내신을 철저하게
대비해 주는
교과서 쌍둥이 문제

정답과 해설

정답과 해설

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

1. 지수

1-1 거듭제곱과 거듭제곱근

내신 대비 쌍둥이 문제 28~30쪽

1-1 $\dfrac{1}{ab}$

2-1 (1) $2,\ -2$

(2) $3,\ \dfrac{-3+3\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-3-3\sqrt{3}i}{2}$

(3) $-4,\ 2+2\sqrt{3}i,\ 2-2\sqrt{3}i$

(4) $1,\ -1,\ i,\ -i$

3-1 (1) -3 (2) 2 (3) -1 (4) 3

4-1 풀이 참조

5-1 (1) 7 (2) 2 (3) 27 (4) 2

6-1 (1) $6\sqrt[3]{2}$ (2) $\sqrt[3]{2}$

7-1 109

1-1 $(a^3b)^3\times\left(\dfrac{a}{b^2}\right)^2\div(a\times a^2)^4=a^9b^3\times\dfrac{a^2}{b^4}\times\dfrac{1}{(a^3)^4}$

$=a^{9+2}\times\dfrac{1}{b^{4-3}}\times\dfrac{1}{a^{12}}$

$=\dfrac{1}{a^{12-11}\times b}$

$=\dfrac{1}{ab}$

2-1 (1) 4의 제곱근을 x라고 하면 $x^2=4$이므로

$x^2-4=0,\ x=2$ 또는 $x=-2$

따라서 4의 제곱근은 $2,\ -2$이다.

(2) 27의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3=27$이므로

$x^3-27=0,\ (x-3)(x^2+3x+9)=0$

$x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

따라서 27의 세제곱근은

$3,\ \dfrac{-3+3\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-3-3\sqrt{3}i}{2}$이다.

(3) -64의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3=-64$이므로

$x^3+64=0,\ (x+4)(x^2-4x+16)=0$

$x=-4$ 또는 $x=2\pm2\sqrt{3}i$

따라서 -64의 세제곱근은 $-4,\ 2+2\sqrt{3}i,\ 2-2\sqrt{3}i$이다.

(4) 1의 네제곱근을 x라고 하면 $x^4=1$이므로

$x^4-1=0,\ (x^2-1)(x^2+1)=0$

$x=\pm1$ 또는 $x=\pm i$

따라서 1의 네제곱근은 $1,\ -1,\ i,\ -i$이다.

3-1 (1) $-\sqrt[3]{27}=-\sqrt[3]{3^3}=-3$

(2) $\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

(3) $\sqrt[5]{-1}=\sqrt[5]{(-1)^5}=-1$

(4) $\sqrt[6]{729}=\sqrt[6]{3^6}=3$

4-1 $(\sqrt[np]{a^{mp}})^n=(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{mp}}})^n=\sqrt[p]{a^{mp}}=\sqrt[p]{(a^m)^p}=(\sqrt[p]{a^m})^p=a^m$

이때 $\sqrt[np]{a^{mp}}>0$이므로 $\sqrt[np]{a^{mp}}$는 a^m의 양의 n제곱근이다.

즉, $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$이다.

5-1 (1) $\sqrt[4]{7}\times\sqrt[4]{343}=\sqrt[4]{7\times343}=\sqrt[4]{7\times7^3}$

$=\sqrt[4]{7^4}=(\sqrt[4]{7})^4=7$

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{16}{2}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=(\sqrt[3]{2})^3=2$

(3) $(\sqrt[5]{243})^3=(\sqrt[5]{3^5})^3=\{(\sqrt[5]{3})^5\}^3=3^3=27$

(4) $\sqrt[4]{\sqrt{256}}=\sqrt[4\times2]{2^8}=\sqrt[8]{2^8}=(\sqrt[8]{2})^8=2$

6-1 (1) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{25}\times\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{25\times10}$

$=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2\times5^3}$

$=\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}$

$=6\sqrt[3]{2}$

(2) $\sqrt[3]{54}-\dfrac{4}{\sqrt{\sqrt[3]{16}}}=\sqrt[3]{2\times3^3}-\dfrac{4}{\sqrt[6]{2^4}}$

$=3\sqrt[3]{2}-\dfrac{4\times\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2}\times\sqrt[3]{2}}$

$=3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}$

$=\sqrt[3]{2}$

7-1 가로의 길이와 세로의 길이가 각각 $\sqrt{3},\ \sqrt[3]{9}$이고, 높이가 $\sqrt[4]{\sqrt{27}}$인 직육면체의 부피는

$\sqrt{3}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[4]{\sqrt{27}}=3^{\frac{1}{2}}\times\sqrt[3]{3^2}\times\sqrt[8]{3^3}$

$=3^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{8}}$

$=3^{\frac{37}{24}}$

이므로 정육면체의 한 모서리의 길이를 $\sqrt[m]{3^n}$이라고 할 때

$3^{\frac{37}{24}}=(\sqrt[m]{3^n})^3=3^{\frac{3n}{m}}$

따라서 $\dfrac{n}{m}=\dfrac{37}{72}$이므로 $m+n=109$

소단원 확인 문제 31~32쪽

1-1 ⑤ **2-1** (1) 9 (2) 2 (3) 49 (4) $\sqrt{3}$

3-1 $3\sqrt[3]{3}$ **4-1** $3^2\times5^{\frac{2}{5}}$

1-1 ① -27의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3=-27$이므로

$x^3+27=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

따라서 -3은 -27의 세제곱근 중 하나이다.

② 125의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3=125$이므로

$x^3-125=0$, $(x-5)(x^2+5x+25)=0$

$x=5$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm5\sqrt{3}i}{2}$

따라서 125의 세제곱근 중에서 실수인 것은 5뿐이다

③ 16의 네제곱근을 x라고 하면 $x^4=16$이므로

$x^4-16=0$, $(x^2-2^2)(x^2+2^2)=0$

$x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$

따라서 -2는 16의 네제곱근 중 하나이다.

④ 81의 네제곱근을 x라고 하면 $x^4=81$이므로

$x^4-81=0$, $(x^2-3^2)(x^2+3^2)=0$

$x=\pm3$ 또는 $x=\pm3i$

따라서 81의 네제곱근은 3, -3, $3i$, $-3i$이다.

⑤ 256의 네제곱근을 x라고 하면 $x^4=256$이므로

$x^4-256=0$, $(x^2-4^2)(x^2+4^2)=0$

$x=\pm4$ 또는 $x=\pm4i$

따라서 256의 네제곱근 중에서 실수인 것은 4, -4이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

2-1 (1) $\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{9\times81}=\sqrt[3]{9^3}=(\sqrt[3]{9})^3=9$

(2) $\dfrac{\sqrt[5]{160}}{\sqrt[5]{5}}=\sqrt[5]{\dfrac{160}{5}}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=(\sqrt[5]{2})^5=2$

(3) $(\sqrt[4]{7})^8=7^{\frac{8}{4}}=7^2=49$

(4) $\sqrt{\sqrt[5]{243}}=\sqrt{\sqrt[5]{3^5}}=\sqrt{(\sqrt[5]{3})^5}=\sqrt{3}$

3-1 $\sqrt[3]{9^2}+\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{27}-\sqrt{\sqrt[3]{729}}=\sqrt[3]{3^4}+\sqrt[4]{3^4}-\sqrt[2\times3]{3^6}$

$=3\sqrt[3]{3}+3-3$

$=3\sqrt[3]{3}$

4-1 $b^5=\sqrt{5}$에서 $b=\sqrt[5\times2]{5}=\sqrt[10]{5}$이므로

$(ab)^4=a^4b^4=(\sqrt{3})^4(\sqrt[10]{5})^4=3^2\times5^{\frac{2}{5}}$

1-2 지수의 확장

내신 대비 쌍둥이 문제 33~36쪽

1-1 (1) $\dfrac{1}{9}$ (2) $\dfrac{7}{5}$ (3) 1 (4) $-\dfrac{1}{64}$

3-1 (1) 4 (2) 5 (3) a^9 (4) a^6b^{-3}

4-1 (1) 125 (2) 16 (3) 7 (4) $\dfrac{1}{3}$

6-1 (1) 2 (2) 216 (3) a^2 (4) $a^{-5}b^2$

7-1 (1) $2^{2\sqrt{3}}$ (2) $5^{\sqrt{2}}$ (3) 81 (4) 21^{π}

1-1 (1) $3^{-2}=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$

(2) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{-1}=\dfrac{7}{5}$

(3) $(-2)^0=1$

(4) $(-4)^{-3}=\dfrac{1}{(-4)^3}=-\dfrac{1}{64}$

3-1 (1) $16^2\times(2^3)^{-2}=2^{4\times2}\times2^{-6}$

$=2^{8-6}=2^2=4$

(2) $5^2\div5^{-3}\times5^{-4}=5^{2-(-3)+(-4)}=5^1=5$

(3) $(a^2\div a^{-1})^3=(a^2\times a)^3$

$=a^{(2+1)\times3}=a^9$

(4) $(a^{-2}b)^{-3}=a^{(-2)\times(-3)}b^{-3}$

$=a^6b^{-3}$

4-1 (1) $25^{\frac{3}{2}}=(5^2)^{\frac{3}{2}}=(\sqrt{5^2})^3=5^3=125$

(2) $8^{\frac{4}{3}}=(2^3)^{\frac{4}{3}}=(\sqrt[3]{2^3})^4=2^4=16$

(3) $49^{0.5}=(7^2)^{0.5}=(\sqrt{7^2})^1=7^1=7$

(4) $9^{-\frac{1}{2}}=(3^2)^{-\frac{1}{2}}=(\sqrt{3^2})^{-1}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$

6-1 (1) $4^{0.1}\times4^{\frac{2}{5}}=4^{0.1+0.4}=4^{0.5}=(2^2)^{0.5}=2^1=2$

(2) $6^{\frac{3}{2}}\times6^{\frac{1}{4}}\div6^{-\frac{5}{4}}=6^{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}-\left(-\frac{5}{4}\right)}=6^3=216$

(3) $\left(a^{\frac{4}{7}}\right)^{\frac{7}{2}}=a^{\frac{4}{7}\times\frac{7}{2}}=a^2$

(4) $(a^2b^4)^{\frac{1}{2}}\div\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^4=ab^2\div a^6=a^{1-6}b^2=a^{-5}b^2$

7-1 (1) $8^{\sqrt{3}}\times8^{-\frac{\sqrt{3}}{3}}=8^{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}=8^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}=2^{3\times\frac{2\sqrt{3}}{3}}=2^{2\sqrt{3}}$

(2) $5^{\sqrt{8}}\div5^{\sqrt{2}}=5^{\sqrt{8}-\sqrt{2}}=5^{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}=5^{\sqrt{2}}$

(3) $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}=3^{\sqrt{2}\times\sqrt{8}}=3^{\sqrt{16}}=3^4=81$

(4) $7^{\pi}\times9^{\frac{\pi}{2}}=7^{\pi}\times3^{2\times\frac{\pi}{2}}=(7\times3)^{\pi}=21^{\pi}$

소단원 확인 문제 37~38쪽

1-1 (1) $\frac{1}{729}$ (2) 1 (3) 4 (4) 9

2-1 (1) 2 (2) $\frac{3}{2}$ (3) $2^{\frac{5}{2}}3^{\frac{11}{6}}$ (4) 1

3-1 $\frac{17}{4}$ **4-1** $-\frac{1}{2}$

1-1 (1) $9^{-3}=\frac{1}{9^3}=\frac{1}{729}$

(2) $7^0=1$

(3) $(-8)^{\frac{2}{3}}=(-2)^{3\times\frac{2}{3}}=(-2)^2=4$

(4) $81^{0.5}=9^{2\times 0.5}=9^1=9$

2-1 (1) $2^{\frac{2}{3}}\times 4^{\frac{3}{2}}\div 8^{\frac{8}{9}}=2^{\frac{2}{3}}\times 2^{2\times\frac{3}{2}}\div 2^{3\times\frac{8}{9}}=2^{\frac{2}{3}+3-\frac{8}{3}}=2$

(2) $2\times 27^{\frac{1}{3}}\div 8^{\frac{2}{3}}=2\times 3^{3\times\frac{1}{3}}\div 2^{3\times\frac{2}{3}}=2^{1-2}\times 3=\frac{3}{2}$

(3) $2^{\frac{1}{2}}\times 9^{\frac{2}{3}}\times(4^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{6}})^3=2^{\frac{1}{2}}\times 3^{2\times\frac{2}{3}}\times 4\times 3^{\frac{1}{2}}$

$=2^{\frac{1}{2}+2}\times 3^{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}=2^{\frac{5}{2}}3^{\frac{11}{6}}$

(4) $3^{\sqrt{3}+1}\times 3^{\sqrt{3}-1}\div 9^{\sqrt{3}}=3^{2\sqrt{3}-2\sqrt{3}}=3^0=1$

3-1 $(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}-2$이므로

$a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2+2$

$=\left(\frac{3}{2}\right)^2+2=\frac{17}{4}$

4-1 $4^{-\frac{1}{4}}\times 8^{\frac{1}{6}}\div 16^{\frac{1}{8}}=2^{-\frac{2}{4}+\frac{3}{6}-\frac{4}{8}}=2^{-\frac{1}{2}}=2^m$이므로

$m=-\frac{1}{2}$

중단원 연습 문제 40~44쪽

1-1 $a=7$, $b=1$ **2-1** (1) 9 (2) $2^{\frac{5}{3}}$

3-1 ㄴ, ㄷ

4-1 (1) $2^{\frac{1}{4}}$ (2) $5^{\frac{5}{12}}$ (3) 1 (4) $5^{\frac{1}{2}}$

5-1 (1) 3 (2) $\frac{3}{8}$ (3) $-\frac{8}{3}$

6-1 (1) 1 (2) 6 **7-1** 2

8-1 11 **9-1** $24\sqrt{3}\,\text{cm}^3$

10-1 5 **11-1** $\frac{24}{5}$

1-1 $(2^2)^3\times 10^5\div(20^2\times 25)$

$=2^6\times(2\times 5)^5\div\{(2^2\times 5)^2\times 5^2\}$

$=2^6\times(2^5\times 5^5)\div(2^4\times 5^2\times 5^2)$

$=2^{6+5-4}\times 5^{5-(2+2)}=2^7\times 5$

$\therefore a=7,\ b=1$

2-1 (1) $\sqrt[5]{(-3)^{10}}=(-3)^2=9$

(2) $\sqrt{4\sqrt[3]{8\sqrt[4]{16}}}=4^{\frac{1}{2}}\times 8^{\frac{1}{6}}\times 16^{\frac{1}{24}}$

$=2^{2\times\frac{1}{2}}\times 2^{3\times\frac{1}{6}}\times 2^{4\times\frac{1}{24}}$

$=2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=2^{\frac{10}{6}}=2^{\frac{5}{3}}$

3-1 ㄱ. $(-4)^0=1$

ㄴ. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=2^{(-2)\times(-2)}=2^4=16$

ㄷ. $\sqrt[6]{4^2}=4^{\frac{2}{6}}=2^{2\times\frac{2}{6}}=2^{\frac{2}{3}}$

ㄹ. $9^{-\frac{1}{2}}=3^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=3^{-1}=\frac{1}{3}$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

4-1 (1) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}\div\sqrt[4]{8}=2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{4}{6}}\div 2^{\frac{3}{4}}$

$=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{4}}$

(2) $\sqrt[4]{5\sqrt{5\sqrt[3]{5}}}=5^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}}=5^{\frac{10}{24}}=5^{\frac{5}{12}}$

(3) $\frac{(3^2)^{-3}\times(3^{-4})^{-2}}{3^3\times 3^{-1}}=\frac{3^{-6+8}}{3^2}=\frac{3^2}{3^2}=1$

(4) $15^{\frac{4}{3}}\times 3^{-\frac{4}{3}}\times 5^{-\frac{5}{6}}=(5\times 3)^{\frac{4}{3}}\times 3^{-\frac{4}{3}}\times 5^{-\frac{5}{6}}$

$=5^{\frac{4}{3}-\frac{5}{6}}\times 3^{\frac{4}{3}-\frac{4}{3}}=5^{\frac{3}{6}}=5^{\frac{1}{2}}$

5-1 (1) $(2\sqrt[3]{16})^k=2^7$의 좌변을 정리하면

$(2\sqrt[3]{16})^k=(2\times 2^{\frac{4}{3}})^k=2^{\frac{7}{3}k}$

$2^{\frac{7}{3}k}=2^7$에서 $\frac{7}{3}k=7$이므로 $k=3$

(2) $\sqrt{3\sqrt[6]{27}}=3^{2k}$의 좌변을 정리하면

$\sqrt{3\sqrt[6]{27}}=3^{\frac{1}{2}}\times 3^{3\times\frac{1}{12}}=3^{\frac{3}{4}}$

$3^{\frac{3}{4}}=3^{2k}$에서 $\frac{3}{4}=2k$이므로 $k=\frac{3}{8}$

(3) $\sqrt[3]{5^{-3}\times\sqrt{5\sqrt{5}}}=\sqrt[4]{\frac{5^k}{\sqrt[3]{5}}}$의 양변을 각각 정리하면

$\sqrt[3]{5^{-3}\times\sqrt{5\sqrt{5}}}=5^{-1}\times 5^{\frac{1}{6}}\times 5^{\frac{1}{12}}=5^{-\frac{3}{4}}$

$\sqrt[4]{\frac{5^k}{\sqrt[3]{5}}}=\sqrt[4]{\frac{5^k}{5^{\frac{1}{3}}}}=5^{\frac{k}{4}-\frac{1}{12}}$

$5^{-\frac{3}{4}}=5^{\frac{k}{4}-\frac{1}{12}}$에서 $-\frac{3}{4}=\frac{k}{4}-\frac{1}{12}$이므로 $k=-\frac{8}{3}$

6-1 (1) $(3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}})(3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}})(3^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}})=(3^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}})(3^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}})$
$=3-2=1$

(2) $(\sqrt[3]{5}+1)(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1)=(\sqrt[3]{5})^3+1^3$
$=5+1=6$

7-1 $4^a : 4^b=16 : 1$에서 $2^{2a}=16\times2^{2b}=2^{2b+4}$
따라서 $2a=2b+4$이므로 $a-b=2$

8-1 $2^{2x}+2^{-2x}=(2^x-2^{-x})^2+2\times2^x\times2^{-x}$이므로
$2^{2x}+2^{-2x}=3^2+2=9+2=11$

9-1 밑면의 넓이가 $12\,\text{cm}^2$인 정육면체의 한 모서리의 길이를 $a\,\text{cm}$라고 하면
$a^2=12 \quad \therefore a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$
따라서 이 정육면체의 부피는
$a^3=(2\sqrt{3})^3=24\sqrt{3}\,(\text{cm}^3)$

10-1 81의 네제곱근을 x라고 하면 $x^4=81$이므로
$x^4-81=(x^2-3^2)(x^2+3^2)=0$
$x=\pm3$ 또는 $x=\pm3i$
따라서 81의 네제곱근 중에서 실수인 것은 3, -3이므로
$a=3$ 또는 $a=-3$
또, -8의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3=-8$이므로
$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)=0$
$x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$
따라서 -8의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -2이므로
$b=-2$
이때 $a-b$의 최댓값은 $a=3$일 때이므로 $3-(-2)=5$에서 5이다.

11-1 $a^{2x}=5$이므로 $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}+a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$의 분자, 분모에 a^x을 곱하여 정리하면

$$\frac{a^{3x}-a^{-3x}+a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^{4x}-a^{-2x}+a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$$
$$=\frac{5^2-5^{-1}+5-1}{5+1}$$
$$=\frac{24}{5}$$

2. 로그

2-1 로그의 뜻과 성질

내신 대비 쌍둥이 문제 46~49쪽

1-1 (1) $\frac{7}{2}=\log_4 128$ (2) $-2=\log_{\frac{1}{25}}625$

2-1 (1) $8^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$ (2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=81$

3-1 (1) 0 (2) 2 (3) -2 (4) $\frac{1}{2}$

4-1 (1) 64 (2) 25

5-1 풀이 참조

6-1 (1) 2 (2) 1 (3) 1 (4) -3

7-1 (1) $2+2\log_3 2$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) 1 (4) $\frac{3}{2}$

8-1 (1) $\log_5\sqrt{3}$ (2) $\log_5\frac{1}{8}$

9-1 풀이 참조

10-1 (1) $\frac{2a+b}{2a}$ (2) $\frac{4b}{a}$

1-1 (1) $\frac{7}{2}=\log_4 128$
(2) $-2=\log_{\frac{1}{25}}625$

2-1 (1) $8^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$
(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=81$

3-1 (1) $\log_7 1=x$라고 하면 로그의 정의에 의하여
$7^x=1=7^0 \quad \therefore x=0$
(2) $\log_3 9=x$라고 하면 로그의 정의에 의하여
$3^x=9=3^2 \quad \therefore x=2$
(3) $\log_{\frac{1}{5}}25=x$라고 하면 로그의 정의에 의하여
$\left(\frac{1}{5}\right)^x=25=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \quad \therefore x=-2$
(4) $\log_3\sqrt{3}=x$라고 하면 로그의 정의에 의하여
$3^x=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}} \quad \therefore x=\frac{1}{2}$

4-1 (1) $\log_{\frac{1}{4}}N=-3$에서 $N=\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}=64$
(2) $\log_5 N=2$에서 $N=5^2=25$

5-1 $\log_{a^m}b=x$라고 하면 로그의 정의에 의하여
$(a^m)^x=b$, 즉 $a^{mx}=b$

따라서 $mx=\log_a b$이고 $x=\frac{1}{m}\log_a b$이므로

$\log_{a^m} b=\frac{1}{m}\log_a b$이다.

6-1 (1) $\log_6 1+\log_6 36=\log_6(1\times36)$
$=\log_6 6^2=2$
(2) $\log_{15} 5+\log_{15} 3=\log_{15}(5\times3)$
$=\log_{15} 15=1$
(3) $\log_2 10-\log_2 5=\log_2\frac{10}{5}$
$=\log_2 2=1$
(4) $\log_4\frac{1}{64}=\log_4 4^{-3}=-3$

7-1 (1) $\log_3\frac{9}{2}+\log_3 8=\log_3\left(\frac{9}{2}\times8\right)=\log_3(9\times4)$
$=\log_3 9+\log_3 4$
$=2+2\log_3 2$
(2) $2\log_5\sqrt{3}-\log_5\sqrt{45}=\log_5\frac{(\sqrt{3})^2}{\sqrt{45}}=\log_5\frac{3}{3\sqrt{5}}$
$=\log_5\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{2}$
(3) $\log_6\sqrt[3]{16}+\frac{1}{3}\log_6\frac{27}{2}=\log_6 16^{\frac{1}{3}}+\log_6\left(\frac{27}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$
$=\log_6\left(16\times\frac{27}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$
$=\log_6 216^{\frac{1}{3}}$
$=\log_6 6^{3\times\frac{1}{3}}$
$=\log_6 6=1$
(4) $3\log_2\sqrt{10}+\frac{1}{2}\log_2 5-\log_2 25$
$=\log_2(\sqrt{10})^3+\log_2 5^{\frac{1}{2}}-\log_2 25$
$=\log_2\left(\frac{10^{\frac{3}{2}}\times5^{\frac{1}{2}}}{25}\right)$
$=\log_2\left(\frac{10\sqrt{10}\times\sqrt{5}}{25}\right)$
$=\log_2\frac{50\sqrt{2}}{25}$
$=\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$

8-1 (1) $\log_{25} 3=\frac{\log_5 3}{\log_5 25}=\frac{1}{2}\log_5 3=\log_5\sqrt{3}$
(2) $\log_{\frac{1}{5}} 8=\frac{\log_5 8}{\log_5\frac{1}{5}}=-\log_5 8=\log_5\frac{1}{8}$

9-1 1이 아닌 양수 d에 대하여

$$\log_a b=\frac{\log_d b}{\log_d a},\ \log_b c=\frac{\log_d c}{\log_d b},\ \log_c a=\frac{\log_d a}{\log_d c}$$

가 성립하므로

$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a$
$=\frac{\log_d b}{\log_d a}\cdot\frac{\log_d c}{\log_d b}\cdot\frac{\log_d a}{\log_d c}=1$

즉, $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$이 성립한다.

10-1 (1) $\log_4 12=\frac{\log_{10} 12}{\log_{10} 4}=\frac{\log_{10}(2^2\times3)}{\log_{10} 2^2}$
$=\frac{2\log_{10} 2+\log_{10} 3}{2\log_{10} 2}=\frac{2a+b}{2a}$
(2) $\log_2 81=\frac{\log_{10} 81}{\log_{10} 2}=\frac{\log_{10} 3^4}{\log_{10} 2}=\frac{4\log_{10} 3}{\log_{10} 2}=\frac{4b}{a}$

소단원 확인 문제 50~51쪽

1-1 (1)－㉢, (2)－㉣, (3)－㉡, (4)－㉠

2-1 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $-\frac{3}{2}$ (3) $\frac{4}{3}$ (4) -3

3-1 (1) 3 (2) 3 (3) 4 (4) $\frac{5}{2}$

4-1 (1) $a+2b$ (2) $\frac{3a-b+2}{2a+1}$

1-1 (1) $3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}\iff\frac{3}{2}=\log_3 3\sqrt{3}$ (㉢)
(2) $6^3=216\iff3=\log_6 216$ (㉣)
(3) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=5\iff-1=\log_{\frac{1}{5}} 5$ (㉡)
(4) $2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{8}\iff\frac{3}{2}=\log_2\sqrt{8}$ (㉠)
∴ (1)－㉢, (2)－㉣, (3)－㉡, (4)－㉠

2-1 (1) $\log_5\sqrt[3]{625}=\log_5(5^4)^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}$
(2) $\log_{10}\frac{1}{10\sqrt{10}}=\log_{10} 10^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2}$
(3) $\log_8 16=\log_{2^3} 2^4=\frac{4}{3}\log_2 2=\frac{4}{3}$
(4) $\log_3\frac{1}{27}=\log_3 3^{-3}=-3$

3-1 (1) $2\log_5 3+\log_5 \frac{125}{9}=\log_5\left(3^2\times\frac{125}{9}\right)$

$=\log_5 125=\log_5 5^3=3$

(2) $3\log_2 18-6\log_2 \sqrt[4]{81}=\log_2 18^3-6\log_2 3^{4\times\frac{1}{4}}$

$=\log_2\left(\frac{18^3}{3^6}\right)$

$=\log_2 2^3=3$

(3) $\log_2 5\times\log_5 16=\log_2 5\times\frac{\log_2 16}{\log_2 5}$

$=\log_2 16=\log_2 2^4=4$

(4) $4\log_3\sqrt{6}+\frac{1}{2}\log_3 12-\log_3 8$

$=\log_3\left(\frac{6^2\times\sqrt{12}}{8}\right)=\log_3 9\sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$

4-1 (1) $\log_3 50=\log_3(2\times5^2)=\log_3 2+2\log_3 5$

$=a+2b$

(2) $\log_{12}\frac{72}{5}=\log_{12}\frac{144}{10}=\log_{12}12^2-\log_{12}10$

$=2-\frac{\log_3 10}{\log_3 12}=2-\frac{\log_3(2\times5)}{\log_3(2^2\times3)}$

$=2-\frac{\log_3 2+\log_3 5}{2\log_3 2+1}$

$=2-\frac{a+b}{2a+1}$

$=\frac{3a-b+2}{2a+1}$

2-2 상용로그

내신 대비 쌍둥이 문제 53~54쪽

1-1 (1) -2 (2) $\frac{2}{5}$

2-1 (1) 0.3075 (2) 0.9934 (3) 0.6693 (4) 0.8451

3-1 (1) 1.0453 (2) 4.0453 (3) -1.9547 (4) -2.9547

4-1 $\frac{1}{2}$배

1-1 (1) $\log 0.01=\log 10^{-2}=-2$

(2) $\log\sqrt[5]{100}=\log 10^{\frac{2}{5}}=\frac{2}{5}$

2-1 (1) $\log 2.03=0.3075$

(2) $\log 9.85=0.9934$

(3) $\log 4.67=0.6693$

(4) $\log 7.00=0.8451$

3-1 $\log 1.11=0.0453$이므로

(1) $\log 11.1=\log 1.11+\log 10$

$=0.0453+1$

$=1.0453$

(2) $\log 11100=\log 1.11+\log 10000$

$=0.0453+4$

$=4.0453$

(3) $\log 0.0111=\log 1.11+\log 10^{-2}$

$=0.0453-2$

$=-1.9547$

(4) $\log 0.00111=\log 1.11+\log 10^{-3}$

$=0.0453-3$

$=-2.9547$

4-1 전파감쇄비가 -3데시벨인 벽을 투과할 때

$-3=10\log\frac{B}{A}$

즉, $-\frac{3}{10}=\log\frac{B}{A}$에서 $\frac{B}{A}=10^{-\frac{3}{10}}$

이때 $10^{\frac{7}{10}}=5$이므로

$\frac{B}{A}=10^{-\frac{3}{10}}=10^{\frac{7}{10}-1}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

따라서 벽을 투과한 전파의 세기는 투과하기 전 세기의 $\frac{1}{2}$배이다.

소단원 확인 문제 55~56쪽

1-1 (1) 2 (2) $\frac{4}{3}$ (3) -4

2-1 (1) 0.7810 (2) 0.1492 (3) 0.5038 (4) 0.9881

3-1 (1) 2.9133 (2) -1.0867 (3) 0.45665 (4) -0.9133

4-1 683

1-1 (1) $\log 100=\log 10^2=2$

(2) $\log 10\sqrt[3]{10}=\log 10^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}$

(3) $\log 0.0001=\log 10^{-4}=-4$

2-1 (1) $\log 6.04=0.7810$

(2) $\log 1.41=0.1492$

(3) $\log 3.19=0.5038$

(4) $\log 9.73=0.9881$

3-1 $\log 8.19=0.9133$이므로

(1) $\log 819=\log 8.19+\log 100$

$=0.9133+2$

$=2.9133$

(2) $\log 0.0819=\log 8.19+\log 10^{-2}$

$=0.9133-2$

$=-1.0867$

(3) $\log\sqrt{8.19}=\dfrac{1}{2}\log 8.19=\dfrac{1}{2}\times 0.9133=0.45665$

(4) $\log\dfrac{1}{8.19}=-\log 8.19=-0.9133$

4-1 $\log 6.83=0.8344$이므로

$\log N=2.8344=2+0.8344$

$=2+\log 6.83$

$=\log 10^2+\log 6.83$

$=\log(100\times 6.83)$

$=\log 683$

$\therefore N=683$

중단원 연습 문제 58~62쪽

1-1	(1) 0	(2) 3	(3) 3	(4) -7
2-1	(1) 32	(2) $\sqrt{7}$	(3) 5	(4) 3
3-1	(1) 1	(2) $\dfrac{9}{2}$	(3) 2	(4) 3
4-1	(1) 0.6990	(2) -0.5687	(3) 1.6532	(4) 2.2552
5-1	0	**6-1**	(1) 2 (2) 1 (3) $\dfrac{21}{4}$	
7-1	$-2a-b$	**8-1** 15	**9-1** 0.00379	
10-1	$\dfrac{2a+ab}{ab}$	**11-1** 7		

1-1 (1) $\log_4 1=0$

(2) $\log_5 125=\log_5 5^3=3$

(3) $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{27}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=3$

(4) $\log_{\frac{1}{2}}128=\log_{2^{-1}}2^7=-7$

2-1 (1) $\log_2 x=5$에서 $x=2^5=32$

(2) $\log_x 7=2$에서 $x^2=7$이므로

$x=\sqrt{7}$ ($\because$ x는 양수)

(3) $\log_{\frac{1}{5}}x=-1$에서 $x=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}=5$

(4) $\log_x 9\sqrt{3}=\dfrac{5}{2}$에서 $x^{\frac{5}{2}}=9\sqrt{3}=3^{\frac{5}{2}}$이므로

$x=3$

3-1 (1) $\log_5 3\sqrt{5}-\log_5\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\log_5\left(3\sqrt{5}\div\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)$

$=\log_5 5=1$

(2) $\log_2 9\times\log_3 4+\log_6\sqrt{6}=2\log_2 3\times 2\log_3 2+\dfrac{1}{2}$

$=2\log_2 3\times\dfrac{2}{\log_2 3}+\dfrac{1}{2}$

$=4+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$

(3) $\log 25-\log 15+\log 60=\log(25\div 15\times 60)$

$=\log 100=2$

(4) $\log_5 6\times\log_{36}49\times\log_7 125$

$=\log_5 6\times\dfrac{2}{2}\log_6 7\times\log_7 5^3$

$=3\log_5 6\times\log_6 7\times\log_7 5$

$=3\times\dfrac{\log 6}{\log 5}\times\dfrac{\log 7}{\log 6}\times\dfrac{\log 5}{\log 7}$

$=3$

4-1 (1) $\log 5=\log\dfrac{10}{2}=\log 10-\log 2$

$=1-0.3010=0.6990$

(2) $\log 0.27=\log\dfrac{27}{100}=\log 27-\log 100$

$=3\log 3-2=3\times 0.4771-2$

$=-0.5687$

(3) $\log 45=\log(3^2\times 5)=2\log 3+\log 5$

$=2\log 3+(1-\log 2)$

$=2\times 0.4771+(1-0.3010)$

$=1.6532$

(4) $\log 180=\log(2\times 3^2\times 10)$

$=\log 2+2\log 3+\log 10$

$=0.3010+2\times 0.4771+1$

$=2.2552$

5-1 $\log_{|a-2|}(7-2a)$가 정의되려면 로그의 밑과 진수의 조건에 의하여 $|a-2|>0$, $|a-2|\neq1$이고 $7-2a>0$이어야 한다.

따라서 $a\neq2$, $a\neq3$, $a\neq1$이고 $a<\frac{7}{2}$이므로 음이 아닌 정수 a의 값은 0이다.

6-1 (1) $\log_2\frac{5}{3}+\log_2\frac{7}{5}+\log_2\frac{12}{7}=\log_2\left(\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\frac{12}{7}\right)$

$=\log_2 4=2$

(2) $\frac{1}{\log_2 70}+\frac{1}{\log_5 70}+\frac{1}{\log_7 70}$

$=\log_{70}2+\log_{70}5+\log_{70}7$

$=\log_{70}(2\times5\times7)$

$=\log_{70}70=1$

(3) $(\log_3 7+\log_9 7)(\log_7 9+\log_{49}27)$

$=\log_3 7\times\log_7 9+\log_9 7\times\log_7 9$

$+\log_3 7\times\log_{49}27+\log_9 7\times\log_{49}27$

$=2+1+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{21}{4}$

7-1 $\log_{\frac{1}{2}}175=-\log_2 175=-\log_2(5^2\times7)$

$=-(2\log_2 5+\log_2 7)$

$=-(2a+b)$

$=-2a-b$

8-1 $\log_3(x-y)=1$에서 $x-y=3$

$\log_3 x+\log_3 y=\log_3 xy=1$에서 $xy=3$

$\therefore x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$=3^2+2\times3=15$

9-1 $\log x=-2.4214=-3+(1-0.4214)=-3+0.5786$

$=\log 10^{-3}+\log 3.79=\log(10^{-3}\times3.79)$

$=\log 0.00379$

$\therefore x=0.00379$

10-1 $\log_3 5=a$, $\log_5 7=b$이므로

$\log_3 7=\log_3 5\times\log_5 7=ab$

$\therefore \log_7 175=\frac{\log_3 175}{\log_3 7}=\frac{\log_3(5^2\times7)}{\log_3 7}$

$=\frac{2\log_3 5+\log_3 7}{\log_3 7}$

$=\frac{2a+ab}{ab}$

11-1 신호잡음전력비가 a일 때의 최대 전송 속도를 C_1, 신호잡음전력비가 $73a$일 때의 최대 전송 속도를 C_2라고 하면 각각 다음이 성립한다.

$C_1=B\times\log_2(1+a)$ ……①

$C_2=B\times\log_2(1+73a)$ ……②

이때 $C_2=3C_1$이므로 ①, ②에서

$B\times\log_2(1+73a)=3B\times\log_2(1+a)$

$1+73a=(1+a)^3$, $a^3+3a^2-70a=0$

$a(a+10)(a-7)=0$

$\therefore a=7$ ($\because a>0$)

3. 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프

3-1 지수함수의 뜻과 그래프

내신 대비 쌍둥이 문제 64~66쪽

1-1 풀이 참조 **2-1** 풀이 참조

3-1 (1) 그래프는 풀이 참조, 점근선: $y=-1$

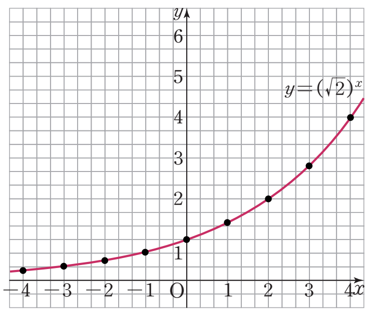
(2) 그래프는 풀이 참조, 점근선: $y=2$

4-1 (1) $5\sqrt{5}>\sqrt[5]{625}$ (2) $\frac{1}{25^2}<\frac{1}{5^3}$

1-1 함수 $y=(\sqrt{2})^x$에서 실수 x의 값에 대응하는 y의 값을 나타내면 다음 표와 같다.

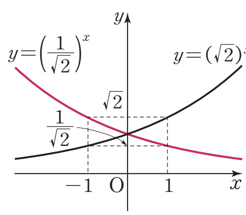
x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$(\sqrt{2})^x$	…	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	4	…

위 표에서 얻은 순서쌍 (x, y)를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내고, 매끄러운 곡선으로 연결하면 다음 그림과 같은 함수 $y=(\sqrt{2})^x$의 그래프를 그릴 수 있다.



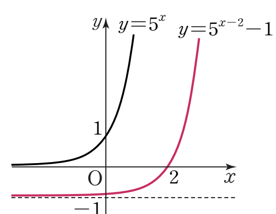
2-1 함수 $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$에서 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x=(\sqrt{2})^{-x}$이므로 함수 $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$의 그래프는 함수 $y=(\sqrt{2})^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



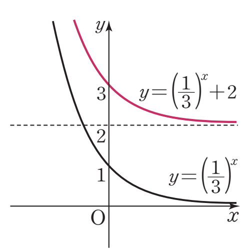
3-1 (1) 함수 $y=5^{x-2}-1$의 그래프는 함수 $y=5^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그 그래프는 다음 그림과 같고, 이때 점근선의 방정식은 $y=-1$이다.



(2) 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+2$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그 그래프는 다음 그림과 같고, 이때 점근선의 방정식은 $y=2$이다.

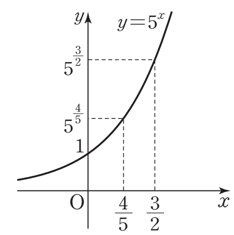


4-1 (1) 주어진 두 수를 5를 밑으로 하는 지수로 나타내면

$5\sqrt{5}=5^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[5]{625}=5^{\frac{4}{5}}$

이때 함수 $y=5^x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로

$5^{\frac{3}{2}}>5^{\frac{4}{5}}$, 즉 $5\sqrt{5}>\sqrt[5]{625}$

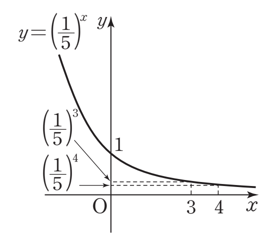


(2) 주어진 두 수를 $\frac{1}{5}$을 밑으로 하는 지수로 나타내면

$\frac{1}{25^2}=\left(\frac{1}{5}\right)^4$, $\frac{1}{5^3}=\left(\frac{1}{5}\right)^3$

이때 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로

$\left(\frac{1}{5}\right)^4<\left(\frac{1}{5}\right)^3$, 즉 $\frac{1}{25^2}<\frac{1}{5^3}$



소단원 확인 문제 67~69쪽

1-1 (1) — ㉢, (2) — ㉣, (3) — ㉡, (4) — ㉠

2-1 (1) $27^3<9^7$ (2) $\frac{1}{\sqrt[5]{64}}>\frac{1}{\sqrt{32}}$

3-1 (1) 그래프는 풀이 참조, 점근선: $y=-1$

(2) 그래프는 풀이 참조, 점근선: $y=3$

(3) 그래프는 풀이 참조, 점근선: $y=0$

(4) 그래프는 풀이 참조, 점근선: $y=1$

4-1 $y=\frac{7}{4}$

1-1 함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프는

(ⅰ) $a>1$일 때, $x>0$에서는 a의 값이 클수록 y축에 가까우므로 함수와 그래프를 짝 지으면

(1) — ㉢, (2) — ㉣

(ⅱ) $0<a<1$일 때, $x<0$에서는 a의 값이 작을수록 y축에 가까우므로 함수와 그래프를 짝 지으면

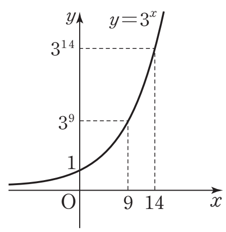
(3) — ㉡, (4) — ㉠

2-1 (1) 주어진 두 수를 3을 밑으로 하는 지수로 나타내면

$27^3=3^9$, $9^7=3^{14}$

이때 함수 $y=3^x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로

$3^9<3^{14}$, 즉 $27^3<9^7$

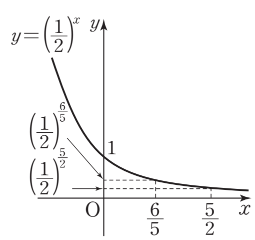


(2) 주어진 두 수를 $\frac{1}{2}$을 밑으로 하는 지수로 나타내면

$$\frac{1}{\sqrt[5]{64}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6}{5}},\ \frac{1}{\sqrt{32}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$$

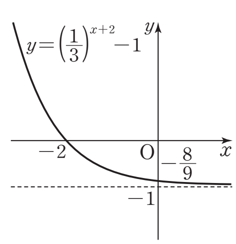
이때 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6}{5}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}},\ \text{즉 } \frac{1}{\sqrt[5]{64}}>\frac{1}{\sqrt{32}}$$



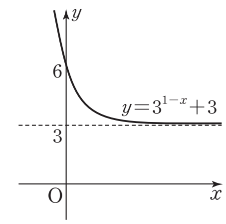
3-1 (1) 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}-1$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그 그래프는 다음 그림과 같고, 이때 점근선의 방정식은 $y=-1$이다.



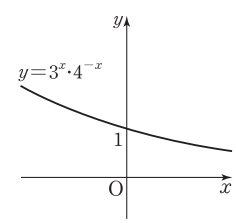
(2) 함수 $y=3^{1-x}+3$의 그래프는 함수 $y=3^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그 그래프는 다음 그림과 같고, 이때 점근선의 방정식은 $y=3$이다.



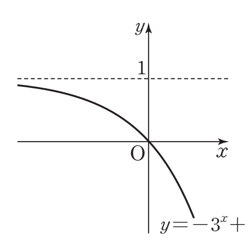
(3) 함수 $y=3^x\times4^{-x}$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$의 그래프와 같다.

따라서 그 그래프는 다음 그림과 같고, 이때 점근선의 방정식은 $y=0$이다.



(4) 함수 $y=-3^x+1$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그 그래프는 다음 그림과 같고, 이때 점근선의 방정식은 $y=1$이다.



4-1 주어진 그래프가 점 $\left(0,\ \frac{11}{4}\right)$을 지나므로

$$\frac{11}{4}=\left(\frac{1}{3}\right)^0+b \qquad \therefore\ b=\frac{7}{4}$$

따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+\frac{7}{4}$의 그래프에서 점근선의 방정식은 $y=\frac{7}{4}$이다.

3-2 로그함수의 뜻과 그래프

내신 대비 쌍둥이 문제 70~71쪽

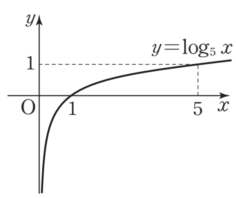
1-1 풀이 참조

2-1 (1) 그래프는 풀이 참조, 점근선: $x=2$

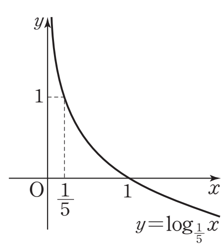
(2) 그래프는 풀이 참조, 점근선: $x=0$

3-1 (1) $\log_2 9>\log_{\frac{1}{2}} 3$　(2) $\log_3 15<\log_{\sqrt{3}} 4$

1-1 (1) 함수 $y=\log_5 x$는 함수 $y=5^x$의 역함수이므로 그 그래프는 다음 그림과 같다.

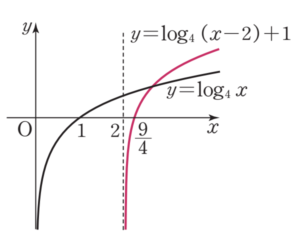


(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{5}} x$는 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$의 역함수이므로 그 그래프는 다음 그림과 같다.



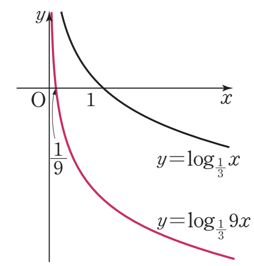
2-1 (1) 함수 $y=\log_4(x-2)+1$의 그래프는 함수 $y=\log_4 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그 그래프는 다음 그림과 같고, 이때 점근선의 방정식은 $x=2$이다.



(2) $y=\log_{\frac{1}{3}} 9x=\log_{\frac{1}{3}} x-2$이므로 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} 9x$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그 그래프는 다음 그림과 같고, 이때 점근선의 방정식은 $x=0$이다.

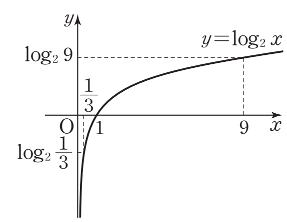


3-1 (1) 로그의 성질을 이용하면

$$\log_{\frac{1}{2}} 3=-\log_2 3=\log_2 \frac{1}{3}$$

이때 함수 $y=\log_2 x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로

$$\log_2 9>\log_2 \frac{1}{3}, \text{ 즉 } \log_2 9>\log_{\frac{1}{2}} 3$$

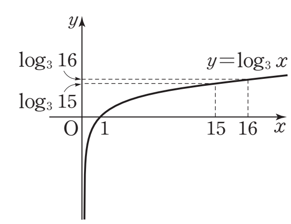


(2) 로그의 성질을 이용하면

$$\log_{\sqrt{3}} 4=2\log_3 4=\log_3 16$$

이때 함수 $y=\log_3 x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로

$$\log_3 15<\log_3 16, \text{ 즉 } \log_3 15<\log_{\sqrt{3}} 4$$



소단원 확인 문제 73~74쪽

1-1 (1) − ㉠, (2) − ㉣, (3) − ㉡, (4) − ㉢

2-1 (1) $\log_4 7<\log_2 3$　(2) $\log_{0.5} 3<\log_{0.5} \frac{1}{4}$

3-1 (1) 그래프는 풀이 참조, 점근선: $x=-1$

(2) 그래프는 풀이 참조, 점근선: $x=0$

(3) 그래프는 풀이 참조, 점근선: $x=0$

(4) 그래프는 풀이 참조, 점근선: $x=1$

4-1 $a=1$, $b=-1$

1-1 함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$의 그래프는

(i) $a>1$일 때, $x>0$에서는 a의 값이 클수록 x축에 가까우므로 함수와 그래프를 짝 지으면

(1) — ㉠, (3) — ㉡

(ii) $0<a<1$일 때, $x>0$에서는 a의 값이 작을수록 x축에 가까우므로 함수와 그래프를 짝 지으면

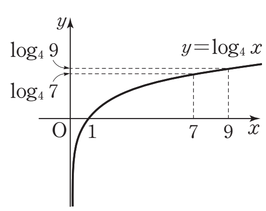
(2) — ㉣, (4) — ㉢

2-1 (1) 로그의 성질을 이용하면

$\log_2 3=\log_{2^2} 3^2=\log_4 9$

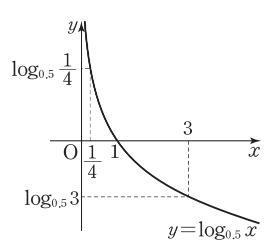
이때 함수 $y=\log_4 x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로

$\log_4 7<\log_4 9$, 즉 $\log_4 7<\log_2 3$



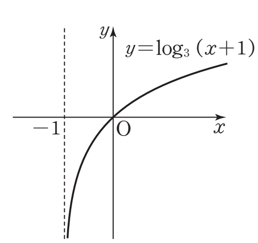
(2) 함수 $y=\log_{0.5} x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로

$\log_{0.5} 3<\log_{0.5}\dfrac{1}{4}$



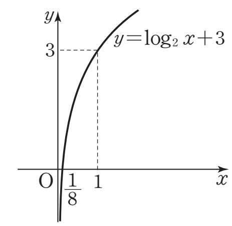
3-1 (1) 함수 $y=\log_3 (x+1)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그 그래프는 다음 그림과 같고, 이때 점근선의 방정식은 $x=-1$이다.



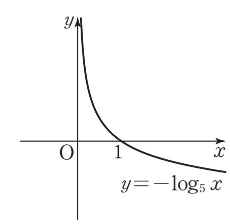
(2) 함수 $y=\log_2 x+3$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그 그래프는 다음 그림과 같고, 이때 점근선의 방정식은 $x=0$이다.



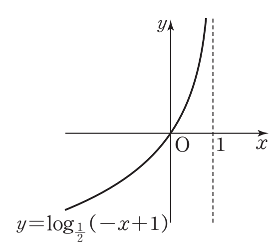
(3) 함수 $y=-\log_5 x$의 그래프는 함수 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 그 그래프는 다음 그림과 같고, 이때 점근선의 방정식은 $x=0$이다.



(4) 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x+1)$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그 그래프는 다음 그림과 같고, 이때 점근선의 방정식은 $x=1$이다.



4-1 함수 $y=\log_2 (x-a)+b$의 그래프의 점근선은 $x=a$이므로

$a=1$

함수 $y=\log_2 (x-1)+b$의 그래프가 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

$0=\log_2 (3-1)+b \qquad \therefore\ b=-1$

3-3 지수함수와 로그함수의 활용

내신 대비 쌍둥이 문제 76~80쪽

1-1 (1) $x=\frac{7}{4}$ (2) $x=\frac{1}{2}$ (3) $x=\frac{19}{12}$ (4) $x=2$

2-1 (1) $x<5$ (2) $x\le 2$ (3) $x>1$ (4) $x\le\frac{5}{2}$

3-1 2590마리

4-1 9년 후

5-1 (1) $x=4$ (2) $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ (3) $x=3$

(4) $x=\frac{1}{1000}$ 또는 $x=100$

6-1 (1) $x>\sqrt{3}$ (2) $x>\frac{7}{3}$ (3) $\frac{5}{4}<x\le 3$ (4) $-1<x\le 1$

7-1 15

8-1 10개월 후

1-1 (1) $2^{x-1}=\sqrt[4]{8}$에서 우변을 밑이 2인 식으로 변형하면

$2^{x-1}=\sqrt[4]{8}=2^{\frac{3}{4}}$이므로

$x-1=\frac{3}{4}$ $\quad\therefore x=\frac{7}{4}$

(2) $3^{4-2x}=9\sqrt{9}$의 양변을 밑이 9인 식으로 변형하면

$9^{2-x}=9^{\frac{3}{2}}$이므로

$2-x=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}$

(3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x-2}=\left(\frac{1}{8}\right)^{5-2x}$의 양변을 밑이 $\frac{1}{2}$인 식으로

변형하면 $\left(\frac{1}{2}\right)^{6x-4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{15-6x}$이므로

$6x-4=15-6x$ $\quad\therefore x=\frac{19}{12}$

(4) $9^{2x-1}=27^x$의 양변을 밑이 3인 식으로 변형하면

$3^{4x-2}=3^{3x}$이므로

$4x-2=3x$ $\quad\therefore x=2$

2-1 (1) $3^{x-2}<27$에서 우변을 밑이 3인 식으로 변형하면

$3^{x-2}<3^3$이므로

$x-2<3$ $\quad\therefore x<5$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-4}$에서

$x\ge 3x-4$ $\quad\therefore x\le 2$

(3) $3^{3x-5}>9^{x-2}$에서 우변을 밑이 3인 식으로 변형하면

$3^{3x-5}>3^{2x-4}$이므로

$3x-5>2x-4$ $\quad\therefore x>1$

(4) $\left(\frac{1}{36}\right)^{x-1}\ge\frac{1}{216}$의 양변을 밑이 $\frac{1}{6}$인 식으로 변형하면

$\left(\frac{1}{6}\right)^{2x-2}\ge\left(\frac{1}{6}\right)^3$이므로

$2x-2\le 3$ $\quad\therefore x\le\frac{5}{2}$

3-1 $3n$일 후의 플랑크톤의 개체 수는

$1000(1+0.1)^n$(마리)

따라서 30일 후의 개체 수는

$1000\times 1.1^{10}=1000\times 2.59=2590$(마리)

4-1 투자액과 이익금의 합이 3410만 원 이상이 되는 것이 x년 후라고 하면

$1250+I(x)\ge 3410$, 즉 $I(x)\ge 2160$

이 성립한다.

$1250\times\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{x}{3}}\ge 2160$에서 $\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{x}{3}}\ge\frac{216}{125}$

그런데 $\frac{216}{125}=\left(\frac{6}{5}\right)^3$이므로 $\frac{x}{3}\ge 3$에서 $x\ge 9$

따라서 최소 9년 후이다.

5-1 (1) $\log_3(x-1)=1$에서 우변을 변형하면

$\log_3(x-1)=\log_3 3$이므로

$x-1=3$ $\quad\therefore x=4$

(2) $\log_2(2x+1)+\log_2(2x-1)=2$의 양변을 변형하면

$\log_2(2x+1)(2x-1)=\log_2 4$이므로

$(2x+1)(2x-1)=4$, $4x^2-1=4$

$\therefore x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

그런데 로그의 진수는 양수이므로

$2x+1>0$, $2x-1>0$에서 $x>\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\sqrt{5}}{2}$

(3) $\log_5(6-x)=\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{x}$에서 우변을 변형하면

$\log_5(6-x)=\log_5 x$이므로

$6-x=x$ $\quad\therefore x=3$

(4) $(\log x+3)(\log x-2)=0$에서

$\log x=-3$ 또는 $\log x=2$

$\therefore x=10^{-3}$ 또는 $x=10^2$

즉, $x=\frac{1}{1000}$ 또는 $x=100$

6-1 (1) $\log_3 x > \frac{1}{2}$을 변형하면

$\log_3 x > \log_3 \sqrt{3}$

$\therefore\ x > \sqrt{3}$ ……①

그런데 로그의 진수는 양수이므로

$x > 0$ ……②

따라서 ①, ②를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$x > \sqrt{3}$

(2) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-4) < -1$을 변형하면

$\log_{\frac{1}{3}}(3x-4) < \log_{\frac{1}{3}} 3$

$3x-4 > 3,\ 3x > 7 \qquad \therefore\ x > \frac{7}{3}$ ……①

그런데 로그의 진수는 양수이므로

$3x-4>0$에서 $x > \frac{4}{3}$ ……②

따라서 ①, ②를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$x > \frac{7}{3}$

(3) $\log(x+4) \ge \log(4x-5)$이므로

$x+4 \ge 4x-5,\ 3x \le 9$

$\therefore\ x \le 3$ ……①

그런데 로그의 진수는 양수이므로

$x+4>0,\ 4x-5>0$에서 $x > \frac{5}{4}$ ……②

따라서 ①, ②를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$\frac{5}{4} < x \le 3$

(4) $\log_{\sqrt{3}}(x+1) \le \log_3(x+3)$을 변형하면

$\log_3(x+1)^2 \le \log_3(x+3)$

$(x+1)^2 \le x+3,\ x^2+x-2 \le 0$

$(x+2)(x-1) \le 0$

$\therefore\ -2 \le x \le 1$ ……①

그런데 로그의 진수는 양수이므로

$x+1>0,\ x+3>0$에서 $x>-1$ ……②

따라서 ①, ②를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$-1 < x \le 1$

7-1 6개월 후의 처리 속도를 y_1, 30개월 후의 처리 속도를 y_2라고 하면

$\log y_1 = \log y_0 + \frac{6}{k}\log 2$ ……①

$\log y_2 = \log y_0 + \frac{30}{k}\log 2$ ……②

그런데 30개월 후의 처리 속도는 6개월 후의 처리 속도의 $2^{\frac{8}{5}}$배이므로 ②－①에서

$$\log\frac{y_2}{y_1} = \log 2^{\frac{8}{5}} = \frac{24}{k}\log 2 = \log 2^{\frac{24}{k}}$$

따라서 $\frac{8}{5} = \frac{24}{k}$에서 $k=15$

8-1 닭의 수가 매월 a배만큼 증가하고, 500마리 이상 되는 달이 $4x$개월 후라고 하면

$a^4 = 2$

$100 \times (a^4)^x \ge 500,\ 100 \times 2^x \ge 500$

$\therefore\ 2^x \ge 5$

위 식의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 2^x \ge \log 5,\ x\log 2 \ge 1-\log 2$

$0.3x \ge 0.7,\ 4x \ge \frac{28}{3} = 9.33\cdots$

따라서 현재로부터 10개월 후에 500마리 이상이 된다.

소단원 확인 문제 81~83쪽

1-1 (1) $x=\frac{5}{4}$ (2) $x=2$ (3) $x=\frac{3}{4}$ (4) $0<x\le 5$

2-1 (1) $x=1$ (2) $x=\frac{2}{3}$ (3) $x=\frac{31}{9}$ (4) $x=1$

3-1 (1) $x<5$ (2) $x>\frac{7}{4}$ (3) $2\le x<7$ (4) $1\le x\le \frac{3}{2}$

4-1 2033년

1-1 (1) $25^x = 25\sqrt{5}$에서

$25^x = 5^{2x},\ 25\sqrt{5} = 5^{\frac{5}{2}}$이므로

$5^{2x} = 5^{\frac{5}{2}},\ 2x = \frac{5}{2} \qquad \therefore\ x = \frac{5}{4}$

(2) $\log_2 x = \log_2(4x-6)$에서

$x = 4x-6,\ 3x=6 \qquad \therefore\ x=2$

(3) $36^x \le \sqrt{216}$에서

$36^x = 6^{2x},\ \sqrt{216} = 6^{\frac{3}{2}}$이므로

$6^{2x} = 6^{\frac{3}{2}},\ 2x = \frac{3}{2} \qquad \therefore\ x = \frac{3}{4}$

(4) $\log_{\frac{1}{5}} x \geq -1$에서 $-1 = \log_{\frac{1}{5}} 5$이므로

$x \leq 5$ ……①

그런데 로그의 진수는 양수이므로

$x > 0$ ……②

따라서 ①, ②를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$0 < x \leq 5$

2-1 (1) $3^{5-x} = 9^{x+1}$에서 $9^{x+1} = 3^{2x+2}$이므로

$3^{5-x} = 9^{x+1} = 3^{2x+2}$, $5-x = 2x+2$

$3x = 3$ $\quad \therefore x = 1$

(2) $10^{2x} = \dfrac{10}{\sqrt[3]{100}} \times 1000^{1-x}$에서

$\dfrac{10}{\sqrt[3]{100}} \times 1000^{1-x} = 10^{\frac{10}{3} - 3x}$이므로

$10^{2x} = \dfrac{10}{\sqrt[3]{100}} \times 1000^{1-x} = 10^{\frac{10}{3} - 3x}$

$2x = \dfrac{10}{3} - 3x$, $5x = \dfrac{10}{3}$ $\quad \therefore x = \dfrac{2}{3}$

(3) $\log(x+1) - \log(x-3) = 1$에서

$\log(x+1) - \log(x-3) = \log\dfrac{x+1}{x-3} = \log 10$

이므로 $\dfrac{x+1}{x-3} = 10$, $x+1 = 10x - 30$, $9x = 31$

$\therefore x = \dfrac{31}{9}$ ……①

그런데 로그의 진수는 양수이므로

$x+1 > 0$, $x-3 > 0$에서 $x > 3$ ……②

이때 ①은 ②를 만족시키므로 구하는 방정식의 해는

$x = \dfrac{31}{9}$

(4) $\log_2(3x-1) = \log_4 x + 1$에서

$\log_2(3x-1) = \log_4(3x-1)^2$

$\log_4 x + 1 = \log_4 4x$

이므로 $(3x-1)^2 = 4x$

$9x^2 - 10x + 1 = 0$, $(x-1)(9x-1) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = \dfrac{1}{9}$ ……①

그런데 로그의 진수는 양수이므로

$3x-1 > 0$, $x > 0$에서 $x > \dfrac{1}{3}$ ……②

이때 ①에서 $x=1$은 ②를 만족시키므로 구하는 방정식의 해는

$x = 1$

3-1 (1) $5^{2-x} > \dfrac{1}{125}$에서 $\dfrac{1}{125} = 5^{-3}$이므로

$5^{2-x} > 5^{-3}$, $2 - x > -3$ $\quad \therefore x < 5$

(2) $3\sqrt{3} < 9^{x-1}$에서 $3\sqrt{3} = 3^{\frac{3}{2}}$, $9^{x-1} = 3^{2x-2}$이므로

$3^{\frac{3}{2}} < 3^{2x-2}$, $\dfrac{3}{2} < 2x - 2$, $\dfrac{7}{2} < 2x$

$\therefore x > \dfrac{7}{4}$

(3) $\log_2 5x \geq \log_2(14-2x)$에서

$5x \geq 14 - 2x$, $7x \geq 14$

$\therefore x \geq 2$ ……①

그런데 로그의 진수는 양수이므로

$5x > 0$, $14 - 2x > 0$에서

$0 < x < 7$ ……②

따라서 ①, ②를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$2 \leq x < 7$

(4) $\log_{\frac{1}{4}}(2-x) \leq \log_4(2x-1)$에서

$\log_{\frac{1}{4}}(2-x) = \log_4 \dfrac{1}{2-x}$이므로

$\dfrac{1}{2-x} \leq 2x-1$, $(2x-3)(x-1) \leq 0$

$\therefore 1 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$ ……①

그런데 로그의 진수는 양수이므로

$2 - x > 0$, $2x - 1 > 0$에서

$\dfrac{1}{2} < x < 2$ ……②

따라서 ①, ②를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$1 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$

4-1 2018년의 입장료를 A원이라고 하면 n년 후 입장료는

$A \times 1.05^n$(원)

이 유적지의 입장료가 2018년 입장료의 두 배 이상이 되려면

$A \times 1.05^n \geq 2A$, 즉 $1.05^n \geq 2$

여야 하므로 양변에 상용로그를 취하면

$\log 1.05^n \geq \log 2$, $n \log 1.05 \geq \log 2$

따라서 $n \times 0.02 \geq 0.3$에서 $n \geq 15$이므로 2033년부터의 입장료는 2018년 입장료의 2배 이상이 된다.

중단원 연습 문제 85~90쪽

1-1 (1) 그래프는 풀이 참조, 점근선: $y=1$
(2) 그래프는 풀이 참조, 점근선: $y=0$

2-1 (1) 그래프는 풀이 참조, 점근선: $x=1$
(2) 그래프는 풀이 참조, 점근선: $x=-1$

3-1 (1) $x=4$ (2) $x=-\frac{2}{9}$ (3) $x=\frac{49}{48}$ (4) $x=\frac{9}{4}$

4-1 (1) $x>4$ (2) $x<-\frac{4}{5}$ (3) $\frac{1}{9}\le x\le 9$ (4) $x\ge 5$

5-1 $a=-1,\ b=-3$

6-1 $c<a<b$

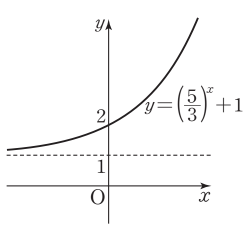
7-1 9시간

8-1 10개월 후

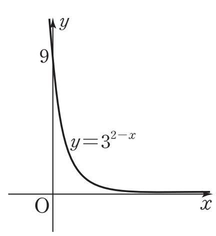
9-1 2

10-1 (1) 2 (2) 5

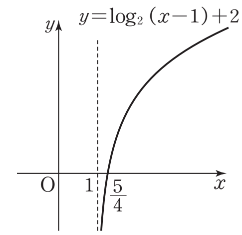
1-1 (1) 함수 $y=\left(\frac{5}{3}\right)^x+1$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{5}{3}\right)^x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그 그래프는 다음 그림과 같고, 이때 점근선의 방정식은 $y=1$이다.



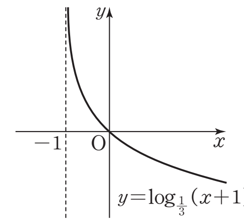
(2) 함수 $y=3^{2-x}$의 그래프는 함수 $y=3^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그 그래프는 다음 그림과 같고, 이때 점근선의 방정식은 $y=0$이다.



2-1 (1) 함수 $y=\log_2(x-1)+2$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그 그래프는 다음 그림과 같고, 이때 점근선의 방정식은 $x=1$이다.



(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그 그래프는 다음 그림과 같고, 이때 점근선의 방정식은 $x=-1$이다.



3-1 (1) $25^{1-x}=\frac{1}{5^{x+2}}$에서

$25^{1-x}=5^{2(1-x)}$, $\frac{1}{5^{x+2}}=5^{-(x+2)}$이므로

$2(1-x)=-(x+2)\qquad \therefore x=4$

(2) $8^{x+1}=4\sqrt[3]{2}$에서
$8^{x+1}=2^{3(x+1)}$, $4\sqrt[3]{2}=2^{\frac{7}{3}}$이므로

$3(x+1)=\frac{7}{3}\qquad \therefore x=-\frac{2}{9}$

(3) $\log_7(x-1)+2=\log_7 x$에서
$\log_7 49(x-1)=\log_7 x$
$49x-49=x$
$\therefore x=\frac{49}{48}$ ……①
그런데 로그의 진수는 양수이므로
$x-1>0,\ x>0$에서 $x>1$ ……②
이때 ①은 ②를 만족시키므로 구하는 방정식의 해는
$x=\frac{49}{48}$

(4) $\log_9 x=\log_3(2x-3)$에서
$\log_3(2x-3)=\log_9(2x-3)^2$이므로
$x=(2x-3)^2,\ 4x^2-13x+9=0$

$(x-1)(4x-9)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{9}{4}$ ……①

그런데 로그의 진수는 양수이므로

$x>0$, $2x-3>0$에서 $x>\frac{3}{2}$ ……②

이때 ①에서 $x=\frac{9}{4}$는 ②를 만족시키므로 구하는 방정식의 해는 $x=\frac{9}{4}$

4-1 (1) $\left(\frac{5}{4}\right)^x<\left(\frac{16}{25}\right)^{2-x}$에서

$\left(\frac{16}{25}\right)^{2-x}=\left(\frac{5}{4}\right)^{2x-4}$이므로

$x<2x-4 \qquad \therefore x>4$

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}>8^{x+2}$에서

$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}=2^{2-2x}$, $8^{x+2}=2^{3x+6}$이므로

$2-2x>3x+6$, $5x<-4$

$\therefore x<-\frac{4}{5}$

(3) $(\log_3 x-2)(\log_3 x+2)\le 0$에서

$-2\le\log_3 x\le 2$이므로

$\frac{1}{9}\le x\le 9$ ……①

그런데 로그의 진수는 양수이므로

$x>0$ ……②

따라서 ①, ②를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$\frac{1}{9}\le x\le 9$

(4) $\log_3 x\ge\log_9(4x+5)$에서

$\log_3 x=\log_9 x^2$이므로

$x^2\ge 4x+5$, $x^2-4x-5\ge 0$

$(x-5)(x+1)\ge 0$

$\therefore x\ge 5$ 또는 $x\le -1$ ……①

그런데 로그의 진수는 양수이므로

$x>0$, $4x+5>0$에서 $x>0$ ……②

따라서 ①, ②를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$x\ge 5$

5-1 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+a}+b$의 그래프의 점근선은 $y=b$이므로

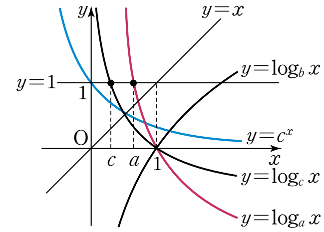
$b=-3$

이 함수의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\left(\frac{1}{3}\right)^a-3 \qquad \therefore a=-1$

6-1 주어진 그림에서 $0<a<1$, $b>1$, $0<c<1$이다.

또한, $y=c^x$의 역함수는 $y=\log_c x$이고, 두 함수 $y=\log_c x$, $y=\log_a x$의 그래프와 직선 $y=1$과의 교점의 x좌표를 차례대로 구하면 c, a이고 이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 세 양수 a, b, c의 대소를 비교하면 $c<a<b$이다.

7-1 $f(t)=50+30\log(t+1)$에서 작품의 성취도가 80일 때, 이 작품을 만드는 데 걸린 시간을 x시간이라고 하면

$80=50+30\log(x+1)$, $\log(x+1)=1$

$x+1=10 \qquad \therefore x=9$

따라서 작품을 만드는 데 걸린 시간은 9시간이다.

8-1 매달 제품 A와 제품 B의 가격이 각각 a, b배로 하락한다고 하면 $2x$개월 후의 제품 A와 제품 B의 가격은 각각

$48\times(a^2)^x$ (만 원), $32\times(b^2)^x$ (만 원)

이때 제품 A를 구입하려면

$48\times(a^2)^x-32\times(b^2)^x\le 32\times(b^2)^x\times 0.2$

즉, $48\times(a^2)^x\le 32\times(b^2)^x\times 1.2$이므로

$\frac{3}{2.4}\le\left(\frac{0.95}{0.9}\right)^x$, $\frac{10}{8}\le\left(\frac{9.5}{9}\right)^x$

양변에 상용로그를 취하면

$\log\frac{10}{8}\le x\log\frac{9.5}{9}$

$(1-3\log 2)\le x(\log 9.5-2\log 3)$

$0.1\le x\times 0.02 \qquad \therefore x\ge 5$

따라서 구입할 수 있는 최초의 시기는 10개월 후이다.

9-1 두 점 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$를 이은 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점이 y축, 즉 직선 $x=0$ 위에 있으므로

$\frac{1\times b+3\times a}{1+3}=0$에서 $b+3a=0$

$\therefore 2^{3a+b+1}=2^1=2$

10-1 (1) $3^{2x}-10\times3^x+9\le0$에서 $3^x=t(t>0)$라고 하면

$t^2-10t+9\le0$, $(t-9)(t-1)\le0$

$\therefore$ $1\le t\le9$, 즉 $1\le3^x\le9$

따라서 $0\le x\le2$이므로 부등식을 만족시키는 자연수 x의 개수는 1, 2의 2이다.

(2) $2\log_2 x\times\log_2 x<3\log_2 x+5$에서 $\log_2 x=t$라고 하면

$2t^2<3t+5$, $(2t-5)(t+1)<0$

$\therefore$ $-1<t<\frac{5}{2}$, 즉 $-1<\log_2 x<\frac{5}{2}$

따라서 $\frac{1}{2}<x<4\sqrt{2}=5.6\cdots$이므로 부등식을 만족시키는 자연수 x의 개수는 1, 2, 3, 4, 5의 5이다.

대단원 **모의고사** 98~101쪽

01 ②	02 ①	03 ⑤	04 ③	05 ④
06 ②	07 ③	08 ⑤	09 ①	10 ⑤
11 ⑤	12 ②	13 ④	14 ①	15 ④
16 ①	17 ⑤	18 ③	19 ⑤	20 ④
21 1000	22 10	23 6	24 45	25 $\sqrt{3}$

01 $\sqrt{8}\times98^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}\times\sqrt{98}=2\sqrt{2}\times7\sqrt{2}=28$

02 $9^2\times5^2\div(15\times3)^3=3^4\times5^2\div(3\times5\times3)^3$

$=3^4\times5^2\div(3^{2\times3}\times5^3)$

$=3^{4-6}\times5^{2-3}$

$=3^{-2}5^{-1}$

따라서 $a=-2$, $b=-1$이므로 $a+b=-3$

03 ㄱ. $(a^x)^y=a^{xy}$이므로 옳지 않다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

04 $\log_2\frac{21^2}{7}=\log_2\frac{3^2\times7^2}{7}=\log_2(3^2\times7)$

$=2\log_2 3+\log_2 7$

$=2a+b$

05 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 $y=2^{x-1}-3$이므로 점 $(1,\ -2)$를 지나고 점근선의 방정식은 $y=-3$이다.

$\therefore$ $a-b=-2-(-3)=1$

06 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$y=-\log_3 x$

다시 이 함수의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면

$y=-\log_3 x+k$

이 함수의 그래프가 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x+2$의 그래프와 겹쳐지므로 $y=-\log_3 x+k=\log_{\frac{1}{3}} x+k$에서

$k=2$

07 $2\times2^a=4\times4^b=8\times\log_2 4$이므로

$2^{a+1}=4^{b+1}=8\times2=16$

따라서 $a=3$, $b=1$이므로 $a\times b=3$

08 방정식 $4^x-5\times2^x+4=0$에서 $2^x=t(t>0)$라고 하면

$t^2-5t+4=0$, $(t-4)(t-1)=0$

$\therefore$ $t=4$ 또는 $t=1$

즉, $2^x=4$ 또는 $2^x=1$이므로 $x=2$ 또는 $x=0$

따라서 방정식을 만족시키는 x의 값의 합은 2이다.

09 주어진 부등식을 변형하면

$\log_6(x+3)-\log_6\frac{1}{x-2}\le1$

$(x+3)(x-2)\le6$

$x^2+x-12\le0$, $(x+4)(x-3)\le0$

$\therefore$ $-4\le x\le3$

그런데 로그의 진수는 양수이므로

$x+3>0$, $x-2>0$에서 $x>2$

$\therefore$ $2<x\le3$

따라서 이를 만족시키는 정수 x의 개수는 1이다.

10 함수 $y=\log_2 x$의 그래프에서

$b=\log_2 a$

$c=\log_2 2a$

$d=\log_2 3a$

$e=\log_2 4a$

이므로

$$\frac{e-d}{c-b}=\frac{\log_2 4a-\log_2 3a}{\log_2 2a-\log_2 a}=\frac{\log_2\frac{4}{3}}{\log_2 2}=2-\log_2 3$$

따라서 $m=2$, $n=3$이므로 $m+n=5$

11 정의역이 $\{x|3\le x\le 6\}$인 함수 $y=2^{x-a}+3$의 밑이 1보다 크고 최댓값이 7이므로

$7=2^{6-a}+3$

따라서 $2^{6-a}=4=2^2$이므로 $a=4$

12 피자 27조각을 데우는 데 걸리는 시간을 t_{27}이라고 하면

$t_{27}=1.2\times 27^{0.5}=1.2\times 3\sqrt{3}$

피자 9조각을 데우는 데 걸리는 시간을 t_9라고 하면

$t_9=1.2\times 9^{0.5}=1.2\times 3$

따라서 $t_{27}=\sqrt{3}t_9$이므로 피자 27조각을 데우는 데 걸리는 시간은 피자 9조각을 데우는 데 걸리는 시간의 $\sqrt{3}$배이다.

13 $f_3(4)$는 4의 세제곱근 중에서 실수인 것의 개수이므로 방정식 $x^3=4$의 실근의 개수와 같다.

$\therefore f_3(4)=1$

$f_4(-5)$는 방정식 $x^4=-5$의 실근의 개수와 같으므로

$f_4(-5)=0$

$f_6(7)$은 방정식 $x^6=7$의 실근의 개수와 같으므로

$f_6(7)=2$

$\therefore f_3(4)+f_4(-5)+f_6(7)=1+0+2=3$

14 방정식 $\log_3|x-2|=1$을 풀면

$|x-2|=3 \qquad \therefore x=5$ 또는 $x=-1$

따라서 모든 실근의 곱은 -5이다.

15 $\log a=3.4518=3+0.4518$

$=\log 10^3+\log 2.83=\log 2830$

$\therefore a=2830$

$\log b=-0.5482=-1+0.4518$

$=\log 10^{-1}+\log 2.83$

$=\log 0.283$

$\therefore b=0.283$

$\therefore\ 100ab=100\times 2830\times 0.283=283^2$

16 $A=\left\{x\,\middle|\,3^{x+2}\ge\frac{1}{9}\right\}=\{x|3^{x+2}\ge 3^{-2}\}=\{x|x\ge -4\}$

$B=\{x|8^x<2\times\sqrt[5]{2}\}=\{x|2^{3x}<2^{\frac{6}{5}}\}=\left\{x\,\middle|\,x<\frac{2}{5}\right\}$

이므로 $A\cap B=\left\{x\,\middle|\,-4\le x<\frac{2}{5}\right\}$

$$\therefore\ \frac{\alpha}{\beta}=\frac{-4}{\frac{2}{5}}=-10$$

17 $x^3=y^4=\sqrt[5]{z}$에서 $y=x^{\frac{3}{4}}$, $z=y^{20}$, $x=z^{\frac{1}{15}}$이 성립하므로

$$\begin{aligned}\log_x y+\log_y z\times\log_z x&=\log_x x^{\frac{3}{4}}+\log_y y^{20}\times\log_z z^{\frac{1}{15}}\\&=\frac{3}{4}+20\times\frac{1}{15}\\&=\frac{3}{4}+\frac{4}{3}\\&=\frac{25}{12}\end{aligned}$$

18 빛의 세기가 수면에서의 빛의 세기의 $\frac{1}{8}$이 되는 곳의 수심을 x m라고 하면

$I_x=I_0\times 2^{-\frac{x}{4}}=I_0\times\frac{1}{8}=I_0\times 2^{-3}$

따라서 $2^{-\frac{x}{4}}=2^{-3}$에서 $-\frac{x}{4}=-3$이므로

$x=12\,(\text{m})$

19 $f(a)=m$에서 $m=\log_2 a$

$f(b)=n$에서 $n=\log_2 b$

그런데 $a\times b=8$이므로

$m+n=\log_2 a+\log_2 b=\log_2 ab$

$=\log_2 8=3$

20 ㄱ. $0<a<b<1$이므로

$a^b<a^0 \qquad \therefore a^b<1$

ㄴ, ㄷ. $0<b-a<1$이고 $0<a<b<1$이므로

$(b-a)^a>(b-a)^b$

이때, $\log_{(b-a)}a>\log_{(b-a)}b$이므로

$\log_{(b-a)}a-\log_{(b-a)}b>0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

서술형 문제

21 ❶ $\left(\frac{1}{8}\right)^{-a}=(2^{-3})^{-a}=2^{3a}$

❷ 이때 $2^{a-1}=2^a\times\frac{1}{2}=5$, 즉 $2^a=10$이므로

$2^{3a}=(2^a)^3=10^3=1000$

채점 기준	배점
❶ $\left(\frac{1}{8}\right)^{-a}$을 2^{3a}으로 변형하기	60 %
❷ $2^{a-1}=5$를 이용하여 $\left(\frac{1}{8}\right)^{-a}$의 값 구하기	40 %

22 ❶ $\log x^2-\log\frac{1}{x}=2\log x+\log x=3\log x$

❷ $0\le\log x<1$이므로 $0\le 3\log x<3$이다.

따라서 정수는 0, 1, 2의 세 개가 있다.

❸ $3\log x=0$에서 $\log x=0$이므로 $x=1$

$3\log x=1$에서 $\log x=\frac{1}{3}$이므로 $x=10^{\frac{1}{3}}$

$3\log x=2$에서 $\log x=\frac{2}{3}$이므로 $x=10^{\frac{2}{3}}$

❹ 따라서 구하는 모든 x의 값의 곱은

$1\times10^{\frac{1}{3}}\times10^{\frac{2}{3}}=10$

채점 기준	배점
❶ $\log x^2-\log\frac{1}{x}$을 $3\log x$로 변형하기	20 %
❷ $3\log x$의 범위를 구하여 정수 찾기	20 %
❸ x의 값 구하기	30 %
❹ 모든 x의 값의 곱 구하기	30 %

23 ❶ 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 4이므로 점 D의 좌표는 $(4,\ 2^4)$이다.

❷ 정사각형 BEFG의 한 변의 길이가 a이므로 점 G의 좌표는 $(a,\ 2^a)$이다.

❸ 따라서 $2^4-2^a=4$이므로 $2^a=12$

❹ $\therefore\ 2^{a-1}=\frac{2^a}{2}=\frac{12}{2}=6$

채점 기준	배점
❶ 점 D의 좌표 구하기	20 %
❷ 점 G의 좌표 구하기	20 %
❸ 2^a의 값 구하기	30 %
❹ 2^{a-1}의 값 구하기	30 %

24 ❶ y좌표가 1인 점의 x좌표는 3, 4, 5, …, 27의 25개

y좌표가 2인 점의 x좌표는 9, 10, 11, …, 27의 19개

y좌표가 3인 점의 x좌표는 27의 1개

❷ 따라서 구하는 점의 개수는

$25+19+1=45$

채점 기준	배점
❶ y좌표가 1, 2, 3인 각각의 경우에 대하여 x좌표의 개수 구하기	80 %
❷ x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수 구하기	20 %

25 ❶ $\sqrt{3}H_A=H_B$, $L_A=3L_B$이므로

$$\frac{H_A}{H_B}=\frac{\frac{k}{L_A}\log\frac{1}{S_A}}{\frac{k}{L_B}\log\frac{1}{S_B}}=\frac{\frac{k}{3L_B}\log\frac{1}{S_A}}{\frac{k}{L_B}\log\frac{1}{S_B}}=\frac{1}{3}\times\frac{\log S_A}{\log S_B}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

❷ $\frac{\log S_A}{\log S_B}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$이므로

$\log_{S_B}S_A=\sqrt{3}$, $S_A=(S_B)^{\sqrt{3}}$

$\therefore\ p=\sqrt{3}$

채점 기준	배점
❶ $\frac{H_A}{H_B}$의 값 구하기	60 %
❷ p의 값 구하기	40 %

Ⅱ. 삼각함수

1. 삼각함수의 뜻과 그래프

1-1 일반각과 호도법

내신 대비 쌍둥이 문제 104～107쪽

1-1 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

2-1 (1) $360^\circ\times n+35^\circ$ (n은 정수)

(2) $360^\circ\times n+300^\circ$ (n은 정수)

(3) $360^\circ\times n+90^\circ$ (n은 정수)

3-1 (1) 제1사분면의 각 (2) 제3사분면의 각

(3) 제4사분면의 각

4-1 풀이 참조

5-1 (1) $2n\pi+\pi$ (n은 정수) (2) $2n\pi+\frac{\pi}{3}$ (n은 정수)

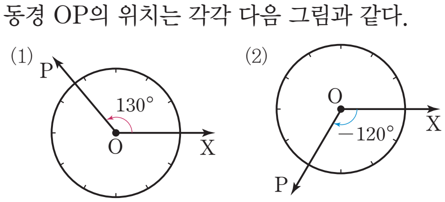
(3) $2n\pi+\frac{5}{6}\pi$ (n은 정수) (4) $2n\pi+\frac{2}{3}\pi$ (n은 정수)

6-1 (1) 호의 길이: π, 부채꼴의 넓이: 3π

(2) 중심각의 크기: $\frac{2}{3}\pi$, 부채꼴의 넓이: $\frac{100}{3}\pi$

7-1 $210\pi\ \mathrm{cm}^2$

1-1 동경 OP의 위치는 각각 다음 그림과 같다.



2-1 (1) $35^\circ=360^\circ\times0+35^\circ$이므로

$360^\circ\times n+35^\circ$ (n은 정수)

(2) $-60^\circ=360^\circ\times(-1)+300^\circ$이므로

$360^\circ\times n+300^\circ$ (n은 정수)

(3) $450^\circ=360^\circ\times1+90^\circ$이므로

$360^\circ\times n+90^\circ$ (n은 정수)

3-1 (1) $390^\circ=360^\circ\times1+30^\circ$에서 30°는 제1사분면의 각이다. 따라서 390°는 제1사분면의 각이다.

(2) $-510^\circ=360^\circ\times(-2)+210^\circ$에서 210°는 제3사분면의 각이다. 따라서 -510°는 제3사분면의 각이다.

(3) $670^\circ=360^\circ\times1+310^\circ$에서 310°는 제4사분면의 각이다. 따라서 670°는 제4사분면의 각이다.

4-1 $\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=120^\circ$

$180^\circ=180\times\frac{\pi}{180}=\pi$

$270^\circ=270\times\frac{\pi}{180}=\frac{3}{2}\pi$

$\frac{13}{6}\pi=\frac{13}{6}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=390^\circ$

따라서 빈칸에 알맞은 값은 다음과 같다.

육십분법	120°	180°	270°	390°
호도법	$\frac{2}{3}\pi$	2π	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{13}{6}\pi$

5-1 (1) $9\pi=2\pi\times4+\pi$이므로

$2n\pi+\pi$ (n은 정수)

(2) $-\frac{11}{3}\pi=2\pi\times(-2)+\frac{\pi}{3}$이므로

$2n\pi+\frac{\pi}{3}$ (n은 정수)

(3) $\frac{17}{6}\pi=2\pi+\frac{5}{6}\pi$이므로

$2n\pi+\frac{5}{6}\pi$ (n은 정수)

(4) $-\frac{4}{3}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{2}{3}\pi$이므로

$2n\pi+\frac{2}{3}\pi$ (n은 정수)

6-1 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ, 호의 길이를 l, 부채꼴의 넓이를 S라고 하면

(1) $l=6\times\frac{\pi}{6}=\pi$, $S=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{\pi}{6}=3\pi$

(2) $10\theta=\frac{20}{3}\pi$이므로 $\theta=\frac{2}{3}\pi$

$S=\frac{1}{2}\times10\times\frac{20}{3}\pi=\frac{100}{3}\pi$

7-1 닦인 유리의 넓이는 반지름의 길이가 40 cm이고, 중심각의 크기가 $\frac{3}{5}\pi$인 부채꼴에서 반지름의 길이가 30 cm이고 중심각의 크기가 $\frac{3}{5}\pi$인 부채꼴의 넓이를 뺀 것과 같다.

$\therefore \frac{1}{2}\times(40^2-30^2)\times\frac{3}{5}\pi=210\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

소단원 확인 문제 108~109쪽

1-1 (1) 220° (2) $\frac{11}{6}\pi$ (3) 72°

2-1 (1) $2n\pi+\frac{3}{4}\pi$ (n은 정수), 제2사분면의 각

(2) $2n\pi+\frac{\pi}{3}$ (n은 정수), 제1사분면의 각

3-1 $\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi$

1-1 (1) $\frac{11}{9}\pi=\frac{11}{9}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=220^\circ$

(2) $330^\circ=330\times\frac{\pi}{180}=\frac{11}{6}\pi$

(3) $\frac{2}{5}\pi=\frac{2}{5}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=72^\circ$

2-1 (1) $\frac{11}{4}\pi=2\pi+\frac{3}{4}\pi$이므로

$2n\pi+\frac{3}{4}\pi$ (n은 정수)

이때 $\frac{3}{4}\pi$는 제2사분면의 각이므로 $\frac{11}{4}\pi$는 제2사분면의 각이다.

(2) $-\frac{11}{3}\pi=2\pi\times(-2)+\frac{\pi}{3}$이므로

$2n\pi+\frac{\pi}{3}$ (n은 정수)

이때 $\frac{\pi}{3}$는 제1사분면의 각이므로 $-\frac{11}{3}\pi$는 제1사분면의 각이다.

3-1 각 θ와 3θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$3\theta+\theta=2n\pi+\pi$ (n은 정수)

$4\theta=(2n+1)\pi \qquad \therefore \theta=\frac{2n+1}{4}\pi$

$0<\theta<\pi$이므로 $0<\frac{2n+1}{4}\pi<\pi$, $0<2n+1<4$

$\therefore -\frac{1}{2}<n<\frac{3}{2}$

n은 정수이므로 $n=0, 1$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$ 또는 $\theta=\frac{3}{4}\pi$

1-2 삼각함수의 뜻

내신 대비 쌍둥이 문제 110~112쪽

1-1 $\sin\theta=-\frac{5}{13}$, $\cos\theta=\frac{12}{13}$, $\tan\theta=-\frac{5}{12}$

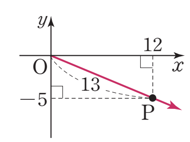
2-1 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $-\sqrt{3}$

3-1 (1) $\sin\frac{7}{4}\pi<0$ (2) $\cos\left(-\frac{7}{6}\pi\right)<0$ (3) $\tan\frac{5}{12}\pi>0$

4-1 (1) 제2사분면의 각 (2) 제4사분면의 각

5-1 $\sqrt{3}$ **6-1** (1) $\frac{12}{25}$ (2) $\frac{15}{12}$

1-1 오른쪽 그림에서

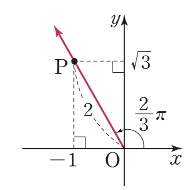


$\overline{OP}=\sqrt{12^2+(-5)^2}=13$이므로

$\sin\theta=-\frac{5}{13}$, $\cos\theta=\frac{12}{13}$,

$\tan\theta=-\frac{5}{12}$

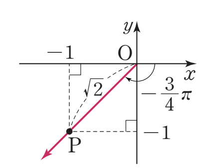
2-1 (1) $\frac{2}{3}\pi$는 제2사분면의 각이므로 오른쪽 그림과 같이 각 $\frac{2}{3}\pi$를 나타내는 동경 위에 x좌표가 -1인 점을 잡으면 P$(-1, \sqrt{3})$



이때 $\overline{OP}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$이므로

$\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$

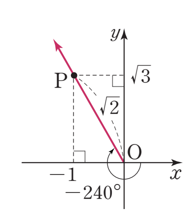
(2) $-\frac{3}{4}\pi$는 제3사분면의 각이므로 오른쪽 그림과 같이 각 $-\frac{3}{4}\pi$를 나타내는 동경 위에 x좌표가 -1인 점을 잡으면 P$(-1, -1)$



이때 $\overline{OP}=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$이므로

$\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) -240°는 제2사분면의 각이므로 오른쪽 그림과 같이 각 -240°를 나타내는 동경 위에 x좌표가 -1인 점을 잡으면 P$(-1, \sqrt{3})$



$\therefore \tan(-240^\circ)=-\sqrt{3}$

3-1 (1) $\frac{7}{4}\pi=2\pi-\frac{\pi}{4}$ 이므로 제4사분면의 각이다.

$\therefore \sin\frac{7}{4}\pi<0$

(2) $-\frac{7}{6}\pi=-2\pi+\frac{5}{6}\pi$이므로 제2사분면의 각이다.

$\therefore \cos\left(-\frac{7}{6}\pi\right)<0$

(3) $\frac{5}{12}\pi=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$ 이므로 제1사분면의 각이다.

$\therefore \tan\frac{5}{12}\pi>0$

4-1 (1) $\sin\theta>0$인 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이고, $\tan\theta<0$인 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.
따라서 θ는 제2사분면의 각이다.

(2) $\sin\theta<0$인 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이고, $\cos\theta>0$인 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.
따라서 θ는 제4사분면의 각이다.

5-1 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

그런데 각 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$에서

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

또, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$에서

$\tan\theta=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\div\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$

6-1 (1) $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{5}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{25}$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}$

(2) $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{25}{12}$

소단원 확인 문제

114~115쪽

1-1 (1) $\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\tan\theta=\frac{3}{4}$

(2) $\sin\theta=\frac{5}{13}$, $\cos\theta=-\frac{12}{13}$, $\tan\theta=-\frac{5}{12}$

2-1 (1) 제1사분면의 각 또는 제3사분면의 각

(2) 제3사분면의 각 또는 제4사분면의 각

3-1 -1 **4-1** $\frac{11}{16}$

1-1 (1) $\overline{OP}=\sqrt{4^2+3^2}=5$이므로

$\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\tan\theta=\frac{3}{4}$

(2) $\overline{OP}=\sqrt{(-12)^2+5^2}=13$이므로

$\sin\theta=\frac{5}{13}$, $\cos\theta=-\frac{12}{13}$, $\tan\theta=-\frac{5}{12}$

2-1 (1) $\sin\theta\cos\theta>0$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

이므로 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(2) $\cos\theta\tan\theta<0$에서

$\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$ 또는 $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

이므로 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

3-1 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\cos^2\theta=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

그런데 각 θ가 제1사분면의 각이므로 $\cos\theta>0$에서

$\cos\theta=\frac{1}{2}$

또, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$에서

$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\div\frac{1}{2}=\sqrt{3}$

$$\therefore \frac{1}{1+\tan\theta}+\frac{1}{1-\tan\theta}$$
$$=\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{1-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=-1$$

4-1 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$　　$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

$\therefore \sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{8}\right)=\frac{11}{16}$

1-3 삼각함수의 그래프와 성질

118~123쪽

내신 대비 쌍둥이 문제

1-1 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(2) $\frac{1}{2}$

2-1 (1) 치역: $\{y \mid -\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2}\}$, 주기: 2π
그래프는 풀이 참조

(2) 치역: $\{y \mid -1\le y\le 1\}$, 주기: $\frac{\pi}{2}$, 그래프는 풀이 참조

3-1 (1) 치역: $\{y \mid -4\le y\le 2\}$, 주기: 2π, 그래프는 풀이 참조

(2) 치역: $\{y \mid -2\le y\le 2\}$, 주기: 2π, 그래프는 풀이 참조

4-1 (1) $-\frac{1}{2}$　(2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　**5-1** (1) $\frac{1}{2}$　(2) $-\frac{1}{2}$

6-1 (1) $-\sqrt{3}$　(2) -1

7-1 주기: 2π, 그래프는 풀이 참조
점근선의 방정식: $x=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

8-1 그래프는 풀이 참조, 주기: π
점근선의 방정식: $x=n\pi+\frac{\pi}{6}$ (n은 정수)

9-1 (1) -1　(2) $-\sqrt{3}$

10-1 (1) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$　(2) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(3) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

11-1 (1) $0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<2\pi$

(2) $0\le x\le\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi\le x<2\pi$

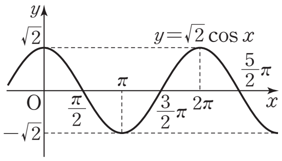
(3) $0\le x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{4}{3}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$

1-1 (1) $\sin\frac{17}{4}\pi=\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\cos\left(-\frac{19}{3}\pi\right)=\cos\frac{19}{3}\pi=\cos\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

2-1 (1) $-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\cos x\le\sqrt{2}$이므로
치역은 $\{y \mid -\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2}\}$이고
$\sqrt{2}\cos x=\sqrt{2}\cos(x+2n\pi)$ (n은 정수)
이므로 주기는 2π이다.
따라서 함수 $y=\sqrt{2}\cos x$의 그래프는 다음 그림과 같다.

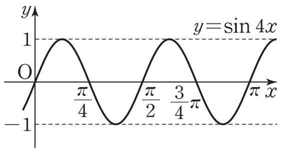


(2) $-1\le\sin 4x\le 1$이므로 치역은 $\{y \mid -1\le y\le 1\}$이고
$\sin 4x=\sin(4x+2n\pi)$

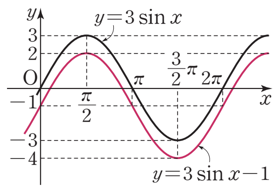
$=\sin 4\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ (n은 정수)

이므로 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

따라서 함수 $y=\sin 4x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



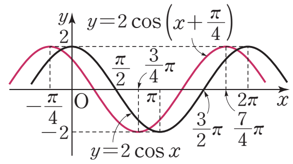
3-1 (1) 함수 $y=3\sin x-1$의 그래프는 함수 $y=3\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 치역은 $\{y \mid -4\le y\le 2\}$이고, 주기는 2π이다.

(2) 함수 $y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 함수
$y=2\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 치역은 $\{y\,|\,-2\le y\le 2\}$이고, 주기는 2π이다.

4-1 (1) $\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

(2) $\cos\frac{5}{4}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

5-1 (1) $\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

(2) $\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

6-1 (1) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

(2) $\tan\frac{15}{4}\pi=\tan\left(4\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

7-1 $\tan\frac{1}{2}x=\tan\left(\frac{1}{2}x+n\pi\right)=\tan\frac{1}{2}(x+2n\pi)$ (n은 정수)

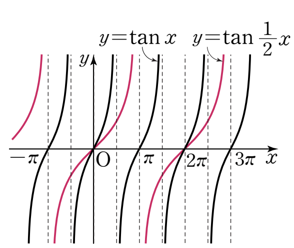
이므로 주기는 2π이다.

또, 함수 $y=\tan\frac{1}{2}x$의 정의역은

$\frac{1}{2}x\ne n\pi+\frac{\pi}{2}$, 즉 $x\ne(2n+1)\pi$ (n은 정수)

인 실수 전체의 집합이므로 함수 $y=\tan\frac{1}{2}x$의 그래프는

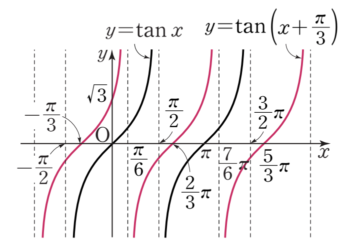
다음 그림과 같다.



이때 점근선의 방정식은 $x=(2n+1)\pi$ (n은 정수)이다.

8-1 함수 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 주기는 π이고, 점근선의 방정식은

$x+\frac{\pi}{3}=n\pi+\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=n\pi+\frac{\pi}{6}$ (n은 정수)이다.

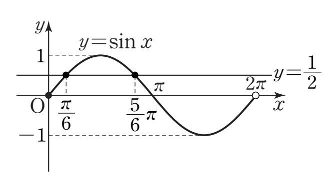
9-1 (1) $\tan\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=-\tan\frac{5}{4}\pi=-\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

(2) $\tan\frac{2}{3}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=-\sqrt{3}$

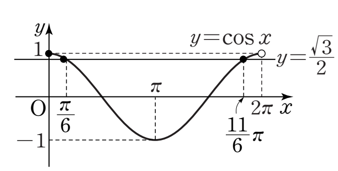
10-1 (1) $2\sin x=1$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표와 같다.



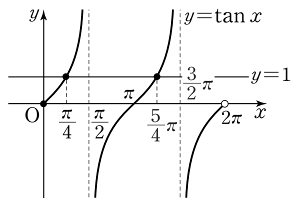
따라서 구하는 해는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

(2) $0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표와 같다.



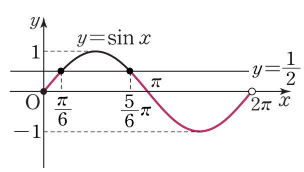
따라서 구하는 해는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(3) $0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\tan x=1$의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표와 같다.



따라서 구하는 해는 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

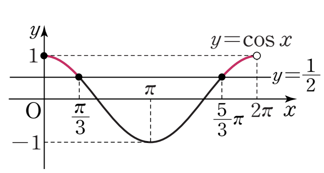
11-1 (1) $0\le x<2\pi$일 때, 부등식 $\sin x\le\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 아래쪽(경계선 포함)에 있는 x의 값의 범위와 같다.



따라서 구하는 해는

$0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<2\pi$

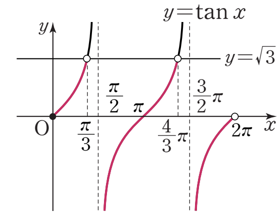
(2) $0\le x<2\pi$일 때, 부등식 $\cos x\ge\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 위쪽(경계선 포함)에 있는 x의 값의 범위와 같다.



따라서 구하는 부등식의 해는

$0\le x\le\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi\le x<2\pi$

(3) $0\le x<2\pi$일 때, 부등식 $\tan x<\sqrt{3}$의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=\sqrt{3}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다.



따라서 구하는 해는

$0\le x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{4}{3}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$

소단원 **확인 문제** 125~126쪽

1-1 (1) 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: 4π
(2) 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: 4π
(3) 최댓값: 4, 최솟값: 0, 주기: π

2-1 (1) 그래프는 풀이 참조, 주기: $\frac{\pi}{2}$
점근선의 방정식: $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)
(2) 그래프는 풀이 참조, 주기: $\frac{\pi}{2}$
점근선의 방정식: $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)

3-1 $a=1$, $b=6$

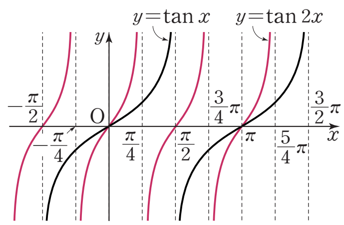
4-1 (1) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$
(2) $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$ 또는 $\frac{5}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$

1-1 (1) $-1\le\sin\frac{x}{2}\le1$이므로 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.
또, 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이다.

(2) $-2\le2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\le2$이므로 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다. 또, 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이다.

(3) $-2\le2\cos2x\le2$에서 $0\le2\cos2x+2\le4$이므로 최댓값은 4, 최솟값은 0이다.
또, 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

2-1 (1) 함수 $y=\tan 2x$의 그래프는 다음 그림과 같다.

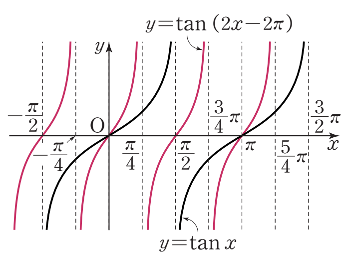


이때 주기는 $\frac{\pi}{2}$이고, 점근선의 방정식은

$2x=n\pi+\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$($n$은 정수)이다.

(2) 함수 $y=\tan(2x-2\pi)=\tan 2(x-\pi)$의 그래프는 $y=\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 주기는 $\frac{\pi}{2}$이고, $\tan(2x-2\pi)=\tan 2x$이므로

점근선의 방정식은 $2x=n\pi+\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$

(n은 정수)이다.

3-1 주어진 함수의 최댓값이 3이고 $a>0$이므로

$a+2=3 \quad \therefore a=1$

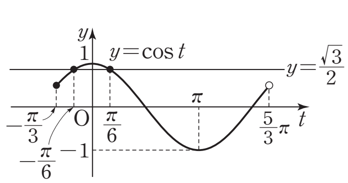
또, 주기가 $\frac{\pi}{3}$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{3} \quad \therefore b=6$

4-1 (1) $2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$에서 $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서

$-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{5}{3}\pi$이고, 주어진 방정식은 $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$



따라서 $t=-\frac{\pi}{6}$ 또는 $t=\frac{\pi}{6}$이므로

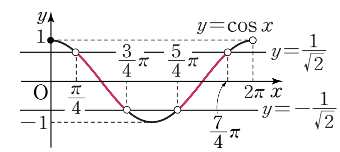
$x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}$ 또는 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

(2) $2\cos^2 x-1<0$에서

$(\sqrt{2}\cos x+1)(\sqrt{2}\cos x-1)<0$

$\therefore -\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos x<\frac{1}{\sqrt{2}}$



따라서 구하는 해는

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$ 또는 $\frac{5}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$

중단원 연습 문제 129~133쪽

1-1 ㄱ, ㄴ, ㅁ	**2-1** $2\pi\ \mathrm{cm}^2$	**3-1** ⑤
4-1 2π	**5-1** 72π	**6-1** $\frac{8}{3}\pi$
7-1 $\frac{64}{55}$	**8-1** 14	**9-1** 7
10-1 $x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$	**11-1** 최댓값: $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 최솟값: 0	

1-1 ㄱ. $-\frac{10}{3}\pi=2\pi\times(-2)+\frac{2}{3}\pi$

ㄴ. $-\frac{4}{3}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{2}{3}\pi$

ㄷ. $\frac{10}{3}\pi=2\pi+\frac{4}{3}\pi$

ㄹ. $\frac{16}{3}\pi=2\pi\times 2+\frac{4}{3}\pi$

ㅁ. $\frac{20}{3}\pi=2\pi\times 3+\frac{2}{3}\pi$

따라서 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 각은 ㄱ, ㄴ, ㅁ이다.

2-1 $45° = \frac{\pi}{4}$이므로 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{4} = 2\pi \ (\mathrm{cm}^2)$

3-1 $\triangle$AOB와 $\triangle$COD에서 $\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{OB}}} = \frac{\overline{\mathrm{OC}}}{\overline{\mathrm{OD}}}$이고

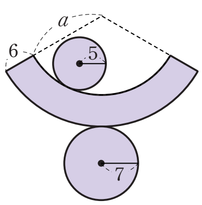
$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{OD}}}{\overline{\mathrm{OC}}} = \frac{1}{\overline{\mathrm{OC}}}$이므로

$\overline{\mathrm{OC}} = \frac{1}{\cos\theta}$

4-1 함수 $y=\cos x$의 그래프는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{a+b}{2} = \pi \qquad \therefore a+b=2\pi$

5-1 원뿔대의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 잘라낸 원뿔의 모선의 길이를 a라고 하자.



이때 원뿔대의 윗면과 아랫면의 둘레의 길이는 각각

$5 \times 2\pi = 10\pi, \ 7 \times 2\pi = 14\pi$

이고, 원뿔대의 옆면에서

$a : (a+6) = 10\pi : 14\pi$

$10\pi(a+6) = 14a\pi \qquad \therefore a=15$

따라서 원뿔대의 옆면의 넓이는

$\frac{1}{2} \times (15+6) \times 14\pi - \frac{1}{2} \times 15 \times 10\pi = 72\pi$

6-1 주어진 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고 $a>0$이므로

$a=2$

또, 주기는 $\frac{4}{3}\pi - \frac{\pi}{3} = \pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b} = \pi \qquad \therefore b=2$

따라서 주어진 함수의 식은 함수 $y=2\sin(2x-c)$이고, 이 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$을 지나므로

$2\sin\left(\frac{2}{3}\pi - c\right) = 0, \ \sin\left(\frac{2}{3}\pi - c\right) = 0$

$0 \le c < \pi$이므로 $\frac{2}{3}\pi - c = 0 \qquad \therefore c = \frac{2}{3}\pi$

$\therefore abc = 2 \times 2 \times \frac{2}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$

7-1 $\frac{1}{2+\tan\theta} + \frac{1}{2+\tan(\pi-\theta)}$

$= \frac{1}{2+\tan\theta} + \frac{1}{2-\tan\theta}$

$= \frac{4}{(2+\tan\theta)(2-\tan\theta)}$

$= \frac{4}{4-\tan^2\theta}$

이때 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$이고 $\sin\theta = \frac{3}{5}$이므로 $\tan\theta = -\frac{3}{4}$

$\therefore$ (주어진 식) $= \frac{4}{4-\left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{64}{55}$

8-1 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{2}$

$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \therefore \sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{4}$

$\therefore \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$= \frac{\sin^4\theta + \cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

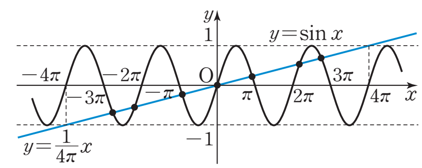
$= \frac{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin\theta\cos\theta)^2}$

$= \frac{1-2(\sin\theta\cos\theta)^2}{(\sin\theta\cos\theta)^2}$

$= \frac{1-2\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = 14$

9-1 방정식 $\sin x = \frac{1}{4\pi}x$의 실근은 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4\pi}x$의 교점의 x좌표이다.

따라서 다음 그림에서 실근의 개수는 7이다.



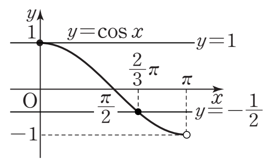
10-1 $2\sin^2 x+\cos x-1=0$에서 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$이므로

$2(1-\cos^2 x)+\cos x-1=0$

$2\cos^2 x-\cos x-1=0$

$(\cos x-1)(2\cos x+1)=0$

$\therefore \cos x=1$ 또는 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$



따라서 주어진 방정식의 해는

$\cos x=1$일 때 $x=0$

$\cos x=-\dfrac{1}{2}$일 때 $x=\dfrac{2}{3}\pi$

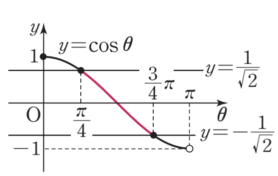
11-1 이차방정식 $x^2-2x\sin\theta+\cos^2\theta=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=\sin^2\theta-\cos^2\theta\ge 0$

$(1-\cos^2\theta)-\cos^2\theta\ge 0$, $2\cos^2\theta-1\le 0$

$(\sqrt{2}\cos\theta+1)(\sqrt{2}\cos\theta-1)\le 0$

$\therefore -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le\cos\theta\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



$0\le\theta<\pi$에서 부등식의 해는 $\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{3}{4}\pi$

$\therefore \dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{2}{3}\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

따라서 $0\le\cos\dfrac{2}{3}\theta\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 최댓값은 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 최솟값은 0이다.

2. 사인법칙과 코사인법칙

2-1 사인법칙과 코사인법칙과 그 활용

135~139쪽

내신 대비 쌍둥이 문제

1-1 (1) 2 (2) $c=2\sqrt{2}$, $R=2\sqrt{2}$

2-1 $a=b$인 이등변삼각형 **3-1** 16.26 m

4-1 $125\sqrt{2}\text{ m}$ **5-1** (1) 2 (2) 30°

6-1 $A=90^\circ$인 직각삼각형 **7-1** $50\sqrt{7}\text{ m}$

8-1 (1) 18 (2) $30\sqrt{2}$ **9-1** $4\sqrt{3}$ 또는 $8+4\sqrt{3}$

10-1 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

1-1 (1) $\triangle$ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{a}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$

$\therefore a=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}\times\sin 45^\circ=2$

(2) $\triangle$ABC에서 $A=180^\circ-(105^\circ+30^\circ)=45^\circ$이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{4}{\sin 45^\circ}=\dfrac{c}{\sin 30^\circ}=2R$

$\therefore c=\dfrac{4}{\sin 45^\circ}\times\sin 30^\circ=2\sqrt{2}$

$R=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{\sin 45^\circ}=2\sqrt{2}$

2-1 $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$

위 식을 $\sin^4 A-\sin^4 B=0$에 대입하면

$\left(\dfrac{a}{2R}\right)^4-\left(\dfrac{b}{2R}\right)^4=0$

$a^4-b^4=0$, $(a^2+b^2)(a^2-b^2)=0$

$(a^2+b^2)(a+b)(a-b)=0$

이때 $a>0$, $b>0$이므로 $a-b=0$, 즉 $a=b$

따라서 $\triangle$ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

3-1 $\triangle$ABC에서

$B=180^\circ-46^\circ=134^\circ$, $C=46^\circ-29^\circ=17^\circ$

이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{40}{\sin 134^\circ}=\dfrac{\overline{\text{AB}}}{\sin 17^\circ}$

$\therefore\ \overline{AB}=\dfrac{40}{\sin 134^\circ}\times\sin 17^\circ$

$\sin 134^\circ=\sin(180^\circ-46^\circ)=\sin 46^\circ$이므로

$\overline{AB}=\dfrac{40}{0.7193}\times 0.2924=16.260\cdots$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 16.26 m이다.

4-1 $\triangle$ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{5}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin 30^\circ}$

$\therefore\ \overline{BC}=\dfrac{5}{\sin 45^\circ}\times\sin 30^\circ=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

이때 지도의 축척이 1 : 5000이므로

$\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\times 5000=12500\sqrt{2}\ (\text{cm})$

따라서 두 점 B, C 사이의 실제 거리는 $125\sqrt{2}$ m이다.

5-1 (1) $\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$c^2=(2\sqrt{3})^2+2^2-2\times 2\sqrt{3}\times 2\cos 30^\circ=4$

이때 $c>0$이므로 $c=2$

(2) $\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{(2\sqrt{3})^2+4^2-2^2}{2\times 2\sqrt{3}\times 4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=30^\circ$이다.

6-1 $\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

위 식을 $a\cos B-b\cos A=c$에 대입하면

$a\times\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-b\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$

$\dfrac{a^2-b^2}{c}=c$, $a^2=b^2+c^2$

따라서 $\triangle$ABC는 $A=90^\circ$인 직각삼각형이다.

7-1 A와 B의 속력의 비가 2 : 3이므로 A가 100 m 이동하였을 때, B가 이동한 거리는 150 m이다.

$\triangle$OAB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=100^2+150^2-2\times 100\times 150\cos 60^\circ=17500$

$\therefore\ \overline{AB}=50\sqrt{7}$

따라서 A, B 두 사람 사이의 거리는 $50\sqrt{7}$ m이다.

8-1 $\triangle$ABC의 넓이를 S라고 하면

(1) $S=\dfrac{1}{2}\times 12\times 6\sin 30^\circ=18$

(2) $S=\dfrac{1}{2}\times 10\times 12\sin 45^\circ=30\sqrt{2}$

9-1 $\triangle$ABC가 이등변삼각형이므로

$A=B=30^\circ$, $C=120^\circ$ 또는 $A=C=30^\circ$, $B=120^\circ$

또는 $A=30^\circ$, $B=C=75^\circ$이다.

(i) $A=B=30^\circ$, $C=120^\circ$일 때

사인법칙에 의하여 $\dfrac{b}{\sin 30^\circ}=8$

$\therefore\ b=8\times\sin 30^\circ=4$

따라서 $a=4$, $b=4$이므로 $\triangle$ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\sin 120^\circ=4\sqrt{3}$

(ii) $A=C=30^\circ$, $B=120^\circ$일 때

사인법칙에 의하여 $\dfrac{c}{\sin 30^\circ}=8$

$\therefore\ c=8\times\sin 30^\circ=4$

따라서 $a=4$, $c=4$이므로 $\triangle$ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\sin 120^\circ=4\sqrt{3}$

(iii) $A=30^\circ$, $B=C=75^\circ$일 때

사인법칙에 의하여 $\dfrac{b}{\sin 75^\circ}=8$

$\therefore\ b=8\times\sin 75^\circ=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$

따라서 $b=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$, $c=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$이므로

$\triangle$ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{6}+2\sqrt{2})^2\times\sin 30^\circ=8+4\sqrt{3}$

(i), (ii), (iii)에서 $\triangle$ABC의 넓이는

$4\sqrt{3}$ 또는 $8+4\sqrt{3}$

10-1 $\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{19})^2=b^2+2^2-2\times b\times 2\cos 120^\circ$

$b^2+2b-15=0$, $(b+5)(b-3)=0$

이때 $b>0$이므로 $b=3$

따라서 $\triangle$ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 2\times 3\sin 120^\circ=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

소단원 확인 문제 141~142쪽

1-1 (1) $3\sqrt{2}$ (2) 7 **2-1** $120°$ **3-1** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4-1 (1) $A=90°$인 직각삼각형

(2) $A=90°$인 직각삼각형 또는 $B=90°$인 직각삼각형

1-1 (1) △ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin 30°}=\frac{6}{\sin 45°}$$

$$\therefore\ a=\frac{6}{\sin 45°}\times\sin 30°=3\sqrt{2}$$

(2) △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$c^2=5^2+3^2-2\times5\times3\cos 120°=49$$

이때 $c>0$이므로 $c=7$

2-1 △ABC에서 사인법칙에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$

이므로 최대각은 C이다.

$a=3k,\ b=5k,\ c=7k$ (k는 양수)라고 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\times3k\times5k}=-\frac{1}{2}$$

이때 $0°<C<180°$이므로 $C=120°$

따라서 최대각의 크기는 $120°$이다.

3-1 △ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{9\sqrt{3}}{\sin A}=18\qquad\therefore\ \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $B+C=180°-A$이므로

$$\sin(B+C)=\sin(180°-A)=\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4-1 (1) △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

위 식을 $\sin A\cos B=\sin C$에 대입하면

$$\frac{a}{2R}\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{c}{2R}$$

$$c^2+a^2-b^2=2c^2,\ a^2=b^2+c^2$$

따라서 △ABC는 $A=90°$인 직각삼각형이다.

(2) △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

위 식을 $a\cos A+b\cos B=c\cos C$에 대입하면

$$a\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$=c\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

양변에 $2abc$를 곱하여 정리하면

$$a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)$$

$$=c^2(a^2+b^2-c^2)$$

$$a^4-2a^2b^2+b^4-c^4=0,\ (a^2-b^2)^2-(c^2)^2=0$$

$$(a^2-b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)=0$$

$$a^2=b^2+c^2\text{ 또는 }b^2=c^2+a^2$$

따라서 △ABC는 $A=90°$인 직각삼각형 또는 $B=90°$인 직각삼각형이다.

중단원 연습 문제 145~149쪽

1-1 $2\sqrt{6}$	**2-1** 0	**3-1** 4
4-1 $\sqrt{2}$	**5-1** 2	**6-1** 4
7-1 $\frac{5}{2}$	**8-1** 10 km	**9-1** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
10-1 24		

1-1 △ABC에서 $C=180°-(75°+45°)=60°$이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{4}{\sin 45°}=\frac{c}{\sin 60°}$$

$$\therefore\ c=\frac{4}{\sin 45°}\times\sin 60°=2\sqrt{6}$$

2-1 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

$$=(2b)^2+b^2-2\times2b\times b\times\cos\frac{\pi}{3}=3b^2$$

이때 $b>0,\ c>0$이므로 $c=\sqrt{3}b$

$$\therefore\ \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+(\sqrt{3}b)^2-(2b)^2}{2\times b\times\sqrt{3}b}=0$$

3-1 △ABC의 넓이가 $3\sqrt{2}$이므로

$$3\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times3\times b\times\sin\frac{\pi}{4},\ 3\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}b$$

$\therefore\ b=4$

4-1 정팔각형의 내각의 총합은 $180^\circ\times(8-2)=1080^\circ$이므로

$$\angle ABC=\frac{1080^\circ}{8}=135^\circ$$

따라서 △ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times2\times2\sin135^\circ=\sqrt{2}$$

5-1 $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 $0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=45^\circ$

△ABC에서 $B=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$이므로

사인법칙에 의하여

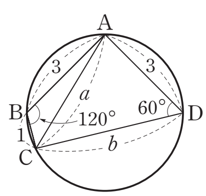
$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin60^\circ}=2R\qquad\therefore\ R=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{\sin60^\circ}=2$$

6-1 △ABC에서 $\overline{AC}=a$라고 하면 코사인법칙에 의하여

$$a^2=3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos120^\circ=13$$

이때 $a>0$이므로 $a=\sqrt{13}$

한편, □ABCD는 원에 내접하므로



$$\angle ADC=180^\circ-120^\circ=60^\circ$$

△ADC에서 $\overline{CD}=b$라고 하면 코사인법칙에 의하여

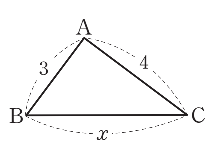
$$(\sqrt{13})^2=3^2+b^2-2\times3\times b\times\cos60^\circ$$

$$b^2-3b-4=0,\ (b-4)(b+1)=0$$

이때 $b>0$이므로 $b=4$

따라서 선분 CD의 길이는 4이다.

7-1 오른쪽 그림에서 △ABC의 넓이를 S라고 하면



$$S=\frac{1}{2}\times3\times4\sin A$$

$$=6\sin A$$

이때 △ABC의 넓이 S가 최대가 되려면 $\sin A=1$, 즉 $A=90^\circ$일 때이다.

따라서 피타고라스 정리에 의하여

$$x^2=3^2+4^2\qquad\therefore\ x=5$$

이때 $\overline{BC}$는 △ABC의 외접원의 지름이므로

$$R=\frac{5}{2}$$

8-1 $\overline{PC}=x$라고 하면 △ACP에서

$$\tan45^\circ=\frac{x}{\overline{AC}}\qquad\therefore\ \overline{AC}=x$$

△BCP에서

$$\tan30^\circ=\frac{x}{\overline{BC}}\qquad\therefore\ \overline{BC}=\sqrt{3}x$$

△ACB에서 $\angle BAC=120^\circ$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\,\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos(\angle BAC)$이므로

$$(\sqrt{3}x)^2=10^2+x^2-2\times10\times x\times\cos120^\circ$$

$$x^2-5x-50=0,\ (x-10)(x+5)=0$$

이때 $x>0$이므로 $x=10$

따라서 지면으로부터 로켓이 있는 P 위치까지의 높이는 10 km이다.

9-1 $\angle CAD=45^\circ$이므로 △CAD는 $\overline{AC}=\overline{DC}$인 직각이등변삼각형이다.

$\overline{AC}=\overline{DC}=x$라고 하면 $\overline{AD}=\sqrt{2}x$

△ABC에서 $\sin30^\circ=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$, $\tan30^\circ=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$이므로

$$\overline{AB}=\frac{\overline{AC}}{\sin30^\circ}=2x,\ \overline{BC}=\frac{\overline{AC}}{\tan30^\circ}=\sqrt{3}x$$

이때 $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{DC}$이므로

$$\sqrt{3}x=(10\sqrt{3}-10)+x$$

$$(\sqrt{3}-1)x=10(\sqrt{3}-1)\qquad\therefore\ x=10$$

따라서 △ABD에서

$\overline{AB}=2x=20,\ \overline{BD}=10\sqrt{3}-10,\ \overline{AD}=\sqrt{2}x=10\sqrt{2}$

이므로

$$\cos(\angle BAD)$$

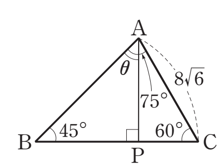
$$=\frac{20^2+(10\sqrt{2})^2-(10\sqrt{3}-10)^2}{2\times20\times10\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

10-1 △ABP에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BP}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AP}}{\sin45^\circ}\text{이므로 }\frac{\overline{BP}}{\sin\theta}=\sqrt{2}\times\overline{AP}$$

$\frac{\overline{BP}}{\sin\theta}$는 $\overline{AP}$가 최소일 때, 즉



$\overline{AP}\perp\overline{BC}$일 때 최소가 된다.

이때

$$\angle ACP=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)$$

$$=60^\circ$$

이므로 △APC에서

$$\overline{AP}=8\sqrt{6}\times\sin 60^\circ=12\sqrt{2}$$

따라서 구하는 $\dfrac{\overline{BP}}{\sin\theta}$의 최솟값은

$$\sqrt{2}\times\overline{AP}=\sqrt{2}\times12\sqrt{2}=24$$

대단원 모의고사 158~161쪽

01 ④	02 ⑤	03 ④	04 ④	05 ②
06 ⑤	07 ④	08 ③	09 ④	10 ③
11 ④	12 ②	13 ①	14 ⑤	15 ⑤
16 ①	17 ②	18 ④	19 $\frac{4}{5}$	
20 $a=2$, $b=2$, $c=\sqrt{3}$			21 $\frac{5}{6}$	22 4
23 $\sqrt{13}+3\sqrt{3}$				

01 ① $-300^\circ=360^\circ\times(-1)+60^\circ$

② $-240^\circ=360^\circ\times(-1)+120^\circ$

③ $420^\circ=360^\circ\times1+60^\circ$

④ $750^\circ=360^\circ\times2+30^\circ$

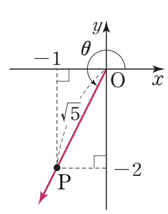
⑤ $1040^\circ=360^\circ\times2+320^\circ$

따라서 30°를 나타내는 동경과 일치하는 것은 750°이다.

02 구하는 호의 길이는 $6\times\dfrac{\pi}{6}=\pi$

03 각 θ가 제3사분면의 각이므로 오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경 위에 좌표가 -1인 점을 잡으면

$P(-1,\ -2)$



이때 $\overline{OP}=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$ 이므로

$$\sin\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\frac{2}{5}$$

04 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin(\pi+\theta)+\cos(-\theta)$

$=\sin\theta-\sin\theta+\cos\theta=\cos\theta$

05 $\cos(\pi+\theta)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+\tan(-\theta)$

$=-\cos\theta+\cos\theta-\tan\theta=-\tan\theta$

직선 $x-3y+3=0$의 기울기는 $\dfrac{1}{3}$이므로

$$\tan\theta=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 값은 $-\dfrac{1}{3}$이다.

06 ㄱ. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin(\pi+\theta)=\sin\theta-\sin\theta=0$ (참)

ㄴ. $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$

$=\dfrac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$

$=\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ (참)

ㄷ. $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

$=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta-\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

07 $y=3\sin x+\cos\left(x+\dfrac{3}{2}\pi\right)+2$

$=3\sin x+\sin x+2$

$=4\sin x+2$

이때 $-2\le4\sin x+2\le6$이므로 최댓값은 6, 최솟값은 -2이다.

따라서 $M=6$, $m=-2$이므로 $M+m=4$

08 함수 $f(x)=\cos x$에 대하여

$$g(100)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{100}{2}\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

이때

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이므로

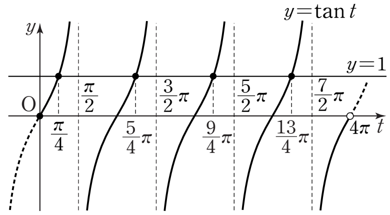
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$\therefore g(100)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{100}{2}\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=f\left(\frac{100}{2}\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

09 $2x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $0\le t<4\pi$이고 주어진 방정식은 $\tan t=1$



따라서

$$t=\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } t=\frac{5}{4}\pi \text{ 또는 } t=\frac{9}{4}\pi \text{ 또는 } t=\frac{13}{4}\pi$$

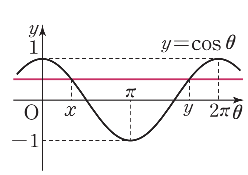
이므로

$$x=\frac{\pi}{8} \text{ 또는 } x=\frac{5}{8}\pi \text{ 또는 } x=\frac{9}{8}\pi \text{ 또는 } x=\frac{13}{8}\pi$$

따라서 모든 해의 합은

$$\frac{\pi}{8}+\frac{5}{8}\pi+\frac{9}{8}\pi+\frac{13}{8}\pi=\frac{7}{2}\pi$$

10 함수 $y=\cos\theta$의 그래프에서 $0<x<2\pi$, $0<y<2\pi$일 때 $\cos x=\cos y\ (x\neq y)$이면



$$\frac{x+y}{2}=\pi$$

$$\therefore y=2\pi-x$$

따라서 구하는 값은

$$\sin x+\sin y=\sin x+\sin(2\pi-x)$$

$$=\sin x-\sin x=0$$

11 주어진 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -3이므로 $|a|=3$

주기는 π이므로 $\frac{2\pi}{|b|}=\pi$ $\quad\therefore |b|=2$

$$\therefore a^2+b^2=13$$

12 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(2,\ 0)$에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 해는

$$x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

$f\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=0$에서 $\cos x-\frac{1}{2}=t$로 놓으면

$f(t)=0$이므로 $t=-1$ 또는 $t=2$이다.

그런데 $-\frac{3}{2}\le\cos x-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}$에서 $-\frac{3}{2}\le t\le\frac{1}{2}$이므로

$t=-1$이다.

즉, $\cos x-\frac{1}{2}=-1$에서 $\cos x=-\frac{1}{2}$

따라서 $0\le x\le 2\pi$일 때 $\cos x=-\frac{1}{2}$의 해는

$$x=\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{4}{3}\pi$$

이므로 방정식 $f\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=0$의 모든 해의 합은

$$\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi=2\pi$$

13 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}=k,\ \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{k} \qquad \cdots\cdots ②$$

①에서

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$$

위 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$1+2\sin\theta\cos\theta=3(\sin\theta\cos\theta)^2$$

위 식에 ②를 대입하면

$$1+\frac{2}{k}=\frac{3}{k^2},\ k^2+2k-3=0$$

$$(k+3)(k-1)=0 \qquad \therefore k=-3 \text{ 또는 } k=1$$

한편, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta\cos\theta<0$이므로

$$k=-3$$

14 $\triangle$ABC에서 사인법칙에 의하여

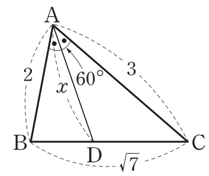
$$\frac{\sqrt{7}}{\sin A}=\frac{2}{\sin C}$$

$\therefore \sin A=\dfrac{\sin C}{2}\times\sqrt{7}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\triangle$ABC는 예각삼각형이므로

$A=60^\circ$

이때



$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$

이므로 $\overline{AD}=x$라고 하면

$$\frac{1}{2}\times2\times3\sin60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\times2\times x\times\sin30^\circ+\frac{1}{2}\times x\times3\sin30^\circ$$

에서

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}x \qquad \therefore x=\frac{6\sqrt{3}}{5}$$

따라서 선분 AD의 길이는 $\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$이다.

15 ㄱ. $a=5$이면 $\triangle$ABC는 직각삼각형이므로 변 BC는 원의 지름이다.

$\therefore R=\dfrac{5}{2}$ (참)

ㄴ. 사인법칙에 의하여 $R=4$이면

$a=2\times4\sin A=8\sin A$ (참)

ㄷ. $1<a\le\sqrt{13}$에서 $1<a^2\le13$이고 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{4^2+3^2-a^2}{2\times4\times3}=\frac{25-a^2}{24}$$

그런데 $\dfrac{1}{2}\le\cos A<1$이므로 $0^\circ<A\le60^\circ$

따라서 A의 최대 크기는 60°이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

16 $\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{19})^2=b^2+2^2-2\times2\times b\times\cos120^\circ$

$b^2+2b-15=0$, $(b+5)(b-3)=0$

이때 $b>0$이므로 $b=3$

따라서 $\triangle$ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times2\times3\sin120^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

17 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 $4a$라고 하면 $\triangle$ADF에서

$\overline{AD}=3a$, $\overline{AF}=a$, $A=60^\circ$

$\triangle$ADF에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DF}^2=(3a)^2+a^2-2\times3a\times a\times\cos60^\circ=7a^2$

$\therefore \overline{DF}=\sqrt{7}a$

이때 $\triangle$ABC의 넓이는 96이므로

$\dfrac{1}{2}\times4a\times4a\times\sin60^\circ=96$, $4\sqrt{3}a^2=96$

$\therefore a^2=8\sqrt{3}$

따라서 $\triangle$DEF의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{7}a\times\sqrt{7}a\times\sin60^\circ$$
$$=\frac{7\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{7\sqrt{3}}{4}\times8\sqrt{3}=42$$

참고 $\overline{AB}:\overline{DF}=4a:\sqrt{7}a=4:\sqrt{7}$이므로 두 삼각형의 넓이의 비는 $16:7$이다.

$\therefore \triangle DEF=\dfrac{7}{16}\times96=42$

18 $\angle ADB=\angle DBC=\theta$라고 하면 $\triangle$ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{3^2+8^2-7^2}{2\times3\times8}=\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ<\theta<180^\circ$이므로 $\theta=60^\circ$

$\therefore \square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$

$$=\frac{1}{2}\times3\times8\sin60^\circ+\frac{1}{2}\times8\times6\sin60^\circ$$
$$=6\sqrt{3}+12\sqrt{3}=18\sqrt{3}$$

서술형 문제

19 ❶ $\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{10^2+a^2-6^2}{2\times10\times a}=\frac{a^2+64}{20a}=\frac{1}{20}\left(a+\frac{64}{a}\right)$$

❷ $a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{20}\left(a+\frac{64}{a}\right)\ge\frac{1}{20}\times2\sqrt{a\times\frac{64}{a}}$$
$$=\frac{4}{5}\ (\text{등호는 } a=8\text{일 때 성립})$$

❸ 따라서 $a=8$일 때, $\cos B$는 최솟값 $\dfrac{4}{5}$를 갖는다.

채점 기준	배점
❶ 코사인법칙을 이용하여 $\cos B$의 값을 a로 나타내기	40 %
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $\cos B$의 값의 범위 구하기	40 %
❸ $\cos B$의 최솟값 구하기	20 %

20 ❶ 함수 $y=\tan x$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ c\right)$를 지나므로

$$\tan\frac{\pi}{3}=c \qquad \therefore\ c=\sqrt{3}$$

❷ 함수 $y=a\sin bx$의 주기는 π이고 $b>0$이므로

$$\frac{2\pi}{b}=\pi \qquad \therefore\ b=2$$

❸ 주어진 함수의 식은 $y=a\sin 2x$이고, 이 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ \sqrt{3}\right)$을 지나므로

$$\sqrt{3}=a\sin\frac{2}{3}\pi,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{3}$$

$$\therefore\ a=2$$

채점 기준	배점
❶ 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ c\right)$를 $y=\tan x$에 대입하여 c의 값 구하기	40 %
❷ 주기를 이용하여 b의 값 구하기	30 %
❸ ❶, ❷를 이용하여 a의 값 구하기	30 %

21 ❶ $\triangle$ABC에서 사인법칙에 의하여

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=2:4:5$$

이므로

❷ $\sin A=2k,\ \sin B=4k,\ \sin C=5k$ (k는 양수)라고 하면

❸ $$\frac{\sin C}{\sin A+\sin B}=\frac{5k}{2k+4k}=\frac{5}{6}$$

채점 기준	배점
❶ 사인법칙을 이용하여 $\sin A:\sin B:\sin C$ 구하기	40 %
❷ $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$를 비례상수 k로 나타내기	20 %
❸ $\frac{\sin C}{\sin A+\sin B}$의 값 구하기	40 %

22 ❶ $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=8$$

$$\therefore\ \overline{AC}=8\times\sin\frac{2}{3}\pi=4\sqrt{3}$$

❷ $\triangle$ABC는 이등변삼각형이고 $\angle ABC=\frac{2}{3}\pi$이므로

$$\angle BAC=\angle BCA=\frac{\pi}{6}$$

❸ $\triangle$ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sin\frac{2}{3}\pi}$$

$$\therefore\ \overline{AB}=\frac{4\sqrt{3}}{\sin\frac{2}{3}\pi}\times\sin\frac{\pi}{6}=4$$

채점 기준	배점
❶ $\triangle$ABC에서 사인법칙을 이용하여 선분 AC의 길이 구하기	30 %
❷ $\triangle$ABC에서 $\angle$BAC의 크기 구하기	30 %
❸ $\triangle$ABC에서 사인법칙을 이용하여 선분 AB의 길이 구하기	40 %

23 ❶ $\triangle$BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\cos60^\circ=13$$

$$\therefore\ \overline{BD}=\sqrt{13}$$

❷ $\therefore\ \square$ABCD

$$=\triangle ABD+\triangle BCD$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{13}\times4\sin30^\circ+\frac{1}{2}\times3\times4\sin60^\circ$$

$$=\sqrt{13}+3\sqrt{3}$$

채점 기준	배점
❶ 코사인법칙을 이용하여 변 BD의 길이 구하기	40 %
❷ $\square$ABCD의 넓이 구하기	60 %

Ⅲ. 수열

1. 등차수열과 등비수열

1-1 수열의 뜻

내신 대비 쌍둥이 문제 164쪽

1-1 (1) 제5항: 20, 제8항: 32 (2) 제5항: $\frac{25}{9}$, 제8항: $\frac{64}{15}$

2-1 (1) 1, 4, 7, 10, 13 (2) -1, 1, 5, 13, 29

(3) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$ (4) 2, 0, 2, 0, 2

1-1 (1) 첫째항부터 시작하여 다섯 번째와 여덟 번째에 있는 항을 각각 찾으면 제5항은 20이고, 제8항은 32이다.

(2) 첫째항부터 시작하여 다섯 번째와 여덟 번째에 있는 항을 각각 찾으면 제5항은 $\frac{25}{9}$이고, 제8항은 $\frac{64}{15}$이다.

2-1 (1) $a_n=3n-2$에 $n=1$, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$a_1=3\times1-2=1$
$a_2=3\times2-2=4$
$a_3=3\times3-2=7$
$a_4=3\times4-2=10$
$a_5=3\times5-2=13$

(2) $a_n=2^n-3$에 $n=1$, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$a_1=2^1-3=-1$
$a_2=2^2-3=1$
$a_3=2^3-3=5$
$a_4=2^4-3=13$
$a_5=2^5-3=29$

(3) $a_n=\frac{1}{n^2+n}$에 $n=1$, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$a_1=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2}$

$a_2=\frac{1}{2^2+2}=\frac{1}{6}$

$a_3=\frac{1}{3^2+3}=\frac{1}{12}$

$a_4=\frac{1}{4^2+4}=\frac{1}{20}$

$a_5=\frac{1}{5^2+5}=\frac{1}{30}$

(4) $a_n=1+(-1)^{n-1}$에 $n=1$, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$a_1=1+(-1)^{1-1}=1+(-1)^0=2$
$a_2=1+(-1)^{2-1}=1+(-1)^1=0$
$a_3=1+(-1)^{3-1}=1+(-1)^2=2$
$a_4=1+(-1)^{4-1}=1+(-1)^3=0$
$a_5=1+(-1)^{5-1}=1+(-1)^4=2$

소단원 확인 문제 167쪽

1-1 (1) 제6항: 27, 제8항: 243 (2) 제6항: $\frac{1}{6}$, 제8항: $\frac{1}{8}$

2-1 (1) 1, $\log_2 5$, $\log_2 10$, $\log_2 17$, $\log_2 26$

(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3-1 9

1-1 (1) 첫째항부터 시작하여 여섯 번째와 여덟 번째에 있는 항을 각각 찾으면 제6항은 27이고, 제8항은 243이다.

(2) 첫째항부터 시작하여 여섯 번째와 여덟 번째에 있는 항을 각각 찾으면 제6항은 $\frac{1}{6}$이고, 제8항은 $\frac{1}{8}$이다.

2-1 (1) $a_n=\log_2(n^2+1)$에 $n=1$, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$a_1=\log_2(1^2+1)=\log_2 2=1$
$a_2=\log_2(2^2+1)=\log_2 5$
$a_3=\log_2(3^2+1)=\log_2 10$
$a_4=\log_2(4^2+1)=\log_2 17$
$a_5=\log_2(5^2+1)=\log_2 26$

(2) $a_n=\sin\frac{n}{3}\pi$에 $n=1$, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$a_1=\sin\frac{1}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a_2=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a_3=\sin\frac{3}{3}\pi=\sin\pi=0$

$a_4=\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a_5=\sin\frac{5}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3-1 $a_1=(7^1=7$을 10으로 나누었을 때의 나머지$)=7$

$a_2=(7^2=49$를 10으로 나누었을 때의 나머지$)=9$

$a_3=(7^3=343$을 10으로 나누었을 때의 나머지$)=3$

$a_4=(7^4=2401$을 10으로 나누었을 때의 나머지$)=1$

$a_5=(7^5=16807$을 10으로 나누었을 때의 나머지$)=7$

$a_6=(7^6=117649$를 10으로 나누었을 때의 나머지$)=9$

⋮

위에서 수열 $\{a_n\}$은 7, 9, 3, 1이 반복하여 나타남을 알 수 있다.

$\therefore a_{50}=a_{4\times12+2}=a_2=9$

보충 $a_{4n+1}=7$, $a_{4n+2}=9$, $a_{4n+3}=3$, $a_{4n}=1$

$\therefore a_{50}=a_{4\times12+2}=a_2=9$

1-2 등차수열

내신 대비 쌍둥이 문제 169~172쪽

1-1 (1) 공차: 3, $\boxed{}$: 8, 14 (2) 공차: -3, $\boxed{}$: 2, -7

2-1 (1) $a_n=5n-23$ (2) $a_n=-3n+8$

(3) $a_n=-2n+1$ (4) $a_n=\frac{3}{2}n$

3-1 (1) -29 (2) 제17항

4-1 $a_n=4n-1$

5-1 제31항

6-1 4

7-1 27

8-1 (1) 304 (2) 160

9-1 1225

10-1 첫째항: 10, 공차: 0

1-1 (1) $5-2=3$에서 공차가 3이므로

2, 5, $\boxed{8}$, 11, $\boxed{14}$, ⋯

(2) $-4-(-1)=-3$에서 공차가 -3이므로

$\boxed{2}$, -1, -4, $\boxed{-7}$, -10, ⋯

2-1 (1) $a_n=-18+(n-1)\times5=5n-23$

(2) $a_n=5+(n-1)\times(-3)=-3n+8$

(3) 주어진 수열은 첫째항이 -1, 공차가 -2인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=-1+(n-1)\times(-2)=-2n+1$

(4) 주어진 수열은 첫째항이 $\frac{3}{2}$, 공차가 $\frac{3}{2}$인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=\frac{3}{2}+(n-1)\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}n$

3-1 (1) 첫째항이 6, 공차가 -5인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=6+(n-1)\times(-5)$

$=-5n+11$

$\therefore a_8=(-5)\times8+11=-29$

(2) $-5n+11=-74$에서

$5n=85$ $\quad\therefore n=17$

따라서 -74는 제17항이다.

4-1 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_2=a+d=7$, $a_5=a+4d=19$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $d=4$

$\therefore a_n=3+(n-1)\times4=4n-1$

5-1 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_5=a+4d=76$, $a_{10}=a+9d=61$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=88$, $d=-3$

$\therefore a_n=88+(n-1)\times(-3)=-3n+91$

$a_n<0$인 n을 구하면 $-3n+91<0$에서

$n>\frac{91}{3}=30.33\cdots$

이때 n은 자연수이므로 n의 최솟값은 31이다.

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제31항이다.

6-1 $a+2$가 a^2과 $-a$의 등차중항이므로

$a+2=\frac{a^2+(-a)}{2}$에서 $a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$

그런데 $a>0$이므로 $a=4$

7-1 y는 -6과 -12의 등차중항이므로

$y=\frac{-6+(-12)}{2}=-9$

-6은 x와 y의 등차중항이므로

$-6=\frac{x+y}{2}=\frac{x+(-9)}{2}$ $\qquad\therefore x=-3$

$\therefore xy=(-3)\times(-9)=27$

8-1 (1) $\frac{16\{(-2)+40\}}{2}=304$

(2) $\frac{16\{2\times25+(16-1)\times(-2)\}}{2}=160$

9-1 100 이하의 자연수 중에서 4로 나누었을 때의 나머지가 1인 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$1, 5, 9, 13, 17, \cdots, 97$

이고, 이것은 첫째항이 1, 공차가 4인 등차수열을 이룬다. 이때 100 이하의 자연수 중에서 가장 큰 수는 97이므로 97을 이 수열의 제n항이라고 하면

$1+(n-1)\times4=97 \qquad \therefore n=25$

즉, 97은 제25항이다.

따라서 구하는 합은 $\dfrac{25(1+97)}{2}=1225$

10-1 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$\dfrac{4(2a+3d)}{2}=40$ ……①

$\dfrac{6(2a+5d)}{2}=60$ ……②

①에서 $2a+3d=20$ ……③

②에서 $2a+5d=20$ ……④

③, ④를 연립하여 풀면 $a=10$, $d=0$

따라서 주어진 등차수열의 첫째항은 10, 공차는 0이다.

소단원 확인 문제 174~175쪽

1-1 (1) $a_n=4n-5$ (2) $a_n=-2n+13$

2-1 (1) 465 (2) 255

3-1 1800 **4-1** -9

1-1 (1) 주어진 등차수열은 첫째항이 -1, 공차가 4이므로

$a_n=-1+(n-1)\times4=4n-5$

(2) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=a+2d=7$, $a_8=a+7d=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=11$, $d=-2$

$\therefore a_n=11+(n-1)\times(-2)=-2n+13$

2-1 (1) 첫째항이 3, 공차가 4인 등차수열의 첫째항부터 제15항까지의 합은

$\dfrac{15\{2\times3+(15-1)\times4\}}{2}=465$

(2) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=a+2d=7$, $a_6=a+5d=13$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $d=2$

따라서 주어진 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제15항까지의 합은

$\dfrac{15\{2\times3+(15-1)\times2\}}{2}=255$

3-1 집합 A의 모든 원소를 작은 수부터 차례로 나열하면

$106, 114, 122, \cdots, 194$

이고, 이것은 첫째항이 106, 공차가 8인 등차수열을 이룬다. 이때 194를 이 수열의 제n항이라고 하면

$106+(n-1)\times8=194 \qquad \therefore n=12$

즉, 194는 제12항이다.

따라서 구하는 합은 $\dfrac{12(106+194)}{2}=1800$

4-1 $f(x)=x^2+ax+1$로 놓으면 $f(x)$를 $x-1$, $x-2$, $x-4$로 나누었을 때의 나머지는 각각

$f(1)=2+a$, $f(2)=5+2a$, $f(4)=17+4a$

$2+a$, $5+2a$, $17+4a$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(5+2a)=(2+a)+(17+4a)$

$10+4a=5a+19 \qquad \therefore a=-9$

1-3 등비수열

내신 대비 쌍둥이 문제 176~180쪽

1-1 (1) 공비: -3, $\boxed{}$: -3, 81

(2) 공비: $-\dfrac{1}{4}$, $\boxed{}$: $\dfrac{1}{8}$, $-\dfrac{1}{32}$

2-1 (1) $a_n=5\times(-3)^{n-1}$ (2) $a_n=2\times(\sqrt{2})^{n-1}$

(3) $a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}$ (4) $a_n=2\times(-3)^{n-1}$

3-1 (1) $-\dfrac{1}{2}$ (2) 제7항

4-1 $a_n=-3\times(-2)^{n-1}$

5-1 43

6-1 11장

7-1 3

8-1 $a=4$, $b=8$, $c=16$ 또는 $a=-4$, $b=8$, $c=-16$

9-1 (1) $\dfrac{257}{128}$ (2) -255

10-1 $\dfrac{1}{2}$ 또는 2

1-1 (1) $-27\div 9=-3$에서 공비가 -3이므로

$1\times(-3)=-3,\ (-27)\times(-3)=81$

$1,\ \boxed{-3},\ 9,\ -27,\ \boxed{81},\ \cdots$

(2) $-8\div 32=-\frac{1}{4}$에서 공비가 $-\frac{1}{4}$이므로

$\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8},\ \frac{1}{8}\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{32}$

$32,\ -8,\ 2,\ -\frac{1}{2},\ \boxed{\frac{1}{8}},\ \boxed{-\frac{1}{32}},\ \cdots$

2-1 (1) $a_n=5\times(-3)^{n-1}$

(2) $a_n=2\times(\sqrt{2})^{n-1}$

(3) 주어진 수열은 첫째항이 3, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$

(4) 주어진 수열은 첫째항이 2, 공비가 -3인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=2\times(-3)^{n-1}$

3-1 (1) 첫째항이 4, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열의 일반항 a_n은

$a_n=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_4=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{4-1}=-\frac{1}{2}$

(2) 이 등비수열의 제n항을 $\frac{1}{16}$이라고 하면

$4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{16},\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{64}$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{6},\ n-1=6$

$\therefore\ n=7$

따라서 $\frac{1}{16}$은 제7항이다.

4-1 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_5=ar^4=-48$ $\cdots\cdots$ ①

$a_8=ar^7=384$ $\cdots\cdots$ ②

②÷①을 하면

$r^3=-8\qquad\therefore\ r=-2$ ($\because$ r는 실수)

$r=-2$를 ①에 대입하면

$16a=-48\qquad\therefore\ a=-3$

$\therefore\ a_n=-3\times(-2)^{n-1}$

5-1 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=ar^2=3$ $\cdots\cdots$ ①

$a_5=ar^4=9$ $\cdots\cdots$ ②

②÷①을 하면

$r^2=3\qquad\therefore\ r=\sqrt{3}\ (\because\ r>0)$

$r=\sqrt{3}$을 ①에 대입하면

$3a=3\qquad\therefore\ a=1$

$\therefore\ a_n=1\times(\sqrt{3})^{n-1}=3^{\frac{n-1}{2}}$

$3^{\frac{n-1}{2}}>10^{10}$에서 양변에 상용로그를 취하면

$\log 3^{\frac{n-1}{2}}>\log 10^{10},\ \frac{n-1}{2}\log 3>10$

$n-1>\frac{20}{\log 3}=\frac{20}{0.4771}=41.91\cdots$

$\therefore\ n>42.91\cdots$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 43이다.

6-1 처음 빛의 밝기를 a라고 하자.

색유리를 n장 통과한 후의 빛의 밝기를 a_n이라고 하면

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a\times\left(1-\frac{20}{100}\right)=\frac{8}{10}a$이고,

공비가 $\frac{8}{10}$인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=\frac{8}{10}a\times\left(\frac{8}{10}\right)^{n-1}=\left(\frac{8}{10}\right)^{n}a$

$\left(\frac{8}{10}\right)^{n}a\le\frac{1}{10}a$에서

$\left(\frac{8}{10}\right)^{n}\le\frac{1}{10}$ $\cdots\cdots$ ①

①의 양변에 상용로그를 취하면

$n(3\log 2-1)\le -1$

$\therefore\ n\ge\frac{1}{1-3\log 2}=\frac{1}{1-3\times 0.3010}=10.3\cdots$

이때 n은 자연수이므로 n의 최솟값은 11이다.

따라서 빛의 밝기가 처음의 $\frac{1}{10}$ 이하가 되려면 색유리를 최소한 11장 통과해야 한다.

7-1 $x+2$가 $x-1$과 $3x+1$의 등비중항이므로

$(x+2)^2=(x-1)(3x+1)$에서

$x^2+4x+4=3x^2-2x-1$

$\therefore\ 2x^2-6x-5=0$

따라서 모든 x의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{-6}{2}=3$이다.

8-1 2, a, b, c, 32에서 b는 2와 32의 등비중항이므로

$b^2=2\times32=64$ $\quad\therefore b=\pm8$

(i) $b=8$일 때, a는 2와 8의 등비중항이므로

$a^2=2\times8=16$ $\quad\therefore a=\pm4$

이때 $a=4$이면 $c=16$이고, $a=-4$이면 $c=-16$이다.

(ii) $b=-8$일 때, a는 2와 -8의 등비중항이므로

$a^2=2\times(-8)=-16$

이것을 만족하는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

따라서 등비수열을 이루도록 하는 a, b, c의 값은

$a=4$, $b=8$, $c=16$ 또는 $a=-4$, $b=8$, $c=-16$

9-1 (1) $\dfrac{1\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}=\dfrac{257}{128}$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 3, 공비가 -2인 등비수열이므로 첫째항부터 제8항까지의 합은

$$\frac{3\{1-(-2)^8\}}{1-(-2)}=1-(-2)^8$$
$$=1-256$$
$$=-255$$

10-1 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$\dfrac{a(1-r^4)}{1-r}=45$ $\quad\cdots\cdots$ ①

$a_1+a_4=a+ar^3=a(1+r^3)=27$ $\quad\cdots\cdots$ ②

①에서

$$\frac{a(1-r^4)}{1-r}=\frac{a(1-r^2)(1+r^2)}{1-r}$$
$$=a(1+r)(1+r^2)$$
$$=45 \quad\cdots\cdots ③$$

②에서

$$a(1+r^3)=a(1+r)(1-r+r^2)$$
$$=27 \quad\cdots\cdots ④$$

③÷④를 하면

$\dfrac{1+r^2}{1-r+r^2}=\dfrac{5}{3}$, $3+3r^2=5-5r+5r^2$

$2r^2-5r+2=0$, $(2r-1)(r-2)=0$

$\therefore r=\dfrac{1}{2}$ 또는 $r=2$

소단원 확인 문제 182~183쪽

1-1 (1) $a_n=2\times(-2)^{n-1}$ (2) $a_n=2^{2n-5}$
(3) $a_n=2^{n-1}$ (4) $a_n=2\times3^{n-1}$

2-1 (1) $\dfrac{255}{64}$ (2) -255

3-1 6

4-1 200

1-1 (1) $a_n=2\times(-2)^{n-1}$

(2) 첫째항이 $\dfrac{1}{8}$, 공비가 4인 등비수열이므로

$a_n=\dfrac{1}{8}\times4^{n-1}=2^{2n-5}$

(3) 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_2=ar=2$

$a_5=ar^4=16$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$r^3=8$ $\quad\therefore r=2$ ($\because$ r는 실수)

$r=2$를 $ar=2$에 대입하면 $a=1$

$\therefore a_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$

(4) 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=ar^2=18$

$a_5=ar^4=162$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$r^2=9$ $\quad\therefore r=3$ ($\because$ 각 항이 양수)

$r=3$을 $ar^2=18$에 대입하면 $a=2$

$\therefore a_n=2\times3^{n-1}$

2-1 (1) 첫째항이 2, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$$\frac{2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{2}}=4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}$$
$$=4-\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{255}{64}$$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 3, 공비가 -2인 등비수열이므로 첫째항부터 제8항까지의 합은

$$\frac{3\{1-(-2)^8\}}{1-(-2)}=1-(-2)^8$$
$$=1-256=-255$$

3-1 2^{n+3}이 8^{n-1}과 8^{n-5}의 등비중항이므로

$(2^{n+3})^2=8^{n-1}\times8^{n-5}$에서

$2^{2n+6}=2^{3n-3}\times2^{3n-15}=2^{(3n-3)+(3n-15)}=2^{6n-18}$

따라서 $2n+6=6n-18$이므로 $n=6$

4-1 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$$\frac{a(1-r^5)}{1-r}=5 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{a(1-r^{10})}{1-r}=\frac{a(1-r^5)}{1-r}\times(1+r^5)=20 \qquad \cdots\cdots ②$$

②÷①을 하면 $1+r^5=4$이므로 $r^5=3$

따라서 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\frac{a(1-r^{20})}{1-r}=\frac{a(1-r^{10})(1+r^{10})}{1-r}$$

$$=\frac{a(1-r^5)}{1-r}\times(1+r^5)(1+r^{10})$$

$$=5(1+3)(1+9)=200$$

중단원 연습 문제 186~191쪽

1-1 (1) $\log_5 2$, $\log_5\frac{3}{2}$, $\log_5\frac{4}{3}$, $\log_5\frac{5}{4}$, $\log_5\frac{6}{5}$

(2) 3, 33, 333, 3333, 33333

2-1 (1) $a_n=6n-8$, 합: 372 (2) $a_n=-2n+37$, 합: 288

3-1 (1) $a_n=4\times(-2)^{n-1}$, 합: 684 (2) $a_n=2^{8-n}$, 합: $\frac{511}{2}$

4-1 10 **5-1** 16

6-1 -286 **7-1** 4

8-1 6 **9-1** 108

10-1 45 **11-1** 1530톤

1-1 (1) $a_n=\log_5\frac{n+1}{n}$에 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 차례로 대입하면

$$a_1=\log_5\frac{1+1}{1}=\log_5 2$$

$$a_2=\log_5\frac{2+1}{2}=\log_5\frac{3}{2}$$

$$a_3=\log_5\frac{3+1}{3}=\log_5\frac{4}{3}$$

$$a_4=\log_5\frac{4+1}{4}=\log_5\frac{5}{4}$$

$$a_5=\log_5\frac{5+1}{5}=\log_5\frac{6}{5}$$

(2) $a_n=\frac{1}{3}(10^n-1)$에 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 차례로 대입하면

$$a_1=\frac{1}{3}(10^1-1)=\frac{1}{3}\times9=3$$

$$a_2=\frac{1}{3}(10^2-1)=\frac{1}{3}\times99=33$$

$$a_3=\frac{1}{3}(10^3-1)=\frac{1}{3}\times999=333$$

$$a_4=\frac{1}{3}(10^4-1)=\frac{1}{3}\times9999=3333$$

$$a_5=\frac{1}{3}(10^5-1)=\frac{1}{3}\times99999=33333$$

2-1 (1) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_2=a+d=4$ $\cdots\cdots$ ①

$a_5=a+4d=22$ $\cdots\cdots$ ②

①, ②를 연립하여 풀면

$a=-2$, $d=6$

$\therefore a_n=-2+(n-1)\times6=6n-8$

따라서 첫째항부터 제12항까지의 합은

$$\frac{12\{2\times(-2)+(12-1)\times6\}}{2}=372$$

(2) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_4=a+3d=29$ $\cdots\cdots$ ①

$a_7=a+6d=23$ $\cdots\cdots$ ②

①, ②를 연립하여 풀면

$a=35$, $d=-2$

$\therefore a_n=35+(n-1)\times(-2)=-2n+37$

따라서 첫째항부터 제12항까지의 합은

$$\frac{12\{2\times35+(12-1)\times(-2)\}}{2}=288$$

3-1 (1) 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_2=ar=-8$ $\cdots\cdots$ ①

$a_5=ar^4=64$ $\cdots\cdots$ ②

②÷①을 하면

$r^3=-8$ $\quad\therefore r=-2$ ($\because$ 공비는 실수)

$r=-2$를 ①에 대입하면

$-2a=-8$ $\quad\therefore a=4$

$\therefore a_n=4\times(-2)^{n-1}$

따라서 첫째항부터 제9항까지의 합은

$$\frac{4\{1-(-2)^9\}}{1-(-2)}=\frac{4\times513}{3}=684$$

⑵ 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=ar^2=32$ ······ ①

$a_6=ar^5=4$ ······ ②

②÷①을 하면

$r^3=\frac{1}{8}$ $\quad\therefore r=\frac{1}{2}$ (∵ 공비는 실수)

$r=\frac{1}{2}$을 ①에 대입하면

$a\left(\frac{1}{2}\right)^2=32$ $\quad\therefore a=128$

$\therefore a_n=128\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{8-n}$

따라서 첫째항부터 제9항까지의 합은

$$\frac{128\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9\right\}}{1-\frac{1}{2}}=256\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9\right\}=\frac{511}{2}$$

4-1 1과 b의 등차중항이 a이므로

$2a=1+b$ $\quad\therefore b=2a-1$ ······ ①

a와 b의 등비중항이 $\sqrt{3}$이므로

$(\sqrt{3})^2=ab$ ······ ②

①을 ②에 대입하면 $3=a(2a-1)$

$2a^2-a-3=0$, $(2a-3)(a+1)=0$

$\therefore a=\frac{3}{2}$ 또는 $a=-1$

그런데 a는 정수이므로 $a=-1$

$a=-1$을 ①에 대입하면 $b=-3$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+(-3)^2=10$

5-1 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_2+a_3=(a+d)+(a+2d)=2a+3d=10$ ······ ①

$a_6=a+5d=12$ ······ ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=2$, $d=2$

$\therefore a_8=a+7d=2+7\times2=16$

6-1 첫째항이 50, 제n항이 -10, 항의 개수가 n인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이 220이므로

$\frac{n\{50+(-10)\}}{2}=220$, $20n=220$

$\therefore n=11$

즉, $a_{11}=-10$이므로 공차를 d라고 하면

$50+(11-1)d=-10$, $10d=-60$

$\therefore d=-6$

따라서 첫째항부터 제$2n$항까지의 합은 첫째항부터 제22항까지의 합이므로

$$\frac{22\{2\times50+(22-1)\times(-6)\}}{2}=-286$$

7-1 공비를 r라고 하면

$$\frac{a_{11}}{a_1}+\frac{a_{12}}{a_2}+\frac{a_{13}}{a_3}+\frac{a_{14}}{a_4}+\frac{a_{15}}{a_5}$$

$$=\frac{a_1r^{10}}{a_1}+\frac{a_1r^{11}}{a_1r}+\frac{a_1r^{12}}{a_1r^2}+\frac{a_1r^{13}}{a_1r^3}+\frac{a_1r^{14}}{a_1r^4}$$

$=r^{10}+r^{10}+r^{10}+r^{10}+r^{10}$

$=5r^{10}=10$

$\therefore r^{10}=2$

$\therefore \frac{a_{30}}{a_{10}}=\frac{a_1r^{29}}{a_1r^9}=r^{20}=(r^{10})^2=2^2=4$

8-1 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라고 하면

$a_1=a$, $a_2=a+4$, $a_5=a+(5-1)\times4$

이때 a_1, a_2, a_5가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_2{}^2=a_1a_5$에서

$(a+4)^2=a(a+16)$, $8a=16$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore a_2=2+4=6$

9-1 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=3$ ······ ①

$\frac{ar^{10}(r^{10}-1)}{r-1}=18$ ······ ②

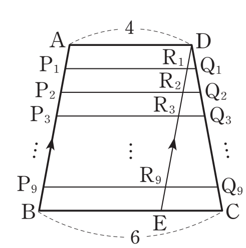
②÷①을 하면 $r^{10}=6$

따라서 제21항부터 제30항까지의 합은

$\frac{ar^{20}(r^{10}-1)}{r-1}=(r^{10})^2\times\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}$

$=6^2\times3=108$

10-1 오른쪽 그림과 같이 변 BC 위에 $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{DE}$인 점 E를 잡고, $\overline{P_kQ_k}(k=1, 2, 3, \cdots, 9)$와 $\overline{DE}$의 교점을 R_k라고 하면 $\triangle DEC$와 $\triangle DR_kQ_k$는 닮음이고, 닮음비는 $10:k$이므로



$2:\overline{R_kQ_k}=10:k$ $\quad\therefore \overline{R_kQ_k}=\frac{1}{5}k$

$\therefore \overline{P_kQ_k}=\overline{P_kR_k}+\overline{R_kQ_k}=4+\frac{1}{5}k$

따라서 $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$, $\overline{P_3Q_3}$, $\cdots$, $\overline{P_9Q_9}$는 공차가 $\frac{1}{5}$인 등차수열을 이루고

$$\overline{P_1Q_1}=4+\frac{1}{5}=\frac{21}{5},\ \overline{P_9Q_9}=4+\frac{9}{5}=\frac{29}{5}$$

이므로

$$\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\cdots+\overline{P_9Q_9}$$
$$=\frac{9\times\left(\frac{21}{5}+\frac{29}{5}\right)}{2}$$
$$=\frac{9\times10}{2}=45$$

11-1 P지역의 연간 자동차 휘발유 소비량이 매년 r배 감소한다고 하면 4년 후의 휘발유 소비량은 $768r^4$톤이므로

$$768r^4=48,\ r^4=\frac{1}{16}\qquad \therefore r=\frac{1}{2}\ (\because r>0)$$

따라서 8년 동안 사용되는 자동차 휘발유 소비량의 총합은

$$768+768r+768r^2+\cdots+768r^7$$
$$=\frac{768(1-r^8)}{1-r}=\frac{768\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=1530(\text{톤})$$

2. 수열의 합

2-1 $\sum$의 뜻과 성질

내신 대비 쌍둥이 문제 193~194쪽

1-1 (1) $7+11+15+\cdots+43$
(2) $3+8+15+\cdots+120$

2-1 $\sum_{k=1}^{8}(2k+1)$

3-1 (1) 2 (2) 19

1-1 (1) $\sum_{i=1}^{10}(4i+3)=(4\times1+3)+(4\times2+3)$
$+(4\times3+3)+\cdots+(4\times10+3)$
$=7+11+15+\cdots+43$

(2) $\sum_{j=1}^{10}j(j+2)=1\times3+2\times4+3\times5+\cdots+10\times12$
$=3+8+15+\cdots+120$

2-1 주어진 등차수열의 첫째항이 3, 공차가 2이므로 일반항 a_k는

$$a_k=3+(k-1)\times2=2k+1$$

$2k+1=17$에서 $k=8$이므로

$$3+5+7+\cdots+17=\sum_{k=1}^{8}(2k+1)$$

3-1 (1) $\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k$
$=2\times5-8=2$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(3a_k-2b_k+2)=3\sum_{k=1}^{10}a_k-2\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}2$
$=3\times5-2\times8+2\times10$
$=15-16+20$
$=19$

소단원 확인 문제 195~196쪽

1-1 (2), (4)

2-1 (1) 435 (2) -40

3-1 $\sum_{k=1}^{8}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

4-1 13

1-1 (2) $2^2+3^2+4^2+\cdots+9^2=\sum_{k=1}^{8}(k+1)^2$

(4) $1\times3+2\times5+3\times7+\cdots+10\times21=\sum_{k=1}^{10}k(2k+1)$

따라서 잘못 나타낸 것은 (2), (4)이다.

2-1 (1) $\sum_{k=1}^{100}(a_k+2)^2=\sum_{k=1}^{100}(a_k{}^2+4a_k+4)$
$=\sum_{k=1}^{100}a_k{}^2+4\sum_{k=1}^{100}a_k+\sum_{k=1}^{100}4$
$=15+4\times5+4\times100$
$=435$

(2) $\sum_{k=1}^{100}(2a_k+1)(2a_k-1)=\sum_{k=1}^{100}(4a_k{}^2-1)$
$=4\sum_{k=1}^{100}a_k{}^2-\sum_{k=1}^{100}1$
$=4\times15-1\times100$
$=-40$

3-1 주어진 등비수열의 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{1}{3}$이므로

일반항 a_k는

$$a_k=1\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}=-\frac{1}{2187}=\left(-\frac{1}{3}\right)^7$에서 $k=8$이므로

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\cdots-\frac{1}{2187}=\sum_{k=1}^{8}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

4-1 $\sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^2=12$에서

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k{}^2-2a_k+1)=12 \quad \cdots\cdots ①$$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-1)(a_k+1)=18$에서

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k{}^2-1)=18 \quad \cdots\cdots ②$$

②−①을 하면

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-2)=6,\ 2\sum_{k=1}^{10}a_k-20=6$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=13$$

2-2 여러 가지 수열의 합

내신 대비 쌍둥이 문제 197~201쪽

1-1 (1) 91 (2) 1296 (3) 650 (4) 2025
2-1 (1) -4 (2) 495 (3) 3976 (4) 516
3-1 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
4-1 8000
5-1 (1) $\frac{36}{55}$ (2) 4
6-1 (1) $a_n=2n$ (2) $a_n=2^n$
7-1 (1) $a_n=p(q-1)\times q^{n-1}$ (2) 풀이 참조

1-1 (1) $\sum_{k=1}^{6}k^2=\frac{6\times7\times13}{6}=91$

(2) $\sum_{k=1}^{8}k^3=\left(\frac{8\times9}{2}\right)^2=36^2=1296$

(3) $1^2+2^2+3^2+\cdots+12^2=\sum_{k=1}^{12}k^2$

$$=\frac{12\times13\times25}{6}$$
$$=650$$

(4) $1^3+2^3+3^3+\cdots+9^3=\sum_{k=1}^{9}k^3$

$$=\left(\frac{9\times10}{2}\right)^2$$
$$=2025$$

2-1 (1) $\sum_{k=1}^{8}(k-5)=\sum_{k=1}^{8}k-\sum_{k=1}^{8}5$

$$=\frac{8\times9}{2}-5\times8$$
$$=-4$$

(2) $\sum_{k=1}^{10}k(k+2)=\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k)$

$$=\sum_{k=1}^{10}k^2+2\sum_{k=1}^{10}k$$
$$=\frac{10\times11\times21}{6}+2\times\frac{10\times11}{2}$$
$$=385+110$$
$$=495$$

(3) $\sum_{k=1}^{7}(4k^3+6k^2)$

$$=4\sum_{k=1}^{7}k^3+6\sum_{k=1}^{7}k^2$$
$$=4\left(\frac{7\times8}{2}\right)^2+6\times\frac{7\times8\times15}{6}$$
$$=3136+840$$
$$=3976$$

(4) $\sum_{k=1}^{9}(k-1)(2k+1)$

$$=\sum_{k=1}^{9}(2k^2-k-1)$$
$$=2\sum_{k=1}^{9}k^2-\sum_{k=1}^{9}k-\sum_{k=1}^{9}1$$
$$=2\times\frac{9\times10\times19}{6}-\frac{9\times10}{2}-1\times9$$
$$=570-45-9$$
$$=516$$

3-1 주어진 수열의 일반항을 a_k라고 하면

$$a_k=k\{n-(k-1)\}=-k^2+(n+1)k$$

$\therefore$ (주어진 식)

$$=\sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}$$
$$=-\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

4-1 20단계에 속한 수들은 다음과 같다.

1	2	3	4	⋯	20
2	3	4	5	⋯	21
3	4	5	6	⋯	22
		⋮			
20	21	22	23	⋯	39

제1행의 수들의 합은

$$1+2+3+\cdots+20=\sum_{k=1}^{20}k=\frac{20\times21}{2}=210$$

제2행의 수들의 합은

$$(1+2+3+\cdots+20)+20=210+20$$

제3행의 수들의 합은

$$(1+2+3+\cdots+20)+40=210+40$$

⋮

제20행의 수들의 합은

$$(1+2+3+\cdots+20)+380=210+380$$

따라서 모두 더하면

$$210\times20+\sum_{k=1}^{19}20k=4200+20\times\frac{19\times20}{2}$$
$$=4200+3800=8000$$

5-1 (1) $\displaystyle\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{k^2-1}$

$$=\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{(k-1)(k+1)}$$
$$=\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=\frac{36}{55}$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}$

$$=\sum_{k=1}^{40}\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}$$
$$=\sum_{k=1}^{40}\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(2k+1)-(2k-1)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{40}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{79}-\sqrt{77})+(\sqrt{81}-\sqrt{79})\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{81}-1)=4$$

6-1 (1) $n=1$일 때, $a_1=1^2+1=2$

$n\ge2$일 때, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+n$이라고 하면

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+n-\{(n-1)^2+n-1\}=2n$ ⋯⋯ ①

①에 $n=1$을 대입한 값이 $a_1=2$와 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=2n$

(2) $n=1$일 때, $a_1=2^2-2=2$

$n\ge2$일 때, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=2^{n+1}-2$라고 하면

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2^{n+1}-2)-(2^n-2)=2^n$ ⋯⋯ ①

①에 $n=1$을 대입한 값이 $a_1=2$와 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=2^n$

7-1 (1) $n=1$일 때, $a_1=p\times q-p$

$n\ge2$일 때, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=p\times q^n-p$라고 하면

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(p\times q^n-p)-(p\times q^{n-1}-p)$

$=p(q-1)\times q^{n-1}$ ⋯⋯ ①

①에 $n=1$을 대입한 값이 $a_1=p\times q-p$와 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=p(q-1)\times q^{n-1}$

(2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{p(q-1)\times q^n}{p(q-1)\times q^{n-1}}=q$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 q인 등비수열이다.

소단원 확인 문제 202~204쪽

1-1 (1) 250 (2) 310 (3) $\frac{12}{25}$ (4) $\frac{9}{10}$

2-1 (1) 96 (2) 2572

3-1 (1) $\frac{20}{11}$ (2) 10

4-1 $a_1=4$, $a_n=2\times3^{n-1}\ (n\ge2)$

1-1 (1) $\sum_{k=1}^{10}(4k+3)=4\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}3$

$=4\times\frac{10\times11}{2}+3\times10$

$=220+30=250$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(k^2-k-2)$

$=\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}2$

$=\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}-2\times10$

$=385-55-20$

$=310$

(3) $\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$이므로

$\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{4k^2-1}$

$=\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{23}-\frac{1}{25}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{25}\right)=\frac{12}{25}$

(4) $\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$이므로

$\sum_{k=1}^{99}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{99}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}\right)$

$=1-\frac{1}{\sqrt{100}}$

$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

2-1 (1) $\sum_{k=1}^{9}(2k-1)(k-3)-\sum_{k=1}^{9}(k+2)(k-3)$

$=\sum_{k=1}^{9}\{(2k-1)(k-3)-(k+2)(k-3)\}$

$=\sum_{k=1}^{9}(k^2-6k+9)$

$=\sum_{k=1}^{9}k^2-6\sum_{k=1}^{9}k+\sum_{k=1}^{9}9$

$=\frac{9\times10\times19}{6}-6\times\frac{9\times10}{2}+9\times9=96$

(2) $\sum_{k=1}^{8}k(k-1)(k+1)+\sum_{k=1}^{8}(k^3+2)$

$=\sum_{k=1}^{8}\{k(k-1)(k+1)+(k^3+2)\}$

$=\sum_{k=1}^{8}(2k^3-k+2)$

$=2\sum_{k=1}^{8}k^3-\sum_{k=1}^{8}k+\sum_{k=1}^{8}2$

$=2\left(\frac{8\times9}{2}\right)^2-\frac{8\times9}{2}+2\times8=2572$

3-1 (1) $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}=\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k(k+1)}$

$=2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$

(2) $\frac{2}{\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k+4}}$

$=\frac{2(\sqrt{2k+4}-\sqrt{2k+2})}{(\sqrt{2k+4}+\sqrt{2k+2})(\sqrt{2k+4}-\sqrt{2k+2})}$

$=\frac{2(\sqrt{2k+4}-\sqrt{2k+2})}{(2k+4)-(2k+2)}=\sqrt{2k+4}-\sqrt{2k+2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{70}\frac{2}{\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k+4}}$

$=\sum_{k=1}^{70}(\sqrt{2k+4}-\sqrt{2k+2})$

$=(\sqrt{6}-\sqrt{4})+(\sqrt{8}-\sqrt{6})+(\sqrt{10}-\sqrt{8})+\cdots$

$+(\sqrt{144}-\sqrt{142})$

$=\sqrt{144}-\sqrt{4}=12-2=10$

4-1 $n=1$일 때, $a_1=3^1+1=4$

$n\geq 2$일 때, $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=3^n+1$이라고 하면

$$\begin{aligned} a_n &= S_n-S_{n-1} \\ &= (3^n+1)-(3^{n-1}+1) \\ &= 3^n-3^{n-1} \\ &= 3^{n-1}(3-1) \\ &= 2\times 3^{n-1} \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

①에 $n=1$을 대입한 값이 $a_1=4$와 다르므로 일반항 a_n은

$a_1=4,\ a_n=2\times 3^{n-1}\ (n\geq 2)$

중단원 연습 문제

206~211쪽

1-1 (1) $\sum_{k=1}^{10} k(2k+1)$ (2) $\sum_{k=1}^{7} \frac{1}{(2k+1)^2-1}$

2-1 75

3-1 (1) 1522 (2) $\frac{8}{17}$

4-1 (1) $a_n=4n-7$ (2) $a_n=3n^2-3n+1$

(3) $a_n=9\times 10^{n-1}$ (4) $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$

5-1 (1) 830 (2) $2^{13}-8$ (3) 190

6-1 290 **7-1** -100

8-1 $-\frac{15}{16}$ **9-1** 36

10-1 258 **11-1** 19

1-1 (1) $\sum_{k=1}^{10} k(2k+1)$

(2) $\sum_{k=1}^{7} \frac{1}{(2k+1)^2-1}$

2-1 $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20}(a_k-2)^2 &= \sum_{k=1}^{20}(a_k{}^2-4a_k+4) \\ &= \sum_{k=1}^{20} a_k{}^2-4\sum_{k=1}^{20} a_k+\sum_{k=1}^{20} 4 \\ &= 55-4\times 15+4\times 20 \\ &= 75 \end{aligned}$$

3-1 (1) $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{8}(3\times 2^k-1) &= 3\sum_{k=1}^{8} 2^k-\sum_{k=1}^{8} 1 \\ &= 3\times\frac{2(2^8-1)}{2-1}-8 \\ &= 6(2^8-1)-8=1522 \end{aligned}$$

(2) $\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{4k^2-1}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right. \\ &\qquad \left.+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\right)+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{17}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{17}\right)=\frac{8}{17} \end{aligned}$$

4-1 (1) $n=1$일 때, $a_1=2\times 1^2-5\times 1=-3$

$n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n-S_{n-1} \\ &= (2n^2-5n)-\{2(n-1)^2-5(n-1)\} \\ &= 4n-7 \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

①에 $n=1$을 대입한 값이 $a_1=-3$과 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=4n-7$

(2) $n=1$일 때, $a_1=1^3=1$

$n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n-S_{n-1} \\ &= n^3-(n-1)^3 \\ &= 3n^2-3n+1 \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

①에 $n=1$을 대입한 값이 $a_1=1$과 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=3n^2-3n+1$

(3) $n=1$일 때, $a_1=10-1=9$

$n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n-S_{n-1} \\ &= 10^n-1-(10^{n-1}-1) \\ &= 10^{n-1}(10-1) \\ &= 9\times 10^{n-1} \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

①에 $n=1$을 대입한 값이 $a_1=9$와 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=9\times 10^{n-1}$

(4) $n=1$일 때, $a_1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

$n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}$$
$$=\frac{1}{n(n+1)} \quad \cdots\cdots ①$$

①에 $n=1$을 대입한 값이 $a_1=\frac{1}{2}$과 같으므로 일반항 a_n은

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$$

5-1 (1) $\sum_{k=1}^{10}\frac{(k+1)^3}{k}+\sum_{k=1}^{10}\frac{(k-1)^3}{k}$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{k^3+3k^2+3k+1}{k}+\sum_{k=1}^{10}\frac{k^3-3k^2+3k-1}{k}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{2k^3+6k}{k}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(2k^2+6)$$
$$=2\times\frac{10\times 11\times 21}{6}+6\times 10=830$$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(2^k+1)^2-\sum_{k=1}^{10}(2^k-1)^2$

$$=\sum_{k=1}^{10}\{(2^{2k}+2\times 2^k+1)-(2^{2k}-2\times 2^k+1)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(4\times 2^k)$$
$$=4\sum_{k=1}^{10}2^k$$
$$=4\times\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}$$
$$=2^{13}-8$$

(3) $\sum_{n=1}^{19}\{(-1)^{n+1}\times n^2\}$

$$=1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots+19^2$$
$$=1^2+(3^2-2^2)+(5^2-4^2)+\cdots+(19^2-18^2)$$
$$=1^2+(3-2)(3+2)+(5-4)(5+4)+\cdots+(19-18)(19+18)$$
$$=1+(2+3)+(4+5)+\cdots+(18+19)$$
$$=\sum_{n=1}^{19}n=\frac{19\times 20}{2}$$
$$=190$$

6-1 $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$$
$$=S_{2n}$$

따라서 $S_{2n}=4n^2-2n$이므로

$$S_n=n^2-n=n(n-1)$$
$$\therefore \sum_{k=11}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}a_k-\sum_{k=1}^{10}a_k=S_{20}-S_{10}$$
$$=20\times 19-10\times 9=290$$

7-1 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=-2$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\left(1-\frac{k}{\alpha}\right)\left(1-\frac{k}{\beta}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{\alpha\beta}\{k^2-(\alpha+\beta)k+\alpha\beta\}$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}(k^2-3k-2)$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{10\times 11\times 21}{6}-3\times\frac{10\times 11}{2}-2\times 10\right)$$
$$=-100$$

8-1 $-2x^2+(n+1)x-2n$을 $x-n$으로 나누었을 때의 나머지가 a_n이므로

$$a_n=-2n^2+(n+1)n-2n$$
$$=-n^2-n$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_k}$$
$$=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{-k^2-k}$$
$$=\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{15}\right)$$
$$=\frac{1}{16}-1=-\frac{15}{16}$$

9-1 $S_n=-2n^2+an$이므로

$n=1$일 때, $a_1=S_1=-2+a$

$n=2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=-2n^2+an-\{-2(n-1)^2+a(n-1)\}$$
$$=-4n+a+2 \quad \cdots\cdots ①$$

①에 $n=1$을 대입한 값이 $a_1=-2+a$와 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=-4n+a+2$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=a-2$, 공차가 -4인 등차수열이고, $a_8=-a_{11}$이므로

$a-30=-(a-42)$ $\quad\therefore a=36$

10-1 $\sum_{k=1}^{20} k(a_k-a_{k+1})$

$=(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+3(a_3-a_4)+\cdots+19(a_{19}-a_{20})+20(a_{20}-a_{21})$

$=a_1+(-a_2+2a_2)+(-2a_3+3a_3)+\cdots+(-19a_{20}+20a_{20})-20a_{21}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20})-20a_{21}$

$=\sum_{k=1}^{20} a_k-20\times\frac{1}{2}=248$

$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k=258$

11-1 나열된 모든 수의 합을 S라고 하면

$S=1+2\times3+3\times3^2+4\times3^3+\cdots+8\times3^7$ ……①

①의 양변에 3을 곱하면

$3S=3+2\times3^2+3\times3^3+4\times3^4+\cdots+8\times3^8$ ……②

①－②를 하면

$-2S=1+3+3^2+3^3+\cdots+3^7-8\times3^8$

$=\frac{1\times(3^8-1)}{3-1}-8\times3^8$

$=\frac{1}{2}(3^8-1)-8\times3^8$

$=-\frac{1}{2}(15\times3^8+1)$

$\therefore S=\frac{1}{4}(15\times3^8+1)$

따라서 $m=4$, $n=15$이므로 $m+n=19$

3. 수학적 귀납법

3-1 수열의 귀납적 정의

213~215쪽

내신 대비 쌍둥이 문제

1-1 (1) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=\frac{5}{2}$, $a_4=\frac{17}{6}$

(2) $a_1=10$, $a_2=9$, $a_3=10$, $a_4=9$

(3) $a_1=2$, $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=12$

(4) $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=8$, $a_4=19$

2-1 (1) $a_{n+1}=8a_n$ (2) 2^{18}

3-1 (1) 32 (2) $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+12$ (3) 24.5

1-1 (1) $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n}$에 $n=1, 2, 3$을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+\frac{1}{1}=1+1=2$

$a_3=a_2+\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$a_4=a_3+\frac{1}{3}=\frac{5}{2}+\frac{1}{3}=\frac{17}{6}$

(2) $a_{n+1}=a_n+(-1)^n$에 $n=1, 2, 3$을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+(-1)^1=10-1=9$

$a_3=a_2+(-1)^2=9+1=10$

$a_4=a_3+(-1)^3=10-1=9$

(3) $a_{n+1}=na_n$에 $n=1, 2, 3$을 차례로 대입하면

$a_2=a_1=2$

$a_3=2a_2=2\times2=4$

$a_4=3a_3=3\times4=12$

(4) $a_{n+1}=2a_n+n$에 $n=1, 2, 3$을 차례로 대입하면

$a_2=2a_1+1=2\times1+1=3$

$a_3=2a_2+2=2\times3+2=8$

$a_4=2a_3+3=2\times8+3=19$

2-1 (1) 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정육면체의 개수는

$a_1=8$

한 변의 길이가 $\frac{1}{2^2}$인 정육면체의 개수는

$a_2=a_1\times8=8a_1$

마찬가지로 $a_3=a_2\times8=8a_2$, …이므로

$a_{n+1}=8a_n$

(2) $a_1=8$이므로 관계식 $a_{n+1}=8a_n$에 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 차례로 대입하면

$a_2=8a_1=8\times8=8^2$

$a_3=8a_2=8\times8^2=8^3$

$a_4=8a_3=8\times8^3=8^4$

$a_5=8a_4=8\times8^4=8^5$

$\therefore\ a_6=8a_5=8\times8^5=8^6=2^{18}$

3-1 (1) a_1은 처음 수족관에 있던 물의 양 40 L의 절반을 버리고 12 L의 물을 새로이 넣었을 때 수족관에 남아 있는 물의 양이므로

$$a_1=\frac{40}{2}+12=32$$

(2) n번째 주말의 물의 양 a_n L의 절반을 버리고 12 L의 물을 새로이 넣었을 때 수족관에 남아 있는 물의 양이 a_{n+1} L이므로

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+12$$

(3) $a_1=32$이므로 관계식 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+12$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$를 차례로 대입하면

$a_2=\frac{1}{2}a_1+12=16+12=28$

$a_3=\frac{1}{2}a_2+12=14+12=26$

$a_4=\frac{1}{2}a_3+12=13+12=25$

$\therefore\ a_5=\frac{1}{2}a_4+12=12.5+12=24.5$

소단원 **확인 문제** 217~219쪽

1-1 (1) 0 (2) 1 (3) 27 (4) 16

2-1 (1) 6 (2) $\frac{41}{17}$

3-1 (1) $a_{n+1}=a_n+n+1$ (2) 16

1-1 (1) $a_{n+1}=a_n+3$에 $n=1,\ 2,\ 3$을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+3=-9+3=-6$

$a_3=a_2+3=-6+3=-3$

$\therefore\ a_4=a_3+3=-3+3=0$

(2) $a_{n+1}=2a_n$에 $n=1,\ 2,\ 3$을 차례로 대입하면

$a_2=2a_1=2\times\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$

$a_3=2a_2=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a_4=2a_3=2\times\frac{1}{2}=1$

(3) $a_{n+1}=a_n+4n$에 $n=1,\ 2,\ 3$을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+4\times1=3+4=7$

$a_3=a_2+4\times2=7+8=15$

$\therefore\ a_4=a_3+4\times3=15+12=27$

(4) $a_{n+1}=a_n+2^n$에 $n=1,\ 2,\ 3$을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+2^1=2+2=4$

$a_3=a_2+2^2=4+4=8$

$\therefore\ a_4=a_3+2^3=8+8=16$

2-1 (1) $a_{n+1}=n-a_n$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$를 차례로 대입하면

$a_2=1-a_1=1-4=-3$

$a_3=2-a_2=2-(-3)=5$

$a_4=3-a_3=3-5=-2$

$\therefore\ a_5=4-a_4=4-(-2)=6$

(2) $a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+2$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$를 차례로 대입하면

$a_2=\frac{1}{a_1}+2=1+2=3$

$a_3=\frac{1}{a_2}+2=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$

$a_4=\frac{1}{a_3}+2=\frac{3}{7}+2=\frac{17}{7}$

$\therefore\ a_5=\frac{1}{a_4}+2=\frac{7}{17}+2=\frac{41}{17}$

3-1 (1) $a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=7,\ a_4=11,\ \cdots$

n개의 직선에 1개의 직선을 추가하면 $(n+1)$개의 영역이 새로 생긴다. 즉,

$a_2=a_1+2$

$a_3=a_2+3$

$a_4=a_3+4$

$\vdots$

$\therefore\ a_{n+1}=a_n+n+1$

(2) $a_5=a_4+5=11+5=16$

3-2 수학적 귀납법

내신 대비 쌍둥이 문제 220~222쪽

1-1 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조
2-1 풀이 참조
3-1 풀이 참조

1-1 (1) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ ……①

❶ $n=1$일 때

$(\text{좌변})=1^3=1$, $(\text{우변})=\left(\dfrac{1\times2}{2}\right)^2=1$

이므로 ①이 성립한다.

❷ $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\dfrac{k(k+1)}{2}\right\}^2$

이므로 양변에 $(k+1)^3$을 더하면

$$\begin{aligned}&1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3\\&=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+(k+1)^3\\&=\frac{(k+1)^2}{4}\{k^2+4(k+1)\}\\&=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2\\&=\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

❶, ❷에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

(2) $2+4+8+\cdots+2^n=2^{n+1}-2$ ……①

❶ $n=1$일 때

$(\text{좌변})=2$, $(\text{우변})=2^2-2=2$

이므로 ①이 성립한다.

❷ $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$2+4+8+\cdots+2^k=2^{k+1}-2$

이므로 양변에 2^{k+1}을 더하면

$$\begin{aligned}&(2+4+8+\cdots+2^k)+2^{k+1}\\&=(2^{k+1}-2)+2^{k+1}\\&=2\times2^{k+1}-2\\&=2^{k+2}-2\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

❶, ❷에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

2-1 $2^{n+3}>(n+1)(n+2)$ ……①

❶ $n=1$일 때

$(\text{좌변})=2^4=16$, $(\text{우변})=2\times3=6$

이때 $16>6$이므로 ①이 성립한다.

❷ $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$2^{k+3}>(k+1)(k+2)$

이므로 양변에 2를 곱하면

$$\begin{aligned}2^{k+4}&>2(k+1)(k+2)\\&=(2k+2)(k+2)\geq(k+2)(k+3)\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

❶, ❷에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

3-1 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{6}\times\cdots\times\dfrac{2n-1}{2n}<\sqrt{\dfrac{1}{2n+1}}$ ……①

❶ $n=1$일 때

$(\text{좌변})=\dfrac{1}{2}$, $(\text{우변})=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

이때 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로 ①이 성립한다.

❷ $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{6}\times\cdots\times\dfrac{2k-1}{2k}<\sqrt{\dfrac{1}{2k+1}}$

이므로 양변에 $\dfrac{2k+1}{2k+2}$을 곱하면

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2k-1}{2k}\times\frac{2k+1}{2k+2}\\&<\sqrt{\frac{1}{2k+1}}\times\frac{2k+1}{2k+2}=\sqrt{\frac{2k+1}{4(k+1)^2}}\end{aligned}$$

그런데

$$\begin{aligned}&\frac{2k+1}{4(k+1)^2}-\frac{1}{2k+3}\\&=\frac{(2k+1)(2k+3)-4(k+1)^2}{4(k+1)^2(2k+3)}\\&=\frac{-1}{4(k+1)^2(2k+3)}<0\ (\because k\text{는 자연수})\end{aligned}$$

이므로 $\dfrac{2k+1}{4(k+1)^2}<\dfrac{1}{2k+3}$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2k-1}{2k}\times\frac{2k+1}{2k+2}\\&<\sqrt{\frac{1}{2k+3}}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

❶, ❷에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

소단원 확인 문제 223~224쪽

1-1 ㈎: 3 ㈏: $k+2$

2-1 풀이 참조

1-1 명제 $p(n)$이 $n=3, 5, 7, \cdots, 2m+1, \cdots$ (m은 자연수)일 때 성립함을 수학적 귀납법으로 보이려면

❶ $n=\boxed{3}$일 때, 명제 $p(n)$이 성립함을 보인다.

❷ $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하고

$n=\boxed{k+2}$일 때도 명제 $p(n)$이 성립함을 보인다.

2-1 $2^n>2n+3$ $\cdots\cdots$ ①

❶ $n=4$일 때

(좌변)$=2^4=16$, (우변)$=2\times4+3=11$

이므로 ①이 성립한다.

❷ $n=k(k\geq4)$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$2^k>2k+3$

이므로 양변에 2를 곱하면

$2^{k+1}>4k+6>2k+5=2(k+1)+3$

따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

❶, ❷에 의하여 $n\geq4$인 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

중단원 연습 문제 226~230쪽

1-1 (1) $a_1=-3$, $a_2=6$, $a_3=-12$, $a_4=24$, $a_5=-48$

(2) $a_1=3$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=-2$, $a_4=-\frac{1}{3}$, $a_5=-\frac{3}{4}$

2-1 (1) $a_1=10$, $a_{n+1}=a_n-3$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

(2) $a_1=3$, $a_{n+1}=-2a_n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

3-1 96 **4-1** 51 **5-1** $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$

6-1 (1) $a_{n+1}=7a_n+9^n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$) (2) 536

7-1 풀이 참조 **8-1** 606

9-1 ㈎ 99 ㈏ 9

1-1 (1) $a_{n+1}=-2a_n$에 $n=1, 2, 3, 4$를 차례로 대입하면

$a_2=-2a_1=(-2)\times(-3)=6$

$a_3=-2a_2=(-2)\times6=-12$

$a_4=-2a_3=(-2)\times(-12)=24$

$a_5=-2a_4=(-2)\times24=-48$

(2) $a_{n+1}=\dfrac{1}{a_n-1}$에 $n=1, 2, 3, 4$를 차례로 대입하면

$$a_2=\frac{1}{a_1-1}=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}$$

$$a_3=\frac{1}{a_2-1}=\frac{1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$$

$$a_4=\frac{1}{a_3-1}=\frac{1}{-2-1}=-\frac{1}{3}$$

$$a_5=\frac{1}{a_4-1}=\frac{1}{-\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{-\frac{4}{3}}=-\frac{3}{4}$$

2-1 (1) $a_1=10$, $a_2=a_1-3$, $a_3=a_2-3$, $\cdots$이므로 수열 $\{a_n\}$을 귀납적으로 정의하면

$a_1=10$, $a_{n+1}=a_n-3$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

(2) $a_1=3$, $a_2=-2a_1$, $a_3=-2a_2$, $\cdots$이므로 수열 $\{a_n\}$을 귀납적으로 정의하면

$a_1=3$, $a_{n+1}=-2a_n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

3-1 $(a_{n+1})^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라고 하면

$a_4=3r^3=6$ $\quad\therefore r^3=2$

$\therefore a_{16}=3r^{15}=3(r^3)^5=3\times2^5=96$

4-1 $a_{n+1}=a_n+4$에서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 4인 등차수열이다.

이때 $a_1=3$이므로

$a_n=3+(n-1)\times4=4n-1$

$4n-1>200$에서 $n>50.25$

따라서 처음으로 200보다 커지는 항은 제51항이다.

$\therefore k=51$

5-1 $a_1=\frac{2}{3}$

$$a_2=\frac{2}{3}a_1=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$a_3=\frac{2}{3}a_2=\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$\vdots$

$$\therefore a_{10}=\frac{2}{3}a_9=\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

6-1 (1) n번째 시행 후 얻어지는 흰색 사각형 1개에 대하여

$(n+1)$번째 시행 후 얻어지는 흰색 사각형의 개수는

8(개)

n번째 시행 후 얻어지는 검은색 사각형 1개에 대하여

$(n+1)$번째 시행 후 얻어지는 흰색 사각형의 개수는

1(개)

n번째 시행 후 얻어지는 검은색 사각형의 개수는

9^n-a_n(개)이므로

$a_{n+1}=8a_n+9^n-a_n=7a_n+9^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_{n+1}=7a_n+9^n$에 $n=1$, 2를 차례로 대입하면

$a_2=7a_1+9^1=7\times8+9=65$

$\therefore\ a_3=7a_2+9^2=7\times65+81=536$

7-1 $3n+2<2^n$ $\cdots\cdots$ ①

❶ $n=4$일 때

(좌변)$=14$, (우변)$=16$

이때 $14<16$이므로 ①이 성립한다.

❷ $n=k(k\geq4)$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$3k+2<2^k$

이므로

$3(k+1)+2=3k+2+3<2^k+3$

이때 $k\geq4$에서 $2^k+3>2^{k+1}$이므로

$3(k+1)+2<2^{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

❶, ❷에 의하여 $n\geq4$인 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

8-1 수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$a_1=7,\ a_2=3,\ a_3=-1,\ a_4=9,\ a_5=5,\ a_6=1,$

$a_7=-3,\ a_8=7,\ a_9=3,\ \cdots$

이므로 $a_n=a_{n+7}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$임을 알 수 있다.

이때 $200=7\times28+4$이고, $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}a_k=21$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{200}a_k&=28\sum_{k=1}^{7}a_k+(a_{197}+a_{198}+a_{199}+a_{200})\\&=28\times21+(7+3-1+9)\\&=606\end{aligned}$$

9-1 ❶ $n=1$일 때, $f(1)=10+1=11$이므로

$f(n)=10^{2n-1}+1$은 11의 배수이다.

❷ $n=k$일 때 $f(k)=10^{2k-1}+1$이 11의 배수라고 가정하면

$f(k)=11p$ (p는 자연수)

로 놓을 수 있다.

$n=k+1$일 때

$$\begin{aligned}f(k+1)&=10^{2k+1}+1\\&=10^{2k-1}\times10^2+1\\&=100(10^{2k-1}+1)-100+1\\&=100f(k)-\boxed{99}\\&=11(100p-\boxed{9})\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 $f(n)=10^{2n-1}+1$은 11의 배수이다.

❶, ❷에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)$은 11의 배수이다.

$\therefore$ (가): 99 (나): 9

대단원 **모의고사** 239~242쪽

01 ③	02 ④	03 ②	04 ①	05 ④
06 ⑤	07 ②	08 ④	09 ②	10 ①
11 ③	12 ④	13 ③	14 ③	15 ②
16 ①	17 ①	18 ④	19 ①	20 ①
21 8	22 40	23 203	24 -10	25 37

01 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면 $a_1=4$이므로

$$\begin{aligned}a_2+a_3&=(a_1+d)+(a_1+2d)\\&=2a_1+3d\\&=8+3d\end{aligned}$$

$8+3d=14$에서 $d=2$

$\therefore\ a_8=a_1+7d=4+7\times2=18$

02 세 수 a, 2, b는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$4=a+b$

세 수 $\dfrac{1}{a}$, 2, $\dfrac{2}{b}$는 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$4=\dfrac{2}{ab}$ $\qquad\therefore\ ab=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^2+b^2&=(a+b)^2-2ab\\&=4^2-2\times\frac{1}{2}\\&=16-1=15\end{aligned}$$

03 $a_2+a_4+a_6+a_8+\cdots+a_{100}$

$=a_{2\times1}+a_{2\times2}+a_{2\times3}+a_{2\times4}+\cdots+a_{2\times50}$

$=\sum_{k=1}^{50} a_{2k}$

한편, $a_{2k}=2k\times4^k$이므로

$$(\text{주어진 식})=\sum_{k=1}^{50} a_{2k}=\sum_{k=1}^{50}(2k\times4^k)$$
$$=2\sum_{k=1}^{50}(k\times4^k)$$

04 $\sum_{k=1}^{11} k(k-2)=11\times9+\sum_{k=1}^{10} k(k-2)$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{11}k(k-2)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{10}k(k-2)-99$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(4k+1)-99$$
$$=4\times\frac{10\times11}{2}+10-99=131$$

05 $a_{n+1}=a_n-3$에서 $a_{n+1}-a_n=-3$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고 첫째항이 a, 공차가 -3이다.

따라서 $a_n=a+(n-1)\times(-3)=-3n+3+a$이므로

$a_{10}=-30+3+a=20$

$\therefore\ a=47$

06 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$a_{50}-a_{40}=10d=30 \qquad \therefore\ d=3$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로

$$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}$$
$$=S_{20}-S_{10}$$
$$=\frac{20(2\times2+19\times3)}{2}-\frac{10(2\times2+9\times3)}{2}$$
$$=610-155=455$$

07 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$
$$S_{2n}=\frac{a(1-r^{2n})}{1-r}=\frac{a(1-r^n)(1+r^n)}{1-r}$$
$$=(1+r^n)S_n$$
$$S_{3n}=\frac{a(1-r^{3n})}{1-r}=\frac{a(1-r^n)(1+r^n+r^{2n})}{1-r}$$
$$=(1+r^n+r^{2n})S_n$$

$\frac{S_{2n}}{S_n}=5$에서 $1+r^n=5$이므로 $r^n=4$

$$\therefore\ \frac{S_{3n}}{S_n}=1+r^n+r^{2n}=1+4+4^2=21$$

08 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=n$, $\alpha_n\beta_n=n$이므로

$$\alpha_n^3+\beta_n^3=(\alpha_n+\beta_n)^3-3\alpha_n\beta_n(\alpha_n+\beta_n)$$
$$=n^3-3n^2$$
$$\therefore\ \sum_{n=1}^{10}(\alpha_n^3+\beta_n^3)=\sum_{n=1}^{10}(n^3-3n^2)$$
$$=\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2-3\left(\frac{10\times11\times21}{6}\right)$$
$$=1870$$

09 $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{2n}=4n^2$

따라서 구하는 합은

$S_{16}-S_6=(4\times8^2)-(4\times3^2)=220$

10 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 s, t라고 하면

$$A_n=\frac{n\{2a_1+(n-1)s\}}{2}$$
$$B_n=\frac{n\{2b_1+(n-1)t\}}{2}$$

따라서 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{A_n}{B_n}=\frac{2a_1+(n-1)s}{2b_1+(n-1)t}=\frac{3n+1}{5n+4} \qquad \cdots\cdots ①$$

한편, $a_5=a_1+4s$, $b_5=b_1+4t$ 이므로

$$\frac{a_5}{b_5}=\frac{a_1+4s}{b_1+4t}=\frac{2a_1+8s}{2b_1+8t}$$

①에 $n=9$를 대입하면

$$\frac{2a_1+8s}{2b_1+8t}=\frac{3\times9+1}{5\times9+4}=\frac{28}{49}=\frac{4}{7}$$

따라서 $\frac{a_5}{b_5}=\frac{4}{7}$이므로

$m+n=7+4=11$

11 $\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)=\sum_{m=1}^{n}\frac{m(m+1)}{2}$

$=\frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{n}m^2+\sum_{m=1}^{n}m\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)=120$

$n(n+1)(n+2)=720=8\times9\times10$이므로 $n=8$

12 (주어진 식)

$=\sqrt{4}(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\sqrt{5}(\sqrt{6}-\sqrt{4})$
$+\sqrt{6}(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+\sqrt{63}(\sqrt{64}-\sqrt{62})$

$=(\sqrt{4}\sqrt{5}-\sqrt{3}\sqrt{4})+(\sqrt{5}\sqrt{6}-\sqrt{4}\sqrt{5})$
$+(\sqrt{6}\sqrt{7}-\sqrt{5}\sqrt{6})+\cdots+(\sqrt{63}\sqrt{64}-\sqrt{62}\sqrt{63})$

$=\sqrt{63}\sqrt{64}-\sqrt{3}\sqrt{4}$

$=24\sqrt{7}-2\sqrt{3}$

따라서 $m=24$, $n=2$이므로 $m+n=26$

13 $(3n-2)a_{n+1}=(3n+1)a_n$에서

$a_{n+1}=\frac{3n+1}{3n-2}a_n$

위 식에 $n=1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입하면

$a_2=\frac{4}{1}a_1$

$a_3=\frac{7}{4}a_2$

$a_4=\frac{10}{7}a_3$

$\vdots$

$a_n=\frac{3n-2}{3n-5}a_{n-1}$

위 식을 각 변끼리 곱하면

$a_n=\frac{4}{1}\times\frac{7}{4}\times\frac{10}{7}\times\cdots\times\frac{3n-2}{3n-5}a_1$

$=(3n-2)a_1$

$=6n-4$ ($\because a_1=2$)

$\therefore a_{20}=6\times20-4=116$

14 $\sum_{k=n}^{2n}a_k=n^2$이므로

$a_1+a_2=1^2$

$a_3+a_4+\cdots+a_6=3^2$

$a_6+a_7+\cdots+a_{12}=6^2$

$\sum_{k=1}^{12}a_k=(a_1+a_2)+(a_3+a_4+\cdots+a_6)$
$+(a_6+a_7+\cdots+a_{12})-a_6$

$=1^2+3^2+6^2-a_6$

$=1+9+36-a_6=40$

$\therefore a_6=6$

15 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 조건 ㈏에서

$\sum_{k=1}^{8}a_k=\frac{8(a_1+a_8)}{2}=4(1+a_8)=516$ ($\because a_1=1$)

따라서 $a_8=128$이므로 조건 ㈎에서 $b_8=128$

등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라고 하면

$\frac{b_8}{b_1}=r^7=128$이므로 $r=2$

$\therefore \sum_{k=1}^{8}b_k=1+2+2^2+\cdots+2^7$

$=\frac{2^8-1}{2-1}=255$

16 $S_1=2$이고 수열 $\{S_{2n-1}\}$이 공비가 2인 등비수열이므로

$S_{2n-1}=S_1\times2^{n-1}=2\times2^{n-1}=2^n$

$a_2=S_2-S_1=2-2=0$이고 수열 $\{a_{2n}\}$이 공차가 2인 등차수열이므로

$a_{2n}=a_2+(n-1)\times2=2n-2$

이때 $a_{12}=S_{12}-S_{11}$이므로

$S_{12}=a_{12}+S_{11}$

$=(2\times6-2)+2^6$

$=10+64=74$

17 $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+2n)-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=2n+1(n\geq2)$

$a_1=S_1=1+2=3$

$\therefore \sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$

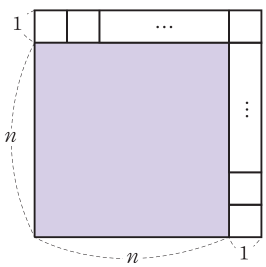
$=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{31}-\frac{1}{33}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{33}\right)=\frac{5}{33}$

18 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 $(n+1)$인 정사각형은 한 변의 길이가 n인 정사각형보다 한 변의 길이가 1인 정사각형이 $(2n+1)$개, 한 변의 길이가 2인 정사각형이 $(2n-1)$개,



⋮

한 변의 길이가 n인 정사각형이 3개, 한 변의 길이가 $(n+1)$인 정사각형이 1개 더 많다.

$$\therefore\ a_{n+1}=a_n+\{1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1)\}$$
$$=a_n+\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)$$
$$=a_n+2\times\frac{(n+1)(n+2)}{2}-(n+1)$$
$$=a_n+(n+1)^2$$
$$\therefore\ a_{21}-a_{20}=(20+1)^2=21^2=441$$

19 자연수 n에 대하여 9^n, 8^n을 10으로 나누었을 때의 나머지를 차례로 구하면 다음과 같다.

n	$f(n)$	$g(n)$	$a_n=f(n)-g(n)$
1	9	8	$a_1=1$
2	1	4	$a_2=-3$
3	9	2	$a_3=7$
4	1	6	$a_4=-5$
5	9	8	$a_5=1$
6	1	4	$a_6=-3$
7	9	2	$a_7=7$
8	1	6	$a_8=-5$
9	9	8	$a_9=1$
⋮	⋮	⋮	⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=\begin{cases}1 & (n=4k+1)\\ -3 & (n=4k+2)\\ 7 & (n=4k+3)\\ -5 & (n=4k+4)\end{cases}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

따라서 $a_1+a_2+a_3+a_4=a_5+a_6+a_7+a_8=\cdots=0$이고, $2018=4\times504+2$이므로

$$\sum_{n=1}^{2018}a_n=\sum_{n=1}^{2016}a_n+a_{2017}+a_{2018}$$
$$=0+a_1+a_2$$
$$=1+(-3)=-2$$

20 $\displaystyle\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{m}}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$가 성립한다고 가정하면

$$\sum_{m=1}^{k+1}\frac{1}{\sqrt{m}}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\boxed{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}$$
$$>\sqrt{k}+\boxed{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}$$

이고

$$\sqrt{k}+\boxed{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}-\boxed{\text{(나)}}$$
$$=\frac{\sqrt{k^2+k}-k}{\sqrt{k+1}}=\sqrt{k}-\frac{k}{\sqrt{k+1}}>0$$

에서 $\boxed{\text{(나)}}=\sqrt{k+1}$이므로

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

이다.

따라서 $f(k)=\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$, $g(k)=\sqrt{k+1}$이므로

$$f(3)\times g(15)=\frac{1}{\sqrt{4}}\times\sqrt{16}=\frac{1}{2}\times4=2$$

서술형 문제

21 ❶ $f(x)=x^2-ax+2a+1$이라고 하면 다항식 $f(x)$를 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 각각 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이므로

$$p=f(1)=a+2,\ q=f(2)=5,\ r=f(3)=10-a$$

❷ 한편, 세 수 $a+2$, 5, $10-a$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(a+2)(10-a)=5^2$$
$$-a^2+8a+20=25,\ a^2-8a+5=0$$

❸ 따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 8이다.

채점 기준	배점
❶ 나머지정리를 이용하여 p, q, r의 값 구하기	30 %
❷ 등비중항을 이용하여 방정식 세우기	30 %
❸ 조건을 만족하는 모든 실수 a의 값의 합 구하기	40 %

22 ❶ 첫째항부터 제n항까지의 합이 50이므로

$$\frac{n\{2m+(n-1)\times1\}}{2}=50$$

$\therefore\ n(2m+n-1)=100$

❷ n은 자연수이므로 위의 식을 만족하는 n, m의 값은 다음 표와 같다.

n	1	2	4	5	10	20	25	50	100
m	50	$\frac{49}{2}$	11	8	$\frac{1}{2}$	-7	-10	$\frac{-47}{2}$	-49

❸ 또, m은 자연수이고 $m\le10$이므로 $n=5$, $m=8$

$\therefore\ mn=8\times5=40$

채점 기준	배점
❶ 등차수열의 합의 공식을 이용하여 m, n에 대한 식 세우기	30 %
❷ ❶의 등식을 만족하는 m, n의 값 구하기	40 %
❸ 조건을 만족하는 m, n과 mn의 값 구하기	30 %

23 ❶ $a_{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+2}\right)a_n=\frac{n+1}{n+2}a_n$에

$n=1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입하면

$$a_2=\frac{2}{3}a_1$$

$$a_3=\frac{3}{4}a_2$$

$$a_4=\frac{4}{5}a_3$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{n}{n+1}a_{n-1}$$

❷ ❶의 식을 각 변끼리 곱하면

$$a_n=a_1\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}\right)$$

$$=1\times\frac{2}{n+1}\ (\because\ a_1=1)$$

$$=\frac{2}{n+1}\ (n\ge2)$$

❸ 따라서 $a_{200}=\frac{2}{201}$이므로

$p+q=201+2=203$

채점 기준	배점
❶ 주어진 식에 $n=1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입하기	40 %
❷ a_n의 식 구하기	40 %
❸ $p+q$의 값 구하기	20 %

24 ❶ $2S_n=a_n+5$에서 $2S_{n+1}=a_{n+1}+5$

$2(S_{n+1}-S_n)=(a_{n+1}+5)-(a_n+5)$

$\therefore\ S_{n+1}-S_n=\frac{1}{2}a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n$

이때 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$이므로

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n$$

$$\frac{1}{2}a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n$$

$\therefore\ a_{n+1}=-a_n$

❷ $a_1=5$이므로

$a_1=a_3=a_5=\cdots=a_{2n-1}=5$

$a_2=a_4=a_6=\cdots=a_{2n}=-5$

❸ $\therefore\ a_{2020}-a_{2019}=(-5)-5=-10$

채점 기준	배점
❶ 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 a_{n+1}과 a_n 사이의 관계식 구하기	50 %
❷ a_{2n}, a_{2n-1}의 값 구하기	30 %
❸ $a_{2020}-a_{2019}$의 값 구하기	20 %

25 ❶ 수열 $\{a_n+a_{n+1}\}$은 첫째항이 1, 공차가 4인 등차수열이므로

$$a_n+a_{n+1}=1+(n-1)\times4$$
$$=4n-3$$

이 성립한다.

❷ $\therefore\ a_1+a_{20}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{19}+a_{20})$
$\quad-(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{18}+a_{19})$

$=\{(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{19}+a_{20})\}$
$\quad-\{(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{18}+a_{19})\}$

$=(1+9+\cdots+73)-(5+13+\cdots+69)$

❸ 즉, $a_1+a_{20}=\sum_{k=1}^{10}(8k-7)-\sum_{k=1}^{9}(8k-3)$

$$=\frac{10(1+73)}{2}-\frac{9(5+69)}{2}$$

$$=37$$

채점 기준	배점
❶ 수열 $\{a_n+a_{n+1}\}$의 일반항 구하기	30 %
❷ ❶의 식을 이용하여 a_1+a_{20}을 등차수열의 합으로 나타내기	40 %
❸ a_1+a_{20}의 값 구하기	30 %

권말 부록

수학 Ⅰ 중간고사 244~247쪽

01 ④	02 ③	03 ④	04 ②	05 ⑤
06 ①	07 ①	08 ②	09 ④	10 ②
11 ①	12 ④	13 ⑤	14 ②	15 ②
16 ④	17 ②	18 ③	19 15	20 10배
21 $\frac{26}{25}$	22 1	23 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{1}{4}$		
24 24				

01 좌변을 간단히 하면

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}}=\frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[4]{\sqrt{a}}}\times\frac{\sqrt{\sqrt[4]{a}}}{\sqrt{\sqrt[3]{a}}}$$

$$=\frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}}\times\frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[6]{a}}=\frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[6]{a}}$$

$$=\frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[12]{a^2}}=\sqrt[12]{\frac{1}{a}}$$

$\therefore\ n=12$

02 $\sqrt[3]{8}\times27^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^3}\times(3^3)^{\frac{2}{3}}=2\times3^2=18$

03 $8^x=3$에서 $2^{3x}=3$

$27^y=512$에서 $3^{3y}=2^9$

이때 $3^{3y}=(2^{3x})^{3y}=2^{9xy}=2^9$이므로

$xy=1$

다른 풀이

$8^x=3$에서 $2^{3x}=3$, $3x=\log_2 3$

$\therefore\ x=\frac{1}{3}\log_2 3$

$27^y=512$에서 $3^{3y}=2^9$, $3y=\log_3 2^9$

$\therefore\ y=3\log_3 2$

$\therefore\ xy=\frac{1}{3}\log_2 3\times3\log_3 2=1$

04 ② $\log_c\frac{b}{a}=\log_c b-\log_c a$이므로

$\log_c\frac{b}{a}\neq\frac{\log_c b}{\log_c a}$이다.

05 $\log 592=2.7723$에서

$\log 5920^2=2\log 5920=2\log(10\times592)$

$=2(1+\log 592)=2(1+2.7723)$

$\log 0.0592=\log\left(\frac{1}{10^4}\times592\right)$

$=-4+\log 592=-4+2.7723$

$\therefore\ \log 5920^2+\log 0.0592$

$=2(1+2.7723)+(-4+2.7723)$

$=-2+3\times2.7723=6.3169$

06 현재 이산화황의 배출량을 A라고 하면 n년 후 이산화황의 배출량은 $A\times\left(\frac{95.5}{100}\right)^n$이다.

이때

$A\times\left(\frac{95.5}{100}\right)^n\leq A\times\frac{80}{100}$, 즉 $\left(\frac{95.5}{100}\right)^n\leq\frac{8}{10}$

이어야 하므로 위 식의 양변에 상용로그를 취하면

$n(\log 9.55-1)\leq\log 8-1$, $-0.02n\leq-0.10$

$\therefore\ n\geq5$

따라서 이산화황 배출량이 처음으로 현재의 80 % 이하가 되는 것은 최소 5년 후이다.

07 함수 $y=3^{a-x}+b$의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=3^a+b$

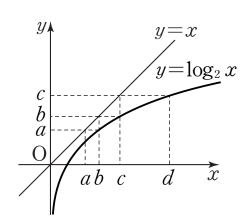
또, 점근선의 방정식이 $y=-1$이므로 $b=-1$

이때 $2=3^a-1$에서 $a=1$

$\therefore\ ab=-1$

08 ② 함수 $y=\log_2(x-4)+3$의 치역은 실수 전체의 집합이다.

09 오른쪽 그림에서



$a=\log_2 b$, $c=\log_2 d$

그런데 $d=2b$이므로

$c=\log_2 d=\log_2 2b$

$=1+\log_2 b=1+a$

즉, $c-a=1$이므로

$3^{c-a}=3^1=3$

10 $2^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-7t+5=0$ ……①

이때 2^α, 2^β이 방정식 ①의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2^\alpha+2^\beta=7$, $2^\alpha\times2^\beta=5$

$\therefore\ 4^\alpha+4^\beta=(2^\alpha+2^\beta)^2-2\times2^\alpha\times2^\beta$

$=7^2-2\times5=39$

11 주어진 부등식을 변형하면

$\log_3(x+1)(3x-4)\le\log_3 10$

$(x+1)(3x-4)\le 10$, $3x^2-x-14\le 0$

$(x+2)(3x-7)\le 0$

$\therefore\ -2\le x\le\frac{7}{3}$ ……①

진수 조건에서 $x>-1$, $x>\frac{4}{3}$

$\therefore\ x>\frac{4}{3}$ ……②

따라서 ①, ②를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $\frac{4}{3}<x\le\frac{7}{3}$이므로 정수는 1개이다.

12 $\frac{2}{\tan\theta}-\frac{\sin(-\pi-\theta)}{1-\cos\theta}+\frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)}{1+\cos(-\theta)}$

$=\frac{2}{\tan\theta}-\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$=\frac{2}{\tan\theta}+\frac{-\sin\theta(1+\cos\theta)+\sin\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$

$=\frac{2}{\tan\theta}+\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}$

$=\frac{2}{\tan\theta}-\frac{2}{\tan\theta}=0$

13 $\angle\mathrm{AOP}_1=\pi\times\frac{1}{10}=\frac{\pi}{10}$이고 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이므로 $\angle\mathrm{ABP}_1=\theta_1=\frac{\pi}{20}$ $\therefore\ \theta_n=\frac{n}{20}\pi$

$\therefore\ \sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\cdots+\sin^2\theta_9$

$=\sin^2\frac{\pi}{20}+\sin^2\frac{2}{20}\pi+\cdots+\sin^2\frac{8}{20}\pi+\sin^2\frac{9}{20}\pi$

그런데

$\sin^2\frac{9}{20}\pi=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{20}\right)=\cos^2\frac{\pi}{20}$

$\sin^2\frac{8}{20}\pi=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{20}\pi\right)=\cos^2\frac{2}{20}\pi$

$\sin^2\frac{7}{20}\pi=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{20}\pi\right)=\cos^2\frac{3}{20}\pi$

$\sin^2\frac{6}{20}\pi=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{20}\pi\right)=\cos^2\frac{4}{20}\pi$

이므로

(주어진 식)

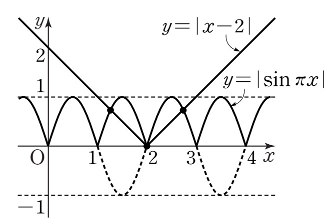
$=\left(\sin^2\frac{\pi}{20}+\sin^2\frac{9}{20}\pi\right)+\left(\sin^2\frac{2}{20}\pi+\sin^2\frac{8}{20}\pi\right)+\left(\sin^2\frac{3}{20}\pi+\sin^2\frac{7}{20}\pi\right)+\left(\sin^2\frac{4}{20}\pi+\sin^2\frac{6}{20}\pi\right)+\sin^2\frac{5}{20}\pi$

$=\left(\sin^2\frac{\pi}{20}+\cos^2\frac{\pi}{20}\right)+\left(\sin^2\frac{2}{20}\pi+\cos^2\frac{2}{20}\pi\right)+\left(\sin^2\frac{3}{20}\pi+\cos^2\frac{3}{20}\pi\right)+\left(\sin^2\frac{4}{20}\pi+\cos^2\frac{4}{20}\pi\right)+\sin^2\frac{\pi}{4}$

$=4+\sin^2\frac{\pi}{4}=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

14 $f(x)=\sqrt{1-\cos^2\pi x}=\sqrt{\sin^2\pi x}=|\sin\pi x|$이고

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{\pi}=1$이다.



두 함수 $f(x)=|\sin\pi x|$, $g(x)=|x-2|$의 그래프는 위의 그림과 같고, 교점의 개수는 3이므로 방정식 $f(x)-g(x)=0$, 즉 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

15 이차방정식 $x^2-4x\cos\theta+6\sin\theta=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라고 할 때,

(i) $\frac{D}{4}=4\cos^2\theta-6\sin\theta>0$

$4(1-\sin^2\theta)-6\sin\theta>0$, $2\sin^2\theta+3\sin\theta-2<0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)<0$

$0\le\theta<2\pi$에서 $\sin\theta+2>0$이므로

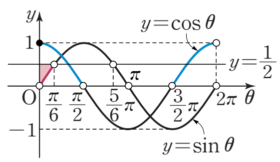
$2\sin\theta-1<0$ $\therefore\ \sin\theta<\frac{1}{2}$

(ii) 두 근의 합: $4\cos\theta>0$ $\therefore\ \cos\theta>0$

(iii) 두 근의 곱: $6\sin\theta>0$ $\therefore\ \sin\theta>0$

(i), (ii), (iii)에서 $0<\sin\theta<\frac{1}{2}$, $\cos\theta>0$

오른쪽 그림에서 구하는 θ의 값의 범위는 $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이므로



$\alpha=0,\ \beta=\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$

16 $x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$이므로

$f(\theta)=4\cos\theta+\sin^2\theta=4\cos\theta+(1-\cos^2\theta)$

$\quad=-(\cos\theta-2)^2+5$

그런데 $-1\le\cos\theta\le1$이므로 $\cos\theta=1$일 때, 최댓값 4를 갖는다.

따라서 함수 $f(\theta)$의 최댓값은 4이다.

17 주어진 그래프에서 주기가 2π이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=2\pi \qquad \therefore\ b=\frac{1}{2}$

주어진 그래프는 함수 $y=a\tan\frac{1}{2}x$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 것이므로

$y=a\tan\frac{1}{2}(x-\pi)=a\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ c=\frac{\pi}{2}\ (\because\ 0\le c<\pi)$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=a\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{2}\right)$이고,

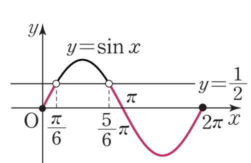
이 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ -2\right)$를 지나므로

$-2=a\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right),\ -2=a\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$-2=-a \qquad \therefore\ a=2$

$\therefore\ abc=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

18 부등식 $\sin x<\frac{1}{2}$을 만족시키는 x의 값의 범위는 $0\le x\le 2\pi$에서



$0\le x<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<x\le2\pi$

이므로 $B=\left\{x\,\middle|\,0\le x<\frac{\pi}{6}\text{ 또는 }\frac{5}{6}\pi<x\le2\pi\right\}$

따라서 두 집합 $A,\ B$ 사이의 포함 관계는

$A\subset B^C$

19 ❶ $\log_a 3=X,\ \log_b 3=Y$라고 하자.

❷ $X+Y=3,\ \frac{1}{X}+\frac{1}{Y}=-1$에서

$\frac{X+Y}{XY}=-1 \qquad \therefore\ XY=-3$

❸ $\therefore\ (\log_a 3)^2+(\log_b 3)^2=X^2+Y^2$

$\quad=(X+Y)^2-2XY$

$\quad=9+6=15$

채점 기준	배점
❶ $\log_a 3=X,\ \log_b 3=Y$로 치환하기	20 %
❷ 주어진 식을 이용하여 $X+Y,\ XY$의 값 구하기	40 %
❸ 곱셈 공식의 변형을 이용하여 $(\log_a 3)^2+(\log_b 3)^2$의 값 구하기	40 %

20 ❶ 1.7등급인 별의 밝기를 I_1, 4.2등급의 별의 밝기를 I_2라고 하면

$1.7=-2.5\log I_1+C \qquad \cdots\cdots ①$

$4.2=-2.5\log I_2+C \qquad \cdots\cdots ②$

❷ ①−②를 하면

$1.7-4.2=(-2.5\log I_1+C)-(-2.5\log I_2+C)$

$-2.5=-2.5\log\frac{I_1}{I_2},\ \frac{I_1}{I_2}=10$

$\therefore\ I_1=10I_2$

❸ 따라서 1.7등급인 별의 밝기는 4.2등급인 별의 밝기의 10배이다.

채점 기준	배점
❶ 별의 밝기에 관한 식 세우기	30 %
❷ ❶의 식을 계산하여 I_1과 I_2 사이의 관계식 구하기	60 %
❸ 몇 배 더 밝은지 구하기	10 %

21 ❶ 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{ax}+b$에 대하여

$f(0)=2$에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^0+b=1+b=2 \qquad \therefore\ b=1$

❷ $f(1)=6$에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^a+6=6,\ \left(\frac{1}{5}\right)^a+1=6$

$\therefore\ a=-1$

❸ 따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}+1$이므로

$f(-2)=\left(\frac{1}{5}\right)^2+1=\frac{26}{25}$

채점 기준	배점
❶ $f(0)=2$를 이용하여 b의 값 구하기	30 %
❷ $f(1)=6$을 이용하여 a의 값 구하기	30 %
❸ $f(-2)$의 값 구하기	40 %

22 ❶ $f(\theta)=\dfrac{\cos(-\pi+\theta)}{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)}=\dfrac{-\cos\theta}{1-\sin\theta}$이므로

$$f(-\theta)=\frac{-\cos(-\theta)}{1-\sin(-\theta)}=\frac{-\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

$$\therefore f(\theta)f(-\theta)=\frac{-\cos\theta}{1-\sin\theta}\times\frac{-\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=1$$

❷ $g(\theta)=\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sin(-\pi+\theta)}=\dfrac{-\sin\theta}{-\sin\theta}=1$

이므로 $g(-\theta)=1$

$\therefore g(-\theta)g(\theta)=1$

❸ $\therefore \dfrac{f(\theta)f(-\theta)}{g(\theta)g(-\theta)}=1$

채점 기준	배점
❶ $f(\theta)$를 정리하여 $f(\theta)f(-\theta)$의 값 구하기	30 %
❷ $g(\theta)$를 정리하여 $g(\theta)g(-\theta)$의 값 구하기	30 %
❸ $\dfrac{f(\theta)f(-\theta)}{g(\theta)g(-\theta)}$의 값 구하기	40 %

23 ❶ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$이므로

$$f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$$
$$=\sin^6 x+(1-\sin^2 x)^3$$
$$=\sin^6 x+1-3\sin^2 x+3\sin^4 x-\sin^6 x$$
$$=3\sin^4 x-3\sin^2 x+1$$
$$=3\left(\sin^2 x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

❷ 이때 $0\le\sin^2 x\le 1$이므로

$f(x)$의 최댓값은 $\sin^2 x=0$ 또는 $\sin^2 x=1$일 때 1

$f(x)$의 최솟값은 $\sin^2 x=\dfrac{1}{2}$일 때 $\dfrac{1}{4}$이다.

채점 기준	배점
❶ 삼각함수의 성질을 이용하여 함수 $f(x)$ 간단히 하기	40 %
❷ ❶을 이용하여 함수의 최댓값과 최솟값 각각 구하기	60 %

24 ❶ 함수 $y=4\sin\dfrac{1}{4}(x-\pi)$의 그래프와 직선 $y=2$가 만나는 점은

$4\sin\dfrac{1}{4}(x-\pi)=2$에서 $\sin\dfrac{1}{4}(x-\pi)=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{4}(x-\pi)=t$로 놓으면

$0\le x\le 10\pi$에서 $-\dfrac{\pi}{4}\le t\le\dfrac{9}{4}\pi$이고 주어진 방정식은

$\sin t=\dfrac{1}{2}$

따라서 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $t=\dfrac{5}{6}\pi$ 또는 $t=\dfrac{13}{6}\pi$이므로

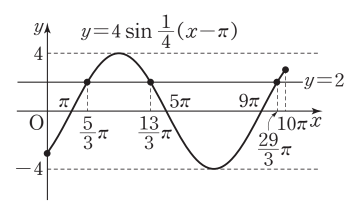
$\dfrac{1}{4}(x-\pi)=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $\dfrac{1}{4}(x-\pi)=\dfrac{5}{6}\pi$ 또는

$\dfrac{1}{4}(x-\pi)=\dfrac{13}{6}\pi$

$\therefore x=\dfrac{5}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{13}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{29}{3}\pi$

❷ 따라서 함수 $y=4\sin\dfrac{1}{4}(x-\pi)\,(0\le x\le 10\pi)$의 그래프와 직선 $y=2$가 만나는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{5}{3}\pi,\ 2\right), \left(\dfrac{13}{3}\pi,\ 2\right), \left(\dfrac{29}{3}\pi,\ 2\right)$



❸ 한편, 함수 $y=4\sin\dfrac{1}{4}(x-\pi)$의 치역은

$\{y\,|\,-4\le y\le 4\}$이고, 이 그래프 위의 점 P와 직선 $y=2$ 사이의 거리를 d라고 하면 $0<d\le 6$

❹ 이때 선분 AB의 최대 길이는 $\dfrac{29}{3}\pi-\dfrac{5}{3}\pi=8\pi$이므로

구하는 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\times 8\pi\times 6=24\pi\qquad\therefore k=24$

채점 기준	배점
❶ 방정식 $\sin\dfrac{1}{4}(x-\pi)=\dfrac{1}{2}$의 해 구하기	30 %
❷ 삼각함수의 그래프와 직선이 만나는 점의 좌표 구하기	30 %
❸ 삼각형의 높이의 범위 구하기	10 %
❹ k의 값 구하기	30 %

수학 I 기말고사 248~251쪽

01 ⑤	**02** ④	**03** ④	**04** ③	**05** ⑤
06 ①	**07** ②	**08** ②	**09** ①	**10** ④
11 ③	**12** ②	**13** ⑤	**14** ②	**15** ④
16 ④	**17** ③	**18** ②	**19** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$	**20** $\sqrt{2}$
21 50	**22** 27	**23** 102	**24** 25	

01 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=70^2+80^2-2\times70\times80\cos60°=5700$

$\therefore\ \overline{BC}=10\sqrt{57}\,(\mathrm{m})$

따라서 두 지점 B, C 사이의 거리는 $10\sqrt{57}$ m이다.

02 주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(\sin A\sin B)^2-\sin^2 A(\sin^2 A+\sin^2 C)=0$

$\sin^2 A(\sin^2 B-\sin^2 A-\sin^2 C)=0$ ……①

△ABC에서 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$

이므로 위 식을 ①에 대입하면

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2\left\{\left(\frac{b}{2R}\right)^2-\left(\frac{a}{2R}\right)^2-\left(\frac{c}{2R}\right)^2\right\}=0$

$\therefore\ b^2=a^2+c^2$

따라서 △ABC는 $B=90°$인 직각삼각형이다.

03 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}=1$에서 $\frac{a(a+c)+b(b+c)}{(b+c)(a+c)}=1$

$\frac{a^2+ac+b^2+bc}{ab+ac+bc+c^2}=1$

$a^2+ac+b^2+bc=ab+ac+bc+c^2$

$a^2+b^2-c^2=ab$ …… ①

이때 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$이므로 이 식에 ①을 대입하면

$\cos C=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$

04 △ABC에서 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}=3:4$

이므로 $\angle DAC=60°$

그런데 △ABC=△ABD+△ACD이므로

$\overline{AD}=x$라고 하면

$\frac{1}{2}\times6\times8\sin120°$

$=\frac{1}{2}\times6\times x\times\sin60°+\frac{1}{2}\times8\times x\times\sin60°$

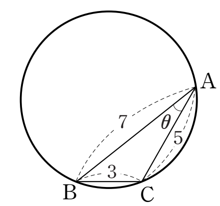
$12\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}x}{2}+2\sqrt{3}x,\ \frac{7\sqrt{3}x}{2}=12\sqrt{3}$

$\therefore\ x=\frac{24}{7}$

따라서 직선 도로 AD의 길이는 $\frac{24}{7}$ km이다.

05 오른쪽 그림의 △ABC에서

$A=\theta$라고 하면



$\cos\theta=\frac{7^2+5^2-3^2}{2\times7\times5}=\frac{13}{14}$

이때

$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{13}{14}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$이므로

△ABC에서 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{3}{\sin\theta}=2R\qquad\therefore\ R=\frac{1}{2}\times\frac{3}{\sin\theta}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{49}{3}\pi$

06 $\overline{AB}=5a,\ \overline{AC}=2a,\ \overline{AD}=b$라고 하자.

이때 선분 BD와 선분 DC의 길이의 비는 △ABD와 △ADC의 넓이의 비와 같고,

$\angle BAD=120°\times\frac{3}{4}=90°,\ \angle DAC=120°\times\frac{1}{4}=30°$

이므로

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times5a\times b\times\sin90°=\frac{5}{2}ab$

$\triangle ADC=\frac{1}{2}\times2a\times b\times\sin30°=\frac{1}{2}ab$

$\therefore\ \overline{BD}:\overline{DC}=5:1$

따라서 $\overline{BD}=5,\ \overline{DC}=1$이고 $\angle EDF=60°$이므로

△EDF에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{EF}^2=5^2+1^2-2\times5\times1\times\cos60°=21$

07 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -3인 등차수열이므로

$a_{10}=a_1+9\times(-3)=a_1-27$

$a_6=a_1+5\times(-3)=a_1-15$

$a_{10}=\frac{a_6}{3}$에서

$a_1-27=\frac{a_1-15}{3}$, $\frac{2}{3}a_1=22$ $\therefore a_1=33$

$\therefore a_5=a_1+4\times(-3)=33-12=21$

08 첫째항이 2, 끝항이 30, 항의 개수가 $k+2$인 등차수열의 합이 128이므로

$\frac{(k+2)(2+30)}{2}=128$, $k+2=8$

$\therefore k=6$

이때 30은 제8항이므로

$30=2+7d$ $\therefore d=4$

$\therefore k+d=6+4=10$

09 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 -3이므로

$$a_1+a_4+a_7=a_1+\{a_1+3\times(-3)\}+\{a_1+6\times(-3)\}$$
$$=3a_1-27=30$$

$\therefore a_1=19$

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=19+(n-1)\times(-3)=-3n+22$

그런데 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$의 값이 최대가 되려면 $a_n>0$인 항까지의 합을 구해야 하므로

$-3n+22>0$, $n<\frac{22}{3}=7.\times\times\times$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제7항까지의 합이 최대이므로 $n=7$이다.

10 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$$a_4a_6a_8=(ar^3)(ar^5)(ar^7)=a^3r^{15}$$
$$=(ar^5)^3=64=4^3$$

이므로 $ar^5=4$

$\therefore a_5a_7=(ar^4)(ar^6)=a^2r^{10}=(ar^5)^2=4^2=16$

11 $a_1+2a_2=0$에서 $a_2=-\frac{1}{2}a_1$이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라고 하면 $r=-\frac{1}{2}$이다.

또, $a_2+a_4=a_1(r+r^3)=a_1\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)=-\frac{5}{8}a_1$이므로

$-\frac{5}{8}a_1=-\frac{5}{24}$에서 $a_1=\frac{1}{3}$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a_1}=3$이고, 공비가 $\frac{1}{r}=-2$인 등비수열이므로

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_m}$$
$$=\frac{3\{1-(-2)^m\}}{1-(-2)}=1-(-2)^m$$

$1-(-2)^m=-255$에서 $(-2)^m=256$

$\therefore m=8$

12 $\sum_{k=1}^{20}|k-10|+\sum_{k=1}^{20}(k-10)$

$=\sum_{k=1}^{20}\{|k-10|+(k-10)\}$

$=\sum_{k=1}^{10}\{(-k+10)+(k-10)\}+\sum_{k=11}^{20}2(k-10)$

$=0+\sum_{k=1}^{10}2k$

$=2\times\frac{10\times11}{2}=110$

13 $\sum_{k=1}^{n}(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k})$

$=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)$
$+\cdots+(a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n})$

$=\sum_{k=1}^{3n}a_k=3n(3n+1)$

위 식에 $n=5$를 대입하면

$\sum_{k=1}^{15}a_k=15(15+1)=240$

$$\therefore \sum_{k=1}^{15}(2a_k+3)=2\sum_{k=1}^{15}a_k+3\times15$$
$$=2\times240+45=525$$

14 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 항 중에서 0, 1, 2의 개수를 각각 x, y, z라고 하면

$\sum_{k=1}^{n}a_k=0\times x+1\times y+2\times z=21$

$\therefore y+2z=21$ ……①

$\sum_{k=1}^{n}a_k^2=0^2\times x+1^2\times y+2^2\times z=37$

$\therefore y+4z=37$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면

$y=5$, $z=8$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} a_k{}^3 = 0^3\times x + 1^3\times y + 2^3\times z$$
$$= 5+8\times 8 = 69$$

15 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=2n-1$, $\alpha_n\beta_n=n^2$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(\alpha_k+1)(\beta_k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{\alpha_k\beta_k+(\alpha_k+\beta_k)+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k^2+(2k-1)+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)=\frac{175}{264}$$

$\therefore m+n=264+175=439$

16 $a_{k+1}+a_{k+2}=S_{k+2}-S_k$이므로

$$\frac{a_{k+1}+a_{k+2}}{S_kS_{k+2}}=\frac{S_{k+2}-S_k}{S_kS_{k+2}}=\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+2}}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+1}+a_{k+2}}{S_kS_{k+2}}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+2}}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_3}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_4}\right)+\left(\frac{1}{S_3}-\frac{1}{S_5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_9}-\frac{1}{S_{11}}\right)+\left(\frac{1}{S_{10}}-\frac{1}{S_{12}}\right)$$
$$=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_{11}}-\frac{1}{S_{12}}$$

조건 (가)에서 $S_1=a_1=1$, $S_2=a_1+a_2=1+1=2$이므로

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_{11}}-\frac{1}{S_{12}}$$
$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{5}{4}$$

17 문제의 조건에서 $p(n)$, $p(n+1)$ 중 어느 하나가 참이면 $p(n+2)$가 참이므로

(ⅰ) $p(1)$이 참이면 $p(3)$이 참이다.
또, $p(3)$이 참이면 $p(4)$도 참이고, $p(5)$도 참이다.
이와 같이 계속하면 $p(1)$이 참이면
$p(3)$, $p(4)$, $p(5)$, $\cdots$도 참이다.

(ⅱ) $p(2)$가 참이면 $p(3)$이 참이다.
또, $p(3)$이 참이면 $p(4)$도 참이고, $p(5)$도 참이다.
이와 같이 계속하면 $p(2)$가 참이면
$p(3)$, $p(4)$, $p(5)$, $\cdots$도 참이다.

그런데 $p(1)$이 참일 때, $p(2)$가 참인지 또는 $p(2)$가 참일 때, $p(1)$이 참인지 알 수 없으므로 $p(1)$과 $p(2)$가 모두 참일 때, 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이라고 말할 수 있다.

즉, 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이기 위한 조건은 $p(1)$과 $p(2)$가 참이다.

18 $n=k+1$일 때,

$$\sum_{i=1}^{k+1} i\times\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{j}$$
$$=\{(1+2+\cdots+k)+(k+1)\}\times\left\{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{k+1}\right\}$$
$$=(1+2+\cdots+k)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+(1+2+\cdots+k)\boxed{\frac{1}{k+1}}+(k+1)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+1$$
$$>k^2+\frac{k(k+1)}{2}\times\boxed{\frac{1}{k+1}}+(k+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)+1$$
$$=\boxed{k^2+2k}+\frac{5}{2}$$
$$>(k+1)^2$$

$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}$
$>1+\frac{1}{2}$

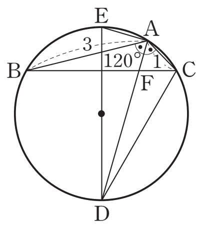
따라서 $f(k)=\dfrac{1}{k+1}$, $g(k)=k^2+2k$이므로

$$f(3)g(4)=\frac{1}{4}\times(4^2+2\times4)=6$$

19 ❶ 선분 AD와 선분 BC의 교점을 F라고 하면

$\triangle ABC=\triangle ABF+\triangle ACF$

이므로



$$\frac{1}{2}\times3\times1\times\sin120^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\times3\times\overline{AF}\times\sin60^\circ+\frac{1}{2}\times1\times\overline{AF}\times\sin60^\circ$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\overline{AF}+\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AF}\qquad\therefore\ \overline{AF}=\frac{3}{4}$$

❷ $\triangle ABF$와 $\triangle ADC$에서 $\angle ABF=\angle ADC$이므로 두 삼각형은 서로 닮음이다.

즉, $\overline{AB}:\overline{AF}=\overline{AD}:\overline{AC}$에서 $3:\frac{3}{4}=\overline{AD}:1$

$\therefore\ \overline{AD}=4$

❸ $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos120^\circ=13$

$\therefore\ \overline{BC}=\sqrt{13}$

❹ $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$2R=\dfrac{\overline{BC}}{\sin120^\circ}$이므로 $R=\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$

$\therefore\ \overline{DE}=\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$

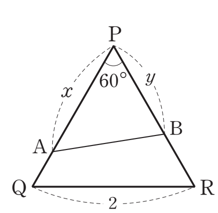
❺ $\triangle ADE$는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AE}^2=\overline{DE}^2-\overline{AD}^2=\left(\frac{2\sqrt{39}}{3}\right)^2-4^2=\frac{4}{3}$$

$\therefore\ \overline{AE}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

채점 기준	배점
❶ 삼각형의 넓이를 이용하여 선분 AF의 길이 구하기	20 %
❷ 삼각형의 닮음을 이용하여 선분 AD의 길이 구하기	20 %
❸ 코사인법칙을 이용하여 선분 BC의 길이 구하기	20 %
❹ 사인법칙을 이용하여 선분 DE의 길이 구하기	20 %
❺ $\triangle ADE$에서 선분 AE의 길이 구하기	20 %

20 ❶ 정삼각형의 세 꼭짓점을 P, Q, R라 하고, $\overline{PA}=x$, $\overline{PB}=y$라고 하면



$$\triangle PQR=\frac{1}{2}\times2\times2\sin60^\circ$$
$$=\sqrt{3}$$

$$\triangle PAB=\frac{1}{2}\times x\times y\times\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}xy$$

이때 $2\triangle PAB=\triangle PQR$이므로

$$2\times\frac{\sqrt{3}}{4}xy=\sqrt{3}\qquad\therefore\ xy=2$$

❷ $\triangle ABP$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2=x^2+y^2-2xy\times\cos60^\circ$$
$$=x^2+y^2-xy=x^2+y^2-2$$
$$\geq2xy-2=2$$

$\therefore\ \overline{AB}\geq\sqrt{2}$ (등호는 $x=y=\sqrt{2}$일 때 성립)

❸ 따라서 선분 AB의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

채점 기준	배점
❶ $\triangle PQR$와 $\triangle PAB$의 넓이를 식으로 나타내기	40 %
❷ 코사인법칙을 이용하여 $\overline{AB}^2$을 식으로 나타내기	40 %
❸ 선분 AB의 길이의 최솟값 구하기	20 %

21 ❶ $\overline{PM}=x$, $\overline{PN}=y$라고 하면

$\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle ACP$이므로

$$\frac{1}{2}\times6\times4\sin30^\circ=\frac{1}{2}\times6\times x+\frac{1}{2}\times4\times y$$

$\therefore\ 3x+2y=6$

❷ 산술평균과 기하평균 사이의 관계에 의하여

$$6\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}\right)$$
$$=(3x+2y)\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}\right)$$
$$=(3x+2y)\left(\frac{6}{x}+\frac{4}{y}\right)$$
$$=26+12\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)$$
$$\geq26+12\times2\sqrt{\frac{y}{x}\times\frac{x}{y}}=50$$

❸ 따라서 구하는 최솟값은 50이다.

채점 기준	배점
❶ $\overline{PM}=x$, $\overline{PN}=y$라 하고 $\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle ACP$의 관계를 x, y에 대한 식으로 나타내기	40 %
❷ ❶의 결과와 $6\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}\right)$에 산술평균과 기하평균의 관계식 적용하기	40 %
❸ $6\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}\right)$의 최솟값 구하기	20 %

22 ❶ 수열 $a_1, a_3, a_5, a_7, \cdots$은 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열이고, 수열 $a_2, a_4, a_6, a_8, \cdots$은 첫째항이 $\frac{1}{9}$, 공비가 3인 등비수열이다.

❷ a_{11}은 수열 $a_1, a_3, a_5, a_7, \cdots$의 제6항이므로

$$a_{11}=3\times3^{6-1}=3^6$$

a_{12}는 수열 $a_2, a_4, a_6, a_8, \cdots$의 제6항이므로

$$a_{12}=\frac{1}{9}\times3^{6-1}=\frac{1}{3^2}\times3^5=3^3$$

❸ $\therefore \dfrac{a_{11}}{a_{12}}=\dfrac{3^6}{3^3}=3^3=27$

채점 기준	배점
❶ a_{2n-1}, a_{2n}의 규칙을 찾아 첫째항과 공비 각각 구하기	40 %
❷ a_{11}, a_{12}의 값 각각 구하기	40 %
❸ $\dfrac{a_{11}}{a_{12}}$의 값 구하기	20 %

23 ❶ 수열 $\{na_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n이므로

$$S_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\frac{n(n+1)(n+2)-3}{3}$$

$$S_{n-1}=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=\frac{(n-1)n(n+1)-3}{3}$$

❷ $n=1$일 때,

$$a_1=S_1=\frac{1\times2\times3-3}{3}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

$n\geq2$일 때,

$$na_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n(n+1)(n+2)-3}{3}-\frac{(n-1)n(n+1)-3}{3}=n(n+1)$$

$$\therefore a_n=n+1 \quad \cdots\cdots ②$$

❸ ①, ②에서

$$a_1=1,\ a_n=n+1\ (n\geq2)$$

❹ $\therefore a_1+a_{100}=1+(100+1)=102$

채점 기준	배점
❶ S_n, S_{n-1} 구하기	20 %
❷ 수열의 일반항과 합의 관계를 이용하여 a_n 구하기	30 %
❸ 수열의 일반항 구하기	30 %
❹ a_1+a_{100}의 값 구하기	20 %

24 ❶ 원의 중심 $(2k+1,\ 0)$과 직선 $y=a_kx$ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|a_k(2k+1)-1\times0|}{\sqrt{a_k^{\,2}+1}}=1$$

❷ 위 식의 양변을 제곱하면

$$\frac{a_k^{\,2}(2k+1)^2}{a_k^{\,2}+1}=1$$

$$a_k^{\,2}(4k^2+4k)=1$$

$$\therefore a_k^{\,2}=\frac{1}{4(k^2+k)}=\frac{1}{4k(k+1)}$$

❸
$$\sum_{k=1}^{n}a_k^{\,2}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{n}{4(n+1)}$$

❹ $\dfrac{n}{4(n+1)}>\dfrac{6}{25}$에서 $25n>24(n+1)$

$\therefore n>24$

따라서 자연수 n의 최솟값은 25이다.

채점 기준	배점
❶ 반지름의 길이가 1인 원과 직선 $y=a_kx$가 접할 조건 구하기	20 %
❷ $a_k^{\,2}$을 k에 대한 식으로 나타내기	20 %
❸ $\sum$의 성질을 이용하여 $\sum_{k=1}^{n}a_k^{\,2}$ 구하기	30 %
❹ 조건을 만족하는 n의 값의 범위에서 자연수 n의 최솟값 구하기	30 %

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

대단원 기출 모의고사 252~255쪽

정답률 80% 이상	01 ④	02 ⑤	03 ③	04 ①
05 ④	06 ⑤	07 ④	08 27	09 ②
10 ④	11 ①			
정답률 79~60%	12 ③	13 98	14 ①	15 ③
16 16	17 124			
정답률 60% 미만	18 ④	19 ①	20 ①	21 36
22 17	23 ④			

01 지수법칙

$$8^{\frac{1}{3}}+27^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}+(3^3)^{\frac{2}{3}}$$
$$=2+3^2=11$$

02 지수함수의 그래프

$0<a<1$이므로 함수 $f(x)=a^x$은 감소함수이다.

즉, $-2\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값, $x=-2$에서 최댓값을 가진다.

$f(1)=a$가 최솟값이므로 $a=\frac{5}{6}$

따라서 $f(x)=\left(\frac{5}{6}\right)^x$이므로

$$M=f(-2)=\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}=\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{36}{25}$$

$$\therefore a\times M=\frac{5}{6}\times\frac{36}{25}=\frac{6}{5}$$

03 지수함수의 함숫값

$f(x)=a^x$에 대하여

$f(b)=3$에서 $a^b=3$

$f(c)=6$에서 $a^c=6$

$$\therefore f\left(\frac{b+c}{2}\right)=a^{\frac{b+c}{2}}=(a^{b+c})^{\frac{1}{2}}=(a^b\times a^c)^{\frac{1}{2}}$$
$$=(3\times 6)^{\frac{1}{2}}=18^{\frac{1}{2}}$$
$$=3\sqrt{2}$$

다른 풀이

$f(b)=a^b=3$에서 $b=\log_a 3$

$f(c)=a^c=6$에서 $c=\log_a 6$

이때 $b+c=\log_a 3+\log_a 6=\log_a 18$이므로

$$f\left(\frac{b+c}{2}\right)=a^{\frac{b+c}{2}}=(a^{b+c})^{\frac{1}{2}}=(\underbrace{a^{\log_a 18}}_{a^{\log_a 18}=18^{\log_a a}=18})^{\frac{1}{2}}$$
$$=18^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{2}$$

04 로그함수의 그래프

곡선 $y=\log_a x$와 직선 $y=1$이 만나는 점 A_1의 x좌표는

$\log_a x=1$에서 $x=a$

즉, 점 A_1의 좌표는 $(a, 1)$이다.

곡선 $y=\log_b x$와 직선 $y=1$이 만나는 점 B_1의 x좌표는

$\log_b x=1$에서 $x=b$

즉, 점 B_1의 좌표는 $(b, 1)$이다.

선분 A_1B_1의 중점의 좌표가 $(2, 1)$이므로

$$\frac{a+b}{2}=2 \qquad \therefore a+b=4$$

$\overline{A_1B_1}=1$에서

$$|a-b|=1 \qquad \therefore b-a=1\,(\because a<b)$$

곡선 $y=\log_a x$와 직선 $y=2$가 만나는 점 A_2의 x좌표는

$\log_a x=2$에서 $x=a^2$

즉, 점 A_2의 좌표는 $(a^2, 2)$이다.

곡선 $y=\log_b x$와 직선 $y=2$가 만나는 점 B_2의 x좌표는

$\log_b x=2$에서 $x=b^2$

즉, 점 B_2의 좌표는 $(b^2, 2)$이다.

$$\therefore \overline{A_2B_2}=|a^2-b^2|=b^2-a^2$$
$$=(b-a)(b+a)$$
$$=1\times 4=4$$

05 실생활에서의 로그의 활용

$t=1$, $x=2$일 때, $y=a$이므로

$$\log a=A-\frac{1}{2}\log 1-\frac{K\times 2^2}{1}$$
$$=A-4K \qquad \cdots\cdots①$$

$t=4$, $x=d$일 때, $y=\frac{a}{2}$이므로

$$\log\frac{a}{2}=A-\frac{1}{2}\log 4-\frac{Kd^2}{4}$$
$$=A-\frac{1}{2}\log 2^2-\frac{Kd^2}{4}$$
$$=A-\log 2-\frac{Kd^2}{4} \qquad \cdots\cdots②$$

①$-$②를 하면

$$\log a-\log\frac{a}{2}=(A-4K)-\left(A-\log 2-\frac{Kd^2}{4}\right)$$

$$\log 2=\log 2-4K+\frac{Kd^2}{4}$$

$$\frac{Kd^2}{4}=4K,\ d^2=16\ (\because K>0)$$

$$\therefore d=4\ (\because d>0)$$

06 로그의 성질

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=18,\ \alpha\beta=6$

$\therefore\ \log_2(\alpha+\beta)-2\log_2\alpha\beta=\log_2 18-2\log_2 6$

$=\log_2\dfrac{18}{6^2}$

$=\log_2\dfrac{1}{2}=-1$

07 로그함수의 그래프

곡선 $y=a^x$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 곡선은 $y=\log_a x$이다.

따라서 곡선 $y=\log_a x$가 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$3=\log_a 2,\ a^3=2$

$\therefore\ a=\sqrt[3]{2}$

다른 풀이

곡선 $y=a^x$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 곡선이 점 $(2,\ 3)$을 지나므로 곡선 $y=a^x$은 점 $(3,\ 2)$를 지난다.

즉, $2=a^3$이므로 $a=\sqrt[3]{2}$

08 로그방정식

$(\log_3 x)^2-6\log_3\sqrt{x}+2=0$에서

$(\log_3 x)^2-3\log_3 x+2=0$

이때 $\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-3t+2=0,\ (t-1)(t-2)=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=2$

즉, $\log_3 x=1$ 또는 $\log_3 x=2$이므로

$\log_3 x=1$에서 $x=3^1=3$

$\log_3 x=2$에서 $x=3^2=9$

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 두 실근 $\alpha,\ \beta$의 곱 $\alpha\beta=3\times 9=27$이다.

다른 풀이

$(\log_3 x)^2-6\log_3\sqrt{x}+2=0$에서

$(\log_3 x)^2-3\log_3 x+2=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-3t+2=0$ ……①

이때 t에 대한 이차방정식 ①의 두 근이 $\log_3\alpha,\ \log_3\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=3,\ \log_3\alpha\beta=3$

$\therefore\ \alpha\beta=3^3=27$

09 로그부등식

$(1+\log_3 x)(a-\log_3 x)>0$에서

$(\log_3 x+1)(\log_3 x-a)<0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 주어진 부등식은

$(t+1)(t-a)<0$ ……①

이때 부등식의 해가 $\dfrac{1}{3}<x<9$이므로

$\log_3\dfrac{1}{3}<t<\log_3 9$

$\log_3 3^{-1}<t<\log_3 3^2$

$\therefore\ -1<t<2$ ……②

①, ②에서 $a=2$

다른 풀이

부등식 $(1+\log_3 x)(a-\log_3 x)>0$의 해가 $\dfrac{1}{3}<x<9$이므로 방정식 $(1+\log_3 x)(a-\log_3 x)=0$의 해는

$x=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=9$이다.

즉, $\log_3 x=-1$ 또는 $\log_3 x=a$에서

$x=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=3^a$

따라서 $3^a=9$이므로 $a=2$

10 지수함수의 그래프의 평행이동

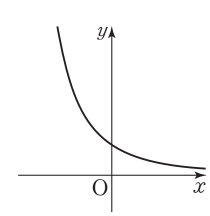
함수 $y=f(x)$의 그래프에서 기울기는 1이고, y절편은 1이므로 $f(x)=x+1$

$\therefore\ y=2^{2-f(x)}=2^{2-(x+1)}$

$=2^{-x+1}=2^{-(x-1)}$

$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}$

따라서 $y=2^{2-f(x)}$의 그래프는 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



참고 도형의 평행이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

⇨ $f(x-a,\ y-b)=0$

x대신 $x-a$, y대신 $y-b$를 대입

11 **로그의 성질**

주어진 두 점을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\log_2 10-\log_2 5}{2-1}=\log_2\frac{10}{5}=1$$

12 **로그함수의 최대 · 최소**

밑이 1보다 크므로 $y=3+\log_3(x^2-4x+31)$이 최소인 경우는 $x^2-4x+31$이 최솟값을 가질 때이다.

$f(x)=x^2-4x+31$로 놓으면

$f(x)=(x-2)^2+27$에서 $f(x)$의 최솟값은 27이다.

따라서 $y=3+\log_3(x^2-4x+31)$의 최솟값은

$$3+\log_3 27=3+3=6$$

참고 로그함수의 최대 · 최소 — $y=\log_a f(x)$ 꼴

정의역이 $\{x\,|\,m\le x\le n\}$인 로그함수

$g(x)=\log_a f(x)\,(a>0,\ a\ne1)$의 최대 · 최소

(1) 주어진 정의역에서 $f(x)$의 최댓값 α, 최솟값 β를 구한다.

(2) $a>1$일 때

⇨ $g(x)$의 최댓값은 $\log_a\alpha$, 최솟값은 $\log_a\beta$

$0<a<1$일 때

⇨ $g(x)$의 최댓값은 $\log_a\beta$, 최솟값은 $\log_a\alpha$

13 **곱셈 공식을 활용한 지수법칙**

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=10$의 양변을 제곱하면

$$(a^{\frac{1}{2}})^2+2\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{1}{2}}+(a^{-\frac{1}{2}})^2=10^2$$

$$a+2+a^{-1}=100 \qquad \therefore a+a^{-1}=98$$

14 **거듭제곱근의 성질**

두 자연수 a, b에 대하여

$\sqrt{\dfrac{2^a\times5^b}{2}}$이 자연수이므로 a는 홀수, b는 짝수이고,

$\sqrt[3]{\dfrac{3^b}{2^{a+1}}}$이 유리수이고 2와 3은 서로소이므로 $a+1$과 b는 3의 배수이다.

따라서 두 자연수 a, b의 최솟값은 각각 5, 6이므로 $a+b$의 최솟값은 11이다.

15 **로그의 정의**

두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(p,\ \log_a p)$, $(q,\ \log_a q)$ $(q<p)$라고 하면 선분 PQ의 중점이 원의 중심이므로

$$\frac{p+q}{2}=\frac{5}{4},\ \frac{\log_a p+\log_a q}{2}=0$$

$$\therefore p+q=\frac{5}{2},\ pq=1$$

p, q를 두 근으로 하는 이차방정식은

$$t^2-\frac{5}{2}t+1=0,\ \left(t-\frac{1}{2}\right)(t-2)=0$$

$$\therefore t=\frac{1}{2} \text{ 또는 } t=2$$

$$\therefore p=2,\ q=\frac{1}{2}\ (\because p>q)$$

두 점 $\mathrm{P}(2,\ \log_a 2)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ \log_a\frac{1}{2}\right)$에서

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\log_a 2-\log_a\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{9}{4}+(\log_a 4)^2}$$

한편, 선분 PQ의 길이는 원의 지름의 길이와 같다.

즉, $\overline{\mathrm{PQ}}=2\times\dfrac{\sqrt{13}}{4}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$에서 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=\dfrac{13}{4}$이므로

$$\frac{9}{4}+(\log_a 4)^2=\frac{13}{4},\ (\log_a 4)^2=1$$

$$\log_a 4=1\,(\because a>1) \qquad \therefore a=4$$

16 **로그의 밑의 변환**

$\dfrac{\log_a b}{2a}=\dfrac{3}{4}$에서 $\log_a b=\dfrac{3}{2}a$

$\dfrac{18\log_b a}{b}=\dfrac{3}{4}$에서 $\log_b a=\dfrac{1}{24}b$

$\log_a b\times\log_b a=1$이므로

$$\frac{3}{2}a\times\frac{1}{24}b=1 \qquad \therefore ab=16$$

다른 풀이

$\log_a b\times\log_b a=1$이므로

$\dfrac{\log_a b}{2a}\times\dfrac{18\log_b a}{b}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$에서

$$\frac{18}{2ab}=\frac{9}{16} \qquad \therefore ab=16$$

17 **지수법칙의 활용**

$$(\sqrt{3^n})^{\frac{1}{2}}=(3^{\frac{n}{2}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{n}{4}},\ \sqrt[n]{3^{100}}=3^{\frac{100}{n}}$$

$3^{\frac{n}{4}}$, $3^{\frac{100}{4}}$이 모두 자연수가 되도록 하는 2 이상의 자연수 n은 4의 배수이면서 $\underbrace{100\text{의 약수}}_{2^2,\ 2^2\times5,\ 2^2\times5^2}$이다.

따라서 구하는 모든 n의 값의 합은

$$4+20+100=124$$

18 **지수법칙의 활용**

$12^a=16$에서 $12^a=2^4 \qquad \therefore 12=2^{\frac{4}{a}}$ ……①

$3^b=2$에서 $3=2^{\frac{1}{b}}$ ……②

①÷②를 하면

$2^{\frac{4}{a}} \div 2^{\frac{1}{b}} = 12 \div 3$

$\therefore 2^{\frac{4}{a}-\frac{1}{b}} = 4$

19 지수함수의 그래프의 평행이동

함수 $f(x)=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 함수 $g(x)$는

$g(x)=2^{x-m}+n$

점 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점 A'의 좌표는

$(1+m,\ f(1)+n)$

이때 점 A'의 x좌표가 3이므로

$1+m=3 \qquad \therefore m=2$

$g(x)=2^{x-2}+n$이고 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $g(0)=1$에서

$2^{-2}+n=1 \qquad \therefore n=\frac{3}{4}$

$\therefore m+n=2+\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$

참고 (1) 점의 평행이동

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 P'이라고 하면

⇨ $\mathrm{P}'(x+a,\ y+b)$

(2) 도형의 평행이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

⇨ $f(x-a,\ y-b)=0$

20 로그의 성질

조건 (가)에서 $\sqrt[4]{ab}=\sqrt[3]{a}$

$(ab)^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{3}},\ ab=a^{\frac{4}{3}} \qquad \therefore b=a^{\frac{1}{3}}$

조건 (나)에서

$\log_a bc+\log_b ac$

$=\log_a b+\log_a c+\log_b a+\log_b c$

$=\log_a a^{\frac{1}{3}}+\log_a c+\log_{a^{\frac{1}{3}}} a+\log_{a^{\frac{1}{3}}} c$

$=\frac{1}{3}+\log_a c+3+3\log_a c$

$=\frac{10}{3}+4\log_a c=4$

즉, $\log_a c=\frac{1}{6},\ c=a^{\frac{1}{6}}$

따라서 $\frac{b}{c}=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{6}}$이므로

$a=\left(\frac{b}{c}\right)^6 \qquad \therefore k=6$

21 치환을 이용한 지수방정식

$4^x+4^{-x}+a(2^x-2^{-x})+7=0$에서

$2^x-2^{-x}=t$로 놓으면

$4^x+4^{-x}=(2^x-2^{-x})^2+2=t^2+2$이므로

주어진 방정식은 $(t^2+2)+at+7=0$

$\therefore t^2+at+9=0$ ……①

이때 $t=2^x-2^{-x}$이 모든 실숫값을 가질 수 있으므로 주어진 방정식이 실근을 갖기 위해서는 이차방정식 ①이 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ①의 판별식을 D라고 하면

$D=a^2-36\ge 0,\ (a+6)(a-6)\ge 0$

$\therefore a\le -6$ 또는 $a\ge 6$

따라서 양수 a의 최솟값은 $m=6$이므로

$m^2=36$

22 지수법칙의 활용

$2^a=x,\ 2^b=y$라고 하면

$x+y=2,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{9}{4}$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{9}{4}$에서 $\frac{x+y}{xy}=\frac{2}{xy}=\frac{9}{4} \qquad \therefore xy=\frac{8}{9}$

$2^{a+b}=2^a 2^b=xy=\frac{8}{9}$

따라서 $p=9,\ q=8$이므로 $p+q=17$

23 실생활에서의 지수법칙의 활용

$D=d,\ W=160$일 때의 가스버블의 최대반경 R_1은

$R_1=k\left(\frac{160}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}$

$D=d,\ W=p$일 때의 가스버블의 최대반경 R_2는

$R_2=k\left(\frac{p}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\frac{R_1}{R_2}=2$에서

$$\frac{k\left(\frac{160}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}}{k\left(\frac{p}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}}=\left(\frac{160}{p}\right)^{\frac{1}{3}}=2$$

$\frac{160}{p}=2^3 \qquad \therefore p=20$

대단원 기출 모의고사 256~259쪽

정답률 80 % 이상	01 ④	02 ③	03 ④	04 ⑤
05 ⑤	06 6			
정답률 79~60 %	07 ②	08 ②	09 27	10 9
11 30	12 18			
정답률 60 % 미만	13 ①	14 9	15 256	16 ②
17 ②	18 ④	19 50	20 103	

01 부채꼴의 호의 길이와 넓이

부채꼴의 호의 길이는 $4\times\frac{\pi}{4}=\pi$

02 삼각함수를 포함하는 방정식

$1+\sqrt{2}\sin 2x=0$에서 $\sin 2x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\le x\le\pi$에서 $0\le 2x\le 2\pi$이므로

$2x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $2x=\frac{7}{4}\pi$

$\therefore x=\frac{5}{8}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{8}\pi$

따라서 구하는 모든 해의 합은

$\frac{5}{8}\pi+\frac{7}{8}\pi=\frac{3}{2}\pi$

03 삼각함수를 포함하는 방정식

$\cos^2 x=\sin^2 x-\sin x$에서

$1-\sin^2 x=\sin^2 x-\sin x$

$2\sin^2 x-\sin x-1=0$

$(2\sin x+1)(\sin x-1)=0$

$\therefore \sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

$0\le x<2\pi$에서

(i) $\sin x=-\frac{1}{2}$일 때, $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(ii) $\sin x=1$일 때, $x=\frac{\pi}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 모든 해의 합은

$\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{7}{2}\pi$

04 삼각함수 사이의 관계

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{5}{18}$

$\therefore \sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^3-3\times\left(-\frac{5}{18}\right)\times\frac{2}{3}$

$=\frac{8}{27}+\frac{5}{9}=\frac{23}{27}$

05 삼각함수의 미정계수 구하기

주어진 함수의 최댓값이 2이고 $a>0$이므로 $a=2$

또, 주기는 2이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2b}}=2$ $\quad\therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=\frac{5}{2}$

06 그래프가 주어진 삼각함수의 미정계수 구하기

주어진 함수의 최댓값이 3이고 $a>0$이므로 $a=3$

또, 주기는 $\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{4}=\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore ab=6$

07 실생활에서 삼각함수의 활용

난방기를 가동한 지 20분 후의 실내 온도가 18 ℃이므로 주어진 식에 $t=20$, $T=18$을 대입하면

$18=B-\frac{k}{6}\cos\left(\frac{\pi}{60}\times 20\right)$, $B-\frac{k}{6}\times\frac{1}{2}=18$

$\therefore B-\frac{k}{12}=18$ ……①

또, 난방기를 가동한 지 40분 후의 실내 온도가 20 ℃이므로 주어진 식에 $t=40$, $T=20$을 대입하면

$20=B-\frac{k}{6}\cos\left(\frac{\pi}{60}\times 40\right)$, $B-\frac{k}{6}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=20$

$\therefore B+\frac{k}{12}=20$ ……②

②−①을 하면 $\frac{k}{6}=2$ $\quad\therefore k=12$

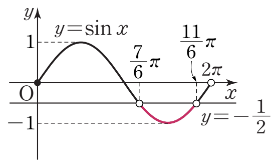
08 삼각함수를 포함하는 부등식

$2\sin x+1<0$에서 $\sin x<-\frac{1}{2}$

주어진 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선

$y=-\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다.

오른쪽 그림에서 구하는 부등식의 해는



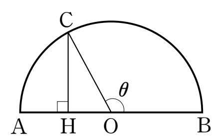
$\frac{7}{6}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{7}{6}\pi$, $\beta=\frac{11}{6}\pi$

이므로 $\cos(\beta-\alpha)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

09 부채꼴의 호의 길이

반원의 중심을 O라고 하면



$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=6$

$\angle COB=\theta$라고 하면 호 BC의 길이가 4π이므로 $6\theta=4\pi$에서

$\theta=\frac{2}{3}\pi$

따라서 $\angle COH=\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$이므로 $\triangle CHO$에서

$\overline{CH}=\overline{OC}\sin\frac{\pi}{3}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

$\therefore \overline{CH}^2=27$

10 삼각함수를 포함하는 방정식

$f(x)=\sin^2 x+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$

$=1-\cos^2 x+\cos x+1$

$=-\cos^2 x+\cos x+2$

$=-\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

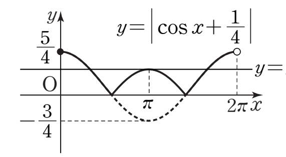
$-1\le\cos x\le1$이므로 $\cos x=\frac{1}{2}$에서 최댓값 $\frac{9}{4}$를 갖는다.

따라서 $M=\frac{9}{4}$이므로 $4M=9$

11 삼각함수를 포함하는 방정식

함수 $y=\cos x+\frac{1}{4}$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 것이므로 주기는 2π, 치역은 $\left\{y\,\middle|\,-\frac{3}{4}\le y\le\frac{5}{4}\right\}$이다.

함수 $y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$의 그래프는 함수 $y=\cos x+\frac{1}{4}$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동시킨 것이므로 함수 $y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=k$가 x좌표가 π인 지점을 지나야 한다.



$x=\pi$일 때 y의 값은

$y=\left|\cos\pi+\frac{1}{4}\right|=\left|-1+\frac{1}{4}\right|=\frac{3}{4}$

따라서 $k=\frac{3}{4}$이므로 $\alpha=\frac{3}{4}$

$\therefore 40\alpha=30$

12 삼각함수 사이의 관계

$\log_2\sin\theta+\log_2\cos\theta=-4$에서

$\log_2\sin\theta\cos\theta=-4$

$\sin\theta\cos\theta=2^{-4}=\frac{1}{16}$

$\log_2(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{1}{2}(\log_2 x-4)$에서

$2\log_2(\sin\theta+\cos\theta)=\log_2 x-\log_2 2^4$

$\log_2(\sin\theta+\cos\theta)^2=\log_2 x-\log_2 16$

$\log_2(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)=\log_2\frac{x}{16}$

$\log_2\left(1+2\times\frac{1}{16}\right)=\log_2\frac{x}{16}$

$\frac{9}{8}=\frac{x}{16}\qquad\therefore x=18$

13 삼각함수의 미정계수 구하기

주어진 함수의 주기는 $\frac{2}{3}\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$이고 $a>0$이므로

$\frac{2\pi}{a}=\pi\qquad\therefore a=2$

즉, 주어진 함수의 식은 $y=\cos2(x+b)+1$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\cos2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 $0<b<\pi$에서 $-\pi<-b<0$이므로

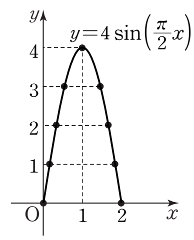
$-b=-\frac{\pi}{3}\qquad\therefore b=\frac{\pi}{3}$

$\therefore ab=\frac{2}{3}\pi$

14 삼각함수의 그래프

주어진 함수의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{2}}=4$이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 y좌표가 정수인 점의 개수는 9이다.



15 삼각함수의 활용

용수철에 질량이 144 g인 추를 매달아 아래쪽으로 10 cm만큼 잡아당겼다가 놓은 지 2초가 지난 후의 추의 높이를 h_1 cm라고 하면

$$h_1=20-10\cos\frac{2\pi\times2}{\sqrt{144}}=20-10\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=20-10\times\frac{1}{2}=15$$

용수철에 질량이 a g인 추를 매달아 아래쪽으로 $5\sqrt{2}$ cm만큼 잡아당겼다가 놓은 지 2초가 지난 후의 추의 높이를 h_2 cm라고 하면

$$h_2=20-5\sqrt{2}\cos\frac{2\pi\times2}{\sqrt{a}}=20-5\sqrt{2}\cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}}$$

$h_1=h_2$이므로 $15=20-5\sqrt{2}\cos\dfrac{4\pi}{\sqrt{a}}$

$$5\sqrt{2}\cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}}=5 \qquad \therefore \cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

이때 $a\ge100$이므로 $0<\dfrac{4\pi}{\sqrt{a}}\le\dfrac{4\pi}{\sqrt{100}}=\dfrac{2}{5}\pi$

따라서 $\cos\dfrac{4\pi}{\sqrt{a}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$에서 $\dfrac{4\pi}{\sqrt{a}}=\dfrac{\pi}{4}$

$$\sqrt{a}=16 \qquad \therefore a=256$$

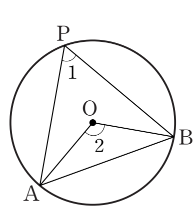
16 부채꼴의 호의 길이

원의 넓이가 100π이므로 반지름의 길이는 10이다.

또, 호 AB의 길이는 반지름의 길이의 2배이므로

$$10\theta=20 \qquad \therefore \theta=2$$

오른쪽 그림과 같이 원 위의 한 점을 P라고 하면 $\angle APB=1$이므로 $\triangle APB$에서 사인법칙에 의하여



$$\frac{\overline{AB}}{\sin1}=20$$

$$\therefore \overline{AB}=20\sin1$$

17 삼각형의 넓이

$\triangle OAB$에서 $\angle AOB=2\pi\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{\pi}{4}$이므로

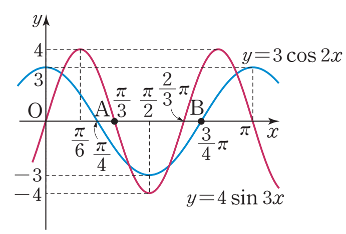
$$\triangle OCB=\frac{1}{2}\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\triangle OCD$$

$$\therefore \square ABCD=3\triangle OCD-\triangle OCB=2\triangle OCD$$

$$=2\times\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

18 삼각함수의 그래프

두 함수 $y=4\sin3x$, $y=3\cos2x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $A\left(\dfrac{\pi}{3},\ 0\right)$, $B\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ 0\right)$



$\triangle ABP$에서 $\overline{AB}=\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{12}\pi$로 일정하므로

$\triangle ABP$의 넓이가 최대가 되려면 점 P의 y좌표의 절댓값이 최대이어야 한다.

이때 점 P는 함수 $y=4\sin3x$의 그래프 위의 점이므로 점 P의 y좌표의 절댓값의 최댓값은 4이다.

따라서 $\triangle ABP$의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times\frac{5}{12}\pi\times4=\frac{5}{6}\pi$$

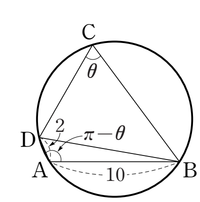
19 사인법칙과 코사인법칙

$\square ABCD$가 원에 내접하므로

$\angle BCD=\theta\,(0<\theta<\pi)$라고 하면

$\angle BAD=\pi-\theta$

$\triangle ABD$에서 코사인법칙에 의하여



$$\overline{BD}^2=2^2+10^2-2\times2\times10\times\cos(\pi-\theta)$$

$$=2^2+10^2-2\times2\times10\times\cos\theta$$

$$=2^2+10^2-2\times2\times10\times\frac{3}{5}=128$$

$$\therefore \overline{BD}=8\sqrt{2}$$

이때 $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$이고, $\triangle BCD$의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{8\sqrt{2}}{\sin\theta}=2R$$

$$\therefore\ R=\frac{1}{2}\times\frac{8\sqrt{2}}{\sin\theta}=5\sqrt{2}$$

따라서 외접원의 넓이는 $(5\sqrt{2})^2\pi=50\pi$이므로

$a=50$

20 삼각형의 넓이의 활용

$\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{6^2+5^2-4^2}{2\times6\times5}=\frac{3}{4}$$

이므로 $\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\triangle$ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times6\times5\times\sin A=\frac{1}{2}\times6\times5\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$$

$\overline{\mathrm{PF}}=x$라고 하면

$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ABP}+\triangle\mathrm{BCP}+\triangle\mathrm{CAP}$이므로

$$\frac{15\sqrt{7}}{4}=\frac{1}{2}\times6\times x+\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{7}+\frac{1}{2}\times5\times\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\frac{15\sqrt{7}}{4}=3x+\frac{13\sqrt{7}}{4}\qquad\therefore\ x=\frac{\sqrt{7}}{6}$$

이때 $\square$AFDE에서 $\angle\mathrm{FPE}=180^\circ-\angle\mathrm{FAE}$이므로

$\triangle$EFP의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{6}\times\frac{\sqrt{7}}{2}\times\sin(\pi-A)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{6}\times\frac{\sqrt{7}}{2}\times\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{6}\times\frac{\sqrt{7}}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{7}{96}\sqrt{7}$$

따라서 $p=96$, $q=7$이므로 $p+q=103$

Ⅲ. 수열

대단원 기출 모의고사 260~264쪽

정답률 80 % 이상	01 ③	02 ①	03 ①	04 ④
05 ①	06 ⑤	07 ⑤	08 ①	09 ④
정답률 79~60 %	10 ③	11 ②	12 ⑤	13 ②
14 ①	15 19	16 8	17 ②	18 ②
19 ①				
정답률 60 % 미만	20 200	21 65	22 ①	23 29
24 26				

01 $\sum$의 성질

$$\sum_{n=1}^{10}(a_n-1)=\sum_{n=1}^{10}a_n-\sum_{n=1}^{10}1$$

$$=20-1\times10=10$$

02 등차수열의 일반항

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 $d(d>0)$라고 하면

조건 (가)에서 $a_6+a_8=0$이므로

$(a+5d)+(a+7d)=0\qquad\therefore\ a=-6d$

조건 (나)에서 $|a_6|=|a_7|+3$이므로

$|a+5d|=|a+6d|+3$ ……①

①에 $a=-6d$를 대입하면

$|-d|=3\qquad\therefore\ d=3\ (\because\ d>0)$

이때 $a=-6d=-18$이므로

$a_2=a+d=-18+3=-15$

다른 풀이

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 조건 (가)에서

$a_7=\frac{a_6+a_8}{2}=0$

공차가 양수이므로 조건 (나)에서

$a_6=-3\qquad\therefore\ d=3$

한편, $a_7-5d=(a_1+6d)-5d=a_1+d=a_2$이므로

$a_2=0-5\times3=-15$

03 수열의 합과 일반항의 관계

$S_n=n^2-10n$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2-10\times1=-9$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2-10n)-\{(n-1)^2-10(n-1)\}$

$=2n-11$ ……①

이때 $a_1=-9$는 ①에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-11$

$a_n<0$에서 $2n-11<0\qquad\therefore\ n<\frac{11}{2}$

따라서 구하는 자연수 n의 개수는 1, 2, 3, 4, 5의 5이다.

04 $\sum$의 성질

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k{}^2-a_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k{}^2-\sum_{k=1}^{10}a_k$$

$$=2\times7-3=11$$

05 등차수열의 합

$a_8-a_6=(6+7d)-(6+5d)=2d$ ……①

$$S_8-S_6=\frac{8(2\times6+7d)}{2}-\frac{6(2\times6+5d)}{2}$$
$$=4(12+7d)-3(12+5d)$$
$$=12+13d \quad \cdots\cdots②$$

①, ②를 $\frac{a_8-a_6}{S_8-S_6}=2$에 대입하면

$$\frac{2d}{12+13d}=2 \qquad \therefore d=-1$$

06 수열의 합

$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k}=a+\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k+1}$에서

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=a+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$$

$$1=a+\frac{1}{6} \qquad \therefore a=\frac{5}{6}$$

07 수학적 귀납법

(ii) $n=k$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$a_k=2^k+\frac{1}{k}$이므로

$$ka_{k+1}=2ka_k-\frac{k+2}{k+1}=2k\left(2^k+\frac{1}{k}\right)-\frac{k+2}{k+1}$$
$$=\boxed{k2^{k+1}+2}-\frac{k+2}{k+1}$$
$$=k2^{k+1}+\boxed{\frac{k}{k+1}}$$

따라서 $a_{k+1}=2^{k+1}+\frac{1}{k+1}$이므로 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

이때 $f(k)=k2^{k+1}+2$, $g(k)=\frac{k}{k+1}$이므로

$$f(3)\times g(4)=(3\times2^4+2)\times\frac{4}{5}=50\times\frac{4}{5}=40$$

08 등차수열의 합

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_5+a_{13}=3a_9$에서

$(a+4d)+(a+12d)=3(a+8d)$

$\therefore a+8d=0$ ……①

$\sum_{k=1}^{18}a_k=\frac{9}{2}$에서

$$\sum_{k=1}^{18}a_k=\frac{18(2a+17d)}{2}$$
$$=18a+153d=18(a+8d)+9d$$
$$=18\times0+9d=9d=\frac{9}{2}$$

$\therefore d=\frac{1}{2}$

$d=\frac{1}{2}$을 ①에 대입하면

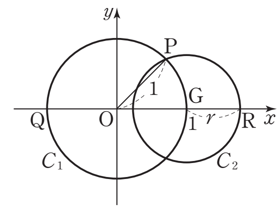
$$a+8\times\frac{1}{2}=a+4=0 \qquad \therefore a=-4$$

$$\therefore a_{13}=a+12d=-4+12\times\frac{1}{2}=2$$

09 등비중항

$\overline{OP}$는 원 C_1의 반지름이므로 $\overline{OP}=1$ ……①

다음 그림과 같이 원 C_2의 중심을 G라고 하면



$\overline{OR}=\overline{OG}+\overline{GR}=1+r$ ……②

$\overline{QR}=\overline{QG}+\overline{GR}=2+r$ ……③

$\overline{OP}$, $\overline{OR}$, $\overline{QR}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\overline{OR}^2=\overline{OP}\times\overline{QR}$ ……④

①, ②, ③을 ④에 대입하면

$(1+r)^2=1\times(2+r)$, $r^2+r-1=0$

$$\therefore r=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad (\because 0<r<\sqrt{2})$$

10 등비수열의 일반항

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=4(a_2-a_1)$에서 $ar^2=4(ar-a)$

$r^2-4r+4=0 \qquad \therefore r=2$

$\sum_{k=1}^{6}a_k=15$에서

$$\frac{a(2^6-1)}{2-1}=15,\ 63a=15$$

$$\therefore a=\frac{5}{21}$$

$\therefore a_1+a_3+a_5=a+ar^2+ar^4$

$$=\frac{5}{21}(1+2^2+2^4)$$

$$=\frac{5}{21}\times 21=5$$

11 수열의 귀납적 정의

주어진 정의에 따라 a_1부터 순서대로 구하면

$a_1=2$는 짝수이므로 $a_2=a_1-1=2-1=1$

$a_2=1$은 홀수이므로 $a_3=a_2+2=1+2=3$

$a_3=3$은 홀수이므로 $a_4=a_3+3=3+3=6$

$a_4=6$은 짝수이므로 $a_5=a_4-1=6-1=5$

$a_5=5$는 홀수이므로 $a_6=a_5+5=5+5=10$

$a_6=10$은 짝수이므로 $a_7=a_6-1=10-1=9$

따라서 a_7의 값은 9이다.

12 자연수의 거듭제곱의 합

$$\sum_{k=1}^{5}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{5}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{5}(k^2+2k+1-k^2-k)$$

$$=\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}1$$

$$=\frac{5\times 6}{2}+5=20$$

13 등차수열의 합

이차방정식 $x^2-14x+24=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_3+a_8=14$

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이고 a_3에서 a_8까지 6개의 항이 있으므로

$$\sum_{n=3}^{8}a_n=\frac{6(a_3+a_8)}{2}=\frac{6\times 14}{2}=42$$

14 자연수의 거듭제곱의 합

사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$은 사다리꼴이고, 네 꼭짓점의 좌표는 각각

$\mathrm{A}_n(n^2,\ n)$, $\mathrm{B}_n(n^2,\ 0)$, $\mathrm{A}_{n+1}((n+1)^2,\ n+1)$,
$\mathrm{B}_{n+1}((n+1)^2,\ 0)$

이므로

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n$, $\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}=n+1$, $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}=2n+1$

$\therefore S_n=\frac{1}{2}\{n+(n+1)\}(2n+1)=2n^2+2n+\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{10}S_n=\sum_{n=1}^{10}\left(2n^2+2n+\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\sum_{n=1}^{10}n^2+2\sum_{n=1}^{10}n+\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}$$

$$=2\times\frac{10\times 11\times 21}{6}+2\times\frac{10\times 11}{2}+\frac{1}{2}\times 10$$

$$=770+110+5=885$$

15 등비수열의 일반항

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라고 하면

$$\frac{a_3}{a_2}-\frac{a_6}{a_4}=\frac{3r^2}{3r}-\frac{3r^5}{3r^3}=r-r^2=\frac{1}{4}$$

$4r^2-4r+1=0$, $(2r-1)^2=0$ $\quad\therefore r=\frac{1}{2}$

$$a_5=ar^4=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{16}$$

따라서 $p=16$, $q=3$이므로

$p+q=19$

16 수열의 귀납적 정의

$a_1=6\geq 0$이므로

$a_2=2-a_1=2-6=-4$

$a_2<0$이므로

$a_3=a_2+p=-4+p$

(i) $a_3=-4+p\geq 0$, 즉 $p\geq 4$일 때

$a_4=2-a_3=2-(-4+p)=6-p=0$에서

$p=6$

(ii) $a_3=-4+p<0$, 즉 $p<4$일 때

$a_4=a_3+p=(-4+p)+p=-4+2p=0$에서

$p=2$

(i), (ii)에서 $a_4=0$이 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 합은

$6+2=8$

17 등비수열의 합

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$S_3=21$에서 $\frac{a(r^3-1)}{r-1}=21$ ……①

$S_6=189$에서 $\frac{a(r^6-1)}{r-1}=189$

$\therefore \frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=189$ ……②

①을 ②에 대입하면

$21(r^3+1)=189$, $r^3=8$ $\quad\therefore r=2$

$r=2$를 ①에 대입하면

$$\frac{a(8-1)}{2-1}=21 \qquad \therefore a=3$$

따라서 $a_n=3\times 2^{n-1}$이므로

$$a_5=3\times 2^{5-1}=48$$

18 **등비수열의 합**

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라고 하면

조건 (가)에서

$$\begin{aligned} S_{12}-S_2&=a_3+a_4+\cdots+a_{12}\\ &=r^2(a_1+a_2+\cdots+a_{10})\\ &=r^2S_{10}=4S_{10}\end{aligned}$$

이므로 $r^2=4 \qquad \therefore r=2$ 또는 $r=-2$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} S_{12}-S_{10}&=a_{11}+a_{12}\\ &=2r^{10}+2r^{11}\\ &=2r^{10}(1+r)<0\end{aligned}$$

$\therefore r=-2\,(\because r^2=4>0$이므로 $1+r<0)$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2, 공비가 -2이므로

$$a_4=2\times(-2)^{4-1}=-16$$

19 **등차수열의 합의 응용**

조건 (나)에서 두 점 $\mathrm{B}(1,\ 0)$과 $\mathrm{C}(2^m,\ m)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{m}{2^m-1}(x-1) \qquad \cdots\cdots ①$$

점 D는 x좌표가 2^n이고 직선 ① 위의 점이므로 점 D의 y좌표는

$$y=\frac{m}{2^m-1}(2^n-1)$$

이때 $\triangle\mathrm{ABD}$의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}&=\frac{1}{2}\times(2^n-1)\times\frac{m}{2^m-1}(2^n-1)\\ &=\frac{m}{2}\times\frac{(2^n-1)^2}{2^m-1}\end{aligned}$$

이므로 조건 (나)에 의하여

$$\frac{m}{2}\times\frac{(2^n-1)^2}{2^m-1}\le\frac{m}{2},\ \frac{(2^n-1)^2}{2^m-1}\le 1\ (\because m>0)$$

$\therefore (2^n-1)^2\le 2^m-1\ (\because 2^m-1>0)$

(i) $n=1$일 때, $(2^1-1)^2\le 2^m-1$을 만족시키는 가장 작은 자연수 m이 a_1이므로

$1\le 2^m-1,\ 2^m\ge 2 \qquad \therefore a_1=1$

(ii) $n=2$일 때, $(2^2-1)^2\le 2^m-1$을 만족시키는 가장 작은 자연수 m이 a_2이므로

$9\le 2^m-1,\ 2^m\ge 10 \qquad \therefore a_2=4$

(iii) $n=3$일 때, $(2^3-1)^2\le 2^m-1$을 만족시키는 가장 작은 자연수 m이 a_3이므로

$49\le 2^m-1,\ 2^m\ge 50 \qquad \therefore a_3=6$

(iv) $n=4$일 때, $(2^4-1)^2\le 2^m-1$을 만족시키는 가장 작은 자연수 m이 a_4이므로

$225\le 2^m-1,\ 2^m\ge 226 \qquad \therefore a_4=8$

$\vdots$

(i)~(iv)에서 $a_1=1,\ a_n=2n\ (n\ge 2)$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{10}a_n&=a_1+\sum_{n=2}^{10}2n=1+\left(\sum_{n=1}^{10}2n-2\right)\\ &=\sum_{n=1}^{10}2n-1\\ &=2\times\frac{10\times 11}{2}-1=109\end{aligned}$$

20 **등차수열의 합의 응용**

점 $(n,\ 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 l과 만나는 점의 y좌표가 a_n이므로 a_n은 n에 관한 일차식으로 나타낼 수 있다. 즉, 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$a_7-a_4=(a_1+6d)-(a_1+3d)=3d$이므로

$$3d=5-\frac{7}{2}=\frac{3}{2} \qquad \therefore d=\frac{1}{2}$$

또, $a_1=a_4-3d=\frac{7}{2}-3\times\frac{1}{2}=2$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{25}a_k&=\frac{25\left\{2\times 2+(25-1)\times\frac{1}{2}\right\}}{2}\\ &=\frac{25\times 16}{2}=200\end{aligned}$$

다른 풀이

$a_4=\frac{7}{2}$이고 $a_7=5$이므로 직선 l은 두 점 $\left(4,\ \frac{7}{2}\right)$, $(7,\ 5)$를 지난다.

직선 l의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 직선 l의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}(x-4)+\frac{7}{2}=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

따라서 점 $(n,\ 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 l과 만나는 점의 y좌표가 a_n이므로 $a_n=\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{25}a_k&=\sum_{k=1}^{25}\left(\frac{1}{2}k+\frac{3}{2}\right)\\ &=\frac{1}{2}\times\frac{25\times 26}{2}+\frac{3}{2}\times 25=200\end{aligned}$$

21 $\sum$의 성질

$$\sum_{k=6}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{5} a_k$$
$$=(10^2-2\times10)-(5^2-2\times5)=65$$

다른 풀이

$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2-2n$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=-1$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$
$$=(n^2-2n)-\{(n-1)^2-2(n-1)\}$$
$$=2n-3$$

이때 $a_1=-1$은 $a_n=2n-3$에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-3$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -1이고 공차가 2인 등차수열이므로

a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}은 등차수열을 이룬다.

$$\therefore \sum_{k=6}^{10}(2n-3)=\frac{5\{(2\times6-3)+(2\times10-3)\}}{2}=65$$

22 수열의 귀납적 정의

주어진 정의에 따라 a_1부터 순서대로 구하면

$a_1=\frac{2}{5}\leq1$이므로 $a_2=2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$

$a_2=\frac{4}{5}\leq1$이므로 $a_3=2\times\frac{4}{5}=\frac{8}{5}$

$a_3=\frac{8}{5}>1$이므로 $a_4=-\frac{8}{5}+2=\frac{2}{5}$

$a_4=\frac{2}{5}\leq1$이므로 $a_5=2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$

⋮

따라서 자연수 n에 대하여

$a_{3n-2}=\frac{2}{5}$, $a_{3n-1}=\frac{4}{5}$, $a_{3n}=\frac{8}{5}$

$$\therefore a_4+a_{17}=a_{3\times2-2}+a_{3\times6-1}$$
$$=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}=\frac{6}{5}$$

23 등차수열의 일반항

첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=2+(n-1)d$

수열 $\{3a_{n+1}-a_n\}$은 공차가 6인 등차수열이므로

$(3a_{n+2}-a_{n+1})-(3a_{n+1}-a_n)=6$에서

$3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=6$

$3\{2+(n+1)d\}-4(2+nd)+\{2+(n-1)d\}=6$

$6+3nd+3d-8-4nd+2+nd-d=6$

$2d=6$ $\quad\therefore d=3$

$\therefore a_{10}=2+(10-1)\times3=29$

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면 n이 1 증가할 때마다 $3a_{n+1}$은 $3d$씩 증가하고 $-a_n$은 d씩 감소하므로

수열 $\{3a_{n+1}-a_n\}$은 n이 1 증가할 때마다 $2d$씩 증가한다.

즉, 수열 $\{3a_{n+1}-a_n\}$의 공차가 $2d$이므로

$2d=6$ $\quad\therefore d=3$

$\therefore a_{10}=2+(10-1)\times3=29$

24 등차수열의 활용

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면 조건 ㈎에서

$a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)=159$

$\therefore a_1+d=53$ ⋯⋯ ①

조건 ㈏에서

$(a_m-2d)+(a_m-d)+a_m=96$

$\therefore a_m-d=32$ ⋯⋯ ②

①+②를 하면

$a_1+a_m=85$ ⋯⋯ ③

또, 조건 ㈏에서

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=\frac{m(a_1+a_m)}{2}=\frac{m\times85}{2}=425$$

$\therefore m=10$

③에서 $a_1+a_m=a_1+a_{10}=a_1+(a_1+9d)=85$

$2a_1+9d=85$ ⋯⋯ ④

①, ④를 연립하여 풀면

$a_1=56$, $d=-3$

$\therefore a_{11}=56+10\times(-3)=26$