이책의

정답과 해설

수학 (하)

본책 8~21쪽

1 | 집합의 뜻과 표현

STEP 1 개념 마스터

0001 답 ○

0002 답 ×

0003 답 ×

0004 답 ×

0005 답 ○

0006 답 $1,\ 2,\ 5,\ 10$

0007 답 $2,\ 4,\ 6,\ 8$

0008 답 $\in$

0009 답 $\notin$

0010 답 $\notin$

0011 답 $\in$

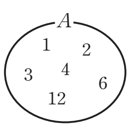
0012 답 $\in$

0013 답 $\notin$

0014 답 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

0015 답 $A=\{x\,|\,x$는 12의 양의 약수$\}$

0016 답



0017 답 $\{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28\}$

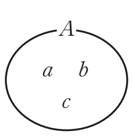
0018 답 $\{\mathrm{a},\ \mathrm{h},\ \mathrm{m},\ \mathrm{t}\}$

0019 답 $\{2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \cdots\}$

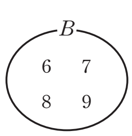
0020 답 $\{x\,|\,x$는 3의 양의 배수$\}$

0021 답 $\{x\,|\,x$는 18의 양의 약수$\}$

0022 답



0023 답



0024 답 무

0025 답 유

0026

$\{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ \cdots\}$: 무한집합 답 무

0027

1보다 작은 자연수는 존재하지 않으므로 공집합이며, 공집합은 유한집합이다. 답 유, 공

0028

ㄷ. $\{3\}$

ㄹ. $x^2=3$에서 $x=\pm\sqrt{3}$

따라서 자연수 x는 존재하지 않으므로 주어진 집합은 공집합이다.

ㅁ. 임의의 실수 x에 대하여 $|x|\ge 0$이므로 $|x|<0$인 정수 x는 존재하지 않는다.

따라서 주어진 집합은 공집합이다.

따라서 공집합인 것은 ㄹ, ㅁ이다. 답 ㄹ, ㅁ

0029 답 0

0030 답 1

0031 답 5

0032

8의 양의 약수는 $1,\ 2,\ 4,\ 8$의 4개이므로

$n(\{x\,|\,x$는 8의 양의 약수$\})=4$ 답 4

0033 답 $\subset$

0034 답 $\in$

0035 답 $\subset$

0036 답 $\subset$

0037 답 $\subset$

0038

$A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \cdots\}$, $B=\{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ \cdots\}$이므로

$B\subset A$ 답 $B\subset A$

0039

2로 나누어떨어지는 홀수는 존재하지 않으므로 $A=\varnothing$

$|x|\le 2$에서 $-2\le x\le 2$

이때, x는 정수이므로 $x=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$

$\therefore B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

$\therefore A\subset B$ 답 $A\subset B$

0040
$B=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8,\ 9\}$이므로
$A\not\subset B,\ B\not\subset A$ 답 $A\not\subset B$, $B\not\subset A$

0041 답 $\varnothing$

0042 답 $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$

0043 답 $\{a,\ b\}$, $\{b,\ c\}$, $\{c,\ a\}$

0044 답 $\{a,\ b,\ c\}$

0045 답 $\varnothing$, $\{\varnothing\}$

0046 답 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,\ 2\}$

0047
5의 양의 약수는 1, 5이므로 집합 $\{1,\ 5\}$의 부분집합은
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{5\}$, $\{1,\ 5\}$ 답 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{5\}$, $\{1,\ 5\}$

0048
7보다 작은 홀수는 1, 3, 5이므로 집합 $\{1,\ 3,\ 5\}$의 부분집합은
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 5\}$, $\{3,\ 5\}$, $\{1,\ 3,\ 5\}$
답 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 5\}$, $\{3,\ 5\}$, $\{1,\ 3,\ 5\}$

0049 답 $=$

0050 답 $\neq$

0051 답 $\neq$

0052 답 $=$

0053 답 $\neq$

0054 답 $\varnothing$, $\{-2\}$, $\{2\}$

0055
6 이하의 짝수는 2, 4, 6이므로 집합 $\{2,\ 4,\ 6\}$의 진부분집합은
$\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{2,\ 4\}$, $\{2,\ 6\}$, $\{4,\ 6\}$
답 $\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{2,\ 4\}$, $\{2,\ 6\}$, $\{4,\ 6\}$

0056
$n(\{1,\ 3\})=2$이므로 부분집합의 개수는
$2^2=4$ 답 4

0057
$\{x\mid x$는 $-2\le x<1$인 정수$\}=\{-2,\ -1,\ 0\}$에서
$n(\{-2,\ -1,\ 0\})=3$이므로 부분집합의 개수는
$2^3=8$ 답 8

0058
$n(A)=4$이므로 부분집합의 개수는
$2^4=16$ 답 16

0059
$n(A)=4$이므로 진부분집합의 개수는
$2^4-1=15$ 답 15

0060
2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는
집합 $\{1,\ 4,\ 8\}$의 부분집합의 개수와 같다.
$2^{4-1}=2^3=8$ 답 8

0061
1, 8을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는
집합 $\{2,\ 4\}$의 부분집합의 개수와 같다.
$2^{4-2}=2^2=4$ 답 4

0062
1, 2는 반드시 원소로 갖고, 4는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는
집합 $\{8\}$의 부분집합의 개수와 같다.
$2^{4-2-1}=2^1=2$ 답 2

Lecture

특정한 원소를 갖는(갖지 않는) 부분집합의 개수

집합 $A=\{a,\ b,\ c\}$에 대하여 b를 원소로 갖지 않는 부분집합과 b를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구해 보자.

b를 원소로 갖지 않는 부분집합	b를 반드시 원소로 갖는 부분집합
$\varnothing$, $\{a\}$, $\{c\}$, $\{a,\ c\}$	$\{b\}$, $\{a,\ b\}$, $\{b,\ c\}$, $\{a,\ b,\ c\}$
⇨ 집합 A에서 원소 b를 제외한 집합 $\{a,\ c\}$의 부분집합과 같다. ⇨ 부분집합의 개수는 집합 A의 원소의 개수 $2^{3-1}=2^2=4$ 부분집합에 속하지 않는 원소의 개수	⇨ 집합 A에서 원소 b를 제외한 집합 $\{a,\ c\}$의 부분집합에 원소 b를 넣은 것과 같다. ⇨ 부분집합의 개수는 집합 A의 원소의 개수 $2^{3-1}=2^2=4$ 부분집합에 반드시 속하는 원소의 개수

⇨ (b를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수)
$=$(b를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수)

STEP 2 유형 마스터

0063
| 전략 | 어떤 조건에 의하여 그 대상을 분명하게 정할 수 있는 것들의 모임이 집합이다.
'작은', '가까운', '아름다운', '인기 있는'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다. 답 ②

0064
① '긴'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다. 답 ①

0065

'작은', '좋아하는'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 보기 중 집합이 아닌 것은 ㄷ, ㄹ의 2개이다. 답 ②

참고 ㄴ에서 '큰'은 조건이 명확하지 않지만 '가장 큰'은 조건이 명확하다. 따라서 집합이다.

0066

|전략| 먼저 집합 A를 원소나열법으로 나타낸다.

$x^2+2x-15<0$에서 $(x+5)(x-3)<0$

$\therefore -5<x<3$

따라서 $A=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$이므로

⑤ $2\in A$ 답 ⑤

0067

$A=\{1, 3, 5, 15\}$, $B=\{1, 5, 9, 13, 17, \cdots\}$이므로

① $1\in A$　③ $3\in A$

④ $3\notin B$　⑤ $6\notin B$ 답 ②

0068

ㄱ. i는 허수이므로 $i\notin R$

ㄴ. $\sqrt{3}$은 무리수이므로 $\sqrt{3}\notin Q$

ㄷ. $\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$는 허수이므로 $\dfrac{2}{1-i}\notin R$

ㄹ. $i^{16}=(i^4)^4=1$은 정수이므로 $i^{16}\in Z$

ㅁ. $\sqrt{4}=2$는 정수이므로 $\sqrt{4}\in Z$

ㅂ. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=\sqrt{2}-1$은 무리수이므로 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\notin Q$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄹ, ㅁ, ㅂ의 4개이다. 답 4

0069

① $a=1$, $b=1$일 때, $2\cdot1+3\cdot1=5$이므로 $5\in A$

② $a=3$, $b=0$일 때, $2\cdot3+3\cdot0=6$

또는 $a=0$, $b=2$일 때, $2\cdot0+3\cdot2=6$

이때, a, b는 자연수이어야 하므로 $6\notin A$

③ $a=2$, $b=1$일 때, $2\cdot2+3\cdot1=7$이므로 $7\in A$

④ $a=1$, $b=2$일 때, $2\cdot1+3\cdot2=8$이므로 $8\in A$

⑤ $a=3$, $b=1$일 때, $2\cdot3+3\cdot1=9$이므로 $9\in A$ 답 ④

0070

|전략| ①~⑤의 집합 A를 각각 원소나열법으로 나타낸 다음 벤 다이어그램으로 표현된 집합 A와 비교한다.

① $A=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$

② $A=\{1, 2, 4, 8\}$

④ $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

⑤ $A=\{4, 8, 12, 16\}$ 답 ③

0071

|전략| 집합 B는 집합 A의 두 원소 a, b의 합 $a+b$를 원소로 갖는 집합이다.

집합 A의 두 원소 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4

0, 1, 2, 3, 4 ··· ❶

$\therefore B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ··· ❷

답 $B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$

채점 기준	비율
❶ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	80 %
❷ 집합 B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	20 %

0072

각각의 수를 소인수분해하면

① $6=2^1\times3^1$　② $12=2^2\times3^1$　③ $54=2^1\times3^3$

④ $60=2^2\times3^1\times5^1$　⑤ $108=2^2\times3^3$

따라서 집합 C의 원소가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

0073

|전략| 조건제시법으로 나타낸 집합을 원소나열법으로 나타낸 후 유한집합인 것을 찾는다.

① 무한집합

② $\{3, 5, 7, 9, \cdots\}$: 무한집합

③ -1과 1 사이의 유리수는 무수히 많으므로 무한집합

④ $\{1\}$: 유한집합

⑤ $\{1, 4, 9, 16, \cdots\}$: 무한집합 답 ④

0074

① $\{101, 102, 103, 104, \cdots\}$: 무한집합

② 0과 1 사이의 무리수는 무수히 많으므로 무한집합

③ 1보다 작은 유리수는 무수히 많으므로 무한집합

④ $\varnothing$: 유한집합

⑤ $\{3, 6, 9, 12, \cdots\}$: 무한집합 답 ④

0075

공집합은 원소가 하나도 없는 집합이므로 '$x<k$인 6의 양의 배수'를 만족시키는 x가 하나도 없으려면 k의 값이 될 수 있는 수는 6 이하의 자연수, 즉 1, 2, 3, 4, 5, 6이다.

따라서 구하는 합은 $1+2+3+4+5+6=21$이다. 답 21

참고 $k=7$이면 $A=\{x|x$는 $x<7$인 6의 양의 배수$\}=\{6\}$이 되어 공집합이 아니다.

Lecture

- 집합 $\{x|x$는 $x<\square$인 a의 양의 배수$\}$가 공집합
  ⇨ □ 안에 들어갈 수 있는 수는 a 이하의 자연수
- 집합 $\{x|x$는 $x>\square$인 a의 양의 약수$\}$가 공집합
  ⇨ □ 안에 들어갈 수 있는 수는 a 이상의 자연수

0076

|전략| 집합 A, B, C를 원소나열법으로 나타낸 다음 각각의 원소의 개수를 구한다.

집합 A는 10의 양의 약수의 집합과 같으므로

$A=\{1, 2, 5, 10\}$

$B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=0$일 때, $x=0$, $y=0$이므로

$C=\{(0, 0)\}$

따라서 $n(A)=4$, $n(B)=5$, $n(C)=1$이므로

$n(A)+n(B)+n(C)=10$ 답 10

0077

① $n(\{\varnothing\})=1$, $n(\{-2\})=1$이므로 $n(\{\varnothing\})=n(\{-2\})$

② $n(\{2, 3, 4\})-n(\{4, 5, 6\})=3-3=0$

③ $n(\{a, b, c\})-n(\{b, c\})=3-2=1$

④ $n(\{\varnothing\})-n(\varnothing)=1-0=1$

⑤ $n(A)=0$이면 $A=\varnothing$ 답 ④

0078

$2x+3y=16$을 만족시키는 자연수 x, y의 값은

$x=2$, $y=4$ 또는 $x=5$, $y=2$

따라서 $A=\{(2, 4), (5, 2)\}$이므로 $n(A)=2$ ··· ❶

또, $B=\{1, 2, 3, \cdots, k\}$이므로 $n(B)=k$ ··· ❷

이때, $n(B)-n(A)=4$에서

$k-2=4$ $\therefore k=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $n(A)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $n(B)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0079

|전략| 집합 A에 대하여 원소와 집합 사이의 관계, 집합과 집합 사이의 포함 관계를 알아본다.

① $a\in A$ 또는 $\{a\}\subset A$ ② $b\in A$ 또는 $\{b\}\subset A$

③ $\{b, c\}\subset A$ ④ $\{a, b, c\}\subset A$ 답 ⑤

0080

$A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{2\}$이므로

① $5\notin B$ ② $B\not\subset\{3, 5, 7\}$

④ $B\subset A$ ⑤ $\{2, 7\}\subset A$ 답 ③

0081

집합 A의 원소는 1, $\{2, 3\}$이다.

①, ④ 1은 집합 A의 원소이므로 $1\in A$이고 $\{1\}\subset A$

② $\{2, 3\}$은 집합 A의 원소이므로 $\{2, 3\}\in A$

③ $1\in A$, $\{2, 3\}\in A$이므로 $\{1, \{2, 3\}\}\subset A$ 답 ②

0082

집합 A의 원소는 1, 2, $\{1, 2\}$, $\varnothing$이다.

① $1\in A$, $2\in A$이므로 $\{1, 2\}\subset A$

② $\{1, 2\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{1, 2\}\in A$

③ $\{1, 2\}\in A$이므로 $\{\{1, 2\}\}\subset A$

④ $\varnothing$은 집합 A의 원소이므로 $\varnothing\in A$

⑤ $\varnothing\in A$, $2\in A$이므로 $\{\varnothing, 2\}\subset A$ 답 ⑤

0083

|전략| 집합 사이의 포함 관계는 각 집합을 원소나열법으로 나타내어 각 원소를 비교하여 판단한다.

$A=\{-2, 2\}$, $B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $C=\{-2, 0, 2\}$이므로

$A\subset C\subset B$ 답 ②

0084

집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 $2x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	0	1	2
0	0	1	2
1	2	3	4
2	4	5	6

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

$\therefore B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 xy의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

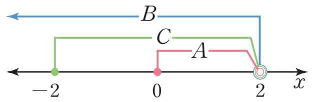
0, 1, 2, 4

$\therefore C=\{0, 1, 2, 4\}$

$\therefore A\subset C\subset B$ 답 ②

0085

세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

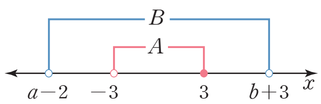


$\therefore A \subset C \subset B$ 답 ②

0086

|전략| 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타낸 후 $A \subset B$임을 이용한다.

두 집합 A, B를 $A \subset B$가 성립하도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $A \subset B$이려면 $a-2 \le -3$, $b+3 > 3$이어야 한다.

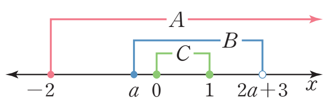
$\therefore a \le -1$, $b > 0$

따라서 정수 a의 최댓값은 -1, 정수 b의 최솟값은 1이다.

답 a의 최댓값 : -1, b의 최솟값 : 1

0087

세 집합 A, B, C를 $C \subset B \subset A$가 성립하도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $C \subset B \subset A$이려면 $-2 \le a \le 0$, $2a+3 > 1$이어야 한다.

$\therefore -1 < a \le 0$

따라서 정수 a는 0의 1개이다. 답 ②

0088

$x^3-2x^2-3x=0$에서 $x(x^2-2x-3)=0$

$x(x+1)(x-3)=0$ $\quad \therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

$\therefore A=\{-1,\ 0,\ 3\}$

이때, 집합 $B=\{x \mid x$는 $x \ge k$인 정수$\}$에 대하여 $A \subset B$이려면 $k \le -1$이어야 한다.

따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다. 답 -1

0089

|전략| $A \subset B$가 성립하려면 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속해야 한다.

$A \subset B$이고 $-4a-3 \in A$, $3 \in A$이므로 $-4a-3 \in B$, $3 \in B$이어야 한다.

(ⅰ) $-4a-3=-7$일 때, $a=1$

이때, $A=\{-7,\ 3\}$, $B=\{-7,\ 8,\ 3\}$이므로 $A \subset B$

(ⅱ) $-4a-3=a+7$일 때, $a=-2$

이때, $A=\{5,\ 3\}$, $B=\{-7,\ 5,\ 6\}$이므로 $A \not\subset B$

(ⅲ) $-4a-3=a^2+2$일 때, $a^2+4a+5=0$

이때, 실수 a는 존재하지 않는다.

(ⅳ) $3=a+7$일 때, $a=-4$

이때, $A=\{13,\ 3\}$, $B=\{-7,\ 3,\ 18\}$이므로 $A \not\subset B$

(ⅴ) $3=a^2+2$일 때, $a=\pm 1$

$a=1$이면 (ⅰ)과 같으므로 $A \subset B$

$a=-1$이면 $A=\{1,\ 3\}$, $B=\{-7,\ 6,\ 3\}$이므로 $A \not\subset B$

(ⅰ)~(ⅴ)에서 $a=1$ 답 1

참고 (ⅲ)에서 얻은 a에 대한 이차방정식 $a^2+4a+5=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=2^2-1\cdot 5=-1<0$이므로 이차방정식 $a^2+4a+5=0$을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

0090

|전략| 집합 A를 원소나열법으로 나타낸 다음 부분집합을 모두 구해 본다.

x, y는 절댓값이 1 이하인 정수이고, $x<y$이므로 x, y의 값이 될 수 있는 수는

$x=-1$, $y=0$ 또는 $x=-1$, $y=1$ 또는 $x=0$, $y=1$

따라서 집합 A의 원소는

$x=-1$, $y=0$일 때, $3x+4y=-3$,

$x=-1$, $y=1$일 때, $3x+4y=1$,

$x=0$, $y=1$일 때, $3x+4y=4$

이므로 $A=\{-3,\ 1,\ 4\}$

① $\varnothing \subset A$ — 공집합은 모든 집합의 부분집합이다.

② $\{-3,\ 0,\ 1,\ 4\} \not\subset A$

③ $\{-3\}$, $\{1\}$, $\{4\}$의 3개이다.

④ $\{-3,\ 1\}$, $\{-3,\ 4\}$, $\{1,\ 4\}$의 3개이다.

⑤ $\{-3,\ 1,\ 4\}$의 1개이다. 답 ③

0091

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$에 대하여 $X \subset A$이고 $n(X)=3$을 만족시키는 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 원소가 3개인 집합이다.

따라서 집합 X는 $\{1,\ 3,\ 5\}$, $\{1,\ 3,\ 7\}$, $\{1,\ 5,\ 7\}$, $\{3,\ 5,\ 7\}$의 4개이다. 답 4

0092

$P(A)$는 집합 A의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합이므로

$P(A)=\{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,\ 2\}\}$

② $\varnothing \in P(A)$이므로 $\{\varnothing\} \subset P(A)$

③ $\{1\} \subset A$이므로 $\{1\} \in P(A)$

④ $\{1,\ 2\} \subset A$이므로 $\{1,\ 2\} \in P(A)$

⑤ $\{1,\ 2\} \in P(A)$이므로 $\{\{1,\ 2\}\} \subset P(A)$ 답 ①

0093

|전략| $A=B$이므로 두 집합 A, B의 원소가 모두 같음을 이용한다.

$A=B$이고 $3\in B$이므로 $3\in A$이어야 한다.

즉, $a^2-2a=3$에서 $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$ $\qquad\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

(i) $a=-1$일 때, $A=\{2,\ 3,\ 8\}$, $B=\{-2,\ 3,\ 4\}$이므로

$A\neq B$

(ii) $a=3$일 때, $A=\{2,\ 3,\ 8\}$, $B=\{2,\ 3,\ 8\}$이므로

$A=B$

(i), (ii)에서 $a=3$ 답 3

0094

$A\subset B$이고 $B\subset A$이면 $A=B$이므로 ··· ❶

$2a+b=7$, $a-2b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$ ··· ❷

$\therefore ab=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $A=B$임을 알 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0095

$A=B$이고 $-1\in B$이므로 $-1\in A$이어야 한다.

즉, $1+5+a=0$ $\qquad\therefore a=-6$

방정식 $x^2-5x-6=0$에서 $(x+1)(x-6)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=6$

따라서 $A=\{-1,\ 6\}$이므로 $b=6$

$\therefore ab=-36$ 답 -36

다른 풀이 $A=B$이므로 이차방정식 $x^2-5x+a=0$의 두 근이 -1, b이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$-1+b=5$ $\qquad\therefore b=6$

$(-1)\cdot b=(-1)\cdot 6=a$ $\qquad\therefore a=-6$

$\therefore ab=-36$

Lecture

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

0096

$A=B$이고 $1\in A$이므로 $1\in B$이어야 한다.

즉, $a-1=1$ 또는 $a^2-4=1$

(i) $a-1=1$일 때, $a=2$

이때, $A=\{1,\ 2,\ 0\}$, $B=\{2,\ 1,\ 0\}$이므로 $A=B$

(ii) $a^2-4=1$일 때, $a=\pm\sqrt{5}$

$a=\sqrt{5}$이면 $A=\{1,\ 2,\ 5-2\sqrt{5}\}$, $B=\{2,\ \sqrt{5}-1,\ 1\}$이므로

$A\neq B$

$a=-\sqrt{5}$이면 $A=\{1,\ 2,\ 5+2\sqrt{5}\}$, $B=\{2,\ -\sqrt{5}-1,\ 1\}$이므로

$A\neq B$

(i), (ii)에서 $a=2$ 답 ④

0097

|전략| 집합 X는 2, 5를 반드시 원소로 갖는 집합 A의 진부분집합이다.

집합 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$의 진부분집합 중에서 2, 5를 반드시 원소로 갖는 집합 X의 개수는

$2^{6-2}-1=2^4-1=15$ 답 15

참고 구하는 집합 X의 개수는 집합 $\{1,\ 4,\ 10,\ 20\}$의 진부분집합의 개수와 같다.

0098

집합 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합 중에서 2, 3은 반드시 원소로 갖고, 5는 원소로 갖지 않는 집합 A의 개수는

$2^{6-2-1}=2^3=8$ 답 ②

0099

집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ n\}$의 부분집합 중에서 1, 2는 반드시 원소로 갖고, 3, 4는 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{n-2-2}=16=2^4$

$n-4=4$ $\qquad\therefore n=8$ 답 8

0100

|전략| 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낸 후 조건을 만족시키는 집합 X의 개수를 구한다.

$x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$ $\qquad\therefore x=1$ 또는 $x=3$

$\therefore A=\{1,\ 3\}$

한 자리의 홀수는 1, 3, 5, 7, 9이므로

$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

따라서 집합 X의 개수는 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$의 부분집합 중 1, 3을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{5-2}=2^3=8$ 답 ③

0101

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

따라서 집합 X의 개수는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 부분집합 중 1, 3, 5, 7은 반드시 원소로 갖고, 4는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{7-4-1}=2^2=4$ 답 4

0102

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

따라서 집합 X의 개수는 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$의 부분집합 중 2, 3, 5, 7을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수에서 집합 A, B를 제외한 것과 같으므로

$2^{10-4}-2=2^6-2=62$ 답 62

0103

| 전략 | 집합 X의 개수를 n에 대한 식으로 나타낸다.

집합 X의 개수는 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$의 부분집합 중 1, 2, 4, 8을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{n-4}=32=2^5$에서

$n-4=5\qquad \therefore n=9$ 답 9

0104

| 전략 | (적어도 하나의 홀수를 원소로 갖는 부분집합의 개수)
=(전체 부분집합의 개수)
−(원소가 짝수만으로 이루어진 집합의 부분집합의 개수)

$A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15\}$

적어도 하나의 홀수를 원소로 갖는 집합은 집합 A의 부분집합 중 $\{6,\ 12\}$의 부분집합을 제외하면 된다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^5-2^2=32-4=28$ 답 28

Lecture

원소의 개수가 n인 집합 A에 대하여 특정한 $k(k\le n)$개의 원소 중 적어도 한 개를 포함하는 A의 부분집합의 개수 ⇨ 2^n-2^{n-k}

0105

1 또는 3을 원소로 갖는 집합은 집합 A의 부분집합 중 $\{2,\ 4,\ 5\}$의 부분집합을 제외하면 된다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^5-2^3=32-8=24$ 답 ④

다른 풀이 1 또는 3을 원소로 갖는 집합은 집합 $\{2,\ 4,\ 5\}$의 부분집합에 1만 넣거나 3만 넣거나 1, 3을 넣으면 된다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^3\cdot 3=24$

0106

집합 B의 원소를 적어도 하나 포함하는 부분집합은 집합 A의 진부분집합 중 $\{b,\ d\}$의 부분집합을 제외하면 된다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$(2^6-1)-2^2=63-4=59$ 답 ③

0107

| 전략 | 주어진 조건을 이용하여 집합 A의 원소를 구해 본다.

x와 $8-x$가 모두 자연수이므로

$x\ge 1,\ 8-x\ge 1$

$\therefore 1\le x\le 7$

따라서 집합 A의 원소가 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이다.

① $2\in A$이면 $8-2=6\in A$

② 원소의 개수가 1인 집합 A는 $A=\{4\}$

③ 원소의 개수가 2인 집합 A는 $\{1,\ 7\}$, $\{2,\ 6\}$, $\{3,\ 5\}$의 3개이다.

④ 원소의 개수가 5인 집합 A는 $\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 7\}$, $\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$, $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 3개이다.

⑤ 원소의 개수가 가장 많은 집합 A는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$로 원소의 개수가 7이다. 답 ④

Lecture

집합 A의 모든 원소는 자연수이고, x가 집합 A의 원소이면 $8-x$도 집합 A의 원소이다.
즉, $1\in A$이면 $7\in A$, $2\in A$이면 $6\in A$, $3\in A$이면 $5\in A$, $4\in A$이면 $4\in A$이므로 1과 7, 2와 6, 3과 5, 4는 어느 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A의 원소이다.

0108

| 전략 | 각각의 원소를 최솟값으로 하는 부분집합의 개수를 구한다.

가장 작은 원소가 1인 부분집합은 1을 원소로 갖는 부분집합과 같으므로 그 개수는

$2^{5-1}=2^4=16$

가장 작은 원소가 2인 부분집합은 2를 원소로 갖고, 1은 원소로 갖지 않는 부분집합과 같으므로 그 개수는

$2^{5-1-1}=2^3=8$

마찬가지로 가장 작은 원소가 3, 4, 5인 부분집합의 개수는 각각

$2^{5-1-2}=2^2=4,\ 2^{5-1-3}=2,\ 2^{5-1-4}=1$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{31}=1\cdot 16+2\cdot 8+3\cdot 4+4\cdot 2+5\cdot 1$
$=57$ 답 57

0109

| 전략 | 먼저 원소의 개수가 2이면서 −2를 원소로 갖는 부분집합을 구한다.

집합 $A=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2이면서 −2를 원소로 갖는 부분집합은

$\{-2,\ -1\}$, $\{-2,\ 0\}$, $\{-2,\ 1\}$, $\{-2,\ 2\}$, $\{-2,\ 3\}$

의 5개이다.

즉, A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{15} 중에서 −2를 원소로 갖는 집합은 위의 5개이다.

마찬가지로 원소의 개수가 2이면서 −1, 0, 1, 2, 3을 원소로 갖는 부분집합도 각각 5개씩 있다.

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15}=(-2-1+0+1+2+3)\cdot 5$
$=3\cdot 5=15$ 답 15

다른 풀이 집합 $A_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 15)$를 직접 구해 보면
$\{-2,\ -1\}$, $\{-2,\ 0\}$, $\{-2,\ 1\}$, $\{-2,\ 2\}$, $\{-2,\ 3\}$,
$\{-1,\ 0\}$, $\{-1,\ 1\}$, $\{-1,\ 2\}$, $\{-1,\ 3\}$,
$\{0,\ 1\}$, $\{0,\ 2\}$, $\{0,\ 3\}$,
$\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$,
$\{2,\ 3\}$
각각의 집합을 살펴보면 원소 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$을 포함하는 집합이 5개씩 있음을 알 수 있다.
$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15}=(-2-1+0+1+2+3)\cdot 5$
$=3\cdot 5=15$

0110

|전략| 집합 A의 원소의 개수가 1, 2, 3일 때로 나누어 생각해 본다.

$A\subset B\subset X$이고, $n(X)=3$이므로
(i) $n(A)=1$일 때
집합 A는 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$의 3개이고, 각각의 집합에 대하여 집합 B는 집합 A의 원소를 반드시 포함하므로 집합 B의 개수는
$2^{3-1}=2^2=4$
따라서 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는 $3\cdot 4=12$
(ii) $n(A)=2$일 때
집합 A는 $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 3\}$의 3개이고, 각각의 집합에 대하여 집합 B는 집합 A의 원소를 반드시 포함하므로 집합 B의 개수는 $2^{3-2}=2$
따라서 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는 $3\cdot 2=6$
(iii) $n(A)=3$일 때
집합 A는 $\{1,\ 2,\ 3\}$이고, $A\subset B\subset X$를 만족시키려면 $B=\{1,\ 2,\ 3\}$이어야 한다.
따라서 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는 1이다.
(i), (ii), (iii)에 의하여 조건을 만족시키는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는
$12+6+1=19$ 답 19

STEP 3 내신 마스터

0111

유형 02 집합과 원소 사이의 관계

|전략| 집합 A를 원소나열법으로 나타낸 다음 집합과 원소 사이의 관계를 알아본다.

$x^4-2x^2+1=0$에서 $x^2=X$로 놓으면
$X^2-2X+1=0$, $(X-1)^2=0$
$\therefore X=1$
즉, $x^2=1$이므로 $x=\pm 1$
$\therefore A=\{-1,\ 1\}$
① $-2\not\in A$ ③ $0\not\in A$
④ $1\in A$ ⑤ $2\not\in A$ 답 ②

0112

유형 03 집합의 표현 방법

|전략| a, b의 값의 부호에 따라 집합 A의 원소를 구해 본다.

(i) $a>0$, $b>0$일 때
$$x=\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{ab}{ab}+\frac{ab}{ab}=4$$
(ii) $a>0$, $b<0$일 때
$$x=\frac{a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-ab}{ab}+\frac{ab}{-ab}=-2$$
(iii) $a<0$, $b>0$일 때
$$x=\frac{a}{-a}+\frac{b}{b}+\frac{-ab}{ab}+\frac{ab}{-ab}=-2$$
(iv) $a<0$, $b<0$일 때
$$x=\frac{a}{-a}+\frac{-b}{b}+\frac{ab}{ab}+\frac{ab}{ab}=0$$
따라서 $A=\{-2,\ 0,\ 4\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 합은 2이다.
답 ⑤

0113

유형 03 집합의 표현 방법

|전략| 집합 B는 집합 A의 서로 다른 두 원소 x, y의 합 $x+y$를 원소로 갖는 집합이다.

집합 A의 서로 다른 두 원소 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	a	b	c
a		$a+b$	$a+c$
b	$a+b$		$b+c$
c	$a+c$	$b+c$	

$a+b$, $a+c$, $b+c$
$\therefore B=\{a+b,\ a+c,\ b+c\}$
$=\{10,\ 14,\ 18\}$
이때, $a<b<c$라 하면 $a+b<a+c<b+c$이므로
$a+b=10$ …… ㉠
$a+c=14$ …… ㉡
$b+c=18$ …… ㉢
㉡$-$㉠을 하면
$c-b=4$ …… ㉣
㉢, ㉣에서 $b=7$, $c=11$
$b=7$을 ㉠에 대입하면 $a=3$
따라서 집합 A의 원소 중 가장 큰 수는 11이다. 답 ⑤

0114

유형 04 유한집합과 무한집합

|전략| 각각의 집합이 유한집합인지 무한집합인지 조사하여 a, b의 값을 구한다.

ㄱ. 무한집합
ㄴ. 임의의 실수 x에 대하여 $x^2\ge 0$이므로 $x^2<0$인 실수 x는 존재하지 않는다.
⇨ $\varnothing$: 공집합(유한집합)
ㄷ. $\{-1\}$: 유한집합
ㄹ. $\{4,\ 7,\ 10,\ \cdots\}$: 무한집합
따라서 $a=2$, $b=2$이므로 $a-b=0$ 답 ③

0115

유형 **05** 유한집합의 원소의 개수

|전략| $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수를 뜻한다.

① $n(\{1,\ 2,\ 3\})-n(\{1,\ 2\})=3-2=1$

② $n(\{x\,|\,x<3,\ x\text{는 자연수}\})=n(\{1,\ 2\})=2$

③ $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5\}$이면 $n(A)<n(B)$이지만 $A\not\subset B$이다.

⑤ $n(\{\varnothing\})=1$, $n(\varnothing)=0$이므로 $n(\{\varnothing\})\neq n(\varnothing)$

답 ④

0116

유형 **06** 기호 ∈, ⊂의 사용

|전략| 집합 X에 대하여 원소와 집합 사이의 관계, 집합과 집합 사이의 포함 관계를 알아본다.

집합 X의 원소는 $\varnothing,\ x,\ \{\varnothing\}$이다.

①, ② $\varnothing$은 집합 X의 원소이므로 $\varnothing\in X$, $\{\varnothing\}\subset X$

③ $x\in X$이므로 $\{x\}\subset X$

④ $\{\varnothing\}\in X$이므로 $\{\{\varnothing\}\}\subset X$

⑤ $x\in X$, $\{\varnothing\}\in X$이므로 $\{x,\ \{\varnothing\}\}\subset X$

답 ④

0117

유형 **10** 서로 같은 집합에서 미지수 구하기

|전략| $A=B$이므로 두 집합 A, B의 원소가 모두 같음을 이용한다.

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$, $B=\{1,\ 3,\ a-1,\ b+5\}$에 대하여

$A=B$이므로

$a-1=5,\ b+5=15$ 또는 $a-1=15,\ b+5=5$

$\therefore a=6,\ b=10$ 또는 $a=16,\ b=0$

그런데 a, b는 자연수이므로 $a=6$, $b=10$

$\therefore ab=60$

답 ③

0118

유형 **11** 특정한 원소를 갖는(갖지 않는) 부분집합의 개수

|전략| 특정한 원소를 갖거나 갖지 않는 부분집합의 개수는 그 원소를 빼고 생각한다.

집합 A의 부분집합 중에서 3, 7은 반드시 원소로 갖고, 11, 13은 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{8-2-2}=2^4=16$

답 ③

참고 구하는 집합의 개수는 집합 $\{1,\ 5,\ 9,\ 15\}$의 부분집합의 개수와 같다.

0119

유형 **13** 조건이 복잡한 부분집합의 개수

|전략| (4의 양의 약수를 적어도 하나 원소로 갖는 부분집합의 개수)
=(전체 부분집합의 개수)
−(원소가 4의 양의 약수가 아닌 것만으로 이루어진 집합의 부분집합의 개수)

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

4의 양의 약수는 1, 2, 4이므로 4의 양의 약수를 적어도 하나 원소로 갖는 집합은 집합 A의 부분집합 중 $\{3,\ 6,\ 12\}$의 부분집합을 제외하면 된다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^6-2^3=64-8=56$

답 ⑤

0120

유형 **14** 여러 가지 발전 문제

|전략| 주어진 조건을 이용하여 집합 A의 원소가 될 수 있는 a의 값을 찾는다.

a와 $\dfrac{81}{a}$이 모두 자연수이므로 집합 A의 원소가 될 수 있는 자연수는 81의 양의 약수인 1, 3, 9, 27, 81이다.

이때, $a\in A$이면 $\dfrac{81}{a}\in A$이므로 1과 81, 3과 27, 9는 어느 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A의 원소이다.

따라서 원소의 개수에 따라 집합 A를 구해 보면

원소가 1개일 때, $A=\{9\}$

원소가 2개일 때, $A=\{1,\ 81\}$, $A=\{3,\ 27\}$

원소가 3개일 때, $A=\{1,\ 9,\ 81\}$, $A=\{3,\ 9,\ 27\}$

원소가 4개일 때, $A=\{1,\ 3,\ 27,\ 81\}$

원소가 5개일 때, $A=\{1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81\}$

이므로 조건을 만족시키는 집합 A의 개수는 7이다.

답 ⑤

다른 풀이 $a\in A$이면 $\dfrac{81}{a}\in A$이므로

$1\in A$이면 $81\in A$

$3\in A$이면 $27\in A$

$9\in A$이면 $9\in A$

$27\in A$이면 $3\in A$

$81\in A$이면 $1\in A$

따라서 집합 A는 $(1,\ 81)$, $(3,\ 27)$, 9를 원소로 갖는 집합의 부분집합에서 $\varnothing$을 제외한 것이므로 구하는 집합 A의 개수는

$2^3-1=7$

참고 집합 A를 만들면 다음과 같다.

$\{(1,\ 81),\ (3,\ 27)\}$일 때, $A=\{1,\ 3,\ 27,\ 81\}$

$\{(1,\ 81),\ 9\}$일 때, $A=\{1,\ 9,\ 81\}$

⋮

0121

유형 **08** 집합의 포함 관계를 이용하여 미지수 구하기

|전략| 먼저 이차방정식을 풀어 집합 A의 원소를 구한다.

$x^2-2(a+1)x+a(a+2)=0$에서 $(x-a)(x-a-2)=0$

$\therefore x=a$ 또는 $x=a+2$

$\therefore A=\{a,\ a+2\}$ ··· ❶

이때, 집합 $B=\{x\,|\,x<4\}$에 대하여 $A\subset B$이려면

$a+2<4$이어야 한다.

$\therefore a<2$ ··· ❷

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다. ··· ❸

답 1

채점 기준	배점
❶ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	3점
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점
❸ 정수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	2점

0122

유형 12 $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수

|전략| 집합 X는 집합 B의 원소를 반드시 포함하는 집합 A의 부분집합이다.

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 18\}$, $B=\{4,\ 8,\ 12,\ 16\}$ ··· ❶

따라서 집합 X의 개수는 $\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 18\}$의 부분집합 중 4, 8, 12, 16을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로 ··· ❷

$2^{9-4}=2^5=32$ ··· ❸

답 32

채점 기준	배점
❶ 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	2점
❷ 조건을 만족시키는 집합 X의 개수와 같은 경우를 구할 수 있다.	3점
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	3점

0123

유형 05 유한집합의 원소의 개수

|전략| 먼저 집합 A의 원소를 구하고, 집합 A의 두 원소 x, y의 제곱의 합 x^2+y^2을 원소로 갖는 집합 B를 구한다.

(1) 음이 아닌 정수 k에 대하여

$i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$, $i^{4k+4}=1$이므로

$A=\{i,\ -1,\ -i,\ 1\}$

(2) 집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 x^2+y^2의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	i	-1	$-i$	1
i	-2	0	-2	0
-1	0	2	0	2
$-i$	-2	0	-2	0
1	0	2	0	2

$-2,\ 0,\ 2$

$\therefore B=\{-2,\ 0,\ 2\}$

(3) $n(B)=3$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	4점
(2) 집합 B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	6점
(3) $n(B)$를 구할 수 있다.	2점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0124

|전략| 주어진 조건을 이용하여 집합 $A_k(a)$를 구한다.

ㄱ. $A_1(3)=\{x\,|\,N(3,\ x)=1\}$에서 $N(3,\ x)=1$은 3과 x의 공약수의 개수가 1이라는 의미이므로 $A_1(3)$은 100 이하의 자연수 중 3과 서로소인 자연수의 집합이다.

이때, 3과 4는 서로소이므로 $4\in A_1(3)$

ㄴ. $A_3(4)=\{x\,|\,N(4,\ x)=3\}$에서 $N(4,\ x)=3$은 4와 x의 공약수의 개수가 3이라는 의미이다.

이때, 4의 약수의 개수가 3이므로 $A_3(4)$는 4의 배수의 집합이다.

따라서 100 이하의 자연수 중 4의 배수는 4, 8, 12, $\cdots$, 100의 25개이므로 집합 $A_3(4)$의 원소의 개수는 25이다.

ㄷ. $A_2(a)=\{x\,|\,N(a,\ x)=2\}$에서 $N(a,\ x)=2$는 a와 x의 공약수의 개수가 2라는 의미이다.

이때, a가 소수이면 a의 약수의 개수는 2이므로 x는 a의 배수이어야 한다. 즉, $A_2(a)$는 a의 배수의 집합이다.

따라서 집합 $A_2(a)$의 원소의 개수는 100 이하의 자연수 중 a의 배수의 개수와 같으므로 $\left[\dfrac{100}{a}\right]$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

Lecture

k 이하의 자연수 중 n의 배수의 개수는

⇨ $\left[\dfrac{k}{n}\right]$ (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

0125

|전략| $\left[\dfrac{x}{n}\right]=1$에서 $n\le x<2n$임을 이용하여 $n(A_n)$을 구한다.

$\left[\dfrac{x}{n}\right]=1$에서 $1\le\dfrac{x}{n}<2$, $n\le x<2n$

$\therefore n(A_n)=2n-n=n$

따라서 $n(A_3)=3$, $n(A_k)=k$이므로

$n(A_3)=\dfrac{n(A_k)}{l}$에서 $3=\dfrac{k}{l}$

$\therefore k=3l$

이때, k, l은 100 이하의 자연수이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 $(k,\ l)$은 $(3,\ 1)$, $(6,\ 2)$, $\cdots$, $(99,\ 33)$의 33개이다.

답 33

0126

|전략| a, a^2, a^3, $\cdots$의 일의 자리의 수를 구하여 집합 $A(a)$를 원소나열법으로 나타낸다.

ㄱ. $A(2)$는 2를 거듭제곱한 수들의 일의 자리의 수 전체의 집합이다.

2를 거듭제곱하면 일의 자리의 수는 2, 4, 8, 6이 차례로 반복되므로

$A(2)=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

$\therefore 6\in A(2)$

ㄴ. $A(8)$은 8을 거듭제곱한 수들의 일의 자리의 수 전체의 집합이다.

8을 거듭제곱하면 일의 자리의 수는 8, 4, 2, 6이 차례로 반복되므로

$A(8)=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

이때, ㄱ에서 $A(2)=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$이므로

$A(8)=A(2)$

ㄷ. $A(7)$은 7을 거듭제곱한 수들의 일의 자리의 수 전체의 집합이다.

7을 거듭제곱하면 일의 자리의 수는 7, 9, 3, 1이 차례로 반복되므로

$A(7)=\{1,\ 3,\ 7,\ 9\}$

이때, 3을 거듭제곱하면 일의 자리의 수는 3, 9, 7, 1이 차례로 반복되므로

$A(3)=\{1,\ 3,\ 7,\ 9\}$

따라서 거듭제곱한 수들의 일의 자리의 수의 집합이 $\{1,\ 3,\ 7,\ 9\}$이려면 자연수 k의 일의 자리의 수는 3 또는 7이어야 한다.

이때, k는 30 이하의 자연수이므로 조건을 만족시키는 k의 값은 3, 7, 13, 17, 23, 27이다.

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$3+7+13+17+23+27=90$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0127

|전략| $x-[x]=\frac{1}{n}$이면 $x=[x]+\frac{1}{n}$이므로 A_n을 구해 본다.

$x-[x]=\frac{1}{n}$에서 $x=[x]+\frac{1}{n}$

이때, $[x]=k$(k는 정수)라 하면

$A_n=\left\{x \middle| x=k+\frac{1}{n},\ k\text{는 정수}\right\}$

ㄱ. $A_5=\left\{x \middle| x=k+\frac{1}{5},\ k\text{는 정수}\right\}$

$=\left\{\cdots,\ -\frac{9}{5},\ -\frac{4}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{6}{5},\ \frac{11}{5},\ \cdots\right\}$

$\therefore -\frac{1}{5}\notin A_5$

ㄴ. $A_4=\left\{x \middle| x=k+\frac{1}{4},\ k\text{는 정수}\right\}$

$=\left\{\cdots,\ -\frac{7}{4},\ -\frac{3}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{9}{4},\ \cdots\right\}$

$A_2=\left\{x \middle| x=k+\frac{1}{2},\ k\text{는 정수}\right\}$

$=\left\{\cdots,\ -\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \cdots\right\}$

$\therefore A_4\not\subset A_2$

ㄷ. 2 이상의 두 자연수 m, n에 대하여

$A_m=\left\{x \middle| x=k+\frac{1}{m},\ k\text{는 정수}\right\}$

$=\left\{\cdots,\ -2+\frac{1}{m},\ -1+\frac{1}{m},\ \frac{1}{m},\ 1+\frac{1}{m},\ 2+\frac{1}{m},\ \cdots\right\}$

이므로 $a(A_m)=\frac{1}{m}$

$A_n=\left\{x \middle| x=k+\frac{1}{n},\ k\text{는 정수}\right\}$

$=\left\{\cdots,\ -2+\frac{1}{n},\ -1+\frac{1}{n},\ \frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n},\ 2+\frac{1}{n},\ \cdots\right\}$

이므로 $a(A_n)=\frac{1}{n}$

이때, $2\le m<n$이므로 $\frac{1}{m}>\frac{1}{n}$

$\therefore a(A_m)>a(A_n)$

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

0128

|전략| $N=p^a q^b r^c$(p, q, r는 서로 다른 소수, a, b, c는 자연수)일 때, N의 양의 약수의 개수는 $(a+1)(b+1)(c+1)$이다.

조건 (가)에서 $A_3\subset A_m\subset A_{120}$이므로

m은 3의 배수이고 120의 약수이다.

집합 A_m의 원소의 개수를 a라 하면 조건 (나)에서 A_m의 부분집합의 개수가 256이므로

$2^a=256=2^8 \qquad \therefore a=8$

이때, $120=2^3\cdot3\cdot5$이므로 120의 약수 중 약수의 개수가 8이고, 3의 배수인 자연수 m은 $2^3\cdot3$ 또는 $2\cdot3\cdot5$, 즉 24 또는 30이다.

따라서 모든 자연수 m의 값의 합은

$24+30=54$ 답 54

0129

|전략| $S(X)=8$을 만족시키는 경우를 세 가지로 나누어 각각의 경우를 만족시키는 집합 X를 생각한다.

집합 A의 두 원소의 합이 8이 되는 경우는 1과 7, 2와 6, 3과 5이다.

(i) 가장 작은 원소가 1, 가장 큰 원소가 7일 때

집합 X의 개수는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 부분집합 중 1, 7을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{7-2}=2^5=32$

(ii) 가장 작은 원소가 2, 가장 큰 원소가 6일 때

집합 X의 개수는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 부분집합 중 2, 6을 반드시 원소로 갖고, 1, 7은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{7-2-2}=2^3=8$

(iii) 가장 작은 원소가 3, 가장 큰 원소가 5일 때

집합 X의 개수는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 부분집합 중 3, 5를 반드시 원소로 갖고, 1, 2, 6, 7은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{7-2-4}=2$

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$32+8+2=42$ 답 42

본책 24~41쪽

2 | 집합의 연산

STEP 1 개념 마스터

0130 답 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$

0131
$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$, $B=\{5,\ 10,\ 15,\ 20\}$이므로
$A\cup B=\{1,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20\}$ 답 $\{1,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20\}$

0132
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$, $B=\{10,\ 11,\ 12,\ \cdots\}$이므로
$A\cup B=\{x\,|\,x$는 자연수$\}$ 답 $\{x\,|\,x$는 자연수$\}$

0133
$A=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$, $B=\varnothing$이므로
$A\cup B=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$ 답 $\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$

0134
$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$이므로
$A\cap B=\{2,\ 4,\ 8\}$ 답 $\{2,\ 4,\ 8\}$

0135
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$이므로
$A\cap B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ 답 $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

0136 답 $\varnothing$

0137 답 (1) $\{2,\ 6\}$ (2) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

0138 답 서로소이다.

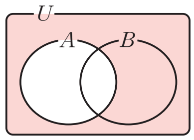
0139
$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$이므로
$A\cap B=\{3,\ 5,\ 7\}$
따라서 A와 B는 서로소가 아니다. 답 서로소가 아니다.

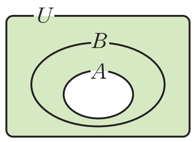
0140
$A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{-2,\ 0\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$
따라서 A와 B는 서로소이다. 답 서로소이다.

0141 답 $\{2,\ 4,\ 6\}$

0142 답 $\{1,\ 2,\ 3\}$

0143
$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 $C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로
$C^C=\{4,\ 5\}$ 답 $\{4,\ 5\}$

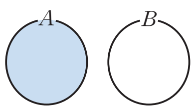
0144 답


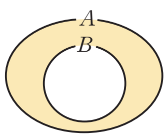
0145 답


0146 답 $\{1,\ 2\}$

0147 답 $\varnothing$

0148
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$이므로
$A-B=\{3,\ 6\}$ 답 $\{3,\ 6\}$

0149 답


0150 답


0151 답 (1) $\{4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ (2) $\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 8\}$ (3) $\{1,\ 2,\ 3\}$
(4) $\{4,\ 7,\ 9\}$ (5) $\{6,\ 8\}$ (6) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

0152
① $\varnothing\subset A$ ③ $A\cap U=A$
④ $A\cup\varnothing=A$ ⑤ $U^C=\varnothing$ 답 ②

0153
ㄱ. $A-A^C=A\cap(A^C)^C=A\cap A=A$
ㅁ. $B-A=B\cap A^C$
ㅂ. $(A\cap B)\subset(A\cup B)$
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

0154 답 A

0155 답 B

0156 답 $\varnothing$

0157 답 $\varnothing$

0158

$(A\cup C)\cap(B\cup C)$
$=(A\cap B)\cup C$ 분배법칙
$=\{3\}\cup\{2,\ 4,\ 6\}$
$=\{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$ 답 $\{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$

다른 풀이 $(A\cup C)\cap(B\cup C)=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}\cap\{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$
$=\{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$

0159

(1) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10\}$이므로
$(A\cup B)^C=\{4,\ 6,\ 8\}$
(2) $A^C=\{3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$, $B^C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$이므로
$A^C\cap B^C=\{4,\ 6,\ 8\}$
(3) $A\cap B=\{1,\ 5\}$이므로
$(A\cap B)^C=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$
(4) $A^C=\{3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$, $B^C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$이므로
$A^C\cup B^C=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

답 (1) $\{4,\ 6,\ 8\}$ (2) $\{4,\ 6,\ 8\}$ (3) $\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$
(4) $\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

0160 답 (가) ㄹ (나) ㄴ

0161 답 (가) ㄹ (나) ㄷ

0162

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=12+9-16=5$ 답 5

0163

(1) $n(A^C)=n(U)-n(A)$
$=30-20=10$
(2) $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$
$=17-12=5$
(3) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=20+17-12=25$
(4) $n(A\cap B^C)=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=20-12=8$

답 (1) 10 (2) 5 (3) 25 (4) 8

0164

(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=36+18-10=44$
(2) $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$
$=50-44=6$
(3) $n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$
$=50-10=40$

답 (1) 44 (2) 6 (3) 40

0165

$n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=10+14+15-5-6-3+2$
$=27$ 답 27

STEP 2 유형 마스터

0166

|전략| 집합 A, B, C를 원소나열법으로 나타낸 후 $(A\cup B)\cap C$를 구한다.

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B=\{1,\ 3,\ 9\}$, $C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로
$(A\cup B)\cap C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}\cap\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$
$=\{1,\ 3\}$ 답 ④

0167

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $B=\{1,\ 4,\ 7\}$, $C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로
④ $(A\cap B)\cup C=\{4\}\cup\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$ 답 ④

0168

집합 B는 3, 5를 반드시 원소로 갖고, 1, 9, 11을 원소로 갖지 않아야 하므로 집합 B가 될 수 있는 것은 ④ $\{3,\ 5,\ 6,\ 8\}$이다. 답 ④

0169

|전략| $A\cap B=\varnothing$이면 두 집합 A, B는 서로소이다.

$A=\{x\mid x=3n+1,\ n$은 정수$\}$
$=\{\cdots,\ -8,\ -5,\ -2,\ 1,\ 4,\ 7,\ \cdots\}$
ㄱ. $B=\{x\mid x=2n,\ n$은 정수$\}$
$=\{\cdots,\ -6,\ -4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$
ㄴ. $C=\{x\mid x=2n+1,\ n$은 정수$\}$
$=\{\cdots,\ -5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ \cdots\}$
ㄷ. $D=\{x\mid x=3n-1,\ n$은 정수$\}$
$=\{\cdots,\ -7,\ -4,\ -1,\ 2,\ 5,\ 8,\ \cdots\}$
따라서 $A\cap D=\varnothing$이므로 A와 서로소인 집합은 ㄷ. D이다. 답 ㄷ

0170

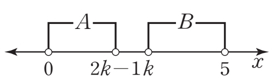
구하는 집합은 집합 A의 부분집합 중 a, b를 원소로 갖지 않는 집합이므로 $\{c,\ d\}$의 부분집합과 같다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^2=4$ 답 4

0171

집합 B와 서로소인 집합은 집합 A의 부분집합 중 집합 B의 원소를 포함하지 않는 집합이다.
집합 B의 원소의 개수를 n이라 하면
$2^{6-n}=8=2^3$에서
$6-n=3 \qquad \therefore n=3$ 답 ③

0172

두 집합 A, B가 서로소, 즉 $A\cap B=\varnothing$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 … ❶



$2k-1\le k \qquad \therefore k\le 1$ … ❷
따라서 정수 k의 최댓값은 1이다. … ❸
답 1

채점 기준	비율
❶ 두 집합 A, B가 서로소가 되도록 수직선 위에 나타낼 수 있다.	50 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ 정수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

0173

|전략| 집합 U, A, B를 원소나열법으로 나타낸 후 먼저 $B-A$를 구해 본다.

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12\}$, $A=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$,
$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$이므로
$B-A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}-\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$
$\quad=\{4,\ 6,\ 8,\ 12\}$
$\therefore (B-A)^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11\}$
답 $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11\}$

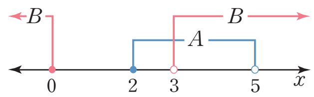
다른 풀이 $(B-A)^C=(B\cap A^C)^C=B^C\cup A$
$B^C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$, $A=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$이므로
$(B-A)^C=B^C\cup A=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11\}$

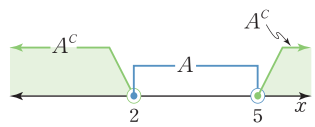
0174

$A\cup B=\{a,\ b,\ c,\ d\}$이므로
$(A\cup B)^C=\{e,\ f\}$ …… ㉠
$A=\{a,\ c,\ d\}$, $B^C=\{a,\ c,\ e,\ f\}$이므로
$A-B^C=\{a,\ c,\ d\}-\{a,\ c,\ e,\ f\}=\{d\}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $(A\cup B)^C\cup(A-B^C)=\{d,\ e,\ f\}$ 답 $\{d,\ e,\ f\}$

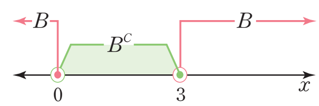
0175

주어진 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.

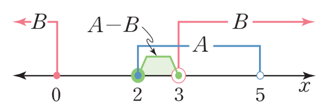


①


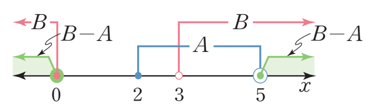
$A^C=\{x\,|\,x<2$ 또는 $x\ge 5\}$

②


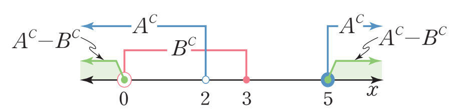
$B^C=\{x\,|\,0<x\le 3\}$

③


$A-B=\{x\,|\,2\le x\le 3\}$

④


$B-A=\{x\,|\,x\le 0$ 또는 $x\ge 5\}$

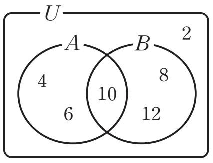
⑤


$A^C-B^C=\{x\,|\,x\le 0$ 또는 $x\ge 5\}$ 답 ⑤

0176

|전략| 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내어 집합 A를 찾는다.

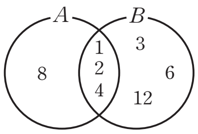
$U=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$,
$(A\cup B)^C=\{2\}$,
$A-B=\{4,\ 6\}$,
$A^C\cap B=B-A=\{8,\ 12\}$
이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore A=\{4,\ 6,\ 10\}$ 답 $\{4,\ 6,\ 10\}$

0177

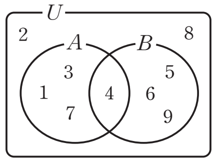
$A=\{1, 2, 4, 8\}$이므로 A, $A\cap B$, $A\cup B$를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$
답 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

0178

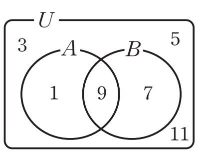
$U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9\}$,
$(A\cup B)^C=\{2,\ 8\}$,
$A\cap B=\{4\}$,
$A\cap B^C=A-B=\{1,\ 3,\ 7\}$
이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



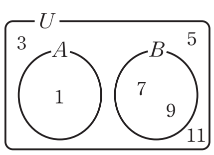
$\therefore B=\{4,\ 5,\ 6,\ 9\}$
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은 $4+5+6+9=24$ 답 ①

0179

$U=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$이고, 조건 ㈎에서 $(A\cup B)^C=\{3,\ 5,\ 11\}$
이므로 $A\cup B=\{1,\ 7,\ 9\}$
조건 ㈐에서 집합 B의 모든 원소의 합은 16이므로 $B=\{7,\ 9\}$
또한, 조건 ㈏에서 $A\subset\{1,\ 3,\ 9\}$이므로 집합 A의 원소가 될 수 있는 것은 1 또는 9이다.
주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



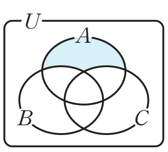
또는

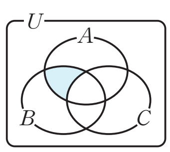


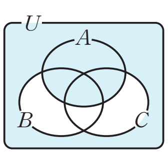
$\therefore A-B=\{1\}$ 답 $\{1\}$

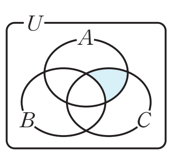
0180

|전략| 각 집합을 벤 다이어그램으로 나타낸 후 주어진 벤 다이어그램과 비교한다.

①


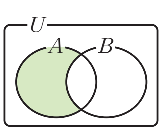
②


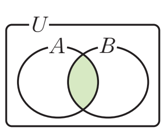
③


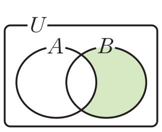
④


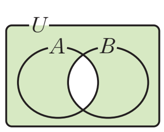
답 ⑤

0181

①


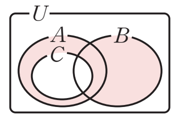
②


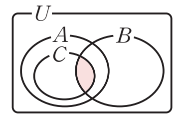
④


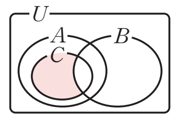
⑤


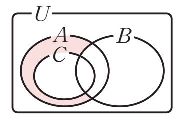
답 ③

0182

②


③


④


⑤


답 ①

0183

|전략| $A\cap B=\{a\}$이면 $a\in A$, $a\in B$임을 이용한다.

$A\cap B=\{0,\ 1\}$에서 $0\in A$이므로
$a^2+2a=0$, $a(a+2)=0$ $\quad\therefore a=0$ 또는 $a=-2$
(i) $a=0$일 때
$A=\{0,\ 1,\ 2\}$, $B=\{-4,\ 3\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$
따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $a=-2$일 때
$A=\{0,\ 1,\ 2\}$, $B=\{0,\ 1,\ 3\}$이므로
$A\cap B=\{0,\ 1\}$
(i), (ii)에서 $a=-2$ 답 -2

0184

$A\cap B^C=A-B=\{4\}$이므로 $2\in B$, $6\in B$, $a-b\in B$
이때, $B=\{2,\ 9,\ a+2b\}$이므로
$6\in B$에서 $a+2b=6$ …… ㉠
$a-b\in B$에서 $a-b=9$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $b=-1$
$\therefore a+b=7$ 답 7

0185

$A\cap B=\{2,\ 3\}$에서 $3\in A$이므로
$a^2-1=3$, $a^2=4$ $\quad\therefore a=\pm2$ … ❶
(i) $a=2$일 때
$A=\{0,\ 2,\ 3\}$, $B=\{5,\ 6,\ 7\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$
따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다. … ❷
(ii) $a=-2$일 때
$A=\{0,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$이므로
$A\cap B=\{2,\ 3\}$ … ❸
(i), (ii)에서 $a=-2$ … ❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ $A\cap B=\{2,\ 3\}$을 이용하여 가능한 a의 값들을 구할 수 있다.	30 %
❷ $a=2$일 때, 주어진 조건이 성립하는지 알 수 있다.	30 %
❸ $a=-2$일 때, 주어진 조건이 성립하는지 알 수 있다.	30 %
❹ a의 값을 구할 수 있다.	10 %

0186

$A\cup B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 8\}$이고 $1\in A$, $2\in A$, $2\in B$이므로 세 원소 a^2+2a, $a+1$, a^2-4는 0, 3, 8 중 하나의 값을 각각 가져야 한다.

(i) $a+1=0$, 즉 $a=-1$일 때

$a^2+2a=-1$, $a^2-4=-3$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+1=3$, 즉 $a=2$일 때

$a^2+2a=8$, $a^2-4=0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

이때, $A=\{1,\ 2,\ 8\}$, $B=\{0,\ 2,\ 3\}$에 대하여

$A\cup B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 8\}$

(iii) $a+1=8$, 즉 $a=7$일 때

$a^2+2a=63$, $a^2-4=45$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=2$이고 $B=\{0,\ 2,\ 3\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은 $0+2+3=5$ 답 5

0187

|전략| 집합의 연산의 성질을 이용하여 각 보기를 살펴본다.

① $(A^C)^C=A$, $U-A=A^C$이므로 $(A^C)^C\neq U-A$

② $A^C\cap B=B-A$

③ $A\cup\varnothing=A$

④ $A\cup A^C=U$ 답 ⑤

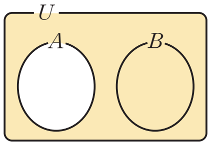
0188

③ $A-B=A\cap B^C$

④ $B-A^C=B\cap(A^C)^C=B\cap A=A\cap B$

⑤ $A\cap B=\varnothing$일 때, A^C은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분과 같다.

$\therefore\ A^C\neq B$



답 ③, ⑤

0189

① $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$

② $B-A^C=B\cap(A^C)^C=B\cap A=A\cap B$

③ $(U-A^C)\cap B=A\cap B$

④ $(U\cup A)\cap B^C=U\cap B^C=B^C$

⑤ $(A\cap B)\cup(B\cap B^C)=(A\cap B)\cup\varnothing=A\cap B$ 답 ④

0190

|전략| $A\cap B=B$이면 $B\subset A$이므로 집합의 연산의 성질을 이용하여 항상 옳은 것을 찾는다.

$A\cap B=B$이므로 $B\subset A$

ㄱ. $A^C\subset B^C$

ㄷ. $A\cup B=A$

ㄹ. $B^C-A^C=B^C\cap(A^C)^C=B^C\cap A=A\cap B^C=A-B$

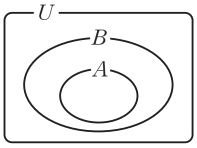
$B\subset A$이지만 $A\neq B$이면 $B^C-A^C=A-B\neq\varnothing$

따라서 항상 옳은 것은 ㄴ이다. 답 ②

0191

$B^C\subset A^C$이므로 $A\subset B$

$A\subset B$를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$A\cap B=A$, $A\cup B=B$,

$(A\cap B)\subset B$, $A-B=\varnothing$

④ $A\subset B$이면 $A^C\cup B=U$

답 ④

0192

$A-(A\cap B)=\varnothing$이므로 $A\subset(A\cap B)$

$\therefore\ A\subset B$

②, ④ $A\cup B=B$

③ $A\cap B=A$

⑤ $A\subset B$이지만 $A\neq B$이면 $B-A\neq\varnothing$ 답 ①

0193

$(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$이므로

$A-B=\varnothing$, $B-A=\varnothing$

따라서 $A\subset B$, $B\subset A$이므로 $A=B$ 답 ③

0194

|전략| 집합 X에 반드시 속하는 원소 또는 속하면 안 되는 원소를 찾아 주어진 조건을 만족시키는 집합 X의 개수를 구한다.

$B\cap X=X$이므로 $X\subset B$

$(A\cap B)\cup X=X$이므로 $(A\cap B)\subset X$

$\therefore\ (A\cap B)\subset X\subset B$

즉, $\{2,\ 4\}\subset X\subset\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$를 만족시키는 집합 X는 $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$의 부분집합 중 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$ 답 16

0195

$(B-A)\cup X=X$이므로 $(B-A)\subset X$

$B\cap X=X$이므로 $X\subset B$

$\therefore\ (B-A)\subset X\subset B$ ··· ❶

이때, $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$이고 $B-A=\{1,\ 9\}$이므로 $\{1,\ 9\}\subset X\subset\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$를 만족시키는 집합 X는 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$의 부분집합 중 1, 9를 반드시 원소로 갖는 집합이다. … ❷

따라서 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$ … ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 이용하여 집합 $B-A$, X, B 사이의 포함 관계를 알 수 있다.	30 %
❷ ❶을 만족시키기 위한 조건을 구할 수 있다.	40 %
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30 %

0196

U의 부분집합 C가 $\{1,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9\}\cup C=\{2,\ 4,\ 9\}\cup C$를 만족시키려면 집합 C는 두 집합 $\{1,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9\}$, $\{2,\ 4,\ 9\}$에서 공통인 원소 4, 9를 제외한 나머지 원소 1, 2, 5, 8을 반드시 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 C의 개수는

$2^{10-4}=2^6=64$ 답 ⑤

참고 4, 9는 두 집합 A, B의 공통인 원소이므로

$4\in(A\cup C)$, $4\in(B\cup C)$, $9\in(A\cup C)$, $9\in(B\cup C)$

즉, 집합 C가 4, 9를 원소로 갖지 않아도 $A\cup C=B\cup C$가 성립하므로 집합 C는 1, 2, 5, 8을 반드시 원소로 갖는다는 조건만 만족시키면 된다.

0197

$(A-B)\cup X=X$이므로 $(A-B)\subset X$

$X-B=X$이므로 $X\cap B=\varnothing$

이때, $A-B=\{1\}$이므로 $\{1\}\subset X$, $X\cap\{4,\ 6\}=\varnothing$을 만족시키는 집합 X는 1을 반드시 원소로 갖고, 4, 6을 원소로 갖지 않아야 한다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{6-1-2}=2^3=8$ 답 ③

0198

|전략| 집합의 연산의 성질과 연산법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

ㄱ. $A\cap(A^C\cup B)=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$ → 분배법칙

$=\varnothing\cup(A\cap B)$

$=A\cap B$

ㄴ. $(A-B)-C=(A\cap B^C)\cap C^C$

$=A\cap(B^C\cap C^C)$ 결합법칙

$=A\cap(B\cup C)^C$ 드모르간의 법칙

$=A-(B\cup C)$

ㄷ. $A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)^C$

$=A\cap(B^C\cup C^C)$ 드모르간의 법칙

$=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)$ 분배법칙

$=(A-B)\cup(A-C)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

0199

$A\cap\{(B-A^C)^C\cap(A\cup B^C)\}$

$=A\cap\{(B\cap A)^C\cap(A\cup B^C)\}$

$=A\cap\{(A^C\cup B^C)\cap(A\cup B^C)\}$ 교환법칙, 드모르간의 법칙

$=A\cap\{(A^C\cap A)\cup B^C\}$ 분배법칙

$=A\cap(\varnothing\cup B^C)$

$=A\cap B^C=A-B$

따라서 주어진 집합을 나타내는 것은 ①이다. 답 ①

0200

$A-\{(A-B)\cup(A-B^C)\}$

$=A-\{(A\cap B^C)\cup(A\cap B)\}$

$=A-\{A\cap(B^C\cup B)\}$ 분배법칙

$=A-(A\cap U)$

$=A-A=\varnothing$ 답 $\varnothing$

0201

$(A\cup B^C)\cap(A^C\cup B)$

$=\{(A\cup B^C)\cap A^C\}\cup\{(A\cup B^C)\cap B\}$ 분배법칙

$=\{(A\cap A^C)\cup(B^C\cap A^C)\}\cup\{(A\cap B)\cup(B^C\cap B)\}$ 분배법칙

$=\{\varnothing\cup(B^C\cap A^C)\}\cup\{(A\cap B)\cup\varnothing\}$

$=(B^C\cap A^C)\cup(A\cap B)$

이때, 주어진 벤 다이어그램에서 두 집합 A, B의 포함 관계는 $A\subset B$이므로

$B^C\cap A^C=B^C$, $A\cap B=A$

$\therefore$ (주어진 식)$=B^C\cup A=A\cup B^C$ 답 ⑤

다른 풀이 주어진 벤 다이어그램에서 두 집합 A, B의 포함 관계는 $A\subset B$이므로 $(A\cup B^C)\cap(A^C\cup B)=(A\cup B^C)\cap U=A\cup B^C$

0202

$(A-B)\cup(A\cap C)=(A\cap B^C)\cup(A\cap C)$

$=A\cap(B^C\cup C)$ 분배법칙

$=A\cap(B\cap C^C)^C$ 드모르간의 법칙

$=A-(B\cap C^C)$

$=A-(B-C)$ 답 ⑤

0203

$\{A-(A^C-B)\}\cap B=\{A-(A^C\cap B^C)\}\cap B$

$=\{A\cap(A^C\cap B^C)^C\}\cap B$

$=\{A\cap(A\cup B)\}\cap B$ 드모르간의 법칙

$=A\cap B$

④ $(A-B)^C\cap A=(A\cap B^C)^C\cap A$ 드모르간의 법칙
$=(A^C\cup B)\cap A$ 분배법칙
$=(A^C\cap A)\cup(B\cap A)$
$=\varnothing\cup(B\cap A)$
$=B\cap A=A\cap B$

답 ④

0204

|전략| 집합의 연산에 대한 등식을 연산법칙을 이용하여 간단히 한 후 두 집합의 포함 관계를 구한다.

$(A\cup B)\cap A^C=(A\cap A^C)\cup(B\cap A^C)$ → 분배법칙
$=\varnothing\cup(B\cap A^C)$
$=B\cap A^C=B-A$

즉, $B-A=\varnothing$이므로 $B\subset A$

따라서 $B\subset A$일 때 항상 옳은 것은 ④ $A^C\subset B^C$이다.

답 ④

0205

$\{(A\cap B)\cup(B-A)\}\cup A=\{(A\cap B)\cup(B\cap A^C)\}\cup A$ 교환법칙
$=\{(B\cap A)\cup(B\cap A^C)\}\cup A$ 분배법칙
$=\{B\cap(A\cup A^C)\}\cup A$
$=(B\cap U)\cup A$
$=B\cup A$

즉, $B\cup A=A$이므로 $B\subset A$

따라서 $B\subset A$일 때 항상 옳은 것은 ① $A\cap B=B$이다.

답 ①

0206

$\{(A-B^C)\cup(A^C\cup B)^C\}\cup B$ 드모르간의 법칙
$=\{(A\cap B)\cup(A\cap B^C)\}\cup B$ 분배법칙
$=\{A\cap(B\cup B^C)\}\cup B$
$=(A\cap U)\cup B$
$=A\cup B$

즉, $A\cup B=B$이므로 $A\subset B$

따라서 집합 A, B 사이의 관계를 벤 다이어그램으로 바르게 나타낸 것은 ②이다.

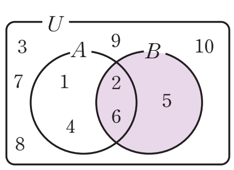
답 ②

0207

|전략| 먼저 주어진 식을 집합의 연산법칙을 이용하여 간단히 한 후 조건을 벤 다이어그램으로 나타내어 본다.

$(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$
$=(A\cup B)-(A\cap B)$
$=\{1,\ 4,\ 5\}$

이고 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore B=\{2,\ 5,\ 6\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

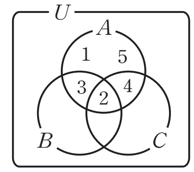
$2+5+6=13$

답 13

0208

$(A-B)\cap(A-C)=(A\cap B^C)\cap(A\cap C^C)$
$=A\cap(B^C\cap C^C)$
$=A\cap(B\cup C)^C$
$=A-(B\cup C)$
$=\{1,\ 5\}$

이고 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore 4\in(C-B)$

답 ④

0209

$(B\cup A^C)\cap\{B\cap(A\cap B)^C\}$
$=(B\cup A^C)\cap\{B\cap(A^C\cup B^C)\}$
$=(B\cup A^C)\cap\{(B\cap A^C)\cup(\underbrace{B\cap B^C}_{\varnothing})\}$
$=(B\cup A^C)\cap(B\cap A^C)$ 결합법칙
$=\{\underbrace{(B\cup A^C)\cap B}\}\cap A^C$ $B\subset(B\cup A^C)$이므로 $(B\cup A^C)\cap B=B$
$=B\cap A^C=B-A$

$\therefore B-A=\{4\}$ ··· ❶

또, $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로 $(A\cap B)^C=\{1,\ 4,\ 5,\ 7\}$

$\therefore A\cap B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}-\{1,\ 4,\ 5,\ 7\}$
$=\{2,\ 3,\ 6\}$ ··· ❷

따라서 $B=(B-A)\cup(A\cap B)=\{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$이므로 ··· ❸

집합 B의 모든 원소의 합은 $2+3+4+6=15$이다. ··· ❹

답 15

채점 기준	비율
❶ $(B\cup A^C)\cap\{B\cap(A\cap B)^C\}$를 간단히 할 수 있다.	50 %
❷ 드모르간의 법칙을 이용하여 집합 $A\cap B$를 구할 수 있다.	20 %
❸ 집합 B를 구할 수 있다.	20 %
❸ 집합 B의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	10 %

0210

|전략| 자연수 p의 양의 배수의 집합을 A_p라 하면 $A_k\cap A_l$은 k와 l의 공배수의 집합이다. 이때, k와 l의 최소공배수가 m이면 $A_k\cap A_l=A_m$이다.

(단, k, l, m은 자연수)

$A_6\cup(A_3\cap A_4)=A_6\cup A_{12}=A_6$ $A_k\cup A_{mk}=A_k$ (단, m, k는 자연수)

전체집합 U의 원소 중 6의 배수는 16개이므로 구하는 원소의 개수는 16이다.

답 16

Lecture

배수와 약수의 집합

자연수 k에 대하여

(1) k의 배수의 집합을 A_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 배수이면
⇨ $A_m\subset A_n$ ⇨ $A_m\cap A_n=A_m$, $A_m\cup A_n=A_n$

(2) k의 약수의 집합을 B_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 약수이면
⇨ $B_m\subset B_n$ ⇨ $B_m\cap B_n=B_m$, $B_m\cup B_n=B_n$

0211

$(A_{12} \cup A_{18}) \subset A_k$에서 $A_{12} \subset A_k$, $A_{18} \subset A_k$이므로 k는 12의 약수이고, 18의 약수이다.

즉, k는 $\underbrace{\text{12와 18의 공약수}}_{1,\ 2,\ 3,\ 6}$이므로 자연수 k의 최댓값은 6이다. 답 6

0212

$(A_8 \cup A_{16}) \cap (A_{12} \cup A_{36}) = A_8 \cap A_{12} = A_{24}$ 답 ④

0213

ㄱ. A_2는 2와 서로소인 자연수의 집합, 즉 홀수의 집합이고, B_2는 2의 배수의 집합, 즉 짝수의 집합이다.
$\therefore A_2 \cup B_2 = \{x \mid x\text{는 자연수}\}$

ㄴ. A_2는 홀수의 집합이고, B_3은 3의 배수의 집합이므로
$A_2 \cap B_3 = \{3,\ 9,\ 15,\ 21,\ \cdots\}$
한편,
$A_6 = \{x \mid x\text{는 6과 서로소인 자연수}\}$
$\quad = \{x \mid x\text{는 2, 3과 서로소인 자연수}\}$
$\quad = \{x \mid x\text{는 2와 3의 배수가 아닌 수}\}$
이므로 $A_6 = \{1,\ 5,\ 7,\ 11,\ \cdots\}$
$\therefore A_2 \cap B_3 \neq A_6$

ㄷ. B_2는 2의 배수의 집합이고, B_3은 3의 배수의 집합이므로 $B_2 \cap B_3$은 6의 배수의 집합이다.
즉, $B_2 \cap B_3 = B_6$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

참고 $A_m = \{x \mid x\text{는 } m\text{과 서로소인 자연수}\}$
$\quad = \{x \mid x\text{는 } m\text{의 소인수의 배수가 아닌 수}\}$

0214

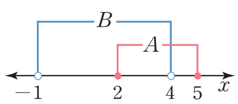
|전략| 집합 A의 부등식을 풀어 해를 수직선 위에 나타낸 후 조건을 이용하여 집합 B를 구한다.

$x^2 - 7x + 10 \le 0$에서 $(x-2)(x-5) \le 0$ $\quad \therefore 2 \le x \le 5$

$\therefore A = \{x \mid 2 \le x \le 5\}$

$A \cap B = \{x \mid 2 \le x < 4\}$이고,

$A \cup B = \{x \mid -1 < x \le 5\}$이려면 오른쪽 그림에서



$B = \{x \mid -1 < x < 4\}$
$\quad = \{x \mid (x+1)(x-4) < 0\}$
$\quad = \{x \mid x^2 - 3x - 4 < 0\}$

따라서 $a = -3$, $b = -4$이므로 $ab = 12$ 답 12

0215

$A \cap B = \{1\}$이므로 $1 \in A$, $1 \in B$

$1 \in A$에서 $1 + a - 3 = 0$ $\quad \therefore a = 2$

$x^2 + 2x - 3 = 0$에서 $(x+3)(x-1) = 0$

$x = -3$ 또는 $x = 1$ $\quad \therefore A = \{-3,\ 1\}$

$1 \in B$에서 $b + b - 4 = 0$ $\quad \therefore b = 2$

$2x^2 + 2x - 4 = 0$에서 $2(x+2)(x-1) = 0$

$x = -2$ 또는 $x = 1$ $\quad \therefore B = \{-2,\ 1\}$

$\therefore A \cup B = \{-3,\ -2,\ 1\}$ 답 $\{-3,\ -2,\ 1\}$

0216

$x^2 - 6x + 8 < 0$에서 $(x-2)(x-4) < 0$ $\quad \therefore 2 < x < 4$

$\therefore A = \{x \mid 2 < x < 4\}$

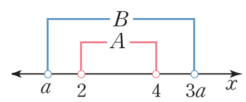
$x^2 - 4ax + 3a^2 < 0$에서 $(x-a)(x-3a) < 0$

$\therefore a < x < 3a$ $(\because a > 0)$

$\therefore B = \{x \mid a < x < 3a\}$

이때, $A \cap B = A$이므로 $A \subset B$

두 집합 A, B를 $A \subset B$가 성립하도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a \le 2$, $4 \le 3a$ $\quad \therefore \frac{4}{3} \le a \le 2$ 답 ④

0217

$x^2 - 4x - 12 < 0$에서 $(x+2)(x-6) < 0$ $\quad \therefore -2 < x < 6$

$\therefore A = \{x \mid -2 < x < 6\}$

$x^2 - 8x + 16 > 0$에서 $(x-4)^2 > 0$이므로 해는 $x \neq 4$인 모든 실수

$\therefore B = \{x \mid x \neq 4\text{인 모든 실수}\}$

$x^2 - 2x + 10 \le 0$에서 $(x-1)^2 + 9 \le 0$이므로 해는 없다.

$\therefore C = \varnothing$

$\therefore (A \cap B) \cup C = \{x \mid -2 < x < 4 \text{ 또는 } 4 < x < 6\}$

따라서 $(A \cap B) \cup C$의 원소 중 정수는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5$의 6개이다. 답 ④

0218

|전략| 새로운 집합의 연산의 약속에 따라 집합의 연산법칙을 이용하여 간단한 연산으로 정리한다.

① $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) = (B \cup A) - (B \cap A) = B \triangle A$

② $A \triangle \varnothing = (A \cup \varnothing) - (A \cap \varnothing) = A - \varnothing = A$

③ $A \triangle A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \varnothing$

④ $A \triangle A^C = (A \cup A^C) - (A \cap A^C) = U - \varnothing = U$

⑤ $A \triangle U = (A \cup U) - (A \cap U) = U - A = A^C$ 답 ④

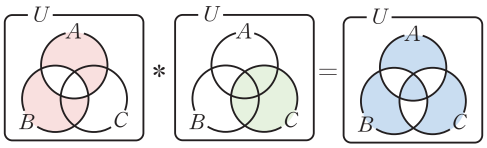
0219

$B \diamond C = (B \cup C) \cap (B \cup C^C)$
$\quad = B \cup (C \cap C^C)$
$\quad = B \cup \varnothing = B$

$\therefore A \diamond (B \diamond C) = A \diamond B$
$\quad = (A \cup B) \cap (A \cup B^C)$
$\quad = A \cup (B \cap B^C)$
$\quad = A \cup \varnothing = A$ 답 A

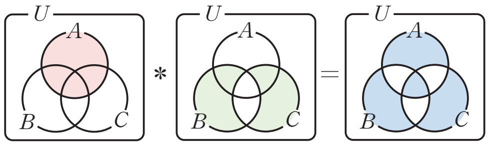
0220

ㄱ. $(A*B)*C$



$A*B$ $\qquad C \qquad (A*B)*C$

$A*(B*C)$



$A \qquad B*C \qquad A*(B*C)$

$\therefore (A*B)*C=A*(B*C)$

ㄴ. $A^C*B^C=(A^C-B^C)\cup(B^C-A^C)$

$=(A^C\cap B)\cup(B^C\cap A)$

$=(B-A)\cup(A-B)=(A-B)\cup(B-A)$

$=A*B$

ㄷ. $(A*B)*A=(B*A)*A$ ($\because A*B=B*A$)

$=B*(\underbrace{A*A}_{(A-A)\cup(A-A)=\emptyset\cup\emptyset=\emptyset})$ ($\because$ ㄱ)

$=B*\emptyset$

$=(B-\emptyset)\cup(\emptyset-B)$

$=B\cup\emptyset=B$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ④

0221

|전략| 집합의 원소의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

$n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cap B)=n(U)-n(A^C\cup B^C)=50-45=5$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=26+18-5=39$ 답 ④

0222

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cap B)=n(B)-n(B-A)=14-9=5$

$\therefore n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=20-5=15$ 답 ⑤

0223

$n(U-B)=n(U)-n(B)$이므로

$n(B)=n(U)-n(U-B)=25-13=12$

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=19-10=9$

따라서 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $B-A$이므로

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=12-9=3$ 답 3

0224

$A\cap B=\emptyset$이므로 $A\cap B\cap C=\emptyset$

$\therefore n(A\cap B)=0,\ n(A\cap B\cap C)=0$

$n(A\cap C)=n(A)+n(C)-n(A\cup C)$

$=5+3-7=1$

$n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)$

$=4+3-5=2$

$\therefore n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$

$-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$

$+n(A\cap B\cap C)$

$=5+4+3-0-2-1+0=9$ 답 9

0225

|전략| 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\subset B$일 때 $n(A\cap B)$는 최대가 되고, $A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$는 최소가 된다. (단, $n(A)<n(B)$)

$n(A\cap B)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면

$A\subset B$일 때, $n(A\cap B)$가 최대이므로 $M=n(A)=56$

또, $A\cup B=U$일 때, $n(A\cap B)$가 최소이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서

$m=56+78-100=34$

$\therefore M+m=56+34=90$ 답 90

0226

$B\subset A$일 때, $n(A\cap B)$가 최대이므로

$n(A\cap B)\le n(B)=15$

이때, $n(A\cap B)\ge 10$이므로 $10\le n(A\cap B)\le 15$ ··· ❶

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$n(A\cup B)=25+15-n(A\cap B)$이므로

$40-15\le n(A\cup B)\le 40-10$

$\therefore 25\le n(A\cup B)\le 30$ ··· ❷

따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값은 30, 최솟값은 25이므로 그 합은

$30+25=55$이다. ··· ❸

답 55

채점 기준	비율
❶ $n(A\cap B)$의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ $n(A\cup B)$의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	10 %

0227

|전략| 주어진 조건을 집합과 그 원소의 개수로 나타낸 다음 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$임을 이용한다.

어느 학급 학생 전체의 집합을 U, 영어 문제를 푼 학생의 집합을 A, 수학 문제를 푼 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=40,\ n(A)=25,\ n(B)=18,\ n(A^C\cap B^C)=3$

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A^C\cap B^C)$

$=40-3=37$

따라서 영어 문제와 수학 문제를 모두 푼 학생 수는

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=25+18-37=6$ 답 6

0228

수진이네 반 학생 전체의 집합을 U, 인라인스케이트를 탈 수 있는 학생의 집합을 A, 자전거를 탈 수 있는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=40,\ n(A)=17,\ n(B)=26,\ n((A\cup B)^C)=5$ ··· ❶

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$

$=40-5=35$ ··· ❷

따라서 자전거만 탈 수 있는 학생 수는

$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$

$=35-17=18$ ··· ❸

답 18

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 집합으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $n(A\cup B)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 자전거만 탈 수 있는 학생 수를 구할 수 있다.	40 %

0229

어느 고등학교 1학년 1반 학생 전체의 집합을 U, A 놀이 기구를 타본 학생의 집합을 A, B 놀이 기구를 타본 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=30,\ n(A)=15,\ n(B)=17,\ n(A^C\cap B^C)=3$

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A^C\cap B^C)$

$=30-3=27$

$\therefore\ n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=15+17-27=5$

따라서 A를 타보지 못하거나 B를 타보지 못한 학생 수는

$n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$

$=30-5=25$ 답 ⑤

0230

어느 학급 학생 전체의 집합을 U, 수학, 영어, 국어 문제를 푼 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(U)=50,\ n(A)=20,\ n(B)=28,\ n(C)=31$

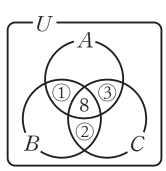
$n(A\cap B\cap C)=8,\ n(A^C\cap B^C\cap C^C)=2$

$n(A\cup B\cup C)=n(U)-n((A\cup B\cup C)^C)$

$=n(U)-n(A^C\cap B^C\cap C^C)$

$=50-2=48$

오른쪽 그림에서 꼭 두 문제만을 푼 학생 수는 ①+②+③이므로



$n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

에서

$48=20+28+31-(①+8)-(②+8)-(③+8)+8$

$\therefore$ ①+②+③$=15$

따라서 꼭 두 문제만 푼 학생 수는 15이다. 답 15

0231

|전략| $n(A)<n(B)$이면 $A\subset B$일 때 $n(A\cup B)$가 최소이고, $n(A\cap B)=0$일 때 $n(A\cup B)$가 최대이다.

지수네 반 학생 전체의 집합을 U, 인터넷으로 수학을 수강하는 학생의 집합을 A, 영어를 수강하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=40,\ n(A)=14,\ n(B)=20,\ n(A^C\cap B^C)=x$

$x=n(A^C\cap B^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로

(i) x가 최대일 때는 $n(A\cup B)$가 최소, 즉 $A\subset B$일 때이므로

$x=n(U)-n(A\cup B)=40-20=20$ $n(A\cup B)=n(B)$일 때 $n(A\cup B)$가 최소가 된다.

$\therefore\ M=20$

(ii) x가 최소일 때는 $n(A\cup B)$가 최대, 즉 $n(A\cap B)=0$일 때이므로

$x=n(U)-n(A\cup B)=40-(14+20)=6$

$\therefore\ m=6$

$\therefore\ M+m=20+6=26$ 답 ⑤

0232

어느 학급 학생 전체의 집합을 U, A 포털 사이트의 블로그를 갖고 있는 학생의 집합을 A, B 포털 사이트의 블로그를 갖고 있는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=40,\ n(A)=23,\ n(B)=19$

이때, 두 사이트의 블로그를 모두 갖고 있는 학생의 집합은 $A\cap B$이다.

(i) $n(A\cap B)$가 최대일 때 : $B\subset A$이어야 하므로

$n(A\cap B)=n(B)=19$ $\therefore\ M=19$

(ii) $n(A\cap B)$가 최소일 때 :

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$n(A\cup B)$가 최대이면, 즉 $n(A\cup B)=n(U)$이면 $n(A\cap B)$는 최소가 된다.

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(U)$

$=23+19-40=2$

$\therefore\ m=2$

$\therefore\ M+m=19+2=21$ 답 21

0233

어느 학급 학생 전체의 집합을 U, A신문을 구독하는 학생의 집합을 A, B신문을 구독하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=35,\ n(A)=20,\ n(B)=12,\ n(A\cap B)\geq 5$

이때, A신문과 B신문 중 적어도 하나를 구독하는 학생의 집합은 $A\cup B$이다.

(i) $n(A\cup B)$가 최대일 때 : $n(A\cap B)$가 최소가 되어야 하므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=20+12-5=27$

$\therefore a=27$

(ii) $n(A\cup B)$가 최소일 때 : $n(A\cap B)$가 최대가 되어야 하므로

$B\subset A$일 때 최대가 되고, 이때 $A\cup B=A$이므로

$n(A\cup B)=n(A)=20 \qquad \therefore b=20$

$\therefore a+b=27+20=47$

답 ⑤

STEP 3 내신 마스터

0234

유형 02 서로소인 집합

|전략| 두 집합 A, B가 서로소이면 $A\cap B=\varnothing$이다.

두 집합 $A=\{a,\ 2a\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 30\}$에 대하여 A, B가 서로소, 즉 $A\cap B=\varnothing$이려면 $a\notin B$, $2a\notin B$이어야 한다.

(i) a가 홀수일 때

$a\notin B$이므로 $2a\notin B$이려면

$2a>30 \qquad \therefore a>15$

(ii) a가 짝수일 때

$a\notin B$이려면 $a>30$이고, 이때 $2a\notin B$이다.

(i), (ii)에서 a는 $a>15$인 홀수이거나 $a>30$인 짝수이어야 한다.

따라서 a의 최솟값은 17이다.

답 ③

0235

유형 03 여집합과 차집합

|전략| 집합 U, A, B를 원소나열법으로 나타낸 후 먼저 $A\cup B$, $A\cap B$를 구해 본다.

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$, $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $B=\{2,\ 5,\ 8\}$

이므로

$A\cup B=\{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$, $A\cap B=\{2,\ 8\}$

$\therefore (A\cup B)-(A\cap B)=\{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}-\{2,\ 8\}$

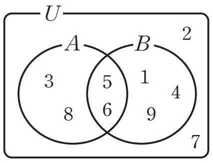
$=\{4,\ 5,\ 6\}$

답 ③

0236

유형 04 벤 다이어그램을 이용한 집합의 연산

|전략| 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내어 집합 A를 찾는다.



$U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9\}$,

$A\cap B^C=A-B=\{3,\ 8\}$,

$B-A=\{1,\ 4,\ 9\}$,

$A\cup B=U-\{2,\ 7\}$

$=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$

이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore A=\{3,\ 5,\ 6,\ 8\}$

따라서 집합 A의 모든 원소의 합은 $3+5+6+8=22$

답 ①

0237

유형 06 집합의 연산을 이용하여 미지수 구하기

|전략| $A-B=\{a\}$이면 $a\in A$, $a\notin B$임을 이용한다.

$A-B=\{6\}$이므로 $2\in B$, $4\in B$, $a^2-4a+10\in B$

이때, $B=\{2,\ 7,\ a^2-5\}$이므로

(i) $4\in B$에서 $a^2-5=4$

$a^2=9 \qquad \therefore a=\pm3$

(ii) $a^2-4a+10\in B$에서 $a^2-4a+10=7$

$a^2-4a+3=0$, $(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

(i), (ii)에서 $a=3$

답 ⑤

0238

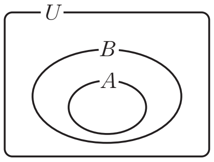
유형 08 집합의 연산의 성질과 포함 관계

|전략| $A\cap B^C=\varnothing$, 즉 $A-B=\varnothing$이면 $A\subset B$이므로 집합의 연산의 성질을 이용하여 옳지 않은 것을 찾는다.

A와 B^C이 서로소이므로 $A\cap B^C=\varnothing$

즉, $A-B=\varnothing$이므로 $A\subset B$

$A\subset B$를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B^C\subset A^C$, $A\cap B=A$,

$A-B=\varnothing$, $A^C\cap B^C=B^C$

④ $B\cap A^C=B-A\neq\varnothing$

답 ④

0239

유형 10 연산법칙을 이용하여 식 간단히 하기

|전략| 집합의 연산의 성질과 연산법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

드모르간의 법칙

ㄱ. $\{(A\cup B^C)\cap B\}^C=(A\cup B^C)^C\cup B^C$

드모르간의 법칙

$=(A^C\cap B)\cup B^C$

분배법칙

$=(A^C\cup B^C)\cap(B\cup B^C)$

드모르간의 법칙

$=(A\cap B)^C\cap U$

$=(A\cap B)^C$

ㄴ. $(A\cap B^C)\cap(A^C\cap B)=(A\cap A^C)\cap(B^C\cap B)$ → 교환법칙

$=\varnothing\cap\varnothing=\varnothing$

드모르간의 법칙

ㄷ. $\{A^C\cup(A\cap B^C)\}^C=A\cap(A\cap B^C)^C$

드모르간의 법칙

$=A\cap(A^C\cup B)$

분배법칙

$=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$

$=\varnothing\cup(A\cap B)$

$=A\cap B$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

2 집합의 연산

0240

유형 **10** 연산법칙을 이용하여 식 간단히 하기

|**전략**| 집합의 연산의 성질과 연산법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$(A^C-B)\cup(B\cup C)^C$

드모르간의 법칙

$=(A^C\cap B^C)\cup(B^C\cap C^C)$

교환법칙

$=(B^C\cap A^C)\cup(B^C\cap C^C)$

분배법칙

$=B^C\cap(A^C\cup C^C)$

드모르간의 법칙

$=B^C\cap(A\cap C)^C$

$=B^C-(A\cap C)$

답 ③

0241

유형 **11** 집합의 연산법칙과 포함 관계

|**전략**| 집합의 연산에 대한 등식을 연산법칙을 이용하여 간단히 한 후 두 집합의 포함 관계를 구한다.

$(A\cup B)\cap(B-A)^C=(A\cup B)\cap(B\cap A^C)^C$

드모르간의 법칙

$=(A\cup B)\cap(B^C\cup A)$

교환법칙, 분배법칙

$=A\cup(B\cap B^C)$

$=A\cup\varnothing$

$=A$

즉, $A\cup B=A$이므로 $B\subset A$

따라서 $B\subset A$일 때 항상 옳은 것은 ④ $A^C\subset B^C$이다.

답 ④

0242

유형 **14** 방정식, 부등식과 집합의 연산

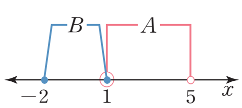
|**전략**| 집합 A의 부등식을 풀어 수직선 위에 나타낸 후 조건을 이용하여 집합 B를 구한다.

$x^2-6x+5<0$에서 $(x-1)(x-5)<0$ $\quad\therefore 1<x<5$

$\therefore A=\{x\mid 1<x<5\}$

$A\cap B=\varnothing$이고,

$A\cup B=\{x\mid -2\le x<5\}$이려면 오른쪽 그림에서



$B=\{x\mid -2\le x\le 1\}$

$=\{x\mid (x+2)(x-1)\le 0\}$

$=\{x\mid x^2+x-2\le 0\}$

따라서 $a=1$, $b=-2$이므로 $a+b=-1$

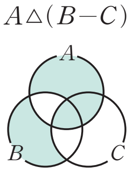
답 ②

0243

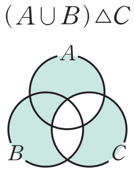
유형 **05** 벤 다이어그램에서 색칠한 부분이 나타내는 집합 + **15** 새로운 집합의 연산

|**전략**| 새로운 집합의 연산의 약속에 따라 각 보기를 벤 다이어그램으로 나타낸 후 주어진 벤 다이어그램과 비교한다.

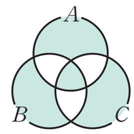
① $A\triangle(B-C)$



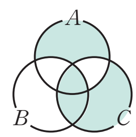
② $(A\cup B)\triangle C$



③ $(A\triangle B)\triangle C$



④ $(A-B)\triangle C$



답 ⑤

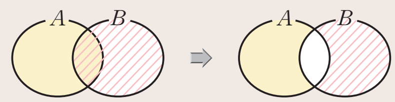
Lecture

$A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$

$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

$=(A-B)\cup(B-A)$

는 벤 다이어그램으로 나타내면 두 집합 A, B에 대하여 겹쳐지는 부분을 제거하고 남은 부분이다.



이를 이용하여 벤 다이어그램에 색칠한 부분과 빗금친 부분으로 두 집합을 각각 나타낸 후 겹쳐지는 부분을 제거하면 된다.

0244

유형 **16** 유한집합의 원소의 개수

|**전략**| $A\cap B=\varnothing$이면 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$이고, $n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)$임을 이용한다.

$n(A^C\cap B)=n(B\cap A^C)=n(B-A)=10$ …… ㉠

$(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$이므로

$n((A-B)\cup(B-A))=n(A-B)+n(B-A)=20$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $n(A-B)=10$

$\therefore n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=18-10=8$

답 ④

0245

유형 **17** 유한집합의 원소의 개수의 최댓값과 최솟값

|**전략**| $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$이므로 먼저 $n(A\cap B)$의 최솟값과 최댓값을 구한다.

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=14-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cap B)$가 최대일 때 $n(A-B)$는 최소이고,

$n(A\cap B)$가 최소일 때 $n(A-B)$는 최대이다.

(i) $B\subset A$일 때, $n(A\cap B)$가 최대이고, 최댓값은 $n(B)=8$이다.

$\therefore m=14-8=6$

(ii) $A\cup B=U$일 때, $n(A\cap B)$가 최소이고, 최솟값은

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서

$n(A\cap B)=14+8-20=2$

$\therefore M=14-2=12$

(i), (ii)에서 $M-m=6$

답 ③

0246

유형 **18** 유한집합의 원소의 개수의 활용

|**전략**| 주어진 모임을 전체집합 U와 그 부분집합 A, B로 나타낸 다음 다른 조건의 모임도 A, B로 나타내어 본다.

어느 학급 학생 전체의 집합을 U, A게임을 해본 학생의 집합을 A, B게임을 해본 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=40,\ n(A)=27,\ n(A-B)=15,\ n(A^C\cap B^C)=5$

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A^C\cap B^C)$

$=40-5=35$

$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=27-15=12$

따라서 B게임을 해본 학생 수는

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$35=27+n(B)-12 \quad \therefore\ n(B)=20$ 답 ⑤

0247

유형 19 유한집합의 원소의 개수의 활용 – 최댓값과 최솟값

| 전략 | $n(B)$가 최대가 되려면 $n(A\cup B)$, $n(A\cap B)$가 최대, $n(B)$가 최소가 되려면 $n(A\cup B)$, $n(A\cap B)$가 최소이어야 한다.

어느 반 학생 전체의 집합을 U, A은행의 계좌를 갖고 있는 학생의 집합을 A, B은행의 계좌를 갖고 있는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=35,\ n(A)=13,\ 20\le n(A\cup B)\le 30$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$20\le n(A)+n(B)-n(A\cap B)\le 30$

$20\le 13+n(B)-n(A\cap B)\le 30$

$7+n(A\cap B)\le n(B)\le 17+n(A\cap B)$

이때, $0\le n(A\cap B)\le 13$이므로 $7\le n(B)\le 30$

따라서 $M=30$, $m=7$이므로 $M+m=37$ 답 ⑤

$(A\cap B)\subset A$이므로 $n(A\cap B)\le n(A)$

0248

유형 09 집합의 연산과 부분집합의 개수

| 전략 | $(A-B)\cup X=X$이면 $(A-B)\subset X$이고, $(A\cup B)\cap X=X$이면 $X\subset (A\cup B)$이다.

조건 (가)에서 $(A-B)\cup X=X$이므로 $(A-B)\subset X$

조건 (나)에서 $(A\cup B)\cap X=X$이므로 $X\subset(A\cup B)$

$\therefore (A-B)\subset X\subset (A\cup B)$ … ❶

이때, $A-B=\{1\}$, $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$이므로

$\{1\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$을 만족시키는 집합 X는

$\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$의 부분집합 중 1을 반드시 원소로 갖는 집합이다. … ❷

따라서 집합 X의 개수는

$2^{6-1}=2^5=32$ … ❸

답 32

채점 기준	배점
❶ 조건 (가), (나)를 이용하여 집합 $A-B$, X, $A\cup B$ 사이의 포함 관계를 알 수 있다.	2점
❷ ❶을 만족시키기 위한 조건을 구할 수 있다.	2점
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	2점

0249

유형 12 집합의 연산을 이용하여 집합의 원소 구하기

| 전략 | 먼저 주어진 식을 집합의 연산법칙을 이용하여 간단히 한 후 $B=(A\cap B)\cup(B-A)$임을 이용하여 집합 B를 구한다.

$A-(A-B)=A\cap(A\cap B^C)^C=A\cap(A^C\cup B)$

$=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)$

$=A\cap B=\{3,\ 6\}$

$B-(A\cap B)=B\cap(A\cap B)^C=B\cap(A^C\cup B^C)$

$=(B\cap A^C)\cup(B\cap B^C)=(B\cap A^C)\cup\varnothing$

$=B\cap A^C=B-A=\{2,\ 7\}$ … ❶

이므로

$B=(A\cap B)\cup(B-A)=\{2,\ 3,\ 6,\ 7\}$ … ❷

이때, $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9\}$에 대하여

$B^C=U-B=\{1,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9\}$ … ❸

따라서 집합 B^C의 모든 원소의 합은

$1+4+5+8+9=27$이다. … ❹

답 27

채점 기준	배점
❶ $A-(A-B)$, $B-(A\cap B)$를 간단히 할 수 있다.	4점
❷ 집합 B를 구할 수 있다.	2점
❸ 집합 B^C을 구할 수 있다.	1점
❹ 집합 B^C의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	1점

0250

유형 13 배수와 약수의 집합의 연산

| 전략 | 자연수 p의 양의 배수의 집합을 A_p라 할 때, $A_k\cap A_l=A_m$이면 m은 k와 l의 최소공배수이고, $(A_k\cup A_l)\subset A_m$이면 m은 k와 l의 공약수이다.

(단, k, l, m은 자연수)

$A_3\cap A_5$는 3과 5의 공배수의 집합, 즉 15의 배수의 집합이므로

$A_3\cap A_5=A_{15}$

즉, $A_m\subset A_{15}$를 만족시키는 m은 15의 배수이므로 자연수 m의 최솟값은 15이다. … ❶

또, $(A_{18}\cup A_{24})\subset A_n$에서 $A_{18}\subset A_n$, $A_{24}\subset A_n$이므로 n은 18의 약수이고, 24의 약수이다.

즉, n은 18과 24의 공약수이므로 자연수 n의 최댓값은 6이다. … ❷

1, 2, 3, 6

따라서 구하는 값은 $15+6=21$ … ❸

답 21

채점 기준	배점
❶ 자연수 m의 최솟값을 구할 수 있다.	3점
❷ 자연수 n의 최댓값을 구할 수 있다.	3점
❸ m의 최솟값과 n의 최댓값의 합을 구할 수 있다.	1점

0251

유형 06 집합의 연산을 이용하여 미지수 구하기

| 전략 | $A\cap B=\{a,\ d\}$에서 $a\in B$, $d\in B$이므로 주어진 조건을 이용하여 먼저 a, d의 값을 구한다.

(1) $A\cap B=\{a,\ d\}$에서 $a\in B$이므로 $a=a^2$ ($\because a<b<c<d$)

이때, a는 자연수이므로 $a=1$

$a+d=10$이므로 $d=9$

(2) $9\in B$이므로 $b^2=9$ 또는 $c^2=9$

즉, $b=3$ 또는 $c=3$

이때, $1\in A$, $3\in A$, $9\in A$이므로 집합 A의 나머지 원소를 x라 하면
$A=\{1,\ 3,\ 9,\ x\}$, $B=\{1,\ 3^2,\ 9^2,\ x^2\}$
$A\cup B=\{1,\ 3,\ 9,\ x,\ 81,\ x^2\}$이고, $A\cup B$의 모든 원소의 합이 114이므로
$1+3+9+x+81+x^2=114$
$x^2+x-20=0$, $(x+5)(x-4)=0$
$\therefore x=4$ ($\because$ x는 자연수)
$\therefore A=\{1,\ 3,\ 4,\ 9\}$
(3) 집합 A의 모든 원소의 합은 $1+3+4+9=17$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) a, d의 값을 구할 수 있다.	4점
(2) 집합 A를 구할 수 있다.	6점
(3) 집합 A의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	2점

0252

유형 **11** 집합의 연산법칙과 포함 관계

|전략| 연산법칙을 이용하여 주어진 등식을 간단히 한 후 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 알아본다.

(1) $\{(A-B)\cup(A\cap B)\}\cap\{(A-B)^C\cap(A\cup B)\}$
$=\{(A\cap B^C)\cup(A\cap B)\}\cap\{(A\cap B^C)^C\cap(A\cup B)\}$
$=\{A\cap(B^C\cup B)\}\cap\{(A^C\cup B)\cap(A\cup B)\}$ 분배법칙, 드모르간의 법칙
$=(A\cap U)\cap\{(A^C\cap A)\cup B\}$ 분배법칙
$=A\cap(\varnothing\cup B)=A\cap B$
즉, $A\cap B=A$이므로 $A\subset B$
(2) 집합 A는 집합 B의 부분집합이고, $n(B)=4$이므로 집합 A의 개수는 $2^4=16$

답 풀이 참조

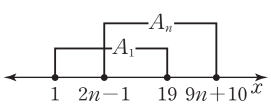
채점 기준	배점
(1) $\{(A-B)\cup(A\cap B)\}\cap\{(A-B)^C\cap(A\cup B)\}=A$를 간단히 한 후 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 알 수 있다.	6점
(2) 조건을 만족시키는 집합 A의 개수를 구할 수 있다.	4점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0253

|전략| 집합 A_n(n은 자연수)을 수직선 위에 나타내고
$A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n\neq\varnothing$이 성립하려면
(A_n의 원소의 최솟값)$\le$(A_1의 원소의 최댓값)임을 이해한다.

$A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n\neq\varnothing$이 성립하려면 $A_1\cap A_n\neq\varnothing$이어야 한다.
이때, $A_1=\{x\,|\,1\le x\le 19,\ x$는 정수$\}$,
$A_n=\{x\,|\,2n-1\le x\le 9n+10,\ x$는 정수$\}$
이므로 오른쪽 그림에서
$2n-1\le 19$
$2n\le 20$ $\quad\therefore n\le 10$



따라서 자연수 n의 최댓값은 10이다.

답 10

다른 풀이 $A_1=\{x\,|\,1\le x\le 19,\ x$는 정수$\}=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 19\}$
$A_2=\{x\,|\,3\le x\le 28,\ x$는 정수$\}=\{3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 28\}$
$A_3=\{x\,|\,5\le x\le 37,\ x$는 정수$\}=\{5,\ 6,\ 7,\ \cdots,\ 37\}$
$\vdots$
$A_{10}=\{x\,|\,19\le x\le 100,\ x$는 정수$\}=\{19,\ 20,\ 21,\ \cdots,\ 100\}$
$A_{11}=\{x\,|\,21\le x\le 109,\ x$는 정수$\}=\{21,\ 22,\ 23,\ \cdots,\ 109\}$
이때, $A_1\cap A_{11}=\varnothing$
따라서 $A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n\neq\varnothing$이 성립하려면 $n\le 10$이어야 하므로 n의 최댓값은 10이다.

0254

|전략| 집합 A의 원소의 합을 $S(A)$라 하면 두 집합 A, B에 대하여 $S(A\cup B)=S(A)+S(B)-S(A\cap B)$임을 이용한다.

$n(A)=5$이므로 집합 $A=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\}$라 하면
집합 $B=\left\{\dfrac{x+a}{2}\,\middle|\,x\in A\right\}$에서
$B=\left\{\dfrac{x_1+a}{2},\ \dfrac{x_2+a}{2},\ \dfrac{x_3+a}{2},\ \dfrac{x_4+a}{2},\ \dfrac{x_5+a}{2}\right\}$
두 집합 A, B에 대하여 집합 A의 원소의 합을 $S(A)$라 할 때,
$S(A\cup B)=S(A)+S(B)-S(A\cap B)$
이때, 조건 (가)에서 집합 A의 모든 원소의 합이 28이므로
$S(A)=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=28$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
조건 (나)에서 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합이 49이므로
$S(A\cup B)=49$
조건 (다)에서 $A\cap B=\{10,\ 13\}$이므로
$S(A\cap B)=10+13=23$
$S(A\cup B)=S(A)+S(B)-S(A\cap B)$에 대입하면
$49=28+S(B)-23$
$\therefore S(B)=44$
이때, 집합 B의 모든 원소의 합은
$S(B)=\dfrac{x_1+a}{2}+\dfrac{x_2+a}{2}+\dfrac{x_3+a}{2}+\dfrac{x_4+a}{2}+\dfrac{x_5+a}{2}$
$=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+\dfrac{5}{2}a$
$=\dfrac{1}{2}\cdot 28+\dfrac{5}{2}a$ ($\because$ ㉠)
$=14+\dfrac{5}{2}a$
이므로 $14+\dfrac{5}{2}a=44$, $\dfrac{5}{2}a=30$
$\therefore a=12$

답 12

0255

|전략| k의 값을 1, 2, 3, 4, 5일 때로 나누어 $\left[\dfrac{9}{4}k\right]$, $\left[\dfrac{9}{5}k\right]$의 값을 구해 본다.

k는 $k\ge 1$인 정수이므로
(i) $k=1$일 때, $\left[\dfrac{9}{4}k\right]=\left[\dfrac{9}{4}\right]=2$, $\left[\dfrac{9}{5}k\right]=\left[\dfrac{9}{5}\right]=1$

(ii) $k=2$일 때, $\left[\frac{9}{4}k\right]=\left[\frac{9}{2}\right]=4$, $\left[\frac{9}{5}k\right]=\left[\frac{18}{5}\right]=3$

(iii) $k=3$일 때, $\left[\frac{9}{4}k\right]=\left[\frac{27}{4}\right]=6$, $\left[\frac{9}{5}k\right]=\left[\frac{27}{5}\right]=5$

(iv) $k=4$일 때, $\left[\frac{9}{4}k\right]=[9]=9$, $\left[\frac{9}{5}k\right]=\left[\frac{36}{5}\right]=7$

(v) $k=5$일 때, $\left[\frac{9}{4}k\right]=\left[\frac{45}{4}\right]=11$, $\left[\frac{9}{5}k\right]=[9]=9$

(i)~(v)에서

$A=\left\{\left[\frac{9}{4}k\right] \middle| k\text{는 } 1\le k\le 4\text{인 정수}\right\}=\{2,\ 4,\ 6,\ 9\}$

$B=\left\{\left[\frac{9}{5}k\right] \middle| k\text{는 } 1\le k\le 5\text{인 정수}\right\}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

일 때, $A\cap B\ne\varnothing$이다.

따라서 조건을 만족시키는 a의 최솟값은 4, b의 최솟값은 5이므로 구하는 ab의 최솟값은 $4\cdot 5=20$ 답 ③

0256

|전략| $A_n\cap A_2=A_{2n}$에서 n과 2의 관계를 구하고, $90\in(A_2-A_n)$에서 n과 90의 관계를 구한다.

$A_n\cap A_2$는 n과 2의 공배수의 집합이고, A_{2n}은 $2n$의 배수의 집합이다.

$A_n\cap A_2=A_{2n}$에서 n과 2의 공배수의 집합이 $2n$의 배수의 집합과 같으므로 n과 2는 서로소이다.

즉, n은 홀수이다. …… ㉠

$90\in(A_2-A_n)$에서 $90\in A_2$, $90\notin A_n$이므로 90은 n의 배수가 아니다.

즉, n은 90의 약수가 아니다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 n은 90 이하의 홀수 중 90의 약수가 아닌 수이다.

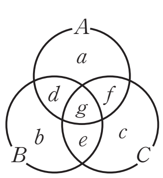
따라서 90 이하의 홀수는 45개이고, 90의 약수 중 홀수는 1, 3, 5, 9, 15, 45의 6개이므로 n의 개수는

$45-6=39$ 답 39

0257

|전략| 각 집합에 속하는 원소의 개수를 벤 다이어그램을 이용하여 나타내어 본다.

오른쪽 그림과 같이 벤 다이어그램의 각 부분에 속하는 원소의 개수를 a, b, c, d, e, f, g로 나타내면



$n(A\cup B\cup C)=40$, $n(A\triangledown B)=30$,

$n(B\triangledown C)=20$, $n(C\triangledown A)=10$

이므로

$a+b+c+d+e+f+g=40$ …… ㉠

$a+f+b+e=30$ …… ㉡

$b+d+c+f=20$ …… ㉢

$a+d+c+e=10$ …… ㉣

㉡+㉢+㉣을 하면

$2(a+b+c+d+e+f)=60$

$\therefore a+b+c+d+e+f=30$ …… ㉤

㉠−㉤을 하면 $g=10$

$\therefore n(A\cap B\cap C)=10$ 답 10

다른 풀이 $n(A\cup B\cup C)=40$에서

$n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$

$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=40$ …… ㉠

$n(A\triangledown B)=30$에서

$n(A)+n(B)-2\times n(A\cap B)=30$ …… ㉡

$n(B\triangledown C)=20$에서

$n(B)+n(C)-2\times n(B\cap C)=20$ …… ㉢

$n(C\triangledown A)=10$에서

$n(C)+n(A)-2\times n(C\cap A)=10$ …… ㉣

㉡+㉢+㉣을 하면

$2\times n(A)+2\times n(B)+2\times n(C)$

$-2\times n(A\cap B)-2\times n(B\cap C)-2\times n(C\cap A)$

$=60$

$\therefore n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)=30$

…… ㉤

㉠−㉤을 하면 $n(A\cap B\cap C)=10$

0258

|전략| $n(A-B)$를 $n(A\cap B)$에 대한 식으로 만든 후 $n(A\cap B)$가 최소일 때, $n(A-B)$가 최대임을 이용한다.

어느 학교 학생 전체의 집합을 U, 두 과자 A, B를 선호하는 학생의 집합을 각각 A, B라 하면

$n(U)=200$ …… ㉠

$n(A)=n(B)+20 \qquad \therefore n(B)=n(A)-20$ …… ㉡

$n(A^C\cap B^C)=n(A\cup B)-100$ …… ㉢

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로

㉠, ㉢에서 $200-n(A\cup B)=n(A\cup B)-100$

$2\times n(A\cup B)=300 \qquad \therefore n(A\cup B)=150$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로 ㉡에서

$150=n(A)+n(A)-20-n(A\cap B)$

$2\times n(A)=170+n(A\cap B)$

$\therefore n(A)=\frac{170+n(A\cap B)}{2}$

이때, 과자 A만을 선호하는 학생의 집합은 $A-B$이고,

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

이므로 $n(A\cap B)$가 최소일 때, $n(A-B)$는 최대가 된다.

그런데 $0\le n(A\cap B)\le n(B)$에서 $n(A\cap B)$의 최솟값은 0이므로

$n(A-B)$의 최댓값은 $\frac{170-0}{2}=85$

따라서 과자 A만을 선호하는 학생 수의 최댓값은 85이다. 답 85

본책 44~67쪽

3 | 명제

STEP 1 개념 마스터 ❶

0259

4의 배수 4, 8, 12, …는 모두 2의 배수이므로 참인 명제이다.

답 참인 명제

0260

x의 값에 따라 참, 거짓이 결정되므로 조건이다. 답 조건

참고 $x^2-2x-3=0$은 $x=-1$ 또는 $x=3$일 때에만 참이 된다.

0261

$\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 거짓인 명제이다. 답 거짓인 명제

0262

실수 x에 대하여 $|x|\geq 0$이므로 $|x|+1>0$은 참인 명제이다.

답 참인 명제

0263

$2x-6>4$에서 $2x>10$ $\quad\therefore x>5$

따라서 조건 p의 진리집합은 $\{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ 답 $\{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

0264

10 이하의 소수는 2, 3, 5, 7이므로 조건 q의 진리집합은

$\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 답 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

0265

$x^2-5x+6=0$에서 $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

따라서 조건 r의 진리집합은 $\{2,\ 3\}$ 답 $\{2,\ 3\}$

0266 답 (가) 참 (나) 홀수 (다) 거짓

0267 답 $\sqrt{9}$는 무리수가 아니다. (참)

0268 답 1은 소수이거나 합성수이다. (거짓)

0269

$\sim p$: x는 10의 약수가 아니다.

10의 약수는 1, 2, 5, 10이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은

$\{3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ 답 풀이 참조

0270

$\sim q$: $x^2-4x+3\neq 0$

$x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 조건 $\sim q$의 진리집합은

$\{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ 답 풀이 참조

0271 답 $-2\leq x\leq 3$

0272 답 $x\neq 0$ 또는 $y\neq 0$

0273 답 $x\leq -1$ 또는 $x>4$

0274 답 (1) $a>0$이다.

(2) $-a<0$이다.

0275 답 (1) a, b가 2의 배수이다.

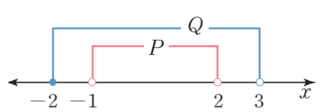
(2) $a+b$가 2의 배수이다.

0276 답 (1) $\triangle$ABC에서 $\angle$B$=\angle$C이다.

(2) $\triangle$ABC에서 $\overline{\text{AB}}=\overline{\text{AC}}$이다.

0277

두 조건 p : $-1<x<2$, q : $-2\leq x<3$의 진리집합을 각각 P, Q라 하면



따라서 $P\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다. 답 참

0278

[반례] $x=-2$이면 $x^2=4$이지만 $x\neq 2$이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다. 답 거짓

다른 풀이 두 조건 p : $x^2=4$, q : $x=2$의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P=\{-2,\ 2\}$, $Q=\{2\}$

$\therefore P\not\subset Q$

따라서 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

0279
[반례] $x=0$이면 $x^2=0$이다. 답 거짓

0280
(홀수)$\times$(홀수)$=$(홀수), (홀수)$\times$(짝수)$=$(짝수),
(짝수)$\times$(홀수)$=$(짝수), (짝수)$\times$(짝수)$=$(짝수)
이므로 주어진 명제는 참이다. 답 참

0281
[반례] $a=-3$, $b=\sqrt{3}$이면 $a+b\sqrt{3}=0$이지만 $a\neq0$, $b\neq0$이다.
답 거짓

0282
[반례] $x=0$이면 $|x|=0$이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다. 답 거짓

0283
$x=0$이면 $x^2=0$이므로 주어진 명제는 참이다. 답 참

0284 답 어떤 실수 x에 대하여 $\sqrt{x^2}\neq|x|$이다.

0285 답 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{x}\leq0$이다.

0286 답 역 : $a=0$이고 $b=0$이면 $a^2+b^2=0$이다.
대우 : $a\neq0$ 또는 $b\neq0$이면 $a^2+b^2\neq0$이다.

0287 답 역 : x와 y가 모두 유리수이면 $x+y$는 유리수이다.
대우 : x 또는 y가 무리수이면 $x+y$는 무리수이다.

0288 답 역 : 이등변삼각형이면 정삼각형이다.
대우 : 이등변삼각형이 아니면 정삼각형이 아니다.

0289 답 (1) $x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다. (2) 참 (3) 참

0290
명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 반드시 참인 명제는 그 대우인
$q \longrightarrow \sim p$이다. 답 ③

0291
$Q\subset P$이므로 명제 $q \longrightarrow p$가 참이다.
따라서 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 참이므로 반드시 참인 명제인 것은
ㄹ, ㅂ이다. 답 ㄹ, ㅂ

0292
3의 양의 약수이면 모두 6의 양의 약수이므로 $p \Longrightarrow q$
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다. 답 충분조건

0293
$x^2-x=0$에서 $x(x-1)=0$
$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=1$
따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다. 답 필요조건

0294
$x^2=y^2$이면 $x=-y$ 또는 $x=y$
따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다. 답 충분조건

0295
$xy<0$이면 $x<0$, $y>0$ 또는 $x>0$, $y<0$
따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다. 답 충분조건

0296
$A\subset B$이면 $A-B=\emptyset$이고, $A-B=\emptyset$이면 $A\subset B$이다.
따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
답 필요충분조건

0297
$xy=0 \Longleftrightarrow x=0$ 또는 $y=0$
따라서 $xy=0$은 $x=0$ 또는 $y=0$이기 위한 필요충분조건이다.
답 필요충분조건

0298
$x^2+y^2=0 \Longleftrightarrow x=0,\ y=0$
$x=0,\ y=0 \Longrightarrow x=0$ 또는 $y=0$
따라서 $x^2+y^2=0$은 $x=0$ 또는 $y=0$이기 위한 충분조건이다.
답 충분조건

0299
$(x+y)^2\geq0 \Longleftrightarrow x+y$는 실수
$x=0$ 또는 $y=0 \Longrightarrow x+y$는 실수
따라서 $(x+y)^2\geq0$은 $x=0$ 또는 $y=0$이기 위한 필요조건이다.
답 필요조건

0300
$|x|+|y|=0 \Longleftrightarrow x=0,\ y=0$
$x=0,\ y=0 \Longrightarrow x=0$ 또는 $y=0$
따라서 $|x|+|y|=0$은 $x=0$ 또는 $y=0$이기 위한 충분조건이다.
답 충분조건

3 명제

0301

(1) $P=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Q=\{0,\ 1\}$, $R=\{-1,\ 0,\ 1\}$

(2) $Q\subset P$이므로 $q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

(3) $P=R$이므로 $p \Longleftrightarrow r$

따라서 p는 r이기 위한 필요충분조건이다.

답 (1) $P=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Q=\{0,\ 1\}$, $R=\{-1,\ 0,\ 1\}$
(2) 필요조건 (3) 필요충분조건

STEP 2 유형 마스터 ❶

0302

|전략| 미지수의 값에 따라 참, 거짓이 달라지는 식이나 사람에 따라 기준이 달라질 수 있는 문장은 명제가 아님을 이용한다.

①, ②, ⑤ '재미있다', '크다', '많다', '좋다' 등은 주관적인 견해이므로 참, 거짓을 판별할 수 없다.

따라서 명제가 아니다.

③ 거짓인 명제이다.

④ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다. (조건이다.)

따라서 명제인 것은 ③이다. 답 ③

0303

ㄱ. 거짓인 명제이다.

ㄴ. 참인 명제이다.

ㄷ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다. (조건이다.)

ㄹ. '멋지다'는 주관적인 견해이므로 참, 거짓을 판별할 수 없다.

따라서 명제가 아니다.

ㅁ. 참인 명제이다.

따라서 명제인 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㅁ

0304

①, ⑤ 거짓인 명제이다.

②, ④ 참인 명제이다. 답 ③

0305

|전략| '$=$'의 부정은 '$\neq$'임을 이용한다.

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$의 부정은

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$

$(a-b)^2\neq 0$ 또는 $(b-c)^2\neq 0$ 또는 $(c-a)^2\neq 0$

$\therefore\ a\neq b$ 또는 $b\neq c$ 또는 $c\neq a$

즉, $a,\ b,\ c$ 중에 서로 다른 것이 적어도 하나 있다. 답 ⑤

0306

'두 실수 $x,\ y$ 중 적어도 하나는 무리수이다.'의 부정은

'두 실수 $x,\ y$ 중 무리수는 없다.'

즉, '두 실수 $x,\ y$는 모두 유리수이다.' 답 ④

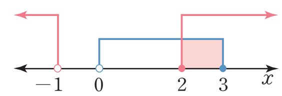
0307

'p 또는 $\sim q$'의 부정은 '$\sim p$이고 q'이다.

$\sim p$: $x<-1$ 또는 $x\geq 2$,

q : $0<x\leq 3$이므로

'$\sim p$이고 q'는 $2\leq x\leq 3$



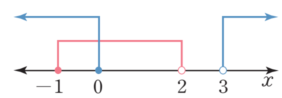
답 $2\leq x\leq 3$

다른 풀이 p : $-1\leq x<2$,

$\sim q$: $x\leq 0$ 또는 $x>3$이므로

'p 또는 $\sim q$'는 $x<2$ 또는 $x>3$

따라서 'p 또는 $\sim q$'의 부정은 $2\leq x\leq 3$



0308

|전략| 먼저 전체집합 U를 구한 다음 조건 p의 진리집합을 구해 본다.

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$이고 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$P=\{1,\ 2,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$

따라서 $\sim p$의 진리집합은 $P^C=\{3,\ 4\}$ 답 $\{3,\ 4\}$

0309

$P=\{x\,|\,f(x)=0\}$, $Q=\{x\,|\,g(x)=0\}$이고

$f(x)g(x)=0$에서 $f(x)=0$ 또는 $g(x)=0$

따라서 조건 $f(x)g(x)=0$의 진리집합은 $P\cup Q$ 답 ②

0310

$P=\{x\,|\,x\geq 2\}$, $Q=\{x\,|\,x<-1\}$에서

$P^C=\{x\,|\,x<2\}$, $Q^C=\{x\,|\,x\geq -1\}$

이때, 조건 $-1\leq x<2$의 진리집합은 $\{x\,|\,-1\leq x<2\}$이므로 구하는 집합은

$P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$ 답 ②

0311

$U=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

$x^2-x=0$에서 $x(x-1)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

조건 p의 진리집합을 P라 하면 $P=\{0,\ 1\}$ … ❶

$x^2=1$에서 $x=\pm 1$

조건 q의 진리집합을 Q라 하면 $Q=\{-1,\ 1\}$ … ❷

이때, '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합은 $P^C\cup Q$이고 $P^C=\{-2,\ -1,\ 2\}$이므로 $P^C\cup Q=\{-2,\ -1,\ 1,\ 2\}$ … ❸

따라서 구하는 집합의 모든 원소의 곱은

$-2\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2=4$ ··· ❹

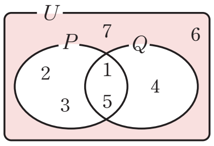
답 4

채점 기준	비율
❶ 조건 p의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❷ 조건 q의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❸ 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❹ 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합의 모든 원소의 곱을 구할 수 있다.	10 %

0312

| 전략 | 조건 $\sim p$의 진리집합의 원소 중에서 조건 q의 진리집합의 원소가 아닌 것을 찾는다.

명제 '$\sim p$이면 q이다.'가 거짓임을 보이려면 P^C의 원소 중에서 Q의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.



따라서 반례는 집합 $P^C\cap Q^C$의 원소인 6, 7이므로 구하는 모든 원소의 합은

$6+7=13$

답 13

0313

주어진 명제에 대하여 두 조건 p, q를 각각

p : x는 홀수이다.

q : x는 소수이다.

라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $Q=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

이때, 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 $P\cap Q^C$의 원소이다.

따라서 구하는 반례는 1, 9이다.

답 1, 9

0314

명제 '$\sim p$이면 $\sim q$이다.'가 거짓임을 보이려면 P^C의 원소 중에서 Q^C의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

따라서 반례가 속하는 집합은

$P^C\cap(Q^C)^C=P^C\cap Q$

답 ⑤

0315

명제 'p 또는 q이면 r이다.'가 거짓임을 보이려면 $P\cup Q$의 원소 중에서 R의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

따라서 반례는 집합 $\underbrace{(P\cup Q)\cap R^C}_{\{a,\ b,\ e\}\cap\{a,\ d\}=\{a\}}$의 원소인 a이다.

답 a

0316

| 전략 | 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이려면 조건 p는 만족시키지만 조건 q는 만족시키지 않는 반례를 찾는다.

ㄱ. $|x|<1$에서 $-1<x<1$

즉, $-1<x<1$이면 $x<1$이다. (참)

ㄴ. [반례] $x=-2$이면 $x\neq 2$이지만 $x^2=4$이다. (거짓)

ㄷ. $x=3$이면 $x^2-3x=3^2-3\cdot 3=0$ (참)

ㄹ. [반례] $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$이면 x, y는 모두 무리수이지만 $x+y=\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$, $xy=\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})=-2$로 모두 유리수이다. (거짓)

따라서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

0317

③ [반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x+y=0$이지만 $x\neq 0$, $y\neq 0$이다. (거짓)

⑤ [반례] 1은 16의 양의 약수이지만 2의 배수가 아니다. (거짓)

답 ③, ⑤

0318

ㄱ. [반례] $x=0$, $y=1$이면 $xy=0$이지만 $x^2+y^2=1\neq 0$이다. (거짓)

ㄴ. [반례] $x=0$, $y=-1$이면 $x>y$이지만 $x^2<y^2$이다. (거짓)

ㄹ. [반례] $\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{C}\neq\angle\mathrm{B}$이면 삼각형 ABC는 이등변삼각형이지만 $\angle\mathrm{A}\neq\angle\mathrm{B}$이다. (거짓)

따라서 참인 명제인 것은 ㄷ이다.

답 ②

0319

| 전략 | 주어진 각 조건들의 진리집합 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램에서 찾아본다.

① $R\subset Q^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim q$는 참

② $R\subset P^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$는 참

③ $P\subset R^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$는 참

④ $P\subset Q$에서 $Q^C\subset P^C$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$는 참

⑤ $P\not\subset Q^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$는 거짓

답 ⑤

0320

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이면 $P\subset Q^C$, 즉 $P\cap Q^C=P$

따라서 항상 옳은 것은 ③ $P-Q=P$이다.

답 ③

0321

$P\cup Q=P$이므로 $Q\subset P$ ······ ㉠

$Q\cap R=Q$이므로 $Q\subset R$ ······ ㉡

따라서 명제 $q \longrightarrow p$와 $q \longrightarrow r$는 참이다.

또, ㉠에서 $P^C\subset Q^C$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 참이고

㉡에서 $R^C\subset Q^C$이므로 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$도 참이다.

답 ⑤

0322

조건 ㈎에서 $P\cap Q=P$이므로 $P\subset Q$ ······ ㉠

조건 ㈏에서 $P\cup R^C=R^C$이므로 $P\subset R^C$ ······ ㉡

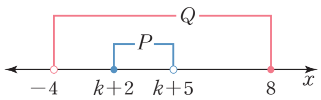
따라서 명제 $p \longrightarrow q$와 $p \longrightarrow \sim r$는 참이다.

또, ㉠에서 $Q^C \subset P^C$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이고
㉡에서 $R \subset P^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다. 답 ④

0323

|전략| 두 조건 p, q의 진리집합을 P, Q라 할 때, 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계를 수직선 위에 나타내어 본다.

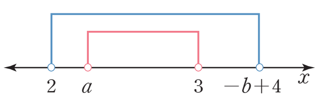
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x \mid k+2 \le x < k+5\}$, $Q=\{x \mid -4 < x \le 8\}$
명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면
$P \subset Q$이어야 하므로 오른쪽
그림에서



$-4 < k+2$, $k+5 \le 8$
즉, $k > -6$, $k \le 3$
$\therefore -6 < k \le 3$
따라서 구하는 정수 k는 -5, -4, -3, $\cdots$, 2, 3의 9개이다. 답 ④

0324

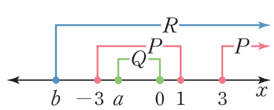
주어진 명제가 참이 되려면 $\{x \mid a < x < 3\} \subset \{x \mid 2 < x < -b+4\}$이어야 하므로 다음 그림에서



$2 \le a < 3$, $-b+4 \ge 3$
$\therefore 2 \le a < 3$, $b \le 1$
따라서 a의 최솟값은 $\alpha=2$, b의 최댓값은 $\beta=1$이므로
$\alpha+\beta=3$ 답 ③

0325

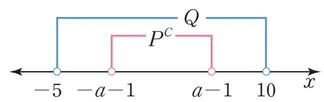
세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면
$P=\{x \mid -3 \le x \le 1$ 또는 $x \ge 3\}$
$Q=\{x \mid a \le x \le 0\}$
$R=\{x \mid x \ge b\}$
명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면
$Q \subset P$이고, 명제 $p \longrightarrow r$가 참이
되려면 $P \subset R$이어야 하므로 오른
쪽 그림에서



$-3 \le a \le 0$, $b \le -3$
따라서 a의 최솟값은 -3, b의 최댓값은 -3이므로 구하는 곱은
$(-3) \cdot (-3)=9$ 답 9

0326

p : $|x+1| \ge a$에서 $\sim p$: $|x+1| < a$이므로
$-a < x+1 < a$ $\qquad \therefore -a-1 < x < a-1$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P^C=\{x \mid -a-1 < x < a-1\}$, $Q=\{x \mid -5 < x < 10\}$ ··· ❶
명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려
면 $P^C \subset Q$이어야 하므로 오
른쪽 그림에서 ··· ❷



$-5 \le -a-1$, $a-1 \le 10$
즉, $a \le 4$, $a \le 11$
$\therefore 0 < a \le 4$ ($\because a > 0$) ··· ❸
따라서 양수 a의 최댓값은 4이다. ··· ❹
답 4

채점 기준	비율
❶ 두 조건 $\sim p$, q의 진리집합을 구할 수 있다.	20 %
❷ 두 조건 $\sim p$, q의 진리집합 사이의 포함 관계를 알 수 있다.	40 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ a의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

0327

ㄱ. [반례] $x=-1$이면 $x \ne |x|$이므로 거짓이다.
ㄴ. $x=0$이면 $x^2=0$이므로 참이다.
ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \ge \frac{3}{4}$이므로 참이다.
ㄹ. $|x| < 0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 거짓이다.
따라서 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

0328

① 가장 큰 원소인 $x=5$일 때도 $x-1=4$이므로 참이다.
② $x=1$이면 $x^2-1=0$이므로 참이다.
③ $x=1$, $y=1$이면 $x+y=2$이므로 참이다.
④ [반례] $x=1$이면 $|x-x^2|=0$이므로 거짓이다.
⑤ $x=1$, $y=2$이면 $x^2+y^2=5$이므로 참이다. 답 ④

0329

|전략| '모든 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '어떤 x에 대하여 $\sim p$이다.'이고, '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'임을 이용한다.

① 부정 : 모든 실수 x에 대하여 $x < |x|$이다.
[반례] $x=1$이면 $x=|x|$이므로 거짓이다.
② 부정 : 모든 실수 x에 대하여 $x+\frac{1}{x} < 2$이다.
[반례] $x=1$이면 $x+\frac{1}{x}=2$이므로 거짓이다.
③ 부정 : 모든 실수 x에 대하여 $x^2 < x-1$이다.
[반례] $x=0$이면 $x^2 > x-1$이므로 거짓이다.
④ 부정 : 어떤 실수 x에 대하여 $x^2+6x+10 \le 0$이다.
모든 실수 x에 대하여 $x^2+6x+10=(x+3)^2+1 \ge 1$이므로 거짓이다.
⑤ 부정 : 어떤 실수 x, y에 대하여 $|x+y|=|x|+|y|$이다.
이때, $x=1$, $y=1$이면 $|x+y|=|x|+|y|=2$이므로 참이다.
답 ⑤

0330

|전략| 주어진 명제의 가정과 결론을 서로 바꾸어 그 역을 찾은 다음 그것의 참, 거짓을 판별한다.

① 역 : $xy=0$이면 $x=0$이고 $y=0$이다. (거짓)
[반례] $x=0$, $y=1$이면 $xy=0$이지만 $y\neq0$이다.

② 역 : $x\leq1$이면 $x^2\leq1$이다. (거짓)
[반례] $x=-2$이면 $x\leq1$이지만 $x^2=4>1$이다.

③ 역 : $x>1$ 또는 $y>1$이면 $x+y>2$이다. (거짓)
[반례] $x=2$, $y=-3$이면 $x>1$이지만 $x+y=-1<2$이다.

④ 역 : $x^2=4$이면 $x=-2$이다. (거짓)
[반례] $x=2$이면 $x^2=4$이지만 $x\neq-2$이다.

⑤ 역 : x, y가 짝수이면 xy는 짝수이다. (참) 답 ⑤

참고 (짝수)×(짝수)=(짝수)이다.

0331

① 명제 : $x^2=9$이면 $x=3$이다. (거짓)
[반례] $x=-3$이면 $x^2=9$이지만 $x\neq3$이다.
주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

② 명제 : $x>y$이면 $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$이다. (거짓)
[반례] $x=2$, $y=-1$이면 $x>y$이지만 $\frac{1}{2}>-1$이 되어 $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$이다.
주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

③ 명제 : $xy=yz$이면 $x=z$이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=0$, $z=2$이면 $xy=yz=0$이지만 $x\neq z$이다.
주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

④ 대우 : $x=0$이고 $y=0$이면 $x^2+y^2=0$이다. (참)

⑤ 명제 : xy가 유리수이면 x, y는 모두 유리수이다. (거짓)
[반례] $x=\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}$이면 $xy=-3$은 유리수이지만 x, y는 모두 유리수가 아니다.
주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다. 답 ④

0332

ㄱ. (i) 명제 : $|x|+|y|=0$이면 $x=0$, $y=0$이므로 $x^2+y^2=0$이다. (참)
주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
(ii) 역 : $x^2+y^2=0$이면 $|x|+|y|=0$이다.
이때, $x^2+y^2=0$에서 $x=0$, $y=0$이므로 $|x|+|y|=0$이다. (참)

ㄴ. (i) 명제 : $x^2=1$이면 $x^3=1$이다. (거짓)
[반례] $x=-1$이면 $x^2=1$이지만 $x^3=-1$이다.
주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.
(ii) 역 : $x^3=1$이면 $x^2=1$이다.
이때, x는 실수이므로 $x^3=1$에서 $x=1$
$x=1$이면 $x^2=1$이다. (참)

ㄷ. (i) 명제 : $x\geq1$이고 $y\geq1$이면 $x+y\geq2$이다. (참)
주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
(ii) 역 : $x+y\geq2$이면 $x\geq1$이고 $y\geq1$이다. (거짓)
[반례] $x=2$, $y=0$이면 $x+y\geq2$이지만 $y<1$이다.

ㄹ. (i) 명제 : 자연수 x, y에 대하여 x^2+y^2이 짝수이면 xy는 짝수이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=1$이면 $x^2+y^2=2$는 짝수이지만 $xy=1$은 홀수이다.
주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.
(ii) 역 : 자연수 x, y에 대하여 xy가 짝수이면 x^2+y^2은 짝수이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=2$이면 $xy=2$는 짝수이지만 $x^2+y^2=5$는 홀수이다.

따라서 그 역이 참이고, 대우가 거짓인 명제인 것은 ㄴ이다. 답 ㄴ

0333

|전략| 명제가 참이면 그 대우도 참임을 이용한다.

명제 '$4x^2-ax+3\neq0$이면 $2x-3\neq0$이다.'가 참이므로 그 대우 '$2x-3=0$이면 $4x^2-ax+3=0$이다.'도 참이다.

$x=\frac{3}{2}$을 $4x^2-ax+3=0$에 대입하면

$4\cdot\frac{9}{4}-\frac{3}{2}a+3=0$, $\frac{3}{2}a=12$

$\therefore a=8$ 답 ④

0334

명제 '$a+b<6$이면 $a<1$ 또는 $b<k$이다.'가 참이 되려면 그 대우 '$a\geq1$이고 $b\geq k$이면 $a+b\geq6$이다.'도 참이 되어야 한다. … ❶

이때, $a\geq1$, $b\geq k$에서 $a+b\geq1+k$이므로
'$a+b\geq1+k$이면 $a+b\geq6$이다.'가 참이 되려면
$1+k\geq6$ $\therefore k\geq5$ … ❷

답 $k\geq5$

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 대우가 참임을 알 수 있다.	40 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %

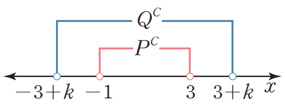
0335

명제 $q\longrightarrow p$가 참이 되려면 그 대우 $\sim p\longrightarrow\sim q$도 참이 되어야 한다.

p : $|x-1|\geq2$에서 $\sim p$: $|x-1|<2$
$-2<x-1<2$ $\therefore -1<x<3$
q : $|x-k|\geq3$에서 $\sim q$: $|x-k|<3$
$-3<x-k<3$ $\therefore -3+k<x<3+k$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P^C=\{x\mid-1<x<3\}$, $Q^C=\{x\mid-3+k<x<3+k\}$

명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 $P^C \subset Q^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-3+k \le -1$, $3 \le 3+k$

$\therefore 0 \le k \le 2$

따라서 정수 k는 0, 1, 2의 3개이다. 답 ③

다른 풀이 p : $|x-1| \ge 2$에서 $x-1 \le -2$ 또는 $x-1 \ge 2$

$\therefore x \le -1$ 또는 $x \ge 3$

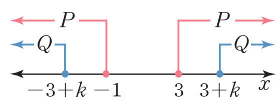
q : $|x-k| \ge 3$에서 $x-k \le -3$ 또는 $x-k \ge 3$

$\therefore x \le -3+k$ 또는 $x \ge 3+k$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid x \le -1$ 또는 $x \ge 3\}$, $Q=\{x \mid x \le -3+k$ 또는 $x \ge 3+k\}$

명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q \subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-3+k \le -1$, $3 \le 3+k$

$\therefore 0 \le k \le 2$

따라서 정수 k는 0, 1, 2의 3개이다.

0336

|전략| 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 참이면 $p \longrightarrow r$도 참임을 이용한다.

$\sim q \longrightarrow p$와 $r \longrightarrow \sim p$가 참이므로 각각의 대우 $\sim p \longrightarrow q$, $p \longrightarrow \sim r$도 참이다.

또한, $\sim q \longrightarrow p$와 $p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

따라서 항상 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

0337

$P \cap Q = \varnothing$에서 $P \subset Q^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이다.

$Q \cup R^C = Q$에서 $R^C \subset Q$이므로 명제 $\sim r \longrightarrow q$가 참이다.

$R \cap S = R$에서 $R \subset S$이므로 명제 $r \longrightarrow s$가 참이다.

명제 $\sim r \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow r$도 참이다.

$p \longrightarrow \sim q$와 $\sim q \longrightarrow r$가 참이므로 $p \longrightarrow r$도 참이다.

$p \longrightarrow r$와 $r \longrightarrow s$가 참이므로 $p \longrightarrow s$가 참이고 그 대우 $\sim s \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ⑤ $\sim s \longrightarrow \sim p$이다. 답 ⑤

0338

ㄱ. $s \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow r$가 참이므로 $s \longrightarrow r$가 참이고 그 대우 $\sim r \longrightarrow \sim s$도 참이다.

ㄴ. $r \longrightarrow s$와 $s \longrightarrow q$가 참이므로 $r \longrightarrow q$가 참이고 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

ㄷ. 명제 $p \longrightarrow q$는 참이지만 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$의 참, 거짓은 추론할 수 없다.

따라서 항상 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0339

명제 $\sim s \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow s$도 참이다.

$p \longrightarrow \sim q$와 $r \longrightarrow s$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow s$가 참이 되려면 명제 $\sim q \longrightarrow r$가 참이어야 한다.

또한, 명제 $\sim q \longrightarrow r$가 참이면 그 대우 $\sim r \longrightarrow q$도 참이다.

따라서 명제 $p \longrightarrow s$가 참임을 보이기 위해 필요한 참인 명제는 ⑤ $\sim r \longrightarrow q$이다. 답 ⑤

0340

p : 영어를 잘한다.

q : 국어를 잘한다.

r : 수학을 잘한다.

로 놓으면 $p \longrightarrow q$와 $\sim p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 각각의 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$, $r \longrightarrow p$도 참이다.

또, $r \longrightarrow p$와 $p \longrightarrow q$가 참이므로 $r \longrightarrow q$가 참이고, 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ④이다. 답 ④

참고 각 보기를 p, q, r로 나타내면 다음과 같다.

① $p \longrightarrow r$ ② $q \longrightarrow r$ ③ $\sim p \longrightarrow \sim q$

④ $r \longrightarrow q$ ⑤ $r \longrightarrow \sim p$

0341

p : A가 범인이다. q : B가 범인이다.

r : C가 범인이다. s : D가 범인이다.

로 놓으면 명제 $q \longrightarrow s$, $\sim p \longrightarrow \sim s$, $\sim q \longrightarrow \sim r$가 참이므로 각각의 대우 $\sim s \longrightarrow \sim q$, $s \longrightarrow p$, $r \longrightarrow q$도 참이다.

또, $r \longrightarrow q$, $q \longrightarrow s$, $s \longrightarrow p$가 참이므로

$r \longrightarrow q \longrightarrow s \longrightarrow p$도 참이다.

이때, C가 범인이면 B, D, A도 범인이 되어 네 명 모두가 범인이고, B가 범인이면 D, A도 범인이 되어 A, B, D 세 명이 범인이다. 이것은 조건 ㈑에 모순이므로 C, B는 범인이 아니다.

따라서 범인은 A, D이다. 답 A, D

0342

|전략| 두 조건 p, q에 대하여 $p \Longrightarrow q$이고 $q \not\Longrightarrow p$인 것을 찾는다.

ㄱ. $p : x>2 \Longleftarrow q : x>4$

$\therefore$ 필요조건 [$\longrightarrow$의 반례 : $x=3$]

ㄴ. p : x는 6의 양의 약수 $\Longrightarrow q$: x는 18의 양의 약수

$\therefore$ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례 : $x=9$]

ㄷ. $p : x^2+y^2=0 \Longleftrightarrow q : x=0$이고 $y=0$

$\therefore$ 필요충분조건

ㄹ. $p : A \subset (B \cap C) \Longrightarrow q : A \subset B$ 또는 $A \subset C$

$\therefore$ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례 : $A \subset (B-C)$인 경우]

따라서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

0343

① $p: x=0$이고 $y=0 \Longrightarrow q: xy=0$

 $\therefore$ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례 : $x=1,\ y=0$]

② $p: x>y \Longleftrightarrow q: xz>yz$

 $\therefore$ 필요충분조건

③ $p: xy=|xy| \Longleftarrow q: x>0$이고 $y>0$

 $\therefore$ 필요조건 [$\longrightarrow$의 반례 : $x=1,\ y=0$]

④ $p: xy<0 \Longrightarrow q: x<0$ 또는 $y<0$

 $\therefore$ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례 : $x=-1,\ y=0$]

⑤ $p: x>y \mathrel{\substack{\not\Leftarrow \\ \not\Rightarrow}} q: \dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}$

 따라서 아무 조건도 아니다.

 [$\longrightarrow$의 반례 : $x=1,\ y=-1$, $\longleftarrow$의 반례 : $x=-1,\ y=1$]

답 ③

0344

① $p: a^2+b^2>0 \Longleftarrow q: ab<0$

 $\therefore$ 필요조건 [$\longrightarrow$의 반례 : $a=0,\ b=1$]

② $p: a=1 \Longrightarrow q: a^2=a$

 $\therefore$ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례 : $a=0$]

③ $p: |a+b|>a+b \Longleftrightarrow q: a+b<0$

 $\therefore$ 필요충분조건

④ $p: a=b=c=0 \Longrightarrow q: (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

 $\therefore$ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례 : $a=b=c=1$]

⑤ $p: (A\cup B)-A=\varnothing \Longrightarrow q: A\cap B\neq\varnothing$

 $\therefore$ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례 : $A=\{1,\ 2\},\ B=\{2,\ 3\}$] 답 ③

참고 ⑤에서

$$(A\cup B)-A=(A\cup B)\cap A^C=(A\cap A^C)\cup(B\cap A^C)$$
$$=\varnothing\cup(B\cap A^C)=B\cap A^C$$
$$=B-A$$

이므로 $B-A=\varnothing \Longleftrightarrow B\subset A$

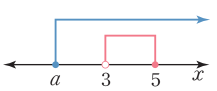
Lecture

$A\subset B \Longleftrightarrow A\cap B=A \Longleftrightarrow A\cup B=B$
$\Longleftrightarrow A-B=\varnothing \Longleftrightarrow B^C\subset A^C$

0345

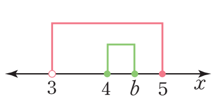
|전략| 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때 $P\subset Q$이면 p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건임을 이용한다.

$x\geq a$는 $3<x\leq5$이기 위한 필요조건이므로 명제 '$3<x\leq5$이면 $x\geq a$이다.'가 참이다.



$\therefore a\leq3$

$4\leq x\leq b$는 $3<x\leq5$이기 위한 충분조건이므로 명제 '$4\leq x\leq b$이면 $3<x\leq5$이다.'가 참이다.



$\therefore 4\leq b\leq5$

따라서 a의 최댓값은 3이고, b의 최댓값은 5이므로 두 값의 차는

$|3-5|=2$

답 2

0346

$x+2\neq0$이 $x^2+ax+4\neq0$이기 위한 필요조건이므로 명제 '$x^2+ax+4\neq0$이면 $x+2\neq0$이다.'는 참이다. ··· ❶

따라서 이 명제의 대우 '$x+2=0$이면 $x^2+ax+4=0$이다.'도 참이다. ··· ❷

$x=-2$를 $x^2+ax+4=0$에 대입하면

$4-2a+4=0 \qquad \therefore a=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $x+2\neq0$이 $x^2+ax+4\neq0$이기 위한 필요조건임을 이용하여 참인 명제를 찾을 수 있다.	40 %
❷ ❶에서 찾은 명제의 대우가 참임을 알 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

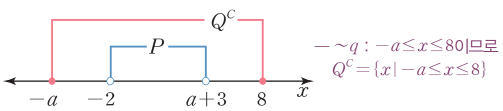
0347

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\mid -2<x<a+3\}$, $Q=\{x\mid x<-a$ 또는 $x>8\}$

이때, p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$는 참이다.

즉, $P\subset Q^C$



위의 그림에서 $-a\leq-2$, $-2<a+3\leq8$이므로

$a\geq2$, $-5<a\leq5$

$\therefore 2\leq a\leq5$

따라서 정수 a는 2, 3, 4, 5이므로 그 합은 14이다. 답 14

0348

$|x-a|\leq1$에서 $-1\leq x-a\leq1$

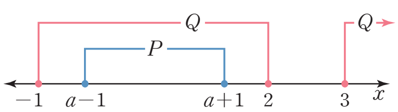
$a-1\leq x\leq a+1 \qquad \therefore P=\{x\mid a-1\leq x\leq a+1\}$

이때, p가 q이기 위한 충분조건이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

즉, $P\subset Q$

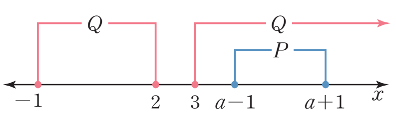
다음과 같이 $P\subset Q$가 되는 두 가지 경우를 생각해 보자.

(i)



위의 그림에서 $-1\leq a-1$, $a+1\leq2 \qquad \therefore 0\leq a\leq1$

(ii)



위의 그림에서 $3\leq a-1 \qquad \therefore a\geq4$

(i), (ii)에서 $0\leq a\leq1$ 또는 $a\geq4$

따라서 실수 a의 최솟값은 0이다. 답 ④

0349

|전략| 주어진 벤 다이어그램에서 세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 찾는다.

ㄱ. $Q \subset P$이므로 $q \Longrightarrow p$, 즉 q는 p이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $R \subset Q^C$이므로 $r \Longrightarrow \sim q$, 즉 $\sim q$는 r이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $Q \subset R^C$이므로 $q \Longrightarrow \sim r$, 즉 $\sim r$는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄹ. $R \not\subset P^C$, $P^C \not\subset R$이므로 r는 $\sim p$이기 위한 아무 조건도 아니다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

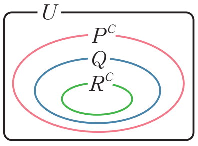
0350

q는 $\sim p$이기 위한 충분조건이므로

$Q \subset P^C$ …… ㉠

q는 $\sim r$이기 위한 필요조건이므로

$R^C \subset Q$ …… ㉡



㉠, ㉡에서 $R^C \subset Q \subset P^C$

따라서 위의 벤 다이어그램에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

0351

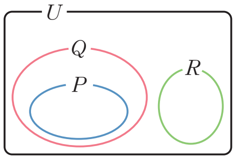
$(Q-R^C) \cup (P-Q) = \varnothing$이므로

$Q-R^C=\varnothing$이고 $P-Q=\varnothing$

즉, $Q \cap R=\varnothing$이고 $P-Q=\varnothing$

따라서 Q와 R는 서로소이고 $P \subset Q$이다.

세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 $P \subset R^C$



따라서 p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로 항상 옳은 것은 ④이다.

답 ④

0352

|전략| 세 조건 p, q, r에 대하여 $p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow r$이면 $p \Longrightarrow r$임을 이용한다.

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow q$

p는 $\sim r$이기 위한 필요조건이므로 $\sim r \Longrightarrow p$

$\sim r \Longrightarrow p$, $p \Longrightarrow q$이므로 $\sim r \Longrightarrow q$, 즉 $\sim q \Longrightarrow r$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ의 2개이다.

답 2

0353

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow q$

p는 r이기 위한 필요조건이므로 $r \Longrightarrow p$

r는 s이기 위한 필요충분조건이므로 $r \Longleftrightarrow s$

ㄱ. $r \Longrightarrow p$, $p \Longrightarrow q$이므로 $r \Longrightarrow q$

즉, r는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $s \Longrightarrow r$, $r \Longrightarrow q$이므로 $s \Longrightarrow q$

즉, q는 s이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $s \Longrightarrow r$, $r \Longrightarrow p$이므로 $s \Longrightarrow p$

즉, s는 p이기 위한 충분조건이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

0354

r는 p, q 모두의 필요조건이므로 $p \Longrightarrow r$, $q \Longrightarrow r$

s는 r이기 위한 필요조건이므로 $r \Longrightarrow s$

s는 p이기 위한 충분조건이므로 $s \Longrightarrow p$

즉, $q \Longrightarrow r \Longrightarrow s$

$\Nwarrow p \swarrow$

따라서 서로 필요충분조건인 것은 ㄴ. p와 r, ㄷ. p와 s, ㅂ. r와 s의 3개이다.

답 ③

STEP 1 개념 마스터 ❷

0355

주어진 명제의 대우는

'두 실수 a, b에 대하여 $\boxed{\text{(가) } a<0\text{이고 } b<0}$이면 $\boxed{\text{(나) } a+b<0}$이다.'

이고, 이는 $\boxed{\text{(다) 참}}$이므로 주어진 명제도 참이다.

답 (가) $a<0$이고 $b<0$ (나) $a+b<0$ (다) 참

0356

$\sqrt{2}$를 $\boxed{\text{(가) 유리수}}$라 가정하면

$\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 $\boxed{\text{(나) 서로소}}$인 자연수)으로 놓을 수 있다.

양변을 제곱하여 정리하면

$n^2=2m^2$ …… ㉠

여기서 n^2이 $\boxed{\text{(다) 짝수}}$이므로 n도 $\boxed{\text{(다) 짝수}}$이다.

$n=2k$ (k는 자연수)로 놓고 이를 ㉠에 대입하면

$(2k)^2=2m^2$, 즉 $m^2=2k^2$

이때, m^2이 $\boxed{\text{(다) 짝수}}$이므로 m도 $\boxed{\text{(다) 짝수}}$이다.

이것은 m, n이 $\boxed{\text{(나) 서로소}}$인 자연수라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{2}$는 무리수이다.

답 (가) 유리수 (나) 서로소 (다) 짝수

0357

$$a^2+ab+b^2=a^2+ab+\frac{b^2}{4}+\boxed{\text{(가) } \frac{3b^2}{4}}$$

$$=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\boxed{\text{(가) } \frac{3b^2}{4}}$$

a, b가 실수이므로 $\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2 \ge 0$, $b^2 \ge 0$

따라서 $\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\boxed{\text{(가) } \dfrac{3b^2}{4}} \ge 0$이므로

$a^2+ab+b^2 \ge 0$

이때, 등호는 $a+\frac{b}{2}=0$, $b=0$, 즉 $\boxed{(나)\ a=b=0}$ 일 때 성립한다.

답 (가) $\frac{3b^2}{4}$ (나) $a=b=0$

0358

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-\boxed{(가)\ 2\sqrt{ab}}}{2}$$
$$=\frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{2}$$
$$=\frac{(\boxed{(나)\ \sqrt{a}-\sqrt{b}})^2}{2}\geq 0$$

$\therefore\ \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

이때, 등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, 즉 $\boxed{(다)\ a=b}$ 일 때 성립한다.

답 (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (다) $a=b$

0359

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$

그런데 $a+b=6$이므로 $6\geq 2\sqrt{ab}$

$3\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $ab\leq 9$

따라서 ab의 최댓값은 9이다. 답 9

0360

$a>0$, $4b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+4b\geq 2\sqrt{a\cdot 4b}=4\sqrt{ab}$

$=4\cdot 2=8$ (단, 등호는 $a=4b$일 때 성립)

따라서 $a+4b$의 최솟값은 8이다. 답 8

0361

$x>0$, $\frac{1}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$ (단, 등호는 $x=1$일 때 성립)

따라서 $x+\frac{1}{x}$의 최솟값은 2이다. 답 2

참고 등호는 $x=\frac{1}{x}$에서 $x^2=1$, 즉 $x=1$ ($\because x>0$)일 때 성립한다.

0362

$4x>0$, $\frac{9}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4x+\frac{9}{x}\geq 2\sqrt{4x\cdot\frac{9}{x}}=2\cdot 6=12$ $\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{3}{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $4x+\frac{9}{x}$의 최솟값은 12이다. 답 12

참고 등호는 $4x=\frac{9}{x}$에서 $4x^2=9$, 즉 $x=\frac{3}{2}$ ($\because x>0$)일 때 성립한다.

0363

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$=b^2x^2-2abxy+a^2y^2$

$=(\boxed{(가)\ bx-ay})^2\geq 0$

$\therefore\ (a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

이때, 등호는 $bx=ay$, 즉 $\boxed{(나)\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}}$ 일 때 성립한다.

답 (가) $bx-ay$ (나) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

0364

a, b, x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

$6\cdot 2\geq(ax+by)^2$, $12\geq(ax+by)^2$

$\therefore\ -2\sqrt{3}\leq ax+by\leq 2\sqrt{3}$ $\left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $ax+by$의 최댓값은 $2\sqrt{3}$, 최솟값은 $-2\sqrt{3}$이므로 그 합은 0이다. 답 0

0365

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+4^2)(x^2+y^2)\geq(3x+4y)^2$

그런데 $3x+4y=5$이므로 $25(x^2+y^2)\geq 25$

$\therefore\ x^2+y^2\geq 1$ $\left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{3}=\frac{y}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 1이다. 답 1

STEP 2 유형 마스터 ❷

0366

|전략| 주어진 명제의 대우가 참이면 그 명제도 참임을 이용한다.

n이 $\boxed{(가)\ 짝수}$ 이면 $n=2k$ (k는 자연수)로 놓을 수 있으므로

$n^2=(2k)^2=4k^2=2(\boxed{(나)\ 2k^2})$

즉, n^2은 $\boxed{(다)\ 2}$ 의 배수이므로 $\boxed{(라)\ 짝수}$ 이다.

따라서 주어진 명제의 $\boxed{(마)\ 대우}$ 가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 ②

0367

n이 3의 배수가 아니라고 하면

n은 $3k+1$ 또는 $3k+2$ ($k=0, 1, 2, \cdots$) 중의 하나이다.

(i) $n=3k+1$일 때

$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1$

$=3(3k^2+2k)+\boxed{(가)\ 1}$

(ii) $n=3k+2$일 때

$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4$

$=3(3k^2+4k+1)+\boxed{(나)\ 1}$

3 명제

즉, n^2은 3으로 나누면 나머지가 1인 자연수가 되므로 3의 배수가 아니다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.
(가), (나)에 알맞은 수의 합은 $1+1=2$

답 2

0368

| 전략 | '무리수이다.'의 부정은 '유리수이다.'임을 이용하여 결론을 부정하고 가정에 모순이 생기는 것을 보인다.

$\sqrt{n^2-1}$이 유리수라 가정하면 $\sqrt{n^2-1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)로 놓을 수 있다.
이 식의 양변을 제곱하면

$n^2-1=\dfrac{q^2}{p^2}$ ······ ㉠

㉠의 좌변은 자연수이므로 우변도 자연수이어야 하고, p와 q는 서로소이므로

$p^2=\boxed{\text{(가) } 1}$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $n^2-1=q^2$

$n^2-q^2=\boxed{\text{(나) } 1}$, $(n+q)(n-q)=\boxed{\text{(나) } 1}$

따라서 $n+q$, $n-q$의 값은 모두 $\boxed{\text{(다) } 1 \text{ 또는 } -1}$이다.

이때, n은 $n\geq2$인 자연수, q는 자연수라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{n^2-1}$은 무리수이다.

$n+q=\pm1$, $n-q=\pm1$(복호동순)을 만족시키는 자연수 $n(n\geq2)$, q가 존재하지 않는다.

답 (가) 1 (나) 1 (다) 1 또는 -1

0369

$b\neq0$이라 가정하면 $a+b\sqrt{2}=0$에서 $\sqrt{2}=\boxed{\text{(가) } -\dfrac{a}{b}}$이다.

이때, a, b가 유리수이므로 $\boxed{\text{(가) } -\dfrac{a}{b}}$도 유리수이다.

즉, $\sqrt{2}$는 $\boxed{\text{(나) 유리수}}$이다.
이것은 $\sqrt{2}$가 $\boxed{\text{(다) 무리수}}$라는 사실에 모순이다.
따라서 $b=0$이다.
$b=0$을 등식 $a+b\sqrt{2}=0$에 대입하면 $a=\boxed{\text{(라) } 0}$이다.
따라서 유리수 a, b에 대하여 $a+b\sqrt{2}=0$이면 $a=b=0$이다.

답 (가) $-\dfrac{a}{b}$ (나) 유리수 (다) 무리수 (라) 0

0370

| 전략 | $A-B\geq0 \Longleftrightarrow A\geq B$임을 이용한다.

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\dfrac{1}{2}\{2a^2+2b^2+2c^2-2(ab+bc+ca)\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\boxed{\text{(가) } \dfrac{1}{2}}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

a, b, c가 $\boxed{\text{(나) 실수}}$이므로
$(a-b)^2\geq0$, $(b-c)^2\geq0$, $(c-a)^2\geq0$

따라서 $\boxed{\text{(가) } \dfrac{1}{2}}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq0$이므로

$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$
이때, 등호는 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$, 즉 $\boxed{\text{(다) } a=b=c}$일 때 성립한다.

답 (가) $\dfrac{1}{2}$ (나) 실수 (다) $a=b=c$

0371

$A-B=(a^2-ab+b^2)-(a+b-1)$

$\quad=\dfrac{1}{2}(2a^2-2ab+2b^2-2a-2b+2)$

$\quad=\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\}$

$\quad=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\}$

a, b가 실수이므로 $(a-b)^2\geq0$, $(a-1)^2\geq0$, $(b-1)^2\geq0$

따라서 $\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\}\geq0$이므로

$A-B\geq0$

$\therefore A\geq B$ (단, 등호는 $a=b=1$일 때 성립)

답 ④

0372

$(xy+1)-(x+y)=xy-x-y+1$

$\quad=x(y-1)-(y-1)$

$\quad=(x-1)(y-1)\geq0$ ($\because x\leq1$, $y\leq1$)

$\therefore xy+1\geq x+y$ ··· ❶

이때, 등호는 $x-1=0$ 또는 $y-1=0$, 즉 $x=1$ 또는 $y=1$일 때 성립한다. ··· ❷

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ $(xy+1)-(x+y)\geq0$임을 이용하여 $xy+1\geq x+y$가 성립함을 증명할 수 있다.	70 %
❷ 등호가 성립하는 조건을 찾을 수 있다.	30 %

0373

| 전략 | $A>0$, $B>0$일 때, $A^2-B^2\geq0 \Longleftrightarrow A\geq B$임을 이용한다.

$\{\sqrt{2(a+b)}\}^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=2(a+b)-(a+2\sqrt{ab}+b)$

$\quad=a-2\sqrt{ab}+b$

$\quad=(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2$

$\quad=(\boxed{\text{(가) } \sqrt{a}-\sqrt{b}})^2\geq0$

$\therefore \{\sqrt{2(a+b)}\}^2\geq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

그런데 $\sqrt{2(a+b)}>0$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$이므로

$\sqrt{2(a+b)}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

이때, 등호는 $\boxed{\text{(가) } \sqrt{a}-\sqrt{b}}=0$, 즉 $\boxed{\text{(나) } a=b}$일 때 성립한다.

답 ②

0374

$A>0,\ B>0,\ C>0$이므로

$A^2-B^2=(1-a)^2-(\sqrt{1-a})^2$

$=1-2a+a^2-(1-a)=a^2-a$

$=a(a-1)<0$ ($\because 0<a<1$)

즉, $A^2<B^2$

$\therefore A<B$ ...... ㉠

$B^2-C^2=(\sqrt{1-a})^2-\left(1-\frac{a}{2}\right)^2$

$=(1-a)-\left(1-a+\frac{a^2}{4}\right)$

$=-\frac{a^2}{4}<0$ ($\because 0<a<1$)

즉, $B^2<C^2$

$\therefore B<C$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $A<B<C$ 답 ①

0375

|전략| 절댓값을 포함한 식은 제곱의 차를 이용하여 부등식이 성립하는지 확인한다.

ㄱ. (i) $|a|\ge|b|$일 때,

$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$

$=(a-b)^2-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)$

$=a^2-2ab+b^2-(a^2-2|ab|+b^2)$

$=2(|ab|-ab)\ge0$ ($\because |ab|\ge ab$)

$\therefore |a-b|^2\ge(|a|-|b|)^2$

그런데 $|a-b|\ge0,\ |a|-|b|\ge0$이므로

$|a-b|\ge|a|-|b|$

(ii) $|a|<|b|$일 때,

$|a-b|>0,\ |a|-|b|<0$이므로

$|a-b|>|a|-|b|$

(i), (ii)에서 $|a-b|\ge|a|-|b|$

(단, 등호는 $|ab|=ab,\ |a|\ge|b|$일 때 성립)

ㄴ. [반례] $a=1,\ b=-1$이면 $|a+b|=0,\ |a-b|=2$이므로

$|a+b|<|a-b|$

ㄷ. $||a|-|b||^2-|a-b|^2$

$=(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)-(a-b)^2$

$=a^2-2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=-2(|ab|-ab)\le0$ ($\because |ab|\ge ab$)

$\therefore ||a|-|b||^2\le|a-b|^2$

그런데 $||a|-|b||\ge0,\ |a-b|\ge0$이므로

$||a|-|b||\le|a-b|$ (단, 등호는 $|ab|=ab$일 때 성립)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0376

|전략| $a^2>0,\ 4b^2>0$이고, a^2+4b^2의 값이 일정하므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$a^2>0,\ 4b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+4b^2\ge2\sqrt{a^2\cdot4b^2}=4|ab|$

그런데 $a^2+4b^2=8$이므로 $8\ge4|ab|,\ |ab|\le2$

$\therefore -2\le ab\le2$ (단, 등호는 $|a|=|2b|$일 때 성립, $ab\ne0$)

따라서 ab의 최댓값은 2이다. 답 2

0377

$2a>0,\ 8b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+8b\ge2\sqrt{2a\cdot8b}=8\sqrt{ab}$

그런데 $ab=16$이므로

$2a+8b\ge8\sqrt{16}=32$ (단, 등호는 $a=4b$일 때 성립)

따라서 $2a+8b$의 최솟값은 32이다. 답 32

0378

$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+2b}{ab}=\frac{4}{ab}$ ...... ㉠

$a>0,\ 2b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+2b\ge2\sqrt{a\cdot2b}=2\sqrt{2ab}$

그런데 $a+2b=4$이므로 $4\ge2\sqrt{2ab}$

$2\ge\sqrt{2ab}$ (단, 등호는 $a=2b$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $4\ge2ab$ $\quad\therefore \frac{4}{ab}\ge2$ ($\because ab>0$)

따라서 ㉠에서 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$의 최솟값은 2이다. 답 ②

0379

$3x+2y=10$이므로

$(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})^2=3x+2y+2\sqrt{6xy}=10+2\sqrt{6xy}$ ...... ㉠

한편, $3x>0,\ 2y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3x+2y\ge2\sqrt{3x\cdot2y}=2\sqrt{6xy}$

그런데 $3x+2y=10$이므로

$10\ge2\sqrt{6xy}$ (단, 등호는 $3x=2y$일 때 성립) ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})^2=10+2\sqrt{6xy}\le10+10=20$

$\therefore 0<\sqrt{3x}+\sqrt{2y}\le2\sqrt{5}$

따라서 $\sqrt{3x}+\sqrt{2y}$의 최댓값은 $2\sqrt{5}$이다. 답 ②

0380

|전략| 주어진 식을 전개한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$a>0,\ b>0$에서 $ab>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\left(a+\frac{8}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right)=ab+2+8+\frac{16}{ab}$

$\ge10+2\sqrt{ab\cdot\frac{16}{ab}}$

$=10+2\cdot4=18$ (단, 등호는 $ab=4$일 때 성립)

따라서 $\left(a+\frac{8}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right)$의 최솟값은 18이다. 답 18

3 명제

0381

$a>0$에서 $a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(2a+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{8}{a}\right)=2a^2+16+1+\frac{8}{a^2}$$
$$\geq 17+2\sqrt{2a^2\cdot\frac{8}{a^2}}$$
$$=17+2\cdot 4=25 \text{ (단, 등호는 } a=\sqrt{2}\text{일 때 성립)}$$

따라서 $\left(2a+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{8}{a}\right)$의 최솟값은 25이다.

답 25

0382

$x>0,\ y>0$에서 $xy>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(4x-\frac{1}{y}\right)\left(9y-\frac{1}{x}\right)=36xy-4-9+\frac{1}{xy}$$
$$\geq -13+2\sqrt{36xy\cdot\frac{1}{xy}}$$
$$=-13+2\cdot 6=-1$$

등호는 $36xy=\frac{1}{xy}$일 때 성립하므로 $(xy)^2=\frac{1}{36}$에서

$xy=\frac{1}{6}$ ($\because x>0,\ y>0$)

따라서 $m=-1,\ n=\frac{1}{6}$이므로 $mn=-\frac{1}{6}$

답 ②

0383

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}\right)=\{(a+b)+c\}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$=1+\frac{a+b}{c}+\frac{c}{a+b}+1$$
$$=2+\frac{a+b}{c}+\frac{c}{a+b} \quad \cdots ❶$$

$a>0,\ b>0,\ c>0$에서 $\frac{a+b}{c}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2+\frac{a+b}{c}+\frac{c}{a+b}\geq 2+2\sqrt{\frac{a+b}{c}\cdot\frac{c}{a+b}}=4$$

(단, 등호는 $a+b=c$일 때 성립)

따라서 $(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}\right)$의 최솟값은 4이다. $\cdots$ ❷

$\frac{a+b}{c}=\frac{c}{a+b}$에서

$a+b=c$ ($\because a>0, b>0, c>0$)

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	50 %
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

0384

|전략| 주어진 식을 변형하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$a>1$에서 $a-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+\frac{4}{a-1}=a-1+\frac{4}{a-1}+1$$
$$\geq 2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{4}{a-1}}+1$$
$$=2\cdot 2+1=5 \text{ (단, 등호는 } a=3\text{일 때 성립)}$$

따라서 $a+\frac{4}{a-1}$는 $a=3$일 때 최솟값 5를 가지므로 $m=5,\ n=3$

$\therefore m+n=8$

답 ⑤

참고 등호는 $a-1=\frac{4}{a-1}$일 때 성립하므로

$(a-1)^2=4,\ a-1=2$ ($\because a-1>0$)

$\therefore a=3$

즉, 등호는 $a=3$일 때 성립한다.

0385

$a>1$에서 $a-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3a-1+\frac{3}{a-1}=3(a-1)+\frac{3}{a-1}+2$$
$$\geq 2\sqrt{3(a-1)\cdot\frac{3}{a-1}}+2$$
$$=2\cdot 3+2=8 \text{ (단, 등호는 } a=2\text{일 때 성립)}$$

따라서 $3a-1+\frac{3}{a-1}$의 최솟값은 8이다.

답 ④

참고 등호는 $3(a-1)=\frac{3}{a-1}$일 때 성립하므로

$3(a-1)^2=3,\ a-1=1$ ($\because a-1>0$)

$\therefore a=2$

즉, 등호는 $a=2$일 때 성립한다.

0386

$x^2\geq 0$에서 $x^2+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x^4+4x^2+7}{x^2+1}=x^2+3+\frac{4}{x^2+1}$$
$$=x^2+1+\frac{4}{x^2+1}+2$$
$$\geq 2\sqrt{(x^2+1)\cdot\frac{4}{x^2+1}}+2$$
$$=2\cdot 2+2=6 \text{ (단, 등호는 } x=\pm 1\text{일 때 성립)}$$

$x^4+4x^2+7=x^2(x^2+1)+3(x^2+1)+4$
$=(x^2+1)(x^2+3)+4$

에서 $\frac{x^4+4x^2+7}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)(x^2+3)+4}{x^2+1}$
$=x^2+3+\frac{4}{x^2+1}$

따라서 $\frac{x^4+4x^2+7}{x^2+1}$의 최솟값은 6이다.

답 6

참고 등호는 $x^2+1=\frac{4}{x^2+1}$일 때 성립하므로

$(x^2+1)^2=4,\ x^2+1=2$ ($\because x^2+1>0$)

$x^2=1 \qquad \therefore x=\pm 1$

즉, 등호는 $x=\pm 1$일 때 성립한다.

0387

$x>2$이고 $x^2-2x+4>0$이므로 $\frac{x-2}{x^2-2x+4}>0$

따라서 $\frac{x^2-2x+4}{x-2}$가 최소일 때, $\frac{x-2}{x^2-2x+4}$는 최댓값을 갖는다.

이때, $x>2$에서 $x-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x^2-2x+4}{x-2}=x+\frac{4}{x-2}=x-2+\frac{4}{x-2}+2$$
$$\geq 2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{4}{x-2}}+2$$
$$=2\cdot 2+2=6 \text{ (단, 등호는 } x=4\text{일 때 성립)}$$

따라서 $\frac{x^2-2x+4}{x-2}$의 최솟값이 6이므로 $\frac{x-2}{x^2-2x+4}$의 최댓값은 $\frac{1}{6}$이다. 답 $\frac{1}{6}$

참고 등호는 $x-2=\frac{4}{x-2}$일 때 성립하므로
$(x-2)^2=4$, $x-2=2$ ($\because x-2>0$)
$\therefore x=4$
즉, 등호는 $x=4$일 때 성립한다.

0388

| 전략 | $a>0, b>0, c>0$에서 $\frac{a}{b}>0, \frac{b}{c}>0, \frac{c}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}}=2\sqrt{\frac{a}{c}},\ \frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 2\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=2\sqrt{\frac{b}{a}},$$
$$\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2\sqrt{\frac{c}{b}}\text{이므로}$$
$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq 8\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}}=8$$

$b^2=ca,\ c^2=ab,\ a^2=bc$ 이므로 $a=b=c$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 8이다. 답 8

0389

$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$
$$=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$
$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) \quad \cdots ❶$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}} \quad \cdots ❷$$
$$=2+2+2=6 \text{ (단, 등호는 } a=b=c\text{일 때 성립)}$$

따라서 구하는 최솟값은 6이다. ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

0390

$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$1+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{1\cdot\frac{b}{a}}=2\sqrt{\frac{b}{a}},\ 1+\frac{c}{b}\geq 2\sqrt{1\cdot\frac{c}{b}}=2\sqrt{\frac{c}{b}},$$
$$1+\frac{a}{c}\geq 2\sqrt{1\cdot\frac{a}{c}}=2\sqrt{\frac{a}{c}}\text{이므로}$$
$$\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\geq 8\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}}=8$$

$1=\frac{b}{a}, 1=\frac{c}{b}, 1=\frac{a}{c}$이므로 $a=b=c$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 8이다. 답 ④

다른 풀이

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)=\left(1+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)$$
$$=1+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1$$
$$\geq 2+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}}$$
$$=2+2+2+2=8$$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

0391

$x=a+\frac{3}{b},\ y=b+\frac{3}{a}$이므로

$$x^2+y^2=\left(a+\frac{3}{b}\right)^2+\left(b+\frac{3}{a}\right)^2$$
$$=\left(a^2+\frac{6a}{b}+\frac{9}{b^2}\right)+\left(b^2+\frac{6b}{a}+\frac{9}{a^2}\right)$$
$$=\left(a^2+\frac{9}{a^2}\right)+\left(\frac{6a}{b}+\frac{6b}{a}\right)+\left(b^2+\frac{9}{b^2}\right)$$

$a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2+\frac{9}{a^2}\geq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{9}{a^2}}=2\cdot 3=6 \text{ (단, 등호는 } a=\sqrt{3}\text{일 때 성립)}$$
$$\frac{6a}{b}+\frac{6b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{6a}{b}\cdot\frac{6b}{a}}=2\cdot 6=12 \text{ (단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립)}$$
$$b^2+\frac{9}{b^2}\geq 2\sqrt{b^2\cdot\frac{9}{b^2}}=2\cdot 3=6 \text{ (단, 등호는 } b=\sqrt{3}\text{일 때 성립)}$$
$$\therefore x^2+y^2\geq 6+12+6=24 \text{ (단, 등호는 } a=b=\sqrt{3}\text{일 때 성립)}$$

따라서 구하는 최솟값은 24이다. 답 24

다른 풀이 $x^2>0,\ y^2>0,\ a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

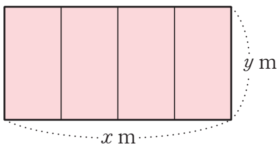
$$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2\cdot y^2} \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$=2xy=2\left(a+\frac{3}{b}\right)\left(b+\frac{3}{a}\right)$$
$$=2\left(ab+\frac{9}{ab}+6\right)$$
$$\geq 2\left(2\sqrt{ab\cdot\frac{9}{ab}}+6\right) \quad \cdots\cdots ㉡$$
$$=2(2\cdot 3+6)=24$$

㉠에서 등호는 $x=y$일 때, ㉡에서 등호는 $ab=3$일 때 성립하므로 등호는 $a=b=\sqrt{3}$일 때 성립한다.

3 명제

0392

|전략| 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y로 놓고 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.



오른쪽 그림과 같이 바깥쪽 직사각형의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면 철망의 길이가 80 m이므로

$2x+5y=80$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+5y\ge 2\sqrt{2x\cdot 5y}=2\sqrt{10xy}$

그런데 $2x+5y=80$이므로 $80\ge 2\sqrt{10xy}$

$40\ge\sqrt{10xy}$ (단, 등호는 $2x=5y$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $10xy\le 1600$

$\therefore 0<xy\le 160$

따라서 울타리 안의 넓이의 최댓값은 160 m^2이다. 답 160 m^2

0393

소포의 밑면의 가로, 세로의 길이를 각각 a cm, b cm라 하면 노끈의 길이가 120 cm이므로

$4a+2b+6\cdot 12=120 \qquad \therefore 2a+b=24$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+b\ge 2\sqrt{2ab}$

그런데 $2a+b=24$이므로 $24\ge 2\sqrt{2ab}$

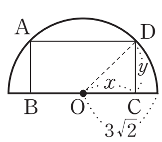
$12\ge\sqrt{2ab}$ (단, 등호는 $2a=b$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $2ab\le 144$

$\therefore 0<ab\le 72$

따라서 소포의 부피는 $12ab\le 12\cdot 72=864$ (cm^3)이므로 소포의 최대 부피는 864 cm^3이다. 답 ②

0394



오른쪽 그림과 같이 $\overline{OC}=x$, $\overline{CD}=y$라 하면 직각삼각형 OCD에서

$x^2+y^2=(3\sqrt{2})^2=18$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2\cdot y^2}=2xy$ …… ㉠

㉠에서 등호는 $x^2=y^2$일 때 성립하고 이때 직사각형 ABCD의 넓이 $2xy$가 최대가 되므로 $x^2+y^2=18$에서

$x^2=9$, $y^2=9 \qquad \therefore x=3,\ y=3\ (\because x>0,\ y>0)$

따라서 그때의 직사각형의 둘레의 길이는

$4x+2y=4\cdot 3+2\cdot 3=18$ 답 ③

0395

|전략| 코시-슈바르츠의 부등식 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$에 $a=3$, $b=4$를 대입한다.

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+4^2)(x^2+y^2)\ge(3x+4y)^2$

그런데 $x^2+y^2=4$이므로 $100\ge(3x+4y)^2$

$\therefore -10\le 3x+4y\le 10$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $3x+4y$의 최댓값은 10이다. 답 ③

0396

$x^2+y^2=5$이므로 $x^2+2x+y^2+4y=2x+4y+5$

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+4^2)(x^2+y^2)\ge(2x+4y)^2$

그런데 $x^2+y^2=5$이므로 $100\ge(2x+4y)^2$

$\therefore -10\le 2x+4y\le 10$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{4}\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore -5\le 2x+4y+5\le 15$

따라서 x^2+2x+y^2+4y의 최댓값은 15, 최솟값은 -5이므로 구하는 곱은

$15\cdot(-5)=-75$ 답 ①

0397

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+3^2)(x^2+y^2)\ge(2x+3y)^2$

그런데 $x^2+y^2=a$이므로 $13a\ge(2x+3y)^2$

$\therefore -\sqrt{13a}\le 2x+3y\le\sqrt{13a}$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $2x+3y$의 최댓값은 $\sqrt{13a}$, 최솟값은 $-\sqrt{13a}$이고 그 차가 26이므로

$2\sqrt{13a}=26$, $13a=169$

$\therefore a=13$ 답 ④

0398

|전략| $\dfrac{x^2}{2}=\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2$, $\dfrac{y^2}{3}=\left(\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)^2$임과 코시-슈바르츠의 부등식을 이용한다.

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\}\left\{\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}\ge(x+y)^2$

그런데 $x+y=2$이므로 $5\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}\right)\ge 4$

$\therefore \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}\ge\dfrac{4}{5}$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}$의 최솟값은 $\dfrac{4}{5}$이다. 답 $\dfrac{4}{5}$

0399

a, b는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(a^2+b^2)\ge(a+b)^2$ …… ㉠

$a+b+c=4$, $a^2+b^2+c^2=8$에서

$a+b=4-c$, $a^2+b^2=8-c^2$이므로 ㉠에 대입하면

$2(8-c^2)\ge(4-c)^2,\ 3c^2-8c\le0,\ c(3c-8)\le0$

$\therefore\ 0\le c\le\frac{8}{3}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

따라서 c의 최댓값은 $\frac{8}{3}$, 최솟값은 0이므로 구하는 합은

$\frac{8}{3}+0=\frac{8}{3}$ 답 $\frac{8}{3}$

다른 풀이 $a+b+c=4,\ a^2+b^2+c^2=8$에서

$a+b=4-c,\ a^2+b^2=8-c^2$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$에 $a+b=4-c,\ a^2+b^2=8-c^2$을 대입하면

$(4-c)^2=8-c^2+2ab$

$\therefore\ ab=c^2-4c+4$

이때, a, b는 t에 대한 이차방정식 $t^2-(a+b)t+ab=0$, 즉 $t^2-(4-c)t+(c^2-4c+4)=0$의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(4-c)^2-4(c^2-4c+4)\ge0,\ -3c^2+8c\ge0$

$c(3c-8)\le0\qquad\therefore\ 0\le c\le\frac{8}{3}$

따라서 c의 최댓값은 $\frac{8}{3}$, 최솟값은 0이므로 구하는 합은

$\frac{8}{3}+0=\frac{8}{3}$

0400

|전략| $x,\ y,\ z$가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식을 이용한다.

$x,\ y,\ z$가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+1^2+1^2)\{(2x)^2+y^2+(3z)^2\}\ge(4x+y+3z)^2$

그런데 $4x+y+3z=12$이므로 $6(4x^2+y^2+9z^2)\ge144$

$\therefore\ 4x^2+y^2+9z^2\ge24$ (단, 등호는 $x=y=3z$일 때 성립)

따라서 $4x^2+y^2+9z^2$의 최솟값은 24이다. 답 ③

0401

$x>0,\ y>0,\ z>0$이므로 $\sqrt{x},\ \sqrt{y},\ \sqrt{z}$는 실수이다.

$\sqrt{x},\ \sqrt{y},\ \sqrt{z}$가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+3^2+4^2)(x+y+z)\ge(\sqrt{x}+3\sqrt{y}+4\sqrt{z})^2$

그런데 $x+y+z=26$이므로 $26^2\ge(\sqrt{x}+3\sqrt{y}+4\sqrt{z})^2$

이때, $\sqrt{x}>0,\ \sqrt{y}>0,\ \sqrt{z}>0$이므로

$0<\sqrt{x}+3\sqrt{y}+4\sqrt{z}\le26$ $\left(\text{단, 등호는 }\sqrt{x}=\frac{\sqrt{y}}{3}=\frac{\sqrt{z}}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\sqrt{x}+3\sqrt{y}+4\sqrt{z}$의 최댓값은 26이다. 답 26

0402

|전략| a, b, c에 대한 식을 세우고, 코시-슈바르츠의 부등식을 이용한다.

$\overline{AG}=\sqrt{3}$이므로 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=3$

$a,\ b,\ c$는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$

$3\cdot3\ge(a+b+c)^2,\ 9\ge(a+b+c)^2$

이때, $a>0,\ b>0,\ c>0$이므로

$0<a+b+c\le3$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)$이므로

$0<4(a+b+c)\le12$

따라서 구하는 최댓값은 12이다. 답 12

0403

원의 지름의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로 원에 내접하는 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 $a,\ b$라 하면

$a^2+b^2=20$ ··· ❶

이때, 정사각기둥의 밑면의 한 변의 길이는 $\frac{a}{4}$, 높이는 b이므로 정사각기둥의 모든 모서리의 길이의 합은

$\frac{a}{4}\cdot8+4b=2a+4b$ ··· ❷

$a,\ b$는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+4^2)(a^2+b^2)\ge(2a+4b)^2$ ··· ❸

$20^2\ge(2a+4b)^2$

이때, $a>0,\ b>0$이므로

$0<2a+4b\le20$ $\left(\text{단, 등호는 }\frac{a}{2}=\frac{b}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최댓값은 20이다. ··· ❹

답 20

채점 기준	비율
❶ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ 모든 모서리의 길이의 합을 구할 수 있다.	20 %
❸ 코시-슈바르츠의 부등식을 이용할 수 있다.	40 %
❹ 정사각기둥의 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

0404

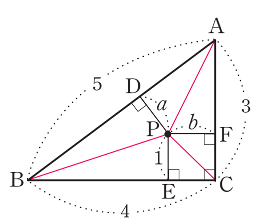
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$이므로 $\triangle ABC$는 $\angle C=90°$인 직각삼각형이다.

$\overline{PD}=a,\ \overline{PF}=b$라 하면

$\overline{PD}^2+\overline{PF}^2=a^2+b^2$

$\triangle ABC=\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PCA$

에서



$\frac{1}{2}\cdot4\cdot3=\frac{1}{2}\cdot5\cdot a+\frac{1}{2}\cdot4\cdot1+\frac{1}{2}\cdot3\cdot b$

$\therefore\ 5a+3b=8$

이때, $a,\ b$는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(5^2+3^2)(a^2+b^2)\ge(5a+3b)^2$

$34(a^2+b^2)\ge64$

$\therefore\ a^2+b^2\ge\frac{64}{34}=\frac{32}{17}$ $\left(\text{단, 등호는 }\frac{a}{5}=\frac{b}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\overline{PD}^2+\overline{PF}^2$의 최솟값은 $\frac{32}{17}$이다. 답 ⑤

STEP 3 내신 마스터

0405
유형 **02** 명제와 조건의 부정

|전략| '<'의 부정은 '≥', '='의 부정은 '≠', '또는'의 부정은 '이고'임을 이용한다.

ㄱ. $\sim p$: $a \geq 0$이고 $b \geq 0$

ㄴ. $ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$이므로

  $\sim p$: $a \neq 0$이고 $b \neq 0$

ㄷ. $a^2+b^2+c^2=0$에서 $a=0$, $b=0$, $c=0$이므로

  $\sim p$: $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 또는 $c \neq 0$

따라서 조건 p와 그 부정 $\sim p$가 바르게 연결된 것은 ㄱ이다. 답 ①

참고 ㄷ. $abc \neq 0$에서 $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$

0406
유형 **04** 거짓인 명제의 반례

|전략| 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 집합은 $P \cap Q^C$임을 이용한다.

명제 $p \longrightarrow q$, $p \longrightarrow r$가 거짓임을 보이는 원소가 속하는 집합은 각각 $P \cap Q^C$, $P \cap R^C$이므로 두 명제가 모두 거짓임을 동시에 보이는 원소가 속하는 집합은

$$(P \cap Q^C) \cap (P \cap R^C) = P \cap (Q^C \cap R^C)$$
$$= P \cap (Q \cup R)^C$$
$$= P - (Q \cup R)$$

답 ②

0407
유형 **05** 명제의 참, 거짓

|전략| 명제가 거짓임을 보이려면 반례를 찾는다.

① [반례] $x=-3$이면 $x^2=9>4$이지만 $x<2$이다. (거짓)

② [반례] $x=3$, $y=0$이면 $x+y=3>2$이지만 $y<1$이다. (거짓)

④ [반례] $x=\sqrt{3}$, $y=0$이면 $x+y=\sqrt{3}$은 무리수이지만 y는 무리수가 아니다. (거짓)

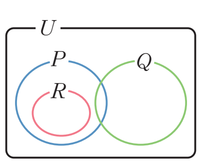
⑤ [반례] $x=2$이면 x는 소수이지만 $x^2=4$로 홀수가 아니다. (거짓)

답 ③

0408
유형 **06** 명제의 참, 거짓과 진리집합의 포함 관계

|전략| $(P-Q) \cup R = P-Q$를 만족시키도록 세 집합 P, Q, R의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내어 본다.

$(P-Q) \cup R = P-Q$에서 $R \subset (P-Q)$이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $R \subset P$이므로 명제 $r \longrightarrow p$는 참

② $R \not\subset Q$이므로 명제 $r \longrightarrow q$는 거짓

③ $R \subset Q^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim q$는 참

④ $Q \subset R^C$이므로 명제 $q \longrightarrow \sim r$는 참

⑤ $P^C \subset R^C$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim r$는 참

따라서 거짓인 명제인 것은 ② $r \longrightarrow q$이다. 답 ②

0409
유형 **07** 명제가 참이 되도록 하는 미지수 구하기

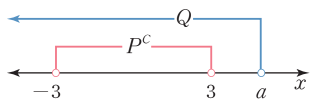
|전략| 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때 P, Q 사이의 포함 관계를 수직선 위에 나타내어 본다.

p : $x \leq -3$ 또는 $x \geq 3$에서 $\sim p$: $-3<x<3$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P^C=\{x \mid -3<x<3\}$, $Q=\{x \mid x<a\}$

명제 '$\sim p$이면 q이다.'가 참이 되려면 $P^C \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a \geq 3$ 답 ⑤

0410
유형 **08** '모든' 또는 '어떤'이 있는 명제의 참, 거짓

|전략| '모든'의 부정은 '어떤', '어떤'의 부정은 '모든'임을 이용한다.

ㄱ. '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'이다.

ㄴ. 전체집합 U의 원소는 모두 조건 p를 만족시키므로 '어떤 x에 대하여 p이다.'는 참이다.

ㄷ. '모든 x에 대하여 p이거나 q이다.'의 부정은 '어떤 x에 대하여 $\sim p$이고 $\sim q$이다.'이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 답 ②

0411
유형 **06** 명제의 참, 거짓과 진리집합의 포함 관계
+ **09** 명제의 역, 대우의 참, 거짓

|전략| 명제가 참이면 그 대우도 참임을 이용하여 두 조건 p, q의 진리집합 P, Q 사이의 포함 관계를 알아본다.

명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$의 역이 참이므로 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이고, 그 대우 $q \longrightarrow p$도 참이다.

$\therefore Q \subset P$, 즉 $Q \cap P^C = \varnothing$

따라서 항상 옳은 것은 ③ $P^C \cap Q = \varnothing$이다. 답 ③

0412
유형 **09** 명제의 역, 대우의 참, 거짓

|전략| 주어진 명제의 가정과 결론을 바꾸어 그 역을 찾은 다음 그것의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 역 : $x \geq 3$이면 $x^2 \geq 9$이다. (참)

ㄴ. 역 : $A \cup B = B$이면 $A \subset B$이다. (참)

ㄷ. 역 : $2x+4>0$이면 $x>2$이다. (거짓)

  [반례] $x=-1$이면 $2x+4=2>0$이지만 $x<2$이다.

따라서 역이 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0413

유형 11 삼단논법

| 전략 | 세 조건 p, q, r의 진리집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 찾고, 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 참이면 $p \longrightarrow r$가 참임을 이용한다.

$P-Q=\emptyset$에서 $P\subset Q$ …… ㉠

$Q-R=\emptyset$에서 $Q\subset R$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $P\subset Q\subset R$

따라서 $\sim p \longrightarrow \sim r$, 즉 $r \longrightarrow p$는 $P=Q=R$일 때에만 참이므로 항상 참이라고 할 수 없다.

답 ⑤

0414

유형 12 충분조건, 필요조건, 필요충분조건

| 전략 | 명제 $p \longrightarrow q$와 명제 $q \longrightarrow p$의 참, 거짓을 판별하여 충분, 필요, 필요충분조건을 판단한다.

① $p : |x-2|=1 \Longleftarrow q : x=3$

∴ 필요조건 [$\longrightarrow$의 반례 : $x=1$]

② $p : xy=0 \Longleftarrow q : x^2+y^2=0$

∴ 필요조건 [$\longrightarrow$의 반례 : $x=0, y=1$]

③ $p : x, y$는 유리수 $\Longrightarrow q : x+y, xy$는 유리수

∴ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례 : $x=\sqrt{2}, y=-\sqrt{2}$]

④ $p : x=3 \Longleftrightarrow q : x^2-6x+9=0$

∴ 필요충분조건

⑤ $p : x$는 6의 양의 약수 $\overset{\not\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow}$ $q : x$는 8의 양의 약수

따라서 아무 조건도 아니다.

[$\longrightarrow$의 반례 : $x=3$, $\longleftarrow$의 반례 : $x=4$]

답 ②

0415

유형 13 충분조건, 필요조건이 되는 미지수 구하기

| 전략 | 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때 $P\subset Q$이면 p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건임을 이용한다.

q는 p이기 위한 필요조건이려면 명제

'$3x-a=0$이면 $x^3-7x^2+4x+12=0$이다.'가 참이어야 한다.

$x=\frac{a}{3}$를 $x^3-7x^2+4x+12=0$에 대입하면

$\left(\frac{a}{3}\right)^3-7\left(\frac{a}{3}\right)^2+4\cdot\frac{a}{3}+12=0$

∴ $a^3-21a^2+36a+324=0$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{-21}{1}=21$

답 ②

Lecture

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

(1) $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

(3) $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

0416

유형 15 충분, 필요, 필요충분조건과 삼단논법

| 전략 | 세 조건 p, q, r에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건이면 $p \Longrightarrow q$, 필요조건이면 $q \Longrightarrow p$임을 이용한다.

p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow \sim r$

r는 q이기 위한 필요조건이므로 $q \Longrightarrow r$

$q \Longrightarrow r$에서 $\sim r \Longrightarrow \sim q$

$p \Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow \sim q$이므로 $p \Longrightarrow \sim q$

따라서 항상 참인 명제는 ③ $p \longrightarrow \sim q$이다.

답 ③

0417

유형 21 산술평균과 기하평균의 관계 ; 전개식의 이용

| 전략 | $(x+2y)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)$를 전개하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$x>0$, $y>0$에서 $\frac{2x}{y}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(x+2y)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)=1+\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}+4$$
$$\geq 5+2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{2y}{x}}$$
$$=5+2\cdot 2=9 \text{ (단, 등호는 } x=y\text{일 때 성립)}$$

그런데 $x+2y=4$이므로 $4\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)\geq 9$

∴ $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\geq\frac{9}{4}$ 등호는 $x=y$이고 $x+2y=4$, 즉 $x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{4}{3}$일 때 성립한다.

따라서 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$의 최솟값은 $\frac{9}{4}$이므로

$a=9$, $b=4$

∴ $a-b=5$

답 ⑤

0418

유형 22 산술평균과 기하평균의 관계 ; 식의 변형

| 전략 | $f(x)+\frac{1}{f(x)}$ $(f(x)>0)$ 꼴을 포함하도록 식을 적당히 변형한다.

$a>0$에서 $a^2+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+\frac{1}{a}+\frac{4a}{a^2+1}=\frac{a^2+1}{a}+\frac{4a}{a^2+1}$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{a^2+1}{a}\cdot\frac{4a}{a^2+1}}$$
$$=2\cdot 2=4 \text{ (단, 등호는 } a=1\text{일 때 성립)}$$

따라서 $a+\frac{1}{a}+\frac{4a}{a^2+1}$의 최솟값은 4이다.

답 ②

참고 등호는 $\frac{a^2+1}{a}=\frac{4a}{a^2+1}$일 때 성립하므로

$(a^2+1)^2=4a^2$, $a^2+1=2a$ ($\because a>0$, $a^2+1>0$)

$a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0$ ∴ $a=1$

즉, 등호는 $a=1$일 때 성립한다.

3 명제

0419

유형 **20** 산술평균과 기하평균의 관계 ; 합 또는 곱이 일정할 때
+ **25** 코시-슈바르츠의 부등식 ; $ax+by$의 최대·최소

|전략| 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $ab+cd$의 최댓값을 구하고, 코시-슈바르츠의 부등식을 이용하여 $ac+bd$의 최댓값을 구한다.

(i) $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$

그런데 $a^2+b^2=2$이므로 $2\ge 2ab$

$\therefore 0<ab\le 1$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립) ······ ㉠

$c>0$, $d>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$c^2+d^2\ge 2\sqrt{c^2d^2}=2cd$

그런데 $c^2+d^2=8$이므로 $8\ge 2cd$

$\therefore 0<cd\le 4$ (단, 등호는 $c=d$일 때 성립) ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $0<ab+cd\le 5$

따라서 $ab+cd$의 최댓값은 5이므로 $\alpha=5$

(ii) a, b, c, d가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2$

그런데 $a^2+b^2=2$, $c^2+d^2=8$이므로 $16\ge(ac+bd)^2$

$\therefore 0<ac+bd\le 4$ (단, 등호는 $ad=bc$일 때 성립)

따라서 $ac+bd$의 최댓값은 4이므로 $\beta=4$

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta=9$

답 ③

0420

유형 **03** 조건의 진리집합

|전략| 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 할 때, 조건 'p이고 q이고 $\sim r$'의 진리집합을 P, Q, R를 이용하여 나타낸다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$

$Q=\{2, 4, 6, 8, \cdots, 28\}$

$x^2-10x+24=0$에서 $(x-4)(x-6)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=6$

조건 r의 진리집합을 R라 하면 $R=\{4, 6\}$ ··· ❶

이때, 조건 'p이고 q이고 $\sim r$'의 진리집합은 $P\cap Q\cap R^C$이고

$R^C=\{2, 8, 10, 12, \cdots, 50\}$이므로

$P\cap Q\cap R^C=\{2, 8, 12, 16, 24\}$ ··· ❷

답 $\{2, 8, 12, 16, 24\}$

채점 기준	배점
❶ 세 조건의 진리집합을 각각 구할 수 있다.	3점
❷ 조건 'p이고 q이고 $\sim r$'의 진리집합을 구할 수 있다.	3점

0421

유형 **13** 충분조건, 필요조건이 되는 미지수 구하기

|전략| 명제 $r \longrightarrow (p$이고 $q)$가 참이어야 함을 이용한다.

p : $|x|\le 7$에서 $-7\le x\le 7$

q : $x\ge 1$

r : $|x-a|\le 2$에서 $-2\le x-a\le 2$ $\therefore a-2\le x\le a+2$

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

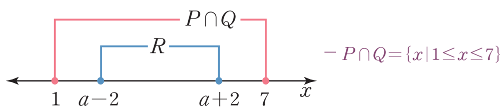
$P=\{x\,|\,-7\le x\le 7\}$, $Q=\{x\,|\,x\ge 1\}$,

$R=\{x\,|\,a-2\le x\le a+2\}$

이때, r는 'p이고 q'이기 위한 충분조건이므로 명제

$r \longrightarrow (p$이고 $q)$가 참이다. ··· ❶

즉, $R\subset(P\cap Q)$



위의 그림에서 $1\le a-2$, $a+2\le 7$

$\therefore 3\le a\le 5$ ··· ❷

따라서 실수 a의 최솟값은 3이다. ··· ❸

답 3

채점 기준	배점
❶ r가 'p이고 q'이기 위한 충분조건임을 이용하여 참인 명제를 찾을 수 있다.	2점
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	3점
❸ a의 최솟값을 구할 수 있다.	1점

0422

유형 **23** 산술평균과 기하평균의 관계 ; 복잡한 식의 최대·최소

|전략| 양수 x, y에 대하여 $x+y\ge 2\sqrt{xy}$에서 등호는 $x=y$일 때 성립함을 이용한다.

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2-2a+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=(a-1)^2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-1 \quad \cdots ❶$$

$$\ge(a-1)^2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}-1 \quad \cdots ❷$$

$$=(a-1)^2+1$$

이때, 등호는 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$, 즉 $a=b$일 때 성립하고 주어진 식은 $a=1$일 때 최소이므로 $a=b=1$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=1$이므로 $\alpha+\beta+\gamma=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	배점
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	3점
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있다.	2점
❸ $\alpha+\beta+\gamma$의 값을 구할 수 있다.	2점

0423

유형 **14** 충분, 필요, 필요충분조건과 진리집합 사이의 관계

|전략| 두 집합 A, B에 대하여 $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수는 B의 부분집합 중 A의 원소를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같음을 이용한다.

(1) 'p이고 q'는 r이기 위한 충분조건이므로 명제 $(p$이고 $q) \longrightarrow r$는 참이다. 즉, $(P\cap Q)\subset R$

'p 또는 q'는 r이기 위한 필요조건이므로 명제 $r \longrightarrow (p$ 또는 $q)$는 참이다. 즉, $R\subset(P\cup Q)$

$\therefore (P\cap Q)\subset R\subset(P\cup Q)$

(2) $P=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $Q=\{2,\ 3,\ 5,\ 6\}$에서

$P\cap Q=\{3,\ 5\}$, $P\cup Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$

따라서 집합 R의 개수는 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 부분집합 중 원소 3, 5를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{6-2}=16$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 세 조건 $p,\ q,\ r$의 진리집합 $P,\ Q,\ R$ 사이의 포함 관계를 알 수 있다.	6점
(2) 집합 R의 개수를 구할 수 있다.	4점

Lecture

특정한 원소를 갖는 부분집합의 개수

집합 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n\}$에 대하여 A의 특정한 원소 k개를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수

⇨ 2^{n-k} (단, $k\le n$)

0424

유형 **16** 대우를 이용한 명제의 증명

|전략| 주어진 명제의 대우를 구한 다음 $a\ne0$일 때와 $b\ne0$일 때로 나누어 대우의 참, 거짓을 판별한다.

(1) 주어진 명제의 대우는

'$a\ne0$ 또는 $b\ne0$이면 $a^2+b^2\ne0$이다.'

(2) (i) $a\ne0$이면

$a^2>0$이고 $b^2\ge0$이므로 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2\ne0$이다.

(ii) $b\ne0$이면

$b^2>0$이고 $a^2\ge0$이므로 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2\ne0$이다.

(i), (ii)에서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 주어진 명제의 대우를 말할 수 있다.	4점
(2) (1)을 이용하여 주어진 명제가 참임을 증명할 수 있다.	8점

다른 풀이 주어진 명제의 결론을 부정하면 $a\ne0$ 또는 $b\ne0$이다.

$a\ne0$ 또는 $b\ne0$이면 $a^2>0$ 또는 $b^2>0$이므로 $a^2+b^2>0$이다.

그런데 이것은 $a^2+b^2=0$이라는 가정에 모순이다.

따라서 두 실수 $a,\ b$에 대하여 $a^2+b^2=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다.

창의·융합 교과서 속 심화문제

0425

|전략| 조건 p의 진리집합을 P라 할 때, '어떤 x에 대하여 p이다.'가 참이려면 $P\ne\varnothing$이어야 함을 이용한다.

조건 $k-1\le x\le k+3$의 진리집합을 P, 조건 $0\le x\le2$의 진리집합을 Q라 하면

$P=\{x\,|\,k-1\le x\le k+3\}$, $Q=\{x\,|\,0\le x\le2\}$

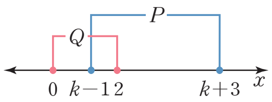
이때, 주어진 명제가 참이려면 집합 P에 속하는 원소 중에서 집합 Q에 속하는 원소가 존재해야 한다.

즉, $P\cap Q\ne\varnothing$

(i) $k-1\ge0$, 즉 $k\ge1$일 때,

오른쪽 그림에서 $P\cap Q\ne\varnothing$이려면 $k-1\le2$, $k\le3$

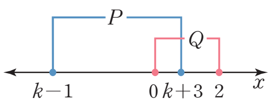
$\therefore 1\le k\le3$



(ii) $k-1<0$, 즉 $k<1$일 때,

오른쪽 그림에서 $P\cap Q\ne\varnothing$이려면 $0\le k+3$, $k\ge-3$

$\therefore -3\le k<1$



(i), (ii)에서 $-3\le k\le3$

따라서 정수 k는 $-3,\ -2,\ \cdots,\ 3$의 7개이다. 답 ④

0426

|전략| 명제 '어떤 $x,\ y$에 대하여 p이면 q이다.'가 참이 되기 위해서는 두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 할 때, $P\cap Q\ne\varnothing$이어야 한다.

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$P=\{(x,\ y)\,|\,y=|x|+a\}$

$Q=\{(x,\ y)\,|\,(x-4)^2+y^2=4\}$

명제 '어떤 $x,\ y$에 대하여 p이면 q이다.'가 참이려면 $P\cap Q\ne\varnothing$이어야 하므로 함수 $y=|x|+a$의 그래프와 원 $(x-4)^2+y^2=4$가 만나야 한다.

이때, 원 $(x-4)^2+y^2=4$는 제1, 4사분면 위에 있으므로 이 원은 함수 $y=|x|+a$의 그래프의 $x>0$인 부분과 만나야 한다.

$x>0$일 때, $|x|+a=x+a$이므로 직선 $y=x+a$, 즉 $x-y+a=0$과 원의 중심 $(4,\ 0)$ 사이의 거리는

$$\frac{|4+a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|4+a|}{\sqrt2}$$

이때, 원의 반지름의 길이는 2이므로 원과 직선이 만나려면

$$\frac{|4+a|}{\sqrt2}\le2,\ |4+a|\le2\sqrt2$$

$-2\sqrt2\le4+a\le2\sqrt2$

$\therefore -4-2\sqrt2\le a\le-4+2\sqrt2$

따라서 $M=-4+2\sqrt2$, $m=-4-2\sqrt2$이므로

$Mm=(-4+2\sqrt2)(-4-2\sqrt2)=16-8=8$ 답 8

참고 점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$에서 $\overline{\mathrm{AP}}=2$인 좌표평면 위의 점 P는 중심이 $\mathrm{A}(4,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다.

0427

|전략| A의 답지에서 (1) 금강산이 맞다고 가정하고 이 가정에 모순이 생기는 것을 보인다.

A의 답지에서 (1) 금강산이 맞다고 가정하자.

다섯 명의 학생 모두 2개 중 하나씩만 맞혔으므로 (2) 설악산은 틀린 답이 된다.

이때, C의 답지에서 (5) 금강산이 틀린 답이므로 (3) 설악산이 맞는 답이 된다.
그러므로 B의 답지에서 (3) 한라산이 틀린 답이므로 (2) 백두산이 맞는 답이 되고, D의 답지에서도 (2) 백두산이 맞으므로 (4) 지리산이 틀린 답이 된다.
따라서 E의 답지에서 (4) 지리산이 틀린 답이 되어 (1) 한라산이 맞는 답이 되는데 이는 A의 답지에서 (1) 금강산이 맞다고 한 가정에 모순이므로 A의 답지에서 (1) 금강산이 틀린 답임을 알 수 있다.
따라서 (2) 설악산이 정답이므로 B의 답지에서 (2) 백두산은 틀린 답이 되어 (3) 한라산이 정답이다.
즉, C의 답지의 (3) 설악산, D의 답지의 (2) 백두산이 모두 틀린 답이므로 (4) 지리산, (5) 금강산이 정답이다.
이에 따라 (2) 설악산, (3) 한라산, (4) 지리산, (5) 금강산이 정답이므로 (1)번 사진의 산 이름은 백두산이다.

답 백두산

0428

|전략| 네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$의 진리집합을 각각 $P,\ Q,\ R,\ S$로 놓고, 집합 사이의 포함 관계를 이용하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$의 진리집합을 각각 $P,\ Q,\ R,\ S$라 하자.
$x\in P$이면 x가 정수이므로 $x^2,\ x^3,\ x^4$도 정수이다.
즉, $x\in Q,\ x\in R,\ x\in S$이므로 $P\subset Q,\ P\subset R,\ P\subset S$
또, x^2이 정수이면 $(x^2)^2=x^4$도 정수이므로 $Q\subset S$
ㄱ. [반례] $x=\sqrt{2}$이면 $x^2=2$는 정수이지만 $x=\sqrt{2}$는 정수가 아니다.
따라서 $q \not\Longrightarrow p$이므로 q는 p이기 위한 충분조건이 아니다. (거짓)
ㄴ. 'p이고 r'의 진리집합은 $P\cap R$
그런데 $P\subset R$이므로 $P\cap R=P$
이때, $P\subset Q$이므로 $(P\cap R)\subset Q$
따라서 (p이고 r) $\Longrightarrow q$이므로 'p이고 r'는 q이기 위한 충분조건이다. (참)
ㄷ. 'p 또는 s'의 진리집합은 $P\cup S$
그런데 $P\subset S$이므로 $P\cup S=S$
이때, $Q\subset S$이므로 $Q\subset(P\cup S)$
따라서 $q\Longrightarrow$ (p 또는 s)이므로 'p 또는 s'는 q이기 위한 필요조건이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

0429

|전략| 결론을 부정하여 가정에 모순이 생기는 것을 보인다.

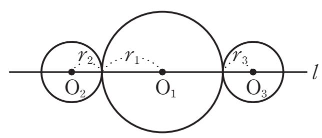
$a,\ b$가 모두 홀수라 가정하자.
방정식 $x^2+ax-b=0$의 정수인 해를 $x=m$이라 하면
$m^2+am=b$
(i) m이 홀수일 때,
m^2은 홀수이고, am은 두 홀수의 곱이므로 홀수이다.
따라서 m^2+am, 즉 b가 짝수이므로 가정에 모순이다.
(ii) m이 짝수일 때,
m^2은 짝수이고, am은 홀수와 짝수의 곱이므로 짝수이다.
따라서 m^2+am, 즉 b가 짝수이므로 가정에 모순이다.
(i), (ii)에서 $a,\ b$ 중 적어도 하나는 짝수이다.

답 풀이 참조

0430

|전략| 조건에 맞도록 세 원을 그려 식을 세운 다음 코시-슈바르츠의 부등식을 이용한다.

조건 (가), (나)를 만족시키는 세 원 $O_1,\ O_2,\ O_3$은 다음 그림과 같다.



세 원 $O_1,\ O_2,\ O_3$의 반지름의 길이를 각각 $r_1,\ r_2,\ r_3$이라 하면
조건 (다)에서 $2r_1+r_2+r_3=18$
$r_1,\ r_2,\ r_3$이 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(2^2+1^2+1^2)(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\geq(2r_1+r_2+r_3)^2$
그런데 $2r_1+r_2+r_3=18$이므로 $6(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\geq 324$
$\therefore r_1^2+r_2^2+r_3^2\geq 54$
등호는 $\frac{r_1}{2}=r_2=r_3$일 때 성립하고 $2r_1+r_2+r_3=18$이므로
$2r_1+\frac{r_1}{2}+\frac{r_1}{2}=18,\ 3r_1=18\qquad \therefore r_1=6$
이때 $S_1+S_2+S_3=\pi(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\geq 54\pi$이므로 $S_1+S_2+S_3$은 $\frac{r_1}{2}=r_2=r_3=3$일 때, 최솟값 54π를 갖는다.
따라서 $a=54,\ b=6,\ c=3,\ d=3$이므로
$a+b+c+d=66$

답 66

4 | 함수

본책 70~89쪽

STEP 1 개념 마스터 ❶

0431

X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

답 함수가 아니다.

0432

X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
이때, 정의역은 $\{1, 2, 3\}$, 공역은 $\{a, b, c\}$, 치역은 $\{a, c\}$이다.

답 함수이다. 정의역 : $\{1, 2, 3\}$, 공역 : $\{a, b, c\}$, 치역 : $\{a, c\}$

0433

X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 b, d의 2개이므로 함수가 아니다.

답 함수가 아니다.

0434

X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
이때, 정의역은 $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역은 $\{a, b, c, d\}$, 치역은 $\{b, c, d\}$이다.

답 함수이다. 정의역 : $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역 : $\{a, b, c, d\}$, 치역 : $\{b, c, d\}$

0435

$y=2x-1$은 모든 실수에서 정의되므로 정의역은 $\{x|x$는 실수$\}$이고, 치역은 $\{y|y$는 실수$\}$이다.

답 정의역 : $\{x|x$는 실수$\}$, 치역 : $\{y|y$는 실수$\}$

0436

$y=x^2+1$은 모든 실수에서 정의되므로 정의역은 $\{x|x$는 실수$\}$이고, $x^2+1\geq1$이므로 치역은 $\{y|y\geq1\}$이다.

답 정의역 : $\{x|x$는 실수$\}$, 치역 : $\{y|y\geq1\}$

0437

$y=\frac{1}{x}$은 $x\neq0$인 실수에서 정의되므로 정의역은 $\{x|x\neq0$인 실수$\}$이고, $\frac{1}{x}\neq0$이므로 치역은 $\{y|y\neq0$인 실수$\}$이다.

답 정의역 : $\{x|x\neq0$인 실수$\}$, 치역 : $\{y|y\neq0$인 실수$\}$

0438

$f(x)$와 $g(x)$의 정의역과 공역이 각각 서로 같으나
$f(-1)=-1$, $g(-1)=1$이므로 $f(-1)\neq g(-1)$
$\therefore f\neq g$

답 서로 같은 함수가 아니다.

0439

$f(x)$와 $g(x)$의 정의역과 공역이 각각 서로 같고
$f(-1)=g(-1)=1$, $f(2)=g(2)=4$
$\therefore f=g$

답 서로 같은 함수이다.

참고 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 공역은 실수 전체의 집합이다.

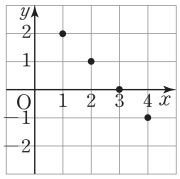
0440

$f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, $g(x)$의 정의역은 $x\neq3$인 실수 전체의 집합이므로 두 함수의 정의역이 서로 다르다.
$\therefore f\neq g$

답 서로 같은 함수가 아니다.

0441

$f(1)=2$, $f(2)=1$, $f(3)=0$, $f(4)=-1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 주어진 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0442 답 ㄱ, ㄷ

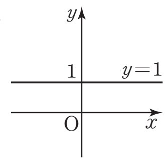
0443 답 ㄱ, ㄷ

0444 답 ㄷ

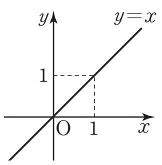
0445 답 ㄴ

[0446~0449]

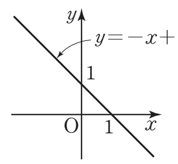
ㄱ.



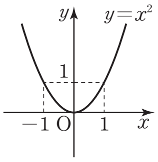
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



0446 답 ㄴ, ㄷ

0447 답 ㄴ, ㄷ

0448 답 ㄴ

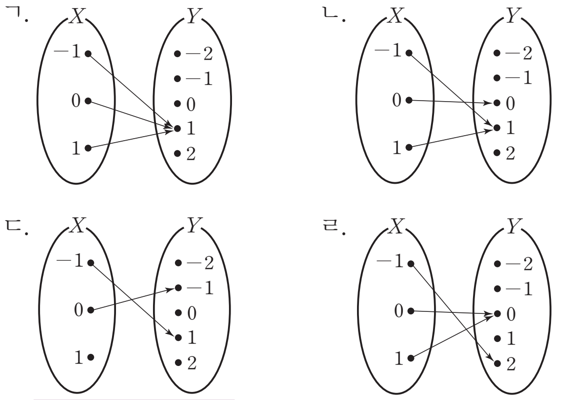
0449 답 ㄱ

STEP 2 유형 마스터 ❶

0450

|전략| 각 대응을 그림으로 나타내어 본다.

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ⑤

0451

임의의 실수 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$를 그었을 때, 그래프와 한 점에서 만나면 R에서 R로의 함수의 그래프이다.

따라서 R에서 R로의 함수의 그래프는 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

0452

|전략| 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 정의되려면 X의 모든 원소가 Y의 원소에 하나씩만 대응해야 한다.

① $-1 \le x \le 1$에서 $-3 \le x-2 \le -1$

$\therefore -3 \le f(x) \le -1$

② $-1 \le x \le 1$에서 $-2 \le 2x \le 2$

$-1 \le 2x+1 \le 3 \qquad \therefore -1 \le f(x) \le 3$

③ $-1 \le x \le 1$에서 $-11 \le x-10 \le -9$

$9 \le |x-10| \le 11,\ 3 \le \dfrac{1}{3}|x-10| \le \dfrac{11}{3}$

$\therefore 3 \le f(x) \le \dfrac{11}{3}$

④ $-1 \le x \le 1$에서 $0 \le x^2 \le 1$

$-1 \le -x^2 \le 0,\ 0 \le -x^2+1 \le 1$

$\therefore 0 \le f(x) \le 1$

⑤ $-1 \le x \le 1$에서 $-2 \le x-1 \le 0$

$0 \le (x-1)^2 \le 4,\ -3 \le (x-1)^2-3 \le 1$

$\therefore -3 \le f(x) \le 1$

따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ④이다. 답 ④

0453

|전략| 2와 $2-\sqrt{2}$가 유리수인지 무리수인지 구분한다.

2는 유리수이므로 $f(2)=4-2=2$

$2-\sqrt{2}$는 무리수이므로 $f(2-\sqrt{2})=2-\sqrt{2}$

$\therefore f(2)-f(2-\sqrt{2})=2-(2-\sqrt{2})=\sqrt{2}$ 답 ③

0454

$\dfrac{3x+1}{2}=5$라 하면 $3x=9 \qquad \therefore x=3$

$f\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)=x^2-7$에 $x=3$을 대입하면

$f(5)=3^2-7=2$ 답 2

다른 풀이 $\dfrac{3x+1}{2}=t$라 하면 $3x+1=2t \qquad \therefore x=\dfrac{2t-1}{3}$

$f\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)=x^2-7$에 x 대신 $\dfrac{2t-1}{3}$을 대입하면

$f(t)=\left(\dfrac{2t-1}{3}\right)^2-7$

따라서 $f(x)=\left(\dfrac{2x-1}{3}\right)^2-7$이므로

$f(5)=\left(\dfrac{2\cdot5-1}{3}\right)^2-7=2$

0455

$f(2)=2^2-2=2$

$f(23)=f(23-6)=f(17)=f(17-6)=f(11)$

$=\cdots=f(-1)=(-1)^2-2=-1$

$\therefore f(2)+f(23)=2+(-1)=1$ 답 1

0456

조건 (나)에 의하여

$f(1999)=f(2\cdot1000-1)=(-1)^{1000}=1$

조건 (가)에 의하여

$f(2000)=3f(1000)=3^2f(500)=3^3f(250)=3^4f(125)$

이때, $f(125)=f(2\cdot63-1)=(-1)^{63}=-1$이므로

$f(2000)=-3^4=-81$

$\therefore f(1999)+f(2000)=1+(-81)=-80$ 답 -80

0457

|전략| 주어진 등식의 양변에 적당한 x, y의 값을 대입한다.

$f(x+y)=f(x)f(y)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1, y=1$을 대입하면

$f(2)=f(1)f(1)=2\cdot2=4$

㉠의 양변에 $x=2, y=2$를 대입하면

$f(4)=f(2)f(2)=4\cdot4=16$ 답 ⑤

0458

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0, y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

㉠의 양변에 $x=1, y=1$을 대입하면

$f(2)=f(1)+f(1),\ 2f(1)=6 \qquad \therefore f(1)=3$

㉠의 양변에 $x=1, y=-1$을 대입하면

$f(0)=f(1)+f(-1),\ 0=3+f(-1)$

$\therefore f(-1)=-3$

$f(-2)=f(-1)+f(-1)=2f(-1)$
$f(-3)=f(-1)+f(-2)=f(-1)+2f(-1)=3f(-1)$
$f(-4)=f(-1)+f(-3)=f(-1)+3f(-1)=4f(-1)$
$\vdots$
$\therefore f(-10)=f(-1)+f(-9)=f(-1)+9f(-1)$
$=10f(-1)=10\cdot(-3)=-30$ 답 -30

0459

$f(24)=f(2)+f(12)=f(2)+f(2)+f(6)$
$=2f(2)+f(6)=2f(2)+f(2)+f(3)$
$=3f(2)+f(3)$
$=3(2+1)+(3+1)=13$ 답 13

0460

$f(x)+2f(1-x)=x^2-3x+9$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면
$f(0)+2f(1)=9$ …… ㉡
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f(1)+2f(0)=7$ …… ㉢
㉡$-2\times$㉢을 하면
$-3f(0)=-5$ $\therefore f(0)=\frac{5}{3}$ 답 $\frac{5}{3}$

0461

|전략| $a>0$일 때와 $a<0$일 때로 나누어 생각해 본다.
(i) $a>0$일 때, $f(0)=0$, $f(3)=3$이어야 하므로
$f(0)=b=0$, $f(3)=3a+b=3$
$\therefore a=1, b=0$ $\therefore a+b=1$
(ii) $a<0$일 때, $f(0)=3$, $f(3)=0$이어야 하므로
$f(0)=b=3$, $f(3)=3a+b=0$
$\therefore a=-1, b=3$ $\therefore a+b=2$
(i), (ii)에서 구하는 $a+b$의 값은 1 또는 2이다. 답 1, 2
참고 $a=0$이면 $f(x)=b$이므로 함수 $f(x)$의 치역은 $\{b\}$이다.
따라서 치역과 공역이 같을 수 없으므로 $a\neq0$

0462

음이 아닌 정수 k에 대하여
(i) $x=2k$일 때, $x^2=(2k)^2=4k^2$ $\therefore f(x)=0$
(ii) $x=2k+1$일 때, $x^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$
$\therefore f(x)=1$
따라서 함수 f의 치역은 $\{0, 1\}$이다. 답 $\{0, 1\}$

0463

$f(x)=ax+1$이라 하면 $a>0$이므로 $0\le f(-2)<f(2)\le4$가 성립한다.
(i) $f(-2)\ge0$에서 $-2a+1\ge0$ $\therefore a\le\frac{1}{2}$
(ii) $f(2)\le4$에서 $2a+1\le4$ $\therefore a\le\frac{3}{2}$
(i), (ii)에서 $a\le\frac{1}{2}$
이때, $a>0$이므로 $0<a\le\frac{1}{2}$ 답 $0<a\le\frac{1}{2}$

0464

함수 f의 치역이 $\{2\}$가 되려면 정의역의 원소는 소수이어야 한다.
전체집합 U의 원소 중 소수는 2, 3, 5, 7이므로 정의역 X는 집합 $\{2, 3, 5, 7\}$의 부분집합 중에서 $\emptyset$을 제외한 집합이다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^4-1=15$ 답 ③

Lecture
부분집합의 개수
집합 $A=\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ (n은 자연수)의 부분집합의 개수 ⇨ 2^n

참고 함수 f의 치역이 $\{3\}$이 되려면 정의역의 원소는 1이 아닌 제곱수이어야 한다.

0465

|전략| $f=g$이려면 $f(1)=g(1)$, $f(2)=g(2)$이어야 함을 이용한다.
$f(1)=g(1)$에서 $2=a+b$
$f(2)=g(2)$에서 $5=2a+b$
두 식을 연립하여 풀면 $a=3, b=-1$
$\therefore ab=-3$ 답 ①

0466

ㄱ. $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(0)=g(0)=0$, $f(1)=g(1)=-1$이므로 $f=g$
ㄴ. $f(-1)=1$, $g(-1)=-1$이므로 $f(-1)\neq g(-1)$
$\therefore f\neq g$
ㄷ. $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(0)=g(0)=0$, $f(1)=g(1)=1$이므로 $f=g$
따라서 $f=g$인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0467

$f(x)=g(x)$, 즉 $x^2-x-1=2x^3-3x$에서
$2x^3-x^2-2x+1=0$, $x^2(2x-1)-(2x-1)=0$
$(x^2-1)(2x-1)=0$, $(x+1)(x-1)(2x-1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

4 함수

즉, 집합 $\left\{-1,\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$의 부분집합 중에서 $\emptyset$을 제외한 집합을 정의역 X로 하면 $f=g$를 만족시킨다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^3-1=7$ 답 7

0468

|전략| 정의역의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이지만 $f(x_1)=f(x_2)$인 반례를 찾는다.

① [반례] $x_1=1$, $x_2=2$이면 $x_1 \neq x_2$이지만
$f(x_1)=2$, $f(x_2)=2$
로 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 일대일대응이 아니다.

③ [반례] $x_1=0$, $x_2=-1$이면 $x_1 \neq x_2$이지만
$f(x_1)=0+|0|=0$, $f(x_2)=-1+|-1|=0$
으로 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 일대일대응이 아니다.

④ [반례] $x_1=1$, $x_2=-1$이면 $x_1 \neq x_2$이지만
$f(x_1)=1^2=1$, $f(x_2)=(-1)^2=1$
로 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 일대일대응이 아니다.

⑤ [반례] $x_1=1.2$, $x_2=1.5$이면 $x_1 \neq x_2$이지만
$f(x_1)=[1.2]=1$, $f(x_2)=[1.5]=1$
로 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 일대일대응이 아니다. 답 ②

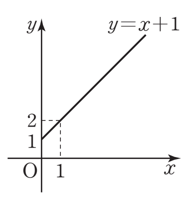
0469

치역에 속하는 임의의 실수 k에 대하여 y축에 수직인 직선 $y=k$를 그었을 때, 그래프와 한 점에서 만나고 (치역)=(공역)이면 그 함수는 일대일대응이다.
따라서 일대일대응인 것은 ㄹ이다. 답 ③

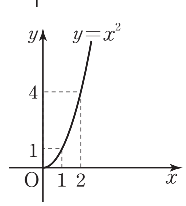
0470

치역에 속하는 임의의 실수 k에 대하여 y축에 수직인 직선 $y=k$를 그었을 때, 그래프와 한 점에서 만나고 (치역)$\neq$(공역)이면 그 함수는 일대일함수이지만 일대일대응이 아니다.

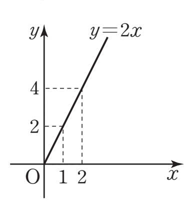
ㄱ. $f(x)=x+1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 일대일함수이지만 일대일대응이 아니다.
치역 $\{y|y \geq 1\}$이 공역과 같지 않으므로 일대일대응이 아니다.



ㄴ. $f(x)=x^2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 일대일대응이다.



ㄷ. $f(x)=2x$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 일대일대응이다.

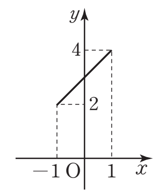


따라서 일대일함수이지만 일대일대응이 아닌 것은 ㄱ이다. 답 ㄱ

0471

|전략| 함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 $a>0$이므로 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값도 증가함을 이용한다.

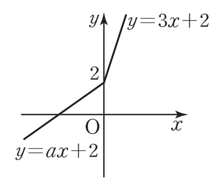
$a>0$이고 함수 $f(x)=ax+b$가 일대일대응이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(-1)=2$에서 $-a+b=2$
$f(1)=4$에서 $a+b=4$
두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$
$\therefore ab=3$ 답 3

0472

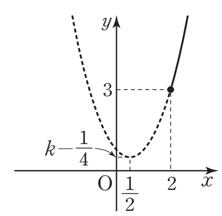
함수 f가 일대일대응이려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 직선 $y=ax+2$의 기울기가 양수이어야 한다.
$\therefore a>0$ 답 $a>0$

0473

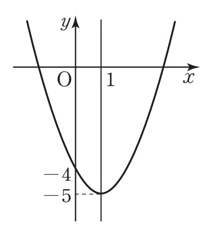
$f(x)=x^2-x+k=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+k-\frac{1}{4}$이므로 오른쪽 $y=f(x)$의 그래프에서 $x \geq 2$일 때 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.



따라서 함수 f가 일대일대응이려면
$f(2)=3$이어야 하므로
$4-2+k=3 \qquad \therefore k=1$ 답 1

0474

$f(x)=x^2-2x-4=(x-1)^2-5$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 f가 일대일대응이려면 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값도 증가하거나, x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소해야 한다.
즉, $x=1$을 기준으로 어느 한쪽의 전체 또는 일부분이어야 한다.
$\therefore a \geq 1$ ⋯⋯ ㉠
또, 치역과 공역이 같아야 하므로 정의역 $\{x|x \geq a\}$에 대하여 치역은 $\{y|y \geq a\}$이어야 한다.
즉, $f(a)=a$에서 $a^2-2a-4=a$
$a^2-3a-4=0$, $(a+1)(a-4)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=4$ 답 ④

0475

|전략| $f(x)$가 항등함수이면 $f(x)=x$이다.

ㄱ. $f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$이므로 항등함수이다.

ㄴ. $g(-1)=1$이므로 항등함수가 아니다.

ㄷ. $h(-1)=-1$, $h(0)=0$, $h(1)=1$이므로 항등함수이다.

ㄹ. $k(-1)=\dfrac{|0|-|-2|}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$,

$k(0)=\dfrac{|1|-|-1|}{2}=\dfrac{0}{2}=0$,

$k(1)=\dfrac{|2|-|0|}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

이므로 항등함수이다.

따라서 항등함수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

0476

함수 f는 상수함수이므로 $f(x)=f(2)=1$

$\therefore f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(19)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{10개}=10$

답 10

0477

함수 g는 항등함수이므로

$g(2)=2$, $g(3)=3$, $g(6)=6$

$f(2)=g(3)=h(6)$에서 $f(2)=h(6)=3$

$f(2)f(3)=f(6)$에서 $3f(3)=f(6)$

이때, 함수 f는 일대일대응이므로

$f(3)=2$, $f(6)=6$ 또는 $f(3)=6$, $f(6)=2$

그런데 $f(3)=6$, $f(6)=2$이면 $3f(3)\neq f(6)$이므로

$f(3)=2$, $f(6)=6$

또, 함수 h는 상수함수이므로

$h(2)=h(3)=h(6)=3$

$\therefore f(6)+g(2)+h(2)=6+2+3=11$ 답 11

0478

함수 $f(x)=x^2+2x$가 항등함수가 되려면 $f(x)=x$를 만족시켜야 한다. … ❶

$x^2+2x=x$에서 $x^2+x=0$

$x(x+1)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ … ❷

즉, 집합 $\{-1, 0\}$의 부분집합 중에서 $\varnothing$을 제외한 집합을 정의역 X로 하면 함수 f는 항등함수가 된다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^2-1=3$ … ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(x)=x$임을 알 수 있다.	40 %
❷ $f(x)=x$를 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30 %

0479

|전략| 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4에 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4가 대응되는 경우의 수를 생각하여 함수의 개수를 구한다.

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 X로의

(i) 함수의 개수 : $4^4=256$

(ii) 일대일대응의 개수 : $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

(iii) 상수함수의 개수 : 4

(iv) 항등함수의 개수 : 1

따라서 $k=256$, $l=24$, $m=4$, $n=1$이므로

$k+l+m+n=285$ 답 285

Lecture

(1) X에서 X로의 함수 f의 개수

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 4개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 4개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 4개

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 4개

따라서 함수의 개수는 $4\cdot4\cdot4\cdot4=4^4=256$

(2) X에서 X로의 일대일대응인 f의 개수

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 4개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 3개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 2개

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 제외한 1개

따라서 일대일대응의 개수는 $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

0480

두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{2, 4, 6, 8\}$에 대하여 X에서 Y로의

(i) 함수의 개수 : $4^3=64$

(ii) 일대일함수의 개수 : $4\cdot3\cdot2=24$

(iii) 상수함수의 개수 : 4

따라서 $a=64$, $b=24$, $c=4$이므로

$a+b+c=92$ 답 ④

Lecture

X에서 Y로의 일대일함수 f의 개수

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 4, 6, 8 중 하나이므로 4개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 3개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 2개

따라서 일대일함수의 개수는 $4\cdot3\cdot2=24$

0481

일대일함수일 때, 정의역과 공역의 원소의 개수가 같으면 (치역)=(공역)

X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이고 치역과 공역이 같으므로 함수 f는 일대일대응이다.

$X=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로 집합 X의 원소는 6개이다.

따라서 구하는 함수 $f : X \longrightarrow X$의 개수는

$6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ 답 ⑤

4 함수

0482

|전략| A의 각 원소가 대응할 수 있는 A의 원소의 개수를 구한다.

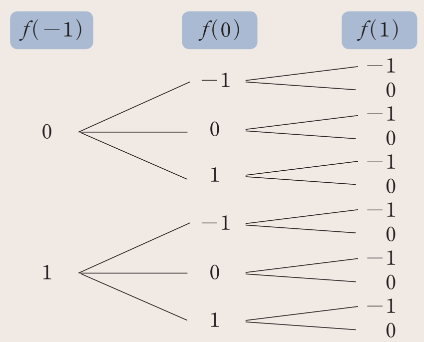
$f(5)$의 값이 될 수 있는 것은 $-5,\ -3,\ 0,\ 3,\ 5$ 중 하나이므로 5개
$f(-5)=f(5)$에서 $f(-5)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(5)$의 값과 같아야 하므로 1개
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $-5,\ -3,\ 0,\ 3,\ 5$ 중 하나이므로 5개
$f(-3)=f(3)$에서 $f(-3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(3)$의 값과 같아야 하므로 1개
$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $-5,\ -3,\ 0,\ 3,\ 5$ 중 하나이므로 5개
따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$5\cdot1\cdot5\cdot1\cdot5=125$ 답 125

0483

$\{f(-1)+1\}\{f(1)-1\}\neq0$에서 $f(-1)\neq-1,\ f(1)\neq1$
$f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 $0,\ 1$ 중 하나이므로 2개
$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $-1,\ 0,\ 1$ 중 하나이므로 3개
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-1,\ 0$ 중 하나이므로 2개
따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$2\cdot3\cdot2=12$ 답 12

Lecture

조건을 만족시키는 함숫값은 다음과 같이 나타낼 수 있다.



0484

임의의 $x\in X$에 대하여 $xf(x)$의 값이 일정하므로
$xf(x)=k$ (k는 상수)라 하면
$x=0$일 때, $0\cdot f(0)=k$ $\quad\therefore k=0$
$x=1$일 때, $1\cdot f(1)=k$
$x=3$일 때, $3\cdot f(3)=k$
$\therefore f(1)=f(3)=0$
$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $0,\ 2,\ 4$ 중 하나이므로 3개
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 0뿐이므로 1개
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 0뿐이므로 1개
따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$3\cdot1\cdot1=3$ 답 3

0485

|전략| 먼저 조건 (가)의 양변에 적당한 값을 대입하여 함숫값을 유도한다.

조건 (가)에서 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x_1=0,\ x_2=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)+f(0)$ $\quad\therefore f(0)=0$
㉠의 양변에 $x_1=-3,\ x_2=3$을 대입하면
$f(0)=f(-3)+f(3)$ $\quad\therefore f(-3)=-f(3)$
또, 조건 (나)에서 함수 f는 일대일함수이다. 이때,
$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 0뿐이므로 1개
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $\underbrace{-4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4 \text{ 중 } f(0)\text{의 값을 제외}}_{-4,\ -2,\ 2,\ 4\text{ 중 하나}}$한 4개
$f(-3)=-f(3)$에서 $f(-3)$의 값이 될 수 있는 것은 $-f(3)$의 값과 같아야 하므로 1개
따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$1\cdot4\cdot1=4$ 답 ②

STEP 1 개념 마스터 ❷

0486

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(a)=3$ 답 3

0487

$(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(b)=1$ 답 1

0488

$(f\circ g)(c)=f(g(c))=f(2)=a$ 답 a

0489

$(f\circ g)(d)=f(g(d))=f(4)=b$ 답 b

0490

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+2)$
$=(x+2)^2-1=x^2+4x+3$
답 $(g\circ f)(x)=x^2+4x+3$

0491

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-1)$
$=(x^2-1)+2=x^2+1$ 답 $(f\circ g)(x)=x^2+1$

0492

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x+2)$
$=(x+2)+2=x+4$ 답 $(f\circ f)(x)=x+4$

0493

$(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x^2-1)$

$\quad\quad\quad\quad=(x^2-1)^2-1=x^4-2x^2$ 답 $(g\circ g)(x)=x^4-2x^2$

0494

역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

ㄴ. X의 원소 2, 3이 모두 Y의 원소 b에 대응하므로 일대일대응이 아니다.

ㄹ. Y의 원소 b에 대응하는 X의 원소가 없으므로 일대일대응이 아니다.

따라서 역함수가 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

0495

$f^{-1}(-3)=a$에서 $f(a)=-3$이므로

$-2a+3=-3,\ -2a=-6 \quad \therefore a=3$ 답 3

0496

$f^{-1}(b)=7$에서 $f(7)=b$이므로

$b=-2\cdot7+3=-11$ 답 -11

0497

함수 $y=3x-5$는 실수 전체의 집합 R에서 R로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=3x-5$에서 x를 y로 나타내면

$3x=y+5 \quad \therefore x=\frac{1}{3}y+\frac{5}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ 답 $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

0498

음이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=x^2$은 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=x^2$에서 x를 y로 나타내면 $x=\pm\sqrt{y}\ (y\ge0)$

그런데 $x\ge0$이므로 $x=\sqrt{y}\ (y\ge0)$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\sqrt{x}\ (x\ge0)$ 답 $y=\sqrt{x}\ (x\ge0)$

0499

$f^{-1}(5)=1$ 답 1

0500

$(f^{-1})^{-1}(4)=f(4)=3$ 답 3

0501

$(f^{-1}\circ f)(2)=f^{-1}(f(2))=f^{-1}(4)=2$ 답 2

0502

$(f\circ f^{-1})(3)=f(f^{-1}(3))=f(4)=3$ 답 3

0503

(1) $y=-\frac{3}{2}x+3$에서 x를 y로 나타내면

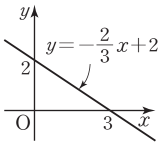
$-\frac{3}{2}x=y-3 \quad \therefore x=-\frac{2}{3}y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-\frac{2}{3}x+2$

$\therefore f^{-1}(x)=-\frac{2}{3}x+2$

(2)



답 (1) $f^{-1}(x)=-\frac{2}{3}x+2$ (2) 풀이 참조

STEP 2 유형 마스터 ❷

0504

|전략| $(f\circ f)(a)=f(f(a))$이므로 $f(a)$의 값을 구하여 $f(x)$의 x에 대입한다.

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(-3)=3$

$(f\circ f)(\sqrt{2})=f(f(\sqrt{2}))=f(4)=-4$

$\therefore (f\circ f)(3)+(f\circ f)(\sqrt{2})=3+(-4)=-1$ 답 -1

0505

$(f\circ g)(2)+(g\circ f)(0)=f(g(2))+g(f(0))$

$\quad\quad=f(2)+g(-1)$

$\quad\quad=5+5=10$ 답 10

0506

$\underline{(h\circ(g\circ f))(5)=((h\circ g)\circ f)(5)}$ 합성함수의 결합법칙

$\quad\quad=(h\circ g)(f(5))$

$\quad\quad=(h\circ g)(0)$

$\quad\quad=6\cdot0+7=7$ 답 ③

0507

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(3)=8$

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=10$에서 $g(4)=10$이고, $g(x)$는 일대일대응이므로 $f(2)=4$

$\therefore f(2)+g(3)=4+8=12$ 답 12

0508

|전략| 합성함수 $(f\circ g)(x)$와 $(g\circ f)(x)$를 각각 구하고, 양변의 동류항의 계수를 비교한다.

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x+4)=a(-x+4)+3$

$=-ax+4a+3$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+3)=-(ax+3)+4$

$=-ax+1$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $-ax+4a+3=-ax+1$

$4a+3=1,\ 4a=-2 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

답 ②

0509

주어진 그림에서

$f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=4,\ f(4)=5,\ f(5)=1$

$f\circ g=g\circ f$에서 $f(g(x))=g(f(x))$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(g(1))=g(f(1))$

$f(3)=g(2) \qquad \therefore g(2)=4$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f(g(2))=g(f(2))$

$f(4)=g(3) \qquad \therefore g(3)=5$

답 ⑤

0510

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+k^2)=-2(2x+k^2)+k$

$=-4x-2k^2+k$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-2x+k)=2(-2x+k)+k^2$

$=-4x+2k+k^2$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $-4x-2k^2+k=-4x+2k+k^2$

$-2k^2+k=2k+k^2,\ 3k^2+k=0$

$k(3k+1)=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{3}$ 또는 $k=0$

이때, $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=-\frac{1}{3},\ \beta=0$

$\therefore 3\alpha+\beta=-1$

답 -1

0511

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx-2)=a(bx-2)+3$

$=abx-2a+3$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+3)=b(ax+3)-2$

$=abx+3b-2$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $abx-2a+3=abx+3b-2$

$-2a+3=3b-2 \qquad \therefore 2a+3b=5$

이때, $2a>0,\ 3b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{2a+3b}{2}\ge\sqrt{2a\cdot 3b},\ \frac{5}{2}\ge\sqrt{6ab}$ (단, 등호는 $2a=3b$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $6ab\le\frac{25}{4} \qquad \therefore 3ab\le\frac{25}{8}$

따라서 $3ab$의 최댓값은 $\frac{25}{8}$이다.

답 $\frac{25}{8}$

Lecture

산술평균과 기하평균의 관계

$a>0,\ b>0$일 때

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

0512

|전략| $f(x)$의 x에 $f(x)$를 대입하여 $f(f(x))$를 구하고 양변의 동류항의 계수를 비교한다.

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)$

$=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$

즉, $a^2x+ab+b=4x+9$이므로 $a^2=4,\ ab+b=9$

$\therefore a=2,\ b=3\ (\because a>0)$

따라서 $f(x)=2x+3$이므로

$f(2)=2\cdot2+3=7$

답 ③

0513

$(f\circ f)(k)=f(f(k))=f(k^2-1)$

$=(k^2-1)^2-1=k^4-2k^2$

즉, $k^4-2k^2=-1$이므로 $k^4-2k^2+1=0$

이때, $k^2=t$로 놓으면

$t^2-2t+1=0,\ (t-1)^2=0$

$\therefore t=1$

즉, $k^2=1$이므로 $k=\pm1$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$(-1)\cdot1=-1$

답 -1

다른 풀이 $f(k)=a$라 하면

$(f\circ f)(k)=f(f(k))=f(a)=-1$

이므로 $a^2-1=-1,\ a^2=0$

$\therefore a=0$

즉, $f(k)=0$이므로

$k^2-1=0,\ k^2=1 \qquad \therefore k=\pm1$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$(-1)\cdot1=-1$

0514

$f(-2)=\underbrace{-2a+3<0}_{a\ge3\text{에서 } -2a\le-6 \quad \therefore -2a+3\le-3}$이므로

$(f\circ f)(-2)=f(f(-2))=f(-2a+3)$

$=a(-2a+3)+3=-2a^2+3a+3$

즉, $-2a^2+3a+3=-17$이므로 $2a^2-3a-20=0$

$(2a+5)(a-4)=0 \qquad \therefore a=4\ (\because a\ge3)$

$\therefore (f\circ f)(-1)=f(\underbrace{f(-1)}_{f(-1)=4\cdot(-1)+3=-1})=f(-1)=-1$

답 ②

0515
|전략| $(f\circ h)(x)=f(h(x))$이므로 $f(x)$의 x 대신 $h(x)$를 대입하여 $f(h(x))$를 구한 다음 $h(x)$에 대한 식으로 정리한다.

$(f\circ h)(x)=f(h(x))=2h(x)+2$

$(f\circ h)(x)=g(x)$이므로 $2h(x)+2=4x-6$

$2h(x)=4x-8\qquad\therefore h(x)=2x-4$ 답 $h(x)=2x-4$

0516
$(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$ ← 합성함수의 결합법칙

$=(h\circ g)(f(x))$

$=-2f(x)+1$

즉, $-2f(x)+1=x^2-4x+1$이므로 $-2f(x)=x^2-4x$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x$

$\therefore f(-2)=-\frac{1}{2}\cdot(-2)^2+2\cdot(-2)=-6$ 답 -6

0517
|전략| $(h\circ f)(x)=h(f(x))$이므로 $f(x)=t$로 치환하여 $h(t)$를 구한다.

$(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(3x+2)$

$(h\circ f)(x)=g(x)$이므로 $h(3x+2)=2x-1$

$3x+2=t$라 하면 $3x=t-2\qquad\therefore x=\frac{t-2}{3}$

따라서 $h(t)=2\cdot\frac{t-2}{3}-1=\frac{2}{3}t-\frac{7}{3}$이므로

$h(-1)=\frac{2}{3}\cdot(-1)-\frac{7}{3}=-3$ 답 -3

다른 풀이 $h(3x+2)=2x-1$에서

$3x+2=-1$이라 하면 $3x=-3\qquad\therefore x=-1$

$h(3x+2)=2x-1$에 $x=-1$을 대입하면

$h(-1)=2\cdot(-1)-1=-3$

0518
$f(x)=-x+2,\ g(x)=-4x+2$이므로

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-x+2)$

$=-4(-x+2)+2=4x-6$

이때, $(h\circ(g\circ f))(x)=h((g\circ f)(x))=h(4x-6)$

$(h\circ(g\circ f))(x)=f(x)$이므로 $h(4x-6)=-x+2$

$4x-6=t$라 하면 $4x=t+6\qquad\therefore x=\frac{t+6}{4}$

따라서 $h(t)=-\frac{t+6}{4}+2=-\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}$이므로

$h(6)=-\frac{1}{4}\cdot6+\frac{1}{2}=-1$ 답 ⑤

다른 풀이 $h(4x-6)=-x+2$에서

$4x-6=6$이라 하면 $4x=12\qquad\therefore x=3$

$h(4x-6)=-x+2$에 $x=3$을 대입하면

$h(6)=-3+2=-1$

0519
|전략| $f^1(2), f^2(2), f^3(2), \cdots$의 값에서 규칙을 찾아 $f^{2018}(2)$의 값을 추정한다.

$f^1(2)=f(2)=\frac{2}{2}=1$

$f^2(2)=f(f(2))=f(1)=\frac{3\cdot1+1}{2}=2$

$f^3(2)=f(f^2(2))=f(2)=1$

$f^4(2)=f(f^3(2))=f(1)=2$

$\vdots$

즉, $f^n(2)$의 값은 1, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때, $2018=2\cdot1009$이므로 $f^{2018}(2)=f^2(2)=2$ 답 ②

0520
$f^1(x)=f(x)=1-x$

$f^2(x)=f(f(x))=f(1-x)=1-(1-x)=x$

따라서 $f^3(x)=f(x), f^4(x)=f^2(x), \cdots$이므로

$f^n(x)=\begin{cases}1-x & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$ 답 $f^n(x)=\begin{cases}1-x & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

0521
$f^1(1)=f(1)=3$

$f^2(1)=f(f(1))=f(3)=3^2$

$f^3(1)=f(f^2(1))=f(3^2)=3^3$

$f^4(1)=f(f^3(1))=f(3^3)=3^4$ ··· ❶

$\vdots$

$\therefore f^k(1)=3^k$ ··· ❷

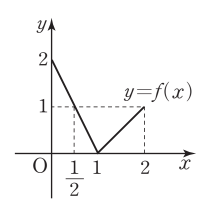
이때, $f^k(1)=243=3^5$이므로 $3^k=3^5$

$\therefore k=5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $f^1(1), f^2(1), f^3(1), f^4(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f^k(1)$을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0522
오른쪽 그림에서



$f^1\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=1$

$f^2\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(1)=0$

$f^3\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^2\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(0)=2$

$f^4\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^3\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(2)=1$

$f^5\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^4\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(1)=0$

$\vdots$

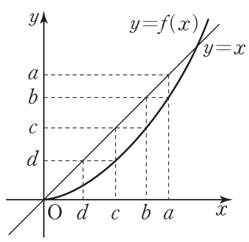
즉, $f^n\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은 1, 0, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때, $200=3\cdot66+2$이므로 $f^{200}\left(\frac{1}{2}\right)=f^2\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 답 0

0523

|전략| 직선 $y=x$ 위의 점은 x좌표와 y좌표가 서로 같음을 이용한다.

오른쪽 그림에서



$f(c)=d$

$(f\circ f)(b)=f(f(b))=f(c)=d$

$(f\circ f\circ f)(a)=f(f(f(a)))$

$=f(f(b))$

$=f(c)$

$=d$

$\therefore f(c)+(f\circ f)(b)+(f\circ f\circ f)(a)$

$=d+d+d=3d$ 답 ⑤

0524

$f(a)=b$라 하면 $(f\circ f)(a)=4$에서

$f(f(a))=f(b)=4$

주어진 그래프에서 $f(b)=4$를 만족시키는 b의 값은

$b=0$ 또는 $b=5$

$\therefore f(a)=0$ 또는 $f(a)=5$

(i) $f(a)=0$일 때, $a=2$ 또는 $a=4$

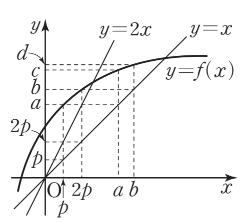
(ii) $f(a)=5$를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$2+4=6$ 답 6

0525

오른쪽 그림에서



$(f\circ f)(p)+(f\circ f)(2p)$

$=f(f(p))+f(f(2p))$

$=f(a)+f(b)$

$=c+d$

답 ⑤

0526

|전략| $f^{-1}(m)=n$이면 $f(n)=m$임을 이용한다.

$f^{-1}(-1)=2$에서 $f(2)=-1$이므로 $2a+b=-1$ …… ㉠

$f^{-1}(4)=-3$에서 $f(-3)=4$이므로 $-3a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

$\therefore a+b=0$ 답 0

0527

$f^{-1}(2)=1$에서 $f(1)=2$이므로

$-3\cdot1+k=2 \qquad \therefore k=5$

따라서 $f(x)=-3x+5$이므로

$f(3)=-3\cdot3+5=-4$ 답 ①

0528

$\frac{x+1}{2}=t$라 하면 $x=2t-1$

따라서 $f(t)=-(2t-1)+2=-2t+3$이므로

$f(x)=-2x+3$

$f^{-1}(-3)=k$라 하면 $f(k)=-3$이므로

$-2k+3=-3,\ -2k=-6 \qquad \therefore k=3$ 답 3

다른 풀이 $f^{-1}(-3)=k$라 하면 $f(k)=-3$

$-x+2=-3$에서 $x=5$

$x=5$를 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=-x+2$에 대입하면

$f\left(\frac{5+1}{2}\right)=-5+2,\ f(3)=-3$

$\therefore f^{-1}(-3)=3$

0529

$x\ge0$일 때, $f(x)=2x+1\ge1$

$x<0$일 때, $f(x)=1-x^2<1$

$f^{-1}(5)=m$이라 하면 $f(m)=5>1$이므로

$2m+1=5,\ 2m=4 \qquad \therefore m=2$

$f^{-1}(-3)=n$이라 하면 $f(n)=-3<1$이므로

$1-n^2=-3,\ n^2=4 \qquad \therefore n=-2\ (\because n<0)$

$\therefore f^{-1}(5)+f^{-1}(-3)=2+(-2)=0$ 답 ⑤

0530

|전략| $(f^{-1}\circ g)(k)=f^{-1}(g(k))=1$이면 $f(1)=g(k)$임을 이용한다.

$(f^{-1}\circ g)(k)=f^{-1}(g(k))=1$에서 $f(1)=g(k)$

$3\cdot1+1=-k+2 \qquad \therefore k=-2$ 답 ②

0531

$(f\circ g^{-1})(1)=f(g^{-1}(1))$이고 $g(2)=1$이므로 $g^{-1}(1)=2$

$\therefore (f\circ g^{-1})(1)=f(2)=3$

$(g\circ f^{-1})(4)=g(f^{-1}(4))$이고 $f(3)=4$이므로 $f^{-1}(4)=3$

$\therefore (g\circ f^{-1})(4)=g(3)=4$

$\therefore (f\circ g^{-1})(1)+(g\circ f^{-1})(4)=3+4=7$ 답 7

0532

$f^{-1}(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로

$2+a=1 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore f(x)=x-1$ … ❶

$(g\circ f)(x)=2x-1$에 $x=2$를 대입하면
$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(1)=3$
$b+1=3 \quad \therefore b=2$
$\therefore g(x)=2x+1$ … ❷
$g^{-1}(f(1))=g^{-1}(0)=k$라 하면 $g(k)=0$이므로
$2k+1=0 \quad \therefore k=g^{-1}(f(1))=-\frac{1}{2}$ … ❸

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ a의 값과 $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ b의 값과 $g(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $g^{-1}(f(1))$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0533

$(f^{-1}\circ g)(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 나머지가
$R(x)=ax+b$이므로 몫을 $Q(x)$라 하면
$(f^{-1}\circ g)(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$
양변에 $x=1$을 대입하면 $(f^{-1}\circ g)(1)=0\cdot Q(1)+a+b$
$\therefore a+b=(f^{-1}\circ g)(1)=f^{-1}(g(1))=f^{-1}(1)$
$f^{-1}(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로
$2k-2=1 \quad \therefore k=\frac{3}{2}$
$\therefore a+b=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

Lecture

다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면
⇨ $A=BQ+R$ (단, (R의 차수)<(B의 차수))

0534

|전략| 함수 f의 역함수가 존재하면 함수 f는 일대일대응이므로 치역과 공역이 같아야 한다.

함수 $f(x)=-2x+1$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 치역과 공역이 같아야 한다.
이때, $y=f(x)$의 그래프의 기울기가 음수이므로
x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소한다.
$f(-1)=b$에서 $-2\cdot(-1)+1=b \quad \therefore b=3$
$f(1)=a$에서 $-2\cdot 1+1=a \quad \therefore a=-1$
$\therefore a+b=2$

답 ⑤

0535

$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$이고, 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로
$a\geq 1$, $f(a)=a$
$a^2-2a=a$에서 $a^2-3a=0$
$a(a-3)=0 \quad \therefore a=3\ (\because a\geq 1)$

답 3

0536

$$f(x)=2(x-1)-3a|x-2| =\begin{cases}(2-3a)x+6a-2 & (x\geq 2)\\(2+3a)x-6a-2 & (x<2)\end{cases}$$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 $x\geq 2$일 때와 $x<2$일 때의 직선의 기울기 $2-3a$, $2+3a$의 부호가 서로 같아야 한다.
즉, $(2-3a)(2+3a)>0$이므로
$-\frac{2}{3}<a<\frac{2}{3}$
따라서 정수 a는 0의 1개이다.

답 ②

0537

|전략| $y=2x+a$로 놓고 그 역함수를 구한다.

$y=2x+a$라 하면 $2x=y-a \quad \therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}a$
여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}a$
$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}a$
즉, $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}a=bx+4$이므로
$a=-8$, $b=\frac{1}{2} \quad \therefore ab=-4$

답 ②

0538

$2x-1=t$라 하면 $2x=t+1 \quad \therefore x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$
따라서 $f(t)=4\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)+5=2t+7$이므로
$f(x)=2x+7$
$y=2x+7$이라 하면 $2x=y-7 \quad \therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{7}{2}$
여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$
$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$

답 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$

0539

$y=af(x)$라 하면 $f(x)=\frac{y}{a}$이므로 $x=g\left(\frac{y}{a}\right)$
역함수의 정의를 이용하여 x를 y로 나타낸 것
여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=g\left(\frac{x}{a}\right)$
따라서 $af(x)$의 역함수는 $g\left(\frac{x}{a}\right)$이다.
$y=f(ax)$라 하면 $g(y)=ax$
여기서 x와 y를 서로 바꾸면
$g(x)=ay \quad \therefore y=\frac{1}{a}g(x)$
따라서 $f(ax)$의 역함수는 $\frac{1}{a}g(x)$이다.

답 ⑤

0540

|전략| $f(x)=f^{-1}(x)$이면 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=x$임을 이용한다.

① $f(x)=x+1$이므로 $f(f(x))=f(x+1)=x+2$

② $f(x)=2x$이므로 $f(f(x))=f(2x)=4x$

③ $f(x)=-x+2$이므로 $f(f(x))=f(-x+2)=x$

④ $f(x)=-2x$이므로 $f(f(x))=f(-2x)=4x$

⑤ $f(x)=x^3$이므로 $f(f(x))=f(x^3)=x^9$

따라서 $f(x)=f^{-1}(x)$를 만족시키는 함수는 ③이다. 답 ③

0541

$(f\circ f)(x)=x$에서 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로

$f(5)=f^{-1}(5)=4$

$f^{-1}(5)=4$에서 $f(4)=5$이므로

$f^{-1}(4)=f(4)=5$

$\therefore f(5)+f^{-1}(4)=9$ 답 9

0542

조건 (가), (나)에서 $f(3)=f^{-1}(3)=5$

이때, $f^{-1}(3)=5$에서 $f(5)=3$

$f(3)=5$, $f(5)=3$에서

$3a+b=5$, $5a+b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=8$

따라서 $f(x)=-x+8$이므로

$f(1)+f(5)=7+3=10$ 답 ⑤

다른 풀이 조건 (나)에서 $f(3)=3a+b=5$

$\therefore b=5-3a$ ······ ㉠

이것을 $f(x)=ax+b$에 대입하면

$f(x)=ax+5-3a$

조건 (가)에서 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=x$

$f(f(x))=a(ax+5-3a)+5-3a$

$=a^2x-3a^2+2a+5$

즉, $a^2x-3a^2+2a+5=x$이므로 $a^2=1$, $-3a^2+2a+5=0$

(i) $a^2=1$일 때, $a=\pm1$

(ii) $-3a^2+2a+5=0$일 때

$3a^2-2a-5=0$, $(a+1)(3a-5)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\dfrac{5}{3}$

(i), (ii)에서 $a=-1$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=8$

따라서 $f(x)=-x+8$이므로

$f(1)+f(5)=7+3=10$

0543

$f(x)=f^{-1}(x)$에서 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=x$

$f(f(x))=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$

즉, $a^2x+ab+b=x$이므로 $a^2=1$, $ab+b=0$

(i) $a^2=1$일 때, $a=\pm1$

(ii) $ab+b=0$일 때, $b(a+1)=0$

$\therefore b=0$ 또는 $a=-1$

(i), (ii)에서 $ab\neq0$이므로 $a=-1$

$\therefore f(x)=-x+b$

이때, 함수 $f(x)=-x+b$의 역함수가 존재하므로 f는 일대일대응이고 그래프의 기울기가 음수인 일차함수이다.

$\therefore f(1)=4$, $f(2)=3$, $f(3)=2$, $f(4)=1$

$f(1)=-1+b=4$에서 $b=5$

따라서 $a=-1$, $b=5$이므로

$a+2b=9$ 답 9

0544

|전략| $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$, $f^{-1}\circ f=I$임을 이용한다.

$(f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(4)=(f\circ g^{-1}\circ \underbrace{f^{-1}\circ f}_{I})(4)$

$=(f\circ g^{-1})(4)$

$=f(g^{-1}(4))$

$g^{-1}(4)=k$라 하면 $g(k)=4$이므로

$2k-2=4$ $\quad\therefore k=3$

$\therefore$ (주어진 식)$=f(g^{-1}(4))=f(3)=2$ 답 2

0545

$((f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f)(-1)=(g^{-1}\circ f\circ f)(-1)$

$=g^{-1}(f(f(-1)))$

$=g^{-1}(f(1))$

$=g^{-1}(3)$

$g^{-1}(3)=k$라 하면 $g(k)=3$이므로

$k-3=3$ $\quad\therefore k=6$

$\therefore$ (주어진 식)$=g^{-1}(3)=6$ 답 ⑤

0546

$(h\circ g\circ f)(x)=(h\circ(g\circ f))(x)=h(x)$이므로 $g\circ f$는 항등함수이고, f가 일대일대응이므로 g는 f의 역함수이다.

$g(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로

$3k-2=1$ $\quad\therefore k=1$

$\therefore g(1)=1$ 답 ③

다른 풀이 g는 f의 역함수이므로

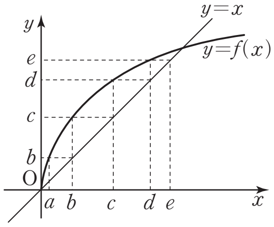
$y=3x-2$라 하면 $3x=y+2$ $\quad\therefore x=\dfrac{1}{3}y+\dfrac{2}{3}$

여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$

따라서 $g(x)=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$이므로 $g(1)=1$

0547

|전략| $f^{-1}(a)=b \Longleftrightarrow f(b)=a$임을 이용하여 점선을 따라가며 함숫값을 구한다.



$(f\circ f)^{-1}(e)=(f^{-1}\circ f^{-1})(e)$

$=f^{-1}(f^{-1}(e))$

$f^{-1}(e)=k$라 하면

$f(k)=e \quad \therefore k=d$

$\therefore f^{-1}(f^{-1}(e))=f^{-1}(d)$

$f^{-1}(d)=l$이라 하면

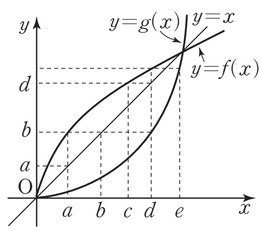
$f(l)=d \quad \therefore l=c$

$\therefore f^{-1}(d)=c$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(e)=c$

답 ③

0548



$(f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(a)$

$=f^{-1}(g^{-1}(f(a)))$

$=f^{-1}(g^{-1}(b))$

$g^{-1}(b)=k$라 하면

$g(k)=b \quad \therefore k=d$

$\therefore f^{-1}(g^{-1}(b))=f^{-1}(d)$

$f^{-1}(d)=l$이라 하면

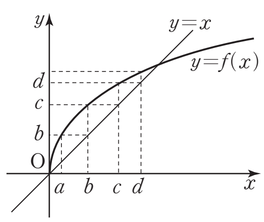
$f(l)=d \quad \therefore l=c$

$\therefore f^{-1}(d)=c$

$\therefore (f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(a)=c$

답 ③

0549



① $g(b)=k$라 하면

$f(k)=b \quad \therefore k=a$

$\therefore g(b)=a$

② $(f\circ f)(b)=f(f(b))=f(c)=d$

③ $(f\circ g)(a)=f(g(a))$

$g(a)=l$이라 하면 $f(l)=a$

그런데 이를 만족시키는 l의 값은

그래프에서 알 수 없지만 $l<a$임을 알 수 있다.

이때, $f(a)=b$이므로 $f(l)<b$

$\therefore (f\circ g)(a)=f(g(a))=f(l)\neq b$

④ $(g\circ g)(d)=g(g(d))$

$g(d)=m$이라 하면

$f(m)=d \quad \therefore m=c$

$\therefore g(g(d))=g(c)$

$g(c)=n$이라 하면

$f(n)=c \quad \therefore n=b$

$\therefore g(c)=b$

$\therefore (g\circ g)(d)=b$

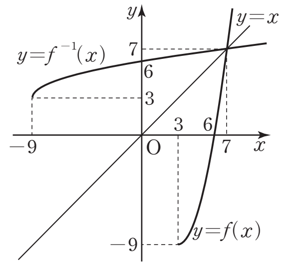
⑤ $(f\circ \underbrace{g\circ f}_{I})(c)=f(c)=d$

따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

0550

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.

$x^2-6x=x$에서

$x^2-7x=0,\ x(x-7)=0$

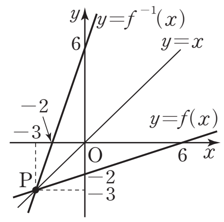
$\therefore x=7\ (\because x\geq 3)$

따라서 교점의 좌표는 $(7,\ 7)$이므로 $a=7,\ b=7$

$\therefore ab=49$

답 ⑤

0551



$y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.

$\frac{1}{3}x-2=x$에서

$-\frac{2}{3}x=2 \quad \therefore x=-3$ ··· ❶

따라서 점 $P(-3,\ \underbrace{-3}_{\text{점 P는 직선 } y=x \text{ 위의 점이다.}})$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$ ··· ❷

답 $3\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	70 %
❷ $\overline{OP}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %

Lecture

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

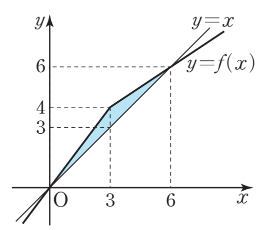
(1) 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리

⇨ $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

(2) 원점 O와 점 $A(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리

⇨ $\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

0552



$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.

$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

(i) $x\geq 3$일 때

$\frac{2}{3}x+2=x \qquad \therefore x=6$

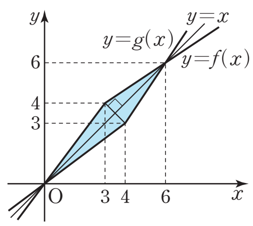
(ii) $x<3$일 때

$\frac{4}{3}x=x \qquad \therefore x=0$

(i), (ii)에서 교점의 좌표는 $(0,\ 0)$, $(6,\ 6)$이므로 구하는 넓이는

$2\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3\right)=6$ 답 ③

다른 풀이 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



$y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분은 마름모이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\sqrt{(4-3)^2+(3-4)^2}\cdot\sqrt{6^2+6^2}$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}=6$

두 대각선의 길이가 a, b인 마름모의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이다.

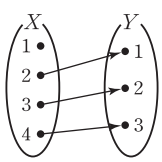
STEP 3 내신 마스터

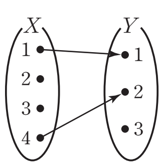
0553

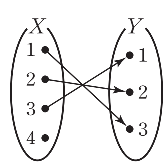
유형 01 함수의 뜻

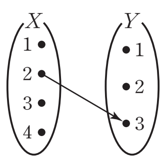
|전략| 각 대응을 그림으로 나타내어 함수인 것을 찾는다.

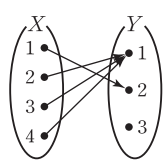
각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0554

유형 04 함수의 정의역, 공역, 치역

|전략| 모든 $x\in A$에 대하여 $f(x)$의 범위를 구한다.

$f(x)=|x-1|+x=\begin{cases} 2x-1 & (x\geq 1) \\ 1 & (x<1) \end{cases}$

(i) $-2\leq x<1$일 때, $f(x)=1$

(ii) $1\leq x\leq 3$일 때, $2\leq 2x\leq 6$

$1\leq 2x-1\leq 5 \qquad \therefore 1\leq f(x)\leq 5$

(i), (ii)에서 $1\leq f(x)\leq 5$

따라서 $a=1$, $b=5$이므로 $a+b=6$ 답 ③

참고 $x\geq 1$일 때, $x-1\geq 0$이므로 $f(x)=(x-1)+x=2x-1$
$x<1$일 때, $x-1<0$이므로 $f(x)=-(x-1)+x=1$

0555

유형 06 일대일대응

|전략| 주어진 조건을 만족시키는 함수는 일대일대응임을 이용한다.

정의역의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이고, 치역과 공역이 같은 함수는 일대일대응이다.

$x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$ (대우)

ㄱ. [반례] $x_1=0$, $x_2=1$이면 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=1$, $f(x_2)=1$

로 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 일대일대응이 아니다.

ㄷ. [반례] $x_1=-3$, $x_2=1$이면 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=|-6|-3=3$, $f(x_2)=|2|+1=3$

으로 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 일대일대응이 아니다.

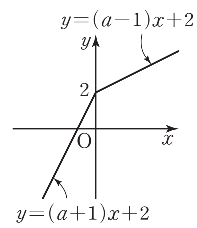
따라서 일대일대응인 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

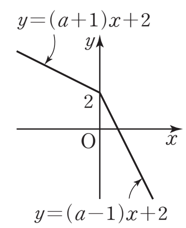
0556

유형 07 일대일대응이 되기 위한 조건

|전략| 함수 f가 일대일대응이려면 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값이 증가하거나 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값이 감소해야 함을 이용한다.

함수 f가 일대일대응이려면 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.





즉, 두 직선의 기울기 $a-1$, $a+1$의 부호가 서로 같아야 하므로

$(a+1)(a-1)>0 \qquad \therefore a<-1$ 또는 $a>1$ 답 ④

0557

유형 08 항등함수와 상수함수

|전략| $f(x)$가 항등함수이면 $f(x)=x$이다.

함수 f가 항등함수이므로 $f(x)=x$이어야 한다.

(i) $x<-4$일 때, $x=-5$

(ii) $-4\leq x<3$일 때,

$x^2+2x-6=x$에서 $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0 \qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=2$

(iii) $x\geq 3$일 때, $x=7$

(i), (ii), (iii)에서 $X=\{-5,\ -3,\ 2,\ 7\}$

따라서 모든 함숫값들의 합은

$f(-5)+f(-3)+f(2)+f(7)=-5-3+2+7=1$ 답 ④

0558

유형 10 조건을 만족시키는 함수의 개수

|전략| $x+f(x)$가 짝수이려면 x와 $f(x)$가 둘 다 짝수이거나 둘 다 홀수이어야 한다.

조건 (가)에서 $x+f(x)$가 짝수이기 위해서는 짝수인 x의 함숫값 $f(x)$는 짝수이어야 하고, 홀수인 x의 함숫값 $f(x)$는 홀수이어야 한다.
조건 (나)에서 함수 f는 일대일대응이므로 짝수는 짝수끼리 일대일대응, 홀수는 홀수끼리 일대일대응이어야 한다.
짝수끼리의 일대일대응의 개수는 $2\cdot1=2$
홀수끼리의 일대일대응의 개수는 $3\cdot2\cdot1=6$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$2\cdot6=12$ 답 ②

0559

유형 **11** 합성함수의 함숫값

|전략| 함수의 정의에 따라 $f(13)$, $(f\circ f)(13)$, $(f\circ f\circ f)(13)$의 값을 차례로 구해 본다.

13보다 작거나 같은 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13의 6개이므로 $f(13)=6$
$(f\circ f)(13)=f(f(13))=f(6)$
6보다 작거나 같은 소수는 2, 3, 5의 3개이므로 $(f\circ f)(13)=3$
$(f\circ f\circ f)(13)=f((f\circ f)(13))=f(3)$
3보다 작거나 같은 소수는 2, 3의 2개이므로 $(f\circ f\circ f)(13)=2$
$\therefore f(13)+(f\circ f)(13)+(f\circ f\circ f)(13)$
$=6+3+2=11$ 답 ④

0560

유형 **13** $f\circ f$에 대한 조건이 주어진 경우

|전략| $(f\circ f\circ f)(x)$를 구하고 x의 값이 증가할 때 $(f\circ f\circ f)(x)$의 값이 증가하는지 감소하는지 알아본다.

$$(f\circ f\circ f)(x)=f(f(f(x)))=f\left(f\left(\frac{1}{2}x+b\right)\right)$$
$$=f\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}b\right)=\frac{1}{8}x+\frac{7}{4}b$$

이때, $(f\circ f\circ f)(0)=\frac{3}{2}$, $(f\circ f\circ f)(a)=\frac{5}{2}$이어야 하므로

$\frac{7}{4}b=\frac{3}{2}$, $\frac{1}{8}a+\frac{7}{4}b=\frac{5}{2}$ $\quad\therefore a=8,\ b=\frac{6}{7}$

$\therefore a+7b=14$ 답 ④

0561

유형 **14** $f\circ g=h$를 만족시키는 함수 f 또는 g 구하기

|전략| $(f\circ g)(x)=h(x)$에서 $f(g(x))=h(x)$이므로 $g(x)=t$로 치환하여 $f(t)$를 구한다.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{x+2}{5}\right)$$

$(f\circ g)(x)=h(x)$이므로 $f\left(\frac{x+2}{5}\right)=3x+6$

$\frac{x+2}{5}=t$라 하면 $x+2=5t$ $\quad\therefore x=5t-2$

따라서 $f(t)=3(5t-2)+6=15t$이므로
$f(-1)=-15$ 답 ①

다른 풀이 $f\left(\frac{x+2}{5}\right)=3x+6$에서

$\frac{x+2}{5}=-1$이라 하면 $x+2=-5$ $\quad\therefore x=-7$

$f\left(\frac{x+2}{5}\right)=3x+6$에 $x=-7$을 대입하면

$f(-1)=3\cdot(-7)+6=-15$

0562

유형 **18** 합성함수와 역함수

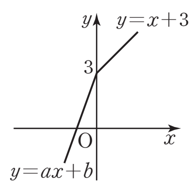
|전략| $f^{-1}(a)=b$이면 $f(b)=a$이고, $(f\circ g)^{-1}(a)=b$이면 $(f\circ g)(b)=a$임을 이용한다.

$f^{-1}(2)=-1$에서 $f(-1)=2$이므로
$-a+b=2$ ······ ㉠
$(f\circ g)^{-1}(3x+1)=x$에서 $(f\circ g)(x)=3x+1$이므로
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+c)=a(x+c)+b$
$=ax+ac+b$
즉, $ax+ac+b=3x+1$에서 $a=3$, $ac+b=1$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=5$, $c=-\frac{4}{3}$
$\therefore a+2b+3c=9$ 답 ④

0563

유형 **19** 역함수가 존재하기 위한 조건

|전략| 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 함을 이용한다.



함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.
(i) 두 직선 $y=x+3$, $y=ax+b$의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로 $a>0$
(ii) 직선 $y=ax+b$가 점 $(0,\ 3)$을 지나야 하므로
$3=0+b$ $\quad\therefore b=3$
(i), (ii)에서 a, b의 값으로 적당한 것은 ③이다. 답 ③

0564

유형 **21** $f=f^{-1}$인 함수

|전략| 점 $(a,\ b)$를 반드시 지나는 직선을 $y=m(x-a)+b\ (m\neq0)$로 놓고, $f=f^{-1}$이면 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=x$임을 이용한다.

$y=f(x)$의 그래프는 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로
$f(x)=m(x+1)+3=mx+m+3\ (m\neq0)$으로 놓자.
$f=f^{-1}$이므로 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=x$
$f(f(x))=m(mx+m+3)+m+3=m^2x+m^2+4m+3$
즉, $m^2x+m^2+4m+3=x$이므로 $m^2=1$, $m^2+4m+3=0$
(i) $m^2=1$일 때, $m=\pm1$
(ii) $m^2+4m+3=0$일 때, $(m+3)(m+1)=0$
$\therefore m=-3$ 또는 $m=-1$
(i), (ii)에서 $m=-1$

따라서 $f(x)=-x+2$이므로

$f(2)=-2+2=0$ 답 ③

다른 풀이 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치하므로

$y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-1,\ 3)$, $(3,\ -1)$을 지난다.

$f(x)=mx+n\ (m\neq 0)$으로 놓으면

$-m+n=3$, $3m+n=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $m=-1$, $n=2$

따라서 $f(x)=-x+2$이므로 $f(2)=0$

0565

유형 22 역함수의 성질

|전략| $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$임을 이용하여 푼다.

$(g\circ f)^{-1}(2)+(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$

$=(f^{-1}\circ g^{-1})(2)+(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$

$=2(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$

$=2f^{-1}(g^{-1}(2))$

$g^{-1}(2)=m$이라 하면 $g(m)=2$이므로

$m-3=2 \qquad \therefore m=5$

$f^{-1}(5)=n$이라 하면 $f(n)=5$이므로

$3n^2+2=5$, $n^2=1 \qquad \therefore n=1\ (\because n\geq 0)$

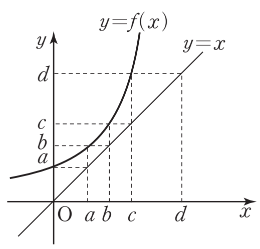
$\therefore$ (주어진 식)$=2f^{-1}(g^{-1}(2))=2f^{-1}(5)$

$=2\cdot 1=2$ 답 ①

0566

유형 23 함수의 그래프와 역함수

|전략| $f^{-1}(d)=k$로 놓고, k의 값을 구한다.



$(f\circ f\circ f)^{-1}(d)$

$=(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(d)$

$=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(d)))$

$f^{-1}(d)=k$라 하면

$f(k)=d \qquad \therefore k=c$

$\therefore f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(d)))$

$=f^{-1}(f^{-1}(c))$

$f^{-1}(c)=l$이라 하면

$f(l)=c \qquad \therefore l=b$

$\therefore f^{-1}(f^{-1}(c))=f^{-1}(b)$

$f^{-1}(b)=m$이라 하면

$f(m)=b \qquad \therefore m=a$

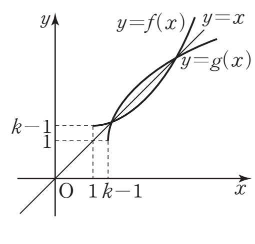
$\therefore f^{-1}(b)=a$

$\therefore (f\circ f\circ f)^{-1}(d)=a$ 답 ②

0567

유형 24 역함수의 그래프의 성질

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 함을 이용한다.



$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2-2x+k=x$, 즉 $x^2-3x+k=0$이 1보다 크거나 같은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4k>0 \qquad \therefore k<\frac{9}{4}$

(ii) $1-3+k\geq 0$이므로 $k\geq 2$

(iii) $-\frac{-3}{2}>1$

(i), (ii), (iii)에서 $2\leq k<\frac{9}{4}$

따라서 정수 k는 2의 1개이다. 답 ①

Lecture

이차방정식의 근의 분리

이차방정식 $f(x)=0$의 근의 조건이 주어진 경우

⇨ 조건을 만족시키도록 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후 다음 세 가지 조건을 생각한다.

(i) $f(x)=0$의 판별식의 부호

(ii) 경계에서의 함숫값의 부호

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 위치

0568

유형 02 함숫값 구하기

|전략| 함숫값 $f(a)$는 $f(x)$의 x 대신 a를 대입하여 계산한다.

(i) 7은 홀수이므로 $f(7)=f\left(\frac{7+1}{2}\right)=f(4)$

4는 짝수이므로 $f(4)=f\left(\frac{4}{2}\right)=f(2)$

2는 짝수이므로 $f(2)=f\left(\frac{2}{2}\right)=f(1)=1$ … ❶

(ii) 10은 짝수이므로 $f(10)=f\left(\frac{10}{2}\right)=f(5)$

5는 홀수이므로 $f(5)=f\left(\frac{5+1}{2}\right)=f(3)$

3은 홀수이므로 $f(3)=f\left(\frac{3+1}{2}\right)=f(2)=f(1)=1$ … ❷

(i), (ii)에서 $f(7)+f(10)=1+1=2$ … ❸

답 2

채점 기준	배점
❶ $f(7)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ $f(10)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $f(7)+f(10)$의 값을 구할 수 있다.	2점

0569

유형 **05** 서로 같은 함수

|전략| 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 서로 같은 함수이므로 모든 $x\in X$에 대하여 $f(x)=g(x)$이다.

$f(x)=g(x)$, 즉 $x=x^3$에서

$x^3-x=0$, $x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ ··· ❶

즉, 집합 $\{-1,\ 0,\ 1\}$의 부분집합 중에서 $\varnothing$을 제외한 집합을 정의역 X로 하면 $f=g$를 만족시킨다.

따라서 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$일 때 원소의 개수가 최대이므로 구하는 집합 X의 원소의 개수의 최댓값은 3이다. ··· ❷

답 3

채점 기준	배점
❶ $f(x)=g(x)$를 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	3점
❷ 집합 X의 원소의 개수의 최댓값을 구할 수 있다.	3점

0570

유형 **17** 역함수의 함숫값 + **19** 역함수가 존재하기 위한 조건

|전략| 먼저 a, b의 값을 구한 다음 $x\ge2$, $x<2$일 때의 $f(x)$의 범위를 생각해 본다.

$f^{-1}(3)=1$에서 $f(1)=3$이므로

$b+1=3 \qquad \therefore b=2$

또, 함수 f의 역함수가 존재하므로 함수 f는 일대일대응이다. 즉,

$f(2)=2+a=2\cdot2+1 \qquad \therefore a=3$

$\therefore f(x)=\begin{cases} x+3 & (x\ge2) \\ 2x+1 & (x<2) \end{cases}$ ··· ❶

$x\ge2$일 때, $f(x)=x+3\ge5$

$x<2$일 때, $f(x)=2x+1<5$

$f^{-1}(-5)=m$이라 하면 $f(m)=-5<5$이므로

$2m+1=-5$, $2m=-6 \qquad \therefore m=-3$ ··· ❷

$f^{-1}(6)=n$이라 하면 $f(n)=6>5$이므로

$n+3=6 \qquad \therefore n=3$ ··· ❸

$\therefore f^{-1}(-5)+f^{-1}(6)=-3+3=0$ ··· ❹

답 0

채점 기준	배점
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	2점
❷ $f^{-1}(-5)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $f^{-1}(6)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❹ $f^{-1}(-5)+f^{-1}(6)$의 값을 구할 수 있다.	1점

0571

유형 **12** $f\circ g=g\circ f$인 경우

|전략| $(f\circ g)(x)$와 $(g\circ f)(x)$를 각각 구해서 비교해 본다.

(1) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+b)=3(ax+b)+4$

$=3ax+3b+4$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+4)=a(3x+4)+b$

$=3ax+4a+b$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $3ax+3b+4=3ax+4a+b$

$3b+4=4a+b \qquad \therefore b=2a-2$

(2) $g(x)=ax+b=ax+2a-2$

$=a(x+2)-2$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ -2)$를 지난다.

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	4점
(2) $y=g(x)$의 그래프가 a의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	6점

0572

유형 **20** 역함수 구하기

|전략| $x\ge0$, $x<0$인 경우로 구간을 나누어 $f(x)$의 역함수를 구한 다음 주어진 $f^{-1}(x)$와 비교해 본다.

$f(x)=2x+|x|=\begin{cases} 3x & (x\ge0) \\ x & (x<0) \end{cases}$ 의 역함수는

$f^{-1}(x)=ax+b|x|=\begin{cases} (a+b)x & (x\ge0) \\ (a-b)x & (x<0) \end{cases}$

(1) $x\ge0$일 때, $y=3x$라 하면 $y\ge0$이고 $x=\frac{1}{3}y$

여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{3}x\ (x\ge0)$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x\ (x\ge0)$

$\therefore a+b=\frac{1}{3}$

(2) $x<0$일 때, $y=x$라 하면 $y<0$이고 $x=y$

여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=x\ (x<0)$

$\therefore f^{-1}(x)=x\ (x<0)$

$\therefore a-b=1$

(3) (1), (2)에서 구한 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) $x\ge0$일 때, $f(x)$의 역함수를 구한 다음 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	5점
(2) $x<0$일 때, $f(x)$의 역함수를 구한 다음 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	5점
(3) a, b의 값을 구할 수 있다.	2점

Lecture

함수 f의 치역은 역함수 f^{-1}의 정의역이 되므로 $y=f(x)$에서 y의 값의 범위를 구해 준다.

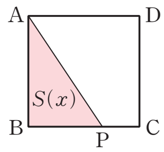
4 함수

창의·융합 교과서 속 심화문제

0573

|전략| 점 P가 정사각형의 세 변 BC, CD, DA 위에 있을 때의 넓이를 각각 구해 본다.

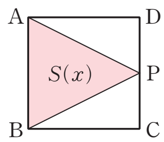
(i) $0<x<2$일 때



$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BP}$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x=x$

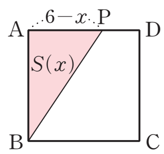
(ii) $2\le x<4$일 때



$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$

(iii) $4\le x<6$일 때



$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AP}$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(6-x)=6-x$

(i), (ii), (iii)에서 $S(x)=\begin{cases} x & (0<x<2) \\ 2 & (2\le x<4) \\ 6-x & (4\le x<6)\end{cases}$

ㄱ. $S(1)=1$, $S(2)=2$이므로 $2S(1)=S(2)$

ㄴ. $2\le x<4$일 때, $S(x)=2$이므로 상수함수이다.

ㄷ. $4\le x<6$일 때, $S(x)=6-x$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ④

0574

|전략| 2 이상의 자연수 p에 대하여 p가 짝수이면 p^2도 짝수이고 p가 홀수이면 p^2도 홀수이다.

ㄱ. $f(p)=2^p-1$ (참)

ㄴ. 자연수 k에 대하여 $2k$는 짝수이므로

$(2k)^2=4k^2$

$\therefore g(2k)=0$

자연수 k에 대하여 $2k+1$은 홀수이므로

$(2k+1)^2=4k^2+4k+1$

$\therefore g(2k+1)=1$ …… ㉠

$\therefore g(2k)+g(2k+1)=1$ (거짓)

ㄷ. 임의의 자연수 p에 대하여 $f(p)=2^p-1$은 홀수이므로 ㉠에 의하여

$(g\circ f)(p)=g(f(p))=g(2^p-1)=1$

즉, $g\circ f$는 상수함수이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0575

|전략| 주어진 조건을 이용하여 함수 f의 대응 관계를 찾는다.

$f^3=I$에서 $f^3(0)=0$이므로

$f^3(0)=f(f(f(0)))=f(f(2))=0$

이때, $f(0)=2$이고 함수 f는 일대일대응이므로

$f(1)=0$, $f(2)=1$ 또는 $f(1)=1$, $f(2)=0$

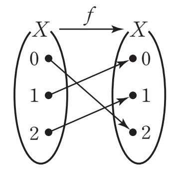
$f(1)=1$, $f(2)=0$이면

$f^3(0)=f(f(f(0)))=f(f(2))=f(0)=2$이므로

$f^3(0)\ne 0$

$\therefore f(1)=0$, $f(2)=1$

따라서 f의 대응 관계는 오른쪽 그림과 같으므로 f의 역함수 g에 대하여



$g(0)=1$, $g(1)=2$, $g(2)=0$

(i) $g^1(2)=g(2)=0$

$g^2(2)=g(g(2))=g(0)=1$

$g^3(2)=g(g^2(2))=g(1)=2$

$g^4(2)=g(g^3(2))=g(2)=0$

⋮

즉, $g^n(2)$의 값은 0, 1, 2가 이 순서대로 반복되므로

$g^{330}(2)=g^3(2)=2$

(ii) $g^1(1)=g(1)=2$

$g^2(1)=g(g(1))=g(2)=0$

$g^3(1)=g(g^2(1))=g(0)=1$

$g^4(1)=g(g^3(1))=g(1)=2$

⋮

즉, $g^n(1)$의 값은 2, 0, 1이 이 순서대로 반복되므로

$g^{331}(1)=g(1)=2$

(i), (ii)에서 $g^{330}(2)+g^{331}(1)=2+2=4$ 답 4

다른 풀이 $(f\circ f\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1}=g\circ g\circ g=g^3=I$이므로

$g^3(x)=x$

$\therefore g^{330}(2)+g^{331}(1)=g^3(2)+g(1)=2+2=4$

0576

|전략| $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$, $g(5)$의 값을 구한 다음 $f(a)=b \Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$임을 이용하여 $(g\circ f)^{-1}(1)$의 값을 구한다.

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=2$이고 $f(1)=2$이므로 $g(1)=1$

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=1$이고 $f(5)=1$이므로 $g(2)=5$

$(f\circ g)(3)=f(g(3))=4$이고 $f(2)=4$이므로 $g(3)=2$

$(f\circ g)(4)=f(g(4))=3$이고 $f(3)=3$이므로 $g(4)=3$

$(f\circ g)(5)=f(g(5))=5$이고 $f(4)=5$이므로 $g(5)=4$

$(g\circ f)^{-1}=(f^{-1}\circ g^{-1})(1)$

$=f^{-1}(g^{-1}(1))$ $g(1)=1$에서 $g^{-1}(1)=1$

$=f^{-1}(1)$ $f(5)=1$에서 $f^{-1}(1)=5$

$=5$

$\therefore g(2)+(g\circ f)^{-1}(1)=5+5=10$ 답 10

다른 풀이 $(g\circ f)^{-1}(1)=a$라 하면

$(g\circ f)(a)=g(f(a))=1$

이때, $g(1)=1$이므로 $f(a)=1$

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(5)=1$이므로

$a=5$ $\therefore (g\circ f)^{-1}(1)=5$

0577

|전략| 함수 $y=f(f(x))$의 그래프를 그린 다음 $y=f(f(x))$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 개수를 찾는다.

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \left(0\le x<\frac{1}{2}\right) \\ -2x+2 & \left(\frac{1}{2}\le x\le 1\right) \end{cases}$$

(i) $0\le x<\frac{1}{4}$일 때, $0\le f(x)=2x<\frac{1}{2}$이므로

$f(f(x))=f(2x)=4x$

(ii) $\frac{1}{4}\le x<\frac{1}{2}$일 때, $\frac{1}{2}\le f(x)=2x<1$이므로

$f(f(x))=f(2x)=-4x+2$

(iii) $\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{4}$일 때, $\frac{1}{2}<f(x)=-2x+2\le 1$이므로

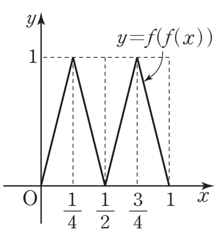
$f(f(x))=f(-2x+2)=4x-2$

(iv) $\frac{3}{4}\le x\le 1$일 때,

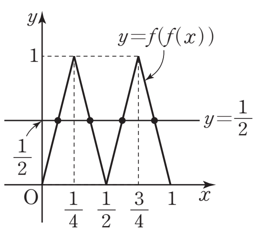
$0\le f(x)=-2x+2\le\frac{1}{2}$이므로

$f(f(x))=f(-2x+2)=-4x+4$

(i)~(iv)에서 함수 $y=f(f(x))$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=f(f(x))$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 개수는 4이므로 방정식 $f(f(x))=\frac{1}{2}$의 실근의 개수는 4이다.



답 ④

다른 풀이

(i) $0\le f(x)<\frac{1}{2}$일 때

$2x$에 x 대신 $f(x)$를 대입한 것

$f(f(x))=\frac{1}{2}$에서 $2f(x)=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore f(x)=\frac{1}{4}$

$f(x)=\frac{1}{4}$을 만족시키는 x의 값은

$2x=\frac{1}{4}$ 또는 $-2x+2=\frac{1}{4}$에서 $x=\frac{1}{8}$ 또는 $x=\frac{7}{8}$

(ii) $\frac{1}{2}\le f(x)\le 1$일 때

$-2x+2$에 x 대신 $f(x)$를 대입한 것

$f(f(x))=\frac{1}{2}$에서 $-2f(x)+2=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore f(x)=\frac{3}{4}$

$f(x)=\frac{3}{4}$을 만족시키는 x의 값은

$2x=\frac{3}{4}$ 또는 $-2x+2=\frac{3}{4}$에서 $x=\frac{3}{8}$ 또는 $x=\frac{5}{8}$

(i), (ii)에서 방정식 $f(f(x))=\frac{1}{2}$의 실근의 개수는 4이다.

본책 92~111쪽

5 | 유리식과 유리함수

STEP 1 개념 마스터 ❶

0578 답 ㄹ, ㅂ

0579 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ

0580 답 $\frac{3y}{2x}$

0581

$\frac{x^3+1}{x^2-x+1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}=x+1$ 답 $x+1$

0582

$\frac{1}{2ab^2}$, $\frac{1}{3a^3b}$의 분모의 최소공배수는 $6a^3b^2$이므로

$\frac{3a^2}{6a^3b^2}$, $\frac{2b}{6a^3b^2}$ 답 $\frac{3a^2}{6a^3b^2}$, $\frac{2b}{6a^3b^2}$

0583

$x^2-3xy+2y^2=(x-y)(x-2y)$,

$x^2+xy-2y^2=(x-y)(x+2y)$

즉, 분모의 최소공배수는 $(x-y)(x-2y)(x+2y)$이므로

$\frac{(x+2y)^2}{(x-y)(x-2y)(x+2y)}$, $\frac{(x-2y)^2}{(x-y)(x-2y)(x+2y)}$

답 $\frac{(x+2y)^2}{(x-y)(x-2y)(x+2y)}$, $\frac{(x-2y)^2}{(x-y)(x-2y)(x+2y)}$

참고 다항식의 최소공배수는 각 다항식을 인수분해한 후 각 다항식의 인수(공통인수는 차수가 높은 것)를 곱하여 구한다.

0584

$\frac{x}{x^2+x-2}+\frac{1-x}{x^2-x-6}$

$=\frac{x}{(x-1)(x+2)}+\frac{1-x}{(x+2)(x-3)}$

$=\frac{x(x-3)+(1-x)(x-1)}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

$=\frac{x^2-3x+x-1-x^2+x}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

$=\frac{-x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)}$ 답 $\frac{-x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

0585

$\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x+4}=\frac{x(x+4)-x(x-2)}{(x-2)(x+4)}$

$=\frac{x^2+4x-x^2+2x}{(x-2)(x+4)}$

$=\frac{6x}{(x-2)(x+4)}$ 답 $\frac{6x}{(x-2)(x+4)}$

0586

$$\frac{x^2+4x-5}{x^2-4x+3}\times\frac{x^2-x-6}{x^2+7x+10}$$
$$=\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x-3)}\times\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x+5)}$$
$$=1$$

답 1

0587

$$\frac{10x^3y^2}{3a^3b^2}\div\frac{5x^5y^4}{6a^4b^3}=\frac{10x^3y^2}{3a^3b^2}\times\frac{6a^4b^3}{5x^5y^4}=\frac{4ab}{x^2y^2}$$

답 $\frac{4ab}{x^2y^2}$

0588

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$
$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x}{x(x+2)}$$
$$=\frac{2}{x(x+2)}$$

답 $\frac{2}{x(x+2)}$

0589

$$\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x+6-(x+2)}{(x+2)(x+6)}$$
$$=\frac{2}{(x+2)(x+6)}$$

답 $\frac{2}{(x+2)(x+6)}$

0590

$$\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\frac{x-1}{x+1}$$

답 $\frac{x-1}{x+1}$

0591

$$1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{\frac{x-1}{x}}=1-\frac{x}{x-1}$$
$$=\frac{x-1-x}{x-1}=\frac{1}{1-x}$$

답 $\frac{1}{1-x}$

0592

$x:y=3:4$이므로 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}$

이때, $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=k\,(k\neq0)$로 놓으면 $x=3k,\ y=4k$

(1) $\frac{x+2y}{x-y}=\frac{3k+8k}{3k-4k}=\frac{11k}{-k}=-11$

(2) $\frac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{9k^2+16k^2}{9k^2-12k^2+16k^2}=\frac{25k^2}{13k^2}=\frac{25}{13}$

답 (1) -11 (2) $\frac{25}{13}$

0593

가비의 리에 의하여

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}=\frac{x+y+z}{3+2+4}=\frac{x+y+z}{9}$$

$\therefore k=9$

답 9

0594

$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=k\,(k\neq0)$로 놓으면 $x=2k,\ y=3k,\ z=5k$

$$\therefore \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}=\frac{4k^2+9k^2+25k^2}{6k^2+15k^2+10k^2}$$
$$=\frac{38k^2}{31k^2}=\frac{38}{31}$$

답 $\frac{38}{31}$

STEP 2 유형 마스터 ❶

0595

| 전략 | 유리식의 덧셈과 뺄셈은 분모를 통분하여 계산한다.

$$\frac{2}{x^2+2x-3}-\frac{1}{x^2-1}+\frac{2}{x^2+4x+3}$$
$$=\frac{2}{(x+3)(x-1)}-\frac{1}{(x+1)(x-1)}+\frac{2}{(x+1)(x+3)}$$
$$=\frac{2(x+1)-(x+3)+2(x-1)}{(x+1)(x+3)(x-1)}$$
$$=\frac{3(x-1)}{(x+1)(x+3)(x-1)}$$
$$=\frac{3}{(x+1)(x+3)}$$

답 $\frac{3}{(x+1)(x+3)}$

0596

| 전략 | 유리식의 곱셈과 나눗셈은 분자, 분모를 인수분해한 후 공통인수로 약분하여 계산한다. 특히 나눗셈은 역수로 곱하여 계산한다.

$$\frac{x-3}{x^2+3x+2}\times\frac{x^3+x^2-2x}{x^2-4x+3}\div\frac{x^2-x}{x+1}$$
$$=\frac{x-3}{(x+1)(x+2)}\times\frac{x(x+2)(x-1)}{(x-1)(x-3)}\div\frac{x(x-1)}{x+1}$$
$$=\frac{x-3}{(x+1)(x+2)}\times\frac{x(x+2)(x-1)}{(x-1)(x-3)}\times\frac{x+1}{x(x-1)}$$
$$=\frac{1}{x-1}$$

답 $\frac{1}{x-1}$

0597

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$$

간단한 식이 되도록 분모의 차가 같은 것끼리 두 개씩 짝지어 계산한다.

$$=\frac{x+1-x}{x(x+1)}-\frac{x+3-(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$
$$=\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$
$$=\frac{(x+2)(x+3)-x(x+1)}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$
$$=\frac{4x+6}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

따라서 $\frac{4x+6}{x(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{ax+b}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$이므로 $a=4,\ b=6$

$\therefore a-b=-2$

답 -2

0598

$\dfrac{2x^2-4x-3}{x-2}-\dfrac{2x^2+2x+2}{x+1}$

$=\dfrac{2x(x-2)-3}{x-2}-\dfrac{2x(x+1)+2}{x+1}$

$=2x-\dfrac{3}{x-2}-2x-\dfrac{2}{x+1}$

$=\dfrac{-3(x+1)-2(x-2)}{(x-2)(x+1)}$

$=\dfrac{1-5x}{(x-2)(x+1)}$

답 $\dfrac{1-5x}{(x-2)(x+1)}$

0599

| 전략 | 주어진 등식의 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 식을 변형하고, 항등식의 성질을 이용한다.

$x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$이므로 주어진 등식의 양변에

$(x+2)(x+4)$를 곱하면

$a(x+4)+b(x+2)=x+6$

$\therefore (a+b)x+4a+2b=x+6$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=1,\ 4a+2b=6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-1$

$\therefore a-b=3$

답 3

Lecture

항등식의 성질

(1) $ax+b=0$이 x에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow a=0,\ b=0$

(2) $ax+b=a'x+b'$이 x에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow a=a',\ b=b'$

(3) $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow a=0,\ b=0,\ c=0$

(4) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식

$\Longleftrightarrow a=a',\ b=b',\ c=c'$

0600

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$이므로 주어진 등식의 양변에

$(x-1)(x^2+x+1)$을 곱하면

$3x^2=a(x^2+x+1)+(bx+1)(x-1)$

$\therefore 3x^2=(a+b)x^2+(a-b+1)x+a-1$ … ❶

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=3,\ a-b+1=0,\ a-1=0$

따라서 $a=1,\ b=2$이므로 … ❷

$ab=2$ … ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 양변에 알맞은 식을 곱하여 정리할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0601

$x^2(x+1)-(x+1)=(x^2-1)(x+1)$
$=(x-1)(x+1)(x+1)$

$x^3+x^2-x-1=(x-1)(x+1)^2$이므로 주어진 등식의 양변에

$(x-1)(x+1)^2$을 곱하면

$x^2-5=a(x+1)^2+b(x-1)(x+1)+2(x-1)$

$\therefore x^2-5=(a+b)x^2+(2a+2)x+a-b-2$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=1,\ 2a+2=0,\ a-b-2=-5$

따라서 $a=-1,\ b=2$이므로

$ab=-2$

답 ④

0602

주어진 등식의 양변에 $(x-1)^9$을 곱하면

$x^8+1=a_1(x-1)^8+a_2(x-1)^7+\cdots+a_8(x-1)+a_9$ …… ㉠

이 식이 x에 대한 항등식이므로

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^8+1=a_1+a_2+\cdots+a_8+a_9$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a_1-a_2+\cdots-a_8+a_9$ …… ㉢

㉡+㉢을 하면

$2^8+2=2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)$

$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=2^7+1=129$

답 129

0603

| 전략 | $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$임을 이용한다. (단, $A\neq B$)

$\dfrac{3}{x(x+3)}+\dfrac{4}{(x+3)(x+7)}+\dfrac{5}{(x+7)(x+12)}$

$=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}\right)+\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+7}\right)+\left(\dfrac{1}{x+7}-\dfrac{1}{x+12}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+12}=\dfrac{12}{x(x+12)}$

따라서 $\dfrac{12}{x(x+12)}=\dfrac{b}{x(x+a)}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로 $a=12,\ b=12$

$\therefore a+b=24$

답 ⑤

0604

$\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}$

$=\dfrac{1}{x(x-1)}+\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

$=\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}\right)+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)+\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$\quad+\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{4}{(x-1)(x+3)}$

따라서 $\dfrac{4}{(x-1)(x+3)}=\dfrac{a}{(x-1)(x-b)}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로 $a=4,\ b=-3$

$\therefore ab=-12$

답 -12

0605

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{7\cdot9}+\frac{1}{9\cdot11}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{11}=\frac{5}{11}$$

따라서 $\frac{5}{11}=\frac{a}{b}$이고, a, b는 서로소인 자연수이므로

$a=5$, $b=11$

$\therefore a+b=16$

답 ①

0606

$f(x)=x^2+x=x(x+1)$이므로

$$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(50)}$$
$$=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{50\cdot51}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{51}\right)$$
$$=1-\frac{1}{51}=\frac{50}{51}$$

답 $\frac{50}{51}$

0607

| 전략 | $\dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\dfrac{AD}{BC}$임을 이용한다. (단, $BCD\neq0$)

$$1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\frac{1}{x}}}}=1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\frac{x-1}{x}}}}$$
$$=1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\frac{x}{x-1}}}=1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\frac{-1}{x-1}}}$$
$$=1+\frac{1}{1+x-1}=\frac{x+1}{x}$$

답 ④

0608

$$\frac{\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}}{\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}}=\frac{\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}}{\frac{(x-y)^2-(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}}$$
$$=\frac{\frac{2x^2+2y^2}{(x+y)(x-y)}}{\frac{-4xy}{(x+y)(x-y)}}$$
$$=\frac{2x^2+2y^2}{-4xy}=-\frac{x^2+y^2}{2xy}$$

답 $-\frac{x^2+y^2}{2xy}$

0609

$$\frac{1-\cfrac{1}{1-\frac{1}{1-x}}}{1-\cfrac{1}{1-\frac{1}{x-1}}}=\frac{1-\cfrac{1}{\frac{-x}{1-x}}}{1-\cfrac{1}{\frac{x-2}{x-1}}}=\frac{1+\frac{1-x}{x}}{1-\frac{x-1}{x-2}}$$
$$=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x-2}}=\frac{-x+2}{x}$$ ··· ❶

따라서 $\frac{-x+2}{x}=\frac{bx+c}{x+a}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=0$, $b=-1$, $c=2$ ··· ❷

$\therefore a+b+c=1$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0610

| 전략 | a_1, a_2, a_3, $\cdots$의 값을 구하는 과정에서 주기적으로 반복되는 규칙을 찾는다.

$$a_1=\frac{1}{3},\ a_2=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2},\ a_3=\frac{1}{1-\frac{3}{2}}=-2,$$
$$a_4=\frac{1}{1-(-2)}=\frac{1}{3},\ a_5=\frac{3}{2},\ \cdots$$이므로

$a_{n+1}=\frac{1}{1-a_n}$ (n은 자연수)

$$a_{3k-2}=\frac{1}{3},\ a_{3k-1}=\frac{3}{2},\ a_{3k}=-2\ (k\text{는 자연수})$$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{16}+a_{17}+a_{18}$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2\right)\cdot6=-1$$

답 -1

0611

| 전략 | $\frac{A}{B}=\dfrac{1}{\frac{B}{A}}$임을 이용한다. (단, $AB\neq0$)

$$\frac{16}{21}=\frac{1}{\frac{21}{16}}=\frac{1}{1+\frac{5}{16}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{16}{5}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\frac{1}{5}}}$$

따라서 $a=1$, $b=3$, $c=5$이므로

$abc=15$

답 15

0612

$$\frac{79}{23}=3+\frac{10}{23}=3+\frac{1}{\frac{23}{10}}=3+\cfrac{1}{2+\frac{3}{10}}$$
$$=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{10}{3}}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{1}{3}}}$$

따라서 $a=3,\ b=2,\ c=3,\ d=3$이므로

$a+b+c+d=11$ 답 11

0613

$\dfrac{59}{45}=1+\dfrac{14}{45}=1+\dfrac{1}{\dfrac{45}{14}}=1+\dfrac{1}{3+\dfrac{3}{14}}$

$=1+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{\dfrac{14}{3}}}=1+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{2}{3}}}$

$=1+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{\dfrac{3}{2}}}}=1+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}}$

따라서 $a=1,\ b=3,\ c=4,\ d=1,\ e=2$이므로

$abcde=24$ 답 24

0614

| 전략 | 주어진 식의 양변을 x로 나누어 $x+\dfrac{1}{x}$의 값을 구한 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

$x^2-3x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-3+\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\dfrac{1}{x}=3$

$\therefore x^2+3x-1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}=x^2+\dfrac{1}{x^2}+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1$

$=\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\right\}+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1$

$=(3^2-2)+3\cdot3-1=15$ 답 15

참고 $x=0$을 $x^2-3x+1=0$에 대입하면 $1\neq0$이므로 $x\neq0$이다.

0615

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=14+2=16$

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=4\ (\because x>0)$

$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=4^3-3\cdot4=52$ 답 52

0616

$x+\dfrac{1}{x}=-3$의 양변에 x를 곱하여 정리하면 $x^2+3x+1=0$

$\therefore x^{3n+2}+3x^{3n+1}+x^{3n}+\dfrac{1}{x^{3n}}+\dfrac{3}{x^{3n+1}}+\dfrac{1}{x^{3n+2}}$

$=x^{3n}\cdot x^2+3x^{3n}\cdot x+x^{3n}+\dfrac{x^2}{x^{3n+2}}+\dfrac{3x}{x^{3n+2}}+\dfrac{1}{x^{3n+2}}$

$=x^{3n}(\underbrace{x^2+3x+1}_{0})+\dfrac{\overbrace{x^2+3x+1}^{0}}{x^{3n+2}}$

$=0$ 답 ③

0617

| 전략 | $a+b+c=0$이면 $b+c=-a,\ c+a=-b,\ a+b=-c$임을 이용한다.

$a+b+c=0$에서 $b+c=-a,\ c+a=-b,\ a+b=-c$이므로

$a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

$=\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}$

$=\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}$

$=\dfrac{-a}{a}+\dfrac{-b}{b}+\dfrac{-c}{c}$

$=-1-1-1=-3$ 답 ①

다른 풀이

$a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

$=a\cdot\dfrac{b+c}{bc}+b\cdot\dfrac{c+a}{ac}+c\cdot\dfrac{a+b}{ab}$

$=a\cdot\dfrac{-a}{bc}+b\cdot\dfrac{-b}{ac}+c\cdot\dfrac{-c}{ab}$

$=-\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}$

이때, 인수분해 공식

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$에서

$a+b+c=0$이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc=0 \qquad \therefore a^3+b^3+c^3=3abc$

$\therefore$ (주어진 식)$=-\dfrac{3abc}{abc}=-3$

0618

$a+b+c=0$에서 $b+c=-a,\ c+a=-b,\ a+b=-c$이므로

$\left(1-\dfrac{a}{a+b}\right)\left(1-\dfrac{b}{b+c}\right)\left(1-\dfrac{c}{c+a}\right)$

$=\dfrac{b}{a+b}\cdot\dfrac{c}{b+c}\cdot\dfrac{a}{c+a}$

$=\dfrac{b}{-c}\cdot\dfrac{c}{-a}\cdot\dfrac{a}{-b}=-1$ 답 ②

0619

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$에서 $\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=0$

$\therefore ab+bc+ca=0$

$\therefore \dfrac{a}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{c}{(c+a)(c+b)}$

$=\dfrac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$=\dfrac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0$ 답 0

다른 풀이 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$에서 $\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=0$

$\therefore ab+bc+ca=0$

이때, 주어진 식의 분모는

$(a+b)(a+c)=a^2+ab+bc+ca=a^2$

$(b+c)(b+a)=b^2+ab+bc+ca=b^2$

$(c+a)(c+b)=c^2+ab+bc+ca=c^2$

$\therefore \dfrac{a}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{c}{(c+a)(c+b)}$

$=\dfrac{a}{a^2}+\dfrac{b}{b^2}+\dfrac{c}{c^2}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$

0620

$\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)$이고,

$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2$이므로

$\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=0$, $\dfrac{a+b+c}{abc}=0$

$\therefore a+b+c=0$ … ❶

따라서 인수분해 공식

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$에서

$a+b+c=0$이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$ $\quad\therefore a^3+b^3+c^3=3abc$ … ❷

$\therefore \dfrac{a^3+b^3+c^3}{3abc}=\dfrac{3abc}{3abc}=1$ … ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $a+b+c=0$임을 알 수 있다.	40 %
❷ $a^3+b^3+c^3=3abc$임을 알 수 있다.	40 %
❸ $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3abc}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0621

| 전략 | a에서 p %만큼 감소하면 $a\left(1-\dfrac{p}{100}\right)$임을 이용한다.

어느 해 4월의 판매 가격을 a원이라 하면

5월의 판매 가격은 $a\left(1-\dfrac{15}{100}\right)=0.85a$(원)

6월의 판매 가격은 $0.85a\left(1-\dfrac{10}{100}\right)=0.765a$(원)

따라서 6월의 판매 가격은 4월의 판매 가격의 76.5 %이므로 4월의 판매 가격에서 23.5 % 할인된 것이다. 답 ①

0622

$\dfrac{a}{a+b}\times 100=20$에서 $10a=2a+2b$ $\quad\therefore b=4a$

20 % 늘어난 소금의 양은 $a\left(1+\dfrac{20}{100}\right)=\dfrac{6}{5}a$ (g)

10 % 줄어든 물의 양은 $b\left(1-\dfrac{10}{100}\right)=\dfrac{9}{10}b=\dfrac{18}{5}a$ (g)

따라서 변화된 소금물의 농도는

$\dfrac{\frac{6}{5}a}{\frac{6}{5}a+\frac{18}{5}a}\times 100=\dfrac{6}{24}\times 100=25$ (%) 답 25 %

0623

오렌지 원액 전체의 양은

$100\times\dfrac{w}{100}+x\times\dfrac{y}{100}=w+\dfrac{xy}{100}$

이고 오렌지 주스 전체의 양은 $(100+x)$ L이므로 새로 만든 오렌지 주스의 농도는

$z=\dfrac{w+\frac{xy}{100}}{100+x}\times 100=\dfrac{100w+xy}{100+x}$

이 식에서 x를 y, z, w에 대한 식으로 나타내면

$(100+x)z=100w+xy$, $100(z-w)=x(y-z)$

$\therefore x=\dfrac{100(z-w)}{y-z}$ 답 ④

Lecture

(1) (용액의 농도)$=\dfrac{(\text{용질의 양})}{(\text{용액의 양})}\times 100$

(2) (용질의 양)$=$(용액의 양)$\times\dfrac{(\text{용액의 농도})}{100}$

0624

| 전략 | $\dfrac{a+b}{5}=\dfrac{b+c}{6}=\dfrac{c+a}{7}=k\,(k\neq 0)$로 놓고 $a=xk$, $b=yk$, $c=zk$ 꼴로 나타내어 주어진 식에 대입한다.

$\dfrac{a+b}{5}=\dfrac{b+c}{6}=\dfrac{c+a}{7}=k\,(k\neq 0)$라 하면

$a+b=5k$, $b+c=6k$, $c+a=7k$ …… ㉠

세 식을 변끼리 더하면 $2(a+b+c)=18k$

$\therefore a+b+c=9k$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3k$, $b=2k$, $c=4k$

$\therefore \dfrac{(a+b)^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}=\dfrac{25k^2-16k^2}{9k^2-4k^2+16k^2}=\dfrac{9k^2}{21k^2}=\dfrac{3}{7}$ 답 $\dfrac{3}{7}$

0625

$2x=5y$이므로 $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{2}$

이때, $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{2}=k\ (k\neq 0)$라 하면 $x=5k$, $y=2k$

$\therefore \dfrac{x^2+3xy+2y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{25k^2+30k^2+8k^2}{25k^2-4k^2}=\dfrac{63k^2}{21k^2}=3$ 답 3

0626

$2x=3y$에서 $x=\dfrac{3}{2}y$, $2y=3z$에서 $z=\dfrac{2}{3}y$

$\therefore x:y:z=\dfrac{3}{2}y:y:\dfrac{2}{3}y=9:6:4$

따라서 $x=9k$, $y=6k$, $z=4k\ (k\neq 0)$라 하면

$\dfrac{x^2-2xy+y^2}{y^2-2yz+z^2}=\dfrac{(x-y)^2}{(y-z)^2}=\dfrac{9k^2}{4k^2}=\dfrac{9}{4}$ 답 $\dfrac{9}{4}$

0627

$(x+y):(y+z):(z+x)=3:5:4$에서

$\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{5}=\frac{z+x}{4}=k\ (k\neq0)$라 하면

$x+y=3k,\ y+z=5k,\ z+x=4k$ ······ ㉠ ··· ❶

세 식을 변끼리 더하면 $2(x+y+z)=12k$

$\therefore\ x+y+z=6k$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $x=k,\ y=2k,\ z=3k$ ··· ❷

$\therefore\ \frac{(x+y+z)^2}{xy-yz+zx}=\frac{36k^2}{2k^2-6k^2+3k^2}=\frac{36k^2}{-k^2}=-36$ ··· ❸

답 -36

채점 기준	비율
❶ $x+y,\ y+z,\ z+x$를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $x,\ y,\ z$를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

0628

| 전략 | 주어진 연립방정식을 이용하여 $y,\ z$를 x에 대한 식으로 나타낸다.

$3x+2y-z=0$ ······ ㉠

$x-2y-z=0$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면 $4x-2z=0$ $\quad\therefore\ z=2x$

$z=2x$를 ㉡에 대입하면 $x-2y-2x=0$ $\quad\therefore\ y=-\frac{1}{2}x$

$\therefore\ \frac{x^2-yz}{xy+yz+zx}=\frac{x^2+x^2}{-\frac{1}{2}x^2-x^2+2x^2}=\frac{2x^2}{\frac{1}{2}x^2}=4$

답 ⑤

0629

$x,\ y,\ z$가 실수이므로 $(2x-y)^2+(3y-2z)^2=0$에서

$2x-y=0,\ 3y-2z=0$

$\therefore\ y=2x,\ z=\frac{3}{2}y=3x$

$\therefore\ \frac{3x^2+yz+z^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{3x^2+6x^2+9x^2}{x^2-2x^2+4x^2}=\frac{18x^2}{3x^2}=6$

답 6

0630

$a-\frac{2}{c}=1$에서 $\frac{2}{c}=a-1,\ \frac{c}{2}=\frac{1}{a-1}$ $\quad\therefore\ c=\frac{2}{a-1}$

$\frac{1}{a}-b=1$에서 $b=\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}$

이때, $abc=a\cdot\frac{1-a}{a}\cdot\frac{2}{a-1}=-2$이므로

$\frac{2}{abc}+3=\frac{2}{-2}+3=2$

답 ②

0631

| 전략 | 각 분수의 분모의 합이 0일 때와 0이 아닐 때로 나누어 생각한다.

(i) $2p+3q+r=0$일 때, $3q+r=-2p$이므로

$\frac{3q+r}{2p}=\frac{-2p}{2p}=-1$ $\quad\therefore\ k=-1$

(ii) $2p+3q+r\neq0$일 때, 가비의 리에 의하여

$$\frac{3q+r}{2p}=\frac{r+2p}{3q}=\frac{2p+3q}{r}$$
$$=\frac{(3q+r)+(r+2p)+(2p+3q)}{2p+3q+r}$$
$$=\frac{2(2p+3q+r)}{2p+3q+r}=2$$

$\therefore\ k=2$

(i), (ii)에서 구하는 모든 k의 값의 합은 1이다.

답 1

0632

$\frac{3a}{5}=\frac{b+2c}{3}=\frac{4c}{7}$에서 가비의 리에 의하여

$\frac{3a}{5}=\frac{2(b+2c)}{2\cdot3}=\frac{-4c}{-7}=\frac{3a+2(b+2c)-4c}{5+6-7}=\frac{3a+2b}{4}$

$\therefore\ k=4$

답 ①

0633

$a+b+c\neq0$이므로 가비의 리에 의하여

$\frac{a-b-c}{a}=\frac{b-c-a}{b}=\frac{c-a-b}{c}=\frac{-(a+b+c)}{a+b+c}=-1$

즉, $a-b-c=-a,\ b-c-a=-b,\ c-a-b=-c$이므로

$b+c=2a,\ c+a=2b,\ a+b=2c$

$$\therefore\ \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a}{2a}+\frac{b}{2b}+\frac{c}{2c}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

답 ⑤

0634

| 전략 | 남녀 학생 수를 각각 비례상수를 이용하여 나타낸다.

안경을 낀 남녀 학생 수를 각각 $2a,\ a$ (a는 자연수)라 하고 안경을 끼지 않은 남녀 학생 수를 각각 $4b,\ 3b$ (b는 자연수)라 하면 전체 남녀 학생 수는 다음 표와 같다.

	남자	여자	계
안경을 낀 학생	$2a$	a	$3a$
안경을 끼지 않은 학생	$4b$	$3b$	$7b$
전체 학생	$2a+4b$	$a+3b$	$3a+7b$

이때, 전체 학생의 남녀 구성비가 $5:3$이므로

$(2a+4b):(a+3b)=5:3$

$3(2a+4b)=5(a+3b)$ $\quad\therefore\ a=3b$

안경을 낀 학생 수와 전체 학생 수의 비는

$3a:(3a+7b)=9b:(9b+7b)=9:16$

따라서 $p=9,\ q=16$이므로 $pq=144$

답 ③

0635

$a:b=2:3=4:6,\ b:c=2:3=6:9$이므로

$a:b:c=4:6:9$

$a=4k,\ b=6k,\ c=9k\ (k>0)$라 하면 세 면 $A,\ B,\ C$의 넓이의 비는

$ab : ca : bc = 24k^2 : 36k^2 : 54k^2$

$= 4 : 6 : 9$ 답 $4 : 6 : 9$

0636

두 자동차 A, B의 연료통의 용량을 각각 $9a$ L, $7a$ L $(a>0)$라 하고, 1 L로 갈 수 있는 거리를 각각 $8b$ km, $9b$ km $(b>0)$라 하면 144 km를 간 후 남아 있는 휘발유의 양은 다음 표와 같다.

	연료통의 용량(L)	1 L로 갈 수 있는 거리 (km)	144 km를 간 후 남아 있는 휘발유의 양 (L)
A	$9a$	$8b$	$9a-\frac{144}{8b}$
B	$7a$	$9b$	$7a-\frac{144}{9b}$

이때, 남아 있는 휘발유의 양의 비가 $4 : 3$이므로

$\left(9a-\frac{144}{8b}\right) : \left(7a-\frac{144}{9b}\right)=4 : 3$

$3\left(9a-\frac{18}{b}\right)=4\left(7a-\frac{16}{b}\right)$, $\frac{10}{b}=a$ $\quad \therefore ab=10$

따라서 연료통에 휘발유를 가득 채웠을 때, 자동차 B가 갈 수 있는 최대 거리는

$7a \cdot 9b = 63ab = 630$ (km)

$\therefore x=630$ 답 630

STEP 1 개념 마스터 ❷

0637 답 ×

0638 답 ×

0639 답 ○

0640 답 ×

0641

$2x=0$에서 $x=0$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\neq0$인 실수$\}$이다.

답 $\{x|x\neq0$인 실수$\}$

0642

$x-1=0$에서 $x=1$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\neq1$인 실수$\}$이다.

답 $\{x|x\neq1$인 실수$\}$

0643

$x^2-4=0$에서 $x=\pm2$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\neq\pm2$인 실수$\}$이다.

답 $\{x|x\neq\pm2$인 실수$\}$

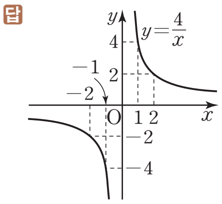
0644

$x^2+2>0$이므로 ─분모를 0으로 하는 x의 값이 존재하지 않는다.

주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이다. 답 $\{x|x$는 실수$\}$

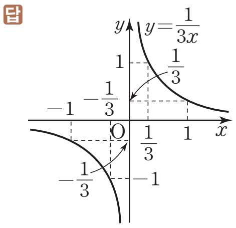
0645

답



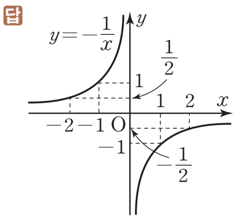
0646

답



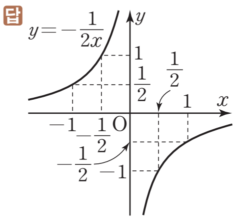
0647

답



0648

답



0649 답 (가) 1 (나) 2 (다) 3

0650

$y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면 $y=\frac{2}{x-1}-4$ 답 $y=\frac{2}{x-1}-4$

0651

$y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y=-\frac{1}{x-(-2)}+3$

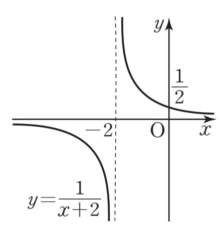
$\therefore y=-\frac{1}{x+2}+3$ 답 $y=-\frac{1}{x+2}+3$

0652

$y=\frac{1}{x+2}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x|x\neq-2$인 실수$\}$,

치역은 $\{y|y\neq0$인 실수$\}$이다.



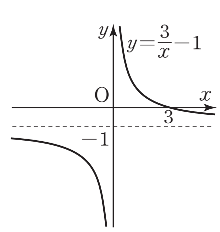
답 풀이 참조

0653

$y=\frac{3}{x}-1$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x|x\neq0$인 실수$\}$,

치역은 $\{y|y\neq-1$인 실수$\}$이다.



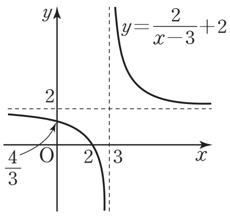
답 풀이 참조

0654

$y=\dfrac{2}{x-3}+2$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x\,|\,x\neq3$인 실수$\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\neq2$인 실수$\}$이다.



답 풀이 참조

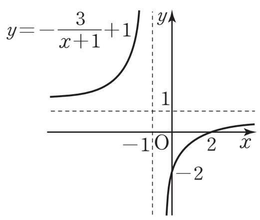
0655

$y=-\dfrac{3}{x+1}+1$의 그래프는

$y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x\,|\,x\neq-1$인 실수$\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\neq1$인 실수$\}$이다.

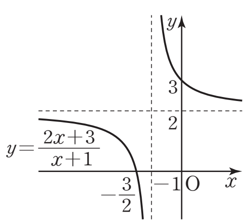


답 풀이 참조

0656

(1) $y=\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+2$

(2) $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



(3) 정의역은 $\{x\,|\,x\neq-1$인 실수$\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\neq2$인 실수$\}$이다.

답 (1) $y=\dfrac{1}{x+1}+2$

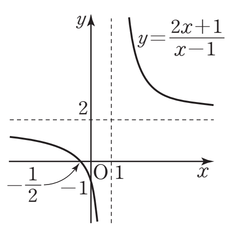
(2) 풀이 참조

(3) 정의역 : $\{x\,|\,x\neq-1$인 실수$\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\neq2$인 실수$\}$

0657

$y=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+2$

따라서 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=2$이다.

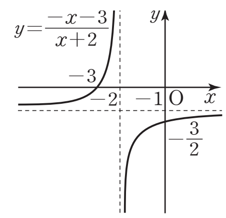


답 풀이 참조

0658

$y=\dfrac{-x-3}{x+2}=\dfrac{-(x+2)-1}{x+2}=-\dfrac{1}{x+2}-1$

따라서 $y=\dfrac{-x-3}{x+2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=-1$이다.



답 풀이 참조

STEP 2 유형 마스터 ❷

0659

| 전략 | $y=\dfrac{-2x+5}{x-1}$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한다.

$y=\dfrac{-2x+5}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}-2$

이므로 $y=\dfrac{-2x+5}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $k=3$, $p=1$, $q=-2$이므로

$k+p+q=2$

답 ⑤

0660

ㄱ. $y=\dfrac{-2x+3}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}-2$

이므로 $y=\dfrac{-2x+3}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{(x-1)-1}{x-1}=-\dfrac{1}{x-1}+1$

이므로 $y=\dfrac{x-2}{x-1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\dfrac{-x-1}{x+2}+3=\dfrac{-(x+2)+1}{x+2}+3=\dfrac{1}{x+2}+2$

이므로 $y=\dfrac{-x-1}{x+2}+3$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동에 의하여 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

Lecture

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형했을 때, k의 값이 같은 유리함수끼리는 그 그래프를 평행이동하여 서로 겹쳐지게 할 수 있다.

0661

$y=\dfrac{3x+5}{x+2}=\dfrac{3(x+2)-1}{x+2}=-\dfrac{1}{x+2}+3$

이므로 $y=\dfrac{3x+5}{x+2}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\dfrac{1}{x-p+2}+3+q$ — $y=-\dfrac{1}{x+2}+3$에 x 대신 $x-p$, y 대신 $y-q$를 대입

5 유리식과 유리함수

이 식이 $y=\frac{2x-3}{x-1}=\frac{2(x-1)-1}{x-1}=-\frac{1}{x-1}+2$와 일치하므로

$p-2=1,\ 3+q=2 \qquad \therefore p=3,\ q=-1$

$\therefore p+q=2$ 답 ②

0662

| 전략 | 함수 $y=\frac{k}{x-p}+q(k\neq0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p,\ y=q$이다.

$y=\frac{4x+1}{x-2a}=\frac{4(x-2a)+8a+1}{x-2a}=\frac{8a+1}{x-2a}+4$

이므로 점근선의 방정식은

$x=2a,\ y=4$

따라서 $2a=1,\ b=4$이므로 $a=\frac{1}{2},\ b=4$

$\therefore a-b=-\frac{7}{2}$ 답 $-\frac{7}{2}$

다른 풀이 $y=\frac{4x+1}{x-2a}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2a,\ y=4$

따라서 $2a=1,\ b=4$이므로 $a=\frac{1}{2},\ b=4$

$\therefore a-b=-\frac{7}{2}$

Lecture

유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq0,\ c\neq0)$의 그래프의 점근선의 방정식은

⇨ $x=-\frac{d}{c},\ y=\frac{a}{c}$

0663

$y=\frac{3x+7}{x+1}=\frac{3(x+1)+4}{x+1}=\frac{4}{x+1}+3$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-1,\ y=3$

$y=\frac{bx-9}{2x+a}=\frac{\frac{b}{2}(2x+a)-\frac{ab}{2}-9}{2x+a}=\frac{-\frac{ab}{2}-9}{2x+a}+\frac{b}{2}$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-\frac{a}{2},\ y=\frac{b}{2}$

따라서 $-\frac{a}{2}=-1,\ \frac{b}{2}=3$이므로 $a=2,\ b=6$

$\therefore a+b=8$ 답 ④

0664

점근선의 방정식이 $x=3,\ y=4$이므로 주어진 함수를

$y=\frac{k}{x-3}+4\ (k\neq0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=\frac{k}{1-3}+4 \qquad \therefore k=4$

따라서 $y=\frac{4}{x-3}+4=\frac{4+4(x-3)}{x-3}=\frac{4x-8}{x-3}$이므로

$a=4,\ b=-8,\ c=-3 \qquad \therefore a+b+c=-7$ 답 -7

다른 풀이 $y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}=\frac{-ac+b}{x+c}+a$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-c,\ y=a$

$\therefore c=-3,\ a=4$

또, $y=\frac{b+12}{x-3}+4$의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=\frac{b+12}{1-3}+4,\ b+12=4 \qquad \therefore b=-8$

$\therefore a+b+c=4+(-8)+(-3)=-7$

0665

| 전략 | 유리함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이면 점근선의 방정식은 $x=p,\ y=q$이다.

함수 $y=\frac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=\frac{b}{c} \qquad \therefore b=3c$ ······ ㉠

$y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}=\frac{-ac+b}{x+c}+a$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-c,\ y=a$

이 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-c,\ a)$에 대하여 대칭이므로

$-c=2,\ a=1 \qquad \therefore a=1,\ c=-2$

$c=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=-6$

$\therefore a-b+c=5$ 답 ④

다른 풀이 주어진 함수의 그래프가 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이므로
점근선의 방정식은 $x=2,\ y=1$

$y=\frac{k}{x-2}+1\ (k\neq0)$

로 놓을 수 있다. 이 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=-\frac{k}{2}+1 \qquad \therefore k=-4$

따라서 $y=\frac{-4}{x-2}+1=\frac{-4+(x-2)}{x-2}=\frac{x-6}{x-2}$이므로

$a=1,\ b=-6,\ c=-2 \qquad \therefore a-b+c=5$

0666

$y=\frac{4x-3}{-x+2}=\frac{-4(-x+2)+5}{-x+2}=-\frac{5}{x-2}-4$

이므로 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=-4$

이 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(2,\ -4)$에 대하여 대칭이므로

$a=2,\ b=-4$

$\therefore a^2+b^2=20$ 답 20

0667

$y=\frac{ax+1}{x+1}=\frac{a(x+1)-a+1}{x+1}=\frac{-a+1}{x+1}+a$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-1,\ y=a$

이때, 두 점근선의 교점 $(-1,\ a)$가 직선 $y=x$ 위의 점이므로

$a=-1$ 답 -1

0668

$$y=\frac{ax+1}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab+1}{x+b}=\frac{-ab+1}{x+b}+a$$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-b,\ y=a$ ··· ❶

이때, 두 점근선의 교점 $(-b,\ a)$가 두 직선 $y=x-2,\ y=-x+3$의 교점이므로

$a=-b-2,\ a=b+3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{5}{2}$ ··· ❷

$\therefore\ ab=-\frac{5}{4}$ ··· ❸

답 $-\frac{5}{4}$

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=\frac{ax+1}{x+b}$의 그래프의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

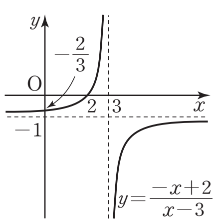
0669

| 전략 | $y=\frac{-x+2}{x-3}$를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그린다.

$$y=\frac{-x+2}{x-3}=\frac{-(x-3)-1}{x-3}=-\frac{1}{x-3}-1$$

이므로 $y=\frac{-x+2}{x-3}$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\frac{-x+2}{x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프가 지나지 않는 사분면은 제 2사분면이다.



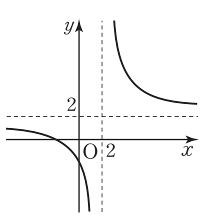
답 제 2 사분면

0670

$$y=\frac{2x+k-6}{x-2}=\frac{2(x-2)+k-2}{x-2}=\frac{k-2}{x-2}+2$$

이므로 $y=\frac{2x+k-6}{x-2}$의 그래프는 $y=\frac{k-2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때, 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $k-2>0$이어야 하므로 $k>2$

(ii) $x=0$일 때, $y<0$이어야 하므로

$\frac{k-6}{-2}<0,\ k-6>0\qquad \therefore\ k>6$

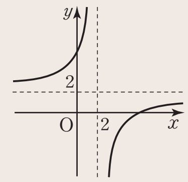
(i), (ii)에 의하여 $k>6$

따라서 정수 k의 최솟값은 7이다.

답 7

Lecture

$k-2<0$인 경우, 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 제 3사분면을 지나지 않는다.



0671

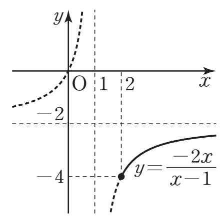
| 전략 | $y=\frac{-2x}{x-1}$를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그린다.

$$y=\frac{-2x}{x-1}=\frac{-2(x-1)-2}{x-1}=-\frac{2}{x-1}-2$$

이므로 $y=\frac{-2x}{x-1}$의 그래프는 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-4\le y<-2$에서 $y=\frac{-2x}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은

$\{x\,|\,x\ge 2\}$



답 ④

0672

$$y=\frac{bx+3}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab+3}{x+a}=\frac{-ab+3}{x+a}+b\text{이므로}$$

정의역은 $\{x\,|\,x\ne -a$인 실수$\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\ne b$인 실수$\}$

따라서 $a=2,\ b=2$이므로

$a+b=4$

답 4

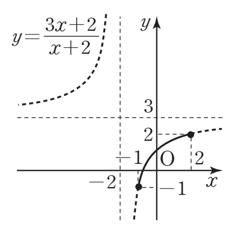
0673

| 전략 | $y=\frac{3x+2}{x+2}$를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한 후 주어진 정의역에서 그래프를 그리고, y의 최댓값과 최솟값을 구한다.

$$y=\frac{3x+2}{x+2}=\frac{3(x+2)-4}{x+2}=-\frac{4}{x+2}+3$$

이므로 $y=\frac{3x+2}{x+2}$의 그래프는 $y=-\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le 2$에서 $y=\frac{3x+2}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=2$일 때 최댓값 2, $x=-1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.



$\therefore\ a=2,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=1$

답 ④

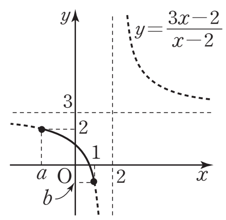
5 유리식과 유리함수

0674

$y=\dfrac{3x-2}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+4}{x-2}=\dfrac{4}{x-2}+3$

이므로 $y=\dfrac{3x-2}{x-2}$의 그래프는 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$a\le x\le 1$에서 $y=\dfrac{3x-2}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. … ❶



즉, $x=a$일 때 최댓값 2를 가지므로

$2=\dfrac{3a-2}{a-2}$에서 $2a-4=3a-2$

$\therefore a=-2$ … ❷

또, $x=1$일 때 최솟값 b를 가지므로

$b=\dfrac{3-2}{1-2}=-1$ … ❸

$\therefore ab=2$ … ❹

답 2

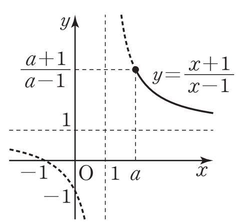
채점 기준	비율
❶ $y=\dfrac{3x-2}{x-2}$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0675

$y=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$

이므로 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$x\ge a$에서 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$이 최댓값을 가지려면 $a>1$이어야 하므로 $x\ge a$에서 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, $x=a$일 때 최댓값 $\dfrac{a+1}{a-1}$을 가지므로 $\dfrac{a+1}{a-1}=a+1$에서

$a+1=(a+1)(a-1)$

$a^2-a-2=0,\ (a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>1)$

답 ③

0676

$y=f(x)=\dfrac{x+c}{ax+b}=\dfrac{\dfrac{1}{a}(ax+b)+c-\dfrac{b}{a}}{ax+b}=\dfrac{c-\dfrac{b}{a}}{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+\dfrac{1}{a}$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-\dfrac{b}{a},\ y=\dfrac{1}{a}$

이 함수의 그래프가 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이므로
└ 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=1$

$-\dfrac{b}{a}=2,\ \dfrac{1}{a}=1 \qquad \therefore a=1,\ b=-2$

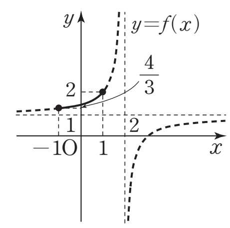
또, $y=\dfrac{x+c}{x-2}$의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{1+c}{1-2} \qquad \therefore c=-3$

$\therefore f(x)=\dfrac{x-3}{x-2}=\dfrac{(x-2)-1}{x-2}=-\dfrac{1}{x-2}+1$

$y=f(x)$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$-1\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=1$일 때 최댓값 2, $x=-1$일 때 최솟값 $\dfrac{4}{3}$를 갖는다.



따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$2\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$

답 $\dfrac{8}{3}$

다른 풀이 $f(x)=\dfrac{x+c}{ax+b}$의 그래프가 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=1$

주어진 함수를 $f(x)=\dfrac{k}{a(x-2)}+1\ (k\ne 0)$로 놓으면 이 함수의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{k}{-a}+1 \qquad \therefore k=-a$

$\therefore f(x)=\dfrac{-a}{a(x-2)}+1=-\dfrac{1}{x-2}+1$

0677

| 전략 | 점근선의 방정식이 $x=p,\ y=q$이면 구하는 함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 놓을 수 있다.

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1,\ y=-2$이므로 주어진 함수를 $y=\dfrac{k}{x+1}-2\ (k>0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=k-2 \qquad \therefore k=1$

따라서 $y=\dfrac{1}{x+1}-2=\dfrac{1-2(x+1)}{x+1}=\dfrac{-2x-1}{x+1}$이므로

$a=-2,\ b=-1,\ c=1$

$\therefore abc=2$

답 2

0678

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1,\ y=-1$이므로 주어진 함수를 $y=\dfrac{k}{x-1}-1\,(k<0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\dfrac{k}{-1}-1 \qquad \therefore k=-1$

따라서 $y=\frac{-1}{x-1}-1$이므로 $p=1,\ q=-1,\ k=-1$

$\therefore\ k+p+q=-1$

답 -1

0679

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2,\ y=1$이므로 주어진 함수를 $y=\frac{k}{-2(x-2)}+1\ (k<0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\frac{k}{4}+1 \qquad \therefore\ k=-4$

따라서 $y=\frac{-4}{-2(x-2)}+1=\frac{-4-2(x-2)}{-2x+4}=\frac{-2x}{-2x+4}$이므로

$a=-2,\ b=0,\ c=4$

$\therefore\ a+b+c=2$

답 2

0680

$y=\frac{bx+c}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab+c}{x+a}=\frac{-ab+c}{x+a}+b$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-a,\ y=b$

따라서 $-a>0,\ b>0$이므로 $a<0,\ b>0$

또, 주어진 그래프의 개형에서 $-ab+c<0$이므로 $c<ab$

이때, $ab<0$이므로 $c<0$

$\therefore\ a<0,\ b>0,\ c<0$

답 ③

참고 함수 $y=\frac{bx+c}{x+a}$의 그래프에서 $x=0$일 때 y의 값은 양수이므로

$\frac{c}{a}>0 \qquad \therefore\ c<0\ (\because\ a<0)$

0681

| 전략 | $y=\frac{-2x-4}{x+1}$를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한다.

$y=\frac{-2x-4}{x+1}=\frac{-2(x+1)-2}{x+1}=-\frac{2}{x+1}-2$

① 정의역은 $\{x\,|\,x\neq-1$인 실수$\}$이다.

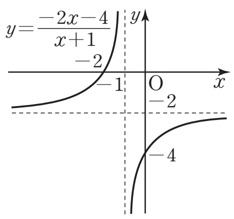
② $y=\frac{-2x-4}{x+1}$에 $x=0$을 대입하면 $y=-4$

따라서 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0,\ -4)$이다.

③ 점근선의 방정식이 $x=-1,\ y=-2$이므로 점 $(-1,\ -2)$에 대하여 대칭이다.

④ $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\frac{-2x-4}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 2, 3, 4 사분면을 지난다.

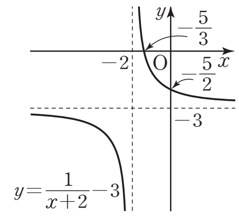


따라서 옳은 것은 ③이다.

답 ③

0682

ㄱ. $y=\frac{1}{x+2}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 2, 3, 4 사분면을 지난다.



ㄴ. $y=\frac{1}{x+2}-3$에 $y=0$을 대입하면

$0=\frac{1}{x+2}-3,\ \frac{1}{x+2}=3$

$x+2=\frac{1}{3} \qquad \therefore\ x=-\frac{5}{3}$

따라서 그래프와 x축의 교점의 좌표는 $\left(-\frac{5}{3},\ 0\right)$이다.

ㄷ. 점근선의 방정식이 $x=-2,\ y=-3$이므로 점 $(-2,\ -3)$에 대하여 대칭이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

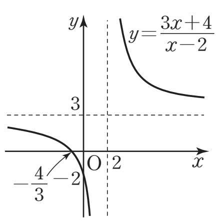
답 ①

0683

$y=\frac{3x+4}{x-2}=\frac{3(x-2)+10}{x-2}=\frac{10}{x-2}+3$

① $y=\frac{-x+12}{x-2}=\frac{-(x-2)+10}{x-2}=\frac{10}{x-2}-1$이므로 평행이동에 의해 $y=\frac{-x+12}{x-2}$의 그래프와 겹쳐질 수 있다.

② $y=\frac{3x+4}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모든 사분면을 지난다.



③ 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=3$이다.

④ 치역은 $\{y\,|\,y\neq3$인 실수$\}$이다.

⑤ $y=\frac{3x+4}{x-2}$에 $y=0$을 대입하면

$0=\frac{3x+4}{x-2},\ 3x+4=0 \qquad \therefore\ x=-\frac{4}{3}$

따라서 그래프와 x축의 교점의 좌표는 $\left(-\frac{4}{3},\ 0\right)$이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

0684

| 전략 | 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수와 같다.

함수 $y=-\frac{4x}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=kx-1$이 한 점에서 만나려면 $-\frac{4x}{x-1}=kx-1$이 한 개의 실근을 가져야 한다.

이 식을 정리하면

$-4x=(kx-1)(x-1),\ -4x=kx^2-kx-x+1$

$\therefore\ kx^2-(k-3)x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(k-3)^2-4\cdot k\cdot 1=0,\ k^2-10k+9=0$

$(k-1)(k-9)=0 \qquad \therefore\ k=1$ 또는 $k=9$

따라서 모든 양수 k의 값의 합은 $1+9=10$

답 10

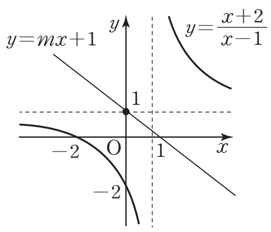
5 유리식과 유리함수

0685

$y=\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{(x-1)+3}{x-1}$

$=\dfrac{3}{x-1}+1$

이므로 $y=\dfrac{x+2}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, 직선 $y=mx+1$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

(i) $m=0$일 때, 두 그래프는 만나지 않는다.

(ii) $m\neq0$일 때, 두 그래프가 만나지 않으려면

$\dfrac{x+2}{x-1}=mx+1$, 즉 $mx^2-mx-3=0$이 실근을 갖지 않아야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-m)^2-4\cdot m\cdot(-3)<0$, $m^2+12m<0$

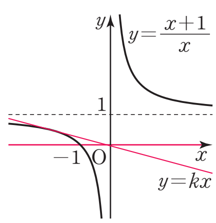
$m(m+12)<0$ $\quad\therefore\ -12<m<0$

(i), (ii)에서 $-12<m\leq0$

답 ②

0686

$y=\dfrac{x+1}{x}$, 즉 $y=\dfrac{1}{x}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, $n(P\cap Q)=1$이므로 함수 $y=\dfrac{x+1}{x}$의 그래프와 직선 $y=kx$는 한 점에서 만난다.

(i) $k=0$일 때, 두 그래프는 한 점에서 만난다.

(ii) $k\neq0$일 때, 두 그래프가 한 점에서 만나려면

$\dfrac{x+1}{x}=kx$, 즉 $kx^2-x-1=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1+4k=0$ $\quad\therefore\ k=-\dfrac{1}{4}$

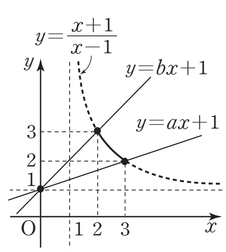
(i), (ii)에서 $k=0$ 또는 $k=-\dfrac{1}{4}$

답 $0,\ -\dfrac{1}{4}$

0687

$y=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$

이므로 $2\leq x\leq3$에서 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, 두 직선 $y=ax+1$, $y=bx+1$은 a, b의 값에 관계없이 각각 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

$ax+1\leq\dfrac{x+1}{x-1}\leq bx+1$이 항상 성립하려면 기울기 a의 값은 점 $(3,\ 2)$를 지날 때보다 작거나 같고, 기울기 b의 값은 점 $(2,\ 3)$을 지날 때보다 크거나 같아야 한다.

이때, 직선 $y=ax+1$이 점 $(3,\ 2)$를 지날 때의 a의 값은 $\dfrac{1}{3}$이고, 직선 $y=bx+1$이 점 $(2,\ 3)$을 지날 때의 b의 값은 1이므로

$a\leq\dfrac{1}{3}$, $b\geq1$

따라서 a의 최댓값은 $\dfrac{1}{3}$, b의 최솟값은 1이므로 구하는 합은 $\dfrac{4}{3}$이다.

답 $\dfrac{4}{3}$

0688

| 전략 | $f^2(x)$, $f^3(x)$, $f^4(x)$, $\cdots$를 직접 구하여 $f^n(x)$를 추정한 다음 x 대신 a를 대입한다.

$f(x)=\dfrac{x-1}{x}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=\dfrac{\dfrac{x-1}{x}-1}{\dfrac{x-1}{x}}=-\dfrac{1}{x-1}$$

$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=\dfrac{-\dfrac{1}{x-1}-1}{-\dfrac{1}{x-1}}=x$$

$\vdots$

따라서 함수 $f^3(x)=f^6(x)=f^9(x)=\cdots=f^{3n}(x)$ (n은 자연수)는 항등함수이므로

$f^{2018}(x)=f^{3\cdot672+2}(x)=f^2(x)$

$\therefore\ f^{2018}(8)=f^2(8)=-\dfrac{1}{8-1}=-\dfrac{1}{7}$

답 $-\dfrac{1}{7}$

다른 풀이 $f^1(8)=f(8)=\dfrac{8-1}{8}=\dfrac{7}{8}$

$$f^2(8)=(f\circ f)(8)=f(f(8))=\dfrac{\dfrac{7}{8}-1}{\dfrac{7}{8}}=-\dfrac{1}{7}$$

$$f^3(8)=(f\circ f^2)(8)=f(f^2(8))=\dfrac{-\dfrac{1}{7}-1}{-\dfrac{1}{7}}=8$$

$$f^4(8)=(f\circ f^3)(8)=f(f^3(8))=\dfrac{8-1}{8}=\dfrac{7}{8}$$

$\vdots$

즉, $f^n(8)$은 $\dfrac{7}{8}$, $-\dfrac{1}{7}$, 8이 이 순서대로 반복된다.

이때, $2018=3\cdot672+2$이므로

$f^{2018}(8)=f^2(8)=-\dfrac{1}{7}$

0689

$f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=\dfrac{\dfrac{x-2}{x-1}-2}{\dfrac{x-2}{x-1}-1}=\dfrac{\dfrac{-x}{x-1}}{\dfrac{-1}{x-1}}=x$$

$\vdots$

즉, 함수 $f^2(x)=f^4(x)=f^6(x)=\cdots=f^{2n}(x)$ (n은 자연수)는 항등함수이므로

$f^{200}(x)=f^{2\cdot100}(x)=x$

따라서 $f^{200}(k)=k$이므로 $k=9$ 답 9

참고 $f^{n}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x-1} & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

0690

$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=x$

⋮

따라서 함수 $f^3(x)=f^6(x)=f^9(x)=\cdots=f^{3n}(x)$($n$은 자연수)는 항등함수이므로

$f^{1004}(x)=f^{3\cdot334+2}(x)=f^2(x)$

$\therefore f^{1004}(2)=f^2(2)=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$ 답 ③

다른 풀이 $f^1(2)=f(2)=\dfrac{1}{1-2}=-1$

$f^2(2)=(f\circ f)(2)=f(f(2))=\dfrac{1}{1-(-1)}=\dfrac{1}{2}$

$f^3(2)=(f\circ f^2)(2)=f(f^2(2))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2$

$f^4(2)=(f\circ f^3)(2)=f(f^3(2))=\dfrac{1}{1-2}=-1$

⋮

즉, $f^n(2)$는 $-1, \dfrac{1}{2}, 2$가 이 순서대로 반복된다.

이때, $1004=3\cdot334+2$이므로

$f^{1004}(2)=f^2(2)=\dfrac{1}{2}$

0691

|전략| 역함수를 구하려면 $x=$(y에 대한 식) 꼴로 정리한 후 x와 y를 서로 바꾼다.

$y=\dfrac{3x+7}{x+k}$이라 하고 x를 y로 나타내면 $y(x+k)=3x+7$

$(y-3)x=-ky+7 \qquad \therefore x=\dfrac{-ky+7}{y-3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{-kx+7}{x-3}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-kx+7}{x-3}$

$f(x)$와 $f^{-1}(x)$가 서로 같으므로 $\dfrac{3x+7}{x+k}=\dfrac{-kx+7}{x-3}$

$\therefore k=-3$ 답 -3

0692

두 함수 $y=\dfrac{4x+7}{2x-5}$, $y=\dfrac{bx+c}{2x+a}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

$y=\dfrac{4x+7}{2x-5}$에서 x를 y로 나타내면 $y(2x-5)=4x+7$

$(2y-4)x=5y+7 \qquad \therefore x=\dfrac{5y+7}{2y-4}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{5x+7}{2x-4}$

따라서 $\dfrac{bx+c}{2x+a}=\dfrac{5x+7}{2x-4}$이므로

$a=-4, b=5, c=7 \qquad \therefore a-b+c=-2$ 답 -2

0693

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x-1}$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로

$3=\dfrac{2a+b}{2-1} \qquad \therefore 2a+b=3$ ⋯⋯ ㉠

또, $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-1}$의 역함수의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x-1}$의 그래프는 점 $(3, 2)$를 지난다.

$2=\dfrac{3a+b}{3-1} \qquad \therefore 3a+b=4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=2$

$\therefore a+b=2$ 답 2

Lecture

함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계

$y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지난다.

$\Longleftrightarrow y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 (b, a)를 지난다.

0694

$f(x)=\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{(x+2)-2}{x+2}=-\dfrac{2}{x+2}+1$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\dfrac{2}{x-p+2}+1+q$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

한편, $y=\dfrac{x}{x+2}$라 하고 x를 y로 나타내면 $y(x+2)=x$

$x(1-y)=2y \qquad \therefore x=\dfrac{2y}{1-y}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{2x}{1-x}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{2x}{1-x}=-\dfrac{2(x-1)+2}{x-1}$

$=-\dfrac{2}{x-1}-2$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

이때, ㉠, ㉡의 그래프가 일치하므로

$p-2=1, 1+q=-2$

따라서 $p=3, q=-3$이므로 $pq=-9$ ⋯ ❸

답 -9

채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ pq의 값을 구할 수 있다.	20 %

0695

| 전략 | 먼저 역함수의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I$ (I는 항등함수)이므로

$(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(1)+(f\circ f^{-1})(-2)$

$=(f^{-1}\circ I)(1)+I(-2)$

$=f^{-1}(1)-2$

이때, $f^{-1}(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로

$1=\dfrac{k+1}{2k-1}$, $2k-1=k+1$ $\quad\therefore k=2$

$\therefore (f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(1)+(f\circ f^{-1})(-2)=2-2=0$ 답 ③

0696

$f(g(x))=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$g(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로

$\dfrac{3\cdot 2+k}{2\cdot 2-1}=1$, $6+k=3$ $\quad\therefore k=-3$

$\therefore f(x)=\dfrac{3x-3}{2x-1}$

$g(3)=a$라 하면 $f(a)=3$이므로

$\dfrac{3a-3}{2a-1}=3$, $3a-3=6a-3$ $\quad\therefore a=0$

즉, $g(3)=0$이므로

$(g\circ g)(3)=g(g(3))=g(0)$

$g(0)=b$라 하면 $f(b)=0$이므로

$\dfrac{3b-3}{2b-1}=0$, $3b-3=0$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore (g\circ g)(3)=1$ 답 1

다른 풀이 $y=\dfrac{3x-3}{2x-1}$이라 하고 x를 y로 나타내면

$y(2x-1)=3x-3$

$(2y-3)x=y-3$ $\quad\therefore x=\dfrac{y-3}{2y-3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{x-3}{2x-3}$

$\therefore g(x)=\dfrac{x-3}{2x-3}$

따라서 $g(3)=0$, $g(0)=1$이므로

$(g\circ g)(3)=g(g(3))=g(0)=1$

0697

$(g^{-1}\circ f)^{-1}(2)=(f^{-1}\circ g)(2)=f^{-1}(g(2))$

이때, $g(2)=\dfrac{-3\cdot 2+1}{2+2}=-\dfrac{5}{4}$이므로

$f^{-1}\left(-\dfrac{5}{4}\right)=k$라 하면 $f(k)=-\dfrac{5}{4}$

$\dfrac{k-1}{2k+1}=-\dfrac{5}{4}$에서 $-4k+4=10k+5$ $\quad\therefore k=-\dfrac{1}{14}$

$\therefore (g^{-1}\circ f)^{-1}(2)=-\dfrac{1}{14}$ 답 $-\dfrac{1}{14}$

0698

$(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(a)=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(a)$

$=(f^{-1}\circ g)(a)$

$=f^{-1}(g(a))$

이므로 $f^{-1}(g(a))=2$에서 $g(a)=f(2)$

이때, $f(2)=\dfrac{3\cdot 2}{2+1}=2$이므로

$g(a)=\dfrac{a+2}{a-1}=2$, $a+2=2a-2$ $\quad\therefore a=4$ 답 ④

STEP 3 내신 마스터

0699

유형 02 유리식과 항등식

| 전략 | 주어진 등식의 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 식을 변형하고, 항등식의 성질을 이용한다.

주어진 등식의 양변에 $x(x-1)(x-2)$를 곱하면

$a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)=4$

$\therefore (a+b+c)x^2-(3a+2b+c)x+2a=4$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b+c=0$, $3a+2b+c=0$, $2a=4$

$2a=4$에서 $a=2$

즉, $2+b+c=0$, $6+2b+c=0$이므로

두 식을 연립하여 풀면 $b=-4$, $c=2$

따라서 $a=2$, $b=-4$, $c=2$이므로

$\dfrac{ac}{b}=\dfrac{2\cdot 2}{-4}=-1$ 답 ②

0700

유형 03 부분분수로의 변형

| 전략 | $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$임을 이용한다. (단, $A\neq B$)

$f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}\right)$

$+\cdots+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+96}-\dfrac{1}{x+98}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+98}-\dfrac{1}{x+100}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+100}\right)$

$\therefore f(1)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{101}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{100}{101}=\dfrac{50}{101}$ 답 ③

다른 풀이

$f(1)=\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{99\cdot 101}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{101}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{101}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{100}{101}=\dfrac{50}{101}$

0701

유형 04 번분수식의 계산

| 전략 | 주어진 유리식을 간단히 하고, (분모)$\neq 0$임을 이용한다.

$$\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}=\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}=\frac{n+2}{n}=1+\frac{2}{n}$$

이 값이 정수가 되려면 $\frac{2}{n}$의 값이 정수이어야 하므로 n의 값은

$-2,\ -1,\ 1,\ 2$이다.

그런데 주어진 식의 (분모)$\neq 0$이어야 하므로

$n\neq 0,\ n\neq -1,\ n\neq -2$

따라서 정수 n의 값은 1, 2이므로 구하는 합은 3이다. 답 ⑤

0702

유형 **06 유리식의 값 구하기 – $x\pm\frac{1}{x}$의 값 이용**

| 전략 | 주어진 식의 양변을 x로 나누어 $x+\frac{1}{x}$의 값을 구한 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

$x^2-4x+1=0$에서 $x\neq 0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-4+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=4$

$$\begin{aligned}\therefore x^3-2x+3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3} &= x^3+\frac{1}{x^3}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\\ &=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\\ &=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\\ &=4^3-5\cdot 4+3=47\end{aligned}$$

답 ④

0703

유형 **09 유리식의 값 구하기 – 비례식이 주어진 경우**

| 전략 | $\frac{3x-2y}{x-y}=\frac{1}{2}$을 변형하여 $x=ak,\ y=bk$ 꼴로 나타낸다.

$\frac{3x-2y}{x-y}=\frac{1}{2}$에서 $2(3x-2y)=x-y \quad \therefore 5x=3y$

$\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=k\,(k\neq 0)$라 하면 $x=3k,\ y=5k$

$\therefore \frac{5x^2-3y^2}{xy}=\frac{45k^2-75k^2}{15k^2}=\frac{-30k^2}{15k^2}=-2$ 답 ①

0704

유형 **11 가비의 리**

| 전략 | $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$임을 이용한다. (단, $b+d+f\neq 0$)

$\frac{y}{x-z}=\frac{x+y}{z}=\frac{x}{y}$에서 가비의 리에 의하여

$\frac{y}{x-z}=\frac{x+y}{z}=\frac{x}{y}=\frac{y+(x+y)+x}{(x-z)+z+y}=\frac{2(x+y)}{x+y}=2$

$x,\ y,\ z$가 서로 다른 양수이므로 (분모의 합)$\neq 0$

$\therefore k=2$ 답 ②

0705

유형 **12 유리식의 활용 – 비례식**

| 전략 | 남녀의 수를 각각 비례상수를 이용하여 나타낸다.

남녀 합격자 수를 각각 $5a,\ 4a$ (a는 자연수), 남녀 불합격자 수를 각각 $4b,\ 3b$ (b는 자연수)라 하면 전체 남녀 지원자 수는 다음 표와 같다.

	남자	여자	계
합격자	$5a$	$4a$	$9a$
불합격자	$4b$	$3b$	$7b$
전체 지원자	$5a+4b$	$4a+3b$	$9a+7b$

이때, 전체 지원자의 남녀의 비가 $9:7$이므로

$(5a+4b):(4a+3b)=9:7$

$7(5a+4b)=9(4a+3b) \quad \therefore a=b$

합격자 수가 3600이므로 $9a=3600 \quad \therefore a=400$

따라서 전체 지원자 수는

$9a+7b=16a=16\cdot 400=6400$ 답 ③

0706

유형 **13 유리함수의 그래프의 평행이동**

| 전략 | 원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동으로 생각할 수 있다.

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$의 중심인 점 $(2,\ -1)$이 점 $(3,\ 4)$로 옮겨지므로 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하는 것이다.

따라서 함수 $y=\frac{2}{x-1}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-5=\frac{2}{(x-1)-1}$

$\therefore y=\frac{2}{x-2}+5=\frac{2+5(x-2)}{x-2}=\frac{5x-8}{x-2}$

따라서 $a=5,\ b=-8,\ c=-2$이므로 $abc=80$ 답 ③

0707

유형 **14 유리함수의 그래프의 점근선**

| 전략 | 함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\,(k\neq 0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p,\ y=q$이다.

$y=\frac{ax-2}{x+b}=\frac{a(x+b)-2-ab}{x+b}=\frac{-2-ab}{x+b}+a$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-b,\ y=a$

따라서 $-b=1,\ a=-2$이므로 $a=-2,\ b=-1$

$\therefore a+b=-3$ 답 ①

다른 풀이 점근선의 방정식이 $x=1,\ y=-2$이므로 주어진 함수를

$y=\frac{k}{x-1}-2\ (k\neq 0)$로 놓을 수 있다.

$y=\frac{k}{x-1}-2=\frac{-2(x-1)+k}{x-1}=\frac{-2x+k+2}{x-1}$에서

$a=-2,\ k+2=-2,\ b=-1$

$\therefore a+b=-3$

0708

유형 **18 유리함수의 최대·최소**

| 전략 | $y=\frac{4x+1}{1-x}$을 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한 후 주어진 정의역에서 그래프를 그리고, y의 최댓값과 최솟값을 구한다.

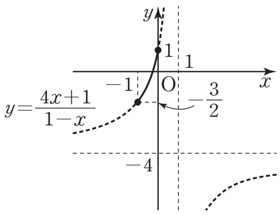
5 유리식과 유리함수

$$y=\frac{4x+1}{1-x}=\frac{-4(1-x)+5}{1-x}=\frac{5}{1-x}-4$$

이므로 $y=\frac{4x+1}{1-x}$의 그래프는 $y=-\frac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le 0$에서

$y=\frac{4x+1}{1-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=0$일 때 최댓값 1, $x=-1$일 때 최솟값 $-\frac{3}{2}$을 갖는다.



$\therefore 1+\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

답 ②

0709

유형 20 유리함수의 그래프의 성질

| 전략 | $y=\frac{2x-1}{x-1}$을 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한다.

$$y=\frac{2x-1}{x-1}=\frac{2(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+2$$

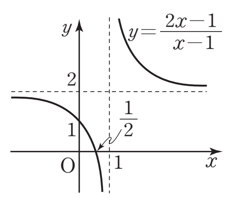
① 정의역은 1이 아닌 실수 전체의 집합이다.

② 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=2$이다.

③ $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

④ 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=2$이므로 점 $(1,\ 2)$에 대하여 대칭이다.

⑤ $y=\frac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.



따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0710

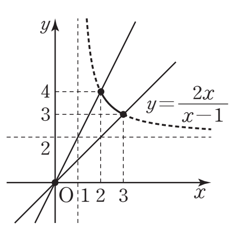
유형 21 유리함수의 그래프와 직선의 위치 관계

| 전략 | $y=\frac{2x}{x-1}$를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그리고 직선이 반드시 지나는 점을 이용한다.

$$y=\frac{2x}{x-1}=\frac{2(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+2$$

이므로 $2\le x\le 3$에서 $y=\frac{2x}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때, 직선 $y=ax$는 a의 값에 관계없이 점 $(0,\ 0)$을 지난다.



함수 $y=\frac{2x}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=ax$가 만나려면 기울기 a의 값은 점 $(3,\ 3)$을 지날 때보다 크거나 같고, 점 $(2,\ 4)$를 지날 때보다 작거나 같아야 한다.

이때, 직선 $y=ax$가 점 $(3,\ 3)$을 지날 때의 a의 값은 1이고 직선 $y=ax$가 점 $(2,\ 4)$를 지날 때의 a의 값은 2이므로

$1\le a\le 2$

답 ③

0711

유형 22 유리함수의 합성 + 23 유리함수의 역함수

| 전략 | $f(1)$, $f^2(1)$, $f^3(1)$, …의 값에서 규칙을 찾아 $f^n(1)$의 값을 구한다.

주어진 그래프에서 $f^{-1}(1)=0$, $f^{-1}(0)=1$이므로

$f(0)=1$, $f(1)=0$

$f^2(1)=(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(0)=1$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(1)=0$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(0)=1$

⋮

따라서 $f^n(1)=\begin{cases}0 & (n\text{은 홀수})\\ 1 & (n\text{은 짝수})\end{cases}$이므로

$f^{999}(1)=0$

답 ②

0712

유형 24 유리함수의 합성함수와 역함수

| 전략 | 먼저 역함수의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I$ (I는 항등함수)이므로

$(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)=f^{-1}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)$

$f^{-1}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)=2x+a$에서 $f(2x+a)=\frac{x+1}{2x-1}$

$2x+a=t$라 하면 $x=\frac{t-a}{2}$이므로

$$f(t)=\frac{\frac{t-a}{2}+1}{2\cdot\frac{t-a}{2}-1}=\frac{t-a+2}{2t-2a-2}$$

이때, $f(1)=2$이므로 $\frac{1-a+2}{2-2a-2}=2$

$-a+3=-4a \qquad \therefore a=-1$

따라서 $f(t)=\frac{t+3}{2t}$이므로 $f(3)=1$

답 ④

0713

유형 16 유리함수의 그래프가 지나는 사분면

| 전략 | $k>0$인 경우와 $k<0$인 경우로 나누어 함수의 그래프를 그리고 k의 값의 범위를 구한다.

$y=\frac{k}{x-1}+2$의 그래프는 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

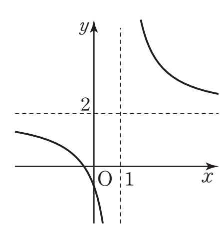
(i) $k>0$일 때

오른쪽 그림과 같이 $y=\frac{k}{x-1}+2$의 그래프가 모든 사분면을 지나려면 $x=0$일 때 $y<0$이어야 하므로

$y\ge 0$이면 제 3 사분면을 지나지 않는다.

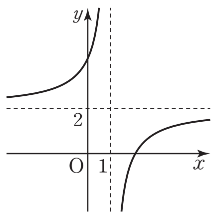
$-k+2<0$

$\therefore k>2$ … ❶



(ii) $k<0$일 때

오른쪽 그림과 같이 $y=\dfrac{k}{x-1}+2$의 그래프는 k의 값에 관계없이 제 3 사분면을 지나지 않는다. ⋯ ❷



(i), (ii)에서 $k>2$ ⋯ ❸

답 $k>2$

채점 기준	배점
❶ $k>0$일 때, 조건에 맞는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	3점
❷ $k<0$일 때, 조건에 맞는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	3점
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	1점

0714

유형 19 유리함수의 그래프와 미정계수 구하기

| 전략 | 점근선의 방정식이 $x=p$, $y=q$이면 구하는 함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 놓을 수 있다.

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-3$, $y=1$이므로 주어진 함수를 $y=\dfrac{k}{x+3}+1\,(k>0)$로 놓을 수 있다. ⋯ ❶

이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{k}{3}+1 \qquad \therefore k=3$

따라서 $y=\dfrac{3}{x+3}+1=\dfrac{3+(x+3)}{x+3}=\dfrac{x+6}{x+3}$이므로

$a=1,\ b=6,\ c=3$ ⋯ ❷

$\therefore y=\dfrac{a-bx}{cx+1}=\dfrac{1-6x}{3x+1}$

$=\dfrac{-2(3x+1)+3}{3x+1}=\dfrac{3}{3x+1}-2$

따라서 구하는 점근선의 방정식은 $x=-\dfrac{1}{3}$, $y=-2$ ⋯ ❸

답 $x=-\dfrac{1}{3}$, $y=-2$

채점 기준	배점
❶ 점근선의 방정식을 이용하여 주어진 함수를 식으로 나타낼 수 있다.	2점
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ 함수 $y=\dfrac{a-bx}{cx+1}$의 그래프의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	2점

0715

유형 23 유리함수의 역함수

| 전략 | $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한다.

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}=\dfrac{a(x+c)+b-ac}{x+c}=\dfrac{b-ac}{x+c}+a$

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프의 두 점근선 중 하나가 직선 $y=2$이므로

$a=2$ ⋯ ❶

$f(x)=\dfrac{2x+b}{x+c}$에서 $f^{-1}(0)=2$이므로 $f(2)=0$

$\dfrac{4+b}{2+c}=0,\ 4+b=0 \qquad \therefore b=-4$ ⋯ ❷

$f(x)=\dfrac{2x-4}{x+c}$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로 $f(1)=1$

$\dfrac{2-4}{1+c}=1,\ 1+c=-2 \qquad \therefore c=-3$ ⋯ ❸

따라서 $f(x)=\dfrac{2x-4}{x-3}$이므로 $f(-1)=\dfrac{3}{2}$ ⋯ ❹

답 $\dfrac{3}{2}$

채점 기준	배점
❶ a의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ b의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ c의 값을 구할 수 있다.	1점
❹ $f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	1점

0716

유형 14 유리함수의 그래프의 점근선

| 전략 | 함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\,(k\neq0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$이다.

(1) $y=\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{(x+1)-2}{x+1}=\dfrac{-2}{x+1}+1$이므로 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=1$

(2) $y=\dfrac{bx+1}{x-a}=\dfrac{b(x-a)+ab+1}{x-a}=\dfrac{ab+1}{x-a}+b$이므로 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=b$

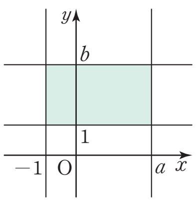
(3) 두 함수의 그래프의 점근선은 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 부분의 넓이가 13이므로

$(a+1)(b-1)=13$

이때, a, b는 자연수이므로

$a+1=13,\ b-1=1 \qquad \therefore a=12,\ b=2$

$\therefore a+b=14$



답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 함수 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	2점
(2) 함수 $y=\dfrac{bx+1}{x-a}$의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	3점
(3) $a+b$의 값을 구할 수 있다.	5점

0717

유형 23 유리함수의 역함수

| 전략 | 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 사이의 관계를 이용한다.

(1) $y=\dfrac{-x+k}{x-1}$에 $y=0$을 대입하면

$0=\dfrac{-x+k}{x-1},\ -x+k=0 \qquad \therefore x=k$

따라서 그래프가 x축의 양의 부분과 만나는 점은 $\mathrm{A}(k,\ 0)$이다.

이때, $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(k,\ 0)$을 지나면 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(0,\ k)$를 지난다.

5 유리식과 유리함수

따라서 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 y축의 양의 부분과 만나는 점은 $\mathrm{B}(0,\ k)$이다.

(2) $\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-k)^2+k^2}=k\sqrt{2}=4\sqrt{2}\qquad \therefore k=4$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 두 점 A, B의 좌표를 각각 k로 나타낼 수 있다.	8점
(2) k의 값을 구할 수 있다.	4점

Lecture

두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여

⇨ $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

창의·융합 교과서 속 심화문제

0718

| 전략 | (거리)=(속력)×(시간)이고, (평균 속력)$=\dfrac{(\text{총 이동 거리})}{(\text{총 걸린 시간})}$임을 이용한다.

A지점에서 B지점까지의 거리는 자동차가 30분, 즉 $\frac{1}{2}$시간 동안 평균 100 km/h의 속력으로 달렸으므로

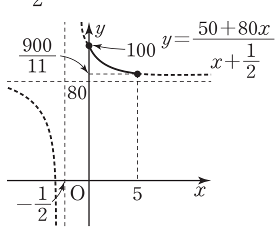
$100\cdot\frac{1}{2}=50(\mathrm{km})$

B지점에서 C지점까지의 거리는 자동차가 x시간 동안 평균 80 km/h의 속력으로 달렸으므로 $80x$ km

즉, A지점에서 C지점까지 자동차의 평균 속력은

$$y=\frac{50+80x}{x+\frac{1}{2}}=\frac{80\left(x+\frac{1}{2}\right)+10}{x+\frac{1}{2}}=\frac{10}{x+\frac{1}{2}}+80$$

따라서 $0\le x\le 5$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=5$일 때 최솟값

$\dfrac{50+80\cdot 5}{5+\frac{1}{2}}=\dfrac{900}{11}$

을 갖는다.

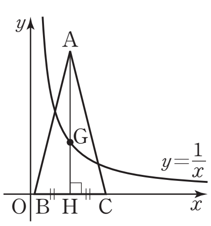
답 ④

0719

| 전략 | $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$임을 이용한다. (단, $A\ne B$)

점 A에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 G는 △ABC의 무게중심이므로 $\overline{\mathrm{AH}}$를 2 : 1로 내분한다.

즉, $\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{GH}}=3:1$



이때, 점 G는 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위의 점이고 점 G의 x좌표는 n이므로 $\mathrm{G}\left(n,\ \frac{1}{n}\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{GH}}=\frac{1}{n},\ \overline{\mathrm{AH}}=\frac{3}{n}$

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cdot\frac{3}{n}=3n$에서 $\overline{\mathrm{BC}}=2n^2$

$\therefore \overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{CH}}=n^2$ ── △ABC는 이등변삼각형이므로 A에서 밑변 BC에 내린 수선 AH는 $\overline{\mathrm{BC}}$를 이등분한다.

$\therefore f(n)=n-n^2,\ g(n)=n+n^2$

이때,

$$\frac{1}{g(n)}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{n(1-n)}=-\frac{1}{n(n-1)}=-\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore 90\left\{\left(\frac{1}{g(2)}-\frac{1}{f(2)}\right)+\left(\frac{1}{g(3)}-\frac{1}{f(3)}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{g(9)}-\frac{1}{f(9)}\right)\right\}$$

$$=90\left\{\left(\frac{1}{g(2)}+\frac{1}{g(3)}+\cdots+\frac{1}{g(9)}\right)-\left(\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(9)}\right)\right\}$$

$$=90\left[\left\{\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\frac{1}{10}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{8}}-\frac{1}{9}\right)\right\}\right]$$

$$=90\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}+1-\frac{1}{9}\right)=116$$

답 116

0720

| 전략 | 점 A의 좌표를 $\left(p,\ \frac{1}{p}\right)$이라 하고 두 점 B, C의 좌표를 구한다.

점 A의 좌표를 $\left(p,\ \frac{1}{p}\right)$이라 하면

점 B의 좌표는 $\left(pk,\ \frac{1}{p}\right)$이고, 점 C의 좌표는 $\left(p,\ \frac{k}{p}\right)$

이때, △ABC의 넓이가 18이므로

$\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\cdot(pk-p)\cdot\left(\frac{k}{p}-\frac{1}{p}\right)=18$

$\frac{1}{2}\cdot p(k-1)\cdot\frac{1}{p}(k-1)=18,\ \frac{1}{2}(k-1)^2=18$

$(k-1)^2=36,\ k-1=\pm 6$

$\therefore k=7\ (\because k>1)$

답 7

0721

| 전략 | 점 A의 좌표를 $\left(p,\ \frac{1}{p}\right)$이라 하고 점 C가 나타내는 도형의 방정식을 구한다.

점 A의 좌표를 $\left(p,\ \frac{1}{p}\right)$이라 하면

점 C의 좌표는 $\left(p+2,\ \frac{1}{p}+2\right)$

즉, 점 C의 자취는 $y=\frac{1}{x}\ (x>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같으므로 자취의 방정식은

$$y=\frac{1}{x-2}+2=\frac{1+2(x-2)}{x-2}=\frac{2x-3}{x-2}\ (x>2)$$

따라서 $a=2,\ b=-3,\ c=1$이므로

$a+b+c=0$

답 0

다른 풀이 점 A의 좌표를 $\left(p,\ \frac{1}{p}\right)$이라 하고, 점 C의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=p+2,\ y=\frac{1}{p}+2 \qquad \therefore p=x-2,\ \frac{1}{p}=y-2$

따라서 $y-2=\frac{1}{x-2}\ (x>2)$이므로
점 A가 제1사분면 위의 점이므로 $p>0$
$\therefore x=p+2>2$

$y=\frac{1}{x-2}+2=\frac{2x-3}{x-2}\ (x>2)$

Lecture

자취의 방정식
(ⅰ) 구하는 자취 위의 점의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓는다.
(ⅱ) 주어진 조건을 이용하여 $x,\ y$ 사이의 관계식을 구한다.

0722

| 전략 | $f(x)=f^{-1}(x)$이려면 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이어야 하므로 점근선의 교점이 직선 $y=x$ 위에 있어야 한다.

$y=\frac{(a+2)x+1}{x-a}=\frac{(a+2)(x-a)+a^2+2a+1}{x-a}$

$=\frac{a^2+2a+1}{x-a}+a+2$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 곡선이 $y=f(x)$이므로

$f(x)=\frac{a^2+2a+1}{x-3-a}+a+2+k$

이때, $f(x)=f^{-1}(x)$이려면 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이어야 한다.

$y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a+3,\ y=a+2+k$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(a+3,\ a+2+k)$이다.

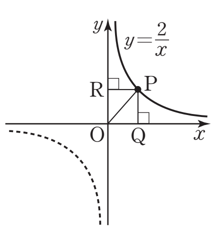
이 점이 직선 $y=x$ 위의 점이므로

$a+2+k=a+3$

$\therefore k=1$ 답 ⑤

0723

| 전략 | 임의의 점 P의 좌표를 $\left(p,\ \frac{2}{p}\right)$라 하고 직사각형 OQPR의 대각선의 길이를 구해 본다.



점 P의 좌표를 $\left(p,\ \frac{2}{p}\right)$라 하면 직사각형 OQPR의 대각선의 길이는

$\overline{OP}=\sqrt{p^2+\frac{4}{p^2}}$

이때, $p>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$p^2+\frac{4}{p^2}\ge 2\sqrt{p^2\cdot\frac{4}{p^2}}=4$

$\left(\text{단, 등호는 } p^2=\frac{4}{p^2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\overline{OP}\ge\sqrt{4}=2$이므로 구하는 대각선의 길이의 최솟값은 2이다.

답 ③

본책 114~129쪽

6 | 무리식과 무리함수

STEP 1 개념 마스터 ❶

0724
답 ㄱ, ㄴ

0725

$x+3\ge0$이어야 하므로 $x\ge-3$ 답 $x\ge-3$

0726

$2-x\ge0,\ x+1\ge0$이어야 하므로 $x\le2,\ x\ge-1$

$\therefore -1\le x\le2$ 답 $-1\le x\le2$

0727

(분모)$\ne0$이므로 $5-x\ne0$

$x-1\ge0,\ 5-x>0$이어야 하므로 $x\ge1,\ x<5$

$\therefore 1\le x<5$ 답 $1\le x<5$

0728

(분모)$\ne0$이므로 $4-x\ne0$

$x+3\ge0,\ 4-x>0$이어야 하므로 $x\ge-3,\ x<4$

$\therefore -3\le x<4$ 답 $-3\le x<4$

0729

ㄱ. $a<0,\ b>0$일 때, $\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}=-a\sqrt{b}$

ㄴ. $a<1$일 때, $a-1<0$이므로
$\sqrt{(a-1)^2}+a=|a-1|+a=1-a+a=1$

ㄷ. $a<0,\ b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

ㄹ. $a<0,\ b<0$일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

ㅁ. $a<0$일 때, $-a>0$이므로
$(-\sqrt{-a})^2=(\sqrt{-a})^2=-a$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ이다. 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

0730

$a>-1$에서 $a+1>0$이므로

$\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|=a+1$ 답 $a+1$

0731

$1<a<2$에서 $a-1>0,\ a-2<0$이므로

$\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a-2)^2}=|a-1|+|a-2|$

$=a-1-(a-2)=1$ 답 1

0732

$a>b>c$일 때, $a-b>0$, $b-c>0$, $c-a<0$이므로

$\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(b-c)^2}+\sqrt{(c-a)^2}$

$=|a-b|+|b-c|+|c-a|$

$=(a-b)+(b-c)-(c-a)$

$=2a-2c$

답 $2a-2c$

0733

$(\sqrt{x+2}+1)(\sqrt{x+2}-1)=(\sqrt{x+2})^2-1^2$

$=(x+2)-1=x+1$

답 $x+1$

0734

$(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})=(\sqrt{x-1})^2-(\sqrt{x})^2$

$=(x-1)-x=-1$

답 -1

0735

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

0736

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

0737

$$\frac{1-3\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{(1-3\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}-6\sqrt{2}+6}{4-2}=\frac{8-7\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{8-7\sqrt{2}}{2}$

0738

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{2}}{\{(\sqrt{3}-1)+\sqrt{2}\}\{(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}\}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-1)^2-2}=\frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{2}}{2-2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1-\sqrt{2})(2+2\sqrt{3})}{(2-2\sqrt{3})(2+2\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+6-2-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{4-12}$$

$$=\frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{-8}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{4}$$

답 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{4}$

0739

$$\frac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=\frac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{(x+2)-2}=\frac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x}$$

$$=\sqrt{x+2}+\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{x+2}+\sqrt{2}$

0740

$$\frac{-6}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}}=\frac{-6(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3})}$$

$$=\frac{-6(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3})}{x-3-(x+3)}$$

$$=\frac{-6(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3})}{-6}$$

$$=\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}$$

답 $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}$

0741

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$$

답 $\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$

참고 무리식을 계산할 때는 (근호 안의 식의 값)≥ 0이 되는 범위에서만 생각하므로 $\sqrt{x}\sqrt{y}=\sqrt{xy}$로 계산할 수 있다.

0742

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x}+x}{x+1-x}=2x+1+2\sqrt{x^2+x}$$

답 $2x+1+2\sqrt{x^2+x}$

0743

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}=\frac{2\sqrt{x}}{x-y}$$

답 $\frac{2\sqrt{x}}{x-y}$

0744

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}-\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$=\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}-\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$=\frac{4\sqrt{x}}{x-1}$$

답 $\frac{4\sqrt{x}}{x-1}$

0745

$$\frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+2}+1}+\frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}-1}$$

$$=\frac{(\sqrt{x+2}-1)^2}{(\sqrt{x+2}+1)(\sqrt{x+2}-1)}+\frac{(\sqrt{x+2}+1)^2}{(\sqrt{x+2}-1)(\sqrt{x+2}+1)}$$

$$=\frac{x+2-2\sqrt{x+2}+1}{x+2-1}+\frac{x+2+2\sqrt{x+2}+1}{x+2-1}$$

$$=\frac{2x+6}{x+1}$$

답 $\frac{2x+6}{x+1}$

STEP 2 유형 마스터 ❶

0746

|전략| $\sqrt{f(x)}$의 값이 실수가 되려면 $f(x)\geq 0$이어야 한다.

$8x^2+10x-3\geq 0$에서 $(2x+3)(4x-1)\geq 0$

$\therefore x\leq -\frac{3}{2}$ 또는 $x\geq \frac{1}{4}$ 답 $x\leq -\frac{3}{2}$ 또는 $x\geq \frac{1}{4}$

0747

$3x+1\geq 0$에서 $x\geq -\frac{1}{3}$, $1-2x>0$에서 $x<\frac{1}{2}$

$\therefore -\frac{1}{3}\leq x<\frac{1}{2}$

따라서 구하는 정수 x는 0의 1개이다. 답 1

0748

$10-3x\geq 0$에서 $x\leq \frac{10}{3}$

$x-2\neq 0$에서 $x\neq 2$

따라서 구하는 자연수 x는 1, 3으로 그 합은 4이다. 답 4

0749

$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq \frac{3}{4}$

따라서 $x^2+x+1\geq 0$의 해는 모든 실수이다.

$5-x\geq 0$에서 $x\leq 5$

$2x-3>0$에서 $x>\frac{3}{2}$

$\therefore \frac{3}{2}<x\leq 5$ 답 ⑤

0750

|전략| $\sqrt{A^2}=|A|=\begin{cases} A & (A\geq 0) \\ -A & (A<0) \end{cases}$이므로 A의 부호를 조사한다.

$-1<a<2$에서 $a+1>0$, $a-2<0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2-4a+4}&=\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-2)^2}\\&=|a+1|+|a-2|\\&=(a+1)-(a-2)\\&=3\end{aligned}$$

답 ⑤

0751

$x^2-4=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4=a^2+\frac{1}{a^2}-2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$

이때, $0<a<1$이므로 $\frac{1}{a}>1$이고 $a-\frac{1}{a}<0$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{x^2-4}-x&=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}-\left(a+\frac{1}{a}\right)\\&=\left|a-\frac{1}{a}\right|-\left(a+\frac{1}{a}\right)\\&=-\left(a-\frac{1}{a}\right)-\left(a+\frac{1}{a}\right)=-2a\end{aligned}$$

답 $-2a$

0752

$$\begin{aligned}x-y&=4a^2-4a+4=4(a^2-a+1)\\&=4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+3\geq 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x+y&=4a^2+4a+4=4(a^2+a+1)\\&=4\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+3\geq 3\end{aligned}$$

따라서 $x-y\geq 0$, $x+y\geq 0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-y)^2}-\sqrt{(x+y)^2}&=|x-y|-|x+y|\\&=x-y-(x+y)\\&=-2y=-8a\end{aligned}$$

답 ①

0753

$\sqrt{x+2}$에서 $x+2\geq 0$ $\therefore x\geq -2$ ...... ㉠

$\sqrt{2-x}$에서 $2-x\geq 0$ $\therefore x\leq 2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 무리식의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위는 $-2\leq x\leq 2$

$-2\leq x\leq 2$일 때, $2x-5<0$, $x-4<0$이므로

$$\begin{aligned}|2x-5|-\underbrace{\sqrt{x^2-8x+16}}_{\sqrt{(x-4)^2}}&=|2x-5|-|x-4|\\&=-(2x-5)+(x-4)\\&=-2x+5+x-4\\&=-x+1\end{aligned}$$

답 ②

0754

|전략| $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이면 $a\geq 0$, $b<0$이다.

$\frac{\sqrt{a-2}}{\sqrt{a-6}}=-\sqrt{\frac{a-2}{a-6}}$이므로

$a-2\geq 0$, $a-6<0$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{(a-2)^2}+\sqrt{(a-6)^2}&=|a-2|+|a-6|\\&=(a-2)-(a-6)=4\end{aligned}$$

답 ②

0755

|전략| $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a\leq 0$, $b\leq 0$이다.

$\sqrt{x-1}\sqrt{2-y}=-\sqrt{(x-1)(2-y)}$이므로

$x-1<0$, $2-y<0$ $\therefore x<1$, $y>2$

따라서 $x-2<0$, $y-x>0$, $y-1>0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(y-x)^2}+|y-1|&=|x-2|-|y-x|+|y-1|\\&=-(x-2)-(y-x)+(y-1)\\&=1\end{aligned}$$

답 1

0756

$\sqrt{a-4}\sqrt{2-a}=-\sqrt{(a-4)(2-a)}$ 이므로

$a-4\leq 0$, $2-a\leq 0$ $\therefore 2\leq a\leq 4$

$\frac{\sqrt{b-5}}{\sqrt{b-6}}=-\sqrt{\frac{b-5}{b-6}}$이므로

$b-5\geq 0$, $b-6<0$ $\therefore 5\leq b<6$

따라서 $a-b<0$, $a-5<0$, $b-3>0$이므로

$$\begin{aligned}|a-b|-|a-5|-|b-3|&=-(a-b)+(a-5)-(b-3)\\&=-2\end{aligned}$$

답 ②

0757

|전략| 분모의 유리화를 이용한다.

$$\begin{aligned}&\frac{x}{1+\sqrt{x+1}}+\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}\\&=\frac{x(1-\sqrt{x+1})}{(1+\sqrt{x+1})(1-\sqrt{x+1})}+\frac{x(1+\sqrt{x+1})}{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}\\&=\frac{x-x\sqrt{x+1}}{1-(x+1)}+\frac{x+x\sqrt{x+1}}{1-(x+1)}\\&=\frac{2x}{-x}=-2\end{aligned}$$

답 ①

0758

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}+\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}\\&=\frac{(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^2}{(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})}\\&\qquad+\frac{(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})^2}{(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})}\\&=\frac{(x+y-2\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}+x-y)+(x+y+2\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}+x-y)}{(x+y)-(x-y)}\\&=\frac{4x}{2y}=\frac{2x}{y}\end{aligned}$$

답 ①

0759

$$\begin{aligned}1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1+x}}&=1+\cfrac{1}{\cfrac{1+x-1}{1+x}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{x}{1+x}}\\&=1+\frac{1+x}{x}=\frac{x+1+x}{x}=\frac{1+2x}{x}\\&=\frac{1}{x}+2\end{aligned}$$

이때, $x=-\sqrt{2}-1$이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+2&=\frac{1}{-\sqrt{2}-1}+2=\frac{\sqrt{2}-1}{-(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+2\\&=-(\sqrt{2}-1)+2=3-\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 $3-\sqrt{2}$

0760

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}\\&=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(x+1)-x}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\end{aligned}$$

⋯ ❶

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(48)$

$$\begin{aligned}&=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{48})\\&=\sqrt{49}-\sqrt{1}=7-1=6\end{aligned}$$

⋯ ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 간단히 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(48)$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0761

|전략| 먼저 주어진 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}&=\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}\\&=\frac{x+1+2\sqrt{x^2-1}+x-1}{(x+1)-(x-1)}\\&=\frac{2x+2\sqrt{x^2-1}}{2}\\&=x+\sqrt{x^2-1}\\&=\sqrt{3}+\sqrt{3-1}=\sqrt{3}+\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 ③

0762

$$\begin{aligned}x-\frac{1}{x}&=2+\sqrt{3}-\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}-\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\\&=2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}x^3-\frac{1}{x^3}&=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)\\&=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3\right\}\\&=2\sqrt{3}\{(2\sqrt{3})^2+3\}=30\sqrt{3}\end{aligned}$$

답 ⑤

0763

$x=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{3}+1$이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}&=\frac{(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\\&=\frac{-2}{x-1}=\frac{-2}{\sqrt{3}+1-1}\\&=\frac{-2}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

답 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

0764

$x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3+2\sqrt{2}$이므로

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}&=\frac{(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\\&=\frac{(x-2\sqrt{x}+1)+(x+2\sqrt{x}+1)}{x-1}\\&=\frac{2(x+1)}{x-1}=\frac{2(3+2\sqrt{2}+1)}{3+2\sqrt{2}-1}\\&=\frac{4(2+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})}=\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{1+\sqrt{2}}\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 ③

0765

|전략| $x+y$, xy의 값을 구한 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

$x+y=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=4$

$xy=(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=4-2=2$

이므로

$x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy$

$\quad=4^2-3\cdot2=10$ 답 ④

Lecture

자주 이용되는 곱셈 공식의 변형

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(x-y)^2+2xy$

(2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$\quad x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

0766

$x+y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}=\sqrt{3}$

$xy=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}=\dfrac{1}{2}$

이므로

$$\dfrac{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}=\dfrac{\dfrac{x^3+y^3}{x^3y^3}}{\dfrac{x+y}{xy}}=\dfrac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{x^2y^2(x+y)}$$

$$=\dfrac{(x+y)^2-3xy}{x^2y^2}=\dfrac{3-\dfrac{3}{2}}{\dfrac{1}{4}}=6$$

답 ③

0767

$x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3+2\sqrt{2}$

$y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=3-2\sqrt{2}$

이므로

$x+y=(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=6$

$xy=(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=9-8=1$

$\therefore \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{y})^2+(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}\sqrt{y}}=\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}=\dfrac{6}{\sqrt{1}}=6$ 답 6

0768

$a-b=3+\sqrt{3}$, $b-c=3-\sqrt{3}$을 변끼리 더하면

$a-c=6$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$\quad=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$\quad=\dfrac{1}{2}\{(3+\sqrt{3})^2+(3-\sqrt{3})^2+(-6)^2\}$

$\quad=\dfrac{1}{2}\{(9+6\sqrt{3}+3)+(9-6\sqrt{3}+3)+36\}=30$ 답 ③

STEP 1 개념 마스터 ❷

0769 답 ×

0770 답 ○

0771 답 ○

0772

$y=\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$

이므로 $y=\sqrt{x^2-2x+1}$은 무리함수가 아니다. 답 ×

0773

$x-2\ge0$에서 $x\ge2$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge2\}$ 답 $\{x\,|\,x\ge2\}$

0774

$1-2x\ge0$에서 $x\le\dfrac{1}{2}$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\le\dfrac{1}{2}\right\}$ 답 $\left\{x\,\middle|\,x\le\dfrac{1}{2}\right\}$

0775

$3x+2\ge0$에서 $x\ge-\dfrac{2}{3}$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\ge-\dfrac{2}{3}\right\}$ 답 $\left\{x\,\middle|\,x\ge-\dfrac{2}{3}\right\}$

0776

$1-x^2\ge0$에서 $x^2-1\le0$

$(x+1)(x-1)\le0 \quad \therefore -1\le x\le1$

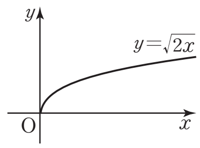
따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x\,|\,-1\le x\le1\}$

답 $\{x\,|\,-1\le x\le1\}$

0777

$y=\sqrt{2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x\,|\,x\ge0\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ge0\}$이다.

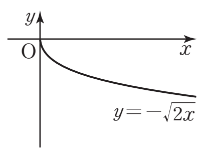


답 풀이 참조

0778

$y=-\sqrt{2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x\,|\,x\ge0\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\le0\}$이다.

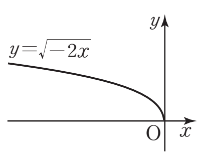


답 풀이 참조

0779

$y=\sqrt{-2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,

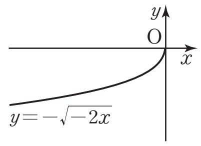
정의역은 $\{x\,|\,x\le0\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ge0\}$이다.



답 풀이 참조

0780

$y=-\sqrt{-2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x\le 0\}$, 치역은 $\{y|y\le 0\}$이다.



답 풀이 참조

0781

ㄱ. $a>0$이면 원점과 제 4 사분면을 지난다.

ㄷ. $a>0$이든지 $a<0$이든지 치역은 항상 $\{y|y\le 0\}$이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다. 답 ㄴ, ㄹ, ㅁ

0782

y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=\sqrt{-5x}$ $\quad\therefore y=-\sqrt{-5x}$ 답 $y=-\sqrt{-5x}$

0783

x 대신 $-x$를 대입하면

$y=\sqrt{-5(-x)}$ $\quad\therefore y=\sqrt{5x}$ 답 $y=\sqrt{5x}$

0784

x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=\sqrt{-5(-x)}$ $\quad\therefore y=-\sqrt{5x}$ 답 $y=-\sqrt{5x}$

0785

$y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$y-(-3)=\sqrt{2(x-1)}$ $\quad\therefore y=\sqrt{2(x-1)}-3$

답 $y=\sqrt{2(x-1)}-3$

0786

$y=\sqrt{-4x+8}+2=\sqrt{-4(x-2)}+2$

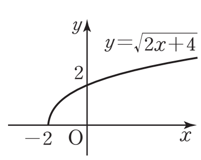
이므로 $y=\sqrt{-4x+8}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore a=2,\ b=2$ 답 $a=2,\ b=2$

0787

$y=\sqrt{2x+4}=\sqrt{2(x+2)}$

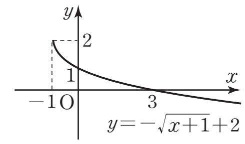
따라서 $y=\sqrt{2x+4}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x\ge -2\}$, 치역은 $\{y|y\ge 0\}$이다.



답 풀이 참조

0788

$y=-\sqrt{x+1}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x\ge -1\}$, 치역은 $\{y|y\le 2\}$이다.

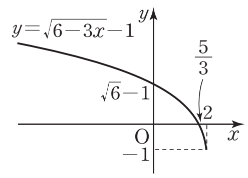


답 풀이 참조

0789

$y=\sqrt{6-3x}-1=\sqrt{-3(x-2)}-1$

따라서 $y=\sqrt{6-3x}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x\le 2\}$, 치역은 $\{y|y\ge -1\}$이다.

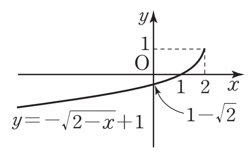


답 풀이 참조

0790

$y=-\sqrt{2-x}+1=-\sqrt{-(x-2)}+1$

따라서 $y=-\sqrt{2-x}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x\le 2\}$, 치역은 $\{y|y\le 1\}$이다.



답 풀이 참조

STEP 2 유형 마스터 ❷

0791

|전략| 함수 $y=\sqrt{x-p}+q$에서 정의역은 $\{x|x\ge p\}$이고, 치역은 $\{y|y\ge q\}$이다.

$x-4\ge 0$에서 $x\ge 4$이므로 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x\ge 4\}$ $\quad\therefore a=4$

또, $\sqrt{x-4}\ge 0$이므로 주어진 함수의 치역은

$\{y|y\ge b\}$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore ab=4$ 답 4

0792

$ax-8\ge 0$에서 $ax\ge 8$

이때, 정의역이 $\{x|x\le -4\}$이려면 $a<0$이어야 하므로 $ax\ge 8$의 양변을 a로 나누면 $x\le\dfrac{8}{a}$

즉, $\dfrac{8}{a}=-4$이므로 $a=-2$

또, $-\sqrt{-2x-8}\le 0$이므로 주어진 함수의 치역은

$\{y|y\le 2\}$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore a+b=0$ 답 0

0793

$-\sqrt{ax+6}\le 0$이므로 주어진 함수의 치역은 $\{y\,|\,y\le b\}$

이때, 주어진 함수의 치역이 $\{y\,|\,y\le 1\}$이므로 $b=1$

또, 주어진 함수의 그래프가 점 $(1,\ -2)$를 지나므로

$-2=-\sqrt{a+6}+1,\ \sqrt{a+6}=3$

$\therefore\ a=3$

따라서 $3x+6\ge 0$에서 $x\ge -2$이므로 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\ge -2\}$ 답 $\{x\,|\,x\ge -2\}$

0794

$y=\dfrac{-3x+4}{x-2}=\dfrac{-3(x-2)-2}{x-2}=-\dfrac{2}{x-2}-3$

이므로 $y=\dfrac{-3x+4}{x-2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore\ a=-2,\ b=2,\ c=-3$

따라서 함수 $y=\sqrt{-2x+2}-3$에서 $\sqrt{-2x+2}\ge 0$이므로

치역은 $\{y\,|\,y\ge -3\}$ 답 $\{y\,|\,y\ge -3\}$

0795

|전략| 먼저 주어진 함수를 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형한다.

$y=\sqrt{-2x+4}-3=\sqrt{-2(x-2)}-3$

이므로 $y=\sqrt{-2x+4}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=-2,\ b=2,\ c=-3$이므로

$a+b+c=-3$ 답 -3

0796

$y=\sqrt{x+2}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{(x-3)+2}-2=\sqrt{x-1}-2$ … ❶

이 그래프를 다시 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

x 대신 $-x$ 대입

$y=\sqrt{-x-1}-2$ … ❷

따라서 $a=-1,\ b=-1,\ c=-2$이므로

$abc=-2$ … ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ $y=\sqrt{x+2}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ ❶에서 구한 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	20 %

0797

ㄱ. $y=\sqrt{-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄷ. $y=-\sqrt{2-x}=-\sqrt{-(x-2)}$ $-y=\sqrt{-x}$ $\therefore\ y=-\sqrt{-x}$

이므로 $y=-\sqrt{2-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{4x-2}+3=-\sqrt{\dfrac{1}{4}(4x-2)}+3$

$=-\sqrt{x-\dfrac{1}{2}}+3$

$-y=\sqrt{x}$ $\therefore\ y=-\sqrt{x}$

이므로 $y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{4x-2}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

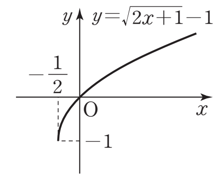
따라서 그 그래프가 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

0798

|전략| 무리함수의 식을 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형한 다음 그래프를 그려 본다.

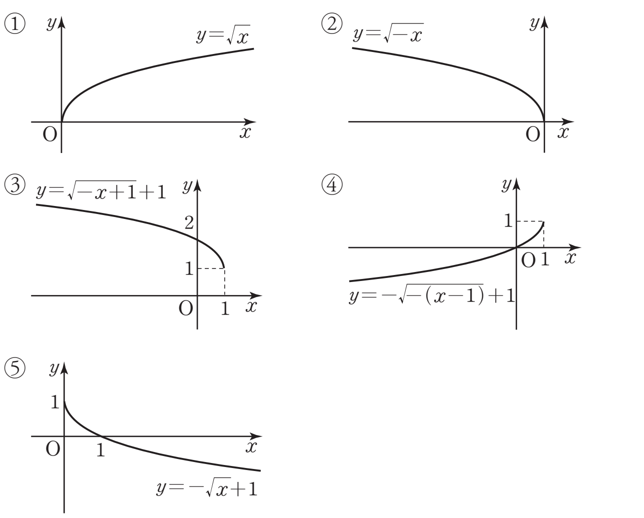
$y=\sqrt{2x+1}-1=\sqrt{2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}-1$

따라서 $y=\sqrt{2x+1}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 제 1, 3 사분면을 지난다.



답 ②

0799

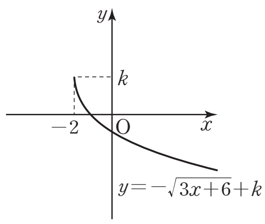


따라서 제 4 사분면을 지나는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0800

$y=-\sqrt{3x+6}+k=-\sqrt{3(x+2)}+k$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=-\sqrt{3x+6}+k$의 그래프가 제 2, 3, 4 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $k>0$이고, $x=0$일 때 $y<0$이어야 하므로



$-\sqrt{6}+k<0 \qquad \therefore 0<k<\sqrt{6}$

따라서 정수 k는 1, 2의 2개이다.

답 2

참고 $x=0$일 때, $y=0$이면 제 3 사분면을 지나지 않고, $y>0$이면 제 1 사분면을 지난다.

0801

|전략| 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-ax}\ (a>0)$의 그래프를 평행이동한 것임을 이용한다.

$-a<0$이므로 $a>0$

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{-a(x-1)}-2$ ...... ㉠

㉠의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\sqrt{a}-2,\ \sqrt{a}=2 \qquad \therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{-4(x-1)}-2=\sqrt{-4x+4}-2$

따라서 $a=4,\ b=4,\ c=-2$이므로

$a+b+c=6$

답 ③

Lecture

주어진 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프가 오른쪽을 향해 뻗어나가면 $a>0$이고, 왼쪽을 향해 뻗어나가면 $a<0$이다.

0802

주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x-1)}+2$ ...... ㉠

㉠의 그래프가 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{-2a}+2,\ \sqrt{-2a}=2 \qquad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{-2(x-1)}+2=-\sqrt{-2x+2}+2$

따라서 $a=-2,\ b=2,\ c=2$이므로

$abc=-8$

답 -8

0803

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x+2)}+1$ ...... ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{2a}+1,\ \sqrt{2a}=2 \qquad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{2(x+2)}+1=\sqrt{2x+4}+1$

따라서 $a=2,\ b=4,\ c=1$이므로

$a+b+c=7$

답 7

0804

주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x-m)}+n=-\sqrt{ax-am}+n$

이 함수가 $y=-\sqrt{ax-b}+c$와 같으므로

$b=am,\ c=n$

주어진 함수의 그래프에서 $a<0,\ m<0,\ n<0$이므로

$a<0,\ b>0,\ c<0$

답 $a<0,\ b>0,\ c<0$

0805

|전략| 주어진 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}\,(a<0)$의 그래프를 평행이동한 것임을 이용하여 $a,\ b,\ c$의 값을 먼저 구한다.

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x-1)}+1$ ...... ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=\sqrt{-a}+1,\ \sqrt{-a}=1 \qquad \therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{-(x-1)}+1=\sqrt{-x+1}+1$

따라서 $a=-1,\ b=1,\ c=1$이므로

$f(x)=\dfrac{1}{x-1}+1$

$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$

$\dfrac{1}{k-1}+1=2,\ k-1=1 \qquad \therefore k=2$

$\therefore f^{-1}(2)=2$

답 2

0806

주어진 함수의 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=a,\ y=b$이므로

$a<0,\ b>0$

$y=\sqrt{ax+1}+b$에서 $ax+1\geq 0,\ ax\geq -1$

$\therefore x\leq -\dfrac{1}{a}\ (\because a<0)$

즉, 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\leq -\dfrac{1}{a}\right\}$이다.

또, $\sqrt{ax+1}\geq 0$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\geq b\}$이다.

이때, $-\dfrac{1}{a}>0,\ b>0$이므로 $y=\sqrt{ax+1}+b$의 그래프의 개형은 ②와 같다.

답 ②

0807

|전략| 주어진 함수를 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그려 본다.

① $3x+9\geq 0$에서 $x\geq -3$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x\geq -3\}$이다.

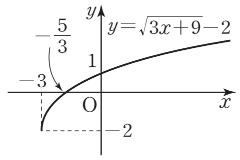
② $\sqrt{3x+9}\geq 0$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\geq -2\}$이다.

③ $y=\sqrt{3x+9}-2$에 $y=0$을 대입하면 $x=-\dfrac{5}{3}$

따라서 그래프는 x축과 점 $\left(-\dfrac{5}{3},\ 0\right)$에서 만난다.

④ $y=\sqrt{3x+9}-2=\sqrt{3(x+3)}-2$

따라서 $y=\sqrt{3x+9}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 제 4 사분면을 지나지 않는다.



$-y=-\sqrt{3x}$ $\quad \therefore y=\sqrt{3x}$

⑤ $y=\sqrt{3x+9}-2$의 그래프는 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 평행이동만해서는 겹쳐지게 할 수 없다.

따라서 옳은 것은 ④이다. 답 ④

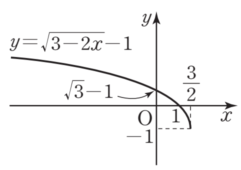
0808

① $3-2x\geq 0$에서 $x\leq\frac{3}{2}$이므로 정의역은 $\left\{x \middle| x\leq\frac{3}{2}\right\}$이다.

② $\sqrt{3-2x}\geq 0$이므로 치역은 $\{y|y\geq -1\}$이다.

③ $y=\sqrt{3-2x}-1=\sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}-1$

따라서 $y=\sqrt{3-2x}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.



④ $y=\sqrt{3-2x}-1$에 $x=0$을 대입하면 $y=\sqrt{3}-1$

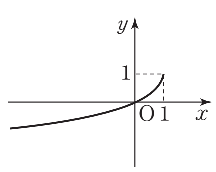
따라서 그래프는 y축과 점 $(0,\ \sqrt{3}-1)$에서 만난다.

⑤ 함수 $y=\sqrt{3-2x}+1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=\sqrt{3-2x}+1$, 즉 $y=-\sqrt{3-2x}-1$이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0809

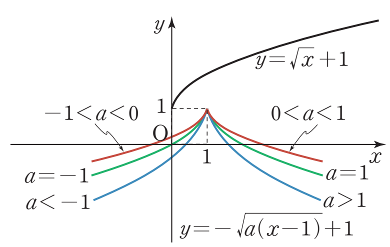
ㄱ. $a=-1$일 때, $y=-\sqrt{-(x-1)}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 제 1, 3 사분면을 지난다.



ㄴ. $a>0$일 때, $-\sqrt{a(x-1)}\leq 0$이므로 치역은 $\{y|y\leq 1\}$이다.

ㄷ. $a<0$일 때, $-\sqrt{a(x-1)}\leq 0$이므로 치역은 $\{y|y\leq 1\}$이다.

ㄹ. $y=-\sqrt{a(x-1)}+1$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $y=\sqrt{x}+1$의 그래프와 만나지 않는다.



따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0810

|전략| 주어진 함수를 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형하고, $a>0$이면 $\alpha\leq x\leq\beta$에서 $x=\alpha$일 때 최소, $x=\beta$일 때 최대임을 이용한다.

$y=\sqrt{2x+k}+4=\sqrt{2\left(x+\frac{k}{2}\right)}+4$

이므로 $y=\sqrt{2x+k}+4$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{k}{2}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

즉, $-2\leq x\leq 4$에서 $x=-2$일 때 최솟값을 갖고, $x=4$일 때 최댓값 8을 가지므로

$8=\sqrt{2\cdot 4+k}+4$에서 $4=\sqrt{8+k}$

$16=8+k \qquad \therefore k=8$

따라서 $y=\sqrt{2x+8}+4$는 $x=-2$일 때 최솟값 6을 갖는다. 답 ④

$y=\sqrt{2\cdot(-2)+8}+4=\sqrt{4}+4=6$

0811

$y=\sqrt{4x+1}+1=\sqrt{4\left(x+\frac{1}{4}\right)}+1$

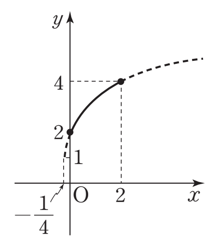
이므로 $y=\sqrt{4x+1}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$0\leq x\leq 2$에서 $y=\sqrt{4x+1}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, $x=2$일 때 최댓값 4, $x=0$일 때 최솟값 2를 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$4+2=6$



답 ④

0812

$y=\sqrt{4-3x}+3=\sqrt{-3\left(x-\frac{4}{3}\right)}+3$

이므로 $y=\sqrt{4-3x}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

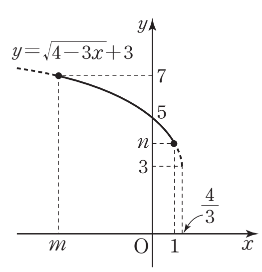
$m\leq x\leq 1$에서 $y=\sqrt{4-3x}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. … ❶

즉, $x=m$일 때 최댓값 7을 가지므로

$7=\sqrt{4-3m}+3$에서

$4=\sqrt{4-3m}$, $16=4-3m$

$\therefore m=-4$ … ❷



또, $x=1$일 때 최솟값 n을 가지므로

$n=\sqrt{4-3\cdot 1}+3=4$ … ❸

$\therefore m+n=-4+4=0$ … ❹

답 0

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=\sqrt{4-3x}+3$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❷ 최댓값을 이용하여 m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 최솟값 n을 구할 수 있다.	30 %
❹ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	10 %

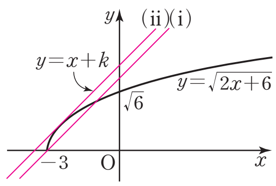
0813

|전략| $y=\sqrt{2x+6}$의 그래프와 직선 $y=x+k$를 좌표평면 위에 그려 보고 서로 다른 두 점에서 만나는 경우를 알아본다.

$y=\sqrt{2x+6}=\sqrt{2(x+3)}$

이므로 $y=\sqrt{2x+6}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

또, $y=x+k$는 기울기가 1, y절편이 k인 직선이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-3,\ 0)$을 지날 때,

$0=-3+k \qquad \therefore k=3$

(ii) $y=\sqrt{2x+6}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때,

$\sqrt{2x+6}=x+k$의 양변을 제곱하면

$2x+6=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2-6=0$

위의 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-6)=0$

$-2k+7=0 \qquad \therefore k=\frac{7}{2}$

(i), (ii)에서 $3\le k<\frac{7}{2}$

답 $3\le k<\frac{7}{2}$

0814

$-\sqrt{3x-2}=-x+k$의 양변을 제곱하면

$3x-2=x^2-2kx+k^2$

$\therefore x^2-(2k+3)x+k^2+2=0$

위의 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

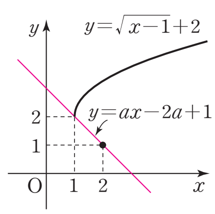
$D=(2k+3)^2-4(k^2+2)=0$

$12k+1=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{12}$

답 ②

0815

$y=\sqrt{x-1}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=ax-2a+1$, 즉 $a(x-2)+(1-y)=0$은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(2,\ 1)$을 지난다.



이때, 그래프와 직선이 만나려면 기울기 a의 값은 0보다 크거나 점 $(1,\ 2)$를 지날 때보다 작거나 같아야 한다.

직선 $y=ax-2a+1$이 점 $(1,\ 2)$를 지날 때

$2=a-2a+1 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore a\le-1$ 또는 $a>0$

답 $a\le-1$ 또는 $a>0$

0816

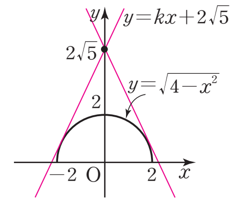
$A\cap B=\varnothing$이므로 함수 $y=\sqrt{4-x^2}$의 그래프와 직선 $y=kx+2\sqrt{5}$는 만나지 않는다.

$y=\sqrt{4-x^2}$의 양변을 제곱하면

$y^2=4-x^2$

$\therefore x^2+y^2=4\ (y\ge0)$

즉, 함수 $y=\sqrt{4-x^2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 중심이 점 $(0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원에서 $y\ge0$인 부분이다. 또, 직선 $y=kx+2\sqrt{5}$는 k의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 2\sqrt{5})$를 지난다.



직선 $y=kx+2\sqrt{5}$가 원 $x^2+y^2=4$ $(y\ge0)$에 접할 때, 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=kx+2\sqrt{5}$, 즉 $kx-y+2\sqrt{5}=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$\frac{|2\sqrt{5}|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=2$에서 $\sqrt{k^2+1}=\sqrt{5}$

양변을 제곱하면 $k^2+1=5$, $k^2=4$

$\therefore k=\pm2$

따라서 그래프와 직선이 만나지 않으려면 $-2<k<2$

답 $-2<k<2$

0817

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프의 역함수가 점 $(\alpha,\ \beta)$를 지나면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(\beta,\ \alpha)$를 지난다.

함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(1,\ 4)$를 지나므로

$\sqrt{a+b}=4 \qquad \therefore a+b=16$ ······ ㉠

또, 함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}$의 역함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 4)$를 지나면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(4,\ 1)$을 지나므로

$\sqrt{4a+b}=1 \qquad \therefore 4a+b=1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5$, $b=21$

따라서 $f(x)=\sqrt{-5x+21}$이므로

$f(-3)=\sqrt{-5\cdot(-3)+21}=6$

답 6

0818

$y=\sqrt{x-2}+1$에서 $y-1=\sqrt{x-2}$

양변을 제곱하면 $(y-1)^2=x-2$

$\therefore x=(y-1)^2+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=(x-1)^2+2$

이때, 함수 $y=\sqrt{x-2}+1$의 치역은 $\{y\,|\,y\ge1\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge1\}$이다.

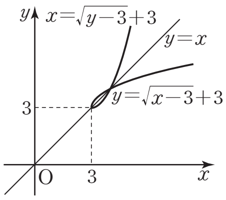
따라서 주어진 함수의 역함수는 $y=x^2-2x+3\ (x\ge1)$이므로

$a=-2$, $b=3$, $c=1$

$\therefore a+b+c=2$

답 ③

0819



$y=\sqrt{x-3}+3$, $x=\sqrt{y-3}+3$은 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 또, 오른쪽 그림에서 알 수 있듯이 $y=\sqrt{x-3}+3$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 두 함수의 그래프의 교점과 같다. … ❶

$\sqrt{x-3}+3=x$에서 $\sqrt{x-3}=x-3$

양변을 제곱하면 $x-3=x^2-6x+9$

$x^2-7x+12=0$, $(x-3)(x-4)=0$

$\therefore$ $x=3$ 또는 $x=4$ … ❷

따라서 주어진 두 함수의 그래프는 두 점 $(3,\ 3)$, $(4,\ 4)$에서 만나므로 구하는 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(4-3)^2+(4-3)^2}=\sqrt{2}$ … ❸

답 $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 두 함수의 그래프가 역함수 관계임을 이용할 수 있다.	30 %
❷ 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %

0820

$y=\sqrt{2x-a}+2$와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=\sqrt{2x-a}+2$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{2x-a}+2=x$에서 $\sqrt{2x-a}=x-2$

양변을 제곱하면 $2x-a=x^2-4x+4$

$\therefore$ $x^2-6x+a+4=0$

이 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 두 교점의 좌표가 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\beta,\ \beta)$이므로

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=2\sqrt{2}$, $(\alpha-\beta)^2=4$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4$

이때, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=a+4$이므로

$6^2-4(a+4)=4$, $4a=16$

$\therefore$ $a=4$

답 ⑤

0821

|전략| $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$(f\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(2)=(f\circ g^{-1}\circ \overbrace{f\circ f^{-1}}^{I})(2)$

$=(f\circ g^{-1})(2)=f(g^{-1}(2))$

$g^{-1}(2)=k$라 하면 $g(k)=2$

$\sqrt{k-1}=2$에서 $k-1=4$ $\therefore$ $k=5$

$\therefore$ $f(g^{-1}(2))=f(5)=\frac{4}{5+1}-1=-\frac{1}{3}$

답 ②

0822

$(f^{-1}\circ g)^{-1}(5)=(g^{-1}\circ f)(5)=g^{-1}(\underline{f(5)})$ $f(5)=\sqrt{2\cdot5+6}+2=6$

$=g^{-1}(6)$

$g^{-1}(6)=k$라 하면 $g(k)=6$

$\sqrt{k+3}=6$에서 양변을 제곱하면

$k+3=36$ $\therefore$ $k=33$

$\therefore$ $(f^{-1}\circ g)^{-1}(5)=33$

답 33

0823

$(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(a)=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(a)))=\frac{5}{4}$이므로

$f\left(f\left(f\left(\frac{5}{4}\right)\right)\right)=a$

$\frac{5}{4}>1$이므로 $f\left(\frac{5}{4}\right)=-2\sqrt{\frac{5}{4}-1}+1=0$

$0<1$이므로 $f(0)=\frac{0-2}{0-1}=2$

$2>1$이므로 $f(2)=-2\sqrt{2-1}+1=-1$

$\therefore$ $a=f\left(f\left(f\left(\frac{5}{4}\right)\right)\right)=f(f(0))=f(2)=-1$

답 ②

STEP 3 내신 마스터

0824

유형 01 무리식의 값이 실수가 되기 위한 조건

|전략| $\sqrt{f(x)}$의 값이 실수가 되려면 $f(x)\ge0$이어야 한다.

$-2x^2+2x+24\ge0$에서

$x^2-x-12\le0$, $(x-4)(x+3)\le0$

$\therefore$ $-3\le x\le4$

따라서 정수 x는 -3, -2, $\cdots$, 3, 4로 그 합은 4이다.

답 ③

0825

유형 03 음수의 제곱근의 성질

|전략| $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이면 $a\ge0$, $b<0$임을 이용하여 x의 값의 범위를 먼저 구한다.

$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-9}}=-\sqrt{\frac{x+2}{x^2-9}}$이므로

$x+2\ge0$, $x^2-9<0$

$x+2\ge0$에서 $x\ge-2$ …… ㉠

$x^2-9<0$에서 $(x-3)(x+3)<0$

$\therefore$ $-3<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-2\le x<3$

따라서 $x+4>0$, $x-5<0$이므로

$\sqrt{(x+4)^2}+\sqrt{(x-5)^2}=|x+4|+|x-5|$

$=(x+4)-(x-5)=9$

답 ⑤

0826

유형 04 분모의 유리화

|전략| 먼저 분모의 유리화를 이용하여 $\dfrac{1}{f(n)}$을 간단히 한다.

$\dfrac{1}{f(n)}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$이므로

$$\dfrac{1}{f(n)}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$
$$=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$\therefore \dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+\cdots+\dfrac{1}{f(99)}$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$$
$$=\sqrt{100}-1=10-1=9$$

답 ③

0827

유형 05 무리식의 값 구하기

|전략| 먼저 분모의 유리화를 이용하여 주어진 수와 식을 간단히 한다.

$x=\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\sqrt{5}+1$이므로

$$\dfrac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)+5\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$
$$=\dfrac{10x}{x-1}=\dfrac{10(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}}$$
$$=\dfrac{10\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{5}$$
$$=10+2\sqrt{5}$$

답 ⑤

0828

유형 05 무리식의 값 구하기

|전략| $x=\sqrt{a}-b$ 즉, $x+b=\sqrt{a}$의 양변을 제곱하여 $x^2+Ax+B=0$ 꼴로 변형한다.

$x=\sqrt{5}-2$에서 $x+2=\sqrt{5}$

양변을 제곱하면

$x^2+4x+4=5$

따라서 $x^2+4x-1=0$이므로

$$x^3+6x^2+7x+1=x(x^2+4x-1)+2x^2+8x+1$$
$$=x(\underbrace{x^2+4x-1}_{0})+2(\underbrace{x^2+4x-1}_{0})+3$$
$$=3$$

답 ②

다른 풀이 다항식의 세로셈을 이용하여 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x^2+4x-1\,\overline{\big)\,x^3+6x^2+7x+1} \\ \underline{x^3+4x^2-\ \ x\quad} \\ 2x^2+8x+1 \\ \underline{2x^2+8x-2} \\ 3 \end{array}$$

$$\therefore x^3+6x^2+7x+1=(\underbrace{x^2+4x-1}_{0})(x+2)+3$$
$$=3$$

0829

유형 06 무리식의 값 구하기 - $x=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $y=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 꼴

|전략| $x-y$, xy의 값을 구한 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

$x-y=(\sqrt{7}+1)-(\sqrt{7}-1)=2$

$xy=(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)=7-1=6$

이므로

$$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$$
$$=2^3+3\cdot6\cdot2=44$$

답 ④

0830

유형 08 무리함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

|전략| 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프이다.

$y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x+2)}-1$

이 그래프가 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=\sqrt{a}-1\qquad \therefore a=1$

$\therefore y=\sqrt{x+2}-1$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=-1$이므로

$a+b-c=4$

답 ④

0831

유형 08 무리함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

|전략| 평행이동을 이용하여 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프를 그리고, 넓이가 같은 부분을 찾는다.

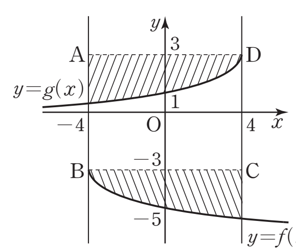
함수 $f(x)=-\sqrt{x+4}-3$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

또, 함수 $g(x)=-\sqrt{-x+4}+3=-\sqrt{-(x-4)}+3$이므로 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 다음 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 도형의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$6\cdot8=48$



답 ④

0832

유형 10 무리함수의 그래프와 미정계수 구하기

|전략| 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{ax}(a>0)$의 그래프를 평행이동한 것임을 이용한다.

주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x+2)}+1$ ······ ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=-\sqrt{2a}+1,\ \sqrt{2a}=2 \qquad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{2(x+2)}+1=-\sqrt{2x+4}+1$

따라서 $a=2,\ b=4,\ c=1$이므로

$a+b+c=7$

답 ②

0833

유형 **12 무리함수의 그래프의 성질**

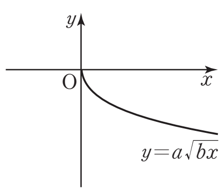
|전략| 함수 $y=a\sqrt{bx}$에서 정의역은 b의 부호, 치역은 a의 부호에 따라 달라진다.

ㄱ. $bx\geq0$을 만족시키는 x의 값들의 집합이 정의역이므로 b의 부호에 의하여 정의역이 결정된다.

ㄴ. 치역은 a의 부호에 의하여 결정된다. $b>0$이어도 $a<0$이면 치역은 $\{y\,|\,y\leq0\}$이다.

ㄷ. 함수 $y=a\sqrt{bx}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=a\sqrt{b(-x)}$, 즉 $y=a\sqrt{-bx}$이다.

ㄹ. $a<0,\ b>0$이면 정의역이 $\{x\,|\,x\geq0\}$, 치역이 $\{y\,|\,y\leq0\}$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제4사분면을 지난다.



따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

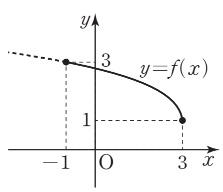
답 ⑤

0834

유형 **13 무리함수의 최대·최소**

|전략| $a>0$일 때와 $a<0$일 때로 나누어서 생각한다.

(i) $a>0$이면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-1$일 때 최댓값 3, $x=3$일 때 최솟값 1을 갖는다.



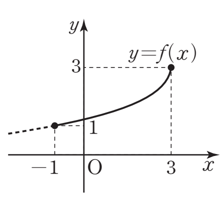
즉, $f(-1)=2a+b=3$,

$f(3)=b=1$

따라서 $a=1,\ b=1$이므로

$a^2+b^2=2$

(ii) $a<0$이면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-1$일 때 최솟값 1, $x=3$일 때 최댓값 3을 갖는다.



즉, $f(-1)=2a+b=1$,

$f(3)=b=3$

따라서 $a=-1,\ b=3$이므로

$a^2+b^2=10$

(i), (ii)에서 a^2+b^2의 최댓값은 10이다.

답 ⑤

0835

유형 **14 무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계**

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하는 경우 방정식 $\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이다.

함수 $y=\sqrt{5-x}$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+n$이 접하므로

$\sqrt{5-x}=-\frac{1}{2}x+n$의 양변을 제곱하면

$5-x=\frac{1}{4}x^2-nx+n^2,\ \frac{1}{4}x^2-(n-1)x+n^2-5=0$

$\therefore x^2-4(n-1)x+4n^2-20=0$

위의 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{2(n-1)\}^2-(4n^2-20)=0$

$-8n+24=0 \qquad \therefore n=3$

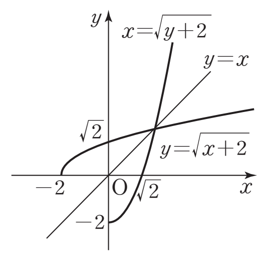
답 ③

0836

유형 **15 무리함수의 역함수**

|전략| $y=\sqrt{x+2}$와 $x=\sqrt{y+2}$는 서로 역함수임을 이용한다.

$y=\sqrt{x+2},\ x=\sqrt{y+2}$는 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 또, 오른쪽 그림에서 알 수 있듯이 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 두 함수의 그래프의 교점과 같다.



$\sqrt{x+2}=x$의 양변을 제곱하면

$x+2=x^2,\ x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=2\ (\because x\geq0)$

따라서 주어진 두 함수의 그래프의 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$이므로

$a=2,\ b=2$

$\therefore a+b=4$

답 ①

0837

유형 **14 무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계 + 15 무리함수의 역함수**

|전략| 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 접하면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$도 접한다.

$y=2\sqrt{x-3}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=2\sqrt{(x-a)-3}$이므로 $f(x)=2\sqrt{x-a-3}$

$y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 접하면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$도 접한다.

$2\sqrt{x-a-3}=x$의 양변을 제곱하면

$4(x-a-3)=x^2,\ x^2-4x+4a+12=0$

위의 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-(4a+12)=0$

$-4a-8=0 \qquad \therefore a=-2$

답 ④

0838

유형 **16** 무리함수의 합성함수와 역함수

|전략| $(f^{-1}\circ g)^{-1}(x)=(g^{-1}\circ f)(x)=g^{-1}(f(x))$임을 이용한다.

$$(f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=(g^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(\underbrace{f(3)}_{f(3)=\sqrt{3-2}+2=3})$$
$$=g^{-1}(3)$$

$g^{-1}(3)=k$라 하면 $g(k)=3$

$\dfrac{1}{k-2}+2=3$에서 $k-2=1$ $\quad\therefore k=3$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=3$

답 ③

0839

유형 **02** 제곱근의 성질

|전략| $x+a$와 $x-a+2$를 a에 대한 식으로 나타낸 후 $\sqrt{A^2}=|A|$임을 이용한다.

$\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}(1-a)$의 양변을 제곱하면 $x=\dfrac{1}{4}(1-a)^2$

$x+a=\dfrac{1}{4}(1-a)^2+a=\dfrac{1}{4}(1+a)^2$

$x-a+2=\dfrac{1}{4}(1-a)^2-a+2=\dfrac{1}{4}(3-a)^2$ ··· ❶

$a<-1$에서 $1+a<0$, $3-a>0$이므로

$\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a+2}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{4}(1+a)^2}-\sqrt{\dfrac{1}{4}(3-a)^2}$

$=\dfrac{1}{2}|1+a|-\dfrac{1}{2}|3-a|$

$=\dfrac{1}{2}(-1-a)-\dfrac{1}{2}(3-a)$

$=-2$ ··· ❷

답 -2

채점 기준	배점
❶ $x+a$와 $x-a+2$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	3점
❷ $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a+2}$의 값을 구할 수 있다.	3점

0840

유형 **11** 유리함수와 무리함수의 그래프

|전략| 주어진 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}\,(a>0)$의 그래프를 평행이동한 것임을 이용하여 a, b, c의 값을 먼저 구한다.

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x+1)}+2$ ······ ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{a}+2$, $\sqrt{a}=1$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $y=\sqrt{x+1}+2$

$\therefore a=1$, $b=1$, $c=2$ ··· ❶

$y=\dfrac{cx+3}{ax+b}=\dfrac{2x+3}{x+1}$에서

$y=\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+2$

따라서 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=2$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-1,\ 2)$이다. ··· ❷

답 $(-1,\ 2)$

채점 기준	배점
❶ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	3점
❷ 두 점근선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	3점

0841

유형 **14** 무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계

|전략| 집합 $A\cap B$의 원소의 개수는 함수 $y=\sqrt{1-x^2}$의 그래프와 직선 $y=k(x+2)$의 교점의 개수와 같다.

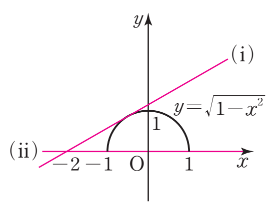
$n(A\cap B)=2$이므로 함수 $y=\sqrt{1-x^2}$의 그래프와 직선 $y=k(x+2)$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$y=\sqrt{1-x^2}$의 양변을 제곱하면 $y^2=1-x^2$

$\therefore x^2+y^2=1\ (y\ge 0)$

즉, 함수 $y=\sqrt{1-x^2}$의 그래프는 중심이 $(0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원에서 $y\ge 0$인 부분이다.

또, 직선 $y=k(x+2)$는 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 0)$을 지난다. ··· ❶



(i) 직선 $y=k(x+2)$가 원 $x^2+y^2=1(y\ge 0)$에 접할 때, 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=k(x+2)$, 즉 $kx-y+2k=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 1과 같으므로

$\dfrac{|0-0+2k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=1$에서

$|2k|=\sqrt{k^2+1}$

양변을 제곱하면 $4k^2=k^2+1$, $k^2=\dfrac{1}{3}$

$\therefore k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $(\because k>0)$ ··· ❷

(ii) 직선 $y=k(x+2)$가 x축일 때, 기울기가 0이므로 $k=0$ ··· ❸

(i), (ii)에서 $0\le k<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ··· ❹

답 $0\le k<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

채점 기준	배점
❶ 무리함수 $y=\sqrt{1-x^2}$의 그래프와 직선의 개형을 알 수 있다.	2점
❷ (i)일 때, k의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ (ii)일 때, k의 값을 구할 수 있다.	2점
❹ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	1점

0842

유형 **07** 무리함수의 정의역과 치역

|전략| 함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\ne 0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$이다.

(1) $y=\dfrac{ax+1}{x-2}=\dfrac{a(x-2)+2a+1}{x-2}=\dfrac{2a+1}{x-2}+a$

따라서 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=a$이므로 $a=3$, $b=2$

(2) $f(x)=-\sqrt{ax+b}=-\sqrt{3x+2}$

$3x+2\geq 0$에서 $x\geq -\frac{2}{3}$이므로 주어진 함수의 정의역은

$\left\{x\,\middle|\,x\geq -\frac{2}{3}\right\}$

따라서 정의역에 속하는 정수의 최솟값은 0이다.

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) a, b의 값을 구할 수 있다.	4점
(2) 주어진 함수의 정의역에 속하는 정수의 최솟값을 구할 수 있다.	6점

0843

유형 09 무리함수의 그래프가 지나는 사분면

|전략| 이차함수의 그래프의 모양, 축의 위치, y절편의 위치 등을 살펴보고 계수의 부호를 판별한다.

(1) 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $-\frac{b}{2a}>0$에서 $b<0$

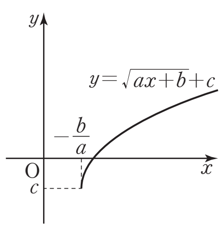
y절편이 x축의 아래쪽에 있으므로 $c<0$

$\therefore a>0,\ b<0,\ c<0$

(2) $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$

따라서 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

이때, $a>0$, $-\frac{b}{a}>0$, $c<0$이므로 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 제 1, 4 사분면을 지난다.



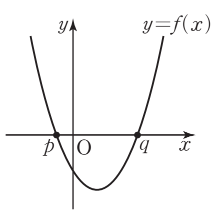
답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) a, b, c의 부호를 결정할 수 있다.	6점
(2) 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 지나는 사분면을 구할 수 있다.	6점

다른 풀이 (1) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하므로 $a>0$ ...... ㉠

오른쪽 그림에서 함수 $f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 각각 p, q라 하면 $p<0$, $q>0$이고, $|p|<|q|$이므로

$p+q>0$, $pq<0$ ...... ㉡



이때, 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 p, q이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$p+q=-\frac{b}{a}$, $pq=\frac{c}{a}$ ...... ㉢

㉡, ㉢에서 $-\frac{b}{a}>0$, $\frac{c}{a}<0$

㉠에서 $a>0$이므로 $b<0$, $c<0$

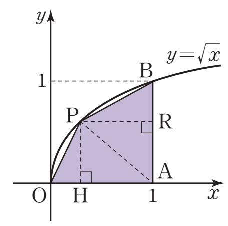
$\therefore a>0,\ b<0,\ c<0$

창의·융합 교과서 속 심화문제

0844

|전략| 사각형 OABP의 넓이는 두 삼각형 OAP, ABP의 넓이의 합이다.

점 P의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t})$로 놓고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 R라 하면



$\triangle OAP=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{PH}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{t}$

$\triangle ABP=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{PR}=\frac{1}{2}(1-t)$

$\square OABP=\triangle OAP+\triangle ABP$이므로

$\square OABP=\frac{1}{2}(-t+\sqrt{t}+1)$

$=-\frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{t}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right\}$

$=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{t}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{8}$

따라서 사각형 OABP의 넓이의 최댓값은 $\frac{5}{8}$이다.

답 ⑤

0845

|전략| 함수 $y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프와 직선 $y=mx+1$을 좌표평면 위에 그려 보고 서로 다른 두 점에서 만나는 경우를 알아본다.

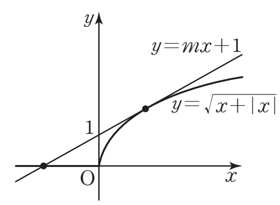
$x\geq 0$일 때, $y=\sqrt{x+|x|}=\sqrt{x+x}=\sqrt{2x}$

$x<0$일 때, $y=\sqrt{x+|x|}=\sqrt{x-x}=0$

$\therefore y=\sqrt{x+|x|}=\begin{cases}\sqrt{2x} & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$

또, 직선 $y=mx+1$, 즉 $mx-y+1=0$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

함수 $y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프와 직선 $y=mx+1$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=mx+1$이 함수 $y=\sqrt{2x}\,(x\geq 0)$의 그래프와 접해야 한다.



$\sqrt{2x}=mx+1$의 양변을 제곱하면

$2x=m^2x^2+2mx+1$ $\quad\therefore m^2x^2+2(m-1)x+1=0$

위의 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(m-1)^2-m^2=0$

$-2m+1=0$ $\quad\therefore m=\frac{1}{2}$

답 ③

0846

|전략| $q-p=k$라 하면 점 $(p,\ q)$는 직선 $y=x+k$ 위의 점이므로 그래프를 이용하여 k의 최댓값을 구한다.

함수 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=\sqrt{-x+2}$

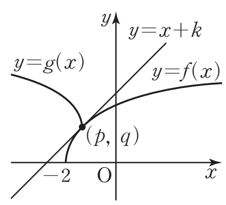
$y=\sqrt{-x+2}$의 그래프를 x축의 방향으로 $p-2$만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{-\{x-(p-2)\}+2}+q$

$\quad=\sqrt{-x+p}+q=\sqrt{-(x-p)}+q$

즉, $g(x)=\sqrt{-(x-p)}+q$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이고, 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 만나려면 점 $(p,\ q)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프의 위에 있거나 그래프의 아랫 부분에 있어야 한다.

이때, $q-p=k$라 하면 점 $(p,\ q)$는 직선 $y-x=k$, 즉 $y=x+k$ 위의 점이고, k의 값은 직선 $y=x+k$의 y절편이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x+k$가 함수 $y=f(x)$의 그래프에 접할 때 최대이다.



$\sqrt{x+2}=x+k$의 양변을 제곱하면

$x+2=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2-2=0$

위의 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2-2)=0$

$-4k+9=0 \qquad \therefore k=\dfrac{9}{4}$

따라서 $q-p$의 최댓값은 $\dfrac{9}{4}$이다. 답 ⑤

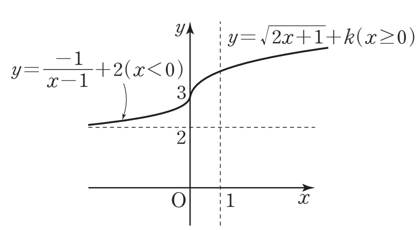
0847

|전략| 두 조건 ㈎, ㈏를 만족시키도록 $y=f(x)$의 그래프를 그려서 k의 값을 먼저 찾는다.

$y=\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{2(x-1)-1}{x-1}=\dfrac{-1}{x-1}+2\ (x<0)$

$y=\sqrt{2x+1}+k=\sqrt{2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}+k\ (x\ge0)$

이때, 조건 ㈎에서 함수 f의 치역이 $\{y\,|\,y>2\}$이고 조건 ㈏에서 함수 f가 일대일함수이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $f(0)=1+k=3$이므로 $k=2$

$\therefore f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-3}{x-1} & (x<0)\\ \sqrt{2x+1}+2 & (x\ge0)\end{cases}$

$f(4)=\sqrt{8+1}+2=5$이므로

$5+f^{-1}(a)=4$에서 $f^{-1}(a)=-1$

즉, $f(-1)=a$

$\therefore a=\dfrac{-2-3}{-1-1}=\dfrac{5}{2}$ 답 ⑤

0848

|전략| $f(x)=\sqrt{2x+3}$과 $g(x)=\dfrac{1}{2}(x^2-3)(x\ge0)$은 서로 역함수 관계임을 이용한다.

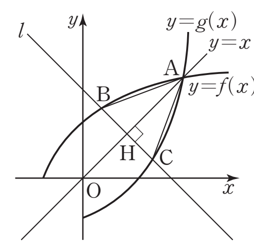
$y=\sqrt{2x+3}$의 양변을 제곱하면 $y^2=2x+3$

$\therefore x=\dfrac{1}{2}(y^2-3)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{1}{2}(x^2-3)$

이때, 함수 $f(x)=\sqrt{2x+3}$의 치역은 $\{y\,|\,y\ge0\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge0\}$이다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 또, 오른쪽 그림에서 알 수 있듯이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 두 함수의 그래프의 교점과 같다.



$\sqrt{2x+3}=x$의 양변을 제곱하면

$2x+3=x^2$, $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0 \qquad \therefore x=3\ (\because x\ge0)$

$\therefore \mathrm{A}(3,\ 3)$

점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면

직선 l의 방정식은 $y-2=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$, 즉 $x+y-\dfrac{5}{2}=0$이고, $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이는 점 A와 직선 l 사이의 거리와 같으므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{\left|3+3-\dfrac{5}{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{\dfrac{7}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$

$\overline{\mathrm{BH}}$의 길이는 점 $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ 2\right)$와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{\left|\dfrac{1}{2}-2\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

이때, $\overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$이므로 구하는 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AH}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{7\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{21}{8}$ 답 ④

본책 132~145쪽

7 | 경우의 수와 순열

STEP 1 개념 마스터 ❶

0849

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 차가 3이 되는 경우

$(1,\ 4)$, $(2,\ 5)$, $(3,\ 6)$, $(4,\ 1)$, $(5,\ 2)$, $(6,\ 3)$의 6가지

(ii) 눈의 수의 차가 4가 되는 경우

$(1,\ 5)$, $(2,\ 6)$, $(5,\ 1)$, $(6,\ 2)$의 4가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$6+4=10$ 답 10

0850

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 5가 되는 경우

$(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$, $(4,\ 1)$의 4가지

(ii) 눈의 수의 합이 10이 되는 경우

$(4,\ 6)$, $(5,\ 5)$, $(6,\ 4)$의 3가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$4+3=7$ 답 7

0851

7의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

$7,\ 14,\ 21,\ \cdots,\ 49$의 7가지

11의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

$11,\ 22,\ 33,\ 44$의 4가지

두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$7+4=11$ 답 11

다른 풀이 **집합을 이용한 합의 법칙으로 풀기**

7의 배수의 집합을 A, 11의 배수의 집합을 B라 하면

$n(A)=7$, $n(B)=4$

$A\cap B$는 7과 11의 최소공배수인 77의 배수의 집합이므로

$A\cap B=\varnothing \qquad \therefore n(A\cap B)=0$

따라서 7의 배수 또는 11의 배수의 집합은 $A\cup B$이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)=7+4=11$

0852

3의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

$3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 48$의 16가지

5의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

$5,\ 10,\ 15,\ \cdots,\ 50$의 10가지

3과 5의 최소공배수인 15의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

$15,\ 30,\ 45$의 3가지

따라서 구하는 경우의 수는

$16+10-3=23$ 답 23

다른 풀이 **집합을 이용한 합의 법칙으로 풀기**

3의 배수의 집합을 A, 5의 배수의 집합을 B라 하면

$n(A)=16$, $n(B)=10$

$A\cap B$는 3과 5의 최소공배수인 15의 배수의 집합이므로

$n(A\cap B)=3$

따라서 3의 배수 또는 5의 배수의 집합은 $A\cup B$이므로

$$\begin{aligned}n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=16+10-3=23\end{aligned}$$

0853

서울에서 대전으로 가는 방법은 $a,\ b,\ c,\ d$의 4가지이고, 대전에서 서울로 오는 방법은 $x,\ y$의 2가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$4\cdot2=8$ 답 8

0854

48을 소인수분해하면

$48=2^4\cdot3$

2^4의 양의 약수는 $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4$의 5개, 3의 양의 약수는 $1,\ 3$의 2개이다.

이때, 2^4의 양의 약수와 3의 양의 약수에서 각각 하나씩 택하여 곱한 수는 모두 48의 약수가 된다.

$\times$	1	3
1	1	3
2	2	$2\cdot3$
2^2	2^2	$2^2\cdot3$
2^3	2^3	$2^3\cdot3$
2^4	2^4	$2^4\cdot3$

따라서 구하는 약수의 개수는

$5\cdot2=10$ 답 10

0855

72를 소인수분해하면

$72=2^3\cdot3^2$

2^3의 양의 약수는 $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3$의 4개, 3^2의 양의 약수는 $1,\ 3,\ 3^2$의 3개이다.

이때, 2^3의 양의 약수와 3^2의 양의 약수에서 각각 하나씩 택하여 곱한 수는 모두 72의 약수가 된다.

$\times$	1	3	3^2
1	1	3	3^2
2	2	$2\cdot3$	$2\cdot3^2$
2^2	2^2	$2^2\cdot3$	$2^2\cdot3^2$
2^3	2^3	$2^3\cdot3$	$2^3\cdot3^2$

따라서 구하는 약수의 개수는

$4\cdot3=12$ 답 12

0856

바지를 입는 방법의 수는 4, 셔츠를 입는 방법의 수는 5, 점퍼를 입는 방법의 수는 3이므로 구하는 방법의 수는

$4\cdot5\cdot3=60$ 답 60

STEP 2 유형 마스터 ❶

0857
|전략| 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합으로 만들 수 있는 8의 약수는 $2,\ 4,\ 8$이다.

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 2가 되는 경우
$(1,\ 1)$의 1가지

(ii) 눈의 수의 합이 4가 되는 경우
$(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$의 3가지

(iii) 눈의 수의 합이 8이 되는 경우
$(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3),\ (6,\ 2)$의 5가지

(i), (ii), (iii)은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$1+3+5=9$

답 9

0858
두 번 꺼낸 카드에 적힌 수를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

(i) $|a-b|=0$이 되는 경우
$(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$의 6가지

(ii) $|a-b|=1$이 되는 경우
$(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 5),\ (5,\ 4),$
$(4,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 1)$의 10가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$6+10=16$

답 16

0859
10과 서로소인 수는 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 수이므로 1에서 100까지의 자연수 중에서 2의 배수 또는 5의 배수를 제외하면 된다.

2의 배수의 집합을 A, 5의 배수의 집합을 B라 하면
$n(A)=50,\ n(B)=20$
$A\cap B$는 2와 5의 최소공배수인 10의 배수의 집합이므로
$n(A\cap B)=10$
이때, 2의 배수 또는 5의 배수의 집합은 $A\cup B$이므로
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=50+20-10=60$
따라서 구하는 수의 개수는
$100-60=40$

답 ②

0860
|전략| $x,\ y,\ z$ 중 계수의 절댓값이 큰 것부터 수를 대입하여 조건을 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$를 찾는다.

$x,\ y,\ z$가 자연수이므로 $x+2y+3z=10$에서

(i) $z=1$일 때, $x+2y=7$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(5,\ 1),\ (3,\ 2),\ (1,\ 3)$의 3개

(ii) $z=2$일 때, $x+2y=4$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(2,\ 1)$의 1개

따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는
$3+1=4$

답 4

0861
$x,\ y$가 자연수이므로 $x+2y<7$을 만족시키는 경우는
$x+2y=3,\ x+2y=4,\ x+2y=5,\ x+2y=6$

(i) $x+2y=3$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(1,\ 1)$의 1개

(ii) $x+2y=4$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(2,\ 1)$의 1개

(iii) $x+2y=5$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(1,\ 2),\ (3,\ 1)$의 2개

(iv) $x+2y=6$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(2,\ 2),\ (4,\ 1)$의 2개

따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는
$1+1+2+2=6$

답 ②

다른 풀이

(i) $y=1$일 때, $x+2<7$, 즉 $x<5$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (4,\ 1)$의 4개

(ii) $y=2$일 때, $x+4<7$, 즉 $x<3$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(1,\ 2),\ (2,\ 2)$의 2개

따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는
$4+2=6$

0862
|전략| 이차방정식이 실근을 가지려면 (판별식)≥ 0임을 이용한다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면
$D=a^2-4b\geq 0 \qquad \therefore a^2\geq 4b$
이때, $a\in A,\ b\in A$이므로

(i) $a=0$일 때, $4b\leq 0$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(0,\ 0)$의 1개

(ii) $a=1$일 때, $4b\leq 1$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 0)$의 1개

(iii) $a=2$일 때, $4b\leq 4$, 즉 $b\leq 1$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(2,\ 0),\ (2,\ 1)$의 2개

(iv) $a=3$일 때, $4b\leq 9$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(3,\ 0),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2)$의 3개

(v) $a=4$일 때, $4b\leq 16$, 즉 $b\leq 4$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(4,\ 0),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4)$의 5개

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는
$1+1+2+3+5=12$

답 12

Lecture

이차방정식의 근의 판별

이차방정식의 판별식을 D라 할 때
(1) 서로 다른 두 실근을 갖는다. ⇨ $D>0$
(2) 중근을 갖는다. ⇨ $D=0$
(1), (2): 실근을 갖는다. ⇨ $D\geq 0$
(3) 서로 다른 두 허근을 갖는다. ⇨ $D<0$

0863

1000원, 5000원, 10000원짜리 지폐를 각각 x장, y장, z장 사용한다고 하면

$1000x+5000y+10000z=34000$

$\therefore x+5y+10z=34$ ...... ㉠

그런데 세 종류의 지폐를 각각 적어도 한 장씩 사용해야 하므로 이 식을 만족시키는 양의 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하면 된다.

(i) $z=1$일 때, ㉠에서 $x+5y=24$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(19, 1)$, $(14, 2)$, $(9, 3)$, $(4, 4)$의 4개

(ii) $z=2$일 때, ㉠에서 $x+5y=14$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(9, 1)$, $(4, 2)$의 2개

따라서 구하는 방법의 수는

$4+2=6$ 답 ④

0864

|전략| 백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것과 십의 자리와 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것을 생각해 본다.

백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

3, 6, 9의 3개

십의 자리와 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 각각

1, 3, 5, 7, 9의 5개

따라서 구하는 자연수의 개수는

$3\cdot5\cdot5=75$ 답 75

0865

x의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개

y의 값이 될 수 있는 것은 -1, 0의 2개

$\therefore n(C)=4\cdot2=8$ 답 ⑤

0866

|전략| 곱해지는 각 항의 문자가 모두 다르면 동류항이 생기지 않으므로 곱의 법칙을 이용하여 항의 개수를 구한다.

$(a+b+c)(p+q+r+s)(x+y)$를 전개하면 a, b, c에 p, q, r, s를 각각 곱하여 항이 만들어지고 그것에 다시 x, y를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 구하는 항의 개수는

$3\cdot4\cdot2=24$ 답 ⑤

Lecture

항의 개수

두 식 A, B를 곱할 때, 곱해지는 각 항의 문자가 모두 다르면 식 AB의 전개식의 항의 개수는

⇨ (식 A의 항의 개수)×(식 B의 항의 개수)

0867

세 눈의 수의 곱이 짝수인 경우의 수는

(전체 경우의 수)$-$(세 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수)

이때, 3개의 주사위를 던져 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$6\cdot6\cdot6=216$

또, 세 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수는

$3\cdot3\cdot3=27$

따라서 구하는 경우의 수는

$216-27=189$ 답 189

0868

|전략| 먼저 120과 180의 최대공약수를 구한 후 최대공약수의 약수가 5의 배수가 되는 것을 생각한다.

120과 180의 최대공약수는 60이므로 120과 180의 양의 공약수 중에서 5의 배수의 개수는 60의 양의 약수 중에서 5의 배수의 개수와 같다.

이때, 60을 소인수분해하면 $60=2^2\cdot3\cdot5$

5의 배수는 5를 소인수로 가지므로 60의 양의 약수 중 5의 배수의 개수는 $2^2\cdot3$의 양의 약수의 개수와 같다.

따라서 구하는 5의 배수의 개수는

$(2+1)(1+1)=6$ 답 ③

0869

108을 소인수분해하면 $108=2^2\cdot3^3$ … ❶

따라서 108의 양의 약수의 개수는

$(2+1)(3+1)=12$ $\therefore a=12$ … ❷

108의 양의 약수의 총합은

$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)=280$ $\therefore b=280$ … ❸

$\therefore a+b=12+280=292$ … ❹

답 292

채점 기준	비율
❶ 108을 소인수분해할 수 있다.	20 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

Lecture

자연수의 양의 약수의 총합

자연수 N이 $N=a^pb^qc^r$ (a, b, c는 서로 다른 소수, p, q, r는 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, N의 양의 약수의 총합은

⇨ $(1+a+a^2+\cdots+a^p)(1+b+b^2+\cdots+b^q)(1+c+c^2+\cdots+c^r)$

0870

480을 소인수분해하면 $480=2^5\cdot3\cdot5$

짝수는 2를 소인수로 가지므로 480의 양의 약수 중에서 짝수의 개수는 $2^4\cdot3\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같다.

$\therefore m=(4+1)(1+1)(1+1)=20$

3의 배수는 3을 소인수로 가지므로 480의 양의 약수 중에서 3의 배수의 개수는 $2^5\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같다.

$\therefore n=(5+1)(1+1)=12$

$\therefore m+n=20+12=32$ 답 32

0871

18을 소인수분해하면 $18=2\cdot3^2$이므로 자연수 n에 대하여

$18^n=2^n\cdot3^{2n}$

18^n의 양의 약수의 개수가 28이므로

$(n+1)(2n+1)=28,\ 2n^2+3n-27=0$

$(2n+9)(n-3)=0 \qquad \therefore n=3\ (\because n$은 자연수$)$

따라서 구하는 수는 18^3이다. 답 ②

0872

|전략| 1000원짜리 지폐 2장을 500원짜리 동전 4개로 바꾸어 지불할 수 있는 금액의 수를 생각해 본다.

(i) 지불 방법의 수

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은 0장, 1장, 2장의 3가지

500원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$a=3\cdot4\cdot5-1=59$

(ii) 지불 금액의 수

500원짜리 동전 2개로 지불하는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액은 같으므로 1000원짜리 지폐 2장을 500원짜리 동전 4개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 7개와 100원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.

500원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개, 5개, 6개, 7개의 8가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$b=8\cdot5-1=39$

$\therefore a-b=59-39=20$ 답 20

0873

10원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

50원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개의 3가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개의 3가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로 구하는 방법의 수는

$4\cdot3\cdot3-1=35$ 답 ③

0874

(i) 지불 방법의 수

10000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

5000원짜리 지폐를 지불하는 방법은 0장, 1장, 2장의 3가지

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장, 4장, 5장, 6장의 7가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$a=4\cdot3\cdot7-1=83$

(ii) 지불 금액의 수

5000원짜리 지폐 2장으로 지불하는 금액과 10000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액은 같고, 1000원짜리 지폐 5장으로 지불하는 금액과 5000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액은 같으므로 10000원짜리 지폐 3장과 5000원짜리 지폐 2장을 1000원짜리 지폐 40장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 1000원짜리 지폐 46장으로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, ⋯, 46장의 47가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$b=47-1=46$

$\therefore a-b=83-46=37$ 답 37

0875

|전략| 동시에 갈 수 없는 길이면 합의 법칙을, 동시에 가거나 이어지는 길이면 곱의 법칙을 이용한다.

(i) P → Q → S로 가는 방법의 수는 $2\cdot3=6$

(ii) P → R → S로 가는 방법의 수는 $2\cdot2=4$

따라서 구하는 방법의 수는

$6+4=10$ 답 ③

0876

(i) 집 → 학교 → 도서관 → 집으로 가는 방법의 수는 $2\cdot2\cdot3=12$

(ii) 집 → 도서관 → 학교 → 집으로 가는 방법의 수는 $3\cdot2\cdot2=12$

따라서 구하는 방법의 수는

$12+12=24$ 답 24

0877

(i) A → B → C로 가는 방법의 수는 $3\cdot1=3$

(ii) A → D → C로 가는 방법의 수는 $2\cdot2=4$

(iii) A → B → D → C로 가는 방법의 수는 $3\cdot2\cdot2=12$

(iv) A → D → B → C로 가는 방법의 수는 $2\cdot2\cdot1=4$

따라서 구하는 방법의 수는

$3+4+12+4=23$ 답 ④

0878

|전략| 각 영역을 칠하는 방법의 수를 구한 후 곱의 법칙을 이용하여 색칠하는 모든 방법의 수를 구한다.

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ 답 48

0879

(i) C에 A와 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 경우의 수는

$4\cdot3\cdot1\cdot3=36$ ⋯ ❶

(ii) C에 A와 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 경우의 수는

$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ ⋯ ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$36+48=84$ ⋯ ❸

답 84

채점 기준	비율
❶ C에 A와 같은 색을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ C에 A와 다른 색을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

0880

A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

이때, D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 경우와 B에 칠한 색과 다른 경우로 나누어진다.

(i) D에 B와 같은 색을 칠하는 경우

D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, B(D)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot1\cdot3=180$

(ii) D에 B와 다른 색을 칠하는 경우

D에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, B, D에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot2=240$

따라서 구하는 방법의 수는

$180+240=420$ 답 ④

다른 풀이

(i) 모두 다른 색을 칠하는 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

(ii) B와 D에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot2=120$

(iii) C와 E에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot2=120$

(iv) B와 D, C와 E에 각각 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3=60$

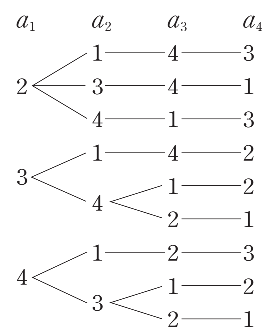
따라서 구하는 방법의 수는

$120+120+120+60=420$

0881

|전략| $a_1\neq1$, $a_2\neq2$, $a_3\neq3$, $a_4\neq4$이어야 함을 이용하여 조건을 만족시키는 수형도를 그려 본다.

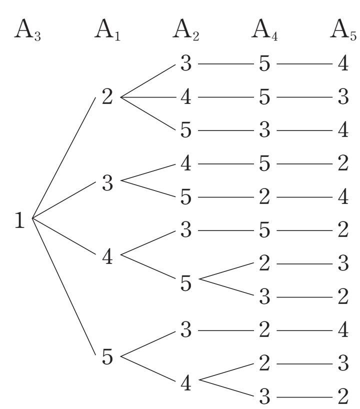
$(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)(a_4-4)\neq0$을 만족시키려면 $a_1\neq1$, $a_2\neq2$, $a_3\neq3$, $a_4\neq4$이어야 하므로 이를 만족시키는 경우는 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 9이다. 답 9

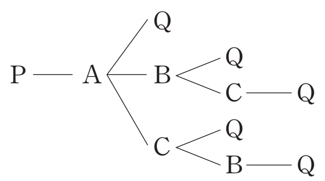
0882

1번 축구공은 A_3에 넣고 i번 축구공은 A_i에 넣지 않는 경우는 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 11이다. 답 11

0883
주어진 육면체의 꼭짓점 P에서 출발하여 꼭짓점 A로 움직인 후 꼭짓점 Q에 도착하는 경우는 다음과 같다.



같은 방법으로 꼭짓점 P에서 출발하여 꼭짓점 B 또는 C로 움직인 후 꼭짓점 Q에 도착하는 경우도 각각 5가지씩이다.
따라서 구하는 방법의 수는
$5\cdot3=15$ 답 15

STEP 1 개념 마스터 ❷

0884
${}_4P_2=4\cdot3=12$ 답 12

0885
$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ 답 24

0886
${}_6P_0=1$ 답 1

0887
${}_3P_3=3\cdot2\cdot1=6$ 답 6

0888
${}_nP_2=n(n-1)$이므로
$n(n-1)=20=5\cdot4 \qquad \therefore n=5$ 답 5

0889
$210=7\cdot6\cdot5$이므로
${}_7P_3=210 \qquad \therefore r=3$ 답 3

0890
${}_8P_r=\dfrac{8!}{(8-r)!}=\dfrac{8!}{5!}$이므로
$8-r=5 \qquad \therefore r=3$ 답 3

0891
${}_nP_n=n!$이고 $120=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$이므로
$n!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 \qquad \therefore n=5$ 답 5

0892
6명의 학생을 일렬로 세우는 방법의 수는
$6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ 답 720

0893
6명 중 2명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수는
${}_6P_2=6\cdot5=30$ 답 30

0894
5명의 가족을 일렬로 세우는 방법의 수는
$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ 답 120

0895
아빠를 제외한 4명을 일렬로 세우고, 그 앞에 아빠를 세우면 되므로 구하는 방법의 수는
$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ 답 24

0896
부모를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는
$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$
이때, 각 경우에 대하여 아빠, 엄마 두 사람이 자리를 바꾸는 방법의 수가 $2!=2$이므로 구하는 방법의 수는
$24\cdot2=48$ 답 48

STEP 2 유형 마스터 ❷

0897
|전략| ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$임을 이용한다. (단, $0<r\le n$)
$6{}_nP_2={}_nP_4$에서
$6n(n-1)=n(n-1)(n-2)(n-3)$
${}_nP_4$에서 $n\ge4$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면
$6=(n-2)(n-3)$, $n^2-5n=0$
$n(n-5)=0 \qquad \therefore n=5\ (\because n\ge4)$ 답 ②

0898
${}_nP_2+4{}_nP_1=28$에서
$n(n-1)+4n=28$, $n^2+3n-28=0$
$(n+7)(n-4)=0 \qquad \therefore n=4\ (\because n\ge2)$ 답 ③

0899
$4{}_{2n}P_2=5{}_{2n-1}P_2$에서
$4\cdot2n(2n-1)=5(2n-1)(2n-2)$

${}_{2n-1}P_2$에서 $2n-1 \geq 2$, 즉 $n \geq \frac{3}{2}$이므로 양변을 $2n-1$로 나누면

$4 \cdot 2n = 5(2n-2)$, $8n = 10n - 10$

$2n = 10$ $\quad \therefore n = 5$

답 5

0900

n명의 학생 중에서 2명을 택하는 순열의 수가 210이므로

${}_nP_2 = 210$

$n(n-1) = 210 = 15 \cdot 14$

$\therefore n = 15$

답 ⑤

0901

|전략| 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 순열의 수를 구한 다음 묶음 안에서의 순열의 수와 곱한다.

모음인 A와 E를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $5! = 120$

A와 E가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 방법의 수는

$120 \cdot 2 = 240$

답 240

0902

커플을 각각 한 사람으로 생각하여 세 사람을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3! = 6$

각각의 커플이 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2! \cdot 2! \cdot 2! = 8$

따라서 구하는 방법의 수는

$6 \cdot 8 = 48$

답 48

0903

국어책 4권을 한 묶음, 수학책 3권을 한 묶음으로 생각하여 4권을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4! = 24$

국어책끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $4! = 24$

수학책끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 방법의 수는

$24 \cdot 24 \cdot 6 = 3456$

답 ⑤

0904

어른 4명을 한 사람으로 생각하여 $(n+1)$명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $(n+1)!$

어른 4명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $4! = 24$

따라서 $(n+1)! \cdot 24 = 576$이므로 $(n+1)! = 24 = 4!$

$n + 1 = 4$ $\quad \therefore n = 3$

답 3

0905

|전략| 이웃해도 상관없는 것을 먼저 일렬로 나열한 후 그 사이사이와 양 끝에 이웃하지 않는 것을 나열한다.

남학생 4명을 한 줄로 세우는 방법의 수는 $4! = 24$

남학생의 양 끝과 사이사이의 5곳 중 3곳 에 여학생을 세우는 방법의 수는 ${}_5P_3 = 60$

∨남∨남∨남∨남∨

따라서 구하는 방법의 수는

$24 \cdot 60 = 1440$

답 ⑤

0906

세 개의 문자 D, E, F를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3! = 6$

이 세 개의 문자의 양 끝과 사이사이의 4개의 자리에 A, B, C 세 문자를 나열하는 방법의 수는 ${}_4P_3 = 24$

따라서 구하는 방법의 수는

$6 \cdot 24 = 144$

답 144

0907

8개의 의자에 4명이 앉게 되면 빈 의자는 4개이다.

이 4개의 빈 의자의 양 끝과 사이사이의 5곳 중 4곳에 앉을 4명을 배열하면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_5P_4 = 120$

답 ③

0908

|전략| 먼저 양 끝에 소수가 오는 경우의 수를 구한다.

소수는 2, 3, 5의 3개이므로 양 끝에 소수가 오는 경우의 수는

${}_3P_2 = 6$

양 끝의 2개의 숫자를 제외한 나머지 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6 \cdot 6 = 36$

답 ②

0909

e□□t를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4! = 24$ ··· ❶

e와 t 사이에 2개의 문자를 나열하는 방법의 수는 ${}_5P_2 = 20$ ··· ❷

e와 t가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2! = 2$ ··· ❸

따라서 구하는 방법의 수는

$24 \cdot 20 \cdot 2 = 960$ ··· ❹

답 960

채점 기준	비율
❶ e□□t를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ e와 t 사이에 2개의 문자를 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ e와 t가 자리를 바꾸는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ exploit를 조건에 맞게 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	10 %

0910
(i) 홀수, 짝수의 순서로 교대로 오는 경우의 수

$5!\cdot5!=120\cdot120=14400$

(ii) 짝수, 홀수의 순서로 교대로 오는 경우의 수

$5!\cdot5!=120\cdot120=14400$

따라서 구하는 경우의 수는

$14400+14400=28800$ 답 ⑤

참고 홀수와 짝수가 교대로 오는 경우는

(홀 짝 홀 짝 홀 짝 홀 짝 홀 짝), (짝 홀 짝 홀 짝 홀 짝 홀 짝 홀)의 2가지이다.

0911
한국의 탁구 선수는 5명, 중국의 탁구 선수는 4명이므로 한국의 탁구 선수 5명을 일렬로 세우고 그 사이사이에 중국의 탁구 선수 4명을 세우면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$5!\cdot4!=120\cdot24=2880$ 답 2880

0912
|전략| 8개의 문자를 일렬로 나열하는 모든 방법의 수에서 양 끝에 모두 모음이 오도록 나열하는 방법의 수를 뺀다.

8개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $8!=40320$

양 끝에 모두 모음이 오도록 나열하는 방법의 수는 모음 o, u, e 중에서 2개를 택하여 양 끝에 나열하는 방법의 수가 ${}_3P_2=6$이고, 양 끝의 모음을 제외한 나머지 6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수가 $6!=720$이므로

$6\cdot720=4320$

따라서 구하는 방법의 수는

$40320-4320=36000$ 답 ⑤

0913
7명의 학생 중에서 반장, 부반장을 뽑는 방법의 수는 7명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로 ${}_7P_2=42$ ··· ❶

반장, 부반장을 모두 남학생으로 뽑는 방법의 수는 남학생 3명 중에서 반장, 부반장을 뽑으면 되므로 ${}_3P_2=6$ ··· ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$42-6=36$ ··· ❸

답 36

채점 기준	비율
❶ 7명의 학생 중에서 반장, 부반장을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 반장, 부반장을 모두 남학생으로 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 적어도 한 명은 여학생을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

0914
a, b, c, d, e, f의 6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$6!=720$

3개의 문자 a, b, c 중에서 어느 것도 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는 d, e, f를 일렬로 나열하고 그 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 a, b, c를 나열하는 방법의 수와 같으므로

$3!\cdot{}_4P_3=6\cdot24=144$

따라서 구하는 방법의 수는

$720-144=576$ 답 576

0915
6개의 한 자리의 자연수를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $6!=720$

짝수의 개수를 n이라 하면 양 끝에 모두 짝수가 오도록 나열하는 방법의 수는 짝수 n개 중에서 2개를 택하여 양 끝에 나열하는 방법의 수가 ${}_nP_2=n(n-1)$이고, 양 끝의 짝수를 제외한 나머지 4개의 숫자를 일렬로 나열하는 방법의 수가 $4!=24$이므로

$n(n-1)\cdot24=24n(n-1)$

이때, 적어도 한쪽 끝에 홀수가 오도록 나열하는 방법의 수가 432이므로

$720-24n(n-1)=432$

$24n(n-1)=288$

$n(n-1)=12=4\cdot3 \qquad \therefore n=4$

따라서 짝수의 개수가 4이므로 홀수의 개수는

$6-4=2$ 답 2

0916
|전략| 배수에 대한 경우의 수는 배수의 조건을 만족시키는 특정한 자리에 올 수 있는 수를 먼저 정한다.

네 자리의 자연수가 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

나머지 자리에는 0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개의 숫자가 올 수 있으므로 ${}_5P_3=60$

즉, 5의 배수의 개수는 60

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에는 0이 올 수 없다.

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 5를 제외한 1, 2, 3, 4의 4가지

나머지 자리에는 천의 자리에 온 숫자와 일의 자리의 숫자인 5를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개의 숫자가 올 수 있으므로

${}_4P_2=12$

즉, 5의 배수의 개수는 $4\cdot12=48$

따라서 구하는 5의 배수의 개수는

$60+48=108$ 답 108

Lecture

배수판정법

(1) 2의 배수 ⇨ 일의 자리의 숫자가 짝수

(2) 3의 배수 ⇨ 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수

(3) 4의 배수 ⇨ 끝의 두 자리의 수가 00 또는 4의 배수

(4) 5의 배수 ⇨ 일의 자리의 숫자가 0 또는 5

0917

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 2, 3, 4의 4가지

나머지 자리에는 천의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 3개의 숫자가 올 수 있으므로 ${}_4P_3=24$

따라서 구하는 네 자리의 정수의 개수는

$4\cdot24=96$ 답 96

0918

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3의 2가지

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3가지

나머지 자리에는 만의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자가 올 수 있으므로 $3!=6$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$2\cdot3\cdot6=36$ 답 ①

0919

어떤 수가 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 하므로 5개의 숫자 0, 6, 7, 8, 9에서 서로 다른 4개를 택했을 때, 그 합이 3의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.

$(0, 6, 7, 8), (0, 7, 8, 9), (6, 7, 8, 9)$

(i) $(0, 6, 7, 8)$인 경우 : $3\cdot3!=3\cdot6=18$

(ii) $(0, 7, 8, 9)$인 경우 : $3\cdot3!=3\cdot6=18$

(iii) $(6, 7, 8, 9)$인 경우 : $4!=24$

따라서 구하는 3의 배수의 개수는

$18+18+24=60$ 답 ③

0920

|전략| 32000보다 큰 수는 32□□□, 34□□□, 35□□□, 4□□□□, 5□□□□ 꼴이다.

32□□□ 꼴인 수의 개수는 $3!=6$

34□□□ 꼴인 수의 개수는 $3!=6$

35□□□ 꼴인 수의 개수는 $3!=6$

4□□□□ 꼴인 수의 개수는 $4!=24$

5□□□□ 꼴인 수의 개수는 $4!=24$

따라서 32000보다 큰 수의 개수는

$6+6+6+24+24=66$ 답 ④

다른 풀이 모든 다섯 자리의 정수의 개수는 $5!=120$

1□□□□ 꼴인 수의 개수는 $4!=24$

2□□□□ 꼴인 수의 개수는 $4!=24$

31□□□ 꼴인 수의 개수는 $3!=6$

따라서 32000보다 큰 수의 개수는

$120-(24+24+6)=66$

0921

A□□□ 꼴인 단어의 개수는 $3!=6$

BA□□ 꼴인 단어의 개수는 $2!=2$

BE□□ 꼴인 단어의 개수는 $2!=2$

BF□□ 꼴인 단어는 순서대로 BFAE, BFEA의 2개

따라서 BFEA까지의 개수는

$6+2\cdot2+2=12$

이므로 BFEA는 12번째에 배열된다. 답 12번째

0922

1□△ 꼴인 수의 개수는 $9\cdot8=72$

2□△ 꼴인 수의 개수는 $9\cdot8=72$

이때, 102부터 298까지의 각 자리의 숫자가 서로 다른 세 자리의 자연수의 개수는

$72+72=144$

따라서 150번째에 오는 수는 3□△ 꼴인 수 중에서 6번째로 작은 수이므로 307이다. 답 307

0923

A□□□□ 꼴인 단어의 개수는 $4!=24$

B□□□□ 꼴인 단어의 개수는 $4!=24$

C□□□□ 꼴인 단어의 개수는 $4!=24$

DA□□□ 꼴인 단어의 개수는 $3!=6$

DB□□□ 꼴인 단어의 개수는 $3!=6$

DCA□□ 꼴인 단어는 순서대로 DCABE, DCAEB의 2개

따라서 A로 시작하는 단어부터 DCA로 시작하는 단어까지 총 개수는

$24\cdot3+6\cdot2+2=86$

이므로 86번째에 오는 단어는 DCAEB이고, 마지막 문자는 B이다. 답 ②

0924

|전략| $n(X)=k$인 집합 X에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow X$의 일대일대응의 개수는 $k!$이다.

$f(a)\neq e$이므로 $f(a)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d의 4개

그 각각에 대하여 일대일대응인 f의 개수는 $4!=24$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$4\cdot24=96$ 답 96

다른 풀이 일대일대응인 f의 개수는 $5!=120$

이때, $f(a)=e$이고 일대일대응인 f의 개수는 $4!=24$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$120-24=96$

Lecture

일대일함수와 일대일대응

(1) 일대일함수 : 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$가 성립하는 함수

(2) 일대일대응 : 일대일함수이고 치역과 공역이 같은 함수

0925

함수 f는 일대일함수이므로 구하는 함수의 개수는

${}_4P_3=24$ 답 ④

0926

치역과 공역이 일치하는 일대일함수 f는 일대일대응이다.

(i) $f(1)=2$ 또는 $f(1)=4$인 경우

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값과 3을 제외한 2개이므로 일대일대응인 f의 개수는

$2\cdot2\cdot2!=8$

(ii) $f(1)=3$인 경우

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 4의 3개이므로 일대일대응인 f의 개수는

$1\cdot3\cdot2!=6$

(i), (ii)에서 함수 f의 개수는

$8+6=14$ 답 14

다른 풀이 전체 함수의 개수에서 $f(1)=1$ 또는 $f(3)=3$인 일대일대응의 개수를 뺀다.

X에서 X로의 일대일대응인 f의 개수는 $4!=24$

$f(1)=1$이고 일대일대응인 f의 개수는 $3!=6$

$f(3)=3$이고 일대일대응인 f의 개수는 $3!=6$

$f(1)=1$이고 $f(3)=3$이면서 일대일대응인 f의 개수는 $2!=2$

이때, 일대일대응인 f 중에서 $f(1)=1$ 또는 $f(3)=3$인 함수 f의 개수는

$6+6-2=10$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$24-10=14$

0927

집합 Y의 모든 원소의 곱이 36^2이므로 조건을 만족시키는 경우는

$1\times4\times9=2\times3\times6$이다.

이때, (x_1, x_3, x_5)가 $(1, 4, 9)$에 대응되는 경우의 수는 $3!=6$

(x_2, x_4, x_6)이 $(2, 3, 6)$에 대응되는 경우의 수는 $3!=6$

또, $f(x_1)$, $f(x_3)$, $f(x_5)$와 $f(x_2)$, $f(x_4)$, $f(x_6)$이 서로 바뀌는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$6\cdot6\cdot2=72$ 답 72

STEP 3 내신 마스터

0928

유형 01 합의 법칙

|전략| 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A와 사건 B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

뽑힌 카드에 적힌 세 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 적힌 세 수의 곱이 3이 되는 경우

$(1, 1, 3)$, $(1, 3, 1)$, $(3, 1, 1)$의 3가지

(ii) 적힌 세 수의 곱이 4가 되는 경우

$(1, 1, 4)$, $(1, 4, 1)$, $(4, 1, 1)$,

$(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$의 6가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$3+6=9$ 답 ③

0929

유형 02 방정식, 부등식의 해의 개수

|전략| 문제의 조건에 맞도록 $ax+by+cz=d$ 꼴의 방정식을 세우고 x, y, z 중 계수의 절댓값이 큰 것부터 수를 대입하여 구한다.

200원, 500원, 700원짜리 쿠키를 각각 x개, y개, z개 산다고 하면

$200x+500y+700z=3000$

$\therefore 2x+5y+7z=30$ ⋯⋯ ㉠

이 식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하면 된다.

(i) $z=0$일 때, ㉠에서 $2x+5y=30$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(15, 0)$, $(10, 2)$, $(5, 4)$, $(0, 6)$의 4개

(ii) $z=1$일 때, ㉠에서 $2x+5y=23$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(9, 1)$, $(4, 3)$의 2개

(iii) $z=2$일 때, ㉠에서 $2x+5y=16$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(8, 0)$, $(3, 2)$의 2개

(iv) $z=3$일 때, ㉠에서 $2x+5y=9$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(2, 1)$의 1개

(v) $z=4$일 때, ㉠에서 $2x+5y=2$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 0)$의 1개

따라서 구하는 방법의 수는

$4+2+2+1+1=10$ 답 ②

0930

유형 01 합의 법칙 + 03 곱의 법칙

|전략| 두 자연수의 합이 짝수이려면 두 자연수가 모두 짝수이거나 두 자연수가 모두 홀수이어야 한다.

십의 자리의 숫자를 $a(a\neq0)$, 일의 자리의 숫자를 b라 하면

$a+b=$(짝수)인 경우는 다음과 같다.

(i) (a, b)가 (짝수, 0)인 경우

a가 될 수 있는 숫자는 2, 4, 6, 8의 4가지

(ii) (a, b)가 (짝수, 짝수)인 경우

a가 될 수 있는 숫자는 2, 4, 6, 8의 4가지이고, b가 될 수 있는 숫자도 2, 4, 6, 8의 4가지이므로

$4\cdot4=16$

(iii) $(a,\ b)$가 (홀수, 홀수)인 경우

a가 될 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지이고, b가 될 수 있는 숫자도 1, 3, 5, 7, 9의 5가지이므로

$5\cdot5=25$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4+16+25=45$ 답 ②

0931

유형 **01** 합의 법칙 + **03** 곱의 법칙

|전략| 곱해지는 각 항의 문자가 모두 다를 때, 전개식의 항의 개수는 곱해지는 각 다항식의 항의 개수의 곱과 같음을 이용한다.

$(a+b)^2(p+q)=(a^2+2ab+b^2)(p+q)$를 전개하면 a^2, $2ab$, b^2에 p, q를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 항의 개수는

$3\cdot2=6$

$(x+y+z)(l+m+n)$을 전개하면 x, y, z에 l, m, n을 각각 곱하여 항이 만들어지므로 항의 개수는

$3\cdot3=9$

이때, $(a+b)^2(p+q)$와 $(x+y+z)(l+m+n)$의 전개식에 동류항이 없으므로 구하는 항의 개수는

$6+9=15$ 답 ①

0932

유형 **04** 약수의 개수

|전략| 먼저 270을 소인수분해한 후 약수가 홀수가 되는 경우를 생각한다.

270을 소인수분해하면 $270=2\cdot3^3\cdot5$

홀수는 2를 소인수로 갖지 않으므로 270의 양의 약수 중에서 홀수의 개수는 $3^3\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같다.

따라서 구하는 홀수의 개수는

$(3+1)(1+1)=8$ 답 ④

다른 풀이 $270=2\cdot3^3\cdot5$이므로 270의 양의 약수의 개수는

$(1+1)(3+1)(1+1)=16$

짝수는 2를 소인수로 가지므로 270의 양의 약수 중에서 짝수의 개수는 $3^3\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같다.

즉, 짝수의 개수는 $(3+1)(1+1)=8$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$16-8=8$

0933

유형 **05** 지불 방법의 수와 지불 금액의 수

|전략| a원짜리 동전 n개로 지불할 수 있는 금액과 b원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 같을 때에는 b원짜리 동전 1개를 a원짜리 동전 n개로 바꾸어 생각한다.

(i) 지불 방법의 수

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

500원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$p=4\cdot5\cdot5-1=99$

(ii) 지불 금액의 수

500원짜리 동전 2개로 지불하는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액은 같으므로 1000원짜리 지폐 3장을 500원짜리 동전 6개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 10개와 100원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.

500원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, $\cdots$, 9개, 10개의 11가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$q=11\cdot5-1=54$

$\therefore p+q=99+54=153$ 답 ③

0934

유형 **06** 도로망에서의 경우의 수

|전략| 동시에 갈 수 없는 길이면 합의 법칙을, 동시에 가거나 이어지는 길이면 곱의 법칙을 이용한다.

(i) A → B → C → D → A로 가는 방법의 수는

$3\cdot3\cdot2\cdot4=72$

(ii) A → D → C → B → A로 가는 방법의 수는

$4\cdot2\cdot3\cdot3=72$

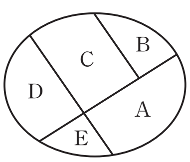
따라서 구하는 방법의 수는

$72+72=144$ 답 ②

0935

유형 **07** 색칠하는 방법의 수

|전략| 각 영역을 칠하는 방법의 수를 구한 후 곱의 법칙을 이용하여 색칠하는 모든 방법의 수를 구한다.



주어진 그림의 영역을 오른쪽 그림과 같이 A, B, C, D, E로 나타내면 A에 칠할 수 있는 색은 3가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 2가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 1가지이다.

이때, D에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 경우와 A에 칠한 색과 다른 경우로 나누어진다.

(i) D에 A와 같은 색을 칠하는 경우

D에 칠할 수 있는 색은 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 경우의 수는

$3\cdot2\cdot1\cdot1\cdot2=12$

(ii) D에 A와 다른 색을 칠하는 경우

D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 1가지이므로 경우의 수는

$3\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1=6$

따라서 구하는 방법의 수는

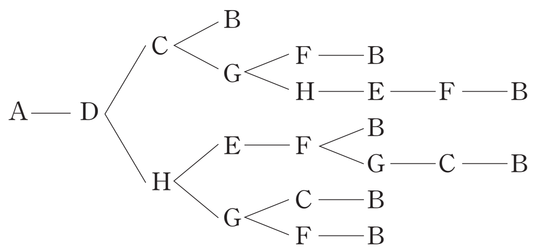
$12+6=18$ 답 ④

0936

유형 08 수형도를 이용하는 경우의 수

|전략| 규칙성을 찾기 어려울 때는 수형도를 이용한다.

주어진 정육면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 주어진 조건에 맞게 모서리를 따라 움직인 후 꼭짓점 B에 도착하는 경우는 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 7이다. 답 ③

0937

유형 09 $_nP_r$의 계산

|전략| $_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$ 임을 이용한다. (단, $0\le r\le n$)

$_6P_n\le 2{}_6P_{n-2}$에서

$\frac{6!}{(6-n)!}\le 2\cdot\frac{6!}{\{6-(n-2)\}!}$

$\frac{1}{(6-n)!}\le 2\cdot\frac{1}{(8-n)!}$, $(8-n)!\le 2(6-n)!$

$(8-n)(7-n)\le 2$, $n^2-15n+54\le 0$

$(n-6)(n-9)\le 0$ $\quad\therefore 6\le n\le 9$

그런데 $2\le n\le 6$이므로 $n=6$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n은 6의 1개이다. 답 ①

참고 $_6P_n$에서 $n\le 6$ ······ ㉠

$_6P_{n-2}$에서 $0\le n-2\le 6$ $\quad\therefore 2\le n\le 8$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $2\le n\le 6$

0938

유형 10 이웃하는 순열의 수 + **11** 이웃하지 않는 순열의 수

|전략| 2학년 학생들을 제외하고 1학년 학생들을 한 묶음으로 생각하여 먼저 나열한다.

1학년 학생 3명을 한 묶음으로 생각하여 3학년 학생 2명과 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$

1학년 학생 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$

1학년 학생 한 묶음과 3학년 학생 2명의 양 끝과 사이사이의 4개의 자리에 2학년 학생 3명을 세우는 방법의 수는 $_4P_3=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot6\cdot24=864$ 답 ⑤

0939

유형 12 특정한 조건이 있는 순열의 수

|전략| 먼저 한쪽 끝에는 자음, 다른 쪽 끝에는 모음이 오는 경우의 수를 구한다.

KOREA의 5개의 문자 중에서 자음은 K, R의 2개이고 모음은 O, E, A의 3개이다.

(i) 맨 앞에 자음, 맨 뒤에 모음이 오는 경우의 수

$2\cdot3=6$

(ii) 맨 앞에 모음, 맨 뒤에 자음이 오는 경우의 수

$3\cdot2=6$

(i), (ii)에서 한쪽 끝에는 자음, 다른 쪽 끝에는 모음이 오는 경우의 수는 $6+6=12$

양 끝의 2개의 문자를 제외한 나머지 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\cdot6=72$ 답 ③

0940

유형 15 사전식 배열법을 이용하는 순열의 수

|전략| A로 시작하는 단어, B로 시작하는 단어, C로 시작하는 단어로 나누어 생각한다.

A□□□□ 꼴인 단어의 개수는 $4!=24$

B□□□□ 꼴인 단어의 개수는 $4!=24$

CAB□□ 꼴인 단어의 개수는 $2!=2$

CAD□□ 꼴인 단어의 개수는 $2!=2$

따라서 A로 시작하는 단어부터 CAD로 시작하는 단어까지 총 개수는

$24\cdot2+2\cdot2=52$

이므로 CAEBD는 53번째에 배열된다. 답 ④

0941

유형 16 함수의 개수

|전략| 먼저 $f(a)+f(b)=12$를 만족시키는 순서쌍 $(f(a), f(b))$를 구한다.

함수 f 중에서 $f(a)+f(b)=12$를 만족시키는 순서쌍 $(f(a), f(b))$는 $(2, 10)$, $(4, 8)$, $(8, 4)$, $(10, 2)$의 4개

그 각각에 대하여 일대일대응인 f의 개수는 $3!=6$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$4\cdot6=24$ 답 ④

0942

유형 **10** 이웃하는 순열의 수

|전략| A, B 두 사람이 서로 옆 자리에 앉게 되는 경우를 생각해 본다.

A, B 두 사람의 좌석 번호를 순서쌍 (A, B)로 나타낼 때, A, B가 서로 옆자리에 앉게 되는 경우는 (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (6, 7), (7, 6)의 6가지이다. ··· ❶

각 경우에 나머지 3명이 남아 있는 세 자리에 앉는 경우의 수는 3명을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$3!=6$ ··· ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot6=36$ ··· ❸

답 36

채점 기준	배점
❶ A, B가 서로 옆자리에 앉게 되는 경우를 알 수 있다.	3점
❷ 나머지 3명이 남아 있는 세 자리에 앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❸ A, B가 서로 옆자리에 앉게 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점

다른 풀이

(i) A, B 두 사람이 좌석 번호가 6, 7인 자리에 앉는 경우

A, B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

나머지 3명이 남아 있는 세 자리에 앉는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 A, B 두 사람이 좌석 번호가 6, 7인 자리에 앉게 되는 경우의 수는

$2\cdot6=12$

(ii) A, B 두 사람이 좌석 번호가 1, 2, 3인 자리에 앉는 경우

A, B를 한 사람으로 생각하여 자리에 앉는 경우의 수는 2

A, B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

나머지 3명이 남아 있는 세 자리에 앉는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 A, B 두 사람이 좌석 번호가 1, 2, 3인 자리에 앉게 되는 경우의 수는

$2\cdot2\cdot6=24$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$12+24=36$

0943

유형 **12** 특정한 조건이 있는 순열의 수

|전략| 짝수와 홀수를 교대로 사용하여 비밀번호를 만드는 경우를 생각해 본다.

(i) (짝 홀 짝 홀 짝)인 경우

3개의 짝수를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

4개의 홀수 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 (짝 홀 짝 홀 짝)으로 비밀번호를 만드는 경우의 수는

$6\cdot12=72$ ··· ❶

(ii) (홀 짝 홀 짝 홀)인 경우

4개의 홀수 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_4P_3=24$

3개의 짝수 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

따라서 (홀 짝 홀 짝 홀)로 비밀번호를 만드는 경우의 수는

$24\cdot6=144$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$72+144=216$ ··· ❸

답 216

채점 기준	배점
❶ (짝 홀 짝 홀 짝)으로 비밀번호를 만드는 경우의 수를 구할 수 있다.	3점
❷ (홀 짝 홀 짝 홀)로 비밀번호를 만드는 경우의 수를 구할 수 있다.	3점
❸ 홀수와 짝수를 교대로 사용하여 비밀번호를 만드는 경우의 수를 구할 수 있다.	1점

0944

유형 **14** 순열의 수를 이용한 정수의 개수

|전략| 어떤 자연수가 4의 배수이려면 끝의 두 자리의 수가 00 또는 4의 배수이어야 한다.

네 자리의 자연수가 4의 배수이려면 끝의 두 자리의 수가 00 또는 4의 배수이어야 한다. ··· ❶

(i) 끝의 두 자리에 0이 없는 경우

□□12, □□24, □□32

세 경우 모두 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 끝의 두 자리에 온 2개의 숫자를 제외한 2가지

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리에 온 숫자와 끝의 두 자리에 온 2개의 숫자를 제외한 2가지

즉, 4의 배수의 개수는 $3\cdot2\cdot2=12$ ··· ❷

(ii) 끝의 두 자리에 0이 있는 경우

□□04, □□20, □□40

세 경우 모두 천의 자리, 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 끝의 두 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자 중에서 2개이므로 ${}_3P_2=6$

즉, 4의 배수의 개수는 $3\cdot6=18$ ··· ❸

따라서 구하는 4의 배수의 개수는

$12+18=30$ ··· ❹

답 30

채점 기준	배점
❶ 네 자리의 자연수가 4의 배수가 되는 경우를 알 수 있다.	1점
❷ 끝의 두 자리에 0이 없는 4의 배수의 개수를 구할 수 있다.	2점
❸ 끝의 두 자리에 0이 있는 4의 배수의 개수를 구할 수 있다.	2점
❹ 4의 배수의 개수를 구할 수 있다.	1점

0945

유형 **11** 이웃하지 않는 순열의 수

|전략| 이웃해도 상관없는 것을 먼저 일렬로 나열한 후 그 사이사이와 양 끝에 이웃하지 않는 것을 나열한다.

(1) 4개의 주스를 일렬로 놓는 방법의 수는 $4!=24$

(2) 주스의 양 끝과 사이사이의 5곳 중 4곳에 커피를 놓는 방법의 수는

${}_5P_4=120$

7 경우의 수와 순열

(3) 커피를 이웃하지 않게 놓는 방법의 수는

$24\cdot120=2880$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 주스를 일렬로 놓는 방법의 수를 구할 수 있다.	4점
(2) 양 끝과 주스 사이사이에 커피를 놓는 방법의 수를 구할 수 있다.	4점
(3) 커피끼리 이웃하지 않게 놓는 방법의 수를 구할 수 있다.	2점

0946

유형 **13** '적어도'의 조건이 있는 순열의 수

|전략| '적어도'의 조건이 있는 사건이 일어나는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 사건이 일어나지 않는 경우의 수를 뺀다.

(1) 6명의 가족이 일렬로 서는 방법의 수는 $6!=720$

(2) (i) 부모 사이에 자녀가 한 명도 서지 않는 경우

부모를 한 묶음으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!=120$

부모가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

즉, 부모 사이에 자녀가 한 명도 서지 않는 경우의 수는

$120\cdot2=240$

(ii) 부모 사이에 자녀가 한 명만 서는 경우

부모 사이에 자녀가 한 명만 설 때 부모 사이에 서는 1명의 자녀를 택하는 경우의 수는 4

부$\boxed{\text{자녀}}$모를 한 묶음으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$

부모가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

즉, 부모 사이에 자녀가 한 명만 서는 경우의 수는

$4\cdot24\cdot2=192$

(i), (ii)에서 부모 사이에 자녀가 어느 한 명도 서지 않거나 한 명만 서는 방법의 수는

$240+192=432$

(3) 자녀 4명 중에서 부모 사이에 적어도 2명이 서는 방법의 수는

$720-432=288$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 6명의 가족이 일렬로 서는 방법의 수를 구할 수 있다.	3점
(2) 자녀 4명 중에서 부모 사이에 어느 한 명도 서지 않거나 한 명만 서는 방법의 수를 구할 수 있다.	6점
(3) 자녀 4명 중에서 부모 사이에 적어도 2명이 서는 방법의 수를 구할 수 있다.	3점

다른 풀이

(i) 부모 사이에 자녀 2명이 서는 경우

부모 사이에 자녀 2명이 설 때 부모 사이에 서는 2명의 자녀를 택하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

부□□모를 한 묶음으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=6$

부모가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

즉, 부모 사이에 자녀 2명이 서는 경우의 수는

$12\cdot6\cdot2=144$

(ii) 부모 사이에 자녀 3명이 서는 경우

부모 사이에 자녀 3명이 설 때 부모 사이에 서는 3명의 자녀를 택하는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$

부□□□모를 한 묶음으로 생각하여 2명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$2!=2$

부모가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

즉, 부모 사이에 자녀 3명이 서는 경우의 수는

$24\cdot2\cdot2=96$

(iii) 부모 사이에 자녀 4명이 서는 경우

부모 사이에 자녀 4명이 모두 서는 경우의 수는 $4!=24$

부모가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

즉, 부모 사이에 자녀 4명이 서는 경우의 수는

$24\cdot2=48$

(i), (ii), (iii)에서 부모 사이에 적어도 2명의 자녀가 서는 방법의 수는

$144+96+48=288$

창의·융합 교과서 속 심화문제

0947

|전략| 직선 $y=ax+b$가 x축과 만나지 않으려면 $a=0$, $b\neq0$이어야 한다.

$y=(f\circ g)(x)=f(g(x))=f((3-b)x+2)$

$=(a-4)\{(3-b)x+2\}+6$

$=(a-4)(3-b)x+2a-2$

이 그래프가 x축과 만나지 않으려면

$(a-4)(3-b)=0$, $2a-2\neq0$

(i) $(a-4)(3-b)=0$일 때, $a=4$ 또는 $b=3$

(ii) $2a-2\neq0$일 때, $a\neq1$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a, b의 값을 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

$(4,\ 1)$, $(4,\ 2)$, $(4,\ 3)$, $(4,\ 4)$, $(4,\ 5)$, $(4,\ 6)$,

$(2,\ 3)$, $(3,\ 3)$, $(5,\ 3)$, $(6,\ 3)$

따라서 구하는 경우의 수는 10이다.

답 ④

0948

|전략| (다)에 대입하는 수가 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나눈다.

(i) (다)에 대입하는 수가 짝수일 때

(다)에 대입할 수 있는 수는 2, 4, 6, 8의 4가지이고, (가)에는 (다)에 대입한 수를 제외한 8가지, (나)에는 (가), (다)에 대입한 수를 제외한 7가지를 대입할 수 있으므로 $4\cdot8\cdot7=224$

(ii) (다)에 대입하는 수가 홀수일 때

(다)에 대입할 수 있는 수는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지이다.

이때, (가)+(나)가 짝수이어야 하므로 (가), (나)에 대입하는 수는 모두 홀수이거나 모두 짝수이어야 한다.

㈎, ㈏에 홀수를 대입하는 경우, ㈎에는 ㈐에 대입한 홀수를 제외한 4가지, ㈏에는 ㈎, ㈐에 대입한 홀수를 제외한 3가지를 대입할 수 있으므로 $5\cdot4\cdot3=60$

또한, ㈎, ㈏에 짝수를 대입하는 경우, ㈎에는 2, 4, 6, 8의 4가지, ㈏에는 ㈎에 대입한 짝수를 제외한 3가지를 대입할 수 있으므로 $5\cdot4\cdot3=60$

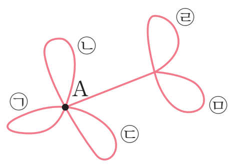
따라서 ㈐에 대입하는 수가 홀수인 경우의 수는 $60+60=120$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$224+120=344$ 답 344

0949

|전략| 그리는 순서와 그리는 방향을 각각 생각한다.



오른쪽 그림에서 ㉠, ㉡, ㉢을 그리는 순서를 정하는 경우의 수는 $3!=6$

㉠, ㉡, ㉢을 각각 시계 방향과 시계 반대 방향으로 그리는 경우의 수는

$2\cdot2\cdot2=8$

따라서 점 A에서 시작하여 ㉠, ㉡, ㉢을 한 번에 그리는 경우의 수는

$6\cdot8=48$

같은 방법으로 ㉣, ㉤을 한 번에 그리는 경우의 수는 $2!\cdot(2\cdot2)=8$

따라서 구하는 방법의 수는

$48\cdot8=384$ 답 384

0950

|전략| $a_3<a_2<a_1$이 되려면 가장 큰 수인 2^9은 1열에 써넣어야 한다.

a_1의 값이 가장 크려면 2^9은 1열에 써넣어야 한다.

1열에 2^9을 써넣는 경우의 수는 3이고, 8개의 숫자 중 2개를 1열의 남은 자리에 써넣는 경우의 수는 ${}_8P_2$이므로 1열에 숫자를 써넣는 경우의 수는

$3\cdot{}_8P_2$

a_2의 값이 두 번째로 크려면 남은 6개의 숫자 중 가장 큰 수를 2열에 써넣어야 한다.

그 수를 2열에 써넣는 경우의 수는 3이고, 남은 5개의 숫자 중 2열의 남은 자리에 써넣는 경우의 수는 ${}_5P_2$이므로 2열에 숫자를 써넣는 경우의 수는

$3\cdot{}_5P_2$

남은 3개의 숫자를 3열에 써넣는 경우의 수는

${}_3P_3$

따라서 구하는 경우의 수는

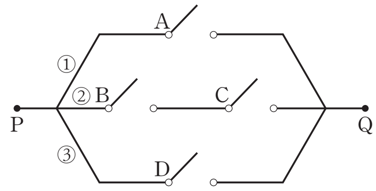
$$(3\cdot{}_8P_2)\cdot(3\cdot{}_5P_2)\cdot{}_3P_3=3^2\cdot\frac{8!}{6!}\cdot\frac{5!}{3!}\cdot3!$$
$$=3^2\cdot\frac{8!}{6}=12\cdot7!$$

$\therefore p=12$ 답 12

0951

|전략| 세 개의 경로 중에서 하나의 경로만 전류가 흘러도 P, Q 사이에 전류가 흐름을 이용한다.

P와 Q 사이에 전류가 흐르는 경우는 다음 그림에서 ①의 경로 또는 ②의 경로 또는 ③의 경로로 전류가 흐를 때이다.



이때, ①의 경로로 전류가 흐르는 사건을 X, ②의 경로로 전류가 흐르는 사건을 Y, ③의 경로로 전류가 흐르는 사건을 Z라 하면

(i) ①의 경로로 전류가 흐를 때

스위치 A가 닫힐 때, 스위치 B, C, D는 닫히거나 닫히지 않을 수 있으므로

$n(X)=2\cdot2\cdot2=8$

(ii) ②의 경로로 전류가 흐를 때

스위치 B와 C가 닫힐 때, 스위치 A, D는 닫히거나 닫히지 않을 수 있으므로

$n(Y)=2\cdot2=4$

(iii) ③의 경로로 전류가 흐를 때

스위치 D가 닫힐 때, 스위치 A, B, C는 닫히거나 닫히지 않을 수 있으므로

$n(Z)=2\cdot2\cdot2=8$

(iv) ①, ②의 경로로 전류가 흐를 때

스위치 A, B, C가 닫힐 때, 스위치 D는 닫히거나 닫히지 않을 수 있으므로

$n(X\cap Y)=2$

(v) ②, ③의 경로로 전류가 흐를 때

스위치 B, C, D가 닫힐 때, 스위치 A는 닫히거나 닫히지 않을 수 있으므로

$n(Y\cap Z)=2$

(vi) ①, ③의 경로로 전류가 흐를 때

스위치 A, D가 닫힐 때, 스위치 B, C는 닫히거나 닫히지 않을 수 있으므로

$n(Z\cap X)=2\cdot2=4$

한편, $n(X\cap Y\cap Z)=1$이므로 P, Q 사이에 전류가 흐를 수 있도록 스위치를 조작하는 방법의 수는

$$n(X\cup Y\cup Z)$$
$$=n(X)+n(Y)+n(Z)-n(X\cap Y)-n(Y\cap Z)-n(Z\cap X)+n(X\cap Y\cap Z)$$
$$=8+4+8-2-2-4+1$$
$$=13$$

답 13

Lecture

①의 경로에 전류가 흐르는 경우의 수와 ②의 경로에 전류가 흐르는 경우의 수에는 ①, ②에 동시에 전류가 흐르는 경우의 수가 중복되어 있다.
다른 경우도 마찬가지이므로 합집합의 원소의 개수를 구하는 방법을 이용해야 한다.

8 | 조합

본책 148~159쪽

STEP 1 개념 마스터

0952

${}_8C_2=\frac{{}_8P_2}{2!}=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$ 답 28

0953

${}_6C_4={}_6C_2=\frac{{}_6P_2}{2!}=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$ 답 15

0954

${}_5C_0=1$ 답 1

0955

${}_{10}C_{10}=1$ 답 1

0956

${}_nC_2=36$에서 $\frac{n(n-1)}{2\cdot1}=36$

$n(n-1)=72=9\cdot8 \qquad \therefore n=9$ 답 9

0957

${}_6C_r=20$에서 $\frac{6!}{r!(6-r)!}=20$

$6!=20\cdot r!(6-r)!$

$6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5\cdot4\cdot r!(6-r)!$

$6\cdot3\cdot2\cdot1=r!(6-r)!$

$3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1=r!(6-r)!$

$\therefore r=3$ 답 3

0958

ㄷ. ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로 ${}_{n+1}C_r={}_{n+1}C_{n-r+1}$ 답 ㄱ, ㄴ

0959

${}_nC_4={}_nC_5$에서 $5=n-4 \qquad \therefore n=9$ 답 9

0960

${}_8C_r={}_8C_{r-4}$에서 $r=r-4$ 또는 $r-4=8-r$

이때, $r\neq r-4$이므로 $2r=12$

$\therefore r=6$ 답 6

0961

${}_8C_3=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$ 답 56

0962

동호회 회원 6명 중에서 순서를 생각하지 않고 2명을 선택하면 되므로 구하는 횟수는

${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$ 답 15

0963

5개의 팀 중에서 순서를 생각하지 않고 2개의 팀을 선택하면 되므로 구하는 경기 수는

${}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ 답 10

0964

7개의 원소 중에서 순서를 생각하지 않고 3개를 선택하면 되므로 구하는 부분집합의 개수는

${}_7C_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ 답 35

0965

9명 중에서 3명의 대표를 뽑는 방법의 수는

${}_9C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$ 답 84

0966

남자 6명 중에서 3명의 대표를 뽑는 방법의 수는

${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$

여자 3명 중에서 1명의 대표를 뽑는 방법의 수는

${}_3C_1=3$

따라서 구하는 방법의 수는

$20\cdot3=60$ 답 60

0967 답 (가) 2 (나) 3 (다) 2 (라) 6

0968

서로 다른 6권의 책을 1권, 2권, 3권으로 나누는 방법의 수는

${}_6C_1\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3=6\cdot10\cdot1=60$ 답 60

0969

서로 다른 6권의 책을 2권, 2권, 2권으로 나누는 방법의 수는

${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}=15\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{6}=15$ 답 15

0970

서로 다른 6권의 책을 2권씩 나누어 3명에게 나누어 주는 방법의 수는

$\left({}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_2\cdot\dfrac{1}{3!}\right)\cdot 3!=15\cdot 6=90$ 답 90

STEP 2 유형 마스터

0971

| 전략 | ${}_n\mathrm{C}_r$와 ${}_n\mathrm{P}_r$의 관계를 이용한다.

${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$이므로 $136=\dfrac{272}{r!}$

$r!=2=2\cdot 1 \qquad \therefore r=2$

또, ${}_n\mathrm{P}_2=n(n-1)=272=17\cdot 16$에서 $n=17$

$\therefore n+r=17+2=19$ 답 ④

0972

${}_n\mathrm{P}_2+6{}_n\mathrm{C}_2=20{}_{n-1}\mathrm{C}_3$에서

$n(n-1)+6\cdot\dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1}=20\cdot\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot 2\cdot 1}$

$4n(n-1)=\dfrac{10}{3}(n-1)(n-2)(n-3)$

$n-1\geq 3$, 즉 $n\geq 4$이므로 등식의 양변을 $(n-1)$로 나누면

$4n=\dfrac{10}{3}(n-2)(n-3)$, $6n=5(n^2-5n+6)$

$5n^2-31n+30=0$, $(n-5)(5n-6)=0$

$\therefore n=5$ 또는 $n=\dfrac{6}{5}$

이때, $n\geq 4$이므로 $n=5$ 답 5

Lecture

${}_n\mathrm{C}_r$에서 구한 n의 값이 $0\leq r\leq n$을 만족시키는 자연수인지 반드시 살펴보아야 한다.

0973

${}_{15}\mathrm{C}_{r+2}={}_{15}\mathrm{C}_{2r-5}$에서

$r+2=2r-5$ 또는 $15-(r+2)=2r-5$

(i) $r+2=2r-5$일 때, $r=7$

(ii) $15-(r+2)=2r-5$일 때,

$13-r=2r-5$, $3r=18 \qquad \therefore r=6$

따라서 모든 자연수 r의 값의 합은

$7+6=13$ 답 ③

0974

이차방정식 ${}_n\mathrm{C}_2x^2-{}_n\mathrm{C}_3x+{}_n\mathrm{C}_4=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=\dfrac{{}_n\mathrm{C}_3}{{}_n\mathrm{C}_2}=2 \qquad \therefore {}_n\mathrm{C}_3=2{}_n\mathrm{C}_2$

즉, $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}=2\cdot\dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1}$에서 $n\geq 4$이므로 등식의 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$\dfrac{n-2}{6}=1 \qquad \therefore n=8$

$\therefore$ (두 근의 곱)$=\dfrac{{}_n\mathrm{C}_4}{{}_n\mathrm{C}_2}=\dfrac{{}_8\mathrm{C}_4}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}}=\dfrac{70}{28}=\dfrac{5}{2}$ 답 $\dfrac{5}{2}$

0975

| 전략 | $n!$의 의미와 유리식의 성질을 이용한다.

${}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

$=\dfrac{(n-1)!}{r!\{(n-1)-r\}!}+\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=\dfrac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}+\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\dfrac{(\boxed{(가)\ n-r})\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}+\dfrac{\boxed{(나)\ r}\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\dfrac{\{(n-r)+r\}\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\dfrac{\boxed{(다)\ n}\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}={}_n\mathrm{C}_r$

$\therefore {}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ 답 (가) $n-r$ (나) r (다) n

Lecture

조합의 수 ${}_n\mathrm{C}_r$는 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$에서 r개의 원소를 택하는 방법의 수로 다음과 같이 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) n을 선택한 경우 : n을 이미 선택하였으므로 나머지 $(n-1)$개의 수에서 $(r-1)$개를 선택하여야 하고, 이 방법의 수는 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$이다.

(ii) n을 선택하지 않은 경우 : n을 제외한 나머지 $(n-1)$개의 수에서 r개를 선택하여야 하고, 이 방법의 수는 ${}_{n-1}\mathrm{C}_r$이다.

(i), (ii)는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 의하여

${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

0976

${}_n\mathrm{C}_{n-r}=\dfrac{n!}{(n-r)!\{n-(\boxed{(가)\ n-r})\}!}$

$=\dfrac{n!}{(n-r)!\boxed{(나)\ r!}}={}_n\mathrm{C}_r$

$\therefore {}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$ 답 (가) $n-r$ (나) $r!$

0977

$n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\dfrac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\dfrac{r\cdot n!}{r!(n-r)!}=r\cdot{}_n\mathrm{C}_r$

$\therefore r\cdot{}_n\mathrm{C}_r=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ 답 풀이 참조

0978

|전략| 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 합의 법칙을 이용한다.

야구 선수 9명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_9C_3=84$

축구 선수 11명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_{11}C_3=165$

따라서 구하는 경우의 수는

$84+165=249$ 답 ④

0979

택한 두 수의 합이 짝수가 되는 경우는

(홀수)+(홀수) 또는 (짝수)+(짝수)이다. ··· ❶

(i) (홀수)+(홀수)인 경우의 수

5개의 홀수 중에서 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_2=10$ ··· ❷

(ii) (짝수)+(짝수)인 경우의 수

4개의 짝수 중에서 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_2=6$ ··· ❸

따라서 구하는 경우의 수는

$10+6=16$ ··· ❹

답 16

채점 기준	비율
❶ 두 수의 합이 짝수가 되는 경우를 알 수 있다.	20 %
❷ (홀수)+(홀수)인 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ (짝수)+(짝수)인 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 조건에 맞는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0980

남자 직원의 수를 n이라 하면 남자 직원 n명 중에서 2명을 선발하는 방법의 수는 ${}_nC_2$

여자 직원 5명 중에서 2명을 선발하는 방법의 수는 ${}_5C_2=10$

즉, ${}_nC_2\cdot 10=210$이므로 ${}_nC_2=21$

$\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}=21$, $n(n-1)=42=7\cdot 6$

$\therefore n=7$ 답 7

0981

|전략| 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 뽑는 방법은 특정한 k개를 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 $(n-k)$개에서 $(r-k)$개를 뽑는 방법과 같다.

은석이와 선규를 뽑고 남은 10명 중에서 3명을 뽑으면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_{10}C_3=120$ 답 120

0982

C를 제외한 11명의 학생 중에서 A, B를 선발한 다음 남은 9명의 학생 중에서 4명을 선발하면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_9C_4=126$ 답 ①

0983

원소의 개수가 3이고 가장 큰 원소가 6인 부분집합은 6을 원소로 선택하고 나머지 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 2개를 선택하면 되므로 구하는 부분집합의 개수는

${}_5C_2=10$ 답 ②

0984

|전략| 짝이 맞는 1켤레의 신발을 뽑는 경우의 수와 나머지 8짝의 신발 중에서 짝이 맞지 않도록 2짝을 뽑는 경우의 수를 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

5켤레의 신발 중에서 1켤레의 신발을 택하는 경우의 수는 ${}_5C_1=5$

1켤레를 제외한 나머지 4켤레의 신발 8짝 중에서 2짝을 택하는 경우의 수는 ${}_8C_2=28$

이때, 신발 4켤레 중에서 짝이 맞는 1켤레의 신발을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$이므로 신발 8짝 중에서 짝이 맞지 않는 신발을 택하는 경우의 수는 $28-4=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\cdot 24=120$ 답 ③

0985

|전략| '적어도'의 조건이 있는 조합의 수는 모든 경우의 수에서 사건이 일어나지 않는 경우의 수를 빼서 구한다.

전체 10명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는 ${}_{10}C_4=210$

소방관만 뽑는 방법의 수는 ${}_6C_4=15$

경찰관만 뽑는 방법의 수는 ${}_4C_4=1$

따라서 구하는 방법의 수는

$210-(15+1)=194$ 답 194

0986

전체 10개의 공 중에서 3개를 뽑는 방법의 수는 ${}_{10}C_3=120$

4 이상의 자연수가 적힌 7개의 공 중에서 3개를 뽑는 방법의 수는

${}_7C_3=35$

따라서 구하는 방법의 수는

$120-35=85$ 답 ②

0987

전체 12편 중에서 2편을 선택하는 경우의 수는 ${}_{12}C_2=66$

외국 영화를 n편이라 하면 외국 영화 n편 중에서 2편을 선택하는 경우의 수는 ${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}$

즉, $66-\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}=56$이므로 $n(n-1)=20=5\cdot 4$

$\therefore n=5$ 답 ①

0988

전체 10권 중에서 4권을 택하는 방법의 수는 ${}_{10}C_4=210$

소설책과 수필집 중에서 4권을 택하는 방법의 수는 ${}_7C_4=35$

소설책과 수필집 중에서 3권을 택하고, 시집 중에서 1권을 택하는 방법의 수는 ${}_7C_3 \cdot {}_3C_1=35 \cdot 3=105$

따라서 구하는 방법의 수는

$210-(35+105)=70$ 답 70

다른 풀이 시집이 2권 포함되도록 택하는 방법의 수는

${}_3C_2 \cdot {}_7C_2=63$

시집이 3권 포함되도록 택하는 방법의 수는

${}_3C_3 \cdot {}_7C_1=7$

따라서 구하는 방법의 수는

$63+7=70$

0989

| 전략 | 먼저 조합을 이용하여 뽑는 경우의 수를 구한 후 순열을 이용하여 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.

남자 4명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는 ${}_4C_2=6$

여자 6명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_6C_3=20$

5명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5!=120$

따라서 구하는 방법의 수는

$6 \cdot 20 \cdot 120=14400$ 답 14400

0990

할머니와 어머니를 뽑고 남은 4명의 가족 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는 ${}_4C_2=6$

4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$6 \cdot 24=144$ 답 ⑤

0991

홀수 1, 3, 5, 7의 네 수 중에서 두 수를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_2=6$

짝수 2, 4, 6의 세 수 중에서 두 수를 택하는 방법의 수는 ${}_3C_2=3$

이때, 홀수 2개와 짝수 2개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 비밀번호의 개수는

$6 \cdot 3 \cdot 24=432$ 답 432

0992

회장과 부회장을 뽑고 남은 8명의 학생 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는 ${}_8C_2=28$

회장과 부회장을 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$

회장과 부회장이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$28 \cdot 6 \cdot 2=336$ 답 ④

0993

| 전략 | 서로 다른 n개에서 순서에 상관없이 r개를 선택할 때에는 조합의 수를 이용한다.

X의 각 원소에 대응되는 Y의 원소의 순서가 정해져 있으므로 Y의 원소 4개 중에서 3개를 택하여 크기 순서대로 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

${}_4C_3=4$ 답 4

0994

조건 (가), (나)에 의하여 치역의 원소는 5개이고, 정의역의 원소 1, 2는 공역의 원소 1, 2, 3, 4 중에서 2개를 택하여 크기 순서대로 대응시키고 정의역의 원소 4, 5는 공역의 원소 6, 7, 8, 9, 10, 11 중에서 2개를 택하여 크기 순서대로 대응시켜야 한다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

${}_4C_2 \cdot {}_6C_2=6 \cdot 15=90$ 답 ③

0995

$f(1)<f(3)$이므로 $f(1)$, $f(3)$의 값은 5, 6, 7, 8, 9, 10 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 작은 수를 $f(1)$, 큰 수를 $f(3)$으로 정하면 된다.

또, $f(2)<f(4)$이므로 $f(2)$, $f(4)$의 값도 5, 6, 7, 8, 9, 10 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 작은 수를 $f(2)$, 큰 수를 $f(4)$로 정하면 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

${}_6C_2 \cdot {}_6C_2=15 \cdot 15=225$ 답 225

0996

| 전략 | 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 n개의 점 중에서 주어진 점을 이어서 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 ${}_nC_2$이다.

5개의 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는

${}_5C_2=10$ 답 10

0997

8개의 점 중에서 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는

${}_8C_2=28$ 답 ④

0998

7개의 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는 ${}_7C_2=21$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_2=6$

일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 ${}_3C_2=3$

그런데 일직선 위에 있는 점들을 연결하여 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

$21-6-3+1+1=14$ 답 ②

다른 풀이 서로 다른 평행선 위의 점을 하나씩 택하여 연결하면 1개의 직선을 만들 수 있으므로 그 개수는 ${}_4C_1 \cdot {}_3C_1=4 \cdot 3=12$

주어진 평행선 2개를 포함하면 구하는 직선의 개수는

$12+2=14$

0999

12개의 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는

${}_{12}C_2=66$ ··· ❶

가로 방향으로 일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 $3\cdot{}_4C_2=3\cdot6=18$ ··· ❷

세로 방향으로 일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 $4\cdot{}_3C_2=4\cdot3=12$ ··· ❸

대각선 방향으로 일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 $4\cdot{}_3C_2=4\cdot3=12$ ··· ❹

그런데 일직선 위에 있는 점들을 연결하여 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

$66-18-12-12+3+4+4=35$ ··· ❺

답 35

채점 기준	비율
❶ 12개의 점으로 만들 수 있는 직선의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 가로 방향으로 일직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❸ 세로 방향으로 일직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❹ 대각선 방향으로 일직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❺ 서로 다른 직선의 개수를 구할 수 있다.	20 %

1000

|전략| n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 n을 뺀 값과 같다.

구하는 대각선의 개수는 8개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 8을 뺀 값과 같으므로

${}_8C_2-8=28-8=20$

답 ③

1001

구하는 다각형을 n각형이라 하면 대각선의 개수가 54이므로

${}_nC_2-n=54$, $\frac{n(n-1)}{2\cdot1}-n=54$

$n^2-3n-108=0$, $(n+9)(n-12)=0$

$\therefore n=12$ ($\because n\geq3$)

따라서 십이각형의 꼭짓점의 개수는 12이다.

답 ①

1002

대각선의 교점은 십일각형의 내부에서 만나는 두 대각선에 의해 결정되고 이를 만족시키는 두 대각선은 4개의 꼭짓점에 의하여 결정되므로 십일각형의 서로 다른 대각선의 교점의 최대 개수는 ${}_{11}C_4=330$

11개의 꼭짓점에서 서로 다른 4개를 택하는 경우의 수와 같다.

따라서 $n=330=2\cdot3\cdot5\cdot11$이므로 n의 약수가 아닌 것은 ③ 4이다.

답 ③

1003

|전략| 일직선 위에 있는 n개의 점으로 만들 수 있는 삼각형은 없다.

7개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_7C_3=35$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_3=4$

그런데 일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$35-4=31$

답 31

1004

9개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_9C_3=84$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_3=4$이고, 4개의 점이 있는 직선은 3개이다.

그런데 일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$84-3\cdot4=72$

답 72

1005

10개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_{10}C_3=120$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_3=4$이고, 4개의 점이 있는 직선은 5개이다.

그런데 일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$120-5\cdot4=100$

답 ②

1006

|전략| m개의 평행선과 n개의 평행선이 만날 때, 이 평행선으로 만들어지는 평행사변형의 개수는 ${}_mC_2\cdot{}_nC_2$이다.

가로로 나열된 5개의 평행선 중에서 2개, 세로로 나열된 6개의 평행선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 결정된다.

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

${}_5C_2\cdot{}_6C_2=10\cdot15=150$

답 150

1007

가로로 놓인 선 5개 중에서 2개, 세로로 놓인 선 5개 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 결정되므로 주어진 도형의 선들로 만들 수 있는 직사각형의 개수는

${}_5C_2\cdot{}_5C_2=10\cdot10=100$

이때, 처음 정사각형의 한 변의 길이를 4라 하면 한 변의 길이가 1, 2, 3, 4인 정사각형의 개수는 각각 16, 9, 4, 1이므로 정사각형의 개수는 $16+9+4+1=30$

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$100-30=70$

답 70

1008

n개의 평행선 중에서 2개, n개의 평행선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 결정되므로 주어진 평행선으로 만들 수 있는 평행사변형의 개수는 ${}_nC_2 \cdot {}_nC_2$

이때, 평행사변형의 개수가 441이므로

${}_nC_2 \cdot {}_nC_2 = 441$, $\left\{\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}\right\}^2 = 441$

$\frac{n(n-1)}{2} = 21 \left(\because \frac{n(n-1)}{2} > 0\right)$

$n(n-1) = 42 = 7\cdot 6$

$\therefore n = 7$ 답 7

1009

|전략| 먼저 6명을 세 개의 조로 나누는 경우를 생각해 본다.

6명을 세 개의 조로 나눌 때, 각 조의 인원수는

1, 1, 4 또는 1, 2, 3 또는 2, 2, 2

(i) 1명, 1명, 4명으로 나누는 방법의 수는

${}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!} = 6\cdot 5\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = 15$

(ii) 1명, 2명, 3명으로 나누는 방법의 수는

${}_6C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 6\cdot 10\cdot 1 = 60$

(iii) 2명, 2명, 2명으로 나누는 방법의 수는

${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{3!} = 15\cdot 6\cdot 1\cdot \frac{1}{6} = 15$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

$15+60+15=90$ 답 90

1010

9명의 학생을 2명, 3명, 4명의 세 조로 나누는 방법의 수는

$a = {}_9C_2 \cdot {}_7C_3 \cdot {}_4C_4 = 36\cdot 35\cdot 1 = 1260$ ··· ❶

9명의 학생을 4명, 4명, 1명의 세 조로 나누는 방법의 수는

$b = {}_9C_4 \cdot {}_5C_4 \cdot {}_1C_1 \cdot \frac{1}{2!} = 126\cdot 5\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = 315$ ··· ❷

9명의 학생을 3명, 3명, 3명의 세 조로 나누는 방법의 수는

$c = {}_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!} = 84\cdot 20\cdot 1\cdot \frac{1}{6} = 280$ ··· ❸

$\therefore a-b+c = 1260-315+280 = 1225$ ··· ❹

답 1225

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a-b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1011

(i) 8명의 학생을 2명, 3명, 3명의 세 조로 나누는 방법의 수는

${}_8C_2 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 28\cdot 20\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = 280$

(ii) 8명의 학생을 2명, 2명, 2명, 2명의 네 조로 나누는 방법의 수는

${}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{4!} = 28\cdot 15\cdot 6\cdot 1\cdot \frac{1}{24} = 105$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$280+105=385$ 답 ③

1012

|전략| 8종류의 꽃을 세 묶음으로 분할한 후 3명에게 나누어 주는 방법의 수를 곱한다.

서로 다른 8종류의 꽃을 2종류, 3종류, 3종류로 묶어 세 개의 꽃다발을 만드는 경우의 수는

${}_8C_2 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 28\cdot 20\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = 280$

세 개의 꽃다발을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$280\cdot 6 = 1680$ 답 1680

1013

X의 원소 4개를 1개, 1개, 2개로 나누는 방법의 수는

${}_4C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 4\cdot 3\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = 6$

이를 Y의 원소 a, b, c에 대응시키는 방법의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$6\cdot 6 = 36$ 답 36

1014

운전자를 제외한 나머지 9명을 세 팀으로 나눌 때, 각 팀의 인원수는

1, 4, 4 또는 2, 3, 4 또는 3, 3, 3

(i) 1명, 4명, 4명으로 나누는 방법의 수는

${}_9C_1 \cdot {}_8C_4 \cdot {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!} = 9\cdot 70\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = 315$

(ii) 2명, 3명, 4명으로 나누는 방법의 수는

${}_9C_2 \cdot {}_7C_3 \cdot {}_4C_4 = 36\cdot 35\cdot 1 = 1260$

(iii) 3명, 3명, 3명으로 나누는 방법의 수는

${}_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!} = 84\cdot 20\cdot 1\cdot \frac{1}{6} = 280$

(i), (ii), (iii)에서 세 팀으로 나누는 방법의 수는

$315+1260+280=1855$

세 팀을 승용차 3대에 분배하는 방법의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 방법의 수는

$1855\cdot 6 = 11130$ 답 11130

1015

(i) 특정한 2명을 2명인 팀에 배정하는 경우

나머지 회원 5명을 2명, 3명으로 나누는 방법의 수는

${}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 10\cdot 1 = 10$

(ⅱ) 특정한 2명을 3명인 팀에 배정하는 경우

나머지 회원 5명을 2명, 2명, 1명으로 나누는 방법의 수는

$_5C_2 \cdot {_3C_2} \cdot {_1C_1} \cdot \frac{1}{2!} = 10 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 15$

(ⅰ), (ⅱ)에서 세 팀으로 나누는 방법의 수는

$10 + 15 = 25$

세 팀을 3개의 방에 배정하는 방법의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 방법의 수는

$25 \cdot 6 = 150$ 답 150

1016

| 전략 | 6명을 3명, 3명의 두 조로 나눈 후, 각 조의 3명을 2명, 1명으로 나눈다.

6명을 3명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$_6C_3 \cdot {_3C_3} \cdot \frac{1}{2!} = 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 10$

나누어진 3명을 2명, 1명으로 나누는 방법의 수는

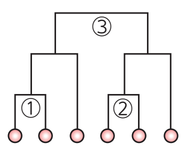
$_3C_2 \cdot {_1C_1} = 3 \cdot 1 = 3$

따라서 구하는 방법의 수는

$10 \cdot 3 \cdot 3 = 90$ 답 90

다른 풀이 6명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $6! = 720$

이때, 오른쪽 그림에서 ①~③은 자리를 바꾸어도 같은 경우이므로 이러한 방법의 수는



$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

따라서 구하는 방법의 수는 $\frac{720}{8} = 90$

1017

6개의 팀을 4개, 2개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$_6C_4 \cdot {_2C_2} = 15 \cdot 1 = 15$

나누어진 4개의 팀을 2개, 2개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$_4C_2 \cdot {_2C_2} \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3$

따라서 구하는 방법의 수는

$15 \cdot 3 = 45$ 답 ⑤

1018

9개의 팀을 4개, 5개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$_9C_4 \cdot {_5C_5} = 126 \cdot 1 = 126$

나누어진 4개의 팀을 2개, 2개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$_4C_2 \cdot {_2C_2} \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3$

나누어진 5개의 팀을 2개, 3개의 팀으로 나눈 다음 3개의 팀을 다시 2개, 1개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$({_5C_2} \cdot {_3C_3}) \cdot ({_3C_2} \cdot {_1C_1}) = (10 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 1) = 30$

따라서 구하는 방법의 수는

$126 \cdot 3 \cdot 30 = 11340$ 답 11340

STEP 3 내신 마스터

1019

유형 01 $_nC_r$의 계산

| 전략 | $a : b = c : d$이면 $bc = ad$임을 이용한다.

$_nC_7 : {_{n+1}C_6} = 5 : 14$에서 $5{_{n+1}C_6} = 14{_nC_7}$

$5 \cdot \frac{_{n+1}P_6}{6!} = 14 \cdot \frac{_nP_7}{7!}$ —— $5 \cdot \frac{_{n+1}P_6}{\cancel{6!}} = \cancel{14}^{2} \cdot \frac{_nP_7}{\cancel{7} \cdot \cancel{6!}}$

$5{_{n+1}P_6} = 2{_nP_7}$에서

$5(n+1)n(n-1)\cdots(n-4) = 2n(n-1)\cdots(n-4)(n-5)(n-6)$

$5(n+1) = 2(n-5)(n-6)$, $2n^2 - 27n + 55 = 0$

$(n-11)(2n-5) = 0$

$\therefore n = 11$ 또는 $n = \frac{5}{2}$

이때, $n \geq 7$이므로 $n = 11$ 답 ④

1020

유형 03 조합의 수

| 전략 | 세 수의 곱이 홀수가 되려면 (홀수)×(홀수)×(홀수)이어야 한다.

세 수의 곱이 홀수가 되는 경우의 수는 1, 3, 5, 7, 9 중에서 세 수를 택하는 경우의 수와 같으므로

$_5C_3 = 10$ 답 ①

1021

유형 03 조합의 수

| 전략 | 초콜릿의 자를 수 있는 부분을 고르는 경우의 수로 생각한다.

초콜릿을 A, B, C 3명의 학생에게 한 조각 이상 나누어 주는 경우의 수는 초콜릿을 자를 수 있는 부분 8곳 중에서 2곳을 선택하여 자르는 경우의 수와 같으므로

$_8C_2 = 28$ 답 ④

1022

유형 04 특정한 것을 포함하거나 포함하지 않는 조합의 수

| 전략 | 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 뽑는 방법의 수는 $_{n-k}C_{r-k}$임을 이용한다.

2에서 20까지의 자연수 중에서 6과 서로소인 수는 5, 7, 11, 13, 17, 19의 6개이다.

이 중에서 7은 반드시 포함해야 하므로 나머지 5개의 수 중에서 2개를 택하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$_5C_2 = 10$ 답 ⑤

1023

유형 **06** 뽑아서 나열하는 경우의 수

|전략| 먼저 조합을 이용하여 뽑는 방법의 수를 구한 후 순열을 이용하여 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한다.

지현이와 지수를 뽑고 남은 5명의 학생 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_5C_3=10$

지현이와 지수를 제외한 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$

3명의 양 끝과 사이사이의 4곳 중 2곳에 지현이와 지수를 일렬로 세우는 방법의 수는 ${}_4P_2=12$

따라서 구하는 방법의 수는

$10\cdot6\cdot12=720$ 답 ③

1024

유형 **07** 함수의 개수

|전략| $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이므로 함수 f는 일대일함수이다.

$x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이므로 치역의 원소의 개수는 4이고, 치역의 최솟값이 4, 최댓값이 9이므로 1, 2, 3, 10은 치역의 원소가 아니다.

이때, 4, 9는 치역의 원소이므로 치역의 나머지 원소 2개는 5, 6, 7, 8 중에서 택해야 한다.

5, 6, 7, 8 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$이고, 정의역의 원소에 치역의 원소를 각각 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $4!=24$이므로 구하는 함수 f의 개수는

$6\cdot24=144$ 답 ④

1025

유형 **08** 직선의 개수

|전략| 일직선 위에 있는 n개의 점으로 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 1이다.

8개의 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는

${}_8C_2=28$

일직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

그런데 일직선 위에 있는 점들을 연결하여 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

$28-10+1=19$ 답 ②

1026

유형 **09** n각형의 대각선의 개수

|전략| 꼭짓점 중 4개의 점을 택하면 대각선의 교점을 만들 수 있다.

볼록 10각형에서 대각선의 개수는

$a={}_{10}C_2-10=\dfrac{10\cdot9}{2\cdot1}-10=35$

볼록 b각형의 b개의 꼭짓점 중에서 4개를 택하면 한 개의 대각선의 교점을 만들 수 있으므로 볼록 b각형의 서로 다른 대각선의 교점의 최대 개수는

${}_bC_4=\dfrac{b(b-1)(b-2)(b-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=70$

$b(b-1)(b-2)(b-3)=8\cdot7\cdot6\cdot5$

$\therefore b=8$

$\therefore a+b=35+8=43$ 답 ③

1027

유형 **13** 분할하여 분배하는 경우의 수

|전략| 특정한 조건을 고려하여 분할하는 방법의 수를 먼저 구한 후 분배하는 방법의 수를 곱한다.

여학생 3명은 각자 다른 차에 타야 하므로 먼저 남학생 4명을 세 팀으로 나누고, 각 팀에 여학생 3명을 분배하여 7명의 학생을 세 팀으로 나눈다.

남학생을 세 팀으로 나눌 때, 각 팀의 남학생 수는

1, 1, 2 또는 $\underbrace{0,\ 2,\ 2}$ 차 한 대에 여학생 한 명이 혼자 타는 경우

(i) 남학생을 1명, 1명, 2명으로 나누고, 여학생 3명을 분배하여 세 팀으로 나누는 방법의 수는

$${}_4C_1\cdot{}_3C_1\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}\cdot3!=4\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot6=36$$

(ii) 남학생을 0명, 2명, 2명으로 나누고, 여학생 3명을 분배하여 세 팀으로 나누는 방법의 수는

$${}_4C_0\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}\cdot3!=1\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot6=18$$

(i), (ii)에서 7명의 학생을 세 팀으로 나누는 방법의 수는

$36+18=54$

세 팀을 서로 다른 3대의 차에 분배하는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$54\cdot6=324$ 답 ⑤

1028

유형 **14** 대진표 작성하기

|전략| 8명을 4명, 4명의 두 조로 나눈 후, 각 조의 4명을 2명, 2명으로 나눈다.

8명을 4명, 4명으로 나누는 방법의 수는

$${}_8C_4\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}=70\cdot1\cdot\frac{1}{2}=35$$

나누어진 4명을 2명, 2명으로 나누는 방법의 수는

$${}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=3$$

따라서 구하는 방법의 수는

$35\cdot3\cdot3=315$ 답 ④

1029

유형 **05** '적어도'의 조건이 있는 조합의 수

|전략| '적어도'의 조건이 있는 사건이 일어나는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 사건이 일어나지 않는 경우의 수를 뺀다.

전체 14명의 학생 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는 ${}_{14}C_4=1001$ ⋯ ❶

1학년 학생 8명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는 ${}_8C_4=70$ ⋯ ❷

2학년 학생 6명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는 ${}_6C_4=15$ ⋯ ❸

8 조합

따라서 구하는 방법의 수는

$1001-(70+15)=916$ ⋯ ❹

답 916

채점 기준	배점
❶ 14명의 학생 중 4명을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	1점
❷ 1학년 학생만 4명을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	1점
❸ 2학년 학생만 4명을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	1점
❹ 각 학년의 학생이 적어도 1명씩 포함되도록 하는 방법의 수를 구할 수 있다.	3점

1030

유형 **13 분할하여 분배하는 경우의 수**

|전략| 먼저 분할하는 방법의 수를 구한 후 분배하는 방법의 수를 곱한다.

2층에서 6층까지 5개의 층 중에서 사람들이 내리게 될 세 개의 층을 택하는 방법의 수는

${}_5C_3=10$ ⋯ ❶

5명을 2명, 2명, 1명의 3개의 조로 나누는 방법의 수는

${}_5C_2\cdot{}_3C_2\cdot{}_1C_1\cdot\dfrac{1}{2!}=10\cdot3\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=15$ ⋯ ❷

3개의 조를 서로 다른 세 개의 층에 분배하는 방법의 수는

$3!=6$ ⋯ ❸

따라서 구하는 방법의 수는

$10\cdot15\cdot6=900$ ⋯ ❹

답 900

채점 기준	배점
❶ 5개의 층 중에서 세 개의 층을 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	2점
❷ 5명을 2명, 2명, 1명으로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	2점
❸ 3개의 조를 서로 다른 세 개의 층에 분배하는 방법의 수를 구할 수 있다.	2점
❹ 세 개의 층에서 2명, 2명, 1명이 내리는 방법의 수를 구할 수 있다.	1점

다른 풀이 5명을 2명, 2명, 1명의 3개의 조로 나누는 방법의 수는

${}_5C_2\cdot{}_3C_2\cdot{}_1C_1\cdot\dfrac{1}{2!}=10\cdot3\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=15$

이때, 3개의 조가 2층부터 6층까지 5개의 층에서 세 개의 층을 택하여 내리는 방법의 수는 ${}_5P_3=60$

따라서 구하는 방법의 수는 $15\cdot60=900$

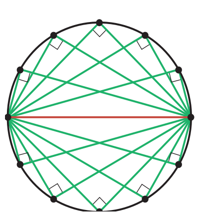
1031

유형 **10 삼각형의 개수**

|전략| 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 n개의 점 중에서 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는 ${}_nC_3$이다.

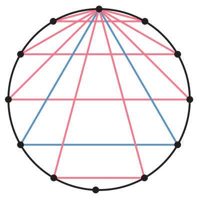
(1) 원 위의 점들은 어떤 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 구하는 삼각형의 개수는 ${}_{12}C_3=220$

(2) 오른쪽 그림과 같이 1개의 지름을 기준으로 지름의 양 끝점을 제외한 10개의 점 중에서 1개를 택하면 직각삼각형이 생기고, 두 점을 이어 만들 수 있는 지름은 6개이므로 구하는 직각삼각형의 개수는



${}_{10}C_1\cdot6=10\cdot6=60$

(3) 오른쪽 그림과 같이 1개의 점을 기준으로 5개의 이등변삼각형이 생기고, 이 중에서 파란색과 같은 정삼각형은 1개가 생기므로 정삼각형을 제외한 이등변삼각형의 개수는 4이다.



12개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_{12}C_1=12$이고, 파란색과 같은 정삼각형은 총 4개가 생기므로 구하는 이등변삼각형의 개수는

$4\cdot12+4=52$

답 풀이 참조

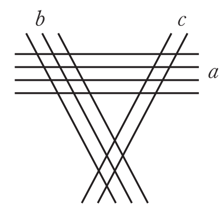
채점 기준	배점
(1) 삼각형의 개수를 구할 수 있다.	3점
(2) 직각삼각형의 개수를 구할 수 있다.	4점
(3) 이등변삼각형의 개수를 구할 수 있다.	5점

창의·융합 교과서 속 심화문제

1032

|전략| 평행사변형이 만들어지는 조건과 평행사변형이 아닌 사다리꼴이 만들어지는 조건을 생각한다.

오른쪽 그림과 같이 4개의 평행선, 3개의 평행선, 2개의 평행선을 각각 a, b, c라 하면 평행사변형을 만드는 방법은 다음과 같다.



(ⅰ) a에서 2개, b에서 2개를 택하여 만들 수 있는 평행사변형의 개수는

${}_4C_2\cdot{}_3C_2=6\cdot3=18$

(ⅱ) a에서 2개, c에서 2개를 택하여 만들 수 있는 평행사변형의 개수는

${}_4C_2\cdot{}_2C_2=6\cdot1=6$

(ⅲ) b에서 2개, c에서 2개를 택하여 만들 수 있는 평행사변형의 개수는

${}_3C_2\cdot{}_2C_2=3\cdot1=3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $p=18+6+3=27$

또, 평행사변형이 아닌 사다리꼴을 만드는 방법은 다음과 같다.

(ⅳ) a에서 2개, b, c에서 각각 1개씩을 택하여 만들 수 있는 사다리꼴의 개수는

${}_4C_2\cdot{}_3C_1\cdot{}_2C_1=6\cdot3\cdot2=36$

(ⅴ) b에서 2개, a, c에서 각각 1개씩을 택하여 만들 수 있는 사다리꼴의 개수는

${}_3C_2\cdot{}_4C_1\cdot{}_2C_1=3\cdot4\cdot2=24$

(ⅵ) c에서 2개, a, b에서 각각 1개씩을 택하여 만들 수 있는 사다리꼴의 개수는

${}_2C_2\cdot{}_4C_1\cdot{}_3C_1=1\cdot4\cdot3=12$

(ⅳ), (ⅴ), (ⅵ)에서 $q=36+24+12=72$

$\therefore q-p=72-27=45$

답 45

1033

|전략| 주어진 조건을 만족시키는 집합 A와 집합 B의 원소를 먼저 생각하고, 함수의 개수를 구한다.

집합 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9,\ 10\}$의 두 부분집합 $A,\ B$에 대하여 $A\cup B=S,\ A\cap B=\varnothing$이고, A에서 B로의 함수 f가 일대일대응이므로 $n(A)=5,\ n(B)=5$이어야 한다.

또, $f(1)=5$이므로 $1\in A,\ 5\in B$이다.

1과 5를 제외한 집합 S의 8개의 원소 중에서 A의 원소가 되는 4개를 택하는 방법의 수는 ${}_8C_4=70$

1을 제외한 A의 원소 4개를 5를 제외한 B의 원소에 대응시키는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$70\cdot24=1680$ 답 1680

1034

|전략| 주어진 조건에 맞게 빨간 공을 넣는 방법의 수를 먼저 생각하고, 파란 공을 넣는 방법의 수를 생각한다.

빨간 공 4개를 서로 다른 세 개의 주머니에 적어도 한 개 이상씩 넣는 방법의 수는 세 주머니 중에서 빨간 공 2개를 넣는 주머니를 고르는 방법의 수와 같으므로

${}_3C_1=3$

파란 공 5개를 서로 다른 세 개의 주머니에 조건을 만족시키면서 넣는 방법은 다음과 같다.

(i) 1개, 1개, 3개로 나누어 넣는 방법의 수는

${}_2C_1=2$ — 파란 공 3개는 빨간 공 1개가 들어있는 주머니 중 하나에 넣어야 한다.

(ii) 1개, 2개, 2개로 나누어 넣는 방법의 수는

${}_3C_1=3$ — 파란 공 1개를 넣는 주머니를 선택한다.

(iii) 0개, 2개, 3개로 나누어 넣는 방법의 수는

${}_2C_1\cdot{}_2C_1=2\cdot2=4$ — 파란 공 3개는 빨간 공 1개가 들어있는 주머니 중 하나에 넣고, 파란 공 2개는 나머지 주머니 중 하나에 넣어야 한다.

따라서 구하는 방법의 수는

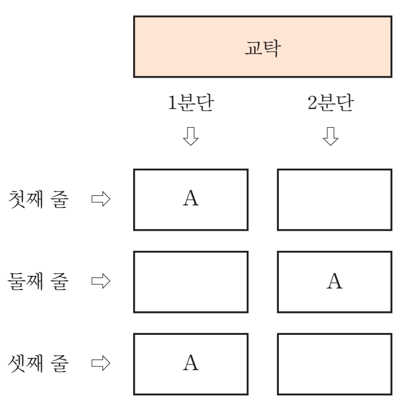
$3\cdot(2+3+4)=27$ 답 ③

1035

|전략| 참가 인원이 가장 많은 A반 학생들의 자리를 먼저 정한 후 나머지 세 자리에 B반과 C반 학생들을 앉히는 방법의 수를 생각한다.

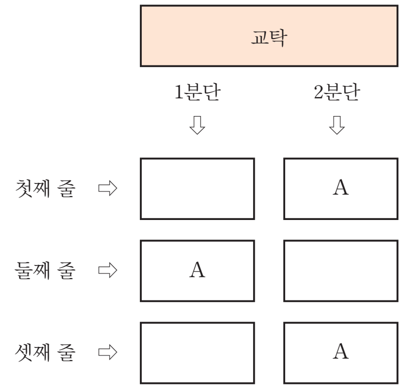
같은 반 학생은 옆 혹은 앞뒤로 이웃하지 않게 앉아야 하므로 A반 학생 3명의 자리를 정하는 방법은 다음과 같다.

(i)



이때, 나머지 세 자리에 B반 학생 2명과 C반 학생 1명을 앉히는 방법의 수는 ${}_3C_2=3$

(ii)



이때, 나머지 세 자리에 B반 학생 2명과 C반 학생 1명을 앉히는 방법의 수는 ${}_3C_2=3$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

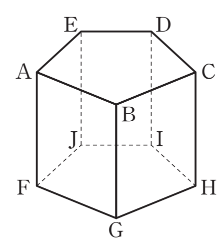
$3+3=6$ 답 6

참고 같은 반 학생들끼리는 출석 번호가 작을수록 교탁에 가까운 자리로 배정하므로 순서를 따로 생각할 필요가 없다.

1036

|전략| 주어진 조건을 만족시키는 삼각형을 만들기 위한 방법을 생각한다.

삼각형의 어떤 변도 오각기둥 ABCDE−FGHIJ의 모서리가 아닌 경우는 다음과 같다.



(i) 면 ABCDE에서 꼭짓점 1개, 면 FGHIJ에서 꼭짓점 2개를 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$5\cdot({}_5C_2-5-2)=15$

(ii) 면 ABCDE에서 꼭짓점 2개, 면 FGHIJ에서 꼭짓점 1개를 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는 (i)과 동일하다.

따라서 구하는 경우의 수는

$15+15=30$ 답 30

Lecture

꼭짓점 A와 면 FGHIJ에서 꼭짓점 2개를 택하여 만든 삼각형 중 어떤 변도 오각기둥 ABCDE−FGHIJ의 모서리가 아닌 삼각형의 개수를 구해 보자.
삼각형의 어떤 변도 오각기둥 ABCDE−FGHIJ의 모서리가 아니려면 면 FGHIJ에서 꼭짓점 2개를 택하여 만든 선분은 오각형 FGHIJ의 대각선이어야 한다.
그런데 점 A에서 면 FGHIJ에 내린 수선의 발 F를 포함하는 △AFI, △AFH는 모서리 AF를 포함한다.
따라서 구하는 삼각형의 개수는
${}_5C_2-5-2$

Memo