이책의

정답과 해설

수학 II

본책 8~23쪽

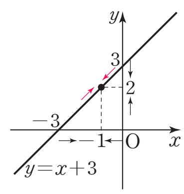
1 | 함수의 극한

STEP 1 개념 마스터

0001

$f(x)=x+3$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to -1}(x+3)=2$

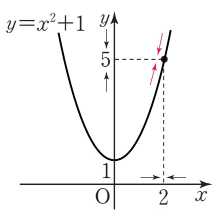


답 2

0002

$f(x)=x^2+1$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 5에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)=5$

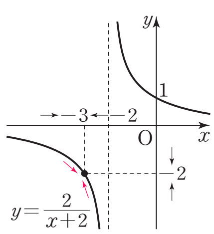


답 5

0003

$f(x)=\dfrac{2}{x+2}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 -3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -2에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2}{x+2}=-2$

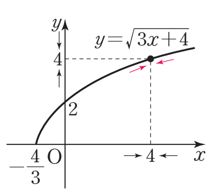


답 -2

0004

$f(x)=\sqrt{3x+4}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 4에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 4에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{3x+4}=4$

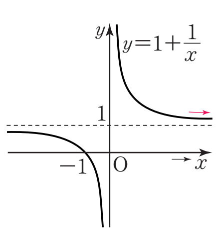


답 4

0005

$f(x)=1+\dfrac{1}{x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$

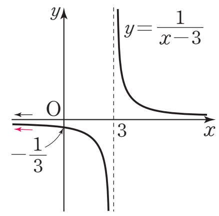


답 1

0006

$f(x)=\dfrac{1}{x-3}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x-3}=0$

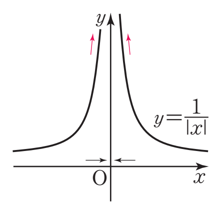


답 0

0007

$f(x)=\dfrac{1}{|x|}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}=\infty$

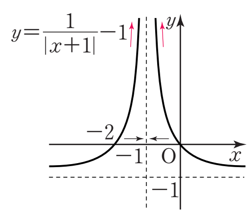


답 ∞

0008

$f(x)=\dfrac{1}{|x+1|}-1$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{|x+1|}-1\right)=\infty$

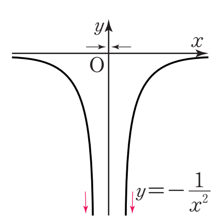


답 ∞

0009

$f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$

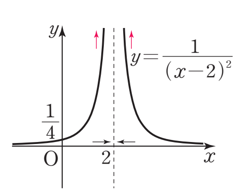


답 $-\infty$

0010

$f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

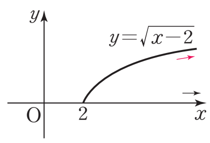
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\infty$



답 ∞

0011

$f(x)=\sqrt{x-2}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값도 한없이 커지므로

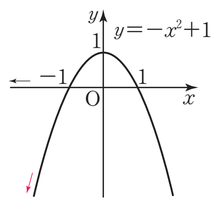


$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x-2}=\infty$

답 ∞

0012

$f(x)=-x^2+1$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값도 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로



$\lim_{x\to-\infty}(-x^2+1)=-\infty$

답 $-\infty$

0013

(1) $\lim_{x\to-1-}f(x)=1$

(2) $\lim_{x\to-1+}f(x)=1$

(3) $\lim_{x\to-1}f(x)=1$

(4) $\lim_{x\to1-}f(x)=4$

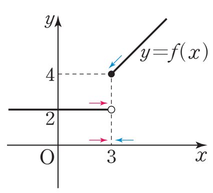
(5) $\lim_{x\to1+}f(x)=2$

(6) $\lim_{x\to1-}f(x)\neq\lim_{x\to1+}f(x)$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

답 (1) 1 (2) 1 (3) 1 (4) 4 (5) 2 (6) 존재하지 않는다.

0014

$y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



(1) $\lim_{x\to3-}f(x)=2$

(2) $\lim_{x\to3+}f(x)=4$

(3) $\lim_{x\to3-}f(x)\neq\lim_{x\to3+}f(x)$이므로

$\lim_{x\to3}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

답 (1) 2 (2) 4 (3) 존재하지 않는다.

0015

$\lim_{x\to1}(-2x+1)=-2\times1+1=-1$

답 -1

0016

$\lim_{x\to-1}x^2(x-4)=(-1)^2\times(-1-4)=-5$

답 -5

0017

$\lim_{x\to2}\dfrac{x+3}{x^2+1}=\dfrac{2+3}{2^2+1}=\dfrac{5}{5}=1$

답 1

0018

$\lim_{x\to-3}\dfrac{x^2+x}{x-1}=\dfrac{(-3)^2+(-3)}{-3-1}=\dfrac{6}{-4}=-\dfrac{3}{2}$

답 $-\dfrac{3}{2}$

0019

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x-1}{2x^2-x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(2x+1)(x-1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{1}{2x+1}\\&=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{1}{3}$

0020

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\frac{x^2-4x+3}{x-3}&=\lim_{x\to3}\frac{(x-1)(x-3)}{x-3}\\&=\lim_{x\to3}(x-1)\\&=3-1=2\end{aligned}$$

답 2

0021

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-3x+2}&=\lim_{x\to1}\frac{(x+4)(x-1)}{(x-1)(x-2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x+4}{x-2}\\&=\frac{1+4}{1-2}=-5\end{aligned}$$

답 -5

0022

$$\begin{aligned}\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}&=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}\\&=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}\\&=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x+5}+3}\\&=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{1}{6}$

0023

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}(\sqrt{x+2}+2)\\&=\sqrt{4}+2=4\end{aligned}$$

답 4

0024

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$$

답 0

0025

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+x}{2x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-3+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x^2}}=\infty$$

답 ∞

0026

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-2x-1}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=4$$

답 4

0027

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)(x-1)}{x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x-1}{x^2-x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=2$$

답 2

0028

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=0$$

답 0

0029

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$
$$=\frac{2}{1+1}=1$$

답 1

0030

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x+1}+1\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\times\frac{x}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x+1}=1$$

답 1

0031

$$\lim_{x\to\infty}3x\left(1-\frac{x-1}{x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}3x\times\frac{3}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{1+\frac{2}{x}}=9$$

답 9

0032

$\lim_{x\to-2}\frac{ax+b}{x+2}=2$에서 $\lim_{x\to-2}(x+2)=0$이므로

$\lim_{x\to-2}(ax+b)=-2a+b=0$ $\quad\therefore b=2a$ ······㉠

㉠을 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{ax+2a}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{a(x+2)}{x+2}=a=2$$

$\therefore a=2,\ b=4$

답 $a=2,\ b=4$

0033

$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=5$에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$ $\quad\therefore b=-2a-4$ ······㉠

㉠을 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x+a+2)=a+4=5$$

$\therefore a=1,\ b=-6$

답 $a=1,\ b=-6$

0034

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=-1$에서 $-1\neq0$이고 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$ $\quad\therefore b=-a-1$ ······㉠

㉠을 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax-a-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+a+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+a+1}=\frac{1}{a+2}=-1$$

$\therefore a=-3,\ b=2$

답 $a=-3,\ b=2$

0035

$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{2x^2+ax+b}=\frac{1}{3}$에서 $\frac{1}{3}\neq0$이고 $\lim_{x\to2}(x^2-x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(2x^2+ax+b)=8+2a+b=0$ $\quad\therefore b=-2a-8$ ······㉠

㉠을 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{2x^2+ax-2a-8}=\lim_{x\to2}\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(2x+a+4)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+1}{2x+a+4}=\frac{3}{a+8}=\frac{1}{3}$$

$\therefore a=1,\ b=-10$

답 $a=1,\ b=-10$

0036

(1) $\lim_{x\to0}\frac{2x^2-1}{x^2+1}=-1$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{3x^2-1}{x^2+1}=-1$

(3) 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{2x^2-1}{x^2+1} \le f(x) \le \dfrac{3x^2-1}{x^2+1}$이고

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2-1}{x^2+1}=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$

답 (1) -1 (2) -1 (3) -1

0037

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $1-\dfrac{1}{x}<f(x)<1+\dfrac{1}{x}$이고

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$

답 1

STEP 2 유형 마스터

0038

| 전략 | 좌극한과 우극한을 각각 구하여 비교한다.

ㄱ. $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{1}{x}=-\infty$이므로 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0-}(x^2+1)=1$, $\lim\limits_{x\to0+}(x^2+1)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to0}(x^2+1)=1$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{-x}{x}=-1$, $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x}{x}=1$이므로

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하는 것은 ㄴ이다.

답 ㄴ

0039

① $\lim\limits_{x\to-3-}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-3+}f(x)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to-3}f(x)=0$

② $\lim\limits_{x\to-2-}f(x)=2$

③ $\lim\limits_{x\to-2-}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-2+}f(x)=4$이므로 $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

④ $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

⑤ $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=2$이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$

따라서 극한값이 존재하지 않는 것은 ③이다.

답 ③

0040

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}(x^2+3x)=4$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(x+a)=1+a$

이때, $\lim\limits_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)$이어야 하므로 $4=1+a$

$\therefore a=3$

답 3

0041

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}(x+k)=k+2$

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\lim\limits_{x\to2+}(-x^2+k^2)=k^2-4$

$\lim\limits_{x\to2}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)$이어야 하므로

$k+2=k^2-4$에서 $k^2-k-6=0$

$(k+2)(k-3)=0 \qquad \therefore k=3\ (\because k>0)$

답 3

0042

| 전략 | $x=2$를 기준으로 구간을 나누어 함수 $f(x)$의 식을 구한다.

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{|x-2|}=\frac{(x-2)(x-3)}{|x-2|}=\begin{cases} x-3 & (x>2) \\ -x+3 & (x<2) \end{cases}$$

이므로

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}(-x+3)=1$

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\lim\limits_{x\to2+}(x-3)=-1$

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로

$a+b=1+(-1)=0$

답 ②

0043

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)=2$이므로 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=2$

또, $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to2}f(x)+\lim\limits_{x\to0-}f(x)=2+(-1)=1$

답 1

0044

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-}(-x+1)=2$

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}(x^2-3x)=0$

따라서 $a=2$, $b=0$이므로

$a-b=2-0=2$

답 2

0045

| 전략 | 정수 n에 대하여 $\lim\limits_{x\to n-}[x]=n-1$, $\lim\limits_{x\to n+}[x]=n$임을 이용한다.

① $-1<x<0$일 때, $[x]=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{x}{[x]}=\dfrac{0}{-1}=0$

② $1<x<2$일 때, $[x]=1$이므로

$\lim\limits_{x\to1.5}\dfrac{x}{[x]}=\dfrac{1.5}{1}=1.5$

③ $0<x<1$일 때, $1<x+1<2$이므로 $[x+1]=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{[x+1]}{x-1}=\dfrac{1}{-1}=-1$

④ $-1<x<0$일 때, $-2<x-1<-1$이므로 $[x-1]=-2$

$\therefore \lim\limits_{x\to0-}\dfrac{[x-1]}{x-1}=\dfrac{-2}{-1}=2$

⑤ $1<x<2$일 때, $0<x-1<1$이므로 $[x-1]=0$

$\therefore \lim_{x\to1+}\frac{[x-1]}{x+1}=\frac{0}{2}=0$

따라서 극한값이 가장 큰 것은 ④이다. 답 ④

0046

$1<x<2$일 때, $-1<x-2<0$이므로 $[x-2]=-1$

$\therefore \lim_{x\to2-}[x-2]=-1$

$2<x<3$일 때, $3<x+1<4$이므로 $[x+1]=3$

$\therefore \lim_{x\to2+}[x+1]=3$

$\therefore \lim_{x\to2-}[x-2]+\lim_{x\to2+}[x+1]=-1+3=2$ 답 ⑤

0047

$2<x<3$일 때, $[x]=2$이므로 $\lim_{x\to3-}[x]=2$

$3<x<4$일 때, $[x]=3$이므로 $\lim_{x\to3+}[x]=3$

$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3-}([x]^2-a[x])=2^2-2a=4-2a$

$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3+}([x]^2-a[x])=3^2-3a=9-3a$

이때, $\lim_{x\to3}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3+}f(x)$이어야 하므로

$4-2a=9-3a \qquad \therefore a=5$ 답 ③

0048

|전략| $x\to a+$일 때, $f(x)\to b+$이면 $\lim_{x\to a+}g(f(x))=\lim_{f(x)\to b+}g(f(x))$이다.

$x\to0+$일 때 $f(x)\to0+$이므로

$\lim_{x\to0+}g(f(x))=\lim_{f(x)\to0+}g(f(x))=-2$

$x\to2+$일 때 $f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to2+}g(f(x))=g(-1)=1$

$\therefore \lim_{x\to0+}g(f(x))+\lim_{x\to2+}g(f(x))=-2+1=-1$ 답 ②

0049

ㄱ. $\lim_{x\to1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to1+}f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $x\to1-$일 때 $f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1-}f(f(x))=f(1)=0$ (참)

ㄷ. $x\to1+$일 때 $f(x)\to0+$이므로

$\lim_{x\to1+}f(f(x))=\lim_{f(x)\to0+}f(f(x))=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0050

$x\to0-$일 때 $g(x)\to0-$이므로

$\lim_{x\to0-}f(g(x))=\lim_{g(x)\to0-}f(g(x))=1$

$x\to1-$일 때 $f(x)\to-1+$이므로

$\lim_{x\to1-}g(f(x))=\lim_{f(x)\to-1+}g(f(x))=-1$

$x\to1+$일 때 $f(x)\to1+$이므로

$\lim_{x\to1+}f(f(x))=\lim_{f(x)\to1+}f(f(x))=1$

$\therefore \lim_{x\to0-}f(g(x))+\lim_{x\to1-}g(f(x))+\lim_{x\to1+}f(f(x))$

$=1+(-1)+1=1$ 답 1

0051

|전략| $3f(x)-g(x)=h(x)$로 놓고 $g(x)$를 $f(x)$, $h(x)$로 나타낸 후 주어진 식에 대입한다.

$3f(x)-g(x)=h(x)$로 놓으면 $g(x)=3f(x)-h(x)$이고

$\lim_{x\to\infty}h(x)=1$이다.

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-3g(x)}{4f(x)+g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-3\{3f(x)-h(x)\}}{4f(x)+\{3f(x)-h(x)\}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-7f(x)+3h(x)}{7f(x)-h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-7+3\times\frac{h(x)}{f(x)}}{7-\frac{h(x)}{f(x)}}$$

$$=\frac{-7}{7}=-1\ \left(\because \lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0\right)$$

답 -1

다른 풀이 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\{3f(x)-g(x)\}=1$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)-g(x)}{f(x)}=0$

즉, $\lim_{x\to\infty}\left\{3-\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=3-\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=0$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=3$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-3g(x)}{4f(x)+g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-3\times\frac{g(x)}{f(x)}}{4+\frac{g(x)}{f(x)}}=\frac{2-3\times3}{4+3}=-1$$

0052

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)+2g(x)}{f(x)-3g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\times\frac{f(x)}{g(x)}+2}{\frac{f(x)}{g(x)}-3}$$

$$=\frac{3\times4+2}{4-3}=14$$

답 14

0053

$2f(x)-3g(x)=h(x)$로 놓으면 $g(x)=\frac{2f(x)-h(x)}{3}$이고

$\lim_{x\to1}h(x)=12$이다.

$\therefore \lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\frac{2f(x)-h(x)}{3}=\frac{2\times3-12}{3}=-2$ 답 ②

0054

$\lim_{x\to\infty}f(x)=4$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=a$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-g(x)}{2f(x)-5g(x)}=\frac{4-a}{2\times4-5a}=1$$

$4-a=8-5a \qquad \therefore a=1$ 답 1

0055

$2x+5=t$로 놓으면 $x \to 0$일 때 $t \to 5$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{2x+5-f(2x+5)}{x}&=\lim_{t\to5}\frac{t-f(t)}{\frac{t-5}{2}}\\&=2\lim_{t\to5}\frac{t-5+5-f(t)}{t-5}\\&=2\lim_{t\to5}\frac{t-5-\{f(t)-5\}}{t-5}\\&=2\lim_{t\to5}\left\{1-\frac{f(t)-5}{t-5}\right\}\\&=2\{1-(-10)\}=22\end{aligned}$$

답 ⑤

0056

$x-3=t$로 놓으면 $x \to 3$일 때 $t \to 0$이므로 … ❶

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x-3)}{x-3}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=4$$ … ❷

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{2f(x)+3x^2}{3f(x)-2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\times\frac{f(x)}{x}+3x}{3\times\frac{f(x)}{x}-2x}$$

$$=\frac{2\times4+0}{3\times4-0}=\frac{2}{3}$$ … ❸

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ $x-3=t$로 놓고 $x \to 3$일 때 t의 극한을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\lim_{x\to0}\frac{2f(x)+3x^2}{3f(x)-2x^2}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0057

ㄱ. $f(x)+g(x)=h(x)$, $f(x)-g(x)=k(x)$로 놓으면

$f(x)=\frac{h(x)+k(x)}{2}$이므로 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=L$,

$\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=M$ (L, M은 실수)이라 하면

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)+k(x)}{2}=\frac{L+M}{2}$ (참)

ㄴ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\ge1)\\0 & (x<1)\end{cases}$이면 $\lim_{x\to1}f(x)=0$,

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=0$이지만 $\lim_{x\to1}g(x)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. [반례] $f(x)=|x|$, $g(x)=\frac{1}{|x|}$이면 $\lim_{x\to0}f(x)=0$,

$\lim_{x\to0}g(x)=\infty$이지만 $\lim_{x\to0}f(x)g(x)=1$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 답 ㄱ

0058

|전략| 분모, 분자를 각각 인수분해하여 약분한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{x^3-x-6}{x^2-3x+2}&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+3)}{(x-1)(x-2)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+3}{x-1}=11\end{aligned}$$

답 11

0059

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{x^2-5x+6}&=\lim_{x\to2}\frac{(x+4)(x-2)}{(x-2)(x-3)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{x+4}{x-3}=-6\end{aligned}$$

답 ①

0060

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{3(x^4-1)}{(x^2-1)f(x)}&=\lim_{x\to1}\frac{3(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2-1)f(x)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{3(x^2+1)}{f(x)}=\frac{6}{f(1)}\end{aligned}$$

즉, $\frac{6}{f(1)}=2$이므로 $f(1)=3$ 답 3

0061

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)\}^2+f(x)}{x^2f(x)-4f(x)}&=\lim_{x\to2}\frac{f(x)\{f(x)+1\}}{f(x)(x^2-4)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{f(x)+1}{(x+2)(x-2)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}\times\lim_{x\to2}\frac{f(x)+1}{x-2}\\&=\frac{1}{4}\times(-4)=-1\end{aligned}$$

답 -1

0062

|전략| 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{x^2-4}\\&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x+2)(x-2)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{x+2}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

답 ⑤

0063

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}&=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x^2-1)(\sqrt{x+3}+2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{8}$

0064

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\frac{0\times(1+1)}{1+1}=0$$

답 ②

0065

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-\sqrt{3x-2}}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x-\sqrt{3x-2})(x+\sqrt{3x-2})(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x^2-3x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+\sqrt{3x-2}}{(x-1)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\frac{2+\sqrt{4}}{(2-1)\times(\sqrt{4}+2)}=1$$

답 ②

0066

|전략| $x=-t$로 놓고 주어진 식을 변형하여 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t+1}{\sqrt{t^2-t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1}=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

0067

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{7x}{5x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}}{5-\frac{1}{x^2}}=0$

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-x}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x^2}}=3$

ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1}=\frac{3}{2}$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

0068

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\ (a\neq0)$라 하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+f(x)}{x^2+2f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}\times\frac{f(x)}{x}}{1+\frac{2}{x}\times\frac{f(x)}{x}}$$
$$=\frac{2+0\times a}{1+0\times a}=2$$

답 ④

다른 풀이 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$가 0이 아닌 값을 가지므로 $f(x)$는 x에 대한 일차식이다.

따라서 $\dfrac{2x^2+f(x)}{x^2+2f(x)}$의 분모, 분자는 모두 이차식이고, 최고차항의 계수의 비는 2이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+f(x)}{x^2+2f(x)}=2$$

0069

$x\to-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{-t}=a$$
$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{t}=-a$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2f(x)-1}{\sqrt{x^2-f(x)}+f(x)}=\lim_{t\to\infty}\frac{2f(-t)-1}{\sqrt{t^2-f(-t)}+f(-t)}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2\times\frac{f(-t)}{t}-\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}\times\frac{f(-t)}{t}}+\frac{f(-t)}{t}}$$
$$=\frac{2\times(-a)-0}{\sqrt{1-0\times(-a)}+(-a)}$$
$$=\frac{-2a}{1-a}=3$$

$-2a=3-3a\qquad\therefore a=3$

답 3

0070

|전략| 분모를 1로 보고 분자를 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-5x+2}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+5t+2}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+5t+2}-t)(\sqrt{t^2+5t+2}+t)}{\sqrt{t^2+5t+2}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{5t+2}{\sqrt{t^2+5t+2}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{5+\frac{2}{t}}{\sqrt{1+\frac{5}{t}+\frac{2}{t^2}}+1}=\frac{5}{2}$$

답 ⑤

0071

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-x}-x)(\sqrt{x^2-x}+x)}{\sqrt{x^2-x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

0072

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x+1})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x+1})(\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-x+1})}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-2}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=2$$

답 ④

0073

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x}}}\right)=-1$$

답 ②

0074

| 전략 | 괄호 안의 식을 통분하여 $\frac{0}{0}$ 꼴로 변형한다.

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\times\frac{2x^2-x-1}{2(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\times\frac{(2x+1)(x-1)}{2(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{2x+1}{2(x+1)}=\frac{3}{4}$$

답 ④

0075

$$\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\times\frac{2-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\times\frac{(2-\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})}{2\sqrt{x+1}(2+\sqrt{x+1})}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\times\frac{3-x}{4\sqrt{x+1}+2x+2}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{-1}{4\sqrt{x+1}+2x+2}=-\frac{1}{16}$$

답 ⑤

0076

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to\infty}x^2\times\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}x^2\times\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1+x\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0077

| 전략 | $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 존재하고, $x\to a$일 때 (분모) $\to$ 0이면 (분자) $\to$ 0임을 이용한다.

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x^2-1}=3$에서 $\lim_{x\to1}(x^2-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$　　$\therefore b=-a-1$　　……㉠

㉠을 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-a-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x+a+1}{x+1}=\frac{a+2}{2}=3$$

따라서 $a=4$, $b=-5$이므로

$a-b=4-(-5)=9$

답 ⑤

0078

$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{2x^2+x-a}=b$에서 $b\neq0$이고 $\lim_{x\to-1}(x^2-1)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}(2x^2+x-a)=1-a=0$　　$\therefore a=1$

$a=1$을 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{2x^2+x-1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)}{(2x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{2x-1}=\frac{2}{3}=b$$

$\therefore a+b=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$

답 $\frac{5}{3}$

0079

$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+3}+b}{x-1}=\frac{1}{4}$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(a\sqrt{x+3}+b)=2a+b=0$

$\therefore b=-2a$　　……㉠　　… ❶

㉠을 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+3}-2a}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{a}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{a}{4}=\frac{1}{4}$$

따라서 $a=1$, $b=-2$이므로 ⋯ ❷

$ab=1\times(-2)=-2$ ⋯ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

0080

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{1-\sqrt{a-x^2}}=b$에서 $b\neq0$이고 $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to2}(1-\sqrt{a-x^2})=1-\sqrt{a-4}=0$ $\quad\therefore a=5$

$a=5$를 주어진 등식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{x-2}{1-\sqrt{5-x^2}}&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(1+\sqrt{5-x^2})}{(1-\sqrt{5-x^2})(1+\sqrt{5-x^2})}\\&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(1+\sqrt{5-x^2})}{(x+2)(x-2)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{1+\sqrt{5-x^2}}{x+2}\\&=\frac{1}{2}=b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2-6x+a}{2x^2-3x+2b}&=\lim_{x\to1}\frac{x^2-6x+5}{2x^2-3x+1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-5)}{(2x-1)(x-1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x-5}{2x-1}=-4\end{aligned}$$

답 ①

0081

|전략| $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$ ($L\neq0$인 실수)이면 $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같다.

$a\le0$이면 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+3}-ax-b)=\infty$이므로 $a>0$이어야 한다.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+3}-ax-b)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x+3}-ax-b)(\sqrt{x^2+2x+3}+ax+b)}{\sqrt{x^2+2x+3}+ax+b}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x^2+(2-2ab)x+(3-b^2)}{\sqrt{x^2+2x+3}+ax+b}\quad\cdots\cdots㉠\end{aligned}$$

이때, ㉠이 극한값을 가지므로

$1-a^2=0$ $\quad\therefore a=1$ ($\because$ $a>0$)

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{(2-2b)x+(3-b^2)}{\sqrt{x^2+2x+3}+x+b}&=\lim_{x\to\infty}\frac{(2-2b)+\dfrac{3-b^2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1+\dfrac{b}{x}}\\&=1-b=-3\end{aligned}$$

$\therefore b=4$

$\therefore a+b=1+4=5$

답 ⑤

0082

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}&=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x+a)(x-a)}\\&=\lim_{x\to a}\frac{x^2+ax+a^2}{x+a}\\&=\frac{3a^2}{2a}=\frac{3a}{2}=3\end{aligned}$$

$\therefore a=2$

$a=2$를 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{x^3-2x^2+4x-8}{x-2}&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+4)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}(x^2+4)=8\end{aligned}$$

답 ④

0083

$$\lim_{x\to\infty}\left(ax+b-\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-1)x^3+bx^2+ax+b-1}{x^2+1}\quad\cdots\cdots㉠$$

이때, ㉠이 극한값을 가지므로 $a-1=0$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{bx^2+x+b-1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{b+\dfrac{1}{x}+\dfrac{b-1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=b=0$$

$\therefore a+b=1+0=1$

답 ①

0084

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{ax^2+bx}+x)&=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{at^2-bt}-t)\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{at^2-bt}-t)(\sqrt{at^2-bt}+t)}{\sqrt{at^2-bt}+t}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{(a-1)t^2-bt}{\sqrt{at^2-bt}+t}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{(a-1)t-b}{\sqrt{a-\dfrac{b}{t}}+1}\quad\cdots\cdots㉠\end{aligned}$$

이때, ㉠이 극한값을 가지므로 $a-1=0$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{-b}{\sqrt{1-\dfrac{b}{t}}+1}=-\frac{b}{2}=-1\qquad\therefore b=2$$

$\therefore ab=1\times2=2$

답 2

0085

|전략| 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$ ($L\neq0$인 실수)이면 $\dfrac{\{f(x)\text{의 최고차항의 계수}\}}{\{g(x)\text{의 최고차항의 계수}\}}=L$이다.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{2x^2-x+9}=2$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 4인 이차함수임을 알 수 있다.

또, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x^2+2x-3}=1$에서 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+2x-3)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$ $\quad\therefore f(1)=0$

즉, $f(x)=4(x-1)(x-a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있으므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{4(x-1)(x-a)}{(x+3)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{4(x-a)}{x+3}=1-a=1$$

$\therefore a=0$

따라서 $f(x)=4x(x-1)=4x^2-4x$이므로

$f(2)=16-8=8$ 답 8

0086

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 $\lim_{x\to0}x=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=0$ $\quad\therefore f(0)=0$

또, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-1$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=0$ $\quad\therefore f(1)=0$

즉, $f(x)=x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수, $a\neq0$)로 놓을 수 있으므로

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}(x-1)(ax+b)=-b=2$ $\quad\therefore b=-2$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}x(ax-2)=a-2=-1$ $\quad\therefore a=1$

따라서 $f(x)=x(x-1)(x-2)$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x(x-1)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}x(x-1)=2$ 답 2

0087

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}=3$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차함수임을 알 수 있다.

$f(x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f(1)=3$이므로 $f(1)=3+a+b=3$, $a+b=0$ ······㉠

$f(-1)=7$이므로 $f(-1)=3-a+b=7$, $a-b=-4$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=2$

따라서 $f(x)=3x^2-2x+2$이므로

$f(2)=12-4+2=10$ 답 10

0088

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-6x^2}{2x-3}=a$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 6인 이차함수임을 알 수 있다.

$f(x)-6x^2$은 일차 이하의 식이다.

또, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-2$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=0$ $\quad\therefore f(1)=0$

즉, $f(x)=6(x-1)(x+k)$ (k는 상수)로 놓을 수 있으므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{6(x-1)(x+k)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}6(x+k)=6+6k=-2$$

$\therefore k=-\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=6(x-1)\left(x-\frac{4}{3}\right)=6x^2-14x+8$이므로

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-6x^2}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x^2-14x+8)-6x^2}{2x-3}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-14x+8}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-14+\frac{8}{x}}{2-\frac{3}{x}}=-7$$

답 ③

0089

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=2$에서 $\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=0$ $\quad\therefore f(-1)=0$

또, $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=-3$에서 $\lim_{x\to-2}(x+2)=0$이므로

$\lim_{x\to-2}f(x)=0$ $\quad\therefore f(-2)=0$

즉, $f(x)=(x+1)(x+2)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식)로 놓을 수 있으므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+2)Q(x)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x+2)Q(x)$$
$$=Q(-1)=2 \quad\cdots\cdots㉠$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+1)(x+2)Q(x)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}(x+1)Q(x)$$
$$=-Q(-2)=-3$$

$\therefore Q(-2)=3$ ······㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 다항함수 $Q(x)$ 중 차수가 가장 낮은 것은 일차식이므로 $Q(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)로 놓으면 ㉠, ㉡에서

$-a+b=2$, $-2a+b=3$

위의 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

따라서 $Q(x)=-x+1$이므로

$$g(x)=(x+1)(x+2)(-x+1)$$
$$=-x^3-2x^2+x+2$$

답 $g(x)=-x^3-2x^2+x+2$

0090

|전략| $g(x)<f(x)<h(x)$이고 $\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}h(x)=L$ (L은 실수)이면 $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$임을 이용한다.

모든 양의 실수 x에 대하여 $x^2>0$이므로

$2x^2-x-1<f(x)<2x^2+4x+1$의 각 변을 x^2으로 나누면

$x^2>0$이므로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

$$\frac{2x^2-x-1}{x^2}<\frac{f(x)}{x^2}<\frac{2x^2+4x+1}{x^2}$$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x-1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x+1}{x^2}=2$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$ 답 2

0091

임의의 양의 실수 x에 대하여 $2x^3>0$이므로

$3ax^3+x^2+2<2x^3f(x)<3ax^3+x^2+3$의 각 변을 $2x^3$으로 나누면

$$\frac{3ax^3+x^2+2}{2x^3}<f(x)<\frac{3ax^3+x^2+3}{2x^3} \quad \cdots ❶$$

이때, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3ax^3+x^2+2}{2x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3ax^3+x^2+3}{2x^3}=\frac{3}{2}a$이므로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{3}{2}a=3 \quad \cdots ❷$$

$$\therefore a=2 \quad \cdots ❸$$

답 2

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 범위를 구할 수 있다.	40%
❷ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	10%

0092

(i) $x \longrightarrow 1+$일 때, $x-1>0$이므로

$2x^3-6x^2+4x\le f(x)\le x^4-2x^3+1$의 각 변을 $x-1$로 나누면

$$\frac{2x^3-6x^2+4x}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{x^4-2x^3+1}{x-1}$$

이때,

$$\lim_{x\to1+}\frac{2x^3-6x^2+4x}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{2x(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to1+}2x(x-2)=-2$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{x^4-2x^3+1}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x^3-x^2-x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}(x^3-x^2-x-1)=-2$$

이므로 $\lim\limits_{x\to1+}\frac{f(x)}{x-1}=-2$

(ii) $x \longrightarrow 1-$일 때, $x-1<0$이므로

$2x^3-6x^2+4x\le f(x)\le x^4-2x^3+1$의 각 변을 $x-1$로 나누면

$$\frac{x^4-2x^3+1}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{2x^3-6x^2+4x}{x-1}$$

이때,

$$\lim_{x\to1-}\frac{x^4-2x^3+1}{x-1}=\lim_{x\to1-}(x^3-x^2-x-1)=-2$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{2x^3-6x^2+4x}{x-1}=\lim_{x\to1-}2x(x-2)=-2$$

이므로 $\lim\limits_{x\to1-}\frac{f(x)}{x-1}=-2$

(i), (ii)에 의하여 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-2$

답 ①

0093

|전략| m과 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸 후 극한값을 구한다.

직선 OP의 기울기가 $\frac{\sqrt{t}}{t}=\frac{1}{\sqrt{t}}$이므로 점 P를 지나고 $\overline{\mathrm{OP}}$와 수직인 직선 l의 기울기는 $m=-\sqrt{t}$이다.

이때, $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+(\sqrt{t})^2}=\sqrt{t^2+t}$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}(\overline{\mathrm{OP}}-m^2)&=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+t}-t)\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+t}-t)(\sqrt{t^2+t}+t)}{\sqrt{t^2+t}+t}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\sqrt{t^2+t}+t}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

0094

원의 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+t^4}$이므로 점 Q의 좌표는 $(0, \sqrt{t^2+t^4})$이다.

이때, 점 H의 좌표가 $(0, t^2)$이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=t$, $\overline{\mathrm{QH}}=\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{t^2+t^4}-t^2$

$$\therefore \lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{QH}}}=\lim_{t\to0+}\frac{t}{\sqrt{t^2+t^4}-t^2}=\lim_{t\to0+}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}-t}=1$$

답 ②

0095

점 P는 곡선 $y=x^2$ 위의 점이므로 $\mathrm{P}(t, t^2)$ $(t>0)$으로 놓으면 직선 OP의 기울기는 $\frac{t^2}{t}=t$

또, 선분 OP의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}\left(\frac{t}{2}, \frac{t^2}{2}\right)$

이때, 직선 QM은 직선 OP와 수직이므로 직선 QM의 기울기는 $-\frac{1}{t}$이고 점 M을 지나므로 직선 QM의 방정식은

$$y-\frac{t^2}{2}=-\frac{1}{t}\left(x-\frac{t}{2}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x=0$을 ㉠에 대입하면 $y=\frac{t^2+1}{2}$ $\quad \therefore \mathrm{Q}\left(0, \frac{t^2+1}{2}\right)$

점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t \longrightarrow 0+$이므로

$$\lim_{t\to0+}\frac{t^2+1}{2}=\frac{1}{2}$$

따라서 점 Q가 한없이 가까워지는 점의 y좌표는 $\frac{1}{2}$이다.

답 ④

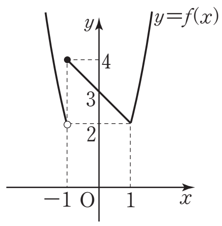
STEP 3 내신 마스터

0096

유형 01 함수의 극한값의 존재

|전략| $x=a$에서의 좌극한과 우극한이 모두 존재하고 그 값이 같을 때, $x=a$에서의 극한값이 존재한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=4$이므로 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=3$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0097

유형 02 함수의 극한값 구하기

|전략| $x \to -2+$는 x가 -2보다 크면서 -2에 한없이 가까워지고, $x \to 2-$는 x가 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워지는 것을 나타낸다.

$\lim_{x \to -2+} f(x) = -1$, $\lim_{x \to 2-} f(x) = 1$이므로

$\lim_{x \to -2+} f(x) + \lim_{x \to 2-} f(x) = -1 + 1 = 0$ 답 ①

0098

유형 04 합성함수의 극한

|전략| $x \to 0-$, $x \to 0+$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 극한값을 먼저 구한다.

ㄱ. $x \to 0-$일 때 $f(x) \to 1-$이므로

$\lim_{x \to 0-} f(f(x)) = \lim_{f(x) \to 1-} f(f(x)) = 0$

$x \to 0+$일 때 $f(x) \to -1+$이므로

$\lim_{x \to 0+} f(f(x)) = \lim_{f(x) \to -1+} f(f(x)) = 0$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(f(x)) = 0$ (참)

ㄴ. $x \to 0-$일 때 $f(x) \to 1-$이므로

$\lim_{x \to 0-} g(f(x)) = \lim_{f(x) \to 1-} g(f(x)) = 1$

$x \to 0+$일 때 $f(x) \to -1+$이므로

$\lim_{x \to 0+} g(f(x)) = \lim_{f(x) \to -1+} g(f(x)) = 1$

$\therefore \lim_{x \to 0} g(f(x)) = 1$ (참)

ㄷ. $x \to 0$일 때 $g(x) \to 0+$이므로

$\lim_{x \to 0} f(g(x)) = \lim_{g(x) \to 0+} f(g(x)) = -1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

Lecture

합성함수의 극한

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $x \to a-$일 때

① $f(x) \to b-$이면 ⇨ $\lim_{x \to a-} g(f(x)) = \lim_{f(x) \to b-} g(f(x))$

② $f(x) \to b+$이면 ⇨ $\lim_{x \to a-} g(f(x)) = \lim_{f(x) \to b+} g(f(x))$

③ $f(x) = b$이면 ⇨ $\lim_{x \to a-} g(f(x)) = g(b)$

0099

유형 05 함수의 극한에 대한 성질

|전략| $2f(x) - 3g(x) = h(x)$로 놓고 $g(x)$를 $f(x)$, $h(x)$로 나타낸 후 주어진 식에 대입한다.

$2f(x) - 3g(x) = h(x)$로 놓으면 $g(x) = \frac{2}{3}f(x) - \frac{1}{3}h(x)$이고

$\lim_{x \to \infty} h(x) = 2$이다.

$$\therefore \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - g(x)}{2f(x) + g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - \left\{\frac{2}{3}f(x) - \frac{1}{3}h(x)\right\}}{2f(x) + \left\{\frac{2}{3}f(x) - \frac{1}{3}h(x)\right\}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) + h(x)}{8f(x) - h(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{h(x)}{f(x)}}{8 - \frac{h(x)}{f(x)}}$$

$$= \frac{1}{8} \left(\because \lim_{x \to \infty} \frac{h(x)}{f(x)} = 0 \right)$$ 답 ①

0100

유형 05 함수의 극한에 대한 성질

|전략| 함수의 극한에 대한 성질을 이용한다.

ㄱ. $\lim_{x \to 1} f(x) = 6$이고 $\lim_{x \to 1} g(x) = 0$이므로

$\lim_{x \to 1} \{f(x) - g(x)\} = \lim_{x \to 1} f(x) - \lim_{x \to 1} g(x)$

$= 6 - 0 = 6$ (참)

ㄴ. $\frac{f(x)}{g(x)} = h(x)$로 놓으면 $g(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$이고 $\lim_{x \to 1} h(x) = 3$이다.

$\therefore \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{6}{3} = 2$ (참)

ㄷ. $f(x)g(x) = h(x)$로 놓으면 $g(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$이고 $\lim_{x \to 1} h(x) = 1$이다.

이때, $\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{1}{6}$이므로 $\lim_{x \to 1} g(x)$의 값은 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0101

유형 05 함수의 극한에 대한 성질

|전략| ㄴ. 좌극한과 우극한을 각각 구하여 비교한다.

ㄱ. $\lim_{x \to -1+} g(x) = 1$, $g(-1) = 1$

$\therefore \lim_{x \to -1+} g(x) = g(-1)$ (참)

ㄴ. $\lim_{x \to -1-} f(x)g(x) = \lim_{x \to -1-} f(x) \times \lim_{x \to -1-} g(x)$

$= 1 \times 0 = 0$

$\lim_{x \to -1+} f(x)g(x) = \lim_{x \to -1+} f(x) \times \lim_{x \to -1+} g(x)$

$= 0 \times 1 = 0$

$\therefore \lim_{x \to -1-} f(x)g(x) = \lim_{x \to -1+} f(x)g(x)$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $\lim_{x \to -1} f(x)g(x) = 0$

$f(-1)g(-1) = 1 \times 1 = 1$

$\therefore \lim_{x \to -1} f(x)g(x) \neq f(-1)g(-1)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0102

유형 06 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한 – 유리식 + 07 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한 – 무리식

|전략| 분모, 분자가 모두 다항식이면 분모, 분자를 각각 인수분해하여 약분하고, 분모, 분자 중 무리식이 있으면 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.

$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} + \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} + \lim_{x \to 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$

$= \lim_{x \to 1} (x^2+x+1) + \lim_{x \to 0} (\sqrt{x+1}+1)$

$= 3 + 2 = 5$ 답 ⑤

0103

유형 08 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

|전략| 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{2(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x})}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}}\right)}{1}=2$$

답 ⑤

0104

유형 10 $\infty\times0$ 꼴의 극한

|전략| 임의의 실수 x에 대하여 $x-1<[x]\le x$이므로 $[x]=x-h\ (0\le h<1)$이다.

$0\le h<1$인 실수 h에 대하여 $\left[\frac{1}{x}\right]=\frac{1}{x}-h$로 나타낼 수 있다.

$$\therefore \lim_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to0}x\left(\frac{1}{x}-h\right)=\lim_{x\to0}(1-xh)=1$$

답 ④

다른 풀이 (ⅰ) $x>0$일 때, $\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}$이므로

$$x\left(\frac{1}{x}-1\right)<x\left[\frac{1}{x}\right]\le x\times\frac{1}{x}$$

이때, $\lim_{x\to0+}x\left(\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{x\to0+}x\times\frac{1-x}{x}=1$, $\lim_{x\to0+}x\times\frac{1}{x}=1$이므로

$$\lim_{x\to0+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

(ⅱ) $x<0$일 때, 같은 방법으로

$$x\times\frac{1}{x}\le x\left[\frac{1}{x}\right]<x\left(\frac{1}{x}-1\right)$$

이때, $\lim_{x\to0-}x\times\frac{1}{x}=1$, $\lim_{x\to0-}x\left(\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{x\to0-}x\times\frac{1-x}{x}=1$이므로

$$\lim_{x\to0-}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\lim_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

0105

유형 11 극한값을 이용한 미정계수의 결정 (1)

|전략| 극한값이 존재하고 (분모) $\to$ 0이면 (분자) $\to$ 0이다.

$\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax+b}{x}=4$에서 $\lim_{x\to0}x=0$이므로

$\lim_{x\to0}(x^2+ax+b)=b=0$

$b=0$을 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+a)}{x}=\lim_{x\to0}(x+a)=a=4$$

$\therefore a+b=4+0=4$

답 ④

0106

유형 13 극한값을 이용한 다항함수의 결정

|전략| $\lim_{x\to\infty}\frac{(f\circ g)(x)}{f(x)}=1$에서 $f(x)$가 이차함수이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 $(f\circ g)(x)$는 이차함수임을 이용한다.

조건 ㈎에서 분모의 $f(x)$가 이차함수이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 $(f\circ g)(x)$, 즉 $f(g(x))$는 이차함수임을 알 수 있다.

즉, $g(x)$는 일차함수이므로 $g(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\ne0$)로 놓으면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(f\circ g)(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(ax+b)}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2(ax+b)^2+5(ax+b)-3}{2x^2+5x-3}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2a^2x^2+a(4b+5)x+(2b^2+5b-3)}{2x^2+5x-3}$$
$$=a^2=1$$

$\therefore a=\pm1$

조건 ㈏에서 $\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{ax+b}{2x^2+5x-3}=-\frac{b}{3}=-2$이므로

$b=6$

$\therefore g(x)=x+6$ 또는 $g(x)=-x+6$

조건 ㈐에서 $g(9)<0$이므로 $g(x)=-x+6$

$\therefore g(3)=-3+6=3$

답 ④

0107

유형 14 함수의 극한의 대소 관계

|전략| 주어진 부등식의 각 변을 x^2+1로 나누어 $\frac{f(x)}{x^2+1}$의 범위를 구한다.

모든 양의 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이므로

$x^2+x+1<f(x)<x^2+2x+3$의 각 변을 x^2+1로 나누면

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}<\frac{f(x)}{x^2+1}<\frac{x^2+2x+3}{x^2+1}$$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{x^2+1}=1$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=1$$

답 ①

0108

유형 15 함수의 극한의 활용

|전략| $\mathrm{P}(x, \sqrt{2x})$라 하고 점 H의 좌표를 구하여 $\overline{\mathrm{AH}}$, $\overline{\mathrm{PH}}$의 길이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

$\mathrm{P}(x, \sqrt{2x})$라 하면 $\mathrm{H}(x, 2)$이고 $x>2$이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=x-2$, $\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{2x}-2$

점 P가 점 A에 한없이 가까워지면 $x\to2+$이므로

$$\lim_{x\to2+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{PH}}}=\lim_{x\to2+}\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{2(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{\sqrt{2x}+2}{2}=2$$

답 ③

0109

유형 06 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한 – 유리식 + 08 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

| 전략 | a의 값은 주어진 식을 통분하여 구하고, b의 값은 $x=-t$로 놓고 주어진 식을 변형하여 구한다.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{3-x^2-x-1}{(1-x)(1+x+x^2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=1$$

$\therefore a=1$ ··· ❶

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t-\sqrt{t^2-1}}{-t+1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t+\sqrt{t^2-1}}{t-1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}{1-\frac{1}{t}}=2$$

$\therefore b=2$ ··· ❷

$\therefore a+b=1+2=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	배점
❶ a의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ b의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	1점

0110

유형 11 극한값을 이용한 미정계수의 결정 (1)

| 전략 | $x\to a$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to$ 0이면 (분모) $\to$ 0임을 이용하여 미정계수를 구한다.

$\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{\sqrt{x^2-a}+b}=-\frac{2}{3}$에서 $-\frac{2}{3}\neq0$이고 $\lim_{x\to-3}(x+3)=0$이므로

$\lim_{x\to-3}(\sqrt{x^2-a}+b)=\sqrt{9-a}+b=0$

$\therefore b=-\sqrt{9-a}$ ······㉠ ··· ❶

㉠을 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{\sqrt{x^2-a}-\sqrt{9-a}}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{9-a})}{(\sqrt{x^2-a}-\sqrt{9-a})(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{9-a})}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{9-a})}{x^2-9}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{9-a})}{(x+3)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x^2-a}+\sqrt{9-a}}{x-3}$$
$$=-\frac{\sqrt{9-a}}{3}=-\frac{2}{3}$$

$\therefore a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면 $b=-2$ ··· ❷

$\therefore ab=5\times(-2)=-10$ ··· ❸

답 -10

채점 기준	배점
❶ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	3점
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	1점

0111

유형 13 극한값을 이용한 다항함수의 결정

| 전략 | 두 다항함수 $f(x), g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ ($L\neq0$인 실수)이면 $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{3x^2+5x+1}=1$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차함수임을 알 수 있다. ··· ❶

또, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=6$에서 $\lim_{x\to1}(x^2-3x+2)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=0$ $\therefore f(1)=0$ ··· ❷

즉, $f(x)=3(x-1)(x+a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있으므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x+a)}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{3(x+a)}{x-2}=-3a-3=6$$

$\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=3(x-1)(x-3)$이므로

$f(-1)=3\times(-2)\times(-4)=24$ ··· ❸

답 24

채점 기준	배점
❶ $f(x)$가 이차항의 계수가 3인 이차함수임을 알 수 있다.	2점
❷ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	3점

0112

유형 01 함수의 극한값의 존재 + 03 가우스 기호를 포함한 함수의 극한

| 전략 | 정수 n에 대하여 $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$, $\lim_{x\to n+}[x]=n$임을 이용한다.

(1) $n-1\le x<n$일 때, $[x]=n-1$이므로

$$\lim_{x\to n-}\frac{[x]^2+x}{2[x]}=\frac{(n-1)^2+n}{2(n-1)}=\frac{n^2-n+1}{2(n-1)}$$

(2) $n\le x<n+1$일 때, $[x]=n$이므로

$$\lim_{x\to n+}\frac{[x]^2+x}{2[x]}=\frac{n^2+n}{2n}=\frac{n+1}{2}$$

(3) $\lim_{x\to n}\frac{[x]^2+x}{2[x]}$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to n-}\frac{[x]^2+x}{2[x]}=\lim_{x\to n+}\frac{[x]^2+x}{2[x]}$에서

$$\frac{n^2-n+1}{2(n-1)}=\frac{n+1}{2},\ n^2-n+1=n^2-1$$

$\therefore n=2$

답 (1) $\frac{n^2-n+1}{2(n-1)}$ (2) $\frac{n+1}{2}$ (3) 2

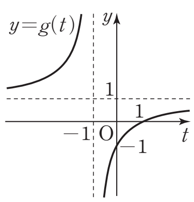
채점 기준	배점
(1) $\lim_{x\to n-}\frac{[x]^2+x}{2[x]}$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	4점
(2) $\lim_{x\to n+}\frac{[x]^2+x}{2[x]}$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	4점
(3) 정수 n의 값을 구할 수 있다.	2점

0113

유형 **04** 합성함수의 극한

|전략| 두 함수 $y=\frac{t-1}{t+1}$, $y=\frac{4t-1}{t+1}$의 그래프를 그린 후 $\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$, $\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$의 값을 각각 구한다.

(1) $\frac{t-1}{t+1}=g(t)$라 하면

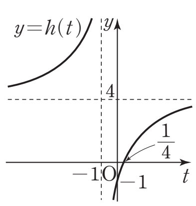


$$g(t)=\frac{t-1}{t+1}=-\frac{2}{t+1}+1$$

$y=g(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t\to\infty$일 때 $g(t)\to1-$이다.

$$\therefore \lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=\lim_{g(t)\to1-}f(g(t))=2$$

(2) $\frac{4t-1}{t+1}=h(t)$라 하면



$$h(t)=\frac{4t-1}{t+1}=-\frac{5}{t+1}+4$$

$y=h(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t\to-\infty$일 때 $h(t)\to4+$이다.

$$\therefore \lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=\lim_{h(t)\to4+}f(h(t))=3$$

(3) $\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=2+3=5$

답 (1) 2 (2) 3 (3) 5

채점 기준	배점
(1) $\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$의 값을 구할 수 있다.	5점
(2) $\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$의 값을 구할 수 있다.	5점
(3) $\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$의 값을 구할 수 있다.	2점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0114

|전략| x의 값의 범위를 나누어 $g(x)$의 값을 구한다.

$-2<x<0$, $0<x<2$일 때, $0<f(x)<1$이므로

$g(x)=[f(x)]=0$

ㄱ. $\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}g(x)=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)=0$ (참)

ㄷ. $\lim_{x\to0}g(x)=0$, $g(0)=[f(0)]=[1]=1$

$\therefore \lim_{x\to0}g(x)\neq g(0)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0115

|전략| ㄷ. $x\to1-$일 때와 $x\to1+$일 때 $f(x)$의 극한값을 먼저 구한다.

$\lim_{x\to1-}f(x)=-1$, $\lim_{x\to1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to1-}g(x)=1$, $\lim_{x\to1+}g(x)=-1$

이므로

ㄱ. $\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1-}g(x)$

$=-1+1=0$

$\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to1+}g(x)$

$=1+(-1)=0$

$\therefore \lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=0$

ㄴ. $\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)\lim_{x\to1-}g(x)$

$=-1\times1=-1$

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\lim_{x\to1+}g(x)$

$=1\times(-1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)g(x)=-1$

ㄷ. $x\to1-$일 때 $f(x)\to-1+$이므로

$\lim_{x\to1-}g(f(x))=\lim_{f(x)\to-1+}g(f(x))=-1$

$x\to1+$일 때 $f(x)\to1-$이므로

$\lim_{x\to1+}g(f(x))=\lim_{f(x)\to1-}g(f(x))=1$

즉, $\lim_{x\to1-}g(f(x))\neq\lim_{x\to1+}g(f(x))$이므로 $\lim_{x\to1}g(f(x))$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

0116

|전략| $x=1$을 기준으로 구간을 나누어 함수 $f(x)$를 구한다.

(i) $x>1$일 때 $\max(x, 1)=x$이므로 $f(x)=x^3-x$

(ii) $x=1$일 때 $f(1)=1+1-2=0$

(iii) $0<x<1$일 때 $\max(x, 1)=1$이므로 $f(x)=x^3-2x+1$

(i), (ii), (iii)에서

$$a=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{x^3-2x+1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x^2+x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-}(x^2+x-1)=1$$

$$b=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x^3-x}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{x(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}x(x+1)=2$$

$\therefore a+b=1+2=3$

답 ②

0117

| 전략 | $\frac{1}{x}=t$로 놓고 주어진 식을 변형한 후 두 다항함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=L$ ($L\neq0$인 실수)이면 $g(x)$, $h(x)$의 차수는 같음을 이용한다.

조건 (가)에서 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-5}{x^4+x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^3f(t)-5}{\left(\frac{1}{t}\right)^4+\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{tf(t)-5t^4}{t^3+1}=2$$

따라서 $tf(t)=5t^4+2t^3+at^2+bt+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$f(t)$는 다항함수이므로 $c=0$

$\therefore f(t)=5t^3+2t^2+at+b$

조건 (나)에서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=5$이고 $\lim_{x\to1}(x^2-3x+2)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=0 \qquad \therefore f(1)=0$

즉, $f(1)=5+2+a+b=0$이므로 $b=-a-7$ ······㉠

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}&=\lim_{x\to1}\frac{5x^3+2x^2+ax-a-7}{x^2-3x+2}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(5x^2+7x+a+7)}{(x-1)(x-2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{5x^2+7x+a+7}{x-2}\\&=-a-19=5\end{aligned}$$

$\therefore a=-24$

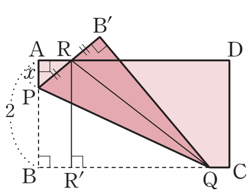
$a=-24$를 ㉠에 대입하면 $b=17$

따라서 $f(x)=5x^3+2x^2-24x+17$이므로

$f(2)=40+8-48+17=17$ 답 ④

0118

| 전략 | 직각삼각형 RQB′과 점 R에서 변 BC에 수선의 발을 내려 만들어지는 직각삼각형을 이용하여 $f(x)$, $g(x)$ 사이의 관계식을 세운다.



직각삼각형 APR에서

$\overline{PR}^2=x^2+\{g(x)\}^2$

직각삼각형 RQB′에서

$$\begin{aligned}\overline{RQ}^2&=\overline{RB'}^2+\overline{B'Q}^2\\&=\overline{PR}^2+\overline{BQ}^2\\&=x^2+\{g(x)\}^2+\{f(x)\}^2\end{aligned}$$ ······㉠

점 R에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 R′이라 하면 직각삼각형 RR′Q에서

$\overline{RQ}^2=\overline{RR'}^2+\overline{R'Q}^2=2^2+\{f(x)-g(x)\}^2$ ······㉡

㉠, ㉡에서

$x^2+\{g(x)\}^2+\{f(x)\}^2=2^2+\{f(x)-g(x)\}^2$

$f(x)g(x)=\frac{4-x^2}{2}$

$\therefore \lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}\frac{4-x^2}{2}=\frac{3}{2}$ 답 ③

본책 26~39쪽

2 | 함수의 연속

STEP 1 개념 마스터

0119

$x=2$에서의 함숫값 $f(2)$가 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다. 답 $f(2)$가 정의되어 있지 않다.

0120

$\lim_{x\to2-}f(x)=1$, $\lim_{x\to2+}f(x)=2 \qquad \therefore \lim_{x\to2-}f(x)\neq\lim_{x\to2+}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to2}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다. 답 $\lim_{x\to2}f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

0121

$f(2)=2$, $\lim_{x\to2}f(x)=1$

따라서 $\lim_{x\to2}f(x)\neq f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다. 답 $\lim_{x\to2}f(x)\neq f(2)$

0122

$f(1)=3$, $\lim_{x\to1}f(x)=3$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 답 연속

0123

$x=1$에서의 함숫값 $f(1)$이 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. 답 불연속

0124 답 $[-2, 1]$ **0125** 답 $(3, 5)$

0126 답 $[-4, -2)$ **0127** 답 $(-1, 7]$

0128 답 $(-\infty, 3]$ **0129** 답 $(2, \infty)$

0130

함수 $f(x)=x^2-2x+2$의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 $(-\infty, \infty)$이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0131

함수 $f(x)=\frac{x}{x-3}$의 정의역은 $x-3\neq0$, 즉 $x\neq3$인 실수의 집합이므로 $(-\infty, 3)\cup(3, \infty)$이다. 답 $(-\infty, 3)\cup(3, \infty)$

0132

함수 $f(x)=\sqrt{x-2}$의 정의역은 $x-2\geq0$, 즉 $x\geq2$인 실수의 집합이므로 $[2, \infty)$이다. 답 $[2, \infty)$

0133

함수 $f(x)=x^2+3x$는 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0134

함수 $f(x)=\dfrac{2}{x-2}$는 $x-2\neq0$, 즉 $x\neq2$인 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$이다. 답 $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$

0135

함수 $f(x)=-\sqrt{x+4}$는 $x+4\geq0$, 즉 $x\geq-4$인 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $[-4, \infty)$이다. 답 $[-4, \infty)$

0136

함수 $f(x)=x^3-4x^2+2x-1$은 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0137

함수 $f(x)=(x-2)(2x^2+x-3)$은 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0138

함수 $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2+1}$은 유리함수이고 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1\neq0$이므로 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0139

함수 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+4x-5}$은 유리함수이므로 $x^2+4x-5\neq0$, $(x+5)(x-1)\neq0$, 즉 $x\neq-5$이고 $x\neq1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 연속인 구간은 $(-\infty, -5)$, $(-5, 1)$, $(1, \infty)$이다.
답 $(-\infty, -5)$, $(-5, 1)$, $(1, \infty)$

0140

(1) $f(x)+g(x)=(2x^2-1)+(x+1)=2x^2+x$
즉, 함수 $f(x)+g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

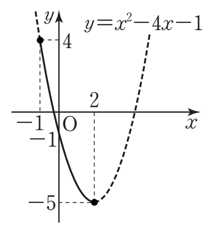
(2) $f(x)g(x)=(2x^2-1)(x+1)=2x^3+2x^2-x-1$
즉, 함수 $f(x)g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

(3) 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{2x^2-1}{x+1}$은 유리함수이므로 $x+1\neq0$, 즉 $x\neq-1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 연속인 구간은 $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$이다.

답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, \infty)$ (3) $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$

0141

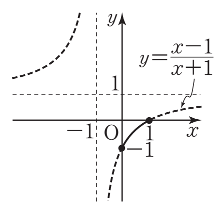
함수 $f(x)=x^2-4x-1=(x-2)^2-5$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고, 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 주어진 구간에서 $x=-1$일 때 최댓값 4, $x=2$일 때 최솟값 -5를 갖는다. 답 최댓값: 4, 최솟값: -5

0142

함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}=-\dfrac{2}{x+1}+1$은 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고, 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 주어진 구간에서 $x=1$일 때 최댓값 0, $x=0$일 때 최솟값 -1을 갖는다.
답 최댓값: 0, 최솟값: -1

0143 답 (가) 연속 (나) $\neq$ (다) 사잇값의 정리

0144 답 (가) 연속 (나) 103 (다) $(0, 5)$

0145

$f(x)=x^3+2x^2-1$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고
$f(0)=-1<0$, $f(1)=2>0$
이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.
즉, 방정식 $x^3+2x^2-1=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 답 풀이 참조

0146

$f(x)=x^4+x^3-6x+2$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고

$f(-1)=8>0, f(1)=-2<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $x^4+x^3-6x+2=0$은 열린구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 답 풀이 참조

STEP 2 유형 마스터

0147

|전략| 함수가 연속이 되도록 하는 세 가지 조건을 만족시키는지 확인한다.

ㄱ. $x=1$에서의 함숫값 $f(1)$이 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $f(1)=4$, $\lim_{x\to 1} f(x)=4$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $x=1$에서의 함숫값 $f(1)$이 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄹ. $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{x-1}{x-1}=1$

$\therefore \lim_{x\to 1-} f(x)\neq\lim_{x\to 1+} f(x)$

즉, $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 $x=1$에서 불연속인 함수는 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

0148

① $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2+2x}{x}=\lim_{x\to 0+}(x+2)=2$ (참)

② $x=0$에서의 함숫값 $f(0)$이 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (참)

③ 함수 $f(x)=\frac{x^2+2x}{x}$의 정의역은 $x\neq 0$인 실수의 집합이므로 $(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$이다. (참)

④ $\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2+2x}{x}=\lim_{x\to 0-}(x+2)=2$

따라서 $\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)$이므로 $x \longrightarrow 0$일 때 함수 $f(x)$의 극한값은 존재한다. (거짓)

⑤ 함수 $f(x)$는 $x\neq 0$인 모든 실수 x에서 연속이다. 이때, $f(0)=2$로 정의하면 $\lim_{x\to 0} f(x)=2$이고 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다. 따라서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속함수이다. (참)

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

0149

$$f(x)=\frac{1}{x-\frac{1}{x-\frac{1}{x}}}=\frac{1}{x-\frac{x}{x^2-1}}=\frac{x^2-1}{x^3-2x}$$

함수 $f(x)$는 $x=0$, $x^2-1=0$, $x^3-2x=0$이 되는 x의 값에서 정의되지 않으므로 불연속이 되는 x의 값은 $-\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}$이다.

따라서 구하는 x의 개수는 5이다. 답 ④

0150

$$f(x)g(x)=\begin{cases}(x-4)(x^2-2) & (x\geq a)\\(x-4)(4x+10) & (x<a)\end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$\lim_{x\to a-}(x-4)(4x+10)=\lim_{x\to a+}(x-4)(x^2-2)=f(a)g(a)$

$(a-4)(4a+10)=(a-4)(a^2-2)$

$(a-4)(a^2-4a-12)=0$, $(a-4)(a+2)(a-6)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=4$ 또는 $a=6$

따라서 모든 a의 값의 합은 $-2+4+6=8$ 답 8

0151

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 합성함수 $f(f(x))$는 $f(x)=1$이 되는 x의 값에서 불연속이다. … ❶

(i) $x<1$일 때, $x^2-2x-1=1$에서

$x^2-2x-2=0$ $\quad\therefore x=1-\sqrt{3}$ $(\because x<1)$

(ii) $x=1$일 때, $f(1)=1$

(iii) $x>1$일 때, $-x^2+2x+1=1$에서

$x(x-2)=0$ $\quad\therefore x=2$ $(\because x>1)$ … ❷

따라서 합성함수 $f(f(x))$가 불연속이 되는 x의 값은 $x=1-\sqrt{3}$, $x=1$, $x=2$이므로 구하는 모든 x의 값의 곱은

$(1-\sqrt{3})\times1\times2=2-2\sqrt{3}$ … ❸

답 $2-2\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ 합성함수 $f(f(x))$가 불연속이 되는 조건을 구할 수 있다.	20%
❷ 합성함수 $f(f(x))$가 불연속이 되는 x의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ 모든 x의 값의 곱을 구할 수 있다.	20%

0152

$-x=x^2-6$에서 $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=2$ … ❶

x가 유리수이면서 -3에 한없이 가까워질 때

$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}(-x)=3$

또, x가 무리수이면서 -3에 한없이 가까워질 때

$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}(x^2-6)=3$

$\therefore \lim_{x\to -3} f(x)=3$

이때, $x=-3$은 유리수이므로 $f(-3)=-(-3)=3$

$\therefore \lim_{x\to -3} f(x)=f(-3)$

마찬가지 방법으로 $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=2$에서 연속이다. … ❷

따라서 구하는 모든 x의 값의 합은

$-3+2=-1$ … ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 방정식 $-x=x^2-6$의 해를 구할 수 있다.	40%
❷ 연속이 되는 모든 x의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 모든 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

0153

|전략| 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$를 만족시키면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

ㄱ. $\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=1\times(-1)=-1$

$\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=-1\times 1=-1$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)g(x)=-1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to -1-} f(x)g(x)=1\times(-1)=-1$

$\lim_{x\to -1+} f(x)g(x)=-1\times(-1)=1$

$\therefore \lim_{x\to -1-} f(x)g(x)\neq \lim_{x\to -1+} f(x)g(x)$

즉, $\lim_{x\to -1} f(x)g(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to 1-} \{f(x)+g(x)\}=1+(-1)=0$

$\lim_{x\to 1+} \{f(x)+g(x)\}=-1+1=0$

$\therefore \lim_{x\to 1} \{f(x)+g(x)\}=0$

이때, $f(1)+g(1)=-1+1=0$이므로

$\lim_{x\to 1} \{f(x)+g(x)\}=f(1)+g(1)$

즉, 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0154

(i) $f(-2)=0$, $\lim_{x\to -2} f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to -2} f(x)\neq f(-2)$

즉, $f(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

(ii) $\lim_{x\to -1-} f(x)=0$, $\lim_{x\to -1+} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to -1-} f(x)\neq \lim_{x\to -1+} f(x)$

즉, $\lim_{x\to -1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(iii) $f(0)=-1$, $\lim_{x\to 0} f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$

즉, $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(i), (ii), (iii)에서 불연속이 되는 x의 값은 $x=-2$, $x=-1$, $x=0$이고, 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 $x=-1$이므로 $a=3$, $b=1$

$\therefore ab=3$ 답 ③

0155

$f(x)+g(x)=h(x)$로 놓으면

$\lim_{x\to 2-} f(x)=3$, $\lim_{x\to 2+} f(x)=5$, $f(2)=1$이므로

$\lim_{x\to 2-} h(x)=\lim_{x\to 2-} \{f(x)+g(x)\}=3+a$

$\lim_{x\to 2+} h(x)=\lim_{x\to 2+} \{f(x)+g(x)\}=5+b$

$h(2)=f(2)+g(2)=1+2=3$

이때, 함수 $h(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-} h(x)=\lim_{x\to 2+} h(x)=h(2)$

$3+a=5+b=3 \qquad \therefore a=0,\ b=-2$

$\therefore a+b=-2$ 답 -2

0156

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 보기에 주어진 함수 $g(x)$는 모두 $-2\le x\le 2$에서 연속이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

ㄱ. $\lim_{x\to 0-} (g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0-} g(f(x))=\lim_{f(x)\to 1-} g(f(x))=1$

$\lim_{x\to 0+} (g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0+} g(f(x))=\lim_{f(x)\to -1+} g(f(x))=1$

$\therefore \lim_{x\to 0} (g\circ f)(x)=1$

이때, $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(0)=0$이므로

$\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)\neq(g\circ f)(0)$

즉, 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0-} (g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0-} g(f(x))=\lim_{f(x)\to 1-} g(f(x))=0$

$\lim_{x\to 0+} (g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0+} g(f(x))=\lim_{f(x)\to -1+} g(f(x))=0$

$\therefore \lim_{x\to 0} (g\circ f)(x)=0$

이때, $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(0)=0$이므로

$\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(0)$

즉, 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0-} (g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0-} g(f(x))=\lim_{f(x)\to 1-} g(f(x))=1$

$\lim_{x\to 0+} (g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0+} g(f(x))=\lim_{f(x)\to -1+} g(f(x))=-1$

$\therefore \lim_{x\to 0-} (g\circ f)(x)\neq \lim_{x\to 0+} (g\circ f)(x)$

즉, $\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 $(g\circ f)(x)$가 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속인 것은 ㄴ이다.

답 ②

0157

|전략| 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이어야 한다.

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 1-} (x^2+bx)=\lim_{x\to 1+} (ax-1)=f(1)$

$1+b=a-1 \qquad \therefore a-b=2$ 답 2

0158

$f(0)=1$이므로 $0-b=1 \qquad \therefore b=-1$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$, $x=2$에서도 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to -1-}(x+c)=\lim_{x\to -1+}(x^2+1)=f(-1)$

$-1+c=1+1 \qquad \therefore c=3$

또, 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 2-}(x^2+1)=\lim_{x\to 2+}(ax+1)=f(2)$

$4+1=2a+1 \qquad \therefore a=2$

$\therefore a+b+c=2+(-1)+3=4$ 답 ④

0159

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (|x|\ge 1) \\ x^2+x+2 & (|x|<1) \end{cases}=\begin{cases} ax+b & (x\ge 1) \\ x^2+x+2 & (-1<x<1) \\ ax+b & (x\le -1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-1$, $x=1$에서도 연속이어야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to -1-}(ax+b)=\lim_{x\to -1+}(x^2+x+2)=f(-1)$

$-a+b=1-1+2 \qquad \therefore a-b=-2$ ……㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 1-}(x^2+x+2)=\lim_{x\to 1+}(ax+b)=f(1)$

$1+1+2=a+b \qquad \therefore a+b=4$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$

$\therefore ab=1\times 3=3$ 답 ③

0160

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이다.

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이므로 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-ax-2}{x-1}=b$ ……㉠

㉠에서 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}(x^2-ax-2)=1-a-2=0 \qquad \therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}(x+2)=3=b$

$\therefore a+b=-1+3=2$ 답 2

0161

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이므로 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=a$

이때,

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$

이므로 $a=2$ 답 2

0162

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to -1}f(x)=f(-1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+a}{x+1}=b$ ……㉠

㉠에서 $\lim_{x\to -1}(x+1)=0$이므로

$\lim_{x\to -1}(x^3+a)=-1+a=0 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=3=b$

$\therefore a+b=1+3=4$ 답 ④

0163

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=0$에서도 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}+a}{x^2}=b$ ……㉠ … ❶

㉠에서 $\lim_{x\to 0}x^2=0$이므로

$\lim_{x\to 0}(\sqrt{x^2+4}+a)=2+a=0 \qquad \therefore a=-2$ … ❷

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{1}{4}=b$ … ❸

$\therefore ab=-2\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$ … ❹

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속임을 이용하여 식을 세울 수 있다.	20%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

0164

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이려면 $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$이어야 하므로

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-ax+b}{x-2}=a+b$ ……㉠

㉠에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}(x^2-ax+b)=4-2a+b=0 \qquad \therefore 2a-b=4$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-ax+2a-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-a+2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}(x-a+2)=4-a=a+b$

2 함수의 연속

$\therefore 2a+b=4$ ……㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=0$

$\therefore a+b=2$ 답 ⑤

0165

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$ $\quad\therefore \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-1}=\frac{1}{4}$ ……㉠

㉠에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(\sqrt{x+a}-b)=\sqrt{1+a}-b=0$ $\quad\therefore b=\sqrt{1+a}$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{1+a}}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{1+a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}\\&=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a}}=\frac{1}{2\sqrt{1+a}}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$\therefore a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면 $b=2$

$\therefore ab=3\times2=6$ 답 ③

0166

|전략| 정수 n에 대하여 $x\to n-$이면 $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$이고, $x\to n+$이면 $\lim_{x\to n+}[x]=n$임을 이용한다.

(i) $n-1\le x<n$일 때, $[x]=n-1$이므로

$$\lim_{x\to n-}f(x)=\frac{(n-1)^2+n}{n-1}=\frac{n^2-n+1}{n-1}$$

(ii) $n\le x<n+1$일 때, $[x]=n$이므로

$$\lim_{x\to n+}f(x)=\frac{n^2+n}{n}=n+1$$

(iii) $f(n)=\frac{n^2+n}{n}=n+1$

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$가 $x=n$에서 연속이므로

$\frac{n^2-n+1}{n-1}=n+1$ $\quad\therefore n=2$ 답 ④

0167

(i) $0<x<\frac{1}{6}$일 때, $0<6x<1$이므로 $[6x]=0$, 즉 $f(x)=0$

(ii) $\frac{1}{6}\le x<\frac{1}{3}$일 때, $1\le6x<2$이므로 $[6x]=1$, 즉 $f(x)=1$

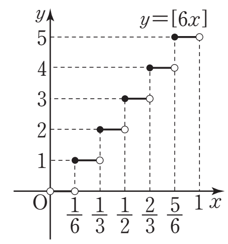
(iii) $\frac{1}{3}\le x<\frac{1}{2}$일 때, $2\le6x<3$이므로 $[6x]=2$, 즉 $f(x)=2$

(iv) $\frac{1}{2}\le x<\frac{2}{3}$일 때, $3\le6x<4$이므로 $[6x]=3$, 즉 $f(x)=3$

(v) $\frac{2}{3}\le x<\frac{5}{6}$일 때, $4\le6x<5$이므로 $[6x]=4$, 즉 $f(x)=4$

(vi) $\frac{5}{6}\le x<1$일 때, $5\le6x<6$이므로 $[6x]=5$, 즉 $f(x)=5$

(i)~(vi)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$이므로 모든 x의 값의 합은 $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{5}{2}$

답 ②

0168

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=n$(n은 정수)에서도 연속이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to n}f(x)=f(n)$

(i) $n-1\le x<n$일 때, $n\le x+1<n+1$이므로

$[x]=n-1$, $[x+1]=n$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to n-}f(x)&=n^2+(an+b)(n-1)\\&=(a+1)n^2+(b-a)n-b\end{aligned}$$

(ii) $n\le x<n+1$일 때, $n+1\le x+1<n+2$이므로

$[x]=n$, $[x+1]=n+1$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to n+}f(x)&=(n+1)^2+(an+b)n\\&=(a+1)n^2+(b+2)n+1\end{aligned}$$

(iii) $$\begin{aligned}f(n)&=(n+1)^2+(an+b)n\\&=(a+1)n^2+(b+2)n+1\end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$가 $x=n$에서 연속이므로

$(a+1)n^2+(b-a)n-b=(a+1)n^2+(b+2)n+1$

이 등식이 임의의 정수 n에 대하여 항상 성립해야 하므로

$b-a=b+2$, $-b=1$ $\quad\therefore a=-2$, $b=-1$

$\therefore a+b=-2+(-1)=-3$ 답 -3

0169

|전략| $x\ne1$일 때 $f(x)$를 구하여 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$임을 이용한다.

$x\ne1$일 때, $f(x)=\frac{x^2-3x+a}{x-1}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+a}{x-1}$ ……㉠

㉠에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(x^2-3x+a)=1-3+a=0$ $\quad\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}f(1)&=\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}(x-2)=-1\end{aligned}$$

답 -1

0170

$(x^2-1)f(x)=x^3+3x^2-x-3$에서

$(x+1)(x-1)f(x)=(x-1)(x+1)(x+3)$이므로

$x\neq-1$이고 $x\neq1$일 때, $f(x)=\dfrac{(x+3)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=x+3$

함수 $f(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 연속이므로 $f(-1)=\lim\limits_{x\to-1}f(x)$, $f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)$

$$f(-1)f(1)=\lim_{x\to-1}f(x)\times\lim_{x\to1}f(x)$$
$$=\lim_{x\to-1}(x+3)\times\lim_{x\to1}(x+3)$$
$$=2\times4=8$$

답 ④

0171

$(x^2-5x+4)f(x)=x+2-3\sqrt{x}$에서

$(x-1)(x-4)f(x)=x+2-3\sqrt{x}$이므로

$x\neq1$이고 $x\neq4$일 때, $f(x)=\dfrac{x+2-3\sqrt{x}}{(x-1)(x-4)}$

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이므로

$$f(4)=\lim_{x\to4}f(x)=\lim_{x\to4}\frac{x+2-3\sqrt{x}}{(x-1)(x-4)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{(x-1)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{12}$$

답 $\dfrac{1}{12}$

0172

$x\neq2$일 때, $f(x)=\dfrac{a\sqrt{x}+b}{x-2}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{a\sqrt{x}+b}{x-2}$ ……㉠ … ❶

㉠에서 $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to2}(a\sqrt{x}+b)=a\sqrt{2}+b=0$

$\therefore b=-a\sqrt{2}$ ……㉡ … ❷

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(2)=\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x}-a\sqrt{2}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{a}{2\sqrt{2}}=1$$

따라서 $a=2\sqrt{2}$, $b=-4$이므로 … ❸

$a^2+b^2=8+16=24$ … ❹

답 24

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속임을 이용하여 식을 세울 수 있다.	30%
❷ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❹ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	10%

0173

| 전략 | 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1-}3x=\lim\limits_{x\to1+}(x^2+ax+b)=f(1)$

$3=1+a+b\qquad\therefore a+b=2$ ……㉠

또, $f(x)=f(x+4)$에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=f(4)$

즉, $0=16+4a+b$이므로 $4a+b=-16$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=8$

따라서 $1\leq x\leq4$일 때, $f(x)=x^2-6x+8$이므로

$f(10)=f(6)=f(2)=4-12+8=0$

답 ②

0174

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to2-}(x^2+ax-2b)=\lim\limits_{x\to2+}(2x-4)=f(2)$

$4+2a-2b=0\qquad\therefore a-b=-2$ ……㉠

또, $f(x-2)=f(x+2)$에 $x=2$를 대입하면 $f(0)=f(4)$이므로

$-2b=4\qquad\therefore b=-2$

$b=-2$를 ㉠에 대입하면 $a=-4$

$\therefore a+b=-4+(-2)=-6$

답 ①

0175

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1-}2x=\lim\limits_{x\to1+}(ax+b)=f(1)\qquad\therefore a+b=2$ ……㉠

또, $f(x)=f(x+5)$에 $x=-2$를 대입하면 $f(-2)=f(3)$이므로

$3a+b=-4$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=5$

따라서 $f(x)=\begin{cases}2x & (-2\leq x<1)\\ -3x+5 & (1\leq x\leq3)\end{cases}$이므로

$f(7)=f(2)=-6+5=-1$

답 -1

0176

| 전략 | 연속함수의 성질을 이용한다.

ㄱ. $f(x)$, $3g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 함수 $f(x)+3g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $g(f(x))$가 $x=a$에서 연속이려면 $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=g(f(a))$이어야 한다.
따라서 함수 $g(x)$가 $x=f(a)$에서 연속이라는 조건이 필요하다.

ㄷ. $\{g(x)\}^2=g(x)\times g(x)$이므로 함수 $\{g(x)\}^2$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄹ. $g(a)=0$이면 함수 $\dfrac{1}{2g(x)}$은 $x=a$에서 정의되어 있지 않으므로
함수 $f(x)-\dfrac{1}{2g(x)}$은 $x=a$에서 불연속이다.

따라서 $x=a$에서 항상 연속인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

0177

①, ②, ③ $3f(x)=3x$, $f(x)+g(x)=x^2+x+1$,
$f(x)g(x)=x^3+x$는 모두 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

④ $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x}{x^2+1}$에서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1\neq0$이므로 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 모든 실수 x에서 연속이다.

⑤ $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{x^2+1}{x}$은 $x=0$일 때 분모가 $f(0)=0$이다.

즉, $x=0$에서 정의되어 있지 않으므로 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속함수라 할 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0178

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수 x에서 연속이 되려면 임의의 실수 x에 대하여 $g(x)=x^2-2ax+3a\neq0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2-2ax+3a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-3a<0$에서 $a(a-3)<0$

$\therefore\ 0<a<3$

따라서 정수 a는 1, 2이므로 구하는 a의 값의 합은

$1+2=3$ 답 ④

0179

ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $f(x)+g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수 $\{f(x)+g(x)\}-f(x)=g(x)$도 $x=a$에서 연속이다. (참)

ㄴ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases} 1 & (x\geq0) \\ -1 & (x<0)\end{cases}$이면 두 함수 $f(x)$, $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases} 1 & (x\geq0) \\ -1 & (x<0)\end{cases}$이면 함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이지만 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 답 ①

0180

|전략| 주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프를 통해 각각의 참, 거짓을 판단한다.

ㄱ. $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=-2$이므로

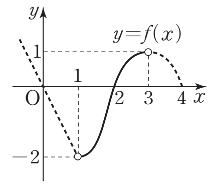
$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극한값이 존재한다. (거짓)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 최솟값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=-1$, $x=1$에서 끊어져 있으므로 함수 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 $x=-1$, $x=1$의 2개이다. (참)

ㄹ. 함수 $f(x)$는 오른쪽 그림과 같이 열린구간 $(1, 3)$에서 최댓값을 갖지 않는다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ②

0181

ㄱ, ㄴ. (i) $f(-1)=3$, $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=2$이므로 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)\neq f(-1)$

즉, $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0+}f(x)$

즉, $\lim\limits_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(iii) $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1+}f(x)$

즉, $\lim\limits_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 불연속인 점은 $x=-1$, $x=0$, $x=1$일 때의 3개이고, 극한값이 존재하지 않는 점은 $x=0$, $x=1$일 때의 2개이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 $x=-1$일 때 최댓값 3을 갖지만 최솟값은 갖지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 답 ㄱ

0182

|전략| 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$f(x)=2x^3+x-5$로 놓으면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(0)=-5<0$, $f(1)=-2<0$, $f(2)=13>0$,

$f(3)=52>0$, $f(4)=127>0$, $f(5)=250>0$

따라서 $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(1, 2)$이다. 답 ②

0183

ㄱ. $f(x)=x^3+x-1$로 놓으면 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 $f(0)=-1<0$, $f(1)=1>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f(x)=x^3+2x^2-2$로 놓으면 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 $f(0)=-2<0$, $f(1)=1>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $f(x)=x^3-5x^2-x+3$으로 놓으면 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 $f(0)=3>0$, $f(1)=-2<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 3개이다. 답 3

0184

$f(x)=x^3-3x^2-a$로 놓으면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.
이때, 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(-2, -1)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 $f(-2)f(-1)<0$이어야 하므로
$(-a-20)(-a-4)<0$, $(a+20)(a+4)<0$
$\therefore -20<a<-4$
따라서 구하는 정수 a는 $-19, -18, \cdots, -5$의 15개이다. 답 15

0185

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 $f(0)f\left(\frac{1}{3}\right)<0$, $f\left(\frac{2}{3}\right)f(1)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다. 답 2개

0186

$f(x)$는 연속함수이고 $f(3)>0$, $f(5)>0$이므로 $f(4)<0$이면
$f(3)f(4)<0$, $f(4)f(5)<0$
이때, 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(3, 4)$, $(4, 5)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
즉, $a^2-2a-3<0$에서 $(a+1)(a-3)<0$
$\therefore -1<a<3$
따라서 정수 a는 0, 1, 2의 3개이다. 답 ②

0187

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면 $h(x)$는 연속함수이고
$h(x)=x^5+2x^2+k-3$
이때, 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$이 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 $h(1)h(2)<0$이어야 하므로
$k(k+37)<0$ $\quad\therefore -37<k<0$
따라서 구하는 정수 k는 $-36, -35, \cdots, -1$의 36개이다. 답 36

0188

|전략| 주어진 방정식의 좌변을 $f(x)$로 놓고 사잇값의 정리를 이용한다.

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)+(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$$

로 놓으면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty<0$
$f(a)=(a-b)(a-c)>0$
$f(b)=(b-c)(b-a)<0$
$f(c)=(c-a)(c-b)>0$
$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$
이때, 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-\infty, a)$, (a, b), (b, c)에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 주어진 방정식은 삼차방정식이므로 3개의 실근을 갖는다. 답 ④

0189

(i) $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=a$에서 $\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로
$\lim_{x\to-1}f(x)=0$ $\quad\therefore f(-1)=0$
(ii) $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=b$에서 $\lim_{x\to-2}(x+2)=0$이므로
$\lim_{x\to-2}f(x)=0$ $\quad\therefore f(-2)=0$
(i), (ii)에서 $f(x)=(x+1)(x+2)g(x)$ ($g(x)$는 다항식)로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+2)g(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x+2)g(x)=g(-1)=a$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+1)(x+2)g(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x+1)g(x)=-g(-2)=b$$

$\therefore g(-2)=-b$
$\therefore g(-1)g(-2)=a\times(-b)=-ab<0$ ($\because ab>0$)
이때, $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(-2, -1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 두 실근 -1, -2를 갖고, $-2<x<-1$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 닫힌구간 $[-2, -1]$에서 최소 3개의 실근을 갖는다. 답 ③

0190

|전략| 승용차가 집에서 출발한 지 t시간 후의 속도를 $v(t)$ km/h라 하고 사잇값의 정리를 이용한다.

인영이가 탄 승용차가 집에서 출발한 시각을 0, 휴게소에 도착한 시각을 t_1, 휴게소에서 다시 출발한 시각을 t_2, 할머니 댁에 도착한 시각을 t_3이라 하고, 집에서 출발한 지 t시간 후의 승용차의 속도를 $v(t)$ km/h라 하자. (단, $1<t_1<t_2<t_3$)
$h(t)=v(t)-90$이라 하면 함수 $h(t)$는 닫힌구간 $[0, t_3]$에서 연속이고
$h(0)=v(0)-90=0-90=-90<0$
$h(1)=v(1)-90=100-90=10>0$
$h(t_1)=v(t_1)-90=0-90=-90<0$
$h(t_2)=v(t_2)-90=0-90=-90<0$
$h\left(t_2+\frac{1}{6}\right)=v\left(t_2+\frac{1}{6}\right)-90=95-90=5>0$
$h(t_3)=v(t_3)-90=0-90=-90<0$
이때, $h(0)h(1)<0$, $h(1)h(t_1)<0$, $h(t_2)h\left(t_2+\frac{1}{6}\right)<0$,

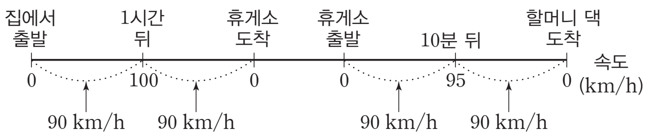
2 함수의 연속

$h\left(t_2+\frac{1}{6}\right)h(t_3)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(t)=0$은 열린구간 $(0, 1)$, $(1, t_1)$, $\left(t_2, t_2+\frac{1}{6}\right)$, $\left(t_2+\frac{1}{6}, t_3\right)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 승용차의 속도가 시속 90 km가 되는 경우는 적어도 4번이다.

답 4번

다른 풀이 다음과 같이 그림을 그려 생각해 보면 간단하다.



0191

주헌이가 x km를 달릴 때의 속력을 $f(x)$ km/h라 하고, $h(x)=f(x)-13$이라 하면 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[0, 42.195]$에서 연속이고

$h(0)=f(0)-13=0-13=-13<0$

$h(10)=f(10)-13=12-13=-1<0$

$h(20)=f(20)-13=15-13=2>0$

$h(30)=f(30)-13=11-13=-2<0$

$h(40)=f(40)-13=14-13=1>0$

$h(42.195)=f(42.195)-13=16-13=3>0$

이때, $h(10)h(20)<0$, $h(20)h(30)<0$, $h(30)h(40)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$은 열린구간 $(10, 20)$, $(20, 30)$, $(30, 40)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 주헌이의 속력이 시속 13 km인 곳은 적어도 3군데이다.

답 ③

STEP 3 내신 마스터

0192

유형 01 함수의 연속과 불연속

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=a$에서도 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to a-}(2x+3)=\lim_{x\to a+}x^2=f(a)$

$2a+3=a^2$, $a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

답 ③

0193

유형 02 함수의 그래프와 연속

|전략| ㄷ. 함수 $g(f(x))$가 $x=a$에서 연속이려면 $\lim_{x\to a-}g(f(x))=\lim_{x\to a+}g(f(x))=g(f(a))$이어야 함을 이용한다.

ㄱ. $\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=0\times 0=0$

$\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=-1\times 0=0$

$\therefore \lim_{x\to 1}f(x)g(x)=0$

이때, $f(1)g(1)=-1\times 0=0$이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $\lim_{x\to -1-}(f\circ f)(x)=\lim_{f(x)\to 0+}f(f(x))=-1$

$\lim_{x\to -1+}(f\circ f)(x)=\lim_{f(x)\to 0-}f(f(x))=-1$

$\therefore \lim_{x\to -1}(f\circ f)(x)=-1$

이때, $(f\circ f)(-1)=f(f(-1))=f(0)=-1$이므로

$\lim_{x\to -1}(f\circ f)(x)=(f\circ f)(-1)$

즉, 함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=-1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $\lim_{x\to 1-}(g\circ f)(x)=\lim_{f(x)\to 0-}g(f(x))=1$

$\lim_{x\to 1+}(g\circ f)(x)=\lim_{f(x)\to -1-}g(f(x))=0$

$\therefore \lim_{x\to 1-}(g\circ f)(x)\neq\lim_{x\to 1+}(g\circ f)(x)$

즉, $\lim_{x\to 1}(g\circ f)(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

Lecture

합성함수의 극한값

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $x\to a-$일 때

(1) $f(x)\to b-$이면 $\lim_{x\to a-}g(f(x))=\lim_{f(x)\to b-}g(f(x))$

(2) $f(x)\to b+$이면 $\lim_{x\to a-}g(f(x))=\lim_{f(x)\to b+}g(f(x))$

(3) $f(x)=b$이면 $\lim_{x\to a-}g(f(x))=g(b)$

0194

유형 03 함수가 연속일 조건(1)

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이려면 $\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$이어야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 2-}(x^2-x+b)=\lim_{x\to 2+}(2x+a)=f(2)$

$4-2+b=4+a \qquad \therefore a-b=-2$

답 ①

0195

유형 03 함수가 연속일 조건(1)

|전략| $3-x=t$로 놓으면 $x\to 2-$, $x\to 2+$일 때, 각각 $t\to 1+$, $t\to 1-$이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 불연속이므로

$\lim_{x\to 1-}(x^2+3x+5)\neq\lim_{x\to 1+}(2x+k)$

$9\neq 2+k \qquad \therefore k\neq 7$ ……㉠

$3-x=t$로 놓으면 $x\to 2-$, $x\to 2+$일 때 각각 $t\to 1+$, $t\to 1-$이므로

$\lim_{x\to 2-}f(x)f(3-x)=\lim_{x\to 2-}f(x)\times\lim_{t\to 1+}f(t)$

$=(4+k)(2+k)$

$\lim_{x\to 2+}f(x)f(3-x)=\lim_{x\to 2+}f(x)\times\lim_{t\to 1-}f(t)$

$=(4+k)\times 9$

$f(2)f(1)=(4+k)\times 9$

함수 $f(x)f(3-x)$가 $x=2$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 2-} f(x)f(3-x)=\lim_{x\to 2+} f(x)(3-x)=f(2)f(1)$

$(4+k)(2+k)=9(4+k)$, $(k+4)(k-7)=0$

㉠에서 $k\neq 7$이므로 $k=-4$ 답 ①

Lecture

함수의 곱 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이면

$\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=f(a)g(a)$

0196

유형 04 함수가 연속일 조건(2)

|전략| 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 (분모)$=0$이 되는 x의 값에서도 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=-a$에서 연속이므로

$$f(-a)=\lim_{x\to -a} f(x)=\lim_{x\to -a}\frac{x^3+a^3}{x+a}$$
$$=\lim_{x\to -a}\frac{(x+a)(x^2-ax+a^2)}{x+a}$$
$$=\lim_{x\to -a}(x^2-ax+a^2)=3a^2$$

답 ⑤

0197

유형 04 함수가 연속일 조건(2)

|전략| $x=-2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to -2} f(x)=f(-2)$이다.

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -2} f(x)=f(-2)\qquad \therefore \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2+1}+a}{x+2}=b$ ……㉠

㉠에서 $\lim_{x\to -2}(x+2)=0$이므로

$\lim_{x\to -2}(\sqrt{x^2+1}+a)=\sqrt{5}+a=0\qquad \therefore a=-\sqrt{5}$

$a=-\sqrt{5}$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}{(x+2)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{(x+2)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}=b$$

$\therefore ab=-\sqrt{5}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=2$ 답 ④

0198

유형 08 연속함수의 성질

|전략| ㄱ. $(g\circ f)(x)$를 구하여 $x=0$에서 연속인지 불연속인지 조사한다.

ㄱ. $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases} g(-1)=|-1|=1 & (x\geq 0) \\ g(1)=|1|=1 & (x<0)\end{cases}$

따라서 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases}-1 & (x\geq 0)\\ 1 & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=|x|$이면 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다. (거짓)

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x=0)\\ 2 & (x\neq 0)\end{cases}$이면

(i) $x=0$인 경우, $f(f(0))=f(1)=2$

(ii) $x\neq 0$인 경우, $f(f(x))=f(2)=2$

따라서 함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 답 ①

0199

유형 10 사잇값의 정리

|전략| 두 함숫값의 곱의 부호를 확인하여 사잇값의 정리를 이용한다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 연속이고, $f(-2)f(1)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

또, $f(-2)f(1)<0$, $f(-2)f(3)>0$이면 $f(1)f(3)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 $-2<x<3$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

$\therefore n=2$ 답 ②

0200

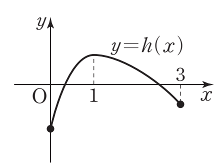
유형 10 사잇값의 정리

|전략| 조건에 맞게 $y=h(x)$의 그래프를 그려 참, 거짓을 판별한다.

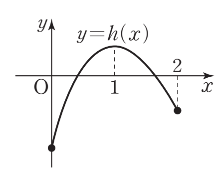
ㄱ. 방정식 $h(x)=0$이 $0<x<3$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 $f(x)=g(x)$를 만족시키는 실수 x가 존재한다. (거짓)

ㄴ. [반례] 함수 $y=h(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때 $h(0)=f(0)-g(0)<0$이고 방정식 $h(x)=0$이 열린구간 $(0, 3)$에서 실근을 갖지만 $h(3)=f(3)-g(3)<0$

$\therefore f(3)<g(3)$ (거짓)



ㄷ. 함수 $h(x)$가 연속함수이고, $h(0)<0$, $h(1)>0$, $h(2)<0$이므로 방정식 $h(x)=0$은 열린구간 $(0, 2)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다. (참)



따라서 옳은 것은 ㄷ이다. 답 ③

0201

유형 11 여러 가지 사잇값의 정리의 활용

|전략| $x\to a$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\to 0$임을 이용하여 함수 $f(x)$를 구한다.

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 $\lim_{x\to 0}x=0$이므로

$\lim_{x\to0} f(x)=0 \qquad \therefore f(0)=0$

(ii) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=2$에서 $\lim_{x\to1}(x^2-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1} f(x)=0 \qquad \therefore f(1)=0$

(i), (ii)에서 $f(x)=x(x-1)g(x)$ ($g(x)$는 다항식)로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)g(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(x-1)g(x)=-g(0)=2$$

$\therefore g(0)=-2$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)g(x)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{xg(x)}{x+1}=\frac{g(1)}{2}=2$$

$\therefore g(1)=4$

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 $g(0)g(1)=-8<0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 두 실근 0, 1을 갖고, $0<x<1$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 닫힌구간 $[0, 1]$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

답 ①

0202

유형 **03** 함수가 연속일 조건(1) + **04** 함수가 연속일 조건(2)

|전략| 함수 $f(x)$가 $-b\le x\le a$에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $-b\le x\le a$에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

$\therefore \lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)$ … ❶

(i) $\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{\sqrt{x+b}-c}{x}$ ……㉠

이때, $\lim_{x\to0-}x=0$이므로

$\lim_{x\to0-}(\sqrt{x+b}-c)=\sqrt{b}-c=0 \qquad \therefore c=\sqrt{b}$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to0-}\frac{\sqrt{x+b}-\sqrt{b}}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{(\sqrt{x+b}-\sqrt{b})(\sqrt{x+b}+\sqrt{b})}{x(\sqrt{x+b}+\sqrt{b})}$$
$$=\lim_{x\to0-}\frac{x}{x(\sqrt{x+b}+\sqrt{b})}$$
$$=\lim_{x\to0-}\frac{1}{\sqrt{x+b}+\sqrt{b}}=\frac{1}{2\sqrt{b}}$$

(ii) $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(x+2a)=2a$

(iii) $f(0)=\frac{1}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 $\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)$이므로

$\frac{1}{2\sqrt{b}}=2a=\frac{1}{2} \qquad \therefore a=\frac{1}{4}, b=1$

$b=1$을 ㉡에 대입하면 $c=1$ … ❷

$\therefore abc=\frac{1}{4}\times1\times1=\frac{1}{4}$ … ❸

답 $\frac{1}{4}$

채점 기준	배점
❶ $-b\le x\le a$에서 연속일 조건을 구할 수 있다.	2점
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	4점
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	1점

0203

유형 **05** 가우스 기호를 포함한 함수의 연속

|전략| 정수 n에 대하여 $x\to n-$이면 $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$이고, $x\to n+$이면 $\lim_{x\to n+}[x]=n$임을 이용한다.

$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3-}([x]+a)^2=(2+a)^2$

$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3+}([x]+a)^2=(3+a)^2$

$f(3)=(3+a)^2$ … ❶

이때, 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이려면

$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3+}f(x)=f(3)$

즉, $(3+a)^2=(2+a)^2$이므로 $2a=-5 \qquad \therefore a=-\frac{5}{2}$ … ❷

답 $-\frac{5}{2}$

채점 기준	배점
❶ $\lim_{x\to3-}f(x)$, $\lim_{x\to3+}f(x)$, $f(3)$을 a로 나타낼 수 있다.	3점
❷ a의 값을 구할 수 있다.	4점

0204

유형 **06** $(x-a)f(x)$ 꼴의 함수의 연속

|전략| 연속함수 $g(x)$에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$를 만족시키는 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $f(a)=\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}$이다.

(1) $x\ne2$일 때, $f(x)=\frac{x^2+ax-6}{(x-2)(x^2+1)}$

(2) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-6}{(x-2)(x^2+1)}$ ……㉠

$\lim_{x\to2}(x-2)(x^2+1)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(x^2+ax-6)=4+2a-6=0 \qquad \therefore a=1$

(3) $a=1$을 ㉠에 대입하면

$$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{(x-2)(x^2+1)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+3}{x^2+1}=1$$

답 (1) $f(x)=\frac{x^2+ax-6}{(x-2)(x^2+1)}$ (2) 1 (3) 1

채점 기준	배점
(1) $x\ne2$일 때, $f(x)$를 구할 수 있다.	2점
(2) a의 값을 구할 수 있다.	5점
(3) $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	5점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0205

|전략| 함수 $f(x+k)$가 $x=a$에서 연속임을 보이려면 $x+k=t$로 놓고 $x \to a$일 때, $t \to a+k$임을 이용하여 극한값을 구한다.

ㄱ. $\lim_{x\to1-}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{-1}{1}=-1$

$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{-1}=-1$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}=-1$ (참)

ㄴ. $x-1=t$로 놓으면 $x \to 0-$, $x \to 0+$일 때, 각각 $t \to -1-$, $t \to -1+$이므로

$\lim_{x\to0-}g(x-1)=\lim_{t\to-1-}g(t)=1$

$\lim_{x\to0+}g(x-1)=\lim_{t\to-1+}g(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to0-}g(x-1)=\lim_{x\to0+}g(x-1)$

이때, $g(-1)=1$이므로 함수 $g(x-1)$은 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $x-1=k$로 놓으면 $x \to 0-$, $x \to 0+$일 때, 각각 $k \to -1-$, $k \to -1+$이고

$x+1=t$로 놓으면 $x \to 0-$, $x \to 0+$일 때, 각각 $t \to 1-$, $t \to 1+$이다.

$\lim_{x\to0-}f(x-1)g(x+1)=\lim_{k\to-1-}f(k)\times\lim_{t\to1-}g(t)$
$=-1\times(-1)=1$

$\lim_{x\to0+}f(x-1)g(x+1)=\lim_{k\to-1+}f(k)\times\lim_{t\to1+}g(t)$
$=1\times1=1$

$f(-1)g(1)=-1\times1=-1$

즉, $\lim_{x\to0}f(x-1)g(x+1)\neq f(-1)g(1)$이므로

함수 $f(x-1)g(x+1)$은 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0206

|전략| $g(x)=0$인 x의 값과 $f(x)$가 불연속인 x의 값에서 연속인지 불연속인지 조사한다.

함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)=0$인 x의 값에서 불연속이므로 $x=0$, $x=2$에서 불연속이다. 또한 함수 $f(x)$가 불연속인 $x=-1$과 $x=1$에서의 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$의 연속성을 조사하면

(i) $x=-1$일 때

$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{-1}{1}=-1$, $\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2}{1}=2$

$\therefore \lim_{x\to-1-}\frac{f(x)}{g(x)}\neq\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)}{g(x)}$

즉, 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $x=1$일 때

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2}{1}=2$, $\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{1}=0$

$\therefore \lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{g(x)}\neq\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{g(x)}$

즉, 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 열린구간 $(-2, 3)$에서 불연속이 되는 x의 값은 $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$의 4개이다. 답 4

0207

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이다.

ㄱ. 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=a$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}=a$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}g(x)=0$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x+1}\times\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}$

$=\frac{a}{2}\times a=\frac{1}{2}a^2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0208

|전략| ㄷ. $h(x)=f(g(x))+\frac{3}{2}$으로 놓고 사잇값의 정리를 이용한다.

ㄱ. $\lim_{x\to-1-}f(g(x))=\lim_{g(x)\to-1+}f(g(x))=-1$

$\lim_{x\to-1+}f(g(x))=f(0)=-1$

$\therefore \lim_{x\to-1}f(g(x))=-1$ (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to1-}f(g(x))=f(0)=-1$

$\lim_{x\to1+}f(g(x))=\lim_{g(x)\to-1+}f(g(x))=-1$

$f(g(1))=f(-1)=-2$

즉, $\lim_{x\to1}f(g(x))\neq f(g(1))$이므로 함수 $f(g(x))$는 $x=1$에서 불연속이다. (참)

ㄷ. 함수 $f(g(x))$가 -2와 -1 사이에서 연속이고

$h(x)=f(g(x))+\frac{3}{2}$이라 하면

$h(-2)=f(g(-2))+\frac{3}{2}=f(0)+\frac{3}{2}=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}>0$

$h(-1)=f(g(-1))+\frac{3}{2}=f(-1)+\frac{3}{2}=-2+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}<0$

이때, $h(-2)h(-1)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$, 즉 $f(g(x))=-\frac{3}{2}$의 실근이 열린구간 $(-2, -1)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

2 함수의 연속

본책 42~57쪽

3 | 미분계수와 도함수

STEP 1 개념 마스터

0209

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\frac{5-0}{5}=1$$

답 1

0210

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\frac{-6-(-1)}{5}=-1$$

답 -1

0211

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\frac{53-(-17)}{5}=14$$

답 14

0212

(1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{9-1}{4}=2$

(2) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{(1+\Delta x)-1}=\frac{\{2(1+\Delta x)+1\}-3}{\Delta x}=\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

답 (1) 2 (2) 2

0213

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}=\frac{\{(a+\Delta x)^2+2(a+\Delta x)\}-(a^2+2a)}{\Delta x}=\frac{(2a+2)\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2a+2+\Delta x$$

답 $2a+2+\Delta x$

0214

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{-4(1+\Delta x)-(-4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{-4\Delta x}{\Delta x}=-4$$

답 -4

0215

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{3(1+\Delta x)-1\}-2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3$$

답 3

0216

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(1+\Delta x)^2-3(1+\Delta x)\}-(-2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{-\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}(-1+\Delta x)=-1$$

답 -1

0217

$f(x)=3x+1$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이므로

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{3(1+\Delta x)+1\}-4}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3$$

답 3

0218

$f(x)=x^2-2x+2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)$이므로

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(\Delta x)^2-2\Delta x+2\}-2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(\Delta x)^2-2\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}(\Delta x-2)=-2$$

답 -2

0219

$f(x)=-x^2+4$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)$이므로

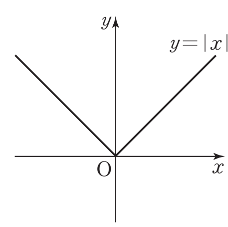
$$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{-(-1+\Delta x)^2+4\}-3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{2\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}(2-\Delta x)=2$$

답 2

0220

(i) $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h}{h}=-1$$



$$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|h|-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{h}{h}=1$$
$$\therefore \lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\neq\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

즉, $f'(0)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

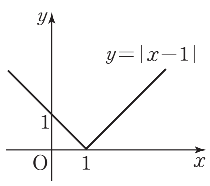
(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다. 답 연속이지만 미분가능하지 않다.

0221

$$f(x)=|x-1|=\begin{cases}x-1 & (x\geq1)\\-x+1 & (x<1)\end{cases}\text{에서}$$

(ⅰ) $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ⅱ) $$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{|h|-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{-h}{h}$$
$$=-1$$



$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|h|-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{h}{h}=1$$
$$\therefore \lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\neq\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

즉, $f'(1)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)=|x-1|$은 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

따라서 구하는 상수 a의 값은 1이다. 답 1

0222

(1) $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(-2x^2+3)=1$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}x^2=1$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(2) $$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(-2x^2+3)-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{-2(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\{-2(x+1)\}=-4$$
$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(x+1)=2$$
$$\therefore \lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

따라서 $f'(1)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다. 답 (1) 연속이다. (2) 미분가능하지 않다.

0223

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{4-4}{\Delta x}=0$$
답 $f'(x)=0$

0224

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{3(x+\Delta x)-4\}-(3x-4)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3$$
답 $f'(x)=3$

0225

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)\}-(x^2-x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(2x-1)\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}(2x-1+\Delta x)=2x-1$$
답 $f'(x)=2x-1$

0226

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{2(x+\Delta x)^2+1\}-(2x^2+1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{4x\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}(4x+2\Delta x)=4x$$

또, 함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수 $f'(2)$는

$f'(2)=4\times2=8$ 답 $f'(x)=4x$, $f'(2)=8$

0227

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\left\{-\frac{1}{2}(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)-3\right\}-\left(-\frac{1}{2}x^2+x-3\right)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(-x+1)\Delta x-\frac{1}{2}(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\left(-x+1-\frac{1}{2}\Delta x\right)$$
$$=-x+1$$

또, 함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수 $f'(2)$는

$f'(2)=-2+1=-1$ 답 $f'(x)=-x+1$, $f'(2)=-1$

0228

$y'=(x^7)'=7x^6$ 답 $y'=7x^6$

0229

$y'=(3x^6)'=18x^5$ 답 $y'=18x^5$

0230

$y'=(-x^{15})'=-15x^{14}$ 답 $y'=-15x^{14}$

0231

$y'=(24)'=0$ 답 $y'=0$

0232

$y'=(5x+1)'=(5x)'+(1)'=5$ 답 $y'=5$

0233

$y'=(-2x^2+3x+1)'=(-2x^2)'+(3x)'+(1)'$

$=-4x+3$ 답 $y'=-4x+3$

0234

$y'=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+x-1\right)'$

$=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'-(x^2)'+(x)'-(1)'$

$=x^2-2x+1$ 답 $y'=x^2-2x+1$

0235

$y'=(-x^4-6x^2+3x+2)'$

$=(-x^4)'-(6x^2)'+(3x)'+(2)'$

$=-4x^3-12x+3$ 답 $y'=-4x^3-12x+3$

0236

$y'=(2x^6-x^3+x)'$

$=(2x^6)'-(x^3)'+(x)'$

$=12x^5-3x^2+1$ 답 $y'=12x^5-3x^2+1$

0237

함수 $f(x)=x^2+ax+3$에서

$f'(x)=(x^2+ax+3)'$

$=(x^2)'+(ax)'+(3)'$

$=2x+a$

이므로 $f'(1)=2+a=0$

$\therefore a=-2$ 답 -2

0238

$y'=(x-2)'(2x+1)+(x-2)(2x+1)'$

$=(2x+1)+2(x-2)$

$=4x-3$ 답 $y'=4x-3$

0239

$y'=(3x+4)'(2x^2+3x-1)+(3x+4)(2x^2+3x-1)'$

$=3(2x^2+3x-1)+(3x+4)(4x+3)$

$=(6x^2+9x-3)+(12x^2+25x+12)$

$=18x^2+34x+9$ 답 $y'=18x^2+34x+9$

0240

$y'=(x)'(x+1)(x+4)+x(x+1)'(x+4)+x(x+1)(x+4)'$

$=(x+1)(x+4)+x(x+4)+x(x+1)$

$=(x^2+5x+4)+(x^2+4x)+(x^2+x)$

$=3x^2+10x+4$ 답 $y'=3x^2+10x+4$

0241

$y'=(2x+1)'(x-1)(-x^2+5x)+(2x+1)(x-1)'(-x^2+5x)$
$+(2x+1)(x-1)(-x^2+5x)'$

$=2(x-1)(-x^2+5x)+(2x+1)(-x^2+5x)$
$+(2x+1)(x-1)(-2x+5)$

$=(-2x^3+12x^2-10x)+(-2x^3+9x^2+5x)$
$+(-4x^3+12x^2-3x-5)$

$=-8x^3+33x^2-8x-5$ 답 $y'=-8x^3+33x^2-8x-5$

0242

$y'=\{(2x-1)^3\}'$

$=3(2x-1)^2(2x-1)'$

$=3(2x-1)^2\times 2=6(2x-1)^2$ 답 $y'=6(2x-1)^2$

0243

$y'=\{(-x^2+3x+5)^4\}'$

$=4(-x^2+3x+5)^3(-x^2+3x+5)'$

$=4(-x^2+3x+5)^3(-2x+3)$

답 $y'=4(-x^2+3x+5)^3(-2x+3)$

STEP 2 유형 마스터

0244

|전략| 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$임을 이용한다.

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+1$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}$$
$$=\frac{\{(a+1)^2-2(a+1)\}-(a^2-2a)}{1}$$
$$=2a-1=3$$

$\therefore a=2$ 답 ④

0245

함수 $f(x)$에서 x의 값이 -1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}$$
$$=\frac{(3^2+2)-\{(-1)^2+2\}}{4}$$
$$=\frac{11-3}{4}=2$$

또, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 -3에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a)-f(-3)}{a-(-3)}$$
$$=\frac{(a^2+2)-\{(-3)^2+2\}}{a+3}$$
$$=\frac{a^2-9}{a+3}=\frac{(a+3)(a-3)}{a+3}$$
$$=a-3$$

즉, $a-3=2$에서 $a=5$ 답 5

0246

|전략| 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $x=c$에서의 미분계수는 $f'(c)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$임을 이용한다.

함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$$
$$=\frac{(2^2+3\times2+1)-(1^2+3\times1+1)}{1}$$
$$=\frac{11-5}{1}=6$$

또, 함수 $f(x)$의 $x=c$에서의 미분계수는

$$f'(c)=\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(c+h)^2+3(c+h)+1\}-(c^2+3c+1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{(2c+3)h+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(2c+3+h)=2c+3$$

즉, $2c+3=6$에서 $c=\frac{3}{2}$ 답 ⑤

0247

함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 k까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(k)-f(1)}{k-1}$$
$$=\frac{(k^2-k+2)-(1^2-1+2)}{k-1}$$
$$=\frac{k^2-k}{k-1}=\frac{k(k-1)}{k-1}=k \quad \cdots ❶$$

또, 함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(2+h)^2-(2+h)+2\}-(2^2-2+2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{3h+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(3+h)=3 \quad \cdots ❷$$

$\therefore k=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $\frac{f(k)-f(1)}{k-1}$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $f'(2)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20%

0248

$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=a$, $f(1)=1$이므로

$f(a)=a^2-a+f(1)=a^2-a+1$

즉, $f(x)=x^2-x+1$이므로 $x=1$에서의 미분계수는

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(1+h)^2-(1+h)+1\}-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h+h^2}{h}=\lim_{h\to0}(1+h)=1$$

답 1

0249

|전략| 분자에서 $f(1)$을 빼고 더하여 식을 변형한다.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$
$$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$$
$$=2\times2=4$$

답 4

0250

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)-g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}-\frac{g(h)}{h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times3-\lim_{h\to0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$$
$$=3f'(1)-g'(0)=0$$

이때, $f'(1)=2$이므로

$3\times2-g'(0)=0 \qquad \therefore g'(0)=6$

답 6

0251

|전략| 분자에서 $3f(3)$을 빼고 더하여 식을 변형한다.

$$\lim_{x\to3}\frac{3f(x)-xf(3)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{3f(x)-3f(3)+3f(3)-xf(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{3\{f(x)-f(3)\}-(x-3)f(3)}{x-3}$$
$$=3\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}-\lim_{x\to3}\frac{(x-3)f(3)}{x-3}$$
$$=3f'(3)-f(3)$$
$$=3\times2-4=2$$

답 ②

0252

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\lim_{x\to1}(x+1)$$
$$=2f'(1)$$
$$=2\times2=4$$

답 4

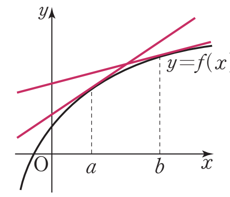
0253

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(1)+f(1)-f(x^2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)f(1)-\{f(x^2)-f(1)\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+1)f(1)-\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\lim_{x\to1}(x+1)$$
$$=2f(1)-2f'(1)$$
$$=2\times3-2\times(-2)=10$$

답 ①

0254

|전략| 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$임을 이용한다.



ㄱ. 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기가 점 $(b, f(b))$에서의 접선의 기울기보다 크므로 $f'(a)>f'(b)$ (거짓)

ㄴ. 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기가 $x=a$인 점에서의 접선의 기울기보다 작으므로 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(a)$ (참)

ㄷ. $0<a<b$일 때 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$이고, 열린구간 (a, b)에서 접선의 기울기는 점점 감소하므로 $f'(\sqrt{ab})>f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (참)

$a>0$, $b>0$일 때, $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

Lecture

(1) 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하고 $a<b$일 때

$f'(a)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(2) 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하고 $a<b$일 때

$f'(a)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

0255

ㄱ. $g(4)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{4-1}{3}=1$

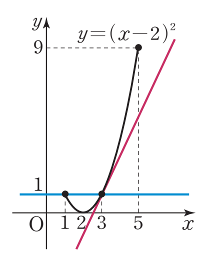
$g(5)=\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{9-1}{4}=2$

$\therefore\ g(4)<g(5)$ (참)

ㄴ. $g(x)=0$에서 $f(x)-f(1)=0$, $(x-2)^2-1=0$

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$1<x\le5$이므로 구하는 x의 값은 $x=3$의 1개이다. (거짓)



ㄷ. $g(3)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{1-1}{2}=0$

$f'(3)$은 $x=3$에서의 접선의 기울기와 같으므로 오른쪽 그림에서 $f'(3)>0$

$\therefore g(3)<f'(3)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

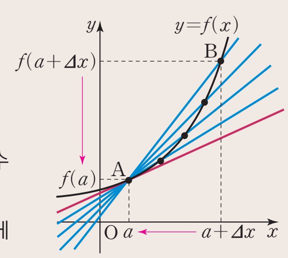
Lecture

미분계수 $f'(a)$의 기하적 의미

오른쪽 그림에서 점 B가 점 A에 한없이 가까워질 때의 평균변화율의 극한값

$f'(a)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

는 $x=a$에서의 접선의 기울기임을 알 수 있다. 따라서 미분계수 $f'(a)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기이다.



0256

| 전략 | 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$이어야 하고, 미분가능하려면 $f'(0)$이 존재해야 한다.

① $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

② $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h|h|-0}{h}=\lim_{h\to0}|h|=0$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

③ $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$이므로 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

④ $f(x)=|x|^2=x^2$이므로 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

⑤ $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2|h|-0}{h}=\lim_{h\to0} h|h|=0$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다. 답 ③

0257

$f(x)=|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (x\le-1 \text{ 또는 } x\ge1) \\ -x^2+1 & (-1<x<1)\end{cases}$ 에서

(i) $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. … ❶

(ii) $\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{\{-(1+h)^2+1\}-0}{h}$

$=\lim_{h\to0-}\frac{-2h-h^2}{h}$

$=\lim_{h\to0-}(-2-h)=-2$

$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{\{(1+h)^2-1\}-0}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{2h+h^2}{h}$

$=\lim_{h\to0+}(2+h)=2$

$\therefore \lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\ne\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

즉, $f'(1)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다. … ❷

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다. … ❸

답 연속이지만 미분가능하지 않다.

채점 기준	비율
❶ $x=1$에서의 연속성을 조사할 수 있다.	30%
❷ $x=1$에서의 미분가능성을 조사할 수 있다.	50%
❸ $x=1$에서의 연속성과 미분가능성을 확인할 수 있다.	20%

0258

ㄱ. $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h}{h}=-1$

$\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h}{h}=1$

즉, $f'(0)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim_{x\to0-} g(x)=\lim_{x\to0-}\left(\frac{-x}{x}-1\right)=-2$

$\lim_{x\to0+} g(x)=\lim_{x\to0+}\left(\frac{x}{x}-1\right)=0$

즉, $\lim_{x\to0} g(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to0} l(x)=l(0)=1$이므로 함수 $l(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{h\to0-}\frac{l(h)-l(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{2h+1-1}{h}=2$

$\lim_{h\to0+}\frac{l(h)-l(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(h+1)^2-1}{h}=\lim_{h\to0+}(h+2)=2$

즉, $l'(0)$이 존재하므로 함수 $l(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ이다.

답 ①

0259

| 전략 | 불연속인 점, 꺾인 점에서는 미분가능하지 않다.

① 함수 $f(x)$는 $x=d$, $x=e$에서 불연속이므로 불연속인 점은 2개이다.

② $\lim_{x\to d-} f(x)=\lim_{x\to d+} f(x)$이므로 $\lim_{x\to d} f(x)$의 값이 존재한다.

③ $f'(x)=0$인 점은 $a<x<c$, $c<x<d$, $d<x<e$에서 각각 한 개씩 존재하고, $e<x<b$에서 함수 $f(x)$는 상수함수이므로 $f'(x)=0$이다.

④ 불연속인 점과 꺾인 점에서는 미분가능하지 않으므로 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점은 $x=c$, $x=d$, $x=e$의 3개이다.

⑤ 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(c, f(c))$에서 접선을 그을 수 없으므로 함수 $f(x)$는 $x=c$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

답 ④

Lecture

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 연결되어 있지 않은 점은 불연속인 점이고, 연결되어 있지만 접선을 그을 수 없는 점, 즉 뾰족한 점(또는 꺾인 점)은 연속이지만 미분가능하지 않은 점이다.

0260

①, ⑤ $x=a$에서 꺾인 점이므로 미분가능하지 않다.

②, ④ $x=a$에서 불연속으로 미분가능하지 않다. 답 ③

0261

(i) 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 불연속인 점은 그래프가 연결되어 있지 않고 끊어져 있는 점이다.

따라서 불연속인 점은 $x=-1$, $x=1$일 때이므로 $a=2$

(ii) 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 미분가능하지 않은 점은 불연속인 점과 꺾인 점이다.

따라서 미분가능하지 않은 점은 $x=-1$, $x=0$, $x=1$일 때이므로 $b=3$

(i), (ii)에서 $a+b=2+3=5$ 답 5

0262

|전략| $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$임을 이용한다.

$F(x)=\{f(x)\}^2$으로 놓으면 $y=F(x)$에서

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+h)\}^2-\{f(x)\}^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+h)+f(x)\}\times\{f(x+h)-f(x)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times\lim_{h\to0}\{\boxed{(가)\ f(x+h)+f(x)}\}$$
$$=f'(x)\times2f(x)$$
$$=\boxed{(나)\ 2f(x)f'(x)}$$

답 ②

0263

도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$\therefore\ f'(-x)=\lim_{h\to0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\boxed{(가)\ f(x-h)}-f(x)}{h}\ (\because f(x)=f(-x))$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{\boxed{(가)\ f(x-h)}-f(x)}{\boxed{(나)\ -h}}\times(-1)\right\}$$
$$=-f'(x)$$

답 (가) $f(x-h)$ (나) $-h$

0264

|전략| $y=x^n$ (n은 양의 정수)이면 $y'=nx^{n-1}$임을 이용한다.

함수 $f(x)=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{1}{99}x^{99}$에서

$f'(x)=1+x^2+x^4+\cdots+x^{98}$이므로

$f'(1)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{50\text{개}}=50$

답 ②

0265

함수 $f(x)=x-x^2+x^3-x^4+x^5-x^6+x^7$에서

$f(1)=1$ … ❶

또, $f'(x)=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+7x^6$이므로

$f'(1)=1-2+3-4+5-6+7=4$ … ❷

$\therefore\ f(1)+f'(1)=1+4=5$ … ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ $f(1)+f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	20%

0266

함수 $f(x)=x^3+ax^2-x-1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-1$

이때, $f'(1)=4$이므로 $2a+2=4$

$\therefore\ a=1$

답 1

0267

$f(-1)=0$에서 $a-b+c=0$ ……㉠

$f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(1)=2$에서 $2a+b=2$ ……㉡

$f'(2)=4$에서 $4a+b=4$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=0$, $c=-1$

$\therefore\ a+b-c=1+0-(-1)=2$

답 ⑤

0268

|전략| 함수의 곱의 미분법을 이용한다.

$$f'(x)=\{(x-1)(x^3-3)\}'+\{(x^2-2x-1)^3\}'$$
$$=(x-1)'(x^3-3)+(x-1)(x^3-3)'+3(x^2-2x-1)^2(x^2-2x-1)'$$
$$=(x^3-3)+(x-1)\times3x^2+3(x^2-2x-1)^2(2x-2)$$
$$=(x^3-3)+3x^2(x-1)+6(x-1)(x^2-2x-1)^2$$

$\therefore\ f'(1)=-2$

답 ①

0269

$f(x)=(x^4-3x^2+ax-1)^2$에서

$$f'(x)=\{(x^4-3x^2+ax-1)^2\}'$$
$$=2(x^4-3x^2+ax-1)(x^4-3x^2+ax-1)'$$
$$=2(x^4-3x^2+ax-1)(4x^3-6x+a)$$

이때, $f'(0)=4$이므로

$f'(0)=-2a=4\qquad\therefore\ a=-2$

따라서 $f(x)=(x^4-3x^2-2x-1)^2$이므로

$f(1)=(1-3-2-1)^2=(-5)^2=25$

답 ④

0270

주어진 식의 우변을 인수분해하면

$(x^2+x+1)f(x)=(x+1)(x-1)(x^3+1)(x^2+x+1)$

$\therefore\ f(x)=(x^2-1)(x^3+1)\ (\because x^2+x+1>0)$

$$f'(x)=(x^2-1)'(x^3+1)+(x^2-1)(x^3+1)'$$
$$=2x(x^3+1)+(x^2-1)\times3x^2$$

$\therefore\ f'(1)=4$

답 4

0271

$$g'(x)=(x^2+2x)'f(x)+(x^2+2x)f'(x)$$
$$=(2x+2)f(x)+(x^2+2x)f'(x)$$
$$\therefore\ g'(1)=4f(1)+3f'(1)$$
$$=4\times2+3\times3=17$$

답 ②

0272

$f(x)=x^6+6x^2+1$에서

$f'(x)=6x^5+12x$ ······ ㉠

$g(x)=(3x^2-4x+1)^2$에서

$g'(x)=2(3x^2-4x+1)(3x^2-4x+1)'$

$=2(3x^2-4x+1)(6x-4)$

$=4(3x-2)(3x^2-4x+1)$ ······ ㉡ ··· ❶

이때, $h(x)=f(x)-g(x)$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로 함수 $h(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$h'(1)=f'(1)-g'(1)$ ··· ❷

㉠에 의하여 $f'(1)=18$

㉡에 의하여 $g'(1)=0$

$\therefore h'(1)=f'(1)-g'(1)=18-0=18$ ··· ❸

답 18

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$, $g'(x)$를 구할 수 있다.	50%
❷ $h'(1)=f'(1)-g'(1)$임을 구할 수 있다.	30%
❸ $h'(1)$의 값을 구할 수 있다.	20%

Lecture

함수 $f(x)$에서 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 도함수 $f'(x)$의 식에 $x=a$를 대입한 값이다.

0273

$f(x)=(x-a)^4$에서 $f'(x)=4(x-a)^3$

$g(x)=x$에서 $g'(x)=1$

$y=f(x)+g(x)$에서 $y'=f'(x)+g'(x)$이고 곡선 $y=f(x)+g(x)$ 위의 $x=3$인 점에서의 접선의 기울기가 5이므로

$f'(3)+g'(3)=5$

$4(3-a)^3+1=5$, $(3-a)^3=1$, $3-a=1$

$\therefore a=2$ ($\because a$는 실수)

답 2

0274

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-5}{x-3}=2$에서 $\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로 $\lim_{x\to3}\{f(x)-5\}=0$이다.

즉, $f(3)=5$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-5}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=2$$

이때, $g(x)=xf(x)$에서

$g'(x)=f(x)+xf'(x)$

$\therefore g'(3)=f(3)+3f'(3)=5+3\times2=11$

답 11

0275

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$이다.

즉, $f(1)=2$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$$

또, $\lim_{x\to1}\frac{g(x)-1}{x-1}=-1$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}\{g(x)-1\}=0$이다.

즉, $g(1)=1$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=-1$$

이때, $H(x)=f(x)g(x)$에서

$H'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$H'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$=3\times1+2\times(-1)=1$

답 1

0276

| 전략 | 분자에서 $f(1)$을 빼고 더하여 식을 변형한다.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-2h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times2$$
$$=f'(1)+2f'(1)=3f'(1)$$

이때, $f(x)=x^4+x^2+1$에서 $f'(x)=4x^3+2x$이므로

$f'(1)=6$

$\therefore 3f'(1)=3\times6=18$

답 ③

0277

$$\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(1)\}^2}{x-1}=\lim_{x\to1}\left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\{f(x)+f(1)\}\right]$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\{f(x)+f(1)\}$$
$$=f'(1)\times2f(1)$$

이때, $f(x)=2x^3-x^2-3x+1$에서 $f(1)=-1$

또, $f'(x)=6x^2-2x-3$이므로 $f'(1)=1$

$\therefore f'(1)\times2f(1)=1\times2\times(-1)=-2$

답 -2

0278

$f(x)=x^6+6x^2+1$에서 $f(1)=f(-1)$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(-1+3h)-f(1)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(-1+3h)-f(-1)}{3h}\times3$$
$$=\frac{3}{2}f'(-1)$$

이때, $f(x)=x^6+6x^2+1$에서 $f'(x)=6x^5+12x$이므로
$f'(-1)=-18$
$\therefore \frac{3}{2}f'(-1)=\frac{3}{2}\times(-18)=-27$ 답 ①

0279

$\frac{1}{n}=t$로 놓으면 $n\to\infty$일 때, $t\to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1-t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)+f(1)-f(1-t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{f(1-t)-f(1)}{-t}$$
$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$
이때, $f(x)=x^3-x^2+2$에서 $f'(x)=3x^2-2x$이므로
$f'(1)=1$
$\therefore 2f'(1)=2\times 1=2$ 답 2

0280

|전략| $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서 $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$임을 이용한다.

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이다.
즉, $f(1)=0$이므로
$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$$
한편, $f(x)=x^3+ax^2+2bx-3b$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+2b$이므로
$f(1)=1+a+2b-3b=0 \qquad \therefore a-b=-1$ ⋯⋯ ㉠
$f'(1)=3+2a+2b=1 \qquad \therefore a+b=-1$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=0$
$\therefore ab=0$ 답 0

0281

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times(\sqrt{x}+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)$$
$$=2f'(1)$$
즉, $2f'(1)=8$이므로 $f'(1)=4$
한편, $f(x)=x^2+ax+b$에서
$f'(x)=2x+a$이므로
$f(1)=1+a+b=8 \qquad \therefore a+b=7$ ⋯⋯ ㉠
$f'(1)=2+a=4 \qquad \therefore a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=5$
$\therefore b-a=5-2=3$ 답 ③

0282

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=12$에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to 2}f(x)=0$이다.
즉, $f(2)=0$이므로
$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=12$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$
$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)=2$
$\therefore f'(1)=1$
한편, $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로
$f(2)=8+4a+2b+c=0 \qquad \therefore 4a+2b+c=-8$ ⋯⋯ ㉠
$f'(2)=12+4a+b=12 \qquad \therefore 4a+b=0$ ⋯⋯ ㉡
$f'(1)=3+2a+b=1 \qquad \therefore 2a+b=-2$ ⋯⋯ ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-4$, $c=-4$
따라서 $f(x)=x^3+x^2-4x-4$이므로 $f(1)=-6$ 답 -6

0283

$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+x-2}=2$이므로 $a=0$, $b=2$
$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-10}{x-1}=5$에서 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로
$\lim_{x\to 1}\{f(x)-10\}=0$이다.
즉, $f(1)=10$이므로
$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-10}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=5$$
한편, $f(x)=2x^2+cx+d$에서 $f'(x)=4x+c$이므로
$f(1)=2+c+d=10 \qquad \therefore c+d=8$ ⋯⋯ ㉠
$f'(1)=4+c=5 \qquad \therefore c=1$
$c=1$을 ㉠에 대입하면 $d=7$
$\therefore ab+cd=0\times 2+1\times 7=7$ 답 7

0284

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$임을 이용한다.

점 $(1, 2)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
$f(1)=1+a+b=2 \qquad \therefore a+b=1$ ⋯⋯ ㉠
또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로
$f'(1)=-2$
이때, $f'(x)=2x+a$이므로
$f'(1)=2+a=-2 \qquad \therefore a=-4$
$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $b=5$
$\therefore ab=-4\times 5=-20$ 답 -20

0285

$f(x)=ax^2+bx+c$로 놓으면 곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(1, 1)$, $(-1, 2)$를 지나므로

$a+b+c=1$ ⋯⋯ ㉠

$a-b+c=2$ ⋯⋯ ㉡

또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기가 $-\frac{3}{2}$이므로

$f'(-1)=-\frac{3}{2}$

이때, $f'(x)=2ax+b$이므로

$-2a+b=-\frac{3}{2}$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=1$

$\therefore 2a-2b+c=2\times\frac{1}{2}-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=3$

답 ④

0286

$f(x)=(3x-4)^2(2x-a)$로 놓으면

$$\begin{aligned}f'(x)&=\{(3x-4)^2\}'(2x-a)+(3x-4)^2(2x-a)'\\&=\{2(3x-4)\times3\}(2x-a)+(3x-4)^2\times2\\&=6(3x-4)(2x-a)+2(3x-4)^2\\&=2(3x-4)(9x-3a-4)\end{aligned}$$

이때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 -4이므로

$f'(1)=2\times(-1)\times(5-3a)=-4$

$\therefore a=1$

답 1

0287

점 (a, b)가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$a^4-4a^3+6a^2+4=b$ ⋯⋯ ㉠

또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 4이므로

$f'(a)=4$

이때, $f'(x)=4x^3-12x^2+12x$이므로

$f'(a)=4a^3-12a^2+12a=4$, $a^3-3a^2+3a-1=0$

$(a-1)^3=0 \quad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=7$

$\therefore a^2+b^2=1+49=50$

답 50

0288

| 전략 | x^n+x^2+x를 $f(x)$로 치환하여 주어진 식을 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 꼴로 변형한다.

$f(x)=x^n+x^2+x$로 놓으면 $f(1)=3$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n+x^2+x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=10$$

이때, $f'(x)=nx^{n-1}+2x+1$이므로 $f'(1)=n+3$

즉, $n+3=10$에서 $n=7$

답 ③

0289

$f(x)=x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6$으로 놓으면 $f(1)=1$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

이때, $f'(x)=10x^9-9x^8+8x^7-7x^6+6x^5$이므로 $f'(1)=8$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-1}{x-1}=8$$

답 ①

0290

$\lim_{x\to2}\frac{x^n-x^4-8x}{x-2}=a$에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(x^n-x^4-8x)=0$이다.

즉, $2^n-2^4-8\times2=0$이므로

$2^n=32 \qquad \therefore n=5$

$f(x)=x^5-x^4-8x$로 놓으면 $f(2)=0$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{x^5-x^4-8x}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

이때, $f'(x)=5x^4-4x^3-8$이므로

$f'(2)=40 \qquad \therefore a=40$

$\therefore \frac{a}{n}=\frac{40}{5}=8$

답 ⑤

0291

| 전략 | 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이고 $f'(1)$이 존재함을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$이므로 $a+b=3$ ⋯⋯ ㉠

또, $f'(1)$이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}&=\lim_{h\to0-}\frac{\{a(1+h)+b\}-(a+b)}{h}\\&=\lim_{h\to0-}\frac{ah}{h}=a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}&=\lim_{h\to0+}\frac{\{(1+h)^2+2\}-(1^2+2)}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{2h+h^2}{h}\\&=\lim_{h\to0+}(2+h)=2\end{aligned}$$

에서 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore ab=2\times1=2$

답 2

다른 풀이 $g(x)=x^2+2\ (x\ge1)$, $h(x)=ax+b\ (x<1)$라 하면

$g'(x)=2x\ (x>1)$, $h'(x)=a\ (x<1)$

(i) $x=1$에서 연속이므로

$g(1)=h(1)$에서 $3=a+b$ ⋯⋯ ㉠

3 미분계수와 도함수

(ⅱ) $x=1$에서 미분계수가 존재하므로

$\lim_{x\to1+}g'(x)=\lim_{x\to1-}h'(x)$에서 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore ab=2\times1=2$

0292

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$이므로 $1+b=4a$ ······ ㉠

또, $f'(2)$가 존재하므로

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{\{(2+h-1)^2+b\}-(1+b)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{2h+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}(2+h)=2$$
$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{a(2+h)^2-4a}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{4ah+ah^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}(4a+ah)=4a$$

에서 $4a=2$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore \frac{b}{a}=2$

답 ⑤

0293

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$이므로 $2=a-b+1$

$\therefore a-b=1$ ······ ㉠ ··· ❶

또, $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{\{(1+h)^3+1\}-2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{3h+3h^2+h^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}(3+3h+h^2)=3$$
$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{\{a(1+h)^2-b(1+h)+1\}-(a-b+1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{(2a-b)h+ah^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}(2a-b+ah)=2a-b$$

에서 $2a-b=3$ ······ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$\therefore a+b=2+1=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $x=1$에서 연속임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30%
❷ $f'(1)$이 존재함을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

0294

| 전략 | 먼저 주어진 식의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하여 $f(0)$의 값을 구한다.

주어진 식의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\quad\therefore f(0)=0$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-2xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-2xh}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-2x$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-2x$$
$$=f'(0)-2x$$
$$=-2x+3$$

답 $f'(x)=-2x+3$

0295

주어진 식의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\quad\therefore f(0)=0$

이때, $f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=0$이므로

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)+h-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+1=1$$

답 1

0296

주어진 식의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)\times f(0)$

이때, $f(x)>0$이므로 $f(0)=1$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)\{f(h)-1\}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x)\{f(h)-f(0)\}}{h}$$
$$=f(x)\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=f(x)f'(0)$$
$$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f(x)f'(0)}{f(x)}=f'(0)=2$$

답 2

0297

ㄱ. $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\quad\therefore f(0)=0$ (참)

ㄴ. $f'(0)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}=3$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2xh}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+2x\\&=2x+3\ (\text{참})\end{aligned}$$

ㄷ. 함수 $f(x)$가 미분가능하므로 모든 실수 a에 대하여 연속이다.

$\therefore f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0298

| 전략 | $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수, $a\neq0$)로 놓고 주어진 조건을 이용하여 $a,\ b,\ c$의 값을 구한다.

$f(x)$가 이차함수이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수, $a\neq0$)로 놓으면 $f'(x)=2ax+b$

$f(x),\ f'(x)$를 주어진 식에 대입하면

$(x+1)(2ax+b)-(ax^2+bx+c)=2x^2+4x$

$\therefore ax^2+2ax+b-c=2x^2+4x$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=2,\ b-c=0$

또, $f'(-1)=-2a+b=0$이므로 $-4+b=0$

$\therefore b=4,\ c=4$

따라서 $f(x)=2x^2+4x+4$이므로

$f(2)=8+8+4=20$ 답 ②

다른 풀이 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

이때, 주어진 식은 x에 대한 항등식이므로 $x=0,\ x=1$을 각각 대입하면

$(0+1)f'(0)-f(0)=0$에서 $b-c=0$ ⋯⋯ ㉠

$(1+1)f'(1)-f(1)=6$에서 $2(2a+b)-(a+b+c)=6$

$\therefore 3a+b-c=6$ ⋯⋯ ㉡

또한, $f'(-1)=0$이므로 $-2a+b=0$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=4,\ c=4$

따라서 $f(x)=2x^2+4x+4$이므로

$f(2)=8+8+4=20$

0299

$f(x)$가 이차함수이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수, $a\neq0$)로 놓으면 $f'(x)=2ax+b$

$f(x),\ f'(x)$를 조건 ㈎에 대입하면

$1-x(2ax+b)+ax^2+bx+c=x^2+2$

$\therefore -ax^2+1+c=x^2+2$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=-1,\ c=1$

또, 조건 ㈏에서 $f'(1)=2a+b=1$이므로 $-2+b=1$ $\quad\therefore b=3$

따라서 $f'(x)=-2x+3$이므로

$f'(2)=-4+3=-1$ 답 -1

0300

$f(x)$가 n차인 다항함수라 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차인 다항함수이므로 $f(x)f'(x)=2x^3-9x^2+5x+6$에서

$n+(n-1)=3$ $\quad\therefore n=2$

즉, $f(x)$는 이차함수이고, 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^2+ax+b$ ($a,\ b$는 상수)로 놓으면 $f'(x)=2x+a$

$f(x),\ f'(x)$를 주어진 식에 대입하면

$(x^2+ax+b)(2x+a)=2x^3-9x^2+5x+6$

$2x^3+3ax^2+(a^2+2b)x+ab=2x^3-9x^2+5x+6$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$3a=-9,\ a^2+2b=5,\ ab=6$

위의 세 식을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-2$

따라서 $f(x)=x^2-3x-2$이므로

$f(-3)=9+9-2=16$ 답 16

0301

| 전략 | $x^5+ax^3+b=(x+1)^2Q(x)$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분한다.

다항식 x^5+ax^3+b를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^5+ax^3+b=(x+1)^2Q(x)$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1-a+b=0$ $\quad\therefore a-b=-1$ ⋯⋯ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$5x^4+3ax^2=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$5+3a=0$ $\quad\therefore a=-\dfrac{5}{3}$

$a=-\dfrac{5}{3}$를 ㉡에 대입하면 $b=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore ab=-\dfrac{5}{3}\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{10}{9}$ 답 $\dfrac{10}{9}$

Lecture

다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어질 때, $f(x)$를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-a)^2Q(x)$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 양변에 $x=a$를 각각 대입하면

$f(a)=0,\ f'(a)=0$

따라서 위의 문제에서 $f(x)=x^5+ax^3+b$로 놓으면

$f'(x)=5x^4+3ax^2$이고 $f(x)$가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(-1)=-1-a+b=0,\ f'(-1)=5+3a=0$

이 성립한다.

0302

다항식 $x^{10}-10x+a$를 $(x-b)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{10}-10x+a=(x-b)^2Q(x)$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=b$를 대입하면

$b^{10}-10b+a=0$ ······㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9-10=2(x-b)Q(x)+(x-b)^2Q'(x)$

양변에 $x=b$를 대입하면

$10b^9-10=0,\ b^9=1 \quad \therefore b=1$

$b=1$을 ㉡에 대입하면 $1-10+a=0 \quad \therefore a=9$

$\therefore a+b=9+1=10$

답 ⑤

0303

다항식 x^4-ax^2+b를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^4-ax^2+b=(x+1)^2Q(x)+2x-1$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1-a+b=-3 \quad \therefore -a+b=-4$ ······㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$4x^3-2ax=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+2$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-4+2a=2 \quad \therefore a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면 $b=-1$

$\therefore a+b=3+(-1)=2$

답 ④

0304

다항식 x^7-x+3을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^7-x+3=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-1+3=a+b \quad \therefore a+b=3$ ······㉡ ··· ❶

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$7x^6-1=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

양변에 $x=1$을 대입하면

$7-1=a \quad \therefore a=6$

$a=6$을 ㉡에 대입하면 $b=-3$ ··· ❷

따라서 $R(x)=6x-3$이므로 $R(2)=12-3=9$ ··· ❸

답 9

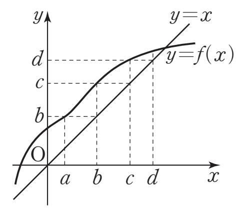
채점 기준	비율
❶ $R(x)=ax+b$로 놓고 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $R(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

STEP 3 내신 마스터

0305

유형 01 평균변화율

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지나면 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 (b, a)를 지난다. 즉, $f(a)=b \Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$이다.



오른쪽 그림에서 $f(a)=b,\ f(b)=c$ 이므로

$f^{-1}(b)=a,\ f^{-1}(c)=b$

$\therefore g(b)=a, g(c)=b$

따라서 구하는 평균변화율은

$\dfrac{g(c)-g(b)}{c-b}=\dfrac{b-a}{c-b}$

답 ②

0306

유형 03 미분계수를 이용한 극한값의 계산 (1)

|전략| 주어진 식의 분자를 인수분해하여 식을 변형한다.

$f(1)=g(1)=2$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+h)\}^2-\{g(1+h)\}^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+h)-g(1+h)\}\{f(1+h)+g(1+h)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+g(1)-g(1+h)}{h}\times\lim_{h\to0}\{f(1+h)+g(1+h)\}$$
$$=\left\{\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}\right\}\times\{f(1)+g(1)\}$$
$$=\{f'(1)-g'(1)\}\times\{f(1)+g(1)\}$$
$$=(3-4)\times(2+2)=-4$$

답 ①

0307

유형 04 미분계수를 이용한 극한값의 계산 (2)

|전략| 분자에서 $f(1)$을 빼고 더하여 식을 변형한다.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-2x^2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)+f(1)-2x^2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x^2)-f(1)\}-2x^2+f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{(x-1)(x+1)}\times(x+1)\right\}+\lim_{x\to1}\frac{-2x^2+2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}+\lim_{x\to1}\frac{-2(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=2\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}+\lim_{x\to1}\{-2(x+1)\}$$
$$=2f'(1)-4=2\times3-4=2$$

답 ⑤

0308

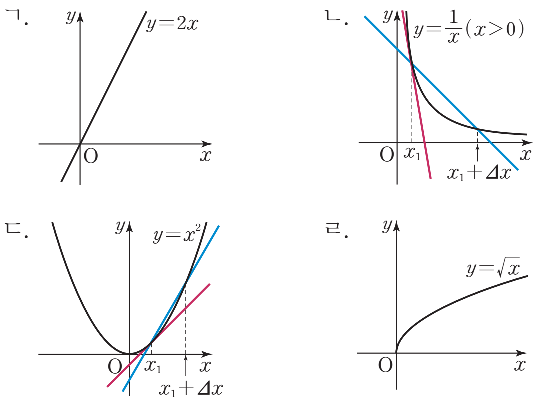
유형 05 미분계수의 기하적 의미

| 전략 | 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a)),\mathrm{B}(b,\ f(b))$를 지나는 직선 AB의 기울기, $x=a$에서의 미분계수는 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기임을 이용한다.

주어진 부등식의 양변을 $\Delta x\ (\Delta x>0)$로 나누면

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}>f'(x_1)$$

x의 값이 x_1에서 $x_1+\Delta x$까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율이 $x=x_1$에서의 미분계수보다 크므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.



따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

0309

유형 06 미분가능성과 연속성 – 식

| 전략 | $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$의 값이 존재하는지 조사한다.

ㄱ. $\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=-1$

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$

이므로 $f'(0)$이 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{(-x^2+1)-1}{x}=\lim_{x\to0-}(-x)=0$

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{1-1}{x}=0$

이므로 $f'(0)$이 존재한다.

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

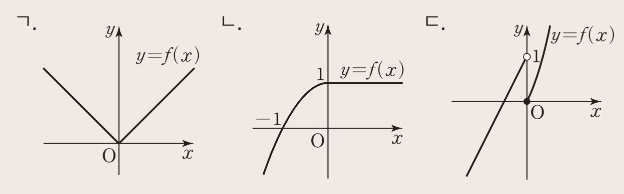
ㄷ. $\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(2x+1)=1$

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(x^2+x)=0$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

따라서 $x=0$에서 미분가능한 것은 ㄴ이다. 답 ②

Lecture



0310

유형 09 미분법의 공식

| 전략 | 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(a)=f(b)=f(c)=k$를 만족시키면 $f(x)-k=(x-a)(x-b)(x-c)$로 놓을 수 있다.

$f(0)=f(1)=f(2)=k$ (k는 상수)로 놓으면

방정식 $f(x)=k$, 즉 $f(x)-k=0$의 세 근이 0, 1, 2이고 삼차함수 $f(x)$의 삼차항의 계수는 1이므로

$f(x)-k=x(x-1)(x-2)$

$\therefore f(x)=x(x-1)(x-2)+k=x^3-3x^2+2x+k$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2-6x+2$

$\therefore f'(0)+f'(1)+f'(2)=2+(-1)+2=3$ 답 ④

다른 풀이 $f(0)=f(1)$에서 $c=1+a+b+c$

$\therefore a+b=-1$ ⋯⋯㉠

$f(0)=f(2)$에서 $c=8+4a+2b+c$

$\therefore 2a+b=-4$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2x+c$이므로

$f'(x)=3x^2-6x+2$

$\therefore f'(0)+f'(1)+f'(2)=2+(-1)+2=3$

0311

유형 10 곱의 미분법

| 전략 | $h(x)=\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$으로 놓고 양변을 x에 대하여 미분한다.

$h(x)=\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$이라 하면

$h'(x)=2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)$

$\quad=2f(x)g(x)-2g(x)f(x)=0$

따라서 $h'(x)=0$에서 함수 $h(x)$는 상수함수이다.

$h(x)=c$ (c는 상수)라 하면

$h(0)=\{f(0)\}^2+\{g(0)\}^2=3^2+4^2=25$

이므로 $c=25$

즉, $h(x)=25$이므로

$\sqrt{\{f(1)\}^2+\{g(1)\}^2}=\sqrt{h(1)}=\sqrt{25}=5$ 답 ⑤

0312

유형 11 미분계수를 이용한 극한값의 계산 (3)

| 전략 | $\frac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $h\to0$임을 이용한다.

$\frac{1}{n}=h$로 놓으면 $n \to \infty$일 때 $h \to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1+3h)-f(1)\}-\{f(1-2h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times 3+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times 2$$
$$=3f'(1)+2f'(1)$$
$$=5f'(1)$$

이때, $f'(x)=8x^3-3$이므로 $f'(1)=8-3=5$

$\therefore 5f'(1)=5\times 5=25$

답 ①

0313

유형 **15** 미분가능할 조건

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이고, $f'(1)$이 존재함을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$에서

$$\lim_{x\to 1-}(ax^2+b)=\lim_{x\to 1+} 2x=\frac{2+a+b}{2}$$

$$a+b=2=\frac{2+a+b}{2}$$

$\therefore b=-a+2$ ……㉠

또, $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{(ax^2-a+2)-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{a(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}a(x+1)=2a$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

에서 $2a=2$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore ab=1\times 1=1$

답 ③

0314

유형 **16** 관계식이 주어질 때 도함수 구하기

|전략| 조건 (가)에 $x=0$, $y=0$을 대입하여 $f(0)$의 값을 구한 후, $f'(0)$의 값을 구한다.

조건 (가)에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1$ $\quad\therefore f(0)=1$

조건 (나)에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to 2}f(x)=0$이다.

즉, $f(2)=0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=3$$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(2)+f(h)+8h-1\}-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+8h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}+8$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+8=f'(0)+8$$

즉, $f'(0)+8=3$이므로 $f'(0)=-5$

답 ②

0315

유형 **17** 미분의 항등식에의 활용

|전략| 먼저 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분한다.

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2+8x^7=a_1+2a_2(x-1)+3a_3(x-1)^2+\cdots+8a_8(x-1)^7$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2+8\times 2^7=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+8a_8$ ……㉡

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$2+8\times 0=a_1-2a_2+3a_3-\cdots-8a_8$ ……㉢

㉡$-$㉢을 하면

$1024=2(2a_2+4a_4+6a_6+8a_8)$

$\therefore 2a_2+4a_4+6a_6+8a_8=512$

답 ⑤

0316

유형 **18** 미분법과 다항식의 나눗셈

|전략| 다항식 $f(x)$를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면 $f(x)=(x-a)^2Q(x)+R(x)$로 나타낼 수 있다.

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}=-4$에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}\{f(x)-4\}=0$이다.

즉, $f(2)=4$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=-4$$

다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-2)^2Q(x)+ax+b$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=2a+b=4$ ……㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+a$

양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(2)=a$ $\quad\therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉡에 대입하면 $b=12$

따라서 $R(x)=-4x+12$이므로

$R(1)=-4+12=8$

답 ④

0317

유형 18 미분법과 다항식의 나눗셈

| 전략 | 다항식 $f(x)$를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면 $f(x)=(x-a)^2Q(x)+R(x)$로 나타낼 수 있다.

다항식 x^8+ax+b를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^8+ax+b=(x+1)^2Q(x)+4x-3$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1-a+b=-7$ $\quad\therefore a-b=8$ ······ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$8x^7+a=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+4$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-8+a=4$ $\quad\therefore a=12$

$a=12$를 ㉡에 대입하면 $b=4$

$\therefore ab=12\times4=48$

답 ①

0318

유형 04 미분계수를 이용한 극한값의 계산 (2)

| 전략 | $y=f(-x)$일 때, $y'=-f'(-x)$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to-3}\frac{f(x^2)-f(9)}{f(x)-f(-3)}$$

$$=\lim_{x\to-3}\left\{\frac{x-(-3)}{f(x)-f(-3)}\times\frac{f(x^2)-f(9)}{x^2-9}\times\frac{x^2-9}{x-(-3)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to-3}\left\{\frac{1}{\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}}\times\frac{f(x^2)-f(9)}{x^2-9}\times(x-3)\right\}$$

$$=\frac{f'(9)}{f'(-3)}\times(-6)$$ ··· ❶

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$f(x)=f(-x)$이다. ··· ❷

양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=-f'(-x)$

$\therefore f'(-3)=-f'(3)=2,\ f'(9)=-f'(-9)=-3$

따라서 구하는 식의 값은

$$\frac{f'(9)}{f'(-3)}\times(-6)=\frac{-3}{2}\times(-6)=9$$ ··· ❸

답 9

채점 기준	배점
❶ 주어진 식을 간단히 나타낼 수 있다.	3점
❷ $f(x)=f(-x)$임을 알 수 있다.	1점
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	3점

Lecture

(1) $f(x)=f(-x)$일 때, $f'(x)=-f'(-x)$

(2) $f(x)=-f(-x)$일 때, $f'(x)=f'(-x)$

0319

유형 10 곱의 미분법

| 전략 | 두 다항함수의 곱 $f(x)g(x)$는 미분가능한 함수이므로 $h(x)=f(x)g(x)$로 놓는다.

조건 (가)에서 $f(0)=-2$, $g(0)=1$이므로

$h(x)=f(x)g(x)$로 놓으면

$h(0)=f(0)g(0)=-2$ ··· ❶

이때, $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로 조건 (나)에서

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)+2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x}$$

$$=h'(0)$$

$$=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$$

$$=4\times1+(-2)\times g'(0)$$

$$=4-2g'(0)=0$$

$\therefore g'(0)=2$ ··· ❷

답 2

채점 기준	배점
❶ $f(0)g(0)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ $g'(0)$의 값을 구할 수 있다.	4점

0320

유형 15 미분가능할 조건

| 전략 | 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$b+1=1+a$ $\quad\therefore a=b$ ······ ㉠ ··· ❶

또, $x=1$에서 미분계수가 존재해야 하므로

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{\{b(1+h)+1\}-(b+1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{bh}{h}=b$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{\{(1+h)^3+a(1+h)^2\}-(1+a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{h^3+(a+3)h^2+(2a+3)h}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\{h^2+(a+3)h+(2a+3)\}$$

$$=2a+3$$

$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$이어야 하므로

$2a+3=b$ ······ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-3$

$\therefore ab=-3\times(-3)=9$ ··· ❸

답 9

채점 기준	배점
❶ 미분가능하면 연속임을 알고, a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	3점
❷ 미분가능하면 미분계수가 존재함을 알고, a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	3점
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	1점

0321

유형 **14** 치환을 이용한 극한값의 계산

|전략| $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 존재하고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

(1) $\lim_{x\to 2}\frac{x^n-x^3-x-6}{x-2}$의 값이 존재하고 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}(x^n-x^3-x-6)=0$

$2^n-8-2-6=0$, $2^n=16$ $\quad\therefore n=4$

(2) $f(x)=x^4-x^3-x$로 놓으면 $f(2)=6$

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^4-x^3-x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

이때, $f'(x)=4x^3-3x^2-1$이므로

$f'(2)=4\times 2^3-3\times 2^2-1=19$

답 (1) 4 (2) 19

채점 기준	배점
(1) n의 값을 구할 수 있다.	4점
(2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^n-x^3-x-6}{x-2}$의 값을 구할 수 있다.	6점

0322

유형 **17** 미분의 항등식에의 활용

|전략| 함수 $f(x)$가 n차인 다항함수이면 $g(x)$는 $(n-1)$차인 다항함수임을 이용한다.

$f(x)g(x)=f(x)+g(x)+2x^3-4x^2+2x-1$에서

$f(x)g(x)-f(x)-g(x)=2x^3-4x^2+2x-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(1) $f(x)$를 n차함수 (n은 자연수)라 하면 $f'(x)=g(x)$에서 $g(x)$는 $(n-1)$차함수이다.

주어진 등식에서 $n=1$이면 좌변은 일차함수이고 우변은 삼차함수가 되어 모순이다. $\therefore n\ge 2$

㉠의 양변의 차수를 비교하면

$n+(n-1)=3$ $\quad\therefore n=2$

(2) $f(x)$는 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)

로 놓으면

$g(x)=2ax+b$

$f(x), g(x)$를 주어진 식에 대입하면

$(ax^2+bx+c)(2ax+b)$

$=(ax^2+bx+c)+(2ax+b)+2x^3-4x^2+2x-1$

$2a^2x^3+3abx^2+(2ac+b^2)x+bc$

$=2x^3+(a-4)x^2+(2a+b+2)x+b+c-1$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a^2=2$, $3ab=a-4$, $2ac+b^2=2a+b+2$, $bc=b+c-1$

위의 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-1$, $c=1$

$\therefore f(x)=x^2-x+1$

(3) $f(x)=x^2-x+1$이므로

$f(1)=1-1+1=1$

답 (1) 2 (2) $f(x)=x^2-x+1$ (3) 1

채점 기준	배점
(1) $f(x)$의 차수를 구할 수 있다.	4점
(2) $f(x)$를 구할 수 있다.	6점
(3) $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	2점

Lecture

(2) $2a^2=2$에서 $a=-1$일 때,

$3ab=a-4$, $2ac+b^2=2a+b+2$에서 $b=\frac{5}{3}$, $c=\frac{5}{9}$

이때, $bc=b+c-1$이 성립하지 않으므로 $a\neq -1$

창의·융합 교과서 속 심화문제

0323

|전략| $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$임을 이용한다.

$\alpha=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h^2)-f(2)}{h^2}=f'(2)$

$\beta=\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}=f'(4)$

$\gamma=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$

$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)+f(3)-f(3-h)}{h}$

$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{\{f(3+h)-f(3)\}-\{f(3-h)-f(3)\}}{h}$

$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}\right\}$

$=\frac{1}{2}\times\{f'(3)+f'(3)\}$

$=\frac{1}{2}\times 2f'(3)=f'(3)$

이때, 함수 $f(x)$가 $x_1<x_2$일 때 $f'(x_1)<f'(x_2)$를 만족시키므로

$f'(2)<f'(3)<f'(4)$

$\therefore \alpha<\gamma<\beta$

답 ②

0324

|전략| $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$로 놓고 각각의 참, 거짓을 판별한다.

$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$로 놓으면

$f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$

ㄱ. $f'(a)+f'(b)=(a-b)(a-c)+(b-a)(b-c)$

$=(a-b)^2>0$

$\therefore f'(a)>-f'(b)$ (거짓)

ㄴ. $f'(b)+f'(c)=(b-a)(b-c)+(c-a)(c-b)$

$=(b-c)^2>0$ (참)

ㄷ. $f'(a)=f'(c)$이면 $(a-b)(a-c)=(c-a)(c-b)$

$a\neq c$이므로 $a-b=b-c$, $2b=a+c$ $\quad\therefore b=\frac{a+c}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

0325

| 전략 | 방정식 $f(x)=k$의 세 실근이 α, β, γ임을 이용한다.

방정식 $f(x)-k=0$의 세 실근이 α, β, γ이고 $f(x)$의 삼차항의 계수가 1이므로

$f(x)-k=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\beta)$

$\therefore f'(\beta)=(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)$ 답 ④

0326

| 전략 | 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 기울기는 미분계수 $g'(2)$와 같다.

다항함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(2, g(2))$에서 직선 $y=-x+3$과 접하므로

$g(2)=-2+3=1, g'(2)=-1$

$(x^2-4)f(x)=g(x)-1$에서 $x\neq\pm2$일 때

$f(x)=\dfrac{g(x)-1}{x^2-4}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$이므로

$$f(2)=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{g(x)-g(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=g'(2)\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$$ 답 ③

0327

| 전략 | 함수 $g(x)$가 $x=0, x=1$에서 미분가능하므로 $x=0, x=1$에서 연속임을 이용한다.

함수 $g(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하므로

$f(0)=0,\ f'(0)=0,\ f(1)=2,\ f'(1)=1$

(i) 함수 $f(x)$가 일차함수이면 $f'(0)=0,\ f'(1)=1$을 동시에 만족시킬 수 없다.

(ii) $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)이면
$f(0)=c=0,\ f(1)=a+b+c=2$ $\quad\therefore a+b=2$
또, $f'(x)=2ax+b$이므로 $f'(0)=b=0,\ f'(1)=2a+b=1$
이때, $a+b=2, b=0, 2a+b=1$을 모두 만족시키는 상수 a, b는 존재하지 않는다.

(iii) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)이면
$f(0)=d=0,\ f(1)=a+b+c+d=2$ $\quad\therefore a+b+c=2$
또, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로
$f'(0)=c=0,\ f'(1)=3a+2b+c=1$
따라서 $a+b=2,\ 3a+2b=1$을 모두 만족시키는 상수 $a,\ b$는
$a=-3, b=5$
$\therefore f(x)=-3x^3+5x^2$

따라서 $h(x)=-3x^3+5x^2$이므로

$h\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}+\frac{5}{4}=\frac{7}{8}$ 답 $\frac{7}{8}$

4 | 도함수의 활용 (1)

본책 60~73쪽

STEP 1 개념 마스터

0328

$f(x)=x^3-4x^2-8$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-8x$이므로

점 $(2, -16)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=3\times2^2-8\times2=-4$ 답 -4

0329

$f(x)=3x^4-5x+2$로 놓으면 $f'(x)=12x^3-5$이므로

점 $(0, 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=-5$ 답 -5

0330

$f(x)=x^{100}-1$로 놓으면 $f'(x)=100x^{99}$이므로

점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=100$ 답 100

0331

$f(x)=-x^2+7x-10$으로 놓으면 $f'(x)=-2x+7$이므로

점 $(1, -4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-2+7=5$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-(-4)=5(x-1)$

$\therefore y=5x-9$ 답 $y=5x-9$

0332

$f(x)=x^4-2x+1$로 놓으면 $f'(x)=4x^3-2$이므로

점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=-2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=-2(x-0)$

$\therefore y=-2x+1$ 답 $y=-2x+1$

0333

$f(x)=2x^3-5x-1$로 놓으면 $f'(x)=6x^2-5$이므로

점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=6\times(-1)^2-5=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-2=1\times\{x-(-1)\}$

$\therefore y=x+3$ 답 $y=x+3$

0334

$f(x)=x^3-3x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-3$

점 $(2, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=9$이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{9}$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{9}(x-2)$

$\therefore y=-\frac{1}{9}x+\frac{20}{9}$ 답 $y=-\frac{1}{9}x+\frac{20}{9}$

0335

$f(x)=3x^2-9x-6$으로 놓으면 $f'(x)=6x-9$

접점의 좌표를 $(a, 3a^2-9a-6)$이라 하면 접선의 기울기가 3이므로

$f'(a)=6a-9=3$에서 $a=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2, -12)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-12)=3(x-2)$

$\therefore y=3x-18$ 답 $y=3x-18$

0336

$f(x)=x^3-2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 (a, a^3-2)라 하면 접선의 기울기가 3이므로

$f'(a)=3a^2=3$에서 $a^2=1$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, -3)$, $(1, -1)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-3)=3\{x-(-1)\}$ 또는 $y-(-1)=3(x-1)$

$\therefore y=3x$ 또는 $y=3x-4$ 답 $y=3x$ 또는 $y=3x-4$

0337

$f(x)=x^2+x$로 놓으면 $f'(x)=2x+1$

접점의 좌표를 (a, a^2+a)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2+a)=(2a+1)(x-a)$

$\therefore y=(2a+1)x-a^2$ …… ㉠

이 직선이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$1=(2a+1)-a^2$, $a^2-2a=0$

$a(a-2)=0$ $\quad\therefore a=0$ 또는 $a=2$

따라서 $a=0$, $a=2$를 ㉠에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=x$ 또는 $y=5x-4$ 답 $y=x$ 또는 $y=5x-4$

0338

$f(x)=x^3-2x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 (a, a^3-2a)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^3-2a)=(3a^2-2)(x-a)$

$\therefore y=(3a^2-2)x-2a^3$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=-2a^3$, $a^3=-1$ $\quad\therefore a=-1$

따라서 $a=-1$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=x+2$ 답 $y=x+2$

0339

함수 $f(x)=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$은 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(3)=0$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $f'(x)=2x-4$이므로 $f'(c)=2c-4=0$

$\therefore c=2$ 답 2

0340

함수 $f(x)=x^2-2x$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(2)=0$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $f'(x)=2x-2$이므로 $f'(c)=2c-2=0$

$\therefore c=1$ 답 1

0341

함수 $f(x)=x^2-6x+1$은 닫힌구간 $[1, 5]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 5)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(5)=-4$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(1, 5)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $f'(x)=2x-6$이므로 $f'(c)=2c-6=0$

$\therefore c=3$ 답 3

0342

함수 $f(x)=3x^2+2x+1$은 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{6-2}{2}=2=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $f'(x)=6x+2$이므로 $f'(c)=6c+2=2$

$\therefore c=0$ 답 0

0343

함수 $f(x)=-x^2+x$는 닫힌구간 $[0, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{-12-0}{4}=-3=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(0, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $f'(x)=-2x+1$이므로 $f'(c)=-2c+1=-3$

$\therefore c=2$ 답 2

0344

함수 $f(x)=x^3-2x$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{21-0}{3}=7=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $f'(x)=3x^2-2$이므로 $f'(c)=3c^2-2=7$

$3c^2=9$, $c^2=3$

$\therefore c=\sqrt{3}$ ($\because 0<c<3$) 답 $\sqrt{3}$

0345

$a<x\le b$인 임의의 x에 대하여 닫힌구간 $[a, x]$에서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a, x)에 적어도 하나 존재한다.

그런데 $f'(c)=0$이므로

$f(x)-f(a)=(x-a)f'(c)=(x-a)\times 0=0$

$\therefore f(x)=f(a)$

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 상수함수이다.

답 풀이 참조

0346

$F(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $F(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하다.

또, 열린구간 (a, b)의 모든 x에 대하여 $f'(x)=g'(x)$이므로

$F'(x)=f'(x)-g'(x)=0$

즉, $F(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 상수함수이므로

$F(x)=f(x)-g(x)=C$ (C는 상수)

따라서 $f(x)=g(x)+C$ (C는 상수)이다. 답 풀이 참조

STEP 2 유형 마스터

0347

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같음을 이용한다.

$f(x)=2x^2+ax+b$로 놓으면 $f'(x)=4x+a$이므로

점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=4+a=-1$ $\therefore a=-5$

이때, 점 $(1, 0)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$0=f(1)=-3+b$ $\therefore b=3$

$\therefore b-a=3-(-5)=8$ 답 ②

0348

$f(x)=x^4-4x^3+6x^2+4$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-12x^2+12x$

이므로 점 (a, b)에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=4a^3-12a^2+12a=4$, $4(a-1)^3=0$

$\therefore a=1$

이때, 점 $(1, b)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$b=f(1)=7$ $\therefore b=7$

$\therefore a^2+b^2=1^2+7^2=50$ 답 50

0349

$f(x)=-x^3+6x^2-9x+a$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-2)^2+3$

이므로 $f'(x)$는 $x=2$에서 최댓값 3을 갖는다.

$\therefore k=3$

따라서 기울기가 최대일 때의 접점의 좌표는 $(2, -1)$이므로 $b=2$

이때, 점 $(2, -1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$-1=f(2)=-2+a$ $\therefore a=1$

$\therefore abk=1\times 2\times 3=6$ 답 6

0350

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이다.

$f(x)=x^3-2x^2+2x-3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2-4x+2$

점 $(1, -2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-4+2=1$

이므로 접선의 방정식은

$y-(-2)=1\times(x-1)$ $\therefore y=x-3$

따라서 $a=1$, $b=-3$이므로 $a-b=4$ 답 ⑤

0351

$f(x)=(x^2-1)(2x+1)$로 놓으면

$f'(x)=2x(2x+1)+2(x^2-1)=6x^2+2x-2$

이므로 점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=6+2-2=6$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-0=6\times(x-1)$ $\therefore y=6x-6$ 답 ④

0352

삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)

로 놓으면

$f(-1)=1$에서 $-1+a-b+c=1$ ······ ㉠

$f(0)=1$에서 $c=1$ ······ ㉡

$f(1)=1$에서 $1+a+b+c=1$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-1$, $c=1$

$\therefore f(x)=x^3-x+1$ ··· ❶

4 도함수의 활용 (1)

이때, $f'(x)=3x^2-1$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-1=2$ … ❷

따라서 점 $(1,\ f(1))$, 즉 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=2(x-1)$ $\quad\therefore y=2x-1$ … ❸

답 $y=2x-1$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40%
❷ $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%

다른 풀이 $f(x)-1=g(x)$라 하면

$f(-1)=f(0)=f(1)=1$에서 $g(-1)=g(0)=g(1)=0$이므로

$g(x)=ax(x+1)(x-1)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$\therefore f(x)=ax(x+1)(x-1)+1$

그런데 $f(x)$의 삼차항의 계수가 1이므로 $a=1$

$\therefore f(x)=x(x+1)(x-1)+1=x^3-x+1$

이때, $f'(x)=3x^2-1$이므로 $f'(1)=2$

따라서 점 $(1,1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=2(x-1)$ $\quad\therefore y=2x-1$

0353

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=1$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$

이다. 즉, $f(1)=2$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는 1이므로

점 $(1,2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=1\times(x-1)$ $\quad\therefore y=x+1$

따라서 $m=1,\ n=1$이므로 $mn=1$ 답 ①

0354

$g(x)=(x^2+2x-2)f(x)$라 하면

$g'(x)=(2x+2)f(x)+(x^2+2x-2)f'(x)$

이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는

$g'(1)=4f(1)+f'(1)$

이때, 주어진 그래프에서 $f(1)=1,\ f'(1)=0$이므로

$g(1)=f(1)=1,\ g'(1)=4\times1+0=4$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 방정식은

$y-1=4(x-1)$ $\quad\therefore y=4x-3$ 답 $y=4x-3$

Lecture

미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a$인 점에서의 접선의 기울기와 같다. x축과 평행한 접선의 기울기는 0이므로 주어진 그래프에서 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는 0이다.

마찬가지로 $x=-1$인 점에서의 접선의 기울기도 0이다.

$\therefore f'(1)=0,\ f'(-1)=0$

0355

|전략| 기울기가 a $(a\neq0)$인 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{a}$임을 이용한다.

$f(x)=x^3-2x^2+3x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-4x+3$

점 $(1,3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-3=-\frac{1}{2}(x-1)$ $\quad\therefore x+2y-7=0$ 답 ②

0356

$f(x)=x^3+ax^2+b$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax$

$x=-1$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3-2a$이므로 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3-2a}$이다.

즉, $-\frac{1}{3-2a}=-\frac{1}{4}$에서 $a=-\frac{1}{2}$

또한, 점 $(1,5)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$1+a+b=5,\ 1-\frac{1}{2}+b=5$ $\quad\therefore b=\frac{9}{2}$

$\therefore b-a=\frac{9}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=5$ 답 5

0357

두 곡선 $f(x)=x^2-1,\ g(x)=ax^2$의 교점 P의 x좌표를 t $(t>0)$라 하면 두 곡선이 모두 $x=t$인 점을 지나므로 $f(t)=g(t)$에서

$t^2-1=at^2$ …… ㉠

또, $f'(x)=2x,\ g'(x)=2ax$이고, $x=t$인 점에서의 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(t)g'(t)=-1$에서

$2t\times2at=-1$ $\quad\therefore at^2=-\frac{1}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $t^2-1=-\frac{1}{4}$ $\quad\therefore t^2=\frac{3}{4}$

$t^2=\frac{3}{4}$을 ㉡에 대입하면

$a=-\frac{1}{3}$ 답 ③

0358

|전략| 접선의 방정식을 구한 후 곡선과 만나는 점의 x좌표를 구한다.

$f(x)=x^3+2x^2-3x-6$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2+4x-3$이므로

$f'(0)=-3$

점 $(0,\ -6)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-6)=-3(x-0)$ $\quad\therefore y=-3x-6$

직선 $y=-3x-6$이 곡선 $y=f(x)$와 다시 만나는 점의 x좌표는

$x^3+2x^2-3x-6=-3x-6$에서

$x^2(x+2)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

따라서 다시 만나는 점의 좌표가 $(-2, 0)$이므로

$a=-2$, $b=0$

$\therefore b-a=2$ 답 ④

0359

$f(x)=x^3-5x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-5$이므로

$f'(1)=-2$

점 $P(1, -4)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-4)=-2(x-1) \quad \therefore y=-2x-2$

직선 $y=-2x-2$가 곡선 $y=f(x)$와 다시 만나는 점의 x좌표는

$x^3-5x=-2x-2$에서 $x^3-3x+2=0$

$(x+2)(x-1)^2=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 점 Q의 좌표는 $(-2, 2)$이므로 선분 PQ의 길이는

$\sqrt{(-2-1)^2+\{2-(-4)\}^2}=3\sqrt{5}$ 답 $3\sqrt{5}$

Lecture

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

0360

$f(x)=-x^3+5x-3$으로 놓으면 $f'(x)=-3x^2+5$이므로

$f'(1)=2$

점 $P(1, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=2(x-1) \quad \therefore y=2x-1$

이때, 점 Q의 좌표는 $(0, -1)$이다.

또, 직선 $y=2x-1$이 곡선 $y=f(x)$와 다시 만나는 점의 x좌표는

$-x^3+5x-3=2x-1$에서 $x^3-3x+2=0$

$(x+2)(x-1)^2=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 점 R의 좌표는 $(-2, -5)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(0-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{5}$

$\overline{QR}=\sqrt{(-2-0)^2+\{-5-(-1)\}^2}=2\sqrt{5}$

$\therefore \overline{PQ} : \overline{QR}=\sqrt{5} : 2\sqrt{5}=1 : 2$ 답 ①

0361

|전략| 접선의 방정식을 구한 후 x절편, y절편을 구한다.

$f(x)=x^3-2x^2+4$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-4x$이므로

$f'(1)=-1$

따라서 점 $(1, 3)$에서의 접선의 방정식은

$y-3=(-1)\times(x-1) \quad \therefore y=-x+4$

이때, 이 접선의 x절편, y절편은 각각 4, 4이므로 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$ 답 ④

0362

$f(x)=kx^4$에서 $f'(x)=4kx^3$이므로

$f'(1)=4k$ ··· ❶

따라서 점 $(1, f(1))$, 즉 점 $(1, k)$에서의 접선의 방정식은

$y-k=4k(x-1) \quad \therefore y=4kx-3k$ ··· ❷

이때, 이 접선의 x절편, y절편은 각각 $\frac{3}{4}$, $-3k$이고 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 9이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times 3k=9 \quad \therefore k=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ $f'(1)$을 구할 수 있다.	20%
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	50%

0363

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x+\frac{1}{3}$로 놓으면 $f'(x)=x^2-2$이므로

$f'(2)=2$

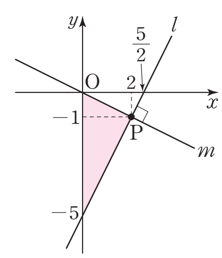
점 $P(2, -1)$에서의 접선의 기울기는 2이므로 직선 l의 방정식은

$y-(-1)=2(x-2) \quad \therefore y=2x-5$

직선 l에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 m의 방정식은

$y-(-1)=-\frac{1}{2}(x-2)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x$



따라서 오른쪽 그림에서 두 직선 l, m 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 5\times 2=5$ 답 ④

0364

$f(x)=x^3$으로 놓고 점 P의 x좌표를 t $(t>0)$라 하면

$f'(x)=3x^2$이므로 $f'(t)=3t^2$

따라서 점 $P(t, t^3)$에서의 접선의 방정식은

$y-t^3=3t^2(x-t) \quad \therefore y=3t^2x-2t^3$

△PQS, △PRS에서 선분 PS를 밑변으로 생각할 때, 두 삼각형의 넓이의 비는 높이의 비와 같다. 즉, 두 삼각형 PQS, PRS의 넓이의 비는 두 선분 QS, OS의 길이의 비와 같다.

이때, 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{2}{3}t, 0\right)$이므로

접선 $y=3t^2x-2t^3$에서 x절편은 $\frac{2}{3}t$이므로 $Q\left(\frac{2}{3}t, 0\right)$

$\triangle PQS : \triangle PRS=\overline{QS} : \overline{OS}=\frac{1}{3}t : t=1 : 3$ 답 ④

점 $S(t, 0)$이므로 $\overline{QS}=\overline{OS}-\overline{OQ}=t-\frac{2}{3}t=\frac{1}{3}t$

4 도함수의 활용 (1)

0365

|전략| 직선 $y=\frac{1}{4}x-1$에 수직인 접선의 기울기는 -4임을 이용하여 접점의 좌표를 구한다.

$x-4y-4=0$에서 $y=\frac{1}{4}x-1$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 -4이다.
$f(x)=x^3-3x^2-x-2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x-1$
접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2-t-2)라 하면 접선의 기울기는 -4이므로
$f'(t)=3t^2-6t-1=-4$
$3t^2-6t+3=0$, $t^2-2t+1=0$
$(t-1)^2=0$ $\quad \therefore t=1$
즉, 접점의 좌표는 $(1, -5)$이므로 구하는 직선의 방정식은
$y-(-5)=-4(x-1)$ $\quad \therefore y=-4x-1$
따라서 $a=-4$, $b=-1$이므로 $a-b=-3$ 답 -3

0366

$f(x)=x^2-3x+5$로 놓으면 $f'(x)=2x-3$
접점의 좌표를 (t, t^2-3t+5)라 하면 직선 $y=x+2$에 평행한 직선의 기울기는 1이므로
$f'(t)=2t-3=1$ $\quad \therefore t=2$
즉, 접점의 좌표는 $(2, 3)$이므로 구하는 직선의 방정식은
$y-3=1\times(x-2)$ $\quad \therefore y=x+1$
따라서 보기 중 직선 $y=x+1$ 위의 점의 좌표는 $(0, 1)$이다. 답 ②

0367

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{2}{3}$로 놓으면 $f'(x)=-x^2-2x$
접점의 좌표를 $\left(t, -\frac{1}{3}t^3-t^2+\frac{2}{3}\right)$라 하면 접선의 기울기는 $\tan 45°=1$이므로
$f'(t)=-t^2-2t=1$
$t^2+2t+1=0$, $(t+1)^2=0$ $\quad \therefore t=-1$
즉, 접점의 좌표는 $(-1, 0)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-0=1\times\{x-(-1)\}$ $\quad \therefore y=x+1$
따라서 $a=1$, $b=1$이므로 $a+b=2$ 답 ①

0368

$f(x)=x^3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$이므로
$f'(1)=3$
즉, 직선 l의 기울기가 3이므로 직선 l에 평행한 직선 m의 기울기는 3이다.
이때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 m의 접점의 좌표를 (t, t^3)이라 하면
$f'(t)=3t^2$에서 $3t^2=3$, $t^2=1$, $(t+1)(t-1)=0$
$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$
그런데 $t=1$이면 두 직선 l, m은 일치하므로
$t=-1$
따라서 접점의 좌표는 $(-1, -1)$이므로 구하는 직선 m의 방정식은
$y-(-1)=3\{x-(-1)\}$
$\therefore y=3x+2$ 답 $y=3x+2$

0369

|전략| 평행한 두 직선 사이의 거리는 한 직선 위의 점과 다른 직선 사이의 거리와 같음을 이용한다.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+x+3$으로 놓으면 $f'(x)=x^2-4x+1$
접점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{3}t^3-2t^2+t+3\right)$이라 하면 접선의 기울기가 -2이므로
$f'(t)=t^2-4t+1=-2$
$t^2-4t+3=0$, $(t-1)(t-3)=0$
$\therefore t=1$ 또는 $t=3$
즉, 접점의 좌표는 $\left(1, \frac{7}{3}\right)$ 또는 $(3, -3)$이므로 접선의 방정식은
$y-\frac{7}{3}=-2(x-1)$에서 $6x+3y-13=0$
$y-(-3)=-2(x-3)$에서 $2x+y-3=0$
따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x+y-3=0$ 위의 한 점 $(0, 3)$과 직선 $6x+3y-13=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는
$\frac{|0+9-13|}{\sqrt{6^2+3^2}}=\frac{4}{3\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$ 답 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$

0370

$f(x)=x^2$으로 놓으면 $f'(x)=2x$
곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=4x-10$과 평행한 접선의 접점의 좌표를 (t, t^2)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 4이므로
$f'(t)=2t=4$ $\quad \therefore t=2$
따라서 접점의 좌표는 $(2, 4)$이고, 점 $(2, 4)$와 직선 $y=4x-10$, 즉 $4x-y-10=0$ 사이의 거리가 구하는 최솟값이므로
$\frac{|8-4-10|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{17}}=\frac{6\sqrt{17}}{17}$ 답 $\frac{6\sqrt{17}}{17}$

0371

|전략| $f(x)=x^3+ax-1$로 놓고 $f(1)=b$, $f'(1)=5$임을 이용한다.

점 $(1, b)$가 곡선 $y=x^3+ax-1$ 위의 점이므로
$b=1+a-1$ $\quad \therefore a=b$ …… ㉠
또, 점 $(1, b)$가 직선 $y=5x+c$ 위의 점이므로
$b=5+c$ …… ㉡
$f(x)=x^3+ax-1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+a$이고 점 $(1, b)$에서의 접선의 기울기가 5이므로
$f'(1)=3+a=5$ $\quad \therefore a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=2$
$b=2$를 ㉡에 대입하면 $c=-3$
$\therefore a+b+c=2+2+(-3)=1$ 답 ③

0372

점 $(1,\ f(1))$이 $f(x)=x^3+ax^2+9x+3$의 그래프 위의 점이므로

$f(1)=1+a+9+3 \qquad \therefore f(1)=a+13 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또, 점 $(1,\ f(1))$이 직선 $y=2x+b$ 위의 점이므로

$f(1)=2+b \qquad \cdots\cdots ㉡$

$f'(x)=3x^2+2ax+9$이고 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f'(1)=3+2a+9=2 \qquad \therefore a=-5$

$a=-5$를 ㉠에 대입하면 $f(1)=8$

$f(1)=8$을 ㉡에 대입하면 $b=6$

$\therefore a+b=-5+6=1$ 답 1

0373

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$로 놓으면 점 $(0,1)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$d=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또, 점 $(3,4)$도 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$27a+9b+3c+d=4 \qquad \cdots\cdots ㉡$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이고 점 $(0,1)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(0)=c=1 \qquad \cdots\cdots ㉢$

또, 점 $(3,4)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(3)=27a+6b+c=-2 \qquad \cdots\cdots ㉣$

㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{3},\ b=1,\ c=1,\ d=1$

$\therefore 3abcd=-1$ 답 ②

0374

$f(x)=x^3-3x^2+4x+k$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x+4$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2+4t+k)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-6t+4$

이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2+4t+k)=(3t^2-6t+4)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-6t+4)x-2t^3+3t^2+k$

이 직선이 직선 $y=x+5$와 일치해야 하므로

$3t^2-6t+4=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$-2t^3+3t^2+k=5 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠에서 $3t^2-6t+3=0,\ 3(t-1)^2=0 \qquad \therefore t=1$

$t=1$을 ㉡에 대입하면

$-2+3+k=5 \qquad \therefore k=4$ 답 ①

0375

$f(x)=x^2$으로 놓으면 $f'(x)=2x$

점 $(-2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=-4$이므로 접선의 방정식은

$y-4=-4\{x-(-2)\} \qquad \therefore y=-4x-4$

$g(x)=x^3+ax-2$로 놓으면 $g'(x)=3x^2+a$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+at-2)$라 하면 접선의 기울기는

$g'(t)=3t^2+a$

이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+at-2)=(3t^2+a)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+a)x-2t^3-2$

이 직선이 직선 $y=-4x-4$와 일치해야 하므로

$3t^2+a=-4 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$-2t^3-2=-4 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉡에서 $-2t^3=-2,\ t^3=1 \qquad \therefore t=1$

$t=1$을 ㉠에 대입하면

$3+a=-4 \qquad \therefore a=-7$ 답 -7

0376

직선 $y=x+3$을 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y=x-k+3$

곡선 $y=x^3+x^2-2$와 직선 $y=x-k+3$의 접점의 x좌표가 t이므로 $x=t$일 때, 접선의 기울기는 1이다.

$f(x)=x^3+x^2-2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+2x$이므로

$f'(t)=3t^2+2t=1$

$3t^2+2t-1=0,\ (t+1)(3t-1)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=\frac{1}{3}$

그런데 t는 정수이므로 $t=-1$

따라서 접점의 좌표가 $(-1,\ -2)$이므로 $x=-1,\ y=-2$를 $y=x-k+3$에 대입하면

$-2=-1-k+3 \qquad \therefore k=4$

$\therefore k+t=4+(-1)=3$ 답 3

0377

$f(x)=x^3-kx^2+kx-1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2kx+k$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-kt^2+kt-1)$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-2kt+k$

이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-kt^2+kt-1)=(3t^2-2kt+k)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-2kt+k)x-2t^3+kt^2-1$

이 직선이 직선 $y=x-1$과 일치해야 하므로

$3t^2-2kt+k=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$-2t^3+kt^2-1=-1 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉡에서 $2t^3-kt^2=0,\ t^2(2t-k)=0 \qquad \therefore t=0$ 또는 $t=\frac{k}{2}$

(i) $t=0$을 ㉠에 대입하면 $k=1$

(ii) $t=\frac{k}{2}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{4}k^2-k^2+k=1,\ k^2-4k+4=0$

$(k-2)^2=0 \qquad \therefore k=2$

(i), (ii)에서 모든 상수 k의 값의 합은 $1+2=3$ 답 3

4 도함수의 활용 (1)

0378

|전략| 접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+t+1)로 놓고 접선의 방정식을 구한다.

$f(x)=x^3-3x^2+x+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x+1$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+t+1)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-6t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2+t+1)=(3t^2-6t+1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-6t+1)x-2t^3+3t^2+1$ …… ㉠

이 직선이 점 $(1, 2)$를 지나므로

$2=3t^2-6t+1-2t^3+3t^2+1$

$t^3-3t^2+3t=0$, $t(t^2-3t+3)=0$

$\therefore t=0$ $(\because t^2-3t+3>0)$

$t=0$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은 $y=x+1$ 답 ①

0379

$f(x)=x^2-x$로 놓으면 $f'(x)=2x-1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-t)=(2t-1)(x-t)$

$\therefore y=(2t-1)x-t^2$

이 직선이 점 $(1, -1)$을 지나므로

$-1=2t-1-t^2$, $t^2-2t=0$, $t(t-2)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=2$

따라서 두 접선의 기울기의 합은

$f'(0)+f'(2)=-1+3=2$ 답 2

다른 풀이 점 $(1, -1)$을 지나는 직선의 방정식을

$y-(-1)=m(x-1)$, 즉 $y=mx-m-1$

이라 하면 이 직선이 곡선 $y=x^2-x$에 접하므로 두 식을 연립하면

$x^2-x=mx-m-1$ $\quad\therefore x^2-(1+m)x+m+1=0$

위 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(1+m)^2-4(m+1)=0$, $m^2-2m-3=0$

그런데 위의 식은 접선의 기울기 m에 대한 이차방정식이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 접선의 기울기의 합은 2이다.

0380

$f(x)=x^3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 (t, t^3)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-t^3=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=-2t^3$, $t^3=-1$ $\quad\therefore t=-1$

$t=-1$을 ㉠에 대입하면 $y=3x+2$

이때, 이 직선이 점 $(-2, k)$를 지나므로 $k=-4$ 답 ④

0381

$f(x)=x^3+2x+2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+2$

접점의 좌표를 $\mathrm{P}(t, t^3+2t+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+2t+2)=(3t^2+2)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2)x-2t^3+2$ … ❶

이 직선이 원점을 지나므로

$0=-2t^3+2$, $t^3=1$ $\quad\therefore t=1$ … ❷

따라서 점 P의 좌표는 $(1, 5)$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$ … ❸

답 $\sqrt{26}$

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 점 P의 x좌표를 이용하여 나타낼 수 있다.	50%
❷ 점 P의 x좌표를 구할 수 있다.	20%
❸ $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이를 구할 수 있다.	30%

0382

$f(x)=x^3-3x^2+2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+2)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-6t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2+2)=(3t^2-6t)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2+2$

이 직선이 점 $(3, 0)$을 지나므로

$0=-2t^3+12t^2-18t+2$

$\therefore t^3-6t^2+9t-1=0$

따라서 세 접점의 x좌표의 합은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 6이다. 답 ⑤

0383

|전략| 접선의 방정식을 이용하여 두 점 Q, R의 좌표를 구하고, 이를 이용하여 $\triangle$PRQ의 넓이를 구한다.

$f(x)=x^2-1$로 놓으면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-1)=2t(x-t)$

$\therefore y=2tx-t^2-1$

이 접선이 점 $\mathrm{P}(1, -4)$를 지나므로

$-4=2t-t^2-1$, $t^2-2t-3=0$, $(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

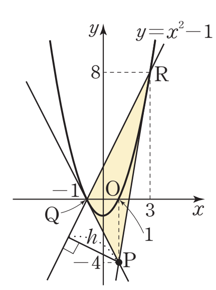
$\therefore \mathrm{Q}(-1, 0)$, $\mathrm{R}(3, 8)$

직선 QR의 방정식은

$y-0=\dfrac{8-0}{3-(-1)}\{x-(-1)\}$

$\therefore 2x-y+2=0$

점 $\mathrm{P}(1, -4)$와 직선 QR 사이의 거리를 h라 하면



$h=\dfrac{|2+4+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

이때, $\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(8-0)^2}=4\sqrt{5}$이므로

$\triangle\mathrm{PRQ}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QR}}\times h$

$=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times\dfrac{8\sqrt{5}}{5}=16$ 답 ③

0384

$f(x)=x^2+k$로 놓으면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 (t, t^2+k)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+k)=2t(x-t)$

$\therefore y=2tx-t^2+k$

이 접선이 점 $\mathrm{A}(-1, -2)$를 지나므로

$-2=-2t-t^2+k$

$\therefore t^2+2t-k-2=0$ …… ㉠

㉠의 서로 다른 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=-k-2$

이때, α, β는 두 접점 B, C의 x좌표이므로 $\mathrm{B}(\alpha, \alpha^2+k)$, $\mathrm{C}(\beta, \beta^2+k)$라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{\alpha+\beta-1}{3}, \dfrac{\alpha^2+k+\beta^2+k-2}{3}\right)$

이 점이 점 $(-1, 6)$과 같으므로 $\dfrac{\alpha^2+k+\beta^2+k-2}{3}=6$에서

$\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2k-2}{3}=6$

$\dfrac{(-2)^2-2(-k-2)+2k-2}{3}=6$

$\dfrac{4k+6}{3}=6, 4k=12$

$\therefore k=3$ 답 3

0385

| 전략 | 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$가 $x=t$에서 공통인 접선을 가지면 $f(t)=g(t), f'(t)=g'(t)$임을 이용한다.

$f(x)=x^3+ax, g(x)=bx^2+c$에서

$f'(x)=3x^2+a, g'(x)=2bx$

두 함수 $y=f(x), y=g(x)$의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$f(1)=2$에서 $1+a=2$ …… ㉠

$g(1)=2$에서 $b+c=2$ …… ㉡

점 $(1, 2)$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(1)=g'(1)$에서 $3+a=2b$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1, b=2, c=0$

$\therefore abc=0$ 답 ①

0386

$f(x)=x^3+ax+2, g(x)=x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a, g'(x)=2x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $t^3+at+2=t^2+1$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $3t^2+a=2t$ …… ㉡

㉡에서 $a=2t-3t^2$이므로 이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$2t^3-t^2-1=0, (t-1)(2t^2+t+1)=0$

$\therefore t=1$ $(\because 2t^2+t+1>0)$

$t=1$을 ㉡에 대입하면 $a=-1$ 답 -1

0387

두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$의 교점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $-t^2+2=at^2+3t$ …… ㉠

$f'(x)=-2x, g'(x)=2ax+3$이므로 $x=t$인 점에서의 접선의 기울기는 각각

$m_1=f'(t)=-2t, m_2=g'(t)=2at+3$

이때, $m_1-m_2=1$이므로

$-2t-2at-3=1$ $\quad\therefore at=-t-2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

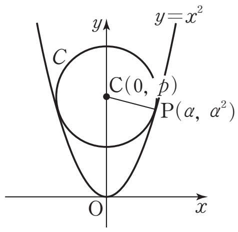
$-t^2+2=t(-t-2)+3t$ $\quad\therefore t=2$

$t=2$를 ㉡에 대입하면

$2a=-4$ $\quad\therefore a=-2$ 답 -2

0388

| 전략 | 원과 곡선의 접점을 P, 원의 중심을 C라 하면 직선 CP와 접선은 서로 수직임을 이용한다.



$f(x)=x^2$으로 놓으면 $f'(x)=2x$

오른쪽 그림과 같이 접점을 $\mathrm{P}(\alpha, \alpha^2)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는

$f'(\alpha)=2\alpha$

이때, 원의 중심 C와 점 P를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{\alpha^2-p}{\alpha-0}=\dfrac{\alpha^2-p}{\alpha}$

이고, 직선 CP와 접선은 서로 수직이므로

$2\alpha\times\dfrac{\alpha^2-p}{\alpha}=-1, 2(\alpha^2-p)=-1$

$\therefore \alpha^2=p-\dfrac{1}{2}$ …… ㉠

또, 원 C의 반지름의 길이가 2이므로

$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(\alpha-0)^2+(\alpha^2-p)^2}=2$

$\therefore \alpha^2+(\alpha^2-p)^2=4$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\left(p-\dfrac{1}{2}\right)+\left(p-\dfrac{1}{2}-p\right)^2=4$ $\quad\therefore p=\dfrac{17}{4}$ 답 ④

0389

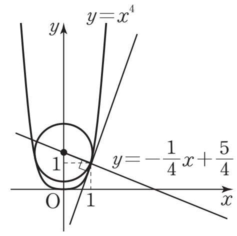
$f(x)=x^4$으로 놓으면 $f'(x)=4x^3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=4$이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{4}$이다.

따라서 점 $(1, 1)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{4}$인 직선의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{4}(x-1) \qquad \therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$ ······ ㉠

중심이 y축 위에 있는 원의 방정식을 $x^2+(y-a)^2=r^2\ (r>0)$이라 하면 직선 ㉠이 원의 중심 $(0, a)$를 지나야 하므로



$a=\frac{5}{4}$

이때, 반지름의 길이 r는 두 점 $(1, 1)$, $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ 사이의 거리와 같으므로

$r=\sqrt{(1-0)^2+\left(1-\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{4}$

따라서 $8r=2\sqrt{17}$이고, $8<2\sqrt{17}=\sqrt{68}<9$이므로 정수 부분은 8이다.

답 ②

0390

|전략| $f(-2)=f(-1)$임을 확인한 후 $f'(c)=0$인 c의 값을 구한다.

함수 $f(x)=(x+1)^2(x+2)$는 닫힌구간 $[-2, -1]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, -1)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(-1)=0$이다.
따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2, -1)$에 적어도 하나 존재한다. 이때,

$$\begin{aligned} f'(x)&=2(x+1)(x+2)+(x+1)^2 \\ &=(x+1)(3x+5) \end{aligned}$$

이므로

$f'(c)=(c+1)(3c+5)=0$

$\therefore c=-\frac{5}{3}\ (\because -2<c<-1)$

답 $-\frac{5}{3}$

0391

ㄱ. 함수 $f(x)=x^2-x$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(2)=2$이므로 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
즉, 롤의 정리가 성립한다.

ㄴ. 함수 $f(x)=|x|$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 $f(-1)=f(1)=1$이지만 $x=0$에서 미분가능하지 않으므로 롤의 정리가 성립하지 않는다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(2)=3$이므로 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
즉, 롤의 정리가 성립한다.

따라서 롤의 정리가 성립하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ⑤

0392

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-1$은 닫힌구간 $[-a, a]$에서 연속이고, 열린구간 $(-a, a)$에서 미분가능하다.
이때, 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-a)=f(a)$이어야 하므로

$-\frac{1}{3}a^3+a^2+3a-1=\frac{1}{3}a^3+a^2-3a-1$, $a^3-9a=0$

$a(a+3)(a-3)=0 \qquad \therefore a=3\ (\because a>0)$

$f'(x)=x^2+2x-3$에서 $f'(c)=0$이므로

$c^2+2c-3=0$, $(c+3)(c-1)=0$

$\therefore c=1\ (\because -3<c<3)$

$\therefore a+c=3+1=4$

답 4

0393

|전략| $g(x)$를 구한 후 $\frac{g(3)-g(0)}{3-0}=g'(c)$를 만족시키는 c의 값을 구한다.

함수 $g(x)=f'(x)=x^2-2x+3$은 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{g(3)-g(0)}{3-0}=\frac{6-3}{3}=1=g'(c)$

인 c가 열린구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

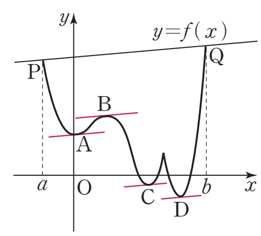
$g'(x)=2x-2$이므로 $g'(c)=2c-2=1$

$2c=3 \qquad \therefore c=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

0394

닫힌구간 $[a, b]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 P, Q를 잇는 직선의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점의 x좌표이다.
함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 점 P, Q를 잇는 직선과 평행한 접선을 네 점 A, B, C, D에서 각각 그을 수 있다.



따라서 상수 c의 개수는 4이다.

답 ⑤

0395

함수 $f(x)=x^2-3x-4$에 대하여 닫힌구간 $[-1, a]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값이 $\frac{1}{2}$이므로 $\frac{f(a)-f(-1)}{a-(-1)}=f'\left(\frac{1}{2}\right)$

인 상수 $\frac{1}{2}$이 열린구간 $(-1, a)$에 존재한다. ··· ❶

$f'(x)=2x-3$이므로 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-2$

따라서 $\frac{a^2-3a-4}{a+1}=-2$이므로 ··· ❷

$a^2-3a-4=-2a-2$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0 \qquad \therefore a=2\ (\because a>-1)$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $\frac{f(a)-f(-1)}{a-(-1)}=f'\left(\frac{1}{2}\right)$인 상수 $\frac{1}{2}$이 열린구간 $(-1, a)$에 존재함을 보일 수 있다.	40%
❷ a에 대한 식을 세울 수 있다.	30%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%

0396

함수 $g(x)=\frac{f(x)}{x+2}$는 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{g(3)-g(-1)}{3-(-1)}=g'(c)$인 c가 열린구간 $(-1,3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $f(-1)=3,\ f(3)=5$이므로

$$\frac{g(3)-g(-1)}{3-(-1)}=\frac{\frac{f(3)}{5}-\frac{f(-1)}{1}}{4}$$
$$=\frac{\frac{5}{5}-\frac{3}{1}}{4}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore g'(c)=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

0397

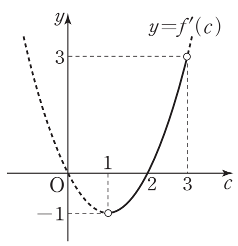
함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+4$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

이때, $1\le a<c<b\le 3$이므로 $1<c<3$

$f'(x)=x^2-2x$이므로

$f'(c)=c^2-2c=(c-1)^2-1$

따라서 $y=f'(c)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, $1<c<3$이므로

$-1<f'(c)<3$

$\therefore\ -1<k<3$ 답 $-1<k<3$

0398

|전략| $\lim_{x\to\infty}\{f(x+1)-f(x)\}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}$임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 $f(x)$는 닫힌구간 $[x, x+1]$에서 연속이고 열린구간 $(x, x+1)$에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(x, x+1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $x\longrightarrow\infty$이면 $c\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x+1)-f(x)\}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}$$
$$=\lim_{c\to\infty}f'(c)=2$$

답 2

0399

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 $f(x)$는 닫힌구간 $[x-1,\ x+1]$에서 연속이고 열린구간 $(x-1,\ x+1)$에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(x+1)-f(x-1)}{(x+1)-(x-1)}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(x-1, x+1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $x\longrightarrow\infty$이면 $c\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x+1)-f(x-1)\}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x-1)}{(x+1)-(x-1)}\times 2$$
$$=2\lim_{c\to\infty}f'(c)=2\times 4=8$$

답 8

0400

$f(x)=x^2$에서 $f'(x)=2x$

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h)$에서

$\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=2(a+\theta h)$

$\frac{2ah+h^2}{h}=2a+2\theta h$

$2a+h=2a+2\theta h$

$\therefore \theta=\frac{1}{2}\ (\because h>0)$ 답 $\frac{1}{2}$

0401

$f(x)=x^3+1$에서 $f'(x)=3x^2$

$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h)$에서

$(x+h)^3+1-(x^3+1)=3h(x+\theta h)^2$

$3hx^2+3h^2x+h^3=3h(x+\theta h)^2$

$x^2+hx+\frac{h^2}{3}=(x+\theta h)^2$

$\therefore \theta=\frac{1}{h}\left(\sqrt{x^2+hx+\frac{h^2}{3}}-x\right)\ (\because \theta>0)$

$$\therefore \lim_{h\to0}\theta=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\sqrt{x^2+xh+\frac{h^2}{3}}-x\right)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{xh+\frac{h^2}{3}}{h\left(\sqrt{x^2+xh+\frac{h^2}{3}}+x\right)}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{x+\frac{h}{3}}{\sqrt{x^2+xh+\frac{h^2}{3}}+x}$$
$$=\frac{x}{x+x}=\frac{1}{2}$$

답 ④

STEP 3 내신 마스터

0402

유형 02 접점의 좌표가 주어진 접선의 방정식

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$임을 이용한다.

$f(x)=x^3+2x^2-1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+4x$

$\therefore\ f'(1)=7$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 7이므로 접선의 방정식은

$y-2=7(x-1)$ $\quad\therefore y=7x-5$

이 접선이 점 $(-1, a)$를 지나므로

$a=-7-5=-12$ 답 ①

0403

유형 04 곡선과 접선의 교점

|전략| 곡선 $y=f(x)$와 그 접선 $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같다.

함수 $f(x)=ax^3+bx$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 방정식을 $y=mx+n$ (m, n은 상수)이라 하면 두 점 P, Q의 x좌표는 방정식 $ax^3+bx=mx+n$의 실근이다.

즉, $ax^3+(b-m)x-n=0$의 세 실근은 α, α, β이다.

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\alpha+\beta=0$, $\beta=-2\alpha$

$\therefore \left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=\left|\dfrac{-2\alpha}{\alpha}\right|=2$ 답 ③

0404

유형 06 기울기가 주어진 접선의 방정식

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=t$인 점에서의 기울기는 $f'(t)$이다.

$f(x)=x^3-3x^2-2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 $(t, f(t))$라 하면 $x=t$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기가 $\dfrac{1}{3}$이므로 접선의 기울기는 -3이다.

즉, $3t^2-6t=-3$이므로 $3t^2-6t+3=0$

$3(t-1)^2=0$ $\quad\therefore t=1$

$t=1$일 때 $f(1)=-4$이므로 접선의 방정식은

$y-(-4)=-3(x-1)$ $\quad\therefore y=-3x-1$

따라서 $m=-3$, $n=-1$이므로 $mn=3$ 답 ⑤

0405

유형 06 기울기가 주어진 접선의 방정식

|전략| 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기 $f'(x)$의 최댓값과 그때의 x의 값을 구한다.

$f(x)=-x^3+6x^2+4x-1$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+12x+4=-3(x-2)^2+16$

이때, $f'(x)$는 $x=2$일 때 최대이고, 최댓값은 16이다.

한편, 기울기가 최대일 때의 접점의 좌표는 $(2, 23)$이므로 접선의 방정식은

$y-23=16(x-2)$, 즉 $y=16x-9$

이 접선이 점 $(1, a)$를 지나므로 $a=16-9=7$ 답 ③

0406

유형 08 접선을 이용한 미정계수의 결정

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=-2x+b$이므로 $f'(1)=-2$임을 이용한다.

점 $(1, f(1))$이 $f(x)=x^3+ax+6$의 그래프 위의 점이므로

$f(1)=1+a+6$ $\quad\therefore f(1)=a+7$ ...... ㉠

또, 점 $(1, f(1))$이 직선 $y=-2x+b$ 위의 점이므로

$f(1)=-2+b$ ...... ㉡

$f'(x)=3x^2+a$이고 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(1)=3+a=-2$ $\quad\therefore a=-5$

$a=-5$를 ㉠에 대입하면 $f(1)=2$

$f(1)=2$를 ㉡에 대입하면 $b=4$

$\therefore ab=(-5)\times4=-20$ 답 ⑤

0407

유형 09 곡선 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식

|전략| 점 $(2, -12)$는 곡선 위의 점이 아니므로 접점의 좌표를 $(t, 2t^2-t)$로 놓고 접선의 방정식을 구한다.

$f(x)=2x^2-x$로 놓으면 $f'(x)=4x-1$

접점의 좌표를 $(t, 2t^2-t)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=4t-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(2t^2-t)=(4t-1)(x-t)$

$\therefore y=(4t-1)x-2t^2$

이 접선이 점 $(2, -12)$를 지나므로

$-12=2(4t-1)-2t^2$, $t^2-4t-5=0$

$(t+1)(t-5)=0$ $\quad\therefore t=-1$ 또는 $t=5$

따라서 접선의 기울기는 $4\times(-1)-1=-5$, $4\times5-1=19$이므로 그 합은 $-5+19=14$ 답 ②

0408

유형 09 곡선 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식

|전략| 점 $(0, 1)$은 곡선 위의 점이 아니므로 접점의 좌표를 (t, t^3+3)으로 놓고 접선의 방정식을 구한다.

$f(x)=x^3+3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 (t, t^3+3)이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+3)=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3+3$ ...... ㉠

이 접선이 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=-2t^3+3$, $t^3=1$ $\quad\therefore t=1$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $y=3x+1$

이 접선의 방정식이 $y=ax+b$이므로

$a=3$, $b=1$

$\therefore a+b=4$ 답 ④

0409

유형 09 곡선 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식

|전략| 점 $(0, -1)$이 곡선 위의 점이 아니므로 접점의 좌표를 (t, t^3-2t+1)로 놓고 접선의 방정식을 구한다.

$f(x)=x^3-2x+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 (t, t^3-2t+1)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-2t+1)=(3t^2-2)(x-t)$

이 접선이 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1-(t^3-2t+1)=(3t^2-2)(-t)$

$t^3=1 \qquad \therefore t=1$

$t=1$일 때 접점의 좌표는 $(1, 0)$, 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

따라서 기울기가 -1이고 점 $(1, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-0=-(x-1) \qquad \therefore y=-x+1$ 답 ⑤

0410

유형 11 두 곡선의 공통인 접선

|전략| 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=a$에서 서로 접하면 $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$임을 이용한다.

$f(x)=x^3+ax+b$, $g(x)=-x^2+bx$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=-2x+b$

$x=1$에서 두 곡선이 만나므로

$f(1)=g(1)$에서 $1+a+b=-1+b$

$\therefore a=-2$

$x=1$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(1)=g'(1)$에서 $3+a=-2+b$

$\therefore b=3$

$\therefore a+b=-2+3=1$ 답 ④

0411

유형 14 평균값 정리

|전략| 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 이은 직선과 기울기가 같은 직선을 찾는다.

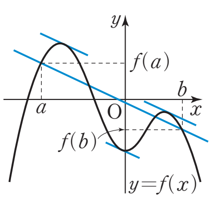
사차함수 $y=f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

이때, 구하는 상수 c의 개수는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선과 기울기가 같은 접선이 열린구간 (a, b)에서 곡선 $y=f(x)$와 접하는 접점의 개수와 같다.

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 상수 c의 개수는 3이다.



답 ③

Lecture

롤의 정리는 곡선 $y=f(x)$에서 $f(a)=f(b)$이면 열린구간 (a, b)에 x축과 평행한 접선이 적어도 하나 존재함을 의미하고, 평균값 정리는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 잇는 직선과 평행한 접선이 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재함을 의미한다.

0412

유형 15 평균값 정리의 활용

|전략| 함수 $f(x)$에 대하여 닫힌구간 $[x-1, x+2]$에서 평균값 정리를 이용한다.

임의의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[x-1, x+2]$에서 연속이고 열린구간 $(x-1, x+2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x+2)-f(x-1)}{(x+2)-(x-1)}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(x-1, x+2)$에 적어도 하나 존재한다. 즉,

$f(x+2)-f(x-1)=3f'(c)$

이때, $x \longrightarrow \infty$이면 $c \longrightarrow \infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x+2)-f(x-1)\}=\lim_{c\to\infty}3f'(c)$$
$$=3\times6=18$$

답 ①

0413

유형 15 평균값 정리의 활용

|전략| $\theta\,(0<\theta<1)$가 $f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$를 만족시킨다고 하면 평균값 정리를 의미한다.

$f(x)=x^3$에서 $f'(x)=3x^2$

$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$이므로

$(a+h)^3-a^3=3h(a+\theta h)^2$

$3a^2h+3ah^2+h^3=3h(a+\theta h)^2$

양변을 $3h$로 나누면 $a^2+ah+\dfrac{h^2}{3}=(a+\theta h)^2$

$$\therefore \theta=\frac{1}{h}\left(\sqrt{a^2+ah+\frac{h^2}{3}}-a\right)\ (\because \theta>0)$$

$$\therefore \lim_{h\to0}\theta=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\sqrt{a^2+ah+\frac{h^2}{3}}-a\right)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{ah+\dfrac{h^2}{3}}{h\left(\sqrt{a^2+ah+\dfrac{h^2}{3}}+a\right)}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{a+\dfrac{h}{3}}{\sqrt{a^2+ah+\dfrac{h^2}{3}}+a}$$
$$=\frac{a}{a+a}=\frac{1}{2}$$

답 ②

0414

유형 01 접선의 기울기

|전략| 두 접점의 좌표를 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$로 놓고 근과 계수의 관계를 이용한다.

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2$으로 놓으면 $f'(x)=x^2-2ax$

접선의 기울기가 2이므로 $x^2-2ax=2$

이때, 두 접선의 접점의 x좌표가 각각 α, β이므로 α, β는 방정식 $x^2-2ax-2=0$의 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=-2$ ··· ❶

이때, $\alpha^2+\beta^2=40$이므로 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$에서

$40=4a^2+4$, $a^2=9$ $\therefore a=-3$ 또는 $a=3$

그런데 $a>0$이므로 $a=3$ ··· ❷

답 3

채점 기준	배점
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	3점
❷ a의 값을 구할 수 있다.	3점

0415

유형 02 접점의 좌표가 주어진 접선의 방정식

| 전략 | 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구한 후 접선의 x절편을 구한다.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3$으로 놓으면 $f'(x)=x^2$이므로 점 $\left(1, \frac{1}{3}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{3}=1\times(x-1)$, $y=x-\frac{2}{3}$

$\therefore a_1=\frac{2}{3}$ ··· ❶

점 $\left(a_1, \frac{1}{3}a_1^3\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{3}a_1^3=a_1^2(x-a_1)$, $y=a_1^2x-\frac{2}{3}a_1^3$

$y=0$일 때, $x=\frac{2}{3}a_1$이므로

$a_2=\frac{2}{3}a_1=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$ ··· ❷

$\therefore a_1a_2=\frac{2}{3}\times\frac{4}{9}=\frac{8}{27}$ ··· ❸

답 $\frac{8}{27}$

채점 기준	배점
❶ a_1의 값을 구할 수 있다.	3점
❷ a_2의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ a_1a_2의 값을 구할 수 있다.	1점

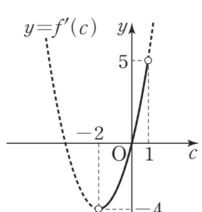
0416

유형 14 평균값 정리

| 전략 | 함수 $f(x)$가 평균값 정리를 만족시킴을 확인한 후, $-2<c<1$에서 $f'(c)$의 값의 범위를 구한다.

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+5$는 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+5$에서



$f'(x)=x^2+4x$

$\therefore f'(c)=c^2+4c=(c+2)^2-4$ ··· ❶

이때, $-2<c<1$이므로

$-4<f'(c)<5$

따라서 실수 k의 값의 범위는

$-4<k<5$ ··· ❷

이므로 $\alpha=-4$, $\beta=5$

$\therefore \alpha+2\beta=-4+10=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	배점
❶ 열린구간 (a, b)에 속하는 c에 대하여 $f'(c)$를 구할 수 있다.	3점
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점
❸ $\alpha+2\beta$의 값을 구할 수 있다.	2점

0417

유형 03 접선과 수직인 직선의 방정식

| 전략 | 직선과 y축의 교점의 y좌표는 $x=0$을 대입하여 구한다.

(1) $f(x)=x^2-1$로 놓으면 $f'(x)=2x$

점 $\mathrm{P}(t, t^2-1)$에서의 접선의 기울기가 $2t$이므로 접선의 방정식은 $y-(t^2-1)=2t(x-t)$

$\therefore y=2tx-t^2-1$ ······ ㉠

이때, 점 Q의 y좌표는 직선 ㉠의 y절편이므로 점 Q의 좌표는 $(0, -t^2-1)$

(2) 점 P를 지나고 점 P에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$y-(t^2-1)=-\frac{1}{2t}(x-t)$

$\therefore y=-\frac{1}{2t}x+t^2-\frac{1}{2}$ ······ ㉡

이때, 점 R의 y좌표는 직선 ㉡의 y절편이므로 점 R의 좌표는 $\left(0, t^2-\frac{1}{2}\right)$

(3) $\overline{\mathrm{QR}}=\left|\left(t^2-\frac{1}{2}\right)-(-t^2-1)\right|=2t^2+\frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{t\to1}\overline{\mathrm{QR}}=\lim_{t\to1}\left(2t^2+\frac{1}{2}\right)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

답 (1) $(0, -t^2-1)$ (2) $\left(0, t^2-\frac{1}{2}\right)$ (3) $\frac{5}{2}$

채점 기준	배점
(1) 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	4점
(2) 점 R의 좌표를 구할 수 있다.	4점
(3) $\lim_{t\to1}\overline{\mathrm{QR}}$의 값을 구할 수 있다.	4점

0418

유형 05 곡선 위의 점에서의 접선과 좌표축으로 둘러싸인 도형의 넓이

| 전략 | 곡선 $f(x)=x^3-2x$ 위의 점 $\mathrm{P}(1, -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이고, 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{f'(1)}$이다.

(1) $f(x)=x^3-2x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2$

이때, 점 $\mathrm{P}(1, -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 접선 l의 방정식은

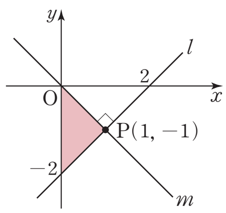
$y-(-1)=x-1$ $\therefore y=x-2$

(2) 직선 m은 기울기가 -1이고, 점 $\mathrm{P}(1, -1)$을 지나므로 직선 m의 방정식은

$y-(-1)=-(x-1)$ $\therefore y=-x$

(3) 오른쪽 그림에서 두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times1=1$



답 (1) $y=x-2$ (2) $y=-x$ (3) 1

채점 기준	배점
(1) 접선 l의 방정식을 구할 수 있다.	3점
(2) 직선 m의 방정식을 구할 수 있다.	3점
(3) 도형의 넓이를 구할 수 있다.	4점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0419

|전략| 곡선 $y=(x-a)(x-b)(x-c)$가 점 $(1, 2)$를 지나는 것과 주어진 식을 이용하여 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기를 구한다.

곡선 $y=(x-a)(x-b)(x-c)$가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$2=(1-a)(1-b)(1-c)$

이때, $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{(b-1)(c-1)+(c-1)(a-1)+(a-1)(b-1)}{(a-1)(b-1)(c-1)}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ (b-1)(c-1)+(c-1)(a-1)+(a-1)(b-1)=-1$

또, $y'=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$이므로

점 $(1, 2)$에서의 기울기는

$(1-b)(1-c)+(1-a)(1-c)+(1-a)(1-b)=-1$

따라서 곡선 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식은

$y=-(x-1)+2\qquad\therefore y=-x+3$

그러므로 이 직선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$

답 $\frac{9}{2}$

0420

|전략| 곡선 위의 점 P에서의 접선의 방정식을 구하고, 두 직선이 수직이면 두 직선의 기울기의 곱이 -1임을 이용하여 직선 PQ의 기울기를 구한다.

$f(x)=x^3-\sqrt{2}x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-\sqrt{2}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P의 좌표를 $(t, t^3-\sqrt{2}t)$라 하면

점 $\mathrm{P}(t, t^3-\sqrt{2}t)$에서의 접선 l의 방정식은

$y-(t^3-\sqrt{2}t)=(3t^2-\sqrt{2})(x-t)$

곡선 $y=f(x)$와 접선 l의 교점의 x좌표는

$x^3-\sqrt{2}x=(3t^2-\sqrt{2})(x-t)+(t^3-\sqrt{2}t)$에서

$x^3-3t^2x+2t^3=0$, $(x-t)^2(x+2t)=0$

$\therefore x=t$ 또는 $x=-2t$

따라서 점 Q의 좌표는 $(-2t, -8t^3+2\sqrt{2}t)$이다.

점 $\mathrm{Q}(-2t, -8t^3+2\sqrt{2}t)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2t)=12t^2-\sqrt{2}$이므로

$(3t^2-\sqrt{2})(12t^2-\sqrt{2})=-1$

$36t^4-15\sqrt{2}t^2+3=0$, $12t^4-5\sqrt{2}t^2+1=0$

$(2\sqrt{2}t^2-1)(3\sqrt{2}t^2-1)=0$

$\therefore t^2=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $t^2=\frac{\sqrt{2}}{6}$

이때, 직선 PQ의 기울기는 $f'(t)=3t^2-\sqrt{2}$이므로

$t^2=\frac{\sqrt{2}}{4}$일 때 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$, $t^2=\frac{\sqrt{2}}{6}$일 때 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

따라서 직선 PQ의 기울기의 최댓값은 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$이다.

답 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

0421

|전략| 곡선 $y=x^2$ 위의 점 (t, t^2)에서의 접선이 점 $\mathrm{A}(a, -2)$를 지남을 이용하여 t에 대한 이차방정식을 세우고, 근과 계수의 관계를 이용하여 두 점 사이의 거리를 구한다.

점 A의 좌표를 $(a, -2)$라 하자. (단, $a>0$)

$y=x^2$에서 $y'=2x$

접점의 좌표를 (t, t^2)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $2t$이므로 접선의 방정식은

$y=2t(x-t)+t^2$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(a, -2)$를 지나므로

$-2=2t(a-t)+t^2$

$t^2-2at-2=0$

$\mathrm{B}(t_1, t_1^2)$, $\mathrm{C}(t_2, t_2^2)$이라 하면 위의 방정식의 두 실근은 t_1, t_2이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$t_1+t_2=2a$, $t_1t_2=-2$

$(t_1-t_2)^2=(t_1+t_2)^2-4t_1t_2=4a^2+8$

$\therefore \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(t_1-t_2)^2+(t_1^2-t_2^2)^2}$

$=\sqrt{(t_1-t_2)^2\{1+(t_1+t_2)^2\}}$

$=\sqrt{(4a^2+8)(4a^2+1)}$

$p=4a^2$이라 하면

$\overline{\mathrm{BC}}^2=(p+8)(p+1)=p^2+9p+8=60$

$p^2+9p-52=0$, $(p+13)(p-4)=0$

$\therefore p=4\ (\because 4a^2=p>0)$

따라서 $4a^2=4$이므로 $a=1\ (\because\ a>0)$

답 ②

0422

|전략| 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 미분가능하므로

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ (a<c<b)$인 실수 c가 존재함을 이용한다.

$f(1)=k$라 하면 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{k-3}{2}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, 함수 $y=|f'(x)|$의 최댓값은 a이고 $k\le 11$이므로

$f'(c)=\frac{k-3}{2}\le 4$

$\therefore a=4$

또, 함수 $y=|f'(x)|$의 최댓값은 4이므로 $-4\le f'(x)\le 4$이다.

따라서 $-1<c<1$인 실수 c에 대하여 $f'(c)=\frac{k-3}{2}\ge -4$

즉, $k\ge -5$이므로 $b=-5$

$\therefore a+b=4+(-5)=-1$ 답 ③

0423

|전략| ㄷ. $g(x)=(f\circ f)(x)$는 직선 $y=x$와 $y=f(x)$의 그래프의 교점을 이용하여 평균값 정리를 적용한다.

ㄱ. 함수 $y=f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$

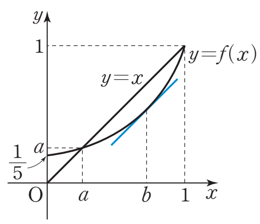
인 c가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$이므로 $f'(x)=\frac{4}{5}$인 x가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄴ. $y=f(x)$의 그래프에서 기울기가 1인 접선을 생각하면 $f'(b)=1$

따라서 열린구간 $(b, 1)$에서 접선의 기울기 $f'(x)$에 대하여

$f'(x)>1$이다. (거짓)



ㄷ. 다항함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(a, 1)$에서 미분가능하므로 $g(x)=(f\circ f)(x)$도 닫힌구간 $[a, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(a, 1)$에서 미분가능하다.

이때,

$g(a)=(f\circ f)(a)=f(a)=a$, $g(1)=(f\circ f)(1)=f(1)=1$

이므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{g(1)-g(a)}{1-a}=1=g'(k)$

인 k가 열린구간 $(a, 1)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

본책 76~93쪽

5 | 도함수의 활용 (2)

STEP 1 개념 마스터

0424 답 (가) < (나) 증가

0425

$x_1<x_2$인 임의의 두 양수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)<0$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(0, \infty)$에서 증가한다. 답 증가

0426

$x_1<x_2$인 임의의 두 음수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)>0$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-\infty, 0)$에서 감소한다. 답 감소

0427

$x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=-x_1^3-(-x_2^3)=-(x_1^3-x_2^3)$

$=-(x_1-x_2)\underbrace{(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)}_{=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0}>0$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다. 답 감소

0428

$f(x)=x^2+2x$에서

$f'(x)=2x+2=2(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

따라서 함수 $f(x)$는 반닫힌 구간 $[-1, \infty)$에서 증가하고, 반닫힌 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소한다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

답 반닫힌 구간 $[-1, \infty)$에서 증가, 반닫힌 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소

0429

$f(x)=-x^2+4x+3$에서

$f'(x)=-2x+4=-2(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$는 반닫힌 구간 $(-\infty, 2]$에서 증가하고, 반닫힌 구간 $[2, \infty)$에서 감소한다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

답 반닫힌 구간 $(-\infty, 2]$에서 증가, 반닫힌 구간 $[2, \infty)$에서 감소

0430

$f(x)=x^3-12x$에서

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 반닫힌 구간 $(-\infty, -2]$, $[2, \infty)$에서 증가하고, 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 감소한다.

답 반닫힌 구간 $(-\infty, -2]$, $[2, \infty)$에서 증가, 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 감소

0431

$f(x)=-2x^3+3x^2+12x+1$에서

$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 증가하고, 반닫힌 구간 $(-\infty, -1]$, $[2, \infty)$에서 감소한다.

답 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 증가, 반닫힌 구간 $(-\infty, -1]$, $[2, \infty)$에서 감소

0432

$f(x)=x^4-2x^2+1$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 0]$, 반닫힌 구간 $[1, \infty)$에서 증가하고, 반닫힌 구간 $(-\infty, -1]$, 닫힌구간 $[0, 1]$에서 감소한다.

답 닫힌구간 $[-1, 0]$, 반닫힌 구간 $[1, \infty)$에서 증가, 반닫힌 구간 $(-\infty, -1]$, 닫힌구간 $[0, 1]$에서 감소

0433

$f(x)=x^3+6x^2+12x+9$에서

$f'(x)=3x^2+12x+12=3(x+2)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗		↗

답 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가

0434

$f(x)=3x^4-4x^3+5$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 반닫힌 구간 $[1, \infty)$에서 증가하고, 반닫힌 구간 $(-\infty, 1]$에서 감소한다.

답 반닫힌 구간 $[1, \infty)$에서 증가, 반닫힌 구간 $(-\infty, 1]$에서 감소

0435

함수 $f(x)$는 $x=-1$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이며 극댓값은

$f(-1)=-1+3+1=3$

또, $x=1$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이며 극솟값은

$f(1)=1-3+1=-1$

답 극댓값: 3, 극솟값: -1

0436

(1) 함수 $f(x)$는 $x=b$, $x=d$, $x=f$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $f(x)$는 $x=b$, $x=d$, $x=f$에서 극대이다.
따라서 함수 $f(x)$가 극댓값을 갖는 점의 x좌표는 b, d, f이다.

(2) 함수 $f(x)$는 $x=c$, $x=e$, $x=g$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $f(x)$는 $x=c$, $x=e$, $x=g$에서 극소이다.
따라서 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖는 점의 x좌표는 c, e, g이다.

답 (1) b, d, f (2) c, e, g

0437

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 미분가능하고 $x=3$에서 극값 4를 가지므로

$f(3)=4$, $f'(3)=0$

$\therefore f(3)+f'(3)=4$

답 4

0438

$f(x)=x^3-6x^2-15x+2$에서

$f'(x)=3x^2-12x-15=3(x+1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=5$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	10	↘	-98	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=10$, $x=5$에서 극소이고 극솟값은 $f(5)=-98$이다.

답 극댓값: 10, 극솟값: -98

0439

$f(x)=-x^3+6x^2-1$에서

$f'(x)=-3x^2+12x=-3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	31	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극대이고 극댓값은 $f(4)=31$,
$x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=-1$이다.

답 극댓값: 31, 극솟값: -1

0440

$f(x)=-2x^3+3x^2-6$에서

$f'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-6	↗	-5	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은 $f(1)=-5$,
$x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=-6$이다.

답 극댓값: -5, 극솟값: -6

0441

$f(x)=x^4-2x^2+5$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	4	↗	5	↘	4	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=5$,
$x=-1$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(-1)=4$, $f(1)=4$이다.

답 극댓값: 5, 극솟값: 4

0442

$f(x)=3x^4-8x^3+1$에서

$f'(x)=12x^3-24x^2=12x^2(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=0$에서는 극값을 갖지 않는다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↘	-15	↗

따라서 함수 $f(x)$는 극댓값은 없고, $x=2$에서 극소이고 극솟값은 $f(2)=-15$이다.

답 극댓값: 없다., 극솟값: -15

0443

$f(x)=-3x^4-4x^3+12x^2-5$에서

$f'(x)=-12x^3-12x^2+24x=-12x(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	27	↘	-5	↗	0	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-2)=27$, $f(1)=0$, $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=-5$이다.

답 극댓값: 27, 0, 극솟값: -5

0444

$f(x)=x^3-3x^2+3x+3$에서

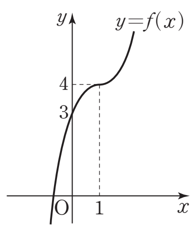
$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, 3)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0445

$f(x)=-2x^3+3x^2+12x-1$에서

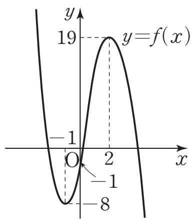
$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-8	↗	19	↘

함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, -1)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0446

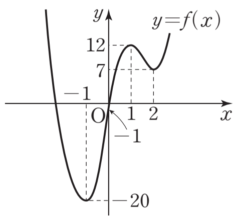
$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x-1$에서

$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24=12(x+1)(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-20	↗	12	↘	7	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, -1)$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 오른쪽 그림과 같다.



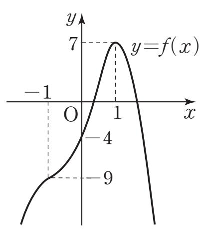
답 풀이 참조

0447

$f(x)=-3x^4-4x^3+6x^2+12x-4$에서
$f'(x)=-12x^3-12x^2+12x+12=-12(x+1)^2(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-9	↗	7	↘

함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, -4)$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0448

$f(x)=2x^3-12x^2+3$에서
$f'(x)=6x^2-24x=6x(x-4)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ $(\because -1\le x\le 2)$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-11	↗	3	↘	-29

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 $x=0$일 때 최댓값 3, $x=2$일 때 최솟값 -29를 갖는다. 답 최댓값: 3, 최솟값: -29

0449

$f(x)=-x^3+3x$에서
$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	18	↘	-2	↗	2	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-3, \sqrt{3}]$에서 $x=-3$일 때 최댓값 18, $x=-1$일 때 최솟값 -2를 갖는다. 답 최댓값: 18, 최솟값: -2

0450

$f(x)=x^4-2x^2+3$에서
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ $(\because -2\le x\le 0)$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	11	↘	2	↗	3

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 0]$에서 $x=-2$일 때 최댓값 11, $x=-1$일 때 최솟값 2를 갖는다. 답 최댓값: 11, 최솟값: 2

0451

$f(x)=-x^4+6x^2-8x+1$에서
$f'(x)=-4x^3+12x-8=-4(x+2)(x-1)^2$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	-2	↗	25	↘	-2	↘	-7

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-3, 2]$에서 $x=-2$일 때 최댓값 25, $x=2$일 때 최솟값 -7을 갖는다. 답 최댓값: 25, 최솟값: -7

STEP 2 유형 마스터

0452

|전략| 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에서 증가하므로 $f'(x)\ge 0$의 해를 구하여 이 구간과 비교한다.

$f(x)=-x^3+3x^2-2$에서
$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$
함수 $f(x)$가 증가하는 구간을 $[\alpha, \beta]$라 하면 이 구간에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다. 즉,
$-3x(x-2)\ge 0$, $x(x-2)\le 0$ $\therefore 0\le x\le 2$
따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 증가한다.
이때, 열린구간 (a, b)에서 함수 $f(x)$가 증가하므로 열린구간 (a, b)가 닫힌구간 $[0, 2]$에 포함되어야 한다.
$\therefore 0\le a<b\le 2$
따라서 a의 최솟값은 0, b의 최댓값은 2이다.

답 a의 최솟값: 0, b의 최댓값: 2

다른 풀이 $f(x)=-x^3+3x^2-2$에서
$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	2	↘

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 증가하고, 반닫힌 구간 $(-\infty, 0]$, $[2, \infty)$에서 감소한다. 이때, 열린구간 (a, b)에서 함수 $f(x)$가 증가하므로 열린구간 (a, b)는 닫힌구간 $[0, 2]$에 포함되어야 한다.
$\therefore 0\le a<b\le 2$
따라서 a의 최솟값은 0, b의 최댓값은 2이다.

0453

$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

이때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$에서 감소하므로 이 구간에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다. 즉,

$3(x+1)(x-3)\le 0 \qquad \therefore -1\le x\le 3$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=3$이므로 $\alpha+\beta=2$

답 ⑤

0454

$f(x)=x^3+ax^2+bx-1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

주어진 조건에 의하여 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 -2, 1이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+1=-\frac{2a}{3}$, $-2\times 1=\frac{b}{3}$

$\therefore a=\frac{3}{2}$, $b=-6 \qquad \therefore ab=-9$

답 -9

0455

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+ax$에서

$f'(x)=x^2-4x+a$

함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위가 $1\le x\le b$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 1, b이다. … ❶

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+b=4$, $1\times b=a \qquad \therefore a=3$, $b=3$ … ❷

$\therefore a+b=6$ … ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근을 구할 수 있다.	40 %
❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0456

|전략| 삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 함을 이용한다.

$f(x)=x^3+kx^2+(k+4)x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2kx+k+4$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-3(k+4)\le 0$, $k^2-3k-12\le 0$

이때, 조건을 만족시키는 실수 k의 값의 범위는 $a\le k\le b$이고, a, b는 이차방정식 $k^2-3k-12=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=3$

답 ③

Lecture

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

(1) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$일 조건은 ⇨ $a>0$, $D\le 0$

(2) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le 0$일 조건은 ⇨ $a<0$, $D\le 0$

0457

$f(x)=-x^3+kx^2-3x+1$에서

$f'(x)=-3x^2+2kx-3$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-9\le 0$, $(k+3)(k-3)\le 0$

$\therefore -3\le k\le 3$

답 ③

0458

$f(x)=x^3+ax^2+ax$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+a$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-3a\le 0$, $a(a-3)\le 0$

$\therefore 0\le a\le 3$ …… ㉠

또, $g(x)=-x^3+(a+1)x^2-(a+1)x$에서

$g'(x)=-3x^2+2(a+1)x-(a+1)$

함수 $g(x)$가 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $g'(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(a+1)^2-3(a+1)\le 0$, $(a+1)(a-2)\le 0$

$\therefore -1\le a\le 2$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡의 공통 범위는 $0\le a\le 2$이므로 상수 a의 값이 될 수 없는 것은 ① $-\frac{1}{2}$이다.

답 ①

0459

$x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 항상 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$f(x)=-x^3+2ax^2-3ax+5$에서

$f'(x)=-3x^2+4ax-3a$

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-9a\le 0$, $a(4a-9)\le 0$

$\therefore 0\le a\le \frac{9}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 0, 1, 2의 3개이다.

답 ③

0460
함수 $f(x)$는 일대일대응이고 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.
즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이다.
$f(x)=x^3+x^2+kx+1$에서
$f'(x)=3x^2+2x+k$
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1-3k\leq 0 \qquad \therefore k\geq\frac{1}{3}$
따라서 정수 k의 최솟값은 1이다. 답 ①
참고 일대일함수이고, 공역과 치역이 같으면 일대일대응이라 한다.

0461
함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.
즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.
$f(x)=-x^3+kx^2+2kx-5$에서
$f'(x)=-3x^2+2kx+2k$
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=k^2+6k\leq 0,\ k(k+6)\leq 0$
$\therefore\ -6\leq k\leq 0$
따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$으로 그 합은 -21이다. 답 ③
참고 **역함수가 존재할 조건**
함수 f의 역함수 f^{-1}가 존재할 필요충분조건은 함수 f가 일대일대응인 것이다.

0462
| 전략 | 삼차함수 $f(x)$가 열린구간 $(1, 2)$에서 증가하려면 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 함을 이용한다.
$f(x)=-x^3+x^2+ax-4$에서
$f'(x)=-3x^2+2x+a$
함수 $f(x)$가 열린구간 $(1,\ 2)$에서 증가하려면 $1<x<2$에서
$f'(x)\geq 0$이어야 하므로
$f'(1)=-3+2+a\geq 0$에서 $a\geq 1$ …… ㉠
$f'(2)=-12+4+a\geq 0$에서 $a\geq 8$ …… ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 $a\geq 8$ 답 $a\geq 8$

0463
$-2<x<1$에서 $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 항상 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$는 $-2<x<1$에서 감소해야 한다.
즉, $-2<x<1$에서 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.
$f(x)=x^3+kx^2-7x+2$에서
$f'(x)=3x^2+2kx-7$
$f'(-2)=12-4k-7\leq 0$에서 $k\geq\frac{5}{4}$ …… ㉠
$f'(1)=3+2k-7\leq 0$에서 $k\leq 2$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $\frac{5}{4}\leq k\leq 2$
따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 2의 1개이다. 답 ②

0464
$f(x)=-x^3+ax^2+2$에서
$f'(x)=-3x^2+2ax$
함수 $f(x)$가 열린구간 $(-\infty, -1)$에서 감소하고, 열린구간 $(1, 2)$에서 증가하려면 $x<-1$에서 $f'(x)\leq 0$, $1<x<2$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로
$f'(-1)=-3-2a\leq 0$에서 $a\geq -\frac{3}{2}$ …… ㉠
$f'(1)=-3+2a\geq 0$에서 $a\geq\frac{3}{2}$ …… ㉡
$f'(2)=-12+4a\geq 0$에서 $a\geq 3$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $a\geq 3$
따라서 정수 a의 최솟값은 3이다. 답 ③

0465
| 전략 | $f'(x)=0$이 되는 x의 값을 구하고 그 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는지 조사한다.
$f(x)=-2x^3+9x^2-12x-2$에서
$f'(x)=-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-7	↗	-6	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이고 극댓값은 $f(2)=-6$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=-7$이므로
$M=-6,\ m=-7 \qquad \therefore M-m=1$ 답 ①

0466
$f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3-6x^2$에서
$f'(x)=4x^3-8x^2-12x=4x(x-3)(x+1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{7}{3}$	↗	0	↘	-45	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=3$에서 극값을 가지므로 구하는 모든 x의 값의 합은
$-1+0+3=2$ 답 ④

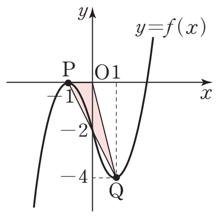
0467
$f(x)=x^3-3x-2$에서
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=0$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=-4$이므로

P$(-1, 0)$, Q$(1, -4)$

따라서 오른쪽 그림에서 △OPQ의 넓이는



$\frac{1}{2}\times1\times4=2$

답 ②

0468

$f(x)=x^3-3x^2+2x$에서

$f'(x)=3x^2-6x+2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 P$(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$ $\quad\therefore y=f'(t)x-tf'(t)+f(t)$

이 접선의 y절편 $g(t)$는

$g(t)=-tf'(t)+f(t)$

$=-t(3t^2-6t+2)+t^3-3t^2+2t$

$=-2t^3+3t^2$

$g'(t)=-6t^2+6t=-6t(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

따라서 함수 $g(t)$는 $t=1$에서 극대이고 극댓값은 $g(1)=1$, $t=0$에서 극소이고 극솟값은 $g(0)=0$이므로 구하는 극댓값과 극솟값의 합은 $1+0=1$이다.

답 ①

0469

|전략| $x=-3$에서 극댓값 28, $x=1$에서 극솟값을 가지므로 $f(-3)=28$, $f'(-3)=0$, $f'(1)=0$임을 이용한다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 극댓값 28을 가지므로

$f(-3)=28$에서 $-27+9a-3b+c=28$

$\therefore 9a-3b+c=55$ …… ㉠

$f'(-3)=0$에서 $27-6a+b=0$ $\quad\therefore 6a-b=27$ …… ㉡

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$f'(1)=0$에서 $3+2a+b=0$ $\quad\therefore 2a+b=-3$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-9$, $c=1$

$\therefore f(x)=x^3+3x^2-9x+1$

따라서 구하는 극솟값은

$f(1)=1+3-9+1=-4$

답 -4

0470

$f(x)=x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$a-4$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=a$, $x=2$에서 극소이고 극솟값은 $f(2)=a-4$이다.

이때, 극댓값과 극솟값의 합이 20이므로

$a+(a-4)=20$, $2a=24$ $\quad\therefore a=12$

답 12

0471

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ … ❶

함수 $f(x)$가 $x=-1$, $x=3$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=0$에서 $3-2a+b=0$

$\therefore 2a-b=3$ …… ㉠

$f'(3)=0$에서 $27+6a+b=0$

$\therefore 6a+b=-27$ …… ㉡

또, 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르므로

$f(-1)=-f(3)$에서 $-1+a-b+c=-27-9a-3b-c$

$\therefore 5a+b+c=-13$ …… ㉢ … ❷

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-9$, $c=11$ … ❸

$\therefore a+b+c=-1$ … ❹

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ 주어진 조건을 이용하여 a, b, c 사이의 관계식을 세울 수 있다.	50 %
❸ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

다른 풀이 $f'(x)=3x^2+2ax+b$에서 $f'(-1)=0$, $f'(3)=0$이므로

$f'(x)=3(x+1)(x-3)=3x^2-6x-9$

$2a=-6$에서 $a=-3$이고 $b=-9$이므로

$f(x)=x^3-3x^2-9x+c$

이때, 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르므로

$f(-1)=-f(3)$에서 $-1-3+9+c=-27+27+27-c$

$\therefore c=11$ $\quad\therefore a+b+c=-1$

0472

$f(x)=x^3+(a+1)x^2-2x$에서

$f'(x)=3x^2+2(a+1)x-2$

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 극대인 점과 극소인 점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 원점에 대하여 대칭이므로

$\alpha+\beta=0$

한편, α, β는 이차방정식 $f'(x)=3x^2+2(a+1)x-2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2(a+1)}{3}=0$　　$\therefore a=-1$　　답 -1

0473

$f(x)=-2x^3+3ax^2-2a$에서

$f'(x)=-6x^2+6ax=-6x(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=a$에서 극값을 갖는다.

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로

$f(0)=0$ 또는 $f(a)=0$

(i) $f(0)=0$인 경우

$f(0)=-2a=0$에서 $a=0$

그런데 조건에서 $a\neq0$이므로 $f(0)=0$이 아니다.

(ii) $f(a)=0$인 경우

$f(a)=-2a^3+3a^3-2a=0$

$a^3-2a=0$, $a(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})=0$

$\therefore a=-\sqrt{2}$ 또는 $a=\sqrt{2}$ ($\because a\neq0$)

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$　　답 0

0474

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+3}{x+1}=0$에서 $x\to-1$일 때, (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to-1}\{f(x)+3\}=0$이므로

$f(-1)+3=0$　　$\therefore f(-1)=-3$　　…… ㉠

또, $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+3}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$이므로

$f'(-1)=0$　　…… ㉡

조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$f'(1)=0$　　…… ㉢

㉡, ㉢에 의하여 $f'(x)$는 $x+1$과 $x-1$을 인수로 가지므로

$f'(x)=3x^2+2ax+b=3(x+1)(x-1)$

$3x^2+2ax+b=3x^2-3$　　$\therefore a=0$, $b=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x+c$이고 ㉠에 의하여

$f(-1)=-1+3+c=-3$　　$\therefore c=-5$

$\therefore f(x)=x^3-3x-5$　　답 $f(x)=x^3-3x-5$

0475

|전략| 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 함을 이용한다.

$f(x)=x^3+kx^2-2kx+2$에서

$f'(x)=3x^2+2kx-2k$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2+6k\leq0$, $k(k+6)\leq0$

$\therefore -6\leq k\leq0$　　답 $-6\leq k\leq0$

0476

$f(x)=x^3-2ax^2+(2a^2-4)x-1$에서

$f'(x)=3x^2-4ax+(2a^2-4)$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4a^2-3(2a^2-4)>0$, $-2a^2+12>0$

$a^2-6<0$, $(a-\sqrt{6})(a+\sqrt{6})<0$

$\therefore -\sqrt{6}<a<\sqrt{6}$

따라서 $\alpha=-\sqrt{6}$, $\beta=\sqrt{6}$이므로

$\alpha+\beta=-\sqrt{6}+\sqrt{6}=0$　　답 0

0477

$f(x)=x^3+kx^2+x-4$에서

$f'(x)=3x^2+2kx+1$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-3>0$, $(k-\sqrt{3})(k+\sqrt{3})>0$

$\therefore k<-\sqrt{3}$ 또는 $k>\sqrt{3}$

따라서 양의 정수 k의 최솟값은 2이다.　　답 ②

0478

함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+x+k$의 그래프가 k의 값에 관계없이 x축과 한 번만 만나므로 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

$y=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+x$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프이다.

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+x+k$에서

$f'(x)=x^2+2ax+1$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-1\leq0$, $(a+1)(a-1)\leq0$

$\therefore -1\leq a\leq1$　　답 $-1\leq a\leq1$

Lecture

(1) 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq0$, b, c, d는 상수)의 그래프가 d의 값에 관계없이 x축과 한 번만 만난다.
$\Longleftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

(2) 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq0$, b, c, d는 상수)의 그래프가 d의 값에 따라 x축과 한 번 또는 두 번 또는 세 번 만난다.
$\Longleftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$는 극값을 가진다.
$\Longleftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 가진다.

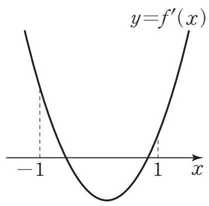
0479

|**전략**| 삼차함수 $f(x)$가 $-1<x<1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 $-1<x<1$에서 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 이용한다.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2kx^2+3kx-2$에서

$f'(x)=x^2-4kx+3k$

함수 $f(x)$가 $-1<x<1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-1<x<1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(ⅰ) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4k^2-3k>0,\ k(4k-3)>0\qquad \therefore k<0$ 또는 $k>\frac{3}{4}$

(ⅱ) $f'(-1)=1+7k>0$에서 $k>-\frac{1}{7}$

(ⅲ) $f'(1)=1-k>0$에서 $k<1$

(ⅳ) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=2k$이므로

$-1<2k<1\qquad \therefore -\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 실수 k의 값의 범위는 $-\frac{1}{7}<k<0$

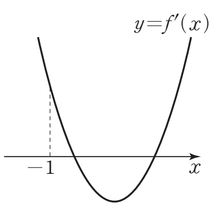
따라서 이를 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다. 답 ①

0480

$f(x)=x^3-3ax^2+3ax-1$에서

$f'(x)=3x^2-6ax+3a$

함수 $f(x)$가 $x>-1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x>-1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(ⅰ) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9a^2-9a>0,\ 9a(a-1)>0\qquad \therefore a<0$ 또는 $a>1$

(ⅱ) $f'(-1)=3+6a+3a>0$에서 $a>-\frac{1}{3}$

(ⅲ) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=a$이므로

$a>-1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 실수 a의 값의 범위는

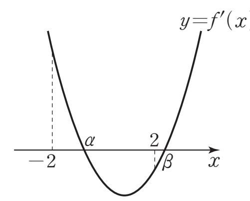
$-\frac{1}{3}<a<0$ 또는 $a>1$ 답 $-\frac{1}{3}<a<0$ 또는 $a>1$

0481

$f(x)=x^3-kx^2-k^2x+3$에서

$f'(x)=3x^2-2kx-k^2$

함수 $f(x)$가 $-2<x<2$에서 극댓값을 갖고, $x>2$에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근 중 한 근은 $-2<x<2$에 있고, 다른 한 근은 $x>2$에 있어야 하므로 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라 하면

$-2<\alpha<2<\beta$이어야 하므로

(ⅰ) $f'(-2)=-k^2+4k+12>0$에서

$(k+2)(k-6)<0\qquad \therefore -2<k<6$

(ⅱ) $f'(2)=-k^2-4k+12<0$에서

$(k+6)(k-2)>0\qquad \therefore k<-6$ 또는 $k>2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $2<k<6$이므로 모든 정수 k의 값의 곱은 $3\times4\times5=60$이다. 답 ⑤

0482

|**전략**| 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 이용한다.

$f(x)=x^4+2x^3-ax^2+1$에서

$f'(x)=4x^3+6x^2-2ax=2x(2x^2+3x-a)$

함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $2x^2+3x-a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2+3x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$a\neq0,\ D=9+8a>0$에서

$-\frac{9}{8}<a<0$ 또는 $a>0$ $a=0$이면 $2x^2+3x=0$이므로 $x=0$을 근으로 가진다.

따라서 실수 a의 값이 될 수 있는 것은 ④ -1이다. 답 ④

Lecture

(1) 사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때
$f(x)$는 $f'(x)=0$의 근에 관계없이 항상 극솟값을 갖지만, $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는 경우에만 극댓값을 가진다.

(2) 사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때
$f(x)$는 $f'(x)=0$의 근에 관계없이 항상 극댓값을 갖지만, $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는 경우에만 극솟값을 가진다.

0483

$f(x)=-x^4+4x^3+2ax^2$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2+4ax=-4x(x^2-3x-a)$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-3x-a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-3x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$a\neq0,\ D=9+4a>0$에서

$-\frac{9}{4}<a<0$ 또는 $a>0$ 답 $-\frac{9}{4}<a<0$ 또는 $a>0$

0484

$f(x)=x^4+2(a-1)x^2+4ax$에서

$f'(x)=4x^3+4(a-1)x+4a=4(x+1)(x^2-x+a)$

함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 (또는 삼중근)을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-x+a=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $4(x+1)(x^2-x+a)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-x+a=0$이 허근을 가져야 하므로

$D=1-4a<0 \qquad \therefore a>\frac{1}{4}$

$(x+1)^2=0$이 될 수 없으므로 삼중근을 갖지 않는다.

(ii) $4(x+1)\underline{(x^2-x+a)=0}$이 한 실근과 중근 갖는 경우

이차방정식 $x^2-x+a=0$이 -1을 근으로 갖거나 -1이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

$x^2-x+a=0$이 -1을 근으로 가지면

$1+1+a=0 \qquad \therefore a=-2$

$x^2-x+a=0$이 -1이 아닌 실수를 중근으로 가지면

$D=1-4a=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $a=-2$ 또는 $a\ge\frac{1}{4}$이므로 실수 a의 최솟값은 -2이다.

답 ①

0485

$f(x)=x^4+ax^3+2x^2+5$에서

$f'(x)=4x^3+3ax^2+4x=x(4x^2+3ax+4)$

함수 $f(x)$가 극값을 하나만 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 (또는 삼중근)을 가져야 한다.

이차방정식 $4x^2+3ax+4=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $x(4x^2+3ax+4)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $4x^2+3ax+4=0$이 허근을 가져야 하므로

$D=9a^2-64<0,\ (3a-8)(3a+8)<0 \qquad \therefore -\frac{8}{3}<a<\frac{8}{3}$

(ii) $x(4x^2+3ax+4)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $4x^2+3ax+4=0$이 0을 근으로 갖거나 0이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

이때, $4x^2+3ax+4=0$이 0을 근으로 가질 수 없으므로 0이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

$D=9a^2-64=0,\ (3a-8)(3a+8)=0$

$\therefore a=-\frac{8}{3}$ 또는 $a=\frac{8}{3}$

(i), (ii)에서 $-\frac{8}{3}\le a\le\frac{8}{3}$

따라서 $M=\frac{8}{3},\ m=-\frac{8}{3}$이므로 $\frac{M}{m}=-1$ 답 -1

다른 풀이 $f(x)=x^4+ax^3+2x^2+5$에서

$f'(x)=4x^3+3ax^2+4x=x(4x^2+3ax+4)$

사차함수 $f(x)$가 극값을 하나만 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 조건을 구하여 그 결과를 부정하면 된다.

삼차방정식 $x(4x^2+3ax+4)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $4x^2+3ax+4=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이때, $x=0$은 $4x^2+3ax+4=0$의 근이 될 수 없으므로 이차방정식 $4x^2+3ax+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9a^2-64>0$에서 $(3a+8)(3a-8)>0$

$\therefore a<-\frac{8}{3}$ 또는 $a>\frac{8}{3}$

따라서 함수 $f(x)$가 극값을 하나만 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는

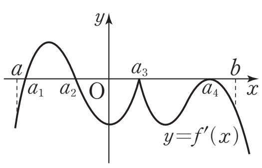
$-\frac{8}{3}\le a\le\frac{8}{3}$

따라서 $M=\frac{8}{3},\ m=-\frac{8}{3}$이므로 $\frac{M}{m}=-1$

참고 사차함수는 일반적으로 극댓값과 극솟값을 모두 가지거나 두 값 중 하나만 가진다. 따라서 극댓값과 극솟값 중 하나만 가질 조건은 극댓값과 극솟값을 모두 가질 조건을 구해 그 결과를 부정하여 구할 수도 있다.

0486

| 전략 | $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌면 극대, 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌면 극소임을 이용한다.



오른쪽 그림과 같이 $a\le x\le b$에서 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 왼쪽부터 차례로 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$라 하면

(i) $x=a_2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a_2$에서 극대이다.

(ii) $x=a_1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a_1$에서 극소이다.

따라서 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 점은 2개이다. 답 2

참고 $x=a_3,\ x=a_4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=a_3,\ x=a_4$에서 극값을 갖지 않는다.

0487

(i) $x=5$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 극대이다.

$\therefore m=1$

(ii) $x=1,\ x=6$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=1,\ x=6$에서 극소이다.

$\therefore n=2$

(i), (ii)에서 $m-n=1-2=-1$ 답 -1

Lecture

함수 $f(x)$는 $f'(6)$의 값이 존재하지 않으므로 $x=6$에서 미분가능하지 않지만 $0<x<7$에서 연속이므로 $x=6$에서도 연속이다. 따라서 $x=6$에서의 극대, 극소를 판단할 수 있다.

0488

| 전략 | 주어진 조건과 도함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌면 극대 또는 극소라는 점을 이용하여 함수 $f(x)$를 구한다.

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 2이므로
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
$f'(0)=0$, $f'(2)=0$이므로
$f'(0)=b=0$
$f'(2)=12+4a+b=0 \quad \therefore a=-3$
또, $f(x)$의 극댓값이 5이므로 $f(0)=c=5$
따라서 $f(x)=x^3-3x^2+5$이므로 구하는 극솟값은
$f(2)=8-12+5=1$ 답 1

0489

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -3, 1이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

… ❶

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$ … ❷
$f'(-3)=0$, $f'(1)=0$이므로
$f'(-3)=27-6a+b=0$ …… ㉠
$f'(1)=3+2a+b=0$ …… ㉡
또, $f(x)$의 극솟값이 -6이므로
$f(1)=1+a+b+c=-6$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$a=3$, $b=-9$, $c=-1$ … ❸
따라서 $f(x)=x^3+3x^2-9x-1$이므로 구하는 극댓값은
$f(-3)=-27+27+27-1=26$ … ❹
답 26

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$의 증감표를 작성할 수 있다.	30 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $f(x)$의 극댓값을 구할 수 있다.	10 %

0490

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 0이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq0$, b, c, d는 상수)라 하면
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$
$f'(-1)=0$, $f'(0)=0$이므로
$f'(-1)=3a-2b+c=0$ …… ㉠
$f'(0)=c=0$
또, $f(x)$의 극솟값이 0이고 극댓값이 1이므로
$f(-1)=-a+b-c+d=0$ …… ㉡
$f(0)=d=1$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-2$, $b=-3$
따라서 $f(x)=-2x^3-3x^2+1$이므로
$f(1)=-2-3+1=-4$ 답 -4

0491

|전략| $f'(x)$의 부호와 그 변화를 보고 $y=f(x)$의 그래프를 해석해 본다.

① $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)
② $f'(b)\neq0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)
③ $x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=c$에서 극대이다. (거짓)
④ 열린구간 $(-\infty, a)$에서 $f'(x)>0$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 증가한다. (거짓)
⑤ 열린구간 (b, c)에서 $f'(x)>0$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 증가한다. (참)
따라서 옳은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0492

ㄱ. $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=0$이다. (거짓)
ㄴ. $f'(1)\neq0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)
ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 $x=0$에서 x축에 접한다. (참)
ㄹ. 열린구간 $(1, 2)$에서 $f'(x)>0$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 증가하고, 열린구간 $(2, \infty)$에서 $f'(x)<0$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 감소한다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄷ이다. 답 ②

0493

ㄱ. $f'(x_2)$가 존재하므로 $f(x)$는 $x=x_2$에서 미분가능하다. (거짓)
ㄴ. $x=x_3$, $x=x_6$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=x_3$, $x=x_6$에서 극대이고 $f(x_3)\neq f(x_6)$이므로 열린구간 (x_2, ∞)에서 $f(x)$는 극댓값을 2개 가진다. (참)

ㄷ. $f(x)$는 $x=x_3$에서 극대이지만 극댓값이 0인지는 알 수 없다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 답 ㄴ

0494

|전략| $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증감표를 만든 후 함수 $f(x)$가 증가 또는 감소하는 구간, 극값을 갖는 x의 값 등을 찾아 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 유추해 본다.

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 a, b, c이므로
$f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=c$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=c$에서 극대, $x=a$에서 극소이다.
또, $x=b$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=b$에서는 극값을 갖지 않는다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다.
답 ④

0495

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 0이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이다.
또, $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ③이다.
답 ③

0496

|전략| $x\to\infty$일 때의 함수의 극한과 $f(0)$의 값의 부호를 이용하여 삼차함수의 최고차항의 계수와 상수항의 부호를 찾고, $f'(x)=0$의 두 실근은 $f(x)$가 극값을 가지는 점에서의 x의 값임을 이용하여 나머지 계수의 부호를 찾는다.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$
$x\to\infty$일 때 $f(x)\to\infty$이므로 $a>0$
$f(0)>0$이므로 $d>0$
또, 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근은 α, β이고 $\alpha>0$, $\beta>0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-\dfrac{2b}{3a}>0$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{3a}>0$
이때, $a>0$이므로 $b<0$, $c>0$
$\therefore a>0, b<0, c>0, d>0$
따라서 옳은 것은 ② $ac>0$이다. 답 ②

0497

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$
$x\to\infty$일 때 $f(x)\to-\infty$이므로 $a<0$
$f(0)<0$이므로 $d<0$
또, 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근은 α, β이고 $\alpha<0$, $\beta>0$, $|\beta|>|\alpha|$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-\dfrac{2b}{3a}>0$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{3a}<0$
이때, $a<0$이므로 $b>0$, $c>0$
$\therefore a<0, b>0, c>0, d<0$
따라서 그 값이 양수인 것은 ③ bc이다. 답 ③

0498

|전략| 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 $f(x)$의 극값, $f(-2)$, $f(1)$을 구한 다음 그 크기를 비교하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

$f(x)=x^3+x^2-x+1$에서
$f'(x)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1}{3}$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↗	2	↘	$\frac{22}{27}$	↗	2

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$일 때 최댓값 2, $x=-2$일 때 최솟값 -1을 가지므로
$M=2$, $m=-1$ $\quad\therefore M+m=1$ 답 ①

0499

$f(x)=4x^3-3x-1$에서
$f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$ $(\because -2\le x\le 0)$

x	-2	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-27	↗	0	↘	-1

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 0]$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$일 때 최댓값 0을 가지므로
$\alpha=-\dfrac{1}{2}$, $\beta=0$ $\quad\therefore 4\alpha^2+\beta^2=4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+0^2=1$ 답 ③

0500

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^4-\dfrac{4}{3}x^3+9$에서
$f'(x)=\dfrac{4}{3}x^3-4x^2=\dfrac{4}{3}x^2(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	9	↘	0	↗	9

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 4]$에서 $x=0$ 또는 $x=4$일 때 최댓값 9, $x=3$일 때 최솟값 0을 가지므로
$M=9$, $m=0$ $\therefore Mm=0$

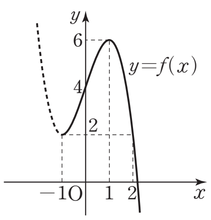
답 ②

0501

$f(x)=-x^3+3x+4$에서
$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	2	↗	6	↘

이때, $f(x)=2$에서 $-x^3+3x+4=2$
$x^3-3x-2=0$, $(x+1)^2(x-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $f(x)$가 최솟값 $f(-1)=2$를 갖기 위한 a의 값의 범위는 $-1<a\le 2$



답 ②

0502

|전략| $x^2-4x+2=t$로 치환하여 t의 값의 범위를 구한 다음 그 범위에서 $g(t)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구한다.

$x^2-4x+2=t$로 놓으면
$t=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$
$0\le x\le 4$에서 t의 값의 범위는 $-2\le t\le 2$
$g(t)=t^3-12t+1$로 놓으면
$g'(t)=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$
$g'(t)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=2$
따라서 함수 $g(t)$는 $-2\le t\le 2$에서 $t=-2$일 때 최댓값 17, $t=2$일 때 최솟값 -15를 가지므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 2이다.

t	-2	$\cdots$	2
$g'(t)$	0	$-$	0
$g(t)$	17	↘	-15

답 ⑤

0503

$g(x)=t$로 놓으면 $t=-x^2+2x-1=-(x-1)^2$ $\therefore t\le 0$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^3-3t+4$
$f'(t)=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$
$f'(t)=0$에서 $t=-1$ ($\because t\le 0$)
따라서 함수 $f(t)$는 $t\le 0$에서 $t=-1$일 때 최댓값 6을 가지므로 $(f\circ g)(x)$의 최댓값은 6이다.

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(t)$	$+$	0	$-$	
$f(t)$	↗	6	↘	4

답 ⑤

0504

|전략| 함수 $f(x)$의 증감표를 작성하고 최댓값과 최솟값을 k에 대한 식으로 나타낸 다음 주어진 조건을 이용하여 k의 값을 구한다.

$f(x)=x^3-3x^2-9x+k$에서
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-2+k$	↗	$5+k$	↘	$-27+k$	↗	$-20+k$

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 4]$에서 $x=-1$일 때 최댓값 $5+k$, $x=3$일 때 최솟값 $-27+k$를 가진다.
이때, 최댓값과 최솟값의 합이 -12이므로
$(5+k)+(-27+k)=-12$
$-22+2k=-12$ $\therefore k=5$

답 ①

0505

$f(x)=x^3-6x^2+k$에서
$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$
$f'(x)=0$에서 $x=4$ ($\because 1\le x\le 5$) … ❶

x	1	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-5+k$	↘	$-32+k$	↗	$-25+k$

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 5]$에서 $x=1$일 때 최댓값 $-5+k$, $x=4$일 때 최솟값 $-32+k$를 가진다. … ❷
이때, 최솟값은 -20이므로
$-32+k=-20$ $\therefore k=12$ … ❸
따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $-5+12=7$ … ❹

답 7

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

0506

$f(x)=x^3-3k^2x+7$에서
$f'(x)=3x^2-3k^2=3(x+k)(x-k)$
$f'(x)=0$에서 $x=k$ ($\because k>0$, $0\le x\le 2k$)

x	0	$\cdots$	k	$\cdots$	$2k$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	7	↘	$-2k^3+7$	↗	$2k^3+7$

$k>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2k$일 때 최댓값 $2k^3+7$, $x=k$일 때 최솟값 $-2k^3+7$을 가진다.

이때, 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차가 32이므로

$(2k^3+7)-(-2k^3+7)=32$

$4k^3=32,\ k^3=8$

$\therefore\ k=2$ 답 2

0507

$f(x)=\frac{1}{3}ax^3-2ax^2+b$에서

$f'(x)=ax^2-4ax=ax(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0\ (\because\ -1\le x\le 2)$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{7}{3}a+b$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$-\frac{16}{3}a+b$

함수 $f(x)$는 $-1\le x\le 2$에서 $x=0$일 때 최댓값 b, $x=2$일 때 최솟값 $-\frac{16}{3}a+b$를 가진다.

이때, 함수 $f(x)$의 최댓값이 3, 최솟값이 -13이므로

$b=3,\ -\frac{16}{3}a+b=-13$

$\therefore\ a=3,\ b=3 \qquad \therefore\ ab=9$ 답 ④

0508

$f(x)=-6x^4+8x^3+ax^2+b$에서

$f'(x)=-24x^3+24x^2+2ax=-2x(12x^2-12x-a)$

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2,\ 0]$에서 $x=-1$일 때 최댓값 4를 가지므로 $x=-1$일 때 극댓값 4를 가져야 한다.

$f'(-1)=48-2a=0$에서 $a=24$

$f(-1)=-14+a+b=-14+24+b=4$에서 $b=-6$

따라서 $f(x)=-6x^4+8x^3+24x^2-6$이므로

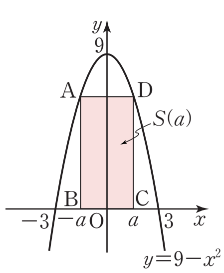
$f(-2)=-96-64+96-6=-70$ 답 ③

참고 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 $f(x)$의 극값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 하나이다.

0509

|전략| $D(a,\ 9-a^2)$으로 놓고 직사각형 ABCD의 넓이를 a에 대한 함수로 나타내어 최댓값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의 한 꼭짓점 C의 x좌표를 $a(0<a<3)$로 놓으면



$D(a,\ 9-a^2),\ A(-a,\ 9-a^2)$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a(9-a^2)=-2a^3+18a$

$S'(a)=-6a^2+18$

$\quad=-6(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})$

$S'(a)=0$에서 $a=\sqrt{3}\ (\because\ 0<a<3)$

a	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $S(a)$는 $a=\sqrt{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 넓이가 최대인 직사각형의 세로의 길이는

$\overline{CD}=9-a^2=9-3=6$ 답 ④

0510

점 Q의 좌표를 $(t,\ t^2)$으로 놓으면

$l^2=\overline{PQ}^2=(t-3)^2+t^4$

$\quad=t^4+t^2-6t+9$

$f(t)=t^4+t^2-6t+9$로 놓으면

$f'(t)=4t^3+2t-6=2(t-1)(2t^2+2t+3)$

이때, $2t^2+2t+3=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$이므로

$f'(t)=0$에서 $t=1$

따라서 $f(t)$는 $t=1$일 때 극소이면서 최소이다.

이때, $l>0$이므로 l^2이 최소이면 l도 최소이다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

즉, l이 최소가 되는 점 Q의 x좌표는 1이다. 답 ①

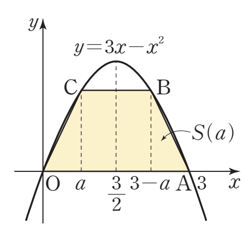
0511

$3x-x^2=0$에서 $x(x-3)=0$이므로

$x=0$ 또는 $x=3 \qquad \therefore\ A(3,\ 0)$

오른쪽 그림과 같이 점 C의 좌표를

$(a,\ 3a-a^2)\left(0<a<\frac{3}{2}\right)$으로 놓으면



$B(3-a,\ 3a-a^2)$ ⋯ ❶

사다리꼴 OABC의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}\times\{3+(3-2a)\}(3a-a^2)$

$\quad=(3-a)(3a-a^2)=a^3-6a^2+9a$ ⋯ ❷

$S'(a)=3a^2-12a+9=3(a-1)(a-3)$

$S'(a)=0$에서 $a=1\ \left(\because\ 0<a<\frac{3}{2}\right)$

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

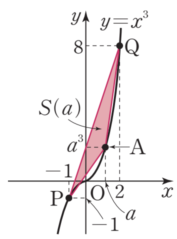
따라서 $S(a)$는 $a=1$일 때 극대이면서 최대이므로 사다리꼴 OABC의 넓이의 최댓값은

$S(1)=1-6+9=4$ … ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 두 점 B, C의 좌표를 한 문자 a로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 사다리꼴 OABC의 넓이 $S(a)$를 a에 대한 함수로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 사다리꼴 OABC의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

0512



두 점 $\mathrm{P}(-1, -1)$, $\mathrm{Q}(2, 8)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-8=\dfrac{-1-8}{-1-2}(x-2)$

$\therefore 3x-y+2=0$

곡선 $y=x^3$ 위를 움직이는 점 A의 좌표를 (a, a^3) $(-1<a<2)$으로 놓으면 점 A와 직선 PQ 사이의 거리는

$\dfrac{|3a-a^3+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{(2-a)(a+1)^2}{\sqrt{10}}$ $(\because -1<a<2)$

또, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-1-2)^2+(-1-8)^2}=3\sqrt{10}$

삼각형 APQ의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\dfrac{1}{2}\times 3\sqrt{10}\times\dfrac{(2-a)(a+1)^2}{\sqrt{10}}=\dfrac{3}{2}(3a-a^3+2)$

$S'(a)=\dfrac{3}{2}(3-3a^2)=-\dfrac{9}{2}(a+1)(a-1)$

$S'(a)=0$에서 $a=1$ $(\because -1<a<2)$

a	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(a)$는 $a=1$일 때 극대이면서 최대이므로 삼각형 APQ의 넓이의 최댓값은

$S(1)=\dfrac{3}{2}(3-1+2)=6$

답 ④

0513

|전략| 잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 x cm로 놓고 상자의 부피를 x에 대한 함수로 나타내어 최댓값을 구한다.

잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 x cm$(0<x<4)$로 놓으면 상자의 밑면의 가로의 길이는 $(15-2x)$ cm, 세로의 길이는 $(8-2x)$ cm이다.

상자의 부피를 $V(x)$ cm^{3}라 하면

$V(x)=x(15-2x)(8-2x)=4x^3-46x^2+120x$

$V'(x)=12x^2-92x+120=4(3x-5)(x-6)$

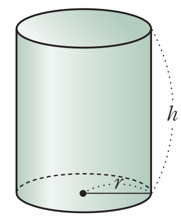
$V'(x)=0$에서 $x=\dfrac{5}{3}$ $(\because 0<x<4)$

x	0	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	4
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=\dfrac{5}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 잘라내는 정사각형의 한 변의 길이는 $\dfrac{5}{3}$ cm이다.

답 $\dfrac{5}{3}$ cm

0514



오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이 r와 높이 h의 합이 일정한 원기둥에 대하여 부피를 $V(r)$라 하면

$r+h=a$ (a는 상수) …… ㉠

$V(r)=\pi r^2h$ …… ㉡

㉠에서 $h=a-r$를 ㉡에 대입하면

$V(r)=\pi r^2(a-r)=-\pi r^3+a\pi r^2$

$V'(r)=-3\pi r^2+2a\pi r=-\pi r(3r-2a)$

$V'(r)=0$에서 $r=\dfrac{2}{3}a$ $(\because 0<r<a)$

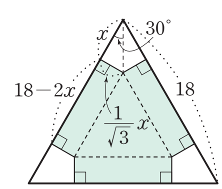
r	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$	a
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(r)$는 $r=\dfrac{2}{3}a$일 때 극대이면서 최대이므로 r와 h의 비는

$r:h=r:(a-r)=\dfrac{2}{3}a:\dfrac{1}{3}a=2:1$

답 ②

0515



오른쪽 그림과 같이 정삼각형의 꼭짓점으로부터 거리가 $x(0<x<9)$인 부분까지 잘라 낸다고 하면 삼각기둥의 밑면은 한 변의 길이가 $18-2x$인 정삼각형이므로 그 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}(18-2x)^2=\sqrt{3}(x-9)^2$

이때, 상자의 높이는 $x\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$이므로 상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\sqrt{3}(x-9)^2\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}x=x(x-9)^2$

$V'(x)=(x-9)^2+x\times 2(x-9)=3(x-3)(x-9)$

$V'(x)=0$에서 $x=3$ $(\because 0<x<9)$

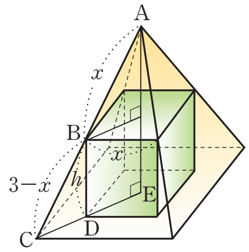
x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	9
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=3$일 때 극대이면서 최대이므로 상자의 부피의 최댓값은

$V(3)=3(3-9)^2=108$ 답 108

0516

오른쪽 그림과 같이 직육면체의 밑면의 한 변의 길이를 $x(0<x<3)$, 높이를 h로 놓으면 $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=3-x$이다.



이때, $\triangle BCD \backsim \triangle ACE$이므로

$\overline{BC}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{AE}$에서

$(3-x):3=h:\frac{3\sqrt{2}}{2}$

밑면의 한 변의 길이가 a, 옆면의 한 모서리의 길이가 b인 정사각뿔의 높이 : $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$

$\therefore h=\frac{\sqrt{2}}{2}(3-x)$

직육면체의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x^2h=\frac{\sqrt{2}}{2}(3x^2-x^3)$

정사각뿔에 내접하는 직육면체의 밑면은 정사각형이다.

$V'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(6x-3x^2)=\frac{3\sqrt{2}}{2}x(2-x)$

$V'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 0<x<3$)

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=2$일 때 극대이면서 최대이므로 직육면체의 부피의 최댓값은

$V(2)=\frac{\sqrt{2}}{2}(12-8)=2\sqrt{2}$ 답 ①

0517

|전략| (수입)=(판매 가격)×(수량)임을 이용하여 수입에 대한 함수식을 세운다.

관람 수입을 $f(x)$라 하면

$$f(x)=xy=x\left(4800-10x-\frac{1}{3}x^2\right)$$
$$=-\frac{1}{3}x^3-10x^2+4800x$$

$f'(x)=-x^2-20x+4800=-(x+80)(x-60)$

$f'(x)=0$에서 $x=60$ ($\because x>0$)

x	0	$\cdots$	60	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=60$일 때 극대이면서 최대이므로 관람 수입을 최대로 하려면 관람료를 6000원으로 정해야 한다. 답 ③

0518

제품 P를 x kg 생산할 때 얻을 수 있는 이익을 $g(x)$라 하면

$$g(x)=1200x-f(x)$$
$$=1200x-(x^3-60x^2+1200x+4500)$$
$$=-x^3+60x^2-4500$$

$g'(x)=-3x^2+120x=-3x(x-40)$

$g'(x)=0$에서 $x=40$ ($\because x>0$)

x	0	$\cdots$	40	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		↗	극대	↘

따라서 $g(x)$는 $x=40$일 때 극대이면서 최대이므로 이익을 최대로 하기 위해서는 제품 P를 하루에 40 kg 생산해야 한다. 답 40 kg

STEP 3 내신 마스터

0519

유형 01 함수의 증가·감소

|전략| 함수 $f(x)$가 $\alpha\le x\le\beta$에서 증가하므로 $f'(x)\ge0$인 해를 구하여 이 범위와 비교한다.

$f(x)=-6x^3+18x+2$에서

$f'(x)=-18x^2+18=-18(x+1)(x-1)$

이때, 함수 $f(x)$는 $\alpha\le x\le\beta$에서 증가하므로 이 범위에서

$f'(x)\ge0$, 즉 $-18(x+1)(x-1)\ge0$, $(x+1)(x-1)\le0$

$\therefore -1\le x\le1$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=1$이므로 $\alpha\beta=-1$ 답 ②

0520

유형 02 삼차함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건

|전략| 삼차함수 $f(x)$가 일대일함수이고 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하기 위한 조건을 구한다.

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$를 만족시키는 함수는 일대일함수이고, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이다.

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+ax^2-x+a$에서

$f'(x)=-x^2+2ax-1$

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-1\le0$, $(a+1)(a-1)\le0$

$\therefore -1\le a\le1$

따라서 자연수 a는 1이다. 답 ①

0521

유형 03 주어진 구간에서 삼차함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건

|전략| 삼차함수 $f(x)$가 열린구간 $(-1, 2)$에서 증가하려면 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 함을 이용한다.

$f(x)=-x^3+3x^2+ax+1$에서

$f'(x)=-3x^2+6x+a$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(-1, 2)$에서 증가하려면 이 구간에서

$f'(x)\ge0$이어야 하므로

$f'(-1)=-3-6+a\ge0$에서 $a\ge9$ ······ ㉠

$f'(2)=-12+12+a\ge0$에서 $a\ge0$ ······ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $a\ge9$이므로 실수 a의 최솟값은 9이다. 답 ⑤

0522

유형 04 함수의 극대·극소

|전략| $f'(x)=0$이 되는 x의 값을 구하고 그 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는지 조사하여 두 점의 좌표를 찾는다.

$f(x)=\frac{3}{4}x^4+5x^3+9x^2$에서

$f'(x)=3x^3+15x^2+18x=3x(x+2)(x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\frac{27}{4}$	↗	8	↘	0	↗

함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=0$에서 극솟값을 가지므로 $\alpha=-3$, $\beta=0$

이고 $f(\alpha)=f(-3)=\frac{27}{4}$, $f(\beta)=f(0)=0$이다.

따라서 두 점 $A\left(-3, \frac{27}{4}\right)$, $B(0, 0)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{0-\frac{27}{4}}{0-(-3)}=-\frac{9}{4}$$

답 ①

0523

유형 05 함수의 극대·극소를 이용한 미정계수의 결정

|전략| $f'(x)=0$이 되는 x의 값을 찾아 극대, 극소를 판정하고, (극댓값)$=-$(극솟값)임을 이용한다.

$f(x)=x^3+3x^2-24x+k$에서

$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$k+80$	↘	$k-28$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 극대이고 극댓값은

$f(-4)=k+80$, $x=2$에서 극소이고 극솟값은 $f(2)=k-28$이다.

이때, 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 그 부호가 서로 다르므로

$k+80=-(k-28)$, $2k=-52$ $\quad\therefore k=-26$ 답 ①

0524

유형 05 함수의 극대·극소를 이용한 미정계수의 결정

|전략| 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고 $f(0)=4$이므로 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값 중 0이 아닌 값에서 극솟값을 가짐을 이용한다.

조건 (가)에서 $f(-x)=f(x)$이므로 $a=0$, $c=0$

즉, $f(x)=x^4+bx^2+4$

$f'(x)=4x^3+2bx=2x(2x^2+b)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2}}$

한편, $f(0)=4$이므로 조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2}}$에서 극솟값 0을 가진다.

$\therefore f\left(\pm\sqrt{-\frac{b}{2}}\right)=\frac{b^2}{4}+b\times\left(-\frac{b}{2}\right)+4=0$

$-\frac{b^2}{4}=-4$, $b^2=16$ $\quad\therefore b=-4$ $(\because b<0)$

따라서 $f(x)=x^4-4x^2+4$이므로 $f(2)=4$ 답 ④

0525

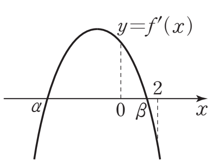
유형 07 삼차함수가 주어진 구간에서 극값을 가질 조건

|전략| 삼차함수 $f(x)$가 $0<x<2$에서 극댓값을 갖고, $x<0$에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근 중 한 근은 $0<x<2$에 있고, 다른 한 근은 $x<0$에 있어야 함을 이용한다.

$f(x)=-x^3+ax^2+3ax+8$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+3a$

함수 $f(x)$가 $0<x<2$에서 극댓값을 갖고, $x<0$에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근 중 한 근은 $0<x<2$에 있고, 다른 한 근은 $x<0$에 있어야 하므로 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$\alpha<0<\beta<2$이어야 하므로

(i) $f'(0)=3a>0$에서 $a>0$

(ii) $f'(2)=-12+4a+3a<0$에서 $-12+7a<0$

$\quad\therefore a<\frac{12}{7}$

(i), (ii)에서 $0<a<\frac{12}{7}$ 답 ③

0526

유형 08 사차함수가 극값을 갖거나 갖지 않을 조건

|전략| 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 이용한다.

$f(x)=x^4-4x^3+2ax^2$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+4ax=4x(x^2-3x+a)$

함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-3x+a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-3x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$a\neq0,\ D=9-4a>0$에서

$a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{4}$

따라서 실수 a의 값이 될 수 있는 것은 ① 1이다. 답 ①

0527

유형 10 도함수의 그래프를 이용한 함수의 극대·극소 (2)

| 전략 | 주어진 조건과 도함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌면 극대 또는 극소라는 점을 이용하여 함수 $f(x)$를 구한다.

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 1, 3이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq0$, b, c, d는 상수)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f(0)=1$이므로 $f(0)=d=1$

$f'(0)=3$이므로 $f'(0)=c=3$

또, $f'(1)=0, f'(3)=0$이므로

$f'(1)=3a+2b+c=3a+2b+3=0$ ······ ㉠

$f'(3)=27a+6b+c=27a+6b+3=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{3}, b=-2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$이므로 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{1}{\frac{1}{3}}=-3$ 답 ③

0528

유형 11 도함수의 그래프를 이용한 다항함수의 해석 (1)

| 전략 | $f'(x)$의 부호와 그 변화를 보고 $y=f(x)$의 그래프를 해석해 본다.

① 열린구간 $(-2, -1)$에서 $f'(x)<0$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 감소한다. (참)

② 열린구간 $(1, 2)$에서 $f'(x)>0$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 증가한다. (참)

③ $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극소이다. (참)

④ $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이다. (참)

⑤ $x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0529

유형 16 함수의 최대·최소를 이용한 미정계수의 결정

| 전략 | 함수 $f(x)$의 증감표를 작성하고 최댓값을 a에 대한 식으로 나타낸 다음 주어진 조건을 이용하여 a의 값을 구한다.

$f(x)=2x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	a	↘	$a-1$	↗	$a+27$

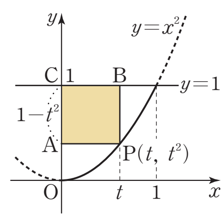
따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 $x=3$일 때 최댓값 $a+27$을 가지므로

$a+27=10$ $\therefore a=-17$ 답 ②

0530

유형 17 최대·최소의 활용 – 길이, 넓이

| 전략 | 점 P의 좌표를 (t, t^2)으로 놓고 직사각형 APBC의 넓이를 t에 대한 함수로 나타내어 최댓값을 구한다.



직사각형 APBC의 넓이를 $S(t)$라 하자.

점 P의 좌표를 $(t, t^2)(0<t<1)$으로 놓으면

$S(t)=t(1-t^2)=-t^3+t$

$S'(t)=-3t^2+1$

$=-3\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$S'(t)=0$에서 $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ($\because$ $0<t<1$)

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(t)$는 $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$일 때 극대이면서 최대이므로 직사각형 APBC의 넓이의 최댓값은

$S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 답 ②

0531

유형 19 최대·최소의 활용 – 실생활

| 전략 | (이익)=(판매 가격)×(수량)−(생산 비용)임을 이용하여 이익에 대한 함수식을 세운다.

호두 파이의 가격이 $(1000+10x)$원일 때 판매량은 $(21600-x^2)$개이므로 그때의 이익을 $f(x)$원이라 하면

$f(x)=(1000+10x)(21600-x^2)$
$-\{400000+40000+100(21600-x^2)\}$
$=-10x^3-900x^2+216000x+19000000$
$f'(x)=-30x^2-1800x+216000=-30(x+120)(x-60)$
$f'(x)=0$에서 $x=60$ ($\because x>0$)

x	0	$\cdots$	60	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=60$일 때 극대이면서 최대이므로 이익이 최대가 되도록 하는 가격은
$1000+10\times60=1600$(원)

답 ④

0532

유형 01 함수의 증가·감소

|전략| 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 증가하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 $-1, 2$임을 이용한다.

$f(x)=-x^3+ax^2+bx-2$에서
$f'(x)=-3x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 증가하는 구간이 $[-1, 2]$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 $-1, 2$이다. ··· ❶
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-1+2=\frac{2a}{3}$, $-1\times2=-\frac{b}{3}$
$\therefore a=\frac{3}{2}, b=6$ ··· ❷
따라서 $f(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x-2$이므로
$f(2)=-8+6+12-2=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	배점
❶ 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 $-1, 2$임을 알 수 있다.	2점
❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	2점

0533

유형 06 삼차함수가 극값을 갖거나 갖지 않을 조건

|전략| 삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 갖고, $g(x)$는 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근, $g'(x)=0$은 중근 또는 허근을 가져야 함을 이용한다.

$f(x)=x^3-ax^2+(a^2-2a)x$에서
$f'(x)=3x^2-2ax+a^2-2a$
함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$\frac{D_1}{4}=a^2-3(a^2-2a)>0$, $a^2-3a<0$
$a(a-3)<0$ $\quad\therefore 0<a<3$ ······ ㉠ ··· ❶

또, $g(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(5a-4)x+2$에서
$g'(x)=x^2+2ax+5a-4$
함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $g'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $g'(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면
$\frac{D_2}{4}=a^2-(5a-4)\le0$, $(a-1)(a-4)\le0$
$\therefore 1\le a\le4$ ······ ㉡ ··· ❷
㉠, ㉡의 공통 범위는 $1\le a<3$이므로 정수 a의 값은 1, 2이다. ··· ❸

답 1, 2

채점 기준	배점
❶ 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 조건을 이용하여 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점
❷ 함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않을 조건을 이용하여 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점
❸ 정수 a의 값을 구할 수 있다.	2점

0534

유형 15 치환을 이용한 함수의 최대·최소

|전략| $g(x)=t$로 치환하여 t의 값의 범위를 구한 다음 그 범위에서 $(f\circ g)(x)=f(t)$의 최댓값을 구한다.

$g(x)=t$로 놓으면 $t=x^2+4x+2=(x+2)^2-2$
$\therefore t\ge-2$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=-t^3+12t$ ··· ❶
$f'(t)=-3t^2+12=-3(t+2)(t-2)$
$f'(t)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=2$ ··· ❷

t	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	-16	↗	16	↘

따라서 함수 $f(t)$는 $t=2$에서 최댓값 16을 가지므로 $(f\circ g)(x)$의 최댓값은 16이다. ··· ❸

답 16

채점 기준	배점
❶ $g(x)=t$로 놓고 $(f\circ g)(x)$를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	2점
❷ $f'(t)=0$을 만족시키는 t의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $(f\circ g)(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	3점

0535

유형 05 함수의 극대·극소를 이용한 미정계수의 결정

|전략| $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓고, 주어진 조건을 이용하여 극댓값과 극솟값의 차를 구한다.

(1) 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가지므로
$f'(3)=0$

(2) $f'(1-x)=f'(1+x)$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(-1)=f'(3)$

이때, $f'(3)=0$이므로 $f'(-1)=0$

(3) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이때, 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x=-1$, $x=3$을 근으로 가지므로

$f'(x)=3x^2+2ax+b=3(x+1)(x-3)$

$3x^2+2ax+b=3x^2-6x-9$

$\therefore 2a=-6, b=-9 \qquad \therefore a=-3, b=-9$

(4) $f(x)=x^3-3x^2-9x+c$이고, $x=-1$일 때 극댓값, $x=3$일 때 극솟값을 가지므로 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는

$f(-1)-f(3)=(5+c)-(-27+c)=32$

답 (1) 0 (2) 0 (3) $a=-3, b=-9$ (4) 32

채점 기준	배점
(1) $f'(3)$의 값을 구할 수 있다.	2점
(2) $f'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	3점
(3) a, b의 값을 구할 수 있다.	4점
(4) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차를 구할 수 있다.	3점

0536

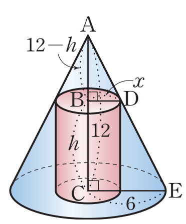
유형 **18** 최대·최소의 활용 – 부피

| 전략 | 삼각형의 닮음을 이용하여 원기둥의 부피를 한 문자에 대한 함수로 나타내어 최댓값을 구한다.

(1) 오른쪽 그림에서 $\triangle ABD \backsim \triangle ACE$이므로 $\overline{BD}:\overline{AB}=\overline{CE}:\overline{AC}$

$x:(12-h)=6:12$

$12-h=2x \qquad \therefore h=12-2x$



(2) $V(x)=\pi x^2 h$

$=\pi x^2(12-2x)$

$=2\pi(6x^2-x^3)$

(3) $V'(x)=2\pi(12x-3x^2)$

$=6\pi x(4-x)$

$V'(x)=0$에서 $x=4$ ($\because 0<x<6$)

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=4$일 때 극대이면서 최대이므로 원기둥의 부피의 최댓값은 $V(4)=2\pi(96-64)=64\pi$

답 (1) $h=12-2x$ (2) $V(x)=2\pi(6x^2-x^3)$ (3) 64π

채점 기준	배점
(1) h를 x에 대한 함수로 나타낼 수 있다.	3점
(2) $V(x)$를 x에 대한 함수로 나타낼 수 있다.	3점
(3) 원기둥의 부피의 최댓값을 구할 수 있다.	4점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0537

| 전략 | 함수 $g(t)$가 열린구간 $(0, 2)$에서 증가하려면 이 구간의 모든 t에 대하여 $g'(t)\ge 0$이어야 함을 이용한다.

$f(x)=x^4-(a+2)x^2+ax$에서

$f'(x)=4x^3-2(a+2)x+a$

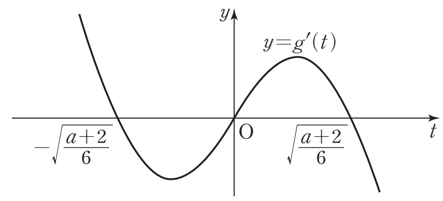
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-\{t^4-(a+2)t^2+at\}=\{4t^3-2(a+2)t+a\}(x-t)$

따라서 이 접선의 y절편 $g(t)$는

$g(t)=-3t^4+(a+2)t^2$

$g'(t)=-12t^3+2(a+2)t=-2t\{6t^2-(a+2)\}$



함수 $g(t)$가 열린구간 $(0, 2)$에서 증가하려면 $0<t<2$에서 $g'(t)\ge 0$이어야 하므로

$g'(2)=-12\times 2^3+2(a+2)\times 2\ge 0$에서 $a\ge 22$

따라서 a의 최솟값은 22이다.

답 ②

0538

| 전략 | 함수 $g(x)$의 증감표를 작성하여 $y=g(x)$의 그래프를 해석해 본다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$
x의 부호	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$의 부호	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g'(x)$의 부호	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$의 증감	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

ㄱ. $g(x)$는 열린구간 $(a, 0)$에서 증가하고, 열린구간 $(0, b)$에서 감소한다. (거짓)

ㄴ. $g(x)$는 $x=b$에서 극솟값을 가진다. (참)

ㄷ. $g(x)$는 $x=a$, $x=0$, $x=b$, $x=c$에서 극값을 가지므로 4개의 극값을 가진다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

0539

| 전략 | 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 1, 3이라는 것과 함수의 그래프와 직선의 교점을 이용하여 a, b, c의 값을 구한다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f(x)$가 $x=1$에서 극대, $x=3$에서 극소이므로

$f'(x)=3(x-1)(x-3)$

$=3x^2-12x+9$ …… ㉡

㉠=㉡에서 $a=-6$, $b=9$

$\therefore f(x)=x^3-6x^2+9x+c$ …… ㉢

또, 극대가 되는 점과 극소가 되는 점을 연결한 직선의 기울기를 m이라 하면

$m=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{c-(c+4)}{2}=-2$

따라서 극대가 되는 점과 극소가 되는 점을 연결한 직선의 방정식은

$y=-2x+10$ …… ㉣

이때, 점 $(1, 8)$이 ㉢, ㉣의 교점 중 하나이므로 이것을 ㉢에 대입하면

$c+4=8 \qquad \therefore c=4$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(-6)^2+9^2+4^2=133$

답 ④

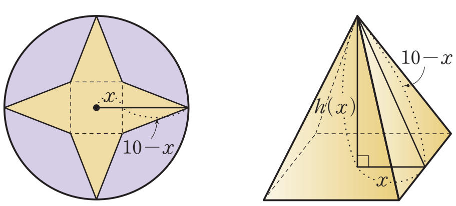
0540

|전략| 정사각뿔의 밑면인 정사각형의 한 변의 길이를 $2x$로 놓고 정사각뿔의 부피를 x에 대한 식으로 나타내어 최댓값을 구한다.

다음 그림과 같이 정사각뿔의 밑면인 정사각형의 한 변의 길이를 $2x$ $(0<x<10)$, 높이를 $h(x)$로 놓으면

$h(x)=\sqrt{(10-x)^2-x^2}$

$=\sqrt{100-20x}$



정사각뿔의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\dfrac{1}{3}\times(2x)^2\times h(x)$

$=\dfrac{4}{3}\sqrt{100x^4-20x^5}$

$g(x)=100x^4-20x^5$으로 놓으면

$g'(x)=400x^3-100x^4$

$=100x^3(4-x)$

$g'(x)=0$에서 $x=4$ ($\because 0<x<10$)

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $g(x)$는 $x=4$일 때 극대이면서 최대이고 $g(x)$가 최대일 때 $V(x)$가 최대이므로 정사각뿔의 부피가 최대일 때의 높이는

$h(4)=\sqrt{100-80}=2\sqrt{5}$

답 ③

본책 96~109쪽

6 | 도함수의 활용 (3)

STEP 1 개념 마스터

0541

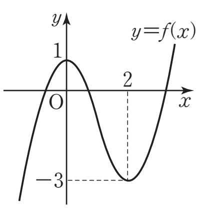
$f(x)=x^3-3x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

답 3



0542

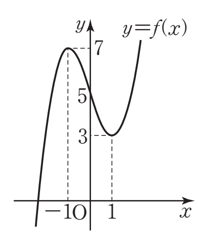
$f(x)=x^3-3x+5$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

답 1



0543

$f(x)=x^4-2x^2-3$으로 놓으면

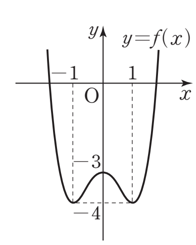
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

답 2



0544

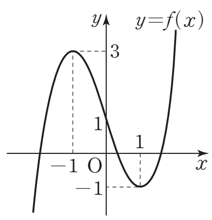
$x^3=3x-1$에서 $x^3-3x+1=0$

$f(x)=x^3-3x+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. 답 3



0545

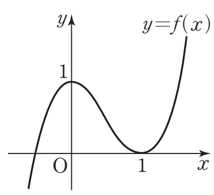
$2x^3+1=3x^2$에서 $2x^3-3x^2+1=0$

$f(x)=2x^3-3x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 답 2



0546

$2x^4-4x^3+3=-x^4+4$에서 $3x^4-4x^3-1=0$

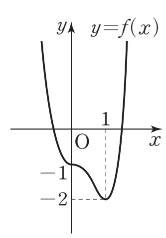
$f(x)=3x^4-4x^3-1$로 놓으면

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↘	-2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 답 2



0547

$f(x)=x^3-6x^2+9x-3$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

이때, $\underbrace{f(1)}_{\text{극댓값}}\overbrace{f(3)}^{\text{극솟값}}=1\times(-3)=-3<0$이므로 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 가진다. 답 서로 다른 세 실근

0548

$f(x)=-2x^3-3x^2+12x-7$로 놓으면

$f'(x)=-6x^2-6x+12=-6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

이때, $\underbrace{f(-2)}_{\text{극솟값}}\overbrace{f(1)}^{\text{극댓값}}=(-27)\times0=0$이므로 주어진 방정식은 한 실근과 중근을 가진다. 답 한 실근과 중근

0549

$f(x)=x^3+6x^2+9x-k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+3)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$

(1) 삼차방정식이 한 실근과 중근을 가지려면

$\underbrace{f(-3)}_{\text{극댓값}}\overbrace{f(-1)}^{\text{극솟값}}=0$이어야 하므로

$-k(-4-k)=0$, $k(4+k)=0$ $\quad\therefore k=-4$ 또는 $k=0$

(2) 삼차방정식이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$f(-3)f(-1)>0$이어야 하므로

$-k(-4-k)>0$, $k(4+k)>0$ $\quad\therefore k<-4$ 또는 $k>0$

답 (1) $k=-4$ 또는 $k=0$ (2) $k<-4$ 또는 $k>0$

0550

$x^3+16\geq12x$에서 $x^3-12x+16\geq0$

$f(x)=x^3-12x+16$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{(가)\ 2}$ $(\because x\geq0)$

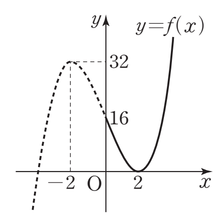
x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	16	↘	0	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x\geq0$일 때 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $\boxed{(나)\ 0}$을 가지므로

$f(x)=x^3-12x+16\geq0$이다.

따라서 $x\geq0$일 때, 부등식

$x^3+16\geq12x$가 성립한다. 답 (가) 2 (나) 0



0551

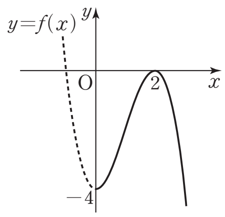
$f(x)=-x^3+3x^2-4$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	-4	↗	0	↘

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x\geq0$일 때 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 0을 가지므로
$f(x)=-x^3+3x^2-4\leq0$이다.
따라서 $x\geq0$일 때, 부등식
$-x^3+3x^2-4\leq0$이 성립한다.



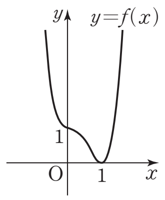
답 풀이 참조

0552

$f(x)=3x^4-4x^3+1$로 놓으면
$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↘	0	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,
$f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 0을 가지므로
$f(x)=3x^4-4x^3+1\geq0$이다.
따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식
$3x^4-4x^3+1\geq0$이 성립한다.



답 풀이 참조

0553

$v=\dfrac{dx}{dt}=6t-7$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6$이므로 $t=3$에서의 점 P의 속도와 가속도는
$v=6\times3-7=11$, $a=6$

답 $v=11$, $a=6$

0554

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-2$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6t$이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는
$v=3\times1^2-2=1$, $a=6\times1=6$

답 $v=1$, $a=6$

0555

$v=\dfrac{dx}{dt}=-6t^2+3$, $a=\dfrac{dv}{dt}=-12t$이므로 $t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는
$v=-6\times2^2+3=-21$, $a=-12\times2=-24$

답 $v=-21$, $a=-24$

0556

$\dfrac{dl}{dt}=3t^2+4t+1$이므로 $t=2$에서의 고무줄의 길이의 변화율은
$3\times2^2+4\times2+1=21$

답 21

0557

정사각형의 넓이를 S라 하면
$S=(1+t)^2 \qquad \therefore \dfrac{dS}{dt}=2(1+t)$
따라서 $t=3$에서의 정사각형의 넓이의 변화율은
$2(1+3)=8$

답 8

0558

구의 부피를 V라 하면
$V=\dfrac{4}{3}\pi(2t)^3=\dfrac{32}{3}\pi t^3 \qquad \therefore \dfrac{dV}{dt}=32\pi t^2$
따라서 $t=2$에서의 구의 부피의 변화율은
$32\pi\times2^2=128\pi$

답 128π

STEP 2 유형 마스터

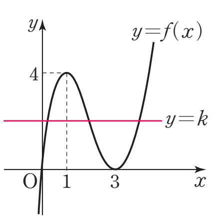
0559

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 3이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구한다.

$x^3-6x^2+9x-k=0$에서 $x^3-6x^2+9x=k$
$f(x)=x^3-6x^2+9x$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로
$0<k<4$
따라서 $a=0$, $b=4$이므로 $b-a=4$



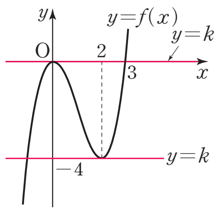
답 ④

0560

$f(x)=x^3-3x^2$으로 놓으면
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로



$k=0$ 또는 $k=-4$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 -4이다. 답 ①

0561

$x^4-4x^3-2x^2+12x-a=0$에서

$x^4-4x^3-2x^2+12x=a$

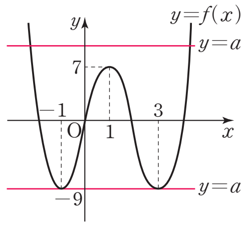
$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=4(x+1)(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-9	↗	7	↘	-9	↗

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로



$a=-9$ 또는 $a>7$

따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 -9이다. 답 -9

0562

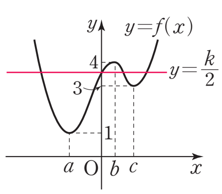
$2f(x)-k=0$에서 $f(x)=\frac{k}{2}$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 a, b, c이므로

$f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=c$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗	4	↘	3	↗

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{k}{2}$가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로



$3<\frac{k}{2}<4$

$\therefore 6<k<8$ 답 ④

0563

| 전략 | 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖기 위해서는 삼차함수 $f(x)$의 (극댓값)×(극솟값)<0이어야 함을 이용한다.

$f(x)=2x^3-6x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(0)f(2)<0$이어야 하므로

$k(k-8)<0 \qquad \therefore 0<k<8$

따라서 정수 k는 $1, 2, 3, \cdots, 7$의 7개이다. 답 ③

다른 풀이 $2x^3-6x^2+k=0$에서 $-2x^3+6x^2=k$

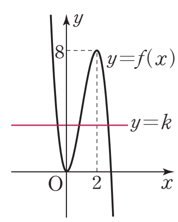
$f(x)=-2x^3+6x^2$으로 놓으면

$f'(x)=-6x^2+12x=-6x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	8	↘

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로



$0<k<8$

따라서 정수 k는 $1, 2, 3, \cdots, 7$의 7개이다.

0564

$-2x^3+3x^2+12x=a$에서 $2x^3-3x^2-12x+a=0$

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+a$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-1)f(2)=0$이어야 하므로

$(a+7)(a-20)=0 \qquad \therefore a=-7$ 또는 $a=20$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-7+20=13$ 답 ①

0565

$f(x)=x^3-3mx^2+4m$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6mx=3x(x-2m)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2m$ ⋯ ❶

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$f(0)f(2m)>0$이어야 하므로

$4m(-4m^3+4m)>0$

$-16m^2(m+1)(m-1)>0$

$m^2(m+1)(m-1)<0$

이때, $m^2(m+1)>0$ ($\because m>0$)이므로

$m-1<0$, 즉 $m<1$ ··· ❷

따라서 구하는 양수 m의 값의 범위는

$0<m<1$ ··· ❸

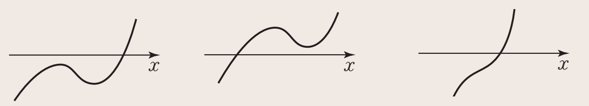
답 $0<m<1$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 삼차방정식의 근의 판별을 이용하여 방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖기 위한 조건을 구할 수 있다.	50 %
❸ 양수 m의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

Lecture

삼차함수의 그래프의 개형

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a>0)$에 대하여 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가질 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



[극값을 갖는 경우] [극값을 갖지 않는 경우]

0566

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=0$에서

$f(x)-a=0$, 즉 $x^3-3x-a=0$

$h(x)=x^3-3x-a$로 놓으면

$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $h(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$h(-1)h(1)<0$이어야 하므로

$(2-a)(-2-a)<0$, $(a-2)(a+2)<0$

$\therefore -2<a<2$

따라서 구하는 정수 a는 $-1, 0, 1$의 3개이다. 답 ④

0567

$y=x^3-3x^2-24x$의 그래프를 y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동하면

$y=x^3-3x^2-24x-k$, 즉 $g(x)=x^3-3x^2-24x-k$

$g'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$

삼차방정식 $g(x)=0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면

$g(-2)g(4)>0$이어야 하므로

$(28-k)(-80-k)>0$, $(k-28)(k+80)>0$

$\therefore k<-80$ 또는 $k>28$

따라서 자연수 k의 최솟값은 29이다. 답 29

0568

$f(x)=-1$, 즉 $\frac{1}{3}mx^3-\frac{1}{2}nx^2=-1$에서 $\frac{1}{3}mx^3-\frac{1}{2}nx^2+1=0$

$g(x)=\frac{1}{3}mx^3-\frac{1}{2}nx^2+1$로 놓으면

$g'(x)=mx^2-nx=x(mx-n)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{n}{m}$

그런데 m, n은 자연수이므로 $\frac{n}{m}\neq 0$이다.

삼차방정식 $g(x)=0$이 두 개의 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면

$g(0)g\left(\frac{n}{m}\right)=0$이어야 하므로

$1\times\left(-\frac{n^3}{6m^2}+1\right)=0$, $\frac{n^3}{6m^2}=1$

$\therefore n^3=6m^2$

이때, m, n은 6 이하의 자연수이므로 이 식을 만족시키는 m, n의 값은

$m=n=6$ $\quad\therefore m+n=12$ 답 ⑤

0569

|전략| 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수와 같음을 이용한다.

주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x^3+3x^2-6x-2=3x+k$, 즉 $x^3+3x^2-9x-2-k=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+3x^2-9x-2-k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-3)f(1)<0$이어야 하므로

$(25-k)(-7-k)<0$, $(k-25)(k+7)<0$

$\therefore -7<k<25$

따라서 음의 정수 k는 $-6, -5, -4, -3, -2, -1$의 6개이다.

답 ③

0570

주어진 두 곡선이 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $x^3-5x^2+4x=x^2-5x+4a$, 즉 $x^3-6x^2+9x-4a=0$이 한 실근과 두 허근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-6x^2+9x-4a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면 $f(1)f(3)>0$이어야 하므로

$(4-4a)\times(-4a)>0$, $a(a-1)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>1$

따라서 자연수 a의 최솟값은 2이다. 답 ②

0571

두 점 A$(-2, -1)$, B$(1, -10)$을 연결한 직선 AB의 방정식은

$y-(-1)=\dfrac{-10-(-1)}{1-(-2)}\{x-(-2)\}$

$\therefore y=-3x-7\ (-2\le x\le 1)$

곡선 $y=x^3-3x^2-12x-a$와 선분 AB가 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $x^3-3x^2-12x-a=-3x-7$,

즉, $x^3-3x^2-9x+7-a=0$이 $-2\le x\le 1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

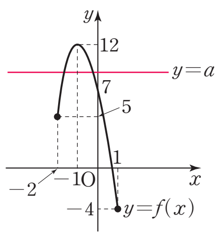
$f(x)=x^3-3x^2-9x+7$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because -2\le x\le 1$)

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	$\nearrow$	12	$\searrow$	-4

이때, $-2\le x\le 1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 방정식 $x^3-3x^2-9x+7-a=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로



$5\le a<12$

답 ④

0572

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수가 되도록 하는 정수 a의 개수를 구한다.

$x^3-3x-a+1=0$에서 $x^3-3x+1=a$

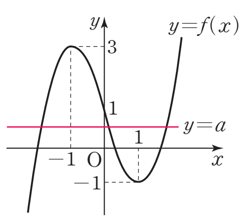
$f(x)=x^3-3x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수가 되는 실수 a의 값의 범위는



$-1<a<1$

따라서 정수 a는 0의 1개이다.

답 1

0573

$x^3-x^2+a=2x^2+9x$에서 $-x^3+3x^2+9x=a$

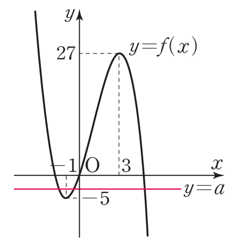
$f(x)=-x^3+3x^2+9x$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	27	$\searrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수가 되는 실수 a의 값의 범위는



$-5<a<0$

답 $-5<a<0$

0574

$4x^3-3x-a=0$에서 $4x^3-3x=a$

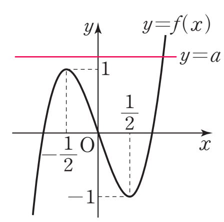
$f(x)=4x^3-3x$로 놓으면

$f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 오직 한 개의 양수가 되는 실수 a의 값의 범위는



$a>1$

따라서 정수 a의 최솟값은 2이다.

답 2

0575

$3x^4+4x^3-12x^2+2-k=0$에서 $3x^4+4x^3-12x^2+2=k$

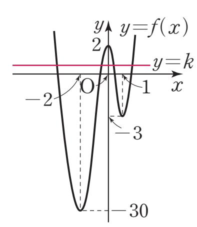
$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-30	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수가 되는 실수 k의 값의 범위는



$-3<k<2$

따라서 정수 k는 -2, -1, 0, 1이므로 그 합은
$-2+(-1)+0+1=-2$ 답 -2

0576

| 전략 | $1<x<5$에서 함수 $f(x)$가 감소하므로 $f(5)\geq 0$인 실수 k의 최댓값을 구한다.

$x^3-9x^2>-15x+k$에서 $x^3-9x^2+15x-k>0$
$f(x)=x^3-9x^2+15x-k$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$
$1<x<5$일 때, $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 $1<x<5$에서 감소한다.
그러므로 $1<x<5$일 때, $f(x)>0$이려면 $f(5)\geq 0$이어야 하므로
$f(5)=-25-k\geq 0 \quad \therefore k\leq -25$
따라서 실수 k의 최댓값은 -25이다. 답 ②

0577

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+a$로 놓으면
$f'(x)=-x^2+4x=-x(x-4)$
$1\leq x\leq 3$일 때, $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $1\leq x\leq 3$에서 증가한다.
그러므로 $1\leq x\leq 3$일 때, $f(x)\leq 0$이려면 $f(3)\leq 0$이어야 하므로
$f(3)=9+a\leq 0 \quad \therefore a\leq -9$ 답 ①

0578

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면
$h(x)=x^3+a-(x^2+x+b)=x^3-x^2-x+a-b$
$h'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$
$x>2$일 때, $h'(x)>0$이므로 함수 $h(x)$는 $x>2$에서 증가한다.
그러므로 $x>2$일 때, $h(x)>0$이려면 $h(2)\geq 0$이어야 하므로
$h(2)=2+a-b\geq 0 \quad \therefore a-b\geq -2$
따라서 $a-b$의 최솟값은 -2이다. 답 ③

0579

| 전략 | $x>0$에서 ($f(x)$의 최솟값)≥ 0인 실수 k의 최댓값을 구한다.

$2x^3+3x^2\geq 12x+k$에서 $2x^3+3x^2-12x-k\geq 0$
$f(x)=2x^3+3x^2-12x-k$로 놓으면
$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-7-k$	$\nearrow$

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최소이므로 최솟값은
$f(1)=-7-k$
$x>0$일 때, $f(x)\geq 0$이려면 $f(1)\geq 0$이어야 하므로
$-7-k\geq 0 \quad \therefore k\leq -7$
따라서 실수 k의 최댓값은 -7이다. 답 ①

0580

$4x^3+1<3x^2-k$에서 $4x^3-3x^2+1+k<0$
$f(x)=4x^3-3x^2+1+k$로 놓으면
$f'(x)=12x^2-6x=6x(2x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-6+k$	$\nearrow$	$1+k$	$\searrow$	$\frac{3}{4}+k$	$\nearrow$	$2+k$

$-1\leq x\leq 1$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최대이므로 최댓값은
$f(1)=2+k$
$-1\leq x\leq 1$일 때, $f(x)<0$이려면 $f(1)<0$이어야 하므로
$2+k<0 \quad \therefore k<-2$ 답 $k<-2$

0581

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면
$h(x)=x^3+x^2-2x-(x^2+x+k)=x^3-3x-k$
$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$h'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$) ⋯ ❶

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$	$-2-k$	$\nearrow$

임의의 양수 x에 대하여, 즉 $x>0$일 때 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 최소이므로 최솟값은 $h(1)=-2-k$ ⋯ ❷
임의의 양수 x에 대하여 $h(x)\geq 0$이려면 $h(1)\geq 0$이어야 하므로
$-2-k\geq 0 \quad \therefore k\leq -2$ ⋯ ❸
따라서 실수 k의 최댓값은 -2이다. ⋯ ❹
답 -2

채점 기준	비율
❶ $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고, $h'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $x>0$일 때 함수 $h(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ k의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

0582

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면
$h(x)=x^3-3kx^2+6kx-(-x^3+3x^2+k-3)$
$\quad =2x^3-3(k+1)x^2+6kx-k+3$

$h'(x)=6x^2-6(k+1)x+6k=6(x-1)(x-k)$
$h'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=k$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	k	$\cdots$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$3-k$	↗	$2+2k$	↘	$(k^2+1)(3-k)$	↗

$x\ge0$일 때, 함수 $h(x)$는 $x=0$ 또는 $x=k$에서 최소이고, $x\ge0$일 때 $h(x)>0$이려면 $h(0)>0$ 또는 $h(k)>0$이어야 하므로
$3-k>0$ 또는 $(k^2+1)(3-k)>0$
$\therefore k<3$ ($\because k^2+1>2$)
이때, $k>1$이므로 $1<k<3$
따라서 정수 k는 2의 1개이다. 답 1

Lecture

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여
① 어떤 구간에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있다.
⇨ 그 구간에서 항상 $f(x)>g(x)$이다.
② 어떤 구간에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있다.
⇨ 그 구간에서 항상 $f(x)<g(x)$이다.

0583

|전략| ($f(x)$의 최솟값)≥0인 정수 k의 개수를 구한다.

(i) $k=0$일 때, 주어진 부등식은 항상 성립한다.
(ii) $k\ne0$일 때,
$f(x)=x^4-4k^3x+3$으로 놓으면
$f'(x)=4x^3-4k^3=4(x-k)(x^2+kx+k^2)$
이때, $x^2+kx+k^2=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2>0$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=k$

x	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-3k^4+3$	↗

함수 $f(x)$는 $x=k$일 때 최소이므로 최솟값은
$f(k)=-3k^4+3$
모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge0$이려면 $f(k)\ge0$이어야 하므로
$-3k^4+3\ge0$, $k^4-1\le0$
$(k^2+1)(k+1)(k-1)\le0$
$(k+1)(k-1)\le0$ ($\because k^2+1>0$)
$\therefore -1\le k<0$ 또는 $0<k\le1$ ($\because k\ne0$)
(i), (ii)에서 $-1\le k\le1$이므로 구하는 정수 k는 -1, 0, 1의 3개이다.
답 3

0584

$x^4-x^2-9x>5x^2-x-a$에서 $x^4-6x^2-8x+a>0$
$f(x)=x^4-6x^2-8x+a$로 놓으면
$f'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$3+a$	↘	$-24+a$	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최소이므로 최솟값은
$f(2)=-24+a$
모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이려면 $f(2)>0$이어야 하므로
$-24+a>0$ $\therefore a>24$
따라서 정수 a의 최솟값은 25이다. 답 25

0585

$f(x)=x^4+2ax^2-4(a+1)x+a^2$으로 놓으면
$f'(x)=4x^3+4ax-4(a+1)=4(x-1)(x^2+x+a+1)$
이때, $a>0$이므로 모든 실수 x에 대하여
$x^2+x+a+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{3}{4}>0$이다.
즉, $f'(x)=0$에서 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	a^2-2a-3	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최소이므로 최솟값은
$f(1)=a^2-2a-3$
모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이려면 $f(1)>0$이어야 하므로
$a^2-2a-3>0$, $(a+1)(a-3)>0$
$\therefore a>3$ ($\because a>0$) 답 $a>3$

0586

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>g(x_2)$가 성립하려면 $f(x)$의 최솟값이 $g(x)$의 최댓값보다 커야 한다.
$f(x)=3x^4-4x^3+16$에서 $f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	16	↘	15	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최소이므로 최솟값은
$f(1)=15$
또, $g(x)=-2x^2+12x+k=-2(x-3)^2+k+18$이므로 함수 $g(x)$는 $x=3$일 때 최대이고 최댓값은
$g(3)=k+18$
이때, $f(1)>g(3)$이어야 하므로
$15>k+18$ $\therefore k<-3$ 답 $k<-3$

0587

|전략| 수직선 위를 움직이는 점 P가 원점을 지나는 순간의 위치는 0임을 이용하여 속도를 구한다.

점 P가 원점을 지나는 순간은 $x=0$일 때이므로

$t^3-4t^2+3t=0$에서 $t(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$ ($\because t>0$)

점 P가 출발 후 마지막으로 원점을 지나는 순간은 $t=3$일 때이고, 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-8t+3$$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 속도는

$v=3\times3^2-8\times3+3=6$ 답 6

0588

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-18t+34$$

$3t^2-18t+34=10$에서 $3t^2-18t+24=0$

$3(t-2)(t-4)=0\qquad\therefore t=2$ 또는 $t=4$

점 P의 속도가 처음으로 10이 되는 순간은 $t=2$일 때이고, 시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면

$$a=\frac{dv}{dt}=6t-18$$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는

$a=6\times2-18=-6$ 답 -6

0589

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=P'(t)=t^2+4$, $v_Q=Q'(t)=4t$ ··· ❶

이때 두 점 P, Q의 속도가 같아지려면 $v_P=v_Q$이므로

$t^2+4=4t$, $(t-2)^2=0\qquad\therefore t=2$ ··· ❷

$t=2$에서의 두 점 P, Q의 위치는

$P(2)=\frac{1}{3}\times2^3+4\times2-\frac{2}{3}=10$, $Q(2)=2\times2^2-10=-2$

따라서 구하는 두 점 P, Q 사이의 거리는

$10-(-2)=12$ ··· ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q의 속도를 구할 수 있다.	40 %
❷ 속도가 같아지는 순간의 시각을 구할 수 있다.	30 %
❸ 두 점 P, Q 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %

0590

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=P'(t)=2t^2-8t+6$, $v_Q=Q'(t)=k$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 때가 두 번 있으려면 $t>0$에서 $v_P=v_Q$를 만족하는 시각 t의 값이 2개 존재해야 한다.

즉, 방정식 $v_P-v_Q=2t^2-8t+6-k=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) t에 대한 이차방정식 $2t^2-8t+6-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=16-2(6-k)>0\qquad\therefore k>-2$

(ii) (두 근의 합)$=4>0$ (성립)

(iii) (두 근의 곱)$=\frac{6-k}{2}>0$에서 $k<6$

(i), (ii), (iii)에서 $-2<k<6$ 답 $-2<k<6$

0591

|전략| $1\le t\le4$에서 $|v|$의 최댓값을 구한다.

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-12t+18=3(t-2)^2+6$$

$1\le t\le4$에서 $6\le v\le18$이므로

$6\le|v|\le18$

따라서 점 P의 최대 속력은 18이다. 답 ④

0592

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=t^2-8t+12=(t-4)^2-4$$

$3\le t\le8$에서 $-4\le v\le12$이므로

$0\le|v|\le12$

따라서 점 P의 최대 속력은 12이고 그때의 시각은 $t=8$이므로

$M=12$, $a=8\qquad\therefore M+a=20$ 답 20

0593

|전략| 수직선 위를 움직이는 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0임을 이용한다.

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-15t+12=3(t-1)(t-4)$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=1$ 또는 $t=4$

점 P가 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=4$일 때이고, 시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면

$$a=\frac{dv}{dt}=6t-15$$

따라서 $t=4$에서의 점 P의 가속도는

$a=6\times4-15=9$ 답 9

0594

시각 t에서의 두 점 A, B의 속도를 각각 v_A, v_B라 하면

$$v_A=\frac{dx_A}{dt}=2t-3,\ v_B=\frac{dx_B}{dt}=2t-10$$

두 점 A, B가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_Av_B<0$이므로

$(2t-3)(2t-10)<0$, $(2t-3)(t-5)<0$

$\therefore \frac{3}{2}<t<5$ 답 $\frac{3}{2}<t<5$

0595

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-24t+36=3(t-2)(t-6)$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=2$ 또는 $t=6$

즉, 점 P가 첫 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=2$일 때이고, 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=6$일 때이다.

$t=2$에서의 점 P의 위치 A는 $2^3-12\times2^2+36\times2=32$

$t=6$에서의 점 P의 위치 B는 $6^3-12\times6^2+36\times6=0$

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는 $32-0=32$ 답 32

0596

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-18t+12=6(t-1)(t-2)$

ㄱ. 출발할 때, 즉 $t=0$에서의 속도는 $v=12$ (참)

ㄴ. 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=1$ 또는 $t=2$

따라서 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾼다. (참)

ㄷ. 점 P가 원점을 지나는 순간은 $x=0$일 때이므로

$2t^3-9t^2+12t=0$에서 $t(2t^2-9t+12)=0$

이때, 이차방정식 $2t^2-9t+12=0$의 판별식을 D라 하면

$D=81-96=-15<0$이고, $t>0$이어야 하므로 방정식을 만족시키는 t의 값이 존재하지 않는다. 즉, 점 P는 다시 원점으로 돌아오지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0597

시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=4t^3-12t-a$

점 P의 운동 방향이 두 번만 바뀌어야 하므로 방정식 $v(t)=0$은 $t>0$에서 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가져야 한다.

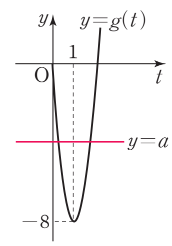
$g(t)=4t^3-12t$로 놓으면

$g'(t)=12t^2-12=12(t+1)(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because t>0$)

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		↘	-8	↗

함수 $y=g(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 t좌표가 서로 다른 두 양수가 되는 실수 a의 값의 범위는



$-8<a<0$

따라서 정수 a는 $-7, -6, -5, \cdots, -1$의 7개이다. 답 7

0598

| 전략 | 자동차가 정지할 때의 속도는 0임을 이용하여 움직인 거리를 구한다.

자동차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=60-3t$

자동차가 정지할 때의 속도는 $v=0$이므로

$60-3t=0$에서 $t=20$

즉, 제동을 건 후 자동차가 멈추는 것은 20초 후이다.

따라서 자동차가 정지할 때까지 움직인 거리는

$x=60\times20-1.5\times20^2=600$ (m) 답 600 m

0599

열차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=a-4t$

이때, 열차가 제동을 건 지 4초 후에 정지하므로 $t=4$일 때의 속도는 $v=0$이다. 즉, $a-16=0$에서

$a=16$ 답 ④

0600

열차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=30-t$

열차가 정지할 때의 속도는 $v=0$이므로

$30-t=0$에서 $t=30$

즉, 제동을 건 후 열차가 멈추는 것은 30초 후이다.

이때, 열차가 30초 동안 움직인 거리는

$x=30\times30-0.5\times30^2=450$ (m)

따라서 목적지로부터 전방 450 m 지점에서 제동을 걸어야 하므로

$a=450$ 답 ⑤

0601

| 전략 | 가장 높은 곳에 도달했을 때의 속도는 0임을 이용하여 높이를 구한다.

물체의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dh}{dt}=7-9.8t$

최고 높이에 도달했을 때의 속도는 $v=0$이므로

$7-9.8t=0$에서 $t=\frac{7}{9.8}=\frac{5}{7}$

따라서 $\frac{5}{7}$초 후 물체의 지면으로부터의 높이는

$h=7\times\frac{5}{7}-4.9\times\left(\frac{5}{7}\right)^2=2.5\ (\mathrm{m})$ 답 ③

0602

공이 지면에 떨어질 때의 높이는 $h=0$이므로

$20t-5t^2=0$에서 $5t(4-t)=0$ $\quad\therefore t=4\ (\because t>0)$

공의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dh}{dt}=20-10t$

$t=4$일 때, 공의 속도는

$v=20-10\times4=-20\ (\mathrm{m/s})$

따라서 공이 지면에 떨어지는 순간의 속력은 $|-20|=20\ (\mathrm{m/s})$이다. 답 ②

0603

물체의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dh}{dt}=-10t+30$

ㄱ. 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 $v=0$이므로

$-10t+30=0$에서 $t=3$

따라서 최고 높이에 도달하는 데 걸리는 시간은 3초이다. (참)

ㄴ. 물체의 최고 높이는 $t=3$일 때의 높이이므로

$h=-5\times3^2+30\times3+40=85\ (\mathrm{m})$ (거짓)

ㄷ. 물체가 땅에 떨어질 때까지 움직인 거리는

$(85-40)+85=130\ (\mathrm{m})$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

0604

|전략| 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$이면 운동 방향은 $v(t)$의 부호, 가속도는 $v'(t)$를 보고 구한다.

① $t=d$, $t=h$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 $0<t<i$에서 운동 방향을 2번 바꾼다. (참)

② $t=c$일 때 점 P의 가속도는 $v'(c)$이고, $v'(c)<0$이므로 가속도는 음의 값이다. (참)

③ $h<t<i$에서 속도 $v(t)$는 증가한다. (참)

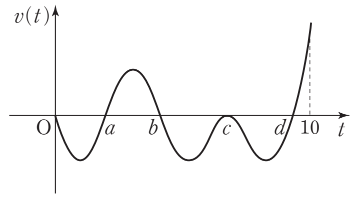
④ $0<t<d$에서 점 P는 한쪽 방향으로 계속 이동하였으므로 $t=d$일 때, 원점으로부터 가장 멀리 떨어진 곳에 위치한다. (참)

⑤ $v(b)>0$, $v(f)<0$이므로 $t=b$일 때와 $t=f$일 때, 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다. (거짓)

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0605

다음 그림과 같이 $v(t)$의 그래프가 t축과 만나는 점의 t좌표를 각각 a, b, c, d라 하면 $t=a$, $t=b$, $t=d$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 $0\le t\le10$에서 운동 방향을 3번 바꾼다.



답 3번

참고 $t=c$일 때, $v(t)=0$이지만 그 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌지 않으므로 점 P는 $t=c$일 때, 정지하지만 운동 방향은 바뀌지 않는다.

0606

|전략| 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x(t)$이면 속도는 $x'(t)$, 운동 방향은 $x'(t)$의 부호를 보고 구한다.

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하자.

ㄱ. $t=d$일 때, $v(d)=x'(d)>0$이므로 점 P의 속도는 양의 값이다. (거짓)

ㄴ. $t=c$일 때 $v(c)=x'(c)=0$이고, 그 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 $t=c$일 때, 운동 방향을 바꾼다. (참)

ㄷ. $0<k<a$이면 $v(k)=x'(k)>0$, $v(a)=x'(a)=0$이므로

$v(k)>v(a)$

따라서 $0<t<b$에서 점 P의 속도는 $t=a$일 때 최대가 아니다. (거짓)

ㄹ. $0<t<d$에서 $t=c$일 때 $|x(t)|$의 값이 가장 크므로 점 P는 $t=c$일 때, 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

0607

점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$를

$x(t)=kt(10-t)\ (0\le t\le10)$

로 놓으면 $t=5$일 때, $x(5)=40$이므로

$40=5k(10-5)\qquad\therefore k=\frac{8}{5}$

따라서 주어진 그래프의 식은

$x(t)=\frac{8}{5}t(10-t)=16t-\frac{8}{5}t^2\ (0\le t\le10)$

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하자.

ㄱ. 속도는 위치의 변화량이고, (속력)$=|$(속도)$|$이므로

$|v(t)|=|x'(t)|=\left|16-\frac{16}{5}t\right|$

따라서 점 P의 속력은 $0\le t\le5$일 때 감소하고, $5\le t\le10$일 때 증가한다. (참)

ㄴ. 가속도는 속도의 변화량이므로

$a(t)=v'(t)=-\frac{16}{5}$

즉, 점 P의 가속도는 $-\frac{16}{5}$으로 일정하다. (참)

ㄷ. $v(t)=16-\frac{16}{5}t$에서 $v(10)=-16<0$

즉, $t=10$일 때, 점 P의 속도는 음의 값이다. (거짓)

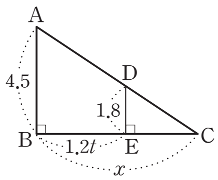
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0608

|전략| 그림자의 길이 l을 t에 대한 함수로 나타낸 후 그림자의 길이의 변화율은 $\frac{dl}{dt}$임을 이용한다.

사람이 1.2 m/s의 속도로 걸어가므로 t초 동안 움직이는 거리는 $1.2t$ m

그림자 끝이 t초 동안 움직이는 거리를 x m라 하면



오른쪽 그림에서 $\triangle ABC \backsim \triangle DEC$이므로

$\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{BC} : \overline{EC}$

$4.5 : 1.8 = x : (x-1.2t)$, $4.5x - 4.5 \times 1.2t = 1.8x$

$2.7x = 4.5 \times 1.2t \quad \therefore x = \frac{5}{3} \times 1.2t = 2t$

t초 후의 그림자의 길이를 l m라 하면

$l = \overline{BC} - \overline{BE} = x - 1.2t = 2t - 1.2t = 0.8t$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 $\frac{dl}{dt} = 0.8$ (m/s) 답 0.8 m/s

0609

t초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각 $A(6t, 0)$, $B(0, 8t)$이므로

선분 AB의 중점 C의 좌표는 $(3t, 4t)$

$\overline{OC} = l$이라 하면

$l = \sqrt{(3t)^2 + (4t)^2} = 5t \ (\because t > 0)$

따라서 $\overline{OC}$의 길이의 변화율은

$\frac{dl}{dt} = 5$ 답 5

0610

|전략| 가장 바깥쪽 물결의 넓이 S를 t에 대한 함수로 나타낸 후 가장 바깥쪽 물결의 넓이의 변화율은 $\frac{dS}{dt}$임을 이용한다.

t초 후 가장 바깥쪽 물결의 반지름의 길이는 $10t$ cm

t초 후의 가장 바깥쪽 물결의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S = \pi(10t)^2 = 100\pi t^2 \quad \therefore \frac{dS}{dt} = 100\pi \times 2t = 200\pi t$

따라서 $t=2$일 때, 가장 바깥쪽 물결의 넓이의 변화율은

$\frac{dS}{dt} = 200\pi \times 2 = 400\pi$ (cm^2/s) 답 400π cm^2/s

0611

각 변의 길이가 0.1 m/s씩 늘어나므로 t초 후 정사각형의 한 변의 길이는 $(5+0.1t)$ m

t초 후의 정사각형의 넓이를 S m^{2}라 하면

$S = (5+0.1t)^2 \quad \therefore \frac{dS}{dt} = 2(5+0.1t) \times 0.1 = 0.2(5+0.1t)$

정사각형의 넓이가 36 m^{2}가 되었을 때 한 변의 길이는 6 m이므로

$5 + 0.1t = 6$에서 $t = 10$

따라서 $t=10$일 때, 정사각형의 넓이의 변화율은

$\frac{dS}{dt} = 0.2(5 + 0.1 \times 10) = 1.2$ (m^2/s) 답 1.2 m^2/s

0612

t초 후 두 원의 지름의 길이는 각각 $\overline{AP} = t$, $\overline{BP} = 10 - t$이므로

두 원의 반지름의 길이는 각각 $\frac{t}{2}$, $\frac{10-t}{2}$이다.

이때, t초 후의 두 원의 넓이의 합 S는

$S = \pi\left\{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{10-t}{2}\right)^2\right\} = \frac{\pi}{2}(t^2 - 10t + 50)$ (단, $0 < t < 10$)

$\therefore \frac{dS}{dt} = \frac{\pi}{2}(2t - 10) = \pi(t-5)$

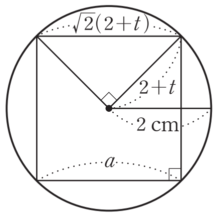
따라서 $t=6$일 때, 넓이 S의 변화율은

$\frac{dS}{dt} = \pi(6-5) = \pi$ 답 ④

0613

원의 반지름의 길이가 1 cm/s씩 늘어나므로 t초 후 원의 반지름의 길이는 $(2+t)$ cm

t초 후 원에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 a cm라 하면



$a^2 + a^2 = \{2(2+t)\}^2$에서 피타고라스의 정리

$a = \sqrt{2}(2+t) \ (\because a > 0, t > 0)$

t초 후의 원에 내접하는 정사각형의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S = 2(2+t)^2 \quad \therefore \frac{dS}{dt} = 2 \times 2(2+t) = 4(2+t)$

원의 넓이가 36π cm^{2}가 되었을 때 반지름의 길이는 6 cm이므로

$2 + t = 6$에서 $t = 4$

따라서 $t=4$일 때, 정사각형의 넓이의 변화율은

$\frac{dS}{dt} = 4(2+4) = 24$ (cm^2/s) 답 24 cm^2/s

0614

|전략| 풍선의 부피 V를 t에 대한 함수로 나타낸 후 풍선의 부피의 변화율은 $\frac{dV}{dt}$임을 이용한다.

반지름의 길이가 0.2 cm/s씩 늘어나므로 t초 후 풍선의 반지름의 길이는 $(2+0.2t)$ cm

t초 후의 풍선의 부피를 V cm^{3}라 하면

$V = \frac{4}{3}\pi(2+0.2t)^3$

$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \times 3(2+0.2t)^2 \times 0.2 = \frac{4}{5}\pi(2+0.2t)^2$

따라서 $t=5$일 때, 풍선의 부피의 변화율은

$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{5}\pi(2 + 0.2 \times 5)^2 = \frac{36}{5}\pi$ (cm^3/s) 답 $\frac{36}{5}\pi$ cm^3/s

0615

밑면의 반지름의 길이가 2 cm/s씩 늘어나고, 높이는 1 cm/s씩 줄어들므로 t초 후 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $(2+2t)$ cm, 높이는 $(12-t)$ cm

t초 후의 원기둥의 부피를 $V\ \mathrm{cm^3}$라 하면

$V=\pi(2+2t)^2(12-t)=(-4t^3+40t^2+92t+48)\pi$ ⋯ ❶

시각 t에 대한 원기둥의 부피 V의 변화율은

$\dfrac{dV}{dt}=(-12t^2+80t+92)\pi$ ⋯ ❷

높이가 $10\ \mathrm{cm}$가 되었을 때의 시각은

$12-t=10$에서 $t=2$ ⋯ ❸

따라서 $t=2$일 때, 원기둥의 부피의 변화율은

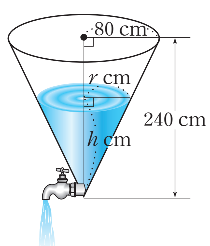
$\dfrac{dV}{dt}=(-12\times2^2+80\times2+92)\pi=204\pi\ (\mathrm{cm^3/s})$ ⋯ ❹

답 $204\pi\ \mathrm{cm^3/s}$

채점 기준	비율
❶ 원기둥의 부피 V를 t에 대한 함수로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $\dfrac{dV}{dt}$를 구할 수 있다.	20 %
❸ 높이가 10 cm가 되었을 때의 시각을 구할 수 있다.	20 %
❹ $t=2$일 때, 원기둥의 부피의 변화율을 구할 수 있다.	30 %

0616

오른쪽 그림과 같이 물탱크의 물이 빠져 나가기 시작하여 t초 후의 수면의 반지름의 길이를 $r\ \mathrm{cm}$, 수면의 높이를 $h\ \mathrm{cm}$라 하면



$r:h=80:240$에서

$r=\dfrac{1}{3}h$ ⋯⋯ ㉠

이때, 수면의 높이가 매초 $10\ \mathrm{cm}$씩 낮아지므로 $h=240-10t$ ⋯⋯ ㉡

t초 후 물탱크에 남아 있는 물의 부피를 $V\ \mathrm{cm^3}$라 하면

$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{1}{3}h\right)^2h=\dfrac{1}{27}\pi h^3$

$=\dfrac{1}{27}\pi(240-10t)^3$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=\dfrac{1}{27}\pi\times3(240-10t)^2\times(-10)=-\dfrac{10}{9}\pi(240-10t)^2$

수면의 높이가 $30\ \mathrm{cm}$가 될 때의 시각은

$240-10t=30$에서 $t=21$

따라서 $t=21$일 때, 남아 있는 물의 부피의 변화율은

$\dfrac{dV}{dt}=-\dfrac{10}{9}\pi(240-10\times21)^2=-1000\pi\ (\mathrm{cm^3/s})$

답 ③

STEP 3 내신 마스터

0617

유형 01 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 3이 되도록 하는 정수 k의 개수를 구한다.

$3x^4-4x^3-12x^2+15-k=0$에서 $3x^4-4x^3-12x^2+15=k$

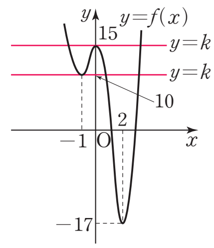
$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+15$로 놓으면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	⋯	-1	⋯	0	⋯	2	⋯
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	10	↗	15	↘	-17	↗

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로



$k=10$ 또는 $k=15$

따라서 정수 k는 2개이다.

답 ②

0618

유형 02 삼차방정식의 근의 판별

|전략| $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고, 삼차방정식 $h(x)=0$이 중근과 다른 한 실근을 갖기 위해서는 삼차함수 $h(x)$의 (극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이어야 함을 이용한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=(3x^3+4x^2-3x+2)-(2x^3+x^2+6x+a)$

$\quad=x^3+3x^2-9x+2-a$

$h'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $h(x)=0$이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

$\underbrace{h(-3)}_{\text{극댓값}}\overbrace{h(1)}^{\text{극솟값}}=0$이어야 하므로

$(29-a)(-3-a)=0 \qquad \therefore a=-3$ 또는 $a=29$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-3+29=26$

답 ①

다른 풀이 $f(x)=g(x)$, 즉 $3x^3+4x^2-3x+2=2x^3+x^2+6x+a$에서 $x^3+3x^2-9x+2=a$

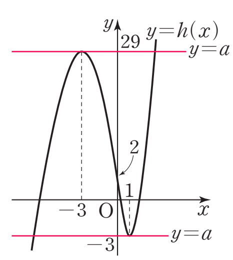
$h(x)=x^3+3x^2-9x+2$로 놓으면

$h'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	⋯	-3	⋯	1	⋯
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	29	↘	-3	↗

이때, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 중근과 다른 한 실근을 가지려면 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로



$a=-3$ 또는 $a=29$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-3+29=26$

0619

유형 03 두 그래프의 교점의 개수

| 전략 | 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수와 같음을 이용한다.

주어진 곡선과 직선이 한 점에서 만나고 다른 한 점에서 접하려면 방정식 $4x^3-2x=x+a$, 즉 $4x^3-3x-a=0$이 한 실근과 중근을 가져야 한다.

$f(x)=4x^3-3x-a$로 놓으면

$f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면

$\underbrace{f\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\text{극댓값}}\overbrace{f\left(\frac{1}{2}\right)}^{\text{극솟값}}=0$이어야 하므로

$(-a+1)(-a-1)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 $-1\times1=-1$ 답 ②

0620

유형 04 방정식 $f(x)=k$의 실근의 부호

| 전략 | 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수가 되도록 하는 정수 a의 최댓값을 구한다.

$x^3-3x^2-9x-a+6=0$에서 $x^3-3x^2-9x+6=a$

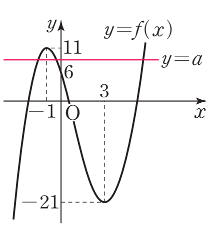
$f(x)=x^3-3x^2-9x+6$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	11	↘	-21	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 서로 다른 두 개는 음수가 되는 실수 a의 값의 범위는



$6<a<11$

따라서 정수 a의 최댓값은 10이다. 답 ⑤

0621

유형 05 주어진 구간에서 부등식이 항상 성립할 조건 – 증가·감소의 활용

| 전략 | 열린구간 $(-1, 1)$에서 함수 $f(x)$가 감소하므로 $f(1)\geq0$인 실수 k의 최솟값을 구한다.

$f(x)=x^3-12x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

열린구간 $(-1, 1)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-1, 1)$에서 감소한다.

그러므로 $-1<x<1$일 때, $f(x)>0$이려면 $f(1)\geq0$이어야 하므로

$f(1)=1-12+k\geq0$ $\therefore k\geq11$

따라서 실수 k의 최솟값은 11이다. 답 ④

0622

유형 07 모든 실수에서 부등식이 항상 성립할 조건

| 전략 | $(f(x)$의 최솟값$)\geq0$인 정수 k의 값을 구한다.

$f(x)=x^4-4x-k^2+4k$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

이때, $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-k^2+4k-3$	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최소이므로 최솟값은

$f(1)=-k^2+4k-3$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq0$이려면 $f(1)\geq0$이어야 하므로

$-k^2+4k-3\geq0$, $k^2-4k+3\leq0$

$(k-1)(k-3)\leq0$ $\therefore 1\leq k\leq3$

따라서 정수 k는 1, 2, 3이므로 그 합은

$1+2+3=6$ 답 ③

0623

유형 08 속도와 가속도

| 전략 | 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 만나는 순간의 시각은 $P(t)=Q(t)$일 때임을 이용한다.

두 점 P, Q가 만날 때, 두 점 P, Q의 위치가 같으므로

$t^2-t+6=4t$, $t^2-5t+6=0$

$(t-2)(t-3)=0$ $\therefore t=2$ 또는 $t=3$

즉, 두 점 P, Q가 두 번째로 만날 때는 $t=3$일 때이다.

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=P'(t)=2t-1$, $v_Q=Q'(t)=4$

$t=3$일 때, 두 점 P, Q의 속도는

$P'(3)=2\times3-1=5$, $Q'(3)=4$

따라서 두 점 P, Q의 속도의 차는 $|5-4|=1$ 답 ②

0624

유형 10 속도, 가속도와 운동 방향

| 전략 | 수직선 위를 움직이는 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0임을 이용한다.

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=t^2-4t+3=(t-1)(t-3)$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서
$t=1$ 또는 $t=3$
따라서 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾸므로 $a=2$
한편, $v(0)=3>0$이고, $1<t<3$에서 $v(t)<0$이므로 점 P는 $1<t<3$에서 처음 운동 방향과 반대인 원점을 향하여 움직인다.
$\therefore b=3$
$\therefore a+b=2+3=5$

답 ③

0625

유형 11 정지하는 물체의 속도와 움직인 거리

|전략| 자동차가 정지할 때의 속도는 0임을 이용하여 정지할 때까지 걸린 시간을 구한다.

자동차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=24-2.4t$$

자동차가 정지할 때의 속도는 $v=0$이므로
$24-2.4t=0$에서 $t=10$
따라서 자동차가 제동을 건 후 정지할 때까지 걸린 시간은 10초이다.

답 ③

0626

유형 14 위치의 그래프의 해석

|전략| 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도는 $x_P'(t)$, 운동 방향은 $x_P'(t)$의 부호를 보고 구한다.

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$라 하자.
ㄱ. $t=8$일 때, $x_P(8)=0$이므로 점 P의 위치는 원점이다. (참)
ㄴ. $t=2$, $t=6$일 때 $v_P(2)=x_P'(2)=0$, $v_P(6)=x_P'(6)=0$이고, 그 좌우에서 $v_P(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 $0<t<10$에서 운동 방향을 두 번 바꾼다. (참)
ㄷ. $t=5$일 때 $v_P(5)=x_P'(5)>0$, $v_Q(5)=x_Q'(5)>0$이므로 두 점 P, Q는 서로 같은 방향으로 움직인다. (거짓)
ㄹ. $t=6$일 때, $v_Q(6)>v_P(6)=0$이므로 점 Q의 속도는 점 P의 속도보다 크다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

0627

유형 06 주어진 구간에서 부등식이 항상 성립할 조건 – 최대·최소의 활용

|전략| $x>0$에서 ($f(x)$의 최솟값)>0인 정수 k의 최댓값을 구한다.

$x^3+2x^2-2x>\frac{1}{2}x^2+4x+k$에서 $x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-k>0$

$f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-k$로 놓으면
$f'(x)=3x^2+3x-6=3(x+2)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$) ⋯ ❶

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{7}{2}-k$	↗

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최소이므로 최솟값은
$f(1)=-\frac{7}{2}-k$ ⋯ ❷
$x>0$일 때 $f(x)>0$이려면 $f(1)>0$이어야 하므로
$-\frac{7}{2}-k>0$ $\quad\therefore k<-\frac{7}{2}$ ⋯ ❸
따라서 정수 k의 최댓값은 -4이다. ⋯ ❹

답 -4

채점 기준	배점
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ $x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	1점
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점
❹ 정수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	1점

0628

유형 12 위로 던진 물체의 위치와 속도

|전략| 가장 높은 곳에 도달했을 때의 속도는 0임을 이용하여 높이를 구한다.

물체의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=16-1.6t \quad \cdots ❶$$

최고 높이에 도달했을 때의 속도는 $v=0$이므로
$16-1.6t=0$에서 $t=10$ ⋯ ❷
따라서 10초 후 물체의 지면으로부터의 높이는
$h=16\times10-0.8\times10^2=80$ (m) ⋯ ❸

답 80 m

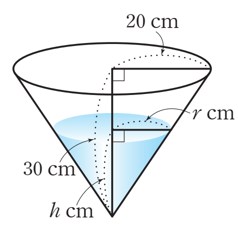
채점 기준	배점
❶ 속도 v를 t에 대한 함수로 나타낼 수 있다.	2점
❷ 물체가 최고 높이에 도달했을 때의 시각을 구할 수 있다.	3점
❸ $t=10$일 때, 물체의 높이를 구할 수 있다.	2점

0629

유형 17 시각에 대한 부피의 변화율

|전략| 물의 부피 V를 t에 대한 함수로 나타낸 후 물의 부피의 변화율은 $\frac{dV}{dt}$임을 이용한다.

(1) 오른쪽 그림에서
$r:h=20:30$ $\quad\therefore r=\frac{2}{3}h$



(2) 수면의 높이가 매초 1 cm씩 올라가므로 t초 후 수면의 높이는 t cm
즉, $h=t$
t초 후 그릇에 담긴 물의 부피를 V cm^{3}라 하면

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{3}h\right)^2h=\frac{4}{27}\pi h^3=\frac{4}{27}\pi t^3\ (\because\ h=t)$$

$$\therefore\ \frac{dV}{dt}=\frac{4}{27}\pi\times 3t^2=\frac{4}{9}\pi t^2$$

(3) 수면의 높이가 6 cm가 될 때의 시각은 $t=6$이므로 이때의 물의 부피의 변화율은

$$\frac{dV}{dt}=\frac{4}{9}\pi\times 6^2=16\pi\ (\mathrm{cm^3/s})$$

답 (1) $r=\frac{2}{3}h$ (2) $\frac{4}{27}\pi t^3$, $\frac{4}{9}\pi t^2$ (3) $16\pi\ \mathrm{cm^3/s}$

채점 기준	배점
(1) r를 h에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	4점
(2) t초 후 그릇에 담긴 물의 부피와 그때의 물의 부피의 변화율을 구할 수 있다.	6점
(3) 수면의 높이가 6 cm일 때, 물의 부피의 변화율을 구할 수 있다.	2점

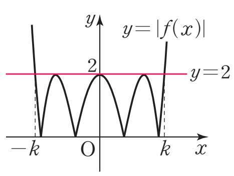
창의·융합 교과서 속 심화문제

0630

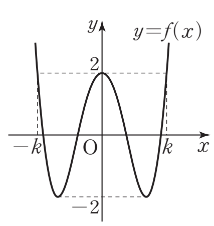
|전략| 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 개수가 5가 되는 사차함수 $f(x)$를 구한다.

사차함수 $f(x)$가 $f(-x)=f(x)$를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

따라서 사차함수 $f(x)$가 $f(-x)=f(x)$, $f(0)>0$을 만족시키고 방정식 $|f(x)|=2$가 서로 다른 다섯 실근을 가지려면 [그림 1]과 같아야 하므로 사차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같아야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-2=x^2(x-k)(x+k)=x^4-k^2x^2$ (단, $k>0$)

$f'(x)=4x^3-2k^2x=2x(\sqrt{2}x+k)(\sqrt{2}x-k)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{k}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{k}{\sqrt{2}}$

이때, 함수 $f(x)$는 $x=\pm\frac{k}{\sqrt{2}}$에서 극소이고 $f\left(\pm\frac{k}{\sqrt{2}}\right)=-2$이므로

$$f\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^4-k^2\times\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2+2=-2$$

$-\frac{k^4}{4}=-4$, $k^4=16$

$\therefore\ k^2=4\ (\because\ k^2>0)$

따라서 $f(x)=x^4-4x^2+2$이므로

$f(1)=1^4-4\times 1^2+2=-1$ 답 -1

참고 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키면 $f(x)$는 짝수 차수의 항 또는 상수항으로만 이루어져 있고, $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

0631

|전략| 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수와 같음을 이용한다.

$x^3-2x^2-3x+k^2=x+2k$에서

$x^3-2x^2-4x=-k^2+2k$

곡선 $y=x^3-2x^2-3x+k^2$과 직선 $y=x+2k$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=x^3-2x^2-4x$와 직선 $y=-k^2+2k=-(k-1)^2+1$의 교점의 x좌표와 같다.

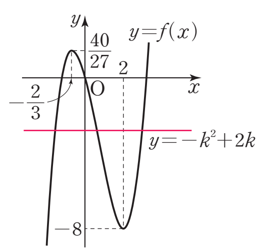
$f(x)=x^3-2x^2-4x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{40}{27}$	↘	-8	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k^2+2k$는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $k=1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k^2+2k=1$은 서로 다른 세 점에서 만난다.
따라서 곡선 $y=x^3-2x^2-3x+k^2$과 직선 $y=x+2k$는 서로 다른 세 점에서 만난다. (참)

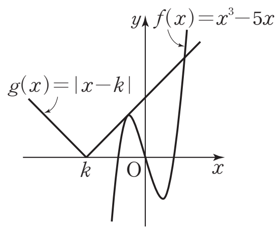
ㄴ. $-k^2+2k=-(k-1)^2+1\le 1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k^2+2k$가 접할 때는 $-k^2+2k=-8$일 때이다.
$k^2-2k-8=0$, $(k+2)(k-4)=0$ $\quad\therefore\ k=-2$ 또는 $k=4$
따라서 $k=-2$ 또는 $k=4$일 때, 곡선 $y=x^3-2x^2-3x+k^2$과 직선 $y=x+2k$가 접하므로 모든 실수 k의 값의 합은
$-2+4=2$ (참)

ㄷ. $y=-k^2+2k=-(k-1)^2+1$이므로 $-2<k<4$일 때, $-8<-k^2+2k\le 1$이다.
따라서 $-2<k<4$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k^2+2k$는 서로 다른 세 점에서 만난다.
그러므로 $-2<k<4$일 때, 곡선 $y=x^3-2x^2-3x+k^2$과 직선 $y=x+2k$는 서로 다른 세 점에서 만난다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0632

|전략| 두 함수의 그래프가 접할 때를 이용하여 k의 값의 범위를 구하고, $f(3)\le g(3)$을 동시에 만족시키는 실수 k의 최댓값을 구한다.



$k<0$이므로 두 함수
$f(x)=x^3-5x$, $g(x)=|x-k|$의 그래프가 한 점에서 접할 때는 오른쪽 그림과 같다.
두 함수의 그래프가 접할 때, 접점에서의 접선의 기울기는 같으므로
$f'(x)=g'(x)$에서
$3x^2-5=1$, $x^2=2$
$\therefore x=-\sqrt{2}$ ($\because x<0$)
즉, $x=-\sqrt{2}$에서 두 함수 $f(x)=x^3-5x$, $g(x)=|x-k|$의 그래프는 접한다.
이때, $f(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}+5\sqrt{2}=3\sqrt{2}$, $g(-\sqrt{2})=|-\sqrt{2}-k|$이므로 $f(-\sqrt{2})=g(-\sqrt{2})$에서
$3\sqrt{2}=|-\sqrt{2}-k|$, $k+\sqrt{2}=\pm3\sqrt{2}$
$\therefore k=-4\sqrt{2}$ ($\because k<0$)
따라서 $k\le-4\sqrt{2}$이어야 한다. …… ㉠
또, $f(3)\le g(3)$이어야 하므로
$f(3)=3^3-3\times5=12$, $g(3)=|3-k|=3-k$ ($\because k<0$)
에서 $12\le3-k$ $\quad\therefore k\le-9$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $k\le-9$이므로 실수 k의 최댓값은 -9이다. 답 -9

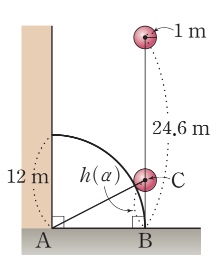
다른 풀이 위의 그림에서 $x\le3$일 때 $f(x)\le g(x)$, 즉 $x^3-5x\le|x-k|$이려면 $x\le3$일 때 $x^3-5x\le x-k$, 즉 $x^3-6x+k\le0$을 만족시키면 된다.
$h(x)=x^3-6x+k$로 놓으면
$h'(x)=3x^2-6=3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$
$h'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	3
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	↗	$4\sqrt{2}+k$	↘	$-4\sqrt{2}+k$	↗	$9+k$

$x\le3$일 때, 함수 $h(x)$는 $x=3$에서 최대이므로 최댓값은
$h(3)=9+k$
$x\le3$일 때 $h(x)\le0$이려면 $h(3)\le0$이어야 하므로
$9+k\le0$ $\quad\therefore k\le-9$
따라서 실수 k의 최댓값은 -9이다.

0633

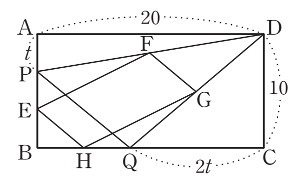
|전략| 공의 높이가 $h(t)$이면 속도는 $v=\dfrac{d}{dt}h(t)$임을 이용한다.



오른쪽 그림과 같이 공이 경사면과 처음으로 충돌하는 순간의 공의 중심을 C라 하면 삼각형 ABC는 직각삼각형이다.
공이 경사면과 처음으로 충돌하는 시각을 $t=\alpha$라 하면
$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$에서
$13^2=12^2+\{h(\alpha)\}^2$
$\therefore h(\alpha)=5$ ($\because h(\alpha)>0$)
이때, $h(\alpha)=24.6-4.9\alpha^2$이므로 $24.6-4.9\alpha^2=5$에서
$4.9\alpha^2=19.6$, $\alpha^2=4$
$\therefore \alpha=2$ ($\because \alpha>0$)
공의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면
$v=\dfrac{d}{dt}h(t)=-9.8t$
따라서 $t=2$일 때, 공의 속도는
$v=-9.8\times2=-19.6$ (m/s) 답 -19.6 m/s

0634

|전략| 삼각형 BPQ의 넓이 S를 t에 대한 함수로 나타낸 후 삼각형의 넓이의 변화율은 $\dfrac{dS}{dt}$임을 이용한다.



점 P는 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 매초 1의 속력으로 움직이므로 t초 후 선분 AP의 길이는
$\overline{AP}=t$
점 Q는 꼭짓점 C에서 꼭짓점 B까지 매초 2의 속력으로 움직이므로 t초 후 선분 CQ의 길이는
$\overline{CQ}=2t$
t초 후 두 직각삼각형 APD, DQC의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면
$S_1=\dfrac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AD}=\dfrac{1}{2}\times t\times20=10t$
$S_2=\dfrac{1}{2}\times\overline{CQ}\times\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\times2t\times10=10t$
t초 후 사각형 BPDQ의 넓이를 S_3이라 하면
$S_3=\square ABCD-(S_1+S_2)$
$\quad=20\times10-(10t+10t)=200-20t$
사각형 BPDQ의 넓이는 사각형 EFGH의 넓이의 2배이므로 t초 후 사각형 EFGH의 넓이를 S_4라 하면
$S_4=\dfrac{1}{2}S_3=\dfrac{1}{2}(200-20t)=100-10t$
사각형 EFGH의 넓이가 직사각형 ABCD의 넓이의 $\dfrac{1}{8}$배가 되는 순간은 $S_4=\dfrac{1}{8}\times(20\times10)$에서
$100-10t=25$ $\quad\therefore t=\dfrac{15}{2}$
t초 후 삼각형 BPQ의 넓이를 S라 하면
$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{BP}\times\overline{BQ}$
$\quad=\dfrac{1}{2}(10-t)(20-2t)=(10-t)^2$
$\therefore \dfrac{dS}{dt}=-2(10-t)$
따라서 $t=\dfrac{15}{2}$일 때, 삼각형 BPQ의 넓이의 변화율은
$\dfrac{dS}{dt}=-2\left(10-\dfrac{15}{2}\right)=-5$ 답 -5

본책 112~123쪽

7 | 부정적분

STEP 1 개념 마스터

0635

(1) $f'(x)=3x^2+2x$

(2) $\int f'(x)dx=\int(3x^2+2x)dx=x^3+x^2+C$

답 (1) $f'(x)=3x^2+2x$ (2) $\int f'(x)dx=x^3+x^2+C$

0636

ㄱ. $F'(x)=(x^7)'=7x^6$

ㄴ. $F'(x)=(x^7+x)'=7x^6+1$

ㄷ. $F'(x)=(x^7-8)'=7x^6$

ㄹ. $F'(x)=\left(x^7+\frac{5}{2}\right)'=7x^6$

ㅁ. $F'(x)=(7x^6)'=42x^5$

따라서 함수 $f(x)=7x^6$의 부정적분이 아닌 것은 ㄴ, ㅁ이다.

답 ㄴ, ㅁ

0637

$f(x)=(3x^2-2x+C)'=6x-2$ 답 $f(x)=6x-2$

0638

$f(x)=(-x^2+3x+C)'=-2x+3$ 답 $f(x)=-2x+3$

0639

$f(x)=\left(\frac{2}{3}x^3+C\right)'=2x^2$ 답 $f(x)=2x^2$

0640

$f(x)=\left(-\frac{1}{3}x^3+2x+C\right)'=-x^2+2$ 답 $f(x)=-x^2+2$

0641

$f(x)=\left(\frac{1}{4}x^4-2x^3-x+C\right)'=x^3-6x^2-1$

답 $f(x)=x^3-6x^2-1$

0642

$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$이므로

$\frac{d}{dx}\int(x^2-2x)dx=x^2-2x$ 답 x^2-2x

0643

$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-2x)\right\}dx=x^2-2x+C$ 답 x^2-2x+C

0644

$\int x^4\,dx=\frac{1}{4+1}x^{4+1}+C=\frac{1}{5}x^5+C$ 답 $\frac{1}{5}x^5+C$

0645

$\int x^7\,dx=\frac{1}{7+1}x^{7+1}+C=\frac{1}{8}x^8+C$ 답 $\frac{1}{8}x^8+C$

0646

$\int x^m\cdot x^n\,dx=\int x^{m+n}\,dx=\frac{1}{m+n+1}x^{m+n+1}+C$

답 $\frac{1}{m+n+1}x^{m+n+1}+C$

0647

$\int(x^m)^n dx=\int x^{mn}\,dx=\frac{1}{mn+1}x^{mn+1}+C$

답 $\frac{1}{mn+1}x^{mn+1}+C$

0648

$$\begin{aligned}\int(4x+5)dx&=\int 4x\,dx+\int 5\,dx\\&=4\int x\,dx+\int 5\,dx\\&=2x^2+5x+C\end{aligned}$$

답 $2x^2+5x+C$

0649

$$\begin{aligned}\int(3x^2+2x-1)dx&=\int 3x^2\,dx+\int 2x\,dx-\int 1\,dx\\&=3\int x^2\,dx+2\int x\,dx-\int 1\,dx\\&=x^3+x^2-x+C\end{aligned}$$

답 x^3+x^2-x+C

0650

$$\begin{aligned}\int(x-2)(3x+1)dx&=\int(3x^2-5x-2)dx\\&=\int 3x^2\,dx-\int 5x\,dx-\int 2\,dx\\&=3\int x^2\,dx-5\int x\,dx-\int 2\,dx\\&=x^3-\frac{5}{2}x^2-2x+C\end{aligned}$$

답 $x^3-\frac{5}{2}x^2-2x+C$

0651

$$\int(2x+3)^2dx=\int(4x^2+12x+9)dx$$
$$=\int 4x^2dx+\int 12x\,dx+\int 9\,dx$$
$$=4\int x^2dx+12\int x\,dx+\int 9\,dx$$
$$=\frac{4}{3}x^3+6x^2+9x+C$$

답 $\frac{4}{3}x^3+6x^2+9x+C$

0652

$$\int\frac{x^2-9}{x+3}dx=\int\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}dx=\int(x-3)dx$$
$$=\int x\,dx-\int 3\,dx=\frac{1}{2}x^2-3x+C$$

답 $\frac{1}{2}x^2-3x+C$

0653

$$\int\frac{x^3-1}{x-1}dx=\int\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx$$
$$=\int(x^2+x+1)dx$$
$$=\int x^2dx+\int x\,dx+\int 1\,dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$$

답 $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$

0654

$$\int(x+1)^2dx-\int(x-1)^2dx$$
$$=\int(x^2+2x+1)dx-\int(x^2-2x+1)dx$$
$$=\int 4x\,dx=4\int x\,dx$$
$$=2x^2+C$$

답 $2x^2+C$

0655

$$\int\frac{x^2}{x-1}dx+\int\frac{1}{1-x}dx$$
$$=\int\frac{x^2-1}{x-1}dx=\int\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}dx$$
$$=\int(x+1)dx=\int x\,dx+\int 1\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+x+C$$

답 $\frac{1}{2}x^2+x+C$

0656

$$\int\frac{x^3}{x+2}dx+\int\frac{8}{x+2}dx$$
$$=\int\frac{x^3+8}{x+2}dx=\int\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}dx$$
$$=\int(x^2-2x+4)dx=\int x^2dx-2\int x\,dx+\int 4\,dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x^2+4x+C$$

답 $\frac{1}{3}x^3-x^2+4x+C$

STEP 2 유형 마스터

0657

|전략| $\int f(x)dx=F(x)+C$이면 $f(x)=F'(x)$이다.

$\int f(x)dx=x^3-2x^2+4x+C$에서

$f(x)=(x^3-2x^2+4x+C)'=3x^2-4x+4$

$\therefore f(2)=12-8+4=8$

답 ②

0658

$f(x)=(x^3-x^2-2x+1)'=3x^2-2x-2$

$\therefore f(-1)=3+2-2=3$

답 ③

0659

$\int(6x^2+ax-3)dx=bx^3+5x^2-cx+1$에서

$6x^2+ax-3=(bx^3+5x^2-cx+1)'=3bx^2+10x-c$

즉, $6=3b$, $a=10$, $-3=-c$이므로

$a=10$, $b=2$, $c=3$

$\therefore a+b+c=10+2+3=15$

답 15

0660

$\int F(x)dx=f(x)g(x)$에서

$F(x)=\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$\quad=4x(-4x-1)+(2x^2+1)\times(-4)$
$\quad=-24x^2-4x-4$

$\therefore F(-1)=-24+4-4=-24$

답 -24

Lecture

함수의 곱의 미분법

두 함수 $f(x), g(x)$가 미분가능할 때

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

0661

$\int(x-1)f(x)dx=2x^3-3x^2+2$에서

$(x-1)f(x)=(2x^3-3x^2+2)'=6x^2-6x=6x(x-1)$

따라서 $f(x)=6x$이므로 $f(2)=12$

답 12

0662

ㄱ. x^3 외에도 x^3+1, x^3-2, $\cdots$ 와 같이 상수항만 다른 $3x^2$의 부정적분은 무수히 많다. (거짓)

ㄴ. 함수 $y=g(x)$가 함수 $y=f(x)$의 한 부정적분이면 $g'(x)=f(x)$가 성립한다. (참)

ㄷ. $\int 3x^2\,dx$는 $3x^2$의 부정적분이다. (참)

ㄹ. 도함수가 0인 함수는 상수함수이다. 즉, $\int 0\,dx=C$ (단, C는 적분상수) (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

0663

$F(x)=x^3+ax^2+bx-1$에서

$f(x)=F'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f(1)=0$에서 $2a+b=-3$ …… ㉠

$f'(x)=6x+2a$이므로 $f'(1)=-2$에서

$6+2a=-2 \quad \therefore a=-4$ … ❶

$a=-4$를 ㉠에 대입하면

$-8+b=-3 \quad \therefore b=5$ … ❷

$\therefore a+b=-4+5=1$ … ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0664

$F'(x)=f(x)$, $G'(x)=f(x)$이므로

$F'(x)-G'(x)=0$

$\therefore F(x)-G(x)=\int\{F'(x)-G'(x)\}dx=C$

이때, $F(0)-G(0)=2-5=-3$이므로 $C=-3$

$\therefore F(-1)-G(-1)=C=-3$

답 -3

0665

|전략| $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$임을 이용한다.

$\frac{d}{dx}\int(ax^2+4x+3)dx=8x^2+bx+c$이므로

$ax^2+4x+3=8x^2+bx+c$

이 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=8$, $b=4$, $c=3$

$\therefore a+b+c=15$

답 ⑤

0666

$\frac{d}{dx}\int xf(x)dx=x^4+x^3+x^2$이므로

$xf(x)=x^4+x^3+x^2$

$\quad =x(x^3+x^2+x)$

따라서 $f(x)=x^3+x^2+x$이므로

$f(2)=8+4+2=14$

답 ③

0667

$\frac{d}{dx}\int x\,dx=x$, $\frac{d}{dx}\int(5x^2-4x-6)dx=5x^2-4x-6$이므로

주어진 등식은

$x=5x^2-4x-6$, $5x^2-5x-6=0$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{-5}{5}=1$

답 ①

0668

|전략| $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$임을 이용한다.

$\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3-2x^2+3x)\right\}dx=x^3-2x^2+3x+C$이므로

$f(x)=x^3-2x^2+3x+C$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+3x+1$이므로

$f(2)=8-8+6+1=7$

답 7

0669

$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C_1$이므로

$f(x)+C_1=x^3-4x+C$

즉, $f(x)=x^3-4x+C-C_1$

$f(-2)=3$이므로 $-8+8+C-C_1=3$

$\therefore C-C_1=3$

따라서 $f(x)=x^3-4x+3$이므로

$f(1)=1-4+3=0$

답 ③

0670

$\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-6x)\right\}dx=x^2-6x+C$이므로

$f(x)=x^2-6x+C=(x-3)^2+C-9$

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값 $C-9$를 가지므로

$C-9=8 \quad \therefore C=17$

따라서 $f(x)=x^2-6x+17$이므로

$f(1)=1-6+17=12$

답 12

Lecture

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값과 최솟값

$y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하면

(1) $a>0$일 때, $x=p$에서 최솟값은 q이고, 최댓값은 없다.

(2) $a<0$일 때, $x=p$에서 최댓값은 q이고, 최솟값은 없다.

0671

$$\int\left[\frac{d}{dx}\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx\right]dx=\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+C_1\}\right]dx$$
$$=f(x)+C_2$$

이므로

$F(x)=100x^{100}+99x^{99}+\cdots+2x^2+x+C_2$

이때, $F(0)=2$이므로 $C_2=2$

따라서 $F(x)=100x^{100}+99x^{99}+\cdots+2x^2+x+2$이므로

$F(1)=100+99+\cdots+2+1+2$

$\quad =\frac{100\times101}{2}+2=5052$

답 5052

0672

|전략| 부정적분의 합, 차, 실수배의 성질과 $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$임을 이용한다.

$f(x)=\int(1+2x+3x^2+\cdots+10x^9)dx$

$\quad=x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}+C$

이때, $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}+1$이므로

$f(-1)=(-1+1-1+\cdots+1)+1=1$ 답 ③

0673

$f(x)=\int(x-2)(x+2)(x^2+4)dx$

$\quad=\int(x^4-16)dx$

$\quad=\frac{1}{5}x^5-16x+C$

이때, $f(0)=\frac{28}{5}$이므로 $C=\frac{28}{5}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{5}x^5-16x+\frac{28}{5}$이므로

$f(2)=\frac{32}{5}-32+\frac{28}{5}=-20$ 답 -20

0674

$f(x)=\int(x+3)(x^2-3x+9)dx-\int(x-3)(x^2+3x+9)dx$

$\quad=\int(x^3+27)dx-\int(x^3-27)dx$

$\quad=\int\{(x^3+27)-(x^3-27)\}dx$

$\quad=\int 54\,dx=54x+C$

이때, $f(0)=-27$이므로 $C=-27$

따라서 $f(x)=54x-27$이므로

$f(1)=54-27=27$ 답 27

0675

$f(x)=\int\frac{3x^2}{x-2}dx-\int\frac{5x}{x-2}dx-\int\frac{2}{x-2}dx$

$\quad=\int\frac{3x^2-5x-2}{x-2}dx$

$\quad=\int\frac{(3x+1)(x-2)}{x-2}dx$

$\quad=\int(3x+1)dx=\frac{3}{2}x^2+x+C$

이때, $f(-1)=\frac{5}{2}$이므로 $\frac{3}{2}-1+C=\frac{5}{2}$ $\quad\therefore C=2$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+x+2$이므로

$f(2)=6+2+2=10$ 답 10

0676

|전략| $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용한다.

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+4x-5)dx$

$\quad=x^3+2x^2-5x+C$

이때, $f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-5x+2$이므로

$f(1)=1+2-5+2=0$ 답 ②

0677

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+2ax-1)dx$

$\quad=x^3+ax^2-x+C$

이때, $f(0)=1$, $f(1)=2$이므로

$f(0)=1$에서 $C=1$

$f(1)=2$에서 $1+a-1+1=2$ $\quad\therefore a=1$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-x+1$이므로

$f(-2)=-8+4+2+1=-1$ 답 -1

0678

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(12x^2-6x)dx$

$\quad=4x^3-3x^2+C_1$

이때, $f(1)=4$이므로

$4-3+C_1=4$ $\quad\therefore C_1=3$

$\therefore f(x)=4x^3-3x^2+3$

$F(x)=\int f(x)dx=\int(4x^3-3x^2+3)dx$

$\quad=x^4-x^3+3x+C_2$

이때, $F(-1)=-2$이므로

$1+1-3+C_2=-2$ $\quad\therefore C_2=-1$

따라서 $F(x)=x^4-x^3+3x-1$이므로

$F(1)=1-1+3-1=2$ 답 2

0679

$g(x)=\int g'(x)dx=\int(3x^2+4x+2)dx$

$\quad=x^3+2x^2+2x+C$

이때, $f(x)-g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 2이므로 나머지정리에 의하여

$f(1)-g(1)=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=2x^3+x^2+x$에서

$f(1)=2+1+1=4$, $g(1)=1+2+2+C=5+C$

㉠에 의하여 $f(1)-g(1)=4-(5+C)=-1-C=2$

$\therefore C=-3$

따라서 $f(1)=4$, $g(1)=2$이므로

$f(1)g(1)=8$ 답 ④

Lecture

나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지 ⇨ $f(a)$

0680

|전략| 조건 ㈎의 양변을 적분하여 $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$임을 이용한다.

조건 ㈎에서 $\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int 3x^2\,dx$

$\therefore f(x)g(x)=x^3+C$

이때, 조건 ㈏에서 $f(1)=3, g(1)=0$이므로

$f(1)g(1)=1+C=0 \qquad \therefore C=-1$

즉, $f(x)g(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$이므로

$\begin{cases} f(x)=x-1 \\ g(x)=x^2+x+1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)=x^2+x+1 \\ g(x)=x-1 \end{cases}$

그런데 $f(1)=3, g(1)=0$이므로

$f(x)=x^2+x+1, g(x)=x-1$

$\therefore g(5)=5-1=4$

답 ①

0681

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=2x-2$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}\right]dx=\int(2x-2)dx$

$\therefore f(x)-g(x)=x^2-2x+C_1$

또, $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int 3x^2dx$

$\therefore f(x)g(x)=x^3+C_2$

이때, $f(0)=g(0)=1$이므로

$f(0)-g(0)=C_1=0,\ f(0)g(0)=C_2=1$에서

$f(x)-g(x)=x^2-2x,\ f(x)g(x)=x^3+1$

따라서 $f(2)-g(2)=0,\ f(2)g(2)=9$이므로

$\{f(2)\}^2+\{g(2)\}^2=\{f(2)-g(2)\}^2+2f(2)g(2)$

$=18$

답 18

0682

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=3$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int 3\,dx$

$\therefore f(x)+g(x)=3x+C_1$

또, $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=4x-1$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(4x-1)dx$

$\therefore f(x)g(x)=2x^2-x+C_2$ … ❶

이때, $f(0)=0, g(0)=-1$이므로

$f(0)+g(0)=C_1=-1,\ f(0)g(0)=C_2=0$에서

$f(x)+g(x)=3x-1=x+(2x-1)$

$f(x)g(x)=2x^2-x=x(2x-1)$

$\therefore \begin{cases} f(x)=x \\ g(x)=2x-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)=2x-1 \\ g(x)=x \end{cases}$

그런데 $f(0)=0, g(0)=-1$이므로

$f(x)=x, g(x)=2x-1$ … ❷

$\therefore f(1)-g(2)=1-3=-2$ … ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}$, $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}$의 부정적분을 구할 수 있다.	40 %
❷ 함수 $f(x)$, $g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(1)-g(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0683

|전략| 양변을 x에 대하여 미분하고, $F'(x)=f(x)$임을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

$F(x)=xf(x)-2x^3-2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2-4x$

$xf'(x)=6x^2+4x \qquad \therefore f'(x)=6x+4$

$\therefore f(x)=\int(6x+4)dx=3x^2+4x+C$

이때, $f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=3x^2+4x$

답 $f(x)=3x^2+4x$

0684

$F(x)+\int xf(x)dx=x^3-x^2-5x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf(x)=3x^2-2x-5$

$(1+x)f(x)=(x+1)(3x-5)$

따라서 $f(x)=3x-5$이므로

$f(2)=6-5=1$

답 1

0685

$(x-1)f(x)-F(x)=2x^3-3x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x-1)f'(x)-f(x)=6x^2-6x$

$(x-1)f'(x)=6x(x-1) \qquad \therefore f'(x)=6x$ … ❶

$\therefore f(x)=\int 6x\,dx=3x^2+C$

이때, $f(1)=2$이므로 $3+C=2$에서 $C=-1$

따라서 $f(x)=3x^2-1$이므로 … ❷

$f(2)=12-1=11$ … ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0686

$f(x)+\int xf(x)dx=\frac{1}{2}x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2+3x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

7 부정적분

$f'(x)+xf(x)=2x^3+3x^2-x+3$ …… ㉠

$f(x)$를 n차함수라 하면 $xf(x)$는 $(n+1)$차함수이므로 ㉠에서

$n+1=3 \quad \therefore n=2$

즉, $f(x)$는 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0,\ b,\ c$는 상수$)$

로 놓을 수 있다.

$f(x)=ax^2+bx+c,\ f'(x)=2ax+b$를 ㉠에 대입하면

$2ax+b+x(ax^2+bx+c)=2x^3+3x^2-x+3$

$\therefore ax^3+bx^2+(2a+c)x+b=2x^3+3x^2-x+3$

이 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=2,\ b=3,\ 2a+c=-1 \quad \therefore a=2,\ b=3,\ c=-5$

따라서 $f(x)=2x^2+3x-5$이므로

$f(1)=2+3-5=0$

답 0

0687

|전략| 구간별로 $f'(x)$의 부정적분을 구하고, 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 $x=2$에서 연속임을 이용하여 적분상수를 구한다.

$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & (x\geq2) \\ 1 & (x<2) \end{cases}$에서 $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+C_1 & (x\geq2) \\ x+C_2 & (x<2) \end{cases}$

$f(0)=1$이므로 $C_2=1$

또, $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다. 즉,

$\lim_{x\to2+}(x^2-3x+C_1)=\lim_{x\to2-}(x+1)$에서

$4-6+C_1=2+1 \quad \therefore C_1=5$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+5 & (x\geq2) \\ x+1 & (x<2) \end{cases}$이므로

$f(4)=16-12+5=9$

답 9

Lecture

미분가능성과 연속성

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

0688

$f'(x)=\begin{cases} x+2 & (x>-1) \\ -1 & (x<-1) \end{cases}$이고 $f(x)$가 연속함수이므로

$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+2x+C_1 & (x\geq-1) \\ -x+C_2 & (x<-1) \end{cases}$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로

$f(-2)=0$에서 $2+C_2=0 \quad \therefore C_2=-2$

또, $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}\left(\frac{1}{2}x^2+2x+C_1\right)=\lim_{x\to-1-}(-x-2)$에서

$\frac{1}{2}-2+C_1=1-2 \quad \therefore C_1=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+2x+\frac{1}{2} & (x\geq-1) \\ -x-2 & (x<-1) \end{cases}$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2}=3$

답 3

0689

$f'(x)=3x|x-1|+x+2$에서

$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-2x+2 & (x\geq1) \\ -3x^2+4x+2 & (x<1) \end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases} x^3-x^2+2x+C_1 & (x\geq1) \\ -x^3+2x^2+2x+C_2 & (x<1) \end{cases}$

$f(0)=4$이므로 $C_2=4$

또, $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}(x^3-x^2+2x+C_1)=\lim_{x\to1-}(-x^3+2x^2+2x+4)$에서

$1-1+2+C_1=-1+2+2+4 \quad \therefore C_1=5$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^3-x^2+2x+5 & (x\geq1) \\ -x^3+2x^2+2x+4 & (x<1) \end{cases}$이므로

$f(-1)=1+2-2+4=5,\ f(2)=8-4+4+5=13$

$\therefore f(-1)+f(2)=18$

답 ④

0690

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$임을 이용한다.

$f'(x)=6x^2+2x+1$이므로

$f(x)=\int(6x^2+2x+1)dx=2x^3+x^2+x+C$

이때, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로 $f(0)=2$에서 $C=2$

따라서 $f(x)=2x^3+x^2+x+2$이므로

$f(1)=2+1+1+2=6$

답 ③

0691

$f'(x)=\frac{d}{dx}\int(2ax+1)dx=2ax+1$

점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(1)=2a+1=-1 \quad \therefore a=-1$

$\therefore f(x)=\int(-2x+1)dx=-x^2+x+C$

이때, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$f(1)=3$에서 $-1+1+C=3 \quad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=-x^2+x+3$이므로

$f(2)=-4+2+3=1$

답 ⑤

0692

$f'(x)=4x-12$이므로

$f(x)=\int(4x-12)dx$

$=2x^2-12x+C=2(x-3)^2-18+C$

이때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 -9이므로

$-18+C=-9 \quad \therefore C=9$

$\therefore f(x)=2x^2-12x+9$

따라서 닫힌구간 $[2,\ 5]$에서 $f(x)$는 $x=5$일 때 최댓값을 가지므로 구하는 최댓값은

$f(5)=50-60+9=-1$

답 -1

0693

$f'(x)=3x^2-2x+2$이고, 직선 $y=3x-2$와 곡선 $y=f(x)$의 접점의 좌표를 (a, b)라 하면 $f'(a)=3$이므로

$3a^2-2a+2=3,\ 3a^2-2a-1=0$

$(3a+1)(a-1)=0 \qquad \therefore a=1\ (\because a>0)$

또, $b=3a-2$이므로 $b=1$ … ❶

$f(x)=\int(3x^2-2x+2)dx=x^3-x^2+2x+C$ … ❷

이고, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 1)$을 지나므로

$f(1)=1$에서 $1-1+2+C=1 \qquad \therefore C=-1$ … ❸

따라서 $f(x)=x^3-x^2+2x-1$이므로

$f(0)=-1$ … ❹

답 -1

채점 기준	비율
❶ 곡선과 직선의 접점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	20 %
❸ 적분상수를 구할 수 있다.	20 %
❹ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0694

|전략| $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$임을 이용한다.

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$

$f(x)=\int(x+2)(x^2-2x+4)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{d}{dx}\int(x+2)(x^2-2x+4)dx=(x+2)(x^2-2x+4)$

$\therefore f'(1)=(1+2)(1-2+4)=9$

따라서 구하는 값은 $2f'(1)=2\times9=18$

답 18

0695

$\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+2h)-f(x)\}-\{f(x-h)-f(x)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\times2+\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$

$=2f'(x)+f'(x)=3f'(x)$

즉, $3f'(x)=9x^2+6x-3$에서 $f'(x)=3x^2+2x-1$

$\therefore f(x)=\int(3x^2+2x-1)dx=x^3+x^2-x+C$

이때, $f(1)=3$이므로 $1+1-1+C=3 \qquad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-x+2$이므로

$f(2)=8+4-2+2=12$

답 12

0696

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$

$f'(1)=1$에서 $6+k=1 \qquad \therefore k=-5$

따라서 $f'(x)=6x-5$이므로

$f(x)=\int(6x-5)dx=3x^2-5x+C$

이때, $f(1)=0$이므로 $3-5+C=0$에서 $C=2$

따라서 $f(x)=3x^2-5x+2$이므로

$f(2)=12-10+2=4$

답 4

0697

$\Delta y=(2x+b)\Delta x-(\Delta x)^2$의 양변을 Δx로 나누면

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+b-\Delta x$이므로

$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+b$

$\therefore f(x)=\int(2x+b)dx=x^2+bx+C$

이때, $f(0)=0,\ f(2)=0$이므로

$f(0)=0$에서 $C=0$

$f(2)=0$에서 $4+2b=0 \qquad \therefore b=-2$

따라서 $f(x)=x^2-2x$이므로

$f(1)=-1$

답 -1

0698

|전략| $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$를 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

$f(x+y)=f(x)+f(y)+1$에 $x=0, y=0$을 대입하면

$f(0+0)=f(0)+f(0)+1 \qquad \therefore f(0)=-1$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$f(x+y)=f(x)+f(y)+1$에서
$f(x+h)=f(x)+f(h)+1$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+1-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\ (\because f(0)=-1)$

$=f'(0)=1$

$\therefore f(x)=\int1\,dx=x+C$

이때, $f(0)=-1$이므로 $C=-1$

$\therefore f(x)=x-1$

답 $f(x)=x-1$

0699

$f(x+y)=f(x)+f(y)-4xy-2$에 $x=0, y=0$을 대입하면

$f(0+0)=f(0)+f(0)-2 \qquad \therefore f(0)=2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-4xh-2-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-2}{h}-4x$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-4x\ (\because f(0)=2)$$
$$=f'(0)-4x=-4x+1\ (\because f'(0)=1)$$
$$\therefore f(x)=\int(-4x+1)dx=-2x^2+x+C$$

이때, $f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=-2x^2+x+2$이므로

$f(-1)=-2-1+2=-1$ 답 ②

0700

조건 ㈎의 $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0+0)=f(0)+f(0)-0 \qquad \therefore f(0)=0$

조건 ㈏에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1)+f(h)-h-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}-1=3$$
$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=4$$

또,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)}{h}-x\right\}=-x+4$$
$$\therefore f(x)=\int(-x+4)dx=-\frac{1}{2}x^2+4x+C$$

이때, $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x$이므로

$f(2)=-2+8=6$ 답 ③

0701

|전략| 극소인 점을 찾아 $f'(x)$의 부정적분에서 적분상수를 구한다.

$f'(x)=6x^2-10x+4=2(3x-2)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극솟값을 가지므로 $f(1)=5$

이때, $f(x)=\int(6x^2-10x+4)dx=2x^3-5x^2+4x+C$이므로

$f(1)=2-5+4+C=5 \qquad \therefore C=4$

따라서 $f(x)=2x^3-5x^2+4x+4$이므로

$f(-1)=-2-5-4+4=-7$ 답 -7

0702

$f'(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극댓값을 가지므로 $f(-1)=\frac{7}{3}$

이때, $f(x)=\int(x^2-1)dx=\frac{1}{3}x^3-x+C$이므로

$f(-1)=-\frac{1}{3}+1+C=\frac{7}{3} \qquad \therefore C=\frac{5}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{5}{3}$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$f(1)=\frac{1}{3}-1+\frac{5}{3}=1$ 답 1

0703

$f(x)$의 최고차항이 $2x^3$이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $6x^2$이다.

이때, $f'(-1)=f'(5)=0$이므로

$f'(x)=6(x+1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=5$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극댓값을 가지므로 $f(-1)=24$

이때,

$$f(x)=\int 6(x+1)(x-5)dx$$
$$=\int(6x^2-24x-30)dx=2x^3-12x^2-30x+C$$

이므로

$f(-1)=-2-12+30+C=24 \qquad \therefore C=8$

따라서 $f(x)=2x^3-12x^2-30x+8$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$f(5)=250-300-150+8=-192$ 답 -192

0704

|전략| 삼차함수의 도함수의 그래프가 $x=\alpha,\ x=\beta$에서 x축과 만나면 $f'(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\ (a\neq 0)$로 놓고 주어진 극값을 이용한다.

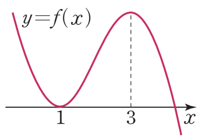
$y=f'(x)$의 그래프가 $x=-2,\ x=0$에서 x축과 만나고 위로 볼록하므로 $f'(x)=ax(x+2)\ (a<0)$로 놓으면

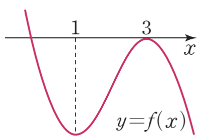
$$f(x)=\int ax(x+2)dx$$
$$=\int(ax^2+2ax)dx$$
$$=\frac{a}{3}x^3+ax^2+C$$

한편, $f(x)$는 $x=0$일 때 극댓값 5를 가지므로
$f(0)=5$에서 $C=5$
또, $f(x)$는 $x=-2$일 때 극솟값 1을 가지므로
$f(-2)=-\frac{8}{3}a+4a+5=1$에서 $a=-3$
$\therefore f(x)=-x^3-3x^2+5$ 답 ②

0705

$f(x)$의 최고차항이 $-x^3$이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $-3x^2$이다.
$y=f'(x)$의 그래프가 $x=1$, $x=3$에서 x축과 만나므로
$f'(x)=-3(x-1)(x-3)=-3x^2+12x-9$
$\therefore f(x)=\int(-3x^2+12x-9)dx=-x^3+6x^2-9x+C$
이때, 곡선 $y=f(x)$가 x축에 접하므로 다음 그림과 같이 극값 중 하나가 0이 된다.

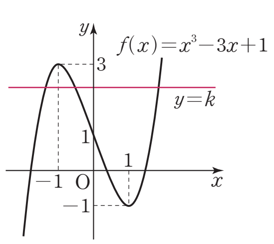
(i) 

(ii) 

(i) $f(1)=0$일 때
$f(1)=-1+6-9+C=0$에서 $C=4$이므로
$f(x)=-x^3+6x^2-9x+4$ $\quad\therefore f(0)=4$
(ii) $f(3)=0$일 때
$f(3)=-27+54-27+C=0$에서 $C=0$이므로
$f(x)=-x^3+6x^2-9x$ $\quad\therefore f(0)=0$
(i), (ii)에 의하여 $f(0)$이 될 수 있는 모든 값의 합은
$4+0=4$ 답 4

0706

$y=f'(x)$의 그래프가 $x=-1$, $x=1$에서 x축과 만나고 아래로 볼록하므로 $f'(x)=a(x+1)(x-1)(a>0)$로 놓으면
$f'(0)=-3$이므로 $-a=-3$ $\quad\therefore a=3$
$\therefore f(x)=\int 3(x+1)(x-1)dx$
$=\int(3x^2-3)dx=x^3-3x+C$
이때, $f(0)=1$이므로 $C=1$
$\therefore f(x)=x^3-3x+1$
한편, $f(x)$는 $x=-1$일 때 극댓값을 갖고 그 값은
$f(-1)=-1+3+1=3$
또, $f(x)$는 $x=1$일 때 극솟값을 갖고 그 값은
$f(1)=1-3+1=-1$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 실수 k의 값의 범위는
$-1<k<3$ 답 $-1<k<3$



STEP 3 내신 마스터

0707

유형 01 부정적분의 정의
|전략| $\int f(x)dx=F(x)+C$이면 $f(x)=F'(x)$이다.

$\int f(x)dx=x^2g(x)+3x+C$에서
$f(x)=\{x^2g(x)+3x+C\}'=2xg(x)+x^2g'(x)+3$
$\therefore f(3)=6g(3)+9g'(3)+3$
$=6\times3+9\times(-2)+3$
$=3$ 답 ④

0708

유형 04 부정적분의 계산
|전략| $\int f(x)dx+\int g(x)dx=\int\{f(x)+g(x)\}dx$임을 이용한다.

$f(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^3+8x\right)dx+\int\left(-\frac{1}{2}x^3+6\right)dx$
$=\int\left\{\left(\frac{1}{2}x^3+8x\right)+\left(-\frac{1}{2}x^3+6\right)\right\}dx$
$=\int(8x+6)dx=4x^2+6x+C$
이때, $f(0)=-1$이므로 $C=-1$
따라서 $f(x)=4x^2+6x-1$이므로
$f(-1)=4-6-1=-3$ 답 ①

0709

유형 05 도함수가 주어진 경우의 부정적분
|전략| $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용한다.

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+ax+5)dx$
$=x^3+\frac{1}{2}ax^2+5x+C$
이때, $f(0)=-2$이므로 $C=-2$
또, 함수 $f(x)$는 $x-1$로 나누어떨어지므로 나머지정리에 의하여 $f(1)=0$
즉, $f(1)=1+\frac{1}{2}a+5-2=0$에서 $a=-8$
따라서 $f(x)=x^3-4x^2+5x-2$이므로
$f(2)=8-16+10-2=0$ 답 ③

0710

유형 01 부정적분의 정의 + 05 도함수가 주어진 경우의 부정적분
|전략| $\int f(x)dx=F(x)+C$이면 $f(x)=F'(x)$이다.

$\int(2x+7)f'(x)dx=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-14x+C$에서
$(2x+7)f'(x)=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-14x+C\right)'$
$=2x^2+3x-14$
$=(2x+7)(x-2)$

$f'(x)=x-2$이므로 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+C_1$

이때, 곡선 $y=f(x)$의 y절편이 $\frac{5}{2}$이므로 $C_1=\frac{5}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{2}$이고 $f(x)$의 모든 계수의 합은 $f(1)$의 값과 같으므로

$f(1)=\frac{1}{2}-2+\frac{5}{2}=1$ 답 ①

0711

유형 06 부정적분을 이용한 함수의 결정

|전략| $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$임을 이용한다.

조건 (나)에서 $\{f(x)-g(x)\}'=2x-1$이므로

$\int\{f(x)-g(x)\}'dx=\int(2x-1)dx$

$\therefore f(x)-g(x)=x^2-x+C_1$

조건 (다)에서 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=3x^2-10x+3$이고,

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$\int\{f(x)g(x)\}'dx=\int\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx$

$=\int(3x^2-10x+3)dx$

$\therefore f(x)g(x)=x^3-5x^2+3x+C_2$

이때, 조건 (가)에서 $f(0)=3, g(0)=-5$이므로

$f(0)-g(0)=C_1=8,\ f(0)g(0)=C_2=-15$에서

$f(x)-g(x)=x^2-x+8$

$f(x)g(x)=x^3-5x^2+3x-15=(x-5)(x^2+3)$

그런데 $f(0)=3, g(0)=-5$이고 $f(x)-g(x)$의 이차항이 x^2이므로

$f(x)=x^2+3,\ g(x)=x-5$

$\therefore f(2)+g(1)=7-4=3$ 답 ⑤

0712

유형 07 함수와 그 부정적분의 관계식

|전략| 양변을 x에 대하여 미분하고, $F'(x)=f(x)$임을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

$xf(x)-F(x)=\frac{2}{3}x^3+4x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-f(x)=2x^2+8x$

$xf'(x)=2x^2+8x \qquad \therefore f'(x)=2x+8$

$\therefore f(x)=\int(2x+8)dx=x^2+8x+C$

이때, $f(-2)=6$이므로 $4-16+C=6$에서 $C=18$

$\therefore f(x)=x^2+8x+18$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 18이다. 답 ②

0713

유형 09 접선의 기울기가 주어진 경우의 부정적분

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$임을 이용한다.

$f'(x)=3x^2-10x+7$이므로

$f(x)=\int(3x^2-10x+7)dx=x^3-5x^2+7x+C$

이때, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, -1)$을 지나므로

$f(2)=-1$에서 $8-20+14+C=-1 \qquad \therefore C=-3$

$\therefore f(x)=x^3-5x^2+7x-3=(x-1)^2(x-3)$

$f(x)=0$에서 $x=1$(중근) 또는 $x=3$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 합은

$1+3=4$ 답 ④

0714

유형 10 미분계수와 부정적분

|전략| $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$임을 이용한다.

$\int\left\{\frac{d}{dx}(2x^2+ax)\right\}dx=2x^2+ax+C$이므로

$f(x)=2x^2+ax+C$

이때, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=11$에서 $f'(2)=11$

한편, $f'(x)=4x+a$이므로 $f'(2)=8+a=11 \qquad \therefore a=3$

$\therefore f'(x)=4x+3$

$\therefore f(x)=2x^2+3x+C$

또, $f(-1)=4$이므로 $2-3+C=4 \qquad \therefore C=5$

따라서 $f(x)=2x^2+3x+5$이므로

$f(1)=2+3+5=10$ 답 ⑤

0715

유형 11 도함수의 정의를 이용한 부정적분

|전략| $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$를 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$에 $x=0, y=0$을 대입하면

$f(0+0)=f(0)+f(0)+0 \qquad \therefore f(0)=0$

$f'(2)=5$이므로

$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)+2\times2\times h-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+4=5$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=1$

또,

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+2x=2x+1$

$\therefore f(x)=\int(2x+1)dx=x^2+x+C$

이때, $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=x^2+x$이므로

$f(5)=25+5=30$ 답 ⑤

0716

유형 13 도함수의 그래프가 주어진 경우의 부정적분

|전략| 삼차함수의 도함수의 그래프가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 x축과 만나면 $f'(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(a\neq 0)$로 놓고 주어진 극값을 이용한다.

$y=f'(x)$의 그래프가 $x=-1$, $x=3$에서 x축과 만나고 위로 볼록하므로 $f'(x)=a(x+1)(x-3)(a<0)$으로 놓으면

$f'(0)=3$에서 $-3a=3 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore f(x)=\int\{-(x+1)(x-3)\}dx$

$=\int(-x^2+2x+3)dx=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+C$

한편, $f(x)$는 $x=3$일 때 극댓값을 가지므로

$f(3)=-9+9+9+C=10 \qquad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+1$이고 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극솟값을 가지므로

$f(-1)=\frac{1}{3}+1-3+1=-\frac{2}{3}$ 답 ②

0717

유형 08 부정적분과 함수의 연속성

|전략| 구간별로 $f'(x)$의 부정적분을 구하고, 함수 $f(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 연속임을 이용하여 적분상수를 구한다.

$f'(x)=\begin{cases}-2 & (x>1)\\ 2x & (-1<x<1)\\ 2 & (x<-1)\end{cases}$ 이고 $f(x)$가 연속함수이므로

$f(x)=\begin{cases}-2x+C_1 & (x\geq 1)\\ x^2+C_2 & (-1\leq x<1)\\ 2x+C_3 & (x<-1)\end{cases}$ … ❶

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로

$f(0)=0$에서 $C_2=0$

$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}(-2x+C_1)=\lim_{x\to 1-}x^2$에서

$-2+C_1=1 \qquad \therefore C_1=3$

또, $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1+}x^2=\lim_{x\to -1-}(2x+C_3)$에서

$1=-2+C_3 \qquad \therefore C_3=3$ … ❷

따라서 $f(x)=\begin{cases}-2x+3 & (x\geq 1)\\ x^2 & (-1\leq x<1)\\ 2x+3 & (x<-1)\end{cases}$ 이므로

$f(-2)+f(2)=-1-1=-2$ … ❸

답 -2

채점 기준	배점
❶ 구간별로 $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	2점
❷ C_1, C_2, C_3의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $f(-2)+f(2)$의 값을 구할 수 있다.	2점

0718

유형 10 미분계수와 부정적분

|전략| $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 존재할 때, (분모)→0이면 (분자)→0임을 이용한다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x-1}=2$이므로 $f'(x)$는 일차항의 계수가 2인 일차함수이다.

즉, $f'(x)=2x+a$ (a는 상수)

$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{x-4}=2$에서 $x\longrightarrow 4$일 때, (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to 4}f(x)=0$이므로 $f(4)=0$

$\therefore \lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)=2$

$f'(4)=2$에서 $8+a=2 \qquad \therefore a=-6$

$\therefore f'(x)=2x-6$ … ❶

$f(x)=\int(2x-6)dx=x^2-6x+C$

$f(4)=0$이므로

$16-24+C=0 \qquad \therefore C=8$

$\therefore f(x)=x^2-6x+8$ … ❷

따라서 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 8이다. … ❸

답 8

채점 기준	배점
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	3점
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	2점
❸ 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱을 구할 수 있다.	2점

0719

유형 12 극값이 주어진 경우의 부정적분

|전략| 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 삼차함수 $f(x)$에서 (극댓값)×(극솟값)<0이어야 함을 이용한다.

(1) $f'(x)=3x^2-9x+6$이므로

$f(x)=\int(3x^2-9x+6)dx$

$=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+C$

(2) $f'(x)=3(x-1)(x-2)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=2$

x	…	1	…	2	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

7 부정적분

함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극댓값을 갖고 그 값은

$f(1)=1-\frac{9}{2}+6+C=C+\frac{5}{2}$

또, 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극솟값을 갖고 그 값은

$f(2)=8-18+12+C=C+2$

(3) 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

(극댓값)×(극솟값)<0이어야 하므로

$\left(C+\frac{5}{2}\right)(C+2)<0$

따라서 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 적분상수 C의 값의 범위는 $-\frac{5}{2}<C<-2$

답 (1) $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+C$

(2) 극댓값: $C+\frac{5}{2}$, 극솟값: $C+2$ (3) $-\frac{5}{2}<C<-2$

채점 기준	배점
(1) $f'(x)$의 부정적분을 적분상수 C를 사용하여 나타낼 수 있다.	4점
(2) 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 적분상수를 사용하여 나타낼 수 있다.	4점
(3) 적분상수 C의 값의 범위를 구할 수 있다.	4점

Lecture

삼차방정식의 근의 판별

삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$의 근은

(1) (극댓값)×(극솟값)$<0 \iff$ 서로 다른 세 실근

(2) (극댓값)×(극솟값)$=0 \iff$ 한 실근과 중근 (서로 다른 두 실근)

(3) (극댓값)×(극솟값)$>0 \iff$ 한 실근과 두 허근

창의·융합 교과서 속 심화문제

0720

|전략| 양변을 x에 대하여 미분하고, $F'(x)=f(x)$임을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

$2F(x)=x\{f(x)-3\}$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)=f(x)-3+xf'(x)$ $\quad \therefore f(x)=xf'(x)-3$ ⋯⋯ ㉡

$f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)$의 최고차항을 x^n(n은 자연수)이라 하면 $xf'(x)$의 최고차항은 nx^n이므로 $n=1$

즉, $f(x)$가 일차함수이므로 $f(x)=x+a$(a는 상수)라 하면

$f'(x)=1$

이것을 ㉡에 대입하면 $x+a=x-3$

$\therefore a=-3 \quad \therefore f(x)=x-3$ ⋯⋯ ㉢

㉠에 $x=2$를 대입하면

$2F(2)=2\{f(2)-3\} \quad \therefore F(2)=f(2)-3$

따라서 ㉢에서 $f(2)=-1$이므로

$F(2)=-1-3=-4$

답 ①

0721

|전략| 두 번째 식에서 $g(x)$는 일차함수임을 유추하고 첫 번째 식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $F'(x)=f(x)$임을 이용한다.

$f(x)g(x)=-x^3+2x^2+x-2$에서 함수 $f(x)$가 이차함수이므로 함수 $g(x)$는 일차함수이다.

또, $g(x)$가 일차함수이므로 $g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$에서

$x^2+f(x)$는 상수이다.

즉, $x^2+f(x)=a$($a\neq0$인 상수)라 하면

$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx=\int a\,dx=ax+C$ ⋯⋯ ㉠

$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$a=x^2+f(x)$에서 $f(x)=-x^2+a$ ⋯⋯ ㉡

이때, $f(x)g(x)=-x^3+2x^2+x-2$이므로 ㉠, ㉡에서

$(-x^2+a)(ax+C)=-ax^3-Cx^2+a^2x+aC$

$=-x^3+2x^2+x-2$

$\therefore a=1, C=-2$

따라서 $g(x)=x-2$이므로 $g(4)=4-2=2$

답 ②

0722

|전략| 조건 (가)와 (나)의 두 식을 변끼리 더하고,

$\frac{d}{dx}[x\{F(x)+G(x)\}]=\{F(x)+G(x)\}+x\{f(x)+g(x)\}$

임을 이용한다.

조건 (가)와 (나)의 두 식을 변끼리 더하면

$\{F(x)+G(x)\}+x\{f(x)+g(x)\}=3x^2-x+1$

$\{F(x)+G(x)\}+x\{f(x)+g(x)\}=\frac{d}{dx}[x\{F(x)+G(x)\}]$

이므로

$\frac{d}{dx}[x\{F(x)+G(x)\}]=3x^2-x+1$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 적분하면

$x\{F(x)+G(x)\}=x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

위의 등식에 $x=0$을 대입하면 $C=0$

$\therefore F(x)+G(x)=x^2-\frac{1}{2}x+1$ ⋯⋯ ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+g(x)=2x-\frac{1}{2}$

$\therefore f(2)+g(2)=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

답 ③

0723

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서 연속임을 이용한다.

$f'(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{x\to2+}(ax+b)=\lim_{x\to2-}3x^2$에서 $2a+b=12$ ⋯⋯ ㉠

$\lim_{x\to-2+}3x^2=\lim_{x\to-2-}(ax+b)$에서 $-2a+b=12$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0, b=12$

$$f'(x)=\begin{cases} 12 & (x\ge 2) \\ 3x^2 & (-2<x<2) \\ 12 & (x\le -2) \end{cases}$$ 이므로

$$f(x)=\begin{cases} 12x+C_1 & (x\ge 2) \\ x^3+C_2 & (-2<x<2) \\ 12x+C_3 & (x\le -2) \end{cases}$$

이때, $f(0)=1$에서 $C_2=1$

또, $f(x)$는 $x=2$, $x=-2$에서 미분가능하므로 $x=2$, $x=-2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2+}(12x+C_1)=\lim_{x\to 2-}(x^3+1)$에서

$24+C_1=9 \qquad \therefore C_1=-15$

$\lim_{x\to -2+}(x^3+1)=\lim_{x\to -2-}(12x+C_3)$에서

$-7=-24+C_3 \qquad \therefore C_3=17$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} 12x-15 & (x\ge 2) \\ x^3+1 & (-2<x<2) \\ 12x+17 & (x\le -2) \end{cases}$$

한편, $|f(x)|=9$에서

(i) $x\ge 2$일 때

$|12x-15|=9$, $12x-15=\pm 9$

$\therefore x=2$ ($\because x\ge 2$)

(ii) $-2<x<2$일 때

$|x^3+1|=9$, $x^3+1=\pm 9$

$-2<x<2$에서 위의 등식을 만족시키는 x의 값은 없다.

(iii) $x\le -2$일 때

$|12x+17|=9$, $12x+17=\pm 9$

$\therefore x=-\frac{13}{6}$ ($\because x\le -2$)

따라서 (i)~(iii)에서 방정식 $|f(x)|=9$의 모든 실근의 합은

$2-\frac{13}{6}=-\frac{1}{6}$ 답 $-\frac{1}{6}$

0724

|전략| $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 만나면 $h'(x)=f'(x)-g'(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$($a\ne 0$인 상수)로 놓을 수 있다.

$y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프가 $x=0$, $x=2$에서 만나므로

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=ax(x-2)$ ($a<0$)로 놓으면

$h(x)=\int ax(x-2)dx=\int(ax^2-2ax)dx=\frac{a}{3}x^3-ax^2+C$

$h'(x)=ax(x-2)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $h(x)$는 $x=0$일 때 극솟값을 가지므로

$h(0)=1$에서 $C=1$

또, 함수 $h(x)$는 $x=2$일 때 극댓값을 가지므로

$h(2)=5$에서 $\frac{8}{3}a-4a+1=5 \qquad \therefore a=-3$

따라서 $h(x)=-x^3+3x^2+1$이므로

$h(-2)=8+12+1=21$ 답 ⑤

본책 126~141쪽

8 | 정적분

STEP 1 개념 마스터

0725

$\int_0^3 4x\,dx=\left[2x^2\right]_0^3=18-0=18$ 답 18

0726

$\int_1^2(8x-3)dx=\left[4x^2-3x\right]_1^2$

$=(16-6)-(4-3)=9$ 답 9

0727

$\int_{-2}^1(3x^2+2x)dx=\left[x^3+x^2\right]_{-2}^1$

$=(1+1)-(-8+4)=6$ 답 6

0728

$\int_0^2(x^3-2x+1)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-x^2+x\right]_0^2$

$=(4-4+2)-0=2$ 답 2

0729

$\int_1^2(2x^3-6x+3)dx=\left[\frac{1}{2}x^4-3x^2+3x\right]_1^2$

$=(8-12+6)-\left(\frac{1}{2}-3+3\right)=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0730

$\int_{-1}^2(x+2)(3x-2)dx=\int_{-1}^2(3x^2+4x-4)dx$

$=\left[x^3+2x^2-4x\right]_{-1}^2$

$=(8+8-8)-(-1+2+4)=3$ 답 3

0731

$\int_1^1(x^2+4x+3)dx=0$ 답 0

0732

$\int_1^0(4x^3-3x^2+2x)dx=-\int_0^1(4x^3-3x^2+2x)dx$

$=-\left[x^4-x^3+x^2\right]_0^1$

$=-\{(1-1+1)-0\}=-1$ 답 -1

0733

$$\int_3^2 (4x^3+2x+1)dx = -\int_2^3 (4x^3+2x+1)dx$$
$$= -\left[x^4+x^2+x\right]_2^3$$
$$= -\{(81+9+3)-(16+4+2)\}$$
$$= -71$$

답 -71

0734

$$\int_0^1 (2x-x^2)dx + \int_0^1 (2x+x^2)dx$$
$$= \int_0^1 (2x-x^2+2x+x^2)dx$$
$$= \int_0^1 4x\,dx = \left[2x^2\right]_0^1$$
$$= 2-0 = 2$$

답 2

0735

$$\int_0^1 (x-2)^2\,dx + \int_0^1 4x\,dx$$
$$= \int_0^1 \{(x-2)^2+4x\}dx$$
$$= \int_0^1 (x^2+4)dx = \left[\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{1}{3}+4\right)-0 = \frac{13}{3}$$

답 $\frac{13}{3}$

0736

$$\int_0^2 (2+x)^3\,dx + \int_0^2 (2-x)^3\,dx$$
$$= \int_0^2 \{(2+x)^3+(2-x)^3\}dx$$
$$= \int_0^2 (8+12x+6x^2+x^3+8-12x+6x^2-x^3)dx$$
$$= \int_0^2 (16+12x^2)dx = \left[16x+4x^3\right]_0^2$$
$$= (32+32)-0 = 64$$

답 64

0737

$$\int_{-1}^1 (x^2+x+1)dx + \int_1^{-1} (x^2-x)dx$$
$$= \int_{-1}^1 (x^2+x+1)dx - \int_{-1}^1 (x^2-x)dx$$
$$= \int_{-1}^1 (x^2+x+1-x^2+x)dx$$
$$= \int_{-1}^1 (2x+1)dx = \left[x^2+x\right]_{-1}^1$$
$$= (1+1)-(1-1) = 2$$

답 2

0738

$$\int_{-1}^1 (2x+3)dx + \int_1^2 (2x+3)dx$$
$$= \int_{-1}^2 (2x+3)dx = \left[x^2+3x\right]_{-1}^2$$
$$= (4+6)-(1-3) = 12$$

답 12

0739

$$\int_0^1 (4x^3+6x^2-3)dx + \int_1^3 (4x^3+6x^2-3)dx$$
$$= \int_0^3 (4x^3+6x^2-3)dx = \left[x^4+2x^3-3x\right]_0^3$$
$$= (81+54-9)-0 = 126$$

답 126

0740

$$\int_2^3 (3x^2-2x+1)dx + \int_3^2 (3x^2-2x+1)dx$$
$$= \int_2^2 (3x^2-2x+1)dx = 0$$

답 0

0741

$$\int_0^1 (x^2-2x)dx + \int_2^1 (2x-x^2)dx$$
$$= \int_0^1 (x^2-2x)dx + \int_1^2 (x^2-2x)dx$$
$$= \int_0^2 (x^2-2x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2$$
$$= \left(\frac{8}{3}-4\right)-0 = -\frac{4}{3}$$

답 $-\frac{4}{3}$

0742

$$\int_{-1}^2 (1+2x-x^3)dx - \int_3^2 (1+2x-x^3)dx$$
$$= \int_{-1}^2 (1+2x-x^3)dx + \int_2^3 (1+2x-x^3)dx$$
$$= \int_{-1}^3 (1+2x-x^3)dx = \left[x+x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^3$$
$$= \left(3+9-\frac{81}{4}\right)-\left(-1+1-\frac{1}{4}\right) = -8$$

답 -8

0743

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & (x \ge 1) \\ -x+1 & (x \le 1) \end{cases}$$ 이므로

$$\int_0^2 |x-1|dx = \int_0^1 (-x+1)dx + \int_1^2 (x-1)dx$$
$$= \left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2$$
$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

답 1

0744

$$|x(x+1)| = \begin{cases} x^2+x & (x \le -1 \text{ 또는 } x \ge 0) \\ -x^2-x & (-1 \le x \le 0) \end{cases}$$ 이므로

$$\int_{-1}^2 |x(x+1)|dx = \int_{-1}^0 (-x^2-x)dx + \int_0^2 (x^2+x)dx$$
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$$
$$= \frac{1}{6}+\frac{14}{3} = \frac{29}{6}$$

답 $\frac{29}{6}$

0745

$$\int_{-1}^{1}(3x^2+4x)dx=\int_{-1}^{1}3x^2dx+\int_{-1}^{1}4x\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}3x^2dx=2\Big[x^3\Big]_0^1=2$$

답 2

0746

$$\int_{-2}^{2}(x^2+x+1)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(x^2+1)dx+\int_{-2}^{2}x\,dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(x^2+1)dx=2\Big[\frac{1}{3}x^3+x\Big]_0^2$$
$$=2\times\Big(\frac{8}{3}+2\Big)=\frac{28}{3}$$

답 $\frac{28}{3}$

0747

$$\int_{-1}^{1}(x^3+5x^2-2x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^3-2x)dx+\int_{-1}^{1}5x^2dx$$
$$=2\int_{0}^{1}5x^2dx=2\Big[\frac{5}{3}x^3\Big]_0^1=\frac{10}{3}$$

답 $\frac{10}{3}$

0748

$$\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2+x-5)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^3+x)dx+\int_{-1}^{1}(-2x^2-5)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-2x^2-5)dx=2\Big[-\frac{2}{3}x^3-5x\Big]_0^1$$
$$=2\times\Big(-\frac{17}{3}\Big)=-\frac{34}{3}$$

답 $-\frac{34}{3}$

0749

$$\int_{-2}^{2}(3x+1)(x-2)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(3x^2-5x-2)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(3x^2-2)dx-\int_{-2}^{2}5x\,dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(3x^2-2)dx=2\Big[x^3-2x\Big]_0^2$$
$$=2\times4=8$$

답 8

0750

함수 $y=f(x)$의 그래프는 닫힌구간 [0, 2]의 그래프가 반복해서 나타나므로 함수 $y=f(x)$의 주기는 2이다.

답 2

0751

$$\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{\boxed{0}}f(x)dx=\int_{\boxed{6}}^{8}f(x)dx$$

답 0, 6

0752

한 주기의 정적분의 값은 항상 같으므로

$$\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{0}^{2}f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{2}\{-x(x-2)\}dx$$
$$=\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+x^2\Big]_0^2$$
$$=-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

0753

$$\int_{-2}^{4}f(x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{4}f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx$$
$$=3\int_{0}^{2}f(x)dx$$
$$=3\int_{0}^{2}\{-x(x-2)\}dx$$
$$=3\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx$$
$$=3\Big[-\frac{1}{3}x^3+x^2\Big]_0^2$$
$$=3\times\frac{4}{3}=4$$

답 4

0754

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-4x$

답 $f(x)=3x^2-4x$

0755

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+10x-3$

답 $f(x)=3x^2+10x-3$

0756

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=5x^4+12x^2$

답 $f(x)=5x^4+12x^2$

0757

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=10x^9+5x^4+1$

답 $f(x)=10x^9+5x^4+1$

0758

$f(t)=2t^2+t+1$로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{0}^{x}(2t^2+t+1)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)=f(0)=1$$

답 1

0759

$f(t)=t^2-t+3$으로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x(t^2-t+3)dt=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$
$$=F'(2)=f(2)=5$$

답 5

STEP 2 유형 마스터

0760

|전략| 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$임을 이용한다.

$$\int_0^1 4(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)dx$$
$$=\int_0^1 4(x^4-1)(x^4+1)dx=\int_0^1 4(x^8-1)dx$$
$$=\int_0^1(4x^8-4)dx=\Big[\frac{4}{9}x^9-4x\Big]_0^1$$
$$=\frac{4}{9}-4=-\frac{32}{9}$$

답 $-\frac{32}{9}$

0761

$\int_2^x f(t)dt=x^3+ax^2+6x-8$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=8+4a+12-8$

$\therefore a=-3$

답 ③

0762

$$\int_0^3 x^2f(x)dx=\int_0^3 x^2(2x-5)dx=\int_0^3(2x^3-5x^2)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{2}x^4-\frac{5}{3}x^3\Big]_0^3=\frac{81}{2}-45=-\frac{9}{2}$$

답 $-\frac{9}{2}$

0763

$$\int_{-1}^2\{2f'(x)-3x^2\}dx=\Big[2f(x)-x^3\Big]_{-1}^2$$
$$=\{2f(2)-8\}-\{2f(-1)+1\}$$
$$=2f(2)-7\ (\because f(-1)=-1)$$

이때, $2f(2)-7=5$이므로 $f(2)=6$

답 6

0764

|전략| 정적분의 정의를 이용하여 미정계수를 포함하는 식으로 나타낸 후, 조건에 맞게 식을 세워 푼다.

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(6x^2+2ax)dx$$
$$=\Big[2x^3+ax^2\Big]_0^1=2+a$$

이때, $f(1)=6+2a$이므로 $2+a=6+2a$

$\therefore a=-4$

답 ①

0765

$$\int_0^2(-3x^2+4kx+4)dx=\Big[-x^3+2kx^2+4x\Big]_0^2=8k$$

이때, $8k<16$이므로 $k<2$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다.

답 1

0766

$$\int_{-a}^a(3x^2+2x)dx=\Big[x^3+x^2\Big]_{-a}^a=(a^3+a^2)-(-a^3+a^2)=2a^3$$

이때, $2a^3=\frac{1}{4}$이므로 $a^3=\frac{1}{8}$ $\qquad\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because a$는 실수)

$\therefore 50a=50\times\frac{1}{2}=25$

답 ③

0767

$$\int_{-1}^k(2x+7)dx=\Big[x^2+7x\Big]_{-1}^k=(k^2+7k)-(-6)$$
$$=k^2+7k+6$$
$$=\left(k+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$$

이므로 $\int_{-1}^k(2x+7)dx$는 $k=-\frac{7}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{25}{4}$를 갖는다.

따라서 $m=-\frac{7}{2}$, $n=-\frac{25}{4}$이므로 $\frac{m}{n}=\frac{14}{25}$

답 ②

0768

|전략| 적분 구간이 같으므로 하나의 정적분 기호로 묶는다.

$$\int_1^2(3x-1)^2dx+\int_1^2(4x+3)dx$$
$$=\int_1^2\{(3x-1)^2+(4x+3)\}dx$$
$$=\int_1^2(9x^2-2x+4)dx$$
$$=\Big[3x^3-x^2+4x\Big]_1^2$$
$$=28-6=22$$

답 22

0769

$$\int_0^1\frac{x^3}{x+1}dx-\int_1^0\frac{1}{t+1}dt$$
$$=\int_0^1\frac{x^3}{x+1}dx-\int_1^0\frac{1}{x+1}dx$$
$$=\int_0^1\frac{x^3}{x+1}dx+\int_0^1\frac{1}{x+1}dx$$
$$=\int_0^1\frac{x^3+1}{x+1}dx \quad \cdots ❶$$
$$=\int_0^1\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx$$
$$=\int_0^1(x^2-x+1)dx \quad \cdots ❷$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\Big]_0^1=\frac{5}{6} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{5}{6}$

채점 기준	비율
❶ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$, $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	40 %
❷ 인수분해 공식을 이용하여 식을 정리할 수 있다.	30 %
❸ $\int_0^1 (x^2-x+1)dx$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0770

$$f(k)=\int_1^3 (x+k)^2dx-\int_3^1 (2x^2+1)dx$$
$$=\int_1^3 (x+k)^2dx+\int_1^3 (2x^2+1)dx$$
$$=\int_1^3 \{(x+k)^2+(2x^2+1)\}dx$$
$$=\int_1^3 (3x^2+2kx+k^2+1)dx$$
$$=\left[x^3+kx^2+(k^2+1)x\right]_1^3$$
$$=(27+9k+3k^2+3)-(1+k+k^2+1)$$
$$=2k^2+8k+28$$
$$=2(k+2)^2+20$$

이므로 $f(k)$는 $k=-2$일 때, 최솟값 20을 갖는다.

따라서 $a=-2$, $b=20$이므로 $a+b=18$ 답 ④

0771

|전략| $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$임을 이용한다.

$$\int_{-1}^0 (3x^2-1)dx+\int_0^2 (3t^2-1)dt$$
$$=\int_{-1}^0 (3x^2-1)dx+\int_0^2 (3x^2-1)dx$$
$$=\int_{-1}^2 (3x^2-1)dx=\left[x^3-x\right]_{-1}^2=6$$

답 6

0772

$$\int_4^6 (3x^2-2x)dx-\int_3^6 (3x^2-2x)dx+\int_2^4 (3x^2-2x)dx$$
$$=\int_2^4 (3x^2-2x)dx+\int_4^6 (3x^2-2x)dx-\int_3^6 (3x^2-2x)dx$$
$$=\int_2^6 (3x^2-2x)dx-\int_3^6 (3x^2-2x)dx$$
$$=\int_2^6 (3x^2-2x)dx+\int_6^3 (3x^2-2x)dx$$
$$=\int_2^3 (3x^2-2x)dx$$
$$=\left[x^3-x^2\right]_2^3=14$$

답 14

0773

$$\int_0^3 (6x+5)dx-\int_a^3 (6x+5)dx$$
$$=\int_0^3 (6x+5)dx+\int_3^a (6x+5)dx$$
$$=\int_0^a (6x+5)dx=\left[3x^2+5x\right]_0^a$$
$$=3a^2+5a=22$$

이므로

$3a^2+5a-22=0$, $(3a+11)(a-2)=0$

$\therefore a=-\dfrac{11}{3}$ 또는 $a=2$

이때, $0<a<3$이므로 $a=2$ 답 ④

0774

$$\int_2^3 f(x)dx=\int_2^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx$$
$$=-\int_0^2 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx$$
$$=-B+A+C=A-B+C$$

답 $A-B+C$

0775

|전략| $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$임을 이용하여 적분 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^0 (2x+3)dx+\int_0^1 (-3x^2+3)dx$$
$$=\left[x^2+3x\right]_{-1}^0+\left[-x^3+3x\right]_0^1$$
$$=2+2=4$$

답 4

0776

$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x\le 0) \\ 4 & (0<x\le 1) \\ -3x^2+b & (x>1)\end{cases}$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로

$f(0)=a=\lim\limits_{x\to 0+} 4$에서 $a=4$

$f(1)=4=\lim\limits_{x\to 1+} (-3x^2+b)$에서 $4=-3+b$이므로 $b=7$

$\therefore f(x)=\begin{cases} 2x+4 & (x\le 0) \\ 4 & (0\le x\le 1) \\ -3x^2+7 & (x\ge 1)\end{cases}$

$$\therefore \int_{-1}^3 f(x)dx=\int_{-1}^0 (2x+4)dx+\int_0^1 4\,dx+\int_1^3 (-3x^2+7)dx$$
$$=\left[x^2+4x\right]_{-1}^0+\left[4x\right]_0^1+\left[-x^3+7x\right]_1^3$$
$$=3+4-12=-5$$

답 -5

0777

$f(x)=\begin{cases} -2x & (x\le 0) \\ -x^2 & (x\ge 0)\end{cases}$이므로

$f(x-2)=\begin{cases} -2x+4 & (x\le 2) \\ -(x-2)^2 & (x\ge 2)\end{cases}$

$\therefore \int_1^3 f(x-2)dx$

$=\int_1^2(-2x+4)dx+\int_2^3\{-(x-2)^2\}dx$

$=\int_1^2(-2x+4)dx+\int_2^3(-x^2+4x-4)dx$

$=\left[-x^2+4x\right]_1^2+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-4x\right]_2^3$

$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

0778

조건 (나)에서 $f'(x)=\begin{cases} 6x+4 & (x<0) \\ -2 & (x>0) \end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases} 3x^2+4x+C_1 & (x<0) \\ -2x+C_2 & (x>0) \end{cases}$로 놓을 수 있다.

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-}(3x^2+4x+C_1)=\lim_{x\to0+}(-2x+C_2)$

$\therefore C_1=C_2$

조건 (가)에서 $f(0)=1$이므로 $C_1=C_2=1$

$\therefore f(x)=\begin{cases} 3x^2+4x+1 & (x\le0) \\ -2x+1 & (x\ge0) \end{cases}$

$\therefore \int_{-1}^3 f(x)dx=\int_{-1}^0(3x^2+4x+1)dx+\int_0^3(-2x+1)dx$

$=\left[x^3+2x^2+x\right]_{-1}^0+\left[-x^2+x\right]_0^3$

$=0+(-6)=-6$

답 -6

0779

$x=-2$와 $x=1$을 경계로 $2-x$와 x^2의 대소가 달라진다.

$2-x=x^2$에서 $x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

(i) $-2\le x\le1$일 때

$(x+2)(x-1)\le0$, 즉 $2-x\ge x^2$이므로

$(2-x)*x^2=2-x$

(ii) $x<-2$ 또는 $x>1$일 때

$(x+2)(x-1)>0$, 즉 $2-x<x^2$이므로

$(2-x)*x^2=x^2$

$\therefore \int_0^2\{(2-x)*x^2\}dx=\int_0^1(2-x)dx+\int_1^2 x^2dx$

$=\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$

$=\frac{3}{2}+\frac{7}{3}=\frac{23}{6}$

답 $\frac{23}{6}$

0780

$f(x)=\begin{cases} 3x & (x\le1) \\ 3 & (x\ge1) \end{cases}$이므로

$\int_0^3(x+2)f(x)dx=\int_0^1 3x(x+2)dx+\int_1^3 3(x+2)dx$

$=\int_0^1(3x^2+6x)dx+\int_1^3(3x+6)dx$

$=\left[x^3+3x^2\right]_0^1+\left[\frac{3}{2}x^2+6x\right]_1^3$

$=4+24=28$

답 ③

0781

|전략| $3x^2-2x-1=0$을 만족시키는 x의 값인 $x=-\frac{1}{3}$, $x=1$을 기준으로 적분 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

$3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)$에서

$|3x^2-2x-1|=\begin{cases} 3x^2-2x-1 & \left(x\le-\frac{1}{3} \text{ 또는 } x\ge1\right) \\ -3x^2+2x+1 & \left(-\frac{1}{3}\le x\le1\right) \end{cases}$이므로

$\int_0^2|3x^2-2x-1|dx$

$=\int_0^1(-3x^2+2x+1)dx+\int_1^2(3x^2-2x-1)dx$

$=\left[-x^3+x^2+x\right]_0^1+\left[x^3-x^2-x\right]_1^2$

$=1+3=4$

답 4

0782

$|x|=\begin{cases} x & (x\ge0) \\ -x & (x\le0) \end{cases}$이므로

$\int_{-1}^3(2|x|-2)dx=\int_{-1}^0(-2x-2)dx+\int_0^3(2x-2)dx$

$=\left[-x^2-2x\right]_{-1}^0+\left[x^2-2x\right]_0^3$

$=-1+3=2$

답 ②

0783

$|x^2(x-1)|=\begin{cases} x^3-x^2 & (x\ge1) \\ -x^3+x^2 & (x\le1) \end{cases}$이므로

$\int_0^2|x^2(x-1)|dx=\int_0^1(-x^3+x^2)dx+\int_1^2(x^3-x^2)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$

$=\frac{1}{12}+\frac{17}{12}=\frac{3}{2}$

답 ①

0784

$|x-a|=\begin{cases} x-a & (a\le x\le3) \\ -x+a & (0\le x\le a) \end{cases}$이므로

$f(a)=\int_0^3|x-a|dx=\int_0^a(-x+a)dx+\int_a^3(x-a)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_0^a+\left[\frac{1}{2}x^2-ax\right]_a^3$

$=\left(-\frac{1}{2}a^2+a^2\right)+\left\{\left(\frac{9}{2}-3a\right)-\left(\frac{1}{2}a^2-a^2\right)\right\}$

$=a^2-3a+\frac{9}{2}=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

따라서 $f(a)$의 값이 최솟값이 되도록 하는 실수 a의 값은 $\frac{3}{2}$이다.

답 $\frac{3}{2}$

0785

$2x^2-4x=2x(x-2)$에서

$$|2x^2-4x|=\begin{cases} 2x^2-4x & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -2x^2+4x & (0\le x\le 2) \end{cases}$$

$a>2$이므로

$$\int_0^a |2x^2-4x|\,dx=\int_0^2(-2x^2+4x)dx+\int_2^a(2x^2-4x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2+\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2\right]_2^a$$
$$=\frac{2}{3}a^3-2a^2+\frac{16}{3}$$

이때, $\int_0^a |2x^2-4x|\,dx=16$이므로

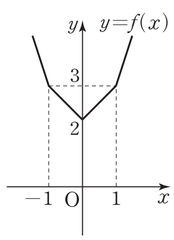
$\frac{2}{3}a^3-2a^2+\frac{16}{3}=16$, $a^3-3a^2-16=0$

$(a-4)(a^2+a+4)=0$ $\quad\therefore a=4$ ($\because a>2$) 답 ②

786

$f(x)=|x-1|+|x|+|x+1|$에서

오른쪽 그림과 같이 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최솟값 2를 가지므로



$a=2$

$1\le x\le 2$일 때,

$f(x)=(x-1)+x+(x+1)=3x$

이므로

$$\int_1^a f(x)dx=\int_1^2 3x\,dx=\left[\frac{3}{2}x^2\right]_1^2=\frac{9}{2}$$ 답 ⑤

0787

|전략| 짝수 차수의 항 또는 상수항으로만 이루어진 함수는 $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$를 만족시키고, 홀수 차수의 항으로만 이루어진 함수는 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$을 만족시킨다.

$$\int_{-a}^3(2x^3+x^2-2x)dx+\int_3^a(2x^3+x^2-2x)dx$$
$$=\int_{-a}^a(2x^3+x^2-2x)dx$$
$$=2\int_0^a x^2dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3$$

즉, $\frac{2}{3}a^3=\frac{16}{3}$이므로 $a^3=8$ $\quad\therefore a=2$ ($\because a$는 실수) 답 2

0788

$f(x)=x^3+2$에서 $f'(x)=3x^2$이므로

$$\int_{-1}^1 f(x)\{f'(x)+1\}dx=\int_{-1}^1(x^3+2)(3x^2+1)dx$$
$$=\int_{-1}^1(3x^5+x^3+6x^2+2)dx$$
$$=2\int_0^1(6x^2+2)dx$$
$$=2\left[2x^3+2x\right]_0^1=2\times 4=8$$ 답 ④

0789

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx=\int_{-1}^1(ax^2+bx)dx$$
$$=2\int_0^1 ax^2dx=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}a$$

이때, $\int_{-1}^1 xf(x)dx=6$이므로 $\frac{2}{3}a=6$ $\quad\therefore a=9$

$$\int_{-1}^1 x^2f(x)dx=\int_{-1}^1(ax^3+bx^2)dx$$
$$=2\int_0^1 bx^2dx=2\left[\frac{b}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}b$$

이때, $\int_{-1}^1 x^2f(x)dx=-2$이므로 $\frac{2}{3}b=-2$ $\quad\therefore b=-3$

$\therefore 2a+b=18-3=15$ 답 15

0790

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1(1+2x+3x^2+\cdots+2019x^{2018})dx$$
$$=2\int_0^1(1+3x^2+5x^4+\cdots+2019x^{2018})dx$$
$$=2\left[x+x^3+x^5+\cdots+x^{2019}\right]_0^1$$
$$=2(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{1010\text{개}})$$
$$=2\times 1010=2020$$ 답 2020

0791

|전략| $f(x)$는 우함수이고 (기함수)×(우함수)=(기함수)임을 이용한다.

$f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로 $x^5f(x)$, $x^3f(x)$는 모두 기함수이다.

$$\therefore \int_{-2}^2(x^5-x^3+3)f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^2 x^5f(x)dx-\int_{-2}^2 x^3f(x)dx+3\int_{-2}^2 f(x)dx$$
$$=3\int_{-2}^2 f(x)dx=3\times 2\int_0^2 f(x)dx$$
$$=6\int_0^2 f(x)dx=6\times 7=42$$ 답 ④

0792

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수이다. ... ❶

$y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 조건 (나)에서

$\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx=5$ ... ❷

조건 (다)에서 $\int_{-3}^3 f(x)dx=2\int_0^3 f(x)dx=20$이므로

$\int_0^3 f(x)dx=10$ ... ❸

$\therefore \int_{-1}^3 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^3 f(x)dx$

$=5+10=15$ ... ❹

답 15

채점 기준	비율
❶ $f(-x)=f(x)$를 만족시키는 함수 $f(x)$는 우함수임을 알 수 있다.	25 %
❷ 우함수의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, $\int_{-a}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{a}f(x)dx$임을 이용할 수 있다.	25 %
❸ 함수 $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$임을 이용할 수 있다.	25 %
❹ $\int_{-1}^{3}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	25 %

0793

$f(-x)=-f(x)$에서 $f(x)$는 기함수이므로 $x^2f(x)$는 기함수, $xf(x)$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-1}^{1}(3x^2+5x-6)f(x)dx$$
$$=3\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx+5\int_{-1}^{1}xf(x)dx-6\int_{-1}^{1}f(x)dx$$
$$=5\int_{-1}^{1}xf(x)dx=5\times2\int_{0}^{1}xf(x)dx$$
$$=10\int_{0}^{1}xf(x)dx=10\times2=20$$

답 20

0794

$f(-x)=-f(x)$에서 $f(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-2}^{5}f(x)dx=\int_{-2}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{5}f(x)dx$$
$$=0+\int_{2}^{5}f(x)dx$$
$$=\int_{2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{5}f(x)dx$$
$$=-\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{0}^{5}f(x)dx$$
$$=-(-3)+k=k+3$$

이때, $\int_{-2}^{5}f(x)dx=4k-1$이므로 $k+3=4k-1$ $\qquad\therefore k=\frac{4}{3}$

답 $\frac{4}{3}$

0795

$f(-x)=-f(x)$에서 $f(x)$는 기함수, $g(-x)=g(x)$에서 $g(x)$는 우함수이다.

$f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)$이므로 $f(x)g(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-a}^{a}\{f(x)+g(x)\}dx+\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx$$
$$=\int_{-a}^{a}f(x)dx+\int_{-a}^{a}g(x)dx+\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx$$
$$=0+\int_{-a}^{a}g(x)dx+0$$
$$=2\int_{0}^{a}g(x)dx=2\times3=6$$

답 6

0796

사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키므로 $f(x)=ax^4+bx^2+c\ (a\neq0)$로 놓을 수 있다.

이때, $f(0)=5$이므로 $c=5$

$f'(x)=4ax^3+2bx$이고 $f'(-1)=0$이므로

$-4a-2b=0 \qquad \therefore b=-2a$

즉, $f(x)=ax^4-2ax^2+5$이므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_{0}^{1}(ax^4-2ax^2+5)dx$$
$$=2\left[\frac{a}{5}x^5-\frac{2a}{3}x^3+5x\right]_{0}^{1}$$
$$=2\left(\frac{1}{5}a-\frac{2}{3}a+5\right)$$
$$=-\frac{14}{15}a+10$$

이때, $\int_{-1}^{1}f(x)dx=-4$이므로

$-\frac{14}{15}a+10=-4 \qquad \therefore a=15$

따라서 $f(x)=15x^4-30x^2+5$이므로

$f(1)=15-30+5=-10$

답 -10

0797

|전략| 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$ (p는 0이 아닌 상수)이면 $\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{a+np}^{b+np}f(x)dx$ (n은 정수)이다.

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{3}^{5}f(x)dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때, $f(x)=-x^2+1(-1\le x\le1)$이 우함수이므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_{0}^{1}f(x)dx \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\int_{0}^{5}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{5}f(x)dx$$
$$=5\int_{0}^{1}f(x)dx=5\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx$$
$$=5\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}=\frac{10}{3}$$

답 $\frac{10}{3}$

0798

조건 (가)에서 $f(-x)=f(x)$이므로

$$\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에서 $f(x)=f(x+4)$이므로

$$\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{-4}^{-2}f(x)dx \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\int_{-4}^{-2}f(x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{2}f(x)dx=8$이므로

$$\int_{-4}^{0}f(x)dx=16$$

$$\therefore \int_{-4}^{12}f(x)dx$$
$$=\int_{-4}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{4}f(x)dx+\int_{4}^{8}f(x)dx+\int_{8}^{12}f(x)dx$$
$$=4\int_{-4}^{0}f(x)dx=4\times16=64$$

답 ④

0799

$|x|=\begin{cases} x & (x\ge 0) \\ -x & (x\le 0)\end{cases}$이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(-x)dx+\int_{0}^{1} x\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

이때, 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로

$\int_{-2018}^{2018} f(x)dx=2018\int_{-1}^{1} f(x)dx=2018\times 1=2018$ 답 2018

0800

|전략| $\int_{0}^{2} f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓고 k의 값을 구한다.

$\int_{0}^{2} f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면

$f(x)=3x^2-2x+k$

$f(t)=3t^2-2t+k$를 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{2}(3t^2-2t+k)dt=k$, $\left[t^3-t^2+kt\right]_{0}^{2}=k$

$8-4+2k=k$ $\therefore k=-4$

따라서 $f(x)=3x^2-2x-4$이므로 $f(0)=-4$ 답 ②

0801

$$f(x)=x^2+\int_{0}^{1}(2x+1)f(t)dt$$
$$=x^2+2x\int_{0}^{1} f(t)dt+\int_{0}^{1} f(t)dt$$

이때,

$\int_{0}^{1} f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면

$f(x)=x^2+2kx+k$

$f(t)=t^2+2kt+k$를 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{1}(t^2+2kt+k)dt=k$, $\left[\frac{1}{3}t^3+kt^2+kt\right]_{0}^{1}=k$

$\frac{1}{3}+2k=k$ $\therefore k=-\frac{1}{3}$

즉, $\int_{0}^{1} f(t)dt=-\frac{1}{3}$이므로 $\int_{0}^{1} f(x)dx=-\frac{1}{3}$ 답 ②

0802

$\int_{0}^{2} tf'(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면

$f(x)=4x+k$, $f'(x)=4$

$f'(t)=4$를 ㉠에 대입하면 $k=\int_{0}^{2} 4t\,dt=\left[2t^2\right]_{0}^{2}=8$

따라서 $f(x)=4x+8$이므로

$f(-1)=-4+8=4$ 답 ③

0803

$\int_{1}^{2} f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면

$f(x)=\frac{12}{7}x^2-2kx+k^2$

$f(t)=\frac{12}{7}t^2-2kt+k^2$을 ㉠에 대입하면

$\int_{1}^{2}\left(\frac{12}{7}t^2-2kt+k^2\right)dt=k$, $\left[\frac{4}{7}t^3-kt^2+k^2t\right]_{1}^{2}=k$

$4-3k+k^2=k$, $k^2-4k+4=0$

$(k-2)^2=0$ $\therefore k=2$

$\therefore 10\int_{1}^{2} f(x)dx=10k=20$ 답 20

0804

$f(x)=2x+1-\int_{0}^{1} g(t)dt$에서 $\int_{0}^{1} g(t)dt=a$ (a는 상수)로 놓으면

$f(x)=2x+1-a$

$g(x)=4x-3+\int_{0}^{2} f(t)dt$에서 $\int_{0}^{2} f(t)dt=b$ (b는 상수)로 놓으면

$g(x)=4x-3+b$

$\int_{0}^{1} g(t)dt=\int_{0}^{1}(4t-3+b)dt=\left[2t^2-3t+bt\right]_{0}^{1}=b-1$

$\therefore b-1=a$ …… ㉠

$\int_{0}^{2} f(t)dt=\int_{0}^{2}(2t+1-a)dt=\left[t^2+t-at\right]_{0}^{2}=6-2a$

$\therefore 6-2a=b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{5}{3}$, $b=\frac{8}{3}$

따라서 $f(x)=2x+1-\frac{5}{3}=2x-\frac{2}{3}$,

$g(x)=4x-3+\frac{8}{3}=4x-\frac{1}{3}$이므로

$f(1)+g(2)=\frac{4}{3}+\frac{23}{3}=9$ 답 ④

0805

|전략| $\int_{x}^{x+a} f(t)dt=g(x)$ (a는 상수)의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x+a)-f(x)=g'(x)$임을 이용한다.

$f(x)=\int_{x}^{x+2}(t^2+2t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\{(x+2)^2+2(x+2)\}-(x^2+2x)$$
$$=4x+8$$

$$\therefore \int_{0}^{3} xf'(x)dx=\int_{0}^{3} x(4x+8)dx=\int_{0}^{3}(4x^2+8x)dx$$
$$=\left[\frac{4}{3}x^3+4x^2\right]_{0}^{3}=72$$ 답 72

0806

$f(x)=\int_{x}^{x+1} t^3dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$

8 정적분

이때, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로 $a=1$, $b=\frac{3}{2}$, $c=1$

또, $f(-1)=\frac{3}{2}$이므로 $-a+b-c+d=\frac{3}{2}$에서

$-1+\frac{3}{2}-1+d=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore d=2$

$\therefore abcd=1\times\frac{3}{2}\times1\times2=3$ 답 3

0807

|전략| $\int_a^x f(t)dt=g(x)$ (a는 상수)의 양변에 $x=a$를 대입하면 $\int_a^a f(t)dt=g(a)=0$이고, 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=g'(x)$임을 이용한다.

$\int_a^x f(t)dt=x^2-x+1-a$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)dt=a^2-a+1-a$

$a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0$ $\quad\therefore a=1$

또, $\int_a^x f(t)dt=x^2-x+1-a$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-1$ $\quad\therefore f(a)=f(1)=2-1=1$ 답 ①

0808

$\int_1^x f(t)dt=x^3+2ax^2-3x$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)dt=1+2a-3$, $2a-2=0$ $\quad\therefore a=1$

또, $\int_1^x f(t)dt=x^3+2ax^2-3x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+4ax-3=3x^2+4x-3$

$\therefore f(2)=12+8-3=17$ 답 17

0809

$xf(x)=x^3-3x^2+\int_2^x f(t)dt$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2f(2)=8-12+\int_2^2 f(t)dt$, $2f(2)=-4$

$\therefore f(2)=-2$ ⋯⋯ ㉠

$xf(x)=x^3-3x^2+\int_2^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=3x^2-6x+f(x)$

$xf'(x)=3x^2-6x$ $\quad\therefore f'(x)=3x-6$

$\therefore f(x)=\int(3x-6)dx=\frac{3}{2}x^2-6x+C$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $f(2)=6-12+C=-2$ $\quad\therefore C=4$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+4$이므로

$$\int_{-2}^2 f(x)dx=\int_{-2}^2\left(\frac{3}{2}x^2-6x+4\right)dx=2\int_0^2\left(\frac{3}{2}x^2+4\right)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{2}x^3+4x\right]_0^2=2\times12=24$$ 답 24

0810

$\int_0^2 f(t)dt=k$ (k는 상수) ⋯⋯ ㉠

로 놓으면

$\int_0^x f(t)dt=-x^3+\frac{9}{4}kx^2-k^2x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-3x^2+\frac{9}{2}kx-k^2$

$f(t)=-3t^2+\frac{9}{2}kt-k^2$을 ㉠에 대입하면

$\int_0^2\left(-3t^2+\frac{9}{2}kt-k^2\right)dt=k$, $\left[-t^3+\frac{9}{4}kt^2-k^2t\right]_0^2=k$

$-8+9k-2k^2=k$, $2k^2-8k+8=0$, $(k-2)^2=0$ $\quad\therefore k=2$

$\therefore f(x)=-3x^2+9x-4$

따라서 $f(1)=2$이므로 $a=2$

$\therefore 50a=100$ 답 100

0811

|전략| $\int_a^x (x-t)f(t)dt$ (a는 상수)를 포함한 등식은 $\int_a^x (x-t)f(t)dt=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$로 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

$\int_1^x (x-t)f(t)dt=2x^3+x^2-8x+5$에서

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=2x^3+x^2-8x+5$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=6x^2+2x-8$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=6x^2+2x-8$ ⋯⋯ ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x+2$ $\quad\therefore f(0)=2$ 답 2

0812

$\int_1^x (x-t)f(t)dt=x^3+px^2+qx+1$에서

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^3+px^2+qx+1$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+2px+q$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=3x^2+2px+q$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❶

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $0=1+p+q+1$

$\therefore p+q=-2$ ⋯⋯ ㉢

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면 $0=3+2p+q$

$\therefore 2p+q=-3$ ⋯⋯ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $p=-1$, $q=-1$ ⋯ ❷

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x+2p=6x-2$ $\quad\therefore f(2)=10$ ⋯ ❸

$\therefore p+q+f(2)=-1+(-1)+10=8$ ⋯ ❹

답 8

채점 기준	비율
❶ $\int_1^x (x-t)f(t)dt = x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt$로 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 식과 ❶에서 얻은 식 $\int_1^x f(t)dt=3x^2+2px+q$의 양변에 $x=1$을 대입하여 p, q의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $p+q+f(2)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0813

$\int_0^x (x-t)f'(t)dt=\frac{1}{2}x^3$에서

$x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=\frac{1}{2}x^3$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=\frac{3}{2}x^2$

$\therefore \int_0^x f'(t)dt=\frac{3}{2}x^2$ ⋯⋯ ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x$

$\therefore f(x)=\int 3x\,dx=\frac{3}{2}x^2+C$

이때, $f(0)=\frac{3}{2}$이므로 $C=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}$이므로 $f(1)=3$

답 ⑤

0814

|전략| $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 증감표를 만든 후, 극값을 구한다.

$f(x)=\int_{-3}^x (t+1)(t+2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x+1)(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=-2$

x	⋯	-2	⋯	-1	⋯
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대, $x=-1$에서 극소이므로

$M=f(-2)=\int_{-3}^{-2}(t+1)(t+2)dt=\int_{-3}^{-2}(t^2+3t+2)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2+2t\right]_{-3}^{-2}=-\frac{2}{3}-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{6}$

$m=f(-1)=\int_{-3}^{-1}(t+1)(t+2)dt=\int_{-3}^{-1}(t^2+3t+2)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2+2t\right]_{-3}^{-1}=-\frac{5}{6}-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}$

$\therefore M+m=\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

0815

$f(x)=\int_0^x (t^2+pt+q)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+px+q$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 $\frac{7}{6}$을 가지므로

$f'(-1)=0,\ f(-1)=\frac{7}{6}$ ⋯ ❶

$f'(-1)=0$에서 $1-p+q=0$

$\therefore p-q=1$ ⋯⋯ ㉠

$f(-1)=\frac{7}{6}$에서

$f(-1)=\int_0^{-1}(t^2+pt+q)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}pt^2+qt\right]_0^{-1}$

$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}p-q=\frac{7}{6}$

$\therefore p-2q=3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=-1$, $q=-2$ ⋯ ❷

$f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	⋯	-1	⋯	2	⋯
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

$f(2)=\int_0^2 (t^2-t-2)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-2t\right]_0^2=-\frac{10}{3}$ ⋯ ❸

답 $-\frac{10}{3}$

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 $\frac{7}{6}$을 가지면 $f'(-1)=0$, $f(-1)=\frac{7}{6}$임을 알 수 있다.	30 %
❷ p, q의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 함수 $f(x)$의 극솟값을 구할 수 있다.	40 %

0816

$f(x)=3x^2+1+6\int_0^1 xf(t)dt$

$=3x^2+1+6x\int_0^1 f(t)dt$

이때, $\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)=3x^2+6kx+1$이므로

$k=\int_0^1 (3t^2+6kt+1)dt=\left[t^3+3kt^2+t\right]_0^1=3k+2,\ 2k=-2$

$\therefore k=-1$

$\therefore f(x)=3x^2-6x+1$

따라서 $f(x)=3(x-1)^2-2$이므로 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

답 ②

8 정적분

0817

$f(x)=\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=1-|x|$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 0\le x\le 2$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $0\le x\le 2$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f(1)=\int_{-1}^{1}(1-|t|)dt$$
$$=\int_{-1}^{0}(1+t)dt+\int_{0}^{1}(1-t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{2}t^2+t\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

답 1

0818

|전략| 주어진 그래프로부터 $F(x)$의 식을 구한 뒤, $F(x)=\int_{1}^{x}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하여 $F'(x)=f(x)$임을 이용한다.

주어진 그래프에서

$F(x)=k(x-1)(x-2)=k(x^2-3x+2)$ $(k>0)$로 놓고,

$F(x)=\int_{1}^{x}f(t)dt=k(x^2-3x+2)$의 각 변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)=k(2x-3)$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, -3)$을 지나므로

$-3=-k$ $\quad\therefore k=3$

이때, $F(x)=3(x^2-3x+2)=3x^2-9x+6$이고

$F'(x)=f(x)=3(2x-3)=0$에서 $x=\frac{3}{2}$

x	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $F(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 극소이므로 극솟값은

$$F\left(\frac{3}{2}\right)=3\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-9\times\frac{3}{2}+6=-\frac{3}{4}$$

답 ③

0819

이차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$f(x)=x(x-2)$이고, $g(x)=\int_{x}^{x+2}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x+2)-f(x)=x(x+2)-x(x-2)=4x$

$g'(x)=0$에서 $x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$g(0)=\int_{0}^{2}f(t)dt=\int_{0}^{2}t(t-2)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{0}^{2}=-\frac{4}{3}$$

답 $-\frac{4}{3}$

0820

|전략| $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_{a}^{x}f(t)dt=f(a)$를 이용한다.

$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x}f(t)dt=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}=F'(2)=f(2)$$
$$=8-8+2+1=3$$

답 ③

0821

$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{0}^{x}f(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)=f(0)$$
$$=0-0+2=2$$

답 ②

0822

$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x}f(t)dt=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)=f(1)$$

즉, $f(1)=5$이므로 $0+2-1+a=5$ $\quad\therefore a=4$

답 ④

0823

$f(t)=3t^3-t^2+4$로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{1}^{1+4x}(3t^3-t^2+4)dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{1}^{1+4x}f(t)dt$$
$$=4\lim_{x\to 0}\frac{F(1+4x)-F(1)}{4x}$$
$$=4F'(1)=4f(1)$$
$$=4\times 6=24$$

답 ①

0824

$f(t)=6t^2-4t+3$으로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{1-x}^{1+2x}(6t^2-4t+3)dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{1-x}^{1+2x}f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(1+2x)-F(1-x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\{F(1+2x)-F(1)\}-\{F(1-x)-F(1)\}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(1+2x)-F(1)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{F(1-x)-F(1)}{x}$$
$$=2\lim_{x\to 0}\frac{F(1+2x)-F(1)}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{F(1-x)-F(1)}{-x}$$
$$=2F'(1)+F'(1)=3F'(1)=3f(1)=3\times 5=15$$

답 ⑤

0825

$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)dt=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}f(2)$$
$$=\frac{1}{4}\times16=4$$

답 ①

0826

$g(x)=\int_0^{x-1}(t-2)f(t)dt$라 하면 $g(1)=0$이고,

양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=(x-3)f(x-1)$ …… ㉠

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_0^{x-1}(t-2)f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=g'(1)=-2f(0)\ (\because ㉠)$$
$$=(-2)\times3=-6$$

답 ③

STEP 3 내신 마스터

0827

유형 01 정적분의 정의

|전략| 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$임을 이용한다.

삼차함수 $f(x)$가 $f(1)=f(2)=f(3)=6$을 만족시키므로

$f(x)-6=a(x-1)(x-2)(x-3)\ (a\neq0)$으로 놓을 수 있다.

$\therefore f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+6$

이때, $f(0)=0$이므로 $-6a+6=0$ $\quad\therefore a=1$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+6$이므로

$$\int_0^4 f'(x)dx=\Big[f(x)\Big]_0^4=f(4)-f(0)$$
$$=(4-1)(4-2)(4-3)+6-0=12$$

답 ⑤

0828

유형 02 정적분의 정의의 활용

|전략| 주어진 조건에서 두 실수 a, b에 대한 두 식을 찾아 연립하여 푼다.

$f(1)=6$에서 $a+b=6$ …… ㉠

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(ax^3+bx)dx$$
$$=\left[\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{2}x^2\right]_0^2=4a+2b=20 \quad \text{…… ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=2$

$\therefore a+2b=4+2\times2=8$

답 ④

0829

유형 05 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분

|전략| 두 다항식 A, B에 대하여 $A-B\geq0$이면 $A\geq B$임을 이용한다.

$x+1\geq x^2+1$에서 $x^2-x\leq0$, $x(x-1)\leq0$

$\therefore 0\leq x\leq1$

$x+1\leq x^2+1$에서 $x^2-x\geq0$, $x(x-1)\geq0$

$\therefore x\leq0$ 또는 $x\geq1$

(i) $0\leq x\leq1$일 때, $\max(x+1, x^2+1)=x+1$

(ii) $x\leq0$ 또는 $x\geq1$일 때, $\max(x+1, x^2+1)=x^2+1$

$$\therefore \int_0^2\{\max(x+1, x^2+1)\}dx$$
$$=\int_0^1(x+1)dx+\int_1^2(x^2+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_1^2$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{10}{3}=\frac{29}{6}$$

답 ⑤

0830

유형 06 절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분

|전략| $x=\frac{a}{2}$를 기준으로 구간을 나누고, $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$임을 이용한다.

$$f(a)=\int_0^4|2x-a|dx$$
$$=\int_0^{\frac{a}{2}}(-2x+a)dx+\int_{\frac{a}{2}}^4(2x-a)dx$$
$$=\Big[-x^2+ax\Big]_0^{\frac{a}{2}}+\Big[x^2-ax\Big]_{\frac{a}{2}}^4$$
$$=\left(-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a^2\right)+\left\{(16-4a)-\left(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}a^2\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}a^2-4a+16$$
$$=\frac{1}{2}(a-4)^2+8$$

따라서 함수 $f(a)$의 최솟값은 $a=4$일 때 8이다.

답 ⑤

0831

유형 07 우함수와 기함수의 정적분 - 피적분함수가 주어진 경우

|전략| 짝수 차수의 항 또는 상수항으로만 이루어진 함수는 $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$를 만족시키고, 홀수 차수의 항으로만 이루어진 함수는 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$을 만족시킨다.

$\int_{-3}^3\{f(x)\}^2dx=k\left\{\int_{-1}^1 f(x)dx\right\}^3$에서

$$\int_{-3}^3\{f(x)\}^2dx=\int_{-3}^3(2x+3)^2dx$$
$$=\int_{-3}^3(4x^2+12x+9)dx$$
$$=2\int_0^3(4x^2+9)dx$$
$$=2\left[\frac{4}{3}x^3+9x\right]_0^3$$
$$=2\times63=126 \quad \text{…… ㉠}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(2x+3)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}3\,dx=2\Big[3x\Big]_{0}^{1}=2\times3=6 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 주어진 식에 대입하면

$126=k\times6^3$, $216k=126$

$\therefore k=\dfrac{7}{12}$ 답 ④

0832

유형 08 우함수와 기함수의 정적분 - 피적분함수가 주어지지 않은 경우

|전략| 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키는 다항함수 $f(x)$는 기함수이다.

$f(-x)=-f(x)$에서 $f(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx=0$$

$\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)dx=\int_{-2}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{4} f(x)dx=4$이므로

$$\int_{2}^{4} f(x)dx=4$$

또, $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)dx=-6$이므로

$$\int_{0}^{4} f(x)dx=\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{4} f(x)dx$$
$$=-6+4=-2$$

답 ②

0833

유형 08 우함수와 기함수의 정적분 - 피적분함수가 주어지지 않은 경우 + 09 주기함수의 정적분

|전략| 함수 $f(x)$가 우함수이고 (기함수)×(우함수)=(기함수)이므로 $xf(x)$는 기함수이다.

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 우함수이므로 $xf(x)$는 기함수이다.

조건 (다)에서

$$\int_{-1}^{1}(x+4)f(x)dx=\int_{-1}^{1}xf(x)dx+\int_{-1}^{1}4f(x)dx$$
$$=0+4\int_{-1}^{1}f(x)dx=16$$
$$\therefore \int_{-1}^{1}f(x)dx=4$$

조건 (나)에서 $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{2}f(x)dx=4$$
$$\therefore \int_{-8}^{12}f(x)dx=\int_{0}^{20}f(x)dx=10\int_{0}^{2}f(x)dx$$
$$=10\times4=40$$

답 ③

0834

유형 10 적분 구간이 상수인 정적분을 포함한 등식

|전략| $\displaystyle\int_{0}^{1}tf(t)dt=k$($k$는 상수)로 놓고 k의 값을 구한다.

$$\int_{0}^{1}tf(t)dt=k\,(k는\ 상수) \quad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓으면

$f(x)=x^2-2x+k$

$f(t)=t^2-2t+k$를 ㉠에 대입하면

$$\int_{0}^{1}t(t^2-2t+k)dt=k,\ \int_{0}^{1}(t^3-2t^2+kt)dt=k$$
$$\Big[\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{2}kt^2\Big]_{0}^{1}=k,\ \frac{1}{2}k-\frac{5}{12}=k,\ \frac{k}{2}=-\frac{5}{12}$$
$$\therefore k=-\frac{5}{6}$$

따라서 $f(x)=x^2-2x-\dfrac{5}{6}$이므로

$f(3)=9-6-\dfrac{5}{6}=\dfrac{13}{6}$ 답 ①

0835

유형 12 적분 구간에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식 - $\displaystyle\int_{a}^{x}f(t)dt$ 꼴

|전략| $f(x)=3x^2-x-2+\displaystyle\int_{1}^{x}g(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)=6x-1+g(x)$임을 이용한다.

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$ ⋯⋯ ㉡

$x=1$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$f(1)=0, f'(1)=0$

한편, $f(x)=3x^2-x-2+\displaystyle\int_{1}^{x}g(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=6x-1+g(x)$

$\therefore g(x)=f'(x)-6x+1$

따라서 다항식 $g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$g(1)=f'(1)-6\times1+1=-5$ ($\because f'(1)=0$) 답 ①

Lecture

나머지정리

① 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지 ⇨ $P(a)$

② 다항식 $P(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지 ⇨ $P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

미분과 나머지정리

① $f(x)=(x-a)^2Q(x)$ ⇨ $f(a)=0, f'(a)=0$

② $f(x)=(x-a)^2Q(x)+mx+n$ ⇨ $f(a)=ma+n,\ f'(a)=m$

0836

유형 13 적분 구간과 피적분함수에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식 - $\displaystyle\int_{a}^{x}(x-t)f(t)dt$ 꼴

|전략| $\displaystyle\int_{a}^{x}(x-t)f(t)dt$($a$는 상수)를 포함한 등식은 $\displaystyle\int_{a}^{x}(x-t)f(t)dt=x\int_{a}^{x}f(t)dt-\int_{a}^{x}tf(t)dt$로 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

$\int_1^x (x-t)f(t)dt=x^3-3x+2$에서

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^3-3x+2$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-3$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=3x^2-3$ …… ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x \quad \therefore f(5)=30$

답 ③

0837

유형 14 정적분으로 정의된 함수의 극대·극소 및 최대·최소

|전략| 함수 $F(x)$가 극댓값을 가지려면 방정식 $F'(x)=f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)=2x^3-24x+a$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=6x^2-24=6(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때, 함수 $F(x)$가 극댓값을 가지려면 방정식 $F'(x)=f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값에 대하여 (극댓값)×(극솟값)<0이어야 한다.

즉, $f(-2)f(2)<0$, $(a+32)(a-32)<0$

$\therefore -32<a<32$

따라서 구하는 정수 a의 최댓값은 31이다.

답 ②

0838

유형 12 적분 구간에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식 - $\int_a^x f(t)dt$ 꼴

|전략| 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구하고, 이 식의 양변에 $x=a$를 대입하여 $\int_a^a f(t)dt=0$임을 이용한다.

$f(x)+\int_0^x tf'(t)dt=3x^4+12x-2$ …… ㉠

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+xf'(x)=12x^3+12$

$(x+1)f'(x)=12(x+1)(x^2-x+1)$

$\therefore f'(x)=12(x^2-x+1)$ … ❶

$f(x)=\int 12(x^2-x+1)dx=\int(12x^2-12x+12)dx$

$=4x^3-6x^2+12x+C$ … ❷

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=-2$이므로 $C=-2$ … ❸

따라서 $f(x)=4x^3-6x^2+12x-2$이므로

$f(1)=4-6+12-2=8$ … ❹

답 8

채점 기준	배점
❶ 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구할 수 있다.	2점
❷ $f'(x)$의 한 부정적분인 $f(x)$를 구할 수 있다.	2점
❸ 주어진 식의 양변에 $x=0$을 대입하여 적분상수 C를 구할 수 있다.	2점
❹ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	1점

0839

유형 16 정적분으로 정의된 함수의 극한

|전략| 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하고 우함수, 기함수의 정적분을 이용한다.

$f(x)=3x^2+ax+b$에 대하여 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

조건 (가), (나)에서

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$

$=F'(0)=f(0)=-2$

$\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)dt=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}$

$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$

$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}f(2)=1$

$\therefore f(2)=4$

따라서 $f(0)=-2$, $f(2)=4$이므로

$f(0)=b=-2$, $f(2)=12+2a+b=4$

$\therefore a=-3, b=-2$

$\therefore f(x)=3x^2-3x-2$ … ❶

$\therefore \int_{-2}^2\{f(x)+f(-x)\}dx$

$=\int_{-2}^2\{(3x^2-3x-2)+(3x^2+3x-2)\}dx$

$=\int_{-2}^2(6x^2-4)dx=2\int_0^2(6x^2-4)dx$

$=2\Big[2x^3-4x\Big]_0^2=2(16-8)=16$ … ❷

답 16

채점 기준	배점
❶ 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 $f(x)$를 구할 수 있다.	5점
❷ $\int_{-2}^2\{f(x)+f(-x)\}dx$의 값을 구할 수 있다.	2점

0840

유형 04 정적분의 계산 - 피적분함수가 같은 경우

|전략| 함수 $f(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌구간에서 연속일 때, $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$임을 이용한다.

8 정적분

(1) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$에서

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx$이므로

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)dx$

$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$

(2) $f(x) = ax^2+bx+c\,(a \neq 0)$로 놓으면

$f(0) = -1$에서 $c = -1$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx &= \int_{-1}^{1}(ax^2+bx-1)dx \\ &= \int_{-1}^{1}(ax^2-1)dx + \int_{-1}^{1} bx\,dx \\ &= 2\int_{0}^{1}(ax^2-1)dx = 2\left[\frac{1}{3}ax^3 - x\right]_0^1 \\ &= 2\left(\frac{1}{3}a-1\right) = \frac{2}{3}a - 2\end{aligned}$$

즉, $\frac{2}{3}a - 2 = 0$이므로 $a = 3$

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} f(x)dx &= \int_{0}^{1}(3x^2+bx-1)dx \\ &= \left[x^3 + \frac{1}{2}bx^2 - x\right]_0^1 = \frac{1}{2}b\end{aligned}$$

즉, $\frac{1}{2}b = 0$이므로 $b = 0$

따라서 $f(x) = 3x^2 - 1$에서 $f(2) = 12 - 1 = 11$

답 (1) 0 (2) 11

채점 기준	배점
(1) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	5점
(2) $f(x) = ax^2+bx+c\,(a \neq 0)$로 놓고 미정계수 a, b, c의 값을 구하여 $f(x)$를 구한 후, $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	7점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0841

|전략| $f(x) = x$로 놓고 주어진 식의 참, 거짓을 확인한다.

ㄱ. $f(x) = x$라 하면 $\int_{0}^{2} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = 2$

$2\int_{0}^{1} x\,dx = 2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

$\therefore \int_{0}^{2} x\,dx \neq 2\int_{0}^{1} x\,dx$ (거짓)

ㄴ. $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$는 a, b, c의 대소와 관계없이 항상 성립한다. (참)

ㄷ. $f(x) = x$라 하면 $\int_{0}^{2} x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}$

$\left(\int_{0}^{2} x\,dx\right)^2 = \left(\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2\right)^2 = 2^2 = 4$

$\therefore \int_{0}^{2} x^2dx \neq \left(\int_{0}^{2} x\,dx\right)^2$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ①

0842

|전략| $(f \circ f)(x) = f(f(x))$이므로 $f(x)$의 값의 범위에 따른 함수를 구한다.

$f(x) = \begin{cases} x+1 & (0 \le x \le 1) \\ 3-x & (1 \le x \le 2) \end{cases}$이므로

$f(f(x)) = \begin{cases} f(x)+1 & (0 \le f(x) \le 1) \\ 3-f(x) & (1 \le f(x) \le 2) \end{cases}$

그런데 $0 \le x \le 2$에서 항상 $1 \le f(x) \le 2$이므로

$f(f(x)) = 3 - f(x)$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{0}^{2}(f \circ f)(x)dx &= \int_{0}^{2} f(f(x))dx \\ &= \int_{0}^{2}\{3-f(x)\}dx \\ &= \int_{0}^{1}\{3-(x+1)\}dx + \int_{1}^{2}\{3-(3-x)\}dx \\ &= \int_{0}^{1}(2-x)dx + \int_{1}^{2} x\,dx \\ &= \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 \\ &= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3\end{aligned}$$

답 ③

0843

|전략| $x = 0$을 기준으로 구간을 나누어 함수 $g(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$를 구하고 함수 $y = g(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타낸다.

ㄱ. $g(0) = \int_{-1}^{0} f(t)dt = \int_{-1}^{0}(-2t+1)dt$

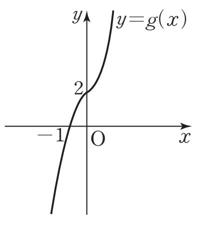
$= \left[-t^2 + t\right]_{-1}^{0} = 2$ (참)

ㄴ. $g(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$

$= \begin{cases} \int_{-1}^{x}(-2t+1)dt & (x \le 0) \\ \int_{-1}^{0}(-2t+1)dt + \int_{0}^{x}(3t^2+1)dt & (x \ge 0) \end{cases}$

$= \begin{cases} -x^2+x+2 & (x \le 0) \\ x^3+x+2 & (x \ge 0) \end{cases}$

$y = g(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $g(x)$는 증가함수이다. (참)

ㄷ. $g(x) = 4$에서 $x^3+x+2 = 4$

$x^3+x-2 = 0$, $(x-1)(x^2+x+2) = 0$

따라서 함수 $g(x)$는 증가함수이므로 $g(x) = 4$를 만족시키는 실수 x의 값은 1뿐이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0844

|전략| $f(x)$의 차수를 n이라 하면 $f(f(x))$, $\int_{0}^{x} f(t)dt$의 차수는 각각 n^2, $n+1$이다.

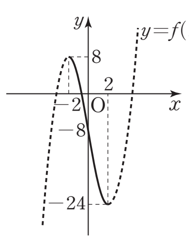
다항식 $f(x)$의 차수를 n이라 하면 $f(f(x))$, $\int_0^x f(t)dt$의 차수는 각각 n^2, $n+1$이다.
이때, $n\ge2$이면 주어진 식의 좌변과 우변의 차수는 각각 n^2, $n+1$이다. 그런데 $n^2=n+1$을 만족시키는 자연수 n의 값은 없으므로 $n<2$임을 알 수 있다.
$\therefore n=1$ ($\because n$은 자연수)
즉, $f(x)$는 일차식이므로
$f(x)=ax+b\ (a\neq0)$ …… ㉠
로 놓고 주어진 식 $f(f(x))=\int_0^x f(t)dt-x^2+3x+3$에 ㉠을 대입하면
$a(ax+b)+b=\int_0^x (at+b)dt-x^2+3x+3$
양변을 x에 대하여 미분하면
$a^2=ax+b-2x+3$
$\therefore (a-2)x-a^2+b+3=0$
이 식은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로
$a-2=0$, $-a^2+b+3=0$ $\quad\therefore a=2$, $b=1$
따라서 $f(x)=2x+1$이므로
$f(1)=2+1=3$

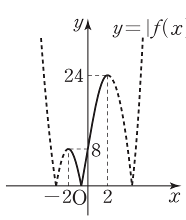
답 ①

0845
|전략| 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동하여 그린다.
$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	8	↘	-24	↗

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.





따라서 $-2\le x\le t$에서 $|f(x)|$의 최댓값 $g(t)$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.
$$g(t)=\begin{cases}8 & (-2\le t\le0)\\ -t^3+12t+8 & (0\le t\le2)\end{cases}$$
$$\therefore \int_{-2}^{2} g(t)dt=\int_{-2}^{0} 8\,dt+\int_0^2(-t^3+12t+8)dt$$
$$=\Big[8t\Big]_{-2}^{0}+\Big[-\frac{1}{4}t^4+6t^2+8t\Big]_0^2$$
$$=16+36=52$$

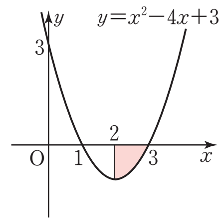
답 ⑤

본책 144~158쪽

9 | 정적분의 활용

STEP 1 개념 마스터

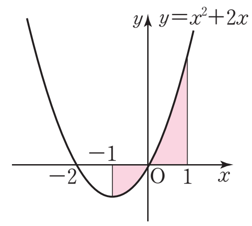
0846
곡선 $y=x^2-4x+3$과 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-4x+3=0$에서
$(x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$
따라서 구하는 넓이는



$$-\int_2^3(x^2-4x+3)dx$$
$$=-\Big[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\Big]_2^3=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

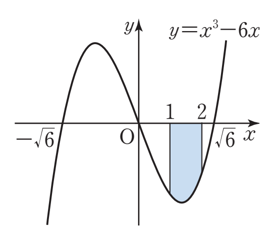
0847
곡선 $y=x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2+2x=0$에서
$x(x+2)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$
따라서 구하는 넓이는



$$-\int_{-1}^{0}(x^2+2x)dx+\int_0^1(x^2+2x)dx$$
$$=-\Big[\frac{1}{3}x^3+x^2\Big]_{-1}^{0}+\Big[\frac{1}{3}x^3+x^2\Big]_0^1$$
$$=-\Big(-\frac{2}{3}\Big)+\frac{4}{3}=2$$

답 2

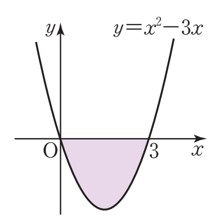
0848
곡선 $y=x^3-6x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-6x=0$에서
$x(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{6}$
따라서 구하는 넓이는



$$-\int_1^2(x^3-6x)dx$$
$$=-\Big[\frac{1}{4}x^4-3x^2\Big]_1^2=\frac{21}{4}$$

답 $\frac{21}{4}$

0849
곡선 $y=x^2-3x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=0$에서 $x(x-3)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=3$
따라서 구하는 넓이는



$$-\int_0^3(x^2-3x)dx$$
$$=-\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\Big]_0^3=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

9 정적분의 활용

0850

곡선 $y=x^3-x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-x=0$에서

$x(x+1)(x-1)=0$

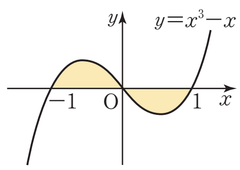
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx-\int_{0}^{1}(x^3-x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$

$=\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$



답 $\frac{1}{2}$

0851

곡선 $y=x^3-3x+2$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-3x+2=0$에서

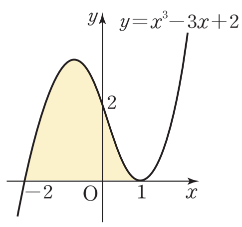
$(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{27}{4}$



답 $\frac{27}{4}$

0852

곡선 $y=-x^2+2$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $-x^2+2=x$에서

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

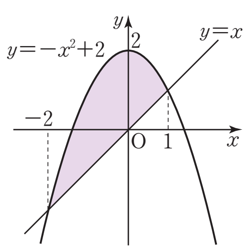
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-2}^{1}\{(-x^2+2)-x\}dx$

$=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$



답 $\frac{9}{2}$

0853

곡선 $y=x^2-1$과 직선 $y=x+1$의 교점의 x좌표는 $x^2-1=x+1$에서

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

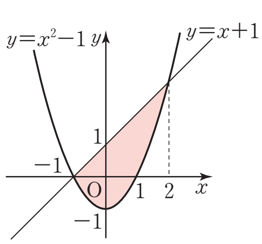
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{2}\{(x+1)-(x^2-1)\}dx$

$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$



답 $\frac{9}{2}$

0854

곡선 $y=x^2-3x+2$와 직선 $y=x-1$의 교점의 x좌표는

$x^2-3x+2=x-1$에서

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

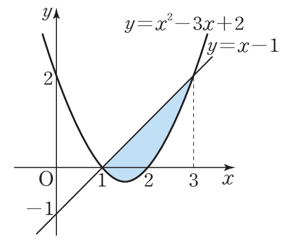
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{1}^{3}\{(x-1)-(x^2-3x+2)\}dx$

$=\int_{1}^{3}(-x^2+4x-3)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_{1}^{3}=\frac{4}{3}$



답 $\frac{4}{3}$

0855

곡선 $y=x^3$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^3=x$에서

$x^3-x=0$, $x(x+1)(x-1)=0$

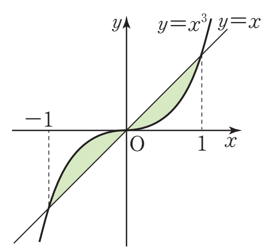
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(x-x^3)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$



답 $\frac{1}{2}$

0856

두 곡선 $y=-x^2+1$, $y=x^2-1$의 교점의 x좌표는 $-x^2+1=x^2-1$에서

$2x^2-2=0$, $2(x+1)(x-1)=0$

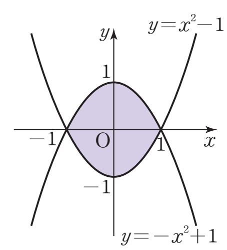
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{1}\{(-x^2+1)-(x^2-1)\}dx$

$=\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)dx=2\int_{0}^{1}(-2x^2+2)dx$

$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_{0}^{1}=2\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$



답 $\frac{8}{3}$

0857

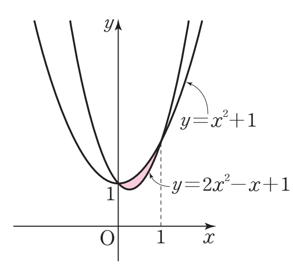
두 곡선 $y=x^2+1$, $y=2x^2-x+1$의 교점의 x좌표는

$x^2+1=2x^2-x+1$에서

$x^2-x=0$, $x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_0^1\{(x^2+1)-(2x^2-x+1)\}dx=\int_0^1(-x^2+x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

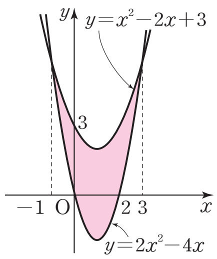
0858

두 곡선 $y=2x^2-4x$, $y=x^2-2x+3$의 교점의 x좌표는 $2x^2-4x=x^2-2x+3$에서

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{-1}^3\{(x^2-2x+3)-(2x^2-4x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^3(-x^2+2x+3)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^3=\frac{32}{3}$$

답 $\frac{32}{3}$

0859

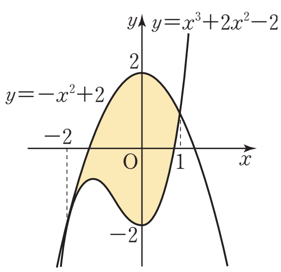
두 곡선 $y=x^3+2x^2-2$, $y=-x^2+2$의 교점의 x좌표는 $x^3+2x^2-2=-x^2+2$에서

$x^3+3x^2-4=0$

$(x+2)^2(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{-2}^1\{(-x^2+2)-(x^3+2x^2-2)\}dx$$
$$=\int_{-2}^1(-x^3-3x^2+4)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-2}^1=\frac{27}{4}$$

답 $\frac{27}{4}$

0860

(1) $0+\int_0^3(4-t)dt=\left[4t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^3=\frac{15}{2}$

(2) $\int_0^5(4-t)dt=\left[4t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^5=\frac{15}{2}$

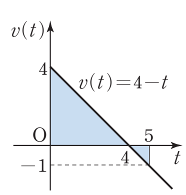
(3) $\int_0^5|4-t|dt=\int_0^4(4-t)dt-\int_4^5(4-t)dt$

$$=\left[4t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^4-\left[4t-\frac{1}{2}t^2\right]_4^5$$
$$=8-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{2}$$

답 (1) $\frac{15}{2}$ (2) $\frac{15}{2}$ (3) $\frac{17}{2}$

다른 풀이 (3) 넓이를 이용하여 구하면

$\frac{1}{2}\cdot4\cdot4+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=8+\frac{1}{2}=\frac{17}{2}$



0861

(1) $4+\int_0^2(-2t+4)dt=4+\left[-t^2+4t\right]_0^2=8$

(2) $\int_0^4(-2t+4)dt=\left[-t^2+4t\right]_0^4=0$

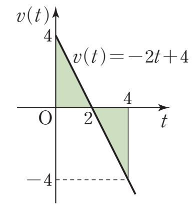
(3) $\int_0^4|-2t+4|dt=\int_0^2(-2t+4)dt-\int_2^4(-2t+4)dt$

$$=\left[-t^2+4t\right]_0^2-\left[-t^2+4t\right]_2^4$$
$$=4-(-4)=8$$

답 (1) 8 (2) 0 (3) 8

다른 풀이 (3) 넓이를 이용하여 구하면

$\frac{1}{2}\cdot2\cdot4+\frac{1}{2}\cdot2\cdot4=4+4=8$



STEP 2 유형 마스터

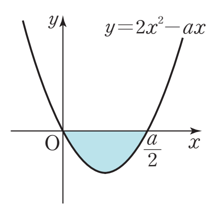
0862

|전략| 닫힌구간 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$에서 $2x^2-ax\le0$이므로 $-\int_0^{\frac{a}{2}}(2x^2-ax)dx=\frac{9}{8}$임을 이용한다.

곡선 $y=2x^2-ax$와 x축의 교점의 x좌표는 $2x^2-ax=0$에서

$x(2x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{a}{2}$



오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$$-\int_0^{\frac{a}{2}}(2x^2-ax)dx$$
$$=-\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^{\frac{a}{2}}=\frac{a^3}{24}$$

즉, $\frac{a^3}{24}=\frac{9}{8}$이므로 $a^3=27$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

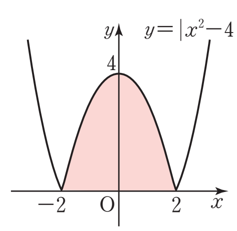
답 3

0863

곡선 $y=|x^2-4|$와 x축의 교점의 x좌표는 $|x^2-4|=0$에서

$x^2-4=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{-2}^2|x^2-4|dx=-\int_{-2}^2(x^2-4)dx$$
$$=-2\int_0^2(x^2-4)dx$$
$$=-2\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_0^2$$
$$=-2\cdot\left(-\frac{16}{3}\right)=\frac{32}{3}$$

답 ③

0864

$\int_{2}^{x} f(t)dt = x^3 - kx^2$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$\int_{2}^{2} f(t)dt = 8-4k$

$8-4k=0 \qquad \therefore k=2$

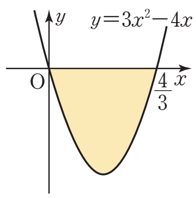
$\int_{2}^{x} f(t)dt = x^3 - 2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x) = 3x^2 - 4x$

$y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는

$3x^2-4x=0$에서

$x(3x-4)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}$



따라서 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$-\int_{0}^{\frac{4}{3}} (3x^2-4x)dx = -\left[x^3-2x^2\right]_0^{\frac{4}{3}}$

$= \frac{32}{27}$

즉, $\frac{a}{b} = \frac{32}{27}$이므로 $a=32$, $b=27$

$\therefore a-b=5$

답 5

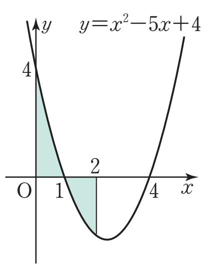
0865

|전략| 넓이는 양수이므로 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x) \geq 0$이면 $S=\int_{a}^{b} f(x)dx$, $f(x) \leq 0$이면 $S=-\int_{a}^{b} f(x)dx$임을 이용한다.

곡선 $y=x^2-5x+4$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-5x+4=0$에서

$(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$



따라서 구하는 넓이는

$\int_{0}^{1} (x^2-5x+4)dx - \int_{1}^{2} (x^2-5x+4)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_1^2$

$= \frac{11}{6} - \left(-\frac{7}{6}\right) = 3$

답 ④

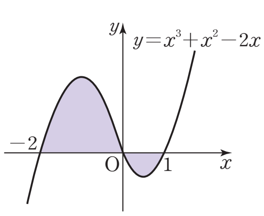
0866

곡선 $y=x^3+x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3+x^2-2x=0$에서

$x(x^2+x-2)=0$

$x(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-2}^{0} (x^3+x^2-2x)dx - \int_{0}^{1} (x^3+x^2-2x)dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-2}^0 - \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_0^1$

$= \frac{8}{3} - \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{37}{12}$

답 ②

0867

두 도형 A, B의 넓이가 각각 9, 5이므로

$\int_{-3}^{3} f'(x)dx = \int_{-3}^{1} f'(x)dx + \int_{1}^{3} f'(x)dx$

$= A - B = 9 - 5 = 4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

한편, 함수 $f'(x)$가 함수 $f(x)$의 도함수이므로

$\int_{-3}^{3} f'(x)dx = \left[f(x)\right]_{-3}^{3}$

$= f(3) - f(-3) \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $f(3)-f(-3)=4$

따라서 $f(-3)=3$이므로

$f(3)=4+3=7$

답 ④

0868

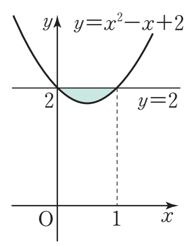
|전략| 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구한 후 {(위쪽 그래프의 식)−(아래쪽 그래프의 식)}의 정적분의 값을 구한다.

곡선 $y=x^2-x+2$와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표는 $x^2-x+2=2$에서

$x^2-x=0$

$x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이는

$\int_{0}^{1} \{2-(x^2-x+2)\}dx$

$= \int_{0}^{1} (-x^2+x)dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{6}$

답 ②

0869

곡선 $y=x^3-4x^2+4x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

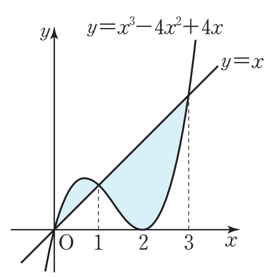
$x^3-4x^2+4x=x$에서

$x^3-4x^2+3x=0$

$x(x^2-4x+3)=0$

$x(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 넓이는

$\int_{0}^{1} \{(x^3-4x^2+4x)-x\}dx + \int_{1}^{3} \{x-(x^3-4x^2+4x)\}dx$

$= \int_{0}^{1} (x^3-4x^2+3x)dx + \int_{1}^{3} (-x^3+4x^2-3x)dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_1^3$

$= \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}$

답 $\frac{37}{12}$

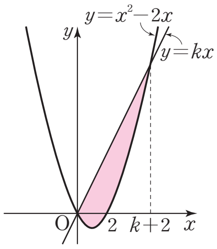
0870

곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=kx$의 교점의 x좌표는 $x^2-2x=kx$에서

$x^2-(k+2)x=0$

$x\{x-(k+2)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=k+2$



오른쪽 그림에서 색칠한 부분이 안전 지역이므로 그 넓이는

$\int_0^{k+2}\{kx-(x^2-2x)\}dx$

$=\int_0^{k+2}\{-x^2+(k+2)x\}dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k+2}{2}x^2\right]_0^{k+2}$

$=-\frac{1}{3}(k+2)^3+\frac{1}{2}(k+2)^3$

$=\frac{1}{6}(k+2)^3$

즉, $\frac{1}{6}(k+2)^3=\frac{125}{6}$이므로

$(k+2)^3=125,\ k+2=5\ (\because k>0)$

$\therefore k=3$

답 3

0871

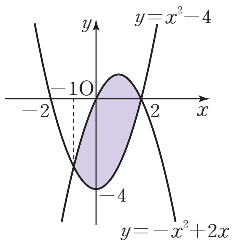
|전략| 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한 후
{(위쪽 그래프의 식)−(아래쪽 그래프의 식)}의 정적분의 값을 구한다.

두 곡선 $y=-x^2+2x$, $y=x^2-4$의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=x^2-4$에서

$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x)-(x^2-4)\}dx$

$=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}=9$

답 9

0872

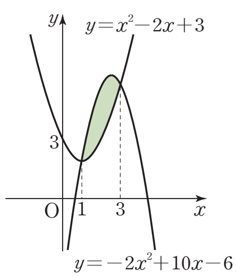
두 곡선 $y=x^2-2x+3$, $y=-2x^2+10x-6$의 교점의 x좌표는

$x^2-2x+3=-2x^2+10x-6$에서

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 넓이는

$\int_1^3\{(-2x^2+10x-6)-(x^2-2x+3)\}dx$

$=\int_1^3(-3x^2+12x-9)dx$

$=\left[-x^3+6x^2-9x\right]_1^3=4$

답 ②

0873

두 곡선 $y=x^3-2x^2$, $y=-x^2+2x$의 교점의 x좌표는

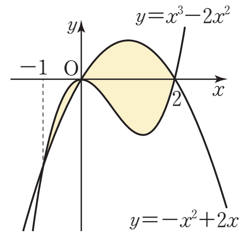
$x^3-2x^2=-x^2+2x$에서

$x^3-x^2-2x=0$

$x(x^2-x-2)=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{0}\{(x^3-2x^2)-(-x^2+2x)\}dx$

$+\int_0^2\{(-x^2+2x)-(x^3-2x^2)\}dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx+\int_0^2(-x^3+x^2+2x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$

$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$

답 ④

0874

곡선 $y=-x^2$을 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=-x^2 \qquad \therefore y=x^2$

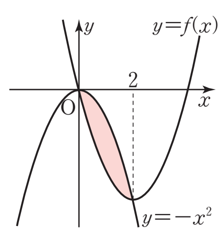
이 곡선을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면

$y=(x-2)^2-4 \qquad \therefore y=x^2-4x$ ··· ❶

두 곡선 $y=-x^2$, $y=x^2-4x$의 교점의 x좌표는 $-x^2=x^2-4x$에서

$x^2-2x=0,\ x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ ··· ❷



따라서 구하는 넓이는

$\int_0^2\{-x^2-(x^2-4x)\}dx$

$=\int_0^2(-2x^2+4x)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2=\frac{8}{3}$ ··· ❸

답 $\frac{8}{3}$

채점 기준	비율
❶ 곡선 $y=f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ 두 곡선 $y=-x^2$, $y=f(x)$의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 두 곡선 $y=-x^2$, $y=f(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

0875

두 곡선 $y=x^3-x$, $y=x^2+ax+b$가 $x=1$에서 접하므로 두 곡선 모두 점 $(1, 0)$을 지나고, $x=1$에서의 접선의 기울기가 서로 같다.

곡선 $y=x^2+ax+b$가 점 $(1, 0)$을 지나므로

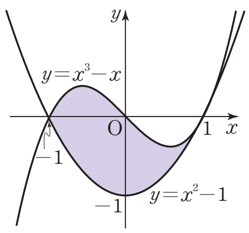
$0=1+a+b$ …… ㉠

또, $y=x^3-x$에서 $y'=3x^2-1$이므로 $x=1$에서의 접선의 기울기는 2이고, $y=x^2+ax+b$에서 $y'=2x+a$이므로 $x=1$에서의 접선의 기울기는 $2+a$이다.

즉, $2+a=2$이므로 $a=0$

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $b=-1$

두 곡선 $y=x^3-x$, $y=x^2-1$의 교점의 x좌표는 $x^3-x=x^2-1$에서



$x^3-x^2-x+1=0$

$x^2(x-1)-(x-1)=0$

$(x-1)^2(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}\{(x^3-x)-(x^2-1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

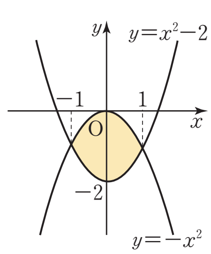
답 ①

0876

$k\to\infty$일 때, 곡선 $y=-x^2+\dfrac{2}{k^2}$는 곡선 $y=-x^2$에 가까워지므로 $\displaystyle\lim_{k\to\infty}S_k$는 두 곡선 $y=x^2-2$, $y=-x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 뜻한다.

두 곡선 $y=x^2-2$, $y=-x^2$의 교점의 x좌표는 $x^2-2=-x^2$에서

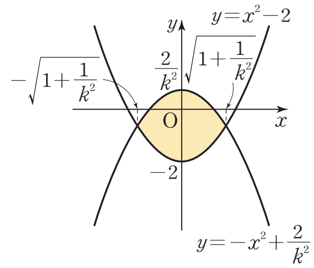
$2x^2=2$ $\quad\therefore x=\pm1$



$$\therefore \lim_{k\to\infty}S_k=\int_{-1}^{1}\{-x^2-(x^2-2)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-2x^2+2)dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1$$
$$=2\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

답 ③

다른 풀이 두 곡선 $y=x^2-2$, $y=-x^2+\dfrac{2}{k^2}$의 교점의 x좌표는



$x^2-2=-x^2+\dfrac{2}{k^2}$에서

$x^2=1+\dfrac{1}{k^2}$

$\therefore x=\pm\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}$

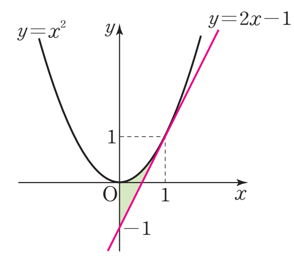
따라서 두 곡선 $y=x^2-2$, $y=-x^2+\dfrac{2}{k^2}$로 둘러싸인 도형의 넓이 S_k는

$$S_k=\int_{-\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}^{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}\left\{\left(-x^2+\frac{2}{k^2}\right)-(x^2-2)\right\}dx$$
$$=2\int_{0}^{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}\left(-2x^2+2+\frac{2}{k^2}\right)dx=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)x\right]_0^{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}$$
$$=2\left\{-\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}+2\cdot\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\right\}$$
$$=\frac{8}{3}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$$
$$\therefore \lim_{k\to\infty}S_k=\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{8}{3}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\right\}=\frac{8}{3}$$

0877

|전략| 먼저 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식을 구한다.

$y=x^2$에서 $y'=2x$이므로 곡선 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $2\cdot1=2$이고, 접선의 방정식은



$y-1=2(x-1)$

$\therefore y=2x-1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{1}\{x^2-(2x-1)\}dx=\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

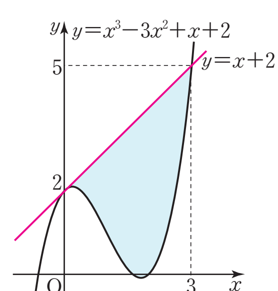
답 $\dfrac{1}{3}$

0878

$y=x^3-3x^2+x+2$에서 $y'=3x^2-6x+1$이므로 곡선 위의 점 $(0, 2)$에서의 접선의 기울기는 1이고, 접선의 방정식은

$y-2=1\cdot(x-0)$ $\quad\therefore y=x+2$

곡선 $y=x^3-3x^2+x+2$와 직선 $y=x+2$의 교점의 x좌표는



$x^3-3x^2+x+2=x+2$에서

$x^3-3x^2=0$, $x^2(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{3}\{(x+2)-(x^3-3x^2+x+2)\}dx$$
$$=\int_{0}^{3}(-x^3+3x^2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_0^3=\frac{27}{4}$$

답 ③

0879

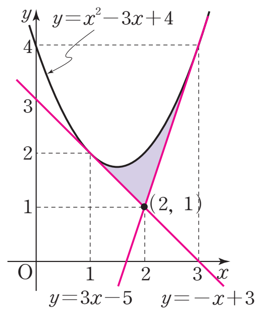
$y=x^2-3x+4$에서 $y'=2x-3$이므로

접점 $(t,\ t^2-3t+4)$에서의 접선의

기울기는 $2t-3$이다.

즉, 접선의 방정식은

$y-(t^2-3t+4)=(2t-3)(x-t)$ ······㉠



이 접선이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$1-(t^2-3t+4)=(2t-3)(2-t)$

에서 $t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$ $\qquad\therefore t=1$ 또는 $t=3$

㉠에 $t=1,\ t=3$을 각각 대입하면 접선의 방정식은

$y=-x+3,\ y=3x-5$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^2\{(x^2-3x+4)-(-x+3)\}dx+\int_2^3\{(x^2-3x+4)-(3x-5)\}dx$$

$$=\int_1^2(x^2-2x+1)dx+\int_2^3(x^2-6x+9)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_2^3$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 ②

0880

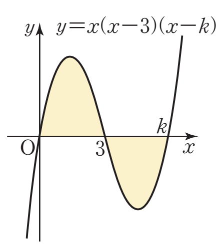
|전략| 곡선 $y=x(x-3)(x-k)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같고 $k>3$이므로 $\int_0^k x(x-3)(x-k)dx=0$임을 이용한다.

곡선 $y=x(x-3)(x-k)$와 x축의 교점의 x좌표는 $x(x-3)(x-k)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=k$

이때, $k>3$이므로

곡선 $y=x(x-3)(x-k)$는 오른쪽 그림과 같고 색칠한 두 도형의 넓이가 같다.



즉, $\int_0^k x(x-3)(x-k)dx=0$이므로

$\int_0^k\{x^3-(3+k)x^2+3kx\}dx=0,\ \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3+k}{3}x^3+\frac{3k}{2}x^2\right]_0^k=0$

$\frac{k^4}{4}-\frac{3k^3+k^4}{3}+\frac{3k^3}{2}=0,\ k^4-6k^3=0$

$k^3(k-6)=0$ $\qquad\therefore k=6\ (\because k>3)$

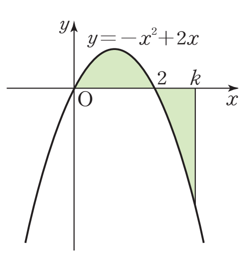
답 ③

0881

곡선 $y=-x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=0$에서

$x(x-2)=0$ $\qquad\therefore x=0$ 또는 $x=2$

이때, $k>2$이므로 곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $x=k$는 오른쪽 그림과 같고 색칠한 두 도형의 넓이가 같다.



즉, $\int_0^k(-x^2+2x)dx=0$이므로

$\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^k=0,\ -\frac{1}{3}k^3+k^2=0$

$k^3-3k^2=0,\ k^2(k-3)=0$

$\therefore k=3\ (\because k>2)$

답 ①

0882

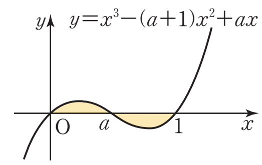
곡선 $y=x^3-(a+1)x^2+ax$와

x축의 교점의 x좌표는

$x^3-(a+1)x^2+ax=0$에서

$x\{x^2-(a+1)x+a\}=0$

$x(x-1)(x-a)=0$



$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=a$

이때, $0<a<1$이므로 곡선 $y=x^3-(a+1)x^2+ax$는 위의 그림과 같고 색칠한 두 도형의 넓이가 같다.

즉, $\int_0^1\{x^3-(a+1)x^2+ax\}dx=0$이므로

$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^1=0,\ \frac{1}{4}-\frac{a+1}{3}+\frac{a}{2}=0$

$3-4(a+1)+6a=0,\ 2a-1=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

답 ③

0883

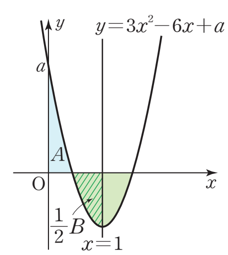
곡선

$y=3x^2-6x+a=3(x-1)^2+a-3$

이 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고

$A:B=1:2$에서 $A=\frac{1}{2}B$이므로

하늘색으로 색칠한 부분과 빗금친 부분의 두 도형의 넓이가 같다. 즉,



$\int_0^1(3x^2-6x+a)dx=0$이므로

$\left[x^3-3x^2+ax\right]_0^1=0,\ 1-3+a=0$

$\therefore a=2$

답 2

0884

$S_1+S_2=\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=8$이고 $S_1:S_2=5:11$이므로

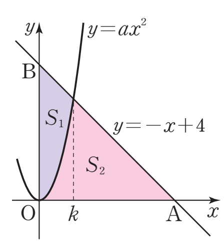
$S_1=8\cdot\frac{5}{16}=\frac{5}{2}$ ······㉠

한편 직선 AB는 두 점 $(4,\ 0),\ (0,\ 4)$를 지나므로 그 방정식은

$y=-x+4$

이때, 직선 AB와 곡선 $y=ax^2$의 교점의 x좌표를 $k(0<k<4)$라 하면

$-k+4=ak^2$ ······㉡



9 정적분의 활용

닫힌구간 $[0, k]$에서 $-x+4 \geq ax^2$이므로

$$S_1=\int_0^k \{(-x+4)-ax^2\}dx=\int_0^k (-ax^2-x+4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_0^k=-\frac{1}{3}ak^3-\frac{1}{2}k^2+4k$$

$$=-\frac{1}{3}k(-k+4)-\frac{1}{2}k^2+4k \ (\because ㉡)$$

$$=-\frac{1}{6}k^2+\frac{8}{3}k \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠=㉢에서 $-\frac{1}{6}k^2+\frac{8}{3}k=\frac{5}{2}$

$k^2-16k+15=0$, $(k-1)(k-15)=0$

$\therefore k=1 \ (\because 0<k<4)$

$k=1$을 ㉡에 대입하면 $a=3$ 답 3

0885

곡선 $y=f(x)$는 x축과 $x=0$, $x=\alpha$, $x=\beta$에서 만나고 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=x(x-\alpha)(x-\beta)$

또, $y=g(x)$는 직선 $y=h(x)$와 $x=0$, $x=\alpha$, $x=\beta$에서 만나고 최고차항의 계수가 4이므로

$g(x)-h(x)=4x(x-\alpha)(x-\beta)$

이때, $S_1=\int_0^\alpha f(x)dx=\int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta)dx$

$S_2=\int_0^\alpha \{g(x)-h(x)\}dx=4\int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta)dx$

이므로 $S_2=4S_1$

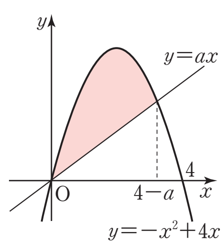
그런데 $S_1+S_2=120$이므로

$S_1+S_2=5S_1=120 \qquad \therefore S_1=24$

$\therefore S_2-3S_1=4S_1-3S_1=S_1=24$ 답 24

0886

|전략| 곡선 $y=-x^2+4x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=-x^2+4x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 $\frac{1}{2}$배임을 이용한다.



곡선 $y=-x^2+4x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는 $-x^2+4x=ax$에서

$x^2+(a-4)x=0$

$x\{x+(a-4)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4-a$

따라서 오른쪽 그림의 색칠한 도형의 넓이는

$$\int_0^{4-a} \{(-x^2+4x)-ax\}dx$$

$$=\int_0^{4-a} \{-x^2+(4-a)x\}dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{4-a}{2}x^2\right]_0^{4-a}$$

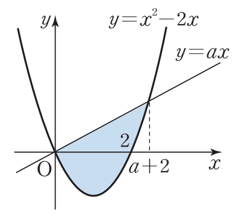
$$=-\frac{1}{3}(4-a)^3+\frac{4-a}{2}(4-a)^2=\frac{1}{6}(4-a)^3$$

곡선 $y=-x^2+4x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^4 (-x^2+4x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$$

즉, $\frac{1}{6}(4-a)^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{3}$이므로 $(4-a)^3=32$ 답 ⑤

0887



곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는 $x^2-2x=ax$에서

$x^2-(a+2)x=0$

$x\{x-(a+2)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a+2$

따라서 오른쪽 그림의 색칠한 도형의 넓이는

$$\int_0^{a+2} \{ax-(x^2-2x)\}dx$$

$$=\int_0^{a+2} \{-x^2+(a+2)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+2}{2}x^2\right]_0^{a+2}=\frac{1}{6}(a+2)^3 \qquad \cdots ❶$$

곡선 $y=x^2-2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

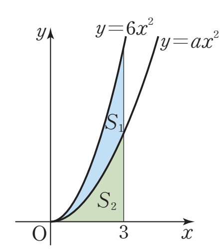
$$-\int_0^2 (x^2-2x)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2=\frac{4}{3} \qquad \cdots ❷$$

즉, $\frac{1}{6}(a+2)^3=2\cdot\frac{4}{3}$이어야 하므로 $(a+2)^3=16$ $\cdots$ ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ 곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ 곡선 $y=x^2-2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %
❸ $(a+2)^3$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0888



곡선 $y=6x^2(x\geq 0)$과 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^3 6x^2dx=\left[2x^3\right]_0^3=54$$

곡선 $y=ax^2(x\geq 0)$과 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^3 ax^2dx=\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^3=9a$$

위의 그림에서 $S_1=S_2$이므로

$9a=\frac{1}{2}\cdot 54 \qquad \therefore a=3$ 답 ③

0889

|전략| 먼저 곡선 $y=x^2-2x-3$과 직선 $y=mx$의 두 근을 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$라 하고, 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 α, β에 대한 식으로 나타내어 본다.

곡선 $y=x^2-2x-3$과 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는 방정식 $x^2-2x-3=mx$, 즉 $x^2-(m+2)x-3=0$의 두 근이다.

두 근을 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$라 하면 α, β가 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표이므로 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_\alpha^\beta \{mx-(x^2-2x-3)\}dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

한편, 이차방정식 $x^2-(m+2)x-3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m+2$, $\alpha\beta=-3$

$\therefore (\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta$

$=(m+2)^2-4\cdot(-3)$

$=m^2+4m+16$

$\beta-\alpha=\sqrt{m^2+4m+16}$ ($\because \alpha<\beta$)이므로

$\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\sqrt{m^2+4m+16})^3$

$=\frac{1}{6}\{\sqrt{(m+2)^2+12}\}^3$

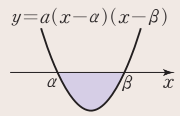
따라서 $m=-2$일 때 넓이는 최소이고 구하는 최솟값은

$\frac{1}{6}\cdot(\sqrt{12})^3=4\sqrt{3}$ 답 $4\sqrt{3}$

Lecture

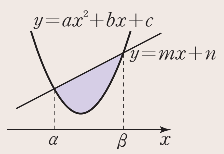
(1) 포물선 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)(a\neq0)$와 x축의 두 교점의 x좌표가 α, $\beta(\alpha<\beta)$일 때, 포물선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$S=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$



(2) 포물선 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$와 직선 $y=mx+n$의 서로 다른 두 교점의 x좌표가 α, $\beta(\alpha<\beta)$일 때, 포물선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

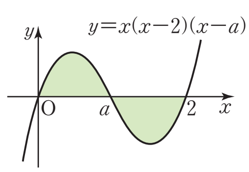
$S=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$



0890

$0<a<2$이므로

곡선 $y=x(x-2)(x-a)$는 오른쪽 그림과 같고 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라 하면



$S(a)=\int_0^a x(x-2)(x-a)dx-\int_a^2 x(x-2)(x-a)dx$

$=\int_0^a\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx$

$-\int_a^2\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\right]_0^a$

$-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\right]_a^2$

$=-\frac{1}{6}a^4+\frac{2}{3}a^3-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}$

$\therefore S'(a)=-\frac{2}{3}a^3+2a^2-\frac{4}{3}$

$=-\frac{2}{3}(a^3-3a^2+2)$

$=-\frac{2}{3}(a-1)\{a-(1+\sqrt{3})\}\{a-(1-\sqrt{3})\}$

$S'(a)=0$에서 $a=1$ ($\because 0<a<2$)

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	극소	↗	

따라서 $S(a)$는 $a=1$일 때 극소이면서 최소이다. 답 1

0891

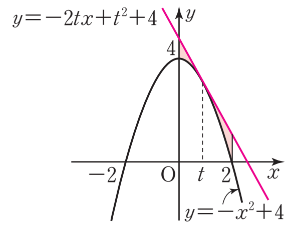
$y=-x^2+4$에서 $y'=-2x$이므로

곡선 위의 점 $(t, -t^2+4)$에서의 접선의 기울기는 $-2t$이다.

즉, 접선의 방정식은

$y-(-t^2+4)=-2t(x-t)$

$\therefore y=-2tx+t^2+4$ ··· ❶



이때, $0<t<2$이므로 오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$\int_0^2\{(-2tx+t^2+4)-(-x^2+4)\}dx$

$=\int_0^2(x^2-2tx+t^2)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2+t^2x\right]_0^2$

$=2t^2-4t+\frac{8}{3}=2(t-1)^2+\frac{2}{3}$ ··· ❷

따라서 구하는 넓이의 최솟값은 $\frac{2}{3}$이다. ··· ❸

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ 곡선 위의 점 $(t, -t^2+4)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ ❶에서 구한 접선과 곡선 $y=-x^2+4$ 및 y축, 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ 도형의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0892

직선 l이 점 $\mathrm{A}(2, 1)$을 지나므로 직선 l의 방정식을

$y-1=m(x-2)$, 즉 $y=mx-2m+1$이라 하면 곡선 $y=x^2-2x$와 직선 l의 교점의 x좌표는 방정식

$x^2-2x=mx-2m+1$, 즉 $x^2-(m+2)x+2m-1=0$

의 두 근이다.

두 근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 α, β가 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표이므로 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_\alpha^\beta\{(mx-2m+1)-(x^2-2x)\}dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

한편, 이차방정식 $x^2-(m+2)x+2m-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m+2$, $\alpha\beta=2m-1$

$\therefore (\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta$

$=(m+2)^2-4(2m-1)$

$=m^2-4m+8$

$\beta-\alpha=\sqrt{m^2-4m+8}$ ($\because \alpha<\beta$)이므로

$\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\sqrt{m^2-4m+8})^3$

$=\frac{1}{6}\{\sqrt{(m-2)^2+4}\}^3$

따라서 $m=2$일 때 넓이는 최소이므로

$a=\frac{1}{6}\cdot(\sqrt{4})^3=\frac{4}{3}$, $b=2$

$\therefore a+b=\frac{10}{3}$ 답 ④

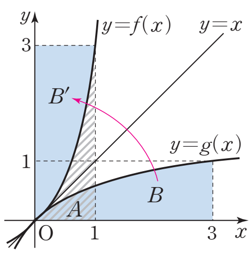
9 정적분의 활용

0893

|전략| $y=g(x)$는 $y=f(x)$의 역함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

$f(x)=2x^3+x$에서 $f'(x)=6x^2+1>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

함수 $f(x)=2x^3+x$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



이때, $\int_0^3 g(x)dx$의 값은 색칠된 B 부분의 넓이이고, 역함수의 성질에 의하여 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 B' 부분의 넓이와 같다.

$\therefore \int_0^1 f(x)dx+\int_0^3 g(x)dx=(A$의 넓이$)+(B$의 넓이$)$

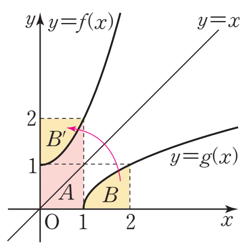
$=(A$의 넓이$)+(B'$의 넓이$)$

$=1\cdot3=3$

답 ③

0894

함수 $f(x)=x^2+1\ (x\ge0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



이때, $\int_1^2 g(x)dx$의 값은 색칠된 B 부분의 넓이이고, 역함수의 성질에 의하여 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 B' 부분의 넓이와 같다.

$\therefore \int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 g(x)dx=(A$의 넓이$)+(B$의 넓이$)$

$=(A$의 넓이$)+(B'$의 넓이$)$

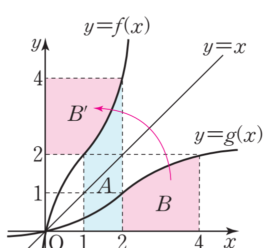
$=1\cdot2=2$

답 2

0895

$f(x)=x^3-3x^2+4x$에서 $f'(x)=3x^2-6x+4=3(x-1)^2+1>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

함수 $f(x)=x^3-3x^2+4x$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



이때, $\int_2^4 g(x)dx$의 값은 색칠된 B 부분의 넓이이고, 역함수의 성질에 의하여 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 B' 부분의 넓이와 같다.

$\therefore \int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 g(x)dx=(A$의 넓이$)+(B$의 넓이$)$

$=(A$의 넓이$)+(B'$의 넓이$)$

$=2\cdot4-1\cdot2=6$

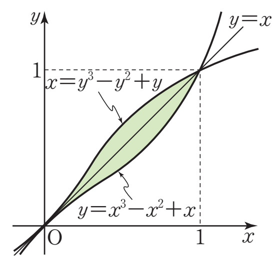
답 ②

0896

|전략| 구하는 넓이는 곡선 $y=x^3-x^2+x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배임을 이용한다.

$y=x^3-x^2+x$에서 $y'=3x^2-2x+1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$이므로 실수 전체의 집합에서 증가한다.

두 함수 $y=x^3-x^2+x$와 $x=y^3-y^2+y$는 서로 역함수 관계이므로 두 곡선 $y=x^3-x^2+x$, $x=y^3-y^2+y$의 교점은 곡선 $y=x^3-x^2+x$와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



곡선 $y=x^3-x^2+x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x^3-x^2+x=x$에서 $x^2(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

이때, 구하는 넓이는 곡선 $y=x^3-x^2+x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로

$$2\int_0^1\{x-(x^3-x^2+x)\}dx=2\int_0^1(-x^3+x^2)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

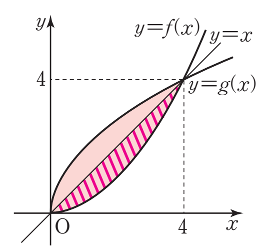
$$=2\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

답 ⑤

참고 증가하는 함수 $f(x)$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 만나면 그 교점은 항상 직선 $y=x$ 위에 있다.

0897

오른쪽 그림과 같이 구하는 넓이는 직선 $y=x$에 의하여 이등분되고, 빗금 친 부분의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot4\cdot4-\int_0^4 f(x)dx$

$=8-5=3$

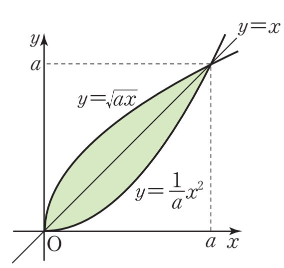
따라서 구하는 넓이는 $2\cdot3=6$이다.

답 ③

0898

함수 $f(x)=\sqrt{ax}$의 역함수는

$f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x^2\ (x\ge0)$이고, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점은 곡선 $y=f^{-1}(x)$와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



곡선 $y=\frac{1}{a}x^2$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $\frac{1}{a}x^2=x$에서 $\frac{1}{a}x(x-a)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=a$

이때, 두 곡선 $y=\sqrt{ax}$와 $y=\frac{1}{a}x^2\ (x\ge0)$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=\frac{1}{a}x^2\ (x\ge0)$과 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로

$$2\int_0^a\left(x-\frac{1}{a}x^2\right)dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3a}x^3\right]_0^a=2\cdot\frac{1}{6}a^2=\frac{1}{3}a^2$$

따라서 $\frac{1}{3}a^2=\frac{16}{3}$이므로 $a^2=16$ $\quad\therefore a=4\ (\because a>0)$ 답 4

0899

|전략| 속도 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 $v(t)=0$일 때의 t의 값을 구한다.

$v(t)=t^2+2t-15=0$에서 $(t+5)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=3\ (\because t>0)$

즉, 점 P는 출발한 지 3초 후에 운동 방향이 바뀐다.

따라서 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3(t^2+2t-15)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+t^2-15t\right]_0^3=-27$$

답 -27

0900

$$0+\int_0^3(3t^2-6t+5)dt=\left[t^3-3t^2+5t\right]_0^3=15$$

답 ⑤

0901

$t=0$일 때 지면으로부터의 높이는 100 m이므로 구하는 높이는

$$100+\int_0^{20}t\,dt+\int_{20}^{35}(60-2t)dt=100+\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{20}+\left[60t-t^2\right]_{20}^{35}$$
$$=100+200+75=375\ (\mathrm{m})$$

답 ①

0902

$t=a(a>0)$일 때 점 P가 원점으로 다시 돌아온다고 하면 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P의 위치의 변화량은 0이므로

$$\int_0^a(-3t^2-2t+12)dt=0,\ \left[-t^3-t^2+12t\right]_0^a=0$$

$-a^3-a^2+12a=0,\ a(a+4)(a-3)=0$ $\quad\therefore a=3\ (\because a>0)$

따라서 점 P가 원점으로 다시 돌아오는 것은 3초 후이다. 답 ③

0903

공이 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0 m/s이므로

$v(t)=25-10t=0$에서 $t=\frac{5}{2}$

$t=0$일 때 지면으로부터의 높이는 50 m이므로 구하는 최고 높이는

$$50+\int_0^{\frac{5}{2}}(25-10t)dt=50+\left[25t-5t^2\right]_0^{\frac{5}{2}}$$
$$=50+\frac{125}{4}=\frac{325}{4}\ (\mathrm{m})$$

답 ④

0904

출발한 지 t초 후의 두 점 A, B의 위치를 각각 x_A, x_B라 하면

$$x_A=0+\int_0^t(-2t+4)dt=-t^2+4t$$

$$x_B=0+\int_0^t(2t-4)dt=t^2-4t$$ … ❶

두 점이 다시 만날 때 $x_A=x_B$이므로

$-t^2+4t=t^2-4t,\ 2t(t-4)=0$ $\quad\therefore t=4\ (\because t>0)$

즉, 두 점 A, B는 출발한 지 4초 후에 다시 만난다. … ❷

이때, 두 점 사이의 거리는

$|x_A-x_B|=2|-t^2+4t|=2|-(t-2)^2+4|$

이고, $0<t\le4$에서 $t=2$일 때 최댓값 8을 가지므로 거리의 최댓값은 8이다. … ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 출발한 지 t초 후의 두 점 A, B의 위치를 각각 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 점 A, B가 원점을 출발한 후 다시 만나는 시각을 구할 수 있다.	30 %
❸ 두 점 A, B 사이의 거리의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

0905

|전략| 열차가 정지할 때의 속도는 0 m/s임을 이용한다.

열차가 정지할 때의 속도는 0 m/s이므로

$v(t)=30-5t=0$에서 $t=6$

따라서 열차는 제동을 건 후 6초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^6|30-5t|dt=\int_0^6(30-5t)dt$$
$$=\left[30t-\frac{5}{2}t^2\right]_0^6=90\ (\mathrm{m})$$

답 ⑤

0906

$v(t)=2t^2-6t=0$에서 $2t(t-3)=0$ $\quad\therefore t=0$ 또는 $t=3$

이때, $0\le t\le3$에서 $v(t)\le0$, $t\ge3$에서 $v(t)\ge0$이므로 구하는 거리는

$$\int_0^6|2t^2-6t|dt=-\int_0^3(2t^2-6t)dt+\int_3^6(2t^2-6t)dt$$
$$=-\left[\frac{2}{3}t^3-3t^2\right]_0^3+\left[\frac{2}{3}t^3-3t^2\right]_3^6$$
$$=-(-9)+45=54$$

답 ⑤

0907

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0 m/s이므로

$v(t)=50-10t=0$에서 $t=5$

따라서 물체가 최고 높이에 도달한 후 3초 동안 움직인 거리는

$$\int_5^8|50-10t|dt=-\int_5^8(50-10t)dt$$
$$=-\left[50t-5t^2\right]_5^8=45\ (\mathrm{m})$$

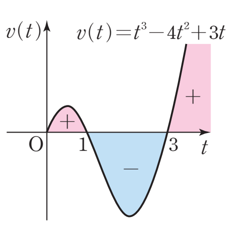
답 ②

0908

$v(t)=t^3-4t^2+3t=0$에서

$t(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=1$ 또는 $t=3$



오른쪽 그림에서 점 P가 음의 방향으로 움직이는 시간은 $1<t<3$이다. 따라서 점 P가 음의 방향으로 움직인 거리는

$$\int_1^3 |t^3-4t^2+3t|\,dt=-\int_1^3 (t^3-4t^2+3t)\,dt$$
$$=-\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{4}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_1^3=\frac{8}{3}$$
답 ③

0909

시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=x'(t)=t^2-6t+8$

물체가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v(t)=t^2-6t+8=0$에서

$(t-2)(t-4)=0 \qquad \therefore t=2$ 또는 $t=4$

점 P는 $t=4$에서 두 번째로 운동 방향을 바꾸고, $0\le t\le 2$에서 $v(t)\ge 0$, $2\le t\le 4$에서 $v(t)\le 0$이므로 구하는 거리는

$$\int_0^4 |t^2-6t+8|\,dt=\int_0^2 (t^2-6t+8)\,dt-\int_2^4 (t^2-6t+8)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_0^2-\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_2^4$$
$$=\frac{20}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)=8$$
답 ③

0910

지훈이가 30초 동안 이동한 거리를 l_A라 하면

$$l_A=\int_0^{30}\left|\frac{1}{4}t+2\right|dt=\int_0^{30}\left(\frac{1}{4}t+2\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{8}t^2+2t\right]_0^{30}=172.5\ (\mathrm{m})$$

유라가 30초 동안 이동한 거리를 l_B라 하면

$$l_B=\int_0^{30}\left|\frac{1}{3}t+1\right|dt=\int_0^{30}\left(\frac{1}{3}t+1\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{6}t^2+t\right]_0^{30}=180\ (\mathrm{m})$$

지훈이와 유라가 서로 반대 방향으로 동시에 출발하였으므로 지훈이와 유라가 30초 동안 움직인 거리의 합은

$l_A+l_B=352.5\ (\mathrm{m})$

이때, 산책로의 한 바퀴의 길이가 80 m이므로

$4\times 80<352.5<5\times 80$

따라서 지훈이와 유라는 30초 동안 4번 만난다.
답 ④

0911

|전략| 속도 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 점 P의 운동 방향이 바뀌고, 원점에서 출발한 점 P의 시각 t에서의 위치는 $\int_0^t v(t)dt$임을 이용한다.

ㄱ. $v(1)=1>0$이므로 점 P는 $t=1$에서 운동 방향을 바꾸지 않는다. (거짓)

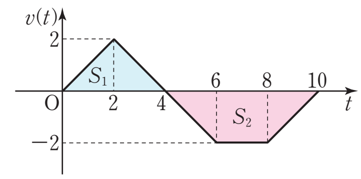
ㄴ. $0<t<2$일 때 $v(t)>0$이므로 점 P는 출발점에서 양의 방향으로 계속 멀어져 가고, $2<t<4$에서 $v(t)<0$이므로 점 P는 $t=2$에서 운동 방향을 바꾸어 음의 방향으로 움직인다.
따라서 $t=2$일 때 점 P는 출발점에서 가장 멀리 떨어져 있다. (참)

ㄷ. 시각 t에서 점 P의 위치는 $\int_0^t v(t)dt$이므로 $t=4$일 때 점 P의 위치는 $\int_0^4 v(t)dt$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.
답 ④

0912

$t=10$에서의 물체의 위치는 오른쪽 그림에서 삼각형의 넓이 S_1에서 사다리꼴의 넓이 S_2를 빼면 되므로



$$a=\int_0^{10} v(t)dt=S_1-S_2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot(2+6)\cdot 2=4-8=-4$$

또, $t=0$에서 $t=10$까지 물체가 움직인 거리는 삼각형의 넓이 S_1과 사다리꼴의 넓이 S_2를 더하면 되므로

$$b=\int_0^{10}|v(t)|dt=S_1+S_2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot(2+6)\cdot 2=4+8=12$$

$\therefore a+b=-4+12=8$
답 8

0913

ㄱ. $f(t)=\int_0^t v(t)dt$는 점 P의 시각 t에서의 위치이므로 $f(4)=0$이다. (거짓)

ㄴ. $f(10)=\int_0^{10} v(t)dt=\int_0^2 v(t)dt+\int_2^{10} v(t)dt$
$=\int_0^2 v(t)dt=f(2)$ (참)

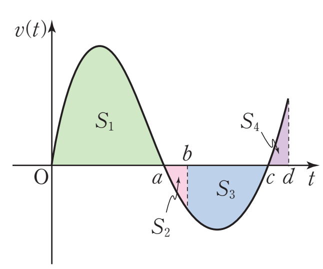
ㄷ. 점 P가 출발 후 원점을 지나는 것은
$f(t)=\int_0^t v(t)dt=0\ (t>0)$
일 때, 즉 $t=4$ 또는 $t=8$일 때로 출발한 후 원점을 2번 지난다. (거짓)

ㄹ. 점 P가 10초 동안 움직인 거리는 속도 $v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로 5이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.
답 ③

0914

오른쪽 그림과 같이 각각의 넓이를 S_1, S_2, S_3, S_4라 하면



$\int_0^a |v(t)|dt=\int_a^d |v(t)|dt$

이므로

$S_1=S_2+S_3+S_4$

ㄱ. $S_1>S_2+S_3$이므로 원점을 다시 지나지 않는다. (거짓)

ㄴ. $\int_0^c v(t)dt=S_1-S_2-S_3$

$\int_c^d v(t)dt=S_4=S_1-S_2-S_3$

$\therefore \int_0^c v(t)dt=\int_c^d v(t)dt$ (참)

ㄷ. $\int_0^b v(t)dt=S_1-S_2$, $\int_b^d |v(t)|dt=S_3+S_4$

이때, 주어진 조건에서 $S_1=S_2+S_3+S_4$, 즉 $S_1-S_2=S_3+S_4$이므로

$\int_0^b v(t)dt=\int_b^d |v(t)|dt$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

STEP 3 내신 마스터

0915

유형 01 곡선과 x축 사이의 넓이 (1)

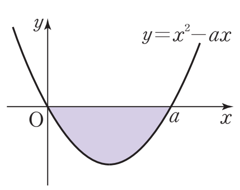
|전략| 닫힌구간 $[0, a]$에서 $x^2-ax\le 0$이므로 $-\int_0^a (x^2-ax)dx=\frac{4}{3}$임을 이용한다.

곡선 $y=x^2-ax$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-ax=0$에서

$x(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는



$-\int_0^a (x^2-ax)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^a$

$=\frac{1}{6}a^3$

즉, $\frac{1}{6}a^3=\frac{4}{3}$이므로 $a^3=8$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

답 ⑤

0916

유형 02 곡선과 x축 사이의 넓이 (2)

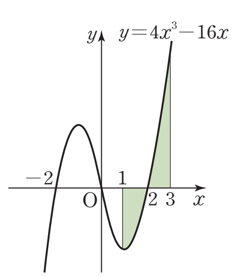
|전략| 넓이는 양수이므로 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)\ge 0$이면 $S=\int_a^b f(x)dx$, $f(x)\le 0$이면 $S=-\int_a^b f(x)dx$임을 이용한다.

곡선 $y=4x^3-16x$와 x축의 교점의 x좌표는 $4x^3-16x=0$에서

$4x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는



$-\int_1^2 (4x^3-16x)dx+\int_2^3 (4x^3-16x)dx$

$=-\left[x^4-8x^2\right]_1^2+\left[x^4-8x^2\right]_2^3$

$=-(-9)+25=34$

답 ⑤

0917

유형 02 곡선과 x축 사이의 넓이 (2)

|전략| $S_2=16S_1$임을 이용하여 식을 세운다.

곡선 $y=x^3$과 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이 S_1은

$S_1=-\int_a^0 x^3dx=-\left[\frac{1}{4}x^4\right]_a^0=\frac{1}{4}a^4$

곡선 $y=x^3$과 x축 및 직선 $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S_2는

$S_2=\int_0^b x^3dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^b=\frac{1}{4}b^4$

$S_2=16S_1$이므로 $b^4=16a^4$

$|b|=2|a|$ $\therefore k=2$

답 ③

0918

유형 04 두 곡선 사이의 넓이

|전략| 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한 후 {(위쪽 그래프의 식)−(아래쪽 그래프의 식)}의 정적분의 값을 구한다.

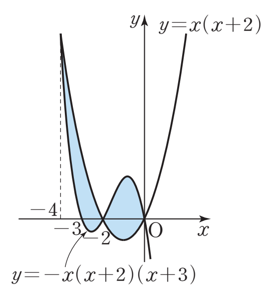
두 곡선 $y=x(x+2)$, $y=-x(x+2)(x+3)$의 교점의 x좌표는

$x(x+2)=-x(x+2)(x+3)$

에서 $x(x+2)(x+4)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=0$

따라서 구하는 넓이는



$\int_{-4}^{-2}[x(x+2)-\{-x(x+2)(x+3)\}]dx$

$+\int_{-2}^{0}\{-x(x+2)(x+3)-x(x+2)\}dx$

$=\int_{-4}^{-2}(x^3+6x^2+8x)dx+\int_{-2}^{0}(-x^3-6x^2-8x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+2x^3+4x^2\right]_{-4}^{-2}+\left[-\frac{1}{4}x^4-2x^3-4x^2\right]_{-2}^{0}$

$=4+4=8$

답 ④

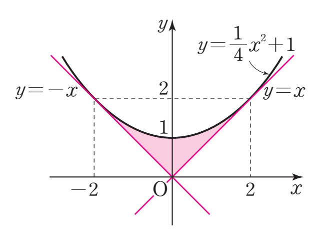
0919

유형 05 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이

|전략| 먼저 원점에서 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2+1$에 그은 두 접선의 방정식을 구한다.

$y=\frac{1}{4}x^2+1$에서 $y'=\frac{1}{2}x$이므로

접점 $\left(t, \frac{1}{4}t^2+1\right)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}t$이다.



즉, 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{4}t^2+1\right)=\frac{1}{2}t(x-t)$ ······ ㉠

이 접선이 원점을 지나므로 $-\frac{1}{4}t^2-1=-\frac{1}{2}t^2$에서 $t^2=4$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

㉠에 $t=-2$, $t=2$를 각각 대입하면 접선의 방정식은

$y=-x$, $y=x$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0}\left\{\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)-(-x)\right\}dx+\int_{0}^{2}\left\{\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)-x\right\}dx$$
$$=\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{4}x^2+x+1\right)dx+\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{4}x^2-x+1\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

답 ②

다른 풀이 두 직선 $y=-x$, $y=x$는 y축에 대하여 서로 대칭이고 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2+1$도 y축에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2+1$과 두 직선 $y=-x$, $y=x$로 둘러싸인 도형도 y축에 대하여 대칭이다.
따라서 구하는 넓이는

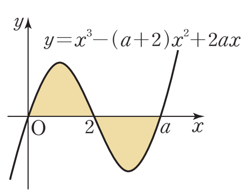
$$\int_{-2}^{0}\left\{\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)-(-x)\right\}dx+\int_{0}^{2}\left\{\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)-x\right\}dx$$
$$=2\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{4}x^2-x+1\right)dx=2\left[\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{0}^{2}$$
$$=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

0920

유형 06 넓이의 활용 - 두 도형의 넓이가 같을 때

|전략| 곡선 $y=x^3-(a+2)x^2+2ax$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같고 $a>2$이므로 $\int_{0}^{a}\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx=0$임을 이용한다.

곡선 $y=x^3-(a+2)x^2+2ax$와 x축의 교점의 x좌표는
$x^3-(a+2)x^2+2ax=0$에서
$x(x-2)(x-a)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=a$



이때, $a>2$이므로 곡선 $y=x^3-(a+2)x^2+2ax$는 위의 그림과 같고 색칠한 두 도형의 넓이가 같다.

즉, $\int_{0}^{a}\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx=0$이므로

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\right]_{0}^{a}=0$$
$$-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3=0,\ a^3(a-4)=0$$
$$\therefore a=4\ (\because a>2)$$

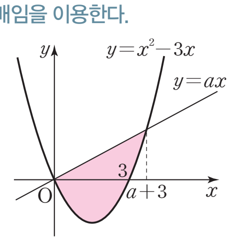
답 ③

0921

유형 07 넓이의 활용 - 넓이를 이등분할 때

|전략| 곡선 $y=x^2-3x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=x^2-3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배임을 이용한다.

곡선 $y=x^2-3x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=ax$에서
$x^2-(a+3)x=0$
$x\{x-(a+3)\}=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=a+3$



따라서 앞의 그림의 색칠한 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{a+3}\{ax-(x^2-3x)\}dx=\int_{0}^{a+3}\{-x^2+(a+3)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+3}{2}x^2\right]_{0}^{a+3}$$
$$=\frac{1}{6}(a+3)^3$$

곡선 $y=x^2-3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$-\int_{0}^{3}(x^2-3x)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}$$
$$=\frac{9}{2}$$

즉, $\frac{1}{6}(a+3)^3=2\cdot\frac{9}{2}$이어야 하므로 $(a+3)^3=54$

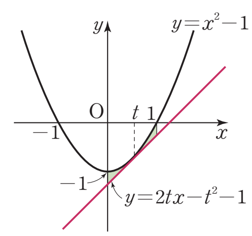
답 ④

0922

유형 08 넓이의 활용 - 넓이가 최소일 때

|전략| 먼저 $y=x^2-1$ 위의 한 점 (t, t^2-1)에서의 접선의 방정식을 구한다.

$y=x^2-1$에서 $y'=2x$이므로 곡선 위의 점 (t, t^2-1)에서의 접선의 기울기는 $2t$이다.
즉, 접선의 방정식은
$y-(t^2-1)=2t(x-t)$
$\therefore y=2tx-t^2-1$
이때, $0<t<1$이므로 오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는



$$\int_{0}^{1}\{(x^2-1)-(2tx-t^2-1)\}dx=\int_{0}^{1}(x^2-2tx+t^2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2+t^2x\right]_{0}^{1}$$
$$=t^2-t+\frac{1}{3}$$
$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}$$

따라서 구하는 넓이의 최솟값은 $\frac{1}{12}$이다.

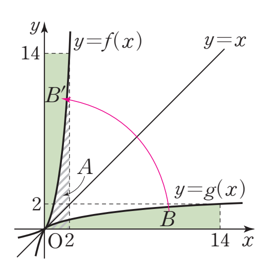
답 ①

0923

유형 09 함수와 그 역함수의 정적분

|전략| $y=g(x)$는 $y=f(x)$의 역함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

$f(x)=x^3+3x$에서 $f'(x)=3x^2+3>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.
함수 $f(x)=x^3+3x$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
이때, $\int_{0}^{14}g(x)dx$의 값은 색칠된 B 부분의 넓이이고, 역함수의 성질에 의하여 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 B' 부분의 넓이와 같다.



$\therefore \int_0^2 f(x)dx+\int_0^{14} g(x)dx=(A$의 넓이$)+(B$의 넓이$)$

$=(A$의 넓이$)+(B'$의 넓이$)$

$=2\cdot 14=28$

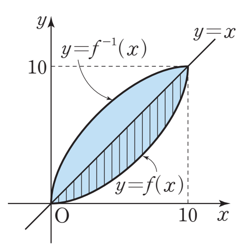
답 ⑤

0924

유형 **10 함수와 그 역함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이**

|전략| 구하는 넓이는 곡선 $y=\frac{1}{10}x^2(x\ge 0)$과 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배임을 이용한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는 빗금 친 부분의 넓이의 2배이다.



즉, 색칠한 부분의 넓이는

$2\int_0^{10}\left(x-\frac{1}{10}x^2\right)dx$

$=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{30}x^3\right]_0^{10}$

$=2\cdot\frac{50}{3}=\frac{100}{3}$ (km^2)

따라서 오일펜스로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{100}{3}$ km^2이다. 답 ⑤

0925

유형 **11 물체의 위치와 위치의 변화량**

|전략| $t=0$일 때 지면으로부터의 높이는 30 m이므로 4초 후의 이 공의 지면으로부터의 높이는 $30+\int_0^4(25-10t)dt$이다.

$t=0$일 때 지면으로부터의 높이는 30 m이므로 구하는 높이는

$30+\int_0^4(25-10t)dt=30+\left[25t-5t^2\right]_0^4$

$=30+20=50$ (m)

답 ④

0926

유형 **11 물체의 위치와 위치의 변화량 + 12 물체가 움직인 거리**

|전략| 원점을 출발한 점 P가 원점으로 다시 돌아온다고 하면 점 P의 위치의 변화량은 0임을 이용한다.

$t=a(a>0)$일 때 점 P가 원점으로 다시 돌아온다고 하면 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P의 위치의 변화량은 0이므로

$\int_0^a(-t^2+2t)dt=0$, $\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^a=0$

$-\frac{1}{3}a^3+a^2=0$, $-\frac{1}{3}a^2(a-3)=0$

$\therefore a=3$ $(\because a>0)$

$v(t)=-t^2+2t=0$에서

$-t(t-2)=0$ $\quad\therefore t=0$ 또는 $t=2$

이때, $0\le t\le 2$에서 $v(t)\ge 0$, $t\ge 2$에서 $v(t)\le 0$이므로 구하는 거리는

$\int_0^3|-t^2+2t|dt=\int_0^2(-t^2+2t)dt-\int_2^3(-t^2+2t)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2-\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_2^3$

$=\frac{4}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}$

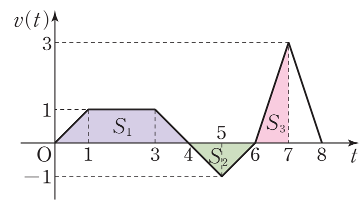
답 ④

0927

유형 **13 그래프에서의 위치와 움직인 거리**

|전략| 원점을 출발한 점 P의 $t=7$에서의 위치는 $\int_0^7 v(t)dt$, $t=0$에서 $t=7$까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_0^7|v(t)|dt$임을 이용한다.

$t=7$에서의 점 P의 위치는 오른쪽 그림에서 사다리꼴의 넓이 S_1에서 삼각형의 넓이 S_2를 빼고, 삼각형의 넓이 S_3을 더하면 되므로



$a=\int_0^7 v(t)dt$

$=S_1-S_2+S_3$

$=\frac{1}{2}\cdot(2+4)\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3$

$=3-1+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$

또, $t=0$에서 $t=7$까지 점 P가 움직인 거리는 사다리꼴의 넓이 S_1과 두 삼각형의 넓이 S_2, S_3을 더하면 되므로

$b=\int_0^7|v(t)|dt=S_1+S_2+S_3$

$=\frac{1}{2}\cdot(2+4)\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3$

$=3+1+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$

$\therefore a+b=\frac{7}{2}+\frac{11}{2}=9$

답 ③

0928

유형 **13 그래프에서의 위치와 움직인 거리**

|전략| 속도 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 점 P의 운동 방향이 바뀌고, 원점을 출발한 점 P가 원점으로 다시 돌아온다고 하면 점 P의 위치의 변화량은 0이다.

ㄱ. $v(t)=0$인 구간의 길이가 1이 되는 t의 구간이 존재하지 않으므로 점 P는 1초 동안 계속 멈춘 적이 없다. (거짓)

ㄴ. $v(t)$의 값이 양에서 음으로 바뀐 t의 값은 $t=2$이고, 음에서 양으로 바뀐 t의 값은 $t=4$이므로 점 P는 운동 방향을 2번 바꾸었다. (거짓)

ㄷ. $\int_0^4 v(t)dt=\int_0^2 v(t)dt+\int_2^4 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=0$

이므로 점 P는 출발하고 나서 4초 후 출발점에 있다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다. 답 ②

0929

유형 **06** 넓이의 활용 - 두 도형의 넓이가 같을 때

|전략| 정적분과 삼각형, 사각형의 넓이를 이용하여 S_1, S_2, S_3을 구하고 $2S_2=S_1+S_3$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

$S_1=\int_0^1 \frac{1}{2}x^2dx=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^1=\frac{1}{6}$

$S_1+S_2=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot a=\frac{1}{2}a$이므로

$S_2=\frac{1}{2}a-S_1=\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}$

또, $S_1+S_2+S_3=2$이므로

$S_3=2-(S_1+S_2)=2-\frac{1}{2}a$ … ❶

이때, $2S_2=S_1+S_3$이므로

$2\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}+\left(2-\frac{1}{2}a\right)$, $a-\frac{1}{3}=\frac{13}{6}-\frac{1}{2}a$

$\frac{3}{2}a=\frac{5}{2}$ $\quad\therefore a=\frac{5}{3}$ … ❷

답 $\frac{5}{3}$

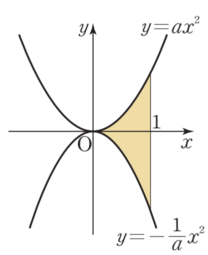
채점 기준	배점
❶ S_1의 값을 구하고, S_2, S_3을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	3점
❷ $2S_2=S_1+S_3$임을 이용하여 a의 값을 구할 수 있다.	3점

0930

유형 **08** 넓이의 활용 - 넓이가 최소일 때

|전략| 먼저 두 곡선 $y=ax^2$, $y=-\frac{1}{a}x^2$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

두 곡선 $y=ax^2$, $y=-\frac{1}{a}x^2$의 교점의 x좌표는 0뿐이고 양수 a에 대하여 $0\le x\le 1$에서 $ax^2\ge -\frac{1}{a}x^2$이다.



두 곡선 $y=ax^2$, $y=-\frac{1}{a}x^2$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\int_0^1\left\{ax^2-\left(-\frac{1}{a}x^2\right)\right\}dx$

$=\int_0^1\left(a+\frac{1}{a}\right)x^2dx$

$=\left[\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{a}\right)x^3\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ … ❶

이때, a는 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$S(a)=\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{a}\right)\ge\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=\frac{2}{3}$

따라서 $S(a)$는 $a=\frac{1}{a}$, 즉 $a=1$일 때 최솟값 $\frac{2}{3}$를 가진다. … ❷

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준	배점
❶ 두 곡선 $y=ax^2$, $y=-\frac{1}{a}x^2$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	3점
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 구하는 도형의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	4점

0931

유형 **10** 함수와 그 역함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이

|전략| 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$를 구한 후 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

함수 $y=\sqrt{2x-1}$의 역함수는 $2x-1=y^2$에서 $x=\frac{1}{2}(y^2+1)$

$\therefore g(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)\,(x\ge 0)$ … ❶

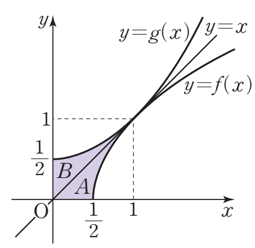
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점은 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{2}(x^2+1)=x$에서 $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$ $\quad\therefore x=1$

이때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서



(A의 넓이)$=$(B의 넓이)이고, 구하는 넓이 S는 $S=2B$이다. … ❷

따라서 $0\le x\le 1$에서

$\frac{1}{2}(x^2+1)\ge x$이므로 넓이 S는

$S=2B=2\int_0^1\left\{\frac{1}{2}(x^2+1)-x\right\}dx$

$=\int_0^1(x^2-2x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}$ … ❸

$\therefore 30S=30\cdot\frac{1}{3}=10$ … ❹

답 10

채점 기준	배점
❶ 역함수 $g(x)$를 구할 수 있다.	2점
❷ 넓이 S는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배임을 알 수 있다.	2점
❸ 넓이 S를 구할 수 있다.	2점
❹ $30S$의 값을 구할 수 있다.	1점

0932

유형 **04** 두 곡선 사이의 넓이

|전략| 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축의 교점의 x좌표와 $x=-2$에서의 두 접선의 기울기가 같음을 이용하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 식을 각각 구한다.

(1) 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수이고, x축과 $x=-2$, $x=0$, $x=2$에서 만나므로

$f(x)=-(x+2)x(x-2)$

$\therefore f(x)=-x^3+4x$

함수 $g(x)$는 이차함수이고 x축과 $x=-2$, $x=2$에서 만나므로 $g(x)=a(x+2)(x-2)$, 즉 $g(x)=ax^2-4a(a>0)$로 놓을 수 있다.

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 $x=-2$인 점에서 만나고, 그 점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(x)=-3x^2+4$, $g'(x)=2ax$에서

$f'(-2)=g'(-2)$

$-8=-4a \qquad \therefore a=2$

$\therefore g(x)=2x^2-8$

$$\therefore f(x)-g(x)=(-x^3+4x)-(2x^2-8)=-x^3-2x^2+4x+8$$

(2) $$\int_{-2}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{-2}^{2}(-x^3-2x^2+4x+8)dx=2\int_{0}^{2}(-2x^2+8)dx=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^2=2\cdot\frac{32}{3}=\frac{64}{3}$$

답 (1) $f(x)-g(x)=-x^3-2x^2+4x+8$ (2) $\frac{64}{3}$

채점 기준	배점
(1) 함수 $f(x)-g(x)$의 식을 구할 수 있다.	5점
(2) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	5점

0933

유형 **12** 물체가 움직인 거리

|전략| 물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0 m/s임을 이용한다.

(1) 물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0 m/s이므로

$v(t)=30-10t=0$에서 $t=3$

따라서 물체가 최고 높이에 도달할 때의 시각은 3초이다.

(2) 물체가 $t=3$일 때 최고 높이에 도달하므로 최고 높이에 도달할 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^3|30-10t|dt=\int_0^3(30-10t)dt=\left[30t-5t^2\right]_0^3=45\text{ (m)}$$

(3) 물체가 지면에 도달할 때까지 움직인 거리는

$45+(45+15)=105$ (m)

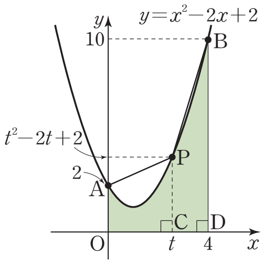
답 (1) 3초 (2) 45 m (3) 105 m

채점 기준	배점
(1) 물체가 최고 높이에 도달할 때의 시각을 구할 수 있다.	2점
(2) 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 움직인 거리를 구할 수 있다.	5점
(3) 물체가 지면에 도달할 때까지 움직인 거리를 구할 수 있다.	3점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0934

|전략| 먼저 점 P의 x좌표를 t로 놓고, 두 사다리꼴 OCPA, CDBP의 넓이를 t에 대한 식으로 나타낸다.



점 P의 x좌표를 t로 놓으면

P(t, t^2-2t+2) (단, $0<t<4$)

사다리꼴 OCPA의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\frac{1}{2}t\{(t^2-2t+2)+2\}=\frac{1}{2}(t^3-2t^2+4t)$$

사다리꼴 CDBP의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\frac{1}{2}(4-t)\{(t^2-2t+2)+10\}=\frac{1}{2}(-t^3+6t^2-20t+48)$$

$$\therefore S_1+S_2=\frac{1}{2}(4t^2-16t+48)=2t^2-8t+24$$

위의 그림의 색칠한 도형의 넓이를 S_3이라 하면

$$S_3=\int_0^4(x^2-2x+2)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+2x\right]_0^4=\frac{40}{3}$$

$f(t)=|S_1+S_2-S_3|$으로 놓으면 $f(t)$가 최소일 때 두 사다리꼴 OCPA와 CDBP의 넓이의 합이 색칠한 도형의 넓이에 가장 가까워진다.

$$f(t)=\left|2t^2-8t+\frac{32}{3}\right|=\left|2(t-2)^2+\frac{8}{3}\right|$$

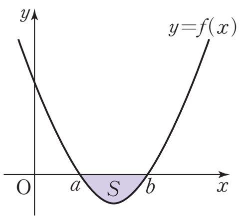
이므로 $t=2$일 때, $f(t)$는 최솟값 $\frac{8}{3}$을 가진다.

따라서 구하는 점 P의 x좌표는 2이다.

답 ③

0935

|전략| 조건 (가), (나)를 이용하여 a, b의 값을 구하고, $\int_0^b|f'(x)|dx$에서 $f'(x)$의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 나누어 정적분의 값을 구한다.



오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=-\int_a^b f(x)dx$$

이때, 조건 (가)에서

$\int_a^b f(x)dx=-\frac{4}{3}$이므로

$$S=-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

한편, $S=\int_a^b|f(x)|dx=\int_a^b|(x-a)(x-b)|dx=\frac{1}{6}(b-a)^3$

즉, $\frac{1}{6}(b-a)^3=\frac{4}{3}$이므로

9 정적분의 활용

$(b-a)^3=8 \quad \therefore b-a=2\ (\because b-a>0)$ ⋯⋯ ㉠

또, 조건 ㈏에서 $\int_{-a}^{b-a} f(x+a)dx=\int_0^b f(x)dx=0$이므로

$\int_0^b (x-a)(x-b)dx=0$

$\int_0^b \{x^2-(a+b)x+ab\}dx=0$

$\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+b)x^2+abx\right]_0^b=0$

$\frac{1}{3}b^3-\frac{b^2(a+b)}{2}+ab^2=0$

$\frac{-b^3+3ab^2}{6}=0,\ -b^2(b-3a)=0$

$\therefore b=3a\ (\because b>0)$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1$, $b=3$이므로

$f(x)=(x-1)(x-3)$

즉, $f(x)=x^2-4x+3$에서 $f'(x)=2x-4$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^3 |f'(x)|dx&=\int_0^3 |2x-4|dx\\&=-\int_0^2 (2x-4)dx+\int_2^3 (2x-4)dx\\&=-\left[x^2-4x\right]_0^2+\left[x^2-4x\right]_2^3\\&=-(-4)+1=5\end{aligned}$$

답 ⑤

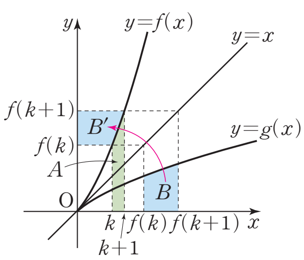
0936

|전략| $y=g(x)$는 $y=f(x)$의 역함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

$f(x)=x^2+x$에서 $f'(x)=2x+1$

$x\ge0$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

함수 $f(x)=x^2+x\,(x\ge0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



이때, $\int_{f(k)}^{f(k+1)} g(x)dx$의 값은 색칠된 B 부분의 넓이이고, 역함수의 성질에 의하여 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 B' 부분의 넓이와 같다.

따라서

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} f(x)dx+\int_{f(k)}^{f(k+1)} g(x)dx&=(A\text{의 넓이})+(B\text{의 넓이})\\&=(A\text{의 넓이})+(B'\text{의 넓이})=44\end{aligned}$$

이므로

$(k+1)f(k+1)-kf(k)=44$에서

$(k+1)\{(k+1)^2+(k+1)\}-k(k^2+k)=44$

$(k+1)^3+(k+1)^2-k^3-k^2=44$

$3k^2+5k-42=0,\ (k-3)(3k+14)=0$

$\therefore k=3\ (\because k>0)$

답 3

0937

|전략| 먼저 B 자동차가 출발한 지 몇 초 후에 P 지점에 도달하는지 구한다.

B자동차가 출발한 지 $a\,(a>0)$초 후에 P지점에 도달한다고 하자.

B자동차가 출발한 후 2초 동안 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^2 |t(2-t)+4|dt&=\int_0^2 \{t(2-t)+4\}dt\\&=\int_0^2 (-t^2+2t+4)dt\\&=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2+4t\right]_0^2=\frac{28}{3}\ (\mathrm{m})\end{aligned}$$

이때, $\frac{28}{3}<\frac{100}{3}$이므로 $a>2$이다.

B자동차가 2초에서 a초까지 움직인 거리는

$\int_2^a |4|dt=\int_2^a 4\,dt=\left[4t\right]_2^a=4(a-2)\ (\mathrm{m})$

이므로 $\frac{28}{3}+4(a-2)=\frac{100}{3}$에서

$28+12(a-2)=100$

$\therefore a=8$

따라서 A자동차가 8초 동안 움직인 거리는

$\int_0^8 |5|dt=\int_0^8 5\,dt=\left[5t\right]_0^8=40\ (\mathrm{m})$

이므로 A자동차는 P지점으로부터 40 m 이내에 있어야 한다.

답 40 m