고등학교 수학 Ⅱ

정답과 해설

핵심 개념 확인하기

Ⅰ-1 함수의 극한 6쪽

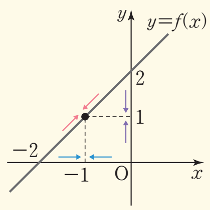
1 (1) 1　(2) -3

2 (1) ∞　(2) 0　(3) 2

3 (1) ∞　(2) $-\infty$

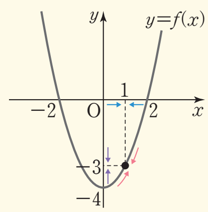
4 -2

1 (1) $f(x)=x+2$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로



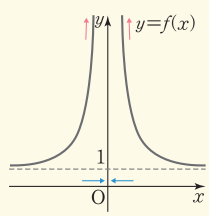
$$\lim_{x\to-1}(x+2)=1$$

(2) $f(x)=x^2-4$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -3에 한없이 가까워지므로



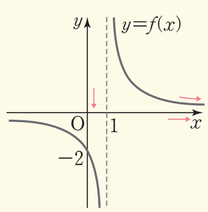
$$\lim_{x\to1}(x^2-4)=-3$$

2 (1) $f(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로



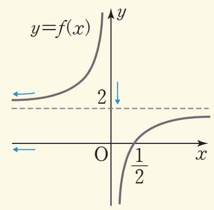
$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\infty$$

(2) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로



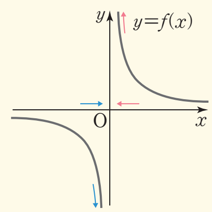
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x-1}=0$$

(3) $f(x)=2-\dfrac{1}{x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 한없이 작아질 때 $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로



$$\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2$$

3 $f(x)=\dfrac{3}{x}$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(1) x의 값이 0보다 크면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{3}{x}=\infty$$

(2) x의 값이 0보다 작으면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 작아지므로

$$\lim_{x\to0-}\frac{3}{x}=-\infty$$

4 $\displaystyle\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(x^2+ax+1)=5+2a$

$\displaystyle\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(-3x+7)=1$

$\displaystyle\lim_{x\to2}f(x)$의 값이 존재하려면 $\displaystyle\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)$이어야 하므로

$5+2a=1$　　$\therefore a=-2$

Ⅰ-2 함수의 극한에 대한 성질 7쪽

1 (1) 3　(2) $\frac{1}{4}$

2 (1) $\frac{3}{4}$　(2) -2

3 (1) $a=3$, $b=-6$　(2) $a=5$, $b=4$

4 -3

1 (1) $\lim_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)$

$=1\times1+1+1=3$

(2) $\lim_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to4}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim_{x\to4}\dfrac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim_{x\to4}\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$

$=\dfrac{1}{2+2}=\dfrac{1}{4}$

2 (1) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(3x-2)}{4x^2+3x-1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-2}{4x^2+3x-1}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}$

$=\dfrac{3+0-0}{4+0-0}=\dfrac{3}{4}$

(2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+2x})$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+2x})(\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x})}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x-x^2-2x}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-4x}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-4}{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}}$

$=\dfrac{-4}{1+1}=-2$

참고 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$일 때, $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}$의 값은 $f(x)-g(x)$가 무리식이면 분모를 1로 보고 분자를 유리화하여 구한다.

3 (1) $x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to2}(ax+b)=0$이므로

$2a+b=0$, $b=-2a$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to2}\dfrac{ax+b}{x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{ax-2a}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{a(x-2)}{x-2}$

$=a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$b=-2\times3=-6$

(2) $x\longrightarrow-1$일 때 (분자) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to-1}(x^2+ax+b)=0$이므로

$1-a+b=0$, $b=a-1$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to-1}\dfrac{x+1}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to-1}\dfrac{x+1}{x^2+ax+a-1}$

$=\lim_{x\to-1}\dfrac{x+1}{(x+1)(x+a-1)}$

$=\lim_{x\to-1}\dfrac{1}{x+a-1}$

$=\dfrac{1}{a-2}=\dfrac{1}{3}$

즉 $a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면

$b=5-1=4$

참고 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

❶ $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)일 때,

$\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$

❷ $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ ($\alpha\neq0$인 실수)일 때,

$\lim_{x\to a}f(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$

4 모든 실수 x에 대하여

$x^2+2x-6\leq f(x)\leq 2x^2-5$이고

$\lim_{x\to1}(x^2+2x-6)=-3$, $\lim_{x\to1}(2x^2-5)=-3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to1}f(x)=-3$

Ⅰ-3 함수의 연속

8쪽

1 (1) 연속 (2) 불연속 (3) 불연속

2 (1) $[-2,\ 2]$ (2) $(-\infty,\ \infty)$

3 (1) $(-\infty,\ 2]$ (2) $\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3},\ \infty\right)$

4 $a=5$, $b=7$

1 (1) $f(2)=0$, $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}|x-2|=0$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(2) $x=2$일 때 함숫값 $f(2)$가 정의되지 않으므로

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(3) $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x+2)$

$=2+2=4$

$f(2)=5$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)\neq f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

2 (1) 함수 $y=\sqrt{4-x^2}$의 정의역은 $4-x^2\geq0$에서

$\{x\,|\,-2\leq x\leq 2\}$이므로 구간의 기호로 나타내면

$[-2,\ 2]$이다.

(2) 함수 $y=2x^2-1$의 정의역은 실수 전체의 집합이므로

$(-\infty,\ \infty)$

3 (1) $f(x)=\sqrt{2-x}$라 하면

① $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 2)$에서 연속이다.

② $\lim_{x\to2-}\sqrt{2-x}=f(2)=0$

따라서 함수 $f(x)$가 연속인 구간은 $(-\infty,\ 2]$이다.

(2) $y=\frac{x-2}{3x+1}$는 $x\neq-\frac{1}{3}$인 모든 실수 x에서 연속이므로

연속인 구간은 $\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3},\ \infty\right)$이다.

4 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

즉 $\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-6}{x-1}=b$ ...... ㉠

$x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to1}(x^2+ax-6)=0$이므로

$1+a-6=0$ $\quad\therefore a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면

$b=\lim_{x\to1}\frac{x^2+5x-6}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x+6)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x+6)=7$

Ⅰ-4 연속함수의 성질

9쪽

1 (1) $(-\infty,\ \infty)$ (2) $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ \infty)$

2 $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(1,\ \infty)$

3 (1) 최댓값: 5, 최솟값: -4 (2) 최댓값: $\frac{3}{5}$, 최솟값: 0

4 풀이 참조

1 (1) $f(x)+g(x)=(x-1)+(x^2+2x-5)$

$=x^2+3x-6$

즉 함수 $f(x)+g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 연속인 구간은 $(-\infty,\ \infty)$

(2) 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2+2x-5}{x-1}$는 유리함수이므로 $x-1\neq0$,

즉 $x\neq1$인 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 연속인 구간은 $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ \infty)$

2 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{x^{2n}+1}$

(i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$f(x)=\frac{0}{0+1}=0$

(ii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=1$$

(iii) $|x|=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=1$이므로

$$f(x)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이므로 연속인 구간은

$(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$

참고 $\lim_{n\to\infty} x^n$(n은 자연수)을 포함한 함수 $f(x)$의 연속성은 x의 범위를

$|x|>1$, $|x|<1$, $x=1$, $x=-1$

인 경우로 구분하여 함수 $f(x)$를 나타낸 후 그래프를 그려서 조사한다. 이때

(i) $|x|>1$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$임을 이용한다.

(ii) $|x|<1$이면 $\lim_{n\to\infty} x^n=0$임을 이용한다.

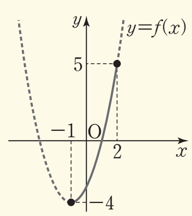
(iii) $x=1$이면 $\lim_{n\to\infty} 1^n=1$임을 이용한다.

(iv) $x=-1$이면 $\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n}=\lim_{n\to\infty}1=1$,

$\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}(-1)=-1$임을 이용한다.

이때 $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$의 값은 존재하지 않음에 주의한다.

3 (1) 함수 $f(x)=x^2+2x-3$은 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고, 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

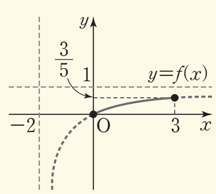


따라서

$x=2$에서 최댓값 $f(2)=5$,

$x=-1$에서 최솟값 $f(-1)=-4$

(2) 함수 $f(x)=\frac{x}{x+2}$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고, 닫힌구간 $[0, 3]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서

$x=3$에서 최댓값 $f(3)=\frac{3}{5}$

$x=0$에서 최솟값 $f(0)=0$

4 $f(x)=x^2+2x-1$이라 하면 $f(x)$는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이므로 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이다.

$f(0)=-1$, $f(1)=2$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^2+2x-1=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

Ⅱ-1 미분계수

10쪽

1 3	**2** 4
3 3	**4** 풀이 참조

1 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{10-1}{3}=3$

2 $f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^2-4}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+4\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+4)=4$

3 $f(x)=x^3$이라 하면 구하는 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같으므로

$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^3-1}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^3+3(\Delta x)^2+3\Delta x}{\Delta x}$

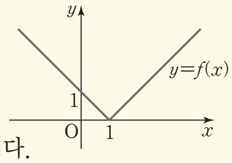
$=\lim_{\Delta x\to 0}\{(\Delta x)^2+3\Delta x+3\}=3$

4 (i) $\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}|x-1|$

$=0$

이고 $f(1)=0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.



(ii) $\lim_{\Delta x\to0-}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0-}\dfrac{-\Delta x-0}{\Delta x}=-1$

$\lim_{\Delta x\to0+}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0+}\dfrac{\Delta x-0}{\Delta x}=1$

즉 $\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)=|x-1|$은 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

Ⅱ-2 도함수

11쪽

1 $f'(x)=3x^2+1$
2 (1) $f'(x)=8x^7$ (2) $f'(x)=0$
3 $y'=5x^4-8x^3-9x^2+8x+4$

1 $f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{(x+h)^3+(x+h)-(x^3+x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{(3x^2+1)h+3xh^2+h^3}{h}$

$=\lim_{h\to0}(3x^2+1+3xh+h^2)$

$=3x^2+1$

2 (1) $f'(x)=8x^{8-1}=8x^7$

(2) $f'(x)=6'=0$

3 $y'=\{(x^2+x)(x^3-3x^2+4)\}'$

$=(x^2+x)'(x^3-3x^2+4)+(x^2+x)(x^3-3x^2+4)'$

$=(2x+1)(x^3-3x^2+4)+(x^2+x)(3x^2-6x)$

$=(2x^4-5x^3-3x^2+8x+4)+(3x^4-3x^3-6x^2)$

$=5x^4-8x^3-9x^2+8x+4$

Ⅱ-3 접선의 방정식

12쪽

1 $y=2x$
2 $y=3x-1$
3 $y=-6x-4$ 또는 $y=2x-4$

1 $f(x)=x^3-x+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-1$

곡선 $y=x^3-x+2$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-1=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-2=2(x-1)$, 즉 $y=2x$

2 $f(x)=-x^3+3x^2$이라 하면 $f'(x)=-3x^2+6x$

접점의 좌표를 $(a, -a^3+3a^2)$이라 하면 접선의 기울기가 3이므로

$f'(a)=-3a^2+6a=3$, $3(a-1)^2=0$ $\quad\therefore a=1$

따라서 접점의 좌표가 $(1, 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2=3(x-1)$, 즉 $y=3x-1$

3 $f(x)=x^2-2x$라 하면 $f'(x)=2x-2$

접점의 좌표를 (a, a^2-2a)라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=2a-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2-2a)=(2a-2)(x-a)$

$y=(2a-2)x-a^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 접선이 점 $(0, -4)$를 지나므로

$-4=-a^2$, $a^2-4=0$, $(a+2)(a-2)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

a의 값을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-6x-4$ 또는 $y=2x-4$

Ⅱ-4 평균값 정리

13쪽

1 3 **2** $\sqrt{3}$ **3** 0

1 함수 $f(x)=x^2-6x$는 닫힌구간 $[0, 6]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 6)$에서 미분가능하다.
이때 $f(0)=f(6)=0$이므로 롤의 정리에 의하여
$f'(c)=0$
인 c가 열린구간 $(0, 6)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=2x-6$이므로 롤의 정리를 만족시키는 c의 값은
$f'(c)=2c-6=0$에서 $c=3$

2 함수 $f(x)=x^3$은 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{27}{3}=9=f'(c)$
인 c가 열린구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=3x^2$이므로 평균값 정리를 만족시키는 c의 값은
$f'(c)=3c^2=9$
이때 $0<c<3$이므로 $c=\sqrt{3}$

3 함수 $f(x)=ax^2+3x$는 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=4a+3=f'(c)$
인 c가 열린구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=2ax+3$이므로 $f'(c)=2ac+3$
즉 $2ac+3=4a+3$이므로
$ac=2a$
이때 방정식 $ac=2a$를 만족시키는 c의 값이 2개 이상이므로
$a=0$
참고 $ac=2a$에서 $a\neq0$이면 $c=2$이므로 c의 값은 1개이다.

Ⅱ-5 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

14쪽

1 풀이 참조
2 극댓값: 8, 극솟값: -19
3 $a=0$, $b=-3$, $c=1$

1 (1) $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

(2) 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -2]$, 구간 $[0, \infty)$에서 증가하고 닫힌구간 $[-2, 0]$에서 감소한다.

2 $f'(x)=6x^2-6x-12$
$=6(x^2-x-2)=6(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	8 (극대)	↘	-19 (극소)	↗

따라서 함수 $f(x)$는
$x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=8$
$x=2$에서 극소이고 극솟값은 $f(2)=-19$

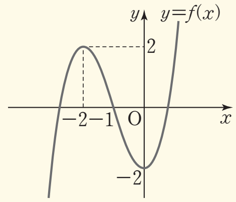
3 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 $x=-1$과 $x=1$에서 극값을 가지므로
$f'(-1)=3-2a+b=0$,
$f'(1)=3+2a+b=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=0$, $b=-3$
즉 $f(x)=x^3-3x+c$이고 $x=-1$에서 극댓값 3을 가지므로
$f(-1)=-1+3+c=3 \qquad \therefore c=1$

Ⅱ-6 함수의 그래프

15쪽

1 풀이 참조
2 풀이 참조
3 풀이 참조
4 최댓값: 18, 최솟값: -2

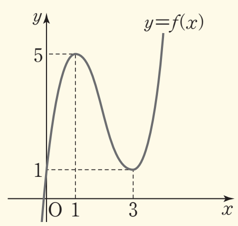
1 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 2를 갖고, $x=0$에서 극솟값 -2를 갖는다.
또, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, -2)$
따라서 주어진 함수의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



2 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$이라 하면
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5 (극대)	↘	1 (극소)	↗

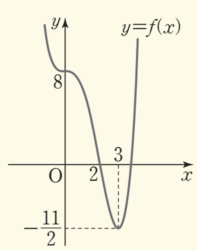
함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, 1)$
따라서 주어진 함수의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



3 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3+8$이라 하면
$f'(x)=2x^3-6x^2=2x^2(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	8	↘	$-\frac{11}{2}$ (극소)	↗

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 $-\frac{11}{2}$을 갖고, 극댓값은 없다.
따라서 주어진 함수의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



4 $f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
닫힌구간 $[-3, \sqrt{3}]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	18	↘	-2 (극소)	↗	2 (극대)	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는
$x=-3$에서 최댓값 $f(-3)=18$,
$x=-1$에서 최솟값 $f(-1)=-2$
를 가진다.

Ⅱ-7 방정식과 부등식에의 활용

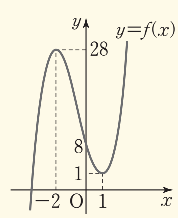
16쪽

1 1개　**2** $-1<k<0$
3 풀이 참조　**4** 풀이 참조

1 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+8$이라 하면
$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내고 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	28 (극대)	↘	1 (극소)	↗

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 방정식 $2x^3+3x^2-12x+8=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



2 $x^4-2x^2-k=0$에서 $x^4-2x^2=k$이므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 함수 $y=x^4-2x^2$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^4-2x^2$이라 하면

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

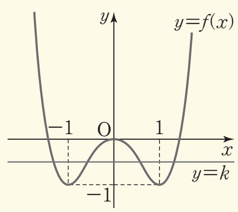
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내고 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1 (극소)	$\nearrow$	0 (극대)	$\searrow$	-1 (극소)	$\nearrow$

따라서 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 갖게 하는 실수 k의 값의 범위는

$-1<k<0$



3 $f(x)=2x^3-3x^2+2$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1(\because x>0)$

$x>0$일 때 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	1 (극소)	$\nearrow$

$x>0$일 때 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=1$이므로 $f(x)\geq 0$이다.

따라서 $x>0$일 때, 부등식 $2x^3-3x^2+2\geq 0$이 성립한다.

4 $f(x)=x^4+4x^3-2x^2-12x+9$라 하면

$f'(x)=4x^3+12x^2-4x-12$

$\quad\;\;=4(x+3)(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0 (극소)	$\nearrow$	16 (극대)	$\searrow$	0 (극소)	$\nearrow$

함수 $f(x)$의 최솟값은 0이므로 모든 실수 x에 대하여

$x^4+4x^3-2x^2-12x+9\geq 0$

즉 $x^4+4x^3+9\geq 2x^2+12x$가 성립한다.

Ⅱ-8 속도와 가속도

17쪽

1 (1) 속도: 8, 가속도: 2 (2) 속도: -24, 가속도: -44

2 (1) 속도: -10, 가속도: -10 (2) 시간: 2초, 높이: 20 m

3 3초 후

1 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

(1) $v=\dfrac{dx}{dt}=2t+2$이므로

$t=3$일 때, $v=2\times3+2=8$

$a=\dfrac{dv}{dt}=2$이므로

$t=3$일 때, $a=2$

(2) $v=\dfrac{dx}{dt}=-4t^3+4t$이므로

$t=2$일 때, $v=-4\times2^3+4\times2=-24$

$a=\dfrac{dv}{dt}=-12t^2+4$이므로

$t=2$일 때, $a=-12\times2^2+4=-44$

2 (1) 공의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=20-10t$, $a=\dfrac{dv}{dt}=-10$

따라서 $t=3$에서 야구공의 속도와 가속도는

$v=20-10\times3=-10$, $a=-10$

(2) 공이 최고 높이에 도달하는 순간의 속도가 0 m/s이므로

$20-10t=0$, $t=2$

$t=2$일 때, $x=20\times2-5\times2^2=20$

따라서 공이 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은 2초이고, 그때의 높이는 20 m이다.

3 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-18t$

$t>0$이고, 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=6t^2-18t=0$에서

$6t(t-3)=0 \quad \therefore t=0$ 또는 $t=3$

따라서 점 P가 운동 방향을 바꾸는 때는 운동을 시작한 지 3초 후이다.

Ⅲ-1 부정적분

18쪽

1 $4x^4$
2 (1) $f(x)=6x^2$ (2) $f(x)=4x^3-6x+2$
3 (1) $3x^2+C$ (2) $3x^2$

1 $(x^4)'=4x^3$, $(x^4+2)'=4x^3$, $(x^4-3)'=4x^3$이므로 x^4, x^4+2, x^4-3은 모두 $4x^3$의 부정적분이다.
하지만 $(4x^4)'=16x^3$이므로 $4x^4$은 $4x^3$의 부정적분이 아니다.

2 (1) $(2x^3+C)'=6x^2$ 이므로 $f(x)=6x^2$
(2) $(x^4-3x^2+2x+C)'=4x^3-6x+2$이므로
$f(x)=4x^3-6x+2$

3 (1) $\frac{d}{dx}f(x)=6x$이므로

$$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=\int 6x\,dx$$
$$=3x^2+C$$

(2) $\int f(x)\,dx=x^3+C$이므로

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=\frac{d}{dx}(x^3+C)$$
$$=3x^2$$

Ⅲ-2 부정적분의 계산

19쪽

1 (1) $\frac{1}{2}x^2+C$ (2) $\frac{1}{7}x^7+C$
2 (1) x^3+x^2+C (2) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+C$
3 (1) $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+1$ (2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{2}{3}$

1 (1) $\int x\,dx=\frac{1}{1+1}x^{1+1}+C=\frac{1}{2}x^2+C$

(2) $\int x^6\,dx=\frac{1}{6+1}x^{6+1}+C=\frac{1}{7}x^7+C$

2 (1)
$$\int(3x^2+2x)\,dx=\int 3x^2\,dx+\int 2x\,dx$$
$$=3\int x^2\,dx+2\int x\,dx$$
$$=3\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)+2\left(\frac{1}{2}x^2+C_2\right)$$
$$=x^3+x^2+C$$

(2)
$$\int(x+2)(x-1)\,dx=\int(x^2+x-2)\,dx$$
$$=\int x^2\,dx+\int x\,dx-\int 2\,dx$$
$$=\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)+\left(\frac{1}{2}x^2+C_2\right)-(2x+C_3)$$
$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+C$$

3 (1) $f(x)=\int(x^3+x)\,dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+1$

(2) $f(x)=\int x(x-2)\,dx=\int(x^2-2x)\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3-x^2+C$

이때 $f(1)=0$이므로

$\frac{1}{3}-1+C=0$에서 $C=\frac{2}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{2}{3}$

Ⅲ-3 정적분

20쪽

1 (1) 4 (2) $\frac{53}{6}$ (3) 0

2 (1) $3x^2-5x+4$ (2) x^2-x-6

3 (1) 20 (2) 32

1 (1) $\int_{-1}^{1}(3x^2-2x+1)\,dx=\Big[x^3-x^2+x\Big]_{-1}^{1}$

$=(1-1+1)-(-1-1-1)$

$=4$

(2) $\int_{1}^{2}(x+1)(x+2)\,dx=\int_{1}^{2}(x^2+3x+2)\,dx$

$=\Big[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x\Big]_{1}^{2}$

$=\left(\frac{8}{3}+6+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+2\right)$

$=\frac{53}{6}$

(3) $\int_{1}^{1}(5x^3+4x^2-3)\,dx=0$

참고 $\int_{a}^{a}f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_{a}^{a}=F(a)-F(a)=0$

2 (1) $\frac{d}{dx}\int_{1}^{x}(3t^2-5t+4)\,dt=3x^2-5x+4$

(2) $\frac{d}{dx}\int_{-2}^{x}(t-3)(t+2)\,dt=(x-3)(x+2)$

$=x^2-x-6$

3 (1) $\int_{1}^{2}(6x^2+4x)\,dx=\int_{1}^{2}6x^2\,dx+\int_{1}^{2}4x\,dx$

$=6\int_{1}^{2}x^2\,dx+4\int_{1}^{2}x\,dx$

$=6\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_{1}^{2}+4\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_{1}^{2}$

$=14+6=20$

(2) $\int_{1}^{3}(x+2)^2dx-\int_{1}^{3}(x-2)^2dx$

$=\int_{1}^{3}\{(x+2)^2-(x-2)^2\}\,dx$

$=\int_{1}^{3}8x\,dx=8\int_{1}^{3}x\,dx$

$=8\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_{1}^{3}=32$

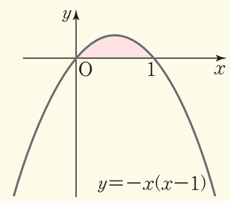
Ⅲ-4 넓이

21쪽

1 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{4}{3}$ **2** 2

3 9

1 (1) 곡선 $y=-x(x-1)$과 x축의 교점의 x좌표는



$-x(x-1)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서

$-x(x-1)\ge 0$

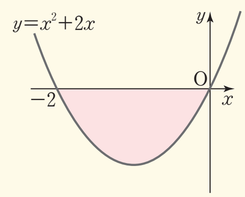
따라서 구하는 넓이는

$\int_{0}^{1}|-x(x-1)|\,dx=\int_{0}^{1}(-x^2+x)\,dx$

$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_{0}^{1}$

$=\frac{1}{6}$

(2) 곡선 $y=x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는



$x^2+2x=0$에서

$x(x+2)=0$

즉 $x=-2$ 또는 $x=0$

닫힌구간 $[-2,\ 0]$에서

$x^2+2x\le 0$

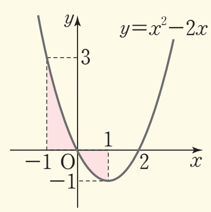
따라서 구하는 넓이는

$\int_{-2}^{0}|x^2+2x|\,dx=\int_{-2}^{0}(-x^2-2x)\,dx$

$=\Big[-\frac{1}{3}x^3-x^2\Big]_{-2}^{0}$

$=\frac{4}{3}$

2 곡선 $y=x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-2x=0$에서



$x(x-2)=0$

즉 $x=0$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서

$x^2-2x\ge 0$

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $x^2-2x\le 0$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}|x^2-2x|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{1}(-x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}=2$$

3 두 곡선의 교점의 x좌표는

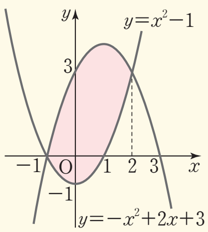
$x^2-1=-x^2+2x+3$에서

$2(x+1)(x-2)=0$

즉 $x=-1$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서

$-x^2+2x+3\geq x^2-1$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x+3)-(x^2-1)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}=9$$

Ⅲ-5 속도와 거리

22쪽

1 (1) 10 (2) 10
2 (1) 75 m (2) 80 m (3) -40 m/s
3 2 m

1 (1) $t=0$에서의 위치가 $x=1$이므로, $t=3$에서 점 P의 위치는

$$1+\int_{0}^{3}(3t^2-4t)\,dt=1+\left[t^3-2t^2\right]_{0}^{3}=10$$

(2) $\int_{1}^{3}(3t^2-4t)dt=\left[t^3-2t^2\right]_{1}^{3}=10$

2 t초 후 지면으로부터의 높이를 $h(t)$라고 하면

$$h(t)=35+\int_{0}^{t}(-10t+30)\,dt=35+\left[-5t^2+30t\right]_{0}^{t}$$
$$=-5t^2+30t+35$$

(1) $h(2)=-5\times2^2+30\times2+35=75$ (m)

(2) 최고 높이에 도달하였을 때, $v(t)=0$이므로

$v(t)=-10t+30=0$에서 $t=3$

$\therefore h(3)=-5\times3^2+30\times3+35=80$ (m)

(3) 물체가 지면에 닿을 때의 높이는 $h(t)=0$이므로

$t^2-6t-7=0,\ (t+1)(t-7)=0$

이때 $t>0$이므로 $t=7$

$\therefore v(7)=-10\times7+30=-40$ (m/s)

3 $v(t)=-t^2+4t-3=(t-1)(3-t)$이므로

$0\leq t\leq1$일 때 $v(t)\leq0$

$1\leq t\leq2$일 때 $v(t)\geq0$

따라서 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_{0}^{2}|-t^2+4t-3|\,dt$$
$$=\int_{0}^{1}(t^2-4t+3)\,dt+\int_{1}^{2}(-t^2+4t-3)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_{1}^{2}$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2\text{ (m)}$$

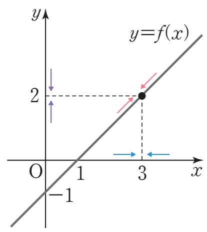
내신 대비 소단원 TEST

I-1 함수의 극한

35쪽 • 소단원 TEST •

01 (1) 2 (2) -3	**02** (1) ∞ (2) ∞
03 (1) $-\infty$ (2) 1	**04** (1) 1 (2) $-\infty$
05 존재하지 않는다.	**06** 1

01 (1) $f(x)=x-1$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

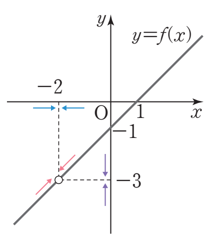


x의 값이 3과 다른 값을 가지면서 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to3}(x-1)=2$$

(2) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$라 하면 $x\neq-2$일 때

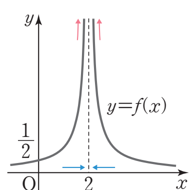
$$f(x)=\frac{(x-1)(x+2)}{x+2}=x-1$$



오른쪽 그림에서 x의 값이 -2와 다른 값을 가지면서 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x+2}=-3$$

02 (1) $f(x)=\dfrac{1}{|x-2|}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



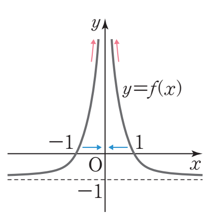
x의 값이 2와 다른 값을 가지면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{|x-2|}=\infty$$

(2) $f(x)=\dfrac{-x^2+1}{x^2}$이라 하면

$$f(x)=\frac{-x^2+1}{x^2}=-1+\frac{1}{x^2}$$

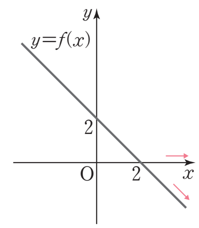
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



x의 값이 0과 다른 값을 가지면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to0}\frac{-x^2+1}{x^2}=\infty$$

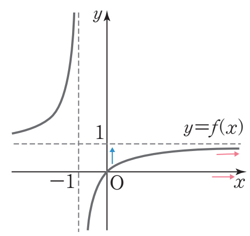
03 (1) $f(x)=2-x$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to\infty}(2-x)=-\infty$$

(2) $f(x)=1-\dfrac{1}{x+1}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



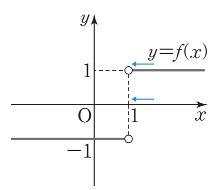
x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=1$$

04 (1) $f(x)=\dfrac{x-1}{|x-1|}$이라 하면

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x>1)\\ -1 & (x<1)\end{cases}$$

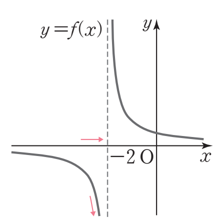
이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



x의 값이 1보다 크면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{|x-1|}=1$$

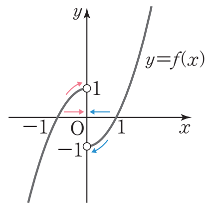
(2) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$이라 하면 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



x의 값이 -2보다 작으면서 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to-2-}\frac{1}{x+2}=-\infty$$

05 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x>0) \\ 1-x^2 & (x<0) \end{cases}$



이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때 $x=0$에서의

좌극한은 $\lim_{x\to 0-} f(x)=1$

우극한은 $\lim_{x\to 0+} f(x)=-1$

즉 $\lim_{x\to 0-} f(x)\neq \lim_{x\to 0+} f(x)$이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)$가 존재하지 않는다.

06 $\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-}(x^2+2)=3$

$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+}(-2x+k)=k+2$

$\lim_{x\to -1} f(x)$가 존재하려면 $\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1+} f(x)$이어야 하므로

$3=k+2 \qquad \therefore k=1$

Ⅰ-2 함수의 극한에 대한 성질

44쪽

소단원 TEST

01 (1) -6 (2) $\frac{1}{4}$	**02** (1) $-\frac{1}{2}$ (2) 5
03 (1) 2 (2) 3	**04** $a=-3$, $b=2$
05 3	**06** $f(x)=3x^2+2x$

01 (1) 분자를 인수분해하여 식을 정리한 후 극한값을 구하면

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-4)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2}(x-4)=-6$$

(2) 분자와 분모에 $\sqrt{x}+2$를 곱하여 분자를 유리화한 후 극한값을 구하면

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$$

02 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\times\frac{\sqrt{2}-(x+\sqrt{2})}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\times\frac{-x}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}$$

(2) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\left(2x-\frac{x+2}{x-1}\right)$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\times\frac{2x(x-1)-(x+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{(x-2)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2x+1)(x-2)}{(x-2)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x-1}=5$$

03 (1) 분자와 분모를 x^2으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+5x-3}{3x^2-4x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}$$
$$=\frac{6+0-0}{3-0+0}=2$$

(2) 분자와 분모에 $\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}$를 곱하여 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x})(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x})}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+3x)-(x^2-3x)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{1+1}=3$$

04 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=1$이고 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)=0$, 즉 $4+2a+b=0$

$b=-2a-4$를 주어진 식에 대입한 후 분자를 인수분해하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x+a+2)$$
$$=4+a$$

$4+a=1$이므로 $a=-3$

$a=-3$을 $b=-2a-4$에 대입하면

$b=2$

05 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{x^2}=3$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=3$

06 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=3$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차식임을 알 수 있다.

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 $\lim_{x\to0}x=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=0$, 즉 $f(0)=0$

따라서 $f(x)=3x^2+ax$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3x^2+ax}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(3x+a)$$
$$=a=2$$

따라서 $f(x)=3x^2+2x$

I-3 함수의 연속

51쪽 소단원 TEST

01 (1) 연속 (2) 불연속	**02** 4
03 10	**04** 9
05 1	**06** 2

01 (1) 함수 $f(x)$에 대하여

❶ $f(2)=0$

❷ $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x+2}=0$

❸ $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(2) 함수 $f(x)$에 대하여

❶ $f(2)=8-2=6$

❷ $\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(8-x)=8-2=6$

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(x^3-3)=8-3=5$

이므로 $\lim_{x\to2}f(x)$는 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

02 $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)=4$

$f(x)$가 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$에서

$f(2)=a=4$

03 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

즉 $\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-2}{x-1}=b$ …… ㉠

이때 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(x^2+ax-2)=0$, $1+a-2=0$, 즉 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+2)$$
$$=3$$

따라서 $a^2+b^2=1^2+3^2=10$

04 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이려면

$f(1)=\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax+b}{x^2-3x+2}$, $f(2)=\lim_{x\to2}\frac{x^3+ax+b}{x^2-3x+2}$

이어야 한다.

$\lim_{x\to1}(x^2-3x+2)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(x^3+ax+b)=0$, $1+a+b=0$ …… ㉠

$\lim_{x\to2}(x^2-3x+2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(x^3+ax+b)=0$, $8+2a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-7$, $b=6$

$$f(1)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-7x+6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+3)=4$$

$$f(2)=\lim_{x\to2}\frac{x^3-7x+6}{x^2-3x+2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}(x+3)=5$$

따라서 $f(1)+f(2)=4+5=9$

05 $x\neq2$일 때 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx}{x-2}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{ax^2+bx}{x-2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(ax^2+bx)=4a+2b=0$

$\therefore b=-2a \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(2)=\lim_{x\to2}\frac{ax^2-2ax}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{ax(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}ax=2a=-2$$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로

$a+b=1$

06 (i) $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=\infty$이므로

$f(x)=\dfrac{x}{a}$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=1$이므로

$f(x)=\dfrac{a}{a+2}$

(iii) $0\le x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=0$, $\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=0$이므로

$f(x)=\dfrac{ax-1}{2}$

함수 $f(x)$가 $x\ge0$에서 연속이려면 $x=1$에서만 연속임을 보이면 된다.

즉 $\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1-0}f(x)=f(1)$이어야 하므로

$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2}(a-1)=\dfrac{a}{a+2}$

$a^2-a-2=0$

$(a-2)(a+1)=0$

따라서 구하는 양수 a의 값은 2이다.

I-4 연속함수의 성질

58쪽

• 소단원 TEST

01 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, -2)$, $(-2, 4)$, $(4, \infty)$

02 연속

03 (1) 최댓값: 5, 최솟값: 1 (2) 최댓값: 2, 최솟값: 1

04 3

05 $-9<a<0$

06 4개

01 (1) 함수 $f(x)=x^3-2x^2-5x+4$는 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$가 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

(2) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-2x-8}=\dfrac{x+3}{(x+2)(x-4)}$

이므로 함수 $f(x)$는 $x\neq-2$, $x\neq4$인 모든 실수에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$가 연속인 구간은 $(-\infty, -2)$, $(-2, 4)$, $(4, \infty)$이다.

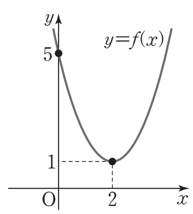
02 함수 $f(x)=x^2-7x+6$은 다항함수이므로 $x=0$에서 연속이고, 함수 $g(x)=\dfrac{x+3}{x+1}$은 $x=f(0)=6$에서 연속이다.

따라서 합성함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

03 (1) $f(x)=x^2-4x+5$

$=(x-2)^2+1$

이므로 그 그래프는 오른쪽과 그림과 같다.

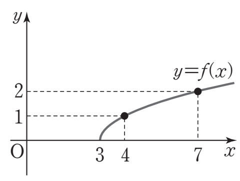


함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이므로

최댓값은 $x=0$일 때 $f(0)=5$

최솟값은 $x=2$일 때 $f(2)=1$

(2) 함수 $f(x)=\sqrt{x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[4, 7]$에서 연속이므로

최댓값은 $x=7$일 때, $f(7)=2$

최솟값은 $x=4$일 때, $f(4)=1$

04 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이

므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수 x에서 연속이 되려면 임의의 실수 x에 대하여 $g(x)=x^2-2ax+3a\neq 0$이어야 한다.
이차방정식 $x^2-2ax+3a=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-3a<0$에서 $a(a-3)<0$
$\therefore\ 0<a<3$
따라서 정수 a는 1, 2이므로 구하는 a의 값의 합은
$1+2=3$

05 $f(x)=x^3-2x^2+a$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[2, 3]$에서 연속이다.
이때 $f(2)f(3)<0$이면 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(2, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 $f(2)f(3)=a(a+9)<0$에서
$-9<a<0$

06 $f(x)$는 열린구간 $(-2, 2)$에서 연속이고
$f(-2)=-2<0$, $f(-1)=1>0$, $f(0)=-3<0$,
$f(1)=4>0$, $f(2)=-4<0$
이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 해가 열린구간 $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$에 각각 적어도 하나씩 존재한다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, 2)$에서 적어도 4개의 실근을 갖는다.

Ⅱ-1 미분계수

76쪽 • 소단원 TEST

01 (1) 3 (2) $\frac{5}{2}$ **02** (1) -1 (2) 0
03 14 **04** 6
05 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.
06 -3

01 (1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{5-(-1)}{2}=\frac{6}{2}=3$

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{5-0}{2}=\frac{5}{2}$

02 (1) $f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-(3+\Delta x)+4\}-(-3+4)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$

(2) $f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5-5}{\Delta x}=0$

03 $f(x)=7x^2$이라 하면 구하는 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같으므로

$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{7(1+\Delta x)^2-7}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{7(\Delta x)^2+14\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(7\Delta x+14)=14$

04 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)-f(1-h)+f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)$

$=2f'(1)=2\times 3=6$

05 (i) $\lim_{x\to 1}f(x)=0=f(1)$이므로 함수
$f(x)=|x^2-1|$은 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|(1+\Delta x)^2-1|-|1^2-1|}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0+}(\Delta x+2)=2$

$\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|(1+\Delta x)^2-1|-|1^2-1|}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-(\Delta x)^2-2\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0-}(-\Delta x-2)=-2$

이므로 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$은 존재하지 않으므로 함수 $f(x)=|x^2-1|$은 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)=|x^2-1|$은 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

06 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$이므로 $1+b=a$ ······ ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{a(1+\Delta x)^2-a}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{a(\Delta x)^2+2a\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0-}(a\Delta x+2a)=2a$$

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{(1+\Delta x-2)^2+b-(1+b)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{(\Delta x)^2-2\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0+}(\Delta x-2)=-2$$

에서 $2a=-2$ $\quad\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

$\therefore a+b=-1+(-2)=-3$

다른 풀이 $\begin{cases} g(x)=ax^2 & (x\le 1) \\ h(x)=(x-2)^2+b & (x>1) \end{cases}$

이라 하면

$\begin{cases} g'(x)=2ax & (x\le 1) \\ h'(x)=2(x-2) & (x>1) \end{cases}$

(i) $x=1$에서 연속이어야 하므로 $g(1)=h(1)$에서

$a=(1-2)^2+b$, 즉 $a=1+b$ ······ ㉠

(ii) $x=1$에서 미분계수가 존재해야 하므로

$g'(1)=2a$, $h'(1)=-2$

즉 $2a=-2$이므로 $a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$b=-2$

$\therefore a+b=-1+(-2)=-3$

Ⅱ-2 도함수

83쪽 소단원 TEST

01 (1) $y'=3x^2+2$ (2) $y'=3x^2-x+3$
(3) $y'=8x^3-6x-1$ (4) $y'=3x^2+4x-1$

02 -3 **03** 5

04 1 **05** 171

06 $r(x)=f'(1)x+f(1)-f'(1)$

01 (1) $y'=(x^3+2x)'=3x^2+2$

(2) $y'=\left(x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right)'=3x^2-\frac{1}{2}\times 2x+3$
$=3x^2-x+3$

(3) $y'=(2x^4-3x^2-x)'=2\times 4x^3-3\times 2x-1$
$=8x^3-6x-1$

(4) $y'=\{(x^2-1)(x+2)\}'$
$=(x^2-1)'(x+2)+(x^2-1)(x+2)'$
$=2x(x+2)+(x^2-1)\times 1$
$=3x^2+4x-1$

02 $f'(x)=3x^2+2ax+a^2$이므로

$f'(1)=3+2a+a^2=6$

$a^2+2a-3=0$

따라서 상수 a의 값들의 곱은 근과 계수의 관계에 의해 -3이다.

03 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(0)=2$ $\quad\therefore c=2$

$f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(1)=2a+b=4$ ······ ㉠

$f'(2)=4a+b=6$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

따라서 $f(x)=x^2+2x+2$이므로

$f(1)=5$

04 $g'(x)=(x^2-3x)'f(x)+(x^2-3x)f'(x)$
$=(2x-3)f(x)+(x^2-3x)f'(x)$

따라서

$g'(1)=(-1)\times f(1)+(-2)\times f'(1)$
$=(-1)\times 3+(-2)\times(-2)$
$=1$

05 $f'(x)=4x-1$

$g'(x)=(x^2+x+1)'(x^2+x+1)$
$\quad+(x^2+x+1)(x^2+x+1)'$
$\quad=2(x^2+x+1)'(x^2+x+1)$
$\quad=2(2x+1)(x^2+x+1)$

이므로 $f'(1)=3$, $g'(1)=18$

함수 $h(x)=f(x)g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

이므로 함수 $h(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$
$\quad=3\times9+8\times18$
$\quad=171$

06 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $r(x)=ax+b$라 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$ …… ㉡

㉠, ㉡의 양변에 $x=1$을 각각 대입하면

$f(1)=a+b$, $f'(1)=a$

따라서 $b=f(1)-f'(1)$이므로

$r(x)=ax+b$
$\quad=f'(1)x+f(1)-f'(1)$

Ⅱ-3 접선의 방정식

89쪽 • 소단원 TEST •

01 (1) $y=9x-6$ (2) $y=-7x-2$
02 (1) $y=4x+2$ 또는 $y=4x-2$ (2) $y=4x-7$
03 $y=x-3$
04 2
05 -30
06 $-\frac{4}{3}$

01 (1) $f(x)=x^3+3x^2-1$이라 하면

$f'(x)=3x^2+6x$

이므로 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3\times1^2+6\times1=9$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-3=9(x-1)$

$\therefore y=9x-6$

(2) $f(x)=3x^2-x+1$이라 하면

$f'(x)=6x-1$이므로 점 $(-1, 5)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=6\times(-1)-1=-7$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-5=-7\{x-(-1)\}$

$\therefore y=-7x-2$

02 (1) $f(x)=x^3+x$라 하면 $f'(x)=3x^2+1$

접점의 좌표를 (t, t^3+t)라 하면 접선의 기울기가 4이므로

$f'(t)=3t^2+1=4$에서

$3t^2=3$, $t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, -2)$ 또는 $(1, 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-2)=4\{x-(-1)\}$ 또는 $y-2=4(x-1)$

$\therefore y=4x+2$ 또는 $y=4x-2$

(2) $f(x)=x^2-2x+2$라 하면 $f'(x)=2x-2$

접점의 좌표를 (t, t^2-2t+2)라 하면 접선의 기울기가 4이므로

$f'(t)=2t-2=4$에서 $t=3$

따라서 접점의 좌표는 $(3, 5)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-5=4(x-3)$

$\therefore y=4x-7$

03 $f(x)=2x^2-3x-1$이라 하면 $f'(x)=4x-3$

접점의 좌표를 $(t, 2t^2-3t-1)$이라 하면 직선 $y=-x$에 수직인 접선의 기울기는 1이므로

$f'(t)=4t-3=1$ $\quad\therefore t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(1, -2)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-2)=x-1$

$\therefore y=x-3$

04 $f(x)=x^2-3x-1$이라 하면

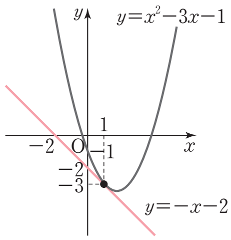
$f'(x)=2x-3$이므로

$f'(1)=-1$

이때 점 $(1,\ -3)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-3)=-(x-1)$

$y=-x-2$



즉 $y=-x-2$의 그래프의 x절편은 -2, y절편은 -2이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times2=2$

05 곡선 $y=x^3+ax+b$가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=1+a+b$ …… ㉠

$f(x)=x^3+ax+b$라 하면 $f'(x)=3x^2+a$이므로 점 $(1,\ 2)$에서 그은 접선의 기울기는

$f'(1)=3+a$

이때 점 $(1,\ 2)$에서 그은 접선에 수직인 직선의 방정식이

$x-2y+3=0$이므로 기울기는 $\frac{1}{2}$

즉 $(3+a)\times\frac{1}{2}=-1$에서

$a=-5$

$a=-5$를 ㉠에 대입하면 $b=6$

따라서 $ab=-30$

06 $f(x)=x^3$, $g(x)=ax^2+b$의 그래프가 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$에서 만나므로

$f(1)=1$, $g(1)=a+b=1$ …… ㉠

점 P에서 두 곡선에 그은 접선이 서로 수직이므로

$f'(1)\times g'(1)=-1$

즉 $f'(x)=3x^2$, $g'(x)=2ax$에서

$3\times2a=-1 \quad \therefore a=-\frac{1}{6}$

$a=-\frac{1}{6}$을 ㉠에 대입하면

$b=\frac{7}{6}$

$\therefore a-b=-\frac{1}{6}-\frac{7}{6}=-\frac{4}{3}$

Ⅱ-4 평균값 정리

96쪽 소단원 TEST

01 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 2	**02** $a=-8$, $b=4$
03 (1) 1 (2) $\frac{\sqrt{39}}{3}$	**04** 4
05 18	**06** -1

01 (1) 함수 $f(x)=-x^2+x+5$는 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 2)$에서 미분가능하다.

이때 $f(-1)=f(2)=3$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=-2x+1$이므로 롤의 정리를 만족시키는 c의 값은

$f'(c)=-2c+1=0$에서 $c=\frac{1}{2}$

(2) 함수 $f(x)=x^3-3x^2$은 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하다.

$f(0)=f(3)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-6x$이므로 롤의 정리를 만족시키는 c의 값은

$f'(c)=3c^2-6c=0$에서 $c(c-2)=0$

$0<c<3$이므로 $c=2$

02 $f(0)=f(b)$이어야 하므로

$0=2b^2+ab$ …… ㉠

함수 $f(x)=2x^2+ax$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ b]$에서 롤의 정리를 만족시키는 c의 값이 2이므로 $f'(2)=0$인 상수 2가 열린구간 $(0,\ b)$에 존재한다.

$f'(x)=4x+a$이므로

$f'(2)=8+a=0$에서 $a=-8$

$a=-8$을 ㉠에 대입하면

$2b^2-8b=2b(b-4)=0$

$\therefore b=4\ (\because b>0)$

03 (1) 함수 $f(x)=x^2-3x$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{-2-0}{2}=-1=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x-3$이므로 평균값 정리를 만족시키는 c의 값은

$f'(c)=2c-3=-1 \qquad \therefore\ c=1$

(2) 함수 $f(x)=x^3+2$는 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{29-3}{2}=13=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2$이므로 평균값 정리를 만족시키는 c의 값은

$f'(c)=3c^2=13$

$\therefore\ c=\dfrac{\sqrt{39}}{3}\ (\because\ 1<c<3)$

04 함수 $f(x)=x^2-x$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ a]$에서 평균값 정리를 만족시키는 c의 값이 2이므로

$\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(2)$

인 상수 2가 열린구간 $(0,\ a)$에 존재한다.

$f'(x)=2x-1$이므로

$\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=3$,

$\dfrac{a^2-a}{a}=a-1=3$

$\therefore\ a=4$

05 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 $f(x)$는 닫힌구간 $[x-3,\ x+3]$에서 연속이고 열린구간 $(x-3,\ x+3)$에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(x+3)-f(x-3)}{(x+3)-(x-3)}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(x-3,\ x+3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x+3)-f(x-3)=6f'(c)$

이므로

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x+3)-f(x-3)\}=6\lim_{c\to\infty}f'(c)$$
$$=6\times 3=18$$

06 평균값 정리에 의하여

$$g'(c)=\frac{g(5)-g(0)}{5-0}$$
$$=\frac{1}{5}\times\left\{\frac{f(5)}{6}-\frac{f(0)}{1}\right\}$$
$$=\frac{1}{5}\times(-1-4)=-1$$

Ⅱ-5 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

104쪽

소단원 TEST

01 (1) 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 증가

반닫힌 구간 $(-\infty,\ -1]$, $[2,\ \infty)$에서 감소

(2) 반닫힌 구간 $\left(-\infty,\ -\dfrac{1}{3}\right]$, $[1,\ \infty)$에서 증가

닫힌구간 $\left[-\dfrac{1}{3},\ 1\right]$에서 감소

02 (1) 극댓값: 18, 극솟값: -18

(2) 극댓값: 1, 극솟값: -31

03 $-2<k<14$

04 -1

05 $a>\dfrac{3}{2}$

06 7

01 (1) $f'(x)=-6x^2+6x+12$

$=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-4	↗	23	↘

따라서 함수 $f(x)=-2x^3+3x^2+12x+3$은 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 증가하고 반닫힌 구간 $(-\infty,\ -1]$, $[2,\ \infty)$에서 감소한다.

(2) $f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=1$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{32}{27}$	↘	0	↗

따라서 함수 $f(x)=x^3-x^2-x+1$은 반닫힌 구간 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$, $[1, \infty)$에서 증가하고, 닫힌구간 $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$에서 감소한다.

02 (1) $f'(x)=x^2-9=(x+3)(x-3)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	18	$\searrow$	-18	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-3$에서 극대이고 극댓값은 $f(-3)=18$

$x=3$에서 극소이고 극솟값은 $f(3)=-18$

(2) $f'(x)=-3x^2-12x=-3x(x+4)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-31	$\nearrow$	1	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=1$

$x=-4$에서 극소이고 극솟값은 $f(-4)=-31$

03 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 증가하려면 $f'(2)>0$이어야 한다.

$f(x)=2x^3+3kx^2-(k^2-4)x+3$에서

$f'(x)=6x^2+6kx-(k^2-4)$이므로

$f'(2)=28+12k-k^2>0$

$k^2-12k-28<0$, $(k+2)(k-14)<0$

$\therefore\ -2<k<14$

04 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=3-2a+b=0$ …… ㉠

$f'(1)=3+2a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=-3$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -5를 가지므로

$f(1)=1+a+b+c=-5$에서 $c=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x-3$이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은

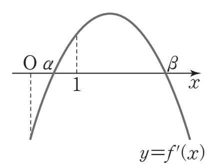
$f(-1)=-1+3-3=-1$

05 $f'(x)=-3x^2+2a^2x-a$

방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면

$0<\alpha<1$, $\beta>1$

이어야 하므로 $y=f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f'(0)=-a<0$에서 $a>0$ …… ㉠

$f'(1)=2a^2-a-3>0$에서

$(2a-3)(a+1)>0$

$\therefore\ a<-1$ 또는 $a>\frac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a>\frac{3}{2}$

06 $f(x)=x^3-ax^2+2ax-5$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+2a$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-6a>0$, $a(a-6)>0$

$\therefore\ a<0$ 또는 $a>6$

따라서 양의 정수 a의 최솟값은 7이다.

Ⅱ-6 함수의 그래프

112쪽 소단원 TEST

01 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

02 (1) 최댓값: 64, 최솟값: 0

(2) 최댓값: 5, 최솟값: -8

03 1 **04** 39

05 4 **06** $\frac{10\sqrt{6}}{3}$

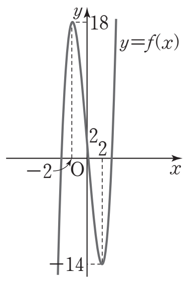
01 (1) $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	18 (극대)	$\searrow$	-14 (극소)	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0,\ 2)$
따라서 주어진 함수의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f'(x)=-12x^3+24x^2-12x$

$\qquad =-12x(x-1)^2$

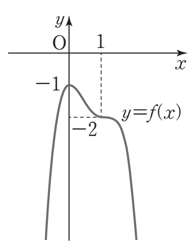
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	-1 (극대)	$\searrow$	-2	$\searrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0,\ -1)$

따라서 주어진 함수의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



02 (1) $f'(x)=6x^2+24x=6x(x+4)$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=0$

닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	10	$\searrow$	0 (극소)	$\nearrow$	64

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 64, $x=0$에서 최솟값 0을 갖는다.

(2) $f'(x)=12x^3-12x^2-24x$

$\qquad =12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	5 (극대)	$\searrow$	-8

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 5, $x=1$에서 최솟값 -8을 갖는다.

03 $f(x)=-ax^3+3x^2$에서

$f'(x)=-3ax^2+6x=-3x(ax-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{2}{a}$

이때 $a>1$이므로 $0<\dfrac{2}{a}<2$

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{a}$	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{4}{a^2}$	$\searrow$	$12-8a$

함수 $f(x)$는 최솟값 -4를 가지므로

$12-8a=-4 \qquad \therefore a=2$

$\therefore f(x)=-2x^3+3x^2$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f\left(\dfrac{2}{a}\right)=f(1)=1$

04 $F(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$\qquad =f(3x+2)$

$\qquad =(3x+2)^3-12(3x+2)-5$

$\qquad =27x^3+54x^2-21$

$F'(x)=81x^2+108x=27x(3x+4)$

$F'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{4}{3}$

닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 함수 $F(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$	-21	$\nearrow$	11	$\searrow$	-21	$\nearrow$	60

따라서 함수 $F(x)$의 최댓값은 60, 최솟값은 -21이므로

$M=60,\ m=-21$

$\therefore\ M+m=39$

05 $\square$ABCD가 직사각형이므로

$\overline{AB}=\overline{DC},\ \overline{AD}=\overline{BC}$

$D(a,\ 3-a^2)$이라 하면 $a>0,\ 3-a^2>0$이므로

$0<a<\sqrt{3}$

이때 $A(-a,\ 3-a^2),\ B(-a,\ 0),\ C(a,\ 0)$이므로

$\square$ABCD의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\overline{AB}\times\overline{BC}=(3-a^2)\times 2a=-2a^3+6a$

$S'(a)=-6a^2+6=-6(a+1)(a-1)$이므로

$S'(a)=0$에서 $a=1$ ($\because\ 0<a<\sqrt{3}$)

열린구간 $(0,\ \sqrt{3})$에서 함수 $S(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$(\sqrt{3})$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $S(a)$는 $a=1$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은

$S(1)=-2+6=4$

06 원뿔의 높이를 x라 하면

$r^2=10^2-x^2\ (0<x<10)$ $\cdots\cdots$ ㉠

원뿔의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\frac{1}{3}\pi r^2\times x$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$V(x)=\frac{1}{3}\pi(100-x^2)x$

$V'(x)=\frac{1}{3}\pi(100-3x^2)=0$에서

$x=\frac{10}{\sqrt{3}}$ ($\because\ 0<x<10$)

열린구간 $(0,\ 10)$에서 함수 $V(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{10}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(10)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $x=\frac{10}{\sqrt{3}}$일 때 부피가 최대이므로 이때 반지름의 길이 r는

$r=\sqrt{100-\frac{100}{3}}=\frac{10\sqrt{6}}{3}$

II-7 방정식과 부등식에의 활용

121쪽 소단원 TEST

01 $a<0$ 또는 $a>4$ **02** $0<k<4$
03 $-20<a<7$ **04** $2<k<6$
05 $a>8$ **06** -1

01 $x^3-3x^2+4x=3x^2-5x+a$에서 $x^3-6x^2+9x=a$이므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 함수 $y=x^3-6x^2+9x$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같다.

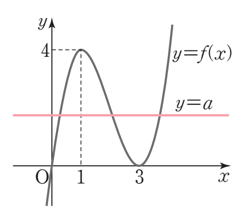
$f(x)=x^3-6x^2+9x$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내고 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$



따라서 주어진 방정식이 단 하나의 실근을 갖게 하는 실수 a의 값의 범위는

$a<0$ 또는 $a>4$

02 $x^3+3x^2-k=0$에서 $x^3+3x^2=k$이므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 함수 $y=x^3+3x^2$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

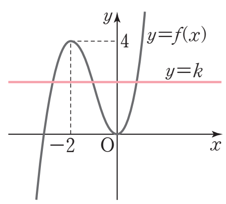
$f(x)=x^3+3x^2$이라 하면

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내고 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$



따라서 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖게 하는 실수 k의 값의 범위는

$0<k<4$

03 곡선 $y=2x^3-2x^2-15x$, $y=x^2-3x+a$의 교점의 개수는 방정식 $2x^3-2x^2-15x=x^2-3x+a$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$2x^3-2x^2-15x=x^2-3x+a$에서 $2x^3-3x^2-12x=a$이므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 함수

$y=2x^3-3x^2-12x$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같다.

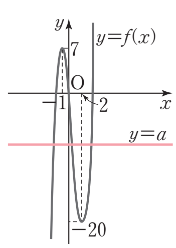
$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내고 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-20	$\nearrow$



따라서 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖게 하는 실수 a의 값의 범위는

$-20<a<7$

04 $2x^3-6x-2+k=0$에서 $-2x^3+6x+2=k$

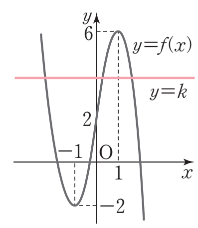
$f(x)=-2x^3+6x+2$라 하면

$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내고 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	6	$\searrow$



따라서 주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 양수이고, 다른 한 개는 음수이어야 하므로 구하는 실수 k의 범위는

$2<k<6$

05 $x^4-x^3+6x^2+a>3x^3+8x$에서

$x^4-4x^3+6x^2-8x+a>0$

$f(x)=x^4-4x^3+6x^2-8x+a$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2+12x-8$

$\quad\quad=4(x-2)(x^2-x+1)$

이때 $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$a-8$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이므로

$f(2)=a-8>0$에서 $a>8$

06 $F(x)=f(x)-g(x)=x^3-3x^2+3-k$라 하면

$F'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$F'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

반닫힌 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $F(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$F'(x)$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$		↘	$-1-k$	↗

$x\geq0$에서 $f(x)\geq g(x)$가 성립하려면

$F(2)=-1-k\geq0$이어야 하므로 $k\leq-1$

따라서 실수 k의 최댓값은 -1이다.

Ⅱ-8 속도와 가속도

126쪽

소단원 TEST

01 (1) 속도: 7, 가속도: 2 (2) 속도: -15, 가속도: -14
02 (1) 속도: -30, 가속도: -42 (2) 1
03 2 **04** 48 m
05 8 **06** $0<m<16$

01 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

(1) $v=\dfrac{dx}{dt}=2t+3$, $a=\dfrac{dv}{dt}=2$

따라서 $t=2$에서 점 P의 속도와 가속도는

$v=2\times2+3=7$, $a=2$

(2) $v=\dfrac{dx}{dt}=-3t^2+4t$, $a=\dfrac{dv}{dt}=-6t+4$

따라서 $t=3$에서 점 P의 속도와 가속도는

$v=-3\times3^2+4\times3=-15$

$a=-6\times3+4=-14$

02 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

(1) $v=\dfrac{dx}{dt}=-12t^2+6t+6$, $a=\dfrac{dv}{dt}=-24t+6$

따라서 $t=2$에서 점 P의 속도와 가속도는

$v=-12\times2^2+6\times2+6=-30$

$a=-24\times2+6=-42$

(2) 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v=-12t^2+6t+6=-6(t-1)(2t+1)=0$에서

$t=1$ ($\because t>0$)

따라서 $0<t<1$일 때 $v>0$이고, $t>1$일 때 $v<0$이므로 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은 1이다.

03 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=6t-3t^2$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v=6t-3t^2=-3t(t-2)=0$에서

$t=2$ ($\because t>0$)

따라서 $0<t<2$일 때 $v>0$이고, $t>2$일 때 $v<0$이므로 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은 2이다.

04 자동차가 정지할 때의 속도는 $v=0$이므로

$v=\dfrac{dx}{dt}=24-6t=0$

에서 $t=4$

따라서 자동차가 정지할 때까지 움직인 거리는

$x=24\times4-3\times4^2=48$ (m)

05 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2+2at+b$

$t=3$일 때, 점 P는 운동 방향을 바꾸고 이때 순간의 속도는 0이므로

$v=6a+b+27=0$ …… ㉠

또 $t=3$일 때 x의 위치가 9이므로

$27+9a+3b=9$

즉 $3a+b+6=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-7$, $b=15$

$\therefore a+b=8$

06 시각 t에서 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$라 하면

$v_P(t)=4t^3-24t^2+36t$

$v_Q(t)=m$

두 점 P, Q의 속도가 같을 때가 3번 있으려면 방정식 $4t^3-24t^2+36t=m$이 서로 다른 세 양의 실근을 가져야 한다.

$f(t)=4t^3-24t^2+36t-m$이라 하면

$f'(t)=12t^2-48t+36=12(t^2-4t+3)$

$=12(t-1)(t-3)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$

함수 $f(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$	+	0	−	0	+
$f(t)$	↗	$16-m$	↘	$-m$	↗

방정식 $4t^3-24t^2+36t-m=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(t)$의 (극댓값)×(극솟값)<0이어야 한다.
즉 $(16-m)(-m)=m(m-16)<0$이므로
$0<m<16$

Ⅲ-1 부정적분

140쪽 소단원 TEST

01 (1) $3x^2+C$ (2) x^4+C
02 (1) $f(x)=4x^3-2$ (2) $f(x)=-3x^2-4x+3$
03 257 **04** 2
05 -6 **06** 0

01 (1) $(3x^2)'=6x$이므로

$$\int 6x\,dx=3x^2+C$$

(2) $(x^4)'=4x^3$이므로

$$\int 4x^3dx=x^4+C$$

02 (1) 주어진 등식의 양변을 미분하면

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=\frac{d}{dx}(x^4-2x+C)$$

$\therefore f(x)=4x^3-2$

(2) 주어진 등식의 양변을 미분하면

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=\frac{d}{dx}(-x^3-2x^2+3x+C)$$

$\therefore f(x)=-3x^2-4x+3$

03 $f(x)=\int 8x^7dx=x^8+C$
$f(0)=1$이므로 $C=1$
$\therefore f(2)=2^8+1=257$

04 $f(x)=\int(x^3-2x^2+3)\,dx$이므로 주어진 등식의 양변을 미분하면
$f'(x)=x^3-2x^2+3$
$\therefore f'(1)=2$

05 $f(x)=\int(2x^2+ax+3)\,dx$에서
$f'(x)=2x^2+ax+3$
이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 기울기가 -1이므로 $f'(2)=-1$
$11+2a=-1$ $\quad\therefore a=-6$

06 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=4$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.
즉 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=4$$

$f'(1)=4$에서 $a=4$
따라서 $f'(x)=4x$이므로
$f(x)=\int 4x\,dx=2x^2+C$
이때 $f(1)=0$이므로 $2+C=0$에서 $C=-2$
따라서 $f(x)=2x^2-2$이므로
$f(-1)=2\times(-1)^2-2=0$

Ⅲ-2 부정적분의 계산

147쪽 소단원 TEST

01 (1) $2x^4+\frac{1}{3}x^3-2x+C$ (2) $6x^3+54x+C$
02 -9
03 $f(x)=2x,\ g(x)=x+1$
04 1 **05** 16
06 22

01 (1) $\int(8x^3+x^2-2)\,dx$

$$=8\int x^3dx+\int x^2dx-2\int dx$$

$$=8\times\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-2x+C$$

$$=2x^4+\frac{1}{3}x^3-2x+C$$

(2) $\int(x+3)^3dx-\int(x-3)^3dx$

$$=\int\{(x+3)^3-(x-3)^3\}\,dx=\int(18x^2+54)\,dx$$

$$=6x^3+54x+C$$

02 $f'(x)=6x^2+4x-1$이므로

$f(x)=\int(6x^2+4x-1)\,dx=2x^3+2x^2-x+C$

$f(2)=10$이므로

$22+C=10$, $C=-12$

따라서 $f(x)=2x^3+2x^2-x-12$이므로

$f(1)=2+2-1-12=-9$

03 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=3$에서 $f(x)+g(x)=3x+C_1$

$f(0)+g(0)=C_1=1$

$\therefore f(x)+g(x)=3x+1$ ······ ㉠

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=4x+2$에서

$f(x)g(x)=2x^2+2x+C_2$

$f(0)g(0)=C_2=0$

$\therefore f(x)g(x)=2x^2+2x=2x(x+1)$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서

$f(x)=2x$, $g(x)=x+1$ 또는 $f(x)=x+1$, $g(x)=2x$

이때 $f(0)=0$, $g(0)=1$이므로

$f(x)=2x$, $g(x)=x+1$

04 $f'(x)=2x+1$이므로

$f(x)=\int(2x+1)\,dx=x^2+x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1, 1)$을 지나므로

$1=1-1+C$ $\quad\therefore C=1$

따라서 $f(x)=x^2+x+1=0$의 모든 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의해 1이다.

05 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 -15를 가지므로

$f'(3)=0$, $f(3)=-15$

즉 $f'(3)=27-18+k=0$에서 $k=-9$

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$\quad=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-6x-9)\,dx$

$\quad=x^3-3x^2-9x+C$

$f(3)=27-27-27+C=-15$에서 $C=12$

함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x+12$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	17	↘	-15	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 17을 가지므로

$a=-1$, $M=17$

$\therefore a+M=(-1)+17=16$

06 $F(x)=(x-1)f(x)-3x^4+12x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x-1)f'(x)-12x^3+12$

$(x-1)f'(x)=12(x-1)(x^2+x+1)$

$\therefore f'(x)=12x^2+12x+12$

$f(x)=\int(12x^2+12x+12)\,dx$

$\quad=4x^3+6x^2+12x+C$

이때 $f(0)=C=0$이므로

$f(x)=4x^3+6x^2+12x$

$\therefore f(1)=4+6+12=22$

Ⅲ-3 정적분

155쪽 · 소단원 TEST

01 (1) $\dfrac{14}{3}$ (2) $-\dfrac{21}{2}$ (3) 10 (4) 28

02 2 **03** -2

04 2 **05** 12

06 6

01 (1) $\int_0^2(x^2+1)\,dx=\left[\dfrac{1}{3}x^3+x\right]_0^2$

$\quad=\dfrac{8}{3}+2=\dfrac{14}{3}$

(2) $\int_{-2}^1(t-3t^2)\,dt=\left[\dfrac{1}{2}t^2-t^3\right]_{-2}^1$

$\quad=\left(\dfrac{1}{2}-1\right)-\{2-(-8)\}$

$\quad=-\dfrac{21}{2}$

(3) $\int_{-1}^4(x^5+x^4+1)\,dx+\int_{-1}^4(-x^5-x^4+1)\,dx$

$=\int_{-1}^4\{x^5+x^4+1+(-x^5-x^4+1)\}\,dx$

$=\int_{-1}^4 2\,dx=\Big[2x\Big]_{-1}^4$

$=8-(-2)=10$

(4) $\int_{-1}^{2}(2x+5)\,dx-\int_{3}^{2}(2x+5)\,dx$

$=\int_{-1}^{2}(2x+5)\,dx+\int_{2}^{3}(2x+5)\,dx$

$=\int_{-1}^{3}(2x+5)\,dx=\Big[x^2+5x\Big]_{-1}^{3}$

$=(9+15)-(1-5)=28$

02 $f(x)=|x^2-4x+3|$이라 하면

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x\le 1,\ x\ge 3) \\ -x^2+4x-3 & (1<x<3) \end{cases}$$

구간을 나누어 정적분을 구하면

$\int_{0}^{2}|x^2-4x+3|\,dx$

$=\int_{0}^{1}|x^2-4x+3|\,dx+\int_{1}^{2}|x^2-4x+3|\,dx$

$=\int_{0}^{1}(x^2-4x+3)\,dx+\int_{1}^{2}(-x^2+4x-3)\,dx$

$=\Big[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\Big]_{0}^{1}+\Big[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\Big]_{1}^{2}$

$=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$

03 함수 $f(x)=x^3-2x+1$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}\int_{x}^{-1}f(t)\,dt=-\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^{x}f(t)\,dt$

$=-\lim_{x\to -1}\frac{F(x)-F(-1)}{x-(-1)}$

$=-F'(-1)$

$=-f(-1)$

$=-(-1+2+1)=-2$

04 $\int_{0}^{1}f(t)\,dt=a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=4x^3-2x+2a$

이때 $a=\int_{0}^{1}f(t)\,dt=\int_{0}^{1}(4t^3-2t+2a)\,dt$이므로

$a=\Big[t^4-t^2+2at\Big]_{0}^{1}=2a$에서 $a=0$

따라서 $f(x)=4x^3-2x$이므로

$f(1)=2$

05 $f(x+2)=f(x)$이므로

$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{1}^{3}f(x)\,dx=\int_{3}^{5}f(x)\,dx=\int_{5}^{7}f(x)\,dx$

$=3$

$\int_{-1}^{7}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{3}f(x)\,dx+\int_{3}^{5}f(x)\,dx$

$+\int_{5}^{7}f(x)\,dx$

$=4\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=4\times 3=12$

06 $\int_{1}^{x}(x-t)f(t)\,dt=x^3-3x^2+3x-1$에서

$x\int_{1}^{x}f(t)\,dt-\int_{1}^{x}tf(t)\,dt=x^3-3x^2+3x-1$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{1}^{x}f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-6x+3$

$\int_{1}^{x}f(t)\,dt=3x^2-6x+3$

위 식을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-6$

$\therefore\ f(2)=6$

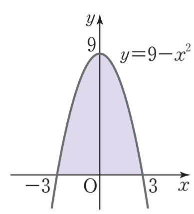
Ⅲ-4 넓이

163쪽

소단원 TEST

01 (1) 36 (2) $\frac{1}{2}$	**02** 2
03 $\frac{64}{3}$	**04** 3
05 $\frac{27}{4}$	**06** 5

01 (1) 곡선 $y=9-x^2$이 오른쪽 그림과 같으므로 닫힌구간 $[-3, 3]$에서



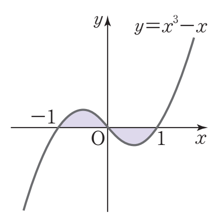
$9-x^2\ge 0$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-3}^{3}(9-x^2)\,dx$

$=\Big[9x-\frac{x^3}{3}\Big]_{-3}^{3}=18-(-18)=36$

(2) 곡선 $y=x^3-x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-x=0$에서



$x(x+1)(x-1)=0$

즉 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

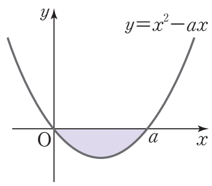
닫힌구간 $[-1, 0]$에서 $x^3-x\ge 0$

닫힌구간 $[0, 1]$에서 $x^3-x\le 0$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}|x^3-x|\,dx=\int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx+\int_{0}^{1}(-x^3+x)\,dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

02 곡선 $y=x^2-ax$와 x축의 교점의 x좌표는



$x^2-ax=0$에서 $x(x-a)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=a$

닫힌구간 $[0,\ a]$에서

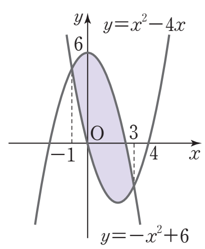
$x^2-ax\le 0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{a}|x^2-ax|\,dx=\int_{0}^{a}(-x^2+ax)\,dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{a}{2}x^2\right]_{0}^{a}=\frac{a^3}{6}$$

이때 $\frac{a^3}{6}=\frac{4}{3}$이므로

$a^3=8$ $\quad\therefore$ $a=2$

03 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표는



$x^2-4x=-x^2+6$에서

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=3$

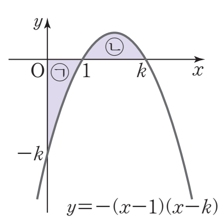
닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서

$-x^2+6\ge x^2-4x$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{3}\{(-x^2+6)-(x^2-4x)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{3}(-2x^2+4x+6)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right]_{-1}^{3}=\frac{64}{3}$$

04 곡선 $y=-(x-1)(x-k)$와 x축의 교점의 x좌표는



$-(x-1)(x-k)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=k$

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서

$-(x-1)(x-k)\le 0$

닫힌구간 $[1,\ k]$에서 $-(x-1)(x-k)\ge 0$

위의 그림에서 ㉠과 ㉡ 부분의 넓이가 같으므로

$$-\int_{0}^{1}\{-(x-1)(x-k)\}dx=\int_{1}^{k}\{-(x-1)(x-k)\}dx$$
$$\int_{0}^{1}\{-(x-1)(x-k)\}dx+\int_{1}^{k}\{-(x-1)(x-k)\}dx=0$$

즉 $\int_{0}^{k}\{-(x-1)(x-k)\}\,dx=0$

$$\therefore\ \int_{0}^{k}\{-x^2+(k+1)x-k\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+(k+1)\frac{x^2}{2}-kx\right]_{0}^{k}$$
$$=\frac{k^3}{6}-\frac{k^2}{2}=\frac{k^2(k-3)}{6}=0$$

$k>1$이므로 $k=3$

05 $f(x)=x^3-4x$라 하면 $f'(x)=3x^2-4$

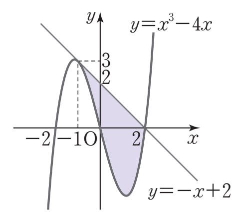
점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3\times(-1)^2-4=-1$

따라서 접선의 방정식은

$y-3=-(x+1)$, 즉 $y=-x+2$

이때 접선과 곡선의 교점의 x좌표는 $x^3-4x=-x+2$에서



$x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}\{(-x+2)-(x^3-4x)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=6-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{4}$$

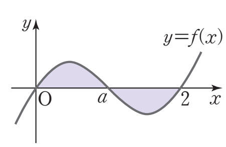
06 곡선 $y=x(x-2)(x-a)$와 x축의 교점의 x좌표는

$x(x-2)(x-a)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=a$

(i) $0<a<2$일 때

오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로



$$\int_{0}^{2}x(x-2)(x-a)\,dx=0$$

$$\int_0^2 \{x^3-(a+2)x^2+2ax\}\,dx=0$$

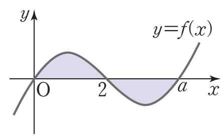
$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\right]_0^2=0$$

$$4-\frac{8}{3}(a+2)+4a=0$$

$\therefore\ a=1$

(ii) $a>2$일 때

오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로



$$\int_0^a x(x-2)(x-a)\,dx=0$$

$$\int_0^a \{x^3-(a+2)x^2+2ax\}\,dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\right]_0^a=0$$

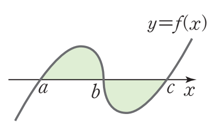
$$\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}(a+2)a^3+a^3=0$$

$a^4-4a^3=0,\ a^3(a-4)=0$

$\therefore\ a=4\ (\because\ a>2)$

(i), (ii)에서 모든 a의 값의 합은 5이다.

참고 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으면



⇨ $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^c f(x)dx$

⇨ $\int_a^c f(x)\,dx=0$

Ⅲ-5 속도와 거리

169쪽 • 소단원 TEST

01 0	**02** (1) 30 (2) 50
03 5초	**04** 50 m
05 -4	

01 $t=0$에서의 위치가 $x=0$이므로 $t=4$에서 점 P의 위치는

$$\int_0^4 (8t-3t^2)\,dt=\left[4t^2-t^3\right]_0^4=0$$

02 (1) $t=0$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^6 (20-5t)\,dt=\left[20t-\frac{5}{2}t^2\right]_0^6$$
$$=30$$

(2) $v(t)=20-5t=5(4-t)$이므로

$0\le t\le 4$일 때, $v(t)\ge 0$

$4\le t\le 6$일 때, $v(t)\le 0$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^6 |20-5t|\,dt$$
$$=\int_0^4 (20-5t)\,dt+\int_4^6 (-20+5t)\,dt$$
$$=\left[20t-\frac{5}{2}t^2\right]_0^4+\left[-20t+\frac{5}{2}t^2\right]_4^6$$
$$=40+10=50$$

03 B지점에 도달하는 데 걸리는 시간을 x초라 하면

$$\int_0^x (4+2t)\,dt=45$$

이므로 $4x+x^2=45$

$x^2+4x-45=0,\ (x+9)(x-5)=0$

$\therefore\ x=5\ (\because\ x>0)$

따라서 B지점에 도달하는 데 걸리는 시간은 5초이다.

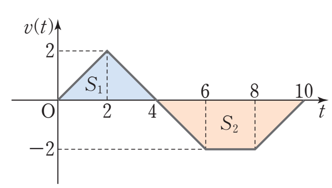
04 물체가 최고 높이에 도달했을 때 $v(t)=0$이므로

$20-10t=0$에서 $t=2$

즉 $t=2$일 때 물체가 최고 높이에 도달하므로 이때의 해수면으로부터의 높이는

$$30+\int_0^2 (20-10t)\,dt=30+\left[20t-5t^2\right]_0^2$$
$$=30+20=50\ (\mathrm{m})$$

05 $t=10$에서의 물체의 위치는 다음 그림에서 삼각형의 넓이 S_1에서 사다리꼴의 넓이 S_2를 빼면 되므로



$$\therefore\ a=\int_0^{10} v(t)\,dt$$
$$=S_1-S_2$$
$$=\frac{1}{2}\times4\times2-\frac{1}{2}\times(2+6)\times2=-4$$

내신대비 대단원 TEST

I 함수의 극한과 연속

178~183쪽

01 ④	02 ⑤	03 ②	04 ④	05 ①
06 ①	07 ②	08 ①	09 ①	10 ②
11 ①	12 ④	13 ④	14 ⑤	15 ④
16 ③	17 ④	18 ③	19 ③	20 ⑤
21 18	22 8	23 385	24 21	

01 $x>2$일 때, $|x-2|=x-2$이므로

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x-2}{|x-2|}=\lim_{x\to 2+0}\frac{x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2+0}1=1$$

02 $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x+2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})$$
$$=\lim_{x\to 1}(x+2)\lim_{x\to 1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})$$
$$=3\times 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$

03 $x\longrightarrow 2$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to 2}(x^2-a)=4-a=0$에서

$a=4$

$a=4$를 주어진 식에 대입하면

$$b=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

$\therefore ab=4\times 4=16$

04 주어진 그래프에서 $\lim_{x\to 0-}f(x)=1$

$-x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 0+$일 때 $t\longrightarrow 0-$이므로

$\lim_{x\to +0}g(-x)=\lim_{t\to 0-}g(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 0+}g(-x)=1+0=1$

05 $x\longrightarrow -\infty$일 때, $x<0$이므로 $x=-\sqrt{x^2}$이다.

$$\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+3x+4}+x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{x^2+3x+4}-x}$$
$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{3+\frac{4}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+3x+4}}{x}-1}$$
$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{3+\frac{4}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2+3x+4}{x^2}}-1}$$
$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{3+\frac{4}{x}}{-\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}-1}$$
$$=\frac{3}{-\sqrt{1}-1}=-\frac{3}{2}$$

다른 풀이 $-x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow -\infty$일 때, $t\longrightarrow \infty$이므로

$$\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+3x+4}+x)$$
$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{(-t)^2+3(-t)+4}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-3t+4}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-3t+4}{\sqrt{t^2-3t+4}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-3+\frac{4}{t}}{\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{4}{t^2}}+1}$$
$$=\frac{-3}{\sqrt{1}+1}=-\frac{3}{2}$$

06 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이므로 $\alpha\neq\beta$이고, 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=2$이다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\alpha^2}-\sqrt{x+\beta^2}}{\sqrt{x+3\alpha}-\sqrt{x+3\beta}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+\alpha^2}-\sqrt{x+\beta^2})(\sqrt{x+3\alpha}+\sqrt{x+3\beta})}{3(\alpha-\beta)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\alpha^2-\beta^2)(\sqrt{x+3\alpha}+\sqrt{x+3\beta})}{3(\alpha-\beta)(\sqrt{x+\alpha^2}+\sqrt{x+\beta^2})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\alpha+\beta)(\sqrt{x+3\alpha}+\sqrt{x+3\beta})}{3(\sqrt{x+\alpha^2}+\sqrt{x+\beta^2})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\alpha+\beta)\left(\sqrt{1+\frac{3\alpha}{x}}+\sqrt{1+\frac{3\beta}{x}}\right)}{3\left(\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{x}}+\sqrt{1+\frac{\beta^2}{x}}\right)}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)(1+1)}{3(1+1)}=\frac{\alpha+\beta}{3}=\frac{2}{3}$$

07 $\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x-2}=3$에서 $x-2=t$로 놓으면

$x \longrightarrow 2$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x-2}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=3$$

즉 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{x-2f(x)}{x^2+f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-2\frac{f(x)}{x}}{x+\frac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to0}\left(1-2\frac{f(x)}{x}\right)}{\lim_{x\to0}\left(x+\frac{f(x)}{x}\right)}=\frac{1-6}{0+3}=-\frac{5}{3}$$

08 $\lim_{x\to\infty}f(x)=3$에서 분모와 분자는 같은 차수의 식이어야 하므로

$a=0$

또, 분모의 최고차항의 계수가 1이므로 분자의 최고차항의 계수는 3이어야 한다.

$\therefore b=3$

따라서 $f(x)=\frac{3x^2-3x-6}{x^2-4}$이므로

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{3x^2-3x-6}{x^2-4}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{3(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{3(x+1)}{x+2}=\frac{9}{4}$$

09 $f(x)$가 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

$x\neq0$일 때, $f(x)=\frac{x^2-3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$이므로

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$$

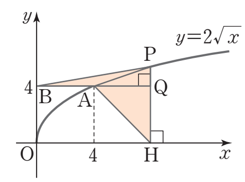
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x^2-3x)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x-3)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{2}$$

$$=\frac{-3(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{2}=-3\sqrt{2}$$

$\therefore f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=-3\sqrt{2}$

10 오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 연장선이 선분 PH와 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 PBA의 넓이 $f(t)$와 삼각형 PAH의 넓이 $g(t)$는



$$f(t)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PQ}=\frac{1}{2}\times4\times(2\sqrt{t}-4)$$

$$=4(\sqrt{t}-2)$$

$$g(t)=\frac{1}{2}\times\overline{PH}\times\overline{AQ}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{t}\times(t-4)$$

$$=\sqrt{t}(t-4)$$

$$\therefore \lim_{t\to4+}\frac{g(t)}{f(t)}=\lim_{t\to4+}\frac{\sqrt{t}(t-4)}{4(\sqrt{t}-2)}$$

$$=\lim_{t\to4+}\frac{\sqrt{t}(\sqrt{t}+2)}{4}$$

$$=\frac{2(2+2)}{4}=2$$

11 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이기 위해서는 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)=4$

이때 $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2+a}{x-2}$에서 $x \longrightarrow 2$일 때,

(분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to2}(x^2+a)=0,\ 4+a=0$

$\therefore a=-4$

12 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $f(2)=\lim_{x\to2}f(x)$이어야 한다.

$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-a}{x-2}=b$에서 $x \longrightarrow 2$일 때, (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 하므로

$\lim_{x\to2}(\sqrt{x+7}-a)=3-a=0$

즉 $a=3$

$$b=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-a}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{3}{\frac{1}{6}}=18$$

13 $g(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to -1-0} g(x)=\lim_{x\to -1+0} g(x)=g(-1)$$

이어야 하므로

$$\lim_{x\to -1-0} g(x)=\lim_{x\to -1-0}(x+a)f(x)$$
$$=(-1+a)\times 1=a-1$$

$$\lim_{x\to -1+0} g(x)=\lim_{x\to -1+0}(x+a)f(x)$$
$$=(-1+a)\times 0=0$$

$$g(-1)=(-1+a)f(-1)$$
$$=(-1+a)\times 0=0$$

따라서 $a-1=0$이므로

$a=1$

14 ㄱ. $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$$

$\therefore f(2)=\frac{1}{2}$ (참)

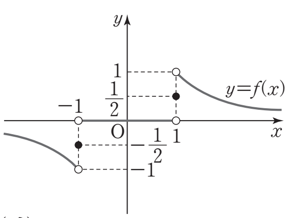
ㄴ. $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}}{x^{2n}+1}=\frac{0}{0+1}=0 \text{ (참)}$$

ㄷ. $x=1$일 때, $f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

$x=-1$일 때, $f(-1)=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=\pm1$에서 불연속이다.



즉 함수 $f(x)$가 불연속인 점은 2개이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 함수 $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수에서 연속이 되려면 임의의 실수 x에 대하여 $g(x)=x^2+ax+2a\neq 0$이어야 한다.

즉 $D=a^2-8a<0$에서 $a(a-8)<0$이므로

$0<a<8$

따라서 구하는 정수 a의 개수는 1, 2, ⋯, 7의 7개이다.

16 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3+0} f(x)=f(3)$$

$\therefore b=9$

모든 실수 x에 대하여 $f(x+6)=f(x)$이므로

$f(6)=f(0)$이다.

이때 $f(0)=0$이므로 $f(6)=9a+9=0$에서

$a=-1$

$$\therefore f(11)=f(5+6)=f(5)$$
$$=-(5-3)^2+9=5$$

17 ㄱ. 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=a$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x-1}=a$에서 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1} g(x)=0$ (거짓)

ㄷ. $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x+1}\times\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x-1}$$
$$=\frac{a}{2}\times a=\frac{1}{2}a^2 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

18 함수 $g(x)$의 값을 조사하면

(i) $|f(x)|>1$일 때, $g(x)=0$

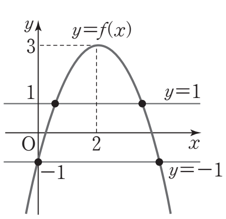
(ii) $|f(x)|=1$일 때, $g(x)=1$

(iii) $|f(x)|<1$일 때, $g(x)=2$

이므로 $y=g(x)$의 그래프는 $|f(x)|=1$, 즉 $f(x)=1$ 또는 $f(x)=-1$일 때 불연속이다.

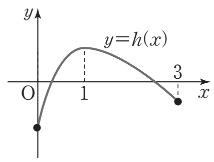
$$f(x)=-x^2+4x-1$$
$$=-(x-2)^2+3$$

에서 함수 $y=f(x)$의 치역은 $y\le 3$이므로 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 네 점에서 불연속이다.



19 ㄱ. 방정식 $h(x)=0$이 $0<x<3$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 $f(x)=g(x)$를 만족시키는 실수 x가 존재한다. (거짓)

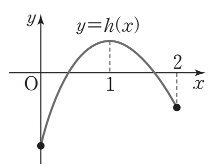
ㄴ. [반례] 함수 $y=h(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때 $h(0)=f(0)-g(0)<0$이고 방정식 $h(x)=0$이 열린구간 $(0,\ 3)$에서 실근을 갖지만



$h(3)=f(3)-g(3)<0$

$\therefore f(3)<g(3)$ (거짓)

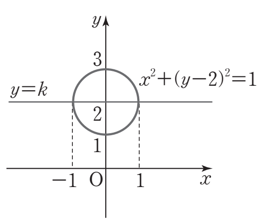
ㄷ. 함수 $h(x)$가 연속함수이고 $h(0)<0$, $h(1)>0$, $h(2)<0$이므로 방정식 $h(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 2)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다. (참)



따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

20 직선 $y=k$와 원 $x^2+(y-2)^2=1$이 만나는 점의 개수 $f(k)$는

$$f(k)=\begin{cases} 0 \ (k<1) \\ 1 \ (k=1) \\ 2 \ (1<k<3) \\ 1 \ (k=3) \\ 0 \ (k>3) \end{cases}$$



함수 $f(k)$는 $k=1$, $k=3$에서 불연속이고, 함수 $y=k^2+ak+b$는 모든 실수에서 연속이므로 함수 $g(k)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $k=1$, $k=3$에서 연속이어야 한다.

(i) $g(k)$가 $k=1$에서 연속일 조건

$\lim\limits_{k\to1+}g(k)=\lim\limits_{k\to1+}(k^2+ak+b)f(k)=2(1+a+b)$

$\lim\limits_{k\to1-}g(k)=\lim\limits_{k\to1-}(k^2+ak+b)f(k)=0$

$g(1)=(1+a+b)f(1)=1+a+b$

이때 $\lim\limits_{k\to1+}g(k)=\lim\limits_{k\to1-}g(k)=g(1)$이어야 하므로

$2+2a+2b=1+a+b=0$에서

$a+b=-1$ …… ㉠

(ii) $g(k)$가 $k=3$에서 연속일 조건

$\lim\limits_{k\to3+}g(k)=\lim\limits_{k\to3+}(k^2+ak+b)f(k)=0$

$\lim\limits_{k\to3-}g(k)=\lim\limits_{k\to3-}(k^2+ak+b)f(k)=2(9+3a+b)$

$g(3)=(9+3a+b)f(3)=9+3a+b$

이때 $\lim\limits_{k\to3+}g(k)=\lim\limits_{k\to3-}g(k)=g(3)$이어야 하므로

$0=18+6a+2b=9+3a+b$에서

$3a+b=-9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=3$

$g(k)=(k^2-4k+3)f(k)$이므로

$g(2)=(2^2-4\times2+3)f(2)=-1\times2=-2$

$\therefore 20\{f(1)-g(2)\}=20\{1-(-2)\}=60$

21 조건 ㈎에서 $2x=t$로 놓으면

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(2x)}{4x^2}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(t)}{t^2}=3$이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

조건 ㈏에서 $x \longrightarrow 1$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉 $\lim\limits_{x\to1}f(x+3)=f(4)=0$이므로

$f(x)=3(x-4)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x+3)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x+3+a)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}3(x+3+a)=3(a+4)$$

즉 $3(a+4)=15$이므로 $a=1$

따라서 $f(x)=3(x-4)(x+1)$이므로

$f(-2)=3\times(-6)\times(-1)=18$

22 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4x^{2n+1}+a}{x^{2n}+2}$에서

(i) $x>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n+1}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{4x+\dfrac{a}{x^{2n}}}{1+\dfrac{2}{x^{2n}}}=4x$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n+1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{4x^{2n+1}+a}{x^{2n}+2}=\frac{4+a}{3}$$

(iii) $0<x<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{4x^{2n+1}+a}{x^{2n}+2}=\frac{a}{2}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 양의 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1+} f(x)=f(1)$

즉 $\frac{a}{2}=4=\frac{4+a}{3}$이므로

$a=8$

23 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$이므로 …… ❶

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)f(x)}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-\alpha)(x-\beta)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x^2-x+1}$$
$$=\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{3}=2$$

즉 $\alpha\beta+(\alpha+\beta)=5$ …… ㉠

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\alpha x+1)(\beta x+1)}{2f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\alpha x+1)(\beta x+1)}{2(x-\alpha)(x-\beta)}$$
$$=\frac{\alpha\beta}{2}=-1$$

즉 $\alpha\beta=-2$

$\alpha\beta=-2$를 ㉠에 대입하면 $\alpha+\beta=7$ …… ❷

$\therefore\ \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=7^3-3\times(-2)\times7=385$ …… ❸

단계	채점 기준	배점
❶	$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$로 나타내기	1점
❷	극한으로 주어진 두 식을 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	2점
❸	곱셈공식을 이용하여 $\alpha^3+\beta^3$의 값 구하기	1점

24 다항식 $g(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지 $R(x)=ax+b$(a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$g(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ❶

$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2Q(x)+ax+b-x^2}{x-1}=f(1)=8$$

$x\longrightarrow1$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉 $a+b-1=0$에서

$b=-a+1$ …… ㉠

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2Q(x)+ax+b-x^2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2Q(x)-(x^2-ax+a-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2Q(x)-(x-1)(x-a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\{(x-1)Q(x)-(x-a+1)\}$$
$$=a-2$$

이때 $a-2=8$이므로 $a=10$

$a=10$을 ㉠에 대입하면 $b=-9$ …… ❷

따라서 $R(x)=10x-9$이므로

$R(3)=10\times3-9=21$ …… ❸

단계	채점 기준	배점
❶	$g(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$로 나타내기	1점
❷	극한의 성질을 이용하여 a, b의 값 구하기	3점
❸	$R(3)$의 값 구하기	1점

II 미분

184~189쪽

01 ②	02 ④	03 ④	04 ②	05 ③
06 ④	07 ③	08 ①	09 ⑤	10 ①
11 ②	12 ③	13 ③	14 ④	15 ②
16 ⑤	17 ⑤	18 ④	19 ③	20 ②
21 10	22 6	23 4	24 9	
25 $10\sqrt{3}$ cm				

01 $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(27-3)-(1-1)}{2}=12$

02 $f(x)=x^4-x^2$에서 $f'(x)=4x^3-2x$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$
$$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$$

이때 $f'(x)=4x^3-2x$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}=2f'(1)=2\times2=4$$

03 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$a+b=2$ …… ㉠

$f'(x)=\begin{cases} a & (x\geq 1) \\ 4x & (x<1) \end{cases}$ 이고 $x=1$에서 미분가능하므로

$a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=-2$

$\therefore a-b=6$

04 $x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 함수 $f(x)$가 극한값을 가지므로 $x \longrightarrow 1$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

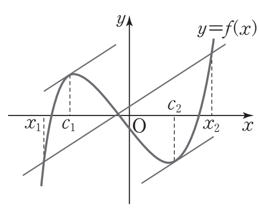
$\lim_{x\to 1}\{f(x)-2\}=0$에서 $f(1)=2$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=4$$

따라서

$$\lim_{x\to 1}\frac{xf(1)-f(x)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(1)-f(x)+xf(1)-f(1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(1)-f(x)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}+\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)f(1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=-\frac{1}{2}f'(1)+\frac{1}{2}f(1)$$
$$=-\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{2}\times 2=-1$$

05 닫힌구간 $[x_1,\ x_2]$에서의 함수 $f(x)$의 평균변화율은 두 점 $(x_1,\ f(x_1))$, $(x_2,\ f(x_2))$을 지나는 직선의 기울기와 같고 $x=c$에서의 미분계수는 곡선 위의 점 $(c,\ f(c))$에서의 접선의 기울기와 같다.



따라서 위의 그림과 같이 조건을 만족시키는 실수 c의 개수는 c_1, c_2의 2개이다.

06 $(x^2-1)g(x)=f(x)$에서 $f(1)=0$

$x\neq\pm 1$일 때 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2-1}$이고 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$g(1)=\lim_{x\to 1}g(x)$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{3}{2}$$

07 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0$ $\quad\therefore f(0)=0$

이때 $f'(0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}=1$이므로

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1)+f(h)+h-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+1=2$$

08 몫을 $Q(x)$라 하고 $R(x)=ax+b$라 하면

$x^{10}-1=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9=(2x+2)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$ …… ㉡

㉠, ㉡의 양변에 $x=-1$을 각각 대입하면

$0=-a+b$, $-10=a$

즉 $a=-10$, $b=-10$이므로

$R(x)=-10x-10$

$\therefore R(1)=-20$

09 $f(x)=x^3-x^2+2x$라 하면 $f'(x)=3x^2-2x+2$이므로

점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3$

따라서 접선의 방정식은

$y-2=3(x-1)$에서 $y=3x-1$

이 직선이 점 $(2,\ a)$를 지나므로

$a=3\times 2-1=5$

10 $f(x)=x^3+2x+2$라 하면 $f'(x)=3x^2+2$

접점의 좌표를 $\mathrm{P}(t,\ t^3+2t+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+2t+2)=(3t^2+2)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2)x-2t^3+2$

이 직선이 원점을 지나므로

$0=-2t^3+2$, $t^3=1$ $\quad\therefore t=1$

따라서 점 P의 좌표는 $(1, 5)$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$

11 $f(x)=(x-a)(x-b)$에서

$f'(x)=(x-a)'(x-b)+(x-a)(x-b)'$

$\quad\;\;=2x-(a+b)$

따라서 롤의 정리를 만족시키는 c의 값은

$f'(c)=2c-(a+b)=0$에서

$c=\dfrac{a+b}{2}$

12 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(0)=b=0$

$f'(1)=3+2a+b=0$ $\quad\therefore a=-\dfrac{3}{2}$

또, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값 2를 가지므로

$f(0)=c=2$

따라서 $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2$이므로

$d=f(1)=1-\dfrac{3}{2}+2=\dfrac{3}{2}$

13 함수 $f(x)$가 감소하는 구간이 닫힌구간 $[a, b]$이므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고 $x=b$에서 극소이다.

즉 $f'(a)=f'(b)=0$이다.

$f'(x)=3x^2+12x-10$에서 $f'(a)=0$, $f'(b)=0$이므로

이차방정식 $3x^2+12x-10=0$의 두 근이 a, b이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=-\dfrac{12}{3}=-4$

14 $f(x)=-x^4+4x^3+2ax^2$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2+4ax=-4x(x^2-3x-a)$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-3x-a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-3x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$a\neq0$, $D=9+4a>0$에서

$-\dfrac{9}{4}<a<0$ 또는 $a>0$

15 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$x \longrightarrow \infty$일 때 $f(x) \longrightarrow \infty$이므로 $a>0$

$f(0)>0$이므로 $d>0$

또, 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근은 α, β이고 $\alpha>0$, $\beta>0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2b}{3a}>0$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{3a}>0$

이때 $a>0$이므로 $b<0$, $c>0$

$\therefore a>0$, $b<0$, $c>0$, $d>0$

따라서 옳은 것은 ② $ac>0$이다.

16 $f'(x)=3ax^2-12ax=3ax(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-7a+b$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$-27a+b$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=0$에서 최대이고 최댓값은 $f(0)=b=3$

$x=3$에서 최소이고 최솟값은

$f(3)=-27a+b=-6$, $-27a=-9$

$\therefore a=\dfrac{1}{3}$

$\therefore a+b=\dfrac{1}{3}+3=\dfrac{10}{3}$

17 $2x^3+3x^2-12x+k=0$, 즉 $2x^3+3x^2-12x=-k$에서

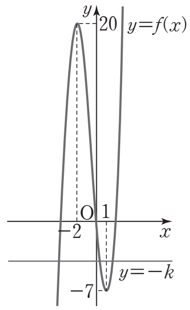
$f(x)=2x^3+3x^2-12x$라 하면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내고 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	20	$\searrow$	-7	$\nearrow$



방정식 $2x^3+3x^2-12x=-k$ 가 하나의 음의 실근과 서로 다른 두 양의 실근을 갖게 하는 k의 값의 범위는

$-7<-k<0 \quad \therefore 0<k<7$

따라서 구하는 정수 k의 개수는 1, 2, $\cdots$, 6의 6개이다.

18 $f(x)=x^3-6x^2+a$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

열린구간 $(0, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	a	$\searrow$	$a-32$	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극소이면서 최소이다.

$x>0$일 때 $f(x)>0$이어야 하므로 $a-32>0$

따라서 $a>32$이므로 정수 a의 최솟값은 33이다.

19 제동을 건 후 t초 후의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=\frac{ds}{dt}=60-3t$

기차가 정지할 때의 속도는 $v=0$이므로

$60-3t=0$에서 $t=20$

즉 기차가 정지할 때까지 걸린 시간은 20초이다.

20 ㄱ. $0<t<2$일 때, $v(t)<0$

$2<t\le 4$일 때, $v(t)>0$

이므로 출발 후 2초가 될 때 움직이는 방향이 바뀐다. (참)

ㄴ. 출발 후 3초부터 4초 사이에는 $v(t)=2$이므로

$\frac{dv}{dt}=0$

따라서 가속도가 0이다. (참)

ㄷ. $0<t<2$일 때, $v(t)<0$이므로 원점을 출발 후 2초가 될 때까지 한 방향으로 움직이므로 원점을 지나지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-x^2}{x-3}=4$에서 $x \longrightarrow 3$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to3}\{f(x)-x^2\}=0$, $f(3)-9=0 \quad \therefore f(3)=9$

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-9-(x^2-9)}{x-3}=4$에서

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}-\lim_{x\to3}(x+3)=4$

$f'(3)-6=4 \quad \therefore f'(3)=10$

22 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+k$라 하면 $f'(x)=x^2$

접점의 좌표를 $\left(a, \frac{1}{3}a^3+k\right)$라 하면 접선의 기울기가

$f'(a)=a^2$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{3}a^3+k\right)=a^2(x-a)$

$\therefore y=a^2x-\frac{2}{3}a^3+k \quad \cdots\cdots$ ㉠

또, $12x-3y+2=0$에서 $y=4x+\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2=4$, $-\frac{2}{3}a^3+k=\frac{2}{3}$

이때 $a>0$이므로 $a=2$

$a=2$를 $-\frac{2}{3}a^3+k=\frac{2}{3}$에 대입하면

$-\frac{16}{3}+k=\frac{2}{3} \quad \therefore k=6$

23 $f(t)=\frac{1}{6}(24t+9t^2-2t^3)$이라 하면

$f'(t)=-t^2+3t+4=-(t-4)(t+1)$

$f'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=4$

$t\ge0$의 범위에서 함수 $f(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(t)$가 $t\ge4$일 때 감소하므로 약효가 떨어지기 시작할 때는 약을 복용 후 4시간 후부터이다.

$\therefore\ a=4$

24 두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하자.

x_1, x_2는 이차방정식 $2x^2-x-2=mx$,

즉 $2x^2-(m+1)x-2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=\dfrac{m+1}{2}$, $x_1x_2=-1$ …… ❶

$f(x)=2x^2-x-2$에서 $f'(x)=4x-1$

점 A에서의 접선의 기울기가 -3이므로

$f'(x_1)=4x_1-1=-3$에서 $x_1=-\dfrac{1}{2}$

$x_1=-\dfrac{1}{2}$을 $x_1x_2=-1$에 대입하면 $x_2=2$ …… ❷

$m=2(x_1+x_2)-1=2\left(-\dfrac{1}{2}+2\right)-1=2$

점 B에서의 접선의 기울기는

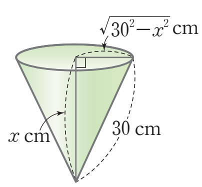
$k=f'(x_2)=f'(2)=4\times2-1=7$

$\therefore\ m+k=2+7=9$ …… ❸

단계	채점 기준	배점
❶	두 점 A, B의 x좌표 사이의 관계 구하기	2점
❷	두 점 A, B의 x좌표 구하기	2점
❸	$m+k$의 값 구하기	1점

25 원뿔 모양의 그릇의 높이를 x라 하면 밑면의 반지름의 길이가 $\sqrt{30^2-x^2}$이다.

따라서 그릇의 부피를 $f(x)$라 하면



$f(x)=\dfrac{1}{3}\pi(\sqrt{30^2-x^2})^2\times x$

$\quad=-\dfrac{1}{3}\pi x^3+300\pi x$ …… ❶

$f'(x)=-\pi x^2+300\pi$

$\quad=-\pi(x-10\sqrt{3})(x+10\sqrt{3})$

$f'(x)=0$에서 $x=-10\sqrt{3}$ 또는 $x=10\sqrt{3}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$10\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

…… ❷

따라서 함수 $f(x)$는 $x=10\sqrt{3}$에서 극대이며 최댓값을 가지므로 그릇의 용량이 최대일 때 그릇의 높이는 $10\sqrt{3}$ cm이다. …… ❸

단계	채점 기준	배점
❶	그릇의 높이를 x라 할 때, 그릇의 부피 $f(x)$를 x로 나타내기	2점
❷	함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내기	2점
❸	그릇의 용량이 최대일 때 그릇의 높이 구하기	1점

III 적분

190~195쪽

01 ⑤	02 ①	03 ③	04 ③	05 ⑤
06 ②	07 ③	08 ①	09 ④	10 ⑤
11 ④	12 ④	13 ①	14 ①	15 ②
16 ②	17 ①	18 ③	19 ⑤	20 ③
21 4	22 $\dfrac{8}{19}$	23 3초	24 $-\dfrac{1}{2}$	25 -2

01 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{(x-1)(x+1)}\times(x+1)\right\}$

$\displaystyle\quad=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\lim_{x\to1}(x+1)$

$\quad=2f'(1)$

$f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left\{\displaystyle\int(2x^3-3x^2+4)\,dx\right\}=2x^3-3x^2+4$

이므로

$f'(1)=2-3+4=3$

$\displaystyle\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=2f'(1)=2\times3=6$

02 $f'(x)=2x-a$이므로

$f(x)=\displaystyle\int(2x-a)\,dx=x^2-ax+C$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$에서 $x\longrightarrow1$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이므로

(분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to1} f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$\therefore f(1)=1-a+C=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-0}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)=3$

이므로 $f'(1)=2-a=3$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1$, $C=-2$

따라서 $f(x)=x^2+x-2$이므로

$f(-1)=1-1-2=-2$

03 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 $x=0$, $x=2$에서 만나므로

$f'(x)=ax(x-2)=ax^2-2ax\ (a<0)$

로 놓을 수 있다.

$f(x)=\int f'(x)\,dx$이므로

$f(x)=\int(ax^2-2ax)\,dx=\frac{a}{3}x^3-ax^2+C$

$y=f'(x)$의 그래프를 보고 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

즉 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소, $x=2$에서 극대이고 극솟값은 1, 극댓값은 5이므로

$f(0)=1$에서 $C=1$

$f(2)=5$에서 $\frac{8}{3}a-4a+C=5$ $\quad\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2+1$이므로

$f(1)=-1+3+1=3$

04 ㄱ. $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$에

$x=0$, $y=0$을 대입하면 $f(0)=f(0)+f(0)$이므로

$f(0)=0$ (참)

ㄴ. $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2xh}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+2x$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f'(1)=3$이므로 ㉠에 $x=1$을 대입하면

$3=f'(0)+2$

$\therefore f'(0)=1$ (참)

ㄷ. $f'(x)=f'(0)+2x=2x+1$이고 $f(0)=0$이므로

$f(x)=x^2+x$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

에서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 최솟값을 갖는다. (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

05 $f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(2x^2-3)\,dx$

$=\frac{2}{3}x^3-3x+C$

이때 $f(2)=4$이므로

$f(2)=\frac{16}{3}-6+C=4$에서 $C=\frac{14}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-3x+\frac{14}{3}$이므로

$f(1)=\frac{7}{3}$

06 $F(x)=xf(x)+3x^3+2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+9x^2+4x$

$xf'(x)=-9x^2-4x$, 즉 $f'(x)=-9x-4$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-9x-4)\,dx=-\frac{9}{2}x^2-4x+C$

그런데 $f(0)=1$이므로 $f(0)=C=1$

따라서 함수 $f(x)=-\frac{9}{2}x^2-4x+1$이므로

$f(-2)=-18+8+1=-9$

07 $f(x)=3x|x|$라 하면

$f(x)=\begin{cases}-3x^2 & (x<0)\\ 3x^2 & (x\geq0)\end{cases}$

구간을 나누어 정적분을 구하면

$\int_{-2}^{2}3x|x|\,dx=\int_{-2}^{0}(-3x^2)\,dx+\int_{0}^{2}3x^2\,dx$

$=\Big[-x^3\Big]_{-2}^{0}+\Big[x^3\Big]_{0}^{2}$

$=-8+8=0$

08 $\int_0^6 f(x)\,dx-\int_3^6 f(x)\,dx$

$=\int_0^6 (x^2-3x)\,dx-\int_3^6 (x^2-3x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^6-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_3^6$

$=18-\frac{45}{2}=-\frac{9}{2}$

09 $\int_0^2 (x+k)^2dx-\int_0^2 (t-k)^2dt$

$=\int_0^2 (x+k)^2dx-\int_0^2 (x-k)^2dx$

$=\int_0^2 \{(x+k)^2-(x-k)^2\}\,dx$

$=\int_0^2 4kx\,dx$

$=\left[2kx^2\right]_0^2=8k$

즉 $8k=32$이므로

$k=4$

10 $\int_0^2 f(t)\,dt=a$라 하면 $f(x)=3x+a$이므로

$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 (3x+a)\,dx$

$=\left[\frac{3}{2}x^2+ax\right]_0^2$

$=6+2a=a$

$\therefore a=-6$

따라서 $f(x)=3x-6$이므로

$f(4)=3\times4-6=6$

11 $f(x)=|x^2(x-1)|$이라 하면

$f(x)=\begin{cases}-x^2(x-1) & (x<1)\\ x^2(x-1) & (x\ge1)\end{cases}$

$=\begin{cases}-x^3+x^2 & (x<1)\\ x^3-x^2 & (x\ge1)\end{cases}$

구간을 나누어 정적분을 구하면

$\int_0^2 |x^2(x-1)|\,dx$

$=\int_0^1 (-x^3+x^2)\,dx+\int_1^2 (x^3-x^2)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$

$=\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)+\left\{4-\frac{8}{3}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\right\}=\frac{3}{2}$

12 $f(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int(3x^2-2x)\,dx\right\}+\frac{d}{dx}\left\{\int\left(\frac{d}{dx}2x^2\right)dx\right\}$

$=3x^2-2x+\frac{d}{dx}(2x^2+C)$

$=3x^2-2x+4x$

$=3x^2+2x$

$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (3x^2+2x)\,dx$

$=\left[x^3+x^2\right]_0^1=1+1=2$

13 $\int_1^x (x-t)f(t)\,dt=\frac{1}{3}x^3-2x^2-4x+3$에서

$x\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt=\frac{1}{3}x^3-2x^2-4x+3$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=x^2-4x-4$

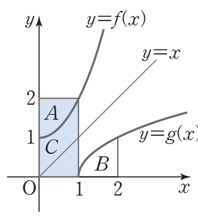
즉 $\int_1^x f(t)\,dt=x^2-4x-4$

위 식을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-4$

$\therefore f(0)=-4$

14 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



$\int_1^2 g(x)\,dx$의 값은 B의 넓이이고, 역함수의 성질에 의하여 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 부분인 A의 넓이와 같다.

이때 $\int_0^1 f(x)\,dx=(C$의 넓이)이고 구하는 넓이는 위의 그림에서 색칠한 직사각형의 넓이와 같으므로

$\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 g(x)\,dx=2\times1=2$

15 $f(x)=x^3-4x$라 하면 $f'(x)=3x^2-4$

점 $(-1,\,3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3\times(-1)^2-4=-1$

따라서 접선의 방정식은

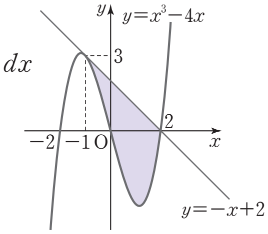
$y-3=-(x+1)$, $y=-x+2$

이때 접선과 곡선의 교점의 x좌표는

$x^3-4x=-x+2$에서 $x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는



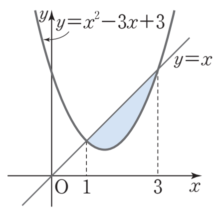
$\int_{-1}^{2}\{(-x+2)-(x^3-4x)\}\,dx$

$=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)\,dx$

$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$

$=6-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{4}$

16 곡선 $y=x^2-3x+3$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는



$x^2-3x+3=x$에서

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

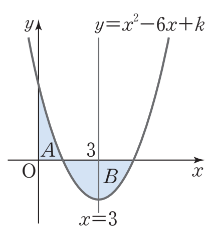
닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 $x\ge x^2-3x+3$이므로 구하는 넓이는

$\int_{1}^{3}\{x-(x^2-3x+3)\}\,dx$

$=\int_{1}^{3}(-x^2+4x-3)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_{1}^{3}=\frac{4}{3}$

17 $y=x^2-6x+k=(x-3)^2+k-9$이므로 주어진 곡선은 직선 $x=3$에 대하여 대칭이고, A, B의 넓이의 비가 $1:2$이므로



$\int_{0}^{3}(x^2-6x+k)\,dx=0$

이다. 즉

$\int_{0}^{3}(x^2-6x+k)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+kx\right]_{0}^{3}$

$=-18+3k=0$

$\therefore k=6$

18 $v(t)=3t^2-9t+6=3(t-1)(t-2)$이므로

$0\le t\le 1$일 때 $v(t)\ge 0$

$1\le t\le 2$일 때 $v(t)\le 0$

따라서 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

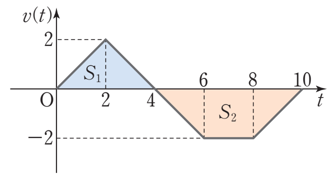
$\int_{0}^{2}|3t^2-9t+6|\,dt$

$=\int_{0}^{1}(3t^2-9t+6)\,dt+\int_{1}^{2}(-3t^2+9t-6)\,dt$

$=\left[t^3-\frac{9}{2}t^2+6t\right]_{0}^{1}+\left[-t^3+\frac{9}{2}t^2-6t\right]_{1}^{2}$

$=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$

19 $t=0$에서 $t=10$까지 물체가 움직인 거리는 삼각형의 넓이 S_1과 사다리꼴의 넓이 S_2를 더한 것이다.



따라서 구하는 거리는

$\int_{0}^{10}|v(t)|\,dt=S_1+S_2$

$=\frac{1}{2}\times 4\times 2+\frac{1}{2}\times(2+6)\times 2$

$=4+8=12$

20 $30-10t=0$에서 $10(3-t)=0$

$0\le t\le 3$일 때 $v>0$, $t\ge 3$일 때 $v<0$

따라서 물체를 던진 후 t초 동안 물체가 움직인 거리는

$\int_{0}^{t}|30-10t|\,dt$

$=\int_{0}^{3}(30-10t)\,dt+\int_{3}^{t}(-30+10t)\,dt$

$=\left[30t-5t^2\right]_{0}^{3}+\left[-30t+5t^2\right]_{3}^{t}=5t^2-30t+90$

이때 $5t^2-30t+90=65$이므로

$t^2-6t+5=0$, $(t-1)(t-5)=0$

$\therefore t=5\ (\because t>3)$

21 함수 $(2x+1)f'(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\int_{0}^{x}(2t+1)f'(t)\,dt=F(x)-F(0)$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{0}^{x}(2t+1)f'(t)\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\{F(x)-F(0)\}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}$

$=F'(0)$

$F'(x)=(2x+1)f'(x)$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (2t+1)f'(t)\,dt = F'(0)$

$= (2\times 0+1)\times f'(0) = 4$

22 곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$-x^2+3x=x$, 즉 $x^2-2x=0$에서 $x(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $-x^2+3x\ge x$이므로

$S_1=\int_0^2 \{(-x^2+3x)-x\}\,dx$

$=\int_0^2 (-x^2+2x)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$

곡선 $y=-x^2+3x$와 x축과의 교점의 x좌표는

$x=0$ 또는 $x=3$

닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 $-x^2+3x\ge 0$이므로

$S_2=\int_0^3 (-x^2+3x)\,dx-S_1$

$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3-\frac{4}{3}=\frac{9}{2}-\frac{4}{3}=\frac{19}{6}$

$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{19}{6}}=\frac{8}{19}$

23 출발한 지 t초 후의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_{\mathrm{P}}(t)$, $x_{\mathrm{Q}}(t)$라 하면

$x_{\mathrm{P}}(t)=\int_0^t (3t^2+5)\,dt=t^3+5t$

$x_{\mathrm{Q}}(t)=\int_0^t (8+4t)\,dt=8t+2t^2$

점 P와 점 Q가 만나는 것은 두 점의 위치가 같을 때,

즉 $x_{\mathrm{P}}(t)=x_{\mathrm{Q}}(t)$일 때이므로

$t^3+5t=2t^2+8t$에서

$t^3-2t^2-3t=t(t-3)(t+1)$

$\therefore t=0$ 또는 $t=3$ ($\because t\ge 0$)

따라서 점 P와 점 Q가 다시 만나는 시각은 3초이다.

24 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=3x^2+2x+f(x)$

$xf'(x)=3x^2+2x$

$f'(x)=3x+2$ …… ❶

$f(x)=\int (3x+2)\,dx$

$=\frac{3}{2}x^2+2x+C$

한편 주어진 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2f(2)=8+4+0$에서 $f(2)=6$

$f(2)=\frac{3}{2}\times 2^2+2\times 2+C=6$이므로

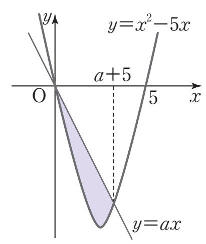
$C=-4$ …… ❷

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+2x-4$이므로

$f(1)=-\frac{1}{2}$ …… ❸

단계	채점 기준	배점
❶	$f'(x)$ 구하기	1점
❷	적분상수 값 구하기	2점
❸	$f(1)$의 값 구하기	1점

25 직선 $y=ax$와 곡선 $y=x^2-5x$의 교점의 x좌표는



$x^2-5x=ax$

즉 $x\{x-(a+5)\}=0$에서

$x=0$ 또는 $x=a+5$ …… ❶

닫힌구간 $[0,\ a+5]$에서

$x^2-5x\le ax$이고, 직선 $y=ax$와 곡선 $y=x^2-5x$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{9}{2}$이므로

$\int_0^{a+5}\{ax-(x^2-5x)\}\,dx=\int_0^{a+5}\{-x^2+(a+5)x\}\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+5}{2}x^2\right]_0^{a+5}$

$=-\frac{(a+5)^3}{3}+\frac{(a+5)^3}{2}$

$=\frac{(a+5)^3}{6}=\frac{9}{2}$ …… ❷

즉 $(a+5)^3=27$이므로

$a+5=3$ $\quad\therefore a=-2$ …… ❸

단계	채점 기준	배점
❶	직선과 곡선의 교점의 x좌표 구하기	1점
❷	직선과 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 a를 사용한 식으로 나타내기	3점
❸	a의 값 구하기	1점