내신을 철저하게
대비해 주는
교과서 쌍둥이 문제

정답과 해설

Ⅰ. 함수의 극한과 연속

1. 함수의 극한

1-1 함수의 극한의 뜻

내신 대비 쌍둥이 문제 24~30쪽

1-1 (1) 2 (2) 6 (3) -6 (4) $\sqrt{2}$

2-1 (1) 0 (2) 0 (3) 1 (4) 2

3-1 45

4-1 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) ∞ (4) $-\infty$

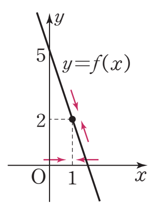
5-1 (1) $-\infty$ (2) ∞

6-1 (1) 1 (2) 0

7-1 (1) 0 (2) 존재하지 않는다.

8-1 존재하지 않는다.

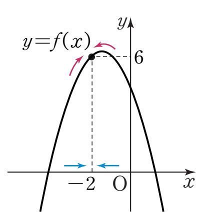
1-1 (1) $f(x)=-3x+5$라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 $x\to1$일 때, $f(x)\to2$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(-3x+5)=2$

(2) $f(x)=-x^2-3x+4$라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 $x\to-2$일 때, $f(x)\to6$이다.

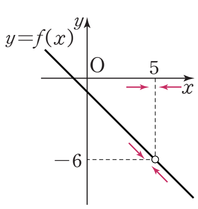
즉, $\lim_{x\to-2}(-x^2-3x+4)=6$

(3) $f(x)=\dfrac{-x^2+4x+5}{x-5}$라고 하면 $x\neq5$일 때

$$f(x)=\frac{-x^2+4x+5}{x-5}=\frac{-(x+1)(x-5)}{x-5}$$

$$=-(x+1)$$

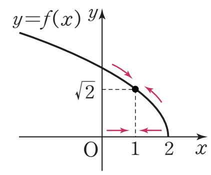
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 $x\to5$일 때, $f(x)\to-6$이다.

즉, $\lim_{x\to5}\dfrac{-x^2+4x+5}{x-5}=-6$

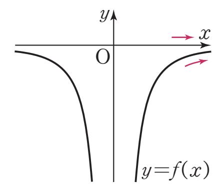
(4) $f(x)=\sqrt{-2x+4}$라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 $x\to1$일 때, $f(x)\to\sqrt{2}$이다.

즉, $\lim_{x\to1}\sqrt{-2x+4}=\sqrt{2}$

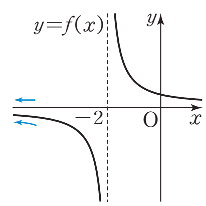
2-1 (1) $f(x)=-\dfrac{2}{x^2}$라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 $x\to\infty$일 때, $f(x)\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to\infty}\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)=0$

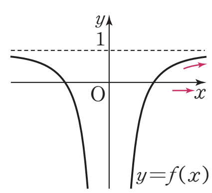
(2) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$이라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 $x\to-\infty$일 때, $f(x)\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$

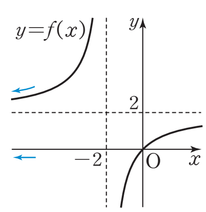
(3) $f(x)=-\dfrac{2}{x^2}+1$이라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 $x\to\infty$일 때, $f(x)\to1$이다.

즉, $\lim_{x\to\infty}\left(-\dfrac{2}{x^2}+1\right)=1$

(4) $f(x)=\dfrac{2x}{x+2}$라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



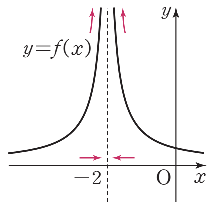
이 그래프에서 $x\to-\infty$일 때, $f(x)\to2$이다.

즉, $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x+2}=2$

3-1 주어진 그림에서 $x\to\infty$일 때, $f(x)\to45$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=45$

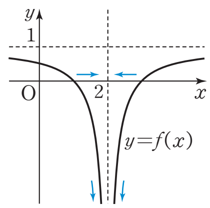
4-1 (1) $f(x)=\dfrac{1}{|x+2|}$ 이라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 $x \to -2$일 때, $f(x) \to \infty$이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{1}{|x+2|}=\infty$

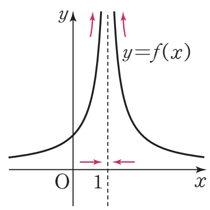
(2) $f(x)=1-\dfrac{1}{|x-2|}$이라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 $x \to 2$일 때, $f(x) \to -\infty$이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to2}\left(1-\frac{1}{|x-2|}\right)=-\infty$

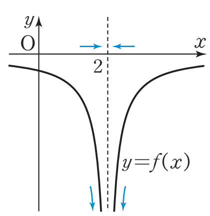
(3) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$이라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 $x \to 1$일 때, $f(x) \to \infty$이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$

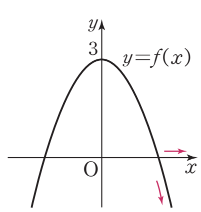
(4) $f(x)=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$이라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 $x \to 2$일 때, $f(x) \to -\infty$이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to2}\left\{-\frac{1}{(x-2)^2}\right\}=-\infty$

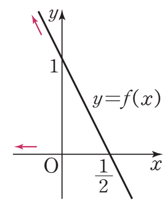
5-1 (1) $f(x)=-x^2+3$이라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 $x \to \infty$일 때, $f(x) \to -\infty$이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(-x^2+3)=-\infty$

(2) $f(x)=-2x+1$이라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 $x \to -\infty$일 때, $f(x) \to \infty$이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(-2x+1)=\infty$

6-1 (1) x의 값이 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워진다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to2-}f(x)=1$

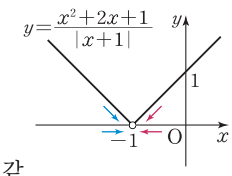
(2) x의 값이 2보다 크면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워진다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to2+}f(x)=0$

7-1 (1) 함수

$$y=\frac{x^2+2x+1}{|x+1|}=\frac{(x+1)^2}{|x+1|}$$

$$=\begin{cases} x+1 & (x>-1) \\ -x-1 & (x<-1) \end{cases}$$



의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서

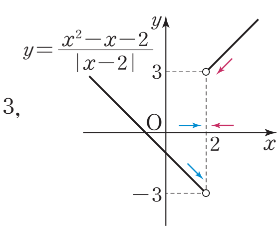
$$\lim_{x\to-1-}\frac{x^2+2x+1}{|x+1|}=0,\ \lim_{x\to-1+}\frac{x^2+2x+1}{|x+1|}=0$$

이므로 $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2+2x+1}{|x+1|}=0$

(2) 함수

$$y=\frac{x^2-x-2}{|x-2|}=\frac{(x-2)(x+1)}{|x-2|}$$

$$=\begin{cases} x+1 & (x>2) \\ -x-1 & (x<2) \end{cases}$$



의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서

$$\lim_{x\to2-}\frac{x^2-x-2}{|x-2|}=-3,$$

$$\lim_{x\to2+}\frac{x^2-x-2}{|x-2|}=3$$

이다. 이때

$$\lim_{x\to2-}\frac{x^2-x-2}{|x-2|}\neq\lim_{x\to2+}\frac{x^2-x-2}{|x-2|}$$

이므로 극한 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{|x-2|}$는 존재하지 않는다.

8-1 $f(t)=\begin{cases} 7000 & (0\le t<9) \\ 6000 & (9\le t<10) \\ 5000 & (10\le t<11) \\ 4000 & (11\le t<12) \end{cases}$ 이므로

$\lim\limits_{t\to 11-} f(t)=5000$, $\lim\limits_{t\to 11+} f(t)=4000$이다.

이때 $\lim\limits_{t\to 11-} f(t)\ne \lim\limits_{t\to 11+} f(t)$이므로 극한 $\lim\limits_{t\to 11} f(t)$는 존재하지 않는다.

소단원 **확인 문제** 31~32쪽

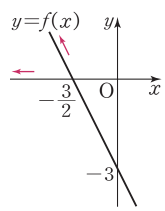
1-1 (1) 3 (2) 14 (3) 1
2-1 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) $-\infty$ (4) ∞
3-1 -1 **4-1** 0

1-1 (1) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x+5}=3$

(2) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x+4)=14$

(3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{x+3}=1$

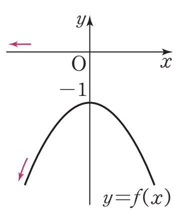
2-1 (1) $f(x)=-2x-3$이라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 $x\to-\infty$일 때, $f(x)\to\infty$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-3)=\infty$

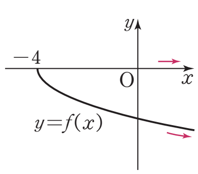
(2) $f(x)=-x^2-1$이라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 $x\to-\infty$일 때, $f(x)\to-\infty$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2-1)=-\infty$

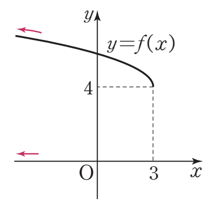
(3) $f(x)=-\sqrt{x+4}$라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 $x\to\infty$일 때, $f(x)\to-\infty$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to-\infty}(-\sqrt{x+4})=-\infty$

(4) $f(x)=4+\sqrt{3-x}$라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 $x\to-\infty$일 때, $f(x)\to\infty$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to-\infty}(4+\sqrt{3-x})=\infty$

3-1 주어진 함수의 그래프에서 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=a+1$이므로

$a+1=4$ $\quad\therefore a=3$

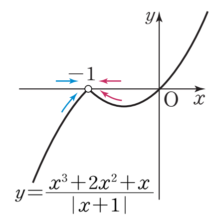
$\therefore \lim\limits_{x\to -2-} f(x)=\lim\limits_{x\to (1-a)-} f(x)=2-a=-1$

4-1 함수

$$y=\frac{x^3+2x^2+x}{|x+1|}=\frac{x(x+1)^2}{|x+1|}$$

$$=\begin{cases} x(x+1) & (x>-1) \\ -x(x+1) & (x<-1) \end{cases}$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서

$\lim\limits_{x\to -1-}\dfrac{x^3+2x^2+x}{|x+1|}=0$,

$\lim\limits_{x\to -1+}\dfrac{x^3+2x^2+x}{|x+1|}=0$

이므로 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+2x^2+x}{|x+1|}=0$

1-2 함수의 극한의 성질

내신 대비 쌍둥이 문제 34~37쪽

1-1 (1) -1 (2) 3
2-1 (1) -32 (2) $-\dfrac{1}{4}$ **3-1** (1) -2 (2) -2
4-1 (1) $a=-1$, $b=-2$ (2) $a=19$, $b=-4$
5-1 4 **6-1** 2

1-1 (1) $\lim\limits_{x\to -2}(x^3-3x+1)$

$=\lim\limits_{x\to -2}x^3-\lim\limits_{x\to -2}3x+\lim\limits_{x\to -2}1$

$=-8+6+1=-1$

(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3}{x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x-1)}=\dfrac{6}{2}=3$

2-1 (1) $\lim_{x\to-2}\frac{x^4-16}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)(x^2+4)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2}(x-2)(x^2+4)$

$=-4\times8=-32$

(2) $\lim_{x\to1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})}{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}$

$=\lim_{x\to1}\frac{-(x-1)}{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}$

$=\lim_{x\to1}\frac{-1}{2+\sqrt{x+3}}$

$=\frac{-1}{2+\sqrt{4}}=-\frac{1}{4}$

3-1 (1) 분모와 분자를 x^2으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x+6}{-x^2+4x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}}{-1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}$$

$$=\frac{2}{-1}=-2$$

(2) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+3}}{x+4}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{4t^2-t+3}}{-t+4}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}}}{-1+\frac{4}{t}}$

$=\frac{\sqrt{4}}{-1}=-2$

4-1 (1) $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x-2$라고 하면

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=3$, $\lim_{x\to2}g(x)=0$

이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=0$

즉, $\lim_{x\to2}(x^2+ax+b)=0$에서

$4+2a+b=0$, $b=-2a-4$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x+a+2)=4+a$

따라서 $4+a=3$이므로

$a=-1$, $b=-2a-4=-2$

(2) $f(x)=\sqrt{x+a}+b$, $g(x)=x+3$이라고 하면

$\lim_{x\to-3}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{8}$, $\lim_{x\to-3}g(x)=0$

이므로

$\lim_{x\to-3}f(x)=0$

즉, $\lim_{x\to-3}(\sqrt{x+a}+b)=0$에서

$\sqrt{a-3}+b=0$, $b=-\sqrt{a-3}$

$\therefore \lim_{x\to-3}\frac{f(x)}{g(x)}$

$=\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a-3}}{x+3}$

$=\lim_{x\to-3}\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a-3})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-3})}{(x+3)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-3})}$

$=\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{(x+3)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-3})}$

$=\lim_{x\to-3}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a-3}}=\frac{1}{2\sqrt{a-3}}$

따라서 $\frac{1}{2\sqrt{a-3}}=\frac{1}{8}$이므로

$a=19$, $b=-\sqrt{a-3}=-4$

5-1 $\lim_{x\to\infty}4=4$, $\lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{2}{x^2}\right)=4$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=4$

6-1 $x\geq1$이므로 각 변에 x를 곱하면

$\frac{6x^2}{3x^2+4}<xf(x)<\frac{4x^3}{2x^3+1}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2}{3x^2+4}=2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{2x^3+1}=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}xf(x)=2$

소단원 확인 문제 38~39쪽

1-1 (1) 2 (2) 3 (3) $-\frac{2}{5}$ (4) $-\frac{1}{8}$

2-1 (1) 2 (2) 2 **3-1** $a=-3$, $b=8$

4-1 (1) 0 (2) 0

1-1 (1) $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-3x+1}{3x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}}=\frac{6}{3}=2$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2x+5}{x^2+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}$

$=3$

(3) $\lim_{x\to-3}\frac{2x+6}{x^2+x-6}=\lim_{x\to-3}\frac{2(x+3)}{(x+3)(x-2)}$

$=\lim_{x\to-3}\frac{2}{x-2}=-\frac{2}{5}$

(4) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{4x-4}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x})(\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x})}{4(x-1)(\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x})}$

$=\lim_{x\to1}\frac{2-2x}{4(x-1)(\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x})}$

$=\lim_{x\to1}\frac{-1}{2(\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x})}$

$=\frac{-1}{2(\sqrt{4}+\sqrt{4})}=-\frac{1}{8}$

2-1 (1) $\lim_{x\to2}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to2}f(x)-\lim_{x\to2}g(x)$

$=4-2=2$

(2) $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to2}f(x)}{\lim_{x\to2}g(x)}=\frac{4}{2}=2$

3-1 $f(x)=\sqrt{6x+3}-\sqrt{3x+6}$, $g(x)=x^2+2x+a$라고 하면

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{b}$, $\lim_{x\to1}f(x)=0$

이므로

$\lim_{x\to1}g(x)=0$

즉, $\lim_{x\to1}(x^2+2x+a)=0$에서 $3+a=0$

$\therefore a=-3$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{6x+3}-\sqrt{3x+6}}{x^2+2x-3}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{6x+3}-\sqrt{3x+6})(\sqrt{6x+3}+\sqrt{3x+6})}{(x-1)(x+3)(\sqrt{6x+3}+\sqrt{3x+6})}$

$=\lim_{x\to1}\frac{3x-3}{(x-1)(x+3)(\sqrt{6x+3}+\sqrt{3x+6})}$

$=\lim_{x\to1}\frac{3}{(x+3)(\sqrt{6x+3}+\sqrt{3x+6})}$

$=\frac{3}{4(\sqrt{9}+\sqrt{9})}=\frac{1}{8}$

따라서 $\frac{1}{8}=\frac{1}{b}$이므로 $b=8$

4-1 (1) $|f(x)|\le x^2$에서 $-x^2\le f(x)\le x^2$

$\lim_{x\to0}(-x^2)=0$, $\lim_{x\to0}x^2=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to0}f(x)=0$

(2) $-x^2\le f(x)\le x^2$에서

$x^3+2>0$일 때, 각 변을 x^3+2로 나누면

$-\frac{x^2}{x^3+2}\le\frac{f(x)}{x^3+2}\le\frac{x^2}{x^3+2}$

$x^3+2<0$일 때, 각 변을 x^3+2로 나누면

$\frac{x^2}{x^3+2}\le\frac{f(x)}{x^3+2}\le-\frac{x^2}{x^3+2}$

$\lim_{x\to0}\left(-\frac{x^2}{x^3+2}\right)=0$, $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^3+2}=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3+2}=0$

중단원 연습 문제 42~46쪽

1-1 (1) ∞ (2) ∞ (3) 2 (4) $-\frac{1}{3}$

2-1 (1) -1 (2) 0

3-1 (1) 2 (2) 12 (3) -1 (4) 8

4-1 1 **5-1** 5

6-1 (1) $a=4$, $b=-12$ (2) $a=1$, $b=\frac{3}{2}$

7-1 (1) 존재하지 않는다. (2) 존재하지 않는다.
(3) 존재하지 않는다. (4) 0

8-1 3 **9-1** $f(x)=2x^2-8x+6$

1-1 (1) $\lim_{x\to -3}\frac{1}{(x+3)^3}=\infty$

(2) $\lim_{x\to 2}\left\{3+\frac{1}{(x-2)^4}\right\}=\infty$

(3) $\lim_{x\to \infty}\left(2-\frac{3}{|x+1|}\right)=2-0=2$

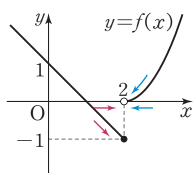
(4) 분모와 분자를 x로 각각 나누면

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{-3x+1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{-3+\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{1}{-3+0}=-\frac{1}{3}$$

2-1 함수 $y=f(x)=\begin{cases}x^2-2x & (x>2)\\ -x+1 & (x\le 2)\end{cases}$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(1) $\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(-x+1)$

$=-1$

(2) $\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}(x^2-2x)=0$

3-1 (1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{3x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{3(x-1)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x+5}{3}=\frac{6}{3}=2$

(2) $\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{\sqrt{x+8}-3}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}2(\sqrt{x+8}+3)$

$=2(\sqrt{9}+3)=12$

(3) 분모와 분자를 x^2으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{-2x^2+x-4}{2x^2+x+3}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

$$=\frac{-2}{2}=-1$$

(4) 분모와 분자를 x로 각각 나누면

$$\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt{4x^2+4x}+6x}{\sqrt{x^2+2x}}=\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt{4+\frac{4}{x}}+6}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$$

$$=\frac{\sqrt{4}+6}{1}=8$$

4-1 $\lim_{x\to 2}\left\{-\frac{1}{4}x(x-4)\right\}=-\frac{1}{2}\times(-2)=1$

$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+3x\right)=4-9+6=1$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to 2}f(x)=1$

5-1 $\lim_{x\to 3-}f(x)=\lim_{x\to 3-}(-x+k)=-3+k$,

$\lim_{x\to 3+}f(x)=\lim_{x\to 3+}(x^2-x-4)=9-3-4=2$

이때 $\lim_{x\to 3}f(x)$가 존재하려면 좌극한과 우극한이 같아야

하므로

$-3+k=2\qquad \therefore k=5$

6-1 (1) $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x^2-4$라고 하면

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=2$, $\lim_{x\to 2}g(x)=0$

이므로

$\lim_{x\to 2}f(x)=0$

즉, $\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)=0$에서

$4+2a+b=0$, $b=-2a-4$

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x^2-4}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{x+a+2}{x+2}=\frac{a+4}{4}$

따라서 $\frac{a+4}{4}=2$이므로

$a=4$, $b=-2a-4=-12$

(2) $f(x)=x-2$, $g(x)=\sqrt{4x+a}-3$이라고 하면

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=b$, $\lim_{x\to 2}f(x)=0$

이므로

$\lim_{x\to 2}g(x)=0$

즉, $\lim_{x\to 2}(\sqrt{4x+a}-3)=0$에서

$\sqrt{8+a}-3=0$, $8+a=9\qquad \therefore a=1$

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{4x+1}+3}{4}$$
$$= \frac{3+3}{4} = \frac{3}{2}$$

$\therefore\ b=\frac{3}{2}$

7-1 (1) $\lim_{x\to -2-} f(x)=1,\ \lim_{x\to -2+} f(x)=3$에서

$\lim_{x\to -2-} f(x) \neq \lim_{x\to -2+} f(x)$이므로

극한 $\lim_{x\to -2} f(x)$는 존재하지 않는다.

(2) $\lim_{x\to 0-} f(x)=2,\ \lim_{x\to 0+} f(x)=-1$에서

$\lim_{x\to 0-} f(x) \neq \lim_{x\to 0+} f(x)$이므로

극한 $\lim_{x\to 0} f(x)$는 존재하지 않는다.

(3) $\lim_{x\to 1-} f(x)=0,\ \lim_{x\to 1+} f(x)=1$에서

$\lim_{x\to 1-} f(x) \neq \lim_{x\to 1+} f(x)$이므로

극한 $\lim_{x\to 1} f(x)$는 존재하지 않는다.

(4) $\lim_{x\to 2-} f(x)=0,\ \lim_{x\to 2+} f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to 2} f(x)=0$

8-1 $x>0$이므로 각 변에 x를 곱하면

$$\frac{9x^2}{3x^2+4} < xf(x) < \frac{6x^3+5x^2}{2x^3+1}$$

$\lim_{x\to\infty} \frac{9x^2}{3x^2+4}=3,\ \lim_{x\to\infty} \frac{6x^3+5x^2}{2x^3+1}=3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty} xf(x)=3$

9-1 $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{2x^2+3x+4}=2$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차함수임을 알 수 있다.

또, $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x^2-1}=-2$에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$이다.

즉, $f(1)=0$이므로

$f(x)=2(x-1)(x-a)$ (a는 상수)라고 하면

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)(x-a)}{(x+1)(x-1)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{2(x-a)}{x+1} = 1-a$$

$1-a=-2$에서 $a=3$이므로

$f(x)=2(x-1)(x-3)=2x^2-8x+6$

2. 함수의 연속

2-1 연속함수

내신 대비 쌍둥이 문제 48~49쪽

1-1 (1) 불연속 (2) 불연속

2-1 (1) $(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ \infty)$ (2) $[-2,\ \infty)$

3-1 (1) $(-\infty,\ \infty)$ (2) $(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ \infty)$

(3) $(-\infty,\ -3]$ (4) $(-\infty,\ \infty)$

1-1 (1) 함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)=4$이고

$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x^2+2x)=8$

이므로 $\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(2) 함수 $f(x)$에 대하여

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(-x^2+4x+2)=6,$

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}(4-\sqrt{6-x})=0$

이므로 극한 $\lim_{x\to 2} f(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

2-1 (1) 함수 $f(x)$의 정의역은 $x+2\neq 0$, 즉 $x\neq -2$인 실수 전체의 집합이므로 정의역을 구간의 기호를 사용하여 나타내면 $(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ \infty)$이다.

(2) 함수 $f(x)$의 정의역은 $x+2\geq 0$, 즉 $x\geq -2$인 실수의 전체의 집합이므로 정의역을 구간의 기호를 사용하여 나타내면 $[-2,\ \infty)$이다.

3-1 (1) 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

(2) 함수 $f(x)$는 $x+2\neq 0$, 즉 $x\neq -2$인 모든 실수에서 연속이므로 $(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ \infty)$에서 연속이다.

(3) 함수 $f(x)$는 $-3-x\geq 0$, 즉 $x\leq -3$인 모든 실수에서 연속이므로 구간 $(-\infty,\ -3]$에서 연속이다.

(4) 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

소단원 확인 문제 51~53쪽

1-1 (1) 연속 (2) 연속 (3) 불연속 (4) 불연속

2-1 (1) $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ \infty)$ (2) $(-\infty,\ -2]$

3-1 (1) $a=-15,\ b=4$ (2) $a=-5,\ b=\dfrac{1}{10}$

1-1 (1) 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=0$이고

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x+1)|x-1|=0$$

이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(2) 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=4$이고

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}2|x-3|=4$$

이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(3) 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=2$이고

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}f(x)&=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}(x+2)=3\end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(4) 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(2-\sqrt{x+3})=0,$$

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(\sqrt{10-x}-2)=1$$

이므로 극한 $\lim_{x\to1}f(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

2-1 (1) 함수 $f(x)$는 $x>1$에서 연속이고, $x<1$에서 연속이다. 그런데

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\sqrt{x+3}=2,$$

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(-3x+4)=1$$

이므로 극한 $\lim_{x\to1}f(x)$가 존재하지 않는다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ \infty)$에서 연속이다.

(2) 함수 $f(x)$는 $-6-3x\geq0$, 즉 $x\leq-2$인 모든 실수에서 연속이므로 구간 $(-\infty,\ -2]$에서 연속이다.

3-1 (1) 함수 $f(x)$가 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이려면 $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2+2x+a}{2x-6}=b$$

이때 $\lim_{x\to3}\dfrac{x^2+2x+a}{2x-6}=b$이고 $\lim_{x\to3}(2x-6)=0$이므로

$$\lim_{x\to3}(x^2+2x+a)=0,\ 즉\ 9+6+a=0$$

$\therefore a=-15$

$$\begin{aligned}\therefore b&=\lim_{x\to3}\frac{x^2+2x-15}{2x-6}\\&=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+5)}{2(x-3)}\\&=\lim_{x\to3}\frac{x+5}{2}=4\end{aligned}$$

(2) 함수 $f(x)$가 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이려면 $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+26}+a}{x+1}=b$$

이때 $\lim_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+26}+a}{x+1}=b$이고 $\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로

$$\lim_{x\to-1}(\sqrt{x+26}+a)=0,\ 즉\ 5+a=0$$

$\therefore a=-5$

$$\begin{aligned}\therefore b&=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+26}-5}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{x+26}-5)(\sqrt{x+26}+5)}{(x+1)(\sqrt{x+26}+5)}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+26}+5)}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{1}{\sqrt{x+26}+5}\\&=\frac{1}{\sqrt{25}+5}=\frac{1}{10}\end{aligned}$$

1-2 연속함수의 성질

내신 대비 쌍둥이 문제 54~55쪽

1-1 (1) 연속 (2) 불연속
2-1 (1) $(-\infty,\ -4)$, $(-4,\ -1)$, $(-1,\ \infty)$
(2) $(-\infty,\ -2)$, $(-2,\ 2)$, $(2,\ \infty)$
3-1 (1) 최댓값과 최솟값을 갖는다.
(2) 최댓값과 최솟값을 갖는다.
4-1 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

1-1 (1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$도 $x=1$에서 연속이다.
따라서 함수 $f(x)g(x)-f(x)-g(x)$도 $x=1$에서 연속이다.
(2) $f(x)=x-1$, $g(x)=(x-1)^2$이라고 하면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x-1}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{x-1}$은 $x=1$에서 불연속이다.
따라서 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=1$에서 불연속이다.

2-1 (1) $f(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+5x+4}=\dfrac{x^2+4x-5}{(x+1)(x+4)}$이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수 $f(x)$는 $x\neq-1$, $x\neq-4$인 모든 실수에서 연속이다.
따라서 함수 $f(x)$는 열린구간
$(-\infty,\ -4)$, $(-4,\ -1)$, $(-1,\ \infty)$
에서 연속이다.
(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x+6}}{x^2-4}=\dfrac{\sqrt{3x+6}}{(x+2)(x-2)}$이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수 $f(x)$는 $x\neq-2$, $x\neq2$인 모든 실수에서 연속이다.
따라서 함수 $f(x)$는 열린구간
$(-\infty,\ -2)$, $(-2,\ 2)$, $(2,\ \infty)$
에서 연속이다.

3-1 (1) $f(x)=\dfrac{-x+3}{x^2+x+1}$에서 $x^2+x+1>0$이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이다.
따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 연속이다.
그러므로 최대·최소 정리에 의하여 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.
(2) 함수 $f(x)$는 $9-2x\geq0$, 즉 $x\leq\dfrac{9}{2}$인 모든 실수에서 연속이므로 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 연속이다.
따라서 최대·최소 정리에 의하여 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

4-1 (1) $f(x)=x^3-3x^2-2x+5$라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고
$f(1)=1>0$, $f(2)=-3<0$
이다.
따라서 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.
즉, 방정식 $x^3-3x^2-2x+5=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
(2) $f(x)=3x^4-2x^3+2x^2-1$이라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고
$f(0)=-1<0$, $f(1)=2>0$
이다.
따라서 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.
즉, 방정식 $3x^4-2x^3+2x^2-1=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

소단원 확인 문제 58~59쪽

1-1 (1) 연속 (2) 불연속 (3) 연속
2-1 (1) $(-\infty,\ \infty)$ (2) $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ \infty)$
3-1 최댓값: (1), (3)
최솟값: (1), (4)
4-1 풀이 참조

1-1 (1) $f(x)=x^2+2x+1$은 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

(2) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2+2x+1}=\dfrac{3x-1}{(x+1)^2}$이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수 $f(x)$는 $x\neq-1$인 모든 실수에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이므로 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 불연속이다.

(3) 함수 $f(x)=(|x|+1)^2$은 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

2-1 (1) $\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)}=\dfrac{x^2+3x+6}{x^2+4}$에서 $x^2+4>0$이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수 $\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)}$는 모든 실수에서 연속이다.

따라서 함수 $\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)}$는 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

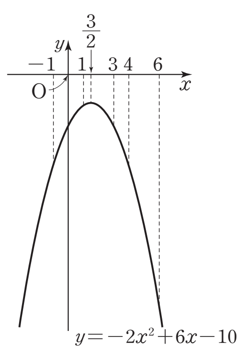
(2) $\dfrac{\{g(x)\}^2}{f(x)-g(x)}=\dfrac{(3x+2)^2}{x^2-3x+2}=\dfrac{(3x+2)^2}{(x-1)(x-2)}$이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수 $\dfrac{\{g(x)\}^2}{f(x)-g(x)}$은 $x\neq1,\ x\neq2$인 모든 실수에서 연속이다.

따라서 함수 $\dfrac{\{g(x)\}^2}{f(x)-g(x)}$는 열린구간 $(-\infty,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ \infty)$에서 연속이다.

3-1 $f(x)=-2x^2+6x-10$

$=-2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{11}{2}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(1) 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

(2) 함수 $f(x)$는 열린구간 $(3,\ 4)$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.

(3) 함수 $f(x)$는 구간 $[1,\ 3)$에서 최댓값은 갖지만 최솟값은 갖지 않는다.

(4) 함수 $f(x)$는 구간 $(4,\ 6]$에서 최솟값은 갖지만 최댓값은 갖지 않는다.

따라서 최댓값을 갖는 구간은 (1), (3)이고, 최솟값을 갖는 구간은 (1), (4)이다.

4-1 $f(x)=x^4-4x^2+3x-7$이라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 연속이고

$f(2)=-1<0,\ f(3)=47>0$

이다.

따라서 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(2,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $x^4-4x^2+3x-7=0$은 열린구간 $(2,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

중단원 연습 문제 62~67쪽

1-1 (1) 연속 (2) 불연속	**2-1** 풀이 참조
3-1 (1) $(-\infty,\ \infty)$ (2) $\left[-\dfrac{5}{4},\ \infty\right)$ (3) $(-\infty,\ \infty)$ (4) $(-\infty,\ 1),\ (1,\ \infty)$	
4-1 $-2,\ 0,\ 2$	**5-1** ㄱ, ㄴ
6-1 2	**7-1** 10
8-1 $a=-5,\ b=4$	**9-1** 풀이 참조
10-1 풀이 참조	**11-1** $-3-2\sqrt{2},\ -3+2\sqrt{2}$
12-1 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$	

1-1 (1) 함수 $f(x)$에 대하여 $f(-3)=3-2\sqrt{13}$이고

$\displaystyle\lim_{x\to-3}f(x)=\lim_{x\to-3}(3-2\sqrt{1-4x})=3-2\sqrt{13}$

이므로 $\displaystyle\lim_{x\to-3}f(x)=f(-3)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 연속이다.

(2) 함수 $f(x)$에 대하여 극한 $\displaystyle\lim_{x\to-3}f(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 불연속이다.

2-1 $\lim_{x\to 1-} f(x)=1$, $\lim_{x\to 1+} f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=1$

그런데 $f(1)=0$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

3-1 (1) 함수 $f(x)=3x^3+2x-1$은 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

(2) 함수 $f(x)=3\sqrt{4x+5}$는 $4x+5\geq 0$, 즉, $x\geq -\frac{5}{4}$인 모든 실수에서 연속이므로 구간 $\left[-\frac{5}{4}, \infty\right)$에서 연속이다.

(3) 함수 $f(x)=|x+2|$는 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

(4) 함수 $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$은 $x-1\neq 0$, 즉 $x\neq 1$인 모든 실수에서 연속이므로 $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$에서 연속이다.

4-1 $\lim_{x\to -2-} f(x)=3$, $\lim_{x\to -2+} f(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to -2-} f(x)\neq \lim_{x\to -2+} f(x)$$

$\lim_{x\to 0-} f(x)=-1$, $\lim_{x\to 0+} f(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to 0-} f(x)\neq \lim_{x\to 0+} f(x)$$

또, $\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=0$, $x=2$에서 불연속이다.

5-1 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

ㄱ. 연속함수의 성질에 의하여 함수 $3f(x)-2g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

ㄴ. 연속함수의 성질에 의하여 함수 $f(x)g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

ㄷ. $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2+x}{2x^2-4x}=\frac{x^2+x}{2x(x-2)}$이고 연속함수의 성질에 의하여 $x\neq 0$, $x\neq 2$인 모든 실수에서 연속이다.

ㄹ. 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x^2-4x}{x^2+x}=\frac{2x^2-4x}{x(x+1)}$이고 연속함수의 성질에 의하여 $x\neq 0$, $x\neq -1$인 모든 실수에서 연속이다.

따라서 모든 실수에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

6-1 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-} (6x+k)=k-6$$

$$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+} (-2x^2+x-1)=-4$$

따라서 $k-6=-4$이므로 $k=2$

7-1 $x\neq 2$일 때,

$$f(x)=\frac{x^3-2x-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x^2+2x+2)}{x-2}$$
$$=x^2+2x+2$$

이때 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

$$\therefore f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} (x^2+2x+2)=10$$

8-1 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+2x+a}{2(x-1)}=b$$

이때 $\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+2x+a}{2(x-1)}=b$이고 $\lim_{x\to 1} 2(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}(3x^2+2x+a)=0$, 즉 $5+a=0$

$\therefore a=-5$

$$\therefore b=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-5}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(3x+5)}{2(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{3x+5}{2}=4$$

9-1 $f(x)=x^3-2x^2+x-3$이라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[2, 3]$에서 연속이고

$f(2)=-1<0$, $f(3)=9>0$

이다.

따라서 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(2, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $x^3-2x^2+x-3=0$은 열린구간 $(2, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

10-1 $g(x)=f(x)-2x$라고 하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고

$g(0)=f(0)=2>0$, $g(1)=f(1)-2=-3<0$

이다.

따라서 사잇값의 정리에 의하여 $g(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.
즉, 방정식 $f(x)-2x=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

11-1 원 $(x-4)^2+(y-1)^2=4$의 중심 $(4,\ 1)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4-1+k|}{\sqrt{2}}=\frac{|3+k|}{\sqrt{2}}$$

이다.

❶ $\frac{|3+k|}{\sqrt{2}}<2$, 즉 $-3-2\sqrt{2}<k<-3+2\sqrt{2}$일 때
주어진 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

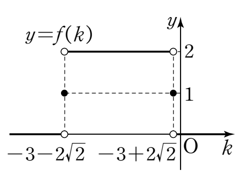
❷ $\frac{|3+k|}{\sqrt{2}}=2$, 즉 $k=-3\pm2\sqrt{2}$일 때
주어진 원과 직선은 한 점에서 만난다.

❸ $\frac{|3+k|}{\sqrt{2}}>2$, 즉 $k<-3-2\sqrt{2}$ 또는 $k>-3+2\sqrt{2}$ 일 때
주어진 원과 직선은 만나지 않는다.

❶, ❷, ❸에서

$$f(k)=\begin{cases} 2 & (-3-2\sqrt{2}<k<-3+2\sqrt{2}) \\ 1 & (k=-3\pm2\sqrt{2}) \\ 0 & (k<-3-2\sqrt{2} \text{ 또는 } k>-3+2\sqrt{2}) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(k)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 구하는 a의 값은 $-3-2\sqrt{2},\ -3+2\sqrt{2}$이다.



12-1 다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(1,\ a)$, $(3,\ a+6)$을 지나므로 $f(1)=a$, $f(3)=a+6$이다.
$g(x)=f(x)-2$라고 하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고

$$g(1)=f(1)-2=a-2,\ g(3)=f(3)-2=a+4$$

이다.
이때 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)-2=0$의 실근이 열린구간 $(1,\ 3)$에서 오직 하나 존재하므로 사잇값의 정리에 의하여

$$g(1)g(3)<0$$

이어야 한다. 즉,

$$(a-2)(a+4)<0 \quad \therefore\ -4<a<2$$

따라서 정수 a는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$이다.

대단원 모의고사 78~81쪽

01 ⑤	02 ①	03 ④	04 ④	05 ②
06 ②	07 ③	08 ③	09 ⑤	10 ②
11 ⑤	12 ②	13 ③	14 ⑤	15 ④
16 ①	17 ③	18 ⑤	19 5	20 2
21 11	22 풀이 참조		23 $\sqrt{3}-1$	

01 $\lim_{x\to-1-}f(x)=-1,\ \lim_{x\to-1+}f(x)=1,\ \lim_{x\to0+}f(x)=2$
이므로 $a=-1,\ b=1,\ c=2$이다.
$\therefore\ -2a+3b+c=2+3+2=7$

02 $$f(x)=\frac{x^3-8}{4|x-2|}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{4|x-2|}$$
$$=\begin{cases} \frac{x^2+2x+4}{4} & (x>2) \\ \frac{-x^2-2x-4}{4} & (x<2) \end{cases}$$

따라서

$$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}\frac{-x^2-2x-4}{4}=\frac{-12}{4}=-3$$

$$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}\frac{x^2+2x+4}{4}=\frac{12}{4}=3$$

$$\therefore\ \lim_{x\to2-}3f(x)+2\lim_{x\to2+}f(x)$$
$$=3\times(-3)+2\times3=-3$$

03 $$\lim_{x\to3}\frac{2x^2+6x-36}{3x-9}=\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)(x+6)}{3(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{2(x+6)}{3}=6$$

04 $$\lim_{x\to2}\left(\frac{2\sqrt{x+2}-4}{x^2-4}+\frac{x-2}{\sqrt{x+14}-4}\right)$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2\sqrt{x+2}-4}{x^2-4}+\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x+14}-4}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$+\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+14}+4)}{(\sqrt{x+14}-4)(\sqrt{x+14}+4)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$+\lim_{x\to3}\frac{(x-2)(\sqrt{x+14}+4)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}+\lim_{x\to2}(\sqrt{x+14}+4)$$

$=\frac{1}{8}+8=\frac{65}{8}$

05 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^4+4x^2+2}}{x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^4}}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=2$

06 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{8x^2+x+3a}+\sqrt{ax^2+3x+1}}{\sqrt{2}x+2a}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{8+\frac{1}{x}+\frac{3a}{x^2}}+\sqrt{a+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{2}+\frac{2a}{x}}$

$=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$

따라서 $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{2}}=3$이므로 $2\sqrt{2}+\sqrt{a}=3\sqrt{2}$, $\sqrt{a}=\sqrt{2}$

$\therefore\ a=2$

07 $x=-t$라고 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이다.

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2-10x+5}+2x)$

$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{4t^2+10t+5}-2t)$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{4t^2+10t+5}-2t)(\sqrt{4t^2+10t+5}+2t)}{\sqrt{4t^2+10t+5}+2t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{10t+5}{\sqrt{4t^2+10t+5}+2t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{10+\frac{5}{t}}{\sqrt{4+\frac{10}{t}+\frac{5}{t^2}}+2}=\frac{10}{\sqrt{4}+2}=\frac{5}{2}$

08 $\lim_{x\to0}\frac{3x}{\sqrt{4+xf(x)}-\sqrt{4-xf(x)}}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{3x}{\sqrt{4+xf(x)}-\sqrt{4-xf(x)}}\times\frac{\sqrt{4+xf(x)}+\sqrt{4-xf(x)}}{\sqrt{4+xf(x)}+\sqrt{4-xf(x)}}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\frac{3x\{\sqrt{4+xf(x)}+\sqrt{4-xf(x)}\}}{2xf(x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{3\{\sqrt{4+xf(x)}+\sqrt{4-xf(x)}\}}{2f(x)}$

$=\frac{3\times4}{2a}=\frac{6}{a}$

따라서 $\frac{6}{a}=4$이므로 $a=\frac{3}{2}$

09 $\lim_{x\to0}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]$

$=\lim_{x\to0}[\{f(x)-g(x)\}^2+2f(x)g(x)]$

$=\lim_{x\to0}\{f(x)-g(x)\}^2+\lim_{x\to0}2f(x)g(x)$

$=3^2+2\times4=17$

10 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{af(x)+4}{f(x)+a}=\frac{4}{a}$

또, $\lim_{x\to0+}f(x)=\infty$이므로

$\lim_{x\to0+}\frac{af(x)+4}{f(x)+a}=\lim_{x\to0+}\frac{a+\frac{4}{f(x)}}{1+\frac{a}{f(x)}}=a$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{af(x)+4}{f(x)+a}=\lim_{x\to0+}\frac{af(x)+4}{f(x)+a}$이므로

$\frac{4}{a}=a$, $a^2=4$

$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=2$

따라서 양수 a의 값은 2이다.

11 $\lim_{x\to1}f(x)=\infty$이므로

$\lim_{x\to1}\{3f(x)-4g(x)\}=\lim_{x\to1}f(x)\left\{3-\frac{4g(x)}{f(x)}\right\}=5$에서

$\lim_{x\to1}\left\{3-\frac{4g(x)}{f(x)}\right\}=0$, 즉 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{3}{4}$

$3f(x)-4g(x)=h(x)$라고 하면

$g(x)=\frac{3}{4}f(x)-\frac{1}{4}h(x)$이고 $\lim_{x\to1}h(x)=5$이다.

$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{3f(x)+2g(x)-1}{5f(x)-6g(x)+3}$

$=\lim_{x\to1}\frac{3f(x)+2\left\{\frac{3}{4}f(x)-\frac{1}{4}h(x)\right\}-1}{5f(x)-6\left\{\frac{3}{4}f(x)-\frac{1}{4}h(x)\right\}+3}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{9}{2}f(x)-\frac{1}{2}h(x)-1}{\frac{1}{2}f(x)+\frac{3}{2}h(x)+3}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\left\{\frac{h(x)}{f(x)}\right\}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left\{\frac{h(x)}{f(x)}\right\}+\frac{3}{f(x)}}$

$=\frac{\frac{9}{2}-0-0}{\frac{1}{2}+0+0}=9$

12 $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{f(x+2)}{2x^3+16}=\lim_{x\to-2}\frac{f(x+2)}{2(x+2)(x^2-2x+4)}$

$\displaystyle=\frac{1}{24}\lim_{x\to-2}\frac{f(x+2)}{x+2}=\frac{5}{12}$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to-2}\frac{f(x+2)}{x+2}=\frac{5}{12}\times24=10$

$x+2=t$라고 하면 $x\to-2$일 때, $t\to0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{f(x+2)}{x+2}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=10$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=10$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2+5x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)}{x}\times\frac{1}{x+5}\right\}=10\times\frac{1}{5}=2$

13 $x>0$이므로 각 변에 x^3을 곱하면

$\displaystyle\frac{x^3(x+4)}{x^4+4x+5}<\frac{x^3f(x)}{3x^2+5x+7}<\frac{x^3(x+6)}{x^4+2x^2+2}$

이때

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(x+4)}{x^4+4x+5}=1,\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3(x+6)}{x^4+2x^2+2}=1$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3f(x)}{3x^2+5x+7}=1$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{x^3f(x)}{3x^2+5x+7}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{x^3}{(3x^2+5x+7)(x+2)}\times(x+2)f(x)\right\}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{\left(3+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)}\times(x+2)f(x)\right\}$

$\displaystyle=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}(x+2)f(x)=1$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to\infty}(x+2)f(x)=3$

14 ⑤ 극한 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하지 않는 상수 a의 값은 $a=0,\ 1,\ 2$이므로 모두 3개이다.

15 함수 $f(x)$는 $x=1,\ 2,\ 3$에서 모두 좌극한과 우극한이 서로 다르므로 함수 $f(x)g(x)$가 모든 실수에서 연속이려면 삼차함수 $g(x)$의 $x=1,\ 2,\ 3$에서의 극한값이 모두 0이 되어야 한다.

따라서 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$

$\therefore g(4)=3\times2\times1=6$

16 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $g(x)$가 연속이고, 열린구간 $(0,\ 2)$에서 방정식 $g(x)=0$이 항상 실근을 갖기 위해서는 $g(0)g(2)<0$이어야 한다.

ㄱ. $g(x)=f(x)-2x$라고 하면 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $g(x)$는 연속이다. 또,

$g(0)g(2)=f(0)\{f(2)-4\}$

$=2\times(-4)=-8<0$

이므로 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 2)$에서 항상 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $g(x)=f(x)-f(2-x)$라고 하면 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $g(x)$는 연속이다. 또,

$g(0)g(2)=\{f(0)-f(2)\}\{f(2)-f(0)\}$

$=2\times(-2)=-4<0$

이므로 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 2)$에서 항상 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $g(x)=f(2-x)-2x$라고 하면 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $g(x)$는 연속이다. 또,

$g(0)g(2)=f(2)\{f(0)-4\}=0\times(-2)=0$

이므로 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 2)$에서 항상 실근을 갖는다고 할 수 없다. (거짓)

ㄹ. $g(x)=f(x)f(2-x)$라고 하면 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $g(x)$는 연속이다. 또,

$g(0)g(2)=\{f(0)f(2)\}\{f(2)f(0)\}=0$

이므로 방정식 $g(x)$는 열린구간 $(0,\ 2)$에서 항상 실근을 갖는다고 할 수 없다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

17 조건 ㈎에서

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x+1}=3,\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x+1}=3$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^2-1)\{f(x)\}^2=3$ ……①

또, 조건 ㈏에서

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+1}{x^2+1}=9,\ \lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+3}{x^2+1}=9$

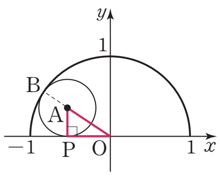
이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x+1)f(x)=9$ ……②

①, ②에 의하여

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-1)f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-1)\{f(x)\}^2}{(x+1)f(x)}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

18 다음 그림과 같이 원 C의 중심을 A, 반원 $x^2+y^2=1$과 원 C의 접점을 B, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 P라고 하자.



이때 $\overline{BO}$는 원 $x^2+y^2=1$의 반지름의 길이이므로

$\overline{BO}=1$

원 C는 x축에 접하므로 원 C의 반지름의 길이는 $|a|$이다.

따라서 $\overline{AO}=\overline{BO}-\overline{AB}=1-b$이고, △APO는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$(1-b)^2=|a|^2+b^2$, $1-2b=a^2$

$\therefore b=\dfrac{1-a^2}{2}$

$$\therefore \lim_{a\to -1+}\frac{b}{a+1}=\lim_{a\to -1+}\frac{1-a^2}{2(a+1)}$$
$$=\lim_{a\to -1+}\frac{(1+a)(1-a)}{2(a+1)}$$
$$=\lim_{a\to -1+}\frac{1-a}{2}=1$$

서술형 문제

19 ❶ $x\neq -1$일 때,

$$f(x)=\frac{x^3+ax^2+b}{x+1}$$

이때 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=-1$에서도 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=f(-1)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+ax^2+b}{x+1}=f(-1)$$

이때 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+ax^2+b}{x+1}=f(-1)$이고

$\lim\limits_{x\to -1}(x+1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to -1}(x^3+ax^2+b)=0$, 즉 $-1+a+b=0$

$\therefore a+b=1$ ……①

❷ $(x+1)f(x)=x^3+ax^2+b$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$3f(2)=8+4a+b$

이때 $f(2)=2$이므로 $6=8+4a+b$

$\therefore 4a+b=-2$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

❸ $$\therefore f(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-x^2+2}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-2x+2)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}(x^2-2x+2)=5$$

채점 기준	배점
❶ 극한의 성질을 이용하여 a와 b의 식 구하기	30 %
❷ $x=2$를 대입하여 a, b의 값 구하기	30 %
❸ $f(x)$가 연속함수임을 이용하여 $f(-1)$의 값 구하기	40 %

20 ❶ $\dfrac{1}{x}=t$로 치환하면 $x\to 0+$일 때, $t\to\infty$이다.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+2x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^3f(t)-1}{\left(\frac{1}{t}\right)^3+\frac{2}{t}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{1+2t^2}=0$$

$\therefore f(t)-t^3=at+b$(a, b는 상수)

즉, $f(x)=x^3+ax+b$

❷ 또, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$에서 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$, 즉 $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+ax+b)=0$

$1+a+b=0$ $\therefore b=-a-1$

❸ $f(x)=x^3+ax-a-1=(x-1)(x^2+x+a+1)$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x^2+x+a+1)=3+a$$

이때 $3+a=0$이므로 $a=-3$, $b=-a-1=2$

$\therefore f(0)=b=2$

채점 기준	배점
❶ 함수 $f(x)$의 식 구하기	30 %
❷ 극한의 성질을 이용하여 a와 b의 식 구하기	30 %
❸ ❶, ❷를 이용하여 $f(0)$의 값 구하기	40 %

21 ➊ $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$에서 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다. 즉, $f(0)=f(2)=0$이다.

따라서 $f(x)=x(x-2)Q(x)$로 놓을 수 있다.

➋ $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x-2)Q(x)}{x}$

$=\lim_{x\to0}(x-2)Q(x)=-2Q(0)$

이때 $-2Q(0)=2$이므로 $Q(0)=-1$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)Q(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}xQ(x)=2Q(2)$

이때 $2Q(2)=3$이므로 $Q(2)=\frac{3}{2}$

또, $f(x)=x(x-2)Q(x)$이므로

$f(f(x))=f(x)\{f(x)-2\}Q(f(x))$

$=x(x-2)Q(x)\{f(x)-2\}Q(f(x))$

➌ $\therefore\lim_{x\to2}\frac{f(f(x))}{(x+3)(x-2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)Q(x)\{f(x)-2\}Q(f(x))}{(x+3)(x-2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{xQ(x)\{f(x)-2\}Q(f(x))}{x+3}$

$=\frac{2Q(2)\{f(2)-2\}Q(f(2))}{5}$

$=\frac{2\times\frac{3}{2}\times(0-2)\times Q(0)}{5}$

$=\frac{-6\times(-1)}{5}=\frac{6}{5}$

따라서 $p=5$, $q=6$이므로

$p+q=11$

채점 기준	배점
➊ 함수 $f(x)$의 식 구하기	30 %
➋ 극한을 이용하여 $f(f(x))$의 식 구하기	30 %
➌ ➊, ➋를 이용하여 $p+q$의 값 구하기	40 %

22 ➊ $g(x)=f(x)-x^2$이라고 하면 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 닫힌구간 $[1, 2]$, $[2, 3]$에서도 각각 연속이다.

➋ $g(0)=f(0)-0=2>0$, $g(1)=f(1)-1=4>0$,
$g(2)=f(2)-4=-1<0$, $g(3)=f(3)-9=3>0$
이므로

$g(1)g(2)<0$, $g(2)g(3)<0$

➌ 따라서 사잇값의 정리에 의하여 함수 $g(x)$는 열린구간 $(1, 2)$, $(2, 3)$에서 각각 적어도 한 개의 실근을 갖는다. 그러므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=x^2$의 그래프는 구간 $(0, 3)$에서 적어도 2개의 교점이 존재한다.

채점 기준	배점
➊ 함수 $g(x)=f(x)-x^2$가 연속임을 알기	30 %
➋ $g(1)g(2)<0$, $g(2)g(3)<0$임을 확인하기	40 %
➌ 사잇값의 정리를 이용하여 교점이 존재함을 증명하기	30 %

23 ➊ 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$과 직선 $y=k$의 교점 Q의 x좌표는

$\frac{1}{2}x^2=k$, $x^2=2k$ $\quad\therefore x=\sqrt{2k}\ (x>0)$

➋ 또, 원 $x^2+(y-3)^2=9$와 직선 $y=k$의 교점 R의 x좌표는

$x^2+(k-3)^2=9$, $x^2=-k^2+6k$

$\therefore x=\sqrt{-k^2+6k}\ (x>0)$

➌ $\therefore\lim_{k\to0+}\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\lim_{k\to0+}\frac{\sqrt{-k^2+6k}-\sqrt{2k}}{\sqrt{2k}}$

$=\lim_{k\to0+}\frac{\sqrt{-k+6}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{3}-1$

채점 기준	배점
➊ 교점 Q의 x좌표 구하기	30 %
➋ 교점 R의 x좌표 구하기	30 %
➌ ➊, ➋를 이용하여 극한값 구하기	40 %

Ⅱ. 미분

1. 미분계수와 도함수

1-1 미분계수

내신 대비 쌍둥이 문제 84~87쪽

1-1 (1) 4 (2) $3a^2+3ah+h^2$
2-1 -2
3-1 (1) 0 (2) -4 (3) -8 (4) 2
4-1 (1) $>$ (2) $=$ (3) $<$
5-1 (1) 2 (2) -5
6-1 풀이 참조

1-1 (1) $\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{8-0}{2}=4$

(2) $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\dfrac{(a+h)^3-a^3}{h}$
$=3a^2+3ah+h^2$

2-1 (직선 AB의 기울기)
$=\dfrac{f(5)-f(3)}{5-3}$
$=$(함수 $f(x)$에서 x의 값이 3에서 5까지 변할 때의 평균변화율)
$=-2$

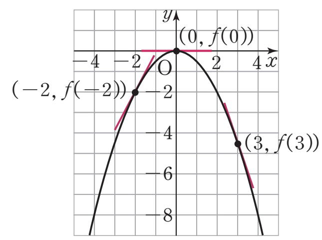
3-1 (1) $f'(2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{100-100}{h}=\lim\limits_{h\to0}0=0$

(2) $f'(2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(-4h-5)-(-5)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-4h}{h}=\lim\limits_{h\to0}(-4)=-4$

(3) $f'(2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\{-2(2+h)^2+1\}-(-8+1)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-2h^2-8h}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}(-2h-8)=-8$

(4) $f'(2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\{(2+h)^2-2(2+h)-3\}-(-3)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h^2+2h}{h}=\lim\limits_{h\to0}(h+2)=2$

4-1 (1) 점 $(-2,\ f(-2))$에서의 접선의 기울기가 양수이므로
$f'(-2)\ \boxed{>}\ 0$
(2) 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선의 기울기가 0이므로
$f'(0)\ \boxed{=}\ 0$
(3) 점 $(3,\ f(3))$에서의 접선의 기울기가 음수이므로
$f'(3)\ \boxed{<}\ 0$



5-1 (1) $f(x)=x^2-2$라고 하면 구하는 접선의 기울기는 $f'(1)$이므로
$f'(1)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(h^2+2h-1)-(-1)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h^2+2h}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}(h+2)=2$

(2) $f(x)=-2x^2+3x+2$라고 하면 구하는 접선의 기울기는 $f'(2)$이므로
$f'(2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\{-2(2+h)^2+3(2+h)+2\}-0}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-2h^2-5h}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}(-2h-5)=-5$

6-1 (i) $x=0$에서의 연속성
$f(0)=0$이고 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x|x|=0$이므로
$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$
따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $x=0$에서의 미분가능성

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h|h|}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h^2}{h}=\lim_{h\to0-}(-h)=0$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h|h|}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to0+}h=0$$

따라서 $\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

소단원 확인 문제 89~90쪽

1-1 ㄴ, ㄷ

2-1 (1) $\frac{1}{6}$ (2) -2

3-1 (1) 연속 (2) 미분가능하지 않다.

1-1 ㄱ. $\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{11-11}{4}=0$ (거짓)

ㄴ. $f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\{3(1+h)^2-1\}-(3-1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{3h^2+6h}{h}=\lim_{h\to0}(3h+6)=6$ (참)

ㄷ. 점 $(0,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)$이고

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(3h^2-1)-(-1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{3h^2}{h}=\lim_{h\to0}3h=0$$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

2-1 (1) $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\frac{1}{x+3}=f'(3)\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

(2) $\lim_{h\to0}\frac{f(3-4h)-f(3)}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(3-4h)-f(3)}{-4h}\times(-2)$ ⬅ $-4h=t$로 놓으면 $h\to0$일 때 $t\to0$

$=\lim_{t\to0}\frac{f(3+t)-f(3)}{t}\times(-2)$

$=f'(3)\times(-2)$

$=-2$

3-1 (1) $f(0)=0$이고 $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(x+1)|x|=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(2) $\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{(h+1)|h|}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{(h+1)(-h)}{h}=\lim_{h\to0-}\{-(h+1)\}=-1$

$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(h+1)|h|}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(h+1)h}{h}=\lim_{h\to0+}(h+1)=1$

따라서

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\neq\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

이므로 $f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$의 값이 존재하지 않는다. 즉, $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

1-2 도함수

내신 대비 쌍둥이 문제

92~93쪽

1-1 (1) $f'(x)=0$, $f'(1)=0$

(2) $f'(x)=1$, $f'(1)=1$

(3) $f'(x)=2x+2$, $f'(1)=4$

(4) $f'(x)=3x^2$, $f'(1)=3$

2-1 (1) $f'(x)=4x^3$ (2) $f'(x)=5x^4$

(3) $y'=7x^6$ (4) $y'=0$

3-1 -108

1-1 (1) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{5-5}{h}=0$

$f'(x)=0$이므로 $f'(1)=0$

(2) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)+3\}-(x+3)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}$

$=\lim_{h\to 0}1=1$

$f'(x)=1$이므로 $f'(1)=1$

(3) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^2+2(x+h)\}-(x^2+2x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2+2h}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(2x+h+2)$

$=2x+2$

$f'(x)=2x+2$이므로 $f'(1)=4$

(4) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)$

$=3x^2$

$f'(x)=3x^2$이므로 $f'(1)=3$

2-1 (1) $f'(x)=4x^{4-1}=4x^3$

(2) $f'(x)=5x^{5-1}=5x^4$

(3) $y'=7x^{7-1}=7x^6$

(4) $y'=0$

3-1 $f'(x)=4x^{4-1}=4x^3$이므로

$f'(-3)=4\times(-3)^3=-108$

소단원 확인 문제

95~96쪽

1-1 (1) $y'=9x^8$ (2) $y'=100x^{99}$ (3) $y'=0$

2-1 $f'(x)=x+3$

3-1 풀이 참조

1-1 (1) $y'=9x^{9-1}=9x^8$

(2) $y'=100x^{100-1}=100x^{99}$

(3) $y'=0$

2-1 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하여 정리하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0$ $\quad\therefore f(0)=0$

$\therefore f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x)+f(h)+xh\}-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+xh}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)}{h}+x\right\}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)-f(0)}{h-0}+x\right\}$

$=f'(0)+x$

$=x+3$

3-1 (i) $n=1$일 때

$f(x)=x$이므로 $f'(x)=1$이다. 이때 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=1$이므로 $f'(-x)=f'(x)$가 성립한다.

(ii) $n\geq 2$일 때

$f'(x)=(2n-1)x^{2n-2}$이므로

$f'(-x)=(2n-1)(-x)^{2n-2}$

Ⅱ

$=(2n-1)(-1)^{2n-2}x^{2n-2}$ ⇐ $2n-2$가 짝수이므로 $(-1)^{2n-2}=1$

$=(2n-1)x^{2n-2}$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$가 성립한다.

1-3 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법

내신 대비 쌍둥이 문제 97~99쪽

1-1 (1) $y'=-\frac{1}{2}$ (2) $y'=20x^3$

2-1 (1) $y'=-2$ (2) $y'=8x-3$

(3) $y'=-x^2-6x+6$

(4) $y'=20x^3-2x$

3-1 (1) $y'=3x^2-2x-5$

(2) $y'=18x+6$

(3) $y'=8x^3-15x^2+22x-6$

(4) $y'=3x^2+6x+2$

4-1 $f'(x)=2(x^2+x+1)(2x+1)$

1-1 (1) $y'=-\frac{1}{2}(x)'=-\frac{1}{2}$

(2) $y'=5(x^4)'=5\times 4x^3=20x^3$

2-1 (1) $y'=(-2x)'+(11)'$

$=-2+0=-2$

(2) $y'=(4x^2)'-(3x)'+(5)'$

$=8x-3+0=8x-3$

(3) $y'=\left(-\frac{1}{3}x^3\right)'-(3x^2)'+(6x)'$

$=-x^2-6x+6$

(4) $y'=(5x^4)'-(x^2)'+(2)'$

$=20x^3-2x+0=20x^3-2x$

3-1 (1) $y'=(x+1)'(x^2-2x-3)+(x+1)(x^2-2x-3)'$

$=(x^2-2x-3)+(x+1)(2x-2)$

$=x^2-2x-3+2x^2-2$

$=3x^2-2x-5$

(2) $y=(3x+1)^2=(3x+1)(3x+1)$이므로

$y'=(3x+1)'(3x+1)+(3x+1)(3x+1)'$

$=3(3x+1)+(3x+1)\cdot 3$

$=9x+3+9x+3$

$=18x+6$

(3) $y'=(2x-3)'(x^3-x^2+4x+3)$
$+(2x-3)(x^3-x^2+4x+3)'$

$=2(x^3-x^2+4x+3)+(2x-3)(3x^2-2x+4)$

$=2x^3-2x^2+8x+6+6x^3-13x^2+14x-12$

$=8x^3-15x^2+22x-6$

(4) $y'=(x)'(x+1)(x+2)+x(x+1)'(x+2)$
$+x(x+1)(x+2)'$

$=1\cdot(x+1)(x+2)+x\cdot 1\cdot(x+2)$
$+x(x+1)\cdot 1$

$=x^2+3x+2+x^2+2x+x^2+x$

$=3x^2+6x+2$

4-1 $f'(x)=2(x^2+x+1)(x^2+x+1)'$

$=2(x^2+x+1)(2x+1)$

소단원 확인 문제 100쪽

1-1 $f'(x)=5x^4-8x^3+4x-1$, $f'(1)=0$

2-1 $a=-1$, $b=4$, $c=5$

3-1 35

1-1 $f'(x)=(x^2-x-1)'(x^3-x^2+1)$
$+(x^2-x-1)(x^3-x^2+1)'$

$=(2x-1)(x^3-x^2+1)+(x^2-x-1)(3x^2-2x)$

$=(2x^4-3x^3+x^2+2x-1)$
$+(3x^4-5x^3-x^2+2x)$

$=5x^4-8x^3+4x-1$

$\therefore f'(1)=5-8+4-1=0$

2-1 $f(0)=c=5$

$f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(1)=2a+b=2$

$f'(-1)=-2a+b=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=4$

$\therefore a=-1$, $b=4$, $c=5$

3-1 $\frac{dQ}{dt}=t^2+2t$이므로 $t=5$일 때 $\frac{dQ}{dt}$의 값은

$5^2+2\times 5=25+10=35$

중단원 연습 문제 103~109쪽

1-1 7	**2-1** (1) 3 (2) -1
3-1 $(0,\ -5)$, $(1,\ -6)$	
4-1 (1) $y'=2x^2-\frac{1}{2}$ (2) $y'=6x^2+10x+4$	
5-1 4	**6-1** $\frac{1}{4}$
7-1 $\frac{2}{7}$	**8-1** $a=3$, $b=10$
9-1 24	**10-1** $a=-10$, $b=9$
11-1 10	**12-1** $\frac{21}{2}$
13-1 8	

1-1 $f(x)=x^2+3x-5$라고 하면

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{13-(-1)}{2}=7$$

2-1 (1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times 3$$
$$=3f'(1)$$
$$=3$$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{2h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times(-1)$$
$$=-f'(1)$$
$$=-1$$

3-1 $y'=6x^2-6x=6x(x-1)$

x축과 평행한 접선의 기울기는 0이므로 $y'=0$에서

$x=0$ 또는 $x=1$

$x=0$일 때, $y=-5$

$x=1$일 때, $y=-6$

따라서 점 P의 좌표는 $(0,\ -5)$, $(1,\ -6)$이다.

4-1 (1) $y'=\frac{2}{3}\times 3x^2-\frac{1}{2}=2x^2-\frac{1}{2}$

(2) $y=(2x+1)(x+1)^2=(2x+1)(x^2+2x+1)$이므로

$$y'=2(x^2+2x+1)+(2x+1)(2x+2)$$
$$=2x^2+4x+2+4x^2+6x+2$$
$$=6x^2+10x+4$$

5-1 $f'(x)=3x^2+a$이므로

$f'(1)=3+a=0$ $\quad\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x+6$이므로

$f(1)=1-3+6=4$

6-1 $f(x)=(2x+a)^2=4x^2+4ax+a^2$이므로

$f'(x)=8x+4a$

$f'(0)=4a=1$이므로 $a=\frac{1}{4}$

7-1 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\frac{2}{7}$

따라서 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선의 기울기는 $\frac{2}{7}$이다.

8-1 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 즉

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$$

이 성립해야 한다. 이때

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(x^2+x+b)=b+2$$
$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(ax+9)=a+9$$
$$f(1)=a+9$$

이므로

$b+2=a+9$ $\quad\therefore b=a+7$

한편, $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

이때

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(ax+9)-(a+9)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{ax-a}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}a=a$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{(x^2+x+b)-(2+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{x^2+x-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}(x+2)=3$$

이므로 $a=3$

$\therefore b=a+7=3+7=10$

9-1 $\frac{1}{x}=h$로 놓으면 $x \longrightarrow \infty$일 때 $h \longrightarrow 0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty} x\left\{f\left(-1+\frac{1}{x}\right)-f(-1)\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$=f'(-1)$$

$f(x)=x(-2x+3)(x^2+1)=(-2x^2+3x)(x^2+1)$

이므로

$$f'(x)=(-4x+3)(x^2+1)+(-2x^2+3x)\cdot 2x$$
$$\therefore f'(-1)=7\times 2+(-5)\times(-2)=24$$

10-1 $x^{10}+ax+b$를 $(x-1)^2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$$x^{10}+ax+b=(x-1)^2Q(x) \qquad \cdots\cdots ①$$

①의 양변에 $x=1$을 대입하여 정리하면

$$a+b=-1$$

①의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$10x^9+a=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하여 정리하면

$$10+a=0 \qquad \therefore a=-10$$

$a=-10$을 $a+b=-1$에 대입하면 $b=9$

11-1 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x-1}=3$에서 $\lim_{x\to 1}\{f(x)+2\}=0$이어야 하므로

$$f(1)=-2$$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$$f'(1)=3$$

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-4}{x-1}=1$에서 $\lim_{x\to 1}\{g(x)-4\}=0$이어야 하므로

$$g(1)=4$$

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$이므로

$$g'(1)=1$$

따라서 함수 $y=f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=3\times 4+(-2)\times 1=10$$

12-1 $\overline{\mathrm{PA}}^2=x^2+(x-9)^2=2x^2-18x+81$

$\overline{\mathrm{PB}}^2=(x-3)^2+(x-3)^2=2x^2-12x+18$

이때 $\overline{\mathrm{PA}}^2\le\overline{\mathrm{PB}}^2$에서

$$2x^2-18x+81\le 2x^2-12x+18,\ \text{즉 } x\ge\frac{21}{2}$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}2x^2-18x+81 & \left(x\ge\frac{21}{2}\right)\\ 2x^2-12x+18 & \left(x<\frac{21}{2}\right)\end{cases}$$

여기서

$$(2x^2-18x+81)'=4x-18$$
$$(2x^2-12x+18)'=4x-12$$
$$4\times\frac{21}{2}-18\ne 4\times\frac{21}{2}-12$$

이므로 $f(x)$는 $x=\frac{21}{2}$에서 미분가능하지 않다.

$x>\frac{21}{2}$, $x<\frac{21}{2}$일 때, 함수 $f(x)$는 이차함수이므로 $x>\frac{21}{2}$, $x<\frac{21}{2}$인 모든 실수 x에서 미분가능하다.

따라서 구하는 a의 값은 $\frac{21}{2}$이다.

13-1 $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-g(x)}{x+2}=-7$에서

$$f(-2)-g(-2)=0$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-g(x)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)-\{g(x)-g(-2)\}}{x-(-2)}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}-\lim_{x\to -2}\frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}$$
$$=f'(-2)-g'(-2)=-7$$
$$\therefore f(-2)=g(-2),\ f'(-2)=g'(-2)-7$$

(가)의 양변에 $x=-2$를 대입하여 정리하면

$$g(-2)=4f(-2)+3$$

이때 $f(-2)=g(-2)$이므로

$$g(-2)=4g(-2)+3,\ 3g(-2)=-3$$
$$\therefore g(-2)=-1$$

(가)에서 $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$이므로 $x=-2$를 대입하면

$$g'(-2)=-4f(-2)+4f'(-2)$$
$$=-4f(-2)+4\{g'(-2)-7\}$$
$$=-4g(-2)+4g'(-2)-28$$
$$=4g'(-2)-24$$
$$\therefore g'(-2)=8$$

따라서 구하는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-2,\ g(-2))$에서의 접선의 기울기는 8이다.

2. 도함수의 활용

2-1 접선의 방정식

내신 대비 쌍둥이 문제 112~113쪽

1-1 (1) $y=-2x-1$ (2) $y=12x+18$

2-1 (1) $y=2x-7$ (2) $y=2x+2$ 또는 $y=2x-2$

3-1 (1) $y=-x+2$ 또는 $y=7x-6$ (2) $y=3x-1$

1-1 (1) $y'=2x-4$이므로 $\mathrm{P}(1,\ -3)$에서의 접선의 기울기는

$2\times1-4=-2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-(-3)=-2(x-1)$

즉, $y=-2x-1$

(2) $y'=3x^2$이므로 $\mathrm{P}(-2,\ -6)$에서의 접선의 기울기는

$3\times(-2)^2=12$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y+6=12(x+2)$

즉, $y=12x+18$

2-1 (1) 접점의 좌표를 $(t,\ t^2-4t+2)$라고 하면 접선의 기울기는 $2t-4$이므로

$2t-4=2 \qquad \therefore t=3$

따라서 접점의 좌표는 $(3,\ -1)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y+1=2(x-3)$, 즉 $y=2x-7$

(2) 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-t)$라고 하면 접선의 기울기는 $3t^2-1$이므로

$3t^2-1=2 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=1$

(i) $t=-1$일 때, 접점의 좌표는 $(-1,\ 0)$이므로 접선의 방정식은

$y=2(x+1)$, 즉 $y=2x+2$

(ii) $t=1$일 때, 접점의 좌표는 $(1,\ 0)$이므로 접선의 방정식은

$y=2(x-1)$, 즉 $y=2x-2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=2x+2$ 또는 $y=2x-2$

3-1 (1) 접점의 좌표를 $(t,\ 2t^2-t+2)$라고 하면 접선의 방정식은

$y-(2t^2-t+2)=(4t-1)(x-t)$

즉, $y=(4t-1)x-2t^2+2$ ……①

이 접선이 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$을 지나므로

$1=(4t-1)-2t^2+2$

$2t^2-4t=0 \qquad \therefore t=0$ 또는 $t=2$

(i) $t=0$을 ①에 대입하여 정리하면

$y=-x+2$

(ii) $t=2$를 ①에 대입하여 정리하면

$y=7x-6$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-x+2$ 또는 $y=7x-6$

(2) 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+1)$이라고 하면 접선의 방정식은

$y-(t^3+1)=3t^2(x-t)$

즉, $y=3t^2x-2t^3+1$ ……①

이 접선이 점 $\mathrm{P}(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=-2t^3+1 \qquad \therefore t=1$

$t=1$을 ①에 대입하여 정리하면 구하는 접선의 방정식은

$y=3x-1$

소단원 확인 문제 115~116쪽

1-1 (1) $y=2x-1$ (2) $y=3x-\frac{5}{4}$

(3) $y=2x-1$ 또는 $y=6x-5$

2-1 $(2,\ 9)$

3-1 4

1-1 (1) $y'=2x+2$이므로 점 $(0,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 2이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y+1=2(x-0)$, 즉 $y=2x-1$

(2) 접점의 좌표를 $(t,\ t^2+2t-1)$이라고 하면 접선의 방정식은

$y-(t^2+2t-1)=(2t+2)(x-t)$

즉, $y=(2t+2)x-t^2-1$ ……①

접선의 기울기가 3이므로

$2t+2=3 \qquad \therefore t=\frac{1}{2}$

$t=\frac{1}{2}$을 ①에 대입하여 정리하면 구하는 접선의 방정식은

$y=3x-\frac{5}{4}$

(3) 접점의 좌표를 $(t,\ t^2+2t-1)$이라고 하면 접선의 방정식은

$y-(t^2+2t-1)=(2t+2)(x-t)$

즉, $y=(2t+2)x-t^2-1$ ……①

이 접선이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$1=(2t+2)-t^2-1$

$t^2-2t=0,\ t(t-2)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=2$

(i) $t=0$을 ①에 대입하여 정리하면

$y=2x-1$

(ii) $t=2$를 ①에 대입하여 정리하면

$y=6x-5$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=2x-1$ 또는 $y=6x-5$

2-1 점 P의 좌표를 $(t,\ -t^2+5t+3)$이라고 하면 접선의 기울기는 $-2t+5$

이때 접선이 직선 $y=x+13$과 평행하므로

$-2t+5=1 \qquad \therefore\ t=2$

$t=2$를 $-t^2+5t+3$에 대입하면

$-2^2+5\times2+3=9$

따라서 점 P의 좌표는 $(2,\ 9)$이다.

3-1 $y'=3x^2+2x+3$이므로 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+t^2+3t-2)$라고 하면 접선의 방정식은

$y-(t^3+t^2+3t-2)=(3t^2+2t+3)(x-t)$

즉, $y=(3t^2+2t+3)x-2t^3-t^2-2$

이 접선이 직선 $y=mx-1$과 일치해야 하므로

$m=3t^2+2t+3$ ……①

$-2t^3-t^2-2=-1$ ……②

②를 풀면 $2t^3+t^2+1=0$에서

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ & & -2 & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$(t+1)(2t^2-t+1)=0$

$\therefore\ t=-1\ (\because\ 2t^2-t+1>0)$

$t=-1$을 ①에 대입하면

$m=3-2+3=4$

2-2 평균값 정리

118~119쪽

내신 대비 쌍둥이 문제

1-1 (1) 1 (2) $\frac{2}{3}$

2-1 (1) 1 (2) $-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}$

3-1 $g(x)=2x+5$

1-1 (1) $f'(c)=2c-2=0$에서 $c=1$

이때 $-1<1<3$이므로 구하는 c의 값은 1이다.

(2) $f(x)=x^3-4x^2+4x$이므로

$f'(x)=3x^2-8x+4$

$f'(c)=3c^2-8c+4=0$에서

$(3c-2)(c-2)=0$

$\therefore\ c=\frac{2}{3}$ 또는 $c=2$

이때 열린구간 $(0,\ 2)$에 존재하는 c의 값은 $\frac{2}{3}$이다.

2-1 (1) $f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{14-0}{2}=7$

이때 $f'(x)=6x+1$이므로

$f'(c)=6c+1=7 \qquad \therefore\ c=1$

$0<1<2$이므로 구하는 c의 값은 1이다.

(2) $f'(c)=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{4+2}{2}=3$

이때 $f'(x)=6x^2+1$이므로

$f'(c)=6c^2+1=3$

$\therefore\ c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $c=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$-1<\frac{\sqrt{3}}{3}<1,\ -1<-\frac{\sqrt{3}}{3}<1$이므로 구하는 c의 값은 $-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

3-1 $g(x)=f(x)+k$ (k는 상수)로 놓으면

$g(0)=f(0)+k$이므로 $k=2$

$\therefore\ g(x)=f(x)+2=2x+5$

소단원 확인 문제 121쪽

1-1 (1) -1 (2) $-\frac{1}{2}$

2-1 9

1-1 (1) $f'(c)=2c+2=0$에서 $c=-1$

이때 $-3<-1<1$이므로 구하는 c의 값은 -1이다.

(2) $f'(c)=\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{3}{3}=1$

$f'(c)=2c+2=1$에서 $c=-\frac{1}{2}$

이때 $-2<-\frac{1}{2}<1$이므로 구하는 c의 값은 $-\frac{1}{2}$이다.

2-1 함수 $f(x)$가 다항함수이므로 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{f(3)-1}{2}$$

을 만족하는 c가 열린구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(c)\le 4$이므로

$$\frac{f(3)-1}{2}\le 4 \qquad \therefore f(3)\le 9$$

따라서 $f(3)$의 최댓값은 9이다.

2-3 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

123~127쪽

내신 대비 쌍둥이 문제

1-1 (1) 증가 (2) 감소 (3) 감소 (4) 감소

2-1 (1) 감소 (2) 증가

3-1 (1) 구간 $(-\infty, 1]$, $[2, \infty)$에서 증가, 닫힌구간 $[1, 2]$에서 감소

(2) 구간 $[-2, 0]$, $[2, \infty)$에서 증가, 구간 $(-\infty, -2]$, $[0, 2]$에서 감소

4-1 (1) 2 (2) 3

5-1 12

6-1 (1) 극댓값: 107, 극솟값: -1 (2) 극댓값: 8, 극솟값: -1

7-1 $a=3$, $b=0$, $c=1$, 극솟값: 1

1-1 (1) $-1\le x_1<x_2\le 2$일 때, $3x_1<3x_2$이므로

$3x_1+2<3x_2+2$, 즉 $f(x_1)<f(x_2)$

따라서 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 $f(x)$는 증가한다.

(2) $-1\le x_1<x_2\le 2$일 때, $x_1-3<x_2-3<0$이므로

$(x_1-3)^2>(x_2-3)^2$, 즉 $f(x_1)>f(x_2)$

따라서 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 $f(x)$는 감소한다.

(3) $-1\le x_1<x_2\le 2$일 때, $0<x_1+2<x_2+2$이므로

$\frac{1}{x_1+2}>\frac{1}{x_2+2}$, 즉 $f(x_1)>f(x_2)$

따라서 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 $f(x)$는 감소한다.

(4) $-1\le x_1<x_2\le 2$일 때, $x_1^3<x_2^3$이므로

$-x_1^3>-x_2^3$, 즉 $f(x_1)>f(x_2)$

따라서 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 $f(x)$는 감소한다.

2-1 (1) $f'(x)=6x^2-6x-12=6(x-2)(x+1)$

$-1<x<2$일 때, $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 열린구간 $(-1, 2)$에서 감소한다.

(2) $f'(x)=2x-4=2(x-2)$

$x>2$일 때, $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 열린구간 $(2, \infty)$에서 증가한다.

3-1 (1) $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$

위 표에서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 1]$, $[2,\ \infty)$에서 증가하고, 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 감소한다.

(2) $f'(x)=8x^3-32x=8x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

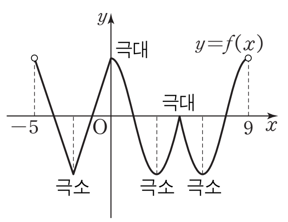
따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-29	$\nearrow$	3	$\searrow$	-29	$\nearrow$

위 표에서 함수 $f(x)$는 구간 $[-2,\ 0]$, $[2,\ \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty,\ -2]$, $[0,\ 2]$에서 감소한다.

4-1 (1) 극대가 되는 x의 값의 개수는 2이다.

(2) 극소가 되는 x의 값의 개수는 3이다.



5-1 $f'(x)=-6x^2+6x+a$이고, $f'(2)=0$이므로

$f'(2)=-24+12+a=0$

$\therefore\ a=12$

6-1 (1) $f'(x)=3x^2+12x-15=3(x+5)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-5$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	107	$\searrow$	-1	$\nearrow$

위 표에서 함수 $f(x)$는 $x=-5$에서 극대이고 극댓값은 $f(-5)=107$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=-1$이다.

(2) $f'(x)=4x^3-12x=4x(x^2-3)$

$=4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	8	$\searrow$	-1	$\nearrow$

위 표에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=8$, $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$에서 극소이고 극솟값은 $f(-\sqrt{3})=-1$, $f(\sqrt{3})=-1$이다.

7-1 $f'(x)=-3x^2+2ax+b$이고, $x=0$과 $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(0)=b=0$, $f'(2)=-12+4a+b=0$

$\therefore\ a=3,\ b=0$

한편, $f(2)=5$이므로

$f(2)=-8+4a+2b+c=5$

$\therefore\ c=1$

$x=0$에서 극솟값을 가지므로 극솟값은

$f(0)=c=1$

따라서 $a=3$, $b=0$, $c=1$이고, 극솟값은 1이다.

소단원 확인 문제 129~131쪽

1-1 ㄷ, ㄹ

2-1 (1) 극댓값: 23, 극솟값: -85

(2) 극댓값: 17, 극솟값: -10

(3) 극댓값: 갖지 않는다. 극솟값: -9

(4) 극댓값: 9, 극솟값: 7

3-1 -2

4-1 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{7}{2}\right)$

1-1 ㄱ. 열린구간 $(-1,\ 0)$에서 $f'(x)<0$이고, 열린구간 $(0,\ 2)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 열린구간 $(-1,\ 2)$에서 감소하다가 증가한다. (거짓)

ㄴ. 열린구간 $(2,\ 4)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다. (거짓)

ㄷ. $f'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀐다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이다. (참)

ㄹ. $f'(4)=0$이고 $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀐다.

따라서 $f(x)$는 $x=4$에서 극대이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

2-1 (1) $f'(x)=3x^2-12x-15=3(x+1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=5$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	23	↘	-85	↗

위 표에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=23$, $x=5$에서 극소이고 극솟값은 $f(5)=-85$이다.

(2) $f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-10	↗	17	↘

위 표에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이고 극댓값은 $f(2)=17$, $x=-1$에서 극소이고 극솟값은 $f(-1)=-10$이다.

(3) $f'(x)=12x^3+12x^2-12x-12$

$=12(x+1)^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	7	↘	-9	↗

위 표에서 함수 $f(x)$는 극댓값은 없고, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=-9$이다.

(4) $f'(x)=-8x^3+8x=-8x(x^2-1)$

$=-8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	9	↘	7	↗	9	↘

위 표에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=9$, $f(1)=9$, $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=7$이다.

3-1 $f'(3)=0$이므로 $f'(x)=3x^2+2ax+b$에서

$27+6a+b=0$

$\therefore\ 6a+b=-27$ ……①

$f(3)=-6$이므로

$27+9a+3b-6=-6$

$\therefore\ 3a+b=-9$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면

$a=-6$, $b=9$

이때 $f(x)=x^3-6x^2+9x-6$이므로

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은

$f(1)=1-6+9-6=-2$

4-1 $f'(x)=-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2)$이므로

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소, $x=2$에서 극대이다.

$\therefore\ \alpha=2$, $\beta=1$

이때

$f(1)=-2+9-12+1=-4$

$f(2)=-16+36-24+1=-3$

이므로 $\mathrm{A}(2,\ -3)$, $\mathrm{B}(1,\ -4)$

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+1}{2},\ \frac{(-3)+(-4)}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\ -\frac{7}{2}\right)$$

2-4 함수의 그래프와 그 활용

132~137쪽

내신 대비 쌍둥이 문제

1-1 풀이 참조

2-1 (1) 최댓값: 48, 최솟값: -28

(2) 최댓값: 42, 최솟값: -17

3-1 $3\sqrt{3}$ cm

4-1 (1) 3 (2) 4

5-1 $a<-\frac{5}{27}$, $a>1$일 때 1개, $a=-\frac{5}{27}$, $a=1$일 때 2개,

$-\frac{5}{27}<a<1$일 때 3개

6-1 풀이 참조

7-1 풀이 참조

1-1 (1) $f'(x)=-12x^2+2x+2=-2(6x^2-x-1)$

$=-2(3x+1)(2x-1)$

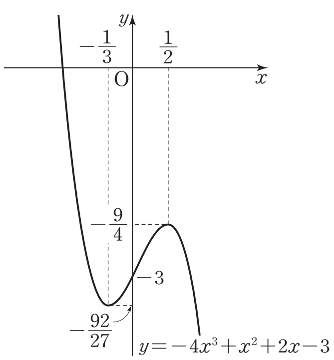
$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{92}{27}$	$\nearrow$	$-\frac{9}{4}$	$\searrow$

또, $f(0)=-3$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축과 점 $(0, -3)$에서 만난다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



(2) $f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

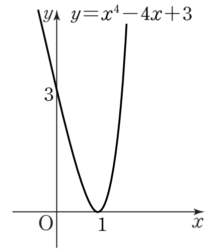
$f'(x)=0$에서 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

또, $f(0)=3$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축과 점 $(0, 3)$에서 만난다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



2-1 (1) $f'(x)=-6x^2-6x+36=-6(x^2+x-6)$

$=-6(x+3)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	4	$\nearrow$	48	$\searrow$	-28

위 표에서 $f(x)$의 최댓값은 48, 최솟값은 -28이다.

(2) $f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$

$=12(x^3-2x^2-x+2)$

$=12(x+1)(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	42	$\searrow$	-17	$\nearrow$	15	$\searrow$	10

위 표에서 $f(x)$의 최댓값은 42, 최솟값은 -17이다.

3-1 원뿔의 높이를 x cm, 밑면의 반지름의 길이를 r cm라고 하면 $0<x<9$이고

$x^2+r^2=9^2 \qquad \therefore r^2=81-x^2$

이때 원뿔의 부피를 $V(x)$ cm^{3}라고 하면

$$V(x)=\frac{1}{3}\pi r^2 x=\frac{\pi}{3}(81-x^2)x=\frac{\pi}{3}(81x-x^3)$$

$$V'(x)=\frac{\pi}{3}(81-3x^2)$$

$V'(x)=0$에서 $x=3\sqrt{3}$ ($\because$ $0<x<9$)
열린구간 $(0,\ 9)$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$3\sqrt{3}$	$\cdots$	9
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	$54\sqrt{3}\pi$	$\searrow$	

위 표에서 $V(x)$는 $x=3\sqrt{3}$일 때 극대이면서 최대이다.
따라서 구하는 원뿔의 높이는 $3\sqrt{3}$ cm이다.

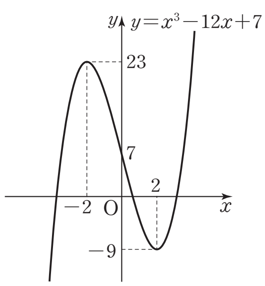
4-1 (1) $f(x)=x^3-12x+7$이라고 하면

$$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	23	$\searrow$	-9	$\nearrow$

위 표를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

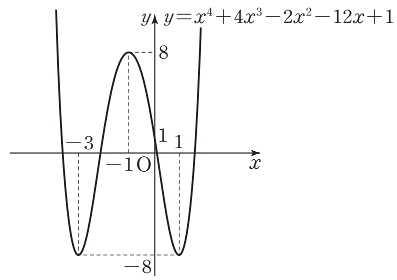
(2) $f(x)=x^4+4x^3-2x^2-12x+1$이라고 하면

$$\begin{aligned}f'(x)&=4x^3+12x^2-4x-12\\&=4(x^3+3x^2-x-3)\\&=4(x+3)(x+1)(x-1)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$
따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	8	$\searrow$	-8	$\nearrow$

위 표를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 네 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

5-1 $f(x)=x^3+x^2-x$, $g(x)=a$라고 하면

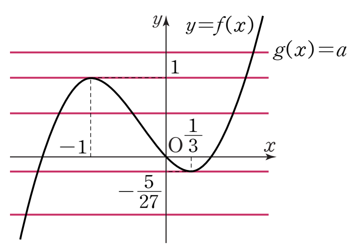
$$f'(x)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$

위 표를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



한편, 함수 $g(x)$의 그래프는 x축에 평행한 직선이므로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수, 즉 주어진 방정식의 실근의 개수를 상수 a의 값에 따라 조사하면 다음과 같다.

(i) $a<-\frac{5}{27}$, $a>1$일 때, 1개

(ii) $a=-\frac{5}{27}$, $a=1$일 때, 2개

(iii) $-\frac{5}{27}<a<1$일 때, 3개

6-1 $f(x)=x^3-(3x^2-4)=x^3-3x^2+4$라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$x\geq 0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	0	↗

위 표에서 $x\geq 0$일 때 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이므로 $x^3-3x^2+4\geq 0$, 즉 $x^3\geq 3x^2-4$가 성립한다.

7-1 $f(x)=(3x^4+1)-4x^3=3x^4-4x^3+1$이라고 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↘	0	↗

위 표에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이므로 모든 실수 x에 대하여 $3x^4-4x^3+1\geq 0$, 즉 $3x^4+1\geq 4x^3$이 성립한다.

소단원 확인 문제 138~140쪽

1-1 (가) -1 (나) 2 (다) $+$ (라) ↗ (마) -19

2-1 풀이 참조

3-1 $a=2$, $b=-18$

4-1 $-16<a<16$

5-1 $k>4$

1-1 $f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	8	↘	-19	↗

$\therefore$ (가) -1 (나) 2 (다) $+$ (라) ↗ (마) -19

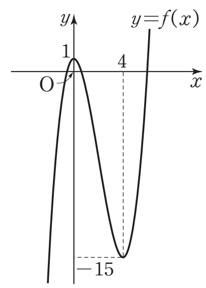
2-1 (1) $f'(x)=\frac{3}{2}x^2-6x=\frac{3}{2}x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-15	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f'(x)=6x^3-6x^2-6x+6=6(x^3-x^2-x+1)$

$=6(x+1)(x-1)^2$

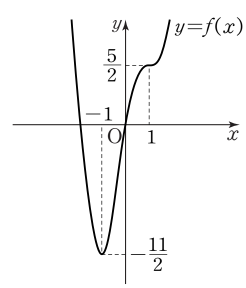
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{11}{2}$	↗	$\frac{5}{2}$	↗

또, $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점을 지난다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 오른쪽 그림과 같다.



3-1 $f'(x)=x^3+3x^2-4x-12=(x+3)(x+2)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=2$
따라서 닫힌구간 $[-2,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	14	$\searrow$	-18	$\nearrow$	50

위 표에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 -18을 가진다.
$\therefore\ a=2,\ b=-18$

4-1 $f(x)=x^3-12x-a$라고 하면 삼차방정식 $x^3-12x-a=0$이 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 조건은
$(f(x)$의 극댓값$)\times(f(x)$의 극솟값$)<0$ ……①
이다.
한편, $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$이므로 $f(x)$의
극댓값은 $f(-2)=16-a$ ……②
극솟값은 $f(2)=-16-a$ ……③
②, ③을 ①에 대입하여 풀면
$(16-a)(-16-a)<0$
$(a-16)(a+16)<0$
$\therefore\ -16<a<16$

5-1 $f(x)=x^3-3x^2+k$라고 하면 $x>0$일 때 주어진 부등식이 성립하려면 $f(x)$의 최솟값이 0보다 커야 한다.
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로 $f'(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=2$
따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$k-4$	$\nearrow$

위 표에서 $x>0$일 때 함수 $f(x)$의 최솟값은 $k-4$이다.
따라서 $k-4>0$에서 $k>4$

2-5 속도와 가속도

142~143쪽

내신 대비 쌍둥이 문제

1-1 (1) 속도: 9, 가속도: 12 (2) 2
2-1 (1) 10 m/s (2) 시각: 3초, 최고 높이: 45 m
3-1 450 m

1-1 (1) 시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라고 하면
$$v(t)=\frac{dx}{dt}=3t^2-6t$$
$a(t)=v'(t)=6t-6$
이므로 $t=3$에서의 점 P의 속도와 가속도는
$v(3)=3\times3^2-6\times3=9$
$a(3)=6\times3-6=12$
(2) 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로
$v(t)=3t^2-6t=0$에서
$3t(t-2)=0$
$\therefore\ t=0$ 또는 $t=2$
이때 $0<t<2$이면 $v(t)<0$, $t>2$이면 $v(t)>0$이므로 점 P는 $t=2$일 때 운동 방향을 바꾼다.

2-1 (1) 로켓을 쏘아 올리고 t초가 지난 후의 속도를 $v(t)$ m/s라고 하면 $v(t)=30-10t$이므로
$v(2)=30-10\times2=10$
따라서 2초가 지난 후의 속도는 10 m/s이다.
(2) 로켓이 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0 m/s이므로
$v(t)=30-10t=0\qquad\therefore\ t=3$
즉, 로켓은 쏘아 올려진지 3초 후 최고 높이에 도달한다. 또, 그때의 높이 x m는
$x=30\times3-5\times3^2=90-45=45$
이므로 최고 높이는 45 m이다.

3-1 시각 t에서의 열차의 속도를 $v(t)$ m/s라고 하면
$$v(t)=\frac{dx}{dt}=60-4t$$
열차가 정지하는 순간의 속도는 0 m/s이므로
$60-4t=0\qquad\therefore\ t=15$
즉, 15초 후에 열차가 정지한다. 이때 정지할 때까지 열차가 움직인 거리는
$60\times15-2\times15^2=900-450=450\ (\mathrm{m})$

소단원 확인 문제 144쪽

1-1 6

2-1 ㄴ

1-1 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 하면

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=9t^2-1$$

운동 방향이 바뀌는 순간의 속도는 0이므로

$$v(t)=9t^2-1=0$$

$$\therefore\ t=-\frac{1}{3} \text{ 또는 } t=\frac{1}{3}$$

그런데 $t\geq 0$이므로 $t=\frac{1}{3}$

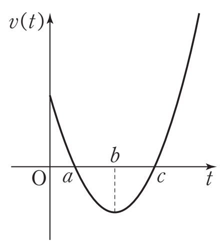
이때 시각 t에서의 가속도를 $a(t)$라고 하면

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=18t$$

따라서 $t=\frac{1}{3}$일 때의 가속도는

$$a\left(\frac{1}{3}\right)=18\times\frac{1}{3}=6$$

2-1 ㄱ. 시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$라고 하면 $v(t)=x'(t)$이다.
이때 $v(t)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $t=b$일 때 점 P의 속도는 최소이다. (거짓)



ㄴ. $t=c$일 때 속도가 0이므로 $t=c$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다. (참)

ㄷ. 시각 t에서의 점 P의 가속도를 $a(t)$라고 하면 $a(t)=v'(t)$이다.
이때 $v(t)$의 그래프에서 점 $(c,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 양수이므로 $a(c)=v'(c)>0$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

중단원 연습 문제 147~155쪽

1-1 (1) $y=1$ (2) $y=-3x+2$
(3) $y=9x+6$ 또는 $y=9x-26$

2-1 12

3-1 풀이 참조

4-1 (1) 속도: $22\ \text{m/s}$, 가속도: $-4\ \text{m/s}^2$
(2) 걸린 시간: $\frac{15}{2}$초, 움직인 거리: $\frac{225}{2}$ m

5-1 $a=2,\ b=0$

6-1 $\frac{1}{2}$

7-1 1

8-1 $0<x\leq 2000$

9-1 $a<0$ 또는 $a>4$

10-1 $a>3$

11-1 31

12-1 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm

1-1 $f(x)=x^3-3x^2+1$이라고 하면

$$f'(x)=3x^2-6x$$

(1) $f'(0)=0$이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=0\cdot(x-0) \qquad \therefore\ y=1$$

(2) 접선의 기울기가 -3이어야 하므로 접점의 x좌표를 t라고 하면

$$f'(t)=3t^2-6t=-3 \qquad \therefore\ t=1$$

$t=1$일 때 접점의 y좌표는

$$y=1-3+1=-1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-(-1)=-3(x-1)$$

즉, $y=-3x+2$

(3) 직선 $x+9y+1=0$의 기울기가 $-\frac{1}{9}$이므로

이 직선과 수직인 접선의 기울기는 9이다.

접점의 x좌표를 t라고 하면

$$f'(t)=3t^2-6t=9 \qquad \therefore\ t=-1 \text{ 또는 } t=3$$

(i) $t=-1$일 때 접점의 y좌표를 구하면

$$y=-1-3+1=-3$$

이때 접선의 방정식은

$y+3=9(x+1)$, 즉 $y=9x+6$

(ii) $t=3$일 때 접점의 y좌표를 구하면

$$y=27-27+1=1$$

이때 접선의 방정식은

$y-1=9(x-3)$, 즉 $y=9x-26$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=9x+6$ 또는 $y=9x-26$

2-1 $f'(x)=6x^2+a$이고 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=6+a=0 \quad \therefore a=-6$

$f(x)=2x^3-6x+8$이므로

$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로 극댓값은

$f(-1)=-2+6+8=12$

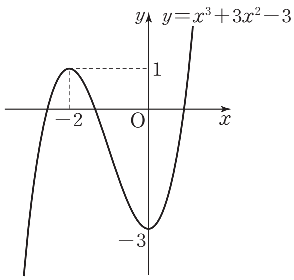
3-1 (1) $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1 (극대)	$\searrow$	-3 (극소)	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



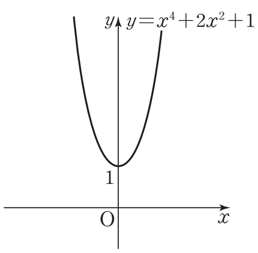
(2) $f'(x)=4x^3+4x=4x(x^2+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1 (극소)	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



4-1 (1) t초 후의 속도를 $v(t)$ m/s, 가속도를 $a(t)$ m/s^{2}이라 고 하면 $v(t)=30-4t$, $a(t)=-4$이므로

$v(2)=30-8=22$, $a(2)=-4$

따라서 2초 후의 속도는 22 m/s, 가속도는 -4 m/s^2 이다.

(2) 정지할 때의 속도는 0 m/s이므로 시각 t일 때 정지한다고 하면

$v(t)=30-4t=0$에서 $t=\frac{15}{2}$(초)

$t=\frac{15}{2}$일 때

$x=30\times\frac{15}{2}-2\left(\frac{15}{2}\right)^2=\frac{225}{2}$

따라서 정지할 때까지 움직인 거리는 $\frac{225}{2}$ m이다.

5-1 $f(x)=x^3+ax+b$라고 하면

$f(-1)=-1-a+b=-3$에서 $a-b=2$

한편, $f'(x)=3x^2+a$이므로

$f'(-1)=3+a$

따라서 접선의 방정식은

$y+3=(3+a)(x+1)$

즉, $y=(a+3)x+a$

이 접선이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로 $a=2$

$a=2$를 $a-b=2$에 대입하면 $b=0$

6-1 $y'=3x^2$이므로 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=3(x-1)$, 즉 $y=3x-1$

따라서 $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$, $\mathrm{R}(0,\ -1)$이므로

$\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-0\right)^2+(0+1)^2}$

$=\sqrt{\frac{1}{9}+1}=\frac{\sqrt{10}}{3}$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+(2-0)^2}$

$=\sqrt{\frac{4}{9}+4}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$

$\overline{\mathrm{QR}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}$이므로 $n=\frac{1}{2}$

7-1 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=1$에서 극소이다.

따라서 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $f(x)$가 최소가 되는 x의 값은 1이다.

8-1 $y'=-3x^2+6000x=-3x(x-2000)$

따라서 $x>0$일 때 y의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2000	$\cdots$	3000
y'		$+$	0	$-$	
y		↗		↘	

위 표에서 y가 증가하는 x의 값의 범위는 $0<x\le 2000$이다.

9-1 방정식 $x^3+3x^2-a=0$이 오직 하나의 실근을 가지려면 두 함수 $f(x)=x^3+3x^2$, $g(x)=a$의 그래프가 한 점에서 만나야 한다.

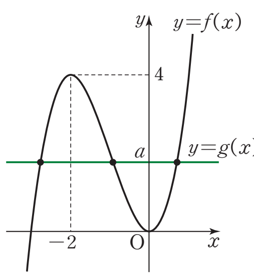
함수 $f(x)=x^3+3x^2$에서

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗



한편, $g(x)=a$의 그래프는 x축에 평행한 직선이므로 이 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 한 점에서 만나기 위한 상수 a의 값의 범위는 위 그림에서

$a<0$ 또는 $a>4$

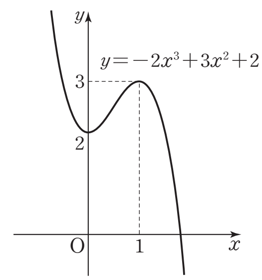
10-1 $3x^2+2<2x^3+a$를 변형하면 $-2x^3+3x^2+2<a$

$f(x)=-2x^3+3x^2+2$라고 하면

$f'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1)$

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	2	↗	3	↘



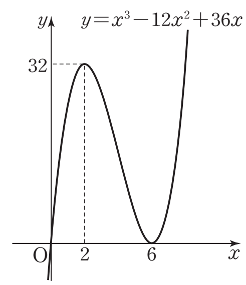
$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값이 3이므로 $f(x)<a$를 만족하는 a의 값의 범위는 $a>3$이다.

11-1 $f(x)=x^3-12x^2+36x$라고 하면

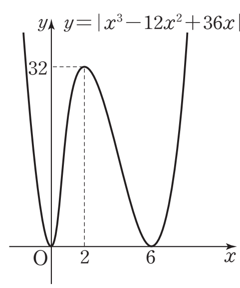
$f'(x)=3x^2-24x+36=3(x-2)(x-6)$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	32	↘	0	↗



이때 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 $|x^3-12x^2+36x|=n$이 서로 다른 네 개의 실근을 갖는 자연수 n의 값은 $1, 2, 3, \cdots, 31$이므로 구하는 개수는 31이다.

12-1 그릇의 높이를 x cm, 윗면의 반지름의 길이를 r cm라고 하면

$x^2+r^2=100$

그릇의 부피를 $V\ \mathrm{cm}^3$라고 하면

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 x=\frac{1}{3}\pi(100-x^2)x$$

$$=\frac{\pi}{3}(100x-x^3)(0<x<10)$$

$$V'=\frac{\pi}{3}(100-3x^2)$$

$V'=0$에서 $x=\frac{10\sqrt{3}}{3}$

$0<x<10$에서 V의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{10\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	10
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	$\frac{2000\sqrt{3}}{27}$	$\searrow$	

따라서 그릇의 용량이 최대일 때 그릇의 높이는

$\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm이다.

대단원 **모의고사** 167~171쪽

01 ①	**02** 18	**03** ①	**04** ③	**05** ③
06 ①	**07** ③	**08** ④	**09** -5, 27	
10 ⑤	**11** ⑤	**12** ②	**13** ②	**14** ④
15 ③	**16** ②	**17** $-4<a<4$		**18** ④
19 ④	**20** ④	**21** -4	**22** $a=3$, $b=-3$	
23 -3	**24** $a=3$, $b=3$		**25** $0<m<16$	

01 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4f(x^2)}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)-4\{f(x^2)-1\}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{x^2-4}{x-2}-4\times\frac{f(x^2)-1}{x-2}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left\{(x+2)-4\times\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\times(x+2)\right\}$$

$$=4-16f'(4)$$

$$=4-16\times(-1)$$

$$=20$$

02 $y=(x^2-1)(2x+1)(2x+1)$이므로

$$y'=2x(2x+1)(2x+1)+2(x^2-1)(2x+1)+2(x^2-1)(2x+1)$$

$$=16x^3+12x^2-6x-4$$

따라서 $a=16$, $b=12$, $c=-6$, $d=-4$이므로

$a+b+c+d=18$

03 $f'(1)=a$ (a는 상수)로 놓으면 $f(x)=2x^3+4ax$이므로

$f'(x)=6x^2+4a$

$f'(1)=6+4a=a$에서 $a=-2$

따라서 $f'(x)=6x^2-8$이므로

$f'(-1)=6-8=-2$

04 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이고 $g(2)=k$이므로

$\lim_{x\to 2}g(x)=k$가 성립한다. 이때

$$\lim_{x\to 2}g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{2x-4}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}f'(2)=\frac{3}{2}$$

$\therefore k=\frac{3}{2}$

05 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$에서 $x_1<x_2$일 때 $f(x_2)-f(x_1)<0$

즉, $f(x_1)>f(x_2)$이므로 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다.

따라서 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=-3x^2+4kx-(k^2+3)\le 0$

즉, $3x^2-4kx+k^2+3\ge 0$이어야 하므로 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=4k^2-3k^2-9=k^2-9\le 0$$

$\therefore -3\le k\le 3$

따라서 정수 k의 개수는 7이다.

06 점 P가 원점을 지날 때의 위치는 0이므로

$t^3-4t^2+3t=0$, $t(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=1$ 또는 $t=3$

$t>0$이므로 $t=1$ 또는 $t=3$

그러므로 $t=3$일 때 점 P는 마지막으로 원점을 지난다.

한편, 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 하면

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=3t^2-8t+3$$

$t=3$에서의 속도 $v(3)$은

$$v(3)=27-24+3=6$$

따라서 점 P가 마지막으로 원점을 지날 때의 속도는 6이다.

07 점 $(0,\ 0)$에서의 접선이 $y=2x$이므로

$$f'(0)=2$$

주어진 극한에서 $\frac{1}{n}=h$로 놓으면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n^2\left\{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)\right\}^2&=\lim_{h\to0+}\frac{\{f(2h)-f(0)\}^2}{h^2}\\&=\lim_{h\to0+}\left\{\frac{f(2h)-f(0)}{h}\right\}^2\\&=\lim_{h\to0+}\left\{\frac{f(2h)-f(0)}{2h-0}\times2\right\}^2\\&=\{2f'(0)\}^2=4^2=16\end{aligned}$$

08 $f'(x)=2x$이므로 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이다.

따라서 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이고

그 방정식은

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-1),\ \text{즉 } y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

따라서 $\mathrm{Q}(5,\ 0)$, $\mathrm{R}\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$이므로 삼각형 OQR의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{OR}}=\frac{1}{2}\times5\times\frac{5}{2}=\frac{25}{4}$$

09 접점의 x좌표를 t라고 하면 $y'=3x^2+6x$이므로 접선의 기울기는 $3t^2+6t$이다.

$3t^2+6t=9$에서

$$t^2+2t-3=0\qquad\therefore\ t=-3\ \text{또는}\ t=1$$

(i) $t=-3$일 때, 접점의 좌표가 $(-3,\ 0)$이므로

$$-27+k=0\qquad\therefore\ k=27$$

(ii) $t=1$일 때, 접점의 좌표가 $(1,\ 4)$이므로

$$9+k=4\qquad\therefore\ k=-5$$

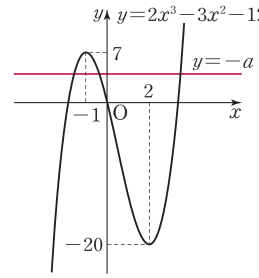
10 $2x^3-2x^2-3x=x^2+9x-a$를 변형하면

$$2x^3-3x^2-12x=-a$$

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$, $g(x)=-a$라고 하면

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=7$, $x=2$에서 극솟값 $f(2)=-20$을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



방정식 $2x^3-3x^2-12x=-a$의 실근은 두 함수 $f(x)=2x^3-3x^2-12x$, $g(x)=-a$의 그래프의 교점의 x좌표이므로 서로 다른 두 개의 음의 근과 한 개의 양의 근을 가지려면 위 그림과 같이 $0<-a<7$이어야 한다. 즉, $-7<a<0$이므로 정수 a의 개수는 6이다.

11 $f(x)-k=(x-a)(x-b)(x-c)$이므로

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)+k$$

$$f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$$

ㄱ. $f'(a)+f'(b)=(a-b)(a-c)+(b-a)(b-c)$
$=(b-a)(-a+c+b-c)$
$=(b-a)^2>0$ (참)

ㄴ. $f'(b)+f'(c)=(b-a)(b-c)+(c-a)(c-b)$
$=(c-b)(-b+a+c-a)$
$=(c-b)^2>0$ (참)

ㄷ. $f'(c)+f'(a)=(c-a)(c-b)+(a-b)(a-c)$
$=(c-a)(c-b-a+b)$
$=(c-a)^2>0$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

12 $\mathrm{P}\left(t,\ -\frac{1}{2}t^2+2\right)$로 놓으면 $0<t<2$이고

$$\overline{\mathrm{PQ}}=2t,\ \overline{\mathrm{PS}}=-t^2+4$$

직사각형 PQRS의 넓이를 $S(t)$라고 하면

$$S(t)=\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PS}}=2t(-t^2+4)=-2t^3+8t$$

$$S'(t)=-6t^2+8=-6\left(t^2-\frac{4}{3}\right)$$

따라서 $0<t<2$에서 $S(t)$는 $t=\frac{2}{\sqrt{3}}$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

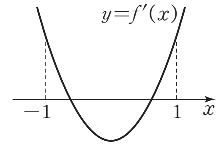
$$\begin{aligned}S\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)&=2\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\left\{-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+4\right\}\\&=2\times\frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{4}{3}+4\right)=\frac{32\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

13 제품 한 개의 판매 가격을 x원 인상하면 제품 한 개를 판매했을 때의 이익은 $(150+x)$원이고, 한 달 판매량은 $(60000-x^2)$개이다.
따라서 한 달 동안의 이익을 $f(x)$원이라고 하면
$0<x<100\sqrt{6}$이고
$f(x)=(150+x)(60000-x^2)$
$f'(x)=(60000-x^2)+(150+x)(-2x)$
$=-3x^2-300x+60000$
$=-3(x+200)(x-100)$
$f(x)$는 $x=100$일 때 극대이면서 최대가 된다. 이때
$f(100)=(150+100)(60000-100^2)$
$=12500000$
이므로 한 달 동안의 최대 이익은 1250만 원이다.

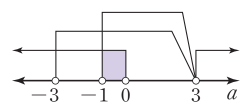
14 $h(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
ㄱ. $f'(0)=0$, $f(0)<0$, $g'(0)>0$이므로
$h(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$
$=f(0)g'(0)<0$ (참)
ㄴ. $g(1)=0$, $f(1)=0$이므로
$h(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=0$ (참)
ㄷ. $f'(2)=0$, $f(2)>0$, $g'(2)>0$이므로
$h(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)>0$ (참)
ㄹ. $f(3)=0$, $f'(3)<0$, $g(3)>0$이므로
$h(3)=f'(3)g(3)+f(3)g'(3)<0$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15 접점의 좌표를 $(t, -t^3+3t^2-2t+1)$로 놓으면 접선의 기울기가 -2이므로
$-3t^2+6t-2=-2$
가 성립한다. 이 방정식을 풀면
$t=0$ 또는 $t=2$
(i) $t=0$일 때, 접점의 좌표는 $(0, 1)$이고 접선의 방정식은
$y-1=-2(x-0)$, 즉 $y=-2x+1$ ……①
(ii) $t=2$일 때, 접점의 좌표는 $(2, 1)$이고 접선의 방정식은
$y-1=-2(x-2)$, 즉 $y=-2x+5$ ……②
두 직선 ①, ② 사이의 거리는 점 $(0, 1)$과 직선 ② 사이의 거리와 같다.
이때 $y=-2x+5$를 변형하면 $2x+y-5=0$이므로
점 $(0, 1)$과 직선 ② 사이의 거리는
$$\frac{|2\times0+1\times1+(-5)|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

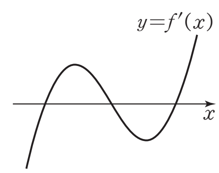
16 $f'(x)=3x^2+2ax+a$이고, 함수 $f(x)$가 열린구간 $(-1, 1)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로
$\frac{D}{4}=a^2-3a>0$, $a(a-3)>0$
$\therefore a<0$ 또는 $a>3$
(ii) $-1<$(꼭짓점의 x좌표)<1이므로
$-1<-\frac{a}{3}<1$ $\therefore -3<a<3$
(iii) $f'(-1)>0$이고 $f'(1)>0$이므로
$f'(-1)=3-a>0$에서 $a<3$
$f'(1)=3a+3>0$에서 $a>-1$
$\therefore -1<a<3$
(i), (ii), (iii)을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는
$-1<a<0$이다.



17 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값을 가진다고 하면
$f'(\alpha)=0$이고 $x=\alpha$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀐다. 이때
$f'(x)=4x^3-12x+2a$
이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 x축과 서로 다른 세 점에서 만난다.



방정식 $4x^3-12x+2a=0$이 서로 다른 세 실근을 가지므로 함수 $y=4x^3-12x+2a$의 극댓값과 극솟값의 곱이 0보다 작다.
$y'=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$에서 $x=-1$에서 극댓값은 $-4+12+2a=2a+8$, $x=1$에서 극솟값은 $4-12+2a=2a-8$이므로
$(2a+8)(2a-8)<0$ $\therefore -4<a<4$

18 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$로 놓으면 $f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 모든 실수 x에 대하여
$f(-x)=-f(x)$이다.
$-ax^3+bx^2-cx+d=-ax^3-bx^2-cx-d$에서 양변의 계수를 비교하면
$b=0,\ d=0$
따라서 $f(x)=ax^3+cx$이고
$f'(x)=3ax^2+c$
$f'(\sqrt{3})=0$에서 $9a+c=0$, 즉 $c=-9a$
따라서 $f(x)=ax^3-9ax=ax(x+3)(x-3)$이므로 x축과 만나는 점의 x좌표는 $-3,\ 0,\ 3$이고 가장 큰 값은 3이다.

19 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간의 속도는 0이다. 이때 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 하면

$$v(t)=\frac{d}{dt}f(t)=f'(t)$$

이고, $f'(t)=0$인 t의 값이 $t=a,\ t=c,\ t=e,\ t=g$이므로 점 P의 운동 방향이 바뀌는 횟수는 4이다.

20 쏘아 올린 지 t초 후의 높이가 720 m 이상이어야 하므로
$at-5t^2\ge720$
$f(t)=at-5t^2$, $g(t)=720$이라고 하면 $f(t)$의 그래프가 $g(t)$의 그래프보다 위에 있는 부분이 있어야 한다. 즉
($f(t)$의 극댓값)≥720 ……①
한편, $f'(t)=a-10t$이므로 $f(t)$는 $t=\frac{a}{10}$에서 극대이고 극댓값은

$$f\left(\frac{a}{10}\right)=a\times\frac{a}{10}-5\times\left(\frac{a}{10}\right)^2=\frac{a^2}{20}$$

따라서 ①에 의하여

$$\frac{a^2}{20}\ge720,\ a^2\ge14400$$

$\therefore\ a\ge120$ 또는 $a\le-120$
그런데 $a>0$이므로 $a\ge120$
따라서 a의 최솟값은 120이다.

서술형 문제

21 ❶ $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x-1}$의 값이 존재하고 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}\{f(x)+1\}=0 \qquad \therefore\ f(1)=-1$$

❷
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$$

❸ 함수 $y=\{f(x)\}^2$을 미분하면 $y'=2f(x)f'(x)$
❹ 따라서 $x=1$에서의 미분계수는
$2f(1)f'(1)=2\times(-1)\times2=-4$

채점 기준	배점
❶ $f(1)$의 값 구하기	25 %
❷ $f'(1)$의 값 구하기	25 %
❸ 함수 $y=\{f(x)\}^2$의 도함수 구하기	25 %
❹ $x=1$에서의 미분계수 구하기	25 %

22 ❶ $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$가 존재해야 한다. 이때

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}ax^2=a$$
$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(6x+b)=6+b$$

이므로
$f(1)=a=6+b$
$\therefore\ a-b=6$ ……①
❷ 한편, $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{ax^2-a}{x-1}=\lim_{x\to1-}a(x+1)=2a$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(6x+b)-(6+b)}{x-1}=\lim_{x\to1+}6=6$$

에서 $2a=6$ $\quad\therefore\ a=3$
❸ $a=3$을 ①에 대입하면 $b=-3$

채점 기준	배점
❶ $x=1$에서 연속임을 이용하여 a, b의 관계식 구하기	45 %
❷ $x=1$에서의 미분계수가 존재함을 이용하여 a의 값 구하기	45 %
❸ b의 값 구하기	10 %

23 ❶ $f(x)$가 삼차함수이고 최고차항의 계수가 1이므로 $f'(x)$는 이차함수이고 최고차항의 계수는 3이다.
또, 함수 $f(x)$가 $x=1$, $x=3$에서 극값을 가지므로
$f'(1)=f'(3)=0$
$\therefore\ f'(x)=3(x-1)(x-3)$
❷ 한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$이고
$f'(2)=3(2-1)(2-3)=-3$
이므로 구하는 접선의 기울기는 -3이다.

채점 기준	배점
❶ $f'(x)$ 구하기	70 %
❷ 접선의 기울기 구하기	30 %

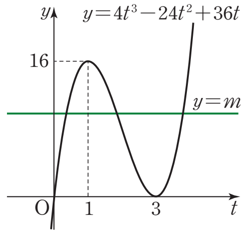
24 ❶ $f'(x)=3ax^2-12ax=3ax(x-4)$
$a<0$이므로 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-1)$	↘	$f(0)$	↗	$f(2)$

따라서 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최소이다. 한편,
$f(-1)=-7a+b$, $f(2)=-16a+b$
이고 $a<0$이므로 $f(2)>f(-1)$이다.
따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $f(2)=-16a+b$를 가진다.
❷ 이때 최댓값이 3, 최솟값이 -45이므로
$3=f(0)=b$, $-45=f(2)=-16a+b$
$\therefore\ a=3,\ b=3$

채점 기준	배점
❶ 미분을 이용하여 $f(x)$가 최대, 최소가 되는 x의 값 구하기	70 %
❷ a, b의 값 구하기	30 %

25 ❶ 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_1, v_2라고 하면
$v_1=4t^3-24t^2+36t$
$v_2=m$
❷ 이때 두 점 P, Q의 속도가 같은 순간이 3번 있으므로 방정식 $4t^3-24t^2+36t=m$이 $t>0$에서 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
$f(t)=4t^3-24t^2+36t$라고 하면
$f'(t)=12t^2-48t+36$
$=12(t-1)(t-3)$
이므로 $f(t)$는 $t=1$에서 극댓값 $f(1)=16$을 갖고, $t=3$에서 극솟값 $f(3)=0$을 갖는다.
따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



❸ 방정식 $4t^3-24t^2+36t=m$이 $t>0$에서 서로 다른 세 실근을 가지므로
$0<m<16$

채점 기준	배점
❶ 두 점 P, Q의 속도 구하기	25 %
❷ 함수 $f(t)=4t^3-24t^2+36t$의 극댓값, 극솟값 구하기	50 %
❸ m의 값의 범위 구하기	25 %

Ⅲ. 적분

1. 부정적분과 정적분

1-1 부정적분

내신 대비 쌍둥이 문제 174~176쪽

1-1 (1) $f(x)=1$ (2) $f(x)=6x^2$
(3) $f(x)=20x^4$ (4) $f(x)=9x^2-4x$

2-1 (1) $\frac{1}{2}x^2+C$ (C는 적분상수)
(2) $\frac{1}{7}x^7+C$ (C는 적분상수)
(3) $\frac{1}{9}x^9+C$ (C는 적분상수)
(4) $\frac{1}{11}x^{11}+C$ (C는 적분상수)

3-1 (1) x^3-2x^2+x+C (C는 적분상수)
(2) x^6-2x^4+C (C는 적분상수)
(3) $2x^3-2x^2+C$ (C는 적분상수)
(4) $3x^3+3x^2+x+C$ (C는 적분상수)

4-1 $f(x)=2x^5-x^3-x$

1-1 (1) $x'=1$이므로 $\int 1\,dx=x+C$ (C는 적분상수)

$\therefore\ f(x)=1$

(2) $(2x^3)'=6x^2$이므로

$\int 6x^2dx=2x^3+C$ (C는 적분상수)

$\therefore\ f(x)=6x^2$

(3) $(4x^5)'=20x^4$이므로

$\int 20x^4dx=4x^5+C$ (C는 적분상수)

$\therefore\ f(x)=20x^4$

(4) $(3x^3-2x^2)'=9x^2-4x$이므로

$\int(9x^2-4x)dx=3x^3-2x^2+C$ (C는 적분상수)

$\therefore\ f(x)=9x^2-4x$

2-1 (1) $\int x\,dx=\frac{1}{1+1}x^{1+1}+C=\frac{1}{2}x^2+C$ (C는 적분상수)

(2) $\int x^6dx=\frac{1}{6+1}x^{6+1}+C=\frac{1}{7}x^7+C$ (C는 적분상수)

(3) $\int x^8dx=\frac{1}{8+1}x^{8+1}+C=\frac{1}{9}x^9+C$ (C는 적분상수)

(4) $\int x^{10}dx=\frac{1}{10+1}x^{10+1}+C=\frac{1}{11}x^{11}+C$

(C는 적분상수)

3-1 (1) $\int(3x^2-4x+1)dx$

$=\int 3x^2dx-\int 4x\,dx+\int 1\,dx$

$=3\int x^2dx-4\int x\,dx+\int 1\,dx$

$=3\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)-4\left(\frac{1}{2}x^2+C_2\right)+(x+C_3)$

$=x^3-2x^2+x+(3C_1-4C_2+C_3)$

여기서 $3C_1-4C_2+C_3$을 C라고 하면

$\int(3x^2-4x+1)dx=x^3-2x^2+x+C$

(2) $\int(6x^5-8x^3)dx=\int 6x^5dx-\int 8x^3dx$

$=6\int x^5dx-8\int x^3dx$

$=6\left(\frac{1}{6}x^6+C_1\right)-8\left(\frac{1}{4}x^4+C_2\right)$

$=x^6-2x^4+(6C_1-8C_2)$

여기서 $6C_1-8C_2$를 C라고 하면

$\int(6x^5-8x^3)dx=x^6-2x^4+C$

(3) $\int x(6x-4)dx=\int(6x^2-4x)dx$

$=\int 6x^2dx-\int 4x\,dx$

$=6\int x^2dx-4\int x\,dx$

$=6\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)-4\left(\frac{1}{2}x^2+C_2\right)$

$=2x^3-2x^2+(6C_1-4C_2)$

여기서 $6C_1-4C_2$를 C라고 하면

$\int x(6x-4)dx=2x^3-2x^2+C$

(4) $\int(3x+1)^2dx$

$=\int(9x^2+6x+1)dx$

$=\int 9x^2dx+\int 6x\,dx+\int 1\,dx$

$=9\int x^2dx+6\int x\,dx+\int 1\,dx$

$$=9\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)+6\left(\frac{1}{2}x^2+C_2\right)+(x+C_3)$$

$$=3x^3+3x^2+x+(9C_1+6C_2+C_3)$$

여기서 $9C_1+6C_2+C_3$을 C라고 하면

$$\int(3x+1)^2dx=3x^3+3x^2+x+C$$

4-1 $f(x)$는 $f'(x)$의 부정적분이므로

$f(x)=2x^5-x^3-x+C$ (C는 적분상수)

꼴로 나타낼 수 있다.

이때 $f(1)=0$이므로 $C=0$이다.

따라서 $f(x)=2x^5-x^3-x$이다.

소단원 확인 문제 178~180쪽

1-1 (1) $f(x)=5x^4$ (2) $f(x)=6x$ (3) $f(x)=4x^3-6x$

2-1 (1) $\frac{1}{2}x+C$ (C는 적분상수)

(2) $-x^4+x^2-x+C$ (C는 적분상수)

(3) $2x^4-4x^3+3x^2-x+C$ (C는 적분상수)

(4) $\frac{1}{4}x^4-x+C$ (C는 적분상수)

3-1 (1) $-x^3+2x+C$ (C는 적분상수)

(2) $\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+x+C$ (C는 적분상수)

4-1 $f(x)=x^5-3x^4+6x^2-x-4$

1-1 (1) $(x^5)'=5x^4$이므로

$$\int 5x^4\,dx=x^5+C \text{ (}C\text{는 적분상수)}$$

$\therefore f(x)=5x^4$

(2) $(3x^2)'=6x$이므로

$$\int 6x\,dx=3x^2+C \text{ (}C\text{는 적분상수)}$$

$\therefore f(x)=6x$

(3) $(x^4-3x^2)'=4x^3-6x$이므로

$$\int(4x^3-6x)dx=x^4-3x^2+C \text{ (}C\text{는 적분상수)}$$

$\therefore f(x)=4x^3-6x$

2-1 (1) $\int\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x+C$

(2) $\int(-4x^3+2x-1)dx$

$$=-\int4x^3\,dx+\int2x\,dx-\int1\,dx$$

$$=-4\int x^3\,dx+2\int x\,dx-\int1\,dx$$

$$=-4\left(\frac{1}{4}x^4+C_1\right)+2\left(\frac{1}{2}x^2+C_2\right)-(x+C_3)$$

$$=-x^4+x^2-x+(-4C_1+2C_2-C_3)$$

여기서 $-4C_1+2C_2-C_3$을 C라고 하면

$$\int(-4x^3+2x-1)dx=-x^4+x^2-x+C$$

(3) $\int(2x-1)^3dx$

$$=\int(8x^3-12x^2+6x-1)dx$$

$$=\int8x^3dx-\int12x^2dx+\int6x\,dx-\int1\,dx$$

$$=8\int x^3dx-12\int x^2dx+6\int x\,dx-\int1\,dx$$

$$=8\left(\frac{1}{4}x^4+C_1\right)-12\left(\frac{1}{3}x^3+C_2\right)+6\left(\frac{1}{2}x^2+C_3\right)-(x+C_4)$$

$$=2x^4-4x^3+3x^2-x+(8C_1-12C_2+6C_3-C_4)$$

여기서 $8C_1-12C_2+6C_3-C_4$를 C라고 하면

$$\int(2x-1)^3dx=2x^4-4x^3+3x^2-x+C$$

(4) $\int(x-1)(x^2+x+1)dx=\int(x^3-1)dx$

$$=\int x^3dx-\int1\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{4}x^4+C_1\right)-(x+C_2)$$

$$=\frac{1}{4}x^4-x+(C_1-C_2)$$

여기서 C_1-C_2를 C라고 하면

$$\int(x-1)(x^2+x+1)dx=\frac{1}{4}x^4-x+C$$

3-1 (1) $\int(x^5-2x^2-x+4)dx-\int(x^5+x^2-x+2)dx$

$$=\int\{(x^5-2x^2-x+4)-(x^5+x^2-x+2)\}dx$$

$$=\int(-3x^2+2)dx=-x^3+2x+C \text{ (}C\text{는 적분상수)}$$

(2) $\int \frac{x^6}{x^2+1}dx+\int \frac{1}{x^2+1}dx$

$=\int\left(\frac{x^6}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$=\int \frac{x^6+1}{x^2+1}dx$

$=\int \frac{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}{x^2+1}dx$

$=\int(x^4-x^2+1)\,dx$

$=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+x+C$ (C는 적분상수)

4-1 $f(x)$는 $f'(x)$의 부정적분이므로

$f(x)=x^5-3x^4+6x^2-x+C$ (C는 적분상수)

꼴로 나타낼 수 있다.

이때 $f(2)=2$이므로 $2=6+C$ $\therefore C=-4$

따라서 $f(x)=x^5-3x^4+6x^2-x-4$이다.

1-2 정적분

182~186쪽

내신 대비 쌍둥이 문제

1-1 (1) 0 (2) 0

2-1 (1) 625 (2) -54 (3) -54 (4) -42

3-1 875만 원

4-1 (1) $3x^2-4$ (2) $(4x-1)(x^2-4)$

5-1 $a=1$, $f(x)=3x^2+1$

7-1 (1) 0 (2) 12

8-1 (1) 28 (2) $\frac{52}{3}$

9-1 (1) $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{22}{3}$

1-1 (1) $\int_a^a f(x)=0$이므로 $\int_3^3(x^4-2x^2)dx=0$

(2) $\int_{-1}^{3}(3x^3+1)dx+\int_3^{-1}(3x^3+1)dx$

$=\int_{-1}^{3}(3x^3+1)dx-\int_{-1}^{3}(3x^3+1)dx$

$=0$

2-1 (1) $\int x^4dx=\frac{1}{5}x^5+C$ (C는 적분상수)이므로

$\int_{-5}^{0}x^4dx=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-5}^{0}$

$=-\left\{\frac{1}{5}\times(-5)^5\right\}=625$

(2) $\int(x^3-x)dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+C$ (C는 적분상수)

이므로

$\int_{-4}^{2}(x^3-x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-4}^{2}$

$=\left(\frac{1}{4}\times2^4-\frac{1}{2}\times2^2\right)-\left\{\frac{1}{4}\times(-4)^4-\frac{1}{2}\times(-4)^2\right\}$

$=2-56=-54$

(3) $\int(3x^3-3)dx=\frac{3}{4}x^4-3x+C$ (C는 적분상수)

이므로

$\int_3^1(3x^3-3)dx$

$=\left[\frac{3}{4}x^4-3x\right]_3^1$

$=\left(\frac{3}{4}\times1^4-3\times1\right)-\left(\frac{3}{4}\times3^4-3\times3\right)$

$=-\frac{9}{4}-\frac{207}{4}=-54$

(4) $\int x(x^2-3)dx=\int(x^3-3x)dx$

$=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+C$ (C는 적분상수)

이므로

$\int_4^2 x(x^2-3)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2\right]_4^2$

$=\left(\frac{1}{4}\times2^4-\frac{3}{2}\times2^2\right)-\left(\frac{1}{4}\times4^4-\frac{3}{2}\times4^2\right)$

$=-2-40=-42$

3-1 5년 후의 자동차의 가격은

$f(5)=2000+\int_0^5(30t-300)dt$

$=2000+\left[15t^2-300t\right]_0^5$

$=2000-1125=875$ (만 원)

4-1 (1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{1}^{x}(3t^2-4)dt=3x^2-4$

(2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-3}^{x}(4t-1)(t^2-4)dt=(4x-1)(x^2-4)$

5-1 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\displaystyle\int_{a}^{a}f(t)dt=a^3+a-2$

$\displaystyle\int_{a}^{a}f(t)dt=0$이므로

$a^3+a-2=(a-1)(a^2+a+2)=0 \qquad \therefore\ a=1$

한편, 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{a}^{x}f(t)dt=\dfrac{d}{dx}(x^3+x-2)$

$\therefore\ f(x)=3x^2+1$

7-1 (1) $\displaystyle\int_{-1}^{3}(x^3-3x-2)dx$

$=\left[\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{3}{2}x^2-2x\right]_{-1}^{3}=0$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x+1)^2dx+\int_{-1}^{2}(x-1)^2dx$

$=\displaystyle\int_{-1}^{2}\{(x+1)^2+(x-1)^2\}dx$

$=\displaystyle\int_{-1}^{2}(2x^2+2)\,dx$

$=\left[\dfrac{2}{3}x^3+2x\right]_{-1}^{2}=12$

8-1 (1) $\displaystyle\int_{0}^{3}(x^3-5x+1)dx+\int_{3}^{4}(x^3-5x+1)dx$

$=\displaystyle\int_{0}^{4}(x^3-5x+1)dx$

$=\left[\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{5}{2}x^2+x\right]_{0}^{4}=28$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-2x+4)dx+\int_{1}^{3}(x^2-2x+4)dx$

$=\displaystyle\int_{-1}^{3}(x^2-2x+4)dx$

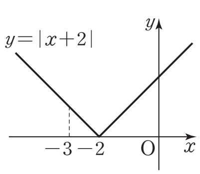
$=\left[\dfrac{1}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-1}^{3}=\dfrac{52}{3}$

9-1 (1) 닫힌구간 $[-3,\ 0]$에서

$|x+2|$

$=\begin{cases}-x-2 & (-3\le x<-2)\\ x+2 & (-2\le x\le 0)\end{cases}$

이므로



$\displaystyle\int_{-3}^{0}|x+2|dx$

$=\displaystyle\int_{-3}^{-2}|x+2|dx+\int_{-2}^{0}|x+2|dx$

$=\displaystyle\int_{-3}^{-2}(-x-2)dx+\int_{-2}^{0}(x+2)dx$

$=\left[-\dfrac{1}{2}x^2-2x\right]_{-3}^{-2}+\left[\dfrac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{0}$

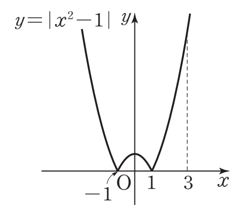
$=\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{5}{2}$

(2) 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서

$|x^2-1|$

$=\begin{cases}-x^2+1 & (0\le x<1)\\ x^2-1 & (1\le x\le 3)\end{cases}$

이므로



$\displaystyle\int_{0}^{3}|x^2-1|dx$

$=\displaystyle\int_{0}^{1}|x^2-1|dx+\int_{1}^{3}|x^2-1|dx$

$=\displaystyle\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx+\int_{1}^{3}(x^2-1)dx$

$=\left[-\dfrac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}+\left[\dfrac{1}{3}x^3-x\right]_{1}^{3}$

$=\dfrac{2}{3}+\dfrac{20}{3}=\dfrac{22}{3}$

소단원 확인 문제 187~188쪽

1-1 (1) 2 (2) -2	**2-1** (1) 9 (2) $\dfrac{14}{3}$
3-1 (1) 27 (2) $\dfrac{13}{2}$	**4-1** $a=-4,\ f(1)=-2$

1-1 (1) $\displaystyle\int_{1}^{2}(3x^2-4x+1)dx$

$=\left[x^3-2x^2+x\right]_{1}^{2}=2$

(2) $\displaystyle\int_{2}^{0}(x-1)(x^2+x+7)dx$

$=\displaystyle\int_{2}^{0}(x^3+6x-7)dx$

$=\left[\dfrac{1}{4}x^4+3x^2-7x\right]_{2}^{0}=-2$

2-1 (1) $\int_{-1}^{2}(3x^3+x^2-5x)dx+\int_{-1}^{2}(x^3-x^2+3x-1)dx$

$=\int_{-1}^{2}\{(3x^3+x^2-5x)+(x^3-x^2+3x-1)\}dx$

$=\int_{-1}^{2}(4x^3-2x-1)dx$

$=\Big[x^4-x^2-x\Big]_{-1}^{2}=9$

(2) $\int_{1}^{3}\frac{x(x^2+1)}{x+1}dx-2\int_{1}^{3}\frac{x^2-2}{x+1}dx$

$=\int_{1}^{3}\left(\frac{x^3+x}{x+1}-\frac{2x^2-4}{x+1}\right)dx$

$=\int_{1}^{3}\frac{x^3-2x^2+x+4}{x+1}dx$

$=\int_{1}^{3}\frac{(x+1)(x^2-3x+4)}{x+1}dx$

$=\int_{1}^{3}(x^2-3x+4)dx$

$=\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x\Big]_{1}^{3}=\frac{14}{3}$

3-1 (1) $\int_{-1}^{1}(5x^4-6x+1)dx+\int_{1}^{2}(5x^4-6x+1)dx$

$=\int_{-1}^{2}(5x^4-6x+1)dx$

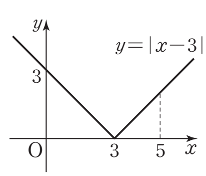
$=\Big[x^5-3x^2+x\Big]_{-1}^{2}=27$

(2) 닫힌구간 $[0,\ 5]$에서

$|x-3|$

$=\begin{cases}-x+3 & (0\le x<3)\\ x-3 & (3\le x\le 5)\end{cases}$

이므로



$\int_{0}^{5}|x-3|dx$

$=\int_{0}^{3}|x-3|dx+\int_{3}^{5}|x-3|dx$

$=\int_{0}^{3}(-x+3)dx+\int_{3}^{5}(x-3)dx$

$=\Big[-\frac{1}{2}x^2+3x\Big]_{0}^{3}+\Big[\frac{1}{2}x^2-3x\Big]_{3}^{5}$

$=\frac{9}{2}+2=\frac{13}{2}$

4-1 주어진 등식의 양변에 $x=-1$를 대입하면

$\int_{-1}^{-1}f(t)dt=-a-4$

$\int_{-1}^{-1}f(t)dt=0$이므로 $-a-4=0$ $\quad\therefore a=-4$

한편, 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}f(t)dt=\frac{d}{dx}(x^2-4x-5)$

따라서 $f(x)=2x-4$이므로 $f(1)=-2$

중단원 연습 문제 191~196쪽

1-1 (1) $f(x)=12x^3-2x$ (2) $f(x)=5x^4-6x-1$

2-1 (1) x^4-3x^3+4x+C (C는 적분상수)

(2) $3x^3+3x^2+x+C$ (C는 적분상수)

3-1 (1) $f(x)=2x^3-2x^2+3x-1$

(2) $f(x)=x^3-2x^2+x+1$

4-1 (1) 64 (2) 8

5-1 11

6-1 $Q(t)=\frac{1}{3}t^3+t^2+3\ (2<t<5)$

7-1 15

8-1 $\frac{1}{2}$

9-1 32

10-1 $\frac{22}{3}$

11-1 -7

12-1 -4

1-1 (1) $f(x)=(3x^4-x^2+C)'=12x^3-2x$

(2) $f(x)=(x^5-3x^2-x+C)'=5x^4-6x-1$

2-1 (1) $\int(4x^3-9x^2+4)dx$

$=\int 4x^3dx-\int 9x^2dx+\int 4\,dx$

$=x^4-3x^3+4x+C$ (C는 적분상수)

(2) $\int(3x+1)^2dx$

$=\int(9x^2+6x+1)\,dx$

$=\int 9x^2dx+\int 6x\,dx+\int 1\,dx$

$=3x^3+3x^2+x+C$ (C는 적분상수)

3-1 (1) $f(x)$는 $f'(x)$의 부정적분이므로

$f(x)=2x^3-2x^2+3x+C$ (C는 적분상수)

꼴로 나타낼 수 있다.

이때 $f(1)=2$이므로 $3+C=2$ $\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=2x^3-2x^2+3x-1$이다.

(2) $f(x)$는 $f'(x)$의 부정적분이고, $f'(x)=3x^2-4x+1$이므로

$f(x)=x^3-2x^2+x+C$ (C는 적분상수)

꼴로 나타낼 수 있다.

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+x+1$이다.

4-1 (1) $\int_{-1}^{3}(x-1)^3dx+\int_{-1}^{3}(x+1)^3dx$

$=\int_{-1}^{3}\{(x-1)^3+(x+1)^3\}dx$

$=\int_{-1}^{3}(2x^3+6x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^4+3x^2\right]_{-1}^{3}=64$

(2) $\int_{-1}^{0}(3x^2-7x+2)dx+\int_{0}^{3}(3x^2-7x+2)dx$

$=\int_{-1}^{3}(3x^2-7x+2)dx$

$=\left[x^3-\frac{7}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{3}=8$

5-1 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $2x+5$이므로

$f'(x)=2x+5$

$\therefore f(x)=x^2+5x+C$ (C는 적분상수)

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1, 1)$을 지나므로

$f(-1)=1$

즉, $1-5+C=1$ $\therefore C=5$

따라서 $f(x)=x^2+5x+5$이므로 $f(1)=11$

6-1 $Q(t)=\int(t^2+2t)\,dt=\frac{1}{3}t^3+t^2+C$ (C는 적분상수)

이때 $Q(3)=21$이므로

$9+9+C=21$ $\therefore C=3$

$\therefore Q(t)=\frac{1}{3}t^3+t^2+3$ $(2<t<5)$

7-1 함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -2, 0이므로

$f'(x)=ax(x+2)(a\neq 0)$

로 놓을 수 있다.

이때 $f'(-1)=-1$이므로 $a=1$

$f'(x)=x(x+2)$이므로

$f(x)=\int x(x+2)\,dx=\int(x^2+2x)\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3+x^2+C$ (C는 적분상수)

한편, $f(0)=-3$이므로 $C=-3$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3$이므로 $f(3)=15$

8-1 함수 $f(t)$의 부정적분을 $F(t)$라고 하면

$\lim_{x\to -1}\frac{1}{x^2-1}\int_{-1}^{x}f(t)dt$

$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)(x-1)}\Big[F(t)\Big]_{-1}^{x}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{F(x)-F(-1)}{x-(-1)}\times\lim_{x\to -1}\frac{1}{x-1}$

$=F'(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=f(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=(-4+1+2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

9-1 $f'(x)=x^2-4=(x+2)(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

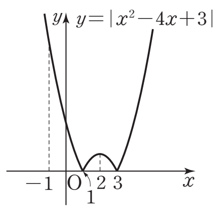
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고 $x=2$에서 극소이다.

$\therefore a=f(-2)=\int_{-2}^{-2}(t^2-4)dt=0$

$$b=f(2)=\int_{-2}^{2}(t^2-4)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-4t\right]_{-2}^{2}=-\frac{32}{3}$$

$\therefore\ a-3b=32$

10-1 $|x^2-4x+3|=|(x-1)(x-3)|$



이므로 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서

$$|x^2-4x+3|=\begin{cases}x^2-4x+3 & (-1\le x<1)\\ -x^2+4x-3 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

이므로

$$\int_{-1}^{2}|x^2-4x+3|dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2-4x+3)dx+\int_{1}^{2}(-x^2+4x-3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_{-1}^{1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_{1}^{2}$$

$$=\frac{20}{3}+\frac{2}{3}=\frac{22}{3}$$

11-1 $f'(x)=6x^2-10x+4=2(3x-2)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 가지므로 $f(1)=5$

$f(x)=\int(6x^2-10x+4)dx=2x^3-5x^2+4x+C$이므로

$1+C=5\qquad \therefore\ C=4$

따라서 $f(x)=2x^3-5x^2+4x+4$이므로 $f(-1)=-7$

12-1 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=(x-2)f'(x)$

이때 함수 $g(x)$가 $x=0$에서만 극값을 가지므로 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$f'(x)=3x(x-2)$

즉, $g(x)=\int_{2}^{x}(t-2)f'(t)dt=\int_{2}^{x}3t(t-2)^2dt$이므로

$$g(0)=\int_{2}^{0}3t(t-2)^2dt=\int_{2}^{0}(3t^3-12t^2+12t)dt$$

$$=\left[\frac{3}{4}t^4-4t^3+6t^2\right]_{2}^{0}=-4$$

2. 정적분의 활용

2-1 도형의 넓이

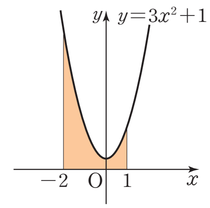
내신 대비 쌍둥이 문제 198~201쪽

1-1 (1) 12 (2) $\frac{4}{3}$ **2-1** (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{27}{4}$

3-1 (1) 12 (2) $\frac{57}{2}$ **4-1** (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{27}{4}$

5-1 $\frac{34}{3}$

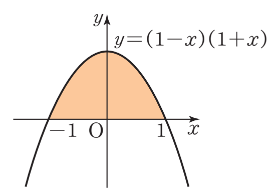
1-1 (1) 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 도형의 넓이 S는



$$S=\int_{-2}^{1}(3x^2+1)dx$$

$$=\left[x^3+x\right]_{-2}^{1}=12$$

(2) 곡선 $y=(1+x)(1-x)$와 x축의 교점의 x좌표는 $-1,\ 1$이고, 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 $y\ge 0$이다. 따라서 구하는 도형의 넓이 S는



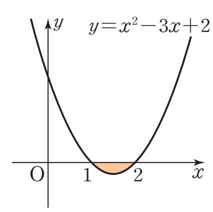
$$S=\int_{-1}^{1}(1-x)(1+x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx$$

$$=\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}$$

2-1 (1) 곡선 $y=x^2-3x+2$와 x축의 교점의 x좌표는 1, 2이고, 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 $y\le 0$이다.

따라서 구하는 도형의 넓이 S는



$$S=\int_{1}^{2}|x^2-3x+2|dx$$

$$=\int_{1}^{2}(-x^2+3x-2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_{1}^{2}=\frac{1}{6}$$

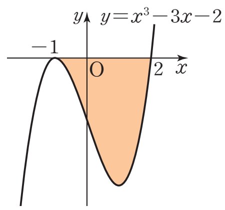
(2) 곡선

$y=x^3-3x-2$

$\quad=(x+1)^2(x-2)$

와 x축의 교점의 x좌표는 -1, 2이고, 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 $y\le 0$이다.

따라서 구하는 도형의 넓이 S는



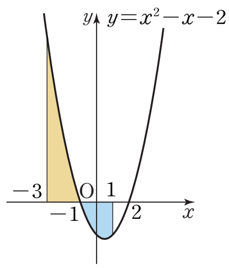
$$S=\int_{-1}^{2}|x^3-3x-2|\,dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{4}$$

3-1 (1) 곡선 $y=x^2-x-2$와 x축의 교점의 x좌표는 -1, 2이고, 닫힌구간 $[-3, -1]$에서 $y\ge 0$, 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $y\le 0$이다.

따라서 구하는 도형의 넓이 S는



$$S=\int_{-3}^{1}|x^2-x-2|\,dx$$

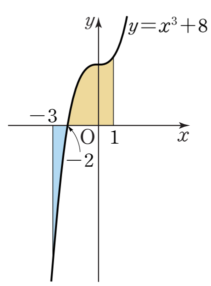
$$=\int_{-3}^{-1}(x^2-x-2)dx+\int_{-1}^{1}(-x^2+x+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-3}^{-1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{26}{3}+\frac{10}{3}=12$$

(2) 곡선 $y=x^3+8$과 x축의 교점의 x좌표는 -2이고, 닫힌구간 $[-3, -2]$에서 $y\le 0$, 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 $y\ge 0$이다.

따라서 구하는 도형의 넓이 S는



$$S=\int_{-3}^{1}|x^3+8|\,dx$$

$$=\int_{-3}^{-2}(-x^3-8)dx+\int_{-2}^{1}(x^3+8)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4-8x\right]_{-3}^{-2}+\left[\frac{1}{4}x^4+8x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\frac{33}{4}+\frac{81}{4}=\frac{57}{2}$$

4-1 (1) 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하면

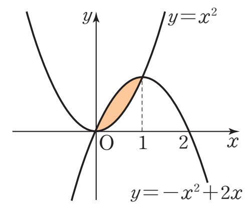
$x^2=-x^2+2x$에서

$2x^2-2x=0$이므로

$2x(x-1)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이 S는



$$S=\int_{0}^{1}|x^2-(-x^2+2x)|\,dx$$

$$=\int_{0}^{1}\{(-x^2+2x)-x^2\}\,dx$$

$$=\int_{0}^{1}(-2x^2+2x)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}=\frac{1}{3}$$

(2) 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3+2x^2+2=-x^2+6$

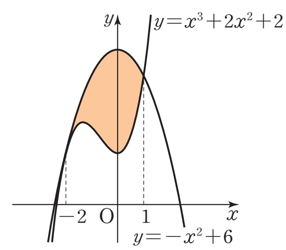
에서 $x^3+3x^2-4=0$

이므로

$(x-1)(x+2)^2=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이 S는



$$S=\int_{-2}^{1}|(x^3+2x^2+2)-(-x^2+6)|\,dx$$

$$=\int_{-2}^{1}\{(-x^2+6)-(x^3+2x^2+2)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-x^3-3x^2+4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-2}^{1}=\frac{27}{4}$$

5-1 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구하면

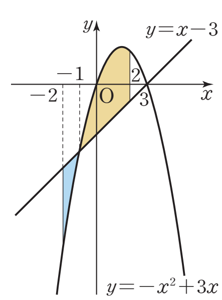
$-x^2+3x=x-3$에서

$x^2-2x-3=0$이므로

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 도형의 넓이 S는



$$S=\int_{-2}^{2}|(-x^2+3x)-(x-3)|dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}\{(x-3)-(-x^2+3x)\}dx+\int_{-1}^{2}\{(-x^2+3x)-(x-3)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(x^2-2x-3)dx+\int_{-1}^{2}(-x^2+2x+3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{7}{3}+9=\frac{34}{3}$$

소단원 확인 문제 203~205쪽

1-1 (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{9}{2}$ (3) 8

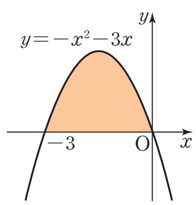
2-1 -1 **3-1** 48

1-1 (1) 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구하면

$-x^2-3x=0$에서

$-x(x+3)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=0$



따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{-3}^{0}(-x^2-3x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{0}$$

$$=\frac{9}{2}$$

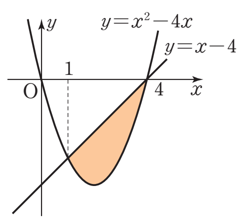
(2) 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2-4x=x-4$에서

$x^2-5x+4=0$이므로

$(x-1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=4$



따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{1}^{4}|(x^2-4x)-(x-4)|dx$$

$$=\int_{1}^{4}\{(x-4)-(x^2-4x)\}dx$$

$$=\int_{1}^{4}(-x^2+5x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_{1}^{4}=\frac{9}{2}$$

(3) 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3+3x^2=x+3$에서

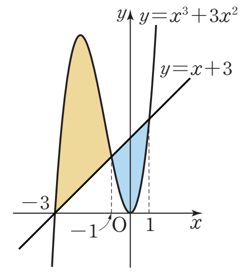
$x^3+3x^2-x-3=0$

이므로

$(x+3)(x+1)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는

$x=-1$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{-3}^{1}|(x^3+3x^2)-(x+3)|dx$$

$$=\int_{-3}^{-1}\{(x^3+3x^2)-(x+3)\}dx+\int_{-1}^{1}\{(x+3)-(x^3+3x^2)\}dx$$

$$=\int_{-3}^{-1}(x^3+3x^2-x-3)dx+\int_{-1}^{1}(-x^3-3x^2+x+3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2-3x\right]_{-3}^{-1}+\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{1}$$

$$=4+4=8$$

2-1 곡선 $y=x^3-2x^2$과 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3-2x^2=0$에서 $x^2(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

이때 곡선 $y=x^3-2x^2$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{2}|x^3-2x^2|dx=\int_{0}^{2}(-x^3+2x^2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_{0}^{2}=\frac{4}{3}$$

또, 곡선 $y=ax^2-2ax$와 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$ax^2-2ax=0$에서 $ax(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

이때 곡선 $y=ax^2-2ax\,(a<0)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

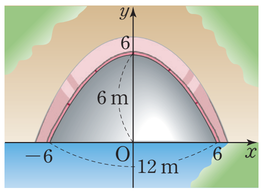
$$\int_0^2 |ax^2-2ax|\,dx=\int_0^2 (ax^2-2ax)\,dx$$

$$=\left[\frac{a}{3}x^3-ax^2\right]_0^2=-\frac{4}{3}a$$

따라서 두 도형의 넓이가 같으므로

$$-\frac{4}{3}a=\frac{4}{3}\qquad \therefore\ a=-1$$

3-1 터널 단면의 모양을 나타내는 포물선의 x축과의 교점의 x좌표가 -6, 6이므로 포물선의 방정식은



$y=a(x+6)(x-6)\,(a\neq 0)$

으로 놓을 수 있다.

이 포물선이 점 $(0,\ 6)$을 지나므로

$$6=-36a\qquad \therefore\ a=-\frac{1}{6}$$

따라서 포물선의 방정식은 $y=-\frac{1}{6}(x+6)(x-6)$, 즉

$y=-\frac{1}{6}x^2+6$이고 터널 단면의 넓이 S는

$$S=\int_{-6}^{6}\left(-\frac{1}{6}x^2+6\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{18}x^3+6x\right]_{-6}^{6}=48$$

2-2 속도와 거리

내신 대비 쌍둥이 문제 — 207~209쪽

1-1 (1) $\frac{41}{3}$ (2) 28 **2-1** (1) 20 m (2) 1000 m
3-1 $\frac{31}{6}$ **4-1** 2 m

1-1 (1) 시각 $t=2$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_2^3 (8t-t^2)\,dt=\left[4t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_2^3=\frac{41}{3}$$

(2) 점 P의 시각 $t=3$에서의 위치는

$$1+\int_0^3 (8t-t^2)\,dt=1+\left[4t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^3=1+27=28$$

2-1 (1) 시각 $t=0$에서 $t=20$까지 이 물체의 높이의 변화량은

$$\int_0^{20}(100-10t)\,dt=\left[100t-5t^2\right]_0^{20}=0$$

따라서 지면으로부터의 높이는

$0+20=20\,(\mathrm{m})$

(2) 닫힌구간 $[0,\ 10]$에서 $v(t)\geq 0$, 닫힌구간 $[10,\ 20]$에서 $v(t)\leq 0$이므로 실제로 움직인 거리는

$$\int_0^{20}|100-10t|\,dt$$

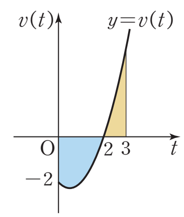
$$=\int_0^{10}(100-10t)\,dt+\int_{10}^{20}(-100+10t)\,dt$$

$$=\left[100t-5t^2\right]_0^{10}+\left[-100t+5t^2\right]_{10}^{20}$$

$$=500+500=1000\,(\mathrm{m})$$

3-1 $v(t)=t^2-t-2=(t-2)(t+1)$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리 s는



$$s=\int_0^3 |v(t)|\,dt$$

$$=\int_0^2 (-t^2+t+2)\,dt+\int_2^3 (t^2-t-2)\,dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-2t\right]_2^3$$

$$=\frac{10}{3}+\frac{11}{6}=\frac{31}{6}$$

4-1 승강기가 정지할 때의 속도는 $0\,\mathrm{m/s}$이므로

$$1-\frac{1}{4}t=0\qquad \therefore\ t=4$$

따라서 승강기가 제동이 걸린 후 정지할 때까지 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^4 |v(t)|\,dt=\int_0^4\left(1-\frac{1}{4}t\right)dt$$

$$=\left[t-\frac{1}{8}t^2\right]_0^4=2\,(\mathrm{m})$$

소단원 확인 문제 — 210~211쪽

1-1 (1) $\frac{3}{2}$ (2) 32 **2-1** (1) 3 (2) $\frac{23}{3}$
3-1 450

1-1 (1) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^3 (t^2-3t+2)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^3=\frac{3}{2}$$

(2) 점 P의 시각 $t=6$에서의 위치는

$$2+\int_0^6 (t^2-3t+2)dt$$

$$=2+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^6=2+30=32$$

2-1 (1) 시각 t에서의 점 P의 위치는

$$\int_0^t (-t^2+4t)dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2\right]_0^t$$

$$=-\frac{1}{3}t^3+2t^2$$

이때 좌표가 9일 때의 시각은

$-\frac{1}{3}t^3+2t^2=9$에서 $t^3-6t^2+27=0$

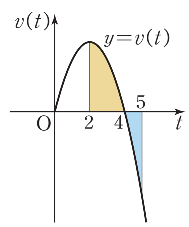
$(t-3)(t^2-3t-9)=0$

그런데 $0\le t\le 4$이므로 $t=3$

따라서 점 P가 출발한 후 좌표가 9일 때의 시각은 3이다.

(2) $v(t)=-t^2+4t=-t(t-4)$

따라서 시각 $t=2$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리 s는



$$s=\int_2^5 |v(t)|dt$$

$$=\int_2^4 (-t^2+4t)dt+\int_4^5 (t^2-4t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2\right]_2^4+\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2\right]_4^5$$

$$=\frac{16}{3}+\frac{7}{3}=\frac{23}{3}$$

3-1 기차가 제동을 건 후 t초 후의 속도를 $v(t)$ m/s라고 하면

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=30-t$$

기차가 정지할 때의 속도는 0 m/s이므로

$30-t=0$ $\quad\therefore t=30$

따라서 기차가 30초 동안 움직인 거리는

$$x=30\times 30-\frac{1}{2}\times 30^2=450\ (\mathrm{m})$$

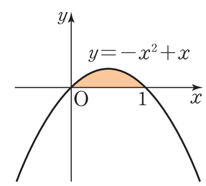
이므로 전방 450 m 지점에서 제동을 걸어야 한다.

$\therefore a=450$

중단원 연습 문제 214~221쪽

1-1 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{37}{12}$
2-1 (1) 3 (2) 16
3-1 (1) $\frac{125}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$
4-1 (1) 0 (2) 2 (3) $\frac{16}{3}$
5-1 6
6-1 $\frac{1}{3}$
7-1 $f(x)=2x^2(x+3)$
8-1 4
9-1 250 m
10-1 3
11-1 2000 cm^3

1-1 (1) 곡선 $y=-x^2+x$와 x축의 교점의 x좌표는 0, 1이고, 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $y\ge 0$이다.

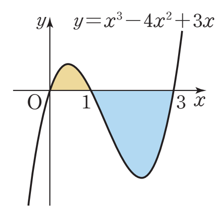


따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_0^1 (-x^2+x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

(2) 곡선 $y=x^3-4x^2+3x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-4x^2+3x=0$에서 $x(x-1)(x-3)=0$이므로 0, 1, 3이고,



닫힌구간 $[0, 1]$에서 $y\ge 0$
닫힌구간 $[1, 3]$에서 $y\le 0$

이다. 따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_0^3 |x^3-4x^2+3x|dx$$

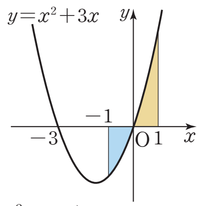
$$=\int_0^1 (x^3-4x^2+3x)dx+\int_1^3 (-x^3+4x^2-3x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_1^3$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

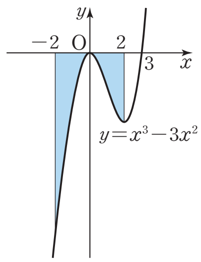
2-1 (1) 곡선 $y=x^2+3x$와 x축의 교점의 x좌표는 -3, 0이고 닫힌구간 $[-1, 0]$에서 $y\le 0$

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $y\geq 0$이다. 따라서 구하는 도형의 넓이 S는



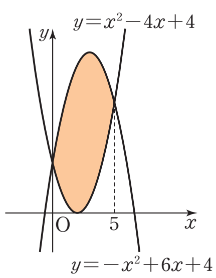
$$S=\int_{-1}^{1}|x^2+3x|dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(-x^2-3x)dx+\int_{0}^{1}(x^2+3x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{7}{6}+\frac{11}{6}=3$$

(2) 곡선 $y=x^3-3x^2$과 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-3x^2=0$에서 $x^2(x-3)=0$이므로 0, 3이고, 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 $y\leq 0$이다. 따라서 구하는 도형의 넓이 S는



$$S=\int_{-2}^{2}(-x^3+3x^2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_{-2}^{2}=16$$

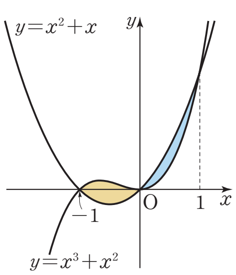
3-1 (1) 두 곡선 $y=x^2-4x+4$, $y=-x^2+6x+4$의 교점의 x좌표를 구하면



$x^2-4x+4=-x^2+6x+4$
에서 $2x^2-10x=0$이므로
$2x(x-5)=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=5$
따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{0}^{5}|(x^2-4x+4)-(-x^2+6x+4)|dx$$
$$=\int_{0}^{5}(-2x^2+10x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2\right]_{0}^{5}=\frac{125}{3}$$

(2) 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=x^2+x$의 교점의 x좌표를 구하면



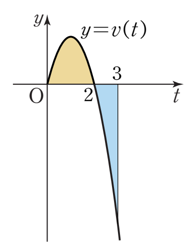
$x^3+x^2=x^2+x$에서
$x^3-x=0$이므로
$x(x+1)(x-1)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{1}|(x^3+x^2)-(x^2+x)|dx$$
$$=\int_{-1}^{0}\{(x^3+x^2)-(x^2+x)\}dx$$
$$+\int_{0}^{1}\{(x^2+x)-(x^3+x^2)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3+x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

4-1 (1) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지의 점 P의 위치의 변화량은
$$\int_{0}^{3}(4t-2t^2)dt=\left[2t^2-\frac{2}{3}t^3\right]_{0}^{3}=0$$

(2) 점 P의 시각 $t=3$에서의 위치는
$$2+\int_{0}^{3}(4t-2t^2)dt=2+0=2$$

(3) $v(t)=4t-2t^2=-2t(t-2)$
따라서 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리 s는



$$s=\int_{0}^{3}|4t-2t^2|dt$$
$$=\int_{0}^{2}(4t-2t^2)dt$$
$$+\int_{2}^{3}(-4t+2t^2)dt$$
$$=\left[2t^2-\frac{2}{3}t^3\right]_{0}^{2}+\left[-2t^2+\frac{2}{3}t^3\right]_{2}^{3}$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

5-1 곡선 $y=-3x^2+ax$와 x축의 교점의 x좌표는 0, $\frac{a}{3}$이고

닫힌구간 $\left[0,\ \frac{a}{3}\right]$에서 $y\geq 0$이다.

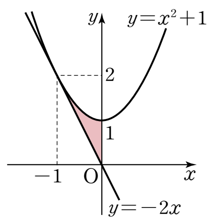
따라서 곡선 $y=-3x^2+ax$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는
$$\int_{0}^{\frac{a}{3}}(-3x^2+ax)dx=\left[-x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_{0}^{\frac{a}{3}}=\frac{a^3}{54}$$

즉, $\frac{a^3}{54}=4$이므로 $a^3=216$　$\therefore\ a=6$

6-1 $y=x^2+1$에서 $y'=2x$이므로 곡선 위의 점 $(-1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 -2이고 접선의 방정식은

$y-2=-2(x+1)$, 즉

$y=-2x$



따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{0}|(x^2+1)-(-2x)|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{3}$$

7-1 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 원점에서 접하고 점 $(-3,\ 0)$을 지나므로 $f(x)=ax^2(x+3)(a\neq0)$으로 놓을 수 있다.

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-3}^{0}(ax^3+3ax^2)dx=\left[\frac{a}{4}x^4+ax^3\right]_{-3}^{0}=\frac{27}{4}a$$

즉, $\frac{27}{4}a=\frac{27}{2}$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=2x^2(x+3)$이다.

8-1 두 점 P, Q가 출발한 후 시각 t에서의 위치를 각각 $x_{\rm P}$, $x_{\rm Q}$라고 하면

$$x_{\rm P}=0+\int_0^t(-2t+4)dt$$
$$=-t^2+4t$$
$$x_{\rm Q}=0+\int_0^t(2t-4)dt$$
$$=t^2-4t$$

두 점 P, Q가 만날 때 $x_{\rm P}=x_{\rm Q}$이므로

$-t^2+4t=t^2-4t$에서 $2t^2-8t=0$이므로

$2t(t-4)=0$

그런데 $t>0$이므로 $t=4$

따라서 두 점 P, Q가 출발한 후 다시 만나는 시각은 4이다.

9-1 $$\int_0^{20}v(t)dt=\int_0^{15}\frac{5}{3}t\,dt+\int_{15}^{20}(100-5t)dt$$
$$=\left[\frac{5}{6}t^2\right]_0^{15}+\left[100t-\frac{5}{2}t^2\right]_{15}^{20}$$
$$=\frac{375}{2}+\frac{125}{2}=250\ (\text{m})$$

10-1 곡선 $y=|x^2-2x|$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^2|x^2-2x|dx=\int_0^2(-x^2+2x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

또, 곡선 $y=|x^2-2x|$와 x축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_2^k|x^2-2x|dx=\int_2^k(x^2-2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^k=\frac{k^3}{3}-k^2+\frac{4}{3}$$

$\frac{k^3}{3}-k^2+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$에서

$\frac{k^3}{3}-k^2=0$, $\frac{1}{3}k^2(k-3)=0$

그런데 $k>2$이므로 $k=3$

11-1 10초 동안 물이 흐른 거리는

$$\int_0^{10}|v(t)|dt=\int_0^{10}\left|\frac{3}{4}t(12-t)\right|dt$$
$$=\int_0^{10}\left(-\frac{3}{4}t^2+9t\right)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{4}t^3+\frac{9}{2}t^2\right]_0^{10}$$
$$=200\ (\text{cm})$$

따라서 10초 동안 흘러나온 물의 양은

$200\times10=2000\ (\text{cm}^3)$

대단원 **모의고사** 231~234쪽

01 ④	02 ③	03 ④	04 ①	05 ⑤
06 ③	07 ①	08 ③	09 ①	10 ②
11 ③	12 ③	13 ②	14 ⑤	15 ①
16 ⑤	17 ③	18 ②	19 ③	20 ②
21 3	22 $f(x)=-x^3+6x^2-16$			23 30
24 64	25 $\frac{4}{3}$			

01 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-2$

$\therefore f(1)=4$

02 $f(x)$는 $f'(x)$의 부정적분이므로

$f(x)=x^3-3x^2+C$ (C는 적분상수)

꼴로 나타낼 수 있다.

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+1$이므로

$f(1)=-1$

03 $\int_1^2(x^2+x+1)dx+\int_1^2(-x^2+x+1)dx$

$=\int_1^2\{(x^2+x+1)+(-x^2+x+1)\}dx$

$=\int_1^2(2x+2)dx$

$=\Big[x^2+2x\Big]_1^2=5$

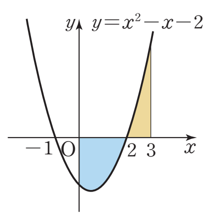
04 $\int_{-2}^0(2x^3+3x^2+1)dx-\int_2^0(2x^3+3x^2+1)dx$

$=\int_{-2}^0(2x^3+3x^2+1)dx+\int_0^2(2x^3+3x^2+1)dx$

$=\int_{-2}^2(2x^3+3x^2+1)dx$

$=\Big[\frac{1}{2}x^4+x^3+x\Big]_{-2}^2=20$

05 곡선 $y=x^2-x-2$와 x축의 교점의 x좌표는



$x^2-x-2=0$에서

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_0^3|x^2-x-2|dx$

$=\int_0^2(-x^2+x+2)dx+\int_2^3(x^2-x-2)\,dx$

$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_0^2+\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\Big]_2^3$

$=\frac{10}{3}+\frac{11}{6}=\frac{31}{6}$

06 곡선 $y=x^2-ax$와 x축의 교점의 x좌표는 0, a이고 닫힌구간 $[0, a]$에서 $y\le 0$이다.

따라서 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

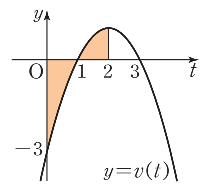
$\int_0^a(-x^2+ax)dx=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\Big]_0^a$

$=\frac{a^3}{6}$

즉, $\frac{a^3}{6}=\frac{9}{2}$이므로 $a^3=27$ $\quad\therefore a=3$

07 $v(t)=-t^2+4t-3$

$=-(t-1)(t-3)$



따라서 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^2|v(t)|dt$

$=\int_0^1(t^2-4t+3)dt+\int_1^2(-t^2+4t-3)dt$

$=\Big[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\Big]_0^1+\Big[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\Big]_1^2$

$=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$

08 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1-3h)-f(1+2h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1-3h)-f(1)\}-\{f(1+2h)-f(1)\}}{h}$

$=-3\lim_{h\to 0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}-2\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}$

$=-3f'(1)-2f'(1)=-5f'(1)$

$f(x)=\int(x^2+5x+4)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+5x+4$

따라서 $f'(1)=10$이므로

$-5f'(1)=-5\times10=-50$

09 물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0 m/s이므로

$-10t+30=0$ $\quad\therefore t=3$

따라서 물체가 최고 높이에 도달했을 때 지면으로부터의 높이는

$55+\int_0^3(-10t+30)dt=55+\Big[-5t^2+30t\Big]_0^3$

$=55+45=100$ (m)

10 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+C_1 & (x\ge 2)\\ kx+C_2 & (x<2)\end{cases}$에서

$f(3)=3$이므로 $C_1=-3$

$f(1)=1$이므로 $k+C_2=1$ ……①

또, $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2-}f(x)$에서

$-1=2k+C_2$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면 $k=-2$

11 주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=8-4+2a \qquad \therefore a=-2$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-2x-2$

$\therefore f(2)=6$

12 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)=x(x-2)$

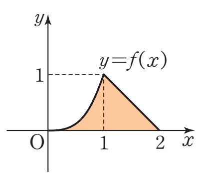
$F'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $F(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$$F(2)=\int_0^2 x(x-2)dx$$
$$=\int_0^2 (x^2-2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2=-\frac{4}{3}$$

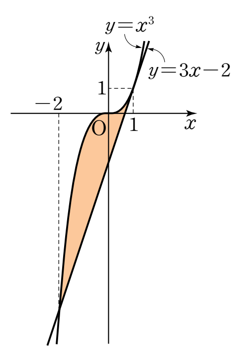
13 닫힌구간 $[0, 2]$에서 $y\geq 0$이므로

구하는 도형의 넓이는



$$\int_0^1 x^3dx+\int_1^2(2-x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1+\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

14 $y=x^3$에서 $y'=3x^2$이므로 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 3이고 접선의 방정식은



$y-1=3(x-1)$, 즉

$y=3x-2$

곡선 $y=x^3$과 직선 $y=3x-2$의 교점의 x좌표는

$x^3=3x-2$에서

$x^3-3x+2=0$이므로

$(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^1 |x^3-(3x-2)|dx$$
$$=\int_{-2}^1\{x^3-(3x-2)\}dx$$
$$=\int_{-2}^1(x^3-3x+2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1=\frac{27}{4}$$

15 고속 열차가 출발한 후 3 km를 달리는 데 걸린 시간을 t분이라고 하면

$$\int_0^t |v(t)|dt=\int_0^t\left(\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{4}t^2\right]_0^t=\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{4}t^2$$

$\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{4}t^2=3$에서 $t^3+t^2-12=0$이므로

$(t-2)(t^2+3t+6)=0 \qquad \therefore t=2$

또, $v(2)=4$이고

$$v(t)=\begin{cases}\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t & (0\leq t\leq 2)\\ 4 & (2<t\leq 5)\end{cases}$$

이므로 출발한 후 5분 동안 열차가 달린 거리는

$$3+\int_2^5 4\,dt=3+\Big[4t\Big]_5^2$$
$$=3+12=15\text{ (km)}$$

16 속도 $v(t)$는 $v(t)=\begin{cases}2t & (0\leq t<1)\\ -t+3 & (1\leq t<4)\\ -1 & (4\leq t<5)\\ t-6 & (5\leq t\leq 6)\end{cases}$이므로

점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^6|v(t)|dt$$
$$=\int_0^1 2t\,dt+\int_1^3(-t+3)\,dt+\int_3^4(t-3)\,dt$$
$$+\int_4^5 1\,dt+\int_5^6(-t+6)\,dt$$
$$=\Big[t^2\Big]_0^1+\left[-\frac{1}{2}t^2+3t\right]_1^3+\left[\frac{1}{2}t^2-3t\right]_3^4$$
$$+\Big[t\Big]_4^5+\left[-\frac{1}{2}t^2+6t\right]_5^6$$
$$=1+2+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}=5$$

17 $f(t)=2t^3+4t^2+3t$로 놓고, $f(t)$의 부정적분을 $F(t)$라 고 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^3-1}\int_1^x(2t^3+4t^2+3t)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=\frac{1}{3}F'(1)=\frac{1}{3}f(1)=\frac{1}{3}\times9=3$$

18 $\int_0^5 f(x)dx$

$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx$$
$$=\left\{\int_0^3 f(x)dx+\int_3^2 f(x)dx\right\}+\int_2^5 f(x)dx$$
$$=\int_0^3 f(x)dx-\int_2^3 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx$$
$$=6-3+4=7$$

19 두 곡선 $y=x^2-2$, $y=-x^2+\frac{2}{n}$의 교점의 x좌표는

$x^2-2=-x^2+\frac{2}{n}$에서 $2x^2=2+\frac{2}{n}$

$\therefore x=\pm\sqrt{1+\frac{1}{n}}$

따라서 도형의 넓이 S_n은

$$\int_{-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}^{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\left\{\left(-x^2+\frac{2}{n}\right)-(x^2-2)\right\}dx$$
$$=\int_{-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}^{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\left(-2x^2+2+\frac{2}{n}\right)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+\left(1+\frac{1}{n}\right)x\right]_{-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}^{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$
$$=\frac{8}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n}}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\frac{8}{3}$$

20 곡선 $y=ax^2-ax$와 직선 $y=a^2x$의 교점의 x좌표는

$ax^2-ax=a^2x$에서 $ax^2-ax-a^2x=0$

$ax(x-1-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a+1$

따라서 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^{a+1}|(ax^2-ax)-a^2x|dx$$
$$=\int_0^{a+1}\{a^2x-(ax^2-ax)\}dx$$
$$=\int_0^{a+1}\{-ax^2+(a+a^2)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{a}{3}x^3+\frac{a+a^2}{2}x^2\right]_0^{a+1}=\frac{a(a+1)^3}{6}$$

또, 곡선 $y=ax^2-ax$와 x축의 교점의 x좌표는 0, 1이고, 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $y\le0$이므로

$$\int_0^1(-ax^2+ax)dx=\left[-\frac{a}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^1=\frac{a}{6}$$

이때 $\frac{a(a+1)^3}{6}=2\times\frac{a}{6}$이므로

$(a+1)^3=2$ $\quad\therefore (a+1)^6=4$

서술형 문제

21 ❶ $2|x|+k=\begin{cases}-2x+k & (x<0)\\ 2x+k & (x\ge0)\end{cases}$이므로

❷ $\int_{-1}^2(2|x|+k)dx$

$$=\int_{-1}^0(-2x+k)dx+\int_0^2(2x+k)dx$$
$$=\Big[-x^2+kx\Big]_{-1}^0+\Big[x^2+kx\Big]_0^2$$
$$=(1+k)+(4+2k)=3k+5$$

❸ 따라서 $3k+5=14$이므로 $k=3$

채점 기준	배점
❶ 주어진 함수를 구간에 따라 나타내기	50 %
❷ 정적분 $\int_{-1}^2(2\lvert x\rvert+k)dx$의 값 구하기	30 %
❸ k의 값 구하기	20 %

22 ❶ 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 0, 4이므로 $f'(x)=ax(x-4)\,(a<0)$라고 하면

❷ $f(x)=\int ax(x-4)dx=\int(ax^2-4ax)dx$

$=\frac{1}{3}ax^3-2ax^2+C$ (C는 적분상수)

❸ 한편, $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 -16, $x=4$에서 극댓값 1을 가지므로 $f(0)=-16$, $f(4)=16$

$f(0)=-16$에서 $C=-16$

$f(4)=16$에서 $\frac{64}{3}a-32a-16=16 \quad \therefore a=-3$

따라서 $f(x)=-x^3+6x^2-16$이다.

채점 기준	배점
❶ 함수 $f'(x)$ 구하기	20 %
❷ $f'(x)$를 적분하여 $f(x)$의 식 구하기	40 %
❸ 미지수의 값을 구하여 $f(x)$ 구하기	40 %

23 ❶ 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$

$$f'(3)=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(3)+f(h)+6h\}-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+6=f'(0)+6$$

즉, $f'(0)+6=7$이므로 $f'(0)=1$

❷ $$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+2x=2x+1$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int(2x+1)\,dx=x^2+x+C$$

❸ 이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(5)=30$

채점 기준	배점
❶ 주어진 식을 이용하여 $f(0)$, $f'(0)$의 값 구하기	50 %
❷ 도함수의 정의와 부정적분을 이용하여 $f(x)$의 식 구하기	30 %
❸ $f(5)$의 값 구하기	20 %

24 ❶ 두 점 P, Q가 원점을 출발한 후 시각 $t=x$에서의 위치는 각각

$$\int_0^x(2t^2-8t)\,dt=\left[\frac{2}{3}t^3-4t^2\right]_0^x=\frac{2}{3}x^3-4x^2$$
$$\int_0^x(t^3-10t^2+24t)\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{10}{3}t^3+12t^2\right]_0^x$$
$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{10}{3}x^3+12x^2$$

이때 두 점 P, Q 사이의 거리를 $h(x)$라고 하면

$$h(x)=\left|\left(\frac{2}{3}x^3-4x^2\right)-\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{10}{3}x^3+12x^2\right)\right|$$
$$=\left|-\frac{1}{4}x^4+4x^3-16x^2\right|$$
$$=\frac{1}{4}x^4-4x^3+16x^2=\frac{1}{4}x^2(x-8)^2$$

❷ $h'(x)=x^3-12x^2+32x$

$=x(x-4)(x-8)$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$ 또는 $x=8$

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	8
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$h(x)$	0	↗	극대	↘	0

❸ 함수 $h(x)$는 $x=4$에서 극대이면서 최대이므로

$$h(4)=\frac{1}{4}\times4^2\times(-4)^2=64$$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은 64이다.

채점 기준	배점
❶ 두 점 사이의 거리를 함수로 나타내기	40 %
❷ 두 점 사이의 거리가 극값이 되는 시각 찾기	40 %
❸ 두 점 사이의 거리의 최댓값 구하기	20 %

25 ❶ 이차함수 $y=f'(t)$의 그래프와 t축의 교점의 t좌표는 1, 3이므로

$f'(t)=a(t-1)(t-3)\,(a>0)$

로 놓을 수 있다.

이때 $f'(0)=3$이므로 $3a=3 \quad \therefore a=1$

$\therefore f'(t)=(t-1)(t-3)=t^2-4t+3$

❷ 점 P가 출발할 때의 운동 방향과 반대 방향으로 움직인 시간은 $t=1$에서 $t=3$까지이다.

❸ 이때 닫힌구간 $[1, 3]$에서 $f'(t)\le0$이므로 구하는 거리는

$$\int_1^3|t^2-4t+3|\,dt=\int_1^3(-t^2+4t-3)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3=\frac{4}{3}$$

채점 기준	배점
❶ 주어진 그래프가 나타내는 식 구하기	30 %
❷ 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시간 구하기	40 %
❸ 점 P가 반대 방향으로 움직인 거리 구하기	30 %

권말 부록

수학 Ⅱ 중간고사 236~239쪽

01 ④	02 ③	03 ④	04 ⑤	05 ①
06 ②	07 ③	08 ②	09 ①	10 ⑤
11 ④	12 ③	13 ②	14 ①	15 ④
16 ①	17 ⑤	18 9	19 24	20 2
21 -1	22 0	23 5		

01 ① $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}$

$\displaystyle=\frac{1}{4}$

② $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(1+\sqrt{x})}{1-x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}\{-(1+\sqrt{x})\}$

$=-2$

③ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-3x+1}{3x^3+2x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{3+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}}=\frac{5}{3}$

④ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5}}{x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{1-\frac{3}{x}}=2$

⑤ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2+x+5}}{x+2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x+2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x+2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}}$

$=-3$

따라서 극한값이 가장 큰 것은 ④이다.

02 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

① $\displaystyle\lim_{x\to-1-}f(x)=2$

② $\displaystyle\lim_{x\to-1+}f(x)=1$

③ $\displaystyle\lim_{x\to 0-}f(x)=0$

④ $\displaystyle\lim_{x\to 0+}f(x)=-1$

⑤ $\displaystyle\lim_{x\to 1-}f(x)=0$

따라서 옳은 것은 ③이다.

03 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

이때 $\displaystyle\lim_{x\to 1}(a\sqrt{x+3}+b)=2a+b$이고, $f(1)=2$이므로

$2a+b=2$

$\therefore\ 4a+2b=2(2a+b)=2\times2=4$

04 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\displaystyle\lim_{x\to 1-}f(x)=2,\ f(2)=3$

또, $x\longrightarrow 1+$이면 $f(x)\longrightarrow 0+$이므로

$f(f(x))\longrightarrow 3$이다. 즉, $\displaystyle\lim_{x\to 1+}f(f(x))=3$

$\displaystyle\therefore\ \lim_{x\to 1-}f(x)+f(2)+\lim_{x\to 1+}f(f(x))=2+3+3=8$

05 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$로 놓으면

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+4x-5}=\frac{2}{3}$에서

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)(x+5)}=\frac{2}{3}$

이때 극한값이 존재하고, $x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)=0$이다.

$\therefore\ f(1)=0$

$f(1)=a+b+c+d$이므로 $a+b+c+d=0$

06 $x<2$이면 $x^3-8<0$이므로

$|x^3-8|=-(x^3-8)$

$\displaystyle\therefore\ \lim_{x\to 2-}\frac{|x^3-8|}{2x-4}=\lim_{x\to 2-}\frac{-(x^3-8)}{2(x-2)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 2-}\frac{-(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x-2)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 2-}\frac{-(x^2+2x+4)}{2}$

$=-6$

07 ① 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)=g(x)=\frac{1}{x-a}$$

이면 $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=0$이지만 $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}g(x)$의 값은 둘 다 존재하지 않는다. (거짓)

② 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x<a)\\ -1 & (x\ge a)\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}-1 & (x<a)\\ 1 & (x\ge a)\end{cases}$$

이면 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$의 값은 0이지만 $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}g(x)$의 값은 둘 다 존재하지 않는다. (거짓)

③ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$와 $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$의 값이 모두 존재하면

$$\lim_{x\to a}g(x)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}-\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}\right]$$

이므로 그 값이 존재한다. (참)

④ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)=x-a,\ g(x)=(x-a)^2$$

이면 $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}g(x)$의 값이 모두 0이지만

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

⑤ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}|x-a| & (x\ne a)\\ 1 & (x=a)\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}2|x-a| & (x\ne a)\\ 2 & (x=a)\end{cases}$$

이면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$이지만 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ③이다.

08 ① 함수 $f(x)=\begin{cases}1 & (x<0)\\ -1 & (x\ge 0)\end{cases}$에 대하여

함수 $|f(x)|=1$이므로 모든 실수에서 연속이지만 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다. (거짓)

② 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이면 함수 $\{f(x)\}^2=f(x)f(x)$도 $x=2$에서 연속이다. (참)

③ 함수 $f(x)=|x|$이고, 함수 $g(x)=\begin{cases}1 & (x<0)\\ -1 & (x\ge 0)\end{cases}$이면 $f(x)g(x)=-x$이다.

따라서 두 함수 $f(x)$, $f(x)g(x)$는 모두 $x=0$에서 연속이지만 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다. (거짓)

④ 함수 $f(x)=\begin{cases}x & \left(0\le x\le \frac{1}{2}\right)\\ x+1 & \left(\frac{1}{2}<x\le 1\right)\end{cases}$은 닫힌구간 $[0, 1]$에서 최댓값 2와 최솟값 0을 모두 갖지만 $x=\frac{1}{2}$에서 연속이 아니다. (거짓)

⑤ 함수 $f(x)=\begin{cases}x-\frac{1}{4} & \left(0\le x\le \frac{1}{2}\right)\\ x-\frac{3}{4} & \left(\frac{1}{2}<x\le 1\right)\end{cases}$은

$f(0)f(1)=\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{16}<0$이고,

방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 두 개의 실근 $x=\frac{1}{4}$, $x=\frac{3}{4}$을 갖지만 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 연속이 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ②이다.

09 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)^2}=1$을 만족하고 $x\longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

따라서 $f(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 갖는다.

$f(x)=(x-2)^2Q(x)$라고 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2Q(x)}{(x-2)^2}$$
$$=\lim_{x\to 2}Q(x)=1$$

이므로 $Q(2)=1$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{2f(x)+x^3-4x^2+4x}{x^3-2x^2-4x+8}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)^2Q(x)+x(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{2Q(x)+x}{x+2}$$
$$=\frac{2Q(2)+2}{4}=\frac{4}{4}=1$$

10 점 P는 곡선 $y=kx^2(1\le k\le 4)$ 위의 점이므로 점 P는 x축보다 위쪽에 존재한다.

또, 중심이 Q$(0, a)$이므로 원 C는 y축에 대하여 대칭이고, 점 P와 원점을 지나므로 원 C는 x축의 위쪽에서 x축과 접한다. 따라서 $a>0$이다.

또, 원 C의 반지름의 길이는 $\overline{OQ}=a$이므로 원 C의 방정식은

$x^2+(y-a)^2=a^2$

점 P의 좌표를 $(t,\ kt^2)(t\neq0)$이라고 하면 점 P는 원 C 위의 점이므로 $t^2+(kt^2-a)^2=a^2$이다. 이를 정리하면

$t^2+k^2t^4-2akt^2=0,\ 1+k^2t^2-2ak=0$

$\therefore\ a=\dfrac{k^2t^2+1}{2k}$

이때 $f(k)=\lim\limits_{t\to0}a=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{k^2t^2+1}{2k}=\dfrac{1}{2k}$이므로

$$g(k)=-\frac{1}{4\{f(k)\}^2}+\frac{2}{f(k)}+5$$
$$=-\frac{(2k)^2}{4}+2(2k)+5$$
$$=-k^2+4k+5$$
$$=-(k-2)^2+9$$

따라서 함수 $g(k)$의 최댓값은 $g(2)=9$이고, 최솟값은 $g(4)=5$이므로 $g(k)$의 최댓값과 최솟값의 곱은 45이다.

11 (i) $a=0$이면 $f(x)=-4x+2$이므로 $f(x)$의 그래프와 x축과의 교점은 1개이다. $\therefore\ g(0)=1$

(ii) $a\neq0$이면 이차함수 $f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 개수는 판별식 D의 부호에 의해 결정된다. 즉,

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2+a(a-2)$$
$$=(a-2)(2a-2)$$
$$=2(a-1)(a-2)$$

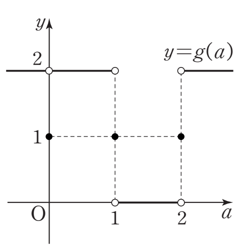
이므로

$\dfrac{D}{4}=0$일 때, $a=1$ 또는 $a=2$에서 $g(a)=1$

$\dfrac{D}{4}<0$일 때, $1<a<2$에서 $g(a)=0$

$\dfrac{D}{4}>0$일 때, $a<0,\ 0<a<1,\ a>2$에서 $g(a)=2$

(i), (ii)에 의하여 함수 $y=g(a)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $\lim\limits_{a\to0}g(a)=2,\ g(0)=1$이므로

$\lim\limits_{a\to0}g(a)\neq g(0)$

ㄴ. $\lim\limits_{a\to c+}g(a)\neq\lim\limits_{a\to c-}g(a)$인 실수 c는 1, 2이므로 2개이다.

ㄷ. 함수 $g(a)$는 $a=0,\ 1,\ 2$에서 연속이 아니므로 불연속인 점은 3개이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

12 $$(\text{평균변화율})=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}$$
$$=\frac{(9k+3)-(k+1)}{2}$$
$$=\frac{8k+2}{2}=4k+1=13$$

$\therefore\ k=3$

13 $$\lim_{h\to0}\frac{f(-1+3h)-f(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+3h)-f(-1)}{3h}\times3$$
$$=3f'(-1)=3$$

$\therefore\ f'(-1)=1$

한편, $f'(x)=3x^2+2ax+2$이므로

$f'(-1)=5-2a=1\qquad\therefore\ a=2$

14 $f(x+y)=f(x)+f(y)-2xy$에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)\qquad\therefore\ f(0)=0$

$f'(0)=2$에서

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=2$$

$$\therefore\ f'(5)=\lim_{h\to0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(5)+f(h)-2\times5\times h-f(5)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-10h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}-10\right\}$$
$$=2-10=-8$$

15 곡선 $y=x^3+ax^2+b$가 점 $(2,\ 4)$를 지나므로

$4a+b+8=4 \qquad \therefore\ 4a+b=-4 \qquad \cdots\cdots ①$

$y'=3x^2+2ax$이고, 점 $(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 9이므로

$12+4a=9 \qquad \therefore\ a=-\frac{3}{4}$

$a=-\frac{3}{4}$을 ①에 대입하면

$-3+b=-4 \qquad \therefore\ b=-1$

$\therefore\ ab=\left(-\frac{3}{4}\right)\times(-1)=\frac{3}{4}$

16 $f'(x)=g(x) \qquad \cdots\cdots ①$

$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

$=4x^3+12x^2+2x+2 \qquad \cdots\cdots ②$

①, ②에서

$g(x)+g'(x)=4x^3+12x^2+2x+2 \qquad \cdots\cdots ③$

③에서 $g(x)$는 삼차식이므로

$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$

로 놓으면

$g'(x)=3ax^2+2bx+c$

③에서

$g(x)+g'(x)$

$=(ax^3+bx^2+cx+d)+(3ax^2+2bx+c)$

$=4x^3+12x^2+2x+2$

이므로

$ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+(c+d)$

$=4x^3+12x^2+2x+2$

이 식은 x에 대한 항등식이므로

$a=4,\ b=0,\ c=2,\ d=0$

따라서 $g(x)=4x^3+2x$이므로

$g(3)=4\times 3^3+2\times 3=114$

17 $f(2)=f'(2)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 갖는다. 또, $f(5)=0$이므로 $f(x)$는 $x-5$를 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)=k(x-2)^2(x-5)$로 놓으면

$f'(x)=2k(x-2)(x-5)+k(x-2)^2$

$=3k(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=4$

그런데 $a\neq 2$이므로 $a=4$

18 ❶ $(x+2)f(x)=2x^2+ax+10$에 $x=-2$를 대입하면

$0\times f(-2)=8-2a+10$

$-2a+18=0 \qquad \therefore\ a=9$

❷ $(x+2)f(x)=2x^2+9x+10$에서 $x+2\neq 0$이면

$$f(x)=\frac{2x^2+9x+10}{x+2}$$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 연속이므로

$$f(-2)=\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+9x+10}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(2x+5)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2}(2x+5)=1$$

❸ $\therefore\ af(-2)=9\times 1=9$

채점 기준	배점
❶ $x=-2$를 대입하여 a의 값 구하기	40 %
❷ 연속임을 이용하여 $f(-2)$의 값 구하기	50 %
❸ ❶, ❷를 이용하여 $af(-2)$의 값 구하기	10 %

19 ❶ 삼차다항식 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=a$이고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 $f(2)=0$이다.

또, $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{x-4}=a$이고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 $f(4)=0$이다.

❷ 따라서 삼차다항식 $f(x)$는 $(x-2)(x-4)$를 인수로 가지므로 $f(x)=(x-2)(x-4)(px+q)$로 놓으면

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)(px+q)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x-4)(px+q)$$

$$=-2(2p+q)=a \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)(x-4)(px+q)}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}(x-2)(px+q)$$

$$=2(4p+q)=a \qquad \cdots\cdots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면

$p=\frac{a}{2},\ q=-\frac{3}{2}a$

$\therefore\ f(x)=(x-2)(x-4)\left(\frac{a}{2}x-\frac{3}{2}a\right)$

❸ 따라서 방정식 $f(x)=0$의 세 근은 $x=2,\ 4,\ 3$이므로
(세 근의 곱)$=2\times4\times3=24$

채점 기준	배점
❶ $f(2)$, $f(4)$의 값 구하기	40 %
❷ $f(x)$를 a에 대한 식으로 나타내기	50 %
❸ 세 근의 곱 구하기	10 %

20 ❶ 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{P}(t,\ t+1)$에 대하여

$$\overline{\mathrm{AP}}^2=(t+1)^2+(t+1)^2=2t^2+4t+2$$

❷ 또, 점 P를 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 이 직선의 방정식은

$y=-(x-t)+(t+1)$, 즉 $y=-x+2t+1$

이 직선의 y절편인 점 Q의 좌표는 $(0,\ 2t+1)$이다.
따라서 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ 2t+1)$에 대하여

$$\overline{\mathrm{AQ}}^2=1+(2t+1)^2=4t^2+4t+2$$

❸ $\therefore \displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t+2}{2t^2+4t+2}=2$

채점 기준	배점
❶ $\overline{\mathrm{AP}}^2$을 t에 대한 식으로 나타내기	30 %
❷ $\overline{\mathrm{AQ}}^2$을 t에 대한 식으로 나타내기	40 %
❸ ❶, ❷를 이용하여 극한값 구하기	30 %

21 ❶ $f(x)=ax^2+bx+c$로 놓으면
$f(0)=1$에서 $c=1$

❷ $f'(x)=2ax+b$이므로
$f'(0)=-5$에서 $b=-5$
$f'(1)=2a+b=1$이므로 $b=-5$를 대입하면 $a=3$
따라서 $f(x)=3x^2-5x+1$이므로

❸ $f(1)=3-5+1=-1$

채점 기준	배점
❶ $f(0)=1$을 이용하여 상수항 구하기	20 %
❷ $f'(0)=-5$, $f'(1)=1$을 이용하여 $f(x)$ 구하기	50 %
❸ $f(1)$의 값 구하기	30 %

22 ❶ $f(x)=x^3+ax$, $g(x)=bx^2+a$라고 하면 교점의 좌표가 $(1,\ c)$이므로 $f(1)=g(1)$에서
$1+a=b+a \qquad \therefore b=1$

❷ 한편, $f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=2bx$이므로 점 $(1,\ c)$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 그은 접선의 기울기는 각각
$f'(1)=3+a$, $g'(1)=2b$

❸ 이때 두 접선의 기울기가 서로 같으므로
$3+a=2b$에서 $b=1$을 대입하면 $a=-1$
$f(1)=1+a=c$에 $a=-1$을 대입하면 $c=0$

❹ $\therefore a+b+c=-1+1+0=0$

채점 기준	배점
❶ $f(1)=g(1)$을 이용하여 b의 값 구하기	20 %
❷ 두 접선의 기울기 구하기	30 %
❸ a와 c의 값 구하기	40 %
❹ $a+b+c$의 값 구하기	10 %

23 ❶ $f(x)=(x^2-1)g(x)$이므로
$f(2)=3g(2)$
이때 $f(2)=6$이므로 $g(2)=2$

❷ 한편, 곱의 미분법에 의하여
$f'(x)=2xg(x)+(x^2-1)g'(x)$

❸ $\therefore f'(2)=4g(2)+3g'(2)$
$=4\times2+3\times(-1)=5$

채점 기준	배점
❶ $g(2)$의 값 구하기	20 %
❷ $f'(x)$ 구하기	40 %
❸ $f'(2)$의 값 구하기	40 %

수학 Ⅱ 기말고사 240~243쪽

01 ④	**02** ⑤	**03** ②	**04** ①	**05** ①
06 ④	**07** ④	**08** ②	**09** ③	**10** ④
11 ②	**12** ③	**13** ①	**14** ⑤	**15** ①
16 ②	**17** ⑤	**18** -4	**19** $y=-2x+2$	
20 -8	**21** 5	**22** $f(x)=x$		**23** $\frac{4}{9}$

01 $x=1$일 때 $y=1$이므로

$\frac{1}{3}+a+b=1 \quad \therefore a+b=\frac{2}{3}$ ……①

$y'=x^2+a$이므로 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는

$a+1$

따라서 접선의 방정식은

$y-1=(a+1)(x-1)$, 즉 $y=(a+1)x-a$

이 접선이 점 $(2, -1)$을 지나므로

$-1=2(a+1)-a \quad \therefore a=-3$

$a=-3$을 ①에 대입하면 $b=\frac{2}{3}+3=\frac{11}{3}$

$\therefore 2a+3b=-6+11=5$

02 접점의 좌표를 (t, t^3+1)로 놓으면 접선의 방정식은

$y-(t^3+1)=3t^2(x-t)$, 즉 $y=3t^2x-2t^3+1$

이 접선이 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-2t^3+1=-1 \quad \therefore t=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=3x-1$

03 $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이다. $\quad \therefore a=-2$

이때 극댓값 b는

$b=f(-2)=-8+24=16$

$\therefore a+b=-2+16=14$

04 ㄱ. 열린구간 $(0, 1)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다. (참)

ㄴ. $x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $x=3$에서 극대이다. (거짓)

ㄷ. 열린구간 $(1, 3)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

$\therefore f\left(\frac{5}{4}\right)<f(2)<f\left(\frac{5}{2}\right)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

05 해안선 $y=x^2-2$ 위의 점 P의 좌표를 (t, t^2-2)라고 하면

$\overline{\mathrm{OP}}^2=t^2+(t^2-2)^2=t^4-3t^2+4$

$y=t^4-3t^2+4$로 놓으면

$y'=4t^3-6t=2t(2t^2-3)$

$y'=0$에서 $t=0$ 또는 $t=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

따라서 함수 $y=t^4-3t^2+4$는 $t=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$에서 극소이면서 최소이다.

이때 최솟값은

$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^4-3\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2+4=\frac{7}{4}$

이므로 구하는 거리는 $\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

06 $f(x)=2x^3+3x^2-12x$, $g(x)=a$로 놓으면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 만나는 점이 두 개 뿐이다.

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$이므로

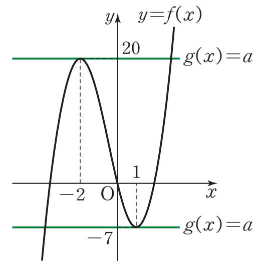
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대, $x=1$에서 극소이고

$f(-2)=-16+12+24=20$

$f(1)=2+3-12=-7$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 두 점에서 만나려면

$a=20$ 또는 $a=-7$

이므로 모든 실수 a의 값의 합은 13이다.

07 ㄱ. $v(t)$가 $t=a$에서 극값을 가지므로 $v'(a)=0$이다.

이때 $v'(a)$는 $t=a$일 때의 점 P의 가속도이므로 $t=a$에서 점 P의 가속도는 0이다. (참)

ㄴ. 점 P의 시각 t에서의 위치를 $x(t)$라고 하면 속도 $v(t)$는

$v(t)=\frac{d}{dt}x(t)=x'(t)$

이때 열린구간 $(a,\ b)$에서 $v(t)>0$이므로 열린구간 $(a,\ b)$에서 $x'(t)>0$이다.

따라서 열린구간 $(a,\ b)$에서 점 P의 위치는 증가한다. (거짓)

ㄷ. $v(b)=0,\ v(d)=0$이므로 $t=b,\ t=d$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

따라서 점 P의 운동 방향은 두 번 바뀐다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

08 $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^3}{x-1}dx-\int_1^4 \frac{1}{x-1}dx=\int_1^4 \frac{x^3-1}{x-1}dx$

$$=\int_1^4 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx$$

$$=\int_1^4 (x^2+x+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^4$$

$$=\frac{63}{2}$$

09 $f(x)=\displaystyle\int(3x^2-4x+2)dx=x^3-2x^2+2x+C$

이때 $f(2)=3$이므로

$8-8+4+C=3\qquad \therefore C=-1$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+2x-1$이므로

$f(-1)=-1-2-2-1=-6$

10 곡선 $y=-x^2+ax$와 x축과의 교점의 x좌표는

$-x^2+ax=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$

곡선 $y=-x^2+ax$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^a(-x^2+ax)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^a=\frac{a^3}{6}$$

따라서 $\dfrac{a^3}{6}=\dfrac{32}{3}$이므로 $a=4$

11 $|x-a|=\begin{cases}x-a & (x\ge a)\\ -x+a & (x<a)\end{cases}$이므로

$$\int_0^3|x-a|dx=\int_0^a(-x+a)dx+\int_a^3(x-a)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_0^a+\left[\frac{1}{2}x^2-ax\right]_a^3$$

$$=a^2-3a+\frac{9}{2}$$

$a^2-3a+\dfrac{9}{2}=\dfrac{5}{2}$에서 $a^2-3a+2=0$

$(a-1)(a-2)=0\qquad \therefore a=1$ 또는 $a=2$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 3이다.

12 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}-\{f(x-h)-f(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

$=2f'(x)$

$=4x^3-6x^2-1$

$\therefore f'(x)=2x^3-3x^2-\dfrac{1}{2}$

$f(x)=\displaystyle\int\left(2x^3-3x^2-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{2}x^4-x^3-\frac{1}{2}x+C$

이고, $f(0)=C=1$이므로

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-x^3-\dfrac{1}{2}x+1\qquad \therefore f(1)=0$

13 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-2x^3-3x^2+2x=f(x)$

$\therefore f'(x)=2x^2+3x-2=(x+2)(2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

따라서 $f(x)$는 $x=-2$일 때 극댓값을 갖는다.

한편,

$$f(x)=\int f'(x)dx$$

$$=\int(2x^2+3x-2)dx$$

$$=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+C$$

이고, 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)-\dfrac{1}{2}-1+1=0$에서 $f(1)=\dfrac{1}{2}$이므로

$f(1)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{2}-2+C=\dfrac{1}{2}\qquad \therefore C=\dfrac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-2x+\dfrac{1}{3}$이므로 구하는 극댓값은 $f(-2)=5$

14 시각 $t=0$에서 $t=7$까지 점 P가 움직인 거리는 $v(t)$의 그래프와 t축 및 두 직선 $t=0,\ t=7$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\int_0^7|v(t)|dt=\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times(1+4)\times2+\frac{1}{2}\times2\times1$$

$$=7$$

15 $f(x+1)=\begin{cases}2-(x+1)^2 & (x+1\le1)\\ 2-(x+1) & (x+1>1)\end{cases}$

$=\begin{cases}-x^2-2x+1 & (x\le0)\\ -x+1 & (x>0)\end{cases}$

$\therefore \int_{-1}^{2} xf(x+1)dx$

$=\int_{-1}^{0} x(-x^2-2x+1)dx+\int_{0}^{2} x(-x+1)dx$

$=\int_{-1}^{0} (-x^3-2x^2+x)dx+\int_{0}^{2} (-x^2+x)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2}$

$=-\frac{19}{12}$

16 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

$f(x)=\int f'(x)dx=x^3-3x^2-9x+C$,

$f(3)=-10$

이므로 $f(3)=27-27-27+C=-10$에서 $C=17$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-9x+17$이므로 극댓값은

$f(-1)=-1-3+9+17=22$

17 $F'(t)=f(t)$이므로 주어진 등식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$f(t)=f(t)+tf'(t)+10t$ $\quad\therefore f'(t)=-10$

$f(t)=\int f'(t)dt=\int(-10)dt$

$=-10t+C$ (C는 적분상수)

이고, $f(0)=30$이므로 $C=30$

$\therefore f(t)=-10t+30$

따라서

$F(t)=tf(t)+5t^2=t(-10t+30)+5t^2$

$=-5t^2+30t$

이므로 $F(2)=-5\times2^2+30\times2=40$

18 ❶ $f'(x)=3x^2+2ax+b$이고, $f(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=0$, $f'(1)=0$

$f'(-1)=3-2a+b=0$에서

$2a-b=3$ ……①

$f'(1)=3+2a+b=0$에서

$2a+b=-3$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면

$a=0$, $b=-3$

❷ 한편,

$f(-1)=-1+a-b+c=-1+3+c=0$

이므로

$c=-2$

❸ 따라서 $f(x)=x^3-3x-2$이므로 극솟값은

$f(1)=1-3-2=-4$

채점 기준	배점
❶ $f'(-1)=0$, $f'(1)=0$임을 이용하여 a, b의 값 구하기	60 %
❷ $f(-1)=0$임을 이용하여 c의 값 구하기	20 %
❸ 극솟값 구하기	20 %

19 ❶ $f(-1)=f(1)=f(2)=0$이므로

$f(x)=a(x+1)(x-1)(x-2)$ ($a\ne0$인 상수)

로 놓으면 $f(0)=2$에서 $a=1$

따라서

$f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$,

$f'(x)=(x-1)(x-2)+(x+1)(x-2)+(x+1)(x-1)$

이다.

❷ 한편, $g(x)=xf(x)$에서

$g(1)=1\times f(1)=0$

❸ $g'(x)=f(x)+xf'(x)$에서

$g'(1)=f(1)+f'(1)$

$=0+(-2)=-2$

❹ 따라서 점 $\mathrm{P}(1, g(1))$에서의 접선의 방정식은 기울기가 -2이고 점 $\mathrm{P}(1, 0)$을 지나는 직선의 방정식이므로

$y=-2(x-1)=-2x+2$

채점 기준	배점
❶ $f(x)$, $f'(x)$ 구하기	30 %
❷ $g(1)$의 값 구하기	10 %
❸ $g'(1)$의 값 구하기	30 %
❹ 접선의 방정식 구하기	30 %

20 ❶ 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-12t+3$$

❷ $a=\dfrac{dv}{dt}=6t-12$

❸ 가속도가 0일 때의 t의 값을 구하면

$6t-12=0 \qquad \therefore t=2$

❹ 따라서 $t=2$일 때 점 P의 위치는

$8-24+6+2=-8$

채점 기준	배점
❶ 시각 t에서의 속도 구하기	30 %
❷ 시각 t에서의 가속도 구하기	30 %
❸ 가속도가 0일 때의 t의 값 구하기	20 %
❹ 가속도가 0일 때의 점 P의 위치 구하기	20 %

21 ❶ 다항함수 $f(x)$의 차수를 n이라고 하면 조건 (가)의 식에서 좌변의 차수는 $n+1$이고 우변의 차수는 $2n$이므로

$n+1=2n \qquad \therefore n=1$

❷ $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$로 놓고 조건 (나)의 식에 대입하면

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(ax+b)dx=\left[\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_0^2=2(a+b)$$

이므로 $2(a+b)=10$에서 $a+b=5$

❸ $\therefore f(1)=a+b=5$

채점 기준	배점
❶ 다항함수 $f(x)$의 차수 구하기	50 %
❷ 미지수에 대한 식 세우기	40 %
❸ $f(1)$의 값 구하기	10 %

22 ❶ $f(x+y)=f(x)+f(y)$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

❷ $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=f'(0)=1$$

즉, $f'(x)=1$

❸ $f(x)=\int 1dx=x+C$이고, $f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=x$

채점 기준	배점
❶ $f(0)$의 값 구하기	20 %
❷ $f'(x)$ 구하기	50 %
❸ $f(x)$ 구하기	30 %

23 ❶ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표 $(1, 1)$, $(2, 2)$와 같다.

따라서 $f(1)=1$에서

$a+b=1$ ······①

$f(2)=2$에서

$4a+b=2$ ······②

①, ②를 연립하여 풀면

$a=\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{2}{3}$

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}$

❷ A, B는 각각 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이므로

$$A-B=2\int_0^1\{f(x)-x\}dx-2\int_1^2\{x-f(x)\}dx=2\int_0^2\{f(x)-x\}dx=2\int_0^2\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}-x\right)dx=2\left[\frac{1}{9}x^3+\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2=\frac{4}{9}$$

채점 기준	배점
❶ $f(x)$ 구하기	50 %
❷ $A-B$의 값 구하기	50 %

244~247쪽

대단원 기출 모의고사 I. 함수의 극한과 연속

정답률 80 % 이상	01 ①	02 ③	03 ⑤	04 ④
05 ③	06 ③	07 ⑤	08 21	09 ①
10 ②	11 ①			
정답률 79~60 %	12 ①	13 ③	14 ⑤	
정답률 60 % 미만	15 ②	16 ④	17 ⑤	18 ②

01 미정계수의 결정

$x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}(4x-a)=0$이므로

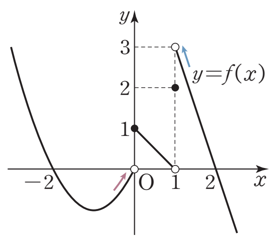
$4-a=0 \qquad \therefore a=4$

$a=4$를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x-4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)}{x-1}=4=b$$

$\therefore a+b=4+4=8$

02 함수의 그래프에서 극한값 구하기



x가 0보다 작은 값을 가지면서 0에 한없이 가까워질 때 $f(x)$는 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to 0-} f(x)=0$

x가 1보다 큰 값을 가지면서 1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$는 3에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to 1+} f(x)=3$

$\therefore \lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=0+3=3$

03 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{\sqrt{x+8}-3}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-x^2+x-1)(\sqrt{x+8}+3)}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+1)(\sqrt{x+8}+3)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x^2+1)(\sqrt{x+8}+3)$$

$$=(1^2+1)(\sqrt{1+8}+3)=2\times 6=12$$

04 함수가 연속일 때 미정계수 구하기

(i) $x<2$일 때, $f(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$

(ii) $x\ge 2$일 때, $f(x)=1>0$

(i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이다.

그런데 $f(x)$는 $x=2$에서만 연속이 아니므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이면 된다.

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2-}\frac{ax+1}{x^2-4x+6}=\frac{2a+1}{2}$$

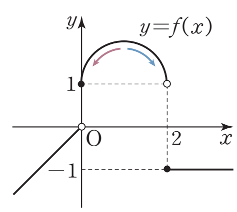
$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2+}\frac{ax+1}{1}=2a+1$$

$$\frac{g(2)}{f(2)}=2a+1$$

즉, $\frac{2a+1}{2}=2a+1$이므로

$2a+1=4a+2,\ 2a=-1 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

05 그래프가 주어진 함수의 연속



ㄱ. $\lim_{x\to 0+} f(x)=1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 2-} f(x)=1$ (거짓)

ㄷ. 함수 $|f(x)|$가 $x=2$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 2-}|f(x)|=\lim_{x\to 2+}|f(x)|=|f(2)|$

가 성립해야 한다.

$\lim_{x\to 2-}|f(x)|=|1|=1,$

$\lim_{x\to 2+}|f(x)|=|-1|=1$

이므로 $\lim_{x\to 2}|f(x)|=1$

이때 $|f(2)|=|-1|=1$이므로

$\lim_{x\to 2}|f(x)|=|f(2)|$

따라서 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

06 함수의 연속

ㄱ. $x>1$일 때 $f(x)=-x+2$이므로

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(-x+2)=-1+2=1$ (참)

ㄴ. $a=0$이면 $f(x)=\begin{cases} 0 & (x\le 1) \\ -x+2 & (x>1) \end{cases}$이고 함수

$f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$

이 성립해야 한다.

그런데 $\lim_{x\to 1+} f(x)=1$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to 1+} f(x)\ne\lim_{x\to 1-} f(x)$

즉, 극한 $\lim_{x\to 1} f(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x\ne 1$인 모든 실수에서 연속이므로 함수 $y=(x-1)f(x)$가 $x=1$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$\lim_{x\to 1-} (x-1)f(x)=\lim_{x\to 1-} a(x-1)=0$

$\lim_{x\to 1+} (x-1)f(x)=\lim_{x\to 1+} (x-1)(-x+2)$

$=0\times 1=0$

$\therefore \lim_{x\to 1} (x-1)f(x)=0$

이때 $x=1$에서의 함숫값은 0이므로

$y=(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 함수 $y=(x-1)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

07 **$f(x)$가 포함된 함수의 극한**

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x)-3\}=0$이므로 $\lim_{x\to 2} f(x)=3$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9} &=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\{f(x)-3\}\{f(x)+3\}} \\ &=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\frac{f(x)-3}{x-2}\times\{f(x)+3\}} \\ &=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\frac{f(x)-3}{x-2}}\times\frac{1}{\lim_{x\to 2}\{f(x)+3\}} \\ &=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3+3}=\frac{1}{30}\end{aligned}$$

주의 함수 $f(x)$가 연속함수인지 알 수 없으므로
$\lim_{x\to 2}\{f(x)-3\}=0$에서 $f(2)=3$이라고 하면 안 된다.

08 **미정계수의 결정**

$x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}(\sqrt{x+a}-2)=0$이므로

$\sqrt{2+a}-2=0$, $\sqrt{2+a}=2$

$2+a=4$ $\quad\therefore a=2$

$a=2$를 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} &=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2} \\ &=\frac{1}{\sqrt{2+2}+2}=\frac{1}{4}=b\end{aligned}$$

$\therefore 10a+4b=10\times 2+4\times\frac{1}{4}=21$

09 **$f(x)$가 포함된 함수의 극한**

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-2x}{x-1}$에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{g(x)-2x\}=0$이고 $g(x)$가 다항함수이므로

$g(1)-2=0$ $\quad\therefore g(1)=2$

$f(x)+x-1=(x-1)g(x)$에서

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-1)g(x)-(x-1) \\ &=(x-1)\{g(x)-1\} \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

①을 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}$에 대입하면

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\{g(x)-1\}g(x)}{x^2-1} \\ &=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\{g(x)-1\}g(x)}{(x-1)(x+1)} \\ &=\lim_{x\to 1}\frac{\{g(x)-1\}g(x)}{x+1} \\ &=\frac{\{g(1)-1\}g(1)}{1+1}=\frac{(2-1)\times 2}{2}=1\end{aligned}$$

10 다항함수의 결정

조건 ㈎에서 다항함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로

$f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

조건 ㈏에서 $x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 0} f(x)=\lim_{x \to 0}(2x^2+ax+b)=b=0$

$\therefore\ f(x)=2x^2+ax$ ……①

①을 조건 ㈏에 대입하면

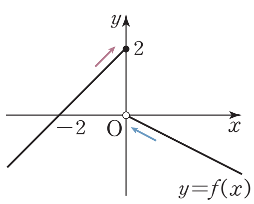
$$\lim_{x \to 0}\frac{2x^2+ax}{x}=\lim_{x \to 0}(2x+a)=a=3$$

$a=3$을 ①에 대입하면

$f(x)=2x^2+3x$

$\therefore\ f(2)=2\times2^2+3\times2=14$

11 함수가 연속일 때 미정계수 구하기



함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$$\lim_{x \to 0-} g(x)=\lim_{x \to 0+} g(x)=g(0)$$

이 성립해야 한다.

$$\lim_{x \to 0-} g(x)=\lim_{x \to 0-} f(x)\{f(x)+k\}=2\times(2+k)=2k+4$$

$$\lim_{x \to 0+} g(x)=\lim_{x \to 0+} f(x)\{f(x)+k\}=0\times(0+k)=0$$

$$g(0)=f(0)\{f(0)+k\}=2\times(2+k)=2k+4$$

즉, $2k+4=0$에서 $k=-2$

12 $f(x)$를 포함한 함수의 극한값 구하기

$$\lim_{x \to 1}\frac{f(f(x))}{2x^2-x-1}$$
$$=\lim_{x \to 1}\frac{f(f(x))}{(x-1)(2x+1)}$$
$$=\lim_{x \to 1}\left\{\frac{f(f(x))}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x-1}\times\frac{1}{2x+1}\right\}$$
$$=\lim_{x \to 1}\frac{f(f(x))}{f(x)}\times\lim_{x \to 1}\frac{f(x)}{x-1}\times\lim_{x \to 1}\frac{1}{2x+1}$$

이때 $\lim_{x \to 1}\frac{f(f(x))}{f(x)}$에서 $f(x)=t$라고 하면

$x \longrightarrow 1$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

(주어진 식)

$$=\lim_{t \to 0}\frac{f(t)}{t}\times\lim_{x \to 1}\frac{f(x)}{x-1}\times\lim_{x \to 1}\frac{1}{2x+1}$$
$$=\lim_{t \to 0}\frac{1}{\frac{t}{f(t)}}\times\lim_{x \to 1}\frac{1}{\frac{x-1}{f(x)}}\times\lim_{x \to 1}\frac{1}{2x+1}$$
$$=1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

13 함수의 연속 판단하기

ㄱ. $\lim_{x \to 1-} f(x)=0$, $\lim_{x \to 1+} f(x)=1$이므로

$\lim_{x \to 1-} f(x)<\lim_{x \to 1+} f(x)$ (참)

ㄴ. $\frac{1}{t}=x$라고 하면 $t \longrightarrow \infty$일 때 $x \longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{t \to \infty} f\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{x \to 0+} f(x)=1$ (참)

ㄷ. $\lim_{x \to 3-} f(f(x))=\lim_{t \to 2+} f(t)=3$

$x \longrightarrow 3-$일 때 $f(x) \longrightarrow 2+$

$\lim_{x \to 3+} f(f(x))=\lim_{t \to 2-} f(t)=1$

$x \longrightarrow 3+$일 때 $f(x) \longrightarrow 2-$

즉, $\lim_{x \to 3-} f(f(x))\neq\lim_{x \to 3+} f(f(x))$이므로

함수 $f(f(x))$는 $x=3$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14 함수의 연속성의 응용

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 0-} f(x)=\lim_{x \to 0+} f(x)=f(0)$

$x<0$일 때, $g(x)=-f(x)+x^2+4$이므로

$$\lim_{x \to 0-} g(x)=\lim_{x \to 0-}\{-f(x)+x^2+4\}=-f(0)+4$$

$x>0$일 때, $g(x)=f(x)-x^2-2x-8$이므로

$$\lim_{x \to 0+} g(x)=\lim_{x \to 0+}\{f(x)-x^2-2x-8\}=f(0)-8$$

$\lim_{x \to 0-} g(x)-\lim_{x \to 0+} g(x)=6$에서

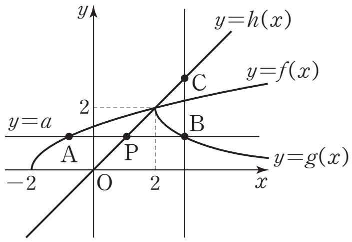
$\{-f(0)+4\}-\{f(0)-8\}=6$

$-2f(0)+12=6$, $2f(0)=6$

$\therefore\ f(0)=3$

15 함수의 극한의 활용

세 점 A, B, C를 그래프에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 점 A의 x좌표를 x_1이라고 하면 $a=\sqrt{x_1+2}$에서

$a^2=x_1+2 \qquad \therefore\ x_1=a^2-2$ ……①

또, 점 B의 x좌표를 x_2라고 하면

$a=-\sqrt{x_2-2}+2$, $2-a=\sqrt{x_2-2}$이므로

$(2-a)^2=x_2-2 \qquad \therefore\ x_2=a^2-4a+6$ ……②

①, ②에서 $A(a^2-2,\ a)$, $B(a^2-4a+6,\ a)$이므로

$\overline{AB}=(a^2-4a+6)-(a^2-2)=-4a+8$

이때 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선은

$x=a^2-4a+6$이므로 점 C의 좌표는

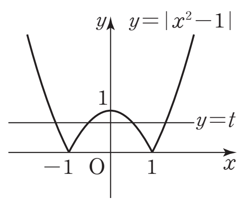
$(a^2-4a+6,\ a^2-4a+6)$이다.

$\therefore\ \overline{BC}=(a^2-4a+6)-a=a^2-5a+6$

$$\therefore\ \lim_{a\to 2-}\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\lim_{a\to 2-}\frac{a^2-5a+6}{-4a+8}$$
$$=\lim_{a\to 2-}\frac{(a-2)(a-3)}{-4(a-2)}$$
$$=\lim_{a\to 2-}\frac{a-3}{-4}=\frac{1}{4}$$

16 절댓값 기호가 주어진 함수의 극한

함수 $y=|x^2-1|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $0<t<1$일 때 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 직선 $y=t$는 서로 다른 네 점에서 만난다. 즉, $f(t)=4$이다.

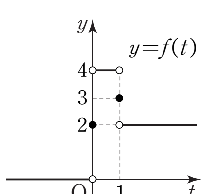


$$\therefore\ \lim_{t\to 1-}f(t)=\lim_{t\to 1-}4=4$$

기출 가이드

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 2 & (t=0\ \text{또는}\ t>1)\\ 4 & (0<t<1)\\ 3 & (t=1)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



17 다항함수의 결정

조건 (가)에 의하여 다항함수 $f(x)-x^2$은 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$f(x)-x^2=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=2x^2+ax+b$

조건 (나)에 의하여 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$이므로 $b=0$

$f(x)=2x^2+ax$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(2x+a)}{x(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+a}{x+1}=a=-1$$

따라서 $f(x)=2x^2-x$이므로 $f(3)=15$

18 함수의 극한의 활용

△POQ가 이등변삼각형이므로 점 Q의 좌표는 $(2t,\ 0)$

△POQ의 넓이는 $S(t)=\frac{1}{2}\times 2t\times t^2=t^3$

△PRO가 이등변삼각형이므로 선분 OP의 수직이등분선이 y축과 만나는 점이 R이다.

선분 OP의 중점을 M이라고 하면 $M\left(\frac{t}{2},\ \frac{t^2}{2}\right)$

이때 직선 OP의 기울기는 $\frac{t^2}{t}=t$이므로 직선 MR의 기울기는 $-\frac{1}{t}$이다.

기울기가 $-\frac{1}{t}$이고 점 $\left(\frac{t}{2},\ \frac{t^2}{2}\right)$을 지나는 직선 MR의 방정식은

$y-\frac{t^2}{2}=-\frac{1}{t}\left(x-\frac{t}{2}\right)$, 즉 $y=-\frac{1}{t}x+\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}$

즉, 점 R의 좌표는 $\left(0,\ \frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\right)$이므로 △PRO의 넓이는

$$T(t)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\times t=\frac{1}{4}(t^3+t)$$

$$\therefore\ \lim_{t\to 0+}\frac{T(t)-S(t)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{4}(t^3+t)-t^3}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\left(-\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}$$

248~251쪽

대단원 기출 모의고사 Ⅱ. 미분

정답률 80 % 이상	01 ②	02 ①	03 ①	04 ⑤
정답률 79~60 %	05 28	06 ⑤	07 ④	08 ⑤
09 ⑤	10 ④	11 ⑤	12 ②	13 16
14 ③	15 33			
정답률 60 % 미만	16 ②	17 ⑤	18 13	19 ②
20 ④				

01 함수의 극대, 극소

$f(x)=-x^3+3x+1$에서

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	3	↘

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극값을 가지므로 두 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$의 좌표는 각각 $(-1, -1)$, $(1, 3)$이다.

따라서 두 점 $(-1, -1)$, $(1, 3)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{3-(-1)}{1-(-1)}=\frac{4}{2}=2$$

02 미분법

$f(x)=x^4-3x^2+4$에서

$f'(x)=4x^3-6x$

$\therefore f'(1)=4-6=-2$

03 속도와 가속도

시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$라고 하면

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=3t^2-12t$$

시각 t에서의 점 P의 가속도를 $a(t)$라고 하면

$a(t)=v'(t)=6t-12$

점 P의 가속도가 0이므로

$6t-12=0 \qquad \therefore t=2$

이때 점 P의 속도는

$v(2)=3\times 2^2-12\times 2=-12$

04 미분계수

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-1}{x-2}=2$에서 $x\longrightarrow 2$일 때 (분모)$\longrightarrow 0$이므로 (분자)$\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 2}\{f(x)-1\}=0$이므로 $f(2)=1$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(2)=2$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(2+h)-f(2)\}-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\\&=f'(2)+f'(2)=2f'(2)\\&=2\times 2=4\end{aligned}$$

05 미분계수

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x+1)-8}{x^2-4}=5$에서 $x\longrightarrow 2$일 때 (분모)$\longrightarrow 0$이므로 (분자)$\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 2}\{f(x+1)-8\}=0$이므로 $f(3)=8$

$x+1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 2$일 때 $t\longrightarrow 3$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{f(x+1)-8}{x^2-4}&=\lim_{x\to 2}\frac{f(x+1)-8}{(x+2)(x-2)}\\&=\lim_{t\to 3}\frac{f(t)-f(3)}{(t+1)(t-3)}\\&=\lim_{t\to 3}\frac{f(t)-f(3)}{t-3}\times\lim_{t\to 3}\frac{1}{t+1}\\&=\frac{1}{4}f'(3)\end{aligned}$$

즉, $\frac{1}{4}f'(3)=5$이므로 $f'(3)=20$

$\therefore f(3)+f'(3)=8+20=28$

06 접선의 방정식

점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이고 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{3}$이므로 $f'(1)=3$

$\frac{1}{n}=h$라고 하면 $n\longrightarrow\infty$일 때 $h\longrightarrow 0+$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{1}{2n}\right)-f\left(1-\frac{1}{3n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{f\left(1+\frac{h}{2}\right)-f\left(1-\frac{h}{3}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{\left\{f\left(1+\frac{h}{2}\right)-f(1)\right\}-\left\{f\left(1-\frac{h}{3}\right)-f(1)\right\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{f\left(1+\frac{h}{2}\right)-f(1)}{\frac{h}{2}}\times\frac{1}{2}$$

$$-\lim_{h\to0+}\frac{f\left(1-\frac{h}{3}\right)-f(1)}{-\frac{h}{3}}\times\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)+\frac{1}{3}f'(1)=\frac{5}{6}f'(1)$$

$$=\frac{5}{6}\times3=\frac{5}{2}$$

07 **곱의 미분법**

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$에서 $x\to2$일 때

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

또, $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$인 삼차함수이므로 $f(x)=(x-1)(x-2)(x+a)$로 놓을 수 있다.

$f'(x)$

$=(x-2)(x+a)+(x-1)(x+a)+(x-1)(x-2)$

이므로

$f'(2)=(2-1)(2+a)=2+a$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x+a)}{\{f'(x)\}^2}$$

$$=\frac{2+a}{(2+a)^2}=\frac{1}{2+a}$$

따라서 $\frac{1}{2+a}=\frac{1}{4}$에서 $a=2$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+2)$

$\therefore f(3)=2\times1\times5=10$

08 **함수의 미분가능**

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=-2$에서 미분가능해야 한다.

또, $x=-2$에서 미분가능하면 $x=-2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2+}f(x)=f(-2)$$

즉, $\displaystyle\lim_{x\to-2-}(x^2+ax+b)=\lim_{x\to-2+}2x$이므로

$4-2a+b=-4 \qquad \therefore b=2a-8 \qquad \cdots\cdots$①

이때 $f'(x)=\begin{cases}2x+a & (x<-2)\\ 2 & (x>-2)\end{cases}$이고 함수 $f(x)$가

$x=-2$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to-2-}f'(x)=\lim_{x\to-2+}f'(x)$$

즉, $\displaystyle\lim_{x\to-2-}(2x+a)=\lim_{x\to-2+}2$이므로

$-4+a=2 \qquad \therefore a=6$

$a=6$을 ①에 대입하면 $b=4$

$\therefore a+b=10$

09 **함수의 극대, 극소**

조건 ㈎에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$(a, b, c는 상수)

조건 ㈏에서 $x=-1$과 $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=0$, $f'(2)=0$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f'(-1)=3-2a+b=0$에서 $2a-b=3 \qquad \cdots\cdots$①

$f'(2)=12+4a+b=0$에서 $4a+b=-12 \qquad \cdots\cdots$②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-\frac{3}{2}$, $b=-6$

$\therefore f'(x)=3x^2-3x-6$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(3+h)-f(3)\}-\{f(3-h)-f(3)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$-\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}\times(-1)$$

$$=f'(3)+f'(3)=2f'(3)$$

이때 $f'(3)=27-9-6=12$이므로 $2f'(3)=24$

10 **수직선 위를 움직이는 점의 속도**

시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$라고 하면

$v(t)=3t^2-12$

점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간의 속도가 0이므로

$3t^2-12=0$에서 $3(t+2)(t-2)=0$

이때 $t>0$이므로 $t=2$

또, $t=2$일 때 점 P의 위치가 원점이므로

$2^3-12\times2+k=0 \qquad \therefore k=16$

11 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 방정식은

$y-g(2)=g'(2)(x-2)$

$\therefore y=g'(2)x-2g'(2)+g(2)$ ……①

함수 $g(x)$의 도함수가 $f(x)$이므로

$g'(x)=f(x)=(x-3)^2$ $\therefore g'(2)=1$

이것을 ①에 대입하면 $y=x-2+g(2)$

이때 접선의 y절편이 -5이므로

$-5=-2+g(2)$ $\therefore g(2)=-3$

따라서 접선의 방정식은 $y=x-5$이므로 x절편은 5이다.

12 절댓값 기호를 포함한 함수의 미분계수

함수 $f(x)=x|x|+|x-1|^3$에서

(i) $x<0$일 때

$f(x)=x\times(-x)+(-x+1)^3$
$=-x^3+2x^2-3x+1$

(ii) $0\le x<1$일 때

$f(x)=x\times x+(-x+1)^3=-x^3+4x^2-3x+1$

(iii) $x\ge 1$일 때

$f(x)=x\times x+(x-1)^3=x^3-2x^2+3x-1$

이때 $f'(x)=\begin{cases} -3x^2+4x-3 & (x<0) \\ -3x^2+8x-3 & (0<x<1) \\ 3x^2-4x+3 & (x>1) \end{cases}$에서

$\lim_{x\to 0+} f'(x)=-3$, $\lim_{x\to 0-} f'(x)=-3$이므로

$f'(0)=-3$

$\lim_{x\to 1+} f'(x)=2$, $\lim_{x\to 1-} f'(x)=2$이므로

$f'(1)=2$

$\therefore f'(0)+f'(1)=-3+2=-1$

13 미분법

$f(x)$를 n차 다항함수라고 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차 다항함수이므로 $f(x)f'(x)=2x^3-9x^2+5x+6$의 양변의 차수를 비교하면

$n+(n-1)=3$ $\therefore n=2$

즉, $f(x)$는 이차함수이고 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f'(x)=2x+a$

이때 $f(x)$, $f'(x)$를 주어진 식에 대입하면

$(x^2+ax+b)(2x+a)=2x^3-9x^2+5x+6$

$2x^3+3ax^2+(a^2+2b)x+ab=2x^3-9x^2+5x+6$

$\therefore 3a=-9$, $a^2+2b=5$, $ab=6$

위 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-2$

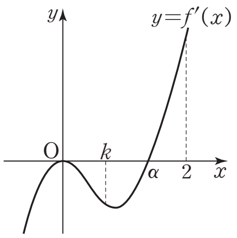
따라서 $f(x)=x^2-3x-2$이므로 $f(-3)=16$

14 함수의 증가, 감소와 극대, 극소

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)로 놓으면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

이때 $f'(x)$가 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이므로 조건 ㈎, ㈏를 만족하는 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $y=f'(x)$의 그래프에서 열린구간 $(0, 2)$에서 방정식 $f'(x)=0$은 한 개의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $y=f'(x)$의 그래프에서 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖는다. (거짓)

ㄷ. ㄱ에서 $f'(x)=0$은 한 개의 실근을 가지므로

$f'(x)=4x^2(x-\alpha)$ $(0<\alpha<2)$로 놓으면

$4x^3+3ax^2+2bx+c=4x^2(x-\alpha)$

$4x^3+3ax^2+2bx+c=4x^3-4\alpha x^2$

$3a=-4\alpha$, $b=0$, $c=0$

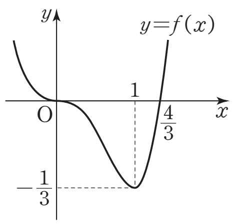
이때 $f'(2)=16$이므로 $32+12a+4b+c=16$

$12a=-16$ $\therefore a=-\frac{4}{3}$, $\alpha=1$

$\therefore f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3+d$

이때 $f(0)=0$이면

$f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3$이고 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 모든 실수 x에 대하여

$f(x)\ge f(1)=-\frac{1}{3}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

15 방정식의 실근

함수 $f(x)=2x^3-3x^2-12x-10$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 함수 $y=g(x)$의 그래프는

$g(x)=2x^3-3x^2-12x-10+a$

$g'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

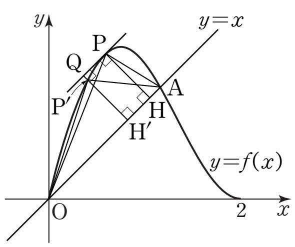
삼차방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $g(-1)g(2)=0$이어야 하므로

$(a-3)(a-30)=0 \qquad \therefore a=3$ 또는 $a=30$

따라서 모든 a의 값의 합은 $3+30=33$

16 접선의 기울기

다음 그림에서 $\overline{\mathrm{OA}}$의 길이는 일정하므로 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되는 경우는 점 P에서 $\overline{\mathrm{OA}}$까지의 거리가 최대일 때이다.



이때 점 P에서의 접선이 직선 OA, 즉 직선 $y=x$와 평행하면 위의 그림에서

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{QH'}}>\overline{\mathrm{P'H'}}$

이므로 점 P에서 $\overline{\mathrm{OA}}$까지의 거리가 최대가 된다.

따라서 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되게 하는 점 P는 그 점에서의 접선의 기울기가 1인 점이다.

$f(x)=ax(x-2)^2$이므로

$f'(x)=3ax^2-8ax+4a$

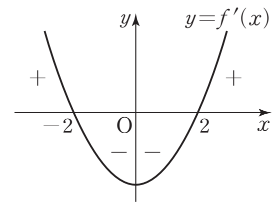
이때 점 P의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이므로 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}a-4a+4a=\frac{3}{4}a$이므로

$\frac{3}{4}a=1 \qquad \therefore a=\frac{4}{3}$

17 접선의 방정식

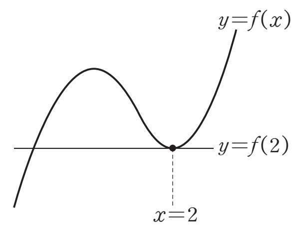
ㄱ. 도함수 $f'(x)$가 이차함수이고 조건 (나)에서 $f'(-3)=f'(3)$이므로 $f'(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.

조건 (가)에서 $x=-2$에서 극대이므로 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



따라서 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대, $x=2$에서 극소이고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 방정식 $f(x)=f(2)$의 서로 다른 두 실근을 2, α로 놓으면

$f(x)-f(2)=a(x-2)^2(x-\alpha)\ (a\neq 0)$

$f'(x)=2a(x-2)(x-\alpha)+a(x-2)^2$

$\quad =a(x-2)(3x-2\alpha-2)$

그런데 $f'(-2)=0$이므로

$a(-4)(-6-2\alpha-2)=0 \qquad \therefore \alpha=-4$

따라서 $f(x)-f(2)=a(x-2)^2(x+4)$이고

$f'(x)=3a(x-2)(x+2)$이므로

$f(-1)-f(2)=27a,\ f'(-1)=-9a$

이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선의 방정식은

$y=-9a(x+1)+f(-1)$, 즉

$y=-9ax+18a+f(2)$

$x=2$를 위 식에 대입하면 $y=f(2)$이므로 접선은 점 $(2,\ f(2))$를 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

18 함수의 연속과 미분가능

$h(x)=f(2k-x)$로 놓으면 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq k) \\ h(x) & (x<k) \end{cases}$

이고

$$h(x)=(2k-x)^3-(2k-x)^2-9(2k-x)+1$$
$$=-x^3+(6k-1)x^2+(-12k^2+4k+9)x+8k^3-4k^2-18k+1$$

이다.

(i) $h(k)=f(2k-k)=f(k)=g(k)$이므로 $g(x)$는 $x=k$에서 연속이다.

(ii) $f(x)$, $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하고

$$\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=f'(k)$$

$$\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k-}\frac{h(x)-h(k)}{x-k}=h'(k)$$

이므로 $g(x)$가 $x=k$에서 미분계수가 존재하려면 $f'(k)=h'(k)$가 성립해야 한다.

$f'(x)=3x^2-2x-9$에서

$f'(k)=3k^2-2k-9$

$h'(x)=-3x^2+2(6k-1)x-12k^2+4k+9$에서

$h'(k)=-3k^2+2k+9$

즉,

$3k^2-2k-9=-3k^2+2k+9$

$3k^2-2k-9=0$

이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{2}{3}$

따라서 $p=3$, $q=2$이므로 $p^2+q^2=13$

19 **기함수의 미분계수**

$f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=-g(x)$에서 $f(x)$, $g(x)$는 기함수이므로 다항함수 $f(x)$, $g(x)$의 모든 항의 차수는 홀수이다.

$f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 홀수 m, n에 대하여 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항을 각각 x^m, x^n이라고 하면 도함수 $f'(x)$, $g'(x)$의 최고차항은 각각 mx^{m-1}, nx^{n-1}이다.

$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^2g'(x)}=3$에서 차수와 계수를 비교하면 각각

$m-1=2+(n-1)$, $\frac{m}{n}=3$

$\therefore m=3$, $n=1$

$f(x)=x^3+ax$ (a는 상수), $g(x)=x$라고 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^3+ax)x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}(x^2+a)=a$$

따라서 $a=-1$이므로 $f(x)=x^3-x$

$\therefore f(2)+g(3)=6+3=9$

20 **곡선 위의 점에서의 접선의 방정식**

$f(x)=x^3+ax^2+bx$에서 $f'(x)=3x^3+2ax+b$

이때 점 $(t, f(t))$, 즉 점 (t, t^3+at^2+bt)에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2at+b$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+at^2+bt)=(3t^2+2at+b)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2at+b)x-2t^3-at^2$ ……①

①에 $x=0$을 대입하면 $y=-2t^3-at^2$이므로

$P(0, -2t^3-at^2)$

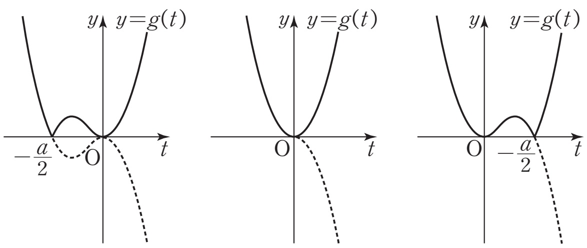
따라서 원점에서 점 $P(0, -2t^3-at^2)$까지의 거리 $g(t)$는

$g(t)=|-2t^3-at^2|=|-t^2(2t+a)|$

$g(t)=0$에서 $t=0$(중근) 또는 $t=-\frac{a}{2}$이므로 함수 $y=g(t)$의 그래프는 t축과 원점에서 접하고 점 $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$에서 만난다.

이때 함수 $y=g(t)$의 그래프는 a의 값에 따라 다음과 같은 세 가지 개형으로 나타낼 수 있다.

(i) $a>0$일 때 (ii) $a=0$일 때 (iii) $a<0$일 때



조건 (나)에서 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 위의 세 가지 개형 중 (ii) $a=0$일 때만 조건을 만족한다.

즉, $f(x)=x^3+bx$이고, 조건 (가)에서 $f(1)=2$이므로

$1+b=2$ $\therefore b=1$

따라서 $f(x)=x^3+x$이므로 $f(3)=27+3=30$

252~255쪽

대단원 기출 모의고사 Ⅲ. 적분

정답률 80 % 이상	01 ①	02 ④	03 ④	04 ④
05 ④	06 ②	07 ④	08 ①	09 ①
정답률 79~60 %	10 17	11 ①	12 ①	13 4
14 ⑤	15 ⑤			
정답률 60 % 미만	16 ①	17 ③	18 ⑤	19 ⑤

01 정적분의 값

$\int_0^a (3x^2-4)dx=\left[x^3-4x\right]_0^a=a^3-4a=0$에서

$a(a+2)(a-2)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=2$

a는 양수이므로 $a=2$

02 두 곡선 사이의 넓이

두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라고 하면

$$S_1=\int_0^1\{(-x^4+x)-(x^4-x^3)\}dx$$
$$=\int_0^1(-2x^4+x^3+x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{7}{20}$$

또, 두 곡선 $y=-x^4+x$, $y=ax(1-x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라고 하면

$$S_2=\int_0^1\{(-x^4+x)-ax(1-x)\}dx$$
$$=\int_0^1\{-x^4+ax^2+(1-a)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{a}{3}x^3+\frac{1-a}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{3}{10}-\frac{a}{6}$$

이때 $S_1=2S_2$이므로

$\frac{7}{20}=2\left(\frac{3}{10}-\frac{a}{6}\right)$, $\frac{a}{6}=\frac{1}{8}$

$\therefore a=\frac{3}{4}$

03 곡선과 좌표축 사이의 넓이

S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2S_2=S_1+S_3$ ······①

$k>4$일 때,

$$\int_0^k f(x)dx=S_1-S_2+S_3=(S_1+S_3)-S_2$$
$$=2S_2-S_2 \ (\because ①)$$
$$=S_2$$

곡선 $f(x)=x^2-5x+4$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-5x+4=0$에서 $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

이때 S_2는 닫힌구간 $[1, 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이이므로

$$S_2=\int_1^4|x^2-5x+4|dx$$
$$=\int_1^4(-x^2+5x-4)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_1^4=\frac{9}{2}$$

04 부정적분

$$f(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^3+2x+1\right)dx-\int\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)dx$$
$$=\int\left\{\left(\frac{1}{2}x^3+2x+1\right)-\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)\right\}dx$$
$$=\int(x+1)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$이므로

$f(4)=\frac{1}{2}\times 4^2+4+1=13$

05 우함수 또는 기함수의 정적분

$$\int_{-1}^1\{f(x)\}^2dx=\int_{-1}^1(x+1)^2dx$$
$$=\int_{-1}^1(x^2+2x+1)dx$$
$$=2\int_0^1(x^2+1)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{8}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(x+1)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}1\,dx$$
$$=2\Big[x\Big]_0^1=2$$

이때 $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=k\left(\int_{-1}^{1}f(x)dx\right)^2$이므로

$\frac{8}{3}=k\times2^2\qquad\therefore k=\frac{2}{3}$

06 정적분과 미분의 관계

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-2)(x-3)$

$\therefore f'(4)=2\times1=2$

기출 가이드

정적분으로 나타내어진 함수의 미분

(1) $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ (단, a는 상수)

(2) $\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} f(t)dt=f(x+a)-f(x)$ (단, a는 상수)

07 곡선과 x축 사이의 넓이

$f'(x)=x^2-1$이므로

$$f(x)=\int(x^2-1)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x+C\text{ (단, }C\text{는 적분상수)}$$

그런데 $f(0)=0$이므로 $C=0$

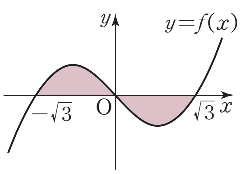
$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{3}x^3-x=0$에서 $\frac{1}{3}x(x^2-3)=0$

$\therefore x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

따라서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}|f(x)|dx$$
$$=2\int_0^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{3}x^3+x\right)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}$$
$$=2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$

08 곡선과 x축 사이의 넓이

$y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx=13$$

즉, $\int_0^a f(x)dx=\frac{13}{2}$

한편, 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$f(x+3)=f(x)$이고,

$\int_0^3 f(x)dx=\frac{1}{2}\times(1+3)\times1=2$이므로

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_3^6 f(x)dx=\int_6^9 f(x)dx=2$$

$$\therefore \int_0^9 f(x)dx=6$$

이때

$$\int_0^a f(x)dx-\int_0^9 f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_9^0 f(x)dx$$
$$=\int_9^a f(x)dx$$
$$=\frac{13}{2}-6=\frac{1}{2}$$

이고

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_3^4 f(x)dx=\int_6^7 f(x)dx$$
$$=\int_9^{10} f(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$$

이므로 $a=10$이다.

09 정적분과 미분의 관계

$$\int_0^2 f'(x)dx=\Big[f(x)\Big]_0^2$$
$$=f(2)-f(0)$$
$$=0-2=-2$$

10 정적분과 미분의 관계

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+5$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=17$$

11 부정적분과 미분의 관계

$g(x+h)-g(x)=\int_{x}^{x+h} f(t)dt$의 양변을 $h(h\neq0)$로 나눈 후 $h\longrightarrow0$일 때의 극한을 취하면

$$\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt$$

이때 $\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$

이고, $f(t)$의 부정적분을 $F(t)$라고 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$
$$=F'(x)=f(x)$$

즉, $g'(x)=f(x)=x^2-4x$이므로

$$g(x)=\int g'(x)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-2x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

따라서 방정식 $g(x)=0$, 즉 $\frac{1}{3}x^3-2x^2+C=0$의 모든 근의 합은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{-2}{\frac{1}{3}}=6$$

12 정적분과 미분의 관계

$\int_{0}^{1} tf(t)dt=k$(k는 상수) ……①

로 놓으면 $f(x)=x^2-2x+k$

이것을 ①에 대입하면

$$\int_{0}^{1} t(t^2-2t+k)dt=k$$
$$\int_{0}^{1} (t^3-2t^2+kt)dt=k$$
$$\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1=k$$
$$-\frac{5}{12}+\frac{k}{2}=k \qquad \therefore k=-\frac{5}{6}$$

따라서 $f(x)=x^2-2x-\frac{5}{6}$이므로

$$f(3)=3^2-2\times3-\frac{5}{6}=\frac{13}{6}$$

13 곡선과 직선 사이의 넓이

곡선 $y=-2x^2+3x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$-2x^2+3x=x$에서 $-2x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{1}\{(-2x^2+3x)-x\}dx$$
$$=\int_{0}^{1}(-2x^2+2x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=1$이므로 $p+q=4$

14 부정적분과 미분의 관계

$f(x)=\int xg(x)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=xg(x)$ ……①

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=4x^3+2x$에서

$f'(x)-g'(x)=4x^3+2x$ ……②

①, ②에서

$xg(x)-g'(x)=4x^3+2x$ ……③

이므로 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 4인 이차함수이다.

$g(x)=4x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$g'(x)=8x+a$

이를 ③에 대입하면

$x(4x^2+ax+b)-(8x+a)=4x^3+2x$

$4x^3+ax^2+(b-8)x-a=4x^3+2x$에서

$a=0$, $b=10$

따라서 $g(x)=4x^2+10$이므로

$g(1)=4\times1+10=14$

참고 다항함수 $g(x)$의 차수를 n이라고 하면
$xg(x)-g'(x)=4x^3+2x$에서 좌변의 차수는 $n+1$이고 우변의 차수는 3이다.
즉, $n+1=3$에서 $n=2$이다.

15 정적분의 성질

ㄱ. $f'(-x)=-f'(x)$이고 $f'(1)=0$이므로

$f'(-1)=-f'(1)=0$ (참)

ㄴ. $f'(-1)=f'(1)=0$, $f'(0)=0$이므로

$f'(x)=4x(x+1)(x-1)=4x^3-4x$

이때

$$f(x)=\int(4x^3-4x)dx$$
$$=x^4-2x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이고, $f(1)=2$이므로

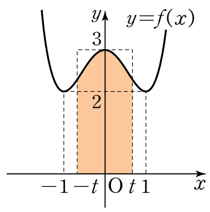
$-1+C=2 \quad \therefore C=3$

$\therefore f(x)=x^4-2x^2+3$

그런데 $f(x)=f(-x)$이므로

$\int_{-k}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{k}f(x)dx$ (참)

ㄷ. $\int_{-t}^{t}f(x)dx$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=-t$, $x=t$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



$\therefore \int_{-t}^{t}f(x)dx<6t$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

16 정적분과 미분의 관계

$\int_{1}^{x}f(t)dt=\{f(x)\}^2$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_{1}^{1}f(t)dt=\{f(1)\}^2$

$\therefore f(1)=0$

$\int_{1}^{x}f(t)dt=\{f(x)\}^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2f(x)f'(x)$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{2}$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f(1)=0$이므로

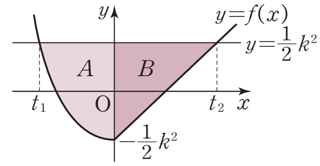
$\frac{1}{2}+C=0 \quad \therefore C=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$이므로

$f(3)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$

17 곡선과 직선 사이의 넓이

주어진 도형에서 $x<0$인 부분을 A, $x\ge0$인 부분을 B라고 하자.



(i) $x<0$일 때

함수 $y=x^2-\frac{1}{2}k^2$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}k^2$의 교점의 x좌표를 t_1이라고 하면

$t_1^2-\frac{1}{2}k^2=\frac{1}{2}k^2$, $t_1^2=k^2$

$\therefore t_1=-k \ (\because t_1<0)$

$$\therefore (A\text{의 넓이})=\int_{-k}^{0}\left\{\frac{1}{2}k^2-\left(x^2-\frac{1}{2}k^2\right)\right\}dx$$
$$=\int_{-k}^{0}(k^2-x^2)dx$$
$$=\left[k^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-k}^{0}$$
$$=-\left(-k^3+\frac{1}{3}k^3\right)=\frac{2}{3}k^3$$

(ii) $x\ge0$일 때

직선 $y=x-\frac{1}{2}k^2$과 직선 $y=\frac{1}{2}k^2$의 교점의 x좌표를 t_2라고 하면

$t_2-\frac{1}{2}k^2=\frac{1}{2}k^2 \quad \therefore t_2=k^2$

$\therefore (B\text{의 넓이})=\frac{1}{2}\times k^2\times k^2=\frac{1}{2}k^4$

(i), (ii)에서 A와 B의 넓이가 같으므로

$\frac{2}{3}k^3=\frac{1}{2}k^4$, $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}k \ (\because k>0)$

$\therefore k=\frac{4}{3}$

18 속도와 움직인 거리

ㄱ. $f(t)=t^2-t=t(t-1)$이므로 점 P는 출발 후 $t=1$에서 운동 방향을 1번 바꾼다. (참)

ㄴ. 시각 t에서 두 점 P, Q의 가속도는 각각

$f'(t)=2t-1$, $g'(t)=-6t+6$

이므로

$p=f'(2)=3$, $q=g'(2)=-6$

$\therefore pq<0$ (참)

ㄷ. $t=0$에서 $t=3$까지 점 Q가 움직인 거리는

$g(t)=-3t^2+6t=-3t(t-2)$이므로

$$\int_0^3 |g(t)|\,dt$$
$$=\int_0^2(-3t^2+6t)\,dt+\int_2^3(3t^2-6t)\,dt$$
$$=\Big[-t^3+3t^2\Big]_0^2+\Big[t^3-3t^2\Big]_2^3$$
$$=4+4=8\ (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

19 **속도와 움직인 거리**

속도 $v(t)$는

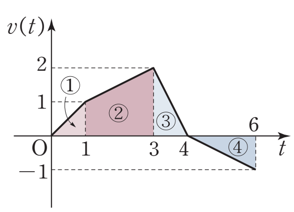
$$v(t)=\begin{cases} t & (0\le t<1) \\ \dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2} & (1\le t<3) \\ -2t+8 & (3\le t<4) \\ -\dfrac{1}{2}t+2 & (4\le t\le 6)\end{cases}$$

이므로 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^6|v(t)|\,dt$$
$$=\int_0^1 t\,dt+\int_1^3\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)dt+\int_3^4(-2t+8)\,dt+\int_4^6\left(\frac{1}{2}t-2\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t\right]_1^3+\Big[-t^2+8t\Big]_3^4+\left[\frac{1}{4}t^2-2t\right]_4^6$$
$$=\frac{1}{2}+3+1+1=\frac{11}{2}$$

다른 풀이

점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는



$$\int_0^6|v(t)|\,dt$$
$$=①+②+③+④$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times(1+2)\times2+\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times2\times1$$
$$=\frac{1}{2}+3+1+1=\frac{11}{2}$$