정답과 풀이

중학 수학 3·1

I. 제곱근과 실수

1. 제곱근과 실수

최고 수준 입문하기 P 8~P 12

01 ④	**02** ②, ③	**03** ③	**04** 8
05 ④	**06** $\sqrt{33}$ cm	**07** ㉡, ㉢, ㉣	**08** ③
09 ④	**10** ⑤	**11** ⑤	**12** 7
13 14	**14** 6	**15** ③	**16** 60
17 $\sqrt{3}$	**18** ①, ⑤	**19** 1	**20** 3
21 4	**22** ②, ④	**23** ①, ④	**24** ④
25 ③			

26 $\mathrm{P}(-3-\sqrt{5})$, $\mathrm{Q}(2-\sqrt{10})$, $\mathrm{R}(-3+\sqrt{5})$, $\mathrm{S}(2+\sqrt{10})$

27 점 P : $1-\sqrt{13}$, 점 Q : $1+\sqrt{13}$ **28** ②, ③

29 $A<C<B$

30 $\sqrt{5}-3$: 점 B, $\sqrt{2}+2$: 점 D, $3-\sqrt{2}$: 점 C, $1-\sqrt{5}$: 점 A

01 Action 양수 a의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}$임을 이용한다.

x가 양수 a의 제곱근이므로 $x^2=a$ 또는 $x=\pm\sqrt{a}$

02 Action 양수 a의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}$, 0의 제곱근은 0, 음수의 제곱근은 없음을 이용한다.

① 제곱근 3은 $\sqrt{3}$이다.

④ -64의 제곱근은 없다.

⑤ 5의 제곱근은 $\pm\sqrt{5}$이고, 제곱근 5는 $\sqrt{5}$이므로 5의 제곱근과 제곱근 5는 같지 않다.

03 Action 양수 a에 대하여 (a의 제곱근)$=\pm\sqrt{a}$이고, (제곱근 a)$=\sqrt{a}$임을 이용한다.

①, ②, ④, ⑤ ±3 ③ 3

04 Action 먼저 주어진 수를 간단히 한 후 제곱근을 구한다.

$\sqrt{16}=4$의 양의 제곱근은 2이므로 $a=2$

$(-6)^2=36$의 음의 제곱근은 -6이므로 $b=-6$

$\therefore a-b=2-(-6)=8$

05 Action 넓이가 a인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{a}$임을 이용한다.

주어진 직사각형의 넓이는 $13\times10=130$

이 직사각형과 넓이가 같은 정사각형의 한 변의 길이를 x라 고 하면

$x^2=130$ $\therefore x=\sqrt{130}$

06 Action 피타고라스 정리를 이용한다.

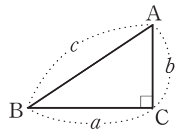
피타고라스 정리에 의해

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{7^2-4^2}=\sqrt{33}$ (cm)

Lecture

피타고라스 정리

$\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 나머지 한 변의 길이를 c라고 하면 $a^2+b^2=c^2$이 성립한다.



07 Action 먼저 주어진 수를 간단히 한 후 제곱근을 구하여 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있는지 확인한다.

㉠ $\sqrt{0.01}=0.1$의 제곱근은 $\pm\sqrt{0.1}$이다.

㉡ 169의 제곱근은 ±13이다.

㉢ $\sqrt{\dfrac{1}{81}}=\dfrac{1}{9}$의 제곱근은 $\pm\dfrac{1}{3}$이다.

㉣ $0.\dot{4}=\dfrac{4}{9}$의 제곱근은 $\pm\dfrac{2}{3}$이다.

따라서 제곱근을 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있는 것은 ㉡, ㉢, ㉣이다.

08 Action $a>0$일 때, $(\sqrt{a})^2=a$, $(-\sqrt{a})^2=a$, $\sqrt{a^2}=a$, $\sqrt{(-a)^2}=a$임을 이용한다.

①, ②, ④, ⑤ 2 ③ -2

09 Action 제곱근의 성질을 이용하여 근호를 푼다.

① $(-\sqrt{5})^2+(\sqrt{3})^2=5+3=8$

② $\sqrt{169}-(-\sqrt{10})^2=13-10=3$

③ $\left(\sqrt{\dfrac{4}{5}}\right)^2\div\sqrt{\left(-\dfrac{8}{15}\right)^2}\times\sqrt{16}$

$=\dfrac{4}{5}\div\dfrac{8}{15}\times4$

$=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{15}{8}\times4=6$

④ $\sqrt{36}\div(-\sqrt{2})^2+\sqrt{\dfrac{25}{9}}\times\sqrt{(-3)^2}$

$=6\div2+\dfrac{5}{3}\times3$

$=3+5=8$

⑤ $\sqrt{121}-\sqrt{(-5)^2}\div\sqrt{\dfrac{25}{36}}+(-\sqrt{7})^2$

$=11-5\div\dfrac{5}{6}+7$

$=11-5\times\dfrac{6}{5}+7=12$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

10 Action $a>0$일 때, $(-\sqrt{a})^2=a$, $\sqrt{(-a)^2}=a$이고, $a<0$일 때, $\sqrt{a^2}=-a$임을 이용한다.

① $a>0$이므로 $(-\sqrt{a})^2=a$

② $-a<0$이므로 $-\sqrt{(-a)^2}=-\{-(-a)\}=-a$

③ $2a>0$이므로 $-\sqrt{4a^2}=-\sqrt{(2a)^2}=-2a$

④ $-9a<0$이므로 $\sqrt{(-9a)^2}=-(-9a)=9a$

⑤ $-6a<0$이므로 $-\sqrt{(-6a)^2}=-\{-(-6a)\}=-6a$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

> **Lecture**
>
> **제곱근의 성질**
>
> 단순히 $\sqrt{(-a)^2}=-a$로 생각하지 않도록 주의한다. a의 부호에 따라 $\sqrt{(-a)^2}$의 결과는 달라진다.
>
> ➡ $\sqrt{(-a)^2}=\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a(a\ge0\text{일 때}) \\ -a(a<0\text{일 때}) \end{cases}$

11 Action $a>0$, $b<0$이므로 $-a<0$, $3b<0$, $-5b>0$임을 이용하여 근호를 없애고 간단히 한다.

$a>0$, $b<0$이므로 $-a<0$, $3b<0$, $-5b>0$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{(-a)^2}+\sqrt{9b^2}-\sqrt{(-5b)^2} &=\sqrt{(-a)^2}+\sqrt{(3b)^2}-\sqrt{(-5b)^2}\\ &=-(-a)+(-3b)-(-5b)\\ &=a+2b\end{aligned}$$

12 Action $-3<x<4$임을 이용하여 $x+3$, $x-4$의 부호를 각각 알아본다.

$-3<x<4$이므로 $x+3>0$, $x-4<0$ …… 40%

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(x-4)^2} &=(x+3)+\{-(x-4)\}\\ &=x+3-x+4\\ &=7\end{aligned}$$
…… 60%

13 Action 자연수 x에 대하여 $\sqrt{Ax}$가 자연수가 되려면 Ax가 제곱수이어야 한다.

$\sqrt{126x}=\sqrt{2\times3^2\times7\times x}$가 자연수가 되려면

$x=2\times7\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

따라서 가장 작은 자연수 x의 값은

$2\times7=14$

> **Lecture**
>
> **$\sqrt{Ax}$, $\sqrt{\frac{A}{x}}$가 자연수가 될 조건**
>
> 자연수 A, x에 대하여 $\sqrt{Ax}$, $\sqrt{\frac{A}{x}}$가 각각 자연수가 되려면 Ax, $\frac{A}{x}$가 각각 제곱수이어야 한다. 즉 A를 소인수분해하였을 때, 소인수의 지수가 모두 짝수가 되도록 하는 x의 값을 구한다.

14 Action 자연수 x에 대하여 $\sqrt{\frac{A}{x}}$가 자연수가 되려면 $\frac{A}{x}$가 제곱수이어야 한다.

$\sqrt{\frac{720}{x}}=\sqrt{\frac{2^4\times3^2\times5}{x}}$가 자연수가 되게 하는 자연수 x의 값은 5, $2^2\times5$, $3^2\times5$, $2^4\times5$, $2^2\times3^2\times5$, $2^4\times3^2\times5$의 6개이다.

15 Action 자연수 x에 대하여 $\sqrt{A+x}$가 자연수가 되려면 $A+x$는 A보다 큰 제곱수이어야 한다.

$\sqrt{69+x}$가 자연수가 되려면 $69+x$는 69보다 큰 제곱수이어야 하므로

$69+x=81, 100, 121, \cdots$

$\therefore x=12, 31, 52, \cdots$

따라서 구하는 가장 작은 수는 12이다.

> **Lecture**
>
> **$\sqrt{A+x}$, $\sqrt{A-x}$가 자연수가 될 조건**
>
> 자연수 A, x에 대하여
>
> (1) $\sqrt{A+x}$가 자연수가 되려면 $A+x$는 A보다 큰 제곱수이어야 한다.
>
> (2) $\sqrt{A-x}$가 자연수가 되려면 $A-x$는 A보다 작은 제곱수이어야 한다. 이때 $\sqrt{A-x}$가 정수가 되려면 $A-x$는 0이 될 수도 있음에 주의한다.

16 Action 자연수 x에 대하여 $\sqrt{A-x}$가 정수가 되려면 $A-x$는 0 또는 A보다 작은 제곱수이어야 한다.

$\sqrt{18-x}$가 정수가 되려면 $18-x$가 0 또는 18보다 작은 제곱수이어야 하므로

$18-x=0, 1, 4, 9, 16$

$\therefore x=2, 9, 14, 17, 18$

따라서 구하는 합은 $2+9+14+17+18=60$

17 Action a와 $\sqrt{b}$의 대소를 비교할 때에는 a를 $\sqrt{a^2}$으로 바꾸어 $\sqrt{a^2}$과 $\sqrt{b}$의 대소를 비교한다.

양수 $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, 2에서

$2=\sqrt{4}$이므로 $\sqrt{3}<2<\sqrt{5}$ …… 40%

음수 $-\sqrt{8}$, -3에서

$-3=-\sqrt{9}$이고 $\sqrt{8}<\sqrt{9}$이므로

$-\sqrt{8}>-3$ …… 40%

따라서 큰 수부터 차례로 나열하면 $\sqrt{5}$, 2, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{8}$, -3이므로 세 번째에 있는 수는 $\sqrt{3}$이다. …… 20%

18 Action $a>0$, $b>0$일 때, $a>b$이면 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$임을 이용한다.

$2=\sqrt{4}$, $3=\sqrt{9}$, $4=\sqrt{16}$이므로 $\sqrt{5}$와 $\sqrt{13}$ 사이에 있는 수가 아닌 것은 ①, ⑤이다.

19 Action 먼저 $4-\sqrt{15}$, $3-\sqrt{15}$의 부호를 각각 파악한 후 근호를 푼다.

$3=\sqrt{9}$, $4=\sqrt{16}$이고 $3<\sqrt{15}<4$이므로

$4-\sqrt{15}>0$, $3-\sqrt{15}<0$

$\therefore \sqrt{(4-\sqrt{15})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{15})^2}$

$=(4-\sqrt{15})+\{-(3-\sqrt{15})\}$

$=4-\sqrt{15}-3+\sqrt{15}$

$=1$

20 Action 주어진 부등식의 각 변을 제곱하여 부등식을 푼다.

$4<\sqrt{3x}<5$의 각 변을 제곱하면 $16<3x<25$

$\therefore \frac{16}{3}<x<\frac{25}{3}$

따라서 자연수 x는 6, 7, 8의 3개이다.

21 Action 주어진 부등식의 각 변에 -1을 곱한 후 각 변을 제곱하여 부등식을 푼다.

$-6<-\sqrt{5x+2}<-3$의 각 변에 -1을 곱하면

$3<\sqrt{5x+2}<6$

각 변을 제곱하면 $9<5x+2<36$, $7<5x<34$

$\therefore \frac{7}{5}<x<\frac{34}{5}$

따라서 자연수 x는 2, 3, 4, 5, 6이므로

$M=6$, $m=2$

$\therefore M-m=6-2=4$

22 Action 근호를 사용하여 나타낸 수 중에서 근호 안의 수가 (유리수)^{2}의 꼴이면 유리수이고 근호 안의 수가 (유리수)^{2}의 꼴이 아니면 무리수임을 이용한다.

① $-\sqrt{0.\dot{1}}=-\sqrt{\frac{1}{9}}=-\frac{1}{3}$이므로 유리수이다.

③ $\sqrt{(-5)^2}=5$이므로 유리수이다.

⑤ $\sqrt{\frac{9}{100}}=\frac{3}{10}$이므로 유리수이다.

따라서 무리수인 것은 ②, ④이다.

23 Action 각각의 경우의 참, 거짓을 판단해 본다.

② 무한소수 중 순환소수는 유리수이다.

③ 순환소수는 무한소수이다.

⑤ $\sqrt{2}$와 $-\sqrt{2}$는 모두 무리수이지만 그 합은 0이므로 유리수이다.

24 Action 먼저 □ 안에 알맞은 것이 무엇인지 생각해 본다.

□ 안에 알맞은 것은 무리수이므로 제곱근이 무리수인 것을 찾는다.

① 0의 제곱근은 0이므로 유리수이다.

② 16의 제곱근은 ±4이므로 유리수이다.

③ 49의 제곱근은 ±7이므로 유리수이다.

④ 0.9의 제곱근은 $\pm\sqrt{0.9}$이므로 무리수이다.

⑤ $\frac{9}{16}$의 제곱근은 $\pm\frac{3}{4}$이므로 유리수이다.

따라서 제곱근이 무리수인 것은 ④이다.

25 Action 실수와 수직선 사이의 관계를 이해한다.

③ 서로 다른 두 정수 0과 1 사이에는 정수가 없다.

26 Action 수직선 위의 기준점 a에서 오른쪽으로 $\sqrt{b}$만큼 떨어져 있는 점의 좌표는 $a+\sqrt{b}$, 왼쪽으로 $\sqrt{b}$만큼 떨어져 있는 점의 좌표는 $a-\sqrt{b}$이다.

$\triangle$ABC에서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{AC}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$\therefore$ P$(-3-\sqrt{5})$, R$(-3+\sqrt{5})$

$\triangle$DEF에서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{DE}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\therefore$ Q$(2-\sqrt{10})$, S$(2+\sqrt{10})$

27 Action 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{AD}$, $\overline{AB}$의 길이를 구한 후 두 점 P, Q에 대응하는 수를 각각 구한다.

피타고라스 정리에 의해

$\overline{AD}=\overline{AB}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ ······ 40%

$\overline{AD}=\overline{AP}=\sqrt{13}$이므로 점 P에 대응하는 수는 $1-\sqrt{13}$이다. ······ 30%

또 $\overline{AB}=\overline{AQ}=\sqrt{13}$이므로 점 Q에 대응하는 수는 $1+\sqrt{13}$이다. ······ 30%

28 Action 두 실수 a, b의 대소 관계를 비교할 때에는 $a-b$의 부호를 이용한다.

① $(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{3}-1)=\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$

$\therefore \sqrt{2}-1<\sqrt{3}-1$

② $3-(\sqrt{3}+1)=2-\sqrt{3}=\sqrt{4}-\sqrt{3}>0$

$\therefore 3>\sqrt{3}+1$

③ $(\sqrt{10}-4)-1=\sqrt{10}-5=\sqrt{10}-\sqrt{25}<0$

$\therefore \sqrt{10}-4<1$

④ $(2-\sqrt{0.5})-(2-\sqrt{0.6})=\sqrt{0.6}-\sqrt{0.5}>0$

$\therefore 2-\sqrt{0.5}>2-\sqrt{0.6}$

⑤ $(\sqrt{20}+\sqrt{8})-(3+\sqrt{20})=\sqrt{8}-3=\sqrt{8}-\sqrt{9}<0$

$\therefore \sqrt{20}+\sqrt{8}<3+\sqrt{20}$

따라서 두 실수의 대소 관계가 옳은 것은 ②, ③이다.

29 Action 세 실수 a, b, c에 대하여 $a<b$이고 $b<c$이면 $a<b<c$임을 이용한다.

$A-C=(\sqrt{11}-3)-2=\sqrt{11}-5=\sqrt{11}-\sqrt{25}<0$

$\therefore A<C$ ······ 40%

$B-C=(1+\sqrt{2})-2=\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-\sqrt{1}>0$

$\therefore B>C$ ······ 40%

따라서 $A<C$이고 $B>C$이므로 $A<C<B$ ······ 20%

30 **Action** $2=\sqrt{4}$, $3=\sqrt{9}$이므로 $1<\sqrt{2}<2$, $2<\sqrt{5}<3$임을 이용하여 각 수에 대응하는 점의 위치를 추측해 본다.

$2<\sqrt{5}<3$이므로 $-1<\sqrt{5}-3<0$

따라서 $\sqrt{5}-3$에 대응하는 점은 점 B이다.

$1<\sqrt{2}<2$이므로 $3<\sqrt{2}+2<4$

따라서 $\sqrt{2}+2$에 대응하는 점은 점 D이다.

$-2<-\sqrt{2}<-1$이므로 $1<3-\sqrt{2}<2$

따라서 $3-\sqrt{2}$에 대응하는 점은 점 C이다.

$-3<-\sqrt{5}<-2$이므로 $-2<1-\sqrt{5}<-1$

따라서 $1-\sqrt{5}$에 대응하는 점은 점 A이다.

최고 수준 완성하기

P 13 – P 16

01 $\frac{7}{2}$	**02** $\sqrt{5}$ cm	**03** $\sqrt{97}$	**04** $2x$
05 0	**06** $2a-\frac{2}{a}$	**07** 42	**08** 40
09 $\frac{1}{6}$	**10** (1) 19 (2) 27		**11** ④
12 ㉢, ㉣	**13** (1) 72 (2) 60		
14 $\mathrm{Q}(2+\sqrt{2})$, $\mathrm{R}(3+\sqrt{2})$	**15** 4		**16** 5

01 **Action** 양수 a에 대하여 제곱근 a는 $\sqrt{a}$이고, a의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}$임을 이용한다.

제곱근 $\frac{81}{16}$은 $\sqrt{\frac{81}{16}}=\frac{9}{4}$이므로 $a=\frac{9}{4}$

$\left(-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$의 제곱근은 $\pm\frac{5}{4}$이므로 $b=\pm\frac{5}{4}$

(i) $a=\frac{9}{4}$, $b=\frac{5}{4}$일 때, $a-b=\frac{9}{4}-\frac{5}{4}=\frac{4}{4}=1$

(ii) $a=\frac{9}{4}$, $b=-\frac{5}{4}$일 때, $a-b=\frac{9}{4}-\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$

(i), (ii)에 의하여 $a-b$의 최댓값은 $\frac{7}{2}$이다.

02 **Action** 각 단계의 정사각형의 넓이는 이전 단계의 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$임을 이용한다.

처음 정사각형의 넓이는 $(\sqrt{80})^2=80\ (\mathrm{cm}^2)$ …… 10%

[1단계]의 정사각형의 넓이는 $80\times\frac{1}{2}=40\ (\mathrm{cm}^2)$

[2단계]의 정사각형의 넓이는 $40\times\frac{1}{2}=20\ (\mathrm{cm}^2)$

[3단계]의 정사각형의 넓이는 $20\times\frac{1}{2}=10\ (\mathrm{cm}^2)$

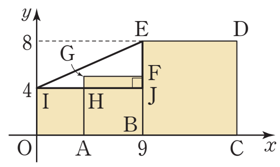
[4단계]의 정사각형의 넓이는 $10\times\frac{1}{2}=5\ (\mathrm{cm}^2)$ …… 80%

따라서 [4단계]에서 만들어지는 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{5}$ cm이다. …… 10%

03 **Action** 두 점 A, D의 좌표를 이용하여 정사각형 OAHI와 BCDE의 한 변의 길이를 각각 구한다.

□OAHI와 □BCDE는 한 변의 길이가 각각 4, 8인 정사각형이므로 B(9, 0), E(9, 8), I(0, 4)이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{EI}}$를 빗변으로 하는 직각삼각형 EIJ를 그리면



$\overline{\mathrm{IJ}}=9-0=9$

$\overline{\mathrm{EJ}}=8-4=4$

따라서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{\mathrm{EI}}=\sqrt{9^2+4^2}=\sqrt{97}$

04 **Action** 먼저 주어진 부등식을 풀어 x의 값의 범위를 구한다.

$4<3x-2<7$에서 $6<3x<9$ $\quad\therefore 2<x<3$

따라서 $\sqrt{3}+x>0$, $\sqrt{3}-x<0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(\sqrt{3}+x)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-x)^2}&=\sqrt{3}+x+\{-(\sqrt{3}-x)\}\\&=\sqrt{3}+x-\sqrt{3}+x\\&=2x\end{aligned}$$

05 **Action** $a-b>0$, $ab<0$임을 이용하여 a, b의 부호를 각각 구한다.

$a-b>0$이므로 $a>b$ …… ㉠

$ab<0$이므로 $a>0$, $b<0$ 또는 $a<0$, $b>0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a>0$, $b<0$

이때 $b-a<0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}-\sqrt{(b-a)^2}&=a+(-b)-\{-(b-a)\}\\&=a-b+b-a=0\end{aligned}$$

06 **Action** $-1<a<0$일 때, $\frac{1}{a}<-1$임을 이용한다.

$-1<a<0$이면 $\frac{1}{a}<-1$이므로

$a>\frac{1}{a}$, 즉 $a-\frac{1}{a}>0$, $\frac{1}{a}-a<0$이다.

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{a}-a\right)^2}&=\left(a-\frac{1}{a}\right)+\left\{-\left(\frac{1}{a}-a\right)\right\}\\&=a-\frac{1}{a}-\frac{1}{a}+a\\&=2a-\frac{2}{a}\end{aligned}$$

07 **Action** $\sqrt{102+x}$와 $\sqrt{168x}$가 자연수가 되게 하는 자연수 x의 값을 각각 구하여 공통인 수 중에서 가장 작은 수를 찾는다.

(i) $\sqrt{102+x}$가 자연수가 되려면 $102+x$는 102보다 큰 제곱수이어야 하므로

$102+x=121,\ 144,\ 169,\ \cdots$

$\therefore\ x=19,\ 42,\ 67,\ \cdots$ …… 40%

(ii) $\sqrt{168x}=\sqrt{2^3\times3\times7\times x}$가 자연수가 되려면

$x=2\times3\times7\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 하므로

$x=(2\times3\times7)\times1^2,\ (2\times3\times7)\times2^2,\ (2\times3\times7)\times3^2,\ \cdots$

$\therefore\ x=42,\ 168,\ 378,\ \cdots$ …… 40%

(i), (ii)에 의하여 $\sqrt{102+x}$와 $\sqrt{168x}$가 모두 자연수가 되게 하는 가장 작은 자연수 x의 값은 42이다. …… 20%

08 Action $A-B$의 값이 최대가 되려면 A는 최대, B는 최소가 되어야 한다.

$\sqrt{100-a}-\sqrt{100+b}$가 가장 큰 정수가 되려면 $\sqrt{100-a}$는 가장 큰 정수, $\sqrt{100+b}$는 가장 작은 정수이어야 한다.

$\sqrt{100-a}$가 가장 큰 정수이려면 $100-a$가 0 또는 100보다 작은 제곱수 중에서 가장 큰 수이어야 하므로

$100-a=81 \qquad \therefore\ a=19$

$\sqrt{100+b}$가 가장 작은 정수이려면 $100+b$가 100보다 큰 제곱수 중에서 가장 작은 수이어야 하므로

$100+b=121 \qquad \therefore\ b=21$

따라서 $a=19,\ b=21$일 때, 주어진 식의 값이 가장 큰 정수가 되므로

$a+b=19+21=40$

09 Action 12를 소인수분해하여 $\sqrt{12ab}$가 자연수가 되기 위한 ab의 조건을 구한다.

$12=2^2\times3$이므로 $ab=3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.

이때 $a,\ b$는 주사위의 눈의 수이므로 $ab=3\times1^2$ 또는 $ab=3\times2^2$, 즉 $ab=3$ 또는 $ab=12$

(i) $ab=3$일 때, $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 3),\ (3,\ 1)$의 2가지

(ii) $ab=12$일 때, $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)$의 4가지

(i), (ii)에 의하여 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$는 6가지이므로

구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

Lecture

$1\le ab\le36$이므로 $ab=3\times3^2=27$까지 ab의 값으로 생각하기 쉽지만 $a,\ b$는 6 이하의 자연수이므로 $ab=27$을 만족하는 두 수 $a,\ b$는 없다.

10 Action $\sqrt{1}=1,\ \sqrt{4}=2,\ \sqrt{9}=3,\ \sqrt{16}=4,\ \sqrt{25}=5,\ \cdots$임을 이용한다.

$\sqrt{1}=1,\ \sqrt{4}=2,\ \sqrt{9}=3,\ \sqrt{16}=4,\ \sqrt{25}=5,\ \sqrt{36}=6,\ \cdots$이므로

(1) $f(1)=f(2)=f(3)=1$

$f(4)=f(5)=f(6)=f(7)=f(8)=2$

$f(9)=f(10)=3$

$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$

$=1\times3+2\times5+3\times2=19$

(2) $f(15)=3$

$f(16)=f(17)=f(18)=\cdots=f(24)=4$

$f(25)=f(26)=f(27)=\cdots=f(35)=5$

이때 $3\times1+4\times9+5\times3=54$이므로 주어진 식을 만족하는 n의 값은 $f(x)=5$를 만족하는 세 번째 자연수인 27이다.

11 Action $0<a<1$을 만족하는 a의 값을 정한 후 각각의 식의 값을 계산하여 대소를 비교한다.

$0<a<1$이므로 $a=\frac{1}{2}$이라고 하면

① $\sqrt{a}=\sqrt{\frac{1}{2}}$

② $a=\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1}{4}}$

③ $a^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}=\sqrt{\frac{1}{16}}$

④ $\frac{1}{a}=1\div a=1\div\frac{1}{2}=1\times2=2=\sqrt{4}$

⑤ $\sqrt{\frac{1}{a}}=\sqrt{1\div a}=\sqrt{1\div\frac{1}{2}}=\sqrt{1\times2}=\sqrt{2}$

따라서 그 값이 가장 큰 것은 ④이다.

12 Action $a,\ b$에 구체적인 수를 대입하여 유리수인 경우가 생기는지 확인한다.

㉠, ㉣ $a=\sqrt{2},\ b=-\sqrt{2}$일 때, $a+b=0,\ \frac{a+b}{2}=0$이므로 유리수인 경우가 생긴다.

㉡, ㉥ $a=b=\sqrt{2}$일 때, $a-b=0,\ ab=2$이므로 유리수인 경우가 생긴다.

㉦ $a=\sqrt{2}$일 때, $a^2=2$이므로 유리수인 경우가 생긴다.

㉧ $b=-\sqrt{2}$일 때, $b+\sqrt{2}=0$이므로 유리수인 경우가 생긴다.

따라서 항상 무리수인 것은 ㉢, ㉣이다.

13 Action $\sqrt{(\text{제곱수})}$는 자연수임을 이용한다.

(1) $\sqrt{x}$가 무리수가 되려면 근호 안의 수 x가 제곱수가 아니어야 한다.

이때 81 이하의 제곱수는 $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \cdots,\ 81$의 9개이므로 무리수에 대응하는 점의 개수는 $81-9=72$

(2) $31^2-30^2-1=961-900-1=60$

14 Action 기준점 a에서 오른쪽으로 $\sqrt{b}$만큼 떨어져 있는 점의 좌표는 $a+\sqrt{b}$, 왼쪽으로 $\sqrt{b}$만큼 떨어져 있는 점의 좌표는 $a-\sqrt{b}$이다.

피타고라스 정리에 의해 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{AC}=\overline{BD}=\overline{CF}=\sqrt{2}$

이때 $\overline{AC}=\overline{PC}=\sqrt{2}$이고 점 P에 대응하는 수가 $3-\sqrt{2}$이므로 점 C에 대응하는 수는 3이다.

따라서 점 B에 대응하는 수는 2이고 $\overline{BD}=\overline{BQ}=\sqrt{2}$, $\overline{CF}=\overline{CR}=\sqrt{2}$이므로

$Q(2+\sqrt{2})$, $R(3+\sqrt{2})$

15 **Action** 주어진 두 수 a, b를 이용하여 $a+b$와 $b-a$의 부호를 각각 판단한다.

$a+b=\sqrt{29}-3+2=\sqrt{29}-1>0$

$b-a=2-(\sqrt{29}-3)=5-\sqrt{29}=\sqrt{25}-\sqrt{29}<0$

$\therefore \sqrt{(a+b)^2}-\sqrt{(b-a)^2}=(a+b)-\{-(b-a)\}$

$=a+b+b-a=2b$

$=2\times2=4$

16 **Action** $3-\sqrt{5}$와 $4+\sqrt{2}$가 각각 어떤 두 정수 사이에 있는지 확인한다.

$-3<-\sqrt{5}<-2$이므로 $0<3-\sqrt{5}<1$

$1<\sqrt{2}<2$이므로 $5<4+\sqrt{2}<6$

따라서 $3-\sqrt{5}$와 $4+\sqrt{2}$ 사이에 있는 정수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

Lecture

무리수 $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$의 범위

$\sqrt{1}=1$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$이고 $1<2<4$, $4<5<9$이므로

$1<\sqrt{2}<2$, $2<\sqrt{5}<3$

최고 수준 뛰어넘기

Ⓟ 17 - Ⓟ 18

01 $-2a+5b$ **02** 750 **03** 44 **04** 172
05 9 **06** $C<A<B$

01 **Action** $a<0<b$이고 $|a|>|b|$임을 이용하여 a, $3b$, $a+b$, $2a-b$의 부호를 각각 판단한다.

$a<0<b$이고 $|a|>|b|$이므로

$a<0$, $3b>0$, $a+b<0$, $2a-b<0$

$\therefore \sqrt{a^2}+|3b|-\sqrt{(a+b)^2}+\sqrt{(2a-b)^2}$

$=-a+3b-\{-(a+b)\}+\{-(2a-b)\}$

$=-a+3b+a+b-2a+b$

$=-2a+5b$

02 **Action** 자연수 x에 대하여 $\sqrt{Ax}$가 자연수가 되려면 Ax가 제곱수이어야 한다.

$3<\sqrt{n}<3.5$의 각 변을 제곱하면 $9<n<12.25$

$\therefore x=12$, $y=10$

이때 $\sqrt{\dfrac{xz}{y}}=\sqrt{\dfrac{12z}{10}}=\sqrt{\dfrac{6z}{5}}=\sqrt{\dfrac{2\times3\times z}{5}}$가 자연수가 되려면 $z=5\times2\times3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

따라서 자연수 z의 값 중에서 가장 큰 세 자리 수는

$5\times2\times3\times5^2=750$

03 **Action** 주어진 조건 중 조건 (나)와 (다)를 만족하는 두 자연수 a_1, a_4를 먼저 구한다.

조건 (나)에서 a_1, a_2, a_3, a_4는 모두 1보다 큰 제곱수이다.

이때 조건 (다)에서 $a_1+a_4=65$이고, 조건 (가)에서 $a_1<a_4$이므로

$a_1=16$, $a_4=49$이다.

또, 조건 (가)에서 $a_1<a_2<a_3<a_4$이므로

$a_1=16$, $a_2=25$, $a_3=36$, $a_4=49$

$\therefore a_4-a_1+a_3-a_2=49-16+36-25=44$

04 **Action** 먼저 $\sqrt{n}$, $\sqrt{3n}$, $\sqrt{5n}$이 모두 유리수가 되도록 하는 n의 값을 각각 구한다.

200 이하의 자연수 n에 대하여

(i) $\sqrt{n}$이 유리수가 되려면 $n=$(자연수)^{2}의 꼴이어야 하므로

$n=1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots, 14^2$

(ii) $\sqrt{3n}$이 유리수가 되려면 $n=3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 하므로

$n=3\times1^2, 3\times2^2, 3\times3^2, \cdots, 3\times8^2$

(iii) $\sqrt{5n}$이 유리수가 되려면 $n=5\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 하므로

$n=5\times1^2, 5\times2^2, 5\times3^2, \cdots, 5\times6^2$

(i)~(iii)에서 중복되는 수가 없으므로 $\sqrt{n}$, $\sqrt{3n}$, $\sqrt{5n}$이 모두 무리수가 되게 하는 n의 값의 개수는

$200-(14+8+6)=172$

05 **Action** $1<\sqrt{2}<2$임을 이용하여 $a+\sqrt{2}$와 $b-\sqrt{2}$가 각각 어떤 두 정수 사이에 있는지 확인한다.

$1<\sqrt{2}<2$이므로 $a+1<a+\sqrt{2}<a+2$

$-2<-\sqrt{2}<-1$이므로 $b-2<b-\sqrt{2}<b-1$

이때 a, b는 정수이고 $a+\sqrt{2}$와 $b-\sqrt{2}$ 사이에 정수 n이 6개 있으므로

$b-2-(a+2)+1=6$ $\quad\therefore b-a=9$

06 **Action** $a>0$, $b>0$일 때, $a^2<b^2$이면 $a<b$임을 이용한다.

(i) $A=1-a$, $B=\sqrt{1-a}$의 대소 비교

$0<a<1$에서 $-1<-a<0$이므로

$0<1-a<1$

이때 각 변에 $1-a$를 곱하면

$0<(1-a)^2<1-a$

즉 $A^2<B^2$이므로 $A<B$

(ii) $A=1-a$, $C=1-\sqrt{a}$의 대소 비교

$0<a<1$에서 각 변에 a를 곱하면

$0<a^2<a$이므로 $0<a<\sqrt{a}$

즉 $-\sqrt{a}<-a$이므로 $1-\sqrt{a}<1-a$

$\therefore C<A$

(i), (ii)에 의하여 $A<B$이고 $C<A$이므로

$C<A<B$

2. 근호를 포함한 식의 계산

최고 수준 입문하기

P 21 – P 24

01 ⑤	**02** ④	**03** ②	**04** ②, ⑤
05 ㉠, ㉡, ㉢, ㉤		**06** $-\frac{\sqrt{7}}{18}$	**07** ①
08 3	**09** $\frac{2\sqrt{15}}{5}$	**10** 2074	**11** ④
12 4	**13** $4\sqrt{2}$	**14** $\frac{5\sqrt{2}}{8}$	**15** ③
16 $18\sqrt{3}\,\mathrm{m}$	**17** $1+2\sqrt{2}$	**18** $6\sqrt{2}-2\sqrt{3}$	**19** -4
20 $-\sqrt{6}-3\sqrt{5}$		**21** $\frac{1}{2}$	
22 $(3\sqrt{10}+10)\,\mathrm{cm}^2$		**23** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$	**24** 14

01 **Action** 제곱근의 곱셈은 근호 안의 수끼리 곱하고, 근호 밖의 수끼리 곱한다.

① $\sqrt{2}\times\sqrt{5}=\sqrt{2\times5}=\sqrt{10}$

② $\sqrt{\frac{15}{4}}\times\sqrt{\frac{20}{3}}=\sqrt{\frac{15}{4}\times\frac{20}{3}}=\sqrt{25}=5$

③ $-\sqrt{18}\times\sqrt{0.6}\times\sqrt{30}=-\sqrt{18\times0.6\times30}$
$=-\sqrt{324}=-18$

④ $2\sqrt{3}\times3\sqrt{11}=(2\times3)\sqrt{3\times11}=6\sqrt{33}$

⑤ $\sqrt{\frac{5}{7}}\times\sqrt{\frac{14}{5}}=\sqrt{\frac{5}{7}\times\frac{14}{5}}=\sqrt{2}$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

02 **Action** 제곱근의 나눗셈은 역수의 곱셈으로 바꾸어 계산한다.

① $\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{2}}=\sqrt{13}$

② $\sqrt{27}\div(-\sqrt{3})=-\sqrt{9}=-3$

③ $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{7}}\div\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{12}{7}\times\frac{7}{3}}=\sqrt{4}=2$

④ $\sqrt{\frac{35}{6}}\div\sqrt{\frac{7}{30}}=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}\div\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{7}}$
$=\sqrt{\frac{35}{6}\times\frac{30}{7}}=\sqrt{25}=5$

⑤ $\sqrt{70}\div\sqrt{2}\div\sqrt{7}=\sqrt{70}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{70}{2\times7}}=\sqrt{5}$

따라서 계산 결과가 가장 큰 것은 ④이다.

03 **Action** $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$임을 이용하여 근호 안의 제곱인 인수를 근호 밖으로 꺼낸다.

$\sqrt{20}=\sqrt{2^2\times5}=2\sqrt{5}$ $\quad\therefore a=2$

$\sqrt{75}=\sqrt{3\times5^2}=5\sqrt{3}$ $\quad\therefore b=5$

$\therefore \sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{2}\sqrt{5}=\sqrt{10}$

04 **Action** $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$임을 이용하여 근호 밖의 양수를 근호 안으로 넣는다. 이때 근호 밖의 음수는 근호 안으로 넣을 수 없다.

① $2\sqrt{7}=\sqrt{2^2\times7}=\sqrt{28}$

② $3\sqrt{6}=\sqrt{3^2\times6}=\sqrt{54}$

③ $5\sqrt{2}=\sqrt{5^2\times2}=\sqrt{50}$

④ $-4\sqrt{2}=-\sqrt{4^2\times2}=-\sqrt{32}$

⑤ $-3\sqrt{3}=-\sqrt{3^2\times3}=-\sqrt{27}$

따라서 옳지 않은 것은 ②, ⑤이다.

05 **Action** 소수는 분수로 바꾸고 $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b^2}}=\frac{\sqrt{a}}{b}$임을 이용한다.

㉠ $\sqrt{\frac{7}{100}}=\sqrt{\frac{7}{10^2}}=\frac{\sqrt{7}}{10}$

㉡ $-\sqrt{\frac{11}{81}}=-\sqrt{\frac{11}{9^2}}=-\frac{\sqrt{11}}{9}$

㉢ $-\sqrt{0.41}=-\sqrt{\frac{41}{100}}=-\sqrt{\frac{41}{10^2}}=-\frac{\sqrt{41}}{10}$

㉣ $\frac{\sqrt{5}}{6}=\sqrt{\frac{5}{6^2}}=\sqrt{\frac{5}{36}}$

㉤ $\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3^2\times3}}{\sqrt{2^2}}=\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\frac{27}{4}}$

㉥ $\sqrt{0.75}=\sqrt{\frac{75}{100}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢, ㉤이다.

06 **Action** 제곱근의 나눗셈은 역수의 곱셈으로 바꾸어 계산한다.

$$\frac{\sqrt{42}}{2}\div3\sqrt{15}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{18}}\right)=\frac{\sqrt{42}}{2}\times\frac{1}{3\sqrt{15}}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{18}}\right)$$
$$=-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{42\times5}{15\times18}}$$
$$=-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{7}{9}}$$
$$=-\frac{\sqrt{7}}{18}$$

07 **Action** 근호 안의 수를 소인수분해하여 주어진 문자로 나타낸다.

$\sqrt{189}=\sqrt{3^2\times3\times7}=3\sqrt{3}\sqrt{7}=3ab$

08 **Action** 분모에 근호가 있는 경우에는 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{b}\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{ab}}{a}$임을 이용한다.

$\frac{15}{\sqrt{6}}=\frac{15\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{2}=a\sqrt{6}$ $\quad\therefore a=\frac{5}{2}$

$\frac{7}{\sqrt{28}}=\frac{7}{2\sqrt{7}}=\frac{7\times\sqrt{7}}{2\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{2}=b\sqrt{7}$ $\quad\therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$

09 Action $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CD}$임을 이용한다.

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CD}$이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times 2=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\overline{CD}$, $\frac{\sqrt{10}}{2}\overline{CD}=\sqrt{6}$

$\therefore\ \overline{CD}=\sqrt{6}\times\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{6}\times\sqrt{10}}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$

10 Action 주어진 제곱근표를 이용하여 제곱근의 값을 각각 구한다.

제곱근표에서 $\sqrt{8.32}=2.884$, $\sqrt{8.10}=2.846$이므로

$a=2.884$, $b=8.10$

$\therefore\ 1000a-100b=1000\times 2.884-100\times 8.10$

$=2884-810=2074$

11 Action 근호 안의 수를 10^2, 10^4, … 또는 $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^4}$, …과의 곱으로 나타낸 후 $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b^2}}=\frac{\sqrt{a}}{b}$임을 이용한다.

① $\sqrt{3.2}=1.789$ ② $\sqrt{3.33}=1.825$

③ 주어진 제곱근표에서 $\sqrt{31}$의 값은 알 수 없다.

④ $\sqrt{322}=\sqrt{100\times 3.22}=10\sqrt{3.22}=10\times 1.794=17.94$

⑤ $\sqrt{0.3331}=\sqrt{\frac{33.31}{100}}=\frac{\sqrt{33.31}}{10}$이고 주어진 제곱근표에서 $\sqrt{33.31}$의 값은 알 수 없으므로 $\sqrt{0.3331}$의 값은 구할 수 없다.

따라서 바르게 구한 것은 ④이다.

12 Action 근호 안에 제곱인 인수가 있으면 $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$임을 이용하여 근호 안의 수를 가장 작은 자연수로 만든 후 제곱근의 덧셈과 뺄셈을 한다.

$\sqrt{24}+7\sqrt{2}+4\sqrt{6}-\sqrt{50}=2\sqrt{6}+7\sqrt{2}+4\sqrt{6}-5\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}+6\sqrt{6}$

따라서 $a=2$, $b=6$이므로

$b-a=6-2=4$

13 Action x, y를 각각 간단히 한 후 $x+y$의 값을 구한다.

$x=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$y=3\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}-\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$=3\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ x+y=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$

14 Action 분모를 유리화한 후 근호 안의 수가 같은 것끼리 모아서 계산한다.

$$\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{3}{\sqrt{18}}-\frac{1}{\sqrt{32}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}-\frac{1\times\sqrt{2}}{4\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{8}+\frac{4\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$=\frac{5\sqrt{2}}{8}$$

15 Action 두 수 a, b에 대하여 $a-b>0$이면 $a>b$임을 이용한다.

$a-c=2\sqrt{3}+3-(3\sqrt{3}-1)=-\sqrt{3}+4>0$

$\therefore\ a>c$

$b-c=5-3\sqrt{5}-(3\sqrt{3}-1)=6-3\sqrt{5}-3\sqrt{3}<0$

$\therefore\ b<c$

따라서 $a>c$이고 $b<c$이므로 $b<c<a$

16 Action 넓이가 a인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{a}$임을 이용한다.

넓이가 $3\ m^2$, $12\ m^2$, $27\ m^2$인 정사각형 모양의 세 밭의 한 변의 길이는 차례로 $\sqrt{3}\ m$, $2\sqrt{3}\ m$, $3\sqrt{3}\ m$이다. …… 30%

∴ (밭 전체의 둘레의 길이)

$=(\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3\sqrt{3})\times 2+3\sqrt{3}\times 2$

$=6\sqrt{3}\times 2+6\sqrt{3}$

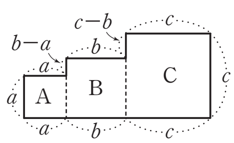
$=12\sqrt{3}+6\sqrt{3}$

$=18\sqrt{3}\ (m)$ …… 70%

Lecture

도형의 둘레의 길이

오른쪽 그림에서 정사각형 A, B, C의 한 변의 길이를 차례로 a, b, c라고 하면 전체의 도형에서



① 윗변의 길이의 합은 $a+b+c$

② 아랫변의 길이는 $a+b+c$

③ 왼쪽 변의 길이의 합은 $a+(b-a)+(c-b)=c$

④ 오른쪽 변의 길이는 c

17 Action 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$임을 이용하여 두 점 P, Q의 좌표를 구한다.

피타고라스 정리에 의해

$\overline{AC}=\overline{BD}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

이때 $\overline{BD}=\overline{BP}=\sqrt{2}$, $\overline{CA}=\overline{CQ}=\sqrt{2}$이므로

$P(2-\sqrt{2})$, $Q(3+\sqrt{2})$

$\therefore\ \overline{PQ}=(3+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})$

$=3+\sqrt{2}-2+\sqrt{2}$

$=1+2\sqrt{2}$

18 Action $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, $\sqrt{a}(\sqrt{b}\pm\sqrt{c})=\sqrt{ab}\pm\sqrt{ac}$임을 이용한다.

$$\begin{aligned}\sqrt{3}A+\sqrt{2}B&=\sqrt{3}(2\sqrt{6}-3\sqrt{2})+\sqrt{2}(3\sqrt{3}-\sqrt{6})\\&=6\sqrt{2}-3\sqrt{6}+3\sqrt{6}-2\sqrt{3}\\&=6\sqrt{2}-2\sqrt{3}\end{aligned}$$

19 Action $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$임을 이용하여 근호 안의 제곱인 인수는 근호 밖으로 꺼낸 후 분모를 유리화한다.

$$\frac{4-\sqrt{27}}{\sqrt{8}}=\frac{(4-3\sqrt{3})\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{4}=\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{6}$$

따라서 $a=1$, $b=-\frac{3}{4}$이므로

$$4b-a=4\times\left(-\frac{3}{4}\right)-1=-3-1=-4$$

20 Action 괄호 풀기 ➡ 제곱인 인수 근호 밖으로 꺼내기 ➡ 분모의 유리화 ➡ 곱셈, 나눗셈 ➡ 덧셈, 뺄셈

$$\begin{aligned}&\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{15}}{\sqrt{3}}-\sqrt{2}(\sqrt{12}+\sqrt{10})\\&=\frac{(3\sqrt{2}-\sqrt{15})\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-\sqrt{24}-\sqrt{20}\\&=\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{5}}{3}-2\sqrt{6}-2\sqrt{5}\\&=\sqrt{6}-\sqrt{5}-2\sqrt{6}-2\sqrt{5}\\&=-\sqrt{6}-3\sqrt{5}\end{aligned}$$

21 Action a, b가 유리수, $\sqrt{m}$이 무리수일 때, $a+b\sqrt{m}$이 유리수가 되려면 $b=0$이어야 함을 이용한다.

$$\begin{aligned}\sqrt{2}(3\sqrt{2}-a\sqrt{6})+\frac{3}{\sqrt{3}}-4a&=6-2a\sqrt{3}+\sqrt{3}-4a\\&=(6-4a)+(-2a+1)\sqrt{3}\end{aligned}$$

위 식이 유리수가 되려면 $-2a+1=0$이어야 하므로

$a=\frac{1}{2}$

22 Action (사다리꼴의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\{$(윗변의 길이)$+$(아랫변의 길이)$\}\times$(높이)

임을 이용한다.

(사다리꼴의 넓이)

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\times\{(\sqrt{2}+\sqrt{5})+(2\sqrt{2}+\sqrt{5})\}\times\sqrt{20}\\&=\frac{1}{2}\times(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})\times2\sqrt{5}\\&=3\sqrt{10}+10\ (\text{cm}^2)\end{aligned}$$

23 Action $3=\sqrt{9}$, $4=\sqrt{16}$이므로 $3<\sqrt{10}<4$임을 이용하여 $\sqrt{10}$의 정수 부분과 소수 부분을 구한다.

$3<\sqrt{10}<4$이므로 $\sqrt{10}$의 정수 부분은 3, 소수 부분은 $\sqrt{10}-3$이다.

따라서 $a=3$, $b=\sqrt{10}-3$이므로

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+3}&=\frac{3}{(\sqrt{10}-3)+3}=\frac{3}{\sqrt{10}}\\&=\frac{3\times\sqrt{10}}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}\end{aligned}$$

24 Action 먼저 a의 값을 구한 후 그 값을 $9-\sqrt{a}$에 대입하여 b의 값을 구한다.

$3<\sqrt{13}<4$이므로 $8<5+\sqrt{13}<9$

따라서 $5+\sqrt{13}$의 정수 부분은 8이므로 $a=8$

$9-\sqrt{a}$, 즉 $9-\sqrt{8}$에서 $2<\sqrt{8}<3$이므로

$-3<-\sqrt{8}<-2$ $\quad\therefore 6<9-\sqrt{8}<7$

따라서 $9-\sqrt{8}$의 정수 부분은 6이므로 $b=6$

$\therefore a+b=8+6=14$

Lecture

부등식의 성질

① $a<b$이면 $a+c<b+c$, $a-c<b-c$

② $a<b$, $c>0$이면 $ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

③ $a<b$, $c<0$이면 $ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

최고 수준 완성하기

P 25~P 28

01 3	**02** ②	**03** 30	**04** 2
05 $25\sqrt{2}$	**06** 29.46	**07** 27	**08** ㉡
09 $11-5\sqrt{5}$	**10** 2	**11** $\frac{\sqrt{2}}{2}$	**12** $7\sqrt{5}$
13 $(10\sqrt{5}+2\sqrt{10})$ cm		**14** 9	**15** $3-\sqrt{2}$
16 $2\sqrt{5}-4$			

01 Action 먼저 주어진 식의 좌변을 간단히 한다.

$\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{a}\times\sqrt{8}\times\sqrt{3a}=36$에서

$\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{a}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{a}=36$

$12a=36$ $\quad\therefore a=3$

02 Action $0.02=\frac{2}{100}=\frac{2}{10^2}$, $50000=10000\times5=100^2\times5$임을 이용한다.

$$\begin{aligned}\sqrt{0.02}+\sqrt{50000}&=\sqrt{\frac{2}{100}}+\sqrt{10000\times5}\\&=\frac{\sqrt{2}}{10}+100\sqrt{5}=\frac{a}{10}+100b\end{aligned}$$

03 **Action** $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$임을 이용한다.

$$\begin{aligned}a\sqrt{\frac{8b}{a}}+b\sqrt{\frac{2a}{b}}&=\sqrt{a^2\times\frac{8b}{a}}+\sqrt{b^2\times\frac{2a}{b}}\\&=\sqrt{8ab}+\sqrt{2ab}\\&=\sqrt{400}+\sqrt{100}\\&=20+10=30\end{aligned}$$

04 **Action** 분모가 $\sqrt{a^2b}$의 꼴이면 $a\sqrt{b}$의 꼴로 바꾼 후 분모를 유리화한다.

$$\frac{10\sqrt{a}}{\sqrt{45}}=\frac{10\sqrt{a}}{3\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5a}}{15}=\frac{2\sqrt{5a}}{3}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

따라서 $\sqrt{5a}=\sqrt{10}$이므로 $a=2$

05 **Action** 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 $2k$, $3k$(단, $k>0$)로 놓고 정사각형의 넓이가 50임을 이용하여 k의 값을 구한다.

직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 $2k$, $3k$(단, $k>0$)라 고 하면 정사각형의 한 변의 길이는 $2k$이므로

$(2k)^2=50$, $4k^2=50$, $k^2=\frac{25}{2}$

$\therefore\ k=\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

따라서 직사각형의 둘레의 길이는

$2(2k+3k)=2\times5k=10k=10\times\frac{5\sqrt{2}}{2}=25\sqrt{2}$

06 **Action** $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$임을 이용하여 근호 안의 수를 주어진 제곱근표에 있는 수로 변형한다.

$$\begin{aligned}\sqrt{868}&=\sqrt{2^2\times217}=2\sqrt{217}=2\sqrt{100\times2.17}=20\sqrt{2.17}\\&=20\times1.473=29.46\end{aligned}$$

07 **Action** 근호 안의 수를 10^2, 10^4, $\cdots$ 또는 $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^4}$, $\cdots$과의 곱으로 나타낸다.

$$\begin{aligned}\sqrt{493}&=\sqrt{100\times4.93}=10\sqrt{4.93}\\&=10\times2.220=22.20\end{aligned}$$

$\therefore\ a=22.20$ …… 40%

$\sqrt{4.80}=2.191$이므로 $\frac{\sqrt{4.80}}{10}=0.2191$

$\sqrt{\frac{4.80}{100}}=0.2191$이므로 $\sqrt{0.0480}=0.2191$

$\therefore\ b=0.0480$ …… 40%

$\therefore\ a+100b=22.20+100\times0.0480=27$ …… 20%

08 **Action** 주어진 수를 $a\sqrt{3}$(단, a는 유리수)의 꼴로 나타낼 수 있는지 확인한다.

㉠ $\sqrt{\frac{3}{16}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ ㉡ $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

㉢ $\sqrt{0.03}=\sqrt{\frac{3}{100}}=\frac{\sqrt{3}}{10}$ ㉣ $\sqrt{75}=5\sqrt{3}$

따라서 $\sqrt{3}=1.732$임을 이용하여 그 값을 구할 수 없는 것은 ㉡이다.

09 **Action** $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$임을 이용하여 $2\sqrt{5}-5$와 $6-3\sqrt{5}$의 부호를 먼저 확인한다.

$2\sqrt{5}-5=\sqrt{20}-\sqrt{25}<0$이므로 $2\sqrt{5}-5<0$

$6-3\sqrt{5}=\sqrt{36}-\sqrt{45}<0$이므로 $6-3\sqrt{5}<0$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\sqrt{(2\sqrt{5}-5)^2}-\sqrt{(6-3\sqrt{5})^2}\\&=-(2\sqrt{5}-5)-\{-(6-3\sqrt{5})\}\\&=-2\sqrt{5}+5+6-3\sqrt{5}\\&=11-5\sqrt{5}\end{aligned}$$

10 **Action** 좌변을 정리하여 $m+n\sqrt{2}$(단, m, n은 유리수)의 꼴로 나타낸다.

$$\begin{aligned}(1+2\sqrt{2})a-(-1+\sqrt{2})b&=a+2a\sqrt{2}+b-b\sqrt{2}\\&=(a+b)+(2a-b)\sqrt{2}\end{aligned}$$

즉 $(a+b)+(2a-b)\sqrt{2}=4+5\sqrt{2}$에서

$a+b=4$ …… ㉠

$2a-b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$

$\therefore\ a-b=3-1=2$

11 **Action** 주어진 약속에 따라 식을 세워 간단히 한다.

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-1)*\frac{1}{\sqrt{2}}&=(\sqrt{2}-1)\times\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)+1\\&=1-\frac{1}{\sqrt{2}}-2+\sqrt{2}+1\\&=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\\&=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

12 **Action** (사각뿔의 부피)$=\frac{1}{3}\times$(밑넓이)$\times$(높이)임을 이용한다.

$$\begin{aligned}(\text{전체 사각뿔의 부피})&=\frac{1}{3}\times(2\sqrt{3}\times2\sqrt{3})\times2\sqrt{5}\\&=8\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{작은 사각뿔의 부피})&=\frac{1}{3}\times(\sqrt{3}\times\sqrt{3})\times\sqrt{5}\\&=\sqrt{5}\end{aligned}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는 $8\sqrt{5}-\sqrt{5}=7\sqrt{5}$

13 **Action** 넓이가 a인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{a}$임을 이용한다.

정사각형 A의 넓이가 $5\ \mathrm{cm}^2$이므로

정사각형 B의 넓이는 $2\times5=10\ (\mathrm{cm}^2)$

정사각형 C의 넓이는 $2\times10=20\ (\mathrm{cm}^2)$

따라서 세 정사각형 A, B, C의 한 변의 길이는 차례로
$\sqrt{5}$ cm, $\sqrt{10}$ cm, $2\sqrt{5}$ cm이므로
(도형의 둘레의 길이)$=(\sqrt{5}+\sqrt{10}+2\sqrt{5})\times2+2\sqrt{5}\times2$
$=(3\sqrt{5}+\sqrt{10})\times2+4\sqrt{5}$
$=6\sqrt{5}+2\sqrt{10}+4\sqrt{5}$
$=10\sqrt{5}+2\sqrt{10}$ (cm)

14 **Action** 조건에 알맞은 부등식을 세운다.
$\sqrt{x}$의 정수 부분이 4이므로 $4\le\sqrt{x}<5$
각 변을 제곱하면 $16\le x<25$
따라서 조건을 만족하는 자연수 x의 값은 16, 17, 18, ⋯, 24의 9개이다.

15 **Action** 주어진 등식을 변형하여 b를 a에 대한 식으로 나타낸 후 근호 안의 식에 대입하여 근호 안을 간단히 한다.
$\frac{4b-5a}{3a-b}=3$에서 $4b-5a=9a-3b$
$7b=14a$ $\quad\therefore b=2a$
$\sqrt{\frac{2a-11b}{b-6a}}$에 $b=2a$를 대입하면
$\sqrt{\frac{2a-11b}{b-6a}}=\sqrt{\frac{2a-22a}{2a-6a}}=\sqrt{\frac{-20a}{-4a}}=\sqrt{5}$
이때 $2<\sqrt{5}<3$이므로 $m=2$
$\sqrt{\frac{20a^2-b^2}{4a^2+b^2}}$에 $b=2a$를 대입하면
$\sqrt{\frac{20a^2-b^2}{4a^2+b^2}}=\sqrt{\frac{20a^2-4a^2}{4a^2+4a^2}}=\sqrt{\frac{16a^2}{8a^2}}=\sqrt{2}$
이때 $1<\sqrt{2}<2$이므로 $n=\sqrt{2}-1$
$\therefore m-n=2-(\sqrt{2}-1)=3-\sqrt{2}$

16 **Action** $\sqrt{a}$의 정수 부분이 n이면 $\sqrt{a}$의 소수 부분은 $\sqrt{a}-n$이다.
$6<\sqrt{40}<7$이므로 $f(40)=6$
$8<\sqrt{80}<9$이므로 $g(80)=\sqrt{80}-8=4\sqrt{5}-8$
$2<\sqrt{5}<3$이므로 $g(5)=\sqrt{5}-2$
$\therefore \frac{f(40)-g(80)-4}{g(5)+2}=\frac{6-(4\sqrt{5}-8)-4}{(\sqrt{5}-2)+2}=\frac{10-4\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$
$=\frac{(10-4\sqrt{5})\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}-20}{5}$
$=2\sqrt{5}-4$

최고 수준 뛰어넘기

P 29 – P 30

01 $a=\sqrt{2}, b=\sqrt{6}, c=3\sqrt{6}$	**02** 86.6 %	**03** $6\sqrt{2}+10\sqrt{3}$
04 $\frac{2\sqrt{3}+3}{9}$배	**05** $\sqrt{3}$	**06** 30

01 **Action** 발판의 길이가 늘어나는 비율을 k로 놓고 이웃한 두 발판의 길이 사이의 관계를 k를 사용한 식으로 나타내어 본다.
발판의 길이가 늘어나는 비율을 $k(k>0)$라고 하면
$b=ak$, $\sqrt{18}=bk$, $c=\sqrt{18}k$, $\sqrt{162}=ck$
$\sqrt{162}=ck$에 $c=\sqrt{18}k$를 대입하면
$\sqrt{162}=\sqrt{18}k\times k$, $k^2=3$
이때 $k>0$이므로 $k=\sqrt{3}$
$\therefore c=\sqrt{18}\times\sqrt{3}=3\sqrt{6}$
$\sqrt{18}=bk$에서 $b=\frac{\sqrt{18}}{k}=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}$
$b=ak$에서 $a=\frac{b}{k}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$
$\therefore a=\sqrt{2}, b=\sqrt{6}, c=3\sqrt{6}$

02 **Action** A4용지의 가로의 길이를 x로 놓고 B5용지의 가로의 길이를 x를 사용하여 나타낸다.
A4용지의 가로의 길이를 x라고 하자.
(B4용지의 가로) : (A4용지의 가로)$=\sqrt{1.5}:1$이므로
(B4용지의 가로) : $x=\sqrt{1.5}:1$
$\therefore$ (B4용지의 가로)$=\sqrt{1.5}x$
또, (B4용지의 가로) : (B5용지의 가로)$=\sqrt{2}:1$이므로
$\sqrt{1.5}x$: (B5용지의 가로)$=\sqrt{2}:1$
$\therefore$ (B5용지의 가로)$=\sqrt{1.5}x\div\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$
$=\frac{1.732}{2}x=0.866x$
따라서 A4용지를 B5용지로 축소하려면 86.6 %로 축소 인쇄해야 한다.

03 **Action** 먼저 네 정사각형의 한 변의 길이를 각각 구한다.
네 정사각형의 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$이고 색칠된 세 정사각형의 한 변의 길이는 각각 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{2}$이다.
따라서 새로 만든 도형의 둘레의 길이는
(처음 네 정사각형의 둘레의 길이의 합)
$-$(색칠된 세 정사각형의 둘레의 길이의 합)
$=(4\times\sqrt{2}+4\times\sqrt{3}+4\times2\sqrt{2}+4\times2\sqrt{3})$
$-\left(4\times\frac{\sqrt{2}}{2}+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4\times\sqrt{2}\right)$
$=12\sqrt{2}+12\sqrt{3}-(6\sqrt{2}+2\sqrt{3})$
$=6\sqrt{2}+10\sqrt{3}$

04 **Action** 직육면체 A의 밑면의 한 변의 길이를 a로 놓고, 직육면체 A의 높이와 정육면체 B의 한 모서리의 길이를 각각 a를 사용하여 나타낸다.
직육면체 A의 밑면의 한 변의 길이를 a라고 하면

직육면체 A와 정육면체 B의 밑면의 넓이는 각각 a^2, $3a^2$이다.
따라서 정육면체 B의 한 모서리의 길이는 $\sqrt{3a^2}=\sqrt{3}a$이므로
(정육면체 B의 부피)$=(\sqrt{3}a)^3=3\sqrt{3}a^3$
(직육면체 A의 부피)$=\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{3}=\sqrt{3}a^3$
∴ (직육면체 A의 높이)$=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{a^2}=\sqrt{3}a$
이때 직육면체 A의 모든 모서리의 길이의 합은
$8a+4\times\sqrt{3}a=(8+4\sqrt{3})a$
또, 정육면체 B의 모든 모서리의 길이의 합은 $12\sqrt{3}a$이다.
따라서 $\dfrac{(8+4\sqrt{3})a}{12\sqrt{3}a}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{(2+\sqrt{3})\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{9}$
이므로 직육면체 A의 모든 모서리의 길이의 합은 정육면체 B의 모든 모서리의 길이의 합의 $\dfrac{2\sqrt{3}+3}{9}$배이다.

Lecture

직육면체와 정육면체
① (직육면체의 부피)=(밑넓이)×(높이)
② 한 모서리의 길이가 a인 정육면체의 부피는 a^3이다.
③ (직육면체의 모서리의 길이의 합)
$=4\times${(가로의 길이)+(세로의 길이)+(높이)}
④ (정육면체의 모서리의 길이의 합)$=12\times$(한 모서리의 길이)

05 Action 번분수의 계산 방법을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}}}=\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{3}{2\sqrt{3}}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

06 Action 10은 두 자리 자연수, 10^2은 세 자리 자연수, 10^3은 네 자리 자연수, …임을 이용하여 아홉 자리 자연수 a는 $10^8\le a<10^9$임을 파악한다.

아홉 자리 자연수 a는 $10^8\le a<10^9$이므로
$10000\le\sqrt{a}<10000\sqrt{10}$
따라서 $\sqrt{a}$의 정수 부분은 5자리 자연수이다.
∴ $m=5$
$\sqrt{x^2+y^2}$의 정수 부분이 7이면 $7\le\sqrt{x^2+y^2}<8$이므로
$49\le x^2+y^2<64$ …… ㉠
㉠을 만족하는 순서쌍 (x, y)는 $(7, 1)$, $(7, 2)$, $(7, 3)$, $(6, 4)$, $(6, 5)$, $(5, 5)$의 6개이므로 $n=6$
∴ $mn=5\times6=30$

교과서 속 창의 사고력

P 31 – P 32

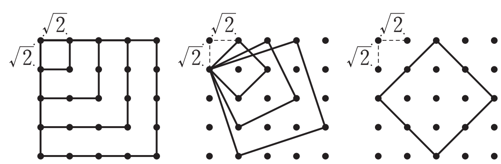
01 8 **02** 6
03 $(84+20\sqrt{2})$ cm **04** $8+5\sqrt{2}$

01 Action 직선 $y=\sqrt{3}x$가 점 $(a, \sqrt{b})$를 지날 때, $y=\sqrt{3}x$에 $x=a$, $y=\sqrt{b}$를 대입하면 등식이 성립한다.

$y=\sqrt{3}x$에 $x=a$, $y=\sqrt{b}$를 대입하면
$\sqrt{b}=\sqrt{3}a$ ∴ $b=3a^2$
이때 $1\le b\le200$이므로
$1\le3a^2\le200$ ∴ $\dfrac{1}{3}\le a^2\le\dfrac{200}{3}$
또, a는 $1\le a\le200$인 자연수이므로 $a=1, 2, 3, \cdots, 8$
따라서 직선 $y=\sqrt{3}x$는 8개의 점을 지난다.

02 Action 한 변의 길이가 다른 정사각형을 모두 그려 피타고라스 정리를 이용하여 정사각형의 한 변의 길이를 각각 구한다.

한 변의 길이가 다른 정사각형은 다음 그림과 같이 모두 8가지를 그릴 수 있다.



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

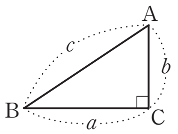
[그림 1]에서 각 정사각형의 한 변의 길이는 차례로 $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$이다.
[그림 2]에서 각 정사각형의 한 변의 길이는 차례로 2, $\sqrt{10}$, $2\sqrt{5}$이다.
[그림 3]에서 정사각형의 한 변의 길이는 4이다.

따라서 정사각형의 한 변의 길이가 무리수인 것은 $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, $2\sqrt{5}$의 6개이다.

Lecture

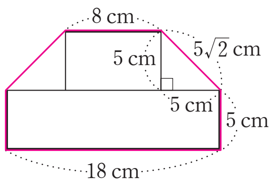
피타고라스 정리

직각삼각형 ABC에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 나머지 한 변의 길이를 c라고 하면 $a^2+b^2=c^2$이 성립한다.



03 Action 상자를 정면으로 본 모양을 그림으로 그려 본다.

상자를 정면에서 본 모양을 그리면 오른쪽 그림과 같다. 또, 측면에서 보는 모양도 같고 매듭을 매는 데 필요한 끈의 길이가 12 cm이므로 필요한 끈의 전체 길이는

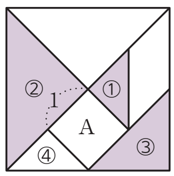


$2(8+5\sqrt{2}+5+18+5+5\sqrt{2})+12$

$=2(36+10\sqrt{2})+12$

$=84+20\sqrt{2}$ (cm)

04 Action 직각을 낀 두 변의 길이가 a인 직각이등변삼각형의 빗변의 길이는 $\sqrt{2}a$임을 이용한다.



①, ④ 직각을 낀 두 변의 길이가 1이므로 빗변의 길이는 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이다.
즉, 세 변의 길이는 1, 1, $\sqrt{2}$

② 직각을 낀 두 변의 길이가 2이므로 빗변의 길이는 $\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$이다. 즉, 세 변의 길이는 2, 2, $2\sqrt{2}$

③ (③의 직각을 낀 한 변의 길이)
=(정사각형 모양의 판의 한 변의 길이) −(④의 빗변의 길이)
=(②의 빗변의 길이)−(④의 빗변의 길이)
$=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$
이므로 빗변의 길이는 $\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$이다.
즉, 세 변의 길이는 $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 2

따라서 색칠한 세 삼각형의 둘레의 길이의 합은
(①의 둘레의 길이)+(②의 둘레의 길이) +(③의 둘레의 길이)
$=(1+1+\sqrt{2})+(2+2+2\sqrt{2})+(\sqrt{2}+\sqrt{2}+2)$
$=8+5\sqrt{2}$

Ⅱ. 다항식의 곱셈과 인수분해

1. 다항식의 곱셈

최고 수준 입문하기

P 36– P 39

01 ③	**02** −46	**03** ③, ⑤	**04** ㉢, ㉤
05 ④	**06** ①	**07** ④	**08** ②
09 30	**10** ④	**11** $22x^2+74x+10$	
12 $48a^2-14a+1$		**13** 48	
14 $x^4+10x^3+25x^2-36$		**15** ③	**16** ③
17 4	**18** $19+6\sqrt{10}$	**19** 13	**20** −10
21 ④	**22** ③	**23** 74	**24** 12

01 Action 분배법칙을 이용하여 전개하고 전개식에 동류항이 있으면 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

$(-x+4)(3x-y+2)$
$=-3x^2+xy-2x+12x-4y+8$
$=-3x^2+xy+10x-4y+8$

02 Action 분배법칙을 이용하여 전개하고 x의 계수, y의 계수를 각각 구한다.

$(4x-7)(6y-1)=24xy-4x-42y+7$
따라서 x의 계수는 −4, y의 계수는 −42이므로 그 합은
$-4+(-42)=-46$

03 Action 곱셈 공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$을 이용한다.

① $(x-3)^2=x^2-6x+9$
② $(4x+1)^2=16x^2+8x+1$
④ $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2=a^2-a+\frac{1}{4}$

04 Action 각 보기의 식을 전개하여 전개식이 같은 것을 찾는다.

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
㉠ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
㉡ $-(a+b)^2=-(a^2+2ab+b^2)$
$=-a^2-2ab-b^2$
㉢ $(b-a)^2=a^2-2ab+b^2$
㉣ $-(a-b)^2=-(a^2-2ab+b^2)$
$=-a^2+2ab-b^2$
㉤ $(-a+b)^2=a^2-2ab+b^2$
㉥ $(-a-b)^2=a^2+2ab+b^2$
따라서 $(a-b)^2$과 전개식이 같은 것은 ㉢, ㉤이다.

Lecture

전개식이 같은 다항식

(1) $(-a-b)^2=\{-(a+b)\}^2=(a+b)^2$

(2) $(-a+b)^2=\{-(a-b)\}^2=(a-b)^2$

(3) $(-a-b)(-a+b)=\{-(a+b)\}\{-(a-b)\}$
$=(a+b)(a-b)$

05 Action 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용한다.

④ $(b-5a)(b+5a)=-25a^2+b^2$

06 Action 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 여러 번 이용한다.

$(1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)$
$=(1-a^2)(1+a^2)(1+a^4)$
$=(1-a^4)(1+a^4)$
$=1-a^8$

따라서 □ 안에 알맞은 자연수는 8이다.

07 Action 곱셈 공식 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$를 이용한다.

$\left(x+\frac{2}{3}y\right)\left(x-\frac{3}{4}y\right)=x^2-\frac{1}{12}xy-\frac{1}{2}y^2$이므로

$A=-\frac{1}{12}$, $B=-\frac{1}{2}$

$\therefore AB=-\frac{1}{12}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{24}$

08 Action 곱셈 공식 $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$를 이용한다.

① $(a+4b)(2a-5b)=2a^2+\boxed{3}ab-20b^2$

② $(7a+2)(1-3a)=\boxed{-21}a^2+a+2$

③ $(6x-5)(4x-3)=24x^2-38x+\boxed{15}$

④ $(4x+y)(5y-3x)=\boxed{-12}x^2+17xy+5y^2$

⑤ $(2x+3y)(3x-y)=6x^2+\boxed{7}xy-3y^2$

따라서 □ 안에 들어갈 수가 가장 작은 것은 ②이다.

09 Action 곱셈 공식을 이용하여 전개한 후 동류항이 있으면 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

$(3x-5)(x+4)-(x+2)(x-6)$
$=3x^2+7x-20-(x^2-4x-12)$
$=2x^2+11x-8$ …… 50%

따라서 $a=11$, $b=-8$이므로

$2a-b=2\times11-(-8)=30$ …… 50%

10 Action 직사각형의 넓이를 구하는 공식을 이용하여 식을 세운 후 곱셈 공식을 이용하여 전개한다.

색칠한 직사각형의 가로의 길이는 $7x-5$, 세로의 길이는 $3x+4$이므로

(색칠한 직사각형의 넓이)$=(7x-5)(3x+4)$
$=21x^2+13x-20$

11 Action 직육면체의 겉넓이를 구하는 공식과 곱셈 공식을 이용하여 식을 전개한 후 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

(직육면체의 겉넓이)
$=2\{(x+7)(2x-1)+(2x-1)(3x+2)+(x+7)(3x+2)\}$
$=2(2x^2+13x-7+6x^2+x-2+3x^2+23x+14)$
$=2(11x^2+37x+5)$
$=22x^2+74x+10$

12 Action 길을 제외한 땅의 넓이와 넓이가 같은 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 구한다.

길을 제외한 땅의 넓이는 가로의 길이가 $8a-1$, 세로의 길이가 $6a-1$인 직사각형의 넓이와 같으므로

(길을 제외한 땅의 넓이)$=(8a-1)(6a-1)$
$=48a^2-14a+1$

13 Action 두 개의 항을 하나의 문자로 치환하고 곱셈 공식을 이용하여 식을 전개한다.

$3x^2+2x=A$로 치환하면

$(3x^2+2x+1)^2=(A+1)^2$
$=A^2+2A+1$
$=(3x^2+2x)^2+2(3x^2+2x)+1$
$=9x^4+12x^3+4x^2+6x^2+4x+1$
$=9x^4+12x^3+10x^2+4x+1$

따라서 $a=12$, $b=4$이므로

$ab=12\times4=48$

14 Action 공통부분이 나오도록 두 개의 일차식끼리 묶어 전개한 후 공통부분을 하나의 문자로 치환한다.

$(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$
$=\{(x-1)(x+6)\}\{(x+2)(x+3)\}$
$=(x^2+5x-6)(x^2+5x+6)$

$x^2+5x=A$로 치환하면

(주어진 식)$=(A-6)(A+6)$
$=A^2-36$
$=(x^2+5x)^2-36$
$=x^4+10x^3+25x^2-36$

15 Action $993=1000-7$, $1007=1000+7$임을 이용한다.

$993\times1007=(1000-7)(1000+7)$
$=1000^2-7^2=999951$

따라서 가장 편리한 곱셈 공식은 ③이다.

16 Action 제곱근을 문자로 생각하여 곱셈 공식을 이용한다.

$(\sqrt{2}+3\sqrt{3})(5\sqrt{2}-\sqrt{3})=10+14\sqrt{6}-9=1+14\sqrt{6}$

따라서 $a=1$, $b=14$이므로

$b-a=14-1=13$

17 Action 주어진 식을 $a+b\sqrt{3}$(a, b는 유리수)의 꼴로 정리한 후 유리수가 되려면 $b=0$이어야 함을 이용한다.

$(2-\sqrt{3})(2\sqrt{3}+a)=4\sqrt{3}+2a-6-a\sqrt{3}$

$=(2a-6)+(4-a)\sqrt{3}$

이것이 유리수가 되려면 $4-a=0$이어야 하므로 $a=4$

18 Action 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하여 분모를 유리화한다.

$\dfrac{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}=\dfrac{(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})^2}{(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})}$ …… 40%

$=\dfrac{20+12\sqrt{10}+18}{20-18}$

$=\dfrac{38+12\sqrt{10}}{2}$

$=19+6\sqrt{10}$ …… 60%

19 Action 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하여 각 분수의 분모를 유리화한 후 간단히 한다.

$\dfrac{3}{3+2\sqrt{2}}-\dfrac{2}{3-2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{3(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}-\dfrac{2(3+2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}$

$=\dfrac{9-6\sqrt{2}}{9-8}-\dfrac{6+4\sqrt{2}}{9-8}$

$=9-6\sqrt{2}-6-4\sqrt{2}$

$=3-10\sqrt{2}$

따라서 $a=3$, $b=-10$이므로

$a-b=3-(-10)=13$

20 Action 먼저 곱셈 공식을 이용하여 xy의 값을 구한다.

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$에서 $4^2=20+2xy$

$2xy=-4 \qquad \therefore xy=-2$

$\therefore \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{20}{-2}=-10$

21 Action 먼저 곱셈 공식을 이용하여 주어진 식을 전개하고 동류항끼리 모아서 간단히 한 후 x, y의 값을 각각 대입한다.

$(x-y)^2-(x+y)(x-y)$

$=x^2-2xy+y^2-(x^2-y^2)$

$=-2xy+2y^2$

$=-2\times2\sqrt{6}\times5\sqrt{3}+2\times(5\sqrt{3})^2$

$=-60\sqrt{2}+150$

22 Action 곱셈 공식의 변형을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4$

$=(4\sqrt{5})^2-4$

$=80-4=76$

Lecture

두 수의 곱이 1인 식의 변형

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$

(2) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+4$,

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4$

23 Action 먼저 $x^2-5x+1=0$의 양변을 x로 나누어 $x+\dfrac{1}{x}$의 값을 구한다.

$x^2-5x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-5+\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\dfrac{1}{x}=5$ …… 40%

$\therefore 3x^2+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}=3\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=3\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\right\}+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=3\times(5^2-2)+5$

$=74$ …… 60%

24 Action 먼저 x의 분모를 유리화한 후 식을 변형하여 x^2-10x의 값을 구한다.

$x=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=5-2\sqrt{5}$

$\therefore x-5=-2\sqrt{5}$

위 식의 양변을 제곱하면

$(x-5)^2=(-2\sqrt{5})^2$

$x^2-10x+25=20 \qquad \therefore x^2-10x=-5$

$\therefore x^2-10x+17=-5+17=12$

최고 수준 완성하기 P 40– P 43

01 12 **02** -9 **03** 27 **04** 2

05 $a=\dfrac{1}{4}$, $b=8$ **06** $-2a^2+7ab-6b^2$

07 $y^2+2xy-20x-25y+150$

08 $a^6-a^4-a^2+1$ **09** 73 **10** ③

11 $-5+3\sqrt{3}$ **12** 18 **13** 81 **14** 47

15 5 **16** $10+4\sqrt{6}$

01 Action 분배법칙을 이용하여 좌변을 전개하고 동류항끼리 모아서 간단히 한다.

$(x-ay-1)(x-2y+3)$

$=x^2-2xy+3x-axy+2ay^2-3ay-x+2y-3$

$=x^2+(-a-2)xy+2ay^2+2x+(-3a+2)y-3$

$=x^2+3xy-10y^2+2x+by-3$

즉 $-a-2=3$, $-3a+2=b$에서 $a=-5$, $b=17$

$\therefore a+b=-5+17=12$

02 Action 곱셈 공식 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$를 이용하여 주어진 식을 전개하고 $AB=8$을 만족하는 순서쌍 (A, B)를 구한다.

$(x-A)(x-B)=x^2-(A+B)x+AB$

$\qquad\qquad\qquad\quad=x^2-Cx+8$

이므로 $A+B=C$, $AB=8$

$AB=8$을 만족하는 두 정수 A, B의 순서쌍 (A, B)는

$(1, 8)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(8, 1)$, $(-1, -8)$, $(-2, -4)$, $(-4, -2)$, $(-8, -1)$

이때 $C=A+B$이므로 C의 값이 될 수 있는 수는 9, 6, -9, -6이고, 이중 가장 작은 수는 -9이다.

03 Action 전개하려는 식에 잘못 본 계수를 대입하여 식을 전개한 후 계수를 비교한다.

$(x+a)(x+5)=x^2+(a+5)x+5a=x^2+9x+b$

에서 $a+5=9$, $5a=b$ $\qquad\therefore a=4$, $b=20$

$(2x-7)(cx+5)=2cx^2+(10-7c)x-35$

$\qquad\qquad\qquad\quad=dx^2+3x-35$

에서 $2c=d$, $10-7c=3$ $\qquad\therefore c=1$, $d=2$

$\therefore a+b+c+d=4+20+1+2=27$

04 Action 자연수 N을 p로 나누었을 때 몫이 q이고 나머지가 r이면 $N=pq+r$ (단, $0\le r<p$)로 나타냄을 이용한다.

0 이상의 두 정수 a, $b(a\ge b)$에 대하여 $A=7a+5$, $B=7b+3$이라고 하면

$A^2-B^2=(7a+5)^2-(7b+3)^2$

$\qquad\quad=49a^2+70a+25-(49b^2+42b+9)$

$\qquad\quad=49a^2+70a-49b^2-42b+16$

$\qquad\quad=7(7a^2+10a-7b^2-6b+2)+2$

따라서 A^2-B^2을 7로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

Lecture

나머지는 0 이상이고 나누는 수 7보다 작으므로

$A^2-B^2=49a^2+70a-49b^2-42b+16$

$\qquad\quad=7(7a^2+10a-7b^2-6b+3)-5$

로 나타내어 나머지가 -5라고 답하지 않도록 주의한다.

05 Action $y=x-4$이므로 $x-y=4$이고 $A=1\times A$임을 이용하여 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용할 수 있도록 주어진 등식의 좌변을 변형한다.

$y=x-4$에서 $x-y=4$이므로

$(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

$=\dfrac{1}{x-y}\times(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

$=\dfrac{1}{4}(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

$=\dfrac{1}{4}(x^4-y^4)(x^4+y^4)=\dfrac{1}{4}(x^8-y^8)$

$\therefore a=\dfrac{1}{4}$, $b=8$

06 Action $\overline{\mathrm{HI}}$, $\overline{\mathrm{IJ}}$의 길이를 각각 a, b의 식으로 나타낸다.

$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{AB}}=b$이므로 $\overline{\mathrm{FC}}=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{BF}}=a-b$

$\overline{\mathrm{HG}}=\overline{\mathrm{FC}}=a-b$이므로 $\overline{\mathrm{DG}}=\overline{\mathrm{HG}}=a-b$

$\overline{\mathrm{GC}}=\overline{\mathrm{DC}}-\overline{\mathrm{DG}}=b-(a-b)=2b-a$이므로

$\overline{\mathrm{IG}}=\overline{\mathrm{GC}}=2b-a$, $\overline{\mathrm{IJ}}=\overline{\mathrm{GC}}=2b-a$

$\overline{\mathrm{HI}}=\overline{\mathrm{HG}}-\overline{\mathrm{IG}}=a-b-(2b-a)=2a-3b$

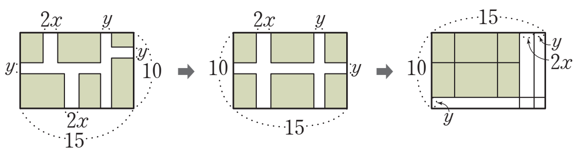
$\therefore \square\mathrm{HFJI}=\overline{\mathrm{HI}}\times\overline{\mathrm{IJ}}$

$\qquad\qquad\quad=(2a-3b)(2b-a)$

$\qquad\qquad\quad=-2a^2+7ab-6b^2$

07 Action 주어진 그림에서 길을 적당히 이동시켜 땅을 직사각형 모양으로 만든다.

주어진 그림을 변형하면 다음과 같으므로 땅의 넓이는 가로의 길이가 $15-2x-y$, 세로의 길이가 $10-y$인 직사각형의 넓이와 같다.



$\therefore$ (땅의 넓이)

$\quad=(15-2x-y)(10-y)$

$\quad=150-15y-20x+2xy-10y+y^2$

$\quad=y^2+2xy-20x-25y+150$

08 Action 공통부분을 하나의 문자로 치환한다. 이때 공통부분은 여러 개 나올 수 있다.

$1-a^3=P$, $a-a^2=Q$라고 하면

$(1-a+a^2-a^3)(1+a-a^2-a^3)$

$=\{(1-a^3)-(a-a^2)\}\{(1-a^3)+(a-a^2)\}$

$=(P-Q)(P+Q)$

$=P^2-Q^2$

$=(1-a^3)^2-(a-a^2)^2$

$=1-2a^3+a^6-(a^2-2a^3+a^4)$

$=a^6-a^4-a^2+1$

09 Action $x^2+2x-6=0$이므로 $x^2+2x=6$임을 이용한다.

$x^2+2x-6=0$에서 $x^2+2x=6$

$$\begin{aligned}&(x-3)(x-1)(x+3)(x+5)+100\\&=\{(x-3)(x+5)\}\{(x-1)(x+3)\}+100\\&=(x^2+2x-15)(x^2+2x-3)+100\\&=(6-15)(6-3)+100\\&=(-9)\times3+100\\&=73\end{aligned}$$

10 Action $\dfrac{1}{2-3}\times(2-3)=1$이고 $A=1\times A$임을 이용하여 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

$$\begin{aligned}&(2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)(2^8+3^8)(2^{16}+3^{16})\\&=\frac{1}{2-3}\times(2-3)(2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)(2^8+3^8)(2^{16}+3^{16})\\&=-(2-3)(2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)(2^8+3^8)(2^{16}+3^{16})\\&=-(2^2-3^2)(2^2+3^2)(2^4+3^4)(2^8+3^8)(2^{16}+3^{16})\\&=-(2^4-3^4)(2^4+3^4)(2^8+3^8)(2^{16}+3^{16})\\&=-(2^8-3^8)(2^8+3^8)(2^{16}+3^{16})\\&=-(2^{16}-3^{16})(2^{16}+3^{16})\\&=-(2^{32}-3^{32})=3^{32}-2^{32}\end{aligned}$$

11 Action $(2-\sqrt{3})^4=(2-\sqrt{3})^3(2-\sqrt{3})$, $(2-\sqrt{3})^7=(2-\sqrt{3})^5(2-\sqrt{3})^2$임을 이용한다.

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=1$이므로 …… 10%

$(2+\sqrt{3})^3(2-\sqrt{3})^4=\{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\}^3(2-\sqrt{3})$

$=2-\sqrt{3}$ …… 30%

$(2+\sqrt{3})^5(2-\sqrt{3})^7=\{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\}^5(2-\sqrt{3})^2$

$=(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$ …… 30%

$\therefore (2+\sqrt{3})^3(2-\sqrt{3})^4-(2+\sqrt{3})^5(2-\sqrt{3})^7$

$=(2-\sqrt{3})-(7-4\sqrt{3})$

$=2-\sqrt{3}-7+4\sqrt{3}=-5+3\sqrt{3}$ …… 30%

12 Action $3.05=3+0.05$, $2.95=3-0.05$이므로 곱셈 공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$을 이용한다.

$$\begin{aligned}&3.05^2+2.95^2\\&=(3+0.05)^2+(3-0.05)^2\\&=3^2+2\times3\times0.05+0.05^2+3^2-2\times3\times0.05+0.05^2\\&=2\times(3^2+0.05^2)=18.005\end{aligned}$$

$\therefore [3.05^2+2.95^2]=[18.005]=18$

13 Action 두 정사각형의 둘레의 길이의 합을 이용하여 $x+y$의 값을 구하고, 넓이의 합을 이용하여 x^2+y^2의 값을 구한다.

두 정사각형의 둘레의 길이의 합이 84 cm이므로

$4x+4y=84$ $\therefore x+y=21$

두 정사각형의 넓이의 합이 261 cm^2이므로

$x^2+y^2=261$

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$에서 $21^2=261+2xy$

$\therefore xy=90$

$\therefore (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=21^2-4\times90=81$

14 Action $x^2-x-1=0$의 양변을 x로 나누어 $x-\dfrac{1}{x}$의 값을 구한다.

$x^2-x-1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-1-\dfrac{1}{x}=0$ $\therefore x-\dfrac{1}{x}=1$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=1^2+2=3$

$x^4+\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2=3^2-2=7$

$\therefore x^8+\dfrac{1}{x^8}=\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}\right)^2-2=7^2-2=47$

15 Action 분모의 유리화를 이용하여 $\dfrac{1}{f(x)}$을 간단히 한 후 $x=1, 2, 3, \cdots, 35$를 차례로 대입한다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)}&=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\\&=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}\\&=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{x-(x+1)}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{-1}\\&=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\end{aligned}$$ …… 60%

$\therefore \dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+\cdots+\dfrac{1}{f(35)}$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots$

$+(\sqrt{36}-\sqrt{35})$

$=-\sqrt{1}+\sqrt{36}=-1+6$

$=5$ …… 40%

16 Action 먼저 x의 분모를 유리화한다.

$$\begin{aligned}x&=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\\&=5+2\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\\&=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}\\&\quad+\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}\\&=\frac{2x-2\sqrt{(x+1)(x-1)}}{x+1-(x-1)}+\frac{2x+2\sqrt{(x+1)(x-1)}}{x+1-(x-1)}\\&=\frac{4x}{2}=2x\\&=2(5+2\sqrt{6})=10+4\sqrt{6}\end{aligned}$$

최고 수준 뛰어넘기

P 44 – P 45

01 41 **02** $8\sqrt{2}$ **03** -4, 4 **04** $-8+8\sqrt{2}$
05 156 **06** 8

01 **Action** 모든 항의 계수와 상수항의 총합은 주어진 식에 $x=1$을 대입해야 함을 이용한다.

$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2$
$=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$
이므로 x^4항이 나오는 부분만 전개하면
$1\times x^4+x\times x^3+x^2\times x^2+x^3\times x+x^4\times 1=5x^4$
$\therefore a=5$
모든 항의 계수와 상수항의 총합은 주어진 식에 $x=1$을 대입하면 된다.
즉 주어진 식에 $x=1$을 대입하면
$6^2=36 \quad \therefore b=36$
$\therefore a+b=5+36=41$

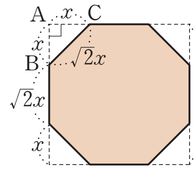
02 **Action** 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 여러 번 이용하여 주어진 식을 전개한다.

$(x-a)(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)(x^8+a^8)$
$=(x^2-a^2)(x^2+a^2)(x^4+a^4)(x^8+a^8)$
$=(x^4-a^4)(x^4+a^4)(x^8+a^8)$
$=(x^8-a^8)(x^8+a^8)$
$=x^{16}-a^{16}$
즉 $x^{16}-a^{16}=x^b-256$이므로
$x^{16}=x^b$에서 $b=16$
$a^{16}=256$에서 $256=2^8=\{(\sqrt{2})^2\}^8=(\sqrt{2})^{16}$
$\therefore a=\sqrt{2}$
$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{16}{\sqrt{2}}=8\sqrt{2}$

03 **Action** $(x+y)^n=A$, $(x-y)^n=B$로 치환한다.

$x^2-y^2+1=0$에서 $x^2-y^2=-1$
$(x+y)^n=A$, $(x-y)^n=B$로 치환하면
$\{(x+y)^n+(x-y)^n\}^2-\{(x+y)^n-(x-y)^n\}^2$
$=(A+B)^2-(A-B)^2$
$=A^2+2AB+B^2-(A^2-2AB+B^2)$
$=4AB=4(x+y)^n(x-y)^n$
$=4\{(x+y)(x-y)\}^n=4(x^2-y^2)^n$
$=4\times(-1)^n$
(i) $n\ge 2$인 홀수일 때, $(-1)^n=-1$이므로
$4\times(-1)^n=4\times(-1)=-4$
(ii) $n\ge 2$인 짝수일 때, $(-1)^n=1$이므로
$4\times(-1)^n=4\times 1=4$
따라서 구하는 값은 -4, 4이다.

04 **Action** 정사각형에서 잘라낸 네 모퉁이는 직각이등변삼각형이므로 피타고라스 정리를 이용하여 정팔각형의 한 변의 길이를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 직각이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}=x$라고 하면 피타고라스 정리에 의해
$\overline{BC}=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}x$
이때 처음 정사각형의 한 변의 길이는 2이므로
$x+\sqrt{2}x+x=2$, $(2+\sqrt{2})x=2$
$\therefore x=\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\dfrac{2(2-\sqrt{2})}{2}=2-\sqrt{2}$
$\therefore$ (정팔각형의 넓이)
$\therefore$ =(정사각형의 넓이)$-4\triangle$ABC
$=2\times 2-4\times\left\{\dfrac{1}{2}\times(2-\sqrt{2})\times(2-\sqrt{2})\right\}$
$=4-4\times\left\{\dfrac{1}{2}\times(6-4\sqrt{2})\right\}$
$=4-12+8\sqrt{2}=-8+8\sqrt{2}$

05 **Action** 먼저 $\dfrac{-a+b}{a+2}=\dfrac{a-b}{b+2}$를 변형하여 $a+b$의 값을 구한다.

조건 (다)에서 $\dfrac{-a+b}{a+2}=\dfrac{a-b}{b+2}$이므로 $\dfrac{-(a-b)}{a+2}=\dfrac{a-b}{b+2}$
이때 $a\ne b$이므로 양변을 $a-b$로 나누면
$\dfrac{-1}{a+2}=\dfrac{1}{b+2}$, $a+2=-(b+2) \quad \therefore a+b=-4$
조건 (나)에서 $ab=-5$이므로
$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$
$=(-4)^2-4\times(-5)=36$
이때 조건 (가)에서 $a>b$이므로 $a-b=6$
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$=(-4)^2-2\times(-5)=26$
$\therefore (a-b)(a^2+b^2)=6\times 26=156$

06 **Action** 정사각형의 한 변의 길이를 x, 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 a, b로 놓고 문제에 주어진 조건에 맞게 식을 세운다.

정사각형의 한 변의 길이를 x, 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 a, b라고 하자.
정사각형과 직사각형의 둘레의 길이가 서로 같으므로
$4x=2(a+b) \quad \therefore x=\dfrac{a+b}{2}$ …… ㉠
또, 넓이의 차가 16이므로 $|x^2-ab|=16$ …… ㉡
㉡에 ㉠을 대입하면 $\left|\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-ab\right|=16$
양변에 4를 곱하면
$|(a+b)^2-4ab|=64$, $|(a-b)^2|=64$
$\therefore |a-b|=8$
따라서 직사각형의 두 변의 길이의 차는 8이다.

2. 다항식의 인수분해

최고 수준 입문하기

P 48– P 52

01 ⑤	**02** ④	**03** ④	**04** ⑤
05 ②	**06** ④	**07** $2x-4$	**08** ③
09 ⑤	**10** 11	**11** $(3x+1)(5x-2)$	
12 $4a+10$	**13** ②	**14** $2x+17$	**15** ⑤
16 5	**17** $(x^2+x-7)^2$		**18** ①
19 ③, ④	**20** ③	**21** $(x+2y-1)^2$	
22 ②	**23** ②	**24** 10030	**25** ⑤
26 ③	**27** ③	**28** ②	**29** ③
30 $150\pi\ \mathrm{cm}^2$			

02 Action 공통 인수를 찾을 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

$$\begin{aligned}2x(a-b)+2y(b-a)&=2x(a-b)-2y(a-b)\\&=2(a-b)(x-y)\end{aligned}$$

03 Action 완전제곱식은 (다항식)^2 또는 (수)×(다항식)^{2}의 꼴이다.

① $x^2+2x+1=(x+1)^2$

② $a^2-8a+16=(a-4)^2$

③ $\frac{1}{4}a^2+a+1=\left(\frac{1}{2}a+1\right)^2$

⑤ $3x^2-12x+12=3(x^2-4x+4)=3(x-2)^2$

04 Action 주어진 식을 전개하여 간단히 한 후 완전제곱식이 될 조건을 이용한다.

$$\begin{aligned}(3x-4)(3x+8)+a&=9x^2+12x-32+a\\&=(3x)^2+2\times3x\times2-32+a\end{aligned}$$

위의 식이 완전제곱식이 되어야 하므로

$-32+a=2^2 \qquad \therefore a=36$

> **Lecture**
>
> 완전제곱식이 되려면 세 항 사이에 다음과 같은 관계가 성립해야 한다.
>
> $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
>
> 제곱 제곱

05 Action 근호 안의 식을 인수분해 공식 $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$을 이용하여 인수분해한 후 $\sqrt{A^2}=\begin{cases}A(A\ge0)\\-A(A<0)\end{cases}$임을 이용한다.

$2<x<3$이므로 $x-2>0,\ x-3<0$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}\\&=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}\\&=(x-2)+\{-(x-3)\}\\&=x-2-x+3\\&=1\end{aligned}$$

06 Action 공통인수로 묶은 후 인수분해 공식 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용한다.

$$\begin{aligned}a^3-a&=a(a^2-1)\\&=a(a+1)(a-1)\end{aligned}$$

07 Action 인수분해 공식 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$를 이용한다.

$x^2-4x-12=(x+2)(x-6)$

따라서 구하는 두 일차식의 합은

$(x+2)+(x-6)=2x-4$

> **Lecture**
>
> $x^2-4x-12$의 인수분해
>
> 곱이 -12인 두 정수는 $1, -12$ 또는 $2, -6$ 또는 $3, -4$ 또는 $4, -3$ 또는 $6, -2$ 또는 $12, -1$이다.
>
> 이 중에서 합이 -4인 두 정수는 $2, -6$이므로
>
> $x^2-4x-12=(x+2)(x-6)$

08 Action 인수분해 공식 $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$를 이용하여 인수분해한다.

① $a^2-2ab-24b^2=(a+4b)(a-6b)$

② $2x^2+7xy-4y^2=(x+4y)(2x-y)$

④ $x^2+3xy-10y^2=(x-2y)(x+5y)$

⑤ $3a^2-ab-14b^2=(a+2b)(3a-7b)$

> **Lecture**
>
> $acx^2+(ad+bc)x+bd$의 인수분해
>
> $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$
>
> $$\begin{array}{lll} ax & b & \to bcx \\ cx & d & \to adx\ (+ \\ & & (ad+bc)x \end{array}$$
>
> ⑤ $3a^2-ab-14b^2=(a+2b)(3a-7b)$
>
> $$\begin{array}{lll} a & 2b & \to 6ab \\ 3a & -7b & \to -7ab\ (+ \\ & & -ab \end{array}$$

09 Action 인수분해 공식 $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$를 이용하여 인수분해한 후 두 다항식의 공통인수를 찾는다.

$2x^2+7x+3=(x+3)(2x+1)$

$6x^2-5x-4=(2x+1)(3x-4)$

따라서 두 다항식의 공통인수는 ⑤이다.

10 Action $2x^2+ax-6$이 $x+6$을 인수로 갖고, x^2의 계수가 2이므로 다른 인수를 $2x+k$로 놓는다.

$2x^2+ax-6=(x+6)(2x+k)$라고 하면

$2x^2+ax-6=2x^2+(k+12)x+6k$

$-6=6k$에서 $k=-1$

$\therefore a=k+12=(-1)+12=11$

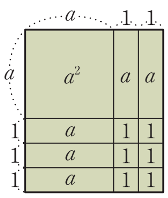
11 Action 민준이는 x^2의 계수와 x의 계수를 바르게 보았고, 다희는 x^2의 계수와 상수항을 바르게 보았으므로 이를 이용하여 처음 이차식을 구한다.

민준이가 인수분해한 식은
$(3x-2)(5x+3)=15x^2-x-6$
이때 민준이는 상수항을 잘못 보았으므로 x^2의 계수와 x의 계수는 바르게 보았다. 즉 처음 이차식의 x^2의 계수는 15, x의 계수는 -1이다. …… 40%
다희가 인수분해한 식은
$(15x-2)(x+1)=15x^2+13x-2$
이때 다희는 x의 계수를 잘못 보았으므로 x^2의 계수와 상수항은 바르게 보았다. 즉 처음 이차식의 상수항은 -2이다. …… 40%
따라서 처음 이차식은 $15x^2-x-2$이므로 이 식을 바르게 인수분해하면
$15x^2-x-2=(3x+1)(5x-2)$ …… 20%

12 Action 정사각형 7개와 직사각형 5개의 넓이의 합을 구한 후 인수분해한다.

정사각형 7개와 직사각형 5개의 넓이의 합은
$a\times a+5\times(1\times a)+6\times(1\times 1)=a^2+5a+6$
$=(a+2)(a+3)$
따라서 새로 만든 직사각형의 가로와 세로의 길이는 각각 $a+2$, $a+3$ 또는 $a+3$, $a+2$이므로 그 둘레의 길이는
$2\{(a+2)+(a+3)\}=4a+10$

Lecture
직사각형의 넓이
정사각형 7개와 직사각형 5개를 모두 사용하여 만든 직사각형은 오른쪽 그림과 같고 그 넓이는
$a^2+5a+6=(a+2)(a+3)$이다.



13 Action 주어진 다항식의 각 항에서 공통인수를 찾아 인수분해한다.

$3a^3b+18a^2b+15ab=3ab(a^2+6a+5)$
$=3ab(a+1)(a+5)$
따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ②이다.

14 Action 공통부분 $x+5$를 한 문자로 치환한 후 인수분해한다.

$x+5=A$로 치환하면 …… 20%
$(x+5)^2+7(x+5)-8=A^2+7A-8$
$=(A-1)(A+8)$
$=(x+5-1)(x+5+8)$
$=(x+4)(x+13)$ …… 60%
따라서 두 일차식의 합은
$(x+4)+(x+13)=2x+17$ …… 20%

15 Action 공통부분 $a+3b$를 한 문자로 치환한 후 인수분해한다.

$a+3b=A$로 치환하면
$(a+3b+4)(a+3b+2)-24=(A+4)(A+2)-24$
$=A^2+6A-16$
$=(A-2)(A+8)$
$=(a+3b-2)(a+3b+8)$

16 Action $2x+1=A$, $x-3=B$로 치환한 후 인수분해 공식 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$를 이용한다.

$2x+1=A$, $x-3=B$로 치환하면
$(2x+1)^2-(x-3)^2$
$=A^2-B^2$
$=(A+B)(A-B)$
$=\{(2x+1)+(x-3)\}\{(2x+1)-(x-3)\}$
$=(3x-2)(x+4)$
따라서 $a=3$, $b=-2$이므로
$a-b=3-(-2)=5$

17 Action 일차식의 상수항의 합이 같아지도록 2개씩 짝을 지어 전개한다.

$(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)+25$
$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+25$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+25$
$x^2+x=A$로 치환하면
(주어진 식)$=(A-2)(A-12)+25$
$=A^2-14A+49$
$=(A-7)^2$
$=(x^2+x-7)^2$

Lecture
( )( )( )( )$+k$의 꼴의 인수분해
❶ 공통부분이 생기도록 ( )( )( )( )를 2개씩 짝 지어 전개한다.
❷ 공통부분을 한 문자로 치환하여 전개한 후 인수분해한다.

18 Action 각 다항식을 인수분해하여 공통인수를 구한다.

$ab^2-b^2-4a+4=b^2(a-1)-4(a-1)$
$=(a-1)(b^2-4)$
$=(a-1)(b+2)(b-2)$
$ab-a-b+1=a(b-1)-(b-1)$
$=(b-1)(a-1)$
따라서 두 다항식의 공통인수는 ①이다.

19 Action 완전제곱식이 되는 3개의 항을 묶어 A^2-B^2의 꼴로 만든다.

$$\begin{aligned} a^2-4ab+4b^2-16c^2 &= (a^2-4ab+4b^2)-16c^2 \\ &= (a-2b)^2-(4c)^2 \\ &= (a-2b+4c)(a-2b-4c) \end{aligned}$$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ③, ④이다.

Lecture

항이 4개인 다항식의 인수분해

(1) 공통인수가 나오도록 (항 2개)+(항 2개)로 짝 지어 인수분해한다.

(2) (항 3개)+(항 1개)로 나누어 A^2-B^2의 꼴로 만든 후 인수분해한다.

완전제곱식

20 Action 차수가 낮은 문자 y에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

$$\begin{aligned} 3x^2-xy+8x-2y+4 &= (-x-2)y+(3x^2+8x+4) \\ &= -(x+2)y+(x+2)(3x+2) \\ &= (x+2)(3x-y+2) \end{aligned}$$

21 Action 두 문자 x, y의 차수가 같으므로 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+4y^2-2x-4y+4xy+1$

$=x^2+(4y-2)x+(4y^2-4y+1)$

$=x^2+2(2y-1)x+(2y-1)^2$

$=(x+2y-1)^2$

다른 풀이

y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+4y^2-2x-4y+4xy+1$

$=4y^2+4(x-1)y+(x^2-2x+1)$

$=(2y)^2+2\times 2y(x-1)+(x-1)^2$

$=(x+2y-1)^2$

22 Action 수를 문자로 생각하여 인수분해 공식을 이용한다.

$0.2\times 77.7^2-0.2\times 22.3^2$

$=0.2\times(77.7^2-22.3^2)$

$=0.2\times(77.7+22.3)(77.7-22.3)$

$=0.2\times 100\times 55.4$

$=1108$

따라서 계산에 이용되는 인수분해 공식은 ㉠, ㉢이다.

23 Action 분자는 공통인수를 이용하여 인수분해하고, 분모는 수를 문자로 생각하여 인수분해 공식을 이용한다.

$$\begin{aligned} \frac{1000\times 1001-1001}{1000^2-1} &= \frac{1001\times(1000-1)}{(1000+1)(1000-1)} \\ &= \frac{1001}{1001}=1 \end{aligned}$$

24 Action 수를 문자로 생각하여 인수분해 공식을 이용한다.

$A=86^2+28\times 86+14^2=86^2+2\times 86\times 14+14^2$

$=(86+14)^2=100^2$

$=10000$ …… 40%

$B=\sqrt{34^2-16^2}=\sqrt{(34+16)(34-16)}$

$=\sqrt{50\times 18}=\sqrt{900}$

$=30$ …… 40%

$\therefore A+B=10000+30=10030$ …… 20%

Lecture

인수분해 공식을 이용한 수의 계산

A의 값을 구할 때, $86=a$, $14=b$라고 하면

$A=86^2+28\times 86+14^2$

$=86^2+2\times 86\times 14+14^2$

$=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$=(86+14)^2=100^2$

$=10000$

25 Action 주어진 식을 인수분해한 후 a, b의 값을 각각 대입한다.

$$\begin{aligned} a^2-b^2 &= (a+b)(a-b) \\ &= \{(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\}\{(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})\} \\ &= 2\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2} \end{aligned}$$

26 Action 먼저 x, y의 분모를 각각 유리화한다.

$$x=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{3}+1$$

$$y=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2}=\sqrt{3}-1$$

$$\begin{aligned} \therefore x^2+2xy+y^2 &= (x+y)^2 \\ &= \{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)\}^2 \\ &= (2\sqrt{3})^2=12 \end{aligned}$$

Lecture

분모의 유리화

$a>0$, $b>0$일 때

(1) $\dfrac{b}{\sqrt{a}}=\dfrac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}}=\dfrac{b\sqrt{a}}{a}$

(2) $\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$ (단, $a\neq b$)

27 Action $x-3=A$로 치환하여 주어진 식을 인수분해한 후 식의 값을 구한다.

$x-3=A$로 치환하면

$(x-3)^2+4(x-3)+4$

$=A^2+4A+4$

$=(A+2)^2=(x-3+2)^2$

$=(x-1)^2=(3\sqrt{2}+1-1)^2$

$=(3\sqrt{2})^2=18$

28 **Action** 색칠한 부분의 넓이는 큰 원의 넓이에서 작은 원의 넓이를 뺀 것이다.

큰 원의 지름의 길이가 $13r$이므로 반지름의 길이는 $\frac{13}{2}r$이다. 작은 원의 지름의 길이는 $13r-2\times3r=7r$이므로 반지름의 길이는 $\frac{7}{2}r$이다. 따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$\left(\frac{13}{2}r\right)^2\pi-\left(\frac{7}{2}r\right)^2\pi=\left\{\left(\frac{13}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2\right\}\pi r^2$$
$$=\left(\frac{13}{2}+\frac{7}{2}\right)\left(\frac{13}{2}-\frac{7}{2}\right)\pi r^2$$
$$=10\times3\times\pi r^2=30\pi r^2$$

29 **Action** 도형 (가)의 넓이는 한 변의 길이가 $3x+1$인 정사각형의 넓이에서 한 변의 길이가 x인 정사각형의 넓이를 뺀 것이다.

(도형 (가)의 넓이)$=(3x+1)^2-x^2$
$=(3x+1+x)(3x+1-x)$
$=(4x+1)(2x+1)$

이때 도형 (나)는 가로의 길이가 $4x+1$이고 도형 (가)와 넓이가 같으므로 세로의 길이는 $2x+1$이다.

30 **Action** 반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 $x°$인 부채꼴의 넓이는 $\pi r^2\times\frac{x}{360}$임을 이용한다.

(그림이 그려진 부분의 넓이)

$=\pi\times21^2\times\frac{150}{360}-\pi\times9^2\times\frac{150}{360}$ …… 30%

$=\frac{5}{12}\pi\times(21^2-9^2)$ …… 20%

$=\frac{5}{12}\pi\times(21+9)(21-9)$ …… 30%

$=\frac{5}{12}\pi\times30\times12$

$=150\pi\ (\mathrm{cm}^2)$ …… 20%

최고 수준 완성하기

P 53–P 56

01 15	**02** 8	**03** $-a-b$	
04 $(x-z)(x+4y-5z)$		**05** 36	**06** $3x-y$
07 $(a-b)(a^2+b^2+c^2)$		**08** 2502	**09** -960
10 64	**11** 23	**12** $\sqrt{10}+3$	**13** 90
14 85	**15** $a=6\sqrt{3}, b=\sqrt{3}$		
16 (1) 16 (2) $16\pi a$			

01 **Action** 두 다항식 $2x^2+ax-10$, $3x^2+14x+b$의 공통인수가 $x+2$이므로 다른 인수의 x의 계수는 각각 2, 3임을 이용한다.

$2x^2+ax-10=(x+2)(2x+m)$이라고 하면
$2x^2+ax-10=2x^2+(m+4)x+2m$
$-10=2m$에서 $m=-5$
$\therefore a=m+4=-5+4=-1$
$3x^2+14x+b=(x+2)(3x+n)$이라고 하면
$3x^2+14x+b=3x^2+(n+6)x+2n$
$14=n+6$에서 $n=8$
$\therefore b=2n=2\times8=16$
$\therefore a+b=-1+16=15$

02 **Action** $(ax+2)(bx+6)$의 전개식과 $kx^2+20x+12$가 서로 같음을 이용한다.

$kx^2+20x+12=(ax+2)(bx+6)$이므로
$kx^2+20x+12=abx^2+(6a+2b)x+12$
$20=6a+2b$에서 $3a+b=10$
위의 식을 만족하는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 7)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$이다.
이때 $k=ab$이므로 가능한 k의 값은 $1\times7=7$, $2\times4=8$, $3\times1=3$이다. 따라서 k의 최댓값은 8이다.

03 **Action** 근호 안의 식을 인수분해하여 완전제곱식의 꼴로 만든다.

$a-b>0$, $ab<0$이므로 $a>0$, $b<0$
즉 $3b-a<0$이므로 …… 20%

$\sqrt{9b^2-6ab+a^2}-\sqrt{4(a^2+b^2)-8ab}$
$=\sqrt{(3b-a)^2}-\sqrt{4(a^2-2ab+b^2)}$
$=\sqrt{(3b-a)^2}-\sqrt{\{2(a-b)\}^2}$ …… 50%
$=-(3b-a)-2(a-b)$
$=-3b+a-2a+2b$
$=-a-b$ …… 30%

Lecture

$\sqrt{(a-b)^2}$의 근호 풀기
(1) $a\ge b$일 때, $a-b\ge0$이므로
$\sqrt{(a-b)^2}=a-b$
(2) $a<b$일 때, $a-b<0$이므로
$\sqrt{(a-b)^2}=-(a-b)=b-a$

04 **Action** 약속에 따라 식을 세운 후 공통인수를 찾아 인수분해한다.

$[x, y, z]+5[z, x, y]$
$=(x-y)(x-z)+5(z-x)(z-y)$
$=(x-y)(x-z)-5(x-z)(z-y)$
$=(x-z)\{(x-y)-5(z-y)\}$
$=(x-z)(x+4y-5z)$

05 Action 공통부분이 생기도록 식을 적당히 묶는다.

$(x-5)(x-3)(x+3)(x+1)+k$
$=\{(x-5)(x+3)\}\{(x-3)(x+1)\}+k$
$=(x^2-2x-15)(x^2-2x-3)+k$
$x^2-2x=A$로 치환하면
(주어진 식)$=(A-15)(A-3)+k$
$=A^2-18A+45+k$
위의 식이 완전제곱식이 되어야 하므로
$45+k=(-9)^2 \quad \therefore k=36$

Lecture
주어진 식이 완전제곱식이 되는지 확인하기
$k=36$일 때
(주어진 식)$=A^2-18A+45+36$
$=A^2-18A+81$
$=(A-9)^2$
$=(x^2-2x-9)^2$
이므로 완전제곱식이 된다.

06 Action 주어진 식을 전개한 후 인수분해한다.

$y-(xy+1)x+x^3=y-x^2y-x+x^3$
$=y(1-x^2)-x(1-x^2)$
$=(1-x^2)(y-x)$
$=(1+x)(1-x)(y-x)$
$=(x+1)(x-1)(x-y)$
따라서 구하는 합은 $(x+1)+(x-1)+(x-y)=3x-y$

Lecture
x의 계수가 1인 세 일차식의 곱
문제에서 x의 계수가 1인 세 일차식의 곱으로 인수분해된다고 하였으므로 $(1+x)(1-x)(y-x)$에서 인수분해를 끝내지 않고, 세 일차식의 x의 계수가 모두 1이 되도록 계수를 정리해야 한다.
➡ $(1+x)(1-x)(y-x)=(x+1)\{-(x-1)\}\{-(x-y)\}$
$=(x+1)(x-1)(x-y)$

07 Action 차수가 가장 낮은 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

$a^3-a^2b+ab^2+ac^2-b^3-bc^2$
$=(a-b)c^2+a^3-a^2b+ab^2-b^3$
$=(a-b)c^2+a^2(a-b)+b^2(a-b)$
$=(a-b)(a^2+b^2+c^2)$

08 Action 수를 문자로 생각하여 인수분해 공식을 이용한다.

$2500\times2504+4=2500\times(2500+4)+4$
$=2500\times2500+2500\times4+4$
$=2500^2+2\times2500\times2+2^2$
$=(2500+2)^2$
$=2502^2$
$\therefore a=2502$

09 Action 인수분해 공식 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용할 수 있도록 주어진 식의 항을 이동한다.

$10^2+11^2+12^2-20^2-21^2-22^2$
$=(10^2-20^2)+(11^2-21^2)+(12^2-22^2)$
$=(10+20)(10-20)+(11+21)(11-21)$
$+(12+22)(12-22)$
$=30\times(-10)+32\times(-10)+34\times(-10)$
$=-10\times(30+32+34)$
$=-10\times96=-960$

10 Action $2^{80}=(2^{40})^2$이고 $1=1^2$임을 이용한다.

$2^{80}-1=(2^{40})^2-1$
$=(2^{40}+1)(2^{40}-1)$
$=(2^{40}+1)(2^{20}+1)(2^{20}-1)$
$=(2^{40}+1)(2^{20}+1)(2^{10}+1)(2^{10}-1)$
$=(2^{40}+1)(2^{20}+1)(2^{10}+1)(2^5+1)(2^5-1)$
따라서 $2^{80}-1$은 30과 40 사이의 두 자연수 $2^5+1=33$, $2^5-1=31$로 나누어떨어지므로 구하는 두 자연수의 합은 $33+31=64$

Lecture
지수법칙
$a\neq0$이고 m, n이 자연수일 때
(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$
(2) $(a^m)^n=a^{mn}$
(3) $a^m\div a^n=\begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n)\end{cases}$
(4) $(ab)^n=a^nb^n$
(5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$ (단, $b\neq0$)

11 Action 주어진 다항식을 인수분해하고, 소수는 약수가 1과 자기 자신뿐인 수임을 이용한다.

$3n^2-16n-12=(n-6)(3n+2)$가 소수가 되려면 $1\times$(소수)이어야 한다.
(i) $n-6=1$일 때, $n=7$
$\therefore 3n+2=3\times7+2=23$
(ii) $3n+2=1$일 때, $n=-\dfrac{1}{3}$
이때 n은 자연수가 아니므로 조건을 만족하지 않는다.
(i), (ii)에 의하여 구하는 소수는 23이다.

12 Action $\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$이므로 $3<\sqrt{10}<4$이고, $\sqrt{4}<\sqrt{8}<\sqrt{9}$이므로 $2<2\sqrt{2}<3$임을 이용한다.

$\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$이므로 $3<\sqrt{10}<4$

따라서 $\sqrt{10}$의 정수 부분은 3이므로 소수 부분은 $\sqrt{10}-3$

$\therefore\ a=\sqrt{10}-3$ …… 30%

$\sqrt{4}<\sqrt{8}<\sqrt{9}$이므로 $2<2\sqrt{2}<3$

따라서 $2\sqrt{2}$의 정수 부분은 2이므로 $b=2$ …… 30%

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{a^2+4ab+3b^2}{a+b}&=\frac{(a+b)(a+3b)}{a+b}=a+3b\\&=(\sqrt{10}-3)+3\times2\\&=\sqrt{10}+3\end{aligned}$$ …… 40%

Lecture

$\sqrt{x}$의 정수 부분과 소수 부분

$\sqrt{x}$가 무리수이고 n이 자연수일 때, $n<\sqrt{x}<n+1$이면 $\sqrt{x}$의 정수 부분은 n이고 소수 부분은 $\sqrt{x}-n$이다.

13 **Action** 먼저 분모의 유리화를 이용하여 k의 값을 간단히 하고, 주어진 식을 인수분해한 후 k의 값을 대입한다.

$$\begin{aligned}k&=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{89}+\sqrt{90}}\\&=\frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}+\cdots\\&\qquad+\frac{\sqrt{89}-\sqrt{90}}{(\sqrt{89}+\sqrt{90})(\sqrt{89}-\sqrt{90})}\\&=-(1-\sqrt{2})+\{-(\sqrt{2}-\sqrt{3})\}+\cdots+\{-(\sqrt{89}-\sqrt{90})\}\\&=-1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\cdots-\sqrt{89}+\sqrt{90}\\&=\sqrt{90}-1=3\sqrt{10}-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &(k-2)^2+6(k-2)+9\\&=(k-2)^2+2(k-2)\times3+3^2\\&=(k-2+3)^2\\&=(k+1)^2=(3\sqrt{10}-1+1)^2\\&=(3\sqrt{10})^2=90\end{aligned}$$

14 **Action** 곱셈 공식의 변형을 이용하여 $(a-b)^2$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}a^2(a-b)+b^2(b-a)&=a^2(a-b)-b^2(a-b)\\&=(a-b)(a^2-b^2)\\&=(a-b)(a+b)(a-b)\\&=(a-b)^2(a+b)\end{aligned}$$

이때 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$이므로

$(a-b)^2=5^2-4\times2=25-8=17$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^2(a-b)+b^2(b-a)&=(a-b)^2(a+b)\\&=17\times5=85\end{aligned}$$

15 **Action** 길의 둘레의 길이와 넓이를 각각 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

길의 폭이 b이므로 꽃밭은 한 변의 길이가 $a-2b$인 정사각형 모양이다.

길의 둘레의 길이는 $4a+4(a-2b)=40\sqrt{3}$이므로

$8a-8b=40\sqrt{3}$ $\quad\therefore\ a-b=5\sqrt{3}$ …… ㉠

길의 넓이는 $a^2-(a-2b)^2=60$이므로

$(a+a-2b)\{a-(a-2b)\}=60$

$(2a-2b)\times2b=60$

$4b(a-b)=60$ $\quad\therefore\ b(a-b)=15$ …… ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면 $b\times5\sqrt{3}=15$ $\quad\therefore\ b=\sqrt{3}$

㉠에 $b=\sqrt{3}$을 대입하면

$a-\sqrt{3}=5\sqrt{3}$ $\quad\therefore\ a=6\sqrt{3}$

16 **Action** $\overline{BD}$의 길이를 구하고, $\overline{AD}$, $\overline{CD}$의 길이를 각각 a를 사용한 식으로 나타낸다.

(1) $\overline{BD}$를 지름으로 하는 원의 반지름의 길이를 r라고 하면

$2\pi r=16\pi$, $r=8$ $\quad\therefore\ \overline{BD}=16$

(2) $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BD}=a+16$, $\overline{CD}=\overline{BD}-\overline{BC}=16-a$이므로

(색칠한 부분의 넓이)

$=(\overline{AD}$를 지름으로 하는 원의 넓이$)$

$\qquad-(\overline{CD}$를 지름으로 하는 원의 넓이$)$

$$\begin{aligned}&=\pi\times\left(\frac{a+16}{2}\right)^2-\pi\times\left(\frac{16-a}{2}\right)^2\\&=\pi\left\{\left(\frac{16+a}{2}\right)^2-\left(\frac{16-a}{2}\right)^2\right\}\\&=\pi\left(\frac{16+a}{2}+\frac{16-a}{2}\right)\left(\frac{16+a}{2}-\frac{16-a}{2}\right)\\&=\pi\times16\times a=16\pi a\end{aligned}$$

최고수준 뛰어넘기

P 57– P 58

01 $(a+b)(b+c)(c+a)$ **02** $\frac{4}{3}$ **03** 288

04 461 **05** 80

06 서쪽으로 200 cm, 남쪽으로 220 cm

01 **Action** 주어진 식을 전개한 후 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

$$\begin{aligned}&a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc\\&=ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+ca^2+cb^2+2abc\\&=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc^2+cb^2\\&=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)\\&=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\&=(b+c)(a+b)(a+c)\\&=(a+b)(b+c)(c+a)\end{aligned}$$

02 Action $4=2^2$, $8=2^3$, $16=2^4$임을 이용한다.

$$\sqrt{\frac{8^8\times2^3-16^6}{4^{13}-8^6\times2^2}}=\sqrt{\frac{(2^3)^8\times2^3-(2^4)^6}{(2^2)^{13}-(2^3)^6\times2^2}}=\sqrt{\frac{2^{24}\times2^3-2^{24}}{2^{26}-2^{18}\times2^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{2^{27}-2^{24}}{2^{26}-2^{20}}}=\sqrt{\frac{2^{24}(2^3-1)}{2^{20}(2^6-1)}}$$
$$=\sqrt{\frac{2^4(2^3-1)}{2^6-1}}=\sqrt{\frac{2^4(2^3-1)}{(2^3+1)(2^3-1)}}$$
$$=\sqrt{\frac{2^4}{2^3+1}}=\sqrt{\frac{16}{9}}$$
$$=\frac{4}{3}$$

03 Action $287=289-2$, $291=289+2$이고 $289=17^2$임을 이용한다.

$289=17^2$이므로

$$\sqrt{\left(287+\frac{1}{289}\right)\left(291+\frac{1}{289}\right)}$$
$$=\sqrt{\left(17^2-2+\frac{1}{17^2}\right)\left(17^2+2+\frac{1}{17^2}\right)}$$

$17=x$로 치환하면

$$(\text{주어진 식})=\sqrt{\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)}$$
$$=\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}$$
$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=\left(17-\frac{1}{17}\right)\left(17+\frac{1}{17}\right)$$
$$=17^2-\frac{1}{17^2}$$
$$=289-\frac{1}{289}$$

따라서 $288<\sqrt{\left(287+\frac{1}{289}\right)\left(291+\frac{1}{289}\right)}<289$이므로

주어진 수의 정수 부분은 288이다.

04 Action $20=x$로 놓으면 연속하는 네 자연수는 x, $x+1$, $x+2$, $x+3$임을 이용한다.

$20=x$라고 하면

$$20\times21\times22\times23+1$$
$$=x(x+1)(x+2)(x+3)+1$$
$$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1$$
$$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$$

$x^2+3x=A$로 치환하면

$$20\times21\times22\times23+1=A(A+2)+1$$
$$=A^2+2A+1$$
$$=(A+1)^2$$
$$=(x^2+3x+1)^2$$
$$=(20^2+3\times20+1)^2$$
$$=461^2$$
$$\therefore\ \sqrt{20\times21\times22\times23+1}=\sqrt{461^2}=461$$

05 Action 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

$$abc+ab+bc+ca+a+b+c+1$$
$$=a(bc+b+c+1)+(bc+b+c+1)$$
$$=(a+1)(bc+b+c+1)$$
$$=(a+1)\{b(c+1)+(c+1)\}$$
$$=(a+1)(b+1)(c+1)$$
$$=165$$

이때 a, b, c는 자연수이므로

$(a+1)(b+1)(c+1)=165=3\times5\times11$

또, $a<b<c$이므로 $a=2$, $b=4$, $c=10$

따라서 구하는 직육면체의 부피는

$2\times4\times10=80$

06 Action 달팽이의 위치를 좌표평면 위의 점의 좌표로 나타내어 본다.

달팽이의 집의 위치를 원점 $(0, 0)$으로 하는 좌표평면 위에 달팽이의 위치를 점의 좌표로 나타내면

첫째 날은 $(1^2, 0)$, 둘째 날은 $(1^2, 2^2)$,

셋째 날은 $(1^2-3^2, 2^2)$, 넷째 날은 $(1^2-3^2, 2^2-4^2)$,

다섯째 날은 $(1^2-3^2+5^2, 2^2-4^2)$,

여섯째 날은 $(1^2-3^2+5^2, 2^2-4^2+6^2)$이다.

이와 같은 방법으로 20째 날의 달팽이의 위치의 x좌표는

$$1^2-3^2+5^2-7^2+\cdots+17^2-19^2$$
$$=(1+3)(1-3)+(5+7)(5-7)+\cdots+(17+19)(17-19)$$
$$=-2\times(1+3+5+7+\cdots+17+19)$$
$$=-2\times100$$
$$=-200$$

20째 날의 달팽이의 위치의 y좌표는

$$2^2-4^2+6^2-8^2+\cdots+18^2-20^2$$
$$=(2+4)(2-4)+(6+8)(6-8)+\cdots+(18+20)(18-20)$$
$$=-2\times(2+4+6+8+\cdots+18+20)$$
$$=-2\times110$$
$$=-220$$

따라서 달팽이가 출발한 지 20째 날의 위치는 집을 기준으로 서쪽으로 200 cm, 남쪽으로 220 cm 떨어져 있다.

교과서 속 **창의 사고력** P 59– P 60

01 360	**02** 12
03 $\frac{1}{9}$	**04** $(a+b)^3$

01 Action (직육면체의 부피)=(밑넓이)×(높이)임을 이용하여 x에 대한 이차식으로 나타낸다.

쌓기나무 하나의 부피는

$5(3x+2)(x-5)=5(3x^2-13x-10)$

$=15x^2-65x-50$

이때 입체도형은 쌓기나무 24개로 만들어졌으므로 그 부피는

$24(15x^2-65x-50)=360x^2-1560x-1200$

따라서 이 입체도형의 부피의 x^2의 계수는 360이다.

02 Action $19999=20000-1$, $39999=2\times20000-1$이므로 $20000=x$로 놓고 곱셈 공식을 이용한다.

$20000=x$라고 하면

$19999^2+39999=(20000-1)^2+(2\times20000-1)$

$=(x-1)^2+(2x-1)$

$=x^2-2x+1+2x-1$

$=x^2$

$=20000^2$

$=400000000$

$=4\times10^8$

따라서 $A=4$, $B=8$이므로

$A+B=4+8=12$

03 Action 다항식 x^2-ax+b가 완전제곱식이 되려면 $b=\left(\frac{-a}{2}\right)^2$이어야 한다.

모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 $6\times6=36$

다항식 x^2-ax+b가 완전제곱식이 되어야 하므로

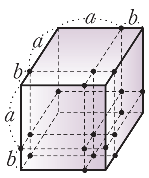
$b=\left(\frac{-a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$이어야 한다.

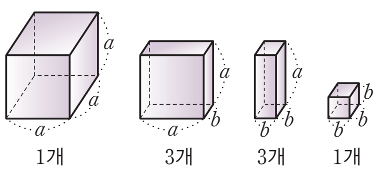
즉 $a^2=4b$를 만족하는 순서쌍 (a, b)는 $(2, 1)$, $(4, 4)$, $(6, 9)$, $(8, 16)$의 4개이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

04 Action 한 모서리의 길이가 $a+b$인 정육면체를 그려 본다.

한 모서리의 길이가 $a+b$인 정육면체를 그려 보면 오른쪽 그림과 같고, 이 정육면체를 이루고 있는 네 종류의 직육면체의 개수는 각각 다음과 같다.





따라서 새로 만든 정육면체의 부피를 일차식의 곱으로 나타내면

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

Ⅲ. 이차방정식

1. 이차방정식의 풀이

최고수준 입문하기

P 64–P 67

01 ①, ④	**02** ①	**03** ②, ④	**04** 3
05 -7	**06** -4	**07** ③	**08** -1
09 ①	**10** 3	**11** ④, ⑤	**12** 15
13 $x=8$	**14** (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조	**15** 8	
16 $k\ge2$	**17** $\frac{45}{16}$	**18** 24	**19** 26
20 -6	**21** -6	**22** $x=7\pm2\sqrt{10}$	
23 72	**24** $x=1$ 또는 $x=\frac{9}{5}$		

01 Action 등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이 (x에 대한 이차식)$=0$의 꼴이 되는지 알아본다.

② 이차식

③ $x^2-3=x^2-3x+1$에서 $3x-4=0$이므로 일차방정식이다.

④ $(x-2)(2x+1)=-2$에서 $2x^2-3x=0$이므로 이차방정식이다.

⑤ $x^2(1-x)=x^3+x^2+x+1$에서 $-2x^3-x-1=0$이므로 이차방정식이 아니다.

따라서 이차방정식인 것은 ①, ④이다.

02 Action x에 대한 이차방정식이 되려면 (x^2의 계수)$\neq0$이어야 함을 이용한다.

$2(x+1)^2-1=-ax^2+2x-5$에서 $(2+a)x^2+2x+6=0$이므로 x에 대한 이차방정식이 되려면 $2+a\neq0$이어야 한다.

$\therefore a\neq-2$

03 Action 각 이차방정식에 $x=2$를 대입하여 등식이 참이 되는 것을 찾는다.

① $2^2-2\neq0$ (거짓)

② $2^2-5\times2+6=0$ (참)

③ $2\times2^2+2-3\neq0$ (거짓)

④ $3\times2^2-5\times2-2=0$ (참)

⑤ $(2+1)\times(2-4)\neq0$ (거짓)

따라서 $x=2$를 해로 갖는 것은 ②, ④이다.

04 Action 주어진 두 이차방정식에 $x=-1$을 각각 대입하여 a, b의 값을 구한다.

$2x^2+ax-5=0$에 $x=-1$을 대입하면
$2-a-5=0$, $-a=3$ $\quad\therefore a=-3$
$x^2-(2-b)x+4b=0$에 $x=-1$을 대입하면
$1+(2-b)+4b=0$, $3b=-3$ $\quad\therefore b=-1$
$\therefore ab=-3\times(-1)=3$

05 Action 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 한 근이 k일 때, $k^2+mk+n=0$이므로 $k^2+mk=-n$임을 이용한다.

$x^2-2x-4=0$에 $x=a$를 대입하면
$a^2-2a-4=0$ $\quad\therefore a^2-2a=4$ …… 30%
$x^2-3x-3=0$에 $x=b$를 대입하면
$b^2-3b-3=0$ $\quad\therefore b^2-3b=3$ …… 30%
$\therefore (a^2-2a-5)(2b^2-6b+1)$
$=\{(a^2-2a)-5\}\{2(b^2-3b)+1\}$
$=(4-5)\times(2\times3+1)$
$=(-1)\times7=-7$ …… 40%

06 Action 주어진 이차방정식에 $x=a$를 대입하여 a에 대한 식으로 변형한다.

$x^2+4x-1=0$에 $x=a$를 대입하면
$a^2+4a-1=0$
$a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면
$a+4-\frac{1}{a}=0$ $\quad\therefore a-\frac{1}{a}=-4$

07 Action 두 식 A, B에 대하여 $AB=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$임을 이용한다.

각 이차방정식의 해를 구하면 다음과 같다.
① $x=-1$ 또는 $x=5$ ② $x=-5$ 또는 $x=\frac{1}{3}$
③ $x=5$ 또는 $x=-\frac{1}{3}$ ④ $x=1$ 또는 $x=-5$
⑤ $x=-1$ 또는 $x=5$
따라서 해가 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=5$인 것은 ③이다.

08 Action 인수분해를 이용하여 이차방정식의 해를 구한다.

$6x^2+x-2=0$에서 $(3x+2)(2x-1)=0$
$\therefore x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$
따라서 $a=-\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{2}$이므로
$3a+2b=3\times\left(-\frac{2}{3}\right)+2\times\frac{1}{2}=-2+1=-1$

09 Action 주어진 이차방정식에 $x=2$를 대입하여 상수 a의 값을 먼저 구한다.

$x^2+(2a+1)x-6a=0$에 $x=2$를 대입하면
$4+2(2a+1)-6a=0$, $-2a=-6$ $\quad\therefore a=3$
즉 $x^2+7x-18=0$에서 $(x-2)(x+9)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=-9$
따라서 다른 한 근은 $x=-9$이다.

10 Action 이차방정식 $x^2+3x-28=0$을 인수분해를 이용하여 푼 후 큰 근을 이차방정식 $2x^2-(a+1)x-16=0$에 대입한다.

$x^2+3x-28=0$에서 $(x-4)(x+7)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=-7$
두 근 중 큰 근은 $x=4$이므로
$2x^2-(a+1)x-16=0$에 $x=4$를 대입하면
$32-4(a+1)-16=0$, $32-4a-4-16=0$
$-4a=-12$ $\quad\therefore a=3$

11 Action 이차방정식이 $a(x-m)^2=0(a\neq0)$의 꼴로 인수분해되면 중근 $x=m$을 갖는다.

① $x^2-2x=0$에서 $x(x-2)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=2$
② $x^2+4x-5=0$에서 $(x-1)(x+5)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=-5$
③ $x^2-5x=14$에서 $x^2-5x-14=0$
$(x+2)(x-7)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=7$
④ $x^2-3x+9=5x-7$에서 $x^2-8x+16=0$
$(x-4)^2=0$ $\quad\therefore x=4$
⑤ $(2x-1)^2+8x=0$에서 $4x^2-4x+1+8x=0$
$4x^2+4x+1=0$, $(2x+1)^2=0$ $\quad\therefore x=-\frac{1}{2}$
따라서 중근을 갖는 것은 ④, ⑤이다.

Lecture
이차방정식이 중근을 가질 조건
(1) 이차방정식이 (완전제곱식)$=0$의 꼴로 인수분해되면 그 이차방정식은 중근을 갖는다.
(2) 이차방정식 $x^2+ax+b=0(b>0)$에서 $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$이면 중근을 갖는다.

12 Action 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 중근을 가질 조건은 $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$임을 이용한다.

$x(x-6)=3-k$, 즉 $x^2-6x-3+k=0$이 중근을 가지려면
$-3+k=\left(\frac{-6}{2}\right)^2$이어야 하므로
$-3+k=9$ $\quad\therefore k=12$
$x^2-6x-3+k=0$에 $k=12$를 대입하면
$x^2-6x+9=0$, $(x-3)^2=0$ $\quad\therefore x=3$, 즉 $m=3$
$\therefore k+m=12+3=15$

13 Action 각 이차방정식을 풀어 공통인 해를 찾는다.

$x^2-5x-24=0$에서 $(x+3)(x-8)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=8$

$2x^2-15x-8=0$에서 $(x-8)(2x+1)=0$

$\therefore\ x=8$ 또는 $x=-\dfrac{1}{2}$

따라서 두 이차방정식의 공통인 해는 $x=8$이다.

14 Action 인수분해와 제곱근을 각각 이용하여 주어진 이차방정식을 푼다.

(1) $3(x-1)^2-12=0$의 괄호를 풀면

$3x^2-6x+3-12=0,\ 3x^2-6x-9=0$

$x^2-2x-3=0,\ (x+1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$ …… 50%

(2) $3(x-1)^2-12=0$에서 $3(x-1)^2=12$

$(x-1)^2=4,\ x-1=\pm2$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$ …… 50%

15 Action 제곱근을 이용하여 해를 구한 후 주어진 해와 비교하여 미지수의 값을 구한다.

$4(x+a)^2=b$에서 $(x+a)^2=\dfrac{b}{4}$

$x+a=\pm\dfrac{\sqrt{b}}{2}$ $\quad\therefore\ x=-a\pm\dfrac{\sqrt{b}}{2}$

따라서 $a=1,\ b=7$이므로 $a+b=1+7=8$

16 Action 이차방정식 $(x-p)^2=q$가 해를 가질 조건은 $q\ge0$임을 이용한다.

$\left(x+\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{k-2}{3}$가 해를 가지려면 $\dfrac{k-2}{3}\ge0$이어야 하므로 $k-2\ge0$ $\quad\therefore\ k\ge2$

Lecture

이차방정식 $(x-p)^2=q$의 해

이차방정식 $(x-p)^2=q$에서

(1) $q>0$이면 $x=p\pm\sqrt{q}$

(2) $q=0$이면 $x=p$

(3) $q<0$이면 해가 없다.

➡ 해를 가질 조건은 $q\ge0$

17 Action x^2의 계수를 1로 만들고 상수항을 우변으로 이항한 후 양변에 $\left(\dfrac{x\text{의 계수}}{2}\right)^2$을 더하여 정리한다.

$2x^2-3x-6=0$에서 $x^2-\dfrac{3}{2}x-3=0$

$x^2-\dfrac{3}{2}x=3,\ x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{16}=3+\dfrac{9}{16}$

$\therefore\ \left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{57}{16}$

따라서 $p=-\dfrac{3}{4},\ q=\dfrac{57}{16}$이므로

$p+q=-\dfrac{3}{4}+\dfrac{57}{16}=-\dfrac{12}{16}+\dfrac{57}{16}=\dfrac{45}{16}$

18 Action (완전제곱식)=(상수)의 꼴로 고쳐서 푼다.

$x^2-8x+3=0$에서 $x^2-8x=-3$

$x^2-8x+16=-3+16,\ (x-4)^2=13$

$x-4=\pm\sqrt{13}$ $\quad\therefore\ x=4\pm\sqrt{13}$

따라서 $A=16,\ B=-4,\ C=13,\ D=4,\ E=13$이므로

$A-B-C+D+E=16-(-4)-13+4+13=24$

19 Action 근의 공식을 이용하여 해를 구한다.

$5x^2+3x-1=0$에서

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times5\times(-1)}}{2\times5}=\dfrac{-3\pm\sqrt{29}}{10}$

따라서 $A=-3,\ B=29$이므로

$A+B=-3+29=26$

20 Action 근의 공식을 이용하여 해를 구한다. 이때 x의 계수가 짝수일 때에는 x의 계수가 짝수일 때의 근의 공식을 이용한다.

$x^2+4x+A=0$에서

$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\times A}=-2\pm\sqrt{4-A}$

이때 $-2\pm\sqrt{4-A}=B\pm2\sqrt{3}$이므로

$B=-2,\ \sqrt{4-A}=2\sqrt{3}=\sqrt{12}$

즉 $4-A=12$이므로 $A=-8$

$\therefore\ A-B=-8-(-2)=-6$

Lecture

x의 계수가 짝수일 때의 근의 공식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $b=2b'$이면

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}$

$=\dfrac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

21 Action 계수가 소수이므로 양변에 10의 거듭제곱을 곱하여 계수를 정수로 고친다.

$0.1x^2-0.6=0.4x$의 양변에 10을 곱하면

$x^2-6=4x,\ x^2-4x-6=0$

$\therefore\ x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\times(-6)}=2\pm\sqrt{10}$

따라서 두 근의 곱은

$(2+\sqrt{10})(2-\sqrt{10})=2^2-(\sqrt{10})^2=-6$

22 Action 계수가 분수이므로 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 계수를 정수로 고친다.

주어진 이차방정식의 양변에 12를 곱하면

$3(x-1)(x+3)=4x(x-2),\ x^2-14x+9=0$

$\therefore\ x=-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-1\times9}$

$=7\pm\sqrt{40}=7\pm2\sqrt{10}$

23 Action $0.5=\frac{1}{2}$이므로 양변에 $5, 2, 10$의 최소공배수를 곱하여 계수를 정수로 고친다.

주어진 이차방정식의 양변에 10을 곱하면

$2(2x^2+x)+5x=1,\ 4x^2+7x-1=0$

$\therefore\ x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times4\times(-1)}}{2\times4}=\frac{-7\pm\sqrt{65}}{8}$

따라서 $A=-7,\ B=65$이므로

$B-A=65-(-7)=72$

24 Action $x-2=A$로 치환한 후 A에 대한 이차방정식을 푼다. 이때 $A=x-2$를 다시 대입하여 해를 구해야 함에 유의한다.

$x-2=A$로 치환하면 …… 10%

$5A^2+6A+1=0,\ (A+1)(5A+1)=0$

$\therefore\ A=-1$ 또는 $A=-\frac{1}{5}$ …… 40%

즉 $x-2=-1$ 또는 $x-2=-\frac{1}{5}$이므로

$x=1$ 또는 $x=\frac{9}{5}$ …… 50%

최고 수준 완성하기

P 68–P 70

01 $k\neq1$	02 28	03 (1) 2 (2) $x=3$	
04 $\frac{1}{18}$	05 $\frac{5}{4}$	06 8	07 $\frac{5}{4}$
08 $a=-6,\ b=-11$		09 11	10 12
11 $x=1,\ y=1$	12 $x=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{37}}{2}$		

01 Action 방정식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 이차방정식이 되려면 $a\neq0$임을 이용한다.

$(k^2+1)x^2-x=2k(x-1)^2$에서

$(k^2+1)x^2-x=2k(x^2-2x+1)$

$(k^2+1)x^2-x=2kx^2-4kx+2k$

$(k^2-2k+1)x^2+(4k-1)x-2k=0$

이때 이 식이 x에 대한 이차방정식이 되려면 $k^2-2k+1\neq0$이어야 한다.

따라서 $(k-1)^2\neq0$이므로 $k\neq1$

02 Action 주어진 이차방정식의 한 근이 $x=a$이므로 $x=a$를 대입하여 $a+\frac{1}{a}$의 값을 먼저 구한다.

$x^2-5x+1=0$에 $x=a$를 대입하면 $a^2-5a+1=0$

$a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면 $a-5+\frac{1}{a}=0$

$\therefore\ a+\frac{1}{a}=5$

$\therefore\ a^2+a+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)$

$=\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\right\}+a+\frac{1}{a}$

$=5^2-2+5=28$

Lecture

곱셈 공식의 변형

(1) $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2$

(2) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4,\ \left(a-\frac{1}{a}\right)^2=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4$

03 Action 주어진 이차방정식에 $x=2$를 대입하여 상수 a의 값을 구한다.

(1) 주어진 이차방정식에 $x=2$를 대입하면

$4(a-1)-2(a^2+1)+2(a+1)=0$

$4a-4-2a^2-2+2a+2=0,\ -2a^2+6a-4=0$

$a^2-3a+2=0,\ (a-1)(a-2)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=2$

그런데 $a=1$이면 주어진 방정식은 $-2x+4=0$이므로 이차방정식이 되지 않는다. $\therefore\ a=2$

(2) 주어진 이차방정식에 $a=2$를 대입하면

$x^2-5x+6=0,\ (x-2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=3$

따라서 다른 한 근은 $x=3$이다.

04 Action 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 중근을 가질 조건은 $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$임을 이용한다.

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 일어나는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

$x^2+ax+b=0$이 중근을 가지려면 $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$, 즉 $a^2=4b$이어야 한다.

이를 만족하는 순서쌍 (a, b)는 $(2, 1), (4, 4)$의 2가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

05 Action 이차방정식 $2x^2+x-15=0$의 두 근을 각각 이차방정식 $x^2-3x+k=0$에 대입하여 조건에 맞는 상수 k의 값을 구한다.

$2x^2+x-15=0$에서 $(x+3)(2x-5)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

$x^2-3x+k=0$과 공통인 근이

(i) $x=-3$일 때,

$(-3)^2-3\times(-3)+k=0$

$9+9+k=0\qquad\therefore\ k=-18$

(ii) $x=\frac{5}{2}$일 때,

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2-3\times\frac{5}{2}+k=0$$

$$\frac{25}{4}-\frac{15}{2}+k=0 \qquad \therefore k=\frac{5}{4}$$

그런데 $k>0$이므로 (i), (ii)에 의하여 $k=\frac{5}{4}$

06 Action $\langle x\rangle$에 대한 이차방정식을 인수분해를 이용하여 푼다.

$\langle x\rangle^2+\langle x\rangle-6=0$에서 $(\langle x\rangle-2)(\langle x\rangle+3)=0$

$\therefore \langle x\rangle=2$ 또는 $\langle x\rangle=-3$

그런데 $\langle x\rangle>0$이므로 $\langle x\rangle=2$

즉 자연수 x의 약수의 개수가 2이므로 x는 소수이다.

따라서 20보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19의 8개이다.

07 Action 제곱근을 이용하여 이차방정식을 푼다.

$5(x-3)^2=a$에서 $(x-3)^2=\frac{a}{5}$

$$x-3=\pm\sqrt{\frac{a}{5}} \qquad \therefore x=3\pm\sqrt{\frac{a}{5}}$$

두 근의 차가 1이어야 하므로

$$\left(3+\sqrt{\frac{a}{5}}\right)-\left(3-\sqrt{\frac{a}{5}}\right)=1$$

$2\sqrt{\frac{a}{5}}=1$에서 $\sqrt{\frac{a}{5}}=\frac{1}{2}$

양변을 제곱하면 $\frac{a}{5}=\frac{1}{4}$ $\qquad \therefore a=\frac{5}{4}$

08 Action 완전제곱식을 이용하여 해를 구한 후 주어진 해와 비교하여 미지수의 값을 구한다.

$x^2+ax+b=0$에서 $x^2+ax=-b$

$$x^2+ax+\frac{a^2}{4}=-b+\frac{a^2}{4},\ \left(x+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2-4b}{4}$$

$$x+\frac{a}{2}=\pm\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2} \qquad \therefore x=-\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}$$ … 40%

따라서 $-\frac{a}{2}=3$에서 $a=-6$ …… 30%

$\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}=2\sqrt{5}$에서 $\sqrt{(-6)^2-4b}=4\sqrt{5}$

양변을 제곱하면 $36-4b=80$

$-4b=44 \qquad \therefore b=-11$ …… 30%

09 Action 이차방정식의 해가 모두 유리수가 되려면 근의 공식에서 근호 안의 수가 0 또는 어떤 수의 제곱의 꼴이어야 한다.

$2x^2-3x+a-4=0$에서

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times(a-4)}}{2\times2}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{41-8a}}{4}$$

이때 해가 모두 유리수가 되려면 $41-8a$는 0 또는 41보다 작은 제곱수이어야 한다.

즉 $41-8a=0, 1, 4, 9, 16, 25, 36$이므로

$$a=\frac{41}{8},\ 5,\ \frac{37}{8},\ 4,\ \frac{25}{8},\ 2,\ \frac{5}{8}$$

따라서 자연수 a는 5, 4, 2이므로 구하는 합은

$5+4+2=11$

10 Action $x-y=A$로 치환한 후 A에 대한 이차방정식을 먼저 푼다.

$x-y=A$로 치환하면

$A^2-3A-10=0$, $(A+2)(A-5)=0$

$\therefore A=-2$ 또는 $A=5$ …… 40%

$\therefore x-y=-2$ 또는 $x-y=5$

그런데 $x<y$, 즉 $x-y<0$이므로 $x-y=-2$ …… 20%

따라서 $x-y=-2$, $xy=4$이므로

$$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$$

$$=(-2)^2+2\times4=12$$ …… 40%

11 Action $x+2y=A$로 치환한 후 A에 대한 이차방정식을 먼저 푼다.

$x+2y=A$로 치환하면 $(A-1)(A+3)-12=0$

$A^2+2A-15=0$, $(A-3)(A+5)=0$

$\therefore A=3$ 또는 $A=-5$

$\therefore x+2y=3$ 또는 $x+2y=-5$

그런데 x, y는 양수이므로 $x+2y=3$

따라서 $x+2y=3$, $2x-y=1$을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=1$

12 Action 공통부분이 나오도록 주어진 방정식의 좌변을 적당히 묶어 전개한다.

$(x+1)(x+3)(x-2)(x-4)+21=0$에서

$\{(x+1)(x-2)\}\{(x+3)(x-4)\}+21=0$

$(x^2-x-2)(x^2-x-12)+21=0$

$x^2-x=A$로 치환하면 $(A-2)(A-12)+21=0$

$A^2-14A+45=0$, $(A-5)(A-9)=0$

$\therefore A=5$ 또는 $A=9$

(i) $A=5$, 즉 $x^2-x=5$에서 $x^2-x-5=0$

$$\therefore x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-5)}}{2\times1}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$$

(ii) $A=9$, 즉 $x^2-x=9$에서 $x^2-x-9=0$

$$\therefore x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-9)}}{2\times1}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{37}}{2}$$

(i), (ii)에 의하여 $x=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{37}}{2}$

최고 수준 뛰어넘기

P 71 – P 72

01 2　　02 4　　03 0

04 $x=-2\pm\sqrt{6}$　　05 $-\frac{5}{2}$　　06 $-2, 6$

01 Action 주어진 이차방정식에 $x=a$를 대입한 후 $a-\frac{1}{a}$의 꼴이 나오도록 변형한다.

주어진 이차방정식에 $x=a$를 대입하면

$4a^2-(3k+2)a-4=0$

$a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면

$4a-(3k+2)-\frac{4}{a}=0$

$4\left(a-\frac{1}{a}\right)=3k+2,\ a-\frac{1}{a}=\frac{3k+2}{4}$

따라서 $k=\frac{3k+2}{4}$이므로 $4k=3k+2$　　$\therefore k=2$

02 Action 주어진 일차함수의 식에 지나는 점의 좌표를 대입하여 a에 대한 이차방정식을 세운다.

$y=ax+4$의 그래프가 점 $(7-a, a^2)$을 지나므로

$a^2=a(7-a)+4,\ a^2=7a-a^2+4$

$2a^2-7a-4=0,\ (a-4)(2a+1)=0$

$\therefore a=4$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$

이때 일차함수의 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 (기울기)>0, (y절편)≥0이어야 하므로 $a>0$이어야 한다.

$\therefore a=4$

03 Action 약속에 따라 방정식의 좌변을 정리한 후 두 근 α, β를 구한다.

$(x+1)★(x-3)=x+1-(x-3)+(x+1)(x-3)$

$=x+1-x+3+x^2-2x-3$

$=x^2-2x+1$ …… 30%

즉 $(x+1)★(x-3)=4$에서 $x^2-2x+1=4$

$x^2-2x-3=0,\ (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

이때 $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=-1, \beta=3$ …… 30%

따라서 $4\alpha+\beta=-4+3=-1$이므로

$4\alpha+\beta+(4\alpha+\beta)^2+(4\alpha+\beta)^3+\cdots+(4\alpha+\beta)^{2020}$

$=-1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^{2020}$

$=-1+1-1+\cdots+1=0$ …… 40%

04 Action $\frac{7}{3+\sqrt{2}}$의 분모를 유리화한 후 주어진 수의 정수 부분과 소수 부분을 구한다.

$\frac{7}{3+\sqrt{2}}=\frac{7(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=3-\sqrt{2}$

이때 $1<\sqrt{2}<2$에서 $-2<-\sqrt{2}<-1$이므로

$1<3-\sqrt{2}<2$

$\therefore a=1, b=(3-\sqrt{2})-1=2-\sqrt{2}$

주어진 이차방정식에 $a=1, b=2-\sqrt{2}$를 대입하면

$x^2+(2+2-\sqrt{2}+\sqrt{2})x-(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=0$

$x^2+4x-2=0$

$\therefore x=-2\pm\sqrt{2^2-1\times(-2)}=-2\pm\sqrt{6}$

05 Action 잘못 구한 두 근과 근의 공식을 이용하여 옳은 두 근을 구한다.

잘못 구한 두 근이 $-2, 7$이므로

$-2=\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{a},\ 7=\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{a}$

한편 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식은

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$이므로

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(b-\sqrt{b^2-4ac})}{2\times a}=-\frac{1}{2}\times\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{a}=-\frac{1}{2}\times(-2)=1$$

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(b+\sqrt{b^2-4ac})}{2\times a}=-\frac{1}{2}\times\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{a}=-\frac{1}{2}\times7=-\frac{7}{2}$$

따라서 바르게 구한 두 근은 $1, -\frac{7}{2}$이므로

구하는 합은 $1+\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{5}{2}$

06 Action 주어진 방정식에 $x=a$를 대입한 후 양변을 a^2으로 나눈다.

주어진 방정식에 $x=a$를 대입하면

$a^4-4a^3-10a^2-4a+1=0$

$a\neq0$이므로 양변을 a^2으로 나누면

$a^2-4a-10-\frac{4}{a}+\frac{1}{a^2}=0$

$\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-4\left(a+\frac{1}{a}\right)-10=0$

$\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\right\}-4\left(a+\frac{1}{a}\right)-10=0$

$\therefore \left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4\left(a+\frac{1}{a}\right)-12=0$

$a+\frac{1}{a}=A$로 치환하면 $A^2-4A-12=0$

$(A+2)(A-6)=0$　　$\therefore A=-2$ 또는 $A=6$

$\therefore a+\frac{1}{a}=-2$ 또는 $a+\frac{1}{a}=6$

2. 이차방정식의 활용

최고수준 입문하기

P 75 - P 79

01 ③	02 21	03 $x=\frac{5\pm\sqrt{41}}{2}$	
04 ⑤	05 ⑤	06 $\frac{5}{3}$	07 ㉣
08 -8	09 $x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$		10 2
11 3	12 8	13 5	
14 $2x^2-24x+70=0$		15 $x^2-2x-4=0$	
16 ⑤	17 21	18 360	19 24
20 $x=1$ 또는 $x=5$		21 5세	22 14
23 (1) 2초 후 (2) 5초 후		24 6초	25 7 cm
26 4 cm	27 18 cm^2	28 3	29 17 cm
30 12초 후			

01 **Action** 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 개수는 b^2-4ac의 값의 부호에 따라 결정된다.

① $(-2)^2-4\times1\times(-4)=20>0$이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.
② $(-5)^2-4\times2\times3=1>0$이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.
③ $1^2-4\times2\times6=-47<0$이므로 근이 없다.
④ $(-4)^2-4\times3\times(-1)=28>0$이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.
⑤ $10^2-4\times3\times(-5)=160>0$이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.

따라서 근의 개수가 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

> **Lecture**
> **이차방정식의 근의 개수**
> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서
> ① $b^2-4ac>0$ ➡ 근이 2개
> ② $b^2-4ac=0$ ➡ 근이 1개(중근)
> ③ $b^2-4ac<0$ ➡ 근이 없다.

02 **Action** 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 가질 조건은 $b^2-4ac=0$임을 이용하여 상수 m의 값을 구한다.

$4x^2+(m-1)x+m+4=0$이 중근을 가지므로
$(m-1)^2-4\times4\times(m+4)=0$
$m^2-2m+1-16m-64=0$, $m^2-18m-63=0$
$(m+3)(m-21)=0$ $\quad\therefore m=-3$ 또는 $m=21$
그런데 $m>0$이므로 $m=21$

03 **Action** 이차방정식 $kx^2-2x+2=0$이 중근을 가지는 상수 k의 값을 구한 후 이차방정식 $kx^2+(k-3)x-2=0$에 k의 값을 대입한다.

$kx^2-2x+2=0$이 중근을 가지므로
$(-2)^2-4\times k\times2=0$
$-8k=-4$ $\quad\therefore k=\frac{1}{2}$ …… 40%

$kx^2+(k-3)x-2=0$에 $k=\frac{1}{2}$을 대입하면
$\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-2=0$ …… 30%

위 이차방정식의 양변에 2를 곱하면
$x^2-5x-4=0$
$\therefore x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times(-4)}}{2\times1}$
$=\frac{5\pm\sqrt{41}}{2}$ …… 30%

04 **Action** 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 근을 가질 조건은 $b^2-4ac\geq0$임을 이용한다.

$x^2+2x-k+2=0$이 근을 가지므로
$2^2-4\times1\times(-k+2)\geq0$
$4k-4\geq0$, $4k\geq4$ $\quad\therefore k\geq1$

05 **Action** 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 근을 가질 조건은 $b^2-4ac>0$임을 이용한다.

$(k+2)x^2+6x+3=0$이 서로 다른 두 근을 가지므로
$6^2-4\times(k+2)\times3>0$
$-12k+12>0$, $-12k>-12$ $\quad\therefore k<1$
그런데 (x^2의 계수)$\neq0$이어야 하므로
$k+2\neq0$ $\quad\therefore k\neq-2$
따라서 구하는 k의 값의 범위는
$k<-2$ 또는 $-2<k<1$

> **Lecture**
> **이차방정식이 되는 조건**
> 방정식 $ax^2+bx+c=0$이 이차방정식이 되려면 $a\neq0$이어야 한다.

06 **Action** 이차방정식의 계수를 정수로 바꾼 후 근과 계수의 관계를 이용한다.

$\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}=0$의 양변에 분모의 최소공배수 6을 곱하면 $3x^2-4x-1=0$
따라서 $A=-\frac{-4}{3}=\frac{4}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$이므로
$A-B=\frac{4}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$

다른 풀이
$\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}=0$의 양변에 6을 곱하면
$3x^2-4x-1=0$

$\therefore\ x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\times(-1)}}{3}=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$

즉 주어진 이차방정식의 두 근이 $\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$, $\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$이므로

$A=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}+\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}=\dfrac{4}{3}$

$B=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\times\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ A-B=\dfrac{4}{3}-\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{3}$

07 Action 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 합과 곱을 구한 후 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값을 구한다.

$x^2-4x+2=0$에서 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$

㉠ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=4^2-2\times2=16-4=12$

㉡ $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=4^2-4\times2=16-8=8$

㉢ $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{4}{2}=2$

㉣ $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$
$=\dfrac{4^2-2\times2}{2}=\dfrac{12}{2}=6$

따라서 구한 식의 값이 옳지 않은 것은 ㉣이다.

Lecture

곱셈 공식의 변형

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

② $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$
$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

08 Action 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 각각 구한다.

$x^2-2x-6=0$의 두 근의 합이 2, 두 근의 곱이 -6이므로
$x^2+ax+b=0$의 두 근은 2, -6이다.
$2+(-6)=-a$에서 $a=4$
$2\times(-6)=b$에서 $b=-12$
$\therefore\ a+b=4+(-12)=-8$

09 Action $x^2+ax+b=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 각각 구한 후 $bx^2-ax+2=0$에 각각 대입하여 해를 구한다.

$x^2+ax+b=0$의 두 근이 -1, 2이므로
$-1+2=-a$에서 $a=-1$
$-1\times2=b$에서 $b=-2$
$bx^2-ax+2=0$에 $a=-1$, $b=-2$를 대입하면
$-2x^2+x+2=0$, 즉 $2x^2-x-2=0$

$\therefore\ x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times2\times(-2)}}{2\times2}=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

10 Action 이차방정식의 두 근의 차가 2이므로 두 근을 α, $\alpha+2$로 놓고 근과 계수의 관계를 이용한다.

$2x^2+8x+3k=0$의 두 근을 α, $\alpha+2$라고 하면

$\alpha+(\alpha+2)=-\dfrac{8}{2}=-4$에서

$2\alpha+2=-4$, $2\alpha=-6$ $\qquad\therefore\ \alpha=-3$

따라서 $2x^2+8x+3k=0$의 두 근이 -3, -1이므로

$-3\times(-1)=\dfrac{3k}{2}$, $3k=6$ $\qquad\therefore\ k=2$

11 Action 두 근의 비가 $3:4$이므로 두 근을 3α, 4α로 놓고 근과 계수의 관계를 이용한다.

$x^2-(2k+1)x+4k=0$의 두 근을 3α, 4α라고 하면
$3\alpha+4\alpha=2k+1$에서 $7\alpha=2k+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$3\alpha\times4\alpha=4k$에서 $k=3\alpha^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠에 ㉡을 대입하면
$7\alpha=2\times3\alpha^2+1$, $6\alpha^2-7\alpha+1=0$

$(\alpha-1)(6\alpha-1)=0$ $\qquad\therefore\ \alpha=1$ 또는 $\alpha=\dfrac{1}{6}$

$\therefore\ k=3$ 또는 $k=\dfrac{1}{12}$

그런데 k는 정수이므로 $k=3$

12 Action 이차방정식의 한 근이 $5+\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $5-\sqrt{2}$임을 이용하여 m의 값을 구한다.

$x^2-(m+2)x+23=0$의 한 근이 $5+\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $5-\sqrt{2}$이다.
$(5+\sqrt{2})+(5-\sqrt{2})=m+2$에서
$10=m+2$ $\qquad\therefore\ m=8$

13 Action x^2의 계수가 k이고 중근 α를 갖는 이차방정식은 $k(x-\alpha)^2=0$임을 이용하여 a, b의 값을 각각 구한다.

x^2의 계수가 3이고 중근 -1을 갖는 이차방정식은
$3(x+1)^2=0$ $\qquad\therefore\ 3x^2+6x+3=0$
따라서 $a=6$, $b=-1$이므로
$a+b=6+(-1)=5$

14 Action 이차방정식이 중근을 가질 조건을 이용하여 상수 k의 값을 구한 후 조건을 만족하는 이차방정식을 구한다.

$x^2-6x+2k-1=0$이 중근을 가지므로
$(-6)^2-4\times1\times(2k-1)=0$
$-8k+40=0$, $-8k=-40$ $\qquad\therefore\ k=5$
따라서 5, 7을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은
$2(x-5)(x-7)=0$, 즉 $2x^2-24x+70=0$

15 Action 이차방정식의 한 근이 $1+\sqrt{5}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{5}$임을 이용하여 두 근의 합과 곱을 구한다.

한 근이 $1+\sqrt{5}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{5}$이므로
(두 근의 합)$=(1+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})=2$
(두 근의 곱)$=(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=-4$
따라서 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-2x-4=0$

16 Action n각형의 대각선의 개수를 구하는 식을 이용하여 이차방정식을 세운다.

$\frac{n(n-3)}{2}=77$이므로 $n^2-3n-154=0$
$(n+11)(n-14)=0$ $\quad\therefore n=-11$ 또는 $n=14$
그런데 $n>3$이므로 $n=14$
따라서 구하는 다각형은 십사각형이다.

17 Action n명의 사람이 악수하는 횟수를 구하는 식을 이용하여 이차방정식을 세운다.

$\frac{n(n-1)}{2}=210$이므로 $n^2-n-420=0$
$(n+20)(n-21)=0$ $\quad\therefore n=-20$ 또는 $n=21$
그런데 $n>1$이므로 $n=21$
따라서 이 동호회의 회원 수는 21이다.

18 Action 연속하는 두 짝수를 x, $x+2$로 놓고 조건에 맞는 이차방정식을 세운다.

연속하는 두 짝수를 x, $x+2$라고 하면
$x^2+(x+2)^2=724$ …… 40%
$x^2+2x-360=0$, $(x-18)(x+20)=0$
$\therefore x=18$ 또는 $x=-20$
그런데 x는 짝수이므로 $x=18$ …… 40%
따라서 구하는 두 수의 곱은
$18\times20=360$ …… 20%

19 Action 십의 자리의 숫자가 a, 일의 자리의 숫자가 b인 두 자리 자연수는 $10a+b$임을 이용한다.

조건 (가)에서 십의 자리의 숫자를 x라고 하면 일의 자리의 숫자는 $6-x$이다.
조건 (나)에서 $x(6-x)=10x+(6-x)-16$
$x^2+3x-10=0$, $(x-2)(x+5)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=-5$
그런데 x는 자연수이므로 $x=2$
따라서 십의 자리의 숫자는 2, 일의 자리의 숫자는 4이므로 구하는 두 자리 자연수는 24이다.

20 Action 수민이는 x의 계수를 잘못 보았으므로 상수항을 바르게 보았고, 동완이는 상수항을 잘못 보았으므로 x의 계수를 바르게 보았다.

x^2의 계수가 1이고 두 근이 -5, -1인 이차방정식은
$(x+5)(x+1)=0$, 즉 $x^2+6x+5=0$
이때 수민이는 상수항을 바르게 보았으므로
(상수항)$=5$ …… 35%
x^2의 계수가 1이고 두 근이 2, 4인 이차방정식은
$(x-2)(x-4)=0$, 즉 $x^2-6x+8=0$
이때 동완이는 x의 계수를 바르게 보았으므로
(x의 계수)$=-6$ …… 35%
따라서 처음 이차방정식은 $x^2-6x+5=0$이므로
$(x-1)(x-5)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=5$ …… 30%

다른 풀이
수민이는 상수항을 바르게 보았으므로
(상수항)$=-5\times(-1)=5$ …… 35%
동완이는 x의 계수를 바르게 보았으므로
(x의 계수)$=-(2+4)=-6$ …… 35%
따라서 처음 이차방정식은 $x^2-6x+5=0$이므로
$(x-1)(x-5)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=5$ …… 30%

21 Action 동생의 나이를 x세라고 하면 형의 나이는 $(x+3)$세이다.

동생의 나이를 x세라고 하면 형의 나이는 $(x+3)$세이므로
$(x+3)^2=3x^2-11$
$x^2-3x-10=0$, $(x+2)(x-5)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=5$
그런데 x는 자연수이므로 $x=5$
따라서 동생의 나이는 5세이다.

22 Action 전체 학생 수를 x라고 하면 한 학생에게 나누어주는 사탕의 수는 $(x+4)$이다.

전체 학생 수를 x라고 하면 한 학생에게 나누어주는 사탕의 수는 $(x+4)$이므로
$x(x+4)=252$
$x^2+4x-252=0$, $(x-14)(x+18)=0$
$\therefore x=14$ 또는 $x=-18$
그런데 x는 자연수이므로 $x=14$
따라서 전체 학생 수는 14이다.

23 Action (2) 물체가 바닥에 떨어질 때의 높이는 0 m이다.

(1) $25t-5t^2=30$에서 $t^2-5t+6=0$
$(t-2)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=2$ 또는 $t=3$
따라서 처음으로 높이가 30 m가 되는 것은 2초 후이다.
(2) 물체가 바닥에 떨어질 때의 높이는 0 m이므로
$25t-5t^2=0$에서 $t^2-5t=0$
$t(t-5)=0$ $\quad\therefore t=0$ 또는 $t=5$
그런데 $t>0$이므로 $t=5$
따라서 물체가 바닥에 떨어지는 것은 5초 후이다.

24 Action 물체가 35 m 이상의 높이에 머무르는 시간은 이차방정식 $40t-5t^2=35$의 두 근의 차임을 이용한다.

$40t-5t^2=35$에서 $t^2-8t+7=0$

$(t-1)(t-7)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=7$

따라서 물체가 35 m 이상의 높이에 머무르는 것은 1초부터 7초까지이므로 $7-1=6$(초) 동안이다.

25 Action 큰 정사각형의 한 변의 길이를 x cm로 놓는다.

큰 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라고 하면 작은 정사각형의 한 변의 길이는 $(10-x)$ cm이므로

$x^2+(10-x)^2=58$

$x^2-10x+21=0$, $(x-3)(x-7)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=7$

그런데 $x>5$이므로 $x=7$

따라서 큰 정사각형의 한 변의 길이는 7 cm이다.

26 Action 가장 작은 반원의 반지름의 길이를 x cm로 놓는다.

가장 작은 반원의 반지름의 길이를 x cm라고 하면 두 번째로 큰 반원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}(20-2x)=10-x$ (cm)

이때 색칠한 부분의 넓이가 24π cm^{2}이므로

$\frac{1}{2}\pi\times10^2-\frac{1}{2}\pi(10-x)^2-\frac{1}{2}\pi x^2=24\pi$

$x^2-10x+24=0$, $(x-4)(x-6)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=6$

그런데 $0<x<5$이므로 $x=4$

따라서 가장 작은 반원의 반지름의 길이는 4 cm이다.

27 Action 처음 삼각형의 밑변의 길이를 x cm로 놓는다.

처음 삼각형의 밑변의 길이를 x cm라 하면

$\frac{1}{2}(x+3)(x+6)=3\times\frac{1}{2}x^2$

$2x^2-9x-18=0$, $(x-6)(2x+3)=0$

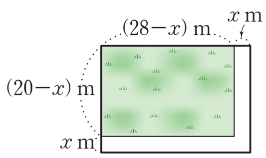
$\therefore x=6$ 또는 $x=-\frac{3}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $x=6$

따라서 처음 삼각형의 밑변의 길이는 6 cm이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times6^2=18$ (cm^2)

28 Action 길의 폭을 일정하게 유지시키며 길의 위치를 옮겨 본다.



길을 제외한 텃밭의 넓이는 가로의 길이가 $(28-x)$ m, 세로의 길이가 $(20-x)$ m인 직사각형의 넓이와 같으므로

$(28-x)(20-x)=425$

$x^2-48x+135=0$, $(x-3)(x-45)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=45$

그런데 $x<20$이므로 $x=3$

29 Action 처음 정사각형 모양의 종이의 한 변의 길이를 x cm로 놓는다.

처음 정사각형 모양의 종이의 한 변의 길이를 x cm라고 하면

$4(x-8)^2=324$

$(x-8)^2=81$, $x-8=\pm9$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=17$

그런데 $x>8$이므로 $x=17$

따라서 처음 정사각형 모양의 종이의 한 변의 길이는 17 cm이다.

30 Action x초 후의 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 x에 대한 식으로 나타내어 본다.

x초 후의 가로의 길이는 $(20-x)$ cm, 세로의 길이는 $(16+2x)$ cm이므로

$(20-x)(16+2x)=20\times16$

$x^2-12x=0$, $x(x-12)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=12$

그런데 $0<x<20$이므로 $x=12$

따라서 처음 직사각형의 넓이와 같아지는 것은 12초 후이다.

최고 수준 완성하기

P 80– P 83

01 ㉡, ㉢	**02** 2	**03** $p=-13$, $q=42$	
04 $x=\pm\sqrt{7}$	**05** 4	**06** $-3\sqrt{17}$	**07** -4
08 ①	**09** ②	**10** $x=-1$ 또는 $x=2$	
11 6분	**12** 8	**13** $(5+5\sqrt{5})$ cm	
14 6	**15** $(4, 2)$	**16** 24단계	

01 Action 주어진 이차방정식의 a에 각 보기의 값을 대입하여 이차방정식의 근의 개수를 확인한다.

㉠ $3x^2+2x-5=0$에서 $(x-1)(3x+5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-\frac{5}{3}$

따라서 두 근 중 한 근만 양수이다.

㉡ $3x^2+2x-2=0$에서 $2^2-4\times3\times(-2)=28>0$이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.

㉢ $3x^2+2x+\frac{1}{3}=0$, 즉 $9x^2+6x+1=0$이므로

$(3x+1)^2=0$ $\quad\therefore x=-\frac{1}{3}$

따라서 음수인 중근을 갖는다.

㉣ $3x^2+2x+a=0$이 근을 갖지 않으려면 $2^2-4\times3\times a<0$ 이어야 한다.

$4-12a<0$에서 $-12a<-4$ $\quad\therefore a>\frac{1}{3}$

따라서 $a>\frac{1}{3}$이면 근을 갖지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢이다.

Lecture

이차방정식의 근의 개수

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서

(1) $b^2-4ac>0$ ➡ 근이 2개

(2) $b^2-4ac=0$ ➡ 근이 1개(중근)

(3) $b^2-4ac<0$ ➡ 근이 없다.

02

Action 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 개수는 b^2-4ac의 값의 부호에 따라 결정됨을 이용한다. 이때 이차방정식이 되려면 (x^2의 계수)$\neq0$임에 주의한다.

$(k+1)x^2+3x-1=0$이 근을 가지므로

$3^2-4\times(k+1)\times(-1)\geq0$

$4k+13\geq0,\ 4k\geq-13$ $\quad\therefore k\geq-\frac{13}{4}$

그런데 (x^2의 계수)$\neq0$이어야 하므로

$k+1\neq0$ $\quad\therefore k\neq-1$

$\therefore -\frac{13}{4}\leq k<-1$ 또는 $k>-1$

따라서 구하는 음의 정수 k는 $-3,\ -2$의 2개이다.

03

Action 두 근이 연속하는 양수이므로 두 근을 $\alpha,\ \alpha+1$로 놓는다.

$x^2+px+q=0$의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+1$이라고 하면 두 근의 제곱의 차가 13이므로

$(\alpha+1)^2-\alpha^2=13,\ \alpha^2+2\alpha+1-\alpha^2=13$

$2\alpha+1=13,\ 2\alpha=12$ $\quad\therefore \alpha=6$

따라서 두 근이 6, 7이므로

$6+7=13=-p$ $\quad\therefore p=-13$

$6\times7=42=q$

04

Action 두 근의 절댓값이 같고 부호가 서로 반대이므로 두 근을 α, $-\alpha$로 놓고 근과 계수의 관계를 이용한다.

$x^2-(k^2+3k-18)x+(k-1)=0$의 두 근을 $\alpha,\ -\alpha$라고 하면 …… 10%

$\alpha+(-\alpha)=k^2+3k-18$에서 $k^2+3k-18=0$

$(k-3)(k+6)=0$ $\quad\therefore k=3$ 또는 $k=-6$ …… 40%

(i) $k=3$일 때,

$x^2+2=0$에서 $x^2=-2$ ➡ 근이 없다.

(ii) $k=-6$일 때,

$x^2-7=0$에서 $x^2=7$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{7}$

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족하는 k의 값은 -6이고, 이때 두 근은 $x=\pm\sqrt{7}$이다. …… 50%

05

Action 두 근의 곱이 -15이므로 곱해서 -15가 되는 두 정수를 순서쌍으로 나열해 본다.

$x^2+ax-15=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라고 하면

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=-15$

이때 $\alpha\beta=-15$를 만족하는 두 정수 $\alpha,\ \beta$의 순서쌍 $(\alpha,\ \beta)$는 $(1,\ -15),\ (3,\ -5),\ (5,\ -3),\ (15,\ -1),\ (-1,\ 15),\ (-3,\ 5),\ (-5,\ 3),\ (-15,\ 1)$이므로 a의 값이 될 수 있는 수는 $14,\ 2,\ -2,\ -14$의 4개이다.

Lecture

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라고 할 때

(1) $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

(2) $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

06

Action 약속에 따라 방정식의 좌변을 정리한 후 근과 계수의 관계와 인수분해 공식 $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$를 이용한다.

$$\begin{aligned}(x+3)*(x-2)&=(x+3)(x-2)+2(x-2)-3\\&=x^2+x-6+2x-4-3\\&=x^2+3x-13\end{aligned}$$

즉 $x^2+3x-13=-11$에서 $x^2+3x-2=0$이므로

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=-2$

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=(-3)^2-4\times(-2)\\&=9+8=17\end{aligned}$$

$\therefore \alpha-\beta=\pm\sqrt{17}$

그런데 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha-\beta=\sqrt{17}$

$\therefore \alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=-3\sqrt{17}$

07

Action $3<\sqrt{10}<4$임을 이용하여 $6-\sqrt{10}$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 구한다.

$3<\sqrt{10}<4$이므로 $-4<-\sqrt{10}<-3$

$\therefore 2<6-\sqrt{10}<3$

따라서 $6-\sqrt{10}$의 정수 부분은 2이므로 $a=2$

소수 부분은 $(6-\sqrt{10})-2=4-\sqrt{10}$이므로 $b=4-\sqrt{10}$

이때 $b=4-\sqrt{10}$이 이차방정식 $ax^2+px+q=0$의 한 근이므로 다른 한 근은 $4+\sqrt{10}$이다.

$(4-\sqrt{10})+(4+\sqrt{10})=-\frac{p}{a}$에서

$8=-\frac{p}{2}$ $\quad\therefore p=-16$

$(4-\sqrt{10})(4+\sqrt{10})=\dfrac{q}{a}$에서

$6=\dfrac{q}{2}$ $\quad\therefore q=12$

$\therefore p+q=-16+12=-4$

08 Action 두 근의 합이 m, 곱이 n이고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은 $a(x^2-mx+n)=0$임을 이용한다.

$x^2-7x+3=0$에서 $\alpha+\beta=7$, $\alpha\beta=3$이므로

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{7}{3}$, $\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{3}$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2-\dfrac{7}{3}x+\dfrac{1}{3}=0$, 즉 $3x^2-7x+1=0$

09 Action 수련회에 가는 3일의 날짜는 연속하는 세 자연수이다.

수련회에 가는 날짜를 $(x-1)$일, x일, $(x+1)$일이라고 하면

$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=365$

$3x^2=363$, $x^2=121$ $\quad\therefore x=\pm11$

그런데 $x>1$이므로 $x=11$

따라서 수련회의 출발 날짜는 6월 10일이다.

10 Action 민주는 상수항을 잘못 보았으므로 x의 계수를 바르게 보았고, 희경이는 x의 계수를 잘못 보았으므로 상수항을 바르게 보았다.

x^2의 계수가 1이고 두 근이 -2, 3인 이차방정식은

$(x+2)(x-3)=0$, 즉 $x^2-x-6=0$

이때 민주는 x의 계수를 바르게 보았으므로

(x의 계수)$=-1$

x^2의 계수가 1이고 두 근이 $-1\pm\sqrt{3}$인 이차방정식은

$\{x-(-1+\sqrt{3})\}\{x-(-1-\sqrt{3})\}=0$

즉 $x^2+2x-2=0$

이때 희경이는 상수항을 바르게 보았으므로

(상수항)$=-2$

따라서 처음 이차방정식은 $x^2-x-2=0$이므로

$(x+1)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

다른 풀이

민주는 x의 계수를 바르게 보았으므로

(x의 계수)$=-(-2+3)=-1$

희경이는 상수항을 바르게 보았으므로

(상수항)$=(-1+\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})=-2$

따라서 처음 이차방정식은 $x^2-x-2=0$이므로

$(x+1)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

11 Action 먼저 $t=14$를 대입하여 호수 둘레의 길이를 구한다.

호수 둘레를 처음 한 바퀴 도는 데 14분이 걸렸으므로 호수 둘레의 길이는 $(14^2+14)\pi=210\pi$ (m)

두 바퀴 도는 데 움직인 거리는 $210\pi\times2=420\pi$ (m)이므로

$(t^2+t)\pi=420\pi$

$t^2+t-420=0$, $(t-20)(t+21)=0$

$\therefore t=20$ 또는 $t=-21$

그런데 $t>14$이므로 $t=20$

따라서 총 두 바퀴 도는 데 20분이 걸렸으므로 두 번째로 한 바퀴 도는 데 걸린 시간은 $20-14=6$(분)

12 Action $\triangle$ABC와 $\triangle$AED가 닮음임을 이용하여 $\overline{\text{AD}}$의 길이를 구한다.

$\triangle$ABC와 $\triangle$AED에서

$\angle$A는 공통, $\angle$ACB$=\angle$ADE이므로

$\triangle\text{ABC}\backsim\triangle\text{AED}$(AA 닮음)

$\overline{\text{AD}}=x$라고 하면 $\overline{\text{AB}}:\overline{\text{AE}}=\overline{\text{AC}}:\overline{\text{AD}}$에서

$(x+1):6=(6+6):x$

$x(x+1)=72$, $x^2+x-72=0$

$(x-8)(x+9)=0$ $\quad\therefore x=8$ 또는 $x=-9$

그런데 $x>0$이므로 $x=8$

따라서 $\overline{\text{AD}}$의 길이는 8이다.

13 Action □ABCD가 황금사각형이므로 □ABCD$\backsim$□DFEC임을 이용한다.

□ABCD가 황금사각형이므로 정사각형 ABEF를 잘라내고 남은 □DFEC와 □ABCD는 서로 닮은 도형이다.

$\overline{\text{AD}}=x$ cm라고 하면 □ABCD$\backsim$□DFEC이므로

$\overline{\text{AB}}:\overline{\text{DF}}=\overline{\text{AD}}:\overline{\text{DC}}$에서 $10:(x-10)=x:10$

$x(x-10)=100$, $x^2-10x-100=0$

$\therefore x=-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-1\times(-100)}$

$=5\pm\sqrt{125}=5\pm5\sqrt{5}$

그런데 $x>0$이므로 $x=5+5\sqrt{5}$

따라서 $\overline{\text{AD}}$의 길이는 $(5+5\sqrt{5})$ cm이다.

Lecture

닮은 도형의 길이의 비

닮은 도형은 대응하는 변의 길이의 비가 일정하다.

14 Action $\overline{\text{AC}}/\!/\overline{\text{FG}}$, $\overline{\text{BC}}/\!/\overline{\text{DE}}$이므로 □PGCE는 정사각형이고 $\triangle$FDP는 직각이등변삼각형임을 이용한다.

$\angle\text{C}=90^\circ$, $\overline{\text{EC}}=\overline{\text{GC}}$, $\overline{\text{AC}}/\!/\overline{\text{FG}}$, $\overline{\text{BC}}/\!/\overline{\text{DE}}$이므로

□PGCE는 정사각형이고 $\triangle$ADE, $\triangle$FBG, $\triangle$FDP는 모두 직각이등변삼각형이다.

$\overline{\text{GC}}=\overline{\text{EC}}=x$라고 하면 $\overline{\text{FG}}=\overline{\text{BG}}=16-x$,

$\overline{\text{DE}}=\overline{\text{AE}}=16-x$이고 $\overline{\text{PE}}=\overline{\text{PG}}=x$이므로

$\overline{\text{FP}}=\overline{\text{DP}}=16-2x$이다.

이때 □PGCE와 △FDP의 넓이의 합이 44이므로

$x^2+\frac{1}{2}(16-2x)^2=44$

$3x^2-32x+84=0$, $(x-6)(3x-14)=0$

$\therefore x=6$ 또는 $x=\frac{14}{3}$

그런데 $\overline{GC}>\overline{DP}$이므로 $x=6$

따라서 $\overline{GC}$의 길이는 6이다.

15 Action 점 C의 좌표를 $(a, 0)$으로 놓고 점 B의 좌표를 a를 사용한 식으로 나타내어 본다.

일차함수 $y=-\frac{1}{2}x+4$의 그래프의 y절편은 4이므로 점 A의 좌표는 $(0, 4)$이다.

점 C의 좌표를 $(a, 0)$이라고 하면 점 B의 좌표는 $\left(a, -\frac{1}{2}a+4\right)$이고 □AOCB의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\times\left\{\left(-\frac{1}{2}a+4\right)+4\right\}\times a=12$

$a^2-16a+48=0$, $(a-4)(a-12)=0$

$\therefore a=4$ 또는 $a=12$

그런데 $y=-\frac{1}{2}x+4$의 그래프의 x절편이 8이므로 $a<8$

$\therefore a=4$

따라서 점 B의 좌표는 $(4, 2)$이다.

16 Action n단계에 놓이는 바둑돌의 수를 n에 대한 식으로 나타낸다.

n단계에서 바둑돌은 가로에 $(n+2)$개, 세로에 n개를 직사각형 모양으로 나열한 것이므로 n단계에 놓이는 바둑돌은 $n(n+2)$개이다.

이때 n단계에 바둑돌이 624개가 된다고 하면

$n(n+2)=624$

$n^2+2n-624=0$, $(n-24)(n+26)=0$

$\therefore n=24$ 또는 $n=-26$

그런데 n은 자연수이므로 $n=24$

따라서 바둑돌이 624개가 되는 것은 24단계이다.

최고 수준 뛰어넘기

P 84– P 86

01 2

02 (1) $\alpha+\beta=\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{255}{a}$ (2) 3, 5, 17 (3) 66, 100, 136 (4) 302

03 $a=4$, $b=1$ **04** $x^2-4x+1=0$ **05** 20 %

06 140 cm^2 **07** 13 **08** $(-6+6\sqrt{2})$ cm

09 $\frac{5+5\sqrt{5}}{2}$

01 Action 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 근을 가질 조건은 $b^2-4ac\geq0$임을 이용한다.

$x^2+px+q=0$이 근을 가지므로

$p^2-4\times1\times q\geq0$ $\quad\therefore p^2\geq4q$

$x^2+2px-q^2+6q-6=0$에서

$$\begin{aligned}(2p)^2-4\times1\times(-q^2+6q-6)&=4p^2+4q^2-24q+24\\&\geq4\times4q+4q^2-24q+24\\&=4q^2-8q+24\\&=4(q-1)^2+20>0\end{aligned}$$

따라서 서로 다른 두 근을 가지므로 근의 개수는 2이다.

02 Action 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

(2) $\alpha\beta=\frac{255}{a}$이고 $255=3\times5\times17$이므로 $\frac{255}{a}$가 두 소수의 곱이 되려면 a의 값은 3, 5, 17 중 하나이어야 한다.

(3) $\alpha+\beta=\frac{b}{a}$이므로 $b=a(\alpha+\beta)$

(i) $a=3$일 때, $\alpha\beta=5\times17$

$\therefore b=3\times(5+17)=66$

(ii) $a=5$일 때, $\alpha\beta=3\times17$

$\therefore b=5\times(3+17)=100$

(iii) $a=17$일 때, $\alpha\beta=3\times5$

$\therefore b=17\times(3+5)=136$

(i)~(iii)에 의하여 b의 값은 66, 100, 136이다.

(4) $66+100+136=302$

03 Action 이차방정식 $x^2-14x+1=0$의 두 근이 α^2, β^2임을 이용하여 $\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^2\beta^2$의 값을 각각 구한다.

$x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$

$x^2-14x+1=0$의 두 근이 α^2, β^2이므로

$\alpha^2+\beta^2=14$, $\alpha^2\beta^2=1$

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$에서 $a^2=14+2b$

$\alpha^2\beta^2=1$에서 $b^2=1$ $\quad\therefore b=\pm1$

(i) $b=1$일 때, $a^2=14+2=16$ $\quad\therefore a=\pm4$

그런데 $a>b$이므로 $a=4$

(ii) $b=-1$일 때, $a^2=14-2=12$ $\quad\therefore a=\pm2\sqrt{3}$

이때 a는 정수가 아니므로 조건을 만족하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $a=4$, $b=1$

04 Action 근호 안의 식을 각각 인수분해한 후 제곱근의 성질을 이용한다.

$\sqrt{(a+b)^2-8(a+b)+16}+\sqrt{a^2b^2-2ab+1}=0$에서

$\sqrt{(a+b-4)^2}+\sqrt{(ab-1)^2}=0$

$|a+b-4|+|ab-1|=0$

위의 등식을 만족하려면 $a+b-4=0$, $ab-1=0$이어야 한다. $\quad\therefore a+b=4$, $ab=1$

따라서 x^2의 계수가 1이고 a, b를 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2-4x+1=0$이다.

Lecture

$|A|+|B|=0$이 되기 위한 조건

어떤 수의 절댓값은 항상 0 또는 양수로 나타나므로 두 수 A, B에 대하여 $|A|+|B|=0$이 되려면 $A=0$, $B=0$이어야 한다.

05 Action (매출액)=(가격)×(판매량)임을 이용한다.

제품 한 개의 정가를 a원, 판매량을 b개라고 하면

정가를 x % 인상한 가격은 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원,

$\frac{x}{2}$ %만큼 줄어든 판매량은 $b\left(1-\frac{x}{200}\right)$개이므로

정가를 x % 인상한 후의 매출은

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)$원

이때 매출이 8 % 증가해야 하므로

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)=ab\left(1+\frac{8}{100}\right)$

$(100+x)(200-x)=21600$, $x^2-100x+1600=0$

$(x-20)(x-80)=0$ $\quad\therefore x=20$ 또는 $x=80$

그런데 $0<x<50$이므로 $x=20$

따라서 가격을 20 % 인상해야 한다.

06 Action 벽의 모양이 직사각형임을 이용하여 타일의 짧은 변의 길이를 구한다.

타일의 짧은 변의 길이를 x cm라고 하면 긴 변의 길이는

$\frac{1}{2}(4x-12)=2x-6$ (cm)

직사각형 모양의 벽의 가로의 길이는 $4x$ cm, 세로의 길이는 $2x-6+x=3x-6$ (cm)이고 벽의 넓이가 960 cm^{2}이므로 $4x(3x-6)=960$

$x^2-2x-80=0$, $(x+8)(x-10)=0$

$\therefore x=-8$ 또는 $x=10$

그런데 $x>3$이므로 $x=10$

따라서 타일 한 개의 넓이는

$x(2x-6)=10\times14=140$ (cm^2)

07 Action 서로 다른 n개의 점이 있는 완전 그래프의 선의 개수는 n각형의 변의 개수와 대각선의 개수의 합과 같다.

서로 다른 n개의 점이 있는 완전 그래프의 선의 개수는 n각형의 변의 개수와 대각선의 개수의 합과 같으므로

$n+\frac{n(n-3)}{2}=\frac{2n+n^2-3n}{2}=\frac{n^2-n}{2}$

즉 $\frac{n^2-n}{2}=78$에서 $n^2-n=156$, $n^2-n-156=0$

$(n+12)(n-13)=0$ $\quad\therefore n=-12$ 또는 $n=13$

그런데 $n>3$이므로 $n=13$

따라서 구하는 완전 그래프의 점의 개수는 13이다.

08 Action 작은 정삼각형의 한 변의 길이를 x cm라고 하고 큰 정삼각형의 한 변의 길이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

작은 정삼각형의 한 변의 길이를 x cm라고 하면 큰 정삼각형의 한 변의 길이는 $\frac{18-3x}{3}=6-x$ (cm)

두 정삼각형의 넓이의 비가 1 : 2이므로

$x^2:(6-x)^2=1:2$

$2x^2=(6-x)^2$, $2x^2=x^2-12x+36$

$x^2+12x-36=0$

$\therefore x=-6\pm\sqrt{6^2-1\times(-36)}$

$=-6\pm\sqrt{72}=-6\pm6\sqrt{2}$

그런데 $0<x<3$이므로 $x=-6+6\sqrt{2}$

따라서 작은 정삼각형의 한 변의 길이는 $(-6+6\sqrt{2})$ cm이다.

다른 풀이

작은 정삼각형의 한 변의 길이를 x cm라고 하면 큰 정삼각형의 한 변의 길이는 $(6-x)$ cm

두 정삼각형의 넓이의 비가 1 : 2가 되려면 닮음비는 $1:\sqrt{2}$이어야 한다.

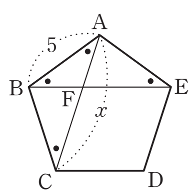
즉 $x:(6-x)=1:\sqrt{2}$에서

$\sqrt{2}x=6-x$, $(\sqrt{2}+1)x=6$

$\therefore x=\frac{6}{\sqrt{2}+1}=\frac{6(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=6\sqrt{2}-6$

따라서 작은 정삼각형의 한 변의 길이는 $(6\sqrt{2}-6)$ cm이다.

09 Action 한 대각선의 길이를 x로 놓고 닮은 두 삼각형을 찾아 닮음비를 이용한다.



오른쪽 그림과 같이 두 대각선 AC, BE의 교점을 F라고 하자.

정오각형의 한 내각의 크기는

$\frac{180^\circ\times(5-2)}{5}=108^\circ$이고,

△ABC는 이등변삼각형이므로

$\angle BAC=\angle BCA=\frac{1}{2}\times(180^\circ-108^\circ)=36^\circ$

마찬가지 방법으로 △ABE는 이등변삼각형이므로

$\angle ABE=\angle AEB=36^\circ$

이때

$\angle CBF=\angle ABC-\angle ABE=108^\circ-36^\circ=72^\circ$,

$\angle CFB=\angle ABF+\angle BAF=36^\circ+36^\circ=72^\circ$

이므로 △CFB는 이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{CF}=\overline{CB}=5$

$\overline{AC}=x$라고 하면 $\overline{AF}=x-5$이고,

$\triangle FAB \backsim \triangle BCA$(AA 닮음)이므로

$\overline{FA}:\overline{BC}=\overline{AB}:\overline{CA}$에서

$(x-5):5=5:x$

$x(x-5)=25$, $x^2-5x-25=0$

$\therefore x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times(-25)}}{2\times1}$

$=\dfrac{5\pm\sqrt{125}}{2}=\dfrac{5\pm5\sqrt{5}}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\dfrac{5+5\sqrt{5}}{2}$

따라서 한 대각선의 길이는 $\dfrac{5+5\sqrt{5}}{2}$이다.

교과서 속 창의 사고력

P 87 – P 88

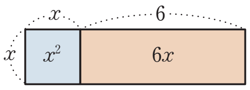
01 $x=2$ **02** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ **03** 250보

01 Action 주어진 방법과 같이 직사각형과 정사각형의 넓이를 이용하여 이차방정식의 양수인 해를 구한다.

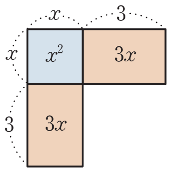
① [그림 1]과 같이 $x^2+6x=16$의 좌변 x^2+6x를 정사각형과 직사각형의 넓이를 이용하여 나타낸다.

② [그림 1]에서 넓이가 $6x$인 직사각형을 합동인 두 개의 직사각형으로 나누어 [그림 2]와 같이 옮겨 붙인다.

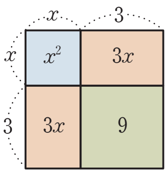
③ [그림 3]과 같이 정사각형이 만들어지도록 넓이가 9인 정사각형을 추가한다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

이때 새로 만든 정사각형의 넓이는 $16+9=25$이고 $25=5^2$이므로 정사각형의 한 변의 길이는 5이다.

따라서 $x+3=5$이므로 $x=2$이다.

02 Action 황금비의 뜻을 이해한 후 비례식을 푼다.

밀로의 비너스에서 하반신의 길이를 x라고 하면 전체의 길이는 $1+x$이고,

(상반신의 길이) : (하반신의 길이)

=(하반신의 길이) : (전체의 길이)

이므로 $1:x=x:(1+x)$

$x^2=1+x$, $x^2-x-1=0$

$\therefore x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$

$=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

그런데 $x>1$이므로 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

따라서 하반신의 길이는 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

Lecture

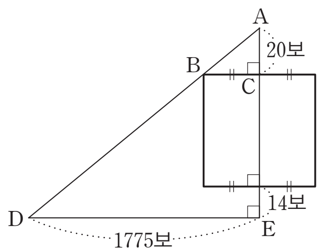
비례식

비례식에서 외항의 곱은 내항의 곱과 같다.

➡ $a:b=c:d$에서 $ad=bc$

03 Action 문제의 내용을 그림으로 나타낸 후 닮음을 이용하여 문제를 해결한다.

문제의 내용을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



성벽의 한쪽 벽의 길이를 x보라고 하면

$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$(AA 닮음)이므로

$\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{BC}:\overline{DE}$에서

$20:(20+x+14)=\dfrac{x}{2}:1775$

$\dfrac{x}{2}(x+34)=35500$, $x^2+34x-71000=0$

$(x-250)(x+284)=0$

$\therefore x=250$ 또는 $x=-284$

그런데 $x>0$이므로 $x=250$

따라서 성벽의 한쪽 벽의 길이는 250보이다.

Ⅳ. 이차함수

1. 이차함수와 그래프

최고 수준 **입문하기** P 91 – P 93

01 ②, ③	**02** ㉢, ㉤	**03** 8	**04** ①, ④
05 ④	**06** ㉢, ㉤	**07** 3	**08** 5
09 5	**10** $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$	**11** 60	**12** $-\frac{15}{4}$
13 ②	**14** $-\frac{3}{2}$	**15** 제 3, 4 사분면	
16 8	**17** ㉡, ㉣	**18** $a<0, p<0, q>0$	

01 Action 주어진 식을 간단히 정리한 후 y가 x에 대한 이차식인 것을 찾는다.

① $y=x^2(x-1)=x^3-x^2$

② $y=x(2-x)=-x^2+2x$

③ $y=(x+3)(x+5)=x^2+8x+15$

④ $y=(x-1)^2-x^2=x^2-2x+1-x^2=-2x+1$

따라서 이차함수인 것은 ②, ③이다.

02 Action x와 y 사이의 관계식을 구한 후 y가 x에 대한 이차식인 것을 찾는다.

㉠ $y=180\times(x-2)=180x-360$

㉡ $y=3x$

㉢ $y=\pi x^2$

㉣ $y=6x$

㉤ $y=x^2+(x+2)^2=2x^2+4x+4$

따라서 y가 x에 대한 이차함수인 것은 ㉢, ㉤이다.

03 Action $f(x)=2x^2-4x+5$에 $x=2$, $x=4$를 각각 대입한다.

$f(2)=2\times2^2-4\times2+5=5$

$f(4)=2\times4^2-4\times4+5=21$

$\therefore 3f(2)-\frac{1}{3}f(4)=3\times5-\frac{1}{3}\times21=8$

04 Action y가 x에 대한 이차함수이려면 $y=$(x에 대한 이차식)의 꼴이어야 한다.

$y=a(a+3)x^2-4x-10x^2+1$

$\quad=(a^2+3a-10)x^2-4x+1$

위의 식이 x에 대한 이차함수가 되려면

$a^2+3a-10\neq0$이어야 한다.

따라서 $(a-2)(a+5)\neq0$이므로

$a\neq2$이고 $a\neq-5$

05 Action 이차함수 $y=ax^2$에서 a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아짐을 이용한다.

x^2의 계수의 절댓값을 각각 구해 보면

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ $\frac{5}{2}$

x^2의 계수의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁으므로 그래프의 폭이 가장 좁은 것은 ④이다.

06 Action 이차함수 $y=3x^2$의 그래프의 성질을 파악해 본다.

㉢ $y=3x^2$의 그래프가 $y=2x^2$의 그래프보다 폭이 좁다.

㉤ $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 옳지 않은 것은 ㉢, ㉤이다.

Lecture

이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 증가, 감소

이차함수 $y=ax^2$의 그래프에서

(1) $a>0$일 때

① $x<0$이면 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다.

② $x>0$이면 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가한다.

(2) $a<0$일 때

① $x<0$이면 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가한다.

② $x>0$이면 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다.

07 Action 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식은 $y=ax^2(a\neq0)$의 꼴이다.

원점을 꼭짓점으로 하는 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=ax^2$이라고 하자.

$y=ax^2$의 그래프가 점 $(-2, 8)$을 지나므로

$8=4a \qquad \therefore a=2$

따라서 $y=2x^2$의 그래프가 점 $(k, 18)$을 지나므로

$18=2k^2$, $k^2=9 \qquad \therefore k=\pm3$

그런데 $k>0$이므로 $k=3$

08 Action 이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 x축에 대칭인 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=-ax^2$이다.

$y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프와 x축에 대칭인 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=\frac{1}{3}x^2$

$y=\frac{1}{3}x^2$의 그래프가 점 $(a-1, a+5)$를 지나므로

$a+5=\frac{1}{3}(a-1)^2$, $3a+15=a^2-2a+1$

$a^2-5a-14=0$, $(a+2)(a-7)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=7$

따라서 모든 a의 값의 합은 $-2+7=5$

09 Action 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=ax^2+q$이다.

$y=-2x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=-2x^2+q$
$y=-2x^2+q$의 그래프가 점 $(1, 3)$을 지나므로
$3=-2+q \qquad \therefore q=5$

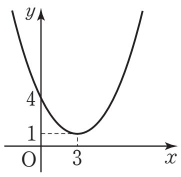
10 **Action** 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0, q)$이다.
$y=ax^2+q$의 그래프가 점 $(-1, 1)$을 지나므로
$1=a+q$ ...... ㉠
$y=ax^2+q$의 그래프가 점 $(2, 8)$을 지나므로
$8=4a+q$ ...... ㉡ 30%
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{7}{3}, q=-\frac{4}{3}$ 40%
따라서 $y=\frac{7}{3}x^2-\frac{4}{3}$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$\left(0, -\frac{4}{3}\right)$이다. 30%

11 **Action** 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=a(x-p)^2$이다.
$y=-4x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=-4(x-3)^2$
$y=-4(x-3)^2$의 그래프가 점 $(2, m)$을 지나므로
$m=-4$
$y=-4(x-3)^2$의 그래프가 점 $(-1, n)$을 지나므로
$n=-64$
$\therefore m-n=-4-(-64)=60$

12 **Action** 먼저 꼭짓점의 좌표를 이용하여 p의 값을 구한다.
$y=a(x-p)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-4, 0)$이므로
$y=a(x+4)^2 \qquad \therefore p=-4$
$y=a(x+4)^2$의 그래프가 점 $(0, 4)$를 지나므로
$4=16a \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$
$\therefore a+p=\frac{1}{4}+(-4)=-\frac{15}{4}$

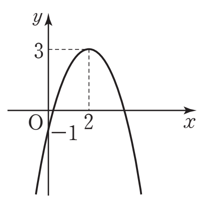
13 **Action** 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프는 축 $x=p$를 기준으로 증가, 감소하는 범위가 나뉜다.
$y=-5x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=-5(x+2)^2$
이 그래프는 위로 볼록하고 축의 방정식이 $x=-2$이므로
$x<-2$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

14 **Action** 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=a(x-p)^2+q$이다.
$y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은
$y=\frac{1}{2}(x+1)^2+q$
$y=\frac{1}{2}(x+1)^2+q$의 그래프가 점 $(-4, 3)$을 지나므로
$3=\frac{9}{2}+q \qquad \therefore q=-\frac{3}{2}$

15 **Action** 이차함수 $y=\frac{1}{3}(x-3)^2+1$의 그래프를 그려 본다.
$y=\frac{1}{3}(x-3)^2+1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3, 1)$이고 아래로 볼록하며 점 $(0, 4)$를 지나므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.


따라서 그래프가 지나지 않는 사분면은 제 3, 4 사분면이다.

16 **Action** 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=a(x-m-p)^2+q+n$이다.
$y=-3(x+1)^2+5$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은
$y=-3(x-4+1)^2+5-3$
$=-3(x-3)^2+2$ 50%
따라서 꼭짓점의 좌표는 $(3, 2)$, 축의 방정식은 $x=3$이므로
$a=3, b=2, c=3$ 40%
$\therefore a+b+c=3+2+3=8$ 10%

17 **Action** 이차함수 $y=-(x-2)^2+3$의 그래프를 그려 본다.
$y=-(x-2)^2+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.


㉡ $y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
㉣ $x<2$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 옳지 않은 것은 ㉡, ㉣이다.

18 **Action** 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프에서 a의 부호는 그래프의 모양에 따라 결정되고, p, q의 부호는 꼭짓점이 위치하는 사분면에 따라 결정된다.
그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
꼭짓점 $(-p, q)$가 제 1 사분면 위에 있으므로
$-p>0, q>0$
$\therefore a<0, p<0, q>0$

최고 수준 완성하기

P 94 – P 97

01 $-\frac{1}{2}$　02 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$　03 $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{9}\right)$　04 $(-2, 1)$

05 (1) $2:1$ (2) $\left(\frac{1}{3}k, \frac{1}{9}k^2\right)$ (3) 6　06 제 2 사분면

07 3, 12, 27　08 10

09 (1) $A(-3, 0), B(3, 0), C(-3, 4), D(3, 4)$ (2) 풀이 참조, 24

10 -1　11 10　12 5　13 $0<a<\frac{7}{9}$

01 **Action** $\square$ABCD는 평행사변형이므로 $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$, $\overline{AB}=\overline{CD}$임을 이용한다.

$\square$ABCD가 평행사변형이므로 $\overline{AB}=\overline{CD}=7-(-1)=8$

이때 $y=ax^2$의 그래프는 y축에 대칭이므로

$A(-4, -8), B(4, -8)$

따라서 $y=ax^2$에 $x=4, y=-8$을 대입하면

$-8=16a$　$\therefore a=-\frac{1}{2}$

02 **Action** 이차함수 $y=-x^2$의 그래프는 y축에 대칭이므로 점 A의 x좌표를 a라고 하면 점 B의 x좌표는 $-a$임을 이용한다.

점 A의 x좌표를 a라고 하면

$A(a, -a^2), B(-a, -a^2), C\left(-a, \frac{1}{3}a^2\right)$

이때 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$이므로

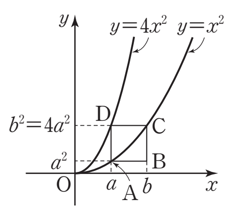
$\{a-(-a)\}:\left\{\frac{1}{3}a^2-(-a^2)\right\}=3:1$

$2a:\frac{4}{3}a^2=3:1$, $4a^2=2a$, $2a(2a-1)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

그런데 $a>0$이므로 $a=\frac{1}{2}$　$\therefore A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

03 **Action** 점 A의 x좌표를 a, 점 B의 x좌표를 b로 놓고 네 점 A, B, C, D의 좌표를 각각 a, b에 대한 식으로 나타낸다.



점 A의 x좌표를 $a(a>0)$, 점 B의 x좌표를 $b(b>0)$라고 하면

$A(a, a^2), B(b, a^2), C(b, b^2), D(a, 4a^2)$

이때 $\overline{CD}$는 x축에 평행하므로 점 C와 점 D의 y좌표가 같다.

즉 $b^2=4a^2$이므로 $b=2a$ ($\because a>0, b>0$)

$\therefore B(2a, a^2), C(2a, 4a^2)$

$\square$ABCD는 정사각형이므로 $\overline{AB}=\overline{AD}$에서

$2a-a=4a^2-a^2$, $3a^2-a=0$

$a(3a-1)=0$　$\therefore a=0$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

그런데 $a>0$이므로 $a=\frac{1}{3}$　$\therefore B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{9}\right)$

04 **Action** 점 P의 x좌표를 k라고 할 때, △PBC에서 밑변의 길이를 $\overline{BC}$로 하면 높이는 $6-k$임을 이용하여 넓이를 구한다.

점 C의 y좌표가 9이므로 $y=\frac{1}{4}x^2$에 $y=9$를 대입하면

$9=\frac{1}{4}x^2$, $x^2=36$　$\therefore x=6$ ($\because x>0$)

즉 $A(-6, 0), B(6, 0), C(6, 9), D(-6, 9)$

점 P의 x좌표를 k라고 하면 △ACD : △PBC$=3:2$에서

$\left\{\frac{1}{2}\times12\times9\right\}:\left\{\frac{1}{2}\times(6-k)\times9\right\}=3:2$

$12:(6-k)=3:2$, $24=3(6-k)$

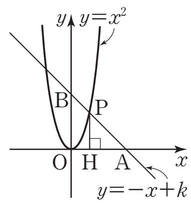
$3k=-6$　$\therefore k=-2$

따라서 점 P의 x좌표가 -2이므로

$y=\frac{1}{4}x^2$에 $x=-2$를 대입하면

$y=\frac{1}{4}\times(-2)^2=1$　$\therefore P(-2, 1)$

05 **Action** (1) 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\overline{PH}/\!/\overline{BO}$이므로 △ABO에서 삼각형과 평행선 사이의 선분의 길이의 비를 이용한다.



(1) △ABO에서 $\overline{PH}/\!/\overline{BO}$이므로

$\overline{AH}:\overline{HO}=\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$

(2) $y=-x+k$에 $y=0$을 대입하면

$0=-x+k$, $x=k$

$\therefore A(k, 0)$

이때 $\overline{OA}=k$이고 $\overline{AH}:\overline{HO}=2:1$이므로

$\overline{OH}=k\times\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}k$

즉 점 P의 x좌표가 $\frac{1}{3}k$이고 점 P는 $y=x^2$의 그래프 위의 점이므로

$y=\left(\frac{1}{3}k\right)^2=\frac{1}{9}k^2$　$\therefore P\left(\frac{1}{3}k, \frac{1}{9}k^2\right)$

(3) 점 P는 $y=-x+k$의 그래프 위의 점이므로

$\frac{1}{9}k^2=-\frac{1}{3}k+k$, $k^2-6k=0$

$k(k-6)=0$　$\therefore k=0$ 또는 $k=6$

그런데 $k>0$이므로 $k=6$

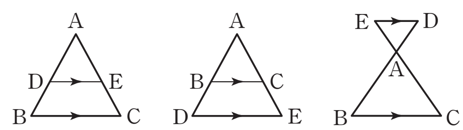
Lecture

삼각형에서 평행선과 선분의 길이의 비

△ABC에서 두 점 D, E가 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 또는 그 연장선 위에 있을 때, $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$이면

(1) $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{BC}:\overline{DE}$

(2) $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$



06 Action 먼저 주어진 그래프를 이용하여 a, b의 부호를 결정한다.

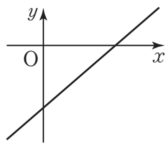
그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

꼭짓점이 x축의 아래쪽에 있으므로 $b<0$ …… 40%

따라서 $y=ax+b$의 그래프에서

(기울기)$=a>0$, (y절편)$=b<0$이므로

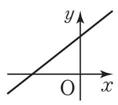
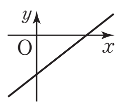
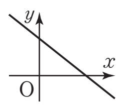
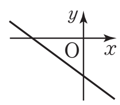
그 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제 2 사분면을 지나지 않는다. …… 60%



Lecture

일차함수의 그래프와 계수의 부호

a, b의 부호에 따른 일차함수 $y=ax+b$의 그래프의 모양과 그래프가 지나는 사분면은 다음과 같다.

$a>0, b>0$	$a>0, b<0$	$a<0, b>0$	$a<0, b<0$
			
제1, 2, 3 사분면을 지난다.	제1, 3, 4 사분면을 지난다.	제1, 2, 4 사분면을 지난다.	제2, 3, 4 사분면을 지난다.

07 Action 두 점 A, B의 x좌표는 $-\frac{1}{3}x^2+q=0$의 해이다.

$y=-\frac{1}{3}x^2+q$에 $y=0$을 대입하면

$0=-\frac{1}{3}x^2+q$, $x^2=3q$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{3q}$

즉 $\mathrm{A}(-\sqrt{3q}, 0)$, $\mathrm{B}(\sqrt{3q}, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3q}-(-\sqrt{3q})=2\sqrt{3q}$

$\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 정수가 되려면 $q=3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

이때 $0<q<40$이므로 구하는 q의 값은 3×1^2, 3×2^2, 3×3^2, 즉 3, 12, 27이다.

08 Action □ABCD=△ABD+△BCD임을 이용한다.

$y=-x^2+m$의 그래프가 점 $\mathrm{D}(2, 0)$을 지나므로

$0=-4+m$ $\quad\therefore m=4$

즉 $y=-x^2+4$의 그래프의 꼭짓점 A의 좌표는 $(0, 4)$이다.

$y=\frac{1}{4}x^2+n$의 그래프가 점 $\mathrm{D}(2, 0)$을 지나므로

$0=1+n$ $\quad\therefore n=-1$

즉 $y=\frac{1}{4}x^2-1$의 그래프의 꼭짓점 C의 좌표는 $(0, -1)$이다.

두 점 B, D는 y축에 대칭이므로 $\mathrm{B}(-2, 0)$

$\therefore$ □ABCD=△ABD+△BCD

$=\frac{1}{2}\times4\times4+\frac{1}{2}\times4\times1$

$=8+2$

$=10$

09 Action (2) 이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2+1$의 그래프는 이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2-3$의 그래프를 평행이동한 것임을 알고 넓이가 같은 부분을 찾는다.

(1) $y=\frac{1}{3}x^2-3$에 $y=0$을 대입하면

$0=\frac{1}{3}x^2-3$, $x^2=9$ $\quad\therefore x=\pm3$

$\therefore \mathrm{A}(-3, 0)$, $\mathrm{B}(3, 0)$

이때 점 C와 점 D의 x좌표가 각각 -3, 3이므로

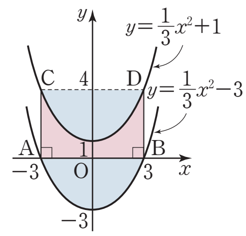
$y=\frac{1}{3}x^2+1$에 $x=-3$을 대입하면

$y=4$ $\quad\therefore \mathrm{C}(-3, 4)$

$y=\frac{1}{3}x^2+1$에 $x=3$을 대입하면

$y=4$ $\quad\therefore \mathrm{D}(3, 4)$

(2) $y=\frac{1}{3}x^2+1$의 그래프는 $y=\frac{1}{3}x^2-3$의 그래프를 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림에서 파란색 부분의 넓이는 서로 같다.



따라서 구하는 넓이는 □ABDC의 넓이와 같으므로

$6\times4=24$

10 Action 먼저 두 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$, $y=a(x-b)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 각각 구한다.

$y=-\frac{1}{2}x^2+2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 2)$이고,

$y=a(x-b)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(b, 0)$이다.

$y=-\frac{1}{2}x^2+2$의 그래프가 점 $(b, 0)$을 지나므로

$0=-\frac{1}{2}b^2+2$, $b^2=4$ $\quad\therefore b=\pm2$

그런데 $b<0$이므로 $b=-2$

즉 $y=a(x+2)^2$의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=4a$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore ab=\frac{1}{2}\times(-2)=-1$

11 Action 이차함수 $y=(x-4)^2$의 그래프는 이차함수 $y=(x+1)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

$y=(x-4)^2$의 그래프는 $y=(x+1)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=5$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}}=5+5=10$

12 Action 두 이차함수 $y=-(x-p)^2+7$, $y=-(x-1)^2+q$의 그래프의 축의 방정식을 이용한다.

이차함수 $y=-(x-p)^2+7$의 그래프의 축의 방정식은 $x=p$, 이차함수 $y=-(x-1)^2+q$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$이다.

이때 $\overline{BC}=2$이고 $\overline{AB}=2\overline{BC}$이므로

$2|p|=2\times2 \qquad \therefore p=-2\ (\because p<0)$

$y=-(x+2)^2+7$에 $x=0$을 대입하면

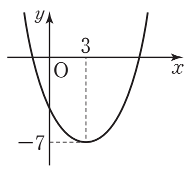
$y=-2^2+7=3 \qquad \therefore B(0, 3),\ k=3$

$y=-(x-1)^2+q$의 그래프가 점 $B(0, 3)$을 지나므로

$3=-(-1)^2+q \qquad \therefore q=4$

$\therefore k+p+q=3+(-2)+4=5$

13 Action 이차함수 $y=a(x-3)^2-7$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 이용하여 모든 사분면을 지나도록 그래프를 그려 본다.



$y=a(x-3)^2-7$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(3, -7)$이므로 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 아래로 볼록해야 한다.

$\therefore a>0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또, 그래프가 y축과 만나는 점이 x축의 아래쪽에 있어야 하므로 $y=a(x-3)^2-7$에 $x=0$을 대입하면 $y=9a-7$

$9a-7<0 \qquad \therefore a<\frac{7}{9} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $0<a<\frac{7}{9}$

최고 수준 뛰어넘기

P 98– P 99

01 (1) $(2\sqrt{2}, 4)$ (2) $2\sqrt{2}-2$		**02** (1) $(4, 4)$ (2) $135°$ (3) 12π	
03 30	**04** 14	**05** 4	**06** $\frac{5}{18}$

01 Action 점 C의 y좌표는 점 P의 y좌표의 2배임을 이용한다.

(1) 점 P의 x좌표가 2이므로 $y=\frac{1}{2}x^2$에 $x=2$를 대입하면

$y=2 \qquad \therefore P(2, 2)$

이때 점 P가 $\overline{BD}$의 중점이므로 점 D의 y좌표는 점 P의 y좌표의 2배이고 두 점 C, D의 y좌표는 같으므로 점 C의 y좌표는 $2\times2=4$

$y=\frac{1}{2}x^2$에 $y=4$를 대입하면

$4=\frac{1}{2}x^2,\ x^2=8 \qquad \therefore x=\pm2\sqrt{2}$

그런데 점 C는 제 1 사분면 위의 점이므로 $C(2\sqrt{2}, 4)$

(2) 점 P의 x좌표가 a이므로 $y=\frac{1}{2}x^2$에 $x=a$를 대입하면

$y=\frac{1}{2}a^2 \qquad \therefore P\left(a, \frac{1}{2}a^2\right)$

위의 (1)에 의하여 점 C의 y좌표는 점 P의 y좌표의 2배이므로

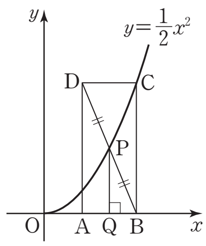
$2\times\frac{1}{2}a^2=a^2 \qquad \therefore \overline{BC}=a^2$

점 C의 y좌표가 a^2이므로 $y=\frac{1}{2}x^2$에 $y=a^2$을 대입하면

$a^2=\frac{1}{2}x^2,\ x^2=2a^2 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{2}a$

그런데 점 C는 제 1 사분면 위의 점이므로

$C(\sqrt{2}a, a^2)$



한편, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라고 하면

$Q(a, 0)$, $B(\sqrt{2}a, 0)$이므로

$\overline{AB}=2(\sqrt{2}a-a)$

따라서 □ABCD가 정사각형이 되려면 $\overline{AB}=\overline{BC}$이어야 하므로

$2(\sqrt{2}a-a)=a^2$

$a^2-(2\sqrt{2}-2)a=0,\ a\{a-(2\sqrt{2}-2)\}=0$

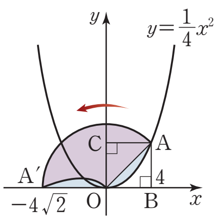
$\therefore a=0$ 또는 $a=2\sqrt{2}-2$

그런데 $a>0$이므로 $a=2\sqrt{2}-2$

02 Action (2) 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B로 놓고 ∠AOB의 크기를 구한다.

(1) 점 A의 x좌표가 4이므로 $y=\frac{1}{4}x^2$에 $x=4$를 대입하면

$y=4 \qquad \therefore A(4, 4)$



(2) 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 B, C라고 하면 □OBAC는 한 변의 길이가 4인 정사각형이고 $\overline{OA}$가 정사각형 OBAC의 대각선이므로 ∠AOB$=45°$이다.

$\therefore$ ∠A′OA$=180°-45°$

$=135°$

(3) 위의 그림에서 파란색 부분의 넓이는 서로 같으므로 구하는 넓이는 부채꼴 A′OA의 넓이와 같다.

따라서 부채꼴 A′OA의 반지름의 길이는 $\overline{OA'}=4\sqrt{2}$이고 중심각의 크기는 $135°$이므로

(구하는 넓이)=(부채꼴 A′OA의 넓이)

$=\pi\times(4\sqrt{2})^2\times\frac{135}{360}$

$=\pi\times32\times\frac{3}{8}$

$=12\pi$

03 **Action** 두 점 A, B의 좌표를 각각 a에 대한 식으로 나타낸 후 직선 AB의 기울기를 구하는 식을 세운다.

$y=2x^2+3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 3)$이므로
$C(0, 3)$
점 A의 좌표는 $(a, 2a^2+3)$,
점 B의 좌표는 $(a+5, 2(a+5)^2+3)$
직선 AB의 기울기가 -2이므로

$$\frac{2(a+5)^2+3-(2a^2+3)}{a+5-a}=-2$$

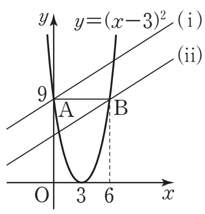
$20a+50=-10$, $20a=-60$
$\therefore a=-3$, 즉 $A(-3, 21)$, $B(2, 11)$
따라서 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은
$y=-2x+15$
직선 AB와 y축이 만나는 점의 좌표를 D라고 하면
$D(0, 15)$

$$\therefore \triangle ACB=\triangle ACD+\triangle DCB$$
$$=\frac{1}{2}\times 12\times 3+\frac{1}{2}\times 12\times 2$$
$$=18+12=30$$

Lecture
두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기
➡ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ (단, $x_1\neq x_2$)

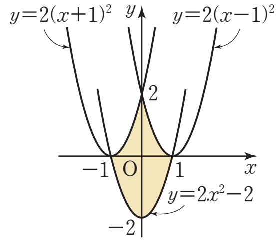
04 **Action** 두 점 A, B의 좌표를 각각 구한 후 일차함수 $y=\frac{2}{3}x+k$의 그래프가 두 점 A, B를 지날 때의 k의 값을 각각 구한다.

$y=(x-3)^2$에 $x=0$을 대입하면
$y=9$ $\quad\therefore A(0, 9)$
이때 두 점 A, B는 축 $x=3$에 대칭이므로 $B(6, 9)$

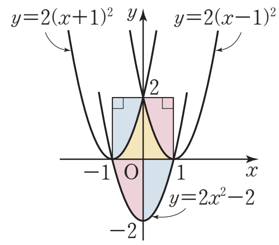


$y=\frac{2}{3}x+k$의 그래프의 y절편이 k이므로 오른쪽 그림에서 k의 값은 $y=\frac{2}{3}x+k$의 그래프가 점 $A(0, 9)$를 지날 때 최대가 되고 점 $B(6, 9)$를 지날 때 최소가 된다.
(i) 점 $A(0, 9)$를 지날 때
$y=\frac{2}{3}x+k$에 $x=0$, $y=9$를 대입하면 $k=9$
(ii) 점 $B(6, 9)$를 지날 때
$y=\frac{2}{3}x+k$에 $x=6$, $y=9$를 대입하면
$9=4+k$ $\quad\therefore k=5$
(i), (ii)에 의하여 구하는 k의 값의 범위는 $5\leq k\leq 9$
따라서 $m=5$, $n=9$이므로
$m+n=5+9=14$

05 **Action** 세 이차함수 $y=2(x+1)^2$, $y=2(x-1)^2$, $y=2x^2-2$의 그래프를 그려서 넓이가 같은 부분을 찾는다.



세 이차함수 $y=2(x+1)^2$, $y=2(x-1)^2$, $y=2x^2-2$의 그래프로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.
세 이차함수의 그래프는 서로 평행이동하면 일치하므로 오른쪽 그림에서 파란색 부분의 넓이는 서로 같고, 빨간색 부분의 넓이는 서로 같다.



따라서 구하는 넓이는 가로의 길이가 2, 세로의 길이가 2인 정사각형의 넓이와 같으므로
$2\times 2=4$

06 **Action** 이차함수 $y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 구한 후 이 그래프가 모든 사분면을 지날 때의 꼭짓점의 위치와 y축과 만나는 점의 위치를 생각한다.

주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6\times 6=36$
이차함수 $y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=-\frac{1}{3}(x-p)^2+q$
이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 (p, q)이고 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표는 $\left(0, -\frac{1}{3}p^2+q\right)$이다.
이때 이 그래프가 모든 사분면을 지나려면 꼭짓점이 제 1 사분면 또는 제 2 사분면 위에 있고 그래프가 y축과 만나는 점이 x축보다 위쪽에 있어야 한다.
(i) 꼭짓점이 제 1 사분면 위에 있는 경우의 꼭짓점의 좌표는
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$이고 이 중에서 $-\frac{1}{3}p^2+q>0$인 경우는
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$의 5가지이다.
(ii) 꼭짓점이 제 2 사분면 위에 있는 경우의 꼭짓점의 좌표는
$(-1, 1)$, $(-1, 2)$, $(-1, 3)$, $(-2, 1)$, $(-2, 2)$, $(-2, 3)$, $(-3, 1)$, $(-3, 2)$, $(-3, 3)$이고 이 중에서 $-\frac{1}{3}p^2+q>0$인 경우는 $(-1, 1)$, $(-1, 2)$, $(-1, 3)$, $(-2, 2)$, $(-2, 3)$의 5가지이다.
따라서 구하는 확률은

$$\frac{5+5}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

2. 이차함수의 활용

최고 수준 입문하기

P 101 – P 104

01 ④

02 꼭짓점의 좌표 : $\left(\frac{3}{2},\ -6\right)$, 축의 방정식 : $x=\frac{3}{2}$

03 ②	04 ③	05 ⑤	06 3
07 ①	08 $(-2, 1)$	09 $(8, 0)$	10 5
11 16	12 -2	13 $a<0, b>0, c>0$	
14 ③	15 ㉡, ㉢	16 24	17 3
18 $\frac{15}{4}$	19 18	20 $-\frac{11}{2}$	21 $(0, 2)$
22 $\left(4, \frac{16}{3}\right)$	23 13	24 -4	

01 Action 이차함수 $y=-\frac{2}{3}x^2-4x+1$을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고친다.

$$y=-\frac{2}{3}x^2-4x+1=-\frac{2}{3}(x^2+6x)+1$$
$$=-\frac{2}{3}(x^2+6x+9-9)+1$$
$$=-\frac{2}{3}(x^2+6x+9)+6+1$$
$$=-\frac{2}{3}(x+3)^2+7$$

따라서 $a=-\frac{2}{3}$, $p=-3$, $q=7$이므로

$$apq=-\frac{2}{3}\times(-3)\times7=14$$

02 Action 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 (p, q)이고 축의 방정식은 $x=p$이다.

$$y=4x^2-12x+3=4(x^2-3x)+3$$
$$=4\left(x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+3$$
$$=4\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)-9+3$$
$$=4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-6$$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ -6\right)$이고 축의 방정식은 $x=\frac{3}{2}$이다.

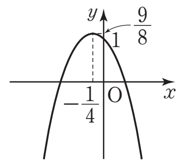
03 Action 이차함수 $y=3x^2+12x+8$을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고친 후 꼭짓점의 좌표와 y축과 만나는 점의 좌표를 이용하여 그래프를 그려 본다.

$$y=3x^2+12x+8=3(x+2)^2-4$$

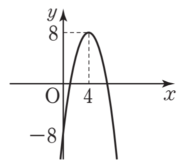
따라서 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ -4)$이고 y축과의 교점 $(0, 8)$을 지나는 아래로 볼록한 포물선을 그리면 ②와 같다.

04 Action 주어진 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고친 후 그래프를 그려 x축과 만나지 않는 것을 찾는다.

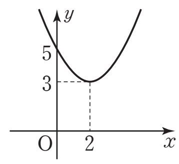
① $y=-2x^2-x+1$
$$=-2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$$



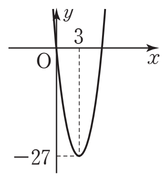
② $y=-x^2+8x-8$
$$=-(x-4)^2+8$$



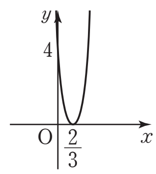
③ $y=\frac{1}{2}x^2-2x+5$
$$=\frac{1}{2}(x-2)^2+3$$



④ $y=3x^2-18x$
$$=3(x-3)^2-27$$



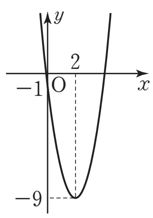
⑤ $y=9x^2-12x+4$
$$=9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2$$



따라서 이차함수의 그래프가 x축과 만나지 않는 것은 ③이다.

05 Action 이차함수 $y=2x^2-8x-1$을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고친 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 찾는다.

$$y=2x^2-8x-1=2(x-2)^2-9$$



① 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ -9)$이다.

② 아래로 볼록한 포물선이다.

③ 축의 방정식은 $x=2$이다.

④ $x>2$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

06 Action 두 이차함수 $y=-3x^2-6x-2$, $y=x^2+2mx+n$을 각각 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고친 후 꼭짓점의 좌표를 비교한다.

$y=-3x^2-6x-2=-3(x+1)^2+1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 1)$이고

$y=x^2+2mx+n=(x+m)^2-m^2+n$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-m,\ -m^2+n)$이다.

두 이차함수의 그래프의 꼭짓점이 일치하므로

$-m=-1$, $-m^2+n=1$에서 $m=1$, $n=2$

$\therefore\ m+n=1+2=3$

07 **Action** 이차함수 $y=-2x^2+4x+k$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 꼭짓점의 y좌표가 0보다 작아야 함을 이용한다.

$y=-2x^2+4x+k=-2(x-1)^2+2+k$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 꼭짓점의 y좌표가 0보다 작아야 한다.

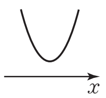
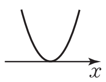
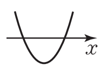
따라서 $2+k<0$이므로 $k<-2$

Lecture

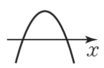
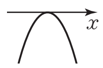
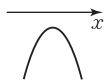
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치면 그래프의 꼭짓점의 좌표는 (p, q)이므로 그래프와 x축의 위치 관계는 a, q의 부호에 따라 다음과 같다.

(1) $a>0$일 때

$q>0$	$q=0$	$q<0$
		
x축과 만나지 않는다.	x축과 한 점에서 만난다. (접한다.)	x축과 두 점에서 만난다.

(2) $a<0$일 때

$q>0$	$q=0$	$q<0$
		
x축과 두 점에서 만난다.	x축과 한 점에서 만난다. (접한다.)	x축과 만나지 않는다.

08 **Action** 이차함수의 그래프에서 증가, 감소하는 범위는 그래프의 축을 기준으로 나뉨을 이용하여 축의 방정식을 구한다.

$x<-2$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하고,

$x>-2$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로

그래프의 축의 방정식은 $x=-2$이다.

즉 $y=\frac{1}{4}x^2+px+2=\frac{1}{4}(x+2p)^2-p^2+2$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-2$이므로

$-2p=-2 \qquad \therefore\ p=1$

따라서 꼭짓점의 좌표는

$(-2p, -p^2+2)$, 즉 $(-2, 1)$

09 **Action** 먼저 주어진 이차함수의 식에 $x=-4$, $y=0$을 대입하여 k의 값을 구하고, x축과의 교점의 x좌표는 $y=0$일 때의 x의 값임을 이용한다.

$y=-\frac{1}{2}x^2+2x+k$의 그래프가 점 $(-4, 0)$을 지나므로

$0=-\frac{1}{2}\times(-4)^2+2\times(-4)+k \qquad \therefore\ k=16$

즉 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+16$에 $y=0$을 대입하면

$-\frac{1}{2}x^2+2x+16=0$, $x^2-4x-32=0$

$(x+4)(x-8)=0$

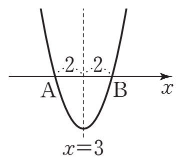
$\therefore\ x=-4$ 또는 $x=8$

따라서 다른 한 점의 좌표는 $(8, 0)$이다.

10 **Action** 두 점 A, B는 축에 대칭이므로 축에서 두 점 A, B까지의 거리가 각각 같음을 이용하여 두 점 A, B의 좌표를 각각 구한다.

$y=x^2-6x+k=(x-3)^2-9+k$의 그래프의 축의 방정식은 $x=3$

이때 $\overline{AB}=4$이므로 축에서 두 점 A, B까지의 거리는 각각 $\frac{4}{2}=2$이다.



따라서 A$(1, 0)$, B$(5, 0)$이므로

$y=x^2-6x+k$에 $x=1$, $y=0$을 대입하면

$0=1-6+k \qquad \therefore\ k=5$

다른 풀이

이차함수 $y=x^2-6x+k$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 해와 같으므로

$x^2-6x+k=0$에서 $x=3\pm\sqrt{9-k}$

$\therefore$ A$(3-\sqrt{9-k}, 0)$, B$(3+\sqrt{9-k}, 0)$

이때 $\overline{AB}=4$이므로

$(3+\sqrt{9-k})-(3-\sqrt{9-k})=4$

$2\sqrt{9-k}=4$, $\sqrt{9-k}=2$

$9-k=4 \qquad \therefore\ k=5$

11 **Action** 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 p, q를 사용하여 나타낸 후 $y=x^2-8x+7$의 그래프와 일치함을 이용하여 p, q의 값을 각각 구한다.

$y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은

$y=(x-p+1)^2+2+q$

이 그래프가 $y=x^2-8x+7=(x-4)^2-9$의 그래프와 일치하므로

$-p+1=-4$, $2+q=-9$

따라서 $p=5$, $q=-11$이므로

$p-q=5-(-11)=16$

다른 풀이

$y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 2)$이고

$y=x^2-8x+7=(x-4)^2-9$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(4, -9)$이다.

x축의 방향으로 5만큼 평행이동

$(-1, 2) \longrightarrow (4, -9)$

y축의 방향으로 -11만큼 평행이동

즉 $y=x^2+2x+3$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -11만큼 평행이동하면 $y=x^2-8x+7$의 그래프와 일치하므로

$p=5, q=-11$

$\therefore p-q=5-(-11)=16$

12 Action x축에 대칭이동한 그래프를 구하려면 $y=x^2-4x$에 y 대신 $-y$를 대입한다.

$y=x^2-4x$의 그래프를 x축에 대칭이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은

$-y=x^2-4x \quad \therefore y=-x^2+4x$ …… 30%

$y=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은

$y=-(x+4-2)^2+4+3$

$=-(x+2)^2+7$

$=-x^2-4x+3$ …… 40%

따라서 $a=-1, b=-4, c=3$이므로 …… 20%

$a+b+c=-1+(-4)+3=-2$ …… 10%

Lecture

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 대칭이동

(1) x축에 대칭이동 : y 대신 $-y$를 대입한다.

➡ $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 x축에 대칭이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은

$-y=ax^2+bx+c \quad \therefore y=-ax^2-bx-c$

(2) y축에 대칭이동 : x 대신 $-x$를 대입한다.

➡ $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 y축에 대칭이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은

$y=a\times(-x)^2+b\times(-x)+c \quad \therefore y=ax^2-bx+c$

13 Action 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 a의 부호는 그래프의 모양에 따라, b의 부호는 축의 위치에 따라, c의 부호는 y축과의 교점의 위치에 따라 결정된다.

그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

축이 y축의 왼쪽에 있으므로

$-ab>0 \quad \therefore b>0$

y축과 만나는 점이 x축의 아래쪽에 있으므로

$-c<0 \quad \therefore c>0$

$\therefore a<0, b>0, c>0$

Lecture

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 b의 부호

$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$이므로 그래프의 축의 방정식은 $x=-\frac{b}{2a}$이다.

(1) 축이 y축의 왼쪽에 있는 경우

$-\frac{b}{2a}<0$이므로 $\frac{b}{2a}>0 \quad \therefore ab>0$

즉 a, b는 같은 부호이다.

(2) 축이 y축의 오른쪽에 있는 경우

$-\frac{b}{2a}>0$이므로 $\frac{b}{2a}<0 \quad \therefore ab<0$

즉 a, b는 다른 부호이다.

14 Action 먼저 주어진 그래프를 이용하여 a, b, c의 부호를 알아본다.

그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $ab>0 \quad \therefore b>0$

y축과 만나는 점이 x축의 아래쪽에 있으므로 $c<0$

즉 $y=cx^2-bx+a$의 그래프는 $c<0$이므로 위로 볼록하고, $-bc>0$이므로 축은 y축의 왼쪽에 있으며 $a>0$이므로 y축과 만나는 점은 x축의 위쪽에 있다.

따라서 $y=cx^2-bx+a$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ③이다.

15 Action 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 $x=k$일 때 $y>0$이면 $ak^2+bk+c>0$이고, $x=k$일 때 $y<0$이면 $ak^2+bk+c<0$임을 이용한다.

㉠ 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0 \quad \therefore b<0$

y축과 만나는 점이 x축의 아래쪽에 있으므로 $c<0$

$\therefore abc>0$

㉡ $x=1$일 때, $y<0$이므로 $a+b+c<0$

㉢ $x=-1$일 때, $y>0$이므로 $a-b+c>0$

㉣ $x=\frac{1}{2}$일 때, $y<0$이므로 $\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c<0$

따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢이다.

16 Action 먼저 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 구한다.

$y=-x^2+2x+8$에 $y=0$을 대입하면

$0=-x^2+2x+8, x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=4$

$\therefore A(-2, 0), B(4, 0)$ …… 50%

$y=-x^2+2x+8$에 $x=0$을 대입하면

$y=8 \quad \therefore C(0, 8)$ …… 20%

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times6\times8=24$ …… 30%

17 **Action** $\triangle ABO=\frac{1}{2}\times\overline{BO}\times$(높이)임을 이용한다. 이때 높이는 점 A의 x좌표와 같다.

$y=-\frac{4}{3}x^2+4x+4=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+7$의 그래프의 꼭짓점 A의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, 7\right)$이다.

$y=-\frac{4}{3}x^2+4x+4$에 $x=0$을 대입하면

$y=4$ $\quad\therefore B(0, 4)$

$\therefore \triangle ABO=\frac{1}{2}\times4\times\frac{3}{2}=3$

18 **Action** $\square ABOC=\triangle ABO+\triangle AOC$임을 이용한다.

$y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x+1)^2+2$의 그래프의 꼭짓점 A의 좌표는 $(-1, 2)$이다.

$y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$에 $y=0$을 대입하면

$0=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$, $x^2+2x-3=0$

$(x-1)(x+3)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=-3$

$\therefore B(-3, 0)$

$y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$에 $x=0$을 대입하면

$y=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore C\left(0, \frac{3}{2}\right)$

이때 $\overline{OC}$를 그으면

$$\square ABOC=\triangle ABO+\triangle AOC$$
$$=\frac{1}{2}\times3\times2+\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times1$$
$$=3+\frac{3}{4}$$
$$=\frac{15}{4}$$

19 **Action** 꼭짓점의 좌표가 $(2, 4)$이므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x-2)^2+4$로 놓는다.

꼭짓점의 좌표가 $(2, 4)$이고 점 $(0, -2)$를 지나므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x-2)^2+4$로 놓고 $x=0$, $y=-2$를 대입하면

$-2=4a+4$, $4a=-6$ $\quad\therefore a=-\frac{3}{2}$

$\therefore y=-\frac{3}{2}(x-2)^2+4=-\frac{3}{2}x^2+6x-2$

따라서 $a=-\frac{3}{2}$, $b=6$, $c=-2$이므로

$abc=-\frac{3}{2}\times6\times(-2)=18$

20 **Action** 이차함수의 그래프를 평행이동하여도 그래프의 모양과 폭은 변하지 않으므로 x^2의 계수는 같음을 이용한다.

조건 (가), (나)에 의하여 $y=-\frac{1}{4}x^2$의 그래프를 평행이동한 것이므로 x^2의 계수는 $-\frac{1}{4}$이고, 축의 방정식이 $x=3$이므로 구하는 이차함수의 식을 $y=-\frac{1}{4}(x-3)^2+q$로 놓자.

조건 (다)에 의하여 $y=-\frac{1}{4}(x-3)^2+q$에 $x=-1$, $y=5$를 대입하면 $5=-4+q$ $\quad\therefore q=9$

$\therefore y=-\frac{1}{4}(x-3)^2+9=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{27}{4}$

따라서 $a=-\frac{1}{4}$, $b=\frac{3}{2}$, $c=\frac{27}{4}$이므로

$a+b-c=-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-\frac{27}{4}=-\frac{11}{2}$

21 **Action** 축의 방정식이 $x=-1$이므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x+1)^2+q$로 놓는다.

축의 방정식이 $x=-1$이므로 구하는 이차함수의 식을
$y=a(x+1)^2+q$로 놓고 …… 20%
$x=-2$, $y=2$를 대입하면 $2=a+q$ …… ㉠
$x=1$, $y=5$를 대입하면 $5=4a+q$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $q=1$ …… 40%
$\therefore y=(x+1)^2+1=x^2+2x+2$ …… 20%
$y=x^2+2x+2$에 $x=0$을 대입하면 $y=2$
따라서 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 2)$이다. …… 20%

22 **Action** 구하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓고 주어진 세 점의 좌표를 각각 대입한다.

구하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓고
$x=0$, $y=4$를 대입하면 $4=c$ …… ㉠
$x=-4$, $y=0$을 대입하면 $0=16a-4b+c$ …… ㉡
$x=2$, $y=5$를 대입하면 $5=4a+2b+c$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{12}$, $b=\frac{2}{3}$, $c=4$

따라서 $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+4=-\frac{1}{12}(x-4)^2+\frac{16}{3}$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(4, \frac{16}{3}\right)$이다.

23 **Action** 구하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓고 주어진 세 점의 좌표를 각각 대입한다.

구하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓고
$x=0$, $y=3$을 대입하면 $3=c$ …… ㉠
$x=1$, $y=4$를 대입하면 $4=a+b+c$ …… ㉡
$x=3$, $y=18$을 대입하면 $18=9a+3b+c$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$, $c=3$
따라서 $y=2x^2-x+3$의 그래프가 점 $(-2, k)$를 지나므로
$k=2\times(-2)^2-(-2)+3=13$

24 Action x축과 두 점 $(-3, 0)$, $(2, 0)$에서 만나므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x+3)(x-2)$로 놓는다.

x축과 두 점 $(-3, 0)$, $(2, 0)$에서 만나고 점 $(0, -6)$을 지나므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x+3)(x-2)$로 놓고 $x=0$, $y=-6$을 대입하면

$-6=-6a$ $\qquad \therefore a=1$

$\therefore y=(x+3)(x-2)=x^2+x-6$

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=-6$이므로

$a+b+c=1+1+(-6)=-4$

최고 수준 완성하기

Ⓟ 105– Ⓟ 108

01 $a=-2$일 때, $(-1, 0)$, $a=3$일 때, $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ **02** 19

03 $a=-6$, $b=3$ **04** -3 **05** 14

06 (1) $f(x)=(x-1)^2+1$, $g(x)=(x+1)^2+1$

(2) $g(x)=f(x+2)$ (3) 9802

07 ㉢, ㉣ **08** 6

09 (1) 27 (2) $\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ (3) $y=x+1$ **10** 27

11 -12 **12** $2\sqrt{6}$ **13** $y=2x^2+8x-10$

01 Action 이차함수의 그래프의 꼭짓점이 x축 위에 있으려면 꼭짓점의 y좌표가 0이어야 한다.

$y=4x^2-4ax+a+6$

$=4(x^2-ax)+a+6$

$=4\left(x^2-ax+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}a^2\right)+a+6$

$=4\left(x-\frac{1}{2}a\right)^2-a^2+a+6$

이 그래프의 꼭짓점이 x축 위에 있으려면 꼭짓점의 y좌표가 0이어야 하므로

$-a^2+a+6=0$, $a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0$ $\qquad \therefore a=-2$ 또는 $a=3$

(i) $a=-2$일 때, 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 0)$

(ii) $a=3$일 때, 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

02 Action 이차함수 $y=2x^2-4mx+n$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구하고 $y=2x+5$에 대입하여 m, n의 값을 각각 구한다.

$y=2x^2-4mx+n$의 그래프가 점 $(1, 11)$을 지나므로

$11=2-4m+n$ $\qquad \therefore n=4m+9$ …… 30%

$y=2x^2-4mx+n=2(x-m)^2-2m^2+n$

$=2(x-m)^2-2m^2+4m+9$ …… 30%

위의 그래프의 꼭짓점 $(m, -2m^2+4m+9)$가 일차함수 $y=2x+5$의 그래프 위에 있으므로

$-2m^2+4m+9=2m+5$, $m^2-m-2=0$

$(m+1)(m-2)=0$ $\qquad \therefore m=-1$ 또는 $m=2$

그런데 $m>0$이므로 $m=2$

$\therefore n=4\times2+9=17$ …… 30%

$\therefore m+n=2+17=19$ …… 10%

03 Action $\mathrm{B}(0, b)$이고 $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=1:3$임을 이용하여 점 A의 좌표를 b를 사용하여 나타낸다.

$y=3x^2+ax+b=3\left(x+\frac{a}{6}\right)^2-\frac{a^2}{12}+b$의 그래프의 꼭짓점 A의 좌표는 $\left(-\frac{a}{6}, -\frac{a^2}{12}+b\right)$

$\therefore -\frac{a^2}{12}+b=0$ …… ㉠

이때 $\mathrm{B}(0, b)$이고 $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=1:3$이므로

$\overline{\mathrm{OA}}:b=1:3$ $\qquad \therefore \overline{\mathrm{OA}}=\frac{b}{3}$, 즉 $\mathrm{A}\left(\frac{b}{3}, 0\right)$

따라서 $-\frac{a}{6}=\frac{b}{3}$에서 $a=-2b$

㉠에 $a=-2b$를 대입하면 $-\frac{b^2}{3}+b=0$

$b^2-3b=0$, $b(b-3)=0$ $\qquad \therefore b=0$ 또는 $b=3$

그런데 $b>0$이므로 $a=-6$, $b=3$

04 Action 먼저 이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리를 구한다.

$y=x^2-4x+3$에 $y=0$을 대입하면

$0=x^2-4x+3$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

즉 $y=x^2-4x+3$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표는 각각 $(1, 0)$, $(3, 0)$이므로 두 점 사이의 거리는 $3-1=2$이다. …… 30%

또, $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은

$y=(x-2)^2-1+k$ …… 20%

이때 이 그래프의 축의 방정식은 $x=2$이고 이 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는 4이어야 하므로 두 점의 좌표는 각각 $(0, 0)$, $(4, 0)$이다. …… 30%

따라서 $y=(x-2)^2-1+k$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$0=4-1+k$ $\qquad \therefore k=-3$ …… 20%

05 Action 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프를 y축에 대칭이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 x 대신 $-x$를 대입하여 구한다.

$y=x^2+ax+b$의 그래프가 점 $(-1, 4)$를 지나므로

$4=1-a+b$ $\qquad \therefore a-b=-3$ …… ㉠

$y=x^2+ax+b$의 그래프를 y축에 대칭이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은

$y=(-x)^2+a\times(-x)+b$ $\qquad \therefore y=x^2-ax+b$

이 그래프가 $y=x^2+cx+d$의 그래프와 일치하므로
$-a=c,\ b=d$
즉 $y=x^2-ax+b$의 그래프가 점 $(2,\ 3)$을 지나므로
$3=4-2a+b \qquad \therefore 2a-b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=7$
$\therefore c=-a=-4,\ d=b=7$
$\therefore a+b+c+d=4+7+(-4)+7=14$

06 Action 두 이차함수 $f(x),\ g(x)$ 사이의 관계를 알아본다.

(1) $f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$
$g(x)=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$

(2) $g(x)=(x+1)^2+1=(x+2-1)^2+1=f(x+2)$

(3) $\dfrac{g(0)g(1)g(2)\cdots g(98)}{f(1)f(2)f(3)\cdots f(99)}=\dfrac{f(2)f(3)f(4)\cdots f(100)}{f(1)f(2)f(3)\cdots f(99)}$
$=\dfrac{f(100)}{f(1)}=\dfrac{100^2-200+2}{1^2-2+2}$
$=9802$

Lecture
$f(x+2)$는 $f(x)$에 x 대신 $x+2$를 대입한 것이므로 $y=f(x+2)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
즉 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것과 같다.

07 Action ㉢ 이차함수의 그래프는 축 $x=\frac{1}{2}$에 대칭임을 이용하여 점 B의 좌표를 구한다.

㉠ 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0 \qquad \therefore b>0$
y축과 만나는 점이 x축의 위쪽에 있으므로 $c>0$
$\therefore abc<0$

㉡ $x=-1$일 때, $y=0$이므로 $a-b+c=0$

㉢ $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 축 $x=\dfrac{1}{2}$에 대칭이므로
x축과 만나는 다른 한 점의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.
따라서 $x=2$일 때, $y=0$이므로 $4a+2b+c=0$

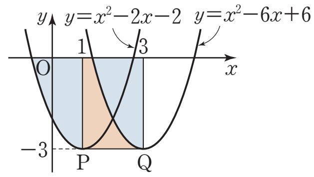
㉣ $x=3$일 때, $y<0$이므로 $9a+3b+c<0$

㉤ $x=\dfrac{1}{2}$일 때, $y>0$이므로 $\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{2}b+c>0$
$\therefore \dfrac{1}{4}(a+2b+4c)>0$

따라서 옳지 않은 것은 ㉢, ㉣이다.

08 Action 이차함수 $y=x^2-6x+6$의 그래프는 이차함수 $y=x^2-2x-2$의 그래프를 평행이동한 것임을 알고 넓이가 같은 부분을 찾는다.

$y=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$의 그래프의 꼭짓점 P의 좌표는 $(1,\ -3)$
$y=x^2-6x+6=(x-3)^2-3$의 그래프의 꼭짓점 Q의 좌표는 $(3,\ -3)$
이때 $y=x^2-6x+6$의 그래프는 $y=x^2-2x-2$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림에서 파란색 부분의 넓이는 서로 같다.

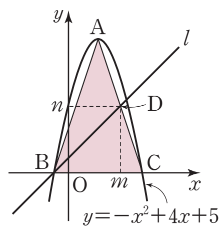


따라서 구하는 넓이는 가로의 길이가 2, 세로의 길이가 3인 직사각형의 넓이와 같으므로 $2\times3=6$

09 Action (2) 직선 l에 의하여 $\triangle$ABC의 넓이가 이등분됨을 이용하여 $\overline{\mathrm{AC}}$와 직선 l의 교점의 y좌표를 구한다.

(1) $y=-x^2+4x+5=-(x-2)^2+9$의 그래프의 꼭짓점 A의 좌표는 $(2,\ 9)$
$y=-x^2+4x+5$에 $y=0$을 대입하면
$0=-x^2+4x+5,\ x^2-4x-5=0$
$(x+1)(x-5)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=5$
즉 $\mathrm{B}(-1,\ 0),\ \mathrm{C}(5,\ 0)$이므로
$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times6\times9=27$

(2) $\overline{\mathrm{AC}}$와 직선 l의 교점 D의 좌표를 $(m,\ n)$이라고 하면 직선 l에 의하여 $\triangle$ABC의 넓이가 이등분되므로



$\triangle\mathrm{DBC}=\dfrac{1}{2}\times6\times n=\dfrac{27}{2}$
$\therefore n=\dfrac{9}{2}$
이때 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 9),\ \mathrm{C}(5,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은
$y=-3x+15$
$y=-3x+15$의 그래프가 점 $\mathrm{D}\left(m,\ \dfrac{9}{2}\right)$를 지나므로
$\dfrac{9}{2}=-3m+15,\ 3m=\dfrac{21}{2} \qquad \therefore m=\dfrac{7}{2}$
따라서 점 D의 좌표는 $\left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{9}{2}\right)$이다.

(3) 직선 l은 두 점 $\mathrm{B}(-1,\ 0),\ \mathrm{D}\left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{9}{2}\right)$를 지나므로
직선 l의 방정식은 $y=x+1$

Lecture
서로 다른 두 점을 지나는 직선의 방정식
서로 다른 두 점 $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)$(단, $x_1\neq x_2$)를 지나는 직선의 방정식은
$$y-y_1=\underbrace{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}_{\text{기울기}}(x-x_1)$$

10 Action 꼭짓점 A의 좌표가 $(1, 9)$이므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2+9$로 놓는다.

꼭짓점 A의 좌표가 $(1, 9)$이고 점 $(-1, 5)$를 지나므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2+9$로 놓고

$x=-1$, $y=5$를 대입하면

$5=4a+9$, $4a=-4$ $\quad\therefore a=-1$

$\therefore y=-(x-1)^2+9=-x^2+2x+8$

$y=-x^2+2x+8$에 $y=0$을 대입하면

$0=-x^2+2x+8$, $x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 $B(-2, 0)$, $C(4, 0)$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times6\times9=27$

11 Action 먼저 $f(-1)=1$, $f(0)=3$, $f(1)=9$임을 이용하여 a, b, c의 값을 각각 구한다.

$f(x)=ax^2+bx+c$에서

$f(-1)=1$이므로 $1=a-b+c$ …… ㉠

$f(0)=3$이므로 $3=c$ …… ㉡

$f(1)=9$이므로 $9=a+b+c$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$, $c=3$

즉 $y=2x^2+4x+3=2(x+1)^2+1$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은

$y=2(x-p+1)^2+1+q$

이 그래프가 $y=2x^2-4x-3=2(x-1)^2-5$의 그래프와 일치하므로

$-p+1=-1$, $1+q=-5$ $\quad\therefore p=2$, $q=-6$

$\therefore pq=2\times(-6)=-12$

12 Action 세 점을 지나는 이차함수의 식을 구한 후 그 식에 $y=0$을 대입하여 x축과 만나는 두 점의 좌표를 구한다.

구하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓고

$x=1$, $y=6$을 대입하면 $6=a+b+c$ …… ㉠

$x=-1$, $y=2$를 대입하면 $2=a-b+c$ …… ㉡

$x=0$, $y=5$를 대입하면 $5=c$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=2$, $c=5$ …… 50%

즉 $y=-x^2+2x+5$에 $y=0$을 대입하면

$0=-x^2+2x+5$, $x^2-2x-5=0$

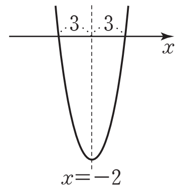
$\therefore x=1\pm\sqrt{6}$

따라서 x축과 만나는 두 점의 좌표는 $(1-\sqrt{6}, 0)$, $(1+\sqrt{6}, 0)$이므로 …… 30%

$\overline{AB}=(1+\sqrt{6})-(1-\sqrt{6})=2\sqrt{6}$ …… 20%

13 Action 축의 방정식이 $x=-2$이고 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 6임을 이용하여 그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표를 구한다.

축의 방정식이 $x=-2$이고 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 6이므로 축에서 x축과 만나는 점까지의 거리는 각각 $\frac{6}{2}=3$이다.



따라서 그래프가 x축과 두 점 $(-5, 0)$, $(1, 0)$에서 만나므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x+5)(x-1)$로 놓고 $x=-4$, $y=-10$을 대입하면

$-10=-5a$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore y=2(x+5)(x-1)=2x^2+8x-10$

최고 수준 뛰어넘기

P 109 – P 110

01 $\frac{1}{3}$	02 ㉠, ㉡	03 $\frac{19}{4}$	04 $-\frac{3}{2}$
05 64	06 $\frac{9}{2}$		

01 Action 아래로 볼록한 이차함수의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 꼭짓점의 y좌표가 0보다 작아야 함을 이용한다.

주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

$y=2x^2-2ax+3b=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}+3b$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 꼭짓점의 y좌표가 0보다 작아야 하므로

$-\frac{a^2}{2}+3b<0$, $-\frac{a^2}{2}<-3b$ $\quad\therefore a^2>6b$

따라서 이 조건을 만족하는 순서쌍 (a, b)는 $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $(5, 4)$, $(6, 1)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$, $(6, 4)$, $(6, 5)$의 12가지이므로 구하는 확률은

$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

02 Action 먼저 조건 ㈎, ㈏를 만족하는 이차함수의 식을 세운다.

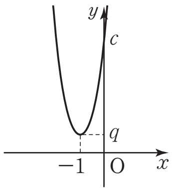
조건 ㈎, ㈏에 의하여 $f(x)=ax^2+bx+c=2(x+1)^2+q$로 놓자.

㉠ $f(-2)=2+q$, $f(2)=18+q$이므로

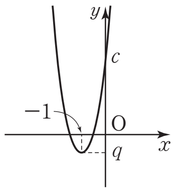
$f(-2)<f(2)$

㉡ $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 -1이다.

ⓒ (i) $c>0$, $q\geq 0$일 때



(ii) $c>0$, $q<0$일 때



즉 $c>0$일 때, $f(x)$의 그래프는 제 2 사분면을 지난다.

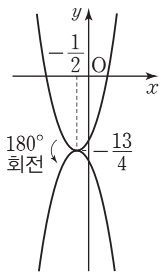
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

03

Action 이차함수 $y=x^2+x-3$의 그래프를 꼭짓점을 중심으로 $180°$ 회전시킨 그래프는 처음 그래프와 꼭짓점과 축이 같고, 위로 볼록하다.

$y=x^2+x-3=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{13}{4}\right)$이다.

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점을 중심으로 $180°$ 회전시킨 그래프는 $y=x^2+x-3$의 그래프와 꼭짓점과 축이 같고 그래프는 위로 볼록하므로



$y=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$

이 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}+k$

$y=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}+k$에 $x=-\frac{3}{2}$, $y=0$을 대입하면

$0=-1-\frac{13}{4}+k \qquad \therefore k=\frac{17}{4}$

$y=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1$에 $x=m$, $y=0$을 대입하면

$0=-\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+1$, $\left(m+\frac{1}{2}\right)^2=1$

$m+\frac{1}{2}=\pm 1 \qquad \therefore m=-\frac{3}{2}$ 또는 $m=\frac{1}{2}$

그런데 $m\neq -\frac{3}{2}$이므로 $m=\frac{1}{2}$

$\therefore k+m=\frac{17}{4}+\frac{1}{2}=\frac{19}{4}$

04

Action $\triangle DEO : \square ABED=1:3$이므로 $\triangle DEO : \triangle ABO=1:4$임을 이용한다.

$y=-x^2-2x+3$에 $y=0$을 대입하면

$0=-x^2-2x+3$, $x^2+2x-3=0$

$(x-1)(x+3)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=-3$

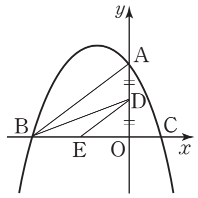
$\therefore$ B$(-3, 0)$, C$(1, 0)$

$\triangle DEO : \square ABED=1:3$이므로

$\triangle DEO : \triangle ABO=1:4$

$\therefore \triangle ABO=4\triangle DEO$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면



$\triangle ABO=2\triangle DBO$이므로

$2\triangle DBO=4\triangle DEO$

$\therefore \triangle DBO=2\triangle DEO$

즉 점 E는 $\overline{BO}$의 중점이므로

E$\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

따라서 점 E의 x좌표는 $-\frac{3}{2}$이다.

05

Action 두 점 A, D가 직선 $x=3$에 대칭임을 이용하여 점 A의 x좌표를 $3-a\,(0<a<3)$라고 할 때 점 D의 x좌표를 a의 식으로 나타낸다.

$y=x^2-6x-3=(x-3)^2-12$

$y=-x^2+6x+3=-(x-3)^2+12$

두 점 A, D는 직선 $x=3$에 대칭이므로 점 A의 x좌표를 $3-a\,(0<a<3)$라고 하면 점 D의 x좌표는 $3+a$이므로

$\overline{AD}=2a$

두 점 A, B의 좌표는 각각 A$(3-a, -a^2+12)$, B$(3-a, a^2-12)$이므로

$\overline{AB}=-a^2+12-(a^2-12)=-2a^2+24$

이때 $\square$ABCD의 둘레의 길이가 40이므로

$40=2(\overline{AD}+\overline{AB})=2(2a-2a^2+24)$

$4a^2-4a-8=0$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=2$

그런데 $0<a<3$이므로 $a=2$

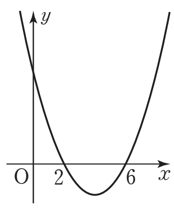
따라서 $\overline{AD}=4$, $\overline{AB}=16$이므로

$\square ABCD=\overline{AD}\times\overline{AB}=4\times 16=64$

06

Action 문제에 주어진 조건을 이용하여 이차함수 $y=ax^2+bx+ab+8$의 그래프를 그려 본다.

$y=ax^2+bx+ab+8$의 그래프를 그려 보면 오른쪽 그림과 같다.



즉 $a>0$이고 x축과 두 점 $(2, 0)$, $(6, 0)$에서 만나므로 이차함수의 식을 $y=a(x-2)(x-6)$으로 놓으면

$y=a(x-2)(x-6)=a(x^2-8x+12)=ax^2-8ax+12a$

$\therefore b=-8a$, $ab+8=12a$

$ab+8=12a$에 $b=-8a$를 대입하면

$-8a^2+8=12a$, $2a^2+3a-2=0$

$(a+2)(2a-1)=0 \qquad \therefore a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

그런데 $a>0$이므로 $a=\frac{1}{2}$

$b=-8a$에 $a=\frac{1}{2}$을 대입하면 $b=-4$

$\therefore a-b=\frac{1}{2}-(-4)=\frac{9}{2}$

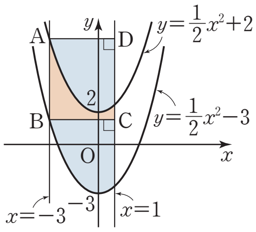
교과서 속 창의 사고력

P 111 – P 112

01 20	**02** $\frac{1}{8}<a<\frac{5}{4}$
03 9초 후	**04** 16 m

01 **Action** 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+2$의 그래프는 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2-3$의 그래프를 평행이동한 것임을 알고 넓이가 같은 부분을 찾는다.

오른쪽 그림과 같이 두 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+2$, $y=\frac{1}{2}x^2-3$의 그래프와 직선 $x=-3$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고 두 점 A, B에서 직선 $x=1$에 내린 수선의 발을 각각 D, C라고 하자.



$y=\frac{1}{2}x^2+2$에 $x=-3$을 대입하면 $y=\frac{13}{2}$

$\therefore$ $A\left(-3, \frac{13}{2}\right)$, $D\left(1, \frac{13}{2}\right)$

$y=\frac{1}{2}x^2-3$에 $x=-3$을 대입하면 $y=\frac{3}{2}$

$\therefore$ $B\left(-3, \frac{3}{2}\right)$, $C\left(1, \frac{3}{2}\right)$

$y=\frac{1}{2}x^2+2$의 그래프는 $y=\frac{1}{2}x^2-3$의 그래프를 평행이동한 것이므로 위의 그림에서 파란색 부분의 넓이는 서로 같다.

따라서 구하는 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같으므로

$\left(\frac{13}{2}-\frac{3}{2}\right)\times\{1-(-3)\}=20$

02 **Action** 이차함수 $y=a(x-1)^2-1$의 그래프가 직사각형 ABCD의 둘레 위의 서로 다른 두 점에서 만나려면 $y=a(x-1)^2-1$의 그래프가 점 A와 점 C 사이를 지나야 함을 이용한다.

$y=a(x-1)^2-1$의 그래프가 직사각형 ABCD의 둘레 위의 서로 다른 두 점에서 만나려면 $y=a(x-1)^2-1$의 그래프가 점 A와 점 C 사이를 지나야 한다.

(i) 점 A(3, 4)를 지날 때

$y=a(x-1)^2-1$에 $x=3$, $y=4$를 대입하면

$4=4a-1$, $4a=5$ $\quad\therefore a=\frac{5}{4}$

(ii) 점 C(5, 1)을 지날 때

$y=a(x-1)^2-1$에 $x=5$, $y=1$을 대입하면

$1=16a-1$, $16a=2$ $\quad\therefore a=\frac{1}{8}$

(i), (ii)에 의하여 $\frac{1}{8}<a<\frac{5}{4}$

03 **Action** $y=-5x^2+40x+45$에 $y=0$을 대입한다.

물 로켓이 지면에 떨어질 때의 지면으로부터의 높이는 0 m이므로

$y=-5x^2+40x+45$에 $y=0$을 대입하면

$0=-5x^2+40x+45$, $x^2-8x-9=0$

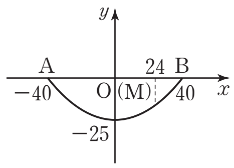
$(x+1)(x-9)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=9$

그런데 $x>0$이므로 $x=9$

따라서 물 로켓이 지면에 떨어지는 것은 쏘아 올린 지 9초 후이다.

04 **Action** 호수의 중앙인 M 지점을 원점으로 하여 좌표평면 위에 호수의 모양을 나타내어 본다.

호수의 중앙인 M 지점을 원점으로 하여 좌표평면 위에 호수의 모양을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 호수의 모양을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=a(x+40)(x-40)$으로 놓으면 그래프가 점 $(0, -25)$를 지나므로

$-25=-1600a$ $\quad\therefore a=\frac{1}{64}$

$\therefore y=\frac{1}{64}(x+40)(x-40)=\frac{1}{64}x^2-25$

$y=\frac{1}{64}x^2-25$에 $x=24$를 대입하면

$y=\frac{1}{64}\times24^2-25=9-25=-16$

따라서 구하는 수심은 16 m이다.