내신을 철저하게
대비해 주는
교과서 쌍둥이 문제

정답과 해설

Ⅰ. 이차곡선

1. 이차곡선

1-1 포물선의 방정식

내신 대비 쌍둥이 문제 29~31쪽

1-1 (1) $x^2=3y$ (2) $x^2=-10y$

2-1 (1) 초점의 좌표: $(0,\ 3)$

준선의 방정식: $y=-3$, 그래프는 풀이 참조

(2) 초점의 좌표: $\left(0,\ -\frac{1}{24}\right)$

준선의 방정식: $y=\frac{1}{24}$, 그래프는 풀이 참조

3-1 (1) $y^2=-12x$ (2) $y^2=5x$

4-1 (1) 초점의 좌표: $\left(\frac{9}{4},\ 0\right)$

준선의 방정식: $x=-\frac{9}{4}$, 그래프는 풀이 참조

(2) 초점의 좌표: $\left(-\frac{7}{2},\ 0\right)$

준선의 방정식: $x=\frac{7}{2}$, 그래프는 풀이 참조

5-1 (1) 포물선의 방정식: $(x+3)^2=12(y+1)$

초점의 좌표: $(-3,\ 2)$, 준선의 방정식: $y=-4$

(2) 포물선의 방정식: $(y+1)^2=20(x+3)$

초점의 좌표: $(2,\ -1)$, 준선의 방정식: $x=-8$

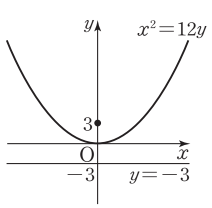
6-1 (1) 초점의 좌표: $\left(-5,\ \frac{21}{4}\right)$, 준선의 방정식: $y=\frac{19}{4}$

(2) 초점의 좌표: $\left(-\frac{1}{2},\ 4\right)$, 준선의 방정식: $x=-\frac{3}{2}$

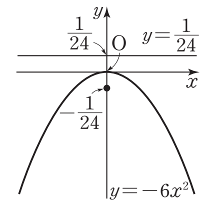
1-1 (1) $x^2=4\times\frac{3}{4}\times y$, 즉 $x^2=3y$

(2) $x^2=4\times\left(-\frac{5}{2}\right)\times y$, 즉 $x^2=-10y$

2-1 (1) $x^2=12y=4\times3\times y$이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(0,\ 3)$, 준선의 방정식은 $y=-3$이다.
또, 그 그래프는 다음 그림과 같다.



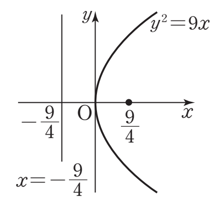
(2) $y=-6x^2$에서 $x^2=-\frac{1}{6}y=4\times\left(-\frac{1}{24}\right)\times y$이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(0,\ -\frac{1}{24}\right)$, 준선의 방정식은 $y=\frac{1}{24}$이다.
또, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



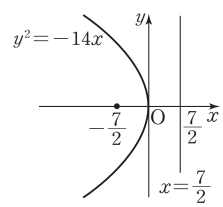
3-1 (1) $y^2=4\times(-3)\times x$, 즉 $y^2=-12x$

(2) $y^2=4\times\frac{5}{4}\times x$, 즉 $y^2=5x$

4-1 (1) $y^2=9x=4\times\frac{9}{4}\times x$이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(\frac{9}{4},\ 0\right)$, 준선의 방정식은 $x=-\frac{9}{4}$이다.
또, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $y^2=-14x=4\times\left(-\frac{7}{2}\right)\times x$이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(-\frac{7}{2},\ 0\right)$, 준선의 방정식은 $x=\frac{7}{2}$이다.
또, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



5-1 (1) 주어진 포물선을 평행이동하면 구하는 것은 각각 다음과 같다.

포물선 $x^2=12y$	x축의 방향으로 -3만큼 / 평행이동 / y축의 방향으로 -1만큼	포물선 $(x+3)^2=12(y+1)$
$(0,\ 3)$	초점의 좌표	$(-3,\ 2)$
$y=-3$	준선의 방정식	$y=-4$

(2) 주어진 포물선을 평행이동하면 구하는 것은 각각 다음과 같다.

포물선 $y^2=20x$	x축의 방향으로 -3만큼 / 평행이동 / y축의 방향으로 -1만큼	포물선 $(y+1)^2=20(x+3)$
$(5,\ 0)$	초점의 좌표	$(2,\ -1)$
$x=-5$	준선의 방정식	$x=-8$

6-1 (1) 주어진 포물선의 방정식을 변형하면

$(x+5)^2=y-5$

이 포물선은 포물선 $x^2=y$를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(-5, \frac{21}{4}\right)$,

준선의 방정식은 $y=\frac{19}{4}$이다.

(2) 주어진 포물선의 방정식을 변형하면

$(y-4)^2=2(x+1)$

이 포물선은 포물선 $y^2=2x$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$,

준선의 방정식은 $x=-\frac{3}{2}$이다.

소단원 **확인 문제** 33~34쪽

1-1 (1) $x^2=\frac{20}{3}y$ (2) $x^2=-6y$ (3) $y^2=2x$ (4) $y^2=-3x$

2-1 2

3-1 -5

4-1 $a=3$, $b=-4$

1-1 (1) $x^2=4\times\frac{5}{3}\times y$, 즉 $x^2=\frac{20}{3}y$

(2) $x^2=4\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times y$, 즉 $x^2=-6y$

(3) $y^2=4\times\frac{1}{2}\times x$, 즉 $y^2=2x$

(4) $y^2=4\times\left(-\frac{3}{4}\right)\times x$, 즉 $y^2=-3x$

2-1 초점이 $F(2, 0)$이고 준선이 $x=-2$인 포물선의 방정식은 $y^2=4\times2\times x$, 즉 $y^2=8x$이므로

$4^2=8a$, $16=8a$ $\quad\therefore a=2$

3-1 $x^2=-12y=4\times(-3)\times y$이므로 주어진 포물선의 초점 F의 좌표는 $(0, -3)$, 준선의 방정식은 $y=3$이다.

포물선의 정의에 의하여 초점 F와 포물선 위의 점 P 사이의 거리는 준선 $y=3$과 점 P 사이의 거리와 같으므로 점 P의 y좌표를 a라고 하면

$3-a=8$ $\quad\therefore a=-5$

4-1 포물선 $(x+3)^2=12(y-1)$은 포물선 $x^2=12y$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(-3, 4)$이고, 이 점을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(-3+a, 4+b)$이므로

$-3+a=0$, $4+b=0$ $\quad\therefore a=3$, $b=-4$

1-2 타원의 방정식

내신 대비 쌍둥이 문제 35~38쪽

1-1 (1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ (2) $\frac{4x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$

2-1 (1) 초점의 좌표: $(2, 0)$, $(-2, 0)$, 장축의 길이: 6

단축의 길이: $2\sqrt{5}$, 그래프는 풀이 참조

(2) 초점의 좌표: $(3, 0)$, $(-3, 0)$, 장축의 길이: $2\sqrt{10}$

단축의 길이: 2, 그래프는 풀이 참조

3-1 (1) $\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{16}=1$ (2) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$

4-1 (1) 초점의 좌표: $(0, \sqrt{13})$, $(0, -\sqrt{13})$

장축의 길이: 10, 단축의 길이: $4\sqrt{3}$

그래프는 풀이 참조

(2) 초점의 좌표: $(0, 2\sqrt{3})$, $(0, -2\sqrt{3})$

장축의 길이: 8, 단축의 길이: 4

그래프는 풀이 참조

5-1 (1) 타원의 방정식: $\frac{(x+4)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

꼭짓점의 좌표: $(0, 2)$, $(-8, 2)$, $(-4, 5)$, $(-4, -1)$

초점의 좌표 : $(\sqrt{7}-4, 2)$, $(-\sqrt{7}-4, 2)$

(2) 타원의 방정식: $\frac{(x+4)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$

꼭짓점의 좌표: $(0, 2)$, $(-8, 2)$, $(-4, 7)$, $(-4, -3)$

초점의 좌표 : $(-4, 5)$, $(-4, -1)$

6-1 (1) 초점의 좌표 : $(7, 1)$, $(-1, 1)$

장축의 길이: 10, 단축의 길이: 6

(2) 초점의 좌표 : $(-1, 2+\sqrt{2})$, $(-1, 2-\sqrt{2})$

장축의 길이: 4, 단축의 길이: $2\sqrt{2}$

1-1 (1) 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라고 하면,

$c=1$이고 $2a=4$에서 $a=2$이므로

$b^2=a^2-c^2=4-1=3$

따라서 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$이다.

(2) 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라고 하면,

$c=\frac{1}{2}$이고 $2a=3$에서 $a=\frac{3}{2}$이므로

$b^2=a^2-c^2=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=2$

따라서 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y^2}{2}=1$, 즉

$\frac{4x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$이다.

2-1 (1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$에서 $a^2=9$, $b^2=5$이므로

$c^2=a^2-b^2=9-5=4$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는

$(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$

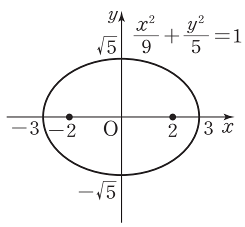
장축의 길이는

$2a=6$

단축의 길이는

$2b=2\sqrt{5}$

또, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $x^2+10y^2=10$을 변형하면 $\frac{x^2}{10}+y^2=1$에서

$a^2=10$, $b^2=1$이므로

$c^2=a^2-b^2=10-1=9$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는

$(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$

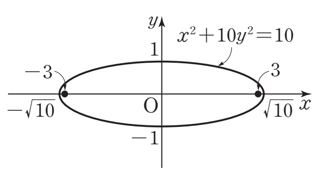
장축의 길이는

$2a=2\sqrt{10}$

단축의 길이는

$2b=2$

또, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



3-1 (1) 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라고 하면,

$c=\sqrt{5}$이고 $2b=8$에서 $b=4$이므로

$a^2=b^2-c^2=16-5=11$

따라서 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{16}=1$이다.

(2) 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라고 하면,

$c=2$이고 $2b=6$에서 $b=3$이므로

$a^2=b^2-c^2=9-4=5$

따라서 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$이다.

4-1 (1) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{25}=1$에서 $a^2=12$, $b^2=25$이므로

$c^2=b^2-a^2=25-12=13$

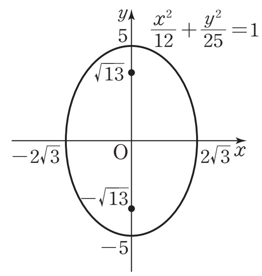
따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는

$(0,\ \sqrt{13})$, $(0,\ -\sqrt{13})$

장축의 길이는 $2b=10$

단축의 길이는 $2a=4\sqrt{3}$

또, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $4x^2+y^2=16$을 변형하면 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$에서

$a^2=4$, $b^2=16$이므로

$c^2=b^2-a^2=16-4=12$

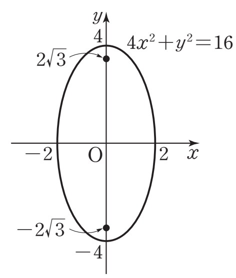
따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는

$(0,\ 2\sqrt{3})$, $(0,\ -2\sqrt{3})$

장축의 길이는 $2b=8$

단축의 길이는 $2a=4$

또, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



5-1 (1) 주어진 타원을 평행이동하면 구하는 것은 각각 다음과 같다.

타원	평행이동 (x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼)	타원
$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$		$\frac{(x+4)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$
$(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$, $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$	꼭짓점의 좌표	$(0,\ 2)$, $(-8,\ 2)$, $(-4,\ 5)$, $(-4,\ -1)$
$(\sqrt{7},\ 0)$, $(-\sqrt{7},\ 0)$	초점의 좌표	$(\sqrt{7}-4,\ 2)$, $(-\sqrt{7}-4,\ 2)$

(2) 주어진 타원을 평행이동하면 구하는 것은 각각 다음과 같다.

타원	x축의 방향으로 -4만큼 평행이동 y축의 방향으로 2만큼	타원
$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$	→	$\frac{(x+4)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$
$(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$, $(0,\ 5)$, $(0,\ -5)$	꼭짓점의 좌표	$(0,\ 2)$, $(-8,\ 2)$, $(-4,\ 7)$, $(-4,\ -3)$
$(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$	초점의 좌표	$(-4,\ 5)$, $(-4,\ -1)$

6-1 (1) 주어진 타원의 방정식을 변형하면

$9(x-3)^2+25(y-1)^2=225$에서

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

이 타원은 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$의 초점의 좌표가 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$이므로 주어진 타원의 초점의 좌표는

$(7,\ 1)$, $(-1,\ 1)$

장축의 길이 $2\times5=10$, 단축의 길이 $2\times3=6$이다.

(2) 주어진 타원의 방정식을 변형하면

$2(x+1)^2+(y-2)^2=4$에서

$$\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

이 타원은 타원 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 타원 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$의 초점의 좌표가 $(0,\ \sqrt{2})$, $(0,\ -\sqrt{2})$이므로 주어진 타원의 초점의 좌표는

$(-1,\ 2+\sqrt{2})$, $(-1,\ 2-\sqrt{2})$

장축의 길이 $2\times2=4$, 단축의 길이 $2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$이다.

소단원 확인 문제 40~41쪽

1-1 (1) 초점의 좌표: $(\sqrt{21},\ 0)$, $(-\sqrt{21},\ 0)$

장축의 길이: 10, 단축의 길이: 4

(2) 초점의 좌표: $(0,\ \sqrt{13})$, $(0,\ -\sqrt{13})$

장축의 길이: 14, 단축의 길이: 12

2-1 $3\sqrt{10}-8$

3-1 20

1-1 (1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$에서 $a^2=25$, $b^2=4$이므로

$c^2=a^2-b^2=25-4=21$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는

$(\sqrt{21},\ 0)$, $(-\sqrt{21},\ 0)$

장축의 길이는 $2a=10$

단축의 길이는 $2b=4$이다.

(2) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{49}=1$에서 $a^2=36$, $b^2=49$이므로

$c^2=b^2-a^2=49-36=13$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는

$(0,\ \sqrt{13})$, $(0,\ -\sqrt{13})$

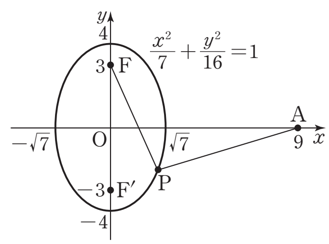
장축의 길이는 $2b=14$

단축의 길이는 $2a=12$이다.

2-1 타원 $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$에서 $a^2=7$, $b^2=16$이므로

$c^2=b^2-a^2=16-7=9$

따라서 주어진 타원의 초점은 $\mathrm{F}(0,\ 3)$, $\mathrm{F'}(0,\ -3)$이다.



이때 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{F'P}}=2b=8$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{FP}}&=\overline{\mathrm{AP}}-(8-\overline{\mathrm{F'P}})\\&=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{F'P}}-8\\&\ge\overline{\mathrm{AF'}}-8\end{aligned}$$

이때 $\overline{\mathrm{AF'}}=\sqrt{9^2+(-3)^2}=3\sqrt{10}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{FP}}$의 최솟값은 $3\sqrt{10}-8$이다.

3-1 타원 $\frac{(x+2)^2}{a}+\frac{(y-3)^2}{36}=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 타원

$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{36}=1$이 된다.

이때 주어진 타원의 두 초점 $\mathrm{F}(-2,\ 7)$, $\mathrm{F'}(-2,\ -1)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표가 각각 $(0,\ 4)$, $(0,\ -4)$이므로

$4^2=36-a \qquad \therefore a=20$

1-3 쌍곡선의 방정식

내신 대비 쌍둥이 문제 42~47쪽

1-1 (1) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ (2) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$

2-1 (1) 초점의 좌표: $(7, 0)$, $(-7, 0)$
꼭짓점의 좌표: $(5, 0)$, $(-5, 0)$
주축의 길이: 10, 그래프는 풀이 참조
(2) 초점의 좌표: $(6, 0)$, $(-6, 0)$
꼭짓점의 좌표: $(4, 0)$, $(-4, 0)$
주축의 길이: 8, 그래프는 풀이 참조

3-1 (1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$ (2) $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{49}=-1$

4-1 (1) 초점의 좌표: $(0, 8)$, $(0, -8)$
꼭짓점의 좌표: $(0, 4)$, $(0, -4)$
주축의 길이: 8, 그래프는 풀이 참조
(2) 초점의 좌표: $(0, 4)$, $(0, -4)$
꼭짓점의 좌표: $(0, 2)$, $(0, -2)$
주축의 길이: 4, 그래프는 풀이 참조

5-1 (1) 점근선의 방정식: $y=\pm\frac{5}{4}x$
그래프는 풀이 참조
(2) 점근선의 방정식: $y=\pm\frac{1}{2}x$
그래프는 풀이 참조

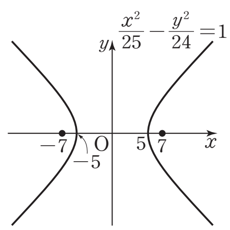
6-1 (1) 쌍곡선의 방정식: $\frac{(x+3)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{20}=1$
꼭짓점의 좌표: $(1, 2)$, $(-7, 2)$
초점의 좌표: $(3, 2)$, $(-9, 2)$
점근선의 방정식: $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x+3)+2$
(2) 쌍곡선의 방정식: $\frac{(x+3)^2}{5}-\frac{(y-2)^2}{4}=-1$
꼭짓점의 좌표: $(-3, 4)$, $(-3, 0)$
초점의 좌표: $(-3, 5)$, $(-3, -1)$
점근선의 방정식: $y=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}(x+3)+2$

7-1 (1) 중심의 좌표: $(-1, 3)$
꼭짓점의 좌표: $(2, 3)$, $(-4, 3)$
초점의 좌표: $(6, 3)$, $(-8, 3)$
(2) 중심의 좌표: $(2, 1)$
꼭짓점의 좌표: $(2, 3)$, $(2, -1)$
초점의 좌표: $(2, 1+\sqrt{7})$, $(2, 1-\sqrt{7})$

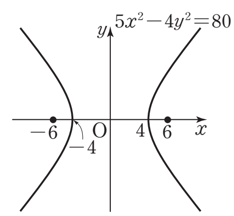
8-1 (1) 포물선 (2) 타원 (3) 쌍곡선 (4) 쌍곡선

1-1 (1) 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라고 하면,
$c=2$이고 $2a=2\sqrt{2}$에서 $a=\sqrt{2}$이므로
$b^2=c^2-a^2=4-2=2$
따라서 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$이다.
(2) 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라고 하면,
$c=6$이고 $2a=10$에서 $a=5$이므로
$b^2=c^2-a^2=36-25=11$
따라서 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$이다.

2-1 (1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$에서 $a^2=25$, $b^2=24$이므로
$c^2=a^2+b^2=25+24=49$
따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는
$(7, 0)$, $(-7, 0)$
꼭짓점의 좌표는
$(5, 0)$, $(-5, 0)$
주축의 길이는
$2a=10$
또, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $5x^2-4y^2=80$을 변형하면
$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$에서 $a^2=16$, $b^2=20$이므로
$c^2=a^2+b^2=16+20=36$
따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는
$(6, 0)$, $(-6, 0)$
꼭짓점의 좌표는
$(4, 0)$, $(-4, 0)$
주축의 길이는
$2a=8$
또, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



3-1 (1) 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$이라고 하면,
$c=5$이고 $2b=8$에서 $b=4$이므로
$a^2=c^2-b^2=25-16=9$
따라서 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$이다.

(2) 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$이라고 하면,

$c=8$이고 $2b=14$에서 $b=7$이므로

$a^2=c^2-b^2=64-49=15$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{15}-\dfrac{y^2}{49}=-1$이다.

4-1 (1) $\dfrac{x^2}{48}-\dfrac{y^2}{16}=-1$에서 $a^2=48$, $b^2=16$이므로

$c^2=a^2+b^2=48+16=64$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(0,\ 8)$, $(0,\ -8)$

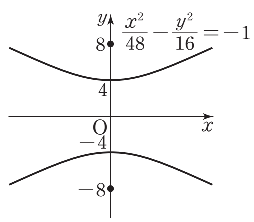
꼭짓점의 좌표는

$(0,\ 4)$, $(0,\ -4)$

주축의 길이는

$2b=8$

또, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $x^2-3y^2=-12$를 변형하면

$\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=-1$에서 $a^2=12$, $b^2=4$이므로

$c^2=a^2+b^2=12+4=16$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(0,\ 4)$, $(0,\ -4)$

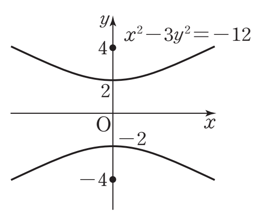
꼭짓점의 좌표는

$(0,\ 2)$, $(0,\ -2)$

주축의 길이는

$2b=4$

또, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

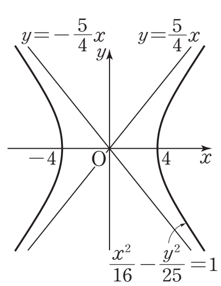


5-1 (1) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=1$에서 $a=4$, $b=5$이므로 점근선의 방정식은 $y=\pm\dfrac{5}{4}x$

이때 꼭짓점의 좌표는

$(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$

이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



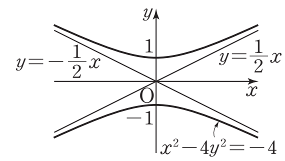
(2) $x^2-4y^2=-4$를 변형하면 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=-1$에서 $a=2$, $b=1$이므로 점근선의 방정식은

$y=\pm\dfrac{1}{2}x$

이때 꼭짓점의 좌표는

$(0,\ 1)$, $(0,\ -1)$

이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



6-1 (1) 주어진 쌍곡선을 평행이동하면 구하는 것은 각각 다음과 같다.

쌍곡선	x축의 방향으로 -3만큼 / 평행이동 / y축의 방향으로 2만큼	쌍곡선
$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{20}=1$	→	$\dfrac{(x+3)^2}{16}-\dfrac{(y-2)^2}{20}=1$
$(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$	꼭짓점의 좌표	$(1,\ 2)$, $(-7,\ 2)$
$(6,\ 0)$, $(-6,\ 0)$	초점의 좌표	$(3,\ 2)$, $(-9,\ 2)$
$y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$	점근선의 방정식	$y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}(x+3)+2$

(2) 주어진 쌍곡선을 평행이동하면 구하는 것은 각각 다음과 같다.

쌍곡선	x축의 방향으로 -3만큼 / 평행이동 / y축의 방향으로 2만큼	쌍곡선
$\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=-1$	→	$\dfrac{(x+3)^2}{5}-\dfrac{(y-2)^2}{4}=-1$
$(0,\ 2)$, $(0,\ -2)$	꼭짓점의 좌표	$(-3,\ 4)$, $(-3,\ 0)$
$(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$	초점의 좌표	$(-3,\ 5)$, $(-3,\ -1)$
$y=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}x$	점근선의 방정식	$y=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}(x+3)+2$

7-1 (1) 주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면

$40(x+1)^2-9(y-3)^2=360$에서

$\dfrac{(x+1)^2}{9}-\dfrac{(y-3)^2}{40}=1$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{40}=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{40}=1$의 중심의 좌표는 $(0,\ 0)$, 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$, 초점의 좌표는 $(7,\ 0)$, $(-7,\ 0)$이므로

주어진 쌍곡선의 중심의 좌표는 $(-1,\ 3)$

꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 3)$, $(-4,\ 3)$

초점의 좌표는 $(6,\ 3)$, $(-8,\ 3)$이다.

(2) 주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면

$4(x-2)^2-3(y-1)^2=-12$에서

$\frac{(x-2)^2}{3}-\frac{(y-1)^2}{4}=-1$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=-1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=-1$의 중심의 좌표는 $(0, 0)$, 꼭짓점의 좌표는 $(0, 2)$, $(0, -2)$, 초점의 좌표는 $(0, \sqrt{7})$, $(0, -\sqrt{7})$이므로

주어진 쌍곡선의 중심의 좌표는 $(2, 1)$

꼭짓점의 좌표는 $(2, 3)$, $(2, -1)$

초점의 좌표는 $(2, 1+\sqrt{7})$, $(2, 1-\sqrt{7})$이다.

8-1 (1) 주어진 이차방정식을 변형하면

$(y-2)^2=8(x+1)$

이므로 이 이차방정식은 포물선을 나타낸다.

(2) 주어진 이차방정식을 변형하면

$(x-2)^2+2(y+1)^2=8$, 즉

$\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$

이므로 이 이차방정식은 타원을 나타낸다.

(3) 주어진 이차방정식을 변형하면

$(x-1)^2-3(y+2)^2=6$, 즉

$\frac{(x-1)^2}{6}-\frac{(y+2)^2}{2}=1$

이므로 이 이차방정식은 쌍곡선을 나타낸다.

(4) 주어진 이차방정식을 변형하면

$(x+2)^2-(y-1)^2=-8$, 즉

$\frac{(x+2)^2}{8}-\frac{(y-1)^2}{8}=-1$

이므로 이 이차방정식은 쌍곡선을 나타낸다.

소단원 **확인 문제** 49~50쪽

1-1 (1) × (2) ○ (3) × **2-1** 8

3-1 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=-1$

4-1 $p=4$, $q=5$

1-1 (1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$에서 $c^2=a^2+b^2=12$이므로 초점의 좌표는 $(2\sqrt{3}, 0)$, $(-2\sqrt{3}, 0)$이다. (×)

(2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$에서 $a=3$이므로 주축의 길이는 $2a=6$이다. (○)

(3) 쌍곡선 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$이다. (×)

2-1 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$이라고 하면 초점의 좌표가 $(0, 2\sqrt{5})$, $(0, -2\sqrt{5})$이므로

$a^2+b^2=20$ ……①

또, 점근선의 방정식이 $y=\pm 2x$이므로 $\frac{b}{a}=2$

$\therefore b=2a$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면

$5a^2=20$ $\therefore a=2, b=4$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는 $2b=2\times4=8$

3-1 점 $(2, \sqrt{3})$은 점근선 $y=\frac{1}{2}x$보다 위쪽에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1(a>0, b>0)$이라고 하자.

점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{1}{2}x$이므로 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$

$\therefore a=2b$ ……①

또, 점 $(2, \sqrt{3})$이 쌍곡선 위의 점이므로

$\frac{2^2}{a^2}-\frac{(\sqrt{3})^2}{b^2}=-1$에서 $\frac{4}{a^2}-\frac{3}{b^2}=-1$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면

$\frac{4}{4b^2}-\frac{3}{b^2}=-1$, $-\frac{2}{b^2}=-1$ $\therefore b^2=2$

①에서 $a^2=4b^2=8$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=-1$이다.

4-1 쌍곡선 $\frac{(x-2)^2}{p}-\frac{(y-1)^2}{q}=1$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 쌍곡선

$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=1$이 된다.

이때 주축의 길이가 4이므로 $2\sqrt{p}=4$에서 $p=4$

또, 두 초점의 좌표 $(5, 1)$, $(-1, 1)$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는 각각 $(3, 0)$, $(-3, 0)$이다.

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=1$의 두 초점의 좌표는 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$이므로

$3^2=4+q \qquad \therefore q=5$

중단원 연습 문제 53~59쪽

1-1 (1) $y^2=3x$ (2) $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ (3) $\frac{x^2}{11}-\frac{y^2}{25}=-1$

2-1 (1) 초점의 좌표 : $\left(0,\ \frac{25}{4}\right)$, 준선의 방정식 $y=-\frac{25}{4}$

(2) 초점의 좌표: $(0,\ -4)$, 준선의 방정식: $y=4$

(3) 초점의 좌표: $(4,\ 0)$, 준선의 방정식: $x=-4$

(4) 초점의 좌표: $\left(-\frac{25}{4},\ 0\right)$, 준선의 방정식: $x=\frac{25}{4}$

3-1 (1) 초점의 좌표: $(2\sqrt{3},\ 0)$, $(-2\sqrt{3},\ 0)$

장축의 길이: 8, 단축의 길이: 4

(2) 초점의 좌표: $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$

장축의 길이: $2\sqrt{15}$, 단축의 길이: $2\sqrt{6}$

(3) 초점의 좌표: $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$

장축의 길이: $2\sqrt{10}$, 단축의 길이: $2\sqrt{6}$

(4) 초점의 좌표: $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$

장축의 길이: $2\sqrt{17}$, 단축의 길이: $4\sqrt{2}$

4-1 (1) 초점의 좌표: $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$

주축의 길이: $6\sqrt{2}$, 점근선의 방정식: $y=\pm\frac{\sqrt{14}}{6}x$

(2) 초점의 좌표: $(0,\ 7)$, $(0,\ -7)$

주축의 길이: $2\sqrt{17}$, 점근선의 방정식: $y=\pm\frac{\sqrt{34}}{8}x$

(3) 초점의 좌표: $(\sqrt{6},\ 0)$, $(-\sqrt{6},\ 0)$

주축의 길이: $2\sqrt{2}$, 점근선의 방정식: $y=\pm\sqrt{2}x$

(4) 초점의 좌표: $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$

주축의 길이: $4\sqrt{2}$, 점근선의 방정식: $y=\pm 2\sqrt{2}x$

5-1 8 **6-1** 6

7-1 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

8-1 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$

9-1 28 **10-1** 6π

1-1 (1) $y^2=4\times\frac{3}{4}\times x$, 즉 $y^2=3x$

(2) 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라고 하면,

$c=2\sqrt{2}$이고 $2a=6$에서 $a=3$이므로

$b^2=a^2-c^2=9-8=1$

따라서 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$이다.

(3) 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$이라고 하면,

$c=6$이고 $2b=10$에서 $b=5$이므로

$a^2=c^2-b^2=36-25=11$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{11}-\frac{y^2}{25}=-1$이다.

2-1 (1) $x^2=25y=4\times\frac{25}{4}\times y$이므로 초점의 좌표는 $\left(0,\ \frac{25}{4}\right)$,

준선의 방정식은 $y=-\frac{25}{4}$이다.

(2) $x^2=-16y=4\times(-4)\times y$이므로 초점의 좌표는 $(0,\ -4)$, 준선의 방정식은 $y=4$이다.

(3) $y^2=16x=4\times 4\times x$이므로 초점의 좌표는 $(4,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-4$이다.

(4) $y^2=-25x=4\times\left(-\frac{25}{4}\right)\times x$이므로 초점의 좌표는 $\left(-\frac{25}{4},\ 0\right)$, 준선의 방정식은 $x=\frac{25}{4}$이다.

3-1 (1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$에서 $a^2=16$, $b^2=4$이므로

$c^2=a^2-b^2=16-4=12$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는

$(2\sqrt{3},\ 0)$, $(-2\sqrt{3},\ 0)$

장축의 길이는 $2a=8$

단축의 길이는 $2b=4$

(2) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{15}=1$에서 $a^2=6$, $b^2=15$이므로

$c^2=b^2-a^2=15-6=9$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는

$(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$

장축의 길이는 $2b=2\sqrt{15}$

단축의 길이는 $2a=2\sqrt{6}$

(3) $3x^2+5y^2=30$을 변형하면 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$에서

$a^2=10$, $b^2=6$이므로

$c^2=a^2-b^2=10-6=4$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는

$(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$

장축의 길이는 $2a=2\sqrt{10}$

단축의 길이는 $2b=2\sqrt{6}$

(4) $17x^2+8y^2=136$을 변형하면 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{17}=1$에서

$a^2=8$, $b^2=17$ 이므로

$c^2=b^2-a^2=17-8=9$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는

$(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$

장축의 길이는 $2b=2\sqrt{17}$

단축의 길이는 $2a=4\sqrt{2}$

4-1 (1) $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{7}=1$에서 $a^2=18$, $b^2=7$이므로

$c^2=a^2+b^2=18+7=25$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$

주축의 길이는 $2a=6\sqrt{2}$

점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}}x$, 즉 $y=\pm\frac{\sqrt{14}}{6}x$

(2) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{17}=-1$에서 $a^2=32$, $b^2=17$이므로

$c^2=a^2+b^2=32+17=49$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(0,\ 7)$, $(0,\ -7)$

주축의 길이는 $2b=2\sqrt{17}$

점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{\sqrt{17}}{4\sqrt{2}}x$, 즉 $y=\pm\frac{\sqrt{34}}{8}x$

(3) $2x^2-y^2=4$를 변형하면 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$에서 $a^2=2$,

$b^2=4$이므로

$c^2=a^2+b^2=2+4=6$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(\sqrt{6},\ 0)$, $(-\sqrt{6},\ 0)$

주축의 길이는 $2a=2\sqrt{2}$

점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{2}{\sqrt{2}}x$, 즉 $y=\pm\sqrt{2}x$

(4) $8x^2-y^2=-8$을 변형하면 $x^2-\frac{y^2}{8}=-1$에서

$a^2=1$, $b^2=8$이므로

$c^2=a^2+b^2=1+8=9$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$

주축의 길이는 $2b=4\sqrt{2}$

점근선의 방정식은 $y=\pm 2\sqrt{2}x$

5-1 $y^2=-4x=4\times(-1)\times x$이므로 초점은 $F_1(-1,\ 0)$이고,

$x^2=ay=4\times\frac{a}{4}\times y$이므로 초점은 $F_2\left(0,\ \frac{a}{4}\right)$이다.

이때 $\overline{F_1F_2}=\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{a}{4}\right)^2}=\sqrt{5}$, $1+\frac{a^2}{16}=5$

$a^2=64$ $\quad\therefore a=\pm 8$

따라서 양수 a의 값은 8이다.

6-1 포물선 $x^2=8y=4\times2\times y$이므로 초점의 좌표는 $(0,\ 2)$이고, 이 점이 타원 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{a}=1$의 한 초점이므로 다른 한 초점의 좌표는 $(0,\ -2)$이다.

따라서 $a-2=2^2$이므로 $a=2+4=6$

7-1 $\overline{OF}:\overline{FA}=3:2$이므로 초점 F의 좌표를 $(3k,\ 0)$이라고 하면 점 A의 좌표는 $(5k,\ 0)$이다. (단, k는 양수)

구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라고 하면

$(3k)^2=a^2-b^2=(5k)^2-b^2$이므로

$b^2=16k^2$ $\quad\therefore b=4k$

또, 타원의 정의에 의하여 $\overline{F'P}+\overline{FP}=10k$, $\overline{F'F}=6k$이므로 $\triangle PF'F$의 둘레의 길이는

$\overline{PF'}+\overline{F'F}+\overline{PF}=10k+6k=16k$

$16k=16$ $\quad\therefore k=1$

$\therefore a=5k=5$, $b=4k=4$

따라서 구하는 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$이다.

8-1 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{35}=1$에서 $a^2=10$, $b^2=35$이므로

$c^2=b^2-a^2=35-10=25$

따라서 주어진 타원의 초점은 $F(0,\ 5)$, $F'(0,\ -5)$이다.

이때 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$이라고 하면 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=8$이므로

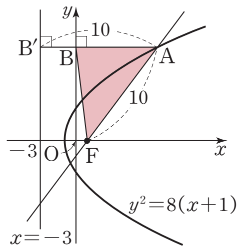
$2b=8$ $\quad\therefore b=4$

따라서 $a^2=c^2-b^2=25-16=9$이므로 구하는 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$이다.

9-1 포물선 $y^2=8(x+1)$은 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고 $y^2=8x$의 초점의 좌표는 $(2, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2$이므로 포물선 $y^2=8(x+1)$의 초점은 $\mathrm{F}(1, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

다음 그림과 같이 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 B′이라고 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AB'}}=\overline{\mathrm{FA}}=10$



이때 $\overline{\mathrm{BA}}=7$이고 점 $\mathrm{A}(7, k)$ $(k>0)$라고 하면 점 A는 포물선 $y^2=8(x+1)$ 위의 점이므로

$k^2=8(7+1)=64 \qquad \therefore k=8$

따라서 구하는 $\triangle\mathrm{FAB}$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BA}}\times k=\frac{1}{2}\times7\times8=28$

10-1 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$에서 $a^2=16$, $b^2=9$이므로

$c^2=a^2+b^2=16+9=25$

따라서 쌍곡선의 두 초점의 좌표는 $(5, 0)$, $(-5, 0)$이고, 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{3}{4}x$이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 한 초점 $(5, 0)$을 중심으로 하고 쌍곡선의 점근선 $y=\frac{3}{4}x$에 접하는 원의 반지름의 길이는 점 $(5, 0)$에서 직선 $y=\frac{3}{4}x$, 즉 $3x-4y=0$에 이르는 거리와 같다.

따라서 원의 반지름의 길이가

$\frac{|3\times5-4\times0|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=3$

이므로 구하는 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times3=6\pi$

2. 이차곡선과 직선

2-1 이차곡선과 직선의 위치 관계

내신 대비 쌍둥이 문제 61쪽

1-1 (1) $-3<k<3$일 때, 서로 다른 두 점에서 만난다.
$k=-3$ 또는 $k=3$일 때, 한 점에서 접한다.
$k<-3$ 또는 $k>3$일 때, 만나지 않는다.
(2) $k<-4$ 또는 $k>4$일 때, 서로 다른 두 점에서 만난다.
$k=-4$ 또는 $k=4$일 때, 한 점에서 접한다.
$-4<k<4$일 때, 만나지 않는다.

1-1 (1) $y=-2x+k$를 $x^2+2y^2-2=0$에 대입하여 정리하면

$x^2+2(-2x+k)^2-2=0$

$9x^2-8kx+2k^2-2=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=(-4k)^2-9(2k^2-2)=-2k^2+18$

$=-2(k^2-9)=-2(k+3)(k-3)$

(i) $\frac{D}{4}>0$, 즉 $(k+3)(k-3)<0$에서

$-3<k<3$일 때, 서로 다른 두 점에서 만난다.

(ii) $\frac{D}{4}=0$, 즉 $(k+3)(k-3)=0$에서

$k=-3$ 또는 $k=3$일 때, 한 점에서 접한다.

(iii) $\frac{D}{4}<0$, 즉 $(k+3)(k-3)>0$에서

$k<-3$ 또는 $k>3$일 때, 만나지 않는다.

(2) $y=-2x+k$를 $4x^2-5y^2-20=0$에 대입하여 정리하면

$4x^2-5(-2x+k)^2-20=0$

$16x^2-20kx+5k^2+20=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=(-10k)^2-16(5k^2+20)=20k^2-320$

$=20(k^2-16)=20(k+4)(k-4)$

(i) $\frac{D}{4}>0$, 즉 $(k+4)(k-4)>0$에서

$k<-4$ 또는 $k>4$일 때, 서로 다른 두 점에서 만난다.

(ii) $\frac{D}{4}=0$, 즉 $(k+4)(k-4)=0$에서

$k=-4$ 또는 $k=4$일 때, 한 점에서 접한다.

(iii) $\frac{D}{4}<0$, 즉 $(k+4)(k-4)<0$에서

$-4<k<4$일 때, 만나지 않는다.

소단원 확인 문제 63~64쪽

1-1 ㄴ, ㄷ **2-1** 12
3-1 $k<-3$ 또는 $k>3$ **4-1** $k<-1$ 또는 $k>1$

1-1 ㄱ. $y=x+1$을 $y^2=x$에 대입하여 정리하면
$(x+1)^2=x,\ x^2+x+1=0$
이 이차방정식의 판별식은
$D=1-4=-3<0$
이므로 포물선 $y^2=x$는 직선 $y=x+1$과 만나지 않는다. (거짓)

ㄴ. $y=x+1$을 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{7}=1$, 즉 $7x^2+2y^2=14$에 대입하여 정리하면
$7x^2+2(x+1)^2=14,\ 9x^2+4x-12=0$
이 이차방정식의 판별식은
$\frac{D}{4}=2^2+108=112>0$
이므로 타원 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{7}=1$은 직선 $y=x+1$과 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

ㄷ. $y=x+1$을 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=-1$, 즉 $2x^2-y^2=-8$에 대입하여 정리하면
$2x^2-(x+1)^2=-8,\ x^2-2x+7=0$
이 이차방정식의 판별식은
$\frac{D}{4}=(-1)^2-7=-6<0$
이므로 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=-1$은 직선 $y=x+1$과 만나지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

2-1 $y=3x+1$을 $y^2=ax$에 대입하여 정리하면
$(3x+1)^2=ax,\ 9x^2+(6-a)x+1=0$
이 이차방정식의 판별식은
$D=(6-a)^2-36=a^2-12a$
그런데 포물선과 직선이 한 점에서 만나려면 $D=0$이어야 하므로
$a^2-12a=a(a-12)=0 \qquad \therefore a=0$ 또는 $a=12$
한편, $a=0$이면 $y^2=ax$이 포물선이 아니므로 조건을 만족하는 실수 a의 값은 12이다.

3-1 $y=2x+k$를 $5x^2+y^2-5=0$에 대입하여 정리하면
$5x^2+(2x+k)^2-5=0,\ 9x^2+4kx+k^2-5=0$
이 이차방정식의 판별식은
$\frac{D}{4}=(2k)^2-9(k^2-5)=-5(k^2-9)$
그런데 타원과 직선이 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로
$-5(k^2-9)<0,\ (k+3)(k-3)>0$
$\therefore k<-3$ 또는 $k>3$

4-1 $y=x+k$를 $2x^2-3y^2-6=0$에 대입하여 정리하면
$2x^2-3(x+k)^2-6=0,\ x^2+6kx+3k^2+6=0$
이 이차방정식의 판별식은
$\frac{D}{4}=(3k)^2-(3k^2+6)=6(k^2-1)$
그런데 쌍곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로
$6(k^2-1)>0,\ (k+1)(k-1)>0$
$\therefore k<-1$ 또는 $k>1$

2-2 이차곡선의 접선

내신 대비 쌍둥이 문제 66~70쪽

1-1 (1) $y=-3x+3\sqrt{2},\ y=-3x-3\sqrt{2}$
(2) $y=-2x+2,\ y=-2x-2$
2-1 (1) $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (2) $y=\sqrt{2}x+3$
3-1 (1) $y=x-4$ (2) $y=\frac{\sqrt{6}}{4}x+2$
4-1 (1) $y=-2x-1$ (2) $y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$
5-1 $a=\sqrt{5},\ b=1$
6-1 (1) $y=\frac{1}{2}x-2$ (2) $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-2\sqrt{3}$
(3) $y=x-2$

1-1 (1) 직선 $y=-3x+2$와 평행한 직선의 기울기는 -3이므로 구하는 직선의 y절편을 k라고 하면 직선의 방정식은 $y=-3x+k$ ……①
①을 $x^2+\frac{y^2}{9}=1$, 즉 $9x^2+y^2=9$에 대입하여 정리하면
$9x^2+(-3x+k)^2=9$
$18x^2-6kx+k^2-9=0$

이 이차방정식의 판별식은

$$\frac{D}{4}=(-3k)^2-18(k^2-9)=-9(k^2-18)$$

그런데 타원과 직선이 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$-9(k^2-18)=0 \qquad \therefore k=\pm 3\sqrt{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-3x\pm 3\sqrt{2}$이다.

(2) 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$과 수직인 직선의 기울기는 -2이므로

구하는 직선의 y절편을 k라고 하면 직선의 방정식은

$y=-2x+k \qquad \cdots\cdots ①$

①을 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$, 즉 $2x^2-y^2=4$에 대입하여 정리하면

$2x^2-(-2x+k)^2=4$

$2x^2-4kx+k^2+4=0$

이 이차방정식의 판별식은

$$\frac{D}{4}=(-2k)^2-2(k^2+4)=2(k^2-4)$$

그런데 쌍곡선과 직선이 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$2(k^2-4)=0 \qquad \therefore k=\pm 2$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-2x\pm 2$이다.

2-1 (1) 구하는 접선의 방정식은

$5\sqrt{2}y=5(x+5)$, 즉 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{5\sqrt{2}}{2}$

(2) 구하는 접선의 방정식은

$-3\sqrt{2}x=-3(y-3)$, 즉 $y=\sqrt{2}x+3$

3-1 (1) 구하는 접선의 방정식은

$\frac{3x}{12}-\frac{y}{4}=1$, 즉 $y=x-4$

(2) 구하는 접선의 방정식은

$-\sqrt{6}x+8\times\frac{1}{2}y=8$, 즉 $y=\frac{\sqrt{6}}{4}x+2$

4-1 (1) 구하는 접선의 방정식은

$-2x-\frac{3y}{3}=1$, 즉 $y=-2x-1$

(2) 구하는 접선의 방정식은

$\frac{4x}{2}-(-3)y=-1$, 즉 $y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$

5-1 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(5, 2)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{5x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}=1$, 즉 $y=\frac{5b^2}{2a^2}x-\frac{b^2}{2}$

이때 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{5b^2}{2a^2}=\frac{1}{2}$, $a^2=5b^2 \qquad \cdots\cdots ①$

또, 점 $(5, 2)$는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{25}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ②$

①, ②를 연립하여 풀면 $a^2=5$, $b^2=1$

따라서 양수 a, b의 값은 $a=\sqrt{5}$, $b=1$이다.

6-1 (1) $y^2+4x=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\times\frac{dy}{dx}+4=0$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{y}$ (단, $y\neq 0$) $\qquad \cdots\cdots ①$

$x=-4$, $y=-4$를 ①에 대입하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$이므로

접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y+4=\frac{1}{2}(x+4)$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-2$

(2) $3x^2+6y^2-36=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x+12y\times\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2y}$ (단, $y\neq 0$) $\qquad \cdots\cdots ①$

$x=\sqrt{6}$, $y=-\sqrt{3}$을 ①에 대입하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

접선의 기울기는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\sqrt{6})$, 즉 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-2\sqrt{3}$

(3) $2x^2-3y^2-24=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$4x-6y\times\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y}$ (단, $y\neq 0$) $\cdots\cdots ①$

$x=6$, $y=4$를 ①에 대입하면 $\frac{dy}{dx}=1$이므로 접선의 기울기는 1

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-4=x-6$, 즉 $y=x-2$

소단원 확인 문제 71~72쪽

1-1 (1) $y=4x-\frac{5}{4}$

(2) $y=4x+\sqrt{35}$, $y=4x-\sqrt{35}$

(3) $y=4x+6$, $y=4x-6$

2-1 (1) $y=x+4$ (2) $y=x-5$ (3) $y=-x-3$

1-1 기울기가 4인 직선의 y절편을 k라고 하면 직선의 방정식은

$y=4x+k$ ……①

(1) ①을 $y^2=-20x$에 대입하여 정리하면

$(4x+k)^2+20x=0$, $16x^2+4(2k+5)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=4(2k+5)^2-16k^2=80k+100$

그런데 포물선과 직선이 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$80k+100=0$ $\quad\therefore k=-\frac{5}{4}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=4x-\frac{5}{4}$이다.

(2) ①을 $3x^2+2y^2=6$에 대입하여 정리하면

$3x^2+2(4x+k)^2=6$, $35x^2+16kx+2k^2-6=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=(8k)^2-35(2k^2-6)=-6(k^2-35)$

그런데 타원과 직선이 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$-6(k^2-35)=0$ $\quad\therefore k=\pm\sqrt{35}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=4x\pm\sqrt{35}$이다.

(3) ①을 $4x^2-y^2=12$에 대입하여 정리하면

$4x^2-(4x+k)^2=12$, $12x^2+8kx+k^2+12=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=(4k)^2-12(k^2+12)=4(k^2-36)$

그런데 쌍곡선과 직선이 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$4(k^2-36)=0$ $\quad\therefore k=\pm 6$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=4x\pm 6$이다.

2-1 (1) 구하는 접선의 방정식은

$-8x=-8(y-4)$, 즉 $y=x+4$

(2) 구하는 접선의 방정식은

$\frac{2x}{10}-\frac{3y}{15}=1$, 즉 $y=x-5$

(3) 구하는 접선의 방정식은

$\frac{x}{3}+\frac{4y}{12}=-1$, 즉 $y=-x-3$

중단원 연습 문제 75~82쪽

1-1 (1) $k>-\frac{5}{4}$ (2) $-3<k<3$ (3) $k<-\sqrt{5}$ 또는 $k>\sqrt{5}$

2-1 (1) $y=x+\frac{1}{2}$ (2) $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\sqrt{3}$

3-1 (1) $y=2x+5$, $y=2x-5$ (2) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$

4-1 (1) $y=3x+2\sqrt{2}$, $y=3x-2\sqrt{2}$ (2) $y=-x-2$

5-1 $8\sqrt{2}$ **6-1** $(2, \sqrt{2})$

7-1 $(2\sqrt{5}, 4\sqrt{5})$ **8-1** 4

9-1 $y=x-2$ 또는 $y=-x-2$

10-1 2 **11-1** $(3, 4)$

1-1 (1) $y=2x+k$를 $y^2=-10x$에 대입하여 정리하면

$(2x+k)^2=-10x$, $4x^2+2(2k+5)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=(2k+5)^2-4k^2=20k+25$

그런데 포물선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로

$20k+25>0$ $\quad\therefore k>-\frac{5}{4}$

(2) $y=-x+k$를 $x^2+\frac{y^2}{8}=1$, 즉 $8x^2+y^2=8$에 대입하여 정리하면

$8x^2+(-x+k)^2=8$, $9x^2-2kx+k^2-8=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=k^2-9(k^2-8)=-8(k^2-9)$

그런데 타원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로

$-8(k^2-9)>0$, $(k+3)(k-3)<0$

$\therefore -3<k<3$

(3) $y=3x+k$를 $4x^2-y^2=4$에 대입하여 정리하면

$4x^2-(3x+k)^2=4$, $5x^2+6kx+k^2+4=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=(3k)^2-5(k^2+4)=4(k^2-5)$

그런데 쌍곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로

$4(k^2-5)>0$, $(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})>0$

$\therefore k<-\sqrt{5}$ 또는 $k>\sqrt{5}$

2-1 (1) 기울기가 1인 직선의 방정식을 $y=x+k$라고 하자.

$y=x+k$를 $y^2=2x$에 대입하여 정리하면

$(x+k)^2=2x$, $x^2+2(k-1)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-k^2=-2k+1$

그런데 포물선과 직선이 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$-2k+1=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=x+\frac{1}{2}$이다.

(2) 구하는 접선의 방정식은

$-2\sqrt{3}y=3(x+2)$, 즉 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\sqrt{3}$이다.

3-1 (1) 기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+k$라고 하자.

$y=2x+k$를 $\frac{x^2}{6}+y^2=1$, 즉 $x^2+6y^2=6$에 대입하여 정리하면

$x^2+6(2x+k)^2=6$, $25x^2+24kx+6k^2-6=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=(12k)^2-25(6k^2-6)=-6(k^2-25)$

그런데 타원과 직선이 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$-6(k^2-25)=0 \qquad \therefore k=\pm 5$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=2x\pm 5$이다.

(2) 구하는 접선의 방정식은

$2\sqrt{3}x-6y=12$, 즉 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$

4-1 (1) 기울기가 3인 직선의 방정식을 $y=3x+k$라고 하자.

$y=3x+k$를 $x^2-y^2=1$에 대입하여 정리하면

$x^2-(3x+k)^2=1$, $8x^2+6kx+k^2+1=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=(3k)^2-8(k^2+1)=k^2-8$

그런데 쌍곡선과 직선이 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$k^2-8=0 \qquad \therefore k=\pm 2\sqrt{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=3x\pm 2\sqrt{2}$이다.

(2) 구하는 접선의 방정식은

$4\times 2x-2\times(-4y)=-16$, 즉 $y=-x-2$

5-1 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $(4,\ 4\sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

$4\sqrt{2}y=4(x+4)$, 즉 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+2\sqrt{2}$

포물선 $x^2=ay=4\times\frac{a}{4}\times y$에서 초점의 좌표는 $\left(0,\ \frac{a}{4}\right)$이고 이 점을 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+2\sqrt{2}$가 지나므로

$\frac{a}{4}=2\sqrt{2} \qquad \therefore a=8\sqrt{2}$

6-1 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면

$\frac{a^2}{8}+\frac{b^2}{4}=1$, $a^2+2b^2=8$ ……①

타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{ax}{8}+\frac{by}{4}=1$, 즉 $y=-\frac{a}{2b}x+\frac{4}{b}$

이때 접선의 y절편이 $2\sqrt{2}$이므로

$\frac{4}{b}=2\sqrt{2} \qquad \therefore b=\sqrt{2}$

이를 ①에 대입하면

$a^2+4=8$, $a^2=4 \qquad \therefore a=2\,(\because a>0)$

따라서 점 P의 좌표는 $(2,\ \sqrt{2})$이다.

7-1 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{20}=1$ 위의 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면

$\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{20}=1$, $5a^2-b^2=20$ ……①

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{20}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{ax}{4}-\frac{by}{20}=1$, 즉 $y=\frac{5a}{b}x-\frac{20}{b}$

이때 접선의 기울기가 $\frac{5}{2}$이므로

$\frac{5a}{b}=\frac{5}{2}$, $b=2a$ ……②

②를 ①에 대입하여 정리하면

$5a^2-4a^2=20$, $a^2=20$

$\therefore a=2\sqrt{5}\,(\because a>0)$, $b=4\sqrt{5}$

따라서 점 P의 좌표는 $(2\sqrt{5},\ 4\sqrt{5})$이다.

8-1 기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+k$라고 하자.

$y=2x+k$를 $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1$, 즉 $a^2x^2+y^2=a^2$에 대입하여 정리하면

$a^2x^2+(2x+k)^2=a^2$

$(a^2+4)x^2+4kx+k^2-a^2=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\dfrac{D}{4}=(2k)^2-(a^2+4)(k^2-a^2)=-a^2(k^2-a^2-4)$

그런데 타원과 직선이 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$-a^2(k^2-a^2-4)=0$

$\therefore k=\pm\sqrt{a^2+4}$ ($\because a\neq 0$)

따라서 타원의 접선의 방정식은 $y=2x\pm\sqrt{a^2+4}$이다.

이때 두 직선 사이의 거리가 4이므로 직선 $y=2x+\sqrt{a^2+4}$ 위의 한 점 $(0, \sqrt{a^2+4})$와 직선 $y=2x-\sqrt{a^2+4}$, 즉 $2x-y-\sqrt{a^2+4}=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-\sqrt{a^2+4}-\sqrt{a^2+4}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-2\sqrt{a^2+4}|}{\sqrt{5}}=4$

$\sqrt{a^2+4}=2\sqrt{5}$, $a^2+4=20$, $a^2=16$

그런데 a는 양수이므로 $a=4$

9-1 포물선 $x^2=8y$의 접선이 y축과 만나는 점의 좌표를 $(0, k)$, 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$y=mx+k$

$y=mx+k$를 $x^2=8y$에 대입하여 정리하면

$x^2=8(mx+k)$, $x^2-8mx-8k=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\dfrac{D}{4}=(-4m)^2+8k=16m^2+8k$

그런데 포물선과 직선이 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$16m^2+8k=0$ ……①

m에 대한 이차방정식 ①의 두 실근이 접선의 기울기이고, 두 접선이 서로 수직으로 만나므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{8k}{16}=-1$ $\quad\therefore k=-2$

$k=-2$를 ①에 대입하면

$16m^2-16=0$, $16(m+1)(m-1)=0$

$\therefore m=-1$ 또는 $m=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-x-2$ 또는 $y=x-2$

10-1 점 P의 좌표를 (a, b)라고 하면 타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{ax}{4}+by=1$

이 접선이 x축, y축과 만나는 점은 각각 $\mathrm{A}\left(\dfrac{4}{a}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0, \dfrac{1}{b}\right)$이므로

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{a}\times\dfrac{1}{b}=\dfrac{2}{ab}$ ……①

또, 점 $\mathrm{P}(a, b)$는 타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{a^2}{4}+b^2=1$ ……②

이때 $a>0$, $b>0$이므로

$\dfrac{a^2}{4}+b^2\geq 2\sqrt{\dfrac{a^2}{4}\times b^2}$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{a^2}{4}=b^2\text{일 때 성립}\right)$

$1\geq ab$, $\dfrac{1}{ab}\geq 1$

①에서 $\dfrac{2}{ab}\geq 2$이므로 $\triangle\mathrm{OAB}$의 넓이의 최솟값은 2이다.

11-1 직선 $y=\dfrac{3}{2}x$ 사이의 거리가 최소가 되게 하는 쌍곡선 위의 점은 기울기가 $\dfrac{3}{2}$인 쌍곡선의 접선의 접점과 같다.

점 P의 좌표를 (a, b)라고 하면 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$ax-\dfrac{by}{2}=1$, 즉 $y=\dfrac{2a}{b}x-\dfrac{2}{b}$

$\dfrac{2a}{b}=\dfrac{3}{2}$, $a=\dfrac{3b}{4}$ ……①

또, 점 $\mathrm{P}(a, b)$는 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 위의 점이므로

$a^2-\dfrac{b^2}{2}=1$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면

$\left(\dfrac{3b}{4}\right)^2-\dfrac{b^2}{2}=1$, $b^2=16$

$\therefore b=4$ ($\because b>0$), $a=3$

따라서 점 P의 좌표는 $(3, 4)$이다.

대단원 모의고사 90~93쪽

01 ②	02 ④	03 ⑤	04 ①	05 ③
06 ②	07 ②	08 ⑤	09 ③	10 ⑤
11 ①	12 ①	13 ④	14 ⑤	15 ⑤
16 ③	17 ④	18 ⑤	19 ②	20 40
21 10π	22 27	23 11	24 6	

01 $y^2=8x=4\times2\times x$이므로 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.
이 포물선을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 포물선이 $(y-3)^2=8(x+4)$이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(-2,\ 3)$, 준선의 방정식은 $x=-6$이다.
따라서 $a=-2$, $b=3$, $c=-6$이므로

$$a+b+c=-5$$

02 $y^2=16x=4\times4\times x$이므로 초점의 좌표는 $(4,\ 0)$이고, 이 점이 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{9}=1$의 한 초점이므로 다른 한 초점의 좌표는 $(-4,\ 0)$이다.
따라서 $a-9=4^2$이므로 $a=9+16=25$

03 $\overline{\mathrm{PF}}=a$, $\overline{\mathrm{PF'}}=b$라고 하자.
타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$에서 장축의 길이가 $2\times6=12$이므로 타원의 정의에 의하여

$$a+b=12$$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2&=a^2+b^2\\&=a^2+(12-a)^2\\&=2a^2-24a+144\\&=2(a-6)^2+72\geq72\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2$의 최솟값은 72이다.

04 $y^2-6y-16x+k=0$을 변형하면

$$(y-3)^2=16x+9-k$$

$$(y-3)^2=16\left(x+\frac{9}{16}-\frac{k}{16}\right) \quad \cdots\cdots①$$

①은 포물선 $y^2=16x$을 x축의 방향으로 $\frac{k}{16}-\frac{9}{16}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
한편, $y^2=16x$의 준선의 방정식이 $x=-4$이므로 주어진 포물선의 준선의 방정식은

$$x-\frac{k}{16}+\frac{9}{16}=-4,\ x=\frac{k}{16}-\frac{73}{16}$$

따라서 준선이 y축이므로

$$\frac{k}{16}-\frac{73}{16}=0 \qquad \therefore k=73$$

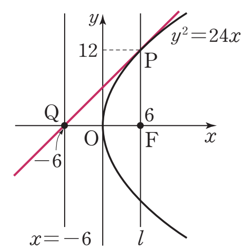
05 $y^2=24x=4\times6\times x$이므로 초점 F의 좌표는 $(6,\ 0)$이고, 직선 l의 방정식은 $x=6$이다.
$x=6$을 $y^2=24x$에 대입하면

$$y^2=144,\ y=12$$

이므로 점 P의 좌표는 $(6,\ 12)$이다.
이때 포물선 $y^2=24x$ 위의 점 $\mathrm{P}(6,\ 12)$에서의 접선의 방정식은

$$12y=12(x+6),\ 즉$$

$$y=x+6$$



이므로 점 Q의 좌표는 $(-6,\ 0)$이다.
따라서 $\overline{\mathrm{PF}}=12$, $\overline{\mathrm{QF}}=12$이므로 △FPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{QF}}=\frac{1}{2}\times12\times12=72$$

06 $y^2=12x=4\times3\times x$이므로 초점의 좌표는 $(3,\ 0)$이다.
기울기가 1인 직선을 $y=x+k$라 하고, 이 직선을 $y^2=12x$에 대입하여 정리하면

$$(x+k)^2=12x,\ x^2+2(k-6)x+k^2=0$$

이 이차방정식의 판별식이 $D=0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(k-6)^2-k^2=0,\ -12k+36=0 \qquad \therefore k=3$$

따라서 접선의 방정식은 $y=x+3$, 즉 $x-y+3=0$이다.
이때 점 $(3,\ 0)$과 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3-0+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

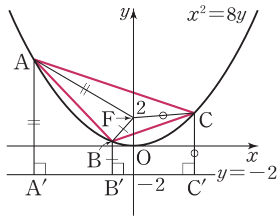
07 $x^2=8y=4\times2\times y$이므로 초점 F의 좌표는 $(0,\ 2)$, 준선의 방정식은 $y=-2$이다.
△ABC의 세 꼭짓점을 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$이라고 하면 △ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

이 점이 초점의 좌표와 같으므로

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=0,\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}=2$$

한편, 준선 $y=-2$에 내린 세 점 A, B, C의 수선의 발을 각각 A′, B′, C′이라고 하면 포물선의 정의에 의하여



$\overline{FA}=\overline{AA'}$,

$\overline{FB}=\overline{BB'}$, $\overline{FC}=\overline{CC'}$

이므로

$\overline{FA}=\overline{AA'}=y_1+2$, $\overline{FB}=\overline{BB'}=y_2+2$,

$\overline{FC}=\overline{CC'}=y_3+2$

$\therefore \overline{AF}+\overline{BF}+\overline{CF}=y_1+y_2+y_3+6$

$=6+6=12$

08 $x^2=-12y=4\times(-3)\times y$이므로 초점의 좌표는 $(0,\ -3)$, 준선의 방정식은 $y=3$이다.

초점을 F, 포물선 위의 두 점 A, B의 좌표를 각각 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$라고 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{FA}=3-y_1$, $\overline{FB}=3-y_2$

한편, 점 $F(0,\ -3)$이므로 직선 AB는 포물선의 초점을 지난다.

$\therefore \overline{AB}=\overline{FA}+\overline{FB}=6-(y_1+y_2)$

그런데 선분 AB의 중점의 y좌표가 -4이므로

$\dfrac{y_1+y_2}{2}=-4$, $y_1+y_2=-8$

$\therefore \overline{AB}=6-(-8)=14$

09 초점이 $F(0,\ 3\sqrt{5})$, $F'(0,\ -3\sqrt{5})$인 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이라고 하면

$b^2-a^2=(3\sqrt{5})^2$, $b^2-a^2=45$ ……①

장축과 단축의 길이의 차가 10이므로

$2b-2a=10$, $b=a+5$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면

$a=2$, $b=7$

따라서 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2b=14$

10 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 초점의 좌표가 $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$이므로

$a^2-b^2=25$ ……①

$\triangle FAB$의 둘레의 길이가 52이므로

$\overline{AF}+\overline{FB}+\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{AF'}+\overline{F'B}+\overline{FB}$

$=2a+2a=4a=52$

$\therefore a=13$

①에 $a=13$을 대입하면

$13^2-b^2=5^2$, $b^2=144$ $\therefore b=12$

따라서 단축의 길이는 $2b=24$이다.

11 $y^2=-12x=4\times(-3)\times x$이므로 초점의 좌표는 $(-3,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=3$이다.

점 $P(a,\ b)$에서 준선 $x=3$에 내린 수선의 발을 R라고 하면 점 R의 좌표는 $(3,\ b)$이고, 점 Q에서 준선 $x=3$에 내린 수선의 발을 R′이라고 하면 점 R′의 좌표는 $(3,\ 4)$이므로

$\overline{RP}+\overline{PQ}\geq\overline{R'Q}$

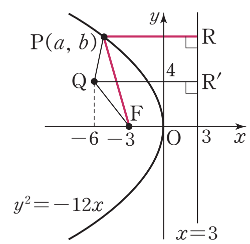
이때 $\overline{R'Q}=3-(-6)=9$,

$\overline{FQ}=\sqrt{(-6+3)^2+(4-0)^2}=5$

이고 포물선의 정의에 의하여

$\overline{FP}=\overline{RP}$

따라서 $\triangle FPQ$의 둘레의 길이는



$\overline{FP}+\overline{PQ}+\overline{QF}$

$=\overline{RP}+\overline{PQ}+\overline{QF}$

$\geq\overline{R'Q}+\overline{QF}$

$=9+5=14$

따라서 $\triangle FPQ$의 둘레의 길이의 최솟값은 14이다.

12 $14x^2+5y^2=70$을 변형하면 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{14}=1$이고, $14-5=9$이므로 타원의 두 초점의 좌표는 $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$이다.

이 두 점을 초점으로 하고 주축의 길이가 4인 쌍곡선의 방정식이 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$이므로

$2b=4$에서 $b=2$, $a^2=3^2-2^2=5$

$\therefore a^2-b^2=5-4=1$

13 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$에서 $9+7=16$이므로 주어진 쌍곡선의 초점은 $F(4,\ 0)$, $F'(-4,\ 0)$이고 $\overline{F'F}=8$이다.

또, 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선의 x좌표는 4이므로

$\dfrac{16}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$, $y=\pm\dfrac{7}{3}$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 각각 $\left(4,\ \frac{7}{3}\right)$, $\left(4,\ -\frac{7}{3}\right)$이고, $\overline{AB}=\frac{14}{3}$이다.
이때 △AF′B의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{F'F}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times8\times\frac{14}{3}=\frac{56}{3}$$

이므로 $\frac{k}{3}=\frac{56}{3}$ $\quad\therefore k=56$

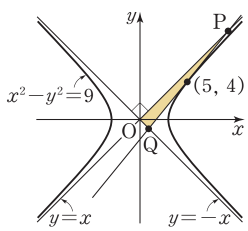
14 $x^2-y^2=9$를 변형하면 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$이므로 두 점근선의 방정식은 $y=\pm x$이다.
이때 쌍곡선 $x^2-y^2=9$ 위의 점 $(5,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$5x-4y=9$ ……①

직선 ①과 직선 $y=x$가 만나는 점을 P라고 하면

$5x-4x=9,\ x=9$

$\therefore$ P$(9,\ 9)$



또, 직선 ①과 직선 $y=-x$가 만나는 점을 Q라고 하면

$5x+4x=9,\ x=1$ $\quad\therefore$ Q$(1,\ -1)$

$\overline{OP}=9\sqrt{2}$, $\overline{OQ}=\sqrt{2}$이고, 두 점근선 $y=x$, $y=-x$가 서로 수직이므로 직각삼각형 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{OQ}=\frac{1}{2}\times9\sqrt{2}\times\sqrt{2}=9$$

15 점 P에서 포물선 $y^2=2x$에 그은 접선의 접점을 $(a,\ b)$라고 하면 이 점은 포물선 위의 점이므로

$b^2=2a$ ……①

포물선 $y^2=2x$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은 $by=x+a$이고, 이 직선은 점 P$(-4,\ 2)$를 지나므로

$2b=-4+a$ ……②

②를 ①에 대입하여 정리하면

$$\left(\frac{-4+a}{2}\right)^2=2a,\ a^2-16a+16=0$$

이차방정식 $a^2-16a+16=0$의 두 실근이 두 점 A, B의 x좌표이므로 근과 계수의 관계에 의하여 x좌표의 합은 16이다.

16 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$에서 $9+16=25$이므로 F$(5,\ 0)$, F′$(-5,\ 0)$이다.

$\therefore \overline{F'F}=10$

$\overline{PF'}=a$, $\overline{PF}=b$라고 하면 주어진 쌍곡선의 주축의 길이가 $2\times3=6$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$a-b=6$ ……①

또, 직각삼각형 F′PF에서 피타고라스 정리에 의하여

$a^2+b^2=100$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면

$(a-b)^2-(a^2+b^2)=36-100$

$-2ab=-64,\ ab=32$

따라서 직각삼각형 F′PF의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{PF'}\times\overline{PF}=\frac{1}{2}\times a\times b=16$$

17 포물선 $y^2=12x$에 접하고 점 $(a,\ 8)$을 지나는 직선의 방정식을 $y=m(x-a)+8$이라고 하자.
$y=m(x-a)+8$을 $y^2=12x$에 대입하여 정리하면

$(mx+8-am)^2=12x$

$m^2x^2+2(8m-am^2-6)x+(8-am)^2=0$

이 이차방정식의 판별식은

$$\frac{D}{4}=(8m-am^2-6)^2-m^2(8-am)^2$$
$$=12am^2-96m+36$$

그런데 포물선과 직선이 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$12am^2-96m+36=0$

$am^2-8m+3=0$ ……①

m에 대한 이차방정식 ①의 두 실근이 접선의 기울기이고, 두 접선이 서로 수직으로 만나므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{3}{a}=-1$ $\quad\therefore a=-3$

다른 풀이

포물선 $y^2=12x$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$y_1y=6(x+x_1)$ ……①

이 접선이 $(a,\ 8)$을 지나므로

$8y_1=6(a+x_1)$, $x_1=\frac{1}{3}(4y_1-3a)$ ……②

점 $(x_1,\ y_1)$은 포물선 $y^2=12x$ 위의 점이므로

${y_1}^2=12x_1$ ……③

②를 ③에 대입하여 정리하면

${y_1}^2=4(4y_1-3a)$, ${y_1}^2-16y_1+12a=0$

이 이차방정식의 두 실근을 α, β라고 하면 ①에서 접선의 기울기가 $\frac{6}{y_1}$이고, 두 접선이 서로 수직이므로

$$\frac{6}{\alpha}\times\frac{6}{\beta}=\frac{36}{\alpha\beta}=\frac{36}{12a}=-1 \qquad \therefore a=-3$$

18 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선의 방정식을 $y=\sqrt{3}x+k$라고 하자.
$y=\sqrt{3}x+k$를 $4x^2+12y^2=48$에 대입하여 정리하면

$4x^2+12(\sqrt{3}x+k)^2=48$

$10x^2+6\sqrt{3}kx+3k^2-12=0$

이 이차방정식의 판별식은

$\frac{D}{4}=(3\sqrt{3}k)^2-10(3k^2-12)=-3(k^2-40)$

그런데 타원과 직선이 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$3(k^2-40)=0 \qquad \therefore k=\pm 2\sqrt{10}$

이때 두 직선 $y=\sqrt{3}x+2\sqrt{10}$, $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{10}$ 사이의 거리는 직선 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{10}$ 위의 점 $(0,\ -2\sqrt{10})$과 직선 $y=\sqrt{3}x+2\sqrt{10}$, 즉 $\sqrt{3}x-y+2\sqrt{10}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2\sqrt{10}+2\sqrt{10}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{10}}{2}=2\sqrt{10}$$

19 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 타원 $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$\frac{ax}{16}+\frac{by}{25}=1$

이 접선이 x축, y축과 만나는 점은 각각 $A\left(\frac{16}{a},\ 0\right)$, $B\left(0,\ \frac{25}{b}\right)$이므로

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times\frac{16}{a}\times\frac{25}{b}=\frac{200}{ab}$ ……①

또, 점 $P(a,\ b)$는 타원 $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{a^2}{4^2}+\frac{b^2}{5^2}=1$

이때 $a>0$, $b>0$이므로

$\frac{a^2}{4^2}+\frac{b^2}{5^2}\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{4^2}\times\frac{b^2}{5^2}}$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a^2}{4^2}=\frac{b^2}{5^2}\text{일 때 성립}\right)$

$1\ge\frac{ab}{10}$, $ab\le 10$

①에서 $\frac{200}{ab}\ge\frac{200}{10}=20$이므로 $\triangle OAB$의 넓이의 최솟값은 20이다.

서술형 문제

20 ❶ 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$에서 $25-16=9$이므로 두 초점은 $F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$이고 장축의 길이는 $2\times5=10$이다.

❷ 또, 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$에서 $4+5=9$이므로 두 초점은 $F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$이고 주축의 길이는 $2\times2=4$이다.

❸ 따라서 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF'}+\overline{PF}=10$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=4$

$\therefore \overline{PF'}^2-\overline{PF}^2=(\overline{PF'}+\overline{PF})(\overline{PF'}-\overline{PF})$

$=10\times4=40$

채점 기준	배점
❶ 타원 초점의 좌표와 장축의 길이 구하기	30 %
❷ 쌍곡선 초점의 좌표와 주축의 길이 구하기	30 %
❸ $\overline{PF'}^2-\overline{PF}^2$의 값 구하기	40 %

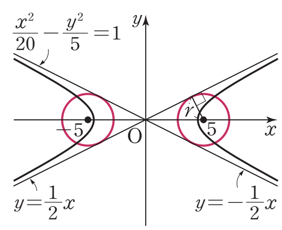
21 ❶ 쌍곡선 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$에서 $20+5=25$이므로 두 초점의 좌표는 $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$이다.

❷ 또, 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}x$, 즉 $y=\pm\frac{1}{2}x$

❸ 한 초점을 중심으로 하고 두 점근선에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 r의 값은 점 $(5,\ 0)$과 직선 $y=\frac{1}{2}x$, 즉 $x-2y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$



따라서 구하는 원의 넓이는

$2\times(\sqrt{5})^2\pi=10\pi$

채점 기준	배점
❶ 쌍곡선의 두 초점의 좌표 구하기	30 %
❷ 쌍곡선의 두 점근선의 방정식 구하기	30 %
❸ 원의 넓이 구하기	40 %

22 ❶ 점 $(a,\ b)$는 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{9}=1 \qquad \cdots\cdots①$$

❷ 또, 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{ax}{16}+\frac{by}{9}=1$이고 이 직선의 y절편이 6이므로

$$\frac{9}{b}=6 \qquad \therefore\ b=\frac{3}{2}$$

❸ $b=\frac{3}{2}$을 ①에 대입하여 풀면

$$\frac{a^2}{16}+\frac{1}{4}=1,\ a^2=12$$

$$\therefore\ (ab)^2=12\times\frac{9}{4}=27$$

채점 기준	배점
❶ 점 $(a,\ b)$가 타원 위의 점임을 이용하여 $a,\ b$ 사이의 관계식 구하기	20 %
❷ 접선의 y절편을 이용하여 b의 값 구하기	40 %
❸ ❷를 이용하여 a^2의 값 구하기	40 %

23 ❶ 주축의 길이가 8이므로

$$2a=8 \qquad \therefore\ a=4$$

또, $a^2+b^2=5^2$이므로 $4^2+b^2=25,\ b^2=9$

따라서 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

❷ 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+k$라고 하자.

$y=2x+k$를 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, 즉 $9x^2-16y^2=144$에 대입하여 정리하면

$$9x^2-16(2x+k)^2=144$$

$$55x^2+64kx+16k^2+144=0$$

이 이차방정식의 판별식은

$$\frac{D}{4}=(32k)^2-55(16k^2+144)=144(k^2-55)$$

그런데 쌍곡선과 직선이 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$$144(k^2-55)=0 \qquad \therefore\ k=\pm\sqrt{55}$$

따라서 직선 $y=2x+\sqrt{55}$ 또는 $y=2x-\sqrt{55}$와 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 접점이 P이다.

❸ 점 P와 직선 $y=2x$ 사이의 최단 거리 d는 직선 $y=2x$ 위의 점 $(0,\ 0)$과 직선 $y=2x+\sqrt{55}$, 즉 $2x-y+\sqrt{55}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$d=\frac{|\sqrt{55}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{55}}{\sqrt{5}}=\sqrt{11}$$

$$\therefore\ d^2=11$$

채점 기준	배점
❶ 쌍곡선의 방정식 구하기	30 %
❷ 접점에서 접선의 방정식 구하기	50 %
❸ d^2의 값 구하기	20 %

24 ❶ 포물선 $y^2=8x$와 타원 $\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{12}=1$의 교점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라고 하자.

포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은 $by=4(x+a)$이므로 그 기울기는 $\frac{4}{b}$이다.

❷ 또, 타원 $\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{ax}{k^2}+\frac{by}{12}=1$이므로 그 기울기는 $-\frac{12a}{bk^2}$이다.

❸ 두 직선이 서로 수직이므로

$$\frac{4}{b}\times\left(-\frac{12a}{bk^2}\right)=-1,\ \frac{48a}{k^2b^2}=1$$

$$k^2=\frac{48a}{b^2} \qquad \cdots\cdots①$$

❹ 그런데 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로

$$b^2=8a$$

이를 ①에 대입하면

$$k^2=\frac{48a}{8a}=6$$

채점 기준	배점
❶ 포물선 위의 점 P에서의 접선의 기울기 구하기	40 %
❷ 타원 위의 점 P에서의 접선의 기울기 구하기	40 %
❸ 수직인 직선의 기울기의 곱이 -1임을 이용하여 k^2을 $a,\ b$ 사이의 관계식으로 나타내기	10 %
❹ k^2의 값 구하기	10 %

Ⅱ. 평면벡터

1. 벡터의 연산

1-1 벡터의 뜻

내신 대비 쌍둥이 문제 96~97쪽

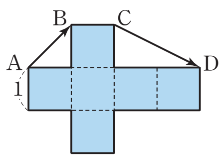
1-1 (1) $\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{5}$

2-1 (1) $\vec{c}$ (2) $\vec{e}$

1-1 (1) 오른쪽 그림에서 정육면체의 한 변의 길이가 1이므로

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

(2) $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$



2-1 (1) $\vec{a}$와 크기와 방향이 모두 같은 벡터는 $\vec{c}$이다.

(2) $\vec{b}$와 크기가 같은 벡터는 $\vec{e}$, $\vec{f}$이고, 이 중 방향이 반대인 벡터는 $\vec{e}$이다.

소단원 확인 문제 98~99쪽

1-1 크기가 같은 벡터: $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{g}$

방향이 같은 벡터: $\vec{g}$

2-1 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$

3-1 $3\sqrt{3}$

1-1 $\vec{a}$와 크기가 같은 벡터는 $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{g}$이고, 방향이 같은 벡터는 $\vec{g}$이다.

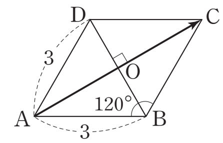
2-1 주어진 그림에서 $\triangle$AOB, $\triangle$BOC, $\triangle$COD, $\triangle$DOE, $\triangle$EOF, $\triangle$FOA는 모두 정삼각형이므로 각 삼각형의 한 변의 길이는 모두 1이다.

따라서 점 O를 시점으로 하는 단위벡터는

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$

이다.

3-1 오른쪽 그림과 같이 두 대각선의 교점을 O라고 하면 $\triangle$AOB에서 $\angle$ABO$=60^\circ$이므로



$\overline{AO}=3\sin 60^\circ$

$=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

따라서 $\overline{AC}=2\overline{AO}$이므로

$|\overrightarrow{AC}|=2\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

1-2 벡터의 덧셈과 뺄셈

내신 대비 쌍둥이 문제 100~103쪽

1-1 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

2-1 풀이 참조

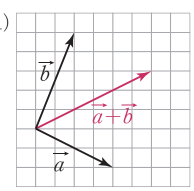
3-1 (1) $\overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{AD}$

4-1 풀이 참조

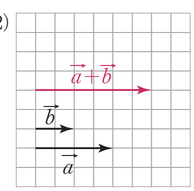
5-1 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

6-1 $2(\vec{a}-\vec{b})$

1-1 (1)



(2)



2-1 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+\overrightarrow{DC}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC})$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

$\therefore (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

3-1 (1) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}$

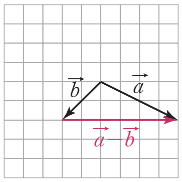
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AD}$

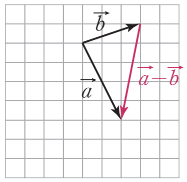
4-1 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

5-1 (1)



(2)



6-1 $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OB}$

$=2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO})=2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})$

$=2(\vec{a}-\vec{b})$

소단원 확인 문제 104~105쪽

1-1 (1) $\vec{a}+\vec{b}$ (2) $\vec{b}-\vec{a}$ (3) $-\vec{a}-\vec{b}$ (4) $\vec{a}+\vec{b}$

2-1 2 **3-1** 10

1-1 (1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

(3) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{FA}=-\vec{a}-\vec{b}$

(4) $\overrightarrow{FC}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\vec{a}+\vec{b}$

2-1 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}|$

$=2|\overrightarrow{AC}|=2$

3-1 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$에서

$\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$이므로 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

$\therefore |\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AB}|=10$

1-3 벡터의 실수배

내신 대비 쌍둥이 문제 106~108쪽

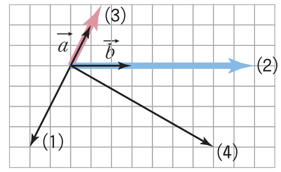
1-1 풀이 참조

2-1 (1) $8\vec{a}-\vec{b}$ (2) $-4\vec{a}+8\vec{b}$

3-1 (1) $\vec{a}+4\vec{b}$ (2) $4\vec{a}+2\vec{b}$

4-1 -9 **5-1** 풀이 참조

1-1



2-1 (1) $3(2\vec{a}+\vec{b})-2(-\vec{a}+2\vec{b})$

$=6\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{a}-4\vec{b}$

$=(6+2)\vec{a}+(3-4)\vec{b}=8\vec{a}-\vec{b}$

(2) $2(\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c})-3(2\vec{a}-4\vec{b}+2\vec{c})$

$=2\vec{a}-4\vec{b}+6\vec{c}-6\vec{a}+12\vec{b}-6\vec{c}$

$=(2-6)\vec{a}+(-4+12)\vec{b}+(6-6)\vec{c}$

$=-4\vec{a}+8\vec{b}$

3-1 (1) $2\vec{x}+\vec{a}-4\vec{b}=3\vec{a}+4\vec{b}$에서

$2\vec{x}=3\vec{a}+4\vec{b}-(\vec{a}-4\vec{b})$

$=3\vec{a}+4\vec{b}-\vec{a}+4\vec{b}$

$=2\vec{a}+8\vec{b}$

$=2(\vec{a}+4\vec{b})$

$\therefore \vec{x}=\vec{a}+4\vec{b}$

(2) $2\vec{a}+3\vec{x}=2(\vec{x}+3\vec{a}+\vec{b})$에서

$2\vec{a}+3\vec{x}=2\vec{x}+6\vec{a}+2\vec{b}$

$3\vec{x}-2\vec{x}=6\vec{a}+2\vec{b}-2\vec{a}$

$\therefore \vec{x}=4\vec{a}+2\vec{b}$

4-1 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2\vec{a}-\vec{b})-(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}-2\vec{b}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(6\vec{a}+m\vec{b})-(2\vec{a}-\vec{b})$

$=4\vec{a}+(m+1)\vec{b}$

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{BC}$가 서로 평행하므로

$4\vec{a}+(m+1)\vec{b}=k(\vec{a}-2\vec{b})$ (단, k는 0이 아닌 실수)

$4\vec{a}+(m+1)\vec{b}=k\vec{a}-2k\vec{b}$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$4=k,\ m+1=-2k \qquad \therefore m=-9$

5-1 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=3\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-2\vec{a}+9\vec{b})-\vec{a}$

$=9\vec{b}-3\vec{a}=3(3\vec{b}-\vec{a})$

이때 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$이므로 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다.

따라서 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

소단원 확인 문제 110~111쪽

1-1 (1) $2\vec{a}-3\vec{b}$ (2) $\vec{a}-12\vec{b}-6\vec{c}$ (3) $-\vec{a}+\vec{b}$

2-1 (1) $\frac{14}{3}\vec{a}-\frac{10}{3}\vec{b}$ (2) $-2\vec{a}+8\vec{b}$

3-1 $-5\vec{a}+5\vec{b}$ **4-1** $m=3,\ n=-1$

1-1 (1) $\frac{1}{3}(2\vec{a}-\vec{b})+\frac{2}{3}(2\vec{a}-4\vec{b})$

$=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{4}{3}\vec{a}-\frac{8}{3}\vec{b}$

$=\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)\vec{a}+\left(-\frac{1}{3}-\frac{8}{3}\right)\vec{b}=2\vec{a}-3\vec{b}$

(2) $2(3\vec{a}-\vec{b}+7\vec{c})-5(\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c})$

$=6\vec{a}-2\vec{b}+14\vec{c}-5\vec{a}-10\vec{b}-20\vec{c}$

$=(6-5)\vec{a}+(-2-10)\vec{b}+(14-20)\vec{c}$

$=\vec{a}-12\vec{b}-6\vec{c}$

(3) $\frac{1}{2}(\vec{a}-4\vec{b})-\frac{3}{2}(\vec{a}-2\vec{b})$

$=\frac{1}{2}\vec{a}-2\vec{b}-\frac{3}{2}\vec{a}+3\vec{b}$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)\vec{a}+(-2+3)\vec{b}=-\vec{a}+\vec{b}$

2-1 (1) $-3(2\vec{a}-\vec{x})=2(4\vec{a}-5\vec{b})$에서

$-6\vec{a}+3\vec{x}=8\vec{a}-10\vec{b}$

$3\vec{x}=8\vec{a}-10\vec{b}+6\vec{a}=14\vec{a}-10\vec{b}$

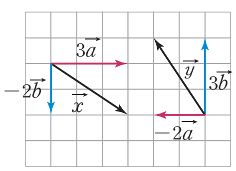
$\therefore\ \vec{x}=\frac{14}{3}\vec{a}-\frac{10}{3}\vec{b}$

(2) $2\vec{a}+3\vec{x}=2(\vec{x}+4\vec{b})$에서

$2\vec{a}+3\vec{x}=2\vec{x}+8\vec{b},\ 3\vec{x}-2\vec{x}=8\vec{b}-2\vec{a}$

$\therefore\ \vec{x}=-2\vec{a}+8\vec{b}$

3-1 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 시점을 각각 $\vec{x}$, $\vec{y}$와 일치시키면



$\vec{x}=3\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{y}=-2\vec{a}+3\vec{b}$

이므로

$\vec{y}-\vec{x}$

$=(-2\vec{a}+3\vec{b})-(3\vec{a}-2\vec{b})$

$=-2\vec{a}+3\vec{b}-3\vec{a}+2\vec{b}$

$=-5\vec{a}+5\vec{b}$

4-1 두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$3m+4n=2m+n,\ 4m-n-6=2m+4n+5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=3,\ n=-1$

중단원 연습 문제 114~117쪽

1-1 (1) $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{FD}$ (2) $\overrightarrow{DE}$

2-1 (1) $\overrightarrow{CA}$ (2) $\vec{0}$ **3-1** -4

4-1 1 **5-1** 사다리꼴

6-1 (1) $-\vec{a}-5\vec{b}$ (2) $-\vec{a}+5\vec{b}-7\vec{c}$

7-1 풀이 참조 **8-1** $\frac{3}{2}$

9-1 $60\sqrt{3}$ km/h **10-1** $m=-4,\ n=2$

1-1 (1) 정육면체의 한 변의 길이가 1이므로

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

이때 $\overrightarrow{AB}$와 크기가 같은 벡터는

$\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{FD}$

(2) $\overrightarrow{BA}$와 서로 같은 벡터는 $\overrightarrow{DE}$이다.

2-1 (1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}$

(2) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

3-1 두 벡터 $2\vec{a}+\vec{b}$와 $k\vec{a}-2\vec{b}$가 서로 평행하므로

$k\vec{a}-2\vec{b}=m(2\vec{a}+\vec{b})$ (단, m은 0이 아닌 실수)

$k\vec{a}-2\vec{b}=2m\vec{a}+m\vec{b}$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$k=2m,\ -2=m \qquad \therefore\ k=-4$

4-1 $3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$

$=4\overrightarrow{BC}$

이므로 $|4\overrightarrow{BC}|=4$에서 $|\overrightarrow{BC}|=1$

따라서 정사각형의 한 변의 길이는 1이다.

5-1 $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$에서

$2\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC},\ 2\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$

이때 두 벡터 $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}$는 평행하고 그 크기가 다르므로 사각형 ABCD는 사다리꼴이다.

6-1 (1) $2(\vec{a}-3\vec{b})-(3\vec{a}-\vec{b})$

$=2\vec{a}-6\vec{b}-3\vec{a}+\vec{b}=-\vec{a}-5\vec{b}$

(2) $2(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})-3(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$

$=2\vec{a}+2\vec{b}-4\vec{c}-3\vec{a}+3\vec{b}-3\vec{c}$

$=-\vec{a}+5\vec{b}-7\vec{c}$

7-1 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{a}-\vec{b}-(2\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}-2\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=4\vec{a}+5\vec{b}-(2\vec{a}+\vec{b})$

$=2\vec{a}+4\vec{b}=-2(-\vec{a}-2\vec{b})$

이때 $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}$이므로 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다.

따라서 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$는 서로 평행하다.

8-1 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB})$

$=2\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

이때 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$이므로 $2\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$

$-2\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ $\quad\therefore\ \overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$

따라서 점 P는 선분 AB의 중점이다.

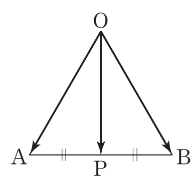
오른쪽 그림의 정삼각형 OAB에서

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OP}$

이고, $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=\sqrt{6}$이므로

$2|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{6}$, $|\overrightarrow{OP}|=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore\ |\overrightarrow{OP}|^2=\dfrac{3}{2}$

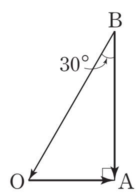


9-1 실제로 빗방울이 떨어지는 속력은

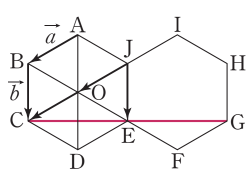
$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{BA}|\tan 30°$에서

$|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{OA}|\dfrac{1}{\tan 30°}$

$=60\times\dfrac{3}{\sqrt{3}}=60\sqrt{3}\ (\mathrm{km/h})$



10-1 다음 그림의 정육각형 ABCDEJ에서 세 대각선 AD, BE, CJ의 교점을 O라고 하자.



이때 $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}$

$=(\overrightarrow{JE}-\overrightarrow{JO})-\overrightarrow{OC}$

$=\vec{b}-\vec{a}-\vec{a}=\vec{b}-2\vec{a}$

이므로 $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{CE}$

$=2(-2\vec{a}+\vec{b})=-4\vec{a}+2\vec{b}$

$\therefore\ m=-4,\ n=2$

2. 평면벡터의 성분과 내적

2-1 위치벡터와 평면벡터의 성분

내신 대비 쌍둥이 문제 119~123쪽

1-1 $-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$

2-1 풀이 참조

3-1 (1) $\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ (2) $2\vec{a}-\vec{b}$

4-1 풀이 참조

5-1 (1) $(-3,\ 2)$ (2) $(3,\ 1)$ (3) $-\vec{e_1}+4\vec{e_2}$ (4) $-3\vec{e_1}$

6-1 (1) $\vec{a}=-2\vec{e_1}+2\vec{e_2}$, $\vec{b}=3\vec{e_1}+\vec{e_2}$

(2) $\vec{a}=(-2,\ 2)$, $\vec{b}=(3,\ 1)$

7-1 (1) $\sqrt{17}$ (2) $\sqrt{5}$

8-1 (1) $(4,\ -2)$ (2) $(3,\ -9)$ (3) $(-3,\ 15)$ (4) $(3,\ 11)$

9-1 (1) $2\vec{a}-2\vec{b}$ (2) $-\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}$

10-1 (1) $\overrightarrow{AB}=(1,\ -3)$, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{10}$

(2) $\overrightarrow{AB}=(-4,\ -3)$, $|\overrightarrow{AB}|=5$

1-1 $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

$=2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$=2(\vec{b}-\vec{a})-(\vec{c}-\vec{b})$

$=2\vec{b}-2\vec{a}-\vec{c}+\vec{b}$

$=-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$

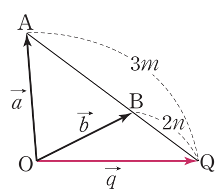
2-1 $|\overrightarrow{AQ}|:|\overrightarrow{QB}|=3m:2n$이므로

$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{3m}{2n}\overrightarrow{BQ}$

이때 $\overrightarrow{AQ}=\vec{q}-\vec{a}$, $\overrightarrow{BQ}=\vec{q}-\vec{b}$이므로

$\vec{q}-\vec{a}=\dfrac{3m}{2n}(\vec{q}-\vec{b})$

$\therefore\ \vec{q}=\dfrac{3m\vec{b}-2n\vec{a}}{3m-2n}$



3-1 (1) 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 위치벡터는

$\dfrac{\vec{b}+2\vec{a}}{1+2}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$

(2) 선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점의 위치벡터는

$\dfrac{\vec{b}-2\vec{a}}{1-2}=2\vec{a}-\vec{b}$

4-1 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라 하고, △ABC의 무게중심 G의 위치벡터를 $\vec{g}$라고 하면

$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

점 D는 선분 BC의 중점이므로 점 D의 위치벡터를 $\vec{d}$라고 하면

$\vec{d}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{GD}&=(\vec{g}-\vec{a})-2(\vec{d}-\vec{g})\\&=3\vec{g}-\vec{a}-2\vec{d}\\&=3\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)-\vec{a}-2\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

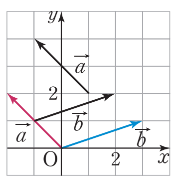
5-1 (1) $\vec{a}=-3(1,\ 0)+2(0,\ 1)=(-3,\ 2)$

(2) $\vec{b}=3(1,\ 0)+(0,\ 1)=(3,\ 1)$

(3) $\vec{c}=-(1,\ 0)+4(0,\ 1)=-\vec{e_1}+4\vec{e_2}$

(4) $\vec{d}=-3(1,\ 0)=-3\vec{e_1}$

6-1 (1) 오른쪽 그림에서 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 시점이 원점이 되도록 평행이동하면 원점 O와 두 점 $(-2,\ 2)$, $(3,\ 1)$에 대하여



$\vec{a}=-2\vec{e_1}+2\vec{e_2}$

$\vec{b}=3\vec{e_1}+\vec{e_2}$

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$를 성분으로 나타내면 각각

$\vec{a}=(-2,\ 2)$, $\vec{b}=(3,\ 1)$

7-1 (1) $|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$

(2) $\vec{b}=2\vec{e_1}+\vec{e_2}=(2,\ 1)$이므로

$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

8-1 (1) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=(2,\ 3)+(1,\ -3)-(-1,\ 2)$

$=(2+1+1,\ 3-3-2)=(4,\ -2)$

(2) $3\vec{b}=3(1,\ -3)=(3,\ -9)$

(3) $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}=(2,\ 3)-2(1,\ -3)+3(-1,\ 2)$

$=(2-2-3,\ 3+6+6)=(-3,\ 15)$

(4) $2(\vec{a}-2\vec{b})-(2\vec{c}-\vec{b})$

$=2\vec{a}-4\vec{b}-2\vec{c}+\vec{b}$

$=2\vec{a}-3\vec{b}-2\vec{c}$

$=2(2,\ 3)-3(1,\ -3)-2(-1,\ 2)$

$=(4-3+2,\ 6+9-4)=(3,\ 11)$

9-1 (1) $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$라고 하면

$(2,\ -6)=k(2,\ -1)+l(1,\ 2)=(2k+l,\ -k+2l)$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$2k+l=2,\ -k+2l=-6$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $k=2,\ l=-2$

$\therefore\ \vec{c}=2\vec{a}-2\vec{b}$

(2) $\vec{e_2}=k\vec{a}+l\vec{b}$라고 하면

$(0,\ 1)=k(2,\ -1)+l(1,\ 2)=(2k+l,\ -k+2l)$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$2k+l=0,\ -k+2l=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $k=-\dfrac{1}{5},\ l=\dfrac{2}{5}$

$\therefore\ \vec{e_2}=-\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}$

10-1 (1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3,\ -2)-(2,\ 1)=(1,\ -3)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

(2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-1,\ -2)-(3,\ 1)$

$=(-4,\ -3)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$

소단원 확인 문제 124~125쪽

1-1 (1) $(6,\ 3)$ (2) $(-6,\ -10)$ (3) $(-4,\ -2)$ (4) $2\sqrt{5}$

2-1 $-6\vec{a}-\vec{b}+7\vec{c}$

3-1 $\dfrac{2}{3}$

4-1 $k=-1,\ l=3$

1-1 (1) $\vec{a}+2\vec{b}=(0,\ -1)+2(3,\ 2)=(6,\ 3)$

(2) $2(3\vec{a}-\vec{b})=6\vec{a}-2\vec{b}=6(0,\ -1)-2(3,\ 2)$

$=(-6,\ -10)$

(3) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-2,\ 1)-(2,\ 3)$

$=(-4,\ -2)$

(4) $|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$

2-1 $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{CA}$

$=2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+3(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})-4(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})$

$=2\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OC}$

$=-6\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+7\overrightarrow{OC}$

$=-6\vec{a}-\vec{b}+7\vec{c}$

3-1 $3\overrightarrow{OQ}=5\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}$에서

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{5\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}}{3}=\frac{5\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}}{5-2}$$

이므로 $\overrightarrow{OQ}$는 선분 AB를 5 : 2로 외분하는 점 Q의 위치 벡터이다.

이때 정삼각형의 한 변의 길이가 1이므로

$$|\overrightarrow{BQ}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|=\frac{2}{3}\times1=\frac{2}{3}$$

4-1 두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$2k+1=2-l$, $3=2-k$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$k=-1$, $l=3$

2-2 평면벡터의 내적

내신 대비 쌍둥이 문제 126~129쪽

1-1 (1) $5\sqrt{2}$ (2) -5 (3) -10 **2-1** (1) 8 (2) -3

3-1 (1) $\frac{5}{3}$ (2) -1

4-1 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

5-1 $4\sqrt{3}$ **6-1** $2\sqrt{19}$

7-1 (1) $45°$ (2) $150°$ **8-1** -6

9-1 $\vec{b}=(2,\ 6)$ 또는 $\vec{b}=(-2,\ -6)$

1-1 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos45°=5\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180°-120°)$

$=-5\times2\times\frac{1}{2}=-5$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180°-180°)$

$=-5\times2\times1=-10$

2-1 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\times(-1)+3\times2=8$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times0+(-1)\times3=-3$

3-1 (1) $(2\vec{a})\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot(2\vec{c})=2(\vec{a}\cdot\vec{b})+2(\vec{b}\cdot\vec{c})$

$=2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

(2) $\vec{b}\cdot(3\vec{c}-4\vec{a})=3(\vec{b}\cdot\vec{c})-4(\vec{b}\cdot\vec{a})$

$=3\times\frac{1}{3}-4\times\frac{1}{2}=-1$

4-1 (1) $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|\le|\vec{a}||\vec{b}|$

이때 $|\vec{a}|\ge0$, $|\vec{b}|\ge0$, $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\ge0$이므로 부등식의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2\le|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$

(2) 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면

$0\le\cos\theta\le1$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\le|\vec{a}||\vec{b}|$

따라서

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^2&=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\\&=|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2\\&\le|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2\\&=(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2\end{aligned}$$

이고 $|\vec{a}+\vec{b}|\ge0$, $|\vec{a}|+|\vec{b}|\ge0$이므로

$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$

5-1 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=9+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=9$

에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$

따라서

$$\begin{aligned}|2\vec{a}+3\vec{b}|^2&=4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2\\&=4\times9-12\times2+9\times4\\&=48\end{aligned}$$

이므로 $|2\vec{a}+3\vec{b}|=4\sqrt{3}$

6-1 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60°=3\times4\times\frac{1}{2}=6$

이므로

$$\begin{aligned}|2\vec{a}+\vec{b}|^2&=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\\&=4\times9+4\times6+16\\&=76\end{aligned}$$

$\therefore\ |2\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{19}$

7-1 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=5>0$이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$\cos\theta=\frac{-1\times1+3\times2}{\sqrt{(-1)^2+3^2}\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore\ \theta=45°$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\sqrt{3}<0$이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$\cos(180°-\theta)=-\frac{1\times0+\sqrt{3}\times(-1)}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\sqrt{0+(-1)^2}}$$
$$=-\frac{-\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $180°-\theta=30°$이므로 $\theta=150°$

8-1 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 수직이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times k+3\times4=2k+12=0$

$\therefore k=-6$

9-1 $\vec{b}=(x, y)$라고 하면 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 수직이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, 즉 $3x-y=0$ ……①

또, $|\vec{b}|=2\sqrt{10}$이므로

$|\vec{b}|^2=40$, 즉 $x^2+y^2=40$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면

$x=2$, $y=6$ 또는 $x=-2$, $y=-6$

따라서 구하는 벡터 $\vec{b}$는

$\vec{b}=(2, 6)$ 또는 $\vec{b}=(-2, -6)$

소단원 확인 문제 131~132쪽

1-1 (1) $30°$ (2) $60°$ (3) $45°$ (4) $135°$

2-1 (1) 51 (2) $3\sqrt{10}$

3-1 12

4-1 수직: $\frac{1}{4}$, 평행: -1

1-1 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\sqrt{3}>0$이므로

$$\cos\theta=\frac{4\sqrt{3}}{4\times2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \theta=30°$$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=4>0$이므로

$$\cos\theta=\frac{4}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{1}{2} \qquad \therefore \theta=60°$$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=5>0$이므로

$$\cos\theta=\frac{5}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore \theta=45°$

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6<0$이므로

$$\cos(180°-\theta)=-\frac{-6}{\sqrt{3^2+3^2}\sqrt{0+(-2)^2}}$$
$$=\frac{6}{3\sqrt{2}\times2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $180°-\theta=45°$이므로 $\theta=135°$

2-1 $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$, $|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2-9=-7$

(1) $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$

$=(3\vec{a})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})-(2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$

$=3\vec{a}\cdot\vec{a}+6\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=3|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}-4|\vec{b}|^2$

$=3\times(\sqrt{13})^2+4\times(-7)+4\times(\sqrt{10})^2$

$=51$

(2) $|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=4\times(\sqrt{13})^2-4\times(-7)+(\sqrt{10})^2$

$=90$

$\therefore |2\vec{a}-\vec{b}|=3\sqrt{10}$

3-1 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 교점을 O라고 하면 $\overline{AO}=1$, $\overline{AB}=2$이므로

$\overline{BO}=\sqrt{3}$

$|\vec{p}|=|\overrightarrow{BD}|=2|\overrightarrow{BO}|=2\sqrt{3}$, $|\vec{q}|=|\overrightarrow{AC}|=2$이고

$\vec{p}\cdot\vec{q}=0$이므로

$(2\vec{p}+\vec{q})\cdot(\vec{p}-3\vec{q})$

$=(2\vec{p})\cdot(\vec{p}-3\vec{q})+\vec{q}\cdot(\vec{p}-3\vec{q})$

$=2\vec{p}\cdot\vec{p}-6\vec{p}\cdot\vec{q}+\vec{p}\cdot\vec{q}-3\vec{q}\cdot\vec{q}$

$=2|\vec{p}|^2-5\vec{p}\cdot\vec{q}-3|\vec{q}|^2$

$=2\times(2\sqrt{3})^2-5\times0-3\times2^2$

$=12$

4-1 $\vec{a}+\vec{b}=(1, 1)+(-2, 2)=(-1, 3)$

$-\vec{a}+t\vec{b}=-(1, 1)+t(-2, 2)$

$=(-1-2t, -1+2t)$

(i) 수직일 때

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(-a+t\vec{b})=0$이므로

$(-1, 3)\cdot(-1-2t, -1+2t)$

$=-(-1-2t)+3(-1+2t)$

$=8t-2=0$

$\therefore t=\frac{1}{4}$

(ii) 평행할 때

$-\vec{a}+t\vec{b}=k(\vec{a}+\vec{b})$(단, k는 0이 아닌 실수)

이므로

$(-1-2t, -1+2t)=k(-1, 3)=(-k, 3k)$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$-1-2t=-k$, $-1+2t=3k$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$k=-1$, $t=-1$

2-3 직선과 원의 방정식

내신 대비 쌍둥이 문제 134~137쪽

1-1 (1) $\frac{x-1}{2}=3-y$ (2) $\frac{x-4}{2}=-y$

2-1 풀이 참조

3-1 (1) $x-3y-9=0$ (2) $y=2$

4-1 $30°$

5-1 수직: $\frac{4}{3}$, 평행: -3

6-1 (1) $(x-2)^2+(y-4)^2=4$ (2) $(x-2)^2+y^2=2$

7-1 (1) 점 $(2, 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원

(2) 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원

1-1 (1) 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-1}, \text{ 즉 } \frac{x-1}{2}=3-y$$

(2) 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y-0}{-1}, \text{ 즉 } \frac{x-4}{2}=-y$$

2-1 벡터 $\overrightarrow{AB}=((m-n)x_1, (m-n)y_1)$은 두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터이고, 점 $A(nx_1, ny_1)$은 이 직선 위의 점이다.

따라서 직선의 방정식은

$$\frac{x-nx_1}{(m-n)x_1}=\frac{y-ny_1}{(m-n)y_1}, \text{ 즉}$$

$$\frac{x-nx_1}{x_1}=\frac{y-ny_1}{y_1} \text{ (단, } m\neq n)$$

3-1 (1) 구하는 직선의 방정식은

$-(x-3)+3\{y-(-2)\}=0$, 즉 $x-3y-9=0$

(2) y축에 수직인 직선의 법선벡터는 $\vec{e_2}=(0, 1)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-2=0$, 즉 $y=2$

4-1 두 벡터 $\vec{u_1}=(1, \sqrt{3})$, $\vec{u_2}=(\sqrt{3}, 1)$은 각각 주어진 두 직선의 방향벡터이므로 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면

$$\cos\theta=\frac{1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times1}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \theta=30°$

5-1 두 벡터 $\vec{u_1}=(3, 2)$, $\vec{u_2}=(a, -2)$는 각각 주어진 두 직선의 방향벡터이다.

(i) 수직일 때

$\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0$이므로 $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=3a-4=0$

$\therefore a=\frac{4}{3}$

(ii) 평행할 때

$\vec{u_2}=k\vec{u_1}$(단, k는 0이 아닌 실수)이므로

$(a, -2)=k(3, 2)=(3k, 2k)$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$a=3k$, $-2=2k$

$\therefore k=-1$, $a=-3$

6-1 (1) 원 위의 한 점의 좌표를 (x, y)라고 하면 원의 방정식은

$(x-2, y-4)\cdot(x-2, y-4)=2^2$, 즉

$(x-2)^2+(y-4)^2=4$

(2) 원 위의 한 점을 $P(x, y)$라 하고, 세 점 P, A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{p}, \vec{a}, \vec{b}$라고 하자.

$\overline{AB}$가 원의 지름이므로 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$에서 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$

이때 $\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}=(x-3, y-1)$,

$\overrightarrow{BP}=\vec{p}-\vec{b}=(x-1, y+1)$

이므로 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$에서

$(x-3, y-1)\cdot(x-1, y+1)=0$

$(x-3)(x-1)+(y-1)(y+1)=0$

$x^2-4x+y^2+2=0$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+y^2=2$

7-1 점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면

$\vec{p}-\vec{a}=(x-2, y-1)$, $\vec{p}+\vec{a}=(x+2, y+1)$

(1) $|\vec{p}-\vec{a}|=1$에서 $|\vec{p}-\vec{a}|^2=1$이므로

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=1$

$(x-2, y-1)\cdot(x-2, y-1)=1$

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

따라서 점 P는 점 $(2, 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위에 있다.

(2) $(\vec{p}+\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$에서

$(x+2, y+1)\cdot(x-2, y-1)=0$

$(x+2)(x-2)+(y+1)(y-1)=0$

$x^2+y^2=5$

따라서 점 P는 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원 위에 있다.

소단원 확인 문제 139~140쪽

1-1 (1) $2-x=\frac{y+1}{2}$ (2) $y=3$

(3) $\frac{x-2}{-3}=\frac{y-3}{4}$ (4) $x-3=y$

2-1 0

3-1 $a=-2,\ b=3$

4-1 최댓값: $2+\sqrt{2}$, 최솟값: $2-\sqrt{2}$

1-1 (1) 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-(-1)}{2},\ \text{즉 } 2-x=\frac{y+1}{2}$$

(2) 구하는 직선의 방정식은

$$2(y-3)=0,\ \text{즉 } y=3$$

(3) 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y-3}{7-3},\ \text{즉 } \frac{x-2}{-3}=\frac{y-3}{4}$$

(4) 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{4-3}=\frac{y}{1-0},\ \text{즉 } x-3=y$$

2-1 $\frac{x-1}{2}=\frac{3-2y}{3}$에서 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}}$이므로 두 벡터 $\vec{u_1}=\left(2,\ -\frac{3}{2}\right)$, $\vec{u_2}=(3,\ 4)$는 각각 주어진 두 직선의 방향벡터이다.

이때 $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=6-6=0$이므로

$$\cos\theta=0$$

3-1 직선 $\frac{x}{3}=\frac{1-2y}{2}$에서 $\frac{x}{3}=-y+\frac{1}{2}$이므로 벡터 $\vec{u_1}=(3,\ -1)$은 $\frac{x}{3}=\frac{1-2y}{2}$의 방향벡터이고, $\vec{u_2}=(6,\ a)$는 직선 $\frac{x+1}{6}=\frac{y-2}{a}$의 방향벡터이며, $\vec{u_3}=(1,\ b)$는 직선 $x-2=\frac{y+3}{b}$의 방향벡터이다.

(i) 직선 $\frac{x}{3}=\frac{1-2y}{2}$가 직선 $\frac{x+1}{6}=\frac{y-2}{a}$와 평행할 때

$\vec{u_2}=k\vec{u_1}$ (단, k는 0이 아닌 실수)

이므로

$(6,\ a)=k(3,\ -1)=(3k,\ -k)$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$6=3k,\ a=-k$

$\therefore k=2,\ a=-2$

(ii) 직선 $\frac{x}{3}=\frac{1-2y}{2}$가 직선 $x-2=\frac{y+3}{b}$과 수직일 때

$\vec{u_1}\cdot\vec{u_3}=0$

이므로

$(3,\ -1)\cdot(1,\ b)=3-b=0$

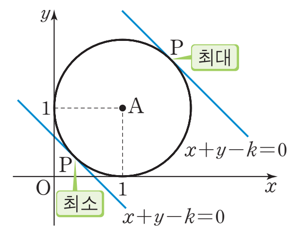
$\therefore b=3$

4-1 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하고, 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면 $|\overrightarrow{AP}|=1$이므로 $|\vec{p}-\vec{a}|=1$, 즉

$|\vec{p}-\vec{a}|^2=(x-1,\ y-1)\cdot(x-1,\ y-1)=1$

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

이때 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=(1,\ 1)\cdot(x,\ y)=x+y$에서 $x+y=k$라고 하면 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$과 직선 $x+y=k$, 즉 $x+y-k=0$이 접할 때, k의 값이 최대 또는 최소가 된다.



즉, 점 $(1,\ 1)$과 직선 $x+y-k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로

$\frac{|1+1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1,\ |2-k|=\sqrt{2}$

$2-k=\sqrt{2}$ 또는 $2-k=-\sqrt{2}$

$\therefore k=2-\sqrt{2}$ 또는 $k=2+\sqrt{2}$

따라서 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$의 최댓값은 $2+\sqrt{2}$, 최솟값은 $2-\sqrt{2}$이다.

중단원 연습 문제 143~148쪽

1-1 $(-8,\ 3)$

2-1 0 또는 -6

3-1 -1

4-1 (1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}$ (2) $\frac{x+2}{3}=y-3$

5-1 $\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

6-1 $\sqrt{10}$

7-1 6

8-1 2π

9-1 $\frac{11}{4}$

10-1 $2\sqrt{3}$

11-1 3 : 2

1-1 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-2,\ 2)-(1,\ 3)=(-3,\ -1)$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(3,\ -2)-(-2,\ 2)=(5,\ -4)$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=(-3,\ -1)-(5,\ -4)=(-8,\ 3)$

2-1 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(t,\ 2)-(-3,\ 6)=(t+3,\ -4)$

이때 $|\overrightarrow{AB}|=5$에서 $\sqrt{(t+3)^2+(-4)^2}=5$이므로

$(t+3)^2+16=25,\ (t+3)^2=9$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=-6$

3-1 $2\vec{a}+\vec{b}=2(1,\ 0)+(-2,\ 1)=(0,\ 1)$

$4\vec{b}+t\vec{c}=4(-2,\ 1)+t(3,\ 4)=(-8+3t,\ 4+4t)$

이때 $2\vec{a}+\vec{b}$와 $4\vec{b}+t\vec{c}$가 서로 수직이므로

$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(4\vec{b}+t\vec{c})$

$=(0,\ 1)\cdot(-8+3t,\ 4+4t)$

$=4+4t=0$

$\therefore\ t=-1$

4-1 (1) 벡터 $\vec{u}=(2,\ 3)$은 직선 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+3}{3}$의 방향벡터이므로 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}$$

(2) 벡터 $\vec{n}=(3,\ 1)$은 직선 $3x+y+6=0$의 법선벡터이므로 이 벡터는 구하는 직선의 방향벡터이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x-(-2)}{3}=\frac{y-3}{1},\ \text{즉 } \frac{x+2}{3}=y-3$$

5-1 세 점 B, F, E가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{BF}=k\overrightarrow{BE}$ (단, k는 0이 아닌 실수)에서

$\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=k(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{AF}-3\vec{a}=k(\vec{b}-3\vec{a})$

$\overrightarrow{AF}=(3-3k)\vec{a}+k\vec{b}$ ……①

또, 세 점 C, F, D가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{CF}=l\overrightarrow{CD}$ (단, l은 0이 아닌 실수)에서

$\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC}=l(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AF}-2\vec{b}=l(2\vec{a}-2\vec{b})$

$\overrightarrow{AF}=2l\vec{a}+(2-2l)\vec{b}$ ……②

①, ②에서 $3-3k=2l,\ k=2-2l$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $k=\dfrac{1}{2},\ l=\dfrac{3}{4}$

$\therefore\ \overrightarrow{AF}=\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

6-1 $\vec{a}=\vec{b}$이므로 $(2-x,\ 6+y)=(4+y,\ x+2)$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$2-x=4+y,\ 6+y=x+2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=1,\ y=-3$

따라서 $\vec{a}=(1,\ 3)$이므로 $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

7-1 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면

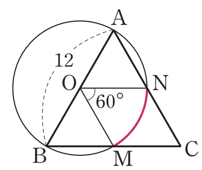
$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{12\sqrt{3}}{4\times6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore\ \theta=30°$

따라서 △OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta=\frac{1}{2}\times4\times6\times\frac{1}{2}=6$$

8-1 △ABC의 세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 O, M, N이라고 하자. 점 P가 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$을 만족시키므로 점 P는 점 O를 중심으로 하고 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이며, 이 원은 두 점 M, N을 지난다.



이때 점 P는 정삼각형 ABC의 내부에 있으므로 점 P가 나타내는 도형은 점 O를 중심으로 하고 선분 AB를 지름으로 하는 원의 호 MN이다.

한편, 원의 반지름의 길이는 6이고 $\angle MON=60°$이므로 호 MN의 길이는

$$\frac{1}{6}\times12\pi=2\pi$$

9-1 △ABC가 정삼각형이므로 $|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{3},\ |\overrightarrow{ED}|=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED})\cdot(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF})$

$=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED})\cdot(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{ED})$

$=|\overrightarrow{AE}|^2-|\overrightarrow{ED}|^2$

$=3-\dfrac{1}{4}=\dfrac{11}{4}$

10-1 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_2Q}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}=|\overrightarrow{O_1P}||\overrightarrow{O_2Q}|\cos\theta$

$=2\times2\times\cos\theta=4\cos\theta$

$\cos\theta$의 값이 최대인 경우는 두 점 P, Q가 모두 점 A 또는 점 B의 위치에 있을 때, 즉 $\theta=60°$일 때이다.

따라서 $\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_2Q}$의 최댓값은

$4\times\cos 60^\circ=4\times\frac{1}{2}=2$

이므로

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=4+2\times2+4=12$

$\therefore |\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{3}$

11-1 $5\overrightarrow{OP}-2\vec{a}-3\vec{b}=\vec{0}$에서 $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$이므로 점 P는 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점이다.

따라서 △OAP와 △OBP의 넓이의 비는

$\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$이다.

대단원 **모의고사** 157~161쪽

01 ①	02 ④	03 ②	04 ④	05 ③
06 ②	07 ①	08 ④	09 ①	10 ⑤
11 ②	12 ①	13 ①	14 ①	15 ③
16 ④	17 ⑤	18 ②	19 ③	20 ②
21 3	22 5π	23 25	24 $\frac{7}{9}$	

01 $(m+n)(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}+n\vec{b})+4\vec{b}$에서

$(m+n)\vec{a}+(m+n)\vec{b}=2\vec{a}+(2n+4)\vec{b}$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$m+n=2,\ m+n=2n+4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=3,\ n=-1$

$\therefore m^2+n^2=3^2+(-1)^2=10$

02 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(\vec{a}-\vec{b})-(3\vec{a}+\vec{b})$

$=-2\vec{a}-2\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(k\vec{a}+2\vec{b})-(3\vec{a}+\vec{b})$

$=(k-3)\vec{a}+\vec{b}$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}$ (단, m은 0이 아닌 실수)

를 만족시키는 실수 m이 존재한다. 즉,

$(k-3)\vec{a}+\vec{b}=m(-2\vec{a}-2\vec{b})=-2m\vec{a}-2m\vec{b}$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$k-3=-2m,\ 1=-2m$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=-\frac{1}{2},\ k=4$

03 조건 (나)에서 $\vec{a}+\vec{b}$, $2\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직이므로

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=0,\ 2|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=0$

조건 (가)에서 $|\vec{b}|=\sqrt{3}$이므로

$2|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=3$ ……①

$|\vec{a}-2\vec{b}|=3\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=18$

$|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면

$|\vec{a}|=\sqrt{2},\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-1$

04 (i) $k=-1$일 때 $\vec{x}=-\overrightarrow{AB}$이므로 이를 만족하는 벡터는

$\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{CO},\ \overrightarrow{DE},\ \overrightarrow{OF}$

(ii) $k=-2$일 때 $\vec{x}=-2\overrightarrow{AB}$이므로 이를 만족하는 벡터는

$\overrightarrow{CF}$

(i), (ii)에서 구하는 원소의 개수는 5이다.

05 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC}=0$에서

$(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$

$|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=0$

따라서 $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|$이므로 △ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이다.

06 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라고 하면

$\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\vec{a},\ \overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\vec{b},\ \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{a}$

따라서 $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}=2\vec{b}-\frac{7}{4}\vec{a}$이므로

$|\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}|^2=\left|2\vec{b}-\frac{7}{4}\vec{a}\right|^2$

$=4|\vec{b}|^2-7\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{49}{16}|\vec{a}|^2$

이때 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=4$이고 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 60°이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=4\times4\times\frac{1}{2}=8$

$\therefore |\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}|^2=4\times4^2-7\times8+\frac{49}{16}\times4^2=57$

07 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$를 만족시키는 점 P는 △ABC의 무게중심이다.

따라서 △ABC의 무게중심 P의 좌표는

$\left(\dfrac{-4+0-5}{3},\ \dfrac{-2+5+3}{3}\right)$, 즉 $(-3,\ 2)$

08 $\vec{p}=(x,\ y)$라고 하면 $\vec{p}-\vec{a}=(x+1,\ y-1)$

$|\vec{p}-\vec{a}|=4$에서 $|\vec{p}-\vec{a}|^2=16$이므로

$(x+1)^2+(y-1)^2=16$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 4인 원이므로 도형의 길이는 8π이다.

09 조건 (가)에서 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$이므로 양변을 제곱하면

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=|-\overrightarrow{OC}|^2$

$|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2$

$1+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+4=2$

$\therefore\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\dfrac{3}{2}$

10 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$

$=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

이때 △ACD, △ACB에서 ∠ADC=∠ABC=90°이고, 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$가 이루는 각의 크기를 θ_1, 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기를 θ_2라고 하면

$|\overrightarrow{AC}|\cos\theta_1=|\overrightarrow{AD}|$, $|\overrightarrow{AC}|\cos\theta_2=|\overrightarrow{AB}|$

∴ (주어진 식)

$=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|\cos\theta_1-|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta_2$

$=|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2$

$=7^2-5^2=24$

11 타원 $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{33}=1$에서 $49-33=16$이므로 두 초점 F, F′의 좌표는 각각 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$이다.

이때 원점 O에 대하여

$\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{PF'}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OF})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OF'})$

$=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OF})\cdot(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OF})$

$=|\overrightarrow{PO}|^2-|\overrightarrow{OF}|^2$

$=|\overrightarrow{PO}|^2-16$

$\overline{PO}$가 최대일 때는 점 P가 장축의 끝점에 올 때이고, 최소일 때는 단축의 끝점에 올 때이다.

따라서 $M=7^2-16=33$, $m=(\sqrt{33})^2-16=17$이므로

$M-m=16$

12 (i) $t=0$일 때

$\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\vec{0}$, 즉 $\overrightarrow{OB}=-2\overrightarrow{OC}$

에서 세 점 O, B, C는 한 직선 위에 있으므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

(ii) $t\neq0$일 때

$t\overrightarrow{OA}=(t-1)\overrightarrow{OB}+(t-2)\overrightarrow{OC}$에서

$\overrightarrow{OA}=\dfrac{t-1}{t}\overrightarrow{OB}+\dfrac{t-2}{t}\overrightarrow{OC}$

이때 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{BC}$ (단, k는 0이 아닌 실수)에서

$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$\overrightarrow{OC}-\left(\dfrac{t-1}{t}\overrightarrow{OB}+\dfrac{t-2}{t}\overrightarrow{OC}\right)=k\overrightarrow{OC}-k\overrightarrow{OB}$

$\dfrac{2}{t}\overrightarrow{OC}-\dfrac{t-1}{t}\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OC}-k\overrightarrow{OB}$

이때 $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$는 서로 평행하지 않으므로

$\dfrac{2}{t}=k$, $-\dfrac{t-1}{t}=-k$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$k=\dfrac{2}{3}$, $t=3$

13 $2\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$에서

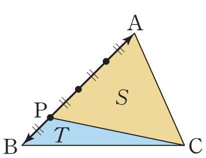
$2\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BP}$

이므로

$2\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{BP}-5\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{PB}-5\overrightarrow{PB}=-6\overrightarrow{PB}$

$\therefore\ \overrightarrow{PA}=-3\overrightarrow{PB}$

따라서 세 점 P, A, B는 한 직선 위에 있고, 점 P는 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점이다.



따라서 $S:T=3:1$이므로

$\dfrac{T}{S}=\dfrac{1}{3}$

14 $\overrightarrow{PB}=2(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})$에서

$\overrightarrow{PB}=2(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DC})$, $\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{DP}$

이므로 점 P는 $\overline{BD}$를 2 : 1로 내분하는 점이다.

$\therefore$ △PCD$=\dfrac{1}{3}$△BCD$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\times3\times4\right)=2$

15 $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{24}=1$에서 $49-24=25$이므로 두 초점은

$F(5,\ 0)$, $F'(-5,\ 0)$이고, $\overline{FF'}=10$

한편, $\overline{PF}=a$, $\overline{PF'}=b$라고 하면

$a+b=14$ ……①

이때 △PFF′는 ∠FPF′=90°인 직각삼각형이므로

$a^2+b^2=10^2$ ……②

①을 ②에 대입하여 정리하면

$a^2+(14-a)^2=10^2$, $a^2-14a+48=0$

$(a-6)(a-8)=0$ $\quad\therefore a=6$ 또는 $a=8$

한편, 점 P는 제1사분면 위의 점이므로 $\overline{PF}<\overline{PF'}$에서

$\overline{PF}=a=6$, $\overline{PF'}=b=8$

또, 점 O는 직각삼각형 PFF′의 외심이므로

$\overline{OP}=\overline{OF}=\overline{OF'}=5$

△OPF는 $\overline{OP}=\overline{OF}=5$, $\overline{PF}=6$인 이등변삼각형이므로

$\overrightarrow{PO}$와 $\overrightarrow{PF}$가 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면

$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

$\therefore \overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PF}=|\overrightarrow{PO}||\overrightarrow{PF}|\cos\theta$

$=5\times6\times\dfrac{3}{5}=18$

16 점 $A(4,\ 0)$과 직선 $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{3}$, 즉 $3x-2y+1=0$

사이의 거리는

$\dfrac{|12+1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$

$\overline{AB}=a$라고 하면 점 A와 직선 l 사이의 거리는

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{13}$이므로 $a=\dfrac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$

$\therefore \triangle ABC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\dfrac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$

17 두 점 $A(3,\ 2)$, $B(-1,\ 5)$를 지나는 직선 l의 방정식은

$\dfrac{x-3}{-1-3}=\dfrac{y-2}{5-2}$, 즉 $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y-2}{3}$

이므로 $\vec{u}=(-4,\ 3)$은 직선 l의 방향벡터이다.

또, 벡터 $\vec{v}=(2,\ 1)$은 직선 m의 방향벡터이다.

$\therefore \cos\theta=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{|-4\times2+3\times1|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}\sqrt{2^2+1^2}}$

$=\dfrac{5}{5\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

18 $\overline{AB}$의 중점을 M, $\overline{AC}$의 중점을 N이라고 하면

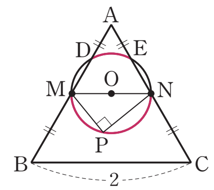
$\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}=\overrightarrow{PM}$, $\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}}{2}=\overrightarrow{PN}$

이므로

$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})=4\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$

$\therefore \overrightarrow{PM}\perp\overrightarrow{PN}$

오른쪽 그림과 같이 점 P가 나타내는 도형은 점 O를 중심으로 하고, 선분 MN을 지름으로 하는 원이다.



이때 원과 △ABC가 만나는 점을 각각 D, E라고 하면 △ODE는 정삼각형이므로 점 P가 나타내는 도형의 길이는

$\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2}{3}\pi$

$\therefore p+q=5$

19 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}=k$에서 $|\overrightarrow{AP}|^2=k$이므로 점 P가 나타내는 도형은 중심이 $A(-1,\ 3)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{k}$인 원이다.

이 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이는 3이다.

따라서 $\sqrt{k}=3$이므로 $k=9$

20 한 변의 길이가 2인 정사각형에 내접하는 원의 반지름의 길이는 1이고, 그 원에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EH}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EH}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{EH}|\cos\theta$

$=2\times\sqrt{2}\cos\theta=\sqrt{6}$

따라서 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\theta=30°$

즉, ∠DEH=30°이므로 ∠FGB=30°

한편, □ABCD, □EFGH는 정사각형이므로

∠OBG=∠OGF=45°

따라서 △OBG에서 ∠BOG=60°이므로

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OG}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OG}|\cos 60°$

$=\sqrt{2}\times1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore 20\times|\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OG}|^2=20\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=10$

서술형 문제

21 ❶ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 하자.

세 점 A, P, D가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AD}$ (단, k는 0이 아닌 실수)

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})$, $\overrightarrow{OP}-\vec{a}=k\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)$

$\overrightarrow{OP}=(1-k)\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}$ ……①

❷ 또, 세 점 B, P, C가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{BP}=l\overrightarrow{BC}$ (단, l은 0이 아닌 실수)

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=l(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$, $\overrightarrow{OP}-\vec{b}=l\left(\frac{3}{4}\vec{a}-\vec{b}\right)$

$\overrightarrow{OP}=\frac{3l}{4}\vec{a}+(1-l)\vec{b}$ ……②

❸ ①, ②에서

$1-k=\frac{3}{4}l$, $\frac{k}{2}=1-l$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$k=\frac{2}{5}$, $l=\frac{4}{5}$

따라서 $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$이므로 $25mn=3$

채점 기준	배점
❶ 세 점 A, P, D가 한 직선 위에 있음을 이용하여 $\overrightarrow{OP}$를 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$로 나타내기	40 %
❷ 세 점 A, P, D가 한 직선 위에 있음을 이용하여 $\overrightarrow{OP}$를 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$로 나타내기	40 %
❸ $25mn$의 값 구하기	20 %

22 ❶ 점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면

$\overrightarrow{PA}=(1-x, -5-y)$, $\overrightarrow{PB}=(-2-x, -1-y)$

❷ $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$에서

$(1-x)(-2-x)+(-5-y)(-1-y)=0$

$x^2+x+y^2+6y+3=0$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+3)^2=\frac{25}{4}$

❸ 따라서 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\frac{5}{2}$인 원이므로 도형의 길이는 5π이다.

채점 기준	배점
❶ 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$를 성분으로 나타내기	40 %
❷ $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$임을 이용하여 식 세우기	40 %
❸ 도형의 길이 구하기	20 %

23 ❶ $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$와 $\overrightarrow{DC}$가 각각 수직이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$

❷ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=9$

❸ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot\overrightarrow{AD}$

$=|\overrightarrow{AD}|^2+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}=16$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=25$

채점 기준	배점
❶ 수직임을 이용하여 관계식 구하기	20 %
❷ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$의 값 구하기	40 %
❸ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$의 값 구하기	40 %

24 ❶ 두 벡터 $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기를 θ_1, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기를 θ_2라고 하자.

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AH}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta_1=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta_2=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|$

$|\overrightarrow{AD}|=x$라고 하면 피타고라스 정리에 의하여

$2^2-x^2=(\sqrt{7})^2-(3-x)^2$

위 식을 전개하여 정리하면

$6x=6$, $x=1$ $\quad\therefore |\overrightarrow{AD}|=1$

$\therefore \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$

마찬가지 방법으로 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$

❷ $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$이므로

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}$

$=x|\overrightarrow{AB}|^2+y(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})$

$=4x+3y=3$ ……①

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}$

$=x(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})+y|\overrightarrow{AC}|^2$

$=3x+9y=3$ ……②

❸ ①, ②를 연립하여 풀면

$x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{9}$ $\quad\therefore x+y=\frac{7}{9}$

채점 기준	배점
❶ 피타고라스 정리를 이용하여 내적 구하기	40 %
❷ x, y에 대한 관계식 구하기	40 %
❸ $x+y$의 값 구하기	20 %

Ⅲ. 공간도형과 공간좌표

1. 공간도형

1-1 직선, 평면의 위치 관계

내신 대비 쌍둥이 문제 164~166쪽

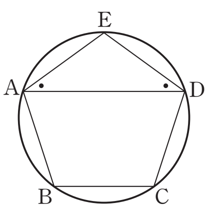
1-1 모서리 DC, 모서리 HG, 모서리 EF
2-1 (1) 1개 (2) 4개
3-1 (1) 2개 (2) 8개
4-1 72°
5-1 직선 BE, 직선 AD, 직선 CF

1-1 직선 AB와 평행한 모서리는 모서리 DC, HG, EF이다.

2-1 (1) 직선 BC와 평행한 모서리는 모서리 ED이므로 그 개수는 1개이다.
(2) 직선 BC와 꼬인 위치에 있는 모서리는 모서리 AE, AD, EF, DF이므로 그 개수는 4개이다.

3-1 (1) 평면 ABHG와 평행한 평면은 평면 FEKL, DCIJ이므로 그 개수는 2개이다.
(2) 평면 EDJK와 평행한 직선은 직선 AF, FL, GL, AG, BC, CI, IH, BH이므로 그 개수는 8개이다.

4-1 두 직선 FI와 AD는 서로 평행하므로 직선 AB와 직선 FI가 이루는 예각의 크기는 직선 AB와 직선 AD가 이루는 예각의 크기와 같다.
정오각형의 한 내각의 크기는 108°이고 오른쪽 그림에서 삼각형 ADE는 이등변삼각형이므로



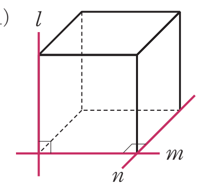
$\angle EAD=\angle EDA=36^\circ$
따라서
$\angle EAB-\angle EAD=108^\circ-36^\circ=72^\circ$
이므로 직선 AB와 직선 AD가 이루는 예각의 크기는 72°이다.

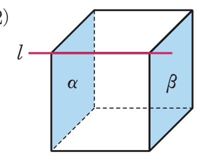
5-1 평면 DEF와 수직인 평면은 평면 BEDA, 평면 ADFC, 평면 BEFC이므로 이 세 평면 중 두 평면이 만나서 생기는 세 개의 교선 BE, AD, CF 역시 평면 DEF와 수직이다. 따라서 평면 DEF와 수직인 직선은 직선 BE, AD, CF이다.

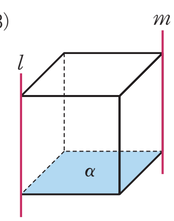
소단원 확인 문제 167~168쪽

1-1 (1) × (2) ○ (3) ○
2-1 (1) 45° (2) 60°
3-1 풀이 참조

1-1 (1) (×) (반례) 다음 그림과 같이 $l\perp n$일 수도 있다.
(2) (○) 다음 그림과 같이 항상 참이다.
(3) (○) 다음 그림과 같이 항상 참이다.

(1)


(2)


(3)


2-1 (1) $\overleftrightarrow{BC}\,/\!/\,\overleftrightarrow{FG}$이므로 두 직선 DB와 FG가 이루는 예각의 크기는 두 직선 DB와 BC가 이루는 예각의 크기와 같다. 이때 삼각형 DBC는 직각이등변삼각형이므로 $\angle DBC=45^\circ$이다. 따라서 두 직선 DB와 FG가 이루는 예각의 크기는 45°이다.
(2) $\overleftrightarrow{DE}\,/\!/\,\overleftrightarrow{CF}$이므로 두 직선 AF와 DE가 이루는 예각의 크기는 두 직선 AF와 CF가 이루는 예각의 크기와 같다. 이때 삼각형 AFC는 정삼각형이므로 $\angle AFC=60^\circ$이다. 따라서 두 직선 AF와 DE가 이루는 예각의 크기는 60°이다.

3-1 정사각기둥이므로 (평면 ABCD)$\perp$(직선 BF)이다.
그런데 직선 AC는 평면 ABCD에 포함되므로
(직선 AC)$\perp$(직선 BF) ……①
또한, 정사각형 ABCD에서 두 대각선은 서로 수직이므로
(직선 AC)$\perp$(직선 DB) ……②
따라서 ①, ②에 의하여 두 직선 DB와 BF를 모두 포함하는 평면 DBF는 직선 AC와 수직이다.
즉, (직선 AC)$\perp$(평면 DBF)이다. 그런데 직선 DF는 평면 DBF에 포함되므로 직선 AC와 직선 DF는 수직이다.

1-2 삼수선 정리

내신 대비 쌍둥이 문제 170쪽

2-1 8 **3-1** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2-1 $\overline{PO}\perp\alpha$이고, $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{PH}\perp\overline{AB}$

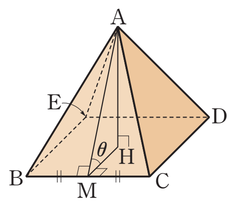
따라서 직각삼각형 PHO에서

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{PO}^2+\overline{OH}^2}=\sqrt{12+36}=4\sqrt{3}$

또, 직각삼각형 PHA에서

$\overline{PA}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{PH}^2}=\sqrt{16+48}=8$

3-1 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 M이라 하고, 점 A에서 밑면 BCDE에 내린 수선의 발을 H라고 하면 삼수선 정리에 의하여



$\overline{BC}\perp\overline{HM}$이므로 밑면 BCDE와 옆면 ABC가 이루는 각의 크기 θ는 $\overline{HM}$과 $\overline{AM}$이 이루는 각의 크기와 같다.

정사각뿔의 한 모서리의 길이를 a라고 하면

$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\overline{HM}=\frac{1}{2}a$

$\therefore \cos\theta=\frac{\overline{HM}}{\overline{AM}}=\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

소단원 확인 문제 172~173쪽

1-1 $4\sqrt{2}$ **2-1** $\sqrt{21}$ **3-1** $\frac{3}{7}$

1-1 $\overline{PO}\perp\alpha$이고, $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{PH}\perp\overline{AB}$

따라서 직각삼각형 PAH에서

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{PA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{100-36}=8$

또, 직각삼각형 PHO에서

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{PH}^2-\overline{PO}^2}=\sqrt{64-32}=4\sqrt{2}$

2-1 $\overline{AD}\perp\overline{BD}$, $\overline{AD}\perp\overline{CD}$이므로

$\overline{AD}\perp$(평면 DBC)

이고 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{DH}\perp\overline{BC}$

직각삼각형 DBC에서

$\overline{BC}=\sqrt{3^2+(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

이때 $\triangle$DBC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{CD}=\frac{1}{2}\times\overline{DH}\times\overline{BC}$이므로

$\overline{DH}=\frac{\overline{BD}\times\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{3\times3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\sqrt{6}$

따라서 직각삼각형 ADH에서

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AH}^2-\overline{DH}^2}$

$=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2}$

$=\sqrt{21}$

3-1 직각삼각형 HEG에서

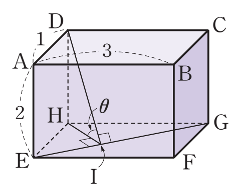
$\overline{EG}=\sqrt{\overline{HE}^2+\overline{HG}^2}$

$=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

이고, 직각삼각형 HEG의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{HE}\times\overline{HG}=\frac{1}{2}\times1\times3=\frac{3}{2}$

점 D에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 I라고 하면



$\overline{DH}\perp$(평면 EFGH),

$\overline{DI}\perp\overline{EG}$

이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{HI}\perp\overline{EG}$

직각삼각형 HEG의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{HI}\times\overline{EG}=\frac{1}{2}\times\overline{HI}\times\sqrt{10}=\frac{3}{2}$

$\therefore \overline{HI}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

직각삼각형 DHI에서

$\overline{DI}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{HI}^2}$

$=\sqrt{4+\frac{9}{10}}=\frac{7}{\sqrt{10}}=\frac{7\sqrt{10}}{10}$

$\therefore \cos\theta=\frac{\overline{HI}}{\overline{DI}}=\frac{\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{7\sqrt{10}}{10}}=\frac{3}{7}$

1-3 정사영

내신 대비 쌍둥이 문제 175~176쪽

1-1 (1) 선분 BC (2) 선분 CF (3) 삼각형 BCF

2-1 (1) 60° (2) $4\sqrt{3}$

3-1 $16\sqrt{2}\pi$

4-1 18π

1-1 (1) 선분 BD의 평면 BFGC 위로의 정사영은 선분 BC이다.
(2) 선분 DE의 평면 BFGC 위로의 정사영은 선분 CF이다.
(3) 삼각형 BDE의 평면 BFGC 위로의 정사영은 삼각형 BCF이다.

2-1 (1) $\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$이므로
$\theta=60^\circ$
(2) $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\cos\theta}=\dfrac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$

3-1 반지름의 길이가 4인 원의 넓이는 16π이므로 도형 F의 넓이를 S라고 하면
$S\times\cos 45^\circ=16\pi$
$\therefore S=\dfrac{16\pi}{\cos 45^\circ}=\dfrac{16\pi}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=16\sqrt{2}\pi$

4-1 단면의 밑면 위로의 정사영은 원기둥의 밑면인 원이고, 그 넓이는 9π이다.
구하려는 단면의 넓이를 S라고 하면
$S\times\cos 60^\circ=9\pi$이므로
$\dfrac{1}{2}S=9\pi$ $\quad\therefore S=18\pi$

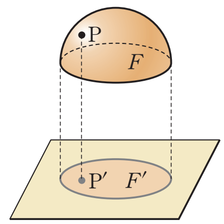
소단원 확인 문제 177~178쪽

1-1 (1) ○ (2) × (3) ×

2-1 6

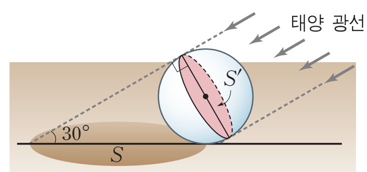
3-1 162π

1-1 (1) 도형 F가 점이면 도형 F'도 점이다. (○)
(2) 도형 F가 평면 α와 수직인 직선에 포함되는 선분이면 도형 F'은 점이다. (×)
(3) 오른쪽 그림과 같이 구의 경계 위에 있는 점 P의 평면 α 위로의 정사영 점 P′은 도형 F'(원)의 경계 위에 있지 않고 내부에 있다. (×)



2-1 점 A의 평면 BCD 위로의 정사영을 점 G라고 하면 점 G는 삼각형 BCD의 무게중심과 일치한다.
따라서 선분 AB의 평면 BCD 위로의 정사영은 선분 BG이므로 선분 BG의 길이는
(정삼각형 BCD의 높이)$\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times6\sqrt{3}\times\dfrac{2}{3}=6$

3-1 다음 그림과 같이 그림자의 넓이를 S, 반지름의 길이가 9인 원의 넓이를 S'이라고 하면



$S\times\cos 60^\circ=S'$에서
$S=\dfrac{S'}{\cos 60^\circ}$
$S'=81\pi$이므로
$S=\dfrac{S'}{\cos 60^\circ}=\dfrac{81\pi}{\frac{1}{2}}=162\pi$

중단원 연습 문제 180~184쪽

1-1 (1) ◯ (2) × (3) ◯ (4) ×

2-1 $\frac{3}{5}$

3-1 (1) 8 (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4-1 24

5-1 $\frac{3\sqrt{190}}{5}$

6-1 $4\sqrt{3}$

7-1 90°

8-1 $\frac{4}{9}\pi$

1-1 (1) 직선 AF와 직선 DG는 서로 평행하다. (◯)

(2) 직선 AF와 직선 DG는 서로 평행하고, 삼각형 DBG는 정삼각형이므로 직선 AF와 직선 DB는 서로 수직이 아니다. (×)

(3) 직선 AH는 평면 BFGC와 서로 만나지 않으므로 평행하다. (◯)

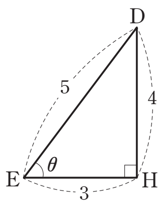
(4) 직선 AH는 평면 DHGC와 점 H에서 만난다. 그리고 삼각형 DAH에서 $\angle AHD=45^\circ$이므로 직선 AH는 평면 DHGC와 서로 수직이 아니다. (×)

2-1 직선 DE는 평면 CDE 위에 있고, 직선 EH는 평면 EFGH 위에 있다. 또, 평면 CDE와 평면 EFGH의 교선은 직선 EF이고, 두 직선 DE, EH는 직선 EF에 각각 수직이므로 평면 CDE와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기는 $\angle DEH$의 크기와 같다.

따라서 직각삼각형 DEH에서

$\overline{DE}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{EH}}{\overline{DE}}=\frac{3}{5}$$



3-1 (1) $\overline{AB}=\frac{\overline{A'B'}}{\cos\theta}=\frac{4\sqrt{2}}{\cos 45^\circ}=\frac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=8$

(2) $\cos\theta=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

4-1 직각삼각형 OAB에서

$\overline{AB}=\sqrt{2}\times 2\sqrt{6}=4\sqrt{3}$

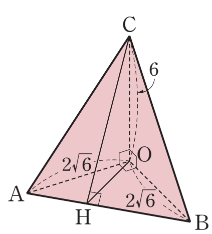
점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{CO}\perp$(평면 OAB),

$\overline{CH}\perp\overline{AB}$

이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{OH}\perp\overline{AB}$



이때

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times\overline{OH}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}$$

이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{OH}\times 4\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times 2\sqrt{6}$$

에서

$\overline{OH}=2\sqrt{3}$

또, $\triangle COH$는 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned}\overline{CH}&=\sqrt{\overline{CO}^2+\overline{OH}^2}\\&=\sqrt{6^2+(2\sqrt{3})^2}\\&=4\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle ABC&=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}\\&=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 4\sqrt{3}\\&=24\end{aligned}$$

5-1 $$\begin{aligned}\triangle HEK&=\frac{1}{2}\times\square EFGH\\&=\frac{1}{2}\times 6^2=18\end{aligned}$$

직각삼각형 EFK에서

$$\begin{aligned}\overline{EK}&=\sqrt{\overline{EF}^2+\overline{KF}^2}\\&=\sqrt{36+4}=2\sqrt{10}\end{aligned}$$

또,

$\overline{DH}\perp$(평면 EFGH), $\overline{DI}\perp\overline{EK}$

이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{HI}\perp\overline{EK}$

따라서

$$\triangle HEK=\frac{1}{2}\times\overline{EK}\times\overline{HI}$$

에서

$$18=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times\overline{HI}$$

$$\therefore \overline{HI}=\frac{18}{\sqrt{10}}=\frac{9\sqrt{10}}{5}$$

따라서 직각삼각형 DHI에서

$$\begin{aligned}\overline{DI}&=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{HI}^2}\\&=\sqrt{36+\frac{162}{5}}\\&=\sqrt{\frac{342}{5}}=\frac{3\sqrt{190}}{5}\end{aligned}$$

6-1 도형 T의 지면 위로의 정사영은 직사각형 EFGH이다. 따라서 도형 T의 넓이를 S, 사각형 EFGH의 넓이를 S'이라고 하면 $S'=S\cos 30^\circ$이므로

$3\times2=S\times\cos 30^\circ$

$6=S\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ S=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$

7-1 (직선 BD)$\perp$(평면 AGC)이고, 직선 AG는 평면 AGC에 포함되므로 직선 BD와 직선 AG는 수직이다.
따라서 구하는 각의 크기는 90°이다.

8-1 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 넓이는

$\triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=4\sqrt{3}$

원 F의 반지름의 길이를 r라고 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})r$

$=\frac{1}{2}\times(4+4+4)r$

$=6r$

이므로

$4\sqrt{3}=6r \qquad \therefore\ r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 원 F의 넓이를 S라고 하면

$S=\pi r^2=\frac{4}{3}\pi$

점 A의 평면 BCD 위로의 정사영을 점 H라고 하면 점 H는 정삼각형 BCD의 무게중심이므로

$\triangle BCH=\frac{1}{3}\triangle BCD=\frac{1}{3}\triangle ABC$

또, 평면 ABC와 평면 BCD의 이면각의 크기를 θ라고 하면

$\triangle ABC\times\cos\theta=\triangle BCH$

에서

$\cos\theta=\frac{\triangle BCH}{\triangle ABC}=\frac{\frac{1}{3}\triangle ABC}{\triangle ABC}=\frac{1}{3}$

따라서 원 F의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이를 S'이라고 하면

$S'=S\cos\theta=\frac{4}{3}\pi\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}\pi$

2. 공간좌표

2-1 점의 좌표

내신 대비 쌍둥이 문제 186~188쪽

1-1 (1) $(0,\ 1,\ -2)$ (2) $(0,\ 1,\ 0)$ (3) $(-3,\ 1,\ 2)$
2-1 (1) $\sqrt{11}$ (2) $\sqrt{14}$ (3) $\sqrt{6}$ (4) 4
3-1 $(8,\ 0,\ 0)$
4-1 $(1,\ 0,\ 0)$ 또는 $(5,\ 0,\ 0)$

1-1 (1) 점 P에서 yz평면에 내린 수선의 발은 x좌표가 0이므로 구하는 점의 좌표는 $(0,\ 1,\ -2)$이다.
(2) 점 P에서 y축에 내린 수선의 발은 x좌표와 z좌표가 모두 0이므로 구하는 점의 좌표는 $(0,\ 1,\ 0)$이다.
(3) 점 P를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점은 z좌표의 부호만 바뀌므로 구하는 점의 좌표는 $(-3,\ 1,\ 2)$이다.

2-1 (1) $\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(2-3)^2+(3-2)^2}=\sqrt{11}$
(2) $\overline{AB}=\sqrt{(1+2)^2+(-2-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{14}$
(3) $\overline{AB}=\sqrt{(-2+3)^2+(-4+3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{6}$
(4) $\overline{OA}=\sqrt{2^2+2^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{16}=4$

3-1 점 P의 좌표를 $(a,\ 0,\ 0)$이라고 하면
$\overline{AP}=\overline{BP}$, 즉 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-2)^2+(0-2)^2+(0+4)^2$

$=(a-4)^2+(0+2)^2+(0-6)^2$

위 식의 양변을 전개하여 정리하면

$a^2-4a+24=a^2-8a+56$

$4a=32$

$\therefore\ a=8$

따라서 점 P의 좌표는 $(8,\ 0,\ 0)$이다.

4-1 점 $(3,\ 2,\ 1)$에서 거리가 3인 x축 위의 점 P의 좌표를 $(x,\ 0,\ 0)$이라고 하면

$(x-3)^2+(0-2)^2+(0-1)^2=9$

$x^2-6x+5=0$

$(x-1)(x-5)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=5$

따라서 점 P의 좌표는

$(1,\ 0,\ 0)$ 또는 $(5,\ 0,\ 0)$

소단원 확인 문제 189~190쪽

1-1 (1) $(1,\ -2,\ 5)$ (2) $(-3,\ 2,\ 4)$

2-1 (1) $2\sqrt{3}$ (2) 5

3-1 2

4-1 $(0,\ 1,\ 2)$

1-1 (1) 점 P의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라고 하면 점 P에서 x축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(a,\ 0,\ 0)=(1,\ 0,\ 0)$이므로

$a=1$

또, 점 P에서 yz평면에 내린 수선의 발의 좌표는 $(0,\ b,\ c)=(0,\ -2,\ 5)$이므로

$b=-2,\ c=5$

따라서 점 P의 좌표는 $(1,\ -2,\ 5)$이다.

(2) 점 P의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라고 하면 yz평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a,\ b,\ c)=(3,\ 2,\ 4)$이므로

$a=-3,\ b=2,\ c=4$

따라서 점 P의 좌표는 $(-3,\ 2,\ 4)$이다.

2-1 (1) $\overline{AB}=\sqrt{(1-3)^2+(-2+4)^2+(3-5)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

(2) $\overline{OA}=\sqrt{(-3)^2+4^2+0^2}=\sqrt{25}=5$

3-1 $\overline{AB}=\sqrt{(3-5)^2+(-3-1)^2+(a+2)^2}=6$이므로

$(a+2)^2+20=36,\ a^2+4a-12=0$

$(a+6)(a-2)=0 \qquad \therefore a=-6$ 또는 $a=2$

따라서 양수 a의 값은 2이다.

4-1 점 $P(0,\ a,\ b)$라고 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$이므로

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2,\ \overline{PB}^2=\overline{PC}^2$

(i) $(0-2)^2+(a-4)^2+(b-6)^2$

$=(0-3)^2+(a+3)^2+(b-0)^2$

에서

$a^2+b^2-8a-12b+56=a^2+b^2+6a+18$

$\therefore 14a+12b=38$ ……①

(ii) $(0-3)^2+(a+3)^2+(b-0)^2$

$=(0+4)^2+(a-3)^2+(b+1)^2$

에서

$a^2+b^2+6a+18=a^2+b^2-6a+2b+26$

$\therefore 12a-2b=8$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=1,\ b=2$

따라서 점 P의 좌표는 $(0,\ 1,\ 2)$이다.

2-2 선분의 내분과 외분

내신 대비 쌍둥이 문제 191~192쪽

1-1 (1) $(0,\ 5,\ 5)$ (2) $(-3,\ 11,\ 8)$

2-1 $(3,\ 2,\ -1)$

1-1 (1) 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\times(-1)+1\times3}{3+1},\ \frac{3\times7+1\times(-1)}{3+1},\ \frac{3\times6+1\times2}{3+1}\right)$$

$=(0,\ 5,\ 5)$

(2) 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\times(-1)-1\times3}{3-1},\ \frac{3\times7-1\times(-1)}{3-1},\ \frac{3\times6-1\times2}{3-1}\right)$$

$=(-3,\ 11,\ 8)$

2-1 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{4+3+2}{3},\ \frac{-3+3+6}{3},\ \frac{-5+4-2}{3}\right)$$

$=(3,\ 2,\ -1)$

소단원 확인 문제 193~194쪽

1-1 (1) $(2,\ -1,\ 6)$ (2) $(-11,\ 12,\ -7)$

(3) $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{11}{2}\right)$

2-1 15

3-1 $(4,\ 2,\ -4)$

4-1 $a=4,\ b=5$

1-1 (1) 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\times4+2\times(-1)}{3+2},\ \frac{3\times(-3)+2\times2}{3+2},\ \frac{3\times8+2\times3}{3+2}\right)$$

$=(2,\ -1,\ 6)$

(2) 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\times4-3\times(-1)}{2-3}, \frac{2\times(-3)-3\times2}{2-3}, \frac{2\times8-3\times3}{2-3}\right)$$

$$=(-11, 12, -7)$$

(3) 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{2-3}{2}, \frac{3+8}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

2-1 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}, \frac{2\times2+1\times(-4)}{2+1}, \frac{2\times(-2)+1\times1}{2+1}\right)$$

$$=(2, 0, -1)$$

또, 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{1\times4-2\times(-2)}{1-2}, \frac{1\times2-2\times(-4)}{1-2}, \frac{1\times(-2)-2\times1}{1-2}\right)$$

$$=(-8, -10, 4)$$

$$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-8-2)^2+(-10-0)^2+(4+1)^2}$$

$$=\sqrt{225}=15$$

3-1 꼭짓점 B의 좌표를 (a, b, c)라고 하자.

평행사변형의 성질에 의하여 선분 OB의 중점과 선분 AC의 중점은 일치한다.

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{3+(-7)}{2}\right)=(2, 1, -2)$$

이고, $\overline{OB}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$이므로

$a=4$, $b=2$, $c=-4$

따라서 꼭짓점 B의 좌표는

$(4, 2, -4)$

4-1 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{4+1+a}{3}, \frac{-4+2+b}{3}, \frac{1+(-3)+(-4)}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{a+5}{3}, \frac{b-2}{3}, -2\right)$$

따라서 $\frac{a+5}{3}=3$, $\frac{b-2}{3}=1$이므로

$a=4$, $b=5$

2-3 구의 방정식

내신 대비 쌍둥이 문제 196~197쪽

1-1 (1) $(x-2)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=1$

(2) $(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$

2-1 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=33$

3-1 (1) 중심의 좌표: $(-3, 1, 2)$, 반지름의 길이: 3

(2) 중심의 좌표: $(2, -1, 0)$, 반지름의 길이: 5

(3) 중심의 좌표: $(-1, -2, 4)$, 반지름의 길이: 2

1-1 (1) 중심의 좌표가 $(2, -4, 1)$이고 반지름의 길이가 1인 구의 방정식은

$$(x-2)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=1$$

(2) 중심의 좌표가 $(2, 2, -1)$이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=r^2$$

이때 구가 원점을 지나므로

$$(0-2)^2+(0-2)^2+(0+1)^2=r^2$$

$$\therefore r^2=9$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$$

2-1 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+6}{2}, \frac{5+1}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right)=(1, 3, -1)$$

이므로 구하는 구의 중심을 C라고 하면 점 C의 좌표는

$(1, 3, -1)$

또, 반지름의 길이는

$$\overline{AC}=\sqrt{(1+4)^2+(3-5)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{33}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=33$$

3-1 (1) $x^2+y^2+z^2+6x-2y-4z+5=0$을 정리하면

$$(x+3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$$

이므로 구의 중심의 좌표는 $(-3, 1, 2)$이고, 반지름의 길이는 3이다.

(2) $x^2+y^2+z^2-4x+2y-20=0$을 정리하면

$$(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=25$$

이므로 구의 중심의 좌표는 $(2, -1, 0)$이고, 반지름의 길이는 5이다.

(3) $x^2+y^2+z^2+2x+4y-8z+17=0$을 정리하면

$(x+1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=4$

이므로 구의 중심의 좌표는 $(-1,\ -2,\ 4)$이고, 반지름의 길이는 2이다.

소단원 확인 문제 198~199쪽

1-1 (1) 중심의 좌표: $(3,\ 3,\ -2)$, 반지름의 길이: 1

(2) 중심의 좌표: $(0,\ 0,\ 1)$, 반지름의 길이: $\sqrt{2}$

(3) 중심의 좌표: $(-2,\ 1,\ -1)$, 반지름의 길이: 2

2-1 $2\sqrt{6}$

3-1 $k=-4$, 반지름의 길이: 5

1-1 (1) 구 $(x-3)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=1$의 중심의 좌표는 $(3,\ 3,\ -2)$이고, 반지름의 길이는 1이다.

(2) 구 $x^2+y^2+(z-1)^2=2$의 중심의 좌표는 $(0,\ 0,\ 1)$이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

(3) 구 $x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z+2=0$을 정리하면

$(x+2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$

이므로 구의 중심의 좌표는 $(-2,\ 1,\ -1)$이고, 반지름의 길이는 2이다.

2-1 구 $x^2+y^2+z^2-4x+8y-4z+15=0$을 정리하면

$(x-2)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=9$

이므로 구의 중심의 좌표는 $(2,\ -4,\ 2)$이다.

따라서 구의 중심에서 원점까지의 거리는

$\sqrt{2^2+(-4)^2+2^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

3-1 구 $x^2+y^2+z^2+6x-4y-8z-k=0$을 정리하면

$(x+3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=k+29$

이므로 구의 중심을 C라고 하면 점 C의 좌표는 $(-3,\ 2,\ 4)$이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{k+29}$이다.

또, 중심 C의 y축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 H의 좌표는 $(0,\ 2,\ 0)$이다. 그런데 주어진 구가 y축과 한 점에서 만나므로 $\overline{CH}$는 반지름의 길이와 같다.

따라서

$\overline{CH}=\sqrt{(0+3)^2+(2-2)^2+(0-4)^2}=\sqrt{k+29}$

에서 $25=k+29$이므로 $k=-4$

또, 구의 반지름의 길이는 5이다.

중단원 연습 문제 202~207쪽

1-1 (1) $(-5,\ 1,\ 4)$ (2) $(5,\ -1,\ -4)$ (3) $(5,\ -1,\ 4)$

2-1 (1) $\sqrt{22}$ (2) $\sqrt{38}$

3-1 (1) $\left(1,\ \frac{3}{2},\ -1\right)$ (2) $(-6,\ 5,\ -8)$ (3) $(0,\ 2,\ -2)$

4-1 (1) $(x+1)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=16$

(2) $x^2+(y+1)^2+(z-3)^2=12$

5-1 $a=4,\ b=-4,\ c=12$

6-1 5

7-1 $(-5,\ 0,\ 0)$

8-1 $\sqrt{102}$

9-1 $(8,\ 4,\ -2)$

10-1 $3\sqrt{3}\pi$

11-1 $\frac{4}{9}\pi$

1-1 (1) 점 P를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점은 z좌표의 부호만 바뀌므로 구하는 점의 좌표는 $(-5,\ 1,\ 4)$이다.

(2) 점 P를 z축에 대하여 대칭이동한 점은 x좌표와 y좌표의 부호만 바뀌므로 구하는 점의 좌표는 $(5,\ -1,\ -4)$이다.

(3) 점 P를 원점에 대하여 대칭이동한 점은 x좌표, y좌표, z좌표의 부호가 모두 바뀌므로 구하는 점의 좌표는 $(5,\ -1,\ 4)$이다.

2-1 (1) $\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(1-4)^2+(1+2)^2}$

$=\sqrt{22}$

(2) $\overline{AB}=\sqrt{(1+2)^2+(4+1)^2+(2-4)^2}$

$=\sqrt{38}$

3-1 (1) 선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\times(-2)+3\times2}{1+3},\ \frac{1\times3+3\times1}{1+3},\ \frac{1\times(-4)+3\times0}{1+3}\right)$$

$$=\left(1,\ \frac{3}{2},\ -1\right)$$

(2) 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\times(-2)-1\times2}{2-1},\ \frac{2\times3-1\times1}{2-1},\ \frac{2\times(-4)-1\times0}{2-1}\right)$$

$$=(-6,\ 5,\ -8)$$

(3) 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+(-2)}{2},\ \frac{1+3}{2},\ \frac{0+(-4)}{2}\right)=(0,\ 2,\ -2)$$

4-1 (1) 중심의 좌표가 $(-1,\ -3,\ -2)$이고 반지름의 길이가 4인 구의 방정식은

$$(x+1)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=16$$

(2) 중심의 좌표가 $(0,\ -1,\ 3)$이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$x^2+(y+1)^2+(z-3)^2=r^2$$

이 구가 점 $(2,\ 1,\ 1)$을 지나므로

$$2^2+(1+1)^2+(1-3)^2=r^2$$

$$\therefore\ r^2=12$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$x^2+(y+1)^2+(z-3)^2=12$$

5-1 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a+4-2}{3},\ \frac{-3+b+4}{3},\ \frac{2-5+c}{3}\right)=(2,\ -1,\ 3)$$

$\frac{a+2}{3}=2,\ \frac{b+1}{3}=-1,\ \frac{c-3}{3}=3$이므로

$a=4,\ b=-4,\ c=12$

6-1 두 점 A, B의 yz평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라고 하면 두 점 A′, B′의 좌표는 $\mathrm{A}'(0,\ -3,\ 1)$, $\mathrm{B}'(0,\ 1,\ 4)$이므로 선분 AB의 yz평면 위로의 정사영인 선분 A′B′의 길이는

$$\overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{(0-0)^2+(1+3)^2+(4-1)^2}$$

$$=\sqrt{25}=5$$

7-1 점 C의 좌표를 $(a,\ 0,\ 0)$이라고 하자.

직각삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$이 성립한다.

이때

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=(2-1)^2+(1-4)^2+(-5+3)^2$$

$$=14$$

$$\overline{\mathrm{CA}}^2=(a-1)^2+(0-4)^2+(0+3)^2$$

$$=a^2-2a+26$$

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=(a-2)^2+(0-1)^2+(0+5)^2$$

$$=a^2-4a+30$$

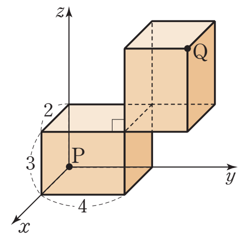
이므로

$$14+a^2-2a+26=a^2-4a+30$$

$$2a=-10 \qquad \therefore\ a=-5$$

따라서 점 C의 좌표는 $(-5,\ 0,\ 0)$이다.

8-1 점 P를 원점으로 하고, x축, y축, z축이 다음 그림과 같은 좌표공간을 생각하자.



이 좌표공간에서 점 Q의 좌표는

$$(2,\ 4+3,\ 3+4)=(2,\ 7,\ 7)$$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$\sqrt{2^2+7^2+7^2}=\sqrt{102}$$

9-1 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점을 C라고 하면 점 C는 xy평면 위에 있으므로 점 C의 z좌표는 0이다.

따라서 내분점 구하는 식에 의하여 z좌표는

$\frac{3\times c+1\times 6}{3+1}=0$이므로

$$c=-2$$

또, 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점을 D라고 하면 점 D는 z축 위에 있으므로 점 D의 x좌표와 y좌표는 모두 0이다.

따라서 점 D의

$$(x좌표)=\frac{2\times a-1\times 16}{2-1}=0,$$

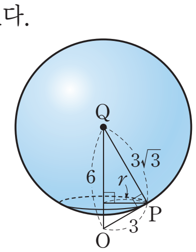
$$(y좌표)=\frac{2\times b-1\times 8}{2-1}=0$$

에서

$$a=8,\ b=4$$

따라서 점 B의 좌표는 $(8,\ 4,\ -2)$이다.

10-1 다음 그림에서 선분 OP의 길이가 3이 되는 점이 나타내는 도형은 원이 된다.



이 원의 반지름의 길이를 r라고 하자.
점 Q의 좌표를 (0, 6, 0)이라고 하면

$\overline{OQ}=6$, $\overline{OP}=3$, $\overline{PQ}=3\sqrt{3}$

에서

$3^2+(3\sqrt{3})^2=6^2$, 즉 $\overline{OQ}^2=\overline{OP}^2+\overline{PQ}^2$

이므로 삼각형 OPQ는 $\overline{OQ}$를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.
△OPQ의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}\times3\times3\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times6\times r$$

$$\therefore r=\frac{9\sqrt{3}}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

따라서 구하는 도형의 길이, 즉 원의 둘레의 길이는

$$2\pi r=2\pi\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\pi$$

11-1 점 Q의 좌표를 (a, b, c)라고 하면 점 Q는 구 $x^2+y^2+z^2=1$ 위의 점이므로 $a^2+b^2+c^2=1$이 항상 성립한다.
선분 PQ를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표를 (x, y, z)라고 하면

$$(x, y, z)=\left(\frac{1\times a+2\times3}{1+2}, \frac{1\times b+2\times(-3)}{1+2}, \frac{1\times c+2\times6}{1+2}\right)$$

에서

$$x=\frac{a+6}{3},\ y=\frac{b-6}{3},\ z=\frac{c+12}{3}$$

이므로

$a=3x-6$, $b=3y+6$, $c=3z-12$

이를 $a^2+b^2+c^2=1$에 대입하여 정리하면

$$(3x-6)^2+(3y+6)^2+(3z-12)^2=1$$
$$9(x-2)^2+9(y+2)^2+9(z-4)^2=1$$
$$(x-2)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

따라서 선분 PQ를 1 : 2로 내분하는 점이 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}$인 구이므로 그 겉넓이는

$$4\pi\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}\pi$$

대단원 모의고사 215~218쪽

01 ⑤	02 ④	03 ③	04 ④	05 ③
06 ④	07 ⑤	08 ③	09 ⑤	10 ②
11 ③	12 ①	13 ②	14 ④	15 ③
16 ①	17 ②	18 ⑤	19 ②	20 ②
21 2	22 $2\sqrt{3}$	23 $\frac{\sqrt{6}}{6}$	24 $\frac{2+\sqrt{3}}{4}\pi$	
25 3072				

01 네 점 A, B, C, D로 결정되는 평면은 1개, 네 점 A, B, C, D 중에서 택한 두 개의 점과 점 E로 결정되는 평면은 6개이므로 $a=7$
또, 5개의 꼭짓점 A, B, C, D, E는 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 서로 다른 직선의 개수는

${}_5C_2=10$(개), 즉 $b=10$

$\therefore a+b=17$

02 두 직선 EG, DF는 한 평면 위에 있지 않고, 네 점 A, B, C, D는 한 평면 위에 위치한다.
따라서 구하는 평면은
(i) 네 점 A, B, C, D로 결정되는 평면 1개
(ii) 직선 EG와 세 점 A, B, D 중 한 개의 점으로 결정되는 평면 3개 (∵ 점 C는 점 A로 결정되는 평면 위의 점이다.)
(iii) 직선 DF와 세 점 A, B, C 중 한 개의 점으로 결정되는 평면 3개
따라서 구하는 평면의 개수는 7이다.

03 ㄱ. 사각형 ABFD는 정사각형이므로 $\overline{AB}$와 $\overline{DF}$는 서로 평행하다. (참)
ㄴ. 직선 AD와 직선 BF는 서로 평행하고 삼각형 BCF는 정삼각형이므로 직선 BF와 직선 BC가 이루는 각의 크기는 60°이다.
따라서 $\overline{AD}$와 $\overline{BC}$는 서로 수직이 아니다. (거짓)
ㄷ. 사각형 AEFC는 정사각형이므로 $\overline{AE}$와 $\overline{AC}$는 서로 수직이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

04 ㄱ. $l\perp m$이고 $m\perp n$이면 l과 n이 같은 평면상에 있으면 $l /\!/ n$이지만 다른 평면에 존재할 때는 꼬인 위치가 될 수 있으므로 서로 평행하지 않다. (거짓)

ㄴ. $l\perp\alpha$이고 $l /\!/ \beta$이면 $\alpha\perp\beta$이다. (참)

ㄷ. $l\perp\alpha$이고 $l\perp\beta$이면 $\alpha /\!/ \beta$이다. (참)

ㄹ. $l /\!/ \alpha$이고 $m /\!/ \alpha$라고 항상 $l /\!/ m$인 것은 아니다.

(반례) $\beta /\!/ \alpha$이고 평면 β에 포함되는 두 직선 l, m이 $l\perp m$이라고 해도 ㄹ은 성립한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

05 점 A(4, -2, 6)에서 yz평면에 내린 수선의 발은 B(0, -2, 6)이고, 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 C(4, 2, -6)이므로 선분 BC를 1 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\times4+3\times0}{1+3},\ \frac{1\times2+3\times(-2)}{1+3},\ \frac{1\times(-6)+3\times6}{1+3}\right)$$

$=(1,\ -1,\ 3)$

따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=3$이므로

$a+b+c=3$

06 두 점 A(-4, 0, 1), B(a, b, -5)에 대하여 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2\times a-1\times(-4)}{2-1},\ \frac{2\times b-1\times0}{2-1},\ \frac{2\times(-5)-1\times1}{2-1}\right)$$

$=(2a+4,\ 2b,\ -11)=(14,\ 6,\ c)$

이므로 $2a+4=14$, $2b=6$, $-11=c$

$\therefore a=5,\ b=3,\ c=-11$

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\times5+1\times(-4)}{2+1},\ \frac{2\times3+1\times0}{2+1},\ \frac{2\times(-5)+1\times1}{2+1}\right)$$

$=(2,\ 2,\ -3)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(14-2)^2+(6-2)^2+(-11+3)^2}$

$=\sqrt{224}=4\sqrt{14}$

07 점 A를 zx평면에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라고 하면

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}$

또, 두 점 A′, B는 zx평면을 기준으로 서로 반대 방향에 있으므로 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $\overline{A'B}$이다.

점 A′(-2, -3, -5)이므로

$\overline{A'B}=\sqrt{(-2+4)^2+(-3-5)^2+(-5+7)^2}$

$=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

08 구 $(x-4)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=r^2$과 z축이 만나는 점의 좌표를 (0, 0, k)라고 하면

$4^2+3^2+(k+1)^2=r^2$

이를 정리하면

$(k+1)^2=r^2-25$

$k+1=\pm\sqrt{r^2-25}$

$\therefore k=-1\pm\sqrt{r^2-25}$

따라서 구 $(x-4)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=r^2$과 z축이 만나는 점의 좌표는

$(0,\ 0,\ -1+\sqrt{r^2-25})$, $(0,\ 0,\ -1-\sqrt{r^2-25})$

이므로 두 점 사이의 거리는 $2\sqrt{r^2-25}$이다.

$2\sqrt{r^2-25}=24$이므로

$\sqrt{r^2-25}=12$

$r^2=12^2+25=169$

$\therefore r=13\ (\because r>0)$

09 선분 BD의 중점을 M이라고 하면 정삼각형 ABD에서 $\overline{AM}\perp\overline{BD}$이고, 정삼각형 CBD에서 $\overline{CM}\perp\overline{BD}$이다.

따라서 삼각형 AMC는 선분 BD에 수직이다.

직선 AC는 평면 AMC 위에 있으므로 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$이다.

삼각형 ABC에서 삼각형의 중점연결정리에 의하여

$\overline{EF} /\!/ \overline{AC}$, $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AC}=4$

마찬가지 방법으로 삼각형 ACD에서

$\overline{GH} /\!/ \overline{AC}$, $\overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{AC}=4$

또, 삼각형 ABD에서 삼각형의 중점연결정리에 의하여

$\overline{EH} /\!/ \overline{BD}$, $\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{BD}=4$

마찬가지 방법으로 삼각형 BCD에서

$\overline{FG} /\!/ \overline{BD}$, $\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BD}=4$

따라서 사각형 EFGH는 한 변의 길이가 4인 정사각형이므로 그 넓이는 16이다.

10 직선 AF는 직선 DG와 서로 평행하다. 삼각형 EGD는 정삼각형이므로 두 직선 EG, DG가 이루는 각의 크기는 $60°$이다.

따라서 두 직선 AF, EG가 이루는 각의 크기도 $60°$이다.

11 직선 PO와 평면 OAB가 수직이고, 직선 PH와 직선 AB가 수직이므로 삼수선 정리에 의하여 직선 OH와 직선 AB는 수직이다.

직각삼각형 OAH에서

$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}$

$=\sqrt{(6\sqrt{3})^2-9^2}=3\sqrt{3}$

따라서 직각삼각형 POH에서

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OH}}^2+\overline{\mathrm{PO}}^2}$

$=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+3^2}=6$

12 직선 PH와 평면 α가 수직이고, 직선 HR와 직선 AB가 수직이므로 삼수선 정리에 의하여 직선 PR와 직선 AB는 수직이다.

직각삼각형 PRA에서

$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PA}}^2-\overline{\mathrm{AR}}^2}$

$=\sqrt{10^2-6^2}=8$

따라서 직각삼각형 PHR에서

$\overline{\mathrm{HR}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PR}}^2-\overline{\mathrm{PH}}^2}$

$=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$

13 $\overline{\mathrm{AB}}\perp$(평면 BCD)이므로

$\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$

따라서 직각삼각형 ABC에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2}$

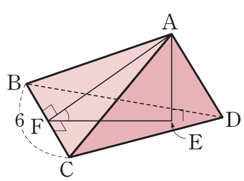
$=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+6^2}=4\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$

또, $\overline{\mathrm{AB}}\perp$(평면 BCD), $\overline{\mathrm{BC}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$이므로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$

따라서 직각삼각형 ACD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times4=8\sqrt{3}\,(\mathrm{cm}^2)$

14 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 E, 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 F라 고 하면 삼수선 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{EF}}$는 $\overline{\mathrm{BC}}$와 수직이다.



삼각형 ABC의 넓이가 24이므로

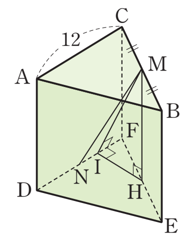
$24=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AF}}=\frac{1}{2}\times6\times\overline{\mathrm{AF}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AF}}=8$

따라서 직각삼각형 AFE에서

$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AF}}\sin30^\circ=8\times\frac{1}{2}=4$

15 점 M에서 밑면 DEF에 내린 수선의 발을 H, 점 M에서 선분 DF에 내린 수선의 발을 I라고 하면 삼수선 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{HI}}\perp\overline{\mathrm{DF}}$



삼각형 DEF는 정삼각형이므로

$\angle\mathrm{HFI}=60^\circ$

직각삼각형 HFI에서

$\overline{\mathrm{FH}}=6$이므로 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{FI}}=3$, $\overline{\mathrm{HI}}=3\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{NI}}=\overline{\mathrm{NF}}-\overline{\mathrm{FI}}=6-3=3$

또, 직각삼각형 MHI에서 $\overline{\mathrm{MH}}=12$, $\overline{\mathrm{HI}}=3\sqrt{3}$이므로

$\overline{\mathrm{MI}}=\sqrt{\overline{\mathrm{MH}}^2+\overline{\mathrm{HI}}^2}$

$=\sqrt{12^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{171}$

따라서 직각삼각형 MIN에서

$\overline{\mathrm{MN}}=\sqrt{\overline{\mathrm{MI}}^2+\overline{\mathrm{NI}}^2}$

$=\sqrt{171+9}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$

16 $\overline{\mathrm{CH}}\perp\alpha$이고, $\overline{\mathrm{HB}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{CB}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

따라서 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=8$

따라서 직각삼각형 CHB에서

$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BC}}^2-\overline{\mathrm{BH}}^2}$

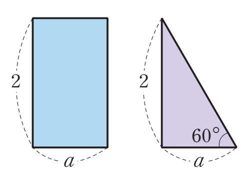
$=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$

17 태양열 집열판의 넓이를 S, 그림자의 넓이를 S'이라고 하면 $S\cos30^\circ=S'$이므로

$a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=180$

$\therefore\ a=\frac{360}{\sqrt{3}}=120\sqrt{3}$

18 그림자는 오른쪽 그림과 같은 직사각형 모양으로 세로의 길이는 2이다. 가로의 길이를 a라고 하면



$\tan60^\circ=\frac{2}{a}$, $\sqrt{3}=\frac{2}{a}$

$\therefore\ a=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 정육면체의 그림자의 넓이는

$2a=2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

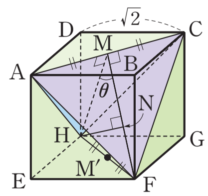
19 건물 지붕의 넓이를 S, 건물 밑면의 넓이를 S'이라고 하면 $S\cos\theta=S'$이므로

$80\sqrt{3}\times\cos\theta=120$

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \theta=30^\circ$

20 △AHC와 △AFC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.



따라서 $\overline{AC}$의 중점을 M, $\overline{HF}$의 중점을 M′이라고 하면

$\overline{HM}\perp\overline{AC}$, $\overline{FM}\perp\overline{AC}$

또, $\overline{AH}=2$, $\overline{AM}=1$이므로

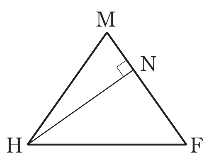
$\overline{HM}=\sqrt{\overline{AH}^2-\overline{AM}^2}$

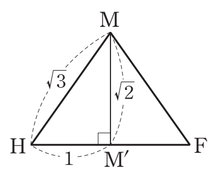
$=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

마찬가지 방법으로

$\overline{FM}=\sqrt{3}$

점 H에서 선분 MF에 내린 수선의 발을 N이라고 하면 평면 AHC의 평면 AFC 위로의 정사영은 삼각형 ANC이다.





삼각형 MHF의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{HF}\times\overline{MM'}=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$

한편, 삼각형 MHF의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{HN}\times\overline{MF}=\dfrac{1}{2}\times\overline{HN}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\overline{HN}$

이므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\overline{HN}=\sqrt{2}\qquad\therefore\ \overline{HN}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{MN}=\sqrt{\overline{MH}^2-\overline{HN}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 정사영, 즉 삼각형 ANC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{MN}=\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

서술형 문제

21 ❶ 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\dfrac{1-4+6}{3},\ \dfrac{5-3+7}{3},\ \dfrac{-9+2+1}{3}\right)$

$=(1,\ 3,\ -2)$

❷ 점 G의 xy평면 위로의 정사영을 G′이라고 하면

G′(1, 3, 0)

❸ 선분 PG의 길이가 최소가 되기 위해서는 점 P가 점 G′의 위치일 때이므로 선분 PG의 길이의 최솟값은 2이다.

채점 기준	배점
❶ 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표 구하기	50 %
❷ 점 G′의 좌표 구하기	20 %
❸ 선분 PG의 길이의 최솟값 구하기	30 %

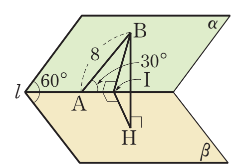
22 ❶ 점 B에서 교선 l에 내린 수선의 발을 I라고 하면

$\overline{BH}\perp\beta$, $\overline{BI}\perp l$

이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{HI}\perp l$

또, $\angle BIH=60^\circ$



❷ 이때 $\overline{AB}=8$이므로 직각삼각형 AIB에서

$\overline{BI}=8\sin 30^\circ=8\times\dfrac{1}{2}=4$

❸ 따라서 직각삼각형 BHI에서

$\overline{BH}=\overline{BI}\sin 60^\circ$

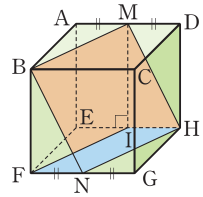
$=4\sin 60^\circ$

$=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=2\sqrt{3}$

채점 기준	배점
❶ 삼수선 정리를 이용하여 수직 관계 파악하기	40 %
❷ $\overline{BI}$의 길이 구하기	30 %
❸ $\overline{BH}$의 길이 구하기	30 %

23 ❶ $\overline{EH}$의 중점을 I라고 하면 마름모 BNHM의 밑면 EFGH 위로의 정사영은 사각형 FNHI이다.



❷ 이때 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라고 하면

$$\square BNHM=\frac{1}{2}\times\overline{MN}\times\overline{BH}$$
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}a\times\sqrt{3}a$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$$

❸ $\square FNHI=\overline{FN}\times\overline{GH}$

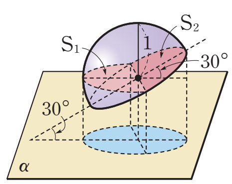
$$=\frac{1}{2}a\times a=\frac{1}{2}a^2$$

❹ $\square FNHI=\square BNHM\times\cos\theta$이므로

$$\cos\theta=\frac{\square FNHI}{\square BNHM}=\frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{6}}{2}a^2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

채점 기준	배점
❶ 정사영 □FNHI 찾기	20 %
❷ □BNHM의 넓이 구하기	30 %
❸ □FNHI의 넓이 구하기	30 %
❹ $\cos\theta$의 값 구하기	20 %

24 ❶ 다음 그림과 같이 반구의 평면 α 위로의 정사영은 반구의 밑면의 중심을 지나 평면 α와 평행한 면이 반구를 지날 때 생기는 단면 S_1과 반구의 밑면에서 반원 S_2의 정사영과 같다.



❷ S_1, S_2의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하고, S_1, S_2의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 각각 S_1', S_2'이라고 하면

$$S_1'=S_1=\frac{\pi}{2}$$

❸ $S_2'=S_2\cos 30^\circ=\frac{\pi}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$

❹ 따라서 구하는 정사영의 넓이는

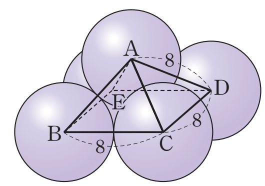
$$\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\pi=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\pi$$

채점 기준	배점
❶ S_1, S_2 찾기	30 %
❷ $S_1'=S_1$의 값 구하기	30 %
❸ $S_2'=S_2\cos 30^\circ$의 값 구하기	30 %
❹ 정사영의 넓이 구하기	10 %

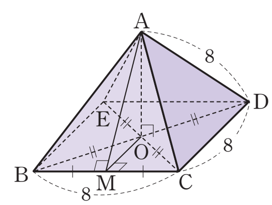
25 ❶ 상자의 옆면에 접하고 4개의 공이 서로 외접하도록 놓을 수 있으므로 상자의 밑면인 정사각형의 한 변의 길이는

$4\times4=16\,(\mathrm{cm})$

❷ 또, 오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 서로 연결하면 한 모서리의 길이가 8 cm인 정사각뿔 A−BCDE가 나온다.



점 A에서 면 BCDE에 내린 수선의 발을 O, $\overline{BC}$의 중점을 M이라고 하면 $\overline{AM}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선 정리에 의하여



$\overline{OM}\perp\overline{BC}$

❸ 이때 한 모서리의 길이가 8 cm이므로

$\overline{OM}=4\,(\mathrm{cm})$, $\overline{AM}=4\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$

△AMO에서

$$\overline{OA}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{OM}^2}$$
$$=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-4^2}$$
$$=4\sqrt{2}\,(\mathrm{cm})$$

이므로 상자의 높이는

$(4\sqrt{2}+8)\,\mathrm{cm}$

❹ 따라서 상자의 부피는

$16\times16\times(4\sqrt{2}+8)=1024\sqrt{2}+2048\,(\mathrm{cm}^3)$

이므로

$a=2048$, $b=1024$

$\therefore a+b=3072$

채점 기준	배점
❶ 상자의 밑면의 변의 길이 구하기	10 %
❷ $\overline{OM}\perp\overline{BC}$임을 보이기	30 %
❸ 상자의 높이 구하기	40 %
❹ $a+b$의 값 구하기	20 %

권말 부록

기하 중간고사 220~224쪽

01 ④	02 ①	03 ⑤	04 ⑤	05 ②
06 ①	07 ③	08 ④	09 ③	10 ③
11 ③	12 ①	13 ③	14 ①	15 ②
16 ④	17 ⑤	18 3	19 26	20 32
21 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$		22 103	23 144	

01 주어진 방정식을 변형하면

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

이때 장축의 길이는 6, 단축의 길이는 4이므로 장축과 단축의 길이의 곱은 24이다.

02 $x^2-6x-2y+7=0$에서

$(x-3)^2=2y-7+9$, $(x-3)^2=2y+2$

$(x-3)^2=4\times\frac{1}{2}(y+1)$

주어진 식은 포물선 $x^2=2y$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 $x^2=2y$의 초점의 좌표는 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, 준선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}$이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(3,\ -\frac{1}{2}\right)$, 준선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}$이다.

$\therefore a+b+c=3-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=1$

03 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 쌍곡선 $x^2-4y^2=4$ 위의 점이므로

$a^2-4b^2=4$

쌍곡선 $x^2-4y^2=4$, 즉 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$에서 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{1}{2}x$이다.

따라서 두 직선 $x+2y=0$, $x-2y=0$에 내린 수선의 발이 각각 Q, R이므로

$5\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PR}}=5\times\frac{|a+2b|}{\sqrt{5}}\times\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$

$=|a^2-4b^2|$

그런데 $a^2-4b^2=4$이므로

$5\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PR}}=4$

04 두 점 F, F′은 주어진 타원의 초점이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{FP_1}}+\overline{\mathrm{F'P_1}}=2\times3=6$

이때 두 점 $\mathrm{P_1}$과 $\mathrm{P_2}$는 y축에 대하여 대칭이므로

$\overline{\mathrm{FP_2}}=\overline{\mathrm{F'P_1}}$

$\therefore \overline{\mathrm{FP_1}}+\overline{\mathrm{FP_2}}=\overline{\mathrm{FP_1}}+\overline{\mathrm{F'P_1}}=6$

05 $\overrightarrow{\mathrm{FC}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{FD}}=\overrightarrow{\mathrm{FC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$\therefore m+n=2+1=3$

06 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}|$

$=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{2}$

07 ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ (참)

ㄴ. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{DB}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\vec{0}$ (참)

ㄷ. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

08 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$=-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{BO}})$

$=-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}})$

$=-\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

이때 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2\sqrt{3}$이므로

$|-\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=2\sqrt{3}$

정육각형의 한 변의 길이를 a라고 하면 직각삼각형 BAE에서

$|\overrightarrow{AB}|=a$, $|\overrightarrow{BE}|=2a$, $|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{3}a$

이므로

$\sqrt{3}a=2\sqrt{3}$ $\quad\therefore a=2$

따라서 원의 반지름의 길이가 2이므로 주어진 원의 넓이는 4π이다.

09 ㄱ. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}$

$=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AO}=\vec{0}$ (참)

ㄴ. $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB})$

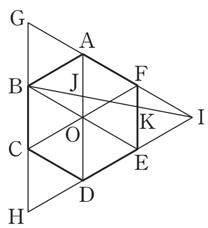
$=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$

$=\vec{0}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}$

$=\overrightarrow{OF}$

$\therefore |2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{OF}|=1$ (거짓)

ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 두 직선 AF, BC가 만나는 점을 G, 두 직선 BC, DE가 만나는 점을 H, 두 직선 DE, AF가 만나는 점을 I라고 하자.



$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{EP}$에서

$3\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}$

$=\overrightarrow{IB}$

이므로 $\overrightarrow{EP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$

$\triangle$GHI에서 두 점 A, F는 선분 GI의 삼등분점이고, 두 점 D, E는 선분 HI의 삼등분점이므로 선분 IB와 두 선분 AD, FE의 교점을 각각 J, K라고 하면

$\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$

따라서 $\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{KJ}$이므로 점 P는 선분 OD 위에 있다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

10 $\overline{AC}=8$, $\overline{BC}=4$이므로 $\overline{AB}=4\sqrt{3}$

이때 직선 l이 원에 접하므로 직선 l의 방정식은

$y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+4)$, 즉 $x-\sqrt{3}y+4=0$

따라서 직선 l과 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{13}=1$, 즉

$13x^2-3y^2=39$의 교점의 y좌표는

$13(\sqrt{3}y-4)^2-3y^2=39$, $36y^2-104\sqrt{3}y+169=0$

$(2\sqrt{3}y-13)(6\sqrt{3}y-13)=0$

$\therefore y=\frac{13\sqrt{3}}{6}$ 또는 $y=\frac{13\sqrt{3}}{18}$

이 값을 $x-\sqrt{3}y+4=0$에 각각 대입하면

$x=\frac{5}{2}$ 또는 $x=-\frac{11}{6}$

따라서 점 P의 좌표는

$\left(\frac{5}{2}, \frac{13\sqrt{3}}{6}\right)$

또, 점 B는 직선 l과 원 $(x-4)^2+y^2=16$의 교점이므로

$(\sqrt{3}y-4-4)^2+y^2=16$에서 $y^2-4\sqrt{3}y+12=0$

$(y-2\sqrt{3})^2=0$ $\quad\therefore y=2\sqrt{3}$

즉, 점 B의 좌표는 $(2, 2\sqrt{3})$

$\therefore \overline{BP}=\sqrt{\left(2-\frac{5}{2}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-\frac{13\sqrt{3}}{6}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

11 점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라고 하면 포물선 $y^2=x$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$y_1y=\frac{1}{2}(x+x_1)$, 즉 $y=\frac{1}{2y_1}x+\frac{x_1}{2y_1}$

한편, 직선 $x+2y+2=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x-1$과 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{2y_1}=-\frac{1}{2}$일 때 선분 PQ의 길이는 최소이다.

$\therefore y_1=-1$

이때 점 P는 포물선 위의 점이므로 ${y_1}^2=x_1$에서 $x_1=1$

따라서 점 P의 좌표는 $(1, -1)$이므로 선분 PQ 길이의 최솟값은

$\frac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

12 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라고 하면 이 쌍곡선의 점근선의 방정식이 $y=3x$, $y=-3x$이므로

$\frac{b}{a}=3$, $b=3a$

쌍곡선의 또 다른 초점을 F′이라고 하면 $\triangle$PFF′에서 점 O는 변 F′F의 중점이고 점 M은 변 PF의 중점이므로

$\overline{PF'}=2\overline{OM}=18$

또, $\overline{PF}=2\overline{MF}=14$이므로

$\overline{PF'}-\overline{PF}=18-14=4$

이때 쌍곡선의 정의에 의하여

$2a=4$ $\quad\therefore a=2, b=6$

$\therefore \overline{OF}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+36}=2\sqrt{10}$

13 원의 중심 P의 좌표를 $(a,\ b)$, 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$으로 놓을 수 있다.

이때 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$은 점 A$(2,\ 0)$을 지나므로

$(2-a)^2+b^2=r^2$ ……①

또, 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이 원 $x^2+y^2=36$에 내접하므로 $\overline{\mathrm{OP}}=6-r$

$\therefore \sqrt{a^2+b^2}=6-r$ ……②

②에 ①을 대입하면

$\sqrt{a^2+b^2}=6-\sqrt{(2-a)^2+b^2}$

양변을 제곱하면

$a^2+b^2=36-12\sqrt{(2-a)^2+b^2}+(a^2-4a+4+b^2)$

$3\sqrt{(2-a)^2+b^2}=-a+10$

양변을 제곱하면

$9a^2-36a+36+9b^2=a^2-20a+100$

$8a^2-16a+9b^2=64,\ 8(a-1)^2+9b^2=72$

$\dfrac{(a-1)^2}{9}+\dfrac{b^2}{8}=1$

따라서 원의 중심 P가 나타내는 도형의 방정식은

$\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$

14 두 초점 F, F′의 좌표는 $(6,\ 0)$, $(-6,\ 0)$이고

$\triangle\mathrm{PFF'}=30\sqrt{2}$이므로 점 P의 y좌표는 $5\sqrt{2}$이다.

이때 점 P는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{30}=1$ 위의 점이므로

P$(4,\ 5\sqrt{2})$

따라서 점 P에서의 접선 l의 방정식은

$\dfrac{4x}{6}-\dfrac{5\sqrt{2}y}{30}=1$, 즉 $y=2\sqrt{2}x-3\sqrt{2}$

또, 쌍곡선 $\dfrac{(x-m)^2}{4}-\dfrac{y^2}{n}=1$의 점근선의 방정식은

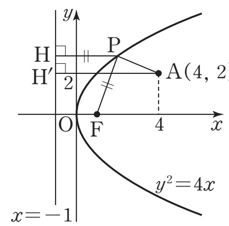
$y=\pm\dfrac{\sqrt{n}}{2}(x-m)$

이므로 $\dfrac{\sqrt{n}}{2}=2\sqrt{2}$, $\dfrac{m\sqrt{n}}{2}=3\sqrt{2}$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=\dfrac{3}{2},\ n=32 \qquad \therefore mn=48$

15 포물선 $y^2=4x$에서 초점은 F$(1,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-1$이다.



오른쪽 그림과 같이 두 점 P, A에서 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라고 하면 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PH}}$

$\geq\overline{\mathrm{AH'}}=5$

따라서 점 A$(4,\ 2)$에서 포물선 $y^2=4x$ 위의 임의의 점 P를 지나 초점 F에 이르는 거리가 최소일 때는 점 P가 포물선 $y^2=4x$와 직선 $y=2$가 만날 때, 즉 직선 AH′ 위에 있을 때이다.

이때 점 P의 좌표는

$2^2=4x,\ x=1 \qquad \therefore (1,\ 2)$

따라서 선분 AP의 길이는

$|4-1|=3$

16 세 점 P, Q, R가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ (단, t는 0이 아닌 실수)

를 만족시키는 실수 t가 존재한다.

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})=\vec{a}+3\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(k\vec{a}+2\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})$

$=(k-1)\vec{a}+4\vec{b}$

이므로

$(k-1)\vec{a}+4\vec{b}=t(\vec{a}+3\vec{b})=t\vec{a}+3t\vec{b}$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$k-1=t,\ 4=3t$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$t=\dfrac{4}{3},\ k=\dfrac{7}{3}$

17 조건 ㈎에서 두 점 F$(p,\ 0)$, A$(11,\ 4\sqrt{3})$은 원 위의 점이고, 점 A에서 준선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하면

H$(-p,\ 4\sqrt{3})$

조건 ㈏에서 점 H는 원과 준선 l의 접점이므로 원의 중심은 $\overline{\mathrm{AH}}$의 중점이다.

$\overline{\mathrm{AH}}$의 중점은 $\left(\dfrac{-p+11}{2},\ 4\sqrt{3}\right)$이고, 이 점은 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로

$(4\sqrt{3})^2=4p\times\dfrac{-p+11}{2}$

위 식을 정리하면

$p^2-11p+24=0,\ (p-3)(p-8)=0$

$\therefore p=3$ 또는 $p=8$

따라서 모든 p의 값의 곱은 24이다.

18 ❶ $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AC}$에서 $\overrightarrow{AF}+2\vec{a}=\vec{b}$

❷ 따라서 $\overrightarrow{AF}=-2\vec{a}+\vec{b}$이므로

$m=-2,\ n=1$

$\therefore |m-n|=|-2-1|=3$

채점 기준	배점
❶ 벡터 $\overrightarrow{AF}$를 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내기	60 %
❷ $\lvert m-n\rvert$의 값 구하기	40 %

19 ❶ 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{BC}-\overline{BD}=6,\ \overline{AC}-\overline{AD}=6$

❷ 두 식의 양변을 각각 더하면

$\overline{BC}+\overline{AC}-(\overline{BD}+\overline{AD})=12$

$\overline{BC}+\overline{AC}-\overline{AB}=12$

$\overline{BC}+\overline{AC}-7=12$

$\overline{BC}+\overline{AC}=19$

❸ 따라서 $\triangle ABC$의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=7+19=26$

채점 기준	배점
❶ 쌍곡선의 정의를 이용하여 관계식 구하기	40 %
❷ 두 식을 이용하여 $\overline{BC}+\overline{AC}$의 값 구하기	40 %
❸ 삼각형의 둘레의 길이 구하기	20 %

20 ❶ 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{16}=1$에서 두 초점은

$F(\sqrt{a^2-16},\ 0),\ F'(-\sqrt{a^2-16},\ 0)$

❷ 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$, 즉 $\overline{PF}=a$

이때 $\triangle PFF'$은 $\overline{PF}=\overline{PF'}$, $\angle FPF'=90°$인 직각이등변삼각형이므로

$\sqrt{2}\times\overline{PF}=\overline{FF'}$

❸ 즉, $\sqrt{2}a=2\sqrt{a^2-16}$

양변을 제곱하면

$2a^2=4a^2-64 \qquad \therefore a^2=32$

채점 기준	배점
❶ 타원의 초점의 좌표 구하기	20 %
❷ $\sqrt{2}\times\overline{PF}=\overline{FF'}$임을 알기	50 %
❸ a^2의 값 구하기	30 %

21 ❶ 점 $P(2,\ 1)$에서 타원의 접선의 방정식은

$\dfrac{2x}{8}+\dfrac{y}{2}=1$, 즉 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$

❷ 타원의 접선과 쌍곡선의 접선이 서로 수직이므로 쌍곡선의 접선의 기울기는 2이다.

쌍곡선 위의 점 $P(2,\ 1)$에서 접선의 방정식은

$\dfrac{2x}{a^2}-\dfrac{y}{b^2}=1,\ y=\dfrac{2b^2}{a^2}x-b^2$

$\dfrac{2b^2}{a^2}=2$이므로 $b^2=a^2$

❸ 또, 점 $P(2,\ 1)$은 쌍곡선 위의 점이므로

$\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1,\ \dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{a^2}=1$

$\therefore a^2=3,\ b^2=3$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{3}=1$이다.

채점 기준	배점
❶ 타원의 접선의 방정식 구하기	40 %
❷ a, b 사이의 관계식 구하기	40 %
❸ 쌍곡선의 방정식 구하기	20 %

22 ❶ $\overline{PF'}=m$, $\overline{PF}=n$이라고 하면 타원의 정의에 의하여

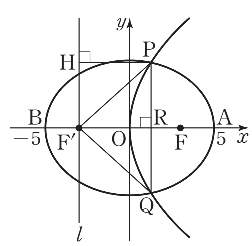
$m+n=10$ ⋯⋯①

❷ $\overline{PQ}$와 x축의 교점을 R라고 하면

$\overline{PR}=\dfrac{1}{2}\overline{PQ}=\sqrt{10}$

직각삼각형 $PF'R$에서

$\overline{F'R}=\sqrt{m^2-10}$



점 F′을 지나고 x축에 수직인 직선을 l이라고 하면 직선 l은 포물선의 준선이고, 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PH}=\overline{PF}$이다.

이때 $\overline{PF}=\overline{PH}=\overline{F'R}=\sqrt{m^2-10}$이므로

$n=\sqrt{m^2-10}$

$\therefore n^2=m^2-10$ ……②

❸ ①, ②를 연립하여 풀면

$m=\frac{11}{2},\ n=\frac{9}{2}$ $\therefore mn=\frac{99}{4}$

$\therefore p+q=103$

채점 기준	배점
❶ 타원의 정의를 이용하여 m, n의 관계식 구하기	30 %
❷ m과 n의 또 다른 관계식 구하기	40 %
❸ ❶, ❷를 연립하여 $p+q$의 값 구하기	30 %

23 ❶ 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$에서 두 초점은

F(5, 0), F′(−5, 0)

초점 F′과 점 A를 지나는 직선이 쌍곡선과 만나는 제2사분면 위의 점을 P′이라고 하면

$\overline{PF'}+\overline{PA}\ge\overline{P'F'}+\overline{P'A}$ ……①

$\overline{PF}-\overline{PF'}=6$에서

$\overline{PF'}=\overline{PF}-6$ ……②

$\overline{P'F}-\overline{P'F'}=6$에서

$\overline{P'F'}=\overline{P'F}-6$ ……③

②, ③을 ①에 대입하면

$\overline{PF}-6+\overline{PA}\ge\overline{P'F}-6+\overline{P'A}$

$\overline{PF}+\overline{PA}\ge\overline{P'F}+\overline{P'A}$

즉, $\overline{PF}+\overline{PA}$의 최솟값은 초점 F′과 점 A를 지나는 직선이 쌍곡선과 만나는 제2사분면 위의 점에서 결정된다.

❷ $\overline{PF}+\overline{PA}=(\overline{PF'}+6)+\overline{PA}\ge\overline{F'A}+6$

여기서 $\overline{PF}+\overline{PA}$의 최솟값이 19이므로

$\overline{F'A}+6=19,\ \overline{F'A}=13$

❸ 이때 F′(−5, 0), A(0, a)이므로

$\overline{F'A}=\sqrt{(-5)^2+a^2}=13$

$25+a^2=169$

$\therefore a^2=144$

채점 기준	배점
❶ $\overline{PF}+\overline{PA}$가 최솟값이 되는 경우 구하기	50 %
❷ $\overline{F'A}$의 길이 구하기	30 %
❸ a^2의 값 구하기	20 %

기하 기말고사 225~229쪽

01 ③	02 ④	03 ②	04 ③	05 ②
06 ④	07 ①	08 ④	09 ④	10 ②
11 ②	12 ③	13 ⑤	14 ②	15 ①
16 ①	17 ②	18 ⑤	19 ④	20 4
21 19	22 6	23 4		

01 $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times(-1)+2\times3=2$

02 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q의 위치벡터를 각각 $\vec{p}$, $\vec{q}$라고 하면

$\vec{p}=\frac{\vec{b}+2\vec{a}}{1+2}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$

$\vec{q}=\frac{\vec{b}-2\vec{a}}{1-2}=2\vec{a}-\vec{b}$

따라서 선분 PQ의 중점의 위치벡터는

$\frac{\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}+2\vec{a}-\vec{b}}{2}=\frac{4}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

03 $\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{b}\cdot\vec{p}+(\vec{b}+\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{b}\cdot\vec{p}+\vec{b}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{a}=0$

$\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{b}\cdot\vec{p}+\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{a}$

$(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}$

$|\vec{p}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2$

$|\vec{p}-\vec{b}|=|\vec{a}|$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $|\vec{a}|$인 원이다.

이때 $|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로 점 P가 나타내는 도형의 길이는 $2\pi\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}\pi$

다른 풀이

$\vec{p}=(x, y)$라고 하면

$\vec{p}\cdot\vec{p}=|\vec{p}|^2=x^2+y^2$

$2\vec{b}\cdot\vec{p}=2(3, 0)\cdot(x, y)=6x$

$(\vec{b}+\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=(2, 2)\cdot(4, -2)=4$

이므로 주어진 벡터방정식은

$x^2+y^2-6x+4=0$

즉, $(x-3)^2+y^2=5$이므로 점 P가 나타내는 도형은 중심이 (3, 0)이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이다.

따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는 $2\pi\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}\pi$

04 점 $(-2,\ 1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(a,\ b)$인 직선을 l이라고 하면 직선 l의 방정식은

$\dfrac{x+2}{a}=\dfrac{y-1}{b}$

$\dfrac{x+2}{a}=\dfrac{y-1}{b}=t$($t$는 실수)라고 하면

$x=at-2,\ y=bt+1$

이때 직선 l과 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$이 만나므로

$(at-2-3)^2+(bt+1-2)^2=1$

$(at-5)^2+(bt-1)^2=1$

위 식을 전개하여 정리하면

$(a^2+b^2)t^2-2(5a+b)t+25=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 실근이 존재해야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(5a+b)^2-25(a^2+b^2)\geq 0$

$10ab-24b^2\geq 0$

그런데 $b>0$이므로 $10a-24b\geq 0,\ 5a\geq 12b$

또, $a>0$이므로 $\dfrac{5}{12}\geq\dfrac{b}{a}$

따라서 $\dfrac{b}{a}$의 최댓값은 $\dfrac{5}{12}$이다.

05 점 A의 위치벡터를 $\vec{a}=(3,\ 1)$이라고 하면 $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$(t는 실수)이므로 직선 l은 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$을 지나고 벡터 $\vec{d}=(-1,\ 2)$에 평행한 직선이다.

즉, 직선 l의 방정식은 $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-1}{2}$

$\therefore\ 2x+y-7=0$

또, $(\vec{q}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$이므로 직선 m은 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$을 지나고 벡터 $\vec{n}=(2,\ 3)$에 수직인 직선이다.

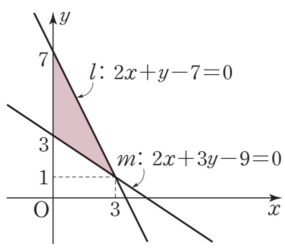
즉, 직선 m의 방정식은 $2(x-3)+3(y-1)=0$

$\therefore\ 2x+3y-9=0$

두 직선 $l,\ m$ 모두 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$을 지나므로 두 직선 $l,\ m$의 교점의 좌표는 $(3,\ 1)$이다.

오른쪽 그림에서 두 직선 $l,\ m$과 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(7-3)\times 3=6$



06 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}=(4,\ 0),\ \vec{b}=(10,\ 0)$라 하고, 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면

$\vec{p}-\vec{a}=(x-4,\ y),\ \vec{p}-\vec{b}=(x-10,\ y)$

이므로

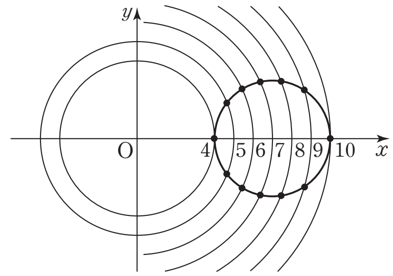
$(x-4,\ y)\cdot(x-10,\ y)=0$

$x^2-14x+40+y^2=0$

$\therefore\ (x-7)^2+y^2=9$

따라서 점 P는 원 $(x-7)^2+y^2=9$ 위의 점이고, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$는 두 점 O, P 사이의 거리이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$가 정수가 되도록 하는 점 P의 개수는

$2+2\times 5=12$



07 점 $(0,\ -1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(4,\ 3)$인 직선 l의 방정식은

$\dfrac{x-0}{4}=\dfrac{y+1}{3}$, 즉 $3x-4y-4=0$

$|\vec{p}|=1$에서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 $x^2+y^2=1$

이 원을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 원의 방정식은

$(x-a)^2+y^2=1$

이때 직선 $3x-4y-4=0$과 원 $(x-a)^2+y^2=1$이 접하려면 원의 중심 $(a,\ 0)$과 직선 $3x-4y-4=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1과 같아야 한다. 즉,

$\dfrac{|3a-4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1,\ |3a-4|=5$

$3a-4=-5$ 또는 $3a-4=5$

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $a=3$

그런데 $a>0$이므로 $a=3$

08 원의 중심을 C라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$

$=(9,\ 0)+(3,\ 4)+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$

$=(12,\ 4)+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$

이때 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$는 벡터 $(12,\ 4)$와 같은 방향일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 값이 최대가 된다.

따라서 $|\overline{CP}|$는 원의 반지름의 길이이므로 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}|$의 최댓값은

$\sqrt{12^2+4^2}+\sqrt{40}=4\sqrt{10}+2\sqrt{10}=6\sqrt{10}$

09 $\overline{AH}$와 꼬인 위치에 있는 모서리는

$\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{CG}$, $\overline{EF}$, $\overline{FB}$, $\overline{GF}$

의 6개이다.

10 ② 삼수선 정리에 의해 $\overline{AD}\perp\overline{CD}$이므로 $\overline{AC}$, $\overline{CD}$는 서로 수직이 아니다.

③ $\overline{AB}=2$, $\overline{BD}=3$, $\angle ABD=90°$이므로

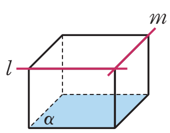
$\overline{AD}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$이다.

④ △ACD에서 $\sin\theta=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$

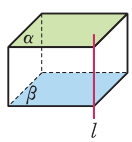
⑤ △ADB에서 $\tan\theta=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}}=\dfrac{2}{3}$

11 ㄱ. 한 평면에 평행한 두 직선이 평행하지 않을 수 있다. (거짓)

[반례]

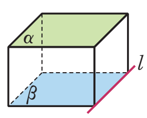


ㄴ. 한 직선에 수직인 두 평면은 서로 평행하다. (참)



ㄷ. 두 평면이 수직일 때 한 평면에 평행한 직선이 다른 평면에는 수직이 아닐 수도 있다. (거짓)

[반례]



따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

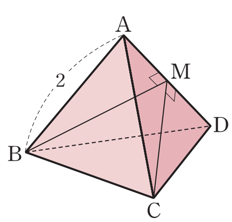
12 정삼각형 ABD에서

$\overline{BM}\perp\overline{AD}$

직각삼각형 ABM에서

$\overline{BM}=\sqrt{\overline{BA}^2-\overline{AM}^2}$

$=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$



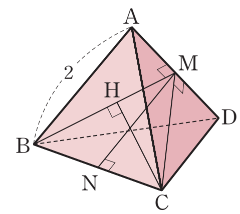
마찬가지 방법으로

$\overline{CM}=\sqrt{3}$

이등변삼각형 MBC에서 선분 BC의 중점을 N이라고 하면 $\overline{MN}\perp\overline{BC}$이므로

$\overline{MN}=\sqrt{\overline{MB}^2-\overline{BN}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$



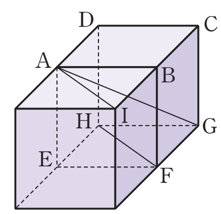
또, 점 C에서 선분 MB에 내린 수선의 발이 H이므로 △MBC에서

$\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{MN}=\dfrac{1}{2}\times\overline{MB}\times\overline{CH}$

$\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\overline{CH}$

$\therefore\ \overline{CH}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

13 오른쪽 그림과 같이 정육면체 ABCD−EFGH와 같은 크기의 정육면체를 정사각형 AEFB에 이어 붙이면 직선 HF와 직선 AI는 서로 평행하므로 두 직선 AG와 FH가 이루는 각의 크기는 두 직선 AG와 AI가 이루는 각의 크기와 같다.



정육면체 ABCD−EFGH의 한 모서리의 길이를 a라고 하면

$\overline{AG}=\sqrt{3}a$, $\overline{AI}=\sqrt{2}a$, $\overline{IG}=\sqrt{5}a$

이므로 △AIG에서

$(\sqrt{5}a)^2=(\sqrt{3}a)^2+(\sqrt{2}a)^2$

즉, $\overline{IG}^2=\overline{AG}^2+\overline{AI}^2$이 성립한다.

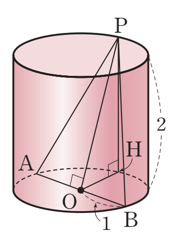
따라서 $\angle IAG=90°$이므로 $\cos\theta=\cos 90°=0$

14 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 원기둥의 아래쪽에 있는 밑면에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

$\overline{PO}\perp\overline{AB}$, $\overline{PH}\perp$(평면 HAB)

이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{HO}\perp\overline{AB}$



즉, $\overline{PO}\perp\overline{AB}$, $\overline{HO}\perp\overline{AB}$이므로 두 평면 PAB와 HAB가 이루는 예각의 크기는 두 직선 PO와 HO가 이루는 예각의 크기와 같다.

$\therefore\ \theta=\angle POH$

이때 △POH는 $\angle PHO=90°$인 직각삼각형이고

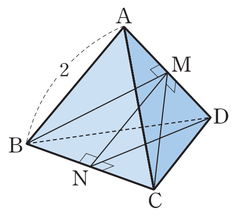
$\overline{HO}=1$, $\overline{PH}=2$이므로

$\overline{\mathrm{PO}}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\therefore \cos\theta=\cos(\angle\mathrm{POH})$

$$=\frac{\overline{\mathrm{HO}}}{\overline{\mathrm{PO}}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

15 정삼각형 ABD에서 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AM}}=1$이므로 직각삼각형 ABM에서



$\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AM}}^2}$

$=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

마찬가지 방법으로

$\overline{\mathrm{CM}}=\sqrt{3}$

이등변삼각형 BCM에서 선분 BC의 중점을 N이라고 하면 직각삼각형 NCM에서

$\overline{\mathrm{MN}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CM}}^2-\overline{\mathrm{CN}}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$

이때 △BCM의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{MN}}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$

이등변삼각형 BCM에서

$\overline{\mathrm{MN}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$ ……①

정삼각형 BCD에서

$\overline{\mathrm{DN}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$ ……②

①, ②에서 두 평면 BCM, BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면

$\theta=\angle\mathrm{MND}$

한편, 정삼각형 ABD에서

$\overline{\mathrm{BM}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$ ……③

정삼각형 ACD에서

$\overline{\mathrm{CM}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$ ……④

③, ④에서 $\overline{\mathrm{AD}}\perp$(평면 BCM)이므로

$\overline{\mathrm{MN}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$

즉, △DMN은 $\angle\mathrm{DMN}=90°$인 직각삼각형이다.

직각삼각형 DMN에서

$\overline{\mathrm{MN}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{DN}}=\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{3}$

이므로

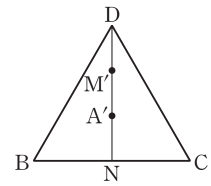
$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{MN}}}{\overline{\mathrm{DN}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

따라서 △BCM의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이는

$\sqrt{2}\times\cos\theta=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

다른 풀이

△DBC에서 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 N이라 하고, $\overline{\mathrm{DN}}$을 2 : 1로 내분하는 점과 1 : 2로 내분하는 점을 각각 A′, M′이라고 하자.



점 A와 점 M의 평면 DBC 위로의 정사영이 각각 A′, M′이므로 구하는 정사영의 넓이는 △M′BC의 넓이이다.

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{M'N}}=\frac{1}{2}\times 2\times\left(\sqrt{3}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

16 A(3, 4, 0)의 zx평면에 대한 대칭점은 (3, -4, 0)

B(2, 5, 3)의 yz평면에 대한 대칭점은 (-2, 5, 3)

이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값은 두 점 (3, -4, 0), (-2, 5, 3) 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 최솟값은

$\sqrt{(-2-3)^2+(5+4)^2+(3-0)^2}=\sqrt{115}$

17 A(x, y, a), B(x, y, b)라고 하면 △OAB의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{2x}{3}, \frac{2y}{3}, \frac{a+b}{3}\right)$이므로

$\frac{2x}{3}=2$, $\frac{2y}{3}=2$, $\frac{a+b}{3}=3$

$\therefore x=3$, $y=3$, $a+b=9$

그런데

$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{x^2+y^2}\times(b-a)=6\sqrt{2}$

이므로

$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times(b-a)=6\sqrt{2}$, $b-a=4$

$\therefore b^2-a^2=4\times 9=36$

18 구의 방정식을 변형하면

$(x+1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=26-k$

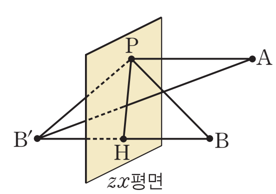
이 구가 zx평면과 만나고 xy평면과 만나지 않으려면

$3\le\sqrt{26-k}<4$, $9\le 26-k<16$

$\therefore 10<k\le 17$

따라서 자연수 k의 개수는 7이다.

19 오른쪽 그림과 같이 점 B의 zx평면에 대한 대칭점을 B′이라 하고, 선분 BB′과 zx평면의 교점을 H라고 하자.



zx평면 위의 임의의 점 P에 대하여

$\triangle PBH \equiv \triangle PB'H$

이므로 $\overline{BP}=\overline{B'P}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}\ge\overline{AB'}$이므로 점 P가 선분 AB'과 zx평면의 교점일 때 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소가 되고, 그 최솟값은 선분 AB'의 길이이다.

한편, 점 B의 zx평면에 대한 대칭점 B'의 좌표는

B'(2, −2, 1)

이고,

$$\overline{AB'}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(-2-3)^2+(1-a)^2}=\sqrt{a^2-2a+35}$$

이때 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값, 즉 $\overline{AB'}$의 값이 $\sqrt{43}$이므로

$a^2-2a+35=43$, $a^2-2a-8=0$

$(a-4)(a+2)=0$

그런데 $a>0$이므로 $a=4$

20 ❶ $|\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{3}$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=12$ ……①

❷ $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$를 ①에 대입하면

$4^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=12$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=4$

채점 기준	배점
❶ $\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert=2\sqrt{3}$의 양변을 제곱하여 식 구하기	40 %
❷ $\lvert\vec{a}\rvert=4$, $\lvert\vec{b}\rvert=2$를 대입하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 구하기	60 %

21 ❶ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라고 하면

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{a}$$

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}$$

❷ 이때

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=3\times3\times\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

이므로

❸
$$|\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}|^2=\left|\left(\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{a}\right)+\left(\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}\right)\right|^2$$
$$=\left|\vec{b}-\frac{5}{3}\vec{a}\right|^2$$
$$=|\vec{b}|^2-\frac{10}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{25}{9}|\vec{a}|^2$$
$$=3^2-\frac{10}{3}\times\frac{9}{2}+\frac{25}{9}\times3^2$$
$$=9-15+25=19$$

채점 기준	배점
❶ 벡터 $\overrightarrow{BF}$와 벡터 $\overrightarrow{DE}$를 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내기	50 %
❷ 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 내적 구하기	20 %
❸ ❷를 이용하여 $\lvert\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}\rvert^2$의 값 구하기	30 %

22 ❶ 점 A에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 G라고 할 때,

$$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{AG}=5\overline{AG}=60$$

이므로

$\overline{AG}=12$

❷ 이때 면 BCD와 면 ACD가 이루는 각의 크기가 30°이므로

$$\overline{AH}=\overline{AG}\sin 30^\circ=12\times\frac{1}{2}=6$$

채점 기준	배점
❶ 선분 AG의 길이 구하기	40 %
❷ 이면각을 이용하여 선분 AH의 길이 구하기	60 %

23 ❶ 주어진 구의 방정식을 변형하면

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$

이므로 구의 중심은 (1, 2, 3)이고 반지름의 길이는 3이다.

❷ 이때 구의 중심 (1, 2, 3)에서 x축까지의 거리는

$\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

y축까지의 거리는

$\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

이고 반지름의 길이 3보다 크므로 x축, y축과 구가 만날 수 없다.

❸ 즉, 구 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$와 만나는 좌표축은 z축이고, z축이 만나는 점의 z좌표는 $x=y=0$일 때이므로

$(-1)^2+(-2)^2+(z-3)^2=9$, $(z-3)^2=4$

$\therefore z=1$ 또는 $z=5$

따라서 구하는 두 점 사이의 거리는

$5-1=4$

채점 기준	배점
❶ 주어진 구의 중심과 반지름의 길이 구하기	30 %
❷ 구가 만나지 않는 축 찾기	20 %
❸ 두 점 사이의 거리 구하기	50 %

230~235쪽

대단원 기출 모의고사 Ⅰ. 이차곡선

정답률 80 % 이상	**01** ③	**02** ④	**03** ①	**04** ②
05 ②	**06** ④	**07** ④	**08** 12	**09** ④
10 ②	**11** ④	**12** ①	**13** 13	**14** 136
15 19				
정답률 79~60 %	**16** 12	**17** 15	**18** ④	**19** ①
20 32	**21** ⑤	**22** 14	**23** 29	
정답률 60 % 미만	**24** 116			

01 포물선의 접선의 방정식

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $A(4,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$4y=2(x+4)$, 즉 $l:\ y=\frac{1}{2}x+2$

준선의 방정식이 $x=-1$이므로 직선 l과 준선이 만나는 점 B의 y좌표는

$y=\frac{1}{2}\times(-1)+2=\frac{3}{2}$

$\therefore B\left(-1,\ \frac{3}{2}\right)$

직선 l과 x축이 만나는 점 C의 좌표는

$C(-4,\ 0)$

준선과 x축이 만나는 점 D의 좌표는

$D(-1,\ 0)$

따라서 $\overline{CD}=3$, $\overline{BD}=\frac{3}{2}$이므로 $\triangle BCD$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$

02 쌍곡선의 방정식

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$이라고 하면

조건 (가)에서 두 초점의 좌표가 $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$이므로

$a^2+b^2=25$ ……①

조건 (나)에서 두 점근선이 서로 수직이므로

$\frac{b}{a}\times\left(-\frac{b}{a}\right)=-1$

$\therefore a^2=b^2$ ……②

②를 ①에 대입하면

$2a^2=25$, $a^2=\frac{25}{2}$

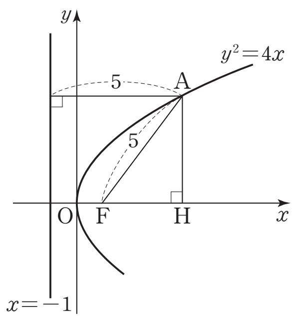
$\therefore a=\frac{5\sqrt{2}}{2}\ (\because a>0)$

따라서 구하는 주축의 길이는

$2a=5\sqrt{2}$

03 포물선의 정의

포물선 $y^2=4x$의 초점은 $F(1,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-1$이다.



포물선의 정의에 의하여 $\overline{AF}=5$이고

$\overline{FH}=4-1=3$

이므로 직각삼각형 AFH에서

$\overline{AH}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

따라서 $\triangle AFH$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{FH}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times3\times4=6$

04 쌍곡선의 방정식

쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-y^2=1$ 위의 점 $A(4,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

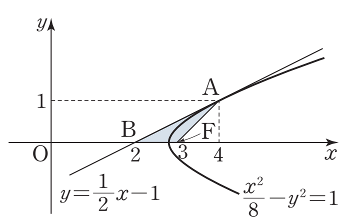
$\frac{4x}{8}-y=1\qquad\therefore y=\frac{1}{2}x-1$

이 접선이 x축과 만나는 점 B의 x좌표는 $0=\frac{1}{2}x-1$에서 $x=2$이므로 점 $B(2,\ 0)$이다.

또, 쌍곡선의 초점 F의 좌표를 $(c,\ 0)(c>0)$이라고 하면

$c^2=8+1=9\qquad\therefore c=3$

$\therefore F(3,\ 0)$



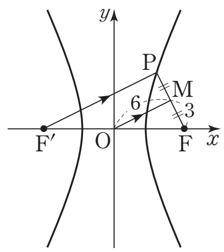
따라서 $\triangle FAB$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(3-2)\times1=\frac{1}{2}$

05 쌍곡선의 정의의 응용

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$이라고 하면 이 쌍곡선의 점근선의 방정식이 $y=2x,\ y=-2x$이므로

$\frac{b}{a}=2 \qquad \therefore b=2a$ ……①



쌍곡선의 또 다른 초점을 F′이라고 하면 △PF′F에서 점 O는 변 F′F의 중점이고 점 M은 변 PF의 중점이므로

$\overline{PF'}=2\overline{OM}=2\times6=12$

또, $\overline{PF}=2\overline{MF}=2\times3=6$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=12-6=6=2a$

$\therefore a=3$

$a=3$을 ①에 대입하면 $b=6$

$\therefore \overline{OF}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$

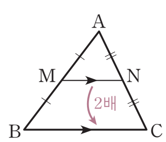
참고 삼각형 ABC에서

(1) $\overline{AM}=\overline{MB},\ \overline{AN}=\overline{NC}$이면

$\overline{MN}\,/\!/\,\overline{BC},\ \overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

(2) $\overline{AM}=\overline{MB},\ \overline{MN}\,/\!/\,\overline{BC}$이면

$\overline{AN}=\overline{NC}$



06 타원의 방정식

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$에서 $\overline{OA}=a,\ \overline{OB}=b,$ $\overline{OF}=c$이고

$c^2=a^2-b^2$ ……①

직각삼각형 OFB에서

$\overline{OF}=\frac{\overline{OB}}{\tan 60^\circ}=\frac{b}{\sqrt{3}}$

$\therefore c=\overline{OF}=\frac{b}{\sqrt{3}}$ ……②

②를 ①에 대입하면 $\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2=a^2-b^2$

$\frac{b^2}{3}=a^2-b^2,\ a^2=\frac{4}{3}b^2$

$\therefore a=\overline{OA}=\frac{2b}{\sqrt{3}}\ (\because a>0,\ b>0)$

이때 △AFB의 넓이가 $6\sqrt{3}$이므로

$\triangle AFB=\frac{1}{2}\times\overline{AF}\times\overline{OB}$

$=\frac{1}{2}\times(\overline{OA}+\overline{OF})\times\overline{OB}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{2b}{\sqrt{3}}+\frac{b}{\sqrt{3}}\right)b$

$=\frac{3b^2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}b^2}{2}=6\sqrt{3}$

$\therefore b^2=12$

한편, $a^2=\frac{4}{3}b^2$이므로 $b^2=12$를 대입하면

$a^2=\frac{4}{3}\times12=16$

$\therefore a^2+b^2=16+12=28$

07 이차곡선의 활용

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 꼭짓점의 좌표는 $(a,\ 0),$ $(-a,\ 0)$이다.

타원 $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점의 좌표가 $(a,\ 0),$ $(-a,\ 0)$이므로 $13>b^2>0$이다.

이때 $a^2=13-b^2$이므로 $a^2+b^2=13$

08 타원의 정의의 활용

$\overline{FP}=a,\ \overline{F'P}=b$라고 하면 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$의 장축의 길이가 $2\times3=6$이므로 타원의 정의에 의하여

$a+b=6$ ……①

또, 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점 F, F′ 사이의 거리는 $2\times\sqrt{9-4}=2\sqrt{5}$이고 $\angle FPF'=90^\circ$이므로

$a^2+b^2=(2\sqrt{5})^2=20$ ……②

이때 ①에서 $b=6-a$이므로 이를 ②에 대입하면

$a^2+(6-a)^2=20,\ 2a^2-12a+16=0$

$a^2-6a+8=0,\ (a-2)(a-4)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=4$

그런데 $a<b$이므로 $a=2,\ b=4$

따라서 $\overline{F'P}=4,\ \overline{FQ}=6$이므로 △QF′F의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{FQ}\times\overline{F'P}=\frac{1}{2}\times6\times4=12$

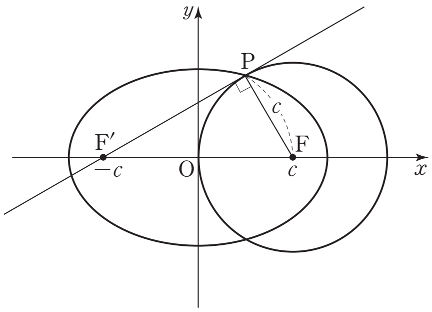
09 타원의 정의

$\overline{PF'}$은 원의 접선이므로 원과 접선의 관계에 의하여

$\angle FPF'=90^\circ$

이때 $\overline{PF}=c,\ \overline{FF'}=2c$이므로 직각삼각형 FPF′에서

$\overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{FF'}}^2-\overline{\mathrm{PF'}}^2}=\sqrt{(2c)^2-c^2}=\sqrt{3}c$



타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{3}c+c=(\sqrt{3}+1)c=4$

$\therefore\ c=\dfrac{4}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{4(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=2\sqrt{3}-2$

10 타원의 성질

접선이 x축과 만나는 점을 A라고 하면 $\angle\mathrm{OAP}=30^\circ$

선분 OP를 그으면 선분 OP는 접선과 수직이므로

$\angle\mathrm{POA}+\angle\mathrm{OAP}=90^\circ$에서

$\angle\mathrm{POA}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

$\therefore\ \angle\mathrm{POF}=60^\circ$

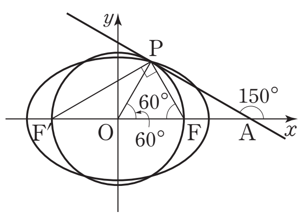
선분 PF를 그으면 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OF}}$에서 $\angle\mathrm{OPF}=\angle\mathrm{OFP}$

이때 $\angle\mathrm{POF}=60^\circ$이므로

$\angle\mathrm{OPF}=\angle\mathrm{OFP}=60^\circ$

따라서 $\triangle\mathrm{POF}$는 정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{OF}}=6$

선분 F′F는 원의 지름이므로 $\angle\mathrm{F'PF}=90^\circ$



직각삼각형 PF′F에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{F'F}}^2-\overline{\mathrm{PF}}^2}=\sqrt{12^2-6^2}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$

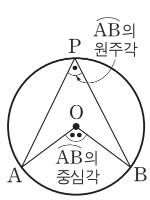
타원의 정의에 의하여 타원의 장축의 길이는

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=6+6\sqrt{3}$

참고 원주각과 중심각의 크기

한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\dfrac{1}{2}$이다.

즉, $\angle\mathrm{APB}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}$



11 포물선의 접선의 방정식

두 직선 l_1, l_2의 기울기 m_1, $m_2(m_1<m_2)$가 방정식 $2x^2-3x+1=0$의 두 근이므로

$(2x-1)(x-1)=0\qquad \therefore\ x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$\therefore\ m_1=\dfrac{1}{2},\ m_2=1$

두 직선 l_1, l_2는 포물선 $y^2=8x$의 접선이고, 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면

$y_1y=4(x+x_1)$, 즉 $y=\dfrac{4}{y_1}x+\dfrac{4x_1}{y_1}$

(ⅰ) 기울기 $m_1=\dfrac{1}{2}$인 접선 l_1의 방정식은

$\dfrac{4}{y_1}=\dfrac{1}{2}$에서 $y_1=8$

${y_1}^2=8x_1$에서 $8^2=8x_1,\ x_1=8$

$\therefore\ y=\dfrac{1}{2}x+4$

(ⅱ) 기울기 $m_2=1$인 접선 l_2의 방정식은

$\dfrac{4}{y_1}=1$에서 $y_1=4$

${y_1}^2=8x_1$에서 $4^2=8x_1,\ x_1=2$

$\therefore\ y=x+2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 직선 l_1, l_2의 교점의 x좌표는

$\dfrac{1}{2}x+4=x+2,\ \dfrac{1}{2}x=2$

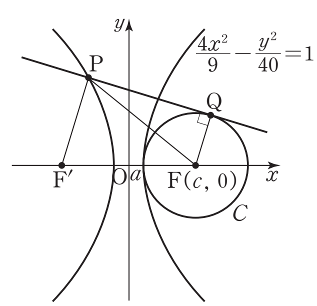
$\therefore\ x=4$

12 쌍곡선의 정의의 활용

$x>0$에서 쌍곡선 $\dfrac{4x^2}{9}-\dfrac{y^2}{40}=1$, 즉 $\dfrac{x^2}{\frac{9}{4}}-\dfrac{y^2}{40}=1$의 꼭짓점과 초점의 좌표를 각각 $(a,\ 0)$, $(c,\ 0)$이라고 하면

$a=\dfrac{3}{2}$

$c=\sqrt{\dfrac{9}{4}+40}=\sqrt{\dfrac{169}{4}}=\dfrac{13}{2}$



선분 QF의 길이는 원 C의 반지름의 길이와 같으므로

$\overline{\mathrm{QF}}=c-a=\frac{13}{2}-\frac{3}{2}=5$

원과 접선의 관계에 의하여 $\angle\mathrm{FQP}=90°$이므로 직각삼각형 FQP에서

$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{QF}}^2}=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13$

따라서 쌍곡선의 정의에 의하여

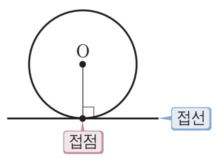
$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=2a=2\times\frac{3}{2}=3$

이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}-3=13-3=10$

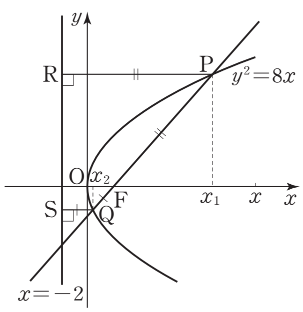
참고 **원과 접선의 관계**

원의 접선은 그 접점을 한 끝점으로 하는 반지름에 수직이다.



13 포물선의 정의

포물선 $y^2=8x$의 초점은 F(2, 0)이고 준선의 방정식은 $x=-2$이다.



두 점 P, Q의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하고, 두 점에서 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 R, S라고 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PR}}=x_1+2,\ \overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{QS}}=x_2+2$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}=(x_1+2)+(x_2+2)=x_1+x_2+4$

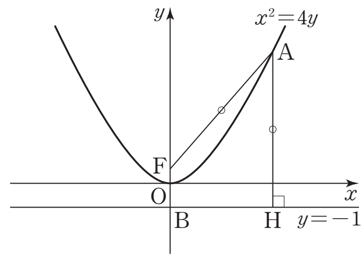
이때 $\overline{\mathrm{PQ}}=17$이므로

$17=x_1+x_2+4$

$\therefore x_1+x_2=13$

14 포물선의 정의의 활용

포물선 $x^2=4y$의 초점은 F(0, 1)이고 준선의 방정식은 $y=-1$이다.



그림과 같이 점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라고 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AF}}=10$

이때 점 A의 좌표를 $(b,\ c)$라고 하면

$c=\overline{\mathrm{AH}}-1=10-1=9$

$b^2=4c$에 $c=9$를 대입하면

$b^2=4\times9=36\qquad\therefore b=6$ 또는 $b=-6$

A(±6, 9), B(0, −1)이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(\pm6-0)^2+\{9-(-1)\}^2}=\sqrt{136}$

따라서 $a=\sqrt{136}$이므로 $a^2=136$이다.

15 이차곡선의 활용

타원 $x^2+\frac{y^2}{a^2}=1$에서 $a>1$이므로 두 초점을 A$(0,\ c)$, B$(0,\ -c)$ $(c>0)$라고 하면

$c^2=a^2-1\qquad\therefore c=\sqrt{a^2-1}\ (\because c>0)$

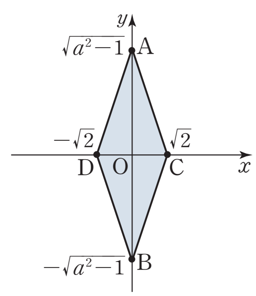
$\therefore$ A$(0,\ \sqrt{a^2-1})$, B$(0,\ -\sqrt{a^2-1})$

쌍곡선 $x^2-y^2=1$의 두 초점을 C$(d,\ 0)$, D$(-d,\ 0)$ $(d>0)$이라고 하면

$d^2=1+1=2\qquad\therefore d=\sqrt{2}\ (\because d>0)$

$\therefore$ C$(\sqrt{2},\ 0)$, D$(-\sqrt{2},\ 0)$

네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같고, 그 넓이가 12이므로



$\square$ADBC

$=2\triangle$ADC

$=2\times\left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{a^2-1}\right)$

$=12$

즉, $\sqrt{a^2-1}=3\sqrt{2}$에서 $a^2-1=18$

$\therefore a^2=19$

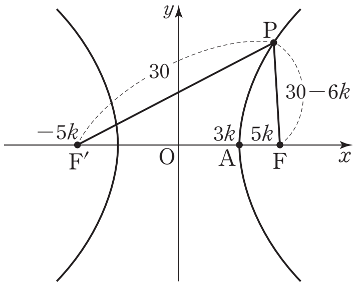
16 쌍곡선의 방정식의 활용

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (c>a>0,\ b^2=c^2-a^2)$

이라고 하면 이 쌍곡선의 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{4}{3}x$이므로

$a=3k,\ b=4k\ (k>0)$

로 놓을 수 있다.



꼭짓점 A의 x좌표는 $3k$이고

$c=\sqrt{(3k)^2+(4k)^2}=5k$

이때 주축의 길이가 $6k$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$|\overline{PF}-\overline{PF'}|=6k$

$\overline{PF}\le 20<30=\overline{PF'}$이므로 $\overline{PF'}-\overline{PF}=6k$에서

$\overline{PF}=30-6k$

$16\le\overline{PF}\le 20$에서 $16\le 30-6k\le 20$

$-14\le -6k\le -10 \qquad \therefore \frac{5}{3}\le k\le\frac{7}{3}$

또, $\overline{AF}=\overline{FO}-\overline{AO}=5k-3k=2k$이고 $\overline{AF}$의 길이가 자연수이므로 $\frac{10}{3}\le 2k\le\frac{14}{3}$를 만족시키는 자연수 $2k$의 값은

$2k=4 \qquad \therefore k=2$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는 $6k=12$이다.

17 쌍곡선의 접선의 방정식

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 $F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$이므로

$a^2+b^2=9$ ……①

또, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $P(4,\ k)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{4x}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1$ ……②

이 직선이 x축과 만나는 점의 x좌표는 ②에서 $y=0$일 때이므로

$\frac{4x}{a^2}=1 \qquad \therefore x=\frac{a^2}{4}$

이때 접선 ②와 x축과의 교점 $\left(\frac{a^2}{4},\ 0\right)$이 선분 $F'F$를 2 : 1로 내분하므로

$\frac{2\times 3+1\times(-3)}{2+1}=\frac{a^2}{4},\ 1=\frac{a^2}{4}$

$\therefore a^2=4$

$a^2=4$를 ①에 대입하면

$4+b^2=9 \qquad \therefore b^2=5$

따라서 주어진 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$이고,

점 $P(4,\ k)$는 쌍곡선 위의 점이므로

$\frac{4^2}{4}-\frac{k^2}{5}=1,\ \frac{k^2}{5}=3$

$\therefore k^2=15$

참고 **수직선 위의 선분의 내분점과 외분점**
수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라고 하면

$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$, $Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\right)$ (단, $m\ne n$)

18 쌍곡선의 정의의 활용

쌍곡선은 원점에 대하여 대칭이므로

$\overline{PG}=\overline{QG'},\ \overline{PF}=\overline{QF'}$ ……①

주어진 쌍곡선의 주축의 길이가 2이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{QG}-\overline{QG'}=2$

$\overline{PG}=k$라고 하면

$\overline{QG}=\overline{QG'}+2=\overline{PG}+2=k+2$ (∵ ①)

$\therefore \overline{PG}\times\overline{QG}=k(k+2)=8$

위의 식을 전개하여 풀면

$k^2+2k-8=0,\ (k+4)(k-2)=0$

$\therefore k=2$ (∵ $k>0$)

$\therefore \overline{PG}=2,\ \overline{QG}=2+2=4$

또, $\overline{QF}-\overline{QF'}=2$이므로 $\overline{PF}=l$이라고 하면

$\overline{QF}=\overline{QF'}+2=\overline{PF}+2=l+2$ (∵ ①)

$\therefore \overline{PF}\times\overline{QF}=l(l+2)=4$

위의 식을 전개하여 풀면

$l^2+2l-4=0 \qquad \therefore l=-1+\sqrt{5}$ (∵ $l>0$)

$\therefore \overline{PF}=-1+\sqrt{5},\ \overline{QF}=(-1+\sqrt{5})+2=1+\sqrt{5}$

따라서 사각형 PGQF의 둘레의 길이는

$\overline{PG}+\overline{QG}+\overline{QF}+\overline{PF}$

$=2+4+1+\sqrt{5}+(-1+\sqrt{5})$

$=6+2\sqrt{5}$

19 포물선의 접선의 방정식

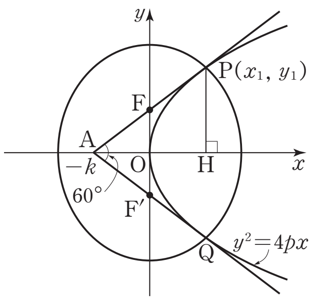
점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2p(x+x_1) \qquad \cdots\cdots ①$$

이때 점 $\mathrm{A}(-k,\ 0)$이 접선 ① 위의 점이므로

$$0=2p(-k+x_1),\ x_1=k\ (\because p>0)$$

$\angle\mathrm{PAQ}=60^\circ$이므로 $\angle\mathrm{PAO}=30^\circ$



점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\mathrm{H}(k,\ 0)$이므로 직각삼각형 AHP에서

$$\overline{\mathrm{AH}}=2k,\ \overline{\mathrm{AP}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times 2k=\frac{4}{\sqrt{3}}k$$

$$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}k\right)^2-(2k)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}k$$

직각삼각형 AOF에서

$$\overline{\mathrm{OF}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PH}}=\frac{k}{\sqrt{3}}$$

따라서 $\mathrm{P}\left(k,\ \frac{2}{\sqrt{3}}k\right)$, $\mathrm{F}\left(0,\ \frac{k}{\sqrt{3}}\right)$, $\mathrm{F}'\left(0,\ -\frac{k}{\sqrt{3}}\right)$이므로

$$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{k^2+\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{3}k^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}k$$

$$\overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{k^2+\left(\frac{3}{\sqrt{3}}k\right)^2}=\sqrt{4k^2}=2k$$

타원의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=4\sqrt{3}+12$$

이므로

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}k+2k=4\sqrt{3}+12$$

$$\frac{2\sqrt{3}+6}{3}k=4\sqrt{3}+12$$

$$(2\sqrt{3}+6)k=6(2\sqrt{3}+6) \qquad \therefore k=6$$

한편, 점 $\mathrm{P}\left(k,\ \frac{2}{\sqrt{3}}k\right)$, 즉 $\mathrm{P}(6,\ 4\sqrt{3})$이 $y^2=4px$ 위의 점이므로

$$(4\sqrt{3})^2=24p,\ 48=24p$$

$$\therefore p=2$$

$$\therefore k+p=6+2=8$$

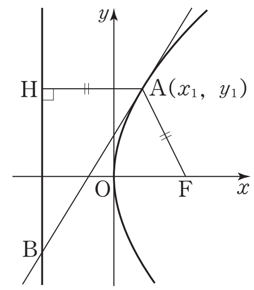
20 포물선의 접선의 방정식

접점 A의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$, 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라고 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AH}},\ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AF}}$$

이므로

$$\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{AB}}=1:2$$



점 A에서의 접선의 기울기는 $\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}$이고 $\triangle\mathrm{ABH}$에서

$$\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$$

따라서 포물선 위의 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=6(x+x_1),\ \text{즉 } y=\frac{6}{y_1}x+\frac{6x_1}{y_1}$$

이므로

$$\frac{6}{y_1}=\sqrt{3} \qquad \therefore y_1=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

또, 점 $(x_1,\ y_1)$은 포물선 위의 점이므로

$$y_1^{\,2}=12x_1,\ (2\sqrt{3})^2=12x_1 \qquad \therefore x_1=1$$

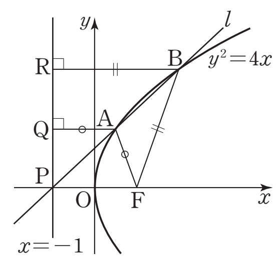
이때 포물선 $y^2=12x$의 준선의 방정식이 $x=-3$이므로

$$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AH}}=x_1+3=4,\ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AF}}=8$$

$$\therefore \overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AF}}=8\times 4=32$$

21 포물선의 정의의 활용

포물선 $y^2=4x$에서 초점은 $\mathrm{F}(1,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-1$이므로 점 P의 좌표는 $(-1,\ 0)$이다.



두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라고 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{FA}},\ \overline{\mathrm{RB}}=\overline{\mathrm{FB}}$$

$\overline{FA}:\overline{FB}=1:2$에서 $\overline{FB}=2\overline{FA}$이므로

$\overline{RB}=2\overline{QA}$

따라서 $\overline{QA}=k$라고 하면 $\overline{RB}=2k$이다.

이때 점 A의 x좌표는 $k-1$이므로 점 A의 y좌표는

$y^2=4(k-1)$에서

$y=2\sqrt{k-1}$ ($\because y>0$)

$\therefore$ A$(k-1,\ 2\sqrt{k-1})$

또, 점 B의 x좌표는 $2k-1$이므로 점 B의 y좌표는

$y^2=4(2k-1)$에서

$y=2\sqrt{2k-1}$ ($\because y>0$)

$\therefore$ B$(2k-1,\ 2\sqrt{2k-1})$

세 점 A, B, P는 모두 직선 l 위의 점이므로

(직선 l의 기울기)=(직선 AP의 기울기)

=(직선 BP의 기울기)

(직선 AP의 기울기)$=\dfrac{2\sqrt{k-1}}{k-1-(-1)}=\dfrac{2\sqrt{k-1}}{k}$

(직선 BP의 기울기)$=\dfrac{2\sqrt{2k-1}}{2k-1-(-1)}=\dfrac{\sqrt{2k-1}}{k}$

즉, $\dfrac{2\sqrt{k-1}}{k}=\dfrac{\sqrt{2k-1}}{k}$에서

$2\sqrt{k-1}=\sqrt{2k-1}$ ($\because k\neq 0$)

양변을 제곱하면

$4(k-1)=2k-1$

$2k=3\qquad \therefore k=\dfrac{3}{2}$

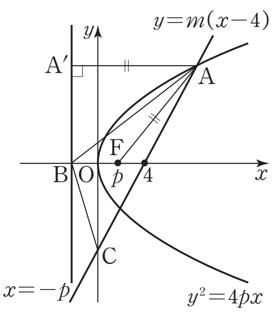
따라서 직선 l의 기울기는

$$\dfrac{2\sqrt{\dfrac{3}{2}-1}}{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$$

22 포물선의 정의의 활용

B$(-p,\ 0)$, C$(0,\ -4m)$이고, A$(\alpha,\ m(\alpha-4))$ $(\alpha>0)$라고 하면 △ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{\alpha-p}{3},\ \dfrac{m\alpha-4m-4m}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{\alpha-p}{3},\ \dfrac{m\alpha-8m}{3}\right)$



이 점이 초점 F$(p,\ 0)$과 일치하므로

$\dfrac{\alpha-p}{3}=p,\ \dfrac{m\alpha-8m}{3}=0$

$\therefore \alpha=4p,\ (\alpha-8)m=0$

이때 $m>0$이므로 $\alpha=8,\ p=2$

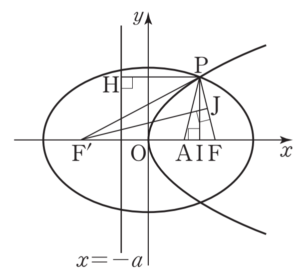
점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 A′이라고 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=\overline{AA'}=2+8=10,\ \overline{BF}=2\overline{OF}=4$

$\therefore \overline{AF}+\overline{BF}=10+4=14$

23 포물선과 타원의 정의의 활용

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 I라 하고, 포물선의 준선 $x=-a$에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



△PAF는 $\overline{PA}=\overline{PF}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{AI}=\dfrac{1}{2}\overline{AF}=1,\ \overline{PA}=\overline{PF}=\overline{PH}=2a+1$

$\overline{PF'}=\overline{FF'}=2\overline{OF}=2(\overline{OA}+\overline{AF})$

$=2(a+2)=2a+4$

△PAF에서 $\angle PFI=\theta$라고 하면

$\cos\theta=\dfrac{\overline{IF}}{\overline{PF}}=\dfrac{\frac{1}{2}\overline{AF}}{\overline{PF}}=\dfrac{1}{2a+1}$ ······①

이등변삼각형 PF′F에서 꼭짓점 F′에서 $\overline{PF}$에 내린 수선의 발을 J라고 하면 F$(a+2,\ 0)$이므로

$\cos\theta=\dfrac{\overline{FJ}}{\overline{FF'}}=\dfrac{\frac{1}{2}\overline{PF}}{\overline{FF'}}=\dfrac{a+\frac{1}{2}}{2a+4}=\dfrac{2a+1}{4a+8}$ ······②

①, ②에서

$\dfrac{1}{2a+1}=\dfrac{2a+1}{4a+8},\ (2a+1)^2=4a+8$

$4a^2+4a+1=4a+8$

$a^2=\dfrac{7}{4}\qquad \therefore a=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ ($\because a>0$)

따라서 타원의 장축의 길이는

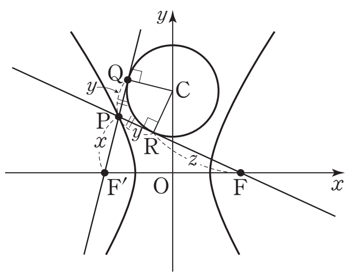
$\overline{PF'}+\overline{PF}=\overline{FF'}+\overline{PF}$

$=(2a+4)+(2a+1)$

$$=4a+5=4\times\frac{\sqrt{7}}{2}+5$$
$$=5+2\sqrt{7}$$
$$\therefore\ p^2+q^2=5^2+2^2=29$$

24 **쌍곡선의 방정식**

원 C의 중심을 $\mathrm{C}(0,\ a)$라 하고, 원과 직선 PF의 교점을 R라고 하자.



$\overline{\mathrm{PF'}}=x$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}=y$, $\overline{\mathrm{RF}}=z$라고 하면 $\overline{\mathrm{F'Q}}=5\sqrt{2}$이므로

$$x+y=5\sqrt{2} \quad \cdots\cdots ①$$

쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

이므로

$$(y+z)-x=4\sqrt{2} \quad \cdots\cdots ②$$

△CQF′과 △CRF에서

$$\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{CR}},\ \overline{\mathrm{CF'}}=\overline{\mathrm{CF}},\ \angle\mathrm{AQF'}=\angle\mathrm{ARF}=90^\circ$$

이므로 두 삼각형은 합동이다. 즉,

$$\overline{\mathrm{QF'}}=\overline{\mathrm{RF}}$$
$$\therefore\ x+y=z \quad \cdots\cdots ③$$

①, ②, ③에서

$$x=3\sqrt{2},\ y=2\sqrt{2},\ z=5\sqrt{2}$$
$$\therefore\ \overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2=(y+z)^2+x^2$$
$$=(7\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2=116$$

236~240쪽

대단원 기출 모의고사 Ⅱ. 평면벡터

정답률 80% 이상	**01** ④	**02** ⑤	**03** ②	**04** ④
05 ⑤	**06** ②	**07** ③	**08** ④	**09** ⑤
10 ⑤	**11** ①	**12** 120	**13** ②	**14** 8
15 ⑤	**16** ⑤			
정답률 79~60%	**17** ⑤	**18** ③	**19** ②	**20** 27
정답률 60% 미만	**21** 24	**22** 7	**23** 486	

01 **벡터의 뺄셈**

$\vec{a}-\vec{b}=(6,\ 2)-(0,\ 4)=(6,\ -2)$

따라서 모든 성분의 합은

$$6+(-2)=4$$

02 **벡터의 연산**

$2\vec{a}-\vec{b}=2(4,\ 1)-(3,\ -2)=(5,\ 4)$

따라서 모든 성분의 합은

$$5+4=9$$

03 **벡터의 수직 조건**

두 벡터 $6\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직이므로

$$(6\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$$
$$6|\vec{a}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=0$$
$$6\times1^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-3^2=0$$
$$5\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$$
$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{5}$$

04 **벡터의 크기**

$\vec{a}+\vec{b}=(-1,\ 2)+(3,\ 1)=(2,\ 3)$이므로

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$

05 **벡터의 내적**

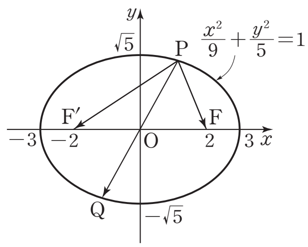
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(4,\ 2)$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$=(2,\ 0)-(0,\ 2)=(2,\ -2)$$
$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(4,\ 2)\cdot(2,\ -2)$$
$$=4\times2+2\times(-2)$$
$$=4$$

06 **타원과 벡터의 크기**

타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$에서 장축의 길이는 $2\times3=6$이다.



$\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PF'}=\overrightarrow{PQ}$라고 할 때, 두 점 P, Q는 타원 위의 점이므로 $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은 타원의 장축의 길이와 같다.

따라서 $|\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PF'}|$의 최댓값은

$2\times3=6$

07 **두 벡터가 이루는 각의 크기**

$$\begin{aligned}|2\vec{a}+\vec{b}|^2&=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\\&=4|\vec{a}|^2+4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2\\&=4\times1^2+4\times1\times3\cos\theta+3^2\\&=13+12\cos\theta\end{aligned}$$

$4^2=13+12\cos\theta$이므로 $12\cos\theta=3$

$\therefore \cos\theta=\frac{1}{4}$

08 **벡터의 내적**

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$이므로 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$이다.

선분 BC의 중점을 M이라고 하면

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|2\overrightarrow{AM}|=4$이므로

$|\overrightarrow{AM}|=2$

따라서 직각삼각형 ABM에서

$\overline{BM}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

이므로

$|\overrightarrow{BC}|=2|\overrightarrow{BM}|=2\overline{BM}=2\sqrt{3}$

다른 풀이

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$에서

$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-|\overrightarrow{AB}|^2=0$

이고 $\overline{AB}=1$이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|^2=1$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2&=|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}|^2-4\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\&=4^2-4=12\end{aligned}$$

$\therefore |\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{3}$

09 **벡터의 평행 조건**

두 벡터 $\vec{a}$와 $v+\vec{b}$가 서로 평행하므로

$\vec{v}+\vec{b}=k\vec{a}$ (단, k는 0이 아닌 실수)

$\vec{v}=k\vec{a}-\vec{b}=k(3,\ 1)-(4,\ -2)=(3k-4,\ k+2)$

$$\begin{aligned}|\vec{v}|^2&=(3k-4)^2+(k+2)^2\\&=10k^2-20k+20\\&=10(k-1)^2+10\ge10\end{aligned}$$

따라서 $|\vec{v}|^2$의 최솟값은 10이다.

10 **벡터의 실수배**

$5\vec{a}=(15,\ -5)$이므로 모든 성분의 합은

$15+(-5)=10$

11 **평면벡터의 내적의 성질**

조건 ㈎에서 $|\overrightarrow{AB}|=5k$ $(k>0)$라고 하면

$|\overrightarrow{AH}|=2k$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos(\angle CAH)\\&=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\frac{|\overrightarrow{AH}|}{|\overrightarrow{AC}|}\\&=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AH}|\\&=5k\times2k=10k^2\end{aligned}$$

조건 ㈏에서 $10k^2=40$이므로 $k=2$ $(\because k>0)$

$\therefore |\overrightarrow{AB}|=5k=10$

조건 ㈐에서 △ABC의 넓이가 30이므로

$\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{CH}|=30$

에서

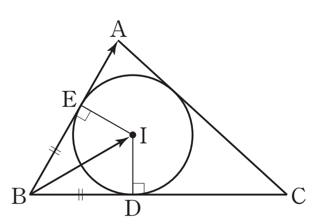
$5|\overrightarrow{CH}|=30$ $\quad\therefore |\overrightarrow{CH}|=6$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CH}&=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CH}|\cos(\angle ACH)\\&=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CH}|\frac{|\overrightarrow{CH}|}{|\overrightarrow{CA}|}\\&=|\overrightarrow{CH}|^2=36\end{aligned}$$

12 **평면벡터의 내적**

점 I에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E라고 하면 △IBE와 △IBD가 합동이므로

$\overline{BE}=\overline{BD}=8$



$\therefore\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BI}|\cos(\angle EBI)$

$$=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BI}|\frac{|\overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{BI}|}$$

$$=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BE}|$$

$$=15\times 8=120$$

13 **방향벡터**

$f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$이므로 $P\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $Q\left(-\dfrac{1}{2},\ -4\right)$

$\therefore\ \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$

$$=\left(-\frac{1}{2},\ -4\right)-\left(1,\ \frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}(1,\ 3)$$

$\vec{u}$와 $\overrightarrow{PQ}$는 평행하므로

$\vec{u}=k(1,\ 3)$ (단, k는 0이 아닌 실수)

이때 $|\vec{u}|=\sqrt{10}$에서 $10k^2=10$, $k^2=1$

즉, $k=\pm1$이므로

$a=1$, $b=3$ 또는 $a=-1$, $b=-3$

$\therefore\ |a-b|=2$

14 **벡터의 내적**

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(4,\ 1)\cdot(-2,\ k)=-8+k=0$

$\therefore\ k=8$

15 **두 직선이 이루는 각의 크기**

벡터 $\vec{u_1}=(4,\ 3)$은 직선 $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-1}{3}$의 방향벡터이고,

벡터 $\vec{u_2}=(-1,\ 3)$은 직선 $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y+1}{3}$의 방향벡터이다.

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}$

$$=\frac{|4\times(-1)+3\times3|}{\sqrt{4^2+3^2}\sqrt{(-1)^2+3^2}}$$

$$=\frac{5}{5\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

16 **위치벡터의 응용**

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CA}$에서

$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}$이므로

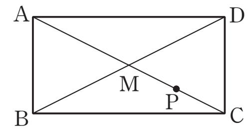
$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}$

즉, $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PC}$

ㄱ. $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{CP}$ (참)

ㄴ. $\dfrac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}}{2}=-\overrightarrow{PC}$

선분 BD의 중점을 M이라고 하면 $\overrightarrow{PM}=-\overrightarrow{PC}$



위의 그림에서 점 P는 선분 MC의 중점이므로

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$이다.

(참)

ㄷ. △ADC의 넓이는 △ADP의 넓이의 $\dfrac{4}{3}$이므로

△ADC의 넓이는

$3\times\dfrac{4}{3}=4$

따라서 □ABCD의 넓이는 8이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

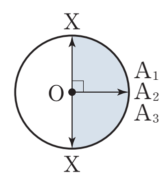
17 **평면벡터의 내적과 크기**

$|\overrightarrow{OX}|\le1$이므로 점 X는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원의 내부와 경계이다.

또, $\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OA_k}\ge0$에서 두 벡터 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OA_k}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$|\overrightarrow{OX}|\ |\overrightarrow{OA_k}|\cos\theta\ge0$, $\cos\theta\ge0$ $\quad\therefore\ 0^\circ\le\theta\le90^\circ$

ㄱ. $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{OA_3}$이면 세 점 A_1, A_2, A_3에 대하여 점 X의 집합이 나타내는 도형 D는 반원과 이 반원의 내부이다.



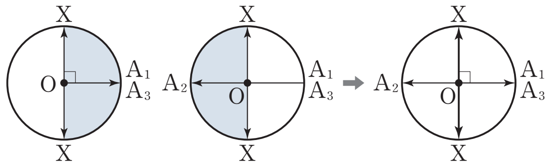
따라서 도형 D의 넓이는 반지름의 길이가 1인 원의 넓이의 $\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\pi\times1^2=\dfrac{\pi}{2}$ (참)

ㄴ. $\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OA_1}$이면 두 점 A_1, A_3에 대하여 점 X의 집합이 나타내는 도형은 반원과 이 반원의 내부이다.

또, $\overrightarrow{OA_2}=-\overrightarrow{OA_1}$이면 점 A_2에 대하여 점 X의 집합이 나타내는 도형은 두 점 A_1, A_3이 나타내는 도형의 반대쪽 반원과 이 반원의 내부이다.

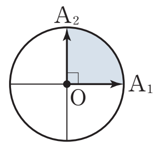
즉, 세 점 A_1, A_2, A_3에 대하여 점 X의 집합이 나타내는 도형 D는 선분 A_1A_2와 수직인 원의 지름과 같다.



따라서 도형 D는 길이가 2인 선분이다. (참)

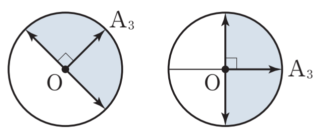
ㄷ. $\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=0$이면 $\overrightarrow{OA_1}\perp\overrightarrow{OA_2}$

두 점 A_1, A_2에 대하여 점 X의 집합이 나타내는 도형은 사분원과 이 사분원의 내부이다.



[그림 1]

또, 점 A_3에 대하여 점 X의 집합이 나타내는 도형은 반원과 이 반원의 내부이다.



[그림 2]

이때 도형 D의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$이면 두 도형의 공통부분이 [그림 1]과 같은 사분원과 그 내부이어야 하므로 점 A_3은 호 A_1A_2 위에 있어야 한다.

즉, 점 A_3은 D에 포함되어 있어야 한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

18 **위치벡터의 연산의 활용**

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{10}$에서

$2|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{10}$ $\quad\therefore |\overrightarrow{PM}|=\frac{\sqrt{10}}{2}$

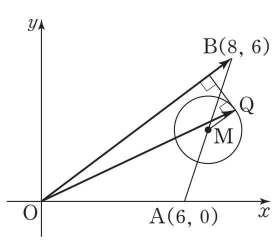
따라서 점 P는 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{10}}{2}$인 원 위의 점이다.

이 원을 C라고 하자.

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP})$

$=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{MP}$

한편, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대가 되려면 직선 OB에 수직인 직선이 원 C와 접하는 점 중 선분 OP의 길이가 가장 클 때의 점이다.



이때 직선 OB에 수직이고 점 Q를 지나는 직선과 직선 MQ는 수직이므로

$\overrightarrow{MQ}\,/\!/\,\overrightarrow{OB}$

따라서 $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{OA}$가 이루는 각의 크기는 두 벡터 $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$가 이루는 각의 크기와 같다.

두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$

에서

$(6,\ 0)\cdot(8,\ 6)=\sqrt{6^2+0^2}\sqrt{8^2+6^2}\cos\theta$

$48=6\times10\times\cos\theta$ $\quad\therefore \cos\theta=\frac{4}{5}$

따라서 $|\overrightarrow{OA}|=6$, $|\overrightarrow{MQ}|=\frac{\sqrt{10}}{2}$이므로

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{MQ}|\cos\theta$

$=6\times\frac{\sqrt{10}}{2}\times\frac{4}{5}$

$=\frac{12\sqrt{10}}{5}$

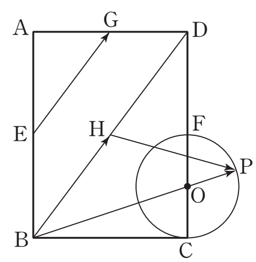
19 **벡터의 합의 크기의 최댓값**

두 점 E, H는 각각 선분 AB, BD의 중점이므로

$|\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}|=|\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HP}|=|\overrightarrow{BP}|$

따라서 $|\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}|$의 최댓값은 $|\overrightarrow{BP}|$의 최댓값과 같다.

즉, 원 밖의 한 점 B와 원 위의 점 P 사이의 거리의 최댓값이다.



따라서 원의 중심을 O라고 하면 원의 반지름의 길이는 2이므로 $|\overrightarrow{BP}|$의 최댓값은

$\overline{BO}+2=\sqrt{6^2+2^2}+2=2\sqrt{10}+2$

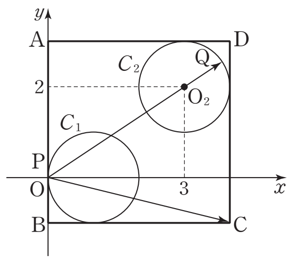
20 **벡터의 내적의 응용**

원 C_2의 중심을 O_2라고 하면

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{PO_2}+\overrightarrow{O_2Q})$

$=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PO_2}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$

점 P가 원점에, 선분 AB가 y축 위에 오도록 정사각형 ABCD와 두 원 C_1, C_2를 좌표평면 위에 놓으면 두 점 O_2, C의 좌표는 각각 $(3,\ 2)$, $(4,\ -1)$이다.



따라서

$$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PO_2}=(4,\ -1)\cdot(3,\ 2)=12-2=10$$

또, $\overrightarrow{PC}$와 $\overrightarrow{O_2Q}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{O_2Q}&=|\overrightarrow{PC}||\overrightarrow{O_2Q}|\cos\theta\\&=\sqrt{4^2+(-1)^2}\times1\times\cos\theta\\&=\sqrt{17}\cos\theta\end{aligned}$$

$\theta=0°$일 때, $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$가 최대이고, 그 최댓값은 $\sqrt{17}$이므로 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 최댓값은 $10+\sqrt{17}$이다.

$\therefore\ a+b=10+17=27$

21 **벡터의 크기**

$$\vec{a}+\vec{b}=(4t-2,\ -1)+\left(2,\ 1+\frac{3}{t}\right)=\left(4t,\ \frac{3}{t}\right)$$

에서 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=16t^2+\dfrac{9}{t^2}$

이때 $t^2>0$이므로

$$16t^2+\frac{9}{t^2}\geq2\sqrt{16t^2\times\frac{9}{t^2}}=24$$

$\left(\text{단, 등호는 } 16t^2=\dfrac{9}{t^2}\text{일 때 성립}\right)$

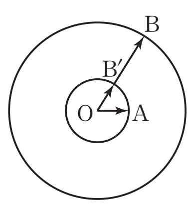
따라서 $|\vec{a}+\vec{b}|^2$의 최솟값은 24이다.

22 **벡터의 내적의 응용**

오른쪽 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원과 선분 OB가 만나는 점을 B′이라 하고,

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB'}=\vec{b},\ \overrightarrow{OP}=\vec{p}$$

라고 하면 조건 ㈎에서



$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$$

이므로

$$(3\vec{b})\cdot\vec{p}=3\vec{a}\cdot\vec{p}$$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{p}=\vec{b}\cdot\vec{p}$ ……①

조건 ㈏에서 $|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2=20$이므로

$$|\vec{a}-\vec{p}|^2+|3\vec{b}-\vec{p}|^2=20$$
$$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2+9|\vec{b}|^2-6\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2=20$$
$$1-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2+9-6\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2=20$$
$$2|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}-6\vec{b}\cdot\vec{p}=10$$

$\therefore\ |\vec{p}|^2=4\vec{a}\cdot\vec{p}+5$ ($\because$ ①) ……②

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}&=(\vec{a}-\vec{p})\cdot(3\vec{b}-\vec{p})\\&=3\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{p}-3\vec{b}\cdot\vec{p}+\vec{p}\cdot\vec{p}\\&=3\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2\ (\because ①)\\&=3\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{a}\cdot\vec{p}+4\vec{a}\cdot\vec{p}+5\ (\because ②)\\&=3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$의 값이 최소가 되는 경우는 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 180°일 때이므로 최솟값은

$$3\{-1\times1\times\cos(180°-180°)\}+5=-3+5=2$$

$\therefore\ m=2$

한편, ①에서 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{p}$가 이루는 각의 크기를 $\theta(0°\leq\theta\leq180°)$, 두 벡터 $\vec{b}$, $\vec{p}$가 이루는 각의 크기를 $\theta'(0°\leq\theta'\leq180°)$이라고 하면

$$|\vec{a}||\vec{p}|\cos\theta=|\vec{b}||\vec{p}|\cos\theta',\ \cos\theta=\cos\theta'$$

$\therefore\ \theta=\theta'$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{p}$가 이루는 각의 크기가 90°일 때 $\vec{a}\cdot\vec{p}$의 값이 최소이므로 ②에서

$$|\vec{p}|^2=4\times1\times|\vec{p}|\times\cos90°+5=5$$

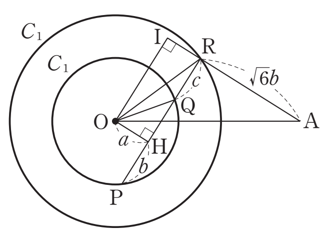
따라서 $|\vec{p}|=\sqrt{5}$이므로 $k=\sqrt{5}$

$\therefore\ m+k^2=2+(\sqrt{5})^2=7$

23 **벡터의 내적의 응용**

조건 ㈎에서 세 점 P, Q, R는 한 직선 위에 있고, 조건 ㈏에서 직선 AR와 직선 PQ는 수직이므로 $\overline{AR}\perp\overline{PR}$이다.

점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\overline{OH}=a$, $\overline{HP}=\overline{HQ}=b$, $\overline{QR}=c$라고 하면 $\overline{PQ}=2b$이므로 조건 (나)에서

$\overline{AR}=\sqrt{6}b$

△OHQ는 직각삼각형이므로

$a^2+b^2=5$ ……①

△OHR는 직각삼각형이므로

$a^2+(b+c)^2=14$ ……②

점 O에서 선분 AR의 연장선에 내린 수선의 발을 I라고 하면 $\overline{OI}=\overline{HR}=b+c$, $\overline{IA}=a+\sqrt{6}b$

△AIO는 직각삼각형이므로

$(a+\sqrt{6}b)^2+(b+c)^2=44$ ……③

②, ③에서

$2\sqrt{6}ab+6b^2=30$ ……④

①, ④에서

$2\sqrt{6}ab+6(5-a^2)=30$

$6a^2-2\sqrt{6}ab=0$, $2a(3a-\sqrt{6}b)=0$

$\therefore$ $a=0$ 또는 $a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}b$

세 점 O, P, Q가 한 직선 위에 있지 않으므로 $a\neq0$

즉, $a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}b$이므로 ①에 대입하면

$a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$

$\overline{PQ}=2\sqrt{3}$, $\overline{AR}=3\sqrt{2}$이고 원 C_1 위의 점 S에 대하여

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AS}&=\overrightarrow{AR}\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OS})\\&=\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{OS}\end{aligned}$$

이때 $\overrightarrow{AR}$과 $\overrightarrow{AO}$가 이루는 각의 크기를 α라고 하면

$|\overrightarrow{AO}|\cos\alpha=|\overrightarrow{AI}|$이므로

$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AO}=|\overrightarrow{AR}||\overrightarrow{AI}|=3\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=24$

$\overrightarrow{AR}$와 $\overrightarrow{OS}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.

$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{OS}$는 $\theta=0°$일 때 최댓값을 갖고 $\theta=180°$일 때 최솟값을 가지므로

최댓값은

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{OS}&=|\overrightarrow{AR}||\overrightarrow{OS}|\cos\theta\\&=3\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\cos0°=3\sqrt{10}\end{aligned}$$

최솟값은

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{OS}&=-|\overrightarrow{AR}||\overrightarrow{OS}|\cos(180°-\theta)\\&=-3\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\cos0°=-3\sqrt{10}\end{aligned}$$

이다.

따라서 $-3\sqrt{10}\le\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{OS}\le3\sqrt{10}$이므로

$24-3\sqrt{10}\le\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AS}\le24+3\sqrt{10}$

즉, $M=24+3\sqrt{10}$, $m=24-3\sqrt{10}$이므로

$Mm=(24+3\sqrt{10})\times(24-3\sqrt{10})=486$

241~246쪽

대단원 기출 모의고사 Ⅲ. 공간도형과 공간좌표

정답률 80% 이상

01 ④	**02** ①	**03** ③	**04** ①
05 ③	**06** 15	**07** ③	**08** ②
09 13	**10** 162		

정답률 79~60%

11 ②	**12** ②	**13** 16	**14** ②
15 ⑤			

정답률 60% 미만

16 ⑤	**17** 11	**18** 12	**19** 40
20 45			

01 점의 평행이동

점 P(2, 2, 3)을 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는

$(-2, 2, 3)$

따라서 두 점 P(2, 2, 3), Q(−2, 2, 3) 사이의 거리는

$\overline{PQ}=\sqrt{(-2-2)^2+(2-2)^2+(3-3)^2}=4$

기출 가이드

점의 대칭이동

좌표공간의 점 $A(a, b, c)$를

(1) x축, y축, z축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 P, Q, R라고 하면

$P(a, -b, -c)$, $Q(-a, b, -c)$, $R(-a, -b, c)$

(2) xy평면, yz평면, zx평면에 대하여 대칭이동한 점을 각각 P, Q, R라고 하면

$P(a, b, -c)$, $Q(-a, b, c)$, $R(a, -b, c)$

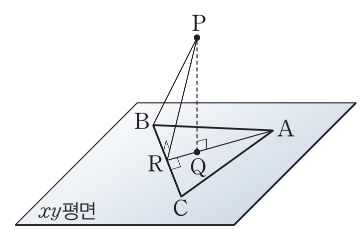
(3) 원점에 대하여 대칭이동한 점을 P라고 하면

$P(-a, -b, -c)$

02 삼수선 정리

점 Q는 이등변삼각형 ABC의 무게중심이므로 $\overline{AQ}$의 연장선이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 R라고 하면

$\overline{AR}\perp\overline{BC}$, 즉 $\overline{QR}\perp\overline{BC}$



따라서 삼수선 정리에 의하여

$\overline{PR}\perp\overline{BC}$ — $\overline{PQ}\perp(xy$ 평면$)$, $\overline{QR}\perp\overline{BC}$이므로

점 P의 xy평면 위로의 정사영 Q의 좌표는 $(1,\ 1,\ 0)$이므로

$\overline{PQ}=4$

직각삼각형 ABR에서 $\overline{AB}=5$, $\overline{BR}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\sqrt{7}$이므로

$$\overline{AR}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BR}^2}$$
$$=\sqrt{5^2-(\sqrt{7})^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

점 Q가 이등변삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\overline{QR}=\frac{1}{3}\overline{AR}=\sqrt{2}$$

따라서 점 P에서 직선 BC까지의 거리 $\overline{PR}$는 직각삼각형 PRQ에서

$$\overline{PR}=\sqrt{\overline{PQ}^2+\overline{QR}^2}$$
$$=\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

03 두 직선이 이루는 각의 크기

주어진 정팔면체에서 모서리 DE와 모서리 CB가 평행하므로 두 모서리 AC와 DE가 이루는 각의 크기는 두 모서리 AC와 CB가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 정팔면체의 한 면은 정삼각형이므로 두 모서리 AC와 CB가 이루는 각의 크기는 60°이다.

$\therefore\ \theta=60^\circ$

$\therefore\ \cos\theta=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

04 선분의 내분점

두 점 $B(0,\ 3,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 3)$에 대하여 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\times0+1\times0}{2+1},\ \frac{2\times0+1\times3}{2+1},\ \frac{2\times3+1\times0}{2+1}\right)$$

$\therefore\ P(0,\ 1,\ 2)$

두 점 $A(3,\ 0,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 3)$에 대하여 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 Q의 좌표는

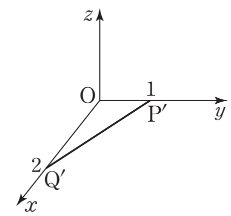
$$\left(\frac{1\times0+2\times3}{1+2},\ \frac{1\times0+2\times0}{1+2},\ \frac{1\times3+2\times0}{1+2}\right)$$

$\therefore\ Q(2,\ 0,\ 1)$

이때 두 점 $P(0,\ 1,\ 2)$, $Q(2,\ 0,\ 1)$의 xy평면 위로의 정사영이 각각 P', Q'이므로

$P'(0,\ 1,\ 0)$, $Q'(2,\ 0,\ 0)$

따라서 오른쪽 그림에서 $\triangle OP'Q'$의 넓이는

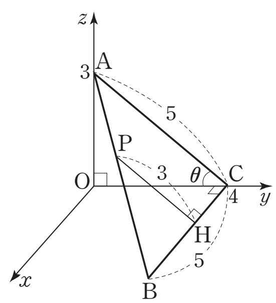


$$\frac{1}{2}\times2\times1=1$$

05 삼수선 정리의 응용

선분 AC를 그으면 다음 그림에서 $\overline{AO}\perp(xy$평면$)$, $\overline{OC}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{AC}\perp\overline{BC}$



$\angle ACO=\theta$라고 하면 θ는 평면 ABC와 xy평면이 이루는 각의 크기이므로 평면 PBH와 xy평면이 이루는 각의 크기도 θ이다.

이때 $\overline{AC}=\sqrt{0^2+4^2+(-3)^2}=5$이므로

$$\cos\theta=\frac{4}{5}$$

$\triangle ABC\backsim\triangle PBH$ (AA 닮음)에서

$\overline{AC}:\overline{PH}=\overline{BC}:\overline{BH}$이므로

$5:3=5:\overline{BH}\qquad\therefore\ \overline{BH}=3$

$$\therefore\ \triangle PBH=\frac{1}{2}\times\overline{BH}\times\overline{PH}$$
$$=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$$

따라서 $\triangle PBH$의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle PBH\times\cos\theta=\frac{9}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{18}{5}$$

06 삼수선 정리

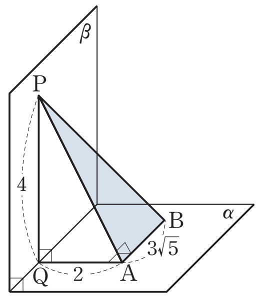
다음 그림과 같이 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 Q라고 하면

$\overline{PQ}\perp\alpha$, $\overline{AQ}\perp\overline{AB}$

이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{PA} \perp \overline{AB}$

즉, $\triangle PAB$는 $\angle PAB = 90°$인 직각삼각형이다.



점 P와 평면 α 사이의 거리가 4이므로 $\overline{PQ}=4$이고,
점 A와 평면 β 사이의 거리가 2이므로 $\overline{AQ}=2$이다.
따라서 직각삼각형 PAQ에서

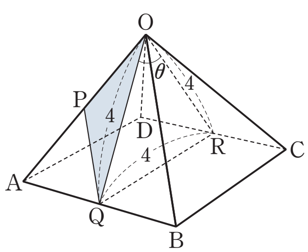
$$\overline{PA}=\sqrt{\overline{PQ}^2+\overline{AQ}^2}$$
$$=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

따라서 $\triangle PAB$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PA}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=15$$

07 정사영의 넓이

선분 CD의 중점을 R라 하고, 두 평면 OAB, OCD가 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.



$$\overline{OQ}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AQ}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=\sqrt{16}=4$$

$\overline{OQ}=\overline{OR}=\overline{QR}=4$에서 $\triangle OQR$는 정삼각형이므로

$$\cos\theta=\cos 60°=\frac{1}{2}$$

점 P는 선분 OA의 중점이므로 $\triangle OPQ$의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\triangle OAQ=\frac{1}{2}\times4=2$$

$\triangle OPQ$의 평면 OCD 위로의 정사영의 넓이를 S'이라고 하면

$$S'=S\cos\theta=2\times\frac{1}{2}=1$$

08 두 점 사이의 거리

$$\overline{AB}=\sqrt{(b-a)^2+a^2+(-b)^2}$$
$$=\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(-b)^2+(b-a)^2+a^2}$$
$$=\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{a^2+(-b)^2+(b-a)^2}$$
$$=\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2}$$

에서 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$이므로 $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

이때 $\triangle ABC$의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2}\}^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(a-b)^2+a^2+b^2\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(a-b)^2+4\}\ (\because a^2+b^2=4)$$

따라서 $a=b$일 때 $\triangle ABC$의 넓이가 최소이므로 구하는 최솟값은

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times4=\sqrt{3}$$

다른 풀이

$a^2+b^2=4$이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(b-a)^2+a^2+(-b)^2}$$
$$=\sqrt{2(a^2+b^2)-2ab}=\sqrt{8-2ab}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(-b)^2+(b-a)^2+a^2}$$
$$=\sqrt{2(a^2+b^2)-2ab}=\sqrt{8-2ab}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{a^2+(-b)^2+(b-a)^2}$$
$$=\sqrt{2(a^2+b^2)-2ab}=\sqrt{8-2ab}$$

에서 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$이므로 $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

이때 $\triangle ABC$의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{8-2ab})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(8-2ab)$이므로 $\triangle ABC$의 넓이가 최소가 되려면 ab가 최대가 되어야 한다.

이때 $a^2+b^2=4$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $a^2+b^2\ge2\sqrt{a^2b^2}$, $4\ge2ab$

$\therefore ab\le2$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

따라서 $ab=2$일 때, $\triangle ABC$의 넓이가 최소가 되므로 구하는 최솟값은

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(8-2\times2)=\sqrt{3}$$

09 두 점 사이의 거리

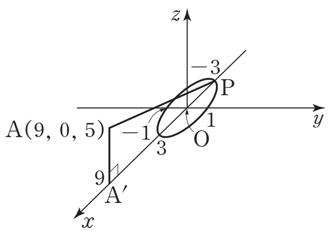
점 A(9, 0, 5)에서 xy평면에 내린 수선의 발을 A′이라고 하면 A′(9, 0, 0)

$$\therefore \overline{AA'}=\sqrt{(9-9)^2+0^2+(-5)^2}=5$$

다음 그림에서 $\triangle AA'P$는 직각삼각형이므로

$\overline{AP}=\sqrt{5^2+\overline{A'P}^2}$

즉, $\overline{AP}$의 길이가 최대가 되려면 $\overline{A'P}$의 길이가 최대이어야 한다.



이때 점 P의 위치가 타원 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$의 장축의 끝점 $(-3,\ 0,\ 0)$에 있을 때, $\overline{A'P}$의 길이가 최대가 된다.
따라서 $\overline{A'P}=12$일 때, $\overline{AP}$의 길이가 최대이므로 구하는 $\overline{AP}$의 최댓값은

$\sqrt{5^2+12^2}=13$

10 정사영의 넓이

직각삼각형 ABQ에서 $\cos(\angle ABC)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin(\angle ABC)=\frac{\sqrt{6}}{3}$

이때 $\triangle ABC$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 9\times 12\times \sin(\angle ABC)$

$=\frac{1}{2}\times 9\times 12\times \frac{\sqrt{6}}{3}=18\sqrt{6}$

$\overline{AP}\perp$(평면 BCD)이고, $\overline{AQ}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{PQ}\perp\overline{BC}$

따라서 두 평면 ABC, BCD가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $\theta=\angle AQP$

$\triangle ABC$의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이가 k이므로

$k=18\sqrt{6}\cos\theta$

$=18\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=9\sqrt{2}$

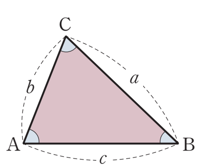
$\therefore\ k^2=(9\sqrt{2})^2=162$

참고 삼각형의 넓이

$\triangle ABC$의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$

$=\frac{1}{2}ab\sin C$



11 점의 대칭이동

점 A(1, 3, 2)를 x축에 대하여 대칭이동한 점이 B이므로 $B(1,\ -3,\ -2)$
점 A(1, 3, 2)를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점이 C이므로 $C(1,\ 3,\ -2)$

$\overline{AB}=\sqrt{(1-1)^2+(-3-3)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{13}$

$\overline{BC}=\sqrt{(1-1)^2+(3+3)^2+(-2+2)^2}=6$

$\overline{CA}=\sqrt{(1-1)^2+(3-3)^2+(2+2)^2}=4$

에서 $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$이므로 $\triangle ABC$는 $\angle C=90°$인 직각삼각형이다.
따라서 세 점 A, B, C를 지나는 원의 지름은 $\overline{AB}$이므로 구하는 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{13}=\sqrt{13}$

12 삼수선 정리

직선 AB는 원의 접선이므로 $\angle ABC=90°$이다.
즉, 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}$

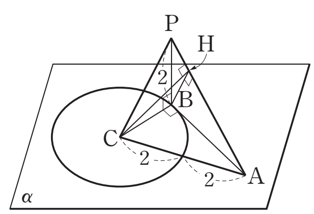
$=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

또, 두 직각삼각형 ABC와 ABP가 서로 합동이므로

$\overline{AP}=\overline{AC}=4$

점 C에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 H라고 하자.
$\overline{CB}\perp\overline{AB}$이고 $\overline{CB}\perp\overline{BP}$이므로 $\overline{CB}\perp$(평면 ABP)
이때 $\overline{CH}\perp\overline{AP}$이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{BH}\perp\overline{AP}$



$\triangle ABP$의 넓이에서

$\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BP}$

$\frac{1}{2}\times 4\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\qquad\therefore\ \overline{BH}=\sqrt{3}$

따라서 직각삼각형 CBH에서

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{BH}^2}$

$=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$

다른 풀이

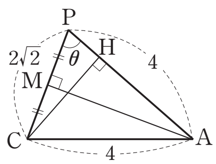
$\overline{AB}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$이고 $\overline{PB}\perp$(평면 ABC)이므로
직각삼각형 PAB에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BP}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$

또, 직각삼각형 PCB에서

$\overline{CP}=\sqrt{\overline{CB}^2+\overline{BP}^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

△ACP는 이등변삼각형이고,
점 A에서 선분 CP에 내린 수선의 발을 M이라고 하면



$\overline{CM}=\overline{MP}$

이때 $\angle CPA=\theta$라고 하면
△APM에서

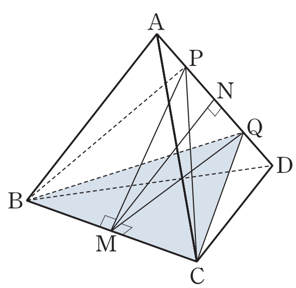
$\sin\theta=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AP}}=\dfrac{\sqrt{4^2-(\sqrt{2})^2}}{4}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

따라서 △CPH에서

$\overline{CH}=2\sqrt{2}\sin\theta=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{14}}{4}=\sqrt{7}$

13 **두 평면이 이루는 각의 크기**

모서리 BC의 중점을 M이라고 하면 $\overline{BC}\perp$(평면 AMD)이므로 $\overline{PM}\perp\overline{BC}$, $\overline{QM}\perp\overline{BC}$이다.
즉, 두 평면 PBC와 QBC가 이루는 각은 $\angle PMQ$이므로 $\angle PMQ=\theta$이다.



△ABC와 △DBC는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로

$\overline{AM}=\overline{DM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}$

모서리 AD의 중점을 N이라고 하면 $\overline{MN}\perp\overline{AD}$,
$\overline{AN}=2$이므로

$\overline{MN}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{AN}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{2}$

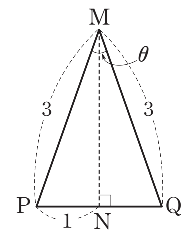
$\overline{PN}=\overline{QN}=1$이므로 직각삼각형 PMN에서

$\overline{PM}=\sqrt{\overline{MN}^2+\overline{PN}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$

마찬가지로 직각삼각형 QMN에서

$\overline{QM}=3$

△PMQ는 오른쪽 그림과 같고,
$\angle PMQ=\theta$이므로 △PMQ의 넓이에서



$\dfrac{1}{2}\times\overline{PM}\times\overline{QM}\times\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{MN}$

$3\times3\times\sin\theta=2\times2\sqrt{2}$

$\sin\theta=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

$\therefore\ \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\right)^2}$

$=\sqrt{1-\dfrac{32}{81}}=\sqrt{\dfrac{49}{81}}=\dfrac{7}{9}$

따라서 $p=9$, $q=7$이므로

$p+q=16$

14 **구의 방정식의 활용**

구 S의 중심을 $C(a,\ b,\ c)(a>0,\ b>0,\ c>0)$, 반지름의 길이를 r라고 하면 구 S의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

구 S가 x축, y축에 접하는 점을 각각 A, B라고 하면 구 S의 중심이 $C(a,\ b,\ c)$이므로

$A(a,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ b,\ 0)$

$\overline{AC}=\sqrt{(a-a)^2+b^2+c^2}=\sqrt{b^2+c^2}$

$\overline{BC}=\sqrt{a^2+(b-b)^2+c^2}=\sqrt{a^2+c^2}$

이때 $r=\overline{AC}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{a^2+c^2}$

양변을 제곱하면

$b^2+c^2=a^2+c^2$

$a^2=b^2\qquad\therefore\ a=b\ (\because\ a>0,\ b>0)$

즉, $r=\sqrt{a^2+c^2}$이므로 구 S의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-c)^2=a^2+c^2$ ……①

구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 방정식은 ①에 $z=0$을 대입한 것이므로

$(x-a)^2+(y-a)^2+(-c)^2=a^2+c^2$

$\therefore\ (x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

이때 이 원의 넓이가 64π이므로

$\pi\times a^2=64\pi$, $a^2=64$

$\therefore\ a=8\ (\because\ a>0)$

$a=8$을 ①에 대입하면 구 S의 방정식은

$(x-8)^2+(y-8)^2+(z-c)^2=64+c^2$ ……②

구 S가 z축과 만나는 점의 z좌표는 ②에 $x=0$, $y=0$을 대입한 방정식의 근이므로

$$(-8)^2+(-8)^2+(z-c)^2=64+c^2$$
$$(z-c)^2=c^2-64$$
$$\therefore z=c\pm\sqrt{c^2-64}$$

이때 구 S가 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8이므로

$$(c+\sqrt{c^2-64})-(c-\sqrt{c^2-64})=8$$
$$\sqrt{c^2-64}=4$$

양변을 제곱하면

$$c^2-64=16$$
$$c^2=80 \qquad \therefore c=4\sqrt{5}\ (\because c>0)$$

따라서 구 S의 반지름의 길이는

$$r=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{8^2+(4\sqrt{5})^2}=\sqrt{144}=12$$

기출 가이드

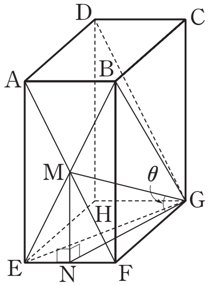
좌표평면 또는 좌표축에 접하는 구의 방정식

중심이 $C(a, b, c)$이고

(1) xy평면에 접하는 구의 방정식은
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=c^2$$
(2) yz평면에 접하는 구의 방정식은
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2$$
(3) zx평면에 접하는 구의 방정식은
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=b^2$$
(4) x축에 접하는 구의 방정식은
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=b^2+c^2$$
(5) y축에 접하는 구의 방정식은
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+c^2$$
(6) z축에 접하는 구의 방정식은
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2$$

15 직선과 평면이 이루는 각의 크기

다음 그림에서 선분 AF와 선분 BE의 교점을 M이라고 하면 평면 AFGD와 평면 BEG의 교선 l은 직선 GM이다.



점 M에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 N이라고 하면 교선 l과 평면 EFGH가 이루는 각은 두 선분 GM과 NG가 이루는 각과 같다.

$$\therefore \angle MGN=\theta$$

이때 직각삼각형 NFG에서

$$\overline{NG}=\sqrt{\overline{NF}^2+\overline{FG}^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$$

또, 직각삼각형 MNG에서

$$\overline{GM}=\sqrt{\overline{MN}^2+\overline{NG}^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{10})^2}=\sqrt{14}$$

따라서 $\cos\theta=\dfrac{\overline{NG}}{\overline{GM}}=\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}}$이므로

$$\cos^2\theta=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$$

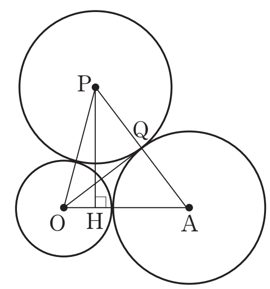
16 구의 방정식의 활용

두 구 $x^2+y^2+z^2=1$, $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$의 중심을 각각 원점 O와 $A(2, -1, 2)$라고 하면 두 구의 중심 사이의 거리는

$$\overline{OA}=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$$

두 구의 반지름의 길이의 합은 $1+2=3$

즉, 두 구의 중심 사이의 거리가 두 구의 반지름의 길이의 합과 같으므로 두 구는 외접한다.



위의 그림과 같이 중심이 A, P인 두 구가 외접하는 점을 Q, 점 P에서 $\overline{OA}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 중심이 O, A인 두 구에 동시에 외접하고 반지름의 길이가 2인 구의 중심 P 전체의 집합이 나타내는 도형은 $\overline{PH}$를 반지름으로 하는 원이다.

이때 $\overline{OA}=1+2=3$, $\overline{AQ}=2$이므로 직각삼각형 OAQ에서

$$\overline{OQ}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$$

또, $\overline{PA}=2+2=4$이므로 $\triangle OAP$의 넓이에서

$$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{PH}=\frac{1}{2}\times\overline{PA}\times\overline{OQ}$$

$\frac{1}{2}\times3\times\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PH}}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$

따라서 점 P 전체의 집합이 나타내는 도형의 둘레의 길이는

$2\pi\times\frac{4\sqrt{5}}{3}=\frac{8\sqrt{5}}{3}\pi$

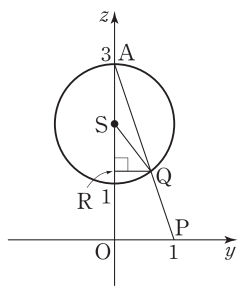
참고 두 구의 위치 관계

두 구 S, S'의 반지름의 길이를 각각 r, $r'(r>r')$, 중심 사이의 거리를 d라고 할 때,

(1) $d>r+r' \Longleftrightarrow$ 구 S의 외부에 구 S'이 있다.
(2) $d=r+r' \Longleftrightarrow$ 두 구 S, S'이 외접한다.
(3) $r-r'<d<r+r' \Longleftrightarrow$ 두 구 S, S'이 만나서 원이 생긴다.
(4) $d=r-r' \Longleftrightarrow$ 구 S에 구 S'이 내접한다.
(5) $0\le d<r-r' \Longleftrightarrow$ 구 S의 내부에 구 S'이 있다.

17 구의 방정식의 활용

주어진 그림을 yz평면으로 자른 단면은 다음 그림과 같다.



점 Q에서 z축에 내린 수선의 발을 R라고 하면 점 P가 원 C 위를 한 바퀴 돌 때, 점 Q가 나타내는 도형은 $\overline{\mathrm{RQ}}$를 반지름으로 하는 원이다.

$\triangle\mathrm{AOP}\backsim\triangle\mathrm{ARQ}$ (AA 닮음)이므로

$\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{AO}}=1:3$에서

$\overline{\mathrm{RQ}}:\overline{\mathrm{AR}}=1:3 \qquad \therefore\ \overline{\mathrm{AR}}=3\overline{\mathrm{RQ}}$

$\overline{\mathrm{RQ}}=r$라고 하면 $\overline{\mathrm{AR}}=3r$이고 구의 반지름의 길이는 1이므로

$\overline{\mathrm{SR}}=3r-1$

직각삼각형 SRQ에서 $(3r-1)^2+r^2=1^2$이므로

$10r^2-6r=0,\ 5r^2-3r=0$

$r(5r-3)=0 \qquad \therefore\ r=\frac{3}{5}\ (\because\ r>0)$

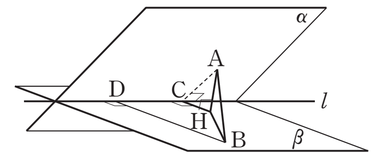
즉, 점 Q가 나타내는 도형 전체의 길이는

$2\pi\times\frac{3}{5}=\frac{6}{5}\pi$

따라서 $a=5$, $b=6$이므로 $a+b=11$

18 삼수선 정리

점 A에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



이때 $\overline{\mathrm{AB}}=2$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 30°이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AB}}\sin30^\circ=2\times\frac{1}{2}=1$ ……①

$\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos30^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{AH}}\perp\beta$이고 $\overline{\mathrm{AC}}\perp l$이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{HC}}\perp l$

이때 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 45°이므로

$\angle\mathrm{ACH}=45^\circ$

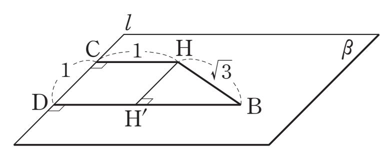
직각이등변삼각형 AHC에서

$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{AH}}=1,\ \overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}$

직각삼각형 ACD에서 $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{3}$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AD}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=1$ ……②

평면 β 위의 점 H에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H′이라고 하자.



이때 $\overline{\mathrm{HH'}}=1$이므로 직각삼각형 HH′B에서

$\overline{\mathrm{BH'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BH}}^2-\overline{\mathrm{HH'}}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BH'}}+\overline{\mathrm{H'D}}=\sqrt{2}+1$ ……③

사면체 ABCD의 부피는 ①, ②, ③에 의해

$$\frac{1}{3}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{3}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{BD}}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times1\times\left\{\frac{1}{2}\times1\times(1+\sqrt{2})\right\}$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{2}$$

따라서 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{6}$이므로

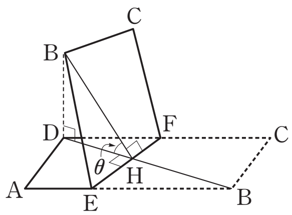
$36(a+b)=36\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=12$

19 두 평면이 이루는 각의 크기

점 B의 평면 AEFD 위로의 정사영이 점 D이고, 점 D에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{BD}\perp$(평면 AEFD), $\overline{DH}\perp\overline{EF}$이므로 삼수선 정리에 의하여

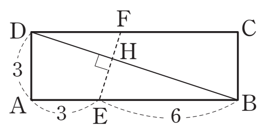
$\overline{BH}\perp\overline{EF}$



따라서 두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각은 $\angle BHD=\theta$이다.

다음 그림의 직각삼각형 BDA에서

$\overline{BD}=\sqrt{9^2+3^2}=3\sqrt{10}$



이때 △BDA와 △BEH는 서로 닮음(AA 닮음)이므로 $\overline{BD}:\overline{BE}=\overline{BA}:\overline{BH}$에서

$3\sqrt{10}:6=9:\overline{BH}$

$\therefore\ \overline{BH}=\dfrac{54}{3\sqrt{10}}=\dfrac{9\sqrt{10}}{5}$

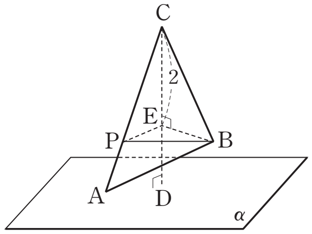
$\therefore\ \overline{DH}=3\sqrt{10}-\dfrac{9\sqrt{10}}{5}=\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\overline{DH}}{\overline{BH}}=\dfrac{\frac{6\sqrt{10}}{5}}{\frac{9\sqrt{10}}{5}}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ 60\cos\theta=60\times\dfrac{2}{3}=40$

20 **정사영의 넓이**

다음 그림과 같이 점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 D라 하고, 점 B에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 E라고 하면 $\overline{DE}=1$, $\overline{CE}=2$이다.

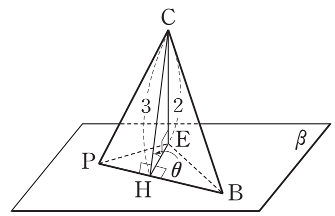


이때 $\overline{AP}:\overline{CP}=1:2$이므로 점 P와 평면 α 사이의 거리는 1이다. 즉, △PBE는 평면 α와 평행하다.

따라서 △ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ, △PBE를 포함하는 평면을 β라고 하면 △PBC와 평면 β가 이루는 각의 크기도 θ이다.

다음 그림과 같이 점 C에서 선분 PB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\overline{CE}\perp\beta$이고 $\overline{CH}\perp\overline{PB}$이므로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{EH}\perp\overline{PB}$이다.

$\therefore\ \angle CHE=\theta$



△ABC의 넓이가 9이고 $\overline{AP}:\overline{CP}=1:2$이므로

$\triangle PBC=9\times\dfrac{2}{3}=6$

이때 $\triangle PBC=\dfrac{1}{2}\times\overline{PB}\times\overline{CH}=6$이므로

$\dfrac{1}{2}\times4\times\overline{CH}=6\qquad\therefore\ \overline{CH}=3$

직각삼각형 CHE에서

$\overline{EH}=\sqrt{\overline{CH}^2-\overline{CE}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\overline{EH}}{\overline{CH}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

따라서 구하는 정사영의 넓이 S는

$S=9\cos\theta=9\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}=3\sqrt{5}$

$\therefore\ S^2=(3\sqrt{5})^2=45$

MEMO

MEMO