내신을 철저하게
대비해 주는
교과서 쌍둥이 문제

정답과 해설

Ⅰ. 수열의 극한

1. 수열의 극한

1-1 수열의 수렴과 발산

내신 대비 쌍둥이 문제 28~31쪽

1-1 (1) 1 (2) 0

2-1 (1) 0, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$

(2) 1, $\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=1$

(3) 1, $\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}=1$

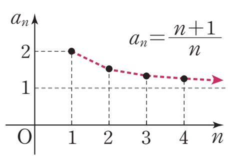
(4) 2, $\lim_{n\to\infty}2=2$

3-1 (1) 양의 무한대로 발산 (2) 음의 무한대로 발산

4-1 (1) 수렴, 2 (2) 음의 무한대로 발산

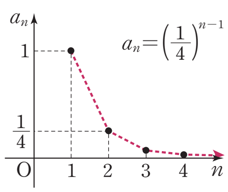
(3) 수렴, 3 (4) 발산(진동)

1-1 (1) $a_n=\frac{n+1}{n}$이라고 하면 수열 $\{a_n\}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 n이 한없이 커질 때, a_n의 값은 1에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$의 극한값은 1이다.

(2) $a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$이라고 하면 수열 $\{a_n\}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

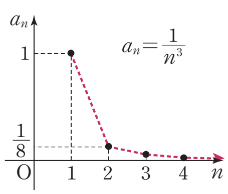


이 그래프에서 n이 한없이 커질 때, a_n의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$의 극한값은 0이다.

2-1 (1) 수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \cdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 0에 수렴한다.

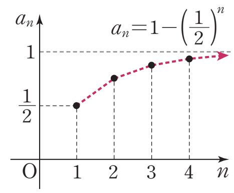


$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$

(2) 수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \cdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 1에 수렴한다.

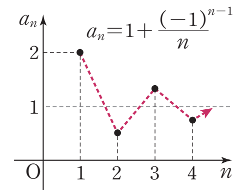


$\therefore \lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=1$

(3) 수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \cdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 1에 수렴한다.

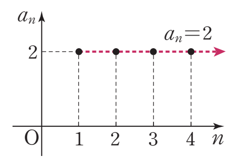


$\therefore \lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}=1$

(4) 수열 $\{a_n\}$을 나열하면

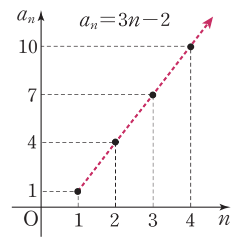
$2, 2, 2, 2, 2, \cdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 2에 수렴한다.

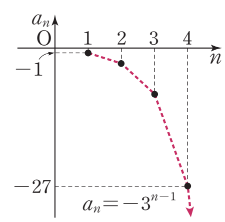


$\therefore \lim_{n\to\infty}2=2$

3-1 (1) $a_n=3n-2$라고 하면 n이 한없이 커질 때 a_n의 값도 한없이 커진다.
따라서 수열 $\{3n-2\}$는 양의 무한대로 발산한다.



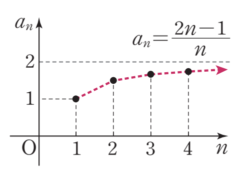
(2) $a_n=-3^{n-1}$이라고 하면 n이 한없이 커질 때 a_n의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다.
따라서 수열 $\{-3^{n-1}\}$은 음의 무한대로 발산한다.



4-1 (1) 수열 $\left\{\frac{2n-1}{n}\right\}$의 각 항을 첫째항부터 나열하면

$1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \cdots$

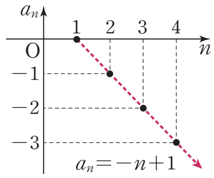
이므로 주어진 수열은 2에 수렴한다.



(2) 수열 $\{-n+1\}$의 각 항을 첫째항부터 나열하면

$0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ \cdots$

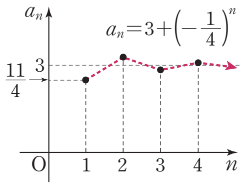
이므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.



(3) 수열 $\left\{3+\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}$의 각 항을 첫째항부터 나열하면

$\frac{11}{4},\ \frac{49}{16},\ \frac{191}{64},\ \frac{769}{256},\ \cdots$

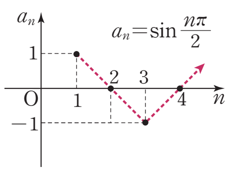
이므로 주어진 수열은 3에 수렴한다.



(4) 수열 $\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$의 각 항을 첫째항부터 나열하면

$1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \cdots$

이므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.



소단원 확인 문제 32~33쪽

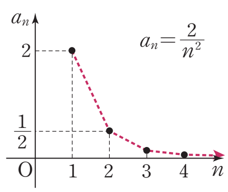
1-1 (1) 수렴 (2) 양의 무한대로 발산
(3) 발산(진동) (4) 음의 무한대로 발산

2-1 (1) 수렴, 1 (2) 양의 무한대로 발산
(3) 발산(진동) (4) 수렴, 0

1-1 (1) 수열 $\left\{\frac{2}{n^2}\right\}$의 각 항을 첫째항부터 나열하면

$2,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{9},\ \frac{1}{8},\ \cdots$

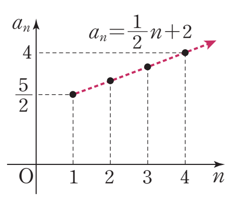
이므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.



(2) 수열 $\left\{\frac{1}{2}n+2\right\}$의 각 항을 첫째항부터 나열하면

$\frac{5}{2},\ 3,\ \frac{7}{2},\ 4,\ \cdots$

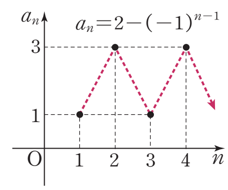
이므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.



(3) 수열 $\{2-(-1)^{n-1}\}$의 각 항을 첫째항부터 나열하면

$1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 1,\ \cdots$

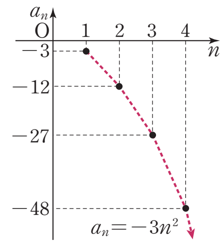
이므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.



(4) 수열 $\{-3n^2\}$의 각 항을 첫째항부터 나열하면

$-3,\ -12,\ -27,\ -48,\ \cdots$

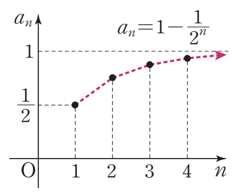
이므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.



2-1 (1) 수열 $\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$의 각 항을 첫째항부터 나열하면

$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ \frac{15}{16},\ \cdots$

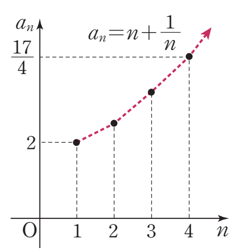
이므로 주어진 수열은 1에 수렴한다.



(2) 수열 $\left\{n+\frac{1}{n}\right\}$의 각 항을 첫째항부터 나열하면

$2,\ \frac{5}{2},\ \frac{10}{3},\ \frac{17}{4},\ \cdots$

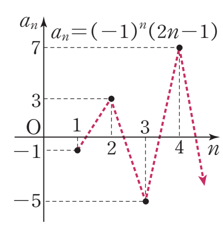
이므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.



(3) 수열 $\{(-1)^n(2n-1)\}$의 각 항을 첫째항부터 나열하면

$-1,\ 3,\ -5,\ 7,\ -9,\ \cdots$

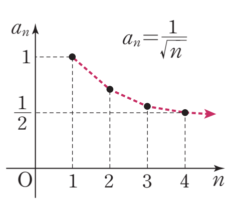
이므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.



(4) 수열 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$의 각 항을 첫째항부터 나열하면

$1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ \cdots$

이므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.



1-2 극한값의 계산

내신 대비 쌍둥이 문제 36~38쪽

1-1 (1) 3 (2) 12 (3) -3 (4) 0

2-1 (1) $\frac{3}{2}$ (2) 1

3-1 (1) 양의 무한대로 발산 (2) 음의 무한대로 발산

4-1 1

5-1 4

1-1 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}=3+0=3$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n}\right)\left(\frac{2}{n}+4\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n}\right)\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+4\right)$

$=\left(\lim_{n\to\infty}3-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\right)\times\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim_{n\to\infty}4\right)$

$=(3-0)\times(0+4)=12$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{1-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}}{\frac{1}{n}-1}$

$=\frac{\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}}{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim_{n\to\infty}1}$

$=\frac{3+0}{0-1}=-3$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$

$=0$

2-1 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+4}{2n^2+3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}$

$=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}$

$=\frac{3}{2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$

$=\frac{2}{1+1}=1$

3-1 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n}{n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{1+\frac{4}{n}}=\infty$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-1}+n}{(\sqrt{n^2-1}-n)(\sqrt{n^2-1}+n)}$

$=-\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-1}+n)$

$=-\infty$

4-1 각 변에 n을 곱하면

$\frac{n}{n+1}\le na_n\le\frac{n}{n-1}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=1$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}na_n=1$

5-1 각 변을 n^2으로 나누면

$\frac{4n^2-n+1}{n^2}\le a_n\le\frac{4n^2+n+3}{n^2}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-n+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(4-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=4$

$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+n+3}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=4$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=4$

소단원 확인 문제 39~40쪽

1-1 (1) 2 (2) 4 (3) $\frac{1}{3}$ (4) 0

2-1 (1) $\frac{1}{2}$ (2) -1 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 4

3-1 40

4-1 $\frac{1}{3}$

1-1 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-1}{n^2-3n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}=2$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(4-\frac{2}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)\times\lim_{n\to\infty}\left(4-\frac{2}{n}\right)=1\times4=4$

(3) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+2n}-3n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{9n^2+2n}-3n)(\sqrt{9n^2+2n}+3n)}{\sqrt{9n^2+2n}+3n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{9n^2+2n}+3n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{9+\frac{2}{n}}+3}$

$=\frac{2}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{3}$

(4) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=0$

2-1 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n}-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}+n}{(\sqrt{n^2+4n}-n)(\sqrt{n^2+4n}+n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}+n}{4n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}{4}=\frac{1+1}{4}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-n}-n)(\sqrt{n^2-n}+n)}{\sqrt{n^2-n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{\sqrt{n^2-n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1}=\frac{-2}{1+1}=-1$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+2n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+2n+1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2+2n+1}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}=4\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{n^2(n+1)^2}$

$=4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=4$

3-1 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)라고 하면

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha+\beta=4$

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha\beta=-12$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2)=\lim_{n\to\infty}a_n{}^2+\lim_{n\to\infty}b_n{}^2$

$=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=4^2-2\times(-12)=40$

4-1 각 변에 $n+2$를 곱하면

$\frac{n+2}{3n+2}\le a_n\le\frac{n+2}{3n+1}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n+2}=\frac{1}{3}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n+1}=\frac{1}{3}$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$

1-3 등비수열의 극한

내신 대비 쌍둥이 문제 42~43쪽

1-1 (1) 양의 무한대로 발산 (2) 수렴

2-1 (1) 수렴, 2 (2) 수렴, 0 (3) 양의 무한대로 발산
(4) 음의 무한대로 발산

3-1 (1) $-1<r<1$일 때, 0에 수렴
$r=1$일 때, $\frac{1}{2}$에 수렴
$r=-1$일 때, 발산(진동)
$r<-1$ 또는 $r>1$일 때, 0에 수렴
(2) $-1<r<1$일 때, r에 수렴
$r=1$일 때, 1에 수렴
$r=-1$일 때, -1에 수렴
$r<-1$ 또는 $r>1$일 때, r에 수렴

1-1 (1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=\infty$
(2) $\lim_{n\to\infty}(-0.8)^n=0$

2-1 (1) 분모, 분자를 각각 4^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}+1}{3^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=\frac{2+0}{0+1}=2$$

(2) 분모, 분자를 각각 4^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+1}{4^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{0+0}{1+0}=0$$

(3) 분모, 분자를 각각 4^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{2^n+2^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^n-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2}=\infty$$

(4) $\lim_{n\to\infty}(2^n-4^n)=\lim_{n\to\infty}4^n\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right\}=-\infty$

3-1 (1) (i) $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}}{1+r^{2n}}=\frac{0}{1+0}=0$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}}{1+r^{2n}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(iii) $r=-1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}}{1+r^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{1+1}$은 발산(진동)한다.

(iv) $r<-1$ 또는 $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}}{1+r^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r}\times\left(\frac{1}{r}\right)^n}{\left(\frac{1}{r}\right)^{2n}+1}=\frac{0}{0+1}=0$$

(2) (i) $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n+1}+r}{1+r^{2n}}=\frac{0+r}{1+0}=r$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n+1}+r}{1+r^{2n}}=\frac{1+1}{1+1}=1$$

(iii) $r=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^{2n+1}=-1$, $\lim_{n\to\infty}r^{2n}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n+1}+r}{1+r^{2n}}=\frac{-1-1}{1+1}=-1$$

(iv) $r<-1$ 또는 $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^{2n}}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n+1}+r}{1+r^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{r+\left(\frac{1}{r}\right)^{2n-1}}{\left(\frac{1}{r}\right)^{2n}+1}=\frac{r+0}{0+1}=r$$

소단원 확인 문제 46쪽

1-1 (1) 양의 무한대로 발산 (2) 0
(3) 발산(진동) (4) 발산(진동)

2-1 (1) $-1<x\le3$ (2) $-2\le x\le3$

3-1 -1

1-1 (1) $\lim_{n\to\infty}(1.001)^n=\infty$
(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n=0$
(3) $\lim_{n\to\infty}(-2)^n$은 발산(진동)한다.
(4) $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{9}{8}\right)^n$은 발산(진동)한다.

2-1 (1) 수열 $\left\{\left(\frac{x-1}{2}\right)^n\right\}$이 수렴하려면

$-1<\frac{x-1}{2}\le1$이어야 하므로

$-2<x-1\le2$ $\quad\therefore -1<x\le3$

(2) 수열 $\left\{\left(\frac{x^2-x}{6}\right)^n\right\}$이 수렴하려면

$-1<\frac{x^2-x}{6}\le 1$이어야 하므로 $-6<x^2-x\le 6$

(i) $x^2-x>-6$에서

$$x^2-x+6=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}>0$$

이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $x^2-x\le 6$에서

$x^2-x-6=(x+2)(x-3)\le 0$이므로

$-2\le x\le 3$

(i), (ii)에서 $-2\le x\le 3$

3-1 $a=0$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times 2^{n+1}+3^n}{2^n+a\times 3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times 2^{n+1}+3^n}{2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{6+\left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}=\infty$$

이므로 $a\neq 0$

주어진 식의 분모, 분자를 각각 3^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times 2^{n+1}+3^n}{2^n+a\times 3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{a}{3}}=\frac{3}{a}$$

이므로

$\frac{3}{a}=-3 \qquad \therefore a=-1$

중단원 연습 문제 49~53쪽

1-1 ㄴ, ㄷ, ㄹ

2-1 (1) 1 (2) 5 (3) -6 (4) -2

3-1 (1) 2 (2) $\frac{3}{2}$ (3) 1 (4) -2

4-1 $-4\le x\le 1$

5-1 $a=0$, $b=-2$

6-1 3

7-1 $10<x\le 1000$

8-1 $\frac{3}{2}$

9-1 3

10-1 $\frac{11}{2}$

1-1 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}n+2\right)=-\infty$이므로 음의 무한대로 발산한다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}=2$

ㄹ. $\lim_{n\to\infty}(-1+\sin n\pi)=-1+\lim_{n\to\infty}\sin n\pi$

$=-1+0=-1$

따라서 수렴하는 수열은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

2-1 (1) $\lim_{n\to\infty}(2a_n+b_n)=2\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$

$=2\times 2+(-3)=1$

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=2-(-3)=5$

(3) $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=2\times(-3)=-6$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n}{b_n}=\frac{3\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{3\times 2}{-3}=-2$

3-1 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-1}}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{1}=1+1=2$$

(2) $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+3}-n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+3}-n)(\sqrt{n^2+3}+n)}{\sqrt{n^2+3}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n^2+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{1+0}=1$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^{2n-1}}{4^{n-1}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=-2$$

4-1 수열 $\left\{\left(\frac{x^2+3x}{4}\right)^n\right\}$이 수렴하려면

$-1<\frac{x^2+3x}{4}\le 1$이어야 하므로

$-4<x^2+3x\le 4$

(i) $x^2+3x>-4$에서

$x^2+3x+4=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$

이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $x^2+3x\le 4$에서

$x^2+3x-4=(x+4)(x-1)\le 0$이므로

$-4\le x\le 1$

(i), (ii)에서 $-4\le x\le 1$

5-1 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+2n^2-1}{b(n-1)^2}$의 값이 존재하므로 $a=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+2n^2-1}{b(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{b(n-1)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n^2}}{b-\frac{2b}{n}+\frac{b}{n^2}}$$

$$=\frac{2}{b}=-1$$

$\therefore\ b=-2$

6-1 각 변을 n^2+1로 나누면

$$\frac{3n^2+n+1}{n^2+1}\le a_n\le\frac{3n^2+3n+2}{n^2+1}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=3$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+3n+2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=3$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=3$

7-1 수열 $\{(\log x-2)^n\}$이 수렴하려면

$-1<\log x-2\le 1$이어야 하므로 $1<\log x\le 3$

$\therefore\ 10<x\le 1000$

8-1 $\lim_{n\to\infty}\frac{5^na_n+3^n}{a_n+2\times 5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+\left(\frac{3}{5}\right)^n}{a_n\times\left(\frac{1}{5}\right)^n+2}$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n+2}$$

$$=\frac{3+0}{3\times 0+2}=\frac{3}{2}$$

9-1 $\mathrm{P}_n(n,\ 3^n)$, $\mathrm{Q}_n(n,\ 2^n)$이므로

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=3^n-2^n$, $\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}}=3^{n+1}-2^{n+1}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}}}{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n-2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{3-0}{1-0}=3$$

10-1 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n+1}+\frac{7}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}+1}$

$$=\frac{0+\frac{7}{2}}{0+1}=\frac{7}{2}$$

$$f(2)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}+1}{2^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

$$=\frac{2+0}{1+0}=2$$

$$\therefore\ f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(2)=\frac{7}{2}+2=\frac{11}{2}$$

2. 급수

2-1 급수의 수렴과 발산

내신 대비 쌍둥이 문제 55~57쪽

1-1 $\frac{1}{2}$ **2-1** (1) 수렴, $-\frac{1}{2}$ (2) 발산

3-1 (1) 발산 (2) 발산 **4-1** (1) 18 (2) 3

1-1 주어진 급수의 제n항을 a_n이라고 하면

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

이므로 제n항까지의 부분합 S_n은

$$S_n=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

2-1 (1) 제n항까지의 부분합 S_n은

$$S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}\right)=-\frac{1}{2}$이므로 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $-\frac{1}{2}$이다.

(2) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라고 하면

$$a_n=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

이므로 제n항까지의 부분합 S_n은

$$S_n=2\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$$
$$=2(\sqrt{n+1}-1)$$

이때 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2(\sqrt{n+1}-1)=\infty$이므로 주어진 급수는 발산한다.

3-1 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+1}=\frac{3}{2}\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}=1\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

4-1 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(4a_n+b_n)=4\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$
$=4\times5+(-2)=18$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n-4b_n)=-\sum_{n=1}^{\infty}a_n-4\sum_{n=1}^{\infty}b_n$
$=-5-4\times(-2)=3$

소단원 확인 문제 58~59쪽

1-1 (1) 발산 (2) 수렴, 1 **2-1** (1) 발산 (2) 수렴, -1

3-1 6

1-1 (1) 제n항까지의 부분합 S_n은

$$S_{2n-1}=1,\ S_{2n}=0$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n$은 발산(진동)한다.

(2) 제n항까지의 부분합 S_n은

$$S_{2n-1}=1,\ S_{2n}=\frac{n}{n+1}$$

이고 $\lim_{n\to\infty}S_n=1$이므로 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

2-1 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

(2) 제n항까지의 부분합 S_n은

$$S_n=\log_2\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\log_2\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\log_2\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}$$
$$=\log_2\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)+\log_2\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)+\cdots+\log_2\left(\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=\log_2\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=\log_2\frac{n+2}{2(n+1)}$$

이때 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \log_2 \frac{n+2}{2(n+1)} = \log_2 \frac{1}{2} = -1$

이므로 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 -1이다.

3-1 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3-\frac{a_n}{2}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{a_n}{2}\right)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 6$

2-2 등비급수

내신 대비 쌍둥이 문제 61~62쪽

1-1 (1) 수렴, $\frac{3}{2}$ (2) 발산

2-1 (1) $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$ (2) $-2<x<2$

3-1 (1) 4 (2) $\frac{11}{2}$

1-1 (1) 주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비급수이다.

이때 $-1<\frac{1}{3}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴하고,

그 합은 $\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

(2) 주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 $-\sqrt{2}$인 등비급수이다.

이때 $|-\sqrt{2}|>1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

2-1 (1) 주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 $3x$인 등비급수이므로 이 급수가 수렴하려면

$-1<3x<1 \quad \therefore -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$

(2) 주어진 급수는 첫째항이 x, 공비가 $\frac{x^2}{4}$인 등비급수이므로 이 급수가 수렴하려면

$x=0$ 또는 $-1<\frac{x^2}{4}<1 \quad \therefore -2<x<2$

3-1 (1) $\frac{2^n+3^n}{4^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n$이고,

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$은 각각 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=1+3=4$$

(2) $\frac{3^n+4^n}{5^n}=\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n$이고,

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$은 각각 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}+\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}=\frac{3}{2}+4=\frac{11}{2}$$

소단원 확인 문제 64~66쪽

1-1 (1) 발산 (2) 발산 (3) 수렴, $\frac{2}{3}$ (4) 수렴, $2+\sqrt{2}$

2-1 (1) $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$ (2) $-3<x<3$

3-1 (1) 2 (2) $\frac{3}{4}$

4-1 $\frac{3}{5}$

1-1 (1) 주어진 급수는 첫째항이 3, 공비가 -1인 등비급수이므로 발산한다.

(2) 주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 $\frac{4}{3}$인 등비급수이다.

이때 $\frac{4}{3}>1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

(3) 주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비급수이다.

이때 $-1<-\frac{1}{2}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$

(4) 주어진 급수는 첫째항이 2, 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 등비급수이다.

이때 $-1<\frac{\sqrt{2}}{2}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=2+\sqrt{2}$

2-1 (1) 주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 $\frac{3}{2}x$인 등비급수이므로 이 급수가 수렴하려면

$-1<\frac{3}{2}x<1 \qquad \therefore -\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$

(2) 주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{x}{3}$인 등비급수이므로 이 급수가 수렴하려면

$-1<-\frac{x}{3}<1 \qquad \therefore -3<x<3$

3-1 (1) $\frac{2}{3^n}+\frac{3}{4^n}=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$이고,

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$은 각각 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}+\frac{3}{4^n}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$=2\times\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+3\times\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=1+1=2$$

(2) $\frac{5^n-2^n}{10^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{5}\right)^n$이고,

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$은 각각 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-2^n}{10^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}$$

$$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

4-1 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\left(\frac{3}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n$

$$=\frac{\frac{3}{8}}{1-\frac{3}{8}}=\frac{3}{5}$$

2-3 등비급수의 활용

내신 대비 쌍둥이 문제 67~69쪽

1-1 (1) $\frac{4}{33}$ (2) $\frac{35}{111}$

2-1 12 **3-1** 500시간

1-1 (1) $0.\dot{1}\dot{2}=0.12121212\cdots$

$$=0.12+0.0012+0.000012+\cdots$$

$$=\frac{12}{100}+\frac{12}{100^2}+\frac{12}{100^3}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{12}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{\frac{12}{100}}{\frac{99}{100}}=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$$

(2) $0.\dot{3}1\dot{5}=0.315315315\cdots$

$$=0.315+0.000315+0.000000315+\cdots$$

$$=\frac{315}{1000}+\frac{315}{1000^2}+\frac{315}{1000^3}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{315}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{315}{999}=\frac{35}{111}$$

2-1 정사각형 P_n의 넓이를 a_n이라고 하면

$a_1=9,\ a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 9, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{9}{1-\frac{1}{4}}=12$

3-1 n번째 충전할 때 충전지의 사용 가능 시간을 a_n시간이라고 하면

$a_1=5,\ a_{n+1}=\frac{99}{100}a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 5, 공비가 $\frac{99}{100}$인 등비수열이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{5}{1-\frac{99}{100}}=500$(시간)

즉, 최대 사용 가능 시간은 500시간이다.

소단원 확인 문제 70~71쪽

1-1 (1) $\frac{6}{11}$ (2) $\frac{71}{330}$

2-1 $\frac{4}{17}$

3-1 32

1-1 (1) $0.\dot{5}\dot{4}=0.54545454\cdots$

$$=0.54+0.0054+0.000054+\cdots$$

$$=\frac{54}{100}+\frac{54}{100^2}+\frac{54}{100^3}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{54}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{54}{99}=\frac{6}{11}$$

(2) $0.2\dot{1}\dot{5}=0.215151515\cdots$

$$=0.2+0.015+0.00015+0.0000015+\cdots$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{1}{10}\left(\frac{15}{100}+\frac{15}{100^2}+\frac{15}{100^3}+\cdots\right)$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{1}{10}\times\frac{\frac{15}{100}}{1-\frac{1}{100}}$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{15}{990}=\frac{213}{990}=\frac{71}{330}$$

2-1 첫째항이 $0.\dot{2}=\frac{2}{9}$이고, 공비가 $0.0\dot{5}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{18}}=\frac{4}{17}$$

3-1 정사각형 A_n의 한 변의 길이를 x_n이라고 하면

$x_n=\sqrt{2}x_{n+1}$, 즉 $x_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}x_n$

이때 $a_n={x_n}^2$이므로 $a_1=16$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 16, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{16}{1-\frac{1}{2}}=32$$

중단원 연습 문제 74~78쪽

1-1 $\frac{1}{3}$

2-1 3

3-1 (1) 수렴, $\frac{3}{2}$ (2) 발산

4-1 $-1<x\le 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)x^{n-1}=\begin{cases}0 & (x=1)\\ -1 & (-1<x<1)\end{cases}$$

5-1 $\frac{11}{20}$

6-1 3

7-1 $\frac{64}{3}$

8-1 $\sqrt{2}$

9-1 $\frac{11}{2}$

10-1 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

1-1 주어진 급수의 제n항을 a_n이라고 하면

$$a_n=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

이므로 제n항까지의 부분합 S_n은

$$S_n=\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}$$

2-1 $\sum_{n=1}^{\infty}(4a_n+3b_n)=4\sum_{n=1}^{\infty}a_n+3\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$$=4\times(-3)+3\times5=3$$

3-1 (1) $-1<\frac{1}{3}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴하고, 그 합은

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

(2) $\left|-\frac{3}{2}\right|>1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

4-1 주어진 급수는 첫째항이 $x-1$, 공비가 x인 등비급수이므로 이 급수가 수렴하려면

$x-1=0$ 또는 $-1<x<1$이므로 $-1<x\le 1$

(i) $x=1$일 때, 0

(ii) $-1<x<1$일 때, $\dfrac{x-1}{1-x}=-1$

5-1 $a_{2n-1}=4$, $a_{2n}=8$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{9^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2n-1}}{9^{2n-1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2n}}{9^{2n}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{9^{2n-1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{9^{2n}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{36}{81^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{81^n}$$
$$=\frac{\frac{36}{81}}{1-\frac{1}{81}}+\frac{\frac{8}{81}}{1-\frac{1}{81}}$$
$$=\frac{36}{80}+\frac{8}{80}=\frac{11}{20}$$

6-1 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$이 각각 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=0$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$

즉, $\lim_{n\to\infty}a_n=2$, $\lim_{n\to\infty}b_n=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(3a_n-2b_n+1)$

$=3\lim_{n\to\infty}a_n-2\lim_{n\to\infty}b_n+1=6-4+1=3$

7-1 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_n=ar^{n-1}$, $a_{2n}=ar^{2n-1}=ar\times(r^2)^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=8$에서 $\dfrac{a}{1-r}=8$ ……①

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\dfrac{8}{3}$에서

$\dfrac{ar}{1-r^2}=\dfrac{ar}{(1-r)(1+r)}=\dfrac{8}{3}$ ……②

①, ②에서 $8\times\dfrac{r}{1+r}=\dfrac{8}{3}$

$3r=1+r$ $\quad\therefore r=\dfrac{1}{2}$

$r=\dfrac{1}{2}$을 ①에 대입하면 $a=4$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{4^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{64}{3}$$

8-1 주어진 원은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$이다.

또, 기울기가 1이고, 점 $(a_n, 0)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=x-a_n$이다.

이 직선이 주어진 원에 접하므로 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=x-a_n$, 즉 $x-y-a_n=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$과 같다.

$$\therefore \frac{|-a_n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ |a_n|=\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

그런데 접선의 y절편이 음수이므로

$-a_n<0$, 즉 $a_n>0$

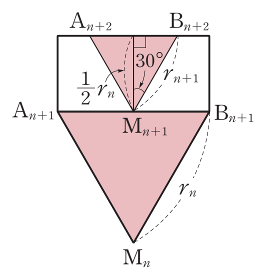
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

9-1 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=5$

그런데 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2S_n+a_n+1}{S_{n-1}-a_n-3}=\frac{2\times5+1}{5-3}=\frac{11}{2}$$

10-1 정삼각형 $A_{n+1}M_nB_{n+1}$의 한 변의 길이를 r_n이라고 하면 오른쪽 그림에서



$\dfrac{1}{2}r_n=r_{n+1}\times\cos 30°$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r_{n+1}$

즉, $r_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}r_n$

이때

$$S_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{4}r_{n+1}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}r_n\right)^2=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}r_n^2=\frac{1}{3}S_n$$

그런데 $r_1=\dfrac{1}{\cos 30°}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$이므로

$$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

대단원 **모의고사** 86~89쪽

01 ①	02 ⑤	03 ③	04 ④	05 ④
06 ④	07 ③	08 ④	09 ②	10 ①
11 ②	12 ⑤	13 ③	14 ⑤	15 ⑤
16 ③	17 ④	18 ④	19 ③	20 ③
21 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$		22 7	23 3	24 20

01 $\sum_{n=1}^{\infty}(5a_n-6b_n)=5\sum_{n=1}^{\infty}a_n-6\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=5\times3-6\times5=-15$

02 $\lim_{n\to\infty}\frac{4\times3^n+5\times4^n}{3\times2^{2n}-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times3^n+5\times4^n}{3\times4^n-3^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times\left(\frac{3}{4}\right)^n+5}{3-\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{5}{3}$

03 $2n^2+3n-3\le a_n\le 2n^2+3n+4$에서

$3n-3\le a_n-2n^2\le 3n+4$

각 변을 n으로 나누면

$\frac{3n-3}{n}\le\frac{a_n-2n^2}{n}\le\frac{3n+4}{n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-3}{n}=3$, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{n}=3$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-2n^2}{n}=3$

04 주어진 급수는 첫째항이 $\frac{3x-1}{6}$, 공비가 $\frac{3x-1}{6}$인 등비급수이므로 이 급수가 수렴하려면

$-1<\frac{3x-1}{6}<1$, $-6<3x-1<6$

$-5<3x<7$, $-\frac{5}{3}<x<\frac{7}{3}$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2의 4개이다.

05 $3a_n-7b_n=c_n$이라고 하면 $3a_n=7b_n+c_n$

$\therefore\ a_n=\frac{7}{3}b_n+\frac{1}{3}c_n$

그런데 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2$, $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=4$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{3}b_n+\frac{1}{3}c_n\right)$

$=\frac{7}{3}\sum_{n=1}^{\infty}b_n+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}c_n$

$=\frac{7}{3}\times2+\frac{1}{3}\times4=6$

06 ㄱ. $S_n=1-0-0-0-\cdots-0=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=1$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

ㄴ. $S_n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=0$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

ㄷ. $S_{2n}=0$, $S_{2n-1}=\frac{n}{2n+1}$

$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$, $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\frac{1}{2}$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

ㄹ. 제n항까지의 부분합 S_n이

$S_n=\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)+\cdots$

$+\left(\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+3}{n+2}\right)$

$=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{n+2}$

이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{n+3}{n+2}\right)$

$=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

따라서 수렴하는 급수는 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

07 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n-1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{6(n^3+n-1)}{n(n+1)(2n+1)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6(n^3+n-1)}{2n^3+3n^2+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{6}{n^2}-\frac{6}{n^3}}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=3$$

08 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+20}{x^{n+1}+2}=\frac{20}{2}=10$$

(ii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+20}{x^{n+1}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{20}{x^n}}{x+\frac{2}{x^n}}=\frac{1}{x}$$

이때 $-1<\frac{1}{x}<0$ 또는 $0<\frac{1}{x}<1$이다.

(iii) $x=1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+20}{x^{n+1}+2}=\frac{1+20}{1+2}=7$$

(i)~(iii)에서 구하는 최댓값은 10이다.

09 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2-2n+1}+\sqrt{n^2-n}}{n+3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{1+\frac{3}{n}}$$

$$=\sqrt{4}+1=3$$

10 $\frac{2a_n-4}{a_n+2}=b_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=4$

이때 $a_n=\frac{-2b_n-4}{b_n-2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-2b_n-4}{b_n-2}=\frac{-2\times4-4}{4-2}=-6$$

11 $S_{n-1}=n\times2^{n-1}$이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}=(n+1)\times2^n-n\times2^{n-1}$

$=(n+2)\times2^{n-1}$ (단, $n\geq2$)

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\times2^n}{(n+2)\times2^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n+2}=2$$

12 공이 완전히 정지할 때까지 움직인 거리는

$$5+2\left\{5\times\frac{3}{5}+5\times\left(\frac{3}{5}\right)^2+5\times\left(\frac{3}{5}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=5+10\left\{\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=5+10\times\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}=20\ (\mathrm{cm})$$

13 $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+3(a_3-a_4)+\cdots+n(a_n-a_{n+1})\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n-na_{n+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)-\lim_{n\to\infty}na_{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}na_{n+1}$$

$$=6-0=6$$

14 $a_n-b_n=c_n$이라고 하면 $b_n=a_n-c_n$

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}c_n=1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-c_n}{a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{c_n}{a_n}\right)=1$$

15 희수가 가져가는 물의 총량은

$$\frac{30}{2}+\frac{30}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{30}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots$$

$$=\frac{30}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots\right\}$$

$$=15\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=20\ (\mathrm{L})$$

16 $\sqrt{(n+1)^2}<\sqrt{n^2+3n+3}<\sqrt{(n+2)^2}$이므로

$a_n=n+1,\ b_n=\sqrt{n^2+3n+3}-(n+1)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{a_nb_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}+\frac{1}{a_n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n+3}-(n+1)}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+3}+n+1}{n+2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}}+1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$$
$$=1+1=2$$

17 $a_n=a_1+2(n-1)$이므로 제n항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{\sqrt{a_ka_{k+1}}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_k}}-\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a_1}}-\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_1+2n}=0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_na_{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}-\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a_1}}=\frac{1}{2}$$

에서 $a_1=4$

$\therefore a_3=4+2\times2=8$

18 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하므로 $-1<r<1$이다.

ㄱ. $0\le|r|<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}|r|^n$은 수렴한다.

ㄴ. $-1<-r<1$이므로 $\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}r^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n\right\}$은 수렴한다.

ㄷ. $-\frac{1}{2}<\frac{r}{2}<\frac{1}{2}$에서 $\frac{1}{2}<\frac{r}{2}+1<\frac{3}{2}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}+1\right)^n$은 반드시 수렴한다고 할 수 없다.

따라서 반드시 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

19 $a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-2}a_{n-1}+2^{n-1}a_n=3n+2$ ……①

$a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-2}a_{n-1}=3n-1$ ……②

①−②를 하면 $2^{n-1}a_n=3$이므로

$$a_n=\frac{3}{2^{n-1}}\ (n\ge2)$$

한편, ①에서 $n=1$일 때 $a_1=5$이므로

$$a_1=5,\ a_n=\frac{3}{2^{n-1}}\ (n\ge2)$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n$$
$$=5+\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}}=8$$

20 두 점 A$(-2,\ 0)$, B$(2,\ 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $n:1$로 내분하는 점은 $\mathrm{P}_n\left(\frac{2n-2}{n+1},\ 0\right)$, 외분하는 점은 $\mathrm{Q}_n\left(\frac{2n+2}{n-1},\ 0\right)$이므로

$$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\left|\frac{2n+2}{n-1}-\frac{2n-2}{n+1}\right|$$
$$=\left|\frac{8n}{(n-1)(n+1)}\right|$$

이때 n은 2 이상의 자연수이므로

$$\frac{8n}{(n-1)(n+1)}>0$$
$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}}{n}$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{8}{(n-1)(n+1)}$$
$$=4\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=4\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=4\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=4\left(1+\frac{1}{2}\right)=6$$

서술형 문제

21 ❶ 이차방정식 $x^2-x-1=0$의 두 실근은

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

❷ 이때 $\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$라고 하면 $\alpha<\beta$이고,

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-3}{2}$에서 $-1<\frac{\alpha}{\beta}<1$

❸ β^n으로 분모, 분자를 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}}{\alpha^n+\beta^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}+\frac{1}{\beta}}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+1}$$

$$=\frac{1}{\beta}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

채점 기준	배점
❶ 이차방정식의 두 근 구하기	20 %
❷ $\frac{\alpha}{\beta}$가 수렴하는지 확인하기	50 %
❸ 극한값 구하기	30 %

22 ❶ 첫째항이 3, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비급수의 합은

$$S=\frac{3}{1-\frac{1}{4}}=4$$

❷ 제n항까지의 부분합 S_n은

$$S_n=\frac{3\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}}=4\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

❸ 이때 S와 S_n의 차가 $\frac{1}{2000}$ 미만이어야 하므로

$$4-4\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}<\frac{1}{2000}$$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}<\frac{1}{2000}$에서 $4^{n-1}>2000$, $2^{2n-2}>2000$

그런데 $2^{11}=2048$이므로 처음으로 $\frac{1}{2000}$보다 작게 되는 자연수 n의 값은 7이다.

채점 기준	배점
❶ 등비급수의 합 S 구하기	30 %
❷ 제n항까지의 부분합 S_n 구하기	30 %
❸ 조건을 만족하는 자연수 n의 값 구하기	40 %

23 ❶ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$의 공비가 $\frac{x}{2}$이므로 이 급수가 수렴하려면

$-1<\frac{x}{2}<1$, $-2<x<2$

$\therefore\ |x|<2$ ······①

❷ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n$의 공비가 $\frac{1}{x}$이므로 이 급수가 수렴하려면

$-1<\frac{1}{x}<1$, $x<-1$ 또는 $x>1$

$\therefore\ |x|>1$ ······②

❸ ①, ②의 공통 범위를 구하면

$1<|x|<2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로 $\alpha+\beta=3$

채점 기준	배점
❶ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$이 수렴하기 위한 $\lvert x\rvert$의 범위 구하기	40 %
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n$이 수렴하기 위한 $\lvert x\rvert$의 범위 구하기	40 %
❸ $\lvert x\rvert$의 공통 범위를 구하여 $\alpha+\beta$의 값 구하기	20 %

24 ❶ 수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$2, 4, 8, 16, \cdots$

이므로 $a_n=2^n\ (n\ge1)$

❷ 수열 $\{b_n\}$을 나열하면

$\frac{10}{2}, \frac{10}{4}, \frac{10}{8}, \frac{10}{16}, \cdots$

이므로 $b_n=\frac{10}{2^n}\ (n\ge1)$

❸ $\therefore\ \lim_{n\to\infty}(2a_n-1)b_n=\lim_{n\to\infty}(2a_nb_n-b_n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2\times2^n\times\frac{10}{2^n}-\frac{10}{2^n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(20-\frac{10}{2^n}\right)$$

$$=20$$

채점 기준	배점
❶ 수열 $\{a_n\}$의 일반항 구하기	30 %
❷ 수열 $\{b_n\}$의 일반항 구하기	30 %
❸ $\lim_{n\to\infty}(2a_n-1)b_n$의 값 구하기	40 %

Ⅱ. 미분법

1. 여러 가지 함수의 미분

1-1 지수함수와 로그함수의 극한

내신 대비 쌍둥이 문제 92~94쪽

1-1 (1) $\frac{5}{2}$ (2) $\sqrt{3}$ (3) 0 (4) 양의 무한대로 발산

2-1 (1) 0 (2) -2 (3) 양의 무한대로 발산
(4) 음의 무한대로 발산

3-1 (1) $\frac{1}{e^2}$ (2) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ (3) $\sqrt[3]{e}$ (4) $\frac{1}{e^8}$

4-1 (1) $\frac{3}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$

5-1 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

6-1 (1) 3 (2) 4

7-1 (1) $\ln 3$ (2) $\frac{1}{\ln 4}$

1-1 (1) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{2}{5}\right)^x=\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}=\frac{5}{2}$

(2) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} 3^x=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

(3) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=0$

(4) $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^x=\infty$

2-1 (1) $\lim_{x\to 1}\log_5 x=\log_5 1=0$

(2) $\lim_{x\to 9}\log_{\frac{1}{3}} x=\log_{\frac{1}{3}} 9=-\log_3 9=-2$

(3) $\lim_{x\to \infty}\log_{\sqrt{2}} x=\infty$

(4) $\lim_{x\to 0+}\log_3 x=-\infty$

3-1 (1) $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\{(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\}^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

(2) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{3x}}=\lim_{x\to 0}\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\}^{-\frac{1}{3}}$

$=e^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

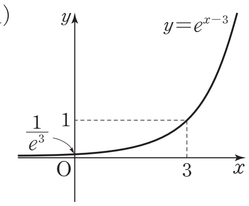
(3) $\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^x=\lim_{x\to \infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right\}^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$

(4) $\lim_{x\to \infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{4x}=\lim_{x\to \infty}\left\{\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right\}^{-8}=e^{-8}=\frac{1}{e^8}$

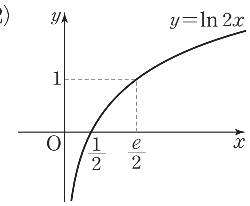
4-1 (1) $\ln e\sqrt{e}=\ln e^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\ln e=\frac{3}{2}\log_e e=\frac{3}{2}$

(2) $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}=\ln e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\ln e=-\frac{1}{2}\log_e e=-\frac{1}{2}$

5-1 (1)



(2)



6-1 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times 3=3$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}\times 4=4$

7-1 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln 3}\times \ln 3=\ln 3$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_4(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x\ln 4}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{1}{\ln 4}$

$=\frac{1}{\ln 4}$

소단원 확인 문제 95~96쪽

1-1 ㄴ, ㄹ

2-1 (1) $\ln 5$ (2) $\frac{e}{3}$

3-1 (1) $\ln 6$ (2) -1 (3) $\ln 2$ (4) $5\ln 3$

1-1 ㄱ. $\lim_{x\to 3}(2^x-3)=2^3-3=5$ (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}=\infty$ (참)

ㄷ. $\lim_{x\to 0+}\log_4 x=-\infty$ (거짓)

ㄹ. $\lim_{x\to \infty}\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=-\infty$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

2-1 (1) $\lim_{x\to\infty}\ln\left(5+\frac{3}{x}\right)=\ln 5$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x+1}-1}{3e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e-e^{-x}}{3+e^{-2x}}=\frac{e}{3}$

3-1 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{6^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 6}-1}{x\ln 6}\times\ln 6=\ln 6$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{-x}\times(-1)=-1$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4^x-1}{x}\times\frac{x}{e^{2x}-1}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\ln 4}-1}{x\ln 4}\times\ln 4\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\ln 4=\ln 2$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{\log_3(1+x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log_3(1+x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{5x}\times 5\times\lim_{x\to 0}\frac{x\ln 3}{\ln(1+x)}$

$=5\ln 3$

1-2 지수함수와 로그함수의 도함수

내신 대비 쌍둥이 문제

97쪽

1-1 (1) $y'=4^{x-1}\ln 4$ (2) $y'=3\times 2^{3x}\ln 2$

(3) $y'=x^2 3^x(3+x\ln 3)$ (4) $y'=e^x(x^2+3x+1)$

2-1 (1) $y'=\frac{1}{x}$ (2) $y'=\frac{1}{x\ln 3}$

(3) $y'=3\ln x+3+\frac{1}{x}$

(4) $y'=\log_3 x+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{x\ln 3}$

1-1 (1) $y'=(4^{x-1})'=(4^{-1}\times 4^x)'=4^{-1}\times 4^x\ln 4=4^{x-1}\ln 4$

(2) $y'=(2^{3x})'=(8^x)'=8^x\ln 8=3\times 2^{3x}\ln 2$

(3) $y'=(x^3)'3^x+x^3(3^x)'=3x^2 3^x+x^3 3^x\ln 3$

$=x^2 3^x(3+x\ln 3)$

(4) $y'=(e^x)'(x^2+x)+e^x(x^2+x)'$

$=e^x(x^2+x)+e^x(2x+1)$

$=e^x(x^2+3x+1)$

2-1 (1) $y'=\left(\ln\frac{3x}{7}\right)'=\left(\ln\frac{3}{7}+\ln x\right)'=\frac{1}{x}$

(2) $y'=\left(\log_3\frac{x}{5}\right)'=(\log_3 x-\log_3 5)'=\frac{1}{x\ln 3}$

(3) $y'=(3x+1)'\ln x+(3x+1)(\ln x)'$

$=3\ln x+(3x+1)\times\frac{1}{x}=3\ln x+3+\frac{1}{x}$

(4) $y'=(x+1)'\log_3 x+(x+1)(\log_3 x)'$

$=\log_3 x+(x+1)\times\frac{1}{x\ln 3}$

$=\log_3 x+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{x\ln 3}$

소단원 확인 문제

99~100쪽

1-1 ㄴ

2-1 (1) $y'=-\ln 5\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}$ (2) $y'=\frac{1}{2x}$

(3) $y'=3^x\left(\ln 3\log_3 x+\frac{1}{x\ln 3}\right)$

(4) $y'=3x^2\ln x+x^2-\frac{1}{x}$

3-1 (1) $y'=-5\ln 3\left(\frac{1}{3}\right)^x$ (2) $y'=-\frac{1}{x}$

4-1 $\frac{1}{e}$

1-1 ㄱ. $y'=(2^x)'=2^x\ln 2$ (거짓)

ㄴ. $y'=(e^{2x})'=\{(e^2)^x\}'=(e^2)^x\ln e^2=e^{2x}\times 2=2e^{2x}$ (참)

ㄷ. $y'=(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

2-1 (1) $y'=\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}\right\}'=\left\{\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}'$

$=\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{5}\right)^x\ln\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}\ln\frac{1}{5}$

$=-\ln 5\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}$

(2) $y'=(\ln\sqrt{x})'=\left(\frac{1}{2}\ln x\right)'=\frac{1}{2x}$

(3) $y'=(3^x\log_3 x)'=3^x\ln 3\log_3 x+\frac{3^x}{x\ln 3}$

$=3^x\left(\ln 3\log_3 x+\frac{1}{x\ln 3}\right)$

(4) $y'=\{(x^3-1)\ln x\}'=3x^2\ln x+\frac{x^3-1}{x}$

$=3x^2\ln x+x^2-\frac{1}{x}$

3-1 (1) $y'=\left(\frac{5}{3^x}\right)'=\left\{5\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}'=5\left(\frac{1}{3}\right)^x\ln\frac{1}{3}$

$=-5\ln 3\left(\frac{1}{3}\right)^x$

(2) $y'=\left(\ln\frac{1}{5x}\right)'=(-\ln 5x)'$

$=(-\ln 5-\ln x)'$

$=-\frac{1}{x}$

4-1 $f'(x)=a^x\ln a$이므로

$f'(0)=\ln a=-1 \qquad \therefore a=e^{-1}=\frac{1}{e}$

1-3 삼각함수의 덧셈정리

내신 대비 쌍둥이 문제 102~105쪽

1-1 (1) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (2) $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2-1 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

3-1 (1) $\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$ (2) $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$

4-1 $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$

5-1 (1) $-2-\sqrt{3}$ (2) $-2+\sqrt{3}$

6-1 $-\frac{4}{3}$ **7-1** $\frac{\pi}{4}$

1-1 (1) $\sin\frac{5}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(2) $\cos\frac{11}{12}\pi=\cos\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\cos\frac{3}{4}\pi\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{3}{4}\pi\sin\frac{\pi}{6}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2-1 (1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha$

$=1+2\sin\alpha\cos\alpha=1+\sin 2\alpha$

(2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)$

$=2\cos^2\alpha-1$

3-1 $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$에서 $\cos\alpha<0$이므로 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

또, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\beta>0$이므로 $\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(1) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$=\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$

(2) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$

4-1 $-\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi\sin\theta+\sin\frac{3}{4}\pi\cos\theta\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$

5-1 (1) $\tan\frac{7}{12}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{3}}$

$=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}$

(2) $\tan\frac{11}{12}\pi=\tan\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\frac{\tan\frac{3}{4}\pi+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{3}{4}\pi\tan\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{-1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=-2+\sqrt{3}$$

6-1 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{4}{1-4}=-\frac{4}{3}$

7-1 두 직선 $2x-y=0$, $x-3y+2=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β $(0\le\alpha<\pi,\ 0\le\beta<\pi)$라고 하면

$\tan\alpha=2,\ \tan\beta=\frac{1}{3}$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\times\frac{1}{3}}=1$$

그런데 θ가 예각이므로 $\theta=\frac{\pi}{4}$

소단원 확인 문제 106~107쪽

1-1 (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) $-\sqrt{3}$

(5) $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$ (6) $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ (7) $\frac{-48+25\sqrt{3}}{39}$

2-1 $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

3-1 $2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$

1-1 $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

(1) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$이므로 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$

(2) $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$

(3) $\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$에서 $\sin\beta<0$이므로

$\sin\beta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$

(5) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$$

(6) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}-\frac{4}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$$

(7) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{\frac{4}{3}-\sqrt{3}}{1-\frac{4}{3}\times(-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{4-3\sqrt{3}}{3+4\sqrt{3}}=\frac{-48+25\sqrt{3}}{39}$$

2-1 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ……①

$\sin(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$에서

$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}$ ……②

①+②를 하면 $2\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$\therefore\ \sin\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

3-1 $-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

$=2\left(-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

$=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi\sin\theta+\sin\frac{2}{3}\pi\cos\theta\right)$

$=2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$

1-4 삼각함수의 극한

내신 대비 쌍둥이 문제 109~111쪽

1-1 (1) 0 (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\sqrt{3}$

2-1 (1) $\sqrt{2}$ (2) 2 (3) 0 (4) 0

3-1 (1) 3 (2) $\frac{4}{3}$

4-1 (1) 0 (2) $\frac{1}{2}$

1-1 (1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=\cos\frac{\pi}{2}=0$

(2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\tan x=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

2-1 (1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\cos x-\sin x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\cos x+\sin x)=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\cos x-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos x(1-\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{\cos x(1-\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos x}=2$

(3) $x\neq 0$일 때 $\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leq 1$이므로

$\left|x^2\cos\frac{1}{x}\right|\leq|x^2|$, $-x^2\leq x^2\cos\frac{1}{x}\leq x^2$

이때 $\lim_{x\to 0}(-x^2)=0$, $\lim_{x\to 0}x^2=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x}=0$

(4) $-1\leq\cos x\leq 1$이므로

$x>0$일 때 $-\frac{1}{x}\leq\frac{\cos x}{x}\leq\frac{1}{x}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0$

3-1 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}\times 3=3$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{4x}\times\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\tan 3x}\times\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$

4-1 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan^2 x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\tan^2 x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\tan^2 x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\tan^2 x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}$

$=\frac{1}{2}$

소단원 확인 문제 112~113쪽

1-1 (1) 0 (2) 1 (3) 0 (4) 3 (5) $\frac{3}{2}$ (6) $\frac{1}{4}$

(7) 2 (8) 1 (9) 1 (10) 1

2-1 (1) -1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{1}{2}$ (4) 0

1-1 (1) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\cos 2x}=\frac{\sin\pi}{\cos 2\pi}=0$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{5x}=1$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{2x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$

$=0$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{x}{\tan x}\times 3\right)=3$

(5) $\lim_{x\to0}\frac{3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

(6) $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\tan^2 2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{\tan 2x}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

(7) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x\tan x}{1-\cos x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\tan x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1+\cos x)}{\sin x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan x}{x}\times\frac{x}{\sin x}\times(1+\cos x)\right\}=2$

(8) $\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\tan x\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\tan x}\times\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)=1$

(9) $\lim_{x\to0}\frac{2x}{3x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{3-\frac{\sin x}{x}}=1$

(10) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin x+\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\times2}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\tan x}{x}}=1$

2-1 (1) $x-\pi=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\pi$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to\pi}\frac{\tan x}{\pi-x}=\lim_{t\to0}\frac{\tan(\pi+t)}{-t}$

$=-\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t}=-1$

(2) $\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}$

$=\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$

$=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{1-\cos x}=\frac{1}{2}$

(3) $x-\pi=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\pi$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2}\right)}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}\times2}=-\frac{1}{2}$

(4) $-1\le\sin 2x\le1$이므로

$x>0$일 때 $-\frac{1}{x}\le\frac{\sin 2x}{x}\le\frac{1}{x}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}=0$

1-5 사인함수와 코사인함수의 도함수

내신 대비 쌍둥이 문제 115~116쪽

1-1 (1) $y'=-2\sin x-3\cos x+1$

(2) $y'=e^x+\sin x$

(3) $y'=\frac{1}{x}\sin x+\ln x\cos x$

(4) $y'=(1-x)\sin x+(1+x)\cos x$

2-1 -1

1-1 (1) $y'=2(\cos x)'-3(\sin x)'+(x)'$

$=-2\sin x-3\cos x+1$

(2) $y'=(e^x)'-(\cos x)'=e^x+\sin x$

(3) $y'=(\ln x)'\sin x+\ln x(\sin x)'$

$=\frac{1}{x}\sin x+\ln x\cos x$

(4) $y'=(x)'(\sin x+\cos x)+x(\sin x+\cos x)'$

$=\sin x+\cos x+x(\cos x-\sin x)$

$=\sin x+\cos x+x\cos x-x\sin x$

$=(1-x)\sin x+(1+x)\cos x$

2-1 $f(x)=\cos^2 x=\cos x\cos x$이므로

$f'(x)=(-\sin x)\cos x+\cos x(-\sin x)$

$=-2\sin x\cos x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-1$

소단원 확인 문제 117~118쪽

1-1 (1) $y'=-\sin x+7\cos x$

(2) $y'=\cos x-\cos^2 x+\sin^2 x$

(3) $y'=2x\sin x+x^2\cos x$

(4) $y'=-6x+2\cos^2 x-2\sin^2 x$

2-1 (1) 1 (2) 1

3-1 2

1-1 (1) $y'=(\cos x)'+7(\sin x)'=-\sin x+7\cos x$

(2) $y'=(\sin x)'(1-\cos x)+\sin x(1-\cos x)'$

$=\cos x(1-\cos x)+\sin x(\sin x)$

$=\cos x-\cos^2 x+\sin^2 x$

(3) $y'=(x^2)'\sin x+x^2(\sin x)'$

$=2x\sin x+x^2\cos x$

(4) $y'=(-3x^2)'+2(\sin x)'\cos x+2\sin x(\cos x)'$

$=-6x+2\cos^2 x-2\sin^2 x$

2-1 (1) $f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x$이므로

$f'(0)=1$

(2) $f'(x)=\cos x-x\sin x$이므로

$f'(0)=1$

3-1 $f'(x)=a\cos x-(a-2)\sin x$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\cos\frac{\pi}{6}-(a-2)\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{a-2}{2}=\sqrt{3}$

$a\sqrt{3}-(a-2)=2\sqrt{3},\ a(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{3}-2$

$\therefore\ a=2$

중단원 연습 문제 120~125쪽

1-1 (1) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ (2) 3 (3) $-\frac{1}{2}\ln 3$ (4) $\frac{2}{3}$

2-1 (1) $y'=\frac{1}{x}-3^x\ln 3$ (2) $y'=2e^{2x}$

(3) $y'=\frac{1}{x}(2\sin x+3\cos x)+\ln x(2\cos x-3\sin x)$

(4) $y'=\sin x+x\cos x+e^x(\sin x+\cos x)$

3-1 $\frac{1-2\sqrt{30}}{12}$

4-1 (1) $\frac{5}{3}$ (2) $-\frac{1}{\pi}$ (3) 1 (4) $-\frac{1}{4}$

5-1 (1) $-\frac{15}{6}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4) 3

6-1 (1) $a=e^2,\ b=1$ (2) $a=1,\ b=\frac{3}{2}$ (3) $a=2,\ b=0$

7-1 $\frac{7}{6}$

8-1 0

9-1 $a=1,\ b=1$

1-1 (1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^{-\frac{1}{2}}$

$=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times 3=3$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log_3(1-2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln 3}{\ln(1-2x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{\ln(1-2x)}\times\frac{\ln 3}{-2}$

$=-\frac{1}{2}\ln 3$

(4) $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{\ln(1+2t)}{\ln(1+3t)}$

$=\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{\ln(1+2t)}{2t}\times\frac{3t}{\ln(1+3t)}\times\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3}$

2-1 (1) $y'=\frac{1}{x}-3^x\ln 3$

(2) $y'=(e^x\times e^x)'=e^x\times e^x+e^x\times e^x=2e^{2x}$

(3) $y'=\frac{1}{x}(2\sin x+3\cos x)+\ln x(2\cos x-3\sin x)$

(4) $y'=(1+e^x)\sin x+(x+e^x)\cos x$

$=\sin x+x\cos x+e^x(\sin x+\cos x)$

3-1 $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

$\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$에서 $\cos\alpha<0$이므로 $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

또, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\beta>0$이므로 $\sin\beta=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\frac{\sqrt{15}}{4}$

$=\frac{1-2\sqrt{30}}{12}$

4-1 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x}{5x}\times\dfrac{3x}{\tan 3x}\times\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{5}{3}$

(2) $x-3=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 3$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sin\pi x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin(\pi t+3\pi)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{-\sin\pi t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\pi t}{\sin\pi t}\times\left(-\frac{1}{\pi}\right)=-\frac{1}{\pi}$$

(3) $\sin x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 0$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x^2-x)}{x^2+4x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x^2-x)}{3x^2-x}\times\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-x}{x^2+4x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x^2-x)}{3x^2-x}\times\lim_{x\to 0}\frac{3x-1}{x+4}=-\frac{1}{4}$$

5-1 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos x}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-1+1-\cos x}{3x^2}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos 4x-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left\{\frac{-\sin^2 4x}{x^2(\cos 4x+1)}+\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin^2 4x}{16x^2}\times\frac{-16}{\cos 4x+1}\right)+\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(-8+\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{6}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{4x}-1}{4x}\times\dfrac{3x}{\sin 3x}\times\dfrac{4}{3}\right)$

$$=\frac{4}{3}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x(x+2)}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{1}{x+2}\times 3\right)$$
$$=\frac{3}{2}$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\ln(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\tan 3x}{3x}\times\dfrac{x}{\ln(x+1)}\times 3\right\}$

$$=3$$

6-1 (1) $x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0}(a^x-b)=0$이므로 $1-b=0$, $b=1$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a=2,\ a=e^2$$

(2) $x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0}\ln(a+3x)=0$이므로 $\ln a=0$, $a=1$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{e^{2x}-1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{3}{2}\right\}$$
$$=\frac{3}{2}$$
$$\therefore b=\frac{3}{2}$$

(3) $x\longrightarrow 0$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이므로 (분모) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

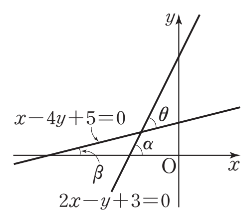
즉, $\lim\limits_{x\to 0}\sin(ax+b)=0$이므로 $\sin b=0$

이때 $0\le b<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $b=0$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin ax}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{ax}{\sin ax}\times\frac{\tan x}{x}\times\frac{1}{a}\right)$$
$$=\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$$
$$\therefore a=2$$

7-1 두 직선 $2x-y+3=0$, $x-4y+5=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β $(0\le\alpha<\pi,\ 0\le\beta<\pi)$라고 하면

$$\tan\alpha=2,\ \tan\beta=\frac{1}{4}$$



$$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{2-\frac{1}{4}}{1+2\times\frac{1}{4}}=\frac{7}{6}$$

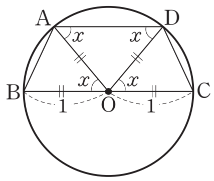
8-1 사다리꼴 ABCD가 등변사다리꼴이므로 $\overline{AB}=\overline{CD}$

$\therefore\ \angle COD=\angle BOA=x$

또, $\overline{AD}$와 $\overline{BC}$가 평행하므로

$\angle OAD=\angle BOA=x$, $\angle ODA=\angle COD=x$

$\therefore\ \angle AOD=\pi-2x$



이때 사다리꼴 ABCD의 넓이 $f(x)$는

$$f(x)=\triangle AOB+\triangle AOD+\triangle COD$$
$$=\frac{1}{2}\times1^2\times\sin x+\frac{1}{2}\times1^2\times\sin(\pi-2x)+\frac{1}{2}\times1^2\times\sin x$$
$$=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$$
$$=\sin x+\sin x\cos x\ (\because\ \sin 2x=2\sin x\cos x)$$
$$=\sin x(1+\cos x)$$

이므로

$$f'(x)=\cos x(1+\cos x)+\sin x(-\sin x)$$
$$=\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x$$
$$\therefore\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}-\sin^2\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=0$$

9-1 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)=b$$
$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}e^x=1\qquad\therefore\ b=1$$

한편, $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{e^x-1}{x}=1$$
$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{ax+1-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{ax}{x}=a$$

이때 $x=0$에서 미분계수가 존재하므로

$a=1$

2. 여러 가지 미분법

2-1 함수의 몫의 미분법

내신 대비 쌍둥이 문제 — 127~129쪽

1-1 (1) $y'=\dfrac{6x^2+4x-3}{(3x+1)^2}$ (2) $y'=-\dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$

(3) $y'=-\dfrac{(x^2+1)\sin x+2x\cos x}{(x^2+1)^2}$

(4) $y'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

2-1 (1) 2 (2) $\sqrt{2}$ (3) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3-1 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

4-1 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조 (3) 풀이 참조

5-1 (1) $y'=-\dfrac{9}{x^4}$ (2) $y'=\dfrac{x^3-4}{x^3}$

1-1 (1) $y'=\dfrac{4x(3x+1)-(2x^2+1)\times3}{(3x+1)^2}=\dfrac{6x^2+4x-3}{(3x+1)^2}$

(2) $y'=-\dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$

(3) $y'=\dfrac{-\sin x\times(x^2+1)-\cos x\times2x}{(x^2+1)^2}$

$=-\dfrac{(x^2+1)\sin x+2x\cos x}{(x^2+1)^2}$

(4) $y'=\dfrac{\cos x\times x-\sin x}{x^2}=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

2-1 (1) $\csc\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2$

(2) $\sec\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$

(3) $\cot\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{1}{\tan\frac{2}{3}\pi}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3-1 (1) $\csc\theta\sec\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{2}{2\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{2}{\sin2\theta}=2\csc2\theta$

(2) $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}\times\dfrac{1}{\cos\theta}$

$=\csc\theta\sec\theta$

4-1 (1) $(\sec^2 x)'$
$=(\sec x\times\sec x)'$
$=\sec x\tan x\times\sec x+\sec x\times\sec x\tan x$
$=2\sec^2 x\tan x$

(2) $(\csc^2 x)'$
$=(\csc x\times\csc x)'$
$=-\csc x\cot x\times\csc x+\csc x\times(-\csc x\cot x)$
$=-2\csc^2 x\cot x$

(3) $(\cot^2 x)'=(\cot x\times\cot x)'$
$=-\csc^2 x\times\cot x+\cot x\times(-\csc^2 x)$
$=-2\csc^2 x\cot x$

5-1 (1) $y'=\left(\dfrac{3}{x^3}\right)'=(3x^{-3})'=-9x^{-4}=-\dfrac{9}{x^4}$

(2) $y'=\left(\dfrac{x^3+2}{x^2}\right)'=\left(x+\dfrac{2}{x^2}\right)'=(x+2x^{-2})'$
$=1-4x^{-3}=1-\dfrac{4}{x^3}=\dfrac{x^3-4}{x^3}$

소단원 확인 문제 130~131쪽

1-1 (1) $y'=\dfrac{12}{x^5}$ (2) $y'=1-\dfrac{3}{x^2}$
(3) $y'=\csc x-x\csc x\cot x$
(4) $y'=\dfrac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}$

2-1 (1) $y'=-\dfrac{x+3}{(x-1)^3}$ (2) $y'=-\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$
(3) $y'=\dfrac{2\cos x}{(2-\sin x)^2}$ (4) $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

3-1 $\dfrac{1}{4}$

1-1 (1) $y'=\left(-\dfrac{3}{x^4}\right)'=(-3x^{-4})'=12x^{-5}=\dfrac{12}{x^5}$

(2) $y'=\left(x+\dfrac{3}{x}\right)'=1-\dfrac{3}{x^2}$

(3) $y'=(x\csc x)'$
$=\csc x+x(-\csc x\cot x)$
$=\csc x-x\csc x\cot x$

(4) $y'=\dfrac{(\sec^2 x)\times x-\tan x}{x^2}=\dfrac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}$

2-1 (1) $y'=\dfrac{(x-1)^2-(x+1)\times 2(x-1)}{(x-1)^4}$
$=\dfrac{(x-1)-2(x+1)}{(x-1)^3}$
$=-\dfrac{x+3}{(x-1)^3}$

(2) $y'=-\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

(3) $y'=\dfrac{\cos x(2-\sin x)-\sin x(-\cos x)}{(2-\sin x)^2}$
$=\dfrac{2\cos x}{(2-\sin x)^2}$

(4) $y'=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

3-1 $f(1)=\dfrac{a}{4}=\dfrac{1}{2}$이므로 $a=2$

즉, $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+3}$에서

$f'(x)=\dfrac{2(x^2+3)-2x\times 2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2}$

$\therefore f'(1)=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$

2-2 합성함수의 미분법

내신 대비 쌍둥이 문제 133~135쪽

1-1 (1) $y'=-\dfrac{6}{(2x-1)^4}$ (2) $y'=3e^{3x+2}$
(3) $y'=\dfrac{3(\ln x)^2}{x}$ (4) $y'=4\cos(4x+3)$

2-1 $\dfrac{5\sqrt{3}}{24}\pi$

3-1 (1) $y'=\dfrac{5}{2}x\sqrt{x}$ (2) $y'=-\dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

4-1 (1) $y'=\dfrac{1}{x\ln 5}$ (2) $y'=\dfrac{3x^2}{x^3+1}$
(3) $y'=\cot x$ (4) $y'=\dfrac{7}{(7x+1)\ln 7}$

1-1 (1) $2x-1=u$라고 하면 $y=\frac{1}{u^3}$이므로

$$y'=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=-\frac{3}{u^4}\times2=-\frac{6}{(2x-1)^4}$$

(2) $3x+2=u$라고 하면 $y=e^u$이므로

$$y'=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=e^u\times3=3e^{3x+2}$$

(3) $\ln x=u$라고 하면 $y=u^3$이므로

$$y'=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=3u^2\times\frac{1}{x}=\frac{3(\ln x)^2}{x}$$

(4) $4x+3=u$라고 하면 $y=\sin u$이므로

$$y'=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\cos u\times4=4\cos(4x+3)$$

2-1 $\frac{\pi}{12}t-\frac{3}{4}\pi=u$라고 하면 $y=5\sin u+16$이므로

$$y'=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dt}=5\cos u\times\frac{\pi}{12}$$

$$=\frac{5}{12}\pi\cos\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{3}{4}\pi\right)$$

따라서 $t=11$에서의 y의 순간변화율은

$$\frac{5}{12}\pi\cos\left(\frac{11}{12}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{5}{12}\pi\cos\frac{\pi}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{24}\pi$$

3-1 (1) $y'=(x^{\frac{5}{2}})'=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}$

(2) $y'=(x^{-\frac{2}{3}})'=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

4-1 (1) $y'=\frac{1}{x\ln 5}$

(2) $y'=\frac{(x^3+1)'}{x^3+1}=\frac{3x^2}{x^3+1}$

(3) $y'=\frac{(\sin x)'}{\sin x}=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

(4) $y'=\frac{(7x+1)'}{(7x+1)\ln 7}=\frac{7}{(7x+1)\ln 7}$

소단원 확인 문제 136~138쪽

1-1 ㄴ, ㄷ

2-1 (1) $y'=2\times3^{2x-1}\ln 3$ (2) $y'=-\frac{6x}{(x^2-4)^4}$

(3) $y'=-3\sin(3x+4)$ (4) $y'=\frac{2(e^{2x}-e^{-2x})}{e^{2x}+e^{-2x}}$

3-1 (1) $y'=\frac{7}{3}x\sqrt[3]{x}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

(2) $y'=-\pi\sin\pi x\sin x+\cos\pi x\cos x$

(3) $y'=\frac{(5x-1)e^{5x-3}}{x^2}$ (4) $y'=-2\tan 2x$

4-1 $\log 4$

1-1 ㄱ. $\{(2x+1)^3\}'=3(2x+1)^2\times2=6(2x+1)^2$ (거짓)

ㄴ. $\{\ln(x^2+3x)\}'=\frac{(x^2+3x)'}{x^2+3x}=\frac{2x+3}{x^2+3x}$ (참)

ㄷ. $(\sqrt{x+3})'=\{(x+3)^{\frac{1}{2}}\}'=\frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\ \text{(참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

2-1 (1) $2x-1=u$라고 하면 $y=3^u$이므로

$$y'=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=3^u\ln 3\times2=2\times3^{2x-1}\ln 3$$

(2) $x^2-4=u$라고 하면 $y=\frac{1}{u^3}$이므로

$$y'=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=-\frac{3}{u^4}\times2x=-\frac{6x}{(x^2-4)^4}$$

(3) $3x+4=u$라고 하면 $y=\cos u$이므로

$$y'=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(-\sin u)\times3$$

$$=-3\sin(3x+4)$$

(4) $y'=\frac{(e^{2x}+e^{-2x})'}{e^{2x}+e^{-2x}}=\frac{2(e^{2x}-e^{-2x})}{e^{2x}+e^{-2x}}$

3-1 (1) $y'=\{(x^2+1)\sqrt[3]{x}\}'=(x^2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x})'=\left(x^{\frac{7}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\right)'$

$$=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{7}{3}x\sqrt[3]{x}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

(2) $y'=(\cos\pi x)'\sin x+\cos\pi x(\sin x)'$

$$=(-\pi\sin\pi x)\sin x+\cos\pi x(\cos x)$$

$$=-\pi\sin\pi x\sin x+\cos\pi x\cos x$$

(3) $y' = \dfrac{(e^{5x-3})'x - e^{5x-3}}{x^2}$

$= \dfrac{5e^{5x-3} \times x - e^{5x-3}}{x^2} = \dfrac{(5x-1)e^{5x-3}}{x^2}$

(4) $y' = \dfrac{(\cos 2x)'}{\cos 2x} = -\dfrac{2\sin 2x}{\cos 2x} = -2\tan 2x$

4-1 $y=f(x)$, $2^x-1=u$라고 하면 $y=\log|u|$이므로

$y' = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{u \ln 10} \times 2^x \ln 2 = \dfrac{2^x \ln 2}{(2^x-1)\ln 10}$

$\therefore\ f'(1) = \dfrac{2\ln 2}{\ln 10} = \dfrac{\ln 4}{\ln 10} = \log 4$

2-3 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

내신 대비 쌍둥이 문제 139~140쪽

1-1 (1) $y=2(x-3)^2$, 그래프는 풀이 참조

(2) $(x+1)^2+y^2=1$, 그래프는 풀이 참조

2-1 (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{1+e^t}$

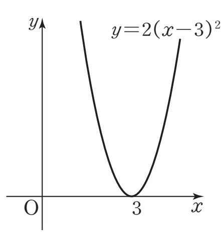
(2) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\cos 2t}{\sin 2t}$ (단, $\sin 2t \neq 0$)

3-1 $-\dfrac{1}{8}$

1-1 (1) $x=-t+3$에서 $t=-x+3$이므로

$y=2t^2=2(-x+3)^2=2(x-3)^2$

따라서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

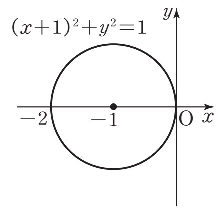


(2) $x=\cos t-1$에서 $\cos t = x+1$

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$이므로

$(x+1)^2+y^2=1$

따라서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



2-1 (1) $\dfrac{dx}{dt}=1+e^t$, $\dfrac{dy}{dt}=3$이므로

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{1+e^t}$

(2) $\dfrac{dx}{dt} = -2\sin 2t$, $\dfrac{dy}{dt} = 2\cos 2t$이므로

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\cos 2t}{-2\sin 2t} = -\dfrac{\cos 2t}{\sin 2t}$ (단, $\sin 2t \neq 0$)

3-1 $\dfrac{dx}{dt}=2$, $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{t^2}$이므로

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\dfrac{1}{t^2}}{2} = -\dfrac{1}{2t^2}$

따라서 $t=2$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$-\dfrac{1}{2\times 2^2} = -\dfrac{1}{8}$

소단원 확인 문제 141~142쪽

1-1 (1) $y=\ln(x-1)-\ln 3$

(2) 풀이 참조

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{3t}$

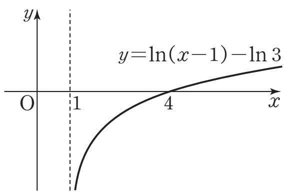
2-1 (1) $\dfrac{dy}{dx} = -e^t$ (2) $\dfrac{dy}{dx} = 2e^{t+1}\sqrt{t}$ (단, $t \neq 0$)

(3) $\dfrac{dy}{dx} = 2t^2+3t$ (4) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{t^3+t}$

1-1 (1) $x=3t+1$에서 $t=\dfrac{x-1}{3}$

$y=\ln t = \ln\dfrac{x-1}{3} = \ln(x-1)-\ln 3$

(2) 함수 $y=\ln(x-1)-\ln 3$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(3) $\dfrac{dx}{dt}=3$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{t}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{t}}{3}=\frac{1}{3t}$$

2-1 (1) $\dfrac{dx}{dt}=-1$, $\dfrac{dy}{dx}=e^t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^t}{-1}=-e^t$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$, $\dfrac{dy}{dt}=e^{t+1}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{t+1}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=2e^{t+1}\sqrt{t}\ (\text{단, } t\neq 0)$$

(3) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}$, $\dfrac{dy}{dt}=2t+3$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2t+3}{\frac{1}{t}}=2t^2+3t$$

(4) $\dfrac{dx}{dt}=1+\dfrac{1}{t^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{2}{t^3}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{2}{t^3}}{1+\frac{1}{t^2}}=-\frac{2}{t^3+t}$$

2-4 음함수와 역함수의 미분법

내신 대비 쌍둥이 문제 　　144~146쪽

1-1 (1) $x-2y-7=0$ (2) $2x-y-3xy+1=0$

2-1 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$ (단, $y\neq 0$) (2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x-1}{y}$ (단, $y\neq 0$)

3-1 $\dfrac{1}{6}$ 　　**4-1** $-\dfrac{95}{461}$

1-1 (1) $x=2y+7$에서 $x-2y-7=0$

(2) $y=\dfrac{2x+1}{3x+1}$에서 $\dfrac{2x+1}{3x+1}-y=0$

$2x+1-y(3x+1)=0$

$\therefore\ 2x-y-3xy+1=0$

2-1 (1) 주어진 방정식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2y\times\frac{dy}{dx}-4=0$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}\ (\text{단, } y\neq 0)$$

(2) 주어진 방정식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x+2y\times\frac{dy}{dx}-2=0$$

$$2y\times\frac{dy}{dx}=-2x+2$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x-1}{y}\ (\text{단, } y\neq 0)$$

3-1 $f^{-1}(3)=a$라고 하면 $f(a)=3$

$f(a)=a^3+a^2+a=3$에서

$a^3+a^2+a-3=0$

$(a-1)(a^2+2a+3)=0$ 　　$\therefore\ a=1$

즉, $f^{-1}(3)=1$

또, $f'(x)=3x^2+2x+1$에서 $f'(1)=6$이므로

$$(f^{-1})'(3)=\frac{1}{f'(f^{-1}(3))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{6}$$

4-1 $\tan x=\dfrac{5-1.2}{y}=\dfrac{3.8}{y}=\dfrac{19}{5y}$에서

$$y=\frac{19}{5\tan x}=\frac{19}{5}\cot x$$

위 방정식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{19}{5}\csc^2 x$$

이므로

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=-\frac{5}{19\csc^2 x}=-\frac{5}{19}\sin^2 x$$

한편, $y=2$일 때 $\sin x=\dfrac{3.8}{\sqrt{2^2+3.8^2}}=\dfrac{19}{\sqrt{461}}$

이므로 $\dfrac{dx}{dy}$의 값은 $-\dfrac{5}{19}\times\left(\dfrac{19}{\sqrt{461}}\right)^2=-\dfrac{95}{461}$

소단원 확인 문제 148~149쪽

1-1 (1) $\frac{dy}{dx}=-\frac{y+1}{x+1}$ (단, $x\neq-1$)

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x-2y}$ (단, $x\neq 2y$)

(3) $\frac{dy}{dx}=-\frac{4y}{3x}$ (단, $x\neq 0$, $y\neq 0$)

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{y}$ (단, $y\neq 0$)

2-1 $\frac{1}{4}$ **3-1** -17, 3

1-1 (1) $1+\frac{dy}{dx}+y+x\times\frac{dy}{dx}=0$

$(x+1)\times\frac{dy}{dx}+y+1=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{y+1}{x+1}$ (단, $x\neq-1$)

(2) $2x-y-x\times\frac{dy}{dx}+2y\times\frac{dy}{dx}=0$

$(-x+2y)\times\frac{dy}{dx}+2x-y=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x-2y}$ (단, $x\neq 2y$)

(3) $4x^3y^3+3x^4y^2\times\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{4x^3y^3}{3x^4y^2}=-\frac{4y}{3x}$ (단, $x\neq 0$, $y\neq 0$)

(4) $2x+2-2y\times\frac{dy}{dx}=0$

$-2y\times\frac{dy}{dx}=-2x-2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{y}$ (단, $y\neq 0$)

2-1 $f(2)=3$에서 $g(3)=2$

$\therefore g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{4}$

3-1 $f^{-1}(a)=b$라고 하면 $f(b)=a$

$(f^{-1})'(a)=\frac{1}{f'(f^{-1}(a))}=\frac{1}{f'(b)}=\frac{1}{13}$

이므로

$f'(b)=13$

그런데 $f'(x)=3x^2+1$에서 $f(b)=3b^2+1=13$

$\therefore b=\pm 2$

(i) $b=2$일 때

$a=f(b)=f(2)=8+2-7=3$

(ii) $b=-2$일 때

$a=f(b)=f(-2)=-8-2-7=-17$

(i), (ii)에서 $a=3$ 또는 $a=-17$

2-5 이계도함수

내신 대비 쌍둥이 문제 151쪽

1-1 (1) $y''=6x-12$ (2) $y''=\frac{1}{x+1}$

(3) $y''=(2x-4)e^{-x}$ (4) $y''=2\sec^2 x\tan x$

1-1 (1) $y'=3x^2-12x+11$이므로

$y''=6x-12$

(2) $y'=\ln(x+1)+(x+1)\times\frac{1}{x+1}=\ln(x+1)+1$

이므로

$y''=\frac{1}{x+1}$

(3) $y'=2e^{-x}-2xe^{-x}=(2-2x)e^{-x}$이므로

$y''=-2e^{-x}-(2-2x)e^{-x}=(2x-4)e^{-x}$

(4) $y'=\sec^2 x$이므로

$y''=2\sec x\times\sec x\tan x$

$=2\sec^2 x\tan x$

소단원 확인 문제 152~153쪽

1-1 (가) 2 (나) 3

2-1 (1) $y''=-\sin x-\sqrt{3}\cos x$ (2) $y''=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

(3) $y''=(x^2-4x+2)e^{-x}$ (4) $y''=4\ln x+6$

3-1 $a=-2$, $b=5$

4-1 $\frac{4e^3+1}{e}$

1-1 $y'=(x+1)'e^x+(x+1)(e^x)'$

$=e^x+(x+1)e^x$

$=(x+\boxed{2})e^x$

$y''=(x+\boxed{2})'e^x+(x+\boxed{2})(e^x)'$

$=e^x+(x+2)e^x$

$=(x+\boxed{3})e^x$

2-1 (1) $y'=\cos x-\sqrt{3}\sin x$이므로

$y''=-\sin x-\sqrt{3}\cos x$

(2) $y'=\dfrac{(\sqrt{x^2+1})'}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{2x}{2(x^2+1)}=\dfrac{x}{x^2+1}$이므로

$y''=\dfrac{(x^2+1)-x\times 2x}{2(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

(3) $y'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x}$이므로

$y''=(2-2x)e^{-x}-(2x-x^2)e^{-x}$

$=(x^2-4x+2)e^{-x}$

(4) $y'=4x\ln x+2x^2\times\dfrac{1}{x}=4x\ln x+2x$

$=2x(2\ln x+1)$

이므로

$y''=2(2\ln x+1)+2x\times\dfrac{2}{x}=4\ln x+6$

3-1 $y'=e^x\cos 2x+e^x(-2\sin 2x)$

$=e^x(\cos 2x-2\sin 2x)$

$y''=e^x(\cos 2x-2\sin 2x)+e^x(-2\sin 2x-4\cos 2x)$

$=e^x(-3\cos 2x-4\sin 2x)$

이때 $y''+ay'+by=0$이므로

$e^x(-3\cos 2x-4\sin 2x)$

$+ae^x(\cos 2x-2\sin 2x)+be^x\cos 2x=0$

그런데 $e^x>0$이므로

$(-3+a+b)\cos 2x+(-4-2a)\sin 2x=0$

위의 식이 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-3+a+b=0,\ -4-2a=0$

$\therefore a=-2,\ b=5$

4-1 $f'(x)=2e^{2x}-e^{-x}$, $f''(x)=4e^{2x}+e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=f''(1)$

이므로

$f''(1)=4e^2+e^{-1}=\dfrac{4e^3+1}{e}$

중단원 **연습 문제** 155~160쪽

1-1 (1) $y'=\dfrac{4x^3-6x^2-2}{(x-1)^2}$ (2) $y'=4\sin(-4x+1)$

(3) $y'=-\dfrac{e^x}{(e^x+3)^2}$ (4) $y'=\dfrac{2x\ln x-x}{(\ln x)^2}$

2-1 (1) $\dfrac{dy}{dx}=3\sqrt{t^2-t}$ (단, $t>1$)

(2) $\dfrac{dy}{dx}=t^2+2t$

3-1 (1) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2}{2y-1}\left(\text{단, } y\neq\dfrac{1}{2}\right)$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x^2}{y^2}$ (단, $y\neq 0$)

4-1 12

5-1 (1) $f'(x)=3\cos(3x+5)$ (2) $f''(x)=-9\sin(3x+5)$

6-1 $a+b=5$ (단, $a\neq b$)

7-1 0 **8-1** $-\dfrac{1}{2}$

9-1 $\dfrac{1}{7}$ **10-1** 1

11-1 $\dfrac{9}{2}$

1-1 (1) $y'=\dfrac{(6x^2+1)(x-1)-(2x^3+x+1)}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{4x^3-6x^2-2}{(x-1)^2}$

(2) $y'=-4\{-\sin(-4x+1)\}$

$=4\sin(-4x+1)$

(3) $y'=-\dfrac{(e^x+3)'}{(e^x+3)^2}=-\dfrac{e^x}{(e^x+3)^2}$

(4) $y'=\dfrac{2x\ln x-x^2\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{2x\ln x-x}{(\ln x)^2}$

2-1 (1) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{3}{2}\sqrt{t}$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{t}}{\frac{1}{2\sqrt{t-1}}}=3\sqrt{t}\sqrt{t-1}$

$=3\sqrt{t^2-t}$ (단, $t>1$)

(2) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{(t+1)-t}{(t+1)^2}=\dfrac{1}{(t+1)^2}$,

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2t(t+1)-t^2}{(t+1)^2}=\frac{t^2+2t}{(t+1)^2}\text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{t^2+2t}{(t+1)^2}}{\frac{1}{(t+1)^2}}=t^2+2t$$

3-1 (1) $2+2y\times\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}$

$$(2y-1)\frac{dy}{dx}=-2$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{2}{2y-1}\ \left(\text{단, } y\neq\frac{1}{2}\right)$$

(2) $3x^2+3y^2\times\frac{dy}{dx}=0$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x^2}{y^2}\ (\text{단, } y\neq 0)$$

4-1 $f^{-1}(2)=a$라고 하면 $f(a)=2$이므로

$\sqrt[3]{a+1}=2,\ a+1=8,\ a=7$

$\therefore\ f^{-1}(2)=7$

한편, $f'(x)=\{(x+1)^{\frac{1}{3}}\}'=\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$\therefore\ (f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(f^{-1}(2))}=\frac{1}{f'(7)}$$

$$=3\sqrt[3]{8^2}=3\times4=12$$

5-1 (1) $f'(x)=\cos(3x+5)\times(3x+5)'$

$=3\cos(3x+5)$

(2) $f''(x)=\{3\cos(3x+5)\}'$

$=3\{-\sin(3x+5)\}\times(3x+5)'$

$=-9\sin(3x+5)$

6-1 $f'(x)=-\frac{(2x-5)'}{(2x-5)^2}=-\frac{2}{(2x-5)^2}$이므로

$f'(a)=f'(b)$에서

$$-\frac{2}{(2a-5)^2}=-\frac{2}{(2b-5)^2}$$

$(2a-5)^2=(2b-5)^2$

$2a-5=2b-5$ 또는 $2a-5=-(2b-5)$

이때 $a\neq b$이므로 $2a-5=-(2b-5)$

$2a+2b=10\qquad\therefore\ a+b=5$

7-1 $\frac{dx}{dt}=2t-\frac{4}{t^2},\ \frac{dy}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{4}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{4}{t^2}}{2t-\frac{4}{t^2}}=\frac{t\sqrt{t}-8}{4t^3-8}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to\infty}\frac{t\sqrt{t}-8}{4t^3-8}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t\sqrt{t}}-\frac{8}{t^3}}{4-\frac{8}{t^3}}=0$$

8-1 $2x^2+4xy+4y^2=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$4x+4y+4x\times\frac{dy}{dx}+8y\times\frac{dy}{dx}=0$$

$$(4x+8y)\frac{dy}{dx}=-4x-4y$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x+y}{x+2y}\ (\text{단, } x\neq-2y)$$

따라서 점 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$x=0,\ y=\frac{1}{2}$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값이므로

$$-\frac{0+\frac{1}{2}}{0+2\times\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

9-1 $\lim_{h\to0}\frac{g(4+h)-g(4)}{h}=g'(4)$

$f(1)=4$이므로 $g(4)=1$

이때 $f'(x)=4x^3+3$이므로

$$g'(4)=\frac{1}{f'(g(4))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{7}$$

10-1 $f'(x)=\frac{1}{x+1}$이므로 $f'(n)=\frac{1}{n+1}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(n)}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

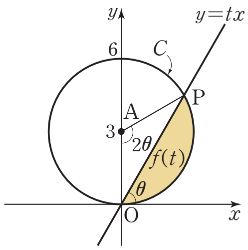
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

11-1 직선 $y=tx$와 원 C가 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 P라 하고, 직선 $y=tx$와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$t=\tan\theta$, $\angle\mathrm{AOP}=\frac{\pi}{2}-\theta$

이때 $\triangle\mathrm{AOP}$가 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{AOP}=2\theta$



$\therefore f(t)=(\text{부채꼴 AOP의 넓이})-\triangle\mathrm{AOP}$

$=\frac{1}{2}\times3^2\times2\theta-\frac{1}{2}\times3\times3\times\sin2\theta$

$=\frac{9}{2}(2\theta-\sin2\theta)$

양변을 θ에 대하여 미분하면

$f'(t)\times\frac{dt}{d\theta}=\frac{9}{2}(2-2\cos2\theta)$

$f'(t)\times\sec^2\theta=9(1-\cos2\theta)$

이때 $\sec^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$,

$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

이므로

$f'(t)\times\frac{1}{\cos^2\theta}=9(1-\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

$\therefore f'(t)=9\cos^2\theta(1-\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

한편, $t=1$일 때 $\tan\theta=1$이므로

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore f'(1)=9\times\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}$

3. 도함수의 활용

3-1 접선의 방정식

내신 대비 쌍둥이 문제 162~164쪽

1-1 (1) $y=3x+6$ (2) $y=1$

(3) $y=(\ln4)x+1$ (4) $y=\frac{1}{\ln4}x-\frac{1}{\ln4}$

2-1 (1) $y=-x+2$ (2) $y=2x-4$

3-1 (1) $y=ex+2\sqrt{e}$, $y=ex-2\sqrt{e}$ (2) $y=ex-2$

4-1 (1) $y=-\frac{1}{6}x+2$, $y=-\frac{1}{2}x+2$

(2) $y=-\frac{1}{e^2}x-\frac{4}{e^2}$

1-1 (1) $f(x)=-\frac{3}{x}$이라고 하면

$f'(x)=\frac{3}{x^2}$이고, $f'(-1)=3$

따라서 접선의 방정식은

$y-3=3(x+1)$, 즉 $y=3x+6$

(2) $f(x)=\cos2x$라고 하면

$f'(x)=-2\sin2x$이고, $f'(\pi)=-2\sin2\pi=0$

따라서 접선의 방정식은

$y-1=0(x-\pi)$, 즉 $y=1$

(3) $f(x)=4^x$이라고 하면

$f'(x)=4^x\ln4$이고, $f'(0)=4^0\ln4=\ln4$

따라서 접선의 방정식은

$y-1=\ln4(x-0)$, 즉 $y=(\ln4)x+1$

(4) $f(x)=\log_4x$라고 하면

$f'(x)=\frac{1}{x\ln4}$이고, $f'(1)=\frac{1}{\ln4}$

따라서 접선의 방정식은

$y-0=\frac{1}{\ln4}(x-1)$, 즉 $y=\frac{1}{\ln4}x-\frac{1}{\ln4}$

2-1 (1) $x+y+xy=3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$1+\frac{dy}{dx}+y+x\times\frac{dy}{dx}=0$

$(x+1)\frac{dy}{dx}=-y-1$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{y+1}{x+1}$ (단, $x\neq-1$)

따라서 점 P(1, 1)에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{1+1}{1+1}=-1$$

이므로 접선의 방정식은

$y-1=(-1)(x-1)$, 즉 $y=-x+2$

(2) $x^2-xy+y^2=4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x-y-x\times\frac{dy}{dx}+2y\times\frac{dy}{dx}=0$$

$$(-x+2y)\frac{dy}{dx}=-2x+y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x-2y}\ (\text{단, } x\neq 2y)$$

따라서 점 P(2, 0)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2\times2-0}{2-2\times0}=\frac{4}{2}=2$$

이므로 접선의 방정식은

$y-0=2(x-2)$, 즉 $y=2x-4$

3-1 (1) $f(x)=-\frac{1}{x}$이라고 하면 $f'(x)=\frac{1}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(a, -\frac{1}{a}\right)$이라고 하면 접선의 기울기가 e이므로

$$f'(a)=\frac{1}{a^2}=e,\ a^2=\frac{1}{e}$$

$$\therefore a=-\frac{1}{\sqrt{e}} \text{ 또는 } a=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

(i) $a=-\frac{1}{\sqrt{e}}$ 일 때

$$f(a)=-\frac{1}{a}=\sqrt{e}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{e}=e\left(x+\frac{1}{\sqrt{e}}\right),\ \text{즉 } y=ex+2\sqrt{e}$$

(ii) $a=\frac{1}{\sqrt{e}}$ 일 때

$$f(a)=-\frac{1}{a}=-\sqrt{e}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y+\sqrt{e}=e\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right),\ \text{즉 } y=ex-2\sqrt{e}$$

(i), (ii)에서 구하는 접선의 방정식은

$y=ex\pm2\sqrt{e}$

(2) $f(x)=\ln x$라고 하면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(a, \ln a)$라고 하면 접선의 기울기가 e이므로

$$f'(a)=\frac{1}{a}=e,\ a=\frac{1}{e}$$

$$f(a)=\ln a=\ln\frac{1}{e}=-1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y+1=e\left(x-\frac{1}{e}\right),\ \text{즉 } y=ex-2$$

4-1 (1) $f(x)=\sqrt{-x+3}$이라고 하면

$$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{-x+3}}$$

접점의 좌표를 $(a, \sqrt{-a+3})$이라고 하면

$$f'(a)=-\frac{1}{2\sqrt{-a+3}}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{-a+3}=-\frac{1}{2\sqrt{-a+3}}(x-a) \quad \cdots\cdots ①$$

이때 접선이 점 (0, 2)를 지나므로

$$2-\sqrt{-a+3}=-\frac{1}{2\sqrt{-a+3}}(0-a)$$

$$2-\sqrt{-a+3}=\frac{a}{2\sqrt{-a+3}}$$

양변에 $2\sqrt{-a+3}$을 곱하여 정리하면

$4\sqrt{-a+3}-2(-a+3)=a$

$4\sqrt{-a+3}=-a+6$

양변을 제곱하여 정리하면

$16(-a+3)=a^2-12a+36$

$a^2+4a-12=0$, $(a+6)(a-2)=0$

$\therefore a=-6$ 또는 $a=2$

(i) $a=-6$일 때, ①에 대입하면

$$y-\sqrt{6+3}=-\frac{1}{2\sqrt{6+3}}(x+6)$$

$$y-3=-\frac{1}{6}(x+6),\ \text{즉 } y=-\frac{1}{6}x+2$$

(ii) $a=2$일 때, ①에 대입하면

$$y-\sqrt{-2+3}=-\frac{1}{2\sqrt{-2+3}}(x-2)$$

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-2),\ \text{즉 } y=-\frac{1}{2}x+2$$

(i), (ii)에서 구하는 접선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{6}x+2,\ y=-\frac{1}{2}x+2$$

(2) $f(x)=xe^x$이라고 하면

$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

접점의 좌표를 (a, ae^a)이라고 하면

$f'(a)=(a+1)e^a$

이므로 접선의 방정식은

$y-ae^a=(a+1)e^a(x-a)$ ……①

이때 접선이 점 $(-4, 0)$을 지나므로

$0-ae^a=(a+1)e^a(-4-a)$

양변을 $-e^a$으로 나누면

$a=(a+1)(4+a)$, $a^2+4a+4=0$

$\therefore a=-2$

$a=-2$를 ①에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y+2e^{-2}=-e^{-2}(x+2)$, 즉 $y=-\frac{1}{e^2}x-\frac{4}{e^2}$

소단원 확인 문제 166~167쪽

1-1 접점의 좌표: $(1, 0)$, 접선의 기울기: 1
접선의 방정식: $y=x-1$

2-1 1

3-1 $y=-2x+3$

1-1 $f(x)=x\ln x$라고 하면

$f'(x)=\ln x+1$

접점의 좌표를 $(a, a\ln a)$라고 하면

$f'(a)=\ln a+1$

이므로 접선의 방정식은

$y-a\ln a=(\ln a+1)(x-a)$

이때 접선이 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1-a\ln a=(\ln a+1)(-a)$

$-1-a\ln a=-a\ln a-a$

$\therefore a=1$

따라서 접점의 좌표는 $(1, 0)$, 접선의 기울기는 1, 접선의 방정식은

$y-0=1\times(x-1)$, 즉 $y=x-1$

2-1 $f(x)=e^{-x}$이라고 하면 $f'(x)=-e^{-x}$

접점의 좌표를 (a, e^{-a})이라고 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(a)=-e^{-a}=-1$ $\therefore a=0$

$f(a)=f(0)=e^0=1$

직선 $y=-x+k$가 접점 $(0, 1)$을 지나므로

$k=1$

3-1 $f(x)=-\frac{2}{x}$라고 하면 $f'(x)=\frac{2}{x^2}$

이때 $f'(2)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이므로 접선에 수직인 직선의 기울기는 -2이다.

또, 이 접선이 점 $(1, 1)$을 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=-2(x-1)$, 즉 $y=-2x+3$

3-2 함수의 그래프의 개형

내신 대비 쌍둥이 문제 169~172쪽

1-1 (1) 구간 $(-\infty, 0]$과 구간 $[2, \infty)$에서 아래로 볼록, 닫힌구간 $[0, 2]$에서 위로 볼록
(2) 닫힌구간 $[-\sqrt{3}, 0]$과 구간 $[\sqrt{3}, \infty)$에서 아래로 볼록, 구간 $(-\infty, -\sqrt{3}]$과 닫힌구간 $[0, \sqrt{3}]$에서 위로 볼록

2-1 (1) $\left(1, -\frac{2}{3}\right)$ (2) $(-1, 0)$

3-1 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

4-1 (1) 최댓값: $\sqrt{2}$, 최솟값: -1 (2) 최댓값: $\frac{1}{4}$, 최솟값: -2

1-1 (1) $y'=4x^3-12x^2$, $y''=12x^2-24x=12x(x-2)$

$x<0$ 또는 $x>2$일 때 $y''>0$

$0<x<2$일 때 $y''<0$

따라서 곡선 $y=x^4-4x^3+12$는 구간 $(-\infty, 0]$과 구간 $[2, \infty)$에서 아래로 볼록하고, 닫힌구간 $[0, 2]$에서 위로 볼록하다.

(2) $y'=\frac{3(x^2+1)-3x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$

$y''=\frac{-6x\times(x^2+1)^2-(-3x^2+3)\times 2(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}$

$=\frac{6x^3-18x}{(x^2+1)^3}=\frac{6x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

$-\sqrt{3}<x<0$ 또는 $x>\sqrt{3}$일 때 $y''>0$

$x<-\sqrt{3}$ 또는 $0<x<\sqrt{3}$일 때 $y''<0$

따라서 곡선 $y=\dfrac{3x}{x^2+1}$는 닫힌구간 $[-\sqrt{3},\ 0]$과 구간 $[\sqrt{3},\ \infty)$에서 아래로 볼록하고, 구간 $(-\infty,\ -\sqrt{3}]$과 닫힌구간 $[0,\ \sqrt{3}]$에서 위로 볼록하다.

2-1 (1) $y'=x^2-2x$, $y''=2x-2=2(x-1)$

$y''=0$에서 $x=1$이고, $x=1$의 좌우에서 y''의 부호가 음에서 양으로 바뀐다.

또, $x=1$일 때, $y=\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{2}{3}$이므로 변곡점의 좌표는 $\left(1,\ -\dfrac{2}{3}\right)$이다.

(2) $y'=2x-\dfrac{1}{x^2}$, $y''=2+\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2(x^3+1)}{x^3}$

$y''=0$에서 $x=-1$이고, $x=-1$의 좌우에서 y''의 부호가 양에서 음으로 바뀐다.

또, $x=-1$일 때, $y=1-1=0$이므로 변곡점의 좌표는 $(-1,\ 0)$이다.

3-1 (1) 함수 $f(x)=x\ln x$의 정의역은 열린구간 $(0,\ \infty)$이다.

$f(1)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 점 $(1,\ 0)$에서 만난다.

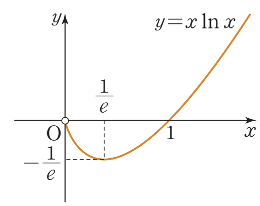
$f'(x)=\ln x+1$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{e}$

$f''(x)=\dfrac{1}{x}$이므로 $f''(x)>0$ (단, $x>0$)

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 곡선 $y=f(x)$의 볼록을 조사하여 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{e}$ (극소)	↗

위 내용을 종합하여 함수 $f(x)=x\ln x$의 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



(2) 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$의 정의역은 $x\neq1$인 모든 실수이다.

$x\neq1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x+2)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-3)\times2(x-1)}{(x-1)^4}$$
$$=\frac{(2x-2)(x-1)-2(x^2-2x-3)}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{8}{(x-1)^3}$$

이므로 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 없다.

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 곡선 $y=f(x)$의 볼록을 조사하여 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	(1)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	-1 (극대)	↘		↘	7 (극소)	↗

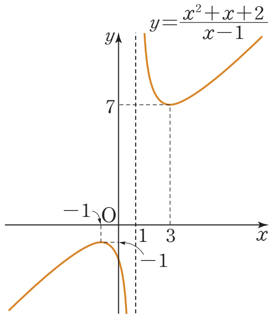
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+2}{x-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2-t+2}{-t-1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t-1+\frac{2}{t}}{-1-\frac{1}{t}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\infty$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{x^2+x+2}{x-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to1+}\frac{x^2+x+2}{x-1}=\infty$$

이므로 점근선은 $x=1$이다.

위 내용을 종합하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



4-1 (1) $f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

따라서 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	0	↗	$\sqrt{2}$ (극대)	↘	1

위 표에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$,

최솟값은 $f(-1)=-1$이다.

(2) $f'(x)=\sin x\cos x-(1-\cos x)\sin x$

$\quad=\sin x\,(2\cos x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구하면

$\sin x=0$에서 $x=0,\ x=\pi,\ x=2\pi$

$\cos x=\dfrac{1}{2}$에서 $x=\dfrac{\pi}{3},\ x=\dfrac{5}{3}\pi$

따라서 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{4}$ (극대)	↘	-2 (극소)	↗	$\frac{1}{4}$ (극대)	↘	0

위 표에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=f\left(\dfrac{5}{3}\pi\right)=\dfrac{1}{4}$, 최솟값은 $f(\pi)=-2$이다.

소단원 확인 문제 174~175쪽

1-1 (1) 구간 $(-\infty,\ 0]$과 구간 $[1,\ \infty)$에서 아래로 볼록, 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 위로 볼록

(2) 구간 $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$에서 위로 볼록,

구간 $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \infty\right)$에서 아래로 볼록

2-1 (1) $(1,\ 2)$ (2) $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 0\right)$ (3) $\left(-1,\ -\dfrac{1}{e^2}\right)$

(4) $(-\sqrt{10},\ \ln 20),\ (\sqrt{10},\ \ln 20)$

3-1 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

1-1 (1) $y'=4x^3-6x^2+2$

$y''=12x^2-12x=12x(x-1)$

$x<0$ 또는 $x>1$일 때 $y''>0$

$0<x<1$일 때 $y''<0$

따라서 곡선 $y=x^4-2x^3+2x+5$는 구간 $(-\infty,\ 0]$과 구간 $[1,\ \infty)$에서 아래로 볼록하고, 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 위로 볼록하다.

(2) $y'=2x+\dfrac{1}{x},\ y''=2-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2x^2-1}{x^2}$

$0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$일 때 $y''<0$

$x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$일 때 $y''>0$

따라서 곡선 $y=x^2+\ln x$는 구간 $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$에서 위로 볼록하고, 구간 $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \infty\right)$에서 아래로 볼록하다.

2-1 (1) $f'(x)=3x^2-6x,\ f''(x)=6x-6=6(x-1)$

$f''(x)=0$에서 $x=1$이고, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀐다.

또, $f(1)=1-3+4=2$이므로 변곡점의 좌표는 $(1,\ 2)$이다.

(2) $f'(x)=-2\sin 2x,\ f''(x)=-4\cos 2x$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos 2x=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=\dfrac{\pi}{4}$이고, $x=\dfrac{\pi}{4}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀐다.

또, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$이므로 변곡점의 좌표는 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 0\right)$이다.

(3) $f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}=(2x+1)e^{2x}$

$f''(x)=2e^{2x}+2(2x+1)e^{2x}=4(x+1)e^{2x}$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$이고, $x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀐다.

또, $f(-1)=-e^{-2}=-\dfrac{1}{e^2}$이므로 변곡점의 좌표는 $\left(-1,\ -\dfrac{1}{e^2}\right)$이다.

(4) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+10}$

$f''(x)=\dfrac{2(x^2+10)-2x\times 2x}{(x^2+10)^2}=\dfrac{-2(x^2-10)}{(x^2+10)^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=-\sqrt{10},\ x=\sqrt{10}$이고, $x=-\sqrt{10}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음에서 양으로, $x=\sqrt{10}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀐다.

또, $f(-\sqrt{10})=\ln 20,\ f(\sqrt{10})=\ln 20$이므로 변곡점의 좌표는 $(-\sqrt{10},\ \ln 20),\ (\sqrt{10},\ \ln 20)$이다.

3-1 (1) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$라고 하면 함수 $f(x)$의 정의역은 열린 구간 $(0,\ \infty)$이다.

$f(1)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 점 $(1,\ 0)$에서 만난다.

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=e$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\times x^2-(1-\ln x)\times 2x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

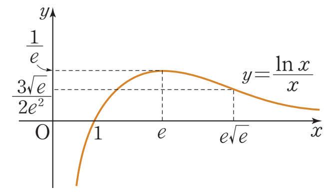
이므로 $f''(x)=0$에서 $x=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 곡선 $y=f(x)$의 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	$\dfrac{3\sqrt{e}}{2e^2}$	↘

또, $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$이므로 점근선은 x축과 y축이다.

위 내용을 종합하여 함수 $y=\dfrac{\ln x}{x}$의 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



(2) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$이라고 하면 함수 $f(x)$의 정의역은 $x\neq 0$인 실수 전체의 집합이다.

$f'(x)=\dfrac{e^x x^2-e^x\times 2x}{x^4}=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=2$

$f''(x)=\dfrac{e^x(x-1)\times x^3-e^x(x-2)\times 3x^2}{x^6}$

$=\dfrac{e^x(x^2-4x+6)}{x^4}$

이므로 $f''(x)=0$을 만족시키는 실수 x의 값은 없다.

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 곡선 $y=f(x)$의 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

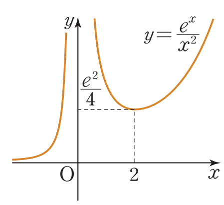
x	$\cdots$	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗		↘	$\dfrac{e^2}{4}$	↗

한편, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t^2e^t}=0$이므로 점근선은 x축이다.

또, $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{t\to\infty}e^{\frac{1}{t}}t^2=\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{t\to\infty}e^{\frac{1}{t}}t^2=\infty$이므로 점근선은 y축이다.

위 내용을 종합하여 함수 $y=\dfrac{e^x}{x^2}$의 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



3-3 방정식과 부등식에의 활용

내신 대비 쌍둥이 문제 178~180쪽

1-1 (1) 2 (2) 2

2-1 (1) 모든 실수 k에 대하여 1

(2) $0\le k<e$일 때 0, $k<0$ 또는 $k=e$일 때 1, $k>e$일 때 2

3-1 풀이 참조

1-1 (1) $f(x)=\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{1}{10}$이라고 하면

$$f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x}$$

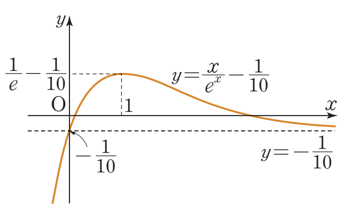
$f'(x)=0$에서 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{10}$	$\searrow$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^x}-\frac{1}{10}\right)=-\frac{1}{10}$이므로 점근선은 $y=-\dfrac{1}{10}$이다.

위 표를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



이때 함수 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{1}{10}$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{1}{10}=0$, 즉 $\dfrac{x}{e^x}=\dfrac{1}{10}$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(2) $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{4}$라고 하면 함수 $f(x)$의 정의역은 열린 구간 $(0,\ \infty)$이다.

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{4}=\frac{4-x}{4x}$$

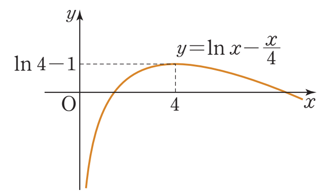
$f'(x)=0$에서 $x=4$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\ln 4-1$	$\searrow$

한편, $\displaystyle\lim_{x\to0+}\left(\ln x-\frac{x}{4}\right)=-\infty$이므로 점근선은 y축이다.

위 표를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



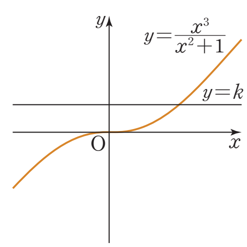
이때 함수 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{4}$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $\ln x-\dfrac{x}{4}=0$, 즉 $\ln x=\dfrac{x}{4}$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

2-1 (1) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$이라고 하면 함수 $f(x)$의 정의역은 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$이다.

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-x^3\times2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

또, $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$는 실수 k의 값에 관계없이 항상 한 점에서 만나므로 방정식 $\dfrac{x^3}{x^2+1}=k$의 서로 다른 실근의 개수는 실수 k의 값에 관계없이 항상 1이다.

(2) 방정식 $e^x=kx$에서 $x\neq0$ ($\because$ $e^x>0$)이므로 양변을 x로 나누면 $\frac{e^x}{x}=k$이다.

$f(x)=\frac{e^x}{x}$이라고 하면 함수 $f(x)$의 정의역은 $x\neq0$인 실수 전체의 집합이다.

$$f'(x)=\frac{e^x x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

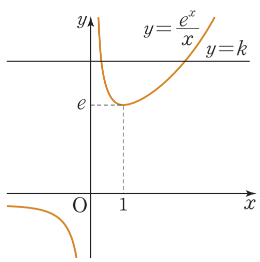
따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	e	↗

$\lim_{x\to0+}\frac{e^x}{x}=\infty$이므로 점근선은 y축이다.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{-te^t}=0$이므로 점근선은 x축이다.

위 표를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 $\frac{e^x}{x}=k$, 즉 $e^x=kx$의 서로 다른 실근의 개수는

$0\le k<e$일 때, 0

$k<0$ 또는 $k=e$일 때, 1

$k>e$일 때, 2

이다.

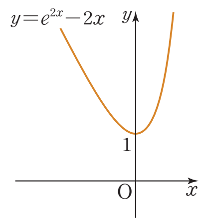
3-1 $f(x)=e^{2x}-2x$라고 하면

$f'(x)=2e^{2x}-2=2(e^{2x}-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗



이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f(0)=1$이므로 $f(x)\ge1$, 즉 $e^{2x}-2x\ge1$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $e^{2x}-2x\ge1$이 성립한다.

소단원 확인 문제 182~183쪽

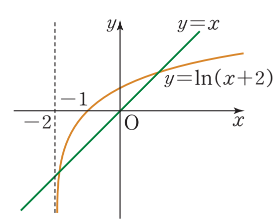
1-1 (1) 2 (2) 0 (3) 2 (4) 1

2-1 풀이 참조

3-1 $0<k<\frac{12}{e^2}$

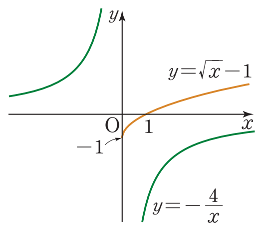
4-1 $\frac{1}{e}$

1-1 (1) $\ln(x+2)=x$에서 함수 $y=\ln(x+2)$의 그래프와 직선 $y=x$는 다음 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만난다.



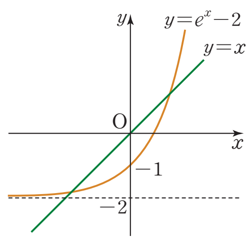
따라서 방정식 $\ln(x+2)=x$, 즉 $\ln(x+2)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(2) $\sqrt{x}-1=-\frac{4}{x}$에서 두 함수 $y=\sqrt{x}-1$, $y=-\frac{4}{x}$의 그래프는 다음 그림과 같이 서로 만나지 않는다.



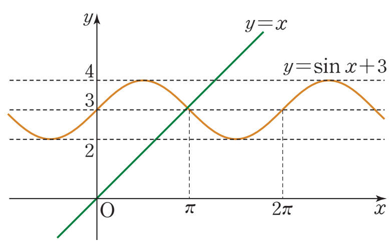
따라서 방정식 $\sqrt{x}-1=-\frac{4}{x}$, 즉 $\sqrt{x}+\frac{4}{x}-1=0$의 서로 다른 실근의 개수는 0이다.

(3) $e^x-2=x$에서 함수 $y=e^x-2$의 그래프와 직선 $y=x$는 다음 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만난다.



따라서 방정식 $e^x-2=x$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(4) $\sin x+3=x$에서 함수 $y=\sin x+3$의 그래프와 직선 $y=x$는 다음 그림과 같이 한 점에서 만난다.



따라서 방정식 $\sin x+3=x$, 즉 $x-\sin x=3$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

2-1 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2$이라고 하면

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

$x\geq 0$일 때, $f'(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $[0, \infty)$에서 증가한다.

이때 $f(0)=0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이므로

$\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2\geq 0$이다.

따라서 $x\geq 0$일 때, 부등식 $\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2\geq 0$,

즉 $\ln(1+x)\geq x-\frac{1}{2}x^2$이 성립한다.

3-1 $f(x)=\frac{3x^2}{e^x}$이라고 하면

$$f'(x)=\frac{6x\times e^x-3x^2\times e^x}{e^{2x}}=\frac{-3x(x-2)}{e^x}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

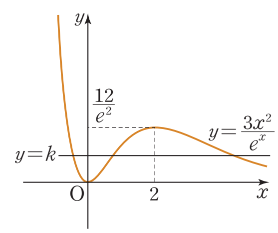
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{12}{e^2}$	$\searrow$

한편, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x}=0$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{t\to\infty}3t^2e^t=\infty$이므로

점근선은 x축이다.

위 표를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)=\frac{3x^2}{e^x}$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 상수 k의 값의 범위는

$0<k<\frac{12}{e^2}$이다.

4-1 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$라고 하면

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=e$

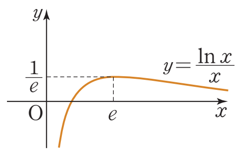
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

이때 함수 $f(x)$의 최댓값이

$\dfrac{1}{e}$이므로 $f(x)\le\dfrac{1}{e}$, 즉

$\dfrac{\ln x}{x}\le\dfrac{1}{e}$이다.



따라서 $x>0$에서 $f(x)\le k$가 성립하려면 $k\ge\dfrac{1}{e}$이어야

하므로 상수 k의 최솟값은 $\dfrac{1}{e}$이다.

3-4 속도와 가속도

내신 대비 쌍둥이 문제 185~187쪽

1-1 속도: $2-\dfrac{2}{e^6}$, 가속도: $\dfrac{4}{e^6}$

2-1 시각: $\dfrac{\pi}{3}$, 가속도: $\sqrt{3}$

3-1 속도: $(\pi,\ 2)$, 가속도: $(0,\ -\pi^2)$

1-1 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라고 하면

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=2-2e^{-2t}$$

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=4e^{-2t}$$

따라서 점 P의 시각 $t=3$에서의 속도와 가속도는 각각

$$v(3)=2-2e^{-6}=2-\frac{2}{e^6},\ a(3)=4e^{-6}=\frac{4}{e^6}$$

2-1 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 하면

$$v(t)=1-2\cos t$$

운동 방향이 바뀌는 시각에서의 속도는 0이므로

$$1-2\cos t=0,\ \cos t=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ t=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi,\ \cdots$$

따라서 처음으로 운동 방향이 바뀌는 시각은 $t=\dfrac{\pi}{3}$이다.

점 P의 시각 t에서의 가속도를 $a(t)$라고 하면

$$a(t)=2\sin t$$

이므로 $t=\dfrac{\pi}{3}$에서의 가속도는

$$a\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$$

3-1 $\dfrac{dx}{dt}=-\pi\cos\pi t,\ \dfrac{dy}{dt}=2+\pi\sin\pi t$

이므로 시각 t에서의 속도는

$$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=(-\pi\cos\pi t,\ 2+\pi\sin\pi t)$$

또, $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\pi^2\sin\pi t,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=\pi^2\cos\pi t$

이므로 시각 t에서의 가속도는

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)=(\pi^2\sin\pi t,\ \pi^2\cos\pi t)$$

따라서 $t=3$에서의 속도와 가속도는 각각

$$(\pi,\ 2),\ (0,\ -\pi^2)$$

이다.

소단원 확인 문제 188~189쪽

1-1 위치: -3, 속도: 0, 가속도: 12

2-1 $\sqrt{2}$

3-1 $\sqrt{3}$

1-1 $t=\dfrac{\pi}{3}$에서의 위치는

$$3\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{3}\right)=3\cos\pi=-3$$

한편,

$$\frac{dx}{dt}=-6\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right),\ \frac{d^2x}{dt^2}=-12\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$$

이므로 $t=\dfrac{\pi}{3}$에서의 속도와 가속도는 각각

$$-6\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-6\sin\pi=0,$$

$$-12\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-12\cos\pi=12$$

2-1 $\dfrac{dx}{dt}=2\cos t(-\sin t)=-2\sin t\cos t=-\sin 2t$

$\dfrac{dy}{dt}=2\sin t\cos t=\sin 2t$

한편, 시각 t에서의 속도의 크기는

$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$

$=\sqrt{(-\sin 2t)^2+(\sin 2t)^2}$

$=\sqrt{2\sin^2 2t}$

이므로 $t=\dfrac{\pi}{4}$에서의 속도의 크기는

$\sqrt{2\sin^2\dfrac{\pi}{2}}=\sqrt{2}$

3-1 $\dfrac{dx}{dt}=2t$, $\dfrac{dy}{dt}=2at+2$이므로

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=2$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=2a$

이때 $t=1$에서의 가속도의 크기가 4이므로

$\sqrt{2^2+(2a)^2}=\sqrt{4a^2+4}=2\sqrt{a^2+1}=4$

$a^2+1=4$ $\quad\therefore a=\pm\sqrt{3}$

따라서 양수 a의 값은 $\sqrt{3}$이다.

중단원 **연습 문제** 191~198쪽

1-1 (1) $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (2) $y=\dfrac{1}{2e}x+\ln 2+3$

(3) $y=1$

2-1 (1) $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\left[\dfrac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ (2) $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi\right]$

(3) $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3}{2}\pi, \dfrac{3}{2}\pi\right)$

3-1 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

4-1 (1) $y=11x-3$ (2) $y=-2x+\dfrac{5}{3}\pi$

5-1 최댓값: $\dfrac{e^3}{7}$, 최솟값: $\dfrac{1}{2e^2}$

6-1 $k\le 2-\ln 4$ **7-1** $\dfrac{1}{8}$

8-1 $5\sqrt{3}$ **9-1** e

10-1 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$

1-1 (1) 방정식 $x^2+4y^2=4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+8y\times\dfrac{dy}{dx}=0$, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{4y}$ (단, $y\ne 0$)

이므로 점 $\left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$-\dfrac{1}{4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

따라서 점 $\left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x-1)$, 즉 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(2) $y'=\dfrac{1}{x}$이므로 접점의 좌표를 $(a, \ln a+3)$이라고 하면

$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2e}$ $\quad\therefore a=2e$

따라서 접선의 방정식은

$y-(\ln 2e+3)=\dfrac{1}{2e}(x-2e)$, 즉

$y=\dfrac{1}{2e}x+\ln 2+3$

(3) 접점의 좌표를 $(a, a-\ln a)$라고 하면

$y'=1-\dfrac{1}{x}$

이므로 접선의 기울기는 $1-\dfrac{1}{a}$이다.

이때 접선의 방정식은

$y-(a-\ln a)=\left(1-\dfrac{1}{a}\right)(x-a)$, 즉

$y=\left(1-\dfrac{1}{a}\right)x+1-\ln a$ ……①

이때 접선이 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=1-\ln a$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ①에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=1$

2-1 함수 $y=x-2\cos x$에서

$y'=1+2\sin x$, $y''=2\cos x$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3}{2}\pi<x<2\pi$일 때 $y''=2\cos x>0$

$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3}{2}\pi$일 때 $y''=2\cos x<0$

(1) 곡선 $y=x-2\cos x$는 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\left[\dfrac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$에서 아래로 볼록하다.

(2) 곡선 $y=x-2\cos x$는 닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$에서 위로 볼록하다.

(3) $0<x<2\pi$일 때 $y''=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{2}\pi$이고, $x=\frac{\pi}{2}$의 좌우에서 y''의 부호가 양에서 음으로 바뀌고, $x=\frac{3}{2}\pi$의 좌우에서 y''의 부호가 음에서 양으로 바뀐다.

또, $x=\frac{\pi}{2}$일 때, $y=\frac{\pi}{2}-2\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

$x=\frac{3}{2}\pi$일 때, $y=\frac{3}{2}\pi-2\cos\frac{3}{2}\pi=\frac{3}{2}\pi$

이므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$이다.

3-1 (1) $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$이라고 하면 함수 $f(x)$의 정의역은 $x\neq0$인 실수 전체의 집합이다.

또, $x\neq0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$$f'(x)=2x-\frac{2}{x^3}=\frac{2(x^4-1)}{x^3}$$
$$=\frac{2(x+1)(x-1)(x^2+1)}{x^3}$$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=\pm1$

$$f''(x)=2+\frac{6}{x^4}$$

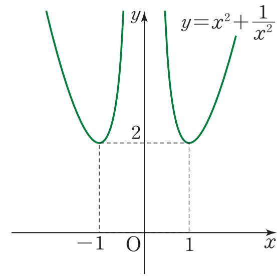
이므로 $f''(x)=0$을 만족시키는 실수 x의 값은 없다

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 곡선 $y=f(x)$의 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	2 (극소)	↗		↘	2 (극대)	↗

한편, $\lim_{x\to0}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=\infty$이므로 점근선은 y축이다.

위 내용을 종합하여 함수 $y=x^2+\frac{1}{x^2}$의 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



(2) $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$이라고 하면 함수 $f(x)$의 정의역은 $x\neq\pm1$인 실수 전체의 집합이다.

또, $x\neq\pm1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$$f'(x)=\frac{4x(x^2-1)-2x^2\times2x}{(x^2-1)^2}$$
$$=-\frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$

$$f''(x)=-\frac{4(x^2-1)^2-4x\times2(x^2-1)\times2x}{(x^2-1)^4}$$
$$=-\frac{4(x^2-1)-16x^2}{(x^2-1)^3}$$
$$=\frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

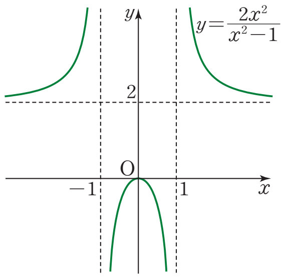
이므로 $f''(x)=0$을 만족시키는 실수 x의 값은 없다.

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 곡선 $y=f(x)$의 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$	(1)	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	$+$		$-$	$-$	$-$		$+$
$f(x)$	↗		↗	0 (극대)	↘		↘

한편, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=2$이므로 점근선은 $y=2$이다.

위 내용을 종합하여 함수 $y=\frac{2x^2}{x^2-1}$의 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



4-1 (1) 함수 $y=2x^3+11x-3$에서

$y'=6x^2+11$, $y''=12x$

$y''=0$에서 $x=0$이고, $x=0$의 좌우에서 y''의 부호가 음에서 양으로 바뀐다.

또, $x=0$일 때, $y=-3$, $y'=11$이므로 변곡점의 좌표는 $(0,\ -3)$이고, 접선의 기울기는 11이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-(-3)=11(x-0)$, 즉 $y=11x-3$

(2) 함수 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$에서

$y'=\sqrt{3}\cos x-\sin x$

$$y''=-\sqrt{3}\sin x-\cos x=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$0\le x\le\pi$에서 $y''=0$을 만족시키는 x의 값은

$x+\frac{\pi}{6}=\pi$, 즉 $x=\frac{5}{6}\pi$이고, $x=\frac{5}{6}\pi$의 좌우에서 y''의 부호가 음에서 양으로 바뀐다.

또, $x=\frac{5}{6}\pi$일 때,

$$y=\sqrt{3}\sin\frac{5}{6}\pi+\cos\frac{5}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

$$y'=\sqrt{3}\cos\frac{5}{6}\pi-\sin\frac{5}{6}\pi=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2$$

이므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{5}{6}\pi,\ 0\right)$이고, 접선의 기울기는 -2이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-0=-2\left(x-\frac{5}{6}\pi\right),\ \text{즉 } y=-2x+\frac{5}{3}\pi$$

5-1 함수 $f(x)=\frac{e^x}{x+4}$에서

$$f'(x)=\frac{e^x(x+4)-e^x}{(x+4)^2}=\frac{e^x(x+3)}{(x+4)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$

닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 함수 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

따라서 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(3)=\frac{e^3}{7}$, 최솟값은 $f(-2)=\frac{1}{2e^2}$이다.

6-1 $f(x)=\sqrt{x}-\ln x\,(x>0)$라고 하면

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

$f'(x)=0$에서 $x=4$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$2-\ln 4$	↗

함수 $f(x)$의 최솟값이 $2-\ln 4$이므로 $f(x)\ge 2-\ln 4$이다.

따라서 $x>0$일 때 $f(x)\ge k$가 성립하려면

$2-\ln 4\ge k$, 즉 $k\le 2-\ln 4$

7-1 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라고 하면

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=\frac{2(t+1)-2t}{(t+1)^2}=\frac{2}{(t+1)^2}$$

$$a(t)=-\frac{4}{(t+1)^3}$$

$a(t)=-\frac{1}{16}$에서 $-\frac{4}{(t+1)^3}=-\frac{1}{16}$, $t=3$

따라서 점 P의 $t=3$에서의 속도는

$$\frac{2}{(3+1)^2}=\frac{1}{8}$$

8-1 $y=5t-5t^2=-5\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$이므로 $t=\frac{1}{2}$일 때 y좌표가 최대이다.

한편,

$$\frac{dx}{dt}=5\sqrt{3},\ \frac{dy}{dt}=5-10t$$

이므로 $t=\frac{1}{2}$에서의 속도의 크기는

$$\sqrt{(5\sqrt{3})^2+\left(5-10\times\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{(5\sqrt{3})^2}=5\sqrt{3}$$

9-1 $y'=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

접점의 좌표를 $(a,\ ae^{-a})$이라고 하면 접선의 기울기는 $(1-a)e^{-a}$이다.

이때 접선의 방정식은

$$y-ae^{-a}=(1-a)e^{-a}(x-a)$$

이 접선이 점 $\mathrm{P}(-1,\ 0)$를 지나므로

$$0-ae^{-a}=(1-a)e^{-a}(-1-a)$$

$$e^{-a}(a^2+a-1)=0$$

이때 $e^{-a}\neq 0$이므로

$$a^2+a-1=0 \qquad \cdots\cdots①$$

방정식 ①의 서로 다른 두 실근을 $\alpha,\ \beta$라고 하면

$$m_1m_2=(1-\alpha)e^{-\alpha}\times(1-\beta)e^{-\beta}$$
$$=(1-\alpha-\beta+\alpha\beta)e^{-(\alpha+\beta)}$$

이때 ①에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-1$$

이므로

$$m_1m_2=(1+1-1)e^{1}$$
$$=e$$

10-1 닫힌구간 $[0,\ 6]$에서 부등식 $f(x)\le g(x)$를 만족시키기 위해서는 직선 $y=g(x)$가 점 $(5,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 접해야 한다.

이때

$$f'(x)=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}x$$

이므로 점 $(5,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(5)=\frac{\pi}{3}\cos\frac{5}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

따라서 접선의 방정식은

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi(x-5),\ \text{즉}\ y=-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi x+\frac{5\sqrt{3}}{6}\pi$$

$g(x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi x+\dfrac{5\sqrt{3}}{6}\pi$이므로

$$g(4)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{5\sqrt{3}}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

대단원 **모의고사**

209~213쪽

01 ④	**02** ①	**03** ②	**04** ②	**05** ④
06 ④	**07** ①	**08** ⑤	**09** ①	**10** ③
11 ⑤	**12** ②	**13** ④	**14** ①	**15** ①
16 ⑤	**17** ②	**18** ③	**19** ④	**20** ①
21 $\frac{3}{2}$	**22** 1	**23** $(-3,\ -4\pi+3)$	**24** 60	
25 2π				

01 $f(x)=e^x$이라고 하면 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{x-1}=f'(1)=e$

02 $$\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos x)}{\sin x\ln(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos^2x)}{\sin x\ln(x+1)(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2x}{\sin x\ln(x+1)(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x}{\ln(x+1)(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{2\sin x}{x}\times\frac{x}{\ln(x+1)}\times\frac{1}{1+\cos x}\right\}$$
$$=2\times1\times\frac{1}{2}=1$$

03 $\displaystyle\lim_{x\to0}\tan x=0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to0}\ln(a+3x)=0$

$\displaystyle\lim_{x\to0}\ln(a+3x)=\ln a$이므로 $\ln a=0,\ a=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(a+3x)}{\tan x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{\tan x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times\frac{3x}{\tan x}\right\}$$
$$=1\times3=3$$

이므로 $b=3$

$\therefore\ a+b=1+3=4$

04 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$4\cos\theta+\cos2\theta=\frac{1}{8},\ 4\cos\theta\cos2\theta=\frac{a}{8}$$

$4\cos\theta+\cos2\theta=\dfrac{1}{8}$에서

$$4\cos\theta+2\cos^2\theta-1=\frac{1}{8}$$

$$16\cos^2\theta+32\cos\theta-9=0$$

$$(4\cos\theta-1)(4\cos\theta+9)=0$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{4}$$

이때

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times\frac{1}{16}-1=-\frac{7}{8}$$

이므로

$$4\cos\theta\cos 2\theta=1\times\left(-\frac{7}{8}\right)=-\frac{7}{8}$$

따라서 $\frac{a}{8}=-\frac{7}{8}$이므로 $a=-7$

05 $f(\alpha)=\tan^2\alpha=5$에서 $\tan\alpha=\pm\sqrt{5}$

$$f'(x)=2\tan x(\tan x)'=2\tan x\sec^2 x$$

이므로

$$\begin{aligned}f'(\alpha)&=2\tan\alpha\sec^2\alpha\\&=2\tan\alpha(1+\tan^2\alpha)\\&=\pm2\sqrt{5}(1+5)\\&=\pm12\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\therefore\ |f'(\alpha)|=12\sqrt{5}$$

06 $f'(x)=-\frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

$$\therefore\ f'(1)=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

07 $\frac{dx}{dt}=2t,\ \frac{dy}{dt}=-\frac{1}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{2t}=-\frac{1}{2t^3}$$

따라서 $t=-\frac{1}{3}$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$-\frac{1}{2\left(-\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{27}{2}$$

08 점 $(1,\ -1)$이 방정식 $5x^2+ay^2-2=0$의 그래프 위의 점이므로

$$5+a-2=0\qquad\therefore\ a=-3$$

주어진 방정식은

$$5x^2-3y^2-2=0$$

이 방정식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$10x-6y\times\frac{dy}{dx}=0,\ \frac{dy}{dx}=\frac{5x}{3y}\ (\text{단, } y\neq0)$$

따라서 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기 b는

$$b=\frac{5\times1}{3\times(-1)}=-\frac{5}{3}$$

$$\therefore\ a+b=-3-\frac{5}{3}=-\frac{14}{3}$$

09 $g(0)=a$라고 하면 $f(a)=0$이므로

$$f(a)=2a^3-3a^2+6a-5=0$$

$$(a-1)(2a^2-a+5)=0\qquad\therefore\ a=1$$

한편, $f'(x)=6x^2-6x+6$이므로

$$g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\ g(0)+g'(0)=1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$$

10 닫힌구간 $[-\pi,\ \pi]$에서 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지고, 실근의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

따라서 $f'(x)=3+k\cos x$이므로

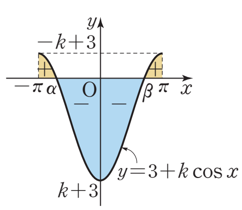
$$f'(-\pi)f'(0)<0,\ f'(0)f'(\pi)<0$$

$$(-k+3)(k+3)<0,\ (k-3)(k+3)>0$$

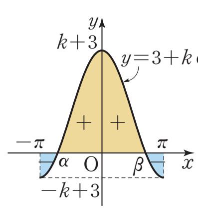
$$\therefore\ k<-3\ \text{또는}\ k>3$$

따라서 자연수 k의 최솟값은 4이다.

참고 [그림 1]에서는 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소이고, [그림 2]에서는 $x=\alpha$에서 극소, $x=\beta$에서 극대이다.



[그림 1]



[그림 2]

11 $e^x>0$이므로 부등식 $ae^x\leq xe^x+1$의 양변을 e^x으로 나누면 $a\leq x+e^{-x}$이 성립한다.

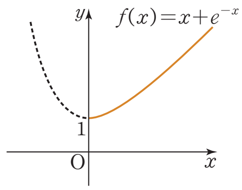
$f(x)=x+e^{-x}\ (x\geq0)$이라고 하면

$$f'(x)=1-e^{-x}=\frac{e^x-1}{e^x}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	1	$\nearrow$



이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 1이므로 $f(x)\geq 1$, 즉 $x+e^{-x}\geq 1$이다.
따라서 $x\geq 0$에서 $f(x)\geq a$가 성립하려면 $a\leq 1$이므로 실수 a의 최댓값은 1이다.

12 $\overline{\mathrm{BE}}=x$라고 하면

$$\tan\alpha=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{1}{4},\ \tan\beta=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{DB}}}=\frac{1}{2},$$

$$\tan(\angle\mathrm{BEC})=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{EB}}}=\frac{1}{x}$$

이때

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}=\frac{6}{7}$$

이므로

$$\frac{1}{x}=\frac{6}{7}\qquad\therefore\ x=\frac{7}{6}$$

13 접점의 좌표를 $(t,\ a\sqrt{t})$라고 하면

$$y'=\frac{a}{2\sqrt{x}}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-a\sqrt{t}=\frac{a}{2\sqrt{t}}(x-t),\ \text{즉 } y=\frac{a}{2\sqrt{t}}x+\frac{a\sqrt{t}}{2}$$

이 접선이 직선 $y=x+4$와 일치하므로

$$\frac{a}{2\sqrt{t}}=1,\ \frac{a\sqrt{t}}{2}=4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$t=4,\ a=4$

14 $\mathrm{P}(t,\ 3e^{-2t})$이므로 $\mathrm{A}(0,\ 3e^{-2t})$, $\overline{\mathrm{AP}}=t$
$y'=-6e^{-2x}$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은
$y-3e^{-2t}=-6e^{-2t}(x-t)$, 즉
$y=-6e^{-2t}x+6te^{-2t}+3e^{-2t}$
이때 점 B는 접선과 y축이 만나는 점이므로
$\mathrm{B}(0,\ 6te^{-2t}+3e^{-2t})$, $\overline{\mathrm{AB}}=6te^{-2t}$
$\triangle\mathrm{APB}$의 넓이를 $S(t)$라고 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\times t\times 6te^{-2t}=3t^2e^{-2t}$$

이므로
$S'(t)=6te^{-2t}+3t^2(-2e^{-2t})=6t(1-t)e^{-2t}$
$t>0$일 때 $S'(t)=0$에서 $t=1$
이때 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		$\nearrow$	$3e^{-2}$	$\searrow$

위 표에서 $S(t)$는 $t=1$에서 최대이고, 최댓값은 $3e^{-2}=\frac{3}{e^2}$이다.

15 $\overline{\mathrm{HA}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OH}}=2-2\cos\theta$
$\triangle\mathrm{BOA}$와 $\triangle\mathrm{QHA}$가 닮음이고, 그 닮음비는
$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{HA}}=2:(2-2\cos\theta)=1:(1-\cos\theta)$
이므로 넓이의 비는
$\triangle\mathrm{BOA}:\triangle\mathrm{QHA}=1:(1-\cos\theta)^2$
$2:\triangle\mathrm{QHA}=1:(1-\cos\theta)^2$
$\triangle\mathrm{QHA}=2(1-\cos\theta)^2$
즉, $S(\theta)=2(1-\cos\theta)^2$이므로
$S'(\theta)=2\times2(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)'$
$=4(1-\cos\theta)\sin\theta$
한편, $S(\alpha)=\frac{1}{8}$에서 $2(1-\cos\alpha)^2=\frac{1}{8}$

$1-\cos\alpha=\pm\frac{1}{4}$

그런데 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$

또, $\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$$\therefore\ S'(\alpha)=4(1-\cos\alpha)\sin\alpha=4\times\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

16 함수 $y=xe^{-x}$에서 $y'=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

$$y''=-e^{-x}+(1-x)(-e^{-x})=(x-2)e^{-x}$$

$y''=0$에서 $x=2$이고, $x=2$의 좌우에서 y''의 부호가 음에서 양으로 바뀐다.

또, $x=2$일 때 $y=2e^{-2}$이므로 변곡점의 좌표는 $\mathrm{A}(2,\ 2e^{-2})$이다.

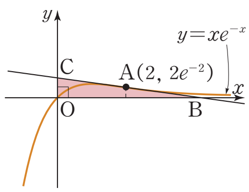
이때 점 $\mathrm{A}(2,\ 2e^{-2})$에서 기울기가 $-e^{-2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-2e^{-2}=-e^{-2}(x-2),\ \text{즉}\ y=-e^{-2}x+4e^{-2}$$

따라서 $\mathrm{B}(4,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 4e^{-2})$이므로 $\triangle\mathrm{OBC}$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OC}}$$

$$=\frac{1}{2}\times4\times4e^{-2}=8e^{-2}=\frac{8}{e^2}$$



17 방정식 $x^2-y^2+8=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x-2y\times\frac{dy}{dx}=0,\ \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$$

이때 점 $\mathrm{P}(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로 접선에 수직인 직선의 기울기는 -3이다.

따라서 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y-3=-3(x-1),\ \text{즉}\ y=-3x+6$$

방정식 $x^2-y^2+8=0$의 그래프와 직선 $y=-3x+6$의 교점의 x좌표를 구하면

$$x^2-(-3x+6)^2+8=0,\ -8x^2+36x-28=0$$

$$2x^2-9x+7=0,\ (2x-7)(x-1)=0$$

$$\therefore\ x=\frac{7}{2}\ \text{또는}\ x=1$$

$x=\frac{7}{2}$일 때, $y=-3\times\frac{7}{2}+6=-\frac{9}{2}$이므로 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{7}{2},\ -\frac{9}{2}\right)$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\left(\frac{7}{2}-1\right)^2+\left(-\frac{9}{2}-3\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{250}{4}}=\frac{5\sqrt{10}}{2}$$

18 $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=2-\frac{1}{t^2}$

이므로 시각 $t=1$에서의 점 P의 속도는

$$(2,\ 1)$$

따라서 $t=1$에서 점 P의 속도의 크기는

$$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

19 함수 $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2\times2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$$f''(x)=\frac{-4x(x^2+1)^2-(-2x^2+2)\times2(x^2+1)\times2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}$$

$$=\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

이므로 $f''(x)=0$에서

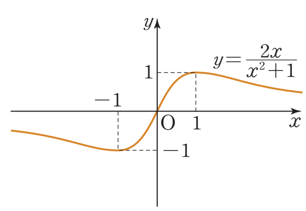
$$x=-\sqrt{3}\ \text{또는}\ x=0\ \text{또는}\ x=\sqrt{3}$$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 곡선 $y=f(x)$의 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘

한편, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$이므로 점근선은 x축이다.

위 내용을 종합하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최대이고, 최댓값은 1이다. (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 열린구간 $(-1, 1)$에서 증가한다. (참)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 열린구간 $(1, \sqrt{3})$에서 위로 볼록하다. (거짓)

ㄹ. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 x축이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

20 $f(x)=ke^{x^2}$이라고 하면 $f'(x)=ke^{x^2}\times 2x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

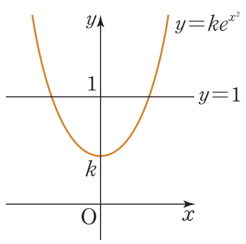
(i) $k>0$일 때

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	k	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 그림과 같다

따라서 방정식 $ke^{x^2}=1$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 k의 값의 범위는 $0<k<1$이다.



(ii) $k=0$일 때

방정식 $ke^{x^2}=1$은 실근을 갖지 않는다.

(iii) $k<0$일 때

$ke^{x^2}<0$이므로 방정식 $ke^{x^2}=1$은 실근을 갖지 않는다.

(i)~(iii)에서 상수 k의 값의 범위는 $0<k<1$이다.

서술형 문제

21 ❶ $y'=4x^3-4ax=4x(x^2-a)$

$y''=12x^2-4a=12\left(x^2-\dfrac{a}{3}\right)$

$y''=0$에서 $x=\pm\sqrt{\dfrac{a}{3}}$

$x=-\sqrt{\dfrac{a}{3}}$일 때, $y=\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{2a^2}{3}+a=-\dfrac{5a^2}{9}+a$

$x=\sqrt{\dfrac{a}{3}}$일 때, $y=\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{2a^2}{3}+a=-\dfrac{5a^2}{9}+a$

❷ 따라서 변곡점의 좌표는

$\left(-\sqrt{\dfrac{a}{3}}, -\dfrac{5a^2}{9}+a\right), \left(\sqrt{\dfrac{a}{3}}, -\dfrac{5a^2}{9}+a\right)$

이때 두 변곡점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$2\sqrt{\dfrac{a}{3}}=\sqrt{2}$ $\quad\therefore a=\dfrac{3}{2}$

❸ $f(x)=x^4-3x^2+\dfrac{3}{2}$이라고 하면

$f'(x)=4x^3-6x=4x\left(x^2-\dfrac{3}{2}\right)$

$=4x\left(x+\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)\left(x-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{3}{4}$	↗	$\dfrac{3}{2}$	↘	$-\dfrac{3}{4}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고, 극댓값은 $\dfrac{3}{2}$이다.

채점 기준	배점
❶ $y''=0$이 되는 x의 값 구하기	30 %
❷ a의 값 구하기	30 %
❸ 극댓값 구하기	40 %

22 ❶ $g(x)=1-2x$라고 하면

$f(1-2x)=f(g(x))$이므로

$f(g(x))=(x^2+x+1)^2$

❷ $f'(g(x))g'(x)=2(x^2+x+1)(2x+1)$에서

$f'(1-2x)(-2)=2(x^2+x+1)(2x+1)$

$\therefore f'(1-2x)=-(x^2+x+1)(2x+1)$

❸ 위 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f'(3)=-(1-1+1)(-2+1)=1$

채점 기준	배점
❶ $f(g(x))$의 식 구하기	40 %
❷ $f'(1-2x)$의 식 구하기	40 %
❸ $f'(3)$의 값 구하기	20 %

23 ❶ $\dfrac{dx}{dt}=3\cos 3t$, $\dfrac{dy}{dt}=-4t+3$

이므로 시각 t에서의 점 P의 속도는

$(3\cos 3t,\ -4t+3)$

❷ 따라서 $t=\pi$에서의 점 P의 속도는

$(3\cos 3\pi,\ -4\pi+3)=(-3,\ -4\pi+3)$

채점 기준	배점
❶ 시각 t에서의 속도 구하기	60 %
❷ 시각 $t=\pi$에서의 속도 구하기	40 %

24 ❶ $\overline{BC}=12\cos\theta$

$\overline{BC_1}=\overline{BC}\cos\theta=12\cos^2\theta$

$\overline{BC_2}=\overline{BC_1}\cos\theta=12\cos^3\theta$

$\vdots$

이므로 수열 $\{\overline{BC_n}\}$은 첫째항이 $12\cos^2\theta$, 공비가 $\cos\theta$인 등비수열이다.

❷ 따라서

$$f(\theta)=\sum_{n=1}^{5}\overline{BC_n}$$
$$=\frac{12\cos^2\theta(1-\cos^5\theta)}{1-\cos\theta}$$
$$=12\cos^2\theta\,(\cos^4\theta+\cos^3\theta+\cos^2\theta+\cos\theta+1)$$

❸ $\therefore \displaystyle\lim_{\theta\to0+}f(\theta)$

$$=\lim_{\theta\to0+}12\cos^2\theta(\cos^4\theta+\cos^3\theta+\cos^2\theta+\cos\theta+1)$$
$$=12\times5=60$$

채점 기준	배점
❶ 수열 $\{\overline{BC_n}\}$이 어떤 수열인지 알기	50 %
❷ $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}\overline{BC_n}$의 식 구하기	30 %
❸ $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}f(\theta)$의 값 구하기	20 %

25 ❶ $f'(x)=1+2\cos x$

$0<x<2\pi$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$

❷ 이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$에서 극대이고, 극댓값은

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}\pi+2\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$$

또, $x=\dfrac{4}{3}\pi$에서 극소이고, 극솟값은

$$f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{4}{3}\pi+2\sin\frac{4}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

❸ $\therefore M+m=\left(\dfrac{2}{3}\pi+\sqrt{3}\right)+\left(\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)=2\pi$

채점 기준	배점
❶ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값 구하기	60 %
❷ 극댓값, 극솟값 각각 구하기	30 %
❸ $M+m$의 값 구하기	10 %

Ⅲ. 적분법

1. 여러 가지 적분법

1-1 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분

내신 대비 쌍둥이 문제 216~220쪽

1-1 (1) $2\ln|x|+C$ (2) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

2-1 (1) $\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x+C$ (2) $\ln|x|-\frac{5}{x}+C$

3-1 $h=3\sqrt[3]{t}$

4-1 (1) $-\frac{8}{3}$ (2) $1-\frac{5}{e^2}+\frac{5}{e}$

5-1 (1) $e^{x+2}+C$ (2) $\frac{3^{2x}}{2\ln 3}+C$

(3) $\frac{e^{2x}}{2}-2e^x+x+C$ (4) $\frac{2^{2x}}{2\ln 2}+\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+x+C$

6-1 (1) e^5-e^3 (2) $\frac{1}{4}(e^4-e^{-4})$ (3) $\frac{30}{\ln 2}$ (4) $e-2$

7-1 (1) $5\sin x+3\cos x+C$ (2) $\tan x+x+C$

8-1 (1) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (2) 1

9-1 $2-\sqrt{3}$

1-1 (1) $\int\frac{2}{x}dx=2\int\frac{1}{x}dx=2\ln|x|+C$

(2) $\int x\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+C$

$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

2-1 (1) $(\sqrt{x}+1)^2=x+2\sqrt{x}+1$이므로

$\int(\sqrt{x}+1)^2dx=\int x\,dx+2\int\sqrt{x}\,dx+\int 1dx$

$=\int x\,dx+2\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int 1dx$

$=\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x+C$

(2) $\int\frac{x+5}{x^2}dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{5}{x^2}dx$

$=\int\frac{1}{x}dx+5\int x^{-2}dx$

$=\ln|x|-\frac{5}{x}+C$

3-1 $\frac{dh}{dt}=\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}=t^{-\frac{2}{3}}$이므로

$h=\int t^{-\frac{2}{3}}dt=\frac{1}{-\frac{2}{3}+1}t^{-\frac{2}{3}+1}+C$

$=3t^{\frac{1}{3}}+C$

$=3\sqrt[3]{t}+C$

$t=0$일 때, $h=0$이므로 $C=0$

$\therefore\ h=3\sqrt[3]{t}$

4-1 (1) $\int_0^4\frac{x-2}{\sqrt{x}}dx=\int_0^4\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$

$=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-4\sqrt{x}\right]_0^4=-\frac{8}{3}$

(2) $\frac{x+5}{x^2}=\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}$이므로

$\int_e^{e^2}\frac{x+5}{x^2}dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}dx+\int_e^{e^2}\frac{5}{x^2}dx$

$=\int_e^{e^2}x^{-1}dx+5\int_e^{e^2}x^{-2}dx$

$=\Big[\ln|x|\Big]_e^{e^2}-5\left[\frac{1}{x}\right]_e^{e^2}$

$=(\ln e^2-\ln e)-5\left(\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e}\right)$

$=1-\frac{5}{e^2}+\frac{5}{e}$

5-1 (1) $\int e^{x+2}dx=e^2\int e^xdx=e^2\times e^x+C=e^{x+2}+C$

(2) $\int 3^{2x}dx=\int 9^xdx=\frac{9^x}{\ln 9}+C=\frac{3^{2x}}{2\ln 3}+C$

(3) $\int(e^x-1)^2dx=\int(e^{2x}-2e^x+1)dx$

$=\int e^{2x}dx-2\int e^xdx+\int 1dx$

$=\frac{e^{2x}}{\ln e^2}-2e^x+x+C$

$=\frac{e^{2x}}{2}-2e^x+x+C$

(4) $\int(2^x+1)^2dx=\int(4^x+2\times 2^x+1)dx$

$=\int 4^xdx+2\int 2^xdx+\int 1dx$

$=\frac{4^x}{\ln 4}+2\times\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$

$=\frac{2^{2x}}{2\ln 2}+\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+x+C$

6-1 (1) $\int_0^2 e^{x+3}dx=e^3\int_0^2 e^x dx=e^3\Big[e^x\Big]_0^2$

$=e^3(e^2-e^0)=e^5-e^3$

(2) $\int_{-1}^1 e^{4x}dx=\left[\frac{e^{4x}}{\ln e^4}\right]_{-1}^1=\left[\frac{e^{4x}}{4}\right]_{-1}^1$

$=\frac{1}{4}(e^4-e^{-4})$

(3) $\int_1^3 \frac{8^x}{2^x}dx=\int_1^3 4^x dx=\left[\frac{4^x}{\ln 4}\right]_1^3$

$=\frac{1}{\ln 4}(64-4)=\frac{30}{\ln 2}$

(4) $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx-\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx$

$=\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx=\int_0^1 (e^x-1)dx$

$=\Big[e^x-x\Big]_0^1=e-2$

7-1 (1) $\int(5\cos x-3\sin x)dx=5\sin x+3\cos x+C$

(2) $\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+1=\sec^2 x+1$이므로

$\int\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int(\sec^2 x+1)dx$

$=\int\sec^2 x dx+\int 1dx$

$=\tan x+x+C$

8-1 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{2}{\cos^2 x}+\cos x\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sec^2 x+\cos x)dx$

$=\Big[2\tan x+\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

(2) $\frac{1}{1-\sin^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1-\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x dx$

$=\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\tan\frac{\pi}{4}-\tan 0=1$

9-1 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)-f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}f'(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\sin t\,dt$

$=\Big[-2\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=2-\sqrt{3}$

소단원 **확인 문제** 222~224쪽

1-1 (1) $x-\ln|x|+\frac{2}{x}+C$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $3e^x+\frac{2^x}{\ln 2}+C$

(4) $\frac{52}{3}$ (5) $e^x-\frac{1}{2}x^2+C$ (6) $\frac{15}{8\ln 2}+2$

(7) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$ (8) $\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

2-1 $-\frac{16}{3}$

3-1 $e+\frac{1}{e}-2$

1-1 (1) $\int\frac{x^3-x^2-2x}{x^3}dx=\int\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx$

$=x-\ln|x|+\frac{2}{x}+C$

(2) $\int_0^2(x-1)^2dx=\int_0^2(x^2-2x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^2=\frac{2}{3}$

(3) $\int(3e^x+2^x)dx=3\int e^x dx+\int 2^x dx$

$=3e^x+\frac{2^x}{\ln 2}+C$

(4) $\int_0^4\frac{x+3}{\sqrt{x}}dx=\int_0^4\left(x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}\right]_0^4=\frac{52}{3}$

(5) $\int\frac{e^{2x}-x^2}{e^x+x}dx=\int\frac{(e^x+x)(e^x-x)}{e^x+x}dx$

$=\int(e^x-x)dx$

$=\int e^x dx-\int x dx$

$=e^x-\frac{1}{2}x^2+C$

(6) $\int_0^1(2^x+2^{-x})^2dx=\int_0^1\left\{4^x+2+\left(\frac{1}{4}\right)^x\right\}dx$

$=\left[\frac{4^x}{\ln 4}+2x+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{\ln\frac{1}{4}}\right]_0^1$

$=\frac{2}{\ln 2}+2-\frac{1}{8\ln 2}$

$=\frac{15}{8\ln 2}+2$

(7) $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$ 이므로

$$\int\sin^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1-\cos x}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int 1dx-\frac{1}{2}\int\cos x dx$$
$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$$

(8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos x)dx$$
$$=\Big[x+\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2-1 $f'(x)=2(x+1)^2$이므로

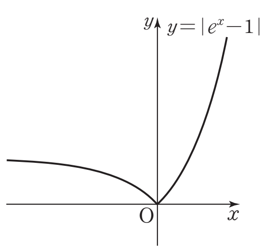
$$f(x)=\int 2(x+1)^2dx$$
$$=2\int(x^2+2x+1)dx$$
$$=\frac{2}{3}x^3+2x^2+2x+C$$

이때 $f(1)=0$이므로 $C=-\frac{14}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x^3+2x^2+2x-\frac{14}{3}$ 이므로

$$f(-1)=-\frac{16}{3}$$

3-1 $|e^x-1|=\begin{cases}e^x-1 & (0\le x\le 1)\\ -e^x+1 & (-1\le x\le 0)\end{cases}$ 이므로



$$\int_{-1}^{1}|e^x-1|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(-e^x+1)dx+\int_0^1(e^x-1)dx$$
$$=\Big[-e^x+x\Big]_{-1}^{0}+\Big[e^x-x\Big]_0^1$$
$$=e+\frac{1}{e}-2$$

1-2 치환적분법

내신 대비 쌍둥이 문제 　　225~230쪽

1-1 (1) $\frac{1}{4}(x^2-2)^4+C$ (2) $e^{x^3}+C$
(3) $\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$ (4) $\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

2-1 $(-25e^{-2.4}+30)$℃

3-1 (1) $\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$
(2) $\frac{2}{5}(x+2)(x-3)\sqrt{x-3}+C$
(3) $\frac{1}{2}e^{2x+1}+C$ (4) $-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+C$

4-1 (1) $\frac{1}{3}\ln|x^3+4|+C$ (2) $\ln(e^x+1)+C$
(3) $\ln|\ln x|+C$ (4) $\ln|\sin x+x|+C$

5-1 (1) $\frac{1}{3}(e^5-e^2)$ (2) 4

6-1 $40e^{-\frac{5}{2}}$

7-1 (1) $\frac{1}{2}\ln 5$ (2) $\ln(e+1)$ (3) $\ln\left(\frac{2+\ln 3}{1+\ln 3}\right)$ (4) $\frac{1}{2}\ln 3$

8-1 (1) π (2) $\frac{\pi}{12}$

1-1 (1) $x^2-2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\int 2x(x^2-2)^3dx=\int t^3dt=\frac{1}{4}t^4+C$$
$$=\frac{1}{4}(x^2-2)^4+C$$

(2) $x^3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3x^2$이므로

$$\int 3x^2e^{x^3}dx=\int e^t dt=e^t+C=e^{x^3}+C$$

(3) $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$ 이므로

$$\int\frac{\ln x}{x}dx=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C$$
$$=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$$

(4) $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$\int\sin^2 x\cos x\,dx=\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3+C$$
$$=\frac{1}{3}\sin^3 x+C$$

2-1 $y=\int 2e^{-0.08t}\,dt$ 이므로 $-0.08t=x$로 놓으면

$$\frac{dx}{dt}=-0.08=-\frac{2}{25}$$

$$\therefore \int 2e^{-0.08t}\,dt=\int\{-25e^{x}\}dx$$
$$=-25e^{x}+C$$
$$=-25e^{-0.08t}+C$$

$t=0$일 때, $y=5$이므로 $C=30$

따라서 $y=-25e^{-0.08t}+30$이므로 $t=30$일 때, 온도는

$(-25e^{-2.4}+30)$℃

3-1 (1) $2x+1=t$, 즉 $x=\frac{1}{2}(t-1)$로 놓으면 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$이므로

$$\int\frac{1}{2x+1}\,dx=\int\frac{1}{t}\times\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\ln|t|+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$$

(2) $\sqrt{x-3}=t$, 즉 $x=t^2+3$으로 놓으면 $\frac{dx}{dt}=2t$ 이므로

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx=\int(t^2+3)t\times 2t\,dt$$
$$=\int(2t^4+6t^2)dt$$
$$=\frac{2}{5}t^5+2t^3+C$$
$$=\frac{2}{5}t^3(t^2+5)+C$$
$$=\frac{2}{5}(x+2)(x-3)\sqrt{x-3}+C$$

(3) $2x+1=t$, 즉 $x=\frac{1}{2}(t-1)$로 놓으면 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$이므로

$$\int e^{2x+1}\,dx=\int\frac{1}{2}e^{t}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}e^{t}+C=\frac{1}{2}e^{2x+1}+C$$

(4) $2x+\frac{\pi}{3}=t$, 즉 $x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$이므로

$$\int\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx=\int\frac{1}{2}\sin t\,dt$$
$$=-\frac{1}{2}\cos t+C$$
$$=-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+C$$

4-1 (1) $(x^3+4)'=3x^2$이므로

$$\int\frac{x^2}{x^3+4}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{(x^3+4)'}{x^3+4}dx$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x^3+4|+C$$

(2) $(e^x+1)'=e^x$이므로

$$\int\frac{e^x}{e^x+1}\,dx=\int\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx$$
$$=\ln|e^x+1|+C$$

(3) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ 이므로

$$\int\frac{1}{x\ln x}dx=\int\frac{(\ln x)'}{\ln x}dx$$
$$=\ln|\ln x|+C$$

(4) $(\sin x+x)'=\cos x+1$이므로

$$\int\frac{\cos x+1}{\sin x+x}\,dx=\int\frac{(\sin x+x)'}{\sin x+x}dx$$
$$=\ln|\sin x+x|+C$$

5-1 (1) $3x-1=t$, 즉 $x=\frac{1}{3}(t+1)$로 놓으면 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}$이고

$x=1$일 때 $t=2$, $x=2$일 때 $t=5$이므로

$$\int_1^2 e^{3x-1}\,dx=\int_2^5\frac{1}{3}e^{t}\,dt=\left[\frac{1}{3}e^{t}\right]_2^5$$
$$=\frac{1}{3}(e^5-e^2)$$

(2) $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$$\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^3}{x}\,dx=\int_0^2 t^3\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^2=4$$

6-1 10초 후의 북소리의 크기는

$$f(10)=40-\int_0^{10}10e^{-\frac{t}{4}}\,dt$$

$-\frac{t}{4}=x$, 즉 $t=-4x$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-4$이고

$t=0$일 때 $x=0$, $t=10$일 때 $x=-\frac{5}{2}$이므로

$$40-\int_0^{10}10e^{-\frac{t}{4}}\,dt=40+40\int_0^{-\frac{5}{2}}e^{x}dx$$
$$=40+40\left[e^{x}\right]_0^{-\frac{5}{2}}$$
$$=40e^{-\frac{5}{2}}$$

7-1 (1) $(x^2+2x+2)'=2(x+1)$이므로

$$\int_0^2 \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx=\frac{1}{2}\Big[\ln(x^2+2x+2)\Big]_0^2$$
$$=\frac{1}{2}(\ln 10-\ln 2)$$
$$=\frac{1}{2}\ln 5$$

(2) $(e^x+x)'=e^x+1$이므로

$$\int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+x}\,dx=\Big[\ln|e^x+x|\Big]_0^1$$
$$=\ln(e+1)$$

(3) $(\ln 3x)'=\dfrac{1}{x}$이므로

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln 3x}\,dx=\Big[\ln|\ln 3x|\Big]_e^{e^2}$$
$$=\ln\left(\frac{2+\ln 3}{1+\ln 3}\right)$$

(4) $(\tan x)'=\sec^2 x$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx=\Big[\ln|\tan x|\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\ln\sqrt{3}-\ln 1$$
$$=\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln 3$$

8-1 (1) $x=2\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$$

$x=0$일 때, $2\sin\theta=0$에서 $\theta=0$

$x=2$일 때, $2\sin\theta=2$에서 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

또, $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=2\cos\theta$이므로

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta\times 2\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+2\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$=\Big[2\theta+\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

(2) $x=3\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\dfrac{dx}{d\theta}=3\sec^2\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=3$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

또, $x^2+9=9(\tan^2\theta+1)=9\sec^2\theta$이므로

$$\int_0^3 \frac{1}{x^2+9}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{9\sec^2\theta}\times 3\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3}\,d\theta$$
$$=\left[\frac{1}{3}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{12}$$

소단원 확인 문제 232~233쪽

1-1 (1) $-\dfrac{1}{x-3}+C$ (2) $\dfrac{1}{3}$ (3) $\dfrac{1}{3}\ln|x^3-2|+C$ (4) $1-\dfrac{1}{e}$

(5) $-e^{-x+3}+C$ (6) 1 (7) $\dfrac{1}{4}\sin^4 x+C$ (8) $\dfrac{3}{2}$

2-1 $\dfrac{1}{3}(x^2+3)\sqrt{x^2+3}+C$

1-1 (1) $x-3=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=1$이므로

$$\int \frac{1}{(x-3)^2}\,dx=\int \frac{1}{t^2}\,dt=\int t^{-2}\,dt$$
$$=-\frac{1}{t}+C$$
$$=-\frac{1}{x-3}+C$$

(2) $2x-1=t$, 즉 $x=\dfrac{1}{2}(t+1)$로 놓으면 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}$이고

$x=\dfrac{1}{2}$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{2x-1}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{t}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

(3) $(x^3-2)'=3x^2$이므로

$$\int \frac{x^2}{x^3-2}\,dx=\frac{1}{3}\int \frac{(x^3-2)'}{x^3-2}\,dx$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x^3-2|+C$$

(4) $x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이고

$x=0$일 때 $t=0$이고, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^1 2xe^{-x^2}dx=\int_0^1 e^{-t}dt$$
$$=\Big[-e^{-t}\Big]_0^1$$
$$=1-\frac{1}{e}$$

(5) $-x+3=t$, 즉 $x=-t+3$으로 놓으면

$\frac{dx}{dt}=-1$이므로

$$\int e^{-x+3}dx=-\int e^t dt$$
$$=-e^t+C$$
$$=-e^{-x+3}+C$$

(6) $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^e \frac{3(\ln x)^2}{x}dx=\int_0^1 3t^2 dt$$
$$=\Big[t^3\Big]_0^1=1$$

(7) $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$\int \sin^3 x\cos x dx=\int t^3 dt$$
$$=\frac{1}{4}t^4+C$$
$$=\frac{1}{4}\sin^4 x+C$$

(8) $1+\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\cos x dx=\int_1^2 t\, dt$$
$$=\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_1^2=\frac{3}{2}$$

2-1 $f'(x)=x\sqrt{3+x^2}$이므로

$$f(x)=\int x\sqrt{3+x^2}\,dx$$

$3+x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\int x\sqrt{3+x^2}dx=\int \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=\frac{1}{3}(x^2+3)^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=\frac{1}{3}(x^2+3)\sqrt{x^2+3}+C$$

$f(0)=\sqrt{3}$이므로

$$f(0)=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{3}+C=\sqrt{3}$$

에서 $C=0$

$$\therefore\ f(x)=\frac{1}{3}(x^2+3)\sqrt{x^2+3}$$

1-3 부분적분법

내신 대비 쌍둥이 문제 235~237쪽

1-1 (1) $\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$

(2) $-x\cos x+\sin x+C$

2-1 (1) $\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C$

(2) $-x^2\cos x+2x\sin x-2\cos x+C$

3-1 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{\pi}{2}$

1-1 (1) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로

$$\int x\ln x dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$$

(2) $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\int x\sin x dx=x(-\cos x)-\int 1\times(-\cos x)dx$$
$$=-x\cos x+\sin x+C$$

2-1 (1) $f(x)=x^2$, $g'(x)=e^{2x}$로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$이므로

$$\int x^2e^{2x}dx=x^2\times\frac{1}{2}e^{2x}-\int 2x\times\frac{1}{2}e^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\int xe^{2x}dx$$

이때 $\int xe^{2x}dx$에 부분적분법을 다시 적용하면

$$\int xe^{2x}dx=x\times\frac{1}{2}e^{2x}-\int 1\times\frac{1}{2}e^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx$$

$$\therefore \int x^2e^{2x}dx=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\left(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C$$

(2) $f(x)=x^2$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\int x^2\sin x dx=x^2(-\cos x)-\int 2x(-\cos x)dx$$

이때 $\int 2x(-\cos x)dx$에 부분적분법을 다시 적용하면

$$\int 2x(-\cos x)dx$$

$$=2x(-\sin x)-\int 2\times(-\sin x)dx$$

$$=-2x\sin x+2\int \sin x\,dx$$

$$\therefore \int x^2\sin x dx$$

$$=x^2(-\cos x)-\left(-2x\sin x+2\int \sin x\,dx\right)$$

$$=-x^2\cos x+2x\sin x-2\cos x+C$$

3-1 (1) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로

$$\int_1^{\sqrt{e}}x\ln x dx=\left[\ln x\times\frac{1}{2}x^2\right]_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x}\times\frac{1}{2}x^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{2}xdx$$

$$=\frac{e}{4}-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$=\frac{1}{4}$$

(2) $f(x)=x+1$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\cos x\,dx$$

$$=\Big[(x+1)\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

소단원 확인 문제 239~240쪽

1-1 (1) $\frac{x\times 2^x}{\ln 2}-\frac{2^x}{(\ln 2)^2}+C$

(2) $-x\cot x+\ln|\sin x|+C$

(3) $e-2$

(4) $5\ln 5-4$

2-1 -4

1-1 (1) $f(x)=x$, $g'(x)=2^x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\frac{2^x}{\ln 2}$이므로

$$\int x\times 2^x dx=x\times\frac{2^x}{\ln 2}-\int 1\times\frac{2^x}{\ln 2}dx$$

$$=\frac{x\times 2^x}{\ln 2}-\frac{2^x}{(\ln 2)^2}+C$$

(2) $f(x)=x$, $g'(x)=\csc^2 x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\cot x$이므로

$$\int x\csc^2 x\,dx=x(-\cot x)-\int 1\times(-\cot x)dx$$

$$=-x\cot x+\ln|\sin x|+C$$

(3) $f(x)=x^2$, $g'(x)=e^x$로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int_0^1 x^2e^x dx=\Big[x^2e^x\Big]_0^1-\int_0^1 2xe^x dx$$

$$=e-\Big[2xe^x\Big]_0^1+\int_0^1 2e^x dx$$

$$=e-2e+\Big[2e^x\Big]_0^1$$

$$=e-2$$

(4) $f(x)=\ln(x-1)$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $g(x)=x$이므로

$$\int_2^6 \ln(x-1)dx$$
$$=\Big[x\ln(x-1)\Big]_2^6-\int_2^6 x\times\frac{1}{x-1}dx$$
$$=6\ln 5-\int_2^6\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$=6\ln 5-\Big[x+\ln|x-1|\Big]_2^6$$
$$=5\ln 5-4$$

2-1 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx+\int_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx+\int_0^{2\pi} f(x)dx$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2-2x)\sin x\,dx$$
$$=\Big[(x^2-2x)(-\cos x)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2x-2)(-\cos x)dx$$
$$=0+\Big[(2x-2)\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\,dx$$
$$=-4-\Big[-2\cos x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-4$$

중단원 연습 문제 244~250쪽

1-1 (1) $\dfrac{1}{2}x^2+4\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+C$ (2) $\tan x+x+C$

(3) $2\sqrt{x^2+5}+C$ (4) $\dfrac{1}{2}\sin(2x+1)+C$

(5) $-(x+2)e^{-x}$ (6) $\dfrac{1}{4}x^4\ln x-\dfrac{1}{16}x^4+C$

2-1 (1) $e^2-e+\dfrac{2}{\ln 2}$ (2) 2 (3) $-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{e^3}-e\right)$

(4) $\dfrac{4-\sqrt{2}}{12}$ (5) $\dfrac{2e^3+1}{9}$ (6) $-\pi$

3-1 0 **4-1** $e^2+e+\dfrac{1}{e}-\dfrac{3}{e^2}$

5-1 5 **6-1** $\dfrac{1}{2}$

7-1 2

1-1 (1) $\displaystyle\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^2dx=\int\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$$=\int(x+2x^{-\frac{1}{2}}+x^{-2})dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+4x^{\frac{1}{2}}-x^{-1}+C$$
$$=\frac{1}{2}x^2+4\sqrt{x}-\frac{1}{x}+C$$

(2) $\displaystyle\int\frac{1+\cos^2 x}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$

$$=\int(\sec^2 x+1)dx$$
$$=\tan x+x+C$$

(3) $x^2+5=t$로 놓으면 $2x=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\times 2x\,dx$$
$$=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt$$
$$=\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=2t^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=2(x^2+5)^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=2\sqrt{x^2+5}+C$$

(4) $2x+1=t$, 즉 $x=\dfrac{1}{2}(t-1)$로 놓으면 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}$이므로

$$\int\cos(2x+1)dx=\int\cos t\times\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\sin t+C$$
$$=\frac{1}{2}\sin(2x+1)+C$$

(5) $f(x)=x+1$, $g'(x)=e^{-x}$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int(x+1)e^{-x}dx$$
$$=(x+1)\times(-e^{-x})-\int 1\times(-e^{-x})dx$$
$$=-(x+1)e^{-x}-e^{-x}$$
$$=-(x+2)e^{-x}$$

(6) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x^3$으로 놓으면

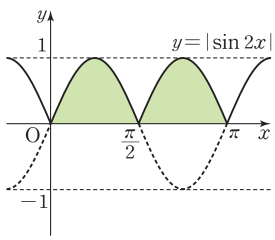
$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{4}x^4$이므로

$$\int x^3\ln x\,dx=\ln x\times\frac{1}{4}x^4-\int\frac{1}{x}\times\frac{1}{4}x^4dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4\ln x-\int\frac{1}{4}x^3dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C$$

2-1 (1) $\int_1^2(e^x+2^x)dx=\left[e^x+\frac{2^x}{\ln 2}\right]_1^2$

$$=\left(e^2+\frac{4}{\ln 2}\right)-\left(e+\frac{2}{\ln 2}\right)$$
$$=e^2-e+\frac{2}{\ln 2}$$

(2) $|\sin 2x|=\begin{cases}\sin 2x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\\ -\sin 2x & \left(\frac{\pi}{2}\le x\le\pi\right)\end{cases}$ 이므로



$$\int_0^\pi|\sin 2x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2x|dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\sin 2x|dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\sin 2x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=2$$

(3) $1-x^2=t$로 놓으면 $-2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=-3$이므로

$$\int_0^2 xe^{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^2 e^{1-x^2}(-2x)dx$$
$$=-\frac{1}{2}\int_1^{-3}e^t dt$$
$$=-\frac{1}{2}\left[e^t\right]_1^{-3}$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^3}-e\right)$$

(4) $\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\sin x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x(-\sin x)dx$$
$$=-\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}t^2dt$$
$$=-\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$=\frac{4-\sqrt{2}}{12}$$

(5) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x^2$으로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{3}x^3$이므로

$$\int_1^e x^2\ln x\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{3}x^3\times\frac{1}{x}dx$$
$$=\frac{1}{3}e^3-\left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^e$$
$$=\frac{2e^3+1}{9}$$

(6) $f(x)=x$, $g'(x)=\sin 2x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$이므로

$$\int_{-\pi}^{\pi}x\sin 2x\,dx$$
$$=\left[x\times\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}1\times\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$
$$=-\pi+\left[\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$=-\pi$$

3-1 (i) $x>1$일 때

$$f(x)=\int(3x^2-2)dx$$
$$=x^3-2x+C_1$$

(ii) $x<1$일 때

$$f(x)=\int(2x-1)dx$$
$$=x^2-x+C_2$$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}x^3-2x+C_1 & (x>1)\\ x^2-x+C_2 & (x<1)\end{cases}$$

이때 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$-1+C_1=C_2$ ……①

그런데 $f(2)=3$이므로 $2^3-2\times2+C_1=3$에서

$C_1=-1$

$C_1=-1$을 ①에 대입하면 $C_2=-2$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^3-2x-1 & (x>1) \\ x^2-x-2 & (x<1) \end{cases}$이므로

$f(-1)=(-1)^2-(-1)-2=0$

4-1 $f(x)=\begin{cases} -x & (-2\le x\le -1) \\ 1 & (-1\le x\le 1) \\ x & (1\le x\le 2) \end{cases}$ 이므로

$$\int_{-2}^{2} e^x f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{-1} e^x(-x)dx+\int_{-1}^{1} e^x dx+\int_{1}^{2} xe^x dx$$
$$=\Big[-xe^x\Big]_{-2}^{-1}-\int_{-2}^{-1}(-e^x)dx+\Big[e^x\Big]_{-1}^{1}$$
$$+\Big[xe^x\Big]_1^2-\int_1^2 e^x dx$$
$$=\frac{1}{e}-\frac{2}{e^2}+\Big[e^x\Big]_{-2}^{-1}+e-\frac{1}{e}+2e^2-e-\Big[e^x\Big]_1^2$$
$$=\frac{1}{e}-\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}+e-\frac{1}{e}+2e^2-e-e^2+e$$
$$=e^2+e+\frac{1}{e}-\frac{3}{e^2}$$

5-1 $f'(x)=xe^x+1$이므로

$$f(x)=\int(xe^x+1)dx$$
$$=\int xe^x dx+\int 1dx$$
$$=xe^x-\int e^x dx+\int 1dx$$
$$=xe^x-e^x+x+C$$

그런데 $f(0)=3$이므로 $-1+C=3$, 즉 $C=4$

따라서 $f(x)=(x-1)e^x+x+4$이므로

$f(1)=5$

6-1 $1-x=t$, 즉 $x=1-t$로 놓으면 $\dfrac{dx}{dt}=-1$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

$$a_n=\int_0^1 x(1-x)^n dx$$
$$=-\int_1^0(1-t)t^n dt$$
$$=\int_0^1(t^n-t^{n+1})dt$$
$$=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}-\frac{1}{n+2}t^{n+2}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$$

7-1 $0<x<\pi$에서 $-1<-\cos x<1$이므로

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-\cos x)^{n-1}$은 첫째항이 1, 공비가 $-\cos x$인 등비급수이고 그 합이 수렴한다.

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{1-(-\cos x)}=\dfrac{1}{1+\cos x}$이므로

$$F(x)=\int f(x)dx$$
$$=\int\frac{1}{1+\cos x}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{2}{1+\cos x}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\sec^2\frac{x}{2}dx$$
$$=\tan\frac{x}{2}+C$$

그런데 $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$\tan\dfrac{\pi}{6}+C=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ 에서 $C=1$

따라서 $F(x)=\tan\dfrac{x}{2}+1$이므로

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\tan\frac{\pi}{4}+1=1+1=2$$

2. 정적분의 활용

2-1 정적분과 급수의 합 사이의 관계

내신 대비 쌍둥이 문제 253쪽

1-1 (1) $\frac{19}{3}$ (2) $\frac{2}{\pi}$

1-1 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(3-\frac{1}{n}\right)^2+\left(3-\frac{2}{n}\right)^2+\left(3-\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(3-\frac{n}{n}\right)^2\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(3-\frac{k}{n}\right)^2$

이때 $\Delta x=\frac{1-0}{n}$, $x_k=0+k\times\frac{1}{n}$이라고 하면

정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(3-\frac{k}{n}\right)^2=\int_0^1(3-x)^2dx=\left[-\frac{1}{3}(3-x)^3\right]_0^1=\frac{19}{3}$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\cos\frac{3\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{n\pi}{2n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}$

이때 $\Delta x=\frac{1-0}{n}$, $x_k=0+k\times\frac{1}{n}$이라고 하면

정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}=\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$$

소단원 확인 문제 254~255쪽

1-1 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{2}{\pi}$ (3) 13

2-1 $\frac{\pi}{4}$

3-1 $a=2,\ b=1$

1-1 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3$

이때 $\Delta x=\frac{1-0}{n}$, $x_k=0+k\times\frac{1}{n}$이라고 하면

정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3=\int_0^1x^3dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

(2) $\Delta x=\frac{1-0}{n}$, $x_k=0+k\times\frac{1}{n}$이라고 하면

정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^2=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^2$

$\Delta x=\frac{5-2}{n}$, $x_k=2+k\times\frac{3}{n}$이라고 하면

정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$(\text{주어진 식})=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^2=\frac{1}{3}\int_2^5x^2dx=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^5=13$$

2-1 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

이때 $\Delta x=\frac{1-0}{n}$, $x_k=0+k\times\frac{1}{n}$이라고 하면

정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

이때 $x=\tan\theta\left(0\le\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$는 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 연속이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$

또, $1+x^2=1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sec^2\theta}\times\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta$$
$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

3-1 $\Delta x=\frac{3-1}{n}$, $x_k=1+k\times\frac{3-1}{n}$이라고 하면

정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3=2\int_1^3 x^3dx$$

$\therefore\ a=2,\ b=1$

2-2 도형의 넓이

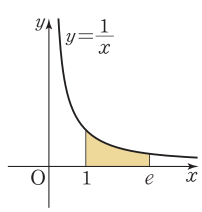
내신 대비 쌍둥이 문제 257~259쪽

1-1 (1) 1 (2) $e-1$ (3) $2\sqrt{2}-2$ (4) $-\sqrt{2}+\sqrt{3}$

2-1 (1) $\frac{26}{27}$ (2) $2\ln 2$ (3) e^2 (4) $e-\frac{1}{e}$

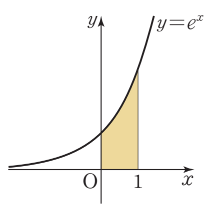
3-1 (1) $2\sqrt{2}$ (2) $4-\frac{4}{e}$

1-1 (1) 구하는 도형의 넓이 S는



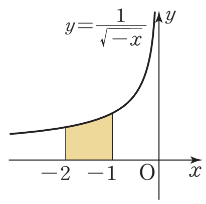
$$S=\int_1^e\frac{1}{x}dx$$
$$=\Big[\ln x\Big]_1^e$$
$$=1$$

(2) 구하는 도형의 넓이 S는



$$S=\int_0^1 e^x\,dx$$
$$=\Big[e^x\Big]_0^1$$
$$=e-1$$

(3) 구하는 도형의 넓이 S는



$$S=\int_{-2}^{-1}\frac{1}{\sqrt{-x}}\,dx$$

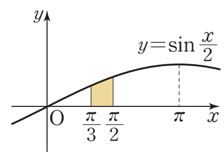
$-x=t$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=-1$이고

$x=-2$일 때 $t=2$, $x=-1$일 때 $t=1$이므로

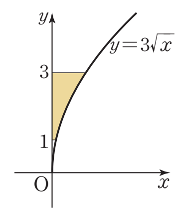
$$\int_{-2}^{-1}\frac{1}{\sqrt{-x}}\,dx=-\int_2^1\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$
$$=\int_1^2 t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$
$$=\Big[2\sqrt{t}\Big]_1^2$$
$$=2\sqrt{2}-2$$

(4) 구하는 도형의 넓이 S는



$$S=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{x}{2}\,dx$$
$$=\left[-2\cos\frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

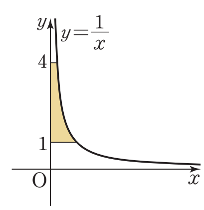
2-1 (1) $y=3\sqrt{x}$에서 $x=\frac{y^2}{9}$이므로



구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_1^3\frac{y^2}{9}\,dy$$
$$=\left[\frac{y^3}{27}\right]_1^3$$
$$=1-\frac{1}{27}=\frac{26}{27}$$

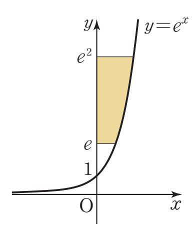
(2) $y=\frac{1}{x}$에서 $x=\frac{1}{y}$이므로



구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_1^4\frac{1}{y}\,dy$$
$$=\Big[\ln y\Big]_1^4$$
$$=\ln 4=2\ln 2$$

(3) $y=e^x$에서 $x=\ln y$이므로



구하는 도형의 넓이 S는

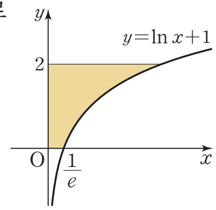
$$S=\int_e^{e^2}\ln y\,dy$$
$$=\Big[y\ln y-y\Big]_e^{e^2}$$
$$=e^2$$

(4) $y=\ln x+1$에서 $x=e^{y-1}$이므로

구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_0^2 e^{y-1}dy$$

$$=\left[e^{y-1}\right]_0^2=e-\frac{1}{e}$$



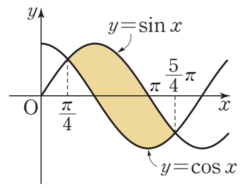
3-1 (1) 구간 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right]$에서

두 곡선 $y=\sin x$와

$y=\cos x$의 교점의 x좌표

는 $\sin x=\cos x$에서

$\tan x=1$이므로



$$x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{5}{4}\pi$$

$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5}{4}\pi$에서 $\sin x\ge\cos x$이므로 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}|\sin x-\cos x|dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-\cos x)dx$$

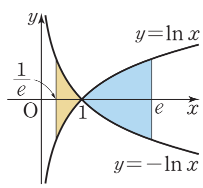
$$=\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}=2\sqrt{2}$$

(2) 구간 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$에서 두 곡선

$y=\ln x$, $y=-\ln x$의 교점

의 x좌표는

$\ln x=-\ln x$에서 $x=1$



구간 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$에서 $-\ln x\ge\ln x$이고

구간 $[1, e]$에서 $\ln x\ge-\ln x$이므로 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\{(-\ln x)-\ln x\}dx$$

$$+\int_1^e\{\ln x-(-\ln x)\}dx$$

$$=-2\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x dx+2\int_1^e\ln x dx$$

$$=-2\left[x\ln x-x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+2\left[x\ln x-x\right]_1^e$$

$$=-2\left(-1+\frac{2}{e}\right)+2$$

$$=4-\frac{4}{e}$$

소단원 확인 문제 261~263쪽

1-1 (1) 3 (2) e^2-1 (3) 4 **2-1** $e-\frac{1}{e}$

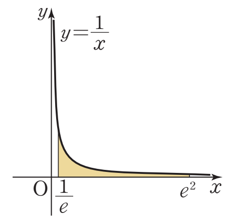
3-1 $\frac{16}{3}$ **4-1** $\frac{e}{2}-1$

1-1 (1) 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{\frac{1}{e}}^{e^2}\frac{1}{x}dx$$

$$=\left[\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{e^2}$$

$$=3$$

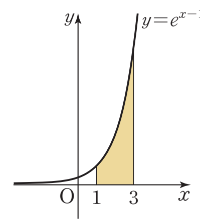


(2) 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_1^3 e^{x-1}dx$$

$$=\left[e^{x-1}\right]_1^3$$

$$=e^2-1$$

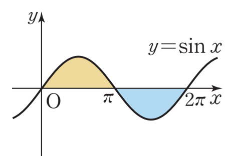


(3) 구간 $[0, \pi]$에서 $\sin x\ge0$

이고, 구간 $[\pi, 2\pi]$에서

$\sin x\le0$이므로 구하는

도형의 넓이 S는



$$S=\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$$

$$=\int_0^{\pi}\sin x dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)dx$$

$$=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}+\left[\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}=4$$

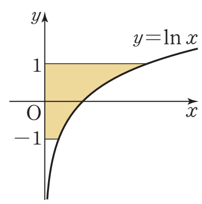
2-1 $y=\ln x$에서 $x=e^y$이므로

구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{1}|e^y|dy$$

$$=\int_{-1}^{1}e^y dy$$

$$=\left[e^y\right]_{-1}^{1}=e-\frac{1}{e}$$

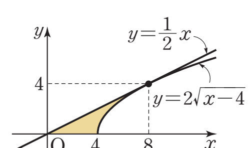


3-1 곡선 $y=2\sqrt{x-4}$와 직선

$y=\frac{1}{2}x$의 교점의 x좌표는

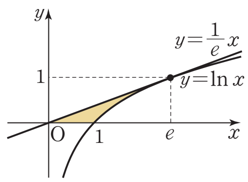
$2\sqrt{x-4}=\frac{1}{2}x$에서 $x=8$

따라서 구하는 도형의 넓이 S는



$$S=\int_0^8 \frac{1}{2}x\,dx-\int_4^8 2\sqrt{x-4}\,dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^8-\left[\frac{4}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}\right]_4^8$$
$$=\frac{16}{3}$$

4-1 $f(x)=\ln x$로 놓으면



$f'(x)=\frac{1}{x}$에서 $f'(e)=\frac{1}{e}$

이므로 점 $(e,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$$y-1=\frac{1}{e}(x-e),\ \text{즉}\ y=\frac{1}{e}x$$

따라서 구하는 도형의 넓이 S는

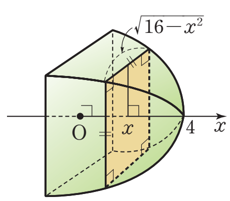
$$S=\int_0^e \frac{1}{e}x\,dx-\int_1^e \ln x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2e}x^2\right]_0^e-\left[x\ln x-x\right]_1^e$$
$$=\frac{e}{2}-1$$

2-3 입체도형의 부피

내신 대비 쌍둥이 문제 265~266쪽

1-1 $\frac{128}{3}$ **2-1** $\frac{1}{3}a^2h$

1-1 오른쪽 그림과 같이 밑면의 중심을 원점 O로 하고, 밑면에 수직인 직선을 x축으로 정할 때, x좌표가 $x(0\le x\le 4)$인 점을 지나 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이 $S(x)$는

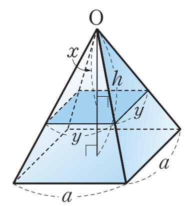


$$S(x)=(\sqrt{16-x^2})^2=16-x^2$$

따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_0^4 S(x)\,dx$$
$$=\int_0^4 (16-x^2)\,dx$$
$$=\left[16x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^4=\frac{128}{3}$$

2-1 정사각뿔의 꼭짓점을 원점 O로 하고, 밑면에 수직인 직선을 x축으로 정할 때, x좌표가 $x(0\le x\le h)$인 점을 지나 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 한 변의 길이를 y라고 하면



$x:h=y:a$에서 $y=\frac{ax}{h}$이므로

단면의 넓이 $S(x)$는

$$S(x)=y^2=\frac{a^2x^2}{h^2}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_0^h S(x)\,dx=\int_0^h \frac{a^2x^2}{h^2}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}\times\frac{a^2}{h^2}x^3\right]_0^h=\frac{1}{3}a^2h$$

소단원 확인 문제 268~269쪽

1-1 $\sqrt{50-2x}$ **2-1** 220 cm^3

3-1 $\frac{4}{3}r^3$

1-1 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$$S(x)=(\sqrt{50-2x})^2$$

따라서 입체도형의 부피는

$$\int_0^{20}\left(\boxed{\sqrt{50-2x}}\right)^2dx$$

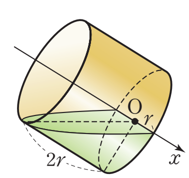
2-1 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$$S(x)=(\sqrt{27-x})^2$$

따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_0^{10}(27-x)\,dx$$
$$=\left[27x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{10}=220\,(\text{cm}^3)$$

3-1 물통의 밑면의 중심을 원점 O로 하고, 밑면인 원의 지름을 연장한 직선을 x축으로 정하자. 이때 좌표가 x인 점을 지나 x축에 수직인 평면으로 자른 물의 단면은 밑변과 높이의 비가 $1:2$인 직각삼각형이고 밑변의 길이가



$\sqrt{r^2-x^2}$ 이므로 그 단면의 넓이 $S(x)$는

$$S(x)=\frac{1}{2}\sqrt{r^2-x^2}\times2\sqrt{r^2-x^2}=r^2-x^2$$

따라서 구하는 물의 부피 V는

$$V=\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx=2\int_{0}^{r}(r^2-x^2)dx$$

$$=2\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\frac{4}{3}r^3$$

2-4 속도와 거리

내신 대비 쌍둥이 문제 271~272쪽

1-1 위치의 변화량: $-\frac{2}{e^4}-\frac{1}{e}$

움직인 거리: $\frac{1}{e}+\frac{2}{e^3}-\frac{2}{e^4}$

2-1 $\sqrt{2}(e^3-e)$ **3-1** $\frac{59}{24}$

1-1 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^4(t-3)e^{-t}dt$$

$$=\left[(t-3)\times(-e^{-t})\right]_1^4-\int_1^4(-e^{-t})dt$$

$$=-\frac{1}{e^4}-\frac{2}{e}-\left[e^{-t}\right]_1^4$$

$$=-\frac{2}{e^4}-\frac{1}{e}$$

한편, 구간 $[1,\ 3]$에서 $v(t)\le0$이고, 구간 $[3,\ 4]$에서 $v(t)\ge0$이므로 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^4|(t-3)e^{-t}|dt$$

$$=\int_1^3\{-(t-3)e^{-t}\}dt+\int_3^4(t-3)e^{-t}dt$$

$$=\left\{\left[-(t-3)\times(-e^{-t})\right]_1^3+\left[e^{-t}\right]_1^3\right\}$$

$$+\left\{\left[(t-3)\times(-e^{-t})\right]_3^4-\left[e^{-t}\right]_3^4\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e^3}\right)+\left(\frac{1}{e^3}-\frac{2}{e^4}\right)$$

$$=\frac{1}{e}+\frac{2}{e^3}-\frac{2}{e^4}$$

2-1 $\frac{dx}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t,\ \frac{dy}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t$ 이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(e^t\sin t+e^t\cos t)^2+(e^t\cos t-e^t\sin t)^2}$$

$$=\sqrt{2}e^t$$

따라서 점 P가 움직인 거리를 s라고 하면

$$s=\int_1^3\sqrt{2}e^t\,dt=\sqrt{2}\left[e^t\right]_1^3=\sqrt{2}(e^3-e)$$

3-1 곡선 $y=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x}\ (1\le x\le2)$에서 $\frac{dy}{dx}=x^2-\frac{1}{4x^2}$이므로 구하는 곡선의 길이 l은

$$l=\int_1^2\sqrt{1+\left(x^2-\frac{1}{4x^2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{4x}\right]_1^2$$

$$=\frac{59}{24}$$

소단원 확인 문제 273~274쪽

1-1 위치의 변화량: 2, 움직인 거리: 6

2-1 $\frac{\pi^2}{8}$ **3-1** $\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$

1-1 시각 $t=0$에서 $t=\pi$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^\pi2\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)dt=\left[-2\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^\pi=2$$

한편, 구간 $\left[0,\ \frac{2}{3}\pi\right]$에서 $v(t)\ge0$이고,

구간 $\left[\frac{2}{3}\pi,\ \pi\right]$에서 $v(t)\le0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^\pi\left|2\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\right|dt$$

$$=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}2\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)dt+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\left\{-2\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\right\}dt$$

$$=\left[-2\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}+\left[2\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$

$$=3+3=6$$

2-1 $\dfrac{dx}{dt}=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$,

$\dfrac{dy}{dt}=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$ 이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=t^2\cos^2 t+t^2\sin^2 t$$
$$=t^2(\cos^2 t+\sin^2 t)=t^2$$

따라서 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}$$

3-1 곡선 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\ln\sqrt{x}\ (1\le x\le e)$에서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}$$

이므로 구하는 곡선의 길이 l은

$$l=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^e\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^2+\ln\sqrt{x}\right]_1^e$$
$$=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

중단원 연습 문제 277~283쪽

1-1 (1) 42 (2) 2

2-1 (1) $\dfrac{14}{3}$ (2) e^3-e

3-1 $\dfrac{40\sqrt{5}}{3}$ cm^3

4-1 (1) $\dfrac{5}{2}\ln 2-\dfrac{3}{2}$ (2) $\dfrac{3}{2}\ln 2-\dfrac{1}{2}$

5-1 $\dfrac{1}{2}$

6-1 $\dfrac{1720}{3}$ cm^3

7-1 4

8-1 $\dfrac{8}{\pi}$

9-1 $\sqrt{3}\pi-1$

1-1 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^2=2\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^2$

이때 $\Delta x=\dfrac{4-1}{n}$, $x_k=1+k\times\dfrac{3}{n}$이라고 하면

정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$(\text{주어진 식})=2\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^2$$
$$=2\int_1^4 x^2dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^4=42$$

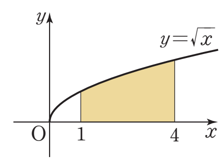
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}$

이때 $\Delta x=\dfrac{\frac{\pi}{2}-0}{n}$, $x_k=0+k\times\dfrac{\frac{\pi}{2}-0}{n}$이라고 하면

정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$(\text{주어진 식})=2\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$
$$=2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

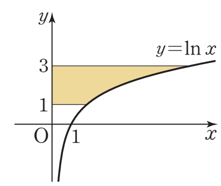
2-1 (1) 구하는 도형의 넓이 S는



$$S=\int_1^4\sqrt{x}\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$
$$=\frac{2}{3}(2^3-1)=\frac{14}{3}$$

(2) $y=\ln x$에서 $x=e^y$이므로

구하는 도형의 넓이 S는



$$S=\int_1^3 e^y\,dy=\Big[e^y\Big]_1^3$$
$$=e^3-e$$

3-1 조형물의 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$S(x)=\sqrt{2x}$ 이므로 구하는 조형물의 부피 V는

$$V=\int_0^{10}\sqrt{2x}\,dx=\int_0^{10}\sqrt{2}\,x^{\frac{1}{2}}\,dx$$
$$=\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{10}$$
$$=\frac{40\sqrt{5}}{3}\ (\mathrm{cm}^3)$$

4-1 (1) 시각 $t=\dfrac{1}{2}$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\ln t\,dt=\Big[t\ln t-t\Big]_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{3}{2}$$

(2) 닫힌구간 $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$에서 $v(t)\le 0$이고, 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 $v(t)\ge 0$이므로 시각 $t=\frac{1}{2}$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}|\ln t|\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-\ln t)dt+\int_{1}^{2}\ln t\,dt$$
$$=\Big[t-t\ln t\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}+\Big[t\ln t-t\Big]_{1}^{2}$$
$$=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}$$

5-1 $5x^2=t$로 놓으면 $10x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=p$일 때 $t=5p^2$이므로

$$\int_0^p xf(5x^2)dx=\frac{1}{10}\int_0^{5p^2}f(t)dt$$
$$=\frac{1}{10}(17-12)=\frac{1}{2}$$

6-1 밑면의 중심을 원점 O로 하고, 밑면에 수직인 직선을 x축으로 정할 때, x좌표가 $x(0\le x\le 10)$인 점을 지나 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이 $S(x)$는

$$S(x)=(x+2)^2$$

따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_0^{10}(x+2)^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x+2)^3\right]_0^{10}=\frac{1720}{3}\ (\mathrm{cm}^3)$$

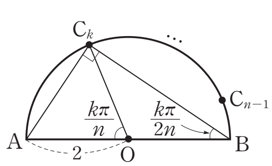
7-1 $\frac{dx}{dt}=6t$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-3$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=36t^2+9t^4-18t^2+9$$
$$=(3t^2+3)^2$$

따라서 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^1(3t^2+3)dt=\Big[t^3+3t\Big]_0^1=4$$

8-1 $S_k=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sin\frac{k\pi}{n}$이므로



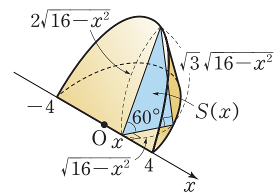
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}4\sin\frac{k\pi}{n}$$
$$=\frac{4}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

이때 $\varDelta x=\frac{\pi-0}{n}$, $x_k=0+k\times\frac{\pi}{n}$라고 하면

정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$(\text{주어진 식})=\frac{4}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$
$$=\frac{4}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\ (\because\ \sin\pi=0)$$
$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=\frac{4}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=\frac{8}{\pi}$$

9-1 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 중심을 원점으로, 지름을 x축으로 정하면 부피가 V_1인 입체도형의 밑면은 반지름의 길이가 4인 반원이다.



이때 x좌표가 x인 점을 지나고 밑면에 수직인 평면으로 이 입체도형을 자를 때 생기는 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}\times\sqrt{3}\sqrt{16-x^2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(16-x^2)$$
$$\therefore\ V_1=\int_{-4}^{4}S(x)dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-4}^{4}(16-x^2)dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[16x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-4}^{4}$$
$$=\frac{128\sqrt{3}}{3}$$

한편, 원기둥의 부피는 $\pi\times 4^2\times 8=128\pi$이므로

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{128\pi-V_1}{V_1}=\frac{128\pi}{V_1}-1$$
$$=\frac{128\pi}{\frac{128\sqrt{3}}{3}}-1$$
$$=\sqrt{3}\pi-1$$

대단원 **모의고사** 291~294쪽

01 ③	**02** ②	**03** ①	**04** ①	**05** ③
06 ⑤	**07** ③	**08** ②	**09** ④	**10** ①
11 ④	**12** ④	**13** ③	**14** ③	**15** ①
16 ⑤	**17** ④	**18** ②	**19** ③	**20** ④
21 $2\sqrt{2}$	**22** -1	**23** $\frac{3-e}{2-e}$	**24** 2	**25** $1-\frac{\pi}{4}$

01 $2f(x)+3=(x^2\ln x+C)'=2x\ln x+x$이므로

$$f(x)=x\ln x+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

$\therefore\ f(3)=3\ln 3$

02 $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx-\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx$

$$=\int_0^1\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx=\int_0^1(e^x-1)dx$$

$$=\Big[e^x-x\Big]_0^1=e-2$$

03 $f'(x)=k\ln x$이므로

$$f(x)=\int k\ln x\,dx$$

$$=kx\ln x-kx+C$$

이때 $f(e)=e$이므로 $C=e$

또, $f(1)=1$이므로 $k=e-1$

04 $9-x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-2x$이므로

$$\int x\sqrt{9-x^2}\,dx=\int\sqrt{t}\times\left(-\frac{1}{2}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=-\frac{1}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

05 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{n\pi}{n}\right)$

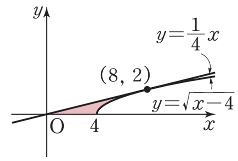
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}$$

이때 $\varDelta x=\frac{\pi-0}{n}$, $x_k=0+k\times\frac{\pi-0}{n}$이라고 하면

정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$(\text{주어진 식})=\int_0^{\pi}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}=0$$

06 $f(x)=\sqrt{x-4}$로 놓으면



$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-4}}\text{에서}$$

$$f'(8)=\frac{1}{4}$$

따라서 점 (8, 2)에서의 접선의 방정식은

$$y-2=\frac{1}{4}(x-8),\ \text{즉}\ y=\frac{1}{4}x$$

이므로 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times8\times2-\int_4^8\sqrt{x-4}\,dx$$

$$=8-\left[\frac{2}{3}(x-4)\sqrt{x-4}\right]_4^8=\frac{8}{3}$$

07 $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$이므로

$$f(x)=\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$$

$$=\ln(x^2+1)+C$$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=\ln(x^2+1)+1$이므로

$$f(\sqrt{e^2-1})=\ln\{(\sqrt{e^2-1})^2+1\}+1=3$$

08 $1+\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=3$이므로

$$\int_1^{e^2}\frac{3}{x(1+\ln x)^2}dx=\int_1^3\frac{3}{t^2}dt$$

$$=\left[-\frac{3}{t}\right]_1^3=2$$

09 곡선 $y=\frac{1}{3}(4x^2-1)\sqrt{4x^2-1}\ (1\le x\le3)$에서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2-1}\times8x=\sqrt{64x^4-16x^2}$$

따라서 구하는 곡선의 길이 l은

$$l=\int_1^3\sqrt{1+(\sqrt{64x^4-16x^2})^2}dx$$

$$=\int_1^3|8x^2-1|dx$$

$$=\left[\frac{8}{3}x^3-x\right]_1^3$$

$$=\frac{202}{3}$$

10 $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$이므로

$$\frac{5}{x^2+x-6}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}$$

$$\therefore \int \frac{5}{x^2+x-6}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$=\ln|x-2|-\ln|x+3|+C$$

$$=\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+C$$

따라서 $a=-2$, $b=3$이므로 $a-b=-5$

11 $\int_e^{2e}f(x)dx-\int_{e^2}^{2e}f(x)dx+\int_1^e f(x)dx$

$$=\int_e^{2e}f(x)dx+\int_{2e}^{e^2}f(x)dx+\int_1^e f(x)dx$$

$$=\int_e^{e^2}f(x)dx+\int_1^e f(x)dx$$

$$=\int_1^{e^2}f(x)dx=\int_1^{e^2}4x\ln x dx$$

$$=\Big[2x^2\ln x\Big]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\left(2x^2\times\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=4e^4-\Big[x^2\Big]_1^{e^2}=3e^4+1$$

12 $\int_1^6\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^6-\int_1^6\frac{1}{x}\times\left(-\frac{1}{x}\right)dx$

$$=-\frac{1}{6}\ln 6-\left[\frac{1}{x}\right]_1^6$$

$$=\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\ln 6=\frac{5-\ln 6}{6}$$

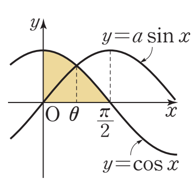
13 $a_n=\int_0^n 5^x\ln 5dx=\Big[5^x\Big]_0^n=5^n-1$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$$

14 두 곡선 $y=\cos x\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$와 $y=a\sin x$의 교점의 x좌표를 θ라고 하면

$\cos\theta=a\sin\theta$ $\quad\cdots\cdots$ ①

곡선 $y=\cos x\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

이므로

$$\int_0^{\theta}(\cos x-a\sin x)dx$$

$$=\Big[\sin x+a\cos x\Big]_0^{\theta}$$

$$=\sin\theta+a\cos\theta-a=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ 2\sin\theta+2a\cos\theta=2a+1$ $\quad\cdots\cdots$ ②

①, ②를 연립하여 풀면

$$\sin\theta=\frac{2a+1}{2(a^2+1)},\ \cos\theta=\frac{a(2a+1)}{2(a^2+1)}$$

한편, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$\left\{\frac{2a+1}{2(a^2+1)}\right\}^2+\left\{\frac{a(2a+1)}{2(a^2+1)}\right\}^2=1$$

위 식의 양변에 $\{2(a^2+1)\}^2$을 곱하여 정리하면

$4a^3-3a^2+4a-3=0$, $(4a-3)(a^2+1)=0$

$$\therefore\ a=\frac{3}{4}$$

15 $S_n=\int_n^{n+1}e^{-x}dx=\Big[-e^{-x}\Big]_n^{n+1}=e^{-n}-e^{-(n+1)}$

$$\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{k=1}^{n}\{e^{-k}-e^{-(k+1)}\}$$

$$=(e^{-1}-e^{-2})+(e^{-2}-e^{-3})+\cdots+(e^{-n}-e^{-(n+1)})$$

$$=e^{-1}-e^{-(n+1)}$$

$$=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^{n+1}}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^{n+1}}\right)=\frac{1}{e}$$

16 점 D에서 변 BC, 변 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$에 내린 수선의 발을 각각 H, H_k라고 하면

$\triangle\mathrm{DH}_k\mathrm{Q}_k \backsim \triangle\mathrm{DHC}$

또, $\overline{\mathrm{DH}_k}:\overline{\mathrm{H}_k\mathrm{Q}_k}=1:1$이므로

$$\overline{\mathrm{H}_k\mathrm{Q}_k}=\overline{\mathrm{DH}_k}=\frac{k}{n}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}=1+\frac{k}{n}$$

따라서 구하는 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}^3+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}^3+\cdots+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}^3\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^3$$

이때 $\Delta x=\dfrac{2-1}{n}$, $x_k=1+k\times\dfrac{1}{n}$이라고 하면

정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^3$$
$$=\int_1^2 x^3dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2$$
$$=\frac{15}{4}$$

17 $\displaystyle\int 3xe^x\,dx=3xe^x-\int 3e^x\,dx$

$=3xe^x-3e^x+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

$\displaystyle\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

$$\therefore f(x)=\begin{cases}3xe^x-3e^x+C_1 & (x<0)\\ \dfrac{1}{3}x^3+C_2 & (x>0)\end{cases}$$

이때 $f(1)=\dfrac{4}{3}$이므로

$\dfrac{1}{3}+C_2=\dfrac{4}{3}\qquad\therefore C_2=1$

또, $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)=-3+C_1=C_2$, 즉 $C_1=4$

$\therefore f(-1)=-3e^{-1}-3e^{-1}+4=4-\dfrac{6}{e}$

18 $W'(t)=0.02e^{0.1t}$이므로

$$W(t)=\int 0.02e^{0.1t}\,dt$$
$$=0.02\int e^{0.1t}\,dt$$
$$=0.2e^{0.1t}+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

이때 $W(0)=2$이므로

$0.2+C=2$, 즉 $C=1.8$

따라서 $W(t)=0.2e^{0.1t}+1.8$이므로

$W(10)=0.2e+1.8$

19 $f(0)=0$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(2h)-f(0)}{2h}\times2\right\}+\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(-2h)-f(0)}{-2h}\times2\right\}$$
$$=2f'(0)+2f'(0)=4f'(0)$$

한편, $u(t)=t$, $v'(t)=\sin(x-t)$로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=\cos(x-t)$이므로

$$f(x)=\Big[t\cos(x-t)\Big]_0^x-\int_0^x 1\times\cos(x-t)dt$$
$$=x-\Big[-\sin(x-t)\Big]_0^x=x-\sin x$$

이때 $f'(x)=1-\cos x$이므로 $f'(0)=0$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(-2h)}{h}=4f'(0)=0$$

20 $x^2+y^2=1$에서 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$이므로 단면은 높이가 $|x|$, 밑변의 길이가 $2\sqrt{1-x^2}$인 이등변삼각형이다.

따라서 구하는 입체의 부피 V는

$$V=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\times2\sqrt{1-x^2}\times|x|\,dx$$
$$=2\int_0^1\frac{1}{2}\times2\sqrt{1-x^2}\times x\,dx$$
$$=-\int_0^1\sqrt{1-x^2}\times(-2x)dx$$
$$=-\left[\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

서술형 문제

21 ❶ $\sqrt{1+\cos 2x}=\sqrt{2\cos^2 x}=\sqrt{2}\,|\cos x|$

❷ 이때 $|\cos x|=\begin{cases}\cos x & \left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)\\ -\cos x & \left(\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\right)\end{cases}$ 이므로

❸ $\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx$$
$$=\sqrt{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx\right\}$$
$$=\sqrt{2}\left(\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)$$
$$=2\sqrt{2}$$

채점 기준	배점
❶ $\sqrt{1+\cos 2x}$를 간단히 나타내기	30 %
❷ 범위에 따라 함수 $\lvert\cos x\rvert$를 나타내기	30 %
❸ 정적분의 값 구하기	40 %

22 ❶ $F(x)=xf(x)+x\cos x-\sin x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-x\sin x$$

$$\therefore f'(x)=\sin x$$

❷ $f(x)=\int \sin x dx=-\cos x+C$

이때 $f(\pi)=1$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=-\cos x$이므로

❸ $f(0)=-1$

채점 기준	배점
❶ 양변을 x에 대하여 미분하기	40 %
❷ $f(x)$ 구하기	40 %
❸ $f(0)$의 값 구하기	20 %

23 ❶ $\int_0^1 e^t f(t)dt=a$로 놓으면

$$f(x)=x+a$$

❷ $$\int_0^1 e^t f(t)dt=\int_0^1 e^t(t+a)dt$$

$$=\Big[e^t(t+a)\Big]_0^1-\int_0^1 e^t dt$$

$$=e(1+a)-a-\Big[e^t\Big]_0^1$$

$$=ea-a+1$$

이때 $ea-a+1=a$이므로

$$a=\frac{1}{2-e}$$

❸ 따라서 $f(x)=x+\frac{1}{2-e}$이므로

$$f(1)=\frac{3-e}{2-e}$$

채점 기준	배점
❶ $f(x)=x+a$로 놓기	20 %
❷ a에 대한 식을 세우고 a의 값 구하기	50 %
❸ $f(1)$의 값 구하기	30 %

24 ❶ $S_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin x\right|dx$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|dx$$

이때 함수 $y=|\sin x|$는 주기가 π인 주기함수이므로

$$\int_0^\pi |\sin x|dx=\int_0^\pi \sin x dx$$

$$=\Big[-\cos x\Big]_0^\pi$$

$$=2$$

따라서 $S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\times 2=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

❷ $$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

채점 기준	배점
❶ S_n 구하기	60 %
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 합 구하기	40 %

25 ❶ x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\tan x$인 정사각형이므로 단면의 넓이 $S(x)$는

$$S(x)=\tan^2 x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

❷ $$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-1)dx$$

$$=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=1-\frac{\pi}{4}$$

채점 기준	배점
❶ 단면의 넓이를 나타내는 식 구하기	40 %
❷ 입체도형의 부피 구하기	60 %

권말 부록

미적분 중간고사 296~300쪽

01 ⑤	02 ④	03 ②	04 ②	05 ④
06 ③	07 ③	08 ①	09 ④	10 ①
11 ①	12 ①	13 ④	14 ③	15 ④
16 1	17 48	18 1	19 14	20 $\frac{4}{e}$
21 2				

01 $\lim_{x\to0}\frac{(a+12)^x-a^x}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(a+12)^x-1-(a^x-1)}{x}$

$=\ln(a+12)-\ln a$

$=\ln\frac{a+12}{a}=\ln 3$

$\frac{a+12}{a}=3$에서 $a+12=3a$

$\therefore a=6$

02 주어진 이차방정식의 근을 구하면

$x=2n\pm\sqrt{4n^2+n}$

이때 a_n이 음의 실근이므로

$a_n=2n-\sqrt{4n^2+n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n$

$=\lim_{n\to\infty}(2n-\sqrt{4n^2+n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-\sqrt{4n^2+n})(2n+\sqrt{4n^2+n})}{2n+\sqrt{4n^2+n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+\sqrt{4n^2+n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2+\sqrt{4+\frac{1}{n}}}=-\frac{1}{4}$

03 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=4$, $\lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{x-2}=-1$에서

(분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

$\lim_{x\to1}f(x)-3=0$에서 $f(1)=3$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=4$ $\quad\therefore f'(1)=4$

마찬가지 방법으로 $\lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{x-2}=-1$에서

$g(2)=1$, $g'(2)=-1$

$\therefore (f\circ g)'(2)=f'(g(2))\times g'(2)$

$=f'(1)\times g'(2)$

$=4\times(-1)$

$=-4$

04 $x^3-4y^2-4xy-16=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2-8y\times\frac{dy}{dx}-4y-4x\times\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-4y}{4x+8y}$ (단, $x\neq-2y$)

이때 점 $(4, 2)$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$\frac{48-8}{16+16}=\frac{5}{4}$

05 $\overline{\mathrm{OP}}=1$, $\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{2}$이므로 두 점 P, Q는 각각

$\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

점 P에서 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$이므로 $\alpha=\frac{\pi}{6}-\beta$

이때 $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{14}}{4}$이므로

$\sin 2\beta=\sin(\beta+\beta)=2\sin\beta\cos\beta=\frac{\sqrt{7}}{4}$,

$\cos 2\beta=\cos(\beta+\beta)=2\cos^2\beta-1=\frac{3}{4}$

$\therefore \sin(\alpha-\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\beta-\beta\right)$

$=\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\beta\right)$

$=\sin\frac{\pi}{6}\cos 2\beta-\cos\frac{\pi}{6}\sin 2\beta$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{4}$

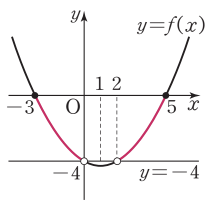
$=\frac{3-\sqrt{21}}{8}$

06 등비수열 $\left\{\left(\frac{1}{2}f(x)+1\right)^n\right\}$이 수렴하려면

$-1<\frac{1}{2}f(x)+1\leq1$

$-4<f(x)\leq0$ ……①

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-4$는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 부등식 ①을 만족시키는 x의 값의 범위는



$-3\le x<0$ 또는 $2<x\le 5$

이므로 정수 x는 -3, -2, -1, 3, 4, 5의 6개이다.

07 $(a-1)n\le a_n\le (b+1)n$ ……①

ㄱ. 부등식 ①의 각 변을 n^2으로 나누면

$$\frac{a-1}{n}\le\frac{a_n}{n^2}\le\frac{b+1}{n}$$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a-1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b+1}{n}=0$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=0$이다.

즉, 수열 $\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$은 수렴한다. (참)

ㄴ. a, b는 실수이고, $a^2+b^2=0$이므로 $a=b=0$이다. 부등식 ①은 $-n\le a_n\le n$이고, 각 변을 n으로 나누면 $-1\le\frac{a_n}{n}\le 1$이므로 수열 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$은 항상 수렴한다고 할 수 없다. (거짓)

[반례] $a_n=\begin{cases}-\frac{n}{2} & (n\text{이 홀수})\\ \frac{n}{2} & (n\text{이 짝수})\end{cases}$ 이면

$-n\le a_n\le n$을 만족시키지만 수열 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$은 발산한다.

ㄷ. $a-b=2$이면 부등식 ①은

$(a-1)n\le a_n\le (a-1)n$

이므로 $a_n=(a-1)n$이다.

이때 $\frac{a_n}{n}=a-1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}(a-1)=a-1$$

즉, 수열 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$은 수렴한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

08 $\overline{AB_n}=a_n$, $\overline{B_nC_n}=b_n$, $\overline{AC_n}=c_n$이라고 하면

$b_n=\frac{4}{3}a_n$, $a_{n+1}=a_n-r_{n+1}$

세 변의 길이가 a_n, b_n, c_n이고 넓이가 T_n인 삼각형의 내접원의 반지름의 길이는 $r_{n+1}=\frac{2T_n}{a_n+b_n+c_n}$이고,

$T_n=\frac{1}{2}a_nb_n$, $c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$이므로

$$\begin{aligned}r_{n+1}&=\frac{a_nb_n}{a_n+b_n+\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\\&=\frac{\frac{4}{3}a_n^2}{a_n\left(1+\frac{4}{3}\right)+a_n\sqrt{1+\frac{4^2}{3^2}}}\\&=\frac{4a_n}{3+4+\sqrt{3^2+4^2}}\\&=\frac{1}{3}a_n\end{aligned}$$

$r_1=\frac{1}{3}\overline{AB}=\frac{1}{3}\times 3=1$, $a_1=3-r_1=3-1=2$

$r_2=\frac{1}{3}a_1=\frac{2}{3}$, $a_2=a_1-r_2=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}=\frac{2^2}{3}$

$r_3=\frac{1}{3}a_2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $a_3=a_2-r_3=\frac{4}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{9}=\frac{2^3}{3^2}$

⋮

$r_{n+1}=\frac{1}{3}a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$, $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{3^n}=3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$(n=1, 2, 3, \cdots)$

$$\begin{aligned}\therefore S_n&=\frac{1}{2}\overline{O_{n+1}C_{n+1}}\times r_{n+1}\\&=\frac{1}{2}(b_{n+1}-r_{n+1})r_{n+1}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}a_{n+1}-r_{n+1}\right)r_{n+1}\\&=\frac{2}{3}\times 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}\\&=\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}\\&=\frac{5}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}=\frac{5}{6}\left(\frac{4}{9}\right)^n\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{5}{6}\times\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

09 $f'(x)=2e^{2x}\cos x+e^{2x}(-\sin x)$

$+2^x\ln 2\times\ln(x+1)+2^x\times\frac{1}{x+1}$

$\therefore f'(0)=2+0+0+1=3$

10 ㄱ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1\ (\text{수렴})$$

ㄴ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=1\neq0$

이므로 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$은 발산한다.

ㄷ. $\displaystyle\frac{3^n}{2^n}-\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{3^n}{2^n}-\frac{3}{2}\times\frac{3^n}{2^n}=-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{2^n}-\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}=-\infty\neq0$$

이므로 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{2^n}-\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}\right)$은 발산한다.

따라서 수렴하는 것은 ㄱ이다.

11 조건 (나)에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to1}\{f'(f(x))-1\}=0$이므로 $f'(f(1))=1$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{f(x)-f(1)}\times\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}=f''(f(1))f'(1)=f''(2)\times3=3$$

$\therefore f''(2)=1$

12 $g(a)=b$라고 하면 $f(b)=a$이므로

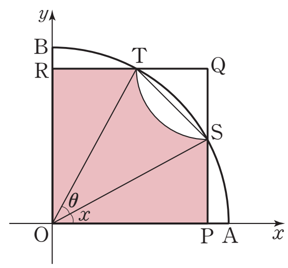
$\ln(e^b-1)=a,\ e^a=e^b-1$

$e^b=e^a+1$

또, $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$이므로

$$\frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{g'(a)}=\frac{e^a-1}{e^a}+\frac{1}{f'(g(a))}=\frac{e^a-1}{e^a}+\frac{e^b}{e^b-1}=\frac{e^a-1}{e^a}+\frac{e^a+1}{(e^a+1)-1}=\frac{2e^a}{e^a}=2$$

13 주어진 그림에서 O를 원점, 직선 OA를 x축의 양의 방향, 직선 OB를 y축의 양의 방향으로 하여 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



직선 OS와 x축이 이루는 각의 크기를 x라고 하면 점 S, Q는 각각 $\mathrm{S}(\cos x,\ \sin x)$, $\mathrm{Q}(\cos x,\ \cos x)$이므로

$$\overline{\mathrm{QS}}=\cos x-\sin x$$

이때 색칠한 부분의 넓이 D는

$$D=\cos^2 x-\frac{\pi}{4}(\cos x-\sin x)^2\ \left(0<x<\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos^2 x-\frac{\pi}{4}(1-\sin 2x)=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)-\frac{\pi}{4}(1-\sin 2x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\sin 2x$$

이므로

$$D'=-\sin 2x+\frac{\pi}{2}\cos 2x$$

$D'=0$에서 $-\sin 2x+\dfrac{\pi}{2}\cos 2x=0,\ \tan 2x=\dfrac{\pi}{2}$

이때 $\tan 2x=\dfrac{\pi}{2}$를 만족시키는 x에서 D는 극대이면서 최대가 된다.

$$\therefore \tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cot 2x=\frac{1}{\tan 2x}=\frac{2}{\pi}$$

참고 $\cos 2x=2\cos^2 x-1$이므로
$\cos^2 x=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$

14 $g(x)=\ln f'(x)=\ln\{1+\{f(x)\}^2\}$에서

$$g'(x)=\frac{2f(x)f'(x)}{1+\{f(x)\}^2}$$

$$=\frac{2f(x)\{1+\{f(x)\}^2\}}{1+\{f(x)\}^2}$$

$$=2f(x)$$

$$\therefore g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\times1=2$$

다른 풀이

$g(x)=\ln f'(x)$이므로

$$g'(x)=\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{2f(x)f'(x)}{f'(x)}=2f(x)$$

$$\therefore g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\times1=2$$

15 $$P'(t)=\frac{-6000\times(-2e^{-0.4t})}{(1+5e^{-0.4t})^2}$$

$$=\frac{12000\times e^{-0.4t}}{(1+5e^{-0.4t})^2}$$

이때 $e^{-0.4t}=a\ (a>0)$라고 하면

$$P'(t)=\frac{12000a}{1+10a+25a^2}=\frac{12000}{\frac{1}{a}+10+25a}$$

$$\le\frac{12000}{10+2\sqrt{25a\times\frac{1}{a}}}=\frac{12000}{20}$$

$$=600\ \left(\text{단, 등호는 } e^{-0.4t}=\frac{1}{5}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 물고기의 개체 수의 변화율은 $e^{-0.4c}=\frac{1}{5}$, 즉

$c=\frac{5}{2}\ln 5$일 때, 최댓값을 가진다.

16 ❶ $f(x)=x^n+5x$로 놓으면 $f(1)=6$이므로

$$a_n=\lim_{x\to1}\frac{x^n+5x-6}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

❷ 이때 $f'(x)=nx^{n-1}+5$이므로

$f'(1)=n+5$

$\therefore a_n=n+5$

❸ $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+5)^2}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{10}{n}+\frac{25}{n^2}\right)=1$$

채점 기준	배점
❶ $a_n=f'(1)$임을 알기	40 %
❷ 미분을 통해 a_n 구하기	40 %
❸ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{n^2}$의 값 구하기	20 %

17 ❶ 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라고 하면 공비가 $r(r>1)$이므로

$a_1+a_3=a+ar^2=15$

$a(1+r^2)=15$ ······①

❷ $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{(a_n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{ar^{2n-1}}{(ar^{n-1}+1)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{ar^{2n-1}}{a^2r^{2n-2}+2ar^{n-1}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{ar}{a^2+\frac{2a}{r^{n-1}}+\frac{1}{r^{2n-2}}}$$

$$=\frac{r}{a}=\frac{2}{3}\ (\because r>1)$$

$\therefore a=\frac{3}{2}r$ ······②

❸ ②를 ①에 대입하면

$\frac{3}{2}r(1+r^2)=15$

$r^3+r-10=0,\ (r-2)(r^2+2r+5)=0$

$\therefore r=2,\ a=3\ (\because r>1)$

$\therefore a_5=ar^4=3\times2^4=48$

채점 기준	배점
❶ 조건 (가)를 이용하여 a, r의 관계식 구하기	40 %
❷ 조건 (나)를 이용하여 a, r의 관계식 구하기	50 %
❸ ❶, ❷를 대입하여 a_5의 값 구하기	10 %

18 ❶ $$(a_1-1)+\left(\frac{a_2}{2}-1\right)+\left(\frac{a_3}{3}-1\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{n}-1\right)+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-1\right)$$

이 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-1\right)=0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$$

❷ $\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{5n-4a_n}{2n-a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-4\times\frac{a_n}{n}}{2-\frac{a_n}{n}}$

$$=\frac{5-4\times1}{2-1}=1$$

채점 기준	배점
❶ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 사이의 관계 알기	60 %
❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{5n-4a_n}{2n-a_n}$의 값 구하기	40 %

19 ❶ $\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{2^{x+1}-a}=\frac{b}{2\ln 2}$에서

$x \longrightarrow 0$일 때, (분자) $\longrightarrow$ 0이므로 (분모) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to0}(2^{x+1}-a)=2-a=0$

$\therefore a=2$

❷ $\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{2^{x+1}-2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{2(2^x-1)}$

$$=\frac{\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{7x}\times7}{2\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}}$$

$$=\frac{7}{2\ln 2}=\frac{b}{2\ln 2}$$

❸ 따라서 $b=7$이므로 $ab=14$

채점 기준	배점
❶ 극한의 성질을 이용하여 a의 값 구하기	30 %
❷ 삼각함수와 지수함수의 극한을 이용하여 b의 값 구하기	60 %
❸ ab의 값 구하기	10 %

20 ❶ $f(x)=\left(\ln\frac{1}{ax}\right)^2=(\ln ax)^2$에서

$$f'(x)=2\ln ax\times\frac{a}{ax}=\frac{2\ln ax}{x}$$

$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-2\ln ax}{x^2}=\frac{2(1-\ln ax)}{x^2}$$

❷ $f''(x)=0$에서 $x=\frac{e}{a}$이므로 $b=\frac{e}{a}$

$b=\frac{e}{a}$일 때, $f(b)=(\ln e)^2=1$이므로

점 $\left(\frac{e}{a},\ 1\right)$은 직선 $y=\frac{2}{e}x$ 위의 점이다.

❸ 따라서 $1=\frac{2}{e}\times\frac{e}{a}$이므로 $a=2,\ b=\frac{e}{2}$

$\therefore \frac{a}{b}=2\times\frac{2}{e}=\frac{4}{e}$

채점 기준	배점
❶ 이계도함수 $f''(x)$ 구하기	40 %
❷ $f''(x)=0$이 되는 x의 값 구하기	40 %
❸ $\frac{a}{b}$의 값 구하기	20 %

21 ❶ 점 A의 x좌표를 t라고 하면 $\mathrm{A}(t,\ \ln(2t+1))$

△OAB의 넓이 S_1과 △OAC의 넓이 S_2는 각각

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\ln(2t+1)=\frac{1}{2}\ln(2t+1)$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OC}}\times t=\frac{t}{2}$$

❷ 한편, $a \longrightarrow \infty$일 때, 두 곡선

$y=ax^2\ (a>0),\ y=\ln(2x+1)$

이 제1사분면에서 만나는 점 A는 원점에 점점 가까워지므로 $t \longrightarrow 0$이다.

❸ $\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln(2t+1)}{t}=2$

채점 기준	배점
❶ $S_1,\ S_2$를 t에 관한 식으로 나타내기	40 %
❷ $a \longrightarrow \infty$일 때 $t \longrightarrow 0$임을 알기	40 %
❸ $\lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2}$의 값 구하기	20 %

미적분 기말고사 301~305쪽

01 ②	**02** ③	**03** ①	**04** ④	**05** ⑤
06 ④	**07** ③	**08** ①	**09** ⑤	**10** ④
11 ③	**12** ③	**13** ②	**14** ⑤	**15** ④
16 ④	**17** ④	**18** $y=x-1$		**19** $\frac{9}{4}$
20 4	**21** 8	**22** $\frac{\sqrt{61}}{61}\pi$ m/s		**23** $e-2$
24 45π cm^3				

01 $\ln y=2e^{-3x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=-6e^{-3x}$$

$$\frac{dy}{dx}=-6e^{-3x}\times y \qquad \cdots\cdots ①$$

①에 $x=0$, $y=e^2$을 대입하면 $\frac{dy}{dx}=-6e^2$

따라서 점 $(0,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는 $-6e^2$이므로 접선의 방정식은

$$y=-6e^2x+e^2$$

이 접선이 점 $(k,\ -3e^2)$을 지나므로

$$-3e^2=-6e^2k+e^2$$

$$\therefore\ k=\frac{2}{3}$$

02 방정식 $e^{2x}-nx=0$이 실근을 갖지 않으려면 함수 $y=e^{2x}-nx$의 그래프가 x축과 만나지 않아야 한다.

$f(x)=e^{2x}-nx$라고 하면

$$f'(x)=2e^{2x}-n,\ f''(x)=4e^{2x}$$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{n}{2}$

$f''(x)=0$을 만족시키는 x는 없다.

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}\ln\frac{n}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{n}{2}$에서 최솟값을 가지므로

$f\left(\frac{1}{2}\ln\frac{n}{2}\right)>0$이어야 한다. 즉,

$$f\left(\frac{1}{2}\ln\frac{n}{2}\right)=\frac{n}{2}-\frac{n}{2}\ln\frac{n}{2}=\frac{n}{2}\left(1-\ln\frac{n}{2}\right)$$

에서 n은 자연수이므로

$$1-\ln\frac{n}{2}>0,\ \ln\frac{n}{2}<1$$

$$\therefore\ 0<n<2e$$

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지지 않도록 하는 자연수 n은 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

03 $f(x)=x-1$, $g'(x)=e^x$로 놓으면

$$f'(x)=1,\ g(x)=e^x$$

이므로

$$\int(x-1)e^x\,dx=(x-1)e^x-\int e^x\,dx$$
$$=(x-2)e^x+C$$

04 $\sin x=t$라 하고, 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\cos x\times\frac{dx}{dt}=1$$

이므로

$$f(x)=\int(\cos x\sin^2x+\cos x\sin^3x)dx$$
$$=\int(t^2+t^3)dt$$
$$=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{4}t^4+C$$
$$=\frac{1}{3}\sin^3x+\frac{1}{4}\sin^4x+C$$

이때 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+C=1$이므로 $C=\frac{5}{12}$

$$\therefore\ f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{12}=\frac{1}{3}$$

05 $f(x)=\sin x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$$f'(x)=\cos x,\ g(x)=e^x$$

이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx=\Big[e^x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx$$
$$=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx$$

이때 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx$에 부분적분법을 다시 한 번 적용하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx=\Big[e^x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx$$
$$=-1+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx$$

따라서

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx = e^{\frac{\pi}{2}} - \left(-1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx\right)$$

이므로

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx = e^{\frac{\pi}{2}} + 1$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$$

06 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}dx$

$$=\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$=\Big[\ln|x+1| - \ln|x+2|\Big]_0^1$$

$$=(\ln 2 - \ln 3) - (\ln 1 - \ln 2) = \ln\frac{4}{3}$$

07 ㄱ. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a) = 3$

$\therefore F(b) = F(a) + 3$ (참)

ㄴ. $y=F(x)$에서

$F'(x)=f(x)$, $F''(x)=f'(x)$

주어진 그래프에서 $x=c$일 때,

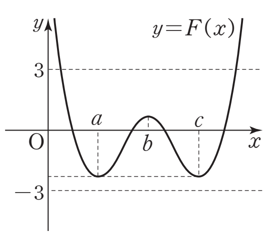
$F''(c)=f'(c)>0$

따라서 점 $(c, F(c))$는 곡선 $y=F(x)$의 변곡점이 아니다. (거짓)

ㄷ. $\displaystyle\int_a^c f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^c = F(c) - F(a) = 0$

$\therefore F(a) = F(c)$

$-3<F(a)<0$이면 $0<F(b)<3$, $-3<F(c)<0$ 이므로 함수 $y=F(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=F(x)$의 그래프와 x축이 서로 다른 네 점에서 만나므로 방정식 $F(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

08 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(n+k)^4}{\sum_{k=1}^{n}k^4}$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^4\times\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\times\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{\int_1^2 x^4 dx}{\int_0^1 x^4 dx} = \frac{\frac{1}{5}(32-1)}{\frac{1}{5}} = 31$$

09 ㄱ. $f'(x)=\dfrac{1}{27}(4x^3-18x^2+24x+19)$

$$f''(x)=\frac{1}{27}(12x^2-36x+24)$$

$$=\frac{4}{9}(x-1)(x-2)$$

$f''(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

이때 $f''(2)=0$이고, $x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀐다.

이때 $f(2)=2$이므로 점 $(2, 2)$는 변곡점이다. (참)

ㄴ. $\dfrac{1}{27}(x^4-6x^3+12x^2+19x)=x$에서

$x^4-6x^3+12x^2-8x=0$, $x(x-2)^3=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 방정식 $f(x)=x$의 실근 중 양수인 것은 2뿐이다. (참)

ㄷ. $f(2)=2$이면 $g(2)=2$이고 $f'(2)=1$이므로

$$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(2)}=1$$

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 함수의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

즉, ㄴ에서 $0<x<2$일 때 $f(x)<x$이므로

$f(x)<g(x)$

또, $x\ge 2$일 때 $f(x)\ge x$이므로

$f(x)\ge g(x)$

$H(x)=|f(x)-g(x)|$라고 하면

$$H(x)=\begin{cases} g(x)-f(x) & (0<x<2) \\ f(x)-g(x) & (x\ge 2)\end{cases}$$

따라서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=1,$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=g'(2)=1$$

이므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{H(2+h)-H(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\left\{\frac{g(2+h)-g(2)}{h}-\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\right\}$$

$$=0$$

같은 방법으로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{H(2+h)-H(2)}{h}=0$$

따라서 $H(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(2+\frac{3}{n}\right)^2+\left(2+\frac{6}{n}\right)^2+\cdots+\left(2+\frac{3n}{n}\right)^2\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^2\times\frac{3}{n}$$

이때 $\Delta x=\frac{5-2}{n}$, $x_k=\frac{3k}{n}$라고 하면 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^2\times\frac{3}{n}$$

$$=\frac{1}{3}\int_2^5 x^2dx=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^5=13$$

11 접점을 $\mathrm{Q}(t,\ 1+\ln t)$라고 하면 $y'=\frac{1}{x}$이므로 접선 l의 방정식은

$$y=\frac{1}{t}(x-t)+1+\ln t,\ \text{즉}\ y=\frac{1}{t}x+\ln t$$

따라서 두 점 P, R는 각각

$\mathrm{P}(0,\ \ln t)$, $\mathrm{R}(0,\ 1+\ln t)$

ㄱ. $\overline{\mathrm{PR}}=(1+\ln t)-\ln t=1$ (참)

ㄴ. $S(a)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{RQ}}\times\overline{\mathrm{PR}}=\frac{t}{2}$이고

$a=-t\ln t$에서 $a\longrightarrow 0-$이면 $t\longrightarrow 1+$이므로

$$\lim_{a\to 0-}S(a)=\lim_{t\to 1+}\frac{t}{2}=\frac{1}{2}\ (\text{참})$$

ㄷ. $a=-t\ln t$에서 $a\longrightarrow -\infty$이면 $t\longrightarrow \infty$이므로

$$\lim_{a\to-\infty}\frac{S(a)}{a}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{t}{2}}{-t\ln t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{2\ln t}=0\ (\text{거짓})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

12 점 P의 시각 t에서의 위치를 $f(t)$라고 하면

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f(0)+\int_0^{\frac{\pi}{6}}(4t-2\cos 2t)dt$$

$$=0+\left[2t^2-\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{\pi^2}{18}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

13 $y=\sin x$와 $y=-\cos x$의 교점은 $0\le x\le\pi$에서 $x=\frac{3}{4}\pi$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|dx$$

$$=\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(\sin x+\cos x)dx+\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}(-\cos x-\sin x)dx$$

$$=\left[-\cos x+\sin x\right]_0^{\frac{3}{4}\pi}+\left[\cos x-\sin x\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+1-1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=2\sqrt{2}$$

14 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=k$ (k는 상수)라고 하면

$$f(x)=x\cos x+k$$

$$k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t\cos t+k)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}kdt$$

$$=\left[t\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt+\frac{\pi}{2}k$$

$$=\frac{\pi}{2}-1+\frac{\pi}{2}k$$

$$\therefore\ k=-1$$

따라서 $f(x)=x\cos x-1$이므로

$$f(\pi)=-\pi-1$$

15 표면의 넓이를 $S(x)$, 부피를 $V(x)$라고 하면

$\frac{dV}{dx}=S(x)=\ln(x+1)$이므로

$$V(x)=\int_0^{20}\ln(x+1)dx$$

$$=\left[(x+1)\ln(x+1)-(x+1)\right]_0^{20}$$

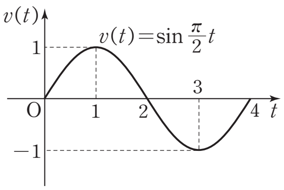
$$=21\ln 21-21+1$$

$$=21\ln 21-20$$

따라서 $a=21$, $b=-20$이므로

$a+b=1$

16 점 P의 속도 $v(t)=\sin\frac{\pi}{2}t$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 점 P의 속도 $v(t)=\sin\frac{\pi}{2}t$가 0이 되는 t의 값은 $t=0$ 또는 $t=2$ 또는 $t=4$이므로 점 P는 0초에서 4초 사이에 한 번 정지한다. (참)

ㄴ. $t=0$에서의 점 P의 위치가 0이므로 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3 \sin\frac{\pi}{2}t\,dt=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}t\right]_0^3=\frac{2}{\pi}\ (\text{거짓})$$

ㄷ. $0\le t\le 2$에서 $v(t)\ge 0$, $2\le t\le 4$에서 $v(t)\le 0$이므로 점 P가 원점을 출발하여 4초 동안 실제로 움직인 거리는

$$\int_0^2 \sin\frac{\pi}{2}t\,dt+\int_2^4\left(-\sin\frac{\pi}{2}t\right)dt$$
$$=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}t\right]_0^2+\left[\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}t\right]_2^4$$
$$=\frac{8}{\pi}\ (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17 곡선 $y=\ln(\cos x)\left(0\le x\le\frac{\pi}{6}\right)$에서

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

이므로 곡선의 길이 l은

$$l=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+(-\tan x)^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sec x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$이고,

$x=0$일 때 $t=0$

$x=\frac{\pi}{6}$일 때 $t=\frac{1}{2}$

이므로

$$(\text{주어진 식})=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-t^2}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[-\ln|1-t|+\ln|1+t|\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\ln 3$$

18 ❶ $f(x)=\ln x$라고 하면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(a, \ln a)$라고 하면 $f'(a)=\frac{1}{a}$이므로 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{a}(x-a)+\ln a$$

❷ 이때 이 접선이 점 $(0, -1)$을 지나므로

$$-1=\frac{1}{a}(-a)+\ln a$$
$$-1=\ln a-1,\ a=1$$

❸ 따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=x-1$$

채점 기준	배점
❶ 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구하기	40 %
❷ a의 값 구하기	30 %
❸ 접선의 방정식 구하기	30 %

19 ❶ $f'(x)=x^3-1$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

이때 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 가지므로 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=\frac{1}{4}$이다.

❷ 한편, $g(x)=-(e^x+e^{-x})+k$에서 모든 실수 x에 대하여

$$e^x+e^{-x}\ge 2$$

이므로 $g(x)$의 최댓값은 $k-2$이다.

❸ 따라서 $f(x_1)\ge g(x_2)$가 항상 성립하려면

$$\frac{1}{4}\ge k-2,\ \text{즉}\ k\le\frac{9}{4}$$

이어야 하므로 상수 k의 최댓값은 $\frac{9}{4}$이다.

채점 기준	배점
❶ 함수 $f(x)$의 최솟값 구하기	30 %
❷ 함수 $g(x)$의 최댓값 구하기	30 %
❸ k의 최댓값 구하기	40 %

20 ❶ 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$y=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

❷ 곡선 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=\pi$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 하면

닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$에서 $2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le 0$,

닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$에서 $2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\ge 0$

이므로

$$S=\int_0^{\pi}\left|2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}-2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx$$
$$=\left[2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[-2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{2}\right)-2\left(-\frac{1}{2}-1\right)$$
$$=1+3=4$$

채점 기준	배점
❶ 덧셈정리를 이용하여 주어진 함수를 사인함수로 나타내기	40 %
❷ 곡선이 양인 부분과 음인 부분으로 나누어 도형의 넓이 구하기	60 %

21 ❶ $f(x)=\int\frac{x-2}{x^2-4x-4}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x-4}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-4x-4)'}{x^2-4x-4}dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-4x-4|+C$$

❷ 그런데 $f(-1)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\ln|x^2-4x-4|$

이때 $\frac{1}{2}\ln|x^2-4x-4|=0$에서

$\ln|x^2-4x-4|=0$, $|x^2-4x-4|=1$

(ⅰ) $x^2-4x-4=1$일 때

$x^2-4x-5=0$, $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

(ⅱ) $x^2-4x-4=-1$일 때

$x^2-4x-3=0 \qquad \therefore x=2\pm\sqrt{7}$

❸ (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 실수 x의 값은

$x=-1$ 또는 $x=5$ 또는 $x=2\pm\sqrt{7}$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은

$-1+5+2+\sqrt{7}+2-\sqrt{7}=8$

채점 기준	배점
❶ 조건을 만족시키는 $f(x)$ 구하기	40 %
❷ $f(x)=0$을 만족시키는 방정식 구하기	30 %
❸ x의 값의 합 구하기	30 %

22 ❶ $\angle POQ=\theta$, $\overline{PQ}=x$라고 하면 $\triangle POQ$에서

$x^2=5^2+6^2-2\times5\times6\cos\theta$

$\quad=61-60\cos\theta$

이 식의 양변을 시각 t에 대하여 미분하면

$$2x\times\frac{dx}{dt}=60\sin\theta\times\frac{d\theta}{dt}$$

❷ 이때 P, Q가 탄 놀이기구는 1초에 각각 $\frac{2\pi}{60}$, $\frac{4\pi}{60}$씩 회전하므로

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{4\pi}{60}-\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$$

$\angle POQ=\frac{\pi}{2}$일 때, $x=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{61}$

❸ 따라서 P, Q가 서로 접근하는 속도 $\frac{dx}{dt}$는

$$2\sqrt{61}\times\frac{dx}{dt}=60\times\frac{\pi}{30}=2\pi$$

$$\therefore \frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{\sqrt{61}}=\frac{\sqrt{61}}{61}\pi\ (\text{m/s})$$

채점 기준	배점
❶ $\overline{PQ}^2$의 값을 θ로 나타내기	40 %
❷ $\frac{d\theta}{dt}$와 $\angle POQ=\frac{\pi}{2}$일 때 x의 값 구하기	30 %
❸ P, Q가 서로 접근하는 속도 $\frac{dx}{dt}$ 구하기	30 %

23 ❶ $\Delta x=\dfrac{1}{n}$, $x_k=\dfrac{k}{n}$라고 하면 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

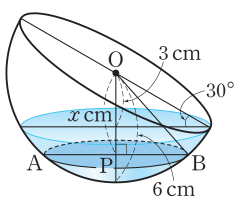
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2e^{\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n^2}e^{\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1 x^2e^x dx$$

❷ 부분적분법을 이용하면

$$\int_0^1 x^2e^x dx=\Big[x^2e^x\Big]_0^1-2\int_0^1 xe^x\,dx$$
$$=e-2\left(\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx\right)$$
$$=e-2\{e-(e-1)\}$$
$$=e-2$$

채점 기준	배점
❶ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2e^{\frac{k}{n}}$을 정적분으로 나타내기	50 %
❷ 정적분 $\int_0^1 x^2e^x dx$의 값 구하기	50 %

24 ❶ 오른쪽 그림과 같이 구의 중심으로부터 x cm $(3\le x\le 6)$만큼 떨어진 점을 P라고 하면, 수면과 평평하게 자른 단면은 중심이 P이고 지름이 $\overline{AB}$인 원이므로



$\overline{OP}=x$ cm, $\overline{OB}=6$ cm에서

$\overline{PB}=\sqrt{36-x^2}$ (cm)

❷ 이때 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$S(x)=\pi(36-x^2)$ (cm^2)

❸ 따라서 구하는 부피 V는

$$V=\pi\int_3^6(36-x^2)dx$$
$$=\pi\left[36x-\frac{x^3}{3}\right]_3^6$$
$$=\pi(144-99)=45\pi\ (\text{cm}^3)$$

이므로 남아 있는 물의 양은 45π cm^{3}이다.

채점 기준	배점
❶ 그림에서 $\overline{PB}$의 길이를 x로 나타내기	40 %
❷ 단면의 넓이 구하기	20 %
❸ 남아 있는 물의 양 구하기	40 %

306~310쪽

대단원 기출 모의고사 　I. 수열의 극한

정답률 80 % 이상	01 ⑤	02 ③	03 2	04 ①
05 15	06 ②	07 12	08 16	09 ②
정답률 79~60 %	10 ②	11 ①	12 ②	13 ④
14 ③	15 ①	16 ②	17 ④	18 16
정답률 60 % 미만	19 4	20 ①	21 ③	22 33
23 16	24 ③			

01 치환하여 극한값 구하기

$\dfrac{a_n}{3n}=c_n$이라고 하면 $a_n=3n\times c_n$

$\dfrac{2n+3}{b_n}=d_n$이라고 하면 $b_n=\dfrac{2n+3}{d_n}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=2$, $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=6$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n\times c_n}{\frac{2n+3}{d_n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n\times c_n\times d_n}{2n+3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+3}\times\lim_{n\to\infty}c_n\times\lim_{n\to\infty}d_n$$
$$=\frac{3}{2}\times2\times6=18$$

02 수열의 극한의 활용

곡선 $y=\dfrac{2n}{x}$과 직선 $y=-\dfrac{x}{n}+3$의 교점의 x좌표는

$\dfrac{2n}{x}=-\dfrac{x}{n}+3$에서 $2n^2=-x^2+3nx$

$x^2-3nx+2n^2=0$, $(x-n)(x-2n)=0$

$\therefore$ $x=n$ 또는 $x=2n$

즉, $A_n(n,\ 2)$, $B_n(2n,\ 1)$

$l_n=\sqrt{(2n-n)^2+(1-2)^2}=\sqrt{n^2+1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(l_{n+1}-l_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{2}{1+1}=1$$

03 $\infty-\infty$ **꼴의 극한**

$x^2+2nx-4n=0$에서 $x=-n\pm\sqrt{n^2+4n}$

이때 a_n은 양의 실근이므로

$$a_n=-n+\sqrt{n^2+4n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n}-n)(\sqrt{n^2+4n}+n)}{\sqrt{n^2+4n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}$$

$$=\frac{4}{1+1}=2$$

04 $\frac{\infty}{\infty}$ **꼴의 극한**

$a_n=\log\frac{n+1}{n}$이므로

$$a_1+a_2+\cdots+a_n$$

$$=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots+\log\frac{n+1}{n}$$

$$=\log\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=\log(n+1)$$

$$\therefore 10^{a_1+a_2+\cdots+a_n}=10^{\log(n+1)}=n+1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

05 **수열의 극한의 대소 관계**

부등식의 각 변에 $\frac{5}{n^2+2n}$를 곱하면

$$\frac{5(3n^2+2n)}{n^2+2n}<\frac{5}{n^2+2n}a_n<\frac{5(3n^2+3n)}{n^2+2n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{5(3n^2+2n)}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{15n^2+10n}{n^2+2n}=15$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5(3n^2+3n)}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{15n^2+15n}{n^2+2n}=15$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n}{n^2+2n}=15$$

06 **등비수열의 극한**

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a_1, 공비가 3인 등비수열이므로

$$S_n=\frac{a_1(3^n-1)}{3-1}=\frac{a_1}{2}(3^n-1)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_1}{2}(3^n-1)}{3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\frac{a_1}{2}$$

즉, $\frac{a_1}{2}=5$이므로 $a_1=10$

07 $\frac{\infty}{\infty}$ **꼴의 극한**

$a\neq0$이면 주어진 수열은 발산하므로 $a=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+7}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+7}{3n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{7}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{b}{3}$$

즉, $\frac{b}{3}=4$이므로 $b=12$

$$\therefore a+b=0+12=12$$

08 **등비급수의 합**

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>0)$라고 하면

$a_1+a_2=20$에서 $a_1+a_1r=20$

$\therefore a_1(1+r)=20$ ……①

$\sum_{n=3}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-(a_1+a_2)$이므로

$$\frac{4}{3}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-20 \qquad \therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{64}{3}$$

$$\frac{a_1}{1-r}=\frac{64}{3} \qquad \therefore a_1=\frac{64}{3}(1-r) \qquad \cdots\cdots②$$

②를 ①에 대입하면

$$\frac{64}{3}(1-r)(1+r)=20,\ 1-r^2=\frac{15}{16}$$

$$r^2=\frac{1}{16} \qquad \therefore r=\frac{1}{4}\ (\because r>0)$$

따라서 $r=\frac{1}{4}$을 ②에 대입하면

$$a_1=\frac{64}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=16$$

09 **급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴, 발산과 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 사이의 관계**

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n}{n+1}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{3n}{n+1}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}=0,\ \lim_{n\to\infty} a_n-3=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=3$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$

$$\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=0,\ 3+\lim_{n\to\infty} b_n=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n=-3$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3-b_n}{a_n}=\frac{3-(-3)}{3}=2$$

10 **$\infty-\infty$ 꼴의 극한**

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=a+2d=5,\ a_6=a+5d=11$이므로

$a=1,\ d=2$

$\therefore a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

11 **등비급수의 합**

$a_na_{n+1}+a_{n+1}=ka_n^{\ 2}+ka_n$에서

$(a_n+1)a_{n+1}=ka_n(a_n+1)$

$a_n+1\neq 0$이므로 양변을 a_n+1로 나누면

$a_{n+1}=ka_n$

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=k$, 공비가 k인 등비수열이므로

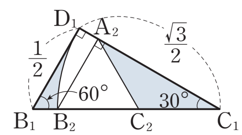
$a_n=k\times k^{n-1}=k^n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} k^n=\frac{k}{1-k}\ (\because 0<k<1)$$

$\frac{k}{1-k}=5$에서 $5-5k=k$

$$\therefore k=\frac{5}{6}$$

12 **등비급수의 활용**



$\overline{C_1D_1}$은 한 변의 길이가 1인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 높이이므로

$$\overline{C_1D_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 D_1B_2로 둘러싸인 영역의 넓이는

($\triangle B_1C_1D_1$의 넓이)$-$(부채꼴 $B_2C_1D_1$의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{16} \qquad \cdots\cdots①$$

직각삼각형 $A_2B_2C_1$에서

$$\overline{A_2B_2}=\overline{B_2C_1}\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\overline{A_2C_1}=\overline{B_2C_1}\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}$$

이때 $\triangle A_2C_2C_1$의 넓이는 $\triangle A_2B_2C_1$의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로

$$\triangle A_2C_2C_1=\frac{1}{2}\triangle A_2B_2C_1$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\overline{A_2B_2}\times\overline{A_2C_1}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{3}{4}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{64} \qquad \cdots\cdots②$$

①, ②에 의하여 R_1에서 색칠한 부분의 넓이는

$$S_1=\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{16}+\frac{3\sqrt{3}}{64}=\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{64}$$

한편, 두 직각삼각형 $D_1B_1C_1$, $D_2B_2C_2$의 닮음비가

$$\overline{D_1B_1}:\overline{D_2B_2}=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{8}=4:\sqrt{3}$$

이므로 그림 R_1에서 색칠한 부분의 넓이와 그림 R_2에서 새로 색칠한 부분의 넓이의 비는 16 : 3이다.

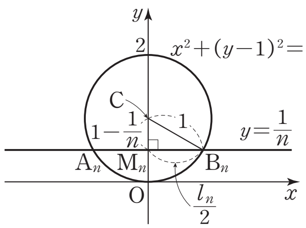
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = S_1 + \frac{3}{16}S_1 + \left(\frac{3}{16}\right)^2 S_1 + \cdots$$

$$= \frac{S_1}{1-\frac{3}{16}} = \frac{\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{64}}{\frac{13}{16}}$$

$$= \frac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$$

13 **수열의 극한의 응용**

주어진 원의 중심을 C(0, 1), $\overline{A_nB_n}$의 중점을 M_n이라고 하면 $\triangle CM_nB_n$은 직각삼각형이다.



$\overline{CB_n}=1$, $\overline{CM_n}=1-\frac{1}{n}$이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\left(\frac{l_n}{2}\right)^2 = \overline{M_nB_n}^2 = \overline{CB_n}^2 - \overline{CM_n}^2$$

$$= 1^2 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}$$

즉, $(l_n)^2 = \frac{8}{n} - \frac{4}{n^2}$이므로 $n(l_n)^2 = 8 - \frac{4}{n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n(l_n)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(8-\frac{4}{n}\right) = 8$$

14 **등비급수의 합**

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(-1<r<1)$라고 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$에서 $\frac{1}{1-r} = 3$

$1 = 3-3r$, $3r = 2$ $\qquad \therefore r = \frac{2}{3}$

$$\therefore a_n = 1\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_{3n-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3n-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3(n-1)} = \left(\frac{8}{27}\right)^{n-1}$$

$$a_{3n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3n-2} = \frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{3n-3}$$

$$= \frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{3(n-1)} = \frac{2}{3}\times\left(\frac{8}{27}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-2}-a_{3n-1})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{8}{27}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\times\left(\frac{8}{27}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\times\left(\frac{8}{27}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{8}{27}} = \frac{9}{19}$$

15 **급수의 수렴**

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4} = 0$$

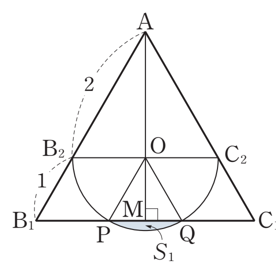
$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}{n^4}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4}$$

16 **등비급수의 활용**

다음 그림과 같이 점 A에서 $\overline{B_1C_1}$에 내린 수선의 발을 M, $\overline{AM}$과 $\overline{B_2C_2}$의 교점을 O라고 하면 점 O는 $\overline{B_2C_2}$의 중점이므로 $\overline{B_2C_2}$를 지름으로 하는 원의 중심이다.



$\overline{AB_2} : \overline{B_2B_1} = \overline{AC_2} : \overline{C_2C_1} = 2 : 1$이므로

$$\overline{AB_2} = \overline{AC_2} = \frac{2}{3}\overline{AB_1} = \frac{2}{3}\times 3 = 2$$

또, $\angle B_2AC_2 = 60°$이므로 $\triangle AB_2C_2$는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

한편, $\overline{B_1C_1}$과 호 B_2C_2가 만나는 두 점을 각각 P, Q라고 하면

$\overline{OB_2}=\frac{1}{2}\overline{B_2C_2}=\frac{1}{2}\times2=1$이므로 $\overline{OP}=\overline{OQ}=1$

이때 $\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times3=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\overline{AO}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$이므로

$$\overline{OM}=\overline{AM}-\overline{AO}=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

△OPM에서 $\overline{PM}^2=\overline{OP}^2-\overline{OM}^2=1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$$\therefore\ \overline{PM}=\frac{1}{2}\ (\because\ \overline{PM}>0)$$

따라서 $\overline{PQ}=2\overline{PM}=2\times\frac{1}{2}=1$이므로 △OPQ는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.

이때 △OPQ의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$, 부채꼴 OPQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$이므로

$$S_1=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

한편, $\overline{B_1C_1}:\overline{B_2C_2}=3:2$이므로

$$S_1:S_2=3^2:2^2=9:4$$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$, 공비가 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{4}{9}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{20}$$

17 급수의 수렴 조건

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-3}{2}\right)^n$의 공비가 $\frac{x-3}{2}$이므로 이 급수가 수렴하려면

$$-1<\frac{x-3}{2}<1,\ -2<x-3<2 \qquad \therefore\ 1<x<5$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x는 2, 3, 4이므로 그 합은 9이다.

18 등비수열의 극한

두 점 P_n, P_{n+1}의 좌표를 각각 구하면

$(4^n,\ 2^n)$, $(4^{n+1},\ 2^{n+1})$

이므로

$$L_n=\sqrt{(4^{n+1}-4^n)^2+(2^{n+1}-2^n)^2}$$
$$=\sqrt{(3\times4^n)^2+(2^n)^2}$$
$$=\sqrt{9\times16^n+4^n}$$

L_n의 식에서 n 대신 $n+1$을 대입하면

$$L_{n+1}=\sqrt{9\times16^{n+1}+4^{n+1}}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{9\times16^{n+1}+4^{n+1}}}{\sqrt{9\times16^n+4^n}}\right)^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times16^{n+1}+4^{n+1}}{9\times16^n+4^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times16\times16^n+4\times4^n}{9\times16^n+4^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times16+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{9+\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$
$$=\frac{9\times16+4\times0}{9+0}$$
$$=16$$

19 급수의 수렴과 극한 사이의 관계

$\sum_{n=1}^{\infty}(3^na_n-2)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(3^na_n-2)=0$

$$\lim_{n\to\infty}3^na_n-2=0 \qquad \therefore\ \lim_{n\to\infty}3^na_n=2$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{6a_n+5\times4^{-n}}{a_n+3^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6\times3^na_n+5\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{3^na_n+1}$$
$$=\frac{6\times2+5\times0}{2+1}=4$$

20 등비급수의 합

$7a_1+7^2a_2+\cdots+7^{n-1}a_{n-1}+7^na_n=3^n-1$ ……①

$7a_1+7^2a_2+\cdots+7^{n-1}a_{n-1}=3^{n-1}-1$ ……②

①−②를 하면

$7^na_n=3^n-3^{n-1}$, $7^na_n=3\times3^{n-1}-3^{n-1}$

$7^na_n=2\times3^{n-1}$

$\therefore\ a_n=\frac{2\times3^{n-1}}{7^n}\ (n\geq2)$ ……③

①에 $n=1$을 대입하면 $7a_1=2$, 즉 $a_1=\frac{2}{7}$이고,

이것은 ③에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=\frac{2\times3^{n-1}}{7^n}\ (n\geq1)$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{2\times3^{n-1}}{7^n}}{3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{7^n}$$
$$=\frac{\frac{2}{7}}{1-\frac{1}{7}}=\frac{1}{3}$$

21 등비수열의 극한

직선 $y=g(x)$는 원점과 점 $(3,\ 3)$을 지나므로 직선의 방정식은 $y=\dfrac{3}{3}x$, 즉 $y=x$이다.

이때 $g(x)=x$이므로 $g(2)=2$이고, 그래프에서

$$f(2)=4$$

$$h(2)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(2)\}^{n+1}+5\{g(2)\}^n}{\{f(2)\}^n+\{g(2)\}^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+5\times2^n}{4^n+2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=4$$

또, $g(3)=3$이고, 그래프에서 $f(3)=3$이므로

$$h(3)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(3)\}^{n+1}+5\{g(3)\}^n}{\{f(3)\}^n+\{g(3)\}^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5\times3^n}{3^n+3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times3^n+5\times3^n}{3^n+3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8\times3^n}{2\times3^n}=4$$

$$\therefore\ h(2)+h(3)=4+4=8$$

22 수열의 극한

(i) $0<\dfrac{6}{k}<1$, 즉 $k>6$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6}{k}\right)^n=0$이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n+1}=\frac{0}{0+1}=0$$

(ii) $\dfrac{6}{k}=1$, 즉 $k=6$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6}{k}\right)^n=1$이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{n+1}}{1^n+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(iii) $\dfrac{6}{k}>1$, 즉 $0<k<6$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6}{k}\right)^n=\infty$이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{k}}{1+\frac{1}{\left(\frac{6}{k}\right)^n}}$$

$$=\frac{\frac{6}{k}}{1+0}=\frac{6}{k}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}ka_k=\sum_{k=1}^{5}ka_k+6a_6+\sum_{k=7}^{10}ka_k$$

$$=\sum_{k=1}^{5}k\times\frac{6}{k}+6\times\frac{1}{2}+\sum_{k=7}^{10}k\times0$$

$$=\sum_{k=1}^{5}6+3+\sum_{k=7}^{10}0$$

$$=6\times5+3+0=33$$

23 수열의 극한

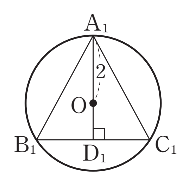
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}$이 수렴하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=0$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+4^{n+1}-3^{n-1}}{4^{n-1}+3^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{4^n}+4-\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{\frac{1}{4}+3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$=\frac{0+4-\frac{1}{4}\times0}{\frac{1}{4}+3\times0}=16$$

24 등비급수의 활용



오른쪽 그림과 같이 원 O_1의 중심을 O라고 하면

$\overline{A_1O}:\overline{OD_1}=2:1$이므로

$\overline{OD_1}=1$

정삼각형 $A_1B_1C_1$의 높이는

$\overline{A_1D_1}=\overline{A_1O}+\overline{OD_1}=2+1=3$

이때 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 한 변의 길이를 a라고 하면

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a=3\qquad\therefore\ a=2\sqrt{3}$$

$\triangle A_1D_1E_1$의 넓이는 $\triangle A_1D_1C_1$의 넓이의 $\dfrac{2}{3}$이므로

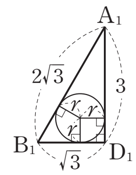
$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

점 A_1을 포함하지 않는 호 B_1C_1과 선분 B_1C_1로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{3}\left\{4\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2\right\}=\frac{1}{3}(4\pi-3\sqrt{3})$$

$$\therefore\ S_1=\sqrt{3}+\frac{1}{3}(4\pi-3\sqrt{3})=\frac{4}{3}\pi$$

$\triangle A_1B_1D_1$에 내접하는 원 O_2의 반지름의 길이를 r라고 하면 오른쪽 그림에서



$$\frac{r}{2}(2\sqrt{3}+\sqrt{3}+3)=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 3$$

이므로

$$r=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

따라서 두 원 O_1, O_2의 닮음비가

$$2:\frac{3-\sqrt{3}}{2}=1:\frac{3-\sqrt{3}}{4}$$

이므로 그림 R_1에서 색칠한 부분의 넓이와 그림 R_2에서 새로 색칠한 부분의 넓이의 비는

$$1^2:\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)^2=1:\frac{6-3\sqrt{3}}{8}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{6-3\sqrt{3}}{8}}=\frac{32\pi}{9\sqrt{3}+6}$$

$$=\frac{32(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$$

311~315쪽

대단원 기출 모의고사 Ⅱ. 미분법

정답률 80% 이상	**01** ①	**02** ⑤	**03** 10	**04** ③
05 6	**06** 15	**07** ②	**08** ④	**09** 10
10 16	**11** 2	**12** ④	**13** 17	
정답률 79~60%	**14** ③	**15** ②	**16** ②	**17** ②
18 ①	**19** 96	**20** ②		
정답률 60% 미만	**21** ④	**22** ③	**23** ③	**24** 25
25 ③				

01 로그함수의 미분

함수 $f(x)=x\ln x$에서 $f'(x)=\ln x+1$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=1$$

02 접선의 방정식

방정식 $e^y\ln x=2y+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$e^y\ln x\times\frac{dy}{dx}+e^y\times\frac{1}{x}=2\times\frac{dy}{dx}$$

$$(e^y\ln x-2)\frac{dy}{dx}=-\frac{e^y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{e^y}{x(e^y\ln x-2)}$$

이때 점 $(e,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{e^0}{e(e^0\ln e-2)}=\frac{1}{e}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-0=\frac{1}{e}(x-e),\ \text{즉 } y=\frac{1}{e}x-1$$

따라서 $a=\frac{1}{e}$, $b=-1$이므로 $ab=-\frac{1}{e}$

03 지수함수의 미분

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)=f(0)$이므로

$f(0)=e^b=1$에서 $b=0$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{ax}-1}{x}=a$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{(x+1)-1}{x}=1$$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 $a=1$

따라서 $f(x)=e^x\ (x\ge 0)$이므로 $f(10)=e^{10}$에서 $k=10$

04 합성함수의 미분법

$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$이고, $f'(x)=\frac{1}{2}+2\cos x$

이므로

$$f(\pi)=\frac{\pi}{2},\ f'(\pi)=-\frac{3}{2},\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ g'(\pi)&=f'(f(\pi))f'(\pi)\\&=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)f'(\pi)=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}\end{aligned}$$

05 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법

$x=t+2\sqrt{t}$에서 $\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}}$

$y=4t^3$에서 $\frac{dy}{dt}=12t^2$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{12t^2}{\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}}}=\frac{12t^2\sqrt{t}}{\sqrt{t}+1}$$

따라서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은 $\frac{12}{2}=6$

06 삼각함수의 덧셈정리

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta)&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\&=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{7}{8}\end{aligned}$$

$$8(\tan\alpha-1)=7(1+\tan\alpha)$$

$$\therefore\ \tan\alpha=15$$

07 역함수의 미분법

$f(1)=0$이므로 $g(0)=1$

$$f'(x)=\frac{2x\times x-(x^2-1)}{x^2}=\frac{x^2+1}{x^2}$$

$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$이므로

$$g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2}$$

08 삼각함수의 미분

$f(x)=0$에서 $\ln(\tan x)=0$, $\tan x=1$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\tan x=1$을 만족시키는 x의 값은

$x=\frac{\pi}{4}$이므로 점 P의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$이다.

$$f'(x)=\frac{(\tan x)'}{\tan x}=\frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

에서 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=(\sqrt{2})^2=2$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$$y=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\ 즉\ y=2x-\frac{\pi}{2}$$

따라서 이 접선의 y절편은 $-\frac{\pi}{2}$이다.

09 합성함수의 미분법

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-\frac{\pi}{6}}{x-1}=k$에서 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로

(분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $f(1)=\frac{\pi}{6}$, $f'(1)=k$

또,

$$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(1)&=g'(f(1))f'(1)=g'\left(\frac{\pi}{6}\right)\times k\\&=k\cos\frac{\pi}{6}=\frac{k\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

이므로 점 $(1,\ (g\circ f)(1))$, 즉 점 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}=\frac{k\sqrt{3}}{2}(x-1),\ y=\frac{k\sqrt{3}}{2}x-\frac{k\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$$

이다. 이 접선이 원점을 지나므로

$$-\frac{k\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=0,\ k=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ 30k^2=30\times\frac{1}{3}=10$$

10 함수의 몫의 미분법

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(x^2+x+8)-x(2x+1)}{(x^2+x+8)^2}\\&=\frac{-x^2+8}{(x^2+x+8)^2}>0\end{aligned}$$

이때 $(x^2+x+8)^2>0$이므로 $-x^2+8>0$에서

$$-2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$$

따라서 $\alpha=-2\sqrt{2}$, $\beta=2\sqrt{2}$이므로

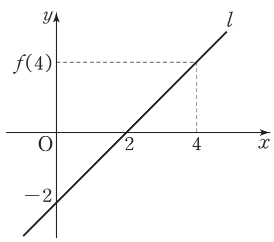
$$\alpha^2+\beta^2=16$$

11 삼각함수의 극한

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x\cos x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{2}{\cos x}\right)=1\times\frac{2}{1}=2$$

12 접선의 방정식

조건 (가), (나)에서 직선 l은 x절편과 y절편이 각각 2, -2인 직선이다.



함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(4,\ f(4))$에서의 접선 l은 기울기가 1이고, 점 $(2,\ 0)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$$y=x-2$$

$$\therefore\ f(4)=2,\ f'(4)=1$$

$g(x)=xf(2x)$에서

$g'(x)=f(2x)+2xf'(2x)$이므로

$$g'(2)=f(4)+4f'(4)=2+4=6$$

13 역함수의 미분법

$f'(x)=15e^{5x}+1+\cos x$, $g(3)=0$이므로

$$g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{17}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to3}\frac{x-3}{g(x)-g(3)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{\dfrac{g(x)-g(3)}{x-3}}$$

$$=\frac{1}{g'(3)}=17$$

14 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 증가하므로

$$f'(x)=x-3+\frac{k}{x^2}\ge0$$

$x^2>0$이므로 양변에 x^2을 곱하면

$$x^3-3x^2+k\ge0$$

$g(x)=x^3-3x^2+k$라고 하면

$$g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

열린구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이다.

이때 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 $g(x)\ge0$이 성립하려면 $g(2)=k-4\ge0$이어야 한다.

즉, $k\ge4$이므로 k의 최솟값은 4이다.

15 삼각함수의 미분과 도함수의 활용

$f(x)=\tan(\pi x^2+ax)$에서

$$f'(x)=(2\pi x+a)\sec^2(\pi x^2+ax)$$

함수 $f(x)$가 $x=\frac{1}{2}$에서 극솟값을 가지므로

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=(\pi+a)\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)=0$$

$\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\ne0$이므로 $a=-\pi$

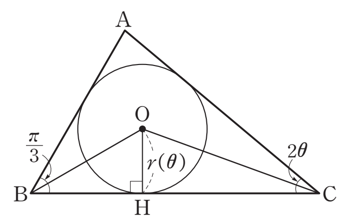
따라서 $f(x)=\tan(\pi x^2-\pi x)$에서 극솟값 k는

$$k=f\left(\frac{1}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

16 삼각함수의 미분의 활용

$\triangle$ABC에 내접하는 원의 중심을 O라 하고, 점 O에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



점 O는 $\triangle$ABC의 내심이므로

$$\angle\mathrm{OBH}=\frac{\pi}{6},\ \angle\mathrm{OCH}=\theta$$

$\dfrac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{BH}}}=\tan\dfrac{\pi}{6}$에서 $\dfrac{r(\theta)}{\overline{\mathrm{BH}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로

$$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{3}\,r(\theta)$$

또, $\dfrac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{CH}}}=\tan\theta$에서 $\dfrac{r(\theta)}{\overline{\mathrm{CH}}}=\tan\theta$이므로

$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{r(\theta)}{\tan\theta}$$

한편, $\overline{\mathrm{BH}}+\overline{\mathrm{HC}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$$\sqrt{3}\,r(\theta)+\frac{r(\theta)}{\tan\theta}=1,\ r(\theta)=\frac{\tan\theta}{1+\sqrt{3}\tan\theta}$$

$h(\theta)=\dfrac{r(\theta)}{\tan\theta}$이므로 $h(\theta)=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}\tan\theta}$

$h(\theta)$의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$$h'(\theta)=-\frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{(1+\sqrt{3}\tan\theta)^2}$$

$$\therefore h'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(1+\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

17 지수함수의 극한

두 곡선 $y=e^{x-1}$과 $y=a^x$이 만나는 점의 x좌표는 방정식 $e^{x-1}=a^x$의 해이다.

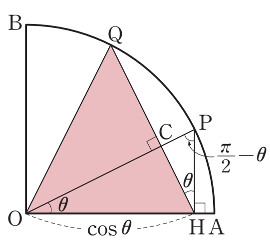
양변에 $\frac{e}{a^x}$를 곱하면 $\left(\frac{e}{a}\right)^x=e$

$x=\frac{1}{\ln\frac{e}{a}}$이므로 $f(a)=\frac{1}{\ln\frac{e}{a}}$

$a-e=t$라고 하면 $a=t+e$이고, $a\longrightarrow e+$일 때, $t\longrightarrow 0+$이므로

$$\lim_{a\to e+}\frac{1}{(e-a)f(a)}=\lim_{a\to e+}\frac{\ln\frac{e}{a}}{e-a}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\ln\frac{e}{t+e}}{-t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)^{\frac{1}{t}}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\ln\left\{\left(1+\frac{t}{e}\right)^{\frac{e}{t}}\right\}^{\frac{1}{e}}=\frac{1}{e}$$

18 삼각함수의 극한



직각삼각형 PHO에서 $\overline{OP}=1$이므로

$\overline{OH}=\cos\theta$, $\overline{PH}=\sin\theta$

한편, $\overline{OP}$와 $\overline{QH}$의 교점을 C라고 하면

$\angle CPH=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 $\angle OCH=\frac{\pi}{2}$

직각삼각형 OCH에서

$\overline{OC}=\overline{OH}\cos\theta=\cos^2\theta$

$\overline{CH}=\overline{OH}\sin\theta=\cos\theta\sin\theta$

직각삼각형 OCQ에서 $\overline{OC}^2+\overline{CQ}^2=\overline{OQ}^2$이므로

$\overline{CQ}=\sqrt{1-\cos^4\theta}=\sqrt{(1-\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta)}$

$=\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}$

따라서

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{HQ}\times\overline{OC}=\frac{1}{2}\times(\overline{HC}+\overline{CQ})\times\overline{OC}$$
$$=\frac{1}{2}\times(\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta})\cos^2\theta$$
$$=\frac{1}{2}\sin\theta(\cos\theta+\sqrt{1+\cos^2\theta})\cos^2\theta$$

이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta(\cos\theta+\sqrt{1+\cos^2\theta})\cos^2\theta}{2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{(\cos\theta+\sqrt{1+\cos^2\theta})\cos^2\theta}{2}\right\}$$
$$=1\times\frac{(1+\sqrt{2})\times 1}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

19 변곡점

점 $(2,\ a)$가 곡선 $y=\frac{2}{x^2+b}$ $(b>0)$ 위의 점이므로

$$\frac{2}{4+b}=a \qquad \cdots\cdots ①$$

$$y'=-\frac{4x}{(x^2+b)^2}$$
$$y''=-\frac{4(x^2+b)^2-4x\times 2(x^2+b)\times 2x}{(x^2+b)^4}$$
$$=\frac{12x^2-4b}{(x^2+b)^3}$$

이때 점 $(2,\ a)$가 변곡점이므로

$12\times 4-4b=0$, $b=12$

①에 $b=12$를 대입하면 $a=\frac{2}{4+12}=\frac{1}{8}$

$\therefore \frac{b}{a}=12\times 8=96$

20 로그함수의 극한

이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$를

$f(x)=x^2+ax+b$(a, b는 상수)라고 하면 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

이때 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 열린구간 $(-1,\ \infty)$에서 연속이려면 $x=0$

에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$이 성립해야 한다.

이때 $f(0)g(0)=b\times 8=8b$이고,

$\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}=8b \qquad \cdots\cdots ①$$

①에서 $x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}(x^2+ax+b)=0$이므로 $b=0$

$b=0$을 ①에 대입하면

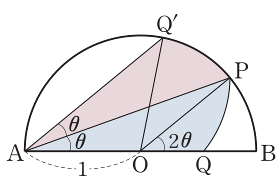
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x}{\ln(x+1)}\times(x+a)\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}\times\lim_{x\to 0}(x+a)$$
$$=1\times a=a$$

$\therefore a=0$

따라서 $f(x)=x^2$이므로 $f(3)=9$

21 삼각함수의 덧셈정리

다음 그림과 같이 반원의 중심을 O, 색종이를 접었을 때 호 AP와 선분 AB의 교점을 Q, 접힌 색종이를 다시 펼쳤을 때 점 Q가 호 AP 위에 있게 되는 점을 Q′이라고 하자.



도형 APQ와 도형 APQ′이 서로 합동이므로 $S(\theta)$는 도형 APQ′의 넓이와 같고, 이는 호 AP와 현 AP로 둘러싸인 부분의 넓이에서 호 AQ′와 현 AQ′으로 둘러싸인 부분의 넓이를 빼면 된다. 즉,

$$S(\theta)=\left\{\frac{1}{2}\times 1^2\times(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin(\pi-2\theta)\right\}$$
$$-\left\{\frac{1}{2}\times 1^2\times(\pi-4\theta)-\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin(\pi-4\theta)\right\}$$
$$=\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta$$

$$S'(\theta)=1-\cos 2\theta+2\cos 4\theta$$
$$=1-\cos 2\theta+2(2\cos^2 2\theta-1)$$
$$=4\cos^2 2\theta-\cos 2\theta-1$$

$S'(\theta)=0$, 즉 $4\cos^2 2\theta-\cos 2\theta-1=0$에서

$\cos 2\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{4}\text{이므로 } 0<\cos 2\theta<1\right)$

$\cos 2\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$인 θ를 β라 하고, 함수 $S(\theta)$의 증가와 감소를 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	β	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{4}\right)$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗	극대	↘	

즉, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$일 때 $S(\theta)$는 $\theta=\beta$에서 극대이면서 최댓값을 가지므로 $\beta=\alpha$

$$\therefore \cos 2\alpha=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$$

22 방정식에서의 활용

ㄱ. $g'(x)=\frac{1}{\ln 3}\times\frac{4x^3}{x^4+2n}$이므로

$g'(f(1))=g'(0)=0$

$\therefore h'(1)=g'(f(1))f'(1)=0$ (참)

ㄴ. $h(x)=g(f(x))=\log_3[\{f(x)\}^4+2n]$이므로

$$h'(x)=\frac{1}{\ln 3}\times\frac{4\{f(x)\}^3f'(x)}{\{f(x)\}^4+2n}$$
$$=\frac{1}{\ln 3}\times\frac{4nx^{n-1}(x^n-1)^3}{(x^n-1)^4+2n}$$

열린구간 $(0,\ 1)$에서 $-1<x^n-1<0$이므로

$h'(x)<0$이다.

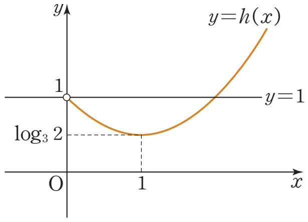
따라서 열린구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $h(x)$는 감소한다.

(거짓)

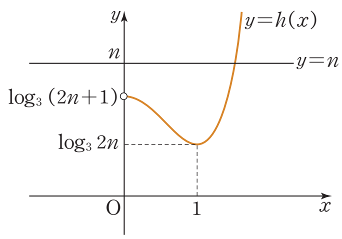
ㄷ. $x>0$에서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $\log_3 2n$을 갖는다.

이때 함수 $h(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

(i) $n=1$일 때, $h(x)=\log_3\{(x-1)^4+2\}$이므로



(ii) $n\geq 2$일 때, $h(x)=\log_3\{(x^n-1)^4+2n\}$이므로



(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 방정식 $h(x)=n$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

23 **삼각함수의 미분과 도함수의 활용**

ㄱ. $f(x)=\cos x+2x\sin x$에서

$f'(x)=\sin x+2x\cos x$

$f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 가지므로

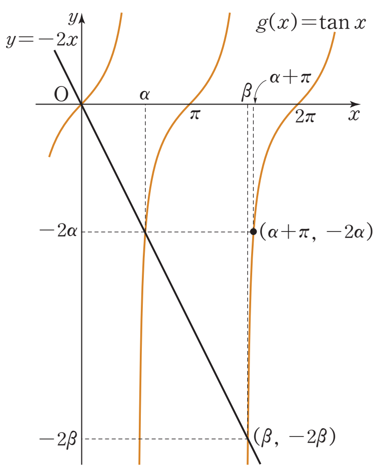
$f'(\alpha)=\sin\alpha+2\alpha\cos\alpha=0$, $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2\alpha$

$\tan\alpha=-2\alpha$

$\therefore \tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha=-2\alpha$ (참)

ㄴ. $x=\beta$에서 극값을 가지므로 ㄱ과 같은 방법으로 $\tan\beta=-2\beta$가 성립한다.

따라서 α, β는 함수 $g(x)=\tan x$의 그래프와 직선 $y=-2x$가 만나는 점의 x좌표이다.



또, $g(\alpha+\pi)=g(\alpha)$이므로 $\beta<\alpha+\pi$이다.

이때 함수 $g(x)=\tan x$의 그래프는 열린구간 $\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right)$에서 위로 볼록하므로 $g'(x)$는 감소한다.

$\therefore g'(\alpha+\pi)<g'(\beta)$ (참)

ㄷ. 함수 $g(x)=\tan x$는 열린구간 $\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{g(\alpha+\pi)-g(\beta)}{\alpha+\pi-\beta}=g'(\gamma)$$

를 만족시키는 γ가 열린구간 $(\beta,\ \alpha+\pi)$에 존재한다.

이때 함수 $g(x)=\tan x$의 그래프는 열린구간 $\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right)$에서 위로 볼록하므로 $g'(x)$는 감소한다.

따라서

$g'(\alpha+\pi)<g'(\gamma)$, 즉

$g'(\alpha+\pi)<\dfrac{g(\alpha+\pi)-g(\beta)}{\alpha+\pi-\beta}$

가 성립한다. 이때

$g(\alpha+\pi)=\tan\alpha=-2\alpha$

$g(\beta)=\tan\beta=-2\beta$

$g'(\alpha+\pi)=\sec^2(\alpha+\pi)=\sec^2\alpha$

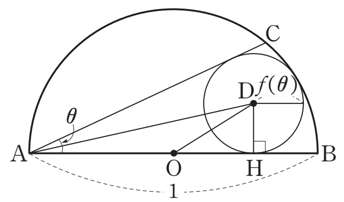
이므로

$\sec^2\alpha<\dfrac{-2\alpha+2\beta}{\alpha+\pi-\beta}=\dfrac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

24 **삼각함수의 극한**

호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하는 원의 중심을 D, 점 D에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H, 선분 AB의 중점을 O라고 하자.



$\angle BAC=\theta$이므로 $\angle HAD=\dfrac{\theta}{2}$

$\overline{DH}=f(\theta)$이므로 $\overline{AH}=\dfrac{f(\theta)}{\tan\dfrac{\theta}{2}}$

한편, 직각삼각형 DOH에서 $\overline{OD}=\dfrac{1}{2}-f(\theta)$이므로

$\overline{OH}=\sqrt{\left\{\dfrac{1}{2}-f(\theta)\right\}^2-\{f(\theta)\}^2}$

이때 $\overline{AO}+\overline{OH}=\overline{AH}$이므로

$\dfrac{1}{2}+\sqrt{\left\{\dfrac{1}{2}-f(\theta)\right\}^2-\{f(\theta)\}^2}=\dfrac{f(\theta)}{\tan\dfrac{\theta}{2}}$

$$\sqrt{\left\{\frac{1}{2}-f(\theta)\right\}^2-\{f(\theta)\}^2}=\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{2}$$

양변을 제곱하면

$$\frac{1}{4}-f(\theta)+\{f(\theta)\}^2-\{f(\theta)\}^2$$
$$=\left\{\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}\right\}^2-\left\{\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}\right\}+\frac{1}{4}$$
$$-f(\theta)=\left\{\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}\right\}^2-\left\{\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}\right\}$$
$$\therefore\ -f(\theta)=\frac{\{f(\theta)\}^2}{\tan^2\frac{\theta}{2}}-\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

양변에 $\tan^2\frac{\theta}{2}$를 곱하여 정리하면 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서

$f(\theta)>0$이므로

$$-\tan^2\frac{\theta}{2}=f(\theta)-\tan\frac{\theta}{2}$$
$$\therefore\ f(\theta)=\tan\frac{\theta}{2}-\tan^2\frac{\theta}{2}$$
$$\alpha=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$
$$\therefore\ 100\alpha=25$$

25 **함수의 그래프의 개형**

점 $P(t,\ 4)$에서 원 $x^2+y^2=9$에 그은 접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$$y-4=m(x-t),\ \text{즉}\ mx-y-mt+4=0$$

이때 원의 중심 $(0,\ 0)$에서 접선까지의 거리는 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|-mt+4|}{\sqrt{m^2+1}}=3,\ |-mt+4|=3\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$(t^2-9)m^2-8tm+7=0$$

두 접선의 기울기는 이 이차방정식의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 접선의 기울기의 곱은

$$f(t)=\frac{7}{t^2-9}$$

ㄱ. $f(\sqrt{2})=\frac{7}{2-9}=-1$ (참)

ㄴ. $f'(t)=-\frac{14t}{(t^2-9)^2}$

$$f''(t)=-\frac{14(t^2-9)^2-14t\times2(t^2-9)\times2t}{(t^2-9)^4}$$
$$=\frac{42(t^2+3)}{(t^2-9)^3}$$

이므로 열린구간 $(-3,\ 3)$에서 $f''(t)<0$ (참)

ㄷ. $9f(x)=3^{x+2}-7$에서 $f(x)=3^x-\frac{7}{9}$

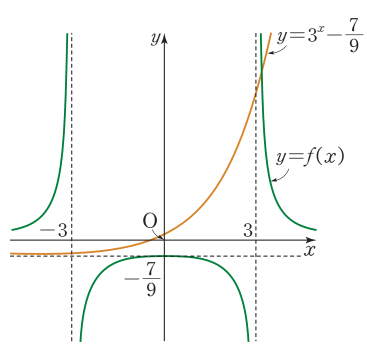
방정식 $f(x)=3^x-\frac{7}{9}$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$와 $y=3^x-\frac{7}{9}$의 그래프가 만나는 점의 개수와 같다.

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	(-3)	$\cdots$	0	$\cdots$	(3)	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$+$
$f''(x)$	$+$		$-$	$-$	$-$		$+$
$f(x)$	⤴		↗	$-\frac{7}{9}$	↘		⤵

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=0,$$
$$\lim_{x\to-3+}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to-3-}f(x)=\infty,$$
$$\lim_{x\to3+}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to3-}f(x)=-\infty$$

이를 종합하면 두 함수 $y=f(x)$와 $y=3^x-\frac{7}{9}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 실근의 개수는 1이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답률 80 % 이상	01 ①	02 ④	03 ③	04 ②
05 4	06 ①	07 ④	08 ①	09 ①
10 ③	11 ④	12 ②		
정답률 79~60 %	13 ①	14 ④	15 ②	16 ③
17 ②	18 ⑤	19 ⑤		
정답률 60 % 미만	20 12	21 ④	22 9	23 ④
24 64	25 ①			

01 정적분의 치환적분법

$\int_{a-1}^{a+1} f(a-x)dx$에서 $a-x=t$로 놓으면 $-1=\frac{dt}{dx}$이고

$x=a-1$일 때 $t=a-(a-1)=1$,

$x=a+1$일 때 $t=a-(a+1)=-1$

이므로

$$\int_{a-1}^{a+1} f(a-x)dx=\int_{1}^{-1} f(t)\times(-dt)$$
$$=\int_{-1}^{1} f(t)dt=24$$

이때 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt=2\int_{0}^{1} f(t)dt=24$$
$$\therefore \int_{0}^{1} f(t)dt=\int_{0}^{1} f(x)dx=12$$

02 입체도형의 부피

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 잘랐을 때의 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면 $S(x)$는 한 변의 길이가 $\sqrt{x}+1$인 정사각형의 넓이이므로

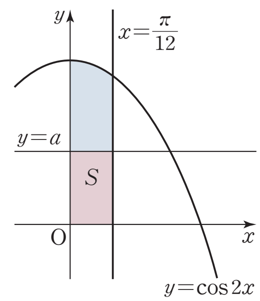
$$S(x)=(\sqrt{x}+1)^2=x+2\sqrt{x}+1=x+2x^{\frac{1}{2}}+1$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_{0}^{1} S(x)dx=\int_{0}^{1} (x+2x^{\frac{1}{2}}+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+1$$
$$=\frac{17}{6}$$

03 곡선과 y축 사이의 넓이

오른쪽 그림과 같이 주어진 영역을 직선 $y=a$에 의하여 이등분했을 때, 이등분한 부분의 아랫부분의 넓이를 S라고 하면 주어진 영역의 전체 넓이는 $2S$이다.



이때 $S=\frac{\pi}{12}\times a=\frac{a}{12}\pi$

이므로

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x\,dx=2S=\frac{a}{6}\pi$$

따라서 $\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{12}}=\frac{a}{6}\pi$이므로

$$\frac{1}{4}=\frac{a}{6}\pi \qquad \therefore a=\frac{3}{2\pi}$$

04 급수의 합과 정적분 사이의 관계

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$에서

$$\Delta x=\frac{3-1}{n}=\frac{2}{n},\ 1+\frac{2k}{n}=x_k$$

라고 하면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}=\int_{1}^{3} f(x)dx=\int_{1}^{3}\frac{1}{x}dx$$
$$=\Big[\ln x\Big]_1^3=\ln 3$$

05 지수함수의 정적분

$$\int_{2}^{4} 2e^{2x-4}dx=\left[\frac{1}{2}\times 2e^{2x-4}\right]_2^4$$
$$=\left[e^{2x-4}\right]_2^4=e^4-1$$

즉, $k=e^4-1$이므로

$\ln(k+1)=\ln e^4=4$

06 직선과 곡선 사이의 넓이

곡선 $y=e^{2x}$과 직선 $y=-2x+a$의 교점의 x좌표를 k라고 하면 영역 A의 넓이는

$$\int_{0}^{k}(-2x+a-e^{2x})dx=\left[-x^2+ax-\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^k$$
$$=-k^2+ak-\frac{1}{2}e^{2k}+\frac{1}{2}$$

또, 영역 B의 넓이는

$$\int_k^1 (e^{2x}+2x-a)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+x^2-ax\right]_k^1$$
$$=\frac{1}{2}e^2+1-a-\left(\frac{1}{2}e^{2k}+k^2-ak\right)$$
$$=\frac{1}{2}e^2+1-a-\frac{1}{2}e^{2k}-k^2+ak$$

이때 (A의 넓이)$=$(B의 넓이)이므로

$$-k^2+ak-\frac{1}{2}e^{2k}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^2+1-a-\frac{1}{2}e^{2k}-k^2+ak$$

에서

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^2+1-a \qquad \therefore a=\frac{e^2+1}{2}$$

07 **정적분의 계산**

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)d\theta=\left[\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{6}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

08 **입체도형의 부피**

직선 $x=t$ $(1\le t\le 2)$를 포함하고, x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라고 하자.

단면은 한 변의 길이가 $3t+\frac{2}{t}$인 정삼각형이므로

$$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3t+\frac{2}{t}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(9t^2+12+\frac{4}{t^2}\right)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_1^2 S(t)\,dt=\int_1^2 \frac{\sqrt{3}}{4}\left(9t^2+12+\frac{4}{t^2}\right)dt$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[3t^3+12t-\frac{4}{t}\right]_1^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(46-11)=\frac{35\sqrt{3}}{4}$$

09 **곡선과 직선 사이의 넓이**

곡선 $y=\frac{2n}{x}$과 직선 $y=-\frac{x}{n}+3$의 교점의 x좌표는

$\frac{2n}{x}=-\frac{x}{n}+3$에서 $2n^2=-x^2+3nx$

$$x^2-3nx+2n^2=0,\ (x-n)(x-2n)=0$$
$\therefore x=n$ 또는 $x=2n$

이때 $n\le x\le 2n$에서 $\frac{2n}{x}\le -\frac{x}{n}+3$이므로

$$S_n=\int_n^{2n}\left\{\left(-\frac{x}{n}+3\right)-\frac{2n}{x}\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2n}x^2+3x-2n\ln x\right]_n^{2n}$$
$$=(-2n+6n-2n\ln 2n)-\left(-\frac{1}{2}n+3n-2n\ln n\right)$$
$$=n\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)$$
$$\therefore S_{n+1}-Sn=(n+1)\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)-n\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)$$
$$=\frac{3}{2}-2\ln 2$$

10 **부분적분법**

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=\{f(x)g(x)\}'$이므로

$$\int\{f(x)g(x)\}'dx=\int\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}\,dx$$
$$=\int h(x)\,dx=\int \ln x\,dx$$

$\int \ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-\int 1\,dx$$
$$=x\ln x-x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$\therefore f(x)g(x)=x\ln x-x+C$

이때 $f(x)=x$이므로 $xg(x)=x\ln x-x+C$

조건 ㈏에서 $g(1)=-1$이므로 위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g(1)=\ln 1-1+C$, $-1=-1+C$ $\qquad \therefore C=0$

따라서 $xg(x)=x\ln x-x$에서

$g(x)=\ln x-1$($\because x>0$)이므로

$g(e)=\ln e-1=1-1=0$

11 **로그함수의 정적분**

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}dt=\int_0^x \frac{e^t}{e^t+1}dt$$

이고, $(e^t+1)'=e^t$이므로

$$\int_0^x \frac{e^t}{e^t+1}=\int_0^x \frac{(e^t+1)'}{e^t+1}dt$$
$$=\left[\ln(e^t+1)\right]_0^x$$
$$=\ln(e^x+1)-\ln 2$$
$$=\ln\frac{e^x+1}{2}$$

$(f \circ f)(a) = \ln 5$이므로

$\ln \dfrac{e^{f(a)}+1}{2} = \ln 5$에서 $e^{f(a)} = 9$이고, $f(a) = \ln 9$

또, $\ln \dfrac{e^a+1}{2} = \ln 9$에서

$\dfrac{e^a+1}{2} = 9$, $a = \ln 17$

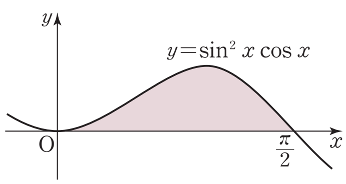
12 **정적분의 치환적분법**

방정식 $\sin^2 x \cos x = 0$의 해는

$\sin x = 0$ 또는 $\cos x = 0$

$\therefore$ $x = 0$ 또는 $x = \dfrac{\pi}{2}$ $\left(\because\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$

이때 함수 $y = \sin^2 x \cos x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\, dx$에서

$\sin x = t$로 놓으면 $\cos x = \dfrac{dt}{dx}$이고

$x = 0$일 때 $t = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$일 때 $t = 1$

이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\, dx = \int_0^1 t^2\, dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

13 **곡선과 직선 사이의 넓이**

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$이므로, 점 A를 지나고 점 A에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{f'(t)}(x-t) + f(t)$$

$y = 0$일 때 $x = f(t)f'(t) + t$이므로

$\mathrm{C}(f(t)f'(t)+t,\ 0)$

또, $\mathrm{B}(t, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = f(t)$, $\overline{\mathrm{BC}} = f(t)f'(t)$

따라서 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{BC}} &= \frac{1}{2} \times f(t) \times f(t)f'(t)\\ &= \frac{1}{2}\{f(t)\}^2 f'(t)\\ &= \frac{1}{2}(e^{3t} - 2e^{2t} + e^t)\end{aligned}$$

이므로

$\{f(t)\}^2 f'(t) = e^{3t} - 2e^{2t} + e^t$

$\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{1}{3}\{f(t)\}^3\right] = e^{3t} - 2e^{2t} + e^t$

양변을 적분하면

$\dfrac{1}{3}\{f(t)\}^3 = \dfrac{1}{3}e^{3t} - e^{2t} + e^t + C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0) = 0$이므로 $C = -\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{3}\{f(t)\}^3 = \dfrac{1}{3}e^{3t} - e^{2t} + e^t - \dfrac{1}{3}$에서

$$\begin{aligned}\{f(t)\}^3 &= e^{3t} - 3e^{2t} + 3e^t - 1\\ &= (e^t - 1)^3\end{aligned}$$

이므로 $f(t) = e^t - 1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (e^x - 1)\,dx = \Big[e^x - x\Big]_0^1 = e - 2$$

14 **정적분의 부분적분법**

$\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt = F(x)$이므로

$F'(x) = f(x)$, $F(-1) = 0$

이때 $F(1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 12$이고,

$\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^{-1} xf(x)\,dx$이므로

$\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx - \int_0^{-1} xf(x)\,dx = 0$

$\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx + \int_{-1}^{0} xf(x)\,dx = 0$

$\therefore$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx = 0$

$\displaystyle\int_{-1}^{1} F(x)\,dx$에서 $u(x) = F(x)$, $v'(x) = 1$로 놓으면

$u'(x) = f(x)$, $v(x) = x$이므로

$$\int_{-1}^{1} F(x)dx=\Big[xF(x)\Big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1} xf(x)dx$$
$$=F(1)+F(-1)-\int_{-1}^{1} xf(x)dx$$
$$=12+0-0=12$$

15 부정적분의 부분적분법

$f(x)+xf'(x)=\{xf(x)\}'$이므로

$$\int\{xf(x)\}'\,dx=\int\{f(x)+xf'(x)\}\,dx$$
$$=\int x\cos x\,dx$$

$\int x\cos x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$이므로

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$\therefore\ xf(x)=x\sin x+\cos x+C$

조건 (가)에서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$이므로 위 식의 양변에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$$\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}+C$$

$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+C \qquad \therefore\ C=0$

따라서 $xf(x)=x\sin x+\cos x$이므로

$\pi f(\pi)=\pi\sin\pi+\cos\pi=-1$

$\therefore\ f(\pi)=-\frac{1}{\pi}$

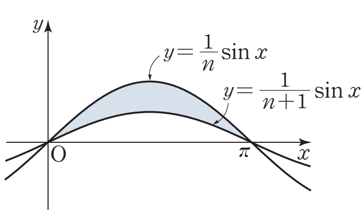
16 두 곡선 사이의 넓이

두 곡선 $y=\frac{1}{n}\sin x$, $y=\frac{1}{n+1}\sin x$의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{n}\sin x=\frac{1}{n+1}\sin x$에서 $\sin x=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\pi$ ($\because\ 0\le x\le\pi$)

두 곡선 $y=\frac{1}{n}\sin x$, $y=\frac{1}{n+1}\sin x$로 둘러싸인 부분은 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



$$\therefore\ S_n=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin x-\frac{1}{n+1}\sin x\right)dx$$
$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)(1+1)=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ \cdots\ +\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

17 정적분의 치환적분법

$$\int_0^a\{f(2x)+f(2a-x)\}dx$$
$$=\int_0^a f(2x)dx+\int_0^a f(2a-x)\,dx$$

(i) $\int_0^a f(2x)\,dx$에서 $2x=t$로 놓으면 $2=\frac{dt}{dx}$이고,

$x=0$일 때 $t=0$, $x=a$일 때 $t=2a$이므로

$$\int_0^a f(2x)dx=\int_0^{2a}\frac{1}{2}f(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{2a}f(t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^a f(t)dt+\int_a^{2a}f(t)dt\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{8+\int_0^a f(a+t)dt\right\}$$
$$=4+\frac{1}{2}\int_0^a f(a-t)dt$$

이때 $\int_0^a f(a-t)\,dt$에서

$a-t=u$로 놓으면 $-1=\frac{du}{dt}$이고,

$t=0$일 때 $u=a$, $t=a$일 때 $u=0$이므로

$$\int_0^a f(a-t)dt=-\int_a^0 f(u)du$$
$$=\int_0^a f(u)du=8$$

$$\therefore\ \int_0^a f(2x)dx=4+\frac{1}{2}\int_0^a f(a-t)dt$$
$$=4+\frac{1}{2}\times 8=8$$

(ii) $f(a-x)=f(a+x)$에서

$a-x=t$로 놓으면 $x=a-t$이므로

$$f(t)=f(a+a-t)=f(2a-t)$$

즉, $f(x)=f(2a-x)$이므로

$$\int_0^a f(2a-x)dx=\int_0^a f(x)dx=8$$

(i), (ii)에서

$$\int_0^a \{f(2x)+f(2a-x)\}dx=8+8=16$$

18 **함수의 연속과 부정적분**

$x\le 1$일 때, $f'(x)=e^{x-1}$이므로

$$f(x)=\int e^{x-1}dx=e^{x-1}+C_1 \text{ (단, } C_1\text{은 적분상수)}$$

$x>1$일 때, $f'(x)=\frac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int \frac{1}{x}dx=\ln x+C_2 \text{ (단, } C_2\text{는 적분상수)}$$

이때 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)$에서

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(e^{x-1}+C_1)=1+C_1$$

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(\ln x+C_2)=C_2$$

$\therefore\ 1+C_1=C_2$

이때 $f(-1)=e+\frac{1}{e^2}$이므로

$$\frac{1}{e^2}+C_1=e+\frac{1}{e^2}$$

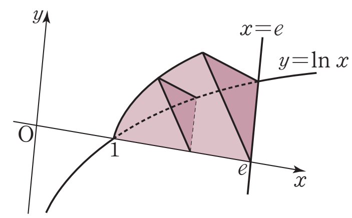
$\therefore\ C_1=e,\ C_2=e+1$

따라서 $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+e & (x\le 1) \\ \ln x+e+1 & (x>1)\end{cases}$이므로

$$f(e)=\ln e+e+1=e+2$$

19 **입체도형의 부피**

다음 그림과 같이 밑면이 함수 $y=e^x$의 역함수인 $y=\ln x$와 x축 및 직선 $x=e$로 둘러싸인 도형이고, x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형인 입체도형의 부피는 주어진 입체도형의 부피와 같다.



$x=t$에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라고 하자.

자른 단면은 모두 한 변의 길이가 $\ln t$인 정삼각형이므로

$$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}(\ln t)^2$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_1^e \frac{\sqrt{3}}{4}(\ln t)^2 dt$$

에서 $u(t)=(\ln t)^2$, $v'(t)=1$로 놓으면

$u'(t)=\frac{2}{t}\ln t$, $v(t)=t$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^e S(t)dt&=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^e (\ln t)^2 dt\\ &=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\Big[t(\ln t)^2\Big]_1^e-\int_1^e t\times\frac{2}{t}\ln t\,dt\right)\\ &=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(e-2\int_1^e \ln t\,dt\right)\\ &=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(e-2\Big[t\ln t-t\Big]_1^e\right)\\ &=\frac{\sqrt{3}}{4}[e-2\{(e-e)-(-1)\}]\\ &=\frac{\sqrt{3}(e-2)}{4}\end{aligned}$$

20 **정적분의 치환적분법**

$g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로 $g(f(x))=x$

$g'(f(x))=\frac{1}{f'(g(f(x)))}=\frac{1}{f'(x)}$에서

$$\int_1^5 \frac{40}{g'(f(x))\{f(x)\}^2}dx=40\int_1^5 \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}dx$$

$f(x)=t$로 놓으면 $f'(x)=\frac{dt}{dx}$이고,

$g(2)=1$, $g(5)=5$에서 $f(1)=2$, $f(5)=5$이므로

$x=1$일 때 $t=2$, $x=5$일 때 $t=5$이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ 40\int_1^5 \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}dx&=40\int_2^5 \frac{1}{t^2}dt\\ &=40\left[-\frac{1}{t}\right]_2^5=12\end{aligned}$$

21 정적분의 치환적분법

$\int_0^2 xf(tx)dx=4t^2$에서 $tx=s$로 놓으면 $t=\dfrac{ds}{dx}$이고,

$x=0$일 때 $s=0$, $x=2$일 때 $s=2t$이므로

$$\int_0^2 xf(tx)dx=\int_0^{2t}\frac{s}{t}\times f(s)\times\frac{1}{t}ds$$
$$=\frac{1}{t^2}\int_0^{2t}sf(s)ds$$
$$=4t^2$$

$\therefore \int_0^{2t}sf(s)ds=4t^4$

위 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$2tf(2t)\times(2t)'=16t^3$, $4tf(2t)=16t^3$

위 식의 양변에 $t=1$을 대입하면

$4f(2)=16 \qquad \therefore f(2)=4$

22 정적분의 치환적분법

$F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$에서

$x-t=s$로 놓으면 $-1=\dfrac{ds}{dt}$이고,

$t=0$일 때 $s=x$, $t=x$일 때 $s=0$이므로

$$F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$$
$$=\int_x^0 (x-s)f(s)\times(-ds)$$
$$=\int_0^x (x-s)f(s)ds$$
$$=x\int_0^x f(s)ds-\int_0^x sf(s)ds$$
$$F'(x)=\int_0^x f(s)ds+xf(x)-xf(x)$$
$$=\int_0^x f(s)ds$$
$$=\int_0^x \frac{1}{1+s}ds$$
$$=\Big[\ln(1+s)\Big]_0^x$$
$$=\ln(1+x)\ (x\ge 0)$$

따라서 $F'(a)=\ln(1+a)=\ln 10$에서

$1+a=10 \qquad \therefore a=9$

23 급수의 합과 정적분 사이의 관계

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-(n+k)^2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{4-\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}}\times\frac{1}{n}$$

이때 $\Delta x=\dfrac{2-1}{n}=\dfrac{1}{n}$, $1+\dfrac{k}{n}=x_k$라고 하면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}}\times\frac{1}{n}=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

$\int_1^2\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$에서 $x=2\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$이고,

$x=1$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$, $x=2$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$\int_1^2\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta}}d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}d\theta\ (\because \cos\theta>0)$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}1\,d\theta=\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

24 좌표평면 위에서 움직인 거리

$\dfrac{dx}{dt}=4(-\sin t+\cos t)$, $\dfrac{dy}{dt}=-2\sin 2t$

이므로 점 P가 $t=0$에서 $t=2\pi$까지 움직인 거리는

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\{4(-\sin t+\cos t)\}^2+(-2\sin 2t)^2}dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{16(\sin^2 t-2\sin t\cos t+\cos^2 t)+4\sin^2 2t}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{16(1-\sin 2t)+4\sin^2 2t}\,dt$$
$$=2\int_0^{2\pi}\sqrt{4(1-\sin 2t)+\sin^2 2t}\,dt$$

$=2\int_{0}^{2\pi}\sqrt{4-4\sin 2t+\sin^2 2t}\,dt$

$=2\int_{0}^{2\pi}\sqrt{(2-\sin 2t)^2}\,dt$

$=2\int_{0}^{2\pi}(2-\sin 2t)\,dt$

$=2\left[2t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{2\pi}$

$=2\times\left\{\left(4\pi+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right\}=8\pi$

따라서 $a=8$이므로 $a^2=64$

25 **두 곡선 사이의 넓이**

곡선 $y=\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$과 직선 $y=\frac{2}{3}x$의 교점의 x좌표는

$\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}=\frac{2}{3}x$에서

$xe^{x^2}=\frac{2}{3}xe^{x^2}+\frac{2}{3}x$, $\frac{1}{3}xe^{x^2}-\frac{2}{3}x=0$

$\frac{1}{3}x(e^{x^2}-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $e^{x^2}-2=0$

$e^{x^2}=2$에서 $x^2=\ln 2$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{\ln 2}$

한편, 두 함수 $y=\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$과 $y=\frac{2}{3}x$의 그래프는 모두 원점에 대하여 대칭이다.

즉, 닫힌구간 $[-\sqrt{\ln 2},\ 0]$과 $[0,\ \sqrt{\ln 2}]$에서 두 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같고, 닫힌구간 $[0,\ \sqrt{\ln 2}]$에서 $\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}\le\frac{2}{3}x$이므로 구하는 넓이를 S라고 하면

$S=\int_{-\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 2}}\left|\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}-\frac{2}{3}x\right|dx$

$=2\int_{0}^{\sqrt{\ln 2}}\left(\frac{2}{3}x-\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}\right)dx$

$=\int_{0}^{\sqrt{\ln 2}}\frac{4}{3}x\,dx-\int_{0}^{\sqrt{\ln 2}}\frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^2\right]_0^{\sqrt{\ln 2}}-\left[\ln(e^{x^2}+1)\right]_0^{\sqrt{\ln 2}}$

$=\frac{2}{3}\ln 2-(\ln 3-\ln 2)$

$=\frac{5}{3}\ln 2-\ln 3$

MEMO