고등학교 수학 Ⅰ

정답과 해설

핵심 개념 확인하기

Ⅰ-1 거듭제곱과 거듭제곱근 6쪽

1 (1) a^7b^4 (2) $\dfrac{a}{b^2}$ (3) $\dfrac{a}{b^4}$

2 (1) -5, 5 (2) 2 (3) -3, 3

3 (1) 4 (2) 2 (3) 16 (4) $\sqrt[12]{5}$

4 (1) 3 (2) -5

1 (1) $(a^3b)^2\times ab^2=a^6b^2\times ab^2=a^{6+1}b^{2+2}=a^7b^4$

(2) $a^2b^3\div ab^5=a^{2-1}\times\dfrac{1}{b^{5-3}}=\dfrac{a}{b^2}$

(3) $\left(\dfrac{a}{b^2}\right)^3\times\left(\dfrac{b}{a}\right)^2=\dfrac{a^3}{b^6}\times\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{a}{b^4}$

2 (1) 25의 제곱근을 x라 하면

$x^2=25$, $x^2-25=0$, $(x+5)(x-5)=0$

이므로

$x=-5$ 또는 $x=5$

따라서 25의 제곱근 중에서 실수인 것은 -5, 5이다.

(2) 8의 세제곱근을 x라 하면

$x^3=8$, $x^3-2^3=0$

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

이므로

$x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

따라서 8의 세제곱근 중에서 실수인 것은 2이다.

(3) 81의 네제곱근을 x라 하면

$x^4=81$, $x^4-3^4=0$, $(x^2+3^2)(x^2-3^2)=0$

$(x+3i)(x-3i)(x+3)(x-3)=0$

이므로

$x=\pm3$ 또는 $x=\pm3i$

따라서 81의 네제곱근 중에서 실수인 것은 -3, 3이다.

3 (1) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{2\times32}$

$=\sqrt[3]{2^6}=(\sqrt[3]{2^3})^2=4$

(2) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\dfrac{32}{2}}=\sqrt[4]{2^4}=2$

(3) $(\sqrt[6]{4})^{12}=\{(\sqrt[6]{4})^6\}^2=4^2=16$

(4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[4\times3]{5}=\sqrt[12]{5}$

4 (1) $\sqrt[3]{3^3}-\sqrt[4]{(-2)^4}-\sqrt[5]{-32}$

$=\sqrt[3]{3^3}-\sqrt[4]{(-2)^4}-\sqrt[5]{(-2)^5}$

$=(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[4]{2})^4-(\sqrt[5]{(-2)})^5$

$=3-2-(-2)=3$

(2) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}\times\sqrt[3]{125}\div\sqrt[3]{-8}$

$=\sqrt[6]{2^6}\times\sqrt[3]{5^3}\div(\sqrt[3]{(-2)^3})$

$=(\sqrt[6]{2})^6\times(\sqrt[3]{5})^3\div(\sqrt[3]{(-2)})^3$

$=2\times5\div(-2)=-5$

Ⅰ-2 지수의 확장과 지수법칙 7쪽

1 (1) 1 (2) 1 (3) $\dfrac{1}{8}$ (4) 81

2 (1) $5^{\frac{1}{7}}$ (2) $6^{-\frac{3}{4}}$ (3) $\sqrt[5]{11^8}$ (4) $\sqrt{7^{-3}}$

3 (1) $\dfrac{1}{3}$ (2) $27\sqrt[3]{2}$ **4** $\dfrac{7}{3}$

1 (1) $(-3)^0=1$

(2) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^0=1$

(3) $2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$

(4) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4}=3^4=81$

2 (1) $\sqrt[7]{5}=5^{\frac{1}{7}}$

(2) $\sqrt[4]{6^{-3}}=6^{\frac{-3}{4}}=6^{-\frac{3}{4}}$

(3) $11^{\frac{8}{5}}=\sqrt[5]{11^8}$

(4) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{7}\right)^3}=\sqrt{7^{-3}}$

3 (1) $9^{\frac{3}{2}}\times27^{-\frac{4}{3}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}\times(3^3)^{-\frac{4}{3}}$

$=3^3\times3^{-4}=3^{3-4}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$

(2) $(4\times3^6)^{\frac{2}{3}}\div\sqrt[3]{16}\times\left(\dfrac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=(2^2\times3^6)^{\frac{2}{3}}\div\sqrt[3]{2^4}\times(2\times3^{-3})^{\frac{1}{3}}$

$=2^{\frac{4}{3}}\times3^4\div2^{\frac{4}{3}}\times2^{\frac{1}{3}}\times3^{-1}$

$=2^{\frac{4}{3}-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}\times3^{4-1}$

$=2^{\frac{1}{3}}\times3^3=27\sqrt[3]{2}$

4 $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{(a^{3x}+a^{-3x})a^x}{(a^x+a^{-x})a^x}=\dfrac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}+1}$

$=\dfrac{(a^{2x})^2+(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}+1}$

$=\dfrac{9+\frac{1}{3}}{3+1}=\dfrac{28}{12}=\dfrac{7}{3}$

Ⅰ-3 로그의 뜻과 성질 8쪽

1 9	**2** (1) 1 (2) 3 (3) $\log_2 3$
3 2	**4** (1) $\frac{5}{3}$ (2) 1 (3) 5

1 $\log_3 a=x$에서 $a=3^x$

따라서 $a^{\frac{2}{x}}=(3^x)^{\frac{2}{x}}=3^2=9$

2 (1) $\log_3 18-\log_3 6=\log_3 \dfrac{18}{6}=\log_3 3=1$

(2) $\log_2 12+\log_2 10-\log_2 15$

$=\log_2 \dfrac{12\times 10}{15}$

$=\log_2 8=\log_2 2^3=3\log_2 2=3$

(3) $\log_2\sqrt{5}-\dfrac{1}{2}\log_2 10+\log_2\sqrt{18}$

$=\log_2\sqrt{5}-\log_2\sqrt{10}+\log_2\sqrt{18}$

$=\log_2\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{18}}{\sqrt{10}}$

$=\log_2\sqrt{9}=\log_2 3$

3 $\log_3\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\log_3\left(1+\dfrac{1}{3}\right)+\log_3\left(1+\dfrac{1}{4}\right)+\cdots$

$+\log_3\left(1+\dfrac{1}{17}\right)$

$=\log_3\dfrac{3}{2}+\log_3\dfrac{4}{3}+\log_3\dfrac{5}{4}+\cdots+\log_3\dfrac{18}{17}$

$=\log_3\left(\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{5}{4}\times\cdots\times\dfrac{18}{17}\right)$

$=\log_3\dfrac{18}{2}=\log_3 9=\log_3 3^2=2\log_3 3=2$

4 (1) $\log_8 32=\dfrac{\log_2 32}{\log_2 8}=\dfrac{\log_2 2^5}{\log_2 2^3}=\dfrac{5\log_2 2}{3\log_2 2}=\dfrac{5}{3}$

다른 풀이 $\log_8 32=\log_{2^3}2^5=\dfrac{5}{3}\log_2 2=\dfrac{5}{3}$

(2) $\log_3 2\times\log_8 27$

$=\log_3 2\times\dfrac{\log_3 27}{\log_3 8}=\log_3 2\times\dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 2^3}$

$=\log_3 2\times\dfrac{3\log_3 3}{3\log_3 2}=\log_3 2\times\dfrac{1}{\log_3 2}$

$=1$

(3) $\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 5\times\cdots\times\log_{31}32$

$=\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}2}\times\dfrac{\log_{10}4}{\log_{10}3}\times\dfrac{\log_{10}5}{\log_{10}4}\times\cdots\times\dfrac{\log_{10}32}{\log_{10}31}$

$=\dfrac{\log_{10}32}{\log_{10}2}$

$=\log_2 32$

$=\log_2 2^5$

$=5\log_2 2=5$

Ⅰ-4 상용로그 9쪽

1 (1) 3 (2) -2 (3) $\frac{2}{5}$

2 (1) 2.4969 (2) 5.4969 (3) -0.5031 (4) -3.5031

3 (1) $2a+b$ (2) $2a-3b$ (3) $1-a$

4 (1) 1.3801 (2) -2.097 (3) 2.6532

1 (1) $\log 1000=\log 10^3=3\log 10=3$

(2) $\log\dfrac{1}{100}=\log 10^{-2}=-2\log 10=-2$

(3) $\log\sqrt[5]{100}=\log\sqrt[5]{10^2}=\log 10^{\frac{2}{5}}=\dfrac{2}{5}\log 10=\dfrac{2}{5}$

2 (1) $\log 314=\log(10^2\times 3.14)$

$=\log 10^2+\log 3.14$

$=2+0.4969=2.4969$

(2) $\log 314000=\log(10^5\times 3.14)$

$=\log 10^5+\log 3.14$

$=5+0.4969=5.4969$

(3) $\log 0.314$

$=\log(10^{-1}\times 3.14)=\log 10^{-1}+\log 3.14$

$=-1+0.4969=-0.5031$

(4) $\log 0.000314$

$=\log(10^{-4}\times 3.14)=\log 10^{-4}+\log 3.14$

$=-4+0.4969$

$=-3.5031$

3 (1) $\log 12=\log(2^2\times 3)=2\log 2+\log 3=2a+b$

(2) $\log\frac{4}{27}=\log 4-\log 27=\log 2^2-\log 3^3$

$=2\log 2-3\log 3=2a-3b$

(3) $\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-a$

4 (1) $\log 24=\log(2^3\times 3)$

$=3\log 2+\log 3=3\times 0.3010+0.4771$

$=1.3801$

(2) $\log 0.008=\log(8\times 10^{-3})=3\log 2-3\log 10$

$=3\times 0.3010-3=-2.097$

(3) $\log 450=\log\frac{900}{2}=\log(9\times 10^2)-\log 2$

$=2\log 3+2-\log 2$

$=2\times 0.4771+2-0.3010=2.6532$

I-5 지수함수의 뜻과 그래프 (10쪽)

1 (2), (3) **2** 풀이 참조

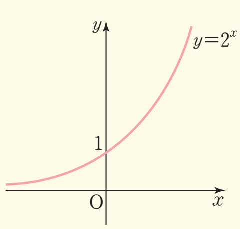
3 (1) $\sqrt[4]{3}<\sqrt[5]{9}$ (2) $4^{0.2}>8^{0.1}$

4 (1) 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{1}{2}$ (2) 최댓값: $\frac{9}{4}$, 최솟값: 1

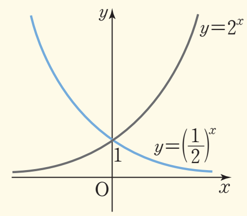
1 (2) $y=3^x$은 3을 밑으로 하는 지수함수이다.

(3) $y=\frac{1}{2^x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 $\frac{1}{2}$을 밑으로 하는 지수함수이다.

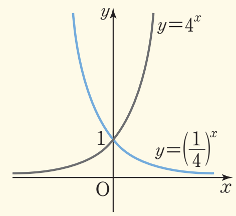
2 (1)



(2) $y=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이므로 지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.



(3) 지수함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$의 그래프는 지수함수 $y=4^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.



3 (1) $\sqrt[4]{3}=3^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[5]{9}=\sqrt[5]{3^2}=3^{\frac{2}{5}}$이고 지수함수 $y=3^x$에서 밑 3은 1보다 크다.

즉 $\frac{1}{4}<\frac{2}{5}$이므로 $3^{\frac{1}{4}}<3^{\frac{2}{5}}$

따라서 $\sqrt[4]{3}<\sqrt[5]{9}$

(2) $4^{0.2}=2^{0.4}$, $8^{0.1}=2^{0.3}$이고 지수함수 $y=2^x$에서 밑 2는 1보다 크다. 즉 $0.4>0.3$이므로 $2^{0.4}>2^{0.3}$

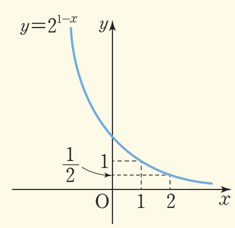
따라서 $4^{0.2}>8^{0.1}$

4 (1) 함수 $y=2^{1-x}=2\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$x=1$일 때 최댓값 $2^{1-1}=1$

$x=2$일 때 최솟값

$2^{1-2}=\frac{1}{2}$을 갖는다.



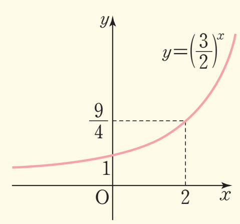
(2) 함수 $y=3^x2^{-x}=\left(\frac{3}{2}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$x=2$일 때 최댓값

$\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

$x=0$일 때 최솟값 $\left(\frac{3}{2}\right)^0=1$

을 갖는다.



Ⅰ-6 로그함수의 뜻과 그래프

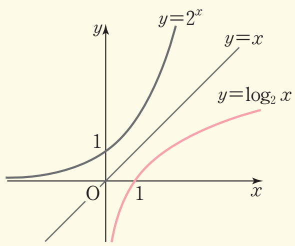
11쪽

1 풀이 참조　　**2** 풀이 참조

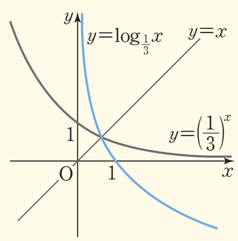
3 (1) $\log_2 5 < 2\log_2 3$　(2) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2} > \log_{\frac{1}{4}} 3$

4 (1) 최댓값: 2, 최솟값: 1　(2) 최댓값: -1, 최솟값: -2

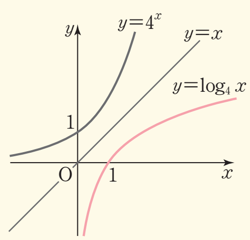
1 (1) 로그함수 $y=\log_2 x$는 지수함수 $y=2^x$의 역함수이므로 두 함수의 그래프는 $y=x$에 대하여 대칭이다.



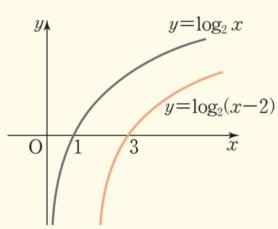
(2) 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$는 지수함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 역함수이므로 두 함수의 그래프는 $y=x$에 대하여 대칭이다.



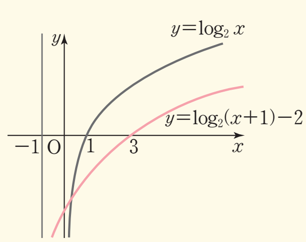
(3) 로그함수 $y=\log_4 x$는 지수함수 $y=4^x$의 역함수이므로 두 함수의 그래프는 $y=x$에 대하여 대칭이다.



2 (1) 함수 $y=\log_2(x-2)$의 그래프는 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



(2) 함수 $y=\log_2(x+1)-2$의 그래프는 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 위의 그림과 같다.



3 (1) 로그함수 $y=\log_2 x$에서 밑 2는 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 $2\log_2 3=\log_2 9$이고 $5<9$이므로
$\log_2 5 < 2\log_2 3$이다.

(2) $\log_{\frac{1}{4}} 3 = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} 3 = \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}$이고 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$에서 밑 $\frac{1}{2}$은 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 $\sqrt{2}<\sqrt{3}$이므로 $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2} > \log_{\frac{1}{4}} 3$이다.

4 (1) 함수 $y=\log_3(x+1)$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
$x=8$일 때, 최댓값 $\log_3 9=2$
$x=2$일 때, 최솟값 $\log_3 3=1$

(2) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-3)$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로
$x=6$일 때, 최댓값 $\log_{\frac{1}{3}} 3=-1$
$x=12$일 때, 최솟값 $\log_{\frac{1}{3}} 9=-2$

Ⅰ-7 지수함수와 로그함수의 활용

12쪽

1 (1) $x=-\frac{5}{9}$　(2) $x=\frac{3}{2}$　(3) $x=-1$ 또는 $x=3$

2 (1) $x>\frac{3}{2}$　(2) $x<2$　(3) $1<x<3$

3 (1) $x=4$　(2) $x=13$　(3) $x=-\frac{2}{5}$

4 (1) $0<x\le 16$　(2) $-\frac{5}{6}<x\le\frac{2}{3}$　(3) $x\ge 3$

1 (1) $8^{x+1}=2^{3x+3}$, $\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}=2^{\frac{4}{3}}$이므로

$2^{3x+3}=2^{\frac{4}{3}}$에서 $3x+3=\frac{4}{3}$

따라서 $x=-\frac{5}{9}$

(2) $4^{x+1}=2^{2x+2}$, $32=2^5$이므로

$2^{2x+2}=2^5$에서 $2x+2=5$

따라서 $x=\frac{3}{2}$

(3) $4^x=2^{2x}$이므로 $x^2-3=2x$에서

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

따라서 $x=-1$ 또는 $x=3$

2 (1) 부등식 $3^x>\sqrt{27}$의 양변을 지수의 밑이 같아지게 변형하면

$3^x>\sqrt{27}$, $3^x>3^{\frac{3}{2}}$

밑 3은 1보다 크므로

$x>\frac{3}{2}$

(2) 부등식 $0.5^{x+1}>0.125$의 양변을 지수의 밑이 같아지게 변형하면

$0.5^{x+1}>0.5^3$

밑 0.5는 1보다 작으므로

$x+1<3$, 즉 $x<2$

(3) 밑 $\frac{1}{2}$은 1보다 작으므로

$x^2<4x-3$, $x^2-4x+3<0$

$(x-1)(x-3)<0$, 즉 $1<x<3$

3 (1) $\log_3(x+5)=2$에서 $2=\log_3 9$이므로

$\log_3(x+5)=\log_3 9$

즉 $x+5=9$에서 $x=4$

(2) $\frac{1}{2}\log(2x-1)=\log 5$의 양변에 2를 곱하면

$\log(2x-1)=2\log 5$, $\log(2x-1)=\log 25$

즉 $2x-1=25$에서

$x=13$

(3) $6x+5=x+3$에서

$x=-\frac{2}{5}$

4 (1) 로그의 진수는 양수이므로 $x>0$ ⋯⋯ ㉠

$\log_4 x\le 2$에서 $2=\log_4 16$이므로

$\log_4 x\le\log_4 16$

밑 4는 1보다 크므로

$x\le 16$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$0<x\le 16$

(2) 로그의 진수는 양수이므로

$6x+5>0$, 즉 $x>-\frac{5}{6}$ ⋯⋯ ㉠

$\log_3(6x+5)\le 2$에서 $2=\log_3 9$이므로

$\log_3(6x+5)\le\log_3 9$

밑 3은 1보다 크므로

$6x+5\le 9$, 즉 $x\le\frac{2}{3}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$-\frac{5}{6}<x\le\frac{2}{3}$

(3) 로그의 진수는 양수이므로

$3x-2>0$, 즉 $x>\frac{2}{3}$ ⋯⋯ ㉠

밑 $\frac{1}{2}$은 1보다 작으므로

$3x-2\ge 7$, 즉 $x\ge 3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$x\ge 3$

Ⅱ-1 일반각과 호도법

13쪽

1 (1) $360^\circ\times n+30^\circ$ (2) $360^\circ\times n+330^\circ$
(3) $360^\circ\times n+180^\circ$

2 (1) 제2사분면의 각 (2) 제2사분면의 각 (3) 제4사분면의 각

3 (1) $\frac{3}{4}\pi$ (2) -330°

4 (1) 3 (2) 넓이: 8π, 중심각의 크기: π

1 (1) $360^\circ\times n+30^\circ$

(2) $-390^\circ=360^\circ\times(-2)+330^\circ$이므로 일반각은

$360^\circ\times n+330^\circ$

(3) $1260^\circ=360^\circ\times 3+180^\circ$이므로 일반각은

$360^\circ\times n+180^\circ$

2 (1) $105°$는 제2사분면의 각이다.

(2) $-225°=360°\times(-1)+135°$이므로 $-225°$는 제2사분면의 각이다.

(3) $660°=360°+300°$이므로 $660°$는 제4사분면의 각이다.

3 (1) $135°=135\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{3}{4}\pi$

(2) $-\dfrac{11}{6}\pi=-\dfrac{11}{6}\pi\times\dfrac{180°}{\pi}=-330°$

4 (1) 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면

$3\pi=\dfrac{1}{2}r\times2\pi$, 즉 $r=3$

(2) 부채꼴의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times4\times4\pi=8\pi$

부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$4\pi=4\theta$, 즉 $\theta=\pi$

Ⅱ-2 삼각함수

14쪽

1 (1) $\dfrac{3}{5}$ (2) $-\dfrac{4}{5}$ (3) $-\dfrac{3}{4}$

2 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3 (1) 제2사분면의 각 (2) 제1사분면의 각 (3) 제4사분면의 각

4 (1) $-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ (2) $-\dfrac{\sqrt{15}}{15}$

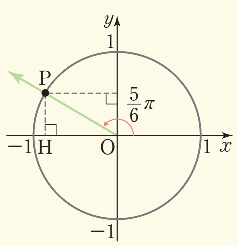
1 $\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

(1) $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$

(2) $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$

(3) $\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$

2 오른쪽 그림과 같이 각 $\theta=\dfrac{5}{6}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{OP}=1$이고



$\angle POH=\dfrac{\pi}{6}$이므로 점 P의 좌표는 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$이다.

(1) $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

(2) $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3 (1) $\sin\theta>0$이므로 각 θ는 제1사분면의 각 또는 제2사분면의 각

$\cos\theta<0$이므로 각 θ는 제2사분면의 각 또는 제3사분면의 각

따라서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$을 만족시키는 각 θ는 제2사분면의 각이다.

(2) $\cos\theta>0$이므로 각 θ는 제1사분면의 각 또는 제4사분면의 각

$\tan\theta>0$이므로 각 θ는 제1사분면의 각 또는 제3사분면의 각

따라서 $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$을 만족시키는 각 θ는 제1사분면의 각이다.

(3) $\tan\theta<0$이므로 각 θ는 제2사분면의 각 또는 제4사분면의 각

$\sin\theta<0$이므로 각 θ는 제3사분면의 각 또는 제4사분면의 각

따라서 $\tan\theta<0$, $\sin\theta<0$을 만족시키는 각 θ는 제4사분면의 각이다.

4 (1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$=1-\dfrac{1}{16}=\dfrac{15}{16}$

이때 각 θ가 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

따라서 $\cos^2\theta=\dfrac{15}{16}$에서

$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

(2) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{4}\times\left(-\dfrac{4}{\sqrt{15}}\right)=-\dfrac{\sqrt{15}}{15}$

Ⅱ-3 삼각함수의 그래프

15쪽

1 (1) 주기: $\frac{\pi}{2}$, 치역: $\{y|-3\le y\le 3\}$, 그래프는 풀이 참조

(2) 주기: 2π, 치역: $\{y|-3\le y\le -1\}$, 그래프는 풀이 참조

2 $a=2$, $b=6$, $c=3$

3 (1) $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(2) $0\le x\le\frac{3}{4}\pi$ 또는 $\frac{5}{4}\pi\le x<2\pi$

4 (1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $-\sqrt{3}$ (4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

1 (1) $f(x)=3\sin 4x$라 하면

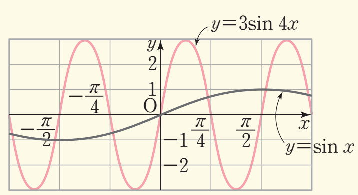
$$\begin{aligned}f(x)&=3\sin 4x\\&=3\sin(4x+2\pi)\\&=3\sin 4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\\&=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

따라서 $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

$-3\le 3\sin 4x\le 3$이므로 치역은

$\{y|-3\le y\le 3\}$

따라서 함수 $y=3\sin 4x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2$라 하면

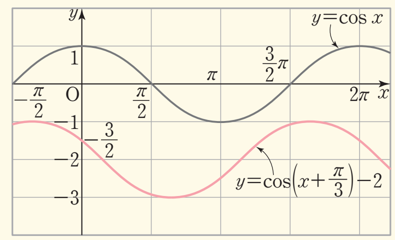
함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 주기는 함수 $y=\cos x$의 주기와 같으므로 2π이다.

또 $f(x)$의 치역은

$\{y|-3\le y\le -1\}$

따라서 함수 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2$의 그래프는 다음 그림과 같다.



2 $f(x)=a\sin bx+c$라 하면

$$\begin{aligned}f(x)&=a\sin(bx+2\pi)+c\\&=a\sin b\left(x+\frac{2\pi}{b}\right)+c\\&=f\left(x+\frac{2\pi}{b}\right)\end{aligned}$$

이므로 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이다.

즉 $\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{3}$에서 $b=6$

$-1\le\sin bx\le 1$에서

$-a+c\le a\sin bx+c\le a+c$이므로

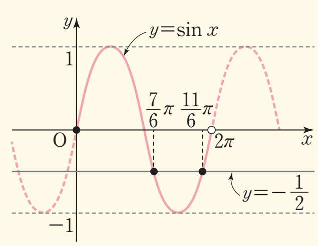
함수 $y=f(x)$의 최댓값은 $a+c$, 최솟값은 $-a+c$이다.

즉 $a+c=5$, $-a+c=1$에서

$a=2$, $c=3$

따라서 $a=2$, $b=6$, $c=3$

3 (1) 구하는 방정식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표와 같다.

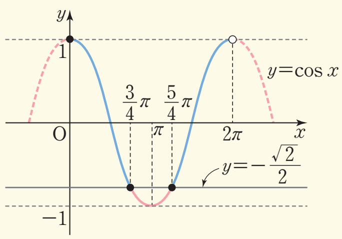


따라서 구하는 해는

$x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(2) $2\cos x+\sqrt{2}\geq 0$에서 $\cos x\geq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

구하는 부등식의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$보다 위쪽에 있는 부분의 x값의 범위와 같다.



따라서 구하는 부등식의 해는

$0\leq x\leq \dfrac{3}{4}\pi$ 또는 $\dfrac{5}{4}\pi\leq x<2\pi$

4 (1) $\sin\dfrac{5}{4}\pi=\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\cos\dfrac{4}{3}\pi=\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$

(3) $\tan\dfrac{2}{3}\pi=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{\tan\dfrac{\pi}{6}}=-\sqrt{3}$

(4) $\sin\dfrac{3}{4}\pi=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ⅱ-4 사인법칙과 코사인법칙

16쪽

1 $\sqrt{2}$　**2** 1

3 120°　**4** (1) 10　(2) $6\sqrt{3}$

1 삼각형의 내각의 크기의 합은 180°이므로

$B=180^\circ-(120^\circ+15^\circ)=45^\circ$

사인법칙에 따라 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=\dfrac{b}{\sin 45^\circ}$이므로

$b=\sin 45^\circ\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2}$

2 코사인법칙에 따라

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$=2^2+(\sqrt{3})^2-2\times 2\times\sqrt{3}\times\cos 30^\circ$

$=1$

그런데 $b>0$이므로

$b=1$

3 코사인법칙으로부터

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\dfrac{10^2+6^2-14^2}{2\times 10\times 6}=-\dfrac{1}{2}$

따라서 $A=120^\circ$

4 (1) 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}ca\sin B$

$=\dfrac{1}{2}\times 5\times 8\times\sin 30^\circ$

$=10$

(2) 코사인법칙으로부터

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$=\dfrac{8^2+3^2-7^2}{2\times 8\times 3}=\dfrac{1}{2}$

즉 $B=60^\circ$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}ca\sin B$

$=\dfrac{1}{2}\times 8\times 3\times\sin 60^\circ$

$=6\sqrt{3}$

Ⅲ-1 수열의 뜻

17쪽

1 (1) 제3항: 10, 제6항: 22　(2) 제3항: 3, 제6항: -6

2 (1) 1, -1, -3, -5, -7　(2) 1, 7, 17, 31, 49

3 (1) $a_n=4n$　(2) $a_n=\dfrac{n}{n+2}$

4 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9

1 (1) 제3항은 10, 제6항은 22이다.
(2) 제3항은 3, 제6항은 -6이다.

2 (1) $3-2n$에 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 차례로 대입하면
$3-2\times1=1$, $3-2\times2=-1$, $3-2\times3=-3$
$3-2\times4=-5$, $3-2\times5=-7$
따라서 첫째항부터 제5항까지 나열하면
$1, -1, -3, -5, -7$
(2) (1)과 마찬가지 방법으로 첫째항부터 제5항까지 나열하면
$1, 7, 17, 31, 49$

3 (1) $a_1=4\times1$, $a_2=4\times2$, $a_3=4\times3$, $\cdots$
따라서 주어진 수열 $\{a_n\}$의 일반항은
$a_n=4n$
(2) $a_1=\frac{1}{1+2}$, $a_2=\frac{2}{2+2}$, $a_3=\frac{3}{3+2}$, $\cdots$
따라서 주어진 수열 $\{a_n\}$의 일반항은
$a_n=\frac{n}{n+2}$

4 3^n을 10으로 나눈 나머지는 3^n의 일의 자리의 수이므로
$a_1=3$, $a_2=9$, $a_3=7$, $a_4=1$,
$a_5=3$, $a_6=9$, $a_7=7$, $a_8=1$,
$a_9=3$, $a_{10}=9$
따라서 수열 $\{a_n\}$을 첫째항부터 제10항까지 나열하면
$3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9$

Ⅲ-2 등차수열

18쪽

1 (1) $a_n=4n-1$ (2) $a_n=-3n+11$
2 (1) $a_n=-2n+8$ (2) $a_n=3n-10$
3 (1) $x=9$ (2) $x=1$, $y=-2$
4 390 **5** $a_n=8n-5$

1 (1) $a_n=3+(n-1)\times4$
$=4n-1$
(2) 첫째항이 8, 공차가 -3인 등차수열이므로
$a_n=8+(n-1)\times(-3)$
$=-3n+11$

2 (1) 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_2=a+d=4$ …… ㉠
$a_5=a+4d=-2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=6$, $d=-2$
따라서 구하는 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은
$a_n=6+(n-1)\times(-2)$
$=-2n+8$
(2) 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3=a+2d=-1$ …… ㉠
$a_7=a+6d=11$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-7$, $d=3$
따라서 구하는 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은
$a_n=-7+(n-1)\times3$
$=3n-10$

3 (1) 3과 15의 등차중항이 x이므로
$x=\frac{3+15}{2}=9$
(2) 4와 y의 등차중항이 x이므로
$x=\frac{4+y}{2}$, 즉 $2x-y=4$ …… ㉠
x와 -5의 등차중항이 y이므로
$y=\frac{x+(-5)}{2}$, 즉 $x-2y=5$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$x=1$, $y=-2$

4 $S_{15}=\frac{15\times\{2\times5+(15-1)\times3\}}{2}$
$=\frac{15\times52}{2}=390$

5 $n\geq2$일 때
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(4n^2-n)-\{4(n-1)^2-(n-1)\}$
$=8n-5$ …… ㉠
$n=1$일 때
$a_1=S_1=4\times1^2-1=3$ …… ㉡

그런데 ㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_1=8\times1-5=3$

이므로 ㉡과 일치한다.

따라서 주어진 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=8n-5$

Ⅲ-3 등비수열

19쪽

1 (1) $a_n=3\times2^{n-1}$ (2) $a_n=2\times(-2)^{n-1}$

2 (1) $a_n=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (2) $a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n$

3 (1) $x=4$ (2) $x=1$, $y=2$

4 2046 **5** $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

1 (1) $a_n=3\times2^{n-1}$

(2) 첫째항은 2이고 공비는 $\frac{-4}{2}=-2$이므로 주어진 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=2\times(-2)^{n-1}$

2 (1) 공비를 r라 하면 $a_1=4$이므로

$a_4=a_1r^3=4r^3=-\frac{1}{2}$

$r^3=-\frac{1}{8}=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$에서 $r=-\frac{1}{2}$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(2) 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=\frac{9}{4}$ ⋯⋯ ㉠

$a_5=ar^4=\frac{243}{32}$ ⋯⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=\frac{27}{8}$

이때 r는 실수이므로 $r=\frac{3}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{3}{2}$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^n$

3 (1) $x^2=1\times16=16$

$x>0$이므로 $x=4$

(2) $\frac{1}{2}$, x, y의 등비중항이 x이므로

$x^2=\frac{y}{2}$, $y=2x^2$ ⋯⋯ ㉠

x, y, 4의 등비중항이 y이므로

$y^2=4x$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$(2x^2)^2=4x$, $x^3=1$

$x>0$이므로 $x=1$

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $y=2$

4 $S_{10}=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2(2^{10}-1)=2046$

5 $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$=\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2^{n-1}}$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ⋯⋯ ㉠

$n=1$일 때

$a_1=S_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ⋯⋯ ㉡

그런데 ㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_1=\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$

이므로 ㉡과 일치한다.

따라서 주어진 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Ⅲ-4 수열의 합

20쪽

1 (1) 17 (2) 25 **2** (1) 330 (2) 783

3 385 **4** (1) $\frac{10}{11}$ (2) $\frac{10}{21}$

1 (1) $\sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k-2\sum_{k=1}^{10}b_k$

$=5-2\times(-6)=17$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}2$
$=5+2\times10=25$

2 (1) $\sum_{k=1}^{10}(k^2-k)=\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k$
$=\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}$
$=385-55=330$

(2) $\sum_{k=1}^{6}(k+1)^3=\sum_{k=1}^{6}(k^3+3k^2+3k+1)$
$=\sum_{k=1}^{6}k^3+3\sum_{k=1}^{6}k^2+3\sum_{k=1}^{6}k+\sum_{k=1}^{6}1$
$=\left(\frac{6\times7}{2}\right)^2+3\times\frac{6\times7\times13}{6}$
$+3\times\frac{6\times7}{2}+6$
$=441+273+63+6=783$

3 $1\times19+2\times17+3\times15+\cdots+10\times1$
$=\sum_{k=1}^{10}k(21-2k)$
$=21\sum_{k=1}^{10}k-2\sum_{k=1}^{10}k^2$
$=21\times\frac{10\times11}{2}-2\times\frac{10\times11\times21}{6}$
$=1155-770=385$

4 (1) $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+1)}$
$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$
$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$
$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$

(2) $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$
$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$
$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$
$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{21}$

III-5 수열의 귀납적 정의

21쪽

1 (1) 14 (2) $\frac{1}{16}$ (3) 33 (4) 7
2 4 **3** 16

1 (1) $a_2=a_1+3=2+3=5$
$a_3=a_2+3=5+3=8$
$a_4=a_3+3=8+3=11$
$a_5=a_4+3=11+3=14$

(2) $a_2=-\frac{1}{2}a_1=-\frac{1}{2}\times1=-\frac{1}{2}$
$a_3=-\frac{1}{2}a_2=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$
$a_4=-\frac{1}{2}a_3=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}$
$a_5=-\frac{1}{2}a_4=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{16}$

(3) $a_2=2a_1-1=2\times3-1=5$
$a_3=2a_2-1=2\times5-1=9$
$a_4=2a_3-1=2\times9-1=17$
$a_5=2a_4-1=2\times17-1=33$

(4) $a_3=a_2+a_1=1+2=3$
$a_4=a_3+a_2=3+1=4$
$a_5=a_4+a_3=4+3=7$

2 $a_1=2$이고 $a_{n+1}=6-a_n$이므로
$a_2=6-a_1=6-2=4$
$a_3=6-a_2=6-4=2$
$a_4=6-a_3=6-2=4$
⋮
즉 홀수 번째 항은 2이고 짝수 번째 항은 4이다.
따라서 a_{100}은 짝수 번째 항이므로
$a_{100}=4$

3 $a_1=16$이고 $a_{n+1}=\frac{4}{a_n}$이므로
$a_2=\frac{4}{a_1}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$
$a_3=\frac{4}{a_2}=\frac{4}{\frac{1}{4}}=16$

$a_4=\dfrac{4}{a_3}=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$

$a_5=\dfrac{4}{a_4}=\dfrac{4}{\dfrac{1}{4}}=16$

$\vdots$

즉 홀수 번째 항은 16이고 짝수 번째 항은 $\dfrac{1}{4}$이다.

따라서 a_{51}은 홀수 번째 항이므로

$a_{51}=16$

Ⅲ-6 수학적 귀납법

22쪽

1 풀이 참조 **2** 풀이 참조

1 ① $n=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=\dfrac{1\times(1+1)}{2}=1$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

② $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

등식 ㉠의 좌변에 $k+1$을 더하면

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+k+(k+1)&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\&=\frac{k^2+3k+2}{2}\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

위 등식은 주어진 등식에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

①, ②에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

2 ① $n=1$일 때, (좌변)$=\dfrac{1}{3}=$(우변)

이므로 주어진 등식이 성립한다.

② $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

등식 ㉠의 좌변에 $\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$을 더하면

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots\\&\qquad+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{k+1}{2k+3}\end{aligned}$$

위 등식은 주어진 등식에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

①, ②에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

내신 대비 소단원 TEST

I-1 거듭제곱과 거듭제곱근

32쪽

01 ± 5, $\pm 5i$	02 (1) $\pm\sqrt{3}$ (2) 4
03 ㄱ, ㄹ	04 7
05 $b\sqrt{a}$	06 13

01 $(-5)^4=5^4$이고, 5^4의 네제곱근을 x라 하면

$x^4=5^4$, $x^4-5^4=0$

$(x^2-5^2)(x^2+25)=0$

이므로

$x=\pm 5$ 또는 $x=\pm 5i$

따라서 $(-5)^4$의 네제곱근은 ± 5, $\pm 5i$이다.

02 (1) $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$이므로 3의 제곱근은

$-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$

(2) 64의 세제곱근을 x라 하면

$x^3=64$, $x^3-64=0$

$(x-4)(x^2+4x+16)=0$

이므로

$x=4$ 또는 $x=-2\pm 2\sqrt{3}i$

따라서 64의 세제곱근 중에서 실수인 것은 4이다.

03 ㄱ. $(\sqrt[4]{9})^2=\sqrt[4]{9^2}=\sqrt[4]{3^4}=3$ (참)

ㄴ. $(\sqrt[5]{2})^5=2$, $(\sqrt[3]{-2})^3=-2$이므로

$(\sqrt[5]{2})^5\neq(\sqrt[3]{-2})^3$ (거짓)

ㄷ. $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt[4]{3^5}}{\sqrt[4]{3^2}}=\sqrt[4]{3^3}\neq 3$ (거짓)

ㄹ. $\sqrt{\sqrt{16}}=\sqrt[4]{2^4}=2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

04 $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16})$

$=(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3\times 4}+\sqrt[3]{4^2})$

$=(\sqrt[3]{3})^3+(\sqrt[3]{4})^3=3+4=7$

참고 다항식의 곱셈 공식

- $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
- $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

05 $\sqrt{a^3b^2}\times\sqrt[3]{\dfrac{a}{a^3b^2}}\div\sqrt[6]{\dfrac{a^2}{b^4}}$

$=\sqrt{a^3b^2}\times\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^3b^2}}\times\dfrac{\sqrt[6]{b^4}}{\sqrt[6]{a^2}}$

$=\sqrt{a^3}\sqrt{b^2}\times\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^3}\times\sqrt[3]{b^2}}\times\dfrac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}}$

$=b\sqrt{a^3}\times\dfrac{1}{a}=b\sqrt{a^3}\times\dfrac{1}{\sqrt{a^2}}$

$=b\sqrt{a}$

06 $\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}=\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^3\sqrt{a^3}}}$

$=\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{a^9}}}=\sqrt[5]{\sqrt{a^3}}$

$=\sqrt[5]{\sqrt{a^3}}=\sqrt[10]{a^3}$

따라서 $m=10$, $n=3$이므로

$m+n=10+3=13$

I-2 지수의 확장과 지수법칙

40쪽

01 4	02 $\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$
03 $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$	04 $\dfrac{5}{2}$
05 288	06 $\dfrac{1}{16}$

01 $4^6\times 8^{-2}\div\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-1}$

$=(2^2)^6\times(2^3)^{-2}\div(2^{-4})^{-1}$

$=2^{12}\times 2^{-6}\div 2^4$

$=2^{12+(-6)-4}$

$=2^2=4$

02 $a+a^{-1}=3$의 양변을 제곱하면

$a^2+2+a^{-2}=9$, $a^2+a^{-2}=7$

한편 $a-a^{-1}$을 제곱하면

$(a-a^{-1})^2=a^2-2+a^{-2}$

$=7-2=5$

이때 $a>1$에서 $0<\dfrac{1}{a}<1$이므로

$a-a^{-1}>0$

즉 $a-a^{-1}=\sqrt{5}$

따라서 $\dfrac{a^2+a^{-2}}{a-a^{-1}}=\dfrac{7}{\sqrt{5}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$

03 $(x^{\frac{1}{8}}-y^{\frac{1}{8}})(x^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{8}})(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})$

$=\{(x^{\frac{1}{8}})^2-(y^{\frac{1}{8}})^2\}(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})$

$=(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})$

$=(x^{\frac{1}{4}})^2-(y^{\frac{1}{4}})^2$

$=x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$

04 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{5}{2}$, $\alpha\beta=1$

이고

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=\left(\frac{5}{2}\right)^2-4$

$=\frac{25}{4}-4=\frac{9}{4}$

이때 $\beta-\alpha>0$이므로 $\beta-\alpha=\frac{3}{2}$

즉

$\frac{2^\beta}{2^\alpha}\times(2^\alpha)^\beta=2^{\beta-\alpha}\times 2^{\alpha\beta}$

$=2^{\frac{3}{2}}\times 2^1=2^{\frac{5}{2}}$

따라서 $p=\frac{5}{2}$

05 $12^x=3$에서 $12=3^{\frac{1}{x}}$

$4^y=9$에서 $4=3^{\frac{2}{y}}$

$\left(\frac{1}{6}\right)^z=27$에서 $\frac{1}{6}=3^{\frac{3}{z}}$

따라서

$3^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}}=3^{\frac{1}{x}}\times 3^{\frac{2}{y}}\div 3^{\frac{3}{z}}$

$=12\times 4\div\frac{1}{6}=288$

06 2일 후 A 성분의 양이 $\frac{1}{2}m_0$이므로

$\frac{1}{2}m_0=m_0\times r^{-2}$, 즉 $r^{-2}=\frac{1}{2}$

따라서 8일 후 A 성분의 양은

$m_8=m_0\times r^{-8}=m_0\times(r^{-2})^4$

$=m_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}m_0$

즉 $k=\frac{1}{16}$

I-3 로그의 뜻과 성질

49쪽 소단원 TEST

01 (1) 16 (2) -4 (3) 4	**02** 10
03 $2a-1$	**04** (1) 3 (2) $\frac{7}{3}$
05 (1) 12 (2) $\frac{1}{4}$	**06** 6

01 (1) $\log_2 x=4$에서 $2^4=x$, 즉 $x=16$

(2) $\log_2\frac{1}{16}=\log_2 2^{-4}=-4$

즉 $x=-4$

(3) $\log_{\sqrt{2}}x=4$에서 $(\sqrt{2})^4=x$, 즉 $x=4$

02 $\log_2 x=3$에서 $x=2^3=8$

$\log_y 4=2$에서 $y^2=4$

이때 로그의 밑의 조건에 의하여 $y>0$, $y\neq 1$이므로

$y=2$

따라서 $x+y=8+2=10$

03 $\log_2 12=\log_2(2^2\times 3)$

$=2\log_2 2+\log_2 3$

$=2+\log_2 3$

$2+\log_2 3=a$에서 $\log_2 3=a-2$이므로

$\log_2 72=\log_2(2^3\times 3^2)$

$=3\log_2 2+2\log_2 3$

$=3+2(a-2)$

$=2a-1$

04 (1) $\log_3(7-\sqrt{22})+\log_3(7+\sqrt{22})$

$=\log_3(7-\sqrt{22})(7+\sqrt{22})$

$=\log_3\{7^2-(\sqrt{22})^2\}$

$=\log_3 27$

$=\log_3 3^3$

$=3\log_3 3=3$

(2) $\frac{1}{2}\log_3\frac{9}{5}+\log_3\sqrt{5}+\log_3\sqrt[3]{9^2}$

$=\frac{1}{2}\log_3\frac{9}{5}+\frac{1}{2}\log_3 5+\log_3\sqrt[3]{3^4}$

$=\frac{1}{2}\left(\log_3\frac{9}{5}+\log_3 5\right)+\log_3 3^{\frac{4}{3}}$

$$=\frac{1}{2}\log_3\left(\frac{9}{5}\times5\right)+\frac{4}{3}\log_3 3$$
$$=\frac{1}{2}\log_3 3^2+\frac{4}{3}=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$$

05 (1) $\log_2 9^3\times\log_9 4^2=\log_2 3^6\times\log_{3^2} 2^4$

$$=6\log_2 3\times\frac{4}{2}\log_3 2$$
$$=6\log_2 3\times\frac{2}{\log_2 3}$$
$$=6\times2=12$$

(2) $\left(\log_2 3+\log_4\frac{1}{3}\right)\left(\log_3 2+\log_9\frac{1}{2}\right)$

$$=\left(\log_4 9+\log_4\frac{1}{3}\right)\left(\log_9 4+\log_9\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left\{\log_4\left(9\times\frac{1}{3}\right)\right\}\left\{\log_9\left(4\times\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=\log_4 3\times\log_9 2$$
$$=\log_{2^2} 3\times\log_{3^2} 2$$
$$=\frac{1}{2}\log_2 3\times\frac{1}{2}\log_3 2$$
$$=\frac{1}{4}$$

06 $\log_a b=2\log_b c=4\log_c a=k$($k$는 상수)로 놓으면

$\log_a b\times2\log_b c\times4\log_c a=k^3$

$\log_a b\times2\dfrac{\log_a c}{\log_a b}\times4\dfrac{\log_a a}{\log_a c}=k^3$

$8=k^3$, 즉 $k=2$

$\log_a b=2$에서 $b=a^2$

$2\log_b c=2$에서 $c=b$

$4\log_c a=2$에서 $a=c^{\frac{1}{2}}$

따라서

$\log_a bc^2=\log_a a^2a^4=\log_a a^6=6$

I-4 상용로그

55쪽

소단원 TEST

01 (1) 5.5119 (2) -0.4881 (3) 5.0238

02 3.3010 **03** $\dfrac{2a+b}{1-a}$

04 $-\dfrac{43}{30}$ **05** 1

06 10^{12}

01 (1) $\log 325000=\log(10^5\times3.25)$

$$=\log 10^5+\log 3.25$$
$$=5+0.5119=5.5119$$

(2) $\log 0.325=\log(10^{-1}\times3.25)$

$$=\log 10^{-1}+\log 3.25$$
$$=-1+0.5119=-0.4881$$

(3) $\log 325^2=2\log 325$

$$=2\log(10^2\times3.25)$$
$$=2(\log 10^2+\log 3.25)$$
$$=2\times(2+0.5119)$$
$$=5.0238$$

02 $\log 40+\log 50$

$$=\log(2^3\times5)+\log(10\times5)$$
$$=3\log 2+\log 5+\log 10+\log 5$$
$$=3\log 2+2\log 5+1$$
$$=3\times0.3010+2\times0.6990+1$$
$$=3.3010$$

다른 풀이 $\log 40+\log 50$

$$=\log(40\times50)=\log 2000$$
$$=\log(10^3\times2)=3+\log 2$$
$$=3+0.3010=3.3010$$

03 $\log_5 12=\dfrac{\log 12}{\log 5}=\dfrac{\log(2^2\times3)}{\log\dfrac{10}{2}}$

$$=\frac{2\log 2+\log 3}{\log 10-\log 2}=\frac{2a+b}{1-a}$$

04 $\log\sqrt{10}-\log\sqrt[3]{10000}+\log\sqrt[5]{\dfrac{1}{1000}}$

$$=\log 10^{\frac{1}{2}}-\log 10^{\frac{4}{3}}+\log 10^{-\frac{3}{5}}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{4}{3}-\frac{3}{5}$$
$$=-\frac{43}{30}$$

05 $xy=10^2$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log xy=\log 10^2$

$\log x+\log y=2$

$\log y=2-\log x$이므로

$\log x \times \log y = \log x(2-\log x)$

$= -(\log x)^2 + 2\log x$

$= -(\log x - 1)^2 + 1$

따라서 $\log x = 1$, 즉 $x = 10$일 때 최댓값 1을 갖는다.

06 크기가 140 dB인 소리의 세기를 I_1, 크기가 20 dB인 소리의 세기를 I_2라 하면

$140 = 120 + 10\log I_1$, $\log I_1 = 2$, 즉 $I_1 = 100$

$20 = 120 + 10\log I_2$, $\log I_2 = -10$, 즉 $I_2 = 10^{-10}$

즉 $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{100}{10^{-10}} = 10^{12}$

따라서 크기가 140 dB인 소리의 세기는 크기가 20 dB인 소리의 세기의 10^{12}배이다.

Ⅰ-5 지수함수의 뜻과 그래프

62쪽

• 소단원 TEST

01 ②	**02** 6
03 6	**04** 5
05 $\dfrac{4}{27}$	**06** $\dfrac{1}{a^a}$

01 $y = 2^{1-x} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}$이므로 구하는 함수의 그래프는 함수 $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y = 2^{1-x}$의 그래프의 개형으로 옳은 것은 ② 이다.

02 함수 $y = 3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프가 나타내는 식은

$y = 3^{x-a} + b$

두 점 $(1, 6)$, $(2, 8)$을 지나므로

$6 = 3^{1-a} + b$ ...... ㉠

$8 = 3^{2-a} + b$ ...... ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$3^{2-a} - 3^{1-a} = 2$, $3^{1-a}(3-1) = 2$

$3^{1-a} = 1$, 즉 $a = 1$

$a = 1$을 ㉠에 대입하면

$b = 5$

따라서

$a + b = 1 + 5 = 6$

03 $a^p = 3$, $a^q = 24$이므로

$f\left(\dfrac{2p+q}{3}\right) = (a^{2p+q})^{\frac{1}{3}} = (a^{2p} \times a^q)^{\frac{1}{3}}$

$= \{(a^p)^2 \times a^q\}^{\frac{1}{3}}$

$= (3^2 \times 24)^{\frac{1}{3}}$

$= (6^3)^{\frac{1}{3}} = 6$

04 점근선의 방정식이 $y = 2$이므로 $n = 2$

$y = 2^{2x+m} + n$의 그래프가 점 $(1, 10)$을 지나므로

$10 = 2^{2+m} + 2$

$8 = 2^{2+m}$, 즉 $m = 1$

따라서 $m^2 + n^2 = 1^2 + 2^2 = 5$

05 함수 $f(x) = 3^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

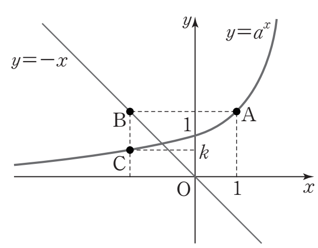
$x = -3$일 때, 최솟값 $f(-3) = \dfrac{1}{27}$을 갖는다.

또, 함수 $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$x = 1$일 때, 최솟값 $g(1) = \dfrac{1}{4}$을 갖는다.

따라서 $a = \dfrac{1}{27}$, $b = \dfrac{1}{4}$이므로 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{27}$

06 오른쪽 그림과 같이 함수 $y = a^x$의 그래프와 직선 $y = -x$가 점선과 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자.



함수 $y = a^x$에서

$x = 1$일 때 $y = a$이므로 $A(1, a)$

또 점 A와 점 B는 y좌표가 같고 점 B는 직선 $y = -x$ 위에 있으므로 $B(-a, a)$

점 B와 점 C는 x좌표가 같으므로 $C(-a, k)$

이때 점 C는 함수 $y = a^x$의 그래프 위에 있으므로 $k = \dfrac{1}{a^a}$

Ⅰ-6 로그함수의 뜻과 그래프

69쪽

소단원 TEST

01 12	02 3
03 13	04 4
05 100	06 32

01 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프가 나타내는 식은

$y=\log_2(x-p)+4$

두 점 $(4, 5)$, $(q, 7)$을 지나므로

$5=\log_2(4-p)+4$에서 $p=2$

$7=\log_2(q-2)+4$에서 $q=10$

따라서 $p+q=12$

02 $y=\log_3(x-1)+2$라 하고, x와 y를 서로 바꾸면

$x=\log_3(y-1)+2$

$\log_3(y-1)=x-2$

$y-1=3^{x-2}$

즉 $y=3^{x-2}+1$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로

$a+b=3$

03 $y=\log_3\left(\frac{x+2}{3}\right)+4$

$=\log_3(x+2)-\log_3 3+4$

$=\log_3(x+2)+3$

이므로 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=-2$, $b=3$이므로

$a^2+b^2=13$

04 함수 $y=k+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$에서 밑 $\frac{1}{3}$은 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

$x=1$일 때 최댓값을 가지므로

$y=k+\log_{\frac{1}{3}}(1+2)=k-1$

즉 $k-1=5$이므로 $k=6$

따라서 구하는 함수는 $x=7$일 때 최솟값을 가지므로

$y=6+\log_{\frac{1}{3}}(7+2)=4$

05 $(g\circ f)(x)=x$이므로 함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

즉 $g(9)=a$라 하면 $f(a)=9$이므로

$1+4\log a=9$

$\log a=2$

즉 $a=100$

따라서 $g(9)=a=100$

06 선분 AC의 길이가 4이므로

$\log_2 x=4$에서 $x=2^4=16$

점 C의 x좌표는 16이므로 $\mathrm{C}(16, 0)$

또 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\mathrm{H}(32, 0)$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CH}}=\frac{1}{2}\times 4\times(32-16)$

$=32$

Ⅰ-7 지수함수와 로그함수의 활용

78쪽

소단원 TEST

01 $\frac{3}{2}$	02 10
03 $x=12$	04 5
05 32	06 8

01 $\frac{27^x}{3}=3^{x+2}$, $3^{3x-1}=3^{x+2}$

이므로

$3x-1=x+2$

즉 $x=\frac{3}{2}$

02 $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x}\le 2^{x+3}$에서

$2^{2x-1}\le 2^{x+3}$

$2x-1\le x+3$

즉 $x\le 4$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은 $1+2+3+4=10$이다.

03 로그의 진수는 양수이므로

$x-4>0$, $5x+4>0$에서 $x>4$ …… ㉠

$\log_3(x-4)=\log_9(5x+4)$에서

$2\log_9(x-4)=\log_9(5x+4)$

$\log_9(x-4)^2=\log_9(5x+4)$

이므로

$(x-4)^2=5x+4$, $x^2-13x+12=0$

$(x-1)(x-12)=0$, 즉 $x=1$ 또는 $x=12$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x=12$

04 $2^x=t$라 하면

$t^2-6t+8=0$, $(t-2)(t-4)=0$

$t=2$ 또는 $t=4$

$t=2$일 때 $2^x=2$에서 $x=1$

$t=4$일 때 $2^x=4$에서 $x=2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로

$\alpha^2+\beta^2=5$

05 $(\log_2 x)^2-10\log_2\sqrt{x}+6=0$에서

$(\log_2 x)^2-5\log_2 x+6=0$

$(\log_2 x-2)(\log_2 x-3)=0$

$\log_2 x=2$ 또는 $\log_2 x=3$

즉 $x=4$ 또는 $x=8$

따라서 서로 다른 두 실근의 곱은 32이다.

06 로그의 진수는 양수이므로

$x^2+x-2>0$에서 $(x-1)(x+2)>0$

$x<-2$ 또는 $x>1$ …… ㉠

$2-2x>0$에서 $x<1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x<-2$ …… ㉢

한편 밑 $\frac{1}{2}$은 1보다 작으므로

$x^2+x-2<2-2x$

$x^2+3x-4<0$, $(x-1)(x+4)<0$

$-4<x<1$ …… ㉣

㉢, ㉣에서

$-4<x<-2$

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=-2$이므로

$\alpha\beta=8$

Ⅱ-1 일반각과 호도법

94쪽

• 소단원 TEST

01 (1) $\frac{5}{6}\pi$ (2) $-\frac{7}{6}\pi$ (3) $108°$ (4) $-330°$

02 ㄴ, ㅁ, ㅂ

03 $315°$

04 $\pi-2$

05 $\theta=\frac{2}{3}\pi$, $l=\frac{4}{3}\pi$

06 $r=6$, $\theta=2$

01 (1) $150°=150\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{6}\pi$

(2) $-210°=-210\times\frac{\pi}{180}=-\frac{7}{6}\pi$

(3) $\frac{3}{5}\pi=\frac{3}{5}\pi\times\frac{180°}{\pi}=108°$

(4) $-\frac{11}{6}\pi=-\frac{11}{6}\pi\times\frac{180°}{\pi}=-330°$

02 ㄱ. $690°=360°\times1+330°$이므로 제4사분면의 각이다.

ㄴ. $-620°=360°\times(-2)+100°$이므로 제2사분면의 각이다.

ㄷ. π는 동경이 좌표축 위에 있으므로 어느 사분면의 각도 아니다.

ㄹ. $\frac{22}{7}\pi=2\pi+\frac{8}{7}\pi$이고 $\pi<\frac{8}{7}\pi<\frac{3}{2}\pi$이므로 제3사분면의 각이다.

ㅁ. $\frac{14}{3}\pi=4\pi+\frac{2}{3}\pi$이고 $\frac{\pi}{2}<\frac{2}{3}\pi<\pi$이므로 제2사분면의 각이다.

ㅂ. $1230°=360°\times3+150°$이므로 제2사분면의 각이다.

따라서 제2사분면의 각은 ㄴ, ㅁ, ㅂ이다.

03 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$5\theta-\theta=360°\times n+180°$ (n은 정수)

즉 $\theta=90°\times n+45°$

이때 $270°<\theta<360°$이므로

$n=3$

따라서 구하는 각 θ의 크기는

$\theta=90°\times3+45=315°$

04 부채꼴의 호의 길이를 l, 중심각의 크기를 θ라 하면 부채꼴의 둘레의 길이는

$2r+l=2r+r\theta$

이때 $2r+r\theta=\pi r$이므로

$r\theta=\pi r-2r$, 즉 $\quad \theta=\pi-2$

05 부채꼴의 반지름을 r, 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}r^2\theta$에서 $\frac{4}{3}\pi=\frac{1}{2}\times 2^2\times\theta$

즉 $\quad \theta=\frac{2}{3}\pi$

따라서 부채꼴의 호의 길이 l은

$l=r\theta=2\times\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$

06 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

$24=2r+l$에서 $l=24-2r$이므로

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(24-2r)$

$\quad=-r^2+12r$

$\quad=-(r-6)^2+36$

따라서 $r=6$일 때 넓이가 최대이다.

이때 중심각의 크기 θ는 $l=r\theta$에서

$\theta=\frac{l}{r}=\frac{24-2r}{r}=\frac{24-2\times6}{6}=2$

Ⅱ-2 삼각함수

102쪽 소단원 TEST

01 $-\frac{1}{5}$ **02** (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\sqrt{3}$

03 (1) 제2사분면의 각

(2) 제1사분면의 각 또는 제3사분면의 각

04 $\frac{79}{156}$ **05** $\frac{11}{16}$

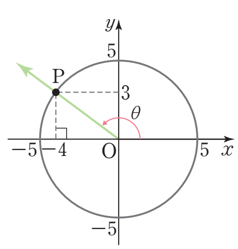
06 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

01 $\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$이므로

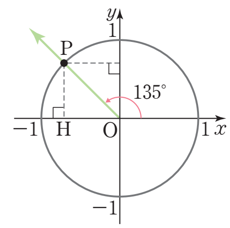
$\sin\theta=\frac{3}{5}$

$\cos\theta=\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5}$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{5}$



02 (1) 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 단위원과 135°를 나타내는 동경의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



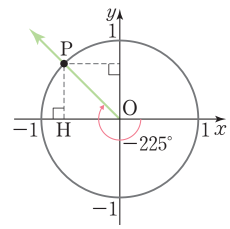
직각삼각형 POH에서

$\overline{OP}=1$, $\angle POH=45°$이므로

점 P의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이다.

따라서 $\sin 135°=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 단위원과 $-225°$를 나타내는 동경의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



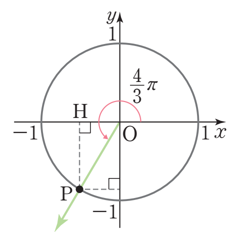
직각삼각형 POH에서

$\overline{OP}=1$, $\angle POH=45°$이므로

점 P의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이다.

따라서 $\cos(-225°)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 단위원과 $\theta=\frac{4}{3}\pi$를 나타내는 동경의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



직각삼각형 POH에서

$\overline{OP}=1$, $\angle POH=\frac{\pi}{3}$이므로

점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

따라서 $\tan\frac{4}{3}\pi=\sqrt{3}$

03 (1) $\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$에서

$\sin\theta>0$이면 θ는 제1, 2사분면의 각

$\tan\theta<0$이면 θ는 제2, 4사분면의 각

따라서 θ는 제2사분면의 각이다.

(2) $\sin\theta\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

(i) $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이면 θ는 제1사분면의 각

(ii) $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이면 θ는 제3사분면의 각

따라서 θ는 제1사분면의 각 또는 제3사분면의 각이다.

04 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$=1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$

이때 각 θ가 제4사분면의 각이므로

$\cos\theta=\frac{12}{13}$

또 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}}=-\frac{5}{12}$

따라서

$\cos\theta+\tan\theta=\frac{12}{13}+\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{79}{156}$

05 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

따라서

$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\times\left(-\frac{3}{8}\right)\times\frac{1}{2}$

$=\frac{11}{16}$

06 이차방정식 $2x^2-(1+\sqrt{3})x+a=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ …… ㉠

$\sin\theta\cos\theta=\frac{a}{2}$ …… ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$, 즉 $\sin\theta\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}$

㉡에서 $\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ⅱ-3 삼각함수의 그래프

114쪽

소단원 TEST

01 최댓값: 5, 최솟값: 1, 주기: π **02** 8

03 $-\frac{9}{8}$ **04** π

05 $\sqrt{3}$ **06** (1) 2 (2) 0

01 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$, 치역은 $-1\le\cos(2x-4)\le1$이므로

$-2\le2\cos(2x-4)\le2$

$1\le2\cos(2x-4)+3\le5$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 5, 최솟값은 1이다.

02 함수 $y=a\sin bx+c$의 최댓값이 6, 최솟값이 0이고, $a>0$이므로

$a+c=6$, $-a+c=0$

즉 $a=3$, $c=3$

함수 $y=3\sin bx+3$의 그래프의 주기는 π이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$에서 $b=2$

따라서

$a+b+c=3+2+3=8$

03 $y=\cos x-2\sin^2x$

$=\cos x-2(1-\cos^2x)$

$=2\cos^2x+\cos x-2$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$f(t)=2t^2+t-2$

$=2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{17}{8}$

즉 $-1\le t\le1$에서

$t=-\frac{1}{4}$일 때 최솟값 $-\frac{17}{8}$

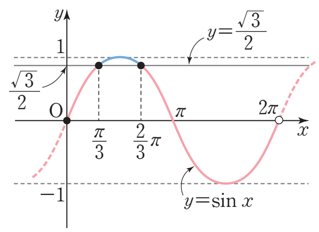
$t=1$일 때 최댓값 1

따라서 $M=1$, $m=-\frac{17}{8}$이므로

$M+m=1-\frac{17}{8}=-\frac{9}{8}$

04 $2\sin x=\sqrt{3}$, 즉 $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표와 같으므로

$x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\dfrac{2}{3}\pi$



따라서 x의 값의 합은 $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{3}\pi=\pi$

05 $2\sin^2 x>3\cos x$에서

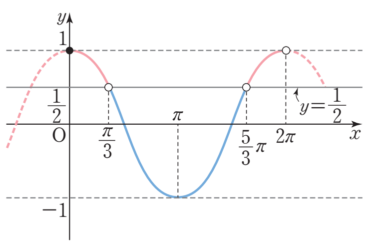
$2(1-\cos^2 x)>3\cos x$

$2\cos^2 x+3\cos x-2<0$

$(\cos x+2)(2\cos x-1)<0$

이때 $\cos x+2>0$이므로

$2\cos x-1<0$, 즉 $\cos x<\dfrac{1}{2}$



$\cos x<\dfrac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\dfrac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같으므로

$\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{5}{3}\pi$

따라서 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, $\beta=\dfrac{5}{3}\pi$이므로

$$\begin{aligned}\tan(\beta-\alpha)&=\tan\left(\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{3}\right)\\&=\tan\frac{4}{3}\pi\\&=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\\&=\tan\frac{\pi}{3}\\&=\sqrt{3}\end{aligned}$$

06 (1) $\sin\dfrac{4}{10}\pi=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{10}\right)=\cos\dfrac{\pi}{10}$

$\sin\dfrac{3}{10}\pi=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{10}\pi\right)=\cos\dfrac{2}{10}\pi$

이므로

$$\begin{aligned}&\sin^2\frac{\pi}{10}+\sin^2\frac{2}{10}\pi+\sin^2\frac{3}{10}\pi+\sin^2\frac{4}{10}\pi\\&=\sin^2\frac{\pi}{10}+\sin^2\frac{2}{10}\pi+\cos^2\frac{2}{10}\pi+\cos^2\frac{\pi}{10}\\&=\left(\sin^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{\pi}{10}\right)+\left(\sin^2\frac{2}{10}\pi+\cos^2\frac{2}{10}\pi\right)\\&=1+1=2\end{aligned}$$

(2) $\sin 210^\circ\sin 230^\circ\sin 250^\circ$

$=\sin(270^\circ-60^\circ)\sin(270^\circ-40^\circ)\sin(270^\circ-20^\circ)$

$=(-\cos 60^\circ)(-\cos 40^\circ)(-\cos 20^\circ)$

$=-\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ$

이므로

$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ+\sin 210^\circ\sin 230^\circ\sin 250^\circ$

$=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ-\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ$

$=0$

Ⅱ-4 사인법칙과 코사인법칙

125쪽

소단원 TEST

01 $c=3\sqrt{2}$, $R=3\sqrt{2}$ **02** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

03 $C=90^\circ$인 직각삼각형 **04** $\sqrt{33}$

05 $20\sqrt{2}$ **06** $\dfrac{12}{5}$

01 삼각형의 내각의 크기의 합은 180°이므로

$A=180^\circ-(105^\circ+30^\circ)=45^\circ$

사인법칙에 따라 $\dfrac{6}{\sin 45^\circ}=\dfrac{c}{\sin 30^\circ}$이므로

$c=\sin 30^\circ\times\dfrac{6}{\sin 45^\circ}=3\sqrt{2}$

한편 사인법칙에 따라 $\dfrac{6}{\sin 45^\circ}=2R$이므로

$6\sqrt{2}=2R$, 즉 $R=3\sqrt{2}$

02 코사인법칙에 따라

$$\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\\&=6^2+3^2-2\times6\times3\times\cos 60^\circ\\&=27\end{aligned}$$

그런데 $c>0$이므로 $c=3\sqrt{3}$

따라서

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$
$$=\frac{(3\sqrt{3})^2+6^2-3^2}{2\times3\sqrt{3}\times6}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

03 $\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=1$에서

$(1-\sin^2 A)+(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 C)=1$

$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$

이때 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이므로

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

따라서 $a^2+b^2=c^2$이므로 삼각형 ABC는 $C=90°$인 직각삼각형이다.

04 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 따라

$$\cos B=\frac{5^2+4^2-7^2}{2\times5\times4}=-\frac{1}{5}$$

삼각형 CDB에서 $\overline{CD}=x$라 하면 코사인법칙에 따라

$$x^2=2^2+5^2-2\times2\times5\times\cos B$$
$$=4+25-20\times\left(-\frac{1}{5}\right)$$
$$=33$$

따라서 $x>0$이므로

$x=\sqrt{33}$

05 코사인법칙에 따라

$$\cos B=\frac{6^2+15^2-11^2}{2\times6\times15}=\frac{7}{9}$$

이므로 $\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B$$
$$=\frac{1}{2}\times15\times6\times\frac{4\sqrt{2}}{9}$$
$$=20\sqrt{2}$$

06 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이와 삼각형 ADC의 넓이의 합과 같으므로 $\overline{AD}=x$라 하면

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times6\times\sin120°=6\sqrt{3}$$
$$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times4\times x\times\sin60°=\sqrt{3}x$$
$$\triangle ADC=\frac{1}{2}\times x\times6\times\sin60°=\frac{3\sqrt{3}}{2}x$$

이므로

$$6\sqrt{3}=\sqrt{3}x+\frac{3\sqrt{3}}{2}x$$

즉 $x=\frac{12}{5}$

Ⅲ-1 수열의 뜻

138쪽 소단원 TEST

01 (1) 18 (2) $\frac{1}{15}$

02 (1) 14 (2) 3

03 (1) 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{5}{3}$ (2) 1, 4, 4, 1, 0

04 (1) $a_n=10-2n$, 제8항: -6

(2) $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, 제8항: $\frac{1}{256}$

05 1

06 $a_4=7$, $a_5=9$

01 (1) 첫째항부터 시작하여 다섯 번째에 있는 항을 찾으면 18이다.

(2) 첫째항부터 시작하여 다섯 번째에 있는 항을 찾으면 $\frac{1}{15}$이다.

02 (1) $3n-4$에 $n=6$을 대입하면

$3\times6-4=14$

(2) $3\times(-1)^n$에 $n=6$을 대입하면

$3\times(-1)^6=3$

03 (1) $a_1=\frac{2\times1}{1+1}=1$, $a_2=\frac{2\times2}{2+1}=\frac{4}{3}$, $a_3=\frac{2\times3}{3+1}=\frac{3}{2}$

$a_4=\frac{2\times4}{4+1}=\frac{8}{5}$, $a_5=\frac{2\times5}{5+1}=\frac{5}{3}$

(2) 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2을 5로 나눈 나머지는 각각 1, 4, 4, 1, 0이므로

$a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=4$, $a_4=1$, $a_5=0$

04 (1) $a_1=10-2\times1$, $a_2=10-2\times2$, $a_3=10-2\times3$,

$a_4=10-2\times4$, $a_5=10-2\times5$, $\cdots$

즉 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=10-2n$이므로

$a_8=10-2\times8=-6$

(2) $a_1=\left(\frac{1}{2}\right)^1$, $a_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $a_3=\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $a_4=\left(\frac{1}{2}\right)^4$,

$a_5=\left(\frac{1}{2}\right)^5$, $\cdots$

즉 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$이므로

$a_8=\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256}$

05 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_1=a_4=a_7=a_{10}=\cdots=1$

$a_2=a_5=a_8=a_{11}=\cdots=2$

$a_3=a_6=a_9=a_{12}=\cdots=3$

이므로 $a_{100}=a_1=1$

다른 풀이 수열에서 1, 2, 3이 반복되므로

$100=3\times33+1$

이므로 수열의 제100항은 1이다.

06 $a_1=1$

$a_2=1+2=3$

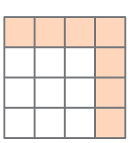
$a_3=1+2+2=5$

$a_4=1+2+2+2=7$

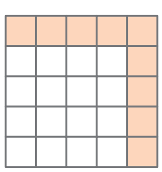
$a_5=1+2+2+2+2=9$

따라서 $a_4=7$, $a_5=9$이다.

참고 〈4단계〉와 〈5단계〉에 새로 그려지는 정사각형은 다음과 같이 각각 7개, 9개이다.



〈4단계〉



〈5단계〉

Ⅲ-2 등차수열

146쪽 소단원 TEST

01 72	**02** 제23항	**03** 5
04 1635	**05** 1365	**06** 68

01 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=4$ …… ㉠

$a_6=a+5d=16$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $d=4$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 -4, 공차는 4이므로

$a_{20}=a+19d=-4+19\times4=72$

02 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=59$ …… ㉠

$a_9=a+8d=41$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=65$, $d=-3$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 65, 공차는 -3이므로

$a_n=65+(n-1)\times(-3)=-3n+68$

이때 처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 처음의 항이므로

$-3n+68<0$에서 $3n>68$, 즉 $n>\frac{68}{3}=22.6\cdots$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제23항이다.

03 a^2은 12와 $10a$의 등차중항이므로

$a^2=\frac{12+10a}{2}$, $a^2-5a-6=0$

$(a+1)(a-6)=0$, 즉 $a=-1$ 또는 $a=6$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+6=5$

04 3으로 나누었을 때 나머지가 2인 자연수는 $3n+2$의 꼴이고 두 자리의 자연수이므로

$10\le3n+2<100$

즉 $\frac{8}{3}\le n<\frac{98}{3}$이므로 $n=3$, 4, $\cdots$, 32이다.

따라서 두 자리의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수들은

11, 14, ⋯, 98

이 수열은 첫째항이 11, 끝항이 98, 항의 개수가 30인 등차수열이므로 구하는 등차수열의 합은

$\frac{30(11+98)}{2}=1635$

05 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10}=\frac{10(2a+9d)}{2}=155$

즉 $2a+9d=31$ ⋯⋯ ㉠

$S_{20}=\frac{20(2a+19d)}{2}=610$

즉 $2a+19d=61$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ d=3$

따라서 $a_{30}=a+29d$이므로

$S_{30}=\frac{30\{a+(a+29d)\}}{2}=\frac{30(2a+29d)}{2}$

$=\frac{30(2\times2+29\times3)}{2}$

$=1365$

06 $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3n^2+4n-\{3(n-1)^2+4(n-1)\}$

$=6n+1(n\geq2)$ ⋯⋯ ㉠

$a_1=S_1=3\times1^2+4\times1=7$ ⋯⋯ ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=6n+1$

따라서 $a_1+a_{10}=7+(6\times10+1)=68$

다른 풀이 $a_1=S_1=3+4=7$

$a_{10}=S_{10}-S_9$

$=(3\times10^2+4\times10)-(3\times9^2+4\times9)$

$=340-279=61$

따라서 $a_1+a_{10}=7+61=68$

Ⅲ-3 등비수열

153쪽 소단원 TEST

01 50	02 37	03 728
04 504	05 $27\sqrt{3}$	06 174

01 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3+a_4=ar^2+ar^3$

$=ar^2(1+r)=2$ ⋯⋯ ㉠

$a_4+a_5=ar^3+ar^4$

$=ar^3(1+r)=10$ ⋯⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r=5$

따라서

$a_5+a_6=ar^4+ar^5=ar^4(1+r)$

$=ar^2(1+r)\times r^2$

$=2\times25=50$

02 6은 x와 y의 등비중항이므로

$xy=6^2=36$

이때 x, y는 서로 다른 두 자연수이므로

$(x,\ y)=(1,\ 36),\ (2,\ 18),\ (3,\ 12),\ (4,\ 9),\ (6,\ 6),$
$(9,\ 4),\ (12,\ 3),\ (18,\ 2),\ (36,\ 1)$

따라서 $x+y$의 최댓값은

$1+36=37$

03 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_5=ar^4=2r^4=162$에서 $r^4=81$

이때 $r>0$이므로

$r=81^{\frac{1}{4}}=3$

따라서 첫째항부터 제6항까지의 합은

$\frac{2(3^6-1)}{3-1}=3^6-1=728$

04 등비수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a, 공비를 r라 하면

$S_4=\frac{a(r^4-1)}{r-1}=24$ ⋯⋯ ㉠

$S_8=\frac{a(r^8-1)}{r-1}=\frac{a(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}=120$ ⋯⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^4+1=5$이므로 $r^4=4$

따라서

$$S_{12}=\frac{a(r^{12}-1)}{r-1}=\frac{a(r^4-1)(r^8+r^4+1)}{r-1}$$
$$=24\times(4^2+4+1)=504$$

05 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\frac{a_{100}}{a_{99}}+\frac{a_{100}}{a_{98}}=\frac{ar^{99}}{ar^{98}}+\frac{ar^{99}}{ar^{97}}=r+r^2=12$에서

$r^2+r-12=0$, $(r+4)(r-3)=0$

이때 r는 양수이므로 $r=3$

따라서 $a_4=ar^3=\sqrt{3}\times3^3=27\sqrt{3}$

06 2018년 초에 50만 원이었던 하루 판매액이 일 년 동안 16 %가 상승하여 2019년 초에 a만 원이 되었으므로

$50\left(1+\frac{16}{100}\right)=58$, 즉 $a=58$

2019년 초의 하루 판매액이 58만 원이므로

2020년 초의 하루 판매액은 $58(1+0.16)$

2021년 초의 하루 판매액은 $58(1+0.16)^2$

⋮

2024년 초의 하루 판매액은 $58(1+0.16)^5$이므로

$$58(1+0.16)^5=58\times1.16^5$$
$$=58\times2=116$$

에서 $b=116$

따라서 $a+b=58+116=174$

Ⅲ-4 수열의 합

161쪽 · 소단원 TEST

01 (1) 29 (2) -2	**02** 396	**03** $\frac{9}{10}$
04 (1) 1226 (2) $\sqrt{n+1}-1$	**05** $\frac{100}{11}$	**06** 231

01 (1) $\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k$
$$=2\times15-1$$
$$=29$$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(a_k+3b_k-2)=\sum_{k=1}^{10}a_k+3\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}2$
$$=15+3\times1-2\times10$$
$$=-2$$

02 $\sum_{k=1}^{100}(k^2+1)-\sum_{k=9}^{100}(k^2-1)$

$$=\sum_{k=1}^{100}k^2+\sum_{k=1}^{100}1-\sum_{k=9}^{100}k^2+\sum_{k=9}^{100}1$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{100}k^2-\sum_{k=9}^{100}k^2\right)+100+92$$
$$=\sum_{k=1}^{8}k^2+192$$
$$=\frac{8\times9\times17}{6}+192=396$$

03 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 3이고 공차가 3이므로

$a_n=3+(n-1)\times3=3n$

따라서

$$\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}-\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{9}\frac{a_{k+1}}{a_k}-\sum_{k=1}^{9}\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}$$
$$=\left(\frac{a_2}{a_1}+\frac{\cancel{a_3}}{\cancel{a_2}}+\frac{\cancel{a_4}}{\cancel{a_3}}+\cdots+\frac{\cancel{a_{10}}}{\cancel{a_9}}\right)$$
$$-\left(\frac{\cancel{a_3}}{\cancel{a_2}}+\frac{\cancel{a_4}}{\cancel{a_3}}+\cdots+\frac{\cancel{a_{10}}}{\cancel{a_9}}+\frac{a_{11}}{a_{10}}\right)$$
$$=\frac{a_2}{a_1}-\frac{a_{11}}{a_{10}}$$
$$=\frac{6}{3}-\frac{33}{30}=\frac{9}{10}$$

04 (1) $4^2+5^2+6^2+\cdots+15^2$

$$=\sum_{k=1}^{12}(k+3)^2=\sum_{k=1}^{12}(k^2+6k+9)$$
$$=\sum_{k=1}^{12}k^2+6\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=1}^{12}9$$
$$=\frac{12\times13\times25}{6}+6\times\frac{12\times13}{2}+9\times12=1226$$

다른 풀이 $4^2+5^2+6^2+\cdots+15^2$

$$=\sum_{k=4}^{15}k^2=\sum_{k=1}^{15}k^2-\sum_{k=1}^{3}k^2=1226$$

(2) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\cancel{\sqrt{2}}-1)+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots$$
$$+(\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}})$$
$$=\sqrt{n+1}-1$$

05 $a_n=\dfrac{n^2+n-1}{n^2+n}=1-\dfrac{1}{n^2+n}=1-\dfrac{1}{n(n+1)}$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} a_k&=\sum_{k=1}^{10}\left\{1-\frac{1}{k(k+1)}\right\}\\&=\sum_{k=1}^{10}1-\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=10-\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=10-\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots\right.\\&\qquad\left.+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\cancel{\frac{1}{10}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{10}}-\frac{1}{11}\right)\right\}\\&=10-\left(1-\frac{1}{11}\right)\\&=\frac{100}{11}\end{aligned}$$

06 $$\begin{aligned}1+3+5+\cdots+(2n-1)&=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\\&=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n\\&=n^2\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}N&=1\times2+(1+3)\times3+(1+3+5)\times4+\cdots\\&\qquad+(1+3+5+\cdots+17)\times10\\&=1^2\times2+2^2\times3+3^2\times4+\cdots+9^2\times10\\&=\sum_{k=1}^{9}k^2(k+1)=\sum_{k=1}^{9}(k^3+k^2)\\&=\sum_{k=1}^{9}k^3+\sum_{k=1}^{9}k^2\\&=\left(\frac{9\times10}{2}\right)^2+\frac{9\times10\times19}{6}\\&=2310\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{N}{10}=231$

Ⅲ-5 수열의 귀납적 정의

166쪽 · 소단원 TEST ·

01 (1) 15 (2) 96	**02** $\dfrac{27}{13}$	**03** $\dfrac{1}{3^{10}}$
04 136	**05** 230	**06** $a_n=2^{n+2}+6$

01 (1) $a_{n+1}=a_n+n+1$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=a_1+1+1=1+1+1=3$

$a_3=a_2+2+1=3+2+1=6$

$a_4=a_3+3+1=6+3+1=10$

$a_5=a_4+4+1=10+4+1=15$

(2) $a_{n+1}=na_n$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=1\times a_1=4$

$a_3=2a_2=2\times4=8$

$a_4=3a_3=3\times8=24$

$a_5=4a_4=4\times24=96$

02 $a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{2a_n-1}$의 n에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$a_2=\dfrac{3a_1}{2a_1-1}=\dfrac{3}{2-1}=3$

$a_3=\dfrac{3a_2}{2a_2-1}=\dfrac{3\times3}{2\times3-1}=\dfrac{9}{5}$

$a_4=\dfrac{3a_3}{2a_3-1}=\dfrac{3\times\frac{9}{5}}{2\times\frac{9}{5}-1}=\dfrac{27}{13}$

03 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 27, 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이므로

$a_n=27\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

따라서

$a_{14}=27\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{14-1}=3^3\times\dfrac{1}{3^{13}}=\dfrac{1}{3^{10}}$

04 $a_{n+1}=a_n+3n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 9를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}\cancel{a_2}&=a_1+3\\\cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+6\\\cancel{a_4}&=\cancel{a_3}+9\\&\ \vdots\\+)\ a_{10}&=\cancel{a_9}+27\\\hline a_{10}&=a_1+(3+6+9+\cdots+27)\\&=a_1+\sum_{k=1}^{9}3k\\&=1+3\left(\frac{9\times10}{2}\right)\\&=136\end{aligned}$$

05 $a_{n+1}=\frac{2n+1}{2n-1}a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 11을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=\frac{3}{1}a_1$$
$$\cancel{a_3}=\frac{5}{3}\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=\frac{7}{5}\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times\big)\ a_{12}=\frac{23}{21}\cancel{a_{11}}$$

$$a_{12}=a_1\times\left(\frac{\cancel{3}}{1}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{7}}{\cancel{5}}\times\cdots\times\frac{23}{\cancel{21}}\right)$$
$$=a_1\times 23$$
$$=10\times 23=230$$

06 $a_{n+1}=2(a_n-3)$이므로 $a_{n+1}-6=2(a_n-6)$

수열 $\{a_n-6\}$은 첫째항이 $a_1-6=14-6=8$이고 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n-6=8\times 2^{n-1}=2^{n+2}$, 즉 $a_n=2^{n+2}+6$

Ⅲ-6 수학적 귀납법

172쪽 • 소단원 TEST •

01 31 **02** 1

01 ❶ $n=1$일 때,

(좌변)$=\frac{1}{3}$, (우변)$=\frac{1}{4}\left(3-\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{3}$

이므로 등식 ㉠이 성립한다.

❷ $n=k$일 때 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{k}{3^k}=\frac{1}{4}\left(3-\frac{2k+3}{3^k}\right) \quad \cdots\cdots ㉡$$

이므로 등식 ㉡의 좌변에 $\frac{k+1}{3^{k+1}}$을 더하여 정리하면

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{k}{3^k}+\frac{k+1}{3^{k+1}}$$
$$=\frac{1}{4}\left(3-\frac{2k+3}{3^k}\right)+\frac{k+1}{3^{k+1}}$$
$$=\frac{1}{4}\left\{3-\frac{3(2k+3)-4(\boxed{k+1})}{3^{k+1}}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(3-\frac{\boxed{2k+5}}{3^{k+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{3-\frac{2(k+1)+3}{3^{k+1}}\right\}$$

위 등식은 등식 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 등식 ㉠이 성립한다.

❶, ❷에서 모든 자연수 n에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

따라서 $f(k)=k+1$, $g(k)=2k+5$이므로

$f(7)+g(9)=8+23=31$

02 ❶ $n=2$일 때,

(좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, (우변)$=\frac{2\times 2}{2+1}=\frac{4}{3}$

이므로 부등식 ㉠이 성립한다.

❷ $n=k(k\ge 2)$일 때, 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1} \quad \cdots\cdots ㉡$$

이므로 부등식 ㉡의 양변에 $\boxed{\frac{1}{k+1}}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\boxed{\frac{1}{k+1}}>\frac{2k}{k+1}+\boxed{\frac{1}{k+1}} \quad \cdots\cdots ㉢$$

이때

$$\frac{2k}{k+1}+\boxed{\frac{1}{k+1}}-\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}=\frac{\boxed{k}}{(k+1)(k+2)}>0$$
$$\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

이므로 ㉢으로부터

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\boxed{\frac{1}{k+1}}>\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

위 등식은 부등식 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

❶, ❷에서 $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

따라서 $f(k)=\frac{1}{k+1}$, $g(k)=k$이므로

$f(10)\times g(11)=\frac{1}{11}\times 11=1$

I 지수함수와 로그함수

180~185쪽

01 ①	02 ①	03 ④	04 ②	05 ⑤
06 ④	07 ⑤	08 ②	09 ③	10 ④
11 ②	12 ④	13 ②	14 ①	15 ⑤
16 ①	17 ③	18 ①	19 ②	20 ③
21 15	22 4	23 31	24 $C>A>B$	
25 $\frac{9}{16}$				

01 $\frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt{\sqrt[3]{36}}}{\sqrt[3]{8}+\sqrt{\sqrt[3]{9}}}=\frac{\sqrt[3]{8\times2}+\sqrt[3]{\sqrt{36}}}{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{\sqrt{9}}}$

$=\frac{\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{3}}$

$=\frac{2\times\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}}{2+\sqrt[3]{3}}$

$=\frac{\sqrt[3]{2}(2+\sqrt[3]{3})}{2+\sqrt[3]{3}}$

$=\sqrt[3]{2}$

02 $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}=(\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}(\sqrt[3]{2})^{\frac{1}{2}}=(3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}(2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{6}}\times2^{\frac{1}{6}}$

$=6^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{6}$

03 $x^3=\left(\sqrt[3]{3}-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^3$

$=3-3\sqrt[3]{3}+3\times\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{3}$

$=3-3\left(\sqrt[3]{3}-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)-\frac{1}{3}$

$=3-3x-\frac{1}{3}$

따라서

$x^3+3x=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$

04 $(\log_{36}9)^2+(\log_6 12)^2+\log_6 12\times\log_6 9$

$=(\log_{6^2}3^2)^2+(\log_6 12)^2+\log_6 12\times\log_6 3^2$

$=(\log_6 3)^2+(\log_6 12)^2+2\log_6 12\times\log_6 3$

$=(\log_6 3+\log_6 12)^2$

$=(\log_6 36)^2$

$=2^2=4$

05 $\log_3\sqrt{3}-\log_3\sqrt{3\sqrt{3}}+\log_3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$

$=\log_3 3^{\frac{1}{2}}-\log_3\sqrt{3\times3^{\frac{1}{2}}}+\log_3\sqrt{3\sqrt{3\times3^{\frac{1}{2}}}}$

$=\frac{1}{2}-\log_3(3^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}+\log_3\sqrt{3\times(3^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}}$

$=\frac{1}{2}-\log_3 3^{\frac{3}{4}}+\log_3(3^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{7}{8}=\frac{5}{8}$

06 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log a+\log b=6$, $\log a\log b=3$

이므로

$\log_a b+\log_b a=\frac{\log b}{\log a}+\frac{\log a}{\log b}$

$=\frac{(\log a+\log b)^2-2\log a\log b}{\log a\log b}$

$=\frac{6^2-2\times3}{3}=10$

07 $\log_3 x\times\log_2 y=\frac{\log x}{\log 3}\times\frac{\log y}{\log 2}$

$=\frac{\log x}{\log 2}\times\frac{\log y}{\log 3}$

$=\log_2 x\times\log_3 y$

이때 $\log_2 x=m$, $\log_3 y=n$이라 하면

$m+n=6$, $mn=8$

위 방정식을 풀면

$m=2$, $n=4$ 또는 $m=4$, $n=2$

한편 $x=2^m$, $y=3^n$이므로

$m=2$, $n=4$일 때 $x=4$, $y=81$

$m=4$, $n=2$일 때 $x=16$, $y=9$

따라서 $x+y$의 최솟값은 25이다.

08 $23^\alpha=27$에서 $23=27^{\frac{1}{\alpha}}=3^{\frac{3}{\alpha}}$

$92^\beta=81$에서 $92=81^{\frac{1}{\beta}}=3^{\frac{4}{\beta}}$

따라서 $\frac{92}{23}=3^{\frac{4}{\beta}-\frac{3}{\alpha}}=4$에서

$\frac{4}{\beta}-\frac{3}{\alpha}=\log_3 4=2\log_3 2$

09 $a>1$이면 $f(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$x=3$일 때 최댓값 $M=a^{3+3}=a^6$

$x=0$일 때 최솟값 $m=a^{0+3}=a^3$

$\frac{M}{m}=a^3=8=2^3$에서 $a=2$ …… ㉠

한편 $0<a<1$이면 $f(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$x=0$일 때 최댓값 $M=a^{0+3}=a^3$

$x=3$일 때 최솟값 $m=a^{3+3}=a^6$

$\frac{M}{m}=\frac{1}{a^3}=2^3$에서 $a=\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 모든 실수 a의 값의 합은

$2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

10 $\sqrt[3]{4}=a$, $\sqrt[4]{5}=b$, $\sqrt[6]{11}=c$라 하면

$a^{12}=4^4=256$

$b^{12}=5^3=125$

$c^{12}=11^2=121$

따라서 $c^{12}<b^{12}<a^{12}$에서 $c<b<a$이므로 작은 것부터 차례로 나열하면 ④ $\sqrt[6]{11}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[3]{4}$이다.

11 $y=a^{-x-3}$의 그래프와 $y=1$이 만나므로

$a^{-x-3}=1$, 즉 $x=-3$

이때 $\overline{AB}=10$이므로 점 B의 x좌표는 7이고 $x=7$을 $y=\log_a(x-4)$에 대입하면

$y=\log_a(7-4)=1$에서 $a=3$

12 $\log m+\log n=1$에서 $\log mn=1$이므로

$mn=10$ …… ㉠

점 $A(m, n)$은 직선 $x-2y+8=0$ 위의 점이므로

$m-2n+8=0$

$m=2n-8$을 $mn=10$에 대입하여 정리하면

$n^2-4n-5=0$, $(n+1)(n-5)=0$

즉 $n=-1$ 또는 $n=5$

이때 $n>0$이므로 $n=5$

$n=5$를 ㉠에 대입하면 $m=2$

따라서 $m^2+n^2=29$

13 $g(x)=\log_2 x$이므로

$\log_2 x=1$에서 $x=2$, 즉 $A(2, 1)$

점 B의 좌표는 $(2, 4)$이므로

$\log_2 x=4$에서 $x=2^4=16$, 즉 $C(16, 4)$

즉 점 D의 좌표는 $(16, 2^{16})$이므로

$p=16$, $q=2^{16}$

따라서 $\log_p q=\log_{16}2^{16}=\log_{2^4}2^{16}=4$

14 점 A의 x좌표를 a라 하면

$\overline{AB}=\log_3 a+2-(\log_3 a-1)=3$

따라서 점 C의 x좌표는 $a-3$이므로

$\log_3(a-3)+2=\log_3 a-1$

$\log_3(a-3)+\log_3 3^3=\log_3 a$

$27(a-3)=a$

$a=\frac{81}{26}$

15 $8^x\times 2^4-2^{x^2}=0$

$2^{3x}\times 2^4=2^{x^2}$

$2^{3x+4}=2^{x^2}$

이므로

$3x+4=x^2$, $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$, 즉 $x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 모든 근의 합은 3이다.

16 $3^{-x}<3\sqrt{3}<9^{1-x}$에서 $3^{-x}<3^{\frac{3}{2}}<3^{2-2x}$

즉 $-x<\frac{3}{2}<2-2x$

위 연립부등식을 풀면 $-\frac{3}{2}<x<\frac{1}{4}$

따라서 $\alpha=-\frac{3}{2}$, $\beta=\frac{1}{4}$이므로

$\alpha+\beta=-\frac{5}{4}$

17 $f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{(a^x-a^{-x})a^x}{(a^x+a^{-x})a^x}=\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$에서

$f(p)=\frac{a^{2p}-1}{a^{2p}+1}=\frac{1}{3}$, 즉 $a^{2p}=2$

$f(q)=\frac{a^{2q}-1}{a^{2q}+1}=\frac{1}{5}$, 즉 $a^{2q}=\frac{3}{2}$

따라서

$$f(p+q)=\frac{a^{2(p+q)}-1}{a^{2(p+q)}+1}=\frac{a^{2p+2q}-1}{a^{2p+2q}+1}=\frac{a^{2p}\times a^{2q}-1}{a^{2p}\times a^{2q}+1}=\frac{2\times\frac{3}{2}-1}{2\times\frac{3}{2}+1}=\frac{1}{2}$$

18 $\log_3 x \le -\log_3(2x+1)+1$에서

$\log_3 x+\log_3(2x+1)\le 1$

$\log_3 x(2x+1)\le \log_3 3$

밑 3은 1보다 크므로

$x(2x+1)\le 3$, $(x-1)(2x+3)\le 0$

즉 $-\frac{3}{2}\le x\le 1$ ······ ㉠

이때 로그의 진수는 양수이므로 $x>0$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $0<x\le 1$

따라서 구하는 정수 x의 개수는 1의 1개이다.

19 $r=10^{2.7}$, $m=1.3$이므로

$\left(\frac{10^{2.7}}{10}\right)^2=100^{\frac{1}{5}(1.3-M)}$

$10^{3.4}=10^{\frac{2}{5}(1.3-M)}$

즉 $3.4=\frac{2}{5}(1.3-M)$이므로

$2M=-14.4$

따라서 $M=-7.2$

20 $5=\log 100a$, $6=\log 100b$이므로

$\log 100a-\log 100b=5-6$, $\log\frac{a}{b}=-1$

따라서 $\frac{a}{b}=\frac{1}{10}$

21 $\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{x}}{16\sqrt{x}}}\times\sqrt[3]{\frac{27\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}}$

$=\frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[4]{16}\times\sqrt[4]{\sqrt{x}}}\times\frac{\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}}\times\frac{\sqrt{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}$

$=\frac{\sqrt[12]{x}}{2\sqrt[8]{x}}\times\frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[12]{x}}\times\frac{\sqrt[8]{x}}{\sqrt[6]{x}}$

$=\frac{3}{2}$

따라서 $a=\frac{3}{2}$이므로

$10a=15$

22 $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$이라 하면

$2=k^{\frac{1}{x}}$ ······ ㉠

$3=k^{\frac{1}{y}}$ ······ ㉡

$24=k^{\frac{1}{z}}$ ······ ㉢

㉠×㉡÷㉢을 각 변끼리 하면

$\frac{2\times 3}{24}=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}$

$\frac{1}{4}=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}$, $2^{-2}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}$

$2^{-2}=2^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)}$에서 $-2=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)$

따라서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=4$

23 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\log_2 m+\log_2 n=6$, $\log_2 m\times\log_2 n=5$이므로

$$\log_m n+\log_n m=\frac{\log_2 n}{\log_2 m}+\frac{\log_2 m}{\log_2 n}$$
$$=\frac{(\log_2 m)^2+(\log_2 n)^2}{\log_2 m\times\log_2 n}$$
$$=\frac{(\log_2 m+\log_2 n)^2-2\log_2 m\times\log_2 n}{\log_2 m\times\log_2 n}$$
$$=\frac{6^2-2\times 5}{5}$$
$$=\frac{26}{5}$$

따라서 $p=5$, $q=26$이므로

$p+q=31$

24 $a^2=b^3=c^5$에서

$b=a^{\frac{2}{3}}$, $c=b^{\frac{3}{5}}$, $a=c^{\frac{5}{2}}$ ······ ❶

$A=\log_a b=\log_a a^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$

$B=\log_b c=\log_b b^{\frac{3}{5}}=\frac{3}{5}$

$C=\log_c a=\log_c c^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$ ······ ❷

따라서 $C>A>B$이다. ······ ❸

단계	채점 기준	배점
❶	a, b, c 사이의 관계식 세우기	2점
❷	A, B, C의 값 구하기	2점
❸	A, B, C의 대소 관계 구하기	1점

25 점 Q의 x좌표를 a라 하면 $Q(a, \log_{\frac{1}{2}} a)$

$\overline{OP}:\overline{PQ}=3:1$에서 점 P는 선분 OQ를 $3:1$로 내분하는 점이므로

$\mathrm{P}\left(\frac{3}{4}a,\ \frac{3}{4}\log_{\frac{1}{2}}a\right)$ …… ❶

이때 점 P는 곡선 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$ 위의 점이므로

$\frac{3}{4}\log_{\frac{1}{2}}a=\log_{\frac{1}{4}}\frac{3}{4}a,\ \frac{3}{4}\log_{\frac{1}{2}}a=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}a$

$3\log_{\frac{1}{2}}a=2\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}a,\ \log_{\frac{1}{2}}a^3=\log_{\frac{1}{2}}\frac{9}{16}a^2$

즉 $a^3=\frac{9}{16}a^2$에서 $a=\frac{9}{16}$ …… ❷

따라서 점 Q의 x좌표는 $\frac{9}{16}$이다. …… ❸

단계	채점 기준	배점
❶	점 Q의 x좌표를 미지수로 놓고 점 P의 좌표 미지수로 나타내기	2점
❷	미지수의 값 구하기	2점
❸	점 Q의 x좌표 구하기	1점

II 삼각함수

186~191쪽

01 ⑤	02 ②	03 ⑤	04 ④	05 ②
06 ④	07 ⑤	08 ④	09 ④	10 ⑤
11 ④	12 ③	13 ⑤	14 ④	15 ①
16 ①	17 ①	18 ④	19 ③	20 ④
21 $\frac{1}{5}$	22 $\frac{89}{2}$	23 1	24 $-\frac{5\sqrt{6}}{2}$	
25 $\frac{7900}{3}\pi$				

01 $140^\circ=140\times\frac{\pi}{180}=\frac{7}{9}\pi$

02 각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$7\theta-\theta=360^\circ\times n$ (n은 정수)

$6\theta=360^\circ\times n$

즉 $\theta=60^\circ\times n$

그런데 $90^\circ<\theta<180^\circ$이므로

$90^\circ<60^\circ\times n<180^\circ,\ \frac{3}{2}<n<3$

이때 n은 정수이므로

$n=2$

따라서 $\theta=60^\circ\times2=120^\circ$

03 각 θ가 제3사분면의 각이므로 일반각으로 나타내면

$2n\pi+\pi<\theta<2n\pi+\frac{3}{2}\pi$ (n은 정수)

$n\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<n\pi+\frac{3}{4}\pi$

위 식에 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$를 차례로 대입하면

(i) $n=0$일 때, $\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{3}{4}\pi$이므로 각 $\frac{\theta}{2}$는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=1$일 때, $\frac{3}{2}\pi<\frac{\theta}{2}<\frac{7}{4}\pi$이므로 각 $\frac{\theta}{2}$는 제4사분면의 각이다.

그런데 $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$일 때도 각 $\frac{\theta}{2}$는 제2, 4사분면의 각이 반복되어 나타난다.

따라서 각 $\frac{\theta}{2}$는 제2, 4사분면의 각이다.

04 반지름의 길이 r는 4,

중심각의 크기 θ는 $120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi$

이므로 부채꼴의 넓이 S는

$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{2}{3}\pi = \frac{16}{3}\pi$

부채꼴의 호의 길이 l은

$l = r\theta = 4 \times \frac{2}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$

따라서

$S + l = \frac{16}{3}\pi + \frac{8}{3}\pi = 8\pi$

05 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$에서 $\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0$이므로

$\sin\theta - \cos\theta > 0$

따라서

$|\sin\theta - \cos\theta| - \sqrt{\cos^2\theta}$

$= (\sin\theta - \cos\theta) - (-\cos\theta) = \sin\theta$

06 $\sin\theta\cos\theta > 0$에서 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 부호가 같고

$\sin\theta = -\frac{1}{3} < 0$이므로 $\sin\theta < 0$, $\cos\theta < 0$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에서

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

이때 $\cos\theta < 0$이므로

$\cos\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

07 $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$= \frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$

즉 $\frac{1}{\cos\theta\sin\theta} = 4$에서 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$이므로

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$

$= 1 + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

따라서 $|\sin\theta + \cos\theta| = \frac{\sqrt{6}}{2}$

08 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{3}{5}$의 양변을 제곱하면

$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{9}{25}$, $\sin\theta\cos\theta = -\frac{8}{25}$

이므로

$\sin^3\theta + \cos^3\theta$

$= (\sin\theta + \cos\theta)^3 - 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta)$

$= \left(\frac{3}{5}\right)^3 - 3 \times \left(-\frac{8}{25}\right) \times \frac{3}{5}$

$= \frac{99}{125}$

09 함수 $y = a\sin(bx - c) = a\sin b\left(x - \frac{c}{b}\right)$의 최댓값이 3,

최솟값이 -3이므로

$a = 3$

함수 $y = 3\sin b\left(x - \frac{c}{b}\right)$의 그래프의 주기가 π이므로

$\frac{2\pi}{b} = \pi$에서 $b = 2$

또 주어진 그래프는 $y = 3\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로

$\frac{c}{b} = \frac{\pi}{4}$, 즉 $c = \frac{\pi}{4} \times 2 = \frac{\pi}{2}$

따라서

$a + b + c = 3 + 2 + \frac{\pi}{2} = 5 + \frac{\pi}{2}$

10 $y = 3 - \left|\cos x - \frac{1}{2}\right|$에서 $\cos x = t\,(-1 \le t \le 1)$로 놓으면

$y = 3 - \left|t - \frac{1}{2}\right|$

즉 $-1 \le t \le 1$에서

$t = \frac{1}{2}$일 때 최댓값 3

$t = -1$일 때 최솟값 $\frac{3}{2}$

따라서 $M = 3$, $m = \frac{3}{2}$이므로

$M + m = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

11 $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x - \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$

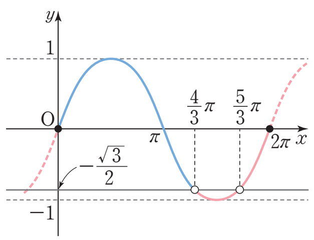
$x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 x의 값의 합은

$\frac{\pi}{2}+\frac{5}{6}\pi=\frac{4}{3}\pi$

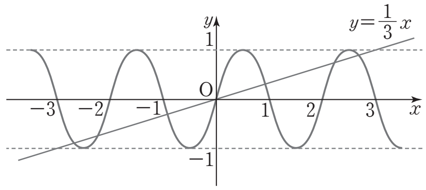
12 $2\sin x+\sqrt{3}>0$에서 $\sin x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 구하는 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같으므로

$0\le x<\frac{4}{3}\pi$ 또는 $\frac{5}{3}\pi<x\le 2\pi$



13 $n(A\cap B)$의 값은 두 함수 $y=\sin \pi x$, $y=\frac{1}{3}x$의 그래프의 교점의 개수이므로 방정식 $\sin \pi x=\frac{1}{3}x$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$y=\sin \pi x$의 최댓값은 1, 최솟값은 -1이고 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로 두 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



따라서 두 그래프의 교점의 개수는 7이므로

$n(A\cap B)=7$

14 $\sin^2 10^\circ+\cos^2 10^\circ=1$에서

$\cos 10^\circ=\sqrt{1-\sin^2 10^\circ}=\sqrt{1-a^2}$이므로

$\cos 170^\circ=\cos(180^\circ-10^\circ)=-\cos 10^\circ$

$=-\sqrt{1-a^2}$

15 직선 $2x-3y+1=0$, 즉 $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$의 기울기는 $\frac{2}{3}$이므로

$\tan\theta=\frac{2}{3}$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$,

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$이므로

$\cos(\pi+\theta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\tan(-\theta)$

$=-\cos\theta+\cos\theta-\tan\theta$

$=-\tan\theta$

$=-\frac{2}{3}$

16 $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$,

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$, $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta$,

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$이므로

$$\frac{\sin(\pi-\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}+\frac{\cos(2\pi-\theta)\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

$$=\frac{\sin\theta\times(-\sin\theta)}{\sin^2\theta}+\frac{\cos\theta\times(-\cos\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=-1-1=-2$$

17 사인법칙에 따라 $\frac{\sqrt{3}}{\sin B}=\frac{1}{\sin 30^\circ}$이므로

$\sin B=\sqrt{3}\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<B<150^\circ$이므로 $B=60^\circ$ 또는 $B=120^\circ$

(i) $B=60^\circ$일 때, $C=180^\circ-(30^\circ+60^\circ)=90^\circ$

(ii) $B=120^\circ$일 때, $C=180^\circ-(30^\circ+120^\circ)=30^\circ$

따라서 C는 예각이므로 $C=30^\circ$

18 $\sin A : \sin B : \sin C=2:3:4$이므로

$a:b:c=2:3:4$

$a=2k$, $b=3k$, $c=4k(k\neq 0)$라 하면

$\cos A=\frac{(3k)^2+(4k)^2-(2k)^2}{2\times 3k\times 4k}=\frac{7}{8}$

19 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 ABD와 삼각형 ACD의 넓이의 합과 같으므로

$\frac{1}{2}\times 6\times 10\times \sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 6\times \overline{AD}\times \sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times 10\times \overline{AD}\times \sin 60^\circ$,

$\frac{1}{2}\times6\times10\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{2}\times6\times\overline{AD}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times10\times\overline{AD}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$15\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\overline{AD}+\frac{5\sqrt{3}}{2}\overline{AD}$

$4\sqrt{3}\,\overline{AD}=15\sqrt{3}$, 즉 $\overline{AD}=\frac{15}{4}$

20 코사인법칙에 따라 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$에서

$14^2=6^2+c^2-2\times6c\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$196=36+c^2+6c$

$(c+16)(c-10)=0$

$c>0$이므로 $c=10$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times6\times10\times\sin120^\circ$

$=30\times\frac{\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}$

21 $\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+a^2}=5$이므로

$9+a^2=25,\ a^2=16$

이때 θ는 제2사분면의 각이므로

$a=4$

따라서

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{5}+\frac{-3}{5}=\frac{1}{5}$

22 $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$이므로

$\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cdots+\cos^2 88^\circ+\cos^2 89^\circ$

$=(\cos^2 1^\circ+\cos^2 89^\circ)+(\cos^2 2^\circ+\cos^2 88^\circ)+\cdots$

$+(\cos^2 44^\circ+\cos^2 46^\circ)+\cos^2 45^\circ$

$=(\cos^2 1^\circ+\sin^2 1^\circ)+(\cos^2 2^\circ+\sin^2 2^\circ)+\cdots$

$+(\cos^2 44^\circ+\sin^2 44^\circ)+\cos^2 45^\circ$

$=1\times44+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{89}{2}$

23 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$y=-4\cos^2 x+4\sin x+1$

$=-4(1-\sin^2 x)+4\sin x+1$

$=4t^2+4t-3$

$=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-4$

즉 $-1\le t\le1$에서

$t=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 -4

$t=1$일 때 최댓값은 5

따라서 $M=5,\ m=-4$이므로

$M+m=5-4=1$

24 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{24}{25}$

이때 각 θ가 제2사분면의 각이므로

$\cos\theta=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$ …… ❶

또 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{1}{5}}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}}=-\frac{1}{2\sqrt{6}}$ …… ❷

따라서

$5\cos\theta+6\tan\theta$

$=5\times\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)+6\times\left(-\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)$

$=-2\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{2}=-\frac{5\sqrt{6}}{2}$ …… ❸

단계	채점 기준	배점
❶	$\cos\theta$의 값 구하기	2점
❷	$\tan\theta$의 값 구하기	1점
❸	$5\cos\theta+6\tan\theta$의 값 구하기	1점

25 △ABC에서 코사인법칙에 따라

$\overline{BC}^2=100^2+70^2-2\times100\times70\times\cos60^\circ$

$=7900$

즉 $\overline{BC}=10\sqrt{79}$ …… ❶

△ABC에서 사인법칙에 따라

$\frac{10\sqrt{79}}{\sin60^\circ}=2R$

즉 $R=\frac{10\sqrt{79}}{\sqrt{3}}$ …… ❷

따라서 호수의 넓이는 πR^2이므로

$\pi\times\left(\frac{10\sqrt{79}}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{7900}{3}\pi$ …… ❸

단계	채점 기준	배점
❶	코사인법칙을 이용하여 $\overline{BC}$의 길이 구하기	2점
❷	사인법칙을 이용하여 R의 값 구하기	2점
❸	호수의 넓이 구하기	1점

III 수열

192~197쪽

01 ③	02 ②	03 ⑤	04 ①	05 ④
06 ①	07 ⑤	08 ②	09 ③	10 ③
11 ①	12 ③	13 ①	14 ④	15 ①
16 ③	17 ②	18 ⑤	19 ②	20 ④
21 20	22 492	23 770	24 175	
25 풀이 참조				

01 첫째항이 3, 공차가 4인 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=3+(n-1)\times4$

$=4n-1$

이므로

$a_{10}=4\times10-1=39$

02 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=67$ …… ㉠

$a_{10}=a+9d=46$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=73,\ d=-3$

즉 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=73+(n-1)\times(-3)$

$=-3n+76$

제n항에서 처음으로 음수가 된다고 하면

$-3n+76<0$에서

$n>\dfrac{76}{3}=25.3\cdots$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제26항이다.

03 a는 18과 12의 등차중항이므로

$a=\dfrac{18+12}{2}=15$

12는 a와 b의 등차중항이므로

$12=\dfrac{a+b}{2}$

즉 $b=24-a$

$=24-15=9$

따라서

$ab=15\times9=135$

04 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=-12$ …… ㉠

$a_8=a+7d=13$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-22,\ d=5$

따라서 이 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\dfrac{10\{2\times(-22)+(10-1)\times5\}}{2}=5$

05 6으로 나누었을 때 나머지가 1인 자연수는 $6n+1$의 꼴이고 두 자리의 자연수이므로

$10\le6n+1<100$

즉 $\dfrac{3}{2}\le n<\dfrac{33}{2}$이므로 $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 16$이다.

따라서 두 자리의 자연수 중에서 6으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수들은

$13,\ 19,\ 25,\ \cdots,\ 97$

이 수열은 첫째항이 13, 끝항이 97, 항의 개수가 15인 등차수열이므로 구하는 합은

$\dfrac{15(13+97)}{2}=825$

06 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10}=\dfrac{10(2a+9d)}{2}=35$

즉 $2a+9d=7$ …… ㉠

$S_{20}=\dfrac{20(2a+19d)}{2}=370$

즉 $2a+19d=37$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-10,\ d=3$

따라서 $a_{30}=a+29d$이므로

$S_{30}=\dfrac{30\{a+(a+29d)\}}{2}=\dfrac{30(2a+29d)}{2}$

$=\dfrac{30\{2\times(-10)+29\times3\}}{2}$

$=1005$

07 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3\times a_6=ar^2\times ar^5=a^2r^7=4$

이때

$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_8 = a \times ar \times ar^2 \times \cdots \times ar^7$
$= a^8 \times r^{1+2+\cdots+7}$
$= a^8 r^{28} = (a^2 r^7)^4$
$= 4^4 = 256$

08 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$a_1 + a_3 = a + ar^2$
$= a(1+r^2) = 1$ ······ ㉠
$a_4 + a_6 = ar^3 + ar^5$
$= ar^3(1+r^2) = 8$ ······ ㉡
㉡÷㉠을 하면
$r^3 = 8$이므로 $r = 2$
$r = 2$를 ㉠에 대입하면 $a = \frac{1}{5}$
이때
$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = ar^6 + ar^7 + ar^8 + ar^9$
$= ar^6(1 + r + r^2 + r^3)$
$= \frac{1}{5} \times 2^6(1 + 2 + 2^2 + 2^3)$
$= \frac{1}{5} \times 2^6 \times 15$
$= 192$

09 a는 4와 b의 등차중항이므로
$a = \frac{4+b}{2}$ ······ ㉠
b는 a와 4의 등비중항이므로
$b^2 = 4a$ ······ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$b^2 = 8 + 2b$, $b^2 - 2b - 8 = 0$
$(b+2)(b-4) = 0$, 즉 $b = -2$ 또는 $b = 4$
(i) $b = -2$일 때 $a = 1$
(ii) $b = 4$일 때 $a = 4$
이때 $a > b$이므로 $a = 1$, $b = -2$
따라서 $a + b = -1$

10 첫째항이 -6, 공비가 -2이므로
$S_n = \frac{-6 \times \{1 - (-2)^n\}}{1 - (-2)}$
$= -2\{1 - (-2)^n\}$
$S_k = 510$에서
$-2\{1 - (-2)^k\} = 510$
$(-2)^k = 256$
따라서 $k = 8$

11 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$S_3 = \frac{a(r^3-1)}{r-1}$, $S_6 = \frac{a(r^6-1)}{r-1}$에서
$\frac{S_6}{S_3} = \frac{\frac{a(r^6-1)}{r-1}}{\frac{a(r^3-1)}{r-1}} = \frac{r^6-1}{r^3-1}$
$= \frac{(r^3-1)(r^3+1)}{r^3-1}$
$= r^3 + 1 = 28$
$r^3 = 27$이므로 $r = 3$
이때 $S_2 = \frac{a(3^2-1)}{3-1}$, $S_8 = \frac{a(3^8-1)}{3-1}$이므로
$\frac{S_8}{S_2} = \frac{3^8-1}{3^2-1} = \frac{(3^4-1)(3^4+1)}{3^2-1}$
$= \frac{(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)}{3^2-1}$
$= (3^2+1)(3^4+1)$
$= 10 \times 82$
$= 820$

12 2021년 초부터 2032년 말까지 12년간 적립한 금액이므로
2021년 초에 적립한 50만 원에 대해 2032년 말에 받는 금액은 $50 \times (1+0.05)^{12} = 50 \times 1.05^{12}$
2022년 초에 적립한 50만 원에 대해 2032년 말에 받는 금액은 $50 \times (1+0.05)^{11} = 50 \times 1.05^{11}$
2023년 초에 적립한 50만 원에 대해 2032년 말에 받는 금액은 $50 \times (1+0.05)^{10} = 50 \times 1.05^{10}$
⋮
2032년 초에 적립한 50만 원에 대해 2032년 말에 받는 금액은 $50 \times (1+0.05) = 50 \times 1.05$
따라서 구하는 값은
$S = 50 \times 1.05 + 50 \times 1.05^2 + \cdots + 50 \times 1.05^{12}$
$= \frac{50 \times 1.05(1.05^{12}-1)}{1.05-1}$
$= \frac{50 \times 1.05(1.8-1)}{0.05} = \frac{50 \times 1.05 \times 0.8}{0.05}$
$= 840$

13 $\sum_{k=1}^{10}(k-2)(2k-3)$

$=\sum_{k=1}^{10}(2k^2-7k+6)$

$=2\times\frac{10\times11\times21}{6}-7\times\frac{10\times11}{2}+6\times10$

$=2\times385-7\times55+60$

$=445$

14 $\sum_{k=1}^{n}a_k=A$, $\sum_{k=1}^{n}b_k=B$라 하면

$\sum_{k=1}^{n}(2a_k+3b_k)=2\sum_{k=1}^{n}a_k+3\sum_{k=1}^{n}b_k$

$=2A+3B=9$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{n}(3a_k+b_k)=3\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

$=3A+B=129$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$A=54$, $B=-33$

따라서

$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k=A+B=21$

15 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+5n$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2+5\times1=6$ …… ㉠

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+5n)-\{(n-1)^2+5(n-1)\}$

$=2n+4$ …… ㉡

$n=1$을 ㉡에 대입하면 ㉠과 일치하므로

$a_n=2n+4=2(n+2)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

따라서

$\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{2(k+2)\times2(k+3)}$

$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$

$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{14}}-\frac{1}{15}\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\right)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{4}{15}=\frac{1}{15}$

16 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha_n+\beta_n=41$, $\alpha_n\beta_n=4n^2-1$

이때

$\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$

$=\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}\right)$

$=\sum_{n=1}^{20}\frac{41}{4n^2-1}$

$=\sum_{n=1}^{20}\frac{41}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{41}{2}\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{41}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{39}}-\frac{1}{41}\right)\right\}$

$=\frac{41}{2}\left(1-\frac{1}{41}\right)$

$=\frac{41}{2}\times\frac{40}{41}=20$

17 수열 $\{a_n\}$의 각 항의 값은 -1, 0, 1 중에서 하나이므로

$\sum_{k=1}^{30}a_k$의 값은 1의 개수에서 -1의 개수를 뺀 값이고,

$\sum_{k=1}^{30}a_k^2$의 값은 1의 개수와 -1의 개수를 더한 값이다.

a_1, a_2, $\cdots$, a_{30} 중에서 그 값이 1인 것의 개수를 m, -1인 것의 개수를 n이라 하면

$\sum_{k=1}^{30}a_k=m-n=6$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{30}a_k^2=m+n=18$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=12$, $n=6$

따라서 값이 1인 것의 개수는 12이다.

18 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=3$에서 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다. 즉

$a_n=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

이때 $\frac{1}{a_k}=\frac{1}{2}\times3^{k-1}$이므로

$\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{2}\times3^{k-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{6}3^{k-1}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{3^6-1}{3-1}\right)$

$=\frac{1}{4}(729-1)$

$=182$

19 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n(n+1)}=a_n+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하여 각 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}=a_1+\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right) \\ & \cancel{a_3}=\cancel{a_2}+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right) \\ & \cancel{a_4}=\cancel{a_3}+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right) \\ & \cancel{a_5}=\cancel{a_4}+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right) \\ +) & a_6=\cancel{a_5}+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\frac{1}{6}\right) \\ \hline & a_6=a_1+\left(1-\frac{1}{6}\right) \end{array}$$

$=1+\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$

20 ❶ $n=1$일 때,

(좌변)$=1\times2^{1-1}=1$

(우변)$=(1-1)\times2^1+1=1$

이므로 주어진 등식 ㉠이 성립한다.

❷ $n=k$일 때, 주어진 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+2\times2+3\times4+\cdots+k\times2^{k-1}$

$=\boxed{(k-1)\times2^k+1}$ …… ㉡

㉡의 좌변에 $\boxed{(k+1)\times2^k}$을 더하면

$1+2\times2+3\times4+\cdots+k\times2^{k-1}+\boxed{(k+1)\times2^k}$

$=\boxed{(k-1)\times2^k+1}+\boxed{(k+1)\times2^k}$

$=\boxed{k\times2^{k+1}+1}$

위 등식은 등식 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 등식 ㉠이 성립한다.

❶, ❷에서 모든 자연수 n에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

즉 $f(k)=(k-1)\times2^k+1$

$g(k)=(k+1)\times2^k$

$h(k)=k\times2^{k+1}+1$

이므로

$f(6)+g(5)-h(5)$

$=(5\times2^6+1)+6\times2^5-(5\times2^6+1)$

$=321+192-321$

$=192$

21 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_6=a+5d=4$ …… ㉠

이고

$\frac{a_8+a_{10}}{a_6+a_8}=\frac{(a+7d)+(a+9d)}{(a+5d)+(a+7d)}$

$=\frac{2a+16d}{2a+12d}$

$=\frac{a+8d}{a+6d}=2$

$a+8d=2(a+6d)$

즉 $a+4d=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-16$, $d=4$

따라서

$a_{10}=a+9d=-16+9\times4=20$

22 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8$

$=\frac{a(3^8-1)}{3-1}$

$=\frac{(3^4-1)(3^4+1)}{2}a$

$=\frac{80\times82}{2}a$

$=3280a$

이때 $3280a=656$이므로

$a=\frac{1}{5}$

따라서 $a_n=\frac{1}{5}\times3^{n-1}$이므로

$a_2+a_4+a_6+a_8=\frac{3}{5}+\frac{3^3}{5}+\frac{3^5}{5}+\frac{3^7}{5}$

$=\frac{3}{5}(1+3^2+3^4+3^6)$

$=\frac{3}{5}\times\frac{(3^2)^4-1}{3^2-1}$

$=\frac{3}{5}\times\frac{(3^4-1)(3^4+1)}{8}$

$=\frac{3}{5}\times\frac{80\times82}{8}=492$

23 $|a_n-\sqrt{n}|<\frac{1}{2}$에서 $-\frac{1}{2}<a_n-\sqrt{n}<\frac{1}{2}$이므로

$a_n-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<a_n+\frac{1}{2}$

즉 $\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2<n<\left(a_n+\frac{1}{2}\right)^2$

$a_n=1$이면 $\left(\frac{1}{2}\right)^2<n<\left(\frac{3}{2}\right)^2$이므로 $n=1,\ 2$

$a_n=2$이면 $\left(\frac{3}{2}\right)^2<n<\left(\frac{5}{2}\right)^2$이므로 $n=3,\ 4,\ 5,\ 6$

$a_n=3$이면 $\left(\frac{5}{2}\right)^2<n<\left(\frac{7}{2}\right)^2$이므로 $n=7,\ 8,\ \cdots,\ 12$

⋮

$a_n=10$이면 $\left(\frac{19}{2}\right)^2<n<\left(\frac{21}{2}\right)^2$이므로

$n=91,\ 92,\ \cdots,\ 110$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{110}a_k&=1\times2+2\times4+3\times6+\cdots+10\times20\\&=\sum_{k=1}^{10}(k\times2k)\\&=2\sum_{k=1}^{10}k^2\\&=2\times\frac{10\times11\times21}{6}\\&=770\end{aligned}$$

24 $b_n=na_n$이라 하고 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=n(n+1)^2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(i) $n=1$일 때, $b_1=S_1=1\times2^2=4$ …… ㉠

(ii) $n\geq2$일 때

$$\begin{aligned}b_n&=S_n-S_{n-1}\\&=n(n+1)^2-(n-1)n^2\\&=n\{(n+1)^2-n(n-1)\}\\&=n(3n+1)\end{aligned}$$ …… ㉡

$n=1$을 ㉡에 대입하면 ㉠과 일치하므로

$b_n=n(3n+1)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ …… ❶

즉 $b_n=na_n$에서

$na_n=n(3n+1)$

$a_n=3n+1$ …… ❷

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}a_k&=\sum_{k=1}^{10}(3k+1)\\&=3\times\frac{10\times11}{2}+1\times10\\&=3\times55+10\\&=175\end{aligned}$$ …… ❸

단계	채점 기준	배점
❶	$b_n=na_n$으로 놓고 b_n의 식 구하기	2점
❷	a_n의 식 구하기	1점
❸	$\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값 구하기	2점

25 $a_n=3^n-1$ …… ㉠

❶ $n=1$일 때

(좌변)$=2$, (우변)$=3-1=2$

따라서 $n=1$일 때 등식 ㉠이 성립한다. …… ❶

❷ $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$a_k=3^k-1$

이때 $a_{k+1}=3a_k+2$가 성립하므로

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=3a_k+2\\&=3(3^k-1)+2\\&=3^{k+1}-1\end{aligned}$$

위 등식은 등식 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 등식 ㉠이 성립한다. …… ❷

❶, ❷에서 모든 자연수 n에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

…… ❸

단계	채점 기준	배점
❶	$n=1$일 때 성립함을 보이기	1점
❷	$n=k$일 때 성립함을 가정하여 $n=k+1$일 때 성립함을 보이기	3점
❸	증명 마무리하기	1점