정답과 풀이

4주 전

학교시험에 꼭 나오는 교과서 문제

● 1일차 본문 10~13쪽

01-1 ⑤	01-2 ⑤	02-1 ③	02-2 ④
03-1 ④	03-2 ⑤	03-3 ④	03-4 ①
04-1 ①	04-2 ②	04-3 ③	04-4 ③
05-1 ②	05-2 ①	05-3 ②	05-4 ①

01-1 $(2+3, -4+5)$, 즉 $(5, 1)$

01-2 $(2-2, 3+b)$, 즉 $(0, 3+b)$
이때 이 점이 $(a, -1)$과 같으므로
$a=0, b=-4$
$\therefore a-b=0-(-4)=4$

02-1 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+1, y-2)$는 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 점 $(-2, 5)$가 옮겨지는 점의 좌표는
$(-2+1, 5-2)$, 즉 $(-1, 3)$

02-2 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+a, y+3)$은 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 점 $(2, 1)$이 옮겨지는 점의 좌표는
$(2+a, 1+3)$, 즉 $(2+a, 4)$
이때 이 점이 $(3, b)$와 같으므로 $a=1, b=4$
$\therefore ab=1\cdot 4=4$

03-1 $3(x-2)-2(y-1)+5=0$
$\therefore 3x-2y+1=0$

Lecture 도형의 평행이동

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은 방정식 $f(x, y)=0$에서 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$를 대입하여 구한다.

03-2 $y-3=a(x+1)-1$
$\therefore y=ax+a+2$
이때 이 직선이 직선 $y=-2x+b$와 일치해야 하므로 $a=-2, b=0$
$\therefore a-b=-2-0=-2$

03-3 $(x+2+1)^2+(y-2)^2=1$
$\therefore (x+3)^2+(y-2)^2=1$

03-4 $(x-2+3)^2+(y+3-5)^2=1$
$\therefore (x+1)^2+(y-2)^2=1$

04-1 점 $(2, a)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-2, -a)$
이때 이 점이 $(b, -5)$와 같으므로
$a=5, b=-2$
$\therefore a+b=5+(-2)=3$

04-2 점 $(a, -1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-1, a)$
이때 이 점이 $(b, 5)$와 같으므로
$a=5, b=-1$
$\therefore a-b=5-(-1)=6$

04-3 점 $(3, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 $(3, -2)$
또 점 $(3, 2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(-3, 2)$
$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-3-3)^2+\{2-(-2)\}^2}$
$=2\sqrt{13}$

04-4 점 $(2, 5)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 $(2, -5)$
또 점 $(2, 5)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(-2, 5)$
따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는
$\left(\frac{2+(-2)}{2}, \frac{-5+5}{2}\right)$, 즉 $(0, 0)$

05-1 직선 $y=-5x+4$를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$-y=-5\cdot(-x)+4$
$\therefore 5x+y+4=0$

05-2 직선 $y=2x+1$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$y=2\cdot(-x)+1 \qquad \therefore y=-2x+1$
따라서 $a=-2$, $b=1$이므로
$a-b=-2-1=-3$

05-3 원 $(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=9$를 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(x-1)^2+(-y-\sqrt{3})^2=9$
$\therefore (x-1)^2+(y+\sqrt{3})^2=9$
따라서 원의 중심 $(1, -\sqrt{3})$과 원점 사이의 거리는
$\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

다른 풀이

원 $(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=9$의 중심 $(1, \sqrt{3})$을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(1, -\sqrt{3})$
따라서 점 $(1, -\sqrt{3})$과 원점 사이의 거리는
$\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

쌍둥이 문제

원 $(x-1)^2+(y+3)^2=4$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 중심과 원점 사이의 거리를 구하시오.

[풀이]
원 $(x-1)^2+(y+3)^2=4$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(y-1)^2+(x+3)^2=4$
$\therefore (x+3)^2+(y-1)^2=4$
따라서 원의 중심 $(-3, 1)$과 원점 사이의 거리는
$\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

답 $\sqrt{10}$

05-4 원 $(x+2)^2+(y-3)^2=k$를 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x+2)^2+(y-3)^2=k$
$\therefore (x-2)^2+(y-3)^2=k$
이때 이 원이 점 $(3, 3)$을 지나므로
$(3-2)^2+(3-3)^2=k \qquad \therefore k=1$

● **2일차** 본문 14~17쪽

01-1 ④	01-2 ③	02-1 ③	02-2 ⑤
03-1 ②	03-2 ④	04-1 ④	04-2 ③
05-1 ③	05-2 ④	05-3 ①	05-4 ③
06-1 ⑤	06-2 ③	07-1 ②	07-2 ③

01-1 ① 0은 집합 A의 원소이므로 $0\in A$
② 1은 집합 A의 원소이므로 $1\in A$
③ 5는 집합 A의 원소가 아니므로 $5\notin A$
④ $\varnothing$은 집합 A의 원소가 아니므로 $\varnothing\notin A$
⑤ 집합 A의 원소의 개수는 5이므로 $n(A)=5$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

01-2 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B=\{3, 6, 9, 12, \cdots\}$
① 1은 집합 A의 원소이므로 $1\in A$
② 6은 집합 A의 원소이므로 $6\in A$
③ 6은 집합 B의 원소이므로 $6\in B$
④ 9는 집합 A의 원소가 아니므로 $9\notin A$
⑤ 12는 집합 B의 원소이므로 $12\in B$
따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

02-1 $A=\{\mathrm{d}, \mathrm{k}, \mathrm{o}\}$이므로 $n(A)=3$

02-2 $A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $B=\{1, 3, 5, 7\}$
따라서 $n(A)=6$, $n(B)=4$이므로
$n(A)+n(B)=6+4=10$

03-1 $4\in A$에서 $4\in B$이어야 하므로 $b=4$
$2\in B$에서 $2\in A$이어야 하므로 $a=2$
$\therefore b-a=4-2=2$

03-2 $3\in A$에서 $3\in B$이어야 하므로
$b+1=3 \qquad \therefore b=2$
$1\in B$에서 $1\in A$이어야 하므로
$a-1=1 \qquad \therefore a=2$
$\therefore a+b=2+2=4$

04-1 $A=\{2, 3, 5, 7\}$
집합 A의 원소의 개수는 4이므로 집합 A의 부분집합의 개수는
$2^4=16$

04-2 집합 A의 원소의 개수는 3이므로 집합 A의 진부분집합의 개수는
$2^3-1=7$

쌍둥이 문제

집합 $A=\{x|x$는 16의 약수$\}$일 때, 집합 A의 진부분집합의 개수를 구하시오.

[풀이]
$A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$
집합 A의 원소의 개수는 5이므로 집합 A의 진부분집합의 개수는 $2^5-1=31$

답 31

05-1 $A=\{1, 5\}$, $B=\{1, 2, 3\}$이므로
$A\cup B=\{1, 2, 3, 5\}$
따라서 $A\cup B$의 모든 원소의 합은
$1+2+3+5=11$

05-2 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$이므로
$A\cap B=\{1, 2, 5\}$
따라서 $A\cap B$의 모든 원소의 합은
$1+2+5=8$

05-3 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{0, 4, 8\}$이므로
$A-B=\{1, 2, 3\}$
따라서 $A-B$의 모든 원소의 합은
$1+2+3=6$

05-4 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{1, 2, 3, 6\}$,
$B=\{2, 4, 6\}$이므로
$B^C=U-B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}-\{2, 4, 6\}$
$\quad=\{1, 3, 5\}$
$\therefore A\cap B^C=\{1, 2, 3, 6\}\cap\{1, 3, 5\}=\{1, 3\}$
따라서 $A\cap B^C$의 모든 원소의 합은
$1+3=4$

다른 풀이

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{2, 4, 6\}$
이므로 $A\cap B^C=A-B=\{1, 3\}$
따라서 $A\cap B^C$의 모든 원소의 합은
$1+3=4$

Lecture 여집합과 차집합의 성질

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

(1) $A^C=U-A$　　(2) $A-B=A\cap B^C$

06-1 ① $A\cap A^C=\varnothing$

② $\varnothing^C=U$

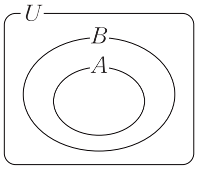
③ $(A^C)^C=A$

④ $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

06-2 $A\cap B=A$에서 $A\subset B$

$$\begin{aligned}A\subset B &\Longleftrightarrow A\cup B=B\\ &\Longleftrightarrow A-B=\varnothing\\ &\Longleftrightarrow B^C\subset A^C\end{aligned}$$



따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

Lecture $A\subset B$와 같은 표현

(1) $A\cap B=A$　　(2) $A\cup B=B$

(3) $A-B=\varnothing$　　(4) $B^C\subset A^C$

오답 피하기

③ $U=\{1, 2, 3, 4\}$, $A=\{1\}$, $B=\{1, 2\}$이면
$A\cap B=\{1\}$, 즉 $A\cap B=A$이지만
$A\cup B^C=\{1, 3, 4\}\neq U$

07-1 $$\begin{aligned}n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=7+10-4=13\end{aligned}$$

07-2 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서
$$\begin{aligned}n(A)&=n(A\cup B)-n(B)+n(A\cap B)\\&=31-15+4=20\end{aligned}$$

● 3일차

본문 18~21쪽

01-1 ④	01-2 ⑤		
02-1 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$		02-2 $\{1, 4, 6, 8\}$	
03-1 ③	03-2 ⑤	03-3 ⑤	03-4 ②
04-1 ④	04-2 ⑤	05-1 ④	05-2 ③
06-1 ③	06-2 ④	06-3 ①	06-4 ⑤

01-1 ① $1+2=3$이므로 거짓인 명제이다.

② 참인 명제

③ 참인 명제

④ 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

⑤ 6과 8의 최대공약수는 2이므로 거짓인 명제이다.

따라서 명제가 아닌 것은 ④이다.

01-2 ① 참인 명제

② $1<2$이므로 거짓인 명제이다.

③ 참인 명제

④ 참인 명제

⑤ 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

따라서 명제가 아닌 것은 ⑤이다.

02-1 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$에 대하여 조건 p의 진리집합을 P라 하면
$P=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

02-2 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$에 대하여 조건 q의 진리집합을 Q라 하면
$Q=\{2, 3, 5, 7\}$
따라서 조건 q의 부정 $\sim q$의 진리집합은
$Q^C=\{1, 4, 6, 8\}$

03-1 ① (반례) $x=3$이면 $x^2\neq 10$이므로 거짓인 명제이다.

② (반례) $x=5$이면 $x^2-2x-3=12>0$이므로 거짓인 명제이다.

③ $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$
$\therefore x^2>x-1$
즉 모든 실수 x에 대하여 $x^2>x-1$이므로 참인 명제이다.
④ 모든 실수 x에 대하여 $x^2\ge0$이므로 $x^2=-4$를 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.
즉 거짓인 명제이다.
⑤ $x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0$
$\therefore x^2>2x-4$
모든 실수 x에 대하여 $x^2>2x-4$이므로
$x^2\le2x-4$를 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다. 즉 거짓인 명제이다.
따라서 참인 명제는 ③이다.

03-2 ① (반례) $x=2$이면 $x^2-1=3>0$이므로 거짓인 명제이다.
② $x^2<2x-3$을 만족시키는 x는 전체집합 U에 존재하지 않으므로 거짓인 명제이다.
③ (반례) $x=1$, $y=2$이면 $y\ne-x$이므로 거짓인 명제이다.
④ (반례) $x=0$, $y=0$이면 $x^2+y^2=0$이므로 거짓인 명제이다.
⑤ $x=0$, $y=0$이면 $|x|+|y|=0$이므로 참인 명제이다.
따라서 참인 명제는 ⑤이다.

03-3 ① 모든 실수 x에 대하여 $x^2\ge0$이고, 모든 실수 y에 대하여 $y^2\ge0$이다. 즉 $x^2+y^2\ge0$이므로 참인 명제이다.
② $x=-1$이면 $x^2+4x+3=0$이므로 참인 명제이다.
③ 모든 실수 x에 대하여 $x^2\ge0$이다. 즉 $x^2+7>0$이므로 참인 명제이다.
④ $x=0$이면 $x^2\le0$이므로 참인 명제이다.
⑤ 모든 실수 x에 대하여 $|x|\ge0$이므로 $|x|<0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.
즉 거짓인 명제이다.
따라서 거짓인 명제는 ⑤이다.

03-4 ① 모든 실수 x에 대하여 $x^2\ge0$이므로 참인 명제이다.
② (반례) $x=1+\sqrt{2}$이면 $x^2=3+2\sqrt{2}$이므로 x^2은 무리수이다. 즉 거짓인 명제이다.
③ $x=0.1$이면 $x^2=0.01$이므로 $x^2<x$이다.
즉 참인 명제이다.
④ $x=0$이면 $x^2+x=0$이므로 참인 명제이다.
⑤ $x=2$이면 소수이면서 짝수이므로 참인 명제이다.
따라서 거짓인 명제는 ②이다.

04-1 ① (반례) $x=-2$이면 $x^2=4$이지만 $x\ne2$이다.
즉 거짓인 명제이다.
② (반례) $x=1$, $y=-1$이면 $x^2=y^2$이지만 $x\ne y$이다. 즉 거짓인 명제이다.
③ (반례) $x=-2$이면 $x<1$이지만 $x^2>1$이다.
즉 거짓인 명제이다.
④ $x-3=0$에서 $x=3$
$x^2-4x+3=0$에 $x=3$을 대입하면
$9-12+3=0$
즉 참인 명제이다.
⑤ (반례) $x=6$이면 x는 2의 배수이지만 4의 배수는 아니다. 즉 거짓인 명제이다.
따라서 참인 명제는 ④이다.

04-2 ① $x=2k$, $y=2l-1$ (k, l은 자연수)이라 하면
$x+y=2k+(2l-1)=2(k+l)-1$
이므로 $x+y$는 홀수이다.
② p: x는 자연수, q: x는 정수로 놓고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1, 2, 3, \cdots\}$, $Q=\{\cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$
이므로 $P\subset Q$이다. 즉 참인 명제이다.
③ $x>-1$의 양변에 2를 더하면 $x+2>1$이므로 참인 명제이다.
④ p: x는 4의 약수, q: x는 16의 약수로 놓고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1, 2, 4\}$, $Q=\{1, 2, 4, 8, 16\}$
이므로 $P\subset Q$이다. 즉 참인 명제이다.
⑤ $\triangle$ABC가 이등변삼각형이면 $\angle A=\angle B$ 또는 $\angle B=\angle C$ 또는 $\angle C=\angle A$이다. 즉 거짓인 명제이다.
따라서 거짓인 명제는 ⑤이다.

05-1 ① 대우: $x\neq1$이면 $x^2\neq1$이다. (거짓)
(반례) $x=-1$이면 $x\neq1$이지만 $x^2=1$이다.
② 대우: $x\leq1$이면 $x^2\leq1$이다. (거짓)
(반례) $x=-2$이면 $x\leq1$이지만 $x^2=4$에서 $x^2>1$이다.
③ 대우: $x\neq0$이면 $x^2\neq3x$이다. (거짓)
(반례) $x=3$이면 $x\neq0$이지만 $x^2=9$, $3x=9$에서 $x^2=3x$이다.
④ 대우: $x+y\leq2$이면 $x\leq1$ 또는 $y\leq1$이다. (참)
⑤ 대우: $\angle A\neq90^\circ$이면 $\triangle ABC$는 직각삼각형이 아니다. (거짓)
(반례) $\angle B=90^\circ$이거나 $\angle C=90^\circ$이면 $\angle A\neq90^\circ$이지만 $\triangle ABC$는 직각삼각형이다.
따라서 그 대우가 참인 명제는 ④이다.

다른 풀이

④ $x>1$이고 $y>1$이면 $x+y>2$이다.
즉 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

05-2 ① 역: $\triangle ABC$의 두 내각의 크기가 같으면 $\triangle ABC$는 정삼각형이다. (거짓)
(반례) $\angle A=70^\circ$, $\angle B=70^\circ$, $\angle C=40^\circ$이면 $\angle A=\angle B$이지만 $\triangle ABC$는 정삼각형이 아니다.
② 역: 마름모는 정사각형이다. (거짓)
마름모 중에서 한 내각이 직각인 것이 정사각형이다.
③ 역: x가 10의 배수이면 x는 5의 배수이다. (참)
④ 역: $x^2>0$이면 $x>0$이다. (거짓)
(반례) $x=-1$이면 $x^2=(-1)^2=1$에서 $x^2>0$이지만 $x<0$이다.
⑤ 역: $x\neq0$이면 $xy\neq0$이다. (거짓)
(반례) $x=1$, $y=0$이면 $x\neq0$이지만 $xy=0$이다.
따라서 그 역이 참인 명제는 ③이다.

06-1 ① p: $x^2+y^2=0 \Longrightarrow q$: $xy=0$
($\longleftarrow$의 반례) $x=1$, $y=0$이면 $xy=0$이지만 $x^2+y^2\neq0$이다.
즉 $p\Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
② p: $x\geq y \Longleftrightarrow q$: $xz\geq yz$
즉 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
③ p: $xy=|xy| \Longleftarrow q$: $x>0, y>0$
($\longrightarrow$의 반례) $x=-1$, $y=-2$이면 $xy=|xy|$이지만 $x<0$, $y<0$이다.
즉 $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
④ p: $x=1 \Longrightarrow q$: $x^2=x$
($\longleftarrow$의 반례) $x=0$이면 $x^2=x$이지만 $x\neq1$이다.
즉 $p\Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
⑤ p: $x=y \Longrightarrow q$: $x^2=y^2$
($\longleftarrow$의 반례) $x=2$, $y=-2$이면 $x^2=y^2$이지만 $x\neq y$이다.
즉 $p\Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은 ③이다.

06-2 ① p: $x=2 \Longrightarrow q$: $x^2=4$
($\longleftarrow$의 반례) $x=-2$이면 $x^2=4$이지만 $x\neq2$이다.
즉 $p\Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
② p: $x>0, y>0 \Longrightarrow q$: $xy>0$
($\longleftarrow$의 반례) $x=-1$, $y=-2$이면 $xy>0$이지만 $x<0$, $y<0$이다.
즉 $p\Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
③ p: $x-5>-2 \Longleftrightarrow q$: $2x-1>5$
즉 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
④ p: $|x|=1 \Longleftarrow q$: $x=-1$
($\longrightarrow$의 반례) $x=1$이면 $|x|=1$이지만 $x\neq-1$이다.
즉 $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
⑤ p: $x^2=9 \Longleftrightarrow q$: $x=-3$ 또는 $x=3$
즉 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은 ④이다.

06-3 (가) p: $x=2$, q: $(x-2)(x+2)=0$으로 놓고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{2\}$, $Q=\{-2, 2\}$이므로
$P\subset Q$, $Q\not\subset P$
즉 $p\Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
따라서 $x=2$는 $(x-2)(x+2)=0$이기 위한 $\boxed{\text{충분}}$ 조건이다.
(나) p: $x=7$, q: $x-1>0$으로 놓고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{7\}$, $Q=\{x|x>1\}$이므로

$P\subset Q$, $Q\not\subset P$

즉 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

따라서 $x=7$은 $x-1>0$이기 위한 $\boxed{\text{충분}}$조건이다.

06-4 (가) p: $(x-1)(x-2)=0$, q: $x=1$로 놓고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 2\}$, $Q=\{1\}$이므로

$P\not\subset Q$, $Q\subset P$

즉 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서 $(x-1)(x-2)=0$은 $x=1$이기 위한 $\boxed{\text{필요}}$조건이다.

(나) p: $x=1$, q: $x^3-1=0$으로 놓고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1\}$, $Q=\{1\}$이므로 $P=Q$

즉 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 $x=1$은 $x^3-1=0$이기 위한 $\boxed{\text{필요충분}}$ 조건이다.

오답 피하기

실수 x에 대하여 $x^3-1=0$에서

$(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로

$x-1=0$ 또는 $x^2+x+1=0$

이때 $x^2+x+1=0$을 만족시키는 실수는 존재하지 않으므로 $x=1$

● 4일차

본문 22~25쪽

01-1 ④	01-2 (가) $2kn$ (나) 짝수		
02-1 (가) 유리수 (나) 서로소 (다) 3		02-2 ②	
03-1 ④	03-2 ②	04-1 ⑤	04-2 ①
05-1 ②	05-2 ⑤		

01-1 주어진 명제의 대우는

'자연수 n에 대하여 n이 짝수이면 n^2도 짝수이다.'

$n=2k$ (k는 자연수)라 하면 $n^2=2\cdot\boxed{(가)\ 2k^2}$이므로 n^2은 $\boxed{(나)\ \text{짝수}}$이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

$\therefore$ (가) $2k^2$ (나) 짝수

01-2 주어진 명제의 대우는

'자연수 m, n에 대하여 m 또는 n이 짝수이면 mn도 짝수이다.'

(i) $m=2k$ (k는 자연수)라 하면

$mn=\boxed{(가)\ 2kn}$이므로 mn은 $\boxed{(나)\ \text{짝수}}$이다.

(ii) $n=2l$ (l은 자연수)이라 하면

$mn=2ml$이므로 mn은 $\boxed{(나)\ \text{짝수}}$이다.

(i), (ii)에서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

$\therefore$ (가) $2kn$ (나) 짝수

02-1 $\sqrt{3}$이 $\boxed{(가)\ \text{유리수}}$라고 가정하면

$\sqrt{3}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 $\boxed{(나)\ \text{서로소}}$인 자연수)

으로 나타낼 수 있다. 즉 $n=\sqrt{3}m$이고 양변을 제곱하면 $n^2=3m^2$ ······ ㉠

이때 n^2이 3의 배수이므로 n도 $\boxed{(다)\ 3}$의 배수이다.

$n=3k$ (k는 자연수)로 놓으면 ㉠에서

$(3k)^2=3m^2$, 즉 $m^2=3k^2$

여기서 m^2이 3의 배수이므로 m도 $\boxed{(다)\ 3}$의 배수이다. 즉 m, n이 모두 $\boxed{(다)\ 3}$의 배수이므로 m, n이 $\boxed{(나)\ \text{서로소}}$라는 가정에 모순이다.

따라서 $\sqrt{3}$은 무리수이다.

$\therefore$ (가) 유리수 (나) 서로소 (다) 3

02-2 $1-\sqrt{5}$가 $\boxed{(가)\ \text{유리수}}$라고 가정하면

$1-\sqrt{5}$와 1이 $\boxed{(가)\ \text{유리수}}$이므로

$1-(1-\sqrt{5})=\boxed{(나)\ \sqrt{5}}$도 유리수이다.

이때 $\sqrt{5}$가 $\boxed{(다)\ \text{무리수}}$라는 사실에 모순이므로

$1-\sqrt{5}$는 무리수이다.

$\therefore$ (가) 유리수 (나) $\sqrt{5}$ (다) 무리수

03-1 $a^2+2b^2-2ab=(a^2-2ab+b^2)+b^2$

$=(a-\boxed{(가)\ b})^2+b^2$

a, b가 실수이므로 $(a-\boxed{(가)\ b})^2 \geq 0$, $b^2 \geq 0$
따라서 $(a-\boxed{(가)\ b})^2+b^2 \geq 0$이므로
$a^2+2b^2 \geq 2ab$
이때 등호는 $a-b=0$, $b=0$, 즉 $a=b=\boxed{(나)\ 0}$일 때 성립한다.
$\therefore$ (가) b (나) 0

03-2 $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$
$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$
$=a^2+2|a||b|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$
$=2(|ab|-ab) \geq \boxed{(가)\ 0}$ ($\because$ $|ab| \geq ab$)
$\therefore$ $(|a|+|b|)^2 \geq |a+b|^2$
그런데 $|a|+|b| \geq 0$, $|a+b| \geq 0$이므로
$|a|+|b| \geq |a+b|$
이때 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $\boxed{(나)\ ab \geq 0}$일 때 성립한다.
$\therefore$ (가) 0 (나) $ab \geq 0$

04-1 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)
그런데 $ab=4$이므로
$a+b \geq 2\sqrt{4}=4$
따라서 $a+b$의 최솟값은 4이다.

다른 풀이

$ab=4$에서 $a>0$이므로 $b=\dfrac{4}{a}$

$$\therefore a+b=a+\frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}} = 2\cdot 2=4$$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\dfrac{4}{a}\text{, 즉 } a=2\text{일 때 성립}\right)$

04-2 $2x>0$, $3y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$2x+3y \geq 2\sqrt{6xy}$ (단, 등호는 $2x=3y$일 때 성립)
그런데 $2x+3y=6$이므로
$6 \geq 2\sqrt{6xy}$, 즉 $\sqrt{6xy} \leq 3$
양변을 제곱하면
$6xy \leq 9$ $\quad\therefore xy \leq \dfrac{3}{2}$
따라서 xy의 최댓값은 $\dfrac{3}{2}$이다.

쌍둥이 문제

양수 x, y에 대하여 $x^2+4y^2=12$일 때, xy의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[풀이]
$x^2>0$, $4y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$x^2+4y^2 \geq 2\sqrt{x^2\cdot 4y^2}=4xy$
(단, 등호는 $x^2=4y^2$, 즉 $x=2y$일 때 성립)
그런데 $x^2+4y^2=12$이므로
$12 \geq 4xy$ $\quad\therefore xy \leq 3$
따라서 xy의 최댓값은 3이다.

답 ③

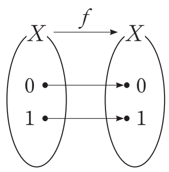
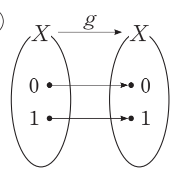
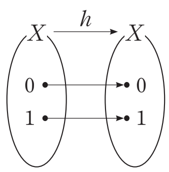
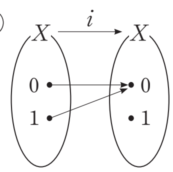
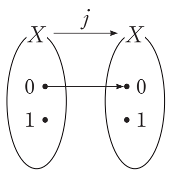
05-1 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여
$(2^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (2x+3y)^2$
$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}\text{일 때 성립}\right)$
이때 $x^2+y^2=13$이므로
$13\cdot 13 \geq (2x+3y)^2$
$\therefore -13 \leq 2x+3y \leq 13$
따라서 $2x+3y$의 최댓값은 13이다.

05-2 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여
$(3^2+4^2)(x^2+y^2) \geq (3x+4y)^2$
$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}\text{일 때 성립}\right)$
이때 $x^2+y^2=4$이므로
$25\cdot 4 \geq (3x+4y)^2$
$\therefore -10 \leq 3x+4y \leq 10$
따라서 $3x+4y$의 최댓값은 10이다.

● 5일차 본문 26~29쪽

01-1 ⑤	01-2 ②		
02-1 ①	02-2 ⑤	02-3 ①	02-4 ①
03-1 ②	03-2 ⑤	04-1 ②	04-2 ④

01-1 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

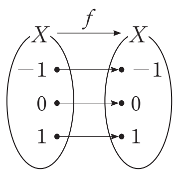
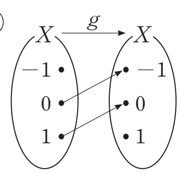
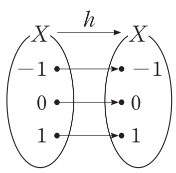
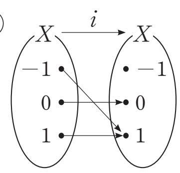
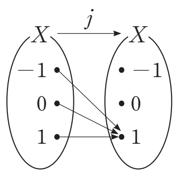
①

②

③

④

⑤


따라서 X에서 X로의 함수가 아닌 것은 ⑤이다.

오답 피하기

⑤ 정의역의 원소 1에 대응하는 공역의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

01-2 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

①

②

③

④

⑤


따라서 X에서 X로의 함수가 아닌 것은 ②이다.

오답 피하기

② 정의역의 원소 -1에 대응하는 공역의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

02-1 $f(0)=g(0)$에서 $1=b$
$f(-1)=g(-1)$, $f(1)=g(1)$에서
$2=a+b$ ······ ㉠
$b=1$을 ㉠에 대입하면 $a+1=2$ $\therefore a=1$
$\therefore ab=1\cdot 1=1$

02-2 $f(-1)=g(-1)$에서 $-a+b=-4$ ······ ㉠
$f(3)=g(3)$에서 $3a+b=20$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=6$, $b=2$
$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{6}{2}=3$

02-3 $f(1)=g(1)$에서 $1+a=-b+2$
$\therefore a+b=1$ ······ ㉠
$f(2)=g(2)$에서 $2+a=-2b+5$
$\therefore a+2b=3$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-1$, $b=2$
$\therefore 3a+b=3\cdot(-1)+2=-1$

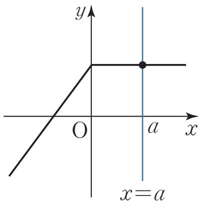
02-4 $f(-2)=g(-2)$에서 $-1=-4-b$
$\therefore b=-3$
따라서 $g(x)=2x+3$이므로
$f(a)=g(a)$에서 $a^2+a-3=2a+3$
$a^2-a-6=0$, $(a+2)(a-3)=0$
$\therefore a=3$ ($\because a\neq -2$)
$\therefore ab=3\cdot(-3)=-9$

오답 피하기

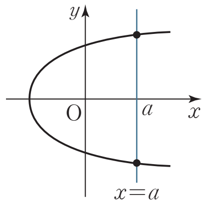
집합을 원소나열법으로 나타낼 때는 원소를 중복하여 쓰지 않는다. 즉 $X=\{-2, a\}$에서 $a\neq-2$이다.

03-1 주어진 그래프에서 정의역의 각 원소 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$를 그으면 다음 그림과 같다.

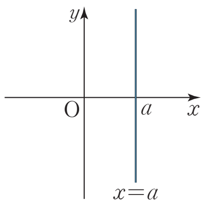
ㄱ.



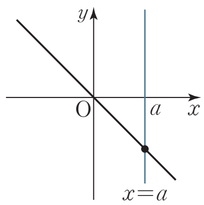
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



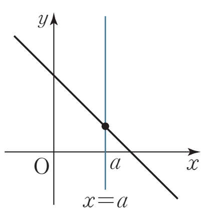
따라서 함수의 그래프인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

오답 피하기

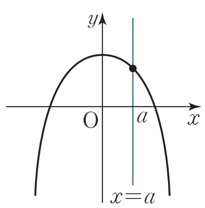
ㄴ, ㄷ과 같이 y축에 평행한 직선을 그었을 때, 2개 이상의 점에서 만난다는 것은 정의역의 한 원소에 2개 이상의 공역의 원소가 대응한다는 것이므로 함수가 아니다.

03-2 주어진 그래프에서 정의역의 각 원소 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$를 그으면 다음 그림과 같다.

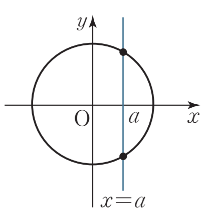
ㄱ.



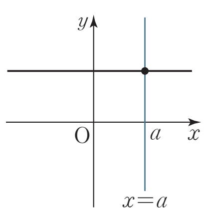
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



따라서 함수의 그래프인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

04-1 일대일함수는 치역의 각 원소 b에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=b$와 함수의 그래프가 한 점에서 만나야 하므로 일대일함수인 것은 ㄷ이다.

04-2 ④ 치역의 각 원소 b에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=b$와 함수의 그래프가 한 점 이상에서 만나는 구간이 존재하므로 일대일함수가 아니다. 즉 일대일대응이 아니다.

Lecture 일대일함수와 일대일대응

일대일대응이면 일대일함수이지만 일대일함수는 일대일대응이 아닐 수 있다.

● 6일차

본문 30~33쪽

01-1 1	01-2 7	01-3 ①	01-4 ①
02-1 ③	02-2 ③	02-3 ①	02-4 ①
03-1 ②	03-2 ④	03-3 ⑤	03-4 ⑤
04-1 ④	04-2 ②	05-1 ⑤	05-2 ③

01-1 $g(-2)=-2+3=1$이므로

$$(f\circ g)(-2)=f(g(-2))=f(1)$$
$$=2\cdot1-1=1$$

01-2 $g(6)=6-4=2$이므로

$$(f\circ g)(6)=f(g(6))=f(2)$$
$$=2\cdot2+3=7$$

01-3 $f(2)=2^2-3=1$이므로

$$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(1)$$
$$=1^2-3=-2$$

01-4 $\sqrt{3}$은 무리수이므로 $f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2=3$

$\therefore (f\circ f)(\sqrt{3})=f(f(\sqrt{3}))=f(3)$

이때 3은 유리수이므로

$(f\circ f)(\sqrt{3})=f(3)=-3$

02-1 $(g \circ h)(x)=g(h(x))=h(x)-1$
이때 $(g \circ h)(x)=f(x)$이므로
$h(x)-1=x^2+1$
$\therefore h(x)=x^2+2$

02-2 $(f \circ h)(x)=f(h(x))=2h(x)-3$
이때 $(f \circ h)(x)=g(x)$이므로
$2h(x)-3=4x-1 \qquad \therefore h(x)=2x+1$
$\therefore h(4)=2\cdot 4+1=9$

다른 풀이

$(f \circ h)(4)=g(4)$에서 $f(h(4))=g(4)$
$2h(4)-3=15$, $2h(4)=18$
$\therefore h(4)=9$

02-3 $(h \circ g)(x)=h(g(x))=h(-x+1)$
$(h \circ g)(x)=f(x)$이므로 $h(-x+1)=3x-1$
이때 $-x+1=t$라 하면 $x=-t+1$
$x=-t+1$을 $h(-x+1)=3x-1$에 대입하면
$h(t)=3(-t+1)-1=-3t+2$
$\therefore h(2)=-3\cdot 2+2=-4$

다른 풀이

$(h \circ g)(x)=h(g(x))=h(-x+1)$
$(h \circ g)(x)=f(x)$이므로 $h(-x+1)=3x-1$
$h(2)$의 값은 $-x+1=2$, 즉 $x=-1$일 때이므로
$x=-1$을 $h(-x+1)=3x-1$에 대입하면
$h(2)=3\cdot(-1)-1=-4$

02-4 $(h \circ g)(x)=h(g(x))=h(-2x+3)$
$(h \circ g)(x)=f(x)$이므로 $h(-2x+3)=2x-1$
이때 $-2x+3=t$라 하면 $x=\dfrac{-t+3}{2}$
$x=\dfrac{-t+3}{2}$을 $h(-2x+3)=2x-1$에 대입하면
$h(t)=2\cdot\dfrac{-t+3}{2}-1=-t+2$
$\therefore h(1)=-1+2=1$

03-1 $f^{-1}(2)=-3$에서 $f(-3)=2$이므로
$-3a-1=2 \qquad \therefore a=-1$

Lecture 역함수의 성질

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
$f(a)=b \Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

03-2 $f^{-1}(-2)=a$라 하면 $f(a)=-2$이므로
$\dfrac{1}{2}a-3=-2 \qquad \therefore a=2$
$\therefore f^{-1}(-2)=2$

03-3 $f(3)=2$이므로 $3a+b=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$f^{-1}(-1)=1$에서 $f(1)=-1$이므로
$a+b=-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{3}{2}$, $b=-\dfrac{5}{2}$
$\therefore a-b=\dfrac{3}{2}-\left(-\dfrac{5}{2}\right)=4$

쌍둥이 문제

함수 $f(x)=ax+b$에 대하여
$f(1)=3$, $f^{-1}(-5)=-3$
일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수)

① -6 ② -4 ③ -2
④ 2 ⑤ 4

[풀이]
$f(1)=3$이므로 $a+b=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$f^{-1}(-5)=-3$에서 $f(-3)=-5$이므로
$-3a+b=-5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$
$\therefore ab=2\cdot 1=2$

답 ④

03-4 $f^{-1}(4)=2$, $f^{-1}(-2)=-1$에서
$f(2)=4$, $f(-1)=-2$이므로

$2a+b=4$ ...... ㉠
$-a+b=-2$ ...... ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=0$
따라서 $f(x)=2x$이므로
$f(1)=2\cdot1=2$

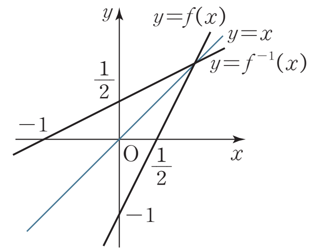
04-1 $y=ax-6$에서 x를 y의 식으로 나타내면
$-ax=-y-6$ $\therefore x=\frac{1}{a}y+\frac{6}{a}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x+\frac{6}{a}$
$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x+\frac{6}{a}$
즉 $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$, $\frac{6}{a}=b$이므로 $a=2$, $b=3$
$\therefore ab=2\cdot3=6$

다른 풀이
$y=\frac{1}{2}x+b$에서 x를 y의 식으로 나타내면
$-\frac{1}{2}x=-y+b$ $\therefore x=2y-2b$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=2x-2b$
$\therefore f(x)=2x-2b$
즉 $a=2$, $-6=-2b$이므로 $a=2$, $b=3$
$\therefore ab=2\cdot3=6$

Lecture 역함수 구하기
함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$는 다음과 같이 구한다.
(i) 함수 $y=f(x)$가 일대일대응인지 확인한다.
(ii) $y=f(x)$에서 x를 y의 식으로 나타낸다.
(iii) x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다.

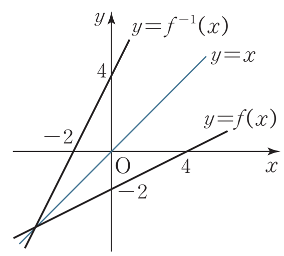
04-2 $y=2x+1$에서 x를 y의 식으로 나타내면
$-2x=-y+1$ $\therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이므로
$a+3b=\frac{1}{2}+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

05-1 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 다음 그림과 같으므로 그 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$2x-1=x$에서 $x=1$
따라서 구하는 교점의 x좌표는 1이다.

05-2 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 다음 그림과 같으므로 그 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\frac{1}{2}x-2=x$에서 $-\frac{1}{2}x=2$ $\therefore x=-4$
$x=-4$를 $y=x$에 대입하면 $y=-4$
따라서 구하는 교점의 좌표는 $(-4, -4)$이므로
$a=-4$, $b=-4$
$\therefore a+b=-4+(-4)=-8$

3주 전

학교시험에 자주 나오는 대표 기출 24

● 1일차

본문 36~39쪽

01-1 ③	01-2 ④	01-3 ④	01-4 ②
02-1 ④	02-2 ⑤	02-3 ⑤	02-4 ④
03-1 ①	03-2 ③	03-3 ④	03-4 ⑤
04-1 ②	04-2 ①	04-3 ④	04-4 ②

대표 기출 01 점의 평행이동

꼭 알고 있을 개념

점 $(1, 2)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(1+3, 2-1)$, 즉 $(4, 1)$

01-1 점 $(1, 3)$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(1-3, 3+2)$ $\quad\therefore (-2, 5)$
따라서 $a=-2$, $b=5$이므로
$a+b=-2+5=3$

01-2 점 $(-3, 4)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(-3+a, 4+b)$
따라서 $-3+a=4$, $4+b=1$이므로
$a=7$, $b=-3$
$\therefore a+b=7+(-3)=4$

01-3 $3+a=5$, $1+1=b$이므로
$a=2$, $b=2$ $\quad\therefore ab=2\cdot2=4$

01-4 점 $(3, -5)$를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(2, -4)$라 하면
$3+p=2$, $-5+q=-4$
$\therefore p=-1$, $q=1$
점 (a, b)를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(a-1, b+1)$
따라서 $a-1=-3$, $b+1=6$이므로
$a=-2$, $b=5$
$\therefore a+b=-2+5=3$

대표 기출 02 도형의 평행이동

꼭 알고 있을 개념

직선 $x+2y+3=0$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$(x+1)+2(y-4)+3=0$, 즉 $x+2y-4=0$

02-1 원 $(x+2)^2+(y-2)^2=1$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x+3+2)^2+(y+1-2)^2=1$
$\therefore (x+5)^2+(y-1)^2=1$

다른 풀이

원 $(x+2)^2+(y-2)^2=1$의 중심의 좌표는 $(-2, 2)$이고, 이 점을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(-2-3, 2-1)$ $\quad\therefore (-5, 1)$
또 원은 평행이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 평행이동한 원의 방정식은
$(x+5)^2+(y-1)^2=1$

02-2 원 $(x+1)^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x-a+1)^2+(y-b)^2=4$
이 원이 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$와 일치하므로
$-a+1=-2$, $-b=1$ $\quad\therefore a=3$, $b=-1$
$\therefore a-b=3-(-1)=4$

다른 풀이

원 $(x+1)^2+y^2=4$의 중심의 좌표는 $(-1, 0)$이고, 이 점을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(-1+a, 0+b)$ $\quad\therefore (a-1, b)$

이 점이 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$의 중심 $(2,\ -1)$과 일치해야 하므로

$a-1=2,\ b=-1 \quad \therefore a=3,\ b=-1$

$\therefore a-b=3-(-1)=4$

02-3 $x^2+y^2-2x+4y=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2=5$

이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-1)^2+(y-b+2)^2=5$

이 원이 원 $x^2+y^2=c$와 일치하므로

$-a-1=0,\ -b+2=0,\ c=5$

$\therefore a=-1,\ b=2,\ c=5$

$\therefore a+b+c=-1+2+5=6$

02-4 원 $x^2+y^2=3$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-2)^2=3$

이 원이 원 $(x-3)^2+(y+b)^2=c$와 일치하므로

$a=3,\ b=-2,\ c=3$

$\therefore a+b+c=3+(-2)+3=4$

대표 기출 03 도형의 대칭이동

꼭 알고 있을 개념

도형 $f(x, y)=0$을 대칭이동한 도형의 방정식은

(1) x축에 대하여 대칭이동 ⇨ $f(x, -y)=0$

(2) y축에 대하여 대칭이동 ⇨ $f(-x, y)=0$

(3) 원점에 대하여 대칭이동 ⇨ $f(-x, -y)=0$

(4) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동 ⇨ $f(y, x)=0$

03-1 직선 $x-2y+1=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y-2x+1=0$

따라서 구하는 x절편은 $\frac{1}{2}$이다.

03-2 직선 $3x-4y+1=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-3x+4y+1=0$

이 직선이 점 $(a, 2)$를 지나므로

$-3a+4\cdot2+1=0,\ -3a+9=0$

$\therefore a=3$

쌍둥이 문제

직선 $2x-y+5=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선이 점 $(-3, a)$를 지날 때, a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[풀이]

직선 $2x-y+5=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $2x+y+5=0$

이 직선이 점 $(-3, a)$를 지나므로

$2\cdot(-3)+a+5=0 \quad \therefore a=1$

답 ①

03-3 원 $(x-3)^2+(y+5)^2=16$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-3)^2+(x+5)^2=16$

$\therefore (x+5)^2+(y-3)^2=16$

이 원을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-1+5)^2+(y+2-3)^2=16$

$\therefore (x+4)^2+(y-1)^2=16$

03-4 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$를 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-2)^2+(y-1)^2=5$

$\therefore (x+2)^2+(y-1)^2=5$

이 원과 직선 $y=-2x+k$, 즉 $-2x-y+k=0$이 한 점에서 만나므로 원의 중심 $(-2, 1)$과 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같다. 즉

$$\frac{|-2\cdot(-2)-1+k|}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

$|k+3|=5,\ k+3=\pm5$

$\therefore k=2$ 또는 $k=-8$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$2\cdot(-8)=-16$

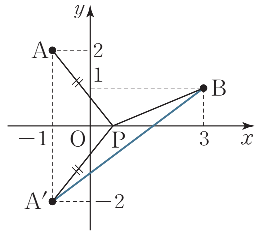
대표 기출 04 대칭이동의 활용

꼭 알고 있을 개념

두 점 $(1, 2)$, $(3, 4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$

04-1 점 $A(-1, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면



$A'(-1, -2)$

$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}$

$=\overline{A'P}+\overline{BP}$

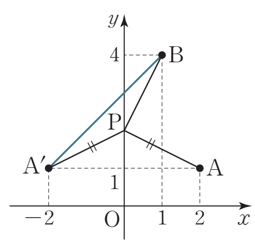
$\geq \overline{A'B}$

$=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+\{1-(-2)\}^2}$

$=5$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 5이다.

04-2 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면



$A'(-2, 1)$

$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}$

$=\overline{A'P}+\overline{BP}$

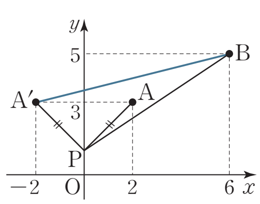
$\geq \overline{A'B}$

$=\sqrt{\{1-(-2)\}^2+(4-1)^2}$

$=3\sqrt{2}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $3\sqrt{2}$이다.

04-3 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면



$A'(-2, 3)$

$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}$

$=\overline{A'P}+\overline{BP}$

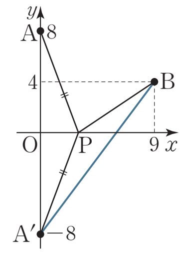
$\geq \overline{A'B}$

$=\sqrt{\{6-(-2)\}^2+(5-3)^2}$

$=2\sqrt{17}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $2\sqrt{17}$이다.

04-4 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 $A'(0, -8)$이므로



$\overline{AP}+\overline{BP}$

$=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq \overline{A'B}$

$=\sqrt{(9-0)^2+\{4-(-8)\}^2}$

$=15$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 15이므로 $m=15$

또 직선 $A'B$의 방정식은

$y-(-8)=\frac{4-(-8)}{9-0}x$

$\therefore y=\frac{4}{3}x-8$

직선 $y=\frac{4}{3}x-8$의 x절편은 6이므로 점 P의 좌표는 $(6, 0)$, 즉 $a=6$

$\therefore m+a=15+6=21$

● 2일차

본문 40~43쪽

05-1 ⑤	05-2 ③	05-3 ③	
06-1 ⑤	06-2 ⑤	06-3 ③	06-4 ⑤
07-1 ③	07-2 ④	07-3 ②	07-4 ②
08-1 ④	08-2 ①	08-3 ①	08-4 ④

대표 기출 05 집합의 뜻

꼭 알고 있을 개념

집합은 어떤 기준에 따라 분명히 정할 수 있는 대상들의 모임이다.

05-1 ①, ②, ③, ④ 큰 수, 일찍 등교한 학생들, 맛있는 과자, 사진을 잘 찍는 사람들 등은 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

⑤ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

따라서 집합인 것은 ⑤이다.

05-2 ① $\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$

② $20=2^2\cdot 5$이므로 $\{2, 5\}$

③ 높은 산은 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

④ $\varnothing$

⑤ $\{2, 12, 22, 32, \cdots\}$

따라서 집합이 아닌 것은 ③이다.

05-3 ㄱ. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

ㄴ. 인구가 많은 나라는 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

ㄷ. 큰 홀수는 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

ㄹ. {월요일, 화요일, $\cdots$, 일요일}

따라서 집합인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

대표 기출 06 집합과 원소, 집합과 집합 사이의 관계

꼭 알고 있을 개념

(1) a가 집합 A의 원소일 때 ⇨ $a \in A$
b가 집합 A의 원소가 아닐 때 ⇨ $b \notin A$

(2) 집합 A가 집합 B의 부분집합일 때 ⇨ $A \subset B$
집합 C가 집합 D의 부분집합이 아닐 때 ⇨ $C \not\subset D$

06-1 ⑤ 집합 $\{3, 6, 9\}$는 집합 A의 부분집합이므로 $\{3, 6, 9\} \subset A$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

06-2 ⑤ 집합 A의 원소의 개수는 4이므로 $n(A)=4$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

06-3 $A=\{1, 2, 4\}$

① $\varnothing \subset A$

② $4 \in A$이므로 $\{4\} \subset A$

③ $2 \in A$이므로 $\{2\} \subset A$

④ $\varnothing \notin A$이므로 $\{\varnothing\} \not\subset A$

⑤ $A=\{1, 2, 4\}$

따라서 옳은 것은 ③이다.

06-4 ⑤ 집합 A의 원소는 $1, 2, \varnothing, \{1, 2\}$로 그 개수는 4이므로 $n(A)=4$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

오답 피하기

집합 기호 안의 집합은 하나의 원소로 생각한다.

대표 기출 07 부분집합의 개수

꼭 알고 있을 개념

집합 $A=\{1, 2, 3\}$일 때

(1) 부분집합의 개수: $2^3=8$

(2) 진부분집합의 개수: $2^3-1=7$

07-1 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

집합 A의 원소의 개수는 5이므로 그 진부분집합의 개수는

$2^5-1=31$

07-2 집합 A의 부분집합 중에서 1, 3을 반드시 원소로 갖는 부분집합은 원소 1, 3을 제외한 집합 $\{2, 4, 5, 6\}$의 부분집합에 원소 1, 3을 넣어서 만든 부분집합과 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$

Lecture 특정한 원소를 갖는 부분집합의 개수

원소가 k개인 집합 A에서 특정한 원소 a개를 반드시 원소로 갖는 집합 A의 부분집합의 개수
⇨ 2^{k-a} (단, $a<k$)

07-3 $\{c, d\} \subset X \subset \{a, b, c, d, e\}$이므로 집합 X는 집합 $\{a, b, c, d, e\}$의 부분집합 중에서 c, d를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

쌍둥이 문제

두 집합 $A=\{3\}$, $B=\{x \mid x$는 6의 약수$\}$에 대하여 $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 4
④ 8 ⑤ 16

[풀이]
$A=\{3\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로 집합 X는 집합 $\{1, 2, 3, 6\}$의 부분집합 중에서 3을 반드시 원소로 갖는 집합이다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{4-1}=2^3=8$

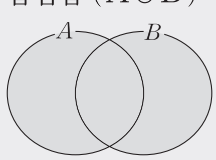
답 ④

07-4 $A\subset X\subset B$, 즉 $\{1, 2, 5\}\subset X\subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$이므로 집합 X는 집합 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$의 진부분집합 중에서 1, 2, 5를 반드시 원소로 갖는 집합이다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{6-3}-1=2^3-1=7$

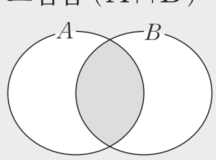
대표 기출 08 집합의 연산

꼭 알고 있을 개념

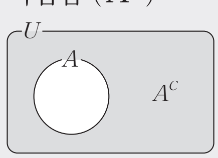
(1) 합집합 $(A\cup B)$



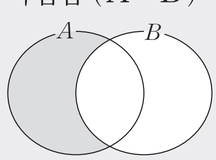
(2) 교집합 $(A\cap B)$



(3) 여집합 (A^C)



(4) 차집합 $(A-B)$

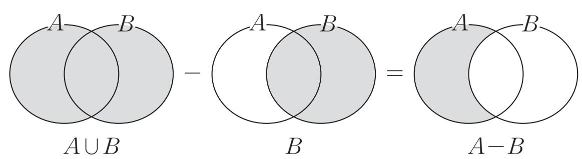


08-1 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B=\{1, 2, 4, 8, 16\}$이므로 $A\cap B=\{1, 2, 4\}$
따라서 $A\cap B$의 모든 원소의 합은
$1+2+4=7$

08-2 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$, $C=\{1, 2, 4\}$이므로
$(A\cup B)\cap C=\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}\cap\{1, 2, 4\}$
$=\{1, 2\}$

08-3 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{4, 5, 6, 7\}$이므로
$(A\cup B)-B$
$=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}-\{4, 5, 6, 7\}$
$=\{1, 2, 3\}$
따라서 $(A\cup B)-B$의 모든 원소의 합은
$1+2+3=6$

다른 풀이



$\therefore (A\cup B)-B=A-B$
$=\{1, 2, 3, 4\}-\{4, 5, 6, 7\}$
$=\{1, 2, 3\}$
따라서 $(A\cup B)-B$의 모든 원소의 합은
$1+2+3=6$

08-4 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B=\{3, 6, 9, 12\}$이므로
$A^C-B=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}-\{3, 6, 9, 12\}$
$=\{1, 5, 7, 11\}$

● **3일차** 본문 44~47쪽

09-1 ②	09-2 ④	09-3 ①	
10-1 ②	10-2 ④	10-3 ②	
11-1 ③	11-2 ④	11-3 ②	11-4 ③
12-1 ③	12-2 ⑤	12-3 ④	12-4 ⑤

대표 기출 09 집합의 연산과 포함 관계

꼭 알고 있을 개념

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

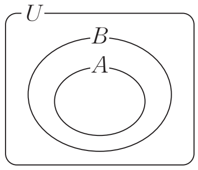
(1) $A\cup A^{C}=U$, $A\cap A^{C}=\varnothing$

(2) $U^{C}=\varnothing$, $\varnothing^{C}=U$

(3) $A^{C}=U-A$, $(A^{C})^{C}=A$

(4) $A-B=A\cap B^{C}$

09-1 $B^{C}\subset A^{C}$이므로 이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $A\subset B$

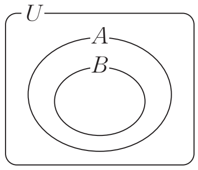
③ $A\cup B=B$

④ $A\cap B=A$

⑤ $A^{C}\not\subset B$

따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

09-2 $B\subset A$이므로 이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $A\cap B=B$

ㄴ. $A-B\neq\varnothing$

ㄷ. $(A-B)\cup(A\cap B)=(A-B)\cup B=A$

이때 $A\cup B=A$이므로

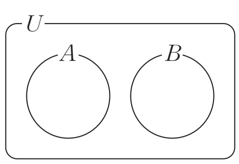
$(A-B)\cup(A\cap B)=A\cup B$

ㄹ. $A-B^{C}=A\cap(B^{C})^{C}=A\cap B=B$이므로

$A-(A-B^{C})^{C}=A-B^{C}=B$

따라서 항상 성립하는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

09-3 두 집합 A, B가 서로소이면 $A\cap B=\varnothing$이므로 이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



② $B\not\subset A$

③ $A\cap B^{C}=A-B=A$

④ $B-A=B$

⑤ $A\cup B\neq U$

따라서 옳은 것은 ①이다.

Lecture 서로소인 집합

두 집합 A, B가 서로소이다. ⇨ $A\cap B=\varnothing$

대표 기출 10 유한집합의 원소의 개수

꼭 알고 있을 개념

전체집합 U가 유한집합일 때, 두 부분집합 A, B에 대하여

(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

(2) $n(A^{C})=n(U)-n(A)$

(3) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$=n(A\cup B)-n(B)$

10-1 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=11+9-7=13$

10-2 주어진 벤다이어그램에서 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수는

$n((A\cup B)^{C})+n(A\cap B)$이다.

이때

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=13+15-4=24$

이므로

$n((A\cup B)^{C})=n(U)-n(A\cup B)$

$=30-24=6$

$\therefore n((A\cup B)^{C})+n(A\cap B)=6+4=10$

따라서 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수는 10이다.

10-3 $n(A^{C}\cap B^{C})=n((A\cup B)^{C})$

$=n(U)-n(A\cup B)$

이므로

$n(A\cup B)=n(U)-n(A^{C}\cap B^{C})$

$=20-6=14$

$\therefore n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$

$=14-5=9$

Lecture 드모르간의 법칙

(1) $(A\cup B)^{C}=A^{C}\cap B^{C}$

(2) $(A\cap B)^{C}=A^{C}\cup B^{C}$

대표 기출 11 명제의 참, 거짓

꼭 알고 있을 개념

(1) 명제: 참, 거짓을 분명하게 판별할 수 있는 문장이나 식 ⇨ 참인 문장이나 식, 거짓인 문장이나 식은 명제이다.

(2) 진리집합을 이용한 명제의 참, 거짓 판별
명제 $p \longrightarrow q$에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때
❶ $P \subset Q \Longleftrightarrow$ 명제 $p \longrightarrow q$가 참
❷ $P \not\subset Q \Longleftrightarrow$ 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓

11-1 ㄱ. $|-6|=6$에서 $|-6|>5$이므로 참인 명제이다.
ㄴ. 10은 합성수이므로 거짓인 명제이다.
ㄷ. 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
ㄹ. 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $180°$이므로 거짓인 명제이다.
ㅁ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
따라서 명제인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ로 그 개수는 3이다.

11-2 ㄱ. $4+5=9$이므로 거짓인 명제이다.
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여
$x^2+4x+9=(x+2)^2+5>0$이므로 참인 명제이다.
ㄷ. 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
따라서 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

오답 피하기
문자를 포함한 식이어도 참, 거짓이 분명한 경우이면 명제가 된다.

11-3 ① 참인 명제
② (반례) $x=0$이면 $x^2=0$이다.
즉 거짓인 명제이다.
③ 모든 자연수는 자기 자신을 약수로 가지므로 100은 100의 약수이다. 즉 참인 명제이다.
④ 모든 무리수는 실수이므로 무리수의 집합은 실수의 집합에 포함된다. 즉 참인 명제이다.
⑤ 홀수와 짝수의 합은 항상 홀수이므로 참인 명제이다.
따라서 거짓인 명제는 ②이다.

11-4 ㄱ. (반례) 4는 12의 약수이지만 6의 약수는 아니다. 즉 거짓인 명제이다.
ㄴ. 모든 자연수 x에 대하여 x^2+x, 즉 $x(x+1)$은 연속하는 두 자연수의 곱이므로 짝수이다.
즉 참인 명제이다.
ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $x^2 \ge 0$이므로 $x^2=-25$를 만족시키는 실수 x의 값은 존재하지 않는다. 즉 거짓인 명제이다.
ㄹ. 주어진 명제의 대우는 'n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.'
$n=2k-1$ (k는 자연수)이라 하면
$n^2=(2k-1)^2=2(2k^2-2k)+1$
이므로 n^2은 홀수이다. 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.
따라서 참인 명제는 ㄴ, ㄹ로 그 개수는 2이다.

대표 기출 12 명제와 그 대우의 참, 거짓

꼭 알고 있을 개념

(1) 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.
(2) 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 거짓이다.

12-1 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

12-2 ① 명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 $Q \subset P^C$
② 명제 $q \longrightarrow \sim p$의 대우 $p \longrightarrow \sim q$도 참이므로 $P \subset Q^C$
③ $P \subset Q^C$이므로 $P \cap Q^C = P$
④ $Q \subset P^C$이므로 $P^C \cup Q = P^C$
⑤ $P \subset Q^C$이므로 $P - Q^C = \varnothing$
따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

쌍둥이 문제

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. $P-Q^C=Q$일 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $p \longrightarrow q$ ② $p \longrightarrow \sim q$
③ $\sim p \longrightarrow \sim q$ ④ $q \longrightarrow \sim p$
⑤ $\sim q \longrightarrow \sim p$

[풀이]
$P-Q^C=P\cap Q=Q$이므로 $Q\subset P$
즉 명제 $q \longrightarrow p$가 참이므로 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 참이다.

답 ③

12-3 ① 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim p$도 참이다.
② 명제 $r \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.
③ 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$도 참이다.
④ 명제 $r \longrightarrow q$가 참이지만 그 역 $q \longrightarrow r$가 항상 참이라고 할 수 없다.
⑤ 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.
따라서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ④이다.

12-4 ① 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow p$도 참이다.
② 명제 $q \longrightarrow r$가 참이므로 그 대우 $\sim r \longrightarrow \sim q$도 참이다.
③ 두 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow p$가 모두 참이므로 명제 $\sim r \longrightarrow p$도 참이다.
④ 명제 $\sim r \longrightarrow p$가 참이므로 그 대우 $\sim p \longrightarrow r$도 참이다.
⑤ 명제 $\sim p \longrightarrow r$가 참이지만 그 역 $r \longrightarrow \sim p$가 항상 참이라고 할 수 없다.
따라서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

● 4일차

본문 48~51쪽

13-1 ①	13-2 ③	13-3 ③	
14-1 ⑤	14-2 ③	14-3 ⑤	14-4 ①
15-1 ③	15-2 (가) 유리수 (나) 유리수 (다) 무리수		
16-1 ③	16-2 ④	16-3 ④	16-4 ⑤

대표 기출 13 충분조건, 필요조건, 필요충분조건

꼭 알고 있을 개념

(1) $p \Longrightarrow q$ ⇨ p는 q이기 위한 충분조건이고, q는 p이기 위한 필요조건이다.
(2) $p \Longleftrightarrow q$ ⇨ p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

13-1 ① 조건 p에서 $(x-y)^2=0$ $\quad \therefore x=y$
즉 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
($\longrightarrow$의 반례) $x=y=1$이면 $x=y$이지만 $x=y\neq 0$이다.
② 조건 q에서 $3x<6$ $\quad \therefore x<2$
즉 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
③ $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
($\longleftarrow$의 반례) $x=2$, $y=2$이면 $x+y=4$이지만 $x\neq 1$, $y\neq 3$이다.
④ 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P=\{4, 8, 12, \cdots\}$, $Q=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$이므로 $P\subset Q$, $Q\not\subset P$
즉 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
⑤ 조건 p에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
즉 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ①이다.

13-2 ㄱ. 조건 p에서 $x=0$, $y=0$
조건 q에서 $x=0$ 또는 $y=0$
즉 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
($\longleftarrow$의 반례) $x=1$, $y=0$이면 $xy=0$이지만 $|x|+|y|\neq 0$이다.
ㄴ. 조건 q에서 $x^2-x=0$, $x(x-1)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=1$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P=\{0\}$, $Q=\{0, 1\}$이므로 $P\subset Q$, $Q\not\subset P$
즉 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
ㄷ. 조건 q에서 $-1<x<1$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P=\{x\,|\,x<1\}$, $Q=\{x\,|\,-1<x<1\}$이므로 $Q\subset P$, $P\not\subset Q$
즉 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄴ이다.

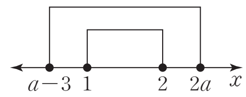
13-3 ① 조건 p에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{-1, 1\}$, $Q=\{1\}$이므로
$P\not\subset Q$, $Q\subset P$
즉 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
② 조건 q에서 $(x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1\}$, $Q=\{1, 2\}$이므로
$P\subset Q$, $Q\not\subset P$
즉 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
③ 조건 p에서 $x=0$
즉 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
④ 조건 p에서 $x>0$, $y>0$ 또는 $x<0$, $y<0$
따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
($\longrightarrow$의 반례) $x=1$, $y=2$이면 $xy>0$이지만 $x>0$, $y>0$이다.
⑤ 조건 q에서 $xz-yz=0$, $(x-y)z=0$
$\therefore x=y$ 또는 $z=0$
즉 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
($\longleftarrow$의 반례) $x=1$, $y=2$, $z=0$이면 $xz=yz$이지만 $x\neq y$이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ③이다.

대표 기출 14 충분조건, 필요조건이 되도록 하는 조건

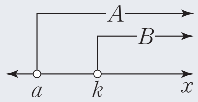
꼭 알고 있을 개념
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때
(1) p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건 ⇨ $P\subset Q$
(2) p는 q이기 위한 필요충분조건 ⇨ $P=Q$

14-1 p는 q이기 위한 필요조건이므로 명제 '$x+1=0$이면 $-x^2+ax+3=0$이다.'가 참이다.
$x+1=0$에서 $x=-1$
$x=-1$을 $-x^2+ax+3=0$에 대입하면
$-1-a+3=0 \qquad \therefore a=2$

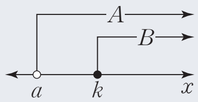
14-2 p는 q이기 위한 충분조건이므로 명제 '$1\le x\le 2$이면 $a-3\le x\le 2a$이다.'가 참이다.
즉 $a-3\le 1$, $2a\ge 2$에서
$1\le a\le 4$
따라서 정수 a는 1, 2, 3, 4로 그 개수는 4이다.



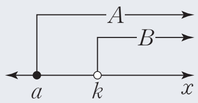
Lecture $B\subset A$가 되도록 하는 a의 값의 범위

(1)


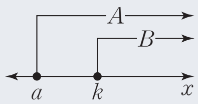
⇨ $a\le k$

(2)


⇨ $a<k$

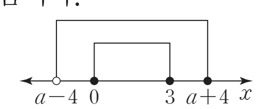
(3)


⇨ $a\le k$

(4)


⇨ $a\le k$

14-3 조건 p에서 $a-4<x\le a+4$
p는 q이기 위한 필요조건이므로 명제 '$0\le x\le 3$이면 $-4<x-a\le 4$이다.'가 참이다.
즉 $a-4<0$, $a+4\ge 3$이므로 $-1\le a<4$
따라서 모든 정수 a의 값의 합은
$-1+0+1+2+3=5$



14-4 $(x+1)^2=a$는 $x=1$ 또는 $x=b$이기 위한 필요충분조건이므로 이차방정식 $(x+1)^2=a$의 두 근은 1, b이다.
$x=1$을 $(x+1)^2=a$에 대입하면 $a=2^2=4$
즉 $(x+1)^2=4$에서 $x^2+2x-3=0$
$(x+3)(x-1)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$
따라서 $b=-3$이므로
$a+b=4+(-3)=1$

대표 기출 15 명제의 증명

꼭 알고 있을 개념

(1) 대우를 이용한 명제의 증명

명제 $p \longrightarrow q$가 참임을 직접 증명할 수 없을 때, 명제와 그 대우는 참, 거짓이 일치하므로 명제의 대우인 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참임을 증명하면 된다.

(2) 귀류법을 이용한 명제의 증명

명제의 결론을 부정하여 가정한 사실 또는 이미 알려진 사실에 모순이 됨을 보이면 된다.

15-1 주어진 명제의 대우는 '실수 x, y에 대하여 $x\neq0$ $\boxed{(가)\ 또는}$ $y\neq0$이면 $x^2+y^2\boxed{(나)\ \neq}0$이다.'

(i) $x\neq0$일 때, $x^2\boxed{(다)\ >}0$이고 $y^2\geq0$이므로

$x^2+y^2>0$, 즉 $x^2+y^2\boxed{(나)\ \neq}0$

(ii) $y\neq0$일 때, $y^2\boxed{(다)\ >}0$이고 $x^2\geq0$이므로

$x^2+y^2>0$, 즉 $x^2+y^2\boxed{(나)\ \neq}0$

(i), (ii)에서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

∴ (가) 또는 (나) $\neq$ (다) $>$

쌍둥이 문제

다음은 명제 '자연수 x, y에 대하여 x^2+y^2이 홀수이면 x 또는 y가 짝수이다.'가 참임을 증명하는 과정이다.

> 주어진 명제의 대우는 '자연수 x, y에 대하여 x, y가 모두 홀수이면 x^2+y^2은 $\boxed{(가)}$ 이다.'
> $x=2m-1$, $y=2n-1$ (m, n은 자연수) 이라 하면
> $x^2+y^2=\boxed{(나)}(2m^2-2m+2n^2-2n+1)$
> 이므로 x^2+y^2은 $\boxed{(가)}$이다.
> 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 구하시오.

[풀이]

주어진 명제의 대우는 '자연수 x, y에 대하여 x, y가 모두 홀수이면 x^2+y^2은 $\boxed{(가)\ 짝수}$이다.'

$x=2m-1$, $y=2n-1$ (m, n은 자연수)이라 하면

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=(2m-1)^2+(2n-1)^2\\&=(4m^2-4m+1)+(4n^2-4n+1)\\&=\boxed{(나)\ 2}(2m^2-2m+2n^2-2n+1)\end{aligned}$$

이므로 x^2+y^2은 $\boxed{(가)\ 짝수}$이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 (가) 짝수 (나) 2

15-2 $1+\sqrt{3}$이 $\boxed{(가)\ 유리수}$라 가정하면

$1+\sqrt{3}=a$ (a는 $\boxed{(가)\ 유리수}$), 즉 $\sqrt{3}=a-1$

a와 1은 유리수이므로 $a-1$도 $\boxed{(나)\ 유리수}$이다.

따라서 $\sqrt{3}$도 $\boxed{(나)\ 유리수}$이다.

이때 $\sqrt{3}$이 $\boxed{(다)\ 무리수}$라는 사실에 모순이므로

$1+\sqrt{3}$은 $\boxed{(다)\ 무리수}$이다.

∴ (가) 유리수 (나) 유리수 (다) 무리수

대표 기출 16 산술평균과 기하평균

꼭 알고 있을 개념

$x>0$일 때

$$\begin{aligned}x+3+\frac{4}{x}&=x+\frac{4}{x}+3\\&\geq2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}+3\\&=2\cdot2+3=7\end{aligned}$$

$\left(단, 등호는\ x=\frac{4}{x},\ 즉\ x=2일\ 때\ 성립\right)$

16-1 $x>-1$에서 $x+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}x+\frac{4}{x+1}&=x+1+\frac{4}{x+1}-1\\&\geq2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}-1\\&=2\cdot2-1=3\end{aligned}$$

이때 등호는 $x+1=\frac{4}{x+1}$일 때 성립하므로

$(x+1)^2=4$, $x+1=2$ ($\because x+1>0$)

$\therefore x=1$

따라서 $x+\frac{4}{x+1}$는 $x=1$일 때 최솟값 3을 가지므로 $m=1$, $n=3$

$\therefore m+n=1+3=4$

16-2 $x>2$에서 $x-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}x+\frac{9}{x-2}&=x-2+\frac{9}{x-2}+2\\&\geq2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{9}{x-2}}+2\\&=2\cdot3+2=8\end{aligned}$$

이때 등호는 $x-2=\dfrac{9}{x-2}$일 때 성립하므로

$(x-2)^2=9$, $x-2=3$ ($\because x-2>0$)

$\therefore x=5$

따라서 $x+\dfrac{9}{x-2}$는 $x=5$일 때 최솟값 8을 가지므로 $m=5$, $n=8$

$\therefore n-m=8-5=3$

16-3 $x>-4$에서 $x+4>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} x+\frac{1}{x+4}&=x+4+\frac{1}{x+4}-4\\ &\geq 2\sqrt{(x+4)\cdot\frac{1}{x+4}}-4\\ &=2\cdot1-4=-2 \end{aligned}$$

이때 등호는 $x+4=\dfrac{1}{x+4}$일 때 성립하므로

$(x+4)^2=1$, $x+4=1$ ($\because x+4>0$)

$\therefore x=-3$

따라서 $x+\dfrac{1}{x+4}$은 $x=-3$일 때 최솟값 -2를 가지므로 $m=-3$, $n=-2$

$\therefore mn=-3\cdot(-2)=6$

16-4 $x>0$, $2y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+2y\geq 2\sqrt{x\cdot 2y}=2\sqrt{2xy}$

(단, 등호는 $x=2y$일 때 성립)

그런데 $x+2y=4$이므로

$2\sqrt{2xy}\leq 4$, 즉 $\sqrt{2xy}\leq 2$

양변을 제곱하면 $2xy\leq 4$

$\therefore xy\leq 2$

또 등호는 $x=2y$일 때 성립하고 $x+2y=4$이므로

$x=2$, $2y=2$ $\therefore x=2$, $y=1$

따라서 xy는 $x=2$, $y=1$일 때 최댓값 2를 가지므로 $\alpha=2$, $\beta=2$, $\gamma=1$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma=2+2+1=5$

● 5일차 본문 52~55쪽

17-1 ㄱ, ㄷ, ㄹ	**17-2** ④	**17-3** ④	
18-1 ⑤	**18-2** ②	**18-3** ⑤	**18-4** ④
19-1 ①	**19-2** ⑤	**19-3** ④	**19-4** ③
20-1 ①	**20-2** ②	**20-3** ④	**20-4** ④

대표 기출 17 함수의 뜻

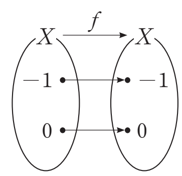
꼭 알고 있을 개념

집합 X에서 집합 Y로의 대응이 함수이려면

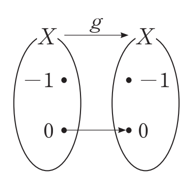
(i) X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응해야 한다.

(ii) X의 원소 중에서 대응하지 않고 남아 있는 원소가 없어야 한다.

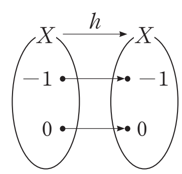
17-1 ㄱ.



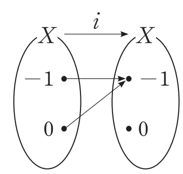
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.

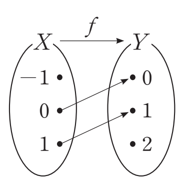


따라서 함수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

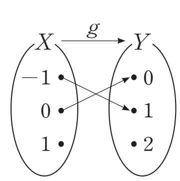
오답 피하기

ㄴ. 정의역의 원소 -1에 대응하는 공역의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

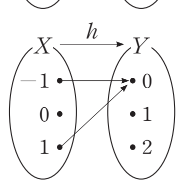
17-2 ①



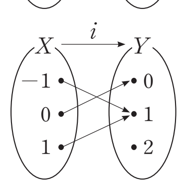
②



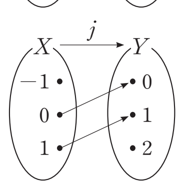
③



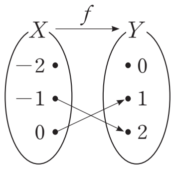
④

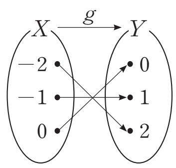


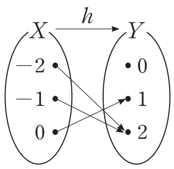
⑤

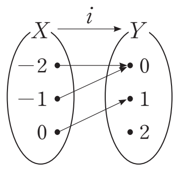


따라서 함수인 것은 ④이다.

17-3 ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄹ.


따라서 함수인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ로 그 개수는 3이다.

대표 기출 18 함수의 정의역, 공역, 치역과 함숫값

꼭 알고 있을 개념

함수 $f : X \longrightarrow Y$에 대하여

(1) 정의역: X (2) 공역: Y

(3) 치역: $\{f(x) \mid x \in X\}$ (4) 함숫값: $f(x)$

18-1 $f(2)=1$, $f(3)=7$이므로
$f(2)+f(3)=1+7=8$

18-2 함수 f의 정의역은 $\{a, b, c\}$, 공역은 $\{1, 2, 3\}$이다. 또 정의역 X의 각 원소에 대한 함숫값은 $f(a)=3$, $f(b)=1$, $f(c)=3$이므로 치역은 $\{1, 3\}$이다.

18-3 함수 f의 정의역은 $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역은 $\{a, b, c, d\}$이다. 또 정의역 X의 각 원소에 대한 함숫값은 $f(1)=a$, $f(2)=c$, $f(3)=b$, $f(4)=c$이므로 치역은 $\{a, b, c\}$이다.

18-4 함수 f의 정의역은 $\{1, 2, 3\}$, 공역은 $\{a, b, c\}$이다. 또 정의역 X의 각 원소에 대한 함숫값은 $f(1)=a$, $f(2)=a$, $f(3)=b$이므로 치역은 $\{a, b\}$이다.

따라서 $m=3$, $n=3-2=1$이므로
$m+n=3+1=4$

대표 기출 19 서로 같은 함수

꼭 알고 있을 개념

두 함수 f, g가 서로 같으려면, 즉 $f=g$이려면
(i) 정의역과 공역이 각각 서로 같다.
(ii) 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$

19-1 $f(-2)=g(-2)$에서 $4-2a+b=8$
$\therefore 2a-b=-4$ ⋯⋯ ㉠
$f(1)=g(1)$에서 $1+a+b=2$
$\therefore a+b=1$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$
$\therefore ab=-1\cdot 2=-2$

19-2 $f(-1)=g(-1)$에서 $-a-b=1$
$f(0)=g(0)$에서 $-b=2$ $\therefore b=-2$
$f(1)=g(1)$에서 $a-b=3$
위의 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$
$\therefore a^2+b^2=1^2+(-2)^2=5$

19-3 $f(0)=g(0)$에서 $a=3$
$f(2)=g(2)$에서 $a+4=2b-1$ ⋯⋯ ㉠
$a=3$을 ㉠에 대입하면 $3+4=2b-1$
$2b=8$ $\therefore b=4$
$\therefore a+b=3+4=7$

19-4 $f(x)=g(x)$에서 $x^2=2x+3$
$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
따라서 집합 X는 공집합이 아닌 집합 $\{-1, 3\}$의 부분집합이므로
$\{-1\}$, $\{3\}$, $\{-1, 3\}$
으로 그 개수는 3이다.

쌍둥이 문제

집합 X를 정의역으로 하는 두 함수
$f(x)=x^2+1$, $g(x)=-x+3$에 대하여
$f=g$가 되도록 하는 집합 X를 모두 구하시오.
(단, $X\neq\varnothing$)

[풀이]
$f(x)=g(x)$에서 $x^2+1=-x+3$
$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$
따라서 집합 X는 공집합이 아닌 집합 $\{-2, 1\}$의 부분집합이므로
$\{-2\}$, $\{1\}$, $\{-2, 1\}$

답 $\{-2\}$, $\{1\}$, $\{-2, 1\}$

대표 기출 20 항등함수와 상수함수

꼭 알고 있을 개념

(1) 항등함수: 정의역의 각 원소가 자기 자신으로 대응하는 함수
⇨ $f: X \longrightarrow X$, $f(x)=x$

(2) 상수함수: 정의역의 모든 원소가 공역의 단 하나의 원소로 대응하는 함수
⇨ $f: X \longrightarrow Y$, $f(x)=c$ (c는 상수)

20-1 ① $f(0)=0$, $f(1)=0$이므로 항등함수가 아니다.
② $g(0)=0$, $g(1)=1$이므로 항등함수이다.
③ $h(0)=0$, $h(1)=1$이므로 항등함수이다.
④ $i(0)=0$, $i(1)=1$이므로 항등함수이다.
⑤ $j(0)=0$, $j(1)=1$이므로 항등함수이다.
따라서 항등함수가 아닌 것은 ①이다.

20-2 ㄱ. $f(-1)=f(1)=4$이므로 상수함수이다.
ㄴ. $g(-1)=g(1)=1$이므로 상수함수이다.
ㄷ. $h(-1)=2$, $h(1)=0$이므로 상수함수가 아니다.
따라서 상수함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

20-3 함수 f는 항등함수이므로
$f(2)=2$, $f(4)=4$, $f(6)=6$
이때 $g(4)=f(4)=4$이고 함수 g는 상수함수이므로 $g(2)=g(4)=g(6)=4$
$\therefore f(2)+g(6)=2+4=6$

20-4 함수 f는 항등함수이므로
$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$
$f(1)+g(2)=4$에서 $1+g(2)=4$
$\therefore g(2)=3$
즉 $g(2)=3$이고 함수 g는 상수함수이므로
$g(1)=g(2)=g(3)=3$
$\therefore f(2)+g(3)=2+3=5$

● 6일차

본문 56~59쪽

21-1 ③	21-2 ④	21-3 ①	21-4 ②
22-1 ②	22-2 ④	22-3 ⑤	22-4 ④
23-1 ④	23-2 ①	23-3 ⑤	23-4 ③
24-1 ①	24-2 ②	24-3 ④	24-4 ②

대표 기출 21 합성함수의 함숫값

꼭 알고 있을 개념

$(g\circ f)(a)=g(f(a))$이므로 합성함수 $g\circ f$의 a에 대한 함숫값 $(g\circ f)(a)$를 구할 때는 $f(a)$의 값을 먼저 구한다.

21-1 $g(2)=3\cdot2-4=2$이므로
$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(2)$
$=2\cdot2+3=7$

21-2 $f(2)=3\cdot2=6$이므로
$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(6)$
$=4\cdot6-9=15$
$g(0)=-9$이므로
$(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(-9)$
$=3\cdot(-9)=-27$
$\therefore (g\circ f)(2)+(f\circ g)(0)=15+(-27)$
$=-12$

21-3 $f(-2)=(-2)^2+1=5$이므로

$(g\circ f)(-2)=g(f(-2))=g(5)=5+a$

따라서 $5+a=2$이므로 $a=-3$

21-4 $f(a)=a+3$이므로

$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(a+3)$

$=5(a+3)-3=5a+12$

따라서 $5a+12=2$이므로 $a=-2$

대표 기출 22 합성함수의 성질

꼭 알고 있을 개념

세 함수 f, g, h에 대하여 합성함수는 다음과 같은 성질을 갖는다.

(1) $f\circ g\neq g\circ f$

(2) $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$

(3) 항등함수 I에 대하여 $f\circ I=I\circ f=f$

22-1 $(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(x^2-2x)$

$(h\circ f)(x)=g(x)$이므로

$h(x^2-2x)=x+2$ ······ ㉠

이때 $h(3)$의 값은 $x^2-2x=3$일 때이므로

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=3\ (\because x\geq 1)$

$x=3$을 ㉠에 대입하면

$h(3)=3+2=5$

22-2 $(g\circ h)(x)=g(h(x))=h(x)-1$

$(g\circ h)(x)=f(x)$이므로 $h(x)-1=-x^2+4x$

따라서 $h(x)=-x^2+4x+1$이므로

$h(3)=-3^2+4\cdot 3+1=4$

다른 풀이

$(g\circ h)(x)=g(h(x))=f(x)$이므로

$g(h(3))=f(3)$

즉 $h(3)-1=-3^2+4\cdot 3=3$이므로

$h(3)=4$

22-3 $(f\circ h)(x)=f(h(x))=13h(x)-2$

$(f\circ h)(x)=g(x)$이므로 $13h(x)-2=5x-1$

$13h(x)=5x+1 \qquad \therefore h(x)=\dfrac{5}{13}x+\dfrac{1}{13}$

$\therefore h(5)=\dfrac{5}{13}\cdot 5+\dfrac{1}{13}=2$

22-4 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=-4(-x+2)+2$

$=4x-6$

이므로

$(h\circ(g\circ f))(x)=h((g\circ f)(x))=h(4x-6)$

$(h\circ(g\circ f))(x)=f(x)$이므로

$h(4x-6)=-x+2$ ······ ㉠

이때 $4x-6=t$라 하면 $x=\dfrac{t+6}{4}$

$x=\dfrac{t+6}{4}$을 ㉠에 대입하면

$h(t)=-\dfrac{t+6}{4}+2=-\dfrac{t}{4}+\dfrac{1}{2}$

$\therefore h(-2)=-\dfrac{-2}{4}+\dfrac{1}{2}=1$

대표 기출 23 역함수의 함숫값

꼭 알고 있을 개념

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여

$f^{-1}(b)=a \Longleftrightarrow f(a)=b$

23-1 $f^{-1}(7)=a$라 하면 $f(a)=7$이므로

$3a+1=7 \qquad \therefore a=2$

$\therefore f^{-1}(7)=2$

23-2 $f(3)=5$이므로 $6+a=5$

$\therefore a=-1$

즉 $f(x)=2x-1$이고 $f^{-1}(3)=b$에서 $f(b)=3$이므로

$2b-1=3 \qquad \therefore b=2$

$\therefore ab=-1\cdot 2=-2$

23-3 $f(-2)=1$이므로 $-2a+b=1$ ⋯⋯ ㉠
$f^{-1}(7)=1$에서 $f(1)=7$이므로
$a+b=7$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=5$

23-4 $f^{-1}(4)=2$에서 $f(2)=4$이므로
$2a+b=4$ ⋯⋯ ㉠
$f^{-1}(-5)=-1$에서 $f(-1)=-5$이므로
$-a+b=-5$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$
$\therefore a^2+b^2=3^2+(-2)^2=13$

대표 기출 24 역함수의 성질

꼭 알고 있을 개념

두 함수 f, g의 역함수가 각각 f^{-1}, g^{-1}일 때 (단, I는 항등함수)

(1) $(f^{-1})^{-1}=f$
(2) $f\circ f^{-1}=I$, $f^{-1}\circ f=I$
(3) $f\circ g=I \Longleftrightarrow f=g^{-1}$, $g=f^{-1}$
(4) $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$

24-1 $g(1)=-3\cdot 1+2=-1$이므로
$(f^{-1}\circ g)(1)=f^{-1}(g(1))=f^{-1}(-1)$
이때 $f^{-1}(-1)=a$라 하면 $f(a)=-1$이므로
$a-1=-1$ $\therefore a=0$
$\therefore (f^{-1}\circ g)(1)=0$

다른 풀이

$y=x-1$이라 하고 x를 y의 식으로 나타내면
$x=y+1$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=x+1$
$\therefore f^{-1}(x)=x+1$
이때 $g(1)=-3\cdot 1+2=-1$이므로
$$\begin{aligned}(f^{-1}\circ g)(1)&=f^{-1}(g(1))=f^{-1}(-1)\\&=-1+1=0\end{aligned}$$

24-2
$$\begin{aligned}(f\circ g^{-1})^{-1}(-3)&=(g\circ f^{-1})(-3)\\&=g(f^{-1}(-3))\\&=-2f^{-1}(-3)+3\end{aligned}$$
이때 $f^{-1}(-3)=a$라 하면 $f(a)=-3$이므로
$a+1=-3$ $\therefore a=-4$
따라서 $f^{-1}(-3)=-4$이므로
$$\begin{aligned}(f\circ g^{-1})^{-1}(-3)&=-2f^{-1}(-3)+3\\&=-2\cdot(-4)+3\\&=11\end{aligned}$$

24-3
$$\begin{aligned}(f^{-1}\circ g)^{-1}(k)&=(g^{-1}\circ f)(k)\\&=g^{-1}(f(k))\\&=-2\end{aligned}$$
이므로 $g(-2)=f(k)$
즉 $-4\cdot(-2)+2=3k+1$이므로
$3k+1=10$ $\therefore k=3$

24-4
$$\begin{aligned}&(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(5)\\&=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(5)\\&=((f\circ f^{-1})\circ g^{-1}\circ f)(5)\\&=(g^{-1}\circ f)(5)\\&=g^{-1}(f(5))\end{aligned}$$
이때 $f(5)=3\cdot 5-1=14$이므로
$g^{-1}(f(5))=g^{-1}(14)$
$g^{-1}(14)=a$라 하면 $g(a)=14$이므로
$-3a+5=14$ $\therefore a=-3$
$$\begin{aligned}\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(5)&=g^{-1}(f(5))\\&=g^{-1}(14)\\&=-3\end{aligned}$$

2주 전

학교시험에 나오는 창의융합, 코딩 서술형 기출 문제

● 1일차 본문 62~63쪽

1-1 (1) $A(3, -1), B(-3, 1), C(-3, -1)$ (2) 6
1-2 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$
2-1 (1) $x+3y+2=0$ (2) -2
2-2 (1) $(x-2)^2+(y+2)^2=9$ (2) 1

1-1 문제 제대로 읽기

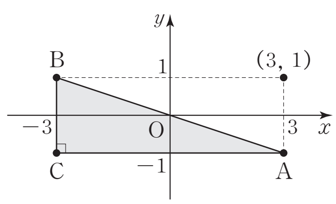
점 $(3, 1)$을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 각각 A, B, C라 할 때, 다음을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]
조건

(1) 세 점 A, B, C의 좌표 질문의 핵심
(2) 삼각형 ABC의 넓이 질문의 핵심

(1) $A(3, -1), B(-3, 1), C(-3, -1)$

❶ 3점

(2) 오른쪽 그림에서
$\overline{AC}=6$, $\overline{BC}=2$이고,
$\angle C=90°$이므로
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2=6$



❷ 4점

1-2 문제 제대로 읽기

다음과 같은 평행이동과 대칭이동에 대하여 원 $x^2+y^2=1$을 평행이동한 후 대칭이동한 도형의 방정식을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]
조건 질문의 핵심

평행이동: x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한다. 조건
대칭이동: 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한다. 조건

원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-2)^2=1$

❶ 3점

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(y-3)^2+(x-2)^2=1$
$\therefore (x-2)^2+(y-3)^2=1$

❷ 3점

2-1 문제 제대로 읽기

직선 l: $3x+y+1=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선을 l'이라 하자. 직선 l'이 원 $(x-a)^2+y^2=4$의 넓이를 이등분할 때, 다음을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. (단, a는 상수) [7점]
조건 조건

(1) 직선 l'의 방정식 질문의 핵심
(2) a의 값 질문의 핵심

(1) 직선 l을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $3y+x+1=0$
이 직선을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선 l'의 방정식은
$3(y+1)+(x-2)+1=0$
$\therefore x+3y+2=0$

❶ 3점

(2) 직선 l'이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(a, 0)$을 지나야 하므로
$a+2=0 \quad \therefore a=-2$

❷ 4점

2-2 문제 제대로 읽기

원 O: $(x+1)^2+y^2=9$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 원을 O'이라 하자. 원 O'이 직선 $3x-4y+k=0$과 접할 때, 다음을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. (단, k는 양수) [7점]
조건 조건

(1) 원 O'의 방정식 질문의 핵심
(2) k의 값 질문의 핵심

(1) 원 O를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 원 O'의 방정식은

$(x-3+1)^2+(y+2)^2=9$

$\therefore (x-2)^2+(y+2)^2=9$

❶ 3점

(2) 원 O'이 직선 $3x-4y+k=0$과 접하므로 원의 중심 $(2, -2)$와 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 3과 같다. 즉

$\dfrac{|3\cdot2-4\cdot(-2)+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$, $|k+14|=15$

$k+14=\pm15 \qquad \therefore k=1\ (\because k>0)$

❷ 4점

● 2일차 본문 64~65쪽

3-1 9	3-2 3
4-1 26	4-2 16

3–1 문제 제대로 읽기

두 집합 $A=\{3a-5, 5\}$, $B=\{a+1, a^2-a-1\}$에 대하여 $A=B$일 때, 집합 A의 모든 원소의 합을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. (단, a는 상수) [7점]

조건 질문의 핵심

$5\in A$에서 $5\in B$이어야 하므로

$a+1=5$ 또는 $a^2-a-1=5$

❶ 1점

(i) $a+1=5$, 즉 $a=4$일 때

$A=\{5, 7\}$, $B=\{5, 11\}$이므로 $A\neq B$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

❷ 2점

(ii) $a^2-a-1=5$일 때

$3a-5=a+1$이어야 하므로

$2a=6 \qquad \therefore a=3$

$A=\{4, 5\}$, $B=\{4, 5\}$이므로 $A=B$가 되어 조건을 만족시킨다.

❸ 2점

(i), (ii)에서 $A=B$일 때, $A=\{4, 5\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 합은

$4+5=9$

❹ 2점

3–2 문제 제대로 읽기

두 집합 $A=\{-1, 0, a^2-3a+4\}$, $B=\{a, b\}$에 대하여 $A\cap B=\{-1, 2\}$일 때, $a-b$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. (단, a, b는 상수) [7점]

조건 질문의 핵심

$A\cap B=\{-1, 2\}$에서 $2\in A$이므로

$a^2-3a+4=2$

❶ 1점

$a^2-3a+2=0$, $(a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=2$

❷ 2점

(i) $a=1$일 때

$A=\{-1, 0, 2\}$, $B=\{1, b\}$이므로 $A\cap B\neq\{-1, 2\}$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$일 때

$A=\{-1, 0, 2\}$, $B=\{2, b\}$

이때 $A\cap B=\{-1, 2\}$가 되려면 $-1\in B$이어야 하므로

$b=-1$

❸ 3점

$\therefore a-b=2-(-1)=3$

❹ 1점

4–1 문제 제대로 읽기

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

조건

$A-B=\{5, 8\}$, $A^C\cap B=\{1, 2, 3\}$,

$A^C\cup B^C=\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$

조건

일 때, 집합 A의 모든 원소의 합을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]

질문의 핵심

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A-B=\{5, 8\}$

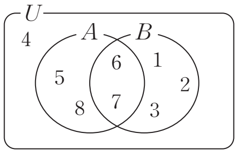
$A^C\cap B=B-A=\{1, 2, 3\}$

$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$

❶ 2점

주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$A=\{5, 6, 7, 8\}$



❷ 2점

따라서 집합 A의 모든 원소의 합은
$5+6+7+8=26$

❸ 2점

4-2 문제 제대로 읽기

전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 12 이하의 짝수$\}$의 두 부분집합 조건
A, B에 대하여

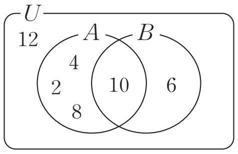
$A=\{2, 4, 8, 10\}$, $A-B^C=\{10\}$,
$A^C \cap B^C=\{12\}$ 조건

일 때, 집합 B의 모든 원소의 합을 구하고, 질문의 핵심 풀이 과정을 쓰시오. [6점]

$U=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $A=\{2, 4, 8, 10\}$
$A-B^C=A\cap B=\{10\}$
$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{12\}$

❶ 2점

주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$B=\{6, 10\}$



❷ 2점

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은
$6+10=16$

❸ 2점

● 3일차 본문 66~67쪽

5-1 (1) 35 (2) 3 (3) 32 **5-2** (1) 13 (2) 26 (3) 10
6-1 (1) (나)
(2) a, b가 실수일 때, a, b는 모두 무리수이다.
(3) 모든 실수 x에 대하여 $x^2\le 0$이다.
6-2 (1) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (2) $\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$ (3) $\{2\}$

5-1 문제 제대로 읽기

40명의 학생을 조건 대상으로 연극과 영화의 선호도를 조사하였더니 연극을 좋아하는 학생은 17명, 영화를 좋아하는 학생은 21명이고, 연극과 영화 중 어느 것도 좋아하지 않는 학생은 5명이었다. 조건 다음을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]

(1) 연극 또는 영화를 좋아하는 학생 수 질문의 핵심
(2) 연극과 영화를 모두 좋아하는 학생 수 질문의 핵심
(3) 연극과 영화 중 하나만 좋아하는 학생 수 질문의 핵심

학생 전체의 집합을 U, 연극을 좋아하는 학생의 집합을 A, 영화를 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=40$, $n(A)=17$, $n(B)=21$, $n(A^C\cap B^C)=5$

(1) 연극 또는 영화를 좋아하는 학생의 집합은 $A\cup B$이므로 구하는 학생 수는

$$\begin{aligned} n(A\cup B)&=n(U)-n((A\cup B)^C)\\ &=n(U)-n(A^C\cap B^C)\\ &=40-5=35 \end{aligned}$$

❶ 2점

(2) 연극과 영화를 모두 좋아하는 학생의 집합은 $A\cap B$이므로 구하는 학생 수는

$$\begin{aligned} n(A\cap B)&=n(A)+n(B)-n(A\cup B)\\ &=17+21-35=3 \end{aligned}$$

❷ 2점

(3) 연극과 영화 중 하나만 좋아하는 학생의 집합은 $(A-B)\cup(B-A)$이므로 구하는 학생 수는

$$\begin{aligned} n((A-B)\cup(B-A))&=n(A\cup B)-n(A\cap B)\\ &=35-3=32 \end{aligned}$$

❸ 3점

5-2 문제 제대로 읽기

36명의 학생을 조건 대상으로 양로원과 복지관에서 봉사활동을 한 학생을 조사하였더니 아래와 같았다. 다음을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]

> (가) 양로원에서 봉사활동을 한 학생은 24명, 복지관에서 봉사활동을 한 학생은 15명이다. 조건
> (나) 양로원에서 봉사활동을 하고 복지관에서 봉사활동을 하지 않은 학생은 11명이다. 조건

질문의 핵심
(1) 양로원과 복지관 모두에서 봉사활동을 한 학생 수
(2) 양로원 또는 복지관에서 봉사활동을 한 학생 수 질문의 핵심
(3) 양로원과 복지관 중 어느 한 곳에서도 봉사활동을 하지 않은 학생 수 질문의 핵심

학생 전체의 집합을 U, 양로원에서 봉사활동을 한 학생의 집합을 A, 복지관에서 봉사활동을 한 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=36$, $n(A)=24$, $n(B)=15$, $n(A-B)=11$

(1) 양로원과 복지관 모두에서 봉사활동을 한 학생의 집합은 $A\cap B$이므로 구하는 학생 수는

$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)$
$=24-11=13$

❶ 2점

(2) 양로원 또는 복지관에서 봉사활동을 한 학생의 집합은 $A\cup B$이므로 구하는 학생 수는

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=24+15-13=26$

❷ 2점

(3) 양로원과 복지관 중 어느 한 곳에서도 봉사활동을 하지 않은 학생의 집합은 $(A\cup B)^C$이므로 구하는 학생 수는

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$
$=36-26=10$

❸ 3점

6-1 문제 제대로 읽기

다음을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]

(가) a, b가 실수일 때, a, b 중 적어도 하나는 유리수이다. (조건)
(나) 어떤 실수 x에 대하여 $x^2>0$이다. (조건)

(1) (가), (나) 중 명제인 것 (질문의 핵심)
(2) (가)의 부정 (질문의 핵심)
(3) (나)의 부정 (질문의 핵심)

(1) (가) a, b의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
(나) 참, 거짓을 판별할 수 있으므로 명제이다.
따라서 명제인 것은 (나)이다.

❶ 2점

(2) (가)의 부정: a, b가 실수일 때, a, b는 모두 무리수이다.

❷ 2점

(3) (나)의 부정: 모든 실수 x에 대하여 $x^2\le 0$이다.

❸ 2점

6-2 문제 제대로 읽기

전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 두 조건 p, q가 아래와 같을 때, 다음을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점] (조건)

p: x는 홀수이다. (조건) q: x는 소수이다. (조건)

(1) 조건 p의 진리집합 (질문의 핵심)
(2) 조건 $\sim q$의 진리집합 (질문의 핵심)
(3) 조건 'p 또는 $\sim q$'의 부정의 진리집합 (질문의 핵심)

(1) 조건 p의 진리집합을 P라 하면
$P=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

❶ 2점

(2) 조건 q의 진리집합을 Q라 하면
$Q=\{2, 3, 5, 7\}$
이때 조건 $\sim q$의 진리집합은 Q^C이므로
$Q^C=\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

❷ 2점

(3) 조건 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cup Q^C$이므로
$P\cup Q^C=\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
따라서 조건 'p 또는 $\sim q$'의 부정의 진리집합은
$(P\cup Q^C)^C=U-(P\cup Q^C)=\{2\}$

❸ 2점

● 4일차 본문 68~69쪽

7-1 (1) 참 (2) 거짓
7-2 (1) 거짓 (2) 참
8-1 (가) $2x=y$ (나) $x=2y$, $k=9$
8-2 틀린 이유는 풀이 참조, $k=\dfrac{9}{2}$

7-1 문제 제대로 읽기

x, y가 실수일 때, 아래의 주어진 명제에 대하여 다음의 참, 거짓을 판별하고, 풀이 과정을 쓰시오. (질문의 핵심)
(단, 거짓인 경우에는 반례를 쓰시오.) [6점] (질문의 핵심)

$x=0$ 또는 $y=0$이면 $x^2+y^2=0$이다. (조건)

(1) 명제의 역 (질문의 핵심)
(2) 명제의 대우 (질문의 핵심)

(1) 역: $x^2+y^2=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이다. (참)

❶ 3점

(2) 대우: $x^2+y^2\neq0$이면 $x\neq0$, $y\neq0$이다. (거짓)
(반례) $x=1$, $y=0$

❷ 3점

7-2 문제 제대로 읽기

x가 실수일 때, 아래의 주어진 명제에 대하여 다음의 참, 거짓을 판별하고, 풀이 과정을 쓰시오.
질문의 핵심
(단, 거짓인 경우에는 반례를 쓰시오.) [6점]
질문의 핵심

$x^2\le16$이면 $x\le4$이다.
조건

(1) 명제의 역
질문의 핵심
(2) 명제의 대우
질문의 핵심

(1) 역: $x\le4$이면 $x^2\le16$이다. (거짓)
(반례) $x=-5$

❶ 3점

(2) 대우: $x>4$이면 $x^2>16$이다. (참)

❷ 3점

8-1 문제 제대로 읽기

다음은 $x>0$, $y>0$일 때, $(2x+y)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)$의 최솟값 k를 구하는 과정으로, 어떤 학생의 오답에 대한 선생님의 첨삭 지도의 일부이다. (가), (나)에 알맞은 식과 바르게 구한 k의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]
조건
질문의 핵심

〈학생의 풀이〉

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+y\ge2\sqrt{2x\cdot y}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{xy}$ …… ㉠

$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\ge2\sqrt{\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{y}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{xy}}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 양변을 각각 곱하면

$(2x+y)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge2\sqrt{2}\cdot\sqrt{xy}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{xy}}=8$

따라서 구하는 최솟값은 8이다.

〈첨삭 내용〉

㉠의 등호가 성립하는 경우는 $\boxed{\text{(가)}}$일 때이고,
㉡의 등호가 성립하는 경우는 $\boxed{\text{(나)}}$일 때이다.
그런데 $\boxed{\text{(가)}}$와 $\boxed{\text{(나)}}$를 동시에 만족시키는 양수 x, y는 존재하지 않는다.

〈첨삭 내용〉

㉠의 등호가 성립하는 경우는 $\boxed{\text{(가) } 2x=y}$일 때이고,
㉡의 등호가 성립하는 경우는 $\frac{2}{x}=\frac{1}{y}$, 즉 $\boxed{\text{(나) } x=2y}$일 때이다.
그런데 $\boxed{\text{(가) } 2x=y}$와 $\boxed{\text{(나) } x=2y}$를 동시에 만족시키는 양수 x, y는 존재하지 않는다.
∴ (가) $2x=y$ (나) $x=2y$

❶ 3점

〈바른 풀이〉

$\frac{2x}{y}>0$, $\frac{2y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(2x+y)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)=4+\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}+1$$
$$\ge5+2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{2y}{x}}$$
$$=5+2\cdot2=9$$
$$\left(\text{단, 등호는 }\frac{2x}{y}=\frac{2y}{x}\text{, 즉 }x=y\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 구하는 최솟값은 9이므로 $k=9$

❷ 3점

8-2 문제 제대로 읽기

다음은 $x>0$, $y>0$이고 $x+y=2$일 때, $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$의 최솟값 k를 구하는 과정이다. 주어진 풀이가 틀린 이유를 말하시오. 또 바르게 구한 k의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]
조건
질문의 핵심

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y\ge2\sqrt{xy}$에서 $2\ge2\sqrt{xy}$, $1\ge\sqrt{xy}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{xy}}\ge1$ …… ㉠

또 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\ge 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{y}}=\frac{4}{\sqrt{xy}}$$

이때 ㉠에 의하여 $\frac{4}{\sqrt{xy}}\ge 4$이므로

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\ge 4$$

따라서 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$의 최솟값은 4이다.

〈틀린 이유〉

㉠의 등호는 $x=y$일 때 성립하고, $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\ge\frac{4}{\sqrt{xy}}$의 등호는 $\frac{1}{x}=\frac{4}{y}$, 즉 $4x=y$일 때 성립한다.
그런데 $x=y$와 $4x=y$를 동시에 만족시키는 양수 x, y는 존재하지 않는다.

❶ 3점

〈바른 풀이〉

$\frac{4x}{y}>0$, $\frac{y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)&=1+\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}+4\\&\ge 5+2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{y}{x}}\\&=5+2\cdot2=9\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 }\frac{4x}{y}=\frac{y}{x}\text{, 즉 }2x=y\text{일 때 성립}\right)$

이때 $x+y=2$이므로 $2\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)\ge 9$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{4}{y}\ge\frac{9}{2}$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{9}{2}$이므로 $k=\frac{9}{2}$

❷ 4점

● 5일차 본문 70~71쪽

9-1 30	**9-2** (1) 4 (2) 24 (3) 6
10-1 $k<-1$ 또는 $k>1$	**10-2** 4

9-1 문제 제대로 읽기

두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{4, 5, 6, 7, 8\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중에서 $f(1)<f(2)$를 만족시키는 일대일함수 f의 개수를 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]
조건 조건 질문의 핵심

(i) $f(1)=4$일 때
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 5, 6, 7, 8 중 하나이므로 4개, $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 3개이므로 함수 f의 개수는
$4\cdot3=12$

(ii) $f(1)=5$일 때
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 6, 7, 8 중 하나이므로 3개, $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 3개이므로 함수 f의 개수는
$3\cdot3=9$

(iii) $f(1)=6$일 때
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 7, 8 중 하나이므로 2개, $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 3개이므로 함수 f의 개수는
$2\cdot3=6$

(iv) $f(1)=7$일 때
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 8이므로 1개, $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 3개이므로 함수 f의 개수는
$1\cdot3=3$

❶ 4점

(i)~(iv)에서 구하는 함수 f의 개수는
$12+9+6+3=30$

❷ 2점

9-2 문제 제대로 읽기

집합 $X=\{a, b, c, d\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f 중에서 다음을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]
조건

(1) 상수함수의 개수
질문의 핵심
(2) 일대일대응의 개수
질문의 핵심
(3) $f(a)=c$인 일대일대응의 개수
질문의 핵심

(1) $f(x)=k$라 하면 상수 k의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d 중 하나이므로 구하는 상수함수의 개수는 4이다.

❶ 2점

(2) $f(a)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d 중 하나이므로 4개
$f(b)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(a)$의 값을 제외한 3개
$f(c)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(a)$, $f(b)$의 값을 제외한 2개

$f(d)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$의 값을 제외한 1개
따라서 구하는 일대일대응의 개수는
$4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

❷ 2점

(3) $f(b)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(a)$의 값, 즉 c를 제외한 3개
$f(c)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(a)$, $f(b)$의 값을 제외한 2개
$f(d)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$의 값을 제외한 1개
따라서 $f(a)=c$인 일대일대응의 개수는
$3\cdot2\cdot1=6$

❸ 2점

Lecture **함수의 개수**

집합 X의 원소의 개수가 n, 집합 Y의 원소의 개수가 m일 때
(1) X에서 Y로의 함수의 개수 ⇨ m^n
(2) X에서 Y로의 일대일함수의 개수
⇨ $m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$ (단, $m\geq n$)
(3) X에서 X로의 일대일대응의 개수
⇨ $n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1$
(4) X에서 Y로의 상수함수의 개수 ⇨ m

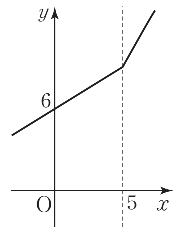
10-1 문제 제대로 읽기

함수 $f(x)=|x-5|+kx+1$의 역함수가 존재할 때, 실수 k의 값의 범위를 구하고, 풀이 과정을 쓰시오.
조건
질문의 핵심
[7점]

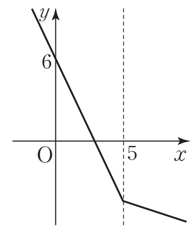
(i) $x\geq5$일 때
$f(x)=(x-5)+kx+1$
$=(k+1)x-4$
(ii) $x<5$일 때
$f(x)=-(x-5)+kx+1$
$=(k-1)x+6$

❶ 3점

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같아야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

즉 $x\geq5$일 때와 $x<5$일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로 $(k+1)(k-1)>0$
$\therefore k<-1$ 또는 $k>1$

❷ 4점

Lecture **역함수가 존재할 조건**

함수 f의 역함수가 존재한다. ⟺ 함수 f가 일대일대응이다.

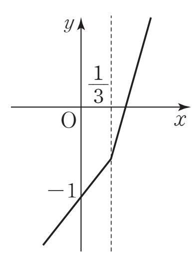
10-2 문제 제대로 읽기

함수 $f(x)=|3x-1|+kx-2$가 일대일대응일 때, 자연수 k의 최솟값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [8점]
조건
질문의 핵심

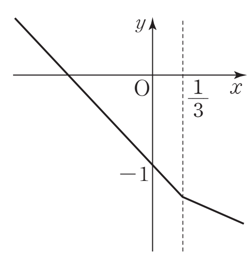
(i) $x\geq\frac{1}{3}$일 때
$f(x)=(3x-1)+kx-2$
$=(k+3)x-3$
(ii) $x<\frac{1}{3}$일 때
$f(x)=-(3x-1)+kx-2$
$=(k-3)x-1$

❶ 3점

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같아야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

즉 $x\geq\frac{1}{3}$일 때와 $x<\frac{1}{3}$일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로 $(k+3)(k-3)>0$
$\therefore k<-3$ 또는 $k>3$

❷ 4점

따라서 자연수 k의 최솟값은 4이다.

❸ 1점

● 6일차

본문 72~73쪽

11-1 -12 **11-2** (1) $a=2$, $b=3$ (2) 6
12-1 4 **12-2** 25

11-1 문제 제대로 읽기

두 함수 $f(x)=x+a$, $g(x)=bx+c$에 대하여

$(f\circ g)(x)=4x-2$, $f(2)=3$ 조건

일 때, abc의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. 질문의 핵심

(단, a, b, c는 상수) [6점]

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=bx+c+a$

❶ 2점

즉 $bx+c+a=4x-2$이므로
$b=4$, $c+a=-2$
또 $f(2)=3$이므로
$f(2)=2+a=3$ $\quad\therefore a=1$
$a=1$을 $c+a=-2$에 대입하면
$c+1=-2$ $\quad\therefore c=-3$

❷ 3점

$\therefore abc=1\cdot4\cdot(-3)=-12$

❸ 1점

11-2 문제 제대로 읽기

함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 $(f\circ f)(x)=4x+9$일 때, 다음을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. 조건

(단, $a>0$이고 a, b는 상수) [7점]

(1) a, b의 값 질문의 핵심
(2) $f^{-1}(15)$의 값 질문의 핵심

(1) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=a(ax+b)+b$
$=a^2x+ab+b$
즉 $a^2x+ab+b=4x+9$이므로
$a^2=4$, $ab+b=9$
$a^2=4$에서 $a=2$ ($\because a>0$)
$a=2$를 $ab+b=9$에 대입하면
$2b+b=9$ $\quad\therefore b=3$

❶ 4점

(2) $f(x)=2x+3$
이때 $f^{-1}(15)=k$라 하면 $f(k)=15$이므로
$2k+3=15$ $\quad\therefore k=6$
$\therefore f^{-1}(15)=6$

❷ 3점

12-1 문제 제대로 읽기

함수 $f(x)=2x^2-4x+2$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표가 (a, b)일 때, 조건 $a+b$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. (단, $x\geq1$) 질문의 핵심 조건

[6점]

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
$2x^2-4x+2=x$에서 $2x^2-5x+2=0$
$(2x-1)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=2$ ($\because x\geq1$)
$x=2$를 $y=x$에 대입하면 $y=2$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $(2, 2)$이므로

❶ 4점

$a=2$, $b=2$

❷ 1점

$\therefore a+b=2+2=4$

❸ 1점

12-2 문제 제대로 읽기

함수 $f(x)=2x-5$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표가 (a, b)일 때, ab의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점] 조건 질문의 핵심

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
$2x-5=x$에서 $x=5$
$x=5$를 $y=x$에 대입하면 $y=5$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $(5, 5)$이므로

❶ 4점

$a=5$, $b=5$

❷ 1점

$\therefore ab=5\cdot5=25$

❸ 1점

1주 전

미리 풀어보는 우리 학교 중간고사

● 1일차 본문 76~79쪽

01 ②	02 ③	03 ①	04 ③	05 ②
06 ④	07 ⑤	08 ⑤	09 ⑤	10 ③
11 ④	12 ③	13 ⑤	14 ③	15 ④
16 ④	17 ①			

[서술형 1] $a=6$, $b=2$, $c=1$
[서술형 2] 15
[서술형 3] (1) 참 (2) 거짓

01 직선 $y=ax+6$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y+3=a(x+1)+6$ $\quad\therefore y=ax+a+3$
이 직선이 직선 $y=-2x+b$와 일치하므로
$a=-2$, $a+3=b$
즉 $b=-2+3=1$이므로
$ab=-2\cdot1=-2$

02 직선 $2x-y-2=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$2y-x-2=0$ $\quad\therefore x-2y+2=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
직선 ㉠이 원 $(x+3)^2+(y-2)^2=a$에 접하므로 원의 중심 $(-3, 2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{a}$와 같다. 즉
$\dfrac{|-3-2\cdot2+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{a}$, $\sqrt{5}=\sqrt{a}$
$\therefore a=5$

Lecture 도형의 대칭이동

도형 $f(x, y)=0$을 대칭이동한 도형의 방정식은
(1) x축에 대하여 대칭이동 ⇨ $f(x, -y)=0$
(2) y축에 대하여 대칭이동 ⇨ $f(-x, y)=0$
(3) 원점에 대하여 대칭이동 ⇨ $f(-x, -y)=0$
(4) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동 ⇨ $f(y, x)=0$

03 ② 9는 집합 A의 원소이므로 $9\in A$
③ 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$
④ 집합 $\{1\}$은 집합 A의 부분집합이 아니므로 $\{1\}\not\subset A$
⑤ 집합 $\{0\}$은 집합 A의 부분집합이므로 $\{0\}\subset A$
따라서 옳은 것은 ①이다.

04 $A\subset X\subset B$에서 $\{3, 5\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로 집합 X는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분집합 중에서 3, 5를 반드시 원소로 갖는 집합이다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{6-2}=2^4=16$

05 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{4, 5, 6, 7\}$에서
$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$이므로
$n(A\cup B)=7$

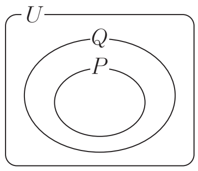
06 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
$A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로
$A\cap B^C=A-B$
$=\{2, 3, 5, 7\}-\{1, 2, 3, 6\}$
$=\{5, 7\}$
따라서 $A\cap B^C$의 모든 원소의 합은
$5+7=12$

07 $A\cap B=\{2\}$에서 $2\in B$이므로 $a=2$
즉 $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{2, 3\}$이므로
$A-B=\{1, 4\}$
따라서 $A-B$의 모든 원소의 합은
$1+4=5$

08 ① $5-2=3$이므로 거짓인 명제이다.
② 참인 명제이다.
③ 정삼각형은 세 내각의 크기가 60°로 같으므로 참인 명제이다.

④ $\sqrt{3}$은 무리수이므로 거짓인 명제이다.
⑤ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
따라서 명제가 아닌 것은 ⑤이다.

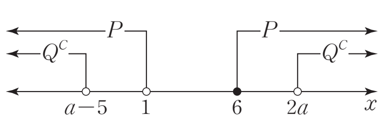
09 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 $P \subset Q$
오른쪽 그림과 같이 벤다이어그램으로 나타내면



$P^C \cup Q = U$
따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

10 ① 역: 짝수는 4의 배수이다. (거짓)
(반례) 2는 짝수이지만 4의 배수가 아니다.
② 역: $x^2=9$이면 $x=3$이다. (거짓)
(반례) $x=-3$이면 $x^2=9$이지만 $x \neq 3$이다.
③ 역: $x>1$이면 $|x|>1$이다. (참)
④ 역: $x+2<9$이면 $2x-1<5$이다. (거짓)
(반례) $x=5$이면 $x+2<9$이지만 $2x-1>5$이다.
⑤ 역: x^2이 유리수이면 x는 무리수이다. (거짓)
(반례) $x=2$이면 x^2이 유리수이고 x도 유리수이다.
따라서 그 역이 참인 명제는 ③이다.

11 $\sim q$: $x<a-5$ 또는 $x>2a$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x \mid x<1 \text{ 또는 } x \geq 6\}$,
$Q^C=\{x \mid x<a-5 \text{ 또는 } x>2a\}$
이때 명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이므로 $Q^C \subset P$



위의 그림에서 $a-5 \leq 1$, $2a \geq 6$이어야 하므로
$3 \leq a \leq 6$
따라서 정수 a는 3, 4, 5, 6으로 그 개수는 4이다.

12 ① 조건 p에서 $x=0$, $y=0$
조건 q에서 $x=0$, $y=0$
즉 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
② p: $x+y>-2 \Longleftarrow q$: $x>-1$, $y>-1$
($\longrightarrow$의 반례) $x=-5$, $y=5$
즉 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
③ p: $x<0$, $y<0 \Longrightarrow q$: $xy>x+y$
($\longleftarrow$의 반례) $x=2$, $y=3$
즉 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
④ 조건 p에서 $x=y$ 또는 $x=-y$
즉 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
($\longrightarrow$의 반례) $x=1$, $y=-1$
⑤ $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
($\longrightarrow$의 반례) $x=-\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ③이다.

13 $\sqrt{5}$가 $\boxed{\text{(가) 유리수}}$라고 가정하면
$\sqrt{5}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)
으로 나타낼 수 있다.
양변을 제곱하면 $5=\dfrac{n^2}{m^2}$이므로
$n^2=\boxed{\text{(나) } 5m^2}$ $\cdots\cdots$ ㉠
㉠에서 n^2이 $\boxed{\text{(다) 5의 배수}}$이므로 n도 5의 배수이다.
$n=5k$ (k는 자연수)로 놓고 ㉠에 대입하면
$n^2=(5k)^2=5m^2$, 즉 $m^2=\boxed{\text{(라) } 5k^2}$
위의 식에서 m^2이 5의 배수이므로 m도 5의 배수이다.
즉 m, n이 모두 5의 배수이므로 m, n이 서로소라는 가정에 모순이다.
따라서 $\sqrt{5}$는 $\boxed{\text{(마) 유리수}}$가 아니다.
이상에서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

14 $2x>0$, $\dfrac{18}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$2x+\dfrac{18}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \dfrac{18}{x}}=12$

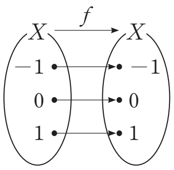
이때 등호는 $2x=\frac{18}{x}$, 즉 $x=3$일 때 성립하므로

$2x+\frac{18}{x}$은 $x=3$일 때 최솟값 12를 갖는다.

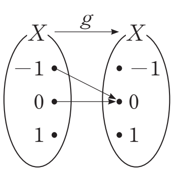
따라서 $\alpha=3$, $\beta=12$이므로

$\beta-\alpha=12-3=9$

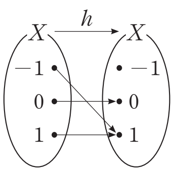
15 ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



따라서 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

16 $f(1)=2$, $f(3)=5$이므로

$f(1)+f(3)=2+5=7$

17 $f(1)=g(1)$에서 $-3+a=b+1$

$\therefore a-b=4$ ⋯⋯ ㉠

$f(2)=g(2)$에서 $-6+a=4b+1$

$\therefore a-4b=7$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

$\therefore ab=3\cdot(-1)=-3$

[서술형 1] 원 $x^2+y^2+4x+10y+5=0$에서

$(x+2)^2+(y+5)^2=24$ ⋯⋯ ㉠

원 $x^2+y^2-8x+6y+c=0$에서

$(x-4)^2+(y+3)^2=25-c$ ⋯⋯ ㉡

❶

원 ㉠의 중심 $(-2,\ -5)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점이 원 ㉡의 중심 $(4,\ -3)$과 같아야 하므로

$-2+a=4$, $-5+b=-3$

$\therefore a=6$, $b=2$

❷

또 두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이가 같으므로

$24=25-c$ $\qquad\therefore c=1$

❸

채점 기준	배점
❶ 주어진 두 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	2점
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ c의 값을 구할 수 있다.	2점

[서술형 2] $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

❶

이때 $X\subset A$이고 $X\neq A$이므로 집합 X는 집합 A의 진부분집합이다.

❷

따라서 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합 A의 진부분집합의 개수는

$2^{6-2}-1=2^4-1=15$

❸

채점 기준	배점
❶ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	2점
❷ 집합 X가 집합 A의 진부분집합임을 알 수 있다.	2점
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	3점

Lecture **진부분집합**

두 집합 A, B에 대하여 $A\subset B$이고 $A\neq B$일 때, 집합 A를 집합 B의 진부분집합이라 한다.

[서술형 3] (1) 역: $x>0$, $y>0$이면 $xy>0$이다. (참)

❶

(2) 대우: $x\leq 0$ 또는 $y\leq 0$이면 $xy\leq 0$이다. (거짓)

(반례) $x=-1$, $y=-2$

❷

채점 기준	배점
❶ 주어진 명제의 역을 구하고, 참, 거짓을 판별할 수 있다.	3점
❷ 주어진 명제의 대우를 구하고, 참, 거짓을 판별할 수 있다.	3점

● 2일차

본문 80~83쪽

01 ③	02 ①	03 ④	04 ④	05 ③
06 ⑤	07 ③	08 ⑤	09 ①	10 ②
11 ③	12 ①	13 ②	14 ⑤	15 ⑤
16 ④	17 ②			

[서술형 1] $(3, -7)$
[서술형 2] 4
[서술형 3] $\{-1, 1, 3, 5\}$

01 점 (a, b)를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(3, 4)$이므로

$a+1=3, b+3=4 \qquad \therefore a=2, b=1$

$\therefore a+b=2+1=3$

02 직선 $2x-y-5=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$2y-x-5=0 \qquad \therefore x-2y+5=0$

이 직선을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$(x-1)-2(y-2)+5=0$

$\therefore x-2y+8=0$

따라서 $a=-2, b=8$이므로

$a+b=-2+8=6$

03 ① $0 \notin \varnothing$

② 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로
$\varnothing \subset \varnothing$

③ $\{4\} \subset \{1, 4, 8\}$

⑤ $\{x | x$는 4의 약수$\} = \{1, 2, 4\}$
$\{x | x$는 2의 약수$\} = \{1, 2\}$
$\therefore \{x | x$는 4의 약수$\} \not\subset \{x | x$는 2의 약수$\}$

따라서 옳은 것은 ④이다.

04 $a^2 \geq 0$이므로 $a^2=1$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

(i) $a=-1$일 때
$A=\{-1, 1\}$이므로 $A=B$

(ii) $a=1$일 때
$A=\{1\}$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-1$

05 $n(A)=6$이므로 원소 1, 3을 반드시 포함하고 원소 5를 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$2^{6-2-1}=2^3=8$

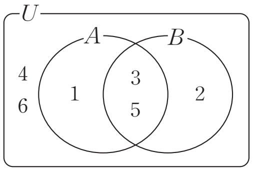
Lecture 부분집합의 개수

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

(1) 집합 A의 원소 중 특정한 k개를 원소로 갖는 (또는 갖지 않는) 부분집합의 개수
⇨ 2^{n-k} (단, $k \leq n$)

(2) 집합 A의 원소 중 특정한 k개는 원소로 갖고 l개는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수
⇨ 2^{n-k-l} (단, $k+l \leq n$)

06 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



⑤ $B \cap A^C = B-A$
$= \{2\}$

07 $n(A^C \cap B^C) = n((A \cup B)^C)$
$= n(U) - n(A \cup B)$

이므로

$7 = 26 - n(A \cup B) \qquad \therefore n(A \cup B) = 19$

$\therefore n(B-A) = n(A \cup B) - n(A)$
$= 19 - 9 = 10$

Lecture 드모르간의 법칙

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

(1) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(2) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

08 학생 전체의 집합을 U, 미술관을 희망하는 학생의 집합을 A, 박물관을 희망하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=30,\ n(A)=15,\ n(B)=19,$

$n(A\cap B)=10$

$\therefore\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=15+19-10=24$

이때 어느 곳도 희망하지 않는 학생의 집합은 $A^C\cap B^C$이므로 구하는 학생 수는

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B)$

$=30-24=6$

09 ① x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

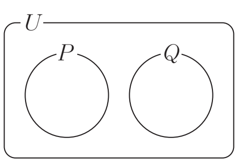
②, ④, ⑤ 참인 명제이다.

③ 거짓인 명제이다.

따라서 명제가 아닌 것은 ①이다.

10 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 $P\subset Q^C$

오른쪽 그림과 같이 벤다이어그램으로 나타내면



$P\cap Q=\varnothing$

따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

오답 피하기

③ $P\cup Q^C=Q^C$

④ $P-Q=P$

⑤ $Q-P=Q$

11 조건 p에서 $-1\le x-a\le 1$

$\therefore\ a-1\le x\le a+1$

조건 q에서 $-4\le x-2\le 4$

$\therefore\ -2\le x\le 6$

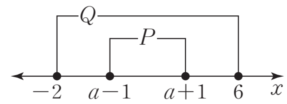
두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$P=\{x\,|\,a-1\le x\le a+1\}$

$Q=\{x\,|\,-2\le x\le 6\}$

이때 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 $P\subset Q$

오른쪽 그림에서



$a-1\ge -2,\ a+1\le 6$

이어야 하므로

$-1\le a\le 5$

따라서 실수 a의 최댓값은 5이다.

12 (가) p: $x=-2$, q: $(x-1)(x+2)=0$이라 하면

조건 q에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$P=\{-2\},\ Q=\{-2,\ 1\}$이므로

$P\subset Q,\ Q\not\subset P$

즉 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 $\boxed{\text{충분}}$ 조건이다.

(나) p: $x=5$, q: $x-3>0$이라 하면

조건 q에서 $x>3$

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$P=\{5\},\ Q=\{x\,|\,x>3\}$이므로

$P\subset Q,\ Q\not\subset P$

즉 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 $\boxed{\text{충분}}$ 조건이다.

13 ① $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

($\longleftarrow$의 반례) $x=1,\ y=1$

② 조건 q에서 양변을 제곱하면 $(x+y)^2=(x-y)^2$

$x^2+2xy+y^2=x^2-2xy+y^2$

$\therefore\ xy=0$

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

③ $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

($\longrightarrow$의 반례) $x=3,\ y=0$

④ $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

($\longleftarrow$의 반례) $x=-1,\ y=2$

⑤ 조건 p에서 $x>0,\ y>0$ 또는 $x<0,\ y<0$이므로

$p \not\Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이다.

($\longrightarrow$의 반례) $x=-1,\ y=-1$

($\longleftarrow$의 반례) $x=2,\ y=-1$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ②이다.

14 p는 q이기 위한 충분조건이므로 명제 $p \longrightarrow q$가 참이다.
r는 q이기 위한 필요조건이므로 명제 $q \longrightarrow r$가 참이다.
또 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$도 참이고, 그 대우 $\sim r \longrightarrow \sim p$도 참이다.
따라서 항상 참인 명제는 ⑤이다.

15 $\frac{2a}{b}>0$, $\frac{2b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right)=2+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}+2$$
$$\geq 4+2\sqrt{\frac{2a}{b}\cdot\frac{2b}{a}}$$
$$=4+2\cdot 2=8$$
$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{2a}{b}=\frac{2b}{a}\text{, 즉 } a=b\text{일 때 성립}\right)$$

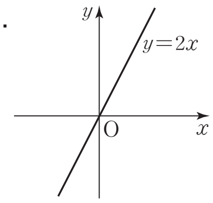
따라서 $(a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right)$의 최솟값은 8이다.

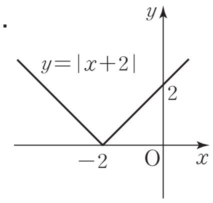
16 주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면
$f(1+1)=f(1)+f(1)$
$\therefore f(2)=2+2=4$
주어진 식의 양변에 $x=2$, $y=2$를 대입하면
$f(2+2)=f(2)+f(2)$
$\therefore f(4)=4+4=8$
주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=4$를 대입하면
$f(1+4)=f(1)+f(4)$
$\therefore f(5)=2+8=10$

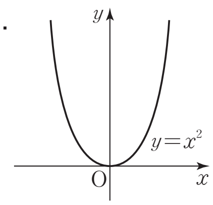
17 ㄴ. (반례) $f(x)=|x+2|$라 하면
$x_1=-3$, $x_2=-1$일 때 $x_1\neq x_2$이지만
$f(x_1)=|-3+2|=1$, $f(x_2)=|-1+2|=1$
$\therefore f(x_1)=f(x_2)$
즉 함수 $y=|x+2|$는 일대일대응이 아니다.
ㄷ. (반례) $f(x)=x^2$이라 하면
$x_1=-1$, $x_2=1$일 때 $x_1\neq x_2$이지만
$f(x_1)=(-1)^2=1$, $f(x_2)=1^2=1$
$\therefore f(x_1)=f(x_2)$
즉 함수 $y=x^2$은 일대일대응이 아니다.
ㅁ. (반례) $f(x)=2$라 하면
$x_1=1$, $x_2=2$일 때 $x_1\neq x_2$이지만
$f(x_1)=2$, $f(x_2)=2$
$\therefore f(x_1)=f(x_2)$
즉 함수 $y=2$는 일대일대응이 아니다.
따라서 일대일대응인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

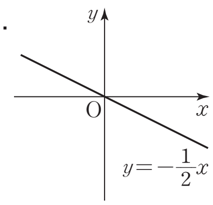
다른 풀이

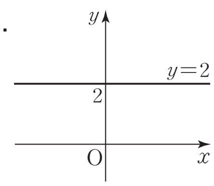
주어진 함수의 그래프는 다음과 같다.

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄹ.


ㅁ.


이때 치역의 원소 a에 대하여 직선 $y=a$와 함수의 그래프가 오직 한 점에서 만나고, 치역과 공역이 같은 함수는 ㄱ, ㄹ이다.
따라서 일대일대응인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

[서술형 1] 점 $(1, 2)$를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(1-4, 2+5)$ $\quad\therefore (-3, 7)$
❶
이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(3, -7)$
❷

채점 기준	배점
❶ 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	3점
❷ ❶에서 구한 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	3점

[서술형 2] $A\cap X=X$에서 $X\subset A$
$(A-B)\cup X=X$에서 $(A-B)\subset X$
$\therefore (A-B)\subset X\subset A$
······ ❶
이때 $A-B=\{1, 3, 5\}$이므로
$\{1, 3, 5\}\subset X\subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$
즉 집합 X는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중에서 1, 3, 5를 반드시 원소로 갖는 집합이다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{5-3}=2^2=4$
······ ❷

채점 기준	배점
❶ 집합 X의 포함 관계를 알 수 있다.	4점
❷ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	3점

[서술형 3] $f(1)=2\cdot1-3=-1$, $f(2)=2\cdot2-3=1$,
$f(3)=2\cdot3-3=3$, $f(4)=2\cdot4-3=5$
······ ❶
따라서 함수 $f(x)=2x-3$의 치역은
$\{-1, 1, 3, 5\}$
······ ❷

채점 기준	배점
❶ 집합 X의 각 원소에 대한 함숫값을 구할 수 있다.	4점
❷ 함수 $f(x)=2x-3$의 치역을 구할 수 있다.	3점

● 3일차
본문 84~87쪽

01 ② 02 ④ 03 ① 04 ④ 05 ③
06 ④ 07 ③ 08 ③ 09 ② 10 ⑤
11 ② 12 ① 13 ① 14 ① 15 ②
16 ④ 17 ②
[서술형 1] (1) $y=x-3$ (2) $y=-3x+9$ (3) 18
[서술형 2] $\{-3\}$
[서술형 3] -6

01 점 $(2, -1)$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(2+1, -1-4)$ $\therefore (3, -5)$
따라서 $a=3$, $b=-5$이므로
$a+b=3+(-5)=-2$

02 점 $(3, -5)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-3, 5)$

03 직선 $y=2x-1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y-3=2(x+1)-1$
$\therefore y=2x+4$

04 ㄱ. $\{1, 3, 5, \cdots\}$
ㄴ. $\{3, 6, 9, \cdots\}$
ㄷ. $x^2+2x=0$에서 $x(x+2)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$
$\therefore \{-2, 0\}$
ㄹ. $\{1, 3, 5, 15\}$
따라서 집합 $\{2, 4, 6\}$과 서로소인 집합은 ㄱ, ㄷ, ㄹ로 그 개수는 3이다.

05 $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 집합 A의 원소 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합이다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{5-2}=2^3=8$

Lecture 부분집합의 개수
집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여
(1) 집합 A의 원소 중 특정한 k개를 원소로 갖는 (또는 갖지 않는) 부분집합의 개수
⇨ 2^{n-k} (단, $k\le n$)
(2) 집합 A의 원소 중 특정한 k개는 원소로 갖고 l개는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수
⇨ 2^{n-k-l} (단, $k+l\le n$)

06 $A-B=\{1, 2\}$, $B-A=\{6\}$이므로
$(A-B)\cup(B-A)=\{1, 2, 6\}$
따라서 $(A-B)\cup(B-A)$의 모든 원소의 합은
$1+2+6=9$

07 $B^C=\{2, 4\}$이므로 $A\cup B^C=\{1, 2, 4\}$
따라서 $A\cup B^C$의 모든 원소의 합은
$1+2+4=7$

08 $X\cap B=\{1, 3, 5\}$이므로 집합 X는 1, 3, 5를 반드시 원소로 갖고, 7은 원소로 갖지 않는 집합이다. 이때 $X\subset A$이므로 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 1, 3, 5를 반드시 원소로 갖고, 7은 원소로 갖지 않는 집합이다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{7-3-1}=2^3=8$

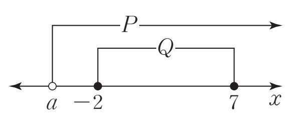
09 ② 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

10 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 $P\subset Q$
명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 $P\subset R^C$
① $Q\supset P$
② $P\subset Q$이므로 $P\cap Q=P$
③ 두 집합 Q, R 사이의 관계는 알 수 없다.
④ $P\subset R^C$이므로 $P-R=P\cap R^C=P$
⑤ $P\subset R^C$이므로 $P\cup R^C=R^C$
따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

11 명제 $\sim p \longrightarrow r$가 참이므로 그 대우 $\sim r \longrightarrow p$도 참이다. 또 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow q$도 참이다.
① 두 명제 $\sim p \longrightarrow r$, $r \longrightarrow q$가 모두 참이므로 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이다.
③ 명제 $\sim r \longrightarrow p$는 참이다.
④ 명제 $r \longrightarrow q$는 참이다.
⑤ 두 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$, $\sim r \longrightarrow p$가 모두 참이므로 명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이다.
따라서 항상 참이라고 할 수 없는 명제는 ②이다.

12 ① 조건 q에서 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=0$
$\therefore a=b$
즉 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
② p: $A\cap B=B \Longleftarrow q$: $A=B$
($\longrightarrow$의 반례) $A=\{1, 2\}$, $B=\{1\}$이면 $A\cap B=B$이지만 $A\neq B$이다.
즉 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
③ p: $a+b>4 \Longleftarrow q$: $a>2$, $b>2$
($\longrightarrow$의 반례) $a=6$, $b=-1$이면 $a+b>4$이지만 $b>2$가 아니다.
즉 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
④ p: $a=b \Longrightarrow q$: $ac=bc$
($\longleftarrow$의 반례) $a=2$, $b=1$, $c=0$이면 $ac=bc$이지만 $a\neq b$이다.
즉 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
⑤ p: $a^2=b^2 \Longleftarrow q$: $a+b=0$
($\longrightarrow$의 반례) $a=1$, $b=1$이면 $a^2=b^2$이지만 $a+b\neq 0$이다.
즉 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ①이다.

13 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x\,|\,x>a\}$, $Q=\{x\,|\,-2\le x\le 7\}$
p는 q이기 위한 필요조건이므로
$q \Longrightarrow p \qquad \therefore Q\subset P$
즉 오른쪽 그림에서
$a<-2$



14 $x>-3$에서 $x+3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} x+\frac{4}{x+3} &= x+3+\frac{4}{x+3}-3 \\ &\ge 2\sqrt{(x+3)\cdot\frac{4}{x+3}}-3 \\ &=2\cdot 2-3 \\ &=1 \end{aligned}$$

이때 등호는 $x+3=\dfrac{4}{x+3}$일 때 성립하므로
$(x+3)^2=4$, $x+3=2$ ($\because x+3>0$)
$\therefore x=-1$

따라서 $x=-1$에서 최솟값 1을 가지므로
$a=-1, b=1$
$\therefore a+b=-1+1=0$

15 ㄱ. $f(-2)=(-2)^2+1=5$, $f(2)=2^2+1=5$이므로 상수함수이다.
ㄴ. $f(-2)=|-2|-2=0$, $f(2)=|2|-2=0$이므로 상수함수이다.
ㄷ. $f(-2)=-(-2)+1=3$,
$f(2)=-2+1=-1$이므로 상수함수가 아니다.
따라서 상수함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

16 함수의 그래프는 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅂ으로 그 개수는 4이므로 $a=4$
함수의 그래프 중 일대일함수의 그래프는 ㄹ로 그 개수는 1이므로 $b=1$
함수의 그래프 중 상수함수의 그래프는 ㅂ으로 그 개수는 1이므로 $c=1$
$\therefore a-b+c=4-1+1=4$

17 $g(x)$는 항등함수이므로
$g(1)=1, g(2)=2, g(3)=3$
(가)에서 $f(1)=g(2)=h(3)$이므로
$f(1)=2, h(3)=2$
이때 $h(x)$는 상수함수이므로
$h(1)=2, h(2)=2, h(3)=2$
(나)에서 $f(3)-f(1)=f(2)$이고, $f(x)$는 일대일대응이므로
$f(3)-2=f(2)$ $\quad\therefore f(2)=1, f(3)=3$
$\therefore f(2)+g(1)+h(2)=1+1+2=4$

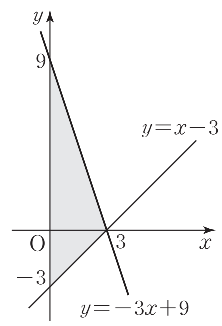
[서술형 1] (1) 직선 $y=x$를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선 l의 방정식은 $y=x-3$

❶

(2) 직선 $y=-\frac{1}{3}x+2$를 y축에 대하여 대칭이동하면
$y=-\frac{1}{3}(-x)+2$ $\quad\therefore y=\frac{1}{3}x+2$
이때 직선 m은 위의 직선에 수직이므로 기울기는 -3이다.
즉 직선 m의 방정식은 $y-6=-3(x-1)$
$\therefore y=-3x+9$

❷

(3) 두 직선 l, m의 교점을 구하면
$x-3=-3x+9$에서
$4x=12$ $\quad\therefore x=3$
$x=3$을 $y=x-3$에 대입하면
$y=3-3=0$
즉 두 직선 l, m의 교점의 좌표는 $(3, 0)$이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot\{9-(-3)\}\cdot 3=18$



❸

채점 기준	배점
❶ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	2점
❷ 직선 m의 방정식을 구할 수 있다.	2점
❸ 두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있다.	3점

[서술형 2] $U=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
조건 p에서 $x(x-3)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=3$
조건 p의 진리집합을 P라 하면
$P=\{0, 3\}$

❶

조건 q에서 $x=\pm 3$
조건 q의 진리집합을 Q라 하면
$Q=\{-3, 3\}$

❷

이때 조건 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cup Q^C$이므로
조건 'p 또는 $\sim q$'의 부정의 진리집합은
$(P\cup Q^C)^C=P^C\cap Q=Q-P=\{-3\}$

❸

채점 기준	배점
❶ 조건 p의 진리집합을 구할 수 있다.	2점
❷ 조건 q의 진리집합을 구할 수 있다.	2점
❸ 조건 'p 또는 $\sim q$'의 부정의 진리집합을 구할 수 있다.	2점

Lecture 부정과 드모르간의 법칙

조건이나 명제의 부정은 드모르간의 법칙과 유사하다.
즉 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
(1) 조건 'p 그리고 q'의 부정
$\sim(p$ 그리고 $q) \Rightarrow \sim p$ 또는 $\sim q$
$(P\cap Q)^C \Rightarrow P^C\cup Q^C$
(2) 조건 'p 또는 q'의 부정
$\sim(p$ 또는 $q) \Rightarrow \sim p$ 그리고 $\sim q$
$(P\cup Q)^C \Rightarrow P^C\cap Q^C$

[서술형 3] 정의역이 $X=\{-1, 1\}$이므로
$f(-1)=g(-1)$, $f(1)=g(1)$
$f(-1)=g(-1)$에서
$-a+b=-5$ …… ㉠
$f(1)=g(1)$에서
$a+b=1$ …… ㉡
❶
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$
❷
$\therefore ab=3\cdot(-2)=-6$
❸

채점 기준	배점
❶ $f=g$를 이용하여 a, b에 대한 연립방정식을 구할 수 있다.	4점
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	1점

● 4일차 본문 88~91쪽

01 ④ **02** ⑤ **03** ③ **04** ④ **05** ⑤
06 ④ **07** ② **08** ② **09** ③ **10** ①
11 ④ **12** ② **13** ③ **14** ⑤ **15** ①
16 ④ **17** ③
[서술형 1] 8명
[서술형 2] 25
[서술형 3] (1) $h(x)=-x+2$ (2) -3

01 ①, ②, ③, ⑤ 맛있는 음식, 잘생긴 축구 선수, 살기 좋은 도시, 100보다 조금 작은 수 등은 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
④ 0보다 작은 자연수는 존재하지 않으므로 주어진 집합은 $\varnothing$이다.
따라서 집합인 것은 ④이다.

02 ⑤ 집합 A의 원소는 1, $\{1\}$로 그 개수는 2이므로
$n(A)=2$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

03 $1\in A$에서 $1\in B$이어야 하므로 $b=1$
$2\in B$에서 $2\in A$이어야 하므로 $a=2$
$\therefore a-b=2-1=1$

04 $B\subset A$에서 집합 B는 집합 A의 부분집합이다.
집합 A의 원소의 개수는 4이므로 집합 B의 개수는
$2^4=16$

05 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 3, 5\}$, $C=\{2, 4, 6\}$이므로
$(A\cap B)\cup C=\{1, 3\}\cup\{2, 4, 6\}$
$=\{1, 2, 3, 4, 6\}$

06 ④ $A-B=A\cap B^C$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

Lecture 여집합과 차집합의 성질

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여
(1) $U^C=\varnothing$, $\varnothing^C=U$
(2) $(A^C)^C=A$
(3) $A\cap A^C=\varnothing$, $A\cup A^C=U$
(4) $U-A=A^C$
(5) $A-B=A\cap B^C=A-(A\cap B)$
$=(A\cup B)-B$
(6) $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$, $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

07 ① 짝수와 홀수를 곱하면 짝수이므로 거짓인 명제이다.
③ 모든 실수 x에 대하여 $|x|\geq 0$이므로 거짓인 명제이다.
④ 25의 약수는 1, 5, 25로 그 개수는 3이므로 거짓인 명제이다.
⑤ 모든 정삼각형은 닮음이므로 거짓인 명제이다.
따라서 참인 명제는 ②이다.

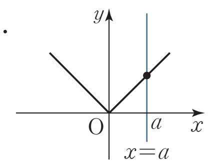
08 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$P=\{3, 6, 9\}$, $Q=\{6\}$
명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하는데
$3\in P$, $3\notin Q$이고 $9\in P$, $9\notin Q$이므로 3, 9는 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례이다.
따라서 구하는 원소의 개수는 2이다.

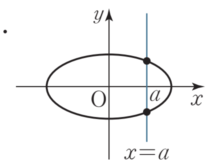
09 ③ 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow p$는 항상 참이다.
따라서 항상 참인 명제는 ③이다.

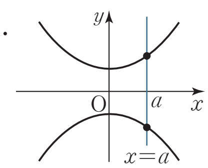
10 명제 '모든 실수 x에 대하여 $x^2+2x-a>0$이다.'가 참이 되려면
$x^2+2x-a=(x+1)^2-a-1>0$
모든 실수 x에 대하여 $(x+1)^2\geq 0$이므로
$-a-1>0$, $-a>1$
$\therefore a<-1$

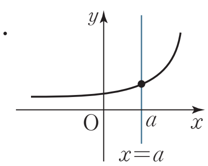
11 ㄱ. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|x>-3\}$, $Q=\{x|x>7\}$이므로
$P\not\subset Q$, $Q\subset P$
즉 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
ㄴ. p: $|x-y|=|x|+|y| \Longleftarrow q$: $x^2+y^2=0$
($\longrightarrow$의 반례) $x=3$, $y=0$
즉 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. $(x-2)^2=0$이므로 $x=2$
$x^2-4=0$에서 $(x+2)(x-2)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{2\}$, $Q=\{-2, 2\}$이므로
$P\subset Q$, $Q\not\subset P$
즉 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄴ이다.

12 주어진 그래프에서 정의역의 각 원소 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$를 그으면 다음 그림과 같다.

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄹ.


따라서 함수의 그래프인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

13 항등함수는 정의역의 각 원소에 그 자신이 대응하는 함수이다. 따라서 항등함수인 것은 ③이다.

14 $g(-1)=-1+2=1$이므로
$(f\circ g)(-1)=f(g(-1))=f(1)$
$=3\cdot 1-1=2$

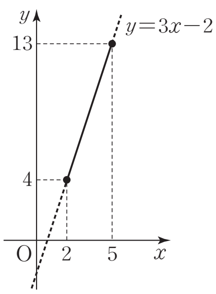
15 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(2, 1)$을 지난다.
즉 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 두 점 $(1, 2)$, $(2, 1)$을 지나므로
$f(1)=2$에서 $a+b=2$ $\cdots\cdots$ ㉠
$f(2)=1$에서 $2a+b=1$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$

따라서 $f(x)=-x+3$이므로
$f(-2)=-(-2)+3=5$

Lecture 역함수

함수 f의 역함수가 f^{-1}일 때,
$f^{-1}(a)=b \Longleftrightarrow f(b)=a$

16 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(2)=4$, $f(5)=13$이므로
$Y=\{y \mid 4 \le y \le 13\}$
따라서 $a=4$, $b=13$이므로
$a+b=4+13=17$

17 $y=3x+a$에서 x를 y의 식으로 나타내면
$-3x=-y+a \qquad \therefore x=\frac{1}{3}y-\frac{a}{3}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{3}x-\frac{a}{3}$
$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{a}{3}$
따라서 $\frac{1}{3}=b$, $-\frac{a}{3}=2$이므로
$a=-6$, $b=\frac{1}{3}$
$\therefore ab=-6\cdot\frac{1}{3}=-2$

[서술형 1] 학생 전체의 집합을 U, A은행의 통장을 갖고 있는 학생의 집합을 A, B은행의 통장을 갖고 있는 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=40$, $n(A)=28$, $n(B)=16$,
$n(A^C\cap B^C)=4$
❶

$$\begin{aligned}\therefore n(A\cup B)&=n(U)-n((A\cup B)^C)\\&=n(U)-n(A^C\cap B^C)\\&=40-4=36\end{aligned}$$
❷

이때 A은행과 B은행의 통장을 모두 갖고 있는 학생의 집합은 $A\cap B$이므로 구하는 학생 수는
$$\begin{aligned}n(A\cap B)&=n(A)+n(B)-n(A\cup B)\\&=28+16-36=8\end{aligned}$$
❸

채점 기준	배점
❶ 주어진 조건을 집합의 원소의 개수로 나타낼 수 있다.	2점
❷ A은행 또는 B은행의 통장을 갖고 있는 학생 수를 구할 수 있다.	2점
❸ A은행과 B은행의 통장을 모두 갖고 있는 학생 수를 구할 수 있다.	2점

[서술형 2] $$\begin{aligned}(4x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)&=4+\frac{36x}{y}+\frac{y}{x}+9\\&=\frac{36x}{y}+\frac{y}{x}+13\end{aligned}$$
❶

이때 $\frac{36x}{y}>0$, $\frac{y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$\begin{aligned}\frac{36x}{y}+\frac{y}{x}+13&\ge 2\sqrt{\frac{36x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+13\\&=12+13=25\end{aligned}$$
$\left(\text{단, 등호는 }\frac{36x}{y}=\frac{y}{x}\text{, 즉 }6x=y\text{일 때 성립}\right)$
❷

따라서 구하는 최솟값은 25이다.
❸

채점 기준	배점
❶ 주어진 식을 전개할 수 있다.	2점
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있다.	4점
❸ 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있다.	1점

[서술형 3] (1) $(f\circ h)(x)=f(h(x))=-2h(x)+1$
이때 $(f\circ h)(x)=g(x)$이므로
$-2h(x)+1=2x-3$
$-2h(x)=2x-4$
$\therefore h(x)=-x+2$
❶

(2) $h(x)=-x+2$이므로
$h(5)=-5+2=-3$
❷

채점 기준	배점
❶ $h(x)$를 구할 수 있다.	4점
❷ $h(5)$의 값을 구할 수 있다.	3점

● 5일차 본문 92~95쪽

01 ②	02 ⑤	03 ④	04 ③	05 ③
06 ①	07 ①	08 ①	09 ③	10 ④
11 ③	12 ④	13 ④	14 ④	15 ⑤
16 ⑤	17 ③			

[서술형 1] (1) -3 (2) $\{-5, 0\}$
[서술형 2] 8
[서술형 3] (1) 11 (2) 8

01 ① $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$이므로 유한집합이다.
② 0과 1 사이에 유리수는 무수히 많으므로 무한집합이다.
③ $\{1, 3\}$이므로 유한집합이다.
④ $x^2=-3$인 실수 x는 없다. 즉 주어진 집합은 공집합이므로 유한집합이다.
⑤ $\{2\}$이므로 유한집합이다.
따라서 유한집합이 아닌 것은 ②이다.

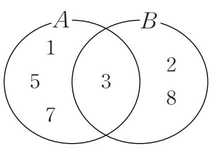
02 집합 A의 원소는 $1, 2, 3, \varnothing, \{1, 3\}$의 5개이므로
$n(A)=5$

오답 피하기
집합 A는 집합을 원소로 갖는 집합이다.
즉 $\{1, 3\}\in A$, $\{\{1, 3\}\}\subset A$

03 $A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$이므로 $n(A)=6$
따라서 집합 A의 진부분집합의 개수는
$2^6-1=63$

Lecture 부분집합의 개수
집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여
(1) 부분집합의 개수 ⇨ 2^n
(2) 진부분집합의 개수 ⇨ 2^n-1

04 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B-A=\{2, 8\}$
따라서 $B-A$의 모든 원소의 합은
$2+8=10$

05 $(A-B)\cap A=A$에서 $A\subset(A-B)$이므로
$A\cap B=\varnothing$(ㄴ)
ㄱ. $B-A=B$
ㄷ. (반례) $U=\{1, 2, 3\}$, $A=\{1\}$, $B=\{2\}$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

Lecture 두 집합의 포함 관계
(1) $A\cap B=A$ ⇨ $A\subset B$
(2) $A\cup B=B$ ⇨ $A\subset B$
(3) $A-B=\varnothing$ ⇨ $A\subset B$

06 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A\cup B)$
이므로
$4=35-n(A\cup B)$ $\quad\therefore n(A\cup B)=31$
$\therefore n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=16+21-31=6$

Lecture 유한집합의 원소의 개수
(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
(2) $n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
(3) $n(A^C)=n(U)-n(A)$
(4) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=n(A\cup B)-n(B)$

07 ② (반례) $x=-2$, $y=1$이면 $x^2>y^2$이지만 $x<y$이다.
③ (반례) $x=-\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{2}$이면 $x+y$는 정수이지만 x, y는 정수가 아니다.
④ $1<x<2$인 정수 x가 존재하지 않으므로 거짓인 명제이다.
⑤ (반례) $x=1$이면 $x>1$이 아니다.
따라서 참인 명제는 ①이다.

08 $P\cap Q=R$에서 $R\subset P$, $R\subset Q$이므로 두 명제
$r \longrightarrow p$, $r \longrightarrow q$가 모두 참이고, 그 대우
$\sim p \longrightarrow \sim r$, $\sim q \longrightarrow \sim r$도 모두 참이다.
따라서 항상 참이라고 할 수 없는 명제는 ①이다.

09 주어진 명제의 역은

'$x=1$이면 $x^2+4x-k=0$이다.'

위의 명제가 참이므로 $x=1$을 $x^2+4x-k=0$에 대입하면

$1+4-k=0 \qquad \therefore k=5$

10 ㄱ. 조건 p에서 $x=0,\ y=0$

즉 $p \Longrightarrow q,\ q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

($\longleftarrow$의 반례) $x=1,\ y=0$

ㄴ. 조건 p에서 $x=3$

조건 q에서 $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$P=\{3\},\ Q=\{2,\ 3\}$이므로

$P\subset Q,\ Q\not\subset P$

즉 $p \Longrightarrow q,\ q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄷ. $p \not\Longrightarrow q,\ q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

($\longrightarrow$의 반례) $x=-2,\ y=\sqrt{2}$

ㄹ. $p \Longrightarrow q,\ q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

($\longleftarrow$의 반례) $x=2,\ y=1$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ로 그 개수는 3이다.

11 두 명제 $p \longrightarrow \sim q,\ \sim r \longrightarrow q$가 모두 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim p,\ \sim q \longrightarrow r$도 모두 참이다.

또 두 명제 $p \longrightarrow \sim q,\ \sim q \longrightarrow r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$도 참이고, 그 대우 $\sim r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 항상 참이라고 할 수 없는 명제는 ③이다.

Lecture 삼단논법

세 조건 $p,\ q,\ r$에 대하여 두 명제 $p \longrightarrow q,\ q \longrightarrow r$가 모두 참이면 명제 $p \longrightarrow r$도 참이다.

12 $x>0,\ 8y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

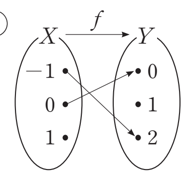
$x+8y \ge 2\sqrt{x\cdot 8y}=4\sqrt{2xy}$

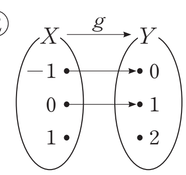
(단, 등호는 $x=8y$일 때 성립)

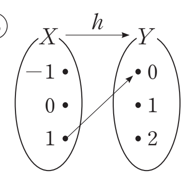
이때 $xy=2$이므로

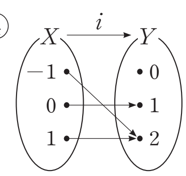
$x+8y \ge 4\sqrt{2\cdot 2}=8$

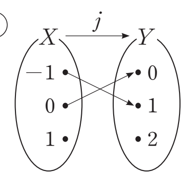
따라서 $x+8y$의 최솟값은 8이다.

13 ①


②


③


④


⑤


따라서 함수인 것은 ④이다.

14 $a>0$이므로 함수 f가 일대일대응이면

$f(-3)=1,\ f(3)=7$

$f(-3)=1$에서 $-3a+b=1 \quad \cdots\cdots ㉠$

$f(3)=7$에서 $3a+b=7 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=4$

$\therefore a+b=1+4=5$

15 $f(-1)=-2\cdot(-1)+3=5$이므로

$(g\circ f)(-1)=g(f(-1))=g(5)$

$=5+4=9$

16 $f(3x-1)=x+7$에서 $3x-1=t$라 하면

$x=\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}$이므로

$f(t)=\left(\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}\right)+7=\frac{1}{3}t+\frac{22}{3}$

$\therefore f(8)=\frac{1}{3}\cdot 8+\frac{22}{3}=10$

다른 풀이

$3x-1=8$에서 $3x=9$ $\quad\therefore x=3$

$x=3$을 $f(3x-1)=x+7$에 대입하면

$f(8)=3+7=10$

17 $f^{-1}(-3)=-2$이므로 $f(-2)=-3$

따라서 $-3\cdot(-2)-a=-3$이므로

$a=9$

[서술형 1] (1) $(A\cap B)\subset A$이므로 $6\in(A\cap B)$이면 $6\in A$이다.

즉 $a^2+a=6$이므로 $a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0$ $\quad\therefore a=-3$ 또는 $a=2$

(i) $a=-3$일 때

$A=\{0, 2, 6\}$, $B=\{-5, 2, 6\}$이므로

$A\cap B=\{2, 6\}$

(ii) $a=2$일 때

$A=\{0, 2, 6\}$, $B=\{0, 1, 2\}$이므로

$A\cap B=\{0, 2\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-3$

❶

(2) $A=\{0, 2, 6\}$, $B=\{-5, 2, 6\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{0\}\cup\{-5\}$

$=\{-5, 0\}$

❷

채점 기준	배점
❶ a의 값을 구할 수 있다.	4점
❷ $(A-B)\cup(B-A)$를 구할 수 있다.	3점

[서술형 2] 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x\mid -a<x\le a+2\}$, $Q=\{x\mid -2\le x<2\}$,

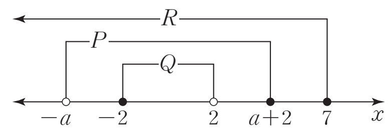
$R=\{x\mid x\le 7\}$

q는 p이기 위한 충분조건이므로 $Q\subset P$

r는 p이기 위한 필요조건이므로 $P\subset R$

$\therefore Q\subset P\subset R$

❶



위의 그림에서 $-a<-2$, $2\le a+2\le 7$이어야 하므로 $a>2$, $0\le a\le 5$

$\therefore 2<a\le 5$

❷

따라서 자연수 a의 최댓값은 5, 최솟값은 3이므로 그 합은 $5+3=8$

❸

채점 기준	배점
❶ 세 조건 p, q, r의 진리집합의 포함 관계를 알 수 있다.	3점
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점
❸ 자연수 a의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	1점

[서술형 3] (1) $(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=f(ax+b)$

$=a(ax+b)+b$

$=a^2x+ab+b$

즉 $a^2x+ab+b=16x+35$이므로

$a^2=16$, $ab+b=35$

이때 $a>0$이므로 $a=4$

$a=4$를 $ab+b=35$에 대입하면

$5b=35$ $\quad\therefore b=7$

$\therefore a+b=4+7=11$

❶

(2) $f(x)=4x+7$

$f^{-1}(39)=k$라 하면 $f(k)=39$이므로

$4k+7=39$ $\quad\therefore k=8$

$\therefore f^{-1}(39)=8$

❷

채점 기준	배점
❶ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	4점
❷ $f^{-1}(39)$의 값을 구할 수 있다.	3점

6일차

본문 96~99쪽

01 ③	02 ⑤	03 ⑤	04 ⑤	05 ④
06 ②	07 ③	08 ④	09 ⑤	10 ③
11 ③	12 ⑤	13 ①	14 ③	15 ②
16 ⑤	17 ②			

[서술형 1] 10명
[서술형 2] 2
[서술형 3] 11

01 $A=\{1, 3, 5, 15\}$
③ $1\in A$

02 주어진 집합의 원소의 개수는 5이므로 부분집합의 개수는 $2^5=32$

Lecture 부분집합의 개수

$A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여
(1) 집합 A의 부분집합의 개수: 2^n
(2) 집합 A의 진부분집합의 개수: 2^n-1

03 $A\cap B=\{3, 4, 5\}$이므로 $A\cap B$의 모든 원소의 합은
$3+4+5=12$

04 $A-B=\{3\}$이므로
$1\in B$, $5\in B$, $a-b\in B$
이때 $B=\{1, 8, a+2b\}$이므로
$5\in B$에서 $a+2b=5$ …… ㉠
$a-b\in B$에서 $a-b=8$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=7$, $b=-1$
$\therefore a+b=7+(-1)=6$

05 $A\cap B=B$이므로 $B\subset A$
① $B\subset A$이므로 $A\cup B=A$
② $B\subset A$이므로 $A^C\subset B^C$
③ $A^C\subset B^C$이므로 $A^C\cap B^C=A^C$
④ $B\subset A$이므로 $A-B\neq\varnothing$
⑤ $B\subset A$이므로 $B\cap A^C=B-A=\varnothing$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

06 ② (반례) $a=1+\sqrt{3}$, $b=1-\sqrt{3}$이면 $a+b=2$이므로 두 수 a, b가 모두 무리수이지만 $a+b$는 무리수가 아니다.
따라서 거짓인 명제는 ②이다.

07 명제가 참이면 그 명제의 대우는 항상 참이므로 항상 참인 명제는 $\sim p \longrightarrow q$이다.

08 명제가 참이면 그 명제의 대우는 항상 참이므로 주어진 명제가 참인 것을 찾으면 된다.
① 거짓
(반례) $x=-2$이면 $x^2=4$이지만 $x=2$가 아니다.
② 거짓
(반례) $x=-4$이면 $x^2>9$이지만 $x>3$이 아니다.
③ 거짓
(반례) $x=1$이면 $1^2=1$이지만 $x=0$이 아니다.
④ 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
⑤ 거짓
(반례) △ABC에서 ∠B$=30^\circ$, ∠C$=30^\circ$이면 ∠B$=$∠C이지만 △ABC는 정삼각형이 아니다.
따라서 그 대우가 참인 명제는 ④이다.

09 p는 q이기 위한 필요조건이므로 명제 $q \longrightarrow p$가 참이다.
r는 q이기 위한 충분조건이므로 명제 $r \longrightarrow q$가 참이다.
또 두 명제 $r \longrightarrow q$, $q \longrightarrow p$가 모두 참이므로 명제 $r \longrightarrow p$도 참이고, 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim r$도 참이다.
따라서 항상 참인 명제는 ⑤이다.

다른 풀이

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자.
p는 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$
r는 q이기 위한 충분조건이므로 $R\subset Q$
$\therefore R\subset Q\subset P$
⑤ $R\subset P$이므로 명제 $r \longrightarrow p$는 참이고, 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim r$도 참이다.

10 (가) p: $(x-5)(x+5)=0$, q: $x=5$라 하면
조건 p에서 $x=-5$ 또는 $x=5$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{-5, 5\}$, $Q=\{5\}$이므로
$P\not\subset Q$, $Q\subset P$
즉 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 $\boxed{\text{필요}}$ 조건이다.
(나) p: $x=6$, q: $x-3>0$이라 하면
조건 q에서 $x>3$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{6\}$, $Q=\{x|x>3\}$이므로
$P\subset Q$, $Q\not\subset P$
즉 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 $\boxed{\text{충분}}$ 조건이다.

Lecture **충분조건, 필요조건과 진리집합**
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
(1) $P\subset Q$이면
p는 q이기 위한 충분조건
q는 p이기 위한 필요조건
(2) $P=Q$이면
p는 q이기 위한 필요충분조건

11 $$\left(2x+\frac{3}{y}\right)\left(\frac{3}{x}+2y\right)=6+4xy+\frac{9}{xy}+6$$
$$=4xy+\frac{9}{xy}+12$$
이때 $4xy>0$, $\frac{9}{xy}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$4xy+\frac{9}{xy}+12\ge 2\sqrt{4xy\cdot\frac{9}{xy}}+12$$
$$=2\cdot 6+12=24$$
$\left(\text{단, 등호는 } 4xy=\frac{9}{xy}\text{일 때 성립}\right)$
따라서 구하는 최솟값은 24이다.

Lecture **산술평균과 기하평균의 관계**
$a>0$, $b>0$일 때
$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)
참고 $a>0$, $b>0$일 때, $\frac{a+b}{2}$를 산술평균, $\sqrt{ab}$를 기하평균이라 한다.

12 ① $x=-1$이면 $y=(-1)^2-5=-4$
$x=1$이면 $y=1^2-5=-4$
② $x=-1$이면 $y=|-1|+3=4$
$x=1$이면 $y=|1|+3=4$
③ $x=-1$이면 $y=-2$
$x=1$이면 $y=-2$
④ $x=-1$이면 $y=-(-1)^2+4=3$
$x=1$이면 $y=-1^2+4=3$
⑤ $x=-1$이면 $y=-(-1)=1$
$x=1$이면 $y=-1$
따라서 상수함수가 아닌 것은 ⑤이다.

13 정의역이 $X=\{-2, -1\}$이므로
$f(-2)=g(-2)$, $f(-1)=g(-1)$
$f(-2)=g(-2)$에서 $(-2)^2+1=-2a-b$
$\therefore 2a+b=-5$ …… ㉠
$f(-1)=g(-1)$에서 $(-1)^2+1=-a-b$
$\therefore a+b=-2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=1$
$\therefore ab=-3\cdot 1=-3$

14 (i) X에서 Y로의 함수의 개수는
0에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 3, 4, 5, 6 중 하나이므로 4개
1에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 3, 4, 5, 6 중 하나이므로 4개
2에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 3, 4, 5, 6 중 하나이므로 4개
따라서 구하는 함수의 개수는
$4\cdot 4\cdot 4=4^3=64$ $\therefore a=64$
(ii) X에서 Y로의 일대일함수의 개수는
0에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 3, 4, 5, 6 중 하나이므로 4개
1에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 0에 대응한 것을 제외한 3개
2에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 0, 1에 대응한 것을 제외한 2개
따라서 구하는 일대일함수의 개수는
$4\cdot 3\cdot 2=24$ $\therefore b=24$
(i), (ii)에서 $a-b=64-24=40$

Lecture 함수의 개수

집합 X의 원소의 개수가 n, 집합 Y의 원소의 개수가 m일 때

(1) X에서 Y로의 함수의 개수 ⇨ m^n

(2) X에서 Y로의 일대일함수의 개수
⇨ $m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$ (단, $m\geq n$)

(3) X에서 X로의 일대일대응의 개수
⇨ $n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1$

(4) X에서 Y로의 상수함수의 개수 ⇨ m

15 $g(1)=1^2-3=-2$이므로

$$\begin{aligned}(f\circ g)(1)&=f(g(1))\\&=f(-2)\\&=-(-2)+5\\&=7\end{aligned}$$

$f(2)=-3\cdot 2+7=1$이므로

$$\begin{aligned}(g\circ f)(2)&=g(f(2))\\&=g(1)\\&=1^2-3\\&=-2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore (f\circ g)(1)+(g\circ f)(2)&=7+(-2)\\&=5\end{aligned}$$

16 ㄱ. $f\circ g\neq g\circ f$

ㄴ. $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$

ㄷ. $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

17 $x\geq 2$일 때, 함수 $f(x)=x^2+2x-a$가 일대일대응이므로 함수 $f(x)=x^2+2x-a$는 $x=2$에서 최솟값 2를 가진다.

즉 $f(2)=2$이므로

$f(2)=2^2+2\cdot 2-a=2$ $\quad\therefore a=6$

$\therefore f(x)=x^2+2x-6$ (단, $x\geq 2$)

이때 $f^{-1}(42)=b$에서 $f(b)=42$이므로

$f(b)=b^2+2b-6=42$, $b^2+2b-48=0$

$(b+8)(b-6)=0$ $\quad\therefore b=6$ $(\because b\geq 2)$

$\therefore a+b=6+6=12$

[서술형 1] 학생 전체의 집합을 U, 영어를 신청한 학생의 집합을 A, 수학을 신청한 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=32$, $n(A)=13$, $n(B)=17$,

$n(A^C\cap B^C)=9$

❶

$$\begin{aligned}\therefore n(A\cup B)&=n(U)-n((A\cup B)^C)\\&=n(U)-n(A^C\cap B^C)\\&=32-9\\&=23\end{aligned}$$

❷

이때 수학만 신청한 학생의 집합은 $B-A$이므로 구하는 학생 수는

$$\begin{aligned}n(B-A)&=n(A\cup B)-n(A)\\&=23-13\\&=10\end{aligned}$$

❸

채점 기준	배점
❶ 주어진 조건을 집합의 원소의 개수로 나타낼 수 있다.	2점
❷ 영어 또는 수학을 신청한 학생 수를 구할 수 있다.	3점
❸ 수학만 신청한 학생 수를 구할 수 있다.	2점

[서술형 2] 조건 q에서 $-3\leq x-n\leq 3$

$\therefore n-3\leq x\leq n+3$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\mid -3\leq x<5\}$

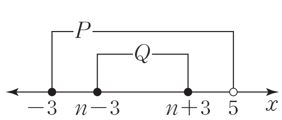
$Q=\{x\mid n-3\leq x\leq n+3\}$

❶

이때 명제 $p\longrightarrow q$의 역이 참이므로 명제 $q\longrightarrow p$가 참이다.

명제 $q\longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q\subset P$이어야 한다.

즉 오른쪽 그림에서



$n-3\geq -3$, $n+3<5$

$\therefore 0\leq n<2$

❷

따라서 정수 n은 0, 1로 그 개수는 2이다.

❸

채점 기준	배점
❶ 두 조건 p, q의 진리집합을 구할 수 있다.	2점
❷ n의 값의 범위를 구할 수 있다.	4점
❸ 정수 n의 개수를 구할 수 있다.	1점

[서술형 3] $f(1)=7$이고 함수 f는 X에서 Y로의 일대일 대응이므로 $f(2)-f(3)=8-6=2$이어야 한다.

$\therefore f(2)=8, f(3)=6$

즉 $f(4)=5$이므로

······························ ❶

$f(3)+f(4)=6+5=11$

······························ ❷

채점 기준	배점
❶ $f(2), f(3), f(4)$의 값을 구할 수 있다.	4점
❷ $f(3)+f(4)$의 값을 구할 수 있다.	2점

Memo.