정답과 풀이

4주 전

학교시험에 꼭 나오는 교과서 문제

● 1일차 본문 10~13쪽

01-1 1	01-2 7	01-3 ①	01-4 ①
02-1 ③	02-2 ③	02-3 ①	02-4 ①
03-1 ②	03-2 ④	03-3 ⑤	03-4 ⑤
04-1 ④	04-2 ②	05-1 ⑤	05-2 ③

01-1 $g(-2)=-2+3=1$이므로

$(f\circ g)(-2)=f(g(-2))=f(1)$

$=2\cdot 1-1=1$

01-2 $g(6)=6-4=2$이므로

$(f\circ g)(6)=f(g(6))=f(2)$

$=2\cdot 2+3=7$

01-3 $f(2)=2^2-3=1$이므로

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(1)$

$=1^2-3=-2$

01-4 $\sqrt{3}$은 무리수이므로 $f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2=3$

$\therefore (f\circ f)(\sqrt{3})=f(f(\sqrt{3}))=f(3)$

이때 3은 유리수이므로

$(f\circ f)(\sqrt{3})=f(3)=-3$

02-1 $(g\circ h)(x)=g(h(x))=h(x)-1$

이때 $(g\circ h)(x)=f(x)$이므로

$h(x)-1=x^2+1$

$\therefore h(x)=x^2+2$

02-2 $(f\circ h)(x)=f(h(x))=2h(x)-3$

이때 $(f\circ h)(x)=g(x)$이므로

$2h(x)-3=4x-1 \qquad \therefore h(x)=2x+1$

$\therefore h(4)=2\cdot 4+1=9$

다른 풀이

$(f\circ h)(4)=g(4)$에서 $f(h(4))=g(4)$

$2h(4)-3=15$, $2h(4)=18$

$\therefore h(4)=9$

02-3 $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(-x+1)$

$(h\circ g)(x)=f(x)$이므로 $h(-x+1)=3x-1$

이때 $-x+1=t$라 하면 $x=-t+1$

$x=-t+1$을 $h(-x+1)=3x-1$에 대입하면

$h(t)=3(-t+1)-1=-3t+2$

$\therefore h(2)=-3\cdot 2+2=-4$

다른 풀이

$(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(-x+1)$

$(h\circ g)(x)=f(x)$이므로 $h(-x+1)=3x-1$

$h(2)$의 값은 $-x+1=2$, 즉 $x=-1$일 때이므로

$x=-1$을 $h(-x+1)=3x-1$에 대입하면

$h(2)=3\cdot(-1)-1=-4$

02-4 $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(-2x+3)$

$(h\circ g)(x)=f(x)$이므로 $h(-2x+3)=2x-1$

이때 $-2x+3=t$라 하면 $x=\dfrac{-t+3}{2}$

$x=\dfrac{-t+3}{2}$을 $h(-2x+3)=2x-1$에 대입하면

$h(t)=2\cdot\dfrac{-t+3}{2}-1=-t+2$

$\therefore h(1)=-1+2=1$

03-1 $f^{-1}(2)=-3$에서 $f(-3)=2$이므로

$-3a-1=2 \qquad \therefore a=-1$

Lecture 역함수의 성질

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여

$f(a)=b \Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

03-2 $f^{-1}(-2)=a$라 하면 $f(a)=-2$이므로

$\frac{1}{2}a-3=-2 \qquad \therefore a=2$

$\therefore f^{-1}(-2)=2$

03-3 $f(3)=2$이므로 $3a+b=2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f^{-1}(-1)=1$에서 $f(1)=-1$이므로

$a+b=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{5}{2}$

$\therefore a-b=\frac{3}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)=4$

쌍둥이 문제

함수 $f(x)=ax+b$에 대하여

$f(1)=3$, $f^{-1}(-5)=-3$

일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수)

① -6 ② -4 ③ -2

④ 2 ⑤ 4

[풀이]

$f(1)=3$이므로 $a+b=3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f^{-1}(-5)=-3$에서 $f(-3)=-5$이므로

$-3a+b=-5 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$\therefore ab=2\cdot1=2$

답 ④

03-4 $f^{-1}(4)=2$, $f^{-1}(-2)=-1$에서

$f(2)=4$, $f(-1)=-2$이므로

$2a+b=4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$-a+b=-2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=0$

따라서 $f(x)=2x$이므로

$f(1)=2\cdot1=2$

04-1 $y=ax-6$에서 x를 y의 식으로 나타내면

$-ax=-y-6 \qquad \therefore x=\frac{1}{a}y+\frac{6}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x+\frac{6}{a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x+\frac{6}{a}$

즉 $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$, $\frac{6}{a}=b$이므로 $a=2$, $b=3$

$\therefore ab=2\cdot3=6$

다른 풀이

$y=\frac{1}{2}x+b$에서 x를 y의 식으로 나타내면

$-\frac{1}{2}x=-y+b \qquad \therefore x=2y-2b$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2x-2b$

$\therefore f(x)=2x-2b$

즉 $a=2$, $-6=-2b$이므로 $a=2$, $b=3$

$\therefore ab=2\cdot3=6$

Lecture 역함수 구하기

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$는 다음과 같이 구한다.

(ⅰ) 함수 $y=f(x)$가 일대일대응인지 확인한다.

(ⅱ) $y=f(x)$에서 x를 y의 식으로 나타낸다.

(ⅲ) x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다.

04-2 $y=2x+1$에서 x를 y의 식으로 나타내면

$-2x=-y+1 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$

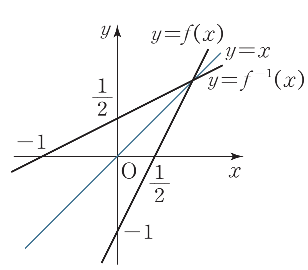
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이므로

$a+3b=\frac{1}{2}+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

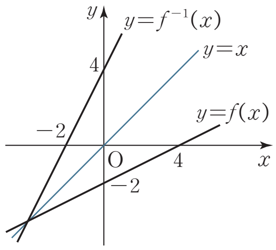
05-1 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 다음 그림과 같으므로 그 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$2x-1=x$에서 $x=1$

따라서 구하는 교점의 x좌표는 1이다.

05-2 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 다음 그림과 같으므로 그 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\frac{1}{2}x-2=x$에서 $-\frac{1}{2}x=2$ $\therefore x=-4$

$x=-4$를 $y=x$에 대입하면 $y=-4$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(-4, -4)$이므로

$a=-4, b=-4$

$\therefore a+b=-4+(-4)=-8$

● 2일차 본문 14~17쪽

01-1 ③	01-2 ②	02-1 ④	02-2 ③
03-1 ②	03-2 ②	04-1 ①	04-2 ③
05-1 ②	05-2 ③	06-1 ③	06-2 ①
07-1 ③	07-2 ⑤		

01-1 ①, ②, ④, ⑤ 분모가 상수이므로 다항식이다.
따라서 다항식이 아닌 유리식은 ③이다.

01-2 ㄴ, ㄷ. 분모가 상수이므로 다항식이다.
따라서 다항식이 아닌 유리식은 ㄱ, ㄹ이다.

02-1 $\frac{x^2+2x-8}{2x^2-3x-2}=\frac{(x+4)\cancel{(x-2)}}{(2x+1)\cancel{(x-2)}}=\frac{x+4}{2x+1}$

02-2 $\frac{x^3+1}{x^2-1}=\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{(x+1)}(x-1)}=\frac{x^2-x+1}{x-1}$

03-1 $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$

$=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}+\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x+1+(x-1)}{x^2-1}=\frac{2x}{x^2-1}$

03-2 $\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x+2}$

$=\frac{3(x+2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{3x+6-(x-2)}{x^2-4}=\frac{2x+8}{x^2-4}$

04-1 $\frac{\cancel{x+2}}{2x-1}\times\frac{x+3}{\cancel{x+2}}=\frac{x+3}{2x-1}$

04-2 $\frac{2x+2}{2x-1}\div\frac{x+1}{4x^2-1}$

$=\frac{2\cancel{(x+1)}}{\cancel{2x-1}}\times\frac{(2x+1)\cancel{(2x-1)}}{\cancel{x+1}}$

$=4x+2$

05-1 분모를 0으로 하는 x의 값은
$x-2=0$에서 $x=2$
따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\neq2$인 실수$\}$이므로 정의역의 원소가 아닌 것은 ②이다.

05-2 분모를 0으로 하는 x의 값은
$2x-2=0$에서 $x=1$
따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\neq1$인 실수$\}$이므로 정의역의 원소가 아닌 것은 ③이다.

06-1 $f(a)=\dfrac{2a+3}{a-2}=9\ (a\neq 2)$이므로

$2a+3=9(a-2),\ 2a+3=9a-18$

$-7a=-21\qquad \therefore a=3$

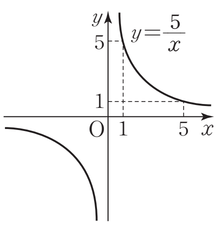
06-2 $f(a)=\dfrac{a+1}{a-2}=-2\ (a\neq 2)$이므로

$a+1=-2(a-2),\ a+1=-2a+4$

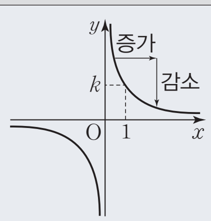
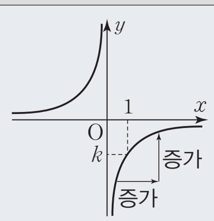
$3a=3\qquad \therefore a=1$

07-1 함수 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

③ $x>0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

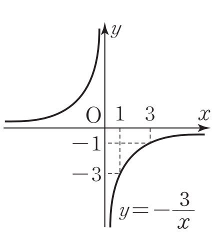


Lecture 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq 0)$의 그래프

$k>0$	$k<0$
	
• 제1사분면과 제3사분면에 있다. • 각 사분면에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.	• 제2사분면과 제4사분면에 있다. • 각 사분면에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

07-2 함수 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

⑤ x축과 만나지 않으므로 교점은 없다.



3일차

본문 18~21쪽

01-1 ④	01-2 ②	02-1 ③	02-2 ④
02-3 ①	02-4 ④	03-1 ③	03-2 ⑤
04-1 ①	04-2 ②	04-3 ①	04-4 ④
05-1 ①	05-2 ④	06-1 ④	06-2 ④

01-1 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$y=\dfrac{3}{x-a}+3$

따라서 $a=2,\ b=3,\ c=3$이므로

$a+b+c=2+3+3=8$

01-2 함수 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$y=\dfrac{a}{x+2}+b$

따라서 $a=-5,\ b=3,\ c=2$이므로

$a+b-c=-5+3-2=-4$

02-1 함수 $y=\dfrac{4}{x-2}+1$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=1$이다.

02-2 함수 $y=-\dfrac{5}{x+1}-3$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은 $x=-1,\ y=-3$이다.

따라서 $a=-1,\ b=-3$이므로

$a-b=-1-(-3)=2$

02-3 함수 $y=\dfrac{3}{x-a}-5$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은 $x=a,\ y=-5$

따라서 $a=2$, $b=-5$이므로
$a+b=2+(-5)=-3$

02-4 함수 $y=-\frac{5}{x+2}+a$의 그래프는 함수 $y=-\frac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=a$
따라서 $a=3$, $b=-2$이므로
$ab=3\cdot(-2)=-6$

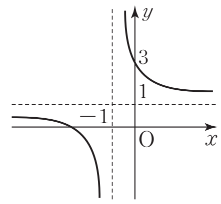
03-1 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=-1$이므로 주어진 함수의 식을
$y=\frac{k}{x-2}-1\ (k>0)$로 놓을 수 있다.
이때 이 함수의 그래프가 점 $(4, 0)$을 지나므로
$0=\frac{k}{4-2}-1 \qquad \therefore k=2$
따라서 구하는 함수의 식은 $y=\frac{2}{x-2}-1$이므로
$a=-2$, $b=2$, $c=-1$
$\therefore a+b+c=-2+2+(-1)=-1$

Lecture 유리함수의 식 구하기
점근선의 방정식이 $x=p$, $y=q$이고 점 (a, b)를 지나는 유리함수의 식은 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$로 놓은 후 $x=a$, $y=b$를 대입하여 상수 k의 값을 구한다.

03-2 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=-2$이므로 주어진 함수의 식을
$y=\frac{k}{x+1}-2\ (k<0)$로 놓을 수 있다.
이때 이 함수의 그래프가 점 $(-2, 0)$을 지나므로
$0=\frac{k}{-2+1}-2 \qquad \therefore k=-2$
따라서 구하는 함수의 식은 $y=\frac{-2}{x+1}-2$이므로
$a=-1$, $b=-2$, $c=-2$
$\therefore abc=-1\cdot(-2)\cdot(-2)=-4$

쌍둥이 문제

함수 $y=\frac{b}{x-a}-c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.



[풀이]
주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=1$이므로 주어진 함수의 식을
$y=\frac{k}{x+1}+1\ (k>0)$로 놓을 수 있다.
이때 이 함수의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로
$3=\frac{k}{0+1}+1 \qquad \therefore k=2$
따라서 구하는 함수의 식은 $y=\frac{2}{x+1}+1$이므로
$a=-1$, $b=2$, $c=-1$
$\therefore a+b+c=-1+2+(-1)=0$

답 0

04-1 $y=\frac{2x+3}{x+1}=\frac{2(x+1)+1}{x+1}=\frac{1}{x+1}+2$이므로
함수 $y=\frac{2x+3}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $a=-1$, $b=2$이므로
$a+b=-1+2=1$

다른 풀이
함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 $y=\frac{1}{x-a}+b$
이때 $y=\frac{1}{x-a}+b=\frac{1+b(x-a)}{x-a}=\frac{bx-ab+1}{x-a}$이므로 $-a=1$, $b=2$, $-ab+1=3$
따라서 $a=-1$, $b=2$이므로
$a+b=-1+2=1$

04-2 $y=\frac{-x-2}{x-1}=\frac{-(x-1)-3}{x-1}=\frac{-3}{x-1}-1$이므로 함수 $y=\frac{-x-2}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{3}{x}$

의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $a=1$, $b=-1$, $k=-3$이므로
$a+b+k=1+(-1)+(-3)=-3$

04-3 ① $y=\frac{2x}{x-1}=\frac{2(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+2$이므로 함수 $y=\frac{2x}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

② $y=\frac{3x-3}{x-2}=\frac{3(x-2)+3}{x-2}=\frac{3}{x-2}+3$이므로 함수 $y=\frac{3x-3}{x-2}$의 그래프는 함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

③ $y=\frac{x}{x-3}=\frac{(x-3)+3}{x-3}=\frac{3}{x-3}+1$이므로 함수 $y=\frac{x}{x-3}$의 그래프는 함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=\frac{x+4}{x+1}=\frac{(x+1)+3}{x+1}=\frac{3}{x+1}+1$이므로 함수 $y=\frac{x+4}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\frac{-2x-1}{x+2}=\frac{-2(x+2)+3}{x+2}=\frac{3}{x+2}-2$ 이므로 함수 $y=\frac{-2x-1}{x+2}$의 그래프는 함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동하여 함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프와 겹쳐질 수 없는 것은 ①이다.

Lecture 유리함수의 그래프가 겹쳐질 조건

두 함수 $y=\frac{k_1}{x}$과 $y=\frac{k_2}{x-p}+q$의 그래프에 대하여
(1) 평행이동하여 두 그래프를 서로 겹쳐지게 할 수 있다. ⇨ $k_1=k_2$
(2) 평행이동과 대칭이동하여 두 그래프를 서로 겹쳐지게 할 수 있다. ⇨ $|k_1|=|k_2|$

04-4 ① $y=\frac{3x-5}{x-1}=\frac{3(x-1)-2}{x-1}=-\frac{2}{x-1}+3$이므로 함수 $y=\frac{3x-5}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

② $y=\frac{-x-6}{x+4}=\frac{-(x+4)-2}{x+4}=-\frac{2}{x+4}-1$ 이므로 함수 $y=\frac{-x-6}{x+4}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

③ $y=\frac{-4x+6}{x-2}=\frac{-4(x-2)-2}{x-2}$
$=-\frac{2}{x-2}-4$
이므로 함수 $y=\frac{-4x+6}{x-2}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=\frac{-4x-10}{x+3}=\frac{-4(x+3)+2}{x+3}=\frac{2}{x+3}-4$ 이므로 함수 $y=\frac{-4x-10}{x+3}$의 그래프는 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\frac{x}{x+2}=\frac{(x+2)-2}{x+2}=-\frac{2}{x+2}+1$이므로 함수 $y=\frac{x}{x+2}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동하여 함수 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐질 수 없는 것은 ④이다.

05-1 $y=\frac{-x-3}{x+a}=\frac{-(x+a)+a-3}{x+a}=\frac{a-3}{x+a}-1$이므로 점근선의 방정식은
$x=-a$, $y=-1$
따라서 $a=2$, $b=-1$이므로
$ab=2\cdot(-1)=-2$

05-2 $y=\dfrac{bx+c}{x+a}=\dfrac{b(x+a)-ab+c}{x+a}=\dfrac{-ab+c}{x+a}+b$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=b$

$\therefore a=1, b=2$

즉 함수 $y=\dfrac{2x+c}{x+1}$의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3=\dfrac{c}{1}\qquad\therefore c=3$

$\therefore a+b+c=1+2+3=6$

다른 풀이

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=2$이므로 주어진 함수의 식을 $y=\dfrac{k}{x+1}+2\ (k\neq 0)$로 놓을 수 있다.

이때 이 함수의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3=\dfrac{k}{0+1}+2\qquad\therefore k=1$

따라서 구하는 함수의 식은

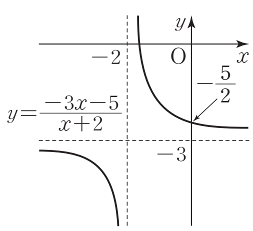
$y=\dfrac{1}{x+1}+2=\dfrac{1+2(x+1)}{x+1}=\dfrac{2x+3}{x+1}$

이므로 $a=1$, $b=2$, $c=3$

$\therefore a+b+c=1+2+3=6$

06-1 $y=\dfrac{-3x-5}{x+2}=\dfrac{-3(x+2)+1}{x+2}=\dfrac{1}{x+2}-3$

즉 함수 $y=\dfrac{-3x-5}{x+2}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



① 점 $(-2, -3)$에 대하여 대칭이다.

② 정의역은 $\{x\,|\,x\neq -2$인 실수$\}$이다.

③ $y=0$을 $y=\dfrac{-3x-5}{x+2}$에 대입하면

$0=\dfrac{-3x-5}{x+2}\qquad\therefore x=-\dfrac{5}{3}$

즉 그래프와 x축의 교점의 좌표는 $\left(-\dfrac{5}{3}, 0\right)$이다.

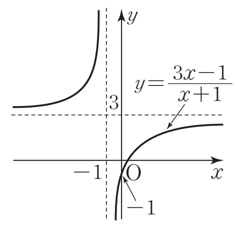
④ 그래프는 제2, 3, 4사분면을 지난다.

⑤ 그래프는 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 평행이동한 것이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

06-2 $y=\dfrac{3x-1}{x+1}=\dfrac{3(x+1)-4}{x+1}=-\dfrac{4}{x+1}+3$

즉 함수 $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



① 정의역은 $\{x\,|\,x\neq -1$인 실수$\}$이다.

② 그래프는 모든 사분면을 지난다.

③ $x=0$을 $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$에 대입하면 $y=\dfrac{-1}{1}=-1$

즉 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, -1)$이다.

④ 그래프는 점 $(-1, 3)$을 지나고 기울기가 -1인 직선에 대하여 대칭이므로

$y=-(x+1)+3$, 즉 $y=-x+2$에 대하여 대칭이다.

⑤ 그래프는 함수 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

● 4일차
본문 22~25쪽

01-1 ①	01-2 ②	02-1 ⑤	02-2 ⑤
03-1 ④	03-2 ①	04-1 ④	04-2 ⑤
05-1 ⑤	05-2 ③	05-3 ③	05-4 ①
06-1 ①	06-2 ⑤	07-1 ③	07-2 ④

01-1 $x^2+4x-5\geq 0$에서 $(x-1)(x+5)\geq 0$

$\therefore x\leq -5$ 또는 $x\geq 1$

01-2 $2-x\geq 0$, $x>0$이어야 하므로 $0<x\leq 2$

오답 피하기

(분모)$\neq 0$이어야 하므로 $x>0$이다.

Lecture **무리식의 값이 실수가 되기 위한 조건**

무리식 $\sqrt{f(x)}$의 값이 실수이려면 $f(x)\geq 0$이어야 하고, 무리식 $\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$의 값이 실수이려면 $f(x)>0$이어야 한다.

02-1 $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$

$=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})}$

$=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{4}$

02-2 $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$=\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$

$\quad+\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$

$=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$=2\sqrt{x+1}$

03-1 $a>0$이고 주어진 함수의 그래프가 점 $(2, 2)$를 지나므로

$2=\sqrt{2a}$, $4=2a$

$\therefore\ a=2$

03-2 $a<0$이고 주어진 함수의 그래프가 점 $(-1, -\sqrt{3})$을 지나므로

$-\sqrt{3}=-\sqrt{-a}$

$\therefore\ a=-3$

04-1 $-x+1\ge 0$에서 $-x\ge -1$ $\quad\therefore\ x\le 1$

즉 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\le 1\}$이므로

$a=1$

또 $\sqrt{-x+1}\ge 0$에서 $\sqrt{-x+1}+3\ge 3$이므로 주어진 함수의 치역은

$\{y|y\ge 3\}$ $\quad\therefore\ b=3$

$\therefore\ ab=1\cdot 3=3$

04-2 $x-2\ge 0$에서 $x\ge 2$

즉 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\ge 2\}$이므로

$a=2$

또 $-\sqrt{x-2}\le 0$에서 $-\sqrt{x-2}+5\le 5$이므로 주어진 함수의 치역은 $\{y|y\le 5\}$ $\quad\therefore\ b=5$

$\therefore\ ab=2\cdot 5=10$

05-1 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{2(x-3)}-1$ $\quad\therefore\ y=\sqrt{2x-6}-1$

05-2 함수 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\sqrt{3(x+1)}+2$ $\quad\therefore\ y=-\sqrt{3x+3}+2$

05-3 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-(x-1)}-1$

이 함수의 그래프가 점 $(-3, k)$를 지나므로

$k=\sqrt{-(-3-1)}-1=1$

05-4 함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

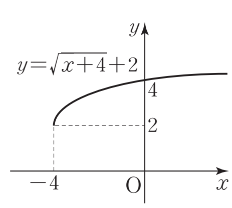
$y=\sqrt{3(x+1)}-2$

이 함수의 그래프가 점 $(2, k)$를 지나므로

$k=\sqrt{3(2+1)}-2=1$

06-1 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

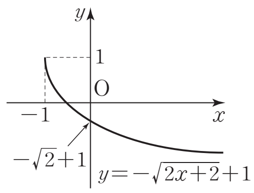
따라서 함수 $y=\sqrt{x+4}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2사분면을 지난다.



06-2 $y=-\sqrt{2x+2}+1=-\sqrt{2(x+1)}+1$

즉 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=-\sqrt{2x+2}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2, 3, 4사분면을 지난다.



쌍둥이 문제

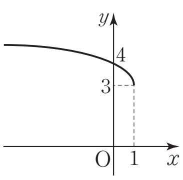
함수 $y=\sqrt{-x+1}+3$의 그래프가 지나는 사분면을 말하시오.

[풀이]

$y=\sqrt{-x+1}+3=\sqrt{-(x-1)}+3$

즉 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\sqrt{-x+1}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2사분면을 지난다.



답 제1, 2사분면

07-1 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{2(x+3)}-1=\sqrt{2x+6}-1$

따라서 $a=6$, $b=-1$이므로

$a+b=6+(-1)=5$

07-2 $a<0$이고 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x-3)}+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1=-\sqrt{-3a}+2$, $-3=-\sqrt{-3a}$

$9=-3a$ $\quad\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{-3(x-3)}+2=-\sqrt{-3x+9}+2$

이므로 $b=9$, $c=2$

$\therefore a+b+c=-3+9+2=8$

오답 피하기

주어진 그래프에서 $a<0$임을 알 수 있다.

5일차

본문 26~29쪽

01-1 ③	01-2 ②	02-1 ①	02-2 ②
02-3 ③	02-4 ②	03-1 ④	03-2 ④
03-3 ②	03-4 ④	04-1 ③	04-2 ⑤
05-1 ⑤	05-2 ⑤	06-1 ④	06-2 ⑤
07-1 ③	07-2 ⑤	08-1 ⑤	08-2 ③

01-1 1부터 10까지의 자연수 중에서 3의 배수를 택하는 경우는 3, 6, 9의 3가지

오답 피하기

경우의 수를 구할 때는 모든 경우를 빠짐없이, 중복되지 않게 구해야 한다.

01-2 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면 두 눈의 수가 같은 경우는

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$

의 6가지

02-1 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 2인 경우

$(1, 1)$의 1가지

(ii) 눈의 수의 합이 5인 경우

$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$의 4가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$1+4=5$

02-2 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 4인 경우

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3가지

(ii) 눈의 수의 합이 9인 경우

$(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$의 4가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3+4=7$

02-3 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 5인 경우

$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$의 4가지

(ii) 눈의 수의 합이 10인 경우

$(4, 6), (5, 5), (6, 4)$의 3가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$4+3=7$

02-4 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 4인 경우

$(1, 3), (2, 2), (3, 1)$의 3가지

(ii) 눈의 수의 합이 8인 경우

$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$의 5가지

(iii) 눈의 수의 합이 12인 경우

$(6, 6)$의 1가지

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$3+5+1=9$

03-1 1부터 100까지의 자연수 중에서

(i) 4로 나누었을 때의 나머지가 1인 수는

$1, 5, 9, \cdots, 97$의 25개

(ii) 4로 나누었을 때의 나머지가 2인 수는

$2, 6, 10, \cdots, 98$의 25개

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$25+25=50$

03-2 1부터 100까지의 자연수 중에서

(i) 5로 나누었을 때의 나머지가 0인 수, 즉 5의 배수는 $5, 10, 15, \cdots, 100$의 20개

(ii) 5로 나누었을 때의 나머지가 1인 수는

$1, 6, 11, \cdots, 96$의 20개

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$20+20=40$

03-3 (i) 카드에 적힌 숫자가 6의 배수인 경우

$6, 12, 18, 24, 30, 36$의 6가지

(ii) 카드에 적힌 숫자가 7의 배수인 경우

$7, 14, 21, 28, 35$의 5가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6+5=11$

03-4 (i) 카드에 적힌 숫자가 2의 배수인 경우

$2, 4, 6, \cdots, 30$의 15가지

(ii) 카드에 적힌 숫자가 3의 배수인 경우

$3, 6, 9, \cdots, 30$의 10가지

(iii) 카드에 적힌 숫자가 6의 배수인 경우

$6, 12, 18, 24, 30$의 5가지

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$15+10-5=20$

오답 피하기

2와 3의 공배수인 6의 배수가 적힌 카드를 주의한다.

04-1 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 $2, 3, 5, 7$의 4가지이고, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 $1, 3, 5, 7, 9$의 5가지이므로 구하는 자연수의 개수는

$4\cdot5=20$

04-2 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 $3, 6, 9$의 3가지이고, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 $1, 3, 5, 7, 9$의 5가지이므로 구하는 자연수의 개수는

$3\cdot5=15$

05-1 $(a+b+c)(x+y)$의 a, b, c에 곱해지는 항이 각각 x, y의 2개이므로 구하는 항의 개수는

$3\cdot2=6$

05-2 $(a+b+c)(x+y+z)$의 a, b, c에 곱해지는 항이 각각 x, y, z의 3개이므로 구하는 항의 개수는

$3\cdot3=9$

쌍둥이 문제

다항식 $(a+b)(p+q+r)(x+y+z)$를 전개할 때, 만들어지는 항의 개수를 구하시오.

[풀이]

주어진 다항식의 a, b에 곱해지는 항이 각각 p, q, r의 3개이고, 이들 각각에 곱해지는 항이 각각 x, y, z의 3개이므로 구하는 항의 개수는

$2\cdot3\cdot3=18$

답 18

06-1 96을 소인수분해하면 $96=2^5\cdot3$

2^5의 양의 약수는 $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$의 6개

3의 양의 약수는 1, 3의 2개

따라서 96의 양의 약수의 개수는

$6\cdot2=12$

다른 풀이

$96=2^5\cdot3$이므로 96의 양의 약수의 개수는

$(5+1)(1+1)=12$

Lecture 자연수의 양의 약수의 개수

자연수 N을 소인수분해하면

$N=a^xb^y$ (a, b는 서로 다른 소수, x, y는 자연수)

일 때, N의 양의 약수의 개수는

⇨ $(x+1)(y+1)$

06-2 360을 소인수분해하면 $360=2^3\cdot3^2\cdot5$

2^3의 양의 약수는 $1, 2, 2^2, 2^3$의 4개

3^2의 양의 약수는 $1, 3, 3^2$의 3개

5의 양의 약수는 1, 5의 2개

따라서 360의 양의 약수의 개수는

$4\cdot3\cdot2=24$

다른 풀이

$360=2^3\cdot3^2\cdot5$이므로 360의 양의 약수의 개수는

$(3+1)(2+1)(1+1)=24$

07-1 A, B, C에 칠할 수 있는 색은 각각 3가지, 2가지, 1가지이므로 구하는 경우의 수는

$3\cdot2\cdot1=6$

07-2 A에 칠할 수 있는 색은 6가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 5가지

C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 4가지

D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 4가지

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot5\cdot4\cdot4=480$

08-1 (ⅰ) 조각상 → 분수대 → 공연장으로 가는 경우의 수는

$2\cdot2=4$

(ⅱ) 조각상 → 놀이터 → 공연장으로 가는 경우의 수는

$3\cdot2=6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$4+6=10$

08-2 (ⅰ) A → B → D로 가는 경우의 수는

$3\cdot2=6$

(ⅱ) A → C → D로 가는 경우의 수는

$2\cdot2=4$

(ⅲ) A → B → C → D로 가는 경우의 수는

$3\cdot3\cdot2=18$

(ⅳ) A → C → B → D로 가는 경우의 수는

$2\cdot3\cdot2=12$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는

$6+4+18+12=40$

● 6일차 본문 30~33쪽

01-1 ②	01-2 ④	02-1 ①	02-2 ③
03-1 ④	03-2 ③	04-1 ⑤	04-2 ②
05-1 ②	05-2 ①	06-1 ②	06-2 ③
07-1 ⑤	07-2 ④	08-1 ④	08-2 ④
08-3 ②	08-4 ③	09-1 ①	09-2 ②

01-1 ${}_{10}\mathrm{P}_r=10\cdot{}_9\mathrm{P}_3$에서
$10\cdot9\cdot\cdots\cdot(10-r+1)=10\cdot9\cdot8\cdot7$이므로
$10-r+1=7\qquad\therefore r=4$

01-2 ${}_n\mathrm{P}_5=20\cdot{}_n\mathrm{P}_3$에서
$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$
$=20n(n-1)(n-2)$
${}_n\mathrm{P}_5$에서 $n\ge5$이므로 등식의 양변을
$n(n-1)(n-2)$로 나누면
$(n-3)(n-4)=20,\ n^2-7n-8=0$
$(n+1)(n-8)=0\qquad\therefore n=8\ (\because n\ge5)$

02-1 5명 중에서 3명을 뽑는 순열의 수이므로
${}_5\mathrm{P}_3=5\cdot4\cdot3=60$

02-2 10명 중에서 2명을 뽑는 순열의 수이므로
${}_{10}\mathrm{P}_2=10\cdot9=90$

03-1 체조부 학생 2명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$4!=24$
체조부 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\cdot2=48$

03-2 1학년 학생 3명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$4!=24$
1학년 학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\cdot6=144$

04-1 홀수이려면 일의 자리의 숫자가 1 또는 3이어야 한다. 나머지 자리에는 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자를 일렬로 나열하면 되므로 구하는 홀수의 개수는
$2\cdot3!=12$

04-2 3000보다 큰 자연수는 3□□□, 4□□□ 꼴이다.
3□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$
4□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$6+6=12$

05-1 양 끝에 짝수가 적힌 카드 2장을 나열하고, 나머지 자리에는 남은 카드 2장을 일렬로 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는
$2!\cdot2!=2\cdot2=4$

05-2 양 끝에 홀수가 적힌 카드 3장 중에서 2장을 택하여 나열하고, 나머지 자리에는 남은 카드 3장을 일렬로 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{P}_2\cdot3!=6\cdot6=36$

06-1 ${}_5\mathrm{P}_3+{}_5\mathrm{C}_3=5\cdot4\cdot3+\dfrac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}$
$=60+10=70$

06-2 ${}_n\mathrm{P}_2+{}_{n+1}\mathrm{C}_4=2\cdot{}_{n+1}\mathrm{C}_3$에서
$n(n-1)+\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$
$=2\cdot\dfrac{(n+1)n(n-1)}{3\cdot2\cdot1}$
${}_{n+1}\mathrm{C}_4$에서 $n+1\ge4$, 즉 $n\ge3$이므로 등식의 양변을 $\dfrac{n(n-1)}{24}$로 나누면

$24+(n+1)(n-2)=8(n+1)$
$n^2-9n+14=0,\ (n-2)(n-7)=0$
$\therefore n=7\ (\because n\geq 3)$

07-1 5명 중에서 2명을 뽑는 조합의 수이므로
${}_5C_2=10$

07-2 8명 중에서 5명을 뽑는 조합의 수이므로
${}_8C_5={}_8C_3=56$

08-1 남학생 3명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는
${}_3C_1=3$
여학생 5명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는
${}_5C_1=5$
따라서 구하는 경우의 수는
$3\cdot 5=15$

08-2 남학생 3명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는
${}_3C_2={}_3C_1=3$
여학생 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는
${}_4C_2=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$3\cdot 6=18$

08-3 짝수 2, 4, 6, 8이 적힌 4개의 공 중에서 1개를 꺼내는 경우의 수는
${}_4C_1=4$
홀수 1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는
${}_5C_2=10$
따라서 구하는 경우의 수는
$4\cdot 10=40$

08-4 1학년 학생 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
${}_5C_3={}_5C_2=10$
2학년 학생 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
${}_4C_3={}_4C_1=4$
따라서 구하는 경우의 수는
$10+4=14$

오답 피하기

팀원이 모두 1학년 학생 또는 2학년 학생이어야 하므로 합의 법칙을 이용한다.

09-1 두 학생 A, B를 제외한 8명의 학생 중에서 2명을 뽑는 조합의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는
${}_8C_2=28$

09-2 세 학생 A, B, C를 제외한 7명의 학생 중에서 4명을 뽑고, A, B, C 중에서 1명을 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는
${}_7C_4\cdot {}_3C_1=35\cdot 3=105$

다른 풀이

(i) A는 뽑고 B, C는 뽑지 않는 경우의 수
A, B, C를 제외한 7명의 학생 중에서 4명을 뽑는 경우의 수와 같으므로
${}_7C_4={}_7C_3=35$
(ii) B는 뽑고 A, C는 뽑지 않는 경우의 수
(i)의 경우와 같으므로 35
(iii) C는 뽑고 A, B는 뽑지 않는 경우의 수
(i)의 경우와 같으므로 35
(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는
$35+35+35=105$

쌍둥이 문제

두 학생 A, B를 포함한 12명의 학생 중에서 줄넘기 선수 5명을 뽑을 때, A는 포함하고 B는 포함하지 않는 경우의 수를 구하시오.

[풀이]
두 학생 A, B를 제외한 10명의 학생 중에서 4명을 뽑고, A를 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는
${}_{10}C_4=210$

답 210

3주 전

학교시험에 자주 나오는 대표 기출 24

● 1일차 본문 36~39쪽

01-1 ③	01-2 ④	01-3 ①	01-4 ②
02-1 ②	02-2 ④	02-3 ⑤	02-4 ④
03-1 ④	03-2 ①	03-3 ⑤	03-4 ③
04-1 ①	04-2 ②	04-3 ④	04-4 ②

대표 기출 01 합성함수의 함숫값

꼭 알고 있을 개념

$(g\circ f)(a)=g(f(a))$이므로 합성함수 $g\circ f$의 a에 대한 함숫값 $(g\circ f)(a)$를 구할 때는 $f(a)$의 값을 먼저 구한다.

01-1 $g(2)=3\cdot2-4=2$이므로

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(2)$

$=2\cdot2+3=7$

01-2 $f(2)=3\cdot2=6$이므로

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(6)$

$=4\cdot6-9=15$

$g(0)=-9$이므로

$(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(-9)$

$=3\cdot(-9)=-27$

$\therefore (g\circ f)(2)+(f\circ g)(0)=15+(-27)$

$=-12$

01-3 $f(-2)=(-2)^2+1=5$이므로

$(g\circ f)(-2)=g(f(-2))=g(5)=5+a$

따라서 $5+a=2$이므로 $a=-3$

01-4 $f(a)=a+3$이므로

$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(a+3)$

$=5(a+3)-3=5a+12$

따라서 $5a+12=2$이므로 $a=-2$

대표 기출 02 합성함수의 성질

꼭 알고 있을 개념

세 함수 f, g, h에 대하여 합성함수는 다음과 같은 성질을 갖는다.

(1) $f\circ g\neq g\circ f$

(2) $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$

(3) 항등함수 I에 대하여 $f\circ I=I\circ f=f$

02-1 $(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(x^2-2x)$

$(h\circ f)(x)=g(x)$이므로

$h(x^2-2x)=x+2$ …… ㉠

이때 $h(3)$의 값은 $x^2-2x=3$일 때이므로

$x^2-2x-3=0,\ (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=3\ (\because x\geq1)$

$x=3$을 ㉠에 대입하면

$h(3)=3+2=5$

02-2 $(g\circ h)(x)=g(h(x))=h(x)-1$

$(g\circ h)(x)=f(x)$이므로 $h(x)-1=-x^2+4x$

따라서 $h(x)=-x^2+4x+1$이므로

$h(3)=-3^2+4\cdot3+1=4$

다른 풀이

$(g\circ h)(x)=g(h(x))=f(x)$이므로

$g(h(3))=f(3)$

즉 $h(3)-1=-3^2+4\cdot3=3$이므로

$h(3)=4$

02-3 $(f\circ h)(x)=f(h(x))=13h(x)-2$

$(f\circ h)(x)=g(x)$이므로 $13h(x)-2=5x-1$

$13h(x)=5x+1 \quad \therefore h(x)=\frac{5}{13}x+\frac{1}{13}$

$\therefore h(5)=\frac{5}{13}\cdot5+\frac{1}{13}=2$

02-4 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=-4(-x+2)+2$

$=4x-6$

이므로

$(h\circ(g\circ f))(x)=h((g\circ f)(x))=h(4x-6)$

$(h\circ(g\circ f))(x)=f(x)$이므로

$h(4x-6)=-x+2$ …… ㉠

이때 $4x-6=t$라 하면 $x=\frac{t+6}{4}$

$x=\frac{t+6}{4}$을 ㉠에 대입하면

$h(t)=-\frac{t+6}{4}+2=-\frac{t}{4}+\frac{1}{2}$

$\therefore h(-2)=-\frac{-2}{4}+\frac{1}{2}=1$

대표 기출 03 역함수의 함숫값

꼭 알고 있을 개념

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여

$f^{-1}(b)=a \Longleftrightarrow f(a)=b$

03-1 $f^{-1}(7)=a$라 하면 $f(a)=7$이므로

$3a+1=7 \quad \therefore a=2$

$\therefore f^{-1}(7)=2$

03-2 $f(3)=5$이므로 $6+a=5$

$\therefore a=-1$

즉 $f(x)=2x-1$이고 $f^{-1}(3)=b$에서 $f(b)=3$이므로

$2b-1=3 \quad \therefore b=2$

$\therefore ab=-1\cdot 2=-2$

03-3 $f(-2)=1$이므로 $-2a+b=1$ ⋯⋯ ㉠

$f^{-1}(7)=1$에서 $f(1)=7$이므로

$a+b=7$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, b=5$

03-4 $f^{-1}(4)=2$에서 $f(2)=4$이므로

$2a+b=4$ ⋯⋯ ㉠

$f^{-1}(-5)=-1$에서 $f(-1)=-5$이므로

$-a+b=-5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3, b=-2$

$\therefore a^2+b^2=3^2+(-2)^2=13$

대표 기출 04 역함수의 성질

꼭 알고 있을 개념

두 함수 f, g의 역함수가 각각 f^{-1}, g^{-1}일 때

(단, I는 항등함수)

(1) $(f^{-1})^{-1}=f$

(2) $f\circ f^{-1}=I, f^{-1}\circ f=I$

(3) $f\circ g=I \Longleftrightarrow f=g^{-1}, g=f^{-1}$

(4) $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$

04-1 $g(1)=-3\cdot 1+2=-1$이므로

$(f^{-1}\circ g)(1)=f^{-1}(g(1))=f^{-1}(-1)$

이때 $f^{-1}(-1)=a$라 하면 $f(a)=-1$이므로

$a-1=-1 \quad \therefore a=0$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(1)=0$

다른 풀이

$y=x-1$이라 하고 x를 y의 식으로 나타내면

$x=y+1$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=x+1$

$\therefore f^{-1}(x)=x+1$

이때 $g(1)=-3\cdot 1+2=-1$이므로

$(f^{-1}\circ g)(1)=f^{-1}(g(1))=f^{-1}(-1)$

$=-1+1=0$

04-2 $(f\circ g^{-1})^{-1}(-3)=(g\circ f^{-1})(-3)$

$=g(f^{-1}(-3))$

$=-2f^{-1}(-3)+3$

이때 $f^{-1}(-3)=a$라 하면 $f(a)=-3$이므로

$a+1=-3 \quad \therefore a=-4$

따라서 $f^{-1}(-3)=-4$이므로

$(f\circ g^{-1})^{-1}(-3)=-2f^{-1}(-3)+3$

$=-2\cdot(-4)+3$

$=11$

04-3 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(k)=(g^{-1}\circ f)(k)$

$=g^{-1}(f(k))$

$=-2$

이므로 $g(-2)=f(k)$

즉 $-4\cdot(-2)+2=3k+1$이므로

$3k+1=10 \quad \therefore k=3$

04-4 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(5)$

$=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(5)$

$=((f\circ f^{-1})\circ g^{-1}\circ f)(5)$

$=(g^{-1}\circ f)(5)$

$=g^{-1}(f(5))$

이때 $f(5)=3\cdot5-1=14$이므로

$g^{-1}(f(5))=g^{-1}(14)$

$g^{-1}(14)=a$라 하면 $g(a)=14$이므로

$-3a+5=14 \quad \therefore a=-3$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(5)=g^{-1}(f(5))$

$=g^{-1}(14)$

$=-3$

● 2일차 본문 40~43쪽

05-1 ⑤	05-2 ③	05-3 ②	05-4 ⑤
06-1 ①	06-2 ⑤	06-3 ④	
07-1 ②	07-2 ③	07-3 ⑤	07-4 ④
08-1 ②	08-2 ②	08-3 ④	

대표 기출 05 유리함수의 그래프의 평행이동

꼭 알고 있을 개념

함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프는 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

05-1 $y=\frac{x-1}{x-4}=\frac{(x-4)+3}{x-4}=\frac{3}{x-4}+1$

이므로 함수 $y=\frac{x-1}{x-4}$의 그래프는 함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=4$, $b=1$이므로

$a-b=4-1=3$

05-2 $y=\frac{ax+5}{x+2}=\frac{a(x+2)-2a+5}{x+2}=\frac{-2a+5}{x+2}+a$

이므로 함수 $y=\frac{ax+5}{x+2}$의 그래프는 함수

$y=\frac{-2a+5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

즉 $-2a+5=b$, $c=-2$, $a=3$이므로

$a=3$, $b=-2\cdot3+5=-1$, $c=-2$

$\therefore a+b+c=3+(-1)+(-2)=0$

다른 풀이

함수 $y=\frac{b}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 c만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$y=\frac{b}{x-c}+3=\frac{b+3(x-c)}{x-c}=\frac{3x+b-3c}{x-c}$

즉 $a=3$, $b-3c=5$, $-c=2$이므로

$a=3$, $b=-1$, $c=-2$

$\therefore a+b+c=3+(-1)+(-2)=0$

05-3 $y=\frac{2x-3}{x+a}=\frac{2(x+a)-2a-3}{x+a}=\frac{-2a-3}{x+a}+2$

이므로 함수 $y=\frac{2x-3}{x+a}$의 그래프는 함수

$y=\frac{-2a-3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

즉 $-a=1$, $c=2$, $b=-2a-3$이므로

$a=-1$, $b=-1$, $c=2$

$\therefore a+b-c=-1+(-1)-2=-4$

05-4 $y=\frac{4x+7}{x+3}=\frac{4(x+3)-5}{x+3}=-\frac{5}{x+3}+4$

이므로 함수 $y=\frac{4x+7}{x+3}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{5}{x-p+3}+4+q \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 그래프가

$y=\frac{2x-7}{x-1}=\frac{2(x-1)-5}{x-1}=-\frac{5}{x-1}+2$

의 그래프와 일치하므로 $-p+3=-1$, $4+q=2$

따라서 $p=4$, $q=-2$이므로

$p+q=4+(-2)=2$

쌍둥이 문제

함수 $y=\frac{2x-3}{x-2}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 함수 $y=\frac{3x+7}{x+2}$의 그래프와 일치할 때, mn의 값을 구하시오.

[풀이]

$y=\frac{2x-3}{x-2}=\frac{2(x-2)+1}{x-2}=\frac{1}{x-2}+2$

이므로 함수 $y=\frac{2x-3}{x-2}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{1}{x-m-2}+2+n$ ...... ㉠

㉠의 그래프가

$y=\frac{3x+7}{x+2}=\frac{3(x+2)+1}{x+2}=\frac{1}{x+2}+3$

의 그래프와 일치하므로 $-m-2=2$, $2+n=3$

따라서 $m=-4$, $n=1$이므로

$mn=-4\cdot1=-4$

답 -4

대표 기출 06 평행이동에 의하여 그래프가 겹쳐지는 유리함수

꼭 알고 있을 개념

함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형했을 때, k의 값이 같은 유리함수끼리는 그 그래프를 평행이동하여 서로 겹쳐지게 할 수 있다.

06-1 ① $y=\frac{x-2}{x}=-\frac{2}{x}+1$

이므로 함수 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

② $y=\frac{3x-4}{x-2}=\frac{3(x-2)+2}{x-2}=\frac{2}{x-2}+3$

이므로 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

③ $y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+1$

이므로 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=\frac{x+3}{x+1}=\frac{(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+1$

이므로 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\frac{-x}{x+2}=\frac{-(x+2)+2}{x+2}=\frac{2}{x+2}-1$

이므로 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동에 의하여 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐지지 않는 것은 ①이다.

06-2 ① $y=\frac{x}{x+1}=\frac{(x+1)-1}{x+1}=-\frac{1}{x+1}+1$

이므로 함수 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

② $y=\frac{3x-4}{x-1}=\frac{3(x-1)-1}{x-1}=-\frac{1}{x-1}+3$

이므로 함수 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

③ $y=\frac{-4x-1}{x}=-\frac{1}{x}-4$

이므로 함수 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=\frac{2x-3}{x-1}=\frac{2(x-1)-1}{x-1}=-\frac{1}{x-1}+2$

이므로 함수 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\frac{-2x-3}{x+2}=\frac{-2(x+2)+1}{x+2}=\frac{1}{x+2}-2$

이므로 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동에 의하여 함수 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프와 겹쳐지지 않는 것은 ⑤이다.

06-3 $y=\frac{-3x+10}{x-4}=\frac{-3(x-4)-2}{x-4}=-\frac{2}{x-4}-3$

이므로 함수 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 평행이동한 것이다.

ㄱ. $y=\frac{2x-4}{x-1}=\frac{2(x-1)-2}{x-1}=-\frac{2}{x-1}+2$

이므로 함수 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\frac{-3x+3}{x-2}=\frac{-3(x-2)-3}{x-2}$

$=-\frac{3}{x-2}-3$

이므로 함수 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\frac{x+1}{x+3}=\frac{(x+3)-2}{x+3}=-\frac{2}{x+3}+1$

이므로 함수 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\frac{-4x-6}{x+1}=\frac{-4(x+1)-2}{x+1}$

$=-\frac{2}{x+1}-4$

이므로 함수 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동에 의하여 함수 $y=\frac{-3x+10}{x-4}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

대표 기출 07 유리함수의 그래프의 점근선

꼭 알고 있을 개념

(1) 함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$의 그래프의 점근선의 방정식 ⇨ $x=p,\ y=q$

(2) 함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}\ (c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$의 그래프의 점근선의 방정식 ⇨ $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$ 꼴로 변형하여 구한다.

07-1 $y=\frac{-3x-1}{x+a}=\frac{-3(x+a)+3a-1}{x+a}$

$=\frac{3a-1}{x+a}-3$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-a,\ y=-3$

따라서 $-a=-2,\ b=-3$이므로

$a=2,\ b=-3$

$\therefore a+b=2+(-3)=-1$

다른 풀이

함수 $y=\frac{-3x-1}{x+a}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{a}{1}=-a,\ y=\frac{-3}{1}=-3$

따라서 $-a=-2,\ b=-3$이므로 $a=2,\ b=-3$

$\therefore a+b=2+(-3)=-1$

Lecture 유리함수의 그래프의 점근선의 방정식

유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}\ (c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$의 그래프의 점근선의 방정식은

⇨ $x=-\frac{d}{c},\ y=\frac{a}{c}$

예 함수 $y=\frac{6x+5}{2x+4}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{4}{2},\ y=\frac{6}{2}\qquad \therefore x=-2,\ y=3$

07-2 $y=\frac{3x-7}{x-2}=\frac{3(x-2)-1}{x-2}=-\frac{1}{x-2}+3$

이므로 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=3$

$y=\frac{ax+2}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab+2}{x+b}=\frac{-ab+2}{x+b}+a$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-b,\ y=a$

이때 두 함수의 그래프의 점근선이 같으므로

$-b=2,\ a=3\qquad \therefore a=3,\ b=-2$

$\therefore ab=3\cdot(-2)=-6$

07-3 주어진 함수의 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=1,\ y=-2$이므로 주어진 함수의 식을

$y=\frac{k}{x-1}-2\ (k>0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{2-1}-2\qquad \therefore k=2$

따라서

$y=\frac{2}{x-1}-2=\frac{2-2(x-1)}{x-1}=\frac{-2x+4}{x-1}$

이므로 $a=-2,\ b=4,\ c=-1$

$\therefore a+b+c=-2+4+(-1)=1$

07-4 주어진 함수의 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=3$이므로 주어진 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-2}+3\ (k<0)$으로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(3, 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{3-2}+3 \qquad \therefore k=-3$

따라서

$y=\dfrac{-3}{x-2}+3=\dfrac{-3+3(x-2)}{x-2}=\dfrac{3x-9}{x-2}$

이므로 $a=3$, $b=-9$, $c=-2$

$\therefore a+b+c=3+(-9)+(-2)=-8$

대표 기출 08 유리함수의 최댓값과 최솟값

꼭 알고 있을 개념

주어진 정의역에서 유리함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후 y의 최댓값과 최솟값을 구한다.

08-1 $y=\dfrac{2x+1}{x+4}=\dfrac{2(x+4)-7}{x+4}=-\dfrac{7}{x+4}+2$

이므로 함수 $y=\dfrac{2x+1}{x+4}$의 그래프는 함수

$y=-\dfrac{7}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

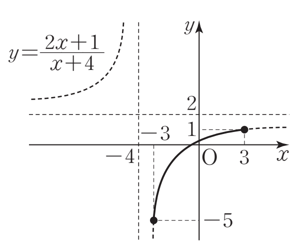
$x=-3$일 때, $y=\dfrac{2\cdot(-3)+1}{-3+4}=-5$

$x=3$일 때, $y=\dfrac{2\cdot3+1}{3+4}=1$

즉 $-3\le x\le3$에서 함수 $y=\dfrac{2x+1}{x+4}$의 그래프는 다음 그림과 같으므로

$x=3$일 때, 최댓값은 1

$x=-3$일 때, 최솟값은 -5



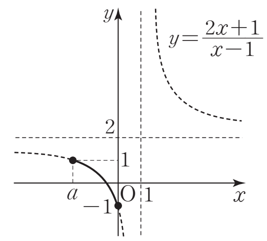
따라서 $a=1$, $b=-5$이므로

$ab=1\cdot(-5)=-5$

08-2 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+2$

이므로 함수 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$a\le x\le0$에서 함수 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉 $x=a$일 때, 최댓값이 1이므로 $1=\dfrac{2a+1}{a-1}$

$a-1=2a+1 \qquad \therefore a=-2$

또 $x=0$일 때, 최솟값이 -1이므로 $b=-1$

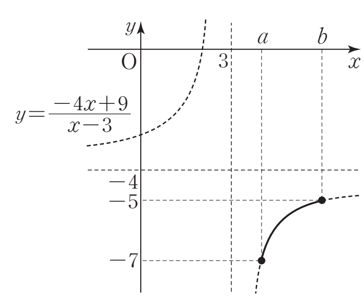
$\therefore b-a=-1-(-2)=1$

08-3 $y=\dfrac{-4x+9}{x-3}=\dfrac{-4(x-3)-3}{x-3}=-\dfrac{3}{x-3}-4$

이므로 함수 $y=\dfrac{-4x+9}{x-3}$의 그래프는 함수

$y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

$a\le x\le b$에서 함수 $y=\dfrac{-4x+9}{x-3}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉 $x=a$일 때, 최솟값이 -7이므로

$-7=\dfrac{-4a+9}{a-3}$, $-7a+21=-4a+9$

$-3a=-12 \qquad \therefore a=4$

또 $x=b$일 때, 최댓값이 -5이므로

$-5=\dfrac{-4b+9}{b-3}$, $-5b+15=-4b+9$

$\therefore b=6$

$\therefore a-b=4-6=-2$

● 3일차

본문 44~47쪽

09-1 ②	09-2 ④		
10-1 ③	10-2 ⑤	10-3 ①	10-4 ③
11-1 ⑤	11-2 ④	11-3 ②	11-4 ⑤
12-1 ①	12-2 ②	12-3 ⑤	12-4 ②

대표 기출 09 유리함수의 그래프의 성질

꼭 알고 있을 개념

유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프

(1) 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

(2) 정의역: $\{x\,|\,x\neq p$인 실수$\}$
치역: $\{y\,|\,y\neq q$인 실수$\}$

(3) 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$이다.

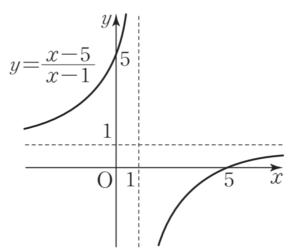
(4) 점 (p, q)에 대하여 대칭이다.

참고 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프의 성질은 주어진 함수의 식을 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형하여 알아본다.

09-1 $y=\dfrac{x-5}{x-1}=\dfrac{(x-1)-4}{x-1}=-\dfrac{4}{x-1}+1$

① 정의역은 $\{x\,|\,x\neq1$인 실수$\}$이다.

② 주어진 함수의 그래프는 다음 그림과 같으므로 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다.



③ $y=\dfrac{x-5}{x-1}$에 $x=0$을 대입하면 $y=5$
즉 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, 5)$이다.

④ 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=1$이므로 그래프는 점 $(1, 1)$에 대하여 대칭이다.

⑤ 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

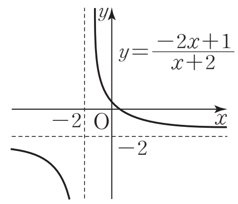
따라서 옳은 것은 ②이다.

09-2 $y=\dfrac{-2x+1}{x+2}=\dfrac{-2(x+2)+5}{x+2}=\dfrac{5}{x+2}-2$

ㄱ. 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. 치역은 $\{y\,|\,y\neq-2$인 실수$\}$이다.

ㄷ. 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프는 모든 사분면을 지난다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

대표 기출 10 무리함수의 그래프의 평행이동

꼭 알고 있을 개념

함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a\neq0)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

10-1 함수 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-\sqrt{3(x+2)}+a$

이 함수의 그래프가 점 $(1, 0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{3(1+2)}+a$, $0=-3+a$

$\therefore a=3$

10-2 $y=\sqrt{-2x-1}+2=\sqrt{-2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}+2$

이므로 함수 $y=\sqrt{-2x-1}+2$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=-2$, $p=-\dfrac{1}{2}$, $q=2$이므로

$apq=-2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot2=2$

10-3 함수 $y=\sqrt{a(x-1)}+3$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\sqrt{a(x-b-1)}+3+c$

이 함수의 그래프가 함수 $y=\sqrt{6-2x}$, 즉
$y=\sqrt{-2(x-3)}$의 그래프와 일치하므로
$a=-2$, $-b-1=-3$, $3+c=0$
따라서 $a=-2$, $b=2$, $c=-3$이므로
$a+b+c=-2+2+(-3)=-3$

10-4 함수 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\sqrt{(x-4)+2}-3=\sqrt{x-2}-3$
이 함수의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=\sqrt{x-2}-3$ $\quad$ $\therefore y=-\sqrt{x-2}+3$
이 함수의 그래프가 함수 $y=a\sqrt{x+b}+c$의 그래프와 일치하므로
$a=-1$, $b=-2$, $c=3$
$\therefore a-b+c=-1-(-2)+3=4$

Lecture 무리함수의 그래프의 대칭이동
무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a\neq 0)$의 그래프를
(1) x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$y=-\sqrt{a(x-p)}-q$
(2) y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$y=\sqrt{-a(x+p)}+q$
(3) 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$y=-\sqrt{-a(x+p)}-q$

대표 기출 11 무리함수의 그래프

꼭 알고 있을 개념
그래프가 점 (p, q)에서 시작하는 무리함수의 식
⇨ $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a\neq 0)$로 놓고 그래프가 지나는 점의 좌표를 대입하여 a의 값을 구한다.

11-1 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로
$y=\sqrt{3(x-1)}+4=\sqrt{3x-3}+4$
따라서 $a=-3$, $b=4$이므로
$b-a=4-(-3)=7$

Lecture 무리함수의 그래프의 모양
함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프가
(1) 오른쪽을 향해 뻗어나가면 $a>0$
(2) 왼쪽을 향해 뻗어나가면 $a<0$

11-2 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로
$y=\sqrt{-3(x-2)}+1=\sqrt{-3x+6}+1$
따라서 $a=6$, $b=1$이므로
$ab=6\cdot 1=6$

11-3 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로
$y=-\sqrt{a(x-4)}+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
㉠의 그래프가 점 $(2, 0)$을 지나므로
$0=-\sqrt{a(2-4)}+2$, $\sqrt{-2a}=2$
$-2a=4$ $\quad$ $\therefore a=-2$
$a=-2$를 ㉠에 대입하면
$y=-\sqrt{-2(x-4)}+2=-\sqrt{-2x+8}+2$
따라서 $a=-2$, $b=8$, $c=2$이므로
$a+b+c=-2+8+2=8$

11-4 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로
$y=-\sqrt{a(x+2)}+3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
㉠의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로
$1=-\sqrt{a(0+2)}+3$, $\sqrt{2a}=2$
$2a=4$ $\quad$ $\therefore a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면
$y=-\sqrt{2(x+2)}+3=-\sqrt{2x+4}+3$
따라서 $a=2$, $b=4$, $c=3$이므로
$a+b-c=2+4-3=3$

대표 기출 12 무리함수의 최댓값과 최솟값

꼭 알고 있을 개념

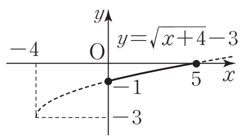
정의역이 $\{x|p\le x\le q\}$인 함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}+c$에 대하여

(1) $a>0$일 때, 최댓값은 $f(q)$, 최솟값은 $f(p)$

(2) $a<0$일 때, 최댓값은 $f(p)$, 최솟값은 $f(q)$

12-1 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

$0\le x\le 5$에서 함수 $y=\sqrt{x+4}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=5$일 때, 최댓값은 0

$x=0$일 때, 최솟값은 -1

따라서 $M=0$, $m=-1$이므로

$M-m=0-(-1)=1$

12-2 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-2\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=-2\sqrt{x-1}+a$는 $x=2$일 때 최댓값 1을 가지므로 $1=-2\sqrt{2-1}+a$

$1=-2+a \qquad \therefore a=3$

즉 함수 $y=-2\sqrt{x-1}+3$은 $x=5$일 때 최솟값 $-2\sqrt{5-1}+3=-1$을 가지므로 $b=-1$

$\therefore a+b=3+(-1)=2$

12-3 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=2\sqrt{x+1}+k$는 $x=0$일 때 최솟값 1을 가지므로

$1=2\sqrt{0+1}+k \qquad \therefore k=-1$

즉 함수 $y=2\sqrt{x+1}-1$은 $x=a$일 때 최댓값 5를 가지므로 $2\sqrt{a+1}-1=5$

$2\sqrt{a+1}=6$, $a+1=9 \qquad \therefore a=8$

$\therefore a+k=8+(-1)=7$

12-4 $y=\sqrt{4x+1}+b=\sqrt{4\left(x+\frac{1}{4}\right)}+b$

이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

$a\le x\le 2$에서 함수 $y=\sqrt{4x+1}+b$는 $x=2$일 때 최댓값 0을 가지므로

$0=\sqrt{4\cdot 2+1}+b \qquad \therefore b=-3$

즉 함수 $y=\sqrt{4x+1}-3$은 $x=a$일 때 최솟값 -2를 가지므로 $-2=\sqrt{4a+1}-3$

$\sqrt{4a+1}=1$, $4a+1=1 \qquad \therefore a=0$

$\therefore b-a=-3-0=-3$

● 4일차 본문 48~51쪽

13-1 ②	**13-2** ④		
14-1 ④	**14-2** ②	**14-3** ①	
15-1 ④	**15-2** ④	**15-3** ⑤	**15-4** ④
16-1 ④	**16-2** ③	**16-3** ②	**16-4** ④

대표 기출 13 무리함수의 그래프의 성질

꼭 알고 있을 개념

무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a\neq 0)$의 그래프

(1) 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

(2) 정의역: $a>0$일 때, $\{x|x\ge p\}$
$a<0$일 때, $\{x|x\le p\}$

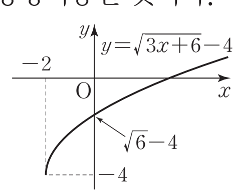
(3) 치역: $\{y|y\ge q\}$

13-1 ㄱ. $3x+6\ge 0$에서 $x\ge -2$이므로 정의역은 $\{x|x\ge -2\}$이다.

ㄴ. $\sqrt{3x+6}\ge 0$에서 $\sqrt{3x+6}-4\ge -4$이므로 치역은 $\{y|y\ge -4\}$이다.

ㄷ. $y=\sqrt{3x+6}-4=\sqrt{3(x+2)}-4$
이므로 함수 $y=\sqrt{3x+6}-4$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 3, 4사분면을 지난다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

쌍둥이 문제

다음 중 함수 $y=-\sqrt{x-2}+1$에 대한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

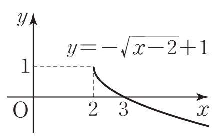
ㄱ. 치역은 $\{y|y\leq 1\}$이다.
ㄴ. 그래프는 제2사분면을 지난다.
ㄷ. 그래프는 함수 $y=\sqrt{x-2}-1$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.
ㄹ. 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 평행이동한 것이다.

[풀이]

ㄱ. $-\sqrt{x-2}\leq 0$에서 $-\sqrt{x-2}+1\leq 1$이므로 치역은 $\{y|y\leq 1\}$이다.

ㄴ, ㄹ. 함수 $y=-\sqrt{x-2}+1$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

즉 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 4사분면을 지난다.



ㄷ. 함수 $y=\sqrt{x-2}-1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sqrt{x-2}-1$

$\therefore\ y=-\sqrt{x-2}+1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

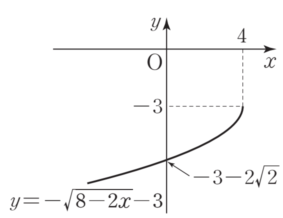
13-2 ㄱ. $8-2x\geq 0$에서 $x\leq 4$이므로 정의역은 $\{x|x\leq 4\}$이다.

ㄴ. $-\sqrt{8-2x}\leq 0$에서 $-\sqrt{8-2x}-3\leq -3$이므로 치역은 $\{y|y\leq -3\}$이다.

즉 주어진 함수의 최댓값은 -3이다.

ㄷ. $y=-\sqrt{8-2x}-3=-\sqrt{-2(x-4)}-3$

이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다. 즉 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3, 4사분면을 지난다.



ㄹ. $y=-\sqrt{4-2x}=-\sqrt{-2(x-2)}$이므로 함수 $y=-\sqrt{4-2x}$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 즉 함수 $y=-\sqrt{8-2x}-3$의 그래프는 평행이동에 의하여 함수 $y=-\sqrt{4-2x}$의 그래프와 겹쳐지게 할 수 있다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

대표 기출 14 무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계

꼭 알고 있을 개념

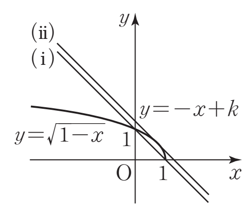
직선 $y=x+k$는 직선 $y=x$를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 무리함수 $y=\sqrt{x-3}$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 위치 관계는 무리함수 $y=\sqrt{x-3}$의 그래프를 그린 후 직선 $y=x$를 y축의 방향으로 평행이동하면서 살펴본다.

14-1 함수 $y=\sqrt{1-x}=\sqrt{-(x-1)}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

(ⅰ) 직선 $y=-x+k$가 점 $(1, 0)$을 지날 때

$0=-1+k$

$\therefore\ k=1$



(ⅱ) 직선 $y=-x+k$가 함수 $y=\sqrt{1-x}$의 그래프에 접할 때

$-x+k=\sqrt{1-x}$의 양변을 제곱하면

$x^2-2kx+k^2=1-x$

$\therefore\ x^2+(-2k+1)x+k^2-1=0$

이 식의 판별식을 D라 하면

$D=(-2k+1)^2-4\cdot 1\cdot(k^2-1)=0$

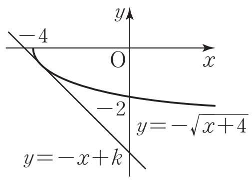
$-4k+5=0\qquad \therefore\ k=\dfrac{5}{4}$

따라서 주어진 함수의 그래프와 직선이 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 직선이 (ⅰ)이거나 (ⅰ)과 (ⅱ) 사이에 있을 때이므로

$1\leq k<\dfrac{5}{4}$

14-2 함수 $y=-\sqrt{x+4}$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

직선 $y=-x+k$가 함수 $y=-\sqrt{x+4}$의 그래프에 접할 때



$-x+k=-\sqrt{x+4}$의 양변을 제곱하면

$x^2-2kx+k^2=x+4$

$\therefore x^2-(2k+1)x+k^2-4=0$

이 식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2k+1)\}^2-4\cdot1\cdot(k^2-4)=0$

$4k+17=0 \qquad \therefore k=-\dfrac{17}{4}$

따라서 주어진 함수의 그래프와 직선이 만나지 않으려면

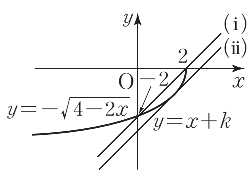
$k<-\dfrac{17}{4}$

14-3 함수 $y=-\sqrt{4-2x}=-\sqrt{-2(x-2)}$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(2, 0)$을 지날 때

$0=2+k$

$\therefore k=-2$



(ii) 직선 $y=x+k$가 함수 $y=-\sqrt{4-2x}$의 그래프에 접할 때

$x+k=-\sqrt{4-2x}$의 양변을 제곱하면

$x^2+2kx+k^2=4-2x$

$\therefore x^2+2(k+1)x+k^2-4=0$

이 식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(k+1)^2-1\cdot(k^2-4)=0$

$2k+5=0 \qquad \therefore k=-\dfrac{5}{2}$

즉 주어진 함수의 그래프와 직선이 한 점에서 만나는 경우는 직선이 (i)보다 위쪽에 있거나 (ii)일 때이므로

$k=-\dfrac{5}{2}$ 또는 $k>-2$

따라서 구하는 k의 최솟값은 $-\dfrac{5}{2}$

쌍둥이 문제

함수 $y=\sqrt{3x+3}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 한 점에서 만날 때, 실수 k의 최댓값은?

① $\dfrac{5}{3}$ ② $\dfrac{7}{4}$ ③ $\dfrac{11}{6}$

④ $\dfrac{23}{12}$ ⑤ 2

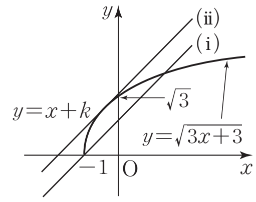
[풀이]

함수 $y=\sqrt{3x+3}=\sqrt{3(x+1)}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-1, 0)$을 지날 때

$0=-1+k$

$\therefore k=1$



(ii) 직선 $y=x+k$가 함수 $y=\sqrt{3x+3}$의 그래프에 접할 때

$x+k=\sqrt{3x+3}$의 양변을 제곱하면

$x^2+2kx+k^2=3x+3$

$\therefore x^2+(2k-3)x+k^2-3=0$

이 식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-3)^2-4\cdot1\cdot(k^2-3)=0$

$-12k+21=0 \qquad \therefore k=\dfrac{7}{4}$

즉 주어진 함수의 그래프와 직선이 한 점에서 만나는 경우는 직선이 (i)보다 아래쪽에 있거나 (ii)일 때이므로

$k<1$ 또는 $k=\dfrac{7}{4}$

따라서 구하는 k의 최댓값은 $\dfrac{7}{4}$

답 ②

대표 기출 15 유리함수, 무리함수의 합성함수와 역함수

꼭 알고 있을 개념

(1) $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$

(2) $f^{-1}(b)=a \Longleftrightarrow f(a)=b$

15-1 $f(2)=\dfrac{2\cdot2+3}{2-1}=7$이므로

$$\begin{aligned}(f\circ(g^{-1}\circ f)^{-1}\circ f)(2)&=(f\circ f^{-1}\circ g\circ f)(2)\\&=(g\circ f)(2)\\&=g(f(2))=g(7)\\&=\sqrt{2\cdot7+2}=4\end{aligned}$$

15-2 $(f\circ g^{-1})(2\sqrt{2})=f(g^{-1}(2\sqrt{2}))$

$g^{-1}(2\sqrt{2})=k$라 하면 $g(k)=2\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{3k-1}=2\sqrt{2}$, $3k-1=8$

$\therefore k=3$

$\therefore (f \circ g^{-1})(2\sqrt{2})=f(g^{-1}(2\sqrt{2}))=f(3)$

$=\dfrac{2\cdot 3-5}{3-2}=1$

15-3 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3)=(f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(3)$

$=(g^{-1} \circ f)(3)$

$=g^{-1}(f(3))$

이때 $f(3)=\dfrac{3+1}{3-2}=4$이므로

$g^{-1}(f(3))=g^{-1}(4)$

$g^{-1}(4)=k$라 하면 $g(k)=4$이므로

$\sqrt{3k+1}=4$, $3k+1=16$ $\quad\therefore k=5$

$\therefore (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3)=5$

15-4 $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(5)=(g \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ g)(5)$

$=(f^{-1} \circ g)(5)$

$=f^{-1}(g(5))$

이때 $g(5)=\sqrt{2\cdot 5-1}=3$이므로

$f^{-1}(g(5))=f^{-1}(3)$

$f^{-1}(3)=k$라 하면 $f(k)=3$이므로

$\dfrac{k+1}{k-1}=3$, $k+1=3k-3$ $\quad\therefore k=2$

$\therefore (g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(5)=2$

대표 기출 16 경우의 수

꼭 알고 있을 개념

두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n일 때

(1) 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수

⇨ $m+n$

(2) 두 사건 A, B가 잇달아 일어나는 경우의 수

⇨ $m\times n$

16-1 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 차가 0인 경우

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)의 6가지

(ii) 눈의 수의 차가 1인 경우

(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6),
(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)의 10가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6+10=16$

16-2 두 주머니에서 꺼낸 공에 적힌 숫자를 순서쌍으로 나타내면

(i) 공에 적힌 숫자의 합이 2인 경우

(1, 1)의 1가지

(ii) 공에 적힌 숫자의 합이 3인 경우

(1, 2), (2, 1)의 2가지

(iii) 공에 적힌 숫자의 합이 4인 경우

(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$1+2+3=6$

16-3 주어진 다항식의 a, b, c에 곱해지는 항이 각각 p, q의 2개이고, 이들 각각에 곱해지는 항이 각각 x, y의 2개이므로 구하는 항의 개수는

$3\cdot 2\cdot 2=12$

쌍둥이 문제

다항식 $(a+b)(x+y)+(a+b+c)(p+q)$를 간단히 할 때, 만들어지는 항의 개수는?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

[풀이]

$(a+b)(x+y)$의 a, b에 곱해지는 항이 각각 x, y의 2개이므로 항의 개수는

$2\cdot 2=4$

$(a+b+c)(p+q)$의 a, b, c에 곱해지는 항이 각각 p, q의 2개이므로 항의 개수는

$3\cdot 2=6$

이때 $(a+b)(x+y)$의 전개식과 $(a+b+c)(p+q)$의 전개식에서 동류항이 없으므로 구하는 항의 개수는

$4+6=10$

답 ①

16-4 (i) $A \to B \to C \to A$로 가는 경우의 수는

$3\cdot3\cdot2=18$

(ii) $A \to C \to B \to A$로 가는 경우의 수는

$2\cdot3\cdot3=18$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$18+18=36$

● 5일차 본문 52~55쪽

17-1 ④	17-2 ②	17-3 ②	17-4 ②
18-1 ④	18-2 ③	18-3 ③	18-4 ④
19-1 ③	19-2 ⑤	19-3 ③	19-4 ④
20-1 ④	20-2 ④	20-3 ①	20-4 ④

대표 기출 17 이웃하는 순열의 수

꼭 알고 있을 개념

이웃하는 조건이 있는 경우의 수는 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한 후 이웃하는 것끼리 자리를 바꾸는 경우의 수를 곱하여 구한다.

17-1 남학생 4명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

남학생 4명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot24=576$

17-2 남자 2명을 한 사람으로, 여자 3명을 한 사람으로 생각하여 2명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$2!=2$

남자 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

여자 3명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot2\cdot6=24$

17-3 자음인 b, c, d, f의 4개의 문자를 한 문자로, 모음인 a, e의 2개의 문자를 한 문자로 생각하여 문자 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

자음 4개의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$4!=24$

모음 2개의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot24\cdot2=96$

17-4 어른 3명을 한 사람으로 생각하여 $(n+1)$명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$(n+1)!$

어른 3명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 $(n+1)!\cdot6=720$이므로

$(n+1)!=120$, $(n+1)!=5!$

$n+1=5 \qquad \therefore n=4$

대표 기출 18 이웃하지 않는 순열의 수

꼭 알고 있을 개념

이웃하지 않는 조건이 있는 경우의 수는 이웃해도 상관없는 것을 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한 후 나열한 것 사이사이와 양 끝에 이웃하지 않아야 하는 것을 나열하는 경우의 수를 곱하여 구한다.

18-1 시집 2권을 일렬로 배치하는 경우의 수는

$2!=2$

시집 사이와 양 끝의 3개의 자리에 잡지 3권을 배치하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot6=12$

18-2 C, D, E 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$3!=6$
C, D, E 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 A, B 2명을 세우는 경우의 수는
${}_4P_2=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\cdot12=72$

18-3 1반 학생과 3반 학생 2명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$2!=2$
1반 학생, 3반 학생 사이와 양 끝의 3개의 자리에 2반 학생 2명을 세우는 경우의 수는
${}_3P_2=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$2\cdot6=12$

18-4 (i) 여학생끼리 이웃하지 않게 세우는 경우
남학생 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$4!=24$
남학생 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 여학생 3명을 세우는 경우의 수는
${}_5P_3=60$
즉 여학생끼리 이웃하지 않게 세우는 경우의 수는
$24\cdot60=1440$
(ii) 남학생과 여학생을 교대로 세우는 경우
여학생 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$3!=6$
여학생 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 남학생 4명을 세우는 경우의 수는
$4!=24$
즉 남학생과 여학생을 교대로 세우는 경우의 수는
$6\cdot24=144$
(i), (ii)에서 $a=1440$, $b=144$이므로
$\frac{a}{b}=\frac{1440}{144}=10$

대표 기출 19 '적어도' 조건이 있는 순열의 수

꼭 알고 있을 개념
사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 사건 A가 일어나지 않는 경우의 수를 빼서 구한다.

19-1 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$6!=720$
양 끝에 자음인 d, s, g, n의 4개의 문자 중에서 2개를 택하여 나열하고, 양 끝의 문자를 제외한 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
${}_4P_2\cdot4!=288$
따라서 구하는 경우의 수는
$720-288=432$

19-2 6개의 인형을 일렬로 진열하는 경우의 수는
$6!=720$
양 끝에 로봇 인형 3개 중에서 2개를 택하여 진열하고, 양 끝의 인형을 제외한 4개의 인형을 일렬로 진열하는 경우의 수는
${}_3P_2\cdot4!=144$
따라서 구하는 경우의 수는
$720-144=576$

19-3 학생 8명 중에서 반장 1명, 부반장 1명을 뽑는 경우의 수는
${}_8P_2=56$
반장, 부반장 모두 여학생인 경우의 수는
${}_5P_2=20$
따라서 구하는 경우의 수는
$56-20=36$

쌍둥이 문제

남자 2명, 여자 5명 중에서 대표 1명, 부대표 1명, 총무 1명을 뽑을 때, 대표, 부대표, 총무 중 적어도 한 명은 남자인 경우의 수는?

① 110 ② 120 ③ 130
④ 140 ⑤ 150

[풀이]

7명 중에서 대표 1명, 부대표 1명, 총무 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_7\mathrm{P}_3=210$

대표, 부대표, 총무 모두 여자인 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_3=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$210-60=150$

답 ⑤

19-4 숫자 6개 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{P}_4=360$

양 끝에 소수가 아닌 1, 4, 6의 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하고, 가운데에 양 끝의 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2\cdot{}_4\mathrm{P}_2=72$

따라서 구하는 경우의 수는

$360-72=288$

대표 기출 20 자연수의 개수

꼭 알고 있을 개념

n개의 숫자 $1, 2, \cdots, n$에서 r개를 택하여 만들 수 있는 r자리의 자연수의 개수 ⇨ ${}_n\mathrm{P}_r$

20-1 10의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0이어야 한다. 나머지 자리에는 0을 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하여 나열하면 되므로 구하는 10의 배수의 개수는

${}_4\mathrm{P}_3=24$

20-2 짝수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 2 또는 4이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

나머지 자리에는 0을 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

${}_4\mathrm{P}_2=12$

(ii) 일의 자리의 숫자가 2 또는 4인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3가지이고, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3가지이므로

$2\cdot3\cdot3=18$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$12+18=30$

오답 피하기

백의 자리에는 0이 올 수 없다.

20-3 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

나머지 자리에는 0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 나열하면 되므로

${}_5\mathrm{P}_3=60$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4가지이고, 백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

$4\cdot{}_4\mathrm{P}_2=48$

(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$60+48=108$

20-4 7개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 그 합이 7인 경우는 다음과 같다.

0, 1, 6 또는 0, 2, 5 또는 0, 3, 4 또는 1, 2, 4

(i) 0, 1, 6으로 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는 $2\cdot2!=4$

(ii) 0, 2, 5로 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는 $2\cdot2!=4$

(iii) 0, 3, 4로 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는 $2\cdot2!=4$

(iv) 1, 2, 4로 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는 $3!=6$

(i)~(iv)에서 구하는 자연수의 개수는

$4+4+4+6=18$

● 6일차

본문 56~59쪽

21-1 ⑤	**21**-2 ①	**21**-3 ④	**21**-4 ⑤
22-1 ③	**22**-2 ④	**22**-3 ①	**22**-4 ③
23-1 ⑤	**23**-2 ②	**23**-3 ③	**23**-4 ④
24-1 ⑤	**24**-2 ④	**24**-3 ④	**24**-4 ⑤

대표 기출 21 사전식으로 배열하는 경우의 수

꼭 알고 있을 개념

4개의 문자 a, b, c, d를 사전식으로 배열할 때, 첫 번째에 오는 문자열은 abcd이고, 마지막에 오는 문자열은 dcba이다.

21-1 a□□□□ 꼴의 개수는 $4!=24$
b□□□□ 꼴의 개수는 $4!=24$
c□□□□ 꼴의 개수는 $4!=24$
da□□□ 꼴의 개수는 $3!=6$
따라서 a□□□□ 꼴부터 da□□□ 꼴까지의 총 개수는
$24+24+24+6=78$
이므로 80번째에 오는 문자열은
dbace, dbaec, ⋯
에서 dbaec이다.

21-2 1□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$
2□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$
31□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$
32□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$
34□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$
351□□ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$
352로 시작하는 자연수는 순서대로
35214, 35241
이므로 35214까지의 개수는
$24+24+6+6+6+2+1=69$
따라서 35214는 69번째 수이다.

21-3 42000보다 큰 자연수는 42□□□, 43□□□, 45□□□, 5□□□□ 꼴이다.
42□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$
43□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$
45□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$
5□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$6+6+6+24=42$

21-4 3300보다 큰 자연수는 34□□, 35□□, 4□□□, 5□□□ 꼴이다.
34□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_3P_2=6$
35□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_3P_2=6$
4□□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_3=24$
5□□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_3=24$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$6+6+24+24=60$

쌍둥이 문제

6개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 세 개를 사용하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 340보다 큰 자연수의 개수는?

① 24 ② 32 ③ 43
④ 47 ⑤ 51

[풀이]
340보다 큰 자연수는 34□, 35□, 4□□, 5□□ 꼴이다.
340보다 큰 34□ 꼴인 자연수는
341, 342, 345의 3개
35□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_1=4$
4□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_2=20$
5□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_2=20$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$3+4+20+20=47$

답 ④

대표 기출 22 조합의 수

꼭 알고 있을 개념

(1) 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수
⇨ ${}_nC_r$
(2) 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 택하는 조합의 수 ⇨ ${}_{n-k}C_{r-k}$
(3) 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 제외하고 r개를 택하는 조합의 수 ⇨ ${}_{n-k}C_r$

22-1 7개 중에서 3개를 뽑는 조합의 수이므로
${}_{7}C_{3}=35$

22-2 컵 4개 중에서 2개를 고르는 경우의 수는
${}_{4}C_{2}=6$
컵받침 6개 중에서 2개를 고르는 경우의 수는
${}_{6}C_{2}=15$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\cdot 15=90$

22-3 1, 3이 적힌 두 공을 제외한 7개의 공 중에서 3개를 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는
${}_{7}C_{3}=35$

쌍둥이 문제

아버지와 어머니를 포함한 8명의 가족 중에서 5명을 선택할 때, 아버지는 포함하고 어머니는 포함하지 않는 경우의 수는?

① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

[풀이]
아버지, 어머니를 제외한 6명 중에서 4명을 선택하면 되므로 구하는 경우의 수는
${}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=15$

답 ②

22-4 남학생 n명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
${}_{n}C_{3}$
여학생 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는
${}_{4}C_{2}=6$
따라서 ${}_{n}C_{3}\cdot 6=60$이므로 ${}_{n}C_{3}=10$
$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}=10$
$n(n-1)(n-2)=5\cdot 4\cdot 3$
$\therefore n=5$

대표 기출 23 '적어도' 조건이 있는 조합의 수

꼭 알고 있을 개념
사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 사건 A가 일어나지 않는 경우의 수를 빼서 구한다.

23-1 9명 중에서 대표 2명을 뽑는 경우의 수는
${}_{9}C_{2}=36$
남자만 2명 뽑는 경우의 수는
${}_{5}C_{2}=10$
따라서 구하는 경우의 수는
$36-10=26$

23-2 8명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
${}_{8}C_{3}=56$
배우만 3명 뽑는 경우의 수는
${}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=10$
따라서 구하는 경우의 수는
$56-10=46$

23-3 10개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는
${}_{10}C_{3}=120$
짝수가 적힌 공 5개 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는
${}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=10$
홀수가 적힌 공 5개 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는
${}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=10$
따라서 구하는 경우의 수는
$120-10-10=100$

23-4 9개 중에서 4개를 택하는 경우의 수는
${}_{9}C_{4}=126$
케이크 5개 중에서 4개를 택하는 경우의 수는
${}_{5}C_{4}={}_{5}C_{1}=5$
음료 4개 중에서 4개를 택하는 경우의 수는
${}_{4}C_{4}={}_{4}C_{0}=1$
따라서 구하는 경우의 수는
$126-5-1=120$

대표 기출 24 뽑아서 나열하는 경우의 수

꼭 알고 있을 개념

서로 다른 m개에서 r개, 서로 다른 n개에서 s개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수

⇨ ${}_mC_r \cdot {}_nC_s \cdot (r+s)!$

24-1 남학생 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

여학생 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$10 \cdot 6 \cdot 24=1440$

24-2 A, B를 제외한 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$4 \cdot 24=96$

24-3 A, B를 제외한 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

A, B를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$20 \cdot 24 \cdot 2=960$

24-4 어른 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

어린이 3명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

양 끝에 어른을 세우는 경우의 수는

$2!=2$

가운데에 어린이를 세우는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2=72$

2주 전

학교시험에 나오는 창의융합, 코딩 서술형 기출 문제

● 1일차

본문 62~63쪽

1-1 -12	**1-2** (1) $a=2, b=3$ (2) 6
2-1 4	**2-2** 25

1-1 문제 제대로 읽기

두 함수 $f(x)=x+a, g(x)=bx+c$에 대하여

$(f \circ g)(x)=4x-2, f(2)=3$ 조건

일 때, abc의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. 질문의 핵심

(단, a, b, c는 상수) [6점]

$(f \circ g)(x)=f(g(x))=bx+c+a$

❶ 2점

즉 $bx+c+a=4x-2$이므로 $b=4, c+a=-2$

또 $f(2)=3$이므로 $f(2)=2+a=3$ $\quad \therefore a=1$

$a=1$을 $c+a=-2$에 대입하면

$c+1=-2$ $\quad \therefore c=-3$

❷ 3점

$\therefore abc=1 \cdot 4 \cdot (-3)=-12$

❸ 1점

1-2 문제 제대로 읽기

함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 $(f \circ f)(x)=4x+9$일 때, 다음을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. 조건

(단, $a>0$이고 a, b는 상수) [7점]

(1) a, b의 값 질문의 핵심

(2) $f^{-1}(15)$의 값 질문의 핵심

(1) $(f \circ f)(x)=f(f(x))=a(ax+b)+b$

$=a^2x+ab+b$

즉 $a^2x+ab+b=4x+9$이므로 $a^2=4, ab+b=9$

$a^2=4$에서 $a=2$ ($\because a>0$)

$a=2$를 $ab+b=9$에 대입하면

$2b+b=9$ $\quad \therefore b=3$

❶ 4점

(2) $f(x)=2x+3$

이때 $f^{-1}(15)=k$라 하면 $f(k)=15$이므로

$2k+3=15 \qquad \therefore k=6$

$\therefore f^{-1}(15)=6$

❷ 3점

2-1 문제 제대로 읽기

함수 $f(x)=2x^2-4x+2$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표가 (a, b)일 때, $a+b$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. (단, $x\geq1$) [6점]

조건 / 질문의 핵심 / 조건

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$2x^2-4x+2=x$에서 $2x^2-5x+2=0$

$(2x-1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

이때 $x\geq1$이므로 $x=2$

$x=2$를 $y=x$에 대입하면 $y=2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $(2, 2)$이므로

❶ 4점

$a=2, b=2$

❷ 1점

$\therefore a+b=2+2=4$

❸ 1점

2-2 문제 제대로 읽기

함수 $f(x)=2x-5$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표가 (a, b)일 때, ab의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]

조건 / 질문의 핵심

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$2x-5=x$에서 $x=5$

$x=5$를 $y=x$에 대입하면 $y=5$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $(5, 5)$이므로

❶ 4점

$a=5, b=5$

❷ 1점

$\therefore ab=5\cdot5=25$

❸ 1점

● 2일차 본문 64~65쪽

3-1 7	3-2 1
4-1 $-\frac{1}{3}$	4-2 8

3-1 문제 제대로 읽기

함수 $y=\frac{4}{x-1}+5$의 그래프 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(a, b)$에 대하여 $a+b-3$의 최솟값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. (단, $a>1$) [6점]

조건 / 질문의 핵심

점 $\mathrm{P}(a, b)$가 함수 $y=\frac{4}{x-1}+5$의 그래프 위에 있으므로

$b=\frac{4}{a-1}+5\ (a>1)$

❶ 1점

$$\begin{aligned}\therefore a+b-3&=a+\left(\frac{4}{a-1}+5\right)-3\\&=a+\frac{4}{a-1}+2\end{aligned}$$

❷ 2점

이때 $a>1$에서 $a-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}a+b-3&=a+\frac{4}{a-1}+2\\&=a-1+\frac{4}{a-1}+3\\&\geq2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{4}{a-1}}+3\\&=2\cdot2+3=7\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } a-1=\frac{4}{a-1}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $a+b-3$의 최솟값은 7이다.

❸ 3점

Lecture 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0, b>0$일 때

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, 즉 $a+b\geq2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

3-2 문제 제대로 읽기

함수 $y=\frac{1}{x-2}-3\ (x>2)$의 그래프 위를 움직이는 점 P에서 x축에 내린 수선의 발의 x좌표를 a, y축에 내린 수선의 발의 y좌표를 b라 할 때, $a+b$의 최솟값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]

조건 / 질문의 핵심

점 P의 좌표는 (a, b)이므로 $x=a$, $y=b$를

$y=\frac{1}{x-2}-3$에 대입하면

$b=\frac{1}{a-2}-3\ (a>2)$

❶ 2점

$\therefore a+b=a+\frac{1}{a-2}-3$

❷ 2점

이때 $a>2$에서 $a-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}a+b&=a+\frac{1}{a-2}-3\\&=a-2+\frac{1}{a-2}-1\\&\geq 2\sqrt{(a-2)\cdot\frac{1}{a-2}}-1\\&=2\cdot1-1=1\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } a-2=\frac{1}{a-2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $a+b$의 최솟값은 1이다.

❸ 3점

4-1 문제 제대로 읽기

함수 $f(x)=\frac{x}{x-1}$에 대하여

$f^1=f,\ f^{n+1}=f\circ f^n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

일 때, $f^{2020}(-1)+f^{2021}(-2)$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [8점]

조건 / 조건 / 질문의 핵심

$f(x)=\frac{x}{x-1}$이므로

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=x$$

$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=\frac{x}{x-1}$$

$$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=x$$

$\vdots$

따라서 $f^2(x)=f^4(x)=f^6(x)=\cdots=f^{2k}(x)$
$(k=1, 2, 3, \cdots)$는 항등함수이므로

❶ 3점

$f^{2020}(x)=f^{2\cdot1010}(x)=x$

$f^{2021}(x)=f^{2\cdot1010+1}(x)=f(x)=\frac{x}{x-1}$

❷ 3점

$\therefore f^{2020}(-1)+f^{2021}(-2)=-1+\frac{-2}{-2-1}=-\frac{1}{3}$

❸ 2점

4-2 문제 제대로 읽기

함수 $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$에 대하여

$f^1=f,\ f^{n+1}=f\circ f^n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

일 때, $f^{-1}(2)+f^{409}(2)$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [8점]

조건 / 조건 / 질문의 핵심

$f(x)=\frac{x+2}{x-1}$이므로

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x+2}{x-1}+2}{\frac{x+2}{x-1}-1}=x$$

$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=\frac{x+2}{x-1}$$

$$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))=\frac{\frac{x+2}{x-1}+2}{\frac{x+2}{x-1}-1}=x$$

$\vdots$

따라서 $f^2(x)=f^4(x)=f^6(x)=\cdots=f^{2k}(x)$
$(k=1, 2, 3, \cdots)$는 항등함수이므로

❶ 3점

$f^{409}(x)=f^{2\cdot204+1}(x)=f(x)=\frac{x+2}{x-1}$

$\therefore f^{409}(2)=\frac{2+2}{2-1}=4$

❷ 2점

이때 $f^{-1}(2)=a$라 하면 $f(a)=2$이므로

$f(a)=\dfrac{a+2}{a-1}=2$, $a+2=2(a-1)$

$\therefore a=4$, 즉 $f^{-1}(2)=4$

❸ 2점

$\therefore f^{-1}(2)+f^{409}(2)=4+4=8$

❹ 1점

● 3일차 본문 66~67쪽

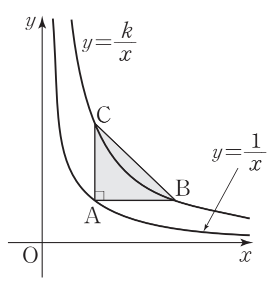
5-1 5 **5-2** $2+4\sqrt{2}$

6-1 $3\le k<\dfrac{7}{2}$ **6-2** $k=\dfrac{5}{2}$ 또는 $k<2$

5-1 문제 제대로 읽기

다음 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프의 제1사분면 위의 점 A에서 x축, y축에 각각 평행한 직선을 그어 함수 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k>1)$의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. △ABC의 넓이가 8일 때, 상수 k의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. (단, $x>0$) [7점]

조건 / 조건 / 질문의 핵심



점 A의 좌표를 $\left(p, \dfrac{1}{p}\right)$이라 하면

점 B의 좌표는 $\left(pk, \dfrac{1}{p}\right)$, 점 C의 좌표는 $\left(p, \dfrac{k}{p}\right)$

❶ 3점

이때 △ABC의 넓이가 8이므로

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\cdot(pk-p)\cdot\left(\dfrac{k}{p}-\dfrac{1}{p}\right)=8$

❷ 2점

$\dfrac{1}{2}\cdot p(k-1)\cdot\dfrac{1}{p}(k-1)=8$, $(k-1)^2=16$

$k^2-2k-15=0$, $(k+3)(k-5)=0$

$\therefore k=5$ $(\because k>1)$

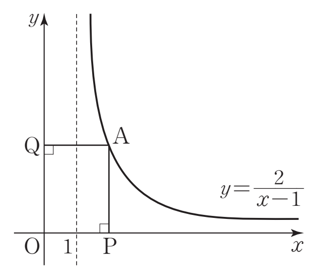
❸ 2점

5-2 문제 제대로 읽기

다음 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{2}{x-1}$ $(x>1)$의 그래프의 제1사분면 위의 점 A에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 할 때, 직사각형 OPAQ의 둘레의 길이의 최솟값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오.

조건 / 질문의 핵심

(단, O는 원점이다.) [6점]



점 A의 좌표를 $\left(p, \dfrac{2}{p-1}\right)$라 하면

$\overline{OP}=p$, $\overline{OQ}=\dfrac{2}{p-1}$이므로

❶ 2점

직사각형 OPAQ의 둘레의 길이는

$2(\overline{OP}+\overline{OQ})=2\left(p+\dfrac{2}{p-1}\right)=2\left(p-1+\dfrac{2}{p-1}+1\right)$

❷ 1점

이때 $p>1$에서 $p-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$p-1+\frac{2}{p-1}+1\ge 2\sqrt{(p-1)\cdot\frac{2}{p-1}}+1$$
$$=2\sqrt{2}+1$$
$$\left(\text{단, 등호는 } p-1=\frac{2}{p-1}\text{일 때 성립}\right)$$

$\therefore 2(\overline{OP}+\overline{OQ})\ge 2(2\sqrt{2}+1)$

$=2+4\sqrt{2}$

따라서 직사각형 OPAQ의 둘레의 길이의 최솟값은 $2+4\sqrt{2}$이다.

❸ 3점

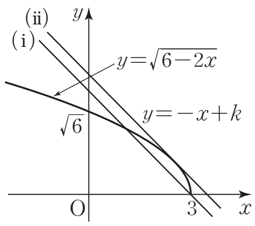
6-1 문제 제대로 읽기

함수 $y=\sqrt{6-2x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k의 값의 범위를 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [8점]

조건 / 질문의 핵심

$y=\sqrt{6-2x}=\sqrt{-2(x-3)}$이므로 함수 $y=\sqrt{6-2x}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다. 또 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.

즉 함수 $y=\sqrt{6-2x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-x+k$가 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있을 때이다.



❶ 2점

(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(3, 0)$을 지날 때

$0=-3+k \qquad \therefore k=3$

❷ 2점

(ii) 직선 $y=-x+k$가 함수 $y=\sqrt{6-2x}$의 그래프에 접할 때

$\sqrt{6-2x}=-x+k$의 양변을 제곱하면

$6-2x=x^2-2kx+k^2$

$\therefore x^2-2(k-1)x+k^2-6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-1\cdot(k^2-6)=0$

$-2k+7=0 \qquad \therefore k=\dfrac{7}{2}$

❸ 2점

따라서 구하는 k의 값의 범위는

$3\le k<\dfrac{7}{2}$

❹ 2점

6-2 문제 제대로 읽기

두 집합

$A=\{(x, y)\,|\,y=\sqrt{2x+4}\}$,

$B=\{(x, y)\,|\,y=x+k\}$

에 대하여 $n(A\cap B)=1$일 때, 실수 k의 값 또는 그 범위를 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [8점]

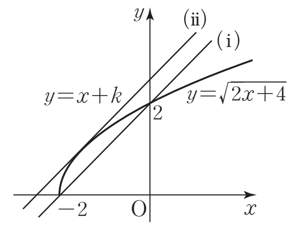
조건

질문의 핵심

$y=\sqrt{2x+4}=\sqrt{2(x+2)}$이므로 함수 $y=\sqrt{2x+4}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다. 또 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.

이때 $n(A\cap B)=1$이므로 함수 $y=\sqrt{2x+4}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 한 점에서 만난다.

즉 함수 $y=\sqrt{2x+4}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 한 점에서 만나는 경우는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x+k$가 (i)보다 아래쪽에 있거나 (ii)일 때이다.



❶ 2점

(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-2, 0)$을 지날 때

$0=-2+k \qquad \therefore k=2$

❷ 2점

(ii) 직선 $y=x+k$가 함수 $y=\sqrt{2x+4}$의 그래프에 접할 때

$\sqrt{2x+4}=x+k$의 양변을 제곱하면

$2x+4=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-1\cdot(k^2-4)=0$

$-2k+5=0 \qquad \therefore k=\dfrac{5}{2}$

❸ 2점

따라서 구하는 k의 값 또는 그 범위는

$k=\dfrac{5}{2}$ 또는 $k<2$

❹ 2점

● 4일차

본문 68~69쪽

7-1 $3\sqrt{2}$	**7**-2 $\dfrac{1}{2}$
8-1 4	**8**-2 $\dfrac{7}{3}$

7-1 문제 제대로 읽기

함수 $f(x)=\sqrt{3x-6}+2$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이를 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]

조건

질문의 핵심

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$\sqrt{3x-6}+2=x$에서 $\sqrt{3x-6}=x-2$

위 식의 양변을 제곱하면

$3x-6=x^2-4x+4$

$x^2-7x+10=0$, $(x-2)(x-5)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=5$

❶ 4점

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $(2, 2)$, $(5, 5)$이므로 $\overline{AB}$의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(5-2)^2+(5-2)^2}=3\sqrt{2}$

❷ 3점

7–2 문제 제대로 읽기

함수 $f(x)=\sqrt{4x-4}+k$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. $\overline{AB}=4$일 때, 실수 k의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [8점]

조건 조건 질문의 핵심

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점을 구하면

$\sqrt{4x-4}+k=x$에서 $\sqrt{4x-4}=x-k$

위 식의 양변을 제곱하면

$4x-4=x^2-2kx+k^2$

$\therefore x^2-2(k+2)x+k^2+4=0$ ······ ㉠

이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β라 하면 두 교점의 좌표는 (α, α), (β, β)이므로 $\overline{AB}$의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2(\alpha-\beta)^2}=4$

❶ 4점

위 식의 양변을 제곱하면 $2(\alpha-\beta)^2=16$

$(\alpha-\beta)^2=8$ $\quad\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=8$

이때 이차방정식 ㉠의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2(k+2)$, $\alpha\beta=k^2+4$이므로

$\{2(k+2)\}^2-4(k^2+4)=8$

$16k=8$ $\quad\therefore k=\dfrac{1}{2}$

❷ 4점

8–1 문제 제대로 읽기

두 함수 $f(x)=\dfrac{x+5}{x+1}$, $g(x)=\sqrt{2x-4}$에 대하여 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]

조건 질문의 핵심

$$\begin{aligned}(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)&=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(3)\\&=(g^{-1}\circ f)(3)\\&=g^{-1}(f(3))\end{aligned}$$

❶ 2점

$f(3)=\dfrac{3+5}{3+1}=2$이므로

❷ 1점

$g^{-1}(f(3))=g^{-1}(2)$

이때 $g^{-1}(2)=k$라 하면 $g(k)=2$이므로

$\sqrt{2k-4}=2$

양변을 제곱하면 $2k-4=4$

$2k=8$ $\quad\therefore k=4$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=4$

❸ 3점

Lecture 합성함수와 역함수의 성질

두 함수 f, g의 역함수가 각각 f^{-1}, g^{-1}일 때

(단, I는 항등함수)

(1) $(f^{-1})^{-1}=f$

(2) $f\circ f^{-1}=I$, $f^{-1}\circ f=I$

(3) $f\circ g=I \Longleftrightarrow f=g^{-1}$, $g=f^{-1}$

(4) $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$

8–2 문제 제대로 읽기

두 함수 $f(x)=\dfrac{-2x+6}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{3x-5}$에 대하여 $(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(2)$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]

조건 질문의 핵심

$$\begin{aligned}(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(2)&=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(2)\\&=(f^{-1}\circ g)(2)\\&=f^{-1}(g(2))\end{aligned}$$

❶ 2점

$g(2)=\sqrt{3\cdot2-5}=1$이므로

❷ 1점

$f^{-1}(g(2))=f^{-1}(1)$

이때 $f^{-1}(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로

$\frac{-2k+6}{k-1}=1$

$-2k+6=k-1 \qquad \therefore k=\frac{7}{3}$

$\therefore (g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(2)=\frac{7}{3}$

❸ 3점

● 5일차 본문 70~71쪽

9-1 9	**9-2** 15
10-1 52	**10-2** 310

9-1 문제 제대로 읽기

방정식 $a+3b+5c=21$을 만족시키는 자연수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]

조건 / 질문의 핵심

a, b, c가 자연수이므로 $a+3b+5c=21$에서

(i) $c=1$일 때, $a+3b+5=21$이므로

$a+3b=16$

$a+3b=16$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(13, 1)$, $(10, 2)$, $(7, 3)$, $(4, 4)$, $(1, 5)$의 5개

(ii) $c=2$일 때, $a+3b+10=21$이므로

$a+3b=11$

$a+3b=11$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(8, 1)$, $(5, 2)$, $(2, 3)$의 3개

(iii) $c=3$일 때, $a+3b+15=21$이므로

$a+3b=6$

$a+3b=6$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(3, 1)$의 1개

❶ 5점

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$5+3+1=9$

❷ 1점

오답 피하기

a, b, c가 자연수인지 음이 아닌 정수인지 그 조건을 반드시 확인한다.

Lecture 방정식의 해의 개수

방정식 $ax+by+cz=k$를 만족시키는 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 x, y, z 중 계수의 절댓값이 큰 것부터 수를 대입하여 구한다.

9-2 문제 제대로 읽기

집합 $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 $a\in A$, $b\in A$일 때, 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]

조건 / 질문의 핵심

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\cdot1\cdot b>0$

$\therefore a^2>4b$

❶ 2점

(i) $a=0$일 때, $0>4b \qquad \therefore b<0$

$b<0$을 만족시키는 b의 값은 없다.

(ii) $a=1$일 때, $1>4b \qquad \therefore b<\frac{1}{4}$

$b<\frac{1}{4}$을 만족시키는 b의 값은 0이므로 순서쌍 (a, b)는 $(1, 0)$의 1개

(iii) $a=2$일 때, $4>4b \qquad \therefore b<1$

$b<1$을 만족시키는 b의 값은 0이므로 순서쌍 (a, b)는 $(2, 0)$의 1개

(iv) $a=3$일 때, $9>4b \qquad \therefore b<\frac{9}{4}$

$b<\frac{9}{4}$를 만족시키는 b의 값은 0, 1, 2이므로 순서쌍 (a, b)는 $(3, 0)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$의 3개

(v) $a=4$일 때, $16>4b \qquad \therefore b<4$

$b<4$를 만족시키는 b의 값은 0, 1, 2, 3이므로 순서쌍 (a, b)는 $(4, 0)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$의 4개

(vi) $a=5$일 때, $25>4b \qquad \therefore b<\frac{25}{4}$

$b<\frac{25}{4}$를 만족시키는 b의 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5이므로 순서쌍 (a, b)는 $(5, 0)$, $(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $(5, 4)$, $(5, 5)$의 6개

❷ 4점

(i)~(vi)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는
$0+1+1+3+4+6=15$

❸ 1점

Lecture 이차방정식의 근의 판별

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$의 판별식을 D라 할 때, $D=b^2-4ac$
(1) 서로 다른 두 실근을 가진다. ⇨ $D>0$
(2) 중근을 가진다. ⇨ $D=0$
(3) 서로 다른 두 허근을 가진다. ⇨ $D<0$

10-1 문제 제대로 읽기

남학생 5명과 여학생 4명 중에서 반장 1명, 부반장 1명을 뽑을 때, 반장, 부반장 중에서 적어도 1명은 여학생인 경우의 수를 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]
조건
질문의 핵심

학생 9명 중에서 반장 1명, 부반장 1명을 뽑는 경우의 수는 9명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
${}_9P_2=72$

❶ 2점

반장과 부반장이 모두 남학생인 경우의 수는 남학생 5명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
${}_5P_2=20$

❷ 2점

따라서 구하는 경우의 수는
$72-20=52$

❸ 2점

10-2 문제 제대로 읽기

남학생 5명과 여학생 6명 중에서 대표 4명을 뽑을 때, 남학생과 여학생이 각각 적어도 1명씩 포함되는 경우의 수를 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]
조건
질문의 핵심

학생 11명 중에서 대표 4명을 뽑는 경우의 수는
${}_{11}C_4=330$

❶ 2점

대표 4명이 모두 남학생인 경우의 수는 남학생 5명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수와 같으므로
${}_5C_4={}_5C_1=5$

❷ 2점

대표 4명이 모두 여학생인 경우의 수는 여학생 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수와 같으므로
${}_6C_4={}_6C_2=15$

❸ 2점

따라서 구하는 경우의 수는
$330-5-15=310$

❹ 1점

● 6일차

본문 72~73쪽

11-1 14	11-2 6
12-1 5	12-2 126

11-1 문제 제대로 읽기

집합 $X=\{1, 3, 5, 7\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow X$ 중에서 $f(1)\neq1$, $f(5)\neq5$이고 치역과 공역이 일치하는 일대일함수 f의 개수를 구하고, 풀이 과정을 쓰시오.
조건
질문의 핵심
[7점]

치역과 공역이 일치하는 일대일함수 f는 일대일대응이다.

❶ 2점

(i) $f(1)=3$인 경우
$f(5)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값인 3과 5를 제외한 2개이므로 일대일대응인 f의 개수는
$2\cdot2!=4$
(ii) $f(1)=5$인 경우
일대일대응인 f의 개수는
$3!=6$
(iii) $f(1)=7$인 경우
$f(5)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값인 7과 5를 제외한 2개이므로 일대일대응인 f의 개수는
$2\cdot2!=4$

❷ 4점

(i)~(iii)에서 구하는 일대일함수 f의 개수는
$4+6+4=14$

❸ 1점

11-2 문제 제대로 읽기

두 집합 $X=\{1, 3, 5, 7\}$, $Y=\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 f의 개수를 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]
조건
질문의 핵심

(가) $f(5)=6$
조건
(나) $a \in X$, $b \in X$일 때, $a<b$이면 $f(a)<f(b)$
조건

주어진 조건에 의하여 $f(1)<f(3)<f(5)<f(7)$, 즉
$f(1)<f(3)<6<f(7)$이다.

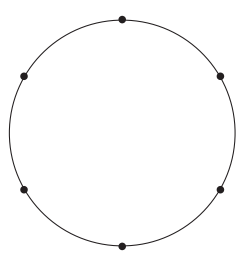
❶ 3점

$f(1)$, $f(3)$의 값은 공역의 원소 0, 2, 4 중에서 2개를 택하여 크기 순서대로 대응시키고, $f(7)$의 값은 공역의 원소 8, 10 중에서 1개를 택하면 되므로 구하는 함수 f의 개수는
${}_3C_2 \cdot {}_2C_1 = 3 \cdot 2 = 6$

❷ 4점

12-1 문제 제대로 읽기

다음 그림과 같이 원 위에 같은 간격으로 6개의 점이 놓여 있다. 6개의 점 중에서 두 점을 이어서 만들 수 있는 직선의 개수는 a, 세 점을 이어서 만들 수 있는 삼각형의 개수는 b일 때, $b-a$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]
조건(i) 조건(ii) 질문의 핵심



6개의 점 중에서 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는
${}_6C_2=15$ $\qquad \therefore a=15$

❶ 3점

6개의 점 중에서 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 구하는 삼각형의 개수는
${}_6C_3=20$ $\qquad \therefore b=20$

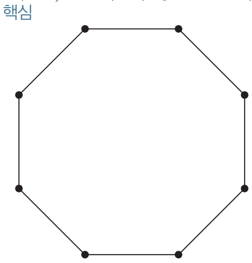
❷ 3점

$\therefore b-a=20-15=5$

❸ 1점

12-2 문제 제대로 읽기

다음 그림과 같은 정팔각형의 꼭짓점을 이어서 만들 수 있는 삼각형의 개수를 a, 사각형의 개수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]
조건(i) 조건(ii) 질문의 핵심



8개의 점 중에서 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 구하는 삼각형의 개수는
${}_8C_3=56$ $\qquad \therefore a=56$

❶ 3점

8개의 점 중에서 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 구하는 사각형의 개수는
${}_8C_4=70$ $\qquad \therefore b=70$

❷ 3점

$\therefore a+b=56+70=126$

❸ 1점

1주 전

미리 풀어보는 우리 학교 기말고사

● 1일차 본문 76~79쪽

01 ②	**02** ③	**03** ①	**04** ②	**05** ③
06 ①	**07** ④	**08** ⑤	**09** ④	**10** ②
11 ④	**12** ④	**13** ⑤	**14** ④	**15** ⑤
16 ③	**17** ①			

[서술형 1] 13
[서술형 2] 9
[서술형 3] 12

01 $f(6)=3$이므로 $\sqrt{2\cdot6+a}=3$
$a+12=9 \qquad \therefore a=-3$

02 $g(1)=3\cdot1+2=5$이므로
$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(5)=5-5=0$

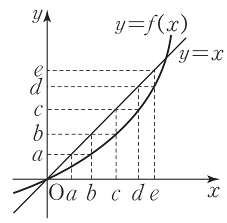
03 $f(1)=-1$이므로 $\dfrac{b-1}{1+a}=-1$
$b-1=-1-a \qquad \therefore a+b=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$f^{-1}(5)=3$에서 $f(3)=5$이므로
$\dfrac{3b-1}{3+a}=5$, $3b-1=15+5a$
$\therefore 5a-3b=-16 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=2$
$\therefore ab=-2\cdot2=-4$

Lecture 역함수의 함숫값
함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
$f(a)=b \Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

04 $f(x)=\begin{cases}(a+2)x-2a+1 & (x\ge2)\\(-a+2)x+2a+1 & (x<2)\end{cases}$
함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 $x\ge2$일 때와 $x<2$일 때의 직선의 기울기 $a+2$, $-a+2$의 부호가 서로 같아야 한다.
즉 $(a+2)(-a+2)>0$이므로 $(a+2)(a-2)<0$
$\therefore -2<a<2$
따라서 정수 a의 값은 -1, 0, 1로 그 개수는 3이다.

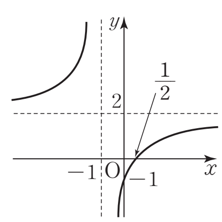
Lecture 역함수가 존재하기 위한 조건
함수 f의 역함수 f^{-1}가 존재한다.
$\Longleftrightarrow$ f가 일대일대응이다.
$\Longleftrightarrow$ (1) $x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$
(2) (치역)=(공역)

05 오른쪽 그림에서 $f(b)=a$
또
$(f^{-1}\circ f^{-1})(b)$
$=f^{-1}(f^{-1}(b))$
이므로 $f^{-1}(b)=k$라 하면
$f(k)=b \qquad \therefore k=c$
즉
$(f^{-1}\circ f^{-1})(b)=f^{-1}(c)$
이므로 $f^{-1}(c)=t$라 하면
$f(t)=c \qquad \therefore t=d$
$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(b)=d$
$\therefore f(b)+(f^{-1}\circ f^{-1})(b)=a+d$



06 $\dfrac{x-4}{x-2}\div\dfrac{x-4}{x^2-4}\times\dfrac{x}{x+2}$
$=\dfrac{x-4}{x-2}\div\dfrac{x-4}{(x+2)(x-2)}\times\dfrac{x}{x+2}$
$=\dfrac{\cancel{x-4}}{\cancel{x-2}}\times\dfrac{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-4}}\times\dfrac{x}{\cancel{x+2}}$
$=x$

07 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-3}{x+1}=-\dfrac{3}{x+1}+2$
ㄱ. 정의역은 $\{x\,|\,x\ne-1$인 실수$\}$이다.
ㄴ. 함수 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프는 모든 사분면을 지난다.



ㄷ. 함수 $y=\frac{2x-1}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

08 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=3$이므로 주어진 함수의 식을 $y=\frac{k}{x+2}+3\ (k\neq0)$으로 놓을 수 있다.
이 함수의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로
$1=\frac{k}{0+2}+3 \qquad \therefore k=-4$
따라서 $y=\frac{-4}{x+2}+3=\frac{-4+3(x+2)}{x+2}=\frac{3x+2}{x+2}$
이므로 $a=2$, $b=3$, $c=2$
$\therefore a+b+c=2+3+2=7$

Lecture 유리함수의 점근선
점근선의 방정식이 $x=p$, $y=q$인 유리함수는
$y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$ 꼴이다.

09 $x-2\geq0$에서 $x\geq2$이므로 주어진 함수의 정의역은
$\{x|x\geq2\} \qquad \therefore a=2$
또 $-\sqrt{x-2}\leq0$에서 $-\sqrt{x-2}+b\leq b$이므로 주어진 함수의 치역은
$\{y|y\leq b\} \qquad \therefore b=4$
$\therefore ab=2\cdot4=8$

10 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로
$y=-\sqrt{a(x-2)}+1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
㉠의 그래프가 점 $(0, -1)$을 지나므로
$-1=-\sqrt{a(0-2)}+1$, $\sqrt{-2a}=2$
$-2a=4 \qquad \therefore a=-2$
$a=-2$를 ㉠에 대입하면
$y=-\sqrt{-2(x-2)}+1=-\sqrt{-2x+4}+1$

따라서 $a=-2$, $b=4$, $c=1$이므로
$a+b-c=-2+4-1=1$

11 (i) 두 카드에 적힌 숫자의 합이 5인 경우
$(1, 4)$, $(2, 3)$의 2가지
(ii) 두 카드에 적힌 숫자의 합이 10인 경우
$(1, 9)$, $(2, 8)$, $(3, 7)$, $(4, 6)$의 4가지
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$2+4=6$

오답 피하기
2장의 카드를 동시에 뽑으므로 $(1, 4)$와 $(4, 1)$은 같은 경우이다. 또 꺼낸 카드를 다시 넣지 않으므로 두 카드에 적힌 숫자의 합이 10인 경우에서 $(5, 5)$는 일어날 수 없는 사건이다.

12 A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 3가지이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$5\cdot4\cdot3\cdot3=180$

13 5개의 숫자 중에서 3개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 구하는 세 자리의 자연수의 개수는
${}_5P_3=60$

14 A와 B를 한 명으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$4!=24$
A와 B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\cdot2=48$

15 어른은 3명이므로 양쪽 끝에 어른이 앉는 경우의 수는
${}_3P_2=6$
양쪽 끝에 앉은 2명을 제외한 나머지 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$5!=120$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\cdot120=720$

16 10명의 학생 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는
${}_{10}C_4=210$
남학생만 4명 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_4={}_6C_2=15$
여학생만 4명 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_4=1$
따라서 구하는 경우의 수는
$210-15-1=194$

17 9개의 점 중에서 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는
${}_9C_2=36$　　$\therefore a=36$
9개의 점 중에서 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 구하는 사각형의 개수는
${}_9C_4=126$　　$\therefore b=126$
$\therefore b-a=126-36=90$

[서술형 1] 함수 $f: X \longrightarrow X$가 일대일대응이므로
(i) $f(1)=1$인 경우
$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(1)=1\neq3$이므로 성립하지 않는다.
(ii) $f(1)=2$인 경우
$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=3$이므로
$f(1)=2, f(2)=3, f(3)=1$
(iii) $f(1)=3$인 경우
$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(3)=3$이므로
$f(1)=f(3)=3$
즉 함수 f는 일대일대응이 아니다.
(i)~(iii)에서 $f(1)=2, f(2)=3, f(3)=1$ ❶
$\therefore 2f(1)+3f(2)=2\cdot2+3\cdot3=13$ ❷

채점 기준	배점
❶ $f(1), f(2), f(3)$의 값을 구할 수 있다.	6점
❷ $2f(1)+3f(2)$의 값을 구할 수 있다.	1점

[서술형 2] 점 P의 좌표는 (a, b)이므로 $x=a, y=b$를
$y=\dfrac{9}{x-1}+7$에 대입하면
$b=\dfrac{9}{a-1}+7\ (a>1)$ ❶
$\therefore a+b-5=a+\left(\dfrac{9}{a-1}+7\right)-5=a+\dfrac{9}{a-1}+2$ ❷
이때 $a>1$에서 $a-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}a+b-5&=a+\frac{9}{a-1}+2\\&=a-1+\frac{9}{a-1}+3\\&\geq2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{9}{a-1}}+3\\&=2\cdot3+3=9\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } a-1=\dfrac{9}{a-1}\text{일 때 성립}\right)$
따라서 $a+b-5$의 최솟값은 9이다. ❸

채점 기준	배점
❶ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	2점
❷ $a+b-5$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	2점
❸ $a+b-5$의 최솟값을 구할 수 있다.	3점

[서술형 3] (가), (나)에 의하여 치역의 원소는 4개이다.
또 정의역의 원소 1은 공역의 원소 1, 2 중에서 1개를 택하여 대응시키고 정의역의 원소 3, 4는 공역의 원소 4, 5, 6, 7 중에서 2개를 택하여 크기 순서대로 대응시키면 된다. ❶
따라서 구하는 함수 f의 개수는
${}_2C_1\cdot{}_4C_2=2\cdot6=12$ ❷

채점 기준	배점
❶ 정의역의 원소에 대응시킬 수 있는 공역의 원소의 조건을 알 수 있다.	3점
❷ 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	3점

2일차 본문 80~83쪽

01 ④	02 ③	03 ①	04 ④	05 ④
06 ④	07 ④	08 ②	09 ③	10 ②
11 ②	12 ③	13 ①	14 ⑤	15 ③
16 ②	17 ③			

[서술형 1] 0

[서술형 2] $0 \le k < \frac{1}{2}$

[서술형 3] 64

01 $f^{-1}(5)=1$에서 $f(1)=5$이므로
$-2+k=5 \qquad \therefore k=7$
따라서 $f(x)=-2x+7$이므로
$f(-2)=-2\cdot(-2)+7=11$

02 $g(2)=\sqrt{2-1}=1$, $f(3)=3^2+1=10$이므로
$$\begin{aligned}(f\circ g)(2)+(g\circ f)(3)&=f(g(2))+g(f(3))\\&=f(1)+g(10)\\&=(1^2+1)+\sqrt{10-1}\\&=2+3=5\end{aligned}$$

03 $(f\circ h)(x)=f(h(x))=h(x)-3$
$(f\circ h)(x)=g(x)$이므로
$h(x)-3=\dfrac{2x+1}{x-2}$
따라서 $h(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}+3$이므로
$h(3)=\dfrac{2\cdot3+1}{3-2}+3=7+3=10$

04 $\dfrac{x-1}{x+2}\times\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-1}=\dfrac{x-3}{x+1}$에서
$\dfrac{\cancel{x-1}}{x+2}\times\dfrac{x^2+ax+b}{(x+1)(\cancel{x-1})}=\dfrac{x-3}{x+1}$
$\dfrac{x^2+ax+b}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x+2)}$
즉 $x^2+ax+b=(x-3)(x+2)=x^2-x-6$이므로
$a=-1$, $b=-6$
$\therefore ab=-1\cdot(-6)=6$

05 함수 $y=\dfrac{2}{x+1}+a$의 그래프의 점근선의 방정식은
$x=-1$, $y=a$이므로 $a=3$, $b=-1$
$\therefore a+b=3+(-1)=2$

06 $y=\dfrac{ax+6}{2x-3}$을 x에 대하여 정리하면
$(2x-3)y=ax+6$, $2xy-3y=ax+6$
$(2y-a)x=3y+6 \qquad \therefore x=\dfrac{3y+6}{2y-a}$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=\dfrac{3x+6}{2x-a}$, 즉 $f^{-1}(x)=\dfrac{3x+6}{2x-a}$
이때 $f=f^{-1}$이므로 $\dfrac{ax+6}{2x-3}=\dfrac{3x+6}{2x-a}$
$\therefore a=3$

07 주어진 함수의 그래프에서 점근선의 방정식이
$x=-3$, $y=1$이므로 주어진 함수의 식을
$y=\dfrac{k}{x+3}+1\ (k>0)$로 놓을 수 있다.
이 함수의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로
$2=\dfrac{k}{0+3}+1 \qquad \therefore k=3$
따라서 $y=\dfrac{3}{x+3}+1=\dfrac{3+(x+3)}{x+3}=\dfrac{x+6}{x+3}$이므로
$a=1$, $b=6$, $c=-3$
$\therefore a+b+c=1+6+(-3)=4$

08 $y=-\sqrt{k-x}+3=-\sqrt{-(x-k)}+3$이므로 함수
$y=-\sqrt{k-x}+3$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
즉 $-7\le x\le1$에서 $x=-7$일 때 최솟값을 갖고,
$x=1$일 때 최댓값 2를 가지므로
$2=-\sqrt{k-1}+3$에서 $\sqrt{k-1}=1$
$k-1=1 \qquad \therefore k=2$
따라서 $y=-\sqrt{2-x}+3$이므로 이 함수의 최솟값은
$x=-7$일 때, $y=-\sqrt{2-(-7)}+3=0$

Lecture 무리함수의 최댓값과 최솟값

정의역이 $\{x \mid p \le x \le q\}$일 때

(1) 함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}+c$에 대하여

① $a>0$일 때, 최댓값은 $f(q)$, 최솟값은 $f(p)$

② $a<0$일 때, 최댓값은 $f(p)$, 최솟값은 $f(q)$

(2) 함수 $f(x)=-\sqrt{ax+b}+c$에 대하여

① $a>0$일 때, 최댓값은 $f(p)$, 최솟값은 $f(q)$

② $a<0$일 때, 최댓값은 $f(q)$, 최솟값은 $f(p)$

09 함수 $y=\sqrt{ax+1}-2$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-1)+1}-2-1$

$\therefore y=\sqrt{a(x-1)+1}-3$

이 함수의 그래프가 점 $(2, 0)$을 지나므로

$0=\sqrt{a(2-1)+1}-3$에서 $\sqrt{a+1}=3$

$a+1=9 \qquad \therefore a=8$

10 480을 소인수분해하면 $480=2^5 \cdot 3 \cdot 5$

약수 중에서 짝수는 2를 소인수로 가지므로 480의 양의 약수 중에서 짝수의 개수는 $2^4 \cdot 3 \cdot 5$의 양의 약수의 개수와 같다.

따라서 480의 양의 약수 중에서 짝수의 개수는

$(4+1)(1+1)(1+1)=20$

Lecture 자연수의 양의 약수의 개수

자연수 N이 $N=a^p b^q c^r$ (a, b, c는 서로 다른 소수, p, q, r는 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, N의 양의 약수의 개수 ⇨ $(p+1)(q+1)(r+1)$

11 x, y가 자연수이므로 $x+3y \le 10$에서

(i) $y=1$일 때, $x+3 \le 10$, 즉 $x \le 7$이므로 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (7, 1)$의 7개

(ii) $y=2$일 때, $x+6 \le 10$, 즉 $x \le 4$이므로 순서쌍 (x, y)는 $(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)$의 4개

(iii) $y=3$일 때, $x+9 \le 10$, 즉 $x \le 1$이므로 순서쌍 (x, y)는 $(1, 3)$의 1개

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$7+4+1=12$

다른 풀이

x, y가 자연수이므로 $x+3y \le 10$을 만족시키는 경우는

$x+3y=4$, $x+3y=5$, $x+3y=6$, $x+3y=7$, $x+3y=8$, $x+3y=9$, $x+3y=10$

(i) $x+3y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$의 1개

(ii) $x+3y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(2, 1)$의 1개

(iii) $x+3y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(3, 1)$의 1개

(iv) $x+3y=7$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(4, 1), (1, 2)$의 2개

(v) $x+3y=8$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(5, 1), (2, 2)$의 2개

(vi) $x+3y=9$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(6, 1), (3, 2)$의 2개

(vii) $x+3y=10$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(7, 1), (4, 2), (1, 3)$의 3개

(i)~(vii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$1+1+1+2+2+2+3=12$

12 ${}_{2n}P_3=28 \cdot {}_nP_2$에서

$2n(2n-1)(2n-2)=28n(n-1)$

$\therefore n(2n-1)(n-1)=7n(n-1)$

이때 ${}_nP_2$에서 $n \ge 2$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$2n-1=7$, $2n=8 \qquad \therefore n=4$

13 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5의 3개

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 놓인 숫자를 제외한 4개

십의 자리와 백의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 놓인 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개의 숫자를 뽑아 일렬로 나열하면 되므로 ${}_4P_2=12$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$3 \cdot 4 \cdot 12=144$

14 남학생 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$5!=120$
남학생 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에 여학생 2명을 세우는 경우의 수는
${}_6P_2=30$
따라서 구하는 경우의 수는
$120\cdot30=3600$

Lecture '적어도' 조건이 있는 경우의 수
'적어도' 조건이 있는 사건 A가 일어나는 경우의 수는
(모든 경우의 수)−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

15 (i) 짝수가 적힌 공 3개가 나오는 경우
2, 4, 6, 8이 적힌 공 4개 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_4C_3={}_4C_1=4$
(ii) 홀수가 적힌 공 3개가 나오는 경우
1, 3, 5, 7, 9가 적힌 공 5개 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_5C_3={}_5C_2=10$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$4+10=14$

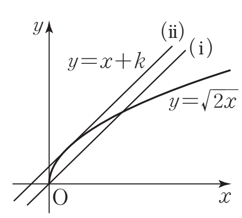
16 A, B, C 3명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는
${}_3C_1=3$
A, B, C를 제외한 7명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_7C_2=21$
따라서 구하는 경우의 수는
$3\cdot21=63$

17 12명의 학생 중에서 2명의 대표를 뽑는 경우의 수는
${}_{12}C_2=66$
이때 여학생의 수를 x명이라 하면 2명의 대표를 모두 여학생으로 뽑는 경우의 수는
${}_xC_2\ (x\geq2)$
즉 남학생이 적어도 1명 포함되도록 뽑는 경우의 수는 $66-{}_xC_2=45$이므로 ${}_xC_2=21$
$\dfrac{x(x-1)}{2\cdot1}=21$, $x(x-1)=42$
$x^2-x-42=0$, $(x+6)(x-7)=0$
$\therefore x=7\ (\because x\geq2)$
따라서 여학생 수는 7명이다.

[서술형 1] $f^1(3)=f(3)=1$
$f^2(3)=f(f^1(3))=f(1)=2$
$f^3(3)=f(f^2(3))=f(2)=3$
$f^4(3)=f(f^3(3))=f(3)=1$
$f^5(3)=f(f^4(3))=f(1)=2$
⋮
즉 $f^n(3)$의 값은 1, 2, 3이 이 순서대로 반복된다.
이때 $10=3\cdot3+1$이므로
$f^{10}(3)=f^1(3)=1$
······ ❶
$f^1(2)=f(2)=3$
$f^2(2)=f(f^1(2))=f(3)=1$
$f^3(2)=f(f^2(2))=f(1)=2$
$f^4(2)=f(f^3(2))=f(2)=3$
$f^5(2)=f(f^4(2))=f(3)=1$
⋮
즉 $f^n(2)$의 값은 3, 1, 2가 이 순서대로 반복된다.
이때 $20=3\cdot6+2$이므로
$f^{20}(2)=f^2(2)=1$
······ ❷
$\therefore f^{10}(3)-f^{20}(2)=1-1=0$
······ ❸

채점 기준	배점
❶ $f^{10}(3)$의 값을 구할 수 있다.	3점
❷ $f^{20}(2)$의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ $f^{10}(3)-f^{20}(2)$의 값을 구할 수 있다.	1점

[서술형 2] 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.
즉 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x+k$가 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있을 때이다.



······ ❶

(i) 직선 $y=x+k$가 원점을 지날 때

$0=0+k \qquad \therefore k=0$

❷

(ii) 직선 $y=x+k$가 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프에 접할 때

$\sqrt{2x}=x+k$의 양변을 제곱하면

$2x=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-1\cdot k^2=0$

$-2k+1=0 \qquad \therefore k=\dfrac{1}{2}$

❸

따라서 구하는 k의 값의 범위는

$0\le k<\dfrac{1}{2}$

❹

채점 기준	배점
❶ 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 그래프를 그릴 수 있다.	2점
❷ 직선 $y=x+k$가 원점을 지날 때, k의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ 직선 $y=x+k$가 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프에 접할 때, k의 값을 구할 수 있다.	2점
❹ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	1점

[서술형 3] 9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_9C_3=84$

❶

일직선 위에 있는 6개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

❷

그런데 일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$84-20=64$

❸

채점 기준	배점
❶ 9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❷ 일직선 위에 있는 6개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❸ 9개의 점 중에서 세 점을 이어서 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구할 수 있다.	2점

● 3일차

본문 84~87쪽

01 ⑤	**02** ④	**03** ③	**04** ③	**05** ②
06 ③	**07** ②	**08** ⑤	**09** ③	**10** ④
11 ⑤	**12** ①	**13** ②	**14** ②	**15** ⑤
16 ⑤	**17** ④			

[서술형 1] $3\sqrt{2}$

[서술형 2] $-\dfrac{4}{3}$

[서술형 3] 720

01 $f^{-1}(5)=k$라 하면 $f(k)=5$이므로

$\dfrac{2k+7}{k-1}=5$에서 $2k+7=5k-5$

$-3k=-12 \qquad \therefore k=4$

$\therefore f^{-1}(5)=4$

02 $g(1)=-3\cdot1+a=a-3$이므로

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(a-3)$

$=(a-3)-1=a-4$

따라서 $a-4=-2$이므로 $a=2$

다른 풀이

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=-3x+a-1$이므로

$(f\circ g)(1)=a-4=-2 \qquad \therefore a=2$

03 $g(0)=\sqrt{4}=2$, $f(-3)=-2\cdot(-3)=6$이므로

$(f\circ g)(0)+(g\circ f)(-3)$

$=f(g(0))+g(f(-3))$

$=f(2)+g(6)$

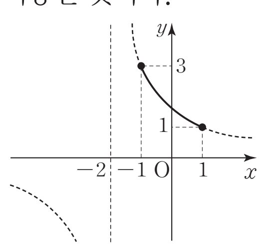
$=(2-3)+\sqrt{2\cdot6+4}$

$=-1+4=3$

04 함수 $y=\dfrac{3}{x+2}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $1\le y\le3$에서 함수 $y=\dfrac{3}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은

$\{x\,|\,-1\le x\le1\}$



05 $y=\frac{-4x-10}{x+3}=\frac{-4(x+3)+2}{x+3}=\frac{2}{x+3}-4$

이므로 함수 $y=\frac{-4x-10}{x+3}$의 그래프는 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=-3$, $b=-4$, $k=2$이므로

$a-b-k=-3-(-4)-2=-1$

06 $y=\frac{ax-1}{2x-6}=\frac{\frac{a}{2}(2x-6)+3a-1}{2x-6}=\frac{3a-1}{2x-6}+\frac{a}{2}$

이므로 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=\frac{a}{2}$

$y=\frac{2x+3}{-x+b}=\frac{-2x-3}{x-b}=\frac{-2(x-b)-2b-3}{x-b}$

$=\frac{-2b-3}{x-b}-2$

이므로 점근선의 방정식은 $x=b$, $y=-2$

따라서 $\frac{a}{2}=-2$, $b=3$이므로 $a=-4$, $b=3$

$\therefore a+b=-4+3=-1$

07 함수 $y=\frac{ax-b}{x+c}$의 그래프가 점 $(-4,\ 2)$에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식은 $x=-4$, $y=2$

즉 주어진 함수의 식을 $y=\frac{k}{x+4}+2\ (k\neq0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(-2,\ 3)$을 지나므로

$3=\frac{k}{-2+4}+2 \qquad \therefore k=2$

따라서 $y=\frac{2}{x+4}+2=\frac{2+2(x+4)}{x+4}=\frac{2x+10}{x+4}$

이므로 $a=2$, $b=-10$, $c=4$

$\therefore a+b-c=2+(-10)-4=-12$

Lecture 유리함수의 그래프의 대칭성

유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프는

(1) 점근선 $x=p$, $y=q$의 교점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다.

(2) 점 $(p,\ q)$를 지나고 기울기가 ±1인 직선에 대하여 대칭이다.

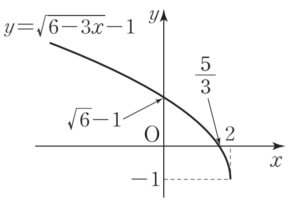
08 ① $6-3x\geq0$에서 $x\leq2$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x\leq2\}$이다.

② $\sqrt{6-3x}\geq0$에서 $\sqrt{6-3x}-1\geq-1$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\geq-1\}$이다.

③ $x=-1$을 $y=\sqrt{6-3x}-1$에 대입하면 $y=\sqrt{6-3\cdot(-1)}-1=2$이므로 그래프는 점 $(-1,\ 2)$를 지난다.

④ $y=\sqrt{6-3x}-1=\sqrt{-3(x-2)}-1$이므로 함수 $y=\sqrt{6-3x}-1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ 함수 $y=\sqrt{6-3x}-1$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

09 $y=-2\sqrt{x+1}+a=-\sqrt{4(x+1)}+a$이므로 함수 $y=-2\sqrt{x+1}+a$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

즉 $0\leq x\leq3$에서 $x=3$일 때 최솟값 b를 갖고, $x=0$일 때 최댓값 1을 가지므로

$1=-2+a \qquad \therefore a=3$

따라서 함수 $y=-2\sqrt{x+1}+3$은 $x=3$일 때 최솟값 b를 가지므로

$b=-2\sqrt{3+1}+3=-1$

$\therefore a-b=3-(-1)=4$

10 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{2(x+2)}+1=\sqrt{2x+4}+1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\therefore a=4$, $b=1$

이때 ㉠의 그래프가 점 $(0,\ c)$를 지나므로

$c=\sqrt{2\cdot0+4}+1=3$

$\therefore a+b-c=4+1-3=2$

11 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 나오는 눈의 수의 곱이 3이 되는 경우

$(1, 1, 3)$, $(1, 3, 1)$, $(3, 1, 1)$의 3가지

(ii) 나오는 눈의 수의 곱이 4가 되는 경우

$(1, 1, 4)$, $(1, 4, 1)$, $(4, 1, 1)$,
$(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$의 6가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3+6=9$

12 1□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$
2□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$
31□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$
32□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$
341□□ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$
따라서 1□□□□ 꼴부터 341□□ 꼴까지의 총 개수는
$24+24+6+6+2=62$
342□□ 꼴인 자연수는 순서대로
34215, 34251
이므로 34251은 64번째 수이다.

13 5개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$5!=120$
양 끝에 짝수인 2, 4를 나열하고, 나머지 자리에 양 끝에 놓인 짝수를 제외한 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$2!\cdot 3!=2\cdot 6=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$120-12=108$

14 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

나머지 자리에는 0을 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로

${}_5P_2=20$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 놓인 숫자를 제외한 1, 2, 3, 4의 4개이고, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리에 놓인 숫자와 일의 자리에 놓인 숫자를 제외한 4개이므로

$4\cdot 4=16$

(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$20+16=36$

15 성일이를 제외한 10명의 학생 중에서 민주와 민석이를 뽑은 다음 남은 8명의 학생 중에서 2명을 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는
${}_8C_2=28$

16 어른 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는
${}_4C_2=6$
어린이 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
${}_5C_3={}_5C_2=10$
위에서 뽑은 5명 중에서 어른 2명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$4!=24$
어른 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\cdot 10\cdot 24\cdot 2=2880$

17 (i) 삼각형의 개수

위의 선에서 1개의 점을 택하고, 아래의 선에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_6C_1\cdot {}_5C_2=6\cdot 10=60$

위의 선에서 2개의 점을 택하고, 아래의 선에서 1개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_6C_2\cdot {}_5C_1=15\cdot 5=75$

즉 삼각형의 개수는 $60+75=135$이므로

$a=135$

(ii) 사각형의 개수

위의 선에서 2개의 점을 택하고, 아래의 선에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_6C_2\cdot {}_5C_2=15\cdot 10=150$

즉 사각형의 개수는 150이므로

$b=150$

(i), (ii)에서 $b-a=150-135=15$

[서술형 1] 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점을 구하면
$2x+3=x$에서 $x=-3$이므로 교점 A의 좌표는
$(-3, -3)$

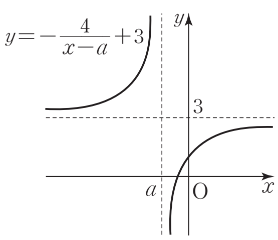
❶

$\therefore \overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

❷

채점 기준	배점
❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점 A의 좌표를 구할 수 있다.	3점
❷ $\overline{\mathrm{OA}}$의 길이를 구할 수 있다.	3점

[서술형 2] 함수 $y=-\frac{4}{x-a}+3$의 그래프는 함수 $y=-\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
(i) $a\geq 0$일 때, 그래프는 제1, 2, 4사분면을 지난다.
(ii) $a<0$일 때, 함수



$y=-\frac{4}{x-a}+3$의 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 크거나 같아야 한다.
즉 $\frac{4}{a}+3\geq 0$이므로 $\frac{4}{a}\geq -3$
이때 $a<0$이므로 $4\leq -3a$, 즉 $-3a\geq 4$
$\therefore a\leq -\frac{4}{3}$

❶

(i), (ii)에서 $a\leq -\frac{4}{3}$

❷

따라서 실수 a의 최댓값은 $-\frac{4}{3}$이다.

❸

채점 기준	배점
❶ a의 조건에 따른 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	4점
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점
❸ 실수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	1점

[서술형 3] C□□□D를 한 명으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$3!=6$

❶

C와 D 사이에 A, B, E, F, G 5명 중에서 3명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수는
${}_5\mathrm{P}_3=60$

❷

C와 D가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$

❸

따라서 구하는 경우의 수는
$6\cdot 60\cdot 2=720$

❹

채점 기준	배점
❶ C□□□D를 한 명으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❷ C와 D 사이에 3명을 일렬로 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❸ C와 D가 자리를 바꾸는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❹ C와 D 사이에 3명이 서는 경우의 수를 구할 수 있다.	1점

● 4일차

본문 88~91쪽

01 ⑤	**02** ②	**03** ②	**04** ③	**05** ⑤
06 ④	**07** ②	**08** ②	**09** ③	**10** ③
11 ③	**12** ⑤	**13** ③	**14** ③	**15** ④
16 ①	**17** ④			

[서술형 1] -1
[서술형 2] $\frac{7}{4}<k\leq 2$
[서술형 3] 42

01 (주어진 식)$=\frac{(3x-2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}-\frac{(2x+1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}$
$=3x-2-(2x+1)$
$=x-3$

02 $\frac{x+2}{x-1}\times\frac{x^2-1}{x+2}=\frac{\cancel{x+2}}{\cancel{x-1}}\times\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x+2}}$
$=x+1$

03 분모를 0으로 하는 x의 값은
$x+3=0$에서 $x=-3$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\{x \mid x\neq -3$인 실수$\}$이므로 정의역의 원소가 아닌 것은 ②이다.

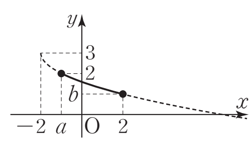
04 함수 $y=\dfrac{5}{x-1}-2$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식은
$x=1,\ y=-2$이므로
$a=1,\ b=-2$
$\therefore a+b=1+(-2)=-1$

05 ① $y=\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{(x-2)+5}{x-2}=\dfrac{5}{x-2}+1$
이므로 함수 $y=\dfrac{x+3}{x-2}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
② $y=\dfrac{3x-2}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+4}{x-2}=\dfrac{4}{x-2}+3$
이므로 함수 $y=\dfrac{3x-2}{x-2}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
③ $y=\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{(x-3)+3}{x-3}=\dfrac{3}{x-3}+1$
이므로 함수 $y=\dfrac{x}{x-3}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
④ $y=\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{(x+1)+2}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}+1$
이므로 함수 $y=\dfrac{x+3}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
⑤ $y=\dfrac{-2x+1}{x-2}=\dfrac{-2(x-2)-3}{x-2}=-\dfrac{3}{x-2}-2$
이므로 함수 $y=\dfrac{-2x+1}{x-2}$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 평행이동에 의하여 함수 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ⑤이다.

06 점근선의 방정식이 $x=-1,\ y=3$이므로 주어진 함수의 식을 $y=\dfrac{k}{x+1}+3\ (k<0)$으로 놓을 수 있다.
이 함수의 그래프가 점 $(0,1)$을 지나므로
$1=\dfrac{k}{0+1}+3 \qquad \therefore k=-2$
따라서 $y=\dfrac{-2}{x+1}+3=\dfrac{-2+3(x+1)}{x+1}=\dfrac{3x+1}{x+1}$
이므로 $a=3,\ b=1,\ c=1$
$\therefore a+b+c=3+1+1=5$

07 $y=\dfrac{4x+3}{2x-2}=\dfrac{2(2x-2)+7}{2x-2}=\dfrac{7}{2(x-1)}+2$
이므로 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식은
$x=1,\ y=2$
따라서 그래프는 점 $(1,2)$에 대하여 대칭이므로
$a=1,\ b=2 \qquad \therefore a+b=1+2=3$

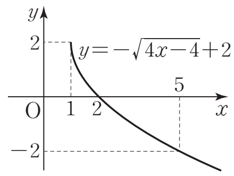
08 함수 $y=-\sqrt{x+2}+3$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



즉 $x=a$일 때 $y=2$이므로
$2=-\sqrt{a+2}+3 \qquad \therefore a=-1$
또 $x=2$일 때 $y=b$이므로
$b=-\sqrt{2+2}+3=1$
$\therefore a+b=-1+1=0$

09 ㄱ. $y=-\sqrt{4x-4}+2=-\sqrt{4(x-1)}+2$
$=-2\sqrt{x-1}+2$
이므로 함수 $y=-\sqrt{4x-4}+2$의 그래프는 함수 $y=-2\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 4사분면을 지난다.



ㄷ. $2\le x\le 5$에서 주어진 함수는 $x=5$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

10 $(g\circ f)^{-1}(3)=(f^{-1}\circ g^{-1})(3)$
$=f^{-1}(g^{-1}(3))$ ...... ㉠

$g^{-1}(3)=a$라 하면 $g(a)=3$이므로

$\sqrt{2a+1}=3$, $2a+1=9$

$\therefore a=4$

㉠에서 $f^{-1}(g^{-1}(3))=f^{-1}(4)=b$라 하면

$f(b)=4$이므로 $\dfrac{2b+2}{b-2}=4$

$2b+2=4b-8 \qquad \therefore b=5$

$\therefore (g\circ f)^{-1}(3)=5$

11 3의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

3, 6, 9의 3가지

5의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

5, 10의 2가지

따라서 구하는 경우의 수는

$3+2=5$

12 4개의 홀수 1, 3, 5, 7을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

3개의 짝수 2, 4, 6을 홀수 사이사이에 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot 6=144$

13 3200보다 작은 자연수는 31□□, 2□□□, 1□□□ 꼴이다.

31□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_3P_2=6$

2□□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_3=24$

1□□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_3=24$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$6+24+24=54$

14 ${}_{20}C_{r-1}={}_{20}C_{3r+1}$에서

(i) $r-1=3r+1 \qquad \therefore r=-1$

이때 $r-1\ge 0$에서 $r\ge 1$이어야 하므로 조건을 만족시키는 r의 값은 존재하지 않는다.

(ii) ${}_{20}C_{20-(r-1)}={}_{20}C_{3r+1}$이므로

$20-(r-1)=3r+1 \qquad \therefore r=5$

(i), (ii)에서 $r=5$

15 의사 7명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_7C_3=35$

간호사 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$35+20=55$

오답 피하기

뽑힌 3명의 직업이 모두 의사인 경우와 모두 간호사인 경우가 동시에 일어나는 사건이 아니므로 합의 법칙을 이용한다.

16 주어진 조건에 의하여 $f(1)<f(2)<f(3)$

즉 공역 Y의 원소 중에서 서로 다른 3개를 뽑아 크기가 작은 수부터 차례대로 정의역 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

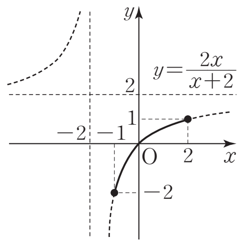
17 가로 방향으로 평행한 직선 6개 중에서 2개, 세로 방향으로 평행한 직선 3개 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는

${}_6C_2\cdot{}_3C_2=15\cdot 3=45$

[서술형 1] $y=\dfrac{2x}{x+2}=\dfrac{2(x+2)-4}{x+2}=-\dfrac{4}{x+2}+2$

이므로 함수 $y=\dfrac{2x}{x+2}$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

즉 $-1\le x\le 2$에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



❶

$x=2$일 때 최댓값 1, $x=-1$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

따라서 $M=1$, $m=-2$이므로

❷

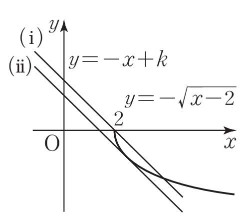
$M+m=1+(-2)=-1$

❸

채점 기준	배점
❶ $-1\le x\le 2$에서 함수 $y=\dfrac{2x}{x+2}$의 그래프를 그릴 수 있다.	3점
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	1점

[서술형 2] 함수 $y=-\sqrt{x-2}$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 또 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.

즉 함수 $y=-\sqrt{x-2}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-x+k$가 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있을 때이다.



❶

(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(2, 0)$을 지날 때

$0=-2+k \qquad \therefore k=2$

❷

(ii) 직선 $y=-x+k$가 함수 $y=-\sqrt{x-2}$의 그래프에 접할 때

$-\sqrt{x-2}=-x+k$의 양변을 제곱하면

$x-2=x^2-2kx+k^2$

$\therefore x^2-(2k+1)x+k^2+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2k+1)\}^2-4\cdot 1\cdot(k^2+2)=0$

$4k-7=0 \qquad \therefore k=\dfrac{7}{4}$

❸

따라서 구하는 k의 값의 범위는

$\dfrac{7}{4}<k\le 2$

❹

채점 기준	배점
❶ 함수 $y=-\sqrt{x-2}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 그래프를 그릴 수 있다.	2점
❷ 직선 $y=-x+k$가 점 $(2, 0)$을 지날 때, k의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ 직선 $y=-x+k$가 함수 $y=-\sqrt{x-2}$의 그래프에 접할 때, k의 값을 구할 수 있다.	2점
❹ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	1점

[서술형 3] 조건 (가)에서 모든 자리의 숫자의 합, 즉 3개의 숫자의 합이 짝수이려면 택한 숫자가 짝수 3개이거나 짝수 1개, 홀수 2개이어야 한다.

(i) 짝수 3개인 경우

세 자리의 자연수의 개수는 3개의 짝수 2, 4, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$3!=6$

❶

(ii) 짝수 1개, 홀수 2개인 경우

조건 (나)에 의하여 $\boxed{홀}\boxed{홀}\boxed{짝}$ 또는 $\boxed{짝}\boxed{홀}\boxed{홀}$이어야 한다. 즉 홀수 3개 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하고, 짝수 3개 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

$2\cdot{}_3P_2\cdot{}_3P_1=2\cdot 6\cdot 3=36$

❷

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$6+36=42$

❸

채점 기준	배점
❶ 짝수 3개를 택하여 만든 자연수의 개수를 구할 수 있다.	3점
❷ 짝수 1개, 홀수 2개를 택하여 만든 자연수의 개수를 구할 수 있다.	3점
❸ 두 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구할 수 있다.	1점

오답 피하기

(ii)에서 $\boxed{홀}\boxed{짝}\boxed{홀}$이면 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

5일차

본문 92~95쪽

01 ⑤	02 ②	03 ①	04 ①	05 ⑤
06 ③	07 ④	08 ①	09 ①	10 ②
11 ⑤	12 ②	13 ④	14 ②	15 ④
16 ①	17 ④			

[서술형 1] $\frac{19}{6}$

[서술형 2] $-\frac{1}{2}\le k<0$

[서술형 3] 7명

01 (주어진 식)

$$=\frac{x-3}{(x+1)(x+2)}\div\frac{(x-1)(x-3)}{x(x+2)(x-1)}\times\frac{x+1}{x(x-1)}$$
$$=\frac{x-3}{(x+1)(x+2)}\times\frac{x(x+2)(x-1)}{(x-1)(x-3)}\times\frac{x+1}{x(x-1)}$$
$$=\frac{1}{x-1}$$

02 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$이므로 주어진 식의 양변에 x^3+1을 곱하면

$3=a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)$

즉 $3=(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c$이므로

$a+b=0,\ -a+b+c=0,\ a+c=3$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-1,\ c=2$

$\therefore\ abc=1\cdot(-1)\cdot 2=-2$

03 ① 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 0$인 실수$\}$이다.

04 $y=\frac{5-2x}{x-3}=\frac{-2(x-3)-1}{x-3}=-\frac{1}{x-3}-2$

이므로 함수 $y=\frac{5-2x}{x-3}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=3,\ b=-2$이므로

$a+b=3+(-2)=1$

05 ㄱ. $y=\frac{1}{3x-3}=\frac{1}{3(x-1)}$

이므로 함수 $y=\frac{1}{3x-3}$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\frac{3x+1}{3x}=\frac{1}{3x}+1$

이므로 함수 $y=\frac{3x+1}{3x}$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{3x}$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\frac{x-1}{3x+3}=\frac{(x+1)-2}{3(x+1)}=-\frac{2}{3(x+1)}+\frac{1}{3}$

이므로 함수 $y=\frac{x-1}{3x+3}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{2}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{3}$만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\frac{6x-5}{3x-3}=\frac{6(x-1)+1}{3(x-1)}=\frac{1}{3(x-1)}+2$

이므로 함수 $y=\frac{6x-5}{3x-3}$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동에 의하여 함수 $y=\frac{1}{3x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

06 $y=\frac{-x}{x-1}=\frac{-(x-1)-1}{x-1}=-\frac{1}{x-1}-1$

즉 함수 $y=\frac{-x}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은

$x=1,\ y=-1$

따라서 $a=1,\ b=-1$이므로

$a+b=1+(-1)=0$

07 점근선의 방정식이 $x=2,\ y=1$이므로 주어진 함수의 식을 $y=\frac{k}{x-2}+1\ (k>0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\dfrac{k}{0-2}+1 \qquad \therefore k=2$

따라서 $y=\dfrac{2}{x-2}+1$이므로 $a=-2,\ b=2,\ c=1$

$\therefore a+b+c=-2+2+1=1$

08 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+1}$의 그래프가 점 $(2, 1)$을 지나므로

$1=\dfrac{2a+b}{2+1} \qquad \therefore 2a+b=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+1}$의 역함수의 그래프가 점 $(2, 1)$을 지나므로 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+1}$의 그래프는 점 $(1, 2)$를 지난다. 즉

$2=\dfrac{a+b}{1+1} \qquad \therefore a+b=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=5$

$\therefore ab=-1\cdot5=-5$

Lecture 함수와 그 역함수의 그래프

함수 f와 그 역함수 f^{-1}에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지난다.

$\Rightarrow f(a)=b \Longleftrightarrow a=f^{-1}(b)$

09 $-x+3\geq0$에서 $x\leq3$이므로 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\leq3\}$ $\qquad \therefore b=3$

또 $\sqrt{-x+3}\geq0$에서 $\sqrt{-x+3}+a\geq a$이므로 주어진 함수의 치역은 $\{y|y\geq a\}$ $\qquad \therefore a=-2$

$\therefore ab=-2\cdot3=-6$

10 $f(3)=2$에서 $\sqrt{2\cdot3+a}=2$

$a+6=4 \qquad \therefore a=-2$

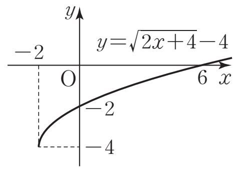
따라서 $f(x)=\sqrt{2x-2}$이므로

$a+f(9)=-2+\sqrt{2\cdot9-2}=2$

11 $y=\sqrt{2x+4}-4=\sqrt{2(x+2)}-4$

이므로 함수 $y=\sqrt{2x+4}-4$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 3, 4사분면을 지난다.



12 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x+1)}+4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=-\sqrt{a(0+1)}+4,\ \sqrt{a}=2$

$\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{4(x+1)}+4=-\sqrt{4x+4}+4$

이므로 $b=4,\ c=4$

$\therefore a+b-c=4+4-4=4$

13 P와 Q 사이에 전류가 흐르는 경우는 스위치 a만 닫히거나 스위치 b만 닫히거나 스위치 a, b가 모두 닫히는 3가지

Q와 R 사이에 전류가 흐르는 경우는 스위치 c만 닫히거나 스위치 d만 닫히거나 스위치 c, d가 모두 닫히는 3가지

따라서 구하는 경우의 수는

$3\cdot3=9$

14 ${}_{n+2}P_4=28\cdot{}_{n+1}P_2$에서

$(n+2)(n+1)n(n-1)=28(n+1)n$

이때 $n+2\geq4$에서 $n\geq2$이므로 양변을 $n(n+1)$로 나누면

$(n+2)(n-1)=28,\ n^2+n-30=0$

$(n-5)(n+6)=0$

$\therefore n=5\ (\because n\geq2)$

15 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

양 끝에 자음인 d, n, c의 3개의 문자 중에서 2개를 택하여 나열하고, 양 끝의 문자를 제외한 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_3P_2 \cdot 3! = 36$

따라서 구하는 경우의 수는

$120 - 36 = 84$

16 두 수의 곱이 짝수이려면 두 수 중에서 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

10개의 자연수 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_{10}C_2 = 45$

5개의 홀수 1, 3, 5, 7, 9 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2 = 10$

따라서 구하는 경우의 수는

$45 - 10 = 35$

17 9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_9C_3 = 84$

일직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 3개이고, 그 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

그런데 일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$84 - 3 \cdot 4 = 72$

[서술형 1] $f^1(x) = f(x) = \dfrac{x-1}{x}$이므로

$$f^2(x) = (f^1 \circ f)(x) = f^1(f(x))$$

$$= \dfrac{\dfrac{x-1}{x} - 1}{\dfrac{x-1}{x}} = \dfrac{1}{1-x}$$

$$f^3(x) = (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{x-1}{x}} = x$$

$$\vdots$$

따라서

$f^3(x) = f^6(x) = \cdots = f^{3k}(x)$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$

는 항등함수이므로

❶

$$f^{20}(x) = f^{3 \cdot 6 + 2}(x) = f^2(x) = \dfrac{1}{1-x}$$

$$f^{30}(x) = f^{3 \cdot 10}(x) = x$$

$$f^{40}(x) = f^{3 \cdot 13 + 1}(x) = f(x) = \dfrac{x-1}{x}$$

❷

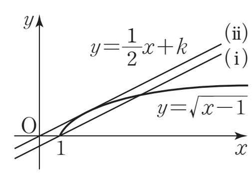
$$\therefore f^{20}(3) + f^{30}(3) + f^{40}(3) = \dfrac{1}{1-3} + 3 + \dfrac{3-1}{3} = \dfrac{19}{6}$$

❸

채점 기준	배점
❶ $f^2(x)$, $f^3(x)$, $\cdots$를 직접 구하여 $f^n(x)$를 추정할 수 있다.	3점
❷ $f^{20}(x)$, $f^{30}(x)$, $f^{40}(x)$를 구할 수 있다.	3점
❸ $f^{20}(3) + f^{30}(3) + f^{40}(3)$의 값을 구할 수 있다.	1점

[서술형 2] 함수 $y = \sqrt{x-1}$의 그래프는 함수 $y = \sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. 또 직선 $y = \dfrac{1}{2}x + k$는 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이고 y절편이 k이다.

즉 함수 $y = \sqrt{x-1}$의 그래프와 직선 $y = \dfrac{1}{2}x + k$가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 오른쪽 그림과 같이 직선



$y = \dfrac{1}{2}x + k$가 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있을 때이다.

❶

(i) 직선 $y = \dfrac{1}{2}x + k$가 점 $(1, 0)$을 지날 때

$0 = \dfrac{1}{2} + k \qquad \therefore k = -\dfrac{1}{2}$

❷

(ii) 직선 $y = \dfrac{1}{2}x + k$가 함수 $y = \sqrt{x-1}$의 그래프에 접할 때

$\sqrt{x-1} = \dfrac{1}{2}x + k$, 즉 $2\sqrt{x-1} = x + 2k$의 양변을 제곱하면

$4(x-1) = x^2 + 4kx + 4k^2$

$\therefore x^2 + 4(k-1)x + 4k^2 + 4 = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4} = \{2(k-1)\}^2 - 1 \cdot (4k^2 + 4) = 0$

$-8k = 0 \qquad \therefore k = 0$

❸

따라서 구하는 k의 값의 범위는

$-\dfrac{1}{2} \le k < 0$

❹

채점 기준	배점
❶ 함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 그래프를 그릴 수 있다.	2점
❷ 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 점 $(1, 0)$을 지날 때, k의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프에 접할 때, k의 값을 구할 수 있다.	2점
❹ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	1점

[서술형 3] 10명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$

여학생 수를 n명이라 하면 여학생 n명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_nC_3$이므로

$120-{}_nC_3=85$ $\therefore {}_nC_3=35$ ❶

$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=35$

$n(n-1)(n-2)=7\cdot6\cdot5$

$\therefore n=7$

따라서 구하는 여학생 수는 7명이다. ❷

채점 기준	배점
❶ 조건을 만족시키는 식을 구할 수 있다.	3점
❷ 모임의 여학생 수를 구할 수 있다.	3점

● 6일차

본문 96~99쪽

01 ②	02 ④	03 ④	04 ②	05 ④
06 ⑤	07 ④	08 ④	09 ①	10 ③
11 ④	12 ⑤	13 ③	14 ②	15 ④
16 ④	17 ①			

[서술형 1] $k>2$

[서술형 2] $\frac{5}{2}$

[서술형 3] 8

01 $f(4)=\frac{5\cdot4}{2\cdot4-3}=4$

02 ㄱ. $y=\frac{2x+3}{x+3}=\frac{2(x+3)-3}{x+3}=-\frac{3}{x+3}+2$

이므로 함수 $y=\frac{2x+3}{x+3}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\frac{-x+1}{x+2}=\frac{-(x+2)+3}{x+2}=\frac{3}{x+2}-1$

이므로 함수 $y=\frac{-x+1}{x+2}$의 그래프는 함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\frac{-4x+5}{x-2}=\frac{-4(x-2)-3}{x-2}=-\frac{3}{x-2}-4$

이므로 함수 $y=\frac{-4x+5}{x-2}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\frac{-3x+9}{x-4}-2=\frac{-3(x-4)-3}{x-4}-2$

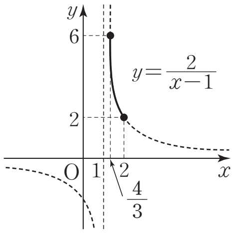
$=-\frac{3}{x-4}-5$

이므로 함수 $y=\frac{-3x+9}{x-4}-2$의 그래프는 함수 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동에 의하여 함수 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

03 함수 $y=\frac{2}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

즉 $2\le y\le6$에서 함수 $y=\frac{2}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은



$\left\{x \middle| \frac{4}{3}\le x\le2\right\}$

따라서 $a=\frac{4}{3}$, $b=2$이므로

$3a+b=3\cdot\frac{4}{3}+2=6$

04 $y=\dfrac{2x-11}{x-a}=\dfrac{2(x-a)+2a-11}{x-a}=\dfrac{2a-11}{x-a}+2$

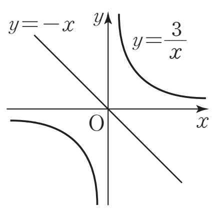
이므로 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=2$

따라서 $a=3$, $b=2$이므로

$b-a=2-3=-1$

05 ㄱ. 정의역은 $\{x\,|\,x\neq0$인 실수$\}$이다.

ㄴ, ㄷ. 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프는 원점, 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이다.



따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

06 점근선의 방정식이 $x=4$, $y=-3$이므로 주어진 함수의 식을 $y=\dfrac{k}{x-4}-3\ (k\neq0)$으로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(6, -2)$를 지나므로

$-2=\dfrac{k}{6-4}-3 \qquad \therefore k=2$

따라서 $y=\dfrac{2}{x-4}-3=\dfrac{2-3(x-4)}{x-4}=\dfrac{-3x+14}{x-4}$

이므로 $a=-3$, $b=14$, $c=-4$

$\therefore a+b+c=-3+14+(-4)=7$

07 $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(\sqrt{2x-1}+1)$이므로

$h(\sqrt{2x-1}+1)=3x-11 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\sqrt{2x-1}+1=t$라 하면 $\sqrt{2x-1}=t-1$

양변을 제곱하면 $2x-1=t^2-2t+1$

$2x=t^2-2t+2 \qquad \therefore x=\dfrac{t^2-2t+2}{2}$

$x=\dfrac{t^2-2t+2}{2}$를 ㉠에 대입하면

$h(t)=3\cdot\dfrac{t^2-2t+2}{2}-11=\dfrac{3}{2}t^2-3t-8$

$\therefore h(4)=\dfrac{3}{2}\cdot4^2-3\cdot4-8=4$

다른 풀이

$(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(\sqrt{2x-1}+1)$이므로

$h(\sqrt{2x-1}+1)=3x-11 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\sqrt{2x-1}+1=4$인 x의 값을 구하면

$\sqrt{2x-1}=3$, $2x-1=9 \qquad \therefore x=5$

$x=5$를 ㉠에 대입하면

$h(4)=3\cdot5-11=4$

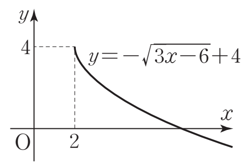
08 ① $3x-6\geq0$에서 $x\geq2$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x\geq2\}$이다.

② $-\sqrt{3x-6}\leq0$에서 $-\sqrt{3x-6}+4\leq4$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\leq4\}$이다.

③ $y=-\sqrt{3x-6}+4$

$=-\sqrt{3(x-2)}+4$

이므로 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 그래프는 제1, 4사분면을 지난다.

④ 함수 $y=\sqrt{3x-6}-4$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 $-y=\sqrt{3x-6}-4$

$\therefore y=-\sqrt{3x-6}+4$

즉 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{3x-6}-4$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

⑤ 그래프는 y축과 만나지 않는다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

09 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(2, 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{2a+b} \qquad \therefore 2a+b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 역함수의 그래프가 점 $(2, 1)$을 지나므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프는 점 $(1, 2)$를 지난다. 즉

$2=\sqrt{a+b} \qquad \therefore a+b=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=7$

$\therefore ab=-3\cdot7=-21$

10 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x-2)}+1=-\sqrt{ax-2a}+1$

이 그래프의 식이 $y=-\sqrt{ax+6}+b$와 일치하므로
$-2a=6,\ 1=b \qquad \therefore a=-3,\ b=1$
따라서 주어진 그래프의 식은
$y=-\sqrt{-3x+6}+1$
이 그래프가 점 $(k,\ -2)$를 지나므로
$-2=-\sqrt{-3k+6}+1,\ \sqrt{-3k+6}=3$
$-3k+6=9 \qquad \therefore k=-1$

11 $\sqrt{4-2x}=-x+k$의 양변을 제곱하면
$4-2x=x^2-2kx+k^2$
$\therefore x^2-2(k-1)x+k^2-4=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-1\cdot(k^2-4)=0$
$-2k+5=0 \qquad \therefore k=\frac{5}{2}$

12 $1\le a\le 6,\ 1\le b\le 6$이므로 $a+b\le 5$를 만족시키는 경우는
$a+b=2,\ a+b=3,\ a+b=4,\ a+b=5$
(i) $a+b=2$일 때, 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(1,\ 1)$의 1개
(ii) $a+b=3$일 때, 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(1,\ 2),\ (2,\ 1)$의 2개
(iii) $a+b=4$일 때, 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$의 3개
(iv) $a+b=5$일 때, 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$의 4개
(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는
$1+2+3+4=10$

다른 풀이
(i) $a=1$일 때, $1+b\le 5$, 즉 $b\le 4$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4)$의 4개
(ii) $a=2$일 때, $2+b\le 5$, 즉 $b\le 3$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3)$의 3개
(iii) $a=3$일 때, $3+b\le 5$, 즉 $b\le 2$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(3,\ 1),\ (3,\ 2)$의 2개
(iv) $a=4$일 때, $4+b\le 5$, 즉 $b\le 1$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(4,\ 1)$의 1개
(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는
$4+3+2+1=10$

13 34000보다 큰 자연수는 34□□□, 35□□□, 4□□□□, 5□□□□ 꼴이다.
34□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$
35□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$
4□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$
5□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$6+6+24+24=60$

14 여자 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$4!=24$
여자 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 남자 2명을 세우는 경우의 수는
${}_5P_2=20$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\cdot 20=480$

15 방송반 학생 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
${}_6C_3=20$
미술반 학생 8명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
${}_8C_3=56$
따라서 구하는 경우의 수는
$20+56=76$

16 카드에 적힌 두 숫자의 합이 짝수이려면
(홀수)+(홀수) 또는 (짝수)+(짝수)이어야 한다.
(i) (홀수)+(홀수)인 경우
8개의 홀수 중에서 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_8C_2=28$
(ii) (짝수)+(짝수)인 경우
7개의 짝수 중에서 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_7C_2=21$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$28+21=49$

17 두 직선 위의 점을 각각 하나씩 택하여 이으면 직선 한 개를 만들 수 있으므로

${}_3C_1 \cdot {}_4C_1 = 3 \cdot 4 = 12$

한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는

2

따라서 구하는 직선의 개수는

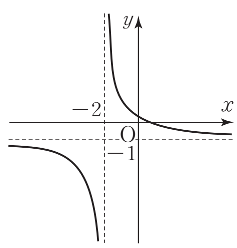
$12+2=14$

[서술형 1] 함수 $y=\dfrac{k}{x+2}-1$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

(i) $k>0$인 경우

오른쪽 그림과 같이 주어진 함수의 그래프가 모든 사분면을 지나려면 $x=0$일 때, $y>0$이어야 하므로

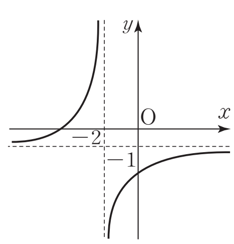
$\dfrac{k}{2}-1>0 \qquad \therefore k>2$



❶

(ii) $k<0$인 경우

오른쪽 그림과 같이 주어진 함수의 그래프는 k의 값에 관계없이 제1사분면을 지나지 않는다.



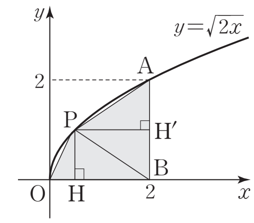
❷

(i), (ii)에서 $k>2$

❸

채점 기준	배점
❶ $k>0$일 때, 조건에 맞는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	3점
❷ $k<0$일 때, 조건에 맞는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	3점
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	1점

[서술형 2] 점 P의 좌표를 $(k, \sqrt{2k})$ $(0<k<2)$라 하고, 점 P에서 $\overline{OB}$, $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면



$\triangle OBP=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{PH}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2k}$

$=\sqrt{2k}$

$\triangle APB=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{PH'}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(2-k)$

$=2-k$

❶

$\therefore \square OBAP=\triangle OBP+\triangle APB$

$=\sqrt{2k}+2-k$

❷

$=-\left(\sqrt{k}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\dfrac{5}{2}$

(단, $0<\sqrt{k}<\sqrt{2}$)

따라서 $\square$OBAP의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{5}{2}$이다.

❸

채점 기준	배점
❶ 점 P의 좌표를 $(k, \sqrt{2k})$로 놓고 $\triangle OBP$와 $\triangle APB$의 넓이를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	3점
❷ $\square$OBAP의 넓이를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	2점
❸ $\square$OBAP의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	2점

[서술형 3] 3의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

3, 6, 9, 12, 15, 18의 6가지

❶

18의 약수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

1, 2, 3, 6, 9, 18의 6가지

❷

이때 3의 배수이면서 18의 약수인 경우는

3, 6, 9, 18의 4가지

따라서 구하는 경우의 수는

$6+6-4=8$

❸

채점 기준	배점
❶ 3의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❷ 18의 약수가 적힌 카드를 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❸ 3의 배수 또는 18의 약수가 적힌 카드를 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점