이 책의

정답과 해설

미적분

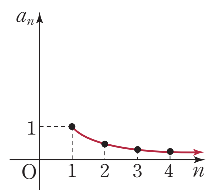
본책 8~25쪽

1 | 수열의 극한

STEP 1 개념 마스터

0001

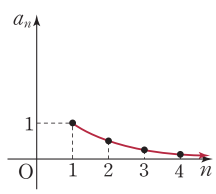
n이 증가하면서 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 n이 한없이 커질 때, $\frac{1}{n}$의 값은 0에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.



따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이다. 답 0

0002

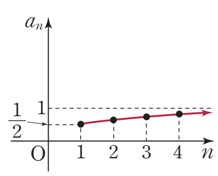
n이 증가하면서 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 n이 한없이 커질 때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$의 값은 0에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.



따라서 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$이다. 답 0

0003

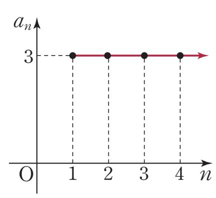
n이 증가하면서 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 n이 한없이 커질 때, $\frac{n}{n+1}$의 값은 1에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.



따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$이다. 답 1

0004

n이 증가하면서 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
따라서 주어진 수열은 3에 수렴하므로
$\lim_{n\to\infty}3=3$이다. 답 3



0005

수열 $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \cdots, \frac{1}{3n}, \cdots$에서 n이 한없이 커지면 $\frac{1}{3n}$의 값은 0에 한없이 가까워진다.
따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 0이다. 답 수렴, 0

0006

수열 $1, 4, 7, 10, \cdots, 3n-2, \cdots$에서 n이 한없이 커지면 $3n-2$의 값도 한없이 커진다.
따라서 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.
답 양의 무한대로 발산

0007

수열 $9, 6, 1, -6, \cdots, 10-n^2, \cdots$에서 n이 한없이 커지면 $10-n^2$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다.
따라서 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.
답 음의 무한대로 발산

0008

수열 $\left\{\frac{2}{n^2}\right\}$에서 분자는 항상 2이고 n이 한없이 커지면 분모 n^2의 값은 한없이 커지므로 $\frac{2}{n^2}$의 값은 0에 한없이 가까워진다.
따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 0이다. 답 수렴, 0

0009

수열 $\left\{10-\frac{1}{n}\right\}$에서 n이 한없이 커지면 $\frac{1}{n}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 $10-\frac{1}{n}$의 값은 10에 한없이 가까워진다.
따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 10이다. 답 수렴, 10

0010

수열 $\left\{\frac{1}{2}n+1\right\}$에서 n이 한없이 커지면 $\frac{1}{2}n$의 값은 한없이 커지므로 $\frac{1}{2}n+1$의 값도 한없이 커진다.
따라서 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.
답 양의 무한대로 발산

0011

수열 $\{4-(-1)^n\}$의 각 항을 첫째항부터 나열하면
$5, 3, 5, 3, 5, \cdots$
이므로 n이 한없이 커지면 $4-(-1)^n$의 값은 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다.
따라서 주어진 수열은 발산(진동)한다. 답 발산(진동)

0012

(1) $\lim_{n\to\infty}(-a_n+3b_n)=-\lim_{n\to\infty}a_n+3\lim_{n\to\infty}b_n=-2+3\times(-5)=-17$

(2) $\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=2\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=2\times2-(-5)=9$

(3) $\lim_{n\to\infty}3a_nb_n=3\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=3\times2\times(-5)=-30$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{3b_n}=\frac{2\lim_{n\to\infty}a_n}{3\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{2\times2}{3\times(-5)}=-\frac{4}{15}$

답 (1) -17 (2) 9 (3) -30 (4) $-\frac{4}{15}$

0013

$$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}3+2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$
$$=3+2\times0=3$$

답 3

0014

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$$
$$=0-2\times0=0$$

답 0

참고 두 수열 $\{n-2\}$, $\{n^2\}$은 수렴하지 않으므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n^2}\neq\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(n-2)}{\lim\limits_{n\to\infty}n^2}$$

0015

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-3\right)$$
$$=2\times(-3)=-6$$

답 -6

0016

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}+4}{2-\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}+4\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)}=\frac{4}{2}=2$$

답 2

0017

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+2}{2n^2+3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{3}{2}$$

답 수렴, $\frac{3}{2}$

0018

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)(n-1)}{(2n+1)(n-2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-3}{2n^2-3n-2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}{2-\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

답 수렴, $\frac{1}{2}$

0019

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+n}{1+n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}+1}=0$$

답 수렴, 0

0020

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-3}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1-\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\infty$$

답 발산

0021

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0022

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{2}$$
$$=\frac{2}{2}=1$$

답 1

0023

$$\lim_{n\to\infty}(2n^2-5n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(2-\frac{5}{n}\right)=\infty$$

답 발산

0024

$$\lim_{n\to\infty}(n+n^2-n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}-1\right)=-\infty$$

답 발산

0025

$\frac{n^2+1}{2n^2+3}<a_n<\frac{n^2+4}{2n^2+1}$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4}{2n^2+1}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0026

주어진 수열의 공비는 $-\frac{1}{2}$이고, $-1<-\frac{1}{2}<1$이므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

답 수렴

0027

주어진 수열의 공비는 $\sqrt{3}$이고, $\sqrt{3}>1$이므로 주어진 수열은 발산한다.

답 발산

0028

주어진 수열의 공비는 2.1이고, $2.1>1$이므로 주어진 수열은 발산한다.

답 발산

0029

주어진 수열의 공비는 -0.8이고, $-1<-0.8<1$이므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

답 수렴

0030

주어진 수열의 공비는 $\frac{2}{3}$이고, $-1<\frac{2}{3}<1$이므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

답 수렴

0031

주어진 수열의 공비는 -2이고, $-2<-1$이므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.

답 발산

0032

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{2^{2n}-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{0}{1-0}=0$$

답 수렴, 0

0033

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^{n+1}+2^{n+1}}{2^n-(-3)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3\times(-3)^n+2\times 2^n}{2^n-(-3)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3+2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{\left(-\frac{2}{3}\right)^n-1}$$

$$=\frac{-3+0}{0-1}=3$$

답 수렴, 3

0034

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 3^n+5^{n+1}}{3^n-4\times 5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{3}{5}\right)^n+5}{\left(\frac{3}{5}\right)^n-4}$$

$$=\frac{0+5}{0-4}=-\frac{5}{4}$$

답 수렴, $-\frac{5}{4}$

0035

$$\lim_{n\to\infty}(3^n-2^n)=\lim_{n\to\infty}3^n\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=\infty$$

답 발산

0036

공비가 $2r$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<2r\le 1 \qquad \therefore -\frac{1}{2}<r\le\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}<r\le\frac{1}{2}$

0037

공비가 $2r-1$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<2r-1\le 1,\ 0<2r\le 2 \qquad \therefore 0<r\le 1$

답 $0<r\le 1$

STEP 2 유형 마스터

0038

|전략| 수열의 항들이 어떤 일정한 값에 가까워지면 수렴, 그렇지 않으면 발산한다.

ㄱ. 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

ㄴ. 홀수 번째 항은 $-2,\ -\frac{2}{3},\ -\frac{2}{5},\ \cdots$에서 0에 수렴하고, 짝수 번째 항은 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots$에서 0에 수렴하므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

ㄷ. 주어진 수열은 1에 수렴한다.

ㄹ. $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 $(-1)^n$에 차례로 대입하면

$-1, 1, -1, 1, \cdots$

이므로 수열 $\{(-1)^n\}$은 발산(진동)한다.

ㅁ. $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 $\frac{(-1)^n}{n}$에 차례로 대입하면

$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$

이므로 n이 한없이 커지면 $\frac{(-1)^n}{n}$의 값은 0에 한없이 가까워진다.

그러므로 수열 $\left\{3-\frac{(-1)^n}{n}\right\}$은 3에 수렴한다.

따라서 수렴하는 수열은 ㄴ, ㄷ, ㅁ이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㅁ

0039

① $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 $\frac{-n^2+2}{n+1}$에 차례로 대입하면

$\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{7}{4},\ -\frac{14}{5},\ \cdots$

이므로 n이 한없이 커지면 $\frac{-n^2+2}{n+1}$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다.

따라서 수열 $\left\{\frac{-n^2+2}{n+1}\right\}$는 음의 무한대로 발산한다.

② $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 $\frac{1}{\sqrt{n}+1}$에 차례로 대입하면

$\frac{1}{\sqrt{1}+1},\ \frac{1}{\sqrt{2}+1},\ \frac{1}{\sqrt{3}+1},\ \frac{1}{\sqrt{4}+1},\ \cdots$

이므로 수열 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right\}$은 0에 수렴한다.

③ $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$에 차례로 대입하면

$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots$

이므로 n이 한없이 커지면 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$의 값은 0에 한없이 가까워진다.

따라서 수열 $\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$은 1에 수렴한다.

④ $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 $\frac{(-1)^n}{n+1}$에 차례로 대입하면

$-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$

이므로 수열 $\left\{\frac{(-1)^n}{n+1}\right\}$은 0에 수렴한다.

⑤ $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 $-1+(-1)^{n+1}$에 차례로 대입하면

$0, -2, 0, -2, \cdots$

이므로 수열 $\{-1+(-1)^{n+1}\}$은 발산(진동)한다.

따라서 발산하는 수열은 ①, ⑤이다. 답 ①, ⑤

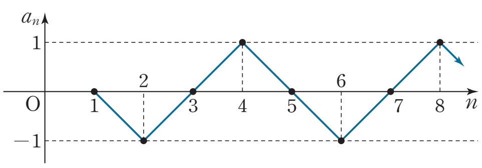
0040

주어진 수열의 일반항을 a_n으로 놓고 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를

$a_n=\cos\frac{n\pi}{2}$에 차례로 대입하면

$0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \cdots$

이므로 n이 증가하면서 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 수열 $\left\{\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$는 발산(진동)한다. 답 발산

0041

| 전략 | $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)로 놓고 극한에 대한 기본 성질을 이용한다.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=6$에서 $\alpha+\beta=6$

$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=8$에서 $\alpha\beta=8$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2)=\lim_{n\to\infty} a_n{}^2+\lim_{n\to\infty} b_n{}^2$

$=\alpha^2+\beta^2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=6^2-2\times8=20$ 답 20

$\lim_{n\to\infty} a_n\times\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n\times\lim_{n\to\infty} b_n$
$=\alpha\times\alpha+\beta\times\beta$
$=\alpha^2+\beta^2$

0042

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-b_n}{a_nb_n+1}=\frac{\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)}{\lim_{n\to\infty}(a_nb_n+1)}=\frac{2\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n}{\lim_{n\to\infty} a_n\times\lim_{n\to\infty} b_n+1}$$

$$=\frac{2\times(-2)-2}{(-2)\times2+1}=2$$

답 ④

0043

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}(3a_n+b_n)=26$에서 $3\alpha+\beta=26$ ……㉠

$\lim_{n\to\infty}(2a_n-3b_n)=10$에서 $2\alpha-3\beta=10$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=8$, $\beta=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{8}{2}=4$$

답 4

0044

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=3$에서 $\alpha+\beta=3$ ……㉠

$\lim_{n\to\infty}(2a_n-3b_n)=-4$에서 $2\alpha-3\beta=-4$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=1$, $\beta=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2a_n}{b_n}+a_nb_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{b_n}+\lim_{n\to\infty} a_nb_n$$

$$=\frac{2\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}+\lim_{n\to\infty} a_n\times\lim_{n\to\infty} b_n$$

$$=\frac{2\alpha}{\beta}+\alpha\beta$$

$$=\frac{2\times1}{2}+1\times2=3$$

답 ③

0045

| 전략 | $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+2}=\alpha$임을 이용한다.

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty} a_{n+2}=\alpha$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}+3}{2a_n+1}=2$에서 $\frac{\alpha+3}{2\alpha+1}=2$

$4\alpha+2=\alpha+3$, $3\alpha=1$

$\therefore \alpha=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{3}$ 답 ③

0046

$\lim_{n\to\infty} a_{n-1}=\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$이므로

$\alpha=\beta$

또, $\lim_{n\to\infty}(3a_{n+1}-a_{n-1})=4$에서

$3\alpha-\alpha=4$ $\quad\therefore \alpha=2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=2^2+2^2=8$ 답 ②

0047

수열 $\{a_n\}$이 0이 아닌 실수에 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ ($\alpha\neq0$)라 하면

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$ … ❶

$\frac{9}{a_{n+1}}=6-a_n$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{9}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(6-a_n)$이므로

$\frac{9}{\alpha}=6-\alpha$ … ❷

$\alpha^2-6\alpha+9=0$, $(\alpha-3)^2=0$

$\therefore \alpha=3$ $\quad\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=3$ … ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$임을 알 수 있다.	30 %
❷ 주어진 식을 α를 사용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0048

|전략| 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

① $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}}=\frac{2}{3}$

② $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{3}=\frac{1}{3}$

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{1-n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-1}{2+\frac{1}{n}}=-\frac{1}{2}$

④ $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=0$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{16n+4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{16+\frac{4}{n}}}=\frac{1}{4}$

따라서 극한값이 가장 작은 것은 ③이다. 답 ③

0049

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{3-2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+1}{3-2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}-2}=-2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{3-2n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+n}=-2+1=-1$$ 답 -1

0050

$n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(2n^2-n)-\{2(n-1)^2-(n-1)\}\\&=4n-3\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-3)^2}{2n^2-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{16n^2-24n+9}{2n^2-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16-\frac{24}{n}+\frac{9}{n^2}}{2-\frac{1}{n}}=8$$ 답 8

Lecture

수열 $\{a_n\}$과 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대한 극한값을 구할 때는 수열의 합과 일반항의 관계 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge2)$을 이용하여 a_n을 구한다. 이때, $n\to\infty$이므로 $a_1=S_1$을 굳이 확인할 필요는 없다.

0051

|전략| 자연수의 거듭제곱의 합을 이용하여 분모, 분자를 n에 대한 식으로 나타낸 후 극한값을 구한다.

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n(1+2+3+\cdots+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n\times\frac{n(n+1)}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3}=\frac{2}{3}$$ 답 ③

0052

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12(4n+1)}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12\left(4+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}}=48$$ 답 ④

0053

$$a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$$ ··· ❶

$$\begin{aligned}b_n&=1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)\\&=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{aligned}$$ ··· ❷

$$c_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$ ··· ❸

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+2)}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(1+\frac{2}{n}\right)}{3}=\frac{2}{3}$$ ··· ❹

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 간단하게 나타낼 수 있다.	20 %
❷ b_n을 간단하게 나타낼 수 있다.	20 %
❸ c_n을 간단하게 나타낼 수 있다.	20 %
❹ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{c_n}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0054

|전략| 로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 변형한 후 $\lim_{n\to\infty}\log a_n=\log\lim_{n\to\infty}a_n(a_n>0)$임을 이용한다.

$$\lim_{n\to\infty}\{\log_2(2n^2-n+3)-2\log_2(n+1)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{2n^2-n+3}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{2n^2-n+3}{n^2+2n+1}$$
$$=\log_2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=\log_2 2=1$$

답 ②

0055

$$\lim_{n\to\infty}(\log_9\sqrt{n^2+2n+5}-\log_9\sqrt{9n^2-n+2})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_9\frac{\sqrt{n^2+2n+5}}{\sqrt{9n^2-n+2}}=\log_9\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}}{\sqrt{9-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}\right)$$
$$=\log_9\frac{1}{3}=\log_{3^2}3^{-1}=-\frac{1}{2}$$

답 ②

0056

$a_n=\log\frac{n+1}{n}$이므로

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\cdots+\log\frac{n+1}{n}$$
$$=\log\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)$$
$$=\log(n+1)$$

$\therefore 10^{a_1+a_2+\cdots+a_n}=10^{\log(n+1)}=n+1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3n-5}{10^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-5}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n}}=3$$

답 ③

0057

|전략| 극한값이 0이 아닌 실수이므로 분모와 분자의 차수가 같다.

$a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{3n+5}=\infty$(또는 $-\infty$)이므로 $a=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{3n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{3n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{1}{n}}{3+\frac{5}{n}}=\frac{b}{3}$$

따라서 $\frac{b}{3}=\frac{1}{3}$이므로 $b=1$

$\therefore a-b=0-1=-1$

답 ②

0058

(ⅰ) $a\neq0$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn+3}{cn^2-2n-4}=\infty\ (\text{또는 } -\infty)$$

(ⅱ) $a=0$, $c\neq0$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn+3}{cn^2-2n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+3}{cn^2-2n-4}=0$$

(ⅲ) $a=0$, $b=0$, $c=0$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn+3}{cn^2-2n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{-2n-4}=0$$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 $a=c=0$, $b\neq0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn+3}{cn^2-2n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+3}{-2n-4}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{3}{n}}{-2-\frac{4}{n}}=-\frac{b}{2}$$

따라서 $-\frac{b}{2}=-2$이므로 $b=4$

$\therefore a+b+c=0+4+0=4$

답 ⑤

0059

$b\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-2n-1}{bn^3+n^2+3}=0$이므로 $b=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2-2n-1}{bn^3+n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-2n-1}{n^2+3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}=a$$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-4}{(an+b)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-4}{\frac{1}{4}n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}{\frac{1}{4}}=4$$

답 4

0060

$a>1$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n^a}=0$이고, $a<1$이면

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n^a}=\infty$이다.

즉, 0이 아닌 상수 b로 수렴하기 위해서는 $a=1$이어야 한다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n^a}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{1}=2=b$$

$\therefore a+b=1+2=3$ 답 3

0061

|전략| 분모를 1로 보고 분자를 유리화한다.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+3n}-2n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+3n}-2n)(\sqrt{4n^2+3n}+2n)}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+2}$$
$$=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}$$

답 ④

0062

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}}$$
$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

답 ③

0063

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=4(n-\sqrt{n^2+2n})$, $\alpha_n\beta_n=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4(n-\sqrt{n^2+2n})}{2}$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n^2+2n})(n+\sqrt{n^2+2n})}{n+\sqrt{n^2+2n}}$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n+\sqrt{n^2+2n}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$$
$$=2\times\frac{-2}{1+1}=-2$$

답 ①

0064

자연수 n에 대하여

$n^2+4n+4<n^2+5n+4<n^2+6n+9$이므로

$(n+2)^2<n^2+5n+4<(n+3)^2$

$n+2<\sqrt{n^2+5n+4}<n+3$

즉, $\sqrt{n^2+5n+4}$의 정수 부분은 $n+2$이므로 소수 부분은

$a_n=\sqrt{n^2+5n+4}-(n+2)$ … ❶

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+5n+4}-(n+2)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{n^2+5n+4}-(n+2)\}\{\sqrt{n^2+5n+4}+(n+2)\}}{\sqrt{n^2+5n+4}+(n+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+5n+4}+n+2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}+1+\frac{2}{n}}$$
$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$ … ❷

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 n에 대한 식으로 간단히 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0065

|전략| 분모를 유리화한 후 극한값을 구한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-3n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-3n})}{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-3n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-3n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-3n})}{4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-3n}}{2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$$

답 1

0066

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}{2(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1}}$$
$$=\frac{1+1}{1+1}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n(n-1)}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2-n}}{(n-\sqrt{n^2-n})(n+\sqrt{n^2-n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2-n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{1}=\frac{1+1}{1}=2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n(n-1)}}$$
$$=1+2=3$$

답 ②

0067

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n^2+1003}}{\sqrt{n^2+1004}-n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n^2+1003})(n+\sqrt{n^2+1003})(\sqrt{n^2+1004}+n)}{(\sqrt{n^2+1004}-n)(\sqrt{n^2+1004}+n)(n+\sqrt{n^2+1003})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1003(\sqrt{n^2+1004}+n)}{1004(n+\sqrt{n^2+1003})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1003\left(\sqrt{1+\frac{1004}{n^2}}+1\right)}{1004\left(1+\sqrt{1+\frac{1003}{n^2}}\right)}$$
$$=\frac{-1003\times2}{1004\times2}=-\frac{1003}{1004}$$

답 ②

0068

|전략| $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한 다음 극한값이 0이 아닌 실수이면 분모와 분자의 차수가 같음을 이용한다.

$a\le0$이면 $\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{4n^2+4n}-(an+b)\}=\infty$이므로 $a>0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\{\sqrt{4n^2+4n}-(an+b)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{4n^2+4n}-(an+b)\}\{\sqrt{4n^2+4n}+(an+b)\}}{\sqrt{4n^2+4n}+(an+b)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4-a^2)n^2+(4-2ab)n-b^2}{\sqrt{4n^2+4n}+an+b}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4-a^2)n+(4-2ab)-\frac{b^2}{n}}{\sqrt{4+\frac{4}{n}}+a+\frac{b}{n}}$$

이 식의 극한값이 3이므로

$$4-a^2=0,\ \frac{4-2ab}{2+a}=3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-2$ ($\because a>0$)

$\therefore a+b=2+(-2)=0$

답 0

0069

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{pn^2+2n}-4n+q)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{pn^2+2n}-(4n-q)\}\{\sqrt{pn^2+2n}+(4n-q)\}}{\sqrt{pn^2+2n}+(4n-q)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(p-16)n^2+(2+8q)n-q^2}{\sqrt{pn^2+2n}+4n-q}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(p-16)n+(2+8q)-\frac{q^2}{n}}{\sqrt{p+\frac{2}{n}}+4-\frac{q}{n}}$$

이 식의 극한값이 2이므로

$$p-16=0,\ \frac{2+8q}{\sqrt{p}+4}=2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $p=16$, $q=\frac{7}{4}$

$\therefore pq=16\times\frac{7}{4}=28$

답 ④

0070

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{an^2+2n+1}-\sqrt{n^2+bn}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an^2+2n+1}+\sqrt{n^2+bn}}{(\sqrt{an^2+2n+1}-\sqrt{n^2+bn})(\sqrt{an^2+2n+1}+\sqrt{n^2+bn})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an^2+2n+1}+\sqrt{n^2+bn}}{(a-1)n^2+(2-b)n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{b}{n}}}{(a-1)n+(2-b)+\frac{1}{n}}$$

이 식의 극한값이 $\frac{1}{5}$이므로

$$a-1=0,\ \frac{\sqrt{a}+1}{2-b}=\frac{1}{5}$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-8$

$\therefore a+b=1+(-8)=-7$

답 ①

0071

|전략| $\frac{3a_n-1}{a_n+1}=b_n$으로 놓고 a_n을 b_n에 대한 식으로 나타낸 다음 $\lim_{n\to\infty}a_n$에 대입한다.

$\frac{3a_n-1}{a_n+1}=b_n$으로 놓으면 $3a_n-1=b_n(a_n+1)$에서

$(3-b_n)a_n=b_n+1$ $\quad\therefore a_n=\frac{b_n+1}{3-b_n}$

이때, $\lim_{n\to\infty}b_n=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+1}{3-b_n}=\frac{2+1}{3-2}=3$$

답 3

다른 풀이 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$($\alpha$는 실수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-1}{a_n+1}=\frac{3\alpha-1}{\alpha+1}=2\text{에서}$$

$3\alpha-1=2\alpha+2$ $\quad\therefore \alpha=3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=3$

0072

$(n+1)a_n=b_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{b_n}{n+1}$

이때, $\lim_{n\to\infty}b_n=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(4n+3)a_n=\lim_{n\to\infty}(4n+3)\times\frac{b_n}{n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{n+1}\times\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=4\times3=12$$

답 ⑤

0073

$(2n^2-n)a_n=c_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{c_n}{2n^2-n}$

$\frac{n^3+n^2+1}{b_n}=d_n$으로 놓으면 $b_n=\frac{n^3+n^2+1}{d_n}$

이때, $\lim_{n\to\infty} c_n=2$, $\lim_{n\to\infty} d_n=3$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{2n^2-n}\times\frac{n^3+n^2+1}{d_n}\times\frac{1}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}\times\frac{n^3+n^2+1}{2n^3-n^2}\\&=\frac{\lim_{n\to\infty}c_n}{\lim_{n\to\infty}d_n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2+1}{2n^3-n^2}\\&=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이 $\lim_{n\to\infty}(2n^2-n)a_n=2$에서 $a_n=\dfrac{1}{n^2+pn+q}$ (p, q는 상수),

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n^2+1}{b_n}=3$에서 $b_n=\dfrac{1}{3}n^3+rn^2+sn+t$ (r, s, t는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}n^3+rn^2+sn+t}{n(n^2+pn+q)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}n^3+rn^2+sn+t}{n^3+pn^2+qn}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

0074

$a_n-2b_n=c_n$으로 놓으면 $a_n=2b_n+c_n$

이때, $\lim_{n\to\infty}c_n=3$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}=0$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n-3}{a_n+3}&=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-3}{2b_n+c_n+3}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{b_n}}{2+\frac{c_n}{b_n}+\frac{3}{b_n}}\\&=\frac{1-3\times0}{2+3\times0+3\times0}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

0075

| 전략 | 명제가 거짓임을 보일 때는 반례를 생각해 본다.

ㄱ. [반례] $a_n=\dfrac{1}{n}$, $b_n=\dfrac{2}{n}$이면 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=2\neq1$이다.

ㄴ. $\dfrac{b_n}{a_n}=c_n$이라 하면 $b_n=a_nc_n$이고 $\lim_{n\to\infty}c_n=1$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)&=\lim_{n\to\infty}(a_n-a_nc_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}c_n\\&=0-0\times1=0\ (\text{참})\end{aligned}$$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=1\neq0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{b_n}{a_n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}1}{\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}}=\frac{1}{1}=1\ (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0076

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이고 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}b_n&=\lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}\\&=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\ (\text{참})\end{aligned}$$

ㄴ. [반례] $a_n=(-1)^n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n^2=1$이지만 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다.

ㄷ. [반례] $a_n=1+(-1)^n$, $b_n=1-(-1)^n$이면

$\{a_n\}$: 0, 2, 0, 2, 0, 2, ⋯

$\{b_n\}$: 2, 0, 2, 0, 2, 0, ⋯

$\{a_nb_n\}$: 0, 0, 0, 0, 0, 0, ⋯

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$이지만 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 모두 발산(진동)한다.

즉, $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$, $\lim_{n\to\infty}b_n\neq0$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

0077

| 전략 | 각 변을 $n(n+1)$로 나눈 후 극한값을 구한다.

$2n^2+n+1<n(n+1)a_n<2n^2+3n+5$에서

$$\frac{2n^2+n+1}{n(n+1)}<a_n<\frac{2n^2+3n+5}{n(n+1)}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n+5}{n(n+1)}=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$

답 2

0078

$2n^2+3n-3<a_n<2n^2+3n+4$에서

$3n-3<a_n-2n^2<3n+4$

$$\frac{3n-3}{n}<\frac{a_n-2n^2}{n}<\frac{3n+4}{n}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n-3}{n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n+4}{n}=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n-2n^2}{n}=3$

답 3

0079

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cos\dfrac{n\pi}{2}$에서 $-1\le\cos\dfrac{n\pi}{2}\le1$이므로

$$-\frac{1}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{2}\le\frac{1}{\sqrt{n}}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cos\dfrac{n\pi}{2}=0$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\tan\dfrac{\pi}{3n}$에서 $0<\tan\dfrac{\pi}{3n}\le\sqrt{3}$이므로

$$0<\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{3n}\le\frac{\sqrt{3}}{n}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{n}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{3n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{3n}=0+0=0$ 답 0

0080

$-1\le\sin(n^2+n)\theta\le1$이므로 $n>0$일 때

$-\frac{1}{n^3}\le\frac{\sin(n^2+n)\theta}{n^3}\le\frac{1}{n^3}$ ··· ①

이때, $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n^2+n)\theta}{n^3}=0$ ··· ②

답 0

채점 기준	비율
① $\frac{\sin(n^2+n)\theta}{n^3}$의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
② $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n^2+n)\theta}{n^3}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0081

|전략| $\frac{4^n+3^{n+1}}{3^n-2^{2n}}$의 분모, 분자를 4^n으로 나눈다.

$a=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^{n+1}}{3^n-2^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3\times3^n}{3^n-4^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}=-1$

$b=\lim_{n\to\infty}(a^{2n}-a^{2n+1})=\lim_{n\to\infty}\{(-1)^{2n}-(-1)^{2n+1}\}$

$=\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n}-\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n+1}$

$=1-(-1)=2$

$\therefore a+b=-1+2=1$ 답 ④

0082

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$($\alpha$는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_n+3^{n+1}}{3^n\times a_n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n\times a_n+3}{a_n-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{3}{\alpha}$

따라서 $\frac{3}{\alpha}=\frac{1}{2}$이므로 $\alpha=6$ 답 6

0083

$x^2-x-1=0$에서 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$라 하면 $|\alpha|>|\beta|$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n+\beta^n}{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{\alpha+\beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}=\frac{1}{\alpha}$

$=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 답 ③

0084

$0<a<b$에서 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}(b^n-a^n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[b^n\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^n\right\}\right]^{\frac{1}{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}(b^n)^{\frac{1}{n}}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}b\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}$

이때, $\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}=(1-0)^0=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}(b^n-a^n)^{\frac{1}{n}}=b\times1=b$ 답 ⑤

0085

$n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3\times5^n-3)-(3\times5^{n-1}-3)$

$=3\times5^{n-1}(5-1)=12\times5^{n-1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times5^n-3}{12\times5^{n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{15-3\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}{12}=\frac{5}{4}$ 답 ⑤

0086

$a_n=3\times r^{n-1}$, $S_n=\frac{3(r^n-1)}{r-1}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times r^{n-1}}{\frac{3(r^n-1)}{r-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}(r-1)}{r^n-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r^n}}=1-\frac{1}{r}$

따라서 $1-\frac{1}{r}=\frac{4}{5}$이므로

$\frac{1}{r}=\frac{1}{5}$ $\therefore r=5$ 답 5

0087

나머지정리에 의하여 다항식 $f(x)$를 $x-\frac{4}{3}$, $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 각각 $f\left(\frac{4}{3}\right)$, $f(2)$이므로

$$a_n=f\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}+\left(\frac{4}{3}\right)^n+2=\frac{7}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^n+2$$

$$b_n=f(2)=2^{n+1}+2^n+2=3\times 2^n+2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n+2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^n-3\times 2^n}{\frac{7}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^n+2+2^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n-3}{\frac{7}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{3}{\frac{1}{2}}=-6$$

답 ②

0088

|전략| $-1<\frac{x^2-x}{2}\leq 1$을 만족시키는 정수 x의 값을 구한다.

공비가 $\frac{x^2-x}{2}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x^2-x}{2}\leq 1$, $-2<x^2-x\leq 2$이어야 한다.

(i) $-2<x^2-x$, 즉 $x^2-x+2>0$에서

$x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로 항상 성립한다.

(ii) $x^2-x\leq 2$, 즉 $x^2-x-2\leq 0$에서

$(x+1)(x-2)\leq 0$ $\quad\therefore -1\leq x\leq 2$

(i), (ii)에서 $-1\leq x\leq 2$

따라서 주어진 등비수열이 수렴하도록 하는 정수 x는 -1, 0, 1, 2이므로 구하는 합은 2이다.

답 2

0089

공비가 $\sqrt{2}\sin x$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\sqrt{2}\sin x\leq 1$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore -\frac{\pi}{4}<x\leq\frac{\pi}{4}$ $\left(\because -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

답 $-\frac{\pi}{4}<x\leq\frac{\pi}{4}$

0090

등비수열 $\{(\log_3 x)^n\}$의 공비가 $\log_3 x$이므로 수렴하려면

$-1<\log_3 x\leq 1$, $\log_3\frac{1}{3}<\log_3 x\leq\log_3 3$

$\therefore \frac{1}{3}<x\leq 3$ ……㉠

등비수열 $\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^n\right\}$의 공비가 $\frac{x}{2}$이므로 수렴하려면

$-1<\frac{x}{2}\leq 1$ $\quad\therefore -2<x\leq 2$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{3}<x\leq 2$

따라서 $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=2$이므로 $\alpha+\beta=\frac{7}{3}$

답 ⑤

0091

주어진 수열 $\{(x+1)(2-x)^{n-1}\}$은 첫째항이 $x+1$, 공비가 $2-x$인 등비수열이므로 이 수열이 수렴하려면

(첫째항)=0 또는 $-1<$(공비)≤ 1이어야 한다.

(i) (첫째항)=0인 경우

$x+1=0$에서 $x=-1$ … ❶

(ii) $-1<$(공비)≤ 1인 경우

$-1<2-x\leq 1$에서 $-3<-x\leq -1$

$\therefore 1\leq x<3$ … ❷

(i), (ii)에서 $x=-1$ 또는 $1\leq x<3$ … ❸

따라서 주어진 등비수열이 수렴하도록 하는 정수 x는 -1, 1, 2이므로 구하는 합은 2이다. … ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ (첫째항)=0을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $-1<$(공비)≤ 1을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 수열이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ 모든 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

0092

수열 $\left\{\frac{5^{n+2}}{(\log_2 x-2)^n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{5^3}{\log_2 x-2}$, 공비가 $\frac{5}{\log_2 x-2}$인 등비수열이므로 0이 아닌 극한값을 가지려면 공비가 1이어야 한다.

따라서 $\frac{5}{\log_2 x-2}=1$에서

$\log_2 x=7$, $x=2^7$ $\quad\therefore 8x=2^3\times 2^7=2^{10}$

답 ③

참고 $-1<\frac{5}{\log_2 x-2}<1$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+2}}{(\log_2 x-2)^n}=\lim_{n\to\infty}25\left(\frac{5}{\log_2 x-2}\right)^n=25\times 0=0$$

$\frac{5}{\log_2 x-2}=1$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+2}}{(\log_2 x-2)^n}=\lim_{n\to\infty}25\left(\frac{5}{\log_2 x-2}\right)^n=25\times 1=25$$

0093

등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하므로 $-1<r\leq 1$ ……㉠

ㄱ. 공비가 $-r$이고 ㉠에서 $-1\leq -r<1$

이때, $-r=-1$, 즉 $r=1$이면 수열 $\{(-r)^n\}$은 발산(진동)한다.

ㄴ. 공비가 $\frac{r-1}{3}$이고 ㉠에서 $-2<r-1\leq 0$

$\therefore -\frac{2}{3}<\frac{r-1}{3}\leq 0$

따라서 수열 $\left\{\left(\frac{r-1}{3}\right)^n\right\}$은 수렴한다.

ㄷ. 공비가 $\frac{r}{2}-1$이고 ㉠에서 $-\frac{1}{2}<\frac{r}{2}\le\frac{1}{2}$

$\therefore -\frac{3}{2}<\frac{r}{2}-1\le-\frac{1}{2}$

이때, $-\frac{3}{2}<\frac{r}{2}-1\le-1$, 즉 $-1<r\le0$이면 수열 $\left\{\left(\frac{r}{2}-1\right)^n\right\}$은 발산(진동)한다.

ㄹ. 공비가 $\frac{1}{r}$이고 ㉠에서 $\frac{1}{r}<-1$ 또는 $\frac{1}{r}\ge1$

이때, $r\ne1$이면 수열 $\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}$은 발산한다.

따라서 반드시 수렴하는 수열은 ㄴ이다. 답 ①

0094

|전략| $|r|>1$일 때, $-1<\frac{1}{r}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$임을 이용한다.

(i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^n+1}=-1$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=1$이므로

$$b=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^n+1}=0$$

(iii) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}}=1$$

$\therefore a+b+c=-1+0+1=0$ 답 0

0095

(i) $0<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-5}{r^{n+1}+1}=-5$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-5}{r^{n+1}+1}=-2$$

(iii) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-5}{r^{n+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r}-\frac{5}{r^{n+1}}}{1+\frac{1}{r^{n+1}}}=\frac{1}{r}$$

(i)~(iii)에서 극한값 중 정수는 -5, -2의 2개이다. 답 ②

0096

(i) $0<\frac{5}{k}<1$, 즉 $k>5$일 때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{k}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{k}\right)^{n+1}=0$이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{5}{k}\right)^n+4}=0$$

(ii) $\frac{5}{k}=1$, 즉 $k=5$일 때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{k}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{k}\right)^{n+1}=1$이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{5}{k}\right)^n+4}=\frac{1}{5}$$

(iii) $\frac{5}{k}>1$, 즉 $1\le k<5$일 때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{k}\right)^n=\infty$이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{5}{k}\right)^n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{k}}{1+\frac{4}{\left(\frac{5}{k}\right)^n}}=\frac{5}{k}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{15}ka_k&=1\times a_1+2\times a_2+\cdots+15\times a_{15}\\&=1\times\frac{5}{1}+2\times\frac{5}{2}+3\times\frac{5}{3}+4\times\frac{5}{4}+5\times\frac{1}{5}\\&\quad+6\times0+7\times0+8\times0+\cdots+15\times0\\&=5+5+5+5+1=21\end{aligned}$$

답 21

0097

|전략| $|x|<1$일 때는 $\lim_{n\to\infty}x^n=0$, $|x|>1$일 때는 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$임을 이용한다.

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}+\left(-\frac{1}{3}\right)^2-1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\left(-\frac{1}{3}\right)+1}=\frac{-\frac{8}{9}}{\frac{2}{3}}=-\frac{4}{3}$$

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{n+1}+1^2-1}{1^n+1+1}=\frac{1}{3}$$

$$f(2)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+2^2-1}{2^n+2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=2$$

$\therefore f\left(-\frac{1}{3}\right)+f(1)+f(2)=-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+2=1$ 답 1

다른 풀이 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+x^2-1}{x^n+x+1}=\frac{x^2-1}{x+1}=x-1$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+x^2-1}{x^n+x+1}=\frac{1+1^2-1}{1+1+1}=\frac{1}{3}$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|x^n|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+x^2-1}{x^n+x+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{1}{x^{n-2}}-\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}}=x$$

$\therefore f\left(-\frac{1}{3}\right)+f(1)+f(2)=\left(-\frac{1}{3}-1\right)+\frac{1}{3}+2=1$

0098

$$f(-3)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^{n+1}-2}{(-3)^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3-2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}=-3$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}-2}{\left(\frac{1}{5}\right)^n+1}=-2$$

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{n+1}-2}{1^n+1}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore f(-3)+f\left(\frac{1}{5}\right)+f(1)=-3+(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{11}{2}$ 답 ①

0099

ㄱ. $f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{2n-1}-2}{1+1^{2n}}=-\frac{1}{2}$

$f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n-1}-2}{1+(-1)^{2n}}=-\frac{3}{2}$

$\therefore f(1)\neq f(-1)$ (거짓)

ㄴ. $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-2}{1+x^{2n}}=-2$ (참)

ㄷ. $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-2}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^{2n}}}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=\frac{1}{x}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

0100

| 전략 | $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+10$을 $a_{n+1}-20=\frac{1}{2}(a_n-20)$으로 변형한다.

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+10$에서 $a_{n+1}-20=\frac{1}{2}(a_n-20)$

수열 $\{a_n-20\}$은 첫째항이 $a_1-20=1-20=-19$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n-20=-19\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n=-19\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+20$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-19\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+20\right\}=20$ 답 ⑤

다른 풀이 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$($\alpha$는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}a_n+10\right)$에서

$\alpha=\frac{1}{2}\alpha+10,\ \frac{1}{2}\alpha=10\qquad\therefore \alpha=20$

Lecture

여러 가지 수열의 귀납적 정의

(1) $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 꼴
⇨ n에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더한다.

(2) $a_{n+1}=a_nf(n)$ 꼴
⇨ n에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱한다.

(3) $a_{n+1}=pa_n+q(p\neq1, pq\neq0)$ 꼴
⇨ $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ 꼴로 변형하여 수열 $\{a_n-\alpha\}$는 첫째항이 $a_1-\alpha$, 공비가 p인 등비수열임을 이용한다.

(4) $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0(p+q+r=0, pqr\neq0)$ 꼴
⇨ $a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{r}{p}(a_{n+1}-a_n)$ 꼴로 변형하여 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 a_2-a_1, 공비가 $\frac{r}{p}$인 등비수열임을 이용한다.

0101

$a_{n+1}=a_n+2^n$의 n에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}\cancel{a_2}&=a_1+2^1\\\cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+2^2\\\cancel{a_4}&=\cancel{a_3}+2^3\\&\vdots\\+)\ a_n&=\cancel{a_{n-1}}+2^{n-1}\\\hline a_n&=a_1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}\end{aligned}$$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4a_n}{2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4(2^n-1)}{2^n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1+\frac{1}{2^n}}=4$ 답 4

0102

이차방정식 $x^2-\sqrt{a_n}x+(a_{n+1}-1)=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(\sqrt{a_n})^2-4(a_{n+1}-1)=0,\ a_n-4a_{n+1}+4=0$

$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+1$ ⋯ ❶

이때, $a_{n+1}-\frac{4}{3}=\frac{1}{4}\left(a_n-\frac{4}{3}\right)$이므로 수열 $\left\{a_n-\frac{4}{3}\right\}$는 첫째항이

$a_1-\frac{4}{3}=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

즉, $a_n-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$에서

$a_n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{4}{3}$ ⋯ ❷

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{4}{3}\right\}=\frac{4}{3}$ ⋯ ❸

답 $\frac{4}{3}$

채점 기준	비율
❶ a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 일반항 a_n을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0103

| 전략 | $\overline{\mathrm{OP}_n}=\sqrt{n^2+n+1}$, $\overline{\mathrm{OQ}_n}=n$임을 이용한다.

$\overline{\mathrm{OP}_n}=\sqrt{n^2+n+1}$, $\overline{\mathrm{OQ}_n}=n$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\overline{\mathrm{OP}_n}-\overline{\mathrm{OQ}_n})&=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-n)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n+1}-n)(\sqrt{n^2+n+1}+n)}{\sqrt{n^2+n+1}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ②

0104

$$\begin{aligned}x_n&=\overline{\mathrm{OA}_1}+\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}+\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}+\cdots+\overline{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}\\&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

$y_1=1$, $y_n=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\overline{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $(n\ge 2)$

이때, $a_n=$(직선 OB_n의 기울기)$=\frac{y_n}{x_n}$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}2^n a_n&=\lim_{n\to\infty}\left(2^n\times\frac{y_n}{x_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{2^n\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=1\end{aligned}$$

답 ①

0105

$\overline{\mathrm{OC}_n}=\overline{\mathrm{AB}_n}=n$, $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}=\overline{\mathrm{OA}}=20$이므로

$\overline{\mathrm{AC}_n}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OC}_n}^2}=\sqrt{20^2+n^2}=\sqrt{400+n^2}$

또, $\triangle\mathrm{AB}_1\mathrm{D}_n\backsim\triangle\mathrm{AB}_n\mathrm{C}_n$이므로

$\overline{\mathrm{AB}_1}:\overline{\mathrm{AB}_n}=\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{D}_n}:\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}$

$1:n=\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{D}_n}:20$ $\quad\therefore\ \overline{\mathrm{B}_1\mathrm{D}_n}=\frac{20}{n}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AC}_n}-\overline{\mathrm{OC}_n}}{\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{D}_n}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{400+n^2}-n}{\frac{20}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{400+n^2}-n)(\sqrt{400+n^2}+n)}{20(\sqrt{400+n^2}+n)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{20n}{\sqrt{400+n^2}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{20}{\sqrt{\frac{400}{n^2}+1}+1}=10\end{aligned}$$

답 10

0106

| 전략 | n번째 시행 후 A그릇에 들어 있는 물의 양을 a_n L라 하고 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한 후 일반항 a_n을 구한다.

n번째 시행 후 A그릇에 들어 있는 물의 양을 a_n L라 하면 물의 총량은 1 L이므로 B그릇에 들어 있는 물의 양은 $(1-a_n)$ L이다.

이때, A그릇에 담긴 물의 $\frac{1}{4}$을 퍼내어 B그릇에 부으면 A그릇에 들어 있는 물의 양은 $\frac{3}{4}a_n$ L, B그릇에 들어 있는 물의 양은 $\left(1-\frac{3}{4}a_n\right)$ L이다.

다시 B그릇에 담긴 물의 $\frac{1}{4}$을 퍼내어 A그릇에 부으면

$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{4}a_n\right)$ $\qquad\therefore\ a_{n+1}=\frac{9}{16}a_n+\frac{1}{4}$

$\therefore\ a_{n+1}-\frac{4}{7}=\frac{9}{16}\left(a_n-\frac{4}{7}\right)$

즉, 수열 $\left\{a_n-\frac{4}{7}\right\}$는 첫째항이 $a_1-\frac{4}{7}$이고 공비가 $\frac{9}{16}$인 등비수열이므로

$a_n-\frac{4}{7}=\left(a_1-\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_n=\left(a_1-\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}+\frac{4}{7}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(a_1-\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}+\frac{4}{7}\right\}=\frac{4}{7}$

따라서 A그릇에 들어 있는 물의 양은 $\frac{4}{7}$ L에 가까워진다. 답 $\frac{4}{7}$ L

0107

두 점 $\mathrm{A}_n(x_n)$, $\mathrm{A}_{n+1}(x_{n+1})$에 대하여 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}$을 $2:1$로 내분하는 점이 $\mathrm{A}_{n+2}(x_{n+2})$이므로

$x_{n+2}=\frac{2\times x_{n+1}+1\times x_n}{2+1}=\frac{2}{3}x_{n+1}+\frac{1}{3}x_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

$\therefore\ x_{n+2}-x_{n+1}=-\frac{1}{3}(x_{n+1}-x_n)$

즉, 수열 $\{x_{n+1}-x_n\}$은 첫째항이 $x_2-x_1=4-1=3$, 공비가 $-\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$x_{n+1}-x_n=3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

위의 식의 n에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}&\cancel{x_2}-x_1=3\\&\cancel{x_3}-\cancel{x_2}=3\times\left(-\frac{1}{3}\right)\\&\cancel{x_4}-\cancel{x_3}=3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2\\&\qquad\vdots\\+)\ &x_n-\cancel{x_{n-1}}=3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\\\hline&x_n-x_1=3\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}\end{aligned}$$

$$\therefore\ x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}=1+\frac{3\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$=\frac{13}{4}-\frac{9}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{13}{4}-\frac{9}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{13}{4}$$

답 ⑤

STEP 3 내신 마스터

0108

유형 02 수열의 극한에 대한 기본 성질

|전략| $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)로 놓고 극한에 대한 기본 성질을 이용한다.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n-1)=2\alpha-1=2 \qquad \therefore\ \alpha=\frac{3}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(3b_n-2)=3\beta-2=1 \qquad \therefore\ \beta=1$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3b_n}{b_n+1}=\frac{2\lim\limits_{n\to\infty}a_n+3\lim\limits_{n\to\infty}b_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n+1}=\frac{2\alpha+3\beta}{\beta+1}$$

$$=\frac{2\times\frac{3}{2}+3\times1}{1+1}=3$$

답 ⑤

0109

유형 02 수열의 극한에 대한 기본 성질

|전략| $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$임을 이용한다.

두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_nb_n\}$이 각각 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^3+b_n^3)=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^3-3a_nb_n(a_n+b_n)\}$$

$$=\underbrace{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)^3}_{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)\times\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)\times\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=3\times3\times3=3^3}-3\lim_{n\to\infty}a_nb_n\times\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$$

$$=3^3-3\times1\times3=18$$

답 ③

참고 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴한다는 조건이 주어지지 않았으므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$로 놓을 수 없다.

0110

유형 04 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

|전략| $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴에서 (분모의 차수)=(분자의 차수)이면 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{n(dn+2a-d)}{2}=\frac{d}{2}n^2+\frac{2a-d}{2}n$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{2n^2+2n-1}=3$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{d}{2}n^2+\frac{2a-d}{2}n}{2n^2+2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{d}{2}+\frac{2a-d}{2n}}{2+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{d}{4}=3$$

$\therefore\ d=12$

답 ③

0111

유형 06 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 – 로그를 포함한 식

|전략| 공차를 d로 놓고 $a_4=\log_3 a+3d$, $a_{10}=\log_3 a+9d$와 주어진 극한값을 이용하여 $\log_3 a$, d의 값을 각각 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_4+a_{10}=(\log_3 a+3d)+(\log_3 a+9d)=2\log_3 a+12d$

이때, $a_4+a_{10}=14$이므로

$2\log_3 a+12d=14 \qquad \therefore\ \log_3 a+6d=7$ ……㉠

$a_n=\log_3 a+(n-1)d$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_3 a+(n-1)d}{2n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{d+\frac{\log_3 a-d}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{d}{2}$$

$\frac{d}{2}=\frac{1}{3}$에서 $d=\frac{2}{3}$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\log_3 a+6\times\frac{2}{3}=7 \qquad \therefore\ \log_3 a=3$

$\therefore\ a_{19}=3+18\times\frac{2}{3}=15$

답 ②

0112

유형 08 $\infty-\infty$ 꼴의 극한

|전략| $n+1<\sqrt{n^2+4n+2}<n+2$임을 이용하여 소수 부분을 구한다.

자연수 n에 대하여

$n^2+2n+1<n^2+4n+2<n^2+4n+4$이므로

$\underbrace{n+1<\sqrt{n^2+4n+2}<n+2}_{(n+1)^2<n^2+4n+2<(n+2)^2}$

즉, $\sqrt{n^2+4n+2}$의 정수 부분은 $n+1$이므로

$a_n=\sqrt{n^2+4n+2}-(n+1)$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+4n+2}-(n+1)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{n^2+4n+2}-(n+1)\}\{\sqrt{n^2+4n+2}+(n+1)\}}{\sqrt{n^2+4n+2}+(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+4n+2}+n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}+1+\frac{1}{n}}=\frac{2}{1+1}=1$$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}50a_n=50\lim\limits_{n\to\infty}a_n=50\times1=50$

답 ①

0113

유형 **10** $\infty-\infty$ 꼴의 극한 – 미정계수의 결정

|전략| $\frac{n}{a}-1<\left[\frac{n}{a}\right]\le\frac{n}{a}$이므로 $\left[\frac{n}{a}\right]=\frac{n}{a}-\alpha\,(0\le\alpha<1)$로 놓고 극한값을 구한다.

$\left[\frac{n}{a}\right]=\frac{n}{a}-\alpha(0\le\alpha<1)$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{a}\right]}-n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+\frac{n}{a}-\alpha}-n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+\frac{n}{a}-\alpha}-n\right)\left(\sqrt{n^2+\frac{n}{a}-\alpha}+n\right)}{\sqrt{n^2+\frac{n}{a}-\alpha}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{a}-\alpha}{\sqrt{n^2+\frac{n}{a}-\alpha}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a}-\frac{\alpha}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{an}-\frac{\alpha}{n^2}}+1}$$

$$=\frac{\frac{1}{a}}{1+1}=\frac{1}{2a}$$

이때, $\frac{1}{2a}=\frac{1}{6}$이므로 $2a=6$ $\quad\therefore a=3$

답 ②

0114

유형 **11** 일반항 a_n을 포함한 식의 극한값

|전략| $\frac{3a_n-5}{2a_n+3}=b_n$으로 놓고 a_n을 b_n에 대한 식으로 나타낸 다음 $\lim_{n\to\infty}6a_n$에 대입한다.

$\frac{3a_n-5}{2a_n+3}=b_n$으로 놓으면 $(2a_n+3)b_n=3a_n-5$에서

$$a_n=\frac{-3b_n-5}{2b_n-3}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{3}{4}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}6a_n=\lim_{n\to\infty}6\times\frac{-3b_n-5}{2b_n-3}=6\times\frac{-3\times\frac{3}{4}-5}{2\times\frac{3}{4}-3}$$

$$=6\times\frac{29}{6}=29$$

답 ⑤

0115

유형 **12** 수열의 극한에 대한 진위 판정 문제 + **13** 수열의 극한의 대소 관계

|전략| 명제가 거짓임을 보일 때는 반례를 생각해 본다.

ㄱ. [반례] $a_n=1-\frac{1}{n}$, $b_n=1+\frac{2}{n}$라 하면 $a_n<b_n$이지만

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=1$

ㄴ. $a_n<b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ (참)

ㄷ. $a_n=n-\frac{1}{n}$, $b_n=n$, $c_n=n+\frac{1}{n}$이라 하면 $a_n<b_n<c_n$

이때, $\lim_{n\to\infty}(c_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

0116

유형 **16** r^n을 포함한 수열의 극한

|전략| x의 값의 범위를 $|x|>4$, $|x|<4$일 때로 나누어 극한값을 구한다.

(i) $|x|>4$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{x}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+4^n}{x^n-4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{4}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{4}{x}\right)^n}=1$$

(ii) $|x|<4$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+4^n}{x^n-4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{x}{4}\right)^n-1}=-1$$

(i), (ii)에서 극한값이 -1이 되는 x의 값의 범위는 $|x|<4$, 즉 $-4<x<4$이므로 정수 x는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$의 7개이다.

답 ③

0117

유형 **13** 수열의 극한의 대소 관계 + **18** 귀납적으로 정의된 수열의 극한

|전략| $a_{n+1}<\frac{1}{2}a_n+1$을 $a_{n+1}-2<\frac{1}{2}(a_n-2)$로 변형한다.

$a_{n+1}<\frac{1}{2}a_n+1$에서 $a_{n+1}-2<\frac{1}{2}(a_n-2)$

위의 식의 n에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2-2}<\frac{1}{2}(a_1-2)$$

$$\cancel{a_3-2}<\frac{1}{2}(\cancel{a_2-2})$$

$$\cancel{a_4-2}<\frac{1}{2}(\cancel{a_3-2})$$

$$\vdots$$

$$\times\,)\ a_n-2<\frac{1}{2}(\cancel{a_{n-1}-2})$$

$$a_n-2<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times(a_1-2)$$

이때, $a_n>2$이므로 $0<a_n-2<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times(a_1-2)$

그런데 $\lim_{n\to\infty}0=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times(a_1-2)=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=0$ $\quad\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=2$

답 ①

0118

유형 18 귀납적으로 정의된 수열의 극한

|전략| $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (α는 실수)이면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$임을 이용한다.

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$, …을 수열 $\{a_n\}$이라 하면

$a_{n+1}=\frac{1}{2+a_n}$ ……㉠

이때, $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha\,(\alpha>0)$라 하면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$이다.

㉠에서 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+a_n}$

$\alpha=\frac{1}{2+\alpha}$, $\alpha^2+2\alpha-1=0$ $\quad\therefore \alpha=-1+\sqrt{2}\ (\because \alpha>0)$

이때, 주어진 수열은 $\{1+a_n\}$이므로

$\lim_{n\to\infty}(1+a_n)=1+\alpha=1+(-1+\sqrt{2})=\sqrt{2}$

따라서 $m=\sqrt{2}$이므로 $m^2=(\sqrt{2})^2=2$ 답 ④

0119

유형 19 수열의 극한의 활용 (1)

|전략| 방정식 $f(x)=k$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같음을 이용한다. (단, k는 실수)

(i) $2nf(a)-1\ge 0$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|2nf(a)-1|-nf(a)}{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2nf(a)-1-nf(a)}{3n-2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{nf(a)-1}{3n-2}=\frac{1}{3}f(a)$$

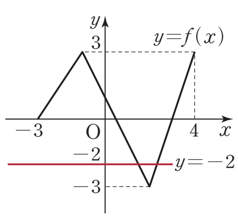
$\frac{1}{3}f(a)=2$에서 $f(a)=6$

그런데 $f(a)=6$은 정의되어 있지 않으므로 $f(a)=6$은 모순이다.

(ii) $2nf(a)-1<0$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|2nf(a)-1|-nf(a)}{3n-2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2nf(a)+1-nf(a)}{3n-2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3nf(a)+1}{3n-2}=-f(a)$$

$-f(a)=2$에서 $f(a)=-2$



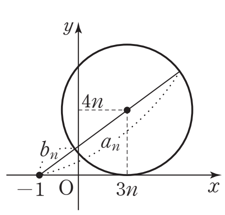
따라서 방정식 $f(a)=-2$의 실근의 개수는 2이므로 (i), (ii)에서 구하는 실수 a의 개수는 2이다. 답 ②

0120

유형 19 수열의 극한의 활용 (1)

|전략| 반지름의 길이가 r인 원의 중심과 점 $(-1, 0)$ 사이의 거리가 d일 때, 원 위의 점과 점 $(-1, 0)$ 사이의 최대, 최소 거리는 각각 $d+r$, $d-r$이다.

자연수 n에 대하여 점 $(3n, 4n)$을 중심으로 하고 x축에 접하는 원 O_n의 반지름의 길이는 $4n$이다.



이때, 점 $(3n, 4n)$과 점 $(-1, 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(3n+1)^2+(4n)^2}=\sqrt{25n^2+6n+1}$

이므로

$a_n=\sqrt{25n^2+6n+1}+4n$

$b_n=\sqrt{25n^2+6n+1}-4n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2+6n+1}+4n}{\sqrt{25n^2+6n+1}-4n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}+4}{\sqrt{25+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}-4}$$
$$=\frac{5+4}{5-4}=9$$

답 ①

Lecture

(1) 좌표축에 접하는 원의 방정식

① 중심의 좌표가 (a, b)이고 x축에 접하는 원의 방정식
⇨ $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

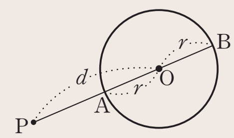
② 중심의 좌표가 (a, b)이고 y축에 접하는 원의 방정식
⇨ $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$

③ 중심의 좌표가 (a, a)이고 제1사분면에서 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식 ⇨ $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

(2) 원 밖의 한 점과 원 위의 점 사이의 거리

① 최댓값 ⇨ $\overline{PO}+\overline{OB}=d+r$

② 최솟값 ⇨ $\overline{PO}-\overline{AO}=d-r$



0121

유형 11 일반항 a_n을 포함한 식의 극한값

|전략| $a_n-b_n=c_n$으로 놓고 $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$임을 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값을 구한다.

$a_n-b_n=c_n$으로 놓으면 $\lim_{n\to\infty}c_n=2$, $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$ … ❶

$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)=0$에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$ … ❷

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{b_n}{a_n}}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n^2}{b_n}-\frac{b_n^2}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^3-b_n^3}{a_nb_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n-b_n)(a_n^2+a_nb_n+b_n^2)}{a_nb_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\left(\frac{a_n^2}{a_nb_n}+\frac{a_nb_n}{a_nb_n}+\frac{b_n^2}{a_nb_n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\left(\frac{a_n}{b_n}+1+\frac{b_n}{a_n}\right)$$
$$=2\times(1+1+1)=6$$ … ❸

답 6

채점 기준	배점
❶ $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}$의 값을 구할 수 있다.	1점
❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n^2}{b_n}-\frac{b_n^2}{a_n}\right)$의 값을 구할 수 있다.	3점

0122

유형 14 등비수열의 극한

|전략| 다항식 $f(x)$를 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 일차 이하의 다항식이므로 $R_n(x)=ax+b$(a, b는 상수)로 놓는다.

다항식 $(x+1)^n$을 x^2-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R_n(x)=ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$(x+1)^n=(x^2-x)Q(x)+ax+b$

$\quad=x(x-1)Q(x)+ax+b$ ······㉠ ··· ❶

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $1=b$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $2^n=a+b$

$\therefore a=2^n-1$

따라서 $R_n(x)=(2^n-1)x+1$이므로 ··· ❷

$R_n(2)=(2^n-1)\times2+1=2^{n+1}-1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}+1}{2^n+R_n(2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}+1}{2^n+2^{n+1}-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{2^n}}{1+2-\frac{1}{2^n}}=\frac{4}{3}$$ ··· ❸

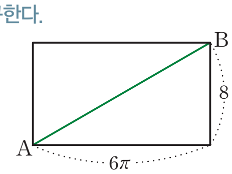
답 $\frac{4}{3}$

채점 기준	배점
❶ 몫과 나머지를 이용하여 항등식을 세울 수 있다.	2점
❷ $R_n(x)$를 구할 수 있다.	2점
❸ $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}+1}{2^n+R_n(2)}$의 값을 구할 수 있다.	2점

0123

유형 19 수열의 극한의 활용 (1)

|전략| 피타고라스 정리를 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

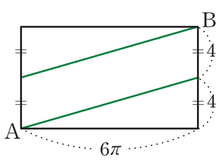


오른쪽 그림과 같이 직원기둥의 옆면의 전개도에서 직사각형의 가로의 길이는 직원기둥의 밑면의 둘레의 길이와 같으므로

$2\pi\times3=6\pi$

이때, 옆면을 한 바퀴 돌아 점 B까지 가는 최단 거리는 직사각형의 대각선의 길이와 같으므로

$a_1=\sqrt{(6\pi)^2+8^2}$ ··· ❶



또, 오른쪽 그림과 같이 두 바퀴 돌아 점 B까지 가는 최단 거리는

$a_2=2\sqrt{(6\pi)^2+\left(\frac{8}{2}\right)^2}$

이와 같은 방법으로 계속하면

$a_n=n\sqrt{(6\pi)^2+\left(\frac{8}{n}\right)^2}$ ··· ❷

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{(6\pi)^2+\left(\frac{8}{n}\right)^2}=6\pi$$ ··· ❸

답 6π

채점 기준	배점
❶ a_1의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ 일반항 a_n을 구할 수 있다.	3점
❸ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구할 수 있다.	2점

0124

유형 13 수열의 극한의 대소 관계 + 18 귀납적으로 정의된 수열의 극한

|전략| 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립하려면 $a>0$이고 $b^2-4ac<0$이어야 한다.

(1) 이차부등식 $a_nx^2-2a_{n+1}x+\frac{4}{9}a_n>0\,(a_n>0)$이 항상 성립하려면

이차방정식 $a_nx^2-2a_{n+1}x+\frac{4}{9}a_n=0$이 실근을 갖지 않아야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a_{n+1}{}^2-\frac{4}{9}a_n{}^2<0$

$\left(a_{n+1}+\frac{2}{3}a_n\right)\left(a_{n+1}-\frac{2}{3}a_n\right)<0$

그런데 $a_{n+1}+\frac{2}{3}a_n>0\,(\because a_n>0)$이므로

$a_{n+1}-\frac{2}{3}a_n<0 \qquad \therefore a_{n+1}<\frac{2}{3}a_n$

(2) (1)의 식의 n에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$\cancel{a_2}<\frac{2}{3}a_1$

$\cancel{a_3}<\frac{2}{3}\cancel{a_2}$

$\vdots$

$\times\,)\ a_n<\frac{2}{3}\cancel{a_{n-1}}$

$a_n<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times a_1$

$\therefore 0<a_n<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times a_1$

이때, $\lim_{n\to\infty}0=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times a_1=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3n^2-2}{2a_n+n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n^2}+3-\frac{2}{n^2}}{\frac{2a_n}{n^2}+1+\frac{1}{n}}=3$$

답 (1) $a_{n+1}<\frac{2}{3}a_n$ (2) 0 (3) 3

채점 기준	배점
(1) a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	5점
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구할 수 있다.	5점
(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+3n^2-2}{2a_n+n^2+n}$의 값을 구할 수 있다.	2점

0125

유형 18 귀납적으로 정의된 수열의 극한

|전략| $a_{n+1}=pa_n+q$ 꼴은 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ 꼴로 변형하여 일반항 a_n을 구한다.

(1) $a_n+S_n=2n$ ⋯⋯ ㉠

$a_{n+1}+S_{n+1}=2(n+1)$ ⋯⋯ ㉡

㉡－㉠을 하면 $a_{n+1}-a_n+a_{n+1}=2$

즉, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$이므로 $a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$

(2) 수열 $\{a_n-2\}$는 첫째항이 a_1-2, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n-2=(a_1-2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_1+S_1=2$

이때, $a_1=S_1$이므로

$2a_1=2 \qquad \therefore a_1=1$

따라서 $a_n-2=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$에서 $a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2$

(3) $\lim_{n\to\infty}(2^n-1)(a_n-2)=\lim_{n\to\infty}(2^n-1)\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$=-\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=-\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$=-2$

답 (1) $a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$ (2) $a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2$ (3) -2

채점 기준	배점
(1) 수열 $\{a_n\}$을 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ 꼴로 변형할 수 있다.	4점
(2) 일반항 a_n을 구할 수 있다.	4점
(3) $\lim_{n\to\infty}(2^n-1)(a_n-2)$의 값을 구할 수 있다.	2점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0126

|전략| $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$($\alpha$는 실수)로 놓고 n이 짝수인 경우와 홀수인 경우 모두 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$임을 이용한다.

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$($\alpha$는 실수)라 하면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$

(i) n이 짝수일 때

$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+6$에서 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}a_n+6\right)$

즉, $\alpha=\frac{1}{3}\alpha+6$이므로 $\alpha=9$

(ii) n이 홀수일 때

$a_{n+1}=\frac{p}{a_n+2}-2$에서 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p}{a_n+2}-2\right)$

즉, $\alpha=\frac{p}{\alpha+2}-2$이다.

(ii)의 식에 $\alpha=9$를 대입하면 $9=\frac{p}{9+2}-2$이므로

$p=11^2 \qquad \therefore p=121$

답 121

0127

|전략| 로그함수는 연속함수이므로 $\lim_{n\to\infty}\log a_n=2$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=100$임을 이용한다.

$\lim_{n\to\infty}\log\frac{an^3+bn^2+5}{2n^2+\sqrt{n^3+3}}=2$에서

$\log\left(\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn^2+5}{2n^2+\sqrt{n^3+3}}\right)=2 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn^2+5}{2n^2+\sqrt{n^3+3}}=100$

이때, $a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn^2+5}{2n^2+\sqrt{n^3+3}}=\infty$ (또는 $-\infty$)이므로 $a=0$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn^2+5}{2n^2+\sqrt{n^3+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{5}{n^2}}{2+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^4}}}=\frac{b}{2}=100$$

이므로 $b=200$

$\therefore a+b=0+200=200$

답 200

0128

|전략| 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax+n$의 교점의 x좌표를 $\alpha_n, \beta_n(\alpha_n<\beta_n)$이라 하면 교점의 좌표는

$(\alpha_n, a\times\alpha_n+n), (\beta_n, a\times\beta_n+n)$

$\therefore l_n^2=(\beta_n-\alpha_n)^2+\{(a\times\beta_n+n)-(a\times\alpha_n+n)\}^2$

$=(\beta_n-\alpha_n)^2+a^2(\beta_n-\alpha_n)^2$

$=(a^2+1)(\beta_n-\alpha_n)^2$ ⋯⋯ ㉠

α_n, β_n은 이차방정식 $x^2-ax-n=0$의 두 근이므로

$\alpha_n+\beta_n=a, \alpha_n\beta_n=-n$ ⋯⋯ ㉡

㉠에 ㉡을 대입하면

$l_n^2=(a^2+1)(\beta_n-\alpha_n)^2$

$=(a^2+1)\{(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\beta_n\}$

$=(a^2+1)(a^2+4n)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{l_n^{\,2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^2(a^2+1)+4(a^2+1)n}{n}$$
$$=4(a^2+1)$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n^{\,2}}{n}=20$이므로

$4(a^2+1)=20 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$ 답 ④

0129

|전략| n년 차 연말에 남아 있는 와인의 양 a_n과 $(n+1)$년 차 연말에 남아 있는 와인의 양 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

$a_{n+1}=(1-0.4)a_n+200=\frac{3}{5}a_n+200$에서

$a_{n+1}-500=\frac{3}{5}(a_n-500)$

수열 $\{a_n-500\}$은 첫째항이 $a_1-500=800-500=300$, 공비가 $\frac{3}{5}$인 등비수열이므로

$a_n-500=300\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n=500+300\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{500+300\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}=500$ 답 500

0130

|전략| 내분점의 공식을 이용하여 주어진 규칙을 수식으로 변형한 후 x_{n-1}과 x_n 사이의 규칙을 찾는다.

(가)에서 $x_1=2$이고 (나)에서 주어진 규칙에 따라 x_n은 점 $\mathrm{P}_{n-1}(x_{n-1})$과 점 $\mathrm{P}(4)$를 $1:n$으로 내분하는 점 P_n의 좌표이므로

$$x_n=\frac{n\times x_{n-1}+4}{n+1}$$
$$=\frac{n}{n+1}x_{n-1}+\frac{4}{n+1}\ (n=2, 3, 4, \cdots)$$

$\therefore x_n-4=\frac{n}{n+1}(x_{n-1}-4)\ (n=2, 3, 4, \cdots)$

이때, $x_n-4=y_n(n=2, 3, 4, \cdots)$이라 하면

$y_n=\frac{n}{n+1}y_{n-1}$이고 $y_{n-1}=\frac{n-1}{n}y_{n-2}$이므로

$$y_n=\frac{n}{n+1}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{2}{3}\times y_1$$
$$=\frac{2}{n+1}(x_1-4)=-\frac{4}{n+1}\ (\because x_1=2)$$

$y_n=x_n-4=-\frac{4}{n+1}$이므로 $x_n=4-\frac{4}{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(4-\frac{4}{n+1}\right)=4$ 답 ④

본책 28~41쪽

2 | 급수

STEP 1 개념 마스터

0131

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+1}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0132

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=1$ 답 1

0133

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{10-n^2}{n(n-3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+10}{n^2-3n}=-1$

답 -1

0134

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(-3)^n\left(\frac{1}{5}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n=0$ 답 0

0135

주어진 급수는 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열의 합이므로 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\frac{n\{2\times2+(n-1)\times3\}}{2}=\frac{3n^2+n}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2}=\infty$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 발산

0136

주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열의 합이므로 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{1\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\frac{3}{2}$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{3}{2}$이다. 답 수렴, $\frac{3}{2}$

0137

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_1=2,\ S_2=0,\ S_3=2,\ S_4=0,\ \cdots$

따라서 수열 $\{S_n\}$이 진동하므로 주어진 급수는 발산한다. 답 발산

0138

제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다. 답 수렴, 1

0139

제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}-\frac{k+1}{k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $-\frac{1}{2}$이다. 답 수렴, $-\frac{1}{2}$

0140

제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k+1}{k}$$
$$=\log 2+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots+\log\frac{n+1}{n}$$
$$=\log\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)=\log(n+1)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log(n+1)=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 발산

0141

제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\sqrt{n+1}-1$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 발산

0142

제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$
$$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다. 답 수렴, 1

0143

주어진 급수는 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열의 합이므로 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=2+(n-1)\times 2=2n$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}2n=\infty\neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0144

주어진 급수는 첫째항이 -2, 공차가 3인 등차수열의 합이므로 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=-2+(n-1)\times 3=3n-5$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(3n-5)=\infty\neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0145

주어진 급수는 첫째항이 5, 공비가 1인 등비수열의 합이므로 제n항을 a_n이라 하면 $a_n=5$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=5\neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0146

주어진 급수는 첫째항이 $\frac{7}{\sqrt{3}}$, 공차가 $-\frac{2}{\sqrt{3}}$인 등차수열의 합이므로 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{7}{\sqrt{3}}+(n-1)\times\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{3}}n+3\sqrt{3}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}n+3\sqrt{3}\right)=-\infty\neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0147

제n항을 a_n이라 하면 $a_n=\frac{n^2}{n(n+2)}$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n}=1\neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0148

제n항을 a_n이라 하면 $a_n=\sqrt{n^2+2n}-n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$$
$$=\frac{2}{1+1}=1\neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0149

제n항을 a_n이라 하면 $a_n=\log_2\frac{n}{2n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n}{2n-1}=\log_2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}\right)$$
$$=\log_2\frac{1}{2}=-1\neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0150

제n항을 a_n이라 하면 $a_n=\frac{3^{n+1}+1}{3^n+2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+1}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=3\neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0151

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2+2\times3=8$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}-4b_n\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n-4\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{2}\times2-4\times3=-11$

답 (1) 8 (2) -11

0152

첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{4}$이고, $-1<\frac{1}{4}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.

따라서 그 합은 $\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$ 답 수렴, $\frac{4}{3}$

0153

공비가 $-\sqrt{2}$이고, $-\sqrt{2}<-1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

답 발산

0154

공비가 $-\frac{3}{2}$이고, $-\frac{3}{2}<-1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

답 발산

0155

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$에서 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{2}{3}$이고, $-1<-\frac{2}{3}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.

따라서 그 합은 $\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}$ 답 수렴, $\frac{3}{5}$

0156

$\sum_{n=1}^{\infty}3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$에서 첫째항이 3, 공비가 $\frac{1}{2}$이고, $-1<\frac{1}{2}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.

따라서 그 합은 $\frac{3}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{\frac{1}{2}}=6$ 답 수렴, 6

0157

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

0158

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}-\frac{5}{4^n}\right)=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-5\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$=3\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-5\times\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=3\times1-5\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

0159

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}$$
$$=1-3=-2$$

답 -2

0160

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}+\frac{4^n}{5^{n-1}}\right)=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$
$$=3\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+4\times\frac{1}{1-\frac{4}{5}}$$
$$=3\times1+4\times5=23$$

답 23

2 급수

0161

$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\sqrt{2})^{n-1}=\frac{1}{1-(1-\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 　답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0162

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}\\&=2\left\{\frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\sin\frac{3\pi}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^3\sin\frac{5\pi}{2}+\cdots\right\}\\&=2\left\{\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots\right\}\\&=2\left\{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\cdots\right\}\\&=2\times\frac{\frac{2}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

답 $\frac{4}{5}$

0163

공비가 $2x$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$-1<2x<1$ 　$\therefore -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ 　답 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

0164

공비가 $4x-1$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$-1<4x-1<1,\ 0<4x<2$ 　$\therefore 0<x<\frac{1}{2}$ 　답 $0<x<\frac{1}{2}$

0165

공비가 $-\frac{x}{2}$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$-1<-\frac{x}{2}<1$ 　$\therefore -2<x<2$ 　답 $-2<x<2$

0166

$$\begin{aligned}0.\dot{1}0\dot{2}&=\underbrace{0.102+0.000102+0.000000102+\cdots}_{\text{첫째항이 0.102, 공비가 0.001인 등비급수}}\\&=\frac{0.102}{1-0.001}=\frac{0.102}{0.999}\\&=\frac{102}{999}=\frac{34}{333}\end{aligned}$$

답 $\frac{34}{333}$

Lecture

순환소수를 분수로 나타내는 방법

(1) $0.\dot{a}b\dot{c}=\frac{abc}{999}$ 　(2) $0.a\dot{b}\dot{c}=\frac{abc-a}{990}$ 　(3) $0.ab\dot{c}=\frac{abc-ab}{900}$

0167

$$\begin{aligned}0.2\dot{8}&=0.2+\underbrace{0.08+0.008+0.0008+\cdots}_{\text{첫째항이 0.08, 공비가 0.1인 등비급수}}\\&=0.2+\frac{0.08}{1-0.1}=0.2+\frac{0.08}{0.9}\\&=\frac{2}{10}+\frac{8}{90}=\frac{26}{90}=\frac{13}{45}\end{aligned}$$

답 $\frac{13}{45}$

0168

$$\begin{aligned}1.\dot{2}\dot{5}&=1+\underbrace{0.25+0.0025+0.000025+\cdots}_{\text{첫째항이 0.25, 공비가 0.01인 등비급수}}\\&=1+\frac{0.25}{1-0.01}=1+\frac{0.25}{0.99}\\&=1+\frac{25}{99}=\frac{124}{99}\end{aligned}$$

답 $\frac{124}{99}$

STEP 2 유형 마스터

0169

| 전략 | 주어진 급수의 제n항을 찾은 후 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$임을 이용하여 부분합을 구한다.

주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}$

이때, 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}\\&=\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$ 　답 ④

0170

주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{1}{(2n)^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

이때, 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$ 　답 ①

0171

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=2n-1,\ \alpha_n\beta_n=n^2$이므로

$$\begin{aligned}(\alpha_n+1)(\beta_n+1)&=\alpha_n\beta_n+(\alpha_n+\beta_n)+1\\&=n^2+(2n-1)+1\\&=n^2+2n=n(n+2)\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_n+1)(\beta_n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \cdots +\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

0172

| 전략 | 로그의 진수 부분을 인수분해한 후 $\log a+\log b=\log ab$임을 이용한다.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{n^2}{n^2-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \log \frac{k\times k}{(k-1)(k+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\log \frac{2\times2}{1\times3}+\log \frac{3\times3}{2\times4}+\log \frac{4\times4}{3\times5} + \cdots +\log \frac{n\times n}{(n-1)(n+1)}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log \left\{\frac{2\times2}{1\times3}\times\frac{3\times3}{2\times4}\times\frac{4\times4}{3\times5}\times\cdots\times\frac{n\times n}{(n-1)(n+1)}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log \frac{2n}{n+1}=\log 2$$

답 ②

0173

$$\sum_{k=1}^{n} \log_3 a_k=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\log_3 a_3+ \cdots +\log_3 a_n$$

$$=\log_3 (a_1a_2a_3\cdots a_n)$$

$$=\log_3 \frac{6n-1}{2n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \log_3 a_n= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \log_3 a_k$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log_3 \frac{6n-1}{2n+1}$$

$$=\log_3 3=1$$

답 1

0174

주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\log_2 \left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}$$

$$=\log_2 \left\{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\log_2 \left(\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\right) \quad \cdots ❶$$

이때, 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} \log_2 \left(\frac{k}{k+1}\times\frac{k+2}{k+1}\right)$$

$$=\log_2 \left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)+\log_2 \left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)+\log_2 \left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right) + \cdots +\log_2 \left(\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$=\log_2 \left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$=\log_2 \frac{n+2}{2(n+1)} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n= \lim_{n\to\infty} \log_2 \frac{n+2}{2(n+1)}=\log_2 \frac{1}{2}=-1 \quad \cdots ❸$$

답 -1

채점 기준	비율
❶ 주어진 급수의 제n항을 찾을 수 있다.	30 %
❷ 부분합 S_n을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0175

| 전략 | S_{2n-1}의 마지막 항은 $\frac{n-1}{2n-1}$, S_{2n}의 마지막 항은 $-\frac{n}{2n+1}$임을 이용한다.

$$S_{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}- \cdots -\frac{n-1}{2n-1}+\frac{n-1}{2n-1}=1$$

$$S_{2n}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}- \cdots +\frac{n-1}{2n-1}-\frac{n}{2n+1}$$

$$=1-\frac{n}{2n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=1,\ \lim_{n\to\infty} S_{2n}= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{n}{2n+1}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}+ \lim_{n\to\infty} S_{2n}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

답 ③

참고 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n\to\infty} S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

0176

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_{2n-1}=2-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}- \cdots -\frac{n+1}{n}+\frac{n+1}{n}=2$$

$$S_{2n}=2-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}- \cdots +\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}$$

$$=2-\frac{n+2}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=2,\ \lim_{n\to\infty} S_{2n}= \lim_{n\to\infty} \left(2-\frac{n+2}{n+1}\right)=2-1=1$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n\to\infty} S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

답 발산

0177

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

ㄱ. $S_{2n-1}=1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots+(-1+1)=1$

$S_{2n}=(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=1,\ \lim_{n\to\infty} S_{2n}=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}\neq \lim_{n\to\infty} S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. $S_n=1-0-0-0-\cdots-0=1$이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n=1$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

ㄷ. $S_{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\cdots-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-1}=1$

$S_{2n}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$

$=1-\frac{1}{2n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=1,\ \lim_{n\to\infty} S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

따라서 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ 이다. 답 ⑤

0178

| 전략 | $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$임을 이용한다.

$(a_1-1)+\left(\frac{a_2}{2}-1\right)+\left(\frac{a_3}{3}-1\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{n}-1\right)+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-1\right)$

이때, 이 급수가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-1\right)=0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3n-4a_n}{2n-a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-4\times\frac{a_n}{n}}{2-\frac{a_n}{n}}$

$=\frac{3-4\times 1}{2-1}=-1$ 답 -1

0179

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^2-n^2}{na_n+n^2-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{{a_n}^2}{n^2}-1}{\frac{a_n}{n}+1-\frac{1}{n}}$

$=\frac{0-1}{0+1-0}=-1$ 답 ②

0180

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

또, $\lim_{n\to\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{4}{3}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n+6S_n+4}{2a_n+3S_n-5}=\frac{5\times 0+6\times\frac{4}{3}+4}{2\times 0+3\times\frac{4}{3}-5}=-12$ 답 ④

0181

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2a_n-2n}{2n+1}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a_n-2n}{2n+1}=0$ ··· ❶

$\frac{n^2a_n-2n}{2n+1}=b_n$으로 놓으면

$n^2a_n-2n=(2n+1)b_n,\ n^2a_n=(2n+1)b_n+2n$

$\therefore a_n=\frac{(2n+1)b_n+2n}{n^2}$

$\therefore 2na_n=2n\times\frac{(2n+1)b_n+2n}{n^2}$

$=\frac{2(2n+1)b_n+4n}{n}$ ··· ❷

이때, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty} 2na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)b_n+4n}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2(2n+1)}{n}\times b_n+4\right\}$

$=4\times 0+4=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a_n-2n}{2n+1}=0$임을 알 수 있다.	30 %
❷ $\frac{n^2a_n-2n}{2n+1}=b_n$으로 놓고 $2na_n$을 b_n과 n을 사용하여 나타낼 수 있다.	50 %
❸ $\lim_{n\to\infty} 2na_n$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0182

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2^{k+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$ (수렴)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$은 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=\lim_{n\to\infty}\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$

이므로 주어진 급수는 발산한다.

따라서 수렴하는 것은 ㄱ이다. 답 ①

Lecture

급수의 수렴, 발산을 조사할 때, 제n항 a_n에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산하는 것을 알 수 있다. 하지만 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$이라고 해서 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$이 반드시 수렴하는 것은 아니다.

ㄷ은 $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$이지만 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

즉, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$일 때는 제$n$항까지의 부분합 S_n에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하여 수렴, 발산 여부를 조사해야 한다.

0183

① $2+1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}+\cdots$

$$=\frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\frac{2}{6}+\frac{2}{7}+\frac{2}{8}+\cdots$$

$$>2+1+\left(\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}\right)+\cdots$$

$$=2+1+1+1+\cdots=\infty$$

이므로 주어진 급수는 발산한다.

② 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면 $a_n = \dfrac{2n}{2n+1}$

이때, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{2n+1} = 1 \neq 0$이므로 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{2n+1}$은 발산한다.

③ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n(n+5)} = 1 \neq 0$이므로 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n(n+5)}$은 발산한다.

④ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n(2n+2)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{1}{4} \text{ (수렴)}$$

⑤ $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{1+2+3+\cdots+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{n(n+1)}=4\neq 0$$

이므로 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2}{1+2+3+\cdots+n}$은 발산한다.

따라서 주어진 급수 중 수렴하는 것은 ④이다. 답 ④

0184

|전략| $\sum\limits_{n=1} a_n=\alpha$, $\sum\limits_{n=1} b_n=\beta$로 놓고 α, β의 값을 구한 후 주어진 급수의 합을 구한다.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$로 놓으면

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3a_n+2b_n) = 3\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = 12$에서

$3\alpha+2\beta=12$ ……㉠

또, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-5a_n+7b_n) = -5\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + 7\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = 11$에서

$-5\alpha+7\beta=11$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=2$, $\beta=3$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n-b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha-\beta = 2-3 = -1$ 답 -1

0185

$3a_n-5b_n=c_n$으로 놓으면 $3a_n=5b_n+c_n$

$\therefore a_n = \dfrac{5}{3}b_n + \dfrac{1}{3}c_n$ … ❶

이때, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = 3$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = 12$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{3}b_n+\frac{1}{3}c_n\right) = \frac{5}{3}\sum_{n=1}^{\infty} b_n + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

$$=\frac{5}{3}\times 3+\frac{1}{3}\times 12 = 9$$ … ❷

답 9

채점 기준	비율
❶ $3a_n-5b_n=c_n$으로 놓고 a_n을 b_n과 c_n을 사용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\sum\limits_{n=1} a_n$의 합을 구할 수 있다.	60 %

0186

ㄱ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$로 놓으면

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \text{ (수렴)}$$

ㄴ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n+1})\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(a_1-a_{n+1})$$

$$=a_1-0=a_1 \text{ (수렴)}$$

ㄷ. [반례] $b_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$이면 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = 1$로 수렴하지만

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} n(n+1) = \infty \neq 0$이므로 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_n}$은 발산한다.

따라서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0187

ㄱ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = \beta$로 놓으면

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+b_n)-a_n\} = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$=\beta-\alpha$ (수렴) (참)

ㄴ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \times \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ (참)

ㄷ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, …, $\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, …이면

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n = 0$으로 수렴하고 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$이지만

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0188

|전략| 주어진 급수를 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}(a\neq0)$의 꼴로 나타낸 다음 $-1<r<1$이면 그 합은 $\frac{a}{1-r}$임을 이용한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{4^n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\times4^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}+\frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$=\frac{1}{6}+3+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{17}{6}$$

답 $\frac{17}{6}$

0189

$1+3+3^2+\cdots+3^n=\frac{1\times(3^{n+1}-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{9^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}-1}{2\times9^n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$$
$$=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n$$
$$=\frac{3}{2}\times\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$$

답 $\frac{11}{16}$

0190

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin\frac{2\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3\sin\frac{3\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^4\sin\frac{4\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^5\sin\frac{5\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^6\sin\frac{6\pi}{2}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5-\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{2}{5}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n\pi}{5}\right)^n$$
$$=\frac{1+\cos\pi}{5}+\left(\frac{1+\cos2\pi}{5}\right)^2+\left(\frac{1+\cos3\pi}{5}\right)^3+\left(\frac{1+\cos4\pi}{5}\right)^4+\cdots$$
$$=\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^4+\left(\frac{2}{5}\right)^6+\cdots$$
$$=\frac{\frac{4}{25}}{1-\frac{4}{25}}=\frac{4}{21}$$
$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n\pi}{5}\right)^n$$
$$=\frac{2}{5}+\frac{4}{21}=\frac{62}{105}$$

답 $\frac{62}{105}$

0191

$x^n=(-3)^{n-1}$에서

(i) $n=2k(k=1, 2, 3, \cdots)$일 때

$x^n=(-3)^{2k-1}=-3^{2k-1}<0$

이때, n은 짝수이므로 실근의 개수는 0이다.

$\therefore\ a_{2k}=0$

(ii) $n=2k+1(k=1, 2, 3, \cdots)$일 때

$x^n=(-3)^{2k}=3^{2k}>0$

이때, n은 홀수이므로 실근의 개수는 1이다.

$\therefore\ a_{2k+1}=1$

(i), (ii)에서 $a_n=\begin{cases}0\ (n=2k)\\1\ (n=2k+1)\end{cases}\ (k=1, 2, 3, \cdots)$

$$\therefore\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2a_n}{5^n}=\frac{2a_2}{5^2}+\frac{2a_3}{5^3}+\frac{2a_4}{5^4}+\frac{2a_5}{5^5}+\cdots$$
$$=\frac{2}{5^3}+\frac{2}{5^5}+\frac{2}{5^7}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{2}{125}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{1}{60}$$

답 $\frac{1}{60}$

0192

|전략| 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 a, 공비가 $r(-1<r<1)$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^3=\frac{a^3}{1-r^3}$임을 이용한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$에서 $\frac{a}{1-r}=1$ ······㉠

수열 $\{{a_n}^2\}$의 첫째항은 a^2, 공비는 r^2이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2=\frac{1}{2}$에서 $\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{a^2}{(1-r)(1+r)}=\frac{1}{2}$ ······㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $1\times\frac{a}{1+r}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{a}{1+r}=\frac{1}{2}$ ······㉢

㉠÷㉢을 하면 $\frac{1+r}{1-r}=2$

$1+r=2(1-r),\ 3r=1\qquad\therefore\ r=\frac{1}{3}$

$r=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{a}{1-\frac{1}{3}}=1\qquad\therefore\ a=\frac{2}{3}$

따라서 수열 $\{{a_n}^3\}$은 첫째항이 $a^3=\frac{8}{27}$, 공비가 $r^3=\frac{1}{27}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^3=\frac{\frac{8}{27}}{1-\frac{1}{27}}=\frac{4}{13}$$

답 $\frac{4}{13}$

0193

주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1-x}{2}$인 등비급수이므로

$\frac{1}{1-\frac{1-x}{2}}=6$, $\frac{2}{1+x}=6$

$6(1+x)=2$, $6x=-4$ $\quad\therefore x=-\frac{2}{3}$ 답 $-\frac{2}{3}$

0194

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\cos^2 x<1$이므로

$1+\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^6 x+\cdots=\frac{1}{1-\cos^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}$

이때, $\frac{1}{\sin^2 x}=2$에서 $\sin^2 x=\frac{1}{2}$

$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad\therefore x=\frac{\pi}{4}$

$\therefore \tan x=\tan\frac{\pi}{4}=1$ 답 1

0195

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+(-x)^n}{2^n}=0+2\times\left(\frac{x}{2}\right)^2+0+2\times\left(\frac{x}{2}\right)^4+\cdots$

즉, 주어진 급수는 첫째항이 $2\times\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2}$, 공비가 $\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{4}$인 등비급수이므로

$\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{4}}=6$, $\frac{x^2}{2}=6-\frac{3}{2}x^2$, $2x^2=6$

$x^2=3$ $\quad\therefore x=\sqrt{3}\ (\because x>0)$ 답 $\sqrt{3}$

0196

| 전략 | 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 조건은 $-1<r\le 1$, 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$의 수렴 조건은 $-1<r<1$임을 이용한다.

(i) 등비수열 $\left\{\left(\frac{x-8}{3}\right)^n\right\}$의 공비가 $\frac{x-8}{3}$이므로 수렴하려면

$-1<\frac{x-8}{3}\le 1$, $-3<x-8\le 3$

$\therefore 5<x\le 11$

(ii) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5-x}{3}\right)^n$의 공비가 $\frac{5-x}{3}$이므로 수렴하려면

$-1<\frac{5-x}{3}<1$, $-3<5-x<3$, $-8<-x<-2$

$\therefore 2<x<8$

(i), (ii)에서 $5<x<8$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x는 6, 7이므로 구하는 합은

$6+7=13$ 답 13

Lecture

등비수열 $\{ar^{n-1}\}$의 수렴 조건은 ⇨ $a=0$ 또는 $-1<r\le 1$

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$의 수렴 조건은 ⇨ $a=0$ 또는 $-1<r<1$

이때, $r=1$은 등비수열의 수렴 조건이지만 등비급수의 수렴 조건이 아니다.

0197

(i) $x=0$일 때

$0+0+0+\cdots=0$이므로 수렴한다.

(ii) $x\ne 0$일 때

공비가 $1-\log(x+1)$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$-1<1-\log(x+1)<1$, $-2<-\log(x+1)<0$

$0<\log(x+1)<2$, $1<x+1<100$ $\quad\therefore 0<x<99$

(i), (ii)에서 구하는 실수 x의 값의 범위는 $0\le x<99$ 답 $0\le x<99$

0198

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하므로 $-1<r<1$

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n-1}$의 공비는 r^2이고 $0\le r^2<1$이므로 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n(r\ne 0)$의 공비는 $\frac{1}{r}$이고 $\frac{1}{r}<-1$ 또는 $\frac{1}{r}>1$이므로 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-1}{2}\right)^n$의 공비는 $\frac{r-1}{2}$이고 $-1<\frac{r-1}{2}<0$이므로 수렴한다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}-1\right)^n$의 공비는 $\frac{r}{2}-1$이고 $-\frac{3}{2}<\frac{r}{2}-1<-\frac{1}{2}$이므로 반드시 수렴하는 것은 아니다.

따라서 반드시 수렴하는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

0199

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하므로 $-1<r<1$이고

$\sum_{n=1}^{\infty}r^n=\frac{r}{1-r}=\frac{-(1-r)+1}{1-r}=-1+\frac{1}{1-r}$

이때, $-1<r<1$에서 $0<1-r<2$, $\frac{1}{1-r}>\frac{1}{2}$

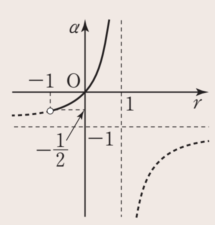
$\therefore -1+\frac{1}{1-r}>-\frac{1}{2}$

따라서 그 합이 될 수 없는 것은 ① -1이다. 답 ①

Lecture

$\sum_{n=1}^{\infty}r^n=-1+\frac{1}{1-r}=a$라 하면

$-1<r<1$에서 $a=-1+\frac{1}{1-r}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$a>-\frac{1}{2}$

$\therefore -1+\frac{1}{1-r}>-\frac{1}{2}$

0200

| 전략 | $2a_{n+1}=a_n-3$을 $a_{n+1}+3=\frac{1}{2}(a_n+3)$으로 변형한다.

$2a_{n+1}=a_n-3$에서 $a_{n+1}+3=\frac{1}{2}(a_n+3)$

수열 $\{a_n+3\}$은 첫째항이 $a_1+3=-5+3=-2$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n+3=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+3)=\sum_{n=1}^{\infty}(-2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{-2}{1-\frac{1}{2}}=-4$$

답 ①

0201

$a_{n+1}=a_n+n+1$의 n에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
&\cancel{a_2}=a_1+1+1\\
&\cancel{a_3}=\cancel{a_2}+2+1\\
&\cancel{a_4}=\cancel{a_3}+3+1\\
&\quad\vdots\\
+)\ &a_n=\cancel{a_{n-1}}+n-1+1\\ \hline
&a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k+(n-1)\\
&\quad=1+\frac{n(n-1)}{2}+n-1\\
&\quad=\frac{n^2-n}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$ … ❶

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2
\end{aligned}$$ … ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ 일반항 a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 합을 구할 수 있다.	50 %

0202

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$이므로 임의의 자연수 n에 대하여 $a_n\ge n$

이때, $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서 $a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$이므로

$$\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\\
&=\frac{1}{a_2}-\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+2}}}_{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

답 ③

0203

| 전략 | $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=\frac{1}{3}$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}
a_n&=S_n-S_{n-1}\\
&=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}\\
&=-\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\
&=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$ ……㉠

이때, $a_1=\frac{1}{3}$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$\therefore a_1+a_3+a_5+\cdots=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{3}{5}$$

답 ①

0204

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_n=n^2$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}
a_n&=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2\\
&=2n-1
\end{aligned}$$ ……㉠

이때, $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-1$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

0205

$\log(S_n+1)=n$에서

$S_n+1=10^n \qquad \therefore S_n=10^n-1$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=9$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=10^n-1-(10^{n-1}-1)$$
$$=9\times 10^{n-1} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때, $a_1=9$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=9\times 10^{n-1}$

$$\therefore \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9}\times\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{81}$$

답 $\frac{10}{81}$

0206

$a_{n+1}=S_n+3 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$a_n=S_{n-1}+3 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠$-$㉡을 하면

$a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}=a_n$

$\therefore a_{n+1}=2a_n\ (n\geq 2)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 제2항부터 공비가 2인 등비수열이다.

한편, $a_1=S_1$이므로 ㉠에서

$a_2=S_1+3=a_1+3=6$

$\therefore a_n=3\times 2^{n-1}\ (n\geq 2) \qquad \cdots\cdots ㉢$

이때, $a_1=3$은 ㉢에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=3\times 2^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0207

|전략| $0.\dot{4}=\frac{4}{9}$, $0.0\dot{5}=\frac{5}{90}$임을 이용한다.

$0.\dot{4}=\frac{4}{9}$, $0.0\dot{5}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$이므로 공비를 r라 하면

$\frac{4}{9}r^3=\frac{1}{18}$, $r^3=\frac{1}{8} \qquad \therefore r=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 등비급수의 합은

$$\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{8}{9}=0.\dot{8}$$

답 ②

0208

공비가 $0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-\frac{1}{3}}=0.\dot{1}\dot{8}$, $\frac{3}{2}a_1=\frac{18}{99}$

$\therefore a_1=\frac{18}{99}\times\frac{2}{3}=\frac{12}{99}=0.\dot{1}\dot{2}$

답 ③

0209

$\frac{4}{33}=\frac{12}{99}=0.\dot{1}\dot{2}=0.121212\cdots$이므로

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=1$, $a_4=2$, $\cdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{2}{2^6}+\cdots$$
$$=2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2^3}+2\times\frac{1}{2^5}+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

0210

a_n은 7^n+1을 5로 나누었을 때의 나머지이므로

$a_1=3$, $a_2=0$, $a_3=4$, $a_4=2$,

$a_5=3$, $a_6=0$, $a_7=4$, $a_8=2$, $\cdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=\frac{3}{10}+\frac{0}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\frac{2}{10^4}+\frac{3}{10^5}+\cdots$$
$$=0.3+0+0.004+0.0002+0.00003+\cdots$$
$$=0.\dot{3}04\dot{2}$$

답 ②

0211

|전략| α, β를 각각 선분의 길이의 합, 차로 나타낸 후 등비급수의 합을 이용한다.

$$\alpha=\overline{OP_1}-\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}-\overline{P_6P_7}+\cdots$$
$$=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^4-\left(\frac{3}{4}\right)^6+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\left(-\frac{9}{16}\right)}=\frac{16}{25}$$

$$\beta=\overline{P_1P_2}-\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}-\overline{P_7P_8}+\cdots$$
$$=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^5-\left(\frac{3}{4}\right)^7+\cdots$$
$$=\frac{\frac{3}{4}}{1-\left(-\frac{9}{16}\right)}=\frac{12}{25}$$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\frac{16}{25}}{\frac{12}{25}}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

0212

점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\overline{P_1P_2}+\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}+\cdots$$
$$=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^5+\cdots=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{6}{5}$$

$$y=\overline{OP_1}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}+\cdots$$
$$=1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots=\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9}{5}$$

2 급수

따라서 점 P_n은 점 $\left(\frac{6}{5}, \frac{9}{5}\right)$에 한없이 가까워진다. 답 $\left(\frac{6}{5}, \frac{9}{5}\right)$

0213

점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\overline{\mathrm{OP}_1}\cos 30^\circ-\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}\cos 30^\circ+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}\cos 30^\circ-\cdots$$

$$=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\cdots$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y=\overline{\mathrm{OP}_1}\sin 30^\circ+\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}\sin 30^\circ+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}\sin 30^\circ+\cdots$$

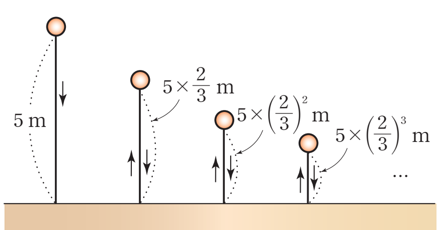
$$=1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

따라서 점 P_n은 점 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$에 한없이 가까워진다. 답 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$

0214

| 전략 | 두 번째부터는 공이 튀어 올랐다가 떨어지므로 공이 움직인 거리는 공의 높이의 두 배를 해야 한다.



위의 그림과 같이 높이가 5 m인 곳에서 수직으로 떨어뜨린 공이 정지할 때까지 움직인 거리는

$$5+2\left\{5\times\frac{2}{3}+5\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+5\times\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=5+2\times\frac{\frac{10}{3}}{1-\frac{2}{3}}=5+20=25\ (\mathrm{m})$$

답 ②

0215

$l_1=30\times\frac{2}{3}+1=21$이고

$l_{n+1}=\frac{2}{3}l_n+1(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$l_{n+1}-3=\frac{2}{3}(l_n-3)$

따라서 수열 $\{l_n-3\}$은 첫째항이 $l_1-3=21-3=18$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$l_n-3=18\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ $\quad\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(l_n-3)=\frac{18}{1-\frac{2}{3}}=54$ 답 54

0216

추가 n번째 움직인 거리를 l_n cm라 하면

$l_1=60$이고 $l_{n+1}=\frac{9}{10}l_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

즉, 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 60, 공비가 $\frac{9}{10}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{60}{1-\frac{9}{10}}=600$$

따라서 추가 정지할 때까지 움직인 거리는 600 cm이다. 답 600 cm

0217

| 전략 | 첫째항이 1, 공비가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$임을 구한 후 등비급수의 합을 이용한다.

$\angle\mathrm{POP}_1=\angle\mathrm{PP}_1\mathrm{P}_2=\angle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3=\cdots=30^\circ$이므로

$\overline{\mathrm{PP}_1}=\overline{\mathrm{OP}}\sin 30^\circ=2\times\frac{1}{2}=1$

$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=\overline{\mathrm{PP}_1}\cos 30^\circ=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}=\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\vdots$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PP}_1}+\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}+\cdots=1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{2-\sqrt{3}}$$

$$=4+2\sqrt{3}$$

답 $4+2\sqrt{3}$

0218

$\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$과 $\triangle\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$은 닮음비가 $2:1$이므로

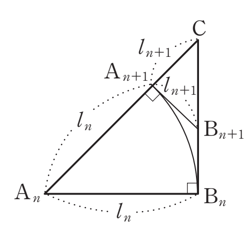
$a_1=2\times\frac{1}{2}=1$이고 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

답 2

0219



오른쪽 그림에서

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=l_n$, $\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}=l_{n+1}$이라 하면

$\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}$, $\triangle\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}$가 직각이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}}=l_{n+1}$이고

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}}:\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\sqrt{2}:1$

$(l_n+l_{n+1}):l_n=\sqrt{2}:1$

$\therefore\ l_{n+1}=(\sqrt{2}-1)l_n$, $l_0=\overline{\mathrm{AB}}=2$

따라서 $l_n=2\times(\sqrt{2}-1)^n(n=0, 1, 2, \cdots)$이므로

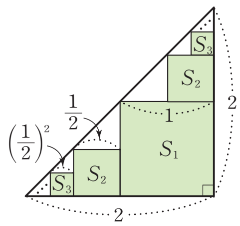
$$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}+\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}l_n=\sum_{n=0}^{\infty}2\times(\sqrt{2}-1)^n$$

$$=\frac{2}{1-(\sqrt{2}-1)}=2+\sqrt{2}$$

답 $2+\sqrt{2}$

0220

| 전략 | $S=S_1+2S_2+2S_3+\cdots$임을 이용한다.



$S_1=1\times1=1$

$S_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$S_3=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$\vdots$

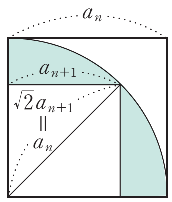
따라서 모든 정사각형의 넓이의 합 S는

$$S=S_1+2S_2+2S_3+\cdots$$
$$=1^2+2\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots\right\}$$
$$=1+2\times\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{5}{3}$$

$\therefore 6S=10$ 답 10

0221

오른쪽 그림과 같이 n번째 정사각형의 한 변의 길이를 a_n이라 하면



$a_1=1$이고 $\sqrt{2}a_{n+1}=a_n$, 즉 $a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}a_n$이므로

$a_n=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

이때, 색칠한 부분의 넓이는

$\frac{\pi}{4}{a_n}^2-\frac{1}{2}{a_n}^2=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right){a_n}^2$

따라서 구하는 넓이의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right){a_n}^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

답 $\frac{\pi}{2}-1$

0222

선분 A_nB_n 위에 빗변이 놓여 있는 직각이등변삼각형의 넓이의 합을 S_n이라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times2\times1=1$

$S_2=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}\times2=\frac{1}{2}$

$S_3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times4=\frac{1}{4}$

$\vdots$

따라서 구하는 넓이의 합은

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$ 답 2

STEP 3 내신 마스터

0223

유형 01 부분분수를 이용하는 급수

| 전략 | $f(x)=a_nx^2+a_nx+5$로 놓고 $f(x)$를 $x-n$으로 나누었을 때의 나머지가 $f(n)$임을 이용한다.

$f(x)=a_nx^2+a_nx+5$로 놓으면 $f(x)$를 $x-n$으로 나누었을 때의 나머지가 15이므로

$f(n)=a_nn^2+a_nn+5=15$, $(n^2+n)a_n=10$

$\therefore a_n=\frac{10}{n(n+1)}$

이때, 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{10}{k(k+1)}=10\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=10\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=10\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}10\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=10$ 답 ①

0224

유형 02 로그를 포함한 급수

| 전략 | 로그의 성질을 이용하여 a_n을 변형하면 $a_n=\log_3\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+2)}$이다.

$a_n=\log_3\frac{n+3}{n+2}-\log_3\frac{n+2}{n+1}=\log_3\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+2)}$

이때, 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_3\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)(k+2)}$$
$$=\log_3\frac{2\times4}{3\times3}+\log_3\frac{3\times5}{4\times4}+\log_3\frac{4\times6}{5\times5}+\cdots+\log_3\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+2)}$$
$$=\log_3\left\{\frac{2\times4}{3\times3}\times\frac{3\times5}{4\times4}\times\frac{4\times6}{5\times5}\times\cdots\times\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+2)}\right\}$$
$$=\log_3\frac{2(n+3)}{3(n+2)}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{2(n+3)}{3(n+2)}$$
$$=\log_3\frac{2}{3}=\log_3 2-1$$

답 ①

다른 풀이 $a_n=\log_3\frac{n+3}{n+2}-\log_3\frac{n+2}{n+1}$에서 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\log_3\frac{k+3}{k+2}-\log_3\frac{k+2}{k+1}\right)$$
$$=\left(\log_3\frac{4}{3}-\log_3\frac{3}{2}\right)+\left(\log_3\frac{5}{4}-\log_3\frac{4}{3}\right)+\cdots+\left(\log_3\frac{n+3}{n+2}-\log_3\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=-\log_3\frac{3}{2}+\log_3\frac{n+3}{n+2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\log_3\frac{3}{2}+\log_3\frac{n+3}{n+2}\right)$$
$$=-\log_3\frac{3}{2}+\log_3 1=\log_3 2-1$$

0225

유형 **04** 급수와 수열의 극한값 사이의 관계

| 전략 | $a_n-\frac{2n}{n+1}=c_n$, $a_n+2b_n=d_n$으로 놓고 $\lim_{n\to\infty} c_n=0$, $\lim_{n\to\infty} d_n=0$임을 이용한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2n}{n+1}\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2n}{n+1}\right)=0$

이때, $a_n-\frac{2n}{n+1}=c_n$으로 놓으면

$a_n=c_n+\frac{2n}{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} c_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(c_n+\frac{2n}{n+1}\right)=0+2=2$

또, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=0$

이때, $a_n+2b_n=d_n$으로 놓으면

$b_n=-\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}d_n$, $\lim_{n\to\infty} d_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}d_n\right)=-\frac{1}{2}\times2+0=-1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3}{b_n+2}=\frac{2+3}{-1+2}=5$

답 ⑤

0226

유형 **05** 급수의 성질

| 전략 | $2a_n-5$와 $2b_n+5$의 합에서 상수항이 소거됨을 이용한다.

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-5)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(2b_n+5)$가 모두 수렴하므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-5)+\sum_{n=1}^{\infty}(2b_n+5)&=\sum_{n=1}^{\infty}\{(2a_n-5)+(2b_n+5)\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+2b_n)=2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)\\&=380\end{aligned}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=190$

답 ④

0227

유형 **07** 합이 주어진 등비급수

| 전략 | 등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 r이면 수열 $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$의 공비는 r^3이다.

첫째항이 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=6$에서 $\frac{2}{1-r}=6$ $\quad\therefore r=\frac{2}{3}$

수열 $\{a_{3n-1}\}$은 첫째항이 $a_2=2r=\frac{4}{3}$, 공비가 $r^3=\frac{8}{27}$인 등비수열이고, 수열 $\{a_{3n}\}$은 첫째항이 $a_3=2r^2=\frac{8}{9}$, 공비가 $r^3=\frac{8}{27}$인 등비수열이다.

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-1}-a_{3n})&=\sum_{n=1}^{\infty}a_{3n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}a_{3n}\\&=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{8}{27}}-\frac{\frac{8}{9}}{1-\frac{8}{27}}=\frac{12}{19}\end{aligned}$$

답 ②

0228

유형 **09** 귀납적으로 정의된 수열의 급수

| 전략 | 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여 $b_1, b_2, b_3, b_4, \cdots$를 차례로 구한다.

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$

a_n을 3으로 나누었을 때의 나머지가 b_n이므로

$\{a_n\}$: 1, 2, 4, 8, 16, 32, $\cdots$

$\{b_n\}$: 1, 2, 1, 2, 1, 2, $\cdots$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 1, 2가 이 순서대로 반복되는 수열이다.

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{5}\right)^n&=\frac{1}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\left(\frac{2}{5}\right)^4+\cdots\\&=\left\{\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\left(\frac{1}{5}\right)^5+\cdots\right\}\\&\quad+\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^4+\left(\frac{2}{5}\right)^6+\cdots\right\}\\&=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}+\frac{\frac{4}{25}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{24}+\frac{1}{6}=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

따라서 $S=\frac{3}{8}$이므로 $16S=16\times\frac{3}{8}=6$

답 ③

0229

유형 **09** 귀납적으로 정의된 수열의 급수

+ **10** S_n과 a_n 사이의 관계를 이용하는 급수

| 전략 | $S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n+1$을 $S_{n+1}-2=\frac{1}{2}(S_n-2)$로 변형한다.

$S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n+1$에서 $S_{n+1}-2=\frac{1}{2}(S_n-2)$

수열 $\{S_n-2\}$는 첫째항이 $S_1-2=10-2=8$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$S_n-2=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\qquad\therefore S_n=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2$

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2-\left\{8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+2\right\}\\&=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\\&=-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\ (n\ge2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore a_2+a_4+a_6+\cdots&=-4+\left\{-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}+\left\{-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}+\cdots\\&=\frac{-4}{1-\frac{1}{4}}=-\frac{16}{3}\end{aligned}$$

답 ①

0230

유형 **11** 순환소수와 등비급수

| 전략 | $\frac{123}{999}=0.\dot{1}2\dot{3}$임을 이용한다.

$\frac{123}{999}=0.\dot{1}2\dot{3}=0.123123123\cdots$이므로

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=1$, $a_5=2$, $a_6=3$, $\cdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{2}{3^5}+\frac{3}{3^6}+\cdots$$
$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right)+2\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^5}+\cdots\right)+3\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^6}+\cdots\right)$$
$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{27}}+2\times\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{27}}+3\times\frac{\frac{1}{27}}{1-\frac{1}{27}}$$
$$=\frac{9}{26}+\frac{6}{26}+\frac{3}{26}=\frac{9}{13}$$

답 ⑤

0231

유형 14 도형과 등비급수 – 길이

|전략| $\triangle OB_nA_n$은 직각삼각형임을 이용한다.

$\overline{OA_n}=\frac{1}{4^{n-1}}$이고 $\overline{A_nB_n}$은 점 $A_n\left(\frac{1}{4^{n-1}}, 0\right)$과 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리이므로

$$\overline{A_nB_n}=\frac{\left|3\times\frac{1}{4^{n-1}}\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{5}\times\frac{1}{4^{n-1}}$$

$\triangle OB_nA_n$은 직각삼각형이므로

$$L_n=\overline{OB_n}=\sqrt{\overline{OA_n}^2-\overline{A_nB_n}^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{1}{4^{n-1}}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{4^{n-1}}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{25}\times\left(\frac{1}{4^{n-1}}\right)^2}$$
$$=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4^{n-1}}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} L_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{5}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{15}$$

답 ④

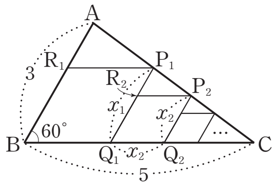
0232

유형 14 도형과 등비급수 – 길이

|전략| 삼각형의 닮음을 이용하여 l_n과 l_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

오른쪽 그림에서

$\overline{P_nQ_n}=x_n(n=1, 2, 3, \cdots)$이라 하면 $\triangle P_nR_{n+1}P_{n+1}$과 $\triangle ABC$가 서로 닮음이므로



$3:5=(x_n-x_{n+1}):x_{n+1}$

$5(x_n-x_{n+1})=3x_{n+1}$

$\therefore x_{n+1}=\frac{5}{8}x_n \qquad \therefore l_{n+1}=\frac{5}{8}l_n$

또, $\triangle AR_1P_1$과 $\triangle ABC$는 서로 닮음이므로

$(3-x_1):x_1=3:5$, $x_1=\frac{15}{8} \qquad \therefore l_1=4x_1=\frac{15}{2}$

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $\frac{15}{2}$, 공비가 $\frac{5}{8}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n=\frac{\frac{15}{2}}{1-\frac{5}{8}}=20$$

답 ②

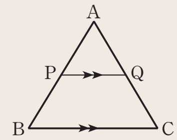
Lecture

오른쪽 그림에서 $\overline{PQ}/\!/\overline{BC}$이면 $\triangle APQ$와 $\triangle ABC$는 서로 닮음이다.

(1) $\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{AQ}:\overline{AC}=\overline{PQ}:\overline{BC}$

(2) $\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{AQ}:\overline{QC}$

(3) $\overline{AB}:\overline{BP}=\overline{AC}:\overline{CQ}$



0233

유형 08 등비급수의 수렴 조건

|전략| 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$의 수렴 조건은 $a=0$ 또는 $-1<r\le1$이고, 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$의 수렴 조건은 $-1<r<1$임을 이용한다.

(i) 등비수열 $\{(x-2)(3x-2)^{n-1}\}$의 첫째항은 $x-2$, 공비는 $3x-2$이므로 수렴하려면 $x-2=0$ 또는 $-1<3x-2\le1$

$x-2=0$에서 $x=2$ …… ㉠

$-1<3x-2\le1$에서 $1<3x\le3$

$\therefore \frac{1}{3}<x\le1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x=2$ 또는 $\frac{1}{3}<x\le1$ … ❶

(ii) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(x^2-x+1)^n$의 공비가 x^2-x+1이므로 수렴하려면 $-1<x^2-x+1<1$

$x^2-x+1>-1$에서 $x^2-x+2>0$

이때, $x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 성립한다. …… ㉢

$x^2-x+1<1$에서 $x^2-x<0$, $x(x-1)<0$

$\therefore 0<x<1$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $0<x<1$ … ❷

(i), (ii)에서 $\frac{1}{3}<x<1$ … ❸

답 $\frac{1}{3}<x<1$

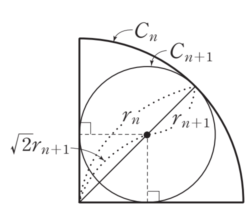
채점 기준	배점
❶ 등비수열이 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점
❷ 등비급수가 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	4점
❸ ❶, ❷의 공통 범위를 구할 수 있다.	1점

0234

유형 15 도형과 등비급수 – 넓이

|전략| r_n과 r_{n+1} 사이의 관계식을 구한 후 수열 $\{S_n\}$의 첫째항과 공비를 구한다.

(1) 원 C의 반지름의 길이가 $2(\sqrt{2}+1)$이므로



$\sqrt{2}r_1+r_1=2(\sqrt{2}+1)$에서

$(\sqrt{2}+1)r_1=2(\sqrt{2}+1) \qquad \therefore r_1=2$

오른쪽 그림에서

$\sqrt{2}r_{n+1}+r_{n+1}=r_n$, $(\sqrt{2}+1)r_{n+1}=r_n$

$$\therefore r_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}r_n=(\sqrt{2}-1)r_n$$

(2) 수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 $\sqrt{2}-1$인 등비수열이므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 4π, 공비가 $(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$인 등비수열이다.

$S_{n+1}=\pi r_{n+1}{}^2=\pi\{(\sqrt{2}-1)r_n\}^2$
$=\pi r_n{}^2(\sqrt{2}-1)^2=(\sqrt{2}-1)^2S_n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{4\pi}{1-(3-2\sqrt{2})}=(2+2\sqrt{2})\pi$$

(3) $(2+2\sqrt{2})\pi=(p+q\sqrt{2})\pi$에서

$p=2,\ q=2 \qquad \therefore p^2+q^2=8$

답 (1) $r_{n+1}=(\sqrt{2}-1)r_n$ (2) $(2+2\sqrt{2})\pi$ (3) 8

채점 기준	배점
(1) r_n과 r_{n+1} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	5점
(2) $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 합을 구할 수 있다.	5점
(3) p^2+q^2의 값을 구할 수 있다.	2점

Lecture

(1) 처음의 길이 또는 넓이 a가 일정한 비 r로 축소되는 등비급수는 a와 r를 구하여 $S=\frac{a}{1-r}$에 대입한다.

(2) 처음의 길이 또는 넓이 a가 일정한 비 r_1로 축소되고 동시에 그 개수가 일정한 비 r_2로 확대되는 등비급수는 a와 r_1, r_2를 구하여 $S=\frac{a}{1-r_1r_2}$에 대입한다.

창의·융합 교과서 속 심화문제

0235

|전략| $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$임을 이용한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2n}{3n-1}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2n}{3n-1}\right)=0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left\{\left(30a_n+\frac{k}{2}\right)\pi\right\}=\sin\left\{\left(30\lim_{n\to\infty}a_n+\frac{k}{2}\right)\pi\right\}$$
$$=\sin\left(20+\frac{k}{2}\right)\pi=\sin\frac{k\pi}{2}$$

(i) $\sin\frac{k\pi}{2}=0$을 만족시키는 두 자리 자연수 k는

10, 12, 14, ⋯, 98로 45개

(ii) $\sin\frac{k\pi}{2}=1$을 만족시키는 두 자리 자연수 k는

13, 17, 21, ⋯, 97로 22개

따라서 조건을 만족시키는 모든 두 자리 자연수 k의 값의 합은

$(10+12+14+\cdots+98)+(13+17+21+\cdots+97)$

$=\frac{108\times45}{2}+\frac{110\times22}{2}$

$=2430+1210=3640$

답 3640

0236

|전략| 주어진 곡선을 x축의 방향으로 b_n만큼 평행이동시켜 점 $(-n, 3)$을 지나는 곡선의 방정식을 구한다.

곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$을 x축의 방향으로 b_n만큼 평행이동시키면

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-b_n}$$

이 곡선이 점 $(-n, 3)$을 지나므로

$2^{b_n+n}=3,\ b_n+n=\log_2 3 \qquad \therefore b_n=-n+\log_2 3$

$$\therefore y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+n-\log_2 3}=2^{-x-n+\log_2 3}=3\times2^{-x-n}$$

이때, 이 곡선의 y절편이 a_n이므로 $a_n=3\times2^{-n}$

$$\therefore \frac{p}{9}\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{p}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{p}{3}\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{p}{3}$$

$\frac{p}{3}$는 자연수가 되어야 하므로 p는 3의 배수이다.

따라서 $\frac{p}{3}\le20$을 만족시키는 p의 값은 3, 6, 9, ⋯, 60이므로 모든 자연수 p의 값의 합은

$$\sum_{k=1}^{20}3k=3\times\frac{20\times21}{2}=630$$

답 630

0237

|전략| S_{2n-1}과 S_{2n}을 각각 구한 후 이를 이용하여 a_{2n-1}과 a_{2n}을 구한다.

$S_1=a_1=4$

$S_nS_{n+1}=2^n$에서 $S_{n+1}=\frac{2^n}{S_n}$이므로

$S_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ S_3=2\times2^2=2^3,\ S_4=\frac{2^3}{2^3}=1,\ S_5=2^4,\ S_6=\frac{2^5}{2^4}=2,\ \cdots$

이상을 정리하면 다음과 같다.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	⋯
2^2	$\frac{1}{2}$	2^3	1	2^4	2	⋯

즉, $S_{2n-1}=2^{n+1}$, $S_{2n}=2^{n-2}$이므로

$a_{2n-1}=S_{2n-1}-S_{2n-2}=2^{n+1}-2^{n-3}=15\times2^{n-3}\ (n\ge2)$

$a_{2n}=S_{2n}-S_{2n-1}=2^{n-2}-2^{n+1}=-7\times2^{n-2}$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-7\times2^{n-2}}{15\times2^{n-3}}=-\frac{14}{15}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{S_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}}{2^{n+1}}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{15a_{2n}}{a_{2n-1}}+\frac{8S_{2n}}{S_{2n-1}}\right)=15\times\left(-\frac{14}{15}\right)+8\times\frac{1}{8}$$
$$=-14+1=-13$$

답 -13

0238

|전략| 공이 처음 떨어지고 난 후부터는 공이 튀어 올랐다가 떨어지므로 공이 움직인 거리는 공의 높이의 두 배를 해야 한다.

$$a_n=10+2\left\{10\times\frac{3}{5}+10\times\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cdots+10\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=10+2\times\frac{6\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{3}{5}}=10+30\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\} \quad\cdots\cdots ㉠$$

$$b_n=x+2\left\{\frac{2}{5}x+\left(\frac{2}{5}\right)^2x+\cdots+\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}x\right\}$$

$$=x+2\times\frac{\frac{2}{5}x\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{5}}=x+\frac{4}{3}x\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\} \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10+30\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}}{x+\frac{4}{3}x\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}}$$

$$=\frac{40}{\frac{7}{3}x}=\frac{120}{7x}$$

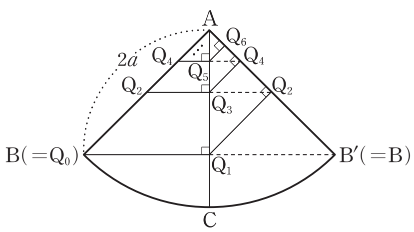
이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$이므로

$\frac{120}{7x}=1$ $\quad\therefore x=\frac{120}{7}$ 답 $\frac{120}{7}$

0239

|전략| 원뿔의 전개도를 그려서 $\{l_n\}$이 어떤 수열이 되는지 파악한다.

직원뿔의 옆면의 전개도는 다음 그림과 같다.



호 BCB′의 길이는 반지름의 길이가 $\frac{a}{2}$인 원의 둘레의 길이와 같으므로 $a\pi$이고, 반지름의 길이가 $\overline{AB}=2a$인 원의 둘레의 길이는 $4a\pi$이므로

$\angle BAB'=90^\circ$

즉, $\angle BAC=45^\circ$이므로

$l_1=\sqrt{2}a,\ l_2=a,\ l_3=\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ l_4=\frac{1}{2}a,\ \cdots$

수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $\sqrt{2}a$, 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 등비수열이므로

$$l_n=\sqrt{2}a\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\sqrt{2}a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=2a(1+\sqrt{2})$$

$2a(1+\sqrt{2})\le 100$에서 $a\le 50(\sqrt{2}-1)=20.710\cdots$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a의 최댓값은 20이다. 답 20

본책 44~57쪽

3 | 지수함수와 로그함수의 미분

STEP 1 개념 마스터

0240

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4^x}{3^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^x=0$$

답 0

0241

$$\lim_{x\to\infty}(3^x-4^x)=\lim_{x\to\infty}4^x\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^x-1\right\}$$

이때, $\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^x-1\right\}=-1$이므로

$$\lim_{x\to\infty}4^x\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^x-1\right\}=-\infty$$

답 $-\infty$

0242

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x+5^{-x}}{5^x-5^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5^{2x}+1}{5^{2x}-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{25^x+1}{25^x-1}$$

이때, $\lim_{x\to-\infty}25^x=0$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{25^x+1}{25^x-1}=-1$$

답 -1

0243

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+4^x}{3^x+5^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x}{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1}$$

이때, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^x=0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x}{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1}=0$$

답 0

0244

$$\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x+3\right\}=1+3=4$$

답 4

0245

$$\lim_{x\to2}\frac{4^x}{3^{x-1}-2^x}=\frac{4^2}{3-2^2}=-16$$

답 -16

0246

$$\lim_{x\to\infty}\log\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}(-\log x)=-\infty$$

답 $-\infty$

0247

$$\lim_{x\to0+}\log_{\frac{1}{5}}x=\infty$$

답 ∞

0248

$x-1=t$로 놓으면 $x \to 1+$일 때 $t \to 0+$이므로

$\lim_{x\to 1+} \log_3 (x-1) = \lim_{t\to 0+} \log_3 t = -\infty$ 　답 $-\infty$

0249

$\lim_{x\to 27} \log_3 x = \log_3 27 = 3$ 　답 3

0250

$\lim_{x\to\infty} \{\log_2 (4x+1) - \log_2 x\}$

$= \lim_{x\to\infty} \log_2 \frac{4x+1}{x} = \lim_{x\to\infty} \log_2 \left(4+\frac{1}{x}\right)$

$= \log_2 4 = 2$ 　답 2

0251

$\lim_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\}^3 = e^3$ 　답 e^3

0252

$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$ 　답 $e^{\frac{1}{2}}$

0253

$\ln x = 3$에서 $x = e^3$ 　답 e^3

0254

$\ln x = -1$에서 $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ 　답 $\frac{1}{e}$

0255

$e^x = 5$에서 $x = \ln 5$ 　답 $\ln 5$

0256

$e^{2x} = \frac{1}{4}$에서 $2x = \ln \frac{1}{4}$

$2x = -2\ln 2$ 　$\therefore x = -\ln 2$ 　답 $-\ln 2$

0257

$\ln e^2 = 2\ln e = 2$ 　답 2

0258

$\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$ 　답 $\frac{1}{2}$

0259

$\ln e^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \ln e = \sqrt{3}$ 　답 $\sqrt{3}$

0260

$\frac{1}{\log_5 e} + \frac{1}{\log_2 e} = \ln 5 + \ln 2 = \ln 10$ 　답 $\ln 10$

0261

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 　답 $\frac{1}{2}$

0262

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)^3}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\ln(1+x)}{x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

$= 3 \times 1 = 3$ 　답 3

0263

$\lim_{x\to 0} \frac{\log_2(1+3x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log_2(1+3x)}{3x} \times 3$

$= \frac{1}{\ln 2} \times 3 = \frac{3}{\ln 2}$ 　답 $\frac{3}{\ln 2}$

0264

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} \times 2 = 1 \times 2 = 2$ 　답 2

0265

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{-x} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

$= 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ 　답 $-\frac{1}{2}$

0266

$\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x} \times \frac{1}{4}$

$= \ln 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \ln 2$ 　답 $\frac{1}{4}\ln 2$

0267

$y = e^{x+1} = e \times e^x$이므로

$y' = e \times (e^x)' = e \times e^x = e^{x+1}$ 　답 $y' = e^{x+1}$

0268

$y' = e^x + (x-1)e^x = xe^x$ 　답 $y' = xe^x$

0269

$y' = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (x+3)$ 　답 $y' = x^2 e^x (x+3)$

0270 답 $y' = 2 \times 3^x \ln 3$

0271

$y = 5^{2x-1} = \frac{1}{5} \times 25^x$이므로

$y' = \frac{1}{5} \times (25^x)' = \frac{1}{5} \times 25^x \ln 25 = 2 \times 5^{2x-1} \ln 5$

답 $y' = 2 \times 5^{2x-1} \ln 5$

0272

$y' = 3^x + x \times 3^x \ln 3 = 3^x (1 + x\ln 3)$ 　답 $y' = 3^x(1+x\ln 3)$

0273

$y=\ln 2x=\ln 2+\ln x$이므로

$y'=\dfrac{1}{x}$ 답 $y'=\dfrac{1}{x}$

0274

$y=\ln x^3=3\ln x$이므로

$y'=\dfrac{3}{x}$ 답 $y'=\dfrac{3}{x}$

0275

$y=3x\ln 2x=3x(\ln 2+\ln x)$이므로

$y'=3(\ln 2+\ln x)+3x\times\dfrac{1}{x}=3\ln 2x+3$ 답 $y'=3\ln 2x+3$

0276

$y=(\ln x)^2=(\ln x)(\ln x)$이므로

$y'=\dfrac{1}{x}\times\ln x+\ln x\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\ln x}{x}$ 답 $y'=\dfrac{2\ln x}{x}$

0277 답 $y'=2x+\dfrac{1}{x\ln 5}$

0278

$y=\log_2 3x=\log_2 3+\log_2 x$이므로

$y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$ 답 $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$

0279

$y'=\log_2 x+x\times\dfrac{1}{x\ln 2}=\log_2 x+\dfrac{1}{\ln 2}$ 답 $y'=\log_2 x+\dfrac{1}{\ln 2}$

0280

$y=x\log_5 3x=x(\log_5 3+\log_5 x)$이므로

$y'=(\log_5 3+\log_5 x)+x\times\dfrac{1}{x\ln 5}=\log_5 3x+\dfrac{1}{\ln 5}$

답 $y'=\log_5 3x+\dfrac{1}{\ln 5}$

STEP 2 유형 마스터

0281

| 전략 | $0<a<1$이면 $\lim\limits_{x\to\infty} a^x=0$임을 이용한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(4^x+3^x)^{\frac{1}{x}}&=\lim_{x\to\infty}\left[4^x\left\{1+\left(\frac{3}{4}\right)^x\right\}\right]^{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to\infty}(4^x)^{\frac{1}{x}}\left\{1+\left(\frac{3}{4}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to\infty}(4^x)^{\frac{1}{x}}\times\lim_{x\to\infty}\left\{1+\left(\frac{3}{4}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}\\&=4\times1=4\end{aligned}$$

답 ④

0282

$-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-x^3+1}{1-2x^3}&=\lim_{t\to\infty}\frac{3^{-t}+t^3+1}{1+2t^3}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{3^{-t}}{1+2t^3}+\lim_{t\to\infty}\frac{t^3+1}{1+2t^3}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{3^t(1+2t^3)}+\lim_{t\to\infty}\frac{1+\frac{1}{t^3}}{\frac{1}{t^3}+2}\\&=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로 $2a+b=4$ 답 ①

0283

ㄱ. $\lim\limits_{x\to-\infty}5^x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}5^{-x}=\infty$이므로 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5^x}{5^x-5^{-x}}=0$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{x}=\infty$이므로 $\lim\limits_{x\to0+}2^{\frac{1}{x}}=\infty$, $\lim\limits_{x\to0+}2^{-\frac{1}{x}}=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}-2^{-\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{1-2^{-\frac{2}{x}}}=1$

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{1}{x}=-\infty$이므로 $\lim\limits_{x\to0-}2^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to0-}2^{-\frac{1}{x}}=\infty$

$\therefore \lim\limits_{x\to0-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}-2^{-\frac{1}{x}}}=0$

즉, $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}-2^{-\frac{1}{x}}}\neq\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}-2^{-\frac{1}{x}}}$

따라서 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}-2^{-\frac{1}{x}}}$의 극한값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7^x}{\sqrt{5^x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{7}{\sqrt{5}}\right)^x=0$

ㄹ. $\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to0-$이므로

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-3^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{t\to0-}\dfrac{1}{1-3^t}=\infty$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

Lecture

함수의 극한값의 존재

함수 $f(x)$에서 좌극한 $\lim\limits_{x\to a-}f(x)$와 우극한 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$가 모두 존재하고 그 값이 서로 같으면 극한값 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$가 존재한다. 또, 그 역도 성립한다.

⇨ $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}f(x)=L \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a}f(x)=L$

0284

| 전략 | 로그의 성질을 이용하여

$\log_2|x^2+4x-12|-\log_2|x-2|=\log_2\left|\dfrac{x^2+4x-12}{x-2}\right|$로 변형한 후 값을 구한다.

$$\lim_{x\to2}(\log_2|x^2+4x-12|-\log_2|x-2|)$$
$$=\lim_{x\to2}\log_2\left|\frac{x^2+4x-12}{x-2}\right|=\lim_{x\to2}\log_2\left|\frac{(x+6)(x-2)}{x-2}\right|$$
$$=\lim_{x\to2}\log_2|x+6|=\log_2 8=3$$

답 ③

0285

$$\lim_{x\to\infty}(\log_7\sqrt{7x^2+x}-\log_7 x)=\lim_{x\to\infty}\log_7\frac{\sqrt{7x^2+x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log_7\sqrt{7+\frac{1}{x}}$$
$$=\log_7\sqrt{7}=\frac{1}{2}$$

답 ④

0286

$$\lim_{x\to\infty}\{\log_2(ax+1)-\log_2(x+1)\}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{ax+1}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{a+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\log_2 a$$

이때, $\log_2 a=4$에서 $a=2^4=16$

답 16

0287

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log_5(10^x+25^x)=\lim_{x\to\infty}\log_5\left[25^x\left\{\left(\frac{10}{25}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log_5(25^x)^{\frac{1}{x}}\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}$$
$$=\log_5\left[\lim_{x\to\infty}25\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}\right]$$
$$=\log_5(25\times1)=2$$

답 ③

0288

|전략| $\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{ax}}=e$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to0}(1-4x)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to0}[\{1+(-4x)\}^{-\frac{1}{4x}}]^{-2}$$
$$=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

답 ①

다른 풀이 $-x=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}(1-4x)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{t\to0}(1+4t)^{-\frac{1}{2t}}$$
$$=\lim_{t\to0}\{(1+4t)^{\frac{1}{4t}}\}^{-2}$$
$$=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

0289

$$\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to0}(1-5x)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^2+\lim_{x\to0}\{(1-5x)^{-\frac{1}{5x}}\}^{-5}$$
$$=e^2+e^{-5}=e^2+\frac{1}{e^5}$$

답 ②

0290

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}$$
$$=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1}$$
$$=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

답 ④

0291

|전략| $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{ax}=e$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right\}^{2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{x+1}{x}\times\frac{x+2}{x+1}\times\frac{x+3}{x+2}\times\cdots\times\frac{2x+1}{2x}\right)^{2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}$$
$$=e$$

답 ③

0292

ㄱ. $\lim_{x\to0}\left(\frac{3+x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}=e$

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=e$

ㄷ. $x-2=t$로 놓으면 $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{t\to0}\left(\frac{2+t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0}\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{2}{t}}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

ㄹ. $x+2=t$로 놓으면 $x\to-2$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-2}(x+3)^{\frac{1}{x+2}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

따라서 극한값이 e인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

0293

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{a}{x}}{1+\frac{a}{x}}\right)^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{a}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{a}{x}\right)^x}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}}\right\}^{-a}}{\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^{a}}$$
$$=\frac{e^{-a}}{e^a}=e^{-2a}$$

즉, $e^{-2a}=e^{10}$이므로

$-2a=10$ $\therefore a=-5$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right\}^{-1}}$$

$$=\frac{e}{e^{-1}}=e^2$$

$\therefore b=e^2$

$\therefore ab=-5e^2$

답 ①

0294

|전략| $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}=1$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{4x}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{-x}$$

$$=-\frac{1}{4}\times 1=-\frac{1}{4}$$

답 ②

0295

$y=e^{3x}-1$로 놓고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$e^{3x}=y+1,\ 3x=\ln(y+1)\qquad\therefore x=\frac{1}{3}\ln(1+y)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{3}\ln(1+x)$

$\therefore g(x)=\frac{1}{3}\ln(1+x)$ ··· ❶

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$ ··· ❷

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $g(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0296

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\{\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\ln(1+3x)+\ln(1+4x)\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times 2+\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times 3+\frac{\ln(1+4x)}{4x}\times 4\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}+2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}+3\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}+4\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}$$

$$=1+2\times 1+3\times 1+4\times 1=10$$

답 10

0297

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{(3+2x)(3+5x)}{9+3x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{\left(1+\frac{2}{3}x\right)\left(1+\frac{5}{3}x\right)}{1+\frac{1}{3}x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{\ln\left(1+\frac{2}{3}x\right)+\ln\left(1+\frac{5}{3}x\right)-\ln\left(1+\frac{1}{3}x\right)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln\left(1+\frac{2}{3}x\right)}{\frac{2}{3}x}\times\frac{2}{3}+\frac{\ln\left(1+\frac{5}{3}x\right)}{\frac{5}{3}x}\times\frac{5}{3}-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{3}x\right)}{\frac{1}{3}x}\times\frac{1}{3}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{3}x\right)}{\frac{2}{3}x}+\frac{5}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{5}{3}x\right)}{\frac{5}{3}x}-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{3}x\right)}{\frac{1}{3}x}$$

$$=\frac{2}{3}\times 1+\frac{5}{3}\times 1-\frac{1}{3}\times 1=2$$

답 ⑤

0298

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x^2+5x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+ax)}{ax}\times\frac{a}{x+5}\right\}$$

$$=1\times\frac{a}{5}=\frac{a}{5}$$

이때, $\frac{a}{5}=10$이므로 $a=50$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+10x)}{ax}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+10x)}{50x}$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+10x)}{10x}=\frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

0299

$$\lim_{x\to\infty}x\{\ln(5x+1)-\ln 5x\}=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{5x+1}{5x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{5x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{5x}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left\{\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5x}\right\}^{\frac{1}{5}}$$

$$=\ln e^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}$$

답 ③

0300

$\left(1+\frac{3}{n}\right)^{f(n)}=\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n\times\frac{f(n)}{n}}=e$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\frac{f(n)}{n}\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=1$$

$$\therefore \frac{f(n)}{n}=\frac{1}{\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}\times 3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}}=\frac{1}{3\times 1}=\frac{1}{3}$$

답 ②

0301

|전략| $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}=1$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{2x}{\ln(1+2x)}\times\frac{3}{2}$$

$$=1\times 1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

답 ④

0302

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+10x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{x}+10\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times 2+10\right)$$

$$=1\times 2+10=12$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{e^{4x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{e^{4x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{e^{4x}-1}\times\frac{x+2}{4}$$

$$=1\times\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+10x-1}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{e^{4x}-1}=12\times\frac{1}{2}=6$$

답 6

0303

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)(1+3x)}{e^{5x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)+\ln(1+3x)}{e^{5x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+2x)}{x}+\frac{\ln(1+3x)}{x}\right\}\times\frac{x}{e^{5x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times 2+\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times 3\right\}\times\frac{5x}{e^{5x}-1}\times\frac{1}{5}$$

$$=(1\times 2+1\times 3)\times 1\times\frac{1}{5}=1$$

답 1

0304

$x-1=t$로 놓으면 $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-e^{x-1}}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^3-e^t}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^3+3t^2+3t+1-e^t}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(t^2+3t+3-\frac{e^t-1}{t}\right)$$

$$=3-1=2$$

답 2

0305

|전략| $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+bx)}{bx}=\frac{1}{\ln a}$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(x+5)-\log_2 5}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\log_2\frac{x+5}{5}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log_2\left(1+\frac{1}{5}x\right)}{\frac{1}{5}x}\times\frac{1}{5}$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5\ln 2}$$

답 $\frac{1}{5\ln 2}$

0306

$x+1=t$로 놓으면 $x\to -1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{\log_2(x+2)}{x+1}=\lim_{t\to 0}\frac{\log_2(1+t)}{t}=\frac{1}{\ln 2}$$

답 ①

0307

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_7(1-6x)}{\log_3(1+2x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\log_7(1-6x)}{-6x}\times\frac{2x}{\log_3(1+2x)}\times\left(-\frac{6}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\ln 7}\times\ln 3\times(-3)$$

$$=-\frac{3\ln 3}{\ln 7}=-3\log_7 3$$

답 $-3\log_7 3$

0308

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_5(1+4x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log_5(1+4x)}{4x}\times 4$$

$$=\frac{4}{\ln 5}$$

이때, $\frac{4}{\ln 5}=\frac{4}{\ln a}$이므로 $a=5$

답 ③

0309

|전략| $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to0}\frac{4^x-3^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{4^x-1-(3^x-1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{4^x-1}{x}-\frac{3^x-1}{x}\right)$$
$$=\ln 4-\ln 3=\ln\frac{4}{3}$$

따라서 $a=3$, $b=4$이므로 $a-b=-1$ 답 ④

0310

$x+1=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{3^{x+1}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{3^{x+1}-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{t\to0}\frac{3^t-1}{t(t-2)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{3^t-1}{t}\times\frac{1}{t-2}=\ln 3\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\ln 3=-\ln\sqrt{3}$$

답 ②

0311

$$\lim_{x\to0}\frac{2^{x+1}-2}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{2^{x+1}-2}{x}\times\frac{x}{e^x-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}\times\frac{x}{e^x-1}\times2$$
$$=\ln 2\times1\times2=2\ln 2$$

따라서 $a\ln a=2\ln 2$이므로 $a=2$ 답 2

0312

|전략| $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$임을 이용한다.

$x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}(e^{x-1}-b)=0$이므로

$e^{-1}-b=0\qquad\therefore b=e^{-1}$

$b=e^{-1}$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x-1}-e^{-1}}{ax}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-1}(e^x-1)}{ax}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{e^{-1}}{a}$$
$$=1\times\frac{1}{ae}=\frac{1}{ae}$$

$\dfrac{1}{ae}=3e^2$에서 $\dfrac{1}{a}=3e^3$

$\therefore\dfrac{b}{a}=e^{-1}\times3e^3=3e^2$ 답 ⑤

0313

$x\to0$일 때 (분자) $\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}\{\log_5(1+x)+a\}=0$이므로 $a=0$

$a=0$을 주어진 식에 대입하면

$$b=\lim_{x\to0}\frac{x^2+3x}{\log_5(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+3)}{\log_5(1+x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\log_5(1+x)}\times(x+3)$$
$$=\ln 5\times3=3\ln 5$$

$\therefore b-a=3\ln 5-0=3\ln 5$ 답 $3\ln 5$

0314

$x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}(a^x+b)=0$이므로

$1+b=0\qquad\therefore b=-1$

$b=-1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}\times\frac{x}{\ln(x+1)}$$
$$=\ln a\times1=\ln a$$

$\ln a=\ln 3$에서 $a=3$

$\therefore a-b=3-(-1)=4$ 답 ③

0315

$x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}\ln(a-2x)=0$이므로

$\ln a=0\qquad\therefore a=1$ ··· ❶

$a=1$을 주어진 식에 대입하면

$$b=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-2x)}{e^{-3x}-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-2x)}{-2x}\times\frac{-3x}{e^{-3x}-1}\times\frac{2}{3}$$
$$=1\times1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$ ··· ❷

$\therefore a+b=1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}$ ··· ❸

답 $\dfrac{5}{3}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0316

|전략| $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}=1$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to0}f(x)\ln(1+2x)=\lim_{x\to0}2xf(x)\times\frac{\ln(1+2x)}{2x}$$
$$=2\lim_{x\to0}xf(x)\times\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}$$
$$=2\times2\times1=4$$

답 4

0317

$xf(x)=g(x)$로 놓으면 $\lim_{x\to\infty} g(x)=5$이고 $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$이므로

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} x\ln\{1+2f(x)\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\{1+2f(x)\}}{2f(x)}\times 2xf(x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\{1+2f(x)\}}{2f(x)}\times 2\lim_{x\to\infty} xf(x)$$

$$=1\times2\times5=10$$

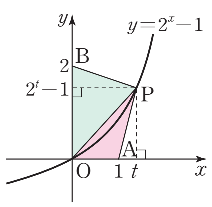
답 ⑤

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln\{1+2f(x)\}}{2f(x)}=\lim_{t\to0}\dfrac{\ln(1+2t)}{2t}=1$

0318

| 전략 | 점 P의 좌표를 $(t, 2^t-1)$로 놓고 S_1, S_2를 각각 t에 대한 식으로 나타낸다.

점 P의 좌표를 $(t, 2^t-1)$이라 하면



$$S_1=\frac{1}{2}\times1\times(2^t-1)=\frac{1}{2}(2^t-1)$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times2\times t=t$$

점 P가 원점 O에 한없이 가까워질 때 $t\to 0+$이므로

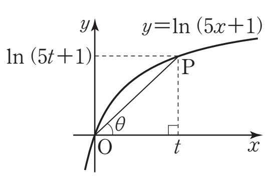
$$\lim_{P\to O}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{2}(2^t-1)}{t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to0+}\frac{2^t-1}{t}$$

$$=\frac{1}{2}\ln2=\ln\sqrt{2}$$

답 $\ln\sqrt{2}$

0319

점 P의 좌표를 $(t, \ln(5t+1))$이라 하면



$$\tan\theta=\frac{\ln(5t+1)}{t}$$

점 P가 원점 O에 한없이 가까워질 때 $t\to 0+$이므로

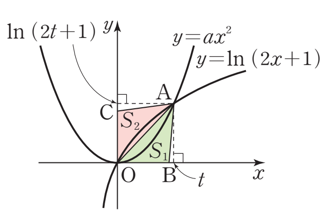
$$\lim_{P\to O}\tan\theta=\lim_{t\to0+}\frac{\ln(5t+1)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{\ln(5t+1)}{5t}\times5$$

$$=1\times5=5$$

답 ③

0320

점 A의 좌표를 $(t, \ln(2t+1))$이라 하면



$$S_1=\frac{1}{2}\times1\times\ln(2t+1)$$

$$=\frac{1}{2}\ln(2t+1)$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times1\times t=\frac{1}{2}t$$

이때, $a\to\infty$이면 곡선 $y=ax^2$은 y축에 한없이 가까워지므로 $t\to 0+$이다.

$$\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{2}\ln(2t+1)}{\frac{1}{2}t}=\lim_{t\to0+}\frac{\ln(2t+1)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\ln(2t+1)}{2t}\times2=1\times2=2$$

$\therefore a=2$

답 2

0321

| 전략 | $\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(2x+a)}{x}=b$임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\ln(2x+a)}{x}=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to0}\ln(2x+a)=0$이므로

$\ln a=0 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to0}\frac{\ln(2x+1)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(2x+1)}{2x}\times2=1\times2=2$$

$\therefore ab=1\times2=2$

답 2

0322

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-a}{3x}=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to0}(e^{2x}-a)=0$이므로

$1-a=0 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{2}{3}=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore a+b=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

답 ②

0323

함수 $f(x)$가 열린구간 $(1, \infty)$에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{\ln(x-1)}{e^{x-2}-1}=a$$

$x-2=t$로 놓으면 $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$$a=\lim_{x\to2}\frac{\ln(x-1)}{e^{x-2}-1}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{e^t-1}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}\times\frac{t}{e^t-1}=1\times1=1$$

답 1

0324

$(e^x-1)f(x)=\ln(3x+1)$에서 $e^x-1\neq0$, 즉 $x\neq0$일 때

$f(x)=\dfrac{\ln(3x+1)}{e^x-1}$

이때, 함수 $f(x)$가 $x>-\dfrac{1}{3}$에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로

$f(0)=\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(3x+1)}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(3x+1)}{3x}\times\dfrac{x}{e^x-1}\times3$

$=1\times1\times3=3$

답 3

0325

$f(x)=x+a$(a는 상수)로 놓으면 $f(0)=a$이므로

$f(0)g(0)=6a$

$\therefore\ f(x)g(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x+a)}{\ln(1+2x)} & (x\neq0)\\ 6a & (x=0)\end{cases}$

함수 $f(x)g(x)$가 열린구간 $\left(-\dfrac{1}{2},\infty\right)$에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)g(x)=f(0)g(0)$이므로

$\lim_{x\to0}\dfrac{x(x+a)}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to0}\dfrac{2x}{\ln(1+2x)}\times(x+a)\times\dfrac{1}{2}$

$=1\times a\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}a=6a$

$11a=0\qquad\therefore\ a=0$

따라서 $f(x)=x$이므로 $f(4)=4$

답 4

0326

|전략| $y=e^x$일 때, $y'=e^x$임을 이용한다.

$f(x)=(x+a)e^{x+b}=(x+a)e^b\times e^x$이므로

$f'(x)=e^b\times e^x+(x+a)e^b\times e^x$

$=e^{x+b}(x+a+1)$

$f'(0)=0$에서 $e^b(a+1)=0$

$\therefore\ a=-1\ (\because\ e^b\neq0)$

$f'(-1)=-1$에서 $-e^{b-1}=-1$

$b-1=0\qquad\therefore\ b=1$

$\therefore\ a+b=-1+1=0$

답 ①

0327

$f(x)=2^{x+1}=2\times2^x$이므로

$f'(x)=2\times2^x\ln2=2^{x+1}\ln2$

이때, $x=1$에서의 미분계수가 $a\ln2$이므로

$f'(1)=4\ln2=a\ln2$

$\therefore\ a=4$

답 ②

0328

$\lim_{h\to0}\dfrac{f(1-h)-f(1+h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(1-h)-f(1)-\{f(1+h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}\times(-1)-\lim_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=-f'(1)-f'(1)=-2f'(1)$

이때, $f(x)=5\times3^{x+1}=5\times3\times3^x=15\times3^x$에서

$f'(x)=15\times3^x\ln3$

$\therefore\ -2f'(1)=-2\times15\times3\times\ln3=-90\ln3$

답 $-90\ln3$

Lecture

미분계수의 정의

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$f'(a)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

0329

|전략| $y=\ln x$일 때, $y'=\dfrac{1}{x}$임을 이용한다.

$f'(x)=3x^2\ln x+x^3\times\dfrac{1}{x}=x^2(3\ln x+1)$

$\therefore f'(e)=4e^2$

답 ⑤

0330

$y=\ln2x=\ln2+\ln x$이므로 $y'=\dfrac{1}{x}$

이때, 함수 $y=\ln2x$의 그래프 위의 점 $\left(\dfrac{e}{2},1\right)$에서의 접선의 기울기는 $x=\dfrac{e}{2}$에서의 미분계수와 같으므로 $\dfrac{1}{\frac{e}{2}}=\dfrac{2}{e}$

답 $\dfrac{2}{e}$

Lecture

접선의 기울기와 미분계수의 관계

함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

0331

$f(x)=x^3\log_4 8x=x^3(\log_4 8+\log_4 x)=x^3\left(\dfrac{3}{2}+\log_4 x\right)$이므로

$f'(x)=3x^2\left(\dfrac{3}{2}+\log_4 x\right)+x^3\times\dfrac{1}{x\ln4}$

$=\dfrac{9}{2}x^2+3x^2\log_4 x+\dfrac{x^2}{\ln4}$

$f'(2)=\dfrac{9}{2}\times4+12\log_4 2+\dfrac{4}{\ln4}=18+6+\dfrac{2}{\ln2}=24+\dfrac{2}{\ln2}$

이므로 $a=24$, $b=2$

$\therefore\ a+b=24+2=26$

답 26

0332

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+2h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$

$=2f'(1)+f'(1)=3f'(1)$

이때, $f(x)=x^2+x\ln x$에서

$$f'(x)=2x+1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}$$

$$=2x+\ln x+1$$

$\therefore 3f'(1)=3\times(2+\ln1+1)=9$ 답 ④

0333

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이고 $f'(1)$이 존재한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1+}\ln ax=\lim_{x\to1-}(bx^2+3)=f(1)$이므로

$\ln a=b+3$ ······㉠

또, $f'(1)$이 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x>1)\\ 2bx & (x<1)\end{cases}$$

$x>1$일 때 $f(x)=\ln ax=\ln a+\ln x$이므로 $f'(x)=\frac{1}{x}$

에서 $\lim_{x\to1+}\frac{1}{x}=\lim_{x\to1-}2bx$

$1=2b$ $\quad\therefore b=\frac{1}{2}$

$b=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\ln a=\frac{7}{2}$

$\therefore \ln a+b=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=4$ 답 ⑤

0334

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to2+}(ax^2-3x-1)=\lim_{x\to2-}(e^{x-2}+b)=f(2)$이므로

$4a-7=1+b$ $\quad\therefore b=4a-8$ ······㉠

또, $f'(2)$가 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases}2ax-3 & (x>2)\\ e^{x-2} & (x<2)\end{cases}$$

에서 $\lim_{x\to2+}(2ax-3)=\lim_{x\to2-}e^{x-2}$

$4a-3=1$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-4$

$\therefore a^2+b^2=1^2+(-4)^2=17$ 답 ⑤

0335

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=1$에서도 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1+}(e^x+a)=\lim_{x\to1-}(x^2+ax+b)=f(1)$이므로

$e+a=1+a+b$ $\quad\therefore b=e-1$

또, $f'(1)$이 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases}e^x & (x>1)\\ 2x+a & (x<1)\end{cases}$$

에서 $\lim_{x\to1+}e^x=\lim_{x\to1-}(2x+a)$

$e=2+a$ $\quad\therefore a=e-2$

$\therefore a-b=(e-2)-(e-1)=-1$ 답 ②

STEP 3 내신 마스터

0336

유형 02 로그함수의 극한

|전략| $\frac{1}{x}=t$로 놓고 $\lim_{t\to\infty}\log_5 t=\infty$임을 이용한다.

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0+}\frac{\log_5\frac{2}{x}}{\log_5\left(\frac{3}{x}+1\right)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\log_5 2t}{\log_5(3t+1)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\log_5 t+\log_5 2}{\log_5 t+\log_5\left(3+\frac{1}{t}\right)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\frac{\log_5 2}{\log_5 t}}{1+\frac{\log_5\left(3+\frac{1}{t}\right)}{\log_5 t}}=\frac{1}{1}=1$$

답 ③

0337

유형 04 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$를 이용한 함수의 극한

|전략| $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{ax}=e$임을 이용한다.

ㄱ. $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right\}^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}\ (\text{참})$$

ㄴ. $f(x-1)=\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^{x-1}=\left(1-\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}f(x-1)=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^t$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}\right\}^{-1}$$

$$=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)f(x-1)=\lim_{x\to\infty}f(x)\times\lim_{x\to\infty}f(x-1)$$

$$=\frac{1}{e}\times\frac{1}{e}=\frac{1}{e^2}\ (\text{참})$$

ㄷ. $k\geq 2$에서 $x\to\infty$일 때 $kx\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}f(kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{kx-1}{kx}\right)^{kx}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{kx}\right)^{-kx}\right\}^{-1}$$
$$=e^{-1}=\frac{1}{e}\text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0338

유형 05 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$을 이용한 함수의 극한

|전략| $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}=1$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)+7x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+5x)}{2x}+\frac{7}{2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+5x)}{5x}\times\frac{5}{2}+\frac{7}{2}\right\}$$
$$=1\times\frac{5}{2}+\frac{7}{2}=6$$

답 ④

다른 풀이 $5x=t$로 놓으면 $x\to 0$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)+7x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+5x)}{2x}+\frac{7}{2}\right\}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\ln(1+t)}{\frac{2}{5}t}+\frac{7}{2}\right\}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\ln(1+t)}{t}\times\frac{5}{2}+\frac{7}{2}\right\}$$
$$=1\times\frac{5}{2}+\frac{7}{2}=6$$

0339

유형 06 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$을 이용한 함수의 극한

|전략| $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}=1$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}+9x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{x}+9\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\times 3+9\right)$$
$$=1\times 3+9=12$$

답 ②

0340

유형 06 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$을 이용한 함수의 극한

+ 08 $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$를 이용한 함수의 극한

|전략| $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}=\ln b$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{27^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{x}{27^x-1}\times 2$$
$$=1\times\frac{1}{\ln 27}\times 2=\frac{2}{3\ln 3}$$

답 ⑤

0341

유형 09 지수함수와 로그함수의 극한 – 미정계수의 결정

|전략| $x\to 0$일 때 (분자) $\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to 0$임을 이용한다.

$x\to 0$일 때 (분자) $\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}(bx-c)=0$이므로 $c=0$

$c=0$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}\times\frac{a}{b}=1\times\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

$\therefore \frac{a}{b}=10$

$\therefore \frac{a}{b}+c=10+0=10$

답 ④

0342

유형 10 극한의 변형

|전략| $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$이고 $\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$($\alpha$는 실수)이면 $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$이다.

(i) $-1<x<0$일 때, 주어진 부등식의 각 변을 x로 나누면

$$\frac{\ln(1+x)}{x}\geq\frac{f(x)}{x}\geq\frac{e^{2x}-1}{2x}$$

이때, $\lim_{x\to 0-}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to 0-}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$이므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x}=1$$

(ii) $x>0$일 때, 주어진 부등식의 각 변을 x로 나누면

$$\frac{\ln(1+x)}{x}\leq\frac{f(x)}{x}\leq\frac{e^{2x}-1}{2x}$$

이때, $\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to 0+}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$이므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=1$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(ex)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(ex)}{ex}\times e=e$$

답 ②

다른 풀이 $\ln(1+x)\leq f(x)\leq\frac{1}{2}(e^{2x}-1)$에서

$$\ln(1+ex)\leq f(ex)\leq\frac{1}{2}(e^{2ex}-1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

(i) $-1<x<0$일 때, 부등식 ㉠의 각 변을 ex로 나누면

$$\frac{\ln(1+ex)}{ex}\geq\frac{f(ex)}{ex}\geq\frac{e^{2ex}-1}{2ex}$$

이때, $\lim_{x\to 0-}\frac{\ln(1+ex)}{ex}=1$, $\lim_{x\to 0-}\frac{e^{2ex}-1}{2ex}=1$이므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(ex)}{ex}=1 \qquad \therefore \lim_{x\to 0-}\frac{f(ex)}{x}=e$$

(ii) $x>0$일 때, 부등식 ㉠의 각 변을 ex로 나누면

$$\frac{\ln(1+ex)}{ex}\leq\frac{f(ex)}{ex}\leq\frac{e^{2ex}-1}{2ex}$$

3 지수함수와 로그함수의 미분

이때, $\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+ex)}{ex}=1$, $\lim_{x\to0+}\frac{e^{2ex}-1}{2ex}=1$이므로

$\lim_{x\to0+}\frac{f(ex)}{ex}=1$ $\quad\therefore \lim_{x\to0+}\frac{f(ex)}{x}=e$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(ex)}{x}=e$

0343

유형 **11** 지수함수와 로그함수의 극한 – 도형에의 활용

|전략| $\overline{PQ}$를 a에 대한 식으로 나타낸 후 극한값을 구한다.

두 점 P, Q의 좌표는 $P(a, 4^a)$, $Q(a, 3^a)$이므로 $\overline{PQ}=4^a-3^a$

$$\therefore \lim_{a\to0+}\frac{\overline{PQ}}{a}=\lim_{a\to0+}\frac{4^a-3^a}{a}$$
$$=\lim_{a\to0+}\frac{(4^a-1)-(3^a-1)}{a}$$
$$=\lim_{a\to0+}\frac{4^a-1}{a}-\lim_{a\to0+}\frac{3^a-1}{a}$$
$$=\ln4-\ln3=\ln\frac{4}{3}$$

답 ①

0344

유형 **14** 로그함수의 도함수

|전략| $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$임을 이용한다.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+3h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times3+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$
$$=3f'(1)+f'(1)=4f'(1)$$

한편, $f(x)=x^3-x^2\ln x$에서

$$f'(x)=3x^2-\left(2x\times\ln x+x^2\times\frac{1}{x}\right)$$
$$=3x^2-2x\ln x-x$$

$\therefore 4f'(1)=4\times(3-2\ln1-1)=8$

답 ④

0345

유형 **15** 지수함수와 로그함수의 도함수 – 미분가능성

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이고 $f'(1)$이 존재한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1+}(\ln x+ax^3)=\lim_{x\to1-}be^{x-1}=f(1)$이므로

$\ln1+a=b$ $\quad\therefore b=a$ …… ㉠

또, $f'(1)$이 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}+3ax^2 & (x>1)\\ be^{x-1} & (x<1)\end{cases}$$

에서 $\lim_{x\to1+}\left(\frac{1}{x}+3ax^2\right)=\lim_{x\to1-}be^{x-1}$

$1+3a=b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

답 ②

0346

유형 **12** 지수함수와 로그함수의 연속

|전략| $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$

이때, $f(0)=6$이므로

$\lim_{x\to0+}\frac{\ln(a+x)}{e^{bx}-1}=6$ …… ㉠

㉠에서 $x\to0+$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to0+}\ln(a+x)=0$이므로

$\ln a=0$ $\quad\therefore a=1$ … ❶

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)}{e^{bx}-1}=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{bx}{e^{bx}-1}\times\frac{1}{b}$$
$$=1\times1\times\frac{1}{b}=6$$

$\therefore b=\frac{1}{6}$ … ❷

$\therefore \frac{a}{b}=1\times6=6$ … ❸

답 6

채점 기준	배점
❶ a의 값을 구할 수 있다.	3점
❷ b의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ $\frac{a}{b}$의 값을 구할 수 있다.	1점

0347

유형 **14** 로그함수의 도함수

|전략| $y=\log_a x\,(a>0, a\neq1)$이면 $y'=\frac{1}{x\ln a}$임을 이용한다.

삼각형 PAQ의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{OQ}\times\overline{PQ}=\frac{1}{2}\times t\times\log_2 t$ … ❶

$$S'(t)=\frac{1}{2}\left(1\times\log_2 t+t\times\frac{1}{t\ln2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\log_2 t+\frac{1}{\ln2}\right)$$ … ❷

$$\therefore S'(16)=\frac{1}{2}\left(\log_2 16+\frac{1}{\ln2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(4+\frac{1}{\ln2}\right)=2+\frac{1}{2\ln2}$$ … ❸

답 $2+\frac{1}{2\ln2}$

채점 기준	배점
❶ $S(t)$를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	2점
❷ $S'(t)$를 구할 수 있다.	2점
❸ $S'(16)$의 값을 구할 수 있다.	2점

0348

유형 09 지수함수와 로그함수의 극한 – 미정계수의 결정
+ 13 지수함수의 도함수

|전략| $x \to 2$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0임을 이용한다.

(1) $x \to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)-2\}=0$이므로

$\lim_{x\to2}(2^x-ax-2)=4-2a-2=0$

$\therefore a=1$

(2) $\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)-2}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\dfrac{1}{x+2}$

$=\dfrac{1}{4}f'(2)=b$

$f(x)=2^x-x$에서 $f'(x)=2^x\ln 2-1$이므로

$f'(2)=4\ln 2-1 \qquad \therefore b=\dfrac{1}{4}\times(4\ln 2-1)=\ln 2-\dfrac{1}{4}$

(3) $a+b=1+\left(\ln 2-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3}{4}+\ln 2$

답 (1) 1 (2) $\ln 2-\dfrac{1}{4}$ (3) $\dfrac{3}{4}+\ln 2$

채점 기준	배점
(1) a의 값을 구할 수 있다.	4점
(2) b의 값을 구할 수 있다.	6점
(3) $a+b$의 값을 구할 수 있다.	2점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0349

|전략| 점 P의 좌표를 $(t, \ln t^2)$이라 하고, 점 P가 제2사분면 위의 점임을 이용하여 t의 값의 범위를 구한다.

점 P의 좌표를 $(t, \ln t^2)$이라 하면 점 Q의 좌표는 Q$(t, 0)$

점 P가 제2사분면 위의 점이므로

$t<0$, $\ln t^2>0$에서 $t<0$이고 $t^2>1$

$t<0$이고 $(t-1)(t+1)>0 \qquad \therefore t<-1$

$\therefore \overline{PQ}=\ln t^2$, $\overline{AQ}=-1-t$

점 P가 점 A$(-1, 0)$에 한없이 가까워질 때 $t \to -1-$이므로

$\lim_{t\to-1-}\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}}=\lim_{t\to-1-}\dfrac{\ln t^2}{-1-t}$

$=\lim_{t\to-1-}\dfrac{2\ln(-t)}{-1-t}$ $(\because t<-1)$

이때, $t+1=h$로 놓으면 $t\to-1-$일 때 $h\to0-$이므로

$\lim_{t\to-1-}\dfrac{2\ln(-t)}{-1-t}=\lim_{h\to0-}\dfrac{2\ln(1-h)}{-h}=2$

답 ③

0350

|전략| $\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+ax)}{ax}=1$임을 이용한다.

$A_n=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdots(1+nx)$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x}\{\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\ln(1+3x)$

$+\cdots+\ln(1+nx)\}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}\times2$

$+\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}\times3+\cdots+\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+nx)}{nx}\times n$

$=1+2+3+\cdots+n$

$=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$B_n=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)(1+3x)(1+5x)\cdots\{1+(2n-1)x\}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x}[\ln(1+x)+\ln(1+3x)+\ln(1+5x)$

$+\cdots+\ln\{1+(2n-1)x\}]$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}\times3+\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+5x)}{5x}\times5$

$+\cdots+\lim_{x\to0}\dfrac{\ln\{1+(2n-1)x\}}{(2n-1)x}\times(2n-1)$

$=1+3+5+\cdots+(2n-1)$

$=\dfrac{n\{1+(2n-1)\}}{2}=n^2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{B_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$

답 $\dfrac{1}{2}$

0351

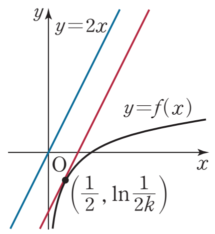
|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 점과 직선 $y=2x$ 사이의 거리를 이용하여 d_k를 구한다.

곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$를 직선 $y=2x$에 대하여 대칭이동한 것이므로 d_k는 곡선 $y=f(x)$의 접선 중 기울기가 2인 접점에서 직선 $y=2x$까지의 거리의 두 배이다.

$f(x)=\ln\frac{x}{k}=\ln x-\ln k$에서

$f'(x)=\frac{1}{x}$이므로 $f'(x)=2$인 접점의

좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \ln\frac{1}{2k}\right)$



이 접점 $\left(\frac{1}{2}, \ln\frac{1}{2k}\right)$에서 직선 $y=2x$,

즉 $-2x+y=0$까지의 거리는

$$\frac{\left|-1+\ln\frac{1}{2k}\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1+\ln 2k}{\sqrt{5}}$$

$\therefore d_k=2\times\frac{1+\ln 2k}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}(1+\ln 2k)$

$d_k\ge 2\sqrt{5}$에서 $\frac{2\sqrt{5}}{5}(1+\ln 2k)\ge 2\sqrt{5}$, $\ln 2k\ge 4$ $\quad\therefore k\ge\frac{e^4}{2}$

따라서 k의 최솟값은 $\frac{e^4}{2}$이다. 답 ③

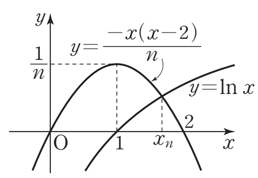
0352

|전략| 주어진 방정식의 실근이 이차함수와 로그함수의 그래프의 교점의 x좌표와 같음을 이용하여 $\lim_{n\to\infty} x_n$의 값을 구한다.

$x^2-2x+\ln x^n=0$에서 $x(x-2)=-n\ln x$ ($\because x>0$)

$\ln x=\frac{-x(x-2)}{n}$

오른쪽 그림에서 방정식 $f_n(x)=0$의 실근 x_n은 두 함수 $y=\ln x$, $y=\frac{-x(x-2)}{n}$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다. 이때,



$y=\frac{-x(x-2)}{n}=\frac{-(x-1)^2+1}{n}$

에서 꼭짓점의 좌표가 $\left(1, \frac{1}{n}\right)$이므로 $n\to\infty$이면 함수 $y=\frac{-x(x-2)}{n}$의 그래프의 꼭짓점은 점 $(1, 0)$에 한없이 가까워진다.

따라서 두 그래프의 교점의 x좌표인 x_n도 1에 한없이 가까워진다.

즉, $\lim_{n\to\infty} x_n=1$

$f_n(x_n)={x_n}^2-2x_n+n\ln x_n=0$에서 $n=\frac{-x_n(x_n-2)}{\ln x_n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} n(x_n-1)=\lim_{x_n\to 1}\frac{-x_n(x_n-2)(x_n-1)}{\ln x_n}$

$=\lim_{x_n\to 1}\frac{x_n-1}{\ln x_n}\times\{-x_n(x_n-2)\}$

이때, $x_n-1=y_n$이라 하면 $x_n\to 1$일 때 $y_n\to 0$이므로

$\lim_{x_n\to 1}\frac{x_n-1}{\ln x_n}\times\{-x_n(x_n-2)\}$

$=\lim_{y_n\to 0}\frac{y_n}{\ln(1+y_n)}\times\{-(y_n+1)(y_n-1)\}$

$=1\times 1=1$ 답 1

본책 60~75쪽

4 | 삼각함수의 미분

STEP 1 개념 마스터

0353

$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$

$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 답 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

0354

$\cos 105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)$

$=\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ 답 $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

0355

$\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$

$=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}$ 답 $2+\sqrt{3}$

0356

$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\times 1}=2-\sqrt{3}$ 답 $2-\sqrt{3}$

0357

$\sin 85^\circ\cos 40^\circ-\cos 85^\circ\sin 40^\circ$

$=\sin(85^\circ-40^\circ)$

$=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0358

$\cos 50^\circ\cos 20^\circ+\sin 50^\circ\sin 20^\circ$

$=\cos(50^\circ-20^\circ)$

$=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

0359

$\frac{\tan 75^\circ-\tan 15^\circ}{1+\tan 75^\circ\tan 15^\circ}=\tan(75^\circ-15^\circ)$

$=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

0360

$\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$이므로

$2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta$

$=4\left(\sin\theta\times\frac{1}{2}+\cos\theta\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=4\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ 답 $4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

0361

$\sqrt{5^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$이므로

$5\sin\theta-5\cos\theta$

$=5\sqrt{2}\left\{\sin\theta\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

$=5\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{7}{4}\pi+\cos\theta\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

$=5\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{7}{4}\pi\right)$ 답 $5\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{7}{4}\pi\right)$

0362

$y=\sin x+\cos x$

$=\sqrt{2}\left(\sin x\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $\sqrt{2}$, 최솟값은 $-\sqrt{2}$, 주기는 2π이다.

답 최댓값: $\sqrt{2}$, 최솟값: $-\sqrt{2}$, 주기: 2π

참고 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 $y=\sqrt{2}\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$의 최댓값, 최솟값, 주기는 함수 $y=\sqrt{2}\sin x$의 최댓값, 최솟값, 주기와 같다.

0363

$y=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$=2\left\{\sin x\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\cos x\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$=2\left(\sin x\cos\frac{2}{3}\pi+\cos x\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

$=2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 2, 최솟값은 -2, 주기는 2π이다.

답 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: 2π

0364

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$에서 $\sin\alpha>0$이므로

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$

(2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(-\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2=-\frac{7}{25}$

(3) $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\left(-\frac{4}{3}\right)}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{24}{7}$

답 (1) $-\frac{24}{25}$ (2) $-\frac{7}{25}$ (3) $\frac{24}{7}$

0365

$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}3\sin 3x=3\sin\frac{\pi}{2}=3$ 답 3

0366

$\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}-2\tan 2x=-2\tan\frac{\pi}{4}=-2$ 답 -2

0367

$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos x-1}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{\cos x-1}$

$=\lim_{x\to0}(-1-\cos x)=-1-1=-2$ 답 -2

0368

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}2\sin x=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ 답 $\sqrt{2}$

0369

$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{2}{3}=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0370

$\lim_{x\to0}\frac{3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to0}\frac{5x}{\tan 5x}\times\frac{3}{5}=1\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

0371

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\tan 3x}{2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{2x}+\frac{\tan 3x}{2x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{2}+\frac{\tan 3x}{3x}\times\frac{3}{2}\right)$

$=1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{3}{2}=2$ 답 2

4 삼각함수의 미분

0372

$$\lim_{x\to0}\frac{2x+\sin 3x}{\tan x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{\tan x}+\frac{\sin 3x}{\tan x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\tan x}\times2+\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{x}{\tan x}\times3\right)$$
$$=1\times2+1\times1\times3=5$$

답 5

0373

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$$

답 1

0374

$\frac{\pi}{4}-x=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{4}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\pi-4x}=\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{4t}=\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t}\times\frac{1}{4}$$
$$=1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

0375 답 $y'=1-2\cos x$

0376 답 $y'=-\sin x-e^x$

0377 답 $y'=\cos x+3\sin x$

0378

$$y'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'$$
$$=\cos^2x-\sin^2x$$

답 $y'=\cos^2x-\sin^2x$

0379

$$y'=(\cos x)'\times\ln x+\cos x\times(\ln x)'$$
$$=-\sin x\times\ln x+\frac{\cos x}{x}$$

답 $y'=-\sin x\times\ln x+\frac{\cos x}{x}$

0380

$y=\sin^2x-\cos^2x=\sin x\sin x-\cos x\cos x$이므로

$$y'=\cos x\sin x+\sin x\cos x-\{-\sin x\cos x+\cos x(-\sin x)\}$$
$$=\cos x\sin x+\sin x\cos x+\sin x\cos x+\cos x\sin x$$
$$=4\sin x\cos x$$

답 $y'=4\sin x\cos x$

다른 풀이 $y=\sin^2x-\cos^2x=\sin^2x-(1-\sin^2x)$
$$=2\sin^2x-1=2\sin x\sin x-1$$
이므로

$y'=2\cos x\sin x+2\sin x\cos x=4\sin x\cos x$

STEP 2 유형 마스터

0381

|전략| $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 $\cos\alpha$의 값과 $\sin\beta$의 값을 구한다.

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$이고, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$이므로

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$에서 $\sin\beta>0$이고, $\cos\beta=-\frac{5}{13}$이므로

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$$

$$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{5}{13}\right)+\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}$$
$$=-\frac{15}{65}+\frac{48}{65}=\frac{33}{65}$$

답 ③

0382

$\sin70^\circ\sin140^\circ+\sin20^\circ\sin50^\circ$
$=\sin70^\circ\sin(90^\circ+50^\circ)+\sin(90^\circ-70^\circ)\sin50^\circ$
$=\sin70^\circ\cos50^\circ+\cos70^\circ\sin50^\circ$
$=\sin(70^\circ+50^\circ)=\sin120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ⑤

Lecture

$\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\cos\theta$

(2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\sin\theta$ (복호동순)

(3) $\tan\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\frac{1}{\tan\theta}$ (복호동순)

0383

$\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{\pi}{4}=1$에서

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$$

즉, $\tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta$

$\therefore (1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$
$=1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta$
$=1+(1-\tan\alpha\tan\beta)+\tan\alpha\tan\beta=2$

답 2

0384

$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots㉠$$

$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{3}{4}$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=1+1=2$

$2+2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)=1$

$\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=-\frac{1}{2}$

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$ 답 ③

0385

| 전략 | 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{5}{2}$, $\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{2}$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{2}}=5$ 답 ⑤

0386

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=2a$, $\tan\alpha\tan\beta=a^2-4$이므로

$(\tan\alpha-\tan\beta)^2=(\tan\alpha+\tan\beta)^2-4\tan\alpha\tan\beta$

$=(2a)^2-4(a^2-4)=16$

$\therefore \tan\alpha-\tan\beta=4$ ($\because \tan\alpha>\tan\beta$)

$\therefore \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4}{1+a^2-4}=\frac{4}{a^2-3}$

이때, $\tan(\alpha-\beta)=\tan\frac{\pi}{4}=1$이므로

$\frac{4}{a^2-3}=1$에서 $a^2=7$ $\quad\therefore a=\sqrt{7}$ ($\because a>0$) 답 ④

0387

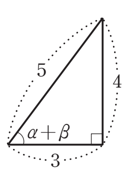
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=4$, $\tan\alpha\tan\beta=-2$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4}{1+2}=\frac{4}{3}$

오른쪽 그림의 직각삼각형에서 빗변의 길이는 5이고

$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin(\alpha+\beta)>0$



$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$

답 $\frac{4}{5}$

0388

| 전략 | $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$임을 이용한다.

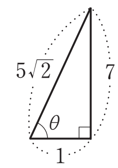
두 직선 $y=2x+2$, $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=2$, $\tan\beta=-\frac{1}{3}$

$\therefore \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\frac{2-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+2\times\left(-\frac{1}{3}\right)}\right|=\frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}}=7$

오른쪽 그림의 직각삼각형에서 빗변의 길이는 $5\sqrt{2}$이고 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta>0$



$\therefore \sin\theta=\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$

답 $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

0389

$kx-y-1=0$에서 $y=kx-1$

$x+2y+3=0$에서 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=k$, $\tan\beta=-\frac{1}{2}$

이때, 두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan\frac{\pi}{4}=1$에서

$\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=1$, $\frac{k+\frac{1}{2}}{1-\frac{k}{2}}=\pm1$

$k+\frac{1}{2}=\pm\left(1-\frac{k}{2}\right)$ $\quad\therefore k=\frac{1}{3}$ ($\because k>0$) 답 ①

0390

직선 $y=\frac{1}{3}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=\frac{1}{3}$ ··· ❶

이때, 직선 $y=ax+b$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\theta+45^\circ$이므로

$a=\tan(\theta+45^\circ)=\frac{\tan\theta+\tan45^\circ}{1-\tan\theta\tan45^\circ}=\frac{\frac{1}{3}+1}{1-\frac{1}{3}\times1}=2$ ··· ❷

직선 $y=2x+b$가 점 $(3, 1)$을 지나므로

$1=2\times3+b$ $\quad\therefore b=-5$ ··· ❸

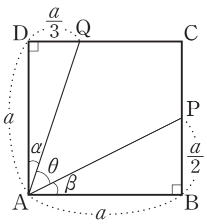
$\therefore a+b=2+(-5)=-3$ ··· ❹

답 -3

채점 기준	비율
❶ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0391

|전략| $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$임을 이용한다.



오른쪽 그림과 같이 $\angle PAQ=\theta$라 하고 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 a라 하면

$\overline{BP}=\dfrac{a}{2}$, $\overline{DQ}=\dfrac{a}{3}$

또한, $\angle QAD=\alpha$, $\angle PAB=\beta$라 하면

$\tan\alpha=\dfrac{\frac{a}{3}}{a}=\dfrac{1}{3}$, $\tan\beta=\dfrac{\frac{a}{2}}{a}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \tan\theta=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\dfrac{1}{\tan(\alpha+\beta)}$

└ $\tan\left\{\dfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}=\dfrac{1}{\tan(\alpha+\beta)}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}=\dfrac{1}{\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}}=1$

$\therefore \angle PAQ=\dfrac{\pi}{4}\ \left(\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

답 ③

0392

$\overline{AB}=a$라 하면 $\overline{BE}=\sqrt{2}a$, $\overline{BD}=\sqrt{10}a$이므로

$\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{2}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{2}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\beta=\dfrac{a}{\sqrt{10}a}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\beta=\dfrac{3a}{\sqrt{10}a}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}+\dfrac{\sqrt{5}}{10}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

답 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

0393

$\overline{BC}=\sqrt{(\sqrt{73})^2-3^2}=\sqrt{64}=8$

이때, $\angle BAR=\alpha$, $\angle BAP=\beta$라 하면

$\tan\alpha=\dfrac{\overline{BR}}{\overline{AB}}=\dfrac{6}{3}=2$, $\tan\beta=\dfrac{\overline{BP}}{\overline{AB}}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2-\frac{2}{3}}{1+2\times\frac{2}{3}}=\dfrac{4}{7}$

답 ④

0394

|전략| $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$임을 이용한다.

$y=\sqrt{3}\cos x+k\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)-1$

$=\sqrt{3}\cos x+k\sin x-1$

$=\sqrt{3+k^2}\left(\sin x\times\dfrac{k}{\sqrt{3+k^2}}+\cos x\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+k^2}}\right)-1$

$=\sqrt{3+k^2}\sin(x+\alpha)-1\ \left(\text{단, } \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+k^2}},\ \cos\alpha=\dfrac{k}{\sqrt{3+k^2}}\right)$

이때, $-1\le\sin(x+\alpha)\le1$이므로

$-\sqrt{3+k^2}-1\le\sqrt{3+k^2}\sin(x+\alpha)-1\le\sqrt{3+k^2}-1$

이고, 최댓값이 3이므로 $\sqrt{3+k^2}-1=3$에서

$3+k^2=16\qquad \therefore k=\sqrt{13}\ (\because k>0)$

답 ②

0395

$f(x)=\sin x+\sqrt{7}\cos x-a$

$=2\sqrt{2}\left(\sin x\times\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\cos x\times\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)-a$

$=2\sqrt{2}\sin(x+\alpha)-a\ \left(\text{단, } \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}},\ \cos\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

이때, $-1\le\sin(x+\alpha)\le1$이므로

$-2\sqrt{2}-a\le2\sqrt{2}\sin(x+\alpha)-a\le2\sqrt{2}-a$

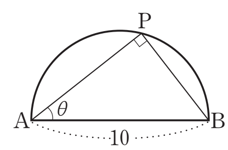
이고, 최댓값이 $2\sqrt{2}-a=\sqrt{2}$이므로 $a=\sqrt{2}$

따라서 $f(x)$의 최솟값은

$-2\sqrt{2}-a=-2\sqrt{2}-\sqrt{2}=-3\sqrt{2}$

답 ③

0396



오른쪽 그림과 같이 $\angle PAB=\theta$라 하면

$\angle APB=90^\circ$이므로

$\overline{AP}=10\cos\theta$, $\overline{BP}=10\sin\theta$

$\therefore 3\overline{AP}+4\overline{BP}=30\cos\theta+40\sin\theta$

$=50\left(\sin\theta\times\dfrac{4}{5}+\cos\theta\times\dfrac{3}{5}\right)$

$=50\sin(\theta+\alpha)\ \left(\text{단, } \sin\alpha=\dfrac{3}{5},\ \cos\alpha=\dfrac{4}{5}\right)$

이때, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, $2n\pi<\alpha<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$($n$은 정수)이므로

$2n\pi<\theta+\alpha<(2n+1)\pi\qquad \therefore 0<\sin(\theta+\alpha)\le1$

따라서 $0<50\sin(\theta+\alpha)\le50$이므로 구하는 최댓값은 50이다.

답 50

0397

|전략| 주어진 식의 양변을 제곱하여 $\sin2\theta$의 값을 구한다.

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{9}$

$1-\sin2\theta=\dfrac{1}{9}\qquad \therefore \sin2\theta=\dfrac{8}{9}$

한편, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta-\cos\theta>0$이려면

$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\qquad \therefore \dfrac{\pi}{2}<2\theta<\pi$

이때, $\dfrac{\pi}{2}<2\theta<\pi$에서 $\cos2\theta<0$이므로

$\cos2\theta=-\sqrt{1-\sin^2 2\theta}$

$=-\sqrt{1-\left(\dfrac{8}{9}\right)^2}=-\dfrac{\sqrt{17}}{9}$

답 $-\dfrac{\sqrt{17}}{9}$

0398

$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ 답 ②

0399

$f(x)=\cos 2x+4\sin x+1$

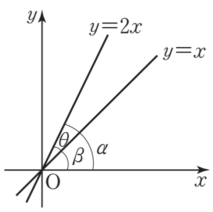
$=(1-2\sin^2 x)+4\sin x+1$

$=-2\sin^2 x+4\sin x+2$

$=-2(\sin x-1)^2+4$

이때, $-1\le\sin x\le 1$이므로 $f(x)$는 $\sin x=1$일 때 최댓값 4를 갖는다. 답 ⑤

0400



오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=2x$, $y=x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=2$, $\tan\beta=1$ ··· ❶

$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{2-1}{1+2\times1}=\frac{1}{3}$ ··· ❷

$\therefore \tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}$ ··· ❸

답 $\frac{3}{4}$

채점 기준	비율
❶ $\tan\alpha$, $\tan\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\tan 2\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0401

$\sin 2x=2\cos x-2\cos^2 x$에서

$2\sin x\cos x=2\cos x-2\cos^2 x$, $\cos x(\sin x+\cos x-1)=0$

$\therefore \cos x=0$ 또는 $\sin x+\cos x=1$

(i) $\cos x=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because\ 0\le x<2\pi$)

(ii) $\sin x+\cos x=1$에서

$\sqrt{2}\left(\sin x\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1$, $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\therefore \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

이때, $0\le x<2\pi$이므로 $\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$

$\therefore x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

(i), (ii)에서 서로 다른 모든 해의 합은

$\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi+0=2\pi$ 답 ⑤

0402

|전략| $\angle BAD=\theta$로 놓고 $\cos\theta$의 값을 구한 후 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$임을 이용한다.

$\overline{AB}:\overline{AC}=3:2$이므로 $\overline{AB}=3t$, $\overline{AC}=2t\,(t>0)$라 하면

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{(3t)^2-(2t)^2}=\sqrt{5}t$

또, $\angle BAD=\angle ABD=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{5}t}{3t}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

이때, $\triangle ABD$에서

$\angle ADC=\angle BAD+\angle ABD=\theta+\theta=2\theta$

이므로

$\cos(\angle ADC)=\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

$=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2-1=\frac{1}{9}$ 답 $\frac{1}{9}$

0403

□ABCD가 직사각형이고 $\angle ADB=\frac{\pi}{8}$이므로

$\overline{AD}=\overline{BD}\cos\frac{\pi}{8}=2\cos\frac{\pi}{8}$, $\overline{AB}=\overline{BD}\sin\frac{\pi}{8}=2\sin\frac{\pi}{8}$

$\therefore$ □ABCD$=\overline{AD}\times\overline{AB}$

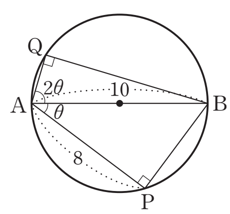
$=2\cos\frac{\pi}{8}\times2\sin\frac{\pi}{8}$

$=4\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$

$=2\sin\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는 $\sqrt{2}$이다. 답 ②

0404



오른쪽 그림과 같이

$\angle PAB=\theta$라 하면 $\angle QAB=2\theta$

이때, $\triangle APB$에서 $\angle APB=90^\circ$이므로

$\cos\theta=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

$\therefore \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

$=2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$

또, $\triangle AQB$에서 $\angle AQB=90^\circ$이므로

$\overline{AQ}=\overline{AB}\cos 2\theta=10\times\frac{7}{25}=\frac{14}{5}$ 답 $\frac{14}{5}$

0405

한 원에서 호 AB에 대한 원주각 $\angle ACB$의 크기는 중심각 $\angle AOB$의 크기 θ의 $\frac{1}{2}$배이므로 $\angle ACB=\frac{\theta}{2}$

이때, $\triangle ABC$의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2}\times 4\times 3\times \sin\frac{\theta}{2}=2 \qquad \therefore \sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{3}$

또, $0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\frac{\theta}{2}>0$

$$\therefore \cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

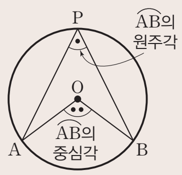
답 ⑤

Lecture

(1) **원주각과 중심각의 크기**

한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$배이다.

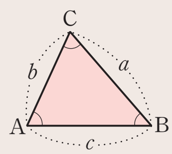
즉, $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$



(2) **삼각형의 넓이**

$\triangle ABC$의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$



0406

|전략| 주어진 식을 간단히 하고, $\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1-(2\cos^2 x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2\underbrace{(1-\cos^2 x)}_{\sin^2 x}\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos^2 x}=\frac{1}{2}$$

답 ②

0407

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x(\sin x-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\cos x}=-\sqrt{2}$$

답 ①

0408

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=2$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)=2$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}+\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}=2+2=4$$

답 ④

0409

|전략| $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x^2-x)}{x^2+4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x^2-x)}{3x^2-x}\times\frac{3x^2-x}{x^2+4x}$$

$$=1\times\lim_{x\to 0}\frac{x(3x-1)}{x(x+4)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x-1}{x+4}=-\frac{1}{4}$$

답 $-\frac{1}{4}$

0410

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+1-e^{5x}}{\sin 3x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x}-\frac{e^{5x}-1}{\sin 3x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{2}{3}-\frac{e^{5x}-1}{5x}\times\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{5}{3}\right)$$

$$=1\times 1\times\frac{2}{3}-1\times 1\times\frac{5}{3}=-1$$

답 -1

Lecture

지수함수, 로그함수의 극한

$a>0,\ a\neq 1$일 때

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

0411

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin 4x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\sin 4x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{4x}{\sin 4x}\times\frac{1}{4(1+\cos x)}$$

$$=1^2\times 1\times\frac{1}{4\times 2}=\frac{1}{8}$$

답 $\frac{1}{8}$

0412

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos kx}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos kx)(1+\cos kx)}{2x^2(1+\cos kx)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 kx}{2x^2(1+\cos kx)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin kx}{kx}\right)^2\times\frac{k^2}{2}\times\frac{1}{1+\cos kx}$$

$$=1^2\times\frac{k^2}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{k^2}{4}$$

즉, $\frac{k^2}{4}=9$에서 $k^2=36$

$\therefore k=6\ (\because k>0)$ 답 ①

0413

| 전략 | $\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{ax}=1$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan 5x)}{\tan 4x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan 5x)}{\tan 5x}\times\frac{4x}{\tan 4x}\times\frac{\tan 5x}{5x}\times\frac{5}{4}$$

$$=1\times1\times1\times\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$$

답 ⑤

0414

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x^2}-1}{\tan x\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}\times\frac{x}{\tan x}\times\frac{2x}{\sin 2x}$$

$$=1\times1\times1=1$$

답 ③

0415

$$f(n)=\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan x+\tan 2x+\tan 3x+\cdots+\tan nx}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\tan x+\tan 2x+\tan 3x+\cdots+\tan nx}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\tan x}{x}+\frac{\tan 2x}{2x}\times2+\frac{\tan 3x}{3x}\times3+\cdots+\frac{\tan nx}{nx}\times n}$$

$$=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$$

$$=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$\therefore f(3)=\frac{2}{3\times4}=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

0416

| 전략 | $x+1=t$로 놓은 다음 $\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$임을 이용한다.

$x+1=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sin\left(\cos\frac{3}{2}\pi x\right)}{x^2-1}$$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi t-\frac{3}{2}\pi\right)=\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{3}{2}\pi t\right)=-\sin\frac{3}{2}\pi t$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\sin\left(\cos\frac{3}{2}\pi x\right)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left\{\cos\frac{3}{2}\pi(t-1)\right\}}{t(t-2)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left\{\cos\left(\frac{3}{2}\pi t-\frac{3}{2}\pi\right)\right\}}{t(t-2)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(\boxed{-\sin\frac{3}{2}\pi t}\right)}{t(t-2)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(-\sin\frac{3}{2}\pi t\right)}{-\sin\frac{3}{2}\pi t}\times\frac{\sin\frac{3}{2}\pi t}{\frac{3}{2}\pi t}\times\frac{-\frac{3}{2}\pi}{t-2}$$

$$=1\times1\times\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{4}\pi$$

답 $\frac{3}{4}\pi$

0417

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x-\pi}{\cos x}=\lim_{t\to0}\frac{2t}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}=\lim_{t\to0}\frac{2t}{-\sin t}$$

$$=-2\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}=-2\times1=-2$$

답 -2

0418

$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{3x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$$

이때, $x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{3}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{2\sin t}{3t}=\frac{2}{3}\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=\frac{2}{3}\times1=\frac{2}{3}$$

따라서 $p=3,\ q=2$이므로 $p+q=5$ 답 5

0419

$$f(x)f(-x)=\frac{1+\sin 3x}{1+\sin x}\times\frac{1+\sin(-3x)}{1+\sin(-x)}$$

$$=\frac{1+\sin 3x}{1+\sin x}\times\frac{1-\sin 3x}{1-\sin x}$$

$$=\frac{1-\sin^2 3x}{1-\sin^2 x}=\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$$

$$=\left(\frac{\cos 3x}{\cos x}\right)^2$$

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)f(-x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos 3x}{\cos x}\right)^2$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+3t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}\right\}^2$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin 3t}{-\sin t}\right)^2=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin 3t}{\sin t}\right)^2$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin 3t}{3t}\times\frac{t}{\sin t}\times 3\right)^2$$
$$=(1\times 1\times 3)^2=9$$

답 ③

0420

|전략| $\frac{1}{x}=t$로 놓은 다음 $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$임을 이용한다.

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{t}{2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\times\frac{1}{2}$$
$$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0421

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty} x^\circ\tan\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{180}x\tan\frac{1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\pi}{180}\times\frac{\tan t}{t}$$
$$=\frac{\pi}{180}\times 1=\frac{\pi}{180}$$

답 ③

0422

$\frac{3}{x-2}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{3}\tan\frac{3}{x-2}=\lim_{t\to 0}\frac{t+2}{t}\tan t$$
$$=\lim_{t\to 0}(t+2)\times\frac{\tan t}{t}$$
$$=2\times 1=2$$

답 ②

0423

|전략| $x\to 0$일 때 (분자) $\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to 0$임을 이용한다.

$x\to 0$일 때 (분자) $\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}\ln(x+b)=0$이므로

$\ln b=0$ $\quad\therefore b=1$

$b=1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\times\frac{x}{\ln(1+x)}\times a$$
$$=1\times 1\times a=a$$

즉, $a=2$

$\therefore a+b=2+1=3$

답 ③

0424

$x\to a$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to a}(3^x-1)=0$이므로

$3^a-1=0$ $\quad\therefore a=0$ $\quad$ ··· ❶

$a=0$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}\times\frac{x}{\sin x}\times\frac{1}{2}$$
$$=\ln 3\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln 3$$

즉, $b\ln 3=\frac{1}{2}\ln 3$에서 $b=\frac{1}{2}$ $\quad$ ··· ❷

$\therefore a-b=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ $\quad$ ··· ❸

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0425

$x\to\frac{\pi}{2}$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(ax+b)=0$이므로

$\frac{a}{2}\pi+b=0$ $\quad\therefore b=-\frac{a}{2}\pi$ $\quad$ ······ ㉠

$b=-\frac{a}{2}\pi$를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax-\frac{a}{2}\pi}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos x}$$

이때, $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{at}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}=-\lim_{t\to 0}\frac{at}{\sin t}$$
$$=-a\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=-a\times 1=-a$$

즉, $-a=3$에서 $a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore ab=-3\times\frac{3}{2}\pi=-\frac{9}{2}\pi$

답 $-\frac{9}{2}\pi$

0426

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^a+1)}{(1-\cos x)\tan bx}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^a+1)\times(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)\tan bx}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^a+1)\times(1+\cos x)}{\sin^2 x\tan bx}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^a+1)}{x^a}\times\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\times\frac{bx}{\tan bx}\times\frac{1+\cos x}{b}\times\frac{x^a}{x^3}$$
$$=1\times 1^2\times 1\times\frac{2}{b}\times\lim_{x\to 0}\frac{x^a}{x^3}=\frac{2}{b}\lim_{x\to 0}\frac{x^a}{x^3}\quad\cdots\cdots ㉠$$

이때, ㉠이 0이 아닌 값에 수렴하므로 분자, 분모의 차수가 같아야 한다. 즉, $a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $\frac{2}{b}\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x^3}=\frac{2}{b}\times1=\frac{2}{b}$

즉, $\frac{2}{b}=\frac{1}{4}$이므로 $b=8$

$\therefore a+b=3+8=11$

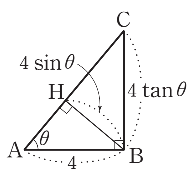
답 11

0427

|전략| $\overline{BC}=4\tan\theta$, $\overline{BH}=4\sin\theta$와 삼각함수의 극한을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

오른쪽 그림의 △ABC에서

$\overline{BC}=4\tan\theta$, $\overline{BH}=4\sin\theta$



$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{BC}-\overline{BH}}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\tan\theta-4\sin\theta}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-4\sin\theta}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\times\frac{\sin\theta-\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}}{\theta^3}$$
$$=4\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3\cos\theta}$$
$$=4\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^3\cos\theta(1+\cos\theta)}$$
$$=4\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^3\theta}{\theta^3\cos\theta(1+\cos\theta)}$$
$$=4\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\times\frac{1}{\cos\theta(1+\cos\theta)}$$
$$=4\times1^3\times\frac{1}{2}=2$$

답 2

0428

$\overline{OH}=\overline{OA}\cos\theta=\cos\theta$이므로

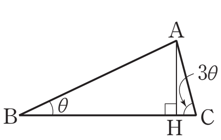
$\overline{BH}=1-\cos\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{BH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos\theta}$$
$$=1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0429

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AB}=\frac{\overline{AH}}{\sin\theta}$, $\overline{AC}=\frac{\overline{AH}}{\sin3\theta}$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\overline{AH}}{\sin3\theta}}{\frac{\overline{AH}}{\sin\theta}}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{3\theta}{\sin3\theta}\times\frac{1}{3}$$
$$=1\times1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

0430

△OAQ에서 $\overline{OA}=\overline{OQ}\cos\theta=2\cos\theta$이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times2^2\times\theta-\frac{1}{2}\times4\cos^2\theta\times\theta$$
$$=2\theta(1-\cos^2\theta)=2\theta\sin^2\theta$$
$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\theta\sin^2\theta}{\theta^3}$$
$$=2\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2=2\times1^2=2$$

답 2

0431

$\overline{OP}=a$에서 $\overline{OB}=a\cos\theta$, $\overline{PB}=a\sin\theta$이므로

$$(\triangle\text{OBP의 넓이})=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{PB}$$
$$=\frac{1}{2}\times a\cos\theta\times a\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}a^2\sin\theta\cos\theta$$

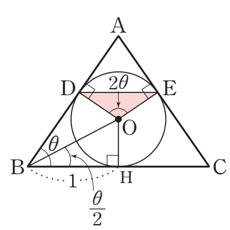
$$(\text{부채꼴 OPA의 넓이})=\frac{1}{2}a^2\theta$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{(\text{부채꼴 OPA의 넓이})}{(\triangle\text{OBP의 넓이})}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}a^2\theta}{\frac{1}{2}a^2\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta}{\sin\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}$$
$$=1\times\frac{1}{1}=1$$

답 1

0432

오른쪽 그림의 △ABC에서



$\angle B=\angle C=\theta$이므로

$\angle A=\pi-2\theta$

□ADOE에서

$\angle ADO=\angle AEO=\frac{\pi}{2}$이므로

$\angle DOE=\pi-\angle DAE=\pi-(\pi-2\theta)=2\theta$

점 O에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고 선분 OB를 그으면

$\angle OBH=\frac{\theta}{2}$, $\overline{BH}=1$이므로

△ODB≡△OHB이므로

$\angle OBH=\frac{1}{2}\angle DBH=\frac{\theta}{2}$

$\overline{OH}=\overline{BH}\tan\frac{\theta}{2}$

$=1\times\tan\frac{\theta}{2}=\tan\frac{\theta}{2}$

즉, 내접원의 반지름의 길이가 $\tan\frac{\theta}{2}$이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{OD}\times\overline{OE}\times\sin 2\theta=\frac{1}{2}\tan^2\frac{\theta}{2}\sin 2\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{1}{2}\tan^2\frac{\theta}{2}\sin 2\theta}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{1}{4}\times\frac{\sin 2\theta}{2\theta}$$

$$=1^2\times\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

0433

| 전략 | 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이면 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{\sin 2(x-1)}{x-1}=k$

이때, $x-1=t$로 놓으면 $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin 2(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}\times 2$$

$$=1\times 2=2$$

$\therefore k=2$

답 ②

0434

함수 $f(x)$가 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}+b}{\tan x}=2$ ……㉠

$x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}(e^{ax}+b)=0$이므로

$1+b=0$ $\therefore b=-1$

$b=-1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}\times\frac{x}{\tan x}\times a$$

$$=1\times 1\times a=a$$

즉, $a=2$

$\therefore a+b=2+(-1)=1$

답 1

0435

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin 2x-a}{3x}=b$ ……㉠

$x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}(e^x-\sin 2x-a)=0$이므로

$1-0-a=0$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin 2x-1}{3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{3x}-\frac{\sin 2x}{3x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{3}-\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{2}{3}\right)$$

$$=1\times\frac{1}{3}-1\times\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$$

즉, $b=-\frac{1}{3}$

$\therefore a-b=1-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$

답 ④

0436

| 전략 | $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$임을 이용한다.

$f(x)=e^x\sin x$이므로

$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$

$\therefore f'(0)=e^0(\sin 0+\cos 0)=1$

답 ①

0437

$f(x)=3x\sin x+2\cos x$에서

$f'(x)=3\sin x+3x\cos x-2\sin x$

$=\sin x+3x\cos x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+3\times\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ③

0438

$f(x)=e^x\cos x$에서

$f'(x)=e^x\cos x+e^x(-\sin x)$

$=e^x(\cos x-\sin x)$ … ❶

$f'(x)=0$에서 $\cos x-\sin x=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore \cos x=\sin x$

이때, $0<x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$ … ❷

따라서 모든 x의 값의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$ … ❸

답 $\frac{3}{2}\pi$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0439

| 전략 | $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$임을 이용한다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(\pi+h)-f(\pi)\}-\{f(\pi-h)-f(\pi)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}$$
$$=f'(\pi)+f'(\pi)=2f'(\pi)$$

$f(x)=2x\cos x$에서 $f'(x)=2\cos x-2x\sin x$

따라서 $f'(\pi)=2\cos\pi-2\pi\sin\pi=-2$이므로

$2f'(\pi)=2\times(-2)=-4$ 답 -4

0440

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(\pi+2h)-f(\pi)\}-\{f(\pi-3h)-f(\pi)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)}{2h}\times 2+\frac{f(\pi-3h)-f(\pi)}{-3h}\times 3\right\}$$
$$=2f'(\pi)+3f'(\pi)=5f'(\pi)$$

$f(x)=x\sin x$에서 $f'(x)=\sin x+x\cos x$

따라서 $f'(\pi)=\sin\pi+\pi\cos\pi=-\pi$이므로

$5f'(\pi)=5\times(-\pi)=-5\pi$ 답 ⑤

0441

$\lim_{x\to\pi}\frac{2f(x)-1}{x-\pi}=3$에서 $x\to\pi$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to\pi}\{2f(x)-1\}=0$이므로

$2f(\pi)-1=0$ $\quad\therefore f(\pi)=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{2f(x)-1}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{2f(x)-2f(\pi)}{x-\pi}$$
$$=2\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$$
$$=2f'(\pi)=3$$

$\therefore f'(\pi)=\frac{3}{2}$

$g(x)=-2f(x)\cos x$에서

$g'(x)=-2f'(x)\cos x-2f(x)(-\sin x)$

$\quad=-2f'(x)\cos x+2f(x)\sin x$

$\therefore g'(\pi)=-2f'(\pi)\cos\pi+2f(\pi)\sin\pi$

$\quad=-2\times\frac{3}{2}\times(-1)=3$ 답 3

0442

| 전략 | 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이므로 $b=1$

또, $f'(0)$이 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases}e^x(\cos x-\sin x) & (x>0)\\ 2x+a & (x<0)\end{cases}$$

에서 $\lim_{x\to 0+}e^x(\cos x-\sin x)=\lim_{x\to 0-}(2x+a)$

$\therefore a=1$

$\therefore ab=1\times 1=1$ 답 ①

0443

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이므로 $a=1$

또, $f'(0)$이 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x & (x>0)\\ b & (x<0)\end{cases}$$

에서 $\lim_{x\to 0+}\cos x=\lim_{x\to 0-}b$

$\therefore b=1$

$\therefore a+b=1+1=2$ 답 2

다른 풀이 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\sin h}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{bh}{h}\qquad\therefore b=1$$

$\therefore a+b=1+1=2$

0444

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=0$에서도 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이므로 $b=-1$

또, $f'(0)$이 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x+\sin x & (x>0)\\ a & (x<0)\end{cases}$$

에서 $\lim_{x\to 0+}(\cos x+\sin x)=\lim_{x\to 0-}a$

$\therefore a=1$

$\therefore a+b=1+(-1)=0$ 답 0

4 삼각함수의 미분

STEP 3 내신 마스터

0445

유형 01 삼각함수의 덧셈정리

|전략| 주어진 식의 양변을 각각 제곱한 후 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$임을 이용한다.

$\sin\alpha+\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$의 양변을 각각 제곱하면

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$2+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=\frac{3}{4}$$

$$2+2\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{4} \qquad \therefore \sin(\alpha+\beta)=-\frac{5}{8}$$

답 ①

0446

유형 02 삼각함수의 덧셈정리 – 방정식에의 활용

|전략| 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=4$, $\tan\alpha\tan\beta=2$

$$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4}{1-2}=-4$$

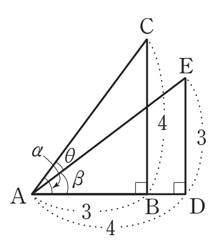
답 ①

0447

유형 04 삼각함수의 덧셈정리 – 도형에의 활용

|전략| $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$임을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 $\angle CAB=\alpha$, $\angle EAD=\beta$라 하면



$\tan\alpha=\frac{4}{3}$, $\tan\beta=\frac{3}{4}$이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}{1+\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}}=\frac{7}{24}$$

$$\therefore 48\tan\theta=48\times\frac{7}{24}=14$$

답 ⑤

0448

유형 01 삼각함수의 덧셈정리 + 05 삼각함수의 합성

|전략| $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$와 삼각함수의 합성을 이용한다.

$$f(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+3\sin x$$
$$=2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}\right)+3\sin x$$
$$=\sqrt{3}\cos x+\sin x+3\sin x$$
$$=\sqrt{3}\cos x+4\sin x$$
$$=\sqrt{19}\left(\sin x\times\frac{4}{\sqrt{19}}+\cos x\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\right)$$
$$=\sqrt{19}\sin(x+\alpha)\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}},\ \cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{19}}\right)$$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{19}$이다.

답 ④

0449

유형 05 삼각함수의 합성

|전략| $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$임을 이용한다.

$$\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)$$
$$=2\left(\sin\frac{2}{3}\pi\cos\theta+\cos\frac{2}{3}\pi\sin\theta\right)$$
$$=2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{4}$$

이때, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{2}{3}\pi<\theta+\frac{2}{3}\pi<\frac{7}{6}\pi$이므로

$$\cos\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)<0$$

$$\therefore \cos\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)}$$
$$=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=-\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$\therefore \sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

$$=2\left(\sin\theta\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\theta\times\frac{1}{2}\right)=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=2\sin\left\{-\left(\frac{\pi}{2}-\theta-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}=-2\sin\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$$
$$=-2\cos\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=-2\times\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

답 ④

0450

유형 05 삼각함수의 합성

|전략| 지름에 대한 원주각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$임을 이용한다.

$\triangle ABP$는 $\angle P$가 직각인 직각삼각형이므로 $\angle PAB=\theta$라 하면

$\overline{AP}=a\cos\theta$, $\overline{BP}=a\sin\theta$

$$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}=a(\cos\theta+\sin\theta)$$
$$=\sqrt{2}a\left(\sin\theta\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\sqrt{2}a\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi$이므로 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$

$\overline{AP}+\overline{BP}$는 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$, 즉 $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$일 때 최댓값 $\sqrt{2}a$를 갖고, 이때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로 $\overline{AP}=a\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

따라서 구하는 값은

$\sqrt{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$ 답 ③

0451

유형 **06** 배각의 공식

| 전략 | $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$임을 이용한다.

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$

$\therefore \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{3}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}$ 답 ①

0452

유형 **07** 배각의 공식 – 도형에의 활용

| 전략 | $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$임을 이용한다.

한 원에서 호 AB에 대한 중심각 $\angle AOB$의 크기는 원주각 $\angle ACB$의 크기 θ의 2배이므로 $\angle AOB=2\theta$ $\therefore \alpha=2\theta$

이때, $\triangle ABC$의 넓이가 10이므로

$\frac{1}{2}\times 10\times 8\times\sin\theta=10$ $\therefore \sin\theta=\frac{1}{4}$

또, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\therefore \sin\alpha=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{8}$ 답 ①

0453

유형 **09** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$을 이용한 함수의 극한

| 전략 | 분자를 인수분해한 후 분모, 분자에 $1+\cos x$를 각각 곱한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x+2\cos x-5}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(3\cos x+5)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)(1+\cos x)(3\cos x+5)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x(3\cos x+5)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{3\cos x+5}{1+\cos x}$$
$$=-1^2\times\frac{8}{2}=-4$$
답 ①

0454

유형 **09** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$을 이용한 함수의 극한 + **10** $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$을 이용한 함수의 극한

| 전략 | $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{\tan bx}{bx}=1$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{2x}\times\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{2}{3}$$
$$=1\times 1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$
답 ②

0455

유형 **15** 삼각함수의 연속

| 전략 | 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2\sin x}=a$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{x}{\sin x}=1\times 1=1$$

$\therefore a=1$ 답 ④

0456

유형 **05** 삼각함수의 합성 + **16** 사인함수와 코사인함수의 도함수

| 전략 | 함수 $f(x)$를 미분한 다음 삼각함수의 합성을 이용하여 a의 값을 구한다.

$$f'(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x+1$$
$$=2\left(\sin x\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\times\frac{1}{2}\right)+1=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$$

$f'(a)=\sqrt{2}+1$에서

$2\sin\left(a+\frac{\pi}{6}\right)+1=\sqrt{2}+1$ $\therefore \sin\left(a+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때, $0<a<\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{6}<a+\frac{\pi}{6}<\frac{2}{3}\pi$이므로

$a+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$ $\therefore a=\frac{\pi}{12}$ 답 ①

0457

유형 **17** 사인함수와 코사인함수의 도함수 – 미분계수를 이용한 극한값의 계산

| 전략 | $\lim_{x\to 0}\frac{f(x+a)-f(a)}{x}=f'(a)$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+a)-f(a)}{x}=f'(a)$$

$f(x)=\sin x\cos x$에서

$f'(x)=\cos x\cos x+\sin x\times(-\sin x)=\cos^2 x-\sin^2 x$

$\therefore f'(a)=\cos^2 a-\sin^2 a$

이때, $f'(a)=0$에서 $\cos^2 a=\sin^2 a$

그런데 $0<a<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin a>0$, $\cos a>0$이므로

$\cos a=\sin a$ $\therefore a=\frac{\pi}{4}$ 답 ⑤

4 삼각함수의 미분

0458

유형 01 삼각함수의 덧셈정리

|전략| $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$임을 이용한다.

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$g\left(\frac{8}{17}\right)=\alpha$에서 $f(\alpha)=\frac{8}{17}$, 즉 $\cos\alpha=\frac{8}{17}$

$g\left(\frac{15}{17}\right)=\beta$에서 $f(\beta)=\frac{15}{17}$, 즉 $\cos\beta=\frac{15}{17}$ … ❶

이때, $0<x<\pi$에서 $\sin\alpha>0$, $\sin\beta>0$이므로

$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}=\frac{15}{17}$, $\sin\beta=\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}=\frac{8}{17}$ … ❷

$$\begin{aligned}\therefore f(\alpha+\beta)&=\cos(\alpha+\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\&=\frac{8}{17}\times\frac{15}{17}-\frac{15}{17}\times\frac{8}{17}=0\end{aligned}$$ … ❸

답 0

채점 기준	배점
❶ $\cos\alpha$, $\cos\beta$의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ $\sin\alpha$, $\sin\beta$의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $f(\alpha+\beta)$의 값을 구할 수 있다.	2점

Lecture

함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$에 대하여
$f(a)=b \Longleftrightarrow g(b)=a$

0459

유형 09 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$을 이용한 함수의 극한

|전략| $\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}=1$임을 이용한다.

$$\begin{aligned}f(n)&=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx}{x}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{2x}\times2+\frac{\sin 3x}{3x}\times3+\cdots+\frac{\sin nx}{nx}\times n}\\&=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\\&=\frac{2}{n(n+1)}\end{aligned}$$ … ❶

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}f(n)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=2\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2\times1=2\end{aligned}$$ … ❷

답 2

채점 기준	배점
❶ $f(n)$을 n에 관한 식으로 간단히 나타낼 수 있다.	4점
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$의 값을 구할 수 있다.	3점

참고 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

0460

유형 18 사인함수와 코사인함수의 도함수 – 미분가능성

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로 $3a=b$ …… ㉠ … ❶

또, $f'(0)$이 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases}3ae^x & (x>0)\\ \cos x & (x<0)\end{cases}$$

에서 $\lim_{x\to0+}3ae^x=\lim_{x\to0-}\cos x$

$3a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$ … ❷

$a=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $b=1$ … ❸

$\therefore a+b=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$ … ❹

답 $\frac{4}{3}$

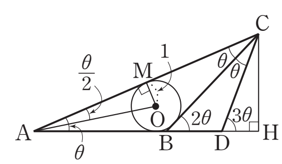
채점 기준	배점
❶ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	2점
❷ a의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ b의 값을 구할 수 있다.	1점
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	1점

0461

유형 14 삼각함수의 극한 – 도형에의 활용

|전략| $\overline{AC}$를 삼각함수를 이용하여 나타낸 다음 $S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{DC}\times\sin\theta$임을 이용한다.

(1) 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O, 원과 $\overline{AC}$가 만나는 점을 M이라 하고, 선분 AO를 그으면 점 O는 삼각형 ABC의 내심이므로



$\angle\text{MAO}=\frac{1}{2}\angle\text{CAB}=\frac{\theta}{2}$

$\angle\text{CBD}=\angle\text{CAB}+\angle\text{BCA}=\theta+\theta=2\theta$

또, 점 C에서 선분 AD의 연장선 위에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle\text{CDH}=\angle\text{CBD}+\angle\text{BCD}=2\theta+\theta=3\theta$

$\triangle\text{AOM}$에서 $\angle\text{MAO}=\frac{\theta}{2}$이므로

$\overline{AM}=\frac{\overline{OM}}{\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$ $\quad\therefore \overline{AC}=2\overline{AM}=\frac{2}{\tan\frac{\theta}{2}}$

(2) $\triangle$CAH에서 $\angle$CAH$=\theta$이므로

$$\overline{CH}=\overline{AC}\sin\theta=\frac{2}{\tan\frac{\theta}{2}}\times\sin\theta=\frac{2\sin\theta}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

$\triangle$CBH에서 $\angle$CBH$=2\theta$이므로

$$\overline{BC}=\frac{\overline{CH}}{\sin 2\theta}=\frac{2\sin\theta}{\tan\frac{\theta}{2}}\times\frac{1}{\sin 2\theta}=\frac{2\sin\theta}{\tan\frac{\theta}{2}\sin 2\theta}$$

$\triangle$CDH에서 $\angle$CDH$=3\theta$이므로

$$\overline{DC}=\frac{\overline{CH}}{\sin 3\theta}=\frac{2\sin\theta}{\tan\frac{\theta}{2}}\times\frac{1}{\sin 3\theta}=\frac{2\sin\theta}{\tan\frac{\theta}{2}\sin 3\theta}$$

$$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{DC}\times\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sin\theta}{\tan\frac{\theta}{2}\sin 2\theta}\times\frac{2\sin\theta}{\tan\frac{\theta}{2}\sin 3\theta}\times\sin\theta$$

$$=\frac{2\sin^3\theta}{\tan^2\frac{\theta}{2}\sin 2\theta\sin 3\theta}$$

(3) $\lim_{\theta\to 0+}\theta S(\theta)$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\theta\times\frac{2\sin^3\theta}{\tan^2\frac{\theta}{2}\sin 2\theta\sin 3\theta}$$

$$=2\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\times\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{2\theta}{\sin 2\theta}\times\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{4}{6}$$

$$=2\times1^3\times1^2\times1\times1\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

답 (1) $\overline{AC}=\dfrac{2}{\tan\frac{\theta}{2}}$ (2) $S(\theta)=\dfrac{2\sin^3\theta}{\tan^2\frac{\theta}{2}\sin 2\theta\sin 3\theta}$ (3) $\dfrac{4}{3}$

채점 기준	배점
(1) $\overline{AC}$를 삼각함수를 이용하여 나타낼 수 있다.	4점
(2) $S(\theta)$를 삼각함수를 이용하여 나타낼 수 있다.	5점
(3) $\lim_{\theta\to 0+}\theta S(\theta)$의 값을 구할 수 있다.	3점

0462

유형 **17 사인함수와 코사인함수의 도함수 – 미분계수를 이용한 극한값의 계산**

| 전략 | $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$임을 이용한다.

(1) $f(x)=\lim_{t\to x}\dfrac{t\sin x-x\sin t}{t-x}$

$$=\lim_{t\to x}\frac{t\sin x-x\sin x+x\sin x-x\sin t}{t-x}$$

$$=\lim_{t\to x}\left\{\frac{(t-x)\sin x}{t-x}-\frac{x(\sin t-\sin x)}{t-x}\right\}$$

$$=\lim_{t\to x}\left(\sin x-x\times\frac{\sin t-\sin x}{t-x}\right)$$

$g(t)=\sin t$로 놓으면

$$f(x)=\lim_{t\to x}\left\{\sin x-x\times\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right\}$$

$$=\sin x-xg'(x)=\sin x-x\cos x$$

(2) $f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$

(3) $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$

답 (1) $f(x)=\sin x-x\cos x$ (2) $f'(x)=x\sin x$ (3) $\dfrac{\pi}{12}$

채점 기준	배점
(1) $f(x)$를 간단히 할 수 있다.	5점
(2) $f'(x)$를 구할 수 있다.	3점
(3) $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값을 구할 수 있다.	2점

다른 풀이 (1) $f(x)=\lim_{t\to x}\left(\sin x-x\times\dfrac{\sin t-\sin x}{t-x}\right)$에서

$t-x=a$로 놓으면 $t\to x$일 때 $a\to 0$이므로

$$\lim_{t\to x}\frac{\sin t-\sin x}{t-x}=\lim_{a\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin x}{a}$$

$g(x)=\sin x$로 놓으면

$$\lim_{a\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin x}{a}=\lim_{a\to 0}\frac{g(x+a)-g(x)}{a}=g'(x)=\cos x$$

$\therefore f(x)=\sin x-x\cos x$

창의·융합 교과서 속 심화문제

0463

| 전략 | 삼각함수의 합성, 배각의 공식 등을 이용하여 주어진 함수를 최댓값, 최솟값, 주기를 판단하기 쉬운 꼴로 변형한다.

ㄱ. $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{3\sin x}{4\cos x}=\dfrac{3}{4}\tan x$

이므로 함수 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 주기는 π이다. (참)

ㄴ. $y=f(x)+g(x)+2=3\sin x+4\cos x+2$

$$=5\left(\sin x\times\frac{3}{5}+\cos x\times\frac{4}{5}\right)+2$$

$$=5\sin(x+\alpha)+2\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{4}{5},\ \cos\alpha=\frac{3}{5}\right)$$

이때, $-1\le\sin(x+\alpha)\le1$이므로

$-3\le5\sin(x+\alpha)+2\le7$

그러므로 함수 $y=f(x)+g(x)+2$의 최솟값은 -3이다. (거짓)

ㄷ. $y=f(x)g(x)=3\sin x\times4\cos x=6\sin 2x$

함수 $y=f(\pi x)g(\pi x)=6\sin 2\pi x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{2\pi}=1$이므로

$y=|f(\pi x)g(\pi x)|=|6\sin 2\pi x|$의 주기는 $\dfrac{1}{2}$

이때, $0\le|6\sin 2\pi x|\le6$이므로 $y=|f(\pi x)g(\pi x)|$의 최댓값은 6이다.

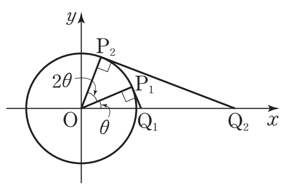
그러므로 함수 $y=|f(\pi x)g(\pi x)|$의 주기와 최댓값의 곱은

$\frac{1}{2}\times 6=3$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0464

| 전략 | 삼각함수의 덧셈정리와 배각의 공식을 이용하여 삼각형 OP_2Q_2의 넓이를 A를 사용하여 나타낸다.



오른쪽 그림에서

$\angle OP_1Q_1=\angle OP_2Q_2=90^\circ$

이므로 직각삼각형 OP_1Q_1의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{OP_1}\times\overline{P_1Q_1}=\frac{1}{2}\times 1\times\tan\theta=\frac{1}{2}\tan\theta$$

따라서 $\frac{1}{2}\tan\theta=A$에서 $\tan\theta=2A$

직각삼각형 OP_2Q_2의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{OP_2}\times\overline{P_2Q_2}=\frac{1}{2}\times 1\times\tan 3\theta=\frac{1}{2}\tan 3\theta$$

이때,

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times 2A}{1-(2A)^2}=\frac{4A}{1-4A^2}$$

이므로

$$\tan 3\theta=\tan(2\theta+\theta)=\frac{\tan 2\theta+\tan\theta}{1-\tan 2\theta\tan\theta}$$

$$=\frac{\frac{4A}{1-4A^2}+2A}{1-\frac{4A}{1-4A^2}\times 2A}=\frac{\frac{4A+2A-8A^3}{1-4A^2}}{\frac{1-4A^2-8A^2}{1-4A^2}}$$

$$=\frac{6A-8A^3}{1-12A^2}$$

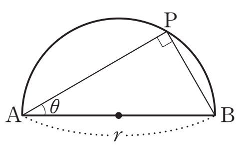
따라서 삼각형 OP_2Q_2의 넓이는

$$\frac{1}{2}\tan 3\theta=\frac{1}{2}\times\frac{6A-8A^3}{1-12A^2}=\frac{3A-4A^3}{1-12A^2}$$ 답 $\frac{3A-4A^3}{1-12A^2}$

0465

| 전략 | $\triangle APB$는 $\angle APB=90^\circ$인 직각삼각형이므로 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$를 삼각함수를 이용하여 나타낸 후 삼각함수의 합성을 이용하여 r의 최솟값을 구한다.

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 $\angle APB=90^\circ$



오른쪽 그림에서 $\angle PAB=\theta$라 하면

$\overline{AP}=r\cos\theta$, $\overline{BP}=r\sin\theta$

$\therefore a\overline{AP}+b\overline{BP}$

$=ar\cos\theta+br\sin\theta$

$=r\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta\right)$

$=r\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

이때, $-1\le\sin(\theta+\alpha)\le 1$이므로

$-r\sqrt{a^2+b^2}\le r\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)\le r\sqrt{a^2+b^2}$

이고, 최댓값이 $r\sqrt{a^2+b^2}=r^2$이므로 $a^2+b^2=r^2$

(i) $r=1, 2, 3, 4$인 경우

$a^2+b^2=r^2$을 만족시키는 순서쌍은

$(r, 0), (-r, 0), (0, r), (0, -r)$

의 4개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $r=5$인 경우

$a^2+b^2=5^2$을 만족시키는 순서쌍은

$(5, 0), (4, 3), (3, 4), (0, 5), (-5, 0), (-4, -3),$
$(-3, -4), (0, -5), (-4, 3), (-3, 4), (4, -3), (3, -4)$

의 12개이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 자연수 r의 최솟값은 5이다. 답 5

0466

| 전략 | $\overline{CH}=k$라 하고 $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$를 각각 k와 삼각함수를 이용하여 나타낸다.

직각삼각형 AHC에서 $\overline{CH}=k$라 하면 $\overline{AH}=k\tan 3\theta$

직각삼각형 ABH에서 $\overline{BH}=\frac{\overline{AH}}{\tan 2\theta}=\frac{k\tan 3\theta}{\tan 2\theta}$이므로

$$\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}=\frac{k\tan 3\theta}{\tan 2\theta}+k=k\left(1+\frac{\tan 3\theta}{\tan 2\theta}\right)$$

직각삼각형 BCD에서

$$\overline{BD}=\overline{BC}\cos\theta=k\left(1+\frac{\tan 3\theta}{\tan 2\theta}\right)\cos\theta$$

$$\overline{CD}=\overline{BC}\sin\theta=k\left(1+\frac{\tan 3\theta}{\tan 2\theta}\right)\sin\theta$$

이때,

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{BH}\times\overline{AH}$, $S_2=\frac{1}{2}\times\overline{CH}\times\overline{AH}$, $S_3=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{CD}$

이므로

$$\frac{S_1+S_3}{S_2}$$

$$=\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_3}{S_2}=\frac{\overline{BH}}{\overline{CH}}+\frac{\overline{BD}\times\overline{CD}}{\overline{CH}\times\overline{AH}}$$

$$=\frac{\frac{k\tan 3\theta}{\tan 2\theta}}{k}+\frac{k\left(1+\frac{\tan 3\theta}{\tan 2\theta}\right)\cos\theta\times k\left(1+\frac{\tan 3\theta}{\tan 2\theta}\right)\sin\theta}{k\times k\tan 3\theta}$$

$$=\frac{\tan 3\theta}{\tan 2\theta}+\frac{\left(1+\frac{\tan 3\theta}{\tan 2\theta}\right)^2\cos\theta\sin\theta}{\tan 3\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{S_1+S_3}{S_2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{\tan 3\theta}{\tan 2\theta}+\frac{\left(1+\frac{\tan 3\theta}{\tan 2\theta}\right)^2\cos\theta\sin\theta}{\tan 3\theta}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan 3\theta}{3\theta}\times\frac{2\theta}{\tan 2\theta}\times\frac{3}{2}+\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin 2\theta\left(1+\frac{\tan 3\theta}{\tan 2\theta}\right)^2}{2\tan 3\theta}$$

$$=1\times 1\times\frac{3}{2}$$

$$+\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{3}\times\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\times\frac{3\theta}{\tan 3\theta}\left(1+\frac{3}{2}\times\frac{2\theta}{\tan 2\theta}\times\frac{\tan 3\theta}{3\theta}\right)^2$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\times 1\times 1\times\left(1+\frac{3}{2}\times 1\times 1\right)^2=\frac{43}{12}$$ 답 $\frac{43}{12}$

본책 78~95쪽

5 | 여러 가지 미분법

STEP 1 개념 마스터

0467

$y'=-\dfrac{(x-1)'}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

답 $y'=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

0468

$y'=-\dfrac{(\ln x)'}{(\ln x)^2}=-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$

답 $y'=-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$

0469

$y'=\dfrac{(2x-1)'(x+2)-(2x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{5}{(x+2)^2}$

답 $y'=\dfrac{5}{(x+2)^2}$

0470

$y'=\dfrac{(x^2-2)'(2x+1)-(x^2-2)(2x+1)'}{(2x+1)^2}$

$=\dfrac{2x(2x+1)-(x^2-2)\times 2}{(2x+1)^2}$

$=\dfrac{2x^2+2x+4}{(2x+1)^2}$

답 $y'=\dfrac{2x^2+2x+4}{(2x+1)^2}$

0471

$y'=\dfrac{(x)'e^x-x(e^x)'}{(e^x)^2}=\dfrac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\dfrac{e^x(1-x)}{e^{2x}}=\dfrac{1-x}{e^x}$

답 $y'=\dfrac{1-x}{e^x}$

0472

$y'=\dfrac{(\sin x+1)'\cos x-(\sin x+1)(\cos x)'}{(\cos x)^2}$

$=\dfrac{\cos x\cos x-(\sin x+1)(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x+\sin x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x}$

답 $y'=\dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x}$

0473

$y'=3\times(-5)\times x^{-5-1}=-15x^{-6}=-\dfrac{15}{x^6}$

답 $y'=-\dfrac{15}{x^6}$

0474

$y=\dfrac{x^2+1}{x^4}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}=x^{-2}+x^{-4}$이므로

$y'=-2x^{-2-1}+(-4)\times x^{-4-1}=-2x^{-3}-4x^{-5}$

$=-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{4}{x^5}$

답 $y'=-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{4}{x^5}$

0475

$\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

(1) $\csc\theta=\dfrac{5}{4}$

(2) $\sec\theta=\dfrac{5}{-3}=-\dfrac{5}{3}$

(3) $\cot\theta=\dfrac{-3}{4}=-\dfrac{3}{4}$

답 (1) $\dfrac{5}{4}$ (2) $-\dfrac{5}{3}$ (3) $-\dfrac{3}{4}$

0476

(1) $\csc\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}}=2$

(2) $\sec\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$

(3) $\cot\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{1}{\tan\dfrac{2}{3}\pi}=\dfrac{1}{-\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

답 (1) 2 (2) $\sqrt{2}$ (3) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

0477

$\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

$\therefore \tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\dfrac{8}{3}$

답 $-\dfrac{8}{3}$

0478

$\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{1}{3}$이므로

$\csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{10}{9}$

답 $\dfrac{10}{9}$

0479 답 $y'=\sec^2 x-\sin x$

0480 답 $y'=\sec x\tan x-\csc x\cot x$

0481

$y'=(x)'\cot x+x(\cot x)'=\cot x+x(-\csc^2 x)$

$=\cot x-x\csc^2 x$ 답 $y'=\cot x-x\csc^2 x$

0482

$y'=3(2x-1)^2\times(2x-1)'=3(2x-1)^2\times 2$

$=6(2x-1)^2$ 답 $y'=6(2x-1)^2$

0483

$y=\dfrac{1}{(2-x)^3}=(2-x)^{-3}$이므로

$y'=-3(2-x)^{-4}\times(2-x)'=-3(2-x)^{-4}\times(-1)$

$=\dfrac{3}{(2-x)^4}$ 답 $y'=\dfrac{3}{(2-x)^4}$

0484

$y'=\{(3x+1)^2\}'(x^2-1)+(3x+1)^2(x^2-1)'$

$=2(3x+1)\times(3x+1)'\times(x^2-1)+(3x+1)^2\times 2x$

$=6(3x+1)(x^2-1)+2x(3x+1)^2$

$=2(3x+1)(6x^2+x-3)$ 답 $y'=2(3x+1)(6x^2+x-3)$

0485

$y'=\dfrac{(x-1)'(x^3+1)^2-(x-1)\{(x^3+1)^2\}'}{(x^3+1)^4}$

$=\dfrac{(x^3+1)^2-(x-1)\{2(x^3+1)\times(x^3+1)'\}}{(x^3+1)^4}$

$=\dfrac{(x^3+1)^2-(x-1)\times 6x^2(x^3+1)}{(x^3+1)^4}$

$=\dfrac{-5x^3+6x^2+1}{(x^3+1)^3}$ 답 $y'=\dfrac{-5x^3+6x^2+1}{(x^3+1)^3}$

0486

$y'=3\sin^2 x\times(\sin x)'=3\sin^2 x\cos x$ 답 $y'=3\sin^2 x\cos x$

Lecture

함수 $f(x)$가 미분가능할 때

(1) $y=\sin f(x) \Rightarrow y'=\cos f(x)\times f'(x)$

(2) $y=\cos f(x) \Rightarrow y'=-\sin f(x)\times f'(x)$

(3) $y=\sin^n f(x) \Rightarrow y'=n\sin^{n-1} f(x)\times\cos f(x)\times f'(x)$

(4) $y=\cos^n f(x) \Rightarrow y'=n\cos^{n-1} f(x)\times\{-\sin f(x)\}\times f'(x)$

(단, n은 정수)

0487

$y'=-\sin(2x+3)\times(2x+3)'=-2\sin(2x+3)$

답 $y'=-2\sin(2x+3)$

0488

$y'=-\csc^2 x^2\times(x^2)'=-2x\csc^2 x^2$ 답 $y'=-2x\csc^2 x^2$

0489

$y'=\cos(\tan x)\times(\tan x)'=\cos(\tan x)\sec^2 x$

답 $y'=\cos(\tan x)\sec^2 x$

0490

$y'=e^{x^2-x}\times(x^2-x)'=(2x-1)e^{x^2-x}$ 답 $y'=(2x-1)e^{x^2-x}$

0491

$y'=5^{5x+1}\ln 5\times(5x+1)'=5^{5x+2}\ln 5$ 답 $y'=5^{5x+2}\ln 5$

0492

$y'=2^{\cos x}\ln 2\times(\cos x)'=-2^{\cos x}\ln 2\times\sin x$

답 $y'=-2^{\cos x}\ln 2\times\sin x$

0493

$y'=(x)'\ln|x|+x(\ln|x|)'$

$=\ln|x|+x\times\dfrac{1}{x}=\ln|x|+1$ 답 $y'=\ln|x|+1$

0494

$y'=\dfrac{(3x+1)'}{(3x+1)\ln 2}=\dfrac{3}{(3x+1)\ln 2}$ 답 $y'=\dfrac{3}{(3x+1)\ln 2}$

0495

$y'=\dfrac{(e^x+1)'}{e^x+1}=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ 답 $y'=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

0496

$y'=\dfrac{(\sin x)'}{\sin x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$ 답 $y'=\cot x$

0497

$\dfrac{dx}{dt}=3$, $\dfrac{dy}{dt}=4t$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{4t}{3}=\dfrac{4}{3}t$ 답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{3}t$

0498

$\dfrac{dx}{dt}=2t$, $\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{t^2}$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-\frac{1}{t^2}}{2t}=-\dfrac{1}{2t^3}$ 답 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2t^3}$

0499

$\dfrac{dx}{dt}=e^{t+1}$, $\dfrac{dy}{dt}=2e^{2t+3}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2e^{2t+3}}{e^{t+1}}=2e^{t+2}$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=2e^{t+2}$

0500

$\dfrac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=\sin\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

0501

$(x+1)^2+(y-3)^2=2$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2(x+1)+2(y-3)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x+1}{y-3}\ (y\neq3)$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x+1}{y-3}\ (y\neq3)$

0502

$xy=4$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$y+x\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$

0503

$x^2-y^3+3x^2y-1=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2x-3y^2\frac{dy}{dx}+6xy+3x^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$(3x^2-3y^2)\frac{dy}{dx}=-2x-6xy$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+6xy}{3x^2-3y^2}\ (x^2\neq y^2)$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+6xy}{3x^2-3y^2}\ (x^2\neq y^2)$

0504

$\sin x+\cos y=1$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\cos x-\sin y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{\sin y}\ (\sin y\neq0)$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos x}{\sin y}\ (\sin y\neq0)$

0505

$y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}=x^{-\frac{1}{5}}$이므로

$$y'=-\frac{1}{5}x^{-\frac{1}{5}-1}=-\frac{1}{5}x^{-\frac{6}{5}}=-\frac{1}{5x\sqrt[5]{x}}$$

답 $y'=-\dfrac{1}{5x\sqrt[5]{x}}$

0506

$y=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$이므로

$$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{x}}{2}$$

답 $y'=\dfrac{3\sqrt{x}}{2}$

0507 답 $y'=\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$

0508

$$y'=-ex^{-e-1}=-\frac{e}{x^{e+1}}$$

답 $y'=-\dfrac{e}{x^{e+1}}$

0509

$y=\sqrt{1-x^2}=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$이므로

$$y'=\frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\times(1-x^2)'$$

$$=\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\times(-2x)$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

답 $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

0510

$y=\sqrt[3]{2x-5}=(2x-5)^{\frac{1}{3}}$이므로

$$y'=\frac{1}{3}(2x-5)^{\frac{1}{3}-1}\times(2x-5)'$$

$$=\frac{1}{3}(2x-5)^{-\frac{2}{3}}\times2$$

$$=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-5)^2}}$$

답 $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x-5)^2}}$

0511

$x=y^3$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=3y^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$x=y^3$에서 $y=\sqrt[3]{x}$이므로 $3y^2=3(\sqrt[3]{x})^2$

답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

0512

$y=\sqrt[6]{x}$에서 $x=y^6$이므로 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=6y^5$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{6y^5}=\frac{1}{6(\sqrt[6]{x})^5}=\frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$

0513

$y=\sqrt[3]{x-3}$에서 $x=y^3+3$이므로 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=3y^2$$

5 여러 가지 미분법

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{3y^2}=\dfrac{1}{3(\sqrt[3]{x-3})^2}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}$

답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}$

0514

$y'=12x^2+2$이므로

$y''=24x$ 답 $y''=24x$

0515

$y'=-\dfrac{1}{x^2}$이므로

$y''=-\left(-\dfrac{2x}{x^4}\right)=\dfrac{2}{x^3}$ 답 $y''=\dfrac{2}{x^3}$

다른 풀이 $y=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$에서 $y'=-x^{-2}$이므로

$y''=2x^{-3}=\dfrac{2}{x^3}$

0516

$y=\sqrt{x+1}=(x+1)^{\frac{1}{2}}$에서

$y'=\dfrac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$y''=-\dfrac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{4(x+1)\sqrt{x+1}}$

답 $y''=-\dfrac{1}{4(x+1)\sqrt{x+1}}$

0517

$y'=-2e^{-2x}$이므로

$y''=4e^{-2x}$ 답 $y''=4e^{-2x}$

0518

$y'=\dfrac{5}{5x}=\dfrac{1}{x}$이므로

$y''=-\dfrac{1}{x^2}$ 답 $y''=-\dfrac{1}{x^2}$

0519

$y'=3\cos 3x$이므로

$y''=-9\sin 3x$ 답 $y''=-9\sin 3x$

0520

$y'=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1$이므로

$y''=\dfrac{1}{x}$ 답 $y''=\dfrac{1}{x}$

0521

$y'=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=e^x(\cos x-\sin x)$이므로

$y''=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)$

$=-2e^x\sin x$ 답 $y''=-2e^x\sin x$

STEP 2 유형 마스터

0522

|전략| 함수 $g(x)(g(x)\neq 0)$가 미분가능할 때, $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$임을 이용한다.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$

$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$에서 $f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$\therefore 2f'(1)=2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$ 답 ①

0523

$f(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$에서 $f'(x)=-\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$

$\therefore f'(\ln 2)=-\dfrac{e^{\ln 2}}{(e^{\ln 2}-1)^2}=-\dfrac{2}{(2-1)^2}=-2$ 답 ④

0524

$f(1)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\left\{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\dfrac{1}{x+1}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}f'(1)$

$f(x)=-\dfrac{2}{x^2-3}$에서 $f'(x)=-\left\{-\dfrac{2\times 2x}{(x^2-3)^2}\right\}=\dfrac{4x}{(x^2-3)^2}$

$\therefore \dfrac{1}{2}f'(1)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{(1-3)^2}=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

0525

|전략| 두 함수 $f(x), g(x)\,(g(x)\neq 0)$가 미분가능할 때,

$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$임을 이용한다.

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+x+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{a(x^2+x+1)-(ax+b)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$f'(0)=-3$에서 $a-b=-3$ …… ㉠

$f'(-1)=1$에서 $a+(-a+b)=1$ $\therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $a=-2$

$\therefore a+b=-1$ 답 -1

0526

$f(x)=\dfrac{x}{g(x)+3}$에서 $f'(x)=\dfrac{g(x)+3-xg'(x)}{\{g(x)+3\}^2}$

$f'(0)=1$에서 $\dfrac{g(0)+3}{\{g(0)+3\}^2}=1$

$\dfrac{1}{g(0)+3}=1,\ g(0)+3=1 \qquad \therefore g(0)=-2$

답 ①

0527

$f(x)=\dfrac{x^2-3x+5}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{(2x-3)(x^2+1)-(x^2-3x+5)\times 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{(x-3)(3x+1)}{(x^2+1)^2}$ … ❶

이때, $(x^2+1)^2>0$이므로 $f'(x)\le 0$에서

$(x-3)(3x+1)\le 0 \qquad \therefore -\dfrac{1}{3}\le x\le 3$ … ❷

따라서 $f'(x)\le 0$을 만족시키는 정수 x는 0, 1, 2, 3의 4개이다. … ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $f'(x)\le 0$을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ $f'(x)\le 0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0528

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1-\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=2-\sqrt{3}$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{f(x)-2+\sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$f(x)=\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$에서

$f'(x)=\dfrac{(-\cos x)\cos x-(1-\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$

$=\dfrac{-\cos^2 x+\sin x-\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{\sin x-1}{\cos^2 x}$

$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}-1}{\cos^2\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{\frac{1}{4}}=2\sqrt{3}-4$

답 $2\sqrt{3}-4$

0529

| 전략 | n이 정수일 때, $(x^n)'=nx^{n-1}$임을 이용한다.

$f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{4}{x^5}=x^{-2}+2x^{-3}+3x^{-4}+4x^{-5}$에서

$f'(x)=-2x^{-3}+2\times(-3)x^{-4}+3\times(-4)x^{-5}+4\times(-5)x^{-6}$

$=-2x^{-3}-6x^{-4}-12x^{-5}-20x^{-6}$

$\therefore f'(1)=-2-6-12-20=-40$

답 ②

0530

$y=\dfrac{x^5-3x+1}{x^2}=x^3-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}=x^3-3x^{-1}+x^{-2}$에서

$y'=3x^2+3x^{-2}-2x^{-3}=3x^2+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$

답 $y'=3x^2+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$

다른 풀이 $y'=\dfrac{(5x^4-3)x^2-(x^5-3x+1)\times 2x}{x^4}$

$=\dfrac{3x^5+3x-2}{x^3}=3x^2+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$

0531

| 전략 | $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\ 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$임을 이용한다.

$\dfrac{\csc\theta}{\sec\theta-\tan\theta}+\dfrac{\csc\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$

$=\dfrac{\csc\theta(\sec\theta+\tan\theta)+\csc\theta(\sec\theta-\tan\theta)}{(\sec\theta-\tan\theta)(\sec\theta+\tan\theta)}$

$=\dfrac{2\csc\theta\sec\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로 $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$

$=2\csc\theta\sec\theta=\dfrac{2}{\sin\theta\cos\theta}$

이때, $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9} \qquad \therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4}{9}$

$\therefore \dfrac{2}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{2}{-\frac{4}{9}}=-\dfrac{9}{2}$

답 ①

0532

$(1+\tan\theta+\sec\theta)(1+\cot\theta-\csc\theta)$

$=\left(1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)\left(1+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}\right)$

$=\dfrac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}\times\dfrac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}$

$=\dfrac{(\cos\theta+\sin\theta)^2-1}{\cos\theta\sin\theta}$

$=\dfrac{\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta-1}{\cos\theta\sin\theta}$

$=\dfrac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta\sin\theta}=2$

답 ④

0533

$\sec^2\theta+\csc^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}+\dfrac{1}{\sin^2\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$

$=\dfrac{1}{(\cos\theta\sin\theta)^2}$

이때, $\tan\theta+\cot\theta=6$에서

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=6,\ \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=6$$

$$\therefore\ \frac{1}{\cos\theta\sin\theta}=6$$

$$\therefore\ \frac{1}{(\cos\theta\sin\theta)^2}=6^2=36$$

답 36

0534

$$\frac{1-\cot\theta}{1+\tan\theta}+\frac{1+\cot\theta}{1-\tan\theta}$$

$$=\frac{(1-\cot\theta)(1-\tan\theta)+(1+\cot\theta)(1+\tan\theta)}{(1+\tan\theta)(1-\tan\theta)}$$

$$=\frac{2+2\underline{\cot\theta\tan\theta}}{1-\tan^2\theta}$$

$\cot\theta\tan\theta=\frac{1}{\tan\theta}\times\tan\theta=1$

$$=\frac{4}{1-\tan^2\theta}$$

이때, $\sin\theta=-\frac{2}{3}$에서 $\sin^2\theta=\frac{4}{9}$

또, $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$이므로

$$\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}}=\frac{4}{5}$$

$$\therefore\ \frac{4}{1-\tan^2\theta}=\frac{4}{1-\frac{4}{5}}=20$$

답 20

0535

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sec\theta+\csc\theta=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}=a$에서

$$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta\sin\theta}=a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\sec\theta\csc\theta=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}=2$에서

$$\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{a}{2} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉢의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{a^2}{4}$$

$1+2\times\frac{1}{2}=\frac{a^2}{4},\ a^2=8 \qquad \therefore\ a=2\sqrt{2}\ (\because\ a$는 양수$)$

답 ④

0536

| 전략 | 주어진 함수를 간단히 한 후 $(\tan x)'=\sec^2 x$, $(\sec x)'=\sec x\tan x$임을 이용한다.

$\frac{\csc x}{\cot x}=\frac{1}{\sin x}\times\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}=\sec x$

$f(x)=\frac{1-\csc x}{\cot x}=\frac{1}{\cot x}-\frac{\csc x}{\cot x}=\tan x-\sec x$이므로

$f'(x)=\sec^2 x-\sec x\tan x=\sec x(\sec x-\tan x)$

$$\therefore\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sec\frac{\pi}{4}\left(\sec\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}-\tan\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$$

답 ①

0537

$$\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}=f'(\pi)$$

$f(x)=\sin x+\tan x$에서 $f'(x)=\cos x+\sec^2 x$이므로

$f'(\pi)=\cos\pi+\sec^2\pi=-1+(-1)^2=0$

답 ④

0538

$f(x)=\tan x$에서 $f'(x)=\sec^2 x$이므로

$f'(a)+f'(b)+f'(c)$

$=\sec^2 a+\sec^2 b+\sec^2 c$

$=(1+\tan^2 a)+(1+\tan^2 b)+(1+\tan^2 c)=3$

$\therefore\ \tan^2 a+\tan^2 b+\tan^2 c=0$

이때, $\tan^2 a\ge0,\ \tan^2 b\ge0,\ \tan^2 c\ge0$이므로

$\tan^2 a=\tan^2 b=\tan^2 c=0$

$\therefore\ \tan a=\tan b=\tan c=0$

$\therefore\ f(a)+f(b)+f(c)=\tan a+\tan b+\tan c=0$

답 ①

0539

| 전략 | 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $h(x)=f(g(x))$의 도함수는 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$임을 이용한다.

$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$$\therefore\ h'(0)=f'(g(0))g'(0)=f'(-1)g'(0) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때, $g'(x)=\frac{4(x+1)-(4x-1)}{(x+1)^2}=\frac{5}{(x+1)^2}$이므로

$g'(0)=5$

따라서 $h'(0)=15$, $g'(0)=5$를 ㉠에 대입하면

$5f'(-1)=15 \qquad \therefore\ f'(-1)=3$

답 3

0540

$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$$\therefore\ h'(1)=f'(g(1))g'(1)=f'(0)g'(1) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때, $f'(x)=\frac{x^2+1-x\times2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$이므로

$f'(0)=1$

$g'(x)=2x-5$이므로 $g'(1)=-3$
따라서 $f'(0)=1$, $g'(1)=-3$을 ㉠에 대입하면
$h'(1)=1\times(-3)=-3$ 답 ①

0541

$f(f(x))=g(x)$로 놓으면 $g(1)=f(f(1))=f(2)=2$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(f(x))-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$$

이때, $g'(x)=f'(f(x))f'(x)$이므로

$$g'(1)=f'(f(1))f'(1)=f'(2)f'(1)$$
$$=4\times3=12$$

답 12

0542

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+1}{x-2}=3$에서 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)+1\}=0$이므로 $f(2)=-1$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)+1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=3$ … ❶

또, $\lim_{x\to-1}\frac{g(x)-2}{x+1}=2$에서 $x\to-1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}\{g(x)-2\}=0$이므로 $g(-1)=2$

$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{g(x)-2}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=g'(-1)=2$ … ❷

이때, $y=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서 $y'=g'(f(x))f'(x)$
따라서 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는
$g'(f(2))f'(2)=g'(-1)f'(2)=2\times3=6$ … ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $f(2)$, $f'(2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $g(-1)$, $g'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 $x=2$에서의 미분계수를 구할 수 있다.	20 %

0543

| 전략 | 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, $\{f(ax+b)\}'=af'(ax+b)$임을 이용한다.

$f(x)=f(3x-1)$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=3f'(3x-1)$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f'(2)=3f'(5)$
$f'(2)=6$이므로 $3f'(5)=6$ $\quad\therefore f'(5)=2$
㉠의 양변에 $x=5$를 대입하면 $f'(5)=3f'(14)$
$f'(5)=2$이므로 $3f'(14)=2$ $\quad\therefore f'(14)=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0544

$f(-3x+2)=x^3-x^2+x+5$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$-3f'(-3x+2)=3x^2-2x+1$
위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$-3f'(5)=3+2+1=6$
$\therefore f'(5)=-2$ 답 ③

0545

$f(2x-3)=\sin2\pi x-\cos\pi x$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$2f'(2x-3)=2\pi\cos2\pi x+\pi\sin\pi x$
위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$2f'(-1)=2\pi\cos2\pi+\pi\sin\pi=2\pi$
$\therefore f'(-1)=\pi$ 답 ④

0546

| 전략 | 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, $[\{f(x)\}^n]'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$ (n은 정수)임을 이용한다.

$g(x)=\{f(x)+1\}^3$에서 $g'(x)=3\{f(x)+1\}^2f'(x)$
$\therefore g'(1)=3\{f(1)+1\}^2f'(1)$ …… ㉠
$f(x)=\frac{1}{2x-1}$에서 $f'(x)=-\frac{2}{(2x-1)^2}$ $\quad\therefore f'(1)=-2$
$f(1)=1$, $f'(1)=-2$를 ㉠에 대입하면
$g'(1)=3(1+1)^2\times(-2)=-24$ 답 -24

0547

$f(x)=\left(\frac{x+a}{2x+1}\right)^3$에서

$$f'(x)=3\left(\frac{x+a}{2x+1}\right)^2\left(\frac{x+a}{2x+1}\right)'$$
$$=3\left(\frac{x+a}{2x+1}\right)^2\times\frac{2x+1-(x+a)\times2}{(2x+1)^2}$$
$$=\frac{3(x+a)^2(1-2a)}{(2x+1)^4}$$

$f'(0)=-3$에서 $3a^2(1-2a)=-3$
$2a^3-a^2-1=0$, $(a-1)(2a^2+a+1)=0$
$\therefore a=1$ ($\because$ a는 정수) 답 ①

0548

$f(x)=\cos^3(2x-\pi)$에서
$f'(x)=3\cos^2(2x-\pi)\times\{-\sin(2x-\pi)\}\times2$
$\quad=-6\cos^2(2x-\pi)\sin(2x-\pi)$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-6\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=-6\cos^2\frac{\pi}{3}\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$\sin(-x)=-\sin x$
$\cos(-x)=\cos x$

답 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

0549

$y=\{x^2f(x)\}^2$에서
$y'=2\{x^2f(x)\}\{x^2f(x)\}'$
$\quad=2\{x^2f(x)\}\{2xf(x)+x^2f'(x)\}$

5 여러 가지 미분법

이므로 $x=1$에서의 미분계수는

$2\{1^2\times f(1)\}\{2\times1\times f(1)+1^2\times f'(1)\}=2\times1\times(2+2)=8$

답 ②

0550

|전략| 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, $\{a^{f(x)}\}'=a^{f(x)}\ln a\times f'(x)$임을 이용한다. (단, $a>0$, $a\neq1$)

$$\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)}{h}=2\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)}{2h}=2f'(\pi)$$

$f(x)=2^{\sin x}$에서

$f'(x)=2^{\sin x}\ln2\times(\sin x)'=2^{\sin x}\ln2\times\cos x$

$\therefore 2f'(\pi)=2\times2^{\sin\pi}\times\ln2\times\cos\pi=-2\ln2$

답 ①

0551

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^{2x}}$에서

$$f'(x)=\frac{2x\times e^{2x}-(x^2+1)\times2e^{2x}}{(e^{2x})^2}$$

$$=\frac{2e^{2x}(x-x^2-1)}{e^{4x}}=\frac{2(x-x^2-1)}{e^{2x}}$$

$\therefore f(1)-f'(1)=\dfrac{2}{e^2}-\dfrac{-2}{e^2}=\dfrac{4}{e^2}$

답 ⑤

0552

$h(x)=g(f(x))$로 놓으면 $h(x)=2e^{2\cos x}$이므로

$h\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2e^{2\cos\frac{\pi}{3}}=2e$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{g(f(x))-2e}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=h'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$h(x)=2e^{2\cos x}$에서

$h'(x)=2e^{2\cos x}\times(2\cos x)'=-4e^{2\cos x}\sin x$이므로

$$h'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-4e^{2\cos\frac{\pi}{3}}\times\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=-4e\times\frac{\sqrt3}{2}=-2\sqrt3e$$

답 $-2\sqrt3e$

0553

|전략| 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f(x)\neq0$일 때, $\{\ln|f(x)|\}'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$임을 이용한다.

$$y=\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac12\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$=\frac12\{\ln(1-\cos x)-\ln(1+\cos x)\}$$

$$\therefore y'=\frac12\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}-\frac{-\sin x}{1+\cos x}\right)$$

$$=\frac{\sin x(1+\cos x)+\sin x(1-\cos x)}{2(1-\cos^2x)}$$

$$=\frac{2\sin x}{2\sin^2x}=\frac{1}{\sin x}$$

따라서 $x=\dfrac{\pi}{6}$에서의 미분계수는 $\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=\dfrac{1}{\frac12}=2$

답 ⑤

0554

$$\log\{(x+1)f(x)\}=\log(x+4)+\log(x^3+1)$$

$$=\log(x+4)(x^3+1)$$

이므로

$(x+1)f(x)=(x+4)(x^3+1)$

$\therefore f(x)=(x+4)(x^2-x+1)\ (x\neq-1)$

$f'(x)=(x^2-x+1)+(x+4)(2x-1)$

$=(x^2-x+1)+(2x^2+7x-4)$

$=3(x^2+2x-1)$

$g(x)=\ln|f(x)|$에서

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3(x^2+2x-1)}{(x+4)(x^2-x+1)}$$

$\therefore g'(1)=\dfrac{3\times2}{5\times1}=\dfrac65$

답 $\dfrac65$

0555

$f(x)=\log_3(3x-1)^3=3\log_3(3x-1)$에서

$$f'(x)=3\times\frac{3}{(3x-1)\ln3}=\frac{9}{(3x-1)\ln3}$$

$f'(a)=\dfrac{3}{\ln3}$에서 $\dfrac{9}{(3a-1)\ln3}=\dfrac{3}{\ln3}$

$\dfrac{3}{3a-1}=1$, $3a-1=3$ $\quad\therefore a=\dfrac43$

답 $\dfrac43$

0556

$f(x)=\ln(x^2-1)$에서 $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$이므로

$f'(n)=\dfrac{2n}{n^2-1}$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{f'(n)}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac1n\times\frac{2n}{n^2-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{(n-1)(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac13\right)+\left(\frac12-\frac14\right)+\left(\frac13-\frac15\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac1n\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac12-\frac1n-\frac{1}{n+1}\right)=\frac32$$

답 $\dfrac32$

0557

|전략| 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

$f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{x^2(x-1)}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(x+1)^3}{x^2(x-1)}\right|$$

$$=3\ln|x+1|-2\ln|x|-\ln|x-1|$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}$$

$$\therefore f'(x)=f(x)\left(\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$f(2)=\frac{3^3}{2^2\times 1}=\frac{27}{4}$이므로

$f'(2)=\frac{27}{4}\times(1-1-1)=-\frac{27}{4}$ 답 ②

다른 풀이 함수의 몫의 미분법을 이용하면

$$f'(x)=\frac{3(x+1)^2\times x^2(x-1)-(x+1)^3\{2x(x-1)+x^2\}}{\{x^2(x-1)\}^2}$$

$$=\frac{x(x+1)^2\{3x(x-1)-(x+1)(3x-2)\}}{x^4(x-1)^2}$$

$$=\frac{2(x+1)^2(1-2x)}{x^3(x-1)^2}$$

$$\therefore f'(2)=\frac{2\times 3^2\times(-3)}{2^3\times 1^2}=-\frac{27}{4}$$

0558

$f(x)=\frac{(x-1)^2\sqrt{x+1}}{x+2}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(x-1)^2\sqrt{x+1}}{x+2}\right|$$

$\therefore \ln|f(x)|=2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\ln|x+2|$ … ❶

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x+2}$ … ❷

$\therefore g(0)=\frac{f'(0)}{f(0)}=-2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-2$ … ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	40 %
❷ $\frac{f'(x)}{f(x)}$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $g(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0559

$f(x)=x^x$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=x\ln x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$$

$\therefore f'(x)=f(x)(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$

$\therefore f'(e)=e^e(\ln e+1)=2e^e$ 답 ④

0560

$f(\pi)=\pi^{\sin\pi}=1$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-1}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)$$

$f(x)=x^{\sin x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln x^{\sin x}=\sin x\times\ln x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\cos x\times\ln x+\sin x\times\frac{1}{x}$$

$$\therefore f'(x)=f(x)\left(\cos x\times\ln x+\sin x\times\frac{1}{x}\right)$$

$$=x^{\sin x}\left(\cos x\times\ln x+\sin x\times\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore f'(\pi)=\pi^{\sin\pi}\left(\cos\pi\times\ln\pi+\sin\pi\times\frac{1}{\pi}\right)$$

$=-\ln\pi=\ln\frac{1}{\pi}$ 답 ⑤

0561

|전략| 매개변수로 나타낸 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$이면 $\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$임을 이용한다.

$\frac{dx}{dt}=3t^2-2t$, $\frac{dy}{dt}=3t^2+\frac{2}{3}t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+\frac{2}{3}t}{3t^2-2t}\ (3t^2\neq 2t)$$

$\therefore \lim_{t\to 0}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to 0}\frac{3t^2+\frac{2}{3}t}{3t^2-2t}=\lim_{t\to 0}\frac{3t+\frac{2}{3}}{3t-2}=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

0562

$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta-\theta\sin\theta-\cos\theta=-\theta\sin\theta$,

$\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta+\theta\cos\theta-\sin\theta=\theta\cos\theta$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\theta\cos\theta}{-\theta\sin\theta}=-\cot\theta$$

$\theta=\frac{\pi}{6}$일 때, $\frac{dy}{dx}=-\cot\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=-\sqrt{3}$ 답 ①

0563

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+2h)-f(4-3h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+2h)-f(4)+f(4)-f(4-3h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(4+2h)-f(4)}{2h}\times 2+\frac{f(4-3h)-f(4)}{-3h}\times 3\right\}$$

$=2f'(4)+3f'(4)=5f'(4)$

이때, $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=6t^2$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t^2}{2t}=3t$$

$x=4$에서 $t^2=4$　　$\therefore t=2\ (\because t>0)$

따라서 구하는 값은

$5f'(4)=5\times3\times2=30$　　답 ④

0564

$\frac{dx}{dt}=3t^2,\ \frac{dy}{dt}=2t-a$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-a}{3t^2}\ (t\neq0)$$

$t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}=-1$이므로

$\frac{2-a}{3}=-1,\ 2-a=-3$　　$\therefore a=5$　　답 ⑤

0565

$\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=2\cos\theta\,(-\sin\theta)=-2\cos\theta\sin\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-2\cos\theta\sin\theta}{\sec^2\theta}=\frac{-2\cos\theta\sin\theta}{\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

$=-2\cos^3\theta\sin\theta$　　… ❶

$x=1,\ y=\frac{1}{2}$일 때, $\tan\theta=1,\ \cos^2\theta=\frac{1}{2}$에서

$\theta=\frac{\pi}{4}\left(\because -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$　　… ❷

따라서 점 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$-2\cos^3\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}=-2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{2}$　　… ❸

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $x=1,\ y=\frac{1}{2}$일 때의 θ의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 점 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기를 구할 수 있다.	20 %

0566

|전략| 음함수 $f(x,y)=0$에서 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

$x^2-y^2+axy+b=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2x-2y\frac{dy}{dx}+\left(ay+ax\frac{dy}{dx}\right)=0$

$(ax-2y)\frac{dy}{dx}=-2x-ay$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-2x-ay}{ax-2y}\ (ax\neq2y)$

점 $(1,2)$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값이 8이므로

$\frac{-2-2a}{a-4}=8,\ -2-2a=8a-32$

$10a=30$　　$\therefore a=3$

또, 점 $(1,2)$가 곡선 위의 점이므로

$1^2-2^2+3\times1\times2+b=0$　　$\therefore b=-3$

$\therefore a-b=6$　　답 6

0567

$2\pi x=y+\sin xy$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2\pi=\frac{dy}{dx}+\cos xy\times\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)$

$(1+x\cos xy)\frac{dy}{dx}=2\pi-y\cos xy$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2\pi-y\cos xy}{1+x\cos xy}\ (1+x\cos xy\neq0)$

위의 식에 $x=1,\ y=2\pi$를 대입하면

$\frac{dy}{dx}=\frac{2\pi-2\pi\cos2\pi}{1+\cos2\pi}=\frac{2\pi-2\pi}{1+1}=0$　　답 ③

0568

$y^3=\ln(5-x^2)+xy+4$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$3y^2\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{5-x^2}+y+x\frac{dy}{dx},\ (3y^2-x)\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{5-x^2}+y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{2x}{5-x^2}+y}{3y^2-x}\ (3y^2\neq x)$

따라서 점 $(2,2)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{-\frac{2\times2}{5-2^2}+2}{3\times2^2-2}=\frac{-2}{10}=-\frac{1}{5}$　　답 ⑤

0569

$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=xy$에서 $ay+bx=x^2y^2$

$ay+bx=x^2y^2$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$a\frac{dy}{dx}+b=2xy^2+2x^2y\frac{dy}{dx},\ (2x^2y-a)\frac{dy}{dx}=b-2xy^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{b-2xy^2}{2x^2y-a}\ (2x^2y\neq a)$

점 $(1,2)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$\frac{b-8}{4-a}=1,\ b-8=4-a$　　$\therefore a+b=12$　　…… ㉠

또, 점 $(1,2)$가 곡선 $ay+bx=x^2y^2$ 위의 점이므로

$a\times2+b\times1=1^2\times2^2$　　$\therefore 2a+b=4$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-8,\ b=20$

$\therefore b-a=28$　　답 28

0570

$\dfrac{x}{3-x}=e^{4(t-3)}$ ...... ㉠

㉠의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln\left(\dfrac{x}{3-x}\right)=\ln e^{4(t-3)}$

$\therefore \ln x-\ln(3-x)=4(t-3)$

위의 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3-x}\right)\dfrac{dx}{dt}=4 \qquad \therefore \dfrac{dx}{dt}=4\div\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3-x}\right)$

㉠에서 $t=3$일 때, $\dfrac{x}{3-x}=e^0=1,\ 3-x=x \qquad \therefore x=\dfrac{3}{2}$

따라서 구하는 순간변화율은

$\dfrac{dx}{dt}=4\div\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\right)=3$ 답 3

0571

|전략| 함수 $g(x)$가 미분가능할 때, $[\{g(x)\}^n]'=n\{g(x)\}^{n-1}g'(x)$ (n은 실수)임을 이용한다.

$f(x)=(2x-\sqrt{4x^2+1})^5$에서

$f'(x)=5(2x-\sqrt{4x^2+1})^4\left(2-\dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}\right)$

$=5(2x-\sqrt{4x^2+1})^4\left(2-\dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)$

이므로

$a=f'(1)=5(2-\sqrt{5})^4\left(2-\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$

$b=f'(-1)=5(-2-\sqrt{5})^4\left(2+\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)=5(2+\sqrt{5})^4\left(2+\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$

$\therefore ab=5(2-\sqrt{5})^4\left(2-\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)\times5(2+\sqrt{5})^4\left(2+\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$

$=25\{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})\}^4\left(2-\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)\left(2+\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$

$=25\times(-1)^4\times\dfrac{4}{5}=20$ 답 20

0572

$f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$에서

$f'(x)=\dfrac{-\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\times x-(1-\sqrt{1-x^2})\times1}{x^2}$

$=\dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}-(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2}=\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})}=\dfrac{1}{2}$ 답 ④

0573

|전략| 함수가 $x=f(y)$ 꼴로 주어진 경우 x를 y에 대하여 미분한 후 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$임을 이용한다.

$x=\sqrt{y^2+2y}-2$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2y+2}{2\sqrt{y^2+2y}}=\dfrac{y+1}{\sqrt{y^2+2y}}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{\sqrt{y^2+2y}}{y+1}$ 답 ①

0574

$x=\tan y$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=\sec^2 y \qquad \therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\sec^2 y}=\cos^2 y$

$x=\tan y$에서 $x=1$일 때, $y=\dfrac{\pi}{4}$ $\left(\because 0<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 $x=1$에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$\cos^2\dfrac{\pi}{4}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$ 답 ③

0575

$\tan\theta=\dfrac{4}{x}$에서 $x=\dfrac{4}{\tan\theta}$

이 식의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{d\theta}=-\dfrac{4\sec^2\theta}{\tan^2\theta} \qquad \therefore \dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{d\theta}}=-\dfrac{\tan^2\theta}{4\sec^2\theta}$

$\tan\theta=\dfrac{4}{x}$에서 $x=2$일 때 $\tan\theta=2$이므로 $\tan^2\theta=4$

따라서 $x=2$에서의 $\dfrac{d\theta}{dx}$의 값은

$-\dfrac{\tan^2\theta}{4\sec^2\theta}=-\dfrac{\tan^2\theta}{4(1+\tan^2\theta)}=-\dfrac{4}{4\times5}=-\dfrac{1}{5}$ 답 $-\dfrac{1}{5}$

0576

|전략| 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g(b)=a$이면 $g'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$임을 이용한다.

$g(18)=a$라 하면 $f(a)=18$이므로

$a^2-4a+6=18,\ a^2-4a-12=0$

$(a+2)(a-6)=0 \qquad \therefore a=6\ (\because a>2)$

따라서 $g(18)=6$이고 $f'(x)=2x-4$이므로

$g'(18)=\dfrac{1}{f'(g(18))}=\dfrac{1}{f'(6)}=\dfrac{1}{8}$ 답 ⑤

다른 풀이 $y=x^2-4x+6\ (x>2)$이라 하면 역함수는

$x=y^2-4y+6\ (y>2)$이므로

$\dfrac{dx}{dy}=2y-4=2(y-2) \qquad \therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2(y-2)}$ ...... ㉠

5 여러 가지 미분법

한편, $x=y^2-4y+6$에서 $x=18$일 때

$y^2-4y+6=18$, $y^2-4y-12=0$

$(y+2)(y-6)=0 \qquad \therefore y=6\ (\because y>2)$

$y=6$을 ㉠에 대입하면 구하는 값은

$\dfrac{1}{2(6-2)}=\dfrac{1}{8}$

0577

$f(2)=3$에서 $g(3)=2$이므로

$g'(3)=\dfrac{1}{f'(g(3))}=\dfrac{1}{f'(2)}=2$ 답 2

0578

$g(2)=\theta$라 하면 $f(\theta)=2$이므로

$2\sin\theta+1=2$, $\sin\theta=\dfrac{1}{2} \qquad \therefore \theta=\dfrac{\pi}{6}\left(\because 0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 $g(2)=\dfrac{\pi}{6}$이고 $f'(x)=2\cos x$이므로

$g'(2)=\dfrac{1}{f'(g(2))}=\dfrac{1}{f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}=\dfrac{1}{2\cos\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{1}{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

답 ③

0579

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{f(x)-1}=\dfrac{1}{5}$에서 $x\to3$일 때 (분자) $\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to3}\{f(x)-1\}=0$이므로 $f(3)=1 \qquad \therefore g(1)=3$

이때, $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{f(x)-1}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{f(x)-f(3)}=\dfrac{1}{f'(3)}$이므로

$\dfrac{1}{f'(3)}=\dfrac{1}{5}$

$\therefore g'(1)=\dfrac{1}{f'(g(1))}=\dfrac{1}{f'(3)}=\dfrac{1}{5}$ 답 $\dfrac{1}{5}$

0580

|전략| 함수 $h(x)$의 도함수 $h'(x)$가 미분가능할 때, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h'(x)-h'(a)}{x-a}=h''(a)$임을 이용한다.

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=\{\ln(x+1)\}^2$에서

$h'(x)=2\ln(x+1)\times\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2\ln(x+1)}{x+1}$

$h'(0)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{h'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{h'(x)-h'(0)}{x-0}=h''(0)$

$h''(x)=2\times\dfrac{\dfrac{1}{x+1}\times(x+1)-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

$=2\times\dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

$\therefore h''(0)=2\times1=2$ 답 ②

다른 풀이 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{h'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\ln(x+1)}{x(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{\ln(x+1)}{x}\times\dfrac{2}{x+1}\right\}=1\times2=2$

0581

$f(x)=\dfrac{1}{x}$에서 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

$f'(1)=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=f''(1)$

$f''(x)=-\left(-\dfrac{2x}{x^4}\right)=\dfrac{2}{x^3}$

$\therefore f''(1)=2$ 답 ④

0582

$f(x)=xe^{ax+b}(a\ne0)$에서

$f'(x)=e^{ax+b}+xe^{ax+b}\times a=(ax+1)e^{ax+b}$

$f''(x)=ae^{ax+b}+(ax+1)e^{ax+b}\times a=a(ax+2)e^{ax+b}$ … ❶

$f'(3)=4$에서 $(3a+1)e^{3a+b}=4$ …… ㉠

$f''(-2)=0$에서 $a(-2a+2)e^{-2a+b}=0$

그런데 $e^{-2a+b}>0$이므로 $a(-2a+2)=0$

$\therefore a=1\ (\because a\ne0)$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $4e^{3+b}=4$, $3+b=0 \qquad \therefore b=-3$ … ❷

$\therefore a^2+b^2=1^2+(-3)^2=10$ … ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$, $f''(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

0583

|전략| $f'(x)$, $f''(x)$를 각각 구하여 주어진 식에 대입한다.

$f(x)=e^x\sin x$에서

$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$

$f''(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$

이것을 $f''(x)=af'(x)+bf(x)$에 대입하면

$2e^x\cos x=ae^x(\sin x+\cos x)+be^x\sin x$

$2\cos x=a\sin x+a\cos x+b\sin x\ (\because e^x>0)$

$\therefore\ (a+b)\sin x+(a-2)\cos x=0$

위의 식이 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a+b=0$, $a-2=0$

따라서 $a=2$, $b=-2$이므로

$a^2+b^2=2^2+(-2)^2=8$ 답 ③

0584

$f(x)=e^{-x}(\cos2x+1)$에서

$f'(x)=-e^{-x}(\cos 2x+1)+e^{-x}(-2\sin 2x)$
$\quad=-e^{-x}(\cos 2x+2\sin 2x+1)$
$f''(x)=e^{-x}(\cos 2x+2\sin 2x+1)$
$\qquad\qquad -e^{-x}(-2\sin 2x+4\cos 2x)$
$\quad=e^{-x}(4\sin 2x-3\cos 2x+1)$
$\therefore f'(0)=-1\times(1+1)=-2, f''(0)=1\times(-3+1)=-2$
이것을 $f'(0)+kf''(0)=0$에 대입하면
$-2-2k=0 \qquad \therefore k=-1$ 답 -1

0585

$f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$에서 $f'(x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x$

$f''(x)=-\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)$

$\quad=2\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)$

$f''(x)=1$에서

$2\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)=1 \qquad \therefore \sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$

이때, $x+\frac{5}{6}\pi=t$로 놓으면 $0\le x\le 2\pi$에서 $\frac{5}{6}\pi\le t\le\frac{17}{6}\pi$이고, 주어진 방정식은

$\sin t=\frac{1}{2} \qquad \therefore t=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{13}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{17}{6}\pi$

즉, $x+\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x+\frac{5}{6}\pi=\frac{13}{6}\pi$ 또는 $x+\frac{5}{6}\pi=\frac{17}{6}\pi$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $x=2\pi$

따라서 $f''(x)=1$을 만족시키는 모든 x의 값의 합은 $\frac{10}{3}\pi$ 답 ⑤

다른 풀이 $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$이므로

$f'(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right), f''(x)=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$f''(x)=1$에서

$-2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1 \qquad \therefore \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

이때, $x-\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $0\le x\le 2\pi$에서 $-\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{11}{6}\pi$이고, 주어진 방정식은

$\sin t=-\frac{1}{2} \qquad \therefore t=-\frac{\pi}{6}$ 또는 $t=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{11}{6}\pi$

즉, $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$ 또는 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{11}{6}\pi$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $x=2\pi$

따라서 $f''(x)=1$을 만족시키는 모든 x의 값의 합은 $\frac{10}{3}\pi$

Lecture

삼각함수의 합성
$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$
$\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

0586

|전략| $f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), f^{(3)}(x), \cdots$를 차례로 구하여 규칙을 찾는다.

$f(x)=\cos x$에서
$f^{(1)}(x)=-\sin x,\ f^{(2)}(x)=-\cos x,\ f^{(3)}(x)=\sin x,$
$f^{(4)}(x)=\cos x, f^{(5)}(x)=-\sin x, \cdots$
$\therefore f^{(4k+1)}(x)=f^{(1)}(x), f^{(4k+2)}(x)=f^{(2)}(x),$
$\quad f^{(4k+3)}(x)=f^{(3)}(x), f^{(4k+4)}(x)=f^{(4)}(x)$ (단, k는 자연수)
이때, $101=4\times25+1$이므로

$f^{(101)}\left(\frac{\pi}{3}\right)=f^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 ①

0587

$y=e^x(\sin x+\cos x)$에서
$y^{(1)}=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$
$y^{(2)}=2e^x\cos x-2e^x\sin x=2e^x(\cos x-\sin x)$
$\therefore y^{(3)}=2e^x(\cos x-\sin x)+2e^x(-\sin x-\cos x)$
$\quad=-4e^x\sin x$ 답 ①

0588

$f(x)=e^{\frac{x}{2}}$에서

$f^{(1)}(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}},\ f^{(2)}(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^2e^{\frac{x}{2}},\ f^{(3)}(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^3e^{\frac{x}{2}}, \cdots$

즉, $f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^ne^{\frac{x}{2}}$이므로

$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f^{(n)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^ne^{\frac{x}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{2}}=e^{\frac{x}{2}}$

$\therefore F(4)=e^2$ 답 ⑤

Lecture

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$은 $-1<r<1$일 때 수렴하고, 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다. (단, $a\ne0$)

STEP 3 내신 마스터

0589

유형 02 함수의 몫의 미분법 – $\frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴

|전략| 두 함수 $f(x), g(x)\,(g(x)\ne0)$가 미분가능할 때,
$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$임을 이용한다.

$f(x)=\frac{x^2+a}{x+1}$에서

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-(x^2+a)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-a}{(x+1)^2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

방정식 $f'(x)=0$의 한 근이 2이므로

$\frac{2^2+2\times2-a}{(2+1)^2}=0,\ \frac{8-a}{9}=0 \qquad \therefore a=8$

$a=8$을 ㉠에 대입하면

$$f'(x)=\frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}=\frac{(x+4)(x-2)}{(x+1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 다른 한 근은 -4이다. 답 ①

0590

유형 04 삼각함수 사이의 관계

|전략| $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$, $\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$임을 이용한다.

$$\sec\theta\csc\theta=\frac{1}{\cos\theta}\times\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$$

이때, $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4} \qquad \therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

$\therefore \sec\theta\csc\theta=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{1}{\frac{3}{8}}=\frac{8}{3}$ 답 ③

0591

유형 05 삼각함수의 도함수

|전략| $(\tan x)'=\sec^2 x$, $(\sec x)'=\sec x\tan x$임을 이용한다.

$f(x)=\frac{1+\tan x}{\sec x}$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{\sec^2 x\sec x-(1+\tan x)\sec x\tan x}{(\sec x)^2}\\&=\sec x-\frac{(1+\tan x)\tan x}{\sec x}\\&=\sec x-(1+\tan x)\sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)&=\sec\frac{\pi}{4}-\left(1+\tan\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}\\&=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}-(1+1)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0\end{aligned}$$

답 ①

0592

유형 06 합성함수의 미분법

|전략| 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $h(x)=f(g(x))$의 도함수는 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$임을 이용한다.

$f(x)=\sin(\tan 2x)$에서

$f'(x)=\cos(\tan 2x)\times\sec^2 2x\times2=2\cos(\tan 2x)\sec^2 2x$

따라서 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos(\tan\pi)\sec^2\pi=2\times1\times(-1)^2=2$ 답 ⑤

0593

유형 07 합성함수의 미분법 – $f(ax+b)$ 꼴

|전략| 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, $\{f(ax+b)\}'=af'(ax+b)$임을 이용한다.

$f(4-x)=f(4+x)$의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(3)=f(5)$

$$\therefore \lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(5)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=1$$

$f(4-x)=f(4+x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$-f'(4-x)=f'(4+x)$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$-f'(3)=f'(5) \qquad \therefore f'(5)=-1$ 답 ②

0594

유형 08 합성함수의 미분법 – $\{f(x)\}^n$ 꼴

|전략| 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, $[\{f(x)\}^n]'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$ (n은 정수)임을 이용한다.

$f(x)=\sin^2\frac{x}{2}$에서

$$f'(x)=2\sin\frac{x}{2}\times\cos\frac{x}{2}\times\frac{1}{2}=\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sin x$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\sin x}{x}=\frac{1}{2}$$ 답 ④

0595

유형 09 지수함수의 도함수

|전략| 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, $\{a^{f(x)}\}'=a^{f(x)}\ln a\times f'(x)$임을 이용한다. (단, $a>0$, $a\neq1$)

$f(x)=2^{4x}$에서

$f'(x)=2^{4x}\ln2\times4=2^{4x+2}\ln2$

$f'(a)=64\ln2$에서

$2^{4a+2}\ln2=64\ln2,\ 2^{4a+2}=2^6$

$4a+2=6 \qquad \therefore a=1$ 답 ②

0596

유형 10 로그함수의 도함수

|전략| 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f(x)\neq0$일 때, $\{\ln|f(x)|\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}$임을 이용한다.

$f'(x)=e^x+f(x)$를 $g(x)=\ln f'(x)$에 대입하면

$g(x)=\ln\{e^x+f(x)\}$

$\therefore g'(x)=\dfrac{e^x+f'(x)}{e^x+f(x)}=\dfrac{e^x+e^x+f(x)}{e^x+f(x)}=\dfrac{2e^x+f(x)}{e^x+f(x)}$

$\therefore g'(0)=\dfrac{2+f(0)}{1+f(0)}=2$ 답 ③

참고 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 함수는 $f(x)=xe^x$이다.

0597

유형 11 로그함수의 도함수의 활용

|전략| 주어진 식의 양변에 자연로그를 취한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

$e^{f(x)}=\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$의 양변에 자연로그를 취하면

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$
$$=\frac{1}{2}\{\ln(1+\sin x)-\ln(1-\sin x)\}$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}-\frac{-\cos x}{1-\sin x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\cos x(1-\sin x)+\cos x(1+\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$$
$$=\frac{2\cos x}{2(1-\sin^2 x)}=\frac{\cos x}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{1}{\cos x}$$

$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{3}}=2$ 답 ⑤

0598

유형 12 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

|전략| 매개변수로 나타낸 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능하고 $f'(t)\neq0$이면 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$임을 이용한다.

$\dfrac{dx}{dt}=2e^{2t}+2e^{-2t}$, $\dfrac{dy}{dt}=2e^{2t}-2e^{-2t}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2e^{2t}-2e^{-2t}}{2e^{2t}+2e^{-2t}}=\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{e^{2t}+e^{-2t}}$$

$t=\ln 3$일 때, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{9-\frac{1}{9}}{9+\frac{1}{9}}=\dfrac{40}{41}$ 답 ①

0599

유형 06 합성함수의 미분법 + 14 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 도함수

|전략| $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이고, n이 실수일 때 $(x^n)'=nx^{n-1}$임을 이용한다.

$h(x)=f(g(x))$에서 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$\therefore h'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f'\left(g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f'(0)g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ …… ㉠

$f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$이므로 $f'(0)=0$

$g'(x)=-2\sin x$이므로 $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-2\sin\dfrac{\pi}{2}=-2$

따라서 $f'(0)=0$, $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-2$를 ㉠에 대입하면

$h'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ 답 ③

0600

유형 16 역함수의 미분법 – 역함수의 미분계수 구하기

|전략| 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g(b)=a$이면 $g'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$임을 이용한다.

$g(2e)=-1$이고

$f'(x)=2xe^{-x}-(x^2+1)e^{-x}$
$=-e^{-x}(x^2-2x+1)=-(x-1)^2e^{-x}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2e, -1)$에서의 접선의 기울기는

$g'(2e)=\dfrac{1}{f'(g(2e))}=\dfrac{1}{f'(-1)}=-\dfrac{1}{4e}$ 답 ①

0601

유형 17 이계도함수

|전략| 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=f''(a)$임을 이용한다.

조건 (나)에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to1}\{f'(f(x))-2\}=0$이므로 $f'(f(1))=2$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{f(x)-f(1)}\times\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f''(f(1))f'(1)=2f''(1)=4$$

$\therefore f''(1)=2$ 답 ②

0602

유형 10 로그함수의 도함수

|전략| $f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{20x})$으로 놓고 $\{\ln|f(x)|\}'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$임을 이용한다.

$f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{20x})$으로 놓으면

$f(0)=\ln(1+1+\cdots+1)=\ln 20$이므로

5 여러 가지 미분법

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{20x}}{20}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{20x})-\ln 20}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0) \quad \cdots ❶$$

이때, $f'(x)=\dfrac{e^x+2e^{2x}+\cdots+20e^{20x}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{20x}}$이므로 $\cdots$ ❷

$$f'(0)=\frac{1+2+\cdots+20}{20}=\frac{\frac{20\times21}{2}}{20}=\frac{21}{2} \quad \cdots ❸$$

답 $\dfrac{21}{2}$

채점 기준	배점
❶ $f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{20x})$으로 놓고 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	3점
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	2점
❸ $f'(0)$의 값을 구할 수 있다.	2점

0603

유형 **13** 음함수의 미분법

| 전략 | 음함수 $f(x, y)=0$에서 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

$\sin(x+y)+\sin(x-y)=1$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\cos(x+y)\times\left(1+\frac{dy}{dx}\right)+\cos(x-y)\times\left(1-\frac{dy}{dx}\right)=0$$
$$\frac{dy}{dx}\{\cos(x+y)-\cos(x-y)\}=-\cos(x+y)-\cos(x-y)$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{\cos(x+y)-\cos(x-y)} \quad \cdots ❶$$

따라서 점 $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0}{\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0}=1 \quad \cdots ❷$$

답 1

채점 기준	배점
❶ $\dfrac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	4점
❷ 점 $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$에서의 접선의 기울기를 구할 수 있다.	2점

0604

유형 **16** 역함수의 미분법 – 역함수의 미분계수 구하기

| 전략 | 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g(b)=a$이면 $g'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$임을 이용한다.

$f(x)=\ln(e^x-1)$에서 $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$이므로

$$f'(a)=\frac{e^a}{e^a-1} \qquad \therefore \frac{1}{f'(a)}=\frac{e^a-1}{e^a} \quad \cdots ❶$$

이때, $g(a)=b$라 하면 $f(b)=a$이므로

$\ln(e^b-1)=a \qquad \therefore e^b-1=e^a \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$$\therefore \frac{1}{g'(a)}=f'(g(a))=f'(b)=\frac{e^b}{e^b-1}=\frac{e^a+1}{e^a}\ (\because ㉠) \quad \cdots ❷$$
$$\therefore \frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{g'(a)}=\frac{e^a-1}{e^a}+\frac{e^a+1}{e^a}=\frac{2e^a}{e^a}=2 \quad \cdots ❸$$

답 2

채점 기준	배점
❶ $\dfrac{1}{f'(a)}$의 값을 구할 수 있다.	3점
❷ $\dfrac{1}{g'(a)}$의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ $\dfrac{1}{f'(a)}+\dfrac{1}{g'(a)}$의 값을 구할 수 있다.	1점

0605

유형 **02** 함수의 몫의 미분법 – $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 꼴

| 전략 | 로그의 성질과 등비급수의 합을 이용하여 $f(x)$를 간단히 한 후 함수의 몫의 미분법을 이용한다.

(1) $e^{-n\ln x}=e^{\ln x^{-n}}=x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$이므로

$$f(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}+\cdots$$

$f(x)$는 첫째항이 1, 공비가 $\dfrac{1}{x}$인 등비급수이고 $0<\dfrac{1}{x}<1$이므로

$$f(x)=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x}{x-1}$$

(2) $f'(x)=\dfrac{1\times(x-1)-x\times1}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

(3) $f(3)=\dfrac{3}{2}$, $f'(2)=-1$이므로

$$4f(3)-f'(2)=4\times\frac{3}{2}-(-1)=7$$

답 (1) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ (2) $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ (3) 7

채점 기준	배점
(1) $f(x)$를 간단히 할 수 있다.	5점
(2) $f'(x)$를 구할 수 있다.	3점
(3) $4f(3)-f'(2)$의 값을 구할 수 있다.	2점

0606

유형 **18** 이계도함수 – 방정식으로 주어진 경우

| 전략 | 주어진 두 식의 차를 이용하여 $f(x)+g(x)$를 찾은 후 $f''(x)+g''(x)$를 구한다.

(1) $f''(x)+g''(x)+g(x)=e^{-x} \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f''(x)+g''(x)-f(x)=2e^x \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠−㉡을 하면 $f(x)+g(x)=e^{-x}-2e^x$

(2) 위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+g'(x)=-e^{-x}-2e^{x}$

다시 양변을 x에 대하여 미분하면

$f''(x)+g''(x)=e^{-x}-2e^{x}$ …… ㉢

㉢을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$e^{-x}-2e^{x}+g(x)=e^{-x}$, $e^{-x}-2e^{x}-f(x)=2e^{x}$

$\therefore f(x)=e^{-x}-4e^{x}$, $g(x)=2e^{x}$

(3) $g'(x)=2e^{x}$이므로

$f(1)+2g'(1)=(e^{-1}-4e)+2\times 2e$

$=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

답 (1) $f(x)+g(x)=e^{-x}-2e^{x}$ (2) $f(x)=e^{-x}-4e^{x}$, $g(x)=2e^{x}$ (3) $\dfrac{1}{e}$

채점 기준	배점
(1) $f(x)+g(x)$를 구할 수 있다.	3점
(2) $f(x)$, $g(x)$를 각각 구할 수 있다.	6점
(3) $f(1)+2g'(1)$의 값을 구할 수 있다.	3점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0607

| 전략 | 도함수의 정의를 이용하여 $f(x)$를 구한 후 함수의 몫의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

$$f(x)=\lim_{t\to x}\frac{t\cos x-x\cos t}{t^2-x^2}$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{t\cos x-x\cos x-x\cos t+x\cos x}{t-x}\times\frac{1}{t+x}$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{(t-x)\cos x-x(\cos t-\cos x)}{t-x}\times\frac{1}{t+x}$$

$$=\lim_{t\to x}\left(\cos x-x\times\frac{\cos t-\cos x}{t-x}\right)\times\frac{1}{t+x}$$

$$=\{\cos x-x(\cos x)'\}\times\frac{1}{2x}$$

$$=\frac{\cos x+x\sin x}{2x}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{(-\sin x+\sin x+x\cos x)\times 2x-(\cos x+x\sin x)\times 2}{4x^2}$$

$$=\frac{x^2\cos x-\cos x-x\sin x}{2x^2}$$

따라서 $f'(\pi)=\dfrac{-\pi^2+1}{2\pi^2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\pi^2}$이므로

$a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$ $\therefore a+b=0$ 답 0

0608

| 전략 | $g(x)=4^x-2^x+3$으로 놓고 $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$임을 이용한다.

$f(4^x-2^x+3)=2^x+5$에서 $g(x)=4^x-2^x+3$이라 하면

$g'(x)=4^x\ln 4-2^x\ln 2=(2\times 4^x-2^x)\ln 2$

$f(g(x))=2^x+5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=2^x\ln 2$ …… ㉠

$g(x)=4^x-2^x+3=3$에서

$2^{2x}=2^x$, $2x=x$ $\therefore x=0$

㉠에 $x=0$을 대입하면 $f'(g(0))g'(0)=\ln 2$

이때, $g(0)=3$, $g'(0)=\ln 2$이므로

$f'(3)\ln 2=\ln 2$ $\therefore f'(3)=1$ 답 1

0609

| 전략 | $f(x)$, $g(x)$, $g(f(x))$, $f(g(x))$의 도함수를 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

$f(x)=3^x$, $g(x)=\ln(x+1)$에서

$f'(x)=3^x\ln 3$, $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}$

ㄱ. $f(0)=1$, $g(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)+g(x)-g(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

$=f'(0)+g'(0)$

$=\ln 3+1=\ln 3e$ (참)

ㄴ. $g(f(x))=h(x)$라 하면 $h(0)=g(f(0))=g(1)=\ln 2$이고

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)=\dfrac{3^x\ln 3}{3^x+1}$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(f(x))-\ln 2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=h'(0)$$

$=\dfrac{\ln 3}{2}=\ln\sqrt{3}$ (참)

ㄷ. $f(g(x))=k(x)$라 하면 $k(0)=f(g(0))=f(0)=1$이고

$k'(x)=f'(g(x))g'(x)=\dfrac{3^{\ln(x+1)}\ln 3}{x+1}$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\{f(g(x))\}^2-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\{k(x)\}^2-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{k(x)-k(0)}{x-0}\times\{k(x)+1\}$$

$=k'(0)\{k(0)+1\}$

$=2\ln 3=\ln 9$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

5 여러 가지 미분법

0610

|전략| $f(a)=b$로 놓고 $f'(a)=\dfrac{1}{g'(b)}$임을 이용한다.

$f(h(x))=x$이므로 $h(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.
즉, $h(x)=g(x)$이므로
$\sqrt{x^2+1}\{g(x)\}^2+(x+1)g(x)=g(x)$
$\sqrt{x^2+1}\{g(x)\}^2+xg(x)=0$
$g(x)\{\sqrt{x^2+1}g(x)+x\}=0$
이때, $g(x)=0$인 경우 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$라는 조건에 맞지 않으므로

$\sqrt{x^2+1}g(x)+x=0 \qquad \therefore g(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$g'(x)=-\frac{\sqrt{x^2+1}-x\times\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=-\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$f(a)=b$라 하면 $f'(a)=\dfrac{1}{g'(f(a))}=\dfrac{1}{g'(b)}=-2\sqrt{2}$이므로
$-(b^2+1)\sqrt{b^2+1}=-2\sqrt{2}$
$b^2+1=2 \qquad \therefore b=\pm1$
즉, $f(a)=\pm1$에서 $g(1)=a$ 또는 $g(-1)=a$이고

$g(1)=-\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$g(-1)=\dfrac{1}{\sqrt{(-1)^2+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

그런데 a는 양수이므로 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

0611

|전략| $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$이므로 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한 후 이 식을 다시 x에 대하여 미분한다.

$\dfrac{dx}{dt}=2-\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=2\sin 2t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\sin 2t}{2-\cos t}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{2\sin 2t}{2-\cos t}\right)\\&=\frac{d}{dt}\left(\frac{2\sin 2t}{2-\cos t}\right)\times\frac{dt}{dx}\\&=\frac{4\cos 2t(2-\cos t)-2\sin 2t\sin t}{(2-\cos t)^2}\times\frac{1}{\frac{dx}{dt}}\\&=\frac{4\cos 2t(2-\cos t)-2\sin 2t\sin t}{(2-\cos t)^3}\end{aligned}$$

따라서 $t=0$일 때 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$의 값은

$\dfrac{4\cos 0(2-\cos 0)-2\sin 0\sin 0}{(2-\cos 0)^3}=4$ 답 ⑤

본책 98~117쪽

6 | 도함수의 활용 (1)

STEP 1 개념 마스터

0612

$f(x)=\dfrac{1}{x+1}$로 놓으면 $f'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$이므로
점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-1$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-1=-(x-0) \qquad \therefore y=-x+1$ 답 $y=-x+1$

0613

$f(x)=\sqrt{2x-1}$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{2x-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$이므로
점 $(5, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(5)=\dfrac{1}{3}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-3=\dfrac{1}{3}(x-5) \qquad \therefore y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$ 답 $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$

0614

$f(x)=e^x$으로 놓으면 $f'(x)=e^x$이므로
점 $(1, e)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=e$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-e=e(x-1) \qquad \therefore y=ex$ 답 $y=ex$

0615

$f(x)=\ln(x+1)$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$이므로
점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=1$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=x$ 답 $y=x$

0616

$f(x)=\sin x$로 놓으면 $f'(x)=\cos x$이므로
점 $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=1$ 답 $y=1$

0617

$f(x)=\cos 2x$로 놓으면 $f'(x)=-2\sin 2x$이므로
점 $\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-2$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=-2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) \qquad \therefore y=-2x+\dfrac{\pi}{2}$ 답 $y=-2x+\dfrac{\pi}{2}$

0618

$f(x)=3x-x\ln x$로 놓으면

$f'(x)=3-\left(\ln x+x\times\frac{1}{x}\right)=2-\ln x$

점 $(e, 2e)$에서의 접선의 기울기는 $f'(e)=1$이므로 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-2e=-(x-e)\qquad\therefore y=-x+3e$ 　　답 $y=-x+3e$

0619

$f(x)=-\frac{2}{x+1}$로 놓으면 $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, -\frac{2}{t+1}\right)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=\frac{2}{(t+1)^2}=2,\ (t+1)^2=1$

$t+1=\pm1\qquad\therefore t=0\ (\because t>-1)$

따라서 접점의 좌표가 $(0, -2)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=2x-2$ 　　답 $y=2x-2$

0620

$f(x)=4\sqrt{x}$로 놓으면 $f'(x)=\frac{4}{2\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{x}}$

접점의 좌표를 $(t, 4\sqrt{t})$라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=\frac{2}{\sqrt{t}}=2$에서 $t=1$

따라서 접점의 좌표가 $(1, 4)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-4=2(x-1)\qquad\therefore y=2x+2$ 　　답 $y=2x+2$

0621

$f(x)=e^{x+1}$으로 놓으면 $f'(x)=e^{x+1}$

접점의 좌표를 (t, e^{t+1})이라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=e^{t+1}=1,\ t+1=0\qquad\therefore t=-1$

따라서 접점의 좌표가 $(-1, 1)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=x-(-1)\qquad\therefore y=x+2$ 　　답 $y=x+2$

0622

$f(x)=\ln(2x+1)$로 놓으면 $f'(x)=\frac{2}{2x+1}$

접점의 좌표를 $(t, \ln(2t+1))$이라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=\frac{2}{2t+1}=1,\ 2t+1=2\qquad\therefore t=\frac{1}{2}$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2}, \ln 2\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\ln 2=x-\frac{1}{2}\qquad\therefore y=x+\ln 2-\frac{1}{2}$ 　　답 $y=x+\ln 2-\frac{1}{2}$

0623

$f(x)=\cos x$로 놓으면 $f'(x)=-\sin x$

접점의 좌표를 $(t, \cos t)$라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=-\sin t=1,\ \sin t=-1\qquad\therefore t=\frac{3}{2}\pi\ (\because 0\le t\le 2\pi)$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=x-\frac{3}{2}\pi$ 　　답 $y=x-\frac{3}{2}\pi$

0624

$f(x)=\frac{1}{x}$로 놓으면 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{t}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-\frac{1}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}(x-t)$ ...... ㉠

이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$-\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t},\ -t=-1+t\qquad\therefore t=\frac{1}{2}$

따라서 $t=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y-2=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)\qquad\therefore y=-4x+4$ 　　답 $y=-4x+4$

0625

$f(x)=\sqrt{x+1}$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t+1})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t+1}}$이므로 접선의 방정식은

$y-\sqrt{t+1}=\frac{1}{2\sqrt{t+1}}(x-t)$ ...... ㉠

이 직선이 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$-\sqrt{t+1}=-\frac{1}{\sqrt{t+1}}-\frac{t}{2\sqrt{t+1}},\ t+1=1+\frac{t}{2}\qquad\therefore t=0$

따라서 $t=0$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{2}x\qquad\therefore y=\frac{1}{2}x+1$ 　　답 $y=\frac{1}{2}x+1$

0626

$f(x)=e^{-x}$으로 놓으면 $f'(x)=-e^{-x}$

접점의 좌표를 (t, e^{-t})이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-e^{-t}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{-t}=-e^{-t}(x-t)$ ...... ㉠

이 직선이 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$-e^{-t}=e^{-t}+te^{-t},\ e^{-t}(t+2)=0\qquad\therefore t=-2\ (\because e^{-t}>0)$

따라서 $t=-2$를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y-e^2=-e^2(x+2)\qquad\therefore y=-e^2x-e^2$ 　　답 $y=-e^2x-e^2$

0627

$f(x)=\ln x$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t, \ln t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{1}{t}$이므로 접선의 방정식은

$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$-\ln t=-1$ $\therefore t=e$

따라서 $t=e$를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y-\ln e=\frac{1}{e}(x-e)$ $\therefore y=\frac{1}{e}x$

답 $y=\frac{1}{e}x$

0628

(1) $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{t^2}}{2t}=\frac{t^2-1}{2t^3}$$

(2) $t=\frac{1}{2}$일 때, $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{5}{2}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2-1}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3}=-3$

(3) $y-\frac{5}{2}=-3\left(x-\frac{1}{4}\right)$ $\therefore y=-3x+\frac{13}{4}$

답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{t^2-1}{2t^3}$ (2) $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{5}{2}$, $\frac{dy}{dx}=-3$ (3) $y=-3x+\frac{13}{4}$

0629

(1) $x^2-2x-3y+y^2=1$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2x-2-3\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0,\ (2y-3)\frac{dy}{dx}=-2x+2$$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-2x+2}{2y-3}\ \left(y\neq\frac{3}{2}\right)$ …… ㉠

(2) $x=3$, $y=1$을 ㉠에 대입하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-6+2}{2-3}=4$$

(3) $y-1=4(x-3)$ $\therefore y=4x-11$

답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{-2x+2}{2y-3}\ \left(y\neq\frac{3}{2}\right)$ (2) 4 (3) $y=4x-11$

0630

$f(x)=xe^x$에서 $f'(x)=e^x+xe^x=$ $\boxed{(가)\ e^x(x+1)}$

$f'(x)=0$에서 $x+1=0$ ($\because e^x>0$) $\therefore x=$ $\boxed{(나)\ -1}$

x	$\cdots$	$\boxed{(나)\ -1}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,$ $\boxed{(나)\ -1}$$]$에서 $\boxed{(다)\ 감소}$하고, 구간 $[$$\boxed{(나)\ -1}$$, \infty)$에서 $\boxed{(라)\ 증가}$한다.

답 (가) $e^x(x+1)$ (나) -1 (다) 감소 (라) 증가

0631

$f(x)=x+\frac{1}{x}$에서 $x\neq0$이고

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-1, 0)$, $(0, 1]$에서 감소한다.

답 구간 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$에서 증가, 구간 $[-1, 0)$, $(0, 1]$에서 감소

0632

$f(x)=\frac{-3x+4}{x^2+1}$에서

$$f'(x)=\frac{-3(x^2+1)-(-3x+4)\times2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{3x^2-8x-3}{(x^2+1)^2}=\frac{(3x+1)(x-3)}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$, $[3, \infty)$에서 증가하고, 구간 $\left[-\frac{1}{3}, 3\right]$에서 감소한다.

답 구간 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$, $[3, \infty)$에서 증가, 구간 $\left[-\frac{1}{3}, 3\right]$에서 감소

0633

$f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$에서

$$f'(x)=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고, 구간 $[-1, \infty)$에서 증가한다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

답 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소, 구간 $[-1, \infty)$에서 증가

0634

$f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+2}}$에서

$f'(x)=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\times 2x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}=-\dfrac{3x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$에서 증가하고, 구간 $[0, \infty)$에서 감소한다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

답 구간 $(-\infty, 0]$에서 증가, 구간 $[0, \infty)$에서 감소

0635

$f(x)=e^x-x$에서 $f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$에서 감소하고, 구간 $[0, \infty)$에서 증가한다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

답 구간 $(-\infty, 0]$에서 감소, 구간 $[0, \infty)$에서 증가

0636

$f(x)=x^2e^x$에서 $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=x(2+x)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ ($\because e^x>0$)

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -2]$, $[0, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-2, 0]$에서 감소한다.

답 구간 $(-\infty, -2]$, $[0, \infty)$에서 증가, 구간 $[-2, 0]$에서 감소

0637

$f(x)=x-\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0, 1]$에서 감소하고, 구간 $[1, \infty)$에서 증가한다.

답 구간 $(0, 1]$에서 감소, 구간 $[1, \infty)$에서 증가

0638

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\quad\therefore x=e$

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0, e]$에서 증가하고, 구간 $[e, \infty)$에서 감소한다.

답 구간 $(0, e]$에서 증가, 구간 $[e, \infty)$에서 감소

0639

$f(x)=1+\cos x$에서 $f'(x)=-\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0$ $\quad\therefore x=\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

x	(0)	$\cdots$	π	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0, \pi]$에서 감소하고, 구간 $[\pi, 2\pi)$에서 증가한다.

답 구간 $(0, \pi]$에서 감소, 구간 $[\pi, 2\pi)$에서 증가

0640

$f(x)=\sin x+\cos x$에서 $f'(x)=\cos x-\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\cos x$ $\quad\therefore x=\dfrac{\pi}{4}$ ($\because 0<x<\pi$)

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$에서 증가하고, 구간 $\left[\dfrac{\pi}{4}, \pi\right)$에서 감소한다.

답 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$에서 증가, 구간 $\left[\dfrac{\pi}{4}, \pi\right)$에서 감소

0641

$f(x)=\tan x-x$에서 $f'(x)=\sec^2 x-1$

$f'(x)=0$에서 $\sec^2 x=1$, $\sec x=\pm 1$

$\therefore x=0$ $\left(\because -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

x	$\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↗	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 증가한다.

답 구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 증가

0642

$f(x)=\dfrac{-x^2+2}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{-2x(x^2+1)-(-x^2+2)\times 2x}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{6x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 2를 갖는다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$

답 극댓값: 2

0643

$f(x)=\sqrt{2x^2+1}$에서 $f'(x)=\dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}}=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 1을 갖는다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

답 극솟값: 1

0644

$f(x)=x-e^{x-2}$에서 $f'(x)=1-e^{x-2}$

$f'(x)=0$에서 $e^{x-2}=1$, $x-2=0$ $\quad\therefore x=2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 1을 갖는다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

답 극댓값: 1

0645

$f(x)=x\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

$f'(x)=0$에서 $\ln x+1=0$, $\ln x=-1$ $\quad\therefore x=\dfrac{1}{e}$

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{e}$에서 극솟값 $-\dfrac{1}{e}$을 갖는다.

답 극솟값: $-\dfrac{1}{e}$

0646

$f(x)=x+2\sin x$에서 $f'(x)=1+2\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore x=\dfrac{2}{3}\pi$ ($\because 0<x<\pi$)

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$에서 극댓값 $\dfrac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$을 갖는다.

답 극댓값: $\dfrac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

0647

(1) $f(x)=x^3-3x^2+1$에서

$f'(x)=3x^2-6x$, $f''(x)=6x-6$

(2) $3x^2-6x=0$에서 $3x(x-2)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=2$

$f''(0)=-6<0$, $f''(2)=6>0$

(3) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 1, $x=2$에서 극솟값 -3을 갖는다.

답 (1) $f'(x)=3x^2-6x$, $f''(x)=6x-6$ (2) $f''(0)<0$, $f''(2)>0$ (3) 극댓값: 1, 극솟값: -3

0648

$f(x)=x^2\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2x\ln x+x^2\times\dfrac{1}{x}=x(2\ln x+1)$

$f''(x)=(2\ln x+1)+x\times\dfrac{2}{x}=2\ln x+3$

$f'(x)=0$에서 $2\ln x+1=0$ ($\because x>0$)

$\ln x=-\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

이때, $f''\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=2>0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$에서 극솟값 $-\dfrac{1}{2e}$을 갖는다.

답 극솟값: $-\dfrac{1}{2e}$

0649

$f(x)=x-2\sin x$에서

$f'(x)=1-2\cos x$, $f''(x)=2\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

이때, $f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}>0$, $f''\left(\dfrac{5}{3}\pi\right)=-\sqrt{3}<0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$에서 극댓값 $\dfrac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$, $x=\dfrac{\pi}{3}$에서 극솟값 $\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$을 갖는다.

답 극댓값: $\dfrac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$, 극솟값: $\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$

0650

$f(x)=e^{\sin x}$에서 $f'(x)=e^{\sin x}\times\cos x$

$f''(x)=e^{\sin x}\times\cos^2 x+e^{\sin x}\times(-\sin x)=(\cos^2 x-\sin x)e^{\sin x}$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ ($\because e^{\sin x}>0$)

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

이때, $f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-e<0$, $f''\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=\dfrac{1}{e}>0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 극댓값 e, $x=\dfrac{3}{2}\pi$에서 극솟값 $\dfrac{1}{e}$을 갖는다.

답 극댓값: e, 극솟값: $\dfrac{1}{e}$

STEP 2 유형 마스터

0651

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$임을 이용한다.

$f(x)=e^{-x^2+x}$으로 놓으면 $f'(x)=(-2x+1)e^{-x^2+x}$

$x=1$인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=(-2+1)e^{-1+1}=-1$

점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=-(x-1)$ $\quad\therefore y=-x+2$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로 $a^2+b^2=5$ 답 ⑤

0652

$f(x)=x\ln x-x$로 놓으면 $f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x$

$x=e^2$인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(e^2)=\ln e^2=2$

또, $x=e^2$일 때 $f(e^2)=e^2\ln e^2-e^2=2e^2-e^2=e^2$

따라서 점 (e^2, e^2)에서의 접선의 방정식은

$y-e^2=2(x-e^2)$ $\quad\therefore y=2x-e^2$ 답 $y=2x-e^2$

0653

$f(x)=\sin x+2\cos x$로 놓으면 $f'(x)=\cos x-2\sin x$

$x=\pi$인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(\pi)=\cos\pi-2\sin\pi=-1-0=-1$

또, $x=\pi$일 때 $f(\pi)=\sin\pi+2\cos\pi=0-2=-2$

따라서 점 $(\pi, -2)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-2)=-(x-\pi)$ $\quad\therefore y=-x+\pi-2$

이 직선이 점 (k, π)를 지나므로

$\pi=-k+\pi-2$ $\quad\therefore k=-2$ 답 -2

0654

$g(x)=\sin x$로 놓으면 $g'(x)=\cos x$

점 $(t, \sin t)$에서의 접선의 기울기는 $g'(t)=\cos t$이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$y-\sin t=\cos t\times(x-t)$

위의 식에 $y=0$을 대입하면 $-\sin t=x\cos t-t\cos t$

$x\cos t=t\cos t-\sin t$ $\quad\therefore x=t-\tan t$

따라서 $f(t)=t-\tan t$이므로

$$\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t-\tan t}{t}=\lim_{t\to0}\left(1-\frac{\tan t}{t}\right)$$

$$=1-1=0$$

답 ③

0655

| 전략 | 기울기가 $a(a\neq0)$인 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{a}$임을 이용한다.

$f(x)=\sqrt{2x+3}+a$로 놓으면 $f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$

$x=-1$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=1$이므로 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

점 $(-1, 1+a)$를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-(1+a)=-(x+1)$ $\quad\therefore y=-x+a$

이때, 이 직선의 y절편이 1이므로 $a=1$ 답 1

0656

$f(x)=2\ln(x-1)$로 놓으면 $f'(x)=\frac{2}{x-1}$

점 $(2, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=2$이므로 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

점 $(2, 0)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}(x-2)$ $\quad\therefore x+2y-2=0$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로 $ab=2$ 답 ④

0657

$f(x)=\sin 3x$로 놓으면 $f'(x)=3\cos 3x$

점 $(t, \sin 3t)$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3\cos 3t$이므로 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3\cos 3t}$이다. … ❶

점 $(t, \sin 3t)$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{3\cos 3t}$인 직선의 방정식은

$y-\sin 3t=-\frac{1}{3\cos 3t}(x-t)$

$\therefore y=-\frac{1}{3\cos 3t}x+\frac{t}{3\cos 3t}+\sin 3t$ … ❷

따라서 $g(t)=\frac{t}{3\cos 3t}+\sin 3t$이므로

$g(\pi)=\frac{\pi}{3\cos 3\pi}+\sin 3\pi=-\frac{\pi}{3}$ … ❸

답 $-\frac{\pi}{3}$

채점 기준	비율
❶ 접선에 수직인 직선의 기울기를 구할 수 있다.	40 %
❷ 접선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $g(\pi)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0658

| 전략 | 접점의 좌표를 $(t, t\ln t+t)$로 놓고 접선의 방정식을 구한다.

$x+2y+2=0$에서 $y=-\frac{1}{2}x-1$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 2이다.

$f(x)=x\ln x+x$로 놓으면 $f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}+1=\ln x+2$

접점의 좌표를 $(t, t\ln t+t)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=\ln t+2=2$, $\ln t=0$ $\quad\therefore t=1$

즉, 접점의 좌표가 $(1, 1)$이므로 접선의 방정식은

$y-1=2(x-1)$ $\quad\therefore y=2x-1$

따라서 $a=2$, $b=-1$이므로 $a-b=3$ 답 3

0659

$f(x)=\frac{2}{x-2}$로 놓으면 $f'(x)=-\frac{2}{(x-2)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{2}{t-2}\right)$라 하면 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(t)=-\dfrac{2}{(t-2)^2}=-2,\ (t-2)^2=1$

$t-2=\pm1 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=3$

즉, 접점의 좌표가 $(1,\ -2),\ (3,\ 2)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-2)=-2(x-1),\ y-2=-2(x-3)$에서

$y=-2x,\ y=-2x+8$

따라서 $a=0,\ b=8$ 또는 $a=8,\ b=0$이므로 $ab=0$ 답 0

0660

직선 $y=-x+1$에 평행한 직선의 기울기는 -1이다.

$f(x)=\cos^2 x$로 놓으면 $f'(x)=2\cos x\times(-\sin x)=-\sin 2x$

접점의 좌표를 $(t,\ \cos^2 t)$라 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(t)=-\sin 2t=-1,\ 2t=\dfrac{\pi}{2}\ (\because 0\le 2t\le 2\pi) \qquad \therefore t=\dfrac{\pi}{4}$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-\dfrac{1}{2}=-\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) \qquad \therefore y=-x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{4}$ 답 ③

0661

$f(x)=e^{2x}+ax$로 놓으면 $f'(x)=2e^{2x}+a$

곡선 $y=f(x)$가 x축과 점 $(t,\ 0)$에서 접한다고 하면

$f(t)=e^{2t}+at=0$ …… ㉠

또, $x=t$인 점에서의 접선의 기울기는 0이므로

$f'(t)=2e^{2t}+a=0,\ a=-2e^{2t}$

$a=-2e^{2t}$을 ㉠에 대입하면

$e^{2t}-2e^{2t}\times t=0,\ e^{2t}(1-2t)=0 \qquad \therefore t=\dfrac{1}{2}\ (\because e^{2t}>0)$

$\therefore a=-2e^{2\times\frac{1}{2}}=-2e$ 답 ①

0662

$f(x)=ke^{x-1}$으로 놓으면 $f'(x)=ke^{x-1}$

접점의 좌표가 $(\alpha,\ 2\alpha)$이므로 $ke^{\alpha-1}=2\alpha$ …… ㉠

또, 점 $(\alpha,\ 2\alpha)$에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f'(\alpha)=ke^{\alpha-1}=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha=1,\ k=2$

$\therefore 4\alpha+k^2=4\times1+2^2=8$ 답 ④

0663

$\triangle$ABP에서 $\overline{AB}$를 밑변으로 생각하면 밑변의 길이는 일정하므로 높이가 최소일 때 넓이가 최소가 된다.

즉, 점 P에서의 접선이 직선 AB에 평행할 때 넓이는 최소이다.

$f(x)=\ln x$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

점 P의 좌표를 $(t,\ \ln t)$라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 1이어야 하므로

직선 AB와 평행한 직선의 기울기는 $\dfrac{2-0}{0-(-2)}=1$

$f'(t)=\dfrac{1}{t}=1 \qquad \therefore t=1$

즉, P$(1,\ 0)$이므로 $\triangle$ABP의 넓이의 최솟값은

$\dfrac{1}{2}\times3\times2=3$ 답 3

밑변을 $\overline{AP}$로 생각하면 밑변의 길이는 $\overline{AP}=3$, 높이는 $\overline{OB}=2$

0664

$f(x)=\sin x-\cos x$로 놓으면

$f'(x)=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

접점의 좌표를 $(t,\ \sin t-\cos t)$라 하면 접선의 기울기는 $\tan 45°=1$이므로

$\sqrt{2}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)=1,\ \sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

이때, $0<t<\pi$에서 $\dfrac{\pi}{4}<t+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{5}{4}\pi$이므로

$t+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{4}\pi \qquad \therefore t=\dfrac{\pi}{2}$

즉, 접점의 좌표가 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-1=x-\dfrac{\pi}{2} \qquad \therefore y=x-\dfrac{\pi}{2}+1$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$0=x-\dfrac{\pi}{2}+1 \qquad \therefore x=\dfrac{\pi}{2}-1$

따라서 구하는 x절편은 $\dfrac{\pi}{2}-1$ 답 $\dfrac{\pi}{2}-1$

0665

| 전략 | 접점의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{e^t}{t}\right)$으로 놓고 접선의 방정식을 구한다.

$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$으로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{e^x\times x-e^x}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{e^t}{t}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\dfrac{e^t(t-1)}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{e^t}{t}=\dfrac{e^t(t-1)}{t^2}(x-t)$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$-\dfrac{e^t}{t}=-\dfrac{e^t(t-1)}{t},\ e^t(t-2)=0 \qquad \therefore t=2\ (\because e^t>0)$

$t=2$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y-\dfrac{e^2}{2}=\dfrac{e^2}{4}(x-2) \qquad \therefore y=\dfrac{e^2}{4}x$

이 직선이 점 $\left(k,\ \dfrac{e}{2}\right)$를 지나므로 $\dfrac{e^2}{4}k=\dfrac{e}{2} \qquad \therefore k=\dfrac{2}{e}$ 답 ④

0666

$f(x)=\dfrac{x}{x+1}$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{(x+1)-x}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{t}{t+1}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\dfrac{1}{(t+1)^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{t}{t+1}=\dfrac{1}{(t+1)^2}(x-t)$

이 직선이 점 $(3, 3)$을 지나므로

$3-\frac{t}{t+1}=\frac{3-t}{(t+1)^2}$, $3(t+1)^2-t(t+1)=3-t$

$2t^2+6t=0$, $2t(t+3)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=0$

따라서 $m_1=\frac{1}{4}$, $m_2=1$ 또는 $m_1=1$, $m_2=\frac{1}{4}$이므로

$m_1+m_2=\frac{5}{4}$ 답 ⑤

0667

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{1}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}(x-t)$ …… ㉠

이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{1-t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$, $-t(t^2+1)=1-t$

$t^3=-1$ $\quad\therefore t=-1$

$t=-1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(x+1)$ $\quad\therefore y=\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{4}$

따라서 구하는 y절편은 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$이다. 답 ③

0668

$f(x)=xe^{-x}$으로 놓으면 $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$

접점의 좌표를 (t, te^{-t})이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=e^{-t}(1-t)$이므로 접선의 방정식은

$y-te^{-t}=e^{-t}(1-t)(x-t)$

이 직선이 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$-te^{-t}=e^{-t}(1-t)(-1-t)$, $(t^2+t-1)e^{-t}=0$

$\therefore t^2+t-1=0$ ($\because e^{-t}>0$)

이차방정식 $t^2+t-1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 이때의 두 실근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-1$ …… ㉠

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$$\begin{aligned}f'(\alpha)f'(\beta)&=e^{-\alpha}(1-\alpha)\times e^{-\beta}(1-\beta)\\&=e^{-\alpha}e^{-\beta}(1-\alpha)(1-\beta)\\&=e^{-(\alpha+\beta)}\{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}\\&=e^{-(-1)}(1+1-1)=e\ (\because ㉠)\end{aligned}$$

답 ③

0669

$f(x)=e^x$, $g(x)=\ln x$로 놓으면 $f'(x)=e^x$, $g'(x)=\frac{1}{x}$

원점에서 곡선 $y=e^x$에 그은 접선의 접점을 (a, e^a)이라 하면 접선의 기울기가 $f'(a)=e^a$이므로 접선의 방정식은

$y-e^a=e^a(x-a)$

이 접선이 원점을 지나므로

$-e^a=-ae^a$, $e^a(a-1)=0$ $\quad\therefore a=1$ ($\because e^a>0$)

따라서 접선의 방정식은

$y-e=e(x-1)$ $\quad\therefore y=ex$

원점에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선의 접점을 $(b, \ln b)$라 하면 접선의 기울기가 $g'(b)=\frac{1}{b}$이므로 접선의 방정식은

$y-\ln b=\frac{1}{b}(x-b)$

이 접선이 원점을 지나므로

$-\ln b=-1$ $\quad\therefore b=e$

따라서 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{e}(x-e)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{e}x$

두 접선 $y=ex$, $y=\frac{1}{e}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하면

$\tan\theta_1=e$, $\tan\theta_2=\frac{1}{e}$

이때, $\theta=\theta_1-\theta_2$이므로

$$\begin{aligned}\tan\theta=\tan(\theta_1-\theta_2)&=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}\\&=\frac{e-\frac{1}{e}}{1+e\times\frac{1}{e}}=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$

0670

$f(x)=x+\frac{4}{x}$로 놓으면 $f'(x)=1-\frac{4}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, t+\frac{4}{t}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=1-\frac{4}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(t+\frac{4}{t}\right)=\left(1-\frac{4}{t^2}\right)(x-t)$

이 직선이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$1-t-\frac{4}{t}=2-\frac{8}{t^2}-t+\frac{4}{t}$, $1+\frac{8}{t}-\frac{8}{t^2}=0$

$t\neq0$이므로 양변에 t^2을 곱하면 $t^2+8t-8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2+8=24>0$

이므로 서로 다른 두 개의 실근을 가진다.

즉, 접점의 개수가 2이므로 점 $(2, 1)$에서 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다. 답 2

0671

$f(x)=xe^x$으로 놓으면 $f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$
접점의 좌표를 (t, te^t)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는
$f'(t)=(t+1)e^t$이므로 접선의 방정식은
$y-te^t=(t+1)e^t(x-t)$
이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로
$-te^t=a(t+1)e^t-t(t+1)e^t$, $e^t(t^2-at-a)=0$
$\therefore t^2-at-a=0$ ($\because e^t>0$) …… ㉠
점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=xe^x$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
㉠의 판별식을 D라 하면
$D=a^2+4a>0$, $a(a+4)>0$
$\therefore a<-4$ 또는 $a>0$
따라서 양의 정수 a의 최솟값은 1이다.

답 ①

0672

|전략| 접선의 방정식을 구한 후 x절편, y절편을 구한다.

$f(x)=x^2\ln x$로 놓으면
$f'(x)=2x\ln x+x^2\times\dfrac{1}{x}=(2\ln x+1)x$
$x=e$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(e)=3e$
따라서 점 (e, e^2)에서의 접선의 방정식은
$y-e^2=3e(x-e)$ $\quad\therefore y=3ex-2e^2$
접선의 x절편과 y절편이 각각 $\dfrac{2}{3}e$, $-2e^2$이므로 구하는 도형의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}e\times2e^2=\dfrac{2}{3}e^3$

답 ④

0673

$f(x)=e^{3-x}$으로 놓으면 $f'(x)=-e^{3-x}$
접점의 좌표를 (t, e^{3-t})이라 하면 접선의 기울기가 -1이므로
$f'(t)=-e^{3-t}=-1$
$e^{3-t}=1$, $3-t=0$ $\quad\therefore t=3$
접점의 좌표가 $(3, 1)$이므로 접선의 방정식은
$y-1=-(x-3)$ $\quad\therefore y=-x+4$
따라서 $\mathrm{P}(4, 0)$, $\mathrm{Q}(0, 4)$이므로 $\triangle\mathrm{OPQ}$의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times4\times4=8$

답 ④

0674

$f(x)=\ln\dfrac{x}{2}+1$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{x}$
접점 P의 좌표를 $\left(t, \ln\dfrac{t}{2}+1\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{1}{t}$이므로 접선의 방정식은
$y-\left(\ln\dfrac{t}{2}+1\right)=\dfrac{1}{t}(x-t)$
이 직선이 원점을 지나므로
$-\ln\dfrac{t}{2}-1=-1$, $\dfrac{t}{2}=1$ $\quad\therefore t=2$
즉, 점 P의 좌표는 $(2, 1)$이고 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이다. … ❶
점 P를 지나고 접선에 수직인 직선의 기울기는 -2이므로 이 직선의 방정식은
$y-1=-2(x-2)$ $\quad\therefore y=-2x+5$
즉, 점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$ … ❷
따라서 $\triangle\mathrm{POQ}$의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\times1=\dfrac{5}{4}$ … ❸

답 $\dfrac{5}{4}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❷ 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\triangle\mathrm{POQ}$의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

0675

|전략| 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$에서 공통인 접선을 가지면 $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$임을 이용한다.

$f(x)=ax^3$, $g(x)=\ln x$로 놓으면
$f'(x)=3ax^2$, $g'(x)=\dfrac{1}{x}$
두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 하면
$f(t)=g(t)$에서 $at^3=\ln t$ …… ㉠
$f'(t)=g'(t)$에서 $3at^2=\dfrac{1}{t}$ …… ㉡
㉡에서 $at^3=\dfrac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $\dfrac{1}{3}=\ln t$ $\quad\therefore t=\sqrt[3]{e}$
$t=\sqrt[3]{e}$를 ㉠에 대입하면 $ae=\dfrac{1}{3}$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{3e}$

답 ④

0676

$f(x)=\dfrac{1}{x^2}-x+2$, $g(x)=x^2+ax+2b$로 놓으면
$f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}-1$, $g'(x)=2x+a$
두 곡선이 $x=1$에서 공통인 접선을 가지므로
$f(1)=g(1)$에서 $2=1+a+2b$ $\quad\therefore a+2b=1$ …… ㉠
$f'(1)=g'(1)$에서 $-3=2+a$ $\quad\therefore a=-5$
$a=-5$를 ㉠에 대입하면 $b=3$
$\therefore a+b=-2$

답 ①

0677

$f(x)=\sin^2x-a$, $g(x)=\cos x$로 놓으면
$f'(x)=2\sin x\cos x$, $g'(x)=-\sin x$
두 곡선이 $x=t$에서 공통인 접선을 가지므로

$f(t)=g(t)$에서 $\sin^2 t-a=\cos t$ ⋯⋯ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $2\sin t\cos t=-\sin t$, $\sin t(2\cos t+1)=0$

$\therefore \cos t=-\frac{1}{2}$ ($\because 0<t<\pi$)

이것을 ㉠에 대입하면

$a=\sin^2 t-\cos t=1-\cos^2 t-\cos t$

$=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$ 답 $\frac{5}{4}$

0678

| 전략 | $f(k)=-1$을 만족시키는 k의 값을 찾은 후 $g'(-1)=\frac{1}{f'(k)}$임을 이용한다.

$g(-1)=k$라 하면 $f(k)=-1$이므로

$\tan k=-1$ $\therefore k=-\frac{\pi}{4}$ $\left(\because -\frac{\pi}{2}<k<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore g'(-1)=\frac{1}{f'(g(-1))}=\frac{1}{f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

이때, $f'(x)=\sec^2 x$이므로

$f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sec^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2$ $\therefore g'(-1)=\frac{1}{2}$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y+\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x+1)$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x+1)$, $\pi=2x+2$ $\therefore x=-1+\frac{\pi}{2}$

따라서 x절편이 $-1+\frac{\pi}{2}$이므로

$a=-1$, $b=\frac{1}{2}$ $\therefore a+2b=0$ 답 ③

0679

$g(2)=a$라 하면 $f(a)=2$이므로

$\sqrt{a+3}=2$, $a+3=4$ $\therefore a=1$

$\therefore g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(1)}$

이때, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$이므로

$f'(1)=\frac{1}{4}$ $\therefore g'(2)=4$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=4(x-2)$ $\therefore y=4x-7$ 답 ④

다른 풀이 $y=\sqrt{x+3}$이라 하면 $y^2=x+3$

$\therefore x=y^2-3$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=x^2-3$ $(x\ge 0)$

즉, $g(x)=x^2-3$ $(x\ge 0)$이므로 $g'(x)=2x$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, 1)$을 지나고 기울기가 $g'(2)=4$인 접선의 방정식은

$y-1=4(x-2)$ $\therefore y=4x-7$

0680

$g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$e^{a-2}=1$, $a-2=0$ $\therefore a=2$

$\therefore g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'(2)}$

이때, $f'(x)=e^{x-2}$이므로

$f'(2)=1$ $\therefore g'(1)=1$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=x-1$ $\therefore y=x+1$

따라서 구하는 y절편은 1이다. 답 ⑤

다른 풀이 $y=e^{x-2}$이라 하면 $\ln y=x-2$

$\therefore x=\ln y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\ln x+2$

즉, $g(x)=\ln x+2$이므로 $g'(x)=\frac{1}{x}$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, 2)$를 지나고 기울기가 $g'(1)=1$인 접선의 방정식은

$y-2=x-1$ $\therefore y=x+1$

따라서 구하는 y절편은 1이다.

0681

| 전략 | $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$임을 이용하여 $t=2$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기를 구한다.

$\frac{dx}{dt}=\frac{(1+t^2)-t\times 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$

$\frac{dy}{dt}=\frac{2t(1+t^2)-t^2\times 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{2t}{(1+t^2)^2}$

이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2t}{(1+t^2)^2}}{\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}}=\frac{2t}{1-t^2}$ $(t\ne\pm 1)$

$t=2$일 때, $x=\frac{2}{5}$, $y=\frac{4}{5}$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{3}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{4}{5}=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{2}{5}\right)$ $\therefore y=-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$

따라서 구하는 y절편은 $\frac{4}{3}$이다. 답 $\frac{4}{3}$

0682

$\frac{dx}{dt}=-2$, $\frac{dy}{dt}=-2+2t$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2+2t}{-2}=1-t$

$x=5$에서 $1-2t=5$이므로 $t=-2$

$t=-2$일 때, $y=11$, $\frac{dy}{dx}=3$이므로 접선의 방정식은

$y-11=3(x-5)$ $\quad\therefore y=3x-4$

따라서 구하는 x절편은 $\frac{4}{3}$이다. 답 ④

0683

$\frac{dx}{d\theta}=3\cos^2\theta\times(-\sin\theta)=-3\cos^2\theta\sin\theta$

$\frac{dy}{d\theta}=3\sin^2\theta\times\cos\theta=3\sin^2\theta\cos\theta$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{3\sin^2\theta\cos\theta}{-3\cos^2\theta\sin\theta}=-\tan\theta\,(\cos^2\theta\sin\theta\neq0)$$

$\theta=\frac{\pi}{3}$일 때, $x=\frac{1}{8}$, $y=\frac{3\sqrt{3}}{8}$, $\frac{dy}{dx}=-\sqrt{3}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{3\sqrt{3}}{8}=-\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{8}\right)$ $\quad\therefore y=-\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 $a=-\sqrt{3}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $2ab=-3$ 답 -3

0684

$\frac{dx}{dt}=ae^{at}$, $\frac{dy}{dt}=-ae^{-at}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-ae^{-at}}{ae^{at}}=-e^{-2at}$$

$t=\ln 2$일 때, $x=2^a$, $y=2^{-a}$, $\frac{dy}{dx}=-2^{-2a}$이므로 접선의 방정식은

$y-2^{-a}=-2^{-2a}(x-2^a)$ $\quad\therefore y=-2^{-2a}x+2^{-a+1}$

이 직선이 직선 $y=-\frac{1}{16}x+\frac{1}{2}$과 일치하므로

$-2^{-2a}=-\frac{1}{16}$, $2^{-a+1}=\frac{1}{2}$

$-a+1=-1$ $\quad\therefore a=2$ 답 ④

0685

$\frac{dx}{dt}=\frac{t-(t-1)}{t^2}=\frac{1}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{(t+1)-t}{(t+1)^2}=\frac{1}{(t+1)^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{(t+1)^2}}{\frac{1}{t^2}}=\frac{t^2}{(t+1)^2}$$

$t=1$일 때, $x=0$, $y=\frac{1}{2}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}x$ $\quad\therefore y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

따라서 $\mathrm{P}\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Q}(-2, 0)$이므로 $\triangle$OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0686

$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=2\cos\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{2\cos\theta}{-\sin\theta}=-2\cot\theta\,(\sin\theta\neq0)$$

점 $\mathrm{P}(a, b)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로

$-2\cot\theta=-2$, $\cot\theta=1$ $\quad\therefore \theta=\frac{\pi}{4}\ (\because 0<\theta<\pi)$

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\sqrt{2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\sqrt{2}=-2\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\quad\therefore y=-2x+2\sqrt{2}$

따라서 $\mathrm{A}(\sqrt{2}, 0)$, $\mathrm{B}(0, 2\sqrt{2})$이므로 $\triangle$OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=2$ 답 ⑤

0687

| 전략 | 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한 후 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기를 구한다.

$x^3+y^3-5xy+1=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-5y-5x\frac{dy}{dx}=0$, $(3y^2-5x)\frac{dy}{dx}=-3x^2+5y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-3x^2+5y}{3y^2-5x}\ (3y^2-5x\neq0)$

점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=\frac{-3\times1^2+5\times2}{3\times2^2-5\times1}=\frac{7}{7}=1$

이므로 접선의 방정식은

$y-2=x-1$ $\quad\therefore y=x+1$

따라서 구하는 x절편은 -1이다. 답 -1

0688

$x\cos y+y\cos x+2\pi=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$\cos y-x\sin y\frac{dy}{dx}+\cos x\frac{dy}{dx}-y\sin x=0$

$\cos y-y\sin x+(\cos x-x\sin y)\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y\sin x-\cos y}{\cos x-x\sin y}\ (\cos x-x\sin y\neq0)$

점 (π, π)에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=\frac{\pi\sin\pi-\cos\pi}{\cos\pi-\pi\sin\pi}=\frac{1}{-1}=-1$

이므로 접선의 방정식은

$y-\pi=-(x-\pi)$ $\quad\therefore y=-x+2\pi$

따라서 이 접선 위의 점은 ①$(0, 2\pi)$이다. 답 ①

0689

$x^2+2ye^x+y^2-3=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2x+2e^x\frac{dy}{dx}+2ye^x+2y\frac{dy}{dx}=0$, $(2e^x+2y)\frac{dy}{dx}=-2x-2ye^x$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x+ye^x}{e^x+y}\ (e^x+y\neq0)$ ··· ❶

점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{0+1\times e^0}{e^0+1}=-\frac{1}{2}$$

이므로 접선의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{2}x \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x+1$ … ❷

이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로 $a=2$ … ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	50 %
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0690

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\times\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\ (x\neq 0, y\neq 0)$$

점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx}=-1$이므로 접선의 방정식은

$y-1=-(x-1) \qquad \therefore y=-x+2$

따라서 $\mathrm{A}(2, 0)$, $\mathrm{B}(0, 2)$이므로 $\triangle\mathrm{OAB}$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$

답 2

0691

$x^2y^2-1=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2xy^2+2x^2y\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

점 $(-1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx}=1$이므로 접선 l의 방정식은

$y-1=x+1 \qquad \therefore x-y+2=0$

따라서 점 $(2, 0)$과 직선 $x-y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

답 ⑤

0692

$xy=3$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$y+x\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

점 $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y_n}{x_n}=-\frac{3}{{x_n}^2}\left(\because y_n=\frac{3}{x_n}\right)$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-y_n=-\frac{3}{{x_n}^2}(x-x_n)$$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$$-y_n=-\frac{3}{{x_n}^2}(x-x_n),\ y_n{x_n}^2=3x-3x_n$$

$3x_n=3x-3x_n\ (\because x_ny_n=3) \qquad \therefore x=2x_n$

즉, $x_{n+1}=2x_n$

점 $\mathrm{P}_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$은 곡선 $y=\frac{3}{x}$ 위의 점이므로

$$y_{n+1}=\frac{3}{x_{n+1}}=\frac{3}{2x_n}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{x_n}=\frac{1}{2}y_n\left(\because y_n=\frac{3}{x_n}\right)$$

따라서 수열 $\{y_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$y_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}y_n=3+3\times\left(\frac{1}{2}\right)+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots$$

$$=\frac{3}{1-\frac{1}{2}}=6$$

답 ②

0693

| 전략 | 증감표를 작성하여 $f'(x)$의 부호를 조사한다.

$f(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$에서

$$f'(x)=\frac{(x^2+3)-(x-1)\times 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-(x^2-2x-3)}{(x^2+3)^2}$$

$$=-\frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-1, 3]$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, -1]$, $[3, \infty)$에서 감소하므로

$a=-1$, $b=3 \qquad \therefore a+b=2$

답 2

0694

$f(x)=x+\sqrt{8-x^2}$에서 $0<x\le 2\sqrt{2}$이고

$$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}=\frac{\sqrt{8-x^2}-x}{\sqrt{8-x^2}}$$ … ❶

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{8-x^2}=x$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2=4 \qquad \therefore x=2\ (\because x>0)$ … ❷

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

따라서 함수 $f(x)$가 증가하는 구간은 $(0, 2]$이므로 이 구간에 속하는 모든 정수 x의 값의 합은

$1+2=3$ … ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 증가하는 구간에 속하는 모든 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	30 %

0695

$f(x)=\dfrac{e^{-x}}{3x^2+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{-e^{-x}(3x^2+1)-e^{-x}\times 6x}{(3x^2+1)^2}=\dfrac{-e^{-x}(3x^2+6x+1)}{(3x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $3x^2+6x+1=0$ ($\because e^{-x}>0$)

$\therefore x=-1\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

x	$\cdots$	$-1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$-1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$가 증가하는 x의 값의 범위는

$-1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\le x\le -1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

이므로 $\alpha=-1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\beta=-1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore \alpha+\beta=-2$ 답 -2

0696

$f(x)=3\ln(x^2+1)-x^3$에서

$f'(x)=\dfrac{6x}{x^2+1}-3x^2=\dfrac{6x-3x^2(x^2+1)}{x^2+1}$

$=\dfrac{-3x(x^3+x-2)}{x^2+1}=-\dfrac{3x(x-1)(x^2+x+2)}{x^2+1}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ ($\because x^2+x+2>0$)

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$가 감소하는 구간은 $(-\infty, 0]$, $[1, \infty)$이므로 이 구간에 속하는 x의 값이 아닌 것은 ③ $\dfrac{1}{2}$이다. 답 ③

0697

|전략| 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 함을 이용한다.

$f(x)=(ax^2-1)e^{-x}$에서

$f'(x)=2axe^{-x}-(ax^2-1)e^{-x}=-(ax^2-2ax-1)e^{-x}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이때, $e^{-x}>0$이므로 $ax^2-2ax-1\le 0$이어야 한다.

(i) $a=0$일 때, $-1\le 0$이므로 항상 성립한다.

(ii) $a\ne 0$일 때, $a<0$이고 이차방정식 $ax^2-2ax-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2+a\le 0$, $-1\le a\le 0$

$a<0$이므로 $-1\le a<0$

(i), (ii)에 의하여 구하는 a의 값의 범위는 $-1\le a\le 0$ 답 ④

Lecture

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

(1) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$일 조건은 ⇨ $a>0$, $D\le 0$

(2) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le 0$일 조건은 ⇨ $a<0$, $D\le 0$

0698

$f(x)=ax+\ln(x^2+4)$에서

$f'(x)=a+\dfrac{2x}{x^2+4}=\dfrac{ax^2+2x+4a}{x^2+4}$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이때, $x^2+4>0$이므로 $ax^2+2x+4a\le 0$이어야 한다.

즉, $a<0$이고 이차방정식 $ax^2+2x+4a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1-4a^2\le 0$, $(2a-1)(2a+1)\ge 0$

$\therefore a\le -\dfrac{1}{2}$ 또는 $a\ge \dfrac{1}{2}$

그런데 $a<0$이므로 $a\le -\dfrac{1}{2}$

따라서 구하는 a의 최댓값은 $-\dfrac{1}{2}$이다. 답 ④

0699

$f(x)=(x^2+2ax+b)e^x$에서

$f'(x)=(2x+2a)e^x+(x^2+2ax+b)e^x$

$=\{x^2+2(a+1)x+2a+b\}e^x$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이때, $e^x>0$이므로 $x^2+2(a+1)x+2a+b\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+2(a+1)x+2a+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a+1)^2-(2a+b)\le 0$ $\quad\therefore a^2+1\le b$

따라서 b의 최솟값은 1이다. 답 ①

0700

|전략| 함수 $f(x)$가 구간 $(-1, 1)$에서 증가하려면 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 함을 이용한다.

$f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{(2x+2)(x^2+1)-(x^2+2x+a)\times 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-2x^2+2(1-a)x+2}{(x^2+1)^2}$

함수 $f(x)$가 구간 $(-1, 1)$에서 증가하려면 $-1<x<1$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이때, $(x^2+1)^2>0$이므로 $g(x)=-2x^2+2(1-a)x+2$로 놓으면 $-1<x<1$에서 $g(x)\ge 0$이어야 한다.

$g(-1)=-2-2(1-a)+2\geq 0$에서 $a\geq 1$

$g(1)=-2+2(1-a)+2\geq 0$에서 $a\leq 1$

따라서 구하는 a의 값은 1이다. 답 1

0701

$f(x)=ax-\sin x$에서 $f'(x)=a-\cos x$

함수 $f(x)$가 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 감소하려면 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $f'(x)\leq 0$ 이어야 한다.

이때, $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\cos x<1$이므로

$-1<-\cos x<0 \qquad \therefore a-1<a-\cos x<a$

즉, $a-1<f'(x)<a$이므로 $f'(x)\leq 0$이려면 $a\leq 0$

따라서 a의 최댓값은 0이다. 답 ③

0702

$f(x)=k^2\ln x+x^2-4x$에서

$f'(x)=\frac{k^2}{x}+2x-4=\frac{2x^2-4x+k^2}{x}$

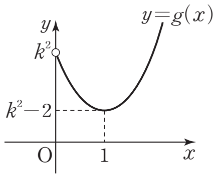
함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 구간 $(0, \infty)$에서 증가해야 하므로 $x>0$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

즉, $x>0$에서 $2x^2-4x+k^2\geq 0$이 항상 성립해야 한다.

$g(x)=2x^2-4x+k^2=2(x-1)^2+k^2-2$ 로 놓으면 $x>0$에서 $g(x)\geq 0$이어야 하므로

$k^2-2\geq 0$

$\therefore k\leq -\sqrt{2}$ 또는 $k\geq \sqrt{2}$



답 $k\leq -\sqrt{2}$ 또는 $k\geq \sqrt{2}$

0703

| 전략 | $f'(x)=0$이 되는 x의 값을 구하고 그 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는지 조사한다.

$f(x)=\frac{2x-1}{x^2+2}$에서

$f'(x)=\frac{2(x^2+2)-(2x-1)\times 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{-2x^2+2x+4}{(x^2+2)^2}$

$=\frac{-2(x+1)(x-2)}{(x^2+2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	$\frac{1}{2}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $\frac{1}{2}$, $x=-1$에서 극솟값 -1을 가지므로 $\alpha=2, f(\alpha)=\frac{1}{2}, \beta=-1, f(\beta)=-1$

$\therefore \frac{f(\alpha)}{\beta}+\frac{f(\beta)}{\alpha}=\frac{\frac{1}{2}}{-1}+\frac{-1}{2}=-1$ 답 -1

0704

$f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$에서 $x\neq -1$이고

$f'(x)=\frac{2x(x+1)-(x^2+3)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

$=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	(-1)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-6	↘		↘	2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 -6, $x=1$에서 극솟값 2를 가지므로 극댓값과 극솟값의 합은

$-6+2=-4$ 답 -4

0705

| 전략 | (근호 안의 식의 값)≥ 0, (분모)$\neq 0$인 x의 값의 범위에서 극대, 극소를 조사한다.

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}-x}$에서 $x\geq 2$이고

$f'(x)=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}-1}{(\sqrt{x-2}-x)^2}=\frac{2\sqrt{x-2}-1}{2\sqrt{x-2}(\sqrt{x-2}-x)^2}$

$f'(x)=0$에서 $2\sqrt{x-2}=1$, $x-2=\frac{1}{4} \qquad \therefore x=\frac{9}{4}$

x	2	$\cdots$	$\frac{9}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{4}{7}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{9}{4}$에서 극솟값 $-\frac{4}{7}$를 갖는다. 답 $-\frac{4}{7}$

0706

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{2-x}$에서 $0\leq x\leq 2$이고

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}=\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x(2-x)}}$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{2-x}=\sqrt{x}$

양변을 제곱하면 $2-x=x \qquad \therefore x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	2	↘	$\sqrt{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 2를 갖는다. 답 2

0707

| 전략 | $f'(x)=0$이 되는 x의 값을 구하고 그 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는지 조사한다.

$f(x)=(x^2-3x+1)e^x$에서

$f'(x)=(2x-3)e^x+(x^2-3x+1)e^x$

$\quad=(x^2-x-2)e^x=(x+1)(x-2)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$ ($\because e^x>0$)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{5}{e}$	↘	$-e^2$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $\frac{5}{e}$, $x=2$에서 극솟값 $-e^2$을 가지므로 구하는 극댓값과 극솟값의 곱은

$\frac{5}{e}\times(-e^2)=-5e$ 답 ①

다른 풀이 $f'(x)=(x^2-x-2)e^x$에서

$f''(x)=(2x-1)e^x+(x^2-x-2)e^x=(x^2+x-3)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$ ($\because e^x>0$)

이때, $f''(-1)=-\frac{3}{e}<0$, $f''(2)=3e^2>0$이므로 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=\frac{5}{e}$, 극솟값은 $f(2)=-e^2$이다.

따라서 구하는 극댓값과 극솟값의 곱은 $\frac{5}{e}\times(-e^2)=-5e$

0708

$f(x)=e^x+e^{-x}$에서 $f'(x)=e^x-e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $e^x=e^{-x}$ $\quad\therefore x=0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 2를 가지므로

$a=0, b=2$ $\quad\therefore a+b=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗

답 2

0709

$f(x)=e^{-x^2}$에서 $f'(x)=-2xe^{-x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because e^{-x^2}>0$)

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	1	↘

ㄱ. $x=0$에서 극댓값 1을 갖는다. (참)

ㄴ. 극솟값은 없다. (거짓)

ㄷ. 구간 $(-\infty, 0]$에서 증가하고 구간 $[0, \infty)$에서 감소한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 답 ①

0710

|전략| (진수)>0인 x의 값의 범위에서 극대, 극소를 조사한다.

$f(x)=1-x(\ln x)^2$에서 $x>0$이고

$f'(x)=-(\ln x)^2-x\times2\ln x\times\frac{1}{x}=-\ln x\times(\ln x+2)$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-2$ 또는 $\ln x=0$

$\therefore x=\frac{1}{e^2}$ 또는 $x=1$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖는다. 답 1

다른 풀이 $f'(x)=-\ln x\times(\ln x+2)$에서

$f''(x)=-\frac{1}{x}(\ln x+2)-\ln x\times\frac{1}{x}=-\frac{2}{x}(\ln x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{e^2}$ 또는 $x=1$

이때, $f''\left(\frac{1}{e^2}\right)=-2e^2\times(-1)=2e^2>0$, $f''(1)=-2<0$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖는다.

0711

$f(x)=x+2-\ln x$에서 $x>0$이고 $f'(x)=1-\frac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	3	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 3을 가지므로

$\alpha=1, \beta=3$ $\quad\therefore \alpha+\beta=4$ 답 ②

0712

$f(x)=\frac{x}{\ln x}$에서 $0<x<1$ 또는 $x>1$이고 $f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\quad\therefore x=e$

x	(0)	$\cdots$	(1)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↘	e	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극솟값 e를 가지므로

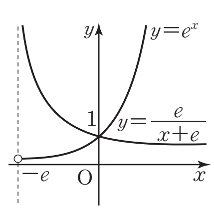
$a=e, b=e$ $\quad\therefore a+b=2e$ 답 $2e$

0713

$f(x)=e^x-e\ln(x+e)$에서 $x>-e$이고 $f'(x)=e^x-\frac{e}{x+e}$

$f'(x)=0$에서 $e^x=\frac{e}{x+e}$

이 방정식의 실근은 두 곡선 $y=e^x$과 $y=\frac{e}{x+e}$의 교점의 x좌표와 같다.



오른쪽 그림에서 $f'(0)=0$이고

$-e<x<0$이면 $f'(x)<0$

$x>0$이면 $f'(x)>0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고 극솟값은

$f(0)=1-e$ 답 ②

참고 $x>0$이면 $y=e^x$의 그래프가 $y=\frac{e}{x+e}$의 그래프보다 위쪽에 있으므로

$e^x>\frac{e}{x+e}$ $\quad\therefore f'(x)=e^x-\frac{e}{x+e}>0$

0714

|전략| 주어진 범위에서 $f'(x)=0$이 되는 x의 값을 구하고 그 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는지 조사한다.

$f(x)=x+2\cos x$에서 $f'(x)=1-2\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because 0<x<\pi$)

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극댓값 $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$, $x=\frac{5}{6}\pi$에서 극솟값 $\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$을 가지므로 $M=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$, $m=\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$

$\therefore M-m=\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)-\left(\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)=-\frac{2}{3}\pi+2\sqrt{3}$ 답 ③

다른 풀이 $f'(x)=1-2\sin x$에서 $f''(x)=-2\cos x$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because 0<x<\pi$)

이때, $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}<0$, $f''\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\sqrt{3}>0$이므로 $f(x)$의 극댓값은

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$, 극솟값은 $f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$이다.

따라서 $M=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$, $m=\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$이므로

$M-m=-\frac{2}{3}\pi+2\sqrt{3}$

0715

$f(x)=2\cos x-\cos 2x$에서

$f'(x)=-2\sin x+2\sin 2x=-2\sin x+4\sin x\cos x$

$=2\sin x(2\cos x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\pi$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$) … ❶

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{5}{3}\pi$에서 극댓값 $\frac{3}{2}$, $x=\pi$에서 극솟값 -3을 가지므로 $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=-3$ … ❷

$\therefore 2\alpha-\beta=2\times\frac{3}{2}-(-3)=6$ … ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ α, β의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $2\alpha-\beta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0716

$f(x)=(\sin 2x)^2+1$에서

$f'(x)=2\sin 2x\times 2\cos 2x=4\sin 2x\cos 2x=2\sin 4x$

$f'(x)=0$에서 $4x=\pi$ 또는 $4x=2\pi$ 또는 $4x=3\pi$ ($\because 0<4x<4\pi$)

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{3}{4}\pi$에서 극대, $x=\frac{\pi}{2}$에서 극소이므로 $0<x<\pi$에서 극대 또는 극소가 되는 점의 개수는 3이다.

답 ④

0717

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값 β를 가지면 $f(\alpha)=\beta$, $f'(\alpha)=0$임을 이용한다.

$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x+1}$에서 $x\neq-1$이고

$f'(x)=\frac{(2x+a)(x+1)-(x^2+ax+b)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+a-b}{(x+1)^2}$

함수 $f(x)$가 $x=-4$에서 극댓값 -9를 가지므로

$f(-4)=\frac{16-4a+b}{-3}=-9$에서 $-4a+b=11$ ⋯⋯ ㉠

$f'(-4)=\frac{8+a-b}{9}=0$에서 $a-b=-8$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=7$

$\therefore f(x)=\frac{x^2-x+7}{x+1}$

$f'(x)=\frac{(2x-1)(x+1)-(x^2-x+7)}{(x+1)^2}=\frac{(x+4)(x-2)}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	(-1)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-9	$\searrow$		$\searrow$	3	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 3을 갖는다. 답 ⑤

0718

$f(x)=a\sin x+b\cos 2x$에서 $f'(x)=a\cos x-2b\sin 2x$ … ❶

함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극댓값 $\frac{3}{2}$을 가지므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=\frac{3}{2}$에서 $a+b=3$ ⋯⋯ ㉠

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}a-\sqrt{3}b=0$에서 $a-2b=0$ ⋯⋯ ㉡ … ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$\therefore a-b=1$ … ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ a, b에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	50 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0719

$f(x)=\dfrac{x^2+ax+1}{x^2-x+1}\,(a>-1)$에서

$f'(x)=\dfrac{(2x+a)(x^2-x+1)-(x^2+ax+1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$

$=\dfrac{-(a+1)(x+1)(x-1)}{(x^2-x+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$a>-1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값, $x=1$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 $f(-1)=\dfrac{-a+2}{3}=-1$이므로 $a=5$

$\alpha=f(1)=1+5+1=7$

$\therefore a+\alpha=5+7=12$

답 ④

0720

$f(x)=e^x+9e^{-x}+a$에서 $f'(x)=e^x-9e^{-x}=\dfrac{e^{2x}-9}{e^x}$

$f'(x)=0$에서 $e^{2x}=9$, $2x=\ln 9$ $\quad\therefore x=\ln 3$

x	$\cdots$	$\ln 3$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\ln 3$에서 극솟값 2를 가지므로

$f(\ln 3)=e^{\ln 3}+9e^{-\ln 3}+a=2$, $3+9\times\dfrac{1}{3}+a=2$

$\therefore a=-4$

답 ②

0721

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-a\ln x\,(a>0)$에서 $x>0$이고

$f'(x)=x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2-a}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x^2=a$ $\quad\therefore x=\sqrt{a}$ ($\because x>0$)

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{a}$에서 극솟값 0을 가지므로

$f(\sqrt{a})=\dfrac{a}{2}-a\ln\sqrt{a}=0$, $\dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{2}\ln a=0$, $\dfrac{a}{2}(1-\ln a)=0$

그런데 $a>0$이므로 $1-\ln a=0$, $\ln a=1$ $\quad\therefore a=e$

답 ④

0722

$f(x)=x+a\cos x\,(a>1)$에서 $f'(x)=1-a\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\dfrac{1}{a}$

이때, $0<\dfrac{1}{a}<1$이므로 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을

$x=\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$, $x=\pi-\alpha$로 놓으면

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\pi-\alpha$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=\pi-\alpha$에서 극솟값 0을 가지므로

$f(\pi-\alpha)=\pi-\alpha+a\cos(\pi-\alpha)=\pi-\alpha-a\cos\alpha=0$

$\therefore \alpha+a\cos\alpha=\pi$

이때, $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대이므로 극댓값은

$f(\alpha)=\alpha+a\cos\alpha=\pi$

답 ③

0723

|전략| 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 이용한다.

$f(x)=(x^2-x+k)e^x$에서

$f'(x)=(2x-1)e^x+(x^2-x+k)e^x=(x^2+x+k-1)e^x$

이때, 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $x^2+x+k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+x+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4(k-1)>0$, $4k-5<0$ $\quad\therefore k<\dfrac{5}{4}$

따라서 구하는 정수 k의 최댓값은 1이다.

답 ①

0724

$f(x)=\left(\dfrac{1}{2}x^2+kx+1\right)e^x$에서

$f'(x)=(x+k)e^x+\left(\dfrac{1}{2}x^2+kx+1\right)e^x$

$=\left\{\dfrac{1}{2}x^2+(k+1)x+k+1\right\}e^x$

이때, 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $\dfrac{1}{2}x^2+(k+1)x+k+1=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $\dfrac{1}{2}x^2+(k+1)x+k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+1)^2-2(k+1)\le 0$, $k^2\le 1$ $\quad\therefore -1\le k\le 1$

따라서 정수 k의 개수는 -1, 0, 1의 3이다.

답 3

0725

$f(x)=2\ln x+\dfrac{a}{x}-x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{a}{x^2}-1=\frac{-x^2+2x-a}{x^2}$$

이때, 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $-x^2+2x-a=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $-x^2+2x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-a>0 \qquad \therefore a<1$

(ii) (두 근의 합)$=2>0$

(iii) (두 근의 곱)$=a>0$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 a의 값의 범위는 $0<a<1$ 답 ④

Lecture

이차방정식의 실근의 부호

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근을 α, β라 하고 판별식을 D라 할 때

① 두 근이 모두 양수 ⇨ $D\ge0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

② 두 근이 모두 음수 ⇨ $D\ge0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호 ⇨ $\alpha\beta<0$

(α, β가 서로 다른 두 실근인 경우 위의 조건에서 판별식의 등호(=)만 없애 주면 된다.)

0726

$y=\frac{1}{3}\cos^3x+k\cos^2x+k\cos x$에서 $\cos x=t\,(-1<t<1)$로 놓으면 $y=\frac{1}{3}t^3+kt^2+kt$

$f(t)=\frac{1}{3}t^3+kt^2+kt$로 놓으면 $f'(t)=t^2+2kt+k$

이때, 함수 $f(t)$가 $-1<t<1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $t^2+2kt+k=0$이 $-1<t<1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $t^2+2kt+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-k>0$, $k(k-1)>0 \qquad \therefore k<0$ 또는 $k>1$

(ii) $y=f'(t)$의 그래프의 축은 직선 $t=-k$이므로

$-1<-k<1 \qquad \therefore -1<k<1$

(iii) $f'(-1)=1-k>0$에서 $k<1$

$f'(1)=1+3k>0$에서 $k>-\frac{1}{3}$

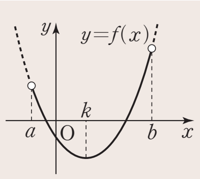
$\therefore -\frac{1}{3}<k<1$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 k의 값의 범위는

$-\frac{1}{3}<k<0$ 답 $-\frac{1}{3}<k<0$

Lecture

이차항의 계수가 양수인 이차방정식 $f(x)=0$이 $a<x<b$에서 서로 다른 두 실근을 가지면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $f(x)=0$에서 판별식 $D>0$

(ii) 축이 $x=k$이면 $a<k<b$

(iii) $f(a)>0$, $f(b)>0$

0727

|전략| 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$ 또는 $f'(x)\le0$임을 이용한다.

$f(x)=kx+\sin x$에서 $f'(x)=k+\cos x$

이때, 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 $f'(x)\ge0$ 또는 $f'(x)\le0$이어야 한다.

이때, $-1\le\cos x\le1$이므로 $k-1\le k+\cos x\le k+1$

$\therefore k-1\le f'(x)\le k+1$

즉, $k-1\ge0$ 또는 $k+1\le0$이어야 하므로

$k\ge1$ 또는 $k\le-1$

따라서 k의 값이 될 수 없는 것은 ③ $\frac{1}{2}$이다. 답 ③

0728

$f(x)=e^x+ke^{-x}\,(k>0)$에서

$f'(x)=e^x-ke^{-x}=\frac{e^{2x}-k}{e^x}$

$f'(x)=0$에서 $e^{2x}=k$, $2x=\ln k$

$\therefore x=\frac{1}{2}\ln k$

이때, $x<\frac{1}{2}\ln k$이면 $f'(x)<0$, $x>\frac{1}{2}\ln k$이면 $f'(x)>0$이므로

$f(x)$는 $x=\frac{1}{2}\ln k$에서 극값을 가진다.

따라서 함수 $f(x)$가 $0<x<1$에서 극값을 가지려면 $0<\frac{1}{2}\ln k<1$이어야 하므로

$0<\ln k<2 \qquad \therefore 1<k<e^2$ 답 ②

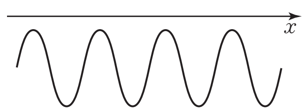
0729

함수 $f(x)$가 극값을 가지므로 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하고 그 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f(x)=a\sin x+bx+1$에서 $f'(x)=a\cos x+b$

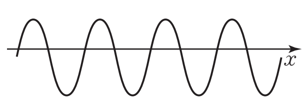
$y=f'(x)$의 그래프는 a, b의 값에 따라 다음과 같이 세 가지 형태로 생각할 수 있다.

(i)



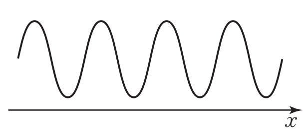
⇨ (최댓값)$=|a|+b\le0$

(ii)



⇨ (최댓값)×(최솟값)<0

(iii)



⇨ (최솟값)$=-|a|+b\ge0$

이때, $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하고 그 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌려면 (ii)의 그래프와 같이 $f'(x)$의 최댓값과 최솟값의 부호가 달라야 하므로

$(|a|+b)(-|a|+b)<0$, $b^2-|a|^2<0$

$\therefore a^2>b^2$ 답 ⑤

STEP 3 내신 마스터

0730

유형 01 접점의 좌표가 주어진 접선의 방정식

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$임을 이용한다.

$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$로 놓으면 $f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$

점 $P(-1,1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=2$이므로 접선의 방정식은

$y-1=2(x+1)\qquad\therefore y=2x+3$

이때, 직선 $y=2x+3$이 x축과 만나는 점 Q의 좌표는 $\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$

이 직선이 곡선과 만나는 점 P가 아닌 점 R의 x좌표는

$\dfrac{1}{x^2}=2x+3$에서 $2x^3+3x^2-1=0$

$(x+1)^2(2x-1)=0\qquad\therefore x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

즉, 점 R의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{2},\ 4\right)$

$\overline{PQ}=\sqrt{\left(-1+\dfrac{3}{2}\right)^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $\overline{QR}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\right)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

$\therefore \overline{PQ}:\overline{QR}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}:2\sqrt{5}=1:4$

답 ③

0731

유형 03 기울기가 주어진 접선의 방정식

|전략| 접점의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{t+1}{t-1}\right)$로 놓고 접선의 방정식을 구한다.

$f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{t+1}{t-1}\right)$이라 하면 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(t)=-\dfrac{2}{(t-1)^2}=-2$, $(t-1)^2=1$

$t-1=\pm1\qquad\therefore t=0$ 또는 $t=2$

즉, 접점의 좌표가 $(0,\ -1)$, $(2,\ 3)$이므로 접선의 방정식은

$y+1=-2x$, $y-3=-2(x-2)$

$\therefore 2x+y+1=0$, $2x+y-7=0$

두 직선 사이의 거리는 직선 $2x+y+1=0$ 위의 점 $(0,\ -1)$과 직선 $2x+y-7=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|-1-7|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

답 ④

0732

유형 04 곡선 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식

|전략| 점 $(0,1)$에서 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t_1,\ 2t_1-\ln t_1)$로 놓고 접선의 방정식을 구한 후 수직인 두 직선의 기울기의 곱이 -1임을 이용한다.

$f(x)=2x-\ln x$로 놓으면 $f'(x)=2-\dfrac{1}{x}$

점 $(0,1)$에서 이 곡선에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t_1,\ 2t_1-\ln t_1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t_1)=2-\dfrac{1}{t_1}$이므로 접선의 방정식은

$y-(2t_1-\ln t_1)=\left(2-\dfrac{1}{t_1}\right)(x-t_1)$

이 직선이 점 $(0,1)$을 지나므로

$1-2t_1+\ln t_1=-2t_1+1$, $\ln t_1=0\qquad\therefore t_1=1$

즉, 점 $(0,1)$에서 그은 접선의 기울기는 $f'(1)=2-1=1$이므로 이 점에서 그은 접선과 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

점 $(a,0)$에서 이 곡선에 그은 접선의 접점의 좌표를

$(t_2,\ 2t_2-\ln t_2)$라 하면 $f'(t_2)=2-\dfrac{1}{t_2}=-1$에서 $t_2=\dfrac{1}{3}$

점 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}-\ln\dfrac{1}{3}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\left(\dfrac{2}{3}-\ln\dfrac{1}{3}\right)=-\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$

이 직선이 점 $(a,0)$을 지나므로

$-\dfrac{2}{3}+\ln\dfrac{1}{3}=-a+\dfrac{1}{3}\qquad\therefore a=1+\ln 3$

답 ②

0733

유형 05 접선과 좌표축으로 둘러싸인 도형의 넓이

|전략| 접선의 방정식을 구한 후 x절편, y절편을 구한다.

$f(x)=(x^2+1)e^x$으로 놓으면

$f'(x)=2xe^x+(x^2+1)e^x=(x+1)^2e^x$

$x=0$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=1$이므로 점 $(0,1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=x\qquad\therefore y=x+1$

따라서 접선의 x절편은 -1, y절편은 1이므로 구하는 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times1\times1=\dfrac{1}{2}$

답 ①

0734

유형 06 두 곡선의 공통인 접선

|전략| 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$에서 공통인 접선을 가지면 $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$임을 이용한다.

$f(x)=e^{2x}$, $g(x)=2\sqrt{x+a}$로 놓으면

$f'(x)=2e^{2x}$, $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+a}}$

두 곡선이 $x=b$인 점에서 접하므로

$f(b)=g(b)$에서 $e^{2b}=2\sqrt{b+a}$ …… ㉠

$f'(b)=g'(b)$에서 $2e^{2b}=\dfrac{1}{\sqrt{b+a}}$ …… ㉡

㉠에서 $\dfrac{1}{\sqrt{b+a}}=\dfrac{2}{e^{2b}}$를 ㉡에 대입하면

$2e^{2b}=\dfrac{2}{e^{2b}}$, $e^{4b}=1\qquad\therefore b=0$

$b=0$을 ㉠에 대입하면

$1=2\sqrt{a}$, $4a=1\qquad\therefore a=\dfrac{1}{4}$

$\therefore a-b=\dfrac{1}{4}$

답 ④

0735

유형 08 매개변수로 나타낸 곡선의 접선의 방정식

|전략| $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$임을 이용하여 $\theta=\pi$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기를 구한다.

$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=1+\sin\theta$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ $(\cos\theta\neq0)$

$\theta=\pi$일 때, $x=1$, $y=\pi+1$, $\frac{dy}{dx}=-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(\pi+1)=-(x-1)$ $\quad\therefore y=-x+\pi+2$

따라서 접선의 x절편과 y절편이 모두 $\pi+2$이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\pi+2)\times(\pi+2)=\frac{1}{2}(\pi+2)^2$

답 ④

0736

유형 11 실수 전체의 구간에서 함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건

|전략| 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이어야 함을 이용한다.

$f(x)=(a-x)e^{x^2}$에서

$f'(x)=-e^{x^2}+(a-x)\times e^{x^2}\times2x$

$=e^{x^2}(-2x^2+2ax-1)$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 구간에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이어야 한다.

이때, $e^{x^2}>0$이므로 $-2x^2+2ax-1\le0$이어야 한다.

이차방정식 $-2x^2+2ax-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-2\le0$, $(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})\le0$

$\therefore -\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$

답 ②

0737

유형 12 주어진 구간에서 함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건

|전략| 함수 $f(x)$가 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 증가하려면 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 함을 이용한다.

$f(x)=a\cos x+x$에서 $f'(x)=-a\sin x+1$

함수 $f(x)$가 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 증가하려면 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 $f'(x)\ge0$이어야 한다.

이때, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 $-1<\sin x<1$이고 $a>0$이므로

$-a+1<-a\sin x+1<a+1$

즉, $-a+1<f'(x)<a+1$이므로 $f'(x)\ge0$이려면

$-a+1\ge0$ $\quad\therefore a\le1$

$\therefore 0<a\le1$

따라서 a의 최댓값은 1이다.

답 ③

0738

유형 13 유리함수의 극대·극소

|전략| $f'(x)=0$이 되는 x의 값을 구하고 그 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는지 조사한다.

$f(x)=-\frac{2x}{x^2+1}$에서

$f'(x)=-\frac{2(x^2+1)-2x\times2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 1, $x=1$에서 극솟값 -1을 가지므로 극댓값과 극솟값의 곱은

$1\times(-1)=-1$

답 ②

0739

유형 14 무리함수의 극대·극소

|전략| $f'(x)=0$이 되는 x의 값을 구하고 그 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는지 조사한다.

$f(x)=x\sqrt{4-x^2}$에서

$f'(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $x^2=2$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{2}$

x	(-2)	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	(2)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	-2	↗	2	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{2}$에서 극댓값 2, $x=-\sqrt{2}$에서 극솟값 -2를 가지므로 $a=2$, $b=-2$

$\therefore a^2+b^2=8$

답 ③

0740

유형 17 삼각함수의 극대·극소

|전략| 주어진 범위에서 $f'(x)=0$이 되는 x의 값을 구하고 그 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는지 조사한다.

$f(x)=\cos x+x\sin x$에서

$f'(x)=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ $(\because x>0)$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ $(\because 0<x<2\pi)$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	$-\frac{3}{2}\pi$	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}\pi$에서 극솟값 $-\frac{3}{2}\pi$를 가지므로

$\alpha=\frac{3}{2}\pi$, $\beta=-\frac{3}{2}\pi$ $\quad\therefore \alpha+\beta=0$

답 ③

0741

유형 **18** 함수의 극대·극소 – 미정계수의 결정

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값 β를 가지면 $f(\alpha)=\beta$, $f'(\alpha)=0$임을 이용한다.

$f(x)=3\ln x+ax-\dfrac{b}{x}$에서 $f'(x)=\dfrac{3}{x}+a+\dfrac{b}{x^2}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -1을 가지므로

$f(1)=a-b=-1$ …… ㉠

$f'(1)=3+a+b=0$에서 $a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-1$

$\therefore ab=2$

답 ④

0742

유형 **19** 극값을 가질 조건 – 판별식을 이용하는 경우

|전략| 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 이용한다.

$f(x)=2p\ln x+\dfrac{q}{x}+x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\dfrac{2p}{x}-\dfrac{q}{x^2}+1=\dfrac{x^2+2px-q}{x^2}$

이때, 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $x^2+2px-q=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2+2px-q=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=p^2+q>0 \qquad \therefore q>-p^2$

(ii) (두 근의 합)$=-2p>0 \qquad \therefore p<0$

(iii) (두 근의 곱)$=-q>0 \qquad \therefore q<0$

(i), (ii), (iii)에 의하여 순서쌍 (p, q)가 될 수 있는 것은 ⑤$(-2, -3)$이다.

답 ⑤

0743

유형 **03** 기울기가 주어진 접선의 방정식

|전략| 주어진 직선과 평행한 접선의 접점의 좌표를 찾아 이 접점과 직선 사이의 거리를 구한다.

$f(x)=2\sqrt{x}$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ … ❶

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=x+4$와 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t, 2\sqrt{t})$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}=1 \qquad \therefore t=1$

즉, 접점의 좌표는 $(1, 2)$이다. … ❷

따라서 점 $(1, 2)$와 직선 $y=x+4$, 즉 $x-y+4=0$ 사이의 거리가 최소이므로

$\dfrac{|1-2+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ … ❸

답 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

채점 기준	배점
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	2점
❷ 주어진 직선에 평행한 접선의 접점의 좌표를 구할 수 있다.	2점
❸ 거리의 최솟값을 구할 수 있다.	2점

0744

유형 **02** 접선과 수직인 직선의 방정식

+ **09** 음함수로 나타낸 곡선의 접선의 방정식

|전략| 양변에 자연로그를 취한 후 음함수의 미분법을 이용하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

$y=x^x$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln y=x\ln x$

위의 식의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{1}{y}\times\dfrac{dy}{dx}=\ln x+1 \qquad \therefore \dfrac{dy}{dx}=y\ln x+y$ … ❶

점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{dy}{dx}=1$이므로 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

따라서 점 $(1, 1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-1=-(x-1) \qquad \therefore y=-x+2$ … ❷

이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로 $a=2$ … ❸

답 2

채점 기준	배점
❶ $\dfrac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	3점
❷ 접선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	3점
❸ a의 값을 구할 수 있다.	1점

0745

유형 **18** 함수의 극대·극소 – 미정계수의 결정

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 가지면 $f'(\alpha)=0$임을 이용한다.

$f(x)=(ax^2-b)e^x$에서

$f'(x)=2axe^x+(ax^2-b)e^x=(ax^2+2ax-b)e^x$ … ❶

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$f'(1)=(3a-b)e=0 \qquad \therefore 3a-b=0$ …… ㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=0$인 점에서의 접선의 기울기가 -3이므로

$f'(0)=-b=-3 \qquad \therefore b=3$

$b=3$을 ㉠에 대입하면 $a=1$ … ❷

$\therefore a+b=4$ … ❸

답 4

채점 기준	배점
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	2점
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	4점
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	1점

0746

유형 **01** 접점의 좌표가 주어진 접선의 방정식

|전략| 서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용한다.

(1) $g(x)=f(x)\ln x^4$에서

$g'(x)=f'(x)\ln x^4+f(x)\times\dfrac{4}{x}$

$\therefore g'(e)=f'(e)\ln e^4+f(e)\times\dfrac{4}{e}$

$=4f'(e)-4 \; (\because f(e)=-e)$

(2) 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(e)g'(e)=-1$에서

$f'(e)\{4f'(e)-4\}=-1$

$4\{f'(e)\}^2-4f'(e)+1=0$

$\{2f'(e)-1\}^2=0 \qquad \therefore f'(e)=\frac{1}{2}$

(3) $100f'(e)=100\times\frac{1}{2}=50$

답 (1) $4f'(e)-4$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 50

채점 기준	배점
(1) $g'(e)$를 $f'(e)$를 사용하여 나타낼 수 있다.	4점
(2) $f'(e)$의 값을 구할 수 있다.	4점
(3) $100f'(e)$의 값을 구할 수 있다.	2점

0747

유형 17 삼각함수의 극대·극소

| 전략 | $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$임을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한 후 $\frac{dy}{dx}=0$을 만족시키는 θ의 값의 좌우에서 $\frac{dy}{dx}$의 부호가 바뀌는지 조사한다.

(1) $\frac{dx}{d\theta}=1-\sin\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta-\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\cos\theta-\frac{1}{2}}{1-\sin\theta}\ (\sin\theta\neq1)$$

(2) $\frac{dy}{dx}=0$에서 $\cos\theta=\frac{1}{2} \qquad \therefore \theta=\frac{\pi}{3}$

(3) $0<\theta<\frac{\pi}{3}$일 때 $\frac{dy}{dx}>0$, $\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$일 때 $\frac{dy}{dx}<0$이므로 주어진 함수는 $\theta=\frac{\pi}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 구하는 극댓값은

$\sin\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$

답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos\theta-\frac{1}{2}}{1-\sin\theta}\ (\sin\theta\neq1)$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$

채점 기준	배점
(1) $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	4점
(2) $\frac{dy}{dx}=0$을 만족시키는 θ의 값을 구할 수 있다.	4점
(3) 극댓값을 구할 수 있다.	4점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0748

| 전략 | 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하여 $\overline{OQ}$, $\overline{QR}$를 각각 t에 대한 식으로 나타낸 후 극한값을 구한다.

$f(x)=\frac{1}{1-\sin x}$로 놓으면 $f'(x)=\frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(t, \frac{1}{1-\sin t}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{1-\sin t}=\frac{\cos t}{(1-\sin t)^2}(x-t)$

위의 식에 $y=0$을 대입하여 정리하면

$-(1-\sin t)=\cos t\times(x-t)$, $x\cos t=t\cos t-1+\sin t$

$\therefore x=\frac{t\cos t-1+\sin t}{\cos t}$

즉, 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{t\cos t-1+\sin t}{\cos t}, 0\right)$

이때, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발 R의 좌표는 $(t, 0)$이므로

$\overline{QR}=\left|\frac{t\cos t-1+\sin t}{\cos t}-t\right|$

$=\left|\frac{-1+\sin t}{\cos t}\right|=\frac{1-\sin t}{\cos t}\ \left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

또, $t\to\frac{\pi}{2}-$일 때, (점 Q의 x좌표)>0

$$\therefore \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\frac{\pi}{2}-\overline{OQ}}{\overline{QR}}=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{t\cos t-1+\sin t}{\cos t}}{\frac{1-\sin t}{\cos t}}$$

$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos t+1-\sin t}{1-\sin t}$$

이때, $t-\frac{\pi}{2}=\theta$라 하면 $t\to\frac{\pi}{2}-$일 때 $\theta\to0-$이므로

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos t+1-\sin t}{1-\sin t}$$

$$=\lim_{\theta\to0-}\frac{-\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+1-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{1-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0-}\frac{\theta\sin\theta+1-\cos\theta}{1-\cos\theta}=\lim_{\theta\to0-}\left(\frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}+1\right)$$

$$=1+\lim_{\theta\to0-}\frac{\theta\sin\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}=1+\lim_{\theta\to0-}\frac{\theta\sin\theta(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$

$$=1+\lim_{\theta\to0-}\frac{\theta(1+\cos\theta)}{\sin\theta}=1+\lim_{\theta\to0-}\frac{\theta}{\sin\theta}\times\lim_{\theta\to0-}(1+\cos\theta)$$

$=1+1\times2=3$

답 3

0749

| 전략 | 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 $x=t$에서 접하면 $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$임을 이용한다.

$f(x)=a_ne^{x-1}$, $g(x)=nx$로 놓으면

$f'(x)=a_ne^{x-1}$, $g'(x)=n$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 접한다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $a_ne^{t-1}=nt$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $a_ne^{t-1}=n$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $nt=n$ $\quad\therefore t=1$ ($\because n$은 자연수)

즉, 접점의 x좌표가 1이므로 접점의 y좌표 b_n은

$b_n=f(1)=a_ne^{1-1}=a_n$, $b_n=g(1)=n$

$\therefore a_n=b_n=n$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{10}(a_n{}^2+b_n{}^2)=\sum_{n=1}^{10}2n^2=2\times\frac{10\times11\times21}{6}=770$ 답 770

0750

|전략| 이계도함수를 이용하여 극댓값을 찾고 등비수열의 합을 이용하여 모든 극댓값의 합을 구한다.

$f(x)=\sqrt{2}e^{-x}\cos x$에서

$f'(x)=-\sqrt{2}e^{-x}\cos x+\sqrt{2}e^{-x}(-\sin x)$

$\quad=-\sqrt{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)$

$f''(x)=\sqrt{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)-\sqrt{2}e^{-x}(\cos x-\sin x)$

$\quad=2\sqrt{2}e^{-x}\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x+\cos x=0$ ($\because e^{-x}>0$)

$\sin x=-\cos x$ $\quad\therefore x=\frac{3}{4}\pi+n\pi$ ($n\ge0$인 정수)

$2\sqrt{2}e^{-x}>0$이므로 $\sin x$의 부호를 조사한다.

$f''\left(\frac{3}{4}\pi+2k\pi\right)>0$, $f''\left(\frac{3}{4}\pi+(2k+1)\pi\right)<0$ ($k\ge0$인 정수)이므로

$x=\frac{7}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi+2\pi, \frac{7}{4}\pi+4\pi, \cdots$에서 극댓값 $e^{-\frac{7}{4}\pi}$, $e^{-\frac{7}{4}\pi-2\pi}$, $e^{-\frac{7}{4}\pi-4\pi}$, $\cdots$을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 첫째항이 $e^{-\frac{7}{4}\pi}$, 공비가 $e^{-2\pi}$인 등비수열을 이루므로 모든 극댓값의 합은

$\dfrac{e^{-\frac{7}{4}\pi}}{1-e^{-2\pi}}=\dfrac{e^{2\pi}\times e^{-\frac{7}{4}\pi}}{e^{2\pi}(1-e^{-2\pi})}=\dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}}{e^{2\pi}-1}$ 답 $\dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}}{e^{2\pi}-1}$

0751

|전략| ㄱ. 삼각함수의 합성과 함수의 극한의 대소 관계를 이용한다.

ㄴ. $x=\frac{\pi}{2}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호의 변화를 조사한다.

ㄷ. $\frac{\pi}{2}<t<\frac{3}{4}\pi$에서 $f'(t)$의 부호를 조사하여 접선의 개형을 유추한다.

ㄱ. $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$이므로 임의의 실수 x에 대하여

$-\sqrt{2}\le\sin x+\cos x\le\sqrt{2}$

$\therefore -\sqrt{2}e^x\le e^x(\sin x+\cos x)\le\sqrt{2}e^x$ ($\because e^x>0$)

이때, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^x=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(-\sqrt{2}e^x)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sqrt{2}e^x=0$

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ (참)

ㄴ. $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이고 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 $f'(x)>0$, $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$에서

$f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄷ. $\frac{\pi}{2}<t<\frac{3}{4}\pi$일 때, $f(t)=\sqrt{2}e^t\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)>0$이므로 점 $(t, f(t))$는 제1사분면 위의 점이다.

또, 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2e^t\cos t<0$이다.

제1사분면 위의 점을 지나면서 기울기가 음수인 직선은 제3사분면을 지나지 않으므로 $\frac{\pi}{2}<t<\frac{3}{4}\pi$일 때, $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선은 제3사분면을 지나지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

Lecture

함수의 극한의 대소 관계

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=L$, $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=M$ (L, M은 실수)

일 때, a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

(1) $f(x)\le g(x)$이면 $L\le M$

(2) 함수 $h(x)$에 대하여 $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $L=M$이면 $\displaystyle\lim_{x\to a}h(x)=L$

0752

|전략| $f'(x)$를 구한 후 사잇값의 정리를 이용한다.

$f(x)=e^{-x}(\ln x-1)$에서 $x>0$이고

$f'(x)=-e^{-x}(\ln x-1)+e^{-x}\times\frac{1}{x}$

$\quad=e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\ln x+1\right)$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지므로 $f'(a)=0$

즉, $g(x)=\frac{1}{x}-\ln x+1$로 놓으면 $g(a)=0$

$g'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=-\frac{1+x}{x^2}<0$ ($\because x>0$)이므로 함수 $g(x)$는 $x>0$에서 연속이고 감소한다.

이때,

$g(1)=1-\ln1+1=2>0$,

$g(e)=\frac{1}{e}-\ln e+1=\frac{1}{e}>0$,

$g(e^2)=\frac{1}{e^2}-\ln e^2+1=\frac{1}{e^2}-1<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $g(c)=0$인 실수 c가 구간 (e, e^2)에 적어도 하나 존재한다.

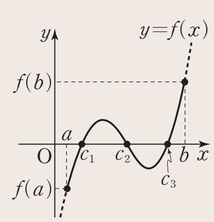
따라서 a가 속하는 구간은 ②(e, e^2)이다. 답 ②

Lecture

사잇값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면 $f(c)=0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.



본책 120~139쪽

7 | 도함수의 활용 (2)

STEP 1 개념 마스터

0753

$f(x)=x^3-3x^2+5$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x$, $f''(x)=6x-6=6(x-1)$

$f''(x)=0$에서 $x=1$

이때, $x<1$이면 $f''(x)<0$, $x>1$이면 $f''(x)>0$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, 1)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(1, \infty)$에서 아래로 볼록하다.

답 구간 $(-\infty, 1)$에서 위로 볼록, 구간 $(1, \infty)$에서 아래로 볼록

0754

$f(x)=-x^4+2x^3-1$로 놓으면

$f'(x)=-4x^3+6x^2$, $f''(x)=-12x^2+12x=-12x(x-1)$

$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

이때, $x<0$ 또는 $x>1$이면 $f''(x)<0$, $0<x<1$이면 $f''(x)>0$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(0, 1)$에서 아래로 볼록하다.

답 구간 $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$에서 위로 볼록, 구간 $(0, 1)$에서 아래로 볼록

0755

$f(x)=x-\dfrac{1}{2x}$로 놓으면 $x\neq0$이고

$f'(x)=1+\dfrac{1}{2x^2}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{x^3}$

이때, $x<0$이면 $f''(x)>0$, $x>0$이면 $f''(x)<0$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$에서 아래로 볼록하고, 구간 $(0, \infty)$에서 위로 볼록하다.

답 구간 $(-\infty, 0)$에서 아래로 볼록, 구간 $(0, \infty)$에서 위로 볼록

0756

$f(x)=3^x$으로 놓으면

$f'(x)=3^x\ln 3$, $f''(x)=3^x(\ln 3)^2$

이때, 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)>0$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 아래로 볼록하다.

답 구간 $(-\infty, \infty)$에서 아래로 볼록

0757

$f(x)=xe^{2x}$으로 놓으면

$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}=(1+2x)e^{2x}$

$f''(x)=2e^{2x}+(1+2x)\times2e^{2x}=4(x+1)e^{2x}$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because e^{2x}>0$)

이때, $x<-1$이면 $f''(x)<0$, $x>-1$이면 $f''(x)>0$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(-1, \infty)$에서 아래로 볼록하다.

답 구간 $(-\infty, -1)$에서 위로 볼록, 구간 $(-1, \infty)$에서 아래로 볼록

0758

$f(x)=x-\ln x$로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$, $f''(x)=\dfrac{1}{x^2}$

이때, $x>0$이면 $f''(x)>0$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 아래로 볼록하다.

답 구간 $(0, \infty)$에서 아래로 볼록

0759

$f(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$

$f''(x)=0$에서 $x=\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

이때, $0<x<\pi$이면 $f''(x)<0$, $\pi<x<2\pi$이면 $f''(x)>0$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(0, \pi)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(\pi, 2\pi)$에서 아래로 볼록하다.

답 구간 $(0, \pi)$에서 위로 볼록, 구간 $(\pi, 2\pi)$에서 아래로 볼록

0760

$f(x)=x^3+x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+1$, $f''(x)=6x$

$f''(x)=0$에서 $x=0$

이때, $x<0$이면 $f''(x)<0$, $x>0$이면 $f''(x)>0$

따라서 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(0, 1)$

답 $(0, 1)$

0761

$f(x)=x^4-4x^3$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3-12x^2$, $f''(x)=12x^2-24x=12x(x-2)$

$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

이때, $x<0$ 또는 $x>2$이면 $f''(x)>0$, $0<x<2$이면 $f''(x)<0$

따라서 $x=0$, $x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(0, 0)$, $(2, -16)$

답 $(0, 0)$, $(2, -16)$

0762

$f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$

$$f''(x)=\frac{-2(x^2+3)^2+2x\times2(x^2+3)\times2x}{(x^2+3)^4}$$

$$=\frac{-2(x^2+3)+8x^2}{(x^2+3)^3}=\frac{6(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

이때, $x<-1$ 또는 $x>1$이면 $f''(x)>0$, $-1<x<1$이면 $f''(x)<0$

따라서 $x=-1$, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(-1, \dfrac{1}{4}\right)$, $\left(1, \dfrac{1}{4}\right)$

답 $\left(-1, \dfrac{1}{4}\right)$, $\left(1, \dfrac{1}{4}\right)$

0763

$f(x)=xe^x$으로 놓으면

$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$

$f''(x)=e^x(1+x)+e^x=e^x(x+2)$

$f''(x)=0$에서 $x=-2$ ($\because e^x>0$)

이때, $x<-2$이면 $f''(x)<0$, $x>-2$이면 $f''(x)>0$

따라서 $x=-2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$　　　답 $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$

0764

$f(x)=\ln(x^2+1)$로 놓으면 $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

이때, $x<-1$ 또는 $x>1$이면 $f''(x)<0$, $-1<x<1$이면 $f''(x)>0$

따라서 $x=-1$, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-1, \ln 2)$, $(1, \ln 2)$　　　답 $(-1, \ln 2)$, $(1, \ln 2)$

0765

$f(x)=x^2-2x\ln x+1$로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=2x-2\left(\ln x+x\times\frac{1}{x}\right)=2x-2\ln x-2$, $f''(x)=2-\frac{2}{x}$

$f''(x)=0$에서 $x=1$

이때, $0<x<1$이면 $f''(x)<0$, $x>1$이면 $f''(x)>0$

따라서 $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(1, 2)$　　　답 $(1, 2)$

0766

$f(x)=x+2\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1-2\sin x$, $f''(x)=-2\cos x$

$f''(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

이때, $0<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$이면 $f''(x)<0$, $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$이면 $f''(x)>0$

따라서 $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{2}\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$　　　답 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$

0767

$f(x)=x^4-2x^3+2$에서

$f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$

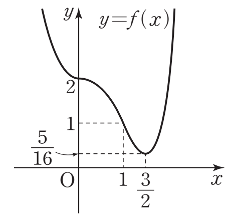
$f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	2	⤵	1	↘	$\frac{5}{16}$	⤴

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

참고 표에서 ↗, ⤵는 각각 위로 볼록이면서 증가, 감소를 나타내고, ⤴, ↘는 각각 아래로 볼록이면서 증가, 감소를 나타낸다.

0768

$f(x)=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}$에서 $x\neq 0$이고

$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$, $f''(x)=\frac{2}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	-2	⤵		↘	2	⤴

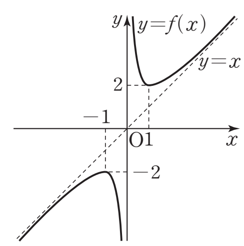
이때, $\lim_{x\to 0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to 0-}f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}x$,

$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}x$이므로

점근선은 y축과 직선 $y=x$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

참고 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(mx+n)$ 또는 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(mx+n)$

⇨ 직선 $y=mx+n$이 곡선 $y=f(x)$의 점근선

0769

$f(x)=\frac{x}{x^2+4}$에서

$$f'(x)=\frac{(x^2+4)-x\times 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{-(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x(x^2+4)^2-(4-x^2)\times 2(x^2+4)\times 2x}{(x^2+4)^4}$$
$$=\frac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3}=\frac{2x(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})}{(x^2+4)^3}$$

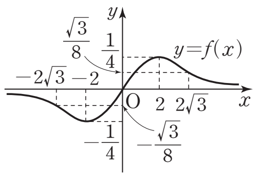
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

$f''(x)=0$에서 $x=-2\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2\sqrt{3}$

x	$\cdots$	$-2\sqrt{3}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{8}$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	↘

이때, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 점근선은 x축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0770

$f(x)=x-\sqrt{x}$에서 $x\geq 0$이고

$$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$$

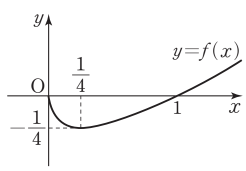
$$f''(x)=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x}=\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{x}=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{1}{4}$

$f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗

이때, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0771

$f(x)=e^x+e^{-x}$에서

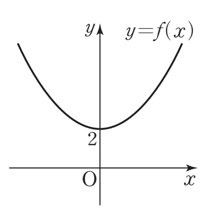
$f'(x)=e^x-e^{-x}$, $f''(x)=e^x+e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $e^x=e^{-x}$ $\quad\therefore x=0$

$f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	2	↗

이때, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0772

$f(x)=\frac{x}{e^x}=xe^{-x}$에서

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$

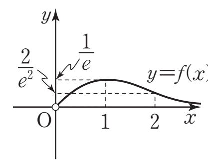
$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because e^{-x}>0$)

$f''(x)=0$에서 $x=2$ ($\because e^{-x}>0$)

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$	↘

이때, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 점근선은 x축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0773

$f(x)=\ln(x^2+2)$에서

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+2}$$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+2)-2x\times 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{-2(x^2-2)}{(x^2+2)^2}$$

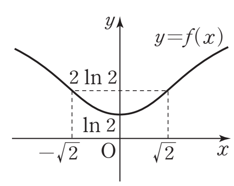
$$=\frac{-2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(x^2+2)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

$f''(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$2\ln 2$	↘	$\ln 2$	↗	$2\ln 2$	↗

이때, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0774

$f(x)=x+\sin x$에서

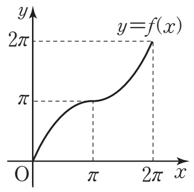
$f'(x)=1+\cos x$, $f''(x)=-\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=-1$ $\quad\therefore x=\pi$ ($\because 0\leq x\leq 2\pi$)

$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ ($\because 0\leq x\leq 2\pi$)

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	0	↗	π	↗	2π

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0775

$f(x)=\dfrac{x^2-5x+15}{x-2}$에서

$f'(x)=\dfrac{(2x-5)(x-2)-(x^2-5x+15)}{(x-2)^2}$

$=\dfrac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}=\dfrac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=5$ ($\because 3\le x\le 6$)

x	3	$\cdots$	5	$\cdots$	6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	9	$\searrow$	5	$\nearrow$	$\dfrac{21}{4}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 9, $x=5$일 때 최솟값 5를 갖는다.

답 최댓값: 9, 최솟값: 5

0776

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{(x^2+x+1)-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$

$=\dfrac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+x+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\dfrac{2}{3}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\dfrac{1}{3}$	$\searrow$	$\dfrac{2}{7}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 $\dfrac{1}{3}$, $x=-1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

답 최댓값: $\dfrac{1}{3}$, 최솟값: -1

0777

$f(x)=\sqrt{3-x^2}$에서 $f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{3-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{3-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	$\sqrt{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 $\sqrt{3}$, $x=-1$ 또는 $x=1$일 때 최솟값 $\sqrt{2}$를 갖는다.

답 최댓값: $\sqrt{3}$, 최솟값: $\sqrt{2}$

0778

$f(x)=x^2e^x$에서 $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=x(2+x)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because e^x>0$, $-1\le x\le 2$)

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $4e^2$, $x=0$일 때 최솟값 0을 갖는다.

답 최댓값: $4e^2$, 최솟값: 0

0779

$f(x)=2x-\ln x$에서 $f'(x)=2-\dfrac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{2}$

x	$\dfrac{1}{e}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	e
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\dfrac{2}{e}+1$	$\searrow$	$1+\ln 2$	$\nearrow$	$2e-1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$일 때 최댓값 $2e-1$, $x=\dfrac{1}{2}$일 때 최솟값 $1+\ln 2$를 갖는다.

답 최댓값: $2e-1$, 최솟값: $1+\ln 2$

0780

$f(x)=\dfrac{e^x}{\sin x}$에서

$f'(x)=\dfrac{e^x\sin x-e^x\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{(\sin x-\cos x)e^x}{\sin^2 x}$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\cos x$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}$ $\left(\because \dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{5}{6}\pi\right)$

x	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{5}{6}\pi$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$2e^{\frac{\pi}{6}}$	$\searrow$	$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$	$\nearrow$	$2e^{\frac{5}{6}\pi}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$일 때 최댓값 $2e^{\frac{5}{6}\pi}$, $x=\dfrac{\pi}{4}$일 때 최솟값 $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$을 갖는다.

답 최댓값: $2e^{\frac{5}{6}\pi}$, 최솟값: $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

0781

$f(x)=\sin x-\cos x$에서 $f'(x)=\cos x+\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=-\sin x$　　$\therefore x=\dfrac{7}{4}\pi$ ($\because \pi\le x\le 2\pi$)

x	π	$\cdots$	$\dfrac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	-1

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$일 때 최댓값 1, $x=\dfrac{7}{4}\pi$일 때 최솟값 $-\sqrt{2}$를 갖는다.

답 최댓값: 1, 최솟값: $-\sqrt{2}$

0782

$f(x)=\sqrt{x+1}-x$로 놓으면 $x\geq-1$이고 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-1$

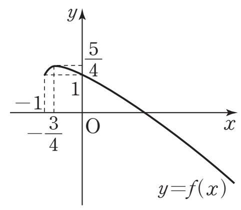
$f'(x)=0$에서 $\sqrt{x+1}=\dfrac{1}{2}$, $x+1=\dfrac{1}{4}$　　$\therefore x=-\dfrac{3}{4}$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$

이때, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

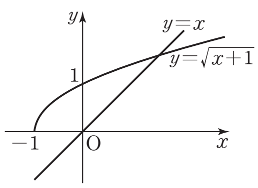
따라서 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

답 1



다른 풀이　방정식 $\sqrt{x+1}-x=0$, 즉 $\sqrt{x+1}=x$의 서로 다른 실근의 개수는 $x\geq-1$에서 두 함수 $y=\sqrt{x+1}$, $y=x$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



0783

$f(x)=e^x-x-2$로 놓으면 $f'(x)=e^x-1$

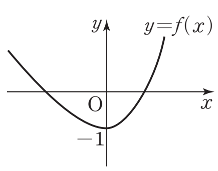
$f'(x)=0$에서 $e^x=1$　　$\therefore x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

이때, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

답 2



0784

$f(x)=\ln x-x+1$로 놓으면 $x>0$이고 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$

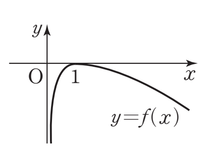
$f'(x)=0$에서 $\dfrac{1}{x}=1$　　$\therefore x=1$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$

이때, $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

답 1



0785

방정식 $x+\dfrac{1}{e^x}=2$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=x+\dfrac{1}{e^x}$과 직선 $y=2$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x+\dfrac{1}{e^x}$로 놓으면 $f'(x)=1-\dfrac{1}{e^x}$

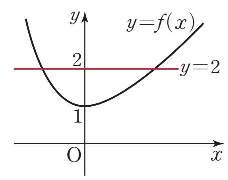
$f'(x)=0$에서 $e^x=1$　　$\therefore x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

이때, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

답 2



0786

방정식 $x-\cos x=1$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=x-\cos x$와 직선 $y=1$의 교점의 개수와 같다.

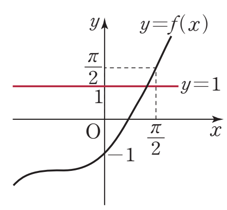
$f(x)=x-\cos x$로 놓으면 $f'(x)=1+\sin x$

$f'(x)\geq0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 구간에서 증가한다.

이때, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

답 1



0787

방정식 $x-2\sqrt{x-2}=k$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=x-2\sqrt{x-2}$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

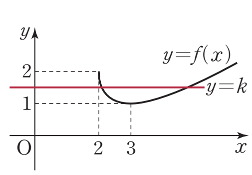
$f(x)=x-2\sqrt{x-2}$로 놓으면 $x\geq2$이고

$f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{x-2}=1$, $x-2=1$　　$\therefore x=3$

x	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

이때, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



(1) 주어진 방정식이 한 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 하므로 $k=1$ 또는 $k>2$

(2) 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 $1<k\leq2$

답 (1) $k=1$ 또는 $k>2$ (2) $1<k\leq2$

0788

$f(x)=e^x-x-1$로 놓으면 $f'(x)=\boxed{(가)\ e^x-1}$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{(나)\ 0}$

x	$\cdots$	$\boxed{(나)\ 0}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\boxed{(다)\ 0}$	$\nearrow$

이때, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로 $f(x)$의 최솟값은

$f(\boxed{(나)\ 0})=\boxed{(다)\ 0}$이다.

즉, $f(x)\geq 0$이므로 $e^x-x-1\geq 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $e^x\geq x+1$이 성립한다.

답 (가) e^x-1 (나) 0 (다) 0

0789

$f(x)=x-\ln(x-1)$로 놓으면 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-2}{x-1}$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

x	(1)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$

이때, $\lim_{x\to1+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 $f(x)$의 최솟값은

$f(2)=2$이다.

즉, $f(x)\geq 0$이므로 $x-\ln(x-1)\geq 0$

따라서 $x>1$일 때 부등식 $x\geq\ln(x-1)$이 성립한다. 답 풀이 참조

0790

$f(x)=\cos x-1+2x$로 놓으면 $f'(x)=-\sin x+2$

$x>0$일 때 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

또, $f(0)=0$이므로 $x>0$일 때 $f(x)>0$

즉, $\cos x-1+2x>0$

따라서 $x>0$일 때 부등식 $\cos x>1-2x$가 성립한다. 답 풀이 참조

0791

점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=e^t+te^t=e^t(t+1)$

$a(t)=f''(t)=e^t(t+1)+e^t=e^t(t+2)$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v(2)=3e^2$, $a(2)=4e^2$ 답 속도: $3e^2$, 가속도: $4e^2$

0792

점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=1+\dfrac{1}{t+1}$

$a(t)=f''(t)=-\dfrac{1}{(t+1)^2}$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v(1)=\dfrac{3}{2}$, $a(1)=-\dfrac{1}{4}$ 답 속도: $\dfrac{3}{2}$, 가속도: $-\dfrac{1}{4}$

0793

점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=1+\cos t$

$a(t)=f''(t)=-\sin t$

따라서 $t=\dfrac{\pi}{2}$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, $a\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$ 답 속도: 1, 가속도: -1

0794

$\dfrac{dx}{dt}=2$, $\dfrac{dy}{dt}=2t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는 $(2, 2t)$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도는 $(2, 4)$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=2$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는 $(0, 2)$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는 $(0, 2)$

답 속도: $(2, 4)$, 가속도: $(0, 2)$

0795

$\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{3}$, $\dfrac{dy}{dt}=1-t^2$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(\sqrt{3}, 1-t^2)$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도는 $(\sqrt{3}, -3)$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-2t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(0, -2t)$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는 $(0, -4)$

답 속도: $(\sqrt{3}, -3)$, 가속도: $(0, -4)$

0796

$\dfrac{dx}{dt}=2e^{2t}$, $\dfrac{dy}{dt}=2t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(2e^{2t}, 2t)$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도는 $(2e^4, 4)$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=4e^{2t}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=2$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(4e^{2t}, 2)$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는 $(4e^4, 2)$

답 속도: $(2e^4, 4)$, 가속도: $(4e^4, 2)$

0797

$\dfrac{dx}{dt}=-\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=\cos t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(-\sin t, \cos t)$

따라서 $t=\dfrac{\pi}{3}$에서의 점 P의 속도는 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\cos t$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\sin t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(-\cos t, -\sin t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{3}$에서의 점 P의 가속도는 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

답 속도: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 가속도: $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

0798

$\frac{dx}{dt}=1-\cos t$, $\frac{dy}{dt}=\sin t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(1-\cos t, \sin t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{3}$에서의 점 P의 속도는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=\cos t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(\sin t, \cos t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{3}$에서의 점 P의 가속도는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

답 속도: $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 가속도: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

0799

$\frac{dx}{dt}=1+\frac{2}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=2-\frac{1}{t^2}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$\left(1+\frac{2}{t^2}, 2-\frac{1}{t^2}\right)$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는 $(3, 1)$이므로 속력은

$\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{4}{t^3}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{2}{t^3}$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$\left(-\frac{4}{t^3}, \frac{2}{t^3}\right)$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는 $(-4, 2)$이므로 가속도의 크기는

$\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$

답 속력: $\sqrt{10}$, 가속도의 크기: $2\sqrt{5}$

0800

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t+1}$, $\frac{dy}{dt}=-t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$\left(\frac{1}{t+1}, -t\right)$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$이므로 속력은

$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{1}{(t+1)^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-1$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$\left(-\frac{1}{(t+1)^2}, -1\right)$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는 $\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$이므로 가속도의

크기는

$\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{17}}{4}$

답 속력: $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 가속도의 크기: $\frac{\sqrt{17}}{4}$

STEP 2 유형 마스터

0801

|전략| 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록함을 이용한다.

$f(x)=e^x\sin x$로 놓으면

$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$

$f''(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$

곡선 $y=e^x\sin x$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로

$\cos x<0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore \frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

따라서 위로 볼록한 구간은 ④ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$이다. 답 ④

0802

$f(x)=x^2(\ln x-1)$로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=2x(\ln x-1)+x^2\times\frac{1}{x}=x(2\ln x-1)$

$f''(x)=2\ln x-1+x\times\frac{2}{x}=2\ln x+1$

곡선 $y=x^2(\ln x-1)$이 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$이어야 하므로

$2\ln x+1>0$, $\ln x>-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore x>\frac{1}{\sqrt{e}}$

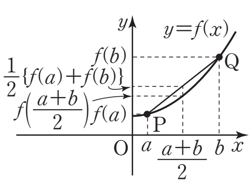
따라서 실수 a의 최솟값은 $\frac{1}{\sqrt{e}}$이다. 답 ②

0803

임의의 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\}$

를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 아래로 볼록한 형태이다.



ㄱ. $f(x)=\ln x$에서 $x>0$이고 $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$

$x>0$에서 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.

ㄴ. $f(x)=e^{3x}$에서 $f'(x)=3e^{3x}$, $f''(x)=9e^{3x}$

모든 실수 x에 대하여 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하다.

ㄷ. $f(x)=\cos x$에서 $f'(x)=-\sin x$, $f''(x)=-\cos x$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.

따라서 조건을 만족시키는 함수는 ㄴ이다. 답 ②

0804

|전략| $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 조사하여 변곡점의 좌표를 구한다.

$f(x)=\ln(x^2+4)$에서 $f'(x)=\frac{2x}{x^2+4}$

$f''(x)=\dfrac{2(x^2+4)-2x\times 2x}{(x^2+4)^2}=\dfrac{-2(x^2-4)}{(x^2+4)^2}=\dfrac{-2(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

이때, $x<-2$ 또는 $x>2$이면 $f''(x)<0$, $-2<x<2$이면 $f''(x)>0$

즉, $x=-2$, $x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-2, 3\ln 2)$, $(2, 3\ln 2)$이다.

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$2-(-2)=4$ 답 ④

0805

$f(x)=1+\cos^2 x$에서

$f'(x)=2\cos x(-\sin x)=-\sin 2x$

$f''(x)=-2\cos 2x$

$f''(x)=0$에서 $2x=-\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $2x=\dfrac{\pi}{2}$ $(\because -\pi<2x<\pi)$

$\therefore x=-\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{4}$ … ❶

이때, $-\dfrac{\pi}{2}<x<-\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$이면 $f''(x)>0$,

$-\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{4}$이면 $f''(x)<0$

즉, $x=-\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{\pi}{4}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x좌표는 $-\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{4}$이다. … ❷

따라서 두 변곡점의 x좌표의 차는 $\dfrac{\pi}{4}-\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ … ❸

답 $\dfrac{\pi}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 변곡점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 변곡점의 x좌표의 차를 구할 수 있다.	20 %

0806

$f(x)=e^{-2x^2}$으로 놓으면 $f'(x)=-4xe^{-2x^2}$

$f''(x)=-4e^{-2x^2}+(-4x)\times(-4x)e^{-2x^2}=4(4x^2-1)e^{-2x^2}$

$f''(x)=0$에서 $4x^2-1=0$ $(\because e^{-2x^2}>0)$

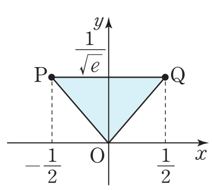
$\therefore x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

이때, $x<-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x>\dfrac{1}{2}$이면 $f''(x)>0$, $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$이면 $f''(x)<0$

즉, $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{1}{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$이다.

따라서 오른쪽 그림에서 △OPQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{1}{\sqrt{e}}=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$



답 $\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$

0807

$f(x)=n\sin^2 x+n-1$로 놓으면

$f'(x)=2n\sin x\cos x=n\sin 2x$

$f''(x)=2n\cos 2x$

$f''(x)=0$에서 $\cos 2x=0$ ($\because$ n은 자연수)

$2x=\dfrac{\pi}{2}$ $(\because 0<2x<\pi)$ $\quad\therefore x=\dfrac{\pi}{4}$

이때, $0<x<\dfrac{\pi}{4}$이면 $f''(x)>0$, $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$이면 $f''(x)<0$

즉, $x=\dfrac{\pi}{4}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 y좌표는

$a_n=n\sin^2\dfrac{\pi}{4}+n-1=\dfrac{3}{2}n-1$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\frac{3}{2}n-1}{n}=\dfrac{3}{2}$ 답 $\dfrac{3}{2}$

0808

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이고, $x=b$인 점이 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이면 $f''(b)=0$임을 이용한다.

$f(x)=(2x+a)e^{-bx}$에서

$f'(x)=2e^{-bx}+(2x+a)(-b)e^{-bx}=e^{-bx}(-2bx-ab+2)$

$f''(x)=-be^{-bx}(-2bx-ab+2)+e^{-bx}(-2b)$

$\quad=e^{-bx}(2b^2x+ab^2-4b)$

$x=-2$에서 극값을 가지므로

$f'(-2)=e^{2b}(4b-ab+2)=0$

$\therefore 4b-ab+2=0$ $(\because e^{2b}>0)$ …… ㉠

변곡점의 x좌표가 -1이므로

$f''(-1)=e^{b}(-2b^2+ab^2-4b)=0$

$-2b^2+ab^2-4b=0$ $(\because e^{b}>0)$

$\therefore 2b-ab+4=0$ $(\because b\neq 0)$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=1$

$\therefore a+b=7$ 답 ⑤

0809

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+2x+1$로 놓으면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+2$, $f''(x)=12x^2+6ax+2b$

변곡점의 좌표가 $(-1, 0)$이므로

$f''(-1)=12-6a+2b=0$ $\quad\therefore 3a-b=6$ …… ㉠

$f(-1)=1-a+b-2+1=0$ $\quad\therefore a-b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=3$

$\therefore ab=9$ 답 9

0810

$f(x)=x^2+px+q\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2x+p+\dfrac{q}{x}$, $f''(x)=2-\dfrac{q}{x^2}$

$x=\dfrac{1}{2}$에서 극대이므로

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=1+p+2q=0$ $\quad\therefore p+2q=-1$ …… ㉠

변곡점의 x좌표가 1이므로

$f''(1)=2-q=0 \quad \therefore q=2$

$q=2$를 ㉠에 대입하면 $p=-5$

$\therefore f(x)=x^2-5x+2\ln x$

$f'(x)=2x-5+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-5x+2}{x}=\dfrac{(2x-1)(x-2)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=2$

x	(0)	⋯	$\frac{1}{2}$	⋯	2	⋯
$f'(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f(2)=-6+2\ln 2$ 답 $-6+2\ln 2$

0811

$f(x)=\left(\ln\dfrac{1}{ax}\right)^2=(-\ln ax)^2=(\ln ax)^2$으로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=2(\ln ax)\times\dfrac{a}{ax}=\dfrac{2\ln ax}{x}$

$f''(x)=\dfrac{\left(2\times\dfrac{a}{ax}\right)\times x-(2\ln ax)\times 1}{x^2}=\dfrac{2(1-\ln ax)}{x^2}$

$f''(x)=0$에서 $1-\ln ax=0$

$\ln ax=1,\ ax=e \quad \therefore x=\dfrac{e}{a}$

$0<x<\dfrac{e}{a}$, 즉 $0<ax<e$일 때 $\ln ax<1$이므로 $f''(x)>0$

$a>0$이므로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

$x>\dfrac{e}{a}$, 즉 $ax>e$일 때 $\ln ax>1$이므로 $f''(x)<0$

따라서 $x=\dfrac{e}{a}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\dfrac{e}{a}, 1\right)$이다.

이때, 변곡점이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$1=\dfrac{2e}{a} \quad \therefore a=2e$ 답 ⑤

0812

|전략| 함수 $f(x)$의 증감표를 작성하고 $y=f(x)$의 그래프를 그려서 참, 거짓을 조사한다.

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{(x^2+1)-x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=\dfrac{-2x(x^2+1)^2-(-x^2+1)\times 2(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}$

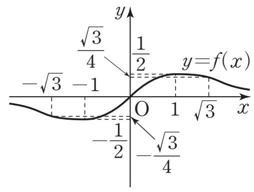
$=\dfrac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}=\dfrac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

x	⋯	$-\sqrt{3}$	⋯	-1	⋯	0	⋯	1	⋯	$\sqrt{3}$	⋯
$f'(x)$	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘

이때, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① $x=1$에서 극댓값 $\dfrac{1}{2}$을 갖는다. (참)

② 변곡점은 $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0, 0)$, $\left(\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$이므로 변곡점의 개수는 3이다. (거짓)

③ $f(-x)=-f(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (참)

④ 구간 $(1, \sqrt{3})$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다. (참)

⑤ $x=-1$에서 극솟값 $-\dfrac{1}{2}$을 갖는다. (참)

따라서 옳지 않은 것은 ②이다. 답 ②

Lecture

함수 $f(x)$에 대하여

(1) $f(x)$가 우함수 $\Longleftrightarrow f(-x)=f(x)$

$\Longleftrightarrow y=f(x)$의 그래프는 x축에 대하여 대칭

(2) $f(x)$가 기함수 $\Longleftrightarrow f(-x)=-f(x)$

$\Longleftrightarrow y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭

0813

$f(x)=\ln(x^2+3)$에서 $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+3}$

$f''(x)=\dfrac{2(x^2+3)-2x\times 2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{-2(x^2-3)}{(x^2+3)^2}$

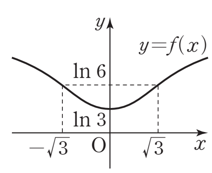
$=\dfrac{-2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+3)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

$f''(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

x	⋯	$-\sqrt{3}$	⋯	0	⋯	$\sqrt{3}$	⋯
$f'(x)$	−	−	−	0	+	+	+
$f''(x)$	−	0	+	+	+	0	−
$f(x)$	↘	$\ln 6$	↘	$\ln 3$	↗	$\ln 6$	↗

이때, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $x=0$에서 극솟값 $\ln 3$을 갖는다. (참)

ㄴ. 구간 $(-\sqrt{3}, 0)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다. (거짓)

ㄷ. 변곡점은 $(-\sqrt{3}, \ln 6)$, $(\sqrt{3}, \ln 6)$이므로 변곡점의 개수는 2이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 답 ①

0814

ㄱ. $f(x)=x\ln(x^2+1)-x$에서

$$f(-x)=-x\ln\{(-x)^2+1\}-(-x)=-x\ln(x^2+1)+x$$
$$=-\{x\ln(x^2+1)-x\}=-f(x)\ \text{(참)}$$

ㄴ. $f'(x)=\ln(x^2+1)+x\times\dfrac{2x}{x^2+1}-1$

$$=\ln(x^2+1)+1-\frac{2}{x^2+1}$$

$$f''(x)=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

$f''(x)=0$에서 $x=0$

이때, $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점은 $(0, 0)$의 1개이다. (참)

ㄷ. $x<0$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다. (거짓)

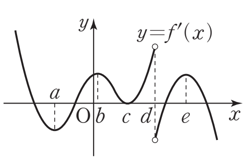
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0815

|전략| $f''(x)$의 부호는 $y=f'(x)$의 그래프에서 접선의 기울기의 부호와 같음을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 a, b, c, d, e를 정하고 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.



x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$

$f''(a)=f''(b)=f''(c)=f''(e)=0$이고, $x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=e$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 4이다.

답 ④

0816

$f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로 구하는 구간은 (b, d)이다.

답 (b, d)

0817

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	↗	변곡점	↗	변곡점	↗	극대	↘

ㄱ. 극솟값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄴ. $x=2$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프는 $x=-1$, $x=1$에서 변곡점을 가지므로 변곡점의 개수는 2이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

0818

(i) $f(x)>0$일 때, 즉 점 A, D, G, H에서 $f'(x)f''(x)>0$

$f'(x)>0$이면 $f''(x)>0$

⇨ 아래로 볼록하면서 증가하는 구간에 있는 점은 없다.

$f'(x)<0$이면 $f''(x)<0$

⇨ 위로 볼록하면서 감소하는 구간에 있는 점은 A, D, H

(ii) $f(x)<0$일 때, 즉 점 B, C, E, F에서 $f'(x)f''(x)<0$

$f'(x)>0$이면 $f''(x)<0$

⇨ 위로 볼록하면서 증가하는 구간에 있는 점은 없다.

$f'(x)<0$이면 $f''(x)>0$

⇨ 아래로 볼록하면서 감소하는 구간에 있는 점은 B, E

(i), (ii)에서 주어진 집합의 원소가 되는 점은 A, B, D, E, H

답 ⑤

0819

|전략| 함수의 몫의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 최댓값과 최솟값을 구한다.

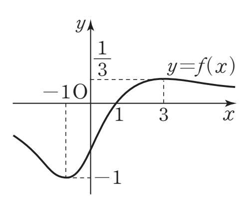
$f(x)=\dfrac{2(x-1)}{x^2+3}$에서

$$f'(x)=\frac{2(x^2+3)-2(x-1)\times 2x}{(x^2+3)^2}$$
$$=\frac{-2(x^2-2x-3)}{(x^2+3)^2}=\frac{-2(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	$\frac{1}{3}$	↘

이때, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $\frac{1}{3}$, $x=-1$일 때 최솟값 -1을 가지므로

$M=\frac{1}{3}$, $m=-1$ $\quad\therefore M+m=-\frac{2}{3}$

답 ③

참고 최대·최소를 구하는 문제에서 구간이 주어지지 않은 경우에는 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$를 구하여 극값이 최댓값 또는 최솟값이 되는지 확인해야 한다.

0820

$f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}=x+1+\dfrac{1}{x}$에서

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$)

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	3	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 3을 가지므로

$\alpha=1, \beta=3 \quad \therefore \alpha\beta=3$ 답 ⑤

다른 풀이 $x>0$에서 $\frac{1}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$f(x)=x+1+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{1}{x}}+1=3$

(단, 등호는 $x=\frac{1}{x}$, 즉 $x=1$일 때 성립)

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 3을 가지므로

$\alpha=1, \beta=3 \quad \therefore \alpha\beta=3$

0821

$f(x)=x-3+\frac{4}{x-3}$에서

$f'(x)=1-\frac{4}{(x-3)^2}=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because -1\leq x\leq 2$)

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-5	↗	-4	↘	-5

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 -4, $x=-1$ 또는 $x=2$일 때 최솟값 -5를 가지므로 최댓값과 최솟값의 곱은

$(-4)\times(-5)=20$ 답 20

0822

|전략| (근호 안의 식의 값)≥ 0인 x의 값의 범위에서 최댓값과 최솟값을 구한다.

$f(x)=x\sqrt{2-x^2}$에서 $2-x^2\geq 0$이므로 $-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$

$f'(x)=\sqrt{2-x^2}+x\times\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}=\frac{-2(x+1)(x-1)}{\sqrt{2-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 1, $x=-1$일 때 최솟값 -1을 가지므로 최댓값과 최솟값의 차는

$1-(-1)=2$ 답 ③

0823

$f(x)=x+\sqrt{8-x^2}$에서 $8-x^2\geq 0$이므로 $-2\sqrt{2}\leq x\leq 2\sqrt{2}$

$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}=\frac{\sqrt{8-x^2}-x}{\sqrt{8-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{8-x^2}=x$, $8-x^2=x^2$

$x^2=4 \quad \therefore x=2$ ($\because x\geq 0$) $\sqrt{8-x^2}\geq 0$이므로 $x\geq 0$

x	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-2\sqrt{2}$	↗	4	↘	$2\sqrt{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 4, $x=-2\sqrt{2}$일 때 최솟값 $-2\sqrt{2}$를 가지므로

$M=4, m=-2\sqrt{2} \quad \therefore M+m=4-2\sqrt{2}$ 답 ①

0824

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$에서 $x\geq 0$, $4-x\geq 0$이므로 $0\leq x\leq 4$ ··· ❶

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}=\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}}$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{4-x}=\sqrt{x}$

$4-x=x \quad \therefore x=2$ ··· ❷

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $2\sqrt{2}$를 갖는다. ··· ❸

답 $2\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❷ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	50 %

0825

|전략| $(e^x)'=e^x$임을 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 최댓값과 최솟값을 구한다.

$f(x)=(x^2+x-1)e^x$에서

$f'(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x-1)e^x=(x^2+3x)e^x$

$=x(x+3)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -2\leq x\leq 1$)

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{e^2}$	↘	-1	↗	e

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 e, $x=0$일 때 최솟값 -1을 가지므로

$M=e, m=-1 \quad \therefore M-m=e+1$ 답 ①

0826

$f(x)=xe^{-2x}$에서

$f'(x)=e^{-2x}-2xe^{-2x}=(1-2x)e^{-2x}$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{2}$ ($\because e^{-2x}>0$)

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-e^2$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	$\frac{1}{e^2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{1}{2e}$, $x=-1$일 때 최솟값 $-e^2$을 가지므로 최댓값과 최솟값의 곱은

$\frac{1}{2e}\times(-e^2)=-\frac{e}{2}$ 답 ②

0827

$f(x)=(x^2-kx+k)e^{-x}$에서

$f'(x)=(2x-k)e^{-x}-(x^2-kx+k)e^{-x}$

$\quad=-\{x^2-(k+2)x+2k\}e^{-x}$

$\quad=-(x-k)(x-2)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=k$ 또는 $x=2$ ($\because e^{-x}>0$)

x	$\cdots$	k	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	ke^{-k}	$\nearrow$	$(4-k)e^{-2}$	$\searrow$

함수 $f(x)$는 $x=k$일 때 극솟값 ke^{-k}을 갖는다.

즉, $g(k)=ke^{-k}$이므로

$g'(k)=e^{-k}-ke^{-k}=(1-k)e^{-k}$

$g'(k)=0$에서 $k=1$ ($\because e^{-k}>0$)

k	$\cdots$	1	$\cdots$	(2)
$g'(k)$	$+$	0	$-$	
$g(k)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	

따라서 함수 $g(k)$는 $k=1$일 때 최댓값 $\frac{1}{e}$을 갖는다. 답 ②

0828

|전략| (진수)>0인 x의 값의 범위에서 최솟값을 구한다.

$f(x)=x^2-\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x^2=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because x>0$)

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{2}(1+\ln 2)$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 최솟값 $\frac{1}{2}(1+\ln 2)$를 갖는다.

답 ⑤

0829

$f(x)=(x+1)\ln(x+1)-x+1$에서

$f'(x)=\ln(x+1)+(x+1)\times\frac{1}{x+1}-1=\ln(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\ln(x+1)=0$ $\quad\therefore x=0$

x	$\frac{1}{e}-1$	$\cdots$	0	$\cdots$	$e-1$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$2-\frac{2}{e}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e-1$일 때 최댓값 2, $x=0$일 때 최솟값 1을 가지므로

$M=2, m=1$ $\quad\therefore M+m=3$ 답 ④

0830

$f(x)=\log_2(x+6)+\log_4(-x)$에서

$x+6>0, -x>0$ $\quad\therefore -6<x<0$

$f'(x)=\frac{1}{(x+6)\ln 2}+\frac{1}{-x\ln 4}\times(-1)$

$\quad=\frac{1}{(x+6)\ln 2}+\frac{1}{2x\ln 2}=\frac{3(x+2)}{2x(x+6)\ln 2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$

x	(-6)	$\cdots$	-2	$\cdots$	(0)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 $\frac{5}{2}$를 갖는다. 답 $\frac{5}{2}$

0831

|전략| $(\sin 2x)'=2\cos 2x$임을 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 최댓값과 최솟값을 구한다.

$f(x)=x+\sin 2x$에서 $f'(x)=1+2\cos 2x$

$f'(x)=0$에서 $\cos 2x=-\frac{1}{2}$

$2x=\frac{2}{3}\pi$ ($\because 0\le 2x\le\pi$) $\quad\therefore x=\frac{\pi}{3}$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$일 때 최댓값 $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=0$일 때 최솟값 0을 가지므로

$\alpha=\frac{\pi}{3}, \beta=0$ $\quad\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$ 답 ②

0832

$f(x)=(1+\cos x)\sin x$에서

$f'(x)=-\sin^2 x+(1+\cos x)\cos x$

$\quad=-(1-\cos^2 x)+\cos x+\cos^2 x$

$\quad=2\cos^2 x+\cos x-1$

$\quad=(2\cos x-1)(\cos x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ ($\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	1

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$일 때 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$을 가지므로

$M=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ $\quad\therefore 16M^2=16\times\frac{27}{16}=27$ 답 ⑤

0833

$f(x)=e^x\cos x$에서

$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\sin x$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=\frac{\pi}{4}\left(\because -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$ ··· ❶

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$	↘	0

함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$일 때 최댓값 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$, $x=-\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$일 때 최솟값 0을 갖는다. ··· ❷

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$이다. ··· ❸

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0834

|전략| 함수 $f(x)$를 $\cos x$에 대한 함수로 나타낸 후 $\cos x=t$로 치환하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

$f(x)=\cos^3x+3\sin^2x+1$

$=\cos^3x+3(1-\cos^2x)+1$

$=\cos^3x-3\cos^2x+4$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$

$g(t)=t^3-3t^2+4$라 하면 $g'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ ($\because -1\le t\le 1$)

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	↗	4	↘	2

따라서 함수 $g(t)$는 $t=0$일 때 최댓값 4를 갖는다. 답 4

0835

$f(x)=3(\log x)^4-8(\log x)^3+2$에서

$\log x=t$로 놓으면 $1\le t\le 3$ ($\because 10\le x\le 1000$)

$g(t)=3t^4-8t^3+2$라 하면 $g'(t)=12t^3-24t^2=12t^2(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=2$ ($\because 1\le t\le 3$)

t	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	-3	↘	-14	↗	29

따라서 함수 $g(t)$는 $t=3$일 때 최댓값 29, $t=2$일 때 최솟값 -14를 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은 15이다. 답 15

0836

$(2^x+2^{-x})^3=2^{3x}+3\times2^{2x}\times2^{-x}+3\times2^x\times2^{-2x}+2^{-3x}$

$=8^x+8^{-x}+3(2^x+2^{-x})$

$(2^x+2^{-x})^2=2^{2x}+2\times2^x\times2^{-x}+2^{-2x}$

$=4^x+4^{-x}+2$

이므로

$f(x)=8^x+8^{-x}+4^x+4^{-x}+2(2^x+2^{-x})+1$

$=(2^x+2^{-x})^3-3(2^x+2^{-x})+(2^x+2^{-x})^2-2+2(2^x+2^{-x})+1$

$=(2^x+2^{-x})^3+(2^x+2^{-x})^2-(2^x+2^{-x})-1$

$2^x+2^{-x}=t$로 놓으면 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2^x+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^x\times2^{-x}}=2$ $\quad\therefore t\ge 2$

$g(t)=t^3+t^2-t-1$이라 하면

$g'(t)=3t^2+2t-1=(t+1)(3t-1)$

이때, $t\ge 2$에서 $g'(t)>0$이므로 함수 $g(t)$는 증가한다.

따라서 함수 $g(t)$는 $t=2$일 때 최솟값 9를 갖는다. 답 9

0837

$g(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)$

$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

이므로 $g(x)=t$로 놓으면 $-2\le t\le 2$이고

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=2t^3-3t^2+10$

$\therefore f'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$

t	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	-18	↗	10	↘	9	↗	14

따라서 함수 $f(t)$는 $t=2$일 때 최댓값 14, $t=-2$일 때 최솟값 -18을 가지므로 최댓값과 최솟값의 차는

$14-(-18)=32$ 답 32

0838

|전략| 증감표를 작성하여 최댓값을 찾은 후 주어진 값과 비교한다.

$f(x)=k\sin 2x-kx$에서

$f'(x)=2k\cos 2x-k=k(2\cos 2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos 2x=\frac{1}{2}$ ($\because k>0$)

$2x=\frac{\pi}{3}$ ($\because 0\le 2x\le\pi$) $\quad\therefore x=\frac{\pi}{6}$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}k-\frac{\pi}{6}k$	↘	$-\frac{\pi}{2}k$

함수 $f(x)$의 최댓값이 $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{2}k-\frac{\pi}{6}k=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$, $\frac{k}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

$\frac{k}{2}=1$ $\quad\therefore k=2$

함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$일 때 최솟값을 가지므로 최솟값은

$-\frac{\pi}{2}\times 2=-\pi$ 답 ③

0839

$f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln kx$에서 $x>0\,(\because k>0)$이고

$f'(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}=\frac{x^2-1}{2x}=\frac{(x+1)(x-1)}{2x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1\ (\because x>0)$ …❶

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln k$	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln k$를 갖는다. …❷

함수 $f(x)$의 최솟값이 0이므로

$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln k=0,\ \ln k=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore k=\sqrt{e}$ …❸

답 $\sqrt{e}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 증감표를 작성하여 $f(x)$의 최솟값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

0840

$f(x)=10^{x^3}\times 10^{-3x^2+k}=10^{x^3-3x^2+k}$에서

$g(x)=x^3-3x^2+k$로 놓으면 $g(x)$가 최소일 때 $f(x)$도 최소이다.

$g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=2\ (\because 1\le x\le 3)$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-2+k$	$\searrow$	$-4+k$	$\nearrow$	k

따라서 함수 $g(x)$는 $x=2$일 때 최소이므로 함수 $f(x)$도 $x=2$일 때 최소이다.

함수 $f(x)$의 최솟값이 10^{10}이므로 $10^{-4+k}=10^{10}$

$-4+k=10$ $\quad\therefore k=14$ 답 ④

0841

|전략| 두 점 P, Q의 x좌표를 t로 놓고 $\overline{\mathrm{PQ}}$를 t에 대한 함수로 나타내어 최솟값을 구한다.

두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(t,\,e^t)$, $(t,\,t)$로 놓으면

$\overline{\mathrm{PQ}}=e^t-t$

$f(t)=e^t-t$라 하면 $f'(t)=e^t-1$

$f'(t)=0$에서 $t=0$

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=0$일 때 극소이면서 최소이므로 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$f(0)=e^0-0=1$ 답 1

0842

직사각형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2ae^{-2a}$

$S'(a)=2e^{-2a}-4ae^{-2a}=-2e^{-2a}(2a-1)$

$S'(a)=0$에서 $a=\frac{1}{2}\ (\because e^{-2a}>0)$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$S'(a)$		$+$	0	$-$
$S(a)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $S(a)$는 $a=\frac{1}{2}$일 때 극대이면서 최대이므로 직사각형의 넓이의 최댓값은

$S\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}\times e^{-1}=\frac{1}{e}$ 답 $\frac{1}{e}$

0843

점 P의 좌표를 $(a,\,\ln a)\,(0<a<1)$, 직사각형 ORPQ의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=a(-\ln a)=-a\ln a$

$S'(a)=-\ln a-a\times\frac{1}{a}=-(\ln a+1)$

$S'(a)=0$에서 $a=\frac{1}{e}$

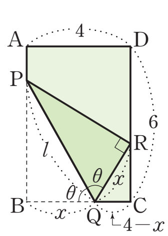
a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	(1)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $S(a)$는 $a=\frac{1}{e}$일 때 극대이면서 최대이므로 직사각형 ORPQ의 넓이의 최댓값은

$S\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}\times\ln\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$ 답 $\frac{1}{e}$

0844

$\overline{\mathrm{PQ}}=l$, $\overline{\mathrm{BQ}}=x\ (2<x<4)$, $\angle\mathrm{PQB}=\theta$로 놓으면 △PQB와 △RQC에서



$\cos\theta=\frac{x}{l}$, $\cos(\pi-2\theta)=\frac{4-x}{x}$

$\cos(\pi-2\theta)=-\cos 2\theta=1-2\cos^2\theta$

이므로

$\frac{4-x}{x}=1-\frac{2x^2}{l^2}$, $\frac{2x^2}{l^2}=\frac{2x-4}{x}$

$\therefore l^2=\frac{x^3}{x-2}$

이때, $f(x)=\frac{x^3}{x-2}$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2}=\dfrac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ ($\because 2<x<4$)

x	(2)	$\cdots$	3	$\cdots$	(4)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 극소이면서 최소이므로 접힌 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ 　답 $3\sqrt{3}$

0845

$\angle\mathrm{POQ}=\theta$로 놓으면 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$\overline{\mathrm{OP}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sin\theta$, $\overline{\mathrm{OQ}}=\cos\theta$

색칠한 부분의 넓이를 $f(\theta)$라 하면

$f(\theta)=(\square\mathrm{PQQ'P'}$의 넓이$)+(\triangle\mathrm{OPQ}$의 넓이$)$

$-($부채꼴 OAP의 넓이$)$

$=\sin^2\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta-\underbrace{\dfrac{\theta}{2}}_{\frac{1}{2}\times1^2\times\theta}$

$\therefore f'(\theta)=2\sin\theta\cos\theta+\dfrac{1}{2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-\dfrac{1}{2}$

$=2\sin\theta\cos\theta+\dfrac{1}{2}(1-2\sin^2\theta)-\dfrac{1}{2}$

$=2\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta$

$=\sin\theta(2\cos\theta-\sin\theta)$

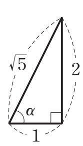
$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$이므로

$f'(\theta)=0$에서 $2\cos\theta=\sin\theta$ 　$\therefore \tan\theta=2$

$\tan\theta=2$를 만족시키는 θ의 값을 $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하자.

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗	극대	↘	

함수 $f(\theta)$는 $\theta=\alpha$일 때 극대이면서 최대이므로 색칠한 부분의 넓이를 최대로 하는 선분 PQ의 길이는 $\tan\alpha=2$일 때의 $\sin\alpha$의 값과 같다.



$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 　답 ⑤

Lecture

부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴에서

(1) 호의 길이 ⇨ $l=r\theta$

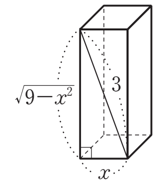
(2) 넓이 ⇨ $S=\dfrac{1}{2}rl=\dfrac{1}{2}r^2\theta$

(3) 둘레의 길이 ⇨ $2r+r\theta$

0846

|전략| 밑면의 한 변의 길이를 x로 놓고 사각기둥의 부피를 x에 대한 함수로 나타내어 부피가 최대일 때의 x의 값을 구한다.

밑면 PQRS의 한 변의 길이를 $x(0<x<3)$로 놓고 사각기둥의 부피를 $V(x)$라 하면



$V(x)=x^2\sqrt{9-x^2}$

$V'(x)=2x\sqrt{9-x^2}+x^2\times\dfrac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}$

$=\dfrac{-3x(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})}{\sqrt{9-x^2}}$

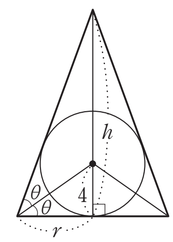
$V'(x)=0$에서 $x=\sqrt{6}$ ($\because 0<x<3$)

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{6}$	$\cdots$	(3)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=\sqrt{6}$일 때 극대이면서 최대이므로 사각기둥의 부피가 최대일 때 밑면의 한 변의 길이는 $\sqrt{6}$이다. 　답 $\sqrt{6}$

0847

직원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 $r(r>4)$, 높이를 h, 모선이 밑면과 이루는 각의 크기를 2θ로 놓으면 $\tan\theta=\dfrac{4}{r}$, $\tan 2\theta=\dfrac{h}{r}$이므로



$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$에서

$\dfrac{h}{r}=\dfrac{\dfrac{8}{r}}{1-\dfrac{16}{r^2}}=\dfrac{8r}{r^2-16}$ 　$\therefore h=\dfrac{8r^2}{r^2-16}$

직원뿔의 부피를 $V(r)$라 하면 $V(r)=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{8}{3}\pi\times\dfrac{r^4}{r^2-16}$

$V'(r)=\dfrac{8}{3}\pi\times\dfrac{4r^3(r^2-16)-r^4\times2r}{(r^2-16)^2}$

$=\dfrac{8}{3}\pi\times\dfrac{2r^3(r+4\sqrt{2})(r-4\sqrt{2})}{(r^2-16)^2}$

$V'(r)=0$에서 $r=4\sqrt{2}$ ($\because r>4$)

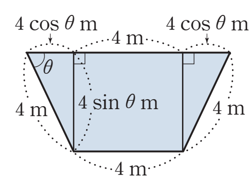
r	(4)	$\cdots$	$4\sqrt{2}$	$\cdots$
$V'(r)$		$-$	0	$+$
$V(r)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $V(r)$는 $r=4\sqrt{2}$일 때 극소이면서 최소이므로 직원뿔의 부피가 최소일 때 밑면의 반지름의 길이는 $4\sqrt{2}$이다. 　답 ①

0848

|전략| 등변사다리꼴의 윗변과 등변이 이루는 각의 크기를 θ로 놓는다.

등변사다리꼴의 윗변과 등변이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓고 등변사다리꼴의 넓이를 $S(\theta)$ m^2라 하면



$S(\theta)=\dfrac{1}{2}(8\cos\theta+8)\times4\sin\theta$

$=16(\cos\theta+1)\sin\theta$

$S'(\theta)=16(-\sin\theta)\sin\theta+16(\cos\theta+1)\cos\theta$

$=16(\cos^2\theta-1)+16(\cos^2\theta+\cos\theta)$

$=16(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)=16(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$

$S'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$

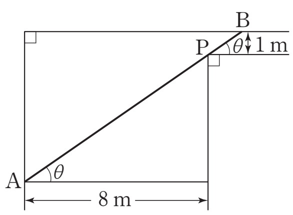
θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 단면의 최대 넓이는

$S\left(\frac{\pi}{3}\right)=16\left(\frac{1}{2}+1\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}\ (\mathrm{m}^2)$

답 $12\sqrt{3}\ \mathrm{m}^2$

0849



막대가 통로를 통과할 수 있어야 하므로 오른쪽 그림과 같이 점 P를 지나고 양쪽 벽에 끝점 A, B를 갖는 선분 AB의 길이의 최솟값이 막대의 길이의 최댓값이다.

막대가 한쪽 벽과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{BP}$에서

$\overline{AP}=\frac{8}{\cos\theta}$ m, $\overline{BP}=\frac{1}{\sin\theta}$ m

막대의 길이 $\overline{AB}$를 $f(\theta)$ m라 하면 $f(\theta)=\frac{8}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}$

$f'(\theta)=\frac{8\sin\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{8\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$

$f'(\theta)=0$에서 $8\sin^3\theta-\cos^3\theta=0$, $\tan^3\theta=\frac{1}{8}$

$\therefore \tan\theta=\frac{1}{2}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\tan\theta=\frac{1}{2}$을 만족시키는 θ의 값을 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하자.

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(\theta)$는 $\theta=\alpha$일 때 극소이면서 최소이므로 막대의 최대 길이는

$f(\alpha)=\frac{8}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}=4\sqrt{5}+\sqrt{5}=5\sqrt{5}\ (\mathrm{m})$

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$에서 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$

답 $5\sqrt{5}$ m

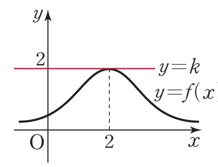
0850

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 1이 되도록 하는 k의 값을 구한다.

$f(x)=\frac{2}{x^2-4x+5}$로 놓으면 $f'(x)=\frac{-4(x-2)}{(x^2-4x+5)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	2	↘



이때, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이고 $x=2$일 때 극대이면서 최대이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

주어진 방정식이 오직 한 개의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 하므로 $k=2$

답 ②

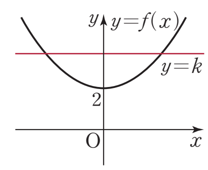
0851

$e^x+e^{-x}-k=0$에서 $e^x+e^{-x}=k$

$f(x)=e^x+e^{-x}$으로 놓으면 $f'(x)=e^x-e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $e^x-e^{-x}=0$, $e^{2x}=1$ $\quad\therefore x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗



이때, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이고 $x=0$일 때 극소이면서 최소이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$k>2$ $\quad\therefore \alpha=2$

답 ⑤

0852

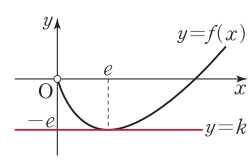
$x\ln x-2x-k=0$에서 $x\ln x-2x=k$

$f(x)=x\ln x-2x$로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}-2=\ln x-1$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\quad\therefore x=e$

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-e$	↗



이때, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이고 $x=e$일 때 극소이면서 최소이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

주어진 방정식이 적어도 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나야 하므로

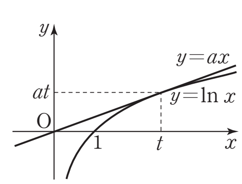
$k\geq -e$

따라서 실수 k의 최솟값은 $-e$이다.

답 ②

0853

|전략| 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=ax$가 한 점에서 접해야 함을 이용한다.



방정식 $\ln x=ax$가 오직 한 개의 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=ax$가 한 점에서 접해야 한다.

$f(x)=\ln x$, $g(x)=ax$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=a$

접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\ln t=at$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\dfrac{1}{t}=a$ …… ㉡

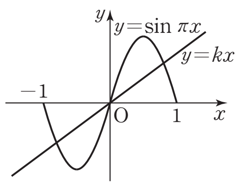
㉡을 ㉠에 대입하면 $\ln t=1$　　$\therefore t=e$

$t=e$를 ㉡에 대입하면 $a=\dfrac{1}{e}$

답 ①

0854

$-1\le x\le 1$에서 방정식 $\sin\pi x=kx$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 $-1\le x\le 1$에서 곡선 $y=\sin\pi x$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.



$y=\sin\pi x$에서 $y'=\pi\cos\pi x$이므로 곡선 $y=\sin\pi x$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 방정식은

$y-0=\pi\cos 0\times(x-0)$　　$\therefore y=\pi x$

따라서 곡선 $y=\sin\pi x$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나려면

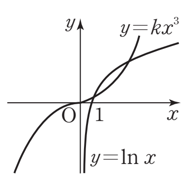
$0\le k<\pi$

답 $0\le k<\pi$

0855

방정식 $\ln x=kx^3$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=\ln x$와 $y=kx^3$이 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$k>0$



$f(x)=\ln x$, $g(x)=kx^3$으로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=3kx^2$

두 곡선이 접할 때의 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\ln t=kt^3$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\dfrac{1}{t}=3kt^2$ …… ㉡

㉡에서 $k=\dfrac{1}{3t^3}$을 ㉠에 대입하면

$\ln t=\dfrac{1}{3t^3}\times t^3=\dfrac{1}{3}$　　$\therefore t=e^{\frac{1}{3}}$

$t=e^{\frac{1}{3}}$을 $k=\dfrac{1}{3t^3}$에 대입하면 $k=\dfrac{1}{3e}$

즉, $k=\dfrac{1}{3e}$이면 두 곡선이 한 점에서 만나므로 방정식 $\ln x=kx^3$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$0<k<\dfrac{1}{3e}$

답 $0<k<\dfrac{1}{3e}$

0856

| 전략 | 곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$의 실근이 존재하고 그 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f(x)=2\cos x+ax^2+3x$로 놓으면

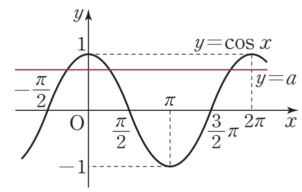
$f'(x)=-2\sin x+2ax+3$, $f''(x)=-2\cos x+2a$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고 그 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서 $\cos x=a$

이 방정식이 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=a$가 만나야 하므로

$-1\le a\le 1$



이때, $a=-1$ 또는 $a=1$이면

$f''(x)=-2(\cos x+1)$ 또는 $f''(x)=2(1-\cos x)$

$\therefore f''(x)\le 0$ 또는 $f''(x)\ge 0$

따라서 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않는다.

$\therefore -1<a<1$

답 ③

0857

$f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}ax^2-2x$로 놓으면

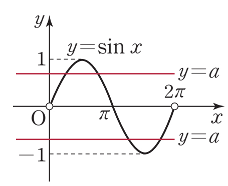
$f'(x)=\cos x+ax-2$, $f''(x)=-\sin x+a$

곡선 $y=f(x)$가 $0<x<2\pi$에서 두 개의 변곡점을 가지므로 방정식 $f''(x)=0$이 $0<x<2\pi$에서 서로 다른 두 실근을 갖고, 이 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서 $\sin x=a$

이 방정식이 $0<x<2\pi$에서 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$-1<a<0$ 또는 $0<a<1$



따라서 실수 a의 값이 될 수 없는 것은 ⑤1이다.

답 ⑤

0858

$f(x)=e^{2x}+e^{-2x}+ax^2$으로 놓으면

$f'(x)=2e^{2x}-2e^{-2x}+2ax$, $f''(x)=4e^{2x}+4e^{-2x}+2a$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고 그 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

이때, $4e^{2x}>0$, $4e^{-2x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$f''(x)=4e^{2x}+4e^{-2x}+2a$

$\ge 2\sqrt{4e^{2x}\times 4e^{-2x}}+2a=2a+8$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

$f''(x)$의 최솟값이 $2a+8$이므로 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 가지려면 $2a+8\le 0$, 즉 $a\le -4$이어야 한다.

그런데 $a=-4$이면 $f''(x)\ge 0$이므로 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않는다.

$\therefore a<-4$

답 $a<-4$

7 도함수의 활용 (2)

0859

|전략| $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}+k$로 놓고 ($f(x)$의 최솟값)>0인 k의 값의 범위를 구한다.

$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}+k$로 놓으면

$f'(x)=2x-\frac{2}{x^3}=\frac{2(x^4-1)}{x^3}=\frac{2(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$)

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$k+2$	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이면서 최소이므로 $f(x)>0$이 성립하려면

$k+2>0 \qquad \therefore k>-2$

답 $k>-2$

0860

$f(x)=x-a+1-\ln(1+x)$로 놓으면

$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$ ($\because x>0$)

즉, 함수 $f(x)$는 $x>0$에서 증가하므로 $f(x)>0$이 성립하려면

$f(0)=-a+1\ge 0 \qquad \therefore a\le 1$

답 $a\le 1$

0861

$\sin x+k\cos x\le k$에서 $\sin x\le k(1-\cos x)$

$\frac{\pi}{4}\le x\le\pi$에서 $1-\cos x>0$이므로 $\frac{\sin x}{1-\cos x}\le k$

$f(x)=\frac{\sin x}{1-\cos x}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{\cos x(1-\cos x)-\sin x\times\sin x}{(1-\cos x)^2}=\frac{-1+\cos x}{(1-\cos x)^2}$

$=-\frac{1}{1-\cos x}<0$

즉, 함수 $f(x)$는 $\frac{\pi}{4}\le x\le\pi$에서 감소하므로 $f(x)$의 최댓값은

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$

$\frac{\pi}{4}\le x\le\pi$에서 $f(x)\le k$가 성립하려면 $k\ge\sqrt{2}+1$

따라서 k의 최솟값은 $\sqrt{2}+1$이다.

답 ④

0862

$f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-x+k$로 놓으면

$f'(x)=e^x-x-1,\ f''(x)=e^x-1$ … ❶

$x>0$일 때, $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가하고 $f'(0)=0$이므로 $x>0$에서 $f'(x)>0$이다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x>0$에서 증가한다. … ❷

$f(x)>0$이 성립하려면

$f(0)=1+k\ge 0 \qquad \therefore k\ge -1$ … ❸

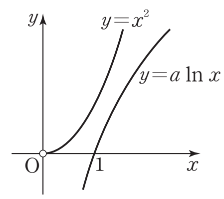
따라서 실수 k의 최솟값은 -1이다. … ❹

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f'(x), f''(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $x>0$에서 $f(x)$의 증가, 감소를 판단할 수 있다.	30 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ k의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

0863

|전략| 곡선 $y=x^2$이 곡선 $y=a\ln x$보다 위쪽에 있어야 함을 이용한다.



$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2>a\ln x$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 $x>0$에서 곡선 $y=x^2$이 곡선 $y=a\ln x$보다 위쪽에 있어야 한다.

$f(x)=x^2,\ g(x)=a\ln x$로 놓으면

$f'(x)=2x,\ g'(x)=\frac{a}{x}$

두 곡선이 접할 때의 접점의 x좌표를 $t\,(t>0)$라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $t^2=a\ln t$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $2t=\frac{a}{t} \qquad \therefore t^2=\frac{a}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\frac{a}{2}=a\ln t,\ \ln t=\frac{1}{2} \qquad \therefore t=\sqrt{e}$

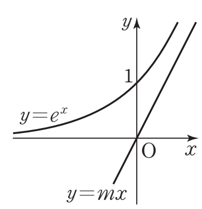
$t=\sqrt{e}$를 ㉡에 대입하면 $a=2e$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 양수 a의 값의 범위는

$0<a<2e$

답 ①

0864



모든 실수 x에 대하여 부등식 $e^x\ge mx$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=e^x$이 직선 $y=mx$보다 위쪽에 있거나 곡선과 직선이 접해야 한다.

$f(x)=e^x,\ g(x)=mx$로 놓으면

$f'(x)=e^x,\ g'(x)=m$

곡선과 직선이 접할 때의 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $e^t=mt$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $e^t=m$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$m=mt \qquad \therefore t=1$

$t=1$을 ㉡에 대입하면 $m=e$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 m의 값의 범위는

$0\le m\le e$ 답 $0\le m\le e$

0865

임의의 양의 실수 x에 대하여 $f(x)\ge g(x)$가 성립하려면 $x>0$에서 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 두 그래프가 접해야 한다.

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$)

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

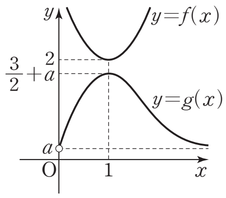
즉, $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=2$

$g'(x)=\dfrac{3(x^2+1)-3x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-3(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$g'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$)

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

이때, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=a$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$g(x)$의 최댓값은 $g(1)=\dfrac{3}{2}+a$

임의의 양의 실수 x에 대하여

$f(x)\ge g(x)$이려면

$2\ge\dfrac{3}{2}+a \qquad \therefore a\le\dfrac{1}{2}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$이다. 답 ②

0866

|전략| 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$이면 시각 t에서의 속도는 $f'(t)$이다.

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=5a\cos\left(5t+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$t=\pi$에서의 속도가 $5\sqrt{3}$이므로

$v(\pi)=5a\cos\left(5\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=5a\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\quad=-5a\cos\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}a=5\sqrt{3}$

$\therefore a=-2$ 답 -2

0867

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=\dfrac{2}{t+1}+1$

$a(t)=f''(t)=-\dfrac{2}{(t+1)^2}$

속도가 2인 순간은 $\dfrac{2}{t+1}+1=2$에서

$\dfrac{2}{t+1}=1 \qquad \therefore t=1$

따라서 점 P의 속도가 2일 때의 가속도는

$a(1)=-\dfrac{1}{2}$ 답 ①

0868

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=(2t-7)e^t+(t^2-7t+13)e^t$

$\quad=(t^2-5t+6)e^t$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$(t^2-5t+6)e^t=0$에서 $t^2-5t+6=0$ ($\because e^t>0$)

$(t-2)(t-3)=0 \qquad \therefore t=2$ 또는 $t=3$

이때, $t=2$, $t=3$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 운동 방향을 2번 바꾼다. 답 2번

0869

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=2\cos 2t-2\sqrt{3}\sin 2t$

$\quad=4\left(\dfrac{1}{2}\cos 2t-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t\right)$

$\quad=4\sin\left(2t+\dfrac{5}{6}\pi\right)$

$-4\le v(t)\le 4$이므로 속력 $|v(t)|$의 최댓값은 4이다. 답 ⑤

0870

|전략| 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$이면 시각 t에서의 속도는 $(f'(t), g'(t))$이고, 속력은 $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$이다.

$\dfrac{dx}{dt}=3$, $\dfrac{dy}{dt}=4-2t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(3, 4-2t)$

점 P의 속력은

$\sqrt{3^2+(4-2t)^2}=\sqrt{4(t-2)^2+9}$

따라서 점 P의 속력이 최소일 때는 $t=2$일 때이다. 답 2

0871

$\dfrac{dx}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t$

이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(e^t\cos t-e^t\sin t, e^t\sin t+e^t\cos t)$

점 P의 속력은

$\sqrt{e^{2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{2t}(\sin t+\cos t)^2}=\sqrt{2e^{2t}}=\sqrt{2}e^t$

따라서 점 P의 속력이 4일 때의 시각 t는

$\sqrt{2}e^t=4$에서 $e^t=2\sqrt{2} \qquad \therefore t=\ln 2\sqrt{2}$ 답 ②

0872

$\dfrac{dx}{dt}=10\sqrt{2}$, $\dfrac{dy}{dt}=-10t+10\sqrt{2}$이므로 골프공의 시각 t에서의 속도는

$(10\sqrt{2},\ -10t+10\sqrt{2})$

골프공이 지면에 떨어질 때는 $y=0$일 때이므로

$-5t^2+10\sqrt{2}t=0$에서 $-5t(t-2\sqrt{2})=0$

$\therefore t=2\sqrt{2}$ ($\because t>0$)

$t=2\sqrt{2}$에서의 골프공의 속도는 $(10\sqrt{2},\ -10\sqrt{2})$이므로 구하는 속력은

$\sqrt{(10\sqrt{2})^2+(-10\sqrt{2})^2}=20$ (m/s)

답 20 m/s

0873

$\dfrac{dx}{dt}=2at-\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=1-\cos t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(2at-\sin t,\ 1-\cos t)$ ··· ❶

$t=\dfrac{\pi}{2}$일 때의 속도는 $(a\pi-1,\ 1)$ ··· ❷

이때의 속력이 1이므로

$\sqrt{(a\pi-1)^2+1^2}=1$, $(a\pi-1)^2+1=1$

$(a\pi-1)^2=0$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{\pi}$ ··· ❸

답 $\dfrac{1}{\pi}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 시각 t에서의 속도를 구할 수 있다.	40 %
❷ $t=\frac{\pi}{2}$일 때의 속도를 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

0874

|전략| 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$이면 시각 t에서의 가속도는 $(f''(t), g''(t))$이고, 가속도의 크기는 $\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$이다.

$\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{17}$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2-1$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(\sqrt{17},\ 3t^2-1)$

점 P의 속력이 9일 때의 시각 t는

$\sqrt{(\sqrt{17})^2+(3t^2-1)^2}=9$에서 $(3t^2-1)^2=64$, $3t^2-1=\pm 8$

이때, t는 실수이므로 $t^2=3$

$\therefore t=\sqrt{3}$ ($\because t>0$)

또, $\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=6t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(0,\ 6t)$

$t=\sqrt{3}$에서의 점 P의 가속도는 $(0,\ 6\sqrt{3})$이므로 구하는 가속도의 크기는

$\sqrt{0+(6\sqrt{3})^2}=6\sqrt{3}$

답 $6\sqrt{3}$

0875

$\dfrac{dx}{dt}=-3\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=3\cos t$,

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-3\cos t$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-3\sin t$

이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는 $(-3\sin t,\ 3\cos t)$이고 가속도는 $(-3\cos t,\ -3\sin t)$이다.

점 P의 속력과 가속도의 크기는 각각

$\sqrt{(-3\sin t)^2+(3\cos t)^2}=3$

$\sqrt{(-3\cos t)^2+(-3\sin t)^2}=3$

따라서 $a=3$, $b=3$이므로 $a+b=6$

답 ④

0876

$\dfrac{dx}{dt}=2t+9$, $\dfrac{dy}{dt}=3at^2-5$에서

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=2$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=6at$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는 $(2,\ 6at)$

$t=1$에서의 가속도는 $(2,\ 6a)$이므로 가속도의 크기는

$\sqrt{4+36a^2}$

즉, $\sqrt{4+36a^2}=2\sqrt{10}$이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$a^2=1$ $\quad\therefore a=1$ ($\because a>0$)

답 1

STEP 3 내신 마스터

0877

유형 01 곡선의 오목·볼록

|전략| 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록함을 이용한다.

$f(x)=\sin^2 x$로 놓으면

$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$

$f''(x)=2\cos 2x$

곡선 $y=\sin^2 x$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로

$\cos 2x<0$, $\dfrac{\pi}{2}<2x<\pi$ ($\because 0<2x<\pi$)

$\therefore \dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$

따라서 $a=\dfrac{\pi}{4}$, $b=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$a+b=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3}{4}\pi$

답 ⑤

0878

유형 02 변곡점

|전략| $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 조사하여 변곡점의 좌표를 구한다.

$f(x)=e^x-e^{-x}+1$로 놓으면

$f'(x)=e^x+e^{-x}$, $f''(x)=e^x-e^{-x}$

$f''(x)=0$에서 $x=0$

이때, $x<0$이면 $f''(x)<0$, $x>0$이면 $f''(x)>0$

즉, $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $(0, 1)$이다.

점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=2$이므로 접선의 방정식은

$y-1=2(x-0)$ $\therefore y=2x+1$

따라서 접선이 x축과 만나는 점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$이다. 답 ①

0879

유형 04 함수의 그래프의 성질

| 전략 | $f'(x)$, $f''(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$를 구하여 참, 거짓을 조사한다.

ㄱ. $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}$에서 $x\neq 2$이고

$$f'(x)=\frac{2x(x-2)-(x^2-3)}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	(2)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값을 갖는다. (거짓)

ㄴ. $f''(x)=\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x+3)\times 2(x-2)}{(x-2)^4}$

$$=\frac{2(x-2)^2-2(x^2-4x+3)}{(x-2)^3}$$

$$=\frac{2}{(x-2)^3}$$

$f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않으므로 변곡점은 존재하지 않는다. (참)

ㄷ. $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}=x+2+\frac{1}{x-2}$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(x+2)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+2)$이므로 직선 $y=x+2$는 $y=f(x)$의 그래프의 점근선이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0880

유형 06 유리함수의 최대 · 최소

| 전략 | 함수의 몫의 미분법을 이용하여 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 찾은 후 $f(n)$을 구한다.

$g(x)=\frac{2nx}{x^2-x+1}$로 놓으면

$$g'(x)=\frac{2n(x^2-x+1)-2nx(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$=\frac{-2n(x+1)(x-1)}{(x^2-x+1)^2}$$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	−	0	+	0	−
$g(x)$	↘	$-\frac{2}{3}n$	↗	$2n$	↘

이때, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 $2n$, $x=-1$일 때 최솟값 $-\frac{2}{3}n$을 갖는다.

따라서 $f(n)=2n+\left(-\frac{2}{3}n\right)=\frac{4}{3}n$이므로

$\sum_{n=1}^{12} f(n)=\sum_{n=1}^{12}\frac{4}{3}n=\frac{4}{3}\times\frac{12\times 13}{2}=104$ 답 ③

0881

유형 07 무리함수의 최대 · 최소

| 전략 | 주어진 구간에서의 극값과 구간의 양 끝에서의 함숫값을 비교하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

$f(x)=x+\sqrt{1-x}$에서 $f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$

$f'(x)=0$에서 $2\sqrt{1-x}=1$, $1-x=\frac{1}{4}$ $\therefore x=\frac{3}{4}$

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	1

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{4}$일 때 최댓값 $\frac{5}{4}$, $x=0$ 또는 $x=1$일 때 최솟값 1을 가지므로

$M=\frac{5}{4}$, $m=1$ $\therefore M-m=\frac{1}{4}$ 답 ①

0882

유형 08 지수함수의 최대 · 최소

| 전략 | 주어진 구간에서의 극값과 구간의 양 끝에서의 함숫값을 비교하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

$f(x)=\frac{e^{-x}}{x^2}$에서

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}x^2-2xe^{-x}}{x^4}=-\frac{e^{-x}(x+2)}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $x+2=0$ $\left(\because \frac{e^{-x}}{x^3}<0\right)$ $\therefore x=-2$

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$\frac{e^3}{9}$	↘	$\frac{e^2}{4}$	↗	e

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 e, $x=-2$일 때 최솟값 $\frac{e^2}{4}$을 가지므로

$M=e$, $m=\frac{e^2}{4}$ $\therefore \frac{M}{m}=\frac{e}{\frac{e^2}{4}}=\frac{4}{e}$ 답 ①

0883

유형 11 치환을 이용한 함수의 최대·최소

| 전략 | 함수 $f(x)$를 $\cos x$에 대한 함수로 나타낸 후 $\cos x=t$로 치환하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

$f(x)=\sin^2 x\cos x=(1-\cos^2 x)\cos x=-\cos^3 x+\cos x$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$

$g(t)=-t^3+t$라 하면 $g'(t)=-3t^2+1$

$g'(t)=0$에서 $t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

t	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	0

함수 $g(t)$는 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$일 때 최댓값 $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, $t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$일 때 최솟값 $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$을 가지므로

$M=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, $m=-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ $\qquad\therefore M^2+m^2=\dfrac{8}{27}$

따라서 $p=27$, $q=8$이므로 $p+q=35$ 답 ②

0884

유형 12 함수의 최대·최소 – 미정계수의 결정

| 전략 | 증감표를 작성하여 최솟값을 찾은 후 주어진 값과 비교한다.

$f(x)=x\ln x-ax-1$에서

$f'(x)=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}-a=\ln x+1-a$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=a-1$ $\qquad\therefore x=e^{a-1}$

이때, $1<a<3$이므로 $1<e^{a-1}<e^2$

x	1	$\cdots$	e^{a-1}	$\cdots$	e^2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-a-1$	↘	$-e^{a-1}-1$	↗	$(2-a)e^2-1$

함수 $f(x)$의 최솟값이 $-e-1$이므로

$-e^{a-1}-1=-e-1$, $e^{a-1}=e$ $\qquad\therefore a=2$

이때, $f(1)=-2-1=-3$, $f(e^2)=-1$이므로 $f(x)$의 최댓값은 -1이다. 답 ②

0885

유형 16 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수

| 전략 | 함수 $y=\ln x-x+20$의 그래프와 직선 $y=n$의 교점의 개수가 2가 되도록 하는 n의 값의 범위를 구한다.

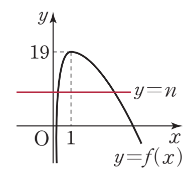
$\ln x-x+20-n=0$에서 $\ln x-x+20=n$

$f(x)=\ln x-x+20$으로 놓으면 $x>0$이고 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	19	↘

이때, $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$이고 $x=1$일 때 극대이면서 최대이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=n$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $n<19$

따라서 자연수 n은 $1, 2, 3, \cdots, 18$의 18개이다. 답 ④

0886

유형 18 변곡점을 가질 조건

| 전략 | 곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않으려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖지 않거나 $f''(x)=0$의 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다.

$f(x)=ax^2+\sin x+\cos x$로 놓으면

$f'(x)=2ax+\cos x-\sin x$

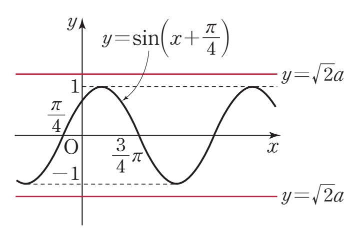
$f''(x)=2a-\sin x-\cos x=2a-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\qquad=\sqrt{2}\left\{\sqrt{2}a-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않으려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖지 않거나 $f''(x)=0$의 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다.

$f''(x)=0$에서 $\sqrt{2}a=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

(i) 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$와 직선 $y=\sqrt{2}a$가 만나지 않아야 하므로



$\sqrt{2}a<-1$ 또는 $\sqrt{2}a>1$ $\qquad\therefore a<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $a>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(ii) $a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이면

$f''(x)=-\sqrt{2}\left\{1+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$ 또는

$f''(x)=\sqrt{2}\left\{1-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

$\therefore f''(x)\le 0$ 또는 $f''(x)\ge 0$

따라서 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $a\le-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $a\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ③

0887

유형 19 $f(x)\ge a$ 꼴의 부등식이 항상 성립할 조건

| 전략 | 각 변에 e^x을 곱하여 주어진 부등식을 변형한 후 부등식이 성립할 조건을 알아본다.

$\alpha e^{-x}\le 2x^2-3x\le\beta e^{-x}$의 각 변에 e^x을 곱하면

$\alpha\le(2x^2-3x)e^x\le\beta$

$f(x)=(2x^2-3x)e^x$으로 놓으면

$f'(x)=(4x-3)e^x+(2x^2-3x)e^x=(2x^2+x-3)e^x$

$\quad=(2x+3)(x-1)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=1$ ($\because e^x>0$)

x	-2	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{14}{e^2}$	$\nearrow$	$\frac{9}{\sqrt{e^3}}$	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	$2e^2$

함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $2e^2$, $x=1$일 때 최솟값 $-e$를 가지므로 $\alpha\le f(x)\le\beta$가 성립하려면

$\alpha\le-e$, $\beta\ge2e^2$

따라서 $\beta-\alpha$의 최솟값은

$2e^2-(-e)=e(2e+1)$

답 ⑤

0888

유형 21 수직선 위를 움직이는 점의 속도와 가속도

|전략| 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$이면 시각 t에서의 속도는 $f'(t)$이고, 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0임을 이용한다.

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=-e^{\cos t}\sin t$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$-e^{\cos t}\sin t=0$에서 $\sin t=0$ ($\because e^{\cos t}>0$)

$\therefore t=n\pi$ (n은 자연수)

이때 $t=\pi$, $t=2\pi$, $t=3\pi$, $\cdots$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P가 두 번째로 운동 방향을 바꾼 때는 $t=2\pi$일 때이고, 그때의 점 P의 위치는

$f(2\pi)=e^{\cos 2\pi}=e$

답 ⑤

0889

유형 03 변곡점 – 미정계수의 결정

|전략| $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 조사하여 변곡점의 좌표를 구한 후 두 변곡점 사이의 거리가 2임을 이용한다.

$f(x)=\ln(x^2+k)$로 놓으면 $f'(x)=\frac{2x}{x^2+k}$

$f''(x)=\frac{2(x^2+k)-2x\times2x}{(x^2+k)^2}=\frac{-2(x^2-k)}{(x^2+k)^2}$

$\quad=\frac{-2(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})}{(x^2+k)^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=-\sqrt{k}$ 또는 $x=\sqrt{k}$ ··· ❶

이때, $x<-\sqrt{k}$ 또는 $x>\sqrt{k}$이면 $f''(x)<0$, $-\sqrt{k}<x<\sqrt{k}$이면 $f''(x)>0$

즉, $x=-\sqrt{k}$, $x=\sqrt{k}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-\sqrt{k}, \ln 2k)$, $(\sqrt{k}, \ln 2k)$이다. ··· ❷

두 변곡점 사이의 거리가 2이므로

$\sqrt{k}-(-\sqrt{k})=2$, $\sqrt{k}=1$ $\quad\therefore k=1$ ··· ❸

답 1

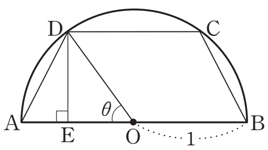
채점 기준	배점
❶ $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	3점
❷ 변곡점의 좌표를 구할 수 있다.	2점
❸ k의 값을 구할 수 있다.	2점

0890

유형 13 최대·최소의 활용 – 길이, 넓이

|전략| $\angle DOE=\theta$로 놓고 사다리꼴의 넓이를 θ에 대한 함수로 나타내어 최댓값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 E라 하고



$\angle DOE=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\overline{OE}=\cos\theta$, $\overline{DE}=\sin\theta$

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$S(\theta)=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{DE}$

$\quad=\frac{1}{2}(2+2\cos\theta)\sin\theta=(1+\cos\theta)\sin\theta$ ··· ❶

$S'(\theta)=-\sin^2\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta$

$\quad=-(1-\cos^2\theta)+(1+\cos\theta)\cos\theta$

$\quad=2\cos^2\theta+\cos\theta-1=(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$

$S'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=\frac{1}{2}$ ($\because \cos\theta+1>0$)

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ ··· ❷

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	

따라서 함수 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 사다리꼴 ABCD의 넓이의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$이다. ··· ❸

답 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

채점 기준	배점
❶ 사다리꼴의 넓이 $S(\theta)$를 θ에 대한 함수로 나타낼 수 있다.	2점
❷ $S'(\theta)=0$을 만족시키는 θ의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ 사다리꼴의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	2점

0891

유형 19 $f(x)\ge a$ 꼴의 부등식이 항상 성립할 조건

|전략| $f(x)=\ln(x^2+1)+\frac{1}{x^2+1}+k$로 놓고 ($f(x)$의 최솟값)$\ge0$인 k의 값의 범위를 구한다.

$f(x)=\ln(x^2+1)+\frac{1}{x^2+1}+k$로 놓으면

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ··· ❶

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$1+k$	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최솟값 $1+k$를 갖는다. ··· ❷

$f(x)\geq 0$이 성립하려면 $1+k\geq 0$ $\quad\therefore k\geq -1$

따라서 음의 정수 k는 -1로 1개이다. ··· ❸

답 1

채점 기준	배점
❶ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	2점
❸ 음의 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	2점

0892

유형 09 로그함수의 최대·최소

|전략| (진수)>0인 x의 값의 범위에서 최솟값 a_n을 구한 후 무리수 e의 정의와 삼각함수의 극한을 이용하여 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값을 구한다.

(1) $f(x)=n\ln x+\frac{n+1}{x}-n\cos\frac{1}{n}$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{n}{x}-\frac{n+1}{x^2}=\frac{nx-(n+1)}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{n+1}{n}$

(2) $0<x<\frac{n+1}{n}$일 때 $f'(x)<0$, $x>\frac{n+1}{n}$일 때 $f'(x)>0$이므로

$f(x)$는 $x=\frac{n+1}{n}$에서 극소이면서 최소이다.

$$\therefore a_n=f\left(\frac{n+1}{n}\right)=n\ln\frac{n+1}{n}+n-n\cos\frac{1}{n}$$
$$=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right\}$

이때, $\frac{1}{n}=t$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{t\to 0}\left\{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}+\frac{1-\cos t}{t}\right\}$$
$$=\lim_{t\to 0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}+\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^2 t}{t(1+\cos t)}$$
$$=\ln e+\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t(1+\cos t)}$$
$$=1+\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1+\cos t}=1$$

답 (1) $\frac{n+1}{n}$ (2) $a_n=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ (3) 1

채점 기준	배점
(1) $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	3점
(2) a_n을 구할 수 있다.	4점
(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값을 구할 수 있다.	5점

0893

유형 23 좌표평면 위를 움직이는 점의 가속도

|전략| 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$이면 시각 t에서의 가속도는 $(f''(t), g''(t))$이고, 가속도의 크기는 $\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$이다.

(1) $\frac{dx}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$, $\frac{dy}{dt}=-\sin t$에서

$\frac{d^2x}{dt^2}=e^t(\sin t+\cos t)+e^t(\cos t-\sin t)=2e^t\cos t$

$\frac{d^2y}{dt^2}=-\cos t$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(2e^t\cos t, -\cos t)$

(2) 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{(2e^t\cos t)^2+(-\cos t)^2}=|\cos t|\sqrt{4e^{2t}+1}$

(3) $|\cos t|\geq 0$, $\sqrt{4e^{2t}+1}>1$이므로 구하는 가속도의 크기의 최솟값은 $\cos t=0$일 때 0이다.

답 (1) $(2e^t\cos t, -\cos t)$ (2) $|\cos t|\sqrt{4e^{2t}+1}$ (3) 0

채점 기준	배점
(1) 점 P의 시각 t에서의 가속도를 구할 수 있다.	3점
(2) 점 P의 시각 t에서의 가속도의 크기를 구할 수 있다.	3점
(3) 가속도의 크기의 최솟값을 구할 수 있다.	4점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0894

|전략| $f''(x)$의 부호를 이용하여 오목, 볼록을 조사하고, $a>1$일 때 $y=f(x)$의 그래프를 그려서 방정식의 실근의 개수를 판단한다.

ㄱ. $f(x)=-\ln(e^x+a)$에서 $f'(x)=-\frac{e^x}{e^x+a}$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{e^x}{e^x+a}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{1+\frac{a}{e^x}}\right)=-1$ (참)

ㄴ. $f''(x)=-\frac{e^x(e^x+a)-e^x\times e^x}{(e^x+a)^2}=-\frac{ae^x}{(e^x+a)^2}$

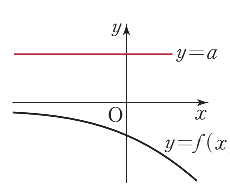
$a>0$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)<0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다. (거짓)

ㄷ. $a>1$일 때,

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\ln a<0$,

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$이고

$f'(x)=-\frac{e^x}{e^x+a}<0$이므로



$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, $a>1$일 때 방정식 $f(x)=a$는 실근을 갖지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

0895

|전략| 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $(t, \ln t)$에서의 접선의 방정식을 $y=x^2+k$에 대입하여 x에 대한 이차방정식을 만들고 이 방정식이 중근을 가져야 함을 이용한다.

$y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$이므로 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $(t, \ln t)$에서의 접선의 방정식은

$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t) \qquad \therefore y=\frac{1}{t}(x-t)+\ln t$

직선 $y=\frac{1}{t}(x-t)+\ln t$가 곡선 $y=x^2+k$에 접하므로 이차방정식 $\frac{1}{t}(x-t)+\ln t=x^2+k$, 즉 $x^2-\frac{1}{t}x+k+1-\ln t=0$은 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\left(-\frac{1}{t}\right)^2-4(k+1-\ln t)=0$에서 $k=\ln t-1+\frac{1}{4t^2}$이므로

k는 t에 대한 함수 $k(t)$로 볼 수 있다.

$k'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^3}=\frac{2t^2-1}{2t^3}$

$k'(t)=0$에서 $t^2=\frac{1}{2} \qquad \therefore t=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\because t>0)$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$k'(t)$		$-$	0	$+$
$k(t)$		↘	극소	↗

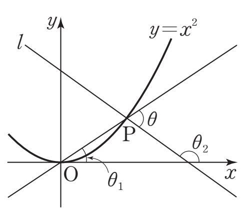
따라서 k는 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 극소이면서 최소이다. 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0896

|전략| 직선 OP와 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2로 놓고 $\tan\theta_1$, $\tan\theta_2$를 구한 후 이를 이용하여 $\tan\theta$를 a에 대한 함수로 나타낸다.

$y=x^2$에서 $y'=2x$이므로 점 $\mathrm{P}(a, a^2)$에서의 접선의 기울기는 $2a$이고, 이 접선과 수직인 직선 l의 기울기는 $-\frac{1}{2a}$이다.

오른쪽 그림과 같이 직선 OP와 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하면



$\tan\theta_1=\frac{a^2}{a}=a$, $\tan\theta_2=-\frac{1}{2a}$

이때, $\theta=\theta_1+\pi-\theta_2$이므로

$\tan\theta=\tan(\theta_1+\pi-\theta_2)=\tan(\theta_1-\theta_2)$

$=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{a+\frac{1}{2a}}{1+a\times\left(-\frac{1}{2a}\right)}$

$=2a+\frac{1}{a}$

$f(a)=2a+\frac{1}{a}$로 놓으면

$f'(a)=2-\frac{1}{a^2}=\frac{2a^2-1}{a^2}$

$f'(a)=0$에서 $a^2=\frac{1}{2} \qquad \therefore a=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\because a>0)$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		↘	$2\sqrt{2}$	↗

따라서 $f(a)$, 즉 $\tan\theta$는 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 최솟값 $2\sqrt{2}$를 갖는다.

답 $2\sqrt{2}$

다른 풀이 $a>0$에서 $2a>0$, $\frac{1}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{2a\times\frac{1}{a}}=2\sqrt{2}$ (단, 등호는 $2a=\frac{1}{a}$, 즉 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 성립)

따라서 $\tan\theta$의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다.

0897

|전략| $f(x)=\ln(\sin x)+x-k$로 놓고 ($f(x)$의 최댓값)≤ 0을 만족시키는 k의 최솟값을 구한다.

$f(x)=\ln(\sin x)+x-k$로 놓으면

$f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}+1=\cot x+1$

$f'(x)=0$에서 $\cot x=-1 \qquad \therefore \tan x=-1$

$(2n-2)\pi<x<(2n-1)\pi$에서 $\tan x=-1$을 만족시키는 x의 값은

$x=(2n-2)\pi+\frac{3}{4}\pi$

x	$((2n-2)\pi)$	$\cdots$	$(2n-2)\pi+\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$((2n-1)\pi)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

함수 $f(x)$는 $x=(2n-2)\pi+\frac{3}{4}\pi$에서 극대이며 최대이므로

$(2n-2)\pi<x<(2n-1)\pi$인 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립하려면 $f\left((2n-2)\pi+\frac{3}{4}\pi\right)\leq 0$이어야 한다.

$f\left((2n-2)\pi+\frac{3}{4}\pi\right)$

$=\ln\left[\sin\left\{(2n-2)\pi+\frac{3}{4}\pi\right\}\right]+(2n-2)\pi+\frac{3}{4}\pi-k$

$=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+(2n-2)\pi+\frac{3}{4}\pi-k\leq 0$

$\therefore k\geq\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+(2n-2)\pi+\frac{3}{4}\pi$

따라서 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값 m_n은

$m_n=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+(2n-2)\pi+\frac{3}{4}\pi$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} m_n=\sum_{n=1}^{10}\left\{\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+(2n-2)\pi+\frac{3}{4}\pi\right\}$

$=2\pi\sum_{n=1}^{10} n+\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{5}{4}\pi\right)\sum_{n=1}^{10} 1$

$=2\pi\times\frac{10\times 11}{2}+10\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{5}{4}\pi\right)$

$=110\pi+10\ln 2^{-\frac{1}{2}}-\frac{25}{2}\pi$

$=\frac{195}{2}\pi-5\ln 2$

따라서 $a=\frac{195}{2}$, $b=-5$이므로

$2a+b=195-5=190$ 답 190

0898

|전략| $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$을 $\sin 2t$에 대한 식으로 나타내고 속력이 최대일 때의 $\sin 2t$의 값을 구한 후 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$임을 이용한다.

$x=2\sin t-2\cos t$, $y=3\sin t\cos t=\frac{3}{2}\sin 2t$에서

$\frac{dx}{dt}=2\cos t+2\sin t$, $\frac{dy}{dt}=3\cos 2t$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\cos 2t}{2(\cos t+\sin t)}$ …… ㉠

시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{(2\cos t+2\sin t)^2+(3\cos 2t)^2}$

$=\sqrt{4\cos^2 t+8\sin t\cos t+4\sin^2 t+9\cos^2 2t}$

$=\sqrt{4+4\sin 2t+9(1-\sin^2 2t)}$

$=\sqrt{-9\sin^2 2t+4\sin 2t+13}$

$0\le t\le\frac{\pi}{4}$에서 $0\le 2t\le\frac{\pi}{2}$이므로 $0\le\sin 2t\le 1$

이때, $\sin 2t=A$로 놓으면 $0\le A\le 1$이고

$\sqrt{-9\sin^2 2t+4\sin 2t+13}=\sqrt{-9A^2+4A+13}$

$=\sqrt{-9\left(A-\frac{2}{9}\right)^2+\frac{121}{9}}$

이므로 속력은 $A=\frac{2}{9}$, 즉 $\sin 2t=\frac{2}{9}$일 때 최대이다.

$\sin 2t=\frac{2}{9}$에서

$\cos 2t=\sqrt{1-\left(\frac{2}{9}\right)^2}=\frac{\sqrt{77}}{9}$ $\left(\because 0\le t\le\frac{\pi}{4}\right)$ …… ㉡

또, $\sin 2t=2\sin t\cos t=\frac{2}{9}$이므로

$(\sin t+\cos t)^2=\sin^2 t+2\sin t\cos t+\cos^2 t$

$=1+\frac{2}{9}=\frac{11}{9}$

$\therefore \sin t+\cos t=\frac{\sqrt{11}}{3}$ $\left(\because 0\le t\le\frac{\pi}{4}\right)$ …… ㉢

따라서 ㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 구하는 값은

$\frac{dy}{dx}=\frac{3\times\frac{\sqrt{77}}{9}}{2\times\frac{\sqrt{11}}{3}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{7}}{2}$

본책 142~155쪽

8 | 여러 가지 적분법

STEP 1 개념 마스터

0899

$\int\sqrt[3]{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$

$=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$ 답 $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$

0900

$\int x^2\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{5}{2}}dx=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C$

$=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+C$ 답 $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+C$

0901

$\int\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{3}{x^2}\right)dx=\int(x^{\frac{2}{3}}-3x^{-2})dx$

$=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+3x^{-1}+C$

$=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{3}{x}+C$ 답 $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{3}{x}+C$

0902

$\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})dx$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$

$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$ 답 $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$

0903

$\int\frac{x^3-3x+1}{x}dx=\int\left(x^2-3+\frac{1}{x}\right)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-3x+\ln|x|+C$

답 $\frac{1}{3}x^3-3x+\ln|x|+C$

0904

$\int\frac{(2x-1)^2}{x}dx=\int\frac{4x^2-4x+1}{x}dx$

$=\int\left(4x-4+\frac{1}{x}\right)dx$

$=2x^2-4x+\ln|x|+C$ 답 $2x^2-4x+\ln|x|+C$

0905

$$\int\frac{1-x}{x^2}dx=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=\int\left(x^{-2}-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{x}-\ln|x|+C$$

답 $-\frac{1}{x}-\ln|x|+C$

0906

$$\int(\sqrt[6]{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)dx=\int(\sqrt[6]{x^2}-1)dx=\int(x^{\frac{1}{3}}-1)dx$$
$$=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x+C=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-x+C$$

답 $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-x+C$

0907

$$\int\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}-1}dx-\int\frac{1}{\sqrt{x}-1}dx$$
$$=\int\frac{\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x}-1}dx=\int\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x^2}+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}dx$$
$$=\int(\sqrt{x^2}+\sqrt{x}+1)dx=\int(x+x^{\frac{1}{2}}+1)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x+C=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$$

답 $\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$

0908

$$\int e^{x+3}dx=\int e^x\times e^3dx=e^3\int e^xdx$$
$$=e^3\times e^x+C=e^{x+3}+C$$

답 $e^{x+3}+C$

0909

$$\int\frac{e^{2x}-4^x}{e^x+2^x}dx=\int\frac{(e^x+2^x)(e^x-2^x)}{e^x+2^x}dx$$
$$=\int(e^x-2^x)dx=e^x-\frac{2^x}{\ln 2}+C$$

답 $e^x-\frac{2^x}{\ln 2}+C$

0910

$$\int(2^x+1)^2dx=\int(4^x+2\times 2^x+1)dx$$
$$=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+x+C$$

답 $\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+x+C$

0911

$$\int\frac{9^x-1}{3^x+1}dx=\int\frac{(3^x+1)(3^x-1)}{3^x+1}dx$$
$$=\int(3^x-1)dx=\frac{3^x}{\ln 3}-x+C$$

답 $\frac{3^x}{\ln 3}-x+C$

0912

$$\int(2\sin x-3\cos x)dx=2\int\sin x\,dx-3\int\cos x\,dx$$
$$=-2\cos x-3\sin x+C$$

답 $-2\cos x-3\sin x+C$

0913

$$\int(\cos x+\tan x)\sec x\,dx=\int(1+\sec x\tan x)dx$$
$$=x+\sec x+C$$

답 $x+\sec x+C$

0914

$$\int\frac{1+2\cos^3 x}{\cos^2 x}dx=\int(\sec^2 x+2\cos x)dx$$
$$=\tan x+2\sin x+C$$

답 $\tan x+2\sin x+C$

0915

$1+\tan^2 x=\sec^2 x$에서 $\tan^2 x=\sec^2 x-1$이므로

$$\int\tan^2 x\,dx=\int(\sec^2 x-1)\,dx$$
$$=\tan x-x+C$$

답 $\tan x-x+C$

0916

$1+\cot^2 x=\csc^2 x$에서 $\cot^2 x=\csc^2 x-1$이므로

$$\int\cot^2 x\,dx=\int(\csc^2 x-1)\,dx$$
$$=-\cot x-x+C$$

답 $-\cot x-x+C$

0917

$$\int\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}dx$$
$$=\int\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1-\sin x}dx$$
$$=\int(1+\sin x)\,dx$$
$$=x-\cos x+C$$

답 $x-\cos x+C$

0918

$x^2-1=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int 2x(x^2-1)^4dx=\int t^4dt=\frac{1}{5}t^5+C$$
$$=\frac{1}{5}(x^2-1)^5+C$$

답 $\frac{1}{5}(x^2-1)^5+C$

0919

$x^2=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int 2xe^{x^2}dx=\int e^t\,dt=e^t+C$$
$$=e^{x^2}+C$$

답 $e^{x^2}+C$

8 여러 가지 적분법

0920

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int \sin^2 x\cos x\,dx=\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3+C$$
$$=\frac{1}{3}\sin^3 x+C$$

답 $\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

0921

$2x+5=t$로 놓으면 $2=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int (2x+5)^4\,dx=\int t^4\times\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{10}t^5+C$$
$$=\frac{1}{10}(2x+5)^5+C$$

답 $\frac{1}{10}(2x+5)^5+C$

0922

$3x-2=t$로 놓으면 $3=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int \sqrt{3x-2}\,dx=\int \sqrt{t}\times\frac{1}{3}\,dt=\frac{2}{9}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{2}{9}(3x-2)\sqrt{3x-2}+C$$

답 $\frac{2}{9}(3x-2)\sqrt{3x-2}+C$

0923

$4x+1=t$로 놓으면 $4=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int \cos(4x+1)\,dx=\int \cos t\times\frac{1}{4}\,dt=\frac{1}{4}\sin t+C$$
$$=\frac{1}{4}\sin(4x+1)+C$$

답 $\frac{1}{4}\sin(4x+1)+C$

0924

$(x^2-2x-1)'=2x-2$이므로

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x-1}\,dx=\int \frac{(x^2-2x-1)'}{x^2-2x-1}\,dx$$
$$=\ln|x^2-2x-1|+C$$

답 $\ln|x^2-2x-1|+C$

0925

$(e^x+1)'=e^x$이므로

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx=\int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx$$
$$=\ln(e^x+1)+C\ (\because e^x+1>0)$$

답 $\ln(e^x+1)+C$

0926

$(x+\cos x)'=1-\sin x$이므로

$$\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}\,dx=\int \frac{(x+\cos x)'}{x+\cos x}\,dx$$
$$=\ln|x+\cos x|+C$$

답 $\ln|x+\cos x|+C$

0927

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$이고, $(\cos x)'=-\sin x$이므로

$$\int \tan x\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx=-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx$$
$$=-\ln|\cos x|+C$$

답 $-\ln|\cos x|+C$

0928

$\frac{x^2-x+3}{x-1}=\frac{x(x-1)+3}{x-1}=x+\frac{3}{x-1}$이므로

$$\int \frac{x^2-x+3}{x-1}\,dx=\int \left(x+\frac{3}{x-1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+3\ln|x-1|+C$$

답 $\frac{1}{2}x^2+3\ln|x-1|+C$

0929

$\frac{x^2+1}{x+1}=\frac{(x^2-1)+2}{x+1}=x-1+\frac{2}{x+1}$이므로

$$\int \frac{x^2+1}{x+1}\,dx=\int \left(x-1+\frac{2}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2-x+2\ln|x+1|+C$$

답 $\frac{1}{2}x^2-x+2\ln|x+1|+C$

0930

$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$이므로

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx=\int \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\ln|x|-\ln|x+1|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$$

답 $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$

0931

$\frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}$로 놓으면

$\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}=\frac{(a+b)x-a+b}{x^2-1}$이므로

$3x-1=(a+b)x-a+b$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$a+b=3,\ -a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=1$

$$\therefore \int \frac{3x-1}{x^2-1}\,dx=\int \left(\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$=2\ln|x+1|+\ln|x-1|+C$$
$$=\ln|(x+1)^2(x-1)|+C$$

답 $\ln|(x+1)^2(x-1)|+C$

0932

$f(x)=x,\ g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=e^x$

$\therefore \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$

$= xe^x - e^x + C$ 답 $xe^x - e^x + C$

0933

$f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$

$\therefore \int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int(-\cos x)dx$

$= -x\cos x + \sin x + C$ 답 $-x\cos x + \sin x + C$

0934

$f(x)=4x-2$, $g'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$f'(x)=4$, $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$\therefore \int(4x-2)e^{2x}dx = (4x-2)\times\frac{1}{2}e^{2x} - 2\int e^{2x}dx$

$= (2x-1)e^{2x} - 2\times\frac{1}{2}e^{2x} + C$

$= (2x-2)e^{2x} + C$ 답 $(2x-2)e^{2x}+C$

0935

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$

$\therefore \int \ln x\,dx = x\ln x - \int\frac{1}{x}\times x\,dx$

$= x\ln x - x + C$ 답 $x\ln x - x + C$

0936

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$

$\therefore \int x\ln x\,dx = \ln x\times\frac{1}{2}x^2 - \int\frac{1}{x}\times\frac{1}{2}x^2dx$

$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$ 답 $\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

STEP 2 유형 마스터

0937

|전략| $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\,(n\neq-1)$, $\int\frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$임을 이용한다.

$f(x)=\int\frac{(x-1)^2}{x}dx = \int\frac{x^2-2x+1}{x}dx = \int\left(x-2+\frac{1}{x}\right)dx$

$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln|x| + C$

이때, $f(e)=\frac{1}{2}e^2-2e$에서

$\frac{1}{2}e^2-2e+1+C=\frac{1}{2}e^2-2e$, $1+C=0$ $\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+\ln|x|-1$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}-2-1=-\frac{5}{2}$ 답 ②

0938

$F(x)=\int f(x)dx = \int\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$

$= \int\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}dx = \int(\sqrt{x}-1)dx$

$= \int(x^{\frac{1}{2}}-1)dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + C$

이때, $F(1)=\frac{5}{3}$에서 $\frac{2}{3}-1+C=\frac{5}{3}$ $\therefore C=2$

$\therefore F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x+2$ 답 $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x+2$

0939

$F(x)=xf(x)+\frac{4}{x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-\frac{4}{x^2}$

$xf'(x)=\frac{4}{x^2}$ $\therefore f'(x)=\frac{4}{x^3}$

$\therefore f(x)=\int\frac{4}{x^3}dx = \int 4x^{-3}dx = -\frac{2}{x^2}+C$

이때, $f(1)=4$에서 $-2+C=4$ $\therefore C=6$

따라서 $f(x)=-\frac{2}{x^2}+6$이므로

$8f(4)=8\times\left(-\frac{1}{8}+6\right)=47$ 답 ④

0940

|전략| $\int e^x dx = e^x + C$임을 이용한다.

$f(x)=\int\frac{xe^x+2}{x}dx = \int\left(e^x+\frac{2}{x}\right)dx$

$= e^x + 2\ln|x| + C$

이때, $f(1)=e-e^2$에서 $e+C=e-e^2$ $\therefore C=-e^2$

따라서 $f(x)=e^x+2\ln|x|-e^2$이므로

$f(2)=2\ln 2$ 답 $2\ln 2$

8 여러 가지 적분법

0941

조건 (가), (나)의 두 식을 변끼리 더하면

$2f'(x)=e^{-x}+e^{x} \qquad \therefore f'(x)=\frac{1}{2}(e^{-x}+e^{x})$

또, 조건 (가), (나)의 두 식을 변끼리 빼면

$2g'(x)=e^{-x}-e^{x} \qquad \therefore g'(x)=\frac{1}{2}(e^{-x}-e^{x})$

$f(x)=\int\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\,dx=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})+C_1$

$g(x)=\int-\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})\,dx=-\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})+C_2$

조건 (다)에서 $f(0)=0$이므로

$\frac{1}{2}(1-1)+C_1=0 \qquad \therefore C_1=0$

또, $g(0)=-1$이므로

$-\frac{1}{2}(1+1)+C_2=-1 \qquad \therefore C_2=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$, $g(x)=-\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$이므로

$f(1)-g(1)=\frac{1}{2}(e-e^{-1})+\frac{1}{2}(e+e^{-1})=e$ 답 e

0942

$y=\ln x-1$로 놓으면

$y+1=\ln x \qquad \therefore x=e^{y+1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=e^{x+1}$

따라서 $g(x)=e^{x+1}$이므로

$G(x)=\int g(x)dx=\int e^{x+1}dx=e\int e^{x}dx$

$\quad =e\times e^{x}+C=e^{x+1}+C$

이때, $G(-1)=2$에서 $1+C=2 \qquad \therefore C=1$

따라서 $G(x)=e^{x+1}+1$이므로

$G\left(\ln\frac{2}{e}\right)=G(\ln 2-1)=e^{\ln 2}+1=2+1=3$ 답 ③

0943

|전략| $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C\,(a>0,\,a\neq1)$임을 이용한다.

$f(x)=\int(3^{x}+9^{x})dx=\frac{3^{x}}{\ln 3}+\frac{9^{x}}{\ln 9}+C$

이때, 곡선 $y=f(x)$가 점 $\left(0,\,\frac{3}{\ln 9}\right)$을 지나므로 $f(0)=\frac{3}{\ln 9}$에서

$\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 9}+C=\frac{3}{\ln 9},\ \frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{2\ln 3}+C=\frac{3}{2\ln 3}$

$\frac{3}{2\ln 3}+C=\frac{3}{2\ln 3} \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{3^{x}}{\ln 3}+\frac{9^{x}}{\ln 9}$이므로

$f(1)=\frac{3}{\ln 3}+\frac{9}{\ln 9}=\frac{6}{2\ln 3}+\frac{9}{2\ln 3}=\frac{15}{2\ln 3}$ 답 ④

Lecture

로그의 성질

$a>0,\ a\neq1,\ M>0,\ N>0$일 때

(1) $\log_a 1=0,\ \log_a a=1$

(2) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(3) $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(4) $\log_a N^{k}=k\log_a N$ (단, k는 실수)

0944

$f(x)=-\int\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\ln 2\,dx=-\ln 2\int\left(\frac{1}{2}\right)^{x}dx$

$\quad =-\ln 2\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}{\ln\frac{1}{2}}+C=-\ln 2\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}{-\ln 2}+C$

$\quad =\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+C$

이때, $f(0)=1$에서 $1+C=1 \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$이므로

$f(1)f(-1)=\frac{1}{2}\times2=1$ 답 1

0945

$f(x)=\int 4^{x}\ln 2\,dx=\ln 2\int 4^{x}dx=\ln 2\times\frac{4^{x}}{\ln 4}+C$

$\quad =\ln 2\times\frac{4^{x}}{2\ln 2}+C=\frac{4^{x}}{2}+C$

이때, $f(1)=2$에서 $2+C=2 \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{4^{x}}{2}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}=2\times\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$

따라서 $p=3,\ q=2$이므로 $p+q=5$ 답 5

Lecture

등비급수의 수렴과 발산

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^{2}+\cdots+ar^{n-1}+\cdots(a\neq0)$은

(1) $|r|<1$일 때 수렴하고, 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

(2) $|r|\geq1$일 때 발산한다.

0946

|전략| $\sin^{2}x=1-\cos^{2}x$임을 이용하여 주어진 식을 적분하기 쉬운 꼴로 변형한다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $\frac{\sin^{2}x}{1+\cos x}$이므로 $f'(x)=\frac{\sin^{2}x}{1+\cos x}$

$\therefore f(x)=\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx=\int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}dx$

$=\int \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1+\cos x}dx$

$=\int (1-\cos x)dx=x-\sin x+C$

이때, 이 곡선이 점 $(0, 1)$을 지나므로 $f(0)=1$에서 $C=1$

따라서 $f(x)=x-\sin x+1$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1+1=\frac{\pi}{2}$ 답 ①

0947

$\int \frac{1}{1-\sin x}dx=\int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx$

$=\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos x}\times\tan x\right)dx$

$=\int (\sec^2 x+\sec x\tan x)dx$

$=\tan x+\sec x+C$

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=0$이므로 $a+b+c=2$ 답 2

0948

$\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2=\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}$

$=1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=1+\sin x$

$\therefore f(x)=\int (1+\sin x)dx=x-\cos x+C$

이때, $f(0)=0$에서 $-1+C=0$ $\therefore C=1$

따라서 $f(x)=x-\cos x+1$이므로

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}$ 답 $\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}$

0949

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x+h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)-\{f(x+h)-f(x)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\times 3-\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=3f'(x)-f'(x)=2f'(x)$

즉, $2f'(x)=\frac{4}{1+\cos 2x}$이므로

$f'(x)=\frac{2}{1+\cos 2x}=\frac{2}{1+(2\cos^2 x-1)}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$

$\therefore f(x)=\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f(\pi)=\left(\tan\frac{\pi}{4}+C\right)-\left(\tan\pi+C\right)=1$ 답 1

0950

| 전략 | $3x-1=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$3x-1=t$로 놓으면 $3=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int (3x-1)^5 dx=\int \frac{1}{3}t^5 dt$

$=\frac{1}{18}t^6+C=\frac{1}{18}(3x-1)^6+C$

이때, $f(0)=\frac{1}{2}$에서 $\frac{1}{18}+C=\frac{1}{2}$ $\therefore C=\frac{4}{9}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{18}(3x-1)^6+\frac{4}{9}$이므로 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)=\frac{64}{18}+\frac{4}{9}=4$ 답 4

Lecture

나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a)$이다.

0951

$x^2-x-3=t$로 놓으면 $2x-1=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int (4x-2)(x^2-x-3)^5 dx=\int 2t^5 dt=\frac{1}{3}t^6+C$

$=\frac{1}{3}(x^2-x-3)^6+C$

$\therefore a=3, b=6$ $\therefore a+b=9$ 답 9

0952

$ax-3=t$로 놓으면 $a=\frac{dt}{dx}$이므로

$F(x)=\int (ax-3)^7 dx=\int t^7\times\frac{1}{a}dt$

$=\frac{1}{8a}t^8+C=\frac{1}{8a}(ax-3)^8+C$

$F(x)$의 최고차항의 계수가 16이므로

$\frac{1}{8a}\times a^8=16$, $a^7=2^7$ $\therefore a=2$ 답 2

0953

| 전략 | $x^2+1=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$x^2+1=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}t\sqrt{t}+C$

$=\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C$

이때, $f(0)=2$에서 $\frac{1}{3}+C=2$ $\therefore C=\frac{5}{3}$

8 여러 가지 적분법

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+\frac{5}{3}$이므로

$f(2)=\frac{1}{3}\times5\sqrt{5}+\frac{5}{3}=\frac{5}{3}(\sqrt{5}+1)$ 답 ⑤

0954

$x+1=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}dx=\int\frac{t-2}{\sqrt{t}}dt$$
$$=\int\left(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{t}}\right)dt=\int\left(t^{\frac{1}{2}}-2t^{-\frac{1}{2}}\right)dt$$
$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-2\times2t^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}-4\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-4\sqrt{x+1}+C$$

이때, $f'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$

x	(-1)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖고, 극솟값이 $-\frac{8\sqrt{2}}{3}$이므로 $f(1)=\frac{4\sqrt{2}}{3}-4\sqrt{2}+C=-\frac{8\sqrt{2}}{3}$

$-\frac{8\sqrt{2}}{3}+C=-\frac{8\sqrt{2}}{3}$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-4\sqrt{x+1}$이므로

$f(3)=\frac{16}{3}-8=-\frac{8}{3}$ 답 ①

0955

$x^2+3=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\times\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{1}{2}\times2t^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{t}+C=\sqrt{x^2+3}+C \quad \cdots ❶$$

이때, $f(1)=-1$에서 $2+C=-1$ $\quad\therefore C=-3$

$\therefore f(x)=\sqrt{x^2+3}-3$ $\cdots$ ❷

방정식 $f(x)=0$, 즉 $\sqrt{x^2+3}-3=0$에서 $\sqrt{x^2+3}=3$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x^2+3=9$, $x^2=6$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{6}$

따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 곱은 -6이다. $\cdots$ ❸

답 -6

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$의 부정적분을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱을 구할 수 있다.	40 %

0956

|전략| $x^2-2x+3=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$x^2-2x+3=t$로 놓으면 $2(x-1)=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int(x-1)e^{x^2-2x+3}dx=\frac{1}{2}\int e^t dt$$
$$=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2-2x+3}+C$$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\left(0, \frac{e^3}{2}\right)$을 지나므로 $f(0)=\frac{e^3}{2}$에서

$\frac{e^3}{2}+C=\frac{e^3}{2}$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}e^{x^2-2x+3}$이므로 $f(1)=\frac{e^2}{2}$ 답 ⑤

0957

$e^x+3=t$로 놓으면 $e^x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{e^x+3}+C$$

$\therefore f(\ln 13)-f(\ln 6)=(2\sqrt{e^{\ln 13}+3}+C)-(2\sqrt{e^{\ln 6}+3}+C)$

$=(8+C)-(6+C)=2$ 답 2

다른 풀이 $\sqrt{e^x+3}=t$로 놓으면 $e^x+3=t^2$에서 $e^x=2t\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}dx=\int\frac{2t}{t}dt=\int 2dt$$
$$=2t+C=2\sqrt{e^x+3}+C$$

$\therefore f(\ln 13)-f(\ln 6)=2$

0958

$e^x+2=t$로 놓으면 $e^x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int 3e^x\sqrt{e^x+2}\,dx=\int 3\sqrt{t}\,dt=3\int t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=3\times\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=2t\sqrt{t}+C=2(e^x+2)\sqrt{e^x+2}+C$$

이때, $f(0)=6\sqrt{3}$에서 $6\sqrt{3}+C=6\sqrt{3}$ $\quad\therefore C=0$

$\therefore f(x)=2(e^x+2)\sqrt{e^x+2}$

한편, $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

따라서 $0\le x\le\ln 7$에서 함수 $f(x)$는 $x=\ln 7$일 때 최대이므로 구하는 최댓값은

$f(\ln 7)=2(e^{\ln 7}+2)\sqrt{e^{\ln 7}+2}=2\times9\times3=54$ 답 ④

0959

| 전략 | $\ln x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$F(x)=\int\frac{4(\ln x)^3}{x}dx=\int 4t^3dt$

$=t^4+C=(\ln x)^4+C$

이때, $F(e)=2$에서 $1+C=2$ $\therefore C=1$

따라서 $F(x)=(\ln x)^4+1$이므로

$F(e^2)=2^4+1=17$ 답 ②

0960

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $\frac{\ln x^4}{x}$이므로 $f'(x)=\frac{\ln x^4}{x}$

$\therefore f(x)=\int\frac{\ln x^4}{x}dx=\int\frac{4\ln|x|}{x}dx$

$\ln|x|=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int\frac{4\ln|x|}{x}dx=\int 4t\,dt=2t^2+C$

$=2(\ln|x|)^2+C$

이때, 이 곡선이 점 $(e, 0)$을 지나므로 $f(e)=0$에서

$2+C=0$ $\therefore C=-2$

따라서 $f(x)=2(\ln|x|)^2-2$이므로

$f(e^2)=2\times2^2-2=6$ 답 ③

0961

$xf'(x)=\ln x$에서 $f'(x)=\frac{\ln x}{x}$이므로

$f(x)=\int\frac{\ln x}{x}dx$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int\frac{\ln x}{x}dx=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$

이때, $f(1)=\frac{1}{2}$에서 $C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+\frac{1}{2}$이므로

$f(e)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ 답 1

0962

| 전략 | $\sin x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로 $f'(x)=\cos^3 x$

$f(x)=\int\cos^3 x\,dx=\int\cos^2 x\cos x\,dx$

$=\int(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int(1-\sin^2 x)\cos x\,dx=\int(1-t^2)dt=t-\frac{1}{3}t^3+C$

$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

이때, $f(0)=2$에서 $C=2$

따라서 $f(x)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+2$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{1}{3}+2=\frac{8}{3}$ 답 ⑤

0963

$\tan x=t$로 놓으면 $\sec^2 x=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int\tan x\sec^2 x\,dx=\int t\,dt$

$=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}\tan^2 x+C$

이때, $f(0)=5$에서 $C=5$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\tan^2 x+5$ 답 $f(x)=\frac{1}{2}\tan^2 x+5$

0964

$f(x)=\int\frac{\sin x}{2+\cos x}dx$

$2+\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int\frac{\sin x}{2+\cos x}dx=\int\left(-\frac{1}{t}\right)dt=-\ln|t|+C$

$=-\ln(2+\cos x)+C$ ($\because 2+\cos x>0$)

이때, $f(0)=0$에서 $-\ln 3+C=0$ $\therefore C=\ln 3$

따라서 $f(x)=-\ln(2+\cos x)+\ln 3$이므로

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\ln 2+\ln 3=\ln\frac{3}{2}$ 답 ①

0965

| 전략 | $\int\sin ax\,dx=-\frac{1}{a}\cos ax+C$임을 이용한다.

$f(x)=\int\sin 2x\cos^2 x\,dx+\int 2\sin^3 x\cos x\,dx$

$=\int(\sin 2x\cos^2 x+\sin 2x\sin^2 x)dx$

$=\int\sin 2x(\cos^2 x+\sin^2 x)dx$

$=\int\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$

이때, $f(\pi)=-\frac{1}{2}$에서 $-\frac{1}{2}+C=-\frac{1}{2}$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$이므로

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ 답 ④

0966

$f(x)=\int(5-2\sin^2 x)dx=\int\{(1-2\sin^2 x)+4\}\,dx$

$=\int(\cos 2x+4)\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x+4x+C$

이때, $f(\pi)=3\pi$이므로 $4\pi+C=3\pi$ $\therefore C=-\pi$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+4x-\pi$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}+\pi-\pi=\frac{1}{2}$ $\therefore a=\frac{1}{2}$ 답 ④

0967

$f(x)=\int(\sin x-\cos 2x)dx=-\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$ … ❶

$f'(x)=\sin x-\cos 2x=\sin x-(1-2\sin^2 x)$

$=2\sin^2 x+\sin x-1=(2\sin x-1)(\sin x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=-1$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because 0<x<\pi$) … ❷

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극솟값을 갖고, 극솟값이 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}+C=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}+C=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ $\therefore C=0$ … ❸

따라서 $f(x)=-\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x$이고, $f(x)$는 $x=\frac{5}{6}\pi$에서 극댓값을 가지므로

$f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ … ❹

답 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	20 %
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 적분상수 C를 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(x)$의 극댓값을 구할 수 있다.	20 %

0968

|전략| $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$임을 이용한다.

$(x^2+1)'=2x$이므로

$f(x)=\int\frac{6x}{x^2+1}dx=3\int\frac{2x}{x^2+1}dx$

$=3\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=3\ln(x^2+1)+C$ ($\because x^2+1>0$)

이때, $f(0)=2$에서 $C=2$

따라서 $f(x)=3\ln(x^2+1)+2$이므로

$f(1)=3\ln 2+2$ 답 $3\ln 2+2$

0969

$f(x)=\int\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$

이때, $(e^{2x}+1)'=2e^{2x}$이므로

$f(x)=\int\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}dx=\int\frac{(e^{2x}+1)'}{e^{2x}+1}dx$

$=\ln(e^{2x}+1)+C$ ($\because e^{2x}+1>0$)

$\therefore f(\ln 3)-f(\ln 2)=\{\ln(e^{2\ln 3}+1)+C\}-\{\ln(e^{2\ln 2}+1)+C\}$

$=(\ln 10+C)-(\ln 5+C)$

$=\ln\frac{10}{5}=\ln 2$ 답 $\ln 2$

0970

$f(x)=f'(x)$에서 $\frac{f'(x)}{f(x)}=1$이므로

$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int dx$, $\ln f(x)=x+C$ ($\because f(x)>0$)

$\therefore f(x)=e^{x+C}$

이때, $f(0)=e^2$에서 $e^C=e^2$ $\therefore C=2$

따라서 $f(x)=e^{x+2}$이므로 $f(1)=e^3$ 답 e^3

0971

조건 (가)에서 두 식을 변끼리 더하면

$f'(x)+g'(x)=2\{f(x)+g(x)\}$, $\frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}=2$

즉, $\int\frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}dx=\int 2\,dx$이므로

$\ln|f(x)+g(x)|=2x+C$

이때, 조건 (나)에서 $f(0)=1$, $g(0)=3$이므로

$\ln|1+3|=C$ $\therefore C=\ln 4$

$\ln|f(x)+g(x)|=2x+\ln 4$에서

$f(x)+g(x)=e^{2x+\ln 4}=e^{2x}\times e^{\ln 4}=4e^{2x}$

$\therefore f(\ln 2)+g(\ln 2)=4e^{2\ln 2}=4\times 4=16$ 답 16

0972

|전략| $\frac{px+q}{(x+a)(x+b)}=\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x+b}$ 꼴로 변형한 후 부정적분을 구한다.

$\frac{4x}{x^2-2x-3}=\frac{4x}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}$로 놓으면

$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}=\frac{(A+B)x-3A+B}{(x+1)(x-3)}$이므로

$4x=(A+B)x-3A+B$
위의 등식은 x에 대한 항등식이므로
$A+B=4,\ -3A+B=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $A=1,\ B=3$

$$\therefore \int \frac{4x}{x^2-2x-3}dx=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x-3}\right)dx$$
$$=\ln|x+1|+3\ln|x-3|+C$$

따라서 $a=1,\ b=3$이므로 $ab=3$ 답 ③

0973

$$f(x)=\int\frac{1}{4x^2-1}dx=\int\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}dx$$
$$=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx=\int\frac{1}{4}\left(\frac{2}{2x-1}-\frac{2}{2x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}(\ln|2x-1|-\ln|2x+1|)+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|+C$$

이때, $f(0)=0$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|$이므로

$$f(1)=\frac{1}{4}\ln\frac{1}{3}=-\frac{\ln 3}{4}$$

답 $-\frac{\ln 3}{4}$

0974

$y=\frac{6-x}{2+x}$로 놓으면 $2y+xy=6-x$

$x(y+1)=6-2y \qquad \therefore x=\frac{6-2y}{y+1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{6-2x}{x+1}$

따라서 $g(x)=\frac{6-2x}{x+1}$이므로 ··· ❶

$$\int g(x)dx=\int\frac{6-2x}{x+1}dx=\int\left(-2+\frac{8}{x+1}\right)dx$$
$$=-2x+8\ln|x+1|+C$$ ··· ❷

답 $-2x+8\ln|x+1|+C$

채점 기준	비율
❶ $g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\int g(x)dx$를 구할 수 있다.	60 %

0975

|전략| $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$임을 이용한다.

$u(x)=x+1,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면
$u'(x)=1,\ v(x)=e^x$이므로

$$f(x)=\int(x+1)e^xdx=(x+1)e^x-\int e^xdx$$
$$=(x+1)e^x-e^x+C=xe^x+C$$

이때, $f(0)=0$에서 $C=0$
따라서 $f(x)=xe^x$이므로 $f(2)=2e^2$ 답 $2e^2$

0976

$u(x)=\ln x,\ v'(x)=ax$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=\frac{a}{2}x^2$이므로

$$f(x)=\int ax\ln x\,dx=\ln x\times\frac{a}{2}x^2-\int\frac{1}{x}\times\frac{a}{2}x^2dx$$
$$=\frac{a}{2}x^2\ln x-\frac{a}{2}\int x\,dx=\frac{a}{2}x^2\ln x-\frac{a}{4}x^2+C$$

이때, $f'(x)=ax\ln x$이고 $f'(e^2)=2e^2$이므로
$2ae^2=2e^2,\ 2e^2(a-1)=0 \qquad \therefore a=1$

또, $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{3}{4e^2}$이므로

$-\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{4e^2}+C=-\frac{3}{4e^2}\ (\because a=1) \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2$이므로

$f(e)=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2=\frac{1}{4}e^2$ 답 ②

0977

$\{e^{f(x)}\}'=x\sin x\times e^{f(x)}$에서 $e^{f(x)}\times f'(x)=x\sin x\times e^{f(x)}$
$\therefore f'(x)=x\sin x$

$f(x)=\int x\sin x\,dx$에서 $u(x)=x,\ v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=-\cos x$이므로

$$f(x)=\int x\sin x\,dx=x\times(-\cos x)-\int(-\cos x)dx$$
$$=-x\cos x+\sin x+C$$

이때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$에서 $1+C=1 \qquad \therefore C=0$

$\therefore f(x)=-x\cos x+\sin x$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)+f'(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(-x\cos x+\sin x)+x\sin x}{x}$$
$$=-\lim_{x\to0}\cos x+\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}+\lim_{x\to0}\sin x$$
$$=-1+1+0=0$$

답 0

0978

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 xe^{4x}이므로 $f'(x)=xe^{4x}$

$f(x)=\int xe^{4x}dx$에서 $u(x)=x,\ v'(x)=e^{4x}$으로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=\frac{1}{4}e^{4x}$이므로

$$f(x)=x\times\frac{1}{4}e^{4x}-\int\frac{1}{4}e^{4x}dx=\frac{1}{4}xe^{4x}-\frac{1}{16}e^{4x}+C$$

8 여러 가지 적분법

이때, $f\left(\frac{1}{4}\right)=1$에서 $\frac{1}{16}e-\frac{1}{16}e+C=1$ $\therefore C=1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}xe^{4x}-\frac{1}{16}e^{4x}+1$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because e^{4x}>0$)

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)$의 최솟값은

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

$f(0)=-\frac{1}{16}+1=\frac{15}{16}$

답 ⑤

0979

$f(x)+xf'(x)=\{xf(x)\}'$이므로 조건 (나)에서

$xf(x)=\int\{f(x)+xf'(x)\}\,dx=\int 2\ln x\,dx$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=2$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=2x$이므로

$$xf(x)=\int 2\ln x\,dx=\ln x\times 2x-\int\frac{1}{x}\times 2x\,dx$$
$$=2x\ln x-2x+C$$

조건 (가)에서 $f(e)=1$이므로

$ef(e)=2e-2e+C$ $\therefore C=e$

따라서 $xf(x)=2x\ln x-2x+e$이므로 $x=e^2$을 대입하면

$e^2f(e^2)=4e^2-2e^2+e=2e^2+e$에서

$f(e^2)=2+\frac{1}{e}$

답 ④

0980

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$f'(x)=\frac{x(1+\cos 2x)}{2}$

$$\therefore f(x)=\int\frac{x(1+\cos 2x)}{2}\,dx=\int\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x\cos 2x\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx \quad\cdots\cdots ㉠$$

$\int x\cos 2x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos 2x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$이므로

$$\int x\cos 2x\,dx=x\times\frac{1}{2}\sin 2x-\int\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C_1 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C_1\right)$$
$$=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$$

$\frac{1}{2}C_1=C$

이때, $f(0)=\frac{1}{4}$에서 $\frac{1}{8}+C=\frac{1}{4}$ $\therefore C=\frac{1}{8}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{1}{8}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{\pi^2}{16}$

답 ①

0981

|전략| 부분적분법을 한 번 적용하여 적분이 되지 않는 경우에는 부분적분법을 한 번 더 적용한다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $e^x\cos x$이므로

$f'(x)=e^x\cos x$

$f(x)=\int e^x\cos x\,dx$에서 $u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x$, $v(x)=e^x$이므로

$$f(x)=\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx \quad\cdots\cdots ㉠$$

$\int e^x\sin x\,dx$에서 부분적분법을 한 번 더 적용하면

$$\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$$
$$=e^x\sin x-f(x)+C_1 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=e^x\cos x+e^x\sin x-f(x)+C_1$

$2f(x)=e^x(\cos x+\sin x)+C_1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$

$\frac{1}{2}C_1=C$

이때, y절편이 $\frac{1}{2}$이므로 $f(0)=\frac{1}{2}$에서

$\frac{1}{2}(1+0)+C=\frac{1}{2}$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)$이므로 $f(\pi)=-\frac{1}{2}e^{\pi}$

답 ②

0982

$f(x)=\int(4-x^2)e^x\,dx$에서 $u(x)=4-x^2$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-2x$, $v(x)=e^x$이므로

$$f(x)=\int(4-x^2)e^x dx=(4-x^2)e^x-\int(-2x)e^x dx$$
$$=(4-x^2)e^x+2\int xe^x dx \quad\cdots\cdots ㉠$$

$\int xe^x dx$에서 부분적분법을 한 번 더 적용하면

$$\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C_1 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=(4-x^2)e^x+2(xe^x-e^x+C_1)$$
$$=e^x(-x^2+2x+2)+C$$

$2C_1=C$

이때, $f(0)=2$에서 $2+C=2$ $\therefore C=0$

$\therefore f(x)=e^x(-x^2+2x+2)$

방정식 $f(x)=0$에서 $x^2-2x-2=0$ ($\because e^x>0$)

따라서 구하는 두 실근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -2이다.

답 -2

0983

$\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)-\{f(x-2h)-f(x)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\times2+\lim_{h\to0}\frac{f(x-2h)-f(x)}{-2h}\times2$

$=2f'(x)+2f'(x)=4f'(x)$

즉, $4f'(x)=4(\ln x)^2$이므로 $f'(x)=(\ln x)^2$

$f(x)=\int(\ln x)^2dx$에서 $u(x)=(\ln x)^2$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{2\ln x}{x}$, $v(x)=x$이므로

$f(x)=\int(\ln x)^2dx=(\ln x)^2\times x-\int\frac{2\ln x}{x}\times x\,dx$

$=x(\ln x)^2-2\int\ln x\,dx$ ……㉠

$\int\ln x\,dx$에서 부분적분법을 한 번 더 적용하면

$\int\ln x\,dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C_1$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=x(\ln x)^2-2(x\ln x-x+C_1)$

$=x\{(\ln x)^2-2\ln x+2\}+C$ ← $-2C_1=C$

이때, $f(e^3)=5e^3+1$에서 $5e^3+C=5e^3+1$ $\therefore C=1$

따라서 $f(x)=x\{(\ln x)^2-2\ln x+2\}+1$이므로

$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{5}{e}+1$ 답 ⑤

0984

| 전략 | 주어진 식의 양변을 미분하여 $f'(x)$를 구한 다음 부분적분법을 이용한다.

$F(x)=xf(x)-x^2e^x$에서

$F(1)=f(1)-e=e$ $\therefore f(1)=2e$ ……㉠

$F(x)=xf(x)-x^2e^x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-(2xe^x+x^2e^x)$

$xf'(x)=2xe^x+x^2e^x$ $\therefore f'(x)=2e^x+xe^x$

$\therefore f(x)=\int(2e^x+xe^x)dx$

$=2e^x+\int xe^xdx$

$=2e^x+xe^x-\int e^xdx$

$\int xe^xdx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면
$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$
$\therefore \int xe^xdx=xe^x-\int e^xdx$

$=(x+1)e^x+C$

이때, ㉠에서 $f(1)=2e$이므로 $2e+C=2e$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=(x+1)e^x$이므로 $f(0)=1$ 답 ①

0985

$\int f(x)dx=xf(x)-x^3\ln x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-\left(3x^2\ln x+x^3\times\frac{1}{x}\right)$

$xf'(x)=3x^2\ln x+x^2$ $\therefore f'(x)=3x\ln x+x$

$\therefore f(x)=\int(3x\ln x+x)dx$

$=3\int x\ln x\,dx+\frac{1}{2}x^2$

$=3\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x\,dx\right)+\frac{1}{2}x^2$

$\int x\ln x\,dx$에서
$u(x)=\ln x$, $v'(x)=x$로 놓으면
$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=\frac{1}{2}x^2$
$\therefore \int x\ln x\,dx$
$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x\,dx$

$=\frac{3}{2}x^2\ln x-3\times\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2+C$

$=\frac{3}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$

이때, $f(e)=\frac{5}{4}e^2+\frac{3}{4}$에서

$\frac{3}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2+C=\frac{5}{4}e^2+\frac{3}{4}$ $\therefore C=\frac{3}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}$이므로

$f(1)=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$ 답 ①

0986

$g(x)=e^xf(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)=e^x\{f(x)+f'(x)\}$

$=e^x\times xe^x=xe^{2x}$

$g(x)=\int xe^{2x}dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$이므로

$g(x)=\frac{1}{2}xe^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$

이때, $g(1)=\frac{1}{4}e^2$에서 $\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2+C=\frac{1}{4}e^2$ $\therefore C=0$

따라서 $g(x)=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}$이므로 $g(0)=-\frac{1}{4}$ 답 ②

STEP 3 내신 마스터

0987

유형 01 함수 $y=x^n$(n은 실수)의 부정적분

| 전략 | $\int x^ndx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\,(n\neq-1)$임을 이용한다.

$f(x)=\int\left(\frac{x}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)dx$

$=\int\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}dx=\int(\sqrt{x}+1)dx$

$=\int(x^{\frac{1}{2}}+1)dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$

8 여러 가지 적분법

이때, $f(1)=\frac{2}{3}$에서 $\frac{2}{3}+1+C=\frac{2}{3}$ $\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x-1$이므로

$f(9)=18+9-1=26$ 답 ④

0988

유형 02 지수함수의 부정적분 – 밑이 e인 경우

|전략| $\int e^x dx=e^x+C$임을 이용한다.

$$f(x)=\int \frac{(e^x-1)(e^{2x}+e^x+1)}{e^{2x}+e^x+1}dx$$
$$=\int (e^x-1)dx=e^x-x+C$$

이때, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 2)$를 지나므로 $f(0)=2$에서

$1+C=2$ $\therefore C=1$

$\therefore f(x)=e^x-x+1$ 답 ③

0989

유형 04 삼각함수의 부정적분

|전략| $\int \sin x\,dx=-\cos x+C_1$, $\int \cos x\,dx=\sin x+C_2$임을 이용한다.

$f'(x)=\begin{cases} \cos x & (x>0) \\ \sin x+1 & (x<0) \end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} \sin x+C_1 & (x>0) \\ -\cos x+x+C_2 & (x<0) \end{cases}$$

$f(-\pi)=1$에서 $1-\pi+C_2=1$ $\therefore C_2=\pi$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)=\lim_{x\to 0-}(-\cos x+x+\pi)=\lim_{x\to 0+}(\sin x+C_1)$

$\therefore C_1=\pi-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases} \sin x+\pi-1 & (x\geq 0) \\ -\cos x+x+\pi & (x<0) \end{cases}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\pi-1=\pi$ 답 ⑤

0990

유형 05 다항함수의 치환적분법

|전략| $x^3+2=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$x^3+2=t$로 놓으면 $3x^2=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int 3x^2(x^3+2)^3dx=\int t^3dt=\frac{1}{4}t^4+C$$
$$=\frac{1}{4}(x^3+2)^4+C$$

따라서 $a=4$, $b=4$이므로 $ab=16$ 답 ④

0991

유형 06 무리함수의 치환적분법

|전략| $1-x^2=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$1-x^2=t$로 놓으면 $-2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt$$
$$=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=-t^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=-\sqrt{1-x^2}+C$$

이때, $f(0)=0$에서 $-1+C=0$ $\therefore C=1$

$\therefore f(x)=-\sqrt{1-x^2}+1$

방정식 $f(x)=1$, 즉 $-\sqrt{1-x^2}+1=1$에서

$1-x^2=0$, $(1+x)(1-x)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은 0이다. 답 ③

0992

유형 07 지수함수의 치환적분법

|전략| $x^2-1=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$x^2-1=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int 2xe^{x^2-1}dx=\int e^t dt$$
$$=e^t+C=e^{x^2-1}+C$$

$\therefore f(\sqrt{2})-f(1)=(e+C)-(1+C)=e-1$ 답 ②

0993

유형 08 로그함수의 치환적분법

|전략| 주어진 식의 양변을 미분하여 $f'(x)$를 구한 다음 $\ln x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$F(x)=xf(x)-4x\ln x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-4\ln x-4$

$xf'(x)=4\ln x+4$ $\therefore f'(x)=\frac{4\ln x+4}{x}$

$f(x)=\int \frac{4\ln x+4}{x}dx$에서 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int \frac{4\ln x+4}{x}dx=\int (4t+4)dt$$
$$=2t^2+4t+C=2(\ln x)^2+4\ln x+C$$

이때, $f(e)=8$에서 $2+4+C=8$ $\therefore C=2$

$\therefore f(x)=2(\ln x)^2+4\ln x+2$

한편, $\ln x=t$로 놓고 $g(t)=2t^2+4t+2=2(t+1)^2$이라 하면 t는 모든 실수$(\because x>0)$이므로 구하는 최솟값은 $t=-1$일 때 0이다.

답 ①

0994

유형 09 삼각함수의 치환적분법

|전략| $1+\sin x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$1+\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int(1+\sin x)^2\cos x\,dx=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C$

$\quad=\frac{1}{3}(1+\sin x)^3+C$

이때, $f(0)=\frac{2}{3}$이므로 $\frac{1}{3}+C=\frac{2}{3}\qquad \therefore C=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(1+\sin x)^3+\frac{1}{3}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}(1+1)^3+\frac{1}{3}=3\qquad \therefore a=3$

답 ⑤

0995

유형 10 삼각함수의 치환적분법 – $\sin ax$, $\cos ax$ 꼴

|전략| $\int\sin ax\,dx=-\frac{1}{a}\cos ax+C$임을 이용한다.

$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$f'(x)=\sin 2x-\cos x$

$\therefore f(x)=\int(\sin 2x-\cos x)dx=-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x+C$

$f'(x)=\sin 2x-\cos x=2\sin x\cos x-\cos x$

$\quad=(2\sin x-1)\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because 0<x<\pi$)

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극댓값을 갖고, 극댓값이 $\frac{7}{2}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}-1+C=\frac{7}{2}\qquad \therefore C=4$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x+4$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=4-\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ③

0996

유형 11 분수함수의 부정적분 – $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 꼴인 경우

|전략| $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$임을 이용한다.

$(x^2+3x+1)'=2x+3$이므로

$f(x)=\int\frac{2x+3}{x^2+3x+1}dx=\int\frac{(x^2+3x+1)'}{x^2+3x+1}dx$

$\quad=\ln|x^2+3x+1|+C$

$\therefore f(1)-f(-1)=(\ln 5+C)-C=\ln 5$

답 ④

0997

유형 08 로그함수의 치환적분법 + 13 부분적분법

|전략| $\ln x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한 다음 부분적분법을 이용한다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $\frac{\ln x}{x^2}$이므로

$f'(x)=\frac{\ln x}{x^2}$

$f(x)=\int\frac{\ln x}{x^2}dx$에서 $\ln x=t$로 놓으면 $x=e^t$이고 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\int\frac{t}{e^t}dt=\int te^{-t}dt$

$u(t)=t,\ v'(t)=e^{-t}$으로 놓으면
$u'(t)=1,\ v(t)=-e^{-t}$

$\quad=t\times(-e^{-t})-\int(-e^{-t})dt$

$\quad=-te^{-t}-e^{-t}+C$

$\quad=-e^{-\ln x}\ln x-e^{-\ln x}+C$

$\quad=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$

이때, x절편이 1이므로 $f(1)=0$에서

$-1+C=0\qquad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+1$이므로

$f\left(\frac{1}{e}\right)=e-e+1=1$

답 ③

0998

유형 03 지수함수의 부정적분 – 밑이 e가 아닌 경우

|전략| $\int a^xdx=\frac{a^x}{\ln a}+C\,(a>0, a\neq1)$임을 이용한다.

$f(x)=\int\frac{8^x-1}{2^x-1}dx=\int\frac{(2^x-1)(4^x+2^x+1)}{2^x-1}dx$

$\quad=\int(4^x+2^x+1)dx=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$ … ❶

이때, $f(0)=\frac{1}{\ln 2}$에서

$\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 2}+C=\frac{1}{\ln 2}\qquad \therefore C=-\frac{1}{\ln 4}$

따라서 $f(x)=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2^x}{\ln 2}+x-\frac{1}{\ln 4}$이므로 … ❷

$f(1)=\frac{4}{\ln 4}+\frac{2}{\ln 2}+1-\frac{1}{\ln 4}$

$\quad=\frac{4}{\ln 4}+\frac{4}{\ln 4}+1-\frac{1}{\ln 4}$

$\quad=\frac{7}{\ln 4}+1$ … ❸

답 $\frac{7}{\ln 4}+1$

채점 기준	배점
❶ $f'(x)=\frac{8^x-1}{2^x-1}$의 부정적분을 구할 수 있다.	2점
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	2점
❸ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	2점

0999

유형 15 부분적분법의 응용

|전략| 주어진 식의 양변을 미분하여 $f'(x)$를 구한 다음 부분적분법을 이용한다.

$F(x)=xf(x)+3x^2e^{2x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+6xe^{2x}+6x^2e^{2x}$

$xf'(x)=-6xe^{2x}-6x^2e^{2x}$ $\quad \therefore f'(x)=-6e^{2x}-6xe^{2x}$ $\quad$ ⋯ ❶

$$\therefore f(x)=-6\int(e^{2x}+xe^{2x})dx$$

$$=-3e^{2x}-6\int xe^{2x}dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int xe^{2x}dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$이므로

$$\int xe^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=-3e^{2x}-6\left(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C_1\right)$$

$-6C_1=C$

$$=-3e^{2x}-3xe^{2x}+\frac{3}{2}e^{2x}+C$$

$$=-\frac{3}{2}e^{2x}-3xe^{2x}+C \quad \cdots ❷$$

이때, $f(0)=-\frac{3}{2}$에서 $-\frac{3}{2}+C=-\frac{3}{2}$ $\quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{3}{2}e^{2x}-3xe^{2x}$이므로 $\quad$ ⋯ ❸

$f(1)=-\frac{3}{2}e^2-3e^2=-\frac{9}{2}e^2$ $\quad \therefore a=-\frac{9}{2}e^2$ $\quad$ ⋯ ❹

답 $-\frac{9}{2}e^2$

채점 기준	배점
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	2점
❷ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	2점
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	2점
❹ a의 값을 구할 수 있다.	1점

1000

유형 07 지수함수의 치환적분법 + 09 삼각함수의 치환적분법

|전략| $\sin x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

(1) $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=\{f(x)g(x)\}'$이므로

$$f(x)g(x)=\int\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx$$

$$=\int h(x)dx=\int e^{\sin x}\cos x\,dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)g(x)=\int e^t dt=e^t+C=e^{\sin x}+C$$

(2) $f(x)=e^x$이므로 $f(x)g(x)=e^{\sin x}+C$에서

$e^xg(x)=e^{\sin x}+C$

$g(0)=2$에서 $2=1+C$ $\quad \therefore C=1$

(3) $e^xg(x)=e^{\sin x}+1$이므로 $g(x)=\frac{e^{\sin x}+1}{e^x}$

답 (1) $f(x)g(x)=e^{\sin x}+C$ (2) 1 (3) $g(x)=\frac{e^{\sin x}+1}{e^x}$

채점 기준	배점
(1) $\{f(x)g(x)\}'$의 부정적분을 구할 수 있다.	5점
(2) 적분상수 C를 구할 수 있다.	4점
(3) $g(x)$를 구할 수 있다.	3점

창의·융합 교과서 속 심화문제

1001

|전략| 치환을 이용하여 주어진 식을 간단히 한 뒤 몫의 미분법의 형태가 되도록 식을 변형한다.

$x^2=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int\frac{x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x^2e^{x^2}}{(x^2+1)^2}\times 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{te^t}{(t+1)^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{e^t(t+1)-e^t}{(t+1)^2}dt$$

몫의 미분법에 의하여 $\left(\frac{e^t}{t+1}\right)'=\frac{e^t(t+1)-e^t}{(t+1)^2}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{e^t}{t+1}+C$$

$$=\frac{e^{x^2}}{2(x^2+1)}+C$$

이때, $f(0)=\frac{1}{2}$에서 $\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2}$ $\quad \therefore C=0$

$$\therefore f(x)=\frac{e^{x^2}}{2(x^2+1)}$$

$f(x)=k$에서 $\frac{e^{x^2}}{2(x^2+1)}=k$, $e^{x^2}=2k(x^2+1)$

$x^2=a$라 하면 $e^a=2k(a+1)\,(a\geq 0)$ $\quad$ ⋯⋯ ㉠

이때, ㉠을 만족시키는 a가 양수이면 $x=\pm\sqrt{a}$로 그 개수가 2가 되므로 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되려면 $a=0$이어야 한다.

따라서 ㉠에 $a=0$을 대입하면

$1=2k$ $\quad \therefore k=\frac{1}{2}$

답 ①

1002

|전략| $\ln x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$x>1>0$이므로

$$f(x)=\int\frac{a}{x}\cos(\ln x^b)\,dx=\int\frac{a}{x}\cos(b\ln x)dx$$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int \frac{a}{x}\cos(b\ln x)dx=\int a\cos bt\,dt$

$=\frac{a}{b}\sin bt+C=\frac{a}{b}\sin(b\ln x)+C$

이때, 조건 ㈎에서 $f(1)=2$이므로 $C=2$

$\therefore f(x)=\frac{a}{b}\sin(b\ln x)+2$

$x>1$, $b>0$이므로 $-1\le\sin(b\ln x)\le 1$

$a>0$, $b>0$이므로 $-\frac{a}{b}\le\frac{a}{b}\sin(b\ln x)\le\frac{a}{b}$

$-\frac{a}{b}+2\le\frac{a}{b}\sin(b\ln x)+2\le\frac{a}{b}+2$

조건 ㈏에서 $f(x)$의 최댓값이 4이므로

$\frac{a}{b}+2=4$, $\frac{a}{b}=2$ $\quad\therefore a=2b$

$\therefore f(x)=2\sin(b\ln x)+2$

$f(x)=0$에서 $2\sin(b\ln x)+2=0$, $\sin(b\ln x)=-1$

$b\ln x>0$이고 $y=b\ln x$는 $x>1$에서 증가하므로 방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 실근 중 최솟값은 $b\ln x=\frac{3}{2}\pi$일 때이다.

이때, 조건 ㈐에서 $f(x)=0$의 실근 중 최솟값이 $e^{\frac{\pi}{2}}$이므로 $b=3$

$\therefore f(x)=2\sin(3\ln x)+2$

따라서 방정식 $f(x)=4$에서 $2\sin(3\ln x)+2=4$, 즉 $\sin(3\ln x)=1$이고 이 식을 만족시키는 실근 중 최솟값은

$3\ln x=\frac{\pi}{2}$에서 $\ln x=\frac{\pi}{6}$ $\quad\therefore x=e^{\frac{\pi}{6}}$

답 ③

1003

|전략| 첫 번째 식의 경우 곱의 미분법의 형태로 변형하고 두 번째 식의 경우 몫의 미분법의 형태로 변형한다.

$x>0$이므로 $\frac{f(x)}{x}+f'(x)=1+\ln x^2$의 양변에 x를 곱하면

$f(x)+xf'(x)=x+2x\ln x$, $\{xf(x)\}'=(x^2\ln x)'$

$\therefore xf(x)=\int(x^2\ln x)'dx=x^2\ln x+C_1$

이때, $f(1)=1$이므로 $C_1=1$

$\therefore f(x)=x\ln x+\frac{1}{x}$

$x>0$이므로 $\frac{g(x)}{x}-g'(x)=1-\ln x$의 양변을 $-x$로 나누면

$\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}=-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$, $\left\{\frac{g(x)}{x}\right\}'=-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$

$\therefore \frac{g(x)}{x}=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)dx$

$=-\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{\ln x}{x}dx$

$\int\frac{\ln x}{x}dx$에서 $\ln x=t$로 놓으면
$\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로
$\int\frac{\ln x}{x}dx=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C$
$=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$

$=-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2+C_2$

이때, $g(1)=1$이므로 $C_2=1$

$\therefore g(x)=-x\ln x+\frac{x}{2}(\ln x)^2+x$

$\therefore \int\frac{f(x)+g(x)}{x^2}dx$

$=\int\frac{1}{x^2}\left\{\frac{x}{2}(\ln x)^2+x+\frac{1}{x}\right\}dx$

$=\int\left\{\frac{1}{2x}(\ln x)^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right\}dx$

$=\int\frac{1}{2x}(\ln x)^2dx+\int\frac{1}{x}dx+\int x^{-3}dx$

$\int\frac{1}{2x}(\ln x)^2dx$에서
$\ln x=t$로 놓으면
$\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로
$\int\frac{1}{2x}(\ln x)^2dx=\frac{1}{2}\int t^2dt$

$=\frac{1}{2}\int t^2dt+\ln x-\frac{1}{2}x^{-2}+C$

$=\frac{1}{6}t^3+\ln x-\frac{1}{2x^2}+C$

$=\frac{1}{6}(\ln x)^3+\ln x-\frac{1}{2x^2}+C$ $\quad$ 답 $\frac{1}{6}(\ln x)^3+\ln x-\frac{1}{2x^2}+C$

1004

|전략| 조건 ㈐의 식을 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 꼴로 변형하여 부정적분을 구한다.

조건 ㈐에서 $\frac{f'(x)}{f(x)+e}=2$이므로

$\int\frac{f'(x)}{f(x)+e}dx=\int 2dx$ $\quad\therefore \ln|f(x)+e|=2x+C_1$

이때, 조건 ㈏에서 $f(x)+e>0$이므로

$\ln\{f(x)+e\}=2x+C_1$, $f(x)+e=e^{2x+C_1}$

$\therefore f(x)=e^{2x+C_1}-e$

조건 ㈎에서 $f(0)=0$이므로

$e^{C_1}-e=0$, $e^{C_1}=e$ $\quad\therefore C_1=1$

따라서 $f(x)=e^{2x+1}-e$이므로

$g(x)=\int xf(x)\,dx=\int x(e^{2x+1}-e)dx$

$=\int xe^{2x+1}dx-e\int x\,dx$

$u(x)=x$, $v'(x)=e^{2x+1}$로 놓으면
$u'(x)=1$, $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x+1}$

$=\frac{1}{2}xe^{2x+1}-\int\frac{1}{2}e^{2x+1}dx-\frac{e}{2}x^2$

$=\frac{1}{2}xe^{2x+1}-\frac{1}{4}e^{2x+1}-\frac{e}{2}x^2+C_2$

$=\frac{1}{4}e^{2x+1}(2x-1)-\frac{e}{2}x^2+C_2$

$\therefore g(1)-g(-1)$

$=\left(\frac{1}{4}e^3-\frac{e}{2}+C_2\right)-\left(-\frac{3}{4}e^{-1}-\frac{e}{2}+C_2\right)$

$=\frac{1}{4}e^3+\frac{3}{4}e^{-1}$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{3}{4}$이므로 $a+b=1$

답 ①

9 | 정적분

본책 158~175쪽

STEP 1 개념 마스터

1005

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx=\int_0^8 x^{\frac{1}{3}}\,dx=\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^8=12$$

답 12

1006

$$\int_1^4 x\sqrt{x}\,dx=\int_1^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx=\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_1^4$$
$$=\frac{64}{5}-\frac{2}{5}=\frac{62}{5}$$

답 $\frac{62}{5}$

1007

$$\int_1^3 \frac{1}{x^3}\,dx=\int_1^3 x^{-3}\,dx=\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_1^3$$
$$=-\frac{1}{18}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{9}$$

답 $\frac{4}{9}$

1008

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\,dx=\Big[\ln|x|\Big]_e^{e^2}=\ln e^2-\ln e=1$$

답 1

1009

$$\int_0^3 e^{4x}\,dx=\left[\frac{1}{4}e^{4x}\right]_0^3=\frac{1}{4}e^{12}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(e^{12}-1)$$

답 $\frac{1}{4}(e^{12}-1)$

1010

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$$

답 1

1011

위끝과 아래끝이 같으므로

$$\int_\pi^\pi \sec^2 x\,dx=0$$

답 0

1012

$$\int_1^0 2^x\,dx=-\int_0^1 2^x\,dx=-\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1$$
$$=-\left(\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}\right)=-\frac{1}{\ln 2}$$

답 $-\frac{1}{\ln 2}$

1013

$$\int_0^1 (\sqrt{x}+1)\,dx+\int_0^1 (\sqrt{x}-1)\,dx$$
$$=\int_0^1 \{(\sqrt{x}+1)+(\sqrt{x}-1)\}\,dx=\int_0^1 2\sqrt{x}\,dx$$
$$=2\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

1014

$$\int_0^2 (e^x+1)\,dx+\int_0^2 (e^x-1)\,dx$$
$$=\int_0^2 \{(e^x+1)+(e^x-1)\}\,dx=\int_0^2 2e^x\,dx$$
$$=2\int_0^2 e^x\,dx=2\Big[e^x\Big]_0^2=2(e^2-1)$$

답 $2(e^2-1)$

1015

$$\int_0^5 \sqrt{x}\,dx+\int_5^9 \sqrt{x}\,dx=\int_0^9 \sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9=18$$

답 18

1016

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx-\int_\pi^{\frac{\pi}{2}} \sin 2y\,dy$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin 2x\,dx=\int_0^\pi \sin 2x\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^\pi=-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

답 0

1017

$$|\cos x|=\begin{cases}-\cos x & \left(\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3}{2}\pi\right)\\ \cos x & \left(\frac{3}{2}\pi\le x\le\frac{5}{2}\pi\right)\end{cases}$$ 이므로

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} |\cos x|\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (-\cos x)\,dx+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \cos x\,dx$$
$$=\Big[-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}+\Big[\sin x\Big]_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi}=2+2=4$$

답 4

Lecture

절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분

(i) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값을 경계로 적분 구간을 나눈다.

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$임을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

1018

$$|e^x-1|=\begin{cases}-e^x+1 & (x\le 0)\\ e^x-1 & (x\ge 0)\end{cases}$$ 이므로

$$\int_{-1}^1 |e^x-1|\,dx=\int_{-1}^0 (-e^x+1)\,dx+\int_0^1 (e^x-1)\,dx$$
$$=\Big[-e^x+x\Big]_{-1}^0+\Big[e^x-x\Big]_0^1$$
$$=\frac{1}{e}+e-2$$

답 $\frac{1}{e}+e-2$

1019

$\tan x$, $-x$는 기함수이므로

$\int_{-1}^{1}(\tan x-x)dx=0$ 답 0

1020

$\sin 2x$는 기함수, x^2은 우함수이므로

$\int_{-2}^{2}(\sin 2x+x^2)dx=2\int_{0}^{2}x^2dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{16}{3}$ 답 $\frac{16}{3}$

1021

$f(x)=e^x+e^{-x}$으로 놓으면 $f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$

따라서 $f(x)=e^x+e^{-x}$은 우함수이므로

$\int_{-4}^{4}(e^x+e^{-x})dx=2\int_{0}^{4}(e^x+e^{-x})dx=2\left[e^x-e^{-x}\right]_0^4$

$=2\left(e^4-\frac{1}{e^4}\right)$ 답 $2\left(e^4-\frac{1}{e^4}\right)$

1022

$\sin x$는 기함수, $\cos x$는 우함수이므로

$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x+\cos x)dx=2\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx=2\left[\sin x\right]_0^{\pi}=0$ 답 0

1023

$f(x+2)=f(x)$를 만족시키므로

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{3}^{5}f(x)dx=2$

$\therefore \int_{-1}^{5}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{5}f(x)dx$

$=2\times 3=6$ 답 6

1024

$2x+1=t$로 놓으면 $2=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=3$이므로

$\int_{0}^{1}(2x+1)^3dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}2(2x+1)^3dx=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}t^3dt$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}t^4\right]_1^3=\frac{1}{2}\left(\frac{81}{4}-\frac{1}{4}\right)=10$ 답 10

1025

$x+1=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=3$일 때 $t=4$이므로

$\int_{0}^{3}\sqrt{x+1}\,dx=\int_{1}^{4}\sqrt{t}\,dt=\int_{1}^{4}t^{\frac{1}{2}}dt$

$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{14}{3}$ 답 $\frac{14}{3}$

1026

$x^2-1=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=3$이므로

$\int_{1}^{2}2x(x^2-1)^2dx=\int_{0}^{3}t^2dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^3=9$ 답 9

1027

$2x^2+1=t$로 놓으면 $4x=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=9$이므로

$\int_{0}^{2}\frac{x}{2x^2+1}dx=\frac{1}{4}\int_{0}^{2}\frac{4x}{2x^2+1}dx=\frac{1}{4}\int_{1}^{9}\frac{1}{t}dt$

$=\frac{1}{4}\left[\ln|t|\right]_1^9=\frac{1}{4}\ln 9=\frac{1}{2}\ln 3$ 답 $\frac{1}{2}\ln 3$

1028

$e^x+1=t$로 놓으면 $e^x=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=2$, $x=\ln 3$일 때 $t=4$이므로

$\int_{0}^{\ln 3}\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_{2}^{4}\frac{1}{t}dt=\left[\ln|t|\right]_2^4$

$=\ln 4-\ln 2=\ln 2$ 답 $\ln 2$

1029

$x^2=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$\int_{0}^{1}xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}e^tdt$

$=\frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$ 답 $\frac{1}{2}(e-1)$

1030

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos x\,dx=\int_{0}^{1}t^3dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

1031

$x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\boxed{(가)\ \cos\theta}$

$x=0$일 때 $\theta=\boxed{(나)\ 0}$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{\boxed{(나)\ 0}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\times\boxed{(가)\ \cos\theta}\,d\theta$

$=\int_{\boxed{(나)\ 0}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$

9 정적분

이때, $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$에서 $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$이므로

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{\boxed{(나)\,0}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\boxed{(나)\,0}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[\boxed{(다)\ \theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta}\right]_{\boxed{(나)\,0}}^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{(라)\ \frac{\pi}{4}}$$

답 (가) $\cos\theta$ (나) 0 (다) $\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta$ (라) $\frac{\pi}{4}$

1032

$x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\times 2\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

1033

$x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{x^2+1}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\times\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

답 $\frac{\pi}{6}$

1034

$f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^1 xe^x\,dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=e-\Big[e^x\Big]_0^1$$
$$=e-(e-1)=1$$

답 1

1035

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$

$$\therefore \int_1^e \ln x\,dx=\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e dx=e-\Big[x\Big]_1^e$$
$$=e-(e-1)=1$$

답 1

1036

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-e^{-x}$

답 $f(x)=-e^{-x}$

1037

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{1}{x}-1$

답 $f(x)=\frac{1}{x}-1$

1038

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-\sin x+2$

답 $f(x)=-\sin x+2$

1039

(1) $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^{x}f(t)\,dt=\lim_{x\to -1}\frac{F(x)-F(-1)}{x+1}$$
$$=F'(-1)=f(-1)$$
$$=(-1)^2-1+3=3$$

(2) $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_2^{x+2}f(t)\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(x+2)-F(2)}{x}$$
$$=F'(2)=f(2)$$
$$=2^2-e^3+3=7-e^3$$

답 (1) 3 (2) $7-e^3$

STEP 2 유형 마스터

1040

|전략| $\int_a^b x^n\,dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_a^b(n\ne-1)$, $\int_a^b\frac{1}{x}\,dx=\Big[\ln|x|\Big]_a^b$임을 이용한다.

$$\int_1^2\frac{x^2-2x+1}{x^3}\,dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$$
$$=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-2x^{-2}+x^{-3}\right)dx$$
$$=\left[\ln|x|+2x^{-1}-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_1^2$$
$$=\left(\ln 2+\frac{7}{8}\right)-\frac{3}{2}=\ln 2-\frac{5}{8}$$

답 $\ln 2-\frac{5}{8}$

1041

$$\int_{-1}^1\frac{x+2}{x^2-x-6}\,dx=\int_{-1}^1\frac{x+2}{(x-3)(x+2)}\,dx$$
$$=\int_{-1}^1\frac{1}{x-3}\,dx=\Big[\ln|x-3|\Big]_{-1}^1$$
$$=\ln 2-\ln 4=-\ln 2$$

$\therefore a=2$

답 ②

1042

$$\int_2^1 \frac{1}{x(x+1)}dx+\int_1^4 \frac{1}{y(y+1)}dy+\int_4^3 \frac{1}{z(z+1)}dz$$

$$=\int_2^1 \frac{1}{x(x+1)}dx+\int_1^4 \frac{1}{x(x+1)}dx+\int_4^3 \frac{1}{x(x+1)}dx$$

$$=\int_2^4 \frac{1}{x(x+1)}dx+\int_4^3 \frac{1}{x(x+1)}dx$$

$$=\int_2^3 \frac{1}{x(x+1)}dx=\int_2^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\Big[\ln|x|-\ln|x+1|\Big]_2^3$$

$$=(\ln 3-\ln 4)-(\ln 2-\ln 3)$$

$$=2\ln 3-3\ln 2=\ln\frac{9}{8}$$

답 ③

1043

|전략| $\int_a^b x^n dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_a^b (n\neq -1)$임을 이용한다.

$$\int_0^1(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})^2dx=\int_0^1(x-2\sqrt{x}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})dx$$

$$=\int_0^1(x-2x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}})dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{12}{11}x^{\frac{11}{6}}+\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{12}{11}+\frac{3}{5}=\frac{1}{110}$$

답 ④

1044

$$\int_1^3\frac{\{f(x-1)\}^2}{f(x)}dx=\int_1^3\frac{x-1}{\sqrt{x}}dx=\int_1^3\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$=\int_1^3(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^3$$

$$=(2\sqrt{3}-2\sqrt{3})-\left(\frac{2}{3}-2\right)=\frac{4}{3}$$

답 ⑤

1045

$$\sum_{n=0}^{a}\int_n^{n+1}f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\cdots+\int_a^{a+1}f(x)dx$$

$$=\int_0^{a+1}f(x)dx=\int_0^{a+1}3\sqrt{x}\,dx$$

$$=\int_0^{a+1}3x^{\frac{1}{2}}dx=\left[2x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a+1}$$

$$=2(a+1)^{\frac{3}{2}}$$ ··· ❶

즉, $2(a+1)^{\frac{3}{2}}=54$이므로

$(a+1)^{\frac{3}{2}}=27$, $a+1=9$

$\therefore a=8$ ··· ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ $\sum_{n=0}^{a}\int_n^{n+1}f(x)dx$를 a에 대한 식으로 간단히 나타낼 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

1046

|전략| $\int_\alpha^\beta e^{kx}dx=\left[\frac{1}{k}e^{kx}\right]_\alpha^\beta$임을 이용한다.

$$\int_0^{\ln 2}\frac{e^{3x}}{e^x+1}dx-\int_{\ln 2}^0\frac{1}{e^t+1}dt$$

$$=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{3x}}{e^x+1}dx+\int_0^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx=\int_0^{\ln 2}(e^{2x}-e^x+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x\right]_0^{\ln 2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\times 4-2+\ln 2\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\ln 2+\frac{1}{2}$$

답 ⑤

1047

$$\int_{-1}^0\sqrt{e^{2x}+4e^x+4}\,dx=\int_{-1}^0\sqrt{(e^x+2)^2}\,dx$$

$$=\int_{-1}^0(e^x+2)dx\ (\because e^x+2>0)$$

$$=\Big[e^x+2x\Big]_{-1}^0$$

$$=1-(e^{-1}-2)=3-\frac{1}{e}$$

답 $3-\frac{1}{e}$

1048

$$\int_0^1(3^x+1)(9^x-3^x+1)dx=\int_0^1(27^x+1)dx$$

$$=\left[\frac{27^x}{\ln 27}+x\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{27}{\ln 27}+1\right)-\frac{1}{\ln 27}=\frac{26}{\ln 27}+1$$

따라서 $a=26$, $b=1$이므로 $a+b=27$

답 ④

1049

|전략| $\int_\alpha^\beta \sin kx\,dx=\left[-\frac{1}{k}\cos kx\right]_\alpha^\beta$임을 이용하여 주어진 정적분의 값을 a에 대한 식으로 나타낸다.

$$\int_0^a(\sin x+\cos x)^2dx-\int_0^a(\sin x-\cos x)^2dx$$

$$=\int_0^a\{(1+2\sin x\cos x)-(1-2\sin x\cos x)\}dx$$

$$=\int_0^a 4\sin x\cos x\,dx=\int_0^a 2\sin 2x\,dx$$

$$=\Big[-\cos 2x\Big]_0^a=-\cos 2a+1$$

즉, $-\cos 2a+1=\frac{1}{2}$이므로

$\cos 2a=\frac{1}{2}$, $2a=\frac{\pi}{3}$ $(\because 0<2a<\pi)$

$\therefore a=\frac{\pi}{6}$

답 ③

Lecture

배각의 공식

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

(2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

1050

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sec^2 x-1)dx$$

$$=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}$$

답 ③

1051

$$\int_\pi^{2\pi}(\cos^2 x-\sin x+2)dx-\int_{2\pi}^{\pi}(\sin^2 t-3)dt$$

$$=\int_\pi^{2\pi}(\cos^2 x-\sin x+2)dx+\int_\pi^{2\pi}(\sin^2 x-3)dx$$

$$=\int_\pi^{2\pi}(\cos^2 x+\sin^2 x-\sin x-1)dx$$

$$=\int_\pi^{2\pi}(-\sin x)dx=\Big[\cos x\Big]_\pi^{2\pi}=1-(-1)=2$$

답 2

1052

|전략| 적분 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

$$\int_{-2}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_{-2}^{0}(e^x-1)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-1)dx$$

$$=\Big[e^x-x\Big]_{-2}^{0}+\Big[\sin x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=(-1-e^{-2})+\left(1-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{e^2}-\frac{\pi}{2}$$

답 $-\frac{1}{e^2}-\frac{\pi}{2}$

1053

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{(x+2)^3} & (x\le -3)\\ e^{-x}-e^3+2 & (x\ge -3)\end{cases}\text{이므로}$$

$$f(x-2)=\begin{cases}-\dfrac{2}{x^3} & (x\le -1)\\ e^{-x+2}-e^3+2 & (x\ge -1)\end{cases}$$

$$\therefore \int_{-3}^{2}f(x-2)dx=\int_{-3}^{-1}\left(-\frac{2}{x^3}\right)dx+\int_{-1}^{2}(e^{-x+2}-e^3+2)dx$$

$$=\int_{-3}^{-1}(-2x^{-3})dx+\int_{-1}^{2}(e^{-x}\times e^2-e^3+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{x^2}\right]_{-3}^{-1}+\Big[-e^2\times e^{-x}-e^3x+2x\Big]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{8}{9}+(-2e^3+5)$$

$$=-2e^3+\frac{53}{9}$$

답 $-2e^3+\frac{53}{9}$

1054

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\sin x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}(\cos x+k)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$에서

$k=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\sin x & \left(x<\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \cos x+1 & \left(x\ge\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$이므로

$$\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos x+1)dx$$

$$=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[\sin x+x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=1+\left(\pi-1-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

답 ②

1055

|전략| $\frac{x-1}{x+1}=0$이 되게 하는 x의 값을 경계로 적분 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=\begin{cases}-\dfrac{x-1}{x+1} & (-1<x\le 1)\\ \dfrac{x-1}{x+1} & (x<-1\text{ 또는 }x\ge 1)\end{cases}\text{이므로}$$

$$\int_0^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx=\int_0^1\left(-\frac{x-1}{x+1}\right)dx+\int_1^2\frac{x-1}{x+1}dx$$

$$=\int_0^1\left(-1+\frac{2}{x+1}\right)dx+\int_1^2\left(1-\frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$=\Big[-x+2\ln|x+1|\Big]_0^1+\Big[x-2\ln|x+1|\Big]_1^2$$

$$=(-1+2\ln 2)+(1-2\ln 3+2\ln 2)$$

$$=4\ln 2-2\ln 3=\ln\frac{16}{9}$$

답 ⑤

1056

$\sqrt{x+3}-2=0$에서 $\sqrt{x+3}=2$

$x+3=4\qquad \therefore x=1$

즉, $|\sqrt{x+3}-2|=\begin{cases}-\sqrt{x+3}+2 & (-3\le x\le 1)\\ \sqrt{x+3}-2 & (x\ge 1)\end{cases}$이므로

$$\int_{-2}^{6}|\sqrt{x+3}-2|dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-\sqrt{x+3}+2)dx+\int_1^6(\sqrt{x+3}-2)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}+2x\right]_{-2}^{1}+\left[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}-2x\right]_1^6$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}=4$$

답 ④

1057

$\int_{-1}^{1}f'(x)dx=f(1)-f(-1)$이므로

$$\int_{-1}^{1}|e^x-1|dx=f(1)-f(-1)$$

$$\therefore f(1)=f(-1)+\int_{-1}^{1}|e^x-1|dx \quad \cdots ❶$$

이때, $|e^x-1|=\begin{cases}1-e^x & (x\le 0)\\ e^x-1 & (x\ge 0)\end{cases}$이므로

$$\int_{-1}^{1}|e^x-1|dx=\int_{-1}^{0}(1-e^x)dx+\int_0^1(e^x-1)dx$$

$$=\Big[x-e^x\Big]_{-1}^{0}+\Big[e^x-x\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{e}+e-2 \quad \cdots ❷$$

$\therefore f(1)=f(-1)+\frac{1}{e}+e-2=e+\frac{1}{e}$ ··· ❸

답 $e+\frac{1}{e}$

채점 기준	비율
❶ $f(1)$을 $f(-1)$과 $f'(x)$의 정적분의 합으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $\int_{-1}^{1}\|e^x-1\|dx$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1058

|전략| $f(x)=x$, $g(x)=e^x+e^{-x}$으로 놓고 (기함수)×(우함수)=(기함수)임을 이용한다.

$\int_{-1}^{1}x(e^x+e^{-x})dx$에서 $f(x)=x$, $g(x)=e^x+e^{-x}$으로 놓으면

$f(-x)=-x=-f(x)$, $g(-x)=e^{-x}+e^x=g(x)$

따라서 $f(x)$는 기함수이고 $g(x)$는 우함수이므로 $f(x)g(x)$는 기함수이다.

$\therefore \int_{-1}^{1}x(e^x+e^{-x})dx=0$ 답 ①

Lecture

우함수, 기함수의 곱

(1) (우함수)×(우함수)=(우함수)

(2) (우함수)×(기함수)=(기함수)

(3) (기함수)×(기함수)=(우함수)

1059

$f(x)=\tan(\cos x)$에서

$f(-x)=\tan\{\cos(-x)\}=\tan(\cos x)=f(x)$

따라서 $f(x)$는 우함수이므로

$\int_{-2}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{2}f(x)dx=a$

$\therefore \int_{-2}^{3}f(x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{3}f(x)dx=a+b$ 답 $a+b$

1060

$f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)$는 기함수이고,

$\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$이다.

ㄱ. $\sin f(-x)=\sin\{-f(x)\}=-\sin f(x)$이므로 $\sin f(x)$는 기함수이다.

$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin f(x)dx=0$

ㄴ. $\cos f(-x)=\cos\{-f(x)\}=\cos f(x)$이므로 $\cos f(x)$는 우함수이다.

즉, $\int_{-\pi}^{\pi}\cos f(x)dx$의 값이 항상 0인 것은 아니다.

ㄷ. $f(x)$는 기함수, $\cos x$는 우함수이므로 $f(x)\cos x$는 기함수이다.

$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\,dx=0$

따라서 정적분의 값이 항상 0인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

1061

|전략| 주기가 p인 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{a}^{a+p}f(x)dx=\int_{b}^{b+p}f(x)dx$임을 이용한다.

$f(x)=|\cos x|$로 놓으면 $f(x)$는 주기가 π인 주기함수이므로

$\int_{0}^{\pi}|\cos x|dx=\int_{\pi}^{2\pi}|\cos x|dx=\int_{2\pi}^{3\pi}|\cos x|dx$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{0}^{3\pi}|\cos x|dx&=3\int_{0}^{\pi}|\cos x|dx\\&=3\left\{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx\right\}\\&=3\Big[\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-3\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\&=3+3=6\end{aligned}$$

답 ③

1062

$f(x)=f(x+2)$에서 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{3}^{5}f(x)dx$

이때, $f(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수이다.

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-1}^{5}f(x)dx&=3\int_{-1}^{1}f(x)dx=6\int_{0}^{1}f(x)dx\\&=6\int_{0}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=3\int_{0}^{1}(e^x+e^{-x})dx\\&=3\Big[e^x-e^{-x}\Big]_{0}^{1}=3\left(e-\frac{1}{e}\right)\end{aligned}$$

$\therefore k=3$ 답 3

1063

$f(x)=|\sin x|$로 놓으면 $f(x)$는 주기가 π인 주기함수이므로

$$\int_{0}^{\pi}|\sin x|dx=\int_{\pi}^{2\pi}|\sin x|dx=\int_{2\pi}^{3\pi}|\sin x|dx=\cdots=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|dx$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{0}^{n\pi}|\sin x|dx&=n\int_{0}^{\pi}|\sin x|dx=n\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx\\&=n\Big[-\cos x\Big]_{0}^{\pi}=2n\end{aligned}$$

따라서 $a_{n+1}=a_n+2n$이므로 n 대신 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}\cancel{a_2}&=a_1+2\times1\\\cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+2\times2\\\cancel{a_4}&=\cancel{a_3}+2\times3\\&\ \vdots\\+)\ a_n&=\cancel{a_{n-1}}+2(n-1)\\\hline a_n&=a_1+2\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore a_n&=a_1+2\sum_{k=1}^{n-1}k=1+2\times\frac{(n-1)n}{2}\\&=(n-1)n+1\end{aligned}$$

$a_n\ge101$에서 $(n-1)n+1\ge101$ $\therefore (n-1)n\ge100$

이때, $9\times10=90$, $10\times11=110$이므로 구하는 자연수 n의 최솟값은 11이다. 답 ③

9 정적분

1064

|전략| $\sqrt{x-1}=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$\sqrt{x-1}=t$로 놓으면 $x=t^2+1$이고 $1=2t\dfrac{dt}{dx}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx=\int_0^1 (t^2+1)\times t\times 2t\,dt=2\int_0^1 (t^4+t^2)dt$$

$$=2\left[\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{16}{15}$$

따라서 $p=15$, $q=16$이므로 $p+q=31$ 답 31

다른 풀이 $x-1=t$로 놓으면 $1=\dfrac{dt}{dx}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx=\int_0^1 (t+1)\sqrt{t}\,dt=\int_0^1 (t\sqrt{t}+\sqrt{t})dt$$

$$=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{16}{15}$$

따라서 $p=15$, $q=16$이므로 $p+q=31$

1065

$x^2+1=t$로 놓으면 $2x=\dfrac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\sqrt{3}$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}dx=2\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}}dt=2\int_1^4 t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$=2\left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_1^4=4$$

답 ④

1066

$x^3+2=t$로 놓으면 $3x^2=\dfrac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=2$, $x=a$일 때 $t=a^3+2$이므로 ⋯ ❶

$$\int_0^a \frac{6x^2}{x^3+2}dx=2\int_2^{a^3+2}\frac{1}{t}dt=2\Big[\ln|t|\Big]_2^{a^3+2}$$

$$=2\{\ln(a^3+2)-\ln 2\}\ (\because\ a>0)$$

$$=\ln\left(\frac{a^3+2}{2}\right)^2$$ ⋯ ❷

즉, $\ln\left(\dfrac{a^3+2}{2}\right)^2=\ln 25$이고 $a>0$이므로

$\dfrac{a^3+2}{2}=5$, $a^3=8$ $\quad\therefore a=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $x^3+2=t$로 치환하고 적분 구간을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\int_0^a \frac{6x^2}{x^3+2}dx$를 a에 대한 식으로 간단히 나타낼 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

1067

|전략| $2^x+1=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$2^x+1=t$로 놓으면 $2^x\ln 2=\dfrac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=2$, $x=2$일 때 $t=5$이므로

$$\int_0^2 \frac{2^x\ln 2}{2^x+1}dx=\int_2^5 \frac{1}{t}dt=\Big[\ln|t|\Big]_2^5$$

$$=\ln 5-\ln 2=\ln\frac{5}{2}$$

답 ②

1068

$$\int_0^{\sqrt{2}}(x+1)^2e^{x^2}dx-\int_0^{\sqrt{2}}(x-1)^2e^{x^2}dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\{(x+1)^2-(x-1)^2\}e^{x^2}dx=\int_0^{\sqrt{2}}4xe^{x^2}dx$$

이때, $x^2=t$로 놓으면 $2x=\dfrac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{2}$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^{\sqrt{2}}4xe^{x^2}dx=2\int_0^2 e^t\,dt=2\Big[e^t\Big]_0^2=2(e^2-1)$$

답 ④

1069

$$\int_0^{\ln 2}\frac{(e^x+1)(2e^{2x}-e^x)}{e^{3x}+1}dx=\int_0^{\ln 2}\frac{(e^x+1)(2e^x-1)e^x}{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}\frac{(2e^x-1)e^x}{e^{2x}-e^x+1}dx$$

이때, $e^x=t$로 놓으면 $e^x=\dfrac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\ln 2$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^{\ln 2}\frac{(2e^x-1)e^x}{e^{2x}-e^x+1}dx=\int_1^2\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt$$

$\int_1^2 \frac{f'(t)}{f(t)}dt=\Big[\ln|f(t)|\Big]_1^2$

$$=\Big[\ln|t^2-t+1|\Big]_1^2$$

$$=\ln 3$$

답 ②

1070

|전략| $\ln x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e^4$일 때 $t=4$이므로

$$\int_e^{e^4}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx=\int_1^4\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int_1^4 t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$=\left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_1^4=2$$

답 ②

1071

$\ln x-1=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$

$x=1$일 때 $t=-1$, $x=e^2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^{e^2}\frac{1}{x(\ln x-1)^2}dx=\int_{-1}^1\frac{1}{t^2}dt=\int_{-1}^1 t^{-2}dt$$

$$=\Big[-t^{-1}\Big]_{-1}^1=-2$$

답 ①

1072

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로 ··· ❶

$a_n=\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx=\int_0^1 t^n dt=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$ ··· ❷

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$$ ··· ❸

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\ln x=t$로 치환하고 적분 구간을 구할 수 있다.	30 %
❷ a_n을 n에 대한 식으로 간단히 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

1073

|전략| $\sin x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

이때, $\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx=\int_0^1(1-t^2)dt$

$=\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$

답 ②

1074

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+1)\sin 2x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+1)\times 2\sin x\cos x\,dx$

이때, $\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+1)\times 2\sin x\cos x\,dx=\int_0^1(t+1)\times 2t\,dt$

$=\int_0^1(2t^2+2t)dt$

$=\left[\frac{2}{3}t^3+t^2\right]_0^1=\frac{5}{3}$

답 ⑤

1075

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}x^2\tan x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x^2+1)\tan x\,dx$

$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}x^2\tan x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\tan x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}x^2\tan x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

x^2은 우함수, $\tan x$는 기함수이므로
$x^2\tan x$는 기함수이다.

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$

이때, $\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{t}dt=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{1}{t}dt$

$=\Big[\ln|t|\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}=-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\ln\sqrt{2}$

답 ④

1076

|전략| $x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=2$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\times 2\cos\theta\,d\theta$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$

이때, $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$에서 $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$이므로

$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$

$=\frac{4}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$

답 π

1077

$9x-x^2=9-(9-9x+x^2)=9-(3-x)^2$이므로

$\int_0^3\sqrt{9x-x^2}\,dx=\int_0^3\sqrt{9-(3-x)^2}\,dx$

이때, $3-x=3\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $-\frac{dx}{d\theta}=3\cos\theta$

$x=0$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$, $x=3$일 때 $\theta=0$이므로

$\int_0^3\sqrt{9-(3-x)^2}\,dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{9-9\sin^2\theta}\times 3\cos\theta\,d\theta$

$=-9\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2\theta\,d\theta=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$

이때, $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$에서 $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$이므로

$9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$

$=\frac{9}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{4}\pi$

답 $\frac{9}{4}\pi$

1078

|전략| $x=3\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$x=3\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=3\sec^2\theta$

$x=-3$일 때 $\theta=-\frac{\pi}{4}$, $x=3$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3}\frac{1}{9+x^2}dx&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{9+9\tan^2\theta}\times3\sec^2\theta\,d\theta\\&=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\\&=\frac{1}{3}\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{6}$

1079

$$\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2-2x+2}dx=\int_{1}^{2}\frac{1}{(x-1)^2+1}dx$$

이때, $x-1=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$

$x=1$일 때 $\theta=0$, $x=2$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\int_{1}^{2}\frac{1}{(x-1)^2+1}dx&=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\times\sec^2\theta\,d\theta\\&=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\\&=\Big[\theta\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

1080

|전략| $x+1=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$x+1=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}\{f(x)+f(x+1)\}dx&=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x+1)dx\\&=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(t)dt\\&=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx\\&=\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{2}2^x dx\\&=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_{0}^{2}=\frac{4}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}=\frac{3}{\ln 2}\end{aligned}$$

답 ⑤

1081

$5x+3=t$로 놓으면 $5=\frac{dt}{dx}$

$x=-1$일 때 $t=-2$, $x=0$일 때 $t=3$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}f(5x+3)dx&=\int_{-2}^{3}f(t)\times\frac{1}{5}dt\\&=\frac{1}{5}\int_{-2}^{3}f(t)\,dt\\&=\frac{1}{5}\int_{-2}^{3}f(x)\,dx=\frac{k}{5}\end{aligned}$$

답 ①

1082

|전략| $f(x)=\ln x$, $g'(x)=\frac{1}{x^2}$로 놓고 부분적분법을 이용한다.

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=\frac{1}{x^2}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=-\frac{1}{x}$이므로

$$\begin{aligned}\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x^2}dx&=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_{1}^{e}-\int_{1}^{e}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx\\&=-\frac{1}{e}-\left[\frac{1}{x}\right]_{1}^{e}=-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right)\\&=1-\frac{2}{e}\end{aligned}$$

답 $1-\frac{2}{e}$

1083

$$|x|-\left|x-\frac{\pi}{2}\right|=\begin{cases}-\frac{\pi}{2} & (x\le0)\\ 2x-\frac{\pi}{2} & \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\\ \frac{\pi}{2} & \left(x\ge\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$이므로

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{\pi}\left(|x|-\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\right)\cos x\,dx\\&=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x\,dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx\end{aligned}$$

이때, $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x\,dx$에서

$u(x)=2x-\frac{\pi}{2}$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=\sin x$이므로

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x\,dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx\\&=\left[\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\,dx+\frac{\pi}{2}\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\&=\frac{\pi}{2}+2\Big[\cos x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}=-2\end{aligned}$$

답 ①

1084

$y=\ln x$에서 $x=e^y$이므로

$$\int_{1}^{2}xy\,dx+\int_{0}^{\ln 2}xy\,dy=\int_{1}^{2}x\ln x\,dx+\int_{0}^{\ln 2}ye^y\,dy$$

(i) $\int_{1}^{2}x\ln x\,dx$에서 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로

$$\begin{aligned}\int_{1}^{2}x\ln x\,dx&=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_{1}^{2}-\int_{1}^{2}\frac{1}{2}x\,dx\\&=2\ln 2-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{1}^{2}=2\ln 2-\frac{3}{4}\end{aligned}$$ ··· ❶

(ii) $\int_0^{\ln 2} ye^y dy$에서 $u(y)=y$, $v'(y)=e^y$으로 놓으면

$u'(y)=1$, $v(y)=e^y$이므로

$$\int_0^{\ln 2} ye^y dy=\Big[ye^y\Big]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2} e^y dy$$

$$=2\ln 2-\Big[e^y\Big]_0^{\ln 2}=2\ln 2-1 \quad \cdots ❷$$

(i), (ii)에서

$$\int_1^2 x\ln x dx+\int_0^{\ln 2} ye^y dy=\left(2\ln 2-\frac{3}{4}\right)+(2\ln 2-1)$$

$$=4\ln 2-\frac{7}{4} \quad \cdots ❸$$

답 $4\ln 2-\frac{7}{4}$

채점 기준	비율
❶ $\int_1^2 xy\,dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\int_0^{\ln 2} xy\,dy$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 정적분의 값을 구할 수 있다.	20 %

1085

$$\int_0^1 (e^x-3ax)^2 dx=\int_0^1 (e^{2x}-6axe^x+9a^2x^2)dx$$

$$=\int_0^1 (e^{2x}+9a^2x^2)dx-6a\int_0^1 xe^x dx$$

이때, $\int_0^1 xe^x dx$에서 $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int_0^1 (e^{2x}+9a^2x^2)dx-6a\int_0^1 xe^x dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+3a^2x^3\right]_0^1-6a\left(\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^2+3a^2-\frac{1}{2}-6a\left(e-\Big[e^x\Big]_0^1\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^2+3a^2-\frac{1}{2}-6a\{e-(e-1)\}$$

$$=3a^2-6a+\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}=3(a-1)^2+\frac{1}{2}e^2-\frac{7}{2}$$

따라서 주어진 정적분의 값이 최소가 되도록 하는 실수 a의 값은 1이다.

답 ④

1086

|전략| 부분적분법을 한 번 적용하여 적분이 되지 않는 경우에는 부분적분법을 한 번 더 적용한다.

$f(x)=\sin x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=\cos x$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x dx=\Big[e^x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx$에서 $u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx=\Big[e^x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-e^x\sin x)dx$$

$$=-1+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x dx=e^{\frac{\pi}{2}}-\left(-1+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x dx\right)$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}+1-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x dx$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x dx=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}$$

답 ②

1087

$f(x)=x^2$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int_0^2 x^2e^x dx=\Big[x^2e^x\Big]_0^2-\int_0^2 2xe^x dx$$

$$=4e^2-2\int_0^2 xe^x dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^2 xe^x dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int_0^2 xe^x dx=\Big[xe^x\Big]_0^2-\int_0^2 e^x dx=2e^2-\Big[e^x\Big]_0^2$$

$$=2e^2-(e^2-1)=e^2+1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^2 x^2e^x dx=4e^2-2(e^2+1)=2e^2-2$$

따라서 $a=2$, $b=-2$이므로 $a+b=0$

답 ③

1088

|전략| $\int_1^e f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓고 k의 값을 구한다.

$$\int_1^e f(t)dt=k\ (k\text{는 상수}) \quad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓으면 $f(x)=\frac{1}{x}+k$

$f(t)=\frac{1}{t}+k$를 ㉠에 대입하면

$$\int_1^e \left(\frac{1}{t}+k\right)dt=k,\ \Big[\ln|t|+kt\Big]_1^e=k,\ (1+ek)-k=k$$

$$(2-e)k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{2-e}$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2-e}$이므로

$$\int_2^e f(x)dx=\int_2^e \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2-e}\right)dx$$

$$=\left[\ln|x|+\frac{1}{2-e}x\right]_2^e$$

$$=\left(1+\frac{e}{2-e}\right)-\left(\ln 2+\frac{2}{2-e}\right)=-\ln 2$$

답 $-\ln 2$

1089

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)\sin t\,dt = k$ (k는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓으면 $f(x)=\cos x+k$

$f(t)=\cos t+k$를 ㉠에 대입하면

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos t+k)\sin t\,dt=k,\ \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}\sin 2t+k\sin t\right)dt=k$

$\left[-\frac{1}{4}\cos 2t-k\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=k,\ \frac{3}{8}+\frac{1}{2}k=k \qquad \therefore k=\frac{3}{4}$

$f(x)=\cos x+\frac{3}{4}$이므로 $f(0)=\frac{7}{4}$

따라서 $p=4,\ q=7$이므로 $p^2+q^2=65$ 답 ④

다른 풀이 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)\sin t\,dt=k$ (k는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓으면 $f(x)=\cos x+k$

$f(t)=\cos t+k$를 ㉠에 대입하면

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos t+k)\sin t\,dt=k$

이때, $\cos t+k=l$로 놓으면 $-\sin t=\frac{dl}{dt}$

$t=0$일 때 $l=1+k$, $t=\frac{\pi}{3}$일 때 $l=\frac{1}{2}+k$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos t+k)\sin t\,dt=-\int_{1+k}^{\frac{1}{2}+k} l\,dl=\int_{\frac{1}{2}+k}^{1+k} l\,dl$$
$$=\left[\frac{1}{2}l^2\right]_{\frac{1}{2}+k}^{1+k}=\frac{1}{2}(1+k)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+k\right)^2$$
$$=\frac{k}{2}+\frac{3}{8}$$

즉, $\frac{k}{2}+\frac{3}{8}=k$이므로 $\frac{k}{2}=\frac{3}{8} \qquad \therefore k=\frac{3}{4}$

$f(x)=\cos x+\frac{3}{4}$이므로 $f(0)=\frac{7}{4}$

따라서 $p=4,\ q=7$이므로 $p^2+q^2=4^2+7^2=65$

1090

$\int_1^e tf(t)dt=k$ (k는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓으면 $f(x)=\ln x+k$

$f(t)=\ln t+k$를 ㉠에 대입하면

$\int_1^e t(\ln t+k)\,dt=k$

이때, $u(t)=\ln t+k,\ v'(t)=t$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{t},\ v(t)=\frac{1}{2}t^2$이므로

$$\int_1^e t(\ln t+k)\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2(\ln t+k)\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{t}\times\frac{1}{2}t^2\,dt$$
$$=\frac{1}{2}e^2(1+k)-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\int_1^e t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}e^2(1+k)-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{2}e^2(1+k)-\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}(e^2-1)$$
$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{2}k(e^2-1)+\frac{1}{4}$$

즉, $\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{2}k(e^2-1)+\frac{1}{4}=k$이므로

$\frac{1}{2}k(e^2-3)=-\frac{1}{4}(e^2+1) \qquad \therefore k=-\frac{e^2+1}{2(e^2-3)}$

$\therefore \int_1^e xf(x)dx=\int_1^e tf(t)dt=k=-\frac{e^2+1}{2(e^2-3)}$ 답 ②

1091

|전략| 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분한다.

$2xf(x)-x=\int_1^x\{f(t)-1\}dt$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)+2xf'(x)-1=f(x)-1$

$f(x)+2xf'(x)=0 \qquad \therefore \frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{2x}$

즉, $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\left(-\frac{1}{2x}\right)dx$이므로

$\ln f(x)=-\frac{1}{2}\ln x+C$ ($\because f(x)>0$)

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $2f(1)-1=0$에서 $f(1)=\frac{1}{2}$이므로

$C=\ln\frac{1}{2}$

따라서 $\ln f(x)=-\frac{1}{2}\ln x+\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{1}{2\sqrt{x}}$이므로

$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\therefore f(9)=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$ 답 ①

1092

$f(x)=\int_0^x\frac{2}{1+t^4}dt$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{2}{1+x^4}$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$

$\int_0^a\frac{2e^{f(x)}}{1+x^4}dx$에서 $e^{f(x)}=h$로 놓으면

$e^{f(x)}\times f'(x)=\frac{dh}{dx},\ \frac{2e^{f(x)}}{1+x^4}=\frac{dh}{dx}$

$x=0$일 때 $h=e^{f(0)}=1$, $x=a$일 때 $h=e^{f(a)}=e$이므로

$\int_0^a\frac{2e^{f(x)}}{1+x^4}dx=\int_1^e dh=\Big[h\Big]_1^e=e-1$ 답 ①

1093

$xf(x)=x^2e^x+\int_1^x f(t)dt$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2xe^x+x^2e^x+f(x)$

$\therefore f'(x)=2e^x+xe^x=(x+2)e^x$

$f(x)=\int(x+2)e^x\,dx$에서 $u(x)=x+2,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=e^x$이므로

$f(x)=\int(x+2)e^x dx=(x+2)e^x-\int e^x dx$

$=(x+2)e^x-e^x+C=(x+1)e^x+C$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=e$

즉, $2e+C=e$이므로 $C=-e$

따라서 $f(x)=(x+1)e^x-e$이므로

$f(-1)=-e$ 답 $-e$

1094

|전략| 좌변을 $\int_1^x(t+x)f(t)dt=\int_1^x tf(t)dt+x\int_1^x f(t)dt$로 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

$\int_1^x(t+x)f(t)dt=e^x+x-e-1$에서

$\int_1^x tf(t)dt+x\int_1^x f(t)dt=e^x+x-e-1$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)+\int_1^x f(t)dt+xf(x)=e^x+1$

$\therefore 2xf(x)+\int_1^x f(t)dt=e^x+1$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $2f(1)=e+1$

$\therefore f(1)=\frac{e+1}{2}$ 답 $\frac{e+1}{2}$

1095

$\int_0^x(x-t)f(t)dt=\sin x-x$에서

$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\sin x-x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\cos x-1$

$\therefore \int_0^x f(t)dt=\cos x-1$

양변을 x에 대하여 다시 미분하면 $f(x)=-\sin x$

$\therefore f(\pi)=0$ 답 ③

1096

$\int_0^x 2f(t)dt=\int_0^x(x-t)f'(t)dt-\cos 2x+1$에서

$\int_0^x 2f(t)dt=x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt-\cos 2x+1$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)=\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)+2\sin 2x$

$2f(x)=f(x)-f(0)+2\sin 2x$

$\therefore f(x)=-f(0)+2\sin 2x$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$

$\therefore f(x)=2\sin 2x$ 답 ③

1097

|전략| $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 증감표를 작성한 후 극값을 구한다.

$f(x)=\int_0^x(t+1)e^{-t}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x+1)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because e^{-x}>0$)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극소이므로 극솟값은

$f(-1)=\int_0^{-1}(t+1)e^{-t}dt=-\int_{-1}^0(t+1)e^{-t}dt$

이때, $u(t)=t+1$, $v'(t)=e^{-t}$으로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=-e^{-t}$이므로

$\int_{-1}^0(t+1)e^{-t}dt=\Big[-(t+1)e^{-t}\Big]_{-1}^0-\int_{-1}^0(-e^{-t})dt$

$=-1+\Big[-e^{-t}\Big]_{-1}^0$

$=-1+(-1+e)=e-2$

$\therefore f(-1)=-(e-2)=2-e$ 답 $2-e$

1098

$f(x)=\int_0^x(t\sqrt{t}-2t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x\sqrt{x}-2x=x(\sqrt{x}-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=4$ ($\because x>0$)

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 극소이므로 극솟값은

$f(4)=\int_0^4(t\sqrt{t}-2t)dt=\int_0^4(t^{\frac{3}{2}}-2t)dt$

$=\Big[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-t^2\Big]_0^4=-\frac{16}{5}$ 답 ②

1099

$f(x)=\int_0^x(1+\cos t)\sin t\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(1+\cos x)\sin x$

$f'(x)=0$에서 $x=\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

x	(0)	$\cdots$	π	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

함수 $f(x)$는 $x=\pi$일 때 극대이므로 극댓값은

$f(\pi)=\int_0^\pi(1+\cos t)\sin t\,dt=\int_0^\pi\left(\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)dt$

$=\Big[-\cos t-\frac{1}{4}\cos 2t\Big]_0^\pi=\frac{3}{4}-\left(-\frac{5}{4}\right)=2$ 답 ⑤

다른 풀이 함수 $f(x)$는 $x=\pi$일 때 극대이므로 극댓값은

$f(\pi)=\int_0^{\pi}(1+\cos t)\sin t\,dt$

이때, $1+\cos t=k$로 놓으면 $-\sin t=\frac{dk}{dt}$

$t=0$일 때 $k=2$, $t=\pi$일 때 $k=0$이므로

$$f(\pi)=\int_0^{\pi}(1+\cos t)\sin t\,dt=-\int_2^0 k\,dk$$
$$=\int_0^2 k\,dk=\left[\frac{1}{2}k^2\right]_0^2=2$$

1100

|전략| $\frac{d}{dx}\int_x^{x+a}g(t)dt=g(x+a)-g(x)$임을 이용한다.

$f(x)=\int_x^{x+1}\left(t+\frac{6}{t}\right)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\left(x+1+\frac{6}{x+1}\right)-\left(x+\frac{6}{x}\right)$$
$$=1+\frac{6}{x+1}-\frac{6}{x}=\frac{x^2+x-6}{x(x+1)}$$
$$=\frac{(x+3)(x-2)}{x(x+1)}$$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x>0$)

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$f(2)=\int_2^3\left(t+\frac{6}{t}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+6\ln|t|\right]_2^3$$
$$=\left(\frac{9}{2}+6\ln 3\right)-(2+6\ln 2)=\frac{5}{2}+6\ln\frac{3}{2}$$

답 $\frac{5}{2}+6\ln\frac{3}{2}$

1101

$f(x)=\int_{-2}^{x}te^{t^2-1}dt-\frac{1}{2e}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=xe^{x^2-1}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because e^{x^2-1}>0$) ··· ❶

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(0)=\int_{-2}^{0}te^{t^2-1}dt-\frac{1}{2e}$

이때, $t^2-1=s$로 놓으면 $2t=\frac{ds}{dt}$

$t=-2$일 때 $s=3$, $t=0$일 때 $s=-1$이므로

$$f(0)=\int_{-2}^{0}te^{t^2-1}dt-\frac{1}{2e}=\frac{1}{2}\int_3^{-1}e^s ds-\frac{1}{2e}$$
$$=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}e^s ds-\frac{1}{2e}=-\frac{1}{2}\left[e^s\right]_{-1}^{3}-\frac{1}{2e}$$
$$=-\frac{1}{2}\left(e^3-\frac{1}{e}\right)-\frac{1}{2e}=-\frac{e^3}{2}$$ ··· ❷

따라서 $a=0$, $b=-\frac{e^3}{2}$이므로 $a+b=-\frac{e^3}{2}$ ··· ❸

답 $-\frac{e^3}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1102

$f(x)=4\int_1^x(t-t\ln t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=4(x-x\ln x)=4x(1-\ln x)$

$f'(x)=0$에서 $x=e$ ($\because x>0$)

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=e$일 때 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$f(e)=4\int_1^e(t-t\ln t)dt=4\int_1^e t(1-\ln t)\,dt$

이때, $u(t)=1-\ln t$, $v'(t)=t$로 놓으면

$u'(t)=-\frac{1}{t}$, $v(t)=\frac{1}{2}t^2$이므로

$$\int_1^e t(1-\ln t)dt=\left[\frac{1}{2}t^2(1-\ln t)\right]_1^e-\int_1^e\left(-\frac{1}{t}\right)\times\frac{1}{2}t^2dt$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_1^e t\,dt=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^e$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}(e^2-3)$$

$$\therefore f(e)=4\int_1^e t(1-\ln t)dt$$
$$=4\times\frac{1}{4}(e^2-3)=e^2-3$$

답 ④

1103

|전략| $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a}f(t)dt=f(a)$임을 이용한다.

$f(x)=x\sin x$, $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+3h}x\sin x\,dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}+3h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}+3h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}+3h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3h}\times 3+\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-h}$$
$$=3F'\left(\frac{\pi}{2}\right)+F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=4F'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=4f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4\times\frac{\pi}{2}=2\pi$$

답 ③

1104

$f(t)=\dfrac{\cos 2t}{\sin t+1}$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\cos 2t}{\sin t+1}dt=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{F(x)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$$

$$=F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

답 $-\dfrac{1}{2}$

1105

$F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x^3}f(t)dt=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^3)-F(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^3)-F(1)}{x^3-1}\times(x^2+x+1)$$

$$=3F'(1)=3f(1)=3e$$

답 ④

STEP 3 내신 마스터

1106

유형 01 유리함수의 정적분

|전략| $\displaystyle\int_a^b\frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_a^b$, $\displaystyle\int_a^b x^n dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_a^b$ $(n\neq-1)$임을 이용한다.

$$\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left(\frac{1}{x}-2\right)dx=\Big[\ln|x|-2x\Big]_1^e$$

$$=(\ln e-2e)-(-2)=3-2e$$

답 ③

1107

유형 03 지수함수의 정적분

|전략| $\displaystyle\int_a^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx=\int_a^\beta f(x)dx$, $\displaystyle\int_a^\beta e^{kx}dx=\left[\frac{1}{k}e^{kx}\right]_a^\beta$임을 이용한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$=\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\cdots+\int_n^{n+1}f(x)dx\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_1^{n+1}f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_1^{n+1}e^{-x}dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_1^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{n+1}}+\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$$

답 ②

1108

유형 04 삼각함수의 정적분

|전략| $\displaystyle\int_a^\beta\sin ax\,dx=\left[-\frac{1}{a}\cos ax\right]_a^\beta$, $\displaystyle\int_a^\beta\cos ax\,dx=\left[\frac{1}{a}\sin ax\right]_a^\beta$임을 이용한다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=\Big[-\cos x-\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\sqrt{2}-(-1)=1-\sqrt{2}$$

답 ①

1109

유형 05 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분

|전략| 적분 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{3}f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\sin x\,dx+\int_0^3\left(\frac{1}{x+1}-1\right)dx$$

$$=\Big[-\cos x\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{0}+\Big[\ln|x+1|-x\Big]_0^3$$

$$=-\frac{1}{2}+(\ln 4-3)$$

$$=\ln 4-\frac{7}{2}$$

따라서 $a=4$, $b=-\dfrac{7}{2}$이므로 $a+b=\dfrac{1}{2}$

답 ②

1110

유형 06 절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분

|전략| $e^x-2=0$이 되게 하는 x의 값을 경계로 적분 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

$e^x-2=0$에서 $e^x=2$ $\quad\therefore x=\ln 2$

즉, $|e^x-2|=\begin{cases}2-e^x & (x\le\ln 2)\\ e^x-2 & (x\ge\ln 2)\end{cases}$이므로

$$\int_0^{\ln 4}|e^x-2|dx=\int_0^{\ln 2}(2-e^x)dx+\int_{\ln 2}^{\ln 4}(e^x-2)dx$$

$$=\Big[2x-e^x\Big]_0^{\ln 2}+\Big[e^x-2x\Big]_{\ln 2}^{\ln 4}$$

$$=(2\ln 2-1)+(2-2\ln 2)=1$$

답 ②

1111

유형 08 주기함수의 정적분

|전략| 주기가 p인 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\displaystyle\int_a^{a+p}f(x)dx=\int_b^{b+p}f(x)dx$임을 이용한다.

$f(x)=|\sin 2x|$로 놓으면 $f(x)$는 주기가 $\frac{\pi}{2}$인 주기함수이므로

$$\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}|\sin 2x|dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}|\sin 2x|dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2x|dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\sin 2x|dx$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi}|\sin 2x|dx=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2x|dx=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx$$
$$=4\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=4\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=4$$

답 ④

Lecture

삼각함수의 주기

(1) 함수 $y=a\sin bx+c$의 주기 ⇨ $\frac{2\pi}{|b|}$

(2) 함수 $y=a\cos bx+c$의 주기 ⇨ $\frac{2\pi}{|b|}$

(3) 함수 $y=a\tan bx+c$의 주기 ⇨ $\frac{\pi}{|b|}$

(4) 함수 $y=|a\sin bx|+c$의 주기 ⇨ $\frac{\pi}{|b|}$

(5) 함수 $y=|a\cos bx|+c$의 주기 ⇨ $\frac{\pi}{|b|}$

1112

유형 **10** 정적분의 치환적분법 – 지수함수

|전략| $e^x+1=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$e^x+1=t$로 놓으면 $e^x=\frac{dt}{dx}$

$x=-a$일 때 $t=e^{-a}+1$, $x=a$일 때 $t=e^a+1$이므로

$$\int_{-a}^{a}\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_{e^{-a}+1}^{e^a+1}\frac{1}{t}dt=\Big[\ln|t|\Big]_{e^{-a}+1}^{e^a+1}$$
$$=\ln(e^a+1)-\ln(e^{-a}+1)$$
$$=\ln\frac{e^a+1}{e^{-a}+1}=\ln\frac{e^a(e^a+1)}{1+e^a}$$
$$=\ln e^a=a$$

$\therefore a=9$

답 ⑤

1113

유형 **11** 정적분의 치환적분법 – 로그함수

|전략| $\ln x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e^n$일 때 $t=n$이므로

$$f(n)=\int_{e}^{e^n}\frac{\ln x}{x}dx=\int_{1}^{n}t\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{1}^{n}=\frac{n^2}{2}-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{2}-\frac{1}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

답 ③

1114

유형 **11** 정적분의 치환적분법 – 로그함수

+ **12** 정적분의 치환적분법 – 삼각함수

|전략| $\ln(x+1)=s$, $\cos x=t$로 놓고 각각 치환적분법을 이용한다.

주어진 식의 좌변에서 $\ln(x+1)=s$로 놓으면 $\frac{1}{x+1}=\frac{ds}{dx}$

$x=0$일 때 $s=0$, $x=e^2-1$일 때 $s=2$이므로

$$\int_{0}^{e^2-1}\frac{a+\ln(x+1)}{x+1}dx=\int_{0}^{2}(a+s)ds$$
$$=\left[as+\frac{1}{2}s^2\right]_{0}^{2}=2a+2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

주어진 식의 우변에서 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\cos x\,dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2 x\,dx$

이므로 $\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2 x\,dx=-2\int_{1}^{0}t^2dt=2\int_{0}^{1}t^2dt$$
$$=2\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{0}^{1}=\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots ㉡$$

따라서 ㉠=㉡에서 $2a+2=\frac{2}{3}$이므로

$2a=-\frac{4}{3}$ $\quad\therefore a=-\frac{2}{3}$

답 ②

1115

유형 **13** 삼각치환법 – $\sqrt{a^2-x^2}$ 꼴 + **14** 삼각치환법 – $\frac{1}{a^2+x^2}$ 꼴

|전략| 피적분함수가 $\sqrt{a^2-x^2}\,(a>0)$ 꼴이면 $x=a\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$, $\frac{1}{a^2+x^2}\,(a>0)$ 꼴이면 $x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 치환한다.

(i) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{4}{1+4x^2}dx$에서

$x=\frac{1}{2}\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{2}\sec^2\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\frac{1}{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{4}{1+4x^2}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{4}{1+\tan^2\theta}\times\frac{1}{2}\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta$$
$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=2\Big[\theta\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}$$

(ii) $\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx$에서

$x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\times\cos\theta\,d\theta$$
$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta}d\theta$$
$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=2\Big[\theta\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{1+4x^2}dx+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$ 답 ②

1116

유형 15 정적분의 치환적분법 – $f(px+q)$ 꼴

|전략| $\int_{-2}^{0} \frac{f(x)}{e^{-x}+1}dx$에서 $x=-t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$$\int_{-2}^{2} \frac{f(x)}{e^{-x}+1}dx=\int_{-2}^{0} \frac{f(x)}{e^{-x}+1}dx+\int_0^2 \frac{f(x)}{e^{-x}+1}dx$$

$\int_{-2}^{0} \frac{f(x)}{e^{-x}+1}dx$에서 $x=-t$로 놓으면 $1=-\frac{dt}{dx}$이고

$x=-2$일 때 $t=2$, $x=0$일 때 $t=0$이므로

$$\int_{-2}^{0} \frac{f(x)}{e^{-x}+1}dx=\int_2^0 \frac{f(-t)}{e^t+1}(-dt)$$
$$=\int_0^2 \frac{f(t)}{e^t+1}dt \ (\because f(x)=f(-x))$$
$$=\int_0^2 \frac{f(x)}{e^x+1}dx$$

$$\therefore \int_{-2}^{2} \frac{f(x)}{e^{-x}+1}dx=\int_0^2 \frac{f(x)}{e^x+1}dx+\int_0^2 \frac{f(x)}{e^{-x}+1}dx$$
$$=\int_0^2 \frac{f(x)}{e^x+1}dx+\int_0^2 \frac{e^x f(x)}{e^x+1}dx$$
$$=\int_0^2 \frac{e^x+1}{e^x+1}f(x)dx$$
$$=\int_0^2 f(x)dx=3$$ 답 ③

1117

유형 07 우함수·기함수의 정적분 + 16 정적분의 부분적분법

|전략| $x^3\cos x$, $x^2\sin 2x$, $x\sin x$가 우함수인지 기함수인지 판단하여 주어진 식을 간단히 나타낸 다음 부분적분법을 이용한다.

x^3, x, $\sin 2x$, $\sin x$는 기함수이고 x^2, $\cos x$는 우함수이므로

$x^3\cos x$, $x^2\sin 2x$는 기함수이고 $x\sin x$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3\cos x-x^2\sin 2x+x\sin x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$$

이때, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$에서 $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx=2\left(\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\right)$$
$$=2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$ 답 ②

1118

유형 19 적분 구간에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식

|전략| 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 두 번 미분한다.

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)+1$$

$$\therefore \int_0^x f(t)dt=f(x)-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f'(x)$, $\frac{f'(x)}{f(x)}=1$

즉, $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 1\,dx$이므로

$\ln f(x)=x+C$ ($\because f(x)>0$)

$\therefore f(x)=e^{x+C}$

㉠에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=1$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=e^x$이므로 $f(4)=e^4$ 답 ④

1119

유형 22 정적분으로 정의된 함수의 최대·최소

|전략| 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한 후, 극값을 이용하여 최댓값을 구한다.

$f(x)=\int_0^x (2-e^t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2-e^x$

$f'(x)=0$에서 $e^x=2$ $\quad\therefore x=\ln 2$

x	$\cdots$	$\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=\ln 2$일 때 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f(\ln 2)=\int_0^{\ln 2}(2-e^t)dt=\Big[2t-e^t\Big]_0^{\ln 2}$$
$$=(2\ln 2-2)-(-1)=2\ln 2-1$$ 답 ②

1120

유형 02 무리함수의 정적분

|전략| $n\neq-1$일 때 $\int_a^b x^n dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_a^b$임을 이용하여 $\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$를 n에 대한 식으로 나타낸다.

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx=\int_0^{\frac{1}{n}} (x+1)^{-\frac{1}{2}}dx=\Big[2\sqrt{x+1}\Big]_0^{\frac{1}{n}}$$
$$=2\sqrt{\frac{1}{n}+1}-2=2\times\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left\{(n+1)\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=1$$
$\cdots$ ❷

답 1

채점 기준	배점
❶ $\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	4점
❷ $\lim_{n\to\infty}\left\{(n+1)\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx\right\}$의 값을 구할 수 있다.	2점

9 정적분

1121

유형 09 정적분의 치환적분법 - 유리함수·무리함수

|전략| $x^3+3x+3=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$x^3+3x+3=t$로 놓으면 $3x^2+3=\dfrac{dt}{dx}$

$x=-1$일 때 $t=-1$, $x=1$일 때 $t=7$이므로 … ❶

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{x^3+3x+3}dx=\frac{1}{3}\int_{-1}^{7}\frac{1}{t}dt$

$=\dfrac{1}{3}\Big[\ln|t|\Big]_{-1}^{7}=\dfrac{1}{3}\ln 7$ … ❷

따라서 $a\ln 7=\dfrac{1}{3}\ln 7$이므로 $a=\dfrac{1}{3}$ … ❸

답 $\dfrac{1}{3}$

채점 기준	배점
❶ $x^3+3x+3=t$로 치환하고 적분 구간을 구할 수 있다.	2점
❷ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{x^3+3x+3}dx$의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ a의 값을 구할 수 있다.	1점

1122

유형 18 적분 구간이 상수인 정적분을 포함한 등식

|전략| $\displaystyle\int_1^3 f(t)dt=k$($k$는 상수)로 놓고 k의 값을 구한다.

$\displaystyle\int_1^3 f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=\ln x+k$ … ❶

$f(t)=\ln t+k$를 ㉠에 대입하면

$\displaystyle\int_1^3(\ln t+k)dt=k$

이때, $u(t)=\ln t+k$, $v'(t)=1$로 놓으면

$u'(t)=\dfrac{1}{t}$, $v(t)=t$이므로

$\displaystyle\int_1^3(\ln t+k)dt=\Big[t(\ln t+k)\Big]_1^3-\int_1^3\frac{1}{t}\times t\,dt$

$\displaystyle=3(\ln 3+k)-k-\int_1^3 dt$

$=3\ln 3+2k-\Big[t\Big]_1^3$

$=3\ln 3+2k-2$

즉, $3\ln 3+2k-2=k$이므로 $k=2-3\ln 3$ … ❷

따라서 $f(x)=\ln x+2-3\ln 3$이므로 $f(27)=2$ … ❸

답 2

채점 기준	배점
❶ $\displaystyle\int_1^3 f(t)dt=k$($k$는 상수)로 놓고 $f(x)$를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	1점
❷ k의 값을 구할 수 있다.	5점
❸ $f(27)$의 값을 구할 수 있다.	1점

1123

유형 07 우함수·기함수의 정적분

|전략| $f(x)$가 우함수이면 $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$, $f(x)$가 기함수이면 $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$임을 이용한다.

(1) $f(x)=2^x+2^{-x}$, $g(x)=7^x-7^{-x}$에서

$f(-x)=2^{-x}+2^x=f(x)$

$g(-x)=7^{-x}-7^x=-(7^x-7^{-x})=-g(x)$

이므로 $f(x)$는 우함수, $g(x)$는 기함수이다.

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(2^x+7^x+2^{-x}-7^{-x})dx=2\int_0^1(2^x+2^{-x})dx$

$=2\Big[\dfrac{2^x}{\ln 2}-\dfrac{2^{-x}}{\ln 2}\Big]_0^1$

$=2\times\dfrac{3}{2\ln 2}=\dfrac{3}{\ln 2}$

답 (1) $f(x)$: 우함수, $g(x)$: 기함수 (2) $\dfrac{3}{\ln 2}$

채점 기준	배점
(1) $f(x)=2^x+2^{-x}$, $g(x)=7^x-7^{-x}$으로 놓고 두 함수가 우함수인지 기함수인지 각각 구할 수 있다.	4점
(2) 정적분 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(2^x+7^x+2^{-x}-7^{-x})dx$의 값을 구할 수 있다.	6점

1124

유형 23 정적분으로 정의된 함수의 극한

|전략| $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a}f(t)dt=f(a)$임을 이용한다.

(1) $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h}f(t)dt$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left\{F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-h}$

$=F'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+F'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2F'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2) $\displaystyle 2f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2t(\sin t+1)dt$

$\displaystyle=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,(\sin t+1)dt$

이때, $\sin t=h$로 놓으면 $\cos t=\dfrac{dh}{dt}$

$t=-\dfrac{\pi}{2}$일 때 $h=-1$, $t=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $h=1$이므로

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t(\sin t+1)dt=2\int_{-1}^{1} h(h+1)dh$$
$$=2\int_{-1}^{1}(h^2+h)dh$$
$$=2\int_{-1}^{1} h^2 dh=4\int_{0}^{1} h^2 dh$$
$$=4\left[\frac{1}{3}h^3\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

답 (1) $2f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (2) $\frac{4}{3}$

채점 기준	배점
(1) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h} f(t)dt$를 $af(b)+c$ 꼴로 간단히 나타낼 수 있다.	6점
(2) 치환적분법을 이용하여 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h} f(t)dt$의 값을 구할 수 있다.	6점

창의·융합 교과서 속 심화문제

1125

|전략| $0\le x<1$인 경우와 $1<x\le 3$인 경우로 나누어 $f(x)$를 구한다.

(i) $0\le x<1$인 경우

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{n+1}+3x^2}{2x^n+2x+1}=\frac{3x^2}{2x+1}$$

(ii) $1<x\le 3$인 경우

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{n+1}+3x^2}{2x^n+2x+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2x+\frac{3}{x^{n-2}}}{2+\frac{2}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}}=x$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$에서

$$\lim_{x\to 1-}\frac{3x^2}{2x+1}=\lim_{x\to 1+}x=\frac{k}{3}$$

$\frac{k}{3}=1$ $\quad\therefore k=3$

$$\therefore \int_0^3 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx$$
$$=\int_0^1\frac{3x^2}{2x+1}dx+\int_1^3 x\,dx$$
$$=\int_0^1\left(\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}+\frac{3}{8x+4}\right)dx+\int_1^3 x\,dx$$
$$=\left[\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{3}{8}\ln|8x+4|\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$$
$$=\frac{3}{8}\ln 3+4$$

답 $\frac{3}{8}\ln 3+4$

1126

|전략| $0\le x<\frac{\pi}{2}$인 경우와 $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$인 경우로 나누어 $f(x)$를 구한다.

(i) $0\le x<\frac{\pi}{2}$인 경우

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin|x-t|dt$$
$$=\int_0^x\sin(x-t)dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\sin(t-x)dt$$
$$=\Big[\cos(x-t)\Big]_0^x-\Big[\cos(t-x)\Big]_x^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=(1-\cos x)-\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1\right\}$$
$$=2-\cos x-\sin x$$

(ii) $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$인 경우

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin|x-t|dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x-t)dt$$
$$=\Big[\cos(x-t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos x$$
$$=\sin x-\cos x$$

(i), (ii)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases}2-\cos x-\sin x & \left(0\le x<\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin x-\cos x & \left(\frac{\pi}{2}\le x\le\pi\right)\end{cases}$$

$$\therefore \int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx$$
$$=\Big[2x-\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=(\pi-2)+2=\pi$$

답 π

1127

|전략| $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos^2x\,dx$에서 $x=\frac{\pi}{2}-t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos^2x\,dx$에서 $x=\frac{\pi}{2}-t$로 놓으면 $1=-\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos^2x\,dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin^2t\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin^2t\,dt\quad\left(\because f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin^2x\,dx=10$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)(\sin^2x+\cos^2x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin^2x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos^2x\,dx$$
$$=10+10=20$$

답 20

1128

|전략| 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분한다.

$$\{f(x)\}^2-4=\int_1^x \frac{tf(t)}{t^2+1}dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2f(x)f'(x)=\frac{xf(x)}{x^2+1} \qquad \therefore f'(x)=\frac{x}{2x^2+2}$$

$$\therefore f(x)=\int\frac{x}{2x^2+2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{4x}{2x^2+2}dx$$
$$=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2)+C$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\{f(1)\}^2-4=0$에서 $f(1)=2$ ($\because f(x)>0$)이므로

$$\frac{1}{4}\ln 4+C=2 \qquad \therefore C=2-\frac{1}{4}\ln 4$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2)+2-\frac{1}{4}\ln 4=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+1}{2}+2$$

따라서 부분적분법을 이용하면

$$\int_1^3 xf''(x)dx=\Big[xf'(x)\Big]_1^3-\int_1^3 f'(x)dx$$
$$=3f'(3)-f'(1)-\Big[f(x)\Big]_1^3$$
$$=3f'(3)-f'(1)-f(3)+f(1)$$
$$=\frac{9}{20}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\ln 5-2+2$$
$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\ln 5$$

답 ①

1129

|전략| $f(x)=\int_0^x (t-a)e^{t-b}dt$의 양변을 x에 대하여 미분한다.

(가) $f(x)=\int_0^x (t-a)e^{t-b}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-a)e^{x-b}$

(나)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=(1-a)e^{1-b}=0$에서 $a=1$ ($\because e^{1-b}>0$)

(다)에서 $f(2)-2f(0)=\frac{2}{e^3}$이고 (가)에서 $f(0)=0$이므로

$$f(2)=\frac{2}{e^3}$$

(가)에서 $u(t)=t-1$, $v'(t)=e^{t-b}$으로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=e^{t-b}$이므로

$$f(x)=\int_0^x (t-1)^{t-b}dt=\Big[(t-1)e^{t-b}\Big]_0^x-\int_0^x e^{t-b}dt$$
$$=(x-1)e^{x-b}-(-e^{-b})-\Big[e^{t-b}\Big]_0^x$$
$$=(x-1)e^{x-b}+e^{-b}-e^{x-b}+e^{-b}$$
$$=(x-2)e^{x-b}+2e^{-b}$$

이때, $f(2)=\frac{2}{e^3}$이므로

$$2e^{-b}=\frac{2}{e^3} \qquad \therefore b=3$$

따라서 $f(x)=(x-2)e^{x-3}+\frac{2}{e^3}$이므로

$$f(3)=1+\frac{2}{e^3}$$

답 $1+\frac{2}{e^3}$

본책 178~191쪽

10 | 정적분의 활용

STEP 1 개념 마스터

1130

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}(1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^n k^4$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^4\frac{1}{n}$$

이때, $f(x)=x^4$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\boxed{(가)\ \frac{1}{n}},\ x_k=a+k\Delta x=\boxed{(나)\ \frac{k}{n}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^4\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x=\int_0^1 \boxed{(다)\ x^4}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\boxed{(라)\ \frac{1}{5}}$$

답 (가) $\frac{1}{n}$ (나) $\frac{k}{n}$ (다) x^4 (라) $\frac{1}{5}$

1131

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

이때, $f(x)=x^2$, $a=1$, $b=2$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{1}{n},\ x_k=1+\frac{k}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x=\int_1^2 x^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2=\frac{7}{3}$$

답 $\frac{7}{3}$

다른 풀이 $f(x)=(1+x)^2$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{1}{n},\ x_k=\frac{k}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x=\int_0^1(1+x)^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(1+x)^3\right]_0^1=\frac{7}{3}$$

1132

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\sin\frac{k\pi}{n}\times\frac{\pi}{n}$$

이때, $f(x)=\sin x$, $a=0$, $b=\pi$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{\pi}{n},\ x_k=\frac{k\pi}{n}$$

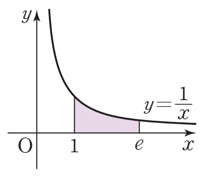
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\sin\frac{k\pi}{n}\times\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x=\int_0^\pi \sin x\,dx$$
$$=\Big[-\cos x\Big]_0^\pi=2$$

답 2

1133

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$\int_1^e \frac{1}{x}dx = \Big[\ln|x|\Big]_1^e = 1$



답 1

1134

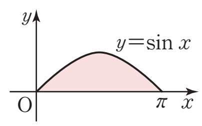
곡선 $y=\sin x$와 x축의 교점의 x좌표는

$\sin x = 0$에서

$x=0$ 또는 $x=\pi$ ($\because 0 \le x \le \pi$)

따라서 구하는 넓이는

$\int_0^\pi \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = 2$



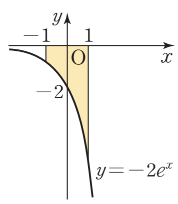
답 2

1135

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^1 |-2e^x|\,dx = \int_{-1}^1 2e^x\,dx$

$= 2\Big[e^x\Big]_{-1}^1 = 2\left(e - \frac{1}{e}\right)$



답 $2\left(e-\frac{1}{e}\right)$

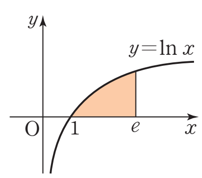
1136

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$\int_1^e \ln x\,dx = \Big[x\ln x\Big]_1^e - \int_1^e dx$

$= e - \Big[x\Big]_1^e$

$= e - (e-1) = 1$



답 1

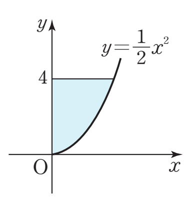
1137

$y = \frac{1}{2}x^2$에서 $x^2 = 2y$

$\therefore x = \sqrt{2y}$ ($\because x \ge 0$)

따라서 구하는 넓이는

$\int_0^4 \sqrt{2y}\,dy = \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{16\sqrt{2}}{3}$



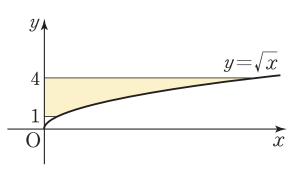
답 $\frac{16\sqrt{2}}{3}$

1138

$y=\sqrt{x}$에서 $x=y^2$

따라서 구하는 넓이는

$\int_1^4 y^2\,dy = \left[\frac{1}{3}y^3\right]_1^4 = 21$



답 21

1139

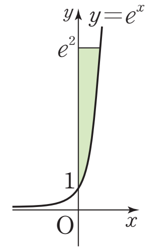
$y=e^x$에서 $x=\ln y$

따라서 구하는 넓이는

$\int_1^{e^2} \ln y\,dy = \Big[y\ln y\Big]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} dy$

$= 2e^2 - \Big[y\Big]_1^{e^2}$

$= 2e^2 - (e^2-1) = e^2+1$



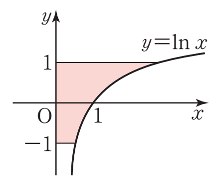
답 e^2+1

1140

$y=\ln x$에서 $x=e^y$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^1 e^y\,dy = \Big[e^y\Big]_{-1}^1 = e - \frac{1}{e}$



답 $e-\frac{1}{e}$

1141

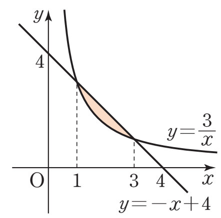
곡선 $y=\frac{3}{x}$과 직선 $y=-x+4$의 교점의

x좌표는 $\frac{3}{x} = -x+4$에서

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는



$\int_1^3 \left\{(-x+4) - \frac{3}{x}\right\}dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3\ln|x|\right]_1^3$

$= 4 - 3\ln 3$

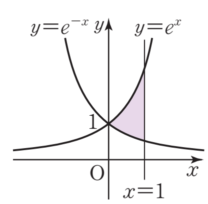
답 $4-3\ln 3$

1142

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$\int_0^1 (e^x - e^{-x})\,dx = \Big[e^x + e^{-x}\Big]_0^1$

$= e + \frac{1}{e} - 2$



답 $e+\frac{1}{e}-2$

1143

두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 교점의

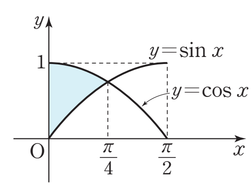
x좌표는 $\sin x = \cos x$에서

$x=\frac{\pi}{4}$ $\left(\because 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

따라서 구하는 넓이는

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx$

$= \Big[\sin x + \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}-1$



답 $\sqrt{2}-1$

1144

밑면으로부터 x인 지점에서의 단면의 넓이가 $\sqrt{6-x}$이므로 구하는 부피는

$$\int_0^6 \sqrt{6-x}\,dx = \left[-\frac{2}{3}(6-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^6 = 4\sqrt{6}$$

답 $4\sqrt{6}$

1145

밑면으로부터 x cm인 지점에서의 단면의 넓이가 $(e^x)^2 = e^{2x}$ (cm^2)이므로 구하는 부피는

$$\int_0^{10} e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{10} = \frac{1}{2}(e^{20}-1)\ (\mathrm{cm}^3)$$

답 $\frac{1}{2}(e^{20}-1)$ cm^3

1146

(1) $0+\int_0^3 e^{2t}\,dt = \left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^3 = \frac{1}{2}e^6 - \frac{1}{2}$

(2) $\int_0^5 e^{2t}\,dt = \left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^5 = \frac{1}{2}e^{10} - \frac{1}{2}$

(3) $\int_0^4 |e^{2t}|\,dt = \int_0^4 e^{2t}\,dt = \left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^4 = \frac{1}{2}e^8 - \frac{1}{2}$

답 (1) $\frac{1}{2}e^6-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}e^{10}-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{2}e^8-\frac{1}{2}$

1147

$x=\frac{1}{3}t^3-t$, $y=t^2$에서

$\frac{dx}{dt}=t^2-1$, $\frac{dy}{dt}=2t$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^1 \sqrt{(t^2-1)^2+(2t)^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{(t^2+1)^2}\,dt = \int_0^1 (t^2+1)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

1148

$x=3\cos t$, $y=3\sin t$에서

$\frac{dx}{dt}=-3\sin t$, $\frac{dy}{dt}=3\cos t$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^1 \sqrt{(-3\sin t)^2+(3\cos t)^2}\,dt = \int_0^1 3\,dt = \left[3t\right]_0^1 = 3$$

답 3

1149

$x=6t^2$, $y=t^3-12t$에서

$\frac{dx}{dt}=12t$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-12$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^1 \sqrt{(12t)^2+(3t^2-12)^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{(3t^2+12)^2}\,dt$$

$$=\int_0^1 (3t^2+12)\,dt$$

$$=\left[t^3+12t\right]_0^1 = 13$$

답 13

1150

$x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$에서

$\frac{dx}{dt}=e^t\cos t - e^t\sin t = e^t(\cos t - \sin t)$

$\frac{dy}{dt}=e^t\sin t + e^t\cos t = e^t(\sin t + \cos t)$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_1^3 \sqrt{\{e^t(\cos t-\sin t)\}^2+\{e^t(\sin t+\cos t)\}^2}\,dt$$

$$=\int_1^3 \sqrt{e^{2t}(1-2\sin t\cos t)+e^{2t}(1+2\sin t\cos t)}\,dt$$

$$=\int_1^3 \sqrt{2e^{2t}}\,dt = \int_1^3 \sqrt{2}e^t\,dt = \left[\sqrt{2}e^t\right]_1^3 = \sqrt{2}(e^3-e)$$

답 $\sqrt{2}(e^3-e)$

1151

$y'=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^3 \sqrt{1+(\sqrt{x})^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1+x}\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}\right]_0^3 = \frac{14}{3}$$

답 $\frac{14}{3}$

1152

$y'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\,dx$$

$$=\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}\,dx$$

$$=\int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_{-1}^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$$

$f(x)=e^x+e^{-x}$이라 하면 $f(-x)=f(x)$이므로 우함수이다.

$$=\int_0^1 (e^x+e^{-x})\,dx$$

$$=\left[e^x-e^{-x}\right]_0^1 = e-\frac{1}{e}$$

답 $e-\frac{1}{e}$

STEP 2 유형 마스터

1153

|전략| $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\times\frac{p}{n}=\int_a^{a+p} f(x)\,dx$임을 이용하여 주어진 식을 정적분으로 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f\Big(\underbrace{1+\frac{2k}{n}}_{x_k}\Big)\times\frac{2}{n} = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$$

$$=\left[\ln|x|\right]_1^3 = \ln 3$$

답 ②

다른 풀이 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f\Big(1+\underbrace{\frac{2k}{n}}_{x_k}\Big)\times\frac{2}{n} = \int_0^2 f(1+x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{1+x}\,dx$

$$=\left[\ln|1+x|\right]_0^2 = \ln 3$$

1154

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\underbrace{a+\frac{(1-a)k}{n}}_{x_k}\Big)\times\frac{1-a}{n}=\int_a^1 f(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a+\underbrace{\frac{(1-a)k}{n}}_{x_k}\Big)\times\frac{1-a}{n}=\int_0^{1-a} f(a+x)dx$$

따라서 정적분으로 바르게 나타낸 것은 ②, ③이다. 답 ②, ③

1155

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\{(3n+2)^2+(3n+4)^2+\cdots+(3n+2n)^2\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(3+\frac{2}{n}\right)^2+\left(3+\frac{4}{n}\right)^2+\cdots+\left(3+\frac{2n}{n}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{2}{n}=\frac{1}{2}\int_3^5 x^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_3^5=\frac{49}{3}$$

답 $\frac{49}{3}$

1156

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\tan\frac{k\pi}{4n}=4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\tan\frac{\pi}{4n}k\right)\frac{\pi}{4n}$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

이때, $\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$$4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=-4\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{t}dt=4\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{1}{t}dt$$

$$=4\Big[\ln|t|\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}=-4\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\ln 4$$

$\therefore a=4$ 답 ③

1157

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n}\times\frac{n+3}{n}\times\cdots\times\frac{2n}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+2}{n}+\ln\frac{n+3}{n}+\cdots+\ln\frac{n+n}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}$$

$$=\int_1^2\ln x\,dx \qquad \cdots ❶$$

$$=\Big[x\ln x\Big]_1^2-\int_1^2 dx$$

$$=2\ln 2-\Big[x\Big]_1^2=2\ln 2-1 \qquad \cdots ❷$$

답 $2\ln 2-1$

채점 기준	비율
❶ 주어진 급수를 정적분으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ 정적분의 값을 구할 수 있다.	40 %

1158

ㄱ. $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(2+3\times\underbrace{\frac{k}{n}}_{x_k}\Big)^2\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1(2+3x)^2dx$$

ㄴ. $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(2+\underbrace{\frac{3k}{n}}_{x_k}\Big)^2\frac{3}{n}$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^3(2+x)^2dx$$

ㄷ. $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\underbrace{2+\frac{3k}{n}}_{x_k}\Big)^2\frac{3}{n}$$

$$=\frac{1}{3}\int_2^5 x^2dx$$

따라서 주어진 식과 같은 값을 갖는 것은 ㄱ이다. 답 ①

1159

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a|+\left|a-\frac{1}{n}\right|+\left|a-\frac{2}{n}\right|+\cdots+\left|a-\frac{n-1}{n}\right|}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left|a-\frac{k}{n}\right|\times\frac{1}{n}=\int_0^1|a-x|dx$$

$$=\int_0^a(-x+a)dx+\int_a^1(x-a)dx$$

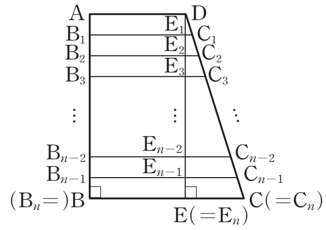
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_0^a+\left[\frac{1}{2}x^2-ax\right]_a^1$$

$$=\frac{1}{2}a^2+\left(\frac{1}{2}-a+\frac{1}{2}a^2\right)=a^2-a+\frac{1}{2}$$

답 $a^2-a+\frac{1}{2}$

1160

|전략| 삼각형의 닮음을 이용하여 주어진 급수를 $\frac{k}{n}$를 포함한 식으로 나타낸 다음 정적분으로 변형하여 그 값을 구한다.



오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 D에서 변 AB에 평행하게 직선을 그어 변 BC와 만나는 점을 E라 하고 선분 B_kC_k와 만나는 점을 E_k라 하면

$\overline{B_kE_k}=3$, $\overline{EC}=2$

한편, $\triangle DEC \backsim \triangle DE_kC_k$이므로

$\overline{DE}:\overline{EC}=\overline{DE_k}:\overline{E_kC_k}$

$6:2=\frac{6k}{n}:\overline{E_kC_k}$ $\quad\therefore \overline{E_kC_k}=\frac{2k}{n}$

따라서 $\overline{B_kC_k}=\overline{B_kE_k}+\overline{E_kC_k}=3+\frac{2k}{n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{B_kC_k}^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{3}{n}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{2}{n}$$

$$=\frac{3}{2}\int_3^5x^2dx=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_3^5$$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{98}{3}=49$$

답 49

1161

x축 위의 닫힌구간 $[0, 2]$를 n등분하면 $x_k=\frac{2k}{n}$이므로

$Q_k\left(\frac{2k}{n}, \sqrt{\frac{4k}{n}+1}\right)$

$$\therefore \overline{OQ_k}=\sqrt{\left(\frac{2k}{n}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{4k}{n}+1}\right)^2}=\sqrt{\frac{4k^2}{n^2}+\frac{4k}{n}+1}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{2k}{n}+1\right)^2}=\frac{2k}{n}+1$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{OQ_k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^3 x\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$$
$$=\frac{1}{2}\times 4=2$$

답 ②

1162

|전략| 넓이는 양수이므로 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)\geq 0$이면 $S=\int_a^b f(x)dx$, $f(x)\leq 0$이면 $S=-\int_a^b f(x)dx$임을 이용한다.

닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 곡선 $y=x\sin x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x\sin x=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$

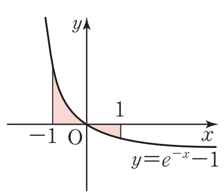
닫힌구간 $[0, \pi]$에서 $x\sin x\geq 0$, 닫힌구간 $[\pi, 2\pi]$에서 $x\sin x\leq 0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-x\sin x)\,dx$$
$$=\left\{\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos x)\,dx\right\}$$
$$+\left(\Big[x\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}-\int_{\pi}^{2\pi}\cos x\,dx\right)$$
$$=\pi-\Big[-\sin x\Big]_0^{\pi}+3\pi-\Big[\sin x\Big]_{\pi}^{2\pi}=4\pi$$

답 ④

1163

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_{-1}^{0}(e^{-x}-1)dx+\int_0^1\{-(e^{-x}-1)\}dx$$
$$=\Big[-e^{-x}-x\Big]_{-1}^{0}+\Big[e^{-x}+x\Big]_0^1$$
$$=e+\frac{1}{e}-2$$

답 $e+\dfrac{1}{e}-2$

1164

$n=1$일 때, $S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos x\,dx=\left[\frac{1}{2}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$

$n=2$일 때, $S_2=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cos x\,dx=-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$n=3$일 때, $S_3=-\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^3\cos x\,dx=-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\sin x\right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$n=4$일 때, $S_4=\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^4\cos x\,dx=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\sin x\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$

즉, 수열 $\{S_n\}$은 $\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \cdots$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

따라서 $a=1$이므로 $100a=100$

답 ②

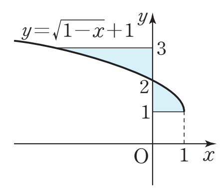
1165

|전략| 넓이는 양수이므로 닫힌구간 $[a, b]$에서 $g(y)\geq 0$이면 $S=\int_a^b g(y)dy$, $g(y)\leq 0$이면 $S=-\int_a^b g(y)dy$임을 이용한다.

$y=\sqrt{1-x}+1$에서 $y-1=\sqrt{1-x}$

$(y-1)^2=1-x \qquad \therefore x=-y^2+2y$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_1^2(-y^2+2y)dy+\int_2^3\{-(-y^2+2y)\}dy$$
$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+y^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}y^3-y^2\right]_2^3$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$$

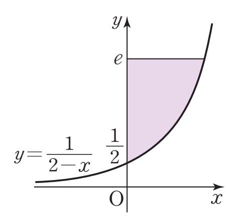
답 ②

1166

$y=\dfrac{1}{2-x}$에서 $2-x=\dfrac{1}{y}$

$\therefore x=2-\dfrac{1}{y}$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{\frac{1}{2}}^{e}\left(2-\frac{1}{y}\right)dy=\Big[2y-\ln|y|\Big]_{\frac{1}{2}}^{e}$$
$$=(2e-1)-\left(1-\ln\frac{1}{2}\right)$$
$$=2e-2-\ln 2$$

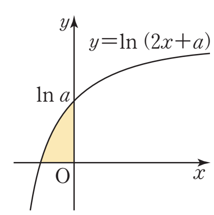
답 ①

1167

$y=\ln(2x+a)$에서 $2x+a=e^y$

$\therefore x=\dfrac{1}{2}(e^y-a)$ ⋯ ❶

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는



$$\int_0^{\ln a}\left\{-\frac{1}{2}(e^y-a)\right\}dy$$
$$=\int_0^{\ln a}\frac{1}{2}(a-e^y)dy$$
$$=\frac{1}{2}\Big[ay-e^y\Big]_0^{\ln a}=\frac{1}{2}(a\ln a-a+1) \quad \cdots ❷$$

따라서 $\dfrac{1}{2}(a\ln a-a+1)=\dfrac{1}{2}$이므로

$a\ln a-a+1=1$, $a(\ln a-1)=0 \qquad \therefore a=e\ (\because a>1)$ ⋯ ❸

답 e

채점 기준	비율
❶ x를 y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 간단히 나타낼 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

1168

|전략| 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구한 후
{(위쪽 그래프의 식)−(아래쪽 그래프의 식)} 의 정적분의 값을 구한다.

곡선 $y=\frac{2x}{x^2+1}$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $\frac{2x}{x^2+1}=x$에서

$2x=x^3+x,\ x^3-x=0$

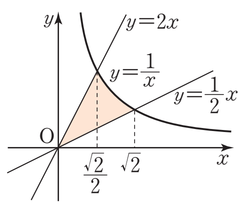
$x(x+1)(x-1)=0 \qquad \therefore\ x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\left(x-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx+\int_{0}^{1}\left(\frac{2x}{x^2+1}-x\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2-\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{0}+\left[\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=-\left(\frac{1}{2}-\ln 2\right)+\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$$
$$=2\ln 2-1$$

답 ③

1169



곡선 $y=\frac{1}{x}$과 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는 $\frac{1}{x}=2x$에서

$x^2=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ x=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\because\ x>0)$

또, 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 직선 $y=\frac{1}{2}x$의 교점의 x좌표는 $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}x$에서

$x^2=2 \qquad \therefore\ x=\sqrt{2}\ (\because\ x>0)$

따라서 구하는 넓이는

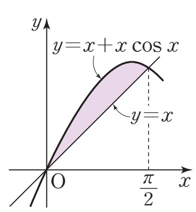
$$\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(2x-\frac{1}{2}x\right)dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}x\right)dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{3}{2}x\,dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}x\right)dx$$
$$=\left[\frac{3}{4}x^2\right]_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\left[\ln|x|-\frac{1}{4}x^2\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{3}{8}+\left(\ln 2-\frac{3}{8}\right)=\ln 2$$

답 ②

다른 풀이 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(2x-\frac{1}{2}x\right)dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}x\right)dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}2x\,dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}\frac{1}{x}dx-\int_{0}^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=\left[x^2\right]_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\left[\ln|x|\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{0}^{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{2}+\left(\ln\sqrt{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{1}{2}=\ln 2$$

1170



곡선 $y=x+x\cos x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x+x\cos x=x$에서

$x\cos x=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}\ \left(\because\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 구하는 넓이는

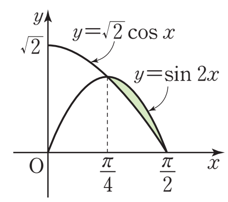
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(x+x\cos x-x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$$
$$=\left[x\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}+\left[\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

답 $\frac{\pi}{2}-1$

참고 곡선 $y=x+x\cos x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $0,\ \frac{\pi}{2}$이고, $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $(x+x\cos x)-x=x\cos x>0$이므로 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 곡선 $y=x+x\cos x$는 직선 $y=x$보다 위쪽에 있음을 알 수 있다.

1171

|전략| 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한 후
{(위쪽 그래프의 식)−(아래쪽 그래프의 식)}의 정적분의 값을 구한다.



두 곡선 $y=\sqrt{2}\cos x,\ y=\sin 2x$의 교점의 x좌표는 $\sqrt{2}\cos x=\sin 2x$에서

$\sqrt{2}\cos x=2\sin x\cos x$

$\sqrt{2}\cos x(1-\sqrt{2}\sin x)=0$

$\cos x=0$ 또는 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

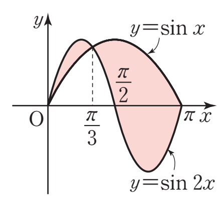
$\therefore\ x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}\ \left(\because\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\sqrt{2}\cos x)dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$$

답 ②

1172



두 곡선 $y=\sin x,\ y=\sin 2x$의 교점의 x좌표는 $\sin x=\sin 2x$에서

$\sin x=2\sin x\cos x$

$\sin x(1-2\cos x)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi\ (\because\ 0\le x\le\pi)$ ··· ❶

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}+\left[-\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{5}{2}$$
··· ❷

답 $\frac{5}{2}$

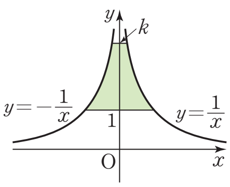
채점 기준	비율
❶ 두 곡선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	50 %
❷ 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

1173

$y=\dfrac{1}{x}$에서 $x=\dfrac{1}{y}$

$y=-\dfrac{1}{x}$에서 $x=-\dfrac{1}{y}$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는



$$\int_1^k \left\{\frac{1}{y}-\left(-\frac{1}{y}\right)\right\}dy=2\int_1^k \frac{1}{y}dy$$

$$=2\Big[\ln|y|\Big]_1^k=2\ln k\ (\because k>1)$$

따라서 $2\ln k=2$이므로 $\ln k=1$ $\quad\therefore k=e$ 답 ⑤

1174

|전략| 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 곡선 $y=x\sin x$와 직선 $y=k$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같고 $0\le k\le\frac{\pi}{2}$이므로 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin x-k)dx=0$임을 이용한다.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin x-k)dx=0$에서

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}k\,dx$

$\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[kx\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}k,\ 1=\frac{\pi}{2}k$ $\quad\therefore k=\frac{2}{\pi}$ 답 $\frac{2}{\pi}$

1175

$\int_0^k(\sqrt{x}-2)dx=0$이므로

$\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x\Big]_0^k=0,\ \frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}-2k=0$

$k\left(\frac{2}{3}\sqrt{k}-2\right)=0,\ \sqrt{k}=3\ (\because k>4)$ $\quad\therefore k=9$ 답 ④

1176

$\int_k^e \frac{\ln x}{x}dx=0$에서 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=k$일 때 $t=\ln k$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$\int_k^e \frac{\ln x}{x}dx=\int_{\ln k}^1 t\,dt=0$

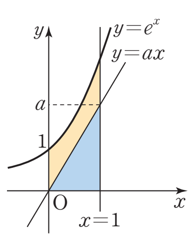
$\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_{\ln k}^1=0,\ \frac{1}{2}\{1-(\ln k)^2\}=0$

$(\ln k)^2=1,\ \ln k=-1\ (\because 0<k<1)$ $\quad\therefore k=\frac{1}{e}$ 답 $\frac{1}{e}$

1177

|전략| 직선 $y=ax$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는 주어진 도형의 넓이의 $\frac{1}{2}$배임을 이용한다.

오른쪽 그림에서 곡선 $y=e^x$과 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$S_1=\int_0^1 e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^1=e-1$

직선 $y=ax$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\frac{1}{2}\times1\times a=\frac{1}{2}a$

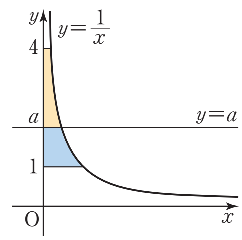
이때, $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}(e-1)$ $\quad\therefore a=e-1$ 답 ③

1178

$y=\frac{1}{x}$에서 $x=\frac{1}{y}$

곡선 $y=\frac{1}{x}$과 y축 및 두 직선 $y=1$, $y=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$S_1=\int_1^4\frac{1}{y}dy=\Big[\ln|y|\Big]_1^4=2\ln2$

곡선 $y=\frac{1}{x}$과 y축 및 두 직선 $y=1$, $y=a$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

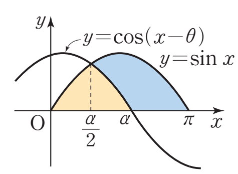
$S_2=\int_1^a\frac{1}{y}dy=\Big[\ln|y|\Big]_1^a=\ln a\ (\because 1<a<4)$

이때, $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$\ln a=\frac{1}{2}\times2\ln2$ $\quad\therefore a=2$ 답 ②

1179

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\cos(x-\theta)$와 x축의 교점의 x좌표를 $\alpha\,(0<\alpha<\pi)$라 하면 $\alpha=\frac{\pi}{2}+\theta$이고 두 곡선의 교점의 x좌표는



$$\frac{\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\alpha}{2}$$

이때, 곡선 $y=\cos(x-\theta)$가 곡선 $y=\sin x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 이등분하므로

$\int_0^{\frac{\alpha}{2}}\sin x\,dx+\int_{\frac{\alpha}{2}}^{\alpha}\cos(x-\theta)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin x\,dx$

이때, $\int_0^{\frac{\alpha}{2}}\sin x\,dx=\int_{\frac{\alpha}{2}}^{\alpha}\cos(x-\theta)\,dx$이므로

$2\int_0^{\frac{\alpha}{2}}\sin x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin x\,dx$

$2\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$

$2\left(-\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)=\frac{1}{2}(1+1),\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$

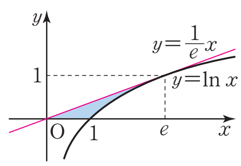
$\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{3}\ \left(\because 0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad\therefore \alpha=\frac{2}{3}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{2}+\theta$에서 $\theta=\alpha-\frac{\pi}{2}$이므로

$\theta=\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$ 답 $\frac{\pi}{6}$

1180

|전략| 먼저 원점에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선의 방정식을 구한다.



$y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$이므로 곡선 위의 점 $(a, \ln a)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{a}$이고 접선의 방정식은

$y-\ln a=\frac{1}{a}(x-a)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-\ln a=\frac{1}{a}\times(-a)$, $\ln a=1$ $\quad\therefore a=e$

즉, 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $(e, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{e}(x-e)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{e}x$

따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\times e\times 1-\int_1^e \ln x\,dx=\frac{e}{2}-\Big[x\ln x\Big]_1^e+\int_1^e dx$$
$$=\frac{e}{2}-e+\Big[x\Big]_1^e$$
$$=\frac{e}{2}-e+(e-1)=\frac{e}{2}-1$$

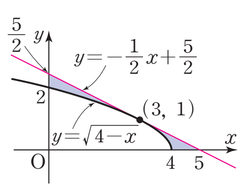
답 ②

다른 풀이 직선 $y=\frac{1}{e}x$에서 $x=ey$, 곡선 $y=\ln x$에서 $x=e^y$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 (e^y-ey)dy=\Big[e^y-\frac{e}{2}y^2\Big]_0^1=\frac{e}{2}-1$$

1181



$y=\sqrt{4-x}$에서 $y'=-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$이므로 곡선 위의 점 $(3, 1)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이고 접선의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{2}(x-3)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ ··· ❶

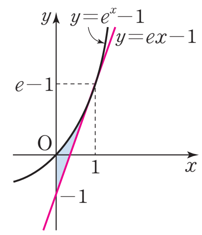
따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 5\times\frac{5}{2}-\int_0^4 \sqrt{4-x}\,dx$$
$$=\frac{25}{4}-\Big[-\frac{2}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^4$$
$$=\frac{25}{4}-\frac{16}{3}=\frac{11}{12}$$ ··· ❷

답 $\frac{11}{12}$

채점 기준	비율
❶ 곡선 위의 점 $(3, 1)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	60 %

1182



$y=e^x-1$에서 $y'=e^x$이므로 곡선 위의 점 $(1, e-1)$에서의 접선의 기울기는 e이고 접선의 방정식은

$y-(e-1)=e(x-1)$ $\quad\therefore y=ex-1$

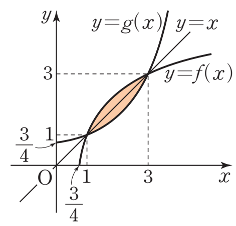
따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 \{(e^x-1)-(ex-1)\}dx$$
$$=\int_0^1 (e^x-ex)dx=\Big[e^x-\frac{e}{2}x^2\Big]_0^1=\frac{e}{2}-1$$

답 ①

1183

|전략| $y=g(x)$는 $y=f(x)$의 역함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.



오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.

즉, $\sqrt{4x-3}=x$에서 $4x-3=x^2$

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

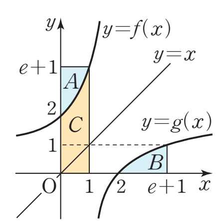
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

이때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\int_1^3 (\sqrt{4x-3}-x)dx=2\Big[\frac{1}{6}(4x-3)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\Big]_1^3=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

1184

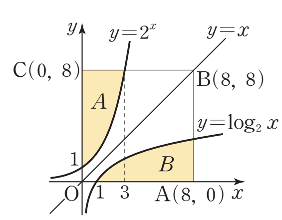


오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $B=\int_2^{e+1} g(x)dx$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=e+1$로 둘러싸인 도형의 넓이, 즉 A와 같다.

$$\therefore \int_0^1 f(x)dx+\int_2^{e+1} g(x)dx=C+B=C+A$$
$$=1\times(e+1)=e+1$$

답 $e+1$

1185



$y=2^x$과 $y=\log_2 x$는 역함수 관계이므로 오른쪽 그림에서 두 곡선 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 따라서

$B=\int_1^8 \log_2 x\,dx$의 값은 곡선 $y=2^x$과 y축 및 직선 $y=8$로 둘러싸인 도형의 넓이, 즉 A와 같다.

이때, 색칠한 부분의 넓이는 A의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\left(3\times 8-\int_0^3 2^x dx\right)=48-2\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^3$$
$$=48-\frac{14}{\ln 2}$$
답 $48-\frac{14}{\ln 2}$

다른 풀이 구하는 넓이는

$$2\int_1^8 \log_2 x\,dx=2\left(\left[x\log_2 x\right]_1^8-\int_1^8 \frac{1}{x\ln 2}\times x\,dx\right)$$
$$=2\left(24-\frac{1}{\ln 2}\left[x\right]_1^8\right)=48-\frac{14}{\ln 2}$$

1186

$y=e^{ax}$에서 $\ln y=ax$, $x=\frac{1}{a}\ln y$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}\ln x$

$\therefore g(x)=\frac{1}{a}\ln x\ (x>0)$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=e$에서 접하므로

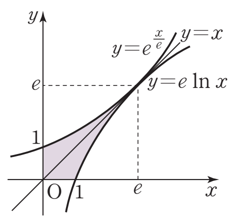
(i) $f(e)=g(e)$에서

$e^{ae}=\frac{1}{a}$, 즉 $ae^{ae}=1$ ...... ㉠

(ii) $f'(x)=ae^{ax}$, $g'(x)=\frac{1}{ax}$이므로

$f'(e)=g'(e)$에서

$ae^{ae}=\frac{1}{ae}$ ...... ㉡



㉠, ㉡에서 $a=\frac{1}{e}$

$\therefore f(x)=e^{\frac{x}{e}}$, $g(x)=e\ln x$

두 곡선이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$2\int_0^e \left(e^{\frac{x}{e}}-x\right)dx=2\left[e\times e^{\frac{x}{e}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^e$$
$$=2\left(e^2-\frac{1}{2}e^2-e\right)=e^2-2e$$
답 e^2-2e

1187

|전략| 밑면으로부터의 높이가 x인 지점에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 높이가 a일 때의 부피는 $\int_0^a S(x)dx$임을 이용한다.

밑면으로부터의 높이가 x인 지점에서의 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{e^{5x}}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}e^{5x}$$

입체도형의 높이가 a이므로 부피는

$$\int_0^a S(x)dx=\int_0^a \frac{\sqrt{3}}{4}e^{5x}dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{5}e^{5x}\right]_0^a=\frac{\sqrt{3}}{20}\left(e^{5a}-1\right)$$

이때, $\frac{\sqrt{3}}{20}\left(e^{5a}-1\right)=\frac{\sqrt{3}}{20}\left(e^{30}-1\right)$이므로

$5a=30\qquad \therefore a=6$
답 ③

1188

밑면으로부터의 높이가 x인 지점에서의 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\pi\left(\sqrt{25+x^2}\right)^2=\pi(25+x^2)$ ··· ❶

따라서 회분의 부피는

$$\int_0^5 S(x)dx=\int_0^5 \pi(25+x^2)dx$$
$$=\pi\left[25x+\frac{1}{3}x^3\right]_0^5=\frac{500}{3}\pi$$ ··· ❷

답 $\frac{500}{3}\pi$

채점 기준	비율
❶ 밑면으로부터의 높이가 x인 지점에서의 단면의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 화분의 부피를 구할 수 있다.	60 %

1189

물의 높이가 x일 때 수면의 넓이가 $x\ln(x^2+1)$이므로 구하는 물의 부피는

$$\int_0^2 x\ln(x^2+1)dx$$

이때, $x^2+1=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고

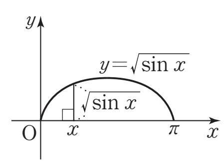
$x=0$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=5$이므로

$$\int_0^2 x\ln(x^2+1)dx=\int_1^5 \ln t\times\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\left(\left[t\ln t\right]_1^5-\int_1^5 dt\right)$$
$$=\frac{1}{2}\{5\ln 5-(5-1)\}=\frac{5}{2}\ln 5-2$$
답 ⑤

1190

|전략| 닫힌구간 $[a, b]$에서 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 잘랐을 때의 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피는 $\int_a^b S(x)dx$임을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 x좌표가 $x(0\le x\le\pi)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면인 정삼각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{\sin x}$이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면



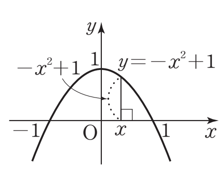
$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{\sin x}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin x$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^\pi S(x)dx=\int_0^\pi \frac{\sqrt{3}}{4}\sin x\,dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[-\cos x\right]_0^\pi$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(1+1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
답 ③

1191

오른쪽 그림과 같이 x좌표가 $x(-1\le x\le 1)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면인 반원의 지름의 길이는 $-x^2+1$이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면



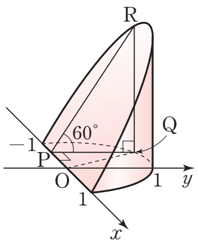
$S(x)=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{-x^2+1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}(-x^2+1)^2$

따라서 구하는 부피는

$$\int_{-1}^{1}S(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{\pi}{8}(-x^2+1)^2dx=2\int_0^1\frac{\pi}{8}(-x^2+1)^2dx$$
$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1(x^4-2x^2+1)dx=\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=\frac{\pi}{4}\times\frac{8}{15}=\frac{2}{15}\pi$$

답 ①

1192



오른쪽 그림과 같이 밑면의 중심을 원점, 밑면의 지름을 x축으로 잡고, x축 위의 점 $P(x, 0)(-1\le x\le 1)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면을 $\triangle PQR$라 하면

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{OQ}^2-\overline{OP}^2}=\sqrt{1-x^2}$

$\overline{RQ}=\overline{PQ}\tan 60^\circ=\sqrt{3}\times\sqrt{1-x^2}$

$\triangle PQR$의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{RQ}=\frac{1}{2}\times\sqrt{1-x^2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{1-x^2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_{-1}^{1}S(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)dx=2\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)dx$$
$$=\sqrt{3}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\sqrt{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

1193

|전략| 수직선 위를 움직이는 점 P의 위치가 0일 때, 점 P가 원점을 지남을 이용한다.

$t=0$에서의 위치가 0이므로

$t=a(0<a\le 3\pi)$일 때 점 P의 위치는

$$0+\int_0^a\cos\frac{\pi}{2}t\,dt=\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t\right]_0^a=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}a$$

점 P가 원점을 지나려면

$\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}a=0$, $\sin\frac{\pi}{2}a=0$

$\therefore a=2, 4, 6, 8\ (\because 0<a\le 3\pi)$

따라서 점 P는 원점을 4번 지난다.

답 4

1194

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v(t)=\sin\pi t=0$에서 $t=1, 2, 3, \cdots\ (\because t>0)$

점 P는 $t=2$에서 두 번째로 운동 방향을 바꾸고, $0\le t\le 1$에서 $v(t)\ge 0$, $1\le t\le 2$에서 $v(t)\le 0$이므로 구하는 거리는

$$\int_0^2|\sin\pi t|dt=\int_0^1\sin\pi t\,dt-\int_1^2\sin\pi t\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^1-\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_1^2$$
$$=\frac{2}{\pi}-\left(-\frac{2}{\pi}\right)=\frac{4}{\pi}$$

답 $\frac{4}{\pi}$

1195

시각 t에서의 두 점 A, B의 위치를 각각 x_A, x_B라 하면

$$x_A=0+\int_0^t dt=\left[t\right]_0^t=t$$
$$x_B=0+\int_0^t\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{1}{2}\right)dt=\int_0^t\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\right)dt$$
$$=\left[t^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}t\right]_0^t=\sqrt{t}+\frac{1}{2}t$$

두 점이 다시 만날 때 $x_A=x_B$이므로

$t=\sqrt{t}+\frac{1}{2}t$, $\frac{1}{2}\sqrt{t}(\sqrt{t}-2)=0$　　$\therefore t=4\ (\because t>0)$

즉, 두 점 A, B가 처음으로 다시 만나는 시각은 $t=4$이므로 그때의 위치는 $x_A=t=4$이다.

답 4

1196

|전략| 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는 $s=\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}dt$임을 이용한다.

$x=\frac{2}{3}t-1$, $y=\frac{e^t+e^{-t}}{3}$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{3}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{e^t-e^{-t}}{3}$

시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^1\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{e^t-e^{-t}}{3}\right)^2}dt=\int_0^1\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{9}}dt$$
$$=\int_0^1\sqrt{\frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{9}}dt$$
$$=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{3}\right)^2}dt=\int_0^1\frac{e^t+e^{-t}}{3}dt$$
$$=\frac{1}{3}\left[e^t-e^{-t}\right]_0^1=\frac{1}{3}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

$\therefore a=\frac{1}{3}$

답 ②

1197

$x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$에서

$\frac{dx}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$

$\frac{dy}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$

시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^a\sqrt{\{e^t(\cos t-\sin t)\}^2+\{e^t(\sin t+\cos t)\}^2}dt$$
$$=\int_0^a\sqrt{e^{2t}(1-2\cos t\sin t)+e^{2t}(1+2\sin t\cos t)}\,dt$$
$$=\int_0^a\sqrt{2e^{2t}}dt=\int_0^a\sqrt{2}e^t dt=\left[\sqrt{2}e^t\right]_0^a=\sqrt{2}(e^a-1)$$

10 정적분의 활용

이때, $\sqrt{2}(e^{a}-1)=\sqrt{2}(e^{2}-1)$이므로

$a=2$ 답 2

1198

$x=1-\frac{1}{2}\cos 2t$, $y=t-\frac{1}{2}\sin 2t$에서

$\frac{dx}{dt}=\sin 2t$, $\frac{dy}{dt}=1-\cos 2t$

점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\begin{aligned}\sqrt{\sin^{2}2t+(1-\cos 2t)^{2}}&=\sqrt{\sin^{2}2t+1-2\cos 2t+\cos^{2}2t}\\&=\sqrt{2(1-\cos 2t)}=\sqrt{2\{1-(1-2\sin^{2}t)\}}\\&=\sqrt{4\sin^{2}t}=2|\sin t|\end{aligned}$$

이때, 점 P의 속력이 0이 되는 시각은

$2|\sin t|=0$에서 $|\sin t|=0$ $\quad\therefore t=\pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$

따라서 점 P가 출발 후 처음으로 속력이 0이 되는 시각은 $t=\pi$이므로 시각 $t=0$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi}2|\sin t|dt&=2\int_{0}^{\pi}\sin t\,dt\\&=2\Big[-\cos t\Big]_{0}^{\pi}=2\times 2=4\end{aligned}$$

답 ②

1199

|전략| 곡선 $y=f(x)(a\le x\le b)$의 길이 l은 $l=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\{f'(x)\}^{2}}dx$임을 이용한다.

$y=\frac{1}{2}x^{2}-\frac{\ln x}{4}$에서 $y'=x-\frac{1}{4x}$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}\int_{1}^{e}\sqrt{1+\left(x-\frac{1}{4x}\right)^{2}}dx&=\int_{1}^{e}\sqrt{1+\left(x^{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^{2}}\right)}dx\\&=\int_{1}^{e}\sqrt{x^{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^{2}}}dx\\&=\int_{1}^{e}\sqrt{\left(x+\frac{1}{4x}\right)^{2}}dx\\&=\int_{1}^{e}\left(x+\frac{1}{4x}\right)dx\\&=\left[\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{4}\ln|x|\right]_{1}^{e}=\frac{1}{2}e^{2}-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 ④

1200

$x=2t^{3}+1$, $y=6t^{2}+1$에서 $\frac{dx}{dt}=6t^{2}$, $\frac{dy}{dt}=12t$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_{0}^{\sqrt{5}}\sqrt{(6t^{2})^{2}+(12t)^{2}}dt=\int_{0}^{\sqrt{5}}6t\sqrt{t^{2}+4}dt$$

이때, $t^{2}+4=u$로 놓으면 $2t=\frac{du}{dt}$이고

$t=0$일 때 $u=4$, $t=\sqrt{5}$일 때 $u=9$이므로

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\sqrt{5}}6t\sqrt{t^{2}+4}dt&=\int_{4}^{9}3\sqrt{u}\,du=\left[3\times\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{4}^{9}=\left[2u^{\frac{3}{2}}\right]_{4}^{9}\\&=2(27-8)=38\end{aligned}$$

답 ①

1201

$y=\frac{1}{3}(x^{2}+2)^{\frac{3}{2}}$에서

$y'=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}(x^{2}+2)^{\frac{1}{2}}\times 2x=x\sqrt{x^{2}+2}$

$0\le x\le a$에서 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}\int_{0}^{a}\sqrt{1+(x\sqrt{x^{2}+2})^{2}}dx&=\int_{0}^{a}\sqrt{1+x^{2}(x^{2}+2)}dx\\&=\int_{0}^{a}\sqrt{x^{4}+2x^{2}+1}dx\\&=\int_{0}^{a}\sqrt{(x^{2}+1)^{2}}dx\\&=\int_{0}^{a}(x^{2}+1)dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^{3}+x\right]_{0}^{a}=\frac{1}{3}a^{3}+a\end{aligned}$$

이때, $\frac{1}{3}a^{3}+a=12$이므로

$a^{3}+3a-36=0$, $(a-3)(a^{2}+3a+12)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a^{2}+3a+12>0$) 답 3

STEP 3 내신 마스터

1202

유형 01 정적분과 급수의 합 사이의 관계

|전략| $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\times\frac{p}{n}=\int_{a}^{a+p}f(x)\,dx$임을 이용하여 주어진 식을 정적분으로 나타낸다.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\times\frac{2}{n}&=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}\\&=2\int_{1}^{2}f(x)dx=2\int_{1}^{2}e^{x}dx\\&=2\Big[e^{x}\Big]_{1}^{2}=2(e^{2}-e)\end{aligned}$$

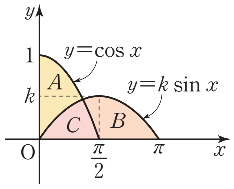
답 ③

1203

유형 03 곡선과 x축 사이의 넓이

|전략| 넓이는 양수이므로 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)\ge 0$이면 $S=\int_{a}^{b}f(x)dx$, $f(x)\le 0$이면 $S=-\int_{a}^{b}f(x)dx$임을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 두 함수 $y=k\sin x$, $y=\cos x$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 C라 하면



$A=B$에서 $A+C=B+C$

(i) $A+C$는 곡선 $y=\cos x$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이이므로

$$A+C=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

(ii) $B+C$는 곡선 $y=k\sin x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이이므로

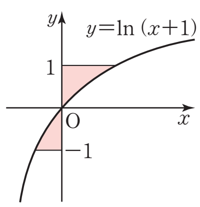
$$B+C=\int_0^{\pi}k\sin x\,dx=k\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=2k$$

(i), (ii)에서 $1=2k$이므로 $k=\frac{1}{2}$ 답 ⑤

1204

유형 04 곡선과 y축 사이의 넓이

|전략| 넓이는 양수이므로 닫힌구간 $[a, b]$에서 $g(y)\ge 0$이면 $S=\int_a^b g(y)dy$, $g(y)\le 0$이면 $S=-\int_a^b g(y)dy$임을 이용한다.



$y=\ln(x+1)$에서 $x+1=e^y$

$\therefore x=e^y-1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{-(e^y-1)\}dy+\int_0^1(e^y-1)dy$$

$$=\Big[-e^y+y\Big]_{-1}^{0}+\Big[e^y-y\Big]_0^1$$

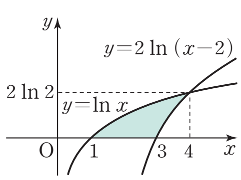
$$=e+\frac{1}{e}-2$$

답 ③

1205

유형 06 두 곡선 사이의 넓이

|전략| 두 곡선의 교점의 y좌표를 구한 후 {(오른쪽 그래프의 식)−(왼쪽 그래프의 식)}의 정적분의 값을 구한다.



$y=\ln x$에서 $x=e^y$

$y=2\ln(x-2)$에서 $x=e^{\frac{1}{2}y}+2$

두 곡선 $x=e^y$, $x=e^{\frac{1}{2}y}+2$의 교점의 y좌표는 $e^y=e^{\frac{1}{2}y}+2$에서

$e^y-e^{\frac{1}{2}y}-2=0$

$(e^{\frac{1}{2}y}-2)(e^{\frac{1}{2}y}+1)=0$

$e^{\frac{1}{2}y}=2$ ($\because e^{\frac{1}{2}y}>0$), $\frac{1}{2}y=\ln 2$

$\therefore y=2\ln 2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{2\ln 2}(e^{\frac{1}{2}y}+2-e^y)dy=\Big[2e^{\frac{1}{2}y}+2y-e^y\Big]_0^{2\ln 2}$$

$$=4\ln 2-1$$

답 ③

다른 풀이 두 곡선 $y=\ln x$, $y=2\ln(x-2)$의 교점의 x좌표는

$\ln x=2\ln(x-2)$에서 $x=(x-2)^2$

$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=4$

이때, $x>0$, $x-2>0$에서 $x>2$이므로 $x=4$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^4\ln x\,dx-\int_3^4 2\ln(x-2)\,dx$$

$$=\Big[x\ln x\Big]_1^4-\int_1^4dx-\left(\Big[2x\ln(x-2)\Big]_3^4-\int_3^4\frac{2x}{x-2}dx\right)$$

$$=4\ln 4-\Big[x\Big]_1^4-8\ln 2+\int_3^4\left(\frac{4}{x-2}+2\right)dx$$

$$=-3+\Big[4\ln(x-2)+2x\Big]_3^4$$

$$=-3+(4\ln 2+8)-6=4\ln 2-1$$

1206

유형 07 넓이의 활용 – 두 도형의 넓이가 같을 때

|전략| 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 곡선 $y=(x^2-a)\sin x$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같고 $0<a<\pi^2$이므로 $\int_0^{\pi}(x^2-a)\sin x\,dx=0$임을 이용한다.

$\int_0^{\pi}(x^2-a)\sin x\,dx=0$에서 $f(x)=x^2-a$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^{\pi}(x^2-a)\sin x\,dx=\Big[-(x^2-a)\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2x(-\cos x)dx$$

$$=\pi^2-2a+\int_0^{\pi}2x\cos x\,dx \quad\cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{\pi}2x\cos x\,dx$에서 $u(x)=2x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=\sin x$이므로

$$\int_0^{\pi}2x\cos x\,dx=\Big[2x\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2\sin x\,dx$$

$$=\Big[2\cos x\Big]_0^{\pi}=-4$$

이것을 ㉠에 대입하면

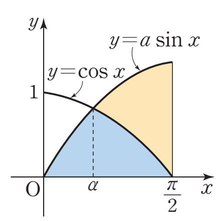
$$\int_0^{\pi}(x^2-a)\sin x\,dx=\pi^2-2a-4$$

따라서 $\pi^2-2a-4=0$이므로 $a=\frac{\pi^2}{2}-2$ 답 ①

1207

유형 08 넓이의 활용 – 넓이를 이등분할 때

|전략| 두 곡선의 교점의 x좌표를 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하고 도형의 넓이를 이용하여 α에 대한 식을 세운다.



오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=a\sin x$, $y=\cos x$의 교점의 x좌표를 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$a\sin\alpha=\cos\alpha$에서

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{a}$, 즉 $\tan\alpha=\frac{1}{a}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 곡선 $y=a\sin x$와 x축 및 직선 $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin x\,dx=\Big[-a\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=a$$

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 두 곡선 $y=a\sin x$, $y=\cos x$와 직선 $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(a\sin x-\cos x)dx=\Big[-a\cos x-\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-1-(-a\cos\alpha-\sin\alpha)=a\cos\alpha+\sin\alpha-1$$

이때, $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$a\cos\alpha+\sin\alpha-1=\frac{a}{2}$ $\quad\therefore a\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{a}{2}+1$

$\cos\alpha\neq0$이므로 양변을 $\cos\alpha$로 나누면

$a+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\left(\frac{a}{2}+1\right)\frac{1}{\cos\alpha}$ $\quad\therefore a+\tan\alpha=\left(\frac{a}{2}+1\right)\sec\alpha$ ...... ㉡

㉠에서 $\sec^2\alpha=\tan^2\alpha+1=\frac{1}{a^2}+1$이므로

$\sec\alpha=\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}\ \left(\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ ...... ㉢

㉠, ㉢을 ㉡에 대입하면

$a+\frac{1}{a}=\left(\frac{a}{2}+1\right)\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}$, $\frac{a^2+1}{a}=\left(\frac{a}{2}+1\right)\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$

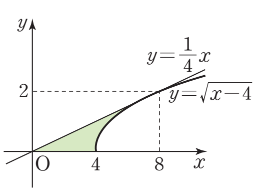
$\sqrt{a^2+1}=\frac{a}{2}+1$, $a^2+1=\frac{a^2}{4}+a+1$, $3a^2-4a=0$

$a(3a-4)=0$ $\quad\therefore a=\frac{4}{3}\ (\because a>0)$ 답 ②

1208

유형 09 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이

|전략| 먼저 원점에서 곡선 $y=\sqrt{x-4}$에 그은 접선의 방정식을 구한다.



$y=\sqrt{x-4}$에서 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-4}}$이므로 곡선 위의 점 $(a, \sqrt{a-4})$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2\sqrt{a-4}}$이고 접선의 방정식은

$y-\sqrt{a-4}=\frac{1}{2\sqrt{a-4}}(x-a)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-\sqrt{a-4}=\frac{-a}{2\sqrt{a-4}}$, $2(a-4)=a$ $\quad\therefore a=8$

즉, 곡선 $y=\sqrt{x-4}$ 위의 점 $(8, 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=\frac{1}{4}(x-8)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{4}x$

따라서 구하는 넓이는

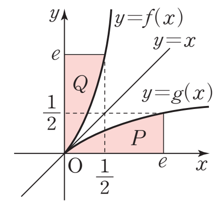
$$\frac{1}{2}\times8\times2-\int_4^8\sqrt{x-4}\,dx=8-\left[\frac{2}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}\right]_4^8$$
$$=8-\frac{16}{3}=\frac{8}{3}$$

답 ③

1209

유형 10 함수와 그 역함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이

|전략| $y=g(x)$는 $y=f(x)$의 역함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.



오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $P=\int_0^e g(x)dx$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=e$로 둘러싸인 도형의 넓이, 즉 Q와 같다.

$\therefore \int_0^e g(x)dx=\frac{1}{2}\times e-\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx=\frac{e}{2}-\int_0^{\frac{1}{2}}2xe^{2x}dx$

이때, $\int_0^{\frac{1}{2}}2xe^{2x}dx$에서 $u(x)=2x$, $v'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$이므로

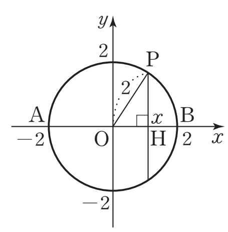
$$\int_0^{\frac{1}{2}}2xe^{2x}dx=\Big[xe^{2x}\Big]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}e^{2x}dx$$
$$=\frac{e}{2}-\frac{1}{2}\Big[e^{2x}\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{e}{2}-\frac{1}{2}(e-1)=\frac{1}{2}$$

$\therefore \frac{e}{2}-\int_0^{\frac{1}{2}}2xe^{2x}dx=\frac{e}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(e-1)$ 답 ②

1210

유형 12 입체도형의 부피 – 단면이 밑면과 수직인 경우

|전략| 닫힌구간 $[a, b]$에서 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 잘랐을 때의 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피는 $\int_a^b S(x)dx$임을 이용한다.



오른쪽 그림과 같이 입체도형의 밑면의 중심이 원점, 지름 AB가 x축이 되도록 밑면을 좌표평면 위에 놓고, 호 AB 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 $H(x, 0)$이라 하면

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{4-x^2}$

점 P를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(2\overline{PH})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{4-x^2})^2=\sqrt{3}(4-x^2)$

따라서 구하는 부피는

$$\int_{-2}^{2}S(x)dx=\int_{-2}^{2}\sqrt{3}(4-x^2)dx$$
$$=2\sqrt{3}\int_0^2(4-x^2)dx$$
$$=2\sqrt{3}\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{32\sqrt{3}}{3}$$

답 ⑤

1211

유형 15 곡선의 길이

|전략| 곡선 $y=f(x)\,(a\le x\le b)$의 길이 l은 $l=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$임을 이용한다.

$y=\frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x})$에서

$y'=\frac{1}{4}(2e^{2x}-2e^{-2x})=\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})$

$-a\le x\le a$에서 곡선의 길이는

$\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\left\{\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})\right\}^2}dx$

$=\int_{-a}^{a}\sqrt{\left\{\frac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2x})\right\}^2}dx$

$=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}(e^{2x}+e^{-2x})dx$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-a}^{a}$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}e^{2a}-\frac{1}{2}e^{-2a}\right)-\left(\frac{1}{2}e^{-2a}-\frac{1}{2}e^{2a}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}(e^{2a}-e^{-2a})$

이때, $\frac{1}{2}(e^{2a}-e^{-2a})=\frac{1}{2}(e^{6}-e^{-6})$이므로

$2a=6\qquad \therefore a=3$

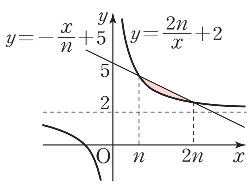
답 ⑤

1212

유형 **05** 곡선과 직선 사이의 넓이

|전략| 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구한 후 {(위쪽 그래프의 식)−(아래쪽 그래프의 식)}의 정적분의 값을 구한다.

곡선 $y=\frac{2n}{x}+2$와 직선 $y=-\frac{x}{n}+5$의 교점의 x좌표는



$\frac{2n}{x}+2=-\frac{x}{n}+5$에서

$2n^2+2nx=-x^2+5nx$

$x^2-3nx+2n^2=0$

$(x-n)(x-2n)=0\qquad \therefore x=n$ 또는 $x=2n$ ··· ❶

$S_n=\int_{n}^{2n}\left\{\left(-\frac{x}{n}+5\right)-\left(\frac{2n}{x}+2\right)\right\}dx$

$=\int_{n}^{2n}\left(-\frac{x}{n}+3-\frac{2n}{x}\right)dx$

$=\left[-\frac{1}{2n}x^2+3x-2n\ln|x|\right]_{n}^{2n}$

$=(4n-2n\ln 2n)-\left(\frac{5}{2}n-2n\ln n\right)$

$=n\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)$ ··· ❷

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)$

$=\frac{3}{2}-2\ln 2$ ··· ❸

답 $\frac{3}{2}-2\ln 2$

채점 기준	배점
❶ 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	1점
❷ S_n을 n에 대한 식으로 간단히 나타낼 수 있다.	3점
❸ $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1}$의 값을 구할 수 있다.	2점

1213

유형 **14** 평면 위를 움직이는 점이 움직인 거리

|전략| 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는 $s=\int_{a}^{b}\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}dt$임을 이용한다.

$x=t^2-2\ln t$, $y=4t$에서

$\frac{dx}{dt}=2t-\frac{2}{t}$, $\frac{dy}{dt}=4$

점 P의 시각 t초에서의 속력은

$\sqrt{\left(2t-\frac{2}{t}\right)^2+4^2}=\sqrt{\left(2t+\frac{2}{t}\right)^2}=2t+\frac{2}{t}\ (\because t>0)$ ··· ❶

$t>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2t+\frac{2}{t}\ge 2\sqrt{2t\times\frac{2}{t}}=4\left(\text{단, 등호는 } 2t=\frac{2}{t}\text{, 즉 } t=1\text{일 때 성립}\right)$

즉, $t=1$일 때 점 P의 속력이 최소가 된다. ··· ❷

따라서 $t=1$일 때부터 3초 동안, 즉 4초까지 움직인 거리는

$\int_{1}^{4}\left(2t+\frac{2}{t}\right)dt=\left[t^2+2\ln t\right]_{1}^{4}$

$=(16+2\ln 4)-1=15+4\ln 2$ ··· ❸

답 $15+4\ln 2$

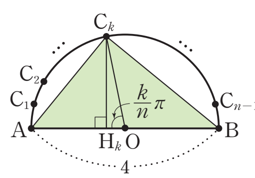
채점 기준	배점
❶ 점 P의 시각 t초에서의 속력을 구할 수 있다.	2점
❷ 점 P의 속력이 최소일 때의 시각을 구할 수 있다.	2점
❸ 점 P의 속력이 최소일 때부터 3초 동안 움직인 거리를 구할 수 있다.	3점

1214

유형 **02** 정적분과 급수의 활용

|전략| 주어진 급수를 $\frac{k}{n}$를 포함한 식으로 나타낸 다음 정적분으로 변형하여 그 값을 구한다.

(1) 반원의 중심을 O, 점 C_k에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H_k라 하면 $\angle AOC_k=\frac{k}{n}\pi$, $\overline{OC_k}=2$이므로 $\overline{C_kH_k}=2\sin\frac{k}{n}\pi$



$\therefore S_k=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sin\frac{k}{n}\pi=4\sin\frac{k}{n}\pi$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}4\sin\frac{k}{n}\pi$

$=\frac{4}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k}{n}\pi\times\frac{\pi}{n}$

$=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx$

$=\frac{4}{\pi}\left[-\cos x\right]_{0}^{\pi}=\frac{8}{\pi}$

답 (1) $4\sin\frac{k}{n}\pi$ (2) $\frac{8}{\pi}$

채점 기준	배점
(1) S_k를 사인함수로 나타낼 수 있다.	6점
(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k$의 값을 구할 수 있다.	6점

창의·융합 교과서 속 심화문제

1215

|전략| 각 함수의 대칭성을 파악하고 각각의 급수의 합을 정적분의 형태로 변형한다.

조건 ㈎에서 $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$이므로 $f(x)$는 우함수, $g(x)$는 기함수이다.

조건 ㈏에서

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx=3$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\times\frac{2}{n}=\int_1^3 f(x)dx=7$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g\left(1+\frac{2k}{n}\right)\times\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g\left(1+\frac{2k}{n}\right)\times\frac{2}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3 g(x)dx=8$$

$$\therefore \int_1^3 g(x)dx=16$$

$$\therefore \int_{-1}^3 \{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx-\int_{-1}^1 g(x)dx-\int_1^3 g(x)dx$$

$$=2\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx-\int_1^3 g(x)dx$$

$$=2\times3+7-16=-3$$

답 -3

1216

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 유추하여 조건을 만족시키는 k의 값을 찾고, 함수의 그래프와 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

$f(x)=x+2\sin x$에서

$f(2\pi-x)=2\pi-x+2\sin(2\pi-x)=2\pi-x-2\sin x$

$\therefore f(x)+f(2\pi-x)=2\pi$

이때, $x=\pi+t$로 놓으면

$f(\pi+t)+f(\pi-t)=2\pi$

$\therefore \dfrac{f(\pi+t)+f(\pi-t)}{2}=\pi \ (-\pi\le t\le\pi)$

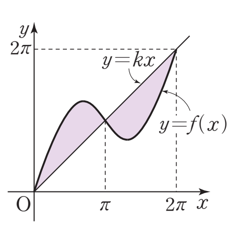
즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 (π, π)에 대하여 대칭이다.

$f'(x)=0$에서 $1+2\cos x=0$

$\cos x=-\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)$	↘	$f\left(\frac{4}{3}\pi\right)$	↗	2π

함수 $f(x)=x+2\sin x$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같고, 함수 $f(x)=x+2\sin x$의 그래프와 원점을 지나는 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나고 이 세 점의 x좌표들이 등차수열을 이루기 위해서는 $k=1$이어야 한다.



이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 0, π, 2π이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^{2\pi}|(x+2\sin x)-x|dx=\int_0^{2\pi}|2\sin x|dx$$

$$=\int_0^{\pi}2\sin x dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-2\sin x)dx$$

$$=4\int_0^{\pi}\sin x dx=4\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$

$$=4\times2=8$$

따라서 $k=1$, $A=8$이므로 $k+A=9$

답 9

1217

|전략| 주어진 곡선과 직선을 각각 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동하여 식을 간단히 한 후 입체도형의 부피를 구한다.

곡선 $y=\sqrt{4x-4}$와 두 직선 $y=x-1$, $y=2x-2$를 각각 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{4(x+1)-4}=2\sqrt{x}$, $y=(x+1)-1=x$,

$y=2(x+1)-2=2x$

오른쪽 그림에서 곡선 $y=2\sqrt{x}$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $2\sqrt{x}=x$에서

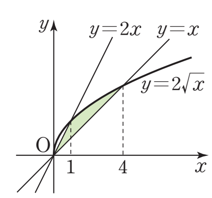
$4x=x^2$, $x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

곡선 $y=2\sqrt{x}$와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는 $2\sqrt{x}=2x$에서

$x=x^2$, $x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$



따라서 입체도형의 단면은 닫힌구간 $[0, 1]$에서 한 변의 길이가 $2x-x=x$인 정삼각형이고, 닫힌구간 $[1, 4]$에서 한 변의 길이가 $2\sqrt{x}-x$인 정삼각형이므로 각각의 단면의 넓이를 $S_1(x)$, $S_2(x)$라 하면

$S_1(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$, $S_2(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{x}-x)^2$

입체도형의 부피는

$$\int_0^1 S_1(x)dx+\int_1^4 S_2(x)dx$$

$$=\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{4}x^2dx+\int_1^4\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{x}-x)^2dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{12}\Big[x^3\Big]_0^1+\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^4(4x-4x\sqrt{x}+x^2)dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{\sqrt{3}}{4}\left[2x^2-\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}x^3\right]_1^4$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{7}{5}=\frac{13}{30}\sqrt{3}$$

따라서 $p=30$, $q=13$이므로 $p+q=43$

답 43

1218

|전략| 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는 $s=\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$임을 이용한다.

$x=(1-t^2)\cos t$, $y=(1-t^2)\sin t$에서

$\dfrac{dx}{dt}=-2t\cos t-(1-t^2)\sin t$

$\dfrac{dy}{dt}=-2t\sin t+(1-t^2)\cos t$

시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^k\sqrt{\{-2t\cos t-(1-t^2)\sin t\}^2+\{-2t\sin t+(1-t^2)\cos t\}^2}\,dt$

$=\int_0^k\sqrt{4t^2+(1-t^2)^2}\,dt=\int_0^k\sqrt{(t^2+1)^2}\,dt$

$=\int_0^k(t^2+1)\,dt=\left[\dfrac{1}{3}t^3+t\right]_0^k=\dfrac{k^3}{3}+k$

이때, 움직인 거리가 자연수가 되기 위해서는 k^3이 3의 배수이어야 한다.

따라서 이를 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 3이므로 $a=3$이고, 그때의 움직인 거리는

$b=\dfrac{3^3}{3}+3=12$

$\therefore a+b=15$ 답 15

1219

|전략| 주어진 정적분 식의 기하적 의미를 파악한다.

$\int_0^3\sqrt{\{1+f'(x)\}^2-2f'(x)}\,dx=5$에서

$\int_0^3\sqrt{\{1+f'(x)\}^2-2f'(x)}\,dx=\int_0^3\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$이므로

$0\le x\le 3$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이는 5이다.

이때, 두 점 $(0, 0)$, $(3, k)$를 지나는 곡선 중에서 길이가 5이면서 k의 값이 최대가 되는 경우는 두 점을 직선으로 연결한 선분인 경우이다.

$\sqrt{3^2+k^2}=5$에서 $k^2=16$ $\therefore k=4$ ($\because$ k는 최대)

즉, 함수 $g(x)$의 식은 두 점 $(0, 0)$, $(3, 4)$를 지나는 직선의 방정식이므로

$g(x)=\dfrac{4}{3}x$

$\therefore \int_0^k e^{g(x)}\,dx=\int_0^4 e^{\frac{4}{3}x}\,dx=\left[\dfrac{3}{4}e^{\frac{4}{3}x}\right]_0^4=\dfrac{3}{4}\left(e^{\frac{16}{3}}-1\right)$ 답 ①

10 정적분의 활용

Memo

Memo

Memo