정답과 풀이

4주 전

학교시험에 꼭 나오는 교과서 문제

● 1일차 본문 10~13쪽

01-1 1	01-2 -2	02-1 2	02-2 -2
03-1 ③	03-2 ④	03-3 ③	03-4 ①
04-1 ①	04-2 ④	05-1 ⑤	05-2 ③
06-1 ①	06-2 ②	07-1 ⑤	07-2 ②

01-1 $\lim_{x\to 0-} f(x)=1$, $\lim_{x\to 1+} f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=1+0=1$

01-2 $\lim_{x\to 1+} f(x)=-1$

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to 1+} f(x)-\lim_{x\to 0} f(x)=-1-1=-2$

02-1 $\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-} (x+a)=2+a$

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+} 4=4$

이때 $\lim_{x\to 2} f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)$

따라서 $2+a=4$이므로 $a=2$

Lecture 함수의 극한값의 존재

좌극한과 우극한을 각각 구했을 때

(1) (좌극한)$=$(우극한) ⇨ 극한값이 존재한다.

(2) (좌극한)$\neq$(우극한) ⇨ 극한값이 존재하지 않는다.

02-2 $\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-} (-x+1)=2$

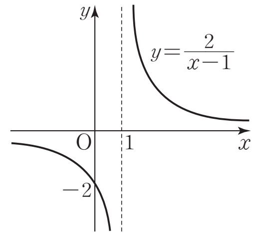
$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+} kx=-k$

이때 $\lim_{x\to -1} f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1+} f(x)$

따라서 $2=-k$이므로 $k=-2$

03-1 ③ 함수 $y=\dfrac{2}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, y의 값은 한없이 커지거나 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 함수 $y=\dfrac{2}{x-1}$는 $x=1$에서 발산한다.



03-2 ④ $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$라 하면 $f(x)=\begin{cases} 1 & (x>0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$이므로 $\lim_{x\to 0-} f(x)=-1$, $\lim_{x\to 0+} f(x)=1$

즉 $x=0$에서 좌극한과 우극한의 값이 서로 다르므로 함수 $y=\dfrac{x}{|x|}$는 $x=0$에서 발산한다.

오답 피하기

$y=\dfrac{x}{|x|}$에 대하여

$x>0$이면 $|x|=x$이므로 $y=\dfrac{x}{|x|}=\dfrac{x}{x}=1$

$x<0$이면 $|x|=-x$이므로 $y=\dfrac{x}{|x|}=\dfrac{x}{-x}=-1$

$\therefore y=\begin{cases} 1 & (x>0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$

03-3 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 발산하려면 $x=0$에서 극한값이 존재하지 않아야 한다.

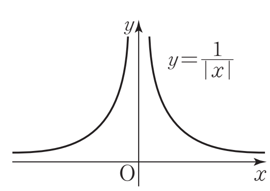
$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-} (-x+a)=a$,

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+} x=0$

이때 좌극한과 우극한의 값이 서로 달라야 하므로 $a\neq 0$

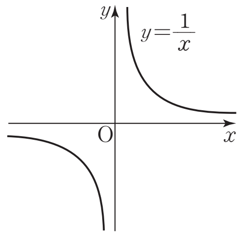
따라서 a의 값으로 적당하지 않은 것은 ③이다.

03-4 ① 함수 $y=\dfrac{1}{|x|}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $\lim_{x\to 0-} \dfrac{1}{|x|}=\infty$



② $\lim_{x \to 0-} |x| = 0$

③ 함수 $y = \frac{1}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$

④ $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x+1} = 1$

⑤ $f(x) = \begin{cases} 2 & (x > 0) \\ -2 & (x < 0) \end{cases}$이므로

$\lim_{x \to 0-} \frac{2x}{|x|} = -2$

따라서 $\lim_{x \to 0-} f(x) = \infty$인 것은 ①이다.

04-1 $\lim_{x \to -1} (2x^2 + 4x - 2)$

$= 2\lim_{x \to -1} x^2 + 4\lim_{x \to -1} x - \lim_{x \to -1} 2$

$= 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 2$

$= -4$

04-2 $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+6}{3x-4} = \frac{\lim_{x \to 2}(x^2+6)}{\lim_{x \to 2}(3x-4)} = \frac{2^2+6}{3 \cdot 2 - 4}$

$= \frac{10}{2} = 5$

05-1 $\lim_{x \to 1} \{3f(x)g(x) - 2f(x)\}$

$= \lim_{x \to 1} 3f(x)g(x) - \lim_{x \to 1} 2f(x)$

$= 3\lim_{x \to 1} f(x) \cdot \lim_{x \to 1} g(x) - 2\lim_{x \to 1} f(x)$

$= 3 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2$

$= 14$

다른 풀이

$\lim_{x \to 1} \{3f(x)g(x) - 2f(x)\}$

$= \lim_{x \to 1} f(x)\{3g(x) - 2\}$

$= \lim_{x \to 1} f(x) \cdot \lim_{x \to 1} \{3g(x) - 2\}$

$= \lim_{x \to 1} f(x) \cdot \{3\lim_{x \to 1} g(x) - 2\}$

$= 2(3 \cdot 3 - 2)$

$= 14$

05-2 $\lim_{x \to 2} \left\{5g(x) - \frac{f(x)}{g(x)}\right\}$

$= \lim_{x \to 2} 5g(x) - \lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

$= 5\lim_{x \to 2} g(x) - \frac{\lim_{x \to 2} f(x)}{\lim_{x \to 2} g(x)}$

$= 5 \cdot 2 - \frac{4}{2}$

$= 8$

쌍둥이 문제

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x \to -2} f(x) = 6$, $\lim_{x \to -2} g(x) = 3$일 때,

$\lim_{x \to -2} \{f(x)g(x) - 8g(x)\}$의 값은?

① -10 ② -6 ③ -2

④ 2 ⑤ 6

[풀이]

$\lim_{x \to -2} \{f(x)g(x) - 8g(x)\}$

$= \lim_{x \to -2} f(x)g(x) - \lim_{x \to -2} 8g(x)$

$= \lim_{x \to -2} f(x) \cdot \lim_{x \to -2} g(x) - 8\lim_{x \to -2} g(x)$

$= 6 \cdot 3 - 8 \cdot 3 = -6$

답 ②

06-1 $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-3)}{x+2}$

$= \lim_{x \to -2} (x-3)$

$= -2 - 3$

$= -5$

06-2 $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - 2}$

$= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$

$= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1)-4}$

$= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$

$= \lim_{x \to 3} (\sqrt{x+1}+2)$

$= \sqrt{4} + 2$

$= 4$

쌍둥이 문제

$\lim_{x\to-2}\frac{x^4-4x^2}{x^2-4x-12}$의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

[풀이]

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^4-4x^2}{x^2-4x-12}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2(x-2)(x+2)}{(x-6)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{x^2(x-2)}{x-6}$$
$$=\frac{4\cdot(-4)}{-8}=2$$

답 ②

07-1 $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-x+1}{3x^2+x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{5}{3}$

07-2 $\lim_{x\to\infty}\frac{-3+5x-4x^2}{1+2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x}-4}{\frac{1}{x^2}+2}$

$=\frac{-4}{2}=-2$

● 2일차 본문 14~17쪽

01-1 ④	01-2 ⑤	02-1 ④	02-2 ⑤
02-3 ②	02-4 ①	03-1 ②	03-2 ④
03-3 ④	03-4 ②	04-1 ④	04-2 ①

01-1 (i) $\lim_{x\to-1-}f(x)=0$, $\lim_{x\to-1+}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)\neq\lim_{x\to-1+}f(x)$

즉 $\lim_{x\to-1}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $\lim_{x\to0-}f(x)=1$, $\lim_{x\to0+}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=1$

즉 $\lim_{x\to0}f(x)$가 존재한다.

이때 $f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(iii) $\lim_{x\to1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to1+}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)\neq\lim_{x\to1+}f(x)$

즉 $\lim_{x\to1}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(i)~(iii)에서 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 $x=-1$, $x=1$로 그 개수는 2이고, 불연속인 x의 값은 $x=-1$, $x=0$, $x=1$로 그 개수는 3이다.

따라서 $m=2$, $n=3$이므로

$m+n=2+3=5$

01-2 (i) $\lim_{x\to1-}f(x)=2$, $\lim_{x\to1+}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=2$

이때 $f(1)=1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(ii) $\lim_{x\to2-}f(x)=1$, $\lim_{x\to2+}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to2-}f(x)\neq\lim_{x\to2+}f(x)$

즉 $\lim_{x\to2}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(iii) $\lim_{x\to3-}f(x)=2$, $\lim_{x\to3+}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to3-}f(x)\neq\lim_{x\to3+}f(x)$

즉 $\lim_{x\to3}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

(i)~(iii)에서 불연속인 x의 값은 $x=1$, $x=2$, $x=3$이므로 모든 a의 값의 합은

$1+2+3=6$

02-1 $-2x+4\geq0$에서 $-2x\geq-4$ $\quad\therefore x\leq2$

따라서 함수 $f(x)=-\sqrt{-2x+4}+1$의 정의역은 $\{x\,|\,x\leq2\}$이므로 $(-\infty, 2]$이다.

오답 피하기

무리함수의 정의역은 (근호 안의 식의 값)≥0인 실수 전체의 집합으로 생각한다.

02-2 함수 $f(x)=\frac{x}{x-4}$의 정의역은 $x-4\neq0$, 즉 $x\neq4$인 모든 실수이므로
$(-\infty, 4)\cup(4, \infty)$

오답 피하기

유리함수의 정의역은 분모가 0이 아닌 실수 전체의 집합으로 생각한다.

02-3 함수 $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-2}$의 정의역은 $x-2\neq0$, 즉 $x\neq2$인 모든 실수이므로
$(-\infty, 2)\cup(2, \infty)$

02-4 $-x^2+5x+14\geq0$에서 $x^2-5x-14\leq0$
$(x+2)(x-7)\leq0 \quad \therefore -2\leq x\leq7$
즉 함수 $f(x)=\sqrt{-x^2+5x+14}$의 정의역은 $\{x|-2\leq x\leq7\}$이므로 $[-2, 7]$
따라서 $a=-2$, $b=7$이므로
$2a+b=-4+7=3$

03-1 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.
즉 $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$이므로
$\lim_{x\to1-}(x^2-1)=\lim_{x\to1+}(-2x+a)=f(1)$
$-2+a=0 \quad \therefore a=2$

Lecture 함수가 연속일 조건 (1)

두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 연속함수일 때,
함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\geq a) \\ h(x) & (x<a)\end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속이려면
$\Rightarrow \lim_{x\to a-}h(x)=\lim_{x\to a+}g(x)=f(a)$

03-2 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로
$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$
즉 $\lim_{x\to2-}(-x^2+ax)=\lim_{x\to2+}(3x-4)=f(2)$이므로 $-4+2a=2 \quad \therefore a=3$

03-3 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=2$에서 연속이다.
즉 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$이므로 $\lim_{x\to2}\frac{x^2+3x-10}{x-2}=a$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{x^2+3x-10}{x-2}&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+5)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}(x+5)\\&=7\end{aligned}$$

$\therefore a=7$

Lecture 함수가 연속일 조건 (2)

함수 $g(x)$가 $x\neq a$인 모든 실수 x에서 연속일 때,
함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\neq a) \\ k & (x=a)\end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속이려면
$\Rightarrow \lim_{x\to a}g(x)=k$

03-4 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이므로 $x=3$에서 연속이다.
즉 $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$이므로 $\lim_{x\to3}\frac{x^2+2x-15}{x-3}=a$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\frac{x^2+2x-15}{x-3}&=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+5)}{x-3}\\&=\lim_{x\to3}(x+5)\\&=8\end{aligned}$$

$\therefore a=8$

쌍둥이 문제

함수 $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & (x\neq1) \\ a & (x=1)\end{cases}$가 $x\geq-3$인 모든 실수 x에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[풀이]

함수 $f(x)$가 $x\geq-3$인 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=a$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

답 ④

04-1 함수 $f(x)=x^3-x-3$은 모든 실수 x에서 연속이다.

① $f(-3)f(-2)=-27\cdot(-9)>0$
② $f(-1)f(0)=-3\cdot(-3)>0$
③ $f(0)f(1)=-3\cdot(-3)>0$
④ $f(1)f(2)=-3\cdot3<0$이므로 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
⑤ $f(2)f(3)=3\cdot21>0$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 적어도 하나 존재하는 구간은 ④이다.

Lecture 사잇값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

04-2 $f(x)=x^3-3x+4$라 하면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

① $f(-3)f(-2)=-14\cdot2<0$이므로 열린구간 $(-3, -2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
② $f(-2)f(-1)=2\cdot6>0$
③ $f(-1)f(0)=6\cdot4>0$
④ $f(0)f(1)=4\cdot2>0$
⑤ $f(1)f(2)=2\cdot6>0$

따라서 방정식 $x^3-3x+4=0$의 실근이 존재하는 구간은 ①이다.

3일차

본문 18~21쪽

01-1 ②	01-2 ②	01-3 ④	01-4 ②
02-1 ⑤	02-2 ①	03-1 ⑤	03-2 ④
04-1 ②	04-2 ③	05-1 ①	05-2 ③
06-1 ③	06-2 ④	07-1 ③	07-2 ㄴ, ㄹ

01-1 x의 값이 2에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}\\&=\frac{-1-1}{1}\\&=-2\end{aligned}$$

01-2 x의 값이 -1에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}\\&=\frac{-8-(-5)}{3}\\&=-1\end{aligned}$$

01-3 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{(3a^2-2a)-0}{a}\\&=3a-2\end{aligned}$$

이때 평균변화율이 4이므로 $3a-2=4$

$3a=6$ $\therefore a=2$

01-4 x의 값이 1에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{(a^2+2a)-3}{a-1}\\&=\frac{a^2+2a-3}{a-1}=\frac{(a-1)(a+3)}{a-1}\\&=a+3\end{aligned}$$

이때 평균변화율이 6이므로

$a+3=6$ $\therefore a=3$

02-1 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{-2(1+\Delta x)^2+1\}-(-1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-2(\Delta x)^2-4\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-2\Delta x-4)$

$=-4$

02-2 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{3(2+h)^2+2(2+h)+2\}-18}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h^2+14h}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}(3h+14)$

$=14$

03-1 함수 $f(x)=x^2-3x$에 대하여 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{0-(-2)}{2}=1$

$x=c$에서의 미분계수 $f'(c)$는

$f'(c)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{(c+h)^2-3(c+h)\}-(c^2-3c)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2+(2c-3)h}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}(h+2c-3)$

$=2c-3$

즉 $1=2c-3$이므로

$4=2c \qquad \therefore c=2$

03-2 함수 $f(x)=2x^2+1$에 대하여 x의 값이 1에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a)-f(1)}{a-1}=\dfrac{(2a^2+1)-3}{a-1}$

$=\dfrac{2a^2-2}{a-1}=\dfrac{2(a+1)(a-1)}{a-1}$

$=2a+2$

$x=3$에서의 미분계수 $f'(3)$은

$f'(3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{2(3+h)^2+1\}-19}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h^2+12h}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}(2h+12)$

$=12$

즉 $2a+2=12$이므로

$2a=10 \qquad \therefore a=5$

04-1 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$이므로

$f'(2)=-1$

따라서 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=-1$

04-2 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 $x=-1$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)$이므로 $f'(-1)=4$

$\therefore \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1)=4$

05-1 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot 2$

$=2f'(1)$

이므로 $2f'(1)=6 \qquad \therefore f'(1)=3$

즉 구하는 접선의 방정식은 기울기가 3이고 점 $(1, 2)$를 지나므로 $y-2=3(x-1)$

$\therefore y=3x-1$

Lecture 직선의 방정식

(1) 기울기가 m이고 y절편이 n인 직선의 방정식

⇨ $y=mx+n$

(2) 점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식

⇨ $y-y_1=m(x-x_1)$

(3) 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식

⇨ $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

05-2 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 $x=2$인 점에서의 접선 $y=3x-1$의 기울기가 3이므로 $f'(2)=3$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\cdot3$$
$$=3f'(2)=3\cdot3=9$$

쌍둥이 문제

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 -2일 때,

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2
④ 2 ⑤ 4

[풀이]

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 -2이므로 $f'(1)=-2$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot2$$
$$=2f'(1)=2\cdot(-2)=-4$$

답 ②

06-1 주어진 그래프에서 미분가능하지 않은 점은 꺾인 점인 $x=0$일 때와 불연속인 점인 $x=2$일 때이다.
따라서 연속이지만 미분가능하지 않은 점은 $x=0$일 때이므로 $a=0$

Lecture 그래프에서 미분가능성과 연속성

함수 $y=f(x)$의 그래프에 대하여

(1) $x=a$에서 불연속인 경우: $x=a$에서 연결되어 있지 않고 끊어져 있는 경우

(2) $x=a$에서 미분가능하지 않은 경우
① $x=a$에서 불연속인 경우
② $x=a$에서 그래프가 꺾인 경우

06-2 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 불연속인 점은 그래프가 연결되어 있지 않고 끊어져 있는 경우이므로 $x=2$일 때이다.

$\therefore a=2$

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 연속이지만 미분가능하지 않은 점은 그래프가 꺾인 경우이므로 $x=1$일 때이다.

$\therefore b=1$

$\therefore a-b=2-1=1$

07-1 ① $f(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이므로 $f(0)$의 값이 존재하지 않는다. 즉 $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

② $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x|x|-0}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}|x|=0$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

③ $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$이므로 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

④ $f(x)=|x|^2=x^2$이므로 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

⑤ $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2|x|-0}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}x|x|=0$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ③이다.

07-2 ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+1)-(-1)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{x+2}=1$$

이므로 $f'(-2)=1$

즉 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 미분가능하다.

ㄴ. $f(x)=\begin{cases} x+2 & (x\ge -2) \\ -x-2 & (x<-2) \end{cases}$이므로

$$\lim_{x\to -2-}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$$
$$=\lim_{x\to -2-}\frac{(-x-2)-0}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2-}\frac{-(x+2)}{x+2}$$
$$=-1$$

$$\lim_{x\to -2+}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2+}\frac{(x+2)-0}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2+}\frac{x+2}{x+2}$$
$$=1$$

즉 $f'(-2)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x^2+4)-8}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2}(x-2)$$
$$=-4$$

이므로 $f'(-2)=-4$

즉 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 미분가능하다.

ㄹ. $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & (x<-2 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -x^2+4 & (-2\le x<2) \end{cases}$이므로

$$\lim_{x\to -2-}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$$
$$=\lim_{x\to -2-}\frac{(x^2-4)-0}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2-}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2-}(x-2)$$
$$=-4$$

$$\lim_{x\to -2+}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$$
$$=\lim_{x\to -2+}\frac{(-x^2+4)-0}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2+}\frac{-(x+2)(x-2)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2+}\{-(x-2)\}$$
$$=4$$

즉 $f'(-2)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 미분가능하지 않다.

따라서 $x=-2$에서 미분가능하지 않은 함수는 ㄴ, ㄹ이다.

● 4일차

본문 22~25쪽

01-1 (가) $f(x+h)-f(x)$ (나) $2x+h$ (다) $2x$

01-2 (가) $f(x+h)$ (나) $-4x+3$ (다) $-4x+3$

02-1 ⑤	02-2 ⑤	02-3 ⑤	02-4 ②
03-1 ②	03-2 ③	03-3 ③	03-4 ④
04-1 ①	04-2 ④	04-3 ①	04-4 ②

01-1 $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{(가)\ f(x+h)-f(x)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(\boxed{(나)\ 2x+h})$$
$$=\boxed{(다)\ 2x}$$

∴ (가) $f(x+h)-f(x)$ (나) $2x+h$ (다) $2x$

01-2 $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{(가)\ f(x+h)}-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{-2(x+h)^2+3(x+h)\}-(-2x^2+3x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2h^2+(\boxed{(나)\ -4x+3})h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(-2h-4x+3)$$
$$=\boxed{(다)\ -4x+3}$$

∴ (가) $f(x+h)$ (나) $-4x+3$ (다) $-4x+3$

02-1 ⑤ $f(x)=10$에서 $f'(x)=0$

02-2 $f'(x)=nx^{n-1}$이므로 $n=7$

02-3 $f(1)=1^5=1$

$f'(x)=5x^{5-1}=5x^4$이므로

$f'(-1)=5$
$\therefore f(1)+f'(-1)=1+5=6$

02-4 $f'(x)=nx^{n-1}$이므로 $f'(1)=n\cdot 1^{n-1}=n$
$\therefore n=6$
즉 $f'(x)=6x^{6-1}=6x^5$이므로
$f'(2)=6\cdot 32=192$

03-1 $f'(x)=-x^2+x+1$이므로
$f'(1)=-1+1+1=1$

03-2 $f(-1)=-1+2+3=4$
$f'(x)=3x^2-2$이므로 $f'(2)=12-2=10$
$\therefore f(-1)-f'(2)=4-10=-6$

03-3 $f'(x)=6x^2-a$이므로 $f'(-1)=6-a$
즉 $6-a=10$이므로 $a=-4$

쌍둥이 문제

함수 $f(x)=x^3-ax^2+5x-4$에 대하여 $f'(2)=9$일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[풀이]
$f'(x)=3x^2-2ax+5$이므로
$f'(2)=12-4a+5=-4a+17$
즉 $-4a+17=9$이므로 $-4a=-8$
$\therefore a=2$

답 ⑤

03-4 $f(-2)=-32+8a-2b=-24$이므로
$8a-2b=8$ $\therefore 4a-b=4$ …… ㉠
$f'(x)=5x^4-3ax^2+b$이므로
$f'(1)=5-3a+b=3$
$\therefore -3a+b=-2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$
$\therefore a+b=2+4=6$

04-1 $f'(x)=(x+1)'(x^2+2)+(x+1)(x^2+2)'$
$=x^2+2+(x+1)\cdot 2x$
$=x^2+2+2x^2+2x$
$=3x^2+2x+2$
$\therefore f'(-2)=12-4+2=10$

04-2 $f'(x)=(x+2)'(x^2-5x-3)$
$+(x+2)(x^2-5x-3)'$
$=x^2-5x-3+(x+2)(2x-5)$
$=x^2-5x-3+2x^2-x-10$
$=3x^2-6x-13$
따라서 $x=1$에서의 미분계수는
$f'(1)=3-6-13=-16$

04-3 $f'(x)=(-x+a)'(2x^2-1)$
$+(-x+a)(2x^2-1)'$
$=-1\cdot(2x^2-1)+(-x+a)\cdot 4x$
$=-2x^2+1-4x^2+4ax$
$=-6x^2+4ax+1$
$\therefore f'(-2)=-24-8a+1=-8a-23$
즉 $-8a-23=-7$이므로 $-8a=16$
$\therefore a=-2$

쌍둥이 문제

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $g(x)=x^2f(x)-4$이고 $f(2)=-5$, $f'(2)=4$일 때, $g'(2)$의 값을 구하시오.

[풀이]
$g'(x)=(x^2)'f(x)+x^2f'(x)$
$=2xf(x)+x^2f'(x)$
$\therefore g'(2)=4f(2)+4f'(2)=4\cdot(-5)+4\cdot 4$
$=-20+16=-4$

답 -4

04-4 $f'(x)=(x^3+2)'(ax^2-3x)$
$+(x^3+2)(ax^2-3x)'$
$=3x^2(ax^2-3x)+(x^3+2)(2ax-3)$
$\therefore f'(1)=3(a-3)+3(2a-3)=9a-18$
즉 $9a-18=0$이므로 $a=2$

5일차

본문 26~29쪽

01-1 ②	01-2 ③	02-1 ④	02-2 ③
03-1 ①	03-2 ③	03-3 ②	03-4 ①
04-1 $y=4x-4$		04-2 8	04-3 ①
04-4 ⑤	05-1 ③	05-2 ①	06-1 ②
06-2 ③			

01-1 $f(x)=ax^3-x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=3ax^2-2x$
이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(1)=4$
즉 $3a-2=4$이므로 $3a=6$
$\therefore a=2$

01-2 $f(x)=x^3+kx+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+k$
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1, a)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(1)=2$
즉 $3+k=2$이므로 $k=-1$
따라서 $f(x)=x^3-x+1$이므로
$f(1)=1-1+1=1 \qquad \therefore a=1$
$\therefore a+k=1+(-1)=0$

02-1 $f'(x)=3x^2+1$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3+1=4$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-(-2)=4\{x-(-1)\}$
$\therefore y=4x+2$

02-2 $f'(x)=2x+2$
곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=-2$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=-4+2=-2$
이때 $f(x)=x^2+2x+3$에 $x=-2$를 대입하면
$f(-2)=4-4+3=3$
따라서 구하는 접선의 방정식은 기울기가 -2이고 점 $(-2, 3)$을 지나므로
$y-3=-2\{x-(-2)\}$
$\therefore y=-2x-1$

03-1 $f(x)=2x^2-x-1$로 놓으면 $f'(x)=4x-1$
접점의 좌표를 $(a, 2a^2-a-1)$이라 하면 접선의 기울기가 3이므로 $f'(a)=4a-1=3$
$\therefore a=1$
즉 접점의 좌표가 $(1, 0)$이므로 구하는 직선의 방정식은 $y-0=3(x-1)$
$\therefore y=3x-3$
따라서 구하는 직선의 y절편은 -3이다.

03-2 $f'(x)=3x^2-6x$
접점의 좌표를 (a, a^3-3a^2)이라 하면 접선의 기울기가 -3이므로 $f'(a)=3a^2-6a=-3$
$3a^2-6a+3=0$, $a^2-2a+1=0$
$(a-1)^2=0 \qquad \therefore a=1$
즉 접점의 좌표가 $(1, -2)$이므로 구하는 직선의 방정식은 $y-(-2)=-3(x-1)$
$\therefore y=-3x+1$
$\therefore k=1$

03-3 $x-2y+3=0$에서 $-2y=-x-3$
$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \qquad \cdots\cdots$ ㉠
구하는 직선이 직선 ㉠에 수직이므로 직선의 기울기는 -2이다.
$f(x)=x^2+4x+5$로 놓으면 $f'(x)=2x+4$
접점의 좌표를 (a, a^2+4a+5)라 하면 접선의 기울기가 -2이므로
$f'(a)=2a+4=-2 \qquad \therefore a=-3$

즉 접점의 좌표가 $(-3, 2)$이므로 구하는 직선의 방정식은 $y-2=-2\{x-(-3)\}$

$\therefore y=-2x-4$

따라서 구하는 직선의 y절편은 -4이다.

03-4 직선 $y=-2x$에 평행하므로 구하는 직선의 기울기는 -2이다.

$f(x)=x^2+2x$로 놓으면

$f'(x)=2x+2$

접점의 좌표를 (a, a^2+2a)라 하면 접선의 기울기가 -2이므로 $f'(a)=2a+2=-2$

$\therefore a=-2$

즉 접점의 좌표가 $(-2, 0)$이므로 구하는 직선의 방정식은 $y-0=-2\{x-(-2)\}$

$\therefore y=-2x-4$

따라서 직선 $y=-2x-4$가 점 $(2, k)$를 지나므로

$k=-4-4=-8$

04-1 $f(x)=x^2$으로 놓으면

$f'(x)=2x$

접점의 좌표를 (a, a^2)이라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=2a$

즉 접선의 방정식은 $y-a^2=2a(x-a)$

$\therefore y=2ax-a^2$ ······ ㉠

이때 이 접선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$0=-a^2+2a$, $a^2-2a=0$

$a(a-2)=0$ $\therefore a=2$ $(\because a>0)$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=4x-4$

04-2 $f(x)=-x^2+4x-4$로 놓으면

$f'(x)=-2x+4$

접점의 좌표를 $(a, -a^2+4a-4)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=-2a+4$ ······ ㉠

즉 접선의 방정식은

$y-(-a^2+4a-4)=(-2a+4)(x-a)$

$\therefore y=(-2a+4)x+a^2-4$

이때 이 접선이 원점을 지나므로

$0=a^2-4$, $a^2=4$

$\therefore a=\pm2$

a의 값을 ㉠에 대입하면 접선의 기울기는 8 또는 0이므로 두 접선의 기울기의 합은

$8+0=8$

04-3 $f'(x)=-3x^2$

접점의 좌표를 $(a, -a^3)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=-3a^2$

즉 접선의 방정식은

$y-(-a^3)=-3a^2(x-a)$

$\therefore y=-3a^2x+2a^3$ ······ ㉠

이때 이 접선이 점 $(0, -16)$을 지나므로

$-16=2a^3$, $a^3=-8$

$\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-12x-16$

$y=0$을 $y=-12x-16$에 대입하면

$0=-12x-16$ $\therefore x=-\frac{4}{3}$

따라서 구하는 접선의 x절편은 $-\frac{4}{3}$이다.

04-4 $f(x)=x^3+2x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+4x$

접점의 좌표를 (a, a^3+2a^2+1)이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2+4a$

즉 접선의 방정식은

$y-(a^3+2a^2+1)=(3a^2+4a)(x-a)$

$\therefore y=(3a^2+4a)x-2a^3-2a^2+1$ ······ ㉠

이때 이 접선이 점 $(0, 9)$를 지나므로

$9=-2a^3-2a^2+1$, $2a^3+2a^2+8=0$

$a^3+a^2+4=0$, $(a+2)(a^2-a+2)=0$

$\therefore a=-2$ $(\because a^2-a+2>0)$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=4x+9$

따라서 $m=4$, $n=9$이므로

$m+n=4+9=13$

05-1 함수 $f(x)=x^2+x$는 닫힌구간 $[-1, 0]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 0)$에서 미분가능하다.
또 $f(-1)=f(0)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 0)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=2x+1$이므로
$f'(c)=2c+1=0 \qquad \therefore c=-\frac{1}{2}$

05-2 함수 $f(x)=x^2-2$는 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-3, 3)$에서 미분가능하다.
또 $f(-3)=f(3)=7$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-3, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=2x$이므로
$f'(c)=2c=0 \qquad \therefore c=0$

06-1 함수 $f(x)=2x^2-x$는 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$$f'(c)=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{15-3}{3-(-1)}=3$$
인 c가 열린구간 $(-1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=4x-1$이므로
$f'(c)=4c-1=3 \qquad \therefore c=1$

06-2 함수 $f(x)=-x^2+x+5$는 닫힌구간 $[-2, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$$f'(c)=\frac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)}=\frac{-7-(-1)}{4-(-2)}=-1$$
인 c가 열린구간 $(-2, 4)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=-2x+1$이므로
$f'(c)=-2c+1=-1 \qquad \therefore c=1$

3주 전

학교시험에 자주 나오는 대표 기출 20

● 1일차 본문 32~35쪽

01-1 ⑤	01-2 ③	01-3 ④	01-4 ④
02-1 ③	02-2 ⑤	02-3 ③	02-4 ⑤
03-1 ③	03-2 ⑤	03-3 ④	
04-1 ②	04-2 ③	04-3 ③	04-4 ③

대표 기출 01 좌극한과 우극한의 계산

꼭 알고 있을 개념

두 다항함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여

함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\geq a) \\ h(x) & (x<a)\end{cases}$일 때

(1) 좌극한: $\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a-} h(x)=h(a)$

(2) 우극한: $\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a+} g(x)=g(a)$

01-1 $\lim_{x\to 2+}\frac{x^2-2x}{|x-2|}=\lim_{x\to 2+}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+} x=2$

Lecture 좌극한과 우극한

(1) $\lim_{x\to a-} f(x)$에서 x의 값은 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워지므로 $x<a$

(2) $\lim_{x\to a+} f(x)$에서 x의 값은 a보다 크면서 a에 한없이 가까워지므로 $x>a$

01-2 $\lim_{x\to -3-}\frac{|x+3|}{x+3}=\lim_{x\to -3-}\frac{-(x+3)}{x+3}=-1$

$\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-x}{|x-1|}=\lim_{x\to 1+}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+} x=1$

따라서 $a=-1$, $b=1$이므로

$a+b=-1+1=0$

01-3 $\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3+}\frac{x^2-4x+3}{|x-3|}$

$=\lim_{x\to 3+}\frac{(x-1)(x-3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3+}(x-1)=2$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3-}f(x)&=\lim_{x\to3-}\frac{x^2-4x+3}{|x-3|}\\&=\lim_{x\to3-}\frac{(x-1)(x-3)}{-(x-3)}\\&=\lim_{x\to3-}(-x+1)=-2\end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=-2$이므로

$a-b=2-(-2)=4$

01-4 $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}x=1$

$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3-}(x^2-3x+2)=9-9+2=2$

$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3+}(-x+4)=-3+4=1$

$\therefore \lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to3-}f(x)-\lim_{x\to3+}f(x)$

$=1+2-1=2$

Lecture 좌극한과 우극한이 다른 함수

유리함수, 무리함수, 절댓값 기호를 포함하는 함수, 구간이 나뉘어 정의된 함수 등은 좌극한과 우극한이 같지 않은 경우가 있으므로 따로 계산해야 한다.

대표 기출 02 함수의 극한의 성질

꼭 알고 있을 개념

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) $\lim_{x\to a}cf(x)=c\lim_{x\to a}f(x)=c\alpha$ (c는 상수)

(2) $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$
$=\alpha+\beta$

(3) $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)$
$=\alpha-\beta$

(4) $\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)=\alpha\beta$

(5) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta\neq0$)

02-1
$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{5f(x)+1}{g(x)-3}&=\frac{\lim_{x\to2}\{5f(x)+1\}}{\lim_{x\to2}\{g(x)-3\}}\\&=\frac{5\lim_{x\to2}f(x)+1}{\lim_{x\to2}g(x)-3}\\&=\frac{5k+1}{-1-3}\\&=-\frac{5k+1}{4}\end{aligned}$$

즉 $-\frac{5k+1}{4}=-4$이므로 $5k+1=16$

$5k=15$ $\quad\therefore k=3$

02-2 $f(x)-2g(x)=h(x)$라 하면

$\lim_{x\to a}h(x)=-9$, $g(x)=\frac{1}{2}\{f(x)-h(x)\}$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to a}g(x)&=\lim_{x\to a}\frac{1}{2}\{f(x)-h(x)\}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to a}f(x)-\frac{1}{2}\lim_{x\to a}h(x)\\&=\frac{1}{2}\cdot3-\frac{1}{2}\cdot(-9)\\&=6\end{aligned}$$

다른 풀이

$\lim_{x\to a}g(x)=k$ (k는 실수)라 하면

$\lim_{x\to a}\{f(x)-2g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)-2\lim_{x\to a}g(x)$
$=3-2k$

즉 $3-2k=-9$이므로 $-2k=-12$

$\therefore k=6$, 즉 $\lim_{x\to a}g(x)=6$

02-3 $f(x)+3g(x)=h(x)$라 하면

$\lim_{x\to\infty}h(x)=7$, $g(x)=\frac{1}{3}\{h(x)-f(x)\}$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-g(x)}{2f(x)-5g(x)}&=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-\frac{1}{3}\{h(x)-f(x)\}}{2f(x)-\frac{5}{3}\{h(x)-f(x)\}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{3}f(x)-\frac{1}{3}h(x)}{\frac{11}{3}f(x)-\frac{5}{3}h(x)}\\&=\frac{\frac{4}{3}\cdot4-\frac{1}{3}\cdot7}{\frac{11}{3}\cdot4-\frac{5}{3}\cdot7}=1\end{aligned}$$

쌍둥이 문제

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=6,\ \lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}=3$$

일 때, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2g(x)}{4f(x)}$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

[풀이]

$f(x)-g(x)=h(x)$라 하면

$\lim_{x\to\infty} h(x)=3,\ g(x)=f(x)-h(x)$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{4f(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2\{f(x)-h(x)\}}{4f(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-f(x)+2h(x)}{4f(x)}$$
$$=\frac{-6+2\cdot3}{4\cdot6}$$
$$=0$$

답 ③

02-4 $3f(x)-2g(x)=h(x)$라 하면

$\lim_{x\to\infty} h(x)=1,\ g(x)=\frac{3}{2}f(x)-\frac{1}{2}h(x)$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+4g(x)}{-8f(x)+6g(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+4\left\{\frac{3}{2}f(x)-\frac{1}{2}h(x)\right\}}{-8f(x)+6\left\{\frac{3}{2}f(x)-\frac{1}{2}h(x)\right\}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7f(x)-2h(x)}{f(x)-3h(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7-2\frac{h(x)}{f(x)}}{1-3\frac{h(x)}{f(x)}}$$
$$=7$$

다른 풀이

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}\{3f(x)-2g(x)\}=1$이므로

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{3f(x)-2g(x)}{f(x)}=0$

즉 $\lim_{x\to\infty}\left\{3-2\dfrac{g(x)}{f(x)}\right\}=3-2\lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$이므로

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{3}{2}$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+4g(x)}{-8f(x)+6g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+4\frac{g(x)}{f(x)}}{-8+6\frac{g(x)}{f(x)}}$$
$$=\frac{1+4\cdot\frac{3}{2}}{-8+6\cdot\frac{3}{2}}$$
$$=7$$

대표 기출 03 함수의 그래프와 여러 가지 함수의 극한

꼭 알고 있을 개념

$\lim_{x\to a-} g(f(x))$의 값을 구할 때

(1) $x\to a-$일 때, $f(x)\to b-$이면
$\quad\lim_{x\to a-} g(f(x))=\lim_{f(x)\to b-} g(f(x))$

(2) $x\to a-$일 때, $f(x)\to b+$이면
$\quad\lim_{x\to a-} g(f(x))=\lim_{f(x)\to b+} g(f(x))$

(3) $x\to a-$일 때, $f(x)=b$이면
$\quad\lim_{x\to a-} g(f(x))=g(b)$

03-1 $\lim_{x\to0-} f(x)=-1,\ f(-1)=1$

$\therefore \lim_{x\to0-} f(x)+f(-1)=-1+1=0$

03-2 ㄱ. $\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0-} f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to0} f(x)=0$

ㄴ. $\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to1+} f(x)\cdot\lim_{x\to1+} g(x)$
$=1\cdot(-2)=-2$

$\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-} f(x)\cdot\lim_{x\to1-} g(x)$
$=1\cdot(-2)=-2$

$\therefore \lim_{x\to1} f(x)g(x)=-2$

ㄷ. $\lim_{x\to2+} g(f(x))=g(-1)=1$

$\lim_{x\to2-} g(f(x))=g(1)=1$

$\therefore \lim_{x\to2} g(f(x))=1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

03-3 ㄱ. $\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to1} f(x)=0$

ㄴ. $\lim_{x\to1+} g(x)=1$, $\lim_{x\to1-} g(x)=-1$

즉 좌극한과 우극한의 값이 다르므로

$\lim_{x\to1} g(x)$가 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to1+} f(x)\cdot\lim_{x\to1+} g(x)$

$=0\cdot1=0$

$\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-} f(x)\cdot\lim_{x\to1-} g(x)$

$=0\cdot(-1)=0$

$\therefore \lim_{x\to1} f(x)g(x)=0$

ㄹ. $\lim_{x\to1+} [\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]$

$=\lim_{x\to1+} \{f(x)\}^2+\lim_{x\to1+} \{g(x)\}^2$

$=0^2+1^2=1$

$\lim_{x\to1-} [\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]$

$=\lim_{x\to1-} \{f(x)\}^2+\lim_{x\to1-} \{g(x)\}^2$

$=0^2+(-1)^2=1$

$\therefore \lim_{x\to1}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]=1$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

대표 기출 04 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한

꼭 알고 있을 개념

$\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=0$일 때, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값은

(1) $f(x)$, $g(x)$가 모두 다항식이면 $f(x)$, $g(x)$를 각각 인수분해한 후 약분한다.

(2) $f(x)$ 또는 $g(x)$가 무리식이면 근호가 있는 쪽을 유리화한 후 약분한다.

04-1 $\lim_{x\to-2}\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x^2-4}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{(x-1)(x-3)(x+2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{(x-1)(x-3)}{x-2}$

$=-\frac{15}{4}$

쌍둥이 문제

$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x+1}$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 2

④ 4 ⑤ 6

[풀이]

$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}(x-1)(x-2)=6$

답 ⑤

04-2 $\lim_{x\to-1}\frac{5(x^3+1)}{(x^2-1)f(x)}=\lim_{x\to-1}\frac{5(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)f(x)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{5(x^2-x+1)}{(x-1)f(x)}$

$=\frac{5(1+1+1)}{-2f(-1)}$

$=-\frac{15}{2f(-1)}$

즉 $-\frac{15}{2f(-1)}=3$이므로 $6f(-1)=-15$

$\therefore f(-1)=-\frac{5}{2}$

04-3 $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}$

$=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}$

04-4 $\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{(x+5)(x-5)}{x-5}$

$=\lim_{x\to5}(x+5)=10$

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(\sqrt{x+1}+1)$$
$$=2$$

따라서 $a=10$, $b=2$이므로
$a-b=10-2=8$

● 2일차 본문 36~39쪽

05-1 ④	05-2 ②	05-3 ④	05-4 ②
06-1 ③	06-2 ⑤	06-3 ②	06-4 ⑤
07-1 ②	07-2 ⑤	07-3 ④	07-4 ③
08-1 ④	08-2 ①		

대표 기출 05 $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$ 꼴의 극한

꼭 알고 있을 개념

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한: 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 나눈다.
(2) $\infty-\infty$ 꼴의 극한
① 무리식이면 분모를 1로 보고 유리화한다.
② 다항식이면 최고차항으로 묶는다.

05-1 분모의 최고차항인 x^2으로 분자, 분모를 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x-3}{x^2-x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=5$$

Lecture $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

(1) (분자의 차수)<(분모의 차수)이면 극한값은 0이다.
(2) (분자의 차수)=(분모의 차수)이면 극한값은 최고차항의 계수의 비와 같다.
(3) (분자의 차수)>(분모의 차수)이면 발산한다.

05-2 $-x=t$라 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t-\sqrt{t^2-1}}{-t+1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1-\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}{-1+\frac{1}{t}}$$
$$=2$$

오답 피하기

분모의 최고차항인 t로 분자와 분모를 나눌 때, 근호 안은 t^2으로 나누어야 한다.

05-3 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$의 값이 0이 아닌 실수이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\ (a\neq0)$라 하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3f(x)}{x^2-f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+3\frac{f(x)}{x^2}}{1-\frac{f(x)}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}\cdot\frac{f(x)}{x}}{1-\frac{1}{x}\cdot\frac{f(x)}{x}}$$
$$=\frac{2+0\cdot a}{1-0\cdot a}$$
$$=2$$

05-4 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x}-x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-3x}-x)(\sqrt{x^2-3x}+x)}{\sqrt{x^2-3x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{\sqrt{x^2-3x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+1}$$
$$=-\frac{3}{2}$$

쌍둥이 문제

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

[풀이]

분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$
$$=1$$

답 ⑤

대표 기출 06 함수의 극한의 대소 관계

꼭 알고 있을 개념

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)

일 때, a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

(1) $f(x)\le g(x)$이면 $\alpha\le\beta$

(2) 함수 $h(x)$에 대하여 $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$

06-1 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2+7}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2+1}=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0$$

06-2 $\lim_{x\to\infty}\frac{5x-2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{2}{x}}{1}=5$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{2}{x^2}}{1}=5$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=5$$

06-3 $(2x+1)^2>0$이므로 $4x^2+1<f(x)<4x^2+7$의 각 변을 $(2x+1)^2$으로 나누면

$$\frac{4x^2+1}{(2x+1)^2}<\frac{f(x)}{(2x+1)^2}<\frac{4x^2+7}{(2x+1)^2}$$

이때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+1}{(2x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+1}{4x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+7}{(2x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+7}{4x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{7}{x^2}}{4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{(2x+1)^2}=1$$

오답 피하기

함수의 극한의 대소 관계는 부등호 $\le$ 대신 $<$일 때에도 성립한다.

06-4 $x>0$이므로 $\frac{3x^2}{x+2}\le f(x)\le\frac{3x^3}{x^2+4}$의 각 변을 x로 나누면

$$\frac{3x^2}{x^2+2x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{3x^3}{x^3+4x}$$

이때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1+\frac{2}{x}}=3,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{x^3+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1+\frac{4}{x^2}}=3$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3$$

대표 기출 07 극한값을 이용한 미정계수의 결정

꼭 알고 있을 개념

(1) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 존재하고, $x\to a$일 때 (분모)$\to 0$이면 (분자)$\to 0$이다.

(2) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 0이 아닌 실수이고, $x\to a$일 때 (분자)$\to 0$이면 (분모)$\to 0$이다.

07-1 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=5$에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$

$\therefore b=-2a-4$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}&=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to 2}(x+a+2)\\&=a+4\end{aligned}$$

즉 $a+4=5$이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-2-4=-6$

$\therefore a-b=1-(-6)=7$

쌍둥이 문제

$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+ax+b}{x+1}=4$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -4 ② 2 ③ 8
④ 14 ⑤ 20

[풀이]

$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+ax+b}{x+1}=4$에서 $\lim_{x\to -1}(x+1)=0$이므로 $\lim_{x\to -1}(2x^2+ax+b)=2-a+b=0$

$\therefore b=a-2$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+ax+b}{x+1}&=\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+ax+a-2}{x+1}\\&=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x+a-2)}{x+1}\\&=\lim_{x\to -1}(2x+a-2)\\&=a-4\end{aligned}$$

즉 $a-4=4$이므로 $a=8$

$a=8$을 ㉠에 대입하면 $b=8-2=6$

$\therefore a+b=8+6=14$

답 ④

07-2 $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+ax}=b$에서 $\lim_{x\to -2}(x^2-4)=0$이므로

$\lim_{x\to -2}(x^2+ax)=4-2a=0$ $\therefore a=2$

$a=2$를 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+ax}&=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+2x}\\&=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-2)}{x(x+2)}\\&=\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{x}\\&=2\end{aligned}$$

이므로 $b=2$

$\therefore ab=2\cdot 2=4$

07-3 $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-4}=\frac{1}{6}$에서 $\lim_{x\to 4}(x-4)=0$이므로

$\lim_{x\to 4}(\sqrt{x+a}-b)=\sqrt{4+a}-b=0$

$\therefore b=\sqrt{4+a}$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-4}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{4+a}}{x-4}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{4+a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{4+a})}{(x-4)(\sqrt{x+a}+\sqrt{4+a})}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x+a}+\sqrt{4+a})}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{4+a}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{4+a}}\end{aligned}$$

즉 $\frac{1}{2\sqrt{4+a}}=\frac{1}{6}$이므로 $\sqrt{4+a}=3$

$4+a=9$ $\therefore a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면 $b=\sqrt{4+5}=3$

$\therefore a+b=5+3=8$

07-4 $\lim_{x\to 3}\frac{a\sqrt{x-2}+b}{x-3}=2$에서 $\lim_{x\to 3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to 3}(a\sqrt{x-2}+b)=a+b=0$

$\therefore b=-a$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{a\sqrt{x-2}+b}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{a\sqrt{x-2}-a}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{a(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{a(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{a}{\sqrt{x-2}+1}$$
$$=\frac{a}{2}$$

즉 $\frac{a}{2}=2$이므로 $a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=-4$

$\therefore ab=4\cdot(-4)=-16$

대표 기출 08 함수의 연속

꼭 알고 있을 개념

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라 한다.

(i) 함숫값 $f(a)$가 정의되어 있다.

(ii) $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

08-1 ㄱ, ㄷ. 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이다.

ㄴ. $x=2$에서의 함숫값 $f(2)$가 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

ㄹ. $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x+2)=4$$

$f(2)=4$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

즉 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

ㅁ. $\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}x=2$

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}\sqrt{x-2}=0$

$\therefore \lim_{x\to2-}f(x)\neq\lim_{x\to2+}f(x)$

즉 $\lim_{x\to2}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

따라서 $x=2$에서 연속인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

08-2 ① $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x}{|x|}=1$, $f(1)=1$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

즉 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

②, ③ $x=1$에서의 함숫값 $f(1)$이 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

④ 정의역이 $\{x\,|\,x\geq3\}$이므로 $x=1$에서의 함숫값 $f(1)$이 정의되지 않는다. 즉 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

⑤ $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$
$$=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

$f(1)=3$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$

즉 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 $x=1$에서 연속인 것은 ①이다.

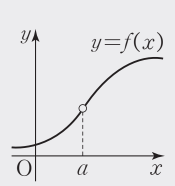
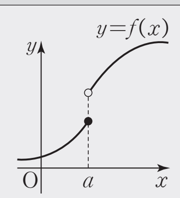
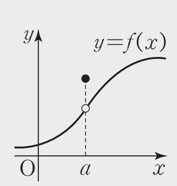
● 3일차 본문 40~43쪽

09-1 ③	09-2 ④		
10-1 ④	10-2 ⑤	10-3 ①	10-4 ③
11-1 ④	11-2 ③	11-3 ④	11-4 ④
12-1 ④	12-2 ②	12-3 ③	12-4 ①

대표 기출 09 함수의 그래프와 연속

꼭 알고 있을 개념

함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 불연속인 경우는 다음과 같다.

함숫값 $f(a)$가 정의되어 있지 않다.	$\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하지 않는다.	$\lim_{x\to a}f(x)\neq f(a)$
		

09-1 ㄱ. $\lim_{x \to 0+} f(x)=1$

ㄴ. $\lim_{x \to 2-} f(x)=2$

ㄷ. $\lim_{x \to 2-} |f(x)|=|2|=2$

$\lim_{x \to 2+} |f(x)|=|-2|=2$

$\therefore \lim_{x \to 2} |f(x)|=2$

이때 $|f(2)|=|-2|=2$이므로

$\lim_{x \to 2} |f(x)|=|f(2)|$

즉 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

09-2 ㄱ. $\lim_{x \to 0-} f(x)=1$, $\lim_{x \to 0+} f(x)=2$이므로

$\lim_{x \to 0-} f(x) \neq \lim_{x \to 0+} f(x)$

즉 $\lim_{x \to 0} f(x)$가 존재하지 않는다.

ㄴ. $-x=t$라 하면 $x \to -1-$일 때 $t \to 1+$이므로 $\lim_{x \to -1-} f(-x)=\lim_{t \to 1+} f(t)=1$

이때 $f(1)=1$이므로

$\lim_{x \to -1-} f(-x)=f(1)$

ㄷ. (i) $\lim_{x \to 0-} f(x)=1$, $\lim_{x \to 0+} f(x)=2$

(ii) $x+1=t$라 하면

$x \to 0-$일 때 $t \to 1-$이므로

$\lim_{x \to 0-} f(x+1)=\lim_{t \to 1-} f(t)=2$

$x \to 0+$일 때 $t \to 1+$이므로

$\lim_{x \to 0+} f(x+1)=\lim_{t \to 1+} f(t)=1$

(i), (ii)에서

$\lim_{x \to 0-} f(x)f(x+1)$

$=\lim_{x \to 0-} f(x) \cdot \lim_{x \to 0-} f(x+1)$

$=1 \cdot 2=2$

$\lim_{x \to 0+} f(x)f(x+1)$

$=\lim_{x \to 0+} f(x) \cdot \lim_{x \to 0+} f(x+1)$

$=2 \cdot 1=2$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x)f(x+1)=2$

이때 $f(0)f(1)=2 \cdot 1=2$이므로

$\lim_{x \to 0} f(x)f(x+1)=f(0)f(1)$

즉 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=0$에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

오답 피하기

ㄴ. $\lim_{x \to -1-} f(-x)$에서 x의 값은 -1보다 작으면서 -1에 한없이 가까워지므로 $x<-1$

이때 $-x=t$라 하면 $x=-t$이므로

$-t<-1 \qquad \therefore t>1$

즉 $x \to -1-$일 때 $t \to 1+$이다.

대표 기출 10 함수의 연속과 미정계수

꼭 알고 있을 개념

두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 연속함수일 때, 함수

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & (x \geq a) \\ h(x) & (x<a) \end{cases}$$

가 모든 실수 x에서 연속이려면

$\lim_{x \to a-} f(x)=\lim_{x \to a+} f(x)=f(a)$

$\therefore \lim_{x \to a-} h(x)=\lim_{x \to a+} g(x)=g(a)$

10-1 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=3$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x \to 3-} f(x)=\lim_{x \to 3+} f(x)=f(3)$이므로

$\lim_{x \to 3-} (x^2-x+1)=\lim_{x \to 3+} (2x+a)=f(3)$

$9-3+1=6+a \qquad \therefore a=1$

10-2 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-3$, $x=2$에서 연속이다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 연속이므로

$\lim_{x \to -3-} f(x)=\lim_{x \to -3+} f(x)=f(-3)$

$\lim_{x \to -3-} (-6x-b)=\lim_{x \to -3+} (2x^2+1)=f(-3)$

$18-b=18+1 \qquad \therefore b=-1$

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 2-} f(x)=\lim_{x \to 2+} f(x)=f(2)$

$\lim_{x \to 2-} (2x^2+1)=\lim_{x \to 2+} (ax-3)=f(2)$

$8+1=2a-3 \qquad \therefore a=6$

(i), (ii)에서 $a-b=6-(-1)=7$

10-3 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로
$x=-1$에서 연속이다.
즉 $\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-ax-2}{x+1}=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로

$$\lim_{x\to-1}(x^2-ax-2)=1+a-2=0$$

$\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}\frac{x^2-ax-2}{x+1}&=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1}(x-2)\\&=-3\end{aligned}$$

이므로 $b=-3$

$\therefore a+b=1+(-3)=-2$

10-4 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x+2}+b}{x-2}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$$\lim_{x\to2}(a\sqrt{x+2}+b)=2a+b=0$$

$$\therefore b=-2a \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x+2}+b}{x-2}&=\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x+2}-2a}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x+2}-2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{a}{\sqrt{x+2}+2}\\&=\frac{a}{4}\end{aligned}$$

즉 $\frac{a}{4}=1$이므로 $a=4$

$a=4$를 ㉡에 대입하면 $b=-8$

$\therefore a+b=4+(-8)=-4$

쌍둥이 문제

함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}+a}{x-1} & (x\neq1)\\ b & (x=1)\end{cases}$가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

[풀이]

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}+a}{x-1}=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}(\sqrt{x+3}+a)=a+2=0 \qquad \therefore a=-2$$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

이므로 $b=\frac{1}{4}$

$$\therefore ab=-2\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$$

답 ②

대표 기출 11 $(x-a)f(x)$ 꼴의 함수의 연속

꼭 알고 있을 개념

함수 $g(x)$가 연속함수이고 함수 $f(x)$가

$(x-a)f(x)=g(x)$

를 만족시킬 때, 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면

$$f(a)=\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}$$

참고 $(x-a)f(x)=g(x)$에서 $x\neq a$일 때,

$$f(x)=\frac{g(x)}{x-a}$$

11-1 $x \neq -6$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2+5x-6}{x+6}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-6$에서 연속이다.

$$\therefore f(-6)=\lim_{x\to -6} f(x) =\lim_{x\to -6}\frac{x^2+5x-6}{x+6} =\lim_{x\to -6}\frac{(x+6)(x-1)}{x+6} =\lim_{x\to -6}(x-1) =-7$$

11-2 $x \neq 3$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2+ax}{x-3}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=3$에서 연속이다.

$\therefore f(3)=\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2+ax}{x-3}$ …… ㉠

㉠에서 $\lim_{x\to 3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to 3}(x^2+ax)=9+3a=0 \quad \therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$$f(3)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{x-3} =\lim_{x\to 3}x=3$$

$\therefore a+f(3)=-3+3=0$

11-3 $x \neq -3$일 때, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{x+3}$

함수 $f(x)$가 $x \geq -4$인 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-3$에서 연속이다.

$$\therefore f(-3)=\lim_{x\to -3} f(x) =\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+4}-1}{x+3} =\lim_{x\to -3}\frac{(\sqrt{x+4}-1)(\sqrt{x+4}+1)}{(x+3)(\sqrt{x+4}+1)} =\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{(x+3)(\sqrt{x+4}+1)} =\lim_{x\to -3}\frac{1}{\sqrt{x+4}+1} =\frac{1}{2}$$

11-4 $x \neq 2$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=2$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$이므로

$\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=6$ …… ㉠

㉠에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$

$\therefore b=-2a-4$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2} =\lim_{x\to 2}(x+a+2) =a+4$$

즉 $a+4=6$이므로 $a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면

$b=-4-4=-8$

$\therefore a-b=2-(-8)=10$

대표 기출 12 사잇값의 정리

꼭 알고 있을 개념

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면, 즉 $f(a)f(b)<0$이면 $f(c)=0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

⇨ 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

12-1 $f(x)=2x^3-x^2-x+1$이라 하면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

① $f(2)f(3)=11\cdot 43>0$

② $f(1)f(2)=1\cdot 11>0$

③ $f(0)f(1)=1\cdot 1>0$

④ $f(-1)f(0)=-1\cdot 1<0$이므로 열린구간 $(-1, 0)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

⑤ $f(-2)f(-1)=-17\cdot(-1)>0$

따라서 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 ④이다.

12-2 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

① $f(0)f(1)=-9\cdot(-4)>0$

② $f(1)f(2)=-4\cdot5<0$이므로 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

③ $f(2)f(3)=5\cdot18>0$

④ $f(3)f(4)=18\cdot35>0$

⑤ $f(4)f(5)=35\cdot56>0$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재하는 구간은 ②이다.

12-3 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고 $f(1)f(2)<0$, $f(3)f(4)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$, $(3, 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

또 $f(x)=f(-x)$이므로

$f(1)=f(-1)$, $f(2)=f(-2)$,

$f(3)=f(-3)$, $f(4)=f(-4)$

$\therefore f(-1)f(-2)<0$, $f(-3)f(-4)<0$

즉 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, -1)$, $(-4, -3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 실수 x는 적어도 4개 존재한다.

12-4 $f(x)=x^3+3x^2-a$라 하면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

이때 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(-2, -1)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 사잇값의 정리에 의하여 $f(-2)f(-1)<0$이어야 하므로

$(4-a)(2-a)<0$

$(a-2)(a-4)<0$

$\therefore 2<a<4$

따라서 정수 a는 3으로 그 개수는 1이다.

● 4일차 본문 44~47쪽

13-1 ①	13-2 ②	13-3 ③	13-4 ③
14-1 ④	14-2 ⑤	14-3 ⑤	14-4 ④
15-1 ④	15-2 ④	15-3 ⑤	
16-1 ②	16-2 ①	16-3 ③	16-4 ②

대표 기출 13 미분계수를 이용한 극한값의 계산 (1)

꼭 알고 있을 개념

주어진 식을 $\lim_{■\to0}\frac{f(a+■)-f(a)}{■}$ 꼴로 변형하고 $f'(a)$의 값을 이용하여 극한값을 구한다.

이때 $\lim_{■\to0}\frac{f(a+■)-f(a)}{■}$에서 ■ 부분이 같아지도록 변형한다.

13-1 $\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}\cdot\frac{-3}{2}$

$=-\frac{3}{2}f'(1)$

이때 $f'(x)=3x^2-1$이므로

$f'(1)=3-1=2$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{2h}=-\frac{3}{2}f'(1)$

$=-\frac{3}{2}\cdot2$

$=-3$

13-2 $\lim_{h\to0}\frac{f(-1+4h)-f(-1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+4h)-f(-1)}{4h}\cdot4$

$=4f'(-1)$

이때 $f'(x)=-3x^2+4x+3$이므로

$f'(-1)=-3-4+3=-4$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(-1+4h)-f(-1)}{h}=4f'(-1)$

$=4\cdot(-4)$

$=-16$

13-3 $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$

$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$

이때 $f'(x)=12x^2-6x-4$이므로

$f'(2)=48-12-4=32$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}=2f'(2)=2\cdot 32=64$$

13-4 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3-2h)-f(3)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3-2h)-f(3)}{-2h}\cdot(-2)$

$=-2f'(3)$

즉 $-2f'(3)=-18$이므로 $f'(3)=9$

이때 $f'(x)=3x^2+2kx$이므로

$f'(3)=6k+27=9$

$6k=-18\qquad \therefore k=-3$

대표 기출 14 미분계수를 이용한 극한값의 계산 (2)

꼭 알고 있을 개념

주어진 식을 $\lim_{\blacktriangle\to a}\frac{f(\blacktriangle)-f(a)}{\blacktriangle-a}$ 꼴로 변형하고 $f'(a)$의 값을 이용하여 극한값을 구한다.

이때 $\lim_{\blacktriangle\to a}\frac{f(\blacktriangle)-f(a)}{\blacktriangle-a}$에서 ▲ 부분이 같아지도록 변형한다.

14-1 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2)-f(4)}{(x-2)(x+2)}\cdot(x+2)$

$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\cdot\lim_{x\to 2}(x+2)$

$=f'(4)\cdot 4$

$=2\cdot 4=8$

오답 피하기

$x^2=t$라 하면 $x\to 2$일 때 $t\to 4$이므로

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}=\lim_{t\to 4}\frac{f(t)-f(4)}{t-4}=f'(4)$

14-2 $\lim_{x\to 3}\frac{\{f(x)\}^2-16}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{\{f(x)-4\}\{f(x)+4\}}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\cdot\{f(x)+4\}$ ($\because f(3)=4$)

$=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\cdot\lim_{x\to 3}\{f(x)+4\}$

$=f'(3)\cdot\{f(3)+4\}$

$=2\cdot(4+4)$

$=16$

14-3 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x^2-4}=6$에서 $\lim_{x\to 2}(x^2-4)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}\{f(x)-5\}=f(2)-5=0$

$\therefore f(2)=5$

이때

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}$

$=\frac{1}{4}f'(2)$

이므로 $\frac{1}{4}f'(2)=6\qquad\therefore f'(2)=24$

$\therefore f(2)+f'(2)=5+24=29$

14-4 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-2$에서 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$

즉 $1-3+a+b=0$이므로 $a+b=2\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또 $f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-2$

이때 $f'(x)=3x^2-6x+a$이므로

$f'(1)=3-6+a=a-3=-2$

$\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$1+b=2\qquad\therefore b=1$

$\therefore ab=1\cdot 1=1$

대표 기출 15 미분가능할 조건

꼭 알고 있을 개념

다항함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\ge a) \\ h(x) & (x<a) \end{cases}$$

가 $x=a$에서 미분가능하면

(1) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to a-}h(x)=\lim_{x\to a+}g(x)=g(a)$$

(2) 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{x\to a-}\frac{h(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

15-1 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$$

$$\lim_{x\to1-}(ax^2+2)=\lim_{x\to1+}(2x+b)=f(1)$$

$a+2=2+b$ $\quad\therefore a=b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1-}\frac{ax^2+2-(a+2)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}\frac{a(x^2-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}\frac{a(x+1)(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}a(x+1)\\&=2a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1+}\frac{2x+b-(a+2)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}\frac{2x+b-b-2}{x-1}\ (\because ㉠)\\&=\lim_{x\to1+}\frac{2(x-1)}{x-1}\\&=2\end{aligned}$$

이므로 $2a=2$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore a+b=1+1=2$

15-2 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하므로 $x=-1$에서 미분가능하다.

즉 $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)=f(-1)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1-}(-x^3+a)=\lim_{x\to-1+}(x^2+bx+3)\\=f(-1)\end{aligned}$$

$1+a=1-b+3$ $\quad\therefore a+b=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $f'(-1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

이때

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\\&=\lim_{x\to-1-}\frac{-x^3+a-(4-b)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1-}\frac{-x^3+a+b-4}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1-}\frac{-(x^3+1)}{x+1}\ (\because ㉠)\\&=\lim_{x\to-1-}\frac{-(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1-}(-x^2+x-1)\\&=-3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\\&=\lim_{x\to-1+}\frac{x^2+bx+3-(4-b)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1+}\frac{x^2+bx-1+b}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+1)(x-1+b)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1+}(x-1+b)\\&=b-2\end{aligned}$$

이므로 $-3=b-2$ $\quad\therefore b=-1$

$b=-1$을 ㉠에 대입하면

$a-1=3$ $\quad\therefore a=4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-x^3+4 & (x<-1)\\ x^2-x+3 & (x\ge-1)\end{cases}$이므로

$f(-2)=8+4=12$

$f(2)=4-2+3=5$

$\therefore f(-2)+f(2)=12+5=17$

15-3 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2+}f(x)=f(-2)$$

$$\lim_{x\to-2-}2=\lim_{x\to-2+}(x^2+ax+b)=f(-2)$$

$2=4-2a+b$ $\quad\therefore 2a-b=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $f'(-2)$가 존재하므로

$$\lim_{x\to-2-}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2+}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$$

이때

$$\lim_{x\to-2-}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$$
$$=\lim_{x\to-2-}\frac{2-(4-2a+b)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2-}\frac{2a-b-2}{x+2}$$
$$=0\ (\because ㉠)$$

$$\lim_{x\to-2+}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$$
$$=\lim_{x\to-2+}\frac{x^2+ax+b-(4-2a+b)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2+}\frac{x^2+ax-4+2a}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2+}\frac{(x+2)(x-2+a)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2+}(x-2+a)$$
$$=a-4$$

이므로 $0=a-4$ $\quad\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$8-b=2$ $\quad\therefore b=6$

$\therefore a+b=4+6=10$

대표 기출 16 접선의 기울기

꼭 알고 있을 개념

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$

16-1 $f'(x)=3x^2+2ax$이므로 구하는 접선의 기울기는 $f'(1)=3+2a$

즉 $3+2a=7$이므로 $a=2$

16-2 점 $(-1, k)$가 곡선 $y=2x^2-5x-3$ 위의 점이므로 $k=2+5-3=4$

$f(x)=2x^2-5x-3$으로 놓으면

$f'(x)=4x-5$

즉 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, k)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-4-5=-9$이므로

$a=-9$

$\therefore a+k=-9+4=-5$

16-3 $f'(x)=4x^3-12x^2+12x$이므로 구하는 접선의 기울기는 $f'(a)=4a^3-12a^2+12a=4$

$4a^3-12a^2+12a-4=0,\ a^3-3a^2+3a-1=0$

$(a-1)^3=0$ $\quad\therefore a=1$

즉 점 $(1, b)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로 $b=1-4+6+4=7$

$\therefore a+b=1+7=8$

16-4 점 $(-1, -2)$가 곡선 $f(x)=2x^3+ax^2+b$ 위의 점이므로 $-2=-2+a+b$

$\therefore a+b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=6x^2+2ax$이므로 점 $(-1, -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=6-2a$

즉 $6-2a=4$이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$1+b=0$ $\quad\therefore b=-1$

$\therefore ab=1\cdot(-1)=-1$

● 5일차 본문 48~51쪽

17-1 ⑤	17-2 ④	17-3 ④	17-4 ④
18-1 ②	18-2 ①	18-3 ①	18-4 ①
19-1 ②	19-2 ②	19-3 ②	
20-1 ④	20-2 ③	20-3 ⑤	20-4 ④

대표 기출 17 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

꼭 알고 있을 개념

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 다음 순서로 구한다.

(i) 접선의 기울기 $f'(a)$를 구한다.

(ii) $y-f(a)=f'(a)(x-a)$를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

17-1 $f(x)=x^2-3x$로 놓으면 $f'(x)=2x-3$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4-3=1$
즉 구하는 접선의 방정식은
$y-(-2)=x-2 \qquad \therefore y=x-4$
따라서 $a=1, b=-4$이므로
$a-b=1-(-4)=5$

17-2 점 $(1, 2)$가 곡선 $y=3x^2+ax+b$ 위의 점이므로
$2=3+a+b \qquad \therefore a+b=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$f(x)=3x^2+ax+b$로 놓으면
$f'(x)=6x+a$
이때 접선의 기울기가 4이므로 $f'(1)=4$
$6+a=4 \qquad \therefore a=-2$
$a=-2$를 ㉠에 대입하면
$-2+b=-1 \qquad \therefore b=1$
$\therefore b-a=1-(-2)=3$

쌍둥이 문제

곡선 $y=x^3+ax^2+b$ 위의 점 $(2, 4)$에서의 접선의 방정식이 $y=9x-14$일 때, 상수 a, b에 대하여 $4a-b$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

[풀이]
점 $(2, 4)$가 곡선 $y=x^3+ax^2+b$ 위의 점이므로
$4=8+4a+b \qquad \therefore 4a+b=-4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$f(x)=x^3+ax^2+b$로 놓으면
$f'(x)=3x^2+2ax$
이때 접선의 기울기가 9이므로 $f'(2)=9$
$12+4a=9 \qquad \therefore a=-\frac{3}{4}$
$a=-\frac{3}{4}$을 ㉠에 대입하면
$-3+b=-4 \qquad \therefore b=-1$
$\therefore 4a-b=4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)-(-1)=-2$

답 ②

17-3 $f(x)=x^3-x^2+k$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2x$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, k)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3-2=1$
즉 구하는 접선의 방정식은
$y-k=x-1 \qquad \therefore y=x+k-1$
이 직선이 점 $(0, 5)$를 지나므로
$5=k-1 \qquad \therefore k=6$

다른 풀이

$f(x)=x^3-x^2+k$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2x$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, k)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=3-2=1$
즉 구하는 접선은 기울기가 1이고 점 $(0, 5)$를 지나므로 접선의 방정식은
$y-5=x-0 \qquad \therefore y=x+5$
이 직선이 점 $(1, k)$를 지나므로
$k=1+5=6$

17-4 $f'(x)=3x^2+2ax+9$
이때 접선의 기울기가 2이므로 $f'(1)=2$
$3+2a+9=2, 2a=-10 \qquad \therefore a=-5$
$\therefore f(x)=x^3-5x^2+9x+3$
즉 $x=1$인 점의 좌표는 $(1, 8)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-8=2(x-1) \qquad \therefore y=2x+6$
따라서 $b=6$이므로
$a+b=-5+6=1$

대표 기출 18 기울기가 주어진 접선의 방정식

꼭 알고 있을 개념

곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 다음 순서로 구한다.
(i) 접점의 좌표를 $(a, f(a))$로 놓는다.
(ii) $f'(a)=m$을 이용하여 접점의 좌표를 구한다.
(iii) $y-f(a)=m(x-a)$를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

18-1 $5x-y-7=0$에서 $y=5x-7$이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 5이다.
$f(x)=-x^2+3x+5$로 놓으면
$f'(x)=-2x+3$

접점의 좌표를 $(a,\ -a^2+3a+5)$라 하면 접선의 기울기가 5이므로 $f'(a)=5$

$-2a+3=5 \qquad \therefore a=-1$

즉 접점의 좌표는 $(-1,\ 1)$이므로 구하는 직선의 방정식은 $y-1=5\{x-(-1)\}$

$\therefore y=5x+6$

이 직선이 점 $(-2,\ k)$를 지나므로

$k=-10+6=-4$

쌍둥이 문제

곡선 $y=x^2-5x+1$에 접하고 직선 $x-y+2=0$에 평행한 직선의 x절편은?

① -10 ② -9 ③ -8
④ 8 ⑤ 9

[풀이]

$x-y+2=0$에서 $y=x+2$이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 1이다.

$f(x)=x^2-5x+1$로 놓으면 $f'(x)=2x-5$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2-5a+1)$이라 하면 접선의 기울기가 1이므로 $f'(a)=1$

$2a-5=1 \qquad \therefore a=3$

즉 접점의 좌표는 $(3,\ -5)$이므로 구하는 직선의 방정식은 $y-(-5)=x-3$

$\therefore y=x-8$

따라서 직선 $y=x-8$의 x절편은 8이다.

답 ④

18-2 $x-3y+2=0$에서 $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 -3이다.

$f(x)=x^3-3x^2$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-3a^2)$이라 하면 접선의 기울기가 -3이므로 $f'(a)=-3$

$3a^2-6a=-3,\ 3a^2-6a+3=0$

$a^2-2a+1=0,\ (a-1)^2=0$

$\therefore a=1$

즉 접점의 좌표는 $(1,\ -2)$이므로 구하는 직선의 방정식은 $y-(-2)=-3(x-1)$

$\therefore y=-3x+1$

18-3 $f(x)=x^3-3x^2+x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x+1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=27-18+1=10$

점 B에서의 접선은 점 A에서의 접선과 평행하므로 점 B에서의 접선의 기울기는 10이다.

점 B의 좌표를 $(a,\ a^3-3a^2+a+1)$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2-6a+1=10$

$3a^2-6a-9=0,\ a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-1\ (\because a\neq 3)$

즉 점 B의 좌표는 $(-1,\ -4)$이므로 구하는 접선의 방정식은 $y-(-4)=10\{x-(-1)\}$

$\therefore y=10x+6$

18-4 $f(x)=x^3-3x^2+4x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x+4$

접선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-3a^2+4a)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2-6a+4=1$

$3a^2-6a+3=0,\ a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0 \qquad \therefore a=1$

즉 접점의 좌표는 $(1,\ 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은 $y-2=x-1$

$\therefore y=x+1$

따라서 $m=1,\ n=1$이므로

$mn=1\cdot 1=1$

오답 피하기

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선의 기울기는 $\tan\theta$

대표 기출 19 곡선 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식

꼭 알고 있을 개념

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 $(x_1,\ y_1)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은 다음 순서로 구한다.

(i) 접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$로 놓는다.

(ii) $y-f(a)=f'(a)(x-a)$에 점 $(x_1,\ y_1)$의 좌표를 대입하여 a의 값을 구한다.

(iii) a의 값을 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

19-1 $f(x)=x^3-3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$
접점의 좌표를 $(a,\ a^3-3)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2$
즉 구하는 접선의 방정식은
$y-(a^3-3)=3a^2(x-a)$
$\therefore\ y=3a^2x-2a^3-3$ ...... ㉠
이 직선이 점 $(0,\ -5)$를 지나므로
$-5=-2a^3-3,\ 2a^3=2$
$a^3=1 \quad \therefore\ a=1$
$a=1$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$y=3x-5$
따라서 접선이 x축과 만나는 점의 좌표는
$\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$이므로 $k=\frac{5}{3}$

쌍둥이 문제

점 $(0,\ 2)$에서 곡선 $y=x^3$에 그은 접선의 x절편은?

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ -1
④ $-\frac{4}{3}$ ⑤ $-\frac{5}{3}$

[풀이]
$f(x)=x^3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$
접점의 좌표를 $(a,\ a^3)$이라 하면 접선의 기울기는
$f'(a)=3a^2$
즉 구하는 접선의 방정식은
$y-a^3=3a^2(x-a)$
$\therefore\ y=3a^2x-2a^3$ ...... ㉠
이 직선이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로
$2=-2a^3,\ a^3=-1 \quad \therefore\ a=-1$
$a=-1$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$y=3x+2$
따라서 접선의 x절편은 $-\frac{2}{3}$이다.

답 ②

19-2 $f(x)=x^2+k$로 놓으면 $f'(x)=2x$
접점의 좌표를 $(a,\ a^2+k)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=2a$
즉 구하는 접선의 방정식은
$y-(a^2+k)=2a(x-a)$
$\therefore\ y=2ax-a^2+k$
이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로
$0=2a-a^2+k$
$\therefore\ a^2-2a-k=0$ ...... ㉠
이차방정식 ㉠의 두 근을 $a_1,\ a_2$라 하면 접선의 기울기는 $2a_1,\ 2a_2$이고 두 접선이 서로 직교하므로
$2a_1\cdot 2a_2=-1$
$\therefore\ a_1a_2=-\frac{1}{4}$
이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여
$a_1a_2=-k=-\frac{1}{4}$
$\therefore\ k=\frac{1}{4}$

Lecture 두 직선의 위치 관계
두 직선 $y=ax+b,\ y=cx+d$에 대하여
(1) 서로 직교(수직)이다. ⇨ $ac=-1$
(2) 서로 평행하다. ⇨ $a=c,\ b\neq d$
(3) 서로 일치한다. ⇨ $a=c,\ b=d$

19-3 $f(x)=x^4-x^2+2$로 놓으면
$f'(x)=4x^3-2x$
접점의 좌표를 $(a,\ a^4-a^2+2)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=4a^3-2a$
즉 구하는 접선의 방정식은
$y-(a^4-a^2+2)=(4a^3-2a)(x-a)$
$\therefore\ y=(4a^3-2a)x-3a^4+a^2+2$
이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로
$0=-3a^4+a^2+2,\ 3a^4-a^2-2=0$
$(3a^2+2)(a^2-1)=0,\ a^2-1=0$
$\therefore\ a=\pm 1$
$a=1$일 때 접점의 좌표는 $(1,\ 2)$
$a=-1$일 때 접점의 좌표는 $(-1,\ 2)$
$\therefore\ \overline{OA}+\overline{OB}=\sqrt{1^2+2^2}+\sqrt{(-1)^2+2^2}$
$=\sqrt{5}+\sqrt{5}$
$=2\sqrt{5}$

Lecture 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리
두 점 $A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는
$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

대표 기출 20 롤의 정리와 평균값 정리

꼭 알고 있을 개념

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때

(1) 롤의 정리: $f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

(2) 평균값 정리: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

20-1 함수 $f(x)=(x+1)^2(x-2)$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$에서 미분가능하다. 또 $f(-1)=f(2)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때

$f(x)=(x+1)^2(x-2)=(x^2+2x+1)(x-2)$

이므로

$$f'(x)=(2x+2)(x-2)+(x^2+2x+1)\cdot 1$$
$$=3x^2-3$$

즉 $f'(c)=3c^2-3=0$이므로 $c^2=1$

$\therefore c=1$ $(\because -1<c<2)$

20-2 함수 $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$에 대하여 닫힌구간 $[0, k]$에서 평균값 정리를 만족시키는 c의 값이 2이므로

$$f'(2)=\frac{f(k)-f(0)}{k-0}$$
$$=\frac{k^3-3k^2+2k+1-1}{k}$$
$$=k^2-3k+2$$

인 2가 열린구간 $(0, k)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-6x+2$이므로

$f'(2)=12-12+2=2$

즉 $k^2-3k+2=2$이므로 $k^2-3k=0$

$k(k-3)=0$ $\qquad\therefore k=3$ $(\because k>0)$

20-3 함수 $f(x)=-x^2+2x+3$은 닫힌구간 $[-2, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$f'(c)=\frac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)}=\frac{-5-(-5)}{6}=0$$

인 c가 열린구간 $(-2, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

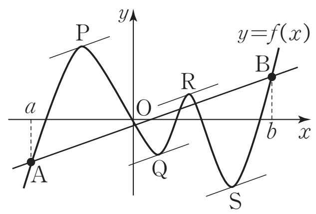
이때 $f'(x)=-2x+2$이므로

$f'(c)=-2c+2=0$ $\qquad\therefore c=1$

$\therefore f(c)=f(1)=-1+2+3=4$

20-4 닫힌구간 $[a, b]$에서 평균값 정리를 만족시키는 c의 값은 미분계수가 직선 AB의 기울기와 같은 점의 x좌표이다.

이때 직선 AB와 평행한 접선은 다음 그림과 같이 네 점 P, Q, R, S에서 각각 그을 수 있다.



따라서 c의 개수는 4이다.

2주 전

학교시험에 나오는 창의융합, 코딩 서술형 기출 문제

● 1일차 본문 54~55쪽

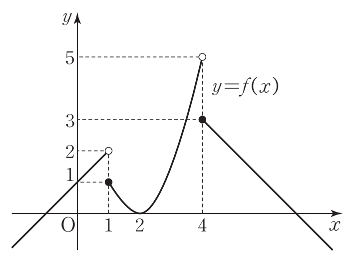
1-1 3	1-2 4
2-1 -2	2-2 20

1-1 문제 제대로 읽기

함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 함수 $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$에 대하여
└ 조건

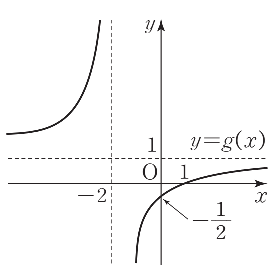
$$\lim_{x\to\infty} f(g(x))+\lim_{x\to-\infty} f(g(x))$$

의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]
질문의 핵심



$g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{(x+2)-3}{x+2}=-\dfrac{3}{x+2}+1$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉 $x\to\infty$일 때, $g(x)\to1-$이고
$x\to-\infty$일 때, $g(x)\to1+$이므로

❶ 3점

$\lim_{x\to\infty} f(g(x))+\lim_{x\to-\infty} f(g(x))$
$=\lim_{g(x)\to1-} f(g(x))+\lim_{g(x)\to1+} f(g(x))$
$=2+1$
$=3$

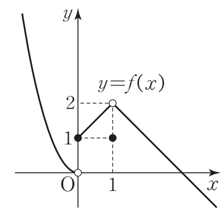
❷ 4점

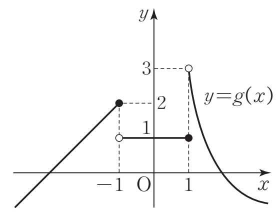
1-2 문제 제대로 읽기

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때,
└ 조건

$$\lim_{x\to1-} f(g(x))+\lim_{x\to0+} g(f(x))$$
질문의 핵심

의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]





$x\to1-$일 때, $g(x)=1$이므로
$\lim_{x\to1-} f(g(x))=f(1)=1$

❶ 3점

$x\to0+$일 때, $f(x)\to1+$이므로
$\lim_{x\to0+} g(f(x))=\lim_{f(x)\to1+} g(f(x))=3$

❷ 3점

$\therefore \lim_{x\to1-} f(g(x))+\lim_{x\to0+} g(f(x))=1+3=4$

❸ 1점

2-1 문제 제대로 읽기

다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=2,\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=5$$
└ 조건

일 때, $f(-1)$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오.
질문의 핵심
[7점]

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2-3x+2}=2$에서 함수 $f(x)$는 x^2의 계수가 2인 이차함수임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=5$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로
$\lim_{x\to1} f(x)=0$ $\therefore f(1)=0$
즉 $f(x)=2(x-1)(x-a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있으므로

❶ 3점

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{2(x-1)(x-a)}{x-1}=\lim_{x\to1}2(x-a)$
$=2(1-a)=2-2a$

이때 $2-2a=5$이므로 $-2a=3$

$\therefore a=-\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)=2x^2+x-3$이므로 ❷ 3점

$f(-1)=2-1-3=-2$ ❸ 1점

Lecture **인수정리**

(1) 다항식 $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $f(\alpha)=0$

(2) $f(\alpha)=0$이면 다항식 $f(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다. ⇨ 다항식 $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 갖는다

다른 풀이

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=2$에서 함수 $f(x)$는 x^2의 계수가 2인 이차함수이므로

$f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수) …… ㉠

로 놓을 수 있다. ❶ 3점

이때 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=5$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=0$ $\therefore f(1)=0$

즉 $2+a+b=0$이므로 $b=-2-a$ …… ㉡

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=5$

㉠의 도함수는 $f'(x)=4x+a$이므로

$f'(1)=4+a=5$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면 $b=-2-1=-3$

따라서 $f(x)=2x^2+x-3$이므로 ❷ 3점

$f(-1)=2-1-3=-2$ ❸ 1점

2-2 문제 제대로 읽기

삼차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)=\frac{g(x)}{x^2+x-2}$가

$\lim_{x\to1}f(x)=4$, $\lim_{x\to-2}f(x)=1$ 조건

을 만족시킬 때, $g(2)$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [8점] 질문의 핵심

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x^2+x-2}=4$에서

$\lim_{x\to1}(x^2+x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to1}g(x)=0$ $\therefore g(1)=0$

$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{g(x)}{x^2+x-2}=1$에서

$\lim_{x\to-2}(x^2+x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to-2}g(x)=0$ $\therefore g(-2)=0$ ❶ 3점

이때 함수 $g(x)$는 삼차함수이므로

$g(x)=(x-1)(x+2)(ax+b)$

(a, b는 상수, $a\neq0$)

로 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)(ax+b)}{(x-1)(x+2)}$

$=\lim_{x\to1}(ax+b)$

$=a+b$

이므로 $a+b=4$ …… ㉠

$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{(x-1)(x+2)(ax+b)}{(x-1)(x+2)}$

$=\lim_{x\to-2}(ax+b)$

$=-2a+b$

이므로 $-2a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$

따라서 $g(x)=(x-1)(x+2)(x+3)$이므로 ❷ 4점

$g(2)=1\cdot4\cdot5=20$ ❸ 1점

● 2일차 본문 56~57쪽

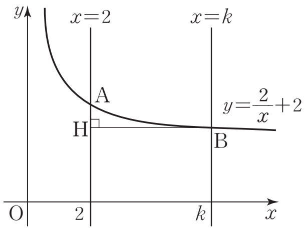
3-1 2　　3-2 $\frac{1}{2}$

4-1 (1) 연속이다. (2) 미분가능하다.

4-2 (1) 연속이다. (2) 미분가능하지 않다.

3-1 문제 제대로 읽기

다음 그림과 같이 곡선 $y=\frac{2}{x}+2$와 두 직선 $x=2$, $x=k\ (k>2)$의 교점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 직선 $x=2$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\lim_{k\to2+}\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}$ 조건
의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. (단, $x>0$) [7점]
질문의 핵심



곡선 $y=\frac{2}{x}+2\ (x>0)$와 두 직선 $x=2$, $x=k\ (k>2)$의 교점은

$\mathrm{A}(2, 3)$, $\mathrm{B}\left(k, \frac{2}{k}+2\right)$

점 B에서 직선 $x=2$에 내린 수선의 발 H의 좌표는

$\mathrm{H}\left(2, \frac{2}{k}+2\right)$이므로

❶ 2점

$\overline{\mathrm{BH}}=k-2$, $\overline{\mathrm{AH}}=3-\left(\frac{2}{k}+2\right)=1-\frac{2}{k}$

❷ 2점

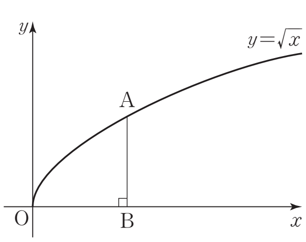
$$\therefore \lim_{k\to2+}\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}=\lim_{k\to2+}\frac{k-2}{1-\frac{2}{k}}=\lim_{k\to2+}\frac{k(k-2)}{k-2}$$
$$=\lim_{k\to2+}k=2$$

❸ 3점

3-2 문제 제대로 읽기

다음 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $\mathrm{A}(a, b)$에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 할 때, $\lim_{a\to\infty}(\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OB}})$의 조건
값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오.
질문의 핵심

(단, $a\neq0$이고 O는 원점이다.) [7점]



점 A는 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점이므로

$b=\sqrt{a}$ $\quad\therefore \mathrm{A}(a, \sqrt{a})$

또 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(a, 0)$

❶ 2점

즉 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a^2+(\sqrt{a})^2}=\sqrt{a^2+a}$, $\overline{\mathrm{OB}}=a$이므로

$\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{a^2+a}-a$

❷ 2점

$$\therefore \lim_{a\to\infty}(\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OB}})$$
$$=\lim_{a\to\infty}(\sqrt{a^2+a}-a)$$
$$=\lim_{a\to\infty}\frac{(\sqrt{a^2+a}-a)(\sqrt{a^2+a}+a)}{\sqrt{a^2+a}+a}$$
$$=\lim_{a\to\infty}\frac{a^2+a-a^2}{\sqrt{a^2+a}+a}$$
$$=\lim_{a\to\infty}\frac{a}{\sqrt{a^2+a}+a}$$
$$=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{a}}+1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$$

❸ 3점

4-1 문제 제대로 읽기

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\geq1) \\ 2x-1 & (x<1)\end{cases}$에 대하여 다음을 구하 조건
고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]

(1) $x=1$에서 연속성 질문의 핵심

(2) $x=1$에서 미분가능성 질문의 핵심

(단, 미분계수의 정의를 이용하시오.) 조건

(1) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$$

이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(2x-1)=2-1=1$,

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}x^2=1$,

$f(1)=1^2=1$

이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

❶ 3점

(2) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $f'(1)$이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

이때 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(2x-1)-1}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{2x-2}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}(x+1)=2$$

이므로 $\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

❷ 3점

4-2 문제 제대로 읽기

함수 $f(x)=|x^2-1|$에 대하여 다음을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]
조건

(1) $x=-1$에서 연속성
질문의 핵심

(2) $x=-1$에서 미분가능성
질문의 핵심

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x\le-1 \text{ 또는 } x\ge1) \\ -x^2+1 & (-1<x<1)\end{cases}$이므로 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)=f(-1)$$

이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(x^2-1)=1-1=0,$

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(-x^2+1)=-1+1=0,$

$f(-1)=(-1)^2-1=0$

이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

❶ 3점

(2) 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하려면 $f'(-1)$이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

이때 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1-}\frac{x^2-1-0}{x+1}=\lim_{x\to-1-}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1-}(x-1)=-2$$

$$\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+}\frac{-x^2+1-0}{x+1}=\lim_{x\to-1+}\frac{-(x+1)(x-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1+}\{-(x-1)\}=2$$

이므로

$$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\ne\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

❷ 3점

● 3일차

본문 58~59쪽

5-1 -1	**5-2** 8
6-1 -2	**6-2** 10

5-1 문제 제대로 읽기

함수 $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x\le-1) \\ x^2+ax+b & (-1<x\le2) \\ 3x-1 & (x>2)\end{cases}$이 모든 실수 x에서 연속일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [8점]
조건
질문의 핵심

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-1$, $x=2$에서 연속이다.

(i) $x=-1$에서 연속

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to-1+} f(x)=f(-1)$

즉 $\lim_{x\to-1-}(2x+1)=\lim_{x\to-1+}(x^2+ax+b)=f(-1)$

이므로 $-1=1-a+b$

$\therefore a-b=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

❶ 3점

(ii) $x=2$에서 연속

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2-} f(x)=\lim_{x\to2+} f(x)=f(2)$

즉 $\lim_{x\to2-}(x^2+ax+b)=\lim_{x\to2+}(3x-1)=f(2)$이므로

$4+2a+b=5$ $\quad\therefore 2a+b=1$ $\cdots\cdots$ ㉡

❷ 3점

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-1$

$\therefore ab=1\cdot(-1)=-1$

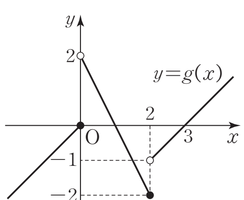
❸ 2점

5-2 문제 제대로 읽기

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)$는 x^2의 계수가 1인 이차함수이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같을 때, $h(x)=f(x)g(x)$라 하자. 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에서 연속일 때, $f(4)$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [8점]

조건

질문의 핵심



함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 불연속이다. 이때 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 연속이다.

(i) $x=0$에서 연속

함수 $h(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0} h(x)=h(0)$

$\therefore \lim_{x\to0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$

이때

$\lim_{x\to0-} f(x)g(x)=\lim_{x\to0-} f(x)\cdot\lim_{x\to0-} g(x)=0$

$\lim_{x\to0+} f(x)g(x)=\lim_{x\to0+} f(x)\cdot\lim_{x\to0+} g(x)$

$=2\lim_{x\to0+} f(x)$

$=2f(0)$

$f(0)g(0)=f(0)\cdot0=0$

이므로 $2f(0)=0$ $\quad\therefore f(0)=0$

(ii) $x=2$에서 연속

함수 $h(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to2} h(x)=h(2)$

$\therefore \lim_{x\to2} f(x)g(x)=f(2)g(2)$

이때

$\lim_{x\to2-} f(x)g(x)=\lim_{x\to2-} f(x)\cdot\lim_{x\to2-} g(x)$

$=-2\lim_{x\to2-} f(x)$

$=-2f(2)$

$\lim_{x\to2+} f(x)g(x)=\lim_{x\to2+} f(x)\cdot\lim_{x\to2+} g(x)$

$=-\lim_{x\to2+} f(x)$

$=-f(2)$

$f(2)g(2)=f(2)\cdot(-2)=-2f(2)$

이므로 $-f(2)=-2f(2)$ $\quad\therefore f(2)=0$

(i), (ii)에서 $f(0)=0$, $f(2)=0$

❶ 4점

이때 함수 $f(x)$는 x^2의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x(x-2)$

❷ 3점

$\therefore f(4)=4\cdot2=8$

❸ 1점

6-1 문제 제대로 읽기

모든 실수 x에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 x, y에 대하여

조건

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy,\ f'(0)=1$$

조건

을 만족시킬 때, $f'(1)+f'(-5)$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]

질문의 핵심

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$에 $y=h$를 대입하면

$f(x+h)=f(x)+f(h)+xh$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+xh-f(x)}{h}\ (\because ㉠)$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+xh}{h}$$

❶ 3점

또 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면 $f(0)=f(0)+f(0)$

$\therefore f(0)=0$ ...... ㉡

따라서

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+xh}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)+xh}{h}\ (\because ㉡)\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}+\lim_{h\to0}\frac{xh}{h}\\ &=f'(0)+x\\ &=x+1 \end{aligned}$$

❷ 3점

$$\begin{aligned} \therefore f'(1)+f'(-5)&=(1+1)+(-5+1)\\ &=2+(-4)\\ &=-2 \end{aligned}$$

❸ 1점

6-2 문제 제대로 읽기

모든 실수 x에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 x, y에 대하여

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$, $f'(1)=4$

를 만족시킬 때, $f'(3)-f'(-2)$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]

조건 / 조건 / 질문의 핵심

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$에 $y=h$를 대입하면

$f(x+h)=f(x)+f(h)+2xh-1$ ...... ㉠

이때 도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-1-f(x)}{h}\ (\because ㉠)\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2xh-1}{h} \end{aligned}$$

❶ 3점

또 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1$

$\therefore f(0)=1$ ...... ㉡

즉

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2xh-1}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2xh-f(0)}{h}\ (\because ㉡)\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}+\lim_{h\to0}\frac{2xh}{h}\\ &=f'(0)+2x \end{aligned}$$

이므로 $f'(1)=f'(0)+2=4$

$\therefore f'(0)=2$

따라서 $f'(x)=f'(0)+2x=2x+2$이므로

❷ 3점

$$\begin{aligned} f'(3)-f'(-2)&=(6+2)-(-4+2)\\ &=8-(-2)=10 \end{aligned}$$

❸ 1점

● 4일차

본문 60~61쪽

7-1 -1	**7-2** 1
8-1 4	**8-2** -2

7-1 문제 제대로 읽기

모든 실수 x에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$g(x)=(x^2+x+1)f(x)$, $g(1)=6$, $g'(1)=3$

일 때, $f'(1)$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오.

[7점]

조건 / 질문의 핵심

$g(x)=(x^2+x+1)f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=(2x+1)f(x)+(x^2+x+1)f'(x)$

❶ 2점

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g'(1)=3f(1)+3f'(1)=3$ ...... ㉠

$g(x)=(x^2+x+1)f(x)$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g(1)=3f(1)=6$ $\therefore f(1)=2$

❷ 3점

$f(1)=2$를 ㉠에 대입하면 $6+3f'(1)=3$

$3f'(1)=-3$ $\therefore f'(1)=-1$

❸ 2점

7-2 문제 제대로 읽기

모든 실수 x에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to4}\frac{f(x)-2}{x-4}=3,\ \lim_{x\to4}\frac{g(x)-1}{x-4}=-1$$

조건

일 때, 함수 $h(x)=f(x)g(x)$의 $x=4$에서의 미분계수를 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]

질문의 핵심

$\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{f(x)-2}{x-4}=3$에서 $\displaystyle\lim_{x\to4}(x-4)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to4}\{f(x)-2\}=f(4)-2=0$

$\therefore f(4)=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{f(x)-2}{x-4}$에 대입하면

$\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{f(x)-2}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)$이므로

$f'(4)=3$

❶ 2점

$\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{g(x)-1}{x-4}=-1$에서 $\displaystyle\lim_{x\to4}(x-4)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to4}\{g(x)-1\}=g(4)-1=0$

$\therefore g(4)=1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{g(x)-1}{x-4}$에 대입하면

$\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{g(x)-1}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{g(x)-g(4)}{x-4}=g'(4)$이므로

$g'(4)=-1$

❷ 2점

이때 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로 함수 $h(x)=f(x)g(x)$의 $x=4$에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}h'(4)&=f'(4)g(4)+f(4)g'(4)\\&=3\cdot1+2\cdot(-1)\\&=1\end{aligned}$$

❸ 3점

8-1 문제 제대로 읽기

다항식 $x^{10}+2ax+b$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어질 때,

조건

상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]

질문의 핵심

다항식 $x^{10}+2ax+b$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{10}+2ax+b=(x-1)^2Q(x)$ $\cdots\cdots$ ㉠

❶ 2점

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $1+2a+b=0$

$\therefore 2a+b=-1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $x^{10}+2ax+b=(x^2-2x+1)Q(x)$이므로 이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9+2a=(2x-2)Q(x)+(x^2-2x+1)Q'(x)$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$10+2a=0$ $\quad\therefore a=-5$

$a=-5$를 ㉡에 대입하면

$-10+b=-1$ $\quad\therefore b=9$

❷ 4점

$\therefore a+b=-5+9=4$

❸ 1점

8-2 문제 제대로 읽기

다항식 x^8-2x^6+7을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(-3)$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]

조건 질문의 핵심

다항식 x^8-2x^6+7을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^8-2x^6+7=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ $\cdots\cdots$ ㉠

❶ 2점

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1-2+7=-a+b$ $\quad\therefore a-b=-6$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $x^8-2x^6+7=(x^2+2x+1)Q(x)+ax+b$이므로 이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$8x^7-12x^5=(2x+2)Q(x)+(x^2+2x+1)Q'(x)+a$

위 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-8+12=a$ $\quad\therefore a=4$

$a=4$를 ㉡에 대입하면

$4-b=-6$ $\quad\therefore b=10$

❷ 3점

따라서 $R(x)=4x+10$이므로

$R(-3)=-12+10=-2$

❸ 2점

Lecture 다항식의 나눗셈에서의 나머지

다항식 $f(x)$를 $Q(x)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 하면

(1) $Q(x)$가 일차식이면 나머지는 상수이다.
⇨ $R(x)=k$ (k는 상수)

(2) $Q(x)$가 이차식이면 나머지는 일차식 또는 상수이다.
⇨ $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)

● **5일차** 본문 62~63쪽

9-1 $y=-x$ **9-2** $y=3x-5$

10-1 (1) $(-1,\ -1)$ (2) 4 (3) $y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$

10-2 9

9-1 문제 제대로 읽기

다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x^2-1}=-\frac{1}{2}$을 만족시킬 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 방정식을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]

조건 / 질문의 핵심

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x^2-1}=-\frac{1}{2}$에서 $\lim_{x\to1}(x^2-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)+1\}=f(1)+1=0$

$\therefore f(1)=-1$

즉 곡선 $y=f(x)$는 점 $(1,\ -1)$을 지난다.

❶ 2점

$f(1)=-1$을 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x^2-1}$에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x^2-1}&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}\\&=\frac{1}{2}f'(1)\end{aligned}$$

이므로 $\frac{1}{2}f'(1)=-\frac{1}{2}$

$\therefore f'(1)=-1$

즉 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는 -1이다.

❷ 3점

따라서 구하는 접선의 방정식은 기울기가 -1이고 점 $(1,\ -1)$을 지나므로

$y-(-1)=-(x-1)$

$\therefore y=-x$

❸ 2점

9-2 문제 제대로 읽기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 방정식이 $y=2x-3$일 때, 곡선 $y=(x-1)f(x)$ 위의 $x=2$인 점에서의 접선의 방정식을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]

조건 / 질문의 핵심

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$이므로 $f'(2)=2$

또 점 $(2,\ 1)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(2)=1$

❶ 2점

$g(x)=(x-1)f(x)$로 놓으면

$g'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$

이때 곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기는

$g'(2)=f(2)+(2-1)f'(2)=1+2=3$

또 $g(2)=(2-1)f(2)=f(2)=1$이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=2$인 점의 좌표는 $(2,\ 1)$이다.

❷ 2점

따라서 구하는 접선의 방정식은 기울기가 3이고 점 $(2,\ 1)$을 지나므로 $y-1=3(x-2)$

$\therefore y=3x-5$

❸ 2점

10-1 문제 제대로 읽기

곡선 $f(x)=x^3+ax^2+(2a+1)x+a+1$은 실수 a의 값에 관계없이 항상 점 P를 지난다. 점 P를 지나고 이 곡선에 접하는 직선을 l이라 할 때, 다음을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]
조건

(1) 점 P의 좌표 질문의 핵심

(2) 직선 l의 기울기 질문의 핵심

(3) 직선 l에 수직이고 점 P를 지나는 직선의 방정식 질문의 핵심

(1) $y=x^3+ax^2+(2a+1)x+a+1$을 a에 대하여 정리하면

$x^3+ax^2+2ax+x+a+1-y=0$

$a(x^2+2x+1)+x^3+x+1-y=0$

위의 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$x^2+2x+1=0$, $x^3+x+1-y=0$

$x^2+2x+1=0$에서 $(x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$

$x=-1$을 $x^3+x+1-y=0$에 대입하면

$-1-1+1-y=0$ $\quad\therefore y=-1$

$\therefore$ P$(-1, -1)$

❶ 2점

(2) $f'(x)=3x^2+2ax+2a+1$

점 P$(-1, -1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3-2a+2a+1=4$

따라서 직선 l의 기울기는 4이다.

❷ 2점

(3) 직선 l에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$

따라서 기울기가 $-\frac{1}{4}$이고 점 P$(-1, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-(-1)=-\frac{1}{4}\{x-(-1)\}$

$\therefore y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$

❸ 2점

10-2 문제 제대로 읽기

곡선 $y=x^3-ax^2+3ax+1$은 실수 a의 값에 관계없이 두 점을 지난다. 이 두 점을 지나고 곡선에 접하는 두 직선이 서로 수직일 때, a의 값의 합을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]
조건 질문의 핵심

$y=x^3-ax^2+3ax+1$을 a에 대하여 정리하면

$x^3-ax^2+3ax+1-y=0$

$a(-x^2+3x)+(x^3+1-y)=0$

위의 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-x^2+3x=0$, $x^3+1-y=0$

$-x^2+3x=0$에서 $x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=3$

$x=0$을 $x^3+1-y=0$에 대입하면

$1-y=0$ $\quad\therefore y=1$

$x=3$을 $x^3+1-y=0$에 대입하면

$27+1-y=0$ $\quad\therefore y=28$

즉 주어진 곡선은 a의 값에 관계없이 두 점 $(0, 1)$, $(3, 28)$을 지난다.

❶ 2점

$f(x)=x^3-ax^2+3ax+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2ax+3a$

점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=3a$

점 $(3, 28)$에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=27-6a+3a=27-3a$

❷ 2점

이때 두 접선이 서로 수직이므로

$3a(27-3a)=-1$

$81a-9a^2=-1$

$9a^2-81a-1=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 a의 값의 합은

$-\frac{-81}{9}=9$

❸ 2점

1주 전

미리 풀어보는 우리 학교 중간고사

● 1일차 본문 66~69쪽

01 ③	02 ④	03 ⑤	04 ①	05 ④
06 ①	07 ⑤	08 ②	09 ④	10 ③
11 ②	12 ⑤	13 ②	14 ③	15 ③
16 ②	17 ④			

[서술형 1] (1) $g(n)=\sqrt{36n^2+36n+10}$ (2) 3
[서술형 2] 6
[서술형 3] 1

01 $\lim\limits_{x\to-1}(2x^2+x+2)=2-1+2=3$

02 $\lim\limits_{x\to2-}f(x)=6$, $\lim\limits_{x\to2+}f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)+\lim\limits_{x\to2+}f(x)=6+2=8$

03 $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}(x^2+x)=2$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(-x+a)=-1+a$

이때 $x=1$에서 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)$

즉 $2=-1+a$이므로 $a=3$

04 $2f(x)-g(x)=h(x)$라 하면

$\lim\limits_{x\to-1}h(x)=3$, $g(x)=2f(x)-h(x)$

$$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{3f(x)+2g(x)}{f(x)-g(x)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{3f(x)+2\{2f(x)-h(x)\}}{f(x)-\{2f(x)-h(x)\}}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{7f(x)-2h(x)}{-f(x)+h(x)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{7-2\cdot\frac{h(x)}{f(x)}}{-1+\frac{h(x)}{f(x)}}$$
$$=-7$$

다른 풀이

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-1}\{2f(x)-g(x)\}=3$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{2f(x)-g(x)}{f(x)}=0$$

즉 $\lim\limits_{x\to-1}\left\{2-\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=2-\lim\limits_{x\to-1}\frac{g(x)}{f(x)}=0$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{g(x)}{f(x)}=2$$

$$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{3f(x)+2g(x)}{f(x)-g(x)}=\lim_{x\to-1}\frac{3+2\cdot\frac{g(x)}{f(x)}}{1-\frac{g(x)}{f(x)}}$$
$$=\frac{3+2\cdot2}{1-2}$$
$$=-7$$

05 $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$
$$=\frac{1}{4}$$

이므로 $a=\frac{1}{4}$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-x+1}-x)(\sqrt{x^2-x+1}+x)}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

이므로 $b=-\frac{1}{2}$

$$\therefore 2a-b=2\cdot\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$$

06 $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2+ax+b}{x-1}=-1$에서 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}(2x^2+ax+b)=2+a+b=0$

$\therefore b=-a-2$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{2x^2+ax+b}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+ax-a-2}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(2x+2+a)(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}(2x+2+a)\\&=a+4\end{aligned}$$

즉 $a+4=-1$이므로 $a=-5$

$a=-5$를 ㉠에 대입하면 $b=5-2=3$

$\therefore a-b=-5-3=-8$

Lecture 극한값을 이용한 미정계수의 결정

미정계수가 포함된 분수 꼴의 함수에서 $x\to a$일 때

(1) (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하면

⇨ (분자)$\to0$

(2) (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하면

⇨ (분모)$\to0$

07 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=3$에서 함수 $f(x)$는 x^2의 계수가 3인 이차함수임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=0$ $\quad\therefore f(1)=0$

즉 $f(x)=3(x-1)(x-a)$ (a는 상수)로 놓으면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x-a)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}3(x-a)\\&=3(1-a)\end{aligned}$$

즉 $3(1-a)=2$이므로 $1-a=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=3(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)=3x^2-4x+1$이므로 $f(2)=12-8+1=5$

08 ㄱ. 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. $g(x)=\begin{cases}1 & (x>1)\\-1 & (x<1)\end{cases}$이므로 $x=1$에서의 함숫값 $g(1)$이 정의되어 있지 않다. 즉 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1-}\frac{1}{x-1}=-\infty$

$\lim_{x\to1+}h(x)=\lim_{x\to1+}\frac{1}{x-1}=\infty$

$\therefore \lim_{x\to1-}h(x)\neq\lim_{x\to1+}h(x)$

즉 $\lim_{x\to1}h(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄹ. $i(x)=\begin{cases}x+2 & (x\neq1)\\2 & (x=1)\end{cases}$이므로

$i(1)=2$, $\lim_{x\to1}i(x)=\lim_{x\to1}(x+2)=3$

$\therefore \lim_{x\to1}i(x)\neq i(1)$

즉 함수 $i(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 $x=1$에서 연속인 함수는 ㄱ으로 그 개수는 1이다.

Lecture 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라 한다.

(i) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

09 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$

즉 $\lim_{x\to2-}(2x+b)=\lim_{x\to2+}(x^2-x+a)=f(2)$이므로

$4+b=4-2+a$

$\therefore a-b=2$

10 $f(x)=x^3-12x+6$이라 하면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

① $f(-2)f(-1)=22\cdot17>0$

② $f(-1)f(0)=17\cdot6>0$

③ $f(0)f(1)=6\cdot(-5)<0$이므로 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

④ $f(1)f(2)=-5\cdot(-10)>0$

⑤ $f(2)f(3)=-10\cdot(-3)>0$

따라서 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 ③이다.

11 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{1-9}{2}=-4$$

12 $\lim_{x\to2}\frac{f(x+1)-5}{x^2-4}=2$에서 $\lim_{x\to2}(x^2-4)=0$이므로

$\lim_{x\to2}\{f(x+1)-5\}=f(3)-5=0$

$\therefore f(3)=5$

이때 $x+1=t$라 하면 $x=t-1$이고 $x\to2$일 때

$t\to3$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x+1)-5}{x^2-4}=\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{(t-1)^2-4}\quad(\because f(3)=5)$$

$$=\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{t^2-2t-3}$$

$$=\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{(t-3)(t+1)}$$

$$=\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{t-3}\cdot\lim_{t\to3}\frac{1}{t+1}$$

$$=\frac{1}{4}f'(3)$$

즉 $\frac{1}{4}f'(3)=2$이므로 $f'(3)=8$

$\therefore f(3)+f'(3)=5+8=13$

13 주어진 그래프에서 불연속인 점은 $x=2$, $x=3$일 때이므로 그 개수는 2이다.

또 미분가능하지 않은 점은 꺾인 점인 $x=1$일 때와 불연속인 점인 $x=2$, $x=3$일 때이므로 그 개수는 3이다.

따라서 $m=2$, $n=3$이므로

$mn=2\cdot3=6$

Lecture 미분가능성과 연속성

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

(1) 불연속인 점: 연결되어 있지 않고 끊어져 있는 점

(2) 미분가능하지 않은 점: 불연속인 점, 뾰족한 점, 꺾인 점

14 $f(xy)=f(x)+f(y)$에 $y=1$을 대입하면

$f(x)=f(x)+f(1)\qquad\therefore f(1)=0\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또 $f(xy)=f(x)+f(y)$에서

$f(x)=f(xy)-f(y)\qquad\cdots\cdots$ ㉡

이때

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}\quad(\because ㉠)$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(xy)-f(y)}{x-1}\quad(\because ㉡)$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(xy)-f(y)}{(x-1)y}\cdot y$$

$$=y\lim_{x\to1}\frac{f(xy)-f(y)}{xy-y}$$

$xy=t$라 하면 $x\to1$일 때 $t\to y$이므로

$$f'(1)=y\lim_{t\to y}\frac{f(t)-f(y)}{t-y}=yf'(y)$$

즉 $f'(1)=yf'(y)=3$이므로 $f'(y)=\frac{3}{y}$

$\therefore f'(9)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

15 $f'(x)=2x+a$이므로

$f'(-3)=-6+a$

즉 $-6+a=-5$이므로 $a=1$

16 $f(x)=2x^2-4$로 놓으면 $f'(x)=4x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=4a=4\qquad\therefore a=1$

즉 점 $(1, b)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$b=2-4=-2$

$\therefore a+b=1+(-2)=-1$

17 함수 $f(x)=-x^3+5x$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{-12-0}{3}=-4$$

인 c가 열린구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-3x^2+5$이므로

$f'(c)=-3c^2+5=-4,\ -3c^2=-9$

$c^2=3 \qquad \therefore c=\sqrt{3}\ (\because 0<c<3)$

[서술형 1] (1) 두 점 $\mathrm{P}(n, f(n)), \mathrm{Q}(n+1, f(n+1))$은 함수 $f(x)=3x^2$의 그래프 위의 점이므로

$\mathrm{P}(n, 3n^2), \mathrm{Q}(n+1, 3(n+1)^2)$

$$\begin{aligned}\therefore g(n)&=\sqrt{\{(n+1)-n\}^2+\{3(n+1)^2-3n^2\}^2}\\&=\sqrt{1+(6n+3)^2}\\&=\sqrt{36n^2+36n+10}\end{aligned}$$

❶

(2) $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{2n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{36n^2+36n+10}}{2n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{36+\frac{36}{n}+\frac{10}{n^2}}}{2}\\&=\frac{\sqrt{36}}{2}\\&=3\end{aligned}$$

❷

채점 기준	배점
❶ $g(n)$을 구할 수 있다.	3점
❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{2n}$의 값을 구할 수 있다.	4점

[서술형 2] 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1, x=2$에서 연속이다.

❶

(i) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1-}(ax+1)=\lim_{x\to1+}(x^2-x+b)=f(1)$

$a+1=b \qquad \therefore a-b=-1$ ...... ㉠

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to2-}(x^2-x+b)=\lim_{x\to2+}(ax+1)=f(2)$

$4-2+b=2a+1 \qquad \therefore 2a-b=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, b=3$

❷

$\therefore ab=2\cdot3=6$

❸

채점 기준	배점
❶ 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속일 조건을 말할 수 있다.	2점
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	4점
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	1점

Lecture 함수의 연속과 미정계수

두 함수 $g(x), h(x)$가 연속함수일 때, 함수

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\ge a)\\ h(x) & (x<a)\end{cases}$$

가 모든 실수 x에서 연속이려면

$\lim_{x\to a-}h(x)=\lim_{x\to a+}g(x)=f(a)$

[서술형 3] $f'(x)=4x$이므로 $x=2$에서의 순간변화율은

$f'(2)=4\cdot2=8$

❶

x의 값이 a에서 $a+2$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(a+2)-f(a)}{(a+2)-a}\\&=\frac{(2a^2+8a+13)-(2a^2+5)}{2}\\&=\frac{8a+8}{2}=4a+4\end{aligned}$$

❷

즉 $8=4a+4$이므로 $a=1$

❸

채점 기준	배점
❶ $x=2$에서의 순간변화율을 구할 수 있다.	2점
❷ x의 값이 a에서 $a+2$까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	2점
❸ a의 값을 구할 수 있다.	2점

● 2일차

본문 70~73쪽

01 ④	02 ③	03 ③	04 ②	05 ④
06 ①	07 ②	08 ④	09 ④	10 ③
11 ②	12 ②	13 ④	14 ⑤	15 ③
16 ④	17 ④			

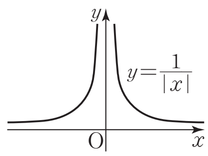
[서술형 1] (1) $S(t)=|t(t+1)|$ (2) 1

[서술형 2] -8

[서술형 3] 22

01 $\lim_{x\to2}(-x^2+4x-7)=-4+8-7=-3$

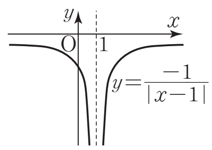
02 ㄱ. 함수 $y=\frac{1}{|x|}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x\to0-}\frac{1}{|x|}=\lim_{x\to0+}\frac{1}{|x|}=\infty$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{1}{|x|}=\infty$

ㄴ. 함수 $y=\frac{-1}{|x-1|}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

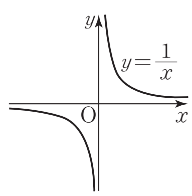


$\lim_{x\to1-}\frac{-1}{|x-1|}=\lim_{x\to1+}\frac{-1}{|x-1|}$
$=-\infty$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{-1}{|x-1|}=-\infty$

ㄷ. $\lim_{x\to-\infty}x^2=\infty$

함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



ㄹ. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

ㅁ. $\lim_{x\to0-}\frac{1}{x}=-\infty$

ㅂ. $\lim_{x\to0+}\frac{1}{x}=\infty$

ㅅ. $\lim_{x\to0-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=-1$

ㅇ. $\lim_{x\to0+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$

따라서 양의 무한대로 발산하는 것은 ㄱ, ㄷ, ㅂ으로 그 개수는 3이다.

03 ① $\lim_{x\to1}\sqrt{x+2}=\sqrt{3}$

② $\lim_{x\to3}(x+1)=4$

③ $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{3x+2}=0$

④ $\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)}$
$=\lim_{x\to1}\frac{x}{x+2}$
$=\frac{1}{3}$

⑤ $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+4}{2x^2+5x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}{2+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{3}{2}$

따라서 극한값이 가장 작은 것은 ③이다.

04 $x=-t$라 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x+7}+x)$
$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-4t+7}-t)$
$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-4t+7}-t)(\sqrt{t^2-4t+7}+t)}{\sqrt{t^2-4t+7}+t}$
$=\lim_{t\to\infty}\frac{-4t+7}{\sqrt{t^2-4t+7}+t}$
$=\lim_{t\to\infty}\frac{-4+\frac{7}{t}}{\sqrt{1-\frac{4}{t}+\frac{7}{t^2}}+1}$
$=-2$

05 $x>0$이므로 $\frac{3x}{x^2+x+3}\le f(x)\le\frac{3x}{x^2+x+1}$의 각 변에 x를 곱하면

$\frac{3x^2}{x^2+x+3}\le xf(x)\le\frac{3x^2}{x^2+x+1}$

이때

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2+x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}=3$

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=3$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}xf(x)=3$

06 $\lim_{x\to\infty}\frac{bx+2}{ax^2+4x-5}=3$이므로 $a=0$

$a=0$을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to\infty}\frac{bx+2}{ax^2+4x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{bx+2}{4x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{b+\frac{2}{x}}{4-\frac{5}{x}}=\frac{b}{4}$

즉 $\frac{b}{4}=3$이므로 $b=12$

$\therefore a-b=0-12=-12$

오답 피하기

$a\neq0$이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{bx+2}{ax^2+4x-5}=0$이므로 $a=0$이어야 한다.

07 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2+}f(x)=f(-2)$

즉 $\lim_{x\to-2-}(3x-1)=\lim_{x\to-2+}(x+a)=f(-2)$이므로

$-6-1=-2+a \qquad \therefore a=-5$

08 $f(x)=x^3-5x^2+k$로 놓으면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다. 이때 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 사잇값의 정리에 의하여 $f(1)f(2)<0$이어야 하므로

$(k-4)(k-12)<0$

$\therefore 4<k<12$

09 ①, ②, ③ 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

④ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2+5}{x+1}$이므로 $x=-1$에서 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 정의되지 않는다. 즉 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=-1$에서 불연속이다.

⑤ $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x+1}{x^2+5}$

이때 모든 실수 x에 대하여 $x^2+5\neq0$이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속이 아닌 함수는 ④이다.

10 x의 값이 2에서 5까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{(28-5a)-(7-2a)}{3}$$
$$=7-a$$

즉 $7-a=3$이므로 $a=4$

11 $$\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{2h}\cdot2$$
$$=2f'(3)$$

즉 $2f'(3)=8$이므로

$f'(3)=4$

이때 $f'(x)=3x^2-6x+a$이므로

$f'(3)=27-18+a=a+9$

즉 $a+9=4$이므로 $a=-5$

12 ㄱ. $\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=-1$

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$

$\therefore \lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

즉 $f'(0)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{(2x+1)-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0-}\frac{2x}{x}$$
$$=2$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{(x+1)^2-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{x^2+2x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}(x+2)$$
$$=2$$

$\therefore \lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$

즉 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $\lim_{x\to0-}h(x)=\lim_{x\to0-}(-x^2+x-1)=-1$

$\lim_{x\to0+}h(x)=\lim_{x\to0+}(x^2+x+1)=1$

즉 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

따라서 $x=0$에서 미분가능한 함수는 ㄴ이다.

Lecture 미분가능성과 연속성

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

$\Longleftrightarrow$ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이면 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

13 ㄱ. $\lim_{x\to1-} f(x)=0$, $\lim_{x\to1+} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1-} f(x) \neq \lim_{x\to1+} f(x)$

즉 $\lim_{x\to1} f(x)$는 존재하지 않는다.

ㄴ. 주어진 그래프에서 불연속인 점은 $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=4$일 때이므로 그 개수는 4이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

14 $f'(x)=6x+a$이므로 $f'(1)=6+a=0$

$\therefore a=-6$

따라서 $f'(x)=6x-6$이므로

$f'(2)=12-6=6$

15 $f(x)=x^2-4x+5$로 놓으면 $f'(x)=2x-4$

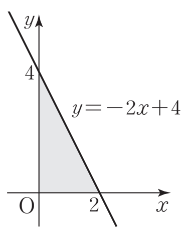
즉 구하는 접선의 기울기는 $f'(1)=2-4=-2$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2=-2(x-1)$

$\therefore y=-2x+4$

직선 $y=-2x+4$는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot2\cdot4=4$



16 $f'(x)=2x-a$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=4-a=6$ $\quad\therefore a=-2$

즉 $f(x)=x^2+2x+1$, $f'(x)=2x+2$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}f'(1)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot4=2$$

$\therefore b=2$

$\therefore a+b=-2+2=0$

17 $f(x)=\frac{1}{4}x^2$으로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{2}x$

접점의 좌표를 $\left(a, \frac{1}{4}a^2\right)$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=\frac{1}{2}a$

즉 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{2}a(x-a)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{2}ax-\frac{1}{4}a^2$

이 직선이 점 $(0, -1)$을 지나므로 $-1=-\frac{1}{4}a^2$

$a^2=4$ $\quad\therefore a=\pm2$

따라서 두 접선의 기울기는 각각 -1, 1이므로

$m_1m_2=-1$

[서술형 1] (1) 직선 $y=x+1$에 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 직선 PQ의 방정식은

$y-(t+1)=-(x-t)$

$\therefore y=-x+2t+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x=0$을 ㉠에 대입하면 $y=2t+1$이므로

$\mathrm{Q}(0, 2t+1)$

즉 $\mathrm{A}(-1, 0)$, $\mathrm{P}(t, t+1)$, $\mathrm{Q}(0, 2t+1)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(t+1)^2+(t+1)^2}=\sqrt{2}|t+1|$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(t-0)^2+\{(t+1)-(2t+1)\}^2}=\sqrt{2}|t|$

$$\therefore S(t)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}|t+1|\cdot\sqrt{2}|t|$$
$$=|t(t+1)|$$

❶

(2) $$\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{|t(t+1)|}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{t(t+1)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}(t+1)=1$$

❷

채점 기준	배점
❶ $S(t)$를 구할 수 있다.	4점
❷ $\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{t}$의 값을 구할 수 있다.	3점

[서술형 2] $f(x)=(x^2+3)(x+1)$로 놓으면

$f'(x)=2x(x+1)+(x^2+3)\cdot1$

$\quad=3x^2+2x+3$

이므로 구하는 접선의 기울기는

$f'(1)=3+2+3=8$

❶

즉 구하는 접선의 방정식은

$y-8=8(x-1)$ $\therefore y=8x$

따라서 $a=8$, $b=0$이므로

❷

$b-a=0-8=-8$

❸

채점 기준	배점
❶ 점 $(1, 8)$에서의 접선의 기울기를 구할 수 있다.	3점
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	1점

[서술형 3] 다항식 $x^{20}+1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^{20}+1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ ······ ㉠

❶

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2=a+b$ ······ ㉡

㉠에서 $x^{20}+1=(x^2-2x+1)Q(x)+ax+b$이므로 이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$20x^{19}=(2x-2)Q(x)+(x^2-2x+1)Q'(x)+a$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $a=20$

$a=20$을 ㉡에 대입하면

$2=20+b$ $\therefore b=-18$

따라서 $R(x)=20x-18$이므로

❷

$R(2)=40-18=22$

❸

채점 기준	배점
❶ 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$로 놓고 나눗셈 식을 세울 수 있다.	2점
❷ $R(x)$를 구할 수 있다.	3점
❸ $R(2)$의 값을 구할 수 있다.	2점

● 3일차

본문 74~77쪽

01 ③	02 ②	03 ③	04 ④	05 ⑤
06 ②	07 ③	08 ④	09 ①	10 ④
11 ⑤	12 ①	13 ③	14 ⑤	15 ⑤
16 ⑤	17 ④			

[서술형 1] (1) 3 (2) $f'(x)=4x-5$

[서술형 2] 7

[서술형 3] 12

01 $\lim_{x\to-2}(x^2-1)+\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{5}{x}\right)=(4-1)+3=6$

02 ㄱ. $\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}|x|=\lim_{x\to0-}(-x)=0$

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}|x|=\lim_{x\to0+}x=0$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)=0$

ㄴ. $\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}[x]=-1$

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}[x]=0$

즉 $\lim_{x\to0-}f(x)\neq\lim_{x\to0+}f(x)$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=0$

ㄹ. $\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to0-}\frac{x}{-x}=-1$

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$

즉 $\lim_{x\to0-}f(x)\neq\lim_{x\to0+}f(x)$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

03 $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(3x^2-2)=3-2=1$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(2x-a)=2-a$

이때 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$

즉 $1=2-a$이므로 $a=1$

04 $\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+x+1}\cdot\frac{f(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+x+1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x-1}$

$=\frac{1}{3}\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x-1}$

이때 $x-1=t$라 하면 $x \to 1$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x-1)}{x^3-1} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 1} \frac{f(x-1)}{x-1} = \frac{1}{3} \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

오답 피하기

$x-a=t$라 하면 $x \to a$일 때 $t \to 0$임에 주의한다.

05 ① $\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2+5} = \sqrt{4+5} = 3$

② $\lim_{x \to 4} (2x-7) = 8-7 = 1$

③ $\lim_{x \to \infty} \frac{4x}{2x^2+5} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{4}{x}}{2+\frac{5}{x^2}} = 0$

④ $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-3x}{x^2-x-6} = \lim_{x \to 3} \frac{x(x-3)}{(x+2)(x-3)}$
$= \lim_{x \to 3} \frac{x}{x+2}$
$= \frac{3}{5}$

⑤ $\lim_{x \to \infty} \frac{7x^2+4x+3}{2x^2-6x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{7+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{2-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{7}{2}$

따라서 극한값이 가장 큰 것은 ⑤이다.

06 $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{9x^2+2x}-3x)$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{9x^2+2x}-3x)(\sqrt{9x^2+2x}+3x)}{\sqrt{9x^2+2x}+3x}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{\sqrt{9x^2+2x}+3x}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt{9+\frac{2}{x}}+3}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3}$$

07 $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+a}-3}{x-2} = b$에서 $\lim_{x \to 2} (x-2) = 0$이므로

$\lim_{x \to 2} (\sqrt{x+a}-3) = \sqrt{2+a}-3 = 0$

$\sqrt{2+a} = 3$, $2+a = 9$ $\quad \therefore a = 7$

$a=7$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+a}-3}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x+7}+3}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}$$

이므로 $b = \frac{1}{6}$ $\quad \therefore ab = 7 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$

08 ㄱ. $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \cos \pi x = \cos \pi = -1$,

$f(1) = \cos \pi = -1$이므로 $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

즉 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $0<x<1$일 때, $1<x+1<2$이므로

$[x+1]=1$ $\quad \therefore [x+1]-1=1-1=0$

$\therefore \lim_{x \to 1-} g(x) = 0$

$1<x<2$일 때, $2<x+1<3$이므로

$[x+1]=2$ $\quad \therefore [x+1]-1=2-1=1$

$\therefore \lim_{x \to 1+} g(x) = 1$

즉 $\lim_{x \to 1-} g(x) \neq \lim_{x \to 1+} g(x)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$
$= \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$

$h(1)=2$이므로 $\lim_{x \to 1} h(x) = h(1)$

즉 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 $x=1$에서 연속인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

오답 피하기

ㄱ. 함수 $f(x)=\cos \pi x$는 주기가 2인 삼각함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

09 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-1$, $x=1$에서 연속이다.

(i) $x=-1$에서 연속

$\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to -1+} f(x) = f(-1)$이므로

$\lim_{x \to -1-} (2x+a) = \lim_{x \to -1+} (-x^2+bx-1)$
$= f(-1)$

$-2+a = -1-b-1$ $\quad \therefore a+b=0$ …… ㉠

(ii) $x=1$에서 연속

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$이므로

$\lim_{x\to 1-}(-x^2+bx-1)=\lim_{x\to 1+}(2x+a)=f(1)$

$-1+b-1=2+a \qquad \therefore a-b=-4 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=2$

$\therefore ab=-2\cdot 2=-4$

10 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-3, 2]$에서 연속이다.

이때

$f(-2)f(-1)=2\cdot(-\sqrt{5})<0$,

$f(-1)f(0)=-\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}<0$,

$f(0)f(1)=\sqrt{2}\cdot(-7)<0$,

$f(1)f(2)=-7\cdot 3<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

즉 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-3, 2)$에서 적어도 4개의 실근을 갖는다.

$\therefore k=4$

11 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $g(x)=x^2-4ax+12a\neq 0$이어야 한다.

이때 이차방정식 $x^2-4ax+12a=0$의 판별식을 D라 하면 $\dfrac{D}{4}=(-2a)^2-1\cdot 12a<0$

$4a^2-12a<0$, $4a(a-3)<0$

$\therefore 0<a<3$

따라서 정수 a의 값의 합은

$1+2=3$

12 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(-1-3h)-f(-1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(-1-3h)-f(-1)}{-3h}\cdot(-3)$

$=-3\lim_{h\to 0}\dfrac{f(-1-3h)-f(-1)}{-3h}$

$=-3f'(-1)$

이때 $f'(x)=6x^2-2x+5$이므로

$f'(-1)=6+2+5=13$

$\therefore \lim_{h\to 0}\dfrac{f(-1-3h)-f(-1)}{h}=-3f'(-1)$

$=-3\cdot 13$

$=-39$

13 $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+1}$

$=\dfrac{1}{2}f'(1)=\dfrac{1}{2}\cdot 6=3$

14 $f'(x)=(2ax-4)(x^2+x-2)$

$+(ax^2-4x)(2x+1)$

이므로 $f'(1)=(a-4)\cdot 3=3a-12$

즉 $3a-12=-3$이므로 $3a=9 \qquad \therefore a=3$

15 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-2)^2Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=2a+b=4 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $f(x)=(x^2-4x+4)Q(x)+ax+b$이므로

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(2x-4)Q(x)+(x^2-4x+4)Q'(x)+a$

위 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(2)=a=5$

$a=5$를 ㉡에 대입하면

$10+b=4 \qquad \therefore b=-6$

따라서 $R(x)=5x-6$이므로

$R(3)=15-6=9$

Lecture 미분과 다항식의 나눗셈

다항식 $f(x)$를 $(x-k)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

(1) $f(x)=(x-k)^2Q(x)+ax+b$

⇨ $f(k)=ak+b$

(2) $f'(x)=(2x-2k)Q(x)+(x-k)^2Q'(x)+a$

⇨ $f'(k)=a$

16 $f(x)=x^3+6x^2-11x+7$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+12x-11$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3+12-11=4$

즉 구하는 접선의 방정식은

$y-3=4(x-1)$ $\quad\therefore y=4x-1$

따라서 $m=4$, $n=-1$이므로

$m-n=4-(-1)=5$

17 $f(x)=-x^2+4x-3$으로 놓으면

$f'(x)=-2x+4$

접점의 좌표를 $(a, -a^2+4a-3)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=-2a+4$

즉 구하는 접선의 방정식은

$y-(-a^2+4a-3)=(-2a+4)(x-a)$

$\therefore y=(-2a+4)x+a^2-3$

이 직선이 점 $(3, 4)$를 지나므로

$4=(-2a+4)\cdot 3+a^2-3$

$4=a^2-6a+9$, $a^2-6a+5=0$

$(a-1)(a-5)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=5$

$a=1$일 때, 접선의 기울기는

$f'(1)=-2+4=2$

$a=5$일 때, 접선의 기울기는

$f'(5)=-10+4=-6$

따라서 $m_1=2$, $m_2=-6$ ($\because m_1>m_2$)이므로

$m_1-m_2=2-(-6)=8$

[서술형 1] (1) x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{3-(-3)}{2}=\frac{6}{2}=3$$

❶

(2) 도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\{2(x+h)^2-5(x+h)\}-(2x^2-5x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2+(4x-5)h}{h}\\&=\lim_{h\to 0}(2h+4x-5)\\&=4x-5\end{aligned}$$

❷

채점 기준	배점
❶ x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	2점
❷ 도함수의 정의를 이용하여 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구할 수 있다.	4점

[서술형 2] (가)에서 $x\neq 1$일 때, $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x-1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+bx+1}{x-1}=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}(ax^2+bx+1)=a+b+1=0$

$\therefore b=-a-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

❶

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{ax^2+bx+1}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{ax^2+(-a-1)x+1}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(ax-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}(ax-1)\\&=a-1\end{aligned}$$

즉 $a-1=2$이므로 $a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면

$b=-3-1=-4$

❷

$\therefore a-b=3-(-4)=7$

❸

채점 기준	배점
❶ 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속임을 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	3점
❷ 상수 a, b의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	1점

[서술형 3] $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{3x^2-2x+5}=2$이므로 $f(x)$는 x^2의 계수가 6인 이차식이다.

$\therefore f(x)=6x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

❶

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{6x^2+ax+b}{x-1}=6\text{에서}$$

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(6x^2+ax+b)=6+a+b=0$

$\therefore b=-a-6 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $\lim_{x\to1}\frac{6x^2+ax+b}{x-1}$에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{6x^2+ax+b}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{6x^2+ax-a-6}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(6x+6+a)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}(6x+6+a)\\&=6+6+a\\&=a+12\end{aligned}$$

즉 $a+12=6$이므로 $a=-6$

$a=-6$을 ㉠에 대입하면

$b=6-6=0$

따라서 $f(x)=6x^2-6x$이므로

❷

$f(2)=24-12=12$

❸

채점 기준	배점
❶ $f(x)$를 x^2의 계수가 6인 이차식으로 나타낼 수 있다.	2점
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	4점
❸ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	1점

4일차

본문 78~81쪽

01 ③	02 ②	03 ②	04 ④	05 ③
06 ③	07 ①	08 ③	09 ⑤	10 ④
11 ②	12 ④	13 ⑤	14 ②	15 ①
16 ①	17 ⑤			

[서술형 1] 8

[서술형 2] $\sqrt{2}+1$

[서술형 3] (1) $f(2)=3, g(2)=-2$ (2) -7

01 $a=\lim_{x\to-1}(x^3+x-2)=-1-1-2=-4$

$b=\lim_{x\to2}\frac{4x^2-3x-1}{5-x}=\frac{16-6-1}{3}=\frac{9}{3}=3$

$\therefore a+b=-4+3=-1$

02 $\lim_{x\to-1-}f(x)=0,\ \lim_{x\to1+}f(x)=-1$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)&=0+(-1)\\&=-1\end{aligned}$$

03
$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\frac{x^2+2x-15}{x^2-2x-3}&=\lim_{x\to3}\frac{(x+5)(x-3)}{(x-3)(x+1)}\\&=\lim_{x\to3}\frac{x+5}{x+1}\\&=2\end{aligned}$$

04
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to1}\frac{(x^2+6)f(x-1)}{x^2-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+6)f(x-1)}{(x+1)(x-1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x^2+6}{x+1}\cdot\frac{f(x-1)}{x-1}\\&=\frac{7}{2}\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x-1}\end{aligned}$$

이때 $x-1=t$라 하면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{(x^2+6)f(x-1)}{x^2-1}&=\frac{7}{2}\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x-1}\\&=\frac{7}{2}\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}\\&=\frac{7}{2}\cdot6\\&=21\end{aligned}$$

05 $2x>0$이므로 $x-3\le f(x)\le x+1$의 각 변을 $2x$로 나누면

$$\frac{x-3}{2x}\le\frac{f(x)}{2x}\le\frac{x+1}{2x}$$

이때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-3}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2}=\frac{1}{2}$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2}$$

Lecture 함수의 극한의 대소 관계

세 함수 $f(x), g(x), h(x)$에 대하여
$f(x) \le h(x) \le g(x)$이고
$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \alpha$ (α는 실수)이면
$\lim_{x\to a} h(x) = \alpha$

06 ㄱ. $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$이므로 $-|x| \le |x|\sin\frac{1}{x} \le |x|$

이때 $\lim_{x\to0}(-|x|)=0$, $\lim_{x\to0}|x|=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

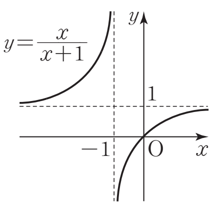
$\lim_{x\to0}|x|\sin\frac{1}{x}=0$

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$

ㄷ. $\lim_{x\to-1}\frac{x}{x+1}$에서 $y=\frac{x}{x+1}$라 하면

$y=\frac{x}{x+1}=\frac{(x+1)-1}{x+1}=-\frac{1}{x+1}+1$

함수 $y=\frac{x}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x\to-1-}\frac{x}{x+1}=\infty$

$\lim_{x\to-1+}\frac{x}{x+1}=-\infty$

즉 $\lim_{x\to-1}\frac{x}{x+1}$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

07 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{4x^2-3x+1}=\frac{1}{2}$이므로 $f(x)$는 x^2의 계수가 2인 이차식이다.

$f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$에서

$\lim_{x\to2}(x^2-x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(2x^2+ax+b)=8+2a+b=0$

$\therefore b=-2a-8$ ...... ㉠

㉠을 $\lim_{x\to2}\frac{2x^2+ax+b}{x^2-x-2}$에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2+ax+b}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2x^2+ax-2a-8}{x^2-x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x+a+4)}{(x-2)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2x+a+4}{x+1}$$
$$=\frac{a+8}{3}$$

즉 $\frac{a+8}{3}=2$이므로 $a+8=6$

$\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=4-8=-4$

따라서 $f(x)=2x^2-2x-4$이므로

$f(3)=18-6-4=8$

Lecture 미정계수의 결정

미정계수가 포함된 분수 꼴의 함수에서 $x \to a$일 때
(1) (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하면 (분자)$\to 0$
(2) (분자)$\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 (분모)$\to 0$

08 $x \ne -1$일 때, $f(x)=\frac{x^3+4x^2-x-4}{x+1}$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^3+4x^2-x-4}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+4)(x-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x+4)(x-1)$$
$$=3\cdot(-2)=-6$$

09 ㄱ. 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 불연속인 점은 $x=-1$, $x=0$, $x=1$일 때이므로 그 개수는 3이다.

ㄴ. 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 최솟값은 $f(2)$, 즉 -1이다.

ㄷ. $\lim_{x\to-1-}f(x)=2$, $\lim_{x\to-1+}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x) \ne \lim_{x\to-1+}f(x)$

$\lim_{x\to1-}f(x)=0$, $\lim_{x\to1+}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x) \ne \lim_{x\to1+}f(x)$

즉 $x=-1$, $x=1$일 때, 좌극한과 우극한이 같지 않으므로 $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재하지 않는 a의 값은 -1, 1로 그 개수는 2이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10 $g(x)=f(x)-2x$라 하면 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다. 이때

$g(0)=f(0)=2$

$g(1)=f(1)-2=5-2=3$

$g(2)=f(2)-4=4-4=0$

$g(3)=f(3)-6=10-6=4$

$g(4)=f(4)-8=0-8=-8$

$g(5)=f(5)-10=4-10=-6$

즉 $g(3)g(4)=4\cdot(-8)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)=2x$는 열린구간 $(3, 4)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

> **Lecture** 사잇값의 정리의 활용
>
> 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

11 x의 값이 a에서 $a+3$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+3)-f(a)}{(a+3)-a}$$
$$=\frac{\{(a+3)^2-3(a+3)\}-(a^2-3a)}{3}$$
$$=2a$$

즉 $2a=-6$이므로 $a=-3$

12 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a-5h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)+f(a)-f(a-5h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a-5h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\cdot 3-\lim_{h\to 0}\frac{f(a-5h)-f(a)}{-5h}\cdot(-5)$$
$$=3f'(a)-(-5)f'(a)$$
$$=8f'(a)=8\cdot\frac{1}{2}=4$$

> **Lecture** 미분계수
>
> 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는
>
> $$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

13 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-6}{x-1}=10$에서 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}\{f(x)-6\}=f(1)-6=0$

$\therefore f(1)=6$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-6}{x-1}$에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-6}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=10$$

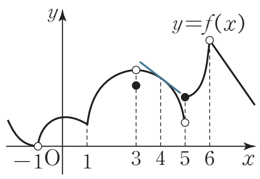
이때 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로

$g'(1)=f(1)+f'(1)=6+10=16$

14 ① 주어진 그래프에서 불연속인 점은 $x=-1$, $x=3$, $x=5$, $x=6$일 때이므로 그 개수는 4이다.

② 주어진 그래프에서 미분가능하지 않은 점은 $x=-1$, $x=1$, $x=3$, $x=5$, $x=6$일 때이므로 그 개수는 5이다.

③ 오른쪽 그림과 같이 $f'(4)$는 $x=4$에서의 접선의 기울기이므로 $f'(4)<0$



④ $\lim_{x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3+} f(x)$이므로 $\lim_{x\to 3} f(x)$가 존재한다.

⑤ $\lim_{x\to -1-} f(x)=0$, $\lim_{x\to -1+} f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to -1} f(x)=0$

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

> **Lecture** 미분가능성과 연속성
>
> 함수 $y=f(x)$의 그래프에서
>
> (1) 연결되어 있지 않은 점은 불연속인 점이다.
>
> (2) 연결되어 있지만 접선을 그을 수 없는 점, 즉 뾰족한 점 또는 꺾인 점은 연속이지만 미분가능하지 않다.

15 ㄱ. $\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-}(-x+3)=3$,

$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+}(x+3)=3$,

$f(0)=3$이므로 $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$

즉 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{(-x+3)-3}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{(x+3)-3}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim_{x\to0-} g(x)=\lim_{x\to0-}(-x^2)=0$,

$\lim_{x\to0+} g(x)=\lim_{x\to0+} x^2=0$,

$g(0)=0$이므로 $\lim_{x\to0} g(x)=g(0)$

즉 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{-x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to0-}(-x)=0$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to0+}x=0$$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $\lim_{x\to0-} h(x)=\lim_{x\to0-}(-x^3)=0$,

$\lim_{x\to0+} h(x)=\lim_{x\to0+} x^3=0$,

$h(0)=0$이므로 $\lim_{x\to0} h(x)=h(0)$

즉 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{-x^3-0}{x-0}=\lim_{x\to0-}(-x^2)=0$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x^3-0}{x-0}=\lim_{x\to0+}x^2=0$$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ이다.

16 $f(x)=x^3+ax^2+b$로 놓으면 점 $(2, -4)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(2)=-4$

$8+4a+b=-4$ $\quad\therefore 4a+b=-12$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $f'(x)=3x^2+2ax$이고 점 $(2, -4)$에서의 접선의 기울기가 8이므로 $f'(2)=8$

$12+4a=8$ $\quad\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$-4+b=-12$ $\quad\therefore b=-8$

$\therefore a+b=-1+(-8)=-9$

17 $f(x)=-x^2+3x-2$로 놓으면 $f'(x)=-2x+3$

접점의 좌표를 $(a, -a^2+3a-2)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=-2a+3$

이때 접선의 기울기가 음수이므로

$-2a+3<0$ $\quad\therefore a>\frac{3}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

즉 구하는 접선의 방정식은

$y-(-a^2+3a-2)=(-2a+3)(x-a)$

$\therefore y=(-2a+3)x+a^2-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

이 직선이 점 $(1, 4)$를 지나므로

$4=-2a+3+a^2-2$, $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$ $\quad\therefore a=3$ ($\because$ ㉠)

$a=3$을 ㉡에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-3x+7$

이 직선이 점 $(k, -5)$를 지나므로

$-5=-3k+7$ $\quad\therefore k=4$

[서술형 1] $a\le0$이면 $\lim_{x\to\infty}(ax+b-\sqrt{x^2+x+1})=-\infty$

이므로 $a>0$이어야 한다.

분모를 1로 생각하고 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}(ax+b-\sqrt{x^2+x+1})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(ax+b-\sqrt{x^2+x+1})(ax+b+\sqrt{x^2+x+1})}{ax+b+\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(ax+b)^2-(x^2+x+1)}{ax+b+\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a^2-1)x^2+(2ab-1)x+b^2-1}{ax+b+\sqrt{x^2+x+1}} \quad\cdots\cdots ㉠$$

❶

이때 ㉠이 3으로 수렴하므로 분자의 최고차항은 분모의 최고차항인 x이어야 한다.

즉 $a^2-1=0$이므로 $a=1$ ($\because a>0$)

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(a^2-1)x^2+(2ab-1)x+b^2-1}{ax+b+\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2b-1)x+b^2-1}{x+b+\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2b-1+\frac{b^2-1}{x}}{1+\frac{b}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$
$$=\frac{2b-1}{2}$$

즉 $\frac{2b-1}{2}=3$이므로 $2b-1=6$

$2b=7$ $\quad\therefore b=\frac{7}{2}$

❷

$\therefore a+2b=1+2\cdot\frac{7}{2}=8$

❸

채점 기준	배점
❶ 분모를 1로 생각하여 분자를 유리화한 후 정리할 수 있다.	2점
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	4점
❸ $a+2b$의 값을 구할 수 있다.	1점

[서술형 2] 원의 반지름의 길이를 r라 하면 주어진 원의 방정식은 $x^2+y^2=r^2$

점 $\mathrm{P}(a, b)$는 원 위의 점이므로

$a^2+b^2=r^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 점 $\mathrm{P}(a, b)$는 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점이므로

$b=\sqrt{a}$

$b=\sqrt{a}$를 ㉠에 대입하면 $a^2+a=r^2$

$\therefore r=\sqrt{a^2+a}$ $(\because r>0)$

❶

이때 $\overline{\mathrm{QH}}=\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{OH}}=r-a=\sqrt{a^2+a}-a$,

$\overline{\mathrm{PH}}=b=\sqrt{a}$이므로

❷

$$\lim_{a\to1}\frac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\overline{\mathrm{QH}}}=\lim_{a\to1}\frac{(\sqrt{a})^2}{\sqrt{a^2+a}-a}$$
$$=\lim_{a\to1}\frac{a}{\sqrt{a^2+a}-a}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$
$$=\sqrt{2}+1$$

❸

채점 기준	배점
❶ 원의 반지름의 길이 r를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	2점
❷ $\overline{\mathrm{QH}}$, $\overline{\mathrm{PH}}$의 길이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	2점
❸ $\lim_{a\to1}\frac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\overline{\mathrm{QH}}}$의 값을 구할 수 있다.	3점

Lecture 원의 방정식

중심의 좌표가 (a, b)이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

[서술형 3] (1) $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=2$에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$

이므로 $\lim_{x\to2}\{f(x)-3\}=f(2)-3=0$

$\therefore f(2)=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $\lim_{x\to2}\frac{g(x)+2}{x-2}=-1$에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$

이므로 $\lim_{x\to2}\{g(x)+2\}=g(2)+2=0$

$\therefore g(2)=-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

❶

(2) ㉠을 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}$에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=f'(2)$$

$\therefore f'(2)=2$

㉡을 $\lim_{x\to2}\frac{g(x)+2}{x-2}$에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{g(x)+2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$
$$=g'(2)$$

$\therefore g'(2)=-1$

❷

이때 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로 $x=2$에서의 미분계수는

$$f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=2\cdot(-2)+3\cdot(-1)$$
$$=-7$$

❸

채점 기준	배점
❶ $f(2)$, $g(2)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ $f'(2)$, $g'(2)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ 함수 $y=f(x)g(x)$의 $x=2$에서의 미분계수를 구할 수 있다.	2점

● 5일차 본문 82~85쪽

01 ①	02 ③	03 ②	04 ①	05 ④
06 ②	07 ④	08 ③	09 ①	10 ①
11 ③	12 ②	13 ②	14 ④	15 ③
16 ②	17 ③			

[서술형 1] -4
[서술형 2] 18
[서술형 3] $(-2, -8)$

01 $\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+} x^2=1^2=1$

02 ① $\lim_{x\to\infty} x^2=\infty$이므로 극한값이 존재하지 않는다.

② $\lim_{x\to2-}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{-(x-2)}{x-2}$
$=-1$
$\lim_{x\to2+}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{x-2}{x-2}$
$=1$
즉 극한값이 존재하지 않는다.

③ $\lim_{x\to1}\sqrt{x+5}=\sqrt{1+5}=\sqrt{6}$

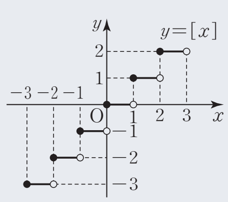
④ $\lim_{x\to1-}\frac{2}{x-1}=-\infty$, $\lim_{x\to1+}\frac{2}{x-1}=\infty$이므로 극한값이 존재하지 않는다.

⑤ $\lim_{x\to0-}[x]=-1$, $\lim_{x\to0+}[x]=0$이므로 극한값이 존재하지 않는다.

따라서 극한값이 존재하는 것은 ③이다.

Lecture $[x]$ 꼴을 포함한 함수의 극한

$[x]$가 x보다 크지 않은 최대의 정수일 때, 정수 n에 대하여



(1) $n\le x<n+1$이면
$[x]=n \Rightarrow \lim_{x\to n+}[x]=n$

(2) $n-1\le x<n$이면
$[x]=n-1 \Rightarrow \lim_{x\to n-}[x]=n-1$

03 $2f(x)-3g(x)=h(x)$라 하면
$\lim_{x\to\infty} h(x)=1$, $3g(x)=2f(x)-h(x)$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5f(x)+6g(x)}{f(x)+3g(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5f(x)+2\cdot3g(x)}{f(x)+3g(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5f(x)+2\{2f(x)-h(x)\}}{f(x)+\{2f(x)-h(x)\}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{9f(x)-2h(x)}{3f(x)-h(x)}$$

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{5f(x)+6g(x)}{f(x)+3g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{9f(x)-2h(x)}{3f(x)-h(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{9-\frac{2h(x)}{f(x)}}{3-\frac{h(x)}{f(x)}}$$
$$=3$$

04 $$\lim_{x\to1}\frac{-6(\sqrt{x}-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{-6(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-6(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-6}{\sqrt{x}+1}$$
$$=-3$$

05 $x^2-3x<f(x)<x^2+3x$의 각 변에 4를 곱하면
$4x^2-12x<4f(x)<4x^2+12x$
$x^2>0$이므로 위 식의 각 변을 x^2으로 나누면
$$\frac{4x^2-12x}{x^2}<\frac{4f(x)}{x^2}<\frac{4x^2+12x}{x^2}$$
이때
$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-12x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{12}{x}}{1}=4,$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+12x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{12}{x}}{1}=4$$
이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여
$$\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)}{x^2}=4$$

06 $\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+b}{x+1}=3$에서 $\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}(x^2+ax+b)=1-a+b=0$

$\therefore b=a-1$ ⋯⋯ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+b}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+a-1}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x+a-1)$$
$$=a-2$$

즉 $a-2=3$이므로 $a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면

$b=5-1=4$

$\therefore a+b=5+4=9$

07 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$

즉 $\lim_{x\to1-}\frac{\sqrt{x^2+1}-ax}{x-1}=\lim_{x\to1+}b=f(1)$이므로

$\lim_{x\to1-}\frac{\sqrt{x^2+1}-ax}{x-1}=b$ ⋯⋯ ㉠

㉠에서 $\lim_{x\to1-}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1-}(\sqrt{x^2+1}-ax)=\sqrt{2}-a=0$

$\therefore a=\sqrt{2}$

$a=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to1-}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}x}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}x)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}x)}{(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}x)}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{1-x^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}x)}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{-(x+1)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}x)}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{-(x+1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}x}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore ab=\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1$

08 ㄱ. $\lim_{x\to1-}f(x)=0$, $\lim_{x\to1+}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=0$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 열린구간 $(0, 2)$에서 연속이므로

$0<a<2$일 때, $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 최댓값이 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

09 $x\neq-1$일 때, $f(x)=\frac{x^2-x+a}{x+1}$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x+a}{x+1}$ ⋯⋯ ㉠

㉠에서 $\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}(x^2-x+a)=2+a=0$

$\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x-2)$$
$$=-3$$

10 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{8-0}{2}=4$

$f'(x)=2x$이므로 $x=c$에서의 미분계수는

$f'(c)=2c$

즉 $2c=4$이므로 $c=2$

Lecture **평균변화율과 미분계수**

(1) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(2) 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

11 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+ah)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+ah)-f(1)}{ah}\cdot a$

$=af'(1)$

이므로 $af'(1)=-1$

이때 $f'(x)=4x-5$이므로 $f'(1)=4-5=-1$

즉 $af'(1)=-a=-1$이므로 $a=1$

12 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-4h)-f(3+2h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-4h)-f(3)+f(3)-f(3+2h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-4h)-f(3)}{h}-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+2h)-f(3)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-4h)-f(3)}{-4h}\cdot(-4)$

$-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+2h)-f(3)}{2h}\cdot 2$

$=-4f'(3)-2f'(3)$

$=-6f'(3)$

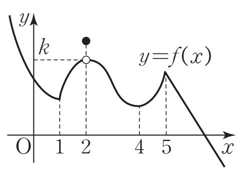
즉 $-6f'(3)=18$이므로 $f'(3)=-3$

13 ㄱ. 오른쪽 그림에서

$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=k$

이므로 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$는 존재

한다.



ㄴ. 주어진 그래프에서 미분가능하지 않은 점은

$x=1$, $x=2$, $x=5$일 때이므로 그 개수는 3이다.

ㄷ. 주어진 그래프에서 접선의 기울기가 0인 점은

$x=4$로 그 개수는 1이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

오답 피하기

ㄷ. $x=2$인 점에서 함수 $y=f(x)$는 불연속이므로 접선을 그을 수 없다. 또 $x=1$, $x=5$인 점과 같이 꺾인 점(뾰족한 점)에서도 접선을 그을 수 없다.

14 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-7}{x+2}=9$에서 $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to -2}\{f(x)-7\}=f(-2)-7=0$

$\therefore f(-2)=7$ ...... ㉠

㉠을 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-7}{x+2}$에 대입하면

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-7}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$

$=f'(-2)=9$

이때 $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$이므로

$g'(-2)=-4f(-2)+4f'(-2)$

$=-4\cdot 7+4\cdot 9$

$=8$

15 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x-1)-5}{x-3}=6$에서 $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 3}\{f(x-1)-5\}=f(2)-5=0$

$\therefore f(2)=5$ ...... ㉠

㉠을 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x-1)-5}{x-3}$에 대입하고 $x-1=t$라 하면

$x\to 3$일 때 $t\to 2$이므로

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x-1)-5}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x-1)-f(2)}{x-3}$

$=\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{f(t)-f(2)}{t-2}$

$=f'(2)=6$

같은 방법으로 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x+1)-3}{x^2-1}=-2$에서

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}\{g(x+1)-3\}=g(2)-3=0$

$\therefore g(2)=3$ ...... ㉡

㉡을 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x+1)-3}{x^2-1}$에 대입하고 $x+1=t$라 하면

$x\to 1$일 때 $t\to 2$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x+1)-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x+1)-g(2)}{x^2-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x+1)-g(2)}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x+1)-g(2)}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+1}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{g(t)-g(2)}{t-2}$

$=\dfrac{1}{2}g'(2)$

즉 $\dfrac{1}{2}g'(2)=-2$이므로 $g'(2)=-4$

이때 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$

$=6\cdot 3+5\cdot(-4)$

$=-2$

16 조건 ㈎에서 $f(2)=16$

조건 ㈏에서 $f'(2)=2$

이때 $g'(x)=-f(x)+(-x+1)f'(x)$이므로

$g'(2)=-f(2)-f'(2)=-16-2$

$=-18$

17 $f(x)=x^2+4$로 놓으면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 (a, a^2+4)라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=2a$

즉 구하는 접선의 방정식은

$y-(a^2+4)=2a(x-a)$

$\therefore y=2ax-a^2+4$ ...... ㉠

이 직선이 점 $(0, 3)$을 지나므로 $3=-a^2+4$

$a^2=1$ $\therefore a=\pm 1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $y=-2x+3$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $y=2x+3$

[서술형 1] $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$에 $y=h$를 대입하면 $f(x+h)=f(x)+f(h)+2xh$ ...... ㉠

또 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$ ...... ㉡

❶

도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+2xh}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+\lim_{h\to 0}2x$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}+2x\ (\because ㉡)$$
$$=f'(0)+2x$$

이때 $f'(0)=2$이므로 $f'(x)=2x+2$

❷

$\therefore f'(-3)=-6+2=-4$

❸

채점 기준	배점
❶ $f(x+h)$와 $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	3점
❸ $f'(-3)$의 값을 구할 수 있다.	2점

[서술형 2] $f(x)=x^n+2x$로 놓으면

$f(1)=3$

❶

$f(1)=3$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=20$$

❷

이때 $f'(x)=nx^{n-1}+2$이므로 $f'(1)=n+2$

따라서 $n+2=20$이므로 $n=18$

❸

채점 기준	배점
❶ $f(x)=x^n+2x$로 놓고 $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ n의 값을 구할 수 있다.	2점

[서술형 3] $f(x)=x^3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

곡선 $y=x^3$ 위의 점 $\mathrm{A}(1, 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3$

즉 구하는 접선의 방정식은

$y-1=3(x-1)$ $\therefore y=3x-2$

❶

곡선 $y=x^3$과 직선 $y=3x-2$의 교점의 좌표를 구하면

$x^3=3x-2$에서 $x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore x=-2\ (\because x\neq 1)$

$x=-2$를 $y=3x-2$에 대입하면

$y=-6-2=-8$

따라서 점 B의 좌표는 $(-2, -8)$이다.

❷

채점 기준	배점
❶ 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $\mathrm{A}(1, 1)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	3점
❷ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	4점

오답 피하기

$f(x)=x^3-3x+2$라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	0	-3	2
		1	1	-2
	1	1	-2	0

$f(x)=(x-1)(x^2+x-2)$

$=(x-1)^2(x+2)$