정답과 풀이

4주 전

학교시험에 꼭 나오는 교과서 문제

1일차 본문 10~13쪽

01-1 ②	01-2 ③	02-1 ④	02-2 ③
03-1 ①	03-2 ③	03-3 ②	03-4 ①
04-1 $y=4x-4$		04-2 8	04-3 ①
04-4 ⑤	05-1 ③	05-2 ①	06-1 ②
06-2 ③			

01-1 $f(x)=ax^3-x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=3ax^2-2x$
이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(1)=4$
즉 $3a-2=4$이므로 $3a=6$
$\therefore a=2$

01-2 $f(x)=x^3+kx+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+k$
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1, a)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(1)=2$
즉 $3+k=2$이므로 $k=-1$
따라서 $f(x)=x^3-x+1$이므로
$f(1)=1-1+1=1$ $\quad\therefore a=1$
$\therefore a+k=1+(-1)=0$

02-1 $f'(x)=3x^2+1$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3+1=4$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-(-2)=4\{x-(-1)\}$
$\therefore y=4x+2$

02-2 $f'(x)=2x+2$
곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=-2$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=-4+2=-2$
이때 $f(x)=x^2+2x+3$에 $x=-2$를 대입하면
$f(-2)=4-4+3=3$
따라서 구하는 접선의 방정식은 기울기가 -2이고 점 $(-2, 3)$을 지나므로
$y-3=-2\{x-(-2)\}$
$\therefore y=-2x-1$

03-1 $f(x)=2x^2-x-1$로 놓으면 $f'(x)=4x-1$
접점의 좌표를 $(a, 2a^2-a-1)$이라 하면 접선의 기울기가 3이므로 $f'(a)=4a-1=3$
$\therefore a=1$
즉 접점의 좌표가 $(1, 0)$이므로 구하는 직선의 방정식은 $y-0=3(x-1)$
$\therefore y=3x-3$
따라서 구하는 직선의 y절편은 -3이다.

03-2 $f'(x)=3x^2-6x$
접점의 좌표를 (a, a^3-3a^2)이라 하면 접선의 기울기가 -3이므로 $f'(a)=3a^2-6a=-3$
$3a^2-6a+3=0$, $a^2-2a+1=0$
$(a-1)^2=0$ $\quad\therefore a=1$
즉 접점의 좌표가 $(1, -2)$이므로 구하는 직선의 방정식은 $y-(-2)=-3(x-1)$
$\therefore y=-3x+1$
$\therefore k=1$

03-3 $x-2y+3=0$에서 $-2y=-x-3$
$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
구하는 직선이 직선 ㉠에 수직이므로 직선의 기울기는 -2이다.
$f(x)=x^2+4x+5$로 놓으면 $f'(x)=2x+4$
접점의 좌표를 (a, a^2+4a+5)라 하면 접선의 기울기가 -2이므로
$f'(a)=2a+4=-2$ $\quad\therefore a=-3$
즉 접점의 좌표가 $(-3, 2)$이므로 구하는 직선의 방정식은 $y-2=-2\{x-(-3)\}$
$\therefore y=-2x-4$
따라서 구하는 직선의 y절편은 -4이다.

03-4 직선 $y=-2x$에 평행하므로 구하는 직선의 기울기는 -2이다.
$f(x)=x^2+2x$로 놓으면 $f'(x)=2x+2$
접점의 좌표를 (a, a^2+2a)라 하면 접선의 기울기가 -2이므로 $f'(a)=2a+2=-2$
$\therefore a=-2$
즉 접점의 좌표가 $(-2, 0)$이므로 구하는 직선의 방정식은 $y-0=-2\{x-(-2)\}$
$\therefore y=-2x-4$

따라서 직선 $y=-2x-4$가 점 $(2, k)$를 지나므로
$k=-4-4=-8$

04-1 $f(x)=x^2$으로 놓으면 $f'(x)=2x$
접점의 좌표를 (a, a^2)이라 하면 접선의 기울기는
$f'(a)=2a$
즉 접선의 방정식은 $y-a^2=2a(x-a)$
$\therefore y=2ax-a^2$ …… ㉠
이때 이 접선이 점 $(1, 0)$을 지나므로
$0=-a^2+2a$, $a^2-2a=0$
$a(a-2)=0$ $\therefore a=2$ ($\because a>0$)
$a=2$를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$y=4x-4$

04-2 $f(x)=-x^2+4x-4$로 놓으면 $f'(x)=-2x+4$
접점의 좌표를 $(a, -a^2+4a-4)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=-2a+4$ …… ㉠
즉 접선의 방정식은
$y-(-a^2+4a-4)=(-2a+4)(x-a)$
$\therefore y=(-2a+4)x+a^2-4$
이때 이 접선이 원점을 지나므로
$0=a^2-4$, $a^2=4$ $\therefore a=\pm 2$
a의 값을 ㉠에 대입하면 접선의 기울기는 8 또는 0이므로 두 접선의 기울기의 합은
$8+0=8$

04-3 $f'(x)=-3x^2$
접점의 좌표를 $(a, -a^3)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=-3a^2$
즉 접선의 방정식은 $y-(-a^3)=-3a^2(x-a)$
$\therefore y=-3a^2x+2a^3$ …… ㉠
이때 이 접선이 점 $(0, -16)$을 지나므로
$-16=2a^3$, $a^3=-8$ $\therefore a=-2$
$a=-2$를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$y=-12x-16$
$y=0$을 $y=-12x-16$에 대입하면
$0=-12x-16$ $\therefore x=-\frac{4}{3}$
따라서 구하는 접선의 x절편은 $-\frac{4}{3}$이다.

04-4 $f(x)=x^3+2x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+4x$
접점의 좌표를 (a, a^3+2a^2+1)이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2+4a$
즉 접선의 방정식은
$y-(a^3+2a^2+1)=(3a^2+4a)(x-a)$
$\therefore y=(3a^2+4a)x-2a^3-2a^2+1$ …… ㉠
이때 이 접선이 점 $(0, 9)$를 지나므로
$9=-2a^3-2a^2+1$, $2a^3+2a^2+8=0$
$a^3+a^2+4=0$, $(a+2)(a^2-a+2)=0$
$\therefore a=-2$ ($\because a^2-a+2>0$)
$a=-2$를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$y=4x+9$
따라서 $m=4$, $n=9$이므로
$m+n=4+9=13$

05-1 함수 $f(x)=x^2+x$는 닫힌구간 $[-1, 0]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 0)$에서 미분가능하다.
또 $f(-1)=f(0)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 0)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=2x+1$이므로
$f'(c)=2c+1=0$ $\therefore c=-\frac{1}{2}$

05-2 함수 $f(x)=x^2-2$는 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-3, 3)$에서 미분가능하다.
또 $f(-3)=f(3)=7$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-3, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=2x$이므로
$f'(c)=2c=0$ $\therefore c=0$

06-1 함수 $f(x)=2x^2-x$는 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$$f'(c)=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{15-3}{3-(-1)}=3$$
인 c가 열린구간 $(-1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=4x-1$이므로
$f'(c)=4c-1=3$ $\therefore c=1$

06-2 함수 $f(x)=-x^2+x+5$는 닫힌구간 $[-2, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$f'(c)=\frac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)}=\frac{-7-(-1)}{4-(-2)}=-1$$

인 c가 열린구간 $(-2, 4)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=-2x+1$이므로
$f'(c)=-2c+1=-1$ $\quad \therefore c=1$

● **2일차** 본문 14~17쪽

01-1 ②	01-2 ③	02-1 ①	02-2 ①
02-3 ②	02-4 ⑤	03-1 ①	03-2 ④
04-1 ②	04-2 ⑤	05-1 ②	05-2 ④
05-3 ⑤	05-4 ②		

01-1 구간 $(-\infty, -2)$, $(0, 2)$, $(2, \infty)$에서 $f'(x)<0$이고, 구간 $(-2, 0)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -2)$, $(0, 2)$, $(2, \infty)$에서 감소하고 구간 $(-2, 0)$에서 증가한다.
따라서 함수 $f(x)$가 증가하는 구간은 ②이다.

01-2 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 $f'(x)>0$이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 증가하므로 $f'(x)>0$인 구간은 ③이다.

02-1 $f(x)=x^3+ax+1$에서 $f'(x)=3x^2+a$
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지므로
$f'(1)=0$
$3+a=0$ $\quad \therefore a=-3$

Lecture **함수 $f(x)=x^n$과 상수함수의 도함수**

(1) 함수 $f(x)=x^n$ (n은 2 이상의 양의 정수)의 도함수는 ⇨ $f'(x)=nx^{n-1}$
(2) 함수 $f(x)=x$의 도함수는 ⇨ $f'(x)=1$
(3) 함수 $f(x)=c$ (c는 상수)의 도함수는 ⇨ $f'(x)=0$

02-2 $f(x)=x^3+ax$에서 $f'(x)=3x^2+a$
함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극댓값을 가지므로
$f'(-2)=0$
$12+a=0$ $\quad \therefore a=-12$

쌍둥이 문제

함수 $f(x)=-x^3+ax-3$이 $x=1$에서 극댓값을 가질 때, 상수 a의 값을 구하시오.

[풀이]
$f(x)=-x^3+ax-3$에서 $f'(x)=-3x^2+a$
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값을 가지므로
$f'(1)=0$
$-3+a=0$ $\quad \therefore a=3$

답 3

02-3 $f(x)=-x^3+ax^2$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax$
함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가지므로
$f'(2)=0$
$-12+4a=0$ $\quad \therefore a=3$
즉 함수 $f(x)=-x^3+3x^2$이므로
$b=f(2)=-8+12=4$
$\therefore a-b=3-4=-1$

02-4 $f(x)=x^3-6x^2+ax+1$에서
$f'(x)=3x^2-12x+a$
함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값을 가지므로
$f'(3)=0$
$27-36+a=0$ $\quad \therefore a=9$
즉 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$이므로
$b=f(3)=27-54+27+1=1$
$\therefore ab=9\cdot 1=9$

03-1 $x=-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $f(-2)$를 갖는다. 또 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $f(0)$을 갖는다.
따라서 $a=-2$, $b=0$이므로
$a+b=-2+0=-2$

03-2 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 3을 갖는다.

$\therefore a=1, b=3$

또 $x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 -2를 갖는다.

$\therefore c=-1, d=-2$

$\therefore (a+b)-(c+d)=(1+3)-(-1-2)=7$

04-1 $f(x)=x^3-3x+1$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 3, $x=1$에서 극솟값 -1을 가지므로 $a=3, b=-1$

$\therefore a+b=3+(-1)=2$

04-2 $f(x)=2x^3-6x^2+a$에서

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	a	↘	$a-8$	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 a를 가지므로 $a=5$

05-1 $f(x)=x^2-1$에서 $f'(x)=2x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	3

즉 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 3, $x=0$에서 최솟값 -1을 가지므로 $M=3, m=-1$

$\therefore M+m=3+(-1)=2$

오답 피하기

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 가지므로 $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

05-2 $f(x)=x^3-3x^2-9x+4$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ ($\because 0\le x\le 4$)

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	↘	-23	↗	-16

즉 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 4, $x=3$에서 최솟값 -23을 가지므로 $M=4, m=-23$

$\therefore M-m=4-(-23)=27$

05-3 $f(x)=-x^3+3x+2$에서

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↘	0	↗	4	↘	2

즉 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 4, $x=-1$에서 최솟값 0을 가지므로 $M=4, m=0$

$\therefore M+m=4+0=4$

05-4 $f(x)=x^2-2x+a$에서

$f'(x)=2x-2=2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	a	↘	$a-1$	↗	$a+3$

즉 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $a+3$, $x=1$에서 최솟값 $a-1$을 가지므로 $a-1=0$ $\quad\therefore a=1$

따라서 구하는 최댓값은

$1+3=4$

● 3일차 본문 18~21쪽

01-1 ①	01-2 ④	02-1 ⑤	02-2 ④
03-1 3	03-2 2	04-1 ⑤	04-2 ④
04-3 ③	04-4 ①	05-1 ③	05-2 ②
05-3 ①	05-4 ②		

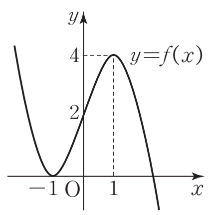
01-1 $f(x)=-x^3+3x+2$에서

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	4	↘

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0,\ 2)$이므로 그 개형은 오른쪽 그림과 같다.



① 구간 $(-3,\ -2)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-3,\ -2)$에서 감소한다.

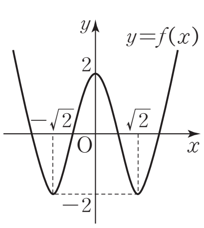
01-2 $f(x)=x^4-4x^2+2$에서

$f'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2	↗	2	↘	-2	↗

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

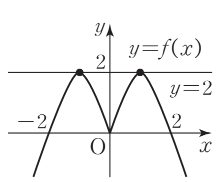


① 구간 $(0,\ 1)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ 1)$에서 감소한다.

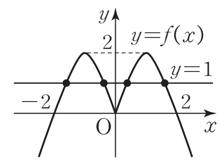
② $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 2를 갖는다.

④ 그래프와 x축의 교점의 개수는 4이다.

02-1 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



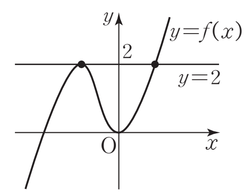
또 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 서로 다른 네 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



따라서 $a=2$, $b=4$이므로

$a+b=2+4=6$

02-2 방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



$\therefore a=2$

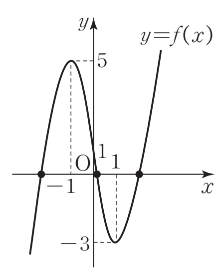
03-1 $f(x)=2x^3-6x+1$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	-3	↗

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



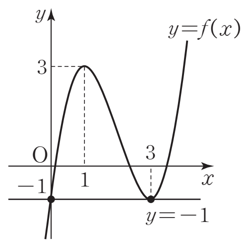
03-2 $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=-1$과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=-1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



쌍둥이 문제

함수 $f(x)=x^4-2x^3+2$에 대하여 방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

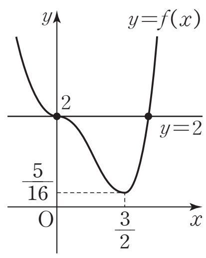
[풀이]

$f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↘	$\frac{5}{16}$	↗

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=2$와 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



답 2

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	k	↘	$k-\frac{1}{2}$	↗

즉 $x\ge0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 $k-\frac{1}{2}$이므로 $f(x)\ge0$이 성립하려면

$k-\frac{1}{2}\ge0 \qquad \therefore k\ge\frac{1}{2}$

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다.

04-3 $x^3\ge3x-k$에서 $x^3-3x+k\ge0$

$f(x)=x^3-3x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x\ge0$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	k	↘	$k-2$	↗

즉 $x\ge0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 $k-2$이므로 $f(x)\ge0$이 성립하려면

$k-2\ge0 \qquad \therefore k\ge2$

따라서 실수 k의 최솟값은 2이다.

04-1 $f(x)=x^3-9x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-18x=3x(x-6)$

$1<x<4$일 때 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(1, 4)$에서 감소한다.

즉 $1<x<4$일 때, $f(x)>0$이 성립하려면

$f(4)\ge0$이어야 하므로

$64-144+k\ge0 \qquad \therefore k\ge80$

따라서 실수 k의 최솟값은 80이다.

04-2 $f(x)=2x^2-2x+k$로 놓으면

$f'(x)=4x-2$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{2}$

04-4 $x^2-x>x+k$에서 $x^2-2x-k>0$

$f(x)=x^2-2x-k$로 놓으면

$f'(x)=2x-2$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-k$	↘	$-k-1$	↗

즉 $x\ge0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 $-k-1$이므로 $f(x)>0$이 성립하려면

$-k-1>0 \qquad \therefore k<-1$

따라서 정수 k의 최댓값은 -2이다.

오답 피하기

$x\ge0$일 때 $f(x)>0$이 성립하려면

(함수 $f(x)$의 최솟값)>0이어야 한다.

05-1 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=t^2+9$, $a=\frac{dv}{dt}=2t$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$\alpha=3^2+9=18$, $\beta=2\cdot3=6$

$\therefore \alpha+\beta=18+6=24$

05-2 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-6t+2$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도는

$3\cdot2^2-6\cdot2+2=2$

05-3 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2+6t-9$, $a=\frac{dv}{dt}=6t+6$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는

$6\cdot1+6=12$

05-4 갑의 시각 t에서의 위치와 속도를 각각 x, v라 하면

$x=t^2$, $v=\frac{dx}{dt}=2t$

갑이 장애물을 뛰어넘는 순간의 시각은

$t^2=25 \qquad \therefore t=5\ (\because t\geq0)$

따라서 $t=5$에서의 갑의 속도는

$2\cdot5=10\ (\mathrm{m/s})$

● 4일차 본문 22~25쪽

01-1 ②	01-2 ③	02-1 4	02-2 −2
03-1 ④	03-2 ⑤	03-3 ⑤	03-4 ④
04-1 ③	04-2 ③	04-3 ①	04-4 ④
05-1 ③	05-2 ①	06-1 ④	06-2 ⑤

01-1 $(x^3+3x+2)'=3x^2+3$이므로

$$\int(3x^2+3)dx=x^3+3x+2+C_1$$
$$=x^3+3x+C$$

오답 피하기

$\int(3x^2+3)dx\neq x^3+3x+2$임에 주의한다.

01-2 $(3x^2+5x)'=f(x)$이므로

$$\int f(x)dx=3x^2+5x+C$$

02-1 $f(x)=(x^2+2x+C)'=2x+2$이므로

$f(1)=2+2=4$

02-2 $f(x)=(x^3+ax+C)'=3x^2+a$

$f(1)=1$이므로 $3+a=1$

$\therefore a=-2$

03-1 $$\int x^2dx=\frac{1}{2+1}x^{2+1}+C$$
$$=\frac{1}{3}x^3+C$$

03-2 $$\int x^6dx=\frac{1}{6+1}x^{6+1}+C$$
$$=\frac{1}{7}x^7+C$$

03-3 $$\int x^3dx=\frac{1}{3+1}x^{3+1}+C=\frac{1}{4}x^4+C$$

이므로 $a=4$, $b=4$

$\therefore a+b=4+4=8$

03-4 $\int x^8 dx = \frac{1}{8+1}x^{8+1}+C=\frac{1}{9}x^9+C$
이므로 $a=9$, $b=9$
$\therefore a+b=9+9=18$

04-1 $\int(3x^2+4x-1)dx$
$=\int 3x^2dx+\int 4x\,dx-\int 1\,dx$
$=3\int x^2dx+4\int x\,dx-\int 1\,dx$
$=x^3+2x^2-x+C$

04-2 $\int(2x+1)dx-\int(x^2+1)dx$
$=\int\{(2x+1)-(x^2+1)\}dx$
$=\int(-x^2+2x)dx$
$=-\int x^2dx+2\int x\,dx$
$=-\frac{1}{3}x^3+x^2+C$

04-3 $\int(x+1)^2dx+\int(x-1)^2dx$
$=\int(x^2+2x+1)dx+\int(x^2-2x+1)dx$
$=\int(2x^2+2)dx$
$=2\int x^2dx+2\int 1\,dx$
$=\frac{2}{3}x^3+2x+C$

04-4 $\int(x+2)^2dx-\int(x-2)^2dx$
$=\int(x^2+4x+4)dx-\int(x^2-4x+4)dx$
$=\int 8x\,dx$
$=8\int x\,dx$
$=4x^2+C$

05-1 $\frac{d}{dx}\int(3x^2+x)dx=3x^2+x$이므로
$a=3$, $b=1$
$\therefore ab=3\cdot1=3$

05-2 $f(x)=\frac{d}{dx}\int(2x^3+x-3)dx$
$=2x^3+x-3$
$\therefore f(-1)=-2-1-3=-6$

쌍둥이 문제

모든 실수 x에 대하여
$$\frac{d}{dx}\int(x^3+ax)dx=bx^3+5x$$
일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수)

① 1 ② 3 ③ 6
④ 9 ⑤ 12

[풀이]
$\frac{d}{dx}\int(x^3+ax)dx=x^3+ax$이므로
$a=5$, $b=1$
$\therefore a+b=5+1=6$

답 ③

06-1 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+x)\right\}dx$
$=x^2+x+C$
이때 $f(0)=2$이므로 $C=2$
따라서 $f(x)=x^2+x+2$이므로
$f(1)=1+1+2=4$

06-2 $F(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx$
$=f(x)+C$
$=4x^4+3x^3+2x^2+x+C$
이때 $F(0)=5$이므로 $C=5$
따라서 $F(x)=4x^4+3x^3+2x^2+x+5$이므로
$F(1)=4+3+2+1+5=15$

● 5일차

본문 26~29쪽

01-1 ④	01-2 ②	01-3 ①	01-4 ②
02-1 ①	02-2 ③	02-3 ④	02-4 ②
03-1 ⑤	03-2 ④	03-3 ①	03-4 ②
04-1 ①	04-2 ⑤	05-1 ③	05-2 ⑤

01-1 $\int_{-1}^{2}(3x^2-2x)dx=\left[x^3-x^2\right]_{-1}^{2}$
$=(8-4)-(-1-1)$
$=6$

01-2 $\int_{1}^{3}(x^2-x+2)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{1}^{3}$
$=\left(9-\frac{9}{2}+6\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)$
$=\frac{26}{3}$

01-3 $\int_{0}^{2}(3x^2+ax)dx=\left[x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_{0}^{2}$
$=8+2a$
이므로 $8+2a=6$ $\quad\therefore a=-1$

01-4 $\int_{-1}^{0}(x^2+x+a)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+ax\right]_{-1}^{0}$
$=-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-a\right)$
$=a-\frac{1}{6}$
이므로 $a-\frac{1}{6}=2$ $\quad\therefore a=\frac{13}{6}$

02-1 $\int_{0}^{2}(2x+1)dx+\int_{0}^{2}(3x^2-2x)dx$
$=\int_{0}^{2}\{(2x+1)+(3x^2-2x)\}dx$
$=\int_{0}^{2}(3x^2+1)dx$
$=\left[x^3+x\right]_{0}^{2}$
$=10$

02-2 $\int_{0}^{1}(x^2+1)dx-\int_{0}^{1}(x^2-2)dx$
$=\int_{0}^{1}\{(x^2+1)-(x^2-2)\}dx$
$=\int_{0}^{1}3\,dx$
$=\left[3x\right]_{0}^{1}$
$=3$

02-3 $\int_{0}^{2}(x^2+4)dx+2\int_{0}^{2}(x^2-x-2)dx$
$=\int_{0}^{2}(x^2+4)dx+\int_{0}^{2}2(x^2-x-2)dx$
$=\int_{0}^{2}\{(x^2+4)+2(x^2-x-2)\}dx$
$=\int_{0}^{2}(3x^2-2x)dx$
$=\left[x^3-x^2\right]_{0}^{2}$
$=4$

02-4 $\int_{2}^{3}\frac{2x^2}{x-1}dx-\int_{2}^{3}\frac{2x}{x-1}dx$
$=\int_{2}^{3}\frac{2x^2-2x}{x-1}dx$
$=\int_{2}^{3}\frac{2x(x-1)}{x-1}dx$
$=\int_{2}^{3}2x\,dx$
$=\left[x^2\right]_{2}^{3}$
$=5$

오답 피하기

분수식의 정적분은 정적분의 성질을 이용한 후 인수분해를 통해 식을 간단히 정리하여 계산한다.

03-1 $\int_{-1}^{1}(x^2+x+1)dx=\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx$
$=2\int_{0}^{1}(x^2+1)dx$
$=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}$
$=2\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

03-2 $\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2-2)dx=\int_{-2}^{2}(3x^2-2)dx$

$=2\int_{0}^{2}(3x^2-2)dx$

$=2\Big[x^3-2x\Big]_0^2$

$=2\cdot 4$

$=8$

03-3 $\int_{-2}^{2}(x-2)(x+2)dx=\int_{-2}^{2}(x^2-4)dx$

$=2\int_{0}^{2}(x^2-4)dx$

$=2\Big[\frac{1}{3}x^3-4x\Big]_0^2$

$=2\cdot\left(-\frac{16}{3}\right)$

$=-\frac{32}{3}$

오답 피하기

$\int_a^b f(x)g(x)dx\neq\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b g(x)dx$임에 주의한다.

03-4 $\int_{-1}^{1}x(x-1)^2dx=\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2+x)dx$

$=\int_{-1}^{1}(-2x^2)dx$

$=2\int_{0}^{1}(-2x^2)dx$

$=2\Big[-\frac{2}{3}x^3\Big]_0^1$

$=2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$

$=-\frac{4}{3}$

04-1 $\int_1^x f(t)dt=x^3-3x^2+2x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-6x+2$

$\therefore f(1)=3-6+2=-1$

Lecture 정적분과 미분의 관계

닫힌구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$가 연속일 때, 열린구간 (a, b)에 속하는 임의의 x에 대하여 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_a^x$$

$$=\frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\}$$

$$=F'(x)$$

$$=f(x)$$

04-2 $\int_0^x\{f(t)+3\}dt=x^5-3x^2+x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+3=5x^4-6x+1$

즉 $f(x)=5x^4-6x-2$이므로

$f(2)=80-12-2=66$

05-1 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x(t^2+2t-1)dt=1+2-1$

$=2$

Lecture 정적분으로 정의된 함수의 극한

함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\Big[F(t)\Big]_a^x$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$$

$$=F'(a)$$

$$=f(a)$$

05-2 $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x(2t+6)dt=4+6$

$=10$

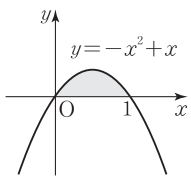
● 6일차 | 본문 30~33쪽

01-1 ①	01-2 ④	02-1 ①	02-2 ④
02-3 ②	02-4 ②	03-1 ④	03-2 ③
04-1 ⑤	04-2 ①	05-1 ④	05-2 ②
06-1 ④	06-2 ②	07-1 ③	07-2 ②
07-3 ①	07-4 ①	08-1 ③	08-2 ④

01-1 $-x^2+x=0$에서 $-x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

즉 곡선 $y=-x^2+x$와 x축의 교점의 x좌표는 0, 1이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는

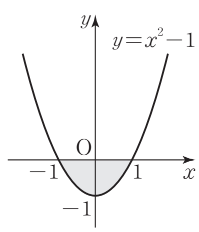


$$\int_0^1 |-x^2+x|\,dx$$
$$=\int_0^1 (-x^2+x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{6}$$

01-2 $x^2-1=0$에서 $(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

즉 곡선 $y=x^2-1$과 x축의 교점의 x좌표는 -1, 1이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-1}^1 |x^2-1|\,dx$$
$$=\int_{-1}^1 (-x^2+1)\,dx$$
$$=2\int_0^1 (-x^2+1)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

Lecture 정적분 $\int_{-a}^a x^n\,dx$의 계산

n이 자연수일 때, 정적분 $\int_{-a}^a x^n\,dx$에 대하여

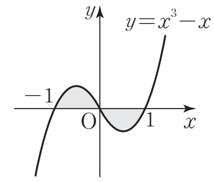
(1) n이 짝수이면 $\int_{-a}^a x^n\,dx=2\int_0^a x^n\,dx$

(2) n이 홀수이면 $\int_{-a}^a x^n\,dx=0$

02-1 $x^3-x=0$에서 $x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

즉 곡선 $y=x^3-x$와 x축의 교점의 x좌표는 -1, 0, 1이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는

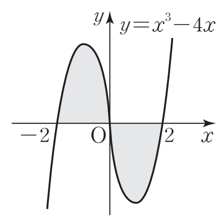


$$\int_{-1}^1 |x^3-x|\,dx$$
$$=\int_{-1}^0 (x^3-x)\,dx+\int_0^1 (-x^3+x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

02-2 $x^3-4x=0$에서 $x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

즉 곡선 $y=x^3-4x$와 x축의 교점의 x좌표는 -2, 0, 2이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-2}^2 |x^3-4x|\,dx$$
$$=\int_{-2}^0 (x^3-4x)\,dx+\int_0^2 (-x^3+4x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_0^2$$
$$=4+4=8$$

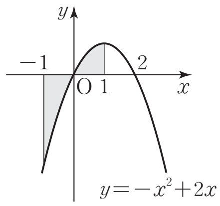
02-3 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^2 |x^2-1|\,dx$$
$$=\int_0^1 (-x^2+1)\,dx+\int_1^2 (x^2-1)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^2$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$$

02-4 $-x^2+2x=0$에서 $-x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

즉 곡선 $y=-x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는 0, 2이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는

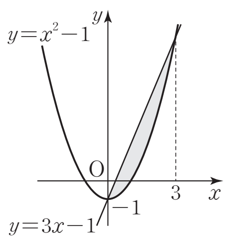


$$\int_{-1}^{1}|-x^2+2x|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{1}(-x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$$

03-1 $x^2-1=3x-1$에서 $x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$ $\qquad\therefore x=0$ 또는 $x=3$

즉 곡선 $y=x^2-1$과 직선 $y=3x-1$의 교점의 x좌표는 0, 3이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{0}^{3}\{(3x-1)-(x^2-1)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{3}(-x^2+3x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}=\frac{9}{2}$$

Lecture 함수의 그래프의 위치에 따른 절댓값 계산

닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(1) 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$보다 위쪽에 있을 때 ⇨ $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$

(2) 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$보다 아래쪽에 있을 때 ⇨ $|f(x)-g(x)|=-f(x)+g(x)$

쌍둥이 문제

곡선 $y=-x^2$과 직선 $y=2x-3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 10 ② $\frac{31}{3}$ ③ $\frac{32}{3}$

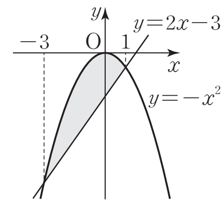
④ 11 ⑤ $\frac{34}{3}$

[풀이]

$-x^2=2x-3$에서 $x^2+2x-3=0$

$(x-1)(x+3)=0$ $\qquad\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

즉 곡선 $y=-x^2$과 직선 $y=2x-3$의 교점의 x좌표는 -3, 1이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



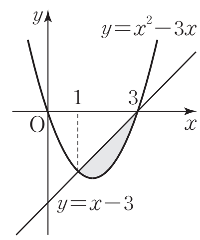
$$\int_{-3}^{1}\{-x^2-(2x-3)\}\,dx$$
$$=\int_{-3}^{1}(-x^2-2x+3)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-3}^{1}$$
$$=\frac{32}{3}$$

답 ③

03-2 $x^2-3x=x-3$에서 $x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$ $\qquad\therefore x=1$ 또는 $x=3$

즉 곡선 $y=x^2-3x$와 직선 $y=x-3$의 교점의 x좌표는 1, 3이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는

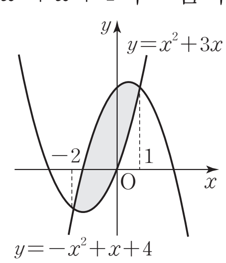


$$\int_{1}^{3}\{(x-3)-(x^2-3x)\}\,dx$$
$$=\int_{1}^{3}(-x^2+4x-3)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_{1}^{3}$$
$$=\frac{4}{3}$$

04-1 $x^2+3x=-x^2+x+4$에서 $x^2+x-2=0$

$(x-1)(x+2)=0$ $\qquad\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

즉 두 곡선 $y=x^2+3x$, $y=-x^2+x+4$의 교점의 x좌표는 -2, 1이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



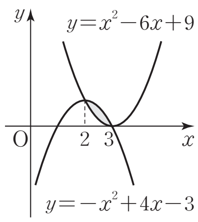
$$\int_{-2}^{1}\{(-x^2+x+4)-(x^2+3x)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}$$
$$=9$$

04-2 $-x^2+4x-3=x^2-6x+9$에서 $x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

즉 두 곡선 $y=-x^2+4x-3$, $y=x^2-6x+9$의 교점의 x좌표는 2, 3이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_2^3 \{(-x^2+4x-3)-(x^2-6x+9)\}dx$$

$$=\int_2^3 (-2x^2+10x-12)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-12x\right]_2^3$$

$$=\frac{1}{3}$$

05-1 시각 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2 (t+2)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^2$$

$$=6$$

05-2 시각 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$$-1+\int_0^2 (t^2-t)dt=-1+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^2$$

$$=-1+\frac{2}{3}$$

$$=-\frac{1}{3}$$

06-1 $v(t)=30-10t=0$에서 $t=3$

따라서 물체는 3초 후에 최고 높이에 도달하므로 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 물체의 위치의 변화량은

$$\int_0^3 (30-10t)dt=\left[30t-5t^2\right]_0^3$$

$$=45\,(\text{m})$$

Lecture **물체의 운동과 속도의 관계 (1)**

지면과 수직으로 던진 물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이다.

06-2 $v(t)=29.4-9.8t=0$에서 $t=3$

따라서 물체는 3초 후에 최고 높이에 도달하므로 $t=3$에서의 물체의 지면으로부터의 높이는

$$30+\int_0^3 (29.4-9.8t)dt=30+\left[29.4t-4.9t^2\right]_0^3$$

$$=30+44.1$$

$$=74.1\,(\text{m})$$

오답 피하기

지면으로부터 a m의 높이에서 출발할 때의 출발점의 위치는 a이다.

07-1 출발한 후 3초 동안 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)|dt=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$$

$$=\frac{3}{2}$$

07-2 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^4 |v(t)|dt=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1+1\cdot 1$$

$$=2$$

07-3 $v(t)=t^2-5t+6=(t-2)(t-3)$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |t^2-5t+6|dt$$

$$=\int_0^2 (t^2-5t+6)dt+\int_2^3 (-t^2+5t-6)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+6t\right]_0^2+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2-6t\right]_2^3$$

$$=\frac{14}{3}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{29}{6}$$

오답 피하기

수직선 위를 움직이는 점의 움직인 거리를 구할 때, $v(t)\geq 0$인 구간과 $v(t)\leq 0$인 구간으로 나누어서 적분한다.

07-4 $v(t)=t^2-2t=t(t-2)$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^3 |t^2-2t|\,dt$$
$$=\int_1^2(-t^2+2t)\,dt+\int_2^3(t^2-2t)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^3$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$$

08-1 $v(t)=20-2t=0$에서 $t=10$

따라서 열차는 제동을 건 후 10초 후에 정지하므로 시각 $t=0$에서 $t=10$까지 열차가 움직인 거리는

$$\int_0^{10}|20-2t|\,dt=\int_0^{10}(20-2t)\,dt$$
$$=\left[20t-t^2\right]_0^{10}$$
$$=100\ (\mathrm{m})$$

Lecture 물체의 운동과 속도의 관계 (2)

(1) 움직이는 물체가 정지할 때 ⇨ (속도)=0

(2) 움직이는 물체가 운동 방향을 바꿀 때 ⇨ (속도)=0

08-2 $v(t)=40-10t=0$에서 $t=4$

따라서 물체는 4초 후에 최고 높이에 도달하므로 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 물체가 움직인 거리는

$$\int_0^4|40-10t|\,dt=\int_0^4(40-10t)\,dt$$
$$=\left[40t-5t^2\right]_0^4$$
$$=80\ (\mathrm{m})$$

3주 전

학교시험에 자주 나오는 대표 기출 24

● 1일차 본문 36~39쪽

01-1 ⑤	01-2 ④	01-3 ④	01-4 ④
02-1 ②	02-2 ①	02-3 ①	02-4 ①
03-1 ②	03-2 ②	03-3 ②	
04-1 ④	04-2 ③	04-3 ⑤	04-4 ④

대표 기출 01 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

꼭 알고 있을 개념

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 다음 순서로 구한다.

(i) 접선의 기울기 $f'(a)$를 구한다.

(ii) $y-f(a)=f'(a)(x-a)$를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

01-1 $f(x)=x^2-3x$로 놓으면 $f'(x)=2x-3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4-3=1$

즉 구하는 접선의 방정식은

$y-(-2)=x-2 \qquad \therefore y=x-4$

따라서 $a=1,\ b=-4$이므로

$a-b=1-(-4)=5$

01-2 점 $(1,\ 2)$가 곡선 $y=3x^2+ax+b$ 위의 점이므로

$2=3+a+b \qquad \therefore a+b=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=3x^2+ax+b$로 놓으면

$f'(x)=6x+a$

이때 접선의 기울기가 4이므로 $f'(1)=4$

$6+a=4 \qquad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$-2+b=-1 \qquad \therefore b=1$

$\therefore b-a=1-(-2)=3$

01-3 $f(x)=x^3-x^2+k$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ k)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3-2=1$

즉 구하는 접선의 방정식은

$y-k=x-1 \qquad \therefore y=x+k-1$

이 직선이 점 $(0, 5)$를 지나므로

$5=k-1 \qquad \therefore k=6$

01-4 $f'(x)=3x^3+2ax+9$

이때 접선의 기울기가 2이므로 $f'(1)=2$

$3+2a+9=2,\ 2a=-10 \qquad \therefore a=-5$

$\therefore f(x)=x^3-5x^2+8x+3$

즉 $x=1$인 점의 좌표는 $(1, 8)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-8=2(x-1) \qquad \therefore y=2x+6$

따라서 $b=6$이므로

$a+b=-5+6=1$

대표 기출 02 기울기가 주어진 접선의 방정식

꼭 알고 있을 개념

곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 다음 순서로 구한다.

(i) 접점의 좌표를 $(a, f(a))$로 놓는다.

(ii) $f'(a)=m$을 이용하여 접점의 좌표를 구한다.

(iii) $y-f(a)=m(x-a)$를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

02-1 $5x-y-7=0$에서 $y=5x-7$이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 5이다.

$f(x)=-x^2+3x+5$로 놓으면

$f'(x)=-2x+3$

접점의 좌표를 $(a, -a^2+3a+5)$라 하면 접선의 기울기가 5이므로 $f'(a)=5$

$-2a+3=5 \qquad \therefore a=-1$

즉 접점의 좌표는 $(-1, 1)$이므로 구하는 직선의 방정식은 $y-1=5\{x-(-1)\}$

$\therefore y=5x+6$

이 직선이 점 $(-2, k)$를 지나므로

$k=-10+6=-4$

02-2 $x-3y+2=0$에서 $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 -3이다.

$f(x)=x^3-3x^2$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 (a, a^3-3a^2)이라 하면 접선의 기울기가 -3이므로 $f'(a)=3$

$3a^2-6a=-3,\ 3a^2-6a+3=0$

$a^2-2a+1=0,\ (a-1)^2=0$

$\therefore a=1$

즉 접점의 좌표는 $(1, -2)$이므로 구하는 직선의 방정식은 $y-(-2)=-3(x-1)$

$\therefore y=-3x+1$

02-3 $f(x)=x^3-3x^2+x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x+1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=27-18+1=10$

점 B에서의 접선은 점 A에서의 접선과 평행하므로 점 B에서의 접선의 기울기는 10이다.

점 B의 좌표를 (a, a^3-3a^2+a+1)이라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2-6a+1=10$

$3a^2-6a-9=0,\ a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-1\ (\because a\neq3)$

즉 점 B의 좌표는 $(-1, -4)$이므로 구하는 접선의 방정식은 $y-(-4)=10\{x-(-1)\}$

$\therefore y=10x+6$

02-4 $f(x)=x^3-3x^2+4x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x+4$

접선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$

접점의 좌표를 (a, a^3-3a^2+4a)라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2-6a+4=1$

$3a^2-6a+3=0,\ a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0 \qquad \therefore a=1$

즉 접점의 좌표는 $(1, 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은 $y-2=x-1$

$\therefore y=x+1$

따라서 $m=1,\ n=1$이므로

$mn=1\cdot1=1$

오답 피하기

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선의 기울기는 $\tan\theta$

대표 기출 03 곡선 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식

꼭 알고 있을 개념

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 (x_1, y_1)에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은 다음 순서로 구한다.

(i) 접점의 좌표를 $(a, f(a))$로 놓는다.

(ii) $y-f(a)=f'(a)(x-a)$에 점 (x_1, y_1)의 좌표를 대입하여 a의 값을 구한다.

(iii) a의 값을 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

03-1 $f(x)=x^3-3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 (a, a^3-3)이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2$

즉 구하는 접선의 방정식은

$y-(a^3-3)=3a^2(x-a)$

$\therefore y=3a^2x-2a^3-3$ $\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(0, -5)$를 지나므로

$-5=-2a^3-3$, $2a^3=2$

$a^3=1$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=3x-5$

따라서 접선이 x축과 만나는 점의 좌표는

$\left(\frac{5}{3}, 0\right)$이므로 $k=\frac{5}{3}$

03-2 $f(x)=x^2+k$로 놓으면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 (a, a^2+k)라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=2a$

즉 구하는 접선의 방정식은

$y-(a^2+k)=2a(x-a)$

$\therefore y=2ax-a^2+k$

이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$0=2a-a^2+k$

$\therefore a^2-2a-k=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 ㉠의 두 근을 a_1, a_2라 하면 접선의 기울기는 $2a_1$, $2a_2$이고 두 접선이 서로 직교하므로

$2a_1\cdot 2a_2=-1$

$\therefore a_1a_2=-\frac{1}{4}$

이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$a_1a_2=-k=-\frac{1}{4}$

$\therefore k=\frac{1}{4}$

03-3 $f(x)=x^4-x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-2x$

접점의 좌표를 (a, a^4-a^2+2)라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=4a^3-2a$

즉 구하는 접선의 방정식은

$y-(a^4-a^2+2)=(4a^3-2a)(x-a)$

$\therefore y=(4a^3-2a)x-3a^4+a^2+2$

이 직선이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=-3a^4+a^2+2$, $3a^4-a^2-2=0$

$(3a^2+2)(a^2-1)=0$, $a^2-1=0$

$\therefore a=\pm 1$

$a=1$일 때 접점의 좌표는 $(1, 2)$

$a=-1$일 때 접점의 좌표는 $(-1, 2)$

$\therefore \overline{OA}+\overline{OB}=\sqrt{1^2+2^2}+\sqrt{(-1)^2+2^2}$

$=\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

Lecture 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

대표 기출 04 롤의 정리와 평균값 정리

꼭 알고 있을 개념

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때

(1) 롤의 정리: $f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

(2) 평균값 정리: $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

04-1 함수 $f(x)=(x+1)^2(x-2)$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$에서 미분가능하다. 또 $f(-1)=f(2)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때

$f(x)=(x+1)^2(x-2)=(x^2+2x+1)(x-2)$

이므로

$f'(x)=(2x+2)(x-2)+(x^2+2x+1)\cdot 1$

$=3x^2-3$

즉 $f'(c)=3c^2-3=0$이므로 $c^2=1$

$\therefore c=1$ ($\because -1<c<2$)

04-2 함수 $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$에 대하여 닫힌구간 $[0, k]$에서 평균값 정리를 만족시키는 c의 값이 2이므로

$$f'(2)=\frac{f(k)-f(0)}{k-0}=\frac{k^3-3k^2+2k+1-1}{k}=k^2-3k+2$$

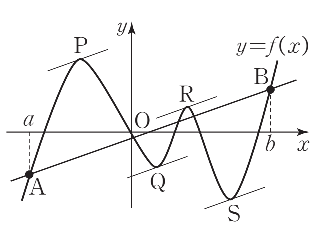
인 2가 열린구간 $(0, k)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=3x^2-6x+2$이므로
$f'(2)=12-12+2=2$
즉 $k^2-3k+2=2$이므로 $k^2-3k=0$
$k(k-3)=0$
$\therefore k=3 \ (\because k>0)$

04-3 함수 $f(x)=-x^2+2x+3$은 닫힌구간 $[-2, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$f'(c)=\frac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)}=\frac{-5-(-5)}{6}=0$$

인 c가 열린구간 $(-2, 4)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=-2x+2$이므로
$f'(c)=-2c+2=0 \qquad \therefore c=1$
$\therefore f(c)=f(1)=-1+2+3=4$

04-4 닫힌구간 $[a, b]$에서 평균값 정리를 만족시키는 c의 값은 미분계수가 직선 AB의 기울기와 같은 점의 x좌표이다.
이때 직선 AB와 평행한 접선은 다음 그림과 같이 네 점 P, Q, R, S에서 각각 그을 수 있다.



따라서 c의 개수는 4이다.

● 2일차			본문 40~43쪽
05-1 ③	05-2 ③	05-3 ③	05-4 ④
06-1 ②	06-2 ④	06-3 ③	06-4 ①
07-1 ②	07-2 ④	07-3 ③	07-4 ②
08-1 ①	08-2 ②	08-3 ②	08-4 ④

대표 기출 05 함수의 증가와 감소

꼭 알고 있을 개념

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고 이 구간의 모든 x에서
(1) 증가하면 $f'(x)\ge 0$
(2) 감소하면 $f'(x)\le 0$

05-1 $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$
$f'(x)\ge 0$인 구간에서 함수 $f(x)$가 증가하므로
$3x(x+2)\ge 0 \qquad \therefore x\le -2$ 또는 $x\ge 0$
따라서 증가하는 구간에 속하는 x의 값이 아닌 것은 ③이다.

05-2 $f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$
$f'(x)\ge 0$인 구간에서 함수 $f(x)$가 증가하므로
$-3(x+1)(x-1)\ge 0$, $(x+1)(x-1)\le 0$
$\therefore -1\le x\le 1$
따라서 함수 $f(x)$가 증가하는 구간은 $[-1, 1]$이다.

05-3 $f'(x)=6x^2-2x=2x(3x-1)$
$f'(x)\le 0$인 구간에서 함수 $f(x)$가 감소하므로
$2x(3x-1)\le 0 \qquad \therefore 0\le x\le \frac{1}{3}$
따라서 함수 $f(x)$가 감소하는 구간은 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$이다.

05-4 $f'(x)=x^2-x=x(x-1)$
$f'(x)\le 0$인 구간에서 함수 $f(x)$가 감소하므로
$x(x-1)\le 0 \qquad \therefore 0\le x\le 1$
따라서 함수 $f(x)$가 감소하는 구간은 $[0, 1]$이므로 a의 최솟값은 0, b의 최댓값은 1이다.
즉 $m=0$, $M=1$이므로
$m+M=0+1=1$

대표 기출 06 함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건

꼭 알고 있을 개념

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서
(1) 증가하면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$
(2) 감소하면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \leq 0$

06-1 $f'(x) = x^2 + 2ax + 2a + 3$
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가함수이려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4} = a^2 - 1 \cdot (2a+3) \leq 0$
$(a+1)(a-3) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq a \leq 3$
따라서 정수 a는 $-1, 0, 1, 2, 3$으로 그 개수는 5이다.

Lecture 이차부등식이 항상 성립할 조건
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때
(1) 모든 실수 x에 대하여 이차부등식
$ax^2+bx+c \geq 0$이 성립하려면
$\Rightarrow a>0, D \leq 0$
(2) 모든 실수 x에 대하여 이차부등식
$ax^2+bx+c \leq 0$이 성립하려면
$\Rightarrow a<0, D \leq 0$

06-2 $f'(x) = -3x^2 + 4ax + 4a$
함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) > f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소함수이어야 한다. 즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \leq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4} = (2a)^2 - (-3) \cdot 4a \leq 0$
$4a(a+3) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq a \leq 0$
따라서 정수 a는 $-3, -2, -1, 0$으로 그 개수는 4이다.

06-3 $f'(x) = 3x^2 + 2(a-1)x + a - 1$
최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가함수이어야 한다.
즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - 3(a-1) \leq 0$
$(a-1)(a-4) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq a \leq 4$

다른 풀이
$f'(x) = 3x^2 + 2(a-1)x + a - 1$
함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖거나 허근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - 3(a-1) \leq 0$
$(a-1)(a-4) \leq 0$
$\therefore 1 \leq a \leq 4$

Lecture 삼차함수가 극값을 갖거나 갖지 않을 조건
(1) 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$
(2) 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖거나 허근을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D \leq 0$

06-4 $f'(x) = -3x^2 + 2ax + a - 6$
함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다. 이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 함수 $f(x)$는 감소함수이어야 한다. 즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \leq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4} = a^2 - (-3) \cdot (a-6) \leq 0$
$(a-3)(a+6) \leq 0$
$\therefore -6 \leq a \leq 3$
따라서 실수 a의 최댓값은 3이다.

Lecture 역함수가 존재하기 위한 조건
함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.
$\Longleftrightarrow$ 함수 $f(x)$가 일대일대응이다.

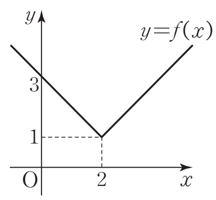
대표 기출 07 함수의 극대·극소

꼭 알고 있을 개념

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고
$x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가
(1) 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대
(2) 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소

07-1 $f(x)=\begin{cases} -x+3 & (x<2) \\ x-1 & (x\geq 2) \end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=2$에서 극솟값 1을 갖는다.



오답 피하기

절댓값이 포함된 함수는 절댓값 기호 안에 있는 식의 값이 0보다 크거나 같을 때와 작을 때로 나누어 정의한다.

07-2 $f(x)=2x^3-3x^2+1$에서
$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	0	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 1, $x=1$에서 극솟값 0을 갖는다.
따라서 $a=1$, $b=0$이므로
$a+b=1+0=1$

07-3 $f(x)=x^3+2x^2-4x-6$에서
$f'(x)=3x^2+4x-4=(3x-2)(x+2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	$-\frac{202}{27}$	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 2를 갖는다.
따라서 $a=-2$, $b=2$이므로
$a+b=-2+2=0$

07-4 $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-10$에서
$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-17	↗	10	↘

즉 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 10, $x=-1$에서 극솟값 -17을 갖는다.
$\mathrm{A}(2, 10)$, $\mathrm{B}(-1, -17)$이므로 선분 AB의 중점의 좌표는
$\left(\frac{2-1}{2}, \frac{10-17}{2}\right)$ $\quad\therefore \left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$
따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{7}{2}$이므로
$a+b=\frac{1}{2}+\left(-\frac{7}{2}\right)=-3$

Lecture 선분의 중점

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표는
$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

대표 기출 08 함수의 극값과 미정계수

꼭 알고 있을 개념

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 가지면
⇨ $f'(a)=0$, $f(a)=b$

08-1 $f(x)=x^3-6x^2+9x+a$에서
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$a+4$	$\searrow$	a	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 a를 가지므로
$a=-2$

08-2 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=2$에서 극값을 가지므로
$f'(0)=0$, $f'(2)=0$
$b=0$, $12+4a+b=0$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=0$
즉 $f(x)=x^3-3x^2+c$이고 $f(0)=3$이므로
$c=3$
$\therefore a+b+c=-3+0+3=0$

08-3 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 실수)라 하면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 $x=1$, $x=5$에서 극값을 가지므로
$f'(1)=0$, $f'(5)=0$
$3+2a+b=0$, $75+10a+b=0$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-9$, $b=15$
$\therefore f(x)=x^3-9x^2+15x+c$
$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$c+7$	$\searrow$	$c-25$	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $c+7$, $x=5$에서 극솟값 $c-25$를 갖는다.
이때 $c+7=17$이므로 $c=10$
따라서 구하는 극솟값은
$10-25=-15$

08-4 $f(x)=x^3-3kx^2-9k^2x$에서
$f'(x)=3x^2-6kx-9k^2=3(x+k)(x-3k)$
$f'(x)=0$에서 $x=-k$ 또는 $x=3k$

x	$\cdots$	$-k$	$\cdots$	$3k$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$5k^3$	$\searrow$	$-27k^3$	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$는 $x=-k$에서 극댓값 $5k^3$, $x=3k$에서 극솟값 $-27k^3$을 갖는다.
이때 극댓값과 극솟값의 차가 32이므로
$5k^3-(-27k^3)=32$, $32k^3=32$
$k^3=1$ $\quad\therefore k=1$

● 3일차

본문 44~47쪽

09-1 ⑤	**09-2** ④		
10-1 ⑤	**10-2** ③	**10-3** ⑤	**10-4** ④
11-1 ⑤	**11-2** ①	**11-3** ④	
12-1 ①	**12-2** ④	**12-3** ③	

대표 기출 09 도함수 $y=f'(x)$의 그래프의 해석

꼭 알고 있을 개념

함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프에 대하여
(1) $f'(x)>0$인 구간에서 $f(x)$는 증가한다.
(2) $f'(x)<0$인 구간에서 $f(x)$는 감소한다.
(3) $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖는다.

09-1 ① $f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$
즉 $f'(x)=0$인 실수 x는 1, 2, 3으로 그 개수는 3이다.
② $x=\frac{3}{2}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 극값을 갖지 않는다.
③ $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖는다.
④ 구간 $(-\infty, 1)$에서 $f'(x)<0$, 구간 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 1)$에서 감소하고 구간 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$에서 증가한다.
⑤ 구간 $(-\infty, 1)$, $(2, 3)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 1)$, $(2, 3)$에서 감소한다.
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

09-2 ㄱ. $x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=3$에서 극값을 갖지 않는다.

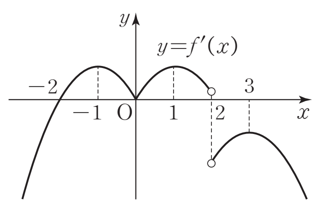
ㄴ. 구간 $(4, 5)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 구간 $(4, 5)$에서 감소한다.

ㄷ. 구간 $(-2, -1)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 구간 $(-2, -1)$에서 증가한다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

쌍둥이 문제

연속함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



ㄱ. $f(x)$는 구간 $(-2, 0)$에서 증가한다.
ㄴ. $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.
ㄷ. $f(x)$는 극댓값과 극솟값이 모두 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[풀이]

ㄱ. 구간 $(-2, 0)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 구간 $(-2, 0)$에서 증가한다.

ㄴ. $f'(2)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이고, $x=-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=-2$에서 극소이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

대표 기출 10 함수의 최대·최소

꼭 알고 있을 개념

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속이고 $x=3$에서 극값을 가지면 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

10-1 $f(x)=x^3-3x^2+4$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 1\le x\le 4$)

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	0	↗	20

즉 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 20, $x=2$에서 최솟값 0을 가지므로

$M=20$, $m=0$

$\therefore M+m=20+0=20$

10-2 $f(x)=-2x^3+3x^2+a$에서

$f'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$a+28$	↘	a	↗	$a+1$

즉 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 $a+28$, $x=0$에서 최솟값 a를 갖는다.

이때 최댓값이 22이므로

$a+28=22$ $\therefore a=-6$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 -6이다.

10-3 $f(x)=x^3-6x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -2\le x\le 2$)

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$a-32$	↗	a	↘	$a-16$

즉 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 a, $x=-2$에서 최솟값 $a-32$를 갖는다.

이때 최댓값과 최솟값의 합이 -10이므로

$a+(a-32)=-10$, $2a=22$

$\therefore a=11$

10-4 $f(x)=-x^3+ax^2+bx-1$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값 -6을 가지므로
$f'(-1)=0,\ f(-1)=-6$
$-3-2a+b=0,\ a-b=-6$
$\therefore\ a=3,\ b=9$
즉 $f(x)=-x^3+3x^2+9x-1$이므로
$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1\ (\because\ -2\le x\le 0)$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	-6	↗	-1

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 1을 갖는다.

대표 기출 11 방정식의 실근의 개수

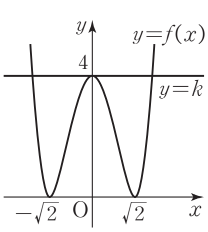
꼭 알고 있을 개념

방정식 $f(x)=3$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3$의 교점의 개수와 같다.

11-1 $x^4-4x^2+4-k=0$에서
$x^4-4x^2+4=k$ $\cdots\cdots$ ㉠
방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=x^4-4x^2+4$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.
$f(x)=x^4-4x^2+4$라 하면
$f'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$
$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	4	↘	0	↗

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면
$k=4$



쌍둥이 문제

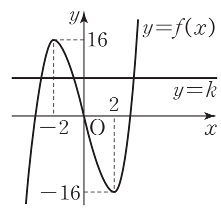
방정식 $x^3-12x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 자연수 k의 개수는?

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

[풀이]
$x^3-12x-k=0$에서 $x^3-12x=k$ $\cdots\cdots$ ㉠
방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=x^3-12x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.
$f(x)=x^3-12x$라 하면
$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	16	↘	-16	↗

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면
$-16<k<16$



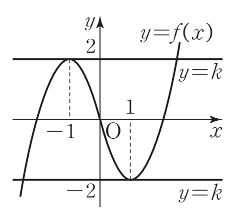
따라서 자연수 k는 $1,\ 2,\ \cdots,\ 15$로 그 개수는 15이다.

답 ③

11-2 $x^3-3x-k=0$에서 $x^3-3x=k$ $\cdots\cdots$ ㉠
방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=x^3-3x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.
$f(x)=x^3-3x$라 하면
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면
$k=-2$ 또는 $k=2$



따라서 모든 실수 k의 값의 곱은
$-2\cdot 2=-4$

다른 풀이

$f(x)=x^3-3x-k$라 하면
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$f(-1)f(1)=0$이어야 하므로
$(-k+2)(-k-2)=0$　　$\therefore k=-2$ 또는 $k=2$
따라서 모든 실수 k의 값의 곱은
$-2\cdot 2=-4$

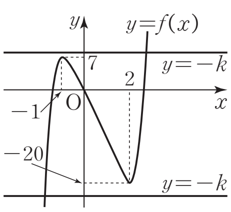
Lecture　삼차방정식의 근의 판별

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$의 근은 다음과 같이 판별할 수 있다.
(1) 서로 다른 세 실근을 갖는다.
　$\Longleftrightarrow$ (극댓값)$\times$(극솟값)<0
(2) 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 갖는다.
　$\Longleftrightarrow$ (극댓값)$\times$(극솟값)$=0$
(3) 한 실근과 두 허근을 갖는다.
　$\Longleftrightarrow$ (극댓값)$\times$(극솟값)>0

11-3 $2x^3-3x^2-12x+k=0$에서
$2x^3-3x^2-12x=-k$　　$\cdots\cdots$ ㉠
방정식 ㉠이 한 실근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=2x^3-3x^2-12x$와 직선 $y=-k$가 한 점에서 만나야 한다.
$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라 하면
$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-20	$\nearrow$

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 한 점에서 만나려면



$-k>7$ 또는 $-k<-20$
$\therefore k<-7$ 또는 $k>20$
따라서 $a=-7$, $b=20$이므로
$a+b=-7+20=13$

다른 풀이

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+k$라 하면
$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$
방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면
$f(-1)f(2)>0$이어야 하므로
$(k+7)(k-20)>0$　　$\therefore k<-7$ 또는 $k>20$
따라서 $a=-7$, $b=20$이므로
$a+b=-7+20=13$

대표 기출 12　두 그래프의 교점의 개수

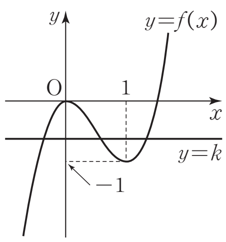
꼭 알고 있을 개념

방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같다.

12-1 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $2x^3-3x^2+x=x+k$, 즉 $2x^3-3x^2=k$가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
$f(x)=2x^3-3x^2$이라 하면
$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면



$-1<k<0$

다른 풀이

주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $2x^3-3x^2+x=x+k$, 즉 $2x^3-3x^2-k=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
$f(x)=2x^3-3x^2-k$라 하면
$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$
방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면
$f(0)f(1)<0$이어야 하므로
$-k(-k-1)<0$
$\therefore -1<k<0$

쌍둥이 문제

두 곡선 $y=x^3-4x^2+6x$, $y=2x^2-3x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 정수 k의 개수는?

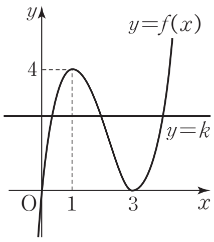
① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

[풀이]
주어진 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x^3-4x^2+6x=2x^2-3x+k$, 즉 $x^3-6x^2+9x=k$가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-6x^2+9x$라 하면
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면
$0<k<4$
따라서 정수 k는 1, 2, 3으로 그 개수는 3이다.

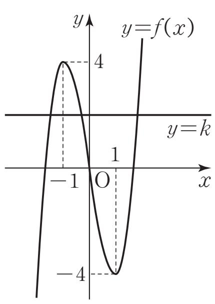


답 ③

12-2 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $2x^3-7x=-x+k$, 즉 $2x^3-6x=k$가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
$f(x)=2x^3-6x$라 하면
$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	-4	↗

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면
$-4<k<4$
따라서 정수 k는 $-3, -2, \cdots, 3$으로 그 개수는 7이다.

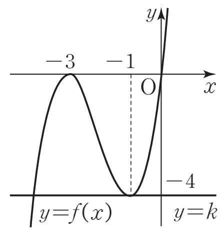


다른 풀이
주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $2x^3-7x=-x+k$, 즉 $2x^3-6x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
$f(x)=2x^3-6x-k$라 하면
$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면
$f(-1)f(1)<0$이어야 하므로
$(-k+4)(-k-4)<0 \qquad \therefore -4<k<4$
따라서 정수 k는 $-3, -2, \cdots, 3$으로 그 개수는 7이다.

12-3 주어진 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $x^3+4x^2+6x=-2x^2-3x+k$, 즉 $x^3+6x^2+9x=k$가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
$f(x)=x^3+6x^2+9x$라 하면
$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+1)(x+3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면
$k=-4$ 또는 $k=0$
따라서 실수 k의 최댓값은 0이다.



● 4일차 본문 48~51쪽

13-1 ⑤	**13-2** ②	**13-3** ⑤	
14-1 ④	**14-2** ④	**14-3** ④	**14-4** ⑤
15-1 ②	**15-2** ③		
16-1 ③	**16-2** ②	**16-3** ⑤	**16-4** ②

대표 기출 13 부등식이 항상 성립할 조건

꼭 알고 있을 개념
(1) 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\ge 0$이 성립하려면
그 구간에서 (함수 $f(x)$의 최솟값)≥ 0
(2) 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\ge g(x)$가 성립하려면
$h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때, 그 구간에서
(함수 $h(x)$의 최솟값)≥ 0

13-1 $f(x)=2x^3-6x+k$라 하면
$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	$k-4$	↗

즉 $x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 $k-4$이므로 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$k-4\geq 0 \qquad \therefore k\geq 4$

따라서 실수 k의 최솟값은 4이다.

쌍둥이 문제

$x>1$일 때, 부등식 $2x^3-9x^2+12x+k>0$이 성립하기 위한 실수 k의 값의 범위는?

① $k>-4$ ② $k\geq -4$ ③ $k>0$
④ $k\geq 0$ ⑤ $k\geq 2$

[풀이]

$f(x)=2x^3-9x^2+12x+k$라 하면

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x>1$)

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$k+4$	$\nearrow$

즉 $x>1$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 $k+4$이므로 $f(x)>0$이 성립하려면

$k+4>0 \qquad \therefore k>-4$

답 ①

13-2 $f(x)=4x^3-12x+k$라 하면

$f'(x)=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 0\leq x\leq 2$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	k	$\searrow$	$k-8$	$\nearrow$	$k+8$

즉 $0\leq x\leq 2$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 $k-8$이므로 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$k-8\geq 0 \qquad \therefore k\geq 8$

따라서 실수 k의 최솟값은 8이다.

13-3 $f(x)\geq g(x)$에서 $f(x)-g(x)\geq 0$

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=2x^3-5x+k-(-2x^3+3x^2+x)$

$\quad\;\;=4x^3-3x^2-6x+k$

$\therefore h'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 0\leq x\leq 2$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	k	$\searrow$	$k-5$	$\nearrow$	$k+8$

즉 $0\leq x\leq 2$일 때, 함수 $h(x)$의 최솟값이 $k-5$이므로 $h(x)\geq 0$이 성립하려면

$k-5\geq 0 \qquad \therefore k\geq 5$

따라서 실수 k의 최솟값은 5이다.

대표 기출 14 속도와 가속도

꼭 알고 있을 개념

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도는

(1) 속도: $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$

(2) 가속도: $a=\dfrac{dv}{dt}$

14-1 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-18t+34$

이때 속도가 10이 되는 시각은

$3t^2-18t+34=10,\ 3t^2-18t+24=0$

$3(t-2)(t-4)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=4$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$2^3-9\cdot 2^2+34\cdot 2=40$

오답 피하기

점 P의 속도가 처음으로 10이 되는 순간이므로 $t=2$임에 주의한다.

14-2 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-6t^2+5,\ a=\dfrac{dv}{dt}=-12t$

이때 속도가 -1이 되는 시각은

$-6t^2+5=-1,\ -6t^2=-6,\ t^2=1$

$\therefore t=1$ ($\because t\geq 0$)

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는

$-12\cdot 1=-12$

14-3 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=(x_P)'=2t-4$, $v_Q=(x_Q)'=t-6$

이때 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이려면 $v_Pv_Q<0$이므로 $(2t-4)(t-6)<0$

$2(t-2)(t-6)<0$　　$\therefore 2<t<6$

Lecture 속도와 운동 방향

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면

(점 P의 속도)×(점 Q의 속도)<0

14-4 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=x_P'(t)=t^2+4$, $v_Q=x_Q'(t)=4t$

두 점 P, Q의 속도가 같아지려면 $v_P=v_Q$이므로

$t^2+4=4t$, $t^2-4t+4=0$

$(t-2)^2=0$　　$\therefore t=2$

$\therefore x_P(2)=\frac{8}{3}+8-\frac{2}{3}=10$, $x_Q(2)=8-6=2$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$10-2=8$

대표 기출 15 속도의 그래프

꼭 알고 있을 개념

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$의 그래프의 $t=a$인 점에서의 접선의 기울기는 $t=a$에서의 점 P의 가속도이다.

15-1 $t=t_2$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P의 운동 방향이 바뀐다. 따라서 $0<t<t_5$에서 점 P는 운동 방향을 1번 바꾼다.

오답 피하기

$v(t_4)=0$이지만 $t=t_4$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌지 않으므로 점 P의 운동 방향은 바뀌지 않는다.

15-2 ㄱ. $v(a)>0$, $v(c)<0$이므로 $t=a$일 때와 $t=c$일 때의 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.

ㄴ. $t>d$일 때, $v(t)>0$이므로 점 P는 출발할 때의 운동 방향과 같은 방향으로 움직인다.

ㄷ. $t=b$와 $t=d$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

ㄹ. 점 P의 시각 t에서의 가속도는 $v'(t)$이고, $v'(b)<0$이므로 $t=b$일 때 점 P의 가속도는 음의 값이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ로 그 개수는 2이다.

대표 기출 16 부정적분

꼭 알고 있을 개념

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

(1) $\int f(x)dx=F(x)+C$ (C는 적분상수)

(2) $f(x)=F'(x)$

16-1 $F(x)=\int f(x)dx=\int(3x^2+4x-1)dx$

$=x^3+2x^2-x+C$

이때 $F(0)=-2$이므로 $C=-2$

따라서 $F(x)=x^3+2x^2-x-2$이므로

$F(1)=1+2-1-2=0$

16-2 $f(x)=(-2x^3+C)'=-6x^2$

16-3 $(x-1)f(x)=(x^3+3x^2-9x+C)'$

$=3x^2+6x-9$

$=3(x-1)(x+3)$

따라서 $f(x)=3(x+3)$이므로

$f(7)=3(7+3)=30$

16-4 조건 (가)에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}\{f(x)-4\}=f(2)-4=0$

$\therefore f(2)=4$

$f(2)=4$를 조건 (가)에 대입하면

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(2)=2$

조건 (나)에서 $f'(x)=x^2+ax+2$이므로

$2a+6=2 \qquad \therefore a=-2$

Lecture 미분계수

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

● 5일차 본문 52~55쪽

17-1 ①	17-2 ②	17-3 ⑤	17-4 ⑤
18-1 ②	18-2 ①	18-3 ①	18-4 ③
19-1 ②	19-2 ⑤	19-3 ③	
20-1 ⑤	20-2 ④	20-3 ①	20-4 ②

대표 기출 17 도함수가 주어질 때 함수 구하기

꼭 알고 있을 개념

$f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용하여 함수 $f(x)$를 적분 상수를 포함한 식으로 나타낸다.

17-1 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2-4x+3)dx$

$=2x^3-2x^2+3x+C$

이때 $f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=2x^3-2x^2+3x+2$이므로

$f(1)=2-2+3+2=5$

17-2 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x^3-2x+1)dx$

$=x^4-x^2+x+C$

이때 $f(-1)=2$이므로

$1-1-1+C=2 \qquad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=x^4-x^2+x+3$이므로

$f(1)=1-1+1+3=4$

17-3 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x-1)dx$

$=2x^2-x+C$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=0 \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=2x^2-x$이므로

$f(2)=8-2=6$

17-4 $f'(x)=\begin{cases}3x^2+2x & (x\ge -1)\\ 4x^3 & (x<-1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}x^3+x^2+C_1 & (x\ge -1)\\ x^4+C_2 & (x<-1)\end{cases}$

이때 $f(-2)=17$이므로

$16+C_2=17 \qquad \therefore C_2=1$

함수 $f(x)$가 연속함수이므로 $x=-1$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1+}f(x)=f(-1)$이므로

$\lim_{x\to -1-}(x^4+1)=\lim_{x\to -1+}(x^3+x^2+C_1)=f(-1)$

$\therefore C_1=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^3+x^2+2 & (x\ge -1)\\ x^4+1 & (x<-1)\end{cases}$이므로

$f(1)=1+1+2=4$

Lecture 함수의 연속

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

$\Longleftrightarrow$ (i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

대표 기출 18 부정적분과 미분의 관계

꼭 알고 있을 개념

함수 $f(x)$에 대하여

(1) $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$

(2) $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$ (C는 적분상수)

18-1 $F(x)=xf(x)-2x^3+x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+2x$
$xf'(x)=6x^2-2x$
$\therefore f'(x)=6x-2$
$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x-2)dx$
$=3x^2-2x+C$
이므로 $f(0)=1$에서 $C=1$
$\therefore f(x)=3x^2-2x+1$

18-2 $F(x)=xf(x)+6x^3-2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=f(x)+xf'(x)+18x^2-4x$
$xf'(x)=-18x^2+4x$
$\therefore f'(x)=-18x+4$
$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-18x+4)dx$
$=-9x^2+4x+C$
이므로 $f(1)=1$에서
$C-5=1 \qquad \therefore C=6$
따라서 $f(x)=-9x^2+4x+6$이므로
$f(-1)=-9-4+6=-7$

18-3 $F(x)=xf(x)+4x^3-x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=f(x)+xf'(x)+12x^2-2x$
$xf'(x)=-12x^2+2x$
$\therefore f'(x)=-12x+2$
$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-12x+2)dx$
$=-6x^2+2x+C$
이므로 $f(0)=2$에서 $C=2$
따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $-6x^2+2x+2=0$의 모든 실근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-\frac{2}{-6}=\frac{1}{3}$

Lecture 이차방정식의 근과 계수의 관계
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 할 때
(1) $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$
(2) $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

18-4 $xf(x)=2x^3+\int f(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)+xf'(x)=6x^2+f(x)$
$xf'(x)=6x^2$
$\therefore f'(x)=6x$
$f(x)=\int f'(x)dx=\int 6x\,dx$
$=3x^2+C$
이므로 $f(1)=2$에서
$C+3=2 \qquad \therefore C=-1$
따라서 $f(x)=3x^2-1$이므로
$f(3)=27-1=26$

대표 기출 19 정적분

꼭 알고 있을 개념
함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여
$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$

19-1 $\int_1^0(3x-2x^2)dx=\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_1^0$
$=-\frac{5}{6}$

19-2 $\int_2^4\frac{x^2}{x+1}dx-\int_2^4\frac{1}{x+1}dx$
$=\int_2^4\frac{x^2-1}{x+1}dx$
$=\int_2^4\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}dx$
$=\int_2^4(x-1)dx$
$=\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_2^4$
$=4$

19-3 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(ax^2+b)dx$
$=\left[\frac{a}{3}x^3+bx\right]_0^2$
$=\frac{8}{3}a+2b$

이므로

$\frac{8}{3}a+2b=-4 \qquad \therefore 4a+3b=-6 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4 (ax^2+b)dx$

$=\left[\frac{a}{3}x^3+bx\right]_1^4$

$=21a+3b$

이므로 $21a+3b=11 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-\frac{10}{3}$

$\therefore \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \left(x^2-\frac{10}{3}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{10}{3}x\right]_0^1$

$=-3$

대표 기출 20 정적분의 계산

꼭 알고 있을 개념

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 열린구간에서 연속일 때

(1) $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

(2) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (k는 상수)

(3) $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx$

$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

(4) $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$

$=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

20-1 $|x-1|=\begin{cases}-x+1 & (x<1)\\ x-1 & (x\ge1)\end{cases}$이므로

$\int_{-1}^2 |x-1|dx=\int_{-1}^1 (-x+1)dx+\int_1^2 (x-1)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^1+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2$

$=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

오답 피하기

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값을 기준으로 적분 구간을 나눈다.

20-2 $x|x-2|=\begin{cases}-x^2+2x & (x<2)\\ x^2-2x & (x\ge2)\end{cases}$이므로

$\int_1^3 x|x-2|dx$

$=\int_1^2 (-x^2+2x)dx+\int_2^3 (x^2-2x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$

$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$

20-3 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 (4x-3x^2)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[2x^2-x^3\right]_1^2$

$=\frac{1}{3}+(-1)=-\frac{2}{3}$

20-4 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 (4x^2-1)dx+\int_1^2 (2x+1)dx$

$=\left[\frac{4}{3}x^3-x\right]_0^1+\left[x^2+x\right]_1^2$

$=\frac{1}{3}+4=\frac{13}{3}$

쌍둥이 문제

함수 $f(x)=\begin{cases}x^2+x & (x<1)\\ x+1 & (x\ge1)\end{cases}$에 대하여 정적분 $\int_{-1}^2 xf(x)dx$의 값은?

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{25}{6}$ ③ $\frac{9}{2}$

④ $\frac{31}{6}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

[풀이]

$\int_{-1}^2 xf(x)dx$

$=\int_{-1}^1 x(x^2+x)dx+\int_1^2 x(x+1)dx$

$=\int_{-1}^1 (x^3+x^2)dx+\int_1^2 (x^2+x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$

$=\frac{2}{3}+\frac{23}{6}=\frac{9}{2}$

답 ③

● 6일차 본문 56~59쪽

21-1 ⑤	21-2 ③	21-3 ②	21-4 ②
22-1 ②	22-2 ④	22-3 ③	22-4 ①
23-1 ⑤	23-2 ②	23-3 ③	23-4 ①
24-1 ①	24-2 ③	24-3 ⑤	24-4 ③

대표 기출 21 곡선과 x축 사이의 넓이

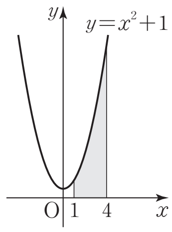
꼭 알고 있을 개념

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\Rightarrow \displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$

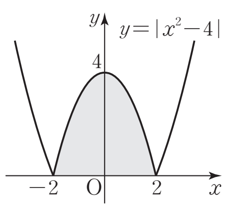
21-1 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_1^4 (x^2+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_1^4$$
$$=24$$



21-2 $|x^2-4|=\begin{cases} x^2-4 & (x<-2 \text{ 또는 } x\geq 2) \\ -x^2+4 & (-2\leq x<2) \end{cases}$

이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는

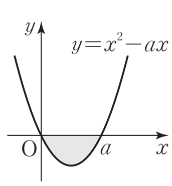


$$\int_{-2}^2 |x^2-4|dx$$
$$=\int_{-2}^2 (-x^2+4)dx$$
$$=2\int_0^2 (-x^2+4)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2$$
$$=2\cdot\frac{16}{3}=\frac{32}{3}$$

21-3 $x^2-ax=0$에서 $x(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a$

즉 곡선 $y=x^2-ax$와 x축의 교점의 x좌표는 0, a이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는

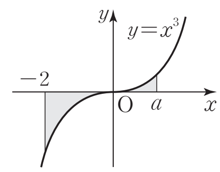


$$\int_0^a |x^2-ax|dx=\int_0^a (-x^2+ax)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^a$$
$$=\frac{a^3}{6}$$

즉 $\dfrac{a^3}{6}=\dfrac{4}{3}$이므로 $a^3=8$

$\therefore a=2$

21-4 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-2}^a |x^3|dx$$
$$=\int_{-2}^0 (-x^3)dx+\int_0^a x^3dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^0+\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^a$$
$$=4+\frac{1}{4}a^4$$

즉 $4+\dfrac{1}{4}a^4=5$이므로 $a^4-4=0$

$(a^2+2)(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})=0$

$\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

대표 기출 22 곡선과 직선 또는 두 곡선 사이의 넓이

꼭 알고 있을 개념

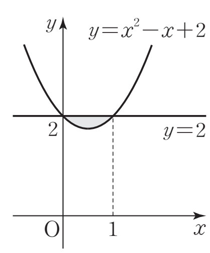
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\Rightarrow \displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

22-1 $x^2-x+2=2$에서 $x^2-x=0$

$x(x-1)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=1$

즉 곡선 $y=x^2-x+2$와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표는 0, 1이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는

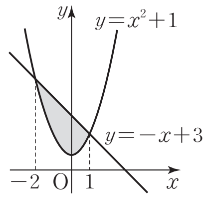


$$\int_0^1 \{2-(x^2-x+2)\}dx$$
$$=\int_0^1 (-x^2+x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{6}$$

22-2 $x^2+1=-x+3$에서 $x^2+x-2=0$

$(x-1)(x+2)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$

즉 곡선 $y=x^2+1$과 직선 $y=-x+3$의 교점의 x좌표는 -2, 1이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-2}^{1}\{(-x+3)-(x^2+1)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx$$

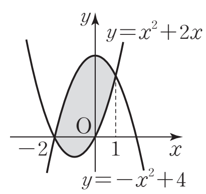
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\frac{9}{2}$$

22-3 $x^2+2x=-x^2+4$에서 $x^2+x-2=0$

$(x-1)(x+2)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$

즉 두 곡선 $y=x^2+2x$, $y=-x^2+4$의 교점의 x좌표는 -2, 1이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-2}^{1}\{(-x^2+4)-(x^2+2x)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}$$

$$=9$$

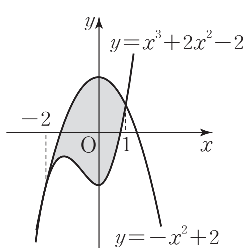
22-4 $x^3+2x^2-2=-x^2+2$에서

$x^3+3x^2-4=0$

$(x-1)(x+2)^2=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

즉 두 곡선 $y=x^3+2x^2-2$, $y=-x^2+2$의 교점의 x좌표는 -2, 1이므로 위의 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-2}^{1}\{(-x^2+2)-(x^3+2x^2-2)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-x^3-3x^2+4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\frac{27}{4}$$

대표 기출 23 위치와 위치의 변화량

꼭 알고 있을 개념

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 시각 $t=a$에서의 위치를 x_0이라 할 때

(1) 시각 t에서의 점 P의 위치는

$$x_0+\int_{a}^{t}v(t)dt$$

(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_{a}^{b}v(t)dt$$

23-1 시각 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_{0}^{2}(-t^3+3t)dt=\left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2\right]_{0}^{2}=2$$

23-2 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서 $6t-2t^2=0$

$-2t(t-3)=0 \qquad \therefore t=3\ (\because t>0)$

따라서 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$$-2+\int_{0}^{3}(6t-2t^2)dt=-2+\left[3t^2-\frac{2}{3}t^3\right]_{0}^{3}$$

$$=-2+9=7$$

23-3 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치를 k라 하면 시각 $t=4$에서의 점 P의 위치는

$$k+\int_{0}^{4}(3-2t)dt=k+\left[3t-t^2\right]_{0}^{4}$$

$$=k-4$$

즉 $k-4=12$이므로 $k=16$

따라서 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치는 16이다.

23-4 $t=a\ (a>0)$일 때, 점 P가 원점으로 다시 돌아온다고 하면 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_{0}^{a}(t^2-2t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{0}^{a}$$

$$=\frac{1}{3}a^3-a^2$$

이때 점 P의 위치의 변화량은 0이므로

$\frac{1}{3}a^3-a^2=0$, $\frac{1}{3}a^2(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

따라서 점 P가 원점으로 다시 돌아오는 시각 t는 3이다.

대표 기출 24 움직인 거리

꼭 알고 있을 개념

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 시각 $t=a$에서의 위치를 x_0이라 할 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_a^b |v(t)|\,dt$$

24-1 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |2t-2|\,dt=\int_0^1(-2t+2)dt+\int_1^3(2t-2)dt$$
$$=\Big[-t^2+2t\Big]_0^1+\Big[t^2-2t\Big]_1^3$$
$$=1+4=5$$

24-2 $v(t)=t^2-3t=t(t-3)$

시각 $t=2$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

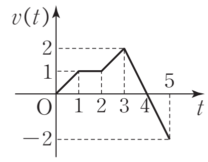
$$\int_2^4|t^2-3t|\,dt$$
$$=\int_2^3(-t^2+3t)dt+\int_3^4(t^2-3t)dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\Big]_2^3+\Big[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\Big]_3^4$$
$$=\frac{7}{6}+\frac{11}{6}=3$$

24-3 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^6|v(t)|\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1+\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot2+\frac{1}{2}\cdot1\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot1$$
$$=\frac{11}{2}$$

쌍둥이 문제

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 시각 $t=1$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, $0\le t\le5$)



① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

[풀이]

시각 $t=1$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^5|v(t)|\,dt$$
$$=1\cdot1+\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot1+\frac{1}{2}\cdot1\cdot2+\frac{1}{2}\cdot1\cdot2$$
$$=\frac{9}{2}$$

답 ④

24-4 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=-6t^2+6t+12$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v(t)=0$에서

$-6t^2+6t+12=0$, $-6(t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2|-6t^2+6t+12|\,dt=\int_0^2(-6t^2+6t+12)dt$$
$$=\Big[-2t^3+3t^2+12t\Big]_0^2$$
$$=20$$

2주 전

학교시험에 나오는 창의융합, 코딩 서술형 기출 문제

● 1일차 본문 62~63쪽

1-1 $y=-x$ **1-2** $y=3x-5$

2-1 (1) $(-1, -1)$ (2) 4 (3) $y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$

2-2 9

1-1 문제 제대로 읽기

다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x^2-1}=-\frac{1}{2}$을 만족시킬 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 방정식을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]

조건 / 질문의 핵심

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x^2-1}=-\frac{1}{2}$에서 $\lim_{x\to1}(x^2-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)+1\}=f(1)+1=0$

$\therefore f(1)=-1$

즉 곡선 $y=f(x)$는 점 $(1, -1)$을 지난다.

❶ 2점

$f(1)=-1$을 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x^2-1}$에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x^2-1}&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}\\&=\frac{1}{2}f'(1)\end{aligned}$$

이므로 $\frac{1}{2}f'(1)=-\frac{1}{2}$

$\therefore f'(1)=-1$

즉 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는 -1이다.

❷ 3점

따라서 구하는 접선의 방정식은 기울기가 -1이고 점 $(1, -1)$을 지나므로

$y-(-1)=-(x-1)$

$\therefore y=-x$

❸ 2점

1-2 문제 제대로 읽기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식이 $y=2x-3$일 때, 곡선 $y=(x-1)f(x)$ 위의 $x=2$인 점에서의 접선의 방정식을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]

조건 / 질문의 핵심

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$이므로 $f'(2)=2$

또 점 $(2, 1)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(2)=1$

❶ 2점

$g(x)=(x-1)f(x)$로 놓으면

$g'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$

이때 곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기는

$$\begin{aligned}g'(2)&=f(2)+(2-1)f'(2)\\&=1+2=3\end{aligned}$$

또 $g(2)=(2-1)f(2)=f(2)=1$이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=2$인 점의 좌표는 $(2, 1)$이다.

❷ 2점

따라서 구하는 접선의 방정식은 기울기가 3이고 점 $(2, 1)$을 지나므로

$y-1=3(x-2)$

$\therefore y=3x-5$

❸ 2점

2-1 문제 제대로 읽기

곡선 $f(x)=x^3+ax^2+(2a+1)x+a+1$은 실수 a의 값에 관계없이 항상 점 P를 지난다. 점 P를 지나고 이 곡선에 접하는 직선을 l이라 할 때, 다음을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]

조건

(1) 점 P의 좌표 질문의 핵심

(2) 직선 l의 기울기 질문의 핵심

(3) 직선 l에 수직이고 점 P를 지나는 직선의 방정식 질문의 핵심

(1) $y=x^3+ax^2+(2a+1)x+a+1$을 a에 대하여 정리하면

$x^3+ax^2+2ax+x+a+1-y=0$

$a(x^2+2x+1)+x^3+x+1-y=0$

위의 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$x^2+2x+1=0$, $x^3+x+1-y=0$

$x^2+2x+1=0$에서 $(x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$

$x=-1$을 $x^3+x+1-y=0$에 대입하면

$-1-1+1-y=0 \qquad \therefore y=-1$

$\therefore \mathrm{P}(-1, -1)$

❶ 2점

(2) $f'(x)=3x^2+2ax+2a+1$

점 $\mathrm{P}(-1, -1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3-2a+2a+1=4$

따라서 직선 l의 기울기는 4이다.

❷ 2점

(3) 직선 l에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$

따라서 기울기가 $-\frac{1}{4}$이고 점 $\mathrm{P}(-1, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-(-1)=-\frac{1}{4}\{x-(-1)\}$

$\therefore y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$

❸ 2점

2-2 문제 제대로 읽기

곡선 $y=x^3-ax^2+3ax+1$은 실수 a의 값에 관계없이 두 점을 지난다. 이 두 점을 지나고 곡선에 접하는 두 직선이 서로 수직일 때, a의 값의 합을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]

조건　질문의 핵심

$y=x^3-ax^2+3ax+1$을 a에 대하여 정리하면

$x^3-ax^2+3ax+1-y=0$

$a(-x^2+3x)+(x^3+1-y)=0$

위의 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-x^2+3x=0$, $x^3+1-y=0$

$-x^2+3x=0$에서 $x^2-3x=0$

$x(x-3)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=3$

$x=0$을 $x^3+1-y=0$에 대입하면

$1-y=0 \qquad \therefore y=1$

$x=3$을 $x^3+1-y=0$에 대입하면

$27+1-y=0 \qquad \therefore y=28$

즉 주어진 곡선은 a의 값에 관계없이 두 점 $(0, 1)$, $(3, 28)$을 지난다.

❶ 2점

$f(x)=x^3-ax^2+3ax+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2ax+3a$

❷ 2점

점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=3a$

점 $(3, 28)$에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=27-6a+3a=27-3a$

이때 두 접선이 서로 수직이므로

$3a(27-3a)=-1$

$81a-9a^2=-1$, $9a^2-81a-1=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 a의 값의 합은

$-\frac{-81}{9}=9$

❸ 2점

● 2일차 본문 64~65쪽

3-1 $a<0$ 또는 $a>4$

3-2 (1) $0<a<3$ (2) $a\le 0$ 또는 $a\ge 3$

4-1 1　**4-2** 4

3-1 문제 제대로 읽기

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+4ax+5$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]

조건　질문의 핵심

$f'(x)=x^2+2ax+4a$

삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

❶ 3점

방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-1\cdot 4a>0$

$a(a-4)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>4$

❷ 3점

Lecture 삼차함수가 극값을 갖거나 갖지 않을 조건

(1) 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$

(2) 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖거나 허근을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$

3–2 문제 제대로 읽기

함수 $f(x)=x^3-ax^2+(a^2-2a)x+5$에 대하여 다음을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]

(1) $f(x)$가 극값을 가질 때, 실수 a의 값의 범위
조건 질문의 핵심

(2) $f(x)$가 극값을 갖지 않을 때, 실수 a의 값의 범위
조건 질문의 핵심

$f'(x)=3x^2-2ax+a^2-2a$

(1) 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-3\cdot(a^2-2a)>0$

$-2a^2+6a>0,\ -2a(a-3)>0$

$a(a-3)<0 \qquad \therefore 0<a<3$

❶ 3점

(2) 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖거나 허근을 가져야 한다.
방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-3\cdot(a^2-2a)\le 0$

$-2a^2+6a\le 0,\ -2a(a-3)\le 0$

$a(a-3)\ge 0 \qquad \therefore a\le 0$ 또는 $a\ge 3$

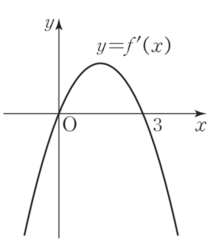
❷ 3점

오답 피하기

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

4–1 문제 제대로 읽기

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에 대하여 그 도함수 $f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 17, 극솟값이 -10일 때, $f(-1)$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]
조건 질문의 핵심



$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서

$f'(0)=0$이므로 $c=0$

또 $f'(3)=0$에서

$27a+6b+c=0$

$\therefore 9a+2b=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

❶ 3점

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 17을 가지므로

$f(3)=17$에서

$27a+9b+3c+d=17 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 -10을 가지므로

$f(0)=-10$에서 $d=-10$

$c=0,\ d=-10$을 ㉡에 대입하면

$27a+9b-10=17$

$\therefore 3a+b=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=9$

❷ 3점

따라서 $f(x)=-2x^3+9x^2-10$이므로

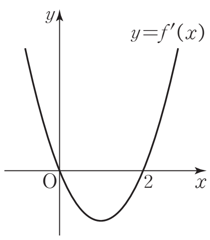
$f(-1)=2+9-10=1$

❸ 1점

4-2 문제 제대로 읽기

삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 4, 극솟값이 0일 때, $f(3)$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]

조건 조건 질문의 핵심



$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq0$, a, b, c, d는 상수)로 놓으면 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

이때 $f'(0)=0$에서 $c=0$

또 $f'(2)=0$에서

$12a+4b+c=0$

$\therefore b=-3a$ $\cdots\cdots$ ㉠

❶ 3점

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 4를 가지므로

$f(0)=4$에서 $d=4$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 0을 가지므로

$f(2)=0$에서

$8a+4b+2c+d=0$

$c=0,\ d=4$를 위의 식에 대입하면

$8a+4b+4=0$

$\therefore 2a+b=-1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-3$

❷ 3점

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+4$이므로

$f(3)=27-27+4=4$

❸ 1점

● 3일차

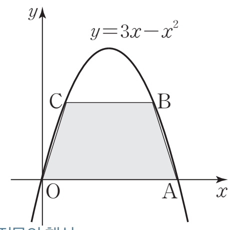
본문 66~67쪽

5-1 4	5-2 $12+4\sqrt{3}$
6-1 $-5<k<-1$	6-2 -3

5-1 문제 제대로 읽기

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=3x-x^2$과 x축의 두 교점을 O, A라 할 때, x축과 이 곡선으로 둘러싸인 부분에 내접하는 사다리꼴 OABC의 넓이의 최댓값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]

조건 질문의 핵심



$3x-x^2=0$에서 $x(3-x)=0$이므로

$x=0$ 또는 $x=3$

따라서 점 A의 좌표는 $(3,\ 0)$이다.

❶ 1점

점 C의 좌표를 $(k,\ 3k-k^2)$ $\left(0<k<\dfrac{3}{2}\right)$이라 하면

$B(3-k,\ 3k-k^2)$

사다리꼴 OABC의 넓이를 $f(k)$라 하면

$$f(k)=\frac{1}{2}\{3+(3-2k)\}(3k-k^2)$$
$$=k^3-6k^2+9k$$

❷ 3점

$\therefore f'(k)=3k^2-12k+9=3(k-1)(k-3)$

$f'(k)=0$에서 $k=1$ $\left(\because 0<k<\dfrac{3}{2}\right)$

k	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
$f'(k)$		$+$	0	$-$	
$f(k)$		↗	4	↘	

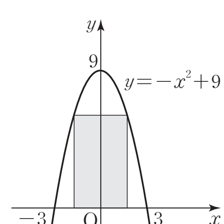
즉 함수 $f(k)$는 $k=1$일 때 최댓값 4를 가지므로 사다리꼴 OABC의 넓이의 최댓값은 4이다.

❸ 3점

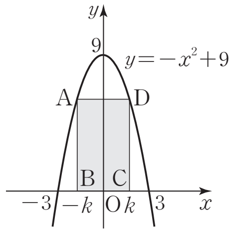
5-2 문제 제대로 읽기

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=-x^2+9$와 x축으로 둘러싸인 모양의 땅에 직사각형 모양의 건물을 지으려고 한다. 건물의 넓이가 최대일 때, 건물의 둘레의 길이를 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]

조건 조건 질문의 핵심



오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의 꼭짓점 C의 좌표를 $(k,\ 0)$ $(0<k<3)$이라 하면
$A(-k,\ -k^2+9)$, $B(-k,\ 0)$,
$D(k,\ -k^2+9)$
직사각형 ABCD의 넓이와 둘레의 길이를 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하면



$f(k)=2k(-k^2+9)=-2k^3+18k$
$g(k)=2\{2k+(-k^2+9)\}=-2k^2+4k+18$

❶ 3점

$\therefore f'(k)=-6k^2+18=-6(k+\sqrt{3})(k-\sqrt{3})$
$f'(k)=0$에서 $k=\sqrt{3}$ $(\because 0<k<3)$

k	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$f'(k)$		$+$	0	$-$	
$f(k)$		↗	$12\sqrt{3}$	↘	

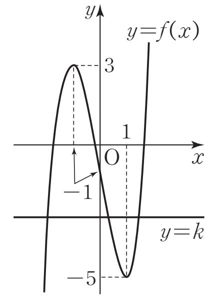
즉 함수 $f(k)$는 $k=\sqrt{3}$에서 최대이므로 건물의 넓이가 최대일 때 건물의 둘레의 길이는

❷ 3점

$g(\sqrt{3})=-6+4\sqrt{3}+18=12+4\sqrt{3}$

❸ 1점

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 양수이고 한 개는 음수이려면
$-5<k<-1$



❸ 3점

Lecture **방정식의 실근의 부호**

방정식 $f(x)=k$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같으므로
(1) 방정식 $f(x)=k$가 양의 실근을 갖는다.
⇨ $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 양수이다.
(2) 방정식 $f(x)=k$가 음의 실근을 갖는다.
⇨ $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 음수이다.

6-1 문제 제대로 읽기

방정식 $2x^3-1=6x+k$가 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖기 위한 실수 k의 값의 범위를 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]
조건
질문의 핵심

$2x^3-1=6x+k$에서 $2x^3-6x-1=k$ ······ ㉠

❶ 1점

방정식 ㉠이 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 가지려면 $y=2x^3-6x-1$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 양수이고 한 개는 음수이어야 한다.

❷ 2점

$f(x)=2x^3-6x-1$이라 하면
$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-5	↗

6-2 문제 제대로 읽기

방정식 $x^3-6x^2+9x+2k=0$이 한 개의 양의 실근과 두 개의 허근을 갖기 위한 정수 k의 최댓값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]
조건
질문의 핵심

$x^3-6x^2+9x+2k=0$에서
$x^3-6x^2+9x=-2k$ ······ ㉠

❶ 1점

방정식 ㉠이 한 개의 양의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 $y=x^3-6x^2+9x$의 그래프와 직선 $y=-2k$의 교점이 1개이고 그 교점의 x좌표가 양수이어야 한다.

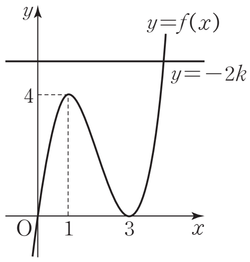
❷ 2점

$f(x)=x^3-6x^2+9x$라 하면
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-2k$의 교점이 1개이고 그 교점의 x좌표가 양수이려면

$-2k>4 \qquad \therefore k<-2$



❸ 3점

따라서 정수 k의 최댓값은 -3이다.

❹ 1점

● **4일차** 본문 68~69쪽

7-1 (1) 속도: 23.4, 가속도: -1.3
(2) 시간: 20초, 움직인 거리: 260 m
7-2 10
8-1 -8 **8-2** 4

7-1 문제 제대로 읽기

직선 궤도를 달리는 기차가 제동을 건 후 t초 동안 움직인 거리가 $x=26t-0.65t^2$ (m)일 때, 다음을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]
조건

(1) 제동을 건 지 2초 후의 속도와 가속도
질문의 핵심
(2) 제동을 건 후 정지할 때까지 걸린 시간과 움직인 거리
질문의 핵심

기차가 제동을 건 지 t초 후의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=26-1.3t$, $a=\dfrac{dv}{dt}=-1.3$

❶ 2점

(1) 제동을 건 지 2초 후의 속도는
$26-2.6=23.4$
또 제동을 건 지 2초 후의 가속도는 -1.3

❷ 2점

(2) 기차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서
$26-1.3t=0 \qquad \therefore t=20$
따라서 20초 동안 움직인 거리는
$26\cdot 20-0.65\cdot 20^2=260$ (m)

❸ 2점

7-2 문제 제대로 읽기

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치는 $x(t)=t^3-3kt^2-(8k-80)t+2$이다. 점 P가 출발 후 운동 방향을 바꾸지 않는다고 할 때, 모든 자연수 k의 값의 합을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]
조건
질문의 핵심

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면
$v(t)=x'(t)=3t^2-6kt-8k+80$

❶ 1점

점 P가 출발 후 운동 방향을 바꾸지 않으므로 이차방정식 $x'(t)=0$, 즉 $v(t)=0$이 중근을 갖거나 허근을 가져야 한다.

❷ 2점

방정식 $v(t)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-3k)^2-3(-8k+80)\leq 0$

$3k^2+8k-80\leq 0$, $(3k+20)(k-4)\leq 0$

$\therefore -\dfrac{20}{3}\leq k\leq 4$

❸ 2점

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4로 그 합은
$1+2+3+4=10$

❹ 1점

8-1 문제 제대로 읽기

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.
조건

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=0$이다.
조건
(나) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=1$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=40$
조건

$f(-1)$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]
질문의 핵심

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq 0$, a, b, c, d는 상수)라 하면 조건 (가)에서 $f(x)=-f(-x)$이므로

$ax^3+bx^2+cx+d=-(-ax^3+bx^2-cx+d)$

$2bx^2+2d=0 \qquad \therefore b=0,\ d=0$

즉 $f(x)=ax^3+cx$이므로

❶ 2점

$\int_0^1 f(x)dx=1$에서 $\int_0^1 (ax^3+cx)dx=1$

$\left[\frac{a}{4}x^4+\frac{c}{2}x^2\right]_0^1=1$, $\frac{a}{4}+\frac{c}{2}=1$

$\therefore a+2c=4$ ...... ㉠

$\int_0^2 f(x)dx=40$에서 $\int_0^2 (ax^3+cx)dx=40$

$\left[\frac{a}{4}x^4+\frac{c}{2}x^2\right]_0^2=40$, $4a+2c=40$

$\therefore 2a+c=20$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=12$, $c=-4$이므로

$f(x)=12x^3-4x$

❷ 3점

$\therefore f(-1)=-12+4=-8$

❸ 1점

8-2 문제 제대로 읽기

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.
조건

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=0$이다.
조건

(나) $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=-\frac{1}{8}$, $\int_0^1 f(x)dx=1$
조건

$\int_0^t f(x)dx=0$을 만족시키는 양수 t에 대하여 $8t^2$의
조건

값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]
질문의 핵심

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq0$, a, b, c, d는 상수)라 하면 조건 (가)에서 $f(x)=-f(-x)$이므로

$ax^3+bx^2+cx+d=-(-ax^3+bx^2-cx+d)$

$2bx^2+2d=0$ $\therefore b=0$, $d=0$

즉 $f(x)=ax^3+cx$이므로

❶ 2점

$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=-\frac{1}{8}$에서 $\int_0^{\frac{1}{2}} (ax^3+cx)dx=-\frac{1}{8}$

$\left[\frac{a}{4}x^4+\frac{c}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{8}$, $\frac{a}{64}+\frac{c}{8}=-\frac{1}{8}$

$\therefore a+8c=-8$ ...... ㉠

$\int_0^1 f(x)dx=1$에서 $\int_0^1 (ax^3+cx)dx=1$

$\left[\frac{a}{4}x^4+\frac{c}{2}x^2\right]_0^1=1$, $\frac{a}{4}+\frac{c}{2}=1$

$\therefore a+2c=4$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=8$, $c=-2$이므로

$f(x)=8x^3-2x$

❷ 2점

$\int_0^t f(x)dx=0$에서 $\int_0^t (8x^3-2x)dx=0$

$\left[2x^4-x^2\right]_0^t=0$, $2t^4-t^2=0$

$t^2(\sqrt{2}t+1)(\sqrt{2}t-1)=0$ $\therefore t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because t>0$)

❸ 2점

$\therefore 8t^2=8\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=4$

❹ 1점

5일차 본문 70~71쪽

9-1 $-\frac{9}{2}$	9-2 9
10-1 108	10-2 $\frac{27}{4}$

9-1 문제 제대로 읽기

$x\geq0$일 때, $f(x)=x^3-12x+2\int_0^1 f(t)dt$를 만족시
조건

키는 함수 $f(x)$의 최솟값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시
질문의 핵심

오. [6점]

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

라 하면 $f(x)=x^3-12x+2k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 (t^3-12t+2k)dt=k$

$\left[\frac{1}{4}t^4-6t^2+2kt\right]_0^1=k$

$\frac{1}{4}-6+2k=k$ $\therefore k=\frac{23}{4}$

❶ 3점

따라서 $f(x)=x^3-12x+\frac{23}{2}$이므로

❷ 1점

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x\geq0$)

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{23}{2}$	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $-\frac{9}{2}$를 갖는다.

❸ 2점

9-2 문제 제대로 읽기

$f(x)=3x^2-x\int_0^1 f(t)dt+\int_0^2 f(t)dt$를 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]

조건 / 질문의 핵심

$\int_0^1 f(t)dt=a,\ \int_0^2 f(t)dt=b$ (a, b는 상수) …… ㉠

라 하면 $f(x)=3x^2-ax+b$

이것을 ㉠에 각각 대입하면

$\int_0^1(3t^2-at+b)dt=a$에서 $\left[t^3-\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^1=a$

$1-\frac{a}{2}+b=a$ $\quad\therefore 3a-2b=2$ …… ㉡

$\int_0^2(3t^2-at+b)dt=b$에서 $\left[t^3-\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^2=b$

$8-2a+2b=b$ $\quad\therefore 2a-b=8$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=14,\ b=20$

❶ 4점

따라서 $f(x)=3x^2-14x+20$이므로

❷ 1점

$f(1)=3-14+20=9$

❸ 1점

10-1 문제 제대로 읽기

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2-6x-9$이고 $f(3)=0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]

조건 / 질문의 핵심

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-6x-9)dx$

$=x^3-3x^2-9x+C$

이때 $f(3)=0$이므로

$27-27-27+C=0$ $\quad\therefore C=27$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2-9x+27$

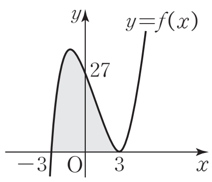
❶ 2점

$f(x)=0$, 즉 $x^3-3x^2-9x+27=0$에서

$(x+3)(x-3)^2=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

❷ 2점

즉 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는 -3, 3이므로 구하는 도형의 넓이는



$\int_{-3}^3(x^3-3x^2-9x+27)dx$

$=\int_{-3}^3(-3x^2+27)dx$

$=2\int_0^3(-3x^2+27)dx$

$=2\left[-x^3+27x\right]_0^3$

$=2\cdot 54=108$

❸ 3점

오답 피하기

$f(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$f(x)=(x-3)(x^2-9)$

$=(x+3)(x-3)^2$

3	1	-3	-9	27
		3	0	-27
	1	0	-9	0

10-2 문제 제대로 읽기

함수 $f(x)=-x^3+3x$의 극댓값이 k일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [7점]

조건 / 질문의 핵심

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$

즉 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 2를 가지므로

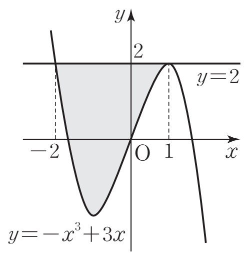
$k=2$

❶ 2점

$-x^3+3x=2$에서 $x^3-3x+2=0$
$(x-1)^2(x+2)=0$　　$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

❷ 2점

즉 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표는 -2, 1이므로 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-2}^{1}\{2-(-x^3+3x)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\frac{27}{4}$$

❸ 3점

오답 피하기

$f(x)=x^3-3x+2$라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	0	-3	2
		1	1	-2
	1	1	-2	0

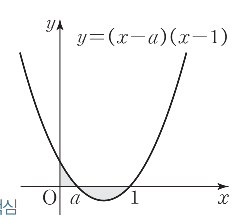
$f(x)=(x-1)(x^2+x-2)$
$\quad=(x-1)^2(x+2)$

● **6일차**　　본문 72~73쪽

11-1 $\frac{1}{3}$　　**11-2** 8
12-1 (1) 3 (2) $\frac{23}{3}$　　**12-2** (1) 15 m (2) 25 m

11-1 문제 제대로 읽기

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=(x-a)(x-1)$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같을 때, 상수 a의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오.
조건　질문의 핵심
(단, $0<a<1$) [6점]



색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_0^1(x-a)(x-1)dx=0$$

❶ 3점

즉 $\int_0^1\{x^2-(a+1)x+a\}dx=0$에서

$$\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a+1}{2}x^2+ax\right]_0^1=0$$
$$\frac{1}{3}-\frac{a+1}{2}+a=0$$
$$\frac{1}{2}a=\frac{1}{6}\qquad\therefore a=\frac{1}{3}$$

❷ 3점

오답 피하기

곡선 $f(x)=(x-a)(x-1)$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면

$S_1=\int_0^a f(x)dx$, $S_2=-\int_a^1 f(x)dx$

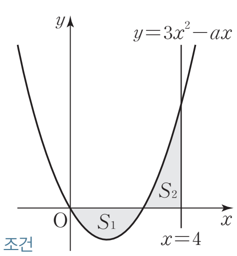
이때 $S_1=S_2$이면 $\int_0^a f(x)dx=-\int_a^1 f(x)dx$

$\int_0^a f(x)dx+\int_a^1 f(x)dx=0$이므로

$\int_0^1 f(x)dx=0$

11-2 문제 제대로 읽기

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=3x^2-ax$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 이 곡선과 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하자. $S_1=S_2$일 때, 상수 a의 값을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. (단, $0<a<12$) [6점]
조건　질문의 핵심



$S_1=S_2$이므로

$$\int_0^4(3x^2-ax)dx=0$$

❶ 3점

$$\left[x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^4=0$$
$64-8a=0\qquad\therefore a=8$

❷ 3점

12-1 문제 제대로 읽기

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=4-t^2$일 때, 다음을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]

조건 조건

(1) 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치 질문의 핵심

(2) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리 질문의 핵심

(1) 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3(4-t^2)dt=\left[4t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^3=3$$

❶ 3점

(2) $v(t)=4-t^2=-(t+2)(t-2)$

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3|4-t^2|dt=\int_0^2(4-t^2)dt+\int_2^3(-4+t^2)dt$$
$$=\left[4t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^2+\left[-4t+\frac{1}{3}t^3\right]_2^3$$
$$=\frac{16}{3}+\frac{7}{3}=\frac{23}{3}$$

❷ 3점

12-2 문제 제대로 읽기

지면에서 20 m/s의 속도로 위를 향해 똑바로 쏘아 올린 물체의 t초 후의 속도가 $v(t)=20-10t$ (m/s)일 때, 다음을 구하고, 풀이 과정을 쓰시오. [6점]

조건

(1) 쏘아 올린 후 3초 동안 물체의 위치의 변화량 질문의 핵심

(2) 쏘아 올린 후 3초 동안 물체가 움직인 거리 질문의 핵심

(1) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 물체의 위치의 변화량은

$$\int_0^3(20-10t)dt=\left[20t-5t^2\right]_0^3=15\ (\mathrm{m})$$

❶ 3점

(2) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 물체가 움직인 거리는

$$\int_0^3|20-10t|dt$$
$$=\int_0^2(20-10t)dt+\int_2^3(-20+10t)dt$$
$$=\left[20t-5t^2\right]_0^2+\left[-20t+5t^2\right]_2^3$$
$$=20+5=25\ (\mathrm{m})$$

❷ 3점

1주 전

미리 풀어보는 우리 학교 기말고사

● 1일차 본문 76~79쪽

01 ②	02 ③	03 ⑤	04 ④	05 ②
06 ①	07 ⑤	08 ⑤	09 ④	10 ①
11 ②	12 ③	13 ④	14 ③	15 ③
16 ③	17 ⑤			

[서술형 1] (1) 9 (2) 극댓값: 0, 극솟값: -4

[서술형 2] $f(x)=4x^3-3x^2-1$

[서술형 3] 4

01 $f'(x)=3x^2-2x+1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-2x+1)dx$$
$$=x^3-x^2+x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 1)$을 지나므로 $f(0)=1$

$\therefore C=1$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+x+1$이므로

$f(1)=1-1+1+1=2$

02 $f(x)=-2x^2+4x+3$으로 놓으면

$f'(x)=-4x+4$

접점의 좌표를 $(t, -2t^2+4t+3)$이라 하면 접선의 기울기가 -4이므로 $f'(t)=-4$에서

$-4t+4=-4 \qquad \therefore t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 3)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-3=-4(x-2)$

$\therefore y=-4x+11$

03 $f'(x)=3x^2-2ax-a$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일 대응이어야 하므로 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다. 이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 증가함수이어야 한다. 즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-3\cdot(-a)\le 0$

$a(a+3)\le 0 \qquad \therefore -3\le a\le 0$

따라서 실수 a의 값으로 옳지 않은 것은 ⑤이다.

Lecture 역함수가 존재하기 위한 조건

함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

$\Longleftrightarrow$ 함수 $f(x)$가 일대일대응이다.

04 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$에서

$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{5}{3}$	$\searrow$	-9	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 -9를 가지므로

$a=3,\ b=-9$

$\therefore a+b=3+(-9)=-6$

05 $f(x)=-x^3+ax^2+bx$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

주어진 그래프에서 $f'(0)=0,\ f'(3)=0$이므로

$b=0,\ -27+6a+b=0 \qquad \therefore a=\frac{9}{2}$

$\therefore f(x)=-x^3+\frac{9}{2}x^2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{27}{2}$	$\searrow$

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 0을 갖는다.

ㄴ. 구간 $(1,\ 2)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(1,\ 2)$에서 증가한다.

ㄷ. $0\le x\le 3$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $\frac{27}{2}$을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

06 $f(x)=x^4-6x^2+k$에서

$f'(x)=4x^3-12x=4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$ ($\because -1\le x\le 2$)

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k-5$	$\nearrow$	k	$\searrow$	$k-9$	$\nearrow$	$k-8$

즉 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 k, $x=\sqrt{3}$에서 최솟값 $k-9$를 가지므로

$k-9=-15 \qquad \therefore k=-6$

따라서 구하는 최댓값은 -6이다.

07 $4x^3+3x^2-6x+k=0$에서

$4x^3+3x^2-6x=-k \qquad \cdots\cdots$ ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=4x^3+3x^2-6x$와 직선 $y=-k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

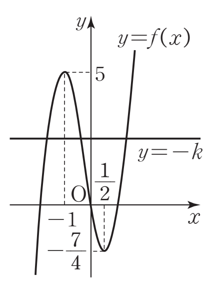
$f(x)=4x^3+3x^2-6x$라 하면

$f'(x)=12x^2+6x-6=6(2x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\frac{7}{4}$	$\nearrow$

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면



$-\frac{7}{4}<-k<5$

$\therefore -5<k<\frac{7}{4}$

따라서 정수 k는 $-4,\ -3,\ \cdots,\ 1$로 그 개수는 6이다.

08 $f(x)>g(x)$에서 $f(x)-g(x)>0$

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=2x^3+k-(x^3+3x^2)$

$\qquad =x^3-3x^2+k$

$\therefore h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x>0$)

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$	$k-4$	$\nearrow$

즉 $x>0$일 때, 함수 $h(x)$의 최솟값이 $k-4$이므로
$h(x)>0$이 성립하려면
$k-4>0 \qquad \therefore k>4$
따라서 정수 k의 최솟값은 5이다.

09 시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-3t-3$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6t-3$
$v=3$에서 $3t^2-3t-3=3$, $3t^2-3t-6=0$
$3(t+1)(t-2)=0 \qquad \therefore t=2\ (\because t>0)$
따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는
$12-3=9$

10 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=t^2-3t+2=(t-1)(t-2)$
점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로
$v=0$에서 $t=1$ 또는 $t=2$
따라서 점 P는 $t=1$에서 처음으로 운동 방향을 바꾼다.

11 $f(x)=\displaystyle\int \frac{d}{dx}(x^2-2x)dx$
$=\displaystyle\int (2x-2)dx$
$=x^2-2x+C$
이때 $f(0)=3$에서 $C=3$이므로
$f(x)=x^2-2x+3$
$\therefore f(1)=1-2+3=2$

12 $f(x)=\displaystyle\int (6x^2+x-1)dx$
$=2x^3+\dfrac{1}{2}x^2-x+C$
이때 $f(0)=2$이므로 $C=2$
따라서 $f(x)=2x^3+\dfrac{1}{2}x^2-x+2$이므로
$f(2)=16+2-2+2=18$

13 $\displaystyle\int_0^2 3x^2\,dx=\Big[x^3\Big]_0^2=8$

14 $\displaystyle\int_0^1 (3x^2+4x)dx-\int_0^1 2x\,dx$
$=\displaystyle\int_0^1 \{(3x^2+4x)-2x\}dx$
$=\displaystyle\int_0^1 (3x^2+2x)dx$
$=\Big[x^3+x^2\Big]_0^1=2$

15 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면
$a^2-3a+2=0$, $(a-1)(a-2)=0$
$\therefore a=1$ 또는 $a=2$
따라서 모든 a의 값의 합은 $1+2=3$

16 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=f(1)=2+3+5=10$

Lecture 정적분으로 정의된 함수의 극한

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)dt=f(a)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$

17 ㄱ. $t=4$에서의 점 P의 위치는
$0+\displaystyle\int_0^4 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=0$
따라서 $t=4$일 때 점 P는 원점에 있다.

ㄴ. $t=0$에서 $t=7$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^7 |v(t)|dt=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2+\frac{1}{2}\cdot(4+1)\cdot2+\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=8$$

ㄷ. 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v(t)=0$에서 $t=2$ 또는 $t=6$

즉 점 P의 운동 방향은 출발한 후 $t=7$일 때까지 2번 바뀐다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[서술형 1] $f(x)=(x^2+3x)(x+3)$에서

$f'(x)=(2x+3)(x+3)+(x^2+3x)\cdot1$

$=3(x+1)(x+3)$

❶

(1) $f'(0)=3\cdot1\cdot3=9$

❷

(2) $f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 0, $x=-1$에서 극솟값 -4를 갖는다.

❸

채점 기준	배점
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	2점
❷ $x=0$에서의 미분계수를 구할 수 있다.	1점
❸ $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있다.	3점

[서술형 2] $F(x)=xf(x)-3x^4+2x^3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3+6x^2$

$xf'(x)=12x^3-6x^2$

$\therefore f'(x)=12x^2-6x$

❶

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(12x^2-6x)dx$

$=4x^3-3x^2+C$

이때 $f(1)=0$이므로 $C+1=0$ $\quad\therefore C=-1$

$\therefore f(x)=4x^3-3x^2-1$

❷

채점 기준	배점
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	3점
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	4점

[서술형 3] $-x^2+2x=0$에서 $-x(x-2)=0$

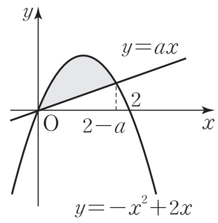
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

또 $-x^2+2x=ax$에서 $x^2+(a-2)x=0$

$x\{x+(a-2)\}=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=2-a$

❶

곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\int_0^{2-a}\{(-x^2+2x)-ax\}dx$

$=\int_0^{2-a}\{-x^2+(2-a)x\}dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{2-a}{2}x^2\right]_0^{2-a}$

$=\frac{1}{6}(2-a)^3$

❷

이때 곡선 $y=-x^2+2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^2(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$

❸

즉 $\frac{1}{6}(2-a)^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}$이므로

$(2-a)^3=4$

❹

채점 기준	배점
❶ 곡선 $y=-x^2+2x$와 x축, 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표를 각각 구할 수 있다.	2점
❷ 곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	2점
❸ 곡선 $y=-x^2+2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	2점
❹ $(2-a)^3$의 값을 구할 수 있다.	1점

● 2일차

본문 80~83쪽

01 ④	02 ①	03 ②	04 ④	05 ①
06 ③	07 ④	08 ⑤	09 ⑤	10 ②
11 ⑤	12 ①	13 ⑤	14 ③	15 ②
16 ②	17 ④			

[서술형 1] -1

[서술형 2] -2

[서술형 3] 9

01 $f'(x)=6x^2-2x-5$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2-2x-5)dx$$
$$=2x^3-x^2-5x+C$$

$\therefore f(1)-f(-2)=C-4-(C-10)=6$

다른 풀이

$$f(1)-f(-2)=\int_{-2}^{1}f'(x)dx=\int_{-2}^{1}(6x^2-2x-5)dx$$
$$=\Big[2x^3-x^2-5x\Big]_{-2}^{1}=6$$

02 $f'(x)=x^2+4ax-4$

점 P, Q의 x좌표를 각각 x_P, x_Q라 하면 x_P, x_Q는 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $x_P+x_Q=-4a$

이때 선분 PQ의 중점 M의 x좌표가 2이므로

$\frac{x_P+x_Q}{2}=2$, $\frac{-4a}{2}=2$ $\quad\therefore a=-1$

03 $f(x)=x^3+ax^2+bx+30$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 35를 가지므로

$f'(-1)=0$, $f(-1)=35$

$3-2a+b=0$, $-1+a-b+30=35$

$\therefore 2a-b=3$, $a-b=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-9$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2-9x+30$,

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	35	↘	3	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 3을 갖는다.

04 $f'(x)=12x^3+3ax^2+12x=3x(4x^2+ax+4)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 삼차방정식 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $4x^2+ax+4=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이차방정식 $4x^2+ax+4=0$의 판별식을 D라 하면 $D=a^2-4\cdot4\cdot4>0$

$(a+8)(a-8)>0$ $\quad\therefore a<-8$ 또는 $a>8$

05 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+36$이라 하면

$f'(x)=x^2-2ax=x(x-2a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2a$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	36	↘	$-\frac{4}{3}a^3+36$	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 36, $x=2a$에서 극솟값 $-\frac{4}{3}a^3+36$을 갖는다.

이때 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면 $36\left(-\frac{4}{3}a^3+36\right)>0$이어야 하므로

$a^3-27<0$, $(a-3)(a^2+3a+9)<0$

$\therefore a<3$ ($\because a^2+3a+9>0$)

따라서 자연수 a는 1, 2로 그 개수는 2이다.

Lecture 삼차방정식의 근의 판별

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 때, 방정식 $f(x)=0$이

(1) 서로 다른 세 실근을 갖는다.

$\iff$ (극댓값)$\times$(극솟값)<0

(2) 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 갖는다.

$\iff$ (극댓값)$\times$(극솟값)$=0$

(3) 한 실근과 두 허근을 갖는다.

$\iff$ (극댓값)$\times$(극솟값)>0

오답 피하기

$a^2+3a+9=\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}>0$

즉 모든 실수 a에 대하여 항상 0보다 크므로

$(a-3)(a^2+3a+9)<0$의 양변을 a^2+3a+9로 나누면

$a-3<0$ $\quad\therefore a<3$

06 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=2t-4$, $a=\frac{dv}{dt}=2$

시각 $t=1$에서의 점 P의 속도, 속력, 가속도는 각각

$l=2-4=-2$, $m=|-2|=2$, $n=2$

$\therefore l+m+n=-2+2+2=2$

오답 피하기

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 할 때, 점 P의 시각 t에서의 속력은 $|v(t)|$이다.

07 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-6t=6t(t-1)$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v=0$에서 $t=1$ ($\because t>0$)

따라서 $t=1$에서의 점 P의 위치는

$2-3+4=3$

08 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3(x-1)(x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 12, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$$f(x)=\int 3(x-1)(x+3)dx$$
$$=\int (3x^2+6x-9)dx$$
$$=x^3+3x^2-9x+C$$

이므로 $f(-3)=12$에서 $C+27=12$

$\therefore C=-15$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-9x-15$이므로 구하는 극솟값은

$f(1)=1+3-9-15=-20$

09 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$

이때 $f(x)=\int (x+2)(x^2-2x+4)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x+2)(x^2-2x+4)$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}=2f'(1)=2\cdot9=18$

10 $f'(x)=\begin{cases}2x+3 & (x>1)\\ -2x+k & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}x^2+3x+C_1 & (x>1)\\ -x^2+kx+C_2 & (x<1)\end{cases}$

이때 $f(2)=15$이므로 $10+C_1=15$ $\quad\therefore C_1=5$

또 $f(-2)=0$이므로 $-4-2k+C_2=0$

$\therefore C_2=2k+4$

$\therefore f(x)=\begin{cases}x^2+3x+5 & (x>1)\\ -x^2+kx+2k+4 & (x<1)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 연속함수이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$이므로

$\lim_{x\to1-}(-x^2+kx+2k+4)$

$=\lim_{x\to1+}(x^2+3x+5)=f(1)$

$-1+k+2k+4=1+3+5$

$3k+3=9 \quad\therefore k=2$

11 $\int_{-1}^{2}(3x^2+2x+1)dx=\left[x^3+x^2+x\right]_{-1}^{2}$

$=15$

12 $\int_{-1}^{1}(x+2)^2dx-\int_{-1}^{1}(x-2)^2dx$

$=\int_{-1}^{1}\{(x+2)^2-(x-2)^2\}dx$

$=\int_{-1}^{1}8x\,dx$

$=0$

13 $\int_{-2}^{1}(x^3+1)dx-\int_{2}^{1}(x^3+1)dx$

$=\int_{-2}^{1}(x^3+1)dx+\int_{1}^{2}(x^3+1)dx$

$=\int_{-2}^{2}(x^3+1)dx$

$=2\int_{0}^{2}1\,dx$

$=2\left[x\right]_{0}^{2}$

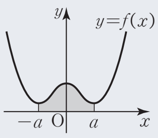
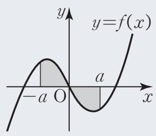
$=2\cdot2=4$

14 $f(-x)=-f(x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 함수 $y=xf(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 함수 $y=x^2f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$$\therefore \int_{-1}^{1}(x-2)(x+4)f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^2+2x-8)f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx+2\int_{-1}^{1}xf(x)dx-8\int_{-1}^{1}f(x)dx$$
$$=0+2\cdot2\int_{0}^{1}xf(x)dx-0$$
$$=4\int_{0}^{1}xf(x)dx$$
$$=4\cdot4=16$$

Lecture **y축 또는 원점에 대하여 대칭인 함수의 정적분**

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-a, a]$에서 연속일 때, 다음이 성립한다.

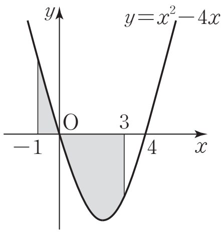
$f(-x)=f(x)$일 때	$f(-x)=-f(x)$일 때
함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 	함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 
$\int_{-a}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{a}f(x)dx$ 이므로 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$	$\int_{-a}^{0}f(x)dx=-\int_{0}^{a}f(x)dx$ 이므로 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

오답 피하기

$G(x)=xf(x)$라 하면
$G(-x)=-xf(-x)=-x\{-f(x)\}=xf(x)$이므로
$G(-x)=G(x)$
즉 함수 $y=xf(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
$H(x)=x^2f(x)$라 하면
$H(-x)=(-x)^2f(-x)=x^2\{-f(x)\}=-x^2f(x)$이므로 $H(-x)=-H(x)$
즉 함수 $y=x^2f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

15 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=2x-2$
$\therefore f(2)=4-2=2$

16 $x^2-4x=0$에서 $x(x-4)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=4$
즉 곡선 $y=x^2-4x$와 x축의 교점의 x좌표가 0, 4이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-1}^{3}|x^2-4x|dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^2-4x)dx+\int_{0}^{3}(-x^2+4x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{3}$$
$$=\frac{7}{3}+9=\frac{34}{3}$$

17 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는
$$\int_{0}^{3}|v(t)|dt=\int_{0}^{2}2t^2dt+\int_{2}^{3}(-2t+12)dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^3\right]_{0}^{2}+\left[-t^2+12t\right]_{2}^{3}$$
$$=\frac{16}{3}+7$$
$$=\frac{37}{3}$$

[서술형 1] 점 $(2, 4)$가 곡선 $y=x^3+ax^2+b$ 위의 점이므로
$4=8+4a+b \qquad \therefore 4a+b=-4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
❶

$f(x)=x^3+ax^2+b$라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax$
이때 점 $(2, 4)$에서의 접선의 기울기가 8이므로
$f'(2)=8$에서 $12+4a=8$
$\therefore a=-1$
$a=-1$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $b=0$
❷

$\therefore a+b=-1+0=-1$
❸

채점 기준	배점
❶ 점 $(2, 4)$가 곡선 $y=x^3+ax^2+b$ 위의 점임을 이용할 수 있다.	2점
❷ 점 $(2, 4)$에서의 접선의 기울기가 8임을 이용할 수 있다.	2점
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	2점

[서술형 2] $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq0$, a, b, c, d는 상수)
라 하면 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$
이때 $f'(0)=0$이므로 $c=0$
즉 $f'(x)=3ax^2+2bx$이므로 $f'(1)=3$, $f'(2)=0$
에서
$3a+2b=3$, $12a+4b=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$

❶

즉 함수 $f(x)=-x^3+3x^2+d$는 $x=2$에서 극댓값
2를 가지므로 $f(2)=2$
$-8+12+d=2 \qquad \therefore d=-2$

❷

따라서 함수 $f(x)=-x^3+3x^2-2$의 극솟값은
$f(0)=-2$

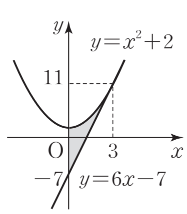
❸

채점 기준	배점
❶ 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 점의 좌표를 이용할 수 있다.	3점
❷ 함수 $f(x)$의 극댓값을 이용할 수 있다.	2점
❸ 함수 $f(x)$의 극솟값을 구할 수 있다.	2점

[서술형 3] $y'=2x$
즉 곡선 위의 점 $(3, 11)$에서의 접선의 기울기는 6이므로 접선의 방정식은
$y-11=6(x-3) \qquad \therefore y=6x-7$

❶

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$\int_0^3 \{(x^2+2)-(6x-7)\}dx$
$=\int_0^3 (x^2-6x+9)dx$
$=\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_0^3$
$=9$

❷

채점 기준	배점
❶ 점 $(3, 11)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	3점
❷ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	4점

● 3일차

본문 84~87쪽

01 ⑤	02 ②	03 ③	04 ④	05 ③
06 ④	07 ①	08 ③	09 ④	10 ①
11 ③	12 ⑤	13 ⑤	14 ⑤	15 ①
16 ②	17 ④			

[서술형 1] (1) $A(-1, 3)$, $B(1, -1)$ (2) $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$
[서술형 2] 10 cm
[서술형 3] 5

01 $f(x)=(x^2-1)(2x+3)$이라 하면
$f'(x)=2x(2x+3)+(x^2-1)\cdot2$
$=6x^2+6x-2$
따라서 점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=6+6-2=10$

02 $f(x)=x^3-2x$라 하면 $f'(x)=3x^2-2$
점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1이다.
즉 점 $(2, 1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은 $y-1=-(x-2) \qquad \therefore y=-x+3$
따라서 $a=-1$, $b=3$이므로
$a+b=-1+3=2$

03 $f'(x)=3x^2-2ax-a$
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가함수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-a)^2-3\cdot(-a)\leq0$
$a(a+3)\leq0 \qquad \therefore -3\leq a\leq0$

04 $f'(x)=6x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값, $x=0$에서 극솟값을 가지므로
$f'(-1)=0$, $f'(0)=0$
$6-2a+b=0$, $b=0$
따라서 $a=3$, $b=0$이므로
$a+b=3+0=3$

05 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

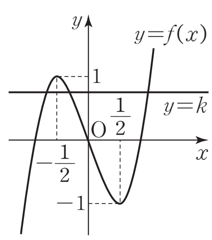
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

① 구간 $(-\infty, -1)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$에서 증가한다.
② 구간 $(1, 2)$에서 $f'(x)<0$이고 구간 $(2, \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(1, 2)$에서 감소하고 구간 $(2, \infty)$에서 증가한다.
③ 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.
④, ⑤ 함수 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 갖지 않는다.
따라서 옳은 것은 ③이다.

06 $4x^3-3x-k=0$에서 $4x^3-3x=k$ ⋯⋯ ㉠
방정식 ㉠이 서로 다른 두 개의 음의 실근과 한 개의 양의 실근을 가지려면 $y=4x^3-3x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 음수이고 한 개는 양수이어야 한다.
$f(x)=4x^3-3x$라 하면
$f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-1	↗

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 음수이고 한 개는 양수이려면
$0<k<1$



07 $f(x)\geq g(x)$에서 $f(x)-g(x)\geq 0$
$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h(x)=x^4+x^2-6x-(-2x^2-16x+k)$
$\quad =x^4+3x^2+10x-k$
$\therefore h'(x)=4x^3+6x+10$
$\quad =2(x+1)(2x^2-2x+5)$
$h'(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because 2x^2-2x+5>0$)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$-k-6$	↗

즉 함수 $h(x)$의 최솟값이 $-k-6$이므로 $h(x)\geq 0$이 성립하려면
$-k-6\geq 0$ $\quad\therefore k\leq -6$
따라서 실수 k의 최댓값은 -6이다.

오답 피하기

$h'(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $h'(x)$를 인수분해하면

-1	4	0	6	10
		-4	4	-10
	4	-4	10	0

$h'(x)$
$=(x+1)(4x^2-4x+10)$
$=2(x+1)(2x^2-2x+5)$

08 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면
$v=\frac{dx}{dt}=t^2-8t+12$, $a=\frac{dv}{dt}=2t-8$
ㄱ. $t=0$에서의 점 P의 속도는 12이다.
ㄴ. 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로
$v=0$에서 $(t-2)(t-6)=0$
$\therefore t=2$ 또는 $t=6$
즉 점 P는 움직이는 동안 운동 방향을 2번 바꾼다.
ㄷ. $t=5$에서의 점 P의 가속도는
$2\cdot 5-8=2$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

09 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{(x-1)(x+1)}\cdot(x+1)$
$\quad =\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$
$\quad =2f'(1)$
이때 $f(x)=\int(2x^3+x^2+1)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=2x^3+x^2+1$
따라서 구하는 값은
$2f'(1)=2\cdot 4=8$

10 $f(x)=\int 6(x-1)(x-2)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 1을 가지므로

$f(1)=1$

$$f(x)=\int 6(x-1)(x-2)dx$$
$$=\int (6x^2-18x+12)dx$$
$$=2x^3-9x^2+12x+C$$

이므로 $f(1)=1$에서

$C+5=1 \qquad \therefore C=-4$

따라서 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-4$이므로 구하는 극솟값은 $f(2)=16-36+24-4=0$

11 $f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & (x<1) \\ 2x+1 & (x\geq 1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases} x^3+C_1 & (x<1) \\ x^2+x+C_2 & (x\geq 1)\end{cases}$

이때 $f(0)=-2$이므로 $C_1=-2$

$\therefore f(x)=x^3-2\ (x<1)$

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉

$$\lim_{x\to 1+}(x^2+x+C_2)=\lim_{x\to 1-}(x^3-2)$$

$C_2+2=-1 \qquad \therefore C_2=-3$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^3-2 & (x<1) \\ x^2+x-3 & (x\geq 1)\end{cases}$이므로

$f(2)=4+2-3=3$

> **Lecture** 미분가능성과 연속성
>
> 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

12 $\int_0^1(3x^2-2x+5)dx=\Big[x^3-x^2+5x\Big]_0^1=5$

13 $\int_{-2}^{0}\frac{t^3}{t-1}dt+\int_0^{-2}\frac{1}{t-1}dt$

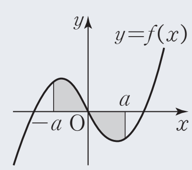
$$=\int_{-2}^{0}\frac{t^3}{t-1}dt-\int_{-2}^{0}\frac{1}{t-1}dt$$
$$=\int_{-2}^{0}\frac{t^3-1}{t-1}dt$$
$$=\int_{-2}^{0}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t-1}dt$$
$$=\int_{-2}^{0}(t^2+t+1)dt$$
$$=\Big[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+t\Big]_{-2}^{0}$$
$$=\frac{8}{3}$$

14 $f(-x)=-f(x)$이므로

$$\int_2^1 f(-x)dx=\int_2^1\{-f(x)\}dx=\int_1^2 f(x)dx$$

즉 $\int_1^2 f(x)dx=4$이므로

$$\int_{-1}^2 f(x)dx=\int_{-1}^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$
$$=0+4=4$$

> **Lecture** 원점에 대하여 대칭인 함수의 정적분
>
> 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-a, a]$에서 연속일 때, $f(-x)=-f(x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로
>
> 
>
>
> $\int_{-a}^0 f(x)dx=-\int_0^a f(x)dx$
>
> $\therefore \int_{-a}^a f(x)dx=0$

15 $\int_0^2 f(t)dt=k$ (k는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

라 하면 $f(x)=x^2+2kx$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^2(t^2+2kt)dt=k$$

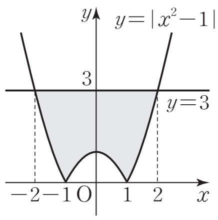
$\Big[\frac{1}{3}t^3+kt^2\Big]_0^2=k,\ \frac{8}{3}+4k=k$

$\therefore k=-\frac{8}{9}$

따라서 $f(x)=x^2-\frac{16}{9}x$이므로

$f(3)=9-\frac{16}{3}=\frac{11}{3}$

16 $|x^2-1|=3$에서 $x^2-1=3$ ($\because x^2-1\geq -1$)
$x^2-4=0$, $(x+2)(x-2)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$
즉 곡선 $y=|x^2-1|$과 직선 $y=3$의 교점의 x좌표는 -2, 2이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$$2\int_0^2(3-|x^2-1|)dx$$
$$=2\left[\int_0^1\{3-(-x^2+1)\}dx+\int_1^2\{3-(x^2-1)\}dx\right]$$
$$=2\left\{\int_0^1(x^2+2)dx+\int_1^2(-x^2+4)dx\right\}$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^1+2\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_1^2$$
$$=2\cdot\frac{7}{3}+2\cdot\frac{5}{3}$$
$$=8$$

오답 피하기

$|x^2-1|=0$에서 $x^2-1=0$
$(x+1)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=1$
따라서 곡선 $y=|x^2-1|$과 x축의 교점의 x좌표는 -1, 1이다.

17 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$$a=1+\int_0^3(t^2-3t+2)dt$$
$$=1+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^3$$
$$=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$b=\int_0^3|t^2-3t+2|dt$$
$$=\int_0^1(t^2-3t+2)dt+\int_1^2(-t^2+3t-2)dt+\int_2^3(t^2-3t+2)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-2t\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_2^3$$
$$=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}$$
$$=\frac{11}{6}$$
$$\therefore a+b=\frac{5}{2}+\frac{11}{6}=\frac{13}{3}$$

[서술형 1] (1) $f(x)=x^3-3x+1$에서
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 3, $x=1$에서 극솟값 -1을 가지므로
A$(-1, 3)$, B$(1, -1)$ ❶

(2) 직선 AB의 기울기는 $\frac{-1-3}{1-(-1)}=-2$이므로 점 A$(-1, 3)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은
$y-3=\frac{1}{2}(x+1)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ ❷

채점 기준	배점
❶ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	4점
❷ 점 A를 지나고 직선 AB에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	3점

[서술형 2] 잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 x cm $(0<x<30)$라 하면 상자의 밑면은 한 변의 길이가 $(60-2x)$ cm인 정사각형이고 높이는 x cm이다.
상자의 부피를 $V(x)$라 하면
$V(x)=x(60-2x)^2=4x^3-240x^2+3600x$ ❶

$\therefore V'(x)=12x^2-480x+3600$
$\qquad=12(x-10)(x-30)$
$V'(x)=0$에서 $x=10$ ($\because 0<x<30$)

x	0	$\cdots$	10	$\cdots$	30
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	16000	↘	

즉 $V(x)$는 $x=10$에서 최대이므로 상자의 부피가 최대일 때 잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이는 10 cm이다. ❷

채점 기준	배점
❶ 상자의 부피를 식으로 나타낼 수 있다.	3점
❷ 상자의 부피가 최대일 때, 잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 구할 수 있다.	4점

[서술형 3] $f(x)=\int_1^x (t^3-4t+5)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^3-4x+5$ ······ ①

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=8-8+5=5$ ······ ②

채점 기준	배점
① $f'(x)$를 구할 수 있다.	3점
② $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$의 값을 구할 수 있다.	3점

4일차 　본문 88~91쪽

01 ④ **02** ② **03** ① **04** ④ **05** ③
06 ④ **07** ① **08** ② **09** ① **10** ⑤
11 ① **12** ⑤ **13** ② **14** ⑤ **15** ①
16 ① **17** ④

[서술형 1] (1) 극댓값: -1, 극솟값: -2
(2) 최댓값: 3, 최솟값: -6

[서술형 2] $f(x)=-3x^2-14x+2$

[서술형 3] 16

01 $f'(x)=3x^2-6ax+3a+6$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가함수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3a)^2-3(3a+6)\leq 0$

$9(a+1)(a-2)\leq 0$ 　　$\therefore -1\leq a\leq 2$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$-1+0+1+2=2$

02 $f(x)=2x^3-6x^2+3$에서

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 3, $x=2$에서 극솟값 -5를 가지므로 극값의 합은

$3+(-5)=-2$

03 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$y=f'(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 0, 2이므로 $f'(x)=ax(x-2)$ $(a<0)$로 놓으면

$f'(1)=1$에서 $-a=1$ 　　$\therefore a=-1$

$\therefore f'(x)=-x(x-2)=-x^2+2x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(-x^2+2x)dx$

$=-\frac{1}{3}x^3+x^2+C$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	C	$\nearrow$	$C+\frac{4}{3}$	$\searrow$

즉 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 C를 가지므로

$C=3$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3$이므로

$f(3)=-9+9+3=3$

04 $f'(x)=12x^3+12ax^2-12(a-8)x$

$=12x(x^2+ax-a+8)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+ax-a+8=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+ax-a+8=0$의 판별식을 D라 하면 $a\neq 8$, $D=a^2-4\cdot 1\cdot(-a+8)>0$

$(a-4)(a+8)>0$

$\therefore 4<a<8$ 또는 $a>8$ 또는 $a<-8$

따라서 실수 a의 값이 될 수 있는 것은 ④이다.

오답 피하기

$a=8$이면 $x^2+8x=0$이므로 0을 근으로 가진다.

05 $f(x)=-x^3+3x^2-6$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	14	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6

즉 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 14, $x=0$ 또는 $x=3$에서 최솟값 -6을 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은

$14+(-6)=8$

06 $4x^3+12x^2-36x+3k=0$에서

$4x^3+12x^2-36x=-3k$ ...... ㉠

방정식 ㉠이 한 개의 음의 실근과 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가지려면 곡선 $y=4x^3+12x^2-36x$와 직선 $y=-3k$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고 두 개는 양수이어야 한다.

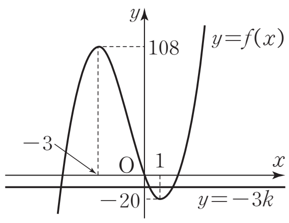
$f(x)=4x^3+12x^2-36x$라 하면

$f'(x)=12x^2+24x-36=12(x-1)(x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	108	$\searrow$	-20	$\nearrow$

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-3k$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고 두 개는 양수이려면



$-20<-3k<0$ $\therefore 0<k<\dfrac{20}{3}$

따라서 자연수 k의 최댓값은 6이다.

Lecture 방정식의 실근의 부호

방정식 $f(x)=k$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같으므로

(1) 방정식 $f(x)=k$가 양의 실근을 갖는다.
⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 양수이다.

(2) 방정식 $f(x)=k$가 음의 실근을 갖는다.
⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 음수이다.

07 $f(x)=3x^4-4x^3+k$라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	k	$\searrow$	$k-1$	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$의 최솟값이 $k-1$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$k-1\ge 0$ $\therefore k\ge 1$

따라서 실수 k의 최솟값은 1이다.

08 두 점 A, B의 시각 t에서의 속도는 각각

$f'(t)=2t-3$, $g'(t)=2t-10$

이때 두 점 A, B가 서로 반대 방향으로 움직이려면

$f'(t)g'(t)<0$에서

$(2t-3)(2t-10)<0$

$\therefore \dfrac{3}{2}<t<5$

09 $F(x)=\int f(x)dx=\int (4x-5)dx$

$=2x^2-5x+C$

이때 $F(1)=-1$이므로

$C-3=-1$ $\therefore C=2$

따라서 방정식 $F(x)=0$, 즉 $2x^2-5x+2=0$의 모든 실근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{2}{2}=1$

10 $f'(x)=ax^2-2ax=ax(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 3, $x=2$에서 극솟값 -1을 가지므로

$f(0)=3$, $f(2)=-1$

이때

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int (ax^2-2ax)dx$

$=\dfrac{a}{3}x^3-ax^2+C$

이므로 $f(0)=3$, $f(2)=-1$에서

$C=3$, $-\dfrac{4}{3}a+C=-1$

$\therefore a=3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3$이므로

$f(4)=64-48+3=19$

11 $\int_{-1}^{1} x(1-x)^2 dx = \int_{-1}^{1} (x^3-2x^2+x)dx$

$$=\int_{-1}^{1}(-2x^2)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-2x^2)dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=-\frac{4}{3}$$

12 $\int_{-1}^{2} \frac{x^2-6}{x-3}dx + \int_{2}^{-1} \frac{x}{x-3}dx$

$$=\int_{-1}^{2}\frac{x^2-6}{x-3}dx - \int_{-1}^{2}\frac{x}{x-3}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}\frac{x^2-x-6}{x-3}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}\frac{(x-3)(x+2)}{x-3}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(x+2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\frac{15}{2}$$

13 $|x^2-2x| = \begin{cases} x^2-2x & (x<0 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -x^2+2x & (0\le x<2) \end{cases}$

$\therefore \int_{1}^{3}|x^2-2x|dx$

$$=\int_{1}^{2}(-x^2+2x)dx + \int_{2}^{3}(x^2-2x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$$

14 $\int_{2}^{x} f(t)dt = x^2+ax+4$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=4+2a+4 \qquad \therefore a=-4$

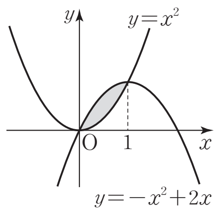
따라서 $\int_{2}^{x} f(t)dt = x^2-4x+4$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=2x-4$이므로

$f(3)=6-4=2$

15 $x^2=-x^2+2x$에서 $2x^2-2x=0$

$2x(x-1)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=1$

즉 두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+2x$의 교점의 x좌표는 0, 1이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는

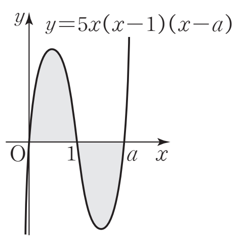


$$\int_{0}^{1}\{(-x^2+2x)-x^2\}dx$$
$$=\int_{0}^{1}(-2x^2+2x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}$$

16 $5x(x-1)(x-a)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=a$

즉 곡선 $y=5x(x-1)(x-a)$와 x축의 교점의 x좌표는 0, 1, a이고 오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로



$$\int_{0}^{a}5x(x-1)(x-a)dx=0$$
$$\int_{0}^{a}\{5x^3-5(a+1)x^2+5ax\}dx=0$$
$$\left[\frac{5}{4}x^4-\frac{5}{3}(a+1)x^3+\frac{5a}{2}x^2\right]_0^a=0$$

$-a^4+2a^3=0$, $-a^3(a-2)=0$

$\therefore a=2 \ (\because a>1)$

17 시각 $t=0$에서 $t=7$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_{0}^{7}|v(t)|dt=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2+\frac{1}{2}\cdot(1+4)\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot1$$
$$=7$$

[서술형 1] (1) $f(x)=-2x^3+9x^2-12x+3$에서

$f'(x)=-6x^2+18x-12$

$=-6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	-1	↘

즉 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 -1, $x=1$에서 극솟값 -2를 갖는다.

❶

(2)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	↘	-2	↗	-1	↘	-6

즉 $0\le x\le 3$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 3, $x=3$에서 최솟값 -6을 갖는다.

❷

채점 기준	배점
❶ 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있다.	3점
❷ 구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	3점

[서술형 2] $F(x)=xf(x)+2x^3+7x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+6x^2+14x$

$xf'(x)=-6x^2-14x$

$\therefore f'(x)=-6x-14$

❶

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-6x-14)dx$

$=-3x^2-14x+C$

이때 $f(1)=-15$이므로

$C-17=-15 \qquad \therefore C=2$

$\therefore f(x)=-3x^2-14x+2$

❷

채점 기준	배점
❶ 함수 $f'(x)$를 구할 수 있다.	3점
❷ 함수 $f(x)$를 구할 수 있다.	4점

[서술형 3] 점 P의 시각 t에서의 위치를 $x(t)$라 하면

$x(t)=0+\int_0^t(t^2-1)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_0^t$

$=\frac{1}{3}t^3-t$

❶

점 P가 다시 원점으로 돌아올 때의 위치는 0이므로 $x(t)=0$에서

$\frac{1}{3}t^3-t=0,\ \frac{1}{3}t(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})=0$

$\therefore t=\sqrt{3}\ (\because t>0)$

❷

따라서 시각 $t=0$에서 $t=\sqrt{3}$까지 점 P가 움직인 거리는

$p=\int_0^{\sqrt{3}}|t^2-1|dt$

$=\int_0^1(-t^2+1)dt+\int_1^{\sqrt{3}}(t^2-1)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_1^{\sqrt{3}}$

$=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

$\therefore 12p=12\cdot\frac{4}{3}=16$

❸

채점 기준	배점
❶ 점 P의 시각 t에서의 위치를 구할 수 있다.	2점
❷ 점 P가 원점으로 돌아오는 시각을 구할 수 있다.	2점
❸ $12p$의 값을 구할 수 있다.	3점

● 5일차

본문 92~95쪽

01 ③	02 ②	03 ①	04 ③	05 ④
06 ①	07 ①	08 ④	09 ④	10 ③
11 ②	12 ④	13 ③	14 ②	15 ④
16 ③	17 ③			

[서술형 1] 풀이 참조

[서술형 2] $k\le -1$

[서술형 3] -32

01 $f'(x)=3kx^2-6x+3k$

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)<f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-3k\cdot 3k\le 0$

$(k+1)(k-1)\ge 0 \qquad \therefore k\ge 1\ (\because k>0)$

따라서 k의 최솟값은 1이다.

02 $f'(x)=6x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=1$과 $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=0$, $f'(2)=0$

$6+2a+b=0$, $24+4a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-9$, $b=12$

즉 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+c$이고 $f(2)=-2$

이므로 $16-36+24+c=-2$

$\therefore c=-6$

따라서 $a=-9$, $b=12$, $c=-6$이므로

$a+b+c=-9+12+(-6)=-3$

03 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+a$에서

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a-4$	↗	$a+7$	↘	$a-20$	↗	$a+32$

즉 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 $a+32$, $x=2$에서 최솟값 $a-20$을 갖는다.

즉 $a+32=34$이므로 $a=2$

따라서 구하는 최솟값은

$m=2-20=-18$

04 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 a, b $(a<b)$라 하면

$f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=b$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, $x=b$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ③이다.

05 $x^3-7=12x+k$에서 $x^3-12x-7=k$ $\cdots\cdots$ ㉠

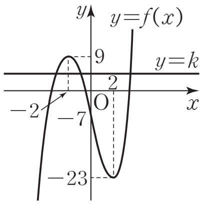
방정식 ㉠이 서로 다른 두 개의 음의 실근과 한 개의 양의 실근을 가지려면 곡선 $y=x^3-12x-7$과 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 음수이고 한 개는 양수이어야 한다.

$f(x)=x^3-12x-7$이라 하면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	9	↘	-23	↗



즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 음수이고 한 개는 양수이려면

$-7<k<9$

따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$-6+(-5)+\cdots+8=15$

06 $x^3-3x^2>k$에서 $x^3-3x^2-k>0$

$f(x)=x^3-3x^2-k$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ $(\because x>1)$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-k-4$	↗

즉 $x>1$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 $-k-4$이므로 $f(x)>0$이 성립하려면

$-k-4>0$ $\quad\therefore k<-4$

07 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-6t^2+5$, $a=\dfrac{dv}{dt}=-12t$

따라서 시각 $t=2$에서의 점 P의 가속도는

$-12\cdot2=-24$

08 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=t^2-10t+16=(t-2)(t-8)$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서 $t=2$ 또는 $t=8$

따라서 $t=8$일 때 점 P가 두 번째로 운동 방향을 바꾼다.

09 $\int f(x)dx=x^3-3x^2+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=3x^2-6x$

$\therefore f(2)+f(-2)=0+24=24$

10 $f'(x)=(x+1)(3x-1)=3x^2+2x-1$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+2x-1)dx$

$=x^3+x^2-x+C$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-x+1$이므로

$f(1)=1+1-1+1=2$

11 $y=f'(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 0, 2이므로 $f'(x)=ax(x-2)$ $(a>0)$로 놓을 수 있다.

$f'(1)=-6$이므로

$-a=-6 \qquad \therefore a=6$

즉 $f'(x)=6x(x-2)=6x^2-12x$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2-12x)dx$

$=2x^3-6x^2+C$

이때 $f(2)=3$이므로

$C-8=3 \qquad \therefore C=11$

따라서 $f(x)=2x^3-6x^2+11$이므로

$f(1)=2-6+11=7$

12 $\int_0^2(2x^2+5)dx-2\int_0^2(x^2+x)dx$

$=\int_0^2\{(2x^2+5)-2(x^2+x)\}dx$

$=\int_0^2(-2x+5)dx$

$=\Big[-x^2+5x\Big]_0^2$

$=6$

13 $\int_0^1 f(x)dx-\int_2^1 f(x)dx$

$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$

$=\int_0^2 f(x)dx$

$=\int_0^2(3x^2-x)dx$

$=\Big[x^3-\frac{1}{2}x^2\Big]_0^2$

$=6$

14 함수 $f(t)$의 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^3-8}\int_2^x f(t)dt$

$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+4}$

$=\frac{1}{12}F'(2)=\frac{1}{12}f(2)$

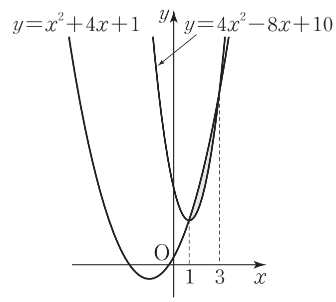
$=\frac{1}{12}(8+4-4)=\frac{2}{3}$

15 $4x^2-8x+10=x^2+4x+1$에서 $3x^2-12x+9=0$

$3(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

즉 두 곡선 $y=4x^2-8x+10$, $y=x^2+4x+1$의 교점의 x좌표는 1, 3이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$\int_1^3\{(x^2+4x+1)-(4x^2-8x+10)\}dx$

$=\int_1^3(-3x^2+12x-9)dx$

$=\Big[-x^3+6x^2-9x\Big]_1^3$

$=0-(-4)$

$=4$

16 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^5|v(t)|dt=\int_0^5(2t+1)dt=\Big[t^2+t\Big]_0^5=30$

17 ㄱ. 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서 $t=6$

즉 점 P는 출발한 후 운동 방향을 한 번 바꾼다.

ㄴ. $\int_0^6 |v(t)|dt=\frac{1}{2}\cdot(6+2)\cdot3=12$,

$\int_6^{10} |v(t)|dt=\frac{1}{2}\cdot4\cdot3=6$

이므로 점 P는 출발한 후 원점을 다시 지나지 않는다.

ㄷ. $\int_0^6 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot(6+2)\cdot3=12$

$\int_0^8 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot(6+2)\cdot3-\frac{1}{2}\cdot2\cdot3=12-3=9$

$\int_0^{10} v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot(6+2)\cdot3-\frac{1}{2}\cdot4\cdot3$

$=12-6=6$

즉 점 P는 $t=6$일 때 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[서술형 1] $x^3-3x^2-9x-k=0$에서

$x^3-3x^2-9x=k$ ······ ㉠

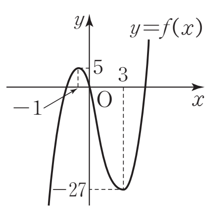
$f(x)=x^3-3x^2-9x$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	-27	↗

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

(i) $k<-27$ 또는 $k>5$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 1개이므로 실근의 개수는 1이다. ❶

(ii) $k=-27$ 또는 $k=5$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 2개이므로 서로 다른 실근의 개수는 2이다. ❷

(iii) $-27<k<5$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 3개이므로 서로 다른 실근의 개수는 3이다. ❸

채점 기준	배점
❶ $k<-27$ 또는 $k>5$일 때, 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구할 수 있다.	2점
❷ $k=-27$ 또는 $k=5$일 때, 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구할 수 있다.	2점
❸ $-27<k<5$일 때, 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구할 수 있다.	2점

[서술형 2] $f(x)\geq g(x)$에서 $f(x)-g(x)\geq0$

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^3-x+1-(2x+k)$

$=x^3-3x+1-k$

$\therefore h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 0\leq x\leq3$) ❶

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-k+1$	↘	$-k-1$	↗	$-k+19$

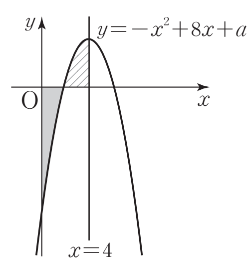
즉 $0\leq x\leq3$일 때, 함수 $h(x)$의 최솟값이 $-k-1$이므로 $h(x)\geq0$이 성립하려면 ❷

$-k-1\geq0$ $\therefore k\leq-1$ ❸

채점 기준	배점
❶ $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 $h'(x)=0$이 되는 x의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ $0\leq x\leq3$에서 함수 $h(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	3점
❸ 실수 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점

[서술형 3] $y=-x^2+8x+a=-(x-4)^2+a+16$

곡선 $y=-x^2+8x+a$는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}Q$와 같다.



이때 $P:Q=1:2$에서

$Q=2P$ $\therefore P=\frac{1}{2}Q$ ❶

즉 빗금 친 부분의 넓이와 색칠한 부분의 넓이가 같으므로

$\int_0^4(-x^2+8x+a)dx=0$ ❷

$$\left[-\frac{1}{3}x^3+4x^2+ax\right]_0^4=0$$

$$-\frac{64}{3}+64+4a=0 \qquad \therefore a=-\frac{32}{3}$$

$\therefore 3a=-32$

❸

채점 기준	배점
❶ P와 빗금 친 부분의 넓이가 서로 같음을 알 수 있다.	3점
❷ $\int_0^4(-x^2+8x+a)dx=0$임을 알 수 있다.	2점
❸ $3a$의 값을 구할 수 있다.	2점

6일차

본문 96~99쪽

01 ⑤	**02** ④	**03** ⑤	**04** ④	**05** ③
06 ④	**07** ②	**08** ②	**09** ①	**10** ④
11 ①	**12** ②	**13** ③	**14** ①	**15** ⑤
16 ③	**17** ④			

[서술형 1] 5

[서술형 2] 22

[서술형 3] $\frac{27}{4}$

01 $f'(x)=3x^2+2ax+2$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-3\cdot 2\le 0$$

$(a+\sqrt{6})(a-\sqrt{6})\le 0$

$\therefore -\sqrt{6}\le a\le\sqrt{6}$

따라서 정수 a는 $-2, -1, 0, 1, 2$로 그 개수는 5이다.

02 $f(x)=x^3+3x^2-12$에서

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-8	↘	-12	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 -8을 갖는다.

03 $f(x)=x^3-9x^2+ax-b$에서

$f'(x)=3x^2-18x+a$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값 3을 가지므로

$f'(1)=0,\ f(1)=3$

$f'(1)=0$에서 $3-18+a=0$

$\therefore a=15$

$f(1)=3$에서 $1-9+a-b=3$

$\therefore a-b=11$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a=15$를 ㉠에 대입하면

$15-b=11 \qquad \therefore b=4$

$\therefore ab=15\cdot 4=60$

04 $f(x)=ax^3-3ax+b$에서

$f'(x)=3ax^2-3a=3a(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 0\le x\le 2$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	b	↘	$-2a+b$	↗	$2a+b$

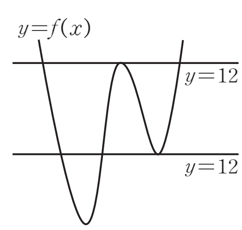
즉 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $2a+b$, $x=1$에서 최솟값 $-2a+b$를 가지므로

$2a+b=5,\ -2a+b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=3$

$\therefore a+b=1+3=4$

05 방정식 $f(x)=12$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=12$의 교점의 개수와 같으므로 오른쪽 그림과 같이 방정식 $f(x)=12$가 서로 다른 세 실근을 가지려면



$a+9=12$ 또는 $a+2=12$

$\therefore a=3$ 또는 $a=10$

따라서 실수 a의 값의 합은

$3+10=13$

06 ㄱ. $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖지 않는다.

ㄴ. $x=-1$, $x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=3$에서 극소이다. 즉 함수 $f(x)$의 극솟점은 두 개이다.

ㄷ. 구간 $(0, 1)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(0, 1)$에서 증가한다.

ㄹ. $y=f'(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 $-1, 1, 2, 3$이므로 $f'(x)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0
$f(x)$		↗	극대	↘		↘	

즉 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때, 최댓값을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

07 $f(x)=x^3+6x-2k$라 하면
$f'(x)=3x^2+6=3(x^2+2)$
모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가함수이다. 즉 $x\le 2$일 때 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(2)=-2k+20$이므로 $f(x)<0$이려면
$-2k+20<0 \qquad \therefore k>10$
따라서 자연수 k의 최솟값은 11이다.

08 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=-4t^3+4t$, $a=\dfrac{dv}{dt}=-12t^2+4$
따라서 시각 $t=2$에서의 점 P의 가속도는
$-12\cdot 2^2+4=-44$

09 $f(x)=\int x^{99}dx+3\int x^2dx=\dfrac{1}{100}x^{100}+x^3+C$
이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$
따라서 $f(x)=\dfrac{1}{100}x^{100}+x^3$이므로
$f(1)=\dfrac{1}{100}+1=\dfrac{101}{100}$

10 $\dfrac{d}{dx}\int(ax^2+bx+4)dx=3x^2+x+c$에서
$ax^2+bx+4=3x^2+x+c$
따라서 $a=3$, $b=1$, $c=4$이므로
$a+b+c=3+1+4=8$

11 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(6x^2+2ax)dx$
$=\Big[2x^3+ax^2\Big]_0^1$
$=a+2$
이때 $\int_0^1 f(x)dx=f(1)$이므로
$a+2=6+2a \qquad \therefore a=-4$

12 $\int_{-1}^1(x+3)(x-2)dx=\int_{-1}^1(x^2+x-6)dx$
$=2\int_0^1(x^2-6)dx$
$=2\Big[\dfrac{1}{3}x^3-6x\Big]_0^1$
$=2\cdot\Big(-\dfrac{17}{3}\Big)$
$=-\dfrac{34}{3}$

13 $f(-x)=-f(x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 함수 $y=xf(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고 함수 $y=x^2f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
$\therefore \int_{-1}^1(x-1)^2f(x)dx$
$=\int_{-1}^1(x^2-2x+1)f(x)dx$
$=\int_{-1}^1x^2f(x)dx-2\int_{-1}^1xf(x)dx+\int_{-1}^1f(x)dx$
$=0-2\cdot 2\int_0^1xf(x)dx+0$
$=-4\int_0^1xf(x)dx$
$=-4\cdot 1$
$=-4$

14 $f(x)=\int_0^x (3t^2+2t-1)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극대이므로 구하는 극댓값은

$$f(-1)=\int_0^{-1}(3t^2+2t-1)dt=\Big[t^3+t^2-t\Big]_0^{-1}=1$$

15 함수 $f(t)$의 부정적분을 $F(t)$라 하면

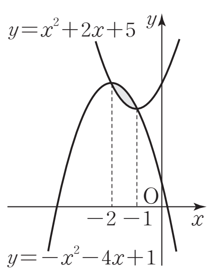
$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)=f(1)=2-1+1=2$$

16 $x^2+2x+5=-x^2-4x+1$에서 $2x^2+6x+4=0$

$2(x+1)(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

즉 두 곡선 $y=x^2+2x+5$, $y=-x^2-4x+1$의 교점의 x좌표는 -2, -1이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-2}^{-1}\{-x^2-4x+1-(x^2+2x+5)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(-2x^2-6x-4)dx$$
$$=\Big[-\frac{2}{3}x^3-3x^2-4x\Big]_{-2}^{-1}$$
$$=\frac{1}{3}$$

17 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2|t(t-1)|dt=\int_0^1(-t^2+t)dt+\int_1^2(t^2-t)dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\Big]_1^2$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$$

[서술형 1] $f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

❶

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값 -3을 갖는다.

이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2-6)dx=2x^3-6x+C$$

$f(1)=-3$에서 $C-4=-3$ $\quad\therefore C=1$

따라서 $f(x)=2x^3-6x+1$이므로 구하는 극댓값은

❷

$f(-1)=-2+6+1=5$

❸

채점 기준	배점
❶ $f'(x)=0$이 되는 x의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	3점
❸ 함수 $f(x)$의 극댓값을 구할 수 있다.	2점

[서술형 2] $x^3+3x^2-9x-k=0$에서

$x^3+3x^2-9x=k$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=x^3+3x^2-9x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

❶

$f(x)=x^3+3x^2-9x$라 하면

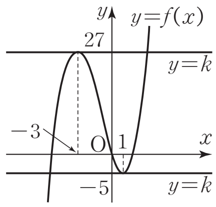
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	27	↘	-5	↗

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$k=-5$ 또는 $k=27$



❷

따라서 실수 k의 값의 합은

$-5+27=22$

❸

채점 기준	배점
❶ 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건을 알 수 있다.	2점
❷ 실수 k의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ 실수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	1점

[서술형 3] 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 x_{P}, x_{Q}라 하면

$$x_{\mathrm{P}}=0+\int_0^t v_{\mathrm{P}}(t)dt=\int_0^t (4t-6)dt=2t^2-6t$$

$$x_{\mathrm{Q}}=0+\int_0^t v_{\mathrm{Q}}(t)dt=\int_0^t (-2t+3)dt=-t^2+3t$$

❶

두 점 P, Q가 다시 만나려면 $x_{\mathrm{P}}=x_{\mathrm{Q}}$이어야 하므로

$2t^2-6t=-t^2+3t$, $3t(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t>0$)

즉 두 점 P, Q는 $t=3$일 때 다시 만난다.

❷

이때 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 하면

$$\begin{aligned} f(t)&=|x_{\mathrm{P}}-x_{\mathrm{Q}}|=|2t^2-6t-(-t^2+3t)| \\ &=|3t^2-9t| \\ &=-3t^2+9t \ (\because 0<t\le 3) \end{aligned}$$

$\therefore f'(t)=-6t+9=-3(2t-3)$

$f'(t)=0$에서 $t=\frac{3}{2}$

t	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	3
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{27}{4}$	$\searrow$	0

따라서 $0<t\le 3$일 때, 함수 $f(t)$는 $t=\frac{3}{2}$에서 최댓값 $\frac{27}{4}$을 가지므로 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은 $\frac{27}{4}$이다.

❸

채점 기준	배점
❶ 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 구할 수 있다.	2점
❷ 두 점 P, Q가 원점을 출발한 후 다시 만나는 시각을 구할 수 있다.	2점
❸ 두 점 P, Q가 원점을 출발한 후 다시 만날 때까지 두 점 사이의 거리의 최댓값을 구할 수 있다.	3점