정답과 해설

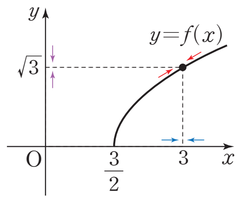
1주 1일 개념 돌파 전략 ①

9, 11쪽

1-2 $\sqrt{3}$ **2-2** (1) -1 (2) 존재하지 않는다. (3) 2 (4) 2
3-2 -2 **4-2** 5 **5-2** 연속
6-2 최댓값: 2, 최솟값: $\frac{1}{2}$

1-2

$f(x)=\sqrt{2x-3}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



x의 값이 3과 다른 값을 가지면서 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $\sqrt{3}$에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to 3}\sqrt{2x-3}=\sqrt{3}$

2-2

(1) $\lim_{x\to 0-} f(x)=-1$

(2) $\lim_{x\to 0-} f(x)=-1$, $\lim_{x\to 0+} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to 0-} f(x)\neq \lim_{x\to 0+} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to 0} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

(3) $\lim_{x\to 2+} f(x)=2$

(4) $\lim_{x\to 2} f(x)=2$

3-2

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\{3f(x)+4g(x)\}&=3\lim_{x\to 0} f(x)+4\lim_{x\to 0} g(x)\\&=3\times 2+4\times(-2)\\&=-2\end{aligned}$$

4-2

$\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{1}{x}\right)=5$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty} f(x)=5$

5-2

$f(3)=2$이고,

$\lim_{x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3-}(5-x)=2$,

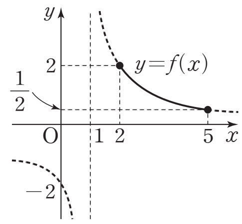
$\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3+}(x^2-7)=2$

이므로 $\lim_{x\to 3} f(x)=2$

따라서 $\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

6-2

함수 $f(x)=\frac{2}{x-1}$는 닫힌구간 $[2, 5]$에서 연속이고, 닫힌구간 $[2, 5]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 주어진 구간에서 $x=2$일 때 최댓값 2, $x=5$일 때 최솟값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

1주 1일 개념 돌파 전략 ②

12, 13쪽

1 ④ **2** ③ **3** ① **4** ②
5 ③ **6** 풀이 참조

1

① $\lim_{x\to -3-} f(x)=1$, $\lim_{x\to -3+} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to -3} f(x)=1$

② $\lim_{x\to -2-} f(x)=0$, $\lim_{x\to -2+} f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to -2} f(x)=0$

③ $\lim_{x\to 0-} f(x)=4$, $\lim_{x\to 0+} f(x)=4$이므로

$\lim_{x\to 0} f(x)=4$

④ $\lim_{x\to 1-} f(x)=2$, $\lim_{x\to 1+} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)\neq \lim_{x\to 1+} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

⑤ $\lim_{x\to 3-} f(x)=0$, $\lim_{x\to 3+} f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to 3} f(x)=0$

따라서 극한값이 존재하지 않는 것은 ④이다.

2

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}(-x^2+1)=-3$

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(x+1)=3$

$\therefore \lim_{x\to 2-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)=-3+3=0$

3

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)g(x)}{f(x)-2g(x)}&=\frac{2\lim_{x\to 1} f(x)\lim_{x\to 1} g(x)}{\lim_{x\to 1} f(x)-2\lim_{x\to 1} g(x)}\\&=\frac{2\times 10\times(-5)}{10-2\times(-5)}=-5\end{aligned}$$

4

모든 양의 실수 x에 대하여 $2x^2>0$이므로

$4x^2-x-1<f(x)<4x^2+4x+1$의 각 변을 $2x^2$으로 나누면

$$\frac{4x^2-x-1}{2x^2}<\frac{f(x)}{2x^2}<\frac{4x^2+4x+1}{2x^2}$$

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-x-1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+4x+1}{2x^2}=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^2}=2$$

5

① $f(1)=0$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

② $f(1)=0$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

③ $f(1)$이 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

④ $f(1)=\sqrt{2}$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\sqrt{2}$이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

⑤ $f(1)=2$이고,

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}2=2$,

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}(x+1)=2$$

이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$

따라서 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 $x=1$에서 불연속인 함수는 ③이다.

6

$f(x)=x^3-3x^2-4$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[3, 4]$에서 연속이고

$f(3)=-4<0$, $f(4)=12>0$

따라서 $f(3)f(4)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $x^3-3x^2-4=0$은 열린구간 $(3, 4)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

참고 사잇값의 정리의 활용

(1) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(2) 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재하는 것을 보일 때 이용한다.

1주 2일 필수 체크 전략 ①

14~17쪽

1-1 2	**1-2** ③	**2-1** ③	**2-2** -7
3-1 ②	**3-2** 192	**4-1** ㄱ, ㄷ	**4-2** ③

1-1

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}1=1$

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}(x^2-2x)=0$

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\lim\limits_{x\to2+}(-x+3)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to0-}f(x)-\lim\limits_{x\to0+}f(x)+\lim\limits_{x\to2+}f(x)=2$

1-2

$$\lim_{x\to1+}\frac{x^2-4x+3}{|x-1|}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=\lim_{x\to1+}(x-3)=-2$$

← $x\to1+$일 때 $x-1>0$

$$\lim_{x\to3-}\frac{x^2-x-6}{|x-3|}=\lim_{x\to3-}\frac{(x+2)(x-3)}{-(x-3)}=\lim_{x\to3-}(-x-2)=-5$$

← $x\to3-$일 때 $x-3<0$

따라서 $a=-2$, $b=-5$이므로 $ab=10$

2-1

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8f(x)-g(x)}{f(x)+3g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{8\times\frac{f(x)}{g(x)}-1}{\frac{f(x)}{g(x)}+3}=\frac{8\times2-1}{2+3}=3$$

2-2

$f(x)-2g(x)=h(x)$라 하면 $g(x)=\frac{f(x)-h(x)}{2}$이고

$\lim\limits_{x\to3}f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to3}h(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{3f(x)-2g(x)}{f(x)-4g(x)}=\lim_{x\to3}\frac{3f(x)-2\times\frac{f(x)-h(x)}{2}}{f(x)-4\times\frac{f(x)-h(x)}{2}}=\lim_{x\to3}\frac{2f(x)+h(x)}{-f(x)+2h(x)}=\frac{2\times3+1}{-3+2\times1}=-7$$

다른 풀이

$f(x)-2g(x)=h(x)$라 하면 $g(x)=\frac{f(x)-h(x)}{2}$이고

$\lim\limits_{x\to3}f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to3}h(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to3}g(x)=\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-h(x)}{2}=\frac{3-1}{2}=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to3}\frac{3f(x)-2g(x)}{f(x)-4g(x)}=\frac{3\times3-2\times1}{3-4\times1}=-7$

3-1

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+2)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x+2}{x-1}=-2$$

3-2

$$\lim_{x\to8}\frac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to8}\frac{(x^2-64)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}$$
$$=\lim_{x\to8}\frac{(x+8)(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-8}$$
$$=\lim_{x\to8}(x+8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)$$
$$=16(4+2\times2+4)=192$$

다른 풀이

$$\lim_{x\to8}\frac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to8}\frac{(x+8)(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt[3]{x}-2}$$
$$=\lim_{x\to8}(x+8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)$$
$$=16(4+2\times2+4)=192$$

4-1

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x}{6x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{6+\frac{1}{x^2}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{7x}{3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}}{3-\frac{1}{x^2}}=0$

ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{\sqrt{4x^2-x}+\sqrt{9x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{10}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+\sqrt{9-\frac{1}{x^2}}}$

$$=\frac{10}{2+3}=2$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

4-2

[풀이 1]

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}-2x}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t+1}{\sqrt{t^2-t}+2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+2}$$
$$=\frac{-1}{1+2}=-\frac{1}{3}$$

[풀이 2]

$x\to-\infty$에서 $x=-\sqrt{x^2}$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2}}-2}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-2}=\frac{1}{-1-2}=-\frac{1}{3}$$

1주 2일 필수 체크 전략 ②

18, 19쪽

1 ②	2 ③	3 ①	4 ②
5 ③	6 ④		

1

$\displaystyle\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x+k)=1+k$

$\displaystyle\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(-x^2+k^2)=-1+k^2$

$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하려면 $\displaystyle\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$이어야 하므로

$1+k=-1+k^2$, $k^2-k-2=0$

$(k+1)(k-2)=0$ $\quad\therefore k=2$ ($\because k>0$)

2

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to-1-$일 때 $t\to0-$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-1-}f(f(x))=\lim_{t\to0-}f(t)=1$

$x\to-1+$일 때 $t=1$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-1+}f(f(x))=f(1)=-1$

$\displaystyle\therefore\lim_{x\to-1-}f(f(x))+\lim_{x\to-1+}f(f(x))=1+(-1)=0$

참고 합성함수의 극한

$\displaystyle\lim_{x\to a+}g(f(x))$의 값은 $f(x)=t$로 놓고 다음을 이용한다.

① $x\to a+$일 때 $t\to b+$이면

➡ $\displaystyle\lim_{x\to a+}g(f(x))=\lim_{t\to b+}g(t)$

② $x\to a+$일 때 $t\to b-$이면

➡ $\displaystyle\lim_{x\to a+}g(f(x))=\lim_{t\to b-}g(t)$

③ $x\to a+$일 때 $t=b$이면

➡ $\displaystyle\lim_{x\to a+}g(f(x))=g(b)$

3

$x+1=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x+1)}{x+1}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=1$$

$$\therefore\lim_{x\to-1}\frac{f(x+1)}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{f(x+1)}{x+1}\times\frac{1}{x^2-x+1}\right\}$$
$$=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

4

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3+x^2-7x+2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+3x-1)}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2+3x-1}{x+1}=3$$

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-\sqrt{2x+3}}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)(x+\sqrt{2x+3})}{(x-\sqrt{2x+3})(x+\sqrt{2x+3})(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+\sqrt{2x+3})}{(x^2-2x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+\sqrt{2x+3})}{(x+1)(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x+\sqrt{2x+3}}{(x+1)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{3}{8}$$

따라서 $a=3$, $b=\frac{3}{8}$이므로 $\frac{a}{b}=8$

5

① $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{3x^2+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}$

② $\lim_{x\to1}\frac{2x^2-x-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(2x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(2x+1)=3$

③ $\lim_{x\to\infty}x\left(1-\frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x}}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{x\times\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+6})(\sqrt{x}+\sqrt{x+6})\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+6})}\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-6\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+6}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6}{1+\sqrt{1+\frac{6}{x}}}=-3$$

④ $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x}+x)$$
$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+t}-t)=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+t}-t)(\sqrt{t^2+t}+t)}{\sqrt{t^2+t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\sqrt{t^2+t}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}+1}=\frac{1}{2}$$

⑤ $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{3x+1}-2)(\sqrt{3x+1}+2)}{(x^2-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{3}{(x+1)(\sqrt{3x+1}+2)}=\frac{3}{8}$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

6

$$\lim_{x\to-a}\frac{x^3+a^3}{x^2-a^2}=\lim_{x\to-a}\frac{(x+a)(x^2-ax+a^2)}{(x+a)(x-a)}$$
$$=\lim_{x\to-a}\frac{x^2-ax+a^2}{x-a}=-\frac{3}{2}a$$

이므로 $-\frac{3}{2}a=3$　　$\therefore a=-2$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-ax}-\sqrt{x^2-bx})$$
$$=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-bx})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-bx})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-bx})}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-bx}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2+b)x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-bx}}=\frac{2+b}{2}$$

이므로 $\frac{2+b}{2}=3$, $2+b=6$　　$\therefore b=4$

$\therefore a+b=2$

1주 3일 필수 체크 전략 ①

20~23쪽

1-1 -18	**1-2** ①	**2-1** 6	**2-2** ㄱ, ㄷ
3-1 1	**3-2** ⑤	**4-1** 8	**4-2** ④

1-1

$\lim_{x\to2}\frac{x^3-3x+a}{x-2}=b$에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(x^3-3x+a)=0$

$2+a=0$　　$\therefore a=-2$

$a=-2$를 주어진 등식에 대입하면

$$b=\lim_{x\to2}\frac{x^3-3x-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)^2}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+1)^2=9$$

$\therefore ab=-18$

1-2

$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-4}=\frac{1}{6}$에서 $\lim_{x\to4}(x-4)=0$이므로

$\lim_{x\to4}(\sqrt{x+a}-b)=0$

$\sqrt{4+a}-b=0$　　$\therefore b=\sqrt{a+4}$　　…… ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a+4}}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a+4})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+4})}{(x-4)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+4})}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+4})}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a+4}}=\frac{1}{2\sqrt{a+4}}$$

즉, $\frac{1}{2\sqrt{a+4}}=\frac{1}{6}$이므로

$\sqrt{a+4}=3$, $a+4=9$　　$\therefore a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore a+b=8$

2-1

(ⅰ) $\lim_{x \to -1-} f(x)=-1$, $\lim_{x \to -1+} f(x)=1$이므로

$\lim_{x \to -1-} f(x) \neq \lim_{x \to -1+} f(x)$

따라서 $\lim_{x \to -1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ⅱ) $f(0)=0$, $\lim_{x \to 0} f(x)=1$이므로 $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(ⅲ) $\lim_{x \to 1-} f(x)=1$, $\lim_{x \to 1+} f(x)=0$이므로

$\lim_{x \to 1-} f(x) \neq \lim_{x \to 1+} f(x)$

따라서 $\lim_{x \to 1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(ⅳ) $f(2)=0$, $\lim_{x \to 2} f(x)=1$이므로 $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 $x=-1$, $x=1$이고, 불연속인 x의 값은 $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$이므로

$a=2$, $b=4$

$\therefore a+b=6$

2-2

ㄱ. $\lim_{x \to 0-} f(x)=1$, $\lim_{x \to 0+} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x \to 0-} f(x) \neq \lim_{x \to 0+} f(x)$

따라서 $\lim_{x \to 0} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x \to 1-} f(x)=-1$, $\lim_{x \to 1+} f(x)=1$이므로

$\lim_{x \to 1-} f(x) \neq \lim_{x \to 1+} f(x)$

따라서 $\lim_{x \to 1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $\{f(1)\}^2=1^2=1$이고

$\lim_{x \to 1-} \{f(x)\}^2=(-1)^2=1$, $\lim_{x \to 1+} \{f(x)\}^2=1^2=1$

이므로 $\lim_{x \to 1} \{f(x)\}^2=1$

따라서 $\lim_{x \to 1} \{f(x)\}^2=\{f(1)\}^2$이므로 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=1$에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

3-1

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$\lim_{x \to a-} f(x)=\lim_{x \to a+} f(x)=f(a)$이어야 하므로

$a^2-6=a$, $a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-2$ 또는 $a=3$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-2+3=1$

3-2

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x \to 1-} f(x)=\lim_{x \to 1+} f(x)=f(1)$이므로

$3=3+a \qquad \therefore a=0$

또 $x=-1$에서도 연속이므로

$\lim_{x \to -1-} f(x)=\lim_{x \to -1+} f(x)=f(-1)$

$-2-b=3 \qquad \therefore b=-5$

$\therefore a-b=5$

4-1

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-1$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x \to -1} f(x)=f(-1)$이므로

$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2+ax}{x+1}=b$ …… ㉠

㉠에서 $\lim_{x \to -1} (x+1)=0$이므로

$\lim_{x \to -1} (2x^2+ax)=0$

$2-a=0 \qquad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$b=\lim_{x \to -1} \frac{2x^2+2x}{x+1}=\lim_{x \to -1} \frac{2x(x+1)}{x+1}=\lim_{x \to -1} 2x=-2$

$\therefore a^2+b^2=2^2+(-2)^2=8$

4-2

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 1} f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{a\sqrt{x}-b}{x-1}=b^2$ …… ㉠

㉠에서 $\lim_{x \to 1} (x-1)=0$이므로

$\lim_{x \to 1} (a\sqrt{x}-b)=0$

$a-b=0 \qquad \therefore a=b$

$a=b$를 ㉠에 대입하면

$b^2=\lim_{x \to 1} \frac{b\sqrt{x}-b}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{b(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\lim_{x \to 1} \frac{b(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x \to 1} \frac{b}{\sqrt{x}+1}$

$=\frac{b}{2}$

$b^2=\frac{b}{2}$에서 $2b^2-b=0$

$b(2b-1)=0 \qquad \therefore b=0$ 또는 $b=\frac{1}{2}$

이때 $b \neq 0$이므로 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=1$

1주 3일 필수 체크 전략 ②

24, 25쪽

1 ③	2 ①	3 ③	4 ①
5 ⑤	6 ①		

1

$\lim_{x\to3}\frac{3\sqrt{x^2+7}-4x}{ax+b}=-\frac{7}{4}$에서 $-\frac{7}{4}\neq0$이고

$\lim_{x\to3}(3\sqrt{x^2+7}-4x)=0$이므로

$\lim_{x\to3}(ax+b)=0$

$3a+b=0 \qquad \therefore b=-3a$ …… ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\frac{3\sqrt{x^2+7}-4x}{ax-3a}&=\lim_{x\to3}\frac{(3\sqrt{x^2+7}-4x)(3\sqrt{x^2+7}+4x)}{(ax-3a)(3\sqrt{x^2+7}+4x)}\\&=\lim_{x\to3}\frac{-7(x^2-9)}{(ax-3a)(3\sqrt{x^2+7}+4x)}\\&=\lim_{x\to3}\frac{-7(x+3)(x-3)}{a(x-3)(3\sqrt{x^2+7}+4x)}\\&=\lim_{x\to3}\frac{-7(x+3)}{a(3\sqrt{x^2+7}+4x)}\\&=-\frac{7}{4a}\end{aligned}$$

즉, $-\frac{7}{4a}=-\frac{7}{4}$이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-3$

$\therefore ab=-3$

2

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-x+5}=3$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차식임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=9$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=0 \qquad \therefore f(1)=0$

즉, $f(x)=3(x-1)(x+a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있으므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x+a)}{x-1}=\lim_{x\to1}3(x+a)\\&=3(1+a)=9\end{aligned}$$

$\therefore a=2$

따라서 $f(x)=3(x-1)(x+2)$이므로

$f(2)=3\times1\times4=12$

3

ㄱ. $\lim_{x\to2}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to2}f(x)\lim_{x\to2}f(x)$
$=1\times1=1$

ㄴ. $x-1=t$로 놓으면 $x\to0-$일 때 $t\to-1-$이고,
$x\to0+$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x-1)=\lim_{t\to-1-}f(t)=1$

$\lim_{x\to0+}f(x-1)=\lim_{t\to-1+}f(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to0-}f(x-1)\neq\lim_{x\to0+}f(x-1)$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x-1)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x-1)$은 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(0)f(0+1)=f(0)f(1)=(-1)\times0=0$

$x+1=t$로 놓으면 $x\to0-$일 때 $t\to1-$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0-}f(x)f(x+1)&=\lim_{x\to0-}f(x)\lim_{x\to0-}f(x+1)\\&=\lim_{x\to0-}f(x)\lim_{t\to1-}f(t)\\&=1\times0=0\end{aligned}$$

$x\to0+$일 때 $t\to1+$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}f(x)f(x+1)&=\lim_{x\to0+}f(x)\lim_{x\to0+}f(x+1)\\&=\lim_{x\to0+}f(x)\lim_{t\to1+}f(t)\\&=(-1)\times0=0\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)f(x+1)=0$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)f(x+1)=f(0)f(1)$이므로 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=0$에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

4

함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=f(2)g(2)$

$f(2)g(2)=(2+2)(4+a)=16+4a$이고,

$\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=\lim_{x\to2-}(-x+3)(2x+a)=4+a$,

$\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to2+}(x+2)(2x+a)=16+4a$

이므로 $4+a=16+4a$

$-3a=12 \qquad \therefore a=-4$

5

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$이므로

$-1+a=b+1 \qquad \therefore a-b=2$ …… ㉠

이때 $f(x)=f(x+4)$에서 $f(-2)=f(2)$이므로

$-4+a=2b+1 \qquad \therefore a-2b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-3$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-x^2-1 & (-2\le x<1)\\ -3x+1 & (1\le x\le2)\end{cases}$이므로

$f(8)=f(4)=f(0)=-1$

6

$x\neq2$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2-x+a}{x-2}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to2} f(x)=f(2)$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x+a}{x-2}=f(2) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to2}(x^2-x+a)=0$

$2+a=0 \qquad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$$f(2)=\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+1)(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x+1)=3$$

$\therefore a+f(2)=1$

1주 4일 교과서 대표 전략 ①

26~29쪽

1 ③	2 ⑤	3 ①	4 ②
5 ②	6 ④	7 ①	8 ④
9 불연속	10 5	11 ⑤	12 ①
13 ③	14 ④	15 ⑤	16 ③

1

$\lim\limits_{x\to2-} f(x)=\lim\limits_{x\to2-} 3a=3a$

$\lim\limits_{x\to2+} f(x)=\lim\limits_{x\to2+}(2x+1)=5$

$\lim\limits_{x\to2} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim\limits_{x\to2-} f(x)=\lim\limits_{x\to2+} f(x)$이어야 하므로

$3a=5 \qquad \therefore a=\dfrac{5}{3}$

2

$\lim\limits_{x\to0-} f(x)=\lim\limits_{x\to0-}(x+2)=2$

$\lim\limits_{x\to4+} f(x)=\lim\limits_{x\to4+}(-x^2+3)=-13$

$\therefore \lim\limits_{x\to0-} f(x)-\lim\limits_{x\to4+} f(x)=2-(-13)=15$

3

$2f(x)-3g(x)=h(x)$라 하면 $g(x)=\dfrac{2f(x)-h(x)}{3}$이고

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to1} h(x)=12$이므로

$$\lim_{x\to1} g(x)=\lim_{x\to1}\frac{2f(x)-h(x)}{3}=\frac{2\times3-12}{3}=-2$$

4

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x^2+2x+4)=12$$

5

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}(\sqrt{x+1}+2)=4$$

6

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x}}-\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}}=1$$

7

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=3$에서 $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax+b)=0$

$4+2a+b=0 \qquad \therefore b=-2a-4 \qquad \cdots\cdots ㉠$

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x+a+2)=a+4$$

즉, $a+4=3$이므로 $a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

$\therefore a-b=1$

8

$3x-1<f(x)<3x+4$의 각 변을 세제곱하면

$(3x-1)^3<\{f(x)\}^3<(3x+4)^3$

$x>1$인 모든 실수 x에서 $x^3-1>0$이므로 각 변을 x^3-1로 나누면

$$\frac{(3x-1)^3}{x^3-1}<\frac{\{f(x)\}^3}{x^3-1}<\frac{(3x+4)^3}{x^3-1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-1)^3}{x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+4)^3}{x^3-1}=27$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^3}{x^3-1}=27$

9

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{x^2-x}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{x(x-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0-}(x-1)=-1,$

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{-(x^2-x)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{-x(x-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0+}(-x+1)=1$

이므로 $\lim_{x\to0-}f(x)\neq\lim_{x\to0+}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

10

(i) $\lim_{x\to-1-}f(x)=2$, $\lim_{x\to-1+}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)\neq\lim_{x\to-1+}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to-1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $\lim_{x\to0-}f(x)=1$, $\lim_{x\to0+}f(x)=-2$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)\neq\lim_{x\to0+}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(iii) $f(1)=-1$, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(i), (ii), (iii)에서

극한값이 존재하지 않는 x의 값은 $x=-1$, $x=0$이고,

불연속인 x의 값은 $x=-1$, $x=0$, $x=1$

이므로 $a=2$, $b=3$

$\therefore a+b=5$

11

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서도 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$

$2=a-1\qquad\therefore a=3$

12

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)\qquad\therefore\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}=b$ ······ ㉠

㉠에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(\sqrt{x+3}-a)=0$

$2-a=0\qquad\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$b=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$

$\therefore\frac{a}{b}=8$

13

$x\neq-1$일 때

$f(x)=\frac{x^3+1}{x+1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=x^2-x+1$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-1$에서도 연속이다.

$\therefore f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)$

$=\lim_{x\to-1}(x^2-x+1)=3$

14

① $3f(x)=3x^2+6$이므로 이 함수는 모든 실수 x에서 연속이다.

② $\{g(x)\}^2=9x^2$이므로 이 함수는 모든 실수 x에서 연속이다.

③ $f(x)+g(x)=x^2+3x+2$이므로 이 함수는 모든 실수 x에서 연속이다.

④ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2+2}{3x}$이므로 이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

⑤ $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{3x}{x^2+2}$이므로 이 함수는 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속이 아닌 함수는 ④이다.

15

① $\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=2$

② $\lim_{x\to0-}f(x)=2$, $\lim_{x\to0+}f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to0-}f(x)\neq\lim_{x\to0+}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

③ $f(x)$가 불연속인 x의 값은 $x=0$, $x=2$, $x=3$이므로 3개이다.

④ $f(x)$가 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최솟값을 갖는다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

16

$f(x)=x^3+x^2-3x-4$라 하면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(-1)=-1<0,\ f(0)=-4<0,\ f(1)=-5<0,$

$f(2)=2>0,\ f(3)=23>0,\ f(4)=64>0$

따라서 $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식

$x^3+x^2-3x-4=0$의 실근이 존재하는 구간은 $(1, 2)$이다.

1주 4일 교과서 대표 전략 ②

30, 31쪽

1 ④	**2** ②	**3** ⑤	**4** ④
5 ㄷ	**6** 8	**7** ①	**8** ④

1

$5-x=t$로 놓으면 $x\to 2+$일 때 $t\to 3-$이므로

$\lim_{x\to 2+} f(5-x)=\lim_{t\to 3-} f(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(5-x)=3+1=4$

2

조건 (가)에서 $f(x)-4x^3$은 이차항의 계수가 3인 이차식임을 알 수 있다.

$f(x)-4x^3=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f(x)=4x^3+3x^2+ax+b$

또 조건 (나)에서 $\lim_{x\to 0} x=0$이므로

$\lim_{x\to 0} f(x)=0,\ f(0)=0 \qquad \therefore b=0$

즉, $f(x)=4x^3+3x^2+ax$ (a는 상수)로 놓을 수 있으므로 조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(4x^2+3x+a)}{x}=\lim_{x\to 0}(4x^2+3x+a)=a$$

$\therefore a=2$

따라서 $f(x)=4x^3+3x^2+2x$이므로

$f(1)=4+3+2=9$

3

$x>0$이므로 $3x<f(x)<3x+1$의 양변을 x로 나누면

$3<\frac{f(x)}{x}<3+\frac{1}{x}$

이때 $\lim_{x\to\infty} 3=\lim_{x\to\infty}\left(3+\frac{1}{x}\right)=3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2}{1-\frac{1}{x^2}}=3^2=9$$

4

직선 OP의 기울기가 $\frac{3t^2}{t}=3t$이므로 점 $\mathrm{P}(t, 3t^2)$을 지나고 직선 OP와 수직인 직선의 방정식은

$y-3t^2=-\frac{1}{3t}(x-t)$

$\therefore y=-\frac{1}{3t}x+3t^2+\frac{1}{3}$

$x=0$을 위의 식에 대입하면 $y=3t^2+\frac{1}{3}$이므로

$f(t)=3t^2+\frac{1}{3}$

$\therefore \lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{t\to 0}\left(3t^2+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$

5

ㄱ. $\lim_{x\to 1-}\{f(x)+g(x)\}=0+(-1)=-1,$

$\lim_{x\to 1+}\{f(x)+g(x)\}=0+1=1$

이므로 $\lim_{x\to 1-}\{f(x)+g(x)\}\neq\lim_{x\to 1+}\{f(x)+g(x)\}$

따라서 $\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $f(1)g(1)=1\times(-1)=-1$이고,

$\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=0\times(-1)=0,$

$\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=0\times 1=0$

이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)g(x)=0$

따라서 $\lim_{x\to 1} f(x)g(x)\neq f(1)g(1)$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $g(f(1))=g(1)=-1$이고,

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to 1$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim_{x\to 1} g(f(x))=\lim_{t\to 0+} g(t)=-1$

$\lim_{x\to 1} g(f(x))=g(f(1))$

따라서 함수 $g(f(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 $x=1$에서 연속인 함수는 ㄷ이다.

6

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to0-} f(x)g(x)=\lim_{x\to0+} f(x)g(x)=f(0)g(0)$

이때 $f(0)g(0)=b\times1=b$이고,

$\lim_{x\to0-} f(x)g(x)=\lim_{x\to0-} (x^2+ax+b)\times(-1)=-b$,

$\lim_{x\to0+} f(x)g(x)=\lim_{x\to0+} (x^2+ax+b)(-x+1)=b$

이므로 $-b=b$ $\quad\therefore b=0$

또 $x=2$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to2-} f(x)g(x)=\lim_{x\to2+} f(x)g(x)=f(2)g(2)$

이때 $f(2)g(2)=(4+2a+b)\times1=4+2a+b$이고,

$\lim_{x\to2-} f(x)g(x)=\lim_{x\to2-} (x^2+ax+b)(-x+1)=-4-2a-b$,

$\lim_{x\to2+} f(x)g(x)=\lim_{x\to2+} (x^2+ax+b)\times1=4+2a+b$

이므로 $-4-2a-b=4+2a+b$

$2a+b=-4$ $\quad\therefore a=-2$ ($\because b=0$)

따라서 $f(x)=x^2-2x$이므로

$f(4)=4^2-2\times4=8$

7

$x\neq2$일 때, $f(x)=\dfrac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2}$

함수 $f(x)$가 $x\geq1$인 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2}=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(a\sqrt{x-1}+b)=0$

$a+b=0$ $\quad\therefore b=-a$

$b=-a$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x-1}-a}{x-2}&=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x-1}-1)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{a}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{a}{2}\end{aligned}$$

즉, $\dfrac{a}{2}=2$이므로 $a=4$

$a=4$를 $b=-a$에 대입하면 $b=-4$

$\therefore ab=-16$

8

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 4]$에서 연속이고

$f(0)f(1)<0$, $f(1)f(2)<0$, $f(2)f(3)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$\therefore n=3$

1주 누구나 합격 전략

32, 33쪽

1 ④	2 ①	3 ④	4 ①
5 ①	6 ④	7 ④	8 ②
9 ③	10 ⑤		

1

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+4x-12}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+6)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+6)=8$$

2

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{x+1}{x-1}+1\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\times\frac{2x}{x-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{2}{x-1}=-2$$

3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{2-0}{1+1}=1$$

4

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-} 2=2$

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+} (x^2+a)=1+a$

$\lim_{x\to1} f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1+} f(x)$

$1+a=2$ $\quad\therefore a=1$

이때 $\lim_{x\to1} f(x)=b$이므로 $b=2$

$\therefore b-a=1$

5

$\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x+a}=b\ (b\neq0)$에서 $\lim_{x\to1}(x^2-4x+3)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(x+a)=0,\ 1+a=0\qquad\therefore a=-1$

$a=-1$을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-3)=-2$

따라서 $b=-2$이므로 $a-b=1$

6

성민이의 말에서 함수 $f(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차식이다.

혜지의 말에서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\sqrt{x+3}-2}=12$에서 $\lim_{x\to1}(\sqrt{x+3}-2)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=0\qquad\therefore f(1)=0$

$f(x)=3(x-1)(x+a)$(a는 상수)로 놓으면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\sqrt{x+3}-2}&=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x+a)}{\sqrt{x+3}-2}\\&=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x+a)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x+a)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}3(x+a)(\sqrt{x+3}+2)\\&=12(1+a)\end{aligned}$$

이때 $12(1+a)=12$이므로

$1+a=1\qquad\therefore a=0$

따라서 $f(x)=3x(x-1)$이므로 $f(3)=18$

7

$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(3+\frac{2}{x}\right)=3$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=3$

8

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x & (|x|\geq1)\\-x^2+ax+b & (|x|<1)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}x^2+x & (x\leq-1\text{ 또는 }x\geq1)\\-x^2+ax+b & (-1<x<1)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-1$, $x=1$에서 연속이어야 한다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to-1+}f(x)=f(-1)$에서

$\lim_{x\to-1+}(-x^2+ax+b)=0,\ -1-a+b=0$

$\therefore a-b=-1$ $\cdots\cdots$ ㉠

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서

$\lim_{x\to1-}(-x^2+ax+b)=2,\ -1+a+b=2$

$\therefore a+b=3$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

$\therefore ab=2$

9

$x\neq-1$일 때

$f(x)=\frac{x^2-x-2}{x+1}=\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}=x-2$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-1$에서도 연속이다.

$\therefore f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(x-2)=-3$

10

$f(x)=2x^3-5x-9$라 하면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(-2)=-15<0,\ f(-1)=-6<0,\ f(0)=-9<0,$

$f(1)=-12<0,\ f(2)=-3<0,\ f(3)=30>0$

따라서 $f(2)f(3)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $2x^3-5x-9=0$의 실근이 반드시 존재하는 구간은 $(2, 3)$이다.

1주 창의·융합·코딩 전략 34~37쪽

1 ⑤ **2** (1) 80 (2) 존재하지 않는다.
3 (1) 민희의 주차 요금이 1000원 더 많다. (2) 3
4 효주, 형선 **5** 풀이 참조
6 ③ **7** ③ **8** 성민

1

x의 값이 5보다 작으면서 5에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지고, x의 값이 5보다 크면서 5에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워진다.

따라서 기온이 5 ℃에 한없이 가까워질 때, 체감 온도는 3 ℃에 가까워진다.

2

(1) t의 값이 10보다 작으면서 10에 한없이 가까워질 때 $v_1(t)$의 값은 80에 가까워지므로 $\lim_{t\to10-}v_1(t)=80$

t의 값이 10보다 크면서 10에 한없이 가까워질 때 $v_1(t)$의 값은 80에 가까워지므로 $\lim_{t\to10+}v_1(t)=80$

$\therefore \lim_{t\to10}v_1(t)=80$

(2) t의 값이 10보다 작으면서 10에 한없이 가까워질 때 $v_2(t)$의 값은 80에 가까워지므로 $\lim_{t \to 10-} v_2(t)=80$

t의 값이 10보다 크면서 10에 한없이 가까워질 때 $v_2(t)$의 값은 30에 가까워지므로 $\lim_{t \to 10+} v_2(t)=30$

따라서 $\lim_{t \to 10-} v_2(t) \neq \lim_{t \to 10+} v_2(t)$이므로 $\lim_{t \to 10} v_2(t)$의 값은 존재하지 않는다.

3

(1) 성규: $2000+1000\times3=5000$(원)

민희: $2000+1000\times4=6000$(원)

따라서 민희의 주차 요금이 1000원 더 많다.

(2) 주차장에 x분 주차하였을 때의 주차 요금을 $f(x)$원이라 하면

$0<x\le60$일 때, $f(x)=2000$

$60<x\le90$일 때, $f(x)=2000+1000=3000$

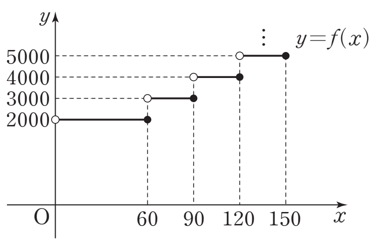
$90<x\le120$일 때, $f(x)=2000+1000\times2=4000$

$120<x\le150$일 때, $f(x)=2000+1000\times3=5000$

$150<x\le180$일 때, $f(x)=2000+1000\times4=6000$

⋮

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $0<x<150$일 때, 불연속이 되는 x의 값의 개수는 60, 90, 120의 3이다.

4

은선: $\lim_{x \to \infty}(-x^2+2x)=-\infty$

시우: $\lim_{x \to 0-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x \to 0-}\frac{x}{-x}=-1$, $\lim_{x \to 0+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x \to 0+}\frac{x}{x}=1$

$\lim_{x \to 0-}\frac{x}{|x|} \neq \lim_{x \to 0+}\frac{x}{|x|}$이므로 $\lim_{x \to 0}\frac{x}{|x|}$는 존재하지 않는다.

효주: $\lim_{x \to \infty}\left(3-\frac{5}{x}\right)=3$

형선: $\lim_{x \to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x \to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}=\lim_{x \to -1}(x-1)=-2$

따라서 극한값이 존재하는 것을 말한 사람은 효주, 형선이다.

5

[풀이 1]

$x=-t$로 치환하면 $x \to -\infty$일 때, $t \to \infty$이므로

$$\lim_{x \to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}-1}{x}=\lim_{t \to \infty}\frac{\sqrt{t^2+2}-1}{-t}=\lim_{t \to \infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{t^2}}-\frac{1}{t}}{-1}$$

$$=\frac{1}{-1}=-1$$

[풀이 2]

$x \to -\infty$에서 $x=-\sqrt{x^2}$이므로

$$\lim_{x \to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}-1}{x}=\lim_{x \to -\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}}=\lim_{x \to -\infty}\frac{-\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2}}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}}$$

$$=\lim_{x \to -\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-\frac{1}{x}}{1}=\frac{-1}{1}=-1$$

6

해안에서 x km 떨어진 지점에서 측정하였을 때, 음파가 되돌아오는 시간을 $f(x)$라 하면 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[20, 50]$에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

수심이 가장 깊은 지점은 함수 $f(x)$가 최대인 지점이므로 C이고 수심이 가장 얕은 지점은 함수 $f(x)$가 최소인 지점이므로 E이다.

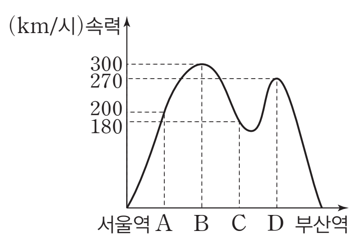
7

함수 $y=f(t)$가 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고 최고 기온이 39 ℃, 최저 기온이 37 ℃이므로 사잇값의 정리에 의하여 온탕의 온도가 38 ℃인 순간이 적어도 한 번 존재한다.

주어진 그림에서 직선 $y=38$은 $y=f(t)$의 그래프와 두 점에서 만나므로 오후 1시부터 3시까지 온탕의 온도가 38 ℃인 순간은 2번이다.

8

오른쪽 그림은 서울역에서 부산역까지 가는 고속 열차의 시간에 대한 속력의 그래프를 나타낸 예이다.



시속 280 km로 지난 지점은 A와 B 사이, B와 C 사이에 각각 적어도 한 곳씩 있으므로 지점 A와 부산역 사이에 시속 280 km로 지난 지점이 적어도 두 곳이 있다.

따라서 옳지 않은 말을 한 사람은 성민이다.

2주 1일 개념 돌파 전략 ①

41, 43쪽

1-2 -2	**2-2** $f'(x)=-2$	**3-2** $y'=6x+1$
4-2 $y=2x+3$	**5-2** $y=-3x+1$	**6-2** $-\sqrt{3}$

1-2

$$f'(-1)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\{-2(-1+\Delta x)^3+4(-1+\Delta x)-1\}-(-3)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{-2\Delta x+6(\Delta x)^2-2(\Delta x)^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x \to 0}\{-2+6\Delta x-2(\Delta x)^2\}$$
$$=-2$$

2-2

$$f'(x)=\lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h \to 0}\frac{\{-2(x+h)+3\}-(-2x+3)}{h}$$
$$=\lim_{h \to 0}\frac{-2h}{h}=-2$$

3-2

$$y'=(3x^2+x+5)'=(3x^2)'+(x)'+(5)'$$
$$=3(x^2)'+(x)'+(5)'$$
$$=3\times 2x+1+0$$
$$=6x+1$$

4-2

$f(x)=2x^2+6x+5$라 하면 $f'(x)=4x+6$

점 $(-1, 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=-4+6=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=2\{x-(-1)\}$ $\quad \therefore y=2x+3$

5-2

$f(x)=x^3-3x^2$이라 하면 $f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 (a, a^3-3a^2)이라 하면 접선의 기울기가 -3이므로

$f'(a)=3a^2-6a=-3$, $3a^2-6a+3=0$

$(a-1)^2=0$ $\quad \therefore a=1$

따라서 접점의 좌표는 $(1, -2)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-2)=-3(x-1)$ $\quad \therefore y=-3x+1$

6-2

함수 $f(x)=x^3$은 닫힌구간 $[-3, 0]$에서 연속이고 열린구간 $(-3, 0)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)}=\frac{0-(-27)}{3}=9=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(-3, 0)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2$이므로 평균값 정리를 만족시키는 c의 값은

$f'(c)=3c^2=9$에서 $c^2=3$

$\therefore c=-\sqrt{3}$ $(\because -3<c<0)$

2주 1일 개념 돌파 전략 ②

44, 45쪽

1 ①	**2** ②	**3** ①
4 $y'=4x^3-12x^2+6x-4$	**5** ②	**6** ⑤

1

함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(81-3a-12)-(3-a-12)}{2}$$
$$=\frac{78-2a}{2}=39-a$$

따라서 $39-a=38$이므로 $a=1$

2

$f(x)=-x^3+3x^2-2x$라 하면 구하는 접선의 기울기는 $f'(2)$와 같으므로

$$f'(2)=\lim_{h \to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h \to 0}\frac{\{-(2+h)^3+3(2+h)^2-2(2+h)\}-0}{h}$$
$$=\lim_{h \to 0}\frac{-2h-3h^2-h^3}{h}=\lim_{h \to 0}(-2-3h-h^2)$$
$$=-2$$

3

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^6-\frac{1}{2}x^2-2x+1\right)'$$
$$=\left(\frac{1}{3}x^6\right)'-\left(\frac{1}{2}x^2\right)'-(2x)'+(1)'$$
$$=\frac{1}{3}(x^6)'-\frac{1}{2}(x^2)'-2(x)'+(1)'$$
$$=\frac{1}{3}\times 6x^5-\frac{1}{2}\times 2x-2\times 1+0$$
$$=2x^5-x-2$$

이므로 $f'(-1)=-2-(-1)-2=-3$

4

$y'=(x^2+1)'(x^2-4x+2)+(x^2+1)(x^2-4x+2)'$
$\quad=2x\times(x^2-4x+2)+(x^2+1)(2x-4)$
$\quad=4x^3-12x^2+6x-4$

5

$f(x)=x^3-x^2+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-2x$
점 $(2, 6)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=8$이므로 접선의 방정식은
$y-6=8(x-2)\qquad\therefore y=8x-10$
이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로
$8a-10=0\qquad\therefore a=\frac{5}{4}$

6

$f(x)=-x^3-2x+1$이라 하면 $f'(x)=-3x^2-2$
접점의 좌표를 $(a, -a^3-2a+1)$이라 하면 접선의 기울기는
$f'(a)=-3a^2-2$이므로 접선의 방정식은
$y-(-a^3-2a+1)=(-3a^2-2)(x-a)$
$\therefore y=(-3a^2-2)x+2a^3+1\qquad\cdots\cdots$ ㉠
이 접선이 점 $(0, -1)$을 지나므로
$-1=2a^3+1, a^3=-1\qquad\therefore a=-1$ ($\because a$는 실수)
$a=-1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은
$y=-5x-1$
따라서 $m=-5, n=-1$이므로
$mn=5$

2주 2일 필수 체크 전략 ①

46~49쪽

1-1 ②	**1-2** $-\frac{3}{2}$	**2-1** ⑤	**2-2** 34
3-1 $f'(x)=x+1$		**3-2** ⑤	**4-1** 55
4-2 ①			

1-1

함수 $f(x)$에서 x의 값이 -2에서 2까지 변할 때의 평균변화율은
$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{15-(-1)}{4}=4$$

또 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 순간변화율은
$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{(a+h)^2+4(a+h)+3\}-(a^2+4a+3)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{2ah+h^2+4h}{h}\\&=\lim_{h\to0}(2a+h+4)\\&=2a+4\end{aligned}$$
따라서 $\frac{2a+4}{2}=4$이므로
$a+2=4\qquad\therefore a=2$

1-2

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+1$까지 변할 때의 평균변화율은
$$\begin{aligned}\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}&=\frac{\{(a+1)^2+a(a+1)\}-(a^2+a^2)}{1}\\&=3a+1\end{aligned}$$
또 함수 $f(x)$의 $x=-1$에서의 미분계수는
$$\begin{aligned}f'(-1)&=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{(-1+h)^2+a(-1+h)\}-(1-a)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{-2h+h^2+ah}{h}\\&=\lim_{h\to0}(-2+h+a)\\&=-2+a\end{aligned}$$
따라서 $-2+a=3a+1$이므로
$-2a=3\qquad\therefore a=-\frac{3}{2}$

2-1

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(1+4h)-f(1)}{2h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+4h)-f(1)}{4h}\times2\\&=2f'(1)=2\times3=6\end{aligned}$$

2-2

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\frac{3f(x)-xf(3)}{x-3}&=\lim_{x\to3}\frac{3f(x)-3f(3)+3f(3)-xf(3)}{x-3}\\&=3\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}-\lim_{x\to3}\frac{(x-3)f(3)}{x-3}\\&=3f'(3)-f(3)\\&=3\times12-2=34\end{aligned}$$

다른 풀이

$$\lim_{x\to3}\frac{3f(x)-xf(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{3f(x)-xf(x)+xf(x)-xf(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{-(x-3)}{x-3}\times f(x)+\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times x$$
$$=-f(3)+3f'(3)$$
$$=-2+3\times12=34$$

3-1

$x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0$　　$\therefore f(0)=0$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+xh}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+x$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+x$$
$$=f'(0)+x=x+1$$

3-2

$x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$　　$\therefore f(0)=0$

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=f'(0)$$

이므로 $f'(0)=5$

4-1

$f'(x)=10x^9+9x^8+8x^7+\cdots+2x+1$이므로

$$f'(1)=10+9+8+\cdots+2+1=\frac{10\times11}{2}=55$$

4-2

$$f'(x)=(x^2+1)'(2x-1)(-x+a)$$
$$+(x^2+1)(2x-1)'(-x+a)$$
$$+(x^2+1)(2x-1)(-x+a)'$$
$$=2x(2x-1)(-x+a)+(x^2+1)\times2\times(-x+a)$$
$$+(x^2+1)(2x-1)\times(-1)$$

이므로 $f'(0)=13$에서

$2a+1=13$, $2a=12$　　$\therefore a=6$

2주 2일 필수 체크 전략 ②

50, 51쪽

1 ②	**2** ①	**3** ④	**4** -7
5 -1	**6** ②	**7** ⑤	

1

함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{(8+2a)-0}{2}=4+a$$

즉, $4+a=6$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=x^3+2x$이므로

$$f'(a)=f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(2+h)^3+2(2+h)\}-12}{h}=\lim_{h\to0}\frac{14h+6h^2+h^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(14+6h+h^2)=14$$

$\therefore a+f'(a)=16$

2

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}\times(-3)$$
$$=f'(1)+3f'(1)=4f'(1)$$

즉, $4f'(1)=12$이므로 $f'(1)=3$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}=2f'(1)$$
$$=2\times3=6$$

3

$x=0$, $y=0$을 조건 (가)에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0$　　$\therefore f(0)=0$

조건 (나)에서

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)+h(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+h(1+h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+\lim_{h\to0}(1+h)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+1=f'(0)+1$$

이므로 $f'(0)+1=2$　　$\therefore f'(0)=1$

$\therefore f'(-3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(-3)+f(h)-3h(-3+h)-f(-3)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-3h(-3+h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+\lim_{h\to 0}(9-3h)$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+9$

$=f'(0)+9=1+9$

$=10$

4

$g'(x)=(x^2+2x)'f(x)+(x^2+2x)f'(x)$

$=(2x+2)f(x)+(x^2+2x)f'(x)$

이므로

$g'(1)=4f(1)+3f'(1)$

$=4\times(-4)+3\times 3=-7$

5

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-1}{x-2}=3$에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}\{f(x)-1\}=0\quad \therefore f(2)=1$

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=3$

또 $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)+1}{x-2}=2$에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}\{g(x)+1\}=0\quad \therefore g(2)=-1$

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{g(x)+1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=2$

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로 함수 $f(x)g(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는

$f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=3\times(-1)+1\times 2=-1$

6

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{4h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{4h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{4h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{4h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\frac{1}{4}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\times\left(-\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{1}{4}f'(1)+\frac{1}{4}f'(1)=\frac{1}{2}f'(1)$

$f'(x)=(x+1)'(x^2+1)+(x+1)(x^2+1)'$

$=1\times(x^2+1)+(x+1)\times 2x$

이므로 $f'(1)=1\times 2+2\times 2=6$

따라서 구하는 값은

$\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}\times 6=3$

7

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)+4}{x+1}=4$에서 $\lim_{x\to -1}(x+1)=0$이므로

$\lim_{x\to -1}\{f(x)+4\}=0\quad \therefore f(-1)=-4$

$\therefore \lim_{x\to -1}\frac{f(x)+4}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=f'(-1)=4$

$f(x)=x^3+ax+b$에서 $f'(x)=3x^2+a$

$f(-1)=-4$에서 $-1-a+b=-4$ …… ㉠

$f'(-1)=4$에서 $3+a=4\quad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$-2+b=-4\quad \therefore b=-2$

$\therefore ab=-2$

2주 3일 필수 체크 전략 ①

52~55쪽

1-1 ④	**1-2** 6	**2-1** ③	
2-2 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{2}$		**3-1** ④	**3-2** 4
4-1 12	**4-2** ③		

1-1

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이므로

$2=1+a+b\quad \therefore a+b=1$ …… ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로

$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{(x^3+1)-(1+a+b)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1-}\frac{x^3-1}{x-1}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim_{x\to 1-}(x^2+x+1)=3$

$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x^2+ax+b)-(1+a+b)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}\frac{x^2+ax-1-a}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}(x+1+a)=2+a$

에서 $3=2+a\quad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$1+b=1 \qquad \therefore b=0$

$\therefore a-b=1$

다른 풀이

$g(x)=x^2+ax+b\ (x\ge1)$, $h(x)=x^3+1\ (x<1)$이라 하면

$g'(x)=2x+a\ (x>1)$, $h'(x)=3x^2\ (x<1)$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $g(1)=h(1)$

$1+a+b=2 \qquad \therefore a+b=1$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $g'(1)=h'(1)$

$2+a=3 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$1+b=1 \qquad \therefore b=0$

$\therefore a-b=1$

1-2

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$이므로

$1+b=a+3 \qquad \therefore a-b=-2$ …… ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x^2+b)-(a+3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{x^2-1}{x-1}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(x+1)=2$$
$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(ax+3)-(a+3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{a(x-1)}{x-1}=a$$

에서 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$2-b=-2 \qquad \therefore b=4$

$\therefore a+b=6$

다른 풀이

$g(x)=ax+3\ (x\ge1)$, $h(x)=x^2+b\ (x<1)$라 하면

$g'(x)=a\ (x>1)$, $h'(x)=2x\ (x<1)$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $g(1)=h(1)$

$a+3=1+b \qquad \therefore a-b=-2$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $g'(1)=h'(1)$

$\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$2-b=-2 \qquad \therefore b=4$

$\therefore a+b=6$

2-1

$f(x)=-x^3+2x^2+6x+a$라 하면 점 $(-1, 4)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(-1)=4$에서

$-3+a=4 \qquad \therefore a=7$

따라서 $f(x)=-x^3+2x^2+6x+7$이므로

$f'(x)=-3x^2+4x+6$

점 $(-1, 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-1$이므로 접선의 방정식은

$y-4=-\{x-(-1)\} \qquad \therefore y=-x+3$

이 직선이 점 $(2, b)$를 지나므로

$b=-2+3=1$

$\therefore a+b=8$

2-2

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-x^2+2x+1$이라 하면 $f'(x)=\frac{3}{2}x^2-2x+2$

점 $(2, 5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-5=-\frac{1}{4}(x-2) \qquad \therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{2}$

3-1

$f(x)=-x^2+9x+5$라 하면 $f'(x)=-2x+9$

접점의 좌표를 $(a, -a^2+9a+5)$라 하면 직선 $y=-x+1$에 평행한 직선의 기울기는 -1이므로

$f'(a)=-2a+9=-1$, $-2a=-10 \qquad \therefore a=5$

즉, 접점의 좌표는 $(5, 25)$이므로 접선의 방정식은

$y-25=-(x-5) \qquad \therefore y=-x+30$

따라서 직선 $y=-x+30$ 위의 점의 좌표인 것은 $(1, 29)$이다.

3-2

$f(x)=x^3-3x^2+4x+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x+4$

접점의 좌표를 (a, a^3-3a^2+4a+2)라 하면 접선의 기울기는 4이므로

$f'(a)=3a^2-6a+4=4$, $a^2-2a=0$

$a(a-2)=0 \qquad \therefore a=0$ 또는 $a=2$

따라서 접점의 좌표는 $(0, 2)$, $(2, 6)$이므로 접선의 방정식은

$y-2=4(x-0)$에서 $y=4x+2$

$y-6=4(x-2)$에서 $y=4x-2$

이때 $a>b$이므로 $a=2$, $b=-2$

$\therefore a-b=4$

4-1

$f(x)=x^2-3$이라 하면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 (a, a^2-3)이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=2a$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2-3)=2a(x-a)$ $\quad\therefore y=2ax-a^2-3$

이 접선이 점 $(3, 2)$를 지나므로

$2=6a-a^2-3$, $a^2-6a+5=0$

$(a-1)(a-5)=0$ $\quad\therefore a=1$ 또는 $a=5$

따라서 구하는 두 접선의 기울기의 합은

$f'(1)+f'(5)=2+10=12$

4-2

$f(x)=x^3-2x$라 하면 $f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 (a, a^3-2a)라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^3-2a)=(3a^2-2)(x-a)$

$\therefore y=(3a^2-2)x-2a^3$ …… ㉠

이 접선이 점 $(0, -2)$를 지나므로

$-2=-2a^3$, $a^3=1$ $\quad\therefore a=1$ ($\because$ a는 실수)

이 값을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $y=x-2$

이 직선이 점 $(k, 1)$을 지나므로

$1=k-2$ $\quad\therefore k=3$

2주 3일 필수 체크 전략 ②

56, 57쪽

1 ②	2 ③	3 ①	4 ②
5 $\frac{5\sqrt{17}}{17}$	6 ①	7 ③	

1

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로 $x=-1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)$이므로

$a-b=0$ $\quad\therefore a=b$ …… ㉠

또 $f'(-1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1-}\frac{(2x+2)-(a-b)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1-}\frac{2(x+1)}{x+1}=2\ (\because ㉠)$$

$$\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+}\frac{(ax^2+bx)-(a-b)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+1)(ax-a+b)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1+}(ax-a+b)=-2a+b$$

에서 $-2a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-2$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서도 미분가능하므로 $f'(0)$이 존재한다.

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{(-2x^2-2x)-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to0-}(-2x-2)=-2$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{(x^3-cx)-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}(x^2-c)=-c$$

에서 $-c=-2$ $\quad\therefore c=2$

$\therefore a+b+c=-2$

다른 풀이

$g(x)=2x+2$ $(x<-1)$, $h(x)=ax^2+bx$ $(-1\le x<0)$,

$k(x)=x^3-cx$ $(x\ge0)$라 하면

$g'(x)=2$ $(x<-1)$, $h'(x)=2ax+b$ $(-1<x<0)$,

$k'(x)=3x^2-c$ $(x>0)$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로 $g(-1)=h(-1)$

$a-b=0$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로 $g'(-1)=h'(-1)$

$-2a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-2$

또 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $h'(0)=k'(0)$

$b=-c$ $\quad\therefore c=-b=2$

$\therefore a+b+c=-2$

2

$f(x)=-x^3-2x^2+3$이라 하면 $f'(x)=-3x^2-4x$

점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=1$이므로 접선의 방정식은

$y-2=x-(-1)$ $\quad\therefore y=x+3$

직선 $y=x+3$이 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는

$-x^3-2x^2+3=x+3$에서

$x^3+2x^2+x=0$, $x(x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$

따라서 다시 만나는 점의 좌표는 $(0, 3)$이므로

$a=0$, $b=3$

$\therefore a+b=3$

3

$f(x)=x^2-3x+3$, $g(x)=-x^2+ax+b$라 하면

$f'(x)=2x-3$, $g'(x)=-2x+a$

곡선 $y=g(x)$가 점 $\mathrm{P}(1, 1)$을 지나므로 $g(1)=1$에서

$-1+a+b=1 \qquad \therefore a+b=2$ …… ㉠

또 점 P에서의 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(1)g'(1)=-1$에서

$(-1)\times(-2+a)=-1 \qquad \therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$3+b=2 \qquad \therefore b=-1$

$\therefore ab=-3$

4

$f(x)=x^3+kx+2$라 하면 $f'(x)=3x^2+k$

접점의 좌표를 (a, a^3+ka+2)라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2+k$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^3+ka+2)=(3a^2+k)(x-a)$

$\therefore y=(3a^2+k)x-2a^3+2$

이 직선이 직선 $y=2x$와 일치해야 하므로

$3a^2+k=2$ …… ㉠

$-2a^3+2=0$ …… ㉡

㉡에서 $a^3=1 \qquad \therefore a=1$ ($\because$ a는 실수)

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$3+k=2 \qquad \therefore k=-1$

5

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}\ (x>0)$이라 하면 $f'(x)=x^2$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중 직선 $4x-y-10=0$, 즉 $y=4x-10$과 평행한 접선의 접점의 좌표를 $\left(a, \frac{1}{3}a^3+\frac{1}{3}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 4이므로

$f'(a)=a^2=4$

이때 $x>0$이므로 $a>0 \qquad \therefore a=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 3)$이고 점 $(2, 3)$과 직선 $4x-y-10=0$ 사이의 거리가 구하는 최솟값이므로

$$\frac{|8-3-10|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{17}}=\frac{5\sqrt{17}}{17}$$

참고 점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

6

$f(x)=x^2+x$라 하면 $f'(x)=2x+1$

접점의 좌표를 (a, a^2+a)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=2a+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2+a)=(2a+1)(x-a)$

$\therefore y=(2a+1)x-a^2$

이 직선이 점 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$을 지나므로

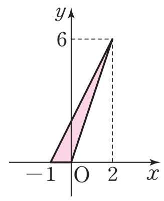
$-\frac{3}{2}=a+\frac{1}{2}-a^2$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=2$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 0)$, $(2, 6)$이므로

오른쪽 그림에서 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times6=3$



7

$f(x)=x^3+ax$, $g(x)=x^3+bx^2+c$라 하면

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=3x^2+2bx$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(1, -2)$를 지나므로

$f(1)=-2$에서 $1+a=-2 \qquad \therefore a=-3$

$g(1)=-2$에서 $1+b+c=-2 \qquad \therefore b+c=-3$ …… ㉠

점 $(1, -2)$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(1)=g'(1)$에서 $3+a=3+2b$

$2b+3=0 \qquad \therefore b=-\frac{3}{2}$

$b=-\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면

$-\frac{3}{2}+c=-3 \qquad \therefore c=-\frac{3}{2}$

$\therefore a+b-c=-3$

2주 4일 교과서 대표 전략 ①

58~61쪽

1 ②	**2** ②	**3** ①	**4** 7
5 $f'(x)=1-x$		**6** ①	**7** ③
8 ①	**9** ①	**10** ①	**11** $y=2x-4$
12 ②	**13** ②	**14** $y=-x-1$ 또는 $y=3x-1$	
15 $\frac{1}{2}$	**16** ③		

1

함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{17-1}{2}=8$$

또 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{2(a+h)^2-1\}-(2a^2-1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{4ah+2h^2}{h}=\lim_{h\to0}(4a+2h)\\&=4a\end{aligned}$$

따라서 $4a=8$이므로 $a=2$

2

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1+2h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)+f(1)-f(1+2h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}\times(-3)-\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2\\&=-3f'(1)-2f'(1)=-5f'(1)\\&=-5\times(-2)=10\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+2x-3}&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x+3)(x-1)}\\&=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+3}\right\}\\&=\frac{1}{4}f'(1)=\frac{1}{4}\times1\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

4

함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=1$, $x=2$에서 불연속이므로

$a=3$

또 $x=-2$, $x=0$, $x=1$, $x=2$에서 미분가능하지 않으므로

$b=4$

$\therefore a+b=7$

참고

$x=a$에서 미분가능한 함수인 경우에는 $x=a$의 좌우에서 함수의 그래프의 모양이 직선이거나 매끄러운 곡선으로 연결되어 있다.
한편 $x=a$에서 미분가능하지 않은 함수인 경우에는 $x=a$에서 함수의 그래프의 모양이 불연속이거나 꺾여서 뾰족한 점으로 연결되어 있다.

5

$x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+1 \quad \therefore f(0)=-1$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-xh+1-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-xh+1}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}-x\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-x\\&=f'(0)-x\\&=1-x\end{aligned}$$

6

$f(1)=4$에서 $-5+a+b=4 \quad \therefore a+b=9$ …… ㉠

$f'(x)=3x^2-12x+a$이므로

$f'(1)=3$에서 $-9+a=3 \quad \therefore a=12$

$a=12$를 ㉠에 대입하면

$12+b=9 \quad \therefore b=-3$

$\therefore \frac{a}{b}=-4$

7

$$\begin{aligned}f'(x)&=(2x^2-x+1)'(x^2-2x+1)+(2x^2-x+1)(x^2-2x+1)'\\&=(4x-1)(x^2-2x+1)+(2x^2-x+1)(2x-2)\end{aligned}$$

이므로

$f'(2)=7\times1+7\times2=21$

8

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\times(-1)\\&=f'(2)+f'(2)\\&=2f'(2)\end{aligned}$$

$f(x)=x^3-4x+5$에서 $f'(x)=3x^2-4$이므로

$f'(2)=3\times4-4=8$

따라서 구하는 값은

$2f'(2)=2\times8=16$

9

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$이므로 $a+b=-3$ …… ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to 1-}\frac{(ax^2+b)-(-3)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1-}\frac{a(x^2-1)}{x-1}\ (\because ㉠)\\&=\lim_{x\to 1-}a(x+1)=2a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to 1+}\frac{(x^2-4x)-(-3)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-4x+3}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1+}(x-3)=-2\end{aligned}$$

에서 $2a=-2$ $\quad\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$-1+b=-3$ $\quad\therefore b=-2$

$\therefore f(-2)=4a+b=4\times(-1)-2=-6$

다른 풀이

$g(x)=x^2-4x\ (x\ge 1)$, $h(x)=ax^2+b\ (x<1)$라 하면

$g'(x)=2x-4\ (x>1)$, $h'(x)=2ax\ (x<1)$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $g(1)=h(1)$

$-3=a+b$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $g'(1)=h'(1)$

$-2=2a$ $\quad\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$-3=-1+b$ $\quad\therefore b=-2$

$\therefore f(-2)=4a+b=4\times(-1)-2=-6$

10

점 $(1, 21)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(1)=21$에서 $a-3=21$ $\quad\therefore a=24$

따라서 $f(x)=x^3-9x^2+24x+5$이므로

$f'(x)=3x^2-18x+24$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 21)$에서의 접선의 기울기가 m이므로

$m=f'(1)=3-18+24=9$

$\therefore a-m=15$

11

$f(x)=(x-1)(x^2+2x+4)$라 하면

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x-1)'(x^2+2x+4)+(x-1)(x^2+2x+4)'\\&=1\times(x^2+2x+4)+(x-1)(2x+2)\\&=3x^2+2x+2\end{aligned}$$

곡선 $y=f(x)$와 y축의 교점의 y좌표는

$f(0)=-1\times 4=-4$

따라서 교점의 좌표는 $(0, -4)$이고, 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=2$이므로 접선의 방정식은

$y-(-4)=2(x-0)$ $\quad\therefore y=2x-4$

12

점 $(1, f(1))$이 $f(x)=x^3+ax^2+5x+1$의 그래프 위의 점이므로

$f(1)=1+a+5+1=a+7$

$f'(x)=3x^2+2ax+5$이고 점 $(1, a+7)$에서의 접선의 기울기는 2이므로

$f'(1)=3+2a+5=2$, $2a=-6$ $\quad\therefore a=-3$

따라서 점 $(1, 4)$에서의 접선의 방정식은

$y-4=2(x-1)$ $\quad\therefore y=2x+2$

이 직선이 $y=2x+b$와 일치하므로 $b=2$

$\therefore a+b=-1$

13

$f(x)=x^3-6x^2+16x-10$이라 하면 $f'(x)=3x^2-12x+16$

접점의 좌표를 $(a, a^3-6a^2+16a-10)$이라 하면 직선 $x+4y=0$, 즉 $y=-\frac{1}{4}x$에 수직인 직선의 기울기는 4이므로

$f'(a)=3a^2-12a+16=4$, $a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0$ $\quad\therefore a=2$

즉, 접점의 좌표는 $(2, 6)$이므로 접선의 방정식은

$y-6=4(x-2)$ $\quad\therefore y=4x-2$

따라서 $m=4$, $n=-2$이므로 $mn=-8$

14

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$이라 하면 $f'(x)=x+1$

접점의 좌표를 $\left(a, \frac{1}{2}a^2+a+1\right)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=a+1$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{2}a^2+a+1\right)=(a+1)(x-a)$

$\therefore y=(a+1)x-\frac{1}{2}a^2+1$ …… ㉠

이 접선이 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1=-\frac{1}{2}a^2+1$, $a^2=4$ $\quad\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

이 값을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-x-1$ 또는 $y=3x-1$

15

함수 $f(x)=x^2(x-a)$는 닫힌구간 $[0, a]$에서 연속이고 열린구간 $(0, a)$에서 미분가능하다.

$f(0)=f(a)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, a)$에 적어도 하나 존재한다. 이때

$$f'(x)=(x^2)'(x-a)+x^2(x-a)'$$
$$=2x(x-a)+x^2\times1=3x^2-2ax$$

이고 롤의 정리를 만족시키는 c의 값은 $\frac{1}{3}$이므로

$$f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a=0,\ -\frac{2}{3}a=-\frac{1}{3}\qquad\therefore a=\frac{1}{2}$$

16

함수 $f(x)=-2x^3+6x$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{4-(-4)}{2}=4=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=-6x^2+6$이므로 평균값 정리를 만족시키는 c의 값은

$$f'(c)=-6c^2+6=4\text{에서 } c^2=\frac{1}{3}\qquad\therefore c=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서 모든 c의 값의 곱은

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{3}$$

2주 4일 교과서 대표 전략 ②

62, 63쪽

1 ①	**2** ㄱ	**3** ③	**4** ④
5 ①	**6** $\frac{4\sqrt{37}}{37}$	**7** ④	**8** ②

1

점 $(1, 2)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(1)=2$

또 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 5이므로

$f'(1)=5$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(1)+f(1)-f(x^2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)f(1)-\{f(x^2)-f(1)\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$$
$$=2f(1)-2f'(1)$$
$$=2\times2-2\times5=-6$$

2

ㄱ. $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{|h^2+2h|-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{-h^2-2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}(-h-2)=-2$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|h^2+2h|-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{h^2+2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}(h+2)=2$$

이므로 $f'(1)$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim_{x\to1}g(x)=g(1)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{|h|h-0}{h}=\lim_{h\to0}|h|=0$$

이므로 $g'(1)=0$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄷ. $\lim_{x\to1}k(x)=k(1)=0$이므로 함수 $k(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0-}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{\{2(1+h)-2\}-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{2h}{h}=2$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{\{(1+h)^2-1\}-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{h^2+2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}(h+2)=2$$

이므로 $k'(1)=2$

따라서 함수 $k(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

따라서 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ이다.

3

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2-5h)-f(2)}{3h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2-5h)-f(2)}{-5h}\times\left(-\frac{5}{3}\right)$$
$$=-\frac{5}{3}f'(2)$$

즉, $-\frac{5}{3}f'(2)=-15$이므로 $f'(2)=9$

이때 $f'(x)=2x+a$이므로

$f'(2)=4+a=9\qquad\therefore a=5$

따라서 $f(x)=x^2+5x$이므로

$f(3)=9+15=24$

4

$x^{10}-ax^2+bx+1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{10}-ax^2+bx+1=(x-1)^2Q(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2-a+b=0$ $\quad\therefore a-b=2$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9-2ax+b=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$10-2a+b=0$ $\quad\therefore 2a-b=10$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=8$, $b=6$

$\therefore a+b=14$

5

$f(x)=x^3-2x^2+3$이라 하면 $f'(x)=3x^2-4x$

점 P$(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$이므로 접선의 방정식은

$y-2=-(x-1)$ $\quad\therefore y=-x+3$

직선 $y=-x+3$이 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는

$x^3-2x^2+3=-x+3$에서

$x^3-2x^2+x=0$, $x(x-1)^2=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 Q$(0, 3)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(0-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$

6

$f(x)=x^3+3x^2+6x-2$라 하면 $f'(x)=3x^2+6x+6$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중 직선 $y=6x-5$와 평행한 접선의 접점의 좌표를 (a, a^3+3a^2+6a-2)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 6이므로

$f'(a)=3a^2+6a+6=6$, $a^2+2a=0$

$a(a+2)=0$ $\quad\therefore a=-2$ 또는 $a=0$

즉, 접점의 좌표는 $(-2, -10)$, $(0, -2)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-10)=6\{x-(-2)\}$에서 $6x-y+2=0$

$y-(-2)=6(x-0)$에서 $6x-y-2=0$

위의 두 직선 사이의 거리는 직선 $6x-y+2=0$ 위의 점 $(0, 2)$와 직선 $6x-y-2=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$\dfrac{|0-2-2|}{\sqrt{6^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{37}}=\dfrac{4\sqrt{37}}{37}$

7

$f(x)=x^3$이라 하면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 (a, a^3)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2$이므로 접선의 방정식은

$y-a^3=3a^2(x-a)$ $\quad\therefore y=3a^2x-2a^3$

이 직선이 직선 $y=mx-2$와 일치해야 하므로

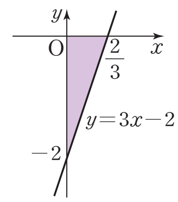
$3a^2=m$ …… ㉠

$-2a^3=-2$ …… ㉡

㉡에서 $a^3=1$ $\quad\therefore a=1$ ($\because$ a는 실수)

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $m=3$

따라서 직선 $y=3x-2$와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 오른쪽 그림에서



$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times2=\dfrac{2}{3}$

8

$f(x)=x^3-3x+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-3$

접점의 좌표를 (a, a^3-3a+1)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2-3$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^3-3a+1)=(3a^2-3)(x-a)$

$\therefore y=(3a^2-3)x-2a^3+1$

이 직선이 점 $(2, -1)$을 지나므로

$-1=-2a^3+6a^2-5$ $\quad\therefore a^3-3a^2+2=0$

위의 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근이 세 접점의 x좌표이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에서 구하는 x좌표의 합은 3이다.

2주 누구나 합격 전략

64, 65쪽

1 ②	**2** ①	**3** ⑤	**4** ③
5 ②	**6** ④	**7** ①	**8** ②
9 ③	**10** ③		

1

함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=\dfrac{(a^2+5a+3)-3}{a}=a+5$

또 함수 $y=f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(1+h)^2+5(1+h)+3\}-9}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2+7h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(h+7)=7$$

따라서 $a+5=7$이므로 $a=2$

2

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x^2+2x+4}\right\}$$
$$=\frac{1}{12}f'(2)$$
$$=\frac{1}{12}\times 3=\frac{1}{4}$$

3

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}f'(3)$$
$$=\frac{1}{2}\times 5=\frac{5}{2}$$

4

$f(x)=ax^2+bx+1$에서 $f'(x)=2ax+b$

$f(1)=2$에서 $a+b+1=2$

$\therefore a+b=1$ …… ㉠

$f'(1)=4$에서 $2a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$

따라서 $f(x)=3x^2-2x+1$이므로

$f(-1)=3+2+1=6$

5

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times(-2)$$
$$=f'(1)+2f'(1)=3f'(1)$$

$f(x)=x^3-4x+5$에서 $f'(x)=3x^2-4$이므로

$f'(1)=3-4=-1$

따라서 구하는 값은

$3f'(1)=3\times(-1)=-3$

6

$$f'(x)=(x^3+1)'(x^2-x)+(x^3+1)(x^2-x)'$$
$$=3x^2(x^2-x)+(x^3+1)(2x-1)$$

이므로 $f'(2)=3\times4\times2+9\times3=51$

7

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이므로

$1+a=3+b$ $\quad\therefore a-b=2$ …… ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{(x^2+ax)-(3+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{x^2+ax-(a+1)}{x-1}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{(x+a+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}(x+a+1)=a+2$$
$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(3x+b)-(3+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{3(x-1)}{x-1}=3$$

에서 $a+2=3$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-1$

$\therefore a+b=0$

다른 풀이

$g(x)=x^2+ax\ (x<1)$, $h(x)=3x+b\ (x\geq 1)$라 하면

$g'(x)=2x+a\ (x<1)$, $h'(x)=3\ (x>1)$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $g(1)=h(1)$

$1+a=3+b$ $\quad\therefore a-b=2$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $g'(1)=h'(1)$

$2+a=3$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-1$

$\therefore a+b=0$

8

$f(x)=x^2+ax+b$라 하면 $f'(x)=2x+a$

곡선 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(1)=2+a=3$ $\quad\therefore a=1$

또 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 1)$을 지나므로

$f(1)=1$에서 $1+a+b=1$ $\quad\therefore a+b=0$ …… ㉠

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-1$

$\therefore ab=-1$

9

$f(x)=x^3-x$라 하면 $f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 (a, a^3-a)라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^3-a)=(3a^2-1)(x-a)$

$\therefore y=(3a^2-1)x-2a^3$ …… ㉠

이 접선이 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=-2a^3,\ a^3=-1$

$\therefore\ a=-1\ (\because\ a$는 실수$)$

이 값을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $y=2x+2$

이 직선이 점 $(3, k)$를 지나므로

$k=6+2=8$

10

함수 $f(x)=x^2-x+2$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{4-2}{1}=2$

인 c가 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x-1$이므로 평균값 정리를 만족시키는 c의 값은

$f'(c)=2c-1=2 \qquad \therefore\ c=\dfrac{3}{2}$

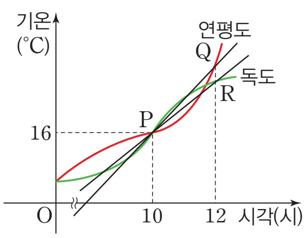
2주 창의·융합·코딩 전략

66~69쪽

1 연평도	**2** ②	**3** ②	**4** 형선
5 풀이 참조	**6** ③	**7** $y=20x+400$	
8 ③			

1

다음 그림과 같이 세 점 P, Q, R를 잡자.



(직선 PQ의 기울기)>(직선 PR의 기울기)이므로 오전 10시부터 12시까지 기온의 평균변화율이 더 큰 지역은 연평도이다.

2

함수 $h(x)$에서 x의 값이 1에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$\dfrac{h(2)-h(1)}{2-1}=\dfrac{21}{20}-\dfrac{79}{80}=\dfrac{1}{16}$

3

수평거리 2 m에서의 높이의 순간변화율은 $x=2$에서의 접선의 기울기와 같다.

$f(x)=-\dfrac{1}{8}x^2+2$라 하면 $f'(x)=-\dfrac{1}{4}x$

따라서 구하는 순간변화율은

$f'(2)=-\dfrac{1}{4}\times 2=-\dfrac{1}{2}$

4

은선: $\lim\limits_{x\to 4-} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 4+} f(x)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=0$

시우: 함수 $f(x)$가 불연속인 점은 $x=4$의 1개이다.

효주: 함수 $f(x)$가 $x=4$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다. 또 $x=6$에서 뾰족하므로 접선을 그을 수 없어 미분가능하지 않다. 따라서 미분가능하지 않은 점은 2개이다.

형선: 함수 $f(x)$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 점은 $x=6$의 1개이다.

따라서 옳지 않은 말을 한 사람은 형선이다.

5

종현이의 방법

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2x+3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x^2+2x+3)$$
$$=1+2+3=6$$

미현이의 방법

$f(x)=x^3+x^2+x$라 하면 $f(1)=1+1+1=3$이고

$f'(x)=3x^2+2x+1$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$
$$=3+2+1=6$$

6

$f(x)=x^3+ax+b,\ g(x)=x^2+cx$라 하면

$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=2x+c$

두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$f(1)=2$에서 $1+a+b=2 \qquad \therefore\ a+b=1$ …… ㉠

$g(1)=2$에서 $1+c=2 \qquad \therefore\ c=1$

점 $(1, 2)$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(1)=g'(1)$에서

$3+a=2+c \qquad \therefore\ a=0$

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore\ 2a-b+c=0$

7

$f(x)=-x^2+60x$라 하면 $f'(x)=-2x+60$

$\mathrm{A}(20, 800)$에서의 접선의 기울기는 $f'(20)=20$이므로

접선의 방정식은

$y-800=20(x-20)$ $\therefore y=20x+400$

8

함수 $f(x)=-\frac{3}{40}x^2+\frac{3}{20}x$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고

열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하다.

이때 $f(0)=f(2)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가

열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=-\frac{3}{20}x+\frac{3}{20}$이므로 롤의 정리를 만족시키는 c의 값은

$f'(c)=-\frac{3}{20}c+\frac{3}{20}=0$ $\therefore c=1$

신유형·신경향·서술형 전략

72~75쪽

1 ②	**2** ②	**3** ②	**4** ③
5 (가) $hf(x)$ (나) $f(x)$		**6** ㉢, 풀이 참조	
7 ③	**8** -1		

1

ㄱ. (반례) $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x}$이라 하면

$\lim_{x\to0} f(x)=0$, $\lim_{x\to0} f(x)g(x)=1$로 모두 극한값이 존재하지만

극한값 $\lim_{x\to0} g(x)$는 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=L$, $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=M$이라 하면

$$L+M=\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}+\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$$
$$=\lim_{x\to a}2f(x)$$

$\therefore \lim_{x\to a} f(x)=\frac{L+M}{2}$

따라서 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$도 존재한다.

참고

$$L-M=\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}-\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$$
$$=\lim_{x\to a}2g(x)$$

$\therefore \lim_{x\to a} g(x)=\frac{L-M}{2}$

따라서 극한값 $\lim_{x\to a} g(x)$도 존재한다.

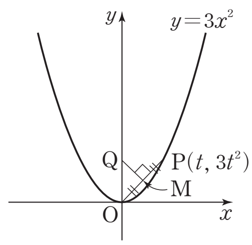
ㄷ. (반례) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=-\frac{1}{x}$이라 하면

$\lim_{x\to0} f(x)$, $\lim_{x\to0} g(x)$는 모두 극한값이 존재하지 않지만

$\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=0$이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

2



오른쪽 그림과 같이 점 P의 좌표를

$\mathrm{P}(t, 3t^2)$, $\overline{\mathrm{OP}}$의 중점을 M이라 하면

$\mathrm{M}\left(\frac{t}{2}, \frac{3}{2}t^2\right)$

이때 직선 OP의 기울기가 $3t$이므로

직선 MQ의 기울기는 $-\frac{1}{3t}$이다.

직선 MQ의 방정식은

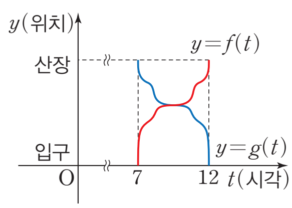
$y-\frac{3}{2}t^2=-\frac{1}{3t}\left(x-\frac{t}{2}\right)$ $\therefore y=-\frac{1}{3t}x+\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{6}$

따라서 점 Q의 y좌표는 $\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{6}$이다.

이때 점 P가 원점에 한없이 가까워지면 $t\to0$이므로

$\lim_{t\to0}\left(\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}$

3



등산객 A와 B의 시각 t에 대한 위치를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하면 $f(t)$와 $g(t)$는 모두 오른쪽 그림과 같은 연속함수이다.

$h(t)=f(t)-g(t)$로 놓으면

$h(7)=f(7)-g(7)\boxed{<}0$,

$h(12)=f(12)-g(12)\boxed{>}0$

따라서 $h(7)h(12)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여

$h(a)=f(a)-g(a)=0$

을 만족시키는 실수 a가 열린구간 $(7, 12)$에 적어도 $\boxed{1}$개 존재한다.

따라서 $t=a$일 때, $f(a)=g(a)$이므로 등산객 A와 B가 등산로의 어느 지점에서 만날 때가 있었다.

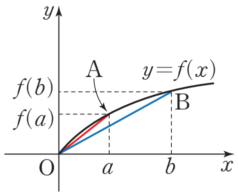
$\therefore$ (가) $<$ (나) $>$ (다) 1

4

두 점 A, B의 좌표를 각각 A$(a,\ f(a))$, B$(b,\ f(b))$라 하자.

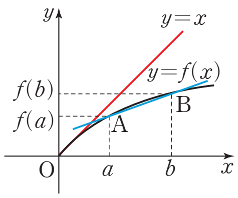
ㄱ. $\dfrac{f(a)}{a}$는 직선 OA의 기울기와 같고,

$\dfrac{f(b)}{b}$는 직선 OB의 기울기와 같으므로 $\dfrac{f(a)}{a}>\dfrac{f(b)}{b}$



ㄴ. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 직선 AB의 기울기와 같다. 그런데 직선 AB의 기울기는 1보다 작으므로

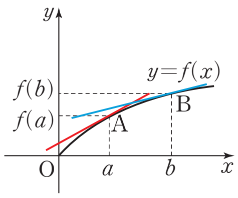
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$



이때 $b-a>0$이므로 $f(b)-f(a)<b-a$

ㄷ. $f'(a)$는 점 A에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$는 점 B에서의 접선의 기울기이므로

$f'(a)>f'(b)$



따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

5

$xf(x)=g(x)$라 하면 $y=g(x)$에서

$$\begin{aligned} y'&=\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)f(x+h)-xf(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)\{f(x+h)-f(x)\}+(x+h)f(x)-xf(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)\{f(x+h)-f(x)\}+\boxed{hf(x)}}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\left\{(x+h)\times\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}+f(x)\\ &=xf'(x)+\boxed{f(x)} \end{aligned}$$

∴ (가) $hf(x)$ (나) $f(x)$

6

$f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, $y=g(x)$ 위의 점 $(-2,\ -1)$에서의 접선은 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ -2)$에서의 접선과 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$f(x)=x^3+3x+2$에서 $f'(x)=3x^2+3$

이때 $f'(-1)=6$이므로 점 $(-1,\ -2)$에서의 접선의 방정식은

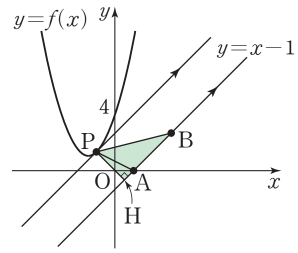
$y-(-2)=6\{x-(-1)\}$ $\qquad$ ∴ $y=6x+4$

이 접선과 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 직선의 방정식은

$x=6y+4$에서 $y=\dfrac{1}{6}x-\dfrac{2}{3}$

따라서 처음으로 잘못된 부분은 ㉡이다.

7



$f(x)=2x^2+5x+4$라 하면 $f'(x)=4x+5$

점 P의 좌표를 $(a,\ 2a^2+5a+4)$라 하면 점 P에서 그은 접선이 직선 AB와 평행할 때 삼각형 PAB의 넓이가 최소이다.

점 P$(a,\ 2a^2+5a+4)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(a)=4a+5=1$ $\qquad$ ∴ $a=-1$

따라서 점 P의 좌표는 $(-1,\ 1)$이다.

한편 점 P에서 직선 $y=x-1$에 내린 수선의 발을 H라 하면

점 P와 직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{|-1-1-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-1)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}$이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값은

$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=3$

8

(i) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$이므로 $a=-a+b+c$

∴ $2a-b-c=0$ $\quad$ …… ㉠ $\qquad$ …… [30 %]

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1-}\frac{ax^2-(-a+b+c)}{x-1}\\ &=\lim_{x\to1-}\frac{a(x^2-1)}{x-1}\ (\because ㉠)\\ &=\lim_{x\to1-}a(x+1)=2a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1+}\frac{(-ax^2+bx+c)-(-a+b+c)}{x-1}\\ &=\lim_{x\to1+}\frac{-a(x^2-1)+b(x-1)}{x-1}\\ &=\lim_{x\to1+}\{-a(x+1)+b\}=-2a+b\end{aligned}$$

에서 $-2a+b=2a$ $\qquad$ ∴ $b=4a$

$b=4a$를 ㉠에 대입하면 $c=-2a$ $\qquad$ …… [30 %]

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$이므로 $-4a+2b+c=1$

이 식에 $b=4a$, $c=-2a$를 대입하면

$-4a+8a-2a=1$, $2a=1$ $\qquad$ …… [30 %]

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=2$, $c=-1$이므로 $abc=-1$ $\qquad$ …… [10 %]

적중 예상 전략 1회

76~79쪽

1 ④	2 ④	3 ⑤	4 ⑤
5 ①	6 ③	7 ③	8 ⑤
9 ⑤	10 ③	11 ①	12 ②
13 -5	14 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$	15 18	16 0

1

$\lim_{x\to-2+} f(x)=1$, $\lim_{x\to0-} f(x)=1$, $\lim_{x\to1-} f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to-2+} f(x)+\lim_{x\to0-} f(x)+\lim_{x\to1-} f(x)=2$

2

$f(x)-g(x)=h(x)$로 놓으면 $\lim_{x\to\infty} h(x)=3$

$f(x)-g(x)=h(x)$에서 $g(x)=f(x)-h(x)$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)-3g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)-3\{f(x)-h(x)\}}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+3h(x)}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3h(x)}{f(x)}}{1}$$
$$=1\left(\because \lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0\right)$$

3

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=2$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{x+2f(x)}{3x-f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{2f(x)}{x}}{3-\frac{f(x)}{x}}=\frac{1+2\times2}{3-2}=5$$

4

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^3+x^2+x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x+1}{x^2+1}=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x^2-3}-1)(\sqrt{x^2-3}+1)}{(x-2)(\sqrt{x^2-3}+1)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2-3}+1)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1}=\frac{2+2}{1+1}=2$$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$

5

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-2x-3}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-3)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x-3)=-4$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=2$$

따라서 $a=-4$, $b=2$이므로

$a+b=-2$

6

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}$$
$$=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$$

7

$$\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to3}\left\{\frac{1}{x-3}\times\frac{x^2-9}{2(x^2+1)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x+3}{2(x^2+1)}$$
$$=\frac{3+3}{2\times10}=\frac{3}{10}$$

8

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-7x+a}{x-2}=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(x^2-7x+a)=0$

$4-14+a=0 \qquad \therefore a=10$

$a=10$을 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to2}\frac{x^2-7x+10}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-5)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x-5)=-3$$

$\therefore a+b=7$

9

두 함수 $f(x)=x^2+2x+3$, $g(x)=x^2+4x+k$는 모든 실수 x에서 연속이다.

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+4x+k}$이므로 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수 x에서 연속이려면 임의의 실수 x에 대하여 $x^2+4x+k\neq 0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+4x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=2^2-k<0 \qquad \therefore k>4$

따라서 정수 k의 최솟값은 5이다.

10

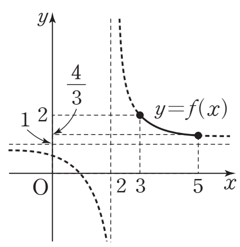
ㄱ. $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 불연속이므로 불연속인 점의 개수는 3이다.

ㄴ. ㄱ에서 $\lim\limits_{x\to -1-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=2$이므로 극한값이 존재하지 않는 점의 개수는 2이다.

ㄷ. 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 3, 최솟값은 -1이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

11



함수 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+1$은 닫힌구간 $[3, 5]$에서 연속이고 닫힌구간 $[3, 5]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 2, $x=5$에서 최솟값 $\dfrac{4}{3}$를 갖는다.

따라서 $a=2$, $b=\dfrac{4}{3}$이므로

$a+b=\dfrac{10}{3}$

12

(i) $f(-2)=1$, $f(-1)=-1$에서 $f(-2)f(-1)<0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, -1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(ii) $f(-1)=-1$, $f(0)=2$에서 $f(-1)f(0)<0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-1, 0)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, 1)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

13

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-a}+b}{x-1}=\dfrac{1}{2}$에서 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x^2-a}+b)=0$, $\sqrt{1-a}+b=0$

$\therefore b=-\sqrt{1-a}$ …… ㉠ …… [30 %]

$b=-\sqrt{1-a}$를 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-a}+b}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-a}-\sqrt{1-a}}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x^2-a}-\sqrt{1-a})(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{1-a})}{(x-1)(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{1-a})}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{1-a})}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-a}+\sqrt{1-a}}\\&=\frac{1}{\sqrt{1-a}}\end{aligned}$$

…… [40 %]

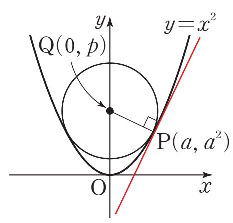
즉, $\dfrac{1}{\sqrt{1-a}}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\sqrt{1-a}=2$, $1-a=4 \qquad \therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

$\therefore a+b=-5$ …… [30 %]

14



오른쪽 그림과 같이 점 P의 좌표를 (a, a^2), 원의 중심을 $\mathrm{Q}(0, p)$라 하자.

곡선 $y=x^2$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기를 m이라 하면

$y=m(x-a)+a^2$ …… [30 %]

이때 곡선 $y=x^2$과 접선은 한 점에서 만나므로 $x^2=m(x-a)+a^2$이 중근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-mx+ma-a^2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-m)^2-4ma+4a^2=0$

$(m-2a)^2=0 \qquad \therefore m=2a$

한편 점 P에서의 접선과 직선 PQ는 서로 수직이므로 직선 PQ의 기울기는 $-\dfrac{1}{2a}$이다.

따라서 직선 PQ의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2a}(x-a)+a^2$

$\therefore y=-\dfrac{1}{2a}x+a^2+\dfrac{1}{2}$ …… [40 %]

이때 직선 PQ가 원의 중심 $(0, p)$를 지나므로

$p=a^2+\dfrac{1}{2}$ …… [20 %]

점 P가 원점에 한없이 가까워지면 $a \to 0$이므로

$\lim_{a \to 0} p = \lim_{a \to 0} \left(a^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

따라서 점 Q는 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$에 가까워진다. …… [10%]

15

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2-x-2} = 3$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차식이다. …… [20%]

$\lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{x^2-x-2} = -1$에서 $\lim_{x \to -1}(x^2-x-2)=0$이므로

$\lim_{x \to -1} f(x) = 0$ $\quad \therefore f(-1)=0$ …… [20%]

즉, $f(x)=3(x+1)(x+a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있으므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{x^2-x-2} &= \lim_{x \to -1} \frac{3(x+1)(x+a)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \to -1} \frac{3(x+a)}{x-2} \\ &= 1-a\end{aligned}$$ …… [40%]

이때 $1-a=-1$이므로 $a=2$ …… [10%]

따라서 $f(x)=3(x+1)(x+2)$이므로

$f(1)=3 \times 2 \times 3 = 18$ …… [10%]

16

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (|x| \ge 1) \\ x^2+ax+b & (|x|<1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x+1 & (x \le -1 \text{ 또는 } x \ge 1) \\ x^2+ax+b & (-1<x<1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-1$, $x=1$에서 연속이어야 한다. …… [20%]

(i) 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to -1+} f(x) = f(-1)$에서

$\lim_{x \to -1+} (x^2+ax+b) = -1$, $1-a+b=-1$

$\therefore a-b=2$ …… ㉠ …… [30%]

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 1-} f(x) = f(1)$에서

$\lim_{x \to 1-} (x^2+ax+b) = 3$, $1+a+b=3$

$\therefore a+b=2$ …… ㉡ …… [30%]

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=0$

$\therefore ab=0$ …… [20%]

적중 예상 전략 2회

80~83쪽

1 ③	**2** ⑤	**3** ⑤	**4** ③
5 ①	**6** ②	**7** ②	**8** ⑤
9 ③	**10** ②	**11** ④	**12** ④
13 2	**14** −3	**15** 4	**16** 2

1

$f(x+1)-f(x)=f(x)-f(x-1)$에서

$\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x} = \frac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}$

즉, 닫힌구간 $[x, x+1]$, $[x-1, x]$에서의 평균변화율이 같으므로 다항함수 $f(x)$는 기울기가 일정한 일차함수이다. 이때 닫힌구간 $[1, 3]$에서의 평균변화율이 2이므로 일차함수의 기울기는 2이다.

따라서 닫힌구간 $[3, 4]$에서의 평균변화율도 2이다.

2

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} \frac{f(x^2)}{x-2} &= \lim_{x \to 2} \left\{ \frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4} \times (x+2) \right\} \\ &= 4f'(4) = 4 \times 2 = 8\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3} \frac{x^2 f(3) - 9f(x)}{x-3} &= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 f(3) - 9f(3) + 9f(3) - 9f(x)}{x-3} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{(x^2-9)f(3)}{x-3} - \lim_{x \to 3} \frac{9\{f(x)-f(3)\}}{x-3} \\ &= f(3) \times \lim_{x \to 3}(x+3) - 9f'(3) \\ &= 6f(3) - 9f'(3) \\ &= 6 \times 2 - 9 \times 1 = 3\end{aligned}$$

4

(i) $\lim_{x \to 1-} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 1+} f(x) = 2$에서 $\lim_{x \to 1-} f(x) \ne \lim_{x \to 1+} f(x)$

이므로 $\lim_{x \to 1} f(x)$는 존재하지 않는다.

극한값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(ii) $\lim_{x \to 2-} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 2+} f(x) = 2$에서 $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$

$x=2$에서의 함숫값은 $f(2)=3$

$\lim_{x \to 2} f(x) \ne f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 $x=1$이므로 $a=1$

$f(x)$가 불연속인 x의 값은 $x=1$, $x=2$이므로 $b=2$

주어진 그래프는 $x=3$에서 뾰족하므로 접선을 그을 수 없다. 즉, 미분가능하지 않다. 따라서 $f(x)$가 미분가능하지 않은 x의 값은 $x=1$, $x=2$, $x=3$이므로 $c=3$

$\therefore a+b+c=1+2+3=6$

5

$x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+2 \qquad \therefore f(0)=-2$

$$\begin{aligned}\therefore f'(1)&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)+2-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\\&=f'(0)\\&=1\end{aligned}$$

6

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x-1}=4$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)+1\}=0 \qquad \therefore f(1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=4$

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2}{x-1}=6$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\{g(x)-2\}=0 \qquad \therefore g(1)=2$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{g(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=6$

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=4\times2+(-1)\times6=2$

7

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times(x^2+x+1)\right\}\\&=3f'(1)\end{aligned}$$

즉, $3f'(1)=15$이므로 $f'(1)=5$

$f(x)=x^3+ax+5$에서 $f'(x)=3x^2+a$이므로

$f'(1)=3+a=5 \qquad \therefore a=2$

8

$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)f(x)}{(x-1)(3x^2+2)}=3$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 9인 이차식이다.

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-1$에서 $f(0)=0$, $f'(0)=-1$

$f(x)=9x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 $f'(x)=18x+a$

$f(0)=0$에서 $b=0$

$f'(0)=-1$에서 $a=-1$

따라서 $f(x)=9x^2-x$이므로

$f(5)=9\times25-5=220$

9

다항식 $2x^3+ax^2+b$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$2x^3+ax^2+b=(x-1)^2Q(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2+a+b=0 \qquad \therefore a+b=-2$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x^2+2ax=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$6+2a=0 \qquad \therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉡에 대입하면 $b=1$

$\therefore a^2+b^2=10$

10

$f(x)=x^3-x^2+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-2x$

점 $(1, a)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(1)=1-1+2=a \qquad \therefore a=2$

점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 접선의 방정식은

$y-2=x-1 \qquad \therefore y=x+1$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=1$이므로

$ab+2c=2\times1+2=4$

11

$f(x)=x^3-6x^2+7x$라 하면 $f'(x)=3x^2-12x+7$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-6a^2+7a)$라 하면 직선 $x-2y+1=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$과 수직인 직선의 기울기는 -2이므로

$f'(a)=3a^2-12a+7=-2$, $3a^2-12a+9=0$

$(a-1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=1$ 또는 $a=3$

즉, 접점의 좌표는 $(1, 2)$, $(3, -6)$이므로 접선의 방정식은 각각

$y-2=-2(x-1)$에서 $2x+y-4=0$

$y+6=-2(x-3)$에서 $2x+y=0$

이때 두 접선 사이의 거리는 직선 $2x+y=0$ 위의 점 $(0, 0)$과 직선 $2x+y-4=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$$\frac{|-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

12

$f(x)=-x^3-ax+b$, $g(x)=x^2+2$라 하면

$f'(x)=-3x^2-a$, $g'(x)=2x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=-1$에서 공통인 접선을 가지므로 $f(-1)=g(-1)$에서

$1+a+b=3 \quad \therefore a+b=2$ …… ㉠

$x=-1$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(-1)=g'(-1)$에서

$-3-a=-2 \quad \therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore 2a+b=-2+3=1$

13

$f(x)=x^3+2ax^2+4bx$에서 $f(1)=3$이므로

$1+2a+4b=3$

$\therefore a+2b=1$ …… ㉠ …… [30 %]

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$이므로 $f'(x)=3x^2+4ax+4b$에서

$f'(1)=3+4a+4b=3$

$\therefore a+b=0$ …… ㉡ …… [40 %]

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$ …… [20 %]

$\therefore a^2+b^2=2$ …… [10 %]

14

$f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)$이므로

$1+a+b=3$

$\therefore b=-a+2$ …… ㉠ …… [30 %]

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to 1-}\frac{(x^3+ax^2+bx)-3}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1-}\frac{x^3+ax^2+(-a+2)x-3}{x-1}\ (\because ㉠)\\&=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)\{x^2+(a+1)x+3\}}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1-}\{x^2+(a+1)x+3\}=a+5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to 1+}\frac{(2x^2+1)-3}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1+}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1+}2(x+1)=4\end{aligned}$$

에서 $a+5=4 \quad \therefore a=-1$ …… [40 %]

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=3$ …… [20 %]

$\therefore ab=-3$ …… [10 %]

다른 풀이

$g(x)=x^3+ax^2+bx\ (x<1)$, $h(x)=2x^2+1\ (x\geq 1)$이라 하면

$g'(x)=3x^2+2ax+b\ (x<1)$, $h'(x)=4x\ (x>1)$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $g(1)=h(1)$

$1+a+b=3 \quad \therefore a+b=2$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $g'(1)=h'(1)$

$3+2a+b=4 \quad \therefore 2a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$

$\therefore ab=-3$

15

$f(x)=-x^3+2x-1$이라 하면 $f'(x)=-3x^2+2$

점 P$(1, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$이므로 접선의 방정식은

$y=-(x-1) \quad \therefore y=-x+1$

따라서 점 Q의 좌표는 $(0, 1)$이다. …… [40 %]

또 직선 $y=-x+1$이 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는

$-x^3+2x-1=-x+1$에서

$x^3-3x+2=0$, $(x+2)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ …… [40 %]

따라서 점 R의 좌표는 $(-2, 3)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\overline{QR}=\sqrt{(-2)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore \overline{PQ}\times\overline{QR}=\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=4$ …… [20 %]

16

$f(x)=x^4-x^2+2$라 하면 $f'(x)=4x^3-2x$

접점의 좌표를 (a, a^4-a^2+2)라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=4a^3-2a$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^4-a^2+2)=(4a^3-2a)(x-a)$

$\therefore y=(4a^3-2a)x-3a^4+a^2+2$ …… [40 %]

이 접선이 원점을 지나므로

$-3a^4+a^2+2=0$, $(a^2-1)(3a^2+2)=0$

이때 $3a^2+2>0$이므로

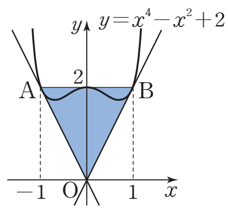
$a^2-1=0$, $(a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$ …… [30 %]

따라서 접점의 좌표는 A$(-1, 2)$,

B$(1, 2)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$ …… [30 %]



1주 1일 개념 돌파 전략 ①

7, 9쪽

1-2 극댓값: 28, 극솟값: -4	**2-2** 최댓값: 20, 최솟값: 0
3-2 2	**4-2** 속도: -4, 가속도: 2

1-2

$f(x)=x^3+6x^2-4$에서 $f'(x)=3x^2+12x=3x(x+4)$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	28	↘	-4	↗

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-4$에서 극대이고 극댓값은 $f(-4)=28$,

$x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=-4$

2-2

$f(x)=x^3-3x+2$에서 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	↘	0	↗	20

따라서 함수 $f(x)$는

$x=3$에서 최댓값 20, $x=1$에서 최솟값 0

을 갖는다.

3-2

$f(x)=x^3+3x^2-4$라 하면

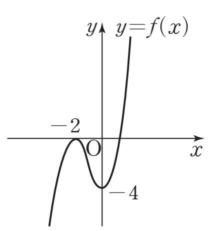
$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^3+3x^2-4=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



4-2

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=6t^2-10t$, $a=\dfrac{dv}{dt}=12t-10$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=6-10=-4$, $a=12-10=2$

1주 1일 개념 돌파 전략 ②

10, 11쪽

1 ④	**2** ②	**3** ④	**4** ③
5 ⑤	**6** ②		

1

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x-2$에서

$f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$-\dfrac{2}{3}$	↘	-2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 3]$에서 감소하므로

$\alpha=1$, $\beta=3$ $\quad\therefore \alpha+\beta=4$

2

$f(x)=-x^4+6x^2-8x-10$에서

$f'(x)=-4x^3+12x-8=-4(x-1)^2(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	↗	14	↘	-13	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 갖고 극솟값은 없으므로

$a=1$, $b=0$ $\quad\therefore a+b=1$

3

$f(x)=2x^3-9x^2-24x+k$에서

$f'(x)=6x^2-18x-24=6(x+1)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=4$

닫힌구간 $[-2, 0]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-4+k$	↗	$13+k$	↘	k

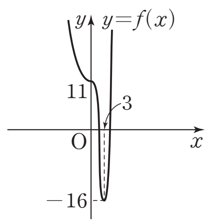
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 $13+k$를 갖는다.
이때 최댓값이 25이므로
$13+k=25 \qquad \therefore k=12$

4

$f(x)=x^4-4x^3+11$이라 하면
$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	11	↘	-16	↗

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^4-4x^3+11=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

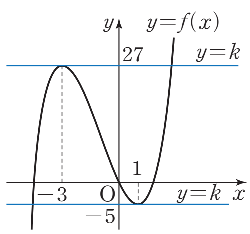


5

$x^3+3x^2-9x-k=0$에서 $x^3+3x^2-9x=k$
$f(x)=x^3+3x^2-9x$라 하면
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	27	↘	-5	↗

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로
$k=-5$ 또는 $k=27$
따라서 실수 k의 값의 합은 22이다.



6

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-4t,\ a=\dfrac{dv}{dt}=6t-4$
점 P의 가속도가 8이므로
$6t-4=8 \qquad \therefore t=2$
따라서 $t=2$에서의 점 P의 위치는
$8-8+3=3$

1주 2일 필수 체크 전략 ①

12~15쪽

1-1 ④ **1-2** $a\le -6$ **2-1** 4 **2-2** ②
3-1 ③ **3-2** $a\le -\frac{2}{3}$ 또는 $a\ge \frac{2}{3}$
4-1 $a=3,\ b=2$ **4-2** ②

1-1

$f(x)=x^3-kx^2+(k+6)x$에서
$f'(x)=3x^2-2kx+k+6$
$x_1<x_2$인 임의의 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$가 성립하는 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.
이때 이차방정식 $3x^2-2kx+k+6=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-3(k+6)\le 0,\ k^2-3k-18\le 0$
$(k+3)(k-6)\le 0 \qquad \therefore -3\le k\le 6$
따라서 실수 k의 최댓값은 6이다.

1-2

$f(x)=-x^3+6x^2+2ax-1$에서
$f'(x)=-3x^2+12x+2a$
삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.
이때 이차방정식 $-3x^2+12x+2a=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=6^2-(-6a)\le 0,\ 36+6a\le 0$
$\therefore a\le -6$

2-1

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+a$에서
$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{7}{2}+a$	↘	$-10+a$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $\dfrac{7}{2}+a$, $x=2$에서 극솟값 $-10+a$를 갖는다.
이때 극댓값과 극솟값의 합이 $\dfrac{3}{2}$이므로
$\left(\dfrac{7}{2}+a\right)+(-10+a)=\dfrac{3}{2},\ 2a=8 \qquad \therefore a=4$

2-2

$f(x)=-x^3-3x^2+ax+b$에서

$f'(x)=-3x^2-6x+a$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 5를 가지므로

$f(1)=5,\ f'(1)=0$

$f(1)=5$에서 $-1-3+a+b=5$ $\quad\therefore a+b=9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(1)=0$에서 $-3-6+a=0$ $\quad\therefore a=9$

$a=9$를 ㉠에 대입하면 $b=0$

즉, $f(x)=-x^3-3x^2+9x$이므로

$f'(x)=-3x^2-6x+9=-3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-27	↗	5	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극솟값 -27을 갖는다.

3-1

$f(x)=x^3+kx^2+(k^2-6)x$에서

$f'(x)=3x^2+2kx+k^2-6$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이때 이차방정식 $3x^2+2kx+k^2-6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-3(k^2-6)>0,\ -2k^2+18>0$

$k^2-9<0,\ (k+3)(k-3)<0$

$\therefore -3<k<3$

따라서 $a=-3,\ b=3$이므로 $a+b=0$

3-2

$f(x)=ax^3+2x^2+3ax+1\,(a\neq0)$에서

$f'(x)=3ax^2+4x+3a$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이때 이차방정식 $3ax^2+4x+3a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-9a^2\le0,\ 9a^2-4\ge0$

$(3a+2)(3a-2)\ge0$ $\quad\therefore a\le-\frac{2}{3}$ 또는 $a\ge\frac{2}{3}$

4-1

$f(x)=ax^3-3ax^2+b\,(a>0)$에서

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[0,3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	b	↘	$-4a+b$	↗	b

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0,\ x=3$에서 최댓값 b, $x=2$에서 최솟값 $-4a+b$를 갖는다.

이때 최댓값은 2, 최솟값은 -10이므로

$b=2,\ -4a+b=-10$ $\quad\therefore a=3,\ b=2$

4-2

$f(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x+k$에서

$f'(x)=-3x^2+3x+6=-3(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-1,4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{7}{2}+k$	↗	$10+k$	↘	$-16+k$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $10+k$, $x=4$에서 최솟값 $-16+k$를 갖는다.

이때 최댓값이 7이므로 $10+k=7$ $\quad\therefore k=-3$

따라서 $f(x)$의 최솟값은 $-16+k=-16+(-3)=-19$

1주 2일 필수 체크 전략 ②

16, 17쪽

1 ②	**2** ③	**3** ②	**4** ②
5 ①	**6** ④	**7** ②	

1

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+(2a+1)x$에서

$f'(x)=x^2-x+2a+1$

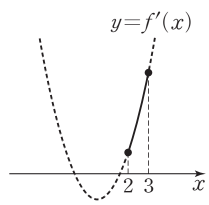
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[2,3]$에서 증가하려면 이 구간에서 $f'(x)\ge0$이어야 하므로

$f'(2)=4-2+2a+1\ge0$

$\therefore a\ge-\frac{3}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(3)=9-3+2a+1\ge0$

$\therefore a\ge-\frac{7}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡



㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a\ge-\frac{3}{2}$

따라서 정수 a의 최솟값은 -1이다.

2

$f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=1$, $x=5$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=0$, $f'(5)=0$

$f'(1)=0$에서 $-3+2a+b=0$ $\quad \therefore 2a+b=3$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(5)=0$에서 $-75+10a+b=0$ $\quad \therefore 10a+b=75$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=9$, $b=-15$

즉, $f(x)=-x^3+9x^2-15x+c$이고 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르므로 $f(1)=-f(5)$에서

$-7+c=-(25+c)$ $\quad \therefore c=-9$

$\therefore a-b+c=9-(-15)+(-9)=15$

다른 풀이

$f'(x)=0$의 두 근이 1, 5이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$1+5=\frac{2a}{3}$, $1\times5=-\frac{b}{3}$ $\quad \therefore a=9$, $b=-15$

3

$f(x)=x^3+ax^2+bx-4$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 1이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f'(-2)=0$에서 $12-4a+b=0$

$\therefore 4a-b=12$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(1)=0$에서 $3+2a+b=0$

$\therefore 2a+b=-3$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2}$, $b=-6$

즉, $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-4$이므로 $f(x)$의 극댓값은

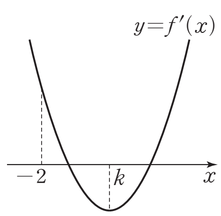
$f(-2)=-8+6+12-4=6$

4

$f(x)=x^3-3kx^2+3kx+5$에서

$f'(x)=3x^2-6kx+3k$

함수 $f(x)$가 $x>-2$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x>-2$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3k)^2-9k>0$, $9k(k-1)>0$

$\therefore k<0$ 또는 $k>1$

(ii) $f'(-2)=12+12k+3k>0$에서 $k>-\frac{4}{5}$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=k$이므로 $k>-2$

(i), (ii), (iii)에서 실수 k의 값의 범위는 $-\frac{4}{5}<k<0$ 또는 $k>1$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

5

$f(x)=x^4+8x^3+6kx^2-1$에서

$f'(x)=4x^3+24x^2+12kx=4x(x^2+6x+3k)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

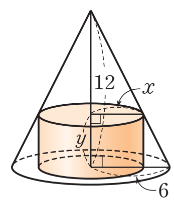
즉, 이차방정식 $x^2+6x+3k=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+6x+3k=0$의 판별식을 D라 하면

$k\neq0$, $\frac{D}{4}=3^2-3k>0$ $\quad \therefore k<0$ 또는 $0<k<3$

따라서 실수 k의 값이 될 수 있는 것은 1이다.

6

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x, 높이를 y라 하면



$6:12=x:(12-y)$

$\therefore y=12-2x\,(0<x<6)$

원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\pi x^2y=\pi x^2(12-2x)=2\pi(6x^2-x^3)$

$V'(x)=2\pi(12x-3x^2)=-6\pi x(x-4)$

$V'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$	(6)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	64π	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=4$에서 최댓값 64π를 가지므로 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 4이다.

7

$f(x)=x^3+px^2+qx-2$에서 $f'(x)=3x^2+2px+q$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 3을 가지므로

$f(-1)=3$, $f'(-1)=0$

$f(-1)=3$에서 $-1+p-q-2=3$ $\quad \therefore p-q=6$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(-1)=0$에서 $3-2p+q=0$ $\quad \therefore 2p-q=3$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=-3$, $q=-9$

즉, $f(x)=x^3-3x^2-9x-2$이므로

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↘	-29	↗	-22

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값 -29를 갖는다.

1주 3일 필수 체크 전략 ①

18~21쪽

1-1 ④	**1-2** $7<k<23$	**2-1** 12	**2-2** ⑤
3-1 ⑤	**3-2** $k>0$	**4-1** ②	**4-2** -4

1-1

$x^3-3x^2+3x-k=0$에서 $x^3-3x^2+3x=k$

$f(x)=x^3-3x^2+3x$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

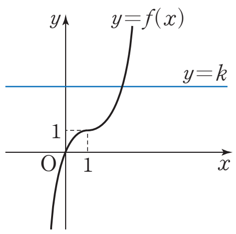
$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↗

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 $x>0$에서 한 개가 되어야 하므로 $k>0$

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다.



1-2

$x^3-12x+k-7=0$에서 $-x^3+12x+7=k$

$f(x)=-x^3+12x+7$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$

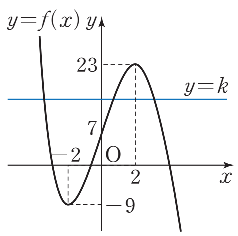
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-9	↗	23	↘

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 $x>0$에서 두 개, $x<0$에서 한 개가 되어야 하므로 오른쪽 그림에서 실수 k의 값의 범위는

$7<k<23$



2-1

$4x^3-8x+3=4x+k$에서 $4x^3-12x+3-k=0$

$f(x)=4x^3-12x+3-k$라 하면

$f'(x)=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

주어진 곡선과 직선이 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $4x^3-12x+3-k=0$이 한 실근과 두 허근을 가져야 하므로

$f(-1)f(1)>0$에서

$(11-k)(-5-k)>0$, $(k-11)(k+5)>0$

$\therefore k<-5$ 또는 $k>11$

따라서 자연수 k의 최솟값은 12이다.

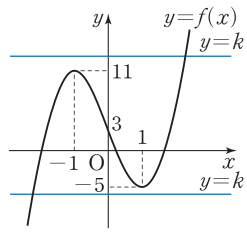
다른 풀이

$4x^3-12x+3-k=0$에서 $4x^3-12x+3=k$

$f(x)=4x^3-12x+3$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 한 개 존재해야 하므로 오른쪽 그림에서 실수 k의 값의 범위는

$k<-5$ 또는 $k>11$

따라서 자연수 k의 최솟값은 12이다.



2-2

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+k$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $f(-1)f(2)=0$에서

$(7+k)(-20+k)=0$, $(k+7)(k-20)=0$

$\therefore k=-7$ 또는 $k=20$

따라서 실수 k의 값의 합은 13이다.

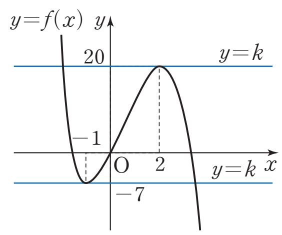
다른 풀이

$2x^3-3x^2-12x+k=0$에서 $-2x^3+3x^2+12x=k$

$f(x)=-2x^3+3x^2+12x$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 두 개 존재해야 하므로 오른쪽 그림에서 실수 k의 값은

$k=-7$ 또는 $k=20$

따라서 실수 k의 값의 합은 13이다.



3-1

$f(x)=2x^4-4x^2+k$라 하면

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-2+k$	↗	k	↘	$-2+k$	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)>0$이려면

$f(1)=-2+k>0 \qquad \therefore k>2$

따라서 a의 값은 2이다.

3-2

$x^3+5x>6x^2-4x-k$에서 $x^3-6x^2+9x+k>0$

$f(x)=x^3-6x^2+9x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

$x>1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(1)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	k	↗

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)>0$이려면

$f(3)=k>0$

4-1

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_p, v_q라 하면

$v_p=f'(t)=3t^2+12$, $v_q=g'(t)=12t$

두 점 P, Q의 속도가 같으므로

$3t^2+12=12t$, $3t^2-12t+12=0$

$3(t-2)^2=0 \qquad \therefore t=2$

$t=2$에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$f(2)=8+24-5=27$, $g(2)=24-1=23$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|27-23|=4$

4-2

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=2t^2-16t+30$, $a=\dfrac{dv}{dt}=4t-16$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$2t^2-16t+30=0$, $t^2-8t+15=0$

$(t-3)(t-5)=0 \qquad \therefore t=3$ 또는 $t=5$

따라서 점 P가 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은 3이므로 $t=3$에서의 가속도는

$12-16=-4$

1주 3일 필수 체크 전략 ②

22, 23쪽

1 ②	**2** ④	**3** ④	**4** ②
5 ③	**6** ②		

1

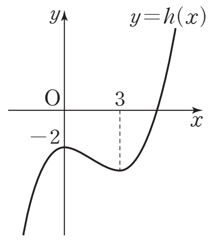
$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$h'(x)=0$, 즉 $f'(x)-g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	$f(0)-g(0)=-2$	↘	$f(3)-g(3)$	↗

오른쪽 그림에서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 방정식 $h(x)=0$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



2

$x^3+2x^2-9x-3=-x^2+k$에서 $x^3+3x^2-9x-3=k$

$f(x)=x^3+3x^2-9x-3$이라 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

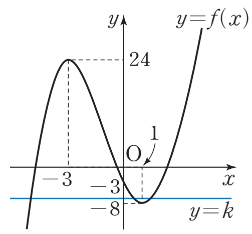
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	24	↘	-8	↗

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 $x>0$에서 두 개, $x<0$에서 한 개가 되어야 하므로

$-8<k<-3$

따라서 정수 k의 개수는 -7, -6, -5, -4의 4이다.



3

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=0$에서 $4x^3-12x-k=0$

$h(x)=4x^3-12x-k$로 놓으면

$h'(x)=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

방정식 $h(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$h(-1)h(1)=0$에서

$(8-k)(-8-k)=0$, $(k+8)(k-8)=0$

$\therefore k=-8$ 또는 $k=8$

따라서 양수 k의 값은 8이다.

4

$h(x)=f(x)-g(x)=4x^3-6x^2+k-1$로 놓으면

$h'(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

$0<x<3$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(3)
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	$-3+k$	↗	

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 $h(x)\geq 0$이려면

$h(1)=-3+k\geq 0$　　$\therefore k\geq 3$

따라서 실수 k의 최솟값은 3이다.

5

$f(x)=x^4-4k^3x+3$이라 하면

$f'(x)=4x^3-4k^3=4(x-k)(x^2+kx+k^2)$

(i) $k=0$일 때, 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $k\neq 0$일 때, $x^2+kx+k^2=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2>0$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=k$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-3k^4+3$	↗

함수 $f(x)$는 $x=k$에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)\geq 0$이려면

$f(k)=-3k^4+3\geq 0$, $(k+1)(k-1)(k^2+1)\leq 0$

$\therefore -1\leq k<0$ 또는 $0<k\leq 1$ ($\because k^2+1>0$, $k\neq 0$)

(i), (ii)에서 $-1\leq k\leq 1$

따라서 정수 k의 개수는 $-1, 0, 1$의 3이다.

6

$x(t)=kt(t-20)$ (k는 상수)으로 놓으면

$25=10k(10-20)$　　$\therefore k=-\frac{1}{4}$

따라서 주어진 그래프의 식은

$x(t)=-\frac{1}{4}t(t-20)=-\frac{1}{4}t^2+5t$ $(0\leq t\leq 20)$

이때 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면

$v(t)=\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}t+5$, $a(t)=\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{2}$

ㄱ. 점 P의 속도는 계속 감소한다.

ㄴ. 점 P의 가속도는 $-\frac{1}{2}$로 일정하다.

ㄷ. $v(20)=-10+5=-5$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

1주 4일 교과서 대표 전략 ①

24~27쪽

1 ④	**2** ④	**3** ①	**4** $\frac{11}{2}$
5 ③	**6** ④	**7** ①	**8** ②
9 ②	**10** ④	**11** $1<k<17$	**12** ④
13 ③	**14** $k\geq 3$	**15** 29	**16** ②

1

$f(x)=-x^3+4x^2-ax+6$에서 $f'(x)=-3x^2+8x-a$

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이다.

이때 이차방정식 $-3x^2+8x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-3a\leq 0$, $16\leq 3a$　　$\therefore a\geq\frac{16}{3}$

따라서 정수 a의 최솟값은 6이다.

2

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+2$에서 $f'(x)=x^2-2ax$

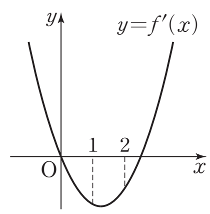
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1, 2]$에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

$f'(1)=1-2a\leq 0$

$\therefore a\geq\frac{1}{2}$　　…… ㉠

$f'(2)=4-4a\leq 0$

$\therefore a\geq 1$　　…… ㉡



㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $a\geq 1$

따라서 정수 a의 최솟값은 1이다.

3

$f(x)=2x^3+6x^2-12$에서

$f'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-4	↘	-12	↗

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-2$에서 극댓값 -4, $x=0$에서 극솟값 -12

를 가지므로 두 점 $(-2, -4)$, $(0, -12)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-12-(-4)}{0-(-2)}=-4$

4

$f(x)=x^3+ax^2+bx+6$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
$f'(x)=0$의 두 근이 -1, 2이므로 $f'(-1)=0$, $f'(2)=0$
$f'(-1)=0$에서 $3-2a+b=0$
$\therefore 2a-b=3$ …… ㉠
$f'(2)=0$에서 $12+4a+b=0$
$\therefore 4a+b=-12$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{3}{2}$, $b=-6$
즉, $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+6$이므로 함수 $f(x)$의
극댓값은 $f(-1)=-1-\frac{3}{2}+6+6=\frac{19}{2}$,
극솟값은 $f(2)=8-6-12+6=-4$
이다. 따라서 구하는 합은
$\frac{19}{2}+(-4)=\frac{11}{2}$

5

$g(x)=x^2f(x)$에서 $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$
함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극솟값 8을 가지므로 $g(2)=8$, $g'(2)=0$
$g(2)=8$에서 $4f(2)=8$ $\quad\therefore f(2)=2$
$g'(2)=0$에서 $4f(2)+4f'(2)=0$
$f(2)=2$를 대입하면
$4\times2+4f'(2)=0$ $\quad\therefore f'(2)=-2$

6

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 -1, 1, 3이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=3$에서 극소이고 $x=1$에서 극대이므로
$\alpha+\beta-\gamma=-1+3-1=1$

7

$f(x)=2x^3-kx^2-kx+1$에서 $f'(x)=6x^2-2kx-k$
함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.
이때 이차방정식 $6x^2-2kx-k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-k)^2-(-6k)\le0$, $k(k+6)\le0$ $\quad\therefore -6\le k\le0$
따라서 $\alpha=-6$, $\beta=0$이므로
$\alpha+\beta=-6$

8

$f(x)=2x^3-6k^2x+5$에서
$f'(x)=6x^2-6k^2=6(x+k)(x-k)$
$f'(x)=0$에서 $x=-k$ 또는 $x=k$
닫힌구간 $[0, 2k]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

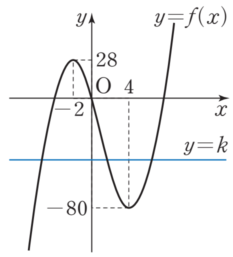
x	0	$\cdots$	k	$\cdots$	$2k$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	↘	$-4k^3+5$	↗	$4k^3+5$

따라서 함수 $f(x)$는
$x=2k$에서 최댓값 $4k^3+5$,
$x=k$에서 최솟값 $-4k^3+5$
를 갖는다.
이때 최댓값과 최솟값의 차가 64이므로
$(4k^3+5)-(-4k^3+5)=64$, $8k^3=64$
$k^3=8$, $(k-2)(k^2+2k+4)=0$
$\therefore k=2$ ($\because$ k는 양수)

9

$x^3-3x^2-24x-k=0$에서 $x^3-3x^2-24x=k$
$f(x)=x^3-3x^2-24x$라 하면
$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	28	↘	-80	↗



오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로
$-80<k<28$
따라서 정수 k의 최댓값은 27, 최솟값은 -79이므로 구하는 합은
$27+(-79)=-52$

다른 풀이

$f(x)=x^3-3x^2-24x-k$라 하면
$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$
주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(-2)f(4)<0$에서
$(28-k)(-80-k)<0$, $(k-28)(k+80)<0$
$\therefore -80<k<28$
따라서 정수 k의 최댓값은 27, 최솟값은 -79이므로 구하는 합은
$27+(-79)=-52$

10

$x^4-4x^3-k=0$에서 $x^4-4x^3=k$

$f(x)=x^4-4x^3$이라 하면 $f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

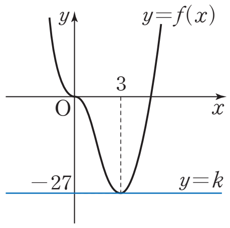
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	-27	↗

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 하므로

$k=-27$



11

$x^3-12x-k+1=0$에서 $x^3-12x+1=k$

$f(x)=x^3-12x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

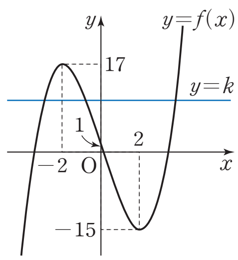
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	17	↘	-15	↗

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 $x>0$에서 한 개, $x<0$에서 두 개가 되어야 하므로

$1<k<17$



12

주어진 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $x^3-x^2+4x=2x^2+4x-k$, 즉 $x^3-3x^2+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2+k$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $f(0)f(2)=0$에서

$k(-4+k)=0 \qquad \therefore k=4$ ($\because k$는 양수)

13

$x^3+2>3x^2+k$에서 $x^3-3x^2+2-k>0$

$f(x)=x^3-3x^2+2-k$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$x>0$일 때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-2-k$	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)>0$이려면

$f(2)=-2-k>0 \qquad \therefore k<-2$

따라서 정수 k의 최댓값은 -3이다.

14

$f(x)=x^4-4x+k$라 하면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

이때 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-3+k$	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)\geq 0$이려면

$f(1)=-3+k\geq 0 \qquad \therefore k\geq 3$

15

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_p, v_q라 하면

$v_p=\frac{dx_p}{dt}=6t^2$, $v_q=\frac{dx_q}{dt}=-3t^2+36$

두 점 P, Q의 속도가 같으므로

$6t^2=-3t^2+36$, $9t^2=36$

$t^2=4 \qquad \therefore t=2$ ($\because t>0$)

$t=2$에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$x_p(2)=16+8=24$, $x_q(2)=-8+72-11=53$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|53-24|=29$

16

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-18t+15$, $a=\frac{dv}{dt}=6t-18$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$3t^2-18t+15=0$, $t^2-6t+5=0$

$(t-1)(t-5)=0 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=5$

점 P가 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 5이므로 $t=5$에서의 가속도는

$a=30-18=12$

1주 4일 교과서 대표 전략 ②

28, 29쪽

1 ②	**2** ②	**3** ③	**4** ③
5 ④	**6** ④	**7** $k>24$	**8** ③

1

$f(x)=x^3+x^2+kx+1$에서 $f'(x)=3x^2+2x+k$

$x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$를 만족시키는 함수는 일대일함수이다.

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$가 일대일함수가 되려면 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이다.

이때 이차방정식 $3x^2+2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-3k\leq 0\qquad \therefore k\geq\frac{1}{3}$

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다.

참고

함수 $f: X\rightarrow Y$에서 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$인 함수를 일대일함수라 한다. 이때 일대일함수에서 공역과 치역이 같은 함수를 일대일대응이라 한다.

2

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 3이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(-1)=0$에서 $3-2a+b=0$

$\therefore 2a-b=3$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f'(3)=0$에서 $27+6a+b=0$

$\therefore 6a+b=-27$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-9$

$f(x)=x^3-3x^2-9x+c$이고 $f(x)$의 극댓값이 10이므로

$f(-1)=-1-3+9+c=10\qquad\therefore c=5$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$이므로 극솟값은

$f(3)=27-27-27+5=-22$

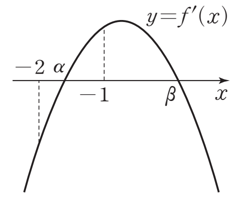
3

$f(x)=-2x^3+(a+1)x^2-ax-7$에서

$f'(x)=-6x^2+2(a+1)x-a$

이차방정식 $-6x^2+2(a+1)x-a=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 $-2<\alpha<-1$, $-1<\beta$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$f'(-2)=-5a-28<0$

$\therefore a>-\frac{28}{5}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f'(-1)=-3a-8>0$

$\therefore a<-\frac{8}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-\frac{28}{5}<a<-\frac{8}{3}$

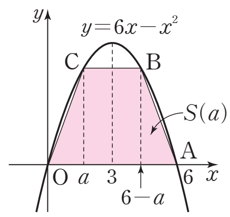
따라서 정수 a의 개수는 -5, -4, -3의 3이다.

4

$6x-x^2=0$에서 $x(6-x)=0$이므로

$x=0$ 또는 $x=6\qquad\therefore \mathrm{A}(6, 0)$

오른쪽 그림과 같이 점 C의 x좌표를 $a\,(0<a<3)$라 하면



$\mathrm{B}(6-a, 6a-a^2)$, $\mathrm{C}(a, 6a-a^2)$

사다리꼴 OABC의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}\{6+(6-2a)\}(6a-a^2)$

$\quad\;\;=a^3-12a^2+36a$

$S'(a)=3a^2-24a+36=3(a-2)(a-6)$

$S'(a)=0$에서 $a=2$ 또는 $a=6$

$0<a<3$에서 $S(a)$의 증가와 감소를 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(a)$는 $a=2$일 때 극대이면서 최대이므로 사다리꼴 OABC의 넓이의 최댓값은

$S(2)=8-48+72=32$

5

$2x^3-\frac{3}{2}x+2-k=0$에서 $2x^3-\frac{3}{2}x+2=k$

$g(x)=2x^3-\frac{3}{2}x+2$라 하면

$g'(x)=6x^2-\frac{3}{2}=6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$g'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	$\frac{5}{2}$	↘	$\frac{3}{2}$	↗

(ⅰ) $k=1$일 때

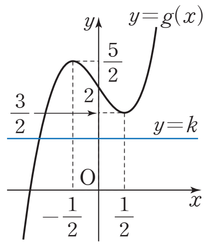
곡선 $g(x)$와 직선 $y=k$는 x좌표가 양수인 점에서 만나지 않으므로

$f(1)=0$

(ⅱ) $k\geq2$일 때

곡선 $g(x)$와 직선 $y=k$의 x좌표가 양수인 교점이 1개이므로

$f(2)=f(3)=\cdots=f(10)=1$



(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f(1)+f(2)+\cdots+f(10)=9$

6

$x^3+4x^2\leq2x^2+4x-k$에서 $x^3+2x^2-4x+k\leq0$

$f(x)=x^3+2x^2-4x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2+4x-4=(x+2)(3x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

$1\leq x\leq3$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $1\leq x\leq3$에서 증가한다.

따라서 $1\leq x\leq3$에서 $f(x)\leq0$이 항상 성립하려면 $f(3)\leq0$이어야 하므로

$f(3)=27+18-12+k\leq0$ $\quad\therefore k\leq-33$

따라서 실수 k의 최댓값은 -33이다.

7

$y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-g(x)>0$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)=x^4-6x^2+8x+k$로 놓으면

$h'(x)=4x^3-12x+8=4(x+2)(x-1)^2$

$h'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$h(x)$	↘	$-24+k$	↗	$3+k$	↗

함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 극소이면서 최소이므로 $h(x)>0$이려면

$h(-2)=-24+k>0$ $\quad\therefore k>24$

8

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_p, v_q라 하면

$v_p=f'(t)=2t-6$, $v_q=g'(t)=4t-8$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_p v_q<0$이므로

$(2t-6)(4t-8)<0$, $(t-3)(t-2)<0$

$\therefore 2<t<3$

1주 누구나 합격 전략

30, 31쪽

1 ①	2 ④	3 ②	4 ③
5 ②	6 ②	7 ③	8 ①
9 ②	10 ①		

1

$f(x)=x^3+2ax^2-ax-2$에서

$f'(x)=3x^2+4ax-a$

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=3x^2+4ax-a\geq0$이어야 한다.

이차방정식 $3x^2+4ax-a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-(-3a)\leq0$, $a(4a+3)\leq0$

$\therefore -\frac{3}{4}\leq a\leq0$

따라서 실수 a의 최솟값은 $-\frac{3}{4}$이다.

2

$f(x)=2x^3-5x^2+ax+1$에서

$f'(x)=6x^2-10x+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $6x^2-10x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-5)^2-6a>0$ $\quad\therefore a<\frac{25}{6}$

따라서 정수 a의 최댓값은 4이다.

3

$f(x)=-2x^3+ax^2+12x+b$에서

$f'(x)=-6x^2+2ax+12$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 17을 가지므로

$f(1)=17$, $f'(1)=0$

$f(1)=17$에서 $-2+a+12+b=17$ $\quad\therefore b=10$

$f'(1)=0$에서 $-6+2a+12=0$ $\quad\therefore a=-3$

즉, $f(x)=-2x^3-3x^2+12x+10$이므로

$f'(x)=-6x^2-6x+12=-6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-10	↗	17	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값 -10을 갖는다.

4

$f(x)=-x^3+3x^2+1$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	↗	5	↘	1

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 5, $x=3$에서 최솟값 1을 갖는다.

따라서 $M=5$, $m=1$이므로

$M+m=6$

5

사각형 ABCD가 직사각형이므로 $\overline{\text{AB}}=\overline{\text{CD}}$, $\overline{\text{AD}}=\overline{\text{BC}}$

$\text{D}(a, 12-a^2)$이라 하면 $a>0$, $12-a^2>0$이므로

$0<a<2\sqrt{3}$

사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a(12-a^2)=-2a^3+24a$

$S'(a)=-6a^2+24=-6(a+2)(a-2)$

$S'(a)=0$에서 $a=-2$ 또는 $a=2$

$0<a<2\sqrt{3}$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	$(2\sqrt{3})$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $S(a)$는 $a=2$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은

$S(2)=-16+48=32$

6

$f(x)=x^3-3x^2-a$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$-a$	↘	$-4-a$	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점에서 만나야 하므로

$-a=0$ 또는 $-4-a=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-4$

따라서 상수 a의 값의 합은 -4이다.

다른 풀이

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$f(0)f(2)=0$에서

$-a(-4-a)=0 \qquad \therefore a=0$ 또는 $a=-4$

따라서 상수 a의 값의 합은 -4이다.

7

$2x^3-6x-a=0$에서 $2x^3-6x=a$

$f(x)=2x^3-6x$라 하면

$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	-4	↗

오른쪽 그림에서

$y=f(x)$의 그래프와 직선

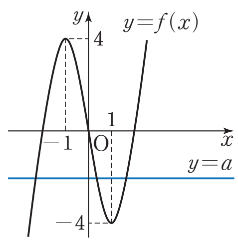
$y=a$의 교점이 $x>0$에서 두 개,

$x<0$에서 한 개가 되어야 하므로

$-4<a<0$

따라서 정수 a의 개수는

$-3, -2, -1$의 3이다.



8

$x^3>3x^2+a$에서 $x^3-3x^2-a>0$

$f(x)=x^3-3x^2-a$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$x\ge0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-4-a$	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)>0$이려면

$-4-a>0 \qquad \therefore a<-4$

따라서 정수 a의 최댓값은 -5이다.

9

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=t^2-8t+15$, $a=\dfrac{dv}{dt}=2t-8$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

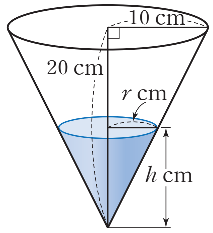
$t^2-8t+15=0$, $(t-3)(t-5)=0$

$\therefore t=3$ 또는 $t=5$

따라서 점 P가 첫 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 3이므로 $t=3$에서의 가속도는 $6-8=-2$

10

오른쪽 그림과 같이 물을 넣기 시작한 지 t초 후의 물의 높이를 h cm, 밑면의 반지름의 길이를 r cm라 하면



$10 : r = 20 : h$, $20r = 10h$

$\therefore r = \frac{1}{2}h$

수면의 높이가 매초 2 cm씩 높아지므로 $h=2t$에서

$r = \frac{1}{2}h = t$

이때 t초 후의 물의 부피 V cm^{3}는

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times t^2 \times 2t = \frac{2}{3}\pi t^3$

$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{2}{3} \times 3\pi t^2 = 2\pi t^2$

$h=2t$에서 $2t=10$　　$\therefore t=5$

따라서 수면의 높이가 10 cm인 순간의 물의 부피의 변화율은

$2\pi \times 5^2 = 50\pi$ (cm^3/s)

1주 창의·융합·코딩 전략　32~35쪽

1 ⑤	**2** 은호	**3** 소현	**4** ③
5 ①	**6** 31500π m^3	**7** -200 m/s	**8** ②

1

$f(t) = -\frac{2}{3}t^3 + 3t^2 + 20t$에서

$f'(t) = -2t^2 + 6t + 20 = -2(t+2)(t-5)$

$f'(t) = 0$에서 $t=-2$ 또는 $t=5$

$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		↗	극대	↘

함수 $f(t)$는 반닫힌 구간 $(0, 5]$에서 증가한다.

따라서 약효가 증가하는 것은 5시간 동안이다.

2

$\lim_{x\to 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2-} \frac{|x-2|-0}{x-2} = \lim_{x\to 2-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$,

$\lim_{x\to 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+} \frac{|x-2|-0}{x-2} = \lim_{x\to 2+} \frac{x-2}{x-2} = 1$

이므로 함수 $f(x)=|x-2|$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

이때 열린구간 $(-\infty, \infty)$에 속하는 모든 x에서

$f(x) \ge f(2)$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이고 극솟값은 $f(2)=0$이다.

즉, 함수 $f(x)=|x-2|$는 $x=2$에서 미분가능하지 않지만 극소이다. 따라서 은호의 의견이 옳다.

참고

함수 $f(x)$의 그래프는 $x=2$에서 뾰족하므로 미분가능하지 않다.

3

함수 $f(x)$는 반닫힌 구간 $(-\infty, 0]$, $[2, \infty)$에서 증가하고, 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 감소하므로 곡선 $y=f(x)$의 개형을 적절하게 추측한 학생은 소현이다.

참고

함수의 그래프의 개형은 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 좌표축과의 교점 등을 이용하여 그릴 수 있다.

4

관람 요금 x천 원과 관람객 수 y 사이에

$y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 32$

가 성립하므로 관람 수입을 $f(x)$천 원이라 하면

$f(x) = xy = x\left(-\frac{1}{3}x^2 + 2x + 32\right) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 32x$

$f'(x) = -x^2 + 4x + 32 = -(x+4)(x-8)$

$f'(x) = 0$에서 $x=-4$ 또는 $x=8$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	8	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=8$에서 극대이며 최대이므로 관람 요금이 8000원일 때 관람 수입이 최대가 된다.

5

$f(t) = -t^4 + 12t^3 - 48t^2 + 64t$에서

$f'(t) = -4t^3 + 36t^2 - 96t + 64 = -4(t-1)(t-4)^2$

$f'(t) = 0$에서 $t=1$ 또는 $t=4$

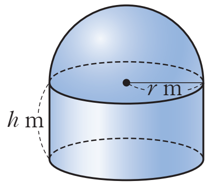
$t \ge 0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$-$
$f(t)$		↗	극대	↘		↘

함수 $f(t)$는 $t=1$에서 극대이며 최대이므로 순이익이 최대가 되려면 1달 후에 주식을 팔아야 한다.

6

오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r m, 높이를 h m라 하면



$r+h=45$이므로 $h=45-r$

이때 $r>0$, $45-r>0$에서

$0<r<45$

원기둥의 부피를 $V(r)$ m^3라 하면

$V(r)=\pi r^2h=\pi r^2(45-r)=-\pi r^3+45\pi r^2$

$V'(r)=-3\pi r^2+90\pi r=-3\pi r(r-30)$

$V'(r)=0$에서 $r=0$ 또는 $r=30$

$0<r<45$에서 함수 $V(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	(0)	$\cdots$	30	$\cdots$	(45)
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

함수 $V(r)$는 $r=30$에서 극대이며 최대이다.

이때 원기둥의 부피는

$V(30)=-\pi\times30^3+45\pi\times30^2=13500\pi\ (\text{m}^3)$

반구 모양의 지붕의 부피는

$\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times30^3=18000\pi\ (\text{m}^3)$

따라서 구하는 실내 농구장의 부피는

$13500\pi+18000\pi=31500\pi\ (\text{m}^3)$

7

t초 후의 스카이다이버의 낙하 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dh}{dt}=-10t$

이때 $-5t^2+4000=2000$에서

$5t^2=2000$, $t^2=400$ $\quad\therefore t=20\ (\because t\ge0)$

따라서 지상 2000 m 높이에서 스카이다이버의 낙하 속도는

$-10\times20=-200\ (\text{m/s})$

8

맨 바깥쪽 원의 반지름의 길이가 1초에 0.5 m씩 커지므로 t초 후 맨 바깥쪽 원의 반지름의 길이를 r m라 하면

$r=0.5t$

또 맨 바깥쪽 원의 넓이 S를 $S=f(t)$라 하면

$f(t)=\pi r^2=\pi(0.5t)^2=0.25\pi t^2\ (\text{m}^2)$

이때 시각 t에 대한 넓이 S의 변화율은

$\frac{dS}{dt}=f'(t)=0.5\pi t$

따라서 $t=4$일 때 맨 바깥쪽 원의 넓이의 변화율은

$f'(4)=0.5\pi\times4=2\pi\ (\text{m}^2/\text{s})$

2주 1일 개념 돌파 전략 ①

39, 41쪽

1-2 4	**2-2** $\frac{22}{5}$	**3-2** 56
4-2 1	**5-2** $\frac{9}{2}$	**6-2** 7

1-2

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 x^3-2x^2+5x-1이므로

$f(x)=(x^3-2x^2+5x-1)'=3x^2-4x+5$

$\therefore f(1)=3-4+5=4$

2-2

$$\begin{aligned}\int_0^2(x+1)(x-1)(x^2+1)dx&=\int_0^2(x^2-1)(x^2+1)dx\\&=\int_0^2(x^4-1)dx\\&=\left[\frac{1}{5}x^5-x\right]_0^2\\&=\frac{22}{5}\end{aligned}$$

3-2

$$\begin{aligned}\int_1^2(4x^3-6x)dx+\int_2^3(4x^3-6x)dx&=\int_1^3(4x^3-6x)dx\\&=\left[x^4-3x^2\right]_1^3\\&=54-(-2)\\&=56\end{aligned}$$

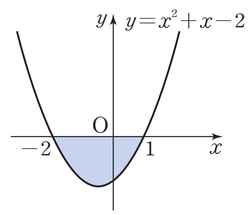
4-2

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=(-x^2+5x)'=-2x+5$ $\quad\therefore f(2)=1$

5-2

곡선 $y=x^2+x-2$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2+x-2=0$에서



$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[-2, 1]$에서

$x^2+x-2\le0$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1|x^2+x-2|dx&=\int_{-2}^1(-x^2-x+2)dx\\&=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1\\&=\frac{7}{6}-\left(-\frac{10}{3}\right)=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

6-2

$t=0$에서의 위치가 $x=-2$이므로 $t=3$에서 점 P의 위치는

$$-2+\int_0^3(4t-t^2)dt=-2+\left[2t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^3=7$$

2주 1일 개념 돌파 전략 ②

42, 43쪽

1 ③	2 ①	3 ⑤	4 ②
5 ④	6 ④	7 ④	

1

$6x^2+ax-2=(bx^3+3x^2+cx-2)'=3bx^2+6x+c$

$6=3b$, $a=6$, $-2=c$에서 $a=6$, $b=2$, $c=-2$

$\therefore a+b+c=6$

2

$(x-2)^3$의 한 부정적분이 $f(x)$이므로 $f'(x)=(x-2)^3$

$\therefore f'(0)=(-2)^3=-8$

3

$$\int_{-1}^2(2x-1)^3dx+\int_{-1}^2(2x+1)^3dx$$
$$=\int_{-1}^2\{(8x^3-12x^2+6x-1)+(8x^3+12x^2+6x+1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^2(16x^3+12x)dx=\left[4x^4+6x^2\right]_{-1}^2$$
$$=88-10=78$$

4

$$\int_0^3(6x-2)dx-\int_a^3(6x-2)dx=\int_0^3(6x-2)dx+\int_3^a(6x-2)dx$$
$$=\int_0^a(6x-2)dx$$
$$=\left[3x^2-2x\right]_0^a=3a^2-2a$$

이때 $3a^2-2a=1$이므로 $3a^2-2a-1=0$

$(3a+1)(a-1)=0$ $\quad\therefore a=1\ (\because 0<a<3)$

5

$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)=f(1)$$
$$=1+1-3+2=1$$

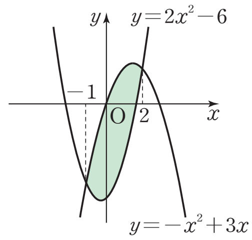
6

두 곡선의 교점의 x좌표는

$-x^2+3x=2x^2-6$, $3x^2-3x-6=0$

$3(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$



닫힌구간 $[-1, 2]$에서

$-x^2+3x\geq 2x^2-6$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^2\{(-x^2+3x)-(2x^2-6)\}dx$$
$$=\int_{-1}^2(-3x^2+3x+6)dx=\left[-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x\right]_{-1}^2$$
$$=10-\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{27}{2}$$

7

$v(t)=t^2-3t=t(t-3)$이므로

$0\leq t\leq3$일 때 $v(t)\leq0$, $3\leq t\leq4$일 때 $v(t)\geq0$

따라서 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^4|t^2-3t|dt=\int_0^3(-t^2+3t)dt+\int_3^4(t^2-3t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^3+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_3^4$$
$$=\frac{9}{2}+\frac{11}{6}=\frac{19}{3}$$

2주 2일 필수 체크 전략 ①

44~47쪽

1-1 ④	1-2 7	2-1 ②	2-2 $A-B+C$
3-1 4	3-2 ④	4-1 ④	4-2 6

1-1

$f'(x)=12x^2-8x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(12x^2-8x)dx=4x^3-4x^2+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 2)$를 지나므로 $2=4-4+C$ $\quad\therefore C=2$

따라서 $f(x)=4x^3-4x^2+2$이므로

$f(2)=32-16+2=18$

1-2

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-4x+5)dx=x^3-2x^2+5x+C$$

이때 $f(-1)=-5$이므로 $-5=-1-2-5+C$ $\quad\therefore C=3$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+5x+3$이므로

$f(1)=1-2+5+3=7$

2-1

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx-\int_1^0 \frac{1}{x+1}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx+\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx=\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx=\int_0^1 (x^2-x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1=\frac{5}{6}$$

2-2

$$\int_0^5 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx$$
$$=\left\{\int_0^3 f(x)dx+\int_3^2 f(x)dx\right\}+\int_2^5 f(x)dx$$
$$=\left\{\int_0^3 f(x)dx-\int_2^3 f(x)dx\right\}+\int_2^5 f(x)dx$$
$$=A-B+C$$

3-1

$f(x)=|2x-6|$이라 하면

$2x-6=0$에서 $x=3$이므로

$$f(x)=\begin{cases}-2x+6 & (x<3)\\ 2x-6 & (x\ge 3)\end{cases}$$

이때 $a>3$이므로

$$\int_0^a |2x-6|dx=\int_0^3(-2x+6)dx+\int_3^a(2x-6)dx$$
$$=\left[-x^2+6x\right]_0^3+\left[x^2-6x\right]_3^a$$
$$=9+(a^2-6a+9)$$
$$=a^2-6a+18$$

따라서 $a^2-6a+18=10$이므로

$a^2-6a+8=0$, $(a-2)(a-4)=0$

$\therefore\ a=4\ (\because\ a>3)$

3-2

$f(x)=(|x|-1)^2$이라 하면

$|x|=0$에서 $x=0$이므로

$$f(x)=\begin{cases}(-x-1)^2 & (x<0)\\ (x-1)^2 & (x\ge 0)\end{cases}$$

$$\therefore\ \int_{-2}^1 (|x|-1)^2dx=\int_{-2}^0 (-x-1)^2dx+\int_0^1(x-1)^2dx$$
$$=\int_{-2}^0 (x^2+2x+1)dx+\int_0^1(x^2-2x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-2}^0+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$$

4-1

$f(x)=2x^2-\int_0^1 (2x+1)f(t)dt$에서

$f(x)=2x^2-(2x+1)\int_0^1 f(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

로 놓으면 $f(x)=2x^2-2kx-k$

$f(t)=2t^2-2kt-k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 (2t^2-2kt-k)dt=\left[\frac{2}{3}t^3-kt^2-kt\right]_0^1=\frac{2}{3}-2k$$

즉, $\frac{2}{3}-2k=k$이므로 $k=\frac{2}{9}$

따라서 $f(x)=2x^2-\frac{4}{9}x-\frac{2}{9}$이므로

$f(4)=32-\frac{16}{9}-\frac{2}{9}=30$

4-2

$f(x)=2x+\int_0^2 tf'(t)dt$에서

$\int_0^2 tf'(t)dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

로 놓으면 $f(x)=2x+k$, $f'(x)=2$

$f'(t)=2$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_0^2 tf'(t)dt=\int_0^2 2t\,dt=\left[t^2\right]_0^2=4$$

즉, $k=4$

따라서 $f(x)=2x+4$이므로

$f(1)=2+4=6$

2주 2일 필수 체크 전략 ②

48, 49쪽

1 ①	2 ④	3 ②	4 ③
5 ④	6 ③		

1

$f'(x)=6x-4$이므로

$f(x)=\int(6x-4)dx=3x^2-4x+C_1$

이때 $f(1)=2$이므로 $2=3-4+C_1$ $\quad\therefore\ C_1=3$

즉, $f(x)=3x^2-4x+3$이므로

$F(x)=\int(3x^2-4x+3)dx=x^3-2x^2+3x+C_2$

이때 $F(1)=4$이므로 $4=1-2+3+C_2$ $\quad\therefore\ C_2=2$

따라서 $F(x)=x^3-2x^2+3x+2$이므로

$F(-1)=-1-2-3+2=-4$

2

$$\begin{aligned}f(k)&=\int_0^1(x+2k)^2dx-\int_1^0(2x^2+3)dx\\&=\int_0^1(x+2k)^2dx+\int_0^1(2x^2+3)dx\\&=\int_0^1\{(x^2+4kx+4k^2)+(2x^2+3)\}dx\\&=\int_0^1(3x^2+4kx+4k^2+3)dx\\&=\Big[x^3+2kx^2+(4k^2+3)x\Big]_0^1\\&=4k^2+2k+4=4\left(k+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{4}\end{aligned}$$

따라서 함수 $f(k)$는 $k=-\frac{1}{4}$일 때 최솟값 $\frac{15}{4}$를 가지므로

$a=-\frac{1}{4}$, $b=\frac{15}{4}$ $\quad\therefore b-a=4$

3

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^0\{f(x)-4x\}dx\\&=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_{-1}^0 4x\,dx\\&=\int_{-1}^2 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx+\int_5^0 f(x)dx-\Big[2x^2\Big]_{-1}^0\\&=2+4+(-3)-(-2)=5\end{aligned}$$

4

$f(x)=|x-a|$라 하면

$x-a=0$에서 $x=a$이므로

$$f(x)=\begin{cases}-x+a & (0\le x<a)\\ x-a & (a\le x\le 2)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^2|x-a|dx&=\int_0^a(-x+a)dx+\int_a^2(x-a)dx\\&=\Big[-\frac{1}{2}x^2+ax\Big]_0^a+\Big[\frac{1}{2}x^2-ax\Big]_a^2\\&=\frac{1}{2}a^2+\left(2-2a+\frac{1}{2}a^2\right)\\&=a^2-2a+2=(a-1)^2+1\end{aligned}$$

따라서 주어진 정적분의 값이 최소가 되도록 하는 실수 a의 값은 1이다.

5

$f(x)=f(-x)$에서 $f(x)$는 우함수이다. 이때

(우함수)$\times$(우함수)$=$(우함수), (기함수)$\times$(우함수)$=$(기함수)

이므로 $x^3f(x)$는 기함수, $x^2f(x)$는 우함수이다.

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-1}^1(x^3+4x^2)f(x)dx&=\int_{-1}^1 x^3f(x)dx+4\int_{-1}^1 x^2f(x)dx\\&=4\int_{-1}^1 x^2f(x)dx=8\int_0^1 x^2f(x)dx\\&=8\times 2=16\end{aligned}$$

6

$\int_0^2 f(t)dt=k$ (k는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓으면 $f(x)=3x^2-\frac{7}{2}kx+k^2$

$f(t)=3t^2-\frac{7}{2}kt+k^2$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(t)dt&=\int_0^2\left(3t^2-\frac{7}{2}kt+k^2\right)dt\\&=\Big[t^3-\frac{7}{4}kt^2+k^2t\Big]_0^2=8-7k+2k^2\end{aligned}$$

즉, $8-7k+2k^2=k$이므로

$2k^2-8k+8=0$, $k^2-4k+4=0$

$(k-2)^2=0$ $\quad\therefore k=2$

따라서 $\int_0^2 f(t)dt=2$이므로

$5\int_0^2 f(t)dt=5\times2=10$

2주 3일 필수 체크 전략 ①

50~53쪽

1-1 -4	**1-2** ⑤	**2-1** 4	**2-2** ⑤
3-1 ②	**3-2** $\frac{1}{3}$	**4-1** -18	**4-2** ④

1-1

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-4$

$f(a)=8$에서 $3a^2-4=8$, $a^2=4$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 -4이다.

1-2

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x+2a$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$\int_2^2 f(t)dt=12+4a-a$

$3a+12=0$ $\quad\therefore a=-4$

따라서 $f(x)=6x-8$이므로

$f(2)=12-8=4$

2-1

$f(t)=t^2-4t+5$로 놓고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}(t^2-4t+5)dt$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$$

$$=2F'(1)=2f(1)=2\times2=4$$

2-2

$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)=f(0)$$

$f'(x)=3x^2+4x-2$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+4x-2)dx=x^3+2x^2-2x+C$$

이때 $f(0)=-1$이므로 $C=-1$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-2x-1$이므로

$f(2)=8+8-4-1=11$

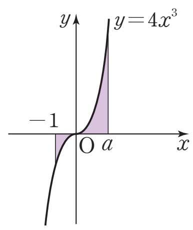
3-1

곡선 $y=4x^3$과 x축의 교점의 x좌표는 $x=0$

닫힌구간 $[-1, 0]$에서 $4x^3\le0$,

닫힌구간 $[0, a]$에서 $4x^3\ge0$

따라서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-1}^0(-4x^3)dx+\int_0^a 4x^3\,dx$$

$$=\Big[-x^4\Big]_{-1}^0+\Big[x^4\Big]_0^a=1+a^4$$

이때 $1+a^4=17$이므로

$a^4=16$, $(a+2)(a-2)(a^2+4)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

3-2

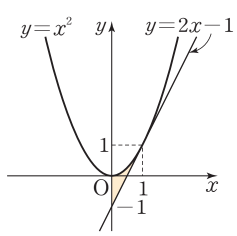
$f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$ $\quad\therefore f'(1)=2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=2(x-1)$ $\quad\therefore y=2x-1$

닫힌구간 $[0, 1]$에서 $x^2\ge2x-1$

따라서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_0^1\{x^2-(2x-1)\}dx$$

$$=\int_0^1(x^2-2x+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

4-1

운동 방향이 바뀔 때의 속도는 0이므로

$v(t)=t^2-9=0$에서 $(t+3)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=3$ ($\because t>0$)

따라서 $t=3$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3(t^2-9)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-9t\right]_0^3=-18$$

4-2

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0 m/s이므로

$v(t)=30-10t=0$에서 $t=3$

따라서 물체가 최고 높이에 도달한 후 2초 동안 움직인 거리는

$$\int_3^5|30-10t|dt=\int_3^5(-30+10t)dt=\Big[-30t+5t^2\Big]_3^5$$

$$=-25-(-45)=20$$

2주 3일 필수 체크 전략 ②

54, 55쪽

1 ①	**2** ②	**3** ①	**4** ⑤
5 ②	**6** ③	**7** ⑤	

1

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=3x^2+4x+f(x)$

즉, $f'(x)=3x+4$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x+4)dx=\frac{3}{2}x^2+4x+C$$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1+2+\int_1^1 f(t)dt$ $\quad\therefore f(1)=3$

$f(1)=\frac{3}{2}+4+C=3$이므로 $C=-\frac{5}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+4x-\frac{5}{2}$이므로

$f(-1)=\frac{3}{2}-4-\frac{5}{2}=-5$

2

$\int_2^x(x-t)f(t)dt=x\int_2^x f(t)dt-\int_2^x tf(t)dt$이므로

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_2^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-2ax-4$$

$\therefore \int_2^x f(t)dt=3x^2-2ax-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

기말

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=6x-2a$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=12-4a-4 \qquad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=6x-4$이므로 $f(1)=2$

3

$f(x)=\int_0^x (t^2-kt-3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-kx-3$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값을 가지므로

$f'(-1)=1+k-3=0 \qquad \therefore k=2$

즉, $f'(x)=x^2-2x-3$이므로 $f'(x)=0$에서

$(x+1)(x-3)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 $f(3)$을 갖는다.

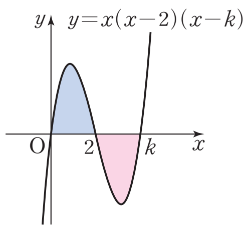
$\therefore f(3)=\int_0^3 (t^2-2t-3)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2-3t\right]_0^3=-9$

4

$g(x)=\int_0^{x-2}(t+1)f(t)dt$라 하면 $g(2)=0$이고 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=(x-1)f(x-2)$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_0^{x-2}(t+1)f(t)dt=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$
$$=g'(2)=f(0)=4$$

5



곡선 $y=x(x-2)(x-k)$와 x축의 교점의 x좌표는 $x(x-2)(x-k)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=k$

이때 $k>2$이므로

곡선 $y=x(x-2)(x-k)$는 오른쪽 그림과 같고 색칠한 두 도형의 넓이가 같다.

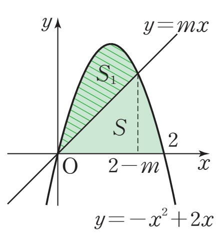
즉, $\int_0^k x(x-2)(x-k)dx=0$이므로

$\int_0^k \{x^3-(k+2)x^2+2kx\}dx=0,\ \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k+2}{3}x^3+kx^2\right]_0^k=0$

$\frac{1}{4}k^4-\frac{k^3(k+2)}{3}+k^3=0,\ k^4-4k^3=0$

$k^3(k-4)=0 \qquad \therefore k=4\ (\because k>2)$

6



곡선 $y=-x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=0$에서

$x(x-2)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=2$

곡선 $y=-x^2+2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^2 (-x^2+2x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$

곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는

$-x^2+2x=mx$에서

$x^2+(m-2)x=0,\ x(x+m-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2-m$

곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면

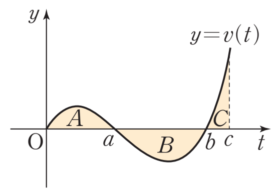
$S_1=\int_0^{2-m}\{(-x^2+2x)-mx\}dx=\int_0^{2-m}\{-x^2+(2-m)x\}dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{2-m}{2}x^2\right]_0^{2-m}=\frac{(2-m)^3}{6}$

이때 $S=2S_1$이므로

$\frac{4}{3}=2\times\frac{(2-m)^3}{6} \qquad \therefore (2-m)^3=4$

7



오른쪽 그림과 같이 각각의 넓이를 A, B, C라 하자.

ㄱ. $t=a$에서 $v(t)$의 값이 양에서 음으로 바뀌었고, $t=b$에서 $v(t)$의 값이 음에서 양으로 바뀌었으므로 점 P는 운동 방향을 2번 바꾸었다.

ㄴ. $A<B$이므로 점 P는 $t=a$와 $t=b$ 사이에서 원점을 다시 지난다.

ㄷ. $\int_0^c |v(t)|dt=A+B+C,\ 2\int_a^b |v(t)|dt=2B$

이때 $\int_0^c v(t)dt<0$에서 $A-B+C<0$이므로

$A+B+C<2B$

$\therefore \int_0^c |v(t)|dt<2\int_a^b |v(t)|dt$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

2주 4일 교과서 대표 전략 ①

56~59쪽

1 ⑤	**2** ②	**3** ③	**4** ②
5 ②	**6** ②	**7** ⑤	**8** ③
9 ①	**10** ③	**11** 22	**12** ④
13 ②	**14** $\frac{27}{4}$	**15** ④	**16** 11

1

⑤ $\int 99x^{99}dx=\frac{99}{100}x^{100}+C$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

참고

$\int 100x^{99}dx=x^{100}+C$

2

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+2x$

즉, $f'(x)=6x-2$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x-2)dx=3x^2-2x+C$

이때 $f(1)=2$이므로

$3-2+C=2 \qquad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=3x^2-2x+1$이므로

$f(2)=12-4+1=9$

3

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(3x^2-2ax)dx=\left[x^3-ax^2\right]_0^1=1-a$

이때 $f(1)=3-2a$이므로

$1-a=3-2a \qquad \therefore a=2$

4

$\int_{-1}^0(4x^3+3x^2+1)dx-\int_1^0(4x^3+3x^2+1)dx$

$=\int_{-1}^0(4x^3+3x^2+1)dx+\int_0^1(4x^3+3x^2+1)dx$

$=\int_{-1}^1(4x^3+3x^2+1)dx=\left[x^4+x^3+x\right]_{-1}^1$

$=3-(-1)=4$

다른 풀이

$\int_{-1}^1(4x^3+3x^2+1)dx=2\int_0^1(3x^2+1)dx=2\left[x^3+x\right]_0^1$

$=2\times2=4$

5

$f(x)=|3x^2-6x|$라 하면 $3x^2-6x=3x(x-2)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$이므로

$f(x)=\begin{cases}-3x^2+6x & (0\le x<2)\\ 3x^2-6x & (x<0 \text{ 또는 } x\ge2)\end{cases}$

$\therefore \int_0^a|3x^2-6x|dx=\int_0^2(-3x^2+6x)dx+\int_2^a(3x^2-6x)dx$

$=\left[-x^3+3x^2\right]_0^2+\left[x^3-3x^2\right]_2^a$

$=4+(a^3-3a^2+4)$

$=a^3-3a^2+8$

따라서 $a^3-3a^2+8=24$이므로

$a^3-3a^2-16=0,\ (a-4)(a^2+a+4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because$ a는 실수)

6

$f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$\int_{-5}^5 f(x)dx=2\int_0^5 f(x)dx=8 \qquad \therefore \int_0^5 f(x)dx=4$

$\int_3^5 f(x)dx=\int_0^5 f(x)dx-\int_0^3 f(x)dx$

$=4-2=2$

7

$\int_0^2 f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=x^3-4x+k$

$f(t)=t^3-4t+k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2(t^3-4t+k)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-2t^2+kt\right]_0^2=-4+2k$

즉, $-4+2k=k$이므로 $k=4$

따라서 $f(x)=x^3-4x+4$이므로

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x^3-4x+4)dt=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2+4x\right]_0^1=\frac{9}{4}$

8

$f(x)=3x^2+\int_0^1(x+1)f(t)dt$

$=3x^2+x\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 f(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=3x^2+kx+k$

$f(t)=3t^2+kt+k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(3t^2+kt+k)dt=\left[t^3+\frac{k}{2}t^2+kt\right]_0^1=1+\frac{3}{2}k$

즉, $1+\frac{3}{2}k=k$이므로 $k=-2$

따라서 $f(x)=3x^2-2x-2$이므로

$f(2)=12-4-2=6$

9

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-2ax-2$

주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)dt=a^3-a^3-2a+6$

$-2a+6=0 \qquad \therefore a=3$

따라서 $f(x)=3x^2-6x-2$이므로

$f(a)=f(3)=27-18-2=7$

10

$\int_1^x (x-t)f(t)dt = x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt$이므로

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = 3x^2 + 2ax$

$\therefore \int_1^x f(t)dt = 3x^2 + 2ax$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x) = 6x + 2a$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0 = 3 + 2a \quad \therefore a = -\frac{3}{2}$

따라서 $f(x) = 6x - 3$이므로

$f(1) = 6 - 3 = 3 \quad \therefore b = 3$

$\therefore 2a + b = 2\times\left(-\frac{3}{2}\right) + 3 = 0$

11

$f(x) = \int_0^x (3t^2 + 6t - 9)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$

$f'(x) = 0$에서 $x = -3$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x = -3$에서 극댓값, $x = 1$에서 극솟값을 가지므로

$M = f(-3) = \int_0^{-3} (3t^2 + 6t - 9)dt$

$= \left[t^3 + 3t^2 - 9t\right]_0^{-3} = 27$

$m = f(1) = \int_0^1 (3t^2 + 6t - 9)dt$

$= \left[t^3 + 3t^2 - 9t\right]_0^1 = -5$

$\therefore M + m = 22$

12

$f(x) = \int_1^x (2t^2 - 6t + 2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x) = 2x^2 - 6x + 2$

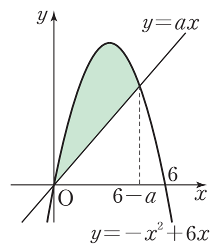
$\therefore \lim_{x\to 2} \frac{f(x^2) - f(4)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x^2) - f(4)}{x^2 - 4} \times (x+2)\right\}$

$= 4f'(4) = 4\times 10$

$= 40$

13

곡선 $y = -x^2 + 6x$와 직선 $y = ax$의 교점의 x좌표는 $-x^2 + 6x = ax$에서



$x^2 + (a-6)x = 0,\ x(x + a - 6) = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = 6 - a$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_0^{6-a} \{(-x^2 + 6x) - ax\}dx$

$= \int_0^{6-a} \{-x^2 + (6-a)x\}dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{6-a}{2}x^2\right]_0^{6-a} = \frac{(6-a)^3}{6}$

따라서 $\frac{(6-a)^3}{6} = \frac{32}{3}$이므로 $(6-a)^3 = 64$

$6 - a = 4$ ($\because a$는 실수) $\quad \therefore a = 2$

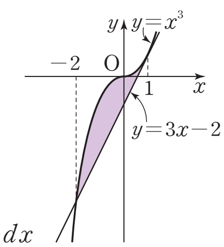
14

$f(x) = x^3$이라 하면 $f'(x) = 3x^2 \quad \therefore f'(1) = 3$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y - 1 = 3(x - 1) \quad \therefore y = 3x - 2$

곡선 $y = x^3$과 직선 $y = 3x - 2$의 교점의 x좌표는 $x^3 = 3x - 2$에서



$x^3 - 3x + 2 = 0,\ (x+2)(x-1)^2 = 0$

$\therefore x = -2$ 또는 $x = 1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_{-2}^1 \{x^3 - (3x - 2)\}dx = \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2)dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^1$

$= \frac{3}{4} - (-6) = \frac{27}{4}$

15

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$v(t) = 50 - 10t = 0$에서 $t = 5 \quad \therefore a = 5$

$b = 25 + \int_0^5 |50 - 10t|dt = 25 + \int_0^5 (50 - 10t)dt$

$= 25 + \left[50t - 5t^2\right]_0^5 = 25 + 125 = 150$

$\therefore a + b = 155$

16

$t = 3$에서의 점 P의 위치가 1이므로

$0 + \int_0^3 v(t)dt = \frac{1}{2}\times 2\times(-a) + \frac{1}{2}\times 1\times 3a = 1$

$\frac{1}{2}a = 1 \quad \therefore a = 2$

따라서 $t = 0$에서 $t = 4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^4 |v(t)|dt = \frac{1}{2}\times 2\times 2 + \frac{1}{2}\times 1\times 6 + 1\times 6 = 2 + 3 + 6 = 11$

2주 4일 교과서 대표 전략 ②

60, 61쪽

1 ④	2 31	3 ⑤	4 ①
5 ③	6 ④	7 ③	8 3

1

$F'(x)=f(x),\ G'(x)=f(x)$이므로

$F'(x)-G'(x)=0$

$\therefore F(x)-G(x)=\int\{F'(x)-G'(x)\}dx=C$

이때 $F(0)-G(0)=1-(-3)=4$이므로 $C=4$

$\therefore F(1)-G(1)=C=4$

2

주어진 함수의 그래프에서 $f(x)=\begin{cases}2x & (x<1)\\ 2 & (x\ge1)\end{cases}$이므로

$$\int_0^3(3x+1)f(x)dx=\int_0^1 2x(3x+1)dx+\int_1^3 2(3x+1)dx$$
$$=\int_0^1(6x^2+2x)dx+\int_1^3(6x+2)dx$$
$$=\Big[2x^3+x^2\Big]_0^1+\Big[3x^2+2x\Big]_1^3$$
$$=3+28=31$$

3

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\ne0$)라 하면

$$\int_{-2}^2 xf(x)dx=\int_{-2}^2 x(ax+b)dx=\int_{-2}^2(ax^2+bx)dx$$
$$=2\int_0^2 ax^2dx=2\Big[\frac{a}{3}x^3\Big]_0^2=\frac{16}{3}a$$

즉, $\frac{16}{3}a=16$이므로 $a=3$

$$\int_{-1}^1 x^2f(x)dx=\int_{-1}^1 x^2(ax+b)dx=\int_{-1}^1(ax^3+bx^2)dx$$
$$=2\int_0^1 bx^2dx=2\Big[\frac{b}{3}x^3\Big]_0^1=\frac{2}{3}b$$

즉, $\frac{2}{3}b=8$이므로 $b=12$

따라서 $f(x)=3x+12$이므로

$f(1)=3+12=15$

4

$\int_0^1 g(t)dt=a$ (a는 상수) …… ㉠

$\int_0^2 f(t)dt=b$ (b는 상수) …… ㉡

로 놓으면 $f(x)=2x-3+a,\ g(x)=4x+b$

$g(t)=4t+b$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_0^1 g(t)dt=\int_0^1(4t+b)dt=\Big[2t^2+bt\Big]_0^1=2+b$$

$\therefore 2+b=a$ …… ㉢

$f(t)=2t-3+a$를 ㉡의 좌변에 대입하면

$$\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2(2t-3+a)dt=\Big[t^2-3t+at\Big]_0^2=-2+2a$$

$\therefore -2+2a=b$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=-2$

따라서 $f(x)=2x-3,\ g(x)=4x-2$이므로

$f(0)+g(0)=-3+(-2)=-5$

5

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면 $f'(x)=2x+a$

$g(x)=\int_0^x tf'(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=xf'(x)=2x^2+ax$

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극값을 가지므로

$g'(2)=8+2a=0 \qquad \therefore a=-4$

즉, $g'(x)=2x^2-4x$이므로

$g(x)=\int(2x^2-4x)dx=\frac{2}{3}x^3-2x^2+C$

이때 $g(x)=\int_0^x tf'(t)dt$의 양변에 $x=0$을 대입하면

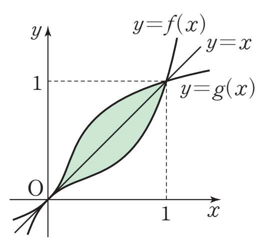
$g(0)=0 \qquad \therefore C=0$

따라서 $g(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2$이므로

$g(3)=18-18=0$

6

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 역함수 관계이므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 따라서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같으므로



$2x^3-2x^2+x=x$에서

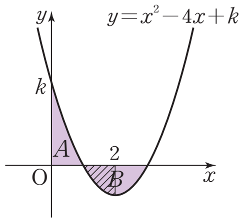
$2x^2(x-1)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=1$

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 도형의 넓이는

$$2\int_0^1\{x-(2x^3-2x^2+x)\}dx=2\int_0^1(-2x^3+2x^2)dx$$
$$=2\Big[-\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3\Big]_0^1$$
$$=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

7

곡선 $y=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고



$A:B=1:2$에서 $A=\frac{1}{2}B$이므로

A와 빗금친 부분의 넓이가 같다.

즉, $\int_0^2(x^2-4x+k)dx=0$이므로

$\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx\right]_0^2=0$, $\frac{8}{3}-8+2k=0$

따라서 $k=\frac{8}{3}$이므로

$3k=3\times\frac{8}{3}=8$

8

출발한 지 t초 후의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_p(t)$, $x_q(t)$라 하면

$x_p(a)=\int_0^a v_p(t)dt=\int_0^a(3t^2-2)dt=\left[t^3-2t\right]_0^a=a^3-2a$

$x_q(a)=\int_0^a v_q(t)dt=\int_0^a(4t+1)dt=\left[2t^2+t\right]_0^a=2a^2+a$

이때 두 점 P, Q가 만나므로

$a^3-2a=2a^2+a$, $a^3-2a^2-3a=0$

$a(a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=3\,(\because a>0)$

2주 누구나 합격 전략

62, 63쪽

1 ①	**2** ③	**3** ②	**4** ①
5 ③	**6** ④	**7** ②	**8** ③
9 ⑤	**10** ③		

1

$f(x)=\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C\right)'=-x^2+x$

$\therefore f(-1)=-1-1=-2$

2

$F(x)=xf(x)+x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+2x \qquad \therefore f'(x)=-2$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2)dx=-2x+C$

이때 $f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=-2x+2$이므로 $f(1)=0$

3

$f'(x)=2x-2$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x-2)dx=x^2-2x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 1)$을 지나므로

$1-2+C=1 \qquad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=x^2-2x+2$이므로

$f(2)=4-4+2=2$

4

도함수 $f'(x)$는 x절편이 0, 2이므로

$f'(x)=ax(x-2)$ (a는 음의 상수)로 놓으면

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(ax^2-2ax)dx$

$\quad=\frac{1}{3}ax^3-ax^2+C$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값, $x=2$에서 극댓값을 갖는다.

이때 극솟값이 4이므로 $f(0)=C=4$

$f(1)=6$에서 $\frac{1}{3}a-a+4=6 \qquad \therefore a=-3$

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2+4$이므로 $f(x)$의 극댓값은

$f(2)=-8+12+4=8$

5

$\int_0^1(x^3+x+1)dx+\int_1^2(x^3+x+1)dx$

$=\int_0^2(x^3+x+1)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^2$

$=4+2+2=8$

6

$\int_0^2 f(t)dt=k$ (k는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓으면 $f(x)=3x^2+2x+k$

$f(t)=3t^2+2t+k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2(3t^2+2t+k)dt$

$\qquad=\left[t^3+t^2+kt\right]_0^2=12+2k$

즉, $12+2k=k$이므로 $k=-12$

따라서 $f(x)=3x^2+2x-12$이므로

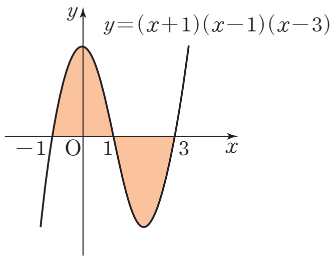
$f(2)=12+4-12=4$

7

$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\int_3^x f(t)dt=\lim_{x\to3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}$$
$$=F'(3)=f(3)$$
$$=27-6+1=22$$

8



곡선 $y=(x+1)(x-1)(x-3)$과 x축의 교점의 x좌표는

$(x+1)(x-1)(x-3)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)(x-3)dx+\int_1^3\{-(x+1)(x-1)(x-3)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-x+3)dx+\int_1^3(-x^3+3x^2+x-3)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{1}+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2-3x\right]_1^3$$
$$=4+4=8$$

9

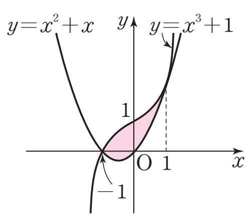
두 곡선의 교점의 x좌표는

$x^3+1=x^2+x$에서 $x^3-x^2-x+1=0$

$(x+1)(x-1)^2=0$

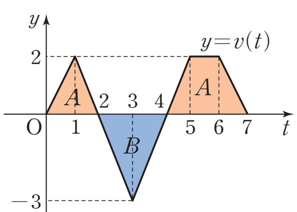
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{1}=\frac{5}{12}-\left(-\frac{11}{12}\right)=\frac{4}{3}$$

10



그림과 같이 t축 윗부분의 넓이를 A, 아랫부분의 넓이를 B라 하면

$$A=\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times(1+3)\times2=6$$

$$B=\frac{1}{2}\times2\times3=3$$

따라서 $t=0$에서 $t=7$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^7|v(t)|dt=A+B=9$$

참고 속도 함수의 그래프 해석하기

점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$의 그래프를 이용하여 다음 사실을 알 수 있다.

(1) 움직이는 물체가 정지할 때와 운동 방향을 바꿀 때는 속도가 0일 때이다. 또 움직이는 방향과 반대 방향으로 움직일 때는 속도 $v(t)$의 부호가 바뀔 때이다.

(2) 점 P가 출발지로 되돌아 올 때는 위치의 변화량이 0일 때이다. 즉, $v(t)$의 그래프에서 t축 윗부분의 넓이와 아랫부분의 넓이가 같을 때이다.

2주 창의·융합·코딩 전략

64~67쪽

1 880 L	**2** 풀이 참조	**3** ②	**4** 11
5 ⑤	**6** ④	**7** ④	**8** 민혁

1

t초 동안 물탱크에서 나온 물의 양을 $f(t)$ L라 하면

$f'(t)=t^3+3t$이므로

$$f(t)=\int(t^3+3t)dt=\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+C$$

이때 2초 동안 줄어든 물의 양이 10 L이므로

$f(2)=4+6+C=10$에서 $C=0$

$$\therefore f(t)=\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2$$

이때 $f(8)=1024+96=1120$이므로 8초 후 물탱크에 남아 있는 물의 양은

$2000-1120=880$ (L)

2

$f'(x)=2x^3-3x-5$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x^3-3x-5)dx=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2-5x+C'$$

이때 $f(0)=2$이므로 $C'=2$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2-5x+2$$

따라서 바른 답은

$$\int f(x)dx=\int\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2-5x+2\right)dx$$
$$=\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}x^2+2x+C$$

3

아동이 단어 암기를 시작한 지 10분 후의 기억량은

$$\int_0^{10} f(t)dt=\int_0^{10}(-0.001t^4+0.8t)dt=\left[-\frac{1}{5000}t^5+\frac{2}{5}t^2\right]_0^{10}$$
$$=-20+40=20$$

4

$x^3+ax^2+b=\int_{-1}^{x}(x-t)f(t)dt$에서

$x^3+ax^2+b=x\int_{-1}^{x}f(t)dt-\int_{-1}^{x}tf(t)dt$ …… ㉠

양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+2ax=\int_{-1}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$ …… ㉡

다시 양변을 x에 대하여 미분하면 $6x+2a=f(x)$

㉠에 $x=-1$을 대입하면 $-1+a+b=0$ …… ㉢

㉡에 $x=-1$을 대입하면 $3-2a=0$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하면 풀면 $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=6x+2a=6x+3$이므로

$a-b+f(1)=\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)+9=11$

5

$\int_{-1}^{0}f(x)dx=-15$, $\int_{0}^{1}f(x)dx=11$이므로

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx=-15+11=-4$

즉, $F(1)-F(-1)=-4$이므로

$6-F(-1)=-4$

$\therefore F(-1)=10$

6

$f(x)=x^3-3x^2+x+3$에서 $f'(x)=3x^2-6x+1$

$\therefore f'(0)=1$

레일 위의 점 $(0, 3)$에서의 접선의 방정식은

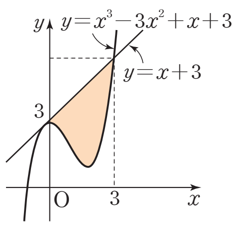
$y-3=x \qquad \therefore y=x+3$

이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+3$의 교점의 x좌표는

$x^3-3x^2+x+3=x+3$에서

$x^3-3x^2=0$, $x^2(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$



따라서 레이저와 롤러코스터의 레일로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^3\{(x+3)-(x^3-3x^2+x+3)\}dx=\int_0^3(-x^3+3x^2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_0^3=\frac{27}{4}$$

7

$$v'(t)=\begin{cases}3 & (0<t<2)\\ 0 & (2<t<10)\\ -2 & (t>10)\end{cases}$$이므로

$$v(t)=\begin{cases}3t+C & (0\le t<2)\\ C_1 & (2\le t<10)\\ -2t+C_2 & (t\ge 10)\end{cases}$$

멈춰 있던 엘리베이터이므로

$v(0)=0$에서 $C=0$

속도의 그래프는 연속이므로

$\lim_{t\to 2-}v(t)=\lim_{t\to 2+}v(t)=v(2)$에서 $C_1=6$

$\lim_{t\to 10-}v(t)=\lim_{t\to 10+}v(t)=v(10)$에서

$C_1=-20+C_2 \qquad \therefore C_2=26$

엘리베이터가 정지했을 때 $v=0$이므로

$-2t+26=0 \qquad \therefore t=13$

따라서 멈춰 있던 엘리베이터가 출발하여 정지할 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^2 3t\,dt+\int_2^{10}6\,dt+\int_{10}^{13}(-2t+26)dt$$
$$=\left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^2+\left[6t\right]_2^{10}+\left[-t^2+26t\right]_{10}^{13}$$
$$=6+48+9=63\ (\mathrm{m})$$

8

성진: 출발한 후 1초 동안 $v(t)=0$인 구간이 없으므로 점 P는 1초 동안 멈춘 적이 없다.

미정: 점 P의 속도 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다. 점 P의 운동 방향은 $t=2$, $t=6$, $t=8$일 때 바뀌므로 움직이는 동안 운동 방향을 3번 바꾼다.

민혁: $t=1$일 때 점 P의 위치는

$$\int_0^1 v(t)dt=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$$

$t=3$일 때 점 P의 위치는

$$\int_0^3 v(t)dt=\int_0^2 v(t)dt+\int_2^3 v(t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times1\times(-1)=\frac{1}{2}$$

따라서 점 P는 $t=1$일 때와 $t=3$일 때 같은 위치에 있다.

선희: $\int_0^{3.5}v(t)dt=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^{3.5}v(t)dt=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

이므로 $t=3.5$일 때 원점을 다시 지난다. 한편 $3.5<t\le9$일 때 $\int_0^t v(t)dt<0$이므로 3.5초 이후에는 원점을 다시 지나지 않는다.

따라서 원점을 다시 지나는 순간은 1번 있다.

따라서 옳은 말을 한 사람은 민혁이다.

신유형·신경향·서술형 전략

70~73쪽

1 $(0, 3]$	**2** ⑤	**3** ②	**4** ③
5 풀이 참조	**6** ④	**7** ⑤	**8** ③

1

$f(t)=\frac{1}{54}t^3-\frac{1}{3}t^2+\frac{3}{2}t+7$에서

$f'(t)=\frac{1}{18}t^2-\frac{2}{3}t+\frac{3}{2}=\frac{1}{18}(t^2-12t+27)$

$=\frac{1}{18}(t-3)(t-9)$

$f'(t)=0$에서 $t=3$ 또는 $t=9$

$0<t\le6$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	6
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	극대	↘	

따라서 혈중 젖산 농도가 증가하는 시각 t의 값의 범위는

$(0, 3]$

2

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=5$에서 극대, $x=9$에서 극소이므로

$f'(5)=0$, $f'(9)=0$

$f'(5)=0$에서 $75+10a+b=0$

$\therefore 10a+b=-75$ ······ ㉠

$x=9$에서 극솟값을 가지므로

$f'(9)=0$에서 $243+18a+b=0$

$\therefore 18a+b=-243$ ······ ㉡

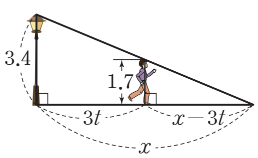
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-21$, $b=135$

따라서 $f(x)=x^3-21x^2+135x+c$이므로 극댓값과 극솟값의 차는

$f(5)-f(9)=(275+c)-(243+c)=32$

3

오른쪽 그림과 같이 가로등의 바로 아래에서 인철이의 그림자 끝까지의 거리를 x m라 하면 t초 동안 인철이가 움직인 거리가 $3t$ m이므로



$x:3.4=(x-3t):1.7$

$3.4(x-3t)=1.7x$, $2(x-3t)=x$

$\therefore x=6t$

따라서 인철이의 그림자 끝이 움직이는 속도는

$\frac{dx}{dt}=6$ (m/s)

4

t초 후의 속도를 $v=f'(t)$라 하면

① $0<t<1$일 때 $f'(t)>0$, $1<t<2$일 때 $f'(t)<0$이므로 1초 후 운동 방향이 바뀐다.

② t의 값이 1, 2, 3, 5, 6, 7일 때, 운동 방향이 바뀐다.

③ $1<t<2$, $3<t<5$, $6<t<7$에서 $f'(t)<0$이므로 음의 방향으로 움직인다.

④ 출발 후 5초 후의 위치와 7초 후의 위치는 -2이다.

⑤ ③에서 8초 동안 음의 방향으로 움직인 시간은 4초이다.

5

$f(x)=\begin{cases}3-x & (x\ge1)\\4x-2 & (x<1)\end{cases}$에서

$f(x-1)=\begin{cases}3-(x-1) & (x-1\ge1)\\4(x-1)-2 & (x-1<1)\end{cases}$

$=\begin{cases}4-x & (x\ge2)\\4x-6 & (x<2)\end{cases}$ ······ [40 %]

$xf(x-1)=\begin{cases}4x-x^2 & (x\ge2)\\4x^2-6x & (x<2)\end{cases}$ ······ [20 %]

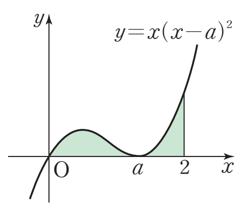
$\therefore \int_0^3 xf(x-1)dx=\int_0^2(4x^2-6x)dx+\int_2^3(4x-x^2)dx$

$=\left[\frac{4}{3}x^3-3x^2\right]_0^2+\left[2x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_2^3$

$=-\frac{4}{3}+\frac{11}{3}=\frac{7}{3}$ ······ [40 %]

6

함수 $y=x(x-a)^2$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 색칠한 도형의 넓이는



$\int_0^2 x(x-a)^2dx$

$=\int_0^2(x^3-2ax^2+a^2x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2a}{3}x^3+\frac{a^2}{2}x^2\right]_0^2$

$=2a^2-\frac{16}{3}a+4=2\left(a-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{4}{9}$

따라서 구하는 넓이의 최솟값은 $\frac{4}{9}$이다.

7

직선의 방정식을 $y=h(x)$로 놓으면

$S_1=\int_0^a x(x-a)(x-b)dx$

$S_2=\int_0^a\{g(x)-h(x)\}dx=3\int_0^a x(x-a)(x-b)dx$

즉, $S_2=3S_1$이므로

$S_1+S_2=4S_1=100$ $\therefore S_1=25$

따라서 $S_1=25$, $S_2=75$이므로

$S_2-S_1=75-25=50$

8

(i) $t=1$일 때, $\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 g(x)dx$

(ii) $t=2$일 때, 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 g(x)dx$

(iii) $t=3$일 때, $\int_0^3 f(x)dx>\int_0^3 g(x)dx$

ㄱ. 출발한 후 1시간 동안 B가 A보다 앞서 있다.

ㄴ. 출발한 후 2시간 후부터는 A가 B보다 앞서 있다.

ㄷ. 출발한 후 2시간 후에 A와 B는 만났다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

적중 예상 전략 1회

74~77쪽

1 ⑤	**2** ②	**3** ①	**4** ③
5 ②	**6** ①	**7** ②	**8** ③
9 ②	**10** ⑤	**11** ②	**12** ③
13 4	**14** 23	**15** 67	**16** 15

1

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+4$에서 $f'(x)=6x^2+2ax+b$

이때 $f'(x)$의 부호가 $x=-1$, $x=3$의 좌우에서 바뀌므로

$f'(-1)=f'(3)=0$

즉, 이차방정식 $6x^2+2ax+b=0$의 두 근이 -1, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+3=-\frac{a}{3}$, $-1\times3=\frac{b}{6}$ $\therefore a=-6, b=-18$

$\therefore a-b=12$

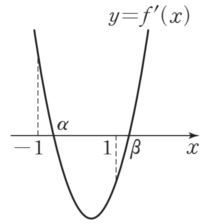
2

$f(x)=x^3+2ax^2-4a^2x$에서 $f'(x)=3x^2+4ax-4a^2$

이차방정식 $3x^2+4ax-4a^2=0$의 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면

$-1<\alpha<1$, $\beta>1$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$f'(-1)=3-4a-4a^2>0$

$4a^2+4a-3<0$, $(2a+3)(2a-1)<0$

$\therefore -\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2}$ ...... ㉠

$f'(1)=3+4a-4a^2<0$

$4a^2-4a-3>0$, $(2a+1)(2a-3)>0$

$\therefore a<-\frac{1}{2}$ 또는 $a>\frac{3}{2}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-\frac{3}{2}<a<-\frac{1}{2}$

3

$f(x)=x^3+ax^2+bx+\frac{1}{2}$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이때 이차방정식 $3x^2+2ax+b=0$의 두 근이 -2, 1이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+1=-\frac{2a}{3}$, $-2\times1=\frac{b}{3}$ $\therefore a=\frac{3}{2}, b=-6$

$f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{1}{2}$이므로

$f'(x)=3x^2+3x-6=3(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{21}{2}$	↘	-3	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 -3을 갖는다.

4

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에서 $\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로 $\lim_{x\to3}f(x)=0$

즉, $f(3)=0$이므로

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=3$ $\therefore f'(3)=3$

조건 (나)에서 $x=0$에서 극댓값을 가지므로

$f'(0)=b=0$ $\therefore f'(x)=3x^2+2ax$

$f(3)=0$에서 $27+9a+c=0$

$\therefore 9a+c=-27$ ...... ㉠

$f'(3)=0$에서 $27+6a=3$, $6a=-24$ $\therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면

$-36+c=-27$ $\therefore c=9$

따라서 $f(x)=x^3-4x^2+9$이므로

$f(2)=8-16+9=1$

5

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 -4, 0, 2, 4이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$가 극솟값을 갖는 x의 값은 -4, 2이고 극댓값을 갖는 x의 값은 0, 4이므로

$a=2$, $b=2$ $\quad\therefore a+2b=6$

6

$f(x)=x^4-2x^2+a$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a+8$	↘	$a-1$	↗	a	↘	$a-1$	↗	$a+8$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-2$, $x=2$에서 최댓값 $a+8$,

$x=-1$, $x=1$에서 최솟값 $a-1$

을 갖는다. 이때 최댓값과 최솟값의 합이 13이므로

$(a+8)+(a-1)=13$, $2a=6$

$\therefore a=3$

7

$f(x)=2ax^3+3ax^2+b$에서

$f'(x)=6ax^2+6ax=6ax(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

닫힌구간 $[-2, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-4a+b$	↗	$a+b$	↘	b	↗	$5a+b$

$a>0$이므로 함수 $f(x)$는

$x=1$에서 최댓값 $5a+b$,

$x=-2$에서 최솟값 $-4a+b$

를 갖는다.

이때 최댓값이 3이고 최솟값이 -6이므로

$5a+b=3$, $-4a+b=-6$

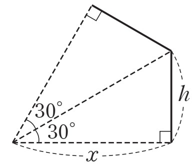
두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-2$ $\quad\therefore a+b=-1$

8

$x>0$, $12-2x>0$에서 $0<x<6$

각 꼭짓점에서 잘라 내는 사각형은 한 내각의 크기가 $30°$인 합동인 두 직각삼각형으로 나눌 수 있으므로



$\tan 30°=\dfrac{h}{x}$, 즉 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

삼각기둥의 부피를 $f(x)$라 하면

$f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(12-2x)^2 h$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(12-2x)^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

$=x^3-12x^2+36x$

$f'(x)=3x^2-24x+36=3(x-2)(x-6)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=6$

$0<x<6$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(6)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	32	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 부피의 최댓값은 32이다.

9

$f(x)=x^3-3x^2-a+5$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

주어진 방정식이 한 실근과 중근을 가지려면 $f(0)f(2)=0$에서

$(-a+5)(-a+1)=0$ $\quad\therefore a=1$ 또는 $a=5$

따라서 모든 a의 값의 합은

$1+5=6$

참고

극댓값과 극솟값을 모두 갖는 삼차함수의 그래프에서 극댓값 또는 극솟값이 x축과 접하는 경우 반드시 x축의 다른 한 점에서 그래프가 만나게 된다. 따라서 위 문제와 같이 중근을 가지는 경우만 확인하면 나머지 한 실근을 가지는 경우는 확인하지 않아도 된다.

10

$x^4+a>4x+2$에서 $x^4-4x+a-2>0$

$f(x)=x^4-4x+a-2$라 하면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

이때 $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$a-5$	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)>0$이려면

$f(1)=a-5>0$ $\quad\therefore a>5$

따라서 정수 a의 최솟값은 6이다.

11

$h(x)=f(x)-g(x)=x^4-6x^2-8x+a$라 하면

$h'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$		$\searrow$	$a-24$	$\nearrow$

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 주어진 부등식이 성립하려면

$h(2)=a-24>0$ $\quad\therefore a>24$

따라서 정수 a의 최솟값은 25이다.

12

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_1, v_2라 하면

$v_1=t^2+9$, $v_2=4t$

두 점 P, Q의 시각 t에서의 가속도를 각각 a_1, a_2라 하면

$a_1=2t$, $a_2=4$

두 점 P, Q의 가속도가 같아지는 시각은

$2t=4$에서 $t=2$ $\quad\therefore a=2$

이때 두 점 P, Q의 위치는 각각

$f(2)=\frac{8}{3}+18-\frac{8}{3}=18$, $g(2)=8-5=3$

이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는 $b=|18-3|=15$

$\therefore a+b=17$

13

$f(x)=-x^3+ax^2+ax-1$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+a$ …… [10 %]

삼차항의 계수가 음수이므로 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다. …… [30 %]

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이므로

$-3x^2+2ax+a\le 0$, $3x^2-2ax-a\ge 0$

이차방정식 $3x^2-2ax-a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(-3a)\le 0$, $a(a+3)\le 0$

$\therefore -3\le a\le 0$ …… [50 %]

따라서 정수 a의 개수는 -3, -2, -1, 0의 4이다. …… [10 %]

14

$f(x)=x^4+ax^3+bx+c$라 하면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+b$

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 점 $(-1, 0)$, $(2, 0)$을 지나므로

$f'(-1)=-4+3a+b=0$

$f'(2)=32+12a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=16$

$\therefore f(x)=x^4-4x^3+16x+c$ …… [50 %]

이때 함수 $y=f(x)$는 $x=-1$에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 극솟값을 갖고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로 극솟값은 0이다. …… [20 %]

따라서 $f(-1)=0$이므로

$f(-1)=1+4-16+c=0$ $\quad\therefore c=11$ …… [20 %]

$\therefore a+b+c=-4+16+11=23$ …… [10 %]

15

$x^3-2x^2-4x+a=0$에서 $a=-x^3+2x^2+4x$

방정식 $x^3-2x^2-4x+a=0$의 실근은 곡선 $y=-x^3+2x^2+4x$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다. …… [20 %]

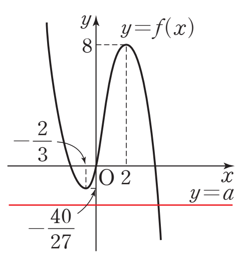
$f(x)=-x^3+2x^2+4x$라 하면

$f'(x)=-3x^2+4x+4=-(3x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$ …… [30 %]

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{40}{27}$	$\nearrow$	8	$\searrow$



주어진 방정식이 한 개의 양의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 오직 한 점에서 만나고 교점의 x좌표가 양수이어야 한다.

$\therefore a<-\frac{40}{27}$ …… [40 %]

따라서 $m=27$, $n=40$이므로

$m+n=67$ …… [10 %]

16

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도는

$P'(t)=4t^3-24t^2+36t$, $Q'(t)=m$ …… [20 %]

$P'(t)=Q'(t)$에서 $4t^3-24t^2+36t=m$

$f(t)=4t^3-24t^2+36t$라 하면

$f'(t)=12t^2-48t+36=12(t-1)(t-3)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$ …… [30 %]

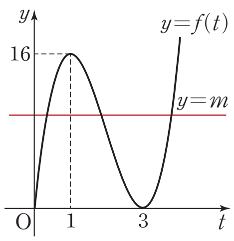
$t\ge0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

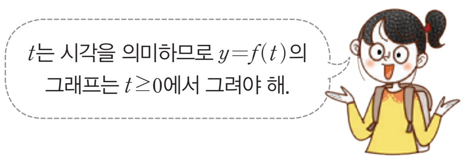
t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	0	↗	16	↘	0	↗

함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=m$이 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 오른쪽 그림에서 실수 m의 값의 범위는

$0<m<16$ …… [40 %]

따라서 정수 m의 개수는 $1, 2, 3, 4, \cdots, 15$의 15이다. …… [10 %]





적중 예상 전략 2회

78~81쪽

1 ①	**2** ②	**3** ⑤	**4** ③
5 ①	**6** ③	**7** ③	**8** ④
9 ②	**10** ②	**11** ①	**12** ④
13 54	**14** 32	**15** 8	**16** $\frac{3}{4}$

1

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+2}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}f'(1)$$

$f(x)=\int(3x^2-4x+7)dx$에서

$f'(x)=3x^2-4x+7$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{1}{3}f'(1)=\frac{1}{3}\times(3-4+7)=2$

2

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 가지므로

$f'(0)=0, f(0)=0$

$f'(x)=3x^2-6x+a$에서 $f'(0)=a=0$

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-6x)dx$$

$$=x^3-3x^2+C$$

$f(0)=0$에서 $C=0$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2$

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 -4를 갖는다.

3

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2 & (x\ge1)\\ 4x-1 & (x<1)\end{cases}$$에서

$$f(x)=\begin{cases}x^3+C_1 & (x\ge1)\\ 2x^2-x+C_2 & (x<1)\end{cases}$$

$f(2)=10$에서 $8+C_1=10$ $\quad\therefore C_1=2$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}(x^3+2)=\lim_{x\to1-}(2x^2-x+C_2)=f(1)$에서

$3=1+C_2$ $\quad\therefore C_2=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^3+2 & (x\ge1)\\ 2x^2-x+2 & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(-2)=8-(-2)+2=12$

4

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$에 $x=0, y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0$ $\quad\therefore f(0)=0$

$f'(0)=2$이므로

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(0)+f(h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=2 \quad\cdots\cdots ㉠$$

도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+2x\right\}=2x+2\ (\because ㉠)$$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x+2)dx=x^2+2x+C$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=x^2+2x$이므로

$f(2)=4+4=8$

5

조건 (가)에서

$f(x)=(x^3+ax-1)'=3x^2+a,\ f'(x)=6x$

조건 (나)에서

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\times(-1)=-f'(1)$

즉, $-f'(1)=a-3$이므로

$-6=a-3 \qquad \therefore a=-3$

따라서 $f(x)=3x^2-3$이므로

$f(2)=12-3=9$

6

$\int_{-1}^{3}(2x-1)^2dx-\int_{-1}^{0}(2x-1)^2dx=\int_{0}^{3}(2x-1)^2dx$

이므로

(주어진 식)$=\int_0^3(2x+1)^2dx-\int_0^3(2x-1)^2dx$

$=\int_0^3\{(4x^2+4x+1)-(4x^2-4x+1)\}dx$

$=\int_0^3 8x\,dx=\Big[4x^2\Big]_0^3=36$

7

삼차함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 3, $x=1$에서 극솟값 -1을 가지므로

$f'(x)=a(x+1)(x-1)=ax^2-a$ (a는 상수)로 놓으면

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(ax^2-a)dx=\frac{1}{3}ax^3-ax+C$

$f(-1)=3$에서

$-\frac{1}{3}a+a+C=3 \qquad \therefore 2a+3C=9$ …… ㉠

$f(1)=-1$에서

$\frac{1}{3}a-a+C=-1 \qquad \therefore 2a-3C=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ C=1$

따라서 $f(x)=x^3-3x+1$이므로

$\int_{-3}^{3}f(x)dx=\int_{-3}^{3}(x^3-3x+1)dx=2\int_0^3 1\,dx$

$=2\Big[x\Big]_0^3=2\times3=6$

8

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=6x^2-k$

$f(t)=6t^2-k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

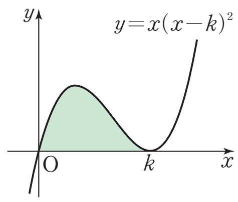
$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(6t^2-k)dt=\Big[2t^3-kt\Big]_0^1=2-k$

즉, $2-k=k$이므로 $k=1$

따라서 $f(x)=6x^2-1$이므로

$f(2)=24-1=23$

9



곡선 $y=x(x-k)^2$과 x축의 교점의 x좌표는 $x(x-k)^2=0$에서

$x=0$ 또는 $x=k$

따라서 곡선 $y=x(x-k)^2$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^k|x(x-k)^2|dx=\int_0^k x(x-k)^2dx$

$=\int_0^k(x^3-2kx^2+k^2x)dx$

$=\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}kx^3+\frac{k^2}{2}x^2\Big]_0^k$

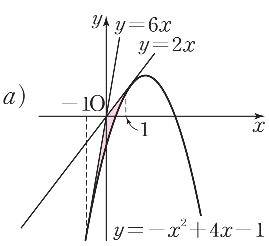
$=\frac{1}{4}k^4-\frac{2}{3}k^4+\frac{1}{2}k^4=\frac{1}{12}k^4$

이때 $\frac{1}{12}k^4=\frac{4}{3}$이므로

$k^4=16 \qquad \therefore k=2\ (\because k>0)$

10

$f(x)=-x^2+4x-1$이라 하면 $f'(x)=-2x+4$



접점의 좌표를 $(a,\ -a^2+4a-1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 방정식은

$y-(-a^2+4a-1)=(-2a+4)(x-a)$

$\therefore y=(-2a+4)x+a^2-1$

이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$a^2-1=0,\ (a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 접선의 방정식은 $y=6x,\ y=2x$이므로 구하는 도형의 넓이는

$\int_{-1}^{0}\{6x-(-x^2+4x-1)\}dx+\int_0^1\{2x-(-x^2+4x-1)\}dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)dx+\int_0^1(x^2-2x+1)dx$

$=\Big[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\Big]_{-1}^{0}+\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\Big]_0^1$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

11

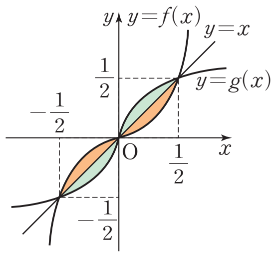
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의

교점의 x좌표는 $x^3+\frac{3}{4}x=x$에서

$4x^3-x=0$, $x(2x+1)(2x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$2\left\{\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(x^3-\frac{1}{4}x\right)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}x-x^3\right)dx\right\}$

$=2\left\{\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{8}x^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left[\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{\frac{1}{2}}\right\}$

$=2\left(\frac{1}{64}+\frac{1}{64}\right)=\frac{1}{16}$

12

운동 방향이 바뀔 때의 속도는 0이므로

$v(t)=3t^2-2t=0$에서 $t=\frac{2}{3}$ $(\because t>0)$

따라서 $t=0$에서 $t=\frac{2}{3}$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_{0}^{\frac{2}{3}}|3t^2-2t|dt=\int_{0}^{\frac{2}{3}}(-3t^2+2t)dt=\left[-t^3+t^2\right]_{0}^{\frac{2}{3}}=\frac{4}{27}$

13

$f(x)=|x^2-9|$라 하면

$x^2-9=(x+3)(x-3)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=3$ ...... [10 %]

$f(x)=\begin{cases} x^2-9 & (x<-3 \text{ 또는 } x\geq 3) \\ -x^2+9 & (-3\leq x<3) \end{cases}$ ...... [30 %]

$\therefore \int_{0}^{6}|x^2-9|dx=\int_{0}^{3}(-x^2+9)dx+\int_{3}^{6}(x^2-9)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+9x\right]_{0}^{3}+\left[\frac{1}{3}x^3-9x\right]_{3}^{6}$

$=18+36=54$ ...... [60 %]

14

조건 (가)에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=0$

즉, $f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$ $\quad\therefore f'(1)=0$ ...... [20 %]

조건 (나)에서 $f(3)=-8$, $f'(3)=0$이므로

$f'(x)=a(x-1)(x-3)=ax^2-4ax+3a$ (a는 상수)로 놓으면

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(ax^2-4ax+3a)dx$

$=\frac{1}{3}ax^3-2ax^2+3ax+C$ ...... [40 %]

$f(1)=0$에서

$\frac{1}{3}a-2a+3a+C=0$ $\quad\therefore 4a+3C=0$ ...... ㉠

$f(3)=-8$에서

$9a-18a+9a+C=-8$ $\quad\therefore C=-8$

$C=-8$을 ㉠에 대입하면 $a=6$

따라서 $f(x)=2x^3-12x^2+18x-8$이므로

$f(5)=250-300+90-8=32$ ...... [40 %]

15

$\int_{1}^{x}(x-t)f(t)dt=x^3-x^2+ax+b$에서

$x\int_{1}^{x}f(t)dt-\int_{1}^{x}tf(t)dt=x^3-x^2+ax+b$ ...... ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{1}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-2x+a$

$\therefore \int_{1}^{x}f(t)dt=3x^2-2x+a$ ...... ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-2$ $\quad\therefore f(2)=12-2=10$ ...... [40 %]

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1-1+a+b$ $\quad\therefore a+b=0$ ...... ㉢

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=3-2+a$ $\quad\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉢에 대입하면 $b=1$ ...... [40 %]

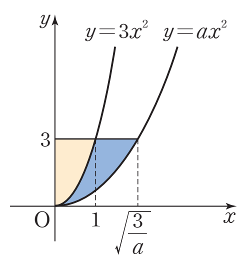
$\therefore a-b+f(2)=-1-1+10=8$ ...... [20 %]

16

$3x^2=3$에서 $x=1$ $(\because x\geq0)$이므로 곡선 $y=3x^2$ $(x\geq0)$과 y축 및 직선 $y=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$3-\int_{0}^{1}3x^2dx=3-\left[x^3\right]_{0}^{1}=3-1=2$

...... [40 %]



$ax^2=3$에서 $x=\sqrt{\frac{3}{a}}$ $(\because x\geq0)$이므로

곡선 $y=ax^2$ $(x\geq0)$과 y축 및 직선 $y=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$3\sqrt{\frac{3}{a}}-\int_{0}^{\sqrt{\frac{3}{a}}}ax^2dx=3\sqrt{\frac{3}{a}}-\left[\frac{1}{3}ax^3\right]_{0}^{\sqrt{\frac{3}{a}}}$

$=3\sqrt{\frac{3}{a}}-\frac{1}{3}a\times\frac{3}{a}\sqrt{\frac{3}{a}}$

$=2\sqrt{\frac{3}{a}}$ ...... [40 %]

$2\sqrt{\frac{3}{a}}=4$에서 $\sqrt{\frac{3}{a}}=2$

$\frac{3}{a}=4$ $\quad\therefore a=\frac{3}{4}$ ...... [20 %]

Memo

Memo

Memo