정답과 해설

1주 1일 개념 돌파 전략 ①

9, 11쪽

1-2 240	**2-2** 125
3-2 10	**4-2** 9
5-2 70	**6-2** 63

1-2

회장과 부회장을 한 사람으로 생각하여 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

회장과 부회장이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times2=240$

2-2

각 자리에 사용할 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9이므로 각 자리의 숫자가 모두 홀수로만 되어 있는 세 자리 자연수의 개수는 서로 다른 숫자 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

$\therefore {}_5\Pi_3=5^3=125$

3-2

a가 2개, b가 3개이므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!3!}=\dfrac{5\times4\times\cancel{3\times2\times1}}{2\times1\times\cancel{3\times2\times1}}=10$

4-2

서로 다른 2개의 접시에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_8={}_{2+8-1}C_8={}_9C_8={}_9C_1=9$

5-2

$\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)^7$의 전개식의 일반항은

$$\begin{aligned}{}_7C_r(2x)^{7-r}\left(\frac{1}{2x}\right)^r&={}_7C_r(2x)^{7-r}(2x)^{-r}\\&={}_7C_r(2x)^{7-2r}\\&={}_7C_r2^{7-2r}x^{7-2r}\end{aligned}$$

$x(=x^1)$항은 $7-2r=1$에서 $r=3$일 때이므로 구하는 x의 계수는

${}_7C_3\times2^1=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times2=70$

6-2

${}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6=2^6$이므로

${}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6=2^6-1=63$

1주 1일 개념 돌파 전략 ②

12~13쪽

1 ②	**2** ④	**3** ③	**4** ①
5 ②	**6** ④		

1

주연배우 2명을 한 사람으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

주연배우 2명끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times2=12$

2

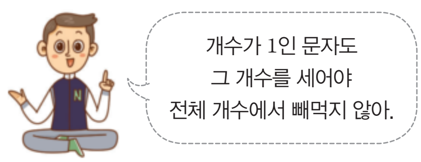
서로 다른 3개의 그릇에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$

3

c는 1개, o는 1개, f는 2개, e는 2개이므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{1!1!2!2!}=\dfrac{6\times5\times4\times3\times\cancel{2\times1}}{1\times1\times2\times1\times\cancel{2\times1}}=180$



4

$(a+b+c)^5$

$=(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$

를 전개할 때 생기는 서로 다른 항은

$a^5, a^4b, a^4c, \cdots, c^5$

으로 모두 5차항이다.

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c 중에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

5

$\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r(x^2)^{6-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_6C_rx^{12-2r}x^{-r}={}_6C_rx^{12-3r}$

상수항은 $12-3r=0$일 때이므로 $r=4$

따라서 구하는 상수항은

${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

6

$\log_2 (\underbrace{{}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}}_{2^{2n}})=82$에서

$\log_2 2^{2n}=2n=82$이므로 $n=41$

1주 2일 필수 체크 전략 ①

14~17쪽

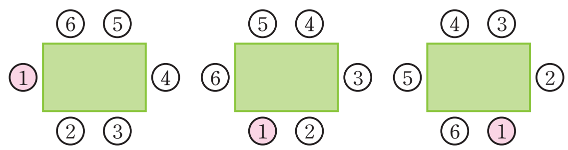
1-1 360	**1-2** ④
2-1 144	**2-2** ④
3-1 98	**3-2** ②
4-1 ③	**4-2** 210

1-1

6명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

이때, 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

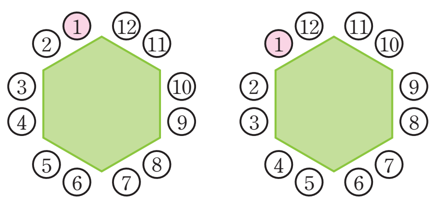
$120\times3=360$

1-2

12명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(12-1)!=11!$

이때, 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 정육각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는 $11!\times2$

2-1

정오각뿔의 밑면을 칠하는 경우의 수는 6이고, 밑면에 칠한 색을 제외한 나머지 5가지 색을 옆면에 칠하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times24=144$

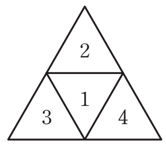
2-2

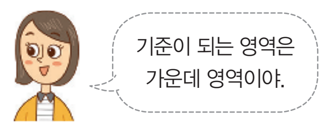
서로 다른 7가지 색 중에서 4가지 색을 고르는 경우의 수는

${}_7C_4={}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

다음 그림의 가운데 영역 1을 칠하는 경우의 수는 4이고, 나머지 영역인 2, 3, 4를 칠하는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$





따라서 구하는 경우의 수는

$35\times4\times2=280$

3-1

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

1, 2를 제외한 3개의 숫자 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$125-27=98$

3-2

한 자리 자연수의 개수는 4

두 자리 자연수의 개수는 $4\times{}_5\Pi_1=4\times5=20$

세 자리 자연수의 개수는 $4\times{}_5\Pi_2=4\times5^2=100$

네 자리 자연수 중에서 천의 자리의 숫자가 1인 자연수의 개수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 2000보다 작은 자연수의 개수는

$4+20+100+125=249$

이므로 250번째 자연수는 2000이다.

4-1

인형 4개를 뽑는 경우는

(A, B, B, C), (A, B, C, C), (A, C, C, C)

(i) (A, B, B, C)일 때, $\frac{4!}{2!}=12$

(ii) (A, B, C, C)일 때, $\frac{4!}{2!}=12$

(iii) (A, C, C, C)일 때, $\frac{4!}{3!}=4$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$12+12+4=28$

4-2

3, 4, 5는 순서가 정해져 있으므로 3, 4, 5를 모두 a로 생각하여 1, 1, 2, 2, a, a, a의 7개를 일렬로 나열한 다음 첫 번째 a는 3, 두 번째 a는 4, 세 번째 a는 5로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!2!3!}=210$

1주 2일 필수 체크 전략 ②

18~19쪽

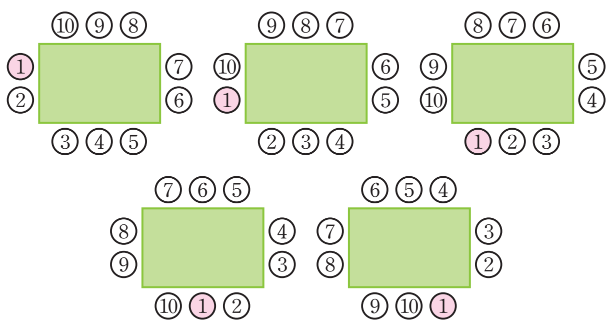
1 ②	**2** ②	**3** ⑤	**4** ④
5 ⑤	**6** ③		

1

10명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(10-1)!=9!$

이때, 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 5가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$5\times9!$

2

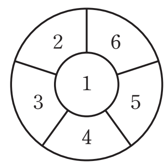
서로 마주 보는 영역에 같은 색을 칠하므로 구하는 경우의 수는 서로 다른 5가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

3

오른쪽 그림의 가운데 영역 1을 칠하는 경우의 수는 6이고, 나머지 영역인 2, 3, 4, 5, 6을 칠하는 경우의 수는



$(5-1)!=4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times24=144$

4

2200보다 작은 자연수는 1□□□ 또는 20□□ 또는 21□□ 꼴이다.

(i) 1□□□ 꼴의 자연수

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 각각 0, 1, 2, 3, 4가 중복하여 올 수 있으므로 그 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

(ii) 20□□ 꼴의 자연수

십의 자리, 일의 자리에는 각각 0, 1, 2, 3, 4가 중복하여 올 수 있으므로 그 경우의 수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

(iii) 21□□ 꼴의 자연수

십의 자리, 일의 자리에는 각각 0, 1, 2, 3, 4가 중복하여 올 수 있으므로 그 경우의 수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$125+25+25=175$

5

한 자리 자연수의 개수는 5

두 자리 자연수의 개수는

$5\times{}_6\Pi_1=5\times6=30$

세 자리 자연수의 개수는

$5\times{}_6\Pi_2=5\times6^2=180$

네 자리 자연수 중에서 천의 자리의 숫자가 1인 자연수의 개수는

${}_6\Pi_3=6^3=216$

네 자리 자연수 중에서 천의 자리의 숫자가 2인 자연수의 개수는

${}_6\Pi_3=6^3=216$

따라서 3000보다 작은 자연수의 개수는

$5+30+180+216+216=647$

이므로 3000은 648번째 자연수이다.

6

여학생 3명을 일렬로 나열하는 경우의 수는

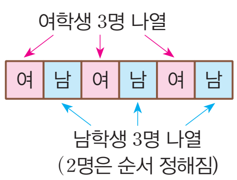
$3!=6$

동우와 정빈이는 순서가 정해져 있으므로 동우와 정빈이를 같은 것으로 생각하여 남학생 3명을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times3=18$



1주 3일 필수 체크 전략 ①

20~23쪽

1-1 64	**1-2** ④
2-1 3	**2-2** ②
3-1 364	**3-2** ⑤
4-1 301	**4-2** ③

1-1

$f(1)=3$으로 고정되어 있으므로 함수 f의 개수는 $\{2, 3, 4\}$에서 $Y=\{0, 1, 2, 3\}$으로의 함수의 개수와 같다.

따라서 구하는 함수의 개수는 공역의 원소 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

1-2

$f(a)\le f(b)\le f(c)$를 만족시키려면 공역 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 작은 수부터 차례로 정의역 X의 원소 a, b, c에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는 공역의 원소 5개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

2-1

$\left(ax-\dfrac{1}{x^2}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(ax)^{4-r}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^r={}_4C_r\,a^{4-r}x^{4-r}(-1)^r x^{-2r}$

$={}_4C_r\,a^{4-r}(-1)^r x^{4-3r}$

$x^{4-3r}=x^1$에서 $4-3r=1$ $\quad\therefore r=1$

이때, x의 계수가 -108이므로

${}_4C_1\,a^3(-1)^1=-108$

$-4a^3=-108$, $a^3=27$

$\therefore a=3$ ($\because$ a는 실수)

2-2

$(x+1)^2$의 전개식의 일반항은

${}_2C_r\,x^{2-r}1^r={}_2C_r\,x^{2-r}$

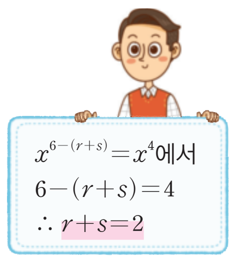
$(x+a)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_s\,x^{4-s}a^s={}_4C_s\,a^s x^{4-s}$

따라서 $(x+1)^2(x+a)^4$의 전개식의 일반항은

${}_2C_r\,x^{2-r}\times{}_4C_s\,a^s x^{4-s}$

$={}_2C_r\times{}_4C_s\,a^s x^{6-(r+s)}$



x^4항은 $r+s=2$일 때이고 r, s는 각각 $0\le r\le2$, $0\le s\le4$인 정수이므로

(i) $r=0$, $s=2$일 때, ${}_2C_0\times{}_4C_2\,a^2=6a^2$

(ii) $r=1$, $s=1$일 때, ${}_2C_1\times{}_4C_1\,a^1=8a$

(iii) $r=2$, $s=0$일 때, ${}_2C_2\times{}_4C_0\,a^0=1$

이때, x^4의 계수가 13이므로

$6a^2+8a+1=13$, $3a^2+4a-6=0$

따라서 모든 상수 a의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{-6}{3}=-2$

3-1

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r\,x^r$이므로

x^2의 계수는 ${}_nC_2$

$(1+x)^2$의 전개식에서 x^2의 계수는 ${}_2C_2$

$(1+x)^3$의 전개식에서 x^2의 계수는 ${}_3C_2$

$\vdots$

$(1+x)^{13}$의 전개식에서 x^2의 계수는 ${}_{13}C_2$

따라서 구하는 x^2의 계수는

${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{13}C_2$

$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{13}C_2$

$={}_4C_3+{}_4C_2+\cdots+{}_{13}C_2$

$\vdots$

$={}_{13}C_3+{}_{13}C_2$

$={}_{14}C_3=\dfrac{14\times13\times12}{3\times2\times1}=364$

3-2

$(1+3x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r(3x)^r={}_nC_r3^rx^r$이므로

x^3의 계수는 ${}_nC_3\times3^3$

$(1+3x)^3$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_3C_3\times3^3$

$(1+3x)^4$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_4C_3\times3^3$

$\vdots$

$(1+3x)^9$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_9C_3\times3^3$

따라서 구하는 x^3의 계수는

${}_3C_3\times3^3+{}_4C_3\times3^3+{}_5C_3\times3^3+\cdots+{}_9C_3\times3^3$

$=3^3({}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_9C_3)$

$=3^3({}_4C_4+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_9C_3)$

$=3^3({}_5C_4+{}_5C_3+\cdots+{}_9C_3)$

$\vdots$

$=3^3({}_9C_4+{}_9C_3)$

$=3^3\times{}_{10}C_4=3^3\times\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=5670$

4-1

$31^{40}=(1+30)^{40}$

$\quad={}_{40}C_0+{}_{40}C_1\times30+{}_{40}C_2\times30^2+\cdots+{}_{40}C_{40}\times30^{40}$

이때, ${}_{40}C_2\times30^2+\cdots+{}_{40}C_{40}\times30^{40}$은 900으로 나누어떨어지므로 31^{40}을 900으로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{40}C_0+{}_{40}C_1\times30$을 900으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 ${}_{40}C_0+{}_{40}C_1\times30=1201=900\times1+301$이므로 31^{40}을 900으로 나누었을 때의 나머지는 301이다.

A를 B로 나눈 몫이 Q, 나머지가 R이면
➡ $A=BQ+R$ (단, $0\le R<B$)

4-2

$(1+x)^{20}={}_{20}C_0+{}_{20}C_1x+{}_{20}C_2x^2+\cdots+{}_{20}C_{20}x^{20}$

이므로 양변에 $x=7$을 대입하면

$8^{20}={}_{20}C_0+{}_{20}C_1\times7+{}_{20}C_2\times7^2+\cdots+{}_{20}C_{20}\times7^{20}$

따라서 구하는 값은

$8^{20}=2^{60}$

1주 3일 필수 체크 전략 ②

24~25쪽

1 ③	2 ①	3 ②	4 ②
5 ④	6 ⑤		

1

X에서 Y로의 함수의 개수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

X에서 Y로의 함수 중에서 $f(3)=3$인 함수의 개수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 함수의 개수는

$125-25=100$

다른 풀이

$f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 5개, $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 5개, $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는 3을 제외한 4개이므로 구하는 함수의 개수는

$5\times5\times4=100$

2

(가), (나)에서 $f(2)=4$이고 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이므로 X의 원소 1을 대응시키는 경우의 수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로 4이다.

또, X의 원소 3, 4, 5를 대응시키는 경우의 수는 Y의 원소 4, 5, 6, 7의 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$4\times20=80$

3

$\left(ax+\dfrac{1}{ax}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(ax)^{5-r}\left(\dfrac{1}{ax}\right)^r={}_5C_ra^{5-r}x^{5-r}(ax)^{-r}={}_5C_ra^{5-2r}x^{5-2r}$

$x^{5-2r}=x^1$에서 $5-2r=1\qquad\therefore r=2$

즉, x의 계수는 ${}_5C_2a=10a$

$x^{5-2r}=x^3$에서 $5-2r=3\qquad\therefore r=1$

즉, x^3의 계수는 ${}_5C_1a^3=5a^3$

이때, x의 계수와 x^3의 계수가 같으므로

$10a=5a^3$, $5a^3-10a=0$, $5a(a^2-2)=0$

$a^2=2\qquad\therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>0)$

4

$(1+x^3)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r(x^3)^r={}_nC_rx^{3r}$

$x^{3r}=x^6$에서 $3r=6\qquad\therefore r=2$

즉, x^6의 계수는 ${}_nC_2$

$(1+x^3)^2$의 전개식에서 x^6의 계수는 ${}_2C_2$

$(1+x^3)^3$의 전개식에서 x^6의 계수는 ${}_3C_2$

$\vdots$

$(1+x^3)^{11}$의 전개식에서 x^6의 계수는 ${}_{11}C_2$

따라서 구하는 x^6의 계수는

$_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{11}C_2$

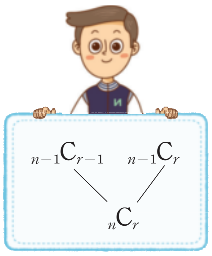
$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{11}C_2$

$={}_4C_3+{}_4C_2+\cdots+{}_{11}C_2$

$\vdots$

$={}_{11}C_3+{}_{11}C_2$

$={}_{12}C_3=\dfrac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$



5

$21^{10}=(1+20)^{10}$

$\quad={}_{10}C_0+{}_{10}C_1\times20+{}_{10}C_2\times20^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\times20^{10}$

이때, $_{10}C_2\times20^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\times20^{10}$은 400으로 나누어떨어지므로 21^{10}을 400으로 나누었을 때의 나머지는 $_{10}C_0+{}_{10}C_1\times20$을 400으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 구하는 나머지는

$_{10}C_0+{}_{10}C_1\times20=201$

6

$16^6=(2+14)^6$

$\quad={}_6C_0\times2^6+{}_6C_1\times2^5\times14+{}_6C_2\times2^4\times14^2+\cdots+{}_6C_6\times14^6$

위 식의 우변에서 14는 7의 배수이므로 $_6C_0\times2^6$항을 제외한 모든 항은 7로 나누어떨어진다.

즉, 16^6을 7로 나누었을 때의 나머지는 $_6C_0\times2^6$을 7로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때, $_6C_0\times2^6=64=9\times7+1$이므로 나머지는 1이다.

따라서 금요일부터 16^6일 후에 해당하는 요일은 1일 후에 해당하는 요일과 같으므로 토요일이다.

1주 4일 교과서 대표 전략 ①

26~29쪽

1 ④	**2** ④	**3** 1125	**4** ⑤
5 ②	**6** ⑤	**7** ④	**8** 55
9 ①	**10** 21	**11** ②	**12** ②
13 9	**14** ③	**15** ④	**16** ①

1

(i) 5명의 가족이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

$\therefore a=24$

(ii) 자녀 3명을 한 사람으로 생각하여 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

자녀 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

즉, 자녀 3명이 이웃하게 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$2\times6=12 \qquad \therefore b=12$

(i), (ii)에서 $a-b=24-12=12$

2

서로 다른 네 종류의 음식에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_4\Pi_3=4^3=64$

3

천의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 곱이 홀수이려면 두 자리의 숫자가 모두 홀수이어야 한다.

이때, 천의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 1, 3, 5의 3개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_3\Pi_2=3^2=9$

만의 자리, 백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$9\times125=1125$

4

f, h를 제외한 i, g, t, i, n, g의 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

i가 2개, g가 2개, t가 1개, n이 1개

$\dfrac{6!}{2!2!}=180$

이때, 양 끝에 f, h를 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$180\times2=360$

5

(i) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

1, 2, 3, 3, 4의 5개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!}=60$

(ii) 일의 자리의 숫자가 4인 경우

1, 2, 2, 3, 3의 5개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!2!}=30$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 짝수의 개수는

$60+30=90$

6

m, a, n의 순서가 정해져 있으므로 m, a, n을 모두 X로 생각하여 s, u, p, e, r, X, X, X의 8개의 문자를 일렬로 나열한 다음 첫 번째 X는 m, 두 번째 X는 a, 세 번째 X는 n으로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\dfrac{8!}{3!}=6720$

7

A지점에서 C지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{9!}{4!5!}=126$

A지점에서 B지점을 거쳐 C지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{5!}{2!3!}=6\times10=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$126-60=66$

8

백합, 튤립, 장미를 먼저 한 송이씩 고르고 백합, 튤립, 장미 중에서 중복을 허용하여 9송이의 꽃을 고르면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_9={}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=\dfrac{11\times10}{2\times1}=55$

9

5개의 문자 a, b, c, d, e 중에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_8={}_{5+8-1}C_8={}_{12}C_8={}_{12}C_4=\dfrac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}=495$

10

(ⅰ) $x+y+z=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수는 3개의 문자 x, y, z 중에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=\dfrac{9\times8}{2\times1}=36$

$\therefore a=36$

(ⅱ) $x+y+z=7$을 만족시키는 양의 정수해의 개수는 3개의 문자 x, y, z 중에서 $(7-3)$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

$\therefore b=15$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a-b=36-15=21$

11

X에서 Y로의 함수 f 중에서 $f(3)=1$인 함수의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

X에서 Y로의 함수 f 중에서 $f(3)=1$, $f(4)=2$인 함수의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 구하는 함수의 개수는

$256-64=192$

다른 풀이

$f(3)$의 값이 될 수 있는 수는 1개, $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 2를 제외한 3개, $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$의 값이 될 수 있는 수는 각각 4개이므로 구하는 함수의 개수는

$1\times3\times4\times4\times4=192$

12

$\left(ax+\dfrac{1}{x^2}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(ax)^{5-r}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^r={}_5C_ra^{5-r}x^{5-r}x^{-2r}={}_5C_ra^{5-r}x^{5-3r}$

$x^{5-3r}=x^2$에서 $5-3r=2$ $\quad\therefore r=1$

이때, x^2의 계수가 80이므로

${}_5C_1a^4=80$, $a^4=16$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

13

$(1+x)^4$의 전개식의 일반항은 ${}_4C_rx^r$

$(1+x^2)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_s(x^2)^s={}_nC_sx^{2s}$

따라서 $(1+x)^4(1+x^2)^n$의 전개식의 일반항은

${}_4C_rx^r\times{}_nC_sx^{2s}={}_4C_r\times{}_nC_sx^{r+2s}$

x^2항은 $r+2s=2$일 때이고 r, s는 각각 $0\le r\le4$, $0\le s\le n$인 정수이므로

(ⅰ) $r=0$, $s=1$일 때, ${}_4C_0\times{}_nC_1=n$

(ⅱ) $r=2$, $s=0$일 때, ${}_4C_2\times{}_nC_0=6$

이때, x^2의 계수가 15이므로

$n+6=15$ $\qquad\therefore n=9$

14

${}_1C_0={}_2C_0$이므로

${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_{20}C_{19}$

$={}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_{20}C_{19}$

$={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_{20}C_{19}$

$={}_4C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_{20}C_{19}$

$\vdots$

$={}_{20}C_{18}+{}_{20}C_{19}={}_{21}C_{19}$

15

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r x^r$이므로 x^4의 계수는 ${}_nC_4$

$(1+x)^4$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_4C_4$

$(1+x)^5$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_5C_4$

$\vdots$

$(1+x)^8$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_8C_4$

따라서 구하는 x^4의 계수는

${}_4C_4+{}_5C_4+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4$

$={}_5C_5+{}_5C_4+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4$

$={}_6C_5+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4$

$={}_7C_5+{}_7C_4+{}_8C_4$

$={}_8C_5+{}_8C_4$

$={}_9C_5={}_9C_4=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

16

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$

따라서 주어진 부등식은

$1000<2^n-1<3000$

$\therefore 1001<2^n<3001$ ...... ㉠

이때, $2^9=512$, $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로 ㉠을 만족시키는 자연수 n은 10, 11의 2개이다.

1주 4일 교과서 대표 전략 ②

30~31쪽

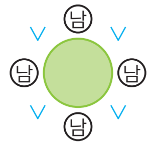
1 ①	**2** ⑤	**3** ④	**4** 108
5 ③	**6** ②	**7** ③	**8** ⑤

1

남자 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

남자 사이사이의 4개의 자리에 여자 4명이 앉는 경우의 수는



$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times24=144$

2

A지역의 중학생 2명이 그 지역의 4곳의 고등학교 중 1곳에 배정되는 경우의 수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$

B지역의 중학생 4명이 그 지역의 3곳의 고등학교 중 1곳에 배정되는 경우의 수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$

따라서 구하는 경우의 수는

$16\times81=1296$

3

양 끝에 흰 바둑돌을 놓으면 그 사이에 흰 바둑돌 4개와 검은 바둑돌 4개를 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$\dfrac{8!}{4!4!}=70$

양 끝에 검은 바둑돌을 놓으면 그 사이에 흰 바둑돌 6개와 검은 바둑돌 2개를 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$\dfrac{8!}{6!2!}=28$

따라서 구하는 경우의 수는

$70+28=98$

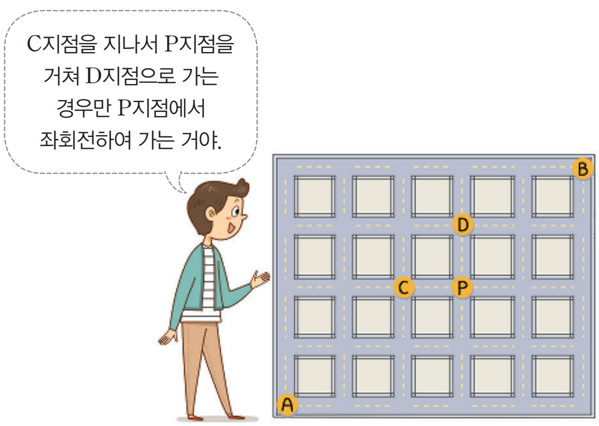
4

A지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{9!}{5!4!}=126$

A지점에서 B지점까지 가는데 P지점에서 좌회전하여 가는 경우의 수는 다음 그림에서 $A\to C\to P\to D\to B$로 가는 경우이므로

$\dfrac{4!}{2!2!}\times1\times1\times\dfrac{3!}{2!1!}=18$



따라서 구하는 경우의 수는

$126-18=108$

5

학생 5명 중에서 노트를 받을 2명의 학생을 택하는 경우의 수는

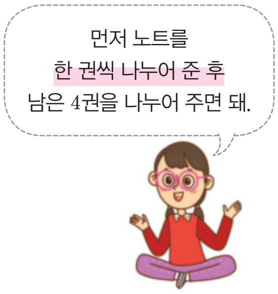
$_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

택한 2명의 학생에게 노트 6권을 한 권 이상씩 갖도록 나누어 주는 경우의 수는

$_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times5=50$



6

x, y, z는 주사위를 던져서 나온 눈의 수이므로

$1\le x\le6$, $1\le y\le6$, $1\le z\le6$

$x+y+z=8$을 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 3개의 문자 x, y, z 중에서 $(8-3)$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

7

$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$_6C_r x^{6-r}\left(\dfrac{2}{x}\right)^r={}_6C_r 2^r x^{6-2r}$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때,

$(x^2+2x+3)\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$

$=x^2\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6+2x\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6+3\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$

의 전개식에서 x^3항은 x^2과 $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 x항, $2x$와 $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 x^2항, 3과 $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 x^3항이 곱해질 때이다.

(i) ㉠에서 x항은 $6-2r=1$, 즉 $r=\dfrac{5}{2}$인 경우이다.
그런데 r는 정수이므로 x항은 존재하지 않는다.

(ii) ㉠에서 x^2항은 $6-2r=2$, 즉 $r=2$인 경우이므로
x^2의 계수는 $_6C_2\times2^2$

(iii) ㉠에서 x^3항은 $6-2r=3$, 즉 $r=\dfrac{3}{2}$인 경우이다.
그런데 r는 정수이므로 x^3항은 존재하지 않는다.

따라서 주어진 전개식에서 x^3항은 (ii)에서만 존재하므로 구하는 x^3의 계수는

$2\times{}_6C_2\times2^2=2^3\times{}_6C_2$

8

$N(k)$는 원소 10개 중에서 k개를 고르는 경우의 수와 같으므로

$N(k)={}_{10}C_k$

$\therefore N(0)+N(1)+N(2)+\cdots+N(10)$

$={}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_{10}$

$=2^{10}=1024$

1주 누구나 합격 전략

32~33쪽

1 24	**2** ⑤	**3** ④	**4** ①
5 ②	**6** ④	**7** ⑤	**8** ③
9 ②	**10** ④		

1

$(5-1)!=4!=4\times3\times2\times1=24$

2

서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_3\Pi_4=3^4=81$

3

b가 2개, a가 2개, s가 1개, e가 1개, l이 2개이므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{8!}{2!2!2!}=5040$

4

A지점에서 C지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!1!}=4$

C지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!2!}=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times6=24$

5

2개의 문자 x, y 중에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{2}\mathrm{H}_{7}={}_{2+7-1}\mathrm{C}_{7}={}_{8}\mathrm{C}_{7}={}_{8}\mathrm{C}_{1}=8$

6

서로 다른 4개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{4}\mathrm{H}_{9}={}_{4+9-1}\mathrm{C}_{9}={}_{12}\mathrm{C}_{9}={}_{12}\mathrm{C}_{3}=\dfrac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$

7

집합 X의 원소 1에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 a, b, c, d, e, f의 6개이고, 집합 X의 다른 원소 2, 3, 4, 5에 대응할 수 있는 Y의 원소도 각각 a, b, c, d, e, f의 6개씩이다.

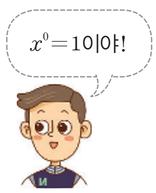
따라서 구하는 함수의 개수는 집합 Y의 원소 a, b, c, d, e, f의 6개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_{6}\Pi_{5}$

8

$\left(2x-\dfrac{1}{x^2}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_{6}\mathrm{C}_{r}(2x)^{6-r}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r={}_{6}\mathrm{C}_{r}2^{6-r}x^{6-r}(-1)^r x^{-2r}$$
$$={}_{6}\mathrm{C}_{r}2^{6-r}(-1)^r x^{6-3r}$$



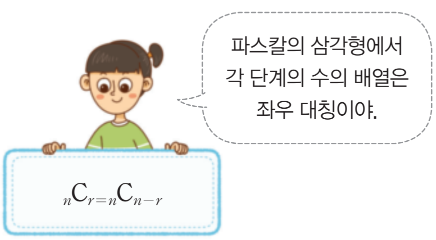
상수항은 $6-3r=0$에서 $r=2$일 때이므로 구하는 상수항은

${}_{6}\mathrm{C}_{2}\times2^4\times(-1)^2=\dfrac{6\times5}{2\times1}\times16\times1=240$

9

${}_{5}\mathrm{C}_{5}={}_{6}\mathrm{C}_{6}$이므로

$${}_{5}\mathrm{C}_{5}+{}_{6}\mathrm{C}_{5}+{}_{7}\mathrm{C}_{5}+{}_{8}\mathrm{C}_{5}+{}_{9}\mathrm{C}_{5}+{}_{10}\mathrm{C}_{5}$$
$$={}_{6}\mathrm{C}_{6}+{}_{6}\mathrm{C}_{5}+{}_{7}\mathrm{C}_{5}+{}_{8}\mathrm{C}_{5}+{}_{9}\mathrm{C}_{5}+{}_{10}\mathrm{C}_{5}$$
$$={}_{7}\mathrm{C}_{6}+{}_{7}\mathrm{C}_{5}+{}_{8}\mathrm{C}_{5}+{}_{9}\mathrm{C}_{5}+{}_{10}\mathrm{C}_{5}$$
$$\vdots$$
$$={}_{10}\mathrm{C}_{6}+{}_{10}\mathrm{C}_{5}$$
$$={}_{11}\mathrm{C}_{6}={}_{11}\mathrm{C}_{5}$$



10

${}_{10}\mathrm{C}_{0}-{}_{10}\mathrm{C}_{1}+{}_{10}\mathrm{C}_{2}-{}_{10}\mathrm{C}_{3}+{}_{10}\mathrm{C}_{4}-\cdots-{}_{10}\mathrm{C}_{9}+{}_{10}\mathrm{C}_{10}=0$이므로

${}_{10}\mathrm{C}_{1}-{}_{10}\mathrm{C}_{2}+{}_{10}\mathrm{C}_{3}-{}_{10}\mathrm{C}_{4}+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{9}={}_{10}\mathrm{C}_{0}+{}_{10}\mathrm{C}_{10}=1+1=2$

1주 창의·융합·코딩 전략

34~37쪽

1 ①	**2** 251
3 ③	**4** ④
5 ①	**6** 풀이 참조
7 풀이 참조	**8** ⑤

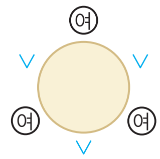
1

여자 3명이 원형으로 서는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

여자 사이사이의 3개의 자리에 남자 3명을 세우는 경우의 수는

$3!=6$



따라서 구하는 경우의 수는

$2\times6=12$

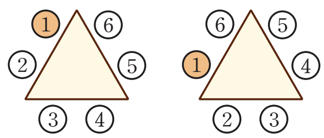
2

(i) 6명씩 조를 짤 때, 한 조가 정삼각형 모양의 책상에 둘러앉는 경우

6명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!$

이때, 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 정삼각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는 $2\times5!=2\times120=240$이므로

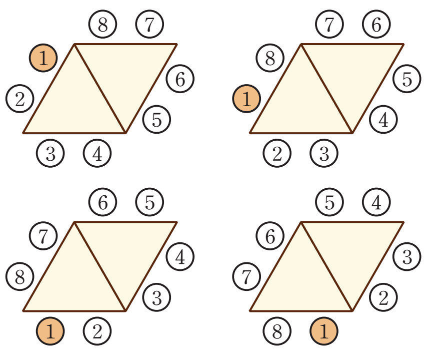
$a=240$

(ii) 8명씩 조를 짤 때, 한 조가 마름모 모양의 책상에 둘러앉는 경우

8명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

이때, 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 마름모 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 4가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는 $4\times7!$이므로

$b=4$, $c=7$

(i), (ii)에서 $a+b+c=240+4+7=251$

3

민아네 집에서 학교까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{9!}{5!4!}=126$

민아네 집에서 싱크홀을 거쳐 학교까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!2!}\times\frac{4!}{2!2!}=10\times6=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$126-60=66$

4

딱지를 한 명당 1개 이상은 갖도록 해야 하므로 3명의 친구에게 1개씩 나누어 준 다음 나머지 5개를 나누는 경우를 생각한다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

5

$a\leq b\leq c\leq d$인 경우의 수는 4개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_4={}_{4+4-1}\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

$a\leq b=c\leq d$인 경우의 수는 b, c를 하나의 숫자로 생각하고, 4개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_3={}_{4+3-1}\mathrm{C}_3={}_6\mathrm{C}_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$35-20=15$

다른 풀이

(i) $a<b<c<d$인 경우

4개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_4=1$

(ii) $a=b<c<d$인 경우

a, b를 하나의 숫자로 생각하고, 4개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

(iii) $a<b<c=d$인 경우

c, d를 하나의 숫자로 생각하고, 4개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

(iv) $a=b<c=d$인 경우

a, b와 c, d를 각각 하나의 숫자로 생각하고, 4개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$1+4+4+6=15$

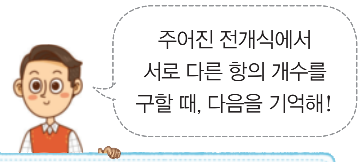
6

혜림이가 다항식 $(x^2+x+1)^3$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수를 잘못 구한 이유는 전개할 때 동류항이 생기지 않는다고 생각하고 항의 개수를 구했기 때문이다.

예를 들어 x^4의 경우, 1을 한 번, x^2을 두 번 택하여 만들 수도 있으나 x를 두 번, x^2을 한 번 택하여 만들 수도 있다.

즉, 1, x, x^2의 곱에 의하여 만들어지는 항이 항상 다른 것은 아니다.

$(x^2+x+1)^3$을 전개하면 동류항이 생기므로 민호처럼 직접 전개하여 항의 개수를 구하는 것이 옳은 방법이다.



$(a+b+c)^3$의 전개식 ➡ 동류항 ×
➡ 중복조합 이용

$(x^2+x+1)^3$의 전개식 ➡ 동류항 ○
➡ 직접 전개

7

$(2x+1)^3$과 $(x-2)^4$의 일반항을 모두 r에 대한 식으로 나타내면 틀립니다.

다음과 같이 풀어야 해요.

$(2x+1)^3(x-2)^4$의 전개식의 일반항은

${}_3\mathrm{C}_r(2x)^r1^{3-r}\times{}_4\mathrm{C}_sx^s(-2)^{4-s}={}_3\mathrm{C}_r\times{}_4\mathrm{C}_s2^r(-2)^{4-s}x^{r+s}$

x^5항은 $r+s=5$일 때이고 r, s는 각각 $0\leq r\leq3$, $0\leq s\leq4$인 정수이므로

(i) $r=1$, $s=4$일 때

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_4\times2^1\times(-2)^0=3\times1\times2\times1=6$

(ii) $r=2$, $s=3$일 때

${}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3\times2^2\times(-2)^1=3\times4\times4\times(-2)=-96$

(iii) $r=3$, $s=2$일 때

${}_3\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_2\times2^3\times(-2)^2=1\times6\times8\times4=192$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 x^5의 계수는

$6+(-96)+192=102$

8

$f(n, k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}={}_n\mathrm{C}_k$이므로

ㄱ. $f(9, 5)={}_9\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_5+{}_8\mathrm{C}_4$
$=f(8, 5)+f(8, 4)$

ㄴ. $f(15, 8)={}_{15}\mathrm{C}_8={}_{15}\mathrm{C}_7=f(15, 7)$

ㄷ. $f(10, 6)=f(11, 7)-f(10, 7)$에서

$f(10, 6)+f(10, 7)=f(11, 7)$

$f(10, 6)+f(10, 7)={}_{10}\mathrm{C}_6+{}_{10}\mathrm{C}_7={}_{11}\mathrm{C}_7$
$=f(11, 7)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

2주 1일 개념 돌파 전략 ①

41, 43쪽

1-2 $\frac{2}{5}$	**2-2** 0	**3-2** $\frac{1}{12}$
4-2 $\frac{5}{12}$	**5-2** $\frac{8}{15}$	**6-2** $\frac{5}{16}$

1-2

표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 20\}$이므로

$n(S)=20$

소수가 적힌 공이 나오는 사건을 A라 하면

$A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$이므로

$n(A)=8$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

2-2

흰 공이 3개 나오는 사건은 절대로 일어나지 않는 사건이므로 그 확률은 0이다.

3-2

$\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$

또, $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{12}$

4-2

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$에서

$\frac{1}{2}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{2}{3}}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{12}$

다른 풀이

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(B)}$

$=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{12}$

5-2

두 사건 A, B가 서로 독립이면 A, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}$

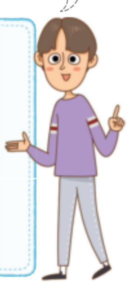
$=\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$

두 사건 A, B^C가 서로 독립인지 어떻게 알아?

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$이므로 두 사건 A, B^C는 서로 독립이야.

두 사건 A, B가 독립일 때,

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A-B)$
$=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}$
$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$



6-2

문제를 맞힐 확률이 $\frac{1}{2}$, 문제를 맞히지 못할 확률이 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 구하는 확률은

${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

2주 1일 개념 돌파 전략 ②

44~45쪽

1 ③	**2** ⑤	**3** ④	**4** ④
5 ⑤	**6** ②		

1

$A=\{a, b, c\}$의 부분집합의 개수는

$2^3=8$

A의 부분집합 중 원소 b를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는

$2^{3-1}=2^2=4$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

참고

집합 A의 원소 중 특정한 원소를 반드시 원소로 갖는(갖지 않는) 부분집합의 개수

집합 A의 원소의 개수 n

특정한 원소 k개를 반드시 원소로 갖는(갖지 않는) 부분집합의 개수 ➡ 2^{n-k}

특정한 원소 k개는 반드시 원소로 갖고, m개는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수 ➡ 2^{n-k-m}

2

ㄱ. $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1,\ 0 \le \mathrm{P}(B) \le 1$이므로

$0 \le \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B) \le 2$

ㄴ. $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1,\ 0 \le \mathrm{P}(B) \le 1$이므로

$0 \le \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \le 1$

ㄷ. $A \cup A^C = S$이므로

$\mathrm{P}(A \cup A^C)=\mathrm{P}(S)=1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

3

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A \cap B)=0$

또, $A \cup B = S$이므로

$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(S)=1$

$\mathrm{P}(A)=4\mathrm{P}(B)$에서

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\mathrm{P}(A)$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{4}\mathrm{P}(A)\\&=\frac{5}{4}\mathrm{P}(A)=1\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{4}{5}$

4

여자 회원을 뽑는 사건을 A, A라켓을 선호하는 회원을 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A \cap B)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

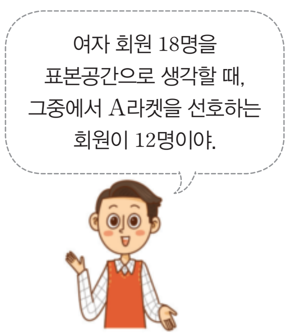
$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

다른 풀이

$n(A)=18,\ n(A \cap B)=12$

이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A)&=\frac{n(A \cap B)}{n(A)}\\&=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$



5

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{4}{5}$

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)=\frac{4}{5}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A \cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{4}{5}+\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}\end{aligned}$$

6

앞면이 3번 이상 나오는 경우는 앞면이 3번 또는 4번 나오는 경우이므로 구하는 확률은

$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$$

2주 2일 필수 체크 전략 ①

46~49쪽

1-1 ⑤	**1-2** $\frac{1}{6}$
2-1 ④	**2-2** $\frac{5}{18}$
3-1 $\frac{7}{10}$	**3-2** ③
4-1 $\frac{3}{5}$	**4-2** ②

1-1

4개의 숫자 1, 2, 3, 4를 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$4!=24$

이때, 3400보다 큰 자연수는 34□□ 또는 4□□□ 꼴이다.

(ⅰ) 34□□ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

(ⅱ) 4□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 3400보다 큰 자연수의 개수는

$2+6=8$

따라서 구하는 확률은

$\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$

1-2

6개의 문자 S, U, M, M, E, R를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!}=360$

맨 앞에 S를 나열하고 나머지 문자 U, M, M, E, R를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

따라서 구하는 확률은

$\frac{60}{360}=\frac{1}{6}$

2-1

10개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$

빨간 공 2개 중에서 1개, 파란 공 4개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_4C_2=2\times6=12$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$

2-2

사과, 감, 오렌지 중에서 중복을 허용하여 7개를 사는 경우의 수는

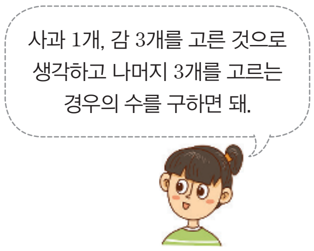
${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

적어도 사과 1개, 감 3개를 포함하여 7개를 사는 경우의 수는 사과, 감, 오렌지 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 확률은

$\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$



3-1

A, B가 서로 이웃하는 사건을 X, B, C가 서로 이웃하는 사건을 Y라 하면 $X\cap Y$는 A, B가 이웃하고 B, C도 이웃하는 사건, 즉 (A, B, C) 또는 (C, B, A)의 순서로 진열되는 사건이므로

$\mathrm{P}(X)=\frac{4!\times2!}{5!}=\frac{2}{5}$ ← A, B를 한 묶음으로 생각

$\mathrm{P}(Y)=\frac{4!\times2!}{5!}=\frac{2}{5}$ ← B, C를 한 묶음으로 생각

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{3!\times2}{5!}=\frac{1}{10}$ ← A, B, C를 한 묶음으로 생각

두 사건 X, Y는 서로 배반사건이 아니므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\cup Y)=\mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)-\mathrm{P}(X\cap Y)$

$=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$

3-2

3송이 모두 빨간 장미를 고르는 사건을 A, 3송이 모두 노란 장미를 고르는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{30}$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$

4-1

6개의 깃발을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!4!}=15$

적어도 한쪽 끝에 흰 깃발이 놓이는 사건을 A라 하면 양쪽 끝에 노란 깃발이 놓이는 사건은 A^C이다.

양쪽 끝에 노란 깃발을 놓고 나머지 깃발을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

4-2

4명의 발표 순서를 정하는 경우의 수는

$4!=24$

남학생의 발표 순서가 연달아 있지 않은 사건을 A라 하면 남학생의 발표 순서가 연달아 있는 사건은 A^C이다.

남학생 2명을 묶어 1명으로 생각하여 발표 순서를 정하는 경우의 수는 $3!=6$, 그 각각의 경우에 대하여 남학생 2명이 순서를 바꾸는 경우의 수는 2이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{6\times2}{24}=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

2주 2일 필수 체크 전략 ②

50~51쪽

1 ④	2 ④	3 ③	4 ④
5 ⑤	6 ③		

1

X에서 Y로의 함수 f의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

이때, 일대일대응의 개수는

${}_4P_4=24$

따라서 구하는 확률은

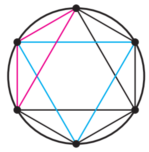
$\frac{24}{256}=\frac{3}{32}$

2

세 점을 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는

${}_{6}C_{3}=20$

만들 수 있는 이등변삼각형은 오른쪽 그림과 같으므로 이등변삼각형의 개수는 8



따라서 구하는 확률은

$\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

3

연필 12자루를 5명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{5}H_{12}={}_{16}C_{12}={}_{16}C_{4}=1820$

모든 학생이 적어도 한 자루의 연필을 받는 경우의 수는 먼저 5명의 학생에게 연필을 한 자루씩 나누어 주고 남은 연필 7자루를 5명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수와 같으므로

${}_{5}H_{7}={}_{11}C_{7}={}_{11}C_{4}=330$

따라서 모든 학생이 적어도 한 자루의 연필을 받을 확률은

$\frac{330}{1820}=\frac{33}{182}$이므로

$p=182$, $q=33$

$\therefore p+q=215$

4

흰 구슬이 2개 이하이려면 꺼낸 3개의 구슬 중에서 흰 구슬이 0개 또는 1개 또는 2개이어야 한다.

흰 구슬이 0개인 사건을 A, 1개인 사건을 B, 2개인 사건을 C라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_{4}C_{3}}{{}_{8}C_{3}}=\frac{1}{14}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_{4}C_{1}\times{}_{4}C_{2}}{{}_{8}C_{3}}=\frac{3}{7}$

$\mathrm{P}(C)=\frac{{}_{4}C_{2}\times{}_{4}C_{1}}{{}_{8}C_{3}}=\frac{3}{7}$

이때, 세 사건 A, B, C는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$

$=\frac{1}{14}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}=\frac{13}{14}$

세 사건 A, B, C가 서로 배반사건이면
$A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$, $C\cap A=\varnothing$
➡ $\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$

다른 풀이

(흰 구슬이 2개 이하일 확률)

$=1-$(흰 구슬이 3개일 확률)

$=1-\frac{{}_{4}C_{3}}{{}_{8}C_{3}}$

$=1-\frac{1}{14}=\frac{13}{14}$

5

적어도 한 개가 당첨 제비일 확률이 $\frac{6}{7}$이므로 모두 당첨 제비가 아닐 확률은

$1-\frac{6}{7}=\frac{1}{7}$

즉, $\frac{{}_{15-k}C_{2}}{{}_{15}C_{2}}=\frac{(15-k)(14-k)}{15\times 14}=\frac{1}{7}$이므로

$(15-k)(14-k)=30$, $k^{2}-29k+180=0$

$(k-9)(k-20)=0\qquad \therefore k=9\ (\because\ 0<k\le 15)$

6

$20=2^{2}\times 5$이므로 20과 서로소가 되려면 2와 5를 약수로 갖지 않아야 한다.

이때, 2의 배수가 되는 사건을 A, 5의 배수가 되는 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 10의 배수가 되는 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{50}{100}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{20}{100}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{10}{100}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{50}{100}+\frac{20}{100}-\frac{10}{100}=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$

따라서 구하는 확률은 $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

2주 3일 필수 체크 전략 ①

52~55쪽

1-1 ②	**1-2** 10
2-1 0.34	**2-2** ③
3-1 ①	**3-2** $\frac{33}{100}$
4-1 $\frac{3}{8}$	**4-2** ⑤

1-1

A가 선물을 받는 사건을 A, 주황 공을 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=1-\frac{{}_{5}C_{2}}{{}_{8}C_{2}}=\frac{9}{14}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_{1}C_{1}\times{}_{7}C_{1}}{{}_{8}C_{2}}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{14}}=\frac{7}{18}$$

1-2

전체 학생 수는 $43+x$이고, 여학생을 뽑는 사건을 A, 음악을 선호하는 학생을 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{15+x}{43+x}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{x}{43+x}$

이때, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{2}{5}$이므로

$\frac{\frac{x}{43+x}}{\frac{15+x}{43+x}}=\frac{2}{5}$, $\frac{x}{15+x}=\frac{2}{5}$, $5x=30+2x$

$3x=30 \qquad \therefore x=10$

2-1

내일 눈이 내리는 사건을 A, 내일 경기에서 지는 사건을 E라 하면 내일 눈이 내리지 않는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A)=0.4$, $\mathrm{P}(A^C)=1-0.4=0.6$

$\mathrm{P}(E|A)=1-0.6=0.4$, $\mathrm{P}(E|A^C)=1-0.7=0.3$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)\\&=0.4\times0.4+0.6\times0.3=0.34\end{aligned}$$

2-2

여학생을 뽑는 사건을 A, 안경을 쓴 학생을 뽑는 사건을 E라 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap E)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)\\&=\left(1-\frac{55}{100}\right)\times\frac{45}{100}=\frac{81}{400}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap E)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)\\&=\frac{55}{100}\times\frac{40}{100}=\frac{11}{50}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)\\&=\frac{81}{400}+\frac{11}{50}=\frac{169}{400}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{81}{400}}{\frac{169}{400}}=\frac{81}{169}$$

3-1

민호, 민준, 유찬이가 풍선을 맞히는 사건을 각각 A, B, C라 하면 세 사건 A, B, C가 서로 독립이므로 A^C, B^C, C^C도 서로 독립이다.

세 사람 모두 풍선을 맞히지 못할 확률은

$1-\frac{13}{14}=\frac{1}{14}$

이때,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C\cap C^C)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(C^C)\\&=\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)(1-p)\\&=\frac{3}{14}(1-p)\end{aligned}$$

즉, $\frac{3}{14}(1-p)=\frac{1}{14}$이므로

$1-p=\frac{1}{3} \qquad \therefore p=\frac{2}{3}$

세 사건 A, B, C가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은
$\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$
(단, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$, $\mathrm{P}(C)>0$)

3-2

세은이의 실기 시험 점수의 합이 8점이려면 1차 시험에서 A, 2차 시험에서 C를 받거나 1차, 2차 시험에서 모두 B를 받거나 1차 시험에서 C, 2차 시험에서 A를 받아야 한다.

(i) 1차 시험에서 A, 2차 시험에서 C를 받을 확률은

$\frac{1}{10}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{25}$

(ii) 1차, 2차 시험에서 모두 B를 받을 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(iii) 1차 시험에서 C, 2차 시험에서 A를 받을 확률은

$\frac{2}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{25}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{25}+\frac{1}{4}+\frac{1}{25}=\frac{33}{100}$

4-1

(i) 흰 공을 꺼내고, 동전을 4번 던져서 뒷면이 2번 나올 확률은

$\frac{3}{5}\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{40}$

(ii) 검은 공을 꺼내고, 동전을 3번 던져서 뒷면이 2번 나올 확률은

$\frac{2}{5}\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{20}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{9}{40}+\frac{3}{20}=\frac{3}{8}$

4-2

(i) 4번째 경기에서 A팀이 우승할 경우

처음 3경기에서 A팀이 2승 1패를 하고 4번째 경기에서 A팀이 이겨야 하므로

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^1\times\frac{3}{5}=\frac{162}{625}$

(ⅱ) 4번째 경기에서 B팀이 우승할 경우
처음 3경기에서 B팀이 2승 1패를 하고 4번째 경기에서 B팀이 이겨야 하므로

$$_3C_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^1\times\frac{2}{5}=\frac{72}{625}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{162}{625}+\frac{72}{625}=\frac{234}{625}$$

2주 3일 필수 체크 전략 ②

56~57쪽

1 ③	**2** ③	**3** ④	**4** ③
5 ⑤	**6** ③		

1

당첨 제비를 꺼내는 사건을 A, 1등 당첨 제비를 꺼내는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{\underbrace{_4C_1\times{_6C_1}}_{\text{당첨 제비가 1개}}+\underbrace{_4C_2\times{_6C_0}}_{\text{당첨 제비가 2개}}}{_{10}C_2}=\frac{2}{3}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{_1C_1\times{_9C_1}}{_{10}C_2}=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{10}$$

2

사과를 꺼내어 보여 주는 사건을 A, 사과라고 대답하는 사건을 E라 하면 배를 꺼내어 보여 주는 사건은 A^C이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

$$\mathrm{P}(E|A)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10},\ \mathrm{P}(E|A^C)=\frac{3}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)\\&=\frac{2}{5}\times\frac{7}{10}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{23}{50}\end{aligned}$$

3

양면이 모두 빨간색인 색종이, 양면이 모두 분홍색인 색종이, 한쪽 면은 빨간색, 다른 쪽 면은 분홍색인 색종이를 꺼내는 사건을 각각 A, B, C라 하고 탁자에 놓여 있는 색종이의 윗면이 분홍색인 사건을 E라 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap E)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)\\&=\frac{1}{3}\times 0=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B\cap E)&=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)\\&=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(C\cap E)&=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(E|C)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(C\cap E)\\&=0+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

4

남자를 택하는 사건을 A, 예방 접종을 한 사람을 택하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{24}{48+x},\ \mathrm{P}(B)=\frac{18+x}{48+x},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{18}{48+x}$$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$$\frac{18}{48+x}=\frac{24}{48+x}\times\frac{18+x}{48+x},\ 18(48+x)=24(18+x)$$

$3(48+x)=4(18+x)$, $144+3x=72+4x$

$\therefore\ x=72$

5

한 개의 주사위를 5번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 3의 배수인 사건을 A라 하면 A^C는 눈의 수의 곱이 3의 배수가 아닌 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)={_5C_5}\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{32}{243}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=1-\mathrm{P}(A^C)\\&=1-\frac{32}{243}=\frac{211}{243}\end{aligned}$$

6

A가 가위바위보를 이기는 횟수를 x, 비기거나 지는 횟수를 y라 하면

$x+y=5$, $3x+y=9$

두 식을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=3$

따라서 9칸을 올라가려면 A가 2번은 이기고, 3번은 비기거나 져야 하므로 구하는 확률은

$$_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}$$

2주 4일 교과서 대표 전략 ①

58~61쪽

1 ①	**2** ③	**3** ④	**4** $1-\frac{\pi}{8}$
5 $\frac{1}{3}$	**6** ②	**7** ④	**8** ②
9 ③	**10** ④	**11** ④	**12** $\frac{21}{25}$
13 ㄴ, ㄷ	**14** ⑤	**15** 72	**16** $\frac{8}{27}$

1

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

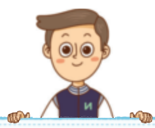
이차방정식 $x^2+2ax+b=0$이 중근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-b=0 \qquad \therefore a^2=b$ …… ㉠

㉠을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(1, 1)$, $(2, 4)$의 2가지이다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$



이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 실수)의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 하면

(1) $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 실근

(2) $D=0 \Longleftrightarrow$ 중근 (서로 같은 두 실근)

(3) $D<0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 허근

2

6개의 문자 A, B, C, D, E, F를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

A□B를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$, □에 들어갈 문자를 정하는 경우의 수는 4, A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 A와 B 사이에 한 개의 문자가 들어가도록 일렬로 나열하는 경우의 수는

$24\times4\times2=192$

따라서 구하는 확률은 $\frac{192}{720}=\frac{4}{15}$

3

10개의 공 중에서 6개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_6=210$

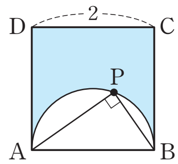
두 번째로 작은 수가 4인 경우의 수는 1, 2, 3이 적힌 공 중에서 1개를 꺼내고 5, 6, 7, 8, 9, 10이 적힌 공 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

${}_3C_1\times{}_6C_4=45$

따라서 구하는 확률은

$\frac{45}{210}=\frac{3}{14}$

4



전체 영역의 넓이는 $2^2=4$

점 P가 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원의 호 위에 있을 때 △ABP는 직각삼각형이 되므로 △ABP가 예각삼각형이 되려면 점 P가 반원의 외부에 있어야 한다.

이때, 색칠한 부분의 넓이는

$4-\frac{1}{2}\times\pi\times1^2=4-\frac{\pi}{2}$

따라서 구하는 확률은

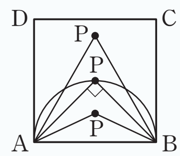
$\frac{4-\frac{\pi}{2}}{4}=1-\frac{\pi}{8}$

점 P의 위치에 따라 △ABP의 모양이 달라져.

(1) 반원의 내부 ➡ 둔각삼각형

(2) 반원의 호 ➡ 직각삼각형

(3) 반원의 외부 ➡ 예각삼각형



5

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3}$

한편, $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

6

$f(1)=a$인 사건을 A, $f(2)=c$인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3\Pi_2}{{}_3\Pi_3}=\frac{3^2}{3^3}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\Pi_2}{{}_3\Pi_3}=\frac{3^2}{3^3}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_3\Pi_1}{{}_3\Pi_3}=\frac{3^1}{3^3}=\frac{1}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$

7

W를 맨 앞에 놓는 사건을 A, W를 맨 뒤에 놓는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{5!}{6!}=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{5!}{6!}=\frac{1}{6}$

이때, 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

8

대표 3명 중에서 적어도 한 명이 여학생일 확률이 $\frac{25}{29}$이므로 대표 3명이 모두 남학생일 확률은

$1-\frac{25}{29}=\frac{4}{29}$

여학생 수를 n이라 하면

$\frac{{}_{30-n}\mathrm{C}_3}{{}_{30}\mathrm{C}_3}=\frac{4}{29}$이므로

$\frac{(30-n)(29-n)(28-n)}{30\times29\times28}=\frac{4}{29}$

$(30-n)(29-n)(28-n)=3360=16\times15\times14$

즉, $30-n=16$이므로 $n=14$

따라서 여학생 수는 14이다.

9

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{8}$$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{7}{8}$

한편, $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{7}{8}=\frac{3}{8}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$$

10

모두 c가 적힌 공이 나오는 사건을 A, 다른 색 공이 나오는 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 c가 적힌 빨간 공과 파란 공을 각각 한 개씩 꺼내는 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2}=\frac{5}{22}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_2}=\frac{4}{33}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{4}{33}}{\frac{5}{22}}=\frac{8}{15}$$

11

첫 번째에 정품이 나오는 사건을 A, 두 번째에 불량품이 나오는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{24}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{5}\times\frac{5}{24}=\frac{1}{6}$$

12

용의자가 말한 문장이 거짓말인 사건을 A, 거짓말 탐지기가 거짓이라고 판단하는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{6}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{21}{50}$$

$$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{4}{10}\times\frac{2}{10}=\frac{2}{25}$$

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{21}{50}+\frac{2}{25}=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{21}{50}}{\frac{1}{2}}=\frac{21}{25}$$

13

표본공간은 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이고,

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $C=\{3, 6\}$

$\therefore A\cap B=\{2\}$, $B\cap C=\{3\}$, $A\cap C=\{6\}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 A와 B는 서로 종속이다.

ㄴ. $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

따라서 B와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

따라서 A와 C는 서로 독립이다.

따라서 서로 독립인 사건인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

14

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)$$

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$$

이때, $\mathrm{P}(A)=x$, $\mathrm{P}(B)=y$라 하면

$(1-x)y=\frac{1}{4}$ ⋯⋯ ㉠

$(1-x)(1-y)=\frac{1}{8}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=\frac{5}{8}$, $y=\frac{2}{3}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=x+y$

$=\frac{5}{8}+\frac{2}{3}=\frac{31}{24}$

15

(단위: 명)

	A동	B동	합계
남자	25	40	65
여자	45	x	$45+x$
합계	70	$40+x$	$110+x$

$\mathrm{P}(A)=\frac{65}{110+x}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{40+x}{110+x}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{40}{110+x}$

이때, 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{40}{110+x}=\frac{65}{110+x}\times\frac{40+x}{110+x}$

$40(110+x)=65(40+x)$

$4400+40x=2600+65x$

$25x=1800$ $\quad\therefore x=72$

16

주사위를 한 번 던질 때 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

주사위를 4번 던져서 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 x, 6의 약수가 아닌 눈이 나오는 횟수를 y라 하면

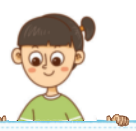
$x+y=4$, $2x+y=6$

두 식을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=2$

따라서 주사위를 4번 던져서 6의 약수의 눈이 2번, 6의 약수가 아닌 눈이 2번 나와야 하므로 구하는 확률은

${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$



주사위를 던진 횟수에 대한 식

➡ $x+y=4$

점 P가 움직인 거리에 대한 식

➡ $2x+y=6$ └ 한 바퀴 돌았으므로 움직인 거리는 6이다.

2주 4일 교과서 대표 전략 ②

62~63쪽

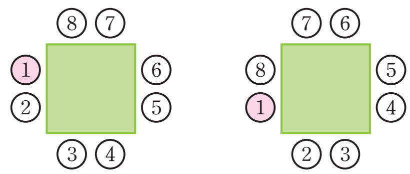
1 ④	**2** ③	**3** ④	**4** ④
5 ④	**6** ③	**7** ③	**8** ⑤

1

8명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

이때, 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 8명이 정사각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$7!\times 2$

남학생 4명을 정사각형 모양의 탁자의 네 변에 각각 앉히는 경우의 수는 $(4-1)!$, 여학생 4명을 남은 네 자리에 앉히는 경우의 수는 $4!$이고, 각 변에서 남학생과 여학생이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2^4이므로 남학생과 여학생이 탁자의 같은 변에 이웃하여 앉는 경우의 수는

$(4-1)!\times 4!\times 2^4=6\times 4!\times 16$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6\times 4!\times 16}{7!\times 2}=\frac{8}{35}$

2

n개의 공 중에서 2개의 공을 뽑는 경우의 수는

${}_n\mathrm{C}_2=\frac{n(n-1)}{2}$

3이 적힌 공이 나오고 5가 적힌 공이 나오지 않는 경우의 수는 3과 5가 적힌 공을 제외한 나머지 $(n-2)$개의 공 중에서 한 개의 공을 뽑고 3이 적힌 공을 포함시키는 경우의 수와 같으므로

${}_{n-2}\mathrm{C}_1=n-2$

즉, $\frac{{}_{n-2}\mathrm{C}_1}{{}_n\mathrm{C}_2}=\frac{5}{21}$에서 $\frac{n-2}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{5}{21}$

$\frac{2(n-2)}{n(n-1)}=\frac{5}{21}$, $5n^2-47n+84=0$

$(n-7)(5n-12)=0$ $\quad\therefore n=7$ ($\because n\geq 5$)

3

내일 비가 오는 사건을 A, 모레 비가 오는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.65$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.45$, $\mathrm{P}(A\cup B)=0.8$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$0.8=0.65+\mathrm{P}(B)-0.45$ $\quad\therefore \mathrm{P}(B)=0.6$

따라서 구하는 확률은 0.6이다.

4

5개의 숫자로 세 자리 정수를 만들 때, 320 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 319 이하인 사건이다.

이때, 319 이하인 정수는 1□□ 꼴 또는 2□□ 꼴 또는 31□ 꼴이다.

(ⅰ) 1□□ 꼴일 확률은 $\dfrac{{}_4\mathrm{P}_2}{{}_5\mathrm{P}_3}=\dfrac{12}{60}=\dfrac{1}{5}$

(ⅱ) 2□□ 꼴일 확률은 $\dfrac{{}_4\mathrm{P}_2}{{}_5\mathrm{P}_3}=\dfrac{12}{60}=\dfrac{1}{5}$

(ⅲ) 31□ 꼴일 확률은 $\dfrac{{}_3\mathrm{P}_1}{{}_5\mathrm{P}_3}=\dfrac{3}{60}=\dfrac{1}{20}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{20}=\dfrac{9}{20}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{9}{20}=\dfrac{11}{20}$

5

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)$에서

$\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}+\mathrm{P}(A\cap B^C)\qquad \therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)=\dfrac{2}{9}$

$\therefore \mathrm{P}(B^C|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3}$

6

상자 A, B, C를 고르는 사건을 각각 A, B, C라 하면 A, B, C는 서로 배반사건이다.

이때, 고른 상자에서 사과 2개를 꺼내는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{30}$

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{10}$

$\mathrm{P}(C\cap E)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(E|C)$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{15}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|E)=\dfrac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\dfrac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(C\cap E)}$

$=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{30}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}=\dfrac{1}{2}$

7

어느 대학 입학시험에 윤후, 혜린, 재율이가 합격하는 사건을 각각 A, B, C라 하면 A, B, C는 서로 독립이다.

(ⅰ) 윤후, 혜린이만 합격하고 재율이는 불합격할 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B\cap C^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C^C)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\left(1-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{1}{15}$

(ⅱ) 윤후, 재율이만 합격하고 혜린이는 불합격할 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B^C\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(C)$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{15}$

(ⅲ) 혜린, 재율이만 합격하고 윤후는 불합격할 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B\cap C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{15}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$\dfrac{1}{15}+\dfrac{2}{15}+\dfrac{4}{15}=\dfrac{7}{15}$

8

동전을 던져서 앞면이 나오는 횟수를 x, 뒷면이 나오는 횟수를 y라 하면

$x+y=8$, $15x+5y=100$

두 식을 연립하여 풀면 $x=6$, $y=2$

따라서 점수의 합이 100점이 되려면 동전을 8번 던져서 앞면이 6번, 뒷면이 2번 나와야 하므로 구하는 확률은

${}_8\mathrm{C}_6\left(\dfrac{1}{2}\right)^6\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{7}{64}$

2주 누구나 합격 전략

64~65쪽

1 ③	2 ⑤	3 ②	4 ③
5 ③	6 ④	7 ③	8 ⑤
9 ⑤	10 ①		

1

A도시에서 D도시로 가는 경우는 A → B → D 또는 A → C → D이므로 그 경우의 수는

$2\times3+3\times3=15$

이때, C도시를 거쳐서 가는 경우의 수는

$3\times3=9$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$

2

8개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{8!}{3!3!2!}=560$

6개의 문자 a, a, a, b, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{3!3!}$ 이고, a, a, a, b, b, b의 사이사이 및 양 끝의 7개의 자리에 c, c를 나열하는 경우의 수는 ${}_7C_2$이므로 문자 c끼리 이웃하지 않는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!3!}\times{}_7C_2=420$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{420}{560}=\dfrac{3}{4}$

3

8개의 구슬 중에서 3개의 구슬을 꺼내는 경우의 수는

${}_8C_3=56$

흰 구슬 5개 중에서 1개, 검은 구슬 3개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_5C_1\times{}_3C_2=15$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{15}{56}$

4

3이 적힌 카드를 뽑는 사건을 A, 9가 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라 하면

$P(A)=\dfrac{{}_9C_2}{{}_{10}C_3}=\dfrac{3}{10}$, $P(B)=\dfrac{{}_9C_2}{{}_{10}C_3}=\dfrac{3}{10}$

$P(A\cap B)=\dfrac{{}_8C_1}{{}_{10}C_3}=\dfrac{1}{15}$

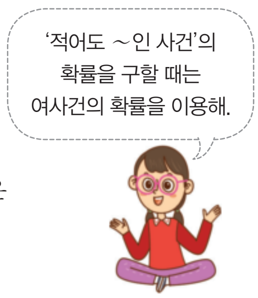
따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{10}-\dfrac{1}{15}=\dfrac{16}{30}=\dfrac{8}{15}$

5

서로 다른 4개의 동전을 동시에 던질 때, 적어도 앞면이 1번 나오는 사건을 A라 하면 4개의 동전 모두 뒷면이 나오는 사건은 A^C이다.



이때, $P(A^C)=\dfrac{1}{16}$이므로 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\dfrac{1}{16}=\dfrac{15}{16}$

6

행사 진행 담당 학생을 뽑는 사건을 A, 여학생을 뽑는 사건을 B라 하면

$P(A)=\dfrac{20}{100}=\dfrac{1}{5}$, $P(A\cap B)=\dfrac{8}{100}=\dfrac{2}{25}$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{2}{25}}{\frac{1}{5}}=\dfrac{2}{5}$

7

첫 번째에 불량품이 나오는 사건을 A, 두 번째에 불량품이 나오는 사건을 B라 하면

$P(A)=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$, $P(B|A)=\dfrac{2}{14}=\dfrac{1}{7}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{35}$

8

경기 일에 비가 오는 사건을 A, 경기에서 이기는 사건을 E라 하면

(i) 경기 일에 비가 오고 경기에서 이길 확률은

$P(A)=\dfrac{70}{100}=0.7$, $P(E|A)=0.8$이므로

$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=0.7\times0.8=0.56$

(ii) 경기 일에 비가 오지 않고 경기에서 이길 확률은

$P(A^C)=1-0.7=0.3$, $P(E|A^C)=0.6$이므로

$P(A^C\cap E)=P(A^C)P(E|A^C)=0.3\times0.6=0.18$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$P(E)=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)$

$=0.56+0.18=0.74$

9

A, B가 전 구간을 완주하는 사건을 각각 A, B라 하면 A, B는 서로 독립이다.

(i) A만 완주할 확률은

$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)=\dfrac{1}{3}\times\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$

(ii) B만 완주할 확률은

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B)=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{6}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{12}$

10

1발을 쏘아 명중시킬 확률이 $\dfrac{3}{4}$이므로 5발을 쏘았을 때

(i) 0발을 명중시킬 확률은

${}_5C_0\left(\dfrac{3}{4}\right)^0\left(\dfrac{1}{4}\right)^5=\dfrac{1}{1024}$

(ii) 1발을 명중시킬 확률은

${}_5C_1\left(\dfrac{3}{4}\right)^1\left(\dfrac{1}{4}\right)^4=\dfrac{15}{1024}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$1-\left(\dfrac{1}{1024}+\dfrac{15}{1024}\right)=1-\dfrac{1}{64}=\dfrac{63}{64}$

2주 창의·융합·코딩 전략

66~69쪽

1 ④	**2** 510	**3** ①, ④	**4** $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{9}$
5 ⑤	**6** ②	**7** ④	**8** ④

1

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(ⅰ) 두 눈의 수가 같고 한 주사위의 눈이 다른 주사위의 눈의 수의 배수인 경우

$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$의 6가지

(ⅱ) 두 눈의 수가 다르고 한 주사위의 눈이 다른 주사위의 눈의 수의 배수인 경우

$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 6),$
$(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (4, 2), (6, 2), (6, 3)$
의 16가지

(ⅰ), (ⅱ)에서 한 주사위의 눈의 수가 다른 주사위의 눈의 수의 배수가 되는 경우의 수는

$6+16=22$

따라서 구하는 확률은

$\frac{22}{36}=\frac{11}{18}$

2

6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 서로 다른 4개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

${}_6P_4=360$

(ⅰ) 35□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$

(ⅱ) 36□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$

(ⅲ) 4□□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$

(ⅳ) 5□□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$

(ⅴ) 6□□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$

(ⅰ)~(ⅴ)에서 3500보다 큰 네 자리 자연수의 개수는

$12+12+60+60+60=204$

따라서 3500보다 큰 수일 확률은 $\frac{204}{360}=\frac{17}{30}$이므로

$p=30$, $q=17$

즉, Wi-Fi의 비밀번호는 $pq=510$

3

회원 9명 중에서 대표 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_9C_2$

남자 회원 수를 n이라 하면 여자 회원 수는 $9-n$이므로 뽑힌 대표 2명이 모두 남자인 경우의 수는 ${}_nC_2$이고, 모두 여자인 경우의 수는 ${}_{9-n}C_2$이다.

뽑힌 대표 2명이 모두 남자이거나 모두 여자일 확률이 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{{}_nC_2+{}_{9-n}C_2}{{}_9C_2}=\frac{1}{2}$, $\frac{n^2-9n+36}{36}=\frac{1}{2}$

$n^2-9n+18=0$, $(n-3)(n-6)=0$

$\therefore n=3$ 또는 $n=6$

4

노란색 원의 반지름의 길이를 x라 하면

가장 큰 원의 넓이는 $\pi\times(3x)^2=9\pi x^2$

노란색 부분의 넓이는 πx^2

빨간색 부분의 넓이는 $\pi\times(2x)^2-\pi x^2=3\pi x^2$

파란색 부분의 넓이는 $\pi\times(3x)^2-\pi\times(2x)^2=5\pi x^2$

$\therefore$ (노란색 부분을 맞힐 확률)$=\frac{\pi x^2}{9\pi x^2}=\frac{1}{9}$

(빨간색 부분을 맞힐 확률)$=\frac{3\pi x^2}{9\pi x^2}=\frac{1}{3}$

(파란색 부분을 맞힐 확률)$=\frac{5\pi x^2}{9\pi x^2}=\frac{5}{9}$

연속적으로 변하여 경우의 수를 셀 수 없는 경우에는 기하적 확률을 이용해.

길이, 넓이, 부피 등에 대한 확률

➡ 기하적 확률 이용

➡ $P(A)=\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 영역의 크기})}{(\text{전체 영역의 크기})}$

5

Li(리튬), Na(나트륨), Ca(칼슘), Rb(루비듐), Cs(세슘), Fr(프랑슘)의 원자 번호는 차례로 3, 11, 20, 37, 55, 87이다.

이때, 첫 번째, 두 번째, 세 번째에 놓인 카드에 적힌 원자 번호 중 적어도 하나는 소수일 확률은 1−(첫 번째, 두 번째, 세 번째에 놓인 카드에 적힌 원자 번호가 모두 소수가 아닐 확률)로 구하면 된다.

(ⅰ) 6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $6!$

(ⅱ) 첫 번째, 두 번째, 세 번째에 놓인 카드에 적힌 원자 번호가 모두 소수가 아닌 경우

소수는 3, 11, 37의 3개이고 소수가 아닌 것은 20, 55, 87의 3개이므로 경우의 수는 $3!\times3!$

(ⅰ), (ⅱ)에서 첫 번째, 두 번째, 세 번째에 놓인 카드에 적힌 원자 번호가 모두 소수가 아닐 확률은

$\frac{3!\times3!}{6!}=\frac{1}{20}$

따라서 구하는 확률은

$1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$

6

현지가 '배우'가 적힌 종이를 뽑는 사건을 A, 은수가 '배우'가 적힌 종이를 뽑는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, $P(B|A)=\frac{5}{9}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$

7

유찬: [반례] 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 홀수, 짝수의 눈이 나오는 사건을 각각 A, B라 하면 A, B는 서로 배반사건이다.

이때, $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=0$이므로

$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

따라서 A, B는 서로 독립이 아니다. (거짓)

세은: A, B가 서로 독립이므로 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$$\begin{aligned}P(A^C\cap B^C)&=P((A\cup B)^C)\\&=1-P(A\cup B)\\&=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}\\&=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)\\&=\{1-P(A)\}\{1-P(B)\}\\&=P(A^C)P(B^C)\end{aligned}$$

따라서 A^C, B^C는 서로 독립이다. (참)

민호: A, B가 서로 독립이므로 A^C, B도 서로 독립이다.

즉, $P(A^C|B)=P(A^C)$

$\therefore P(A)+P(A^C|B)=P(A)+P(A^C)=1$ (참)

따라서 옳은 말을 한 학생은 세은, 민호이다.

참고

$P(A)>0$, $P(B)>0$인 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$P(A\cap B)=0$

$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=0\neq P(B)$

즉, 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 A, B는 서로 종속이다.

8

A팀이 1승 2패이므로 3차전까지 B팀의 경기 결과는 2승 1패이다.

(i) 5차전에서 B팀이 우승할 확률은 B팀이 4차전, 5차전을 모두 이겨야 하므로

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(ii) 6차전에서 B팀이 우승할 확률은 B팀이 4차전, 5차전에서 1번 이기고, 6차전에서 이겨야 하므로

${}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(iii) 7차전에서 B팀이 우승할 확률은 B팀이 4차전, 5차전, 6차전에서 1번 이기고 7차전에서 이겨야 하므로

${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

(i), (ii), (iii)에서 B팀이 우승할 확률은

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{11}{16}$

신유형·신경향·서술형 전략

72~75쪽

1 ④	**2** ⑤	**3** 화요일	**4** ③
5 희진, 수아	**6** ②	**7** 1013	**8** $\left(\frac{4}{5}\right)^9$

1

(i) 10만큼 차이가 나는 수끼리 하나로 묶어서 10개의 묶음을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(10-1)!=9!$

(ii) 10개의 묶음 안의 2개의 수끼리의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는 2^{10}

따라서 예은이가 말한 방법대로 수를 쓰는 경우의 수는 $2^{10}\times9!$이므로

$a=2^{10}=1024$, $b=9$

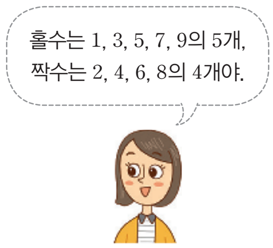
$\therefore a+b=1024+9=1033$

2

네 자리 자연수의 각 자리의 숫자의 합이 홀수인 경우는 각 자리의 숫자가 홀수 3개, 짝수 1개이거나 홀수 1개, 짝수 3개로 이루어진 경우이다.

(i) 네 자리 자연수의 각 자리의 숫자가 홀수 3개, 짝수 1개로 이루어진 경우

홀수인 세 자리를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_3$, 홀수인 세 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_5\Pi_3$, 나머지 한 자리의 짝수를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1$



$\therefore {}_4C_3\times{}_5\Pi_3\times{}_4C_1=4\times5^3\times4=2000$

(ii) 네 자리 자연수의 각 자리의 숫자가 홀수 1개, 짝수 3개로 이루어진 경우

짝수인 세 자리를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_3$, 짝수인 세 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_3$, 나머지 한 자리의 홀수를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_1$

$\therefore {}_4C_3\times{}_4\Pi_3\times{}_5C_1=4\times4^3\times5=1280$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$2000+1280=3280$

3

$13^{30}=(14-1)^{30}$이므로 이항정리를 이용하면

$$(14-1)^{30}={}_{30}C_0\times14^{30}+{}_{30}C_1\times14^{29}\times(-1)^1+\cdots+{}_{30}C_{29}\times14\times(-1)^{29}+{}_{30}C_{30}\times(-1)^{30}$$

위의 식의 우변에서 14는 7의 배수이므로 ${}_{30}C_{30}\times(-1)^{30}$항을 제외한 모든 항은 7로 나누어떨어진다.

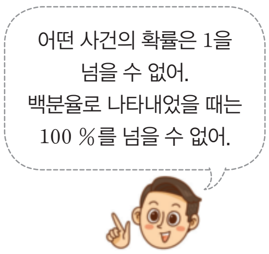
즉, 13^{30}을 7로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{30}C_{30}\times(-1)^{30}$을 7로 나누었을 때의 나머지와 같다.
따라서 ${}_{30}C_{30}\times(-1)^{30}=1$이므로 월요일에 태어난 혜진이가 태어난 지 13^{30}일째 되는 날은 월요일 다음 날인 화요일이다.

4

4명의 학생이 각각 과일을 한 개씩 사 오는 경우의 수는
${}_4\Pi_4=4^4=256$
이때, 4명의 학생이 사 온 과일이 모두 다른 경우의 수는
$4!=24$
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{24}{256}=\dfrac{3}{32}$

5

희진: 확률은 100 %를 넘을 수 없다.
수아: 배반사건이라고 해서 항상 서로 여사건은 아니다.
따라서 옳지 않은 말을 한 학생은 희진, 수아이다.



6

A회사 간식 세트 한 봉지를 택하는 사건을 A, B회사 간식 세트 한 봉지를 택하는 사건을 B라 하고, 초콜릿 2개를 꺼내는 사건을 E라 하자.
(i) A회사 간식 세트 한 봉지를 택한 경우
A회사 간식 세트 한 봉지에는 초콜릿 2개, 사탕 1개가 들어 있고, 이 중에서 2개의 간식을 꺼낼 때, 모두 초콜릿일 확률은
$\mathrm{P}(E|A)=\dfrac{{}_2C_2}{{}_3C_2}=\dfrac{1}{3}$
(ii) B회사 간식 세트 한 봉지를 택한 경우
B회사 간식 세트 한 봉지에는 초콜릿 3개, 사탕 1개가 들어 있고, 이 중에서 2개의 간식을 꺼낼 때, 모두 초콜릿일 확률은
$\mathrm{P}(E|B)=\dfrac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$
이때, 두 사건 A, B는 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}\end{aligned}$$

7

a는 서로 다른 2개에서 10개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$a={}_2\Pi_{10}=2^{10}=1024$ …… [배점 40 %]
b는 서로 다른 2개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$b={}_2H_{10}={}_{2+10-1}C_{10}={}_{11}C_{10}={}_{11}C_1=11$ …… [배점 40 %]
$\therefore\ a-b=1024-11=1013$ …… [배점 20 %]

8

각 선수가 승부차기를 성공할 확률은 $0.8=\dfrac{4}{5}$이므로 승부차기를 실패할 확률은 $0.2=\dfrac{1}{5}$이다. …… [배점 10 %]
한편, B팀이 5 : 4로 이기려면 A팀은 5명의 선수 중에서 4명만 성공하고, B팀은 5명의 선수 모두 성공해야 한다. …… [배점 10 %]
(i) A팀의 5명의 선수 중에서 4명만 성공할 확률은
${}_5C_4\left(\dfrac{4}{5}\right)^4\left(\dfrac{1}{5}\right)^1=\left(\dfrac{4}{5}\right)^4$ …… [배점 30 %]
(ii) B팀의 5명의 선수 모두 성공할 확률은
${}_5C_5\left(\dfrac{4}{5}\right)^5\left(\dfrac{1}{5}\right)^0=\left(\dfrac{4}{5}\right)^5$ …… [배점 30 %]
(i), (ii)에서 구하는 확률은
$\left(\dfrac{4}{5}\right)^4\left(\dfrac{4}{5}\right)^5=\left(\dfrac{4}{5}\right)^9$ …… [배점 20 %]

적중 예상 전략 1회

76~79쪽

1 ⑤	**2** ②	**3** ③	**4** ②
5 ④	**6** ③	**7** ③	**8** ④
9 ③	**10** ④	**11** ⑤	**12** ①
13 1536	**14** 13	**15** 28	**16** 621

1

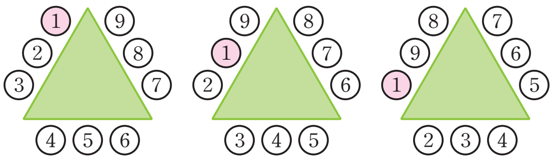
어린이 2명과 어른 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(6-1)!=5!=120$
어린이 2명이 이웃하여 어른 4명과 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$\underbrace{(5-1)!}_{\text{어린이 2명을 한 묶음으로 생각}}\times\underbrace{2!}_{\text{어린이끼리 자리 바꿈}}=4!\times2!=48$
따라서 구하는 경우의 수는
$120-48=72$

2

9명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(9-1)!=8!$

이때, 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 정삼각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$3\times 8!$

3

노란색과 보라색을 한 가지 색으로 생각하여 6가지 색을 원판에 칠하는 경우의 수는

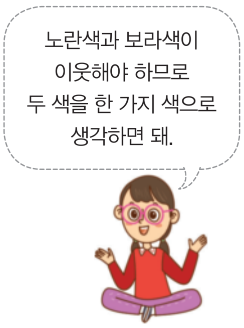
$(6-1)!=5!=120$

노란색과 보라색으로 칠할 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times 2=240$



4

서로 다른 2개에서 8개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_8=2^8=256$

5

일의 자리에는 1, 3이 올 수 있으므로 그 경우의 수는 2이다.

만의 자리에는 0을 제외한 1, 2, 3이 올 수 있으므로 그 경우의 수는 3이다.

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에는 각각 0, 1, 2, 3이 중복하여 올 수 있으므로 그 경우의 수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$2\times 3\times 64=384$

6

A가 C보다 앞에 오도록 나열하려면 A, C를 모두 X로 생각하여 10개의 문자 S, T, X, T, I, S, T, I, X, S를 일렬로 나열한 다음

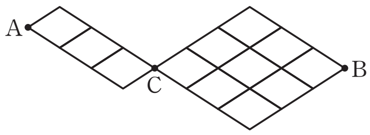
↳ S가 3개, T가 3개, X가 2개, I가 2개

첫 번째 X는 A, 두 번째 X는 C로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{10!}{3!3!2!2!}=10\times 9\times 8\times 7\times 5=25200$

7



(ⅰ) A지점에서 C지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

↗ 방향으로 한 칸, ↘ 방향으로 세 칸 가야 하므로

$\frac{4!}{1!3!}=4$

(ⅱ) C지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

↗ 방향으로 세 칸, ↘ 방향으로 세 칸 가야 하므로

$\frac{6!}{3!3!}=20$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$4\times 20=80$

8

(ⅰ) $x+y+z=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수는 3개의 문자 x, y, z 중에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_9={}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=\frac{11\times 10}{2\times 1}=55$

$\therefore a=55$

(ⅱ) $x+y+z=9$를 만족시키는 양의 정수해의 개수는 3개의 문자 x, y, z 중에서 $(9-3)$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=\frac{8\times 7}{2\times 1}=28$

$\therefore b=28$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$a+b=55+28=83$

9

$\left(ax+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(ax)^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_r\,a^{4-r}x^{4-r}x^{-r}$

$={}_4C_r\,a^{4-r}x^{4-2r}$

$x^{4-2r}=x^0$에서 $4-2r=0$ $\quad\therefore r=2$

이때, 상수항은 54이므로 ${}_4C_2a^2=54$

$6a^2=54$, $a^2=9$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

10

$(1+2x)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r(2x)^r={}_nC_r2^rx^r$

이므로 x^4의 계수는 ${}_nC_4\times 2^4$

$(1+2x)^4$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_4C_4\times2^4$

$(1+2x)^5$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_5C_4\times2^4$

$\vdots$

$(1+2x)^8$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_8C_4\times2^4$

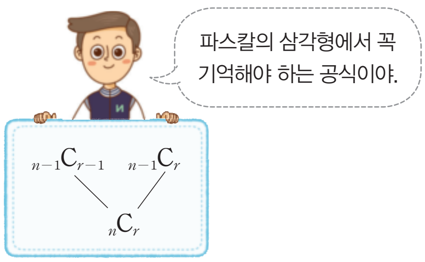
따라서 구하는 x^4의 계수는

$$\begin{aligned}&{}_4C_4\times2^4+{}_5C_4\times2^4+{}_6C_4\times2^4+{}_7C_4\times2^4+{}_8C_4\times2^4\\&=2^4({}_4C_4+{}_5C_4+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4)\\&=2^4({}_5C_5+{}_5C_4+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4)\\&=2^4({}_6C_5+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4)\\&=2^4({}_7C_5+{}_7C_4+{}_8C_4)\\&=2^4({}_8C_5+{}_8C_4)\\&=2^4\times{}_9C_5=2^4\times{}_9C_4=2^4\times\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=2016\end{aligned}$$

11

제2행부터 제12행까지 오른쪽에서 세 번째에 있는 수들을 모두 더하면

$$\begin{aligned}{}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{12}C_{10}&={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{12}C_{10}\\&={}_4C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{12}C_{10}\\&={}_5C_2+\cdots+{}_{12}C_{10}\\&\vdots\\&={}_{12}C_9+{}_{12}C_{10}\\&={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3\\&=\frac{13\times12\times11}{3\times2\times1}=286\end{aligned}$$



12

ㄱ. ${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_{10}=2^{10}$이므로

$${}_{10}C_1+{}_{10}C_2+{}_{10}C_3+\cdots+{}_{10}C_9=2^{10}-{}_{10}C_0-{}_{10}C_{10}=1024-1-1=1022$$

ㄴ. ${}_8C_0+{}_8C_2+{}_8C_4+{}_8C_6+{}_8C_8=2^{8-1}=2^7$이므로

$${}_8C_0+{}_8C_2+{}_8C_4+{}_8C_6=2^7-{}_8C_8=128-1=127$$

ㄷ. ${}_6C_0-{}_6C_1+{}_6C_2-{}_6C_3+{}_6C_4-{}_6C_5+{}_6C_6=0$이므로

$${}_6C_1+{}_6C_3+{}_6C_5={}_6C_0+{}_6C_2+{}_6C_4+{}_6C_6$$

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

13

A의 원소 중 소수는 2, 3, 5, 7이고, 이 소수들은 모두 다른 함숫값을 가지므로 그 경우의 수는

${}_4P_4=4\times3\times2\times1=24$ …… [배점 40 %]

A의 원소 중 소수를 제외한 것은 1, 4, 6이고, 1, 4, 6은 B의 모든 원소 1, 3, 5, 7에 대응할 수 있으므로 그 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

$\therefore {}_4\Pi_3=4^3=64$ …… [배점 40 %]

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$24\times64=1536$ …… [배점 20 %]

14

여섯 자리 자연수가 4의 배수인 경우는 끝 두 자리의 수가 4의 배수이어야 하므로 □□□□12 또는 □□□□20 꼴이다.

이때, 맨 앞자리에는 0이 올 수 없으므로

1□□□12 또는 2□□□12 또는 □□□□20

꼴인 경우의 수를 구한다. …… [배점 20 %]

(i) 1□□□12 꼴의 자연수

나머지 세 자리에는 0, 1, 2가 올 수 있으므로 그 경우의 수는

$3!=6$ …… [배점 20 %]

(ii) 2□□□12 꼴의 자연수

나머지 세 자리에는 0, 1, 1이 올 수 있으므로 그 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$ …… [배점 20 %]

(iii) □□□□20 꼴의 자연수

나머지 네 자리에는 1, 1, 1, 2가 올 수 있으므로 그 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$ …… [배점 20 %]

따라서 구하는 4의 배수의 개수는

$6+3+4=13$ …… [배점 20 %]

15

(i) 과자 5봉지를 두 상자 A, B에 나누어 담는 경우의 수는

${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$ …… [배점 30 %]

(ii) 사탕 4개를 두 상자 A, B에 나누어 담는 경우의 수는

${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$ …… [배점 30 %]

(i), (ii)에서 과자 5봉지와 사탕 4개를 두 상자 A, B에 나누어 담는 경우의 수는

$6\times5=30$ …… [배점 20 %]

이때, 빈 상자가 생기는 2가지 경우를 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$30-2=28$ …… [배점 20 %]

16

$(1+x)^3$의 전개식의 일반항은 ${}_3C_rx^r$

$(1+3x)^4$의 전개식의 일반항은 ${}_4C_s(3x)^s={}_4C_s3^sx^s$

따라서 $(1+x)^3(1+3x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_3C_rx^r\times{}_4C_s3^sx^s={}_3C_r\times{}_4C_s3^sx^{r+s}$ …… [배점 40 %]

x^5항은 $r+s=5$일 때이고 r, s는 각각 $0\le r\le 3$, $0\le s\le 4$인 정수이므로

(ⅰ) $r=1$, $s=4$일 때

$_3C_1\times{}_4C_4\times 3^4=3\times 1\times 81=243$

(ⅱ) $r=2$, $s=3$일 때

$_3C_2\times{}_4C_3\times 3^3=3\times 4\times 27=324$

(ⅲ) $r=3$, $s=2$일 때

$_3C_3\times{}_4C_2\times 3^2=1\times 6\times 9=54$ …… [배점 40 %]

따라서 구하는 x^5의 계수는

$243+324+54=621$ …… [배점 20 %]

적중 예상 전략 2회

80~83쪽

1 ②	**2** ④	**3** ③	**4** ④
5 ③	**6** ③	**7** ②	**8** ⑤
9 ②	**10** ②	**11** ③	**12** ③
13 $\frac{1}{25}$	**14** $\frac{13}{14}$	**15** $\frac{35}{44}$	**16** $\frac{1}{4}$

1

집합 A의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는

$2^6-1=63$

집합의 원소의 개수가 n일 때, 공집합이 아닌 부분집합의 개수는 2^n-1이야.

(ⅰ) 가장 큰 원소가 6, 가장 작은 원소가 1인 경우

1과 6을 반드시 원소로 갖고, 2, 3, 4, 5를 원소로 가질 수 있으므로 부분집합의 개수는 $2^4=16$

(ⅱ) 가장 큰 원소가 5, 가장 작은 원소가 2인 경우

2와 5를 반드시 원소로 갖고, 3, 4를 원소로 가질 수 있으므로 부분집합의 개수는 $2^2=4$

(ⅲ) 가장 큰 원소가 4, 가장 작은 원소가 3인 경우

3과 4를 반드시 원소로 갖고, 다른 원소는 갖지 않으므로 부분집합의 개수는 1

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 부분집합의 원소 중에서 가장 큰 원소와 가장 작은 원소의 합이 7인 경우의 수는

$16+4+1=21$

따라서 구하는 확률은

$\frac{21}{63}=\frac{1}{3}$

2

6개의 모양을 각 정삼각형에 하나씩 그려 넣는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

♥모양을 그려 넣은 맞은편에 ★모양을 그려 넣고 나머지 4개의 모양을 4개의 정삼각형에 그려 넣는 경우의 수는

$_4P_4=24$

따라서 구하는 확률은

$\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

3

8장의 카드 중에서 3장의 카드를 뽑는 경우의 수는

$_8C_3=56$

이때, 가장 큰 수가 짝수가 되는 경우는 가장 큰 수가 6, 8, 10인 경우이다.

(ⅰ) 가장 큰 수가 6인 경우

3, 4, 5가 적힌 3장의 카드에서 2장을 뽑아야 하므로 그 경우의 수는 $_3C_2=3$

(ⅱ) 가장 큰 수가 8인 경우

3, 4, 5, 6, 7이 적힌 5장의 카드에서 2장을 뽑아야 하므로 그 경우의 수는 $_5C_2=10$

(ⅲ) 가장 큰 수가 10인 경우

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9가 적힌 7장의 카드에서 2장을 뽑아야 하므로 그 경우의 수는 $_7C_2=21$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 가장 큰 수가 짝수가 되는 경우의 수는

$3+10+21=34$

따라서 구하는 확률은

$\frac{34}{56}=\frac{17}{28}$

4

20개의 제비 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

$_{20}C_2=190$

n개의 당첨 제비 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

$_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}$

모두 당첨 제비가 나올 확률은 $\frac{1}{19}$이므로

$\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{190}=\frac{1}{19}$, $n(n-1)=20$

$n^2-n-20=0$, $(n+4)(n-5)=0$

$\therefore n=5$ ($\because n>0$)

5

$A\cap B=\varnothing$이므로 두 사건 A, B는 서로 배반사건이다.

$\therefore P(A\cap B)=0$

즉, $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}-\mathrm{P}(A)$

이때, $\frac{1}{8}\le\mathrm{P}(B)\le\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{8}\le\frac{3}{4}-\mathrm{P}(A)\le\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{8}\le-\mathrm{P}(A)\le-\frac{1}{4}$

$\therefore \frac{1}{4}\le\mathrm{P}(A)\le\frac{5}{8}$

따라서 $\mathrm{P}(A)$의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

6

수학을 이틀 연속하여 공부하는 사건을 A, 영어를 이틀 연속하여 공부하는 사건을 B라 하면

수학, 영어, 국어, 과학을 공부하는 날을 각각 a, b, c, d로 놓고 같은 것이 있는 순열을 이용해.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{\frac{5!}{2!}}{\frac{6!}{2!2!}}=\frac{60}{180}=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{\frac{5!}{2!}}{\frac{6!}{2!2!}}=\frac{60}{180}=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4!}{\frac{6!}{2!2!}}=\frac{24}{180}=\frac{2}{15}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{15}=\frac{8}{15}$$

같은 과목을 이틀 연속하여 공부하지 않는 사건, 즉 수학을 이틀 연속하여 공부하지 않고 영어를 이틀 연속하여 공부하지 않는 사건은 $A^C\cap B^C$, 즉 $(A\cup B)^C$이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$$
$$=1-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}$$

7

임의로 뽑은 한 명이 여학생일 사건을 A, 음악을 선호할 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{10+a}{22+2a}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{a}{22+2a}$

한편, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{a}{22+2a}}{\frac{10+a}{22+2a}}=\frac{a}{10+a}=\frac{1}{3}$이므로

$3a=10+a \qquad \therefore a=5$

8

비가 온 날의 다음날에 비가 오지 않을 확률이 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, 비가 오지 않은 날의 다음날에 비가 오지 않을 확률이 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$이므로 같은 주 토요일에 비가 오는 다음의 각 경우의 확률을 구하면

(ⅰ) 목요일과 금요일에 모두 비가 오는 경우

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$

(ⅱ) 목요일에 비가 오고 금요일에 비가 오지 않는 경우

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{18}$

(ⅲ) 목요일에 비가 오지 않고 금요일에 비가 오는 경우

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

(ⅳ) 목요일과 금요일에 모두 비가 오지 않는 경우

$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{27}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{8}=\frac{59}{216}$

9

지연이가 검은 공 1개, 흰 공 1개를 꺼내는 사건을 A, 흰 공 2개를 꺼내는 사건을 B, 지연이가 이기는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)$$
$$=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{2}{35}$$

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)$$
$$=\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\left(\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}+\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}\right)=\frac{11}{42}$$

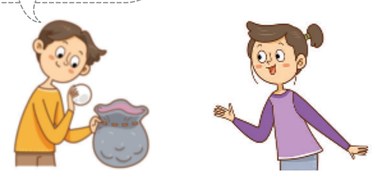
$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$$
$$=\frac{2}{35}+\frac{11}{42}=\frac{67}{210}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{11}{42}}{\frac{67}{210}}=\frac{55}{67}$$

지연이가 이기려면 지연이가 검은 공 1개, 흰 공 1개를 꺼냈을 때, 정훈이는 검은 공 2개를 꺼내야 하고,

지연이가 흰 공 2개를 꺼냈을 때, 정훈이는 검은 공 2개 또는 검은 공 1개, 흰 공 1개를 꺼내야 해.



10

ㄱ. $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\ne 0$이므로 두 사건 A, B는 서로 배반사건이 아니다.

ㄴ. [반례] 표본공간 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 두 사건 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 4\}$라 하면 $A\cap B=\{1\}$

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B가 서로 독립이다.

이때, $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A|B)\neq 1-\mathrm{P}(B)$

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A^C, B도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(A^C)$

또, $1-\mathrm{P}(A|B)=1-\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A^C)$

$\therefore \mathrm{P}(A^C|B)=1-\mathrm{P}(A|B)$

ㄹ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$

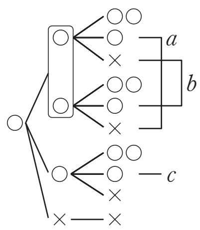
$\therefore \mathrm{P}(A|B)\neq\mathrm{P}(B|A)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

11

세균 1마리가 2분 후에도 1마리인 경우는 오른쪽 수형도에서 a, b, c인 경우이다.

즉, 1분 후에 2마리, 2마리가 다시 1분 후에 1마리, 0마리(a) 또는 0마리, 1마리(b)가 되거나 1분 후에 1마리, 다시 1분 후에 1마리(c)가 되는 경우이다.



(ⅰ) a일 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{8}=\frac{3}{128}$

(ⅱ) b일 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{128}$

(ⅲ) c일 확률은 $\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{64}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$\frac{3}{128}+\frac{3}{128}+\frac{9}{64}=\frac{3}{16}$

12

두 눈의 수의 곱이 홀수일 확률은 두 눈의 수가 모두 홀수일 확률이므로

$\frac{3\times3}{6\times6}=\frac{1}{4}$

이때, 두 눈의 수의 곱이 짝수일 확률은

$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

점 P가 점 $(7, 5)$에 도착하려면 y축의 방향으로 5만큼 평행이동해야 한다.

따라서 시행 횟수는 5회이므로 두 눈의 수의 곱이 짝수인 경우가 r회, 홀수인 경우가 $(5-r)$회 나왔다고 하면

$-r+3(5-r)=7$, $-4r=-8$　　$\therefore r=2$

따라서 점 P가 점 $(7, 5)$에 도착하려면 두 눈의 수의 곱이 짝수인 경우가 2회, 두 눈의 수의 곱이 홀수인 경우가 3회 나오므로

${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{45}{512}$

13

집합 A에서 집합 A로의 함수 f의 개수는

${}_5\Pi_5=5^5$ …… [배점 30 %]

이때, $f(1)=f(2)=5$를 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_5\Pi_3=5^3$ …… [배점 50 %]

따라서 구하는 확률은

$\frac{5^3}{5^5}=\frac{1}{25}$ …… [배점 20 %]

14

삼각형이 만들어질 사건을 A라 하면 A^C는 삼각형이 만들어지지 않는 사건이다.

이때, 삼각형이 만들어지지 않으려면 지름 위의 4개의 점 중에서 3개의 점을 택해야 하므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{4}{56}=\frac{1}{14}$ …… [배점 60 %]

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{14}=\frac{13}{14}$ …… [배점 40 %]

15

동호회 회원이 축구, 농구, 배구를 택한 사건을 각각 A, B, C라 하면 축구, 배구를 모두 택한 회원 수는 $70\times\frac{50}{100}=35$이므로

$n(A\cap C)=35$ …… [배점 20 %]

농구, 배구를 모두 택한 회원 수는 $30\times\frac{30}{100}=9$이므로

$n(B\cap C)=9$ …… [배점 20 %]

축구, 농구를 택한 회원 100명 중에서 배구를 택한 회원 수는

$35+9=44$이므로

$n(C)=44$ …… [배점 20 %]

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap C)}{\mathrm{P}(C)}=\frac{\frac{35}{100}}{\frac{44}{100}}=\frac{35}{44}$ …… [배점 40 %]

16

동전을 던져서 앞면이 나오는 횟수를 x, 뒷면이 나오는 횟수를 y라 하면

$x+y=4$ …… ㉠ …… [배점 20 %]

주머니 속에 들어 있는 흰 구슬의 개수는 $3-x+y$, 검은 구슬의 개수는 $3+x-y$이므로

$3-x+y=5$, $3+x-y=1$

$\therefore x-y=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=3$ …… [배점 50 %]

따라서 주머니 속에 흰 구슬 5개와 검은 구슬 1개가 들어 있으려면 동전의 앞면이 1회, 뒷면이 3회 나와야 하므로 구하는 확률은

${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$ …… [배점 30 %]

1주 1일 개념 돌파 전략 ①

7, 9쪽

1-2 $\frac{1}{2}$	2-2 $\frac{5}{6}$	3-2 $\frac{3}{16}$	4-2 $\frac{3}{5}$
5-2 4	6-2 32		

1-2
$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

2-2
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 2)&=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 2)&=1-\mathrm{P}(X=3)\\&=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

3-2
확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{4}+3a=1$

$4a=\frac{3}{4}\qquad\therefore a=\frac{3}{16}$

4-2
$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{3}{10}=\frac{11}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{10}+2^2\times\frac{3}{5}+3^2\times\frac{3}{10}=\frac{26}{5}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{26}{5}-\left(\frac{11}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

5-2
$\sigma(X)=6$이므로

$\mathrm{V}(X)=6^2=36$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{V}\left(-\frac{1}{3}X+3\right)&=\left(-\frac{1}{3}\right)^2\mathrm{V}(X)\\&=\frac{1}{9}\times 36=4\end{aligned}$$

6-2
$\mathrm{V}(X)=6$에서

$n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=6$

$\therefore n=32$

1주 1일 개념 돌파 전략 ②

10~11쪽

1 ①	2 ①	3 ④	4 ⑤
5 ④	6 ⑤		

1
확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\frac{3}{k}+\frac{4}{k}=1,\ \frac{10}{k}=1\qquad\therefore k=10$

2
확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{18}+\frac{a}{9}+\frac{2a+1}{9}+\frac{a-1}{6}=1,\ \frac{9a}{18}=1\qquad\therefore a=2$

3
확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{4}+2a+\frac{1}{3}=1,\ 3a=\frac{5}{12}\qquad\therefore a=\frac{5}{36}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	1

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X^2-3X+2=0)&=\mathrm{P}((X-1)(X-2)=0)\\&=\mathrm{P}(X=1\text{ 또는 }X=2)\\&=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\\&=\frac{1}{4}+\frac{5}{18}=\frac{19}{36}\end{aligned}$$

X에 대한 이차방정식 $X^2-3X+2=0$의 해를 구해.

4
$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{5}{12}+2\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{12}+6\times\frac{1}{6}=2$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{5}{12}+2^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{12}+6^2\times\frac{1}{6}=\frac{26}{3}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{26}{3}-2^2=\frac{14}{3}$

$\therefore \mathrm{V}(3X+5)=3^2\mathrm{V}(X)=9\times\frac{14}{3}=42$

5
$\mathrm{E}\left(\frac{X+2}{3}\right)=2$에서 $\frac{1}{3}\mathrm{E}(X)+\frac{2}{3}=2$

$\frac{1}{3}\mathrm{E}(X)=\frac{4}{3}\qquad\therefore \mathrm{E}(X)=4$

$\sigma\left(\frac{X+2}{3}\right)=3$에서 $\left|\frac{1}{3}\right|\sigma(X)=3$

$\therefore \sigma(X)=9$

이때, $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$

$=9^2+4^2=97$

6

확률변수 X는 이항분포 $B\left(32, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=32\times\frac{1}{4}=8$, $V(X)=32\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=6$

$\therefore E(X)+V(X)=14$

1주 2일 필수 체크 전략 ①

12~15쪽

1-1 ⑤	**1-2** $\frac{13}{35}$
2-1 ⑤	**2-2** $\frac{3}{5}$
3-1 $\frac{3}{5}$	**3-2** ③
4-1 4	**4-2** ⑤

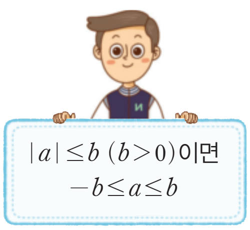
1-1

$P(|X-9|\le1)$

$=P(-1\le X-9\le1)$

$=P(8\le X\le10)$

$=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$



서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

두 눈의 수를 a, b라 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여

(i) 두 눈의 수의 합이 8인 경우

$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$의 5가지

(ii) 두 눈의 수의 합이 9인 경우

$(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$의 4가지

(iii) 두 눈의 수의 합이 10인 경우

$(4, 6), (5, 5), (6, 4)$의 3가지

따라서

$P(X=8)=\frac{5}{36}$, $P(X=9)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$, $P(X=10)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

이므로

$P(|X-9|\le1)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$

$=\frac{5}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$

1-2

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 각 값을 가질 확률은

$P(X=0)=\frac{{}_4C_4\times{}_3C_0}{{}_7C_4}=\frac{1}{35}$, $P(X=1)=\frac{{}_4C_3\times{}_3C_1}{{}_7C_4}=\frac{12}{35}$

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_3C_2}{{}_7C_4}=\frac{18}{35}$, $P(X=3)=\frac{{}_4C_1\times{}_3C_3}{{}_7C_4}=\frac{4}{35}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$\therefore P(X\le1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{35}+\frac{12}{35}=\frac{13}{35}$

2-1

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{5}+b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{4}{5}$

이때,

$E(X)=-1\times a+0\times\frac{1}{5}+1\times b=b-a$

$E(X^2)=(-1)^2\times a+0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times b=a+b=\frac{4}{5}$

이고 확률변수 X의 표준편차가 $\frac{2}{5}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{5}-(b-a)^2 \qquad \therefore (a-b)^2=\frac{16}{25}$

2-2

$P(0\le X\le2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$=\frac{1}{5}+\frac{1+a}{5}+\frac{1}{5}$

$=\frac{3+a}{5}=\frac{4}{5}$

이므로 $a=1$

$\therefore E(X)=-1\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

3-1

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4이다.

(i) $X=2$인 경우

1, 2를 반드시 뽑고 2보다 큰 3, 4, 5 중에서 한 장을 뽑으면 되므로 $P(X=2)=\frac{{}_2C_2\times{}_3C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$

(ii) $X=3$인 경우

3보다 작은 1, 2 중에서 한 장을 뽑고, 3보다 큰 4, 5 중에서 한 장을 뽑으면 되므로 $P(X=3)=\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_3}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

(iii) $X=4$인 경우

4, 5를 반드시 뽑고 4보다 작은 1, 2, 3 중에서 한 장을 뽑으면 되므로 $P(X=4)=\frac{{}_2C_2\times{}_3C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{5}+4\times\frac{3}{10}=3$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{2}{5}+4^2\times\frac{3}{10}-3^2=\frac{3}{5}$

3-2

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 서로 다른 3개의 동전을 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$2\times2\times2=8$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면

(i) $X=0$인 경우

TTT의 1가지이므로 $\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{8}$

(ii) $X=1$인 경우

HTT, THT, TTH의 3가지이므로 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{8}$

(iii) $X=2$인 경우

HHT, HTH, THH의 3가지이므로 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{8}$

(iv) $X=3$인 경우

HHH의 1가지이므로 $\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{8}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$\therefore 4\mathrm{E}(X^2)=4\left(0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}\right)=4\times3=12$

4-1

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{12}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{1}{4}=1$

$\frac{2a}{3}=\frac{2}{3}\qquad\therefore a=1$

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

$\therefore \mathrm{E}\left(2aX+\frac{1}{2}\right)=\mathrm{E}\left(2X+\frac{1}{2}\right)=2\mathrm{E}(X)+\frac{1}{2}$

$=2\times\frac{7}{4}+\frac{1}{2}=4$

4-2

$\mathrm{E}(2X+1)=7$에서

$2\mathrm{E}(X)+1=7\qquad\therefore \mathrm{E}(X)=3$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=12-3^2=3$이므로

$\mathrm{V}(3X)=3^2\mathrm{V}(X)=9\times3=27$

1주 2일 필수 체크 전략 ②

16~17쪽

1 ② **2** ② **3** ⑤ **4** ②
5 ⑤ **6** ①

1

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_4}=\frac{5}{70}=\frac{1}{14}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_4}=\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_4}=\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_5\mathrm{C}_4\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_8\mathrm{C}_4}=\frac{5}{70}=\frac{1}{14}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$	1

위의 표에서

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{2}$

이므로 $\mathrm{P}(X\le2)=\frac{1}{2}$

$\therefore k=2$

2

$\mathrm{E}(X)=\frac{5}{2}$에서

$0\times\frac{1}{6}+a\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{3}+b\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

$a+b=6\qquad\therefore b=6-a$ …… ㉠

$\mathrm{V}(X)=\frac{7}{4}$에서 $\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{7}{4}$

$0^2\times\frac{1}{6}+a^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{3}+b^2\times\frac{1}{4}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{7}{4}$

$a^2+12+b^2-25=7\qquad\therefore a^2+b^2=20$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2+(6-a)^2=20$

$a^2-6a+8=0$, $(a-2)(a-4)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=4$

㉠에서 $a=2$일 때 $b=4$이고, $a=4$일 때 $b=2$

그런데 $a<b$이므로 $a=2$, $b=4$

$\therefore 2a^2+b^2=2\times2^2+4^2=24$

3

확률의 총합은 1이므로

$a+b+\frac{1}{4}=1\qquad\therefore a=\frac{3}{4}-b$ …… ㉠

$\mathrm{E}(X)=0\times a+1\times b+2\times\frac{1}{4}=b+\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$$=0^2\times a+1^2\times b+2^2\times\frac{1}{4}-\left(b+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=b+1-b^2-b-\frac{1}{4}=-b^2+\frac{3}{4}$$

따라서 $b=0$일 때 $\mathrm{V}(X)$는 최댓값 $\frac{3}{4}$을 가지므로 $b=0$을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{3}{4}$

4

사물함이 열릴 때까지 시도한 횟수를 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5이고, 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(X=4)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{5}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

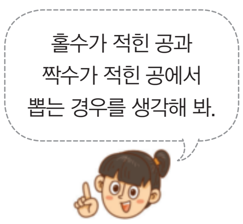
$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{5}=3$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$$=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{1}{5}+5^2\times\frac{1}{5}-3^2=2$$

5

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.



(i) $X=0$인 경우

1, 3, 5가 적힌 공 중에서 2개를 꺼내면 되므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

(ii) $X=1$인 경우

1, 3, 5가 적힌 공 중에서 1개, 2, 4, 6이 적힌 공 중에서 1개를 꺼내면 되므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$

(iii) $X=2$인 경우

2, 4, 6이 적힌 공 중에서 2개를 꺼내면 되므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$$=0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{1}{5}-1^2=\frac{2}{5}$$

$\therefore \mathrm{E}(2X-1)+\mathrm{V}(-5X+1)=2\mathrm{E}(X)-1+(-5)^2\mathrm{V}(X)$

$$=2\times1-1+25\times\frac{2}{5}=11$$

6

$\mathrm{E}(Y)=1$에서 $\mathrm{E}(2X-5)=2\mathrm{E}(X)-5=1$

$\therefore \mathrm{E}(X)=3$ …… ㉠

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2=25-1^2=24$이고 $Y=2X-5$이므로

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(2X-5)=2^2\mathrm{V}(X)=4\mathrm{V}(X)=24$

$\therefore \mathrm{V}(X)=6$

$\therefore \frac{\mathrm{E}(X)}{\mathrm{V}(X)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

다른 풀이

$\mathrm{E}((2X-5)^2)=\mathrm{E}(4X^2-20X+25)$

$$=4\mathrm{E}(X^2)-20\mathrm{E}(X)+25$$

$$=4\mathrm{E}(X^2)-20\times3+25\ (\because ㉠)$$

$$=4\mathrm{E}(X^2)-35=25$$

$\therefore \mathrm{E}(X^2)=15$

따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=15-3^2=6$이므로

$\frac{\mathrm{E}(X)}{\mathrm{V}(X)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

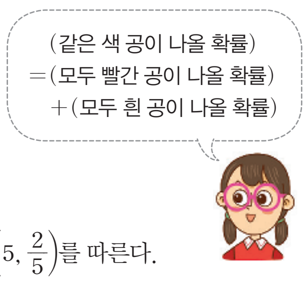
1주 3일 필수 체크 전략 ①

18~21쪽

1-1 $\frac{144}{625}$	**1-2** ⑤
2-1 ⑤	**2-2** 43
3-1 ④	**3-2** $\frac{2\sqrt{10}}{5}$
4-1 ②	**4-2** 6

1-1

2개의 공을 5번 반복해서 꺼내므로 5회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 같은 색의 공이 나올 확률은



$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}+\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{3}{15}+\frac{3}{15}=\frac{2}{5}$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5, \frac{2}{5}\right)$를 따른다.

따라서 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{5-x}$ (단, $x=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

$\therefore \mathrm{P}(X=3)={}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^2=10\times\frac{8}{125}\times\frac{9}{25}=\frac{144}{625}$

1-2

흥행에 성공하는 영화의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(7, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_7\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{7-x}$ (단, $x=0, 1, 2, \cdots, 7$)

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq1)&=1-\mathrm{P}(X=0)\\&=1-{}_7\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^7\\&=1-\left(\frac{2}{3}\right)^7\end{aligned}$$

2-1

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=2$에서 $np=2$ …… ㉠

$\mathrm{V}(X)=\frac{4}{3}$에서 $np(1-p)=\frac{4}{3}$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $1-p=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore p=\frac{1}{3}$

$p=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$n\times\frac{1}{3}=2$ $\quad\therefore n=6$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(6, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_6\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}$ (단, $x=0, 1, 2, \cdots, 6$)

$$\therefore \frac{\mathrm{P}(X=2)}{\mathrm{P}(X=3)}=\frac{{}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4}{{}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3}=\frac{15\times\frac{2^4}{3^6}}{20\times\frac{2^3}{3^6}}=\frac{3}{2}$$

2-2

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{n-x}$ (단, $x=0, 1, 2, \cdots, n$)

(가)에서 $\mathrm{P}(X=1)=40\mathrm{P}(X=0)$

${}_n\mathrm{C}_1 p(1-p)^{n-1}=40{}_n\mathrm{C}_0 p^0(1-p)^n$

$np(1-p)^{n-1}=40(1-p)^n$

이때, $0<1-p<1$이므로 $np=40(1-p)$ …… ㉠

(나)에서 $\mathrm{E}(X)=20$ $\quad\therefore np=20$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$20=40(1-p)$, $1-p=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore p=\frac{1}{2}$

$p=\frac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면 $n\times\frac{1}{2}=20$ $\quad\therefore n=40$

$\therefore n+6p=40+6\times\frac{1}{2}=43$

3-1

3개의 공을 꺼내어 적힌 수를 확인하고 다시 넣는 시행을 50회 반복하므로 50회의 독립시행이다.

5개의 공 중에서 임의로 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_3=10$

꺼낸 3개의 공에 적힌 수를 각각 a, b, c $(a<b<c)$라 하면 순서쌍 (a, b, c)에 대하여 두 수의 평균이 나머지 한 수와 같은 경우는

$(6, 7, 8), (6, 8, 10), (7, 8, 9), (8, 9, 10)$

의 4가지이므로 1회의 시행에서 두 수의 평균이 나머지 한 수와 같을 확률은

$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(50, \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=50\times\frac{2}{5}=20$

$\mathrm{V}(X)=50\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=12$

이때, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=12+20^2=412$

3-2

한 개의 공을 꺼내어 색을 확인하고 다시 넣는 시행을 10번 반복하므로 10회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 흰 공이 나올 확률은 $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10, \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{10\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{8}{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

4-1

$\mathrm{V}(2X-1)=90$에서

$\mathrm{V}(2X-1)=2^2\mathrm{V}(X)=90$ $\quad\therefore \mathrm{V}(X)=\frac{45}{2}$

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{45}{2}$에서

$\frac{3}{16}n=\frac{45}{2}$ $\quad\therefore n=120$

따라서 $\mathrm{E}(X)=120\times\frac{1}{4}=30$이므로

$\mathrm{E}(2X-1)=2\mathrm{E}(X)-1=2\times30-1=59$

4-2

$V(7X)=60$에서 $7^2V(X)=60$ $\quad\therefore V(X)=\frac{60}{49}$

확률변수 X가 이항분포 $B\left(n, \frac{2}{7}\right)$를 따르므로

$V(X)=n\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{7}=\frac{60}{49}$에서 $\frac{10}{49}n=\frac{60}{49}$ $\quad\therefore n=6$

1주 3일 필수 체크 전략 ②

22~23쪽

1 ④	2 ⑤	3 ①	4 ②
5 ③	6 ⑤		

1

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던지는 시행을 5번 반복하므로 5회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 짝수와 홀수가 한 개씩 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

이때, 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}$ (단, $x=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

$$\begin{aligned}\therefore P(X\le4)&=1-P(X>4)\\&=1-P(X=5)\\&=1-{}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\\&=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}\end{aligned}$$

2

확률변수 X는 이항분포 $B(n, p)$를 따르므로

$E(X)=6$에서 $np=6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\sigma(X)=2$에서 $\sqrt{np(1-p)}=2$

$\therefore np(1-p)=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $1-p=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore p=\frac{1}{3}$

$p=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $n\times\frac{1}{3}=6$ $\quad\therefore n=18$

$\therefore \frac{n}{p}=\frac{18}{\frac{1}{3}}=54$

3

확률변수 X는 이항분포 $B(n, p)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_nC_xp^x(1-p)^{n-x}$ (단, $x=0, 1, 2, \cdots, n$)

$V(X)=\frac{10}{9}$에서 $np(1-p)=\frac{10}{9}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$40P(X=n)=P(X=n-1)$에서

$40\,{}_nC_np^n(1-p)^0={}_nC_{n-1}p^{n-1}(1-p)^1$

$40p^n=np^{n-1}(1-p)$

이때, $0<p<1$이므로 $40p^2=np(1-p)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$40p^2=\frac{10}{9}$, $p^2=\frac{1}{36}$ $\quad\therefore p=\frac{1}{6}$ ($\because p>0$)

$p=\frac{1}{6}$을 ㉠에 대입하면

$n\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{10}{9}$ $\quad\therefore n=8$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(8, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$E(X)=8\times\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$

4

서로 다른 3개의 동전을 동시에 던지는 시행을 384번 반복하므로 384회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 앞면이 1개, 뒷면이 2개 나올 확률은 $\frac{3}{8}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(384, \frac{3}{8}\right)$을 따른다.

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{384\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

5

보라색 공이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 한 개의 공을 꺼내어 색을 확인하고 다시 넣는 시행을 25번 반복하므로 25회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 보라색 공이 나올 확률은 $\frac{x}{30}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(25, \frac{x}{30}\right)$를 따른다.

이때, 확률변수 X의 평균이 5이므로

$E(X)=25\times\frac{x}{30}=5$ $\quad\therefore x=6$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(25, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로 구하는 분산은

$V(X)=25\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=4$

6

확률변수 X는 이항분포 $B\left(49, \frac{3}{7}\right)$을 따르므로

$V(X)=49\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}=12$

또, 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$V(Y)=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2n}{9}$

$V(3X)=2V(Y)$에서 $3^2V(X)=2V(Y)$

$9\times12=2\times\frac{2n}{9}$ $\quad\therefore n=243$

1주 4일 교과서 대표 전략 ①

24~27쪽

1 ③	2 ③	3 ③	4 $\frac{5}{24}$
5 ①	6 ②	7 3	8 ②
9 ①	10 ④	11 ④	12 $\frac{23}{50000}$
13 ①	14 ⑤	15 ④	16 ③

1

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=1$

$\left(k+\frac{1}{10}\right)+(k-0)+\left(k-\frac{1}{10}\right)+\left(k+\frac{2}{10}\right)+\left(k+\frac{3}{10}\right)=1$

$5k+\frac{1}{2}=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{10}$

2

확률의 총합은 1이므로

$a+2a+3a+4a=1$

$10a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(X^2-X-2=0)=\mathrm{P}((X+1)(X-2)=0)$
$=\mathrm{P}(X=-1 \text{ 또는 } X=2)$
$=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=2)$
$=\frac{1}{10}+\frac{4}{10}=\frac{1}{2}$

3

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{15}{56}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_5\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{1}{56}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

$\therefore \mathrm{P}(X^2-2X<0)=\mathrm{P}(X(X-2)<0)$
$=\mathrm{P}(0<X<2)$
$=\mathrm{P}(X=1)$
$=\frac{15}{28}$

4

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{24}+\frac{1}{8}+a+\frac{1}{3}+b+\frac{1}{12}=1$

$\therefore a+b=\frac{5}{12}$ ...... ㉠

$\mathrm{E}(X)=\frac{67}{24}$이므로

$0\times\frac{1}{24}+1\times\frac{1}{8}+2\times a+3\times\frac{1}{3}+4\times b+5\times\frac{1}{12}=\frac{67}{24}$

$\therefore a+2b=\frac{5}{8}$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{5}{24},\ b=\frac{5}{24}$

$\therefore \mathrm{P}(X=4)=b=\frac{5}{24}$

5

확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{20}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{3}{10}=\frac{5}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{3}{20}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{3}{10}=8$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=8-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{7}{4}$

6

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5이고, 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$ ← 0, 1을 뽑는 경우

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ ← 0, 2를 뽑는 경우

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}+\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}$ ← 0, 3 또는 1, 2를 뽑는 경우

$=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}$ ← 1, 3 또는 2, 2를 뽑는 경우

$=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ ← 2, 3을 뽑는 경우

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{5}=\frac{16}{5}$

7

한 개의 동전을 3번 던질 때, 획득한 점수는

(ⅰ) 앞면 0번, 뒷면 3번 나오는 경우

$3\times0-1\times3=-3$

(ⅱ) 앞면 1번, 뒷면 2번 나오는 경우

$3\times1-1\times2=1$

(ⅲ) 앞면 2번, 뒷면 1번 나오는 경우

$3\times2-1\times1=5$

(ⅳ) 앞면 3번, 뒷면 0번 나오는 경우

$3\times3-1\times0=9$

이므로 획득한 점수를 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 -3, 1, 5, 9이다.

한 개의 동전을 3번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$2\times2\times2=8$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면

(ⅰ) $X=-3$인 경우

TTT의 1가지이므로 $\mathrm{P}(X=-3)=\frac{1}{8}$

(ⅱ) $X=1$인 경우

HTT, THT, TTH의 3가지이므로 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{8}$

(ⅲ) $X=5$인 경우

HHT, HTH, THH의 3가지이므로 $\mathrm{P}(X=5)=\frac{3}{8}$

(ⅳ) $X=9$인 경우

HHH의 1가지이므로 $\mathrm{P}(X=9)=\frac{1}{8}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	-3	1	5	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 구하는 기댓값은

$\mathrm{E}(X)=-3\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{8}+9\times\frac{1}{8}=3$

8

$\mathrm{E}(aX+b)=7$에서 $a\mathrm{E}(X)+b=7$

$\therefore 10a+b=7$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{V}(bX+a)=32$에서 $b^2\mathrm{V}(X)=32$

$8b^2=32$, $b^2=4$ $\quad\therefore b=2\ (\because b>0)$

$b=2$를 ㉠에 대입하면 $a=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=\frac{5}{2}$

9

확률의 총합은 1이므로

$\frac{5}{12}+\frac{1}{3}+a+2a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{12}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\times\frac{5}{12}+2\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{12}+6\times\frac{1}{6}=2$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=0^2\times\frac{5}{12}+2^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{12}+6^2\times\frac{1}{6}-2^2=\frac{14}{3}$

$\therefore \mathrm{V}(6X-10)=6^2\mathrm{V}(X)=36\times\frac{14}{3}=168$

10

확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$

이때, 확률변수 $Y=10X$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(10X)=10\mathrm{E}(X)$

$=10\times\frac{7}{2}=35$

11

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(8, p)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_8\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{8-x}$ (단, $x=0, 1, 2, \cdots, 8$)

$5\mathrm{P}(X=2)=2\mathrm{P}(X=4)$에서

$5\,{}_8\mathrm{C}_2 p^2(1-p)^6=2\,{}_8\mathrm{C}_4 p^4(1-p)^4$

$5\times28\times p^2(1-p)^6=2\times70\times p^4(1-p)^4$

이때, $0<p<1$이므로

$(1-p)^2=p^2$, $1-2p+p^2=p^2$

$1-2p=0 \qquad \therefore p=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(X=5)={}_8\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3=56\times\frac{1}{2^8}=\frac{7}{32}$

12

'한 병 더'가 표시된 주스의 수를 확률변수 X라 하면 주스 5병의 뚜껑을 확인하므로 5회의 독립시행이고, 주스 한 병을 확인할 때, '한 병 더'가 표시되어 있을 확률이 $\frac{1}{10}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5, \frac{1}{10}\right)$을 따른다.

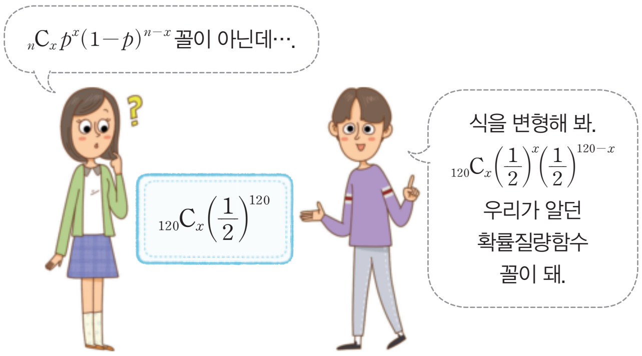
이때, 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{10}\right)^x\left(\frac{9}{10}\right)^{5-x}$ (단, $x=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge 4)&=P(X=4)+P(X=5)\\&={}_5C_4\left(\frac{1}{10}\right)^4\left(\frac{9}{10}\right)^1+{}_5C_5\left(\frac{1}{10}\right)^5\left(\frac{9}{10}\right)^0\\&=5\times\frac{9}{10^5}+1\times\frac{1}{10^5}=\frac{46}{10^5}\\&=\frac{23}{50000}\end{aligned}$$

13



$P(X=x)={}_{120}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^{120}={}_{120}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{120-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 120)$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(120, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\therefore E(X)=120\times\frac{1}{2}=60$

$V(X)=120\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=30$

이때, $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=30+60^2=3630$

14

확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_nC_xp^x(1-p)^{n-x}$ (단, $x=0, 1, 2, \cdots, n$)

$4P(X=1)=3P(X=2)$에서

$4{}_nC_1p^1(1-p)^{n-1}=3{}_nC_2p^2(1-p)^{n-2}$

$4n\times p(1-p)^{n-1}=\frac{3}{2}n(n-1)\times p^2(1-p)^{n-2}$

이때, $0<p<1$이므로

$8(1-p)=3p(n-1)$

$8-8p=3np-3p$

$5p=8-3np$ …… ㉠

한편, 확률변수 X의 평균이 2이므로 $np=2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$5p=8-3\times2$ $\therefore p=\frac{2}{5}$

$p=\frac{2}{5}$를 ㉡에 대입하면

$n\times\frac{2}{5}=2$ $\therefore n=5$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5, \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$V(X)=5\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{5}$

15

신약을 환자 100명에게 투약하므로 100회의 독립시행이고, 한 환자가 완치될 확률은 $\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\sqrt{25}=5$

16

항공권을 예약한 사람이 200명이므로 200회의 독립시행이고, 이 항공사에서 항공권을 예약한 사람 한 명이 비행기를 타지 않을 확률이 $1-\frac{90}{100}=\frac{1}{10}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(200, \frac{1}{10}\right)$을 따른다.

$\therefore E(X)=200\times\frac{1}{10}=20$

$V(X)=200\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=18$

이때, $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$$\begin{aligned}E(X^2)&=V(X)+\{E(X)\}^2\\&=18+20^2=418\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore E(2X^2-6)&=2E(X^2)-6\\&=2\times418-6=830\end{aligned}$$

1주 4일 교과서 대표 전략 ②

28~29쪽

1 ⑤	2 ①	3 ①	4 ②
5 ④	6 ③	7 ⑤	8 ④

1

$P(X=x)=\frac{a}{x(x+1)}=a\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$ (단, $x=1, 2, 3, \cdots, 9$)

확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+\cdots+P(X=9)=1$

$a\left(1-\frac{1}{2}\right)+a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+a\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+a\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=1$

$a\left(1-\frac{1}{10}\right)=1$, $\frac{9}{10}a=1$ $\therefore a=\frac{10}{9}$

2

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이다.

(i) $X=1$인 경우

1이 적힌 카드를 반드시 뽑고, 1보다 큰 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 카드 중에서 2장을 뽑으면 되므로

$P(X=1)=\frac{{}_5C_2}{{}_6C_3}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$

(ii) $X=2$인 경우

2가 적힌 카드를 반드시 뽑고, 2보다 큰 3, 4, 5, 6이 적힌 카드 중에서 2장을 뽑으면 되므로

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2}{{}_6C_3}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

(iii) $X=3$인 경우

3이 적힌 카드를 반드시 뽑고, 3보다 큰 4, 5, 6이 적힌 카드 중에서 2장을 뽑으면 되므로

$P(X=3)=\frac{{}_3C_2}{{}_6C_3}=\frac{3}{20}$

(iv) $X=4$인 경우

4가 적힌 카드를 반드시 뽑고, 4보다 큰 5, 6이 적힌 카드 중에서 2장을 뽑으면 되므로

$P(X=4)=\frac{{}_2C_2}{{}_6C_3}=\frac{1}{20}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

$\therefore P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)$

$=\frac{3}{20}+\frac{1}{20}=\frac{1}{5}$

3

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+b=1$ $\therefore b=\frac{1}{4}-a$ ...... ㉠

$E(X)=4\times a+8\times\frac{1}{4}+12\times\frac{1}{2}+16\times b$

$=4a+16b+8$

$=4a+16\left(\frac{1}{4}-a\right)+8$ ($\because$ ㉠)

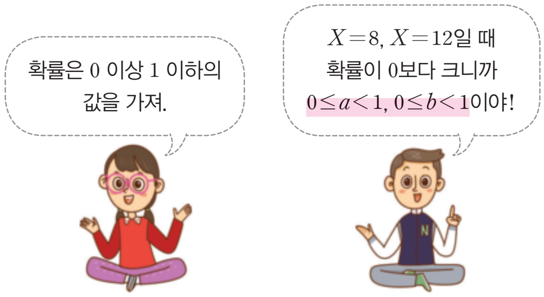
$=-12a+12$

이때, $0\leq b<1$이므로 $0\leq\frac{1}{4}-a<1$

$\therefore 0\leq a\leq\frac{1}{4}$ ($\because 0\leq a<1$)

따라서 $E(X)$는 $a=0$일 때 최댓값 12, $a=\frac{1}{4}$일 때 최솟값 9를 가지므로

$M=12$, $m=9$ $\therefore M+m=21$



4

$E((X+1)^2)=13$에서 $E(X^2+2X+1)=13$

$E(X^2)+2E(X)+1=13$ ...... ㉠

$E((X-1)^2)=5$에서 $E(X^2-2X+1)=5$

$E(X^2)-2E(X)+1=5$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$2E(X^2)+2=18$ $\therefore E(X^2)=8$

$E(X^2)=8$을 ㉠에 대입하면

$8+2E(X)+1=13$, $2E(X)=4$ $\therefore E(X)=2$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=8-2^2=4$

5

확률변수 X는 이항분포 $B\left(72, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=72\times\frac{1}{4}=18$

$V(X)=72\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{2}$

$E(2X-6)=2E(X)-6=2\times 18-6=30$

$V(2X-6)=2^2V(X)=4\times\frac{27}{2}=54$이므로

$\sigma(2X-6)=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

따라서 확률변수 $2X-6$의 평균과 표준편차의 곱은

$30\times 3\sqrt{6}=90\sqrt{6}$

6

확률변수 X가 이항분포 $B(4, 3p)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_4C_x(3p)^x(1-3p)^{4-x}$ (단, $x=0, 1, 2, 3, 4$)

확률변수 Y가 이항분포 $B(5, 2p)$를 따르므로 Y의 확률질량함수는

$P(Y=y)={}_5C_y(2p)^y(1-2p)^{5-y}$ (단, $y=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

$\frac{1}{9}P(X=4)=P(Y\geq 4)$에서

$\frac{1}{9}P(X=4)=P(Y=4)+P(Y=5)$

$\frac{1}{9}{}_4C_4(3p)^4(1-3p)^0={}_5C_4(2p)^4(1-2p)^1+{}_5C_5(2p)^5(1-2p)^0$

$\frac{1}{9}\times 81p^4=5\times 16p^4(1-2p)+32p^5$

$p>0$이므로 $9=80(1-2p)+32p$

$128p=71 \qquad \therefore p=\frac{71}{128}$

따라서 $m=128$, $n=71$이므로

$m+n=199$

7

예약을 받은 VIP 좌석 수를 확률변수 X라 하면 VIP 좌석 22개의 예약을 받았으므로 22회의 독립시행이고, 공연을 예약한 사람 한 명이 실제로 공연을 관람할 확률은 0.9이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(22,\ 0.9)$를 따른다.

이때, 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{22}\mathrm{C}_x\,0.9^x\,0.1^{22-x}$ (단, $x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 22$)

따라서 22개의 예약을 받은 경우 실제로 좌석이 부족하게 될 확률은

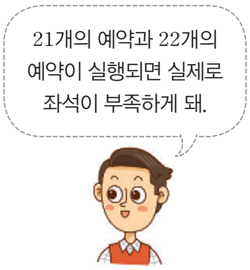
$\mathrm{P}(X>20)$

$=\mathrm{P}(X=21)+\mathrm{P}(X=22)$

$={}_{22}\mathrm{C}_{21}\,0.9^{21}\times0.1^1+{}_{22}\mathrm{C}_{22}\,0.9^{22}\times0.1^0$

$=22\times0.109\times0.1+1\times0.098\times1$

$=0.2398+0.098=0.3378$



8

서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던지는 시행을 n번 반복하므로 n회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 두 동전 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\sigma(X)\ge3$에서 $\sqrt{n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}\ge3$, $\sqrt{\frac{3}{16}n}\ge3$

$\frac{3}{16}n\ge9 \qquad \therefore n\ge48$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 48이다.

1주 누구나 합격 전략 30~31쪽

1 $\frac{2}{5}$	**2** ③	**3** ①	**4** ②
5 ⑤	**6** ③	**7** ③	**8** 20
9 ③			

1

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=1$

$\frac{1}{4}k+\frac{1}{2}k+\frac{3}{4}k+k=1$

$\frac{5}{2}k=1 \qquad \therefore k=\frac{2}{5}$

2

확률의 총합은 1이므로

$a+4a+3a=1$, $8a=1$

$\therefore a=\frac{1}{8}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	1

$\therefore \mathrm{P}(X^2=1)=\mathrm{P}(X=-1$ 또는 $X=1)$

$=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$

3

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\le1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{1}{10}+\frac{3}{5}=\frac{7}{10}$

4

$\mathrm{V}(X)=\{\sigma(X)\}^2=4^2=16$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$16=20-a^2$

$a^2=4 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$

5

확률의 총합은 1이므로

$a+b+\frac{1}{3}=1 \qquad \therefore a+b=\frac{2}{3}$ …… ㉠

$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{6}$이므로

$-1\times a+0\times b+1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$\therefore a=\frac{1}{6}$

$a=\frac{1}{6}$을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{1}{2}$

6

$E(X)=1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{3}{8}+4\times\frac{1}{8}=\frac{5}{2}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=1^2\times\frac{1}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{3}{8}+4^2\times\frac{1}{8}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$\therefore V(Y)=V(2X-5)=2^2V(X)$

$=4\times\frac{3}{4}=3$

7

확률변수 X는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\sigma(X)=\sqrt{10\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{20}{9}}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$

8

트리플 악셀 점프를 성공하는 횟수를 확률변수 X라 하면 트리플 악셀을 40번 시도하므로 40회의 독립시행이고, 1번의 시행에서 성공할 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(40, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

따라서 구하는 평균은

$E(X)=40\times\frac{1}{2}=20$

9

$E(2X+5)=13$에서

$2E(X)+5=13$ $\quad\therefore E(X)=4$

이때, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(X)=n\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}n=4$

$\therefore n=12$

1주 창의·융합·코딩 전략 32~35쪽

1 검은 공 1개, 흰 공 2개, 풀이 참조 **2** $\frac{1}{3}$

3 ④ **4** (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조 (3) 60000원

5 평균: 6, 표준편차: $\frac{2\sqrt{30}}{5}$ **6** ③ **7** 수학 책

8 0

1

꺼낸 검은 공의 개수를 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 각 값을 가질 확률은

$P(X=0)=\frac{{}_7C_3\times{}_3C_0}{{}_{10}C_3}=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$

$P(X=1)=\frac{{}_7C_2\times{}_3C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{63}{120}=\frac{21}{40}$

$P(X=2)=\frac{{}_7C_1\times{}_3C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{21}{120}=\frac{7}{40}$

$P(X=3)=\frac{{}_7C_0\times{}_3C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{120}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

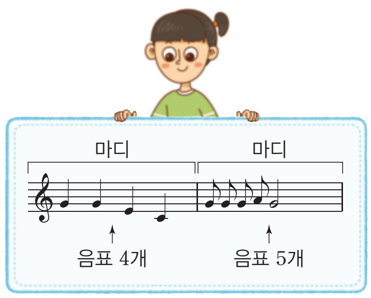
X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$	1

따라서 $X=1$일 때 확률이 가장 크다. 즉, 검은 공 1개와 흰 공 2개가 나올 확률이 가장 크므로 상품을 받기 위하여 검은 공 1개와 흰 공 2개로 공의 색을 정하는 것이 가장 좋다.

2

'곰 세 마리' 악보의 전체 마디 수는 12이다.

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5, 6이고, 각 값을 가질 확률은



$P(X=3)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$P(X=4)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$P(X=5)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

$P(X=6)=\frac{1}{12}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	3	4	5	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	1

$\therefore P(X\geq 5)=P(X=5)+P(X=6)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$

3

'안부'의 전체 어절 수는 10이다.

임의로 택한 한 어절의 글자 수를 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 각 값을 가질 확률은

$P(X=1)=\frac{1}{10}$, $P(X=2)=\frac{3}{10}$

$P(X=3)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

$P(X=4)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

따라서 구하는 기댓값은

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{5}+4\times\frac{1}{5}=\frac{27}{10}$

4

(1) 다음은 7개의 관광 코스와 그 관광 코스의 요금을 나타낸 것이다.

(i) $\mathrm{P}\to\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}\to\mathrm{E}\to\mathrm{Q}$

➡ $5\times14000=70000$(원)

(ii) $\mathrm{P}\to\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{D}\to\mathrm{E}\to\mathrm{Q}$

➡ $4\times14000=56000$(원)

(iii) $\mathrm{P}\to\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{E}\to\mathrm{Q}$

➡ $3\times14000=42000$(원)

(iv) $\mathrm{P}\to\mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{B}\to\mathrm{D}\to\mathrm{E}\to\mathrm{Q}$

➡ $5\times14000=70000$(원)

(v) $\mathrm{P}\to\mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{B}\to\mathrm{E}\to\mathrm{Q}$

➡ $4\times14000=56000$(원)

(vi) $\mathrm{P}\to\mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}\to\mathrm{B}\to\mathrm{E}\to\mathrm{Q}$

➡ $5\times14000=70000$(원)

(vii) $\mathrm{P}\to\mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}\to\mathrm{E}\to\mathrm{Q}$

➡ $4\times14000=56000$(원)

(2) 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	42000	56000	70000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

(3) $\mathrm{E}(X)=42000\times\frac{1}{7}+56000\times\frac{3}{7}+70000\times\frac{3}{7}$

$=60000$

따라서 관광 코스 요금의 평균은 60000원이다.

5

30쌍의 생쥐를 대상으로 하므로 30회의 독립시행이고, 한 쌍의 생쥐가 제한 시간 내에 도착 지점에 도달할 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(30,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=30\times\frac{1}{5}=6$

$\sigma(X)=\sqrt{30\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{24}{5}}=\frac{2\sqrt{30}}{5}$

따라서 X의 평균은 6, 표준편차는 $\frac{2\sqrt{30}}{5}$이다.

6

한 개의 주사위를 60번 던지므로 60회의 독립시행이다.

한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수 x에 대하여 $f(x)\geq0$을 만족시키려면 x는 1, 2, 3, 4 중 하나이어야 한다.

즉, 한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에서 사건 A가 일어날 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(60,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=60\times\frac{2}{3}=40$

7

국어, 영어, 수학 책을 임의로 펼쳐서 그림이 나오는 횟수를 각각 확률변수 X, Y, Z라 하면 국어, 영어, 수학 책을 각각 200번, 192번, 180번 펼쳐 볼 수 있으므로 200회, 192회, 180회의 독립시행이고 국어, 영어, 수학 책에서 그림이 있는 쪽이 나올 확률은 각각

$\frac{80}{400}=\frac{1}{5}$, $\frac{90}{360}=\frac{1}{4}$, $\frac{100}{300}=\frac{1}{3}$

이므로 확률변수 X, Y, Z는 각각 이항분포

$\mathrm{B}\left(200,\ \frac{1}{5}\right)$, $\mathrm{B}\left(192,\ \frac{1}{4}\right)$, $\mathrm{B}\left(180,\ \frac{1}{3}\right)$

을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=200\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=32$

$\mathrm{V}(Y)=192\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=36$

$\mathrm{V}(Z)=180\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=40$

따라서 그림이 나오는 횟수의 분산이 가장 큰 책은 수학 책이다.

8

점 P를 양의 방향으로 1만큼 움직이는 횟수를 확률변수 Y라 하면 한 개의 주사위를 10번 던지므로 10회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 점 P가 양의 방향으로 1만큼 움직일 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이므로 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

1회의 시행에서
점 P가 양의 방향으로
1만큼 움직일 확률은
1개의 주사위를 한 번 던질 때
6의 약수 1, 2, 3, 6이
나올 확률과 같아.

$\therefore\ \mathrm{E}(Y)=10\times\frac{2}{3}=\frac{20}{3}$

점 P를 음의 방향으로 2만큼 움직이는 횟수는 $10-Y$이므로 점 P의 좌표는

$Y-2(10-Y)=3Y-20$

$\therefore\ X=3Y-20$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(3Y-20)=3\mathrm{E}(Y)-20$

$=3\times\frac{20}{3}-20=0$

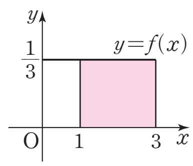
2주 1일 개념 돌파 전략 ①

39, 41쪽

1-2 $\frac{2}{3}$	**2-2** 0.9987
3-2 0.7745	**4-2** 0.8185
5-2 9	**6-2** $69.42 \le m \le 74.58$

1-2

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때, $P(X \ge 1)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

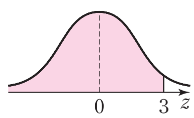


$P(X \ge 1)=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

2-2

$P(Z \le 3)=P(Z \le 0)+P(0 \le Z \le 3)$

$=0.5+0.4987=0.9987$



3-2

$Z=\frac{X-55}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(53 \le X \le 58)=P\left(\frac{53-55}{2} \le Z \le \frac{58-55}{2}\right)$

$=P(-1 \le Z \le 1.5)$

$=P(-1 \le Z \le 0)+P(0 \le Z \le 1.5)$

$=P(0 \le Z \le 1)+P(0 \le Z \le 1.5)$

$=0.3413+0.4332=0.7745$

4-2

$E(X)=64\times\frac{1}{2}=32,\ \sigma(X)=\sqrt{64\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=4$

따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(32,\ 4^2)$을 따른다.

$\therefore\ P(24 \le X \le 36)=P\left(\frac{24-32}{4} \le Z \le \frac{36-32}{4}\right)$

$=P(-2 \le Z \le 1)$

$=P(-2 \le Z \le 0)+P(0 \le Z \le 1)$

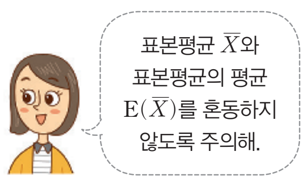
$=P(0 \le Z \le 2)+P(0 \le Z \le 1)$

$=0.4772+0.3413=0.8185$

5-2

$E(\overline{X})=9,\ \sigma(\overline{X})=\frac{6}{\sqrt{36}}=1$

$\therefore\ E(\overline{X})\times\sigma(\overline{X})=9$



6-2

$72-2.58\times\frac{3}{\sqrt{9}} \le m \le 72+2.58\times\frac{3}{\sqrt{9}}$

$72-2.58 \le m \le 72+2.58$

$\therefore\ 69.42 \le m \le 74.58$

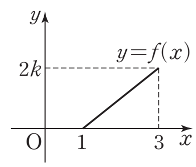
2주 1일 개념 돌파 전략 ②

42~43쪽

1 ③	**2** ④	**3** ③	**4** ⑤
5 ⑤	**6** ④		

1

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1,\ x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\times2\times2k=1 \qquad \therefore\ k=\frac{1}{2}$

2

두 확률변수 $X,\ Y$가 각각 정규분포 $N(14,\ 3^2),\ N(21,\ 4^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-14}{3},\ Z_Y=\frac{Y-21}{4}$로 놓으면 두 확률변수 $Z_X,\ Z_Y$는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(11 \le X \le 14)=P(21 \le Y \le a)$에서

$P\left(\frac{11-14}{3} \le Z_X \le \frac{14-14}{3}\right)=P\left(\frac{21-21}{4} \le Z_Y \le \frac{a-21}{4}\right)$

$\therefore\ P(-1 \le Z_X \le 0)=P\left(0 \le Z_Y \le \frac{a-21}{4}\right)$

이때, $P(-1 \le Z_X \le 0)=P(0 \le Z_X \le 1)$이므로

$\frac{a-21}{4}=1 \qquad \therefore\ a=25$

3

$Z=\frac{X-30}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(28 \le X \le a)=0.5328$에서

$P(28 \le X \le a)=P\left(\frac{28-30}{2} \le Z \le \frac{a-30}{2}\right)$

$=P\left(-1 \le Z \le \frac{a-30}{2}\right)$

$=P(-1 \le Z \le 0)+P\left(0 \le Z \le \frac{a-30}{2}\right)$

$=P(0 \le Z \le 1)+P\left(0 \le Z \le \frac{a-30}{2}\right)$

$=0.3413+P\left(0 \le Z \le \frac{a-30}{2}\right)=0.5328$

$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{a-30}{2}\right)=0.1915$

이때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)=0.1915$이므로

$\frac{a-30}{2}=0.5$

$\therefore a=31$

4

확률변수 X의 확률질량함수가

$\mathrm{P}(X=x)={}_{72}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{72-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 72)$

이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(72,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=72\times\frac{1}{3}=24$

$\sigma(X)=\sqrt{72\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=4$

이때, 72는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(24,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-24}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

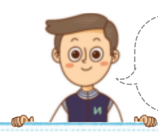
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(20 \le X \le 28)&=\mathrm{P}\left(\frac{20-24}{4} \le Z \le \frac{28-24}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 1)\\&=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)\\&=2\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)\\&=2\times0.3413\\&=0.6826\end{aligned}$$

5

표본평균 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	0	$\frac{1}{2}$	1	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=x)$	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	1

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}\left(\overline{X} \ge \frac{1}{2}\right)&=\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{1}{2}\right)+\mathrm{P}(\overline{X}=1)\\&=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}\end{aligned}$$



크기가 2인 표본이므로 다음과 같이 뽑을 수 있어.

$(0,\ 0)$인 경우 ➡ $\overline{X}=0$

$(0,\ 1),\ (1,\ 0)$인 경우 ➡ $\overline{X}=\frac{1}{2}$

$(1,\ 1)$인 경우 ➡ $\overline{X}=1$

6

$2\times1.96\times\frac{5}{\sqrt{100}}=1.96$

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 모평균 m을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이

➡ $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z| \le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

2주 2일 필수 체크 전략 ①

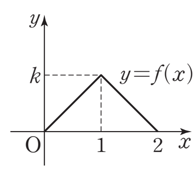
44~47쪽

1-1 $\frac{3}{4}$	**1-2** ⑤
2-1 ②	
3-1 0.0668	**3-2** ③
4-1 ③	**4-2** 0.1359

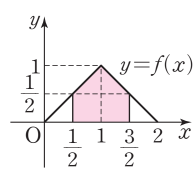
1-1

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times2\times k=1$ $\quad\therefore k=1$



$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right)&=2\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \le X \le 1\right)\\&=2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+1\right)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right)&=1-\mathrm{P}\left(0 \le X \le \frac{1}{2}\right)-\mathrm{P}\left(\frac{3}{2} \le X \le 2\right)\\&=1-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

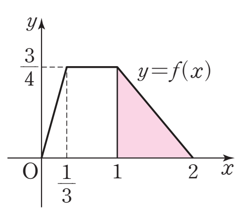
1-2

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times\left\{\left(a-\frac{1}{3}\right)+2\right\}\times\frac{3}{4}=1$

$a+\frac{5}{3}=\frac{8}{3}$ $\quad\therefore a=1$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(a \le X \le 2)&=\mathrm{P}(1 \le X \le 2)\\&=\frac{1}{2}\times1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}\end{aligned}$$



2-1

정규분포 곡선 A와 B는 대칭축의 위치가 서로 같으므로

$m_A = m_B$

또, 정규분포 곡선에서 그래프의 대칭축이 오른쪽에 위치할수록 평균이 커지므로

$m_A = m_B < m_C$

한편, 표준편차가 커질수록 곡선의 가운데 부분이 낮아지고 양쪽으로 퍼지며, 표준편차가 일정할 때 평균이 달라지면 곡선의 모양은 같고 대칭축의 위치만 바뀌므로

$\sigma_A = \sigma_C < \sigma_B$

따라서 옳은 것은 ②이다.

3-1

자전거 한 대를 생산하는 데 걸리는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(30, 2^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-30}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$
\begin{aligned}
P(X \ge 33) &= P\left(Z \ge \frac{33-30}{2}\right) = P(Z \ge 1.5) \\
&= P(Z \ge 0) - P(0 \le Z \le 1.5) \\
&= 0.5 - 0.4332 = 0.0668
\end{aligned}
$$

3-2

원형 알약의 지름의 길이를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(8, 0.2^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-8}{0.2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$
\begin{aligned}
\therefore P(8.4 \le X \le 8.6) &= P\left(\frac{8.4-8}{0.2} \le Z \le \frac{8.6-8}{0.2}\right) \\
&= P(2 \le Z \le 3) \\
&= P(0 \le Z \le 3) - P(0 \le Z \le 2) \\
&= 0.4987 - 0.4772 = 0.0215
\end{aligned}
$$

따라서 이 알약 20000개 중에서 지름의 길이가 8.4 mm 이상 8.6 mm 이하인 것은

$20000 \times 0.0215 = 430$(개)

4-1

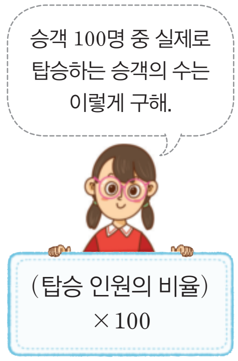
승객 100명 중에서 실제로 탑승하는 승객의 수를 확률변수 X라 하면 승객 한 명이 실제로 탑승할 확률은 0.9이므로 X는 이항분포 $B(100, 0.9)$를 따른다.

$\therefore E(X) = 100 \times 0.9 = 90$, $\sigma(X) = \sqrt{100 \times 0.9 \times 0.1} = 3$

이때, 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(90, 3^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-90}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$
\begin{aligned}
&P(0.87 \times 100 \le X \le 0.96 \times 100) \\
&= P(87 \le X \le 96) \\
&= P\left(\frac{87-90}{3} \le Z \le \frac{96-90}{3}\right) \\
&= P(-1 \le Z \le 2) \\
&= P(-1 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 2) \\
&= P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le 2) \\
&= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185
\end{aligned}
$$



4-2

한 개의 주사위를 400번 던질 때 홀수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 주사위를 한 번 던질 때 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 X는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\therefore E(X) = 400 \times \frac{1}{2} = 200$, $\sigma(X) = \sqrt{400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 10$

이때, 400은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(200, 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-200}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$
\begin{aligned}
P(180 \le X \le 190) &= P\left(\frac{180-200}{10} \le Z \le \frac{190-200}{10}\right) \\
&= P(-2 \le Z \le -1) \\
&= P(1 \le Z \le 2) \\
&= P(0 \le Z \le 2) - P(0 \le Z \le 1) \\
&= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359
\end{aligned}
$$

2주 2일 필수 체크 전략 ②

48~49쪽

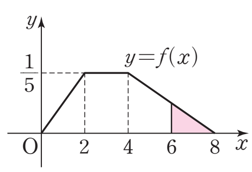
1 ⑤	**2** ②	**3** ④	**4** 57개
5 ①	**6** ②		

1

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2} \times (2+8) \times a = 1 \qquad \therefore a = \frac{1}{5}$

이때, $P(6 \le X \le 8)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같다.



한편, 두 점 $\left(4, \frac{1}{5}\right)$, $(8, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

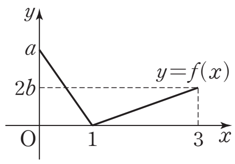
$y = \frac{0-\frac{1}{5}}{8-4}(x-8)$, 즉 $y = -\frac{1}{20}x + \frac{2}{5}$

이므로 이 직선은 점 $\left(6, \frac{1}{10}\right)$을 지난다.

$\therefore \mathrm{P}(6 \le X \le 8)=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{10}=\frac{1}{10}$

2

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\times 1\times a+\frac{1}{2}\times 2\times 2b=1$

$\therefore a+4b=2$ ...... ㉠

또, $\mathrm{P}(1\le X\le 3)=\frac{a}{12}$에서

$\frac{1}{2}\times 2\times 2b=\frac{a}{12}$ $\quad\therefore a=24b$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{12}{7}$, $b=\frac{1}{14}$

$\therefore a+b=\frac{25}{14}$

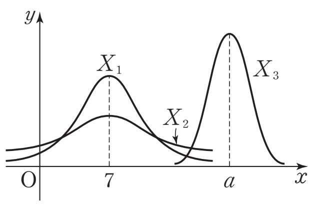
3

두 확률변수 X_1, X_2는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(7, 3)$, $\mathrm{N}(7, 5)$를 따르므로 평균이 같다.

즉, 정규분포 곡선의 대칭축이 같다.

또, X_2의 표준편차가 X_1의 표준편차보다 크므로 X_2의 정규분포 곡선은 X_1의 정규분포 곡선보다 가운데 부분이 낮고 양쪽으로 더 퍼져 있다.

즉, 세 확률변수 X_1, X_2, X_3의 정규분포 곡선은 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore a>7$

이때, X_3의 정규분포 곡선은 X_1의 정규분포 곡선보다 가운데 부분이 높고 폭이 더 좁으므로 X_3의 표준편차가 더 작다.

$\therefore 0<b<3$

따라서 옳은 것은 ④이다.

4

이 공장에서 생산한 물건 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(300, 10^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-300}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(295\le X\le 305)=\mathrm{P}\left(\frac{295-300}{10}\le Z\le\frac{305-300}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0.5)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=2\times 0.19=0.38$

따라서 이 공장에서 생산한 물건 150개 중에서 무게가 295 g 이상 305 g 이하인 것은

$150\times 0.38=57$(개)

5

자유투를 시도하여 성공시킨 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400, \frac{4}{5}\right)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=400\times\frac{4}{5}=320$, $\sigma(X)=\sqrt{400\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}=8$

이때, 400은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(320, 8^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-320}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\le 300)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{300-320}{8}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le -2.5)$

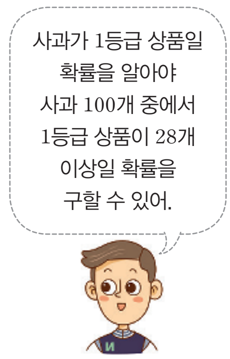
$=\mathrm{P}(Z\ge 2.5)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$

$=0.5-0.4938=0.0062$

6

이 과수원에서 수확한 사과 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(400, 50^2)$을 따르고, $Z_X=\frac{X-400}{50}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.



이 과수원에서 수확한 사과 중에서 한 개를 택할 때, 이 사과가 1등급 상품일 확률은

$\mathrm{P}(X\ge 442)=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{442-400}{50}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_X\ge 0.84)$

$=\mathrm{P}(Z_X\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_X\le 0.84)$

$=0.5-0.3=0.2$

한편, 이 과수원에서 수확한 사과 100개 중에서 1등급 상품의 개수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(100, 0.2)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(Y)=100\times 0.2=20$, $\sigma(Y)=\sqrt{100\times 0.2\times 0.8}=4$

이때, 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20, 4^2)$을 따르고, $Z_Y=\frac{Y-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(Y\ge 28)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{28-20}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_Y\ge 2)$

$=\mathrm{P}(Z_Y\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 2)$

$=0.5-0.48=0.02$

2주 3일 필수 체크 전략 ①

50~53쪽

1-1 $\frac{5}{24}$	**1-2** 3
2-1 ①	**2-2** 0.971
3-1 ⑤	**3-2** $244 \le m \le 256$
4-1 ⑤	**4-2** 100

1-1

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{3}+a+b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{2}{3}$ …… ㉠

이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출할 때, $\overline{X}=1$이 되려면 $(1, 1)$을 뽑아야 한다.

즉, $\mathrm{P}(\overline{X}=1)=a\times a=\frac{1}{16}$에서

$a=\frac{1}{4}$ ($\because 0\le a<1$)

$a=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{5}{12}$

$\overline{X}=2$가 되려면 $(1, 3)$ 또는 $(3, 1)$을 뽑아야 하므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{1}{4}\times\frac{5}{12}+\frac{5}{12}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{24}$

1-2

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{2}+a+b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{1}{2}$ …… ㉠

이때, $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{5}{3}$에서

$1\times\frac{1}{2}+2\times a+3\times b=\frac{5}{3} \qquad \therefore 2a+3b=\frac{7}{6}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{6}$

$$\mathrm{V}(X)=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{5}{3}\right)^2$$
$$=\frac{10}{3}-\frac{25}{9}=\frac{5}{9}$$

$\therefore \sigma(X)=\frac{\sqrt{5}}{3}$

따라서 $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{1}{3}$이므로

$\sigma(9\overline{X}-1)=|9|\sigma(\overline{X})=9\times\frac{1}{3}=3$

2-1

임의추출한 물고기 9마리의 길이의 평균을 $\overline{X}$라 하면 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(24, 2^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=24$, $\sigma(\overline{X})=\frac{2}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$

따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(24, \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{\overline{X}-24}{\frac{2}{3}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

물고기 9마리의 길이의 총합이 198 cm 이하일 확률은 표본평균 $\overline{X}$가 $\frac{198}{9}=22$ (cm) 이하일 확률과 같으므로

표본의 합의 범위

$$\mathrm{P}(\overline{X}\le 22)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{22-24}{\frac{2}{3}}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le -3)=\mathrm{P}(Z\ge 3)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$$
$$=0.5-0.4987=0.0013$$

2-2

임의추출한 쿠키 64개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(200, 16^2)$을 따르고 표본의 크기가 64이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=200$, $\sigma(\overline{X})=\frac{16}{\sqrt{64}}=2$

따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(200, 2^2)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{\overline{X}-200}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(196\le\overline{X}\le 205)=\mathrm{P}\left(\frac{196-200}{2}\le Z\le\frac{205-200}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 2.5)$$
$$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$$
$$=0.4772+0.4938=0.971$$

3-1

표본의 크기를 n이라 하면 모표준편차가 4이고, 모평균을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이가 2 이하이어야 하므로

$2\times 2\times\frac{4}{\sqrt{n}}\le 2$, $\sqrt{n}\ge 8$

$\therefore n\ge 64$

따라서 적어도 64개의 식빵을 조사해야 한다.

3-2

표본의 크기 144가 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 24를 사용할 수 있고, 표본평균이 250이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$250-3\times\frac{24}{\sqrt{144}}\le m\le 250+3\times\frac{24}{\sqrt{144}}$

$250-6\le m\le 250+6$

$\therefore 244\le m\le 256$

4-1

표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$, 표본의 크기를 n이라 하면 모표준편차가 120이므로 신뢰도 95 %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{120}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{120}{\sqrt{n}}$$

$P(0\le Z\le 1.96)=0.475$에서
$P(|Z|\le 1.96)=0.95$

$$-1.96\times\frac{120}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le 1.96\times\frac{120}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m-\overline{x}|\le 1.96\times\frac{120}{\sqrt{n}}$$

이때, 모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 39.2 m 이하이어야 하므로

$$1.96\times\frac{120}{\sqrt{n}}\le 39.2,\ \sqrt{n}\ge 6$$

$\therefore n\ge 36$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 36이다.

4-2

표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면 모표준편차가 0.5이므로 신뢰도 99 %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은

$$\overline{x}-2.58\times\frac{0.5}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{0.5}{\sqrt{n}}$$

$$-2.58\times\frac{0.5}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le 2.58\times\frac{0.5}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m-\overline{x}|\le 2.58\times\frac{0.5}{\sqrt{n}}$$

이때, 모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 0.129 이하이어야 하므로

$$2.58\times\frac{0.5}{\sqrt{n}}\le 0.129,\ \sqrt{n}\ge 10$$

$\therefore n\ge 100$

따라서 표본의 크기 n의 최솟값은 100이다.

2주 3일 필수 체크 전략 ②

54~55쪽

1 ③	**2** $\frac{21}{8}$	**3** ③	**4** 10.2
5 ①	**6** ②		

1

확률의 총합은 1이므로

$a+2b=1$ …… ㉠

이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출할 때, $P(\overline{X}\ge 2)=\frac{3}{4}$,

즉 $P(\overline{X}<2)=1-P(\overline{X}\ge 2)=\frac{1}{4}$이므로

$P(\overline{X}=0)+P(\overline{X}=1)=\frac{1}{4}$, $a\times a+a\times b+b\times a=\frac{1}{4}$

$a^2+2ab=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore a(a+2b)=\frac{1}{4}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a=\frac{1}{4}$

$a=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{3}{8}$

$\therefore a^2+b^2=\frac{1}{16}+\frac{9}{64}=\frac{13}{64}$

2

표본평균 $\overline{X}$는 모집단이 정규분포 $N(0,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로

$$E(\overline{X})=0,\ \sigma(\overline{X})=\frac{4}{\sqrt{9}}=\frac{4}{3}$$

따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(0,\ \left(\frac{4}{3}\right)^2\right)$을 따른다.

또, 표본평균 $\overline{Y}$는 모집단이 정규분포 $N(3,\ 2^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로

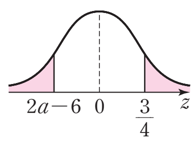
$$E(\overline{Y})=3,\ \sigma(\overline{Y})=\frac{2}{\sqrt{16}}=\frac{1}{2}$$

따라서 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(3,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

이때, $Z_{\overline{X}}=\dfrac{\overline{X}-0}{\frac{4}{3}}$, $Z_{\overline{Y}}=\dfrac{\overline{Y}-3}{\frac{1}{2}}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$, $Z_{\overline{Y}}$는 각각 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\ge 1)=P(\overline{Y}\le a)$에서

$$P\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{1-0}{\frac{4}{3}}\right)=P\left(Z_{\overline{Y}}\le\frac{a-3}{\frac{1}{2}}\right)$$



$$P\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{3}{4}\right)=P(Z_{\overline{Y}}\le 2a-6)$$

$2a-6=-\frac{3}{4}$, $2a=\frac{21}{4}$ $\quad\therefore a=\frac{21}{8}$

3

임의추출한 야구공 49개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 모집단이 정규분포 $N(140,\ 14^2)$을 따르고 표본의 크기가 49이므로

$$E(\overline{X})=140,\ \sigma(\overline{X})=\frac{14}{\sqrt{49}}=2$$

따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(140,\ 2^2)$을 따른다.

이때, $Z=\dfrac{\overline{X}-140}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}
&P(\overline{X}\le 136)+P(\overline{X}\ge 145)\\
&=P\left(Z\le\frac{136-140}{2}\right)+P\left(Z\ge\frac{145-140}{2}\right)\\
&=P(Z\le -2)+P(Z\ge 2.5)\\
&=P(Z\ge 2)+P(Z\ge 2.5)\\
&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)+P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2.5)\\
&=0.5-0.4772+0.5-0.4938=0.0290
\end{aligned}$$

4

임의추출한 딸기 25개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로

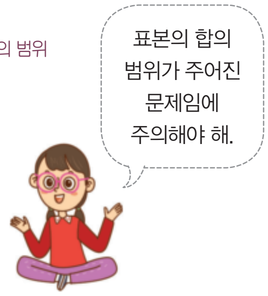
$\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \sigma(\overline{X})=\dfrac{2}{\sqrt{25}}=\dfrac{2}{5}$

따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\dfrac{2}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

이때, $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{2}{5}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

딸기 한 상자의 무게가 270 g 이상일 확률은 표본평균 $\overline{X}$가 $\dfrac{270}{25}=10.8\,(\mathrm{g})$ 이상일 확률과 같으므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge 10.8)=0.0668$에서

표본의 합의 범위



$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 10.8)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{10.8-m}{\frac{2}{5}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge 27-\frac{5}{2}m\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le 27-\frac{5}{2}m\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le 27-\frac{5}{2}m\right)\\&=0.0668\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le 27-\dfrac{5}{2}m\right)=0.4332$

이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$27-\dfrac{5}{2}m=1.5,\ \dfrac{5}{2}m=25.5$

$\therefore\ m=10.2$

5

모표준편차가 30이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\dfrac{30}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\dfrac{30}{\sqrt{n}}$

이때, $\overline{x}-2.58\times\dfrac{30}{\sqrt{n}}=612.1,\ \overline{x}+2.58\times\dfrac{30}{\sqrt{n}}=637.9$이므로 두 식을 더하면

$2\overline{x}=1250\qquad\therefore\ \overline{x}=625$

$\overline{x}=625$를 $\overline{x}+2.58\times\dfrac{30}{\sqrt{n}}=637.9$에 대입하면

$625+2.58\times\dfrac{30}{\sqrt{n}}=637.9$

$2.58\times\dfrac{30}{\sqrt{n}}=12.9,\ \sqrt{n}=6\qquad\therefore\ n=36$

$\therefore\ \overline{x}+n=625+36=661$

6

표본의 크기가 n, 모표준편차가 5이므로 신뢰도 95 %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은

$\overline{x}-2\times\dfrac{5}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2\times\dfrac{5}{\sqrt{n}}$

$-2\times\dfrac{5}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le 2\times\dfrac{5}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ |m-\overline{x}|\le 2\times\dfrac{5}{\sqrt{n}}$

이때, 모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 2점 이하이어야 하므로

$2\times\dfrac{5}{\sqrt{n}}\le 2,\ \sqrt{n}\ge 5$

$\therefore\ n\ge 25$

따라서 표본의 크기 n의 최솟값은 25이다.

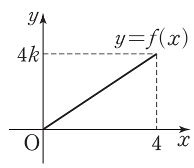
2주 4일 교과서 대표 전략 ①

56~59쪽

1 2	**2** ㄱ, ㄷ, ㄹ	**3** ④	**4** ③
5 ②	**6** 10	**7** ②	**8** ③
9 0.8664	**10** $\frac{5}{9}$	**11** ⑤	**12** ④
13 201.5	**14** $16.02\le m\le 17.98$	**15** 100	
16 90			

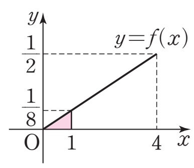
1

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그래프와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로



$\dfrac{1}{2}\times 4\times 4k=1\qquad\therefore\ k=\dfrac{1}{8}$

$\mathrm{P}(0\le X\le 1)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{16}$

$\therefore\ m=\dfrac{1}{16}$

$\therefore\ \dfrac{k}{m}=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{16}}=2$

2

ㄱ. 대칭축이 오른쪽에 있을수록 평균이 크므로 평균이 가장 큰 것은 (4)이다.

ㄴ. 정규분포 곡선의 가운데 부분이 낮고 양쪽으로 퍼져 있을수록 표준편차가 크므로 표준편차가 가장 작은 것은 (4)이다.

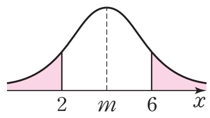
ㄷ. 곡선 (2)의 대칭축이 곡선 (3)의 대칭축보다 왼쪽에 있으므로 (2)의 평균이 (3)의 평균보다 작다.

ㄹ. 곡선 (3)이 곡선 (4)보다 가운데 부분이 낮고 양쪽으로 더 퍼져 있으므로 (3)의 표준편차가 (4)의 표준편차보다 크다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

3

정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 $\mathrm{P}(X\le 2)=\mathrm{P}(X\ge 6)$이므로



$m=\dfrac{2+6}{2}=4$

한편, 분산이 $\mathrm{V}(X)=3^2=9$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$\qquad=9+4^2=25$

4

$Z=\dfrac{X-50}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(46\le X\le a)=0.7745$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(46\le X\le a)&=\mathrm{P}\left(\frac{46-50}{4}\le Z\le \frac{a-50}{4}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-1\le Z\le \frac{a-50}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-50}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-50}{4}\right)\\&=0.3413+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-50}{4}\right)=0.7745\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{a-50}{4}\right)=0.4332$

이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\dfrac{a-50}{4}=1.5,\ a-50=6$

$\therefore\ a=56$

5

이 공장에서 생산한 음료 한 개의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 0.4^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-50}{0.4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\le 48.8)+\mathrm{P}(X\ge 51.2)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{48.8-50}{0.4}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{51.2-50}{0.4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le -3)+\mathrm{P}(Z\ge 3)$

$=2\mathrm{P}(Z\ge 3)=2\{\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 3)\}$

$=2\times(0.5-0.4987)=2\times 0.0013=0.0026$

6

직원 한 명이 한 달 동안 사용한 휴대전화 음성통화량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(180,\ 10^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-180}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 200)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{200-180}{10}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.48=0.02\end{aligned}$$

따라서 이 회사 직원 500명 중에서 한 달 동안 사용한 휴대전화 음성통화량이 200분 이상인 직원의 수는

$500\times 0.02=10$

7

입사 지원자의 필기시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(220,\ 40^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-220}{40}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 k점이라 하면 $\mathrm{P}(X\ge k)=\dfrac{100}{2000}=0.05$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge k)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{k-220}{40}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-220}{40}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-220}{40}\right)=0.05\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{k-220}{40}\right)=0.45$

이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.65)=0.45$이므로

$\dfrac{k-220}{40}=1.65,\ k-220=66\qquad \therefore\ k=286$

따라서 필기시험 합격자의 최저 점수는 286점이다.

8

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(720,\ \dfrac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=720\times\dfrac{1}{6}=120,\ \sigma(X)=\sqrt{720\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}}=10$

이때, 720은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-120}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(130\le X\le 140)&=\mathrm{P}\left(\frac{130-120}{10}\le Z\le \frac{140-120}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4772-0.3413=0.1359\end{aligned}$$

9

항공기가 정시에 도착한 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(400,\ 0.9)$를 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=400\times 0.9=360$

$\quad\ \sigma(X)=\sqrt{400\times 0.9\times 0.1}=6$

이때, 400은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(360,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-360}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(351\le X\le 369)&=\mathrm{P}\left(\frac{351-360}{6}\le Z\le\frac{369-360}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 1.5)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=2\times 0.4332=0.8664\end{aligned}$$

10

확률의 총합은 1이므로

$\dfrac{1}{6}+a+b=1\qquad\therefore\ a+b=\dfrac{5}{6}$ …… ㉠

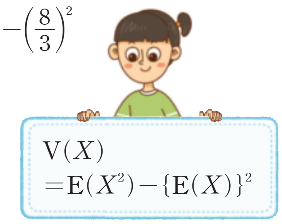
이때, $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})=\dfrac{8}{3}$에서

$0\times\dfrac{1}{6}+2\times a+4\times b=\dfrac{8}{3}\qquad\therefore\ a+2b=\dfrac{4}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{1}{3},\ b=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{V}(X)&=0^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{2}-\left(\frac{8}{3}\right)^2\\&=\frac{28}{3}-\frac{64}{9}=\frac{20}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{V}(\overline{X})&=\frac{\mathrm{V}(X)}{4}=\frac{20}{9}\times\frac{1}{4}\\&=\frac{5}{9}\end{aligned}$$



11

주머니에서 한 장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=1\times\dfrac{1}{10}+2\times\dfrac{1}{5}+3\times\dfrac{3}{10}+4\times\dfrac{2}{5}=3$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=1^2\times\frac{1}{10}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{3}{10}+4^2\times\frac{2}{5}-3^2\\&=10-9=1\end{aligned}$$

$\sigma(X)=\sqrt{1}=1$

이때, 표본의 크기가 4이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=3,\ \sigma(\overline{X})=\dfrac{1}{\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X})=\dfrac{7}{2}$

12

임의추출한 제품 25개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=300,\ \sigma(\overline{X})=\dfrac{10}{\sqrt{25}}=2$

따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 2^2)$을 따른다.

이때, $Z=\dfrac{\overline{X}-300}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(296\le\overline{X}\le 302)&=\mathrm{P}\left(\frac{296-300}{2}\le Z\le\frac{302-300}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4772+0.3413=0.8185\end{aligned}$$

13

임의추출한 화장품 9개의 용량의 평균을 $\overline{X}$라 하면 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(a,\ 1.8^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=a,\ \sigma(\overline{X})=\dfrac{1.8}{\sqrt{9}}=0.6$

따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(a,\ 0.6^2)$을 따른다.

이때, $Z=\dfrac{\overline{X}-a}{0.6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이 공장에서 생산한 화장품 9개의 용량의 평균이 200 mL 이상일 확률이 0.9938이므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge 200)=0.9938$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 200)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{200-a}{0.6}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{200-a}{0.6}\le Z\le 0\right)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-200}{0.6}\right)+0.5=0.9938\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-200}{0.6}\right)=0.4938$

이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)=0.4938$이므로

$\dfrac{a-200}{0.6}=2.5,\ a-200=1.5\qquad\therefore\ a=201.5$

14

표본평균 $\overline{x}=17$, 표본의 크기 $n=16$, 모표준편차 $\sigma=2$이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$17-1.96\times\dfrac{2}{\sqrt{16}}\le m\le 17+1.96\times\dfrac{2}{\sqrt{16}}$

$17-0.98\le m\le 17+0.98\qquad\therefore\ 16.02\le m\le 17.98$

15

표본평균 $\overline{x}=100$, 모표준편차 $\sigma=25$이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$100-1.96\times\dfrac{25}{\sqrt{n}}\le m\le 100+1.96\times\dfrac{25}{\sqrt{n}}$

이때, $100-1.96\times\dfrac{25}{\sqrt{n}}=95.1,\ 100+1.96\times\dfrac{25}{\sqrt{n}}=104.9$이므로

$1.96\times\dfrac{25}{\sqrt{n}}=4.9,\ \sqrt{n}=10\qquad\therefore\ n=100$

16

$P(-k \le Z \le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하자.

표본평균이 780, 모표준편차가 40, 표본의 크기가 25이므로 모평균 m을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간은

$780-k\times\frac{40}{\sqrt{25}} \le m \le 780+k\times\frac{40}{\sqrt{25}}$

$780-8k \le m \le 780+8k$

이때, $780-8k=766.88$, $780+8k=793.12$이므로

$8k=13.12 \qquad \therefore k=1.64$

따라서 $P(-1.64 \le Z \le 1.64)=\frac{\alpha}{100}$이므로

$\alpha=100P(-1.64 \le Z \le 1.64)$

$=100\times 2P(0 \le Z \le 1.64)$

$=200P(0 \le Z \le 1.64)$

$=200\times 0.45=90$

2주 4일 교과서 대표 전략 ②

60~61쪽

1 ③	**2** ④	**3** ⑤	**4** ③
5 ②	**6** 62	**7** 98	

1

$0 \le x \le 2$인 모든 x에 대하여 $f(2-x)=f(2+x)$가 성립하므로 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다. 따라서

$P(0 \le X \le 2)=P(2 \le X \le 4)$

$=\frac{1}{2}$

이므로

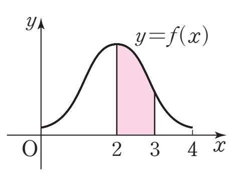
$P(2 \le X \le 3)$

$=P(1 \le X \le 2)$

$=P(0 \le X \le 2)-P(0 \le X \le 1)$

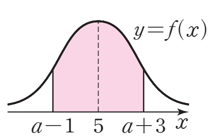
$=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

$0 \le x \le 4$에서 정의된 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 $P(0 \le X \le 2)=\frac{1}{2}$이야.



2

정규분포 $N(5, 2)$를 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 $f(x)$는 $x=5$에서 최댓값을 갖고, $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=5$에 대하여 대칭이다.



따라서 $P(a-1 \le X \le a+3)$이 최대가 되려면

$\frac{(a-1)+(a+3)}{2}=5$, $a+1=5$

$\therefore a=4$

3

이 공장에서 생산한 두 제품 A, B의 무게를 각각 확률변수 X, Y라 하자.

X, Y는 각각 정규분포 $N(20, (2\sigma)^2)$, $N(45, \sigma^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-20}{2\sigma}$, $Z_Y=\frac{Y-45}{\sigma}$로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

제품 A의 무게가 a g 이상일 확률과 제품 B의 무게가 $2a$ g 이하일 확률이 같으므로 $P(X \ge a)=P(Y \le 2a)$에서

$P\left(Z_X \ge \frac{a-20}{2\sigma}\right)=P\left(Z_Y \le \frac{2a-45}{\sigma}\right)$

즉, $\frac{a-20}{2\sigma}=-\frac{2a-45}{\sigma}$이므로

$a-20=-4a+90$, $5a=110$

$\therefore a=22$

4

응시자의 시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(55, 8^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-55}{8}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

1차 합격자의 최저 점수를 k점이라 하면

$P(X \ge k)=\frac{400\times 1.2}{2000}=0.24$에서

$P(X \ge k)=P\left(Z \ge \frac{k-55}{8}\right)$

$=P(Z \ge 0)-P\left(0 \le Z \le \frac{k-55}{8}\right)$

$=0.5-P\left(0 \le Z \le \frac{k-55}{8}\right)=0.24$

$\therefore P\left(0 \le Z \le \frac{k-55}{8}\right)=0.26$

이때, $P(0 \le Z \le 0.71)=0.26$이므로

$\frac{k-55}{8}=0.71$, $k-55=5.68$

$\therefore k=60.68$

따라서 1차 합격자의 최저 점수는 60.68점이다.

5

주머니에서 공 한 개를 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	4	8	a	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}+8\times\frac{1}{5}+a\times\frac{1}{5}=\frac{a+15}{5}$

$$\mathrm{V}(X)=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{1}{5}+8^2\times\frac{1}{5}+a^2\times\frac{1}{5}-\left(\frac{a+15}{5}\right)^2$$
$$=\frac{a^2+85}{5}-\frac{a^2+30a+225}{25}$$
$$=\frac{4a^2-30a+200}{25}$$

이때, 표본의 크기가 4이고, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{3}{2}$이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{4}=\frac{4a^2-30a+200}{100}=\frac{3}{2}$에서

$4a^2-30a+200=150,\ 4a^2-30a+50=0$

$(2a-5)(2a-10)=0$

$\therefore a=5$ ($\because$ a는 자연수)

6

임의추출한 블루베리 100개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(1.5,\ 0.2^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=1.5,\ \sigma(\overline{X})=\frac{0.2}{\sqrt{100}}=0.02$

따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(1.5,\ 0.02^2)$을 따른다.

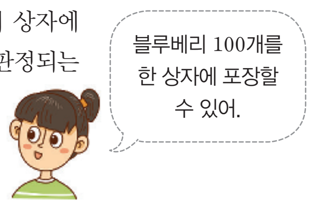
이때, $Z=\frac{\overline{X}-1.5}{0.02}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

한편, 최상품으로 판정하는 블루베리 한 상자의 무게는 155 g 이상이므로 최상품으로 판정될 확률은 표본평균 $\overline{X}$가 $\frac{155}{100}=1.55$ (g) 이상일 확률과 같다.

$$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}\ge 1.55)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{1.55-1.5}{0.02}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 2.5)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$$
$$=0.5-0.4938$$
$$=0.0062$$

블루베리 100만 개를 10000개의 상자에 포장할 수 있으므로 최상품으로 판정되는 상자의 개수는

$10000\times 0.0062=62$



7

$\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하자.

모표준편차가 100, 표본의 크기가 2500이고 모평균 m을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이가 10이므로

$2\times k\times\frac{100}{\sqrt{2500}}=10,\ 4k=10$

$\therefore k=2.5$

따라서 $\mathrm{P}(-2.5\le Z\le 2.5)=\frac{\alpha}{100}$이므로

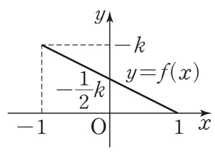
$$\alpha=100\mathrm{P}(-2.5\le Z\le 2.5)$$
$$=100\times 2\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$$
$$=200\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$$
$$=200\times 0.49=98$$

2주 누구나 합격 전략 62~63쪽

1 ①	2 ④	3 ④	4 ①
5 ⑤	6 세은, 수아	7 ③	8 ②

1

함수 $f(x)=\frac{1}{2}k(x-1)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그래프와 x축 및 직선 $x=-1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\times 2\times(-k)=1,\ -k=1$

$\therefore k=-1$

2

④ m의 값이 일정할 때, σ의 값이 커질수록 곡선의 가운데 부분이 낮아지고 양쪽으로 퍼진다.

3

두 확률변수 $X,\ Y$가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 2^2),\ \mathrm{N}(7,\ 3^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-15}{2},\ Z_Y=\frac{Y-7}{3}$로 놓으면 두 확률변수 $Z_X,\ Z_Y$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(11\le X\le 13)=\mathrm{P}(a\le Y\le 13)$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{11-15}{2}\le Z_X\le\frac{13-15}{2}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{a-7}{3}\le Z_Y\le\frac{13-7}{3}\right)$

$\therefore \mathrm{P}(-2\le Z_X\le -1)=\mathrm{P}\left(\frac{a-7}{3}\le Z_Y\le 2\right)$

이때, $\mathrm{P}(-2\le Z_X\le -1)=\mathrm{P}(1\le Z_X\le 2)$이므로

$\frac{a-7}{3}=1,\ a-7=3\qquad \therefore a=10$

4

이 배달 앱을 이용한 한 사람의 한 달 동안의 치킨 소비 금액을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(16,\ 4^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-16}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\le 10)&=P\left(Z\le \frac{10-16}{4}\right)\\&=P(Z\le -1.5)\\&=P(Z\ge 1.5)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

5

이 영화의 관람객 100명 중에서 청소년의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B(100,\ 0.8)$을 따른다.

80 %를 비율로 나타내면 ➡ $\frac{80}{100}=0.8$

$\therefore\ E(X)=100\times 0.8=80$

$\sigma(X)=\sqrt{100\times 0.8\times 0.2}=4$

이때, 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(80,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-80}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge 88)&=P\left(Z\ge \frac{88-80}{4}\right)\\&=P(Z\ge 2)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

6

유찬: 학생들의 체험 학습 희망 여부는 각 개인의 의사가 중요하므로 전수조사가 적합하다.

세은: 모든 라면의 염도를 측정하는 것은 대상이 너무 많고 염도 측정 시 판매가 불가능하므로 표본조사가 적합하다.

민호: 병무청의 징병 신체검사는 모든 징병 대상자를 대상으로 이루어져야 하므로 전수조사가 적합하다.

수아: 모든 유권자에 대해 사전 여론 조사를 하는 것은 매우 오랜 시간이 걸리므로 표본조사가 적합하다.

따라서 표본조사가 적합한 것을 말한 사람은 세은, 수아이다.

7

모분산이 5이므로 모표준편차는 $\sqrt{5}$이고, 모평균이 10, 표본의 크기가 5이므로

$E(\overline{X})=10,\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$

$\therefore\ E(\overline{X})+\sigma(\overline{X})=10+1=11$

8

표본의 크기 64가 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 10을 사용할 수 있고, 표본평균이 320이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$320-1.96\times\frac{10}{\sqrt{64}}\le m\le 320+1.96\times\frac{10}{\sqrt{64}}$

$320-2.45\le m\le 320+2.45$

$\therefore\ 317.55\le m\le 322.45$

2주 창의·융합·코딩 전략 64~67쪽

1 (1) $0\le X\le 8$ (2) $\frac{1}{4}$	**2** ②
3 세은, 유찬, 민호	**4** 2.28 %
5 0.8413	**6** 풀이 참조
7 15개	**8** 종현, 신유

1

(1) 확률변수 X는 0에서 8까지의 임의의 실숫값을 갖는다.
따라서 X가 가질 수 있는 값의 범위는
$0\le X\le 8$

(2) 확률변수 X가 범위 안의 어느 한 값을 가질 수 있는 것은 같은 정도로 일어난다고 기대할 수 있으므로 구하는 확률은

$$P(2\le X\le 4)=\frac{(\text{구간 } 2\le X\le 4\text{의 길이})}{(\text{구간 } 0\le X\le 8\text{의 길이})}=\frac{4-2}{8}=\frac{1}{4}$$

2

사탕 한 개의 지름의 길이를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(14,\ 0.4^2)$을 따르므로

$m=14,\ \sigma=0.4$

$$\begin{aligned}\therefore\ P(X\ge 14.8)&=P(X\ge 14+0.8)=P(X\ge m+2\sigma)\\&=P(X\ge m)-P(m\le X\le m+2\sigma)\\&=0.5-\frac{1}{2}P(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)\\&=0.5-\frac{1}{2}\times 0.954=0.023\end{aligned}$$

따라서 사탕 1000개 중에서 지름의 길이가 14.8 mm 이상인 것은

$1000\times 0.023=23$(개)

있다고 볼 수 있다.

3

2학년 전체 학생의 국어, 영어, 사회, 수학 시험 성적을 각각 확률변수 $X_A,\ X_B,\ X_C,\ X_D$라 하면 네 확률변수 $X_A,\ X_B,\ X_C,\ X_D$는 각각 정규분포 $N(63,\ 11^2),\ N(57,\ 12^2),\ N(61,\ 8^2),\ N(48,\ 7^2)$을 따르므로 $Z_A=\frac{X_A-63}{11},\ Z_B=\frac{X_B-57}{12},\ Z_C=\frac{X_C-61}{8},\ Z_D=\frac{X_D-48}{7}$

로 놓으면 네 확률변수 Z_A, Z_B, Z_C, Z_D는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
이때, 각 과목에 대하여 다른 학생들의 성적이 민지의 성적보다 높을 확률을 구하면

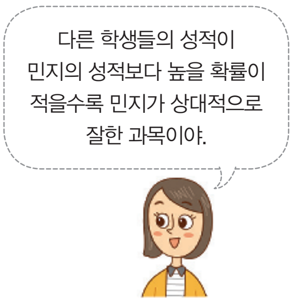
$$P(X_A>74)=P\left(Z_A>\frac{74-63}{11}\right)=P(Z_A>1)$$

$$P(X_B>63)=P\left(Z_B>\frac{63-57}{12}\right)=P(Z_B>0.5)$$

$$P(X_C>73)=P\left(Z_C>\frac{73-61}{8}\right)=P(Z_C>1.5)$$

$$P(X_D>62)=P\left(Z_D>\frac{62-48}{7}\right)=P(Z_D>2)$$

이때, $P(Z_D>2)<P(Z_C>1.5)<P(Z_A>1)<P(Z_B>0.5)$이므로
$P(X_D>62)<P(X_C>73)<P(X_A>74)<P(X_B>63)$
즉, 민지의 성적을 2학년 전체 학생의 성적과 비교할 때, 민지가 상대적으로 잘한 과목부터 순서대로 나열하면
수학, 사회, 국어, 영어
따라서 바르게 말한 사람은 세은, 유찬, 민호이다.



4

커피 한 잔의 양을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(200, 5^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-200}{5}$으로 놓으면 Z는 정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(X\geq 210)&=P\left(Z\geq\frac{210-200}{5}\right)\\&=P(Z\geq 2)\\&=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

따라서 커피 한 잔의 양이 210 mL 이상인 것은 전체의 2.28 %이다.

5

예약을 받은 100명 중에서 예약을 취소하는 사람 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{10}\right)$을 따른다.

$$\therefore E(X)=100\times\frac{1}{10}=10,\ \sigma(X)=\sqrt{100\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}=3$$

이때, 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(10, 3^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-10}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
따라서 공연장에 온 관람객이 모두 공연을 보려면 7명 이상이 예약을 취소해야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\geq 7)&=P\left(Z\geq\frac{7-10}{3}\right)\\&=P(Z\geq -1)\\&=P(-1\leq Z\leq 0)+P(Z\geq 0)\\&=P(Z\geq 0)+P(0\leq Z\leq 1)\\&=0.5+0.3413=0.8413\end{aligned}$$

6

$$\sigma(X)=1,\ \sigma(\overline{X})=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sigma(\overline{Y})=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$\therefore \sigma(\overline{Y})<\sigma(\overline{X})<\sigma(X)$
표준편차가 커질수록 정규분포 곡선의 가운데 부분이 낮아지고 양쪽으로 퍼지므로
확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프: ㉢
확률변수 $\overline{X}$의 확률밀도함수의 그래프: ㉡
확률변수 $\overline{Y}$의 확률밀도함수의 그래프: ㉠

7

모집단이 정규분포 $N(2000, 200^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(2000, \left(\frac{200}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(1900\leq\overline{X}\leq 2100)&=P\left(\frac{1900-2000}{\frac{200}{\sqrt{n}}}\leq Z\leq\frac{2100-2000}{\frac{200}{\sqrt{n}}}\right)\\&=P\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\leq Z\leq\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\\&=2P\left(0\leq Z\leq\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\end{aligned}$$

$2P\left(0\leq Z\leq\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\geq 0.94$에서

$P\left(0\leq Z\leq\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\geq 0.47$

이때, $P(0\leq Z\leq 1.88)=0.47$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}\geq 1.88$, $\sqrt{n}\geq 3.76$　　$\therefore n\geq 14.1376$

따라서 적어도 15개의 형광등을 임의추출해야 한다.

8

표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n일 때, 모평균 m의 신뢰도 α %인 신뢰구간은

$$\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq m\leq\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \left(P(|Z|\leq k)=\frac{\alpha}{100}\right)$$

이므로 신뢰구간의 길이는 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다.
이때, 신뢰도가 일정할 때 n의 값이 커지면 신뢰구간의 길이는 짧아지고, 신뢰구간의 길이는 $\overline{x}$와는 상관이 없다.
또, 표본의 크기가 같을 때 신뢰도가 높아지면 k의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이가 길어진다.
따라서 종현이와 신유의 주장이 타당하다.

신유형·신경향·서술형 전략

70~73쪽

1 ①	**2** 3, 4, 5, 6, 7, 8	**3** ④
4 풀이 참조	**5** (1) 80점 (2) 90점	**6** 0.3085
7 $\frac{505}{4}$	**8** (1) 50초 (2) $49.6\le m\le 50.4$	

1

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 4, 6이고, 각 값을 가질 확률은

$a=1, 2, 3, 4, 5, 6$일 때 곡선과 직선의 교점의 개수는 각각 2, 4, 6, 4, 2, 2야.

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{6}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{6}=\frac{10}{3}$

따라서 $p=3$, $q=10$이므로

$p+q=13$

2

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고, 각 값을 가질 확률은 모두 $\frac{1}{6}$로 같으므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2\\&=\frac{35}{12}\end{aligned}$$

확률변수 $Y=aX+b$ (a, b는 상수, $a>0$)에 대하여 $\mathrm{E}(Y)=\frac{11}{2}$, $\mathrm{V}(Y)=\frac{35}{12}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b\\&=\frac{7}{2}a+b=\frac{11}{2}\qquad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y)&=\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)\\&=\frac{35}{12}a^2=\frac{35}{12}\end{aligned}$$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=2$

따라서 $Y=X+2$이므로 건우가 새롭게 만든 주사위에 적힌 6개의 수는 3, 4, 5, 6, 7, 8이다.

3

직선 $y=ax$와 곡선 $y=x^2+5x+1$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $ax=x^2+5x+1$, 즉 $x^2+(5-a)x+1=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+(5-a)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(5-a)^2-4\times1\times1>0$

$a^2-10a+21>0$, $(a-3)(a-7)>0$

$\therefore 1\le a<3$ ($\because 1\le a\le 6$)

한 개의 주사위를 540번 던지므로 540회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률, 즉 한 개의 주사위를 던져서 1이나 2의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(540, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{V}(X)=540\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=120$이므로

$\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X-2\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{V}(X)=\frac{1}{4}\times120=30$

4

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times20\times k=1\qquad\therefore k=\frac{1}{10}$

[예나의 방법]

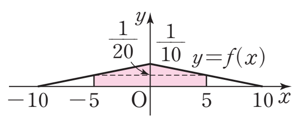
x절편이 10, y절편이 $\frac{1}{10}$인 직선의 방정식은

$\frac{x}{10}+\frac{y}{\frac{1}{10}}=1\qquad\therefore x+100y=10$

$x=5$를 $x+100y=10$에 대입하면

$5+100y=10\qquad\therefore y=\frac{1}{20}$

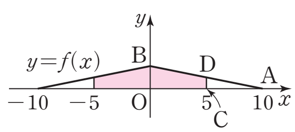
따라서 $\mathrm{P}(|X|\le5)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|X|\le5)&=\mathrm{P}(-5\le X\le5)\\&=1-\{\mathrm{P}(-10\le X\le-5)+\mathrm{P}(5\le X\le10)\}\\&=1-2\mathrm{P}(5\le X\le10)\\&=1-2\times\left(\frac{1}{2}\times5\times\frac{1}{20}\right)=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

[민재의 방법]

오른쪽 그림에서 $\triangle$ACD와 $\triangle$AOB는 닮음이고 닮음비가 1 : 2이므로 넓이의 비는 1 : 4이다.



$\therefore \triangle ACD=\frac{1}{4}\triangle AOB=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

따라서 $P(|X|\le 5)$는 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$P(|X|\le 5)=\underbrace{2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)}_{2\square BOCD}=\frac{3}{4}$

5

H회사 입사 시험 성적을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(70,\ 10^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-70}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

(1) H회사 입사 시험에 합격하기 위한 최저 점수를 x점이라 하면

$P(X\ge x)=P\left(Z\ge\frac{x-70}{10}\right)$

$=\underbrace{0.5}_{P(Z\ge 0)}-P\left(0\le Z\le\frac{x-70}{10}\right)$

$=0.16$

즉, $P\left(0\le Z\le\frac{x-70}{10}\right)=0.34$이므로

$\frac{x-70}{10}=1,\ x-70=10$

$\therefore x=80$

따라서 H회사 입사 시험에 합격하기 위한 최저 점수는 80점이다.

(2) H회사 특별 부서에 배정되기 위한 최저 점수를 y점이라 하면

$P(X\ge y)=P\left(Z\ge\frac{y-70}{10}\right)$

$=\underbrace{0.5}_{P(Z\ge 0)}-P\left(0\le Z\le\frac{y-70}{10}\right)$

$=0.02$

즉, $P\left(0\le Z\le\frac{y-70}{10}\right)=0.48$이므로

$\frac{y-70}{10}=2,\ y-70=20$

$\therefore y=90$

따라서 H회사 특별 부서에 배정되기 위한 최저 점수는 90점이다.

6

H마트에서 구매한 포장 과일 4팩의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 모집단이 정규분포 $N(200,\ 16^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로

$E(\overline{X})=200,\ \sigma(\overline{X})=\frac{16}{\sqrt{4}}=8$

따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(200,\ 8^2)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{\overline{X}-200}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(\overline{X}\le 196)=P\left(Z\le\frac{196-200}{8}\right)$

$=P(Z\le -0.5)$

$=P(Z\ge 0.5)$

$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 0.5)$

$=0.5-0.1915=0.3085$

7

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 각 값을 가질 확률은 모두 $\frac{1}{4}$로 같으므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

…… [배점 20 %]

$\therefore E(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{4}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

…… [배점 30 %]

이때, $Y=10X-1$이므로

$V(Y)=V(10X-1)=10^2V(X)$

$=100\times\frac{5}{4}=125$ …… [배점 30 %]

$\therefore V(X)+V(Y)=\frac{5}{4}+125=\frac{505}{4}$ …… [배점 20 %]

8

(1) (평균)

$=\frac{50.0+50.5+50.1+49.5+49.0+49.6+51.0+50.2+50.1}{9}$

$=\frac{450}{9}=50$(초) …… [배점 40 %]

(2) 표본평균 $\overline{x}=50$, 표본의 크기 $n=9$, 모표준편차 $\sigma=0.5$이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$50-2.4\times\frac{0.5}{\sqrt{9}}\le m\le 50+2.4\times\frac{0.5}{\sqrt{9}}$

$50-0.4\le m\le 50+0.4$

$\therefore 49.6\le m\le 50.4$ …… [배점 60 %]

적중 예상 전략 1회

74~77쪽

1 ⑤	**2** ③	**3** ②	**4** ③
5 ③	**6** ①	**7** ⑤	**8** ③
9 ⑤	**10** ④	**11** ①	**12** $\frac{1}{8}$
13 $\frac{20}{9}$	**14** $\frac{32}{81}$	**15** 14	

1

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=1$

$\frac{k}{3^0}+\frac{k}{3^1}+\frac{k}{3^2}+\frac{k}{3^3}=1,\ k\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right)=1$

$\frac{40}{27}k=1 \qquad \therefore k=\frac{27}{40}$

2

확률의 총합은 1이므로

$a+2a+b+3b+\frac{1}{3}=1$

$\therefore 3a+4b=\frac{2}{3}$ ⋯⋯ ㉠

$\mathrm{P}(X^2-4X+3=0)=\mathrm{P}(X=4)$에서

$\mathrm{P}((X-1)(X-3)=0)=\mathrm{P}(X=4)$

$\mathrm{P}(X=1$ 또는 $X=3)=\mathrm{P}(X=4)$

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(X=4)$

$a+b=3b \qquad \therefore a=2b$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$6b+4b=\frac{2}{3},\ 10b=\frac{2}{3}$

$\therefore b=\frac{1}{15}$

$b=\frac{1}{15}$을 ㉡에 대입하면 $a=\frac{2}{15}$

$\therefore \mathrm{P}(2\le X\le 3)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=2a+b=2\times\frac{2}{15}+\frac{1}{15}=\frac{1}{3}$

3

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 4이고, 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}+\frac{8}{15}=\frac{3}{5}$ ← 0이 2장 나오거나 0이 1장 나오는 경우

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$ ← 1이 2장 나오는 경우

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$ ← 1이 1장, 2가 1장 나오는 경우

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$ ← 2가 2장 나오는 경우

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$\therefore \mathrm{P}(X\ge 2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=4)$

$=\frac{4}{15}+\frac{1}{15}=\frac{1}{3}$

4

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

(i) $X=0$인 경우

네 번째까지 흰 공 2개와 검은 공 2개가 나오고 다섯 번째에 흰 공이 나오면 되므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_4}=\frac{3}{5}$

(ii) $X=1$인 경우

세 번째까지 흰 공 2개와 검은 공 1개가 나오고 네 번째에 흰 공이 나오면 되므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$

(iii) $X=2$인 경우

흰 공 3개가 연속하여 나오면 되므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{1}{10}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{3}{5}+1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$

5

$X_2=2X_1-1$

$X_3=2X_2-1=2(2X_1-1)-1=4X_1-3$

$X_4=2X_3-1=2(4X_1-3)-1=8X_1-7$

$X_{i+1}=2X_i-1$의 i에 1, 2, 3을 대입해.

$\mathrm{E}(X_4)=3$에서

$\mathrm{E}(8X_1-7)=3,\ 8\mathrm{E}(X_1)-7=3$

$8\mathrm{E}(X_1)=10$

$\therefore \mathrm{E}(X_1)=\frac{5}{4}$

6

확률의 총합은 1이므로

$2a+a+b=1 \qquad \therefore 3a+b=1$ ⋯⋯ ㉠

$\mathrm{P}(X\ge 1)=\frac{4}{5}$에서

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=\frac{4}{5} \qquad \therefore a+b=\frac{4}{5}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{10},\ b=\frac{7}{10}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{7}{10}=\frac{3}{2}$

$\therefore \mathrm{E}(4X+2)=4\mathrm{E}(X)+2=4\times\frac{3}{2}+2=8$

7

주머니에 들어 있는 흰 공의 개수를 x라 하면 검은 공의 개수는 $10-x$이다.

$\mathrm{P}(X=2)=3\mathrm{P}(X=3)$에서

$$\frac{{}_{x}\mathrm{C}_2\times{}_{10-x}\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=3\times\frac{{}_{x}\mathrm{C}_3\times{}_{10-x}\mathrm{C}_0}{{}_{10}\mathrm{C}_3}$$

$$\frac{x(x-1)}{2}\times(10-x)=3\times\frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

$10-x=x-2,\ 2x=12 \qquad \therefore x=6$

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 각 값을 가질 확률은

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_{6}\mathrm{C}_0\times{}_{4}\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_{6}\mathrm{C}_1\times{}_{4}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_{6}\mathrm{C}_2\times{}_{4}\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_{6}\mathrm{C}_3\times{}_{4}\mathrm{C}_0}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\therefore \mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{30}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=\frac{9}{5}$$

$$\therefore \mathrm{E}(5X-4)=5\mathrm{E}(X)-4=5\times\frac{9}{5}-4=5$$

8

$\mathrm{E}(3X-1)=5$에서

$3\mathrm{E}(X)-1=5 \qquad \therefore \mathrm{E}(X)=2$

$\sigma(2X+3)=1$에서

$2\sigma(X)=1 \qquad \therefore \sigma(X)=\frac{1}{2}$

이때, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2^2=\frac{17}{4}$$

따라서 $(X-3)^2=X^2-6X+9$의 평균은

$$\mathrm{E}(X^2-6X+9)=\mathrm{E}(X^2)-6\mathrm{E}(X)+9$$
$$=\frac{17}{4}-6\times2+9=\frac{5}{4}$$

9

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(3,\ p)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{3}\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{3-x}$ (단, $x=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

$\mathrm{P}(X>2)=\frac{1}{27}$에서 $\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{27}$

$${}_{3}\mathrm{C}_3 p^3(1-p)^0=\frac{1}{27}$$

$p^3=\frac{1}{27} \qquad \therefore p=\frac{1}{3}$

따라서 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 Y의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(Y=y)={}_{5}\mathrm{C}_y\left(\frac{1}{3}\right)^y\left(\frac{2}{3}\right)^{5-y}$ (단, $y=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$)

$$\therefore \mathrm{P}(Y\le4)=1-\mathrm{P}(Y=5)$$
$$=1-{}_{5}\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0$$
$$=1-\frac{1}{243}=\frac{242}{243}$$

10

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(4,\ p)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{4}\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{4-x}$ (단, $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$)

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{2}\mathrm{P}(X=3)$에서

$${}_{4}\mathrm{C}_2 p^2(1-p)^2=\frac{3}{2}\,{}_{4}\mathrm{C}_3 p^3(1-p)^1$$

$6p^2(1-p)^2=6p^3(1-p)$

$1-p=p\ (\because 0<p<1) \qquad \therefore p=\frac{1}{2}$

$$\therefore \mathrm{P}(X\le1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$$
$$={}_{4}\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_{4}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$=\frac{1}{16}+4\times\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$$

따라서 $m=16,\ n=5$이므로

$m+n=21$

11

한 상자에 1개씩 제품을 포장하여 100개의 상자를 만들므로 100회의 독립시행이고, 포장된 한 상자의 제품에서 제품과 포장 상자가 모두 합격품일 확률은

(제품과 포장 상자가 모두 합격품일 확률)
=(제품이 합격품일 확률)
×(포장 상자가 합격품일 확률)

$$\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{4}{5}$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{4}{5}\right)$를 따른다.

$$\therefore \mathrm{V}(X)=100\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=16$$

12

$$\mathrm{E}(X)=0\times\left(\frac{1}{2}-a\right)+1\times\frac{1}{4}+2\times\left(\frac{1}{4}+a\right)=2a+\frac{3}{4}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\left(\frac{1}{2}-a\right)+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\left(\frac{1}{4}+a\right)=4a+\frac{5}{4}$$

…… [배점 40 %]

$\therefore\ V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=4a+\frac{5}{4}-\left(2a+\frac{3}{4}\right)^2$

$=-4a^2+a+\frac{11}{16}$

$=-4\left(a-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{3}{4}$ …… [배점 50 %]

따라서 $V(X)$는 $a=\frac{1}{8}$일 때 최댓값을 갖는다. …… [배점 10 %]

13

주어진 그림의 선분으로 만들 수 있는 모든 직사각형의 개수는

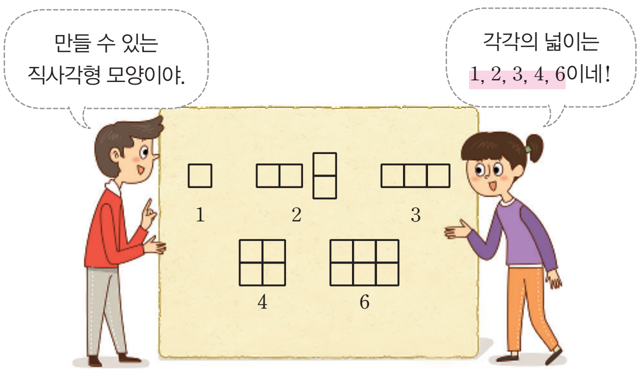
${}_3C_2\times{}_4C_2=3\times6=18$ …… [배점 30 %]

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 6이고, 각 값을 가질 확률은

$P(X=1)=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$, $P(X=2)=\frac{7}{18}$

$P(X=3)=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$, $P(X=4)=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$

$P(X=6)=\frac{1}{18}$



따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	3	4	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	1

…… [배점 50 %]

$\therefore\ E(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{7}{18}+3\times\frac{1}{9}+4\times\frac{1}{9}+6\times\frac{1}{18}$

$=\frac{20}{9}$ …… [배점 20 %]

14

자유투를 4번 시도하므로 4회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 자유투 성공 확률은 $\frac{2}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(4,\ \frac{2}{3}\right)$를 따른다. …… [배점 30 %]

따라서 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{4-x}$ (단, $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$)

…… [배점 30 %]

$\therefore\ P(X=3)={}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1$

$=4\times\frac{8}{27}\times\frac{1}{3}=\frac{32}{81}$ …… [배점 40 %]

15

한 개의 바둑돌을 꺼내어 색을 확인한 후 다시 넣는 시행을 n번 반복하므로 n회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 흰 바둑돌이 나올 확률은 $\frac{x}{x+4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{x}{x+4}\right)$를 따른다.

…… [배점 30 %]

이때, X의 평균이 4, 분산이 $\frac{8}{3}$이므로

$E(X)=n\times\frac{x}{x+4}=4$ …… ㉠

$V(X)=n\times\frac{x}{x+4}\times\frac{4}{x+4}=\frac{8}{3}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4\times\frac{4}{x+4}=\frac{8}{3}$, $x+4=6$ $\quad\therefore\ x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$n\times\frac{1}{3}=4$ $\quad\therefore\ n=12$ …… [배점 60 %]

$\therefore\ x+n=2+12=14$ …… [배점 10 %]

적중 예상 전략 2회

78~81쪽

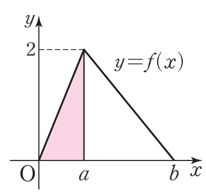
1 ④	**2** ③	**3** ①	**4** ④
5 ②	**6** ③	**7** ①	**8** ③
9 ③	**10** ④	**11** ③	**12** ⑤
13 23	**14** 578	**15** $\frac{5}{3}$	**16** 9

1

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times b\times2=1$ $\quad\therefore\ b=1$

$P(0\le X\le a)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\frac{1}{2}\times a\times2=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore\ a=\frac{1}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{4}{3}$

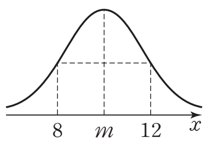
2

두 확률변수 X_1, X_2는 각각 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$, $N(m,\ 2\sigma^2)$을 따르므로 평균이 같다.

즉, 정규분포 곡선의 대칭축이 같다.
또, X_2의 표준편차가 X_1의 표준편차보다 크므로 X_2의 정규분포 곡선은 X_1의 정규분포 곡선보다 낮고 양쪽으로 더 퍼져 있다.
따라서 X_1의 정규분포 곡선은 B, X_2의 정규분포 곡선은 A이다.
확률변수 X_3은 정규분포 $\mathrm{N}(2m,\ 2\sigma^2)$을 따르므로 X_3의 평균은 X_2의 평균보다 크고 X_3의 표준편차는 X_2의 표준편차와 같다.
즉, X_3의 정규분포 곡선은 곡선 A보다 오른쪽에 있고 곡선 A와 모양이 같으므로 곡선 C이다.
따라서 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프를 차례로 나열하면 B, A, C이다.

3

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포 곡선은 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.



(가)에서 $\mathrm{P}(X\le 8)=\mathrm{P}(X\ge 12)$이므로

$m=\frac{8+12}{2}=10$

(나)에서 $\mathrm{V}\left(\frac{1}{5}X\right)=4$이므로

$\left(\frac{1}{5}\right)^2\mathrm{V}(X)=4$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=100$

즉, $\sigma^2=100$이므로

$\sigma=10\ (\because\ \sigma>0)$

$\therefore\ m+\sigma=10+10=20$

$\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$
$\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

4

이 제과 회사에서 생산한 과자의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(82,\ 5^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-82}{5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(77\le X\le 92)=\mathrm{P}\left(\frac{77-82}{5}\le Z\le \frac{92-82}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.3413+0.4772=0.8185$

따라서 과자 2000개 중에서 무게가 77 g 이상 92 g 이하인 것의 개수는
$2000\times 0.8185=1637$

5

A도시의 고등학교 남학생의 몸무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(62,\ 4^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-62}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
이 도시의 고등학교 남학생 중에서 임의로 한 명을 택할 때, 이 학생의 몸무게가 a kg 이하일 확률이 0.0228이므로 $\mathrm{P}(X\le a)=0.0228$에서

$\mathrm{P}(X\le a)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-62}{4}\right)$
$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{62-a}{4}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{62-a}{4}\right)$
$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{62-a}{4}\right)=0.0228$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{62-a}{4}\right)=0.4772$

이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\frac{62-a}{4}=2$, $62-a=8$ $\qquad\therefore\ a=54$

6

이 회사에서 생산하는 손 세정제의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(240,\ 5^2)$을 따르고, $Z_X=\frac{X-240}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
이 회사에서 생산한 손 세정제를 임의로 한 개 택할 때 불량품으로 판정될 확률은

$\mathrm{P}(X\le 230)=\mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{230-240}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(Z_X\le -2)$
$=\mathrm{P}(Z_X\ge 2)$
$=\mathrm{P}(Z_X\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_X\le 2)$
$=0.5-0.48=0.02$

한편, 하루에 생산한 손 세정제 10000개 중에서 불량품으로 판정되는 것의 개수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(10000,\ 0.02)$를 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(Y)=10000\times 0.02=200$
$\sigma(Y)=\sqrt{10000\times 0.02\times 0.98}=14$

이때, 10000은 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 14^2)$을 따르고, $Z_Y=\frac{Y-200}{14}$으로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 하루에 생산한 손 세정제 10000개 중에서 221개 이상 폐기 처분할 확률은

$\mathrm{P}(Y\ge 221)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{221-200}{14}\right)=\mathrm{P}(Z_Y\ge 1.5)$
$=\mathrm{P}(Z_Y\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 1.5)$
$=0.5-0.43=0.07$

7

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{5}+3a+5a=1$, $8a=\frac{4}{5}$ $\qquad\therefore\ a=\frac{1}{10}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	1

$\therefore \ \mathrm{E}(X)=-1\times\frac{1}{5}+0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$

이때, $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=\frac{3}{10}$이므로

$\mathrm{E}(20\overline{X}-1)=20\mathrm{E}(\overline{X})-1=20\times\frac{3}{10}-1=5$

8

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 5^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=100,\ \sigma(\overline{X})=\frac{5}{\sqrt{100}}=\frac{1}{2}$

따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(100,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

이때, $Z_X=\frac{X-100}{5},\ Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-100}{\frac{1}{2}}$으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, $Z_{\overline{X}}$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\le a)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge 101)$에서

$\mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{a-100}{5}\right)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{101-100}{\frac{1}{2}}\right)$

$\mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{a-100}{5}\right)=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 2)$

즉, $\frac{a-100}{5}=-2$에서 $a=90$

9

임의추출한 사과 25개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(230,\ 30^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=230,\ \sigma(\overline{X})=\frac{30}{\sqrt{25}}=6$

따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(230,\ 6^2)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{\overline{X}-230}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(224\le\overline{X}\le 242)&=\mathrm{P}\left(\frac{224-230}{6}\le Z\le\frac{242-230}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.3413+0.4772=0.8185\end{aligned}$$

10

표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{20}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{20}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

모평균과 표본평균의 차가 2 이하일 확률이 0.96이므로

$\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\le 2)=0.96$에서

$\mathrm{P}\left(\left|\frac{20}{\sqrt{n}}Z\right|\le 2\right)=\mathrm{P}\left(|Z|\le\frac{\sqrt{n}}{10}\right)=0.96$

$\therefore \ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{10}\right)=0.48$

이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.48$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{10}=2,\ \sqrt{n}=20 \qquad \therefore \ n=400$

11

표본의 크기 64가 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 8을 사용할 수 있고, 표본평균이 60점이므로 모평균 m점을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간은

$60-1.96\times\frac{8}{\sqrt{64}}\le m\le 60+1.96\times\frac{8}{\sqrt{64}}$

$60-1.96\le m\le 60+1.96$

$\therefore \ 58.04\le m\le 61.96$

따라서 이 신뢰구간에 속하는 자연수는 59, 60, 61이므로 그 개수는 3이다.

12

크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m의 신뢰도 α %인 신뢰구간은

$\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

$\therefore \ b-a=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ㄱ. 표본의 크기 n이 커질수록 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값이 작아지므로 $b-a$의 값은 작아진다.

ㄴ. $b-a$의 값은 표본평균 $\overline{x}$의 영향을 받지 않는다.

ㄷ. α의 값이 커질수록 k의 값도 커지므로 $b-a$의 값은 커진다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

13

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(가) $\mathrm{P}(X\le 8)=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$에서

$\mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{8-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$

즉, $\frac{8-m}{\sigma}=-1.5$에서 $16-2m=-3\sigma$

$\therefore \ 2m-3\sigma=16$ …… ㉠ …… [배점 40 %]

(나) $\mathrm{P}(X\le 11)+\mathrm{P}(Z\le 1)=1$에서

$\mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{11-m}{\sigma}\right)+\mathrm{P}(Z\le 1)=1$

$\mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{11-m}{\sigma}\right)+\mathrm{P}(Z\ge -1)=1$

즉, $\frac{11-m}{\sigma}=-1$이므로 $11-m=-\sigma$

$\therefore \ m-\sigma=11$ …… ㉡ …… [배점 40 %]

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=17$, $\sigma=6$

$\therefore m+\sigma=23$ …… [배점 20 %]

14

확률변수 X가 이항분포 $B\left(180, \frac{5}{6}\right)$를 따른다고 하면 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_{180}C_x\left(\frac{5}{6}\right)^x\left(\frac{1}{6}\right)^{180-x} \quad (x=0, 1, 2, \cdots, 180)$$

이므로

$$ {}_{180}C_{149}\left(\frac{5}{6}\right)^{149}\left(\frac{1}{6}\right)^{31}+{}_{180}C_{150}\left(\frac{5}{6}\right)^{150}\left(\frac{1}{6}\right)^{30} + \cdots + {}_{180}C_{165}\left(\frac{5}{6}\right)^{165}\left(\frac{1}{6}\right)^{15}$$

$=P(X=149)+P(X=150)+\cdots+P(X=165)$

$=P(149\le X\le 165)$ …… [배점 40 %]

이때, $E(X)=180\times\frac{5}{6}=150$, $\sigma(X)=\sqrt{180\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}}=5$이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(150, 5^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-150}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다. …… [배점 20 %]

$$\therefore P(149\le X\le 165)=P\left(\frac{149-150}{5}\le Z\le\frac{165-150}{5}\right)$$
$$=P(-0.2\le Z\le 3)$$
$$=P(-0.2\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 3)$$
$$=P(0\le Z\le 0.2)+P(0\le Z\le 3)$$
$$=0.0793+0.4987$$
$$=0.5780$$ …… [배점 30 %]

따라서 $k=0.5780$이므로

$1000k=578$ …… [배점 10 %]

15

이 공장에서 생산한 두 제품 A, B의 무게를 각각 확률변수 X, Y라 하자.

X, Y는 각각 정규분포 $N(m, 2^2)$, $N(3m, 4^2)$을 따르므로 표본의 크기가 4인 표본평균 $\overline{X}$, $\overline{Y}$는 각각 정규분포 $N(m, 1^2)$, $N(3m, 2^2)$을 따른다. …… [배점 30 %]

이때, $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-m}{1}$, $Z_{\overline{Y}}=\frac{\overline{Y}-3m}{2}$으로 놓으면 두 확률변수 $Z_{\overline{X}}$, $Z_{\overline{Y}}$는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다. …… [배점 20 %]

A제품 4개의 평균 무게가 k 이상일 확률과 B제품 4개의 평균 무게가 k 이하일 확률이 같으므로 $P(\overline{X}\ge k)=P(\overline{Y}\le k)$에서

$$P\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{k-m}{1}\right)=P\left(Z_{\overline{Y}}\le\frac{k-3m}{2}\right)$$

즉, $k-m=-\frac{k-3m}{2}$이므로

$2k-2m=-k+3m$, $3k=5m$

$\therefore \frac{k}{m}=\frac{5}{3}$ …… [배점 50 %]

16

$P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균 m을 신뢰도 α %로 추정할 때, 모표준편차가 3, 표본의 크기가 36, 신뢰구간의 길이가 2이므로

$2\times k\times\frac{3}{\sqrt{36}}=2$

$\therefore k=2$ …… [배점 50 %]

신뢰구간의 길이가 4일 때, 표본의 크기를 n이라 하면

$2\times 2\times\frac{3}{\sqrt{n}}=4$, $\sqrt{n}=3$

$\therefore n=9$

따라서 표본의 크기는 9이다. …… [배점 50 %]

기말

Memo

Memo

Memo