정답과 해설

1주 1일 개념 돌파 전략 ①

9, 11쪽

1-2 풀이 참조	**2-2** 4
3-2 63	**4-2** $\{1, 3, 5, 6\}$
5-2 $\{1, 2, 3, 5\}$	**6-2** 13

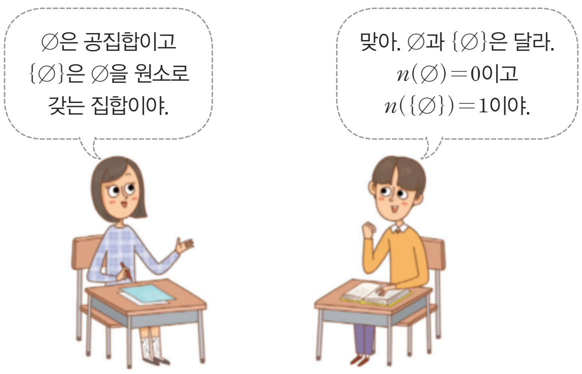
1-2
(2), (3) '가벼운', '잘하는'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 집합인 것은 (1), (4)이다.

(1)의 원소는 2보다 작은 자연수이므로 1이다.

(4)의 원소는 한 자리의 홀수인 자연수이므로 1, 3, 5, 7, 9이다.

2-2
$n(\{2, 3, 4, 5, 6\})-n(\{\varnothing\})=5-1=4$



3-2
집합 A의 부분집합의 개수는

$2^5=32 \quad \therefore a=32$

집합 A의 진부분집합의 개수는

$2^5-1=31 \quad \therefore b=31$

$\therefore a+b=32+31=63$

4-2
$A-B=\{2, 4\}$이므로

$(A-B)^C=\{1, 3, 5, 6\}$

5-2
$$\begin{aligned}(A\cap B^C)^C&=A^C\cup(B^C)^C\\&=A^C\cup B\\&=\{1, 3, 5\}\cup\{1, 2, 5\}\\&=\{1, 2, 3, 5\}\end{aligned}$$

6-2
$A\cap B=\varnothing$이므로 $n(A\cap B)=0$

$$\begin{aligned}\therefore n(A\cup B)&=n(A)+(B)-n(A\cap B)\\&=5+8-0=13\end{aligned}$$

1주 1일 개념 돌파 전략 ②

12~13쪽

1 ⑤	**2** ③	**3** ③	**4** ④
5 ④	**6** ①		

1
4로 나누었을 때의 나머지가 1인 자연수는 1, 5, 9, 13, $\cdots$이므로

$A=\{1, 5, 9, 13, \cdots\}$

⑤ $13\in A$

2
③ $\{0\}$은 집합 A의 원소가 아니므로

$\{0\}\not\in A$

3
$X\subset A$, $X\neq A$를 만족시키는 집합 X는 집합 A의 진부분집합이다.

$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로 집합 X의 개수는

$2^6-1=63$

4
$A\cap B=\{8\}$이므로 $8\in A$

$\therefore a=8$

이때, $B=\{7, b+1\}$이고 $8\in B$이므로

$b+1=8 \quad \therefore b=7$

$\therefore a-b=1$

5
$$\begin{aligned}A\cup(B-A)&=A\cup(B\cap A^C)\\&=(A\cup B)\cap(A\cup A^C)\\&=(A\cup B)\cap U\\&=A\cup B\end{aligned}$$

6
$$\begin{aligned}n(B-A)&=n(A\cup B)-n(A)\\&=20-15=5\end{aligned}$$

$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$$
$$=n(A\cup B)-n(A)$$

1주 2일 필수 체크 전략 ①

14~17쪽

1-1 11	**1-2** ⑤
2-1 ㄱ, ㄴ, ㅁ	**2-2** ④
3-1 1	**3-2** ②
4-1 15	**4-2** ②

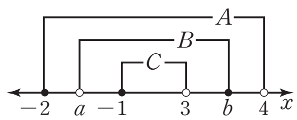
1-1
$A=\{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$이므로 $n(A)=6$
$B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$이므로 $n(B)=5$
$\therefore n(A)+n(B)=6+5=11$

1-2
① $n(\{\varnothing\})=1$, $n(\{-1\})=1$이므로
$n(\{\varnothing\})=n(\{-1\})$
② $n(\{2, 3, 4\})-n(\{1, 2, 3\})=3-3=0$
③ $n(\{a, b, c\})-n(\{a, c\})=3-2=1$
④ $n(\{\varnothing\})-n(\varnothing)=1-0=1$
⑤ $n(A)=0$이면 $A=\varnothing$
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

2-1
ㄱ. $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$
ㄴ, ㄷ, ㄹ. $\varnothing$, $\{1, 2\}$, $\{3\}$은 집합 A의 원소이므로
$\varnothing\in A$, $\{1, 2\}\in A$, $\{3\}\in A$
ㅁ. $5\in A$, $7\in A$이므로 $\{5, 7\}\subset A$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ이다.

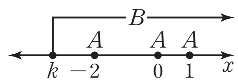
2-2
① 0은 집합 A의 원소이므로 $0\in A$
② $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$
③ $1\in B$, $3\in B$이므로 $\{1, 3\}\subset B$
④ 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이므로 $\underbrace{\{0, 1, 5\}}_{A}\subset A$
⑤ $2\in B$, $2\notin A$이므로 $B\not\subset A$
따라서 옳은 것은 ④이다.

3-1
$C\subset B\subset A$가 성립하도록 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



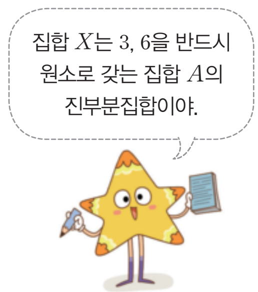
$-2\le a<-1$, $3\le b<4$
이때, a, b는 정수이므로 $a=-2$, $b=3$
$\therefore a+b=1$

3-2
$x^3+x^2-2x=0$에서 $x(x+2)(x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
$\therefore A=\{-2, 0, 1\}$
이때, $A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 $k\le -2$



따라서 정수 k의 최댓값은 -2이다.

4-1
$A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$이고 $X\subset A$, $X\neq A$이므로 집합 X는 집합 A의 진부분집합이다.
이때, 집합 X가 3, 6을 반드시 원소로 가지므로 구하는 집합의 개수는
$2^{6-2}-1=2^4-1=15$



4-2
$A=\{1, 2, 3, \cdots, k\}$이고 $B\subset X\subset A$이므로 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 집합 B의 원소 1, 2, 3, 4를 반드시 원소로 갖는 집합이다.
이때, 집합 X의 개수가 16이므로
$2^{k-4}=16=2^4$
$k-4=4$　　$\therefore k=8$

참고
$A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수
➡ 집합 B의 부분집합 중 집합 A의 원소를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수
➡ 집합 B에서 집합 A의 원소를 제외한 집합의 부분집합의 개수

1주 2일 필수 체크 전략 ②

18~19쪽

1 ③	**2** ③	**3** 정빈	**4** ③
5 ④	**6** ②		

1

$3x+2y=16$을 만족시키는 자연수 x, y의 값은

$x=2$, $y=5$ 또는 $x=4$, $y=2$

따라서 $A=\{(2, 5), (4, 2)\}$이므로 $n(A)=2$

또, $B=\{1, 2, 3, \cdots, k\}$이므로 $n(B)=k$

이때, $\frac{n(B)}{n(A)}=5$에서

$\frac{k}{2}=5 \qquad \therefore k=10$

2

ㄱ. $\{a, b\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{a, b\}\in A$

ㄴ. a, b는 집합 A의 원소이므로 $\{a, b\}\subset A$

ㄷ. $\{a, b\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{\{a, b\}\}\subset A$

ㄹ. $\{\varnothing, b\}$는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{\varnothing, b\}\notin A$

ㅁ. 집합 A의 원소는 $\varnothing$, a, b, $\{a, b\}$의 4개이므로 $n(A)=4$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

3

$A=\{0, 1, 2\}$

집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4

$B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$

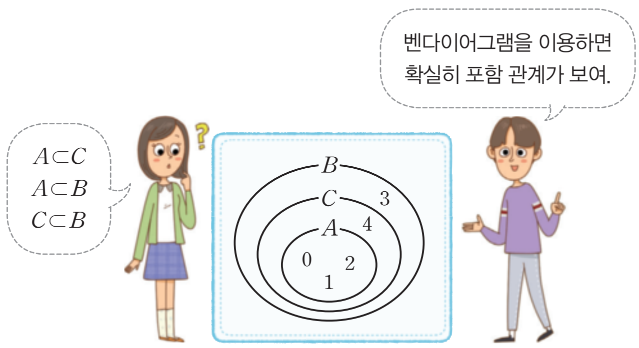
집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 xy의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

$C=\{0, 1, 2, 4\}$

$\therefore A\subset C\subset B$

따라서 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계를 바르게 나타낸 사람은 정빈이다.



4

$A\subset B$이므로 $3\in B$, $2a+1\in B$

(i) $3a+1=3$, 즉 $a=\frac{2}{3}$일 때

$A=\left\{\frac{7}{3}, 3\right\}$, $B=\left\{-\frac{50}{9}, 3, 7\right\}$이므로 $A\not\subset B$

(ii) $a^2-6=3$, 즉 $a=\pm3$일 때

$a=3$이면 $A=\{3, 7\}$, $B=\{3, 7, 10\}$이므로 $A\subset B$

$a=-3$이면 $A=\{-5, 3\}$, $B=\{-8, 3, 7\}$이므로 $A\not\subset B$

(i), (ii)에서 $a=3$

참고

$2a+1\in B$이므로 $2a+1$의 값이 7, $3a+1$, a^2-6인 경우에 대하여 a의 값을 구해도 주어진 조건을 만족시키는 a의 값은 3이다.

5

$A=B$이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $1+\sqrt{2}i$, c이다.

이때, 계수가 실수인 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}i$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}i$이다.

$\therefore c=1-\sqrt{2}i$

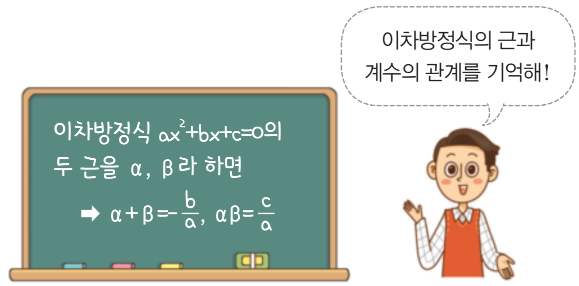
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)=-a \qquad \therefore a=-2$

$(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=b \qquad \therefore b=3$

$\therefore a+b+c=-2+3+(1-\sqrt{2}i)$

$=2-\sqrt{2}i$



6

$B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이고 $A\subset X\subset B$이므로 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 집합 A의 원소 1, 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

이때, $X\neq A$, $X\neq B$이므로 집합 A, B를 제외한다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{6-3}-2=2^3-2=6$

1주 3일 필수 체크 전략 ①

20~23쪽

1-1 ④	**1-2** 1
2-1 ③	**2-2** 64
3-1 $A\cap B$	**3-2** ⑤
4-1 ④	**4-2** 10

1-1

$A\cap B=\{3\}$이므로 $3\in B$

(ⅰ) $a=3$일 때

$A=\{3, 5, 8\}$, $B=\{3, 5, 7\}$이므로

$A\cap B=\{3, 5\}$

(ⅱ) $a+2=3$, 즉 $a=1$일 때

$A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{1, 3, 5\}$이므로

$A\cap B=\{3, 5\}$

(ⅲ) $a+4=3$, 즉 $a=-1$일 때

$A=\{3, 4, 5\}$, $B=\{-1, 1, 3\}$이므로

$A\cap B=\{3\}$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 $a=-1$

따라서 $A\cup B=\{-1, 1, 3, 4, 5\}$이므로 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은

$-1+1+3+4+5=12$

1-2

$A\cup B=\{1, 3, 5, 6\}$이고 $A=\{1, 3, a^2+5\}$이므로

$a^2+5=5$ 또는 $a^2+5=6$

(ⅰ) $a^2+5=5$일 때

$a^2=0$ $\therefore a=0$

$A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{0, 4, 6\}$이므로

$A\cup B=\{0, 1, 3, 4, 5, 6\}$

(ⅱ) $a^2+5=6$일 때

$a^2=1$ $\therefore a=\pm 1$

$a=-1$이면 $A=\{1, 3, 6\}$, $B=\{-3, 3, 6\}$이므로

$A\cup B=\{-3, 1, 3, 6\}$

$a=1$이면 $A=\{1, 3, 6\}$, $B=\{3, 5, 6\}$이므로

$A\cup B=\{1, 3, 5, 6\}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=1$

2-1

$B\cap X=X$이므로 $X\subset B$

$(A\cap B)\cup X=X$이므로 $(A\cap B)\subset X$

$\therefore (A\cap B)\subset X\subset B$

즉, $\{1, 2, 4\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$를 만족시키는 집합 X는 $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$의 부분집합 중 1, 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는 $2^{6-3}=2^3=8$

2-2

전체집합 U의 부분집합 C가 $A\cup C=B\cup C$를 만족시키므로 집합 C는 두 집합 A, B에서 공통인 원소 1, 2를 제외한 나머지 원소 4, 5, 8, 10을 반드시 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 C의 개수는 $2^{10-4}=2^6=64$

3-1

$(A-B)^C\cap A=(A\cap B^C)^C\cap A$

$=(A^C\cup B)\cap A$

$=(A^C\cap A)\cup(B\cap A)$

$=\varnothing\cup(B\cap A)=A\cap B$

3-2

$A\cup(B-A)=A\cup(B\cap A^C)$

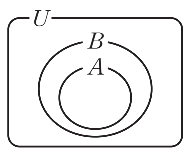
$=(A\cup B)\cap(A\cup A^C)$

$=(A\cup B)\cap U$

$=A\cup B$

즉, $A\cup B=B$이므로 $A\subset B$

⑤ $A-B=\varnothing$



$A\subset B \Longleftrightarrow A\cap B=A \Longleftrightarrow A\cup B=B$
$\Longleftrightarrow A-B=\varnothing \Longleftrightarrow A\cap B^C=\varnothing$
$\Longleftrightarrow B^C\subset A^C \Longleftrightarrow B^C-A^C=\varnothing$

4-1

$n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cap B)=n(U)-n(A^C\cup B^C)$

$=50-30=20$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=30+35-20=45$

4-2

민호네 반 학생 전체의 집합을 U, 스키를 탈 수 있는 학생의 집합을 A, 보드를 탈 수 있는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=35,\ n(A)=20,\ n(B)=18,\ n((A\cup B)^C)=5$

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$

$=35-5=30$

따라서 보드만 탈 수 있는 학생 수는

$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$

$=30-20=10$

1주 3일 필수 체크 전략 ②

24~25쪽

1 ③	**2** ④	**3** 세은	**4** ②
5 ④	**6** ①		

1

$A\cap B^C=A-B=\{3\}$이므로 $1\in B,\ 6\in B,\ a-b\in B$

$6\in B$일 때, $a+3b=6$ …… ㉠

$a-b\in B$일 때, $a-b=10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=9,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=8$

2

$A\cup X=X$이므로 $A\subset X$ $\therefore\ \{2, 4, 6, 8\}\subset X$

$B-A=\{7, 9, 10\}$이고 $(B-A)\cap X=\{9, 10\}$이므로

$9\in X,\ 10\in X,\ 7\notin X$

즉, 집합 X는 2, 4, 6, 8, 9, 10을 반드시 원소로 갖고, 7을 원소로 갖지 않아야 한다.

따라서 집합 X의 개수는

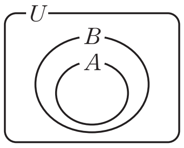
$2^{10-6-1}=2^3=8$

3

$(A\cap B)\cup(A-B)=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)=A\cap(B\cup B^C)$

$=A\cap U=A$

즉, $A\cap B=A$이므로 $A\subset B$



유찬: $A\subset B$

희진: $A\cap B=A$

민호: $B-A\neq\varnothing$

따라서 항상 옳은 것을 들고 있는 사람은 세은이다.

4

ㄱ. $A\cup(A\cap B)^C=A\cup(A^C\cup B^C)=(A\cup A^C)\cup B^C$

$=U\cup B^C=U$

ㄴ. $A^C\cup(B\cap C)^C=A^C\cup(B^C\cup C^C)=A^C\cup B^C\cup C^C$

$=(A\cap B\cap C)^C=U-(A\cap B\cap C)$

ㄷ. $(A\cup B)\cap(A\cup B^C)=A\cup(B\cap B^C)=A\cup\varnothing=A$

ㄹ. $A-(B-C)=A\cap(B\cap C^C)^C=A\cap(B^C\cup C)$

$=(A\cap B^C)\cup(A\cap C)=(A-B)\cup(A\cap C)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

5

$A\subset B$일 때, $n(A\cap B)$가 최대이므로

$M=n(A)=32$

$A\cup B=U$일 때, $n(A\cap B)$가 최소이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서

$m=32+40-50=22$

$\therefore\ M+m=32+22=54$

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$n(A)<n(B)$일 때

(1) $n(A\cap B)$가 최대가 되는 경우

➡ $n(A\cup B)$가 최소, 즉 $A\subset B$

(2) $n(A\cap B)$가 최소가 되는 경우

➡ $n(A\cup B)$가 최대, 즉 $A\cup B=U$

6

동아리 회원 전체의 집합을 U, 바이올린, 첼로, 플루트를 연주할 수 있는 회원의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(U)=30,\ n(A)=16,\ n(B)=15,$

$n(C)=13,\ n(A\cap B\cap C)=5$

모든 회원은 세 악기 중 적어도 한 악기는 연주할 수 있으므로

$n(A\cup B\cup C)=n(U)=30$

세 악기 중 두 악기만 연주할 수 있는 회원 수는

$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3\times n(A\cap B\cap C)$ …… ㉠

이때,

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

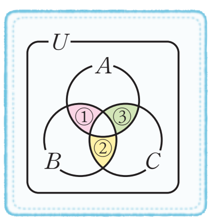
에서

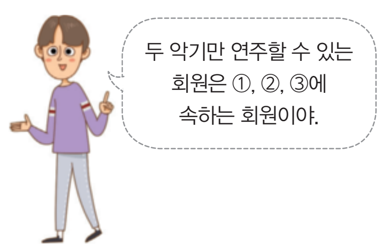
$30=16+15+13-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+5$

$\therefore\ n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=19$

따라서 ㉠에서 구하는 회원 수는

$19-3\times5=4$





1주 4일 교과서 대표 전략 ①

26~29쪽

1 ③	2 ③	3 ⑤	4 ④
5 2	6 ③	7 ⑤	8 ⑤
9 ⑤	10 ②	11 ②	12 ⑤
13 ㄴ, ㄷ	14 ③	15 6	16 ①

1

① 12, 16, 20, ⋯, 96을 원소로 갖는 집합이다.

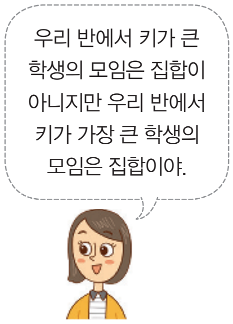
② 8의 양의 약수는 1, 2, 4, 8이므로 10보다 큰 8의 양의 약수는 없다. 따라서 주어진 모임은 공집합이다.

③ '높은'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

④ 부산광역시, 대구광역시, 인천광역시, 광주광역시, 대전광역시, 울산광역시를 원소로 갖는 집합이다.

⑤ '우리 반에서 키가 가장 큰 학생'은 기준이 명확하므로 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다.

따라서 집합이 아닌 것은 ③이다.



2

① $A=\{1, 2\}$, $B=\{-1, 1\}$이면 $n(A)=n(B)=2$이지만 $A\neq B$

② $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2\}$이면 $A\subset B$이지만 $n(A)=n(B)$

③ $n(A)=0$이면 $A=\varnothing$이고 $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 $A\subset B$

④ A의 원소는 $\varnothing$의 1개이므로 $n(A)=1$

⑤ A의 원소는 0, $\{a, b\}$의 2개이므로 $n(A)=2$

따라서 옳은 것은 ③이다.

3

$B\subset A$, $n(B)=3$이므로 집합 B는 집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 3인 집합이다.

따라서 집합 B는

$\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, c, e\}$

$\{a, d, e\}$, $\{b, c, d\}$, $\{b, c, e\}$, $\{b, d, e\}$, $\{c, d, e\}$

이므로 그 개수는 10이다.

4

주어진 벤다이어그램에서

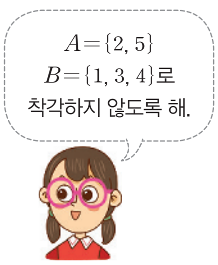
$A=\{2, 5\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

① $5\in B$ ② $A\not\subset\{1, 3, 4\}$

③ 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$

⑤ $\{2, 5\}\subset B$

따라서 옳은 것은 ④이다.



5

$A\subset B$이고 $B\subset A$이므로

$A=B$

이때, $A=\{1, 2, 5, 10\}$이므로

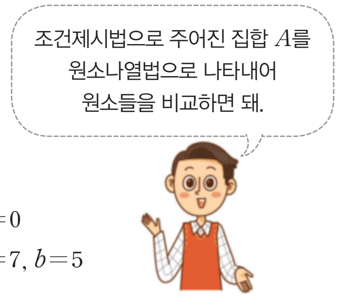
$a-2=5$, $b+5=10$ 또는

$a-2=10$, $b+5=5$

$\therefore a=7, b=5$ 또는 $a=12, b=0$

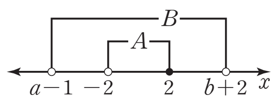
그런데 a, b는 자연수이므로 $a=7$, $b=5$

$\therefore a-b=2$



6

$A\subset B$가 되도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a-1\leq-2$, $b+2>2$

$\therefore a\leq-1, b>0$

따라서 정수 a의 최댓값은 -1, 정수 b의 최솟값은 1이므로 정수 a의 최댓값과 정수 b의 최솟값의 합은 0이다.

7

집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, n\}$의 부분집합 중 1, 3, 5는 반드시 원소로 갖고, 2, 4는 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{n-3-2}=32$, $2^{n-5}=2^5$

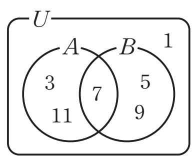
$n-5=5$ $\therefore n=10$

8

$U=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $(A\cup B)^C=\{1\}$, $A-B=\{3, 11\}$,

$A^C\cap B=B-A=\{5, 9\}$

이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $A=\{3, 7, 11\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 합은

$3+7+11=21$

9

$A\cup B=\{3, 6, 8, 10\}$이고 $A=\{3, a^2+6, 8\}$이므로

$a^2+6=6$ 또는 $a^2+6=10$

(i) $a^2+6=6$일 때

$a^2=0$ $\therefore a=0$

$A=\{3, 6, 8\}$, $B=\{-1, 0, 8\}$이므로

$A\cup B=\{-1, 0, 3, 6, 8\}$

(ii) $a^2+6=10$일 때

$a^2=4$ $\therefore a=\pm2$

$a=-2$이면 $A=\{3, 8, 10\}$, $B=\{-6, 3, 6\}$이므로

$A\cup B=\{-6, 3, 6, 8, 10\}$

$a=2$이면 $A=\{3, 8, 10\}$, $B=\{3, 6, 10\}$이므로
$A\cup B=\{3, 6, 8, 10\}$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=2$

10

$B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B-A=\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$이고 $(B-A)\subset X\subset B$이므로 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 2, 3, 4, 6, 7, 8을 반드시 원소로 갖는 집합이다.
따라서 집합 X의 개수는
$2^{8-6}=2^2=4$

11

$A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
$B\subset A$이므로 집합 B와 서로소인 집합은 집합 A의 부분집합 중 집합 B의 원소를 갖지 않는 집합이다.
집합 B의 원소의 개수를 n이라 하면
$2^{6-n}=16=2^4$에서
$6-n=4$ $\quad\therefore n=2$

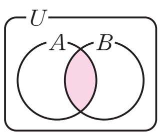
12

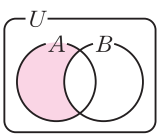
$$\begin{aligned}\{A-(B^C-A)\}\cap B&=\{A-(B^C\cap A^C)\}\cap B\\&=\{A\cap(B^C\cap A^C)^C\}\cap B\\&=\{A\cap(B\cup A)\}\cap B=A\cap B\end{aligned}$$

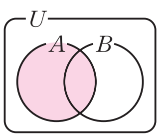
⑤ $$\begin{aligned}(A-B)^C\cap A&=(A\cap B^C)^C\cap A\\&=(A^C\cup B)\cap A\\&=(A^C\cap A)\cup(B\cap A)\\&=\varnothing\cup(B\cap A)\\&=B\cap A=A\cap B\end{aligned}$$

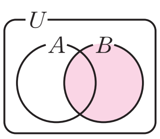
다른 풀이

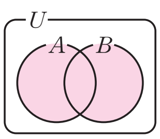
$$\begin{aligned}\{A-(B^C-A)\}\cap B&=\{A-(B^C\cap A^C)\}\cap B\\&=\{A\cap(B^C\cap A^C)^C\}\cap B\\&=\{A\cap(B\cup A)\}\cap B\\&=A\cap B\end{aligned}$$

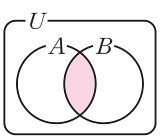


①


②


③


④


⑤


따라서 주어진 집합과 같은 집합은 ⑤이다.

13

ㄱ. $A_3=\{3, 6, 9, \cdots\}$, $A_6=\{6, 12, 18, \cdots\}$이므로
$A_6\subset A_3$
ㄴ. 3과 5의 최소공배수는 15이므로 $A_3\cap A_5$는 15의 양의 배수의 집합이다.
$\therefore A_3\cap A_5=A_{15}$
ㄷ. $A_{24}=\{24, 48, 72, \cdots\}$, $A_8=\{8, 16, 24, \cdots\}$이므로 $A_{24}\subset A_8$
$\therefore A_{24}\cup A_8=A_8$
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

배수와 약수의 집합의 연산을 할 때 기억해.

자연수 m, n에 대하여
(1) 자연수 p의 배수의 집합을 A_p라 하면
$A_m\cap A_n$ ➡ m과 n의 공배수의 집합
(2) 자연수 q의 약수의 집합을 B_q라 하면
$B_m\cap B_n$ ➡ m과 n의 공약수의 집합

14

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서
$$\begin{aligned}n(A\cap B)&=n(A)+n(B)-n(A\cup B)\\&=16+19-25=10\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\therefore n(A^C\cup B^C)&=n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)\\&=30-10=20\end{aligned}$$

15

학생 전체의 집합을 U, 학원을 다니는 학생의 집합을 A, 독서실을 다니는 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=35$, $n(A)=18$, $n(B)=14$, $n(A^C\cap B^C)=11$
$$\begin{aligned}n(A\cup B)&=n(U)-n((A\cup B)^C)\\&=n(U)-n(A^C\cap B^C)\\&=35-11=24\end{aligned}$$
따라서 독서실만 다니는 학생 수는
$$\begin{aligned}n(B-A)&=n(A\cup B)-n(A)\\&=24-18=6\end{aligned}$$

16

도윤이네 반 학생 전체의 집합을 U, 제주도에 가 본 학생의 집합을 A, 울릉도에 가 본 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=36$, $n(A)=20$, $n(B)=14$
$a=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)=36-n(A\cup B)$ ⋯⋯ ㉠
$n(A\cup B)$가 최소일 때 a의 값은 최대이고, $n(A\cup B)$가 최대일 때 a의 값은 최소이다.

$n(A\cup B)$가 최소인 경우는 $B\subset A$일 때이고, 이때
$n(A\cup B)=n(A)=20$이므로 a의 최댓값은 ㉠에서
$36-20=16$
$n(A\cup B)$가 최대인 경우는 $A\cap B=\varnothing$일 때이고, 이때
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)=20+14=34$
이므로 a의 최솟값은 ㉠에서
$36-34=2$
따라서 a의 최댓값과 최솟값의 합은
$16+2=18$

1주 4일 교과서 대표 전략 ②

30~31쪽

1 ④	**2** ①	**3** ⑤	**4** ③
5 ④	**6** 23	**7** ②	

1
①, ② $\varnothing$은 집합 X의 원소이므로 $\varnothing\in X$, $\{\varnothing\}\subset X$
③ $\{x\}\in X$이므로 $\{\{x\}\}\subset X$
④ $\{\varnothing\}\in X$이므로 $\{\{\varnothing\}\}\subset X$
⑤ $\{x\}\in X$, $\{\varnothing\}\in X$이므로 $\{\{x\}, \{\varnothing\}\}\subset X$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

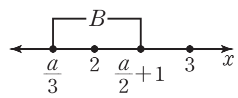
2
$A\subset B$이므로 $-3a-5\in B$
(ⅰ) $-3a-5=4$일 때, $a=-3$
$A=\{4, 8\}$, $B=\{0, 4, 8\}$이므로 $A\subset B$
(ⅱ) $-3a-5=a+3$일 때, $a=-2$
$A=\{1, 8\}$, $B=\{1, 3, 4\}$이므로 $A\not\subset B$
(ⅲ) $-3a-5=a^2-1$일 때, $a^2+3a+4=0$
이때, 실수 a의 값은 존재하지 않는다.
(ⅰ)~(ⅲ)에서 $a=-3$

참고
$8\in A$이므로 $a+3$, a^2-1의 값이 8인 경우에 대하여 a의 값을 구해도 주어진 조건을 만족시키는 a의 값은 -3이다.

3
$A=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$이고 10의 양의 약수는 1, 2, 5, 10이므로 적어도 한 개의 10의 양의 약수를 원소로 갖는 집합은 집합 A의 부분집합 중 $\{4, 20\}$의 부분집합을 제외하면 된다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^6-2^2=64-4=60$

원소의 개수가 n인 집합 A에 대하여 특정한 k $(k<n)$개의 원소 중 적어도 한 개를 포함하는 A의 부분집합의 개수
➡ 2^n-2^{n-k}

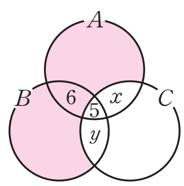
4
$A-B=\{3\}$이므로
$2\in B$, $3\notin B$
주어진 조건을 만족시키려면 오른쪽 그림에서



$\frac{a}{3}\le2$, $2\le\frac{a}{2}+1<3$
$\therefore$ $2\le a<4$

5
$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$
$(A-B)\cup X=X$이므로 $(A-B)\subset X$
$(A\cup B)\cap X=X$이므로 $X\subset(A\cup B)$
$\therefore$ $(A-B)\subset X\subset(A\cup B)$
이때, $A-B=\{1, 3\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$이므로 집합 X는 $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$의 부분집합 중 1, 3을 반드시 원소로 갖는 집합이다.
따라서 집합 X의 개수는
$2^{7-2}=2^5=32$

6
$n(A\cap C)-n(A\cap B\cap C)=x$,
$n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)=y$라 하고
오른쪽 그림과 같이 벤다이어그램에 원소의 개수를 써넣으면 $n(A)=15$, $n(B)=18$이므로



$6+5+x\le15$, $6+5+y\le18$
$\therefore$ $0\le x\le4$, $0\le y\le7$

중간

색칠한 부분의 원소의 개수는

$n(A\cup B)-(x+y+5)$

$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)-(x+y+5)$

$=15+18-11-(x+y+5)$

$=17-(x+y)$

x, y의 값이 모두 최대일 때 색칠한 부분의 원소의 개수는 최소가 되므로 최솟값은 $17-(4+7)=6$

x, y의 값이 모두 최소일 때 색칠한 부분의 원소의 개수는 최대가 되므로 최댓값은 $17-(0+0)=17$

따라서 구하는 최솟값과 최댓값의 합은

$6+17=23$

7

학생 전체의 집합을 U, 피자를 좋아하는 학생의 집합을 A, 치킨을 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=28$, $n(A)=12$, $n(B)=13$, $n(A^C\cap B^C)=6$

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$

$\quad=n(U)-n(A^C\cap B^C)$

$\quad=28-6=22$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$\quad=12+13-22=3$

따라서 피자와 치킨 중 어느 하나만 좋아하는 학생 수는

$n((A-B)\cup(B-A))=n(A\cup B)-n(A\cap B)$

$\quad=22-3=19$

1주 누구나 합격 전략

32~33쪽

1 세은, 희진	**2** ⑤	**3** ④	**4** ③
5 ②	**6** ④	**7** ④	**8** ①
9 26	**10** ⑤		

1

세은: 집합 A를 조건제시법으로 나타내면

$A=\{x\mid x$는 4의 양의 배수$\}$

유찬: 집합 A를 원소나열법으로 나타내면

$A=\{4, 8, 12, 16, 20, \cdots\}$

민호: 24와 32는 모두 4의 양의 배수이므로 $24\in A$, $32\in A$

희진: 집합 A는 원소가 무한히 많은 무한집합이다.

따라서 옳은 말을 한 사람은 세은, 희진이다.

원소나열법 ➡ {모든 원소}
조건제시법 ➡ $\{x\mid x$의 조건$\}$

2

① $0\notin\{-1, 1\}$ ② $\varnothing\notin\{0\}$

③ $\{0, 1\}\subset\{0, 1\}$ ④ $\{0\}\subset\{-1, 0, 1\}$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

3

$A=B$이므로 $5\in A$, $7\in B$

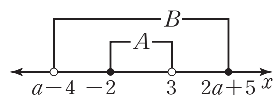
따라서 $a=5$, $a+b=7$이므로

$a=5$, $b=2$

$\therefore ab=10$

4

$A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a-4<-2$, $2a+5\geq 3$

$\therefore -1\leq a<2$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1이므로 그 개수는 3이다.

5

$A\subset X\subset B$이므로 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 집합 A의 원소 1, 2, 3을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는 $2^{5-3}=2^2=4$

6

$A\cap B^C=A-B=\{4\}$이므로 $3\in B$, $6\in B$, $a-b\in B$

$6\in B$에서 $a+2b=6$ …… ㉠

$a-b\in B$에서 $a-b=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $b=-1$

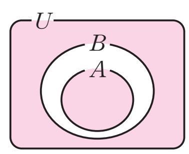
$\therefore a+b=7$

7

$B^C\subset A^C$이므로 $A\subset B$

④ $A\cup B^C$를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$A\cup B^C\neq U$



8

$A=\{1, 2, 4, 8\}$, $B=\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$

$A\cap X=A$이므로 $A\subset X$

$B\cup X=B$이므로 $X\subset B$

$\therefore A\subset X\subset B$

즉, 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 1, 2, 4, 8을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

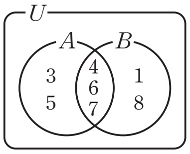
따라서 집합 X의 개수는 $2^{6-4}=2^2=4$

9

$(A\cap B^C)\cup(B\cap A^C)=(A-B)\cup(B-A)=\{1, 3, 5, 8\}$

$A=\{3, 4, 5, 6, 7\}$이므로 $A-B=\{3, 5\}$, $B-A=\{1, 8\}$

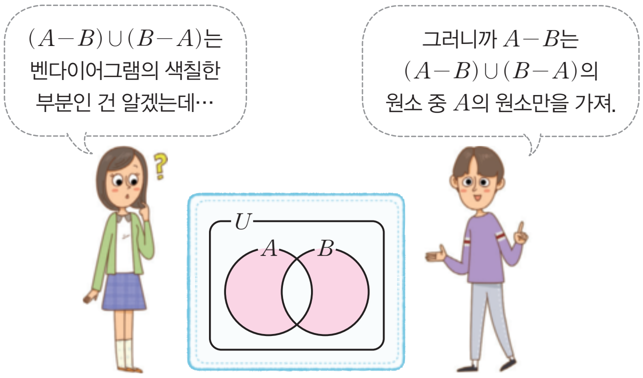
이때, $A\cap B=\{4, 6, 7\}$이므로 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore B=\{1, 4, 6, 7, 8\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$1+4+6+7+8=26$



10

미술을 좋아하는 학생의 집합을 A, 음악을 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면 $n(A)=10$, $n(B)=9$, $n(A\cap B)=4$

따라서 미술 또는 음악을 좋아하는 학생 수는

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=10+9-4=15$

1주 창의·융합·코딩 전략

34~37쪽

1 ②	**2** 희진, 민호
3 민우	**4** ④
5 $\{1, 2, 4\}$	**6** 희진, 정빈, 유찬
7 풀이 참조	**8** ③

1

$A=\{$수성, 금성, 지구, 화성, 목성, 토성, 천왕성, 해왕성$\}$

② 명왕성$\notin A$

2

집합 A의 부분집합은 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$이다.

유찬: $\{1, 2, 3\}\subset A$

세은: 원소가 하나뿐인 집합 A의 부분집합은 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$의 3개이다.

민호: 원소가 2개인 집합 A의 부분집합은 $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$의 3개이다.

따라서 옳은 말을 한 사람은 희진, 민호이다.

3

성훈: $A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$이므로 $A\subset B$이지만 $B\not\subset A$이다.

소은: $A=\varnothing$, $B=\{3\}$이므로 $A\subset B$이지만 $B\not\subset A$이다.

민우: $A=\{3, 6, 9, 12, \cdots\}$, $B=\{6, 12, 18, 24, \cdots\}$이므로 $A\not\subset B$이지만 $B\subset A$이다.

따라서 음악실 청소를 면제 받는 사람은 민우이다.

4

1번 로봇부터 7번 로봇까지 각 로봇을 원소로 가지는 집합을 A라 하면

$A=\{$1번 로봇, 2번 로봇, 3번 로봇, $\cdots$, 7번 로봇$\}$

이 중에서 2번 로봇과 5번 로봇을 모두 포함하여 만들 수 있는 합체 로봇의 개수는 집합 A의 부분집합 중 2번 로봇과 5번 로봇을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.

$\therefore 2^{7-2}=2^5=32$

5

$C\cup\{1, 3\}=\{1, 2, 3, 4\}$이므로 $2\in C$, $4\in C$이고, 집합 C의 나머지 원소는 없거나 1, 3 중에 있다.

$\{1, 4\}\cup A=B$에서 $1\in B$, $4\in B$이고, $B\cap\{1, 2, 4, 5\}=C$이므로 $1\in C$, $3\notin C$

$\therefore C=\{1, 2, 4\}$

6

$A\cap B=B$이므로 $B\subset A$

민호: $B\subset A$이므로 $A^C\subset B^C$

세은: $B^C-A^C=B^C\cap(A^C)^C=B^C\cap A=A\cap B^C=A-B\neq\varnothing$

따라서 최종 관문을 통과한 사람은 희진, 정빈, 유찬이다.

7

바르게 풀면 다음과 같습니다.

$(A\cup B^C)-(A\cap B)^C=(A\cup B^C)\cap((A\cap B)^C)^C$

$=(A\cup B^C)\cap(A\cap B)$

이때, $(A\cup B^C)\supset(A\cap B)$이므로

$(A\cup B^C)\cap(A\cap B)=A\cap B$

따라서 주어진 식을 간단히 하면 $A\cap B$입니다.

8

학생 전체의 집합을 U, 축구를 좋아하는 학생의 집합을 A, 야구를 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=40$, $n(A)=28$, $n(B)=25$, $n(A\cap B)=20$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=28+25-20=33$

따라서 축구와 야구 그 어느 것도 좋아하지 않는 학생 수는

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=40-33=7$

2주 1일 개념 돌파 전략 ①

41, 43쪽

1-2 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조
2-2 (1) 거짓 (2) 거짓
3-2 (1) 필요조건 (2) 필요충분조건 **4-2** 6
5-2 ㄱ, ㄴ **6-2** (1) ㄴ, ㄷ (2) ㄴ

1-2

(1) 주어진 명제의 부정은 '마름모는 직사각형이다.'이고, 이것은 거짓인 명제이다.
(2) 주어진 조건의 부정은 '$x\neq-1$ 또는 $x\neq3$'이다.

2-2

(1) p: $x^2-3x+2=0$, q: $-2<x<-1$이라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
p: $x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$
$\therefore P=\{1, 2\}, Q=\{x\,|\,-2<x<-1\}$
따라서 $P\not\subset Q$이므로 주어진 명제는 거짓이다.
(2) [반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x+y=0$이지만 $x\neq0$, $y\neq0$이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.

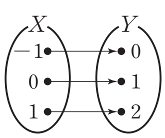
3-2

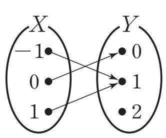
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
(1) p: $|x-2|\le1$에서 $-1\le x-2\le1$ $\therefore 1\le x\le3$
q: $x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$
$P=\{x\,|\,1\le x\le3\}$, $Q=\{1, 3\}$이므로
$P\not\subset Q$, $Q\subset P$
따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
(2) p: $x^2=3x$에서 $x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=3$
$P=\{0, 3\}$, $Q=\{0, 3\}$이므로
$P=Q$
따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

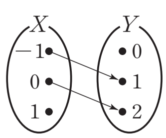
4-2

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$a+b\ge2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)
이때, $ab=9$이므로 $a+b\ge2\sqrt{9}=6$
따라서 $a+b$의 최솟값은 6이다.

5-2

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄱ, ㄴ. X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
ㄷ. X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

6-2

(1) 일대일대응은 일대일함수이고 치역과 공역이 같으므로 ㄴ, ㄷ이다.
(2) 항등함수는 정의역의 각 원소에 자기 자신이 대응하므로 ㄴ이다.

2주 1일 개념 돌파 전략 ②

44~45쪽

1 ① **2** ③ **3** ② **4** ⑤
5 ③

1

p: $|x|\le2$에서 $-2\le x\le2$
q: $x^2+3x-4=0$에서 $(x+4)(x-1)=0$
$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$U=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$이고
$P=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $Q=\{-4, 1\}$
조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합은 $P^C\cup Q$이고 $P^C=\{-4, -3\}$이므로
$P^C\cup Q=\{-4, -3, 1\}$
따라서 구하는 모든 원소의 합은
$-4+(-3)+1=-6$

2

① 역: 직사각형은 정사각형이다. (거짓)
대우: 직사각형이 아니면 정사각형이 아니다. (참)
② 역: 3의 배수는 9의 배수이다. (거짓)
[반례] 6은 3의 배수이지만 9의 배수가 아니다.
대우: 3의 배수가 아니면 9의 배수가 아니다. (참)
③ 역: $x>1$이면 $x>-2$이다. (참)
대우: $x\le1$이면 $x\le-2$이다. (거짓)
④ 역: $x^2>y^2$이면 $x>y$이다. (거짓)
[반례] $x=-2$, $y=-1$이면 $x^2>y^2$이지만 $x<y$이다.
대우: $x^2\le y^2$이면 $x\le y$이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=-2$이면 $x^2<y^2$이지만 $x>y$이다.

⑤ 역: $x+y=7$이면 $x=3$이고 $y=4$이다. (거짓)

[반례] $x=1$이고 $y=6$이면 $x+y=7$이지만 $x\neq3$이고 $y\neq4$이다.

대우: $x+y\neq7$이면 $x\neq3$ 또는 $y\neq4$이다. (참)

따라서 역은 참이고 대우는 거짓인 명제는 ③이다.

3

ㄱ. p: $\overset{a=0\text{ 또는 }b=0}{\underline{ab=0}} \Longleftarrow q$: $\overset{a=0\text{이고 }b=0}{\underline{|a|+|b|=0}}$

[$p \longrightarrow q$의 반례] $a=0$, $b=1$이면 $ab=0$이지만 $|a|+|b|\neq0$이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

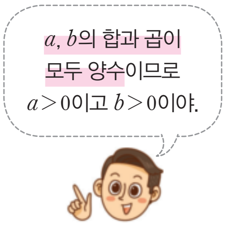
ㄴ. p: $0<a+b<ab \Longrightarrow q$: $a>0$이고 $b>0$

[$p \longleftarrow q$의 반례] $a=1$, $b=1$이면

$a+b=2$, $ab=1$이므로

$a+b>ab$이다.

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.



ㄷ. p: $|a-b|=|a|-|b| \Longleftarrow q$: $a=b$

[$p \longrightarrow q$의 반례] $a=-1$, $b=0$이면 $|a-b|=|a|-|b|$이지만 $a\neq b$이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

따라서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은 ㄴ이다.

4

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(3^2+2^2)(x^2+y^2)\geq(3x+2y)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{3}=\frac{y}{2}\text{, 즉 } 2x=3y\text{일 때 성립}\right)$

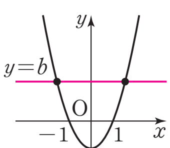
이때, $x^2+y^2=13$이므로

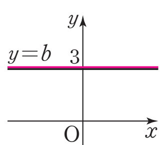
$13^2\geq(3x+2y)^2 \qquad \therefore -13\leq3x+2y\leq13$

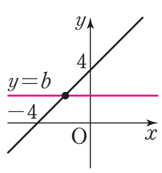
따라서 $3x+2y$의 최댓값은 13이다.

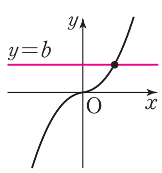
5

주어진 함수의 그래프에 치역의 각 원소 b에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=b$를 그어 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄹ.


ㄱ, ㄴ의 그래프는 직선 $y=b$와 2개 이상의 점에서 만나는 경우가 있으므로 일대일함수의 그래프가 아니다.

ㄷ, ㄹ의 그래프는 직선 $y=b$와 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수의 그래프이다.

따라서 일대일함수의 그래프는 ㄷ, ㄹ이므로 그 개수는 2이다.

2주 2일 필수 체크 전략 ①

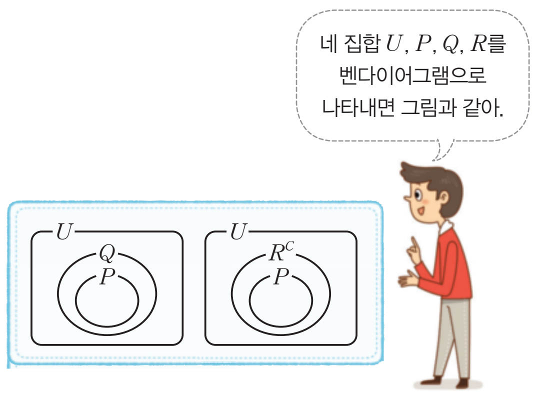
46~49쪽

1-1 ⑤	**1-2** ㄱ, ㄴ, ㄹ
2-1 ①	**2-2** $\frac{5}{2}\leq a\leq4$
3-1 ③	**3-2** ⑤
4-1 9	**4-2** ②

1-1

$P\cup Q=Q$에서 $P\subset Q$

$P\cap R^C=P$에서 $P\subset R^C \qquad \therefore P\cap R=\varnothing$



① $P\not\subset R$이므로 명제 $p\longrightarrow r$는 거짓이다.

② $P^C\not\subset Q$이므로 명제 $\sim p\longrightarrow q$는 거짓이다.

③ $Q\not\subset P$이므로 명제 $q\longrightarrow p$는 거짓이다.

④ Q와 R 사이의 포함 관계는 알 수 없으므로 명제 $\sim q\longrightarrow r$가 참인지 알 수 없다.

⑤ $R\subset P^C$이므로 명제 $r\longrightarrow\sim p$는 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ⑤이다.

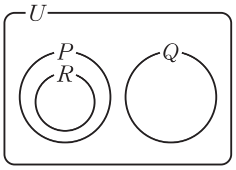
1-2

명제 $p\longrightarrow\sim q$가 참이므로 $P\subset Q^C \qquad \therefore P\cap Q=\varnothing$ (∴ ㄱ)

명제 $\sim p\longrightarrow\sim r$가 참이므로 $P^C\subset R^C \qquad \therefore R\subset P$

명제 $r\longrightarrow\sim q$가 참이므로 $R\subset Q^C \qquad \therefore R\cap Q=\varnothing$

네 집합 U, P, Q, R를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄴ. $P\cap R=R$

ㄷ. $P\cup Q\neq U$

ㄹ. $Q\subset R^C$

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

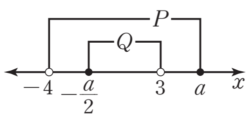
2-1

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,-4<x\leq a\}$, $Q=\left\{x\,\middle|\,-\frac{a}{2}\leq x<3\right\}$

명제 $p \longrightarrow q$의 역 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q\subset P$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$-4<-\frac{a}{2}<3$, $a\geq 3$

즉, $-6<a<8$, $a\geq 3$

$\therefore\ 3\leq a<8$

따라서 정수 a는 3, 4, 5, 6, 7이므로 그 개수는 5이다.

2-2

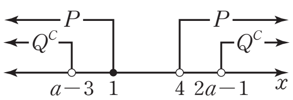
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,x\leq 1$ 또는 $x>4\}$, $Q=\{x\,|\,a-3\leq x\leq 2a-1\}$

명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q^C\subset P$이어야 한다.

이때, $Q^C=\{x\,|\,x<a-3$ 또는 $x>2a-1\}$이므로

오른쪽 그림에서



$a-3\leq 1$, $2a-1\geq 4$

$\therefore\ \frac{5}{2}\leq a\leq 4$

$Q^C\subset P$가 되도록 수직선에서 a의 값의 범위를 구할 때 등호가 포함되는지에 주의해!

3-1

① $3x+4\geq 7$에서 $3x\geq 3$ $\quad\therefore\ x\geq 1$

따라서 주어진 명제는 참이다.

② $x=1$이면 $x\leq 1$이므로 주어진 명제는 참이다.

③ [반례] $x=-2$이면 $(x+2)^2-1=-1<0$이다. $\quad\therefore$ 거짓

④ $x=0$이면 $x^2\leq 0$이므로 주어진 명제는 참이다.

⑤ 마름모는 네 변의 길이가 모두 같은 사각형이고, 마름모 중에서 네 각의 크기가 모두 같은 사각형은 정사각형이므로 주어진 명제는 참이다.

따라서 거짓인 명제는 ③이다.

3-2

이차방정식 $x^2-10x+a=0$의 판별식을 D라 하면

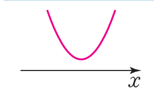
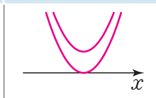
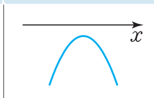
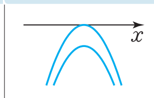
$\frac{D}{4}=(-5)^2-a<0$에서 $a>25$

따라서 정수 a의 최솟값은 26이다.

참고

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 실수)의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여

$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
			
$a>0$, $D<0$	$a>0$, $D\leq 0$	$a<0$, $D<0$	$a<0$, $D\leq 0$

4-1

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x\,|\,1\leq x\leq 8$ 또는 $x>9\}$

$Q=\{x\,|\,x\geq a-2\}$

$R=\{x\,|\,x>b+3\}$

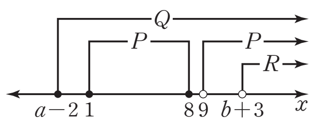
p는 q이기 위한 충분조건이므로

$p\Longrightarrow q$, 즉 $P\subset Q$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

p는 r이기 위한 필요조건이므로

$r\Longrightarrow p$, 즉 $R\subset P$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 만족시키는 오른쪽 그림에서



$a-2\leq 1$, $b+3\geq 9$

$\therefore\ a\leq 3$, $b\geq 6$

따라서 a의 최댓값은 3, b의 최솟값은 6이므로 그 합은

$3+6=9$

4-2

p: $2x-a<0$에서 $2x<a$ $\quad\therefore\ x<\frac{a}{2}$

q: $|x-2|\geq 3$에서 $x-2\leq -3$ 또는 $x-2\geq 3$

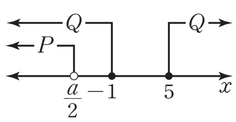
$\therefore\ x\leq -1$ 또는 $x\geq 5$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\left\{x\,\middle|\,x<\frac{a}{2}\right\}$, $Q=\{x\,|\,x\leq -1$ 또는 $x\geq 5\}$

p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $p\Longrightarrow q$, 즉 $P\subset Q$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$\frac{a}{2}\leq -1$ $\quad\therefore\ a\leq -2$

따라서 실수 a의 최댓값은 -2이다.

2주 2일 필수 체크 전략 ②

50~51쪽

1 ②	2 ②	3 ①	4 ③
5 ③	6 ④		

1

ㄱ. $R\subset P$이므로 명제 $r \longrightarrow p$는 참이다.

ㄴ. $P^C\not\subset Q^C$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$는 거짓이다.

ㄷ. $(P\cap Q)\not\subset R$이므로 명제 (p이고 q) $\longrightarrow r$는 거짓이다.

ㄹ. $Q\not\subset(P\cup R)$이므로 명제 $q \longrightarrow$ (p 또는 r)는 거짓이다.

ㅁ. $(P^C\cap Q^C)\subset R^C$이므로 명제 ($\sim p$이고 $\sim q$) $\longrightarrow \sim r$는 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㅁ이므로 그 개수는 2이다.

다른 풀이

ㅁ. 명제 ($\sim p$이고 $\sim q$) $\longrightarrow \sim r$의 대우는 $r \longrightarrow$ (p 또는 q)

이때, $R\subset(P\cup Q)$이므로 주어진 명제의 대우는 참이다.

따라서 주어진 명제도 참이다.

2

p: $|x|\ge a$에서 $x\le -a$ 또는 $x\ge a$

q: $x^2-4x-12\le 0$에서 $(x+2)(x-6)\le 0$

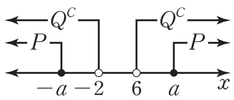
$\therefore\ -2\le x\le 6$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,x\le -a$ 또는 $x\ge a\}$, $Q=\{x\,|\,-2\le x\le 6\}$

명제 $\sim q \longrightarrow p$의 역 $p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 $P\subset Q^C$이어야 한다.

이때, $Q^C=\{x\,|\,x<-2$ 또는 $x>6\}$이므로 오른쪽 그림에서



$-a<-2$, $a>6$

$\therefore\ a>6$

따라서 자연수 a의 최솟값은 7이다.

3

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

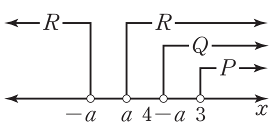
$P=\{x\,|\,x>3\}$, $Q=\{x\,|\,x>4-a\}$

$R=\{x\,|\,(x-a)(x+a)>0\}$

두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참이 되려면 $P\subset Q$, $Q\subset R$, 즉 $P\subset Q\subset R$이어야 한다.

$P\subset Q$에서 $4-a\le 3$

$\therefore\ a\ge 1$ …… ㉠



이때, a는 양수이므로

$R=\{x\,|\,x<-a$ 또는 $x>a\}$

$Q\subset R$에서 $a\le 4-a$ $\quad\therefore\ a\le 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1\le a\le 2$

따라서 정수 a는 1, 2이므로 그 합은

$1+2=3$

4

(가) 어떤 실수 x에 대하여 $x^2-(m-2)x+1\le 0$이 성립하려면 이 차부등식 $x^2-(m-2)x+1\le 0$의 해가 존재해야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-(m-2)x+1=0$이 실근을 가져야 한다.

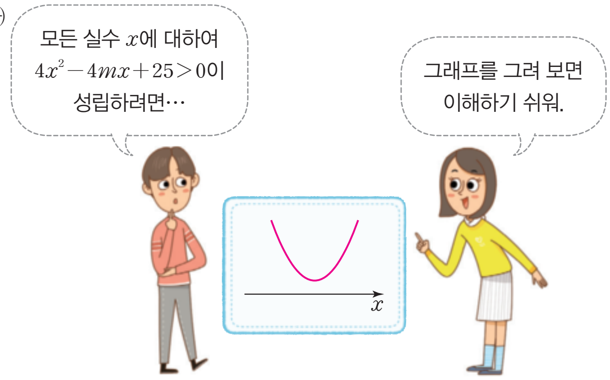
이차방정식 $x^2-(m-2)x+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=\{-(m-2)\}^2-4\times1\times1\ge 0$에서

$m^2-4m\ge 0$, $m(m-4)\ge 0$

$\therefore\ m\le 0$ 또는 $m\ge 4$ …… ㉠

(나)



이차방정식 $4x^2-4mx+25=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=(-2m)^2-4\times25<0$에서

$4m^2-100<0$, $4(m+5)(m-5)<0$

$\therefore\ -5<m<5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-5<m\le 0$ 또는 $4\le m<5$

따라서 정수 m은 -4, -3, -2, -1, 0, 4이므로 그 개수는 6이다.

5

p: $x^2-3x-10\ge 0$에서 $(x+2)(x-5)\ge 0$

$\therefore\ x\le -2$ 또는 $x\ge 5$

q: $x^2-(1+a)x+a<0$에서 $(x-1)(x-a)<0$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,x\le -2$ 또는 $x\ge 5\}$, $Q=\{x\,|\,(x-1)(x-a)<0\}$

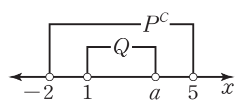
$\sim p$가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $q \Longrightarrow \sim p$, 즉 $Q\subset P^C$이어야 한다.

한편, $P^C=\{x\,|\,-2<x<5\}$이므로

(ⅰ) $a>1$일 때

$Q=\{x\,|\,1<x<a\}$

오른쪽 그림에서

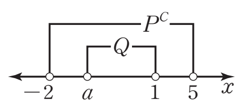


$1<a\le 5$

(ⅱ) $a<1$일 때

$Q=\{x\,|\,a<x<1\}$

오른쪽 그림에서



$-2\le a<1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $-2\le a<1$ 또는 $1<a\le 5$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 2, 3, 4, 5이므로 그 개수는 7이다.

6

p: $3x+2>2x+3$에서 $x>1$

q: $x^2-(2a-1)x+a^2-a-6<0$에서

$x^2-(2a-1)x+(a+2)(a-3)<0$

$\{x-(a-3)\}\{x-(a+2)\}<0$

$\therefore\ a-3<x<a+2$

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x\mid x>1\}$, $Q=\{x\mid a-3<x<a+2\}$

$R=\{x\mid x<9\}$

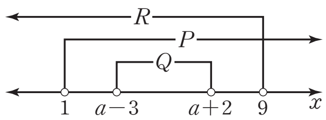
p는 q이기 위한 필요조건이므로

$q \Longrightarrow p$, 즉 $Q\subset P$ …… ㉠

$\sim r$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로

$\sim r \Longrightarrow \sim q$, 즉 $R^C\subset Q^C$에서 $Q\subset R$ …… ㉡

㉠, ㉡을 만족시키는 오른쪽 그림에서



$a-3\geq 1$, $a+2\leq 9$

$\therefore\ 4\leq a\leq 7$

따라서 정수 a의 최댓값 7과 최솟값 4의 곱은

$7\times 4=28$

2주 3일 필수 체크 전략 ①

52~55쪽

1-1 (가) 유리수 (나) 짝수 (다) 서로소	
2-1 ①	**2-2** 35
3-1 ①	**3-2** $-1<a<1$
4-1 2	**4-2** ②

1-1

$\sqrt{2}$를 $\boxed{\text{유리수}}$라 가정하면

$\sqrt{2}=\dfrac{b}{a}$ (a, b는 서로소인 자연수)

로 나타낼 수 있다.

양변을 제곱하여 정리하면 $b^2=2a^2$ …… ㉠

여기서 b^2이 $\boxed{\text{짝수}}$이므로 b도 $\boxed{\text{짝수}}$이다.

$b=2k$ (k는 자연수)로 놓고 이를 ㉠에 대입하면

$(2k)^2=2a^2\qquad \therefore\ a^2=2k^2$

이때, a^2이 $\boxed{\text{짝수}}$이므로 a도 $\boxed{\text{짝수}}$이다.

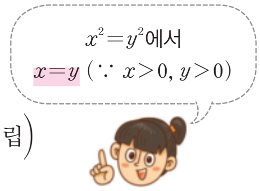
따라서 a, b가 $\boxed{\text{서로소}}$인 자연수라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{2}$는 무리수이다.

2-1

$$(x+3y)\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{y}\right)=1+\frac{3x}{y}+\frac{3y}{x}+9$$
$$=\frac{3x}{y}+\frac{3y}{x}+10$$

이때, $\dfrac{3x}{y}>0$, $\dfrac{3y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{3x}{y}+\frac{3y}{x}+10\geq 2\sqrt{\frac{3x}{y}\times\frac{3y}{x}}+10$$
$$=6+10=16$$



(단, 등호는 $\dfrac{3x}{y}=\dfrac{3y}{x}$, 즉 $x=y$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 16이다.

주의

$$(x+3y)\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{y}\right)\geq 2\sqrt{3xy}\times 2\sqrt{\frac{3}{xy}}$$
$$=4\sqrt{3xy\times\frac{3}{xy}}$$
$$=12$$

와 같이 풀면 안 된다.

왜냐하면 $x+3y\geq 2\sqrt{3xy}$와 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}\geq 2\sqrt{\dfrac{3}{xy}}$에서 각각 등호가 성립하는 경우는 $x=3y$, $\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{y}$일 때이고, 이 두 식을 동시에 만족시키는 x, y의 값은 존재하지 않기 때문이다.

따라서 주어진 식을 전개하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용해야 한다.

2-2

$$9x+\frac{4}{x-1}=9(x-1)+\frac{4}{x-1}+9$$

이때, $9(x-1)>0$, $\dfrac{4}{x-1}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9(x-1)+\frac{4}{x-1}+9\geq 2\sqrt{9(x-1)\times\frac{4}{x-1}}+9=12+9=21$$

등호는 $9(x-1)=\dfrac{4}{x-1}$일 때 성립하므로

$(x-1)^2=\dfrac{4}{9}$에서 $x-1=\pm\dfrac{2}{3}\qquad \therefore\ x=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}$

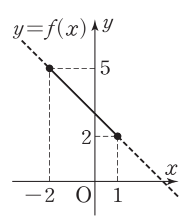
이때, $x>1$이므로 $x=\dfrac{5}{3}$

따라서 최솟값은 $a=21$, 그때의 x의 값은 $b=\dfrac{5}{3}$이므로

$ab=35$

3-1

$f(x)=ax+b$에서 $a<0$이고 함수 f가 일대일대응이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

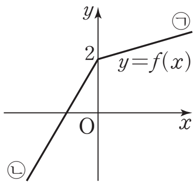


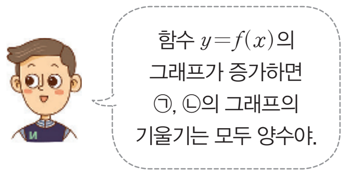
$f(-2)=5$, $f(1)=2$에서
$-2a+b=5$, $a+b=2$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$
$\therefore a-b=-4$

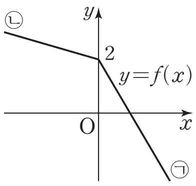
3-2

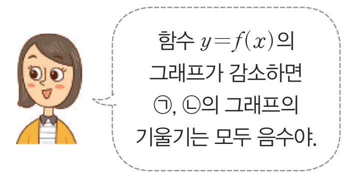
$$f(x)=\begin{cases}(a+1)x+2 & (x\geq 0) & \cdots\cdots ㉠\\(1-a)x+2 & (x<0) & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

함수 f가 일대일대응이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.









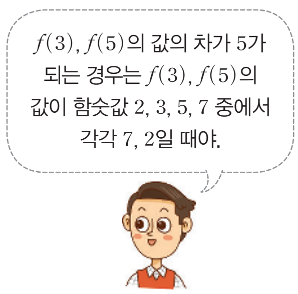
㉠, ㉡의 그래프의 기울기 $a+1$, $1-a$의 부호가 서로 같아야 하므로
$(a+1)(1-a)>0$, $(a+1)(a-1)<0$
$\therefore -1<a<1$

4-1

$f(1)=1$, $f(5)-f(1)=1$이므로
$f(5)=1+f(1)=1+1=2$
함수 f는 일대일대응이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$가 가질 수 있는 값은 -2, -1, 0 중에서 하나이다.
이때, $f(2)<f(3)<f(4)$이므로
$f(2)=-2$, $f(3)=-1$, $f(4)=0$
$\therefore f(4)-f(2)=0-(-2)=2$

4-2

함수 g는 상수함수이고 $f(7)=g(2)=5$이므로
$g(2)=g(3)=g(5)=g(7)=5$
또, $f(3)-f(5)=g(7)=5$에서
$f(3)=7$, $f(5)=2$
이때, 함수 f는 일대일대응이므로
$f(2)=3$
$\therefore f(2)+g(3)=3+5=8$



2주 3일 필수 체크 전략 ②

56~57쪽

1 ②	**2** ④	**3** ④	**4** ③
5 ③	**6** 9		

1

$b\neq 0$이라 가정하면 $a+b\sqrt{2}=0$에서
$b\sqrt{2}=-a$, 즉 $\sqrt{2}=\boxed{-\dfrac{a}{b}}$이다.
이때, a, b가 유리수이므로 $\boxed{-\dfrac{a}{b}}$도 유리수이다.
즉, $\sqrt{2}$도 $\boxed{\text{유리수}}$이다.
이것은 $\sqrt{2}$가 $\boxed{\text{무리수}}$라는 사실에 모순이므로 $b=0$이다.
$b=0$을 $a+b\sqrt{2}=0$에 대입하면 $a=0$이다.
따라서 유리수 a, b에 대하여 $a+b\sqrt{2}=0$이면 $a=b=0$이다.

2

$$\begin{aligned}(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}\right)&=\{(a+b)+c\}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}\right)\\&=1+\frac{a+b}{c}+\frac{c}{a+b}+1\\&=\frac{a+b}{c}+\frac{c}{a+b}+2\end{aligned}$$

$\dfrac{a+b}{c}>0$, $\dfrac{c}{a+b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a+b}{c}+\frac{c}{a+b}+2\geq 2\sqrt{\frac{a+b}{c}\times\frac{c}{a+b}}+2=2\times 1+2=4$$

$\left(\text{단, 등호는 }\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{c}{a+b}\text{, 즉 }a+b=c\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

3

이차방정식 $x^2-kx+2=0$의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로
$D=k^2-8>0$
$k^2-8>0$, $\dfrac{4}{k^2-8}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

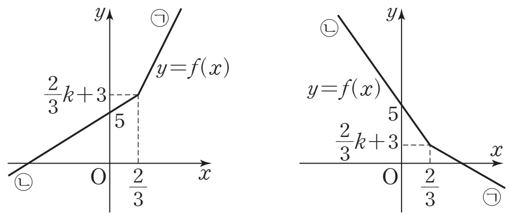
$$k^2-8+\frac{4}{k^2-8}\geq 2\sqrt{(k^2-8)\times\frac{4}{k^2-8}}=2\times 2=4$$

등호는 $k^2-8=\dfrac{4}{k^2-8}$일 때 성립하므로
$(k^2-8)^2=4$에서 $k^2-8=\pm 2$
$\therefore k^2=6$ 또는 $k^2=10$
이때, $k^2>8$이므로 $k^2=10$
따라서 최솟값 $m=4$, 그때의 k^2의 값은 $n=10$이므로
$mn=40$

4

$$f(x)=|3x-2|+kx+3=\begin{cases}(k+3)x+1 & \left(x\geq\dfrac{2}{3}\right) & \cdots\cdots ㉠\\(k-3)x+5 & \left(x<\dfrac{2}{3}\right) & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

함수 f가 일대일대응이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.

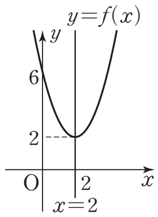


㉠, ㉡의 그래프의 기울기 $k+3$, $k-3$의 부호가 서로 같아야 하므로

$(k+3)(k-3)>0$ $\quad\therefore k<-3$ 또는 $k>3$

5

$f(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2$이므로 정의역이 실수 전체의 집합일 때, $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, 함수 f가 일대일대응이 되려면 그래프가 직선 $x=2$를 기준으로 어느 한 쪽의 전체 또는 일부분이어야 한다.

이때, 정의역이 $X=\{x|x\ge a\}$이므로

$a\ge2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, 치역과 공역이 같아야 하므로 $f(a)=a$에서

$a^2-4a+6=a$, $a^2-5a+6=0$

$(a-2)(a-3)=0$ $\quad\therefore a=2$ 또는 $a=3$ ($\because$ ㉠)

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 5이다.

6

$f(2)\times g(4)=12$이므로 $f(2)$, $g(4)$가 가질 수 있는 값을 순서쌍으로 나타내면 $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$이다.

(i) $f(2)=2$, $g(4)=6$인 경우

$g(3)=6$이고 $g(3)-f(3)=1$이므로

$f(3)=6-1=5$

이때, $f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 3, 4, 6 중의 하나이므로

$f(4)\times g(4)$의 최솟값은

$3\times6=18$

(ii) $f(2)=3$, $g(4)=4$인 경우

$g(3)=4$이고 $g(3)-f(3)=1$이므로

$f(3)=4-1=3$

즉, $f(2)=f(3)=3$이므로 함수 f는 일대일함수가 아니다.

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $f(2)=4$, $g(4)=3$인 경우

$g(3)=3$이고 $g(3)-f(3)=1$이므로

$f(3)=3-1=2$

이때, $f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 3, 5, 6 중의 하나이므로

$f(4)\times g(4)$의 최솟값은

$3\times3=9$

(iv) $f(2)=6$, $g(4)=2$인 경우

$g(3)=2$이고 $g(3)-f(3)=1$이므로

$f(3)=2-1=1$

그런데 공역의 원소에 1이 없으므로 이 경우는 성립하지 않는다.

(i)~(iv)에서 구하는 최솟값은 9이다.

2주 4일 교과서 대표 전략 ①

58~61쪽

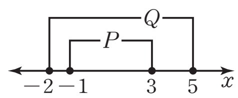
1 ③	**2** ②	**3** ③	**4** ㄱ, ㄷ
5 ②	**6** ①	**7** ㄱ, ㄷ	**8** ①
9 ⑤	**10** ④	**11** 33	**12** ③
13 ①	**14** ②	**15** ⑤	

1

① [반례] $x=-4$이면 $x^2>9$이지만 $x<3$이다.

② $|x|<0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다.

③ p: $-1\le x\le3$, q: $-2\le x\le5$라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면



$P=\{x|-1\le x\le3\}$, $Q=\{x|-2\le x\le5\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

④ [반례] $x=2$이면 x는 소수이지만 짝수이다.

⑤ [반례] $x=0$이면 $x^2-1\ne0$이다.

따라서 참인 명제는 ③이다.

2

p: $x^2-2x-8<0$에서 $(x+2)(x-4)<0$ $\quad\therefore -2<x<4$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 2, 3\}$, $Q=\{3, 4, 5, \cdots, 9\}$

조건 'p 그리고 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cap Q^C$이고 $Q^C=\{1, 2\}$이므로

$P\cap Q^C=\{1, 2\}$

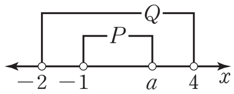
따라서 구하는 원소의 개수는 2이다.

3

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|-1<x<a\}$, $Q=\{x|-2<x<4\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P \subset Q$이어야 한다.



오른쪽 그림에서

$-1 < a \le 4$

따라서 정수 a는 $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$이므로

그 개수는 5이다.

4

ㄱ. 역: $|x|+|y|=0$이면 $x^2+y^2=0$이다. (참)

대우: $|x|+|y| \ne 0$이면 $x^2+y^2 \ne 0$이다. (참)

ㄴ. 역: $x \ne 0$ 또는 $y \ne 0$이면 $xy \ne 0$이다. (거짓)

[반례] $x=1,\ y=0$이면 $xy=0$이다.

대우: $x=0$이고 $y=0$이면 $xy=0$이다. (참)

ㄷ. 역: $A-B=A$이면 $A \cap B=\varnothing$이다. (참)

대우: $A-B \ne A$이면 $A \cap B \ne \varnothing$이다. (참)

따라서 역과 대우가 모두 참인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

5

명제가 참이면 그 대우 '$x=4$이면 $x^2-ax+3a=0$이다.'도 참이다.

$x=4$일 때, $x^2-ax+3a=0$에서

$16-4a+3a=0 \qquad \therefore a=16$

6

$p \longrightarrow q,\ r \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 각각의 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$, $q \longrightarrow \sim r$도 모두 참이다.

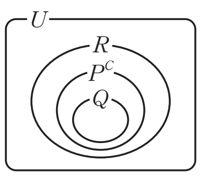
이때, $p \longrightarrow q,\ q \longrightarrow \sim r$가 참이므로 $p \longrightarrow \sim r$도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ①이다.

7

p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow \sim q$, 즉 $P \subset Q^C \qquad \therefore Q \subset P^C$



r는 $\sim p$이기 위한 필요조건이므로

$\sim p \Longrightarrow r$, 즉 $P^C \subset R$ ($\therefore$ ㄱ)

$\therefore Q \subset P^C \subset R$

ㄴ. $Q \cup P^C = P^C$ 　　　ㄷ. $Q \cap R = Q$

ㄹ. $P^C \subset R$에서 $R^C \subset P$이므로 $P-R^C \ne \varnothing$

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

8

q: $|x+a| \le 3$에서 $-3 \le x+a \le 3$

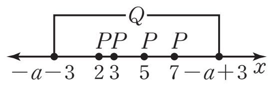
$\therefore -a-3 \le x \le -a+3$

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$P=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\},\ Q=\{x \mid -a-3 \le x \le -a+3\}$

p는 q이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow q$, 즉 $P \subset Q$



오른쪽 그림에서

$-a-3 \le 2,\ -a+3 \ge 7$

$\therefore -5 \le a \le -4$

따라서 실수 a의 최댓값은 -4, 최솟값은 -5이므로 그 합은

$-4+(-5)=-9$

9

$$a^2+b^2-ab=\left(a^2-ab+\frac{1}{4}b^2\right)-\frac{1}{4}b^2+b^2$$

$$=\left(a-\boxed{\frac{1}{2}b}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$$

$a,\ b$가 실수이므로

$\left(a-\boxed{\frac{1}{2}b}\right)^2 \ge 0,\ \frac{3}{4}b^2 \ge 0$

따라서 $a^2+b^2-ab=\left(a-\boxed{\frac{1}{2}b}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \ge 0$이므로

$a^2+b^2 \ge ab$

이때, 등호는 $a-\frac{1}{2}b=0,\ b=0$, 즉 $\boxed{a=b=0}$일 때 성립한다.

10

$$\left(x+\frac{3}{y}\right)\left(y+\frac{27}{x}\right)=xy+27+3+\frac{81}{xy}$$

$$=xy+\frac{81}{xy}+30$$

이때, $xy>0,\ \frac{81}{xy}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$xy+\frac{81}{xy}+30 \ge 2\sqrt{xy \times \frac{81}{xy}}+30=18+30=48$$

등호는 $xy=\frac{81}{xy}$일 때 성립하므로

$(xy)^2=81$에서

$xy=9$ ($\because x>0,\ y>0$)

따라서 $a=9,\ b=48$이므로

$a+b=57$

11

$x,\ y$가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(3^2+4^2)(x^2+y^2) \ge (3x+4y)^2$

이때, $x^2+y^2=16$이므로

$25 \times 16 \ge (3x+4y)^2$

$\therefore 0 < 3x+4y \le 20$

등호는 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}$일 때 성립하므로 $x=\frac{3}{4}y$

$x=\frac{3}{4}y$를 $x^2+y^2=16$에 대입하면

$\left(\frac{3}{4}y\right)^2+y^2=16,\ \frac{25}{16}y^2=16$

$\therefore y=\frac{16}{5}$ ($\because y>0$)

$\therefore\ x=\frac{3}{4}y=\frac{3}{4}\times\frac{16}{5}=\frac{12}{5}$

즉, $3x+4y$는 $x=\frac{12}{5}$, $y=\frac{16}{5}$일 때 최댓값 20을 갖는다.

이때, $\alpha=\frac{12}{5}$, $\beta=\frac{16}{5}$이므로

$\alpha+\beta=\frac{28}{5}$

따라서 $p=5$, $q=28$이므로

$p+q=33$

12

$f(2)=2+1=3$

$f(31)=f(27)=f(23)=\cdots=f(7)=f(3)=3+1=4$

$\therefore\ f(2)+f(31)=3+4=7$

13

$f(x)=x^2+2x-1$, $g(x)=ax-3b$에서

$f(2)=g(2)$이므로

$4+4-1=2a-3b \qquad \therefore\ 2a-3b=7$ …… ㉠

$f(4)=g(4)$이므로

$16+8-1=4a-3b \qquad \therefore\ 4a-3b=23$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=8$, $b=3$

$\therefore\ a+b=11$

14

① $x_1=1$, $x_2=2$이면 $x_1\neq x_2$이지만 $y_1=y_2=3$이므로 일대일대응이 아니다.

③ $x_1=-1$, $x_2=3$이면 $x_1\neq x_2$이지만 $y_1=y_2=3$이므로 일대일대응이 아니다.

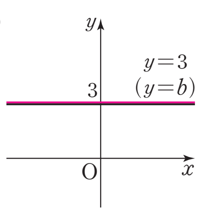
④ $x_1=1$, $x_2=3$이면 $x_1\neq x_2$이지만 $y_1=y_2=1$이므로 일대일대응이 아니다.

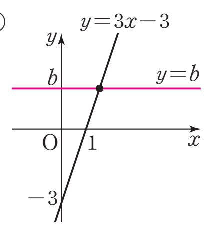
⑤ $x_1=1$, $x_2=\frac{3}{2}$이면 $x_1\neq x_2$이지만 $y_1=y_2=1$이므로 일대일대응이 아니다.

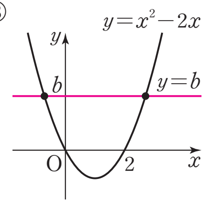
따라서 일대일대응인 것은 ②이다.

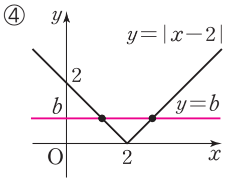
다른 풀이

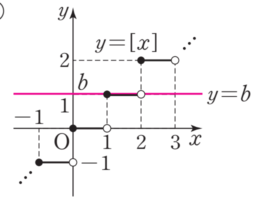
주어진 함수의 그래프에 치역의 각 원소 b에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=b$를 그어 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.

①


②


③


④


⑤


직선 $y=b$와 오직 한 점에서 만나고 치역과 공역이 같은 함수의 그래프는 ②이므로 일대일대응인 것은 ②이다.

15

함수의 개수는 $a=3^3=27$

일대일대응의 개수는 $b=3\times2\times1=6$

상수함수의 개수는 $c=3$

$\therefore\ a-b-c=27-6-3=18$

2주 4일 교과서 대표 전략 ②

62~63쪽

1 ④	**2** $a\le5$	**3** 세은	**4** $-\frac{1}{3}$
5 ④	**6** ②	**7** ②	**8** ②

1

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자.

p: $x^2-14x+40\ge0$에서 $(x-4)(x-10)\ge0$

$\therefore\ x\le4$ 또는 $x\ge10$

$\therefore\ P=\{1, 2, 3, 4, 10\}$

q: $x^2-12x+32\le0$에서 $(x-4)(x-8)\le0$

$\therefore\ 4\le x\le8$

$\therefore\ Q=\{4, 5, 6, 7, 8\}$

r: $\sim(\sim p$ 또는 $q)$에서 r: p 그리고 $\sim q$

이때, $Q^C=\{1, 2, 3, 9, 10\}$이므로

$R=P\cap Q^C=\{1, 2, 3, 10\}$

따라서 조건 r의 진리집합의 모든 원소의 합은

$1+2+3+10=16$

2

주어진 명제가 참이 되려면 그 대우 '$x \le a$, $y \le 2$이면 $x+y \le 7$이다.'도 참이 되어야 한다.

이때, $x \le a$, $y \le 2$에서 $x+y \le a+2$

이므로 '$x+y \le a+2$이면 $x+y \le 7$

이다.'가 참이 되려면

$a+2 \le 7 \qquad \therefore a \le 5$

$a<b$이고 $c<d$이면
$a+c<b+d$

3

p는 $\sim r$이기 위한 필요조건이므로 $\sim r \longrightarrow p$는 참이고 그 대우 $\sim p \longrightarrow r$도 참이다.

r는 q이기 위한 충분조건이므로 $r \longrightarrow q$는 참이고 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

이때, $\sim q \longrightarrow \sim r$, $\sim r \longrightarrow p$가 모두 참이므로 $\sim q \longrightarrow p$가 참이고 그 대우 $\sim p \longrightarrow q$도 참이다.

따라서 항상 참인 명제를 들고 있는 사람은 세은이다.

4

p: $|x-1|<5$에서 $-5<x-1<5$

$\therefore -4<x<6$

q: $|x-a|>2$에서 $x-a<-2$ 또는 $x-a>2$

$\therefore x<a-2$ 또는 $x>a+2$

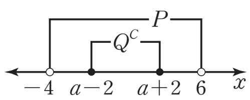
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|-4<x<6\}$, $Q=\{x|x<a-2$ 또는 $x>a+2\}$

p가 $\sim q$이기 위한 필요조건이 되려면 $\sim q \Longrightarrow p$, 즉 $Q^C \subset P$이어야 한다.

$Q^C=\{x|a-2 \le x \le a+2\}$이므로

오른쪽 그림에서



$a-2>-4$, $a+2<6$

$\therefore -2<a<4$

따라서 정수 a의 최댓값은 $M=3$, 최솟값은 $m=-1$이므로

$\dfrac{m}{M}=-\dfrac{1}{3}$

5

$(|a|+\boxed{|b|})^2-|a+b|^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$

$=a^2+2\boxed{|ab|}+b^2-a^2-2ab-b^2$

$=2(\boxed{|ab|-ab})$

그런데 $|ab| \ge \boxed{ab}$이므로

$2(|ab|-ab) \ge 0$

따라서 $|a+b|^2 \le (|a|+|b|)^2$이므로

$|a+b| \le |a|+|b|$

이때, 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $\boxed{ab \ge 0}$일 때 성립한다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

6

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2 \ge 2\sqrt{a^2b^2}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

이때, $a^2+b^2=4$이므로 $4 \ge 2ab \qquad \therefore ab \le 2$

$\therefore 0<ab \le 2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2 \ge 2\sqrt{x^2y^2}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

이때, $x^2+y^2=9$이므로 $9 \ge 2xy \qquad \therefore xy \le \dfrac{9}{2}$

$\therefore 0<xy \le \dfrac{9}{2} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $0<ab+xy \le 2+\dfrac{9}{2}=\dfrac{13}{2}$

$\therefore M_1=\dfrac{13}{2}$

또, a, b, x, y는 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \ge (ax+by)^2$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}\text{일 때 성립}\right)$

이때, $a^2+b^2=4$, $x^2+y^2=9$이므로

$4 \times 9 \ge (ax+by)^2 \qquad \therefore 0<ax+by \le 6$

$\therefore M_2=6$

$\therefore M_1 \times M_2=\dfrac{13}{2} \times 6=39$

7

상자의 밑면의 가로, 세로의 길이를 각각 a cm, b cm라 하면 노끈의 길이가 100 cm이므로

$4a+2b+6 \times 8=100 \qquad \therefore 2a+b=26$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+b \ge 2\sqrt{2ab}$ (단, 등호는 $2a=b$일 때 성립)

이때, $2a+b=26$이므로

$26 \ge 2\sqrt{2ab}$, $\sqrt{2ab} \le 13$

양변을 제곱하면

$2ab \le 169 \qquad \therefore ab \le \dfrac{169}{2}$

따라서 상자의 부피는 $8ab$ cm^{3}이고 $8ab \le 8 \times \dfrac{169}{2}=676$이므로

상자의 최대 부피는 676 cm^{3}이다.

8

$f(1)+f(-1)=0$에서 $f(1)=-f(-1)$

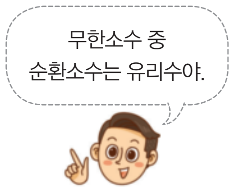
$f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 -1, 0, 1의 3개
$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 -1, 0, 1의 3개
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-f(-1)$의 1개
따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$3\times3\times1=9$

2주 누구나 합격 전략

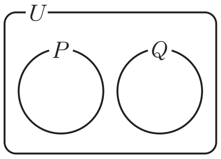
64~65쪽

1 ④	2 ④	3 ④	4 ③
5 ㄷ	6 ②	7 ②	8 ③
9 ②	10 ⑤		

1
① $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 참인 명제이다.
② $18>10$이므로 참인 명제이다.
③ $\frac{\pi}{2}$는 무리수이므로 실수이다. 따라서 참인 명제이다.
④ 순환소수가 아닌 무한소수는 무리수이므로 거짓인 명제이다.
⑤ 6의 배수는 모두 3의 배수이므로 참인 명제이다.
따라서 거짓인 명제는 ④이다.

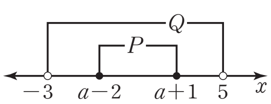


2
명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 $P\subset Q^C$
즉, P, Q는 서로소이므로 세 집합 U, P, Q를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



④ $P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C\neq\varnothing$
⑤ $P^C\cup Q^C=(P\cap Q)^C=\varnothing^C=U$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

3
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x\,|\,a-2\le x\le a+1\}$, $Q=\{x\,|\,-3<x<5\}$
명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 한다.
오른쪽 그림에서
$a-2>-3$, $a+1<5$
$\therefore -1<a<4$



따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3이므로 그 개수는 4이다.

4
명제가 참이면 그 대우 '$x-a=0$이면 $x^2+5x-24=0$이다.'도 참이다.
$x=a$일 때, $x^2+5x-24=0$에서
$a^2+5a-24=0$, $(a+8)(a-3)=0$
$\therefore a=-8$ 또는 $a=3$
따라서 모든 a의 값의 합은 $-8+3=-5$

5
ㄱ. p: $x=y \Longrightarrow q$: $x^2=y^2$
[$p \longleftarrow q$의 반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x^2=y^2$이지만 $x\neq y$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
ㄴ. p: $\underbrace{|x|+|y|=0}_{x=y=0} \Longrightarrow q$: $|x+y|=|x-y|$
[$p \longleftarrow q$의 반례] $x=1$, $y=0$이면 $|x+y|=|x-y|$이지만 $|x|+|y|\neq0$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
ㄷ. p: $x^2+y^2>0 \Longleftarrow q$: $x>0$ 그리고 $y>0$
[$p \longrightarrow q$의 반례] $x=-1$, $y=1$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $x<0$ 그리고 $y>0$이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은 ㄷ이다.

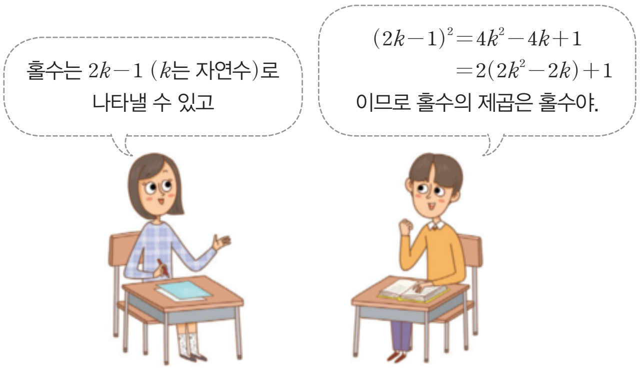
6
① [반례] $x=0$이면 $x^2-x-2=-2<0$이다.
따라서 부등식 $x^2-x-2\ge0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하는 것은 아니다.
② $x^2+1\ge x$에서 $x^2-x+1\ge0$
$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 $x^2+1\ge x$는 모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.
③ [반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x+y=0$, $x-y=2$이므로 $x+y<x-y$이다.
따라서 부등식 $x+y\ge x-y$가 모든 실수 x, y에 대하여 성립하는 것은 아니다.
④ [반례] $x=y=0$이면 $x^2+xy+y^2=0<1$이다.
따라서 부등식 $x^2+xy+y^2\ge1$이 모든 실수 x, y에 대하여 성립하는 것은 아니다.
⑤ [반례] $x=-1$, $y=-1$이면 $x+y=-2$, $2\sqrt{xy}=2$이므로 $x+y<2\sqrt{xy}$이다.
따라서 부등식 $x+y\ge2\sqrt{xy}$가 모든 실수 x, y에 대하여 성립하는 것은 아니다.
따라서 절대부등식은 ②이다.

7
주어진 명제의 대우는 '세 자연수 a, b, c에 대하여 a, b, c가 모두 $\boxed{\text{홀수}}$이면 $a^2+b^2\neq c^2$이다.'이다.

a, b, c가 모두 $\boxed{홀수}$이면 a^2, b^2, c^2은 모두 $\boxed{홀수}$이므로 a^2+b^2은 $\boxed{짝수}$이고 c^2은 $\boxed{홀수}$이다.

즉, $a^2+b^2 \neq c^2$이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.



8

$4a>0$, $2b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4a+2b \geq 2\sqrt{8ab}$

이때, $ab=18$이므로 $4a+2b \geq 2\sqrt{8\times18}=24$

등호는 $4a=2b$, 즉 $2a=b$일 때 성립하므로 $b=2a$를 $ab=18$에 대입하면

$2a^2=18$, $a^2=9$ $\quad\therefore a=3$ ($\because a>0$)

$\therefore b=2a=2\times3=6$

따라서 $4a+2b$의 최솟값은 $\alpha=24$, 그때의 a의 값은 $\beta=3$, b의 값은 $\gamma=6$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=24+3+6=33$

9

$f(x)=x^2+a$, $g(x)=bx-2$에서

$f(-1)=g(-1)$이므로

$1+a=-b-2$ $\quad\therefore a+b=-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=g(2)$이므로

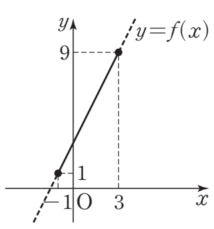
$4+a=2b-2$ $\quad\therefore a-2b=-6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

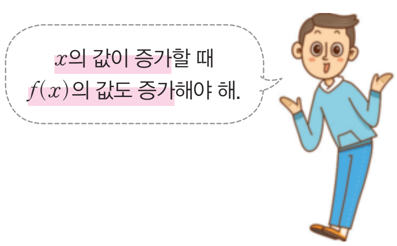
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=1$

$\therefore ab=-4$

10

$f(x)=ax+b$에서 $a>0$이고 함수 f가 일대일대응이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.





$f(-1)=1$에서 $-a+b=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(3)=9$에서 $3a+b=9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=3$

$\therefore a+2b=2+2\times3=8$

2주 창의·융합·코딩 전략

66~69쪽

1 재민	**2** 풀이 참조	**3** (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조
4 ③	**5** (가) mn (나) 대우 (다) $2b-1$ (라) m^2+n^2	
6 ③	**7** ③	**8** 풀이 참조

1

각 사람이 골을 넣은 경우 네 명의 진술의 참, 거짓은 다음과 같다.

(i) 유찬이가 골을 넣은 경우

유찬: 참, 민호: 참, 재민: 거짓, 도현: 거짓

(ii) 민호가 골을 넣은 경우

유찬: 거짓, 민호: 참, 재민: 거짓, 도현: 참

(iii) 재민이가 골을 넣은 경우

유찬: 거짓, 민호: 거짓, 재민: 거짓, 도현: 참

(iv) 도현이가 골을 넣은 경우

유찬: 거짓, 민호: 참, 재민: 참, 도현: 참

네 명 중 한 명의 진술만 참인 경우는 (iii)이다.

따라서 골을 넣은 사람은 재민이다.

2

'모두 나보다 100 m 달리기 기록이 느리다는 사실에 왠지 모를 기쁨이 생긴다.'는 문장은 명제 '모든 학생은 나보다 100 m 달리기 기록이 느리다.'를 포함하고 있다.

이 명제의 부정은 '어떤 학생은 나보다 100 m 달리기 기록이 느리지 않다.'이다.

'게다가 기록이 20초가 넘는 친구들도 있었다.'는 문장은 명제 '어떤 학생은 100 m 달리기 기록이 20초가 넘는다.'를 포함하고 있다.

이 명제의 부정은 '모든 학생은 100 m 달리기 기록이 20초가 넘지 않는다.'이다.

3

(1) 역: B 정류장에 정차하는 버스는 C 정류장에 정차한다. (거짓)

[반례] 14:00에 출발하는 버스는 B 정류장에 정차하지만 C 정류장에는 정차하지 않는다.

(2) 대우: C 정류장에 정차하는 버스는 B 정류장에 정차한다. (참)

4

놓여 있는 카드가 주어진 규칙에 맞는지 확인하려면 규칙 '카드의 한쪽에 홀수가 쓰여 있으면 다른 쪽에는 새 그림이 그려져 있다.'와 그 대우 '카드의 한쪽에 새가 아닌 동물의 그림이 그려져 있으면 다른 쪽에는 홀수가 아닌 숫자가 쓰여 있다.'를 모두 만족시키는지 확인해야 한다.

따라서 확인이 필요한 카드는 3이 쓰여 있는 카드, 염소 그림 카드, 토끼 그림 카드로 그 개수는 3이다.

5

〈세은이의 증명〉

주어진 명제의 대우는 'm, n이 자연수일 때, m 또는 n이 짝수이면 mn은 짝수이다.'이다.

m 또는 n이 짝수이면 m, n 중에서 하나만 짝수이거나 m, n 모두 짝수이다. 이때,

(짝수)×(홀수)=(짝수), (짝수)×(짝수)=(짝수)

이므로 $\boxed{mn}$은 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 $\boxed{\text{대우}}$가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

〈민준이의 증명〉

주어진 명제의 대우는 'm, n이 자연수일 때, mn이 홀수이면 m^2+n^2은 짝수이다.'이다.

mn이 홀수이면 m, n은 모두 홀수이므로

└ 세은이가 증명한 명제

$m=2a-1$, $n=2b-1$ (a, b는 자연수)

로 나타낼 수 있다.

$$m^2+n^2=(2a-1)^2+(\boxed{2b-1})^2$$
$$=4a^2-4a+1+4b^2-4b+1$$
$$=2(2a^2-2a+2b^2-2b+1)$$

즉, 2×(자연수) 꼴이므로 $\boxed{m^2+n^2}$은 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

6

직사각형 모양의 패널의 가로, 세로의 길이를 각각 a cm, b cm라 하면 패널의 넓이가 40 cm^{2}이므로

(색 테이프 비용)
=500×(빨간색 테이프 길이)
+200×(파란색 테이프 길이)

$ab=40$

또, 색 테이프를 이용하여 꾸미는 비용은

$500(2a+2b)+200\times 3b$

$=1000a+1600b$(원)

$1000a>0$, $1600b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$1000a+1600b\ge 2\sqrt{1000a\times 1600b}$$
$$=800\sqrt{10ab}$$

(단, 등호는 $1000a=1600b$, 즉 $5a=8b$일 때 성립)

이때, $ab=40$이므로

$1000a+1600b\ge 800\sqrt{10\times 40}=16000$

따라서 색 테이프를 이용하여 패널을 꾸미는 데 필요한 최소 비용은 16000원이다.

7

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$

㉠의 양변에 $x=1$, $y=-1$을 대입하면

$f(0)=f(1)+f(-1)$, $0=3+f(-1)$

$\therefore f(-1)=-3$

$f(-2)=f(-1)+f(-1)=2f(-1)$

$f(-3)=f(-1)+f(-2)=f(-1)+2f(-1)=3f(-1)$

$f(-4)=f(-1)+f(-3)=f(-1)+3f(-1)=4f(-1)$

⋮

$\therefore f(-10)=f(-1)+f(-9)=f(-1)+9f(-1)$

$=10f(-1)=10\times(-3)=-30$

마찬가지 방법으로

$f(2)=f(1)+f(1)=2f(1)$

$f(3)=f(1)+f(2)=f(1)+2f(1)=3f(1)$

$f(4)=f(1)+f(3)=f(1)+3f(1)=4f(1)$

⋮

$\therefore f(15)=f(1)+f(14)=f(1)+14f(1)$

$=15f(1)=15\times 3=45$

$\therefore f(-10)+f(15)=-30+45=15$

8

$f(-2)$의 값이 될 수 있는 것은 -2, -1, 0, 1, 2 중 하나이므로 5개입니다.

그런데 $f(2)=f(-2)$이므로 $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(-2)$의 값과 같은 1개입니다.

마찬가지로 $f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 -2, -1, 0, 1, 2 중 하나이므로 5개이고, $f(1)=f(-1)$이므로 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(-1)$의 값과 같은 1개입니다.

또, $f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 -2, -1, 0, 1, 2 중 하나이므로 5개입니다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$5\times 1\times 5\times 1\times 5=125$입니다.

신유형·신경향·서술형 전략 72~75쪽

1 세은, 민호, 수아　**2** ②　**3** 풀이 참조, 37
4 ㉢　**5** ④　**6** 소은, 신유
7 (1) 80　(2) 28　(3) 35　**8** (1) 6　(2) 풀이 참조

1

희진: 5는 홀수이지만 3과 서로소이므로 $5 \in A(3)$이다.

유찬: $4=2^2$이므로 4와 서로소인 자연수는 2와 서로소이기도 하다.
따라서 $A(4)=A(2)$이므로 $A(4)$는 $A(2)$의 진부분집합이 아니다.

세은: $9=3^2$이므로 3과 서로소인 자연수는 9와 서로소이기도 하다.
$\therefore A(3)=A(9)$

민호: 6과 서로소인 자연수는 2와 서로소이므로 $A(6) \subset A(2)$이다.
$3 \notin A(6)$, $3 \in A(2)$이므로 $A(6) \neq A(2)$이다.
따라서 $A(6)$은 $A(2)$의 진부분집합이다.
또, $A(4)=A(2)$이므로 $A(6)$은 $A(4)$의 진부분집합이다.

수아: 6과 서로소인 자연수는 3과 서로소이므로 $A(6) \subset A(3)$이다.
따라서 $A(6)$은 $A(3)$의 부분집합이다.

따라서 옳은 말을 한 사람은 세은, 민호, 수아이다.

2

birthday에 있는 알파벳으로 이루어진 집합을 A라 하면
$A=\{b, i, r, t, h, d, a, y\}$
적어도 한 개의 모음을 원소로 갖는 부분집합은 집합 A의 부분집합 중 $\{b, r, t, h, d, y\}$의 부분집합을 제외하면 된다.
따라서 구하는 부분집합의 개수는
$2^8-2^6=256-64=192$

3

두 수 4, 5의 최소공배수는 20이므로
$A_4 \cap A_5=A_{20}$이고 $A_3 \cup (A_4 \cap A_5)=A_3 \cup A_{20}$
또, 집합 A_3은 100 이하의 자연수 중에서 3의 배수의 집합, 집합 A_{20}은 100 이하의 자연수 중에서 20의 배수의 집합이므로
$n(A_3)=33$, $n(A_{20})=5$
이때, $n(A_3 \cap A_{20})=n(A_{60})=1$

$$\begin{aligned}\therefore n(A_3 \cup A_{20}) &= n(A_3)+n(A_{20})-n(A_3 \cap A_{20}) \\ &= n(A_3)+n(A_{20})-n(A_{60}) \\ &= 33+5-1=37\end{aligned}$$

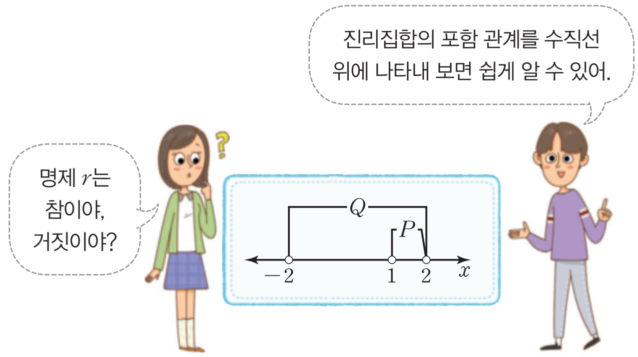
따라서 집합 $A_3 \cup (A_4 \cap A_5)$의 원소의 개수는 37이다.

4

[제1단계]
명제 'p: △ABC와 △DEF가 합동이면 이 두 삼각형은 닮음이다.'는 참이므로 ㈎에서 ㈏로 간다.

[제2단계]
명제 'q: 무리수를 제곱하면 유리수이다.'는 거짓이므로 ㈏에서 ㈑로 간다.
[반례] π는 무리수이지만 π^2은 유리수가 아니다.

[제3단계]
$x^2-3x+2<0$에서 $(x-1)(x-2)<0$
$\therefore 1<x<2$
따라서 명제 'r: $x^2-3x+2<0$이면 $-2<x<2$이다.'는 참이므로 ㈑에서 ㉢으로 간다.



5

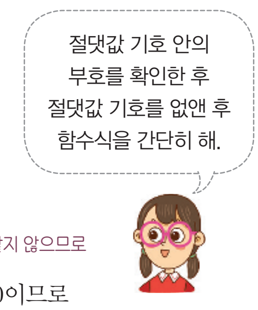
p: 소음이 발생한다.
q: 수질 오염이 발생한다.
r: 대기 오염이 발생한다.
로 놓으면 주어진 결론이 참이므로 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim p \longrightarrow r$가 모두 참이고, 각각의 대우 $q \longrightarrow \sim p$, $\sim r \longrightarrow p$도 모두 참이다.
또, $\sim r \longrightarrow p$, $p \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 $\sim r \longrightarrow \sim q$도 참이고 그 대우 $q \longrightarrow r$도 참이다.
각 보기를 p, q, r로 나타내면 다음과 같다.
ㄱ. $p \longrightarrow r$
ㄴ. $q \longrightarrow \sim p$
ㄷ. $\sim r \longrightarrow \sim q$
따라서 항상 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

6

[종현]
$X=\{x \mid x<0\}$이면 $x<0$, $x-2<0$이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}(x-2)+1 \\ &= -x+2\end{aligned}$$

따라서 $f(x)$는 일대일함수이다.
치역 $\{y \mid y>2\}$가 공역과 같지 않으므로 일대일대응이 아니다.



[소은]
$X=\{x \mid 0 \le x<2\}$이면 $x \ge 0$, $x-2<0$이므로

$$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}(x-2)+1=2$$

따라서 $f(x)$는 상수함수이다.

[신유]

$X=\{x\,|\,x\geq 2\}$이면 $x>0$, $x-2\geq 0$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(x-2)+1=x$

따라서 $f(x)$는 항등함수이다.

이상에서 옳은 설명을 한 사람은 소은, 신유이다.

7

1학년 학생 전체의 집합을 U, 독서 골든벨 대회에 참가 신청을 한 학생의 집합을 A, 영어 말하기 대회에 참가 신청을 한 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=120$, $n(A)=63$, $n(B)=45$, $n((A\cup B)^C)=40$

…… [배점 40 %]

(1) 독서 골든벨 대회에 참가 신청을 하거나 영어 말하기 대회에 참가 신청을 한 학생 수는

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$

$=120-40=80$ …… [배점 20 %]

(2) 두 대회 모두 참가 신청을 한 학생 수는

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=63+45-80=28$ …… [배점 20 %]

(3) 독서 골든벨 대회에만 참가 신청을 한 학생 수는

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$=63-28=35$ …… [배점 20 %]

8

(1) $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$

…… [배점 20 %]

이때, $\frac{b}{a}>0$, $\frac{c}{a}>0$, $\frac{c}{b}>0$, $\frac{a}{b}>0$, $\frac{a}{c}>0$, $\frac{b}{c}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

서로 곱했을 때 상수가 되는 두 식을 묶어 봐.

➡ $\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}=1$

$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$

$=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)$

$\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\times\frac{a}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\times\frac{b}{c}}$

$=2+2+2=6$

따라서 구하는 최솟값은 6이다. …… [배점 50 %]

(2) $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$가 최솟값 6을 가질 때는

$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\geq 6$에서 등호가 성립할 때이다.

등호는 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$, $\frac{c}{a}=\frac{a}{c}$, $\frac{c}{b}=\frac{b}{c}$일 때 성립한다.

즉, $a^2=b^2=c^2$이고 a, b, c가 양수이므로 $a=b=c$일 때 등호가 성립한다. …… [배점 30 %]

적중 예상 전략 1회

76~79쪽

1 ②	2 ①	3 ④	4 ③
5 ②	6 ⑤	7 ①	8 ③
9 ④	10 ④	11 ①	12 ①
13 -25	14 32	15 21	16 3

1

'작은', '좋아하는'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 집합이 아닌 것은 ㄴ, ㄹ의 2개이다.

ㄱ에서 '높은'은 기준이 명확하지 않지만 '가장 높은'은 기준이 명확해.

2

$x^2+x-12<0$에서

$(x+4)(x-3)<0$ $\quad\therefore -4<x<3$

$\therefore A=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

① $-3\in A$

3

$x=\frac{18}{n}$이고 x, n이 자연수이므로 x는 18의 양의 약수이다.

즉, $A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$이므로 $n(A)=6$

이때, $n(B)=k$이므로 $n(A)=n(B)$에서 $k=6$

4

①, ② 0은 집합 A의 원소이므로 $0\in A$, $\{0\}\subset A$

③ $\{\varnothing, 1\}$은 집합 A의 원소이므로 $\{\varnothing, 1\}\in A$

④, ⑤ 0, $\{\varnothing, 1\}$은 집합 A의 원소이므로

$\{0, \{\varnothing, 1\}\}\subset A$, $n(A)=2$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

5

$x^2-2(a+2)x+a(a+4)=0$에서

$(x-a)(x-a-4)=0$ $\quad\therefore x=a$ 또는 $x=a+4$

$\therefore A=\{a, a+4\}$

이때, 집합 $B=\{x\,|\,x<10\}$에 대하여 $A\subset B$를 만족시키려면

$a+4<10$ $\quad\therefore a<6$

따라서 정수 a의 최댓값은 5이다.

6

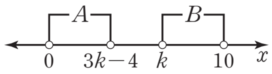
$n(A)=k$이므로 1, 4, 7을 반드시 원소로 갖고 3, 5, 8, 10을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{k-3-4}=128$, $2^{k-7}=2^7$

$k-7=7$ $\quad\therefore k=14$

7

두 집합 A, B가 서로소, 즉 $A\cap B=\varnothing$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

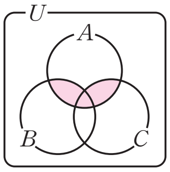


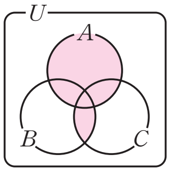
$3k-4\le k \qquad \therefore\ k\le 2$

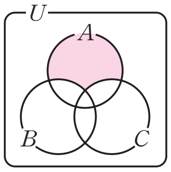
따라서 정수 k의 최댓값은 2이다.

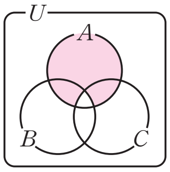
8

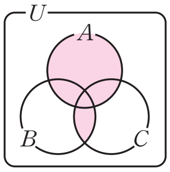
각 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.

①


②


③


④


⑤


따라서 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합은 ③이다.

9

$A\cup B=\{1, 3, 6, 7, 8\}$이고 $1\in A$, $3\in A$, $3\in B$이므로 세 원소 a^2-a, $a+4$, a^2-1은 6, 7, 8 중 하나의 값을 각각 가져야 한다.

(i) $a+4=6$, 즉 $a=2$일 때
$a^2-a=2$, $a^2-1=3$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+4=7$, 즉 $a=3$일 때
$a^2-a=6$, $a^2-1=8$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.
이때, $A=\{1, 3, 6\}$, $B=\{3, 7, 8\}$에 대하여
$A\cup B=\{1, 3, 6, 7, 8\}$

(iii) $a+4=8$, 즉 $a=4$일 때
$a^2-a=12$, $a^2-1=15$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에서 $a=3$이고 $B=\{3, 7, 8\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$3+7+8=18$

10

$(A-B)\cup X=X$이므로 $(A-B)\subset X$

$X-B=X$이므로 $X\cap B=\varnothing$

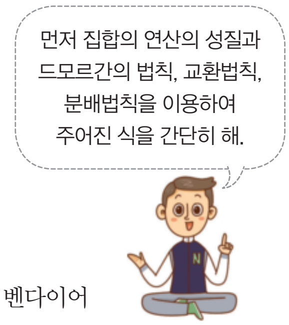
이때, $A-B=\{1\}$이므로 $\{1\}\subset X$, $X\cap\{2, 5\}=\varnothing$을 만족시키는 집합 X는 1을 반드시 원소로 갖고, 2, 5를 원소로 갖지 않아야 한다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{7-1-2}=2^4=16$

11

$(A\cup B)\cap(B-A)^C$
$=(A\cup B)\cap(B\cap A^C)^C$
$=(A\cup B)\cap(B^C\cup A)$
$=(A\cup B)\cap(A\cup B^C)$
$=A\cup(B\cap B^C)$
$=A\cup\varnothing=A$



즉, $A\cup B=A$이므로 $B\subset A$

따라서 두 집합 A, B 사이의 관계를 벤다이어그램으로 바르게 나타낸 것은 ①이다.

12

학생 전체의 집합을 U, A 놀이동산에 가 본 학생의 집합을 A, B 놀이동산에 가 본 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=30$, $n(A)=17$, $n(A-B)=11$, $n(A^C\cap B^C)=3$

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A^C\cap B^C)$
$=30-3=27$

따라서 B 놀이동산에 가 본 학생 수는

$n(B)=n(A\cup B)-n(A-B)$
$=27-11=16$

13

$A\subset B$이고 $B\subset A$이므로 $A=B$

$-1\in B$이므로 $-1\in A$

$x=-1$을 $x^2-4x+a=0$에 대입하면

$1+4+a=0 \qquad \therefore\ a=-5$ …… [배점 40 %]

$x^2-4x-5=0$에서 $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=5$

따라서 $A=\{-1, 5\}$이고 $A=B$이므로 $b=5$ …… [배점 50 %]

$\therefore\ ab=-25$ …… [배점 10 %]

다른 풀이

$A=B$이므로 이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 두 근이 -1, b이다. …… [배점 30 %]

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+b=4 \qquad \therefore\ b=5$ …… [배점 30 %]

$-1\times b=a$, $-1\times 5=a \qquad \therefore\ a=-5$ …… [배점 30 %]

$\therefore\ ab=-25$ …… [배점 10 %]

14

$A=\{3, 6, 9, \cdots, 27\}$, $B=\{6, 12, 18, 24\}$ …… [배점 40 %]

따라서 $B\subset X\subset A$를 만족시키는 집합 X는 $\{3, 6, 9, \cdots, 27\}$의 부분집합 중 6, 12, 18, 24를 반드시 원소로 갖는 집합이다. …… [배점 30 %]

따라서 집합 X의 개수는

$2^{9-4}=2^5=32$ …… [배점 30 %]

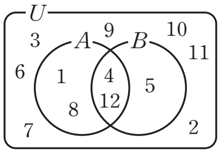
15

$(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$

$=\{1, 5, 8\}$ …… [배점 40 %]

이고 $A=\{1, 4, 8, 12\}$이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ $B=\{4, 5, 12\}$ …… [배점 40 %]

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$4+5+12=21$ …… [배점 20 %]

16

$n(A^C\cap B)=n(B\cap A^C)=n(B-A)=8$ …… [배점 20 %]

$(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$이므로

$n((A-B)\cup(B-A))=n(A-B)+n(B-A)$

$n((A-B)\cup(B-A))=25$에서

$n(A-B)+n(B-A)=25$

$n(A-B)+8=25$ $\therefore$ $n(A-B)=17$ …… [배점 50 %]

$\therefore$ $n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)$

$=20-17=3$ …… [배점 30 %]

적중 예상 전략 2회

80~83쪽

1 ①	**2** ②	**3** ⑤	**4** ⑤
5 ④	**6** ④	**7** ④	**8** ⑤
9 ②	**10** ②	**11** ③	**12** ②
13 $\frac{1}{5}<a\le\frac{1}{2}$	**14** -4	**15** 풀이 참조	**16** 5

1

p: $x^2-9x+14\le0$에서 $(x-2)(x-7)\le0$

$\therefore$ $2\le x\le7$

q: $x^2-14x+48\ge0$에서 $(x-6)(x-8)\ge0$

$\therefore$ $x\le6$ 또는 $x\ge8$

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$이고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$Q=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$

조건 '$\sim(p$ 또는 $\sim q)$', 즉 '$\sim p$ 그리고 q'의 진리집합은 $P^C\cap Q$이고 $P^C=\{1, 8, 9, 10\}$이므로

$P^C\cap Q=\{1, 8, 9, 10\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$1+8+9+10=28$

2

① 역: $x^2=4$이면 $x^2-4x+4=0$이다. (거짓)

[반례] $x=-2$이면 $x^2=4$이지만 $x^2-4x+4\neq0$이다.

② 역: $x\neq0$이고 $y\neq0$이면 $xy\neq0$이다. (참)

③ 역: $x+y>0$이면 $x>0$이고 $y>0$이다. (거짓)

[반례] $x=-1$, $y=2$이면 $x+y>0$이지만 $x<0$이고 $y>0$이다.

④ 역: $|x|=x$이면 $x>0$이다. (거짓)

[반례] $x=0$이면 $|x|=x$이지만 $x>0$이 아니다.

⑤ 역: $|x|\ge x$이면 $x\le0$이다. (거짓)

[반례] $x=1$이면 $|x|=x$이지만 $x>0$이다.

따라서 명제 중 그 역이 참인 것은 ②이다.

3

$(P\cup Q)\cap R=\varnothing$에서 두 집합 $P\cup Q$와 R는 서로소이다.

즉, $(P\cup Q)\subset R^C$에서 $P\subset R^C$, $Q\subset R^C$이므로 명제 $p\longrightarrow\sim r$, $q\longrightarrow\sim r$는 모두 참이고 각각의 대우 $r\longrightarrow\sim p$, $r\longrightarrow\sim q$도 모두 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ⑤이다.

4

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x|x<-4\}$, $Q=\{x|x<a-7\}$,

$R=\{x|(x-a)(x+a)>0\}$

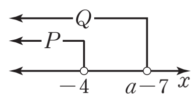
$P\subset Q$

두 명제 $\sim q\longrightarrow\sim p$, $q\longrightarrow r$가 모두 참이 되려면 $Q^C\subset P^C$, $Q\subset R$,

즉 $P\subset Q\subset R$이어야 한다.

$P\subset Q$에서 $a-7\ge-4$

$\therefore$ $a\ge3$ …… ㉠

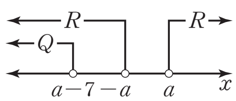


이때, a는 양수이므로

$R=\{x|x<-a$ 또는 $x>a\}$

$Q\subset R$에서 $a-7\le-a$

$\therefore$ $a\le\frac{7}{2}$ …… ㉡



㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3\le a\le\frac{7}{2}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $\frac{7}{2}$, 최솟값은 3이므로 그 합은

$\frac{7}{2}+3=\frac{13}{2}$

5

명제 '모든 x에 대하여 $x^2-6x+a>0$이다.'가 참이므로 이차방정식 $x^2-6x+a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=(-3)^2-1\times a<0$에서

$a>9$ …… ㉠

또, 명제 '어떤 x에 대하여 $x^2+4x+2a\le 0$이다.'가 거짓이므로 이 명제의 부정 '모든 실수 x에 대하여 $x^2+4x+2a>0$이다.'는 참이다.

> 모든 실수 x에 대하여 $x^2-6x+a>0$이 성립하려면 이차방정식 $x^2-6x+a=0$이 허근을 가지면 돼.

이차방정식 $x^2+4x+2a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=2^2-1\times 2a<0$에서 $a>2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a>9$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 10이다.

6

① p: $\overbrace{|x|+|y|=0}^{x=y=0} \Longleftrightarrow q$: $\overbrace{x^2+y^2=0}^{x=y=0}$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

② p: $xy>0 \Longleftarrow q$: $x>0$, $y>0$

[$p \longrightarrow q$의 반례] $x=-1$, $y=-1$이면 $xy>0$이지만 $x<0$, $y<0$이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

③ p: $|xy|=-xy \Longleftarrow q$: $x>0$, $y<0$

[$p \longrightarrow q$의 반례] $x=-1$, $y=2$이면 $|xy|=-xy$이지만 $x<0$, $y>0$이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

④ p: $x=y \Longrightarrow q$: $x^2=y^2$

[$p \longleftarrow q$의 반례] $x=2$, $y=-2$이면 $x^2=y^2$이지만 $x\ne y$이다.

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

⑤ p: $x^2-25=0 \Longleftarrow q$: $x=5$

[$p \longrightarrow q$의 반례] $x=-5$이면 $x^2-25=0$이지만 $x\ne 5$이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

이상에서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은 ④이다.

7

p: $|x-1|<a$에서 $-a<x-1<a$

$\therefore -a+1<x<a+1$

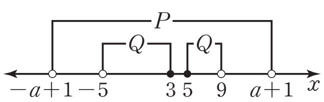
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|-a+1<x<a+1\}$

$Q=\{x|-5<x\le 3$ 또는 $5\le x<9\}$

p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $q \Longrightarrow p$, 즉 $Q\subset P$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$-a+1\le -5$, $a+1\ge 9$

$\therefore a\ge 8$

8

$a>1$에서 $a-1>0$, $a^2-a+4>0$이므로 $\dfrac{a-1}{a^2-a+4}>0$

따라서 $\dfrac{a^2-a+4}{a-1}$가 최솟값을 가질 때, $\dfrac{a-1}{a^2-a+4}$은 최댓값을 갖는다.

$\dfrac{a^2-a+4}{a-1}=\dfrac{a(a-1)+4}{a-1}=a+\dfrac{4}{a-1}=a-1+\dfrac{4}{a-1}+1$

이때, $a-1>0$, $\dfrac{4}{a-1}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a-1+\dfrac{4}{a-1}+1$

$\ge 2\sqrt{(a-1)\times\dfrac{4}{a-1}}+1$

$=2\times 2+1=5$

$\left(\text{단, 등호는 } a-1=\dfrac{4}{a-1}\text{, 즉 } a=3\text{일 때 성립}\right)$

> $(a-1)^2=4$에서
> $a-1=\pm 2$
> 이때, $a>1$이므로 $a=3$

따라서 $\dfrac{a^2-a+4}{a-1}$의 최솟값이 5이므로 $\dfrac{a-1}{a^2-a+4}$의 최댓값은 $\dfrac{1}{5}$이다.

9

$2x+3y=5$이므로

$(\sqrt{2x}+\sqrt{3y})^2=2x+3y+2\sqrt{6xy}=5+2\sqrt{6xy}$ …… ㉠

이때, $2x>0$, $3y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+3y\ge 2\sqrt{2x\times 3y}=2\sqrt{6xy}$

$\therefore 5\ge 2\sqrt{6xy}$ (단, 등호는 $2x=3y$일 때 성립) …… ㉡

㉠, ㉡에서

$(\sqrt{2x}+\sqrt{3y})^2=5+2\sqrt{6xy}\le 5+5=10$

$\therefore 0<\sqrt{2x}+\sqrt{3y}\le\sqrt{10}$

따라서 $\sqrt{2x}+\sqrt{3y}$의 최댓값은 $\sqrt{10}$이다.

10

$f(x)=2x^2-4x+4$, $g(x)=a|x-1|+b$에서

$f(0)=g(0)$이므로

$4=a+b$ …… ㉠

$f(1)=g(1)$이므로

$2-4+4=b$ $\quad\therefore b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$4=a+2$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore 2a-b=2\times 2-2=2$

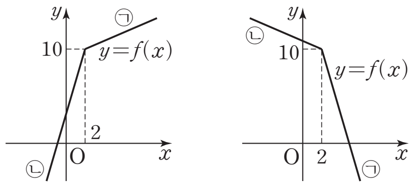
> $f=g$이므로
> $f(0)=g(0)$
> $f(1)=g(1)$
> $f(2)=g(2)$

11

$f(x)=k|x-2|+3x+4$

$=\begin{cases}(k+3)x-2k+4 & (x\ge 2) & \cdots\cdots ㉠\\(3-k)x+2k+4 & (x<2) & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

함수 f가 일대일대응이 되려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



㉠, ㉡의 그래프의 기울기 $k+3$, $3-k$의 부호가 서로 같아야 하므로

$(k+3)(3-k)>0$, $(k+3)(k-3)<0$

$\therefore\ -3<k<3$

따라서 정수 k는 -2, -1, 0, 1, 2이므로 그 개수는 5이다.

12

$f(x)=2x^2-3x$가 항등함수가 되려면 $f(x)=x$이어야 하므로

$2x^2-3x=x$에서 $2x^2-4x=0$

$2x(x-2)=0 \qquad \therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

즉, 집합 $\{0,\ 2\}$의 부분집합 중에서 $\varnothing$을 제외한 집합을 정의역 X로 하면 함수 f는 항등함수가 된다.

따라서 집합 X의 개수는 $2^2-1=3$

13

p: $5x-1=7$에서 $x=\dfrac{8}{5}$

r: $3x-4=-1$에서 $x=1$

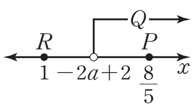
세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\left\{\dfrac{8}{5}\right\}$, $Q=\{x\,|\,x>-2a+2\}$, $R=\{1\}$ …… [배점 20 %]

이때, 명제 $p \longrightarrow q$는 참이고 명제 $r \longrightarrow q$는 거짓이므로

$P\subset Q$, $R\not\subset Q$ …… [배점 30 %]

오른쪽 그림에서



$1\le -2a+2<\dfrac{8}{5}$, $-1\le -2a<-\dfrac{2}{5}$

$\therefore\ \dfrac{1}{5}<a\le\dfrac{1}{2}$ …… [배점 50 %]

14

p: $k-2\le x\le k+3$, q: $-1\le x\le 1$

이라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,k-2\le x\le k+3\}$

$Q=\{x\,|\,-1\le x\le 1\}$

이때, 어떤 실수 x에 대하여 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면

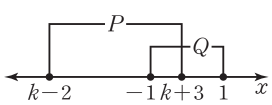
$P\cap Q\ne\varnothing$이어야 한다. …… [배점 20 %]

(i) 오른쪽 그림에서

$P\cap Q\ne\varnothing$이려면

$-1\le k+3\le 1$

$\therefore\ -4\le k\le -2$ …… [배점 20 %]



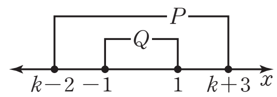
(ii) 오른쪽 그림에서

$P\cap Q\ne\varnothing$이려면

$k-2\le -1$ 또는 $k+3\ge 1$

$k\le 1$ 또는 $k\ge -2$

$\therefore\ -2\le k\le 1$ …… [배점 20 %]

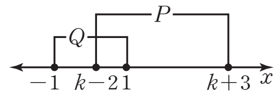


(iii) 오른쪽 그림에서

$P\cap Q\ne\varnothing$이려면

$-1\le k-2\le 1$

$\therefore\ 1\le k\le 3$ …… [배점 20 %]



(i)~(iii)에서 $-4\le k\le 3$

따라서 정수 k는 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3이므로 그 합은

$-4+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3=-4$ …… [배점 20 %]

15

두 자연수 a, b에 대하여 a^3+b^2이 홀수이면 $a+b$가 짝수라고 가정하자. …… [배점 20 %]

이때, $a+b$가 짝수이면 a, b가 모두 홀수이거나 짝수이다.

(i) a, b가 모두 홀수일 때

$a=2m-1$, $b=2n-1$ (m, n은 자연수)이라 하면

$a^3+b^2=(2m-1)^3+(2n-1)^2$

$=8m^3-12m^2+6m-1+4n^2-4n+1$

$=2(4m^3-6m^2+3m+2n^2-2n)$

이므로 a^3+b^2은 짝수이다. …… [배점 30 %]

(ii) a, b가 모두 짝수일 때

$a=2m$, $b=2n$ (m, n은 자연수)이라 하면

$a^3+b^2=8m^3+4n^2=2(4m^3+2n^2)$

이므로 a^3+b^2은 짝수이다. …… [배점 30 %]

(i), (ii)에서 $a+b$가 짝수일 때 a^3+b^2은 짝수가 되어 홀수라는 가정에 모순이다.

따라서 주어진 명제 '두 자연수 a, b에 대하여 a^3+b^2이 홀수이면 $a+b$는 홀수이다.'는 참이다. …… [배점 20 %]

16

함수 g는 항등함수이므로

$g(1)=1$, $g(2)=2$, $g(3)=3$, $g(4)=4$ …… [배점 20 %]

$f(1)=g(3)+h(3)$에서 $f(1)=3+h(3)$

즉, $f(1)>3$이므로 $f(1)=4 \qquad \therefore\ h(3)=1$

이때, 함수 h는 상수함수이므로

$h(1)=h(2)=h(3)=h(4)=1$ …… [배점 30 %]

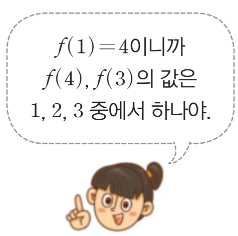
또, 함수 f는 일대일대응이므로

$f(4)-f(3)=2$에서

$f(4)=3$, $f(3)=1$

$\therefore\ f(2)=2$ …… [배점 40 %]

$\therefore\ f(2)+g(2)+h(2)=2+2+1=5$ …… [배점 10 %]



1주 1일 개념 돌파 전략 ①

7, 9쪽

1-2 $(f\circ g)(x)=4x^2+4$	**2-2** -7
3-2 4	**4-2** $\dfrac{x^2+2}{(x+2)(x-1)}$
5-2 제2사분면	**6-2** -1

1-2

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=f\left(2x^2-\dfrac{1}{2}\right)$

$=2\times\left(2x^2-\dfrac{1}{2}\right)+5$

$=4x^2+4$

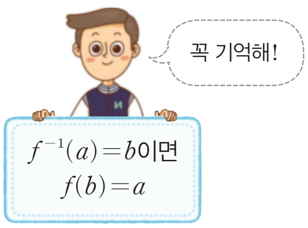
2-2

$f^{-1}(-1)=3$이므로

$f(3)=-1$

즉, $2\times3+a=-1$에서

$a=-7$



3-2

$y=-\dfrac{1}{2}x-3$에서 x를 y로 나타내면

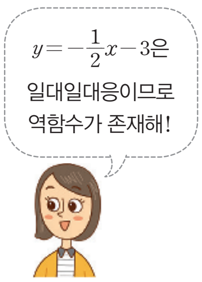
$\dfrac{1}{2}x=-y-3\qquad\therefore x=-2y-6$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$y=-2x-6$

따라서 $a=-2$, $b=-6$이므로

$a-b=4$



4-2

$\dfrac{x^2-x}{x^2+x-2}+\dfrac{x^2+x+1}{x^3-1}$

$=\dfrac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)}+\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{1}{x-1}$

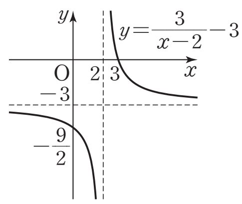
$=\dfrac{x(x-1)+(x+2)}{(x+2)(x-1)}$

$=\dfrac{x^2+2}{(x+2)(x-1)}$

5-2

$y=\dfrac{3}{x-2}-3$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 제2사분면을 지나지 않는다.



6-2

$y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=p$, $y=q$이므로

$p=-2$, $q=2$

$y=\dfrac{k}{x+2}+2$의 그래프가 점 $(-3, 3)$을 지나므로

$3=\dfrac{k}{-3+2}+2\qquad\therefore k=-1$

$\therefore p+q+k=-2+2+(-1)=-1$

1주 1일 개념 돌파 전략 ②

10~11쪽

1 ④	**2** ④	**3** ②	**4** ①
5 ⑤	**6** ③		

1

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(1)=2+a=6$

$\therefore a=4$

2

$(f^{-1}\circ f)(2)=f^{-1}(f(2))=f^{-1}(4)=2$

$(f\circ g^{-1})(5)=f(g^{-1}(5))=f(1)=6$

$\therefore (f^{-1}\circ f)(2)+(f\circ g^{-1})(5)=2+6=8$

3

$y=ax-2$로 놓고 x를 y로 나타내면

$ax=y+2\qquad\therefore x=\dfrac{1}{a}y+\dfrac{2}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{1}{a}x+\dfrac{2}{a}\qquad\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{1}{a}x+\dfrac{2}{a}$

이때, $f(x)=f^{-1}(x)$이므로

$ax-2=\dfrac{1}{a}x+\dfrac{2}{a}$

따라서 $a=\frac{1}{a}$, $-2=\frac{2}{a}$이므로

$a=-1$

다른 풀이

$f(x)=f^{-1}(x)$이면 $(f\circ f^{-1})(x)=(f\circ f)(x)=x$이므로

$f(f(x))=x$, $a(ax-2)-2=x$

$a^2x-2a-2=x$

따라서 $a^2=1$, $-2a-2=0$이므로

$a=-1$

4

$\frac{1}{x+3}-\frac{4}{x^2+2x-3}$

$=\frac{1}{x+3}-\frac{4}{(x+3)(x-1)}$

$=\frac{(x-1)-4}{(x+3)(x-1)}$

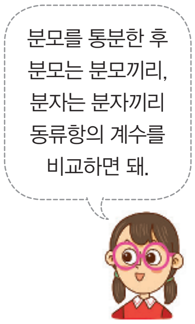
$=\frac{x-5}{(x+3)(x-1)}$

즉, $\frac{x-5}{(x+3)(x-1)}=\frac{x+a}{(x+3)(x+b)}$가

x에 대한 항등식이므로

$a=-5$, $b=-1$

$\therefore a+b=-6$



5

$y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동하면

$y-c=\frac{1}{x-b}$

$\therefore y=\frac{1}{x-b}+c=\frac{1+c(x-b)}{x-b}=\frac{cx-bc+1}{x-b}$

이 식이 $y=\frac{3x-a}{x-3}$와 같으므로

$b=3$, $c=3$

또한, $-a=-bc+1$이므로

$-a=-3\times3+1=-8 \qquad \therefore a=8$

$\therefore a-b-c=8-3-3=2$

6

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=2$이므로 함수의 식을 $y=\frac{k}{x-3}+2\ (k\neq0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{-4}+2 \qquad \therefore k=8$

$\therefore y=\frac{8}{x-3}+2=\frac{8+2(x-3)}{x-3}=\frac{2x+2}{x-3}$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=-3$이므로

$a+b+c=0$

1주 2일 필수 체크 전략 ①

12~15쪽

1-1 $f^{100}(x)=x+100$	**1-2** ④
2-1 -2	**2-2** ⑤
3-1 13	**3-2** ⑤
4-1 -1	**4-2** ①

1-1

함수 $f(x)=x+1$에 대하여

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(x+1)=x+2$

$f^3(x)=(f\circ f\circ f)(x)=f(x+2)=x+3$

$f^4(x)=(f\circ f\circ f\circ f)(x)=f(x+3)=x+4$

$\vdots$

$f^n(x)=x+n$

$\therefore f^{100}(x)=x+100$

1-2

$f(1)=2$

$f^2(1)=(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=3$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(3)=1$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(1)=2$

$\vdots$

함숫값이 2, 3, 1, 2, 3, 1, ⋯로 반복되므로

$f^{100}(1)=f^{3\times33+1}(1)=f(1)=2$

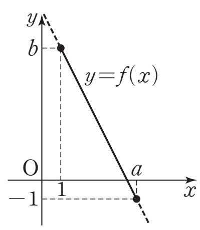
$f^{200}(1)=f^{3\times66+2}(1)=f^2(1)=3$

$\therefore f^{100}(1)+f^{200}(1)=2+3=5$

2-1

$X=\{x\,|\,1\le x\le a\}$에서 $Y=\{y\,|\,-1\le y\le b\}$로의 함수 $f(x)=-2x+9$의 역함수가 존재하므로 $f(x)$는 일대일대응이다.

이때, 직선 $y=f(x)$의 기울기가 음수이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(1)=b$에서 $b=-2\times1+9=7$

$f(a)=-1$에서 $-2a+9=-1$

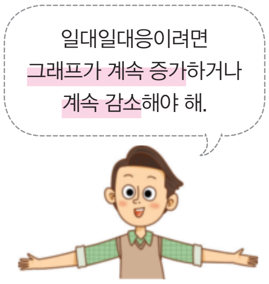
$\therefore a=5$

$\therefore a-b=5-7=-2$

2-2

$$f(x)=\begin{cases}(k+3)x-6 & \left(x\ge\frac{1}{3}\right) & \cdots\cdots ㉠\\ (k-3)x-4 & \left(x<\frac{1}{3}\right) & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

이때, 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.
따라서 ㉠과 ㉡의 그래프의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로
$(k+3)(k-3)>0$
$\therefore k<-3$ 또는 $k>3$



3-1

$f(2x+1)=x-3$에서

$2x+1=t$라 하면 $x=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$

따라서 $f(t)=\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\right)-3=\frac{1}{2}t-\frac{7}{2}$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$

$f^{-1}(3)=k$라 하면 $f(k)=3$이므로

$\frac{1}{2}k-\frac{7}{2}=3 \qquad \therefore k=13$

다른 풀이

$f(2x+1)=x-3$에서 $f^{-1}(x-3)=2x+1$

$x-3=3$에서 $x=6$

$\therefore f^{-1}(3)=f^{-1}(6-3)=2\times6+1=13$

3-2

$$(f^{-1}\circ(g\circ f^{-1})^{-1}\circ f)(k)=(f^{-1}\circ f\circ g^{-1}\circ f)(k)$$
$$=(g^{-1}\circ f)(k)=g^{-1}(f(k))$$

$g^{-1}(f(k))=\frac{5}{2}$이므로 $f(k)=g\left(\frac{5}{2}\right)$

즉, $k+3=4\times\frac{5}{2}-2$이므로 $k=5$

4-1

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$-3x+a=x$에서 $4x=a$

이때, $x=1$이므로 $a=4$

$\therefore f(x)=-3x+4$

$f^{-1}(7)=k$라 하면 $f(k)=7$이므로

$-3k+4=7 \qquad \therefore k=-1$

$\therefore f^{-1}(7)=-1$

4-2

함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$는 서로 역함수 관계이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, 방정식 $f(x)=g(x)$의 근은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.

$-2x^2+5x+k=x$에서 $2x^2-4x-k=0$

이차방정식 $2x^2-4x-k=0$이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2\times(-k)\geq0$

이어야 하므로

$4+2k\geq0 \qquad \therefore k\geq-2$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식이 D일 때
(1) $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 실근 } 실근
(2) $D=0 \Longleftrightarrow$ 중근
(3) $D<0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 허근

1주 2일 필수 체크 전략 ②

16~17쪽

1 ①	**2** ⑤	**3** ④	**4** ①
5 ④	**6** ⑤		

1

$f(1)=3$

$f^2(1)=(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(3)=7$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(7)=15$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(15)=31$

$\vdots$

$f^n(1)=2^{n+1}-1$

$\therefore f^9(1)=2^{10}-1=1023$

2

$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$

$f^2\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(1)=2$

$f^3\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^2\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(2)=0$

$f^4\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^3\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(0)=0$

$f^5\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^4\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(0)=0$

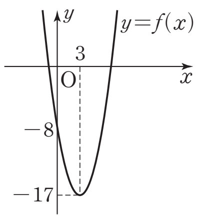
$\vdots$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)+f^2\left(\frac{1}{2}\right)+f^3\left(\frac{1}{2}\right)+\cdots+f^{100}\left(\frac{1}{2}\right)$

$=1+2+0\times98=3$

3

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.



$f(x)=x^2-6x-8=(x-3)^2-17$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $x\geq 3$일 때 x의 값이 증가하면 함수 $f(x)$의 값도 증가하므로 $k\geq 3$

또, 함수 $f(x)$의 치역과 공역이 같아야 하므로 $f(k)=k$에서

$k^2-6k-8=k$, $k^2-7k-8=0$

$(k+1)(k-8)=0 \qquad \therefore k=8\ (\because k\geq 3)$

4

$f\left(\frac{1}{4}x-1\right)=x+1$에서 $\frac{1}{4}x-1=t$라 하면

$x=4t+4$

따라서 $f(t)=(4t+4)+1=4t+5$이므로

$f(x)=4x+5$

$y=4x+5$로 놓고 x를 y로 나타내면

$4x=y-5 \qquad \therefore x=\frac{1}{4}y-\frac{5}{4}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4} \qquad \therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$

따라서 역함수 $f^{-1}(x)$를 들고 있는 사람은 희진이다.

5

$(g\circ f)^{-1}(3)+(f^{-1}\circ g^{-1})(3)$

$=(f^{-1}\circ g^{-1})(3)+(f^{-1}\circ g^{-1})(3)$

$=2(f^{-1}\circ g^{-1})(3)$

$g^{-1}(3)=a$라 하면 $g(a)=3$

즉, $-2a+1=3$이므로 $a=-1$

$(f^{-1}\circ g^{-1})(3)=f^{-1}(g^{-1}(3))=f^{-1}(-1)$

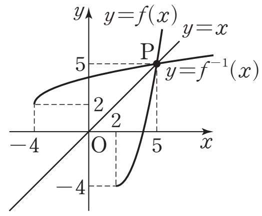
$f^{-1}(-1)=b$라 하면 $f(b)=-1$

즉, $2b-5=-1$이므로 $b=2$

$\therefore (g\circ f)^{-1}(3)+(f^{-1}\circ g^{-1})(3)=2(f^{-1}\circ g^{-1})(3)$

$=2\times 2=4$

6



함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 교점 P의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.

$x^2-4x=x$에서 $x^2-5x=0$

$x(x-5)=0 \qquad \therefore x=5\ (\because x\geq 2)$

따라서 교점 P의 좌표는 $(5, 5)$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$

1주 3일 필수 체크 전략 ①

18~21쪽

1-1 2	**1-2** ②
2-1 ㄷ	**2-2** ⑤
3-1 $\frac{5}{2}$	**3-2** ④
4-1 5	**4-2** ②

1-1

$y=\frac{2x-1}{x-1}=\frac{2(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+2$

이므로 점근선의 방정식은

$x=1$, $y=2$

이때, $y=\frac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 두 점근선의 교점 $(1, 2)$에 대하여 대칭이므로

$a=1$, $b=2$

$\therefore ab=2$

1-2

$y=\frac{ax-2}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab-2}{x+b}=\frac{-ab-2}{x+b}+a$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-b$, $y=a$

이때, 두 점근선의 교점 $(-b, a)$가 두 직선 $y=x+4$, $y=-x+2$의 교점이므로

$a=-b+4$, $a=b+2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$

$\therefore ab=3$

2-1

$y=\frac{3x+1}{2x-1}=\frac{\frac{3}{2}(2x-1)+\frac{5}{2}}{2x-1}=\frac{\frac{5}{2}}{2x-1}+\frac{3}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$

ㄱ. 정의역은 $\frac{1}{2}$을 제외한 실수 전체의 집합이다.

ㄴ. 치역은 $\frac{3}{2}$을 제외한 실수 전체의 집합이다.

ㄷ. ㉠에서 $y=\dfrac{\frac{5}{2}}{2x-1}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{4x-2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)}+\dfrac{3}{2}$이므로

$y=\dfrac{5}{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

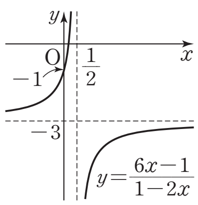
따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq0,\ c\neq0)$의 그래프는 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형하여 생각해!

2-2

$y=\dfrac{6x-1}{1-2x}=-\dfrac{6x-1}{2x-1}$

$=-\dfrac{3(2x-1)+2}{2x-1}=-\dfrac{2}{2x-1}-3$ ······㉠



③, ④ $y=\dfrac{6x-1}{1-2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.

또, $x>\frac{1}{2}$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

⑤ ㉠에서

$y=-\dfrac{2}{2x-1}-3=-\dfrac{2}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}-3=-\dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}-3$

이므로 평행이동하였을 때, $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프와 겹쳐진다.

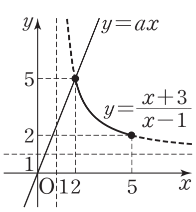
즉, 평행이동하였을 때, $y=-\dfrac{2}{x-3}+2$의 그래프와 겹쳐질 수 없다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

3-1

$y=\dfrac{x+3}{x-1}=\dfrac{(x-1)+4}{x-1}=\dfrac{4}{x-1}+1$이므로

$2\le x\le5$에서 $y=\dfrac{x+3}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, 직선 $y=ax$는 a의 값에 관계없이 원점을 지난다.

$\dfrac{x+3}{x-1}\le ax$가 항상 성립하려면 기울기 a의 값은 직선 $y=ax$가 점 $(2, 5)$를 지날 때의 a의 값보다 크거나 같아야 한다.

직선 $y=ax$가 점 $(2, 5)$를 지날 때의 a의 값은 $\frac{5}{2}$이므로 $a\ge\frac{5}{2}$

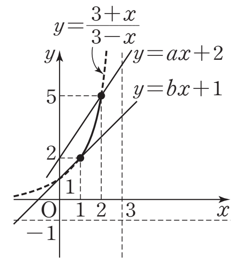
$5=2a$ $\therefore a=\frac{5}{2}$

따라서 a의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.

3-2

$y=\dfrac{3+x}{3-x}=-\dfrac{x+3}{x-3}$

$=-\dfrac{(x-3)+6}{x-3}=-\dfrac{6}{x-3}-1$



이므로 $1\le x\le2$에서 $y=\dfrac{3+x}{3-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때, 두 직선 $y=ax+2$, $y=bx+1$은 a, b의 값에 관계없이 각각 점 $(0, 2)$, $(0, 1)$을 지난다.

$bx+1\le\dfrac{3+x}{3-x}\le ax+2$가 항상 성립하려면 기울기 a의 값은 직선 $y=ax+2$가 점 $(2, 5)$를 지날 때의 a의 값보다 크거나 같고, 기울기 b의 값은 직선 $y=bx+1$이 점 $(1, 2)$를 지날 때의 b의 값보다 작거나 같아야 한다.

$5=2a+2$ $\therefore a=\frac{3}{2}$

직선 $y=ax+2$가 점 $(2, 5)$를 지날 때의 a의 값은 $\frac{3}{2}$이고, 직선 $y=bx+1$이 점 $(1, 2)$를 지날 때의 b의 값은 1이므로

$2=b+1$ $\therefore b=1$

$a\ge\frac{3}{2}$, $b\le1$

따라서 a의 최솟값은 $\frac{3}{2}$, b의 최댓값은 1이므로 그 합은

$\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$

4-1

$y=\dfrac{x+1}{x-2}$에서 x를 y로 나타내면

$y(x-2)=x+1$, $(y-1)x=2y+1$

$\therefore x=\dfrac{2y+1}{y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$

따라서 $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$이므로

$g(2)=\dfrac{2\times2+1}{2-1}=5$

다른 풀이

$f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$이라 하면 $g(2)=f^{-1}(2)$

$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$

즉, $\dfrac{k+1}{k-2}=2$에서 $k+1=2(k-2)$ $\therefore k=5$

4-2

두 함수 $y=\dfrac{5x+3}{x+1}$, $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

$y=\dfrac{5x+3}{x+1}$에서 x를 y로 나타내면

$y(x+1)=5x+3$, $(y-5)x=-y+3$

$\therefore x=\dfrac{-y+3}{y-5}$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는 $y=\dfrac{-x+3}{x-5}$

따라서 $a=-1$, $b=3$, $c=-5$이므로

$a+b+c=-3$

역함수는 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$에서
a와 d의 위치가 서로 바뀌고,
그 부호가 각각 바뀌어.

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq0,\ c\neq0)$의 역함수

➡ $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$

1주 3일 필수 체크 전략 ②

22~23쪽

1 ⑤	2 ⑤	3 ④	4 ⑤
5 ②	6 ①		

1

$y=\dfrac{1-3x}{x-1}=\dfrac{-3(x-1)-2}{x-1}=-\dfrac{2}{x-1}-3$

이므로 점근선의 방정식은

$x=1$, $y=-3$

이때, $y=\dfrac{1-3x}{x-1}$의 그래프는 두 점근선의 교점 $(1,\ -3)$에 대하여 대칭이므로

$a=1$, $b=-3$

$\therefore a-b=4$

2

$y=\dfrac{4x-1}{x-2}=\dfrac{4(x-2)+7}{x-2}=\dfrac{7}{x-2}+4$

이므로 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=4$

이때, 두 점근선의 교점 $(2,\ 4)$가 두 직선 $y=x+a$, $y=-x+b$의 교점이므로

$4=2+a$, $4=-2+b$ $\qquad\therefore a=2,\ b=6$

$\therefore a+b=8$

3

$y=\dfrac{x+5}{2x+4}=\dfrac{\frac{1}{2}(2x+4)+3}{2x+4}=\dfrac{3}{2(x+2)}+\dfrac{1}{2}$

ㄱ. 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=\dfrac{1}{2}$이다.

ㄴ. $y=\dfrac{3}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. 두 점근선의 교점 $\left(-2,\ \dfrac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

4

$y=\dfrac{1}{x}$의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 한 점에서 만나므로

$\dfrac{1}{x}=-2x+k$에서 $2x^2-kx+1=0$

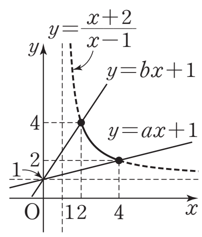
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-8=0$, $k^2=8$ $\qquad\therefore k=2\sqrt{2}$ $(\because k>0)$

5

$y=\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{(x-1)+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+1$이므로

$2\le x\le4$에서 $y=\dfrac{x+2}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, 두 직선 $y=ax+1$, $y=bx+1$은 a, b의 값에 관계없이 모두 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

$ax+1\le\dfrac{x+2}{x-1}\le bx+1$이 항상 성립하려면 기울기 a의 값은 직선 $y=ax+1$이 점 $(4,\ 2)$를 지날 때의 a의 값보다 작거나 같고, 기울기 b의 값은 직선 $y=bx+1$이 점 $(2,\ 4)$를 지날 때의 b의 값보다 크거나 같아야 한다.

$2=4a+1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$

직선 $y=ax+1$이 점 $(4,\ 2)$를 지날 때의 a의 값은 $\dfrac{1}{4}$이고, 직선 $y=bx+1$이 점 $(2,\ 4)$를 지날 때의 b의 값은 $\dfrac{3}{2}$이므로

$4=2b+1$ $\quad\therefore b=\frac{3}{2}$

$a\le\dfrac{1}{4}$, $b\ge\dfrac{3}{2}$

따라서 a의 최댓값은 $\dfrac{1}{4}$, b의 최솟값은 $\dfrac{3}{2}$이므로 그 합은

$\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{7}{4}$

6

$f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}$에서 $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$로 놓고 x를 y로 나타내면

$y(2x+1)=x+1$, $(2y-1)x=-y+1$

$\therefore x=\dfrac{-y+1}{2y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$ $\qquad\therefore f(x)=\dfrac{-x+1}{2x-1}$

따라서 $a=-1$, $b=1$, $c=-1$이므로

$a-b-c=-1$

1주 4일 교과서 대표 전략 ①

24~27쪽

1 ①	**2** ②	**3** 5	**4** ④
5 ④	**6** ①	**7** ⑤	**8** 1
9 ⑤	**10** ④	**11** ①	**12** ⑤
13 9	**14** ②	**15** -5	**16** ④

1

$(f\circ g)(a)=f(g(a))=5$에서 $3g(a)-1=5$이므로

$g(a)=2$

즉, $|a+1|=2$에서 $a+1=\pm 2$

$\therefore a=1$ 또는 $a=-3$

따라서 모든 a의 값의 합은

$1+(-3)=-2$

2

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x-a)$

$\qquad=4-3(3x-a)$

$\qquad=-9x+3a+4$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(4-3x)$

$\qquad=3(4-3x)-a$

$\qquad=-9x+12-a$

$g\circ f=f\circ g$가 성립하려면

$-9x+3a+4=-9x+12-a$

이어야 하므로

$3a+4=12-a$, $4a=8$

$\therefore a=2$

$-9x+3a+4=-9x+12-a$
는 x에 대한 항등식이므로
좌변과 우변이 일치해!

3

$(f\circ g)(x)=-2x+5$에서

$f(g(x))=-2x+5$

$f(-x+b)=-2x+5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때, $-x+b=t$로 놓으면 $x=-t+b$

㉠에서 $f(t)=-2(-t+b)+5=2t-2b+5$

$\therefore f(x)=2x-2b+5$

따라서 $a=2$, $-1=-2b+5$에서 $b=3$

$\therefore a+b=5$

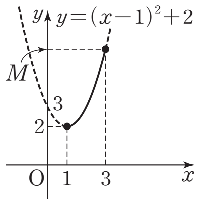
4

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+2)$

$\qquad=(x+2)^2-6(x+2)+11=x^2-2x+3$

$\qquad=(x-1)^2+2$

$1\le x\le 3$에서 $y=(x-1)^2+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, $x=3$일 때 최댓값 M을 가지므로

$M=(3-1)^2+2=6$

$x=1$일 때 최솟값 m을 가지므로

$m=2$

$\therefore M+m=8$

제한된 범위에서의 이차함수의 최대·최소를
구할 때는 꼭짓점의 x좌표가 제한된 범위에
포함되는지부터 확인해.

5

$f(2)=3$이므로 $f^{-1}(3)=2$

$f^{-1}(a)+f^{-1}(3)=6$에서

$f^{-1}(a)+2=6 \qquad \therefore f^{-1}(a)=4$

$f^{-1}(a)=4$이므로 $f(4)=a$

$\therefore a=5$

6

$g^{-1}(10)=a$라 하면

$g(a)=10$이므로 $a=5$

$f(g^{-1}(10))+f^{-1}(g(10))$

$=f(5)+f^{-1}(15)$

이때, $f^{-1}(15)=b$라 하면

$f(b)=15$이므로

$2b+3=15 \qquad \therefore b=6$

$\therefore f(g^{-1}(10))+f^{-1}(g(10))$

$\quad=f(5)+f^{-1}(15)$

$\quad=13+6=19$

$g(a)=10$이므로 $g(x)$에서
'$x\ge 5$일 때 $x+5\ge 10$'을 사용해!
즉, $a+5=10$이므로 $a=5$야.

7

$y=3x+a$로 놓고 x를 y로 나타내면

$3x=y-a \qquad \therefore x=\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}a$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}a \qquad \therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}a$

따라서 $b=\frac{1}{3}$, $-1=-\frac{1}{3}a$에서 $a=3$

$\therefore a+3b=3+3\times\frac{1}{3}=4$

8

주어진 그래프에서 $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=6$이므로

$f^{-1}(2)=1$, $f^{-1}(3)=2$, $f^{-1}(6)=3$

$\therefore (f\circ f\circ f)^{-1}(6)=(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(6)$
$=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(6)))$
$=f^{-1}(f^{-1}(3))$
$=f^{-1}(2)=1$

9

$y=\dfrac{bx+2}{x+a}=\dfrac{b(x+a)-ab+2}{x+a}=\dfrac{-ab+2}{x+a}+b$

이므로 정의역은 $\{x|x\neq -a$인 실수$\}$, 치역은 $\{y|y\neq b$인 실수$\}$이다.

따라서 $a=3$, $b=2$이므로

$a+b=5$

10

① $y=\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+1$

② $y=\dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+2$

③ $y=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+1$

④ $y=\dfrac{x-3}{x-2}=\dfrac{(x-2)-1}{x-2}=-\dfrac{1}{x-2}+1$ → $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동

⑤ $y=\dfrac{2x-3}{x-2}=\dfrac{2(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+2$

따라서 평행이동에 의하여 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ④이다.

11

점근선의 방정식이 $x=3$, $y=2$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-3}+2\ (k\neq 0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(5, 6)$을 지나므로

$6=\dfrac{k}{5-3}+2 \qquad \therefore k=8$

$\therefore y=\dfrac{8}{x-3}+2=\dfrac{2x+2}{x-3}$

따라서 $a=2$, $b=2$, $c=-3$이므로

$abc=-12$

12

$y=\dfrac{bx-1}{x+a}=\dfrac{b(x+a)-ab-1}{x+a}=\dfrac{-ab-1}{x+a}+b$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=b$

이때, $y=\dfrac{bx-1}{x+a}$의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-a, b)$에 대하여 대칭이므로 점 $(-a, b)$는 점 $(-1, c)$와 같다.

$\therefore a=1,\ b=c$

즉, $y=\dfrac{bx-1}{x+1}$의 그래프가 점 $(-3, 5)$를 지나므로

$5=\dfrac{-3b-1}{-3+1} \qquad \therefore b=3,\ c=b=3$

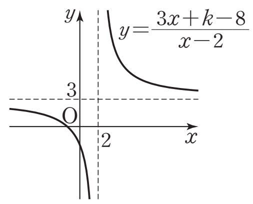
$\therefore a+b+c=1+3+3=7$

13

$y=\dfrac{3x+k-8}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+k-2}{x-2}=\dfrac{k-2}{x-2}+3$

이므로 $y=\dfrac{3x+k-8}{x-2}$의 그래프는 $y=\dfrac{k-2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

이때, 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



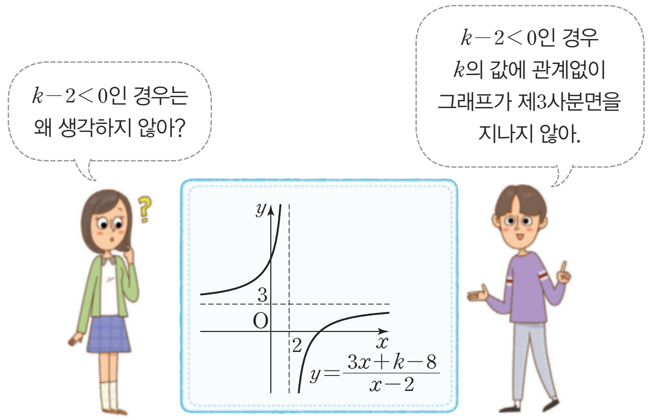
(i) $k-2>0$이어야 하므로 $k>2$

(ii) $x=0$일 때, $y<0$이어야 하므로

$\dfrac{k-8}{-2}<0,\ k-8>0 \qquad \therefore k>8$

(i), (ii)에 의하여 $k>8$

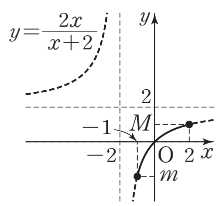
따라서 정수 k의 최솟값은 9이다.



14

$y=\dfrac{2x}{x+2}=\dfrac{2(x+2)-4}{x+2}=-\dfrac{4}{x+2}+2$

이므로 $-1\le x\le 2$에서 $y=\dfrac{2x}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, $x=2$일 때 최댓값 M을 가지므로

$M=-\dfrac{4}{2+2}+2=1$

$x=-1$일 때 최솟값 m을 가지므로

$m=-\dfrac{4}{-1+2}+2=-2$

$\therefore M+m=-1$

15

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=4$이므로 함수의 식을 $y=\dfrac{k}{x-3}+4\ (k\neq 0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{k}{0-3}+4 \qquad \therefore k=6$

$\therefore y=\dfrac{6}{x-3}+4=\dfrac{4x-6}{x-3}$

따라서 $a=4$, $b=-6$, $c=-3$이므로

$a+b+c=-5$

16

$f(x)=\dfrac{x}{x+1}$이므로

$$f^2(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x+1}}=\frac{x}{2x+1}$$

$$f^3(x)=f(f^2(x))=\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}=\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{3x+1}{2x+1}}=\frac{x}{3x+1}$$

$\vdots$

$f^n(x)=\dfrac{x}{nx+1}$

따라서 $f^{10}(x)=\dfrac{x}{10x+1}$이므로

$f^{10}(1)=\dfrac{1}{11}$

다른 풀이

$f(1)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

$$f^2(1)=f(f(1))=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{3}$$

$$f^3(1)=f(f^2(1))=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{1}{4}$$

$\vdots$

$f^n(1)=\dfrac{1}{n+1}$

$\therefore f^{10}(1)=\dfrac{1}{11}$

1주 4일 교과서 대표 전략 ②

28~29쪽

1 ②	**2** ③	**3** ①	**4** ①
5 ④	**6** ①	**7** ③	**8** ②

1

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(4x+3)$

$\qquad =-(4x+3)+k=-4x-3+k$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x+k)$

$\qquad =4(-x+k)+3=-4x+4k+3$

$g\circ f=f\circ g$가 성립하려면

$-4x-3+k=-4x+4k+3$이어야 하므로

$-3+k=4k+3,\ 3k=-6 \qquad \therefore k=-2$

2

$(g\circ f^{-1})(1)=g(f^{-1}(1))$이고 $f(4)=1$이므로 $f^{-1}(1)=4$

$\therefore (g\circ f^{-1})(1)=g(4)=3$

$(f\circ g^{-1})(2)=f(g^{-1}(2))$이고 $g(1)=2$이므로 $g^{-1}(2)=1$

$\therefore (f\circ g^{-1})(2)=f(1)=2$

$\therefore (g\circ f^{-1})(1)+(f\circ g^{-1})(2)=3+2=5$

3

$((f^{-1}\circ g^{-1})\circ f)(a)=0$에서 $(g\circ f)^{-1}(f(a))=0$이므로

$(g\circ f)(0)=f(a)$

$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(1)=7,\ f(a)=3a+1$이므로

$7=3a+1 \qquad \therefore a=2$

4

$(f\circ f)^{-1}(c)=(f^{-1}\circ f^{-1})(c)$

$\qquad\qquad =f^{-1}(f^{-1}(c))$

$f^{-1}(c)=k$라 하면

$f(k)=c \qquad \therefore k=b$

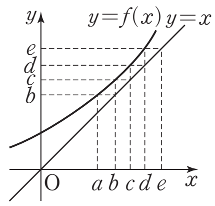
$\therefore f^{-1}(f^{-1}(c))=f^{-1}(b)$

$f^{-1}(b)=l$이라 하면

$f(l)=b \qquad \therefore l=a$

$\therefore f^{-1}(b)=a$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(c)=a$



5

ㄱ. $y=\dfrac{x-4}{x+1}=\dfrac{(x+1)-5}{x+1}=-\dfrac{5}{x+1}+1$

ㄴ. $y=\dfrac{2x-2}{x}=\underline{-\dfrac{2}{x}+2}$ → $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동

ㄷ. $y=\dfrac{-3x-8}{x+2}=\dfrac{-3(x+2)-2}{x+2}=\underline{-\dfrac{2}{x+2}-3}$ → $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동

ㄹ. $y=\dfrac{2x+7}{x+3}=\dfrac{2(x+3)+1}{x+3}=\dfrac{1}{x+3}+2$

따라서 평행이동에 의하여 함수 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

6

$f(x)=\dfrac{-3x+2}{x+1}=\dfrac{-3(x+1)+5}{x+1}=\dfrac{5}{x+1}-3$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-1,\ y=-3$

따라서 $a=-1,\ b=-3$이므로

$a+b=-4$

$f^{-1}(a+b)=f^{-1}(-4)=k$라 하면

$f(k)=-4$

$\frac{5}{k+1}-3=-4$, $\frac{5}{k+1}=-1$

$k+1=-5$ $\quad\therefore k=-6$

다음을 이용하면 역함수를 직접 구하지 않아도 역함수의 함숫값을 구할 수 있어.

$f^{-1}(a)=b \Longleftrightarrow f(b)=a$

7

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=2$이므로 함수의 식을 $y=\frac{k}{x-1}+2\ (k\neq0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 원점을 지나므로 $0=\frac{k}{0-1}+2$ $\quad\therefore k=2$

$\therefore y=\frac{2}{x-1}+2=\frac{2x}{x-1}$

따라서 $a=-1$, $b=2$, $c=0$이므로 $a+b+c=1$

8

$f(x)=\frac{1}{1-x}$

$f^2(x)=f(f(x))=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1}{\frac{-x}{1-x}}=\frac{x-1}{x}$

$f^3(x)=f(f^2(x))=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$

$f^4(x)=f(f^3(x))=\frac{1}{1-x}$

$\vdots$

따라서 $f^n(x)$는 $\frac{1}{1-x}$, $\frac{x-1}{x}$, x가 순서대로 반복되므로

$f^{1000}(x)=f^{3\times333+1}(x)=f(x)=\frac{1}{1-x}$

$\therefore f^{1000}(3)=f(3)=-\frac{1}{2}$

다른 풀이

$f(3)=\frac{1}{1-3}=-\frac{1}{2}$

$f^2(3)=f(f(3))=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$

$f^3(3)=f(f^2(3))=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$

$f^4(3)=f(f^3(3))=f(3)=-\frac{1}{2}$

$\vdots$

따라서 $f^n(3)$의 값은 $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 3이 순서대로 반복되므로

$f^{1000}(3)=f^{3\times333+1}(3)=f(3)=-\frac{1}{2}$

1주 누구나 합격 전략

30~31쪽

1 ①	2 ③	3 ③	4 ⑤
5 ④	6 ①	7 ③	8 유찬
9 ④			

1

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(5)=1$

2

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=2+1=3$이므로

$(f\circ f\circ f)(1)=f(f(f(1)))=f(3)=3+1=4$

$\therefore (f\circ f)(1)+(f\circ f\circ f)(1)=3+4=7$

3

$f^{-1}(1)=0$이므로 $f(0)=1$

즉, $b=1$ $\quad\therefore f(x)=ax+1$

$(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(1)=-1$

즉, $a+1=-1$ $\quad\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=-2x+1$이므로

$f(-1)=3$

4

역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

따라서 주어진 함수의 그래프가 치역의 각 원소 k에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=k$와 한 점에서 만나면서 치역과 공역이 같은 함수의 그래프를 고르면 ⑤이다.

5

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

즉, $ax-3=x$

이때, $x=3$이므로

$3a-3=3$ $\quad\therefore a=2$

6

$\frac{2x^2-x-6}{x^2-4}=\frac{(2x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{2x+3}{x+2}$

즉, $\frac{2x+3}{x+2}=\frac{2x+a}{x+b}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=3$, $b=2$ $\quad\therefore a-b=1$

7

$y=\frac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$y=\dfrac{6}{x-a}+b$

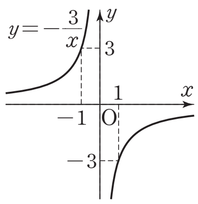
이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=b$이므로

$a=4$, $b=-1$

$\therefore\ a+b=3$

8

$y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



유찬: 치역은 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.

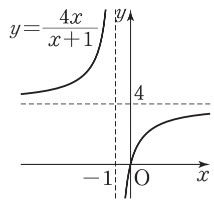
따라서 옳지 않은 말을 한 사람은 유찬이다.

9

$y=\dfrac{4x}{x+1}=\dfrac{4(x+1)-4}{x+1}=-\dfrac{4}{x+1}+4$

이므로 $y=\dfrac{4x}{x+1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\dfrac{4x}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 제4사분면을 지나지 않는다.



1주 창의·융합·코딩 전략 32~35쪽

1 ③ **2** $h(x)=2x-5$

3 형준, 풀이 참조 **4** ① **5** 9

6 (4), $\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}\div\dfrac{x-3}{x^2-1}=\dfrac{(x+1)^2}{(x-3)^2}$ **7** ②

8 0

1

x개의 쿠폰을 가지고 두 상점 f, g를 차례대로 방문했을 때, 받게 되는 쿠폰의 개수는

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x-2)$

$=2(3x-2)-1=6x-5$

이때, 진수가 받은 쿠폰이 31개이므로

$6x-5=31\qquad \therefore\ x=6$

따라서 진수가 처음에 가지고 있던 쿠폰의 개수는 6이다.

두 상점 f, g를 차례대로 방문했으므로 함숫값은 $(g\circ f)(x)$야. $(f\circ g)(x)$로 착각하지마.

2

$(h\circ g)(x)=f(x)$에서

$h(g(x))=f(x)$

$h(2x+1)=4x-3$ ······㉠

이때, $2x+1=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t-1}{2}$

㉠에서 $h(t)=4\times\dfrac{t-1}{2}-3=2t-5$

$\therefore\ h(x)=2x-5$

3

〈형준이의 풀이〉

역함수의 성질에서 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$이므로

$(g\circ f)^{-1}(3)=(f^{-1}\circ g^{-1})(3)=f^{-1}(g^{-1}(3))$

$g^{-1}(3)=a$라 하면 $g(a)=3$

$-a+3=3$에서 $a=0\qquad \therefore\ g^{-1}(3)=0$

$f^{-1}(0)=b$라 하면 $f(b)=0$

$2b+1=0$에서 $b=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ (g\circ f)^{-1}(3)=-\dfrac{1}{2}$

따라서 잘못 푼 사람은 형준이다.

4

$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표가 같으므로

$\dfrac{1}{3}x-4=x$에서 $\dfrac{2}{3}x=-4\qquad \therefore\ x=-6$

따라서 교점의 좌표는 $(-6, -6)$이므로

$a=-6$, $b=-6$

$\therefore\ a+b=-12$

5

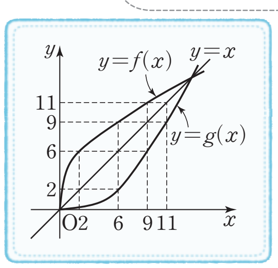
$(g\circ f\circ f\circ f)(2)=g(f(f(f(2))))=g(f(f(6)))$

$=g(f(9))=g(11)$

$g(11)=k$라 하면 $f(k)=11\qquad \therefore\ k=9$

$\therefore\ (g\circ f\circ f\circ f)(2)=g(11)=9$

$f^{-1}(a)=b \Longleftrightarrow f(b)=a$ 임을 이용하여 점선을 따라가며 함숫값을 구할 수 있어.



6

(1) $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{x}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{2}{(x+2)(x-2)}+\dfrac{x}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{2(x+2)+x(x-2)}{(x-2)(x+2)^2}$

$=\dfrac{x^2+4}{(x-2)(x+2)^2}$

(2) $\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+x-2}$

$=\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{1}{(x+2)(x-1)}$

$=\dfrac{(x+2)-(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)}$

(3) $\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}\times\dfrac{x-2}{x^2-2x-3}$

$=\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}\times\dfrac{x-2}{(x+1)(x-3)}$

$=\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$

(4) $\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}\div\dfrac{x-3}{x^2-1}$

$=\dfrac{x+1}{(x-1)(x-3)}\times\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-3}$

$=\dfrac{(x+1)^2}{(x-3)^2}$

따라서 잘못 푼 것은 (4)이고, 바르게 고치면

$\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}\div\dfrac{x-3}{x^2-1}=\dfrac{(x+1)^2}{(x-3)^2}$

이다.

7

어른의 약 용량이 60 mg일 때, x살 소아가 먹어야 할 약 용량을 $f(x)$ mg이라 하면

$f(x)=\dfrac{60x}{x+12}$

$\therefore f(8)=\dfrac{60\times8}{8+12}=24$

따라서 인경이가 먹어야 하는 약 용량은 24 mg이다.

8

$y=\dfrac{x+4}{x+1}$에서 x를 y로 나타내면

$y(x+1)=x+4,\ (y-1)x=-y+4$

$\therefore x=\dfrac{-y+4}{y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$y=\dfrac{-x+4}{x-1}$

따라서 $a=-1,\ b=-1$이므로

$a-b=0$

2주 1일 개념 돌파 전략 ①

39, 41쪽

1-2 5　**2-2** $\frac{1}{2}$

3-2 제1, 2, 4사분면　**4-2** 20

5-2 45　**6-2** (1) 3 (2) 3 또는 4

1-2

$9-3x\ge0$에서 $x\le3$

$x-1\ne0$에서 $x\ne1$

따라서 자연수 x는 2, 3이므로 그 합은 5이다.

2-2

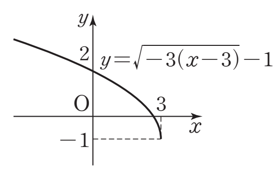
$ax-4\ge0$에서 $ax\ge4$　$\therefore x\ge\dfrac{4}{a}$ ($\because a$는 양수)

즉, 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\ge\dfrac{4}{a}\right\}$이므로

$\dfrac{4}{a}=8$　$\therefore a=\dfrac{1}{2}$

3-2

$y=\sqrt{-3(x-3)}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 제1, 2, 4사분면을 지난다.

4-2

십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 2, 4, 6, 8의 4개이고, 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7, 9의 5개이므로 구하는 두 자리의 자연수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times5=20$

5-2

서로 다른 10개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_{10}C_2=\dfrac{10\times9}{2\times1}=45$

6-2

(1) ${}_5P_r=60=5\times4\times3$이므로 $r=3$

(2) ${}_7\mathrm{C}_r=35$에서 $\dfrac{7!}{r!(7-r)!}=35$

$35\times r!(7-r)!=7!$

$7\times5\times r!(7-r)!=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$

$r!(7-r)!=6\times4\times3\times2\times1$

$r!(7-r)!=(3\times2\times1)\times(4\times3\times2\times1)$

$\therefore r=3$ 또는 $r=4$

2주 1일 개념 돌파 전략 ②

42~43쪽

1 ④	**2** ⑤	**3** ②	**4** ⑤
5 ①	**6** ③		

1

$5-x\ge0$에서 $x\le5$ ……㉠

$x-2\ge0$에서 $x\ge2$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $2\le x\le5$

$\therefore |x-6|+|2x+1|=-(x-6)+(2x+1)=x+7$

2

$2x-6\ge0$에서 $x\ge3$이므로 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\ge3\}$ $\quad\therefore a=3$

또, $\sqrt{2x-6}\ge0$이므로 주어진 함수의 치역은

$\{y\,|\,y\ge-4\}$ $\quad\therefore b=-4$

$\therefore a+b=-1$

3

$y=\sqrt{2x+8}+1=\sqrt{2(x+4)}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

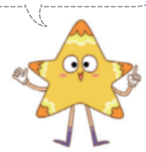
따라서 $p=-4$, $q=1$이므로

$p+q=-3$

4

나오는 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우는 4, 8, 12인 경우가 있다.

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면



(i) 두 눈의 수의 합이 4인 경우는

(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지

(ii) 두 눈의 수의 합이 8인 경우는

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지

(iii) 두 눈의 수의 합이 12인 경우는 (6, 6)의 1가지

(i), (ii), (iii)은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$a=3+5+1=9$

나오는 두 눈의 수의 곱이 홀수이려면 (홀수)$\times$(홀수)이어야 하고 홀수는 1, 3, 5의 3개이므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$b=3\times3=9$

$\therefore a+b=18$

5

5종류의 아이스크림 중에서 2종류를 택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

8종류의 과자 중에서 3종류를 택하는 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times56=560$

6

${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$에서 $15=\dfrac{360}{r!}$

$r!=24=4\times3\times2\times1$ $\qquad\therefore r=4$

${}_n\mathrm{P}_4=360=6\times5\times4\times3$이므로 $n=6$

$\therefore n+r=10$

2주 2일 필수 체크 전략 ①

44~47쪽

1-1 풀이 참조	**1-2** 풀이 참조
2-1 ㄱ, ㄷ	**2-2** ㄱ, ㄴ
3-1 ①	**3-2** $-1\le m\le\dfrac{1}{2}$
4-1 $\dfrac{11}{7}$	**4-2** ③

1-1

$y=-\sqrt{ax+3}-ab=-\sqrt{a\left(x+\dfrac{3}{a}\right)}-ab$의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{3}{a}$만큼, y축의 방향으로 $-ab$만큼 평행이동한 것이므로

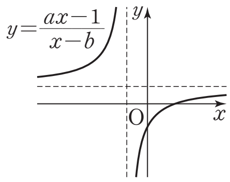
$-\dfrac{3}{a}<0$, $-ab>0$ $\qquad\therefore a>0$, $b<0$

$y=\dfrac{ax-1}{x-b}=\dfrac{a(x-b)+ab-1}{x-b}=\dfrac{ab-1}{x-b}+a$이므로 점근선의 방정식은 $x=b$, $y=a$

이때, $b<0$, $a>0$이고 $ab-1<0$

$x=0$일 때 $y=\dfrac{1}{b}<0$

따라서 $y=\dfrac{ax-1}{x-b}$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



1-2

$y=\dfrac{ax+b}{x+c}=\dfrac{a(x+c)-ac+b}{x+c}=\dfrac{-ac+b}{x+c}+a$이므로 점근선의 방정식은 $x=-c$, $y=a$

따라서 $-c<0$에서 $c>0$, $a>0$

y축과 만나는 점의 좌표는 $\left(0, \dfrac{b}{c}\right)$이므로

$\dfrac{b}{c}<0$ $\quad\therefore b<0\ (\because c>0)$

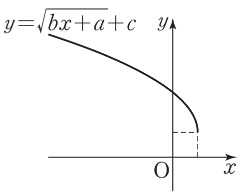
$y=\sqrt{bx+a}+c$에서 $bx+a\geq 0$

$\therefore x\leq -\dfrac{a}{b}\ (\because b<0)$

즉, 정의역은 $\left\{x \,\middle|\, x\leq -\dfrac{a}{b}\right\}$이다.

또, $\sqrt{bx+a}\geq 0$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\geq c\}$이다.

이때, $-\dfrac{a}{b}>0$, $c>0$이므로 $y=\sqrt{bx+a}+c$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



$y=\sqrt{bx+a}+c$의 그래프의 시작점은 $\left(-\dfrac{a}{b}, c\right)$이고 이 점은 제1사분면 위의 점이야.

2-1

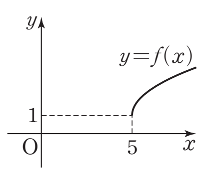
ㄱ. $2x-10\geq 0$에서 $x\geq 5$이므로 함수 $y=f(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq 5\}$이다.

또, $\sqrt{2x-10}\geq 0$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\geq 1\}$이다.

ㄴ. $f(x)=\sqrt{2x-10}+1=\sqrt{2(x-5)}+1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면만을 지난다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.



2-2

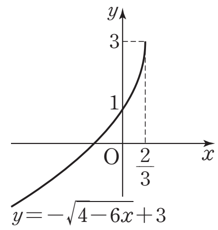
ㄱ. $4-6x\geq 0$에서 $x\leq \dfrac{2}{3}$이므로 정의역은 $\left\{x \,\middle|\, x\leq \dfrac{2}{3}\right\}$이다.

또, $\sqrt{4-6x}\geq 0$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\leq 3\}$이다.

ㄴ. $y=-\sqrt{4-6x}+3=-\sqrt{-6\left(x-\dfrac{2}{3}\right)}+3$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-6x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{2}{3}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

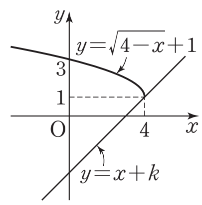
ㄷ. 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.



3-1

$y=\sqrt{4-x}+1=\sqrt{-(x-4)}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1, y절편이 k인 직선이다.



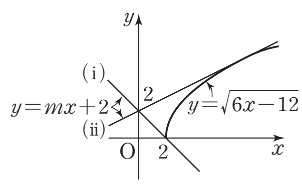
직선 $y=x+k$가 점 $(4, 1)$을 지날 때

$1=4+k$ $\quad\therefore k=-3$

따라서 함수 $y=\sqrt{4-x}+1$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 교점을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $k\geq -3$이므로 구하는 k의 최솟값은 -3이다.

3-2

$y=\sqrt{6x-12}=\sqrt{6(x-2)}$의 그래프는 $y=\sqrt{6x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=mx+2$는 기울기가 m, y절편이 2인 직선이다.



(i) 직선 $y=mx+2$가 점 $(2, 0)$을 지날 때

$0=2m+2$ $\quad\therefore m=-1$

(ii) $y=\sqrt{6x-12}$의 그래프와 직선 $y=mx+2$가 접할 때

$\sqrt{6x-12}=mx+2$의 양변을 제곱하면

$6x-12=m^2x^2+4mx+4$

$\therefore m^2x^2+2(2m-3)x+16=0$

위의 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2m-3)^2-16m^2=0$

$4m^2+4m-3=0$, $(2m+3)(2m-1)=0$

$A\cap B\neq\varnothing$인 경우는 직선 $y=mx+2$와 $y=\sqrt{6x-12}$의 그래프가 만나는 경우야.

그림에서 $m=\frac{1}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $-1 \le m \le \frac{1}{2}$

4-1

$f(x)=t$로 놓으면 $\sqrt{2x+1}=t$에서

$2x+1=t^2 \qquad \therefore x=\frac{t^2-1}{2}$

$(g \circ f)(x)=g(f(x))=\frac{2x+3}{2x-1}$에서

$g(t)=\frac{t^2-1+3}{t^2-1-1}=\frac{t^2+2}{t^2-2}$

$\therefore g(3)=\frac{3^2+2}{3^2-2}=\frac{11}{7}$

다른 풀이

$g(3)$의 값을 구해야 하므로 $g(f(x))=\frac{2x+3}{2x-1}$에서 $f(x)=3$

즉, $\sqrt{2x+1}=3$에서 $2x+1=9 \qquad \therefore x=4$

$x=4$를 $g(f(x))=\frac{2x+3}{2x-1}$에 대입하면

$g(f(4))=g(3)=\frac{2\times4+3}{2\times4-1}=\frac{11}{7}$

4-2

$(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(6)=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(6)=(f^{-1}\circ g)(6)$
$=f^{-1}(g(6))=f^{-1}(\sqrt{3\times6-2})=f^{-1}(4)$

$f^{-1}(4)=k$로 놓으면 $f(k)=4$에서

$\frac{k+1}{k-2}=4,\ k+1=4(k-2) \qquad \therefore k=3$

$\therefore (g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(6)=f^{-1}(4)=3$

2주 2일 필수 체크 전략 ②

48~49쪽

1 ⑤	**2** ④	**3** ②	**4** ④
5 ⑤			

1

$y=a\sqrt{-x+b}+c=a\sqrt{-(x-b)}+c$의 그래프는 $y=a\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이므로

$a>0,\ b>0,\ c<0$

$y=\frac{bx+c}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab+c}{x+a}=\frac{-ab+c}{x+a}+b$이므로 점근선의 방정식은 $x=-a,\ y=b$

$\therefore -a<0,\ b>0$

또, $-ab+c<0$이고 $x=0$일 때 $y=\frac{c}{a}<0$이므로

$y=\frac{bx+c}{x+a}$의 그래프의 개형은 ⑤와 같다.

2

세은: $3-2x\ge0$에서 $x\le\frac{3}{2}$이므로 정의역은 $\left\{x \middle| x\le\frac{3}{2}\right\}$이다.

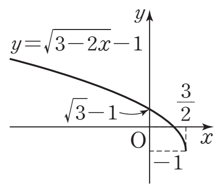
또, $\sqrt{3-2x}\ge0$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\ge-1\}$이다.

유찬: $y=\sqrt{3-2x}-1$에 $x=0$을 대입하면 $y=\sqrt{3}-1$

따라서 그래프는 y축과 점 $(0,\ \sqrt{3}-1)$에서 만난다.

희진: $y=\sqrt{3-2x}-1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=\sqrt{3-2x}-1$, 즉 $y=-\sqrt{3-2x}+1$이다.

민호: $y=\sqrt{3-2x}-1=\sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}-1$

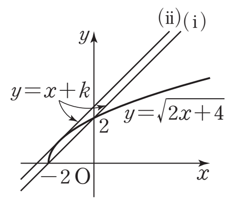


의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 위의 그림과 같고, 제1, 2, 4사분면을 지난다.

따라서 옳게 설명한 사람은 세은, 유찬, 민호이다.

3

$y=\sqrt{2x+4}=\sqrt{2(x+2)}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1, y절편이 k인 직선이다.



(ⅰ) 직선 $y=x+k$가 점 $(-2,\ 0)$을 지날 때

$0=-2+k \qquad \therefore k=2$

(ⅱ) $y=\sqrt{2x+4}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때

$\sqrt{2x+4}=x+k$의 양변을 제곱하면

$2x+4=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2-4=0$

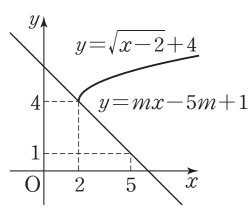
이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-4)=0,\ -2k+5=0 \qquad \therefore k=\frac{5}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는 $2\le k<\frac{5}{2}$

4

$y=\sqrt{x-2}+4$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 직선



$y=mx-5m+1=m(x-5)+1$

은 m의 값에 관계없이 점 $(5,\ 1)$을 지난다. $y=\sqrt{x-2}+4$의 그래프와 직선 $y=mx-5m+1$이 만나지 않으려면 직선 $y=mx-5m+1$의 기울기는 0보다 크지 않고, 점

(2, 4)를 지나는 직선의 기울기보다 커야 한다.

직선 $y=mx-5m+1$이 점 (2, 4)를 지날 때

$4=2m-5m+1$, $3m=-3$ $\therefore m=-1$

따라서 구하는 실수 m의 값의 범위는

$-1<m\le 0$

5

$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(3)=(g^{-1}\circ f)(3)$

$=g^{-1}(f(3))=g^{-1}\left(\dfrac{3+3}{3-1}\right)=g^{-1}(3)$

$g^{-1}(3)=k$로 놓으면 $g(k)=3$에서

$1+\sqrt{k-1}=3$, $k-1=4$ $\therefore k=5$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(3)=5$

2주 3일 필수 체크 전략 ①

50~53쪽

1-1 72	**1-2** ③
2-1 ④	**2-2** ④
3-1 90	**3-2** ①
4-1 60	**4-2** ②

1-1

C동에 칠할 수 있는 색은 4가지

A동에 칠할 수 있는 색은 C동에 칠한 색을 제외한 3가지

B동에 칠할 수 있는 색은 C동, A동에 칠한 색을 제외한 2가지

D동에 칠할 수 있는 색은 C동에 칠한 색을 제외한 3가지

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times3\times2\times3=72$

1-2

C에 칠할 수 있는 색은 5가지

A에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 4가지

B에 칠할 수 있는 색은 C, A에 칠한 색을 제외한 3가지

이때, D에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 경우와 A에 칠한 색과 다른 경우로 나누어진다.

(i) D에 A와 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times4\times3\times1\times3=180$

(ii) D에 A와 다른 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times4\times3\times2\times2=240$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$180+240=420$

D와 A에 칠할 수 있는 색이 같을 수도 있고 다를 수도 있다는 것에 주의해.

2-1

(i) 24□□ 꼴인 수의 개수

십의 자리와 일의 자리에는 2, 4를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개의 숫자가 올 수 있으므로

${}_4P_2=4\times3=12$

(ii) 25□□ 꼴인 수의 개수

십의 자리와 일의 자리에는 2, 5를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개의 숫자가 올 수 있으므로

${}_4P_2=4\times3=12$

(iii) 3□□□ 꼴인 수의 개수

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 3을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개의 숫자가 올 수 있으므로

${}_5P_3=5\times4\times3=60$

(iv) 4□□□ 꼴인 수의 개수

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 4를 제외한 5개의 숫자 중에서 3개의 숫자가 올 수 있으므로

${}_5P_3=5\times4\times3=60$

(v) 5□□□ 꼴인 수의 개수

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 5를 제외한 5개의 숫자 중에서 3개의 숫자가 올 수 있으므로

${}_5P_3=5\times4\times3=60$

(i)~(v)에서 구하는 2400보다 큰 수의 개수는

$12\times2+60\times3=204$

2-2

a□□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $5!=120$

ba□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

bc□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

이때, a로 시작하는 문자열부터 bc로 시작하는 문자열까지 총 개수는 $120+24+24=168$이므로 169번째에 오는 문자열은 bdacef이고 170번째에 오는 문자열은 bdacfe이다.

3-1

가로로 나열된 4개의 평행선 중에서 2개, 세로로 나열된 6개의 평행선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 결정된다.

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

${}_4C_2\times{}_6C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}\times\dfrac{6\times5}{2\times1}=90$

3-2

(i) 일직선 위에 있는 6개의 점 중에서 2개를 택하고, 나머지 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_3C_2={}_6C_2\times{}_3C_1=\dfrac{6\times5}{2\times1}\times3=45$

(ii) 일직선 위에 있는 6개의 점 중에서 1개를 택하고, 나머지 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_1 \times {}_3C_3 = 6$

(i), (ii)에서 구하는 사각형의 개수는

$45+6=51$

4-1

일대일함수는 정의역의 서로 다른 두 원소에 대응하는 공역의 원소가 서로 다른 함수이므로 X의 원소 각각에 Y의 서로 다른 원소가 대응해야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_5P_3 = 5\times4\times3=60$

4-2

(i) $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$인 경우

Y의 원소 6개 중에서 4개를 택하여 X의 원소 1, 2, 3, 4에 작은 수부터 순서대로 대응시키면 된다.

$\therefore {}_6C_4 = {}_6C_2 = \dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

(ii) $f(1)<f(2)=f(3)<f(4)$인 경우

Y의 원소 6개 중에서 3개를 택하여 X의 원소 1에는 가장 작은 수를, 원소 4에는 가장 큰 수를, 원소 2, 3에는 나머지 수를 대응시키면 된다.

$\therefore {}_6C_3 = \dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$15+20=35$

2주 3일 필수 체크 전략 ②

54~55쪽

1 ⑤	2 ④	3 ⑤	4 ②
5 ①	6 ③		

1

A에 칠할 수 있는 색은 5가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지

이때, D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 경우와 B에 칠한 색과 다른 경우로 나누어진다.

(i) D에 B와 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times4\times1\times4=80$

(ii) D에 B와 다른 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times4\times3\times3=180$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $80+180=260$

2

(i) 3□□□ 꼴인 짝수의 개수

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4의 3개이고, 백의 자리와 십의 자리에는 일의 자리에 온 숫자와 3을 제외한 4개의 숫자 중에서 2개의 숫자가 올 수 있으므로

$3\times{}_4P_2=3\times4\times3=36$

(ii) 4□□□ 꼴인 짝수의 개수

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2의 2개이고, 백의 자리와 십의 자리에는 일의 자리에 온 숫자와 4를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개의 숫자가 올 수 있으므로

$2\times{}_4P_2=2\times4\times3=24$

(iii) 5□□□ 꼴인 짝수의 개수

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4의 3개이고, 백의 자리와 십의 자리에는 일의 자리에 온 숫자와 5를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개의 숫자가 올 수 있으므로

$3\times{}_4P_2=3\times4\times3=36$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 3000보다 큰 짝수의 개수는

$36+24+36=96$

3

HOUSE의 각 문자를 사전에 배열된 순서로 배열하면 E, H, O, S, U의 순이다.

E□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

H□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

O□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

SE□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$

SH□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$

SO□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$

이때, E로 시작하는 문자열부터 SO로 시작하는 문자열까지 총 개수는

$24+24+24+6+6+6=90$

이므로 90번째에 오는 문자열은 SOUHE이다.

4

가로로 나열된 5개의 평행한 선분 중에서 2개, 세로로 나열된 6개의 평행한 선분 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 결정되므

로 주어진 선분들로 만들어지는 직사각형의 개수는

$_5C_2 \times {_6C_2} = \frac{5\times4}{2\times1} \times \frac{6\times5}{2\times1} = 150$

이때, 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는 $5\times4=20$

한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는 $4\times3=12$

한 변의 길이가 3인 정사각형의 개수는 $3\times2=6$

한 변의 길이가 4인 정사각형의 개수는 $2\times1=2$

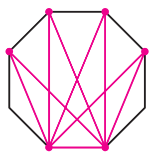
따라서 구하는 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$150-(20+12+6+2)=110$

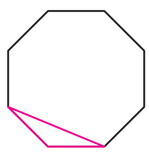
5

정팔각형의 꼭짓점 중에서 임의로 점 3개를 골라 만든 삼각형의 개수는

$_8C_3 = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$



정팔각형과 한 변을 공유하는 삼각형의 개수는 오른쪽 그림과 같이 정팔각형의 8개의 변 중에서 하나를 고르고, 변의 양 끝의 꼭짓점과 변과 이웃한 꼭짓점을 제외한 4개의 꼭짓점 중에서 한 점을 고르는 경우이므로 $8\times4=32$



정팔각형과 두 변을 공유하는 삼각형의 개수는 오른쪽 그림과 같이 이웃하는 두 변으로 이루어진 경우이므로 8

따라서 구하는 삼각형의 개수는 $56-32-8=16$

6

㈏를 만족시키는 경우의 수는 $_5C_3 = {_5C_2} = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$

이 중에서 $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$인 경우를 생각해 보자.

이때, $f(4)\neq4$, $f(5)\neq5$이어야 하므로

$f(4)$의 값이 1, 2, 3 중의 하나이면 $f(5)$의 값은 4이고,

$f(4)$의 값이 5이면 $f(5)$의 값은 1, 2, 3 중의 하나이다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는 $10(3+3)=60$

2주 4일 교과서 대표 전략 ①

56~59쪽

1 ①	2 ①	3 ③	4 ②
5 ①	6 ②	7 ②	
8 $(f\circ g)^{-1}(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2$ $(x\le2)$			9 10
10 15	11 ④	12 ②	13 ③
14 ④	15 ①	16 ②	

1

$ax-10\ge0$에서 $ax\ge10$

이때, 정의역이 $\{x\,|\,x\le-5\}$이려면 $a<0$이어야 하므로

$ax\ge10$의 양변을 a로 나누면 $x\le\frac{10}{a}$

즉, $\frac{10}{a}=-5$이므로 $a=-2$

또, $-\sqrt{-2x-10}\le0$이므로 주어진 함수의 치역은

$\{y\,|\,y\le3\}$ $\quad\therefore b=3$

$\therefore a+b=1$

2

$y=2a\sqrt{x-3}+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2a\sqrt{x-m-3}+2+n$

이 식이 $y=\sqrt{16x+32}=\sqrt{16(x+2)}=4\sqrt{x+2}$와 일치하므로

$2a=4$, $-m-3=2$, $2+n=0$

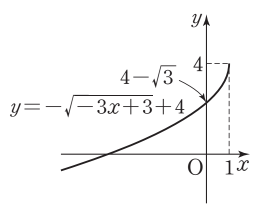
$\therefore a=2$, $m=-5$, $n=-2$

$\therefore a+m+n=-5$

3

$y=-\sqrt{-3x+3}+4$

$\quad=-\sqrt{-3(x-1)}+4$



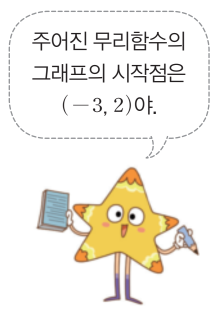
의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 제1, 2, 3사분면을 지난다.

4

$y=f(x)$의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=-\sqrt{a(x+3)}+2$ ……㉠



㉠의 그래프가 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1=-\sqrt{3a}+2$, $\sqrt{3a}=3$ $\quad\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$f(x)=-\sqrt{3(x+3)}+2$

$\therefore f(9)=-6+2=-4$

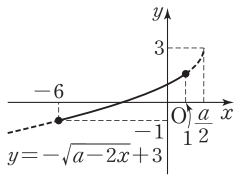
5

$y=-\sqrt{a-2x}+3=-\sqrt{-2\left(x-\frac{a}{2}\right)}+3$

따라서 $-6\le x\le 1$에서

$y=-\sqrt{a-2x}+3$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, $x=-6$일 때 최솟값 -1을 가지므로

$-1=-\sqrt{a+12}+3$

$\sqrt{a+12}=4$, $a+12=16$ $\quad\therefore a=4$

$\therefore y=-\sqrt{4-2x}+3$

또, $x=1$일 때 최댓값을 가지므로 구하는 최댓값은

$-\sqrt{4-2}+3=3-\sqrt{2}$

6

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(3, 2)$를 지나므로

$2=\sqrt{3a+b}$ $\quad\therefore 3a+b=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$y=f(x)$의 역함수의 그래프가 점 $(3, 2)$를 지나므로 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(2, 3)$을 지난다.

즉, $3=\sqrt{2a+b}$에서 $2a+b=9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5$, $b=19$

$\therefore a+b=14$

7

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 두 점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 두 점과 같다.

$\sqrt{2(x-1)}+1=x$에서 $\sqrt{2(x-1)}=x-1$

위의 식의 양변을 제곱하면

$2(x-1)=(x-1)^2$

$(x-1)^2-2(x-1)=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=3$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $(1, 1)$, $(3, 3)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$

8

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+3)=-\sqrt{-2x}+2$

$y=-\sqrt{-2x}+2$라 하면

$y-2=-\sqrt{-2x}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$(y-2)^2=-2x$

$\therefore x=-\frac{1}{2}(y-2)^2$

여기서 x와 y를 서로 바꾸면

$y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$

이때, $(f\circ g)(x)=-\sqrt{-2x}+2$의 치역이 $\{y\,|\,y\le 2\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\le 2\}$이다.

$\therefore (f\circ g)^{-1}(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2\ (x\le 2)$

9

(ⅰ) 카드에 적힌 수가 3의 배수인 경우

3, 6, 9, 12, 15, 18의 6가지

(ⅱ) 카드에 적힌 수가 4의 배수인 경우

4, 8, 12, 16, 20의 5가지

(ⅰ), (ⅱ)에서 12는 동시에 일어나는 경우이므로 구하는 경우의 수는

→ 3, 4의 최소공배수인 12의 배수

$6+5-1=10$

10

(ⅰ) 지불 방법의 수

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은 0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

500원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개의 3가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$a=4\times 3\times 5-1=59$

(ⅱ) 지불 금액의 수

1000원짜리 지폐 3장을 500원짜리 동전 6개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 8개와 100원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.

500원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개, 3개, 4개, 5개, 6개, 7개, 8개의 9가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$b=9\times 5-1=44$

$\therefore a-b=59-44=15$

11

(ⅰ) 축구 선수끼리 이웃하는 경우의 수

축구 선수 3명을 한 묶음으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!=120$

축구 선수 3명끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $a=120\times6=720$

(ⅱ) 축구 선수끼리 이웃하지 않는 경우의 수

야구 선수 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$

야구 선수의 양 끝과 사이사이의 ∨야∨야∨야∨야∨

5곳 중에서 3곳에 축구 선수를

세우는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60$

따라서 구하는 경우의 수는 $b=24\times60=1440$

$\therefore a+b=720+1440=2160$

12

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5의 3개

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개

나머지 자리에는 만의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 3개의 숫자가 올 수 있으므로

${}_4\mathrm{P}_3=4\times3\times2=24$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$3\times4\times24=288$

13

T, O, D, A, Y의 각 문자를 사전에 배열된 순서로 배열하면 A, D, O, T, Y의 순이다.

A□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

D□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

O□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

TA□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$

TD□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$

TOA□□ 꼴인 문자열의 개수는 $2!=2$

이때, A로 시작하는 문자열부터 TOA로 시작하는 문자열까지 총 개수는

$24+24+24+6+6+2=86$

이므로 TODAY는 87번째에 배열된다.

14

모든 경우의 수는 남학생 5명과 여학생 4명, 즉 9명 중에서 3명을 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_9\mathrm{P}_3=9\times8\times7=504$

회장, 부회장, 총무가 모두 남학생인 경우의 수는 남학생 5명 중에서 3명을 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$504-60=444$

15

2를 반드시 포함하고 3을 포함하지 않도록 3개의 숫자를 택하는 방법의 수는 2와 3을 제외한 나머지 3개의 숫자 중에서 2개의 숫자를 택하는 경우의 수와 같으므로

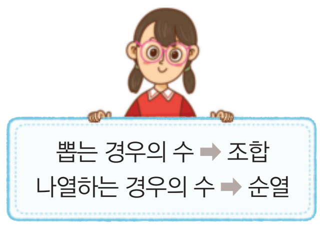
${}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

택한 3개의 숫자로 세 자리의 자연수를 만드는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 세 자리의 자연수의 개수는

$3\times6=18$



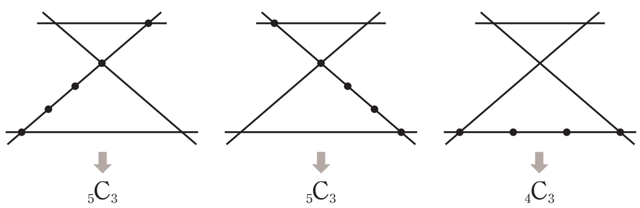
16

11개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_{11}\mathrm{C}_3=\dfrac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$

이때, 한 직선 위에 있는 점 3개를 택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_3\times2+{}_4\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2\times2+{}_4\mathrm{C}_1=\dfrac{5\times4}{2\times1}\times2+4=24$



따라서 구하는 삼각형의 개수는

$165-24=141$

2주 4일 교과서 대표 전략 ②

60~61쪽

1 ㄱ, ㄷ, ㄹ	**2** ⑤	**3** ②	**4** ③
5 ④	**6** ⑤	**7** 287	**8** ⑤
9 ④			

1

ㄱ. $y=-\sqrt{-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

$\rightarrow -y=\sqrt{-x}$ $\quad \therefore y=-\sqrt{-x}$

ㄷ. $y=\frac{1}{2}\sqrt{2-4x}=\frac{1}{2}\sqrt{-4\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)}$

$\rightarrow y=\sqrt{-x}$

이므로 $y=\frac{1}{2}\sqrt{2-4x}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=-\sqrt{x+2}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

$\rightarrow -y=\sqrt{x}$ $\quad \therefore y=-\sqrt{x}$

따라서 그 그래프가 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

2

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x-2)}+1$ ……㉠

㉠의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{-2a}+1$, $\sqrt{-2a}=2$ $\quad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

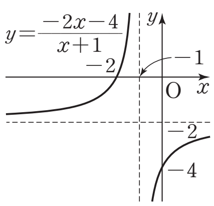
$y=\sqrt{-2(x-2)}+1$, 즉 $y=\sqrt{-2x+4}+1$

$\therefore b=4$, $c=1$

따라서 함수 $y=\frac{ax-b}{x+c}$, 즉

$y=\frac{-2x-4}{x+1}=\frac{-2(x+1)-2}{x+1}$

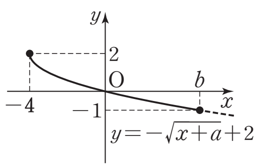
$=\frac{-2}{x+1}-2$



의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2, 3, 4사분면을 지난다.

3

$-4\le x\le b$에서 $y=-\sqrt{x+a}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, $x=-4$일 때 최댓값 2를 가지므로

$2=-\sqrt{-4+a}+2$

$\sqrt{-4+a}=0$ $\quad \therefore a=4$

$\therefore y=-\sqrt{x+4}+2$

또, $x=b$일 때 최솟값 -1을 가지므로

$-1=-\sqrt{b+4}+2$, $\sqrt{b+4}=3$ $\quad \therefore b=5$

$\therefore a-b=-1$

4

$y=f(x)$의 그래프는 $y=2\sqrt{3x}+5$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=2\sqrt{3(x-p)}+5$

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 접하면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 접하므로

$2\sqrt{3(x-p)}+5=x$에서 $2\sqrt{3(x-p)}=x-5$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4\times3(x-p)=(x-5)^2$

$\therefore x^2-22x+25+12p=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-11)^2-(25+12p)=0$

$12p=96$ $\quad \therefore p=8$

5

500원짜리 동전의 개수에 대한 100원짜리 동전의 개수를 각각 구하면 다음과 같다.

(i) 500원짜리 동전을 2개 사용하는 경우

100원짜리 동전을 0개, 1개, 2개 사용하는 경우, 즉 3가지

(ii) 500원짜리 동전을 1개 사용하는 경우

100원짜리 동전을 0개, 1개, 2개, …, 7개 사용하는 경우, 즉 8가지

(iii) 500원짜리 동전을 사용하지 않는 경우

100원짜리 동전을 0개, 1개, 2개, …, 12개 사용하는 경우, 즉 13가지

따라서 구하는 경우의 수는

$3+8+13=24$

6

이웃해도 되는 5개의 빈 의자를 먼저 배열한 다음 빈 의자의 양 끝과 사이사이의 6곳 중에서 4곳을 택하는 경우의 수는

∨ 빈 ∨ 빈 ∨ 빈 ∨ 빈 ∨ 빈 ∨

${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

이때, 의자에 앉는 네 사람을 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times24=360$

이웃하지 않는 조건이 있으니까 이웃해도 되는 대상을 먼저 배열해.

7

6□□□, 5□□□, 4□□□, 3□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$4\times{}_5P_3=4\times5\times4\times3=240$

26□□, 25□□, 24□□ 꼴의 자연수의 개수는

$3\times{}_4P_2=3\times4\times3=36$

236□, 235□, 234□ 꼴의 자연수의 개수는

$3\times{}_3P_1=3\times3=9$

2314보다 큰 231□ 꼴의 자연수는 2315, 2316이므로 그 개수는 2이다.

따라서 2314보다 큰 자연수의 개수는

$240+36+9+2=287$

8

1부터 20까지의 자연수 중에서 3의 배수는 6개이므로 구하는 경우의 수는

(전체 경우의 수)$-$(모두 3의 배수가 아닌 경우의 수)

$={}_{20}C_3-{}_{14}C_3$

$=\dfrac{20\times19\times18}{3\times2\times1}-\dfrac{14\times13\times12}{3\times2\times1}$

$=1140-364=776$

9

8개의 직선 중에서 3개의 직선을 택하는 경우의 수는

${}_8C_3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

8개의 직선 중에서 임의로 3개의 직선을 택할 때, 3개의 직선은 한 점에서 만나지 않으므로 택한 3개의 직선 중에서 평행선이 2개이거나 평행선이 3개이면 삼각형은 만들어지지 않는다.

(ⅰ) 평행한 3개의 직선 중에서 2개, 평행하지 않은 5개의 직선 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_5C_1={}_3C_1\times{}_5C_1=15$

(ⅱ) 평행한 3개의 직선을 택하는 경우의 수는

${}_3C_3=1$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$56-15-1=40$

2주 누구나 합격 전략

62~63쪽

1 ④	**2** 수아	**3** 5	**4** ④
5 ③	**6** ④	**7** ⑤	**8** ②
9 ④	**10** ②		

1

$-x^2-5x-4\geq0$에서 $x^2+5x+4\leq0$

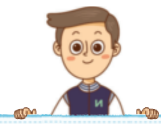
$(x+4)(x+1)\leq0$ $\quad\therefore -4\leq x\leq-1$

따라서 정수 x는 -4, -3, -2, -1이므로 그 개수는 4이다.

2

수아: $y=\sqrt{ax}$의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

따라서 옳지 않은 말을 한 사람은 수아이다.



x축에 대하여 대칭 ➡ y 대신 $-y$ 대입
y축에 대하여 대칭 ➡ x 대신 $-x$ 대입

3

$y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x+3)}$

이때, $y=\sqrt{a(x+3)}$의 그래프가 점 $(2, 5)$를 지나므로

$5=\sqrt{a(2+3)}$, $5a=25$

$\therefore a=5$

4

주어진 그래프는 $y=\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{4(x+2)}-1=\sqrt{4x+8}-1$

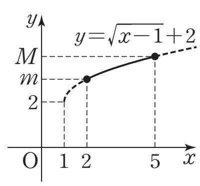
따라서 $a=8$, $b=-1$이므로

$a+b=7$

5

$y=\sqrt{x-1}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

정의역 $\{x|2\leq x\leq5\}$에서 $y=\sqrt{x-1}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, $x=5$일 때 최댓값 M을 가지므로

$M=\sqrt{5-1}+2=4$

또, $x=2$일 때 최솟값 m을 가지므로

$m=\sqrt{2-1}+2=3$

$\therefore M+m=7$

6

${}_nP_2+4\times{}_nC_3={}_nP_3$에서

$n(n-1)+4\times\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=n(n-1)(n-2)$

양변에 $\dfrac{3}{n(n-1)}$ ($\because n\geq3$)을 곱하면

$3+2(n-2)=3(n-2)$

$2n-1=3n-6$

$\therefore n=5$

7

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(ⅰ) 두 눈의 수의 합이 3인 경우

$(1, 2), (2, 1)$의 2가지

(ⅱ) 두 눈의 수의 합이 6인 경우

$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$의 5가지

(ⅲ) 두 눈의 수의 합이 9인 경우

$(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$의 4가지

(ⅳ) 두 눈의 수의 합이 12인 경우

$(6, 6)$의 1가지

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는

$2+5+4+1=12$

8

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 5개

십의 자리와 일의 자리에는 백의 자리에 온 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 2개의 숫자가 올 수 있으므로

${}_5P_2=5\times4=20$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$5\times20=100$

9

특정한 책 3권을 포함하여 5권을 택하는 경우의 수는 3권을 제외한 나머지 17권 중에서 2권을 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_{17}C_2=\dfrac{17\times16}{2\times1}=136$

10

9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_9C_3=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

위쪽 직선 위에 있는 점 5개 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

아래쪽 직선 위에 있는 점 4개 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$84-10-4=70$

점 3개를 택할 때, 다음과 같이 택하여 구할 수도 있어.

(위쪽 직선에서 2개) × (아래쪽 직선에서 1개)

+

(위쪽 직선에서 1개) × (아래쪽 직선에서 2개)

$={}_5C_2\times{}_4C_1+{}_5C_1\times{}_4C_2$

$=10\times4+5\times6=70$

2주 창의·융합·코딩 전략

64~67쪽

1 함수식: $y=\sqrt{\dfrac{x}{3}}$, 세로의 길이: 6 m

2 은주, 치역은 $\{y\,|\,y\le-4\}$야. **3** ② **4** ③

5 ③ **6** ③ **7** 풀이 참조, 336

8 ①

1

$3y\times y=x$에서 $y^2=\dfrac{x}{3}\qquad\therefore y=\sqrt{\dfrac{x}{3}}\ (\because y>0)$

땅의 넓이가 108 m²일 때의 세로의 길이는

$y=\sqrt{\dfrac{108}{3}}=6\,(\mathrm{m})$

2

인성: $5x-10\ge0$에서 $x\ge2$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x\ge2\}$이다.

은주: $-\sqrt{5x-10}\le0$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\le-4\}$이다.

지아: $y=-\sqrt{5x-10}-4$에 $x=7$을 대입하면 $y=-9$이므로 점 $(7, -9)$를 지난다.

민호: $y=-\sqrt{5x-10}-4=-\sqrt{5(x-2)}-4$이므로 $y=-\sqrt{5x-10}-4$의 그래프는 $y=-\sqrt{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳지 않은 말을 한 사람은 은주이고, 바르게 고치면 '치역은 $\{y\,|\,y\le-4\}$야.'이다.

3

제4사분면에 그려진 그림은 무리함수 $y=-\sqrt{kx}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $y=-\sqrt{k(x-2)}$의 그래프의 일부이다.

$\therefore m=2$

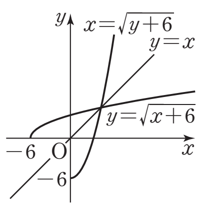
$y=-\sqrt{k(x-2)}$의 그래프가 점 $(0, -4)$를 지나므로

$-4=-\sqrt{k(0-2)},\ -2k=16\qquad\therefore k=-8$

$\therefore k+m=-8+2=-6$

4

두 함수 $y=\sqrt{x+6}$과 $x=\sqrt{y+6}$은 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{x+6}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{x+6}=x$의 양변을 제곱하면

$x+6=x^2,\ x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0\qquad\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

그런데 $x=-2$일 때는 교점이 생기지 않으므로 $x=3$

즉, 교점의 좌표는 $(3, 3)$이므로 $a=3,\ b=3$

$\therefore a+b=6$

5

B에 진열할 수 있는 제품은 3가지
A에 진열할 수 있는 제품은 B에 진열한 제품을 제외한 2가지
C에 진열할 수 있는 제품은 B에 진열한 제품을 제외한 2가지
이때, D에 진열할 수 있는 제품은 B에 진열한 제품과 같은 경우와 B에 진열한 제품과 다른 경우로 나누어진다.

(ⅰ) D에 B와 같은 제품을 진열하는 경우의 수는
$3\times2\times2\times1\times2=24$

(ⅱ) D에 B와 다른 제품을 진열하는 경우의 수는
$3\times2\times2\times1\times1=12$

B와 D에 진열할 수 있는 제품이 같을 수도 있고 다를 수도 있다는 것에 주의해.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$24+12=36$

6

A 도시에서 출발하므로 B, C, D, E, F 도시를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$
이때, C 도시와 F 도시 사이에는 직접 연결된 길이 없으므로 C 도시와 F 도시를 이웃해서 방문할 수 없다.
C 도시와 F 도시를 한 묶음으로 생각하여 B, C, D, E, F 도시를 나열하는 경우의 수는 $4!\times2=(4\times3\times2\times1)\times2=48$
따라서 구하는 경우의 수는 $120-48=72$

다른 풀이

구하는 경우의 수는 B, D, E 도시를 일렬로 나열한 후 양 끝과 사이사이의 4곳 중에서 2곳에 C, F 도시를 나열하는 경우의 수와 같으므로
$3!\times{}_4P_2=(3\times2\times1)\times(4\times3)=72$

7

대응 f가 일대일함수가 되려면 각 주머니에 서로 다른 구슬을 하나씩만 넣어야 한다.
따라서 일대일함수 f의 개수는
${}_8P_3=8\times7\times6=336$

8

과일을 선택하는 방법의 수는 복숭아를 선택하고 남은 5가지 과일 중에서 3가지를 선택하면 되므로
${}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$
꽃을 선택하는 방법의 수는 장미를 제외한 4가지 꽃 중에서 3가지를 선택하면 되므로
${}_4C_3={}_4C_1=4$
따라서 손님이 말하는 대로 선물 바구니를 만들었을 때, 선물 바구니의 종류는 $10\times4=40$(가지)이므로 □ 안에 들어갈 알맞은 수는 40이다.

신유형·신경향·서술형 전략

70~73쪽

1 $f(x)=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{17}{3}$		**2** ⑤	**3** ②
4 풀이 참조	**5** ⑤	**6** ③	**7** 132
8 76			

1

$(f\circ g)(x)=x+5$에서 $f(g(x))=x+5$
$f(-3x+2)=x+5$ ……㉠
이때, $-3x+2=t$라 하면 $x=-\dfrac{t-2}{3}$
㉠에서 $f(t)=-\dfrac{t-2}{3}+5=-\dfrac{t}{3}+\dfrac{17}{3}$
$\therefore f(x)=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{17}{3}$

2

문제의 조건에서
$f(x)=2x+4$, $g(x)=x-7$

$$\begin{aligned}(g\circ(g^{-1}\circ f)^{-1}\circ g^{-1})(2024)&=(g\circ f^{-1}\circ \overbrace{g\circ g^{-1}}^{I})(2024)\\&=(g\circ f^{-1})(2024)\\&=g(f^{-1}(2024))\end{aligned}$$

$f^{-1}(2024)=k$라 하면 $f(k)=2024$
즉, $2k+4=2024$이므로 $k=1010$

$$\begin{aligned}\therefore (g\circ(g^{-1}\circ f)^{-1}\circ g^{-1})(2024)&=g(f^{-1}(2024))\\&=g(1010)\\&=1010-7=1003\end{aligned}$$

따라서 1003년으로 시간 이동을 할 수 있다.

합성함수의 역함수는 순서가 바뀌는 것에 주의해!

$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$
$(f^{-1})^{-1}=f$
$f\circ f^{-1}=I$ ← 항등함수

3

$y=\dfrac{ax+b}{x-3}$에서 x를 y로 나타내면
$y(x-3)=ax+b$, $(y-a)x=3y+b$ $\qquad\therefore x=\dfrac{3y+b}{y-a}$
x와 y를 서로 바꾸면
$y=\dfrac{3x+b}{x-a}$ $\qquad\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{3x+b}{x-a}$
이때, $f(x)=f^{-1}(x)$이므로 $\dfrac{ax+b}{x-3}=\dfrac{3x+b}{x-a}$에서 $a=3$

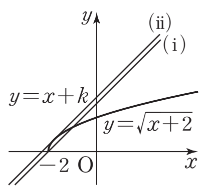
또, $y=f(x)$, 즉 $y=\dfrac{3x+b}{x-3}$의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{3\times2+b}{2-3}$, $6+b=-2$ $\qquad\therefore b=-8$

$\therefore a+b=3+(-8)=-5$

4

$y=\sqrt{x+2}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1, y절편이 k인 직선이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-2,\ 0)$을 지날 때

$0=-2+k$ $\qquad\therefore k=2$

(ii) $y=\sqrt{x+2}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때

$\sqrt{x+2}=x+k$의 양변을 제곱하면

$x+2=x^2+2kx+k^2$, $x^2+(2k-1)x+k^2-2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2-2)=0$

$4k^2-4k+1-4k^2+8=0$, $-4k+9=0$ $\qquad\therefore k=\dfrac{9}{4}$

(i), (ii)에서 $2\le k<\dfrac{9}{4}$

5

400원, 1000원, 2000원짜리 아이스크림을 각각 x개, y개, z개 산다고 하면

$400x+1000y+2000z=6000$

$\therefore 2x+5y+10z=30$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이 식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구하면 된다.

(i) $z=0$일 때, ㉠에서 $2x+5y=30$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(15,\ 0)$, $(10,\ 2)$, $(5,\ 4)$, $(0,\ 6)$의 4개

(ii) $z=1$일 때, ㉠에서 $2x+5y=20$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(10,\ 0)$, $(5,\ 2)$, $(0,\ 4)$의 3개

(iii) $z=2$일 때, ㉠에서 $2x+5y=10$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(5,\ 0)$, $(0,\ 2)$의 2개

(iv) $z=3$일 때, ㉠에서 $2x+5y=0$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(0,\ 0)$의 1개

따라서 아이스크림을 사는 방법의 수는 $4+3+2+1=10$

6

두 묶음 (L, N, C, H, T, M), (U, I, E)를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!=2\times1=2$

자음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$

모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times720\times6=8640$

7

$y=\dfrac{bx+c}{x-a}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=3$이므로

함수의 식을 $y=\dfrac{k}{x-1}+3\ (k\ne0)$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

으로 놓을 수 있다. $\qquad\cdots\cdots$ [배점 20 %]

㉠의 그래프가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$-2=-k+3$ $\qquad\therefore k=5$

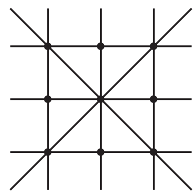
$k=5$를 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{5}{x-1}+3=\dfrac{5+3(x-1)}{x-1}=\dfrac{3x+2}{x-1}$ $\qquad\cdots\cdots$ [배점 50 %]

따라서 $a=1$, $b=3$, $c=2$이므로 비밀번호는 132이다.

$\cdots\cdots$ [배점 30 %]

8



9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_9C_3=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$ $\qquad\cdots\cdots$ [배점 40 %]

일직선 위에 있는 점 3개를 택하는 경우의 수는 3개의 점으로 만들 수 있는 직선의 개수와 같으므로 8 $\qquad\cdots\cdots$ [배점 40 %]

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$84-8=76$ $\qquad\cdots\cdots$ [배점 20 %]

적중 예상 전략 1회

74~77쪽

1 ②	**2** ③	**3** ④	**4** ⑤
5 ②	**6** ②	**7** ⑤	**8** ⑤
9 ①	**10** ①	**11** ③	**12** ②
13 10	**14** $h(3x+2)=6x+5$	**15** 7	
16 (1) 1 (2) $y=\dfrac{x}{x-2}$			

1

$(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(-2)=-2+a$,

$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(a)$이므로

$(f\circ g)(0)+(g\circ f)(0)=10$에서 $-2+a+g(a)=10$

$\therefore g(a)=12-a$

(i) $a<2$일 때, $g(a)=a-2$이므로

$a-2=12-a$ $\qquad\therefore a=7$

그런데 $a<2$이므로 이를 만족시키는 a는 없다.

(ii) $a\geq 2$일 때, $g(a)=a^2$이므로

$a^2=12-a$, $a^2+a-12=0$

$(a+4)(a-3)=0$ $\quad\therefore a=3$ $(\because a\geq 2)$

(i), (ii)에서 $a=3$

따라서 $f(x)=x+3$이므로

$(f\circ g)(a)=(f\circ g)(3)=f(g(3))$

$=f(9)=12$

2

$f(49)=\dfrac{49+1}{2}=25$

$f^2(49)=f(f(49))=f(25)=\dfrac{25+1}{2}=13$

$f^3(49)=f(f^2(49))=f(13)=\dfrac{13+1}{2}=7$

$f^4(49)=f(f^3(49))=f(7)=\dfrac{7+1}{2}=4$

$f^5(49)=f(f^4(49))=f(4)=\dfrac{4}{2}=2$

따라서 $f^n(49)=2$를 만족시키는 자연수 n의 값은 5이다.

3

$f^{-1}(3)=-6$에서 $f(-6)=3$이므로

$-6a-3=3$ $\quad\therefore a=-1$

$\therefore f(x)=-x-3$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(9x+b)$

$=-(9x+b)-3=-9x-b-3$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-x-3)$

$=9(-x-3)+b=-9x-27+b$

$f\circ g=g\circ f$에서

$-9x-b-3=-9x-27+b$

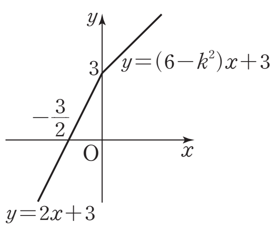
$-b-3=-27+b$ $\quad\therefore b=12$

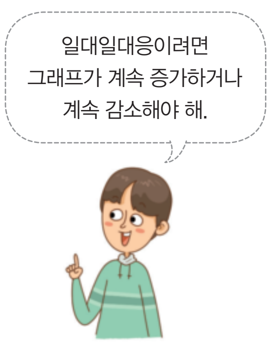
따라서 $g(x)=9x+12$이므로

$g(1)=21$

4

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.





즉, $x\geq 0$에서 직선 $y=(6-k^2)x+3$의 기울기가 양수이어야 하므로

$6-k^2>0$, $k^2<6$

$\therefore -\sqrt{6}<k<\sqrt{6}$

따라서 정수 k는 -2, -1, 0, 1, 2이므로 그 개수는 5이다.

5

$(f\circ(g\circ f)^{-1})(-2)=(\overbrace{f\circ f^{-1}}^{I}\circ g^{-1})(-2)$

$=g^{-1}(-2)$

$g^{-1}(-2)=k$라 하면 $g(k)=-2$이므로

$-2k+3=-2$ $\quad\therefore k=\dfrac{5}{2}$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1})(-2)=g^{-1}(-2)=\dfrac{5}{2}$

6

$f\circ h=g$에서 $\overbrace{f^{-1}\circ f}^{I}\circ h=f^{-1}\circ g$

$\therefore h=f^{-1}\circ g$

$(h\circ f)(3)=(f^{-1}\circ g\circ f)(3)=f^{-1}(g(f(3)))$

$=f^{-1}(g(1))=f^{-1}(3)$

$f^{-1}(3)=k$라 하면 $f(k)=3$

이때, $f(2)=3$이므로 $k=2$

$\therefore (h\circ f)(3)=f^{-1}(3)=2$

7

$y=\dfrac{2x+a}{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$y=\dfrac{2(x-2)+a}{(x-2)+1}+1=\dfrac{2x-4+a+(x-1)}{x-1}=\dfrac{3x+a-5}{x-1}$

이 식이 $y=\dfrac{6x-4}{bx-2}$와 같으므로

$\dfrac{2(3x+a-5)}{2(x-1)}=\dfrac{6x+2a-10}{2x-2}=\dfrac{6x-4}{bx-2}$

즉, $b=2$, $2a-10=-4$에서 $a=3$

$\therefore a+b=5$

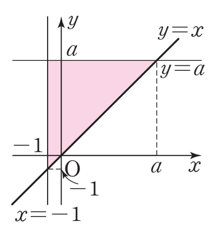
8

$f(x)=\dfrac{ax}{x+1}=\dfrac{a(x+1)-a}{x+1}=-\dfrac{a}{x+1}+a$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-1$, $y=a$

두 점근선과 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 32이므로 오른쪽 그림에서



$\dfrac{1}{2}\times(a+1)\times(a+1)=32$

$(a+1)^2=64$, $a+1=\pm 8$

$\therefore a=7$ $(\because a>0)$

따라서 $f(x)=\frac{7x}{x+1}$이므로

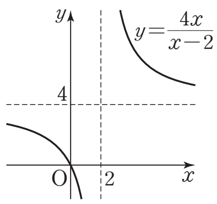
$f(6)=6$

9

$y=\frac{4x}{x-2}=\frac{4(x-2)+8}{x-2}=\frac{8}{x-2}+4$

세은: 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=4$이다.

유찬: $y=\frac{4x}{x-2}$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 4사분면을 지난다.



민호: 치역은 $\{y \mid y\neq 4$인 모든 실수$\}$이다.

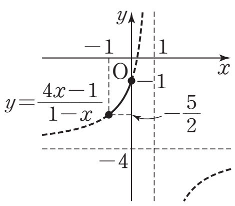
희진: 두 점근선의 교점인 점 $(2,\ 4)$에 대하여 대칭인 그래프이다.

따라서 바르게 설명한 사람은 세은이다.

10

$y=\frac{4x-1}{1-x}=-\frac{4x-1}{x-1}=-\frac{4(x-1)+3}{x-1}=-\frac{3}{x-1}-4$

이므로 $-1\leq x\leq 0$에서 $y=\frac{4x-1}{1-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



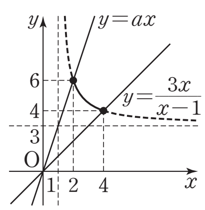
따라서 $x=0$일 때 최댓값 -1, $x=-1$일 때 최솟값 $-\frac{5}{2}$를 가지므로 그 합은

$-1+\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{7}{2}$

11

$y=\frac{3x}{x-1}=\frac{3(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+3$

이므로 $2\leq x\leq 4$에서 $y=\frac{3x}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, 직선 $y=ax$는 a의 값에 관계없이 원점을 지난다.

함수 $y=\frac{3x}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=ax$가 만나려면 기울기 a의 값은 직선 $y=ax$가 점 $(4,\ 4)$를 지날 때보다 크거나 같고, 점 $(2,\ 6)$을 지날 때보다 작거나 같아야 한다.

$4=4a$ $\quad\therefore a=1$

직선 $y=ax$가 점 $(4,\ 4)$를 지날 때의 a의 값은 1이고, 직선 $y=ax$가 점 $(2,\ 6)$을 지날 때의 a의 값은 3이므로

$6=2a$ $\quad\therefore a=3$

$1\leq a\leq 3$

12

점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=-3$이므로 함수의 식을

$y=\frac{k}{x+1}-3\ (k\neq 0)$으로 놓을 수 있다.

이 그래프가 점 $(0,\ 5)$를 지나므로

$5=k-3 \qquad \therefore k=8$

$\therefore y=\frac{8}{x+1}-3=\frac{8-3(x+1)}{x+1}=\frac{-3x+5}{x+1}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

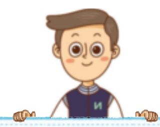
$\frac{-3x+5}{x+1}=x$에서 $-3x+5=x(x+1)$

$x^2+4x-5=0$, $(x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=1$

따라서 $\mathrm{A}(-5,\ -5)$, $\mathrm{B}(1,\ 1)$ 또는 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(-5,\ -5)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(1+5)^2+(1+5)^2}=6\sqrt{2}$ → 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 위의 점이다.



두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리
➡ $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

13

15보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13의 6개이므로

$f(15)=6$ …… [배점 30 %]

$(f\circ f)(15)=f(f(15))=f(6)$이고, 6보다 작은 소수는 2, 3, 5의 3개이므로

$(f\circ f)(15)=3$ …… [배점 30 %]

$(f\circ f\circ f)(15)=f((f\circ f)(15))=f(3)$이고, 3보다 작은 소수는 2의 1개이므로

$(f\circ f\circ f)(15)=1$ …… [배점 30 %]

$\therefore f(15)+(f\circ f)(15)+(f\circ f\circ f)(15)$

$=6+3+1=10$ …… [배점 10 %]

14

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+1)$

$=2(x+1)-3=2x-1$

$(h\circ(f\circ g))(x)=4x-1$에서

$h((f\circ g)(x))=4x-1$

$h(2x-1)=4x-1$ ……㉠ …… [배점 40 %]

이때, $2x-1=t$라 하면 $x=\frac{t+1}{2}$

㉠에서 $h(t)=4\times\frac{t+1}{2}-1=2t+1$

$\therefore h(x)=2x+1$ …… [배점 40 %]

$\therefore h(3x+2)=2(3x+2)+1=6x+5$ …… [배점 20 %]

15

$y=\dfrac{ax+b}{x+3}$의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{a+b}{1+3}$ $\quad \therefore a+b=8$ $\quad$ …… ㉠ $\quad$ …… [배점 30 %]

또, $f(x)=f^{-1}(x)$이므로 $y=\dfrac{ax+b}{x+3}$의 그래프는 점 $(2, 1)$을 지난다.

$1=\dfrac{2a+b}{2+3}$ $\quad \therefore 2a+b=5$ $\quad$ …… ㉡ $\quad$ …… [배점 40 %]

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=11$

따라서 $f(x)=\dfrac{-3x+11}{x+3}$이므로

$f(-1)=7$ $\quad$ …… [배점 30 %]

16

(1) 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 원점을 지나므로

$\dfrac{b}{c}=0$ $\quad \therefore b=0$ $\quad$ …… [배점 20 %]

$y=\dfrac{ax+b}{x+c}=\dfrac{ax}{x+c}=\dfrac{a(x+c)-ac}{x+c}=\dfrac{-ac}{x+c}+a$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-c$, $y=a$

이때, 두 점근선의 교점 $(-c, a)$가 두 직선 $y=x+1$, $y=-x+3$의 교점이므로

$a=-c+1$, $a=c+3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $c=-1$ $\quad$ …… [배점 30 %]

$\therefore a+b+c=1$ $\quad$ …… [배점 10 %]

(2) $y=\dfrac{ax+b}{x+c}=\dfrac{2x}{x-1}$에서 x를 y로 나타내면

$y(x-1)=2x$, $(y-2)x=y$

$\therefore x=\dfrac{y}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$y=\dfrac{x}{x-2}$ $\quad$ …… [배점 40 %]

적중 예상 전략 2회

78~81쪽

1 ①	**2** ②	**3** ③	**4** ⑤
5 ⑤	**6** ⑤	**7** ④	**8** ③
9 ⑤	**10** ③	**11** ②	**12** ①

13 $2\le k<\dfrac{9}{4}$

14 역함수: $y=-(x+2)^2+3$, 정의역: $\{x\,|\,x\ge -2\}$, 치역: $\{y\,|\,y\le 3\}$

15 (1) 17280 (2) 2880 (3) 70 **16** (1) 풀이 참조 (2) 495

1

$y=\sqrt{-x-4}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$y+1=\sqrt{-(x+2)-4}$

$\therefore y=\sqrt{-x-6}-1$

이 함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=\sqrt{x-6}-1$

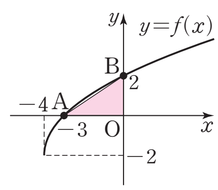
이 함수의 그래프가 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프와 일치하므로

$a=1$, $b=-6$, $c=-1$

$\therefore a+b+c=-6$

2

$y=2\sqrt{x+4}-2$의 그래프는 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$y=2\sqrt{x+4}-2$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $y=0$일 때이므로

$0=2\sqrt{x+4}-2$, $\sqrt{x+4}=1$

$\therefore x=-3$ $\quad \therefore \mathrm{A}(-3, 0)$

$y=2\sqrt{x+4}-2$의 그래프와 y축의 교점의 y좌표는 $x=0$일 때이므로

$y=2\sqrt{0+4}-2=2$ $\quad \therefore \mathrm{B}(0, 2)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 3\times 2=3$

3

$a(x-b)\ge 0$에서 $ax\ge ab$

이때, 정의역이 $\{x\,|\,x\le 2\}$이려면 $a<0$이어야 하므로

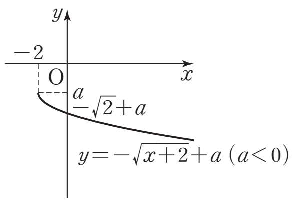
$ax\ge ab$의 양변을 a로 나누면 $x\le b$

$\therefore b=2$

$\sqrt{a(x-b)}\ge 0$이고 치역은 $\{y\,|\,y\ge 1\}$이므로

$c=1$

따라서 함수 $y=-\sqrt{c(x+b)}+a$, 즉 $y=-\sqrt{x+2}+a\ (a<0)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3, 4사분면을 지난다.



4

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=2$이므로

주어진 함수를 $y=\dfrac{k}{x-1}+2\ (k>0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=-k+2 \quad \therefore k=1$

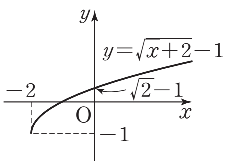
따라서 $y=\dfrac{1}{x-1}+2=\dfrac{2x-1}{x-1}$이므로 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$

$\therefore a=1, b=2, c=-1$

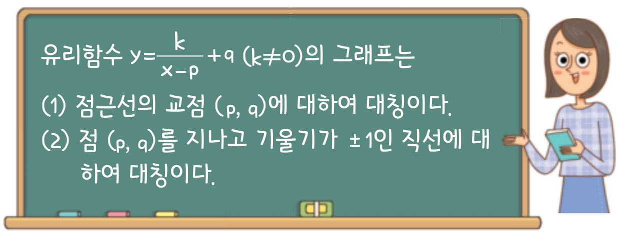
희진: $f(3)=\dfrac{2\times3-1}{3-1}=\dfrac{5}{2}$

유찬: $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 두 점근선의 교점인 $(1, 2)$를 지나고 기울기가 ±1인 직선에 대하여 대칭이므로 직선 $y=x+1$에 대하여 대칭이다.

세은: $y=\sqrt{ax+b}+c$, 즉 $y=\sqrt{x+2}-1$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



따라서 바르게 설명한 사람은 희진, 유찬, 세은이다.



5

$\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}$의 값이 실수가 되기 위한 조건은

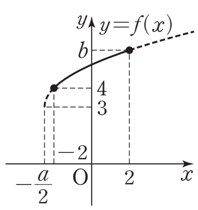
$2-x\geq0$에서 $x\leq2$, $2+x\geq0$에서 $x\geq-2$

$\therefore -2\leq x\leq2$

$-2\leq x\leq2$에서

$y=\sqrt{2x+a}+3=\sqrt{2\left(x+\dfrac{a}{2}\right)}+3$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, $x=-2$일 때 최솟값 4를 가지므로

$4=\sqrt{-4+a}+3$, $\sqrt{-4+a}=1$

$\therefore a=5 \quad \therefore f(x)=\sqrt{2x+5}+3$

또, $x=2$일 때 최댓값 b를 가지므로

$b=\sqrt{2\times2+5}+3=6$

$\therefore a+b=11$

6

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 두 점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 두 점과 같다.

$\sqrt{5x}=x$의 양변을 제곱하면

$5x=x^2$, $x^2-5x=0$

$x(x-5)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=5$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $(0, 0)$, $(5, 5)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(5-0)^2+(5-0)^2}=5\sqrt{2}$

7

A에 칠할 수 있는 색은 5가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지

C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지

D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지

E에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 3가지

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times4\times3\times3\times3=540$

8

부부가 앉을 수 있는 인접한 좌석은 AB, BC, DE의 3가지, 부부가 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $2!=2$이므로 부부가 인접한 좌석에 앉는 경우의 수는

$3\times2=6$

위의 각각의 경우에 대하여 자녀 3명이 자리에 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times6=36$

9

여자 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

남자 3명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

따라서 뽑는 경우의 수는

$6\times3=18$

이때, 뽑힌 3명을 회장, 부회장, 총무에 임명하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$18\times6=108$

10

(ⅰ) $4bc$ 꼴인 자연수의 개수

b, c는 4보다 작은 숫자이고 b는 c보다 큰 숫자이므로 1, 2, 3의 3개의 숫자 중에서 2개를 골라 그중에서 큰 숫자는 b로, 작은 숫자는 c로 놓으면 된다.

$\therefore {}_3C_2={}_3C_1=3$

(ⅱ) $5bc$ 꼴인 자연수의 개수

b, c는 5보다 작은 숫자이고 b는 c보다 큰 숫자이므로 1, 2, 3, 4의 4개의 숫자 중에서 2개를 골라 그중에서 큰 숫자는 b로, 작은 숫자는 c로 놓으면 된다.

$\therefore {}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

(ⅲ) $6bc$ 꼴인 자연수의 개수

b, c는 6보다 작은 숫자이고 b는 c보다 큰 숫자이므로 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자 중에서 2개를 골라 그중에서 큰 숫자는 b로, 작은 숫자는 c로 놓으면 된다.

$\therefore {}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

(ⅳ) $7bc$ 꼴인 자연수의 개수

b, c는 7보다 작은 숫자이고 b는 c보다 큰 숫자이므로 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 숫자 중에서 2개를 골라 그중에서 큰 숫자는 b로, 작은 숫자는 c로 놓으면 된다.

$\therefore {}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 자연수의 개수는 $3+6+10+15=34$

11

$f(1)$, $f(2)$의 값은 9보다 큰 수이고, $f(1)>f(2)$이므로

$f(1)=13$, $f(2)=11$

$f(4)$, $f(5)$의 값은 9보다 작은 수이고 $f(4)>f(5)$이므로 9보다 작은 원소 1, 3, 5, 7의 4개 중에서 2개를 택하여 크기 순서대로 대응시키면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

12

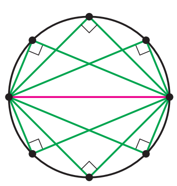
(ⅰ) 선분의 개수

8개의 점 중에서 2개의 점을 이어서 만들 수 있으므로

$a={}_8C_2=\dfrac{8\times7}{2\times1}=28$

(ⅱ) 직각삼각형의 개수

오른쪽 그림과 같이 1개의 지름을 기준으로 지름의 양 끝 점을 제외한 6개의 점 중에서 1개를 택하면 직각삼각형이 생기고, 두 점을 이어 만들 수 있는 지름은 4개이므로 구하는 직각삼각형의 개수는

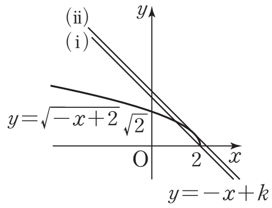


$b={}_6C_1\times4=24$

$\therefore a+b=28+24=52$

13

$y=\sqrt{-x+2}=\sqrt{-(x-2)}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, $y=-x+k$는 기울기가 -1, y절편이 k인 직선이다.



…… [배점 20 %]

(ⅰ) 직선 $y=-x+k$가 점 $(2, 0)$을 지날 때

$0=-2+k \qquad \therefore k=2$ …… [배점 20 %]

(ⅱ) $y=\sqrt{-x+2}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때

$\sqrt{-x+2}=-x+k$의 양변을 제곱하면

$-x+2=x^2-2kx+k^2$

$\therefore x^2-(2k-1)x+k^2-2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2k-1)\}^2-4(k^2-2)=0$

$4k^2-4k+1-4k^2+8=0$

$-4k+9=0 \qquad \therefore k=\dfrac{9}{4}$ …… [배점 40 %]

따라서 서로 다른 두 점에서 만날 때는 직선이 (ⅰ)이거나 (ⅰ)과 (ⅱ) 사이에 있을 때이므로

$2\le k<\dfrac{9}{4}$ …… [배점 20 %]

$n(A\cap B)=2$인 경우는 $y=\sqrt{-x+2}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우야.

14

$y=\sqrt{3-x}-2$에서 $y+2=\sqrt{3-x}$

양변을 제곱하면 $(y+2)^2=3-x$

$\therefore x=-(y+2)^2+3$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$y=-(x+2)^2+3$ …… [배점 50 %]

한편 $y=\sqrt{3-x}-2$의 정의역은 $\{x\,|\,x\le3\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ge-2\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge-2\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\le3\}$이다.

…… [배점 50 %]

15

(1) 여학생 4명을 한 묶음으로 생각하여 6명을 한 줄로 세우는 경우의 수는

$6!=720$

여학생 4명끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$720\times24=17280$ …… [배점 30 %]

(2) 남학생 5명을 한 줄로 세우는 경우의 수는

$5!=120$

남학생의 사이사이의 4곳에 여학생을 세우는 경우의 수는

남 ∨ 남 ∨ 남 ∨ 남 ∨ 남

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times24=2880$ …… [배점 30 %]

(3) 9명 중에서 동아리 대표 3명을 뽑는 경우의 수는

$_{9}C_{3}=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

남학생 5명 중에서 동아리 대표 3명을 뽑는 경우의 수는

$_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

여학생 4명 중에서 동아리 대표 3명을 뽑는 경우의 수는

$_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$84-10-4=70$ …… [배점 40 %]

다른 풀이

남학생 1명, 여학생 2명을 동아리 대표로 뽑는 경우의 수는

$_{5}C_{1}\times{}_{4}C_{2}=5\times\dfrac{4\times3}{2\times1}=30$

남학생 2명, 여학생 1명을 동아리 대표로 뽑는 경우의 수는

$_{5}C_{2}\times{}_{4}C_{1}=\dfrac{5\times4}{2\times1}\times4=40$

따라서 구하는 경우의 수는

$30+40=70$

16

(1) $1\le r\le n-1$일 때

$_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_{r}$

$=\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}+\dfrac{(n-1)!}{r!\{(n-1)-r\}!}$

$=\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}+\dfrac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}$

$=\dfrac{r\times(n-1)!}{r!(n-r)!}+\dfrac{(n-r)\times(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\dfrac{(n-1)!\times(r+n-r)}{r!(n-r)!}$

$=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

$={}_{n}C_{r}$ …… [배점 50 %]

(2) $_{3}C_{0}+{}_{4}C_{1}+{}_{5}C_{2}+\cdots+{}_{11}C_{8}$

$={}_{4}C_{0}+{}_{4}C_{1}+{}_{5}C_{2}+\cdots+{}_{11}C_{8}$

$={}_{5}C_{1}+{}_{5}C_{2}+\cdots+{}_{11}C_{8}$

$\vdots$

$={}_{11}C_{7}+{}_{11}C_{8}$

$={}_{12}C_{8}$

$={}_{12}C_{4}$

$=\dfrac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}$

$=495$ …… [배점 50 %]

Memo

Memo

Memo