# 정답과 해설

## 1주 1일 개념 돌파 전략 ①

9, 11쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1-2 $1$ | 2-2 $\log 2$ | 3-2 $2$ | 4-2 $5$ |
| 5-2 $e^2$ | 6-2 $2$ | | |

### 1-2

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$$
$$=\frac{2}{1+1}=1$$

### 2-2

제 $n$ 항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\log\frac{k^2}{k^2-1}=\sum_{k=2}^{n}\log\left(\frac{k}{k-1}\times\frac{k}{k+1}\right)$$
$$=\log\left(\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\right)+\log\left(\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\right)$$
$$+\cdots+\log\left(\frac{n}{n-1}\times\frac{n}{n+1}\right)$$
$$=\log\left\{\left(\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\right)\cdots\left(\frac{n}{n-1}\times\frac{n}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\log\frac{2n}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log\frac{2n}{n+1}=\log 2$$

### 3-2

두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$이 모두 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{2}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+2\times\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=1+2\times\frac{1}{2}=2$$

### 4-2

$$\lim_{x\to\infty}(4^x+5^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left[5^x\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}=5\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}$$
$$=5(0+1)^0=5$$

### 5-2

$-\frac{2}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0-$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right\}^2$$
$$=\lim_{t\to0-}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^2=e^2$$

### 6-2

$f(x)=2x\ln x\ (x>0)$에서

$$f'(x)=(2x)'\ln x+2x(\ln x)'$$
$$=2\ln x+2x\times\frac{1}{x}$$
$$=2\ln x+2$$

$\therefore\ f'(1)=0+2=2$

## 1주 1일 개념 돌파 전략 ②

12, 13쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 ② | 2 ⑤ | 3 ③ | 4 ② |
| 5 ① | 6 ③ | | |

### 1

분모, 분자를 각각 $4^n$으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+6\times4^n}{3\times2^{2n}-2\times3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+6}{3-2\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$
$$=\frac{0+6}{3-0}=2$$

### 2

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)로 놓으면

$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+b_n)=4$에서 $3\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=4$

$\therefore\ 3\alpha+\beta=4$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3b_n)=10$에서 $2\sum_{n=1}^{\infty}a_n-3\sum_{n=1}^{\infty}b_n=10$

$\therefore\ 2\alpha-3\beta=10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=2$, $\beta=-2$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\alpha-\beta=4$

## 3

첫째항이 $x-2$, 공비가 $x-3$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$x-2=0$ 또는 $-1<x-3<1$

(ⅰ) $x-2=0$일 때, $x=2$

(ⅱ) $-1<x-3<1$일 때, $2<x<4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $2\le x<4$이므로 정수 $x$의 개수는 2, 3의 2이다.

## 4

$$\lim_{x\to\infty}\{\log_3(6x+4)-\log_3 2x\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{6x+4}{2x}=\lim_{x\to\infty}\log_3\left(3+\frac{2}{x}\right)=\log_3 3=1$$

## 5

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-4x)}{2x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1-4x)}{-4x}\times(-2)\right\}$$

$$=1\times(-2)=-2$$

## 6

$f(x)=e^x\log_5 x\ (x>0)$에서

$$f'(x)=(e^x)'\log_5 x+e^x(\log_5 x)'$$

$$=e^x\log_5 x+e^x\times\frac{1}{x\ln 5}$$

$$=e^x\left(\log_5 x+\frac{1}{x\ln 5}\right)$$

$$\therefore\ f'(1)=e\times\frac{1}{\ln 5}=\frac{e}{\ln 5}$$

## 1주 2일 필수 체크 전략 ①

14~17쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1-1 ④ | 1-2 6 | 2-1 ③ | 2-2 $-3$ |
| 3-1 ㄴ | 3-2 ③ | 4-1 2 | 4-2 ③ |

## 1-1

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 하면

$a_5-a_3=4$에서 $2d=4$ $\quad\therefore d=2$

따라서 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n=3+(n-1)\times2=2n+1$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+1}{n^2+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}=4$$

## 1-2

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+an}-2n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+an}-2n)(\sqrt{4n^2+an}+2n)}{\sqrt{4n^2+an}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{\sqrt{4n^2+an}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{4+\frac{a}{n}}+2}$$

$$=\frac{a}{2+2}=\frac{a}{4}$$

따라서 $\frac{a}{4}=\frac{3}{2}$이므로 $a=6$

## 2-1

$(n+1)a_n=b_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{b_n}{n+1}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{(2n+1)\times\frac{b_n}{n+1}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}\times\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$=2\times3=6$$

**다른 풀이**

$\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{(n+1)a_n\times\frac{2n+1}{n+1}\right\}=3\times2=6$$

## 2-2

$\frac{2a_n+5}{2-a_n}=b_n$으로 놓으면

$(2-a_n)b_n=2a_n+5$, $2b_n-a_nb_n=2a_n+5$

$a_n(b_n+2)=2b_n-5$ $\quad\therefore a_n=\frac{2b_n-5}{b_n+2}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n-5}{b_n+2}=\frac{2\lim_{n\to\infty}b_n-5}{\lim_{n\to\infty}b_n+2}=\frac{2\times1-5}{1+2}=-1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-2}{a_n+2}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n-2}{\lim_{n\to\infty}a_n+2}=\frac{-1-2}{-1+2}=-3$$

## 3-1

등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하므로 $-1<r\le1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

ㄱ. 수열 $\{(-r)^n\}$은 공비가 $-r$이고 ㉠에서 $-1\le -r<1$이므로 $-r=-1$, 즉 $r=1$이면 수열 $\{(-r)^n\}$은 수렴하지 않는다.

ㄴ. 수열 $\left\{\left(\frac{1-r}{3}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{1-r}{3}$이고 ㉠에서

$-1\le -r<1$, $0\le \frac{1-r}{3}<\frac{2}{3}$

이므로 주어진 수열은 수렴한다.

ㄷ. 수열 $\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{1}{r}$이고 ㉠에서

$\frac{1}{r}<-1$ 또는 $\frac{1}{r}\ge 1$

이므로 $r\ne 1$이면 수열 $\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}$은 수렴하지 않는다.

따라서 반드시 수렴하는 수열은 ㄴ이다.

## 3-2

(i) 수열 $\{(\log_5 x)^n\}$은 첫째항과 공비가 모두 $\log_5 x$인 등비수열이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<\log_5 x\le 1$ $\quad\therefore \frac{1}{5}<x\le 5$

(ii) 수열 $\left\{\left(\frac{x}{3}\right)^{2n}\right\}$은 첫째항과 공비가 모두 $\left(\frac{x}{3}\right)^2=\frac{x^2}{9}$인 등비수열이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x^2}{9}\le 1$, $-9<x^2\le 9$

이때 $x^2\ge 0$이므로 $x^2\le 9$가 성립하는 정수 $x$의 값의 범위를 구하면 된다.

$x^2-9\le 0$, $(x+3)(x-3)\le 0$ $\quad\therefore -3\le x\le 3$

(i), (ii)에서 $\frac{1}{5}<x\le 3$이므로 두 등비수열이 모두 수렴하기 위한 정수 $x$의 개수는 1, 2, 3의 3이다.

## 4-1

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

또 $\lim_{n\to\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+3S_n+3}{5a_n+2S_n-1}=\frac{4\times 0+3\times 5+3}{5\times 0+2\times 5-1}=\frac{18}{9}=2$$

## 4-2

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n}{2n-1}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{3n}{2n-1}\right)=0$에서 $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{3}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(4n-2)a_n}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-2}{n+3}\times\lim_{n\to\infty} a_n=4\times\frac{3}{2}=6$$

# 1주 2일 필수 체크 전략 ②

18, 19쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 ⑤ | 2 ① | 3 ⑤ | 4 ② |
| 5 ⑤ | 6 ④ | | |

## 1

자연수 $n$에 대하여

$n^2+2n+1<n^2+3n+2<n^2+4n+4$이므로

$n+1<\sqrt{n^2+3n+2}<n+2$

따라서 $\sqrt{n^2+3n+2}$의 정수 부분은 $n+1$이므로

$a_n=\sqrt{n^2+3n+2}-(n+1)$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty} a_n&=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+3n+2}-(n+1)\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{n^2+3n+2}-(n+1)\}\{\sqrt{n^2+3n+2}+(n+1)\}}{\sqrt{n^2+3n+2}+(n+1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+3n+2}+n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

## 2

$2a_n+b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=-2a_n+c_n$

이때 $\lim_{n\to\infty} c_n=5$, $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-(-2a_n+c_n)}{a_n+(-2a_n+c_n)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-c_n}{-a_n+c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{c_n}{a_n}}{-1+\frac{c_n}{a_n}}\\&=\frac{3-0}{-1+0}=-3\end{aligned}$$

## 3

(i) $|r|<3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{3}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n+3^n}{r^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{r}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{r}{3}\right)^n-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1$$

(ii) $|r|>3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{r}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n+3^n}{r^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\left(\frac{3}{r}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{r}\right)^n}=\frac{2+0}{1-0}=2\ne -1$$

(i), (ii)에서 극한값이 $-1$이 되도록 하는 $r$의 값의 범위는 $-3<r<3$이므로 정수 $r$의 개수는 $-2, -1, 0, 1, 2$의 5이다.

## 4

$A_n(n, n^2)$을 지나고 기울기가 $-2$인 직선의 방정식은

$y-n^2=-2(x-n)$ $\therefore y=-2x+2n+n^2$

$0=-2x+2n+n^2$에서 $x=\frac{2n+n^2}{2}$

따라서 이 직선이 $x$축과 만나는 점 $B_n$의 좌표는 $\left(\frac{2n+n^2}{2}, 0\right)$

$\overline{OA_n}=\sqrt{n^2+n^4}$, $\overline{OB_n}=\frac{2n+n^2}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{OB_n}}{\overline{OA_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+n^2}{2\sqrt{n^2+n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+1}{2\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}}=\frac{1}{2}$$

## 5

$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=\lim_{n\to\infty}S_n=S$

또 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

따라서 $S_n+3S_{n+1}=5+a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$에서

$\lim_{n\to\infty}(S_n+3S_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\left\{5+a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$이므로

$S+3S=5$, $4S=5$

$\therefore 20S=25$

## 6

ㄱ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, $\cdots$, $\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, $\cdots$

이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=0$으로 수렴하지만 $\lim_{n\to\infty}a_n$과 $\lim_{n\to\infty}b_n$은 모두 발산한다. (거짓)

ㄴ. $a_n+b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=c_n-a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n-\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\beta-\alpha$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$도 수렴한다. (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

# 1주 3일 필수 체크 전략 ①

20~23쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1-1 $\frac{2}{5}$ | 1-2 ⑤ | 2-1 $e^4$ | 2-2 ③ |
| 3-1 ⑤ | 3-2 2 | 4-1 ② | 4-2 $\frac{4}{\ln 2}$ |

## 1-1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin\pi+\left(\frac{1}{2}\right)^3\sin\frac{3\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^4\sin 2\pi+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5-\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{2}{5}$$

## 1-2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+(-x)^n}{4^n}=0+2\times\left(\frac{x}{4}\right)^2+0+2\times\left(\frac{x}{4}\right)^4+\cdots$$

주어진 급수는 첫째항이 $\frac{x^2}{8}$, 공비가 $\frac{x^2}{16}$인 등비급수이므로

$\frac{\frac{x^2}{8}}{1-\frac{x^2}{16}}=6$, $\frac{2x^2}{16-x^2}=6$, $x^2=12$ $\therefore x=2\sqrt{3}$ ($\because x>0$)

## 2-1

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^x}$$
$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^2}{\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right\}^{-2}}$$
$$=\frac{e^2}{e^{-2}}=e^4$$

다른 풀이

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^x$$

$\frac{4}{x-2}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때, $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^x=\lim_{t\to0+}(1+t)^{\frac{4}{t}+2}=\lim_{t\to0+}\{(1+t)^{\frac{4}{t}}\times(1+t)^2\}$$
$$=\lim_{t\to0+}[\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^4\times(1+t)^2]$$
$$=e^4\times1=e^4$$

## 2-2

$$\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{x}{a}\right)(1+ax)\right\}^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}\times(1+ax)^{\frac{1}{x}}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left[\left\{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}}\right\}^{\frac{1}{a}}\times\left\{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\right\}^{a}\right]$$
$$=e^{\frac{1}{a}}\times e^{a}=e^{\frac{1}{a}+a}$$

따라서 $e^{\frac{1}{a}+a}=e^2$이므로

$\frac{1}{a}+a=2$에서 $a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0$

$\therefore a=1$

## 3-1

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{e^{2x}-b}=3$에서 $x\to0$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이다. 즉,

$\lim_{x\to0}(e^{2x}-b)=0$ $\quad\therefore b=1$

$b=1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+ax)}{ax}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{a}{2}\right\}$$
$$=1\times1\times\frac{a}{2}$$
$$=\frac{a}{2}$$

즉, $\frac{a}{2}=3$이므로 $a=6$

$\therefore a+b=7$

## 3-2

$\lim_{x\to0}xf(x)=2$, $g(x)=e^x-1$이므로

$$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=\lim_{x\to0}\left\{xf(x)\times\frac{g(x)}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}xf(x)\times\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$$
$$=2\times1=2$$

## 4-1

$f(x)=(x-a)e^{2x+1}$에서

$$f'(x)=(x-a)'e^{2x+1}+(x-a)(e^{2x+1})'$$
$$=e^{2x+1}+2(x-a)e^{2x+1}$$
$$=(2x-2a+1)e^{2x+1}$$

이므로

$f'(1)=(2-2a+1)e^3=(3-2a)e^3$

따라서 $(3-2a)e^3=5e^3$이므로

$3-2a=5$ $\quad\therefore a=-1$

## 4-2

함수 $f(x)=\ln 3x$는 닫힌구간 $[4, 8]$에서 연속이고 열린구간 $(4, 8)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(8)-f(4)}{8-4}=f'(c)$$

인 $c$가 열린구간 $(4, 8)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f(8)=\ln 24$, $f(4)=\ln 12$이고

$f(x)=\ln 3x=\ln 3+\ln x$에서 $f'(x)=\frac{1}{x}$이므로

$$\frac{\ln 24-\ln 12}{8-4}=\frac{1}{c},\ \frac{\ln 2}{4}=\frac{1}{c}$$

$\therefore c=\frac{4}{\ln 2}$

**참고** 평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 $(a, b)$에서 미분가능할 때

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 $c$가 열린구간 $(a, b)$에 적어도 하나 존재한다.

## 1주 3일 필수 체크 전략 ②

24, 25쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** ⑤ | **2** ⑤ | **3** ③ | **4** ② |
| **5** ③ | **6** ③ | | |

## 1

주어진 급수는 첫째항이 $(x-1)^2$, 공비가 $\frac{x+2}{3}$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$(x-1)^2=0$ 또는 $-1<\frac{x+2}{3}<1$

(i) $(x-1)^2=0$, 즉 $x=1$일 때

$S=0$

(ii) $-1<\frac{x+2}{3}<1$, 즉 $-5<x<1$일 때

$$S=\frac{(x-1)^2}{1-\frac{x+2}{3}}=\frac{3(x-1)^2}{-(x-1)}=-3x+3$$

이때 $-5<x<1$이므로

$-3<-3x<15$, $0<-3x+3<18$

$\therefore 0<S<18$

(i), (ii)에서 $0\le S<18$이므로 정수 $S$의 최댓값은 17이다.

## 2

$a_1=0.\dot{2}=\frac{2}{9}=\frac{2\times1}{10-1}$, $a_2=0.\dot{2}\dot{0}=\frac{20}{99}=\frac{2\times10^1}{10^2-1}$,

$a_3=0.\dot{2}0\dot{0}=\frac{200}{999}=\frac{2\times10^2}{10^3-1}$, $\cdots$

에서 $a_n=\frac{2\times10^{n-1}}{10^n-1}$

$\therefore 5-\frac{1}{a_n}=5-\frac{10^n-1}{2\times10^{n-1}}=\frac{10^n-(10^n-1)}{2\times10^{n-1}}=\frac{1}{2\times10^{n-1}}$

즉, 수열 $\left\{5-\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$이고 공비가 $\frac{1}{10}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(5-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{10}}$$
$$=\frac{5}{9}=0.\dot{5}$$

다른 풀이

$5-\frac{1}{a_1}=5-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$, $5-\frac{1}{a_2}=5-\frac{99}{20}=\frac{1}{20}$,

$5-\frac{1}{a_3}=5-\frac{999}{200}=\frac{1}{200}$, $\cdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(5-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{20}+\frac{1}{200}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{10}}$$
$$=\frac{5}{9}=0.\dot{5}$$

## 3

ㄱ. $\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\{(1-x)^{-\frac{1}{x}}\}^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

ㄷ. $x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$

ㄹ. $x-3=t$로 놓으면 $x\to3$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to3}\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x-3}}=\lim_{t\to0}\left(\frac{3+t}{3}\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0}\left\{\left(1+\frac{t}{3}\right)^{\frac{3}{t}}\right\}^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}}$

따라서 극한값이 $e$인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

## 4

$\mathrm{P}(a, 3^a)$, $\mathrm{Q}(a, 2^a)$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=3^a-2^a$

$$\therefore \lim_{a\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{a}=\lim_{a\to0+}\frac{3^a-2^a}{a}$$
$$=\lim_{a\to0+}\frac{3^a-1}{a}-\lim_{a\to0+}\frac{2^a-1}{a}$$
$$=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$$

## 5

$3+f(x)\ln(1+2x)=3e^{2x}$에서

$f(x)\ln(1+2x)=3e^{2x}-3$

$\ln(1+2x)\neq0$, 즉 $x\neq0$일 때 $f(x)=\frac{3(e^{2x}-1)}{\ln(1+2x)}$

이때 함수 $f(x)$가 $x>-\frac{1}{2}$에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로

$$f(0)=\lim_{x\to0}\frac{3(e^{2x}-1)}{\ln(1+2x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{3\times\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{2x}{\ln(1+2x)}\right\}$$
$$=3\times1\times1=3$$

## 6

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{3x}{n}\right)^{\frac{n}{3x}}\right\}^{3x}=e^{3x}$

$g(x)=\lim_{h\to0}\frac{5^{xh}-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(5^x)^h-1}{h}$

$=\ln 5^x=x\ln 5$

따라서 $f(x)+g(x)=e^{3x}+x\ln 5$이므로 $f(x)+g(x)$의 도함수는

$\{f(x)+g(x)\}'=3e^{3x}+\ln 5$

## 1주 4일 교과서 대표 전략 ①

26~29쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 ③ | 2 ④ | 3 ③ | 4 ③ |
| 5 ⑤ | 6 ⑤ | 7 ① | 8 $\frac{2}{7}$ |
| 9 $2<x\leq5$ | 10 ④ | 11 ② | 12 ③ |
| 13 ③ | 14 ⑤ | 15 $-4\ln 2$ | 16 ④ |

## 1

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha+\beta=3$

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha\beta=-1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)=\lim_{n\to\infty}a_n^2+\lim_{n\to\infty}b_n^2$$
$$=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=3^2-2\times(-1)=11$$

**2**

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+bn+4}-3n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{an^2+bn+4}-3n)(\sqrt{an^2+bn+4}+3n)}{\sqrt{an^2+bn+4}+3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-9)n^2+bn+4}{\sqrt{an^2+bn+4}+3n} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a-9\neq0$이면 발산하므로 $a-9=0$ $\quad\therefore a=9$

$a=9$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{bn+4}{\sqrt{9n^2+bn+4}+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{4}{n}}{\sqrt{9+\frac{b}{n}+\frac{4}{n^2}}+3}$$
$$=\frac{b}{3+3}=\frac{b}{6}$$

따라서 $\frac{b}{6}=-1$이므로 $b=-6$

$\therefore a+b=9+(-6)=3$

**3**

$n^2a_n=b_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{b_n}{n^2}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(3n^2+2n+1)a_n=3\lim_{n\to\infty}n^2a_n+2\lim_{n\to\infty}na_n+\lim_{n\to\infty}a_n$$
$$=3\lim_{n\to\infty}b_n+2\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}$$
$$=3\times2+2\times0+0=6$$

**4**

$n<a_n<n+1$에서

$$\sum_{k=1}^{n}k<\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}(k+1),$$
$$\frac{n^2+n}{2}<a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\frac{n^2+3n}{2}$$

각 변을 $n^2$으로 나누면

$$\frac{n^2+n}{2n^2}<\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n^2}<\frac{n^2+3n}{2n^2}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}=\frac{1}{2}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{2n^2}=\frac{1}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n^2}=\frac{1}{2}$$

**5**

(i) $0<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-2r^n-1}{r^n-3}=\frac{1}{3}\neq1$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-2r^n-1}{r^n-3}=\frac{1-2-1}{1-3}=1$$

(iii) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-2r^n-1}{r^n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{r-2-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{3}{r^n}}=r-2$$

즉, $r-2=1$에서 $r=3$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 식을 만족시키는 양수 $r$의 값은 1, 3이므로 구하는 곱은 3

**6**

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(5-na_n)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(5-na_n)=0$에서 $\lim_{n\to\infty}na_n=5$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\times na_n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2}\times\lim_{n\to\infty}na_n$$
$$=1\times5=5$$

**7**

$2a_n-3b_n=c_n$으로 놓으면 $3b_n=2a_n-c_n$

$\therefore b_n=\frac{2}{3}a_n-\frac{1}{3}c_n$

주어진 조건에서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3$, $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=12$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}a_n-\frac{1}{3}c_n\right)$$
$$=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}c_n$$
$$=\frac{2}{3}\times3-\frac{1}{3}\times12$$
$$=2-4=-2$$

**8**

$$\frac{a_1}{6}+\frac{a_2}{6^2}+\frac{a_3}{6^3}+\frac{a_4}{6^4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5+(-1)^n}{3\times6^n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$
$$=\frac{5}{3}\times\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}+\frac{1}{3}\times\frac{-\frac{1}{6}}{1-\left(-\frac{1}{6}\right)}$$
$$=\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{21}\right)=\frac{2}{7}$$

## 9

(ⅰ) 수열 $\left\{\left(\frac{x-2}{3}\right)^{n-1}\right\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{x-2}{3}$인 등비수열이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x-2}{3}\le 1$, $-3<x-2\le 3$ $\quad\therefore -1<x\le 5$

(ⅱ) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^{n}$은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{2}{x}$인 등비급수이므로 이 급수가 수렴하려면

$-1<\frac{2}{x}<1$, $\frac{x}{2}<-1$ 또는 $\frac{x}{2}>1$ $\quad\therefore x<-2$ 또는 $x>2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 실수 $x$의 값의 범위는 $2<x\le 5$

## 10

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}-S_n}\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)\ (\because S_{n+1}-S_n=a_{n+1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right)+\cdots+\left\{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}=1$$

## 11

분모, 분자를 각각 $2^x$으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a\times 2^x+5}{2^{x+1}+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+5\times\left(\frac{1}{2}\right)^x}{2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}=3$이므로 $a=6$

## 12

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to 0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to 0+}x\log\left(2^{\frac{1}{x}}+5^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\left(2^t+5^t\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\log\left[5^t\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^t+1\right\}\right]^{\frac{1}{t}}$$
$$=\log(5\times 1)=\log 5$$

**참고** 로그의 성질

$a>0$, $a\ne 1$, $M>0$, $N>0$일 때

① $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

③ $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

④ $\log_a M^k=k\log_a M$ ($k$는 실수)

## 13

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right\}^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{x+1}{x}\times\frac{x+2}{x+1}\times\cdots\times\frac{2x+1}{2x}\right)^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

## 14

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+bx)}{e^{x+a}-e}=1$에서 $x\to 0$일 때 (분자)$\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to 0$이다. 즉,

$\lim_{x\to 0}(e^{x+a}-e)=0$, $e^a-e=0$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+bx)}{e^{x+1}-e}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+bx)}{bx}\times\frac{x}{e^x-1}\times\frac{b}{e}\right\}$$
$$=1\times 1\times\frac{b}{e}$$
$$=\frac{b}{e}$$

따라서 $\frac{b}{e}=1$이므로 $b=e$

$\therefore ab=e$

## 15

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x-2}\right\}=-f'(1)$$

이때 $f(x)=2^{x+1}=2\times 2^x$에서

$f'(x)=2\times 2^x\ln 2=2^{x+1}\ln 2$

따라서 구하는 값은 $-f'(1)=-4\ln 2$

**참고** 미분계수를 이용한 극한값의 계산

주어진 식을 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 꼴로 변형하여 미분계수의 정의를 이용한다.

## 16

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $f(1)=\lim_{x\to 1-}f(x)$에서 $2+a=1$ $\quad\therefore a=-1$

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 $f'(x)=\begin{cases}2 & (x>1)\\ \frac{b}{x} & (x<1)\end{cases}$

또 $x=1$에서 $f(x)$의 미분계수가 존재하므로

$\lim_{x\to 1-}f'(x)=\lim_{x\to 1+}f'(x)$에서 $b=2$

$\therefore a+b=1$

## 1주 4일 교과서 대표 전략 ②

30, 31쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** ㄱ | **2** ④ | **3** ② | **4** ④ |
| **5** ② | **6** ④ | **7** ② | **8** $1+\frac{1}{2\ln 3}$ |

### 1

ㄱ. $a_n-b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=a_n-c_n$이고 $\lim_{n\to\infty} c_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-c_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha-0=\alpha$ (참)

ㄴ. [반례] $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$이면 모든 자연수 $n$에 대하여

$a_n<b_n$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=0$ (거짓)

ㄷ. [반례] $a_n=1+(-1)^n$, $b_n=1-(-1)^n$이면

$\{a_n\}$: 0, 2, 0, 2, 0, 2, $\cdots$

$\{b_n\}$: 2, 0, 2, 0, 2, 0, $\cdots$

$\{a_nb_n\}$: 0, 0, 0, 0, 0, 0, $\cdots$

$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=0$이지만 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 모두 발산(진동)한다.

즉, $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n\neq 0$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

**참고** 발산하는 수열

① $\{a_n\}$: 1, 2, 3, 4, 5, $\cdots$ ➡ $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$

② $\{a_n\}$: 0, $-1$, $-2$, $-3$, $-4$, $\cdots$ ➡ $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$

③ $\{a_n\}$: 1, $-2$, 3, $-4$, 5, $\cdots$ ➡ 진동

### 2

수열 $\left\{\frac{4^n}{(3-2\sin\theta)^{n+1}}\right\}$은 첫째항이 $\frac{4}{(3-2\sin\theta)^2}$, 공비가 $\frac{4}{3-2\sin\theta}$인 등비수열이므로 0이 아닌 극한값을 가지려면 공비가 1이어야 한다.

$\frac{4}{3-2\sin\theta}=1$, $4=3-2\sin\theta$

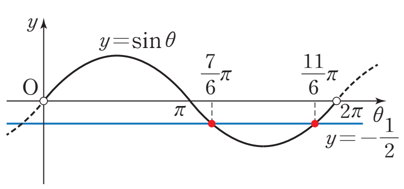
$2\sin\theta=-1$ $\quad\therefore \sin\theta=-\frac{1}{2}$

따라서 $\theta=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\theta=\frac{11}{6}\pi$이므로 $\theta$의 값의 합은

$\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi=3\pi$

**참고**

$0<\theta<2\pi$에서 $y=\sin\theta$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$을 나타내면 다음 그림과 같다.




### 3

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}+2}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}+1}=\frac{0+2}{0+1}=2$$

$$f(2)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-1}+2}{2^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{2^{2n}}}{1+\frac{1}{2^{2n}}}=\frac{\frac{1}{2}+0}{1+0}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)=f(2)=\frac{1}{2}$$

**참고**

(i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\lim_{n\to\infty} x^{2n-1}=0$이므로 $f(x)=2$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\lim_{n\to\infty} x^{2n-1}=1$이므로 $f(x)=\frac{3}{2}$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+2}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty} x^{2n-1}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+2}{x^{2n}+1}=\frac{-1+2}{1+1}=\frac{1}{2}$$

### 4

$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하므로 $-1<r<1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

① 공비가 $r^2$인 등비급수이고 ㉠에서 $0\le r^2<1$이므로 수렴한다.

② 공비가 $-r$인 등비급수이고 ㉠에서 $-1<-r<1$이므로 수렴한다.

③ 공비가 $\frac{r+1}{2}$인 등비급수이고 ㉠에서 $0<\frac{r+1}{2}<1$이므로 수렴한다.

④ 공비가 $\frac{r}{3}-1$인 등비급수이고 ㉠에서 $-\frac{4}{3}<\frac{r}{3}-1<-\frac{2}{3}$이므로 주어진 급수는 항상 수렴한다고 할 수 없다.

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}(r^n+2r^{2n})=\sum_{n=1}^{\infty} r^n+2\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$이 수렴하므로 주어진 급수는 수렴한다.

따라서 항상 수렴하는 급수가 아닌 것은 ④이다.

### 5

원 $C_1$의 반지름의 길이는 1이므로 $S_1=\pi\times 1^2=\pi$

원 $C_2$의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}$이므로 $S_2=\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}$

원 $C_3$의 반지름의 길이는 $\frac{1}{4}$이므로 $S_3=\pi\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{\pi}{16}$

$\vdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n=\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{16}+\cdots=\frac{\pi}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\pi$$

## 6

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{a\times 4^{x+1}-b\times 3^x}{4^x+3^{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4a-b\times\left(\frac{3}{4}\right)^x}{1+\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^x}=4a$$

즉, $4a=12$이므로 $a=3$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{3\times 4^{x+1}-b\times 3^x}{4^x+3^{x-1}}$$

$$=\frac{12-b}{1+\frac{1}{3}}=\frac{36-3b}{4}$$

즉, $\frac{36-3b}{4}=6$이므로

$36-3b=24 \qquad \therefore b=4$

$\therefore a+b=7$

## 7

$$f(n)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{2x}-1}{2x}\times 2+\cdots+\frac{e^{nx}-1}{nx}\times n\right)$$

$$=1+2+3+\cdots+n$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=2$$

**참고** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$e^x-1=t$로 놓으면 $x\to 0$일 때 $t\to 0$이고, $x=\ln(1+t)$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln e}=1$$

## 8

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{OQ}=\frac{1}{2}\times\log_3 t\times t=\frac{1}{2}t\log_3 t$$

$$S'(t)=\frac{1}{2}\left(1\times\log_3 t+t\times\frac{1}{t\ln 3}\right)=\frac{1}{2}\left(\log_3 t+\frac{1}{\ln 3}\right)$$

$$\therefore S'(9)=\frac{1}{2}\left(\log_3 9+\frac{1}{\ln 3}\right)=\frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{\ln 3}\right)=1+\frac{1}{2\ln 3}$$

# 1주 누구나 합격 전략

32, 33쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** ① | **2** ① | **3** 0 | **4** ④ |
| **5** ③ | **6** $\frac{1}{3}<x<27$ | **7** ③ | **8** ④ |
| **9** ② | **10** ④ | | |

## 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-2b_n}{a_nb_n+4}=\frac{\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)}{\lim_{n\to\infty}(a_nb_n+4)}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n-2\lim_{n\to\infty}b_n}{\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n+4}$$

$$=\frac{-2-2\times 1}{-2\times 1+4}=\frac{-4}{2}=-2$$

## 2

$a\neq 0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+an+6}}{an^2+3n-2}=0$

이때 $b\neq 0$이므로 $a=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+an+6}}{an^2+3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{6}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{3}{3}=1$$

따라서 $b=1$이므로

$a+b=1$

## 3

$-1\leq\sin n\theta\leq 1$이므로 부등식의 각 변에 $\frac{n^2+3}{n^3}$을 곱하면

$$-\frac{n^2+3}{n^3}\leq\frac{(n^2+3)\sin n\theta}{n^3}\leq\frac{n^2+3}{n^3}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n^2+3}{n^3}\right)=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{n^3}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+3)\sin n\theta}{n^3}=0$$

## 4

$S_n=2\times 3^{n+1}-6$에서

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2\times 3^{n+1}-6-(2\times 3^n-6)$

$=4\times 3^n$ ······ ㉠

$a_1=S_1=2\times 9-6=12$ ······ ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4\times 3^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 3^{n+1}-6}{4\times 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6-6\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}{4}=\frac{3}{2}$$

## 5

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2+3n^2-n}{n^2+na_n}=\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n^2}{n^2}+3-\frac{1}{n}}{1+\frac{a_n}{n}}$$

$$=\frac{0+3-0}{1+0}=3$$

## 6

주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 $\frac{\log_3 x-1}{2}$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$-1<\frac{\log_3 x-1}{2}<1$, $-2<\log_3 x-1<2$

$-1<\log_3 x<3 \qquad \therefore \frac{1}{3}<x<27$

**참고** 밑을 같게 할 수 있는 부등식

주어진 부등식을 $\log_a f(x)>\log_a g(x)$로 변형한 후

① $a>1$일 때, 부등식 $f(x)>g(x)>0$을 푼다.

② $0<a<1$일 때, 부등식 $0<f(x)<g(x)$를 푼다.

## 7

$$\lim_{x\to\infty} (3^x+4^x)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to\infty} \left[4^x\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{2x}}$$

$$=2\lim_{x\to\infty} \left\{\left(\frac{3}{4}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{2x}}$$

$$=2(0+1)^0=2$$

## 8

$$\lim_{x\to0} (1+ax)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0} \{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\}^{2a}=e^{2a}$$

따라서 $e^{2a}=e^8$이므로

$2a=8 \qquad \therefore a=4$

## 9

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+5x)}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to0} \left\{\frac{\ln(1+5x)}{5x}\times\frac{3x}{e^{3x}-1}\times\frac{5}{3}\right\}$$

$$=1\times1\times\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$$

## 10

$f(x)=x\ln x$에서 $f(e)=e$이므로

$$\lim_{x\to e} \frac{f(x)-e}{x-e}=\lim_{x\to e} \frac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)$$

이때 $f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$이므로

$f'(e)=\ln e+1=1+1=2$

# 1주 창의·융합·코딩 전략

34~37쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 ① | 2 ② | 3 ③ | 4 풀이 참조 |
| 5 ② | 6 0 | | |
| 7 채린: $2e$, 승현: $2\ln 2$, 하나: 2 | | | 8 ① |

## 1

$a_1=3$, $a_2=3+6$, $a_3=3+6+9$, $\cdots$에서

$a_n=3+6+9+\cdots+3n=\sum_{k=1}^{n} 3k=\frac{3}{2}(n^2+n)$

수열 $\{b_n\}$은 [$n$단계]에 있는 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 개수이므로

$b_1=1$, $b_2=1+3$, $b_3=1+3+5$, $\cdots$에서

$b_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$

$$=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2}(n^2+n)}{n^2}=\frac{3}{2}$$

## 2

$n$년 후 두 회사 A, B의 연 매출액을 각각 $a_n$억 원, $b_n$억 원이라 하면

$a_n=3\times1.09^n+5\times1.15^n$, $b_n=6\times1.09^n+4\times1.15^n$

따라서 $n$년 후 A 회사에 대한 B 회사의 연 매출액의 비는

$$\frac{b_n}{a_n}=\frac{6\times1.09^n+4\times1.15^n}{3\times1.09^n+5\times1.15^n}$$

이므로 구하는 연 매출액의 비의 극한값은

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty} \frac{6\times\left(\frac{1.09}{1.15}\right)^n+4}{3\times\left(\frac{1.09}{1.15}\right)^n+5}=\frac{4}{5}$$

## 3

$a_1=\frac{\pi}{2}$, $a_2=\frac{\pi}{2^2}$, $a_3=\frac{\pi}{2^3}$, $\cdots$에서 $a_n=\frac{\pi}{2^n}$

또 $b_1=2$, $b_2=4$, $b_3=8$, $\cdots$에서 $b_n=2^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n(b_n-1)=\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n-1)\pi}{2^n}=\pi$$

## 4

종현: 등비급수의 수렴 조건은 $-1<$(공비)$<1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

소민: 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$S_{2n-1}=1-1+1-1+\cdots+1$

$=(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+1=1$

$$S_{2n}=1-1+1-1+\cdots+1-1$$
$$=(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)=0$$
즉, $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty} S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

## 5

오늘부터 매일 온라인 게임을 하는 시간의 합은 첫째항이 10, 공비가 $\frac{3}{5}$인 등비급수의 합과 같다.

따라서 구하는 시간의 합은

$$\frac{10}{1-\frac{3}{5}}=10\times\frac{5}{2}=25\ (\text{시간})$$

## 6

$t=\frac{1}{x}$로 놓으면 $t\to\infty$일 때 $x\to0+$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log_3(1+3^{-t})}{2^{-t}}=\lim_{x\to0+}\frac{\log_3\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\right\}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}}$$
$$=\lim_{x\to0+}\left[\frac{\log_3\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\right\}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\right]$$
$$=\frac{1}{\ln 3}\times0=0$$

따라서 구하는 극한값은 0이다.

## 7

채린: $f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$ $\quad\therefore f'(1)=2e$

승현: $f'(x)=2\times2^x\ln 2=2^{x+1}\ln 2$ $\quad\therefore f'(0)=2\ln2$

하나: $f'(x)=2^x\ln 2\times\ln x+\frac{2^x}{x}$

$\therefore f'(1)=2\ln 2\times\ln 1+\frac{2}{1}=2$

따라서 각 학생이 제출해야 하는 쪽지에 적힌 숫자는

채린: $2e$, 승현: $2\ln 2$, 하나: 2

## 8

지호의 $x$달 후의 체지방량을 $f(x)$ kg이라 하면

$f(x)=30\times(1-0.03)^x=30\times0.97^x$

이때 체지방량의 변화율은 $f'(x)$이므로

$f'(x)=30\times\ln 0.97\times0.97^x$

따라서 같은 해 11월 1일의 체지방량의 변화율은

$$f'(10)=30\times\ln 0.97\times0.97^{10}=30\times(-0.03)\times0.7$$
$$=-0.63\ (\text{kg/달})$$

# 2주 1일 개념 돌파 전략 ①

41, 43쪽

| | |
|---|---|
| **1-2** 2 | **2-2** $y'=-\frac{2x^2+1}{(2x^2-1)^2}$ |
| **3-2** 2 | **4-2** $y'=4e^{4x-3}$ |
| **5-2** $\frac{dy}{dx}=3\tan t$ | **6-2** $y''=2\cos x-x\sin x$ |

## 1-2

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 6x}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan 6x}{6x}\times\frac{3x}{\sin 3x}\times2\right)=1\times1\times2=2$$

## 2-2

$$y'=\frac{(x)'(2x^2-1)-x(2x^2-1)'}{(2x^2-1)^2}=\frac{1\times(2x^2-1)-x\times4x}{(2x^2-1)^2}$$
$$=-\frac{2x^2+1}{(2x^2-1)^2}$$

## 3-2

$\csc\theta=\frac{5}{3}$이므로 $\sin\theta=\frac{3}{5}$

$\theta$가 제1사분면의 각이므로

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}\ (\because\cos\theta>0)$$

$$\therefore\sec\theta+\tan\theta=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}=2$$

## 4-2

$u=4x-3$으로 놓으면 $y=e^u$

이때 $\frac{dy}{du}=e^u$, $\frac{du}{dx}=4$이므로

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=e^u\times4=4e^{4x-3}$$

## 5-2

$\frac{dx}{dt}=\cos t$, $\frac{dy}{dt}=3\sin t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\sin t}{\cos t}=3\tan t$$

## 6-2

$y'=\sin x+x\cos x$이므로

$y''=\cos x+(\cos x-x\sin x)=2\cos x-x\sin x$

## 2주 1일 개념 돌파 전략 ②

44, 45쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 ④ | 2 ① | 3 ① | 4 ② |
| 5 ④ | 6 ⑤ | | |

### 1

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x-\sin x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x(\cos x-\sin x)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}=\sqrt{2}$$

### 2

$$f'(x)=\frac{-\sin x(1-\cos x)-(1+\cos x)\times\sin x}{(1-\cos x)^2}$$
$$=\frac{-2\sin x}{(1-\cos x)^2}$$
$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-2\sin\frac{\pi}{2}}{\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)^2}=-2$$

### 3

$\theta$가 제2사분면의 각이므로

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13}\ (\because \cos\theta<0)$$
$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=-\frac{13}{5},\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{12}{5}$$
$$\therefore \sec\theta+\tan\theta=-\frac{13}{5}+\left(-\frac{12}{5}\right)=-5$$

### 4

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)\ln 2}=\frac{2x}{(x^2+1)\ln 2}$$

따라서 $x=1$에서의 미분계수는

$$f'(1)=\frac{2}{2\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}$$

### 5

$e^x-\tan y=0$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$e^x-\sec^2 y\frac{dy}{dx}=0\qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{\sec^2 y}$$

따라서 점 $\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{e^0}{\sec^2\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2}$$

### 6

$x=\sqrt{y^2+2}-1$의 양변을 $y$에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{2\sqrt{y^2+2}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+2}}$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{\sqrt{y^2+2}}{y}$$

## 2주 2일 필수 체크 전략 ①

46~49쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1-1 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1-2 ② | 2-1 ② | 2-2 $\frac{3}{2}$ |
| 3-1 ⑤ | 3-2 $\pi$ | 4-1 ⑤ | 4-2 $\frac{1}{9}$ |

### 1-1

$x+3y+6=0$에서 $y=-\frac{1}{3}x-2$

$2x+y-1=0$에서 $y=-2x+1$

두 직선이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면

$\tan\alpha=-\frac{1}{3}$, $\tan\beta=-2$

$$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{-\frac{1}{3}-(-2)}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)\times(-2)}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}=1$$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{4}$

$$\therefore \cos\theta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

### 1-2

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}\ (\because \cos\alpha>0)$$
$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}\ (\because \sin\beta>0)$$
$$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)+\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}$$
$$=-\frac{48}{65}+\frac{15}{65}=-\frac{33}{65}$$

## 2-1

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x \to \frac{\pi}{2}$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{t}$$
$$=-\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=-1$$

**참고** $\frac{\pi}{2}+x$의 삼각함수

① $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$　　② $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$

③ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x$

## 2-2

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+a)}{\tan 2x}=b$에서 $x \to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다. 즉,

$\lim_{x\to0}\ln(x+a)=0$, $\ln a=0$　　$\therefore a=1$

$a=1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{\tan 2x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{2x}{\tan 2x}\times\frac{1}{2}\right\}$$
$$=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

따라서 $b=\frac{1}{2}$이므로

$a+b=\frac{3}{2}$

## 3-1

$$\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)+f(\pi)-f(\pi-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)}{2h}\times2+\lim_{h\to0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}$$
$$=2f'(\pi)+f'(\pi)=3f'(\pi)$$

이때 $f(x)=1-2\sin x$에서 $f'(x)=-2\cos x$이므로

$3f'(\pi)=-6\cos\pi=-6\times(-1)=6$

## 3-2

함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 0에서 $2\pi$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi-0}=\frac{4-4}{2\pi}=0$$

이때 $f(x)=4\cos x$에서 $f'(x)=-4\sin x$

따라서 $f'(a)=-4\sin a$이므로

$-4\sin a=0$, $\sin a=0$

$\therefore a=\pi$ ($\because 0<a<2\pi$)

## 4-1

$$f'(x)=\frac{(x-1)'(x^2+3)-(x-1)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$$
$$=\frac{1\times(x^2+3)-(x-1)\times2x}{(x^2+3)^2}$$
$$=\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$$

주어진 조건에서 $f'(x)\ge0$이고 $(x^2+3)^2>0$이므로

$-x^2+2x+3\ge0$, $x^2-2x-3\le0$

$(x+1)(x-3)\le0$　　$\therefore -1\le x\le3$

따라서 정수 $x$의 개수는 $-1, 0, 1, 2, 3$의 5이다.

## 4-2

$f(x)=\frac{1}{3+\cos x}$이라 하면

$$f'(x)=-\frac{(3+\cos x)'}{(3+\cos x)^2}=-\frac{-\sin x}{(3+\cos x)^2}=\frac{\sin x}{(3+\cos x)^2}$$

따라서 점 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{3}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\left(3+\cos\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$$

**참고** 접선의 기울기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 도함수 $f'(x)$에 $x=a$를 대입한 값과 같다.

## 2주 2일 필수 체크 전략 ②

50, 51쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** ② | **2** ② | **3** ⑤ | **4** ② |
| **5** ③ | **6** ① | | |

## 1

$\alpha=\frac{\pi}{4}$이므로 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$

정사각형의 한 변의 길이를 $a$라 하면

$\overline{BD}=\sqrt{(3a)^2+a^2}=\sqrt{10}a$이므로

$\sin\beta=\frac{a}{\sqrt{10}a}=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\beta=\frac{3a}{\sqrt{10}a}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

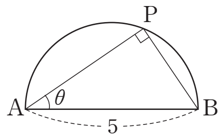
$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{10}$$
$$=\frac{3\sqrt{5}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{10}=\frac{2\sqrt{5}}{10}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

## 2

$\angle APB=90°$이므로 $\angle PAB=\theta$라 하면

$\overline{AP}=5\cos\theta$, $\overline{BP}=5\sin\theta$




$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}$

$=5\cos\theta+5\sin\theta$

$=5\sqrt{2}\left(\cos\theta\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\ \theta\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=5\sqrt{2}\left(\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}+\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}\right)$

$=5\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi$이므로

$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$ $\quad\therefore 5<5\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\le 5\sqrt{2}$

따라서 구하는 최댓값은 $5\sqrt{2}$ 이다.

## 3

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{x}+\frac{\sin 3x}{x}+\cdots+\frac{\sin nx}{x}}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{2x}\times 2+\frac{\sin 3x}{3x}\times 3+\cdots+\frac{\sin nx}{nx}\times n}$

$=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$

$=\frac{2}{n(n+1)}$

이므로 $\frac{2}{n(n+1)}=\frac{1}{55}$에서 $n(n+1)=110=10\times 11$

$\therefore n=10$

## 4

$f(0)=0$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{f(\tan 5x)-f(\sin 3x)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{f(\tan 5x)-f(0)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin 3x)-f(0)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(\tan 5x)-f(0)}{\tan 5x}\times\frac{\tan 5x}{5x}\times 5\right\}$

$-\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(\sin 3x)-f(0)}{\sin 3x}\times\frac{\sin 3x}{3x}\times 3\right\}$

$=f'(0)\times 1\times 5-f'(0)\times 1\times 3$

$=2f'(0)$

이때 $f'(x)=4\sec^2 x-3\cos x$이므로

(주어진 식)$=2f'(0)=2\times(4-3)=2$

## 5

$f'(x)=(e^x)'\cos x+e^x(\cos x)'=e^x\cos x+e^x(-\sin x)$

$=e^x(\cos x-\sin x)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x-\sin x=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore \cos x=\sin x$

이때 $0<x<2\pi$이므로

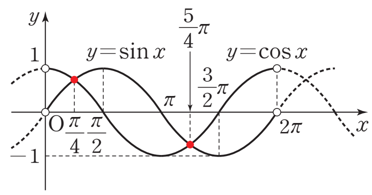
$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

따라서 모든 실근의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$

**참고**

$y=\cos x$와 $y=\sin x$의 그래프를 나타내면 다음과 같다.




## 6

$g'(x)=\frac{\{f(x)\}'(\sin x+2)-f(x)(\sin x+2)'}{(\sin x+2)^2}$

$=\frac{f'(x)(\sin x+2)-f(x)\cos x}{(\sin x+2)^2}$

이때 조건 (가)에서 $g'(x)=-g'(-x)$이므로

$g'(-\pi)=-g'(\pi)=-\frac{f'(\pi)(\sin\pi+2)-f(\pi)\cos\pi}{(\sin\pi+2)^2}$

$=-\frac{2\times 2-4\times(-1)}{2^2}=-2$

## 2주 3일 필수 체크 전략 ①

52~55쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1-1** 4 | **1-2** ④ | **2-1** 1 | **2-2** ⑤ |
| **3-1** $-\frac{\pi}{6}$ | **3-2** ④ | **4-1** ⑤ | **4-2** $\frac{1}{2}$ |

## 1-1

$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$\therefore h'(0)=f'(g(0))g'(0)=f'(-1)g'(0)$

$g'(x)=\frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}$

에서 $g'(0)=3$이고 $h'(0)=12$이므로

$12=f'(-1)\times 3$ $\quad\therefore f'(-1)=4$

## 1-2

$y'=3\{xf(x)\}^2\{xf(x)\}'=3\{xf(x)\}^2\{f(x)+xf'(x)\}$

이므로 $x=2$에서의 미분계수는

$$3\{2f(2)\}^2\{f(2)+2f'(2)\}=3\{2\times(-1)\}^2(-1+2\times1)$$
$$=3\times4\times1=12$$

## 2-1

$f(x)=\log_2(3x-1)^2=2\log_2|3x-1|$에서

$f'(x)=\{2\log_2|3x-1|\}'=\dfrac{6}{(3x-1)\ln 2}$

이때 $f'(a)=\dfrac{3}{\ln 2}$이므로

$\dfrac{6}{(3a-1)\ln 2}=\dfrac{3}{\ln 2}$, $\dfrac{6}{3a-1}=3$

$3a-1=2$ $\therefore a=1$

## 2-2

$f(x)=\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|=\ln|1+x|-\ln|1-x|$에서

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{-1}{1-x}=\dfrac{2}{1-x^2}$ $\therefore f'(0)=2$

## 3-1

$\dfrac{\pi}{3}x=y-\sin xy$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{dy}{dx}-\cos xy\times\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)$

$(1-x\cos xy)\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\pi}{3}+y\cos xy$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{\pi}{3}+y\cos xy}{1-x\cos xy}$ (단, $1-x\cos xy\neq0$)

따라서 점 $(3, \pi)$에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$\dfrac{\frac{\pi}{3}+\pi\cos 3\pi}{1-3\cos 3\pi}=\dfrac{\frac{\pi}{3}-\pi}{1+3}=\dfrac{-\frac{2}{3}\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{6}$

## 3-2

$2x^2-3y^3-axy+b=0$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$4x-9y^2\dfrac{dy}{dx}-\left(ay+ax\dfrac{dy}{dx}\right)=0$, $(ax+9y^2)\dfrac{dy}{dx}=4x-ay$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x-ay}{ax+9y^2}$ (단, $ax+9y^2\neq0$)

점 $(0, -1)$에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{3}$이므로

$\dfrac{a}{9}=\dfrac{1}{3}$ $\therefore a=3$

또 곡선 $2x^2-3y^3-axy+b=0$이 점 $(0, -1)$을 지나므로

$3+b=0$ $\therefore b=-3$

$\therefore ab=-9$

## 4-1

$x=y\sqrt{y+1}$의 양변을 $y$에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=\sqrt{y+1}+y\times\dfrac{1}{2\sqrt{y+1}}=\dfrac{3y+2}{2\sqrt{y+1}}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{2\sqrt{y+1}}{3y+2}$

따라서 $y=2$일 때의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$\dfrac{2\sqrt{2+1}}{3\times2+2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

## 4-2

$g(1)=\theta$라 하면 $f(\theta)=1$이므로

$\tan\theta=1$ $\therefore \theta=\dfrac{\pi}{4}$ $\left(\because -\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 $g(1)=\dfrac{\pi}{4}$이고 $f'(x)=\sec^2 x$이므로

$g'(1)=\dfrac{1}{f'(g(1))}=\dfrac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1}{\sec^2\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{2}$

## 2주 3일 필수 체크 전략 ②

56, 57쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** ② | **2** ② | **3** ③ | **4** ② |
| **5** ② | **6** ③ | | |

## 1

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)+2}{x-2}=-2$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다. 즉,

$\lim\limits_{x\to2}\{f(x)+2\}=0$ $\therefore f(2)=-2$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

이므로 $f'(2)=-2$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-2}{x-1}=2$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다. 즉,

$\lim\limits_{x\to1}\{g(x)-2\}=0$ $\therefore g(1)=2$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$

이므로 $g'(1)=2$

$y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서 $y'=f'(g(x))g'(x)$이므로
$x=1$에서의 미분계수는
$f'(g(1))g'(1)=f'(2)g'(1)=-2\times 2=-4$

**2**

$f'(x)=\dfrac{(x^2+x)'}{x^2+x}=\dfrac{2x+1}{x^2+x}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(n)}{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

참고 부분분수를 이용한 급수의 합

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ $(A\neq B)$을 이용하여 변형한 후 부분합 $S_n$을 구한다.

**3**

$f(x)=x^{\sin x}$의 양변에 자연로그를 취하면
$\ln f(x)=\ln x^{\sin x}=\sin x\times\ln x$
양변을 $x$에 대하여 미분하면
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\cos x\times\ln x+\sin x\times\dfrac{1}{x}$이므로

$$f'(x)=f(x)\left(\cos x\times\ln x+\sin x\times\frac{1}{x}\right)$$
$$=x^{\sin x}\left(\cos x\times\ln x+\sin x\times\frac{1}{x}\right)$$
$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sin\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2}\times\ln\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\times\frac{2}{\pi}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}\times\frac{2}{\pi}=1$$

**4**

$\dfrac{dx}{dt}=1+2t^{-2}=1+\dfrac{2}{t^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=2t-2at^{-3}=2t-\dfrac{2a}{t^3}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-\frac{2a}{t^3}}{1+\frac{2}{t^2}}=\frac{2t^4-2a}{t^3+2t}$$

$t=1$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은 $-\dfrac{2}{3}$이므로

$\dfrac{2-2a}{1+2}=-\dfrac{2}{3}$, $2-2a=-2$ $\quad\therefore a=2$

**5**

$G(4)=a$라 하면 $F(a)=4$
$F(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서
$F(a)=g(f(a))=4$
이때 $g(3)=4$이므로 $f(a)=3$이고
$f(5)=3$이므로 $a=5$
따라서 $G(4)=5$이고, $F'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로
$F'(5)=g'(f(5))f'(5)=g'(3)f'(5)$
$=12\times\dfrac{1}{4}=3$

$\therefore G'(4)=\dfrac{1}{F'(G(4))}=\dfrac{1}{F'(5)}=\dfrac{1}{3}$

**6**

ㄱ. $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\times\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{x^2+1}$

$\therefore f'(2)=\dfrac{2}{2^2+1}=\dfrac{2}{5}$ (참)

ㄴ. $f''(x)=\dfrac{(x^2+1)-x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$\therefore (x^2+1)f''(x)+xf'(x)$
$$=(x^2+1)\times\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}+x\times\frac{x}{x^2+1}$$
$$=\frac{-x^2+1}{x^2+1}+\frac{x^2}{x^2+1}$$
$$=\frac{1}{x^2+1}\ (\text{거짓})$$

ㄷ. $$\lim_{x\to\infty}\frac{xf''(x)}{f'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x(-x^2+1)}{(x^2+1)^2}}{\frac{x}{x^2+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+1}{x^2+1}$$
$$=-1\ (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

## 2주 4일 교과서 대표 전략 ①

58~61쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** ④ | **2** ⑤ | **3** $-5$ | **4** ③ |
| **5** ② | **6** ③ | **7** $-1$ | **8** ② |
| **9** $2+\sqrt{2}$ | **10** ④ | **11** ⑤ | **12** ② |
| **13** 2 | **14** ⑤ | **15** ⑤ | **16** ③ |

## 1

$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{3}$, $\cos\alpha-\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 양변을 각각 제곱하면

$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{9}$ …… ㉠

$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{3}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=\frac{4}{9}$

$2-2\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{9}$, $2\cos(\alpha+\beta)=\frac{14}{9}$

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\frac{7}{9}$

## 2

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{a}{3}$, $\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{3}$

$$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{a}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{a}{2}$$

즉, $\frac{a}{2}=1$이므로 $a=2$

## 3

$$\begin{aligned}y&=2\sin x+\cos x\\&=\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{5}}\cos x\right)\\&=\sqrt{5}\sin(x+\alpha)\ \left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\end{aligned}$$

이때 $-1\le\sin(x+\alpha)\le1$이므로

$-\sqrt{5}\le\sqrt{5}\sin(x+\alpha)\le\sqrt{5}$

따라서 $M=\sqrt{5}$, $m=-\sqrt{5}$이므로

$Mm=-5$

## 4

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$, $1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

이때 $2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$이므로

$1-\sin 2\theta=\frac{1}{4}$ $\qquad\therefore \sin 2\theta=\frac{3}{4}$

따라서 $p=3$, $q=4$이므로

$p+q=7$

**참고** 배각의 공식

삼각함수의 덧셈정리 중 $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\tan(\alpha+\beta)$에 $\beta$ 대신 $\alpha$를 대입하면 다음 공식을 얻을 수 있다.

① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

② $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

③ $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

## 5

$x-\pi=t$로 놓으면 $x\to\pi$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\tan 2x}{x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{\tan 2(\pi+t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\tan(2\pi+2t)}{t}$$

이때 $y=\tan x$의 주기는 $\pi$이므로 $\tan(2\pi+2t)=\tan 2t$

따라서 구하는 값은

$$\lim_{t\to0}\frac{\tan 2t}{t}=\lim_{t\to0}\left(\frac{\tan 2t}{2t}\times2\right)=1\times2=2$$

## 6

함수 $f(x)$가 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로 $\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{\tan x}=a$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{\tan x}&=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{x}{\tan x}\times3\right)\\&=1\times1\times3=3\end{aligned}$$

이므로 $a=3$

## 7

$g(x)=\sin x$로 놓으면

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{h\to0}\frac{x\sin(x+h)-x\sin x}{h}\\&=x\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\&=xg'(x)=x\cos x\end{aligned}$$

따라서 $f'(x)=\cos x-x\sin x$이므로

$f'(\pi)=\cos\pi-\pi\sin\pi=-1$

## 8

$f(0)=\frac{2}{1+1}=1$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

$f(x)=\frac{2}{e^x+1}$에서 $f'(x)=-\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$이므로

$f'(0)=-\frac{1}{2}$

## 9

$$f(x)=\frac{1+\csc x}{\cot x}=\frac{1+\frac{1}{\sin x}}{\frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$=\frac{\sin x+1}{\cos x}=\tan x+\sec x$$

이므로 $f'(x)=\sec^2 x+\sec x\tan x=\sec x(\sec x+\tan x)$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sec\frac{\pi}{4}\left(\sec\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{4}\right)=2+\sqrt{2}$$

## 10

$f(g(x))=h(x)$로 놓으면 $h(1)=f(g(1))=f(1)=3$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(g(x))-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)$$

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로 구하는 값은

$h'(1)=f'(g(1))g'(1)=f'(1)g'(1)=2\times5=10$

## 11

$g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$에서

$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$

$f(x)=e^{3x-1}$에서 $f'(x)=e^{3x-1}\times(3x-1)'=3e^{3x-1}$이므로

$$g'\left(\frac{1}{3}\right)=f'\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)f'\left(\frac{1}{3}\right)=f'(1)f'\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$=3e^2\times3=9e^2$$

## 12

$$f'(x)=3\{\ln(x+1)+a\}^2\times\frac{1}{x+1}=\frac{3\{\ln(x+1)+a\}^2}{x+1}$$

이므로

$f'(0)=3(\ln 1+a)^2=3a^2$

이때 $f'(0)=12$이므로

$3a^2=12,\ a^2=4 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$

## 13

$\dfrac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=2\sec\theta\times\sec\theta\tan\theta=2\sec^2\theta\tan\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{2\sec^2\theta\tan\theta}{\sec^2\theta}=2\tan\theta$$

$x=1$, $y=2$일 때 $\tan\theta=1$, $\sec^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}=2$에서

$$\theta=\frac{\pi}{4}\left(\because -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

따라서 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는

$$2\tan\frac{\pi}{4}=2\times1=2$$

## 14

$ax+\sqrt{y}-5x+b=0$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$a+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}-5=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=(10-2a)\sqrt{y}$$

점 $(1, 1)$에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값이 6이므로

$10-2a=6 \qquad \therefore a=2$

또 곡선 $ax+\sqrt{y}-5x+b=0$이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$2+1-5+b=0 \qquad \therefore b=2$

$\therefore ab=4$

## 15

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\frac{1}{4}$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다. 즉,

$\displaystyle\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0 \qquad \therefore f(1)=2$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)\text{이므로}$$

$f'(1)=\dfrac{1}{4}$

이때 $f(1)=2$에서 $g(2)=1$이므로

$$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(1)}=4$$

## 16

$f'(x)=e^{ax+b}+xe^{ax+b}(ax+b)'=(ax+1)e^{ax+b}$

$f'(0)=\dfrac{1}{e}$이므로 $e^b=\dfrac{1}{e} \qquad \therefore b=-1$

$f''(x)=ae^{ax+b}+(ax+1)e^{ax+b}(ax+b)'=(2a+a^2x)e^{ax+b}$

$f''(0)=\dfrac{2}{e}$이므로 $2ae^b=\dfrac{2}{e}$, $2a=2 \qquad \therefore a=1$

따라서 $f(x)=xe^{x-1}$이므로 $f(1)=e^0=1$

## 2주 4일 교과서 대표 전략 ②

62, 63쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 ⑤ | 2 ② | 3 ③ | 4 ④ |
| 5 ④ | 6 ② | 7 ① | 8 ① |

## 1

$\tan(\alpha-\beta)=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$에서

$$\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=1$$

즉, $\tan\alpha-\tan\beta=1+\tan\alpha\tan\beta$이므로

$(1+\tan\alpha)(1-\tan\beta)=1-\tan\beta+\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta$
$=1+(\tan\alpha-\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta)$
$=1+1=2$

**2**

삼각형 OAH에서 $\overline{AH}=\sin\theta$이고, $\overline{OH}=\cos\theta$이므로

$\overline{BH}=1-\overline{OH}=1-\cos\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{AH}\times\overline{BH}}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^3(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta(1-\cos^2\theta)}{\theta^3(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^3\theta}{\theta^3(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\times\frac{1}{1+\cos\theta}\right\}$$
$$=1^3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

**3**

$\sin 2x=2\sin x-2\sin^2 x$에서

$2\sin x\cos x=2\sin x-2\sin^2 x$, $\sin x(\sin x+\cos x-1)=0$

$\therefore \sin x=0$ 또는 $\sin x+\cos x=1$

(i) $\sin x=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pi$ ($\because 0\le x<2\pi$)

(ii) $\sin x+\cos x=1$에서

$\sqrt{2}\left(\sin x\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1$, $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\therefore \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

이때 $0\le x<2\pi$이므로 $\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$

따라서 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$이므로

$x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

(i), (ii)에서 서로 다른 모든 해의 합은

$0+\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$

**4**

$$g'(x)=\frac{3-xf(x)-x\{-f(x)-xf'(x)\}}{\{3-xf(x)\}^2}=\frac{3+x^2f'(x)}{\{3-xf(x)\}^2}$$

이때 $f(2)=3\times2-5=1$, $f'(2)=3$이므로

$$g'(2)=\frac{3+2^2\times f'(2)}{\{3-2\times f(2)\}^2}=\frac{3+4\times3}{(3-2\times1)^2}=15$$

**5**

$$\frac{\csc\theta}{\sec\theta-\tan\theta}+\frac{\csc\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$$
$$=\frac{\csc\theta(\sec\theta+\tan\theta)+\csc\theta(\sec\theta-\tan\theta)}{(\sec\theta-\tan\theta)(\sec\theta+\tan\theta)}$$
$$=\frac{2\csc\theta\sec\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}=2\csc\theta\sec\theta$$
$$=\frac{2}{\sin\theta\cos\theta}$$

이때 $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{1}{2}$에서 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ $\qquad\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

이므로

$$(\text{주어진 식})=\frac{2}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{2}{\frac{3}{8}}=\frac{16}{3}$$

**6**

주어진 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\cos(x+y)\times\left(1+\frac{dy}{dx}\right)+\cos(x-y)\times\left(1-\frac{dy}{dx}\right)=0$$
$$\frac{dy}{dx}\{\cos(x+y)-\cos(x-y)\}=-\cos(x+y)-\cos(x-y)$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{\cos(x+y)-\cos(x-y)}$$

따라서 점 $\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}\right)$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$-\frac{\cos\pi+\cos\frac{\pi}{2}}{\cos\pi-\cos\frac{\pi}{2}}=-1$$

**7**

$g(e)=a$ ($a$는 상수)라 하면 $f(a)=e$이므로

$f(a)=e^{\tan a}=e$에서 $\tan a=1$

$\therefore a=\frac{\pi}{4}$ $\left(\because -\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}\right)$

즉, $g(e)=\frac{\pi}{4}$에서 $4g(e)=\pi$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{4g(e+h)-\pi}{4h}=\lim_{h\to0}\frac{4g(e+h)-4g(e)}{4h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{g(e+h)-g(e)}{h}=g'(e)$$

이때 $f'(x)=e^{\tan x}(\tan x)'=\sec^2x\times e^{\tan x}$이므로

$$g'(e)=\frac{1}{f'(g(e))}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$=\frac{1}{(\sqrt{2})^2\times e}=\frac{1}{2e}$$

**8**

조건 (가)에서 $f(0)=0$ $\quad\therefore b+c=0$ ······ ㉠

또 $f'(x)=a\cos x-b\sin x$이고 $f'(0)=2$이므로 $a=2$

조건 (나)에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다. 즉,

$\lim_{x\to0}\{f'(f(x))-2\}=0$ $\quad\therefore f'(f(0))=2$

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(f(x))-2}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f'(f(x))-f'(f(0))}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f'(f(x))-f'(f(0))}{f(x)-f(0)}\times\frac{f(x)-f(0)}{x}\right\}$$
$$=f''(f(0))\times f'(0)$$
$$=2f''(0)\ (\because f(0)=0,\ f'(0)=2)$$

이므로 $2f''(0)=-6$ $\quad\therefore f''(0)=-3$

이때 $f''(x)=-a\sin x-b\cos x$이므로 $b=3$

$b=3$을 ㉠에 대입하면 $c=-3$

$\therefore abc=2\times3\times(-3)=-18$

## 2주 누구나 합격 전략

64, 65쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 ③ | 2 ④ | 3 ① | 4 ① |
| 5 ② | 6 ④ | 7 ③ | 8 ③ |
| 9 ⑤ | 10 ② | | |

**1**

$$\sin\frac{5}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}$$
$$=\frac{\sqrt2+\sqrt6}{4}$$

**2**

$$y=\sqrt3\sin x+\sqrt6\cos x-2$$
$$=3\left(\frac{\sqrt3}{3}\sin x+\frac{\sqrt6}{3}\cos x\right)-2$$
$$=3\sin(x+\alpha)-2\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{\sqrt6}{3},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt3}{3}\right)$$

이때 $-1\le\sin(x+\alpha)\le1$이므로

$-5\le3\sin(x+\alpha)-2\le1$

따라서 구하는 최댓값은 1이다.

**3**

두 직선이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면

$\tan\alpha=-\frac{2}{3}$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$

$$\therefore\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$
$$=\left|\frac{-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}}\right|=\left|\frac{-\frac{7}{6}}{\frac{2}{3}}\right|=\frac{7}{4}$$

**4**

$\lim_{x\to0}\frac{3^x-a}{2\tan3x}=b\ln3$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다. 즉,

$\lim_{x\to0}(3^x-a)=0$, $1-a=0$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{2\tan3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{3^x-1}{x}\times\frac{3x}{\tan3x}\times\frac{1}{6}\right)$$
$$=\ln3\times1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\ln3$$

따라서 $b=\frac{1}{6}$이므로 $ab=\frac{1}{6}$

**5**

$f(\pi)=\pi\cos\pi=-\pi$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)+\pi}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)$$

$f'(x)=\cos x+x\times(-\sin x)=\cos x-x\sin x$

$\therefore f'(\pi)=\cos\pi-\pi\sin\pi=-1$

**6**

$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$f'(x)=\frac{1}{x+1}$, $g'(x)=2x$이고

$g(1)=1$, $f'(1)=\frac{1}{2}$, $g'(1)=2$이므로

$h'(1)=f'(g(1))g'(1)=f'(1)g'(1)=\frac{1}{2}\times2=1$

**7**

$\frac{dx}{dt}=-2\sin t$, $\frac{dy}{dt}=-\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\cos t}{-2\sin t}=\frac{\cos t}{2\sin t}=\frac{1}{2}\cot t$$

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt3}{2}$$

**8**

$x^2+2xy+3=0$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$2x+\left(2y+2x\frac{dy}{dx}\right)=0,\ 2x\frac{dy}{dx}=-2x-2y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x+y}{x}$$

따라서 점 $(-1, 2)$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$-\frac{-1+2}{-1}=1$$

**9**

$f(2)=-1$에서 $g(-1)=2$이므로

$$g'(-1)=\frac{1}{f'(g(-1))}=\frac{1}{f'(2)}=3$$

**10**

$f(x)=\sqrt{x-1}=(x-1)^{\frac{1}{2}}$에서 $f'(x)=\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)(x-1)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$$\therefore f''(2)=-\frac{1}{4}$$

## 2주 창의·융합·코딩 전략

66~69쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 (나), (다) | 2 다영 | 3 ④ | 4 ① |
| 5 ① | 6 ④ | 7 ② | 8 $\frac{200(e^{-2}-1)}{e^2(1+e^{-2})^3}$ |

**1**

(가) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

(나) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

(다) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{1+(-\sqrt{3})}{1-1\times(-\sqrt{3})}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(1-\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\frac{4-2\sqrt{3}}{-2}$$

$$=-2+\sqrt{3}$$

(라) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \sec(\alpha-\beta)=\frac{1}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$

$$=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

따라서 주어진 열쇠로 열 수 있는 칸은 (나), (다)이다.

**2**

다영: $\lim_{x\to0+}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to0+}\frac{\sin x}{x}=1$,

$$\lim_{x\to0-}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to0-}\frac{\sin x}{-x}=-1$$

따라서 $\frac{\sin x}{|x|}$는 $x=0$에서 수렴하지 않는다. (거짓)

우진: $x\neq0$일 때, $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq1$이므로 $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leq|x|$

$$-|x|\leq x\sin\frac{1}{x}\leq|x|$$

이때 $\lim_{x\to0}(-|x|)=\lim_{x\to0}|x|=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$

따라서 $x\sin\frac{1}{x}$은 $x=0$에서 수렴한다. (참)

서정: $x\neq\frac{\pi}{4}$일 때

$$\frac{1-\tan^2 x}{\cos x-\sin x}=\frac{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos x-\sin x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{(\cos x-\sin x)\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos x+\sin x}{\cos^2 x}$$

이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan^2 x}{\cos x-\sin x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=2\sqrt{2}$$

따라서 $\frac{1-\tan^2 x}{\cos x-\sin x}$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 수렴한다. (참)

즉, 옳지 않은 말을 한 사람은 다영이다.

**3**

$h'(t)=0.2\times\frac{\pi}{2}\times\sin\frac{\pi}{2}t=0.1\pi\sin\frac{\pi}{2}t$

물의 높이가 빠르게 높아지는 때는 $h'(t)$가 양수이고 최댓값을 가질 때이므로 만족시키는 $t$의 값은 $1, 5, 9, y, 4n-3$ ($n$은 자연수)이다.

따라서 워터파크가 개장하는 오전 7시부터 오후 9시 사이에 방송하는 시간은 오전 8시, 낮 12시, 오후 4시, 오후 8시이므로 하루에 해야 할 안내 방송의 횟수는 4이다.

**4**

소금물에 녹아 있는 소금의 양은 $400\times\frac{10}{100}=40\ (\mathrm{g})$

이때 1초당 1 g의 물이 끓으므로 $t$초 후의 소금물의 양은 $(400-t)$ g이고 $t$초 후의 소금물의 농도를 $f(t)$ %라 하면

$f(t)=\frac{40}{400-t}\times100=\frac{4000}{400-t}$

$\therefore f'(t)=\frac{4000}{(400-t)^2}$

따라서 200초 후의 소금물의 농도의 초당 순간변화율은

$f'(200)=\frac{4000}{(400-200)^2}=\frac{1}{10}\ (\%/\mathrm{s})$

**5**

나무와 그림자가 이루는 각이 직각이므로

$\tan\theta=\frac{20}{y}$에서 $y=\frac{20}{\tan\theta}=20\cot\theta$

$\therefore y'=-20\csc^2\theta$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 나무의 그림자의 길이의 순간변화율은

$-20\csc^2\frac{\pi}{4}=-20\times\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}}=-40$

**6**

$\frac{dx}{dt}=20,\ \frac{dy}{dt}=-10t$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-10t}{20}=-\frac{t}{2}$

$y=0$일 때 $t$의 값은 $-5t^2+5=0$

$(t+1)(t-1)=0 \qquad \therefore t=1\ (\because t>0)$

따라서 돌이 물에 닿는 시간, 즉 $t=1$일 때

$\frac{dy}{dx}$의 값은 $-\frac{1}{2}$

**7**

$(x-80)y^2=16000$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$y^2+(x-80)\times2y\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{2(x-80)}$

$x=90$을 주어진 방정식에 대입하면

$10\times y^2=16000 \qquad \therefore y=40\ (\because y>0)$

따라서 화면의 가로의 길이가 90 cm일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은

$-\frac{40}{2(90-80)}=-2$

**8**

$f'(t)=-\frac{200\times(-e^{-t})}{(1+e^{-t})^2}=\frac{200e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$

이므로

$$f''(t)=\frac{-200e^{-t}(1+e^{-t})^2-200e^{-t}\times2(1+e^{-t})(-e^{-t})}{(1+e^{-t})^4}$$
$$=\frac{-200e^{-t}(1+e^{-t})-200e^{-t}\times(-2e^{-t})}{(1+e^{-t})^3}$$
$$=\frac{200e^{-t}(e^{-t}-1)}{(1+e^{-t})^3}$$

$\therefore f''(2)=\frac{200e^{-2}(e^{-2}-1)}{(1+e^{-2})^3}=\frac{200(e^{-2}-1)}{e^2(1+e^{-2})^3}$

## 신유형·신경향·서술형 전략

72~75쪽

**1** 윤주 **2** ② **3** 1

**4** (가) 미분가능 (나) $x\ln2$ (다) $c\ln2$

**5** (1) $\frac{1}{2}\theta$ (2) $\frac{1}{2}\theta\cos^2\theta$ (3) $\frac{1}{2}$

**6** 풀이 참조 **7** ③, 풀이 참조 **8** ③

**1**

승호: [반례] $\{a_n\}$ : 2, 3, 2, 3, $\cdots$이고 $b_n=4$이면 $1<a_n<b_n$이고 수열 $\{b_n\}$이 수렴하지만 수열 $\{a_n\}$은 진동한다.

윤주: 수열 $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ ($\beta$는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)-b_n\}=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}b_n$

$=1-\beta$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 $1-\beta$로 수렴한다.

동욱: [반례] $a_n=n,\ b_n=n-\frac{1}{n},\ c_n=n+\frac{1}{n}$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}(c_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

따라서 수열 $\{a_n\}$이 수렴하는 조건을 말한 학생은 윤주이다.

## 2

지워진 숫자를 $k$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-kn}-n+k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-kn}+(n-k)}{\{\sqrt{n^2-kn}-(n-k)\}\{\sqrt{n^2-kn}+(n-k)\}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-kn}+n-k}{n^2-kn-(n-k)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-kn}+n-k}{kn-k^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{k}{n}}+1-\frac{k}{n}}{k-\frac{k^2}{n}}=\frac{2}{k}$$

따라서 $\frac{2}{k}=1$이므로 $k=2$

## 3

(i) 1을 뽑았을 때, $\sum_{n=1}^{\infty}1^n$은 양의 무한대로 발산하므로 부등식을 만족시키지 않는다. …… [30 %]

(ii) 2를 뽑았을 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$이므로 부등식을 만족시키지 않는다. …… [30 %]

(iii) 3, 4를 뽑았을 때

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}<1$$

이므로 부등식을 만족시킨다. …… [30 %]

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $(3, 4)$의 1이다. …… [10 %]

## 4

$x>0$일 때, 함수 $f(x)=\log_2 x$가 닫힌구간 $[x, x+1]$에서 연속이고 열린구간 $(x, x+1)$에서 $\boxed{\text{(가) 미분가능}}$하므로

$$\frac{\log_2(x+1)-\log_2 x}{(x+1)-x}=f'(c)$$

인 $c$가 열린구간 $(x, x+1)$에서 적어도 하나 존재한다.

이때 $x<c<x+1$이므로 $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$에서

$$\frac{1}{(x+1)\ln 2}<\frac{1}{c\ln 2}<\frac{1}{x\ln 2}$$

한편 $f(x)=\log_2 x$에서 $f'(x)=\frac{1}{\boxed{\text{(나) } x\ln 2}}$이므로

$$f'(c)=\frac{1}{\boxed{\text{(다) } c\ln 2}}$$

따라서 $\frac{1}{(x+1)\ln 2}<\log_2(x+1)-\log_2 x<\frac{1}{x\ln 2}$이 성립한다.

∴ (가) 미분가능 (나) $x\ln 2$ (다) $c\ln 2$

## 5

(1) 반지름의 길이가 1, 중심각의 크기가 $\theta$이므로 부채꼴 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\theta$

(2) 직각삼각형 OPB에서 $\overline{OP}=\cos\theta$이므로 부채꼴 OPQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\theta\cos^2\theta$

(3) $S=$(부채꼴 OAB의 넓이)$-$(부채꼴 OPQ의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{2}\theta\cos^2\theta=\frac{1}{2}\theta(1-\cos^2\theta)=\frac{1}{2}\theta\sin^2\theta$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\theta\sin^2\theta}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{2\theta^2}=\frac{1}{2}$$

## 6

민철이의 방법

$$y'=\frac{1\times(x+2)^2-(x-1)\times2(x+2)}{(x+2)^4}$$
$$=\frac{x+2-2(x-1)}{(x+2)^3}=\frac{-x+4}{(x+2)^3}$$

성은이의 방법

주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|y|=\ln\left|\frac{x-1}{(x+2)^2}\right|=\ln|x-1|-2\ln|x+2|$$

위의 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2}$이므로

$$y'=y\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2}\right)=\frac{x-1}{(x+2)^2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2}\right)$$
$$=\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{2(x-1)}{(x+2)^3}=\frac{-x+4}{(x+2)^3}$$

## 7

$x=e^{t-2}$에서 $\ln x=t-2$이므로

$t=\ln x+2$ …… ㉠

마찬가지로 $y=e^{2t-3}$에서 $\ln y=2t-3$이므로

$t=\frac{\ln y+3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 $t$를 소거하면

$\ln x+2=\frac{\ln y+3}{2}$, $\ln y=2\ln x+1$

$\therefore \ln y=\ln ex^2$

즉, $y=ex^2\ (x>0, y>0)$이므로 $\frac{dy}{dx}=2ex$

따라서 처음으로 잘못된 부분은 ③이다.

## 8

ㄱ. 피타고라스 정리에 의하여

$x^2+y^2=13^2=169$ (참)

ㄴ. $x^2+y^2=169$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$에서 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ (거짓)

ㄷ. $x^2+y^2=169$에서 $x=5$를 대입하면

$5^2+y^2=169,\ y^2=144 \qquad \therefore y=12\ (\because y>0)$

따라서 $x=5$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은 $-\dfrac{5}{12}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

참고

$x^2+y^2=169$의 양변을 $y$에 대하여 미분하면

$2x\dfrac{dx}{dy}+2y=0$에서 $\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{y}{x}$

## 적중 예상 전략 1회

76~79쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 ① | 2 ② | 3 ④ | 4 ① |
| 5 ③ | 6 ① | 7 ④ | 8 ② |
| 9 ③ | 10 ② | 11 ② | 12 ④ |
| 13 $\frac{1}{2}$ | 14 $3\pi$ | 15 3 | 16 $-2$ |

## 1

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$라 하면

$a_3=a+2d=11$ …… ㉠

$a_7=a+6d=27$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ d=4$

따라서 $a_n=3+(n-1)\times4=4n-1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{4n+3}-\sqrt{4n-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{4n+3}-\sqrt{4n-1})(\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n-1})}{\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+\sqrt{4-\frac{1}{n}}}=1$$

## 2

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ($\alpha$는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha$

이차방정식 $x^2-2a_nx+2a_{n+1}-1=0$이 중근을 가지므로 판별식을 $D$라 하면

$\dfrac{D}{4}=a_n^{\ 2}-(2a_{n+1}-1)=a_n^{\ 2}-2a_{n+1}+1=0$

즉, $\lim_{n\to\infty}(a_n^{\ 2}-2a_{n+1}+1)=0$이므로

$\alpha^2-2\alpha+1=0,\ (\alpha-1)^2=0 \qquad \therefore \alpha=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_{2n}+2a_n)=\alpha+2\alpha=3\alpha=3$

참고

수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ($\alpha$는 실수)이면

$\lim_{n\to\infty}a_{n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{n+2}=\cdots=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha$

## 3

$\log_2(S_n+1)=n$에서 $S_n+1=2^n \qquad \therefore S_n=2^n-1$

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$\quad=2^n-1-(2^{n-1}-1)$

$\quad=2^{n-1}\ (n\ge2)$ …… ㉠

$a_1=S_1=2-1=1$ …… ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2^{n-1}$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$은 첫째항이 1, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

## 4

주어진 함수에 $x=-1,\ x=\dfrac{1}{2},\ x=2$를 각각 대입하면

$$f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n+1}+5\times(-1)}{(-1)^{2n}+2}$$

$$=\frac{-1-5}{1+2}=-2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}+5\times\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+2}=\frac{\frac{5}{2}}{2}=\frac{5}{4}$$

$$f(2)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}+5\times2}{2^{2n}+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{10}{2^{2n}}}{1+\frac{2}{2^{2n}}}=2$$

$$\therefore f(-1)f\left(\frac{1}{2}\right)f(2)=-2\times\frac{5}{4}\times2=-5$$

## 5

일반항 $a_n$은 $0\le a_n\le 2$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$를 만족시키는 정수이므로

$\frac{3}{4}=a_1+\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots$에서 $a_1=0$

$\frac{3}{4}=\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{3^2}+\frac{a_4}{3^3}+\cdots$에서 양변에 3을 곱하면

$\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4}=a_2+\frac{a_3}{3}+\frac{a_4}{3^2}+\cdots$이므로 $a_2=2$

$\frac{1}{4}=\frac{a_3}{3}+\frac{a_4}{3^2}+\frac{a_5}{3^3}+\cdots$에서 양변에 3을 곱하면

$\frac{3}{4}=a_3+\frac{a_4}{3}+\frac{a_5}{3^2}+\cdots$이므로 $a_3=0$

$\vdots$

따라서 $\{a_n\}$은 $0, 2, 0, 2, 0, 2, \cdots$가 반복되므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{0}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{0}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{2}{3}$$

## 6

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2a_n^{\ 2}+1}{a_n^{\ 3}}-3\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2a_n^{\ 2}+1}{a_n^{\ 3}}-3\right)=0$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n^{\ 2}+1}{a_n^{\ 3}}=3$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n\ne 0$이어야 하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=k$ $(k>0)$로 놓으면

$\frac{2k^2+1}{k^3}-3=0$, $3k^3-2k^2-1=0$

$(k-1)(3k^2+k+1)=0$

이때 $k>0$에서 $k=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$

**참고**

각 항이 양수이지만 0에 수렴하는 수열 $\{a_n\}$이 존재한다.

$a_n=\frac{1}{n}$일 때 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n>0$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

## 7

다항식 $f(x)$를 $4x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 $f\left(\frac{3}{4}\right)$이므로

$$a_n=f\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^n+2\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n+2\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}+2\times\frac{1}{1-\frac{3}{4}}$$

$$=3+2\times 4=11$$

## 8

직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$의 기울기 $\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan 30^\circ$이므로

$\angle POP_1=\angle PP_1P_2=\angle P_1P_2P_3=\cdots=30^\circ$이다. 즉,

$\overline{PP_1}=\overline{OP}\times\sin 30^\circ=2\times\frac{1}{2}=1$

$\overline{P_1P_2}=\overline{PP_1}\times\cos 30^\circ=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{P_2P_3}=\overline{P_1P_2}\times\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\vdots$

$$\therefore \overline{PP_1}+\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\cdots=1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{2-\sqrt{3}}$$

$$=4+2\sqrt{3}$$

## 9

$x-1=t$로 놓으면 $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$\lim_{x\to 1}(x-1)f(x)=\lim_{t\to 0}tf(1+t)=2$

$$\therefore \lim_{x\to 1}f(x)\log_2 x=\lim_{t\to 0}f(1+t)\log_2(1+t)$$

$$=\lim_{t\to 0}\left\{f(1+t)\times\frac{\log_2(1+t)}{t}\times t\right\}$$

$$=\lim_{t\to 0}tf(1+t)\times\lim_{t\to 0}\frac{\log_2(1+t)}{t}$$

$$=2\times\frac{1}{\ln 2}=\frac{2}{\ln 2}$$

**다른 풀이**

$$\lim_{x\to 1}f(x)\log_2 x=\lim_{x\to 1}\left\{(x-1)f(x)\times\frac{\log_2 x}{x-1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x-1)f(x)\times\lim_{x\to 1}\frac{\log_2 x-\log_2 1}{x-1}$$

$g(x)=\log_2 x$라 하면 $g'(1)$을 나타낸다.

$$=2\times\frac{1}{\ln 2}=\frac{2}{\ln 2}$$

## 10

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+9)^x-a^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(a+9)^x-1+1-a^x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{(a+9)^x-1}{x}-\frac{a^x-1}{x}\right\}$$

$$=\ln(a+9)-\ln a$$

$$=\ln\frac{a+9}{a}$$

즉, $\ln\frac{a+9}{a}=2\ln 2=\ln 4$이므로

$\frac{a+9}{a}=4$, $a+9=4a$

$\therefore a=3$

## 11

$f(x)=ax^2+\ln bx$에서 $f(1)=2$이므로

$a+\ln b=2$ …… ㉠

$f'(x)=2ax+\dfrac{1}{x}$이므로

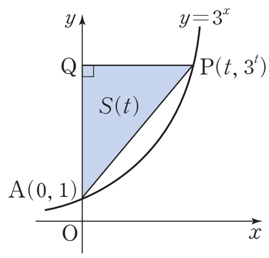
$f'(1)=2a+1=5$ $\quad\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$\ln b=0$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore a+b=3$

## 12




삼각형 APQ의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{AQ}$$
$$=\frac{1}{2}\times t\times(3^t-1)$$
$$=\frac{1}{2}t(3^t-1)$$

이므로

$$S'(t)=\frac{1}{2}\{(3^t-1)+t\times 3^t\ln 3\}$$

$$\therefore S'\left(\frac{1}{\ln 3}\right)=\frac{1}{2}\left\{\left(3^{\frac{1}{\ln 3}}-1\right)+\frac{1}{\ln 3}\times 3^{\frac{1}{\ln 3}}\ln 3\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(2\times 3^{\frac{1}{\ln 3}}-1\right)$$
$$=3^{\frac{1}{\ln 3}}-\frac{1}{2}$$
$$=e-\frac{1}{2}\left(\because \frac{1}{\ln 3}=\log_3 e\right)$$

## 13

$\dfrac{x}{n}=\dfrac{1}{x}$에서 $x^2=n$이므로

$x=\sqrt{n},\ y=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

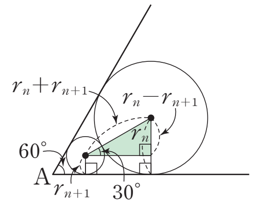
즉, 직선 $y=\dfrac{x}{n}$와 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$이 만나는 점의 좌표는 $\left(\sqrt{n},\ \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$이다. …… [30 %]

이때 점 $\left(\sqrt{n},\ \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$과 원점 사이의 거리 $a_n$은

$$a_n=\sqrt{(\sqrt{n})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}=\sqrt{n+\frac{1}{n}}$$ …… [30 %]

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n}a_n-n)=\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$$ …… [40 %]

## 14




원 $O_n$의 반지름의 길이를 $r_n$이라 하면 오른쪽 그림에서

$(r_n+r_{n+1}) : (r_n-r_{n+1})=2 : 1$

$r_n+r_{n+1}=2(r_n-r_{n+1})$

$\therefore r_{n+1}=\dfrac{1}{3}r_n$ …… [30 %]

즉, 수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이다. …… [30 %]

따라서 모든 원의 둘레의 길이의 합은

$$2\pi r_1+2\pi r_2+2\pi r_3+\cdots=2\pi+2\pi\times\frac{1}{3}+2\pi\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots$$
$$=\frac{2\pi}{1-\frac{1}{3}}=3\pi$$ …… [40 %]

## 15

$\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{f(n)}=e^{\frac{6}{n}}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{f(n)}=\ln e^{\frac{6}{n}}$에서 $f(n)\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right)=\dfrac{6}{n}$

$$\therefore f(n)=\frac{\frac{6}{n}}{\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}$$ …… [40 %]

$$\lim_{n\to\infty} f(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{n}}{\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{6}{a}\times\frac{\frac{a}{n}}{\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}\right\}$$
$$=\frac{6}{a}$$ …… [40 %]

이때 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=2$이므로 $\dfrac{6}{a}=2$

$\therefore a=3$ …… [20 %]

## 16

$|e^x-1|=\begin{cases} e^x-1 & (x\ge 0) \\ -e^x+1 & (x<0)\end{cases}$이고 $|x|=\begin{cases} x & (x\ge 0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} k(e^x-1)+2x & (x\ge 0) \\ -k(e^x-1)-2x & (x<0)\end{cases}$$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다. …… [50 %]

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는

$$f'(x)=\begin{cases} ke^x+2 & (x>0) \\ -ke^x-2 & (x<0)\end{cases}$$ …… [30 %]

$x=0$에서 미분계수가 존재하므로

$\lim\limits_{x\to 0-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)$에서

$-k-2=k+2$ $\quad\therefore k=-2$ …… [20 %]

## 적중 예상 전략 2회

80~83쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 ④ | 2 ③ | 3 ④ | 4 ⑤ |
| 5 ④ | 6 ① | 7 ③ | 8 ④ |
| 9 ⑤ | 10 ① | 11 ② | 12 ③ |
| 13 $\frac{32}{7}$ | 14 2 | 15 $\frac{8}{9}$ | 16 2 |

**1**

함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로

$g\left(\frac{4}{5}\right)=\alpha$에서 $f(\alpha)=\frac{4}{5}$, 즉 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$

$g\left(\frac{3}{5}\right)=\beta$에서 $f(\beta)=\frac{3}{5}$, 즉 $\sin\beta=\frac{3}{5}$

이때 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$에서 $\cos\alpha<0$, $\cos\beta<0$이므로

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$

$\therefore f(\alpha-\beta)=\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{3}{5}=-\frac{7}{25}$

**2**

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\sin\theta+\cos 2\theta=0$, $\sin\theta\cos 2\theta=k$이고

$\cos 2\theta=\cos(\theta+\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta$이므로

$\sin\theta+\cos 2\theta=\sin\theta+1-2\sin^2\theta=0$

$2\sin^2\theta-\sin\theta-1=0$, $(2\sin\theta+1)(\sin\theta-1)=0$

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $-1<\sin\theta<1$이므로

$\sin\theta=-\frac{1}{2}$, $\cos 2\theta=1-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

$\therefore k=\sin\theta\cos 2\theta=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

**3**

직선 $y=3x$가 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\theta_1$이므로

$\tan\theta_1=3$

점 P는 곡선 $y=4-x^2$과 직선 $y=3x$의 교점이므로

$4-x^2=3x$, $(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=1$ ($\because 0<x<2$)

즉, 점 P의 좌표는 $(1, 3)$이므로 직각삼각형 AHP에서

$\tan\theta_2=\frac{\overline{AH}}{\overline{PH}}=\frac{\overline{OA}-\overline{OH}}{\overline{PH}}=\frac{4-3}{1}=1$

$\therefore \tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$

$=\frac{3-1}{1+3\times1}=\frac{1}{2}$

**4**

$\lim_{x\to a}\frac{5^x-5}{2\sin(x-a)}=b\ln 5$에서 $x\to a$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다. 즉,

$\lim_{x\to a}(5^x-5)=0$, $5^a-5=0$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to 1}\frac{5^x-5}{2\sin(x-1)}=b\ln 5$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{5^x-5}{2\sin(x-1)}=\lim_{t\to 0}\frac{5^{t+1}-5}{2\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{5(5^t-1)}{2\sin t}$

$=\frac{5}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{5^t-1}{t}\times\frac{t}{\sin t}\right)$

$=\frac{5}{2}\times\ln 5\times 1=\frac{5}{2}\ln 5$

따라서 $b=\frac{5}{2}$이므로

$a+b=\frac{7}{2}$

**5**

$\angle BAC=\pi-5\theta$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\sin(\pi-5\theta)}{\overline{BC}}=\frac{\sin 3\theta}{\overline{AB}}$

즉, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\sin 3\theta}{\sin(\pi-5\theta)}=\frac{\sin 3\theta}{\sin 5\theta}$이므로

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin 3\theta}{\sin 5\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin 3\theta}{3\theta}\times\frac{5\theta}{\sin 5\theta}\times\frac{3}{5}\right)$

$=1\times1\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$

**6**

$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-h}$

$=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

이때 $f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$이므로

$2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\times(-1)=-2$

**다른 풀이**

$\sin 2x=\sin(x+x)=2\sin x\cos x$임을 이용하면

$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$이므로 $f'(x)=\cos 2x$

$\therefore 2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\times(-1)=-2$

**7**

$g(x)=\{f(x)-1\}^3$에서

$g'(x)=3\{f(x)-1\}^2\times f'(x)$

$f(x)=\sqrt{x^2+3}$에서 $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

이므로

$f(1)=\sqrt{1^2+3}=2$, $f'(1)=\frac{1}{\sqrt{1^2+3}}=\frac{1}{2}$

$\therefore g'(1)=3\{f(1)-1\}^2\times f'(1)$

$=3\times(2-1)^2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

**8**

$f(x)=\frac{(x-1)^2\sqrt{x+2}}{x+4}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(x-1)^2\sqrt{x+2}}{x+4}\right|$

$=\ln\frac{|(x-1)^2\sqrt{x+2}|}{|x+4|}$

$=2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+2|-\ln|x+4|$

위의 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{2(x+2)}-\frac{1}{x+4}$

$\therefore g(0)=\frac{f'(0)}{f(0)}=-2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-2$

참고

로그미분법에서 로그의 진수는 양수이어야 하므로 먼저 식의 양변에 절댓값을 취한 후 로그를 취해야 한다.

이때 양변이 양수이면 절댓값을 취하지 않아도 된다.

**9**

$\frac{dx}{dt}=1-\cos t$, $\frac{dy}{dt}=3t^2$이므로

$$\lim_{t\to0}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\lim_{t\to0}\frac{3t^2}{1-\cos t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{3t^2(1+\cos t)}{(1-\cos t)(1+\cos t)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{3t^2(1+\cos t)}{1-\cos^2 t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{3t^2(1+\cos t)}{\sin^2 t}$$

$$=\lim_{t\to0}\left\{\left(\frac{t}{\sin t}\right)^2\times3(1+\cos t)\right\}$$

$=1\times3\times2=6$

**10**

$4x^2+9y^2=37$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$8x+18y\frac{dy}{dx}=0$ $\quad\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{9y}$

$x=a$, $y=b$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값이 4이므로

$-\frac{4a}{9b}=4$ $\quad\therefore a=-9b$

또 곡선 $4x^2+9y^2=37$이 점 $(a, b)$를 지나므로

$4a^2+9b^2=37$ …… ㉠

$a=-9b$를 ㉠에 대입하면

$4\times(-9b)^2+9b^2=37$, $333b^2=37$ $\quad\therefore b^2=\frac{1}{9}$

$b^2=\frac{1}{9}$을 ㉠에 대입하면

$4a^2+1=37$ $\quad\therefore a^2=9$

$\therefore a^2b^2=9\times\frac{1}{9}=1$

참고

$a^2=9$에서 $a=-3$ 또는 $a=3$

이때 $a=-9b$이므로

$a=-3$일 때 $b=\frac{1}{3}$, $a=3$일 때 $b=-\frac{1}{3}$

**11**

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x-1}=2$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-4\}=0$이므로 $f(1)=4$ $\quad\therefore g(4)=1$

이때 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$이므로

$g'(4)=\frac{1}{f'(g(4))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2}$

$\therefore g(4)g'(4)=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

참고 역함수의 미분계수

$f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고 $g(a)=b$이면 ⇨ $g'(a)=\frac{1}{f'(b)}$

**12**

$f'(x)=a\ln x+\frac{ax+b}{x}=a\ln x+a+\frac{b}{x}$

$f'(1)=5$에서 $a+b=5$ …… ㉠

$f''(x)=\frac{a}{x}+\left(-\frac{b}{x^2}\right)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}$

$f''(1)=1$에서 $a-b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$

$\therefore ab=6$

## 13

$3x+2y-4=0$에서 $y=-\frac{3}{2}x+2$

$ax-y+3=0$에서 $y=ax+3$

두 직선이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면

$\tan\alpha=-\frac{3}{2}$, $\tan\beta=a$ …… [30 %]

$\therefore \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\frac{-\frac{3}{2}-a}{1+\left(-\frac{3}{2}\right)\times a}\right|=\left|\frac{2a+3}{3a-2}\right|$ …… [30 %]

즉, $\left|\frac{2a+3}{3a-2}\right|=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{2a+3}{3a-2}=-\frac{1}{2}$ 또는 $\frac{2a+3}{3a-2}=\frac{1}{2}$

(i) $\frac{2a+3}{3a-2}=-\frac{1}{2}$에서 $2(2a+3)=-(3a-2)$

$7a=-4$ $\quad\therefore a=-\frac{4}{7}$

(ii) $\frac{2a+3}{3a-2}=\frac{1}{2}$에서 $2(2a+3)=3a-2$

$\therefore a=-8$

따라서 모든 상수 $a$의 값의 곱은

$-\frac{4}{7}\times(-8)=\frac{32}{7}$ …… [40 %]

**참고** 두 직선이 이루는 각

① $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$일 때 $\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

② $\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\pi$일 때

$\tan\theta=\tan\{\pi-(\alpha-\beta)\}=-\tan(\alpha-\beta)$

## 14

$\frac{dx}{dt}=\cos t+2\cos 2t+3\cos 3t+\cdots+n\cos nt$,

$\frac{dy}{dt}=\cos t+3\cos 2t+5\cos 3t+\cdots+(2n-1)\cos nt$

이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t+3\cos 2t+5\cos 3t+\cdots+(2n-1)\cos nt}{\cos t+2\cos 2t+3\cos 3t+\cdots+n\cos nt}$

…… [40 %]

이때 $t=0$에 대응하는 곡선 위의 점에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$f(n)=\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+3+\cdots+n}$

$=\frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2n}{n+1}$ …… [40 %]

$\therefore \lim_{n\to\infty}f(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$ …… [20 %]

## 15

$e^{-2n\ln x}=(e^{\ln x})^{-2n}=x^{-2n}=\frac{1}{x^{2n}}$

이므로

$f(x)=1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\cdots+\frac{1}{x^{2n}}+\cdots$ …… [40 %]

이때 $x>1$이므로 $0<\frac{1}{x^2}<1$

즉, $f(x)$는 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{x^2}$인 등비급수이므로

$f(x)=\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{x^2}{x^2-1}$

에서 $f(2)=\frac{4}{3}$ …… [30 %]

$f'(x)=\frac{2x\times(x^2-1)-x^2\times 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$

에서 $f'(2)=\frac{-2\times 2}{(2^2-1)^2}=-\frac{4}{9}$

$\therefore f(2)+f'(2)=\frac{4}{3}-\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$ …… [30 %]

**참고** 로그의 성질

$a>0$, $a\neq 1$, $b>0$일 때

$a^{\log_a b}=b$

예 $e^{\ln x}=e^{\log_e x}=x$

## 16

조건 (가)에서 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$-f'(-x)=-f'(x)$ $\quad\therefore f'(-x)=f'(x)$

조건 (나)에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$이다. 즉,

$\lim_{x\to 1}\{f(x)-3\}=0$ $\quad\therefore f(1)=3$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=\frac{1}{2}$ …… [40 %]

이때 조건 (가)에 의하여

$f(-1)=-f(1)=-3$, $f'(-1)=f'(1)=\frac{1}{2}$ …… [30 %]

$\therefore g'(-3)=\frac{1}{f'(g(-3))}=\frac{1}{f'(-1)}=2$ …… [30 %]

## 1주 1일 개념 돌파 전략 ①

7, 9쪽

**1-2** $y=-x+\frac{\pi}{2}$

**2-2** 열린구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 위로 볼록,

열린구간 $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$에서 아래로 볼록

**3-2** $(-1,\ \ln 2),\ (1,\ \ln 2)$　**4-2** $0$

**5-2** 속도의 크기: $2$, 가속도의 크기: $4$

### 1-2

$f(x)=\cos x$라 하면 $f'(x)=-\sin x$이므로

점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-0=-1\times\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$　　$\therefore\ y=-x+\frac{\pi}{2}$

### 2-2

$f(x)=\sin 2x$라 하면

$f'(x)=2\cos 2x,\ f''(x)=-4\sin 2x$이므로

$0<x<\frac{\pi}{2}$일 때 $f''(x)<0$, $\frac{\pi}{2}<x<\pi$일 때 $f''(x)>0$

따라서 열린구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 위로 볼록하고, 열린구간 $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$에서 아래로 볼록하다.

### 3-2

$f(x)=\ln(x^2+1)$이라 하면 $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$,

$f''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$이고

$x<-1$ 또는 $x>1$일 때 $f''(x)<0$, $-1<x<1$일 때 $f''(x)>0$

따라서 변곡점의 좌표는 $(-1,\ \ln 2),\ (1,\ \ln 2)$

### 4-2

$f(x)=\ln x-2x$라 하면 $f'(x)=\frac{1}{x}-2$

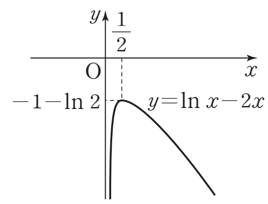
$f'(x)=0$에서 $\frac{1}{x}=2$　　$\therefore\ x=\frac{1}{2}$

함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | | ↗ | $-1-\ln 2$ | ↘ |

또 $\lim_{x\to 0+}(\ln x-2x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}(\ln x-2x)=-\infty$

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 만나지 않으므로 방정식 $\ln x-2x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 $0$이다.




### 5-2

$\frac{dx}{dt}=-2\sin 2t,\ \frac{dy}{dt}=2\cos 2t$

이므로 시각 $t$에서 점 P의 속도의 크기는

$\sqrt{(-2\sin 2t)^2+(2\cos 2t)^2}=\sqrt{4(\sin^2 2t+\cos^2 2t)}=2$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-4\cos 2t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-4\sin 2t$

이므로 시각 $t$에서 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{(-4\cos 2t)^2+(-4\sin 2t)^2}=\sqrt{16(\sin^2 2t+\cos^2 2t)}=4$

## 1주 1일 개념 돌파 전략 ②

10, 11쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** ① | **2** ③ | **3** ③ | **4** ④ |
| **5** ① | **6** ② | | |

### 1

$f(x)=x\ln x$라 하면 $f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

점 $(e,\ e)$에서의 접선의 기울기는 $f'(e)=2$

따라서 접선의 방정식은

$y-e=2(x-e)$　　$\therefore\ y=2x-e$

이 접선의 $x$절편과 $y$절편이 각각 $\frac{e}{2}$, $-e$이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{e}{2}\times e=\frac{e^2}{4}$

### 2

$f(x)=\sin^2 x$라 하면

$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x,\ f''(x)=2\cos 2x$

$f''(x)>0$에서 $2\cos 2x>0$이고

$\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$에서 $\pi\le 2x\le 2\pi$이므로

$\frac{3}{2}\pi<2x\le 2\pi$　　$\therefore\ \frac{3}{4}\pi<x\le\pi$

따라서 $a=\frac{3}{4}\pi,\ b=\pi$이므로 $a+b=\frac{7}{4}\pi$

### 3

$f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=e^{-x}(\cos x-\sin x)$

$f''(x)=-e^{-x}(\cos x-\sin x)+e^{-x}(-\sin x-\cos x)$

$\quad=-2e^{-x}\cos x$

$f''(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ ($\because$ $0<x<\pi$)

$0<x<\frac{\pi}{2}$일 때 $f''(x)<0$, $\frac{\pi}{2}<x<\pi$일 때 $f''(x)>0$

변곡점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$이므로 $a=\frac{\pi}{2}$, $b=e^{-\frac{\pi}{2}}$

$\therefore a+\ln b=\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$

### 4

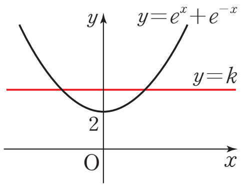
$f(x)=e^x+e^{-x}$이라 하면 $f'(x)=e^x-e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $e^x=e^{-x}$, $e^{2x}=1$ $\quad\therefore x=0$

함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | 2 | ↗ |

오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 $k$의 값의 범위는 $k>2$이다.




### 5

$f(x)=e^x-2x-k$라 하면 $f'(x)=e^x-2$

$f'(x)=0$에서 $e^x=2$ $\quad\therefore x=\ln 2$

함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $\ln 2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $2-2\ln 2-k$ | ↗ |

함수 $f(x)$는 $x=\ln 2$에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)\geq 0$이려면

$2-2\ln 2-k\geq 0$ $\quad\therefore k\leq 2-2\ln 2$

따라서 실수 $k$의 최댓값은 $2-2\ln 2$이다.

### 6

$\frac{dx}{dt}=4t-1$, $\frac{dy}{dt}=\sqrt{7}$이므로 $t=a$에서 점 P의 속도는 $(4a-1, \sqrt{7})$

$\frac{d^2x}{dt^2}=4$, $\frac{d^2y}{dt^2}=0$이므로 $t=a$에서 점 P의 가속도는 $(4, 0)$

이때 속도의 크기와 가속도의 크기가 같으므로

$\sqrt{(4a-1)^2+(\sqrt{7})^2}=\sqrt{4^2+0^2}$

$(4a-1)^2=9$, $2a^2-a-1=0$

$(2a+1)(a-1)=0$ $\quad\therefore a=1$ ($\because a>0$)

## 1주 2일 필수 체크 전략 ①

12~15쪽

**1-1** $y=-3x+12$

**1-2** ②

**2-1** ③

**2-2** 극솟값: 1, 극댓값: $3\ln 2-1$

**3-1** ②

**3-2** 풀이 참조

**4-1** ①

**4-2** 최댓값: $\frac{\pi}{2}$, 최솟값: $-\frac{3}{2}\pi$

### 1-1

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=0$ $\quad\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ (단, $x\neq 0$)

점 $(1, 9)$에서의 접선의 기울기는 $-3$이므로 접선의 방정식은

$y-9=-3(x-1)$ $\quad\therefore y=-3x+12$

### 1-2

$f(x)=\sin 2x$라 하면 $f'(x)=2\cos 2x$

접점의 좌표를 $(a, \sin 2a)$라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(a)=2\cos 2a=1$, $\cos 2a=\frac{1}{2}$이고

$0<a<\pi$에서 $0<2a<2\pi$이므로

$2a=\frac{\pi}{3}$ 또는 $2a=\frac{5}{3}\pi$

$\therefore a=\frac{\pi}{6}$ 또는 $a=\frac{5}{6}\pi$

접점의 좌표가 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{6}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 기울기가 1인

접선의 방정식은 $y-\frac{\sqrt{3}}{2}=x-\frac{\pi}{6}$, 즉 $y=x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

또는

$y-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=x-\frac{5}{6}\pi$, 즉 $y=x-\frac{5}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 접선이 $y$축과 만나는 모든 교점의 $y$좌표의 합은

$\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{5}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\pi$

### 2-1

$f(x)=x^2e^{-x}+2$에서

$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $2x-x^2=0$, $x(2-x)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | 2 | ↗ | $4e^{-2}+2$ | ↘ |

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $4e^{-2}+2$를 갖는다.

따라서 $a=2$, $M=4e^{-2}+2$이므로 $M-a=4e^{-2}$

## 2-2

$f(x)=3\ln x+\frac{2}{x}-x$에서

$f'(x)=\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-1=\frac{-x^2+3x-2}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $1$ | ↗ | $3\ln 2-1$ | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $1$,

$x=2$에서 극댓값 $3\ln 2-1$을 갖는다.

## 3-1

함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x>0\}$이고, $f(1)=0$이므로 $x$축의 교점의 좌표는 $(1, 0)$이다.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}=0\text{에서 } x=e$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\times x^2-(1-\ln x)\times 2x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}=0$$

에서 $x=\sqrt{e^3}$

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ | $\sqrt{e^3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | 변곡점 | ↘ |

함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극댓값 $\frac{1}{e}$을 갖고, 변곡점의 좌표는

$\left(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$이다.

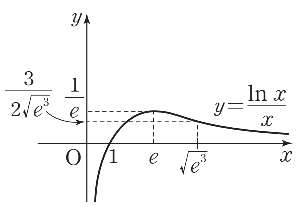
또 $\lim_{x\to 0+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

이므로 $x$축, $y$축이 점근선이고

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형

은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 옳은 것은 ②이다.




## 3-2

$f(x)=\frac{e^x}{x}$이라 하면 정의역은 $x\neq 0$인 실수 전체의 집합이다.

$$f'(x)=\frac{e^x\times x-e^x\times 1}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}=0\text{에서 } x=1$$

$$f''(x)=\frac{xe^x\times x^2-(x-1)e^x\times 2x}{x^4}=\frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}$$

$f''(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $(0)$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↘ | 극소 | ↗ |

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $e$를 갖고

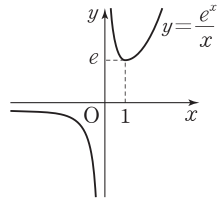
$\lim_{x\to 0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to 0-}f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to -\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

이므로 $x$축, $y$축이 점근선이고

함수 $y=f(x)$의 그래프의

개형은 오른쪽 그림과 같다.




## 4-1

$$f'(x)=\sqrt{2-x^2}+x\times\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}=\frac{-4x^2+4}{2\sqrt{2-x^2}}$$

$$=\frac{-2(x+1)(x-1)}{\sqrt{2-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[0, \sqrt{2}]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 $1$, $x=0$, $x=\sqrt{2}$ 일 때 최솟값 $0$을 갖는다.

따라서 $M=1$, $m=0$이므로 $M-m=1$

## 4-2

$f'(x)=(\sin x+x\cos x)-\sin x=x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↗ | $\frac{\pi}{2}$ | ↘ | $-\frac{3}{2}\pi$ | ↗ | $1$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$일 때 최댓값 $\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{2}\pi$일 때 최솟값 $-\frac{3}{2}\pi$를 갖는다.

## 1주 2일 필수 체크 전략 ②

16, 17쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 ⑤ | 2 ① | 3 ④ | 4 ② |
| 5 ④ | 6 ⑤ | 7 ③ | |

### 1

$f(x)=\sqrt{4x+1}$이라 하면 $f'(x)=\dfrac{4}{2\sqrt{4x+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}$

접점의 좌표를 $(a, \sqrt{4a+1})$이라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(a)=\dfrac{2}{\sqrt{4a+1}}=1$, $4a+1=4$　　$\therefore a=\dfrac{3}{4}$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\dfrac{3}{4}, 2\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2=x-\dfrac{3}{4}$　　$\therefore y=x+\dfrac{5}{4}$

이 직선이 점 $(2, k)$를 지나므로

$k=2+\dfrac{5}{4}=\dfrac{13}{4}$　　$\therefore 4k=13$

### 2

$f(x)=\ln(2x+3)$, $g(x)=a-\ln x$라 하고 두 곡선의 교점의 $x$좌표를 $x_1$이라 하면 $f(x_1)=g(x_1)$에서

$\ln(2x_1+3)=a-\ln x_1$　　…… ㉠

$f'(x)=\dfrac{2}{2x+3}$, $g'(x)=-\dfrac{1}{x}$이므로 $f'(x_1)g'(x_1)=-1$에서

$\dfrac{2}{2x_1+3}\times\left(-\dfrac{1}{x_1}\right)=-1$, $2{x_1}^2+3x_1-2=0$

$(2x_1-1)(x_1+2)=0$

진수 조건에서 $x_1>0$이므로 $x_1=\dfrac{1}{2}$

$x_1=\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\ln 4=a-\ln\dfrac{1}{2}$　　$\therefore a=\ln 2$

### 3

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-2t\times(1+t^2)-(1-t^2)\times 2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}$,

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1\times(1+t^2)-t\times 2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{-t^2+1}{(1+t^2)^2}$

이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-t^2+1}{-4t}$ (단, $t\neq 0$)

따라서 곡선 위의 $t=2$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{-4+1}{-8}=\dfrac{3}{8}$

이때 접점의 좌표는 $\left(-\dfrac{3}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{8}\left\{x-\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right\}$　　$\therefore y=\dfrac{3}{8}x+\dfrac{5}{8}$

따라서 $f(x)=\dfrac{3}{8}x+\dfrac{5}{8}$이므로 $f(1)=\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{8}=1$

### 4

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{k}{x^2}-1=\dfrac{-x^2+x-k}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x>0$이므로

$-x^2+x-k=0$, 즉 $x^2-x+k=0$　　…… ㉠

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 ㉠이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(ⅰ) 이차방정식 ㉠의 판별식을 $D$라 하면

　$D=(-1)^2-4k>0$　　$\therefore k<\dfrac{1}{4}$

(ⅱ) 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 양의 실근을 $\alpha$, $\beta$라 하면

　$\alpha+\beta=1>0$, $\alpha\beta=k>0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 실수 $k$의 값의 범위는

$0<k<\dfrac{1}{4}$

### 5

$f'(x)=2ax+b-\dfrac{1}{x}$, $f''(x)=2a+\dfrac{1}{x^2}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극대이므로

$f'(1)=2a+b-1=0$　　$\therefore 2a+b=1$　　…… ㉠

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 $x$좌표가 $\dfrac{1}{2}$이므로

$f''\left(\dfrac{1}{2}\right)=2a+4=0$　　$\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=5$

즉, $f(x)=-2x^2+5x-\ln x$이고

$f'(x)=-4x+5-\dfrac{1}{x}=\dfrac{-4x^2+5x-1}{x}=\dfrac{-(4x-1)(x-1)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{4}$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 함수 $f(x)$의 극솟값은

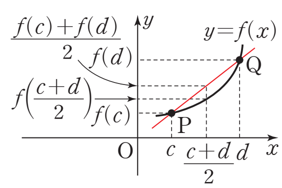
$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{5}{4}-\ln\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{8}+2\ln 2$

### 6

ㄱ. 이계도함수를 갖는 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때 $f''(a)<0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 갖는다. (참)

ㄴ. 점 $(a, f(a))$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이면 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 $f''(a)=0$이다. (참)

ㄷ. 닫힌구간 $[a, b]$에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 두 점 $P(c, f(c))$, $Q(d, f(d))$ $(c<d)$에 대하여



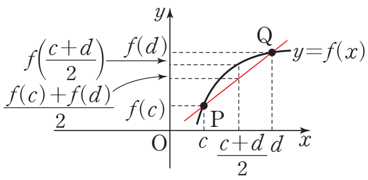

$\dfrac{f(c)+f(d)}{2}>f\left(\dfrac{c+d}{2}\right)$이면

곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

참고

$\dfrac{f(c)+f(d)}{2}<f\left(\dfrac{c+d}{2}\right)$ 이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.




## 7

$f'(x)=\dfrac{-\sin x\times(\sin x-2)-\cos x\times\cos x}{(\sin x-2)^2}=\dfrac{2\sin x-1}{(\sin x-2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $2\sin x-1=0$, $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$

닫힌구간 $[0, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\cdots$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\frac{1}{2}$ | ↘ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | ↗ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | ↘ | $\frac{1}{2}$ |

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$일 때 최댓값 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x=\dfrac{\pi}{6}$일 때 최솟값 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$을 갖는다.

따라서 $a=\dfrac{5}{6}\pi$, $b=\dfrac{\pi}{6}$이므로 $a+b=\pi$

## 1주 3일 필수 체크 전략 ①

18~21쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1-1 ① | 1-2 ② | 2-1 $0<k<\frac{4}{e^2}$ | 2-2 $\frac{3}{4}+\ln 2$ |
| 3-1 ③ | 3-2 ② | 4-1 ② | 4-2 ① |

## 1-1

$x-\sqrt{2x-5}-n=0$에서 $x-\sqrt{2x-5}=n$

$f(x)=x-\sqrt{2x-5}$라 하면

$f'(x)=1-\dfrac{2}{2\sqrt{2x-5}}=1-\dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}$

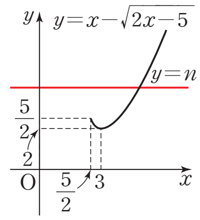
$f'(x)=0$에서 $\dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}=1$, $2x-5=1$ $\quad\therefore x=3$

$x\geq\dfrac{5}{2}$일 때, 함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\frac{5}{2}$ | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\frac{5}{2}$ | ↘ | 2 | ↗ |

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $x-\sqrt{2x-5}-n=0$의 서로 다른 실근의 개수는 $n=1$일 때 0, $n\geq2$일 때 1이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{5}a_n=0+1+1+1+1=4$




## 1-2

$f(x)=\ln x-x+15$라 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$

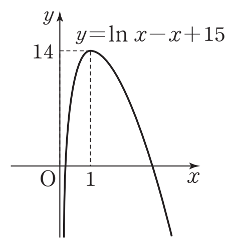
$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | (0) | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | | ↗ | 14 | ↘ |

또 $\lim_{x\to0+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 방정식 $\ln x-x+15=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.




## 2-1

$x^2=ke^x$에서 $\dfrac{x^2}{e^x}=k$

$f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$이라 하면 $f'(x)=\dfrac{2x\times e^x-x^2\times e^x}{e^{2x}}=\dfrac{2x-x^2}{e^x}$

$f'(x)=0$에서 $2x-x^2=0$, $x(2-x)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

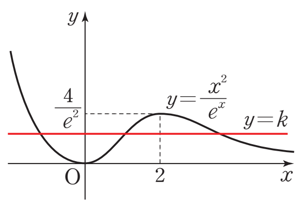
함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | 0 | ↗ | $\frac{4}{e^2}$ | ↘ |

또 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$0<k<\dfrac{4}{e^2}$



## 2-2

$x^2+x-\ln x-k=0$에서 $x^2+x-\ln x=k$

$f(x)=x^2+x-\ln x$라 하면

$f'(x)=2x+1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2+x-1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $2x^2+x-1=0$, $(x+1)(2x-1)=0$

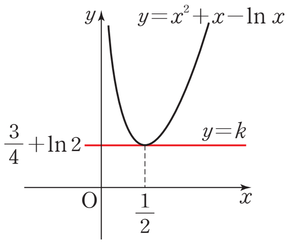
$\therefore x=\dfrac{1}{2}$ ($\because x>0$)

$x>0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\dfrac{1}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $\dfrac{3}{4}+\ln 2$ | ↗ |

또 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야하므로 $k=\dfrac{3}{4}+\ln 2$




## 3-1

$x^2-3-ke^{-x}\le0$에서 $(x^2-3)e^x-k\le0$

$f(x)=(x^2-3)e^x-k$라 하면

$f'(x)=2x\times e^x+(x^2-3)\times e^x=(x^2+2x-3)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ ($\because x\le0$)

$x\le0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ↗ | $6e^{-3}-k$ | ↘ | $-3-k$ |

함수 $f(x)$는 $x=-3$일 때 극대이면서 최대이다.

이때 주어진 부등식이 성립하려면

$f(-3)=6e^{-3}-k\le0$ $\quad\therefore k\ge6e^{-3}$

따라서 구하는 실수 $k$의 최솟값은 $6e^{-3}$이다.

## 3-2

$x\ln x-x\ge k$에서 $x\ln x-x-k\ge0$

$f(x)=x\ln x-x-k$라 하면

$f'(x)=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln x$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

$x>0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $-1-k$ | ↗ |

함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이면서 최소이다.

이때 주어진 부등식이 성립하려면

$f(1)=-1-k\ge0$ $\quad\therefore k\le-1$

따라서 구하는 실수 $k$의 최댓값은 $-1$이다.

## 4-1

$\dfrac{dx}{dt}=1-\dfrac{1}{t^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=3$이므로 점 P의 속도의 크기는

$\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)^2+3^2}=\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)^2+9}$

점 P의 속도의 크기가 최소일 때는 $1-\dfrac{1}{t^2}=0$, 즉 $t=1$일 때이다.

이때 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{2}{t^3}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=0$

이므로 점 P의 가속도의 크기는 $\sqrt{\dfrac{4}{t^6}}=\dfrac{2}{t^3}$

따라서 점 P의 속도의 크기가 최소일 때의 점 P의 가속도의 크기는

$\dfrac{2}{1}=2$

## 4-2

$\dfrac{dx}{dt}=3-\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=\cos t$이므로 점 P의 속도의 크기는

$\sqrt{(3-\sin t)^2+\cos^2 t}=\sqrt{10-6\sin t}$

점 P의 속도의 크기가 최소일 때는 $\sin t=1$, 즉 $t=\dfrac{\pi}{2}$일 때이고 그때의 최솟값은 $\sqrt{10-6}=2$

따라서 $k=\dfrac{\pi}{2}$, $m=2$이므로 $mk=\pi$

## 1주 3일 필수 체크 전략 ②

22, 23쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** ③ | **2** ① | **3** 희진, 민혁 | **4** ⑤ |
| **5** ③ | **6** ③ | | |

## 1

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\ln(1+x^2)$이라 하면

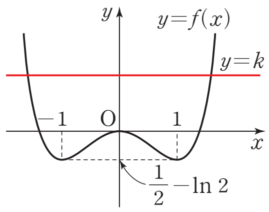
$f'(x)=x-\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{(x+x^3)-2x}{1+x^2}=\dfrac{x(x+1)(x-1)}{1+x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $\frac{1}{2}-\ln 2$ | ↗ | $0$ | ↘ | $\frac{1}{2}-\ln 2$ | ↗ |

ㄱ. $\frac{1}{2}-\ln 2>-\ln 2$이고 $k<-\ln 2$이면 직선 $y=k$는 곡선 $y=f(x)$와 만나지 않으므로 방정식 $f(x)=k$는 실근이 존재하지 않는다. (참)




ㄴ. $k=\frac{1}{2}-\ln 2$이면 방정식 $f(x)=k$는 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이때 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖는 실수 $k$의 값은 0이다. (거짓)

ㄷ. $k=\ln 2$이면 직선 $y=k$는 곡선 $y=f(x)$와 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=k$는 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

## 2

$f(x)=\tan x-2x$라 하면 $f'(x)=\sec^2 x-2$

$f'(x)=0$에서 $\sec^2 x=2$, 즉 $\cos^2 x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=-\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{4}$

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$일 때, 함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

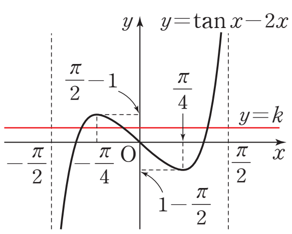
| $x$ | $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ | $\cdots$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ | |

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{\pi}{4}$에서 극댓값 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-1$,

$x=\frac{\pi}{4}$에서 극솟값 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\pi}{2}$를 갖는다.

또 $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.




따라서 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 $k$의 값의 범위는

$1-\frac{\pi}{2}<k<\frac{\pi}{2}-1$

따라서 $\alpha=1-\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{2}-1$이므로

$\beta-\alpha=\pi-2$

## 3

$f'(x)=-e^x-xe^x=-(x+1)e^x=0$에서 $x=-1$

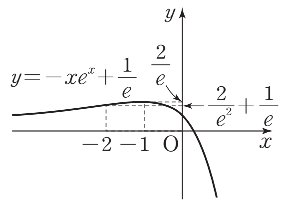
$f''(x)=-e^x-(x+1)e^x=-(x+2)e^x=0$에서 $x=-2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | ⤴ | 변곡점 | ↗ | 극대 | ⤵ |

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $\frac{2}{e}$를 갖고, 변곡점의 좌표는 $\left(-2,\ \frac{2}{e^2}+\frac{1}{e}\right)$이다.

또 $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{1}{e}$




희진: 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극대이면서 최대이고 $f(-1)=\frac{2}{e}$이므로 $f(x)\le\frac{2}{e}$ (참)

준수: $y=f(x)$의 그래프는 열린구간 $(-\infty,\ -2)$에서 아래로 볼록하다. (거짓)

현아: $x=-2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점의 개수는 1이다. (거짓)

민혁: $\frac{1}{e}<\frac{1}{2}<\frac{2}{e}$이므로 $f(x)=\frac{1}{2}$의 실근의 개수는 2이다. (참)

따라서 옳은 말을 한 사람은 희진, 민혁이다.

## 4

ㄱ. $f(x)=\frac{1}{e}x-\ln x$라 하면 $f'(x)=\frac{1}{e}-\frac{1}{x}=0$에서 $x=e$

$x>0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $0$ | ↗ |

함수 $f(x)$는 $x=e$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(e)=0$ $\quad\therefore \frac{1}{e}x-\ln x\ge 0$ (참)

ㄴ. $f(x)=x-1-\ln x$라 하면 $f'(x)=1-\frac{1}{x}=0$에서 $x=1$

$x>0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $0$ | ↗ |

함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(1)=0$ $\quad\therefore x-1-\ln x\ge 0$ (참)

ㄷ. $1-x\le e^{-x}$에서 $x+e^{-x}\ge 1$

$f(x)=x+e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=1-e^{-x}=0$에서 $x=0$

함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $1$ | ↗ |

함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(0)=1$이다. 즉, $x+e^{-x}\ge 1$이므로

$1-x\le e^{-x}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

**5**

점 P의 시각 $t$에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면

$v(t)=\frac{p}{2}\pi\cos\frac{\pi}{2}t+\frac{q}{2}\pi\sin\frac{\pi}{2}t$

$a(t)=-\frac{p}{4}\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t+\frac{q}{4}\pi^2\cos\frac{\pi}{2}t$

따라서 점 P의 $t=3$에서의 속도와 가속도는

$v(3)=\frac{p}{2}\pi\cos\frac{3}{2}\pi+\frac{q}{2}\pi\sin\frac{3}{2}\pi=-\frac{q}{2}\pi$

이때 $v(3)=\frac{3}{2}\pi$이므로 $-\frac{q}{2}\pi=\frac{3}{2}\pi$　　$\therefore q=-3$

$a(3)=-\frac{p}{4}\pi^2\sin\frac{3}{2}\pi+\frac{q}{4}\pi^2\cos\frac{3}{2}\pi=\frac{p}{4}\pi^2$

이때 $a(3)=-\frac{\pi^2}{2}$이므로 $\frac{p}{4}\pi^2=-\frac{\pi^2}{2}$　　$\therefore p=-2$

$\therefore p-q=1$

**6**

$\frac{dx}{dt}=3a\cos^2 t\times(-\sin t)=-3a\sin t\cos^2 t$,

$\frac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\times\cos t=3a\sin^2 t\cos t$

이므로 시각 $t$에서 점 P의 속도의 크기는

$\sqrt{(-3a\sin t\cos^2 t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}$

$=3a\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\sin^2 t+\cos^2 t)}$ ($\because a>0$)

$=3a|\sin t\cos t|=\frac{3}{2}a|\sin 2t|$

$t=b$일 때의 속도의 크기는 $\frac{3}{2}a|\sin 2b|$이고, 속도의 크기가 최대가 되려면 $-1\le\sin 2b\le 1$에서 $|\sin 2b|=1$

이때 $0<b<\frac{\pi}{2}$에서 $0<2b<\pi$이므로

$2b=\frac{\pi}{2}$　　$\therefore b=\frac{\pi}{4}$

또 최댓값이 18이므로

$\frac{3}{2}a=18$　　$\therefore a=12$

$\therefore ab=3\pi$

## 1주 4일 교과서 대표 전략 ①

24~27쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** ① | **2** ⑤ | **3** ③ | **4** ② |
| **5** ⑤ | **6** $k\ge 1$ | **7** ③ | **8** ② |
| **9** ⑤ | **10** ② | **11** ② | **12** ① |
| **13** $-\frac{1}{3}$ | **14** ② | **15** ⑤ | **16** $2\sqrt{10}$ |

**1**

$f(x)=xe^x+1$이라 하면 $f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

이므로 점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=1$

접선의 방정식은

$y-1=1\times(x-0)$　　$\therefore y=x+1$

따라서 구하는 $y$절편은 1이다.

**2**

$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$이라 하면

$f'(x)=\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{t-1}{t+1}\right)$이라 하면 $y=-2x$와 수직인 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로

$f'(t)=\frac{2}{(t+1)^2}=\frac{1}{2}$

$t^2+2t-3=0$, $(t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-3, 2)$, $(1, 0)$이므로 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의 방정식은

$y-2=\frac{1}{2}\{x-(-3)\}$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

또는

$y-0=\frac{1}{2}(x-1)$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$b>0$이므로 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{7}{2}$

$\therefore a+b=4$

**3**

$f(x)=e^{-x-1}$이라 하면 $f'(x)=-e^{-x-1}$

접점의 좌표를 $(a, e^{-a-1})$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=-e^{-a-1}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{-a-1}=-e^{-a-1}(x-a)$

$\therefore y=-e^{-a-1}x+(1+a)e^{-a-1}$

이 접선이 원점을 지나므로

$0=(1+a)e^{-a-1}$　　$\therefore a=-1$

따라서 구하는 접선의 기울기는 $f'(-1)=-1$

기
말

## 4

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=3t^2$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2}{\frac{1}{t}}=3t^3\ (\text{단, } t>0)$$

따라서 곡선 위의 $t=1$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 3이고 접점의 좌표는 $(0, 3)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=3(x-0)\qquad \therefore y=3x+3$

이 접선이 점 $(a, 9)$를 지나므로 $3a+3=9\qquad \therefore a=2$

## 5

$4x^3+y^3-axy+b=0$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$12x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-a\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$(3y^2-ax)\frac{dy}{dx}=ay-12x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{ay-12x^2}{3y^2-ax}\ (\text{단, } 3y^2-ax\neq0)$$

점 $(0, -1)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$\frac{-a}{3}=1$, 즉 $a=-3$

또 점 $(0, -1)$은 이 곡선 위의 점이므로

$-1+b=0$, 즉 $b=1\qquad \therefore ab=-3$

## 6

$f'(x)=2xe^x+(x^2+k)e^x=(x^2+2x+k)e^x$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 한다.

$e^x>0$이므로 이차방정식 $x^2+2x+k=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-k\leq0\qquad \therefore k\geq1$

## 7

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{6-x}$에서

$x\geq0$, $6-x\geq0$이므로 $0\leq x\leq6$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{6-x}}=\frac{\sqrt{6-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{6-x}}$$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{6-x}=\sqrt{x}$, $6-x=x\qquad \therefore x=3$

$0\leq x\leq6$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | $\sqrt{6}$ | ↗ | $2\sqrt{3}$ | ↘ | $\sqrt{6}$ |

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 $2\sqrt{3}$을 가지므로

$a=3$, $b=2\sqrt{3}\qquad \therefore ab=6\sqrt{3}$

## 8

$f'(x)=1-2\cos x=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

$0<x<2\pi$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\cdots$ | $(2\pi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | | ↘ | $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$ | ↗ | $\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$ | ↘ | |

함수 $f(x)$는 $x=\frac{5}{3}\pi$에서 극댓값 $\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$에서 극솟값 $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$을 가지므로 극댓값과 극솟값의 합은

$$\left(\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}\right)+\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)=2\pi$$

## 9

$$f'(x)=1-\frac{2a}{x}+\frac{5a}{x^2}=\frac{x^2-2ax+5a}{x^2}$$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\geq0$ 또는 $f'(x)\leq0$이어야 한다.

이때 $x^2>0$이고 $x^2-2ax+5a$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f'(x)\geq0$이어야 한다.

즉, $x^2-2ax+5a\geq0$이어야 하므로

이차방정식 $x^2-2ax+5a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-5a\leq0$, $a(a-5)\leq0\qquad \therefore 0\leq a\leq5$

따라서 모든 정수 $a$의 값의 합은 $0+1+2+3+4+5=15$

## 10

$f(x)=-(\ln x-2)x^2$이라 하면

$$f'(x)=-\frac{1}{x}\times x^2-(\ln x-2)\times 2x=3x-2x\ln x$$

$$f''(x)=3-2\left(\ln x+x\times\frac{1}{x}\right)=1-2\ln x$$

$f''(x)>0$에서 $1-2\ln x>0$

$\ln x<\frac{1}{2}\qquad \therefore 0<x<\sqrt{e}$

$\alpha=0$, $\beta=\sqrt{e}$ 이므로 $\alpha+\beta=\sqrt{e}$

## 11

$$f'(x)=\frac{2(x^2+2)\times2x}{(x^2+2)^2}=\frac{4x}{x^2+2}$$

$$f''(x)=\frac{4\times(x^2+2)-4x\times2x}{(x^2+2)^2}=\frac{-4x^2+8}{(x^2+2)^2}$$

$f''(x)=0$에서 $-4x^2+8=0$, $x^2=2$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

$x<-\sqrt{2}$ 또는 $x>\sqrt{2}$ 일 때 $f''(x)<0$

$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 일 때 $f''(x)>0$

이므로 변곡점의 좌표는

$(-\sqrt{2}, 4\ln 2)$, $(\sqrt{2}, 4\ln 2)$

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$\sqrt{\{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})\}^2+(4\ln 2-4\ln 2)^2}=2\sqrt{2}$

## 12

$f'(x)=3x^2+2ax+b$, $f''(x)=6x+2a$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=3+2a+b=0 \qquad \therefore 2a+b=-3$ ······ ㉠

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 $x$좌표가 $-1$이므로

$f''(-1)=-6+2a=0 \qquad \therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$6+b=-3 \qquad \therefore b=-9$

즉, $f(x)=x^3+3x^2-9x+c$이고 $f(-1)=3$에서

$-1+3+9+c=3 \qquad \therefore c=-8$

$\therefore a+b+c=3+(-9)+(-8)=-14$

## 13

$f'(x)=\dfrac{\cos x(\cos x+2)-\sin x(-\sin x)}{(\cos x+2)^2}=\dfrac{2\cos x+1}{(\cos x+2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $2\cos x+1=0$, $\cos x=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$

$0\le x\le 2\pi$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\cdots$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | ↘ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | ↗ | $0$ |

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$일 때 최댓값 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x=\dfrac{4}{3}\pi$일 때 최솟값 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$을 갖는다. 따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}$

## 14

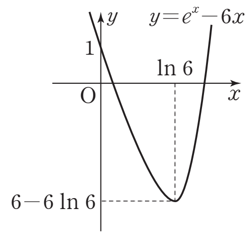
$f(x)=e^x-6x$라 하면 $f'(x)=e^x-6$

$f'(x)=0$에서 $e^x=6 \qquad \therefore x=\ln 6$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $\ln 6$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $6-6\ln 6$ | ↗ |

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $e^x-6x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.




## 15

$f(x)=\cos 3x-3x-k$라 하면

$f'(x)=-3\sin 3x-3=-3(\sin 3x+1)\le 0$

이므로 함수 $f(x)$는 모든 실수 $x$에서 감소한다.

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최대이므로 $f(x)<0$이려면

$f(0)=1-k<0 \qquad \therefore k>1$

따라서 구하는 정수 $k$의 최솟값은 2이다.

## 16

$\dfrac{dx}{dt}=2t$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2+1$이므로 속도는 $(2t, 3t^2+1)$

속도의 크기가 $2\sqrt{5}$ 이므로 $\sqrt{(2t)^2+(3t^2+1)^2}=2\sqrt{5}$

$9t^4+10t^2-19=0$, $(t^2-1)(9t^2+19)=0 \qquad \therefore t=1\ (\because t>0)$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=2$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=6t$이므로 가속도는 $(2, 6t)$

따라서 $t=1$에서의 가속도의 크기는 $\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$

## 1주 4일 교과서 대표 전략 ②

28, 29쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** ④ | **2** ① | **3** ③ | **4** ④ |
| **5** ③ | **6** 2 | **7** ④ | **8** ⑤ |

## 1

$f(x)=(x+1)e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=e^{-x}-(x+1)e^{-x}=-xe^{-x}$

접점의 좌표를 $(a, (a+1)e^{-a})$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=-ae^{-a}$

따라서 접선의 방정식은 $y-(a+1)e^{-a}=-ae^{-a}(x-a)$

이 접선이 점 $(5, 0)$을 지나므로 $-(a+1)e^{-a}=-ae^{-a}(5-a)$

$e^{-a}>0$이므로 $a+1=a(5-a)$, $a^2-4a+1=0$

이 이차방정식의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=1$

접선의 기울기는 각각 $-\alpha e^{-\alpha}$, $-\beta e^{-\beta}$이므로 두 접선의 기울기의 곱은

$(-\alpha e^{-\alpha})\times(-\beta e^{-\beta})=\alpha\beta e^{-(\alpha+\beta)}=e^{-4}$

## 2

$f(x)=(1+\ln x)^2$이라 하면

$f'(x)=2(1+\ln x)\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2(1+\ln x)}{x}$

$f''(x)=\dfrac{\dfrac{2}{x}\times x-2(1+\ln x)}{x^2}=-\dfrac{2\ln x}{x^2}$

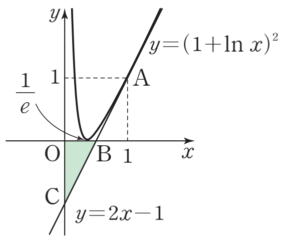
$f''(x)=0$에서 $\ln x=0$  $\therefore x=1$

$0<x<1$일 때 $f''(x)>0$, $x>1$일 때 $f''(x)<0$

이므로 변곡점의 좌표는 $(1, 1)$이다.

이때 $f'(1)=2$이므로 변곡점에서의 접선의 방정식은

$y-1=2(x-1)$  $\therefore y=2x-1$




따라서 $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$, $\mathrm{C}(0, -1)$이므로

삼각형 OCB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{4}$

## 3

$f'(x)=ax+2\cos x+3$, $f''(x)=a-2\sin x$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고, 그 근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서 $a-2\sin x=0$  $\therefore 2\sin x=a$

이때 $-1\le\sin x\le1$이므로 $-2\le2\sin x\le2$

$a=-2$이면 $f''(x)=-2-2\sin x\le0$

$a=2$이면 $f''(x)=2-2\sin x\ge0$

즉, $a=-2$ 또는 $a=2$이면 $f''(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 구하는 $a$의 값의 범위는

$-2<a<2$

따라서 정수 $a$의 값의 합은

$-1+0+1=0$

## 4

$f'(x)=-2xe^{-x^2}=0$에서 $x=0$

$f''(x)=-2e^{-x^2}-2xe^{-x^2}\times(-2x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}=0$에서

$x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ⤴ | $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ | ↗ | $1$ | ↘ | $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ | ↘ |

ㄱ. $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점의 개수는 2이다. (거짓)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $f(0)=1$을 갖는다. (참)

ㄷ. $f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}$, 즉 $f(-x)=f(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

## 5

$f(x)=(\log_3 x)^3+3(\log_3 x)^2-\log_3 x^9$

$\quad=(\log_3 x)^3+3(\log_3 x)^2-9\log_3 x$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{81}\le x\le9$에서 $-4\le t\le2$

$g(t)=t^3+3t^2-9t$라 하면

$g'(t)=3t^2+6t-9=3(t+3)(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=-3$ 또는 $t=1$

$-4\le t\le2$일 때, 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $t$ | $-4$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(t)$ | $20$ | ↗ | $27$ | ↘ | $-5$ | ↗ | $2$ |

함수 $g(t)$는 $t=-3$일 때 최댓값 27을 가지므로

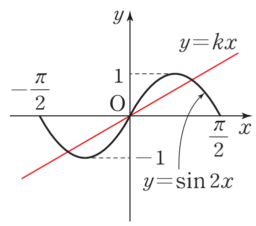
$\log_3 x=-3$에서 $x=\dfrac{1}{27}$

따라서 $a=\dfrac{1}{27}$, $b=27$이므로 $ab=1$

## 6

$-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$에서 방정식

$\sin 2x=kx$의 실근의 개수는 오른쪽 그림과 같이 $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$에서 곡선 $y=\sin 2x$와 직선 $y=kx$의 교점의 개수와 같다.




방정식 $\sin 2x=kx$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=\sin 2x$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$y=\sin 2x$에서 $y'=2\cos 2x$이므로

곡선 $y=\sin 2x$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 방정식은

$y-0=2\cos 0(x-0)$  $\therefore y=2x$

따라서 곡선 $y=\sin 2x$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나려면

$0\le k<2$  $\therefore a=2$

## 7

$f(x)=\ln(x^4+4x+6)+k$라 하면

$f'(x)=\dfrac{4x^3+4}{x^4+4x+6}=\dfrac{4(x+1)(x^2-x+1)}{x^4+4x+6}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because x$는 실수)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $\ln 3+k$ | $\nearrow$ |

함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극소이면서 최소이다.
이때 주어진 부등식이 성립하려면
$f(-1)=\ln 3+k\ge 0$ $\therefore k\ge -\ln 3$
따라서 구하는 실수 $k$의 최솟값은 $-\ln 3$이다.

**8**

ㄱ. $\dfrac{dx}{dt}=\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=1-\cos t$
이므로 점 P의 속도의 크기는
$\sqrt{(\sin t)^2+(1-\cos t)^2}=\sqrt{2-2\cos t}$
$-1\le\cos t\le 1$이므로 $0\le 2-2\cos t\le 4$
$\therefore 0\le\sqrt{2-2\cos t}\le 2$
따라서 점 P의 속도의 크기의 최댓값은 2이다. (참)

ㄴ. $\sqrt{2-2\cos t}=2$에서 $\cos t=-1$
$t>0$이므로 $t=\pi$일 때 점 P의 속도의 크기가 처음으로 2가 된다. (참)

ㄷ. $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\cos t$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=\sin t$
이므로 점 P의 가속도의 크기는 $\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=1$
따라서 점 P의 가속도의 크기는 항상 일정하다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

## 1주 누구나 합격 전략

30, 31쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 ⑤ | 2 ③ | 3 ④ | 4 ② |
| 5 ⑤ | 6 ④ | 7 ⑤ | 8 ④ |
| 9 ⑤ | 10 ④ | | |

**1**

$f(x)=\sqrt{x}$라 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$이므로
점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=\dfrac{1}{2}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-1=\dfrac{1}{2}(x-1)$ $\therefore y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

**2**

$f(x)=e^x$이라 하면 $f'(x)=e^x$
접점의 좌표를 $(t, e^t)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=e^t$
따라서 접선의 방정식은
$y-e^t=e^t(x-t)$ ······ ㉠
이 접선이 점 $(1, 0)$을 지나므로
$-e^t=e^t(1-t)$, $1-t=-1$ $\therefore t=2$
$t=2$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은
$y-e^2=e^2(x-2)$ $\therefore y=e^2x-e^2$
따라서 $a=e^2$, $b=-e^2$이므로 $a+b=0$

**3**

$x^2+xy+y^2=3$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면
$2x+\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)+2y\dfrac{dy}{dx}=0$
$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x-y}{x+2y}$ (단, $x+2y\neq 0$)
따라서 곡선 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는
$\dfrac{-2-1}{1+2}=-1$

**4**

$f'(x)=\dfrac{4\times(x^2+1)-4x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{4(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | 2 | $\searrow$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 2를 갖는다.

**5**

$f(x)=e^x\cos x$라 하면
$f'(x)=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=e^x(\cos x-\sin x)$
$f''(x)=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)=-2e^x\sin x$
$f''(x)>0$에서 $-2e^x\sin x>0$, $\sin x<0$
$\therefore \pi<x<2\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

**6**

$f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$이라 하면 $f'(x)=2x+\dfrac{1}{x^2}$
$f''(x)=2-\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2x^3-2}{x^3}=\dfrac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$
$f''(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x$는 실수)
$0<x<1$일 때 $f''(x)<0$, $x>1$일 때 $f''(x)>0$
따라서 변곡점의 좌표는 $(1, 0)$이다.

## 7

$f(x)=2\ln x+\ln(6-x)$에서

$x>0$, $6-x>0$이므로 $0<x<6$

$f'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{6-x}=\dfrac{12-3x}{x(6-x)}$

$f'(x)=0$에서 $12-3x=0$ $\quad\therefore x=4$

$0<x<6$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $4$ | $\cdots$ | $(6)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $5\ln 2$ | $\searrow$ | |

함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$f(4)=5\ln 2$

## 8

$x-\ln x-2=k$에서 $x-\ln x=k+2$

$f(x)=x-\ln x$라 하면 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$, $f'(x)=0$에서 $x=1$

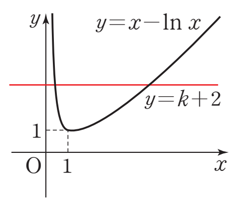
$x>0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ |

또 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$와 직선 $y=k+2$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 $k+2>1$, 즉 $k>-1$

따라서 구하는 정수 $k$의 최솟값은 0이다.




## 9

$f(x)=x-\ln(x-1)$이라 하면

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-2}{x-1}$, $f'(x)=0$에서 $x=2$

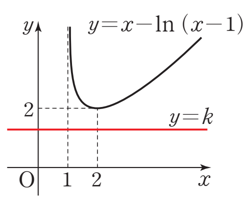
$x>1$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $(1)$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ |

또 $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 주어진 부등식이 성립하도록 하는 실수 $k$의 값의 범위는 $k\le 2$

따라서 실수 $k$의 최댓값은 2이다.




## 10

$\dfrac{dx}{dt}=-3\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=3\cos t$

이므로 점 P의 속도의 크기는

$\sqrt{(-3\sin t)^2+(3\cos t)^2}=\sqrt{9\sin^2 t+9\cos^2 t}=3$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-3\cos t$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-3\sin t$

이므로 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{(-3\cos t)^2+(-3\sin t)^2}=\sqrt{9\cos^2 t+9\sin^2 t}=3$

따라서 속도의 크기와 가속도의 크기의 합은 $3+3=6$

# 1주 창의·융합·코딩 전략

32~35쪽

**1** $y=\dfrac{2}{e}x$ **2** 311 **3** 도훈, 서빈
**4** 태훈: 그릇, 슬비: 뚜껑 **5** ② **6** ⑤
**7** $-1$ **8** 속도의 크기: 1, 가속도의 크기: 1

## 1

$f(x)=\ln 2x$라 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

점 $\left(\dfrac{e}{2}, 1\right)$에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\dfrac{e}{2}\right)=\dfrac{2}{e}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=\dfrac{2}{e}\left(x-\dfrac{e}{2}\right)$ $\quad\therefore y=\dfrac{2}{e}x$

## 2

(i) $f(x)=\sqrt{x^3}$이라 하면 $f'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t^3})$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=\dfrac{3}{2}\sqrt{t}$

따라서 접선의 방정식은 $y-\sqrt{t^3}=\dfrac{3}{2}\sqrt{t}(x-t)$

이 접선이 점 $(0, -4)$를 지나므로

$-4-\sqrt{t^3}=\dfrac{3}{2}\sqrt{t}\times(-t)$, $-4=-\dfrac{1}{2}\sqrt{t^3}$ $\quad\therefore t=4$

이때 접선의 기울기는 $f'(4)=3$이므로 $a=3$

(ii) $f(x)=-\dfrac{1}{x}$이라 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, -\dfrac{1}{t}\right)$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=\dfrac{1}{t^2}$

따라서 접선의 방정식은 $y-\left(-\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{1}{t^2}(x-t)$

이 접선이 점 $(2, 0)$을 지나므로

$\frac{1}{t}=\frac{1}{t^2}(2-t)$, $t=2-t$ $\quad\therefore t=1$

이때 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 $b=1$

(iii) $f(x)=x\ln x$라 하면 $f'(x)=\ln x+1$

접점의 좌표를 $(t, t\ln t)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=\ln t+1$

따라서 접선의 방정식은 $y-t\ln t=(\ln t+1)(x-t)$

이 접선이 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1-t\ln t=(\ln t+1)(-t)$, $-1=-t$ $\quad\therefore t=1$

이때 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 $c=1$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자물쇠의 비밀번호는 311이다.

## 3

$f(t)=\frac{t}{t^2+1}$라 하면

$$f'(t)=\frac{(t^2+1)-t\times 2t}{(t^2+1)^2}=\frac{-t^2+1}{(t^2+1)^2}=0$$

에서 $-t^2+1=0$, $(t+1)(t-1)=0$ $\quad\therefore t=1$

$$f''(t)=\frac{-2t(t^2+1)^2-(-t^2+1)\times 2(t^2+1)\times 2t}{(t^2+1)^4}$$

$$=\frac{2t(t^2-3)}{(t^2+1)^3}=0$$

에서 $t(t^2-3)=0$ $\quad\therefore t=\sqrt{3}$

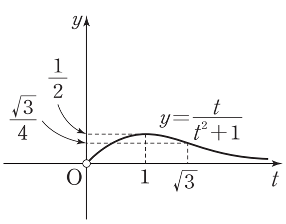
$t>0$일 때, 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $t$ | $(0)$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $\sqrt{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(t)$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(t)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | 변곡점 | ↘ |

함수 $f(t)$는 $t=1$에서 극댓값 $\frac{1}{2}$을 갖고, 변곡점의 좌표는

$\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$이다.

또 $\lim_{t\to 0+}\frac{t}{t^2+1}=0$, $\lim_{t\to\infty}\frac{t}{t^2+1}=0$




채은: 함수 $y=f(t)$는 $t=1$일 때 극대이면서 최대이므로 $t=1$일 때 타율이 가장 높다. (참)

도훈: 함수 $y=f(t)$는 $0<t\le 1$에서 증가하고 $t\ge 1$에서 감소한다. (거짓)

한나: 곡선 $y=f(t)$의 변곡점의 좌표는 $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$이다. (참)

효준: $t\to\infty$일 때 $f(t)\to 0$이므로 타율은 0에 수렴한다. (참)

서빈: 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{4}$의 교점의 개수는 2이다. (거짓)

따라서 옳지 않은 말을 한 사람은 도훈, 서빈이다.

## 4

태훈: $f(x)=xe^x$이라 하면

$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$,

$f''(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

$x>0$일 때 $f''(x)>0$

즉, 주어진 곡선은 $x>0$에서 아래로 볼록하다.

따라서 태훈이가 만드는 것은 그릇이다.

슬비: $f(x)=\ln x-x^2$이라 하면

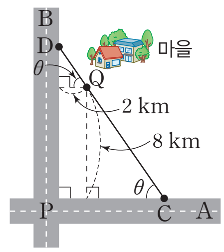
$f'(x)=\frac{1}{x}-2x$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}-2$

$x>0$일 때 $f''(x)<0$

즉, 주어진 곡선은 $x>0$에서 위로 볼록하다.

따라서 슬비가 만드는 것은 뚜껑이다.

## 5




오른쪽 그림과 같이 새로운 도로와 기존 도로 PA, PB의 교점을 각각 C, D라 하고, 마을을 Q라 하면

$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{CQ}}+\overline{\mathrm{DQ}}=\frac{8}{\sin\theta}+\frac{2}{\cos\theta}$

$f(\theta)=\frac{8}{\sin\theta}+\frac{2}{\cos\theta}$라 하면

$$f'(\theta)=-\frac{8\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$f'(\theta)=0$에서 $\frac{8\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}$, $8\cos^3\theta=2\sin^3\theta$

$\tan^3\theta=4$ $\quad\therefore \tan\theta=\sqrt[3]{4}$

$\tan\theta=\sqrt[3]{4}$를 만족시키는 $\theta$의 값을 $\alpha$라 하고 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$일 때, 함수 $f(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $\theta$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(\theta)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(\theta)$ | | ↘ | 극소 | ↗ | |

함수 $f(\theta)$는 $\theta=\alpha$에서 극소이면서 최소이다.

따라서 새로운 직선 도로의 길이가 최소가 되도록 하는 $\tan\theta$의 값은 $\sqrt[3]{4}$이다.

## 6

사진의 가로와 세로의 길이를 각각 $x$ cm, $y$ cm라 하면 사진의 넓이가 48 $\mathrm{cm}^2$이므로

$xy=48$ $\quad\therefore y=\frac{48}{x}$

액자의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=(x+3)(y+4)=(x+3)\left(\frac{48}{x}+4\right)=4x+60+\frac{144}{x}$$

$S'(x)=4-\frac{144}{x^2}$

$S'(x)=0$에서 $\frac{144}{x^2}=4$, $x^2=36$ $\quad\therefore x=6$ $(\because x>0)$

$x>0$일 때, 함수 $y=S(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $6$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $S'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $S(x)$ | | $\searrow$ | 극소 | $\nearrow$ |

함수 $S(x)$는 $x=6$에서 극소이면서 최소이다.
따라서 액자의 넓이의 최솟값은
$S(6)=24+60+24=108\ (\text{cm}^2)$

다른 풀이

$x>0$이므로 산술평균과 기하평균에서

$$S(x)=4x+\frac{144}{x}+60\ge 2\sqrt{4x\times\frac{144}{x}}+60$$
$$=48+60=108\ (\text{cm}^2)$$

### 7

학생 A가 학생 B보다 항상 앞서서 수영하게 되므로

$A(t)>B(t)$, 즉 $e^t+k>\frac{1}{2}t^2+t$에서

$e^t-\frac{1}{2}t^2-t+k>0$

$f(t)=e^t-\frac{1}{2}t^2-t+k$라 하면

$f'(t)=e^t-t-1$, $f''(t)=e^t-1$

$t>0$일 때, $f''(t)>0$이므로 $f'(t)$는 증가하고 $f'(0)=0$이므로 $t>0$에서 $f'(t)>0$이다.

즉, 함수 $f(t)$는 $t>0$에서 증가한다.

이때 $f(t)>0$이 성립하려면

$f(0)=1+k\ge 0 \qquad \therefore k\ge -1$

따라서 학생 A가 학생 B보다 항상 앞서서 수영하게 되는 실수 $k$의 최솟값은 $-1$이다.

### 8

$\frac{dx}{dt}=1-\cos t$, $\frac{dy}{dt}=\sin t$

이므로 점 P의 속도의 크기는

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}=\sqrt{2-2\cos t}$$

$\frac{d^2x}{dt^2}=\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=\cos t$

이므로 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1$$

따라서 $t=\frac{\pi}{3}$에서

점 P의 속도의 크기는 $\sqrt{2-2\times\frac{1}{2}}=1$,

점 P의 가속도의 크기는 1이다.

## 2주 1일 개념 돌파 전략 ①

39, 41쪽

**1-2** $-\frac{1}{3}e^{1-3x}+C$ **2-2** $-\ln|\cos x|+C$

**3-2** $x\ln x-x+C$ **4-2** 2

**5-2** $\frac{5}{6}$

### 1-2

$$\int e^{1-3x}dx=e\int e^{-3x}dx=e\times\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3x}+C$$
$$=-\frac{1}{3}e^{1-3x}+C$$

참고

$\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C$ (단, $a\neq 0$)

### 2-2

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-(\cos x)'}{\cos x}$이므로

$$\int \tan x\,dx=-\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=-\ln|\cos x|+C$$

### 3-2

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$이므로

$$\int \ln x\,dx=(\ln x)\times x-\int\frac{1}{x}\times x\,dx=x\ln x-x+C$$

### 4-2

$f(x)=x^2$, $\Delta x=\frac{(1+a)-1}{n}=\frac{a}{n}$, $x_k=1+k\Delta x=1+\frac{ak}{n}$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{ak}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{a}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{ak}{n}\right)^2\frac{a}{n}=\frac{3}{a}\int_1^{1+a}x^2dx$$
$$=\frac{3}{a}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^{1+a}=\frac{1}{a}\{(1+a)^3-1\}$$
$$=a^2+3a+3$$

즉, $a^2+3a+3=13$이므로 $a^2+3a-10=0$

$(a+5)(a-2)=0 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$

참고 급수를 정적분으로 나타내는 방법

급수를 정적분으로 나타낼 때는 다음과 같은 순서로 한다.
1 적분변수를 정한다.
2 적분 구간을 구한다.
3 정적분으로 나타낸다.
이때 무엇을 적분변수로 정하느냐에 따라 여러 가지 정적분으로 나타낼 수 있다.

㉨ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$의 극한값

[방법 1]

$f(x)=x^2$, $\Delta x=\frac{2-1}{n}=\frac{1}{n}$, $x_k=1+k\Delta x=1+\frac{k}{n}$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\int_1^2 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

[방법 2]

$f(x)=(1+x)^2$, $\Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$, $x_k=0+k\Delta x=\frac{k}{n}$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\int_0^1(1+x)^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(1+x)^3\right]_0^1$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

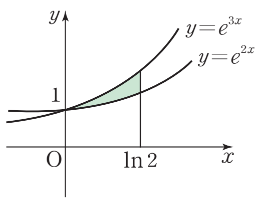
## 5-2

두 곡선의 교점의 $x$좌표는

$e^{2x}=e^{3x}$에서 $x=0$

닫힌구간 $[0, \ln 2]$에서 $e^{3x}\ge e^{2x}$

따라서 구하는 도형의 넓이 $S$는




$$S=\int_0^{\ln 2}(e^{3x}-e^{2x})dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2}$$
$$=\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{6}$$

## 2주 1일 개념 돌파 전략 ②

42, 43쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 ② | 2 ④ | 3 ① | 4 ③ |
| 5 ② | 6 ⑤ | | |

## 1

$f'(x)=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}$이므로

$f(x)=\int\left(1-\frac{1}{x}\right)dx=x-\ln|x|+C$

이 곡선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$f(1)=1+C=0$ $\qquad\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=x-\ln|x|-1$이므로

$f(e)=e-1-1=e-2$

## 2

$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 5\,dx$에서 $\ln|f(x)|=5x+C$

이때 $f(1)=e$이므로

$\ln|f(1)|=5+C$, $1=5+C$ $\qquad\therefore C=-4$

따라서 $\ln|f(x)|=5x-4$에서

$f(x)=e^{5x-4}$이므로 $f(2)=e^6$

## 3

$g(x)=(\ln x)^2$, $h'(x)=1$로 놓으면

$g'(x)=2\ln x\times\frac{1}{x}=\frac{2}{x}\ln x$, $h(x)=x$이므로

부분적분법에 의하여

$$f(x)=x(\ln x)^2-\int\frac{2}{x}\ln x\times x\,dx$$
$$=x(\ln x)^2-2\int\ln x\,dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로 부분적분법에 의하여

$$\int\ln x\,dx=\ln x\times x-\int\frac{1}{x}\times x\,dx=x\ln x-x+C$$

이 식을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=x(\ln x)^2-2(x\ln x-x+C)$$
$$=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x-2C$$

이때 $f(1)=2$이므로 $f(1)=2-2C=2$ $\qquad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$이므로

$f(e)=e-2e+2e=e$

## 4

$f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$, $\Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$, $x_k=0+k\Delta x=\frac{k}{n}$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{2\pi}{2n}+\sin\frac{3\pi}{2n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{2n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}=\lim_{n\to\infty}2\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$
$$=2\int_0^1\sin\frac{\pi}{2}x\,dx=2\times\left(-\frac{2}{\pi}\right)\left[\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1=\frac{4}{\pi}$$

## 5

단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{x^2+4x+6}{x+2}$

따라서 구하는 물의 부피 $V$는

$$V=\int_0^4 S(x)dx=\int_0^4\frac{x^2+4x+6}{x+2}dx$$
$$=\int_0^4\left(x+2+\frac{2}{x+2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+2x+2\ln|x+2|\right]_0^4$$
$$=(16+2\ln 6)-2\ln 2=16+2\ln 3$$

**6**

$\dfrac{dx}{dt}=2t-\dfrac{1}{t},\ \dfrac{dy}{dt}=2\sqrt{2}$

이므로 점 P가 $t=1$에서 $t=4$까지 움직인 거리 $s$는

$$s=\int_1^4\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^4\sqrt{\left(2t-\frac{1}{t}\right)^2+(2\sqrt{2})^2}\,dt$$
$$=\int_1^4\sqrt{\left(2t+\frac{1}{t}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^4\left|2t+\frac{1}{t}\right|dt=\Big[t^2+\ln t\Big]_1^4$$
$$=(16+\ln 4)-1=15+2\ln 2$$

## 2주 2일 필수 체크 전략 ①

44~47쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1-1 ③ | 1-2 $\frac{2}{3}$ | 2-1 $\frac{3}{8}\pi$ | 2-2 ③ |
| 3-1 $a=2,\ b=0$ | 3-2 ① | 4-1 $\frac{1}{4}(e^2-3)$ | 4-2 ④ |

**1-1**

$$\int_0^1\frac{x-3}{x^2-x-2}dx+\int_0^1\frac{6-x}{x^2-x-2}dx$$
$$=\int_0^1\frac{(x-3)+(6-x)}{x^2-x-2}dx$$
$$=\int_0^1\frac{3}{(x-2)(x+1)}dx$$
$$=\int_0^1\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\Big[\ln|x-2|-\ln|x+1|\Big]_0^1=\left[\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\right]_0^1$$
$$=\ln\frac{1}{2}-\ln 2=-2\ln 2$$

**1-2**

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^3x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2x\sin x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\cos^2x)\sin x\,dx$$

이때 $\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\dfrac{dt}{dx}$

$x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=0$, $x=\pi$일 때 $t=-1$이므로

$$(\text{주어진 식})=\int_0^{-1}(1-t^2)\times(-1)dt=\int_{-1}^0(1-t^2)dt$$
$$=\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^0=\frac{2}{3}$$

**2-1**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

$\displaystyle\int_0^2\frac{1}{x^2+4}dx$에서

$x=2\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\dfrac{dx}{d\theta}=2\sec^2\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=2$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^2\frac{1}{x^2+4}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4\tan^2\theta+4}\times 2\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4\sec^2\theta}\times 2\sec^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}d\theta$$
$$=\left[\frac{1}{2}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}$$
$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx+\int_0^2\frac{1}{x^2+4}dx=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}=\frac{3}{8}\pi$$

**2-2**

$x=\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

$x=-1$일 때 $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$, $x=1$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\times\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\times\cos\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\frac{\pi}{2}$$

**3-1**

주어진 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=a\cos x-b\sin x$

주어진 식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $b=0$

$\therefore f(x)=a\cos x$

이때 $f(0)=2$이므로 $a=2$

**3-2**

$\displaystyle\int_1^e\frac{f(t)}{t}dt=k$ ($k$는 상수)로 놓으면 $f(x)=x+2k$

$$\int_1^e\frac{f(t)}{t}dt=\int_1^e\frac{t+2k}{t}dt=\int_1^e\left(1+\frac{2k}{t}\right)dt$$
$$=\Big[t+2k\ln|t|\Big]_1^e=e+2k-1$$

즉, $e+2k-1=k$이므로 $k=1-e$

따라서 $f(x)=x+2-2e$이므로 $f(e)=2-e$

### 4-1

주어진 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=x-x\ln x=x(1-\ln x)$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=1\,(\because x>0)$ $\qquad\therefore x=e$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ |

함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극대이면서 최대이다.

이때 $f(e)=\int_1^e(t-t\ln t)dt=\int_1^e t(1-\ln t)dt$에서

$u(t)=1-\ln t,\ v'(t)=t$로 놓으면

$u'(t)=-\frac{1}{t},\ v(t)=\frac{1}{2}t^2$이므로 부분적분법에 의하여

$$\begin{aligned}\int_1^e t(1-\ln t)dt&=\left[(1-\ln t)\times\frac{1}{2}t^2\right]_1^e-\int_1^e\left(-\frac{1}{t}\times\frac{1}{2}t^2\right)dt\\&=-\frac{1}{2}+\int_1^e\frac{1}{2}t\,dt\\&=-\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{4}t^2\right]_1^e\\&=-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{1}{4}(e^2-3)\end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(e)=\frac{1}{4}(e^2-3)$

### 4-2

$f'(x)=xe^x=0$에서 $x=0$

$0\le x\le\ln 3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\ln 3$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | |

$0\le x\le\ln 3$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 $x=0$일 때 최소이고, $x=\ln 3$일 때 최대이다.

$f(x)=\int xe^x dx$에서 $u(x)=x,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=e^x$이므로 부분적분법에 의하여

$\int xe^x dx=xe^x-\int 1\times e^x dx=(x-1)e^x+C$

이때 $f(0)=3$이므로 $-1+C=3$ $\qquad\therefore C=4$

따라서 $f(x)=(x-1)e^x+4$이므로 최댓값은

$f(\ln 3)=3(\ln 3-1)+4=3\ln 3+1$

## 2주 2일 필수 체크 전략 ②

48, 49쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** ⑤ | **2** ③ | **3** ① | **4** ③ |
| **5** ⑤ | **6** ④ | **7** ② | |

### 1

$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x>1)\\ 2e^{2x} & (x<1)\end{cases}$에서 $f(x)=\begin{cases}\ln x+C_1 & (x>1)\\ e^{2x}+C_2 & (x<1)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$

$e^2=e^2+C_2=C_1$ $\qquad\therefore C_1=e^2,\ C_2=0$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\ln x+e^2 & (x\ge1)\\ e^{2x} & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(0)+f(e)=1+(\ln e+e^2)=e^2+2$

### 2

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 2를 가지므로 $f'(1)=0,\ f(1)=2$

$f'(1)=2+a=0$에서 $a=-2$이므로

$f(x)=\int(2xe^{x^2-1}-2)dx$

이때 $\int 2xe^{x^2-1}dx$에서

$x^2-1=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int 2xe^{x^2-1}dx=\int e^t dt=e^t+C=e^{x^2-1}+C$

$\therefore f(x)=e^{x^2-1}-2x+C$

이때 $f(1)=2$이므로 $1-2+C=2$ $\qquad\therefore C=3$

따라서 $f(x)=e^{x^2-1}-2x+3$이므로

$a+f(2)=-2+(e^3-4+3)=e^3-3$

### 3

주어진 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+(2xe^{-x}-x^2e^{-x})$

$\therefore f'(x)=xe^{-x}-2e^{-x}=(x-2)e^{-x}$

이때 $f(x)=\int(x-2)e^{-x}dx$에서

$u(x)=x-2,\ v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=-e^{-x}$이므로 부분적분법에 의하여

$$\begin{aligned}\int(x-2)e^{-x}dx&=-(x-2)e^{-x}-\int 1\times(-e^{-x})dx\\&=-(x-2)e^{-x}-e^{-x}+C\\&=(1-x)e^{-x}+C\end{aligned}$$

이때 $f(0)=4$이므로 $1+C=4$ $\qquad\therefore C=3$

따라서 $f(x)=(1-x)e^{-x}+3$이므로 $f(1)=3$

## 4

$x-n=0$에서 $x=n$이므로

$$|x-n|=\begin{cases} x-n & (x\geq n) \\ -(x-n) & (x<n) \end{cases}$$

$$f(n)=\int_0^n(-x+n)dx+\int_n^{2n}(x-n)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+nx\right]_0^n+\left[\frac{1}{2}x^2-nx\right]_n^{2n}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n^2=n^2$$

$$\therefore \frac{1}{11}\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(11)\}$$

$$=\frac{1}{11}\sum_{k=1}^{11}f(k)=\frac{1}{11}\sum_{k=1}^{11}k^2$$

$$=\frac{1}{11}\times\frac{11\times12\times23}{6}=46$$

## 5

$\int_0^1 xf'(2x-1)dx$에서 $2x-1=t$로 놓으면 $2=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=-1$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^1 xf'(2x-1)dx=\int_{-1}^1\frac{t+1}{2}\times f'(t)\times\frac{1}{2}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-1}^1\{tf'(t)+f'(t)\}dt$$

이때 조건 (가)에서 $f'(x)$는 기함수이므로 $xf'(x)$는 우함수이다.

$$\therefore \frac{1}{4}\int_{-1}^1\{tf'(t)+f'(t)\}dt=\frac{1}{4}\times2\int_0^1 tf'(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^1 tf'(t)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\Big[tf(t)\Big]_0^1-\int_0^1 f(t)\,dt\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{f(1)-\int_0^1 f(t)\,dt\right\}$$

조건 (나)에서 $\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)=f(1)=-\frac{1}{3}$이고,

조건 (다)에서 $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{1}{5}$이므로 구하는 값은

$$\frac{1}{2}\left\{f(1)-\int_0^1 f(t)dt\right\}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)=-\frac{1}{15}$$

## 6

$\int_0^x(x-t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$이므로

$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\cos 4x-1$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=-4\sin 4x$$

$$\therefore \int_0^x f(t)dt=-4\sin 4x \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=-16\cos 4x \qquad \therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-16\cos\pi=16$

## 7

$f(x)=\int_1^x\frac{n-\ln t}{t}dt$에서 $f'(x)=\frac{n-\ln x}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=n \qquad \therefore x=e^n$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $e^n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ |

함수 $f(x)$는 $x=e^n$에서 극대이면서 최대이므로

$$g(n)=\int_1^{e^n}\frac{n-\ln t}{t}dt=\int_1^{e^n}\frac{n}{t}dt-\int_1^{e^n}\frac{\ln t}{t}dt$$

이때 $\int_1^{e^n}\frac{\ln t}{t}dt$에서 $\ln t=k$로 놓으면 $\frac{1}{t}=\frac{dk}{dt}$

$t=1$일 때 $k=0$, $t=e^n$일 때 $k=n$이므로

$$g(n)=\int_1^{e^n}\frac{n}{t}dt-\int_0^n k\,dk=\Big[n\ln|t|\Big]_1^{e^n}-\left[\frac{1}{2}k^2\right]_0^n$$

$$=n^2-\frac{1}{2}n^2=\frac{1}{2}n^2$$

$$\therefore 12\sum_{n=1}^5 g(n)=6\sum_{n=1}^5 n^2=6\times\frac{5\times6\times11}{6}=330$$

## 2주 3일 필수 체크 전략 ①

50~53쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1-1** $\frac{1}{3}\ln 2$ | **1-2** ② | **2-1** ④ | **2-2** ② |
| **3-1** ④ | **3-2** $\frac{\pi}{2}$ | **4-1** $\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$ | **4-2** ⑤ |

## 1-1

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{1^3+n^3}+\frac{2^2}{2^3+n^3}+\frac{3^2}{3^3+n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{k^2}{k^3+n^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\left(\frac{k}{n}\right)^3+1}\times\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{x^2}{x^3+1}\,dx$$

이때 $x^3+1=t$로 놓으면 $3x^2=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

(주어진 식)$=\frac{1}{3}\int_1^2\frac{1}{t}\,dt=\frac{1}{3}\Big[\ln t\Big]_1^2=\frac{1}{3}\ln 2$

## 1-2

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{2}{n^3}}+\sqrt{\frac{3}{n^3}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n^3}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\sqrt{\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

기말

## 2-1

$\ln x+\ln y=1$에서 $\ln xy=1$

$xy=e \qquad \therefore y=\frac{e}{x}$ (단, $x>0$)

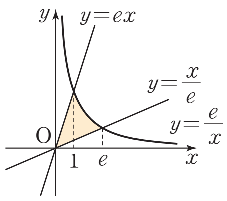
곡선 $y=\frac{e}{x}$와 직선 $y=ex$의 교점의 $x$좌표는

$\frac{e}{x}=ex$에서 $x^2=1 \qquad \therefore x=1\,(\because x>0)$

곡선 $y=\frac{e}{x}$와 직선 $y=\frac{x}{e}$의 교점의 $x$좌표는

$\frac{e}{x}=\frac{x}{e}$에서 $x^2=e^2 \qquad \therefore x=e\,(\because x>0)$

따라서 구하는 도형의 넓이 $S$는




$$S=\int_0^1 ex\,dx+\int_1^e \frac{e}{x}dx-\int_0^e \frac{x}{e}dx$$

$$=\left[\frac{e}{2}x^2\right]_0^1+\left[e\ln x\right]_1^e-\left[\frac{1}{2e}x^2\right]_0^e$$

$$=\frac{e}{2}+e-\frac{e}{2}=e$$

## 2-2

$f(x)=\ln x$에서 $f'(x)=\frac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(a, \ln a)$로 놓으면 접선의 기울기는

$f'(a)=\frac{1}{a}$이므로 접선의 방정식은

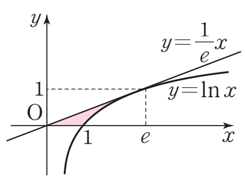
$y-\ln a=\frac{1}{a}(x-a) \qquad \therefore y=\frac{1}{a}x+\ln a-1$

이 접선이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=\ln a-1,\ \ln a=1 \qquad \therefore a=e$

접선의 방정식은 $y=\frac{1}{e}x$이고 접점의 좌표는 $(e, 1)$이다.

따라서 구하는 도형의 넓이 $S$는




$$S=\frac{1}{2}\times e\times 1-\int_1^e \ln x\,dx$$

$$=\frac{e}{2}-\left[x\ln x-x\right]_1^e=\frac{e}{2}-1$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$이므로

$a+b=-\frac{1}{2}$

## 3-1

닫힌구간 $[0, \ln 2]$에서 $x$좌표가 $x$인 점을 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면이 한변의 길이가 $e^{2x}$인 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=(e^{2x})^2=e^{4x}$

따라서 구하는 입체도형의 부피 $V$는

$$V=\int_0^{\ln 2} S(x)\,dx=\int_0^{\ln 2} e^{4x}dx=\left[\frac{1}{4}e^{4x}\right]_0^{\ln 2}$$

$$=\frac{1}{4}(16-1)=\frac{15}{4}$$

## 3-2

닫힌구간 $[1, 3]$에서 $x$좌표가 $x$인 점을 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면이 지름의 길이가 $\sqrt{x}$인 반원이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피 $V$는

$$V=\int_1^3 \frac{\pi}{8}x\,dx=\left[\frac{\pi}{16}x^2\right]_1^3=\frac{\pi}{2}$$

## 4-1

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$

따라서 구하는 곡선의 길이 $l$은

$$l=\int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_1^e \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\right\}^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^e \left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{t}\right]_1^e$$

$$=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

## 4-2

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4x}$이라 하면 $f'(x)=x^2-\frac{1}{4x^2}$

따라서 구하는 곡선의 길이 $l$은

$$l=\int_1^2 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

$$=\int_1^2 \sqrt{1+\left(x^2-\frac{1}{4x^2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4x}\right]_1^2$$

$$=\frac{61}{24}-\frac{1}{12}=\frac{59}{24}$$

## 2주 3일 필수 체크 전략 ②

54, 55쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 ⑤ | 2 ② | 3 ③ | 4 ④ |
| 5 ② | 6 ③ | | |

## 1

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 xe^x\,dx$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\cos\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n}$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\sqrt[n]{\frac{n+k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$=\int_0^1\ln(1+x)dx$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

참고

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\cos\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\left(\pi\times\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$=\pi\int_0^1 x\cos\pi x\,dx$

로 나타낼 수도 있다.

## 2

(i) $f(x)=x^2$, $\Delta x=\frac{5-2}{n}=\frac{3}{n}$, $x_k=2+k\Delta x=2+\frac{3k}{n}$

라 하면

(주어진 식)$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^2\frac{3}{n}=\frac{1}{3}\int_2^5 x^2dx$

(ii) $f(x)=(2+3x)^2$, $\Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$, $x_k=0+k\Delta x=\frac{k}{n}$

라 하면

(주어진 식)$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\int_0^1(2+3x)^2dx$

(iii) $f(x)=(2+x)^2$, $\Delta x=\frac{3-0}{n}=\frac{3}{n}$, $x_k=0+k\Delta x=\frac{3k}{n}$

라 하면

(주어진 식)$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^2\frac{3}{n}=\frac{1}{3}\int_0^3(2+x)^2dx$

## 3

$\int_0^3 f(x)dx=9$, $\int_3^4 f(x)dx=-3$이므로

$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx=6$

이때 $\int_0^2 f(2x)dx$에서 $2x=t$로 놓으면 $2=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=4$이므로

$\int_0^2 f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^4 f(t)dt=\frac{1}{2}\times6=3$

## 4

$x\sin x=0\ (0\le x\le 2\pi)$에서

$x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$

이때 $\int x\sin x dx$에서

$f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$이므로 부분적분법에 의하여

$\int x\sin x dx=-x\cos x-\int(-\cos x)dx$

$=-x\cos x+\sin x$

닫힌구간 $[0, \pi]$에서 $x\sin x\ge0$

닫힌구간 $[\pi, 2\pi]$에서 $x\sin x\le0$

따라서 구하는 도형의 넓이 $S$는

$S=\int_0^\pi x\sin x\,dx+\int_\pi^{2\pi}(-x\sin x)\,dx$

$=\Big[-x\cos x+\sin x\Big]_0^\pi+\Big[x\cos x-\sin x\Big]_\pi^{2\pi}$

$=\pi+3\pi=4\pi$

## 5

밑면에 수직인 직선을 $x$축으로 정할 때, 닫힌구간 $[0, a]$에서 $x$좌표가 $x$인 점을 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=x\ln(x^2+1)$

따라서 구하는 입체도형의 부피 $V$는

$V=\int_0^a S(x)\,dx=\int_0^a x\ln(x^2+1)dx$

이때 $x^2+1=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=a$일 때 $t=a^2+1$이므로

$\int_0^a x\ln(x^2+1)dx=\int_1^{a^2+1}\frac{1}{2}\ln t\,dt$

$=\frac{1}{2}\Big[t\ln t-t\Big]_1^{a^2+1}$

$=\frac{a^2+1}{2}\ln(a^2+1)-\frac{a^2}{2}$

즉, $\frac{a^2+1}{2}\ln(a^2+1)-\frac{a^2}{2}=\frac{5}{2}\ln 5-2$이므로

$a^2+1=5$, $a^2=4$ $\quad\therefore a=2\ (\because\ a>0)$

## 6

$\frac{dx}{dt}=4(-\sin t+\cos t)$, $\frac{dy}{dt}=-2\sin 2t$

따라서 점 P가 움직인 거리 $s$는

$s=\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$=\int_0^\pi\sqrt{\{4(-\sin t+\cos t)\}^2+(-2\sin 2t)^2}dt$

$=\int_0^\pi\sqrt{16(1-2\sin t\cos t)+4\sin^2 2t}\,dt$

$=\int_0^\pi\sqrt{4(\sin 2t-2)^2}dt$

$=2\int_0^\pi|\sin 2t-2|dt$

$=2\int_0^\pi(-\sin 2t+2)dt$

$=2\Big[\frac{1}{2}\cos 2t+2t\Big]_0^\pi$

$=2\left\{\left(\frac{1}{2}+2\pi\right)-\frac{1}{2}\right\}=4\pi$

## 2주 4일 교과서 대표 전략 ①

56~59쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 ④ | 2 ③ | 3 ④ | 4 ⑤ |
| 5 ④ | 6 ② | 7 ① | 8 ③ |
| 9 ⑤ | 10 ⑤ | 11 ② | 12 ③ |
| 13 ② | 14 ③ | 15 ② | 16 ① |

**1**

$f(x)=\int f'(x)dx$이므로

$$f(x)=\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx=\int \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}dx$$
$$=\int \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1+\sin x}dx=\int (1-\sin x)\,dx$$
$$=x+\cos x+C$$

이때 $f(0)=2$이므로 $1+C=2$ $\quad\therefore C=1$

따라서 $f(x)=x+\cos x+1$이므로

$f(\pi)=\pi+(-1)+1=\pi$

**2**

① $(x^2+2x+7)'=2x+2$이고

$x^2+2x+7=(x+1)^2+6>0$이므로

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+7}dx=\ln(x^2+2x+7)+C$$

② $(\ln x)'=\frac{1}{x}$이므로

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx=\ln|\ln x|+C$$

③ $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$이고 $(\sin x)'=\cos x$이므로

$$\int \cot x\,dx=\ln|\sin x|+C$$

④ $(e^x+8)'=e^x$이므로

$$\int \frac{e^x}{e^x+8}dx=\ln(e^x+8)+C$$

⑤ $(e^x+e^{-x})'=e^x-e^{-x}$이므로

$$\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\ln(e^x+e^{-x})+C$$

**3**

$\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1}{(x-3)(x-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)$이므로

$$\int_4^5 \frac{1}{x^2-4x+3}dx=\frac{1}{2}\int_4^5\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\ln|x-3|-\ln|x-1|\Big]_4^5$$
$$=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로 $a+b=5$

**4**

$$\int_0^1(3^x-1)(9^x+3^x+1)dx=\int_0^1(27^x-1)dx$$
$$=\left[\frac{27^x}{\ln 27}-x\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{27}{\ln 27}-1\right)-\frac{1}{\ln 27}$$
$$=\frac{26}{3\ln 3}-1$$

**5**

$\sin x=0$에서 $x=\pi$이므로

$$|\sin x|=\begin{cases}\sin x & (0\le x\le \pi)\\ -\sin x & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

$$\therefore \int_0^{2\pi}|\sin x|dx=\int_0^{\pi}\sin x dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)dx$$
$$=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}+\Big[\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}$$
$$=2+2=4$$

**6**

$1+\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$

$x=1$일 때 $t=1$, $x=e^3$일 때 $t=4$이므로

$$\int_1^{e^3}\frac{1}{x(1+\ln x)^2}dx=\int_1^4\frac{1}{t^2}dt$$
$$=\left[-\frac{1}{t}\right]_1^4=\frac{3}{4}$$

따라서 $a=4$, $b=3$이므로 $ab=12$

**7**

$x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=a\sec^2\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=a$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^a\frac{1}{x^2+a^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a^2\tan^2\theta+a^2}\times a\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a^2\sec^2\theta}\times a\sec^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a}d\theta$$
$$=\left[\frac{1}{a}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4a}$$

따라서 $\frac{\pi}{4a}=\frac{\pi}{4}$이므로 $a=1$

**8**

$f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$이므로 부분적분법에 의하여

$$\int_0^3 xe^x dx=\Big[xe^x\Big]_0^3-\int_0^3 e^x dx=3e^3-\Big[e^x\Big]_0^3$$
$$=3e^3-(e^3-1)=2e^3+1$$

**9**

$\int_1^3 f(t)dt=k$ ($k$는 상수)로 놓으면 $f(x)=\ln x+k$

$k=\int_1^3(\ln t+k)dt=\Big[t\ln t-t+kt\Big]_1^3$

$=(3\ln 3-3+3k)-(-1+k)$

$=3\ln 3+2k-2$

즉, $k=2-3\ln 3$이므로

$f(x)=\ln x+2-3\ln 3$

$\therefore f(27)=\ln 27+2-3\ln 3=2$

**10**

주어진 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=2e^{2x}+ae^x$

주어진 식의 양변에 $x=\ln 3$을 대입하면

$0=9+3a \qquad \therefore a=-3$

따라서 $f(x)=2e^{2x}-3e^x$이므로

$f(\ln 2)=2e^{2\ln 2}-3e^{\ln 2}=2\times 4-3\times 2=2$

**11**

$\int_0^x(x-t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$이므로

$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=e^x-\sin x-a \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=e^x-\cos x$

$\therefore \int_0^x f(t)dt=e^x-\cos x \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=e^x+\sin x \qquad \therefore f(0)=1$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=1-a \qquad \therefore a=1$

$\therefore a+f(0)=2$

**12**

$f(t)=t^2\ln t^3$으로 놓고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

(주어진 식) $=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_{e-x}^{e+x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{F(e+x)-F(e-x)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{F(e+x)-F(e)+F(e)-F(e-x)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{F(e+x)-F(e)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{F(e-x)-F(e)}{-x}$

$=F'(e)+F'(e)$

$=2F'(e)=2f(e)$

$=6e^2$

**13**

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{-\frac{1}{n}}+e^{-\frac{2}{n}}+e^{-\frac{3}{n}}+\cdots+e^{-\frac{n}{n}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{-\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}=\int_0^1 e^{-x}dx=\Big[-e^{-x}\Big]_0^1=-\frac{1}{e}+1$

따라서 $a=-1$, $b=1$이므로 $ab=-1$

**14**

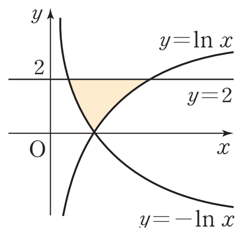
$y=\ln x$에서 $x=e^y$,

$y=-\ln x$에서 $x=e^{-y}$

따라서 구하는 도형의 넓이 $S$는

$S=\int_0^2(e^y-e^{-y})dy=\Big[e^y+e^{-y}\Big]_0^2$

$=e^2+\frac{1}{e^2}-2$




**15**

밑면에 수직인 직선을 $x$축으로 정할 때, 닫힌구간 $[0, 3]$에서 $x$좌표가 $x$인 점을 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\pi(9-x^2)$

따라서 구하는 입체도형의 부피 $V$는

$V=\int_0^3 S(x)dx=\int_0^3\pi(9-x^2)dx=\pi\Big[9x-\frac{1}{3}x^3\Big]_0^3=18\pi$

**16**

$\frac{dx}{dt}=\sqrt{3}\cos t+\sin t$, $\frac{dy}{dt}=-\sqrt{3}\sin t+\cos t$

따라서 $t=0$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리 $s$는

$s=\int_0^\pi\sqrt{(\sqrt{3}\cos t+\sin t)^2+(-\sqrt{3}\sin t+\cos t)^2}\,dt$

$=\int_0^\pi\sqrt{4(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^\pi 2dt=\Big[2t\Big]_0^\pi=2\pi$

## 2주 4일 교과서 대표 전략 ②

60, 61쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** $-3$ | **2** ② | **3** ⑤ | **4** ① |
| **5** ⑤ | **6** ④ | **7** ④ | **8** $\frac{\pi}{6}$ |

**1**

조건 (가)에서

$f(x)=\int\frac{2+x^5}{x^3}dx=\int(2x^{-3}+x^2)dx=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}x^3+C$

조건 (나)에서

$f(1)=-1+\frac{1}{3}+C=-\frac{7}{3}\qquad \therefore C=-\frac{5}{3}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}$이므로

$f(-1)=-1-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}=-3$

## 2

$f'(x)=\frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}$이므로 $f(x)=\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}dx$

이때 $e^x+3=t$로 놓으면 $e^x=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{e^x+3}+C$

이 곡선이 점 $(0, 4)$를 지나므로

$f(0)=4+C=4\qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=2\sqrt{e^x+3}$이므로

$f(\ln 6)=2\times 3=6$

## 3

$\int_{-\ln 2}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{\ln 2}f(x)dx=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}f(x)dx$

$e^x+e^{-x}$은 우함수이므로

$\int_{-\ln 2}^{\ln 2}(e^x+e^{-x})dx=2\int_{0}^{\ln 2}(e^x+e^{-x})dx$

$2^x-2^{-x}$은 기함수이므로

$\int_{-\ln 2}^{\ln 2}(2^x-2^{-x})=0$

$\therefore$ (주어진 식)$=2\int_{0}^{\ln 2}(e^x+e^{-x})dx$

$=2\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^{\ln 2}=2\left(2-\frac{1}{2}\right)=3$

**참고**

$g(x)=e^x+e^{-x}$이라 하면 $g(-x)=e^{-x}+e^x$

$g(x)=g(-x)$이므로 $g(x)$는 우함수이다.

$h(x)=2^x-2^{-x}$이라 하면 $h(-x)=2^{-x}-2^x$

$h(-x)=-h(x)$이므로 $h(x)$는 기함수이다.

## 4

$f(x)=\sin x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=\cos x$, $g(x)=e^x$이므로

$\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx=\Big[e^x\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$

$=-\int_0^{\pi}e^x\cos x dx$ …… ㉠

$\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$에서 $u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x$, $v(x)=e^x$이므로

$\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx=\Big[e^x\cos x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$

$=-e^{\pi}-1+\int_0^{\pi}e^x\sin x dx$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx=e^{\pi}+1-\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$

$2\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx=e^{\pi}+1$, $\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^{\pi}+\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{b}{a}=1$

## 5

주어진 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$3x^2f(x)+(x^3+1)f'(x)-6=6\{x^2f(x)-1\}$

$(x^3+1)f'(x)=3x^2f(x)$

$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3x^2}{x^3+1}$ …… ㉠

㉠의 양변을 적분하면

$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{3x^2}{x^3+1}dx$이므로

$\ln f(x)=\ln(x^3+1)+C$ ($\because f(x)>0$)

주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2f(1)-6=0\qquad \therefore f(1)=3$

$\ln f(1)=\ln 2+C$, $\ln 3=\ln 2+C\qquad \therefore C=\ln\frac{3}{2}$

따라서 $\ln f(x)=\ln(x^3+1)+\ln\frac{3}{2}$에서

$f(x)=\frac{3}{2}(x^3+1)$이므로 $f(3)=42$

## 6

$f'(x)=1-2\sin x=0$에서

$\sin x=\frac{1}{2}\qquad \therefore x=\frac{\pi}{6}$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\cdots$ | $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | |

함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-2\sin t)dt=\Big[t+2\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$

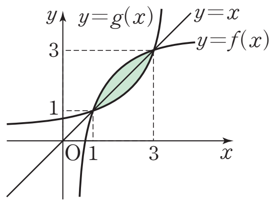
$=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}-2$

따라서 $a=\frac{\pi}{6}$, $M=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}-2$이므로

$a-M=\frac{\pi}{6}-\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}-2\right)=2-\sqrt{3}$

**7**

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 서로 역함수 관계이므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.




따라서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 $x$좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표와 같으므로

$\sqrt{4x-3}=x$에서 $4x-3=x^2$

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 도형의 넓이는

$$2\int_1^3(\sqrt{4x-3}-x)dx=2\left[\frac{1}{6}(4x-3)\sqrt{4x-3}-\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$$
$$=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

**8**

$f(x)=\ln(\cos x)$라 하면 $f'(x)=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$

따라서 구하는 곡선의 길이 $l$은

$$l=\int_0^a\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$$
$$=\int_0^a\sqrt{1+(-\tan x)^2}dx$$
$$=\int_0^a\sqrt{\sec^2x}\,dx=\int_0^a\sec x\,dx$$
$$=\int_0^a\frac{1}{\cos x}\,dx=\int_0^a\frac{\cos x}{\cos^2x}\,dx$$
$$=\int_0^a\frac{\cos x}{1-\sin^2x}\,dx$$

이때 $\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\dfrac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=a$일 때 $t=\sin a$이므로

$$l=\int_0^{\sin a}\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\sin a}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[-\ln(1-t)+\ln(1+t)\Big]_0^{\sin a}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\ln\frac{1+t}{1-t}\right]_0^{\sin a}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin a}{1-\sin a}$$

즉, $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin a}{1-\sin a}=\dfrac{1}{2}\ln 3$이므로

$\dfrac{1+\sin a}{1-\sin a}=3$, $3-3\sin a=1+\sin a$

따라서 $\sin a=\dfrac{1}{2}$이므로

$a=\dfrac{\pi}{6}\left(\because 0<a<\dfrac{\pi}{2}\right)$

## 2주 누구나 합격 전략

62, 63쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 ② | 2 ③ | 3 ① | 4 ⑤ |
| 5 ③ | 6 ① | 7 ③ | 8 ② |
| 9 ⑤ | 10 ④ | | |

**1**

$$\int\sqrt[3]{x^2}dx=\int x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$$

**2**

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int\sin x\cos x\,dx=\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}\sin^2x+C$$

이때 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$이므로

$\dfrac{1}{2}\sin^2\dfrac{\pi}{4}+C=\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{4}+C=\dfrac{1}{4}$ $\qquad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin^2x$이므로 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

다른 풀이

$$f(x)=\int\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx$$
$$=-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

이때 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$이므로 $C=\dfrac{1}{4}$

따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{4}\cos 2x+\dfrac{1}{4}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{4}\cos\pi+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

**3**

$f'(x)=\tan x$이므로

$$f(x)=\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=-\ln|\cos x|+C$$

이 곡선이 점 $(0, 3)$을 지나므로

$f(0)=C=3$

$\therefore f(x)=-\ln|\cos x|+3$

**4**

$$\int_{-1}^2 f(x)dx=\int_{-1}^0 e^x dx+\int_0^2(ex+1)dx$$
$$=\Big[e^x\Big]_{-1}^0+\left[\frac{1}{2}ex^2+x\right]_0^2$$
$$=\left(1-\frac{1}{e}\right)+(2e+2)=2e-\frac{1}{e}+3$$

**5**

$f(x)=\ln x,\ g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로 부분적분법에 의하여

$$\int_1^e x\ln x dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{1}{x}\times\frac{1}{2}x^2 dx$$
$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

**6**

$\int_0^1 f(t)dt=k$ ($k$는 상수)로 놓으면 $f(x)=e^x-k$

$$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(e^t-k)dt=\left[e^t-kt\right]_0^1=(e-k)-1$$

즉, $k=e-k-1$이므로 $k=\frac{e-1}{2}$

따라서 $f(x)=e^x-\frac{e-1}{2}$이므로

$f(\ln 2)=2-\frac{e-1}{2}=\frac{5-e}{2}$

**7**

$f(t)=3^t-\cos \pi t$로 놓고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$(\text{주어진 식})=\lim_{x\to3}\frac{1}{x^2-9}\left[F(t)\right]_3^x$$
$$=\lim_{x\to3}\left\{\frac{F(x)-F(3)}{x-3}\times\frac{1}{x+3}\right\}$$
$$=\frac{1}{6}F'(3)=\frac{1}{6}f(3)$$
$$=\frac{1}{6}\times28=\frac{14}{3}$$

**8**

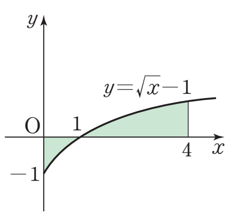
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1\sin\pi x\, dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[-\cos\pi x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$$

**9**

닫힌구간 $[0, 1]$에서 $\sqrt{x}-1\le0$

닫힌구간 $[1, 4]$에서 $\sqrt{x}-1\ge0$

따라서 구하는 도형의 넓이 $S$는




$$S=\int_0^1(-\sqrt{x}+1)dx+\int_1^4(\sqrt{x}-1)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x\right]_1^4$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=2$$

**10**

$$\frac{dx}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$$
$$\frac{dy}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$$

따라서 구하는 곡선의 길이 $l$은

$$l=\int_0^{\ln 5}\sqrt{e^{2t}(\sin t+\cos t)^2+e^{2t}(\cos t-\sin t)^2}dt$$
$$=\int_0^{\ln 5}\sqrt{2e^{2t}(\sin^2 t+\cos^2 t)}dt=\int_0^{\ln 5}\sqrt{2}e^t dt$$
$$=\left[\sqrt{2}e^t\right]_0^{\ln 5}=4\sqrt{2}$$

## 2주 창의·융합·코딩 전략 64~67쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** ② | **2** ② | **3** ⑤ | **4** ③ |
| **5** ① | **6** 풀이 참조 | **7** ④ | **8** ④ |

**1**

$$f(x)=\int\frac{10000}{\sqrt{x}}dx=\int 10000x^{-\frac{1}{2}}dx$$
$$=10000\times2\sqrt{x}+C=20000\sqrt{x}+C$$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(100)=20000\times10=200000$(원)

**2**

$f'(t)=-9e^{-\frac{t}{10}}$이므로

$$f(t)=\int\left(-9e^{-\frac{t}{10}}\right)dt=-9\times\left(-10e^{-\frac{t}{10}}\right)+C$$
$$=90e^{-\frac{t}{10}}+C$$

이때 $f(0)=100$이므로 $100=90+C$ $\quad\therefore C=10$

따라서 $f(t)=90e^{-\frac{t}{10}}+10$이므로 15분 후의 커피의 온도는

$$f(15)=90e^{-\frac{3}{2}}+10=90\times0.2+10$$
$$=18+10=28\,(^\circ\mathrm{C})$$

**3**

$f'(x)=-0.3f(x)$에서

$\frac{f'(x)}{f(x)}=-0.3$이므로

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int(-0.3)\,dx$$

$\therefore \ln|f(x)|=-0.3x+C$

$\ln|f(0)|=C,\ \ln|f(10)|=-3+C$이므로

$$\ln|f(10)|-\ln|f(0)|=\ln\left|\frac{f(10)}{f(0)}\right|=-3$$

$\therefore \frac{f(10)}{f(0)}=e^{-3}=0.05$

**4**

$\int_1^e M(x)dx=\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

이때 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx=\int_0^1 t^2dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

**5**

$k=f(10)-f(0)=\int_0^{10} f'(t)dt$

$=\int_0^{10}(5+te^{-0.1t})dt=\left[5t\right]_0^{10}+\int_0^{10}te^{-0.1t}dt$

$=50+\int_0^{10}te^{-0.1t}dt$

이때 $u(t)=t$, $v'(t)=e^{-0.1t}$로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=-10e^{-0.1t}$이므로 부분적분법에 의하여

$\int_0^{10}te^{-0.1t}dt=\left[-10te^{-0.1t}\right]_0^{10}+\int_0^{10}10e^{-0.1t}dt$

$=-100e^{-1}+\left[10\times(-10)e^{-0.1t}\right]_0^{10}$

$=-100e^{-1}-100(e^{-1}-1)=-200e^{-1}+100$

$=-200\times0.4+100=20$

$\therefore k=50+20=70$

**6**

$f(x)=\sin\pi x$, $\Delta x=\frac{3-1}{n}=\frac{2}{n}$, $x_k=1+k\Delta x=1+\frac{2k}{n}$라 하면

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3\sin\pi x\,dx$

$=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_1^3=\frac{1}{\pi}-\frac{1}{\pi}=0$

**7**

밑면에 수직인 직선을 $x$축으로 정할 때, 닫힌구간 $[0, 20]$에서 $x$좌표가 $x$인 점을 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 잘랐을 때의 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=300\ln(x+1)\ (\text{cm}^2)$

따라서 구하는 물의 부피 $V$는

$V=\int_0^{20}S(x)dx=\int_0^{20}300\ln(x+1)dx$

이때 $x+1=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=20$일 때 $t=21$이므로

$\int_0^{20}300\ln(x+1)dx=\int_1^{21}300\ln t\,dt=300\left[t\ln t-t\right]_1^{21}$

$=300(21\ln21-20)=300(21\times3-20)$

$=12900\ (\text{cm}^3)$

**8**

도구의 전개도는 직사각형이고, 곡선의 제4사분면 부분의 길이를 $l$이라 하면 직사각형의 가로의 길이는 2 m, 세로의 길이는 $2l$ m이다.

$f(x)=\ln(1-x^2)$이라 하면 $f'(x)=\frac{-2x}{1-x^2}$이므로 곡선의 길이 $l$은

$l=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}dx$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}}dx$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-1-\frac{2}{x^2-1}\right)dx$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{-1-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right\}dx$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-1-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\left[-x-\ln|x-1|+\ln|x+1|\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$=\left[-x+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$=-\frac{1}{2}+\ln3$

따라서 도구의 넓이는

$2\times2\times\left(-\frac{1}{2}+\ln3\right)=4\ln3-2\ (\text{m}^2)$

따라서 $a=4$, $b=-2$이므로 $a^2+b^2=20$

## 신유형·신경향·서술형 전략

70~73쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** $(2, 2e^2)$ | **2** ④ | **3** 풀이 참조 | **4** $(20, 20)$ |
| **5** 풀이 참조 | **6** $\frac{3\sqrt{2}}{2\pi}$ | **7** 12 | **8** ③ |

**1**

점 T에서의 접선의 방정식이 도로를 나타내는 직선과 평행할 때, 그 접점과 직선 사이의 거리가 최소이다.

$f(x)=xe^x$이라 하면 $f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

점 T의 좌표를 $(t, te^t)$이라 하면 접선의 기울기가 $3e^2$이므로

$(t+1)e^t=3e^2 \qquad \therefore t=2$

따라서 점 T의 좌표는 $(2, 2e^2)$이다.

**2**

$f(a)=b$라 하면 $f^{-1}(b)=a$이고 $e^{a-1}=b$

함수 $f(x)$와 $f^{-1}(x)$는 서로 역함수 관계이므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점은 함수 $y=f(x)$와 직선 $y=\boxed{x}$의 교점이다.

$e^{x-1}=x$에서 $g(x)=e^{x-1}-x$로 놓으면

$g'(x)=e^{x-1}-1$

$g'(x)=0$에서 $e^{x-1}=1$ $\quad\therefore x=1$

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이다.

이때 $g(1)=0$이므로 방정식 $g(x)=0$의 해는 $x=1$이다.

$\therefore a=b=\boxed{1}$

$f'(x)=e^{x-1}$에서 $f'(1)=1$이므로

$$(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'((f^{-1})(1))}=\frac{1}{f'(1)}=1$$

$\therefore f'(a)+(f^{-1})'(a)=f'(1)+g'(1)=1+1=\boxed{2}$

따라서 $h(x)=x$, $p=1$, $q=2$이므로

$h(1)+p+q=1+1+2=4$

## 3

민철이의 방법

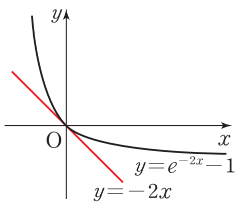
$f(x)=e^{-2x}-1$이라 하면 $f'(x)=-2e^{-2x}$

접점의 좌표를 $(t, e^{-2t}-1)$이라 하면 접선의 기울기가 $-2$이므로

$-2e^{-2t}=-2$, $e^{-2t}=1$ $\quad\therefore t=0$

접점의 좌표가 $(0, 0)$이므로

접선의 방정식은 $y=-2x$




오른쪽 그림에서 모든 실수 $x$에 대하여

$e^{-2x}-1\geq -2x$

$\therefore e^{-2x}+2x-1\geq 0$

성은이의 방법

$f(x)=e^{-2x}+2x-1$이라 하면

$f'(x)=-2e^{-2x}+2=-2(e^{-2x}-1)$

$f'(x)=0$에서 $e^{-2x}=1$ $\quad\therefore x=0$

함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $0$ | ↗ |

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $f(0)=0$이다.

따라서 모든 실수 $x$에 대하여 $e^{-2x}+2x-1\geq 0$이 성립한다.

## 4

축구공을 찬 지 $t$초 후 축구공이 지면과 수평 방향으로 날아간 거리를 $x$좌표, 지면으로부터 수직 방향의 높이를 $y$좌표로 하면

$x=f(t)=10t$, $y=g(t)=-5t^2+20t$에서

$f'(t)=10$, $g'(t)=-10t+20$

시각 $t$에서 축구공의 속도의 크기는

$\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}=\sqrt{10^2+(-10t+20)^2}=10\sqrt{(t-2)^2+1}$

따라서 $t=2$일 때 축구공의 속도의 크기가 최소이므로

$f(2)=20$, $g(2)=20$

따라서 구하는 축구공의 위치는 $(20, 20)$이다.

## 5

$\cos 2x=1-2\sin^2 x$에서 $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$$\therefore \int \sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

## 6

두 곡선 $y=\cos\dfrac{\pi}{4}x$, $y=a\sqrt{x}$와 $y$축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2\left(\cos\frac{\pi}{4}x-a\sqrt{x}\right)dx=0$$ …… [40 %]

$$\int_0^2\left(\cos\frac{\pi}{4}x-a\sqrt{x}\right)dx=\left[\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}x-\frac{2}{3}ax\sqrt{x}\right]_0^2$$

$$=\frac{4}{\pi}-\frac{4\sqrt{2}}{3}a$$ …… [40 %]

즉, $\dfrac{4}{\pi}-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}a=0$이므로 $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}a=\dfrac{4}{\pi}$

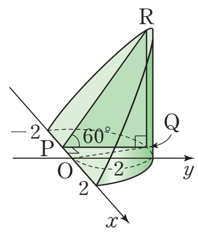
$\therefore a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2\pi}$ …… [20 %]

## 7

△OPQ에서

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{OQ}^2-\overline{OP}^2}=\sqrt{4-x^2}$,

$\overline{RQ}=\overline{PQ}\times\tan\boxed{\dfrac{\pi}{3}}=\sqrt{3(4-x^2)}$




이므로 △PQR의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{RQ}$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{4-x^2}\times\sqrt{3(4-x^2)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(4-x^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피 $V$는

$$V=\int_{-2}^{2}S(x)\,dx=\int_{-2}^{2}\frac{\sqrt{3}}{2}(4-x^2)\,dx$$

$$=\boxed{\sqrt{3}}\int_0^2(4-x^2)\,dx=\sqrt{3}\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{16\sqrt{3}}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=\sqrt{3}$이므로 $p^2+q^2=12$

## 8

$$A=\int_{-3}^{3}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_{-3}^{3}=e^3-e^{-3}$$

$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$라 하면 $f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$이므로

$$B=\int_{-3}^{3}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_{-3}^{3}\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}dx$$

$$=\int_{-3}^{3}\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}dx=\int_{-3}^{3}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$$

$$=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_{-3}^{3}=e^3-e^{-3}$$

따라서 $A=B$이므로 $A:B=1:1$

## 적중 예상 전략 1회

74~77쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 ③ | 2 ⑤ | 3 ⑤ | 4 ④ |
| 5 ② | 6 ⑤ | 7 ④ | 8 ③ |
| 9 ① | 10 ① | 11 ③ | 12 ② |
| 13 12 | 14 0 | 15 60 | 16 10 |

### 1

$f(x)=\dfrac{3x}{x+4}$라 하면

$f'(x)=\dfrac{3\times(x+4)-3x}{(x+4)^2}=\dfrac{12}{(x+4)^2}$

점 $\left(t, \dfrac{3t}{t+4}\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{12}{(t+4)^2}$이므로

이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$y-\dfrac{3t}{t+4}=-\dfrac{(t+4)^2}{12}(x-t)$

$\therefore y=-\dfrac{(t+4)^2}{12}x+\dfrac{t(t+4)^2}{12}+\dfrac{3t}{t+4}$

따라서 $g(t)=\dfrac{t(t+4)^2}{12}+\dfrac{3t}{t+4}$이므로

$g(2)=6+1=7$

### 2

$f'(x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{3}\sin t-\cos t)$라 하면 접선의 기울기는

$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$이므로

$f'(t)=2\sin\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ $\qquad \therefore \sin\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\dfrac{\pi}{3}<t+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5}{6}\pi$이므로

$t+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$ $\qquad \therefore t=\dfrac{\pi}{3}$

접점의 좌표가 $\left(\dfrac{\pi}{3}, 1\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-1=\sqrt{3}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ $\qquad \therefore y=\sqrt{3}x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi+1$

따라서 $a=\sqrt{3}$, $b=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi+1$이므로

$ab=-\pi+\sqrt{3}$

### 3

$f(x)=e^{-x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$이라 하면

$f'(x)=-e^{-x}$, $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

$y=f(x)$의 그래프 위의 접점의 좌표를 $(a, e^{-a})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=-e^{-a}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{-a}=-e^{-a}(x-a)$

이 접선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$-e^{-a}=-e^{-a}+ae^{-a}$ $\qquad \therefore a=0$

따라서 접선의 기울기는 $f'(0)=-1$

$y=g(x)$의 그래프 위의 접점의 좌표를 $\left(b, \dfrac{1}{b}\right)(b\neq 0)$이라 하면

이 점에서의 접선의 기울기는 $g'(b)=-\dfrac{1}{b^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{1}{b}=-\dfrac{1}{b^2}(x-b)$

이 접선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$-\dfrac{1}{b}=-\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{b}$, $-b=-1+b$ $\qquad \therefore b=\dfrac{1}{2}$

따라서 접선의 기울기는 $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-4$

두 접선이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\alpha$, $\beta(\alpha>\beta)$라 하면

$\tan\alpha=-1$, $\tan\beta=-4$이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-1-(-4)}{1+4}=\dfrac{3}{5}$$

### 4

$f(x)=e^{\frac{1}{2}x-1}$, $g(x)=\sqrt{x+a}$라 하면

$f'(x)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x-1}$, $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+a}}$

$f(p)=g(p)$에서 $e^{\frac{1}{2}p-1}=\sqrt{p+a}$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(p)=g'(p)$에서 $\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}p-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{p+a}}$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}p-1}=\dfrac{1}{2e^{\frac{1}{2}p-1}}$, $\left(e^{\frac{1}{2}p-1}\right)^2=1$

$e^{\frac{1}{2}p-1}=1$ $\qquad \therefore p=2$

$p=2$를 ㉠에 대입하면

$1=\sqrt{2+a}$ $\qquad \therefore a=-1$

또 $q=f(2)=1$이므로 $apq=-2$

### 5

$g(\sqrt{2})=k$라 하면 $f(k)=\sqrt{2}$이므로

$\sec k=\sqrt{2}$ $\qquad \therefore k=\dfrac{\pi}{4}$ $\left(\because 0<k<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$f'(x)=\sec x\tan x$이므로 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

$\therefore g'(\sqrt{2})=\dfrac{1}{f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-\sqrt{2})$ $\qquad \therefore y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x-1+\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore h(0)=-1+\dfrac{\pi}{4}$

## 6

점 $(1, 1)$이 곡선 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=x^2+4$ 위의 점이므로

$a+b=5$ ······ ㉠

$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=x^2+4$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$-\frac{a}{x^2}-\frac{b}{y^2}\times\frac{dy}{dx}=2x \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{y^2}{b}\left(\frac{a}{x^2}+2x\right)$

점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기가 $-\frac{4}{3}$이므로

$-\frac{a+2}{b}=-\frac{4}{3} \qquad \therefore 3a-4b=-6$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

$\therefore ab=6$

## 7

$f(x)=x+\ln(5x^2+a)$에서

$f'(x)=1+\frac{10x}{5x^2+a}=\frac{5x^2+10x+a}{5x^2+a}$

$f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 하므로 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\ge 0$ 또는 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

(i) $f'(x)\ge 0$일 때

$5x^2+a>0$이므로 $5x^2+10x+a\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $5x^2+10x+a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=5^2-5a\le 0 \qquad \therefore a\ge 5$

(ii) $f'(x)\le 0$일 때

$5x^2+a>0$이므로 $5x^2+10x+a\le 0$이어야 한다.

이때 모든 실수 $x$에 대하여 이를 만족시키는 $a$의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a\ge 5$이므로 $a$의 최솟값은 5이다.

## 8

$f'(x)=\frac{4\times(x^2+5)-4x\times 2x}{(x^2+5)^2}=\frac{-4(x^2-5)}{(x^2+5)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x^2-5=0 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{5}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-\sqrt{5}$ | $\cdots$ | $\sqrt{5}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ | ↗ | $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{5}$에서 극솟값 $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$를 갖고,

$x=\sqrt{5}$에서 극댓값 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$를 갖는다.

ㄱ. $f(0)+f'(0)=0+\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$ (참)

ㄴ. 극댓값과 극솟값의 곱은

$\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{4}{5}$ (거짓)

ㄷ. $-\sqrt{5}<-2<x<2<\sqrt{5}$이므로 함수 $f(x)$는 $-2<x<2$에서 증가한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

## 9

$f'(x)=2\times(3^{2x}\times\ln 3\times 2)-a\times(3^{x+1}\times\ln 3)$

$=(4\times 3^{2x}-a\times 3^{x+1})\ln 3$

$x=\log_3 6$에서 극솟값을 가지므로

$f'(\log_3 6)=(4\times 36-a\times 18)\ln 3=0$

$144=18a \qquad \therefore a=8$

따라서 $f(x)=2\times 3^{2x}-8\times 3^{x+1}$이므로 극솟값은

$f(\log_3 6)=72-144=-72$

즉, $b=-72$이므로 $\frac{b}{a}=-9$

## 10

$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x$

$f''(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x)e^x=(x^2+4x+2)e^x$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(a, a+1)$에서 위로 볼록하려면

$f''(x)<0$이어야 하므로

$x^2+4x+2<0$ ($\because e^x>0$)

이차방정식 $x^2+4x+2=0$의 해가

$x=-2\pm\sqrt{4-2}=-2\pm\sqrt{2}$

이므로 이차부등식 $x^2+4x+2<0$의 해는

$-2-\sqrt{2}<x<-2+\sqrt{2}$

$a\ge -2-\sqrt{2}=-3.\times\times\times$

$a+1\le -2+\sqrt{2}$에서 $a\le -3+\sqrt{2}=-1.\times\times\times$

따라서 모든 정수 $a$의 값의 합은

$-3+(-2)=-5$

## 11

ㄱ. $f'(x)=0$인 $x$의 값은 $a$, $0$, $d$, $f$

이때 $x=a$, $x=f$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 $-$에서 $+$로 바뀌므로 $x=a$와 $x=f$에서 극솟값을 갖는다. 따라서 극소가 되는 점의 개수는 2이다. (거짓)

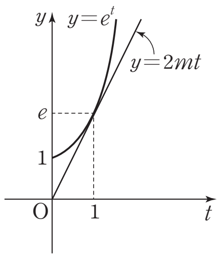
ㄴ. $x=d$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 $+$에서 $-$로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=d$에서 극댓값 $f(d)$를 갖는다. (거짓)

ㄷ. $f''(x)=0$인 $x$의 값은 $b$, $0$, $c$, $e$

이때 $x=b$, $x=0$, $x=c$, $x=e$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $f(x)$의 변곡점의 개수는 4이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

## 12




시각 $t$에서의 두 점 P, Q의 속도는

$P'(t)=e^t$, $Q'(t)=2mt$

$P'(t)=Q'(t)$에서 $e^t=2mt$

속도가 같아지는 순간이 한 번이려면

두 함수 $y=e^t$, $y=2mt$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 접해야 한다.

$f(t)=e^t$, $g(t)=2mt$라 하면

$f'(t)=e^t$, $g'(t)=2m$

접점의 $t$의 좌표를 $a$라 하면

$f(a)=g(a)$에서 $e^a=2ma$ …… ㉠

$f'(a)=g'(a)$에서 $e^a=2m$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2ma=2m$

$m\neq0$이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $e=2m$ $\quad\therefore m=\dfrac{e}{2}$

## 13

$f(x)=(x-6)e^x$이라 하면 $f'(x)=(x-5)e^x$

접점의 좌표를 $(t, (t-6)e^t)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=(t-5)e^t$

따라서 접선의 방정식은

$y-(t-6)e^t=(t-5)e^t(x-t)$ …… [30 %]

이 접선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$-(t-6)e^t=(t-5)e^t(a-t)$

$t^2-(a+6)t+5a+6=0$ …… [30 %]

점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=(x-6)e^x$에 단 한 개의 접선을 그을 수 있으므로 방정식 $t^2-(a+6)t+5a+6=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$D=\{-(a+6)\}^2-4\times(5a+6)=0$

$a^2-8a+12=0$, $(a-2)(a-6)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=6$ …… [30 %]

따라서 모든 $a$의 값의 곱은 12이다. …… [10 %]

## 14

$f'(x)=2xe^{2x}+(x^2-3a)e^{2x}\times2$

$\quad=(2x^2+2x-6a)e^{2x}$ …… [30 %]

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $2x^2+2x-6a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. …… [30 %]

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2-2\times(-6a)>0$, $1+12a>0$

$\therefore a>-\dfrac{1}{12}$ …… [30 %]

따라서 구하는 정수 $a$의 최솟값은 0이다. …… [10 %]

## 15

$\angle BOD=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 도형 OBDC의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$S(\theta)=$(부채꼴 BOD의 넓이)$+$($\triangle$COD의 넓이)

$\quad=\dfrac{1}{2}\times12^2\times\theta+\dfrac{1}{2}\times12^2\times\sin(\pi-2\theta)$

$\quad=72(\theta+\sin2\theta)$ …… [40 %]

$S'(\theta)=72(1+2\cos2\theta)$

$S'(\theta)=0$에서 $\cos2\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0<2\theta<\pi$에서 $2\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{3}$ …… [30 %]

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$일 때, 함수 $S(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $\theta$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\dfrac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(\theta)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $S(\theta)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | |

함수 $S(\theta)$는 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$에서 극대이면서 최대이다.

이때 최댓값은

$S\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=24\pi+36\sqrt{3}$ …… [20 %]

따라서 $a=24$, $b=36$이므로

$a+b=60$ …… [10 %]

## 16

$f(x)=(\ln x)^2-4\ln x-2a+13$으로 놓으면

$f'(x)=2\ln x\times\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x}$

$\quad=\dfrac{2\ln x-4}{x}$

$f'(x)=0$에서 $2\ln x=4$, $\ln x=2$

$\therefore x=e^2$ …… [20 %]

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $e^2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $-2a+9$ | ↗ |

함수 $f(x)$는 $x=e^2$에서 극소이면서 최소이다.

이때 최솟값은

$f(e^2)=-2a+9$ …… [20 %]

주어진 부등식이 성립하려면

$-2a+9\geq0$ $\quad\therefore a\leq\dfrac{9}{2}$ …… [40 %]

따라서 모든 자연수 $a$의 값의 합은

$1+2+3+4=10$ …… [20 %]

## 적중 예상 전략 2회

78~81쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 ③ | 2 ③ | 3 ④ | 4 ① |
| 5 ① | 6 ④ | 7 ⑤ | 8 ③ |
| 9 ② | 10 ② | 11 ③ | 12 ④ |
| 13 2 | 14 5 | 15 $\frac{1}{9}$ | 16 2 |

### 1

$y=\dfrac{x-1}{x+2}$에서 $xy+2y=x-1$, $x(y-1)=-2y-1$

$\therefore x=\dfrac{-2y-1}{y-1}$

따라서 $g(x)=\dfrac{-2x-1}{x-1}$이므로

$$\begin{aligned}G(x)&=\int g(x)dx\\&=\int\frac{-2x-1}{x-1}dx\\&=\int\left(-2-\frac{3}{x-1}\right)dx\\&=-2x-3\ln|x-1|+C\end{aligned}$$

$G(2)=0$이므로 $-4+C=0$, 즉 $C=4$

$\therefore G(x)=-2x-3\ln|x-1|+4$

### 2

$f'(x)=\dfrac{1}{e^x-2}$이므로

$f(x)=\displaystyle\int\frac{1}{e^x-2}dx$

이때 $e^x-2=t$로 놓으면 $e^x=t+2$이고 $e^x=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$\begin{aligned}f(x)=\int\frac{1}{e^x-2}dx&=\int\frac{1}{t(t+2)}dt\\&=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\right)dt\\&=\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t+2|+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{t+2}\right|+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-2}{e^x}\right|+C\end{aligned}$$

$f(2)-f(0)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{e^2-2}{e^2}$

따라서 $a=2$, $b=2$이므로

$a+b=4$

### 3

곡선 $f(x)=a\sin 2x$가 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$을 지나므로

$3=a\sin\dfrac{\pi}{2}\qquad\therefore a=3$

따라서 $f(x)=3\sin 2x$이므로 $f'(x)=6\cos 2x$

$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$에서 $0\le 2x\le\pi$이므로

$0\le 2x\le\dfrac{\pi}{2}$, 즉 $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$일 때 $\cos 2x\ge 0$

$\dfrac{\pi}{2}\le 2x\le\pi$, 즉 $\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$일 때 $\cos 2x\le 0$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}|f'(x)|dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}6\cos 2x dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-6\cos 2x)dx\\&=\Big[3\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-3\sin 2x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\\&=3+3=6\end{aligned}$$

### 4

ㄱ. $e^{f(-x)}=e^{-f(x)}$이므로 $e^{f(x)}$은 기함수가 아니다.

$\quad\therefore \displaystyle\int_{-1}^{1}e^{f(x)}dx\neq 0$

ㄴ. $f(-x)(2^{-x}+2^{-(-x)})=-f(x)(2^x+2^{-x})$이므로

$\quad f(x)(2^x+2^{-x})$은 기함수이다.

$\quad\therefore \displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)(2^x+2^{-x})dx=0$

ㄷ. $f(-x)\tan(-x)=-f(x)(-\tan x)=f(x)\tan x$이므로

$\quad f(x)\tan x$는 우함수이다.

$\quad\therefore \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\tan x\,dx\neq 0$

따라서 정적분의 값이 항상 0인 것은 ㄴ이다.

### 5

$x+2=t$로 놓으면 $x=t-2$이고 $1=\dfrac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=2$, $x=1$일 때 $t=3$이므로

$\displaystyle\int_0^1 e^x f(x+2)dx=\int_2^3 e^{t-2}f(t)dt$

닫힌구간 $[2, 3]$에서 $f(t)=2$이므로

$\displaystyle\int_2^3 e^{t-2}f(t)dt=\int_2^3 2e^{t-2}dt=\Big[2e^{t-2}\Big]_2^3=2e-2$

### 6

$f(x)=a(x+1)\ln x+b$에서

$f'(x)=a\ln x+a(x+1)\times\dfrac{1}{x}=a\ln x+a+\dfrac{a}{x}$

조건 (가)에서

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=2a=4\qquad\therefore a=2$

조건 (나)에서

$\displaystyle\int_1^{e^2}f(x)dx=\int_1^{e^2}\{2(x+1)\ln x+b\}dx$

기말

이때 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=2(x+1)$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=(x+1)^2$이므로

$$\begin{aligned}\int\{2(x+1)\ln x\}dx&=(x+1)^2\ln x-\int\frac{(x+1)^2}{x}dx\\&=(x+1)^2\ln x-\int\left(x+2+\frac{1}{x}\right)dx\\&=(x+1)^2\ln x-\frac{1}{2}x^2-2x-\ln|x|+C\end{aligned}$$

$\therefore \int_1^{e^2}\{2(x+1)\ln x+b\}dx$

$=\left[(x+1)^2\ln x-\frac{1}{2}x^2-2x-\ln|x|+bx\right]_1^{e^2}$

$=\frac{3}{2}e^4+(2+b)e^2+\frac{5}{2}-b$

따라서 $2+b=\frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}-b=2$이므로 $b=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{a}{b}=4$

## 7

$f(x)=\int_x^{x+1}\left(t+\frac{2}{t}\right)dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(x+1+\frac{2}{x+1}\right)-\left(x+\frac{2}{x}\right)\\&=1+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x}=\frac{x^2+x-2}{x(x+1)}\\&=\frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$)

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ |

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이다. 이때 최솟값은

$f(1)=\int_1^2\left(t+\frac{2}{t}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+2\ln|t|\right]_1^2=\frac{3}{2}+2\ln 2$

## 8

$f(t)=\sin t-\cos t$라 하고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x(\sin t-\cos t)dt&=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}\\&=F'(a)=f(a)\end{aligned}$$

즉, $f(a)=\sin a-\cos a=0$이므로

$\sin a=\cos a$ $\quad\therefore a=\frac{\pi}{4}$ 또는 $a=\frac{5}{4}\pi$ ($\because 0\le a\le 2\pi$)

따라서 모든 $a$의 값의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$

## 9

$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\left|\frac{1}{2}-\sin\frac{\pi}{n}\right|+\left|\frac{1}{2}-\sin\frac{2\pi}{n}\right|+\cdots+\left|\frac{1}{2}-\sin\frac{n\pi}{n}\right|\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{2}-\sin\frac{k}{n}\pi\right|\frac{\pi}{n}$

$f(x)=\frac{1}{2}-\sin x$, $\Delta x=\frac{\pi-0}{n}=\frac{\pi}{n}$, $x_k=0+k\Delta x=\frac{k}{n}\pi$라 하면

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{2}-\sin\frac{k}{n}\pi\right|\frac{\pi}{n}$

$=\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{2}-\sin x\right|dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)dx$

$\qquad+\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\left[-\cos x-\frac{1}{2}x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}+\left[\frac{1}{2}x+\cos x\right]_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}$

$=\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)+\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$

$=-2+2\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$

## 10

곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$와 $x$축 및 두 직선 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$, $x=a$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{a}\frac{\ln x}{x}dx=0$

이때 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$

$x=\frac{1}{\sqrt{e}}$일 때 $t=-\frac{1}{2}$, $x=a$일 때 $t=\ln a$이므로

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{a}\frac{\ln x}{x}dx&=\int_{-\frac{1}{2}}^{\ln a}t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{\ln a}\\&=\frac{1}{2}(\ln a)^2-\frac{1}{8}\end{aligned}$$

즉, $\frac{1}{2}(\ln a)^2-\frac{1}{8}=0$이므로

$(\ln a)^2=\frac{1}{4}$, $\ln a=\frac{1}{2}$ ($\because a>1$)

$\therefore a=\sqrt{e}$

## 11

닫힌구간 $[0, 2]$에서 $x$좌표가 $x$인 점을 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $2\sqrt{2x}$인 정삼각형이다.

이 정삼각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{2x})^2=2\sqrt{3}x$

따라서 구하는 입체도형의 부피 $V$는

$$V=\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2 2\sqrt{3}x dx$$
$$=\left[\sqrt{3}x^2\right]_0^2=4\sqrt{3}$$

## 12

$$\frac{dx}{dt}=e^{6t}-a,\ \frac{dy}{dt}=2\sqrt{a}e^{3t}$$

이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^1\sqrt{(e^{6t}-a)^2+(2\sqrt{a}e^{3t})^2}dt$$
$$=\int_0^1\sqrt{e^{12t}-2ae^{6t}+a^2+4ae^{6t}}dt$$
$$=\int_0^1\sqrt{(e^{6t}+a)^2}dt=\int_0^1(e^{6t}+a)dt$$
$$=\left[\frac{1}{6}e^{6t}+at\right]_0^1=\frac{1}{6}e^6+a-\frac{1}{6}$$

즉 $\frac{1}{6}e^6+a-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}e^6+\frac{4}{3}$이므로

$a-\frac{1}{6}=\frac{4}{3}\qquad \therefore a=\frac{3}{2}$

## 13

조건 (나)에서 $x\to\frac{\pi}{4}$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{4}f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\text{이므로}$$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4$ ...... [30 %]

조건 (가)에서 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}a=4$이므로 $a=2\sqrt{2}$

따라서 $f'(x)=2\sqrt{2}\sec x\tan x$이므로

$$f(x)=\int 2\sqrt{2}\sec x\tan x\,dx=2\sqrt{2}\sec x+C$$

이때 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$이므로 $4+C=2\qquad \therefore C=-2$

$\therefore f(x)=2\sqrt{2}\sec x-2$ ...... [40 %]

이때 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\sqrt{2}-2$이므로 $p=4,\ q=-2$

$\therefore p+q=2$ ...... [30 %]

## 14

$\int_0^2 e^t f(t)dt=k$ ($k$는 상수)로 놓으면 $f(x)=x+k$

$$\int_0^2 e^t f(t)dt=\int_0^2(t+k)e^t\,dt$$

이때 $u(t)=t+k,\ v'(t)=e^t$으로 놓으면

$u'(t)=1,\ v(t)=e^t$이므로

$$\int_0^2(t+k)e^t\,dt=\left[(t+k)e^t\right]_0^2-\int_0^2 1\times e^t dt$$
$$=(2+k)e^2-k-\left[e^t\right]_0^2$$
$$=(e^2-1)k+e^2+1$$ ...... [40 %]

즉, $(e^2-1)k+e^2+1=k$이므로 $k=\frac{e^2+1}{2-e^2}$

$\therefore f(x)=x+\frac{e^2+1}{2-e^2}$ ...... [40 %]

이때 $f(1)=1+\frac{e^2+1}{2-e^2}=\frac{3}{2-e^2}$이므로 $a=3,\ b=2$

$\therefore a+b=5$ ...... [20 %]

## 15

곡선 $y=\frac{1}{x}$과 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표는

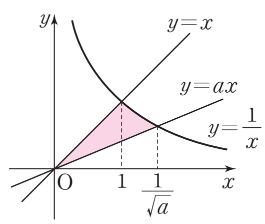
$\frac{1}{x}=x$에서 $x=1$ ($\because x>0$) ...... [30 %]

곡선 $y=\frac{1}{x}$과 직선 $y=ax$의 교점의 $x$좌표는

$\frac{1}{x}=ax$에서 $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$ ($\because x>0$) ...... [30 %]

따라서 곡선과 두 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1 x\,dx+\int_1^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\frac{1}{x}\,dx-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}ax\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\ln x\right]_1^{\frac{1}{\sqrt{a}}}-\left[\frac{a}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}$$
$$=\frac{1}{2}+\ln\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{2}=\ln\frac{1}{\sqrt{a}}$$




즉, $\ln\frac{1}{\sqrt{a}}=\ln 3$이므로 $\frac{1}{\sqrt{a}}=3$

$\sqrt{a}=\frac{1}{3}\qquad \therefore a=\frac{1}{9}$ ...... [40 %]

## 16

$f(x)=\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}$이라 하면

$f'(x)=\frac{1}{4}e^{2x}-e^{-2x}$ ...... [20 %]

따라서 곡선의 길이 $l$은

$$l=\int_0^{\ln a}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^{\ln a}\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}e^{2x}-e^{-2x}\right)^2}dx$$
$$=\int_0^{\ln a}\sqrt{\left(\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right)^2}dx=\int_0^{\ln a}\left(\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\ln a}=\frac{1}{8}a^2-\frac{1}{2a^2}+\frac{3}{8}$$ ...... [50 %]

즉, $\frac{1}{8}a^2-\frac{1}{2a^2}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$이므로

$a^4-3a^2-4=0,\ (a^2-4)(a^2+1)=0$

$(a+2)(a-2)(a^2+1)=0\qquad \therefore a=2$ ($\because a>0$) ...... [30 %]

Memo

Memo

# Memo