정답과 풀이

중학 수학 2·1

I. 유리수와 순환소수

1. 유리수와 순환소수

최고 수준 입문하기
P 7 – P 10

01 ④	**02** ⑤	**03** 10	**04** 18
05 3개	**06** 35	**07** $\frac{14}{35}$, $\frac{21}{35}$	**08** 1
09 12	**10** ③	**11** 5개	**12** 38
13 2개	**14** 10개	**15** ⑤	**16** ②
17 $1.8\dot{3}$	**18** $\frac{139}{99}$	**19** $1.08\dot{3}$	**20** 38
21 $0.8\dot{3}$	**22** $x=5.\dot{6}\dot{3}$	**23** 9	**24** ②, ⑤

01 Action 순환소수를 간단히 나타낼 때, 첫 번째 순환마디의 양 끝의 숫자 위에 점을 찍어 나타낸다.

① $0.444\cdots=0.\dot{4}$

② $0.162162162\cdots=0.\dot{1}6\dot{2}$

③ $3.283283283\cdots=3.\dot{2}8\dot{3}$

⑤ $30.303030\cdots=30.\dot{3}\dot{0}$

02 Action 분자를 분모로 나누어 소수로 나타낸다.

① $\frac{7}{3}=2.333\cdots=2.\dot{3}$이므로 순환마디는 3

② $\frac{7}{12}=0.58333\cdots=0.58\dot{3}$이므로 순환마디는 3

③ $\frac{2}{15}=0.1333\cdots=0.1\dot{3}$이므로 순환마디는 3

④ $\frac{43}{30}=1.4333\cdots=1.4\dot{3}$이므로 순환마디는 3

⑤ $\frac{56}{45}=1.2444\cdots=1.2\dot{4}$이므로 순환마디는 4

따라서 순환마디가 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

03 Action 순환마디의 숫자의 개수를 세어 본다.

$\frac{10}{27}=0.370370\cdots=0.\dot{3}7\dot{0}$에서 순환마디의 숫자의 개수는 3개이므로 $a=3$ …… 40%

$50=3\times16+2$에서 소수점 아래 50번째 자리의 숫자는 순환마디의 2번째 숫자이므로 $b=7$ …… 40%

$\therefore a+b=3+7=10$ …… 20%

04 Action $\frac{5}{13}$를 소수로 나타낸 후 순환마디를 구한다.

$\frac{5}{13}=0.384615384615\cdots=0.\dot{3}8461\dot{5}$이므로 순환마디의 숫자의 개수는 6개이다.

이때 소수점 아래 두 번째 자리의 숫자는 8이므로 $x_2=8$

$9=6\times1+3$에서 소수점 아래 9번째 자리의 숫자는 순환마디의 3번째 숫자이므로 $x_9=4$

$16=6\times2+4$에서 소수점 아래 16번째 자리의 숫자는 순환마디의 4번째 숫자이므로 $x_{16}=6$

$\therefore x_2+x_9+x_{16}=8+4+6=18$

05 Action 주어진 분수를 기약분수로 나타내었을 때, 분모의 소인수가 2 또는 5뿐인 것을 찾는다.

㉠ $\frac{7}{2\times3\times5}$ ㉡ $\frac{3}{2^2}$ ㉢ $\frac{1}{7}$

㉣ $\frac{3}{2\times5}$ ㉤ $\frac{1}{2^2}$ ㉥ $\frac{1}{3\times5}$

따라서 유한소수로 나타낼 수 있는 것은 ㉡, ㉣, ㉤의 3개이다.

> **Lecture**
> 유한소수로 나타낼 수 있는 유리수
> ❶ 주어진 분수를 기약분수로 나타낸다.
> ❷ 분모를 소인수분해한다.
> ❸ 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이면 유한소수로 나타낼 수 있다.

06 Action 기약분수의 분모를 소인수분해하였을 때, 소인수 2와 5의 지수가 같아지도록 분모, 분자에 2 또는 5의 거듭제곱을 곱한다.

$\frac{4}{125}=\frac{4}{5^3}=\frac{4\times2^3}{5^3\times2^3}=\frac{32}{10^3}$

이때 n의 값이 커지면 a의 값도 커지므로 $a+n$의 값은 $a=32$, $n=3$일 때 가장 작다.

따라서 $a+n$의 최솟값은 $32+3=35$

07 Action 구하는 분수를 $\frac{a}{35}$로 놓고 a의 조건을 찾는다.

$35=5\times7$이므로 구하는 분수를 $\frac{a}{35}$라 할 때, $\frac{a}{35}$가 유한소수로 나타내어지려면 a는 7의 배수이어야 한다.

이때 $\frac{2}{7}=\frac{10}{35}$, $\frac{4}{5}=\frac{28}{35}$이므로 10과 28 사이에 있는 7의 배수는 14, 21이다.

따라서 구하는 분수는 $\frac{14}{35}$, $\frac{21}{35}$이다.

08 Action 분수를 기약분수로 나타내었을 때

분모의 소인수가 [2 또는 5 ➡ 유한소수로 나타낼 수 있다.
2 또는 5 이외의 소인수 ➡ 유한소수로 나타낼 수 없다.

$\frac{7}{56}=\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$이므로 유한소수로 나타낼 수 있다.

$\therefore 7\Diamond56=-1$

$\frac{15}{108}=\frac{5}{36}=\frac{5}{2^2\times3^2}$이므로 유한소수로 나타낼 수 없다.

$\therefore 15\Diamond108=1$

$\frac{36}{200}=\frac{9}{50}=\frac{9}{2\times5^2}$이므로 유한소수로 나타낼 수 있다.

$\therefore\ 36\diamond200=-1$

$\therefore\ (7\diamond56)+(15\diamond108)-(36\diamond200)=-1+1-(-1)$
$=1$

09 Action $\frac{21}{180}$을 기약분수로 나타낸 후 분모를 소인수분해하여 2 또는 5 이외의 소인수를 찾는다.

$\frac{21}{180}=\frac{7}{60}=\frac{7}{2^2\times3\times5}$이므로 $\frac{21}{180}\times A$가 유한소수가 되려면 A는 3의 배수이어야 한다.
따라서 A의 값이 될 수 있는 가장 작은 두 자리의 자연수는 12이다.

10 Action 먼저 $\frac{42}{50}$를 기약분수로 나타낸 후 보기의 각 수를 대입해 본다.

$\frac{42}{50\times x}=\frac{21}{25\times x}=\frac{3\times7}{5^2\times x}$

③ $x=18$일 때, $\frac{3\times7}{2\times3^2\times5^2}=\frac{7}{2\times3\times5^2}$이므로 유한소수로 나타낼 수 없다.

11 Action 두 분수의 분모를 소인수분해하여 A의 값이 될 수 있는 조건을 알아본다.

$\frac{7}{170}\times A=\frac{7}{2\times5\times17}\times A$가 유한소수가 되려면 A는 17의 배수이어야 한다. …… 20%

또, $\frac{3}{220}\times A=\frac{3}{2^2\times5\times11}\times A$가 유한소수가 되려면 A는 11의 배수이어야 한다. …… 20%

즉 A는 17과 11의 공배수이다. …… 20%

이때 17과 11의 최소공배수는 $17\times11=187$이므로 세 자리의 자연수 A는 187, 374, 561, 748, 935의 5개이다. …… 40%

12 Action $\frac{a}{280}$가 유한소수가 되도록 하는 a의 값을 구한 후 b의 값을 구한다.

$\frac{a}{280}=\frac{a}{2^3\times5\times7}$가 유한소수가 되려면 a는 7의 배수이어야 한다.
이때 $20<a<30$이므로 $a=21$ 또는 $a=28$

(i) $a=21$일 때,

$\frac{3\times7}{2^3\times5\times7}=\frac{3}{40}=\frac{1}{b}$ $\qquad\therefore\ b=\frac{40}{3}$

이때 b는 자연수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=28$일 때,

$\frac{2^2\times7}{2^3\times5\times7}=\frac{1}{10}=\frac{1}{b}$ $\qquad\therefore\ b=10$

(i), (ii)에 의하여 $a=28$, $b=10$이므로
$a+b=28+10=38$

13 Action $\frac{30}{2^2\times5\times x}$을 기약분수로 나타내었을 때, 분모에 2 또는 5 이외의 소인수가 있으면 순환소수로 나타낼 수 있다.

$\frac{30}{2^2\times5\times x}=\frac{3}{2\times x}$이 순환소수가 되려면 기약분수로 나타내었을 때 분모에 2 또는 5 이외의 소인수가 있어야 한다.
이때 x는 10 이하의 자연수이므로 $x=3, 6, 7, 9$

$x=3$일 때, $\frac{3}{2\times3}=\frac{1}{2}$

$x=6$일 때, $\frac{3}{2\times6}=\frac{1}{2^2}$

따라서 x의 값은 7, 9의 2개이다.

14 Action 기약분수의 분모를 소인수분해하였을 때, 소인수 중에 2 또는 5 이외의 수가 있는지 확인한다.

14개의 점에 대응하는 유리수는 $\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{3}{15}, \cdots, \frac{14}{15}$이다.
이때 $15=3\times5$이므로 순환소수로 나타내어지려면 분자가 3의 배수가 아니어야 한다.
따라서 순환소수로 나타낼 수 있는 수는 $\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{5}{15}, \frac{7}{15}, \frac{8}{15}, \frac{10}{15}, \frac{11}{15}, \frac{13}{15}, \frac{14}{15}$의 10개이다.

15 Action 소수점 아래 첫째 자리부터 똑같이 순환마디가 시작되도록 등식의 양변에 10의 거듭제곱을 곱한다.

$$\begin{array}{rl} 1000x= & 5128.888\cdots \\ -)\ \ 100x= & 512.888\cdots \\ \hline 900x= & 4616 \end{array}$$

16 Action 순환소수를 분수로 나타내는 공식을 이용한다.

① $0.0\dot{5}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$

② $1.\dot{1}\dot{2}=\frac{112-1}{99}=\frac{111}{99}=\frac{37}{33}$

③ $0.2\dot{7}=\frac{27-2}{90}=\frac{25}{90}=\frac{5}{18}$

④ $1.8\dot{3}\dot{5}=\frac{1835-18}{990}=\frac{1817}{990}$

⑤ $1.\dot{0}4\dot{8}=\frac{1048-1}{999}=\frac{1047}{999}=\frac{349}{333}$

따라서 순환소수를 분수로 나타낸 것으로 옳은 것은 ②이다.

Lecture

순환소수를 분수로 나타내는 방법

전체의 수

(1) $0.\dot{a}b\dot{c}=\dfrac{abc}{999}$

순환마디의 숫자 3개

전체의 수 순환하지 않는 수

(2) $0.a\dot{b}\dot{c}=\dfrac{abc-a}{990}$

순환마디의 숫자 2개

소수점 아래에 순환하지 않는 숫자 1개

17 Action $0.\dot{5}\dot{4}$를 분수로 나타내어 본다.

$0.\dot{5}\dot{4}=\dfrac{54}{99}=\dfrac{6}{11}$이므로 $a=11$, $b=6$

$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{11}{6}=1.8333\cdots=1.8\dot{3}$

18 Action 분수를 모두 소수로 나타내어 계산한 후 기약분수로 나타낸다.

(주어진 식)$=1+0.4+0.004+0.00004+\cdots$

$=1.404040\cdots=1.\dot{4}\dot{0}=\dfrac{140-1}{99}=\dfrac{139}{99}$

19 Action 나윤이는 분자를 제대로 보았고, 재석이는 분모를 제대로 보았다.

$1.1\dot{8}=\dfrac{118-1}{99}=\dfrac{117}{99}=\dfrac{13}{11}$에서 나윤이는 분자를 제대로 보았으므로 처음 기약분수의 분자는 13이다. …… 40%

$1.91\dot{6}=\dfrac{1916-191}{900}=\dfrac{1725}{900}=\dfrac{23}{12}$에서 재석이는 분모를 제대로 보았으므로 처음 기약분수의 분모는 12이다. …… 40%

따라서 처음 기약분수는 $\dfrac{13}{12}$이고 이를 순환소수로 나타내면

$\dfrac{13}{12}=1.08333\cdots=1.08\dot{3}$ …… 20%

20 Action $5.\dot{2}\dot{7}$, $0.\dot{8}\dot{1}$을 모두 분수로 나타낸 후 계산한다.

$5.\dot{2}\dot{7}=\dfrac{527-5}{99}=\dfrac{522}{99}=\dfrac{58}{11}$, $0.\dot{8}\dot{1}=\dfrac{81}{99}=\dfrac{9}{11}$

$5.\dot{2}\dot{7}-0.\dot{8}\dot{1}=\dfrac{58}{11}-\dfrac{9}{11}=\dfrac{49}{11}$이므로 $a=11$, $b=49$

$\therefore b-a=49-11=38$

21 Action $0.5\dot{3}$, $0.\dot{4}$를 모두 분수로 나타낸 후 계산한다.

$0.5\dot{3}=\dfrac{53-5}{90}=\dfrac{48}{90}=\dfrac{8}{15}$, $0.\dot{4}=\dfrac{4}{9}$

$0.5\dot{3}\times x=0.\dot{4}$에서 $\dfrac{8}{15}\times x=\dfrac{4}{9}$

$\therefore x=\dfrac{4}{9}\times\dfrac{15}{8}=\dfrac{5}{6}$

따라서 $\dfrac{5}{6}$를 순환소수로 나타내면 $\dfrac{5}{6}=0.8333\cdots=0.8\dot{3}$

22 Action 계수와 상수항을 모두 분수로 나타낸 후 일차방정식의 해를 구한다.

$0.\dot{6}x+0.1\dot{7}=0.4\dot{2}x+1.\dot{5}$에서

$\dfrac{6}{9}x+\dfrac{17-1}{90}=\dfrac{42-4}{90}x+\dfrac{15-1}{9}$

$60x+16=38x+140$, $22x=124$

$\therefore x=\dfrac{124}{22}=\dfrac{62}{11}=5.6363\cdots=5.\dot{6}\dot{3}$

23 Action 순환소수를 기약분수로 나타낸 후, 분모를 소인수분해한다.

$1.1\dot{5}=\dfrac{115-11}{90}=\dfrac{104}{90}=\dfrac{52}{45}=\dfrac{2^2\times 13}{3^2\times 5}$

따라서 $1.1\dot{5}\times x$가 유한소수가 되려면 x는 3^2, 즉 9의 배수이어야 하므로 x의 값이 될 수 있는 가장 작은 자연수는 9이다.

24 Action 유리수와 순환소수의 관계를 이해한다.

① 무한소수 중 순환소수는 유리수이다.

③ 순환소수가 아닌 무한소수는 유리수가 아니다.

④ 순환소수는 모두 유리수이므로 항상 분모와 분자가 정수인 분수로 나타낼 수 있다.

따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다.

최고 수준 완성하기

P 11–P 13

01 8	**02** 171	**03** 222	**04** 30개
05 27개	**06** 462	**07** 14개	**08** 64개
09 12	**10** 6	**11** 15	**12** 10

01 Action 순환마디의 숫자의 개수를 이용하여 a, b, c, d, e, f의 값을 각각 구한다.

$0.\dot{a}bcde\dot{f}$의 순환마디는 $abcdef$이고, 순환마디의 숫자의 개수는 6개이다.

이때 $101=6\times 16+5$이므로 소수점 아래 101번째 자리의 숫자는 순환마디 $abcdef$ 중 5번째 숫자인 $e=4$이다.

따라서 $f=3$, $a=2$, $b=1$, $c=5$, $d=6$이므로

$a+d=2+6=8$

02 Action $\dfrac{13}{60}$을 순환소수로 나타내고 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_{30}의 값을 각각 구한다.

$\dfrac{13}{60}=0.21666\cdots=0.21\dot{6}$

$=\dfrac{2}{10}+\dfrac{1}{10^2}+\dfrac{6}{10^3}+\dfrac{6}{10^4}+\cdots$

$\therefore x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{30}=2+1+6\times 28=171$

03 **Action** 분수를 순환소수로 나타내고 순환마디의 숫자의 개수를 구한다.

$\frac{3}{7}=0.428571428571\cdots=0.\dot{4}2857\dot{1}$이므로 순환마디의 숫자의 개수는 6개이다. …… 30%

이때 $50=6\times8+2$이므로 순환마디가 8번 반복되고 소수점 아래 49번째 자리의 숫자와 50번째 자리의 숫자는 각각 4, 2이다. …… 40%

따라서 구하는 합은

$(4+2+8+5+7+1)\times8+4+2=222$ …… 30%

04 **Action** 분모인 30을 소인수분해하면 $2\times3\times5$이므로 유한소수가 되려면 분자는 3의 배수이어야 한다.

$\frac{x}{30}=\frac{x}{2\times3\times5}$가 유한소수가 되려면 x는 3의 배수이어야 한다.

이때 x는 100 이하의 자연수이므로 3의 배수인 수는 33개이고, 이 중 $\frac{x}{30}$를 정수로 만드는 30, 60, 90을 제외하면 x의 개수는 30개이다.

05 **Action** 조건 (나), (다)를 동시에 만족시키는 n의 조건을 알아본다.

(나)에서 n은 15의 배수가 아니다. …… 20%

(다)에서 $\frac{n}{15}=\frac{n}{3\times5}$이 유한소수가 되려면 n은 3의 배수이어야 한다. …… 30%

이때 100 이하의 자연수 중에서 3의 배수는 33개이고, 15의 배수는 6개이므로 (나), (다)를 만족시키는 자연수 n의 개수는

$33-6=27$(개) …… 50%

06 **Action** 세 분수 $\frac{a}{70}$, $\frac{5a}{264}$, $\frac{9a}{110}$의 분모를 각각 소인수분해한 후 유한소수가 되도록 하는 a의 조건을 알아본다.

$\frac{a}{70}=\frac{a}{2\times5\times7}$, $\frac{5a}{264}=\frac{5a}{2^3\times3\times11}$, $\frac{9a}{110}=\frac{9a}{2\times5\times11}$

가 모두 유한소수가 되려면 세 분수의 분모의 소인수 중 2 또는 5 이외의 수는 모두 약분되어야 하므로 a는 7, 3, 11의 공배수이어야 한다.

7, 3, 11의 최소공배수는 $7\times3\times11=231$이므로 a의 값이 될 수 있는 두 번째로 작은 세 자리의 자연수는 462이다.

07 **Action** $\frac{9}{210}=\frac{3}{70}$이므로 분모인 70을 소인수분해한 후 조건을 만족시키는 a, b의 값을 각각 구한다.

$\frac{9}{210}=\frac{3}{70}=\frac{3}{2\times5\times7}$이므로 $\frac{3}{2\times5\times7}\times\frac{b}{a}$가 유한소수가 되려면 a는 소인수가 2 또는 5뿐이거나 거기에 3을 곱한 수이고, b는 7의 배수이어야 한다.

이때 두 수 a, b는 2 이상 20 이하의 자연수이므로

$a=2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20$

$b=7, 14$

그런데 다음의 경우에 분수 $\frac{b}{a}$는 기약분수가 아니다.

$\frac{14}{2}=\frac{7}{1}$, $\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$, $\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$, $\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$, $\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$, $\frac{14}{12}=\frac{7}{6}$,

$\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$, $\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$

따라서 분수 $\frac{b}{a}$는 $11\times2-8=14$(개)

08 **Action** a, b는 한 자리의 자연수임을 이용하여 a의 값을 기준으로 주어진 분수가 순환소수가 되도록 하는 b의 값을 찾아본다.

(ⅰ) $a=1, 2, 4, 5, 8$일 때, b는 3의 배수가 아니어야 하므로

$b=1, 2, 4, 5, 7, 8$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $5\times6=30$(개)

(ⅱ) $a=3, 6$일 때, b는 9가 아니어야 하므로

$b=1, 2, 3, \cdots, 8$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $2\times8=16$(개)

(ⅲ) $a=7, 9$일 때, b의 값에 관계없이 항상 순환소수가 되므로

$b=1, 2, 3, \cdots, 9$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $2\times9=18$(개)

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 $30+16+18=64$(개)

09 **Action** 주어진 조건에 맞는 식을 세운 후 순환소수를 분수로 나타내어 계산한다.

$1.3x=1.\dot{3}x-0.3$이므로 $\frac{13}{10}x=\frac{13-1}{9}x-\frac{3}{10}$

$39x=40x-9$ $\quad\therefore x=9$

따라서 바르게 계산한 답은

$9\times1.\dot{3}=9\times\frac{4}{3}=12$

10 **Action** $0.\dot{a}\dot{b}=\frac{10a+b}{99}$임을 이용한다.

$0.\dot{a}\dot{b}+0.\dot{b}\dot{a}=0.\dot{5}$에서 $\frac{10a+b}{99}+\frac{10b+a}{99}=\frac{5}{9}$

$\frac{11(a+b)}{99}=\frac{5}{9}$, $\frac{a+b}{9}=\frac{5}{9}$ $\quad\therefore a+b=5$

이때 a, b는 한 자리의 자연수이므로 $a=1$, $b=4$ 또는 $a=2$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=2$ 또는 $a=4$, $b=1$

따라서 ab의 값은 $a=2$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=2$일 때 가장 크므로 ab의 최댓값은 6이다.

Lecture

순환소수를 분수로 나타내기

$0.\dot{a}\dot{b}$를 분수로 나타낼 때, 분자는 ab가 아니라 $10a+b$로 나타내어야 한다.

즉 $0.\dot{a}\dot{b}=\frac{10a+b}{99}$로 나타내어야 한다.

11 **Action** 약속에 따라 $[5, 4, 2]$, $[3, 2, 1]$을 각각 소수로 나타낸다.

$[5, 4, 2]=0.\dot{5}+0.0\dot{4}+0.00\dot{2}$

$=\frac{5}{9}+\frac{4}{90}+\frac{2}{900}=\frac{542}{900}$

$[3, 2, 1]=0.\dot{3}+0.0\dot{2}+0.00\dot{1}$

$=\frac{3}{9}+\frac{2}{90}+\frac{1}{900}=\frac{321}{900}$

$0.3\dot{6}=\frac{36-3}{90}=\frac{11}{30}$이므로

$[5, 4, 2]+[3, 2, 1]=0.3\dot{6}\times x$에서

$\frac{542}{900}+\frac{321}{900}=\frac{11}{30}\times x$, $\frac{863}{900}=\frac{11}{30}\times x$

$\therefore x=\frac{863}{900}\times\frac{30}{11}=\frac{863}{330}=2.6151515\cdots=2.6\dot{1}\dot{5}$

따라서 순환소수 x의 순환마디는 15이다.

12 **Action** x를 분수로 나타낸 후 주어진 식에 대입하여 간단히 한다.

$x=0.\dot{4}=\frac{4}{9}$이므로 $\frac{2}{x}=2\times\frac{1}{x}=2\times\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$

$\therefore 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{x}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{9}{2}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{11}{2}}$

$=1+\frac{2}{11}=\frac{13}{11}=1.181818\cdots$

$=1.\dot{1}\dot{8}=a.\dot{b}\dot{c}$

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=8$이므로

$a+b+c=1+1+8=10$

Lecture

$\cfrac{\cfrac{d}{c}}{\cfrac{b}{a}}$는 다음과 같이 계산한다.

$$\cfrac{\cfrac{d}{c}}{\cfrac{b}{a}}=\frac{d}{c}\div\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\times\frac{a}{b}=\frac{ad}{bc}\ (\text{단, } abc\neq0)$$

특히 $\cfrac{1}{\cfrac{b}{a}}=1\div\frac{b}{a}=1\times\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$이다. (단, $ab\neq0$)

최고 수준 뛰어넘기

P 14– P 15

01 ㉡, ㉢	**02** 123101	**03** 567	**04** $0.\dot{4}$
05 18	**06** $\left(\frac{500}{99}, \frac{50}{99}\right)$		

01 **Action** $\frac{7}{13}$을 순환소수로 나타낸 후 순환마디를 구한다.

$\frac{7}{13}=0.538461538461\cdots=0.\dot{5}3846\dot{1}$이므로 순환마디의 숫자의 개수는 6개이다.

㉠ $31=6\times5+1$에서 소수점 아래 31번째 자리의 숫자는 순환마디의 첫 번째 숫자이므로 5이다.

$\therefore f(31)=5$

㉡ 순환마디의 숫자의 개수는 6개이므로 $f(n)=f(n+6)$

㉢ 순환마디의 숫자 중에 0이 없으므로 $f(n)=0$을 만족시키는 자연수 n은 없다.

따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢이다.

02 **Action** 주어진 조건을 만족시키는 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$의 값을 구하여 규칙을 찾는다.

$a_1=1$, $a_2=2$이고

$a_3=\{(1+2)$를 4로 나눈 나머지$\}=3$

$a_4=\{(2+3)$을 4로 나눈 나머지$\}=1$

$a_5=\{(3+1)$을 4로 나눈 나머지$\}=0$

$a_6=\{(1+0)$을 4로 나눈 나머지$\}=1$

$a_7=\{(0+1)$을 4로 나눈 나머지$\}=1$

$a_8=\{(1+1)$을 4로 나눈 나머지$\}=2$

$a_9=\{(1+2)$를 4로 나눈 나머지$\}=3$

$\vdots$

즉 주어진 조건을 모두 만족시키는 수는

$0.123101123101\cdots=0.\dot{1}2310\dot{1}$이므로 순환마디는 123101이다.

03 **Action** 먼저 조건 (나)를 이용하여 N의 조건을 구한다.

(나)에서 $\frac{N}{630}=\frac{N}{2\times3^2\times5\times7}$이 유한소수가 되려면 N은 $3^2\times7=63$의 배수이어야 한다.

$N=63n$(n은 자연수)이라 하면

(가)에서 $N=63n$은 세 자리의 홀수이므로 가능한 n의 값은

$n=3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$

(다)에서 $M=\frac{N}{630}\times40=\frac{63n}{630}\times40=4n$

즉 $M=4n$이 어떤 자연수의 제곱이고 $4=2^2$이므로 n은 어떤 자연수의 제곱이다.

따라서 n의 값 중 제곱인 수는 3^2, 즉 9뿐이므로 $n=9$

$\therefore N=63n=63\times9=567$

04 **Action** 분모 360을 소인수분해한 후 조건에 맞는 x, y의 값을 각각 구한다.

$\frac{A}{360}=\frac{A}{2^3\times3^2\times5}$가 유한소수가 되려면 A는 3^2, 즉 9의 배수이어야 한다.

따라서 A의 값이 될 수 있는 가장 작은 자연수는 9이므로

$x=9$

한편, $\dfrac{A}{360}$가 소수점 아래 둘째 자리부터 순환마디가 시작되는 순환소수가 되려면 분수로 나타내었을 때, 분모는 9가 계속되다가 일의 자리의 숫자만 0이어야 하므로 기약분수로 나타내었을 때, 분모의 소인수에 2 또는 5가 1개씩만 있어야 한다.

(ⅰ) 분모의 소인수에 2만 1개 있을 때,
A의 값이 될 수 있는 가장 작은 자연수는 $2^2\times5=20$

(ⅱ) 분모의 소인수에 5만 1개 있을 때,
A의 값이 될 수 있는 가장 작은 자연수는 $2^3=8$

(ⅲ) 분모의 소인수에 2, 5가 각각 1개씩 있을 때,
A의 값이 될 수 있는 가장 작은 자연수는 $2^2=4$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 A의 값이 될 수 있는 가장 작은 자연수는 4이므로 $y=4$

$\therefore \dfrac{y}{x}=\dfrac{4}{9}=0.444\cdots=0.\dot{4}$

Lecture

(1) 소수점 아래 첫째 자리부터 순환마디가 시작되는 순환소수
➡ 분모가 9, 99, 999, ⋯의 꼴이다.
➡ 분모의 소인수에 2와 5가 없다.

(2) 소수점 아래 첫째 자리부터 순환마디가 시작되지 않는 순환소수
➡ 분모가 90, 900, 990, ⋯의 꼴이다.
➡ 분모의 소인수에 2 또는 5가 있다.

05

Action 1보다 작은 두 순환소수의 합이 자연수이므로 그 합은 1이다.

두 순환소수 $0.\dot{a}bc\dot{d}$, $0.\dot{c}da\dot{b}$는 각각 1보다 작은 소수이고, 이 두 순환소수의 합이 자연수이므로 그 합은 1이다.

$0.\dot{a}bc\dot{d}+0.\dot{c}da\dot{b}$

$=\dfrac{1000a+100b+10c+d}{9999}+\dfrac{1000c+100d+10a+b}{9999}$

$=\dfrac{1010a+101b+1010c+101d}{9999}$

$=\dfrac{101(10a+b+10c+d)}{9999}$

$=\dfrac{10(a+c)+b+d}{99}=1$

$\therefore 10(a+c)+b+d=99$

이때 a, b, c, d가 서로 다른 한 자리의 자연수이므로

$a+c=9$, $b+d=9$

$\therefore a+b+c+d=(a+c)+(b+d)=9+9=18$

Lecture

$a+c=9$, $b+d=9$인 이유

$10(a+c)$의 일의 자리의 숫자는 0이므로 $b+d$의 일의 자리의 숫자는 9이어야 한다. 이때 b, d는 서로 다른 한 자리의 자연수이므로 $b+d$의 최댓값은 17이다.

따라서 $b+d=9$이므로 $a+c=9$이다.

06

Action 점 A의 x좌표와 y좌표의 규칙성을 각각 찾는다.

점 A의 x좌표가 가까워지는 값을 살펴보면 원점에서 출발하여 오른쪽으로 $a_1=5$만큼, 다시 오른쪽으로

$a_3=\dfrac{1}{10}a_2=\dfrac{1}{100}a_1=\dfrac{5}{100}$만큼, 다시 오른쪽으로

$a_5=\dfrac{1}{10}a_4=\dfrac{1}{100}a_3=\dfrac{1}{1000}a_2=\dfrac{1}{10000}a_1=\dfrac{5}{10000}$만큼,

⋯과 같이 움직이므로 점 A의 x좌표가 가까워지는 값은

$5+\dfrac{5}{100}+\dfrac{5}{10000}+\cdots=5+0.05+0.0005+\cdots$

$=5.0505\cdots=5.\dot{0}\dot{5}$

$=\dfrac{505-5}{99}=\dfrac{500}{99}$

또, 점 A의 y좌표가 가까워지는 값을 살펴보면 원점에서 출발하여 위로 $a_2=\dfrac{1}{10}a_1=\dfrac{5}{10}$만큼, 다시 위로

$a_4=\dfrac{1}{10}a_3=\dfrac{1}{100}a_2=\dfrac{1}{1000}a_1=\dfrac{5}{1000}$만큼, 다시 위로

$a_6=\dfrac{1}{10}a_5=\dfrac{1}{100}a_4=\dfrac{1}{1000}a_3$

$=\dfrac{1}{10000}a_2=\dfrac{1}{100000}a_1=\dfrac{5}{100000}$

만큼, ⋯과 같이 움직이므로 점 A의 y좌표가 가까워지는 값은

$\dfrac{5}{10}+\dfrac{5}{1000}+\dfrac{5}{100000}+\cdots=0.5+0.005+0.00005+\cdots$

$=0.50505\cdots=0.\dot{5}\dot{0}=\dfrac{50}{99}$

따라서 점 A가 가까워지는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{500}{99}, \dfrac{50}{99}\right)$이다.

교과서 속 창의 사고력

P 16–P 18

01 4	**02** 10개	**03** $(-11, -3)$
03 $\dfrac{37}{99}$	**05** $\dfrac{900}{11}$	**06** (1) 풀이 참조 (2) $\dfrac{5}{36}$

01

Action $(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$의 일의 자리의 숫자는 $(11^2+12^2+13^2+\cdots+20^2)$의 일의 자리의 숫자와 같다.

$\{(11^2+12^2+13^2+\cdots+20^2)$의 일의 자리의 숫자$\}$

$=\{(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$의 일의 자리의 숫자$\}=5$이므로

$\{(1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2)$의 일의 자리의 숫자$\}=0$

따라서 $n=21$ 이후로는 1^2, 1^2+2^2, $1^2+2^2+3^2$, ⋯의 일의 자리의 숫자가 다시 반복된다.

즉 $a_{21}=a_1$, $a_{22}=a_2$, $a_{23}=a_3$, ⋯이므로

$0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots=0.\dot{a}_1a_2a_3\cdots\dot{a}_{20}$

이때 순환마디의 숫자는 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{20}$의 20개이고, $2008=20\times100+8$이므로 소수점 아래 2008번째 자리의 숫자는 a_8의 값과 같다.
따라서 $0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$의 소수점 아래 2008번째 자리의 숫자는 $1^2+2^2+3^2+\cdots+8^2$의 일의 자리의 숫자인 4이다.

02 Action 분자, 분모에 올 수 있는 수를 각각 생각해 본다.

분자에 올 수 있는 수는 $1, 2, 3, 4(=2^2), 5, 6(=2\times3)$
분모에 올 수 있는 수는 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44
만들어진 분수를 소수로 나타내었을 때, 유한소수가 되는 분수는 다음과 같다.

(ⅰ) 분모가 $12(=2^2\times3)$일 때, $\frac{3}{12}, \frac{6}{12}$의 2개

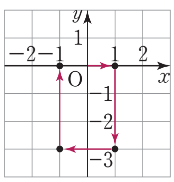
(ⅱ) 분모가 $24(=2^3\times3)$일 때, $\frac{3}{24}, \frac{6}{24}$의 2개

(ⅲ) 분모가 $32(=2^5)$일 때,
$\frac{1}{32}, \frac{2}{32}, \frac{3}{32}, \frac{4}{32}, \frac{5}{32}, \frac{6}{32}$의 6개

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 $2+2+6=10$(개)

03 Action $\frac{1323}{9999}$을 순환소수로 나타낸 후 순환마디를 구한다.

$\frac{1323}{9999}=0.13231323\cdots=0.\dot{1}32\dot{3}$이므로 순환마디의 숫자의 개수는 4개이다.
이때 점 A는 4회마다 일정한 이동을 반복하고, 매회 오른쪽으로 90°씩 회전하여 방향을 바꿔가며 이동한다.



이것을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 4회마다 원점에서 x축의 방향으로 -1만큼 이동하게 된다.
$50=4\times12+2$이므로 순환마디가 12회 반복되어 x축의 방향으로 -1만큼 12회 이동한 후 2회 더 이동한 위치가 50회 이동한 후의 점 A의 위치가 된다.
따라서 순환마디가 12회 반복된 후의 점 A의 좌표는 $(-12, 0)$이고 2회 더 이동하였으므로 $(-12, 0)$에서 x축의 방향으로 1만큼 전진하면 $(-11, 0)$, 그 다음은 다시 오른쪽으로 90° 회전하여 3만큼 전진하면 $(-11, -3)$이다.

04 Action 어떤 수를 10으로 나눈 나머지는 그 수의 일의 자리의 숫자와 같다.

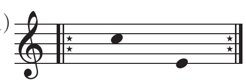
어떤 수를 10으로 나눈 나머지는 그 수의 일의 자리의 숫자와 같으므로
$A_n=\{(14^n+19^n)$의 일의 자리의 숫자$\}$
$\quad=\{(4^n+9^n)$의 일의 자리의 숫자$\}$
$n=1$일 때, 4의 일의 자리의 숫자는 4, 9의 일의 자리의 숫자는 9이고, 이 두 수를 더하면 13이므로 $A_1=3$
$n=2$일 때, 4^2의 일의 자리의 숫자는 6, 9^2의 일의 자리의 숫자는 1이고, 이 두 수를 더하면 7이므로 $A_2=7$
같은 방법으로 $A_3=3, A_4=7, \cdots$

$$\therefore \frac{A_1}{10}+\frac{A_2}{10^2}+\frac{A_3}{10^3}+\frac{A_4}{10^4}+\cdots$$
$$=\frac{3}{10}+\frac{7}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{7}{10^4}+\cdots$$
$$=0.3+0.07+0.003+0.0007+\cdots$$
$$=0.3737\cdots=0.\dot{3}\dot{7}=\frac{37}{99}$$

05 Action 첫 번째 원의 반지름의 길이를 이용하여 두 번째 원, 세 번째 원, …의 반지름의 길이를 구한다.

첫 번째 원의 넓이를 S_1, 두 번째 원의 넓이를 S_2, 세 번째 원의 넓이를 S_3, …이라 하면
첫 번째 원의 반지름의 길이는 9이므로
$S_1=\pi\times9^2=81\pi$
두 번째 원의 반지름의 길이는
$$9-9\times\frac{9}{10}=9-\frac{81}{10}=\frac{9}{10}$$
$$\therefore S_2=\pi\times\left(\frac{9}{10}\right)^2=0.81\pi$$
세 번째 원의 반지름의 길이는
$$\frac{9}{10}-\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{10}-\frac{81}{100}=\frac{9}{100}$$
$$\therefore S_3=\pi\times\left(\frac{9}{100}\right)^2=0.0081\pi$$
$$\therefore S_1+S_2+S_3+\cdots=81\pi+0.81\pi+0.0081\pi+\cdots$$
$$=\pi\times81.8181\cdots$$
$$=\pi\times81.\dot{8}\dot{1}=\pi\times\frac{8181-81}{99}$$
$$=\pi\times\frac{8100}{99}=\frac{900}{11}\pi$$
따라서 $S\pi=\frac{900}{11}\pi$이므로 $S=\frac{900}{11}$

06 Action 소수와 악보의 관계를 이해한다.

(1)


$\frac{8}{11}=0.727272\cdots=0.\dot{7}\dot{2}$이므로 출력되는 악보를 그리면 위의 그림과 같다.

(2) 악보에서 나타내는 음을 소수로 나타내면 $0.13\dot{8}$이므로 기계에 넣은 기약분수는
$$0.13\dot{8}=\frac{138-13}{900}=\frac{125}{900}=\frac{5}{36}$$

Ⅱ. 식의 계산

1. 단항식의 계산

최고수준 입문하기

P 21 – P 24

01 2	**02** 5	**03** 1024	**04** 9
05 4	**06** ④	**07** 15	**08** 12
09 $a=4$, $b=8$, $c=6$		**10** 7	**11** ③
12 500초 후	**13** 3	**14** 29	**15** ④
16 ②	**17** 20	**18** 4	**19** 41
20 $-\dfrac{36}{xy}$	**21** -7	**22** $\dfrac{64x^2}{9yz^4}$	**23** $36b^{10}$
24 $8x^2y^2$			

01 **Action** 256을 소인수분해하여 2의 거듭제곱으로 나타낸다.

$256=2^8$이므로

$2\times2^5\times2^a=2^{1+5+a}=2^8$

따라서 $6+a=8$이므로 $a=2$

02 **Action** m, n이 자연수일 때, $a^m\times a^n=a^{m+n}$, $(a^m)^n=a^{mn}$임을 이용한다.

$(a^3)^{\square}\times a^2\times a^4=a^{3\times\square+2+4}=a^{3\times\square+6}$이므로

$a^{3\times\square+6}=a^{21}$

따라서 $3\times\square+6=21$이므로

$3\times\square=15\qquad\therefore\ \square=5$

03 **Action** $\dfrac{a}{b}$를 2의 거듭제곱으로 나타낸다.

$\dfrac{a}{b}=a\div b=2^{5x}\div2^{5y}=2^{5x-5y}=2^{5(x-y)}=2^{10}=1024$

04 **Action** 밑을 3으로 같게 만든 후 지수를 비교한다.

$9^{x+4}=(3^2)^{x+4}=3^{2x+8}$이므로 …… 50%

$3^{3x-1}=3^{2x+8}$

따라서 $3x-1=2x+8$이므로 $x=9$ …… 50%

05 **Action** $a\neq0$이고, m, n이 자연수일 때,

$a^m\div a^n=\begin{cases}a^{m-n} & (m>n)\\ 1 & (m=n)\\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n)\end{cases}$임을 이용한다.

$a^{20}\div a^4\div a^{2x}=a^{20-4-2x}=a^{16-2x}$이므로

$a^{16-2x}=a^8$

따라서 $16-2x=8$이므로

$2x=8\qquad\therefore\ x=4$

06 **Action** 지수법칙을 이용하여 간단히 한다.

① $a^7\div a^4\div a=a^{7-4-1}=a^2$

② $(a^3)^2\div(a^2)^2=a^6\div a^4=a^{6-4}=a^2$

③ $a\times a^5\div a^4=a^{1+5}\div a^4=a^6\div a^4=a^{6-4}=a^2$

④ $a^4\div(a^5\div a^2)=a^4\div a^{5-2}=a^4\div a^3=a^{4-3}=a$

⑤ $a^7\div(a\times a^4)=a^7\div a^{1+4}=a^7\div a^5=a^{7-5}=a^2$

따라서 계산 결과가 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

07 **Action** 각각의 등식에서 밑을 같게 만든 후 지수를 비교한다.

$3^6\div3^a=\dfrac{1}{3^2}$에서 $a-6=2\qquad\therefore\ a=8$ …… 30%

$8\times2^b\div64=16$에서 $2^3\times2^b\div2^6=2^4$

$2^{3+b-6}=2^4$

따라서 $b-3=4$이므로 $b=7$ …… 50%

$\therefore\ a+b=8+7=15$ …… 20%

08 **Action** 540을 소인수분해한다.

$540=2^2\times3^3\times5$이므로

$540^3=(2^2\times3^3\times5)^3=2^6\times3^9\times5^3$

따라서 $x=6$, $y=9$, $z=3$이므로

$x+y-z=6+9-3=12$

09 **Action** m이 자연수일 때, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}\,(b\neq0)$임을 이용한다.

$\left(\dfrac{2x^2y^a}{z}\right)^3=\dfrac{8x^6y^{3a}}{z^3}=\dfrac{bx^cy^{12}}{z^3}$이므로

$3a=12$, $8=b$, $6=c$

$\therefore\ a=4$, $b=8$, $c=6$

10 **Action** 32, 16, 8을 각각 2의 거듭제곱으로 나타낸다.

$32^2\times16^3\div8^5=(2^5)^2\times(2^4)^3\div(2^3)^5$

$=2^{10}\times2^{12}\div2^{15}=2^{10+12-15}$

$=2^7=2^x$

$\therefore\ x=7$

11 **Action** 지수법칙을 이용하여 간단히 한다.

① $(a^2b^{\square})^3=a^6b^{\square\times3}=a^6b^{15}$이므로

$\square\times3=15\qquad\therefore\ \square=5$

② $(a^3)^4\div a^{\square}=a^{12-\square}=a^8$이므로

$12-\square=8\qquad\therefore\ \square=4$

③ $\left(-\dfrac{b^2}{a^3}\right)^3=-\dfrac{b^6}{a^9}=-\dfrac{b^6}{a^{\square}}$이므로 $\square=9$

④ $a^5\times a^4\div(a^{\square})^2=a^{9-\square\times2}=a$이므로

$9-\square\times2=1\qquad\therefore\ \square=4$

⑤ $a^{\square}\div(a^2)^2\div a=a^{\square-4-1}=a^{\square-5}=a^3$이므로

$\square-5=3\qquad\therefore\ \square=8$

따라서 □ 안에 들어갈 수가 가장 큰 것은 ③이다.

12 Action $(\text{시간})=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$임을 이용한다.

빛의 속력은 초속 3.0×10^5 km이므로 태양을 출발한 빛이 지구에 도달하는 데 걸리는 시간은

$\dfrac{1.5\times10^8}{3.0\times10^5}=\dfrac{10^3}{2}=500(\text{초})$

따라서 태양을 출발한 빛은 500초 후에 지구에 도달한다.

13 Action $3^{x+2}=3^x\times3^2$임을 이용한다.

$3^{x+2}+3^{x+1}+3^x=3^x\times3^2+3^x\times3+3^x$

$=(9+3+1)\times3^x$

$=13\times3^x$

따라서 $13\times3^x=351$이므로

$3^x=27=3^3 \qquad \therefore x=3$

14 Action 덧셈식은 곱셈식으로 바꾸어 간단히 한다.

$16^3+16^3+16^3+16^3=4\times16^3=2^2\times(2^4)^3$

$=2^2\times2^{12}=2^{14}$

이므로 $x=14$ …… 30%

$25^4\times125^3=(5^2)^4\times(5^3)^3=5^8\times5^9=5^{17}$이므로

$y=17$ …… 30%

$\{(-81)^2\}^4=(81^2)^4=\{(3^4)^2\}^4=(3^8)^4=3^{32}$이므로

$z=32$ …… 30%

$\therefore x-y+z=14-17+32=29$ …… 10%

Lecture

밑과 지수가 같은 거듭제곱의 덧셈

밑과 지수가 같은 거듭제곱의 덧셈은 곱셈으로 바꿀 수 있다.

$$\underbrace{a^m+a^m+a^m+\cdots+a^m}_{n\text{개}}=n\times a^m$$

특히 밑이 a인 거듭제곱을 a번 더한 것은 다음과 같이 거듭제곱으로 나타낼 수 있다.

$$\underbrace{a^m+a^m+a^m+\cdots+a^m}_{a\text{개}}=a\times a^m=a^{m+1}$$

15 Action $a^n=A$일 때, $a^{mn}=(a^n)^m=A^m$임을 이용한다.

$24^4=(2^3\times3)^4=(2^3)^4\times3^4$

$=(2^3)^4\times(3^2)^2=A^4B^2$

16 Action $2^{x+1}=2^x\times2$임을 이용하여 2^x을 A를 사용하여 나타낸다.

$A=2^{x+1}=2^x\times2 \qquad \therefore 2^x=\dfrac{A}{2}$

$\therefore 16^x=(2^4)^x=2^{4x}=(2^x)^4$

$=\left(\dfrac{A}{2}\right)^4=\dfrac{A^4}{2^4}=\dfrac{A^4}{16}$

17 Action 주어진 수를 $a\times10^n$의 꼴로 나타낸다.

$2^{15}\times3\times5^{12}=2^3\times2^{12}\times3\times5^{12}=2^3\times3\times(2\times5)^{12}$

$=24\times10^{12}$

따라서 $2^{15}\times3\times5^{12}$은 14자리의 자연수이므로 $n=14$

또, 각 자리의 숫자의 합은 $2+4=6$이므로 $k=6$

$\therefore n+k=14+6=20$

Lecture

지수법칙을 이용하여 자릿수 구하기

주어진 수에서 소인수 2와 5의 지수를 같게 만들고 $2^n\times5^n=(2\times5)^n=10^n$임을 이용하여 주어진 수를 $a\times10^n$ (a, n은 자연수)의 꼴로 나타낸다.

이때 $(a\times10^n$의 자릿수$)=(a$의 자릿수$)+n$이다.

18 Action 주어진 수를 $a\times10^n$의 꼴로 나타낸다.

$4^x\times25^{x+1}=(2^2)^x\times(5^2)^{x+1}=2^{2x}\times5^{2x+2}$

$=2^{2x}\times5^{2x}\times5^2=5^2\times(2\times5)^{2x}$

$=25\times10^{2x}$

이때 $4^x\times25^{x+1}$이 10자리의 자연수이므로

$2x=8 \qquad \therefore x=4$

19 Action 지수법칙을 이용하여 좌변을 간단히 한 후 우변과 비교한다.

$(2x^2y^a)^3\times(-xy^4)^b\times5x^3y^2$

$=8x^6y^{3a}\times(-1)^bx^by^{4b}\times5x^3y^2$

$=(-1)^b\times40x^{9+b}y^{3a+4b+2}$

즉 $(-1)^b\times40x^{9+b}y^{3a+4b+2}=cx^{11}y^{19}$이므로

$(-1)^b\times40=c$, $9+b=11$, $3a+4b+2=19$

따라서 $a=3$, $b=2$, $c=40$이므로

$a-b+c=3-2+40=41$

20 Action 역수를 이용하여 나눗셈을 곱셈으로 바꿔서 계산한다.

$(-3x^3y^4)^2\div2x^4y^3\div\left(-\dfrac{1}{2}xy^2\right)^3$

$=9x^6y^8\div2x^4y^3\div\left(-\dfrac{1}{8}x^3y^6\right)$

$=9x^6y^8\times\dfrac{1}{2x^4y^3}\times\left(-\dfrac{8}{x^3y^6}\right)$

$=-\dfrac{36}{xy}$

21 Action 지수법칙을 이용하여 괄호를 풀고, 역수를 이용하여 나눗셈을 곱셈으로 바꾼다.

$Ax^3y^5\div(-2xy^B)^4\times8x^Cy^3$

$=Ax^3y^5\times\dfrac{1}{16x^4y^{4B}}\times8x^Cy^3$

$=\dfrac{A}{2}x^{C-1}y^{8-4B}$

즉 $\frac{A}{2}x^{C-1}y^{8-4B}=-5xy^4$이므로

$\frac{A}{2}=-5, C-1=1, 8-4B=4$

따라서 $A=-10, B=1, C=2$이므로

$A+B+C=-10+1+2=-7$

22 Action $A\div\boxed{}\times B=C$에서 $\boxed{}=A\times B\div C$임을 이용한다.

$$\boxed{}=(-3x^2y)^2\times\left(-\frac{1}{9}x^2z\right)^2\div\left(\frac{1}{4}x^2yz^2\right)^3$$

$$=9x^4y^2\times\frac{1}{81}x^4z^2\times\frac{64}{x^6y^3z^6}$$

$$=\frac{64x^2}{9yz^4}$$

Lecture

□ 안에 알맞은 식 구하기

$A\times B\div\square=C \Rightarrow \square=A\times B\div C$

$\square\times A\div B=C \Rightarrow \square=C\div A\times B$

23 Action 어떤 식을 A라 하고, A를 먼저 구한다.

어떤 식을 A라 하면 $A\div\frac{2b^3}{a}=(3ab^2)^2$

$\therefore A=(3ab^2)^2\times\frac{2b^3}{a}=9a^2b^4\times\frac{2b^3}{a}$

$=18ab^7$ …… 60%

따라서 바르게 계산하면

$18ab^7\times\frac{2b^3}{a}=36b^{10}$ …… 40%

24 Action (원기둥의 부피)=(밑넓이)×(높이)임을 이용한다.

$\pi\times(2x^2y)^2\times$(높이)$=32\pi x^6y^4$이므로

(높이)$=32\pi x^6y^4\times\frac{1}{(2x^2y)^2\pi}$

$=32\pi x^6y^4\times\frac{1}{4\pi x^4y^2}$

$=8x^2y^2$

최고수준 완성하기

P 25~P 27

01 2	**02** 4	**03** 0	**04** 13
05 5, 96	**06** $\frac{a^3}{40b}$	**07** 17	**08** $-72x^{12}$
09 11	**10** $-\frac{32}{5}a^8b^6$	**11** $64x^4y^6$	**12** $\frac{9}{8}a$

01 Action 16, 4, 64를 각각 2의 거듭제곱으로 나타낸다.

$16^{5x-1}\div4^{3x+6}=2^{4(5x-1)}\div2^{2(3x+6)}=2^{20x-4}\div2^{6x+12}$

$64^2=(2^6)^2=2^{12}$이므로

$2^{20x-4}\div2^{6x+12}=2^{12}$

따라서 $20x-4-(6x+12)=12$이므로

$14x-16=12, 14x=28 \qquad \therefore x=2$

02 Action d의 값이 될 수 있는 자연수는 x, y, z의 지수의 공약수임을 이용한다.

$(x^ay^bz^c)^d=x^{ad}y^{bd}z^{cd}=x^{16}y^{12}z^{28}$이므로

$ad=16, bd=12, cd=28$

이때 a, b, c, d는 모두 자연수이므로 d는 16, 12, 28의 공약수이어야 한다.

즉 가장 큰 자연수 d는 16, 12, 28의 최대공약수인 4이다.

따라서 $d=4$일 때 $a=4, b=3, c=7$이므로

$a+b-c+d=4+3-7+4=4$

03 Action 7의 거듭제곱에서 일의 자리의 숫자의 규칙성을 알아본다.

$\{7\}=7, \{7^2\}=9, \{7^3\}=3, \{7^4\}=1, \{7^5\}=7, \cdots$이므로 7^n의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1의 4개의 숫자가 반복된다.

$17=4\times4+1$이므로 $\{7^{17}\}=\{7\}=7$

$83=4\times20+3$이므로 $\{7^{83}\}=\{7^3\}=3$

$\therefore \{7^{17}+7^{83}\}=\{7+3\}=0$

Lecture

두 자연수의 합의 일의 자리의 숫자

두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 일의 자리의 숫자는 (a의 일의 자리의 숫자)+(b의 일의 자리의 숫자)의 일의 자리의 숫자와 같다.

04 Action 좌변의 덧셈식을 곱셈식으로 바꾼다.

$$\frac{4^6+4^6+4^6}{3^6+3^6+3^6+3^6}\times\frac{5^6+5^6+5^6+5^6}{2^6+2^6+2^6}$$

$$=\frac{3\times4^6}{4\times3^6}\times\frac{4\times5^6}{3\times2^6}=\frac{2^6\times5^6}{3^6}$$

$$=\frac{(2\times5)^6}{3^6}=\left(\frac{10}{3}\right)^6$$

따라서 $a=3, b=10$이므로

$a+b=3+10=13$

05 Action 각각의 수를 소인수분해한 후 지수법칙을 이용한다.

$$\frac{2^{11}\times15^5\times12^3}{6^7\times10^x}=\frac{2^{11}\times(3\times5)^5\times(2^2\times3)^3}{(2\times3)^7\times(2\times5)^x}$$

$$=\frac{2^{11}\times3^5\times5^5\times2^6\times3^3}{2^7\times3^7\times2^x\times5^x}$$

$$=\frac{2^{10}\times3\times5^5}{2^x\times5^x}$$

$x=5$일 때, 가장 작은 자연수가 되므로

$\dfrac{2^{10}\times3\times5^5}{2^5\times5^5}=2^5\times3=96$

따라서 가장 작은 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값은 5이고, 그때의 자연수는 96이다.

06 Action 2^x과 5^x을 각각 a, b를 사용하여 나타낸다.

$a=2^{x+1}=2^x\times2$이므로 $2^x=\dfrac{a}{2}$

$b=5^{x-1}=5^x\div5=\dfrac{5^x}{5}$이므로 $5^x=5b$

$\therefore (1.6)^x=\left(\dfrac{8}{5}\right)^x=\left(\dfrac{2^3}{5}\right)^x=\dfrac{2^{3x}}{5^x}=\dfrac{(2^x)^3}{5^x}$

$=\left(\dfrac{a}{2}\right)^3\div5b=\dfrac{a^3}{8}\times\dfrac{1}{5b}=\dfrac{a^3}{40b}$

07 Action 덧셈식을 곱셈식으로 바꾼 후 $a\times10^n$의 꼴로 나타낸다.

$(6^3+6^3+6^3+6^3)^2\times(5^8+5^8)\div(15^2+15^2+15^2)$

$=(4\times6^3)^2\times(2\times5^8)\div(3\times15^2)$

$=\{2^2\times(2\times3)^3\}^2\times(2\times5^8)\div\{3\times(3\times5)^2\}$

$=(2^5\times3^3)^2\times(2\times5^8)\div(3^3\times5^2)$

$=2^{11}\times3^6\times5^8\times\dfrac{1}{3^3\times5^2}$

$=2^{11}\times3^3\times5^6=2^5\times2^6\times3^3\times5^6$

$=2^5\times3^3\times(2\times5)^6$

$=2^5\times3^3\times10^6$

$=864\times10^6$ …… 50%

따라서 주어진 수는 9자리의 자연수이므로

$m=9$ …… 20%

또, 이 수의 최고 자리의 숫자는 8이므로 $n=8$ …… 20%

$\therefore m+n=9+8=17$ …… 10%

08 Action $A\div C=\dfrac{A}{C}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{B}{C}$임을 이용한다.

$\dfrac{A}{B}=(-2x^2)^3=-8x^6$

$\dfrac{B}{C}=(3x^3)^2=9x^6$

$\therefore A\div C=\dfrac{A}{C}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{B}{C}$

$=-8x^6\times9x^6=-72x^{12}$

09 Action 지수법칙을 이용하여 좌변을 간단히 한 후 우변과 비교한다.

$\left(-\dfrac{x^3}{y}\right)^a\times\left(\dfrac{y^2}{x^b}\right)^2\div\left(-\dfrac{x^2}{2y}\right)^2$

$=(-1)^a\times\dfrac{x^{3a}}{y^a}\times\dfrac{y^4}{x^{2b}}\times\dfrac{4y^2}{x^4}$ …… ㉠

이때 (좌변)=(우변)이므로 $(-1)^a=-1$이고,

$1<a<5$이므로 $a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$-\dfrac{x^9}{y^3}\times\dfrac{y^4}{x^{2b}}\times\dfrac{4y^2}{x^4}=-\dfrac{4y^3}{x^{2b-5}}$

따라서 $-\dfrac{4y^3}{x^{2b-5}}=-\dfrac{4y^{c-1}}{x^3}$이므로

$2b-5=3,\ 3=c-1 \qquad \therefore b=4,\ c=4$

$\therefore a+b+c=3+4+4=11$

10 Action 약속에 따라 주어진 식을 계산한다.

(주어진 식)

$=<10\times a\times b^3>\times[-2\times a^3\times b]\div(5ab)^3$

$=(10ab^3)^2\times(-2a^3b)^3\div125a^3b^3$

$=100a^2b^6\times(-8a^9b^3)\times\dfrac{1}{125a^3b^3}$

$=-\dfrac{32}{5}a^8b^6$

11 Action 직사각형 ABCD의 세로의 길이가 정사각형 DCEF의 한 변의 길이이다.

$3xy^2\times\overline{DC}=24x^3y^5$이므로 $\overline{DC}=\dfrac{24x^3y^5}{3xy^2}=8x^2y^3$

$\therefore$ (정사각형 DCEF의 넓이)$=(8x^2y^3)^2=64x^4y^6$

12 Action (쇠공의 부피)=(원기둥의 밑넓이)×(높아진 물의 높이)이다.

높아진 물의 높이를 h라 하면 높아진 물의 높이만큼의 원기둥의 부피는 쇠공의 부피와 같으므로

$\pi\times(2a)^2\times h=\dfrac{4}{3}\pi\times\left(\dfrac{3}{2}a\right)^3,\ 4\pi a^2h=\dfrac{9}{2}\pi a^3$

$\therefore h=\dfrac{9}{2}\pi a^3\div4\pi a^2=\dfrac{9}{2}\pi a^3\times\dfrac{1}{4\pi a^2}=\dfrac{9}{8}a$

따라서 높아진 물의 높이는 $\dfrac{9}{8}a$이다.

최고 수준 뛰어넘기

P 28–P 29

01 48	**02** ㉡, ㉣	**03** 1	**04** 9
05 1	**06** 14		

01 Action 1부터 100까지의 자연수 중 3의 배수, 9의 배수, 27의 배수, 81의 배수의 개수를 각각 구한다.

3^a과 자연수 b가 서로소이려면 자연수 b의 소인수 중에는 3이 없어야 한다.

즉 a는 $1\times2\times3\times\cdots\times100$을 소인수분해했을 때 소인수 3의 지수와 같다.

1부터 100까지의 자연수 중 3을 소인수로 가지는 수는 3의 배수이다. 이때 9의 배수는 3^2을 인수로, 27의 배수는 3^3을 인수로, 81의 배수는 3^4을 인수로 가지고 있으므로 a의 값은
(3의 배수의 개수)+(9의 배수의 개수)+(27의 배수의 개수)+(81의 배수의 개수)와 같다.
$\therefore a=33+11+3+1=48$

02 Action 약속에 따라 좌변과 우변을 각각 간단히 한 후 비교한다.

㉠ $L[2^x\times2^y]=L[2^{x+y}]=x+y$
$L[2^x]\times L[2^y]=xy$
$\therefore L[2^x\times2^y]\neq L[2^x]\times L[2^y]$
㉡ $x>y$이므로 $L[2^x\div2^y]=L[2^{x-y}]=x-y$
$L[2^x]-L[2^y]=x-y$
$\therefore L[2^x\div2^y]=L[2^x]-L[2^y]$
㉢ $L[(2^x)^y]=L[2^{xy}]=xy$
$(L[2^x])^y=x^y$
$\therefore L[(2^x)^y]\neq(L[2^x])^y$
㉣ $L[A]=3$이므로 $A=2^3=8$
따라서 옳은 것은 ㉡, ㉣이다.

03 Action $2^{x+1}-2^x=2^x$임을 이용한다.

자연수 x에 대하여
$2^{x+1}-2^x=2^x(2-1)=2^x$

$$\begin{aligned}\therefore\ &2^{2019}-(1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{2016}+2^{2017}+2^{2018})\\&=2^{2019}-2^{2018}-2^{2017}-\cdots-2^3-2^2-2-1\\&=(2^{2019}-2^{2018})-2^{2017}-\cdots-2^3-2^2-2-1\\&=2^{2018}-2^{2017}-\cdots-2^3-2^2-2-1\\&=(2^{2018}-2^{2017})-\cdots-2^3-2^2-2-1\\&=2^{2017}-2^{2016}-\cdots-2^3-2^2-2-1\\&\quad\vdots\\&=2-1\\&=1\end{aligned}$$

04 Action b^{1013}을 10으로 나눈 나머지는 b^{1013}의 일의 자리의 숫자와 같다.

$(ab)^{1013}$을 10으로 나눈 나머지가 3이므로 $(ab)^{1013}$의 일의 자리의 숫자는 3이다.
이때 $(ab)^{1013}=a^{1013}b^{1013}$이고 a^{1013}의 일의 자리의 숫자가 7이므로 b^{1013}의 일의 자리의 숫자는 9이어야 한다.
$n=1, 2, 3, 4, 5, \cdots$일 때
$b=2$이면 2^n의 일의 자리의 숫자는 2, 4, 8, 6, 2, ⋯
즉 2^{1013}의 일의 자리의 숫자가 9인 경우는 없다.
$b=3$이면 3^n의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1, 3, ⋯
이때 $1013=4\times253+1$이므로 3^{1013}의 일의 자리의 숫자는 3이다.
$b=4$이면 4^n의 일의 자리의 숫자는 4, 6, 4, 6, 4, ⋯
즉 4^{1013}의 일의 자리의 숫자가 9인 경우는 없다.
$b=5$이면 5^n의 일의 자리의 숫자는 5, 5, 5, 5, 5, ⋯
즉 5^{1013}의 일의 자리의 숫자가 9인 경우는 없다.
$b=6$이면 6^n의 일의 자리의 숫자는 6, 6, 6, 6, 6, ⋯
즉 6^{1013}의 일의 자리의 숫자가 9인 경우는 없다.
$b=7$이면 7^n의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1, 7, ⋯
이때 $1013=4\times253+1$이므로 7^{1013}의 일의 자리의 숫자는 7이다.
$b=8$이면 8^n의 일의 자리의 숫자는 8, 4, 2, 6, 8, ⋯
즉 8^{1013}의 일의 자리의 숫자가 9인 경우는 없다.
$b=9$이면 9^n의 일의 자리의 숫자는 9, 1, 9, 1, 9, ⋯
이때 $1013=2\times506+1$이므로 9^{1013}의 일의 자리의 숫자는 9이다.
따라서 $b=9$일 때, 조건을 만족시키고 같은 방법으로 $b=19$, 29, 39, ⋯일 때, 조건을 만족시킨다.
그러므로 b를 10으로 나눈 나머지는 9이다.

Lecture
두 자연수의 곱의 일의 자리의 숫자
두 자연수 a, b에 대하여 ab의 일의 자리의 숫자는
(a의 일의 자리의 숫자)×(b의 일의 자리의 숫자)의 일의 자리의 숫자와 같다.

05 Action 비례식을 이용하여 x, y, z를 한 문자의 식으로 나타낸다.

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{6}xyz^2\right)^2\div\left(-\frac{1}{2}x\right)^2yz^3\div\frac{x^2}{3}\\&=\frac{1}{36}x^2y^2z^4\div\frac{1}{4}x^2yz^3\div\frac{x^2}{3}\\&=\frac{1}{36}x^2y^2z^4\times\frac{4}{x^2yz^3}\times\frac{3}{x^2}\\&=\frac{yz}{3x^2}\qquad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $x:y:z=2:3:4$이므로
$x=2k$, $y=3k$, $z=4k$ (k는 자연수)라 하고 ㉠에 대입하면
$\frac{yz}{3x^2}=\frac{3k\times4k}{3\times(2k)^2}=\frac{12k^2}{12k^2}=1$

06 Action $A\div B=C$에서 $A=C\times B$임을 이용한다.

$\boxed{}\div12x^3y^5=\frac{3xy^7}{\boxed{}}$에서
$\boxed{}=\frac{3xy^7}{\boxed{}}\times12x^3y^5$
$(\boxed{})^2=3xy^7\times12x^3y^5=36x^4y^{12}$
즉 $(Ax^By^C)^2=A^2x^{2B}y^{2C}=36x^4y^{12}$이므로
$A^2=36$, $2B=4$, $2C=12$
따라서 $A=6(\because A>0)$, $B=2$, $C=6$이므로
$A+B+C=6+2+6=14$

2. 다항식의 계산

최고 수준 입문하기

P 31 – P 34

01 -2 **02** $\frac{7}{4}$ **03** -3 **04** 12
05 $4x-3y$ **06** $7x-6y+5$ **07** $-x^2-10x+7$
08 $7x^2-12x+11$ **09** $7x^2-5x$ **10** -22
11 $16x^2y^4+4x-\frac{1}{3}x^2y$ **12** $6a^3b^3-4ab^2$
13 7 **14** $8xy$ **15** $6x-4y$ **16** $9a+5b-3$
17 -18 **18** -11 **19** $8x-9y$ **20** $-8y+11$
21 $h=\frac{S}{2\pi r}-r$ **22** 4 **23** $\frac{8}{7}$
24 -3

01 Action 분배법칙을 이용하여 먼저 괄호를 푼다.

$(7a-2b-6)-3(-2a+3b-5)$
$=7a-2b-6+6a-9b+15$
$=13a-11b+9$
따라서 b의 계수는 -11, 상수항은 9이므로 구하는 합은
$-11+9=-2$

02 Action 주어진 식을 동류항끼리 모아서 간단히 한다.

$\left(-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{6}x+\frac{5}{4}y-\frac{3}{2}\right)$
$=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}x-\frac{5}{4}y+\frac{3}{2}$
$=-\frac{5}{6}x-\frac{3}{4}y+\frac{11}{6}$ …… 50%
따라서 $a=-\frac{5}{6}$, $b=-\frac{3}{4}$, $c=\frac{11}{6}$이므로 …… 30%
$a-b+c=-\frac{5}{6}-\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{11}{6}$
$=\frac{7}{4}$ …… 20%

03 Action 이차항은 이차항끼리, 일차항은 일차항끼리, 상수항은 상수항끼리 간단히 한다.

$(ax^2-4x-1)-(-2x^2+3x+4a)$
$=ax^2-4x-1+2x^2-3x-4a$
$=(a+2)x^2-7x-4a-1$
따라서 x^2의 계수는 $a+2$, 상수항은 $-4a-1$이므로
$a+2+(-4a-1)=10$, $-3a+1=10$
$-3a=9$ $\quad\therefore a=-3$

04 Action 좌변을 간단히 하여 우변과 비교한다.

(좌변)$=-2ax^2-6x+2+x^2+bx+5$
$=(-2a+1)x^2+(-6+b)x+7$
따라서 $-2a+1=3$, $-6+b=0$, $7=c$이므로
$a=-1$, $b=6$, $c=7$
$\therefore a+b+c=-1+6+7=12$

05 Action (소괄호) → {중괄호} → [대괄호]의 순서로 괄호를 푼다.

$7x-[6x-y+\{-x+3y-(2x-y)\}]$
$=7x-\{6x-y+(-x+3y-2x+y)\}$
$=7x-\{6x-y+(-3x+4y)\}$
$=7x-(3x+3y)$
$=7x-3x-3y$
$=4x-3y$

06 Action $A-\square=B$에서 $\square=A-B$임을 이용한다.

$5x-3y+4-A=-2x+3y-1$에서
$A=(5x-3y+4)-(-2x+3y-1)$
$=5x-3y+4+2x-3y+1$
$=7x-6y+5$

07 Action 두 다항식 A, B를 각각 구한 후 $A+B$를 계산한다.

$A+(-2x^2+6x)=-x^2+x+4$에서
$A=(-x^2+x+4)-(-2x^2+6x)$
$=-x^2+x+4+2x^2-6x$
$=x^2-5x+4$
$B=(x^2-5x+4)-(3x^2+1)$
$=x^2-5x+4-3x^2-1$
$=-2x^2-5x+3$
$\therefore A+B=(x^2-5x+4)+(-2x^2-5x+3)$
$=-x^2-10x+7$

08 Action 잘못 계산한 식에서 어떤 식을 구한 후 바르게 계산한다.

어떤 식을 A라 하면
$A+(-3x^2+5x-7)=x^2-2x-3$
$\therefore A=(x^2-2x-3)-(-3x^2+5x-7)$
$=x^2-2x-3+3x^2-5x+7$
$=4x^2-7x+4$ …… 60%
따라서 바르게 계산한 식은
$(4x^2-7x+4)-(-3x^2+5x-7)$
$=4x^2-7x+4+3x^2-5x+7$
$=7x^2-12x+11$ …… 40%

Lecture

바르게 계산한 식 구하기

(1) 어떤 식에 A를 더해야 하는데 잘못하여 빼었더니 B가 되었다.
➡ (어떤 식)$-A=B$, 즉 (어떤 식)$=B+A$
➡ (바르게 계산한 식)$=$(어떤 식)$+A$

(2) 어떤 식에서 A를 빼어야 하는데 잘못하여 더했더니 B가 되었다.
➡ (어떤 식)$+A=B$, 즉 (어떤 식)$=B-A$
➡ (바르게 계산한 식)$=$(어떤 식)$-A$

09 **Action** 괄호를 풀어 좌변을 간단히 한 후 $A+\square=B$에서 $\square=B-A$임을 이용한다.

(좌변)$=2x-4(3x+5x^2-7x+x^2-A)$
$=2x-4(6x^2-4x-A)$
$=2x-24x^2+16x+4A$
$=-24x^2+18x+4A$

따라서 $-24x^2+18x+4A=4x^2-2x$이므로
$4A=(4x^2-2x)-(-24x^2+18x)$
$=4x^2-2x+24x^2-18x$
$=28x^2-20x$
$\therefore A=\dfrac{28x^2-20x}{4}=7x^2-5x$

10 **Action** 분배법칙을 이용하여 단항식을 다항식의 각 항에 곱한다.

$2x(x+3y-5)=2x^2+6xy-10x$에서 x^2의 계수는 2이므로 $a=2$
$-4x(2x-6y+3)=-8x^2+24xy-12x$에서 xy의 계수는 24이므로 $b=24$
$\therefore a-b=2-24=-22$

11 **Action** 역수를 이용하여 나눗셈을 곱셈으로 고친 후 계산한다.

$\left(24x^3y^5+6x^2y-\dfrac{1}{2}x^3y^2\right)\div\dfrac{3}{2}xy$
$=\left(24x^3y^5+6x^2y-\dfrac{1}{2}x^3y^2\right)\times\dfrac{2}{3xy}$
$=16x^2y^4+4x-\dfrac{1}{3}x^2y$

12 **Action** 잘못 계산한 식을 이용하여 어떤 다항식을 구한다.

어떤 다항식을 A라 하면
$A\div(-2a^2b)=-3ab^2+\dfrac{2b}{a}$
$\therefore A=\left(-3ab^2+\dfrac{2b}{a}\right)\times(-2a^2b)$
$=6a^3b^3-4ab^2$

13 **Action** 분배법칙을 이용하여 주어진 식을 계산한다.

(주어진 식)$=-2x^2+4xy+6x-(5x^2-3xy+2x)$
$=-2x^2+4xy+6x-5x^2+3xy-2x$
$=-7x^2+7xy+4x$

따라서 xy의 계수는 7이다.

14 **Action** 사칙계산이 혼합된 식은 거듭제곱 ➡ 괄호 ➡ 곱셈, 나눗셈 ➡ 덧셈, 뺄셈의 순서대로 계산한다.

(주어진 식)$=(16x-8y)\times\dfrac{3}{4}y-(6x^2y-9xy^2)\times\dfrac{2}{3x}$
$=12xy-6y^2-4xy+6y^2$
$=8xy$

15 **Action** (직육면체의 부피)$=$(밑넓이)$\times$(높이)이다.

(직육면체의 부피)$=$(밑넓이)$\times$(높이)이므로
$3x\times y\times$(높이)$=18x^2y-12xy^2$
$\therefore$ (높이)$=\dfrac{18x^2y-12xy^2}{3xy}$
$=6x-4y$

16 **Action** 색칠한 부분의 넓이는 직사각형의 넓이에서 직각삼각형 3개의 넓이를 뺀 것과 같다.

(색칠한 부분의 넓이)
$=6a\times5b-\dfrac{1}{2}\times(6a-2)\times5b-\dfrac{1}{2}\times2\times3$
$-\dfrac{1}{2}\times6a\times(5b-3)$
$=30ab-15ab+5b-3-15ab+9a$
$=9a+5b-3$

17 **Action** 주어진 식을 먼저 간단히 한 후 x, y의 값을 각각 대입한다.

$(16x^2y^2-20xy^3)\div4x^2y^3=(16x^2y^2-20xy^3)\times\dfrac{1}{4x^2y^3}$
$=\dfrac{4}{y}-\dfrac{5}{x}$
$=4\div\left(-\dfrac{1}{3}\right)-5\div\dfrac{5}{6}$
$=4\times(-3)-5\times\dfrac{6}{5}$
$=-12-6$
$=-18$

18 Action $\frac{A+B}{C}=\frac{A}{C}+\frac{B}{C}$임을 이용하여 식을 계산한다.

$$\begin{aligned}\frac{xy^2-3x^2y}{xy}-\frac{xy^2-4x^2}{x}&=y-3x-(y^2-4x)\\&=y-3x-y^2+4x\\&=-y^2+y+x\\&=-(-3)^2+(-3)+1\\&=-11\end{aligned}$$

19 Action 주어진 식을 먼저 간단히 한 후 A, B를 대입한다.

$$\begin{aligned}&A-\{B-2(A-B)\}+B\\&=A-(B-2A+2B)+B\\&=A-(-2A+3B)+B\\&=A+2A-3B+B=3A-2B\\&=3(2x-y)-2(-x+3y)\\&=6x-3y+2x-6y=8x-9y\end{aligned}$$

20 Action x를 y의 식으로 나타낸 후 대입한다.

$2x+3y=x+y+2$에서 $x=-2y+2$

$$\begin{aligned}\therefore\ 3x-2y+5&=3(-2y+2)-2y+5\\&=-6y+6-2y+5\\&=-8y+11\end{aligned}$$

21 Action 회전체는 원기둥이다.

회전체는 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원기둥이므로

$S=2\pi r^2+2\pi rh$에서 $2\pi rh=S-2\pi r^2$

$\therefore\ h=\frac{S-2\pi r^2}{2\pi r}=\frac{S}{2\pi r}-r$

22 Action 비례식을 x, y에 대한 등식으로 변형한 후 주어진 식에 대입한다.

$(2x+3y):(x-y)=3:1$에서

$2x+3y=3(x-y)$

$2x+3y=3x-3y\qquad \therefore\ x=6y$

$\therefore\ \frac{3x+2y}{x-y}=\frac{18y+2y}{6y-y}=\frac{20y}{5y}=4$

23 Action $a+b$를 ab의 식으로 나타낸다.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=5$에서 $\frac{a+b}{ab}=5$

$\therefore\ a+b=5ab$ …… 40%

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{a+3ab+b}{2a-3ab+2b}&=\frac{(a+b)+3ab}{2(a+b)-3ab}\\&=\frac{5ab+3ab}{10ab-3ab}\\&=\frac{8ab}{7ab}=\frac{8}{7}\end{aligned}$$ …… 60%

24 Action $a+b+c=0$이므로 $b+c=-a$, $c+a=-b$, $a+b=-c$임을 이용한다.

$a+b+c=0$이므로

$b+c=-a$, $c+a=-b$, $a+b=-c$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}&=\frac{a}{-a}+\frac{b}{-b}+\frac{c}{-c}\\&=-1+(-1)+(-1)\\&=-3\end{aligned}$$

최고 수준 완성하기

P 35- P 37

01 $5x^2+4x-2$	**02** $5x^2-10xy-7y^2$	**03** $6x^2+xy-y^2$
04 $\frac{3}{2}x^2y^3-2xy+\frac{2}{y}$	**05** $5xy+2x+8y$	**06** 24
07 $-\frac{7}{4}bc+\frac{13}{20}ac$	**08** $19a^2-4a$	**09** -1
10 $6a+5b-5c$	**11** $\frac{13}{12}$	**12** 2

01 Action 괄호를 풀어 좌변을 먼저 간단히 한다.

$$\begin{aligned}(\text{좌변})&=6x^2-(x-4x^2-2x+\square)\\&=6x^2-(-4x^2-x+\square)\\&=6x^2+4x^2+x-\square\\&=10x^2+x-\square\end{aligned}$$

따라서 $10x^2+x-\square=5x^2-3x+2$이므로

$$\begin{aligned}\square&=(10x^2+x)-(5x^2-3x+2)\\&=10x^2+x-5x^2+3x-2\\&=5x^2+4x-2\end{aligned}$$

02 Action 다항식 A, B를 각각 구한 후 $2A-B$를 계산한다.

$B+(5x^2-y^2)+(7x^2-6xy-3y^2)=15x^2-3y^2$이므로

$$\begin{aligned}B&=(15x^2-3y^2)-(5x^2-y^2)-(7x^2-6xy-3y^2)\\&=15x^2-3y^2-5x^2+y^2-7x^2+6xy+3y^2\\&=3x^2+6xy+y^2\end{aligned}$$ …… 40%

$A+B+(8x^2-4xy-y^2)=15x^2-3y^2$이므로

$A+(3x^2+6xy+y^2)+(8x^2-4xy-y^2)=15x^2-3y^2$

$$\begin{aligned}\therefore\ A&=(15x^2-3y^2)-(3x^2+6xy+y^2)-(8x^2-4xy-y^2)\\&=15x^2-3y^2-3x^2-6xy-y^2-8x^2+4xy+y^2\\&=4x^2-2xy-3y^2\end{aligned}$$ …… 40%

$$\begin{aligned}\therefore\ 2A-B&=2(4x^2-2xy-3y^2)-(3x^2+6xy+y^2)\\&=8x^2-4xy-6y^2-3x^2-6xy-y^2\\&=5x^2-10xy-7y^2\end{aligned}$$ …… 20%

03 Action 약속에 따라 주어진 식을 간단히 한 후 계산한다.

$(3x, -y)※(y, 2x)$

$=3x\times y+3x\times 2x+y\times(-y)+(-y)\times 2x$

$=3xy+6x^2-y^2-2xy$

$=6x^2+xy-y^2$

04 Action a를 b로 나누면 몫이 q이고 나머지가 r이다. ➡ $a=b\times q+r$

$A=2x^2y\times(3xy^3-4y)+8x$

$\quad=6x^3y^4-8x^2y^2+8x$

$\therefore \dfrac{A}{4xy}=\dfrac{6x^3y^4-8x^2y^2+8x}{4xy}=\dfrac{3}{2}x^2y^3-2xy+\dfrac{2}{y}$

05 Action 약속에 따라 식을 나타낸 후 계산한다.

$\begin{vmatrix} 15x^2y-40xy & -\dfrac{1}{2y} \\ 4xy+16xy^2 & -\dfrac{1}{5x} \end{vmatrix}$

$=(15x^2y-40xy)\times\left(-\dfrac{1}{5x}\right)-\left(-\dfrac{1}{2y}\right)\times(4xy+16xy^2)$

$=-3xy+8y+2x+8xy$

$=5xy+2x+8y$

06 Action 먼저 A, B를 각각 계산한다.

$A=\dfrac{12xy^3-9xy^2-18x^3y}{-6xy}=-2y^2+\dfrac{3}{2}y+3x^2$

$B=\left(\dfrac{1}{6}x^3y-\dfrac{4}{3}xy\right)\times\dfrac{18}{xy}-2y^2+\dfrac{3}{2}y$

$\quad=3x^2-24-2y^2+\dfrac{3}{2}y$

$\therefore A-B$

$\quad=\left(-2y^2+\dfrac{3}{2}y+3x^2\right)-\left(3x^2-24-2y^2+\dfrac{3}{2}y\right)$

$\quad=-2y^2+\dfrac{3}{2}y+3x^2-3x^2+24+2y^2-\dfrac{3}{2}y$

$\quad=24$

07 Action 순환소수를 분수로 나타낸 후 계산한다.

$0.\dot{3}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$, $0.1\dot{5}=\dfrac{15-1}{90}=\dfrac{7}{45}$, $0.\dot{4}=\dfrac{4}{9}$이므로

(주어진 식)$=\left(\dfrac{1}{3}ab^2c-\dfrac{7}{45}a^2bc\right)\div\dfrac{4}{9}ab-\dfrac{5}{2}bc+ac$

$\qquad=\left(\dfrac{1}{3}ab^2c-\dfrac{7}{45}a^2bc\right)\times\dfrac{9}{4ab}-\dfrac{5}{2}bc+ac$

$\qquad=\dfrac{3}{4}bc-\dfrac{7}{20}ac-\dfrac{5}{2}bc+ac$

$\qquad=-\dfrac{7}{4}bc+\dfrac{13}{20}ac$

08 Action (정원의 넓이)=(땅의 넓이)−(건물의 넓이)−(통로의 넓이)임을 이용한다.

(정원의 넓이)

=(땅의 넓이)−(건물의 넓이)−(통로의 넓이)

$=(6a+1)\times 5a-4a(2a+3)-a\{5a-(2a+3)\}$

$=30a^2+5a-8a^2-12a-3a^2+3a$

$=19a^2-4a$

09 Action 주어진 식을 간단히 한 후 a, b, c의 값을 각각 대입한다.

$4\left(\dfrac{1}{3}a^2bc-\dfrac{1}{6}ab^2+\dfrac{1}{12}bc\right)\div\dfrac{1}{3}ab$

$=\left(\dfrac{4}{3}a^2bc-\dfrac{2}{3}ab^2+\dfrac{1}{3}bc\right)\times\dfrac{3}{ab}$

$=4ac-2b+\dfrac{c}{a}$

$=4\times1\times(-7)-2\times(-17)+\dfrac{-7}{1}$

$=-28+34-7$

$=-1$

10 Action 주어진 식을 먼저 간단히 한 후 x, y를 각각 대입한다.

$5x+2\{4y-2(x+3y)\}=5x+2(4y-2x-6y)$

$\qquad=5x+2(-2x-2y)$

$\qquad=5x-4x-4y$

$\qquad=x-4y$

$\qquad=(2a+b-c)-4(-a-b+c)$

$\qquad=2a+b-c+4a+4b-4c$

$\qquad=6a+5b-5c$

11 Action $\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{3}{2}$을 이용하여 x를 y의 식으로 나타낸다.

$\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{3}{2}$에서 $2(x+y)=3(x-y)$

$2x+2y=3x-3y \quad \therefore x=5y$

$\therefore \dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}=\dfrac{5y}{5y+y}+\dfrac{y}{5y-y}$

$\qquad=\dfrac{5y}{6y}+\dfrac{y}{4y}$

$\qquad=\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{12}$

12 Action a와 c를 b의 식으로 각각 나타낸다.

$2a+\dfrac{1}{b}=1$에서 $2a=1-\dfrac{1}{b}$

$2a=\dfrac{b-1}{b} \qquad \therefore a=\dfrac{b-1}{2b}$ …… 30%

$b+\frac{1}{c}=1$에서 $\frac{1}{c}=1-b$

$\therefore c=\frac{1}{1-b}=\frac{-1}{b-1}$ …… 30%

$\therefore \frac{1}{a}+2c=\frac{2b}{b-1}+2\times\left(\frac{-1}{b-1}\right)$

$=\frac{2b-2}{b-1}=\frac{2(b-1)}{b-1}=2$ …… 40%

최고 수준 뛰어넘기

P 38–P 39

01 $6y$ **02** 41 **03** 3 : 2 **04** -21
05 9 **06** 6

01 Action $(-1)^{2n-1}$, $(-1)^{2n}$, $(-1)^{2n+1}$의 값을 먼저 구한다.

n이 자연수이므로 $2n-1$, $2n+1$은 홀수이고, $2n$은 짝수이다.
즉 $(-1)^{2n-1}=-1$, $(-1)^{2n}=1$, $(-1)^{2n+1}=-1$이므로
(주어진 식)$=-(3x-y)+(x+4y)+(2x+y)$
$=-3x+y+x+4y+2x+y$
$=6y$

02 Action 입체도형의 겉넓이는 12개의 블록의 겉넓이에서 겹쳐진 부분의 넓이를 뺀 것과 같다.

직육면체 모양의 블록 1개의 겉넓이는 $2x^2+4xy$이므로 입체도형을 만들기 위해 사용한 블록 12개의 겉넓이는
$12(2x^2+4xy)=24x^2+48xy$
이때 겹쳐진 부분은 넓이가 x^2인 부분이 바닥을 포함하여 11군데, 넓이가 xy인 부분이 20군데이므로 입체도형의 겉넓이는 $(24x^2+48xy)-11x^2-20xy=13x^2+28xy$
따라서 $A=13$, $B=28$이므로
$A+B=13+28=41$

03 Action a명의 평균이 p점이면 총점은 ap점이다.

2학년 전체 학생의 평균을 a점이라 하면 남학생의 평균은 $(a-2)$점, 여학생의 평균은 $(a-2)+5=a+3$(점)
이때 남학생 수와 여학생 수를 각각 x명, y명이라 하면 2학년 전체 학생의 총점은 $\{(a-2)x+(a+3)y\}$점이고, 전체 학생 수는 $(x+y)$명이므로 전체 평균은
$\frac{(a-2)x+(a+3)y}{x+y}=a$
$(a-2)x+(a+3)y=a(x+y)$
$ax-2x+ay+3y=ax+ay$
$2x=3y$ $\therefore x=\frac{3}{2}y$
따라서 남학생 수와 여학생 수의 비는
$x:y=\frac{3}{2}y:y=3:2$

04 Action 지수법칙을 이용하여 먼저 x, y의 값을 각각 구한다.

$8^{x+3}=\frac{16^5}{2^y}=2^{12}$에서 $(2^3)^{x+3}=\frac{(2^4)^5}{2^y}=2^{12}$
$\therefore 2^{3x+9}=2^{20-y}=2^{12}$
$2^{3x+9}=2^{12}$에서 $3x+9=12$ $\therefore x=1$
$2^{20-y}=2^{12}$에서 $20-y=12$ $\therefore y=8$
$\therefore \frac{15x^2y-9xy^2}{3xy}-\frac{16x^2-8x}{4x}=5x-3y-(4x-2)$
$=5x-3y-4x+2$
$=x-3y+2$
$=1-3\times8+2$
$=-21$

05 Action a와 b를 각각 c의 식으로 나타낸다.

$a-b+c=0$에서 $b=a+c$
$a-2b-4c=0$에 $b=a+c$를 대입하면
$a-2(a+c)-4c=0$, $a-2a-2c-4c=0$
$-a-6c=0$ $\therefore a=-6c$
$a-b+c=0$에 $a=-6c$를 대입하면
$-6c-b+c=0$, $-5c-b=0$ $\therefore b=-5c$
$\therefore \frac{4a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{11c}{a+b}$
$=\frac{4\times(-6c)}{-5c+c}+\frac{4\times(-5c)}{c+(-6c)}+\frac{11c}{-6c+(-5c)}$
$=\frac{-24c}{-4c}+\frac{-20c}{-5c}+\frac{11c}{-11c}$
$=6+4-1=9$

06 Action $x\neq0$이므로 $x^2-6x+6=0$을 x로 나누어 $x+\frac{6}{x}$의 값을 구한다.

$x^2-6x+6=0$에서 $x^2=6x-6$
이때 $x\neq0$이므로 $x^2-6x+6=0$의 양변을 x로 나누면
$x-6+\frac{6}{x}=0$ $\therefore x+\frac{6}{x}=6$
$\therefore \frac{x^2}{x-\frac{6}{x+\frac{6}{x}}}=\frac{6x-6}{x-\frac{6}{6}}=\frac{6(x-1)}{x-1}=6$

Lecture

$x \neq 0$인 이유

$x^2-6x+6=0$에서 $x=0$이면

$0^2-6\times0+6=0$, $6=0$이므로 등식이 성립하지 않는다.

따라서 $x\neq0$이다.

교과서 속 창의 사고력

P 40–P 42

01 (1) 2^{20}바이트 (2) 4초	**02** $6^{22}<2^{66}<5^{33}<3^{55}<4^{44}$
03 4860	**04** 800개
05 36	**06** $y=\dfrac{(a-10000)x}{a}$

01 **Action** (자료를 모두 내려받는 데 걸리는 시간)
$$=\frac{(\text{자료의 총 용량})}{(1\text{초당 내려받는 자료의 용량})}$$

(1) $(1\text{메가바이트})=(2^{10}\text{킬로바이트})$
$$=(2^{10}\times2^{10}\text{바이트})$$
$$=(2^{20}\text{바이트})$$

(2) $(72\text{메가바이트})=(72\times2^{20}\text{바이트})$이므로
$$\frac{72\times2^{20}}{9\times2^{21}}=\frac{8}{2}=4$$
따라서 모두 내려받는 데 걸리는 시간은 4초이다.

02 **Action** 주어진 수의 지수를 모두 같게 만든다.

주어진 수의 지수 66, 55, 44, 33, 22의 최대공약수가 11이므로 각각의 수를 지수가 11인 수로 나타내면

$2^{66}=(2^6)^{11}=64^{11}$, $3^{55}=(3^5)^{11}=243^{11}$,

$4^{44}=(4^4)^{11}=256^{11}$, $5^{33}=(5^3)^{11}=125^{11}$, $6^{22}=(6^2)^{11}=36^{11}$

각 수의 지수가 같은 경우 밑이 큰 수가 더 크므로

$36^{11}<64^{11}<125^{11}<243^{11}<256^{11}$

$\therefore 6^{22}<2^{66}<5^{33}<3^{55}<4^{44}$

Lecture

거듭제곱의 꼴로 나타낸 두 수의 크기 비교

a, b가 1보다 큰 자연수이고, m, n이 자연수일 때,

(1) $m<n$이면 $a^m<a^n$

(2) $a<b$이면 $a^m<b^m$

03 **Action** $(2, k)=2$, $(3, k)=5$의 의미를 파악한다.

k는 2^2으로 나누어떨어지고 2^3으로 나누어떨어지지 않는다.

또, k는 3^5으로 나누어떨어지고 3^6으로 나누어떨어지지 않는다.

따라서 자연수 k를 소인수분해하면

$k=2^2\times3^5\times m$ (단, m은 2, 3과 서로소)의 꼴이다.

이때 $2000<k<5000$이므로

$m=5$일 때, $k=2^2\times3^5\times5=4860$으로 조건을 만족시킨다.

04 **Action** $1\text{ m}=100\text{ cm}$임을 이용하여 단위를 통일시킨다.

쇠막대 한 개의 부피는 $ab\times bc\times ca=a^2b^2c^2\ (\text{cm}^3)$

$$\left(\frac{2a}{5}\right)^2b\ (\text{m})=\frac{4a^2b}{25}\times100\ (\text{cm})=16a^2b\ (\text{cm})$$
$$\frac{c}{10}\ (\text{m})=\frac{c}{10}\times100\ (\text{cm})=10c\ (\text{cm})$$
$$\frac{bc}{20}\ (\text{m})=\frac{bc}{20}\times100\ (\text{cm})=5bc\ (\text{cm})$$

즉 만들려고 하는 직육면체 모양의 부피는

$16a^2b\times10c\times5bc=800a^2b^2c^2\ (\text{cm}^3)$

따라서 필요한 쇠막대는 $\dfrac{800a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2}=800$(개)이다.

05 **Action** 첫 번째 단의 정육면체에 대응하는 수를 각각 a, b, c, d, e, f로 놓는다.

첫 번째 단의 6개의 정육면체에 대응하는 수를 각각 a, b, c, d, e, f라 하면

[첫 번째 단]	[두 번째 단]
a $b\quad c$ $d\quad e\quad f$	$(a+b+c)$ $(b+d+e)\quad(c+e+f)$

이므로 세 번째 단의 정육면체에 대응하는 수는

$(a+b+c)+(b+d+e)+(c+e+f)$

$=a+2b+2c+d+2e+f$

$=a+d+f+2(b+c+e)$ …… ㉠

이때 ㉠이 최대가 되려면 a, d, f는 1, 2, 3에 대응시키고 b, c, e는 4, 5, 6에 대응시켜야 한다.

따라서 구하는 최댓값은

$1+2+3+2\times(4+5+6)=36$

06 **Action** 1달러가 x원이면 1원은 $\dfrac{1}{x}$달러이다.

화요일에는 1달러가 x원이었으므로 1원은 $\dfrac{1}{x}$달러이다.

따라서 a원을 달러로 바꾸면 $a\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{a}{x}$(달러)

또, 목요일에는 1달러가 y원이었으므로 $\dfrac{a}{x}$달러를 우리나라 돈으로 바꾸면 $\dfrac{a}{x}\times y=\dfrac{ay}{x}$(원)

따라서 $\dfrac{ay}{x}=a-10000$이므로

$ay=(a-10000)x \qquad \therefore y=\dfrac{(a-10000)x}{a}$

Ⅲ. 일차부등식

1. 일차부등식

최고 수준 입문하기 P 45 – P 48

01 3개	**02** ④	**03** ③	**04** ④
05 $\frac{ad}{c^2}<\frac{bd}{c^2}$	**06** $-1<A\le11$		**07** 6
08 10	**09** ②, ④	**10** 10	**11** $x<4$
12 5개	**13** $x>-12$	**14** 5	**15** ⑤
16 $x>-3$	**17** -1	**18** -13	**19** -7
20 -4	**21** 7	**22** $\frac{2}{3}<a\le1$	**23** 1
24 $a>-\frac{1}{2}$			

01 Action 부등호를 사용하여 수 또는 식의 대소 관계를 나타낸 식을 찾는다.

㉠ 단항식 ㉡ 등식 ㉥ 다항식
따라서 부등식인 것은 ㉢, ㉣, ㉤의 3개이다.

02 Action 방정식의 해를 구하여 각각의 부등식에 대입해 본다.

$3x-2=1$에서 $3x=3$ $\quad\therefore x=1$
① $5-2\times1>4$ (거짓)
② $3\times1-6>1$ (거짓)
③ $12+5\times1\le7$ (거짓)
④ $0.4\times1+2\ge-3$ (참)
⑤ $\frac{7\times1-6}{4}>1$ (거짓)
따라서 $x=1$을 해로 갖는 것은 ④이다.

03 Action 주어진 부등식을 이용하여 a와 b의 대소 관계를 먼저 구한다.

$-3a-4<-3b-4$에서 $-3a<-3b$ $\quad\therefore a>b$
① $-2a<-2b$
② $6a>6b$
③ $5a>5b$이므로 $5a-2>5b-2$
④ $\frac{a}{4}>\frac{b}{4}$
⑤ $-\frac{1}{2}a<-\frac{1}{2}b$이므로 $3-\frac{1}{2}a<3-\frac{1}{2}b$
따라서 옳은 것은 ③이다.

04 Action 부등식의 성질을 이용하여 식을 변형한다.

① $a\ge b$에서 $5a\ge5b$ $\quad\therefore 5a+4\ge5b+4$
② $a\le b$에서 $-\frac{a}{3}\ge-\frac{b}{3}$ $\quad\therefore -\frac{a}{3}+1\ge-\frac{b}{3}+1$
③ $-1+a<-1+b$에서 $a<b$
④ $2a<b$에서 $2a-3<b-3$
$\quad\therefore -2(2a-3)>-2(b-3)$
⑤ $\frac{2a-1}{5}>\frac{-3b-1}{5}$에서 $2a-1>-3b-1$
$2a>-3b$ $\quad\therefore -2a<3b$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

05 Action 0이 아닌 수의 제곱은 항상 양수이다.

$a>b$, $d<0$이므로 $ad<bd$
이때 $c^2>0$이므로 $\frac{ad}{c^2}<\frac{bd}{c^2}$

06 Action x의 값의 범위가 주어졌을 때, 각 변에 p를 곱한 후 q를 더하여 $px+q$의 값의 범위를 구한다.

$1<x\le5$에서 $3<3x\le15$
$-1<3x-4\le11$ $\quad\therefore -1<A\le11$

07 Action $px+q$의 값의 범위가 주어졌을 때, 각 변에서 q를 뺀 후 p로 나누어 x의 값의 범위를 구한다.

$-3\le-2a+5<1$에서 $-8\le-2a<-4$
$\therefore 2<a\le4$ …… 60%
따라서 $m=2$, $n=4$이므로
$m+n=2+4=6$ …… 40%

08 Action 먼저 x의 값의 범위를 구한다.

$-5\le3(x-1)+1\le10$에서 $-5\le3x-2\le10$
$-3\le3x\le12$ $\quad\therefore -1\le x\le4$
이때 $-8\le-2x\le2$이므로 $-7\le-2x+1\le3$
따라서 $-2x+1$의 최댓값은 3이므로 $M=3$, 최솟값은 -7이므로 $m=-7$
$\therefore M-m=3-(-7)=10$

09 Action 우변에 있는 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한다.

① 분모에 x가 있으므로 일차부등식이 아니다.
② $-2x+4\ge0$이므로 일차부등식이다.
③ $-11>0$이므로 일차부등식이 아니다.
④ $-x-5<0$이므로 일차부등식이다.
⑤ $x^2-2x-2\le0$이므로 일차부등식이 아니다.
따라서 일차부등식인 것은 ②, ④이다.

10 Action 부등식의 해를 구하여 부등식을 만족시키는 자연수 x의 값을 구한다.

$x-5\le-4x+15$에서 $5x\le20$ $\quad\therefore x\le4$
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x의 값은 1, 2, 3, 4이므로 그 합은 $1+2+3+4=10$

11 Action 주어진 방정식의 해를 구한 후 부등식을 푼다.

$-2(x+3)+1=5$에서 $-2x-6+1=5$

$-2x=10 \quad \therefore x=-5$

따라서 $a=-5$를 주어진 부등식에 대입하면

$x+2>4x-10$, $-3x>-12 \quad \therefore x<4$

12 Action 먼저 분배법칙을 이용하여 괄호를 푼다.

$5x-11\le 3(x-2)+5$에서 $5x-11\le 3x-1$

$2x\le 10 \quad \therefore x\le 5$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

13 Action 부등식의 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 계수를 정수로 바꾼다.

$\frac{x}{3}-\frac{2x-1}{5}<1$의 양변에 분모의 최소공배수 15를 곱하면

$5x-3(2x-1)<15$, $5x-6x+3<15$

$-x<12 \quad \therefore x>-12$

14 Action 부등식의 양변에 10의 거듭제곱을 곱하여 계수를 정수로 바꾼다.

$0.2(3x+4)\ge 1.15+0.53x$의 양변에 100을 곱하면

$20(3x+4)\ge 115+53x$ …… 40%

$60x+80\ge 115+53x$, $7x\ge 35$

$\therefore x\ge 5$ …… 40%

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값 중 가장 작은 정수는 5이다. …… 20%

15 Action 각각의 부등식의 해를 구해 본다.

① $3(-x-1)<x+9$에서 $-3x-3<x+9$

$-4x<12 \quad \therefore x>-3$

② $-0.2x<0.1(x+9)$의 양변에 10을 곱하면

$-2x<x+9$, $-3x<9 \quad \therefore x>-3$

③ $\frac{1-x}{4}<1$의 양변에 4를 곱하면

$1-x<4$, $-x<3 \quad \therefore x>-3$

④ $\frac{1}{3}x+1<\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$의 양변에 분모의 최소공배수 6을 곱하면

$2x+6<3x+9$, $-x<3 \quad \therefore x>-3$

⑤ $0.2x+1<\frac{1}{5}(2x+1)$의 양변에 10을 곱하면

$2x+10<2(2x+1)$, $2x+10<4x+2$

$-2x<-8 \quad \therefore x>4$

따라서 해가 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

16 Action $a>2$에서 $a-2>0$임을 이용한다.

$ax+3a>2x+6$에서 $ax-2x>-3a+6$

$(a-2)x>-3(a-2)$

이때 $a>2$에서 $a-2>0$이므로

$x>\frac{-3(a-2)}{a-2} \quad \therefore x>-3$

17 Action 주어진 부등식을 $x<$(수), $x>$(수), $x\le$(수), $x\ge$(수) 중 어느 하나의 꼴로 나타낸 후 부등식 해와 비교한다.

$ax<3x-12$에서 $(a-3)x<-12$

이때 부등식의 해가 $x>3$이므로 $a-3<0$

따라서 $x>\frac{-12}{a-3}$이므로 $\frac{-12}{a-3}=3$

$-12=3(a-3)$, $-3a=3 \quad \therefore a=-1$

Lecture

부등식의 해가 주어진 경우

일차부등식을 간단히 한 후 부등식의 부등호의 방향과 해의 부등호의 방향이 같으면 x의 계수는 양수이고, 다르면 x의 계수는 음수이다.

18 Action 각 부등식을 풀어 부등식의 해가 같음을 이용하여 a의 값을 구한다.

$\frac{3}{4}x-4>-1$의 양변에 4를 곱하면

$3x-16>-4$, $3x>12 \quad \therefore x>4$

$7-3x<2x+a$에서 $-5x<a-7$

$\therefore x>\frac{7-a}{5}$

이때 두 부등식의 해가 서로 같으므로

$\frac{7-a}{5}=4$, $7-a=20 \quad \therefore a=-13$

19 Action 수직선 위에 나타낸 부등식의 해를 부등호를 사용하여 나타내어 본다.

$ax+3\ge 4(x-0.5a)$에서 $ax+3\ge 4x-2a$

$(a-4)x\ge -2a-3$

이때 부등식의 해가 $x\le -1$이므로 $a-4<0$

따라서 $x\le\frac{-2a-3}{a-4}$이므로 $\frac{-2a-3}{a-4}=-1$

$-2a-3=-a+4 \quad \therefore a=-7$

20 Action 부등식 $x\le k$를 만족시키는 가장 큰 수는 k이다.

$4x-(x+2)\ge 5x+a$에서 $4x-x-2\ge 5x+a$

$-2x\ge a+2 \quad \therefore x\le\frac{-a-2}{2}$

이때 부등식의 해 중 가장 큰 수가 1이므로

$\frac{-a-2}{2}=1$, $-a-2=2 \quad \therefore a=-4$

21 Action 각 부등식을 풀어 주어진 조건을 이용하여 a, b의 값을 각각 구한다.

$\frac{2x-1}{4}-\frac{x-2}{3}\le\frac{a}{4}$의 양변에 분모의 최소공배수 12를 곱하면

$3(2x-1)-4(x-2)\le 3a$, $6x-3-4x+8\le 3a$

$2x\le 3a-5$ $\quad\therefore x\le\frac{3a-5}{2}$

이때 부등식을 만족시키는 x의 값 중 최댓값이 2이므로

$\frac{3a-5}{2}=2$, $3a-5=4$

$3a=9$ $\quad\therefore a=3$

또, $-3x+2(x-1)\le b-1$에서 $-3x+2x-2\le b-1$

$-x\le b+1$ $\quad\therefore x\ge -b-1$

이때 부등식을 만족시키는 x의 값 중 최솟값이 -3이므로

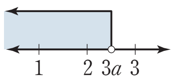
$-b-1=-3$, $-b=-2$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore a+2b=3+2\times 2=7$

22 Action 부등식을 만족시키는 자연수 x가 2개가 되도록 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 본다.

$3x<x+6a$에서 $2x<6a$ $\quad\therefore x<3a$

이 부등식을 만족시키는 자연수 x가 2개가 되도록 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



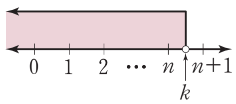
따라서 $2<3a\le 3$이므로 $\frac{2}{3}<a\le 1$

Lecture

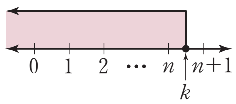
부등식의 자연수인 해의 개수가 주어진 경우

부등식의 자연수인 해의 개수가 n개일 때

(1) 부등식의 해가 $x<k$의 꼴이면 $n<k\le n+1$



(2) 부등식의 해가 $x\le k$의 꼴이면 $n\le k<n+1$



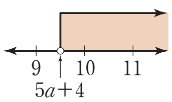
23 Action 주어진 부등식을 만족시키는 가장 작은 자연수가 10이 되도록 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 본다.

$-\frac{x+a}{4}-1>a-\frac{1}{2}x$의 양변에 분모의 최소공배수 4를 곱하면

$-(x+a)-4>4a-2x$, $-x-a-4>4a-2x$

$\therefore x>5a+4$

이 부등식을 만족시키는 x의 값 중 가장 작은 자연수가 10이 되도록 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉 $9\le 5a+4<10$이므로

$5\le 5a<6$ $\quad\therefore 1\le a<\frac{6}{5}$

따라서 구하는 정수 a의 값은 1이다.

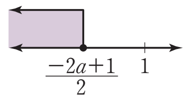
Lecture

부등식 $x>k$를 만족시키는 가장 작은 자연수가 10이 되려면 k는 9와 10 사이에 있어야 한다.
이때 $k=9$이면 $x>9$를 만족시키는 가장 작은 자연수가 10이므로 조건을 만족시키고, $k=10$이면 $x>10$을 만족시키는 가장 작은 자연수는 11이므로 조건을 만족시키지 않는다.

24 Action 부등식을 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않도록 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 본다.

$x-2a\ge 3x-1$에서 $-2x\ge 2a-1$ $\quad\therefore x\le\frac{-2a+1}{2}$

이 부등식을 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않도록 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $\frac{-2a+1}{2}<1$이므로 $-2a+1<2$

$-2a<1$ $\quad\therefore a>-\frac{1}{2}$

최고 수준 완성하기

P 49– P 51

01 ③, ④	**02** ㉡, ㉤	**03** -6	**04** 1
05 3개	**06** -4	**07** 6	**08** 24
09 3	**10** $a=3$, $b=1$	**11** -6	**12** $a\ge -\frac{1}{3}$

01 Action 수직선을 이용하여 네 수 a, b, c, d의 대소 관계를 파악한다.

① $a<b$이므로 $a+c<b+c$

② $b>d$이므로 $b-a>d-a$

③ $d<a$, $c>0$이므로 $cd<ac$

④ $b<c$, $d<0$이므로 $bd>cd$

⑤ $a<c$, $b>0$이므로 $\frac{a}{b}<\frac{c}{b}$

따라서 옳지 않은 것은 ③, ④이다.

02 Action 부등식의 성질을 이용하여 식을 변형한다.

㉠ $a<b$이므로 $a-b<0$

㉡ $a<b$, $c<0$이므로 $ac>bc$

㉢ $a<b$, $a<0$이므로 $a^2>ab$

㉣ $a<b$, $b>0$이므로 $\frac{a}{b}<1$

㉤ $a=-2$, $b=3$일 때, $a<0<b$이지만 $a^2<b^2$이다.

㉥ $a<b$, $c<0$이므로 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

따라서 옳지 않은 것은 ㉡, ㉤이다.

03

Action $a\le x\le b$, $c\le y\le d$일 때, $a-d\le x-y\le b-c$임을 이용한다.

$2\le x\le 4$에서 $6\le 3x\le 12$

$1\le y\le 5$에서 $4\le 4y\le 20$

$\therefore\ -14\le 3x-4y\le 8$

따라서 $3x-4y$의 값 중 가장 큰 정수는 8, 가장 작은 정수는 -14이므로 그 합은 $8+(-14)=-6$

> **Lecture**
>
> **$a\le x\le b$, $c\le y\le d$일 때, $x-y$의 값의 범위**
>
> $a\le x\le b$, $c\le y\le d$일 때,
> ($x-y$의 최솟값)=(x의 최솟값)$-$(y의 최댓값),
> ($x-y$의 최댓값)=(x의 최댓값)$-$(y의 최솟값)
> 이므로 $x-y$의 값의 범위는 오른쪽과 같이 구한다.
>
> $$\begin{array}{rccccc} & a & \le & x & \le & b \\ -) & c & \le & y & \le & d \\ \hline & a-d & \le & x-y & \le & b-c \end{array}$$

04

Action $x+2y=1$을 $x=$(y에 대한 식)의 꼴로 나타낸 후 부등식에 대입하여 y의 값의 범위를 구한다.

$x+2y=1$에서 $x=1-2y$

$x=1-2y$를 $1\le 2x-3<7$에 대입하면

$1\le 2(1-2y)-3<7$, $1\le -4y-1<7$

$2\le -4y<8 \qquad \therefore\ -2<y\le -\frac{1}{2}$

따라서 $a=-2$, $b=-\frac{1}{2}$이므로

$ab=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

05

Action $<1.74>$, $<-2.23>$의 값을 각각 구한다.

$<1.74>=1$, $<-2.23>=-3$이므로

$1-(-3)\times x\le 10$, $3x\le 9 \qquad \therefore\ x\le 3$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3의 3개이다.

06

Action 약속에 따라 좌변과 우변을 각각 정리한다.

$4\circ(x-3)=2\times 4-(x-3)-1=-x+10$

$(-2x+1)\circ 2=2(-2x+1)-2-1=-4x-1$

즉 $4\circ(x-3)<(-2x+1)\circ 2$에서

$-x+10<-4x-1$, $3x<-11 \qquad \therefore\ x<-\frac{11}{3}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값 중 가장 큰 정수는 -4이다.

07

Action 부등식을 $x<$(수), $x>$(수), $x\le$(수), $x\ge$(수) 중 어느 하나의 꼴로 나타낸 후 주어진 해와 비교한다.

$3(x+a)-2<x-5$에서 $3x+3a-2<x-5$

$2x<-3a-3 \qquad \therefore\ x<\frac{-3a-3}{2}$ …… 40%

이때 부등식의 해가 $x<b$이므로

$\frac{-3a-3}{2}=b$ …… 20%

$-3a-3=2b$, $-3a-2b=3$

$\therefore\ -6a-4b=2(-3a-2b)=2\times 3=6$ …… 40%

08

Action 주어진 부등식의 해를 구한 후 $\frac{x-4}{2}$의 값의 범위를 구한다.

$3x-1<31$에서 $3x<32 \qquad \therefore\ x<\frac{32}{3}$

이때 $\frac{x-4}{2}$의 값의 범위를 구하면

$x-4<\frac{20}{3} \qquad \therefore\ \frac{x-4}{2}<\frac{10}{3}$

따라서 $\frac{x-4}{2}$가 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3이다.

(i) $\frac{x-4}{2}=1$일 때, $x-4=2 \qquad \therefore\ x=6$

(ii) $\frac{x-4}{2}=2$일 때, $x-4=4 \qquad \therefore\ x=8$

(iii) $\frac{x-4}{2}=3$일 때, $x-4=6 \qquad \therefore\ x=10$

(i)~(iii)에 의하여 모든 x의 값은 6, 8, 10이므로 그 합은 $6+8+10=24$

09

Action 먼저 주어진 방정식의 해를 구한다.

$2x-\frac{1}{2}(x+5a)=2-x$에서 $4x-x-5a=4-2x$

$5x=5a+4 \qquad \therefore\ x=\frac{5a+4}{5}$

주어진 방정식의 해가 4보다 크지 않으므로

$\frac{5a+4}{5}\le 4$에서 $5a+4\le 20$

$5a\le 16 \qquad \therefore\ a\le\frac{16}{5}$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a의 최댓값은 3이다.

10

Action 먼저 미지수가 없는 부등식의 해를 구한다.

$5x-8\ge 2(x-1)-3$에서 $5x-8\ge 2x-2-3$

$3x\ge 3 \qquad \therefore\ x\ge 1$ …… 30%

$bx-7\le a(x-3)$에서 $bx-7\le ax-3a$

$\therefore\ (b-a)x\le 7-3a$ …… 20%

이때 두 부등식의 해가 서로 같으므로 $b-a<0$, 즉 $a>b$이다.

따라서 $x\geq\frac{7-3a}{b-a}$이므로 $\frac{7-3a}{b-a}=1$

$7-3a=b-a \qquad \therefore 2a+b=7$ …… ㉠ …… 30%

이때 a, b는 자연수이므로 ㉠을 만족시키는 a, b를 순서쌍 (a, b)로 나타내면 $(1, 5)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$

따라서 $a>b$인 것은 $(3, 1)$이므로 $a=3$, $b=1$ …… 20%

11 Action 주어진 부등식을 $x<(수)$, $x>(수)$, $x\leq(수)$, $x\geq(수)$ 중 어느 하나의 꼴로 나타낸 후 부등식의 해와 비교한다.

$(a+2b)x+a-4b<0$에서 $(a+2b)x<-a+4b$

이때 부등식의 해가 $x>\frac{7}{2}$이므로 $a+2b<0$

따라서 $x>\frac{-a+4b}{a+2b}$이므로 $\frac{-a+4b}{a+2b}=\frac{7}{2}$

$2(-a+4b)=7(a+2b)$, $-2a+8b=7a+14b$

$-9a=6b \qquad \therefore a=-\frac{2}{3}b$

$a=-\frac{2}{3}b$를 $a-b=5$에 대입하면

$-\frac{2}{3}b-b=5$, $-\frac{5}{3}b=5 \qquad \therefore b=-3$

$b=-3$을 $a=-\frac{2}{3}b$에 대입하면 $a=-\frac{2}{3}\times(-3)=2$

$\therefore ab=2\times(-3)=-6$

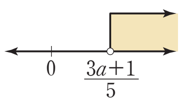
12 Action 주어진 부등식을 만족시키는 음수 x가 존재하지 않도록 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 본다.

$0.1-0.2x<0.3(x-a)$의 양변에 10을 곱하면

$1-2x<3(x-a)$, $1-2x<3x-3a$

$-5x<-3a-1 \qquad \therefore x>\frac{3a+1}{5}$

이 부등식을 만족시키는 음수 x가 존재하지 않도록 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $\frac{3a+1}{5}\geq0$이므로 $3a+1\geq0$

$3a\geq-1 \qquad \therefore a\geq-\frac{1}{3}$

최고 수준 뛰어넘기 P 52

01 12개 **02** $x\leq-6$ **03** $-\frac{17}{4}\leq k<-3$

01 Action 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 값은 정수이다.

$2<\left[\frac{x+3}{4}\right]\leq5$에서 $\left[\frac{x+3}{4}\right]=3, 4, 5$

즉 $2.5\leq\frac{x+3}{4}<5.5$이므로 $10\leq x+3<22$

$\therefore 7\leq x<19$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18의 12개이다.

Lecture

소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 값을 $[n]$과 같이 나타낼 때, $[n]$의 값은 정수이다.
이때 $[n]=a$(a는 정수)라 하면 n의 값의 범위는 $a-0.5\leq n<a+0.5$이다.

02 Action 주어진 부등식과 그 해의 부등호의 방향이 다르므로 x의 계수는 음수이다.

$2ax+b(x-2)>2a-3b$에서 $2ax+bx-2b>2a-3b$

$\therefore (2a+b)x>2a-b$

이때 부등식의 해가 $x<\frac{3}{4}$이므로 $2a+b<0$

따라서 $x<\frac{2a-b}{2a+b}$이므로 $\frac{2a-b}{2a+b}=\frac{3}{4}$

$4(2a-b)=3(2a+b)$, $8a-4b=6a+3b$

$2a=7b \qquad \therefore a=\frac{7}{2}b$

$a=\frac{7}{2}b$를 $2a+b<0$에 대입하면 $7b+b<0 \qquad \therefore b<0$

$a=\frac{7}{2}b$를 $(2a-5b)x+2a+5b\geq0$에 대입하면

$(7b-5b)x+7b+5b\geq0$, $2bx\geq-12b$

이때 $b<0$이므로 $x\leq\frac{-12b}{2b} \qquad \therefore x\leq-6$

03 Action $x+4y=3$을 $y=(x$에 대한 식)의 꼴로 나타낸 후 부등식에 대입한다.

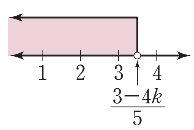
$x+4y=3$에서 $4y=3-x \qquad \therefore y=\frac{3-x}{4}$

$y=\frac{3-x}{4}$를 $y>x+k$에 대입하면

$\frac{3-x}{4}>x+k$, $3-x>4x+4k$

$-5x>4k-3 \qquad \therefore x<\frac{3-4k}{5}$

이 부등식을 만족시키는 자연수 x가 3개가 되도록 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $3<\frac{3-4k}{5}\leq4$이므로 $15<3-4k\leq20$

$12<-4k\leq17 \qquad \therefore -\frac{17}{4}\leq k<-3$

2. 일차부등식의 활용

최고수준 입문하기

P 54-P 57

01 6개	**02** 9, 11, 13	**03** 85점	**04** 19개
05 8자루	**06** 18개	**07** 9일	**08** 20장
09 11개월 후	**10** 5캔	**11** 7회	**12** 50분
13 17명	**14** 50000원	**15** 30 %	**16** 10 cm
17 7 cm	**18** 8 km	**19** 9 km	**20** 1 km
21 24분	**22** 100 g	**23** 75 g	**24** 20 g

01 Action (작지 않다.)=(크거나 같다.)임을 이용하여 부등식을 세운다.

$\frac{x}{3}+2\geq 2x-8$에서 $x\leq 6$
따라서 자연수 x는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

02 Action 연속하는 세 홀수를 $x-2$, x, $x+2$로 놓는다.

연속하는 세 홀수를 $x-2$, x, $x+2$라 하면
$(x-2)+x+(x+2)<36$ $\quad\therefore x<12$
따라서 x의 값 중 가장 큰 홀수는 11이므로 구하는 세 자연수는 9, 11, 13이다.

03 Action (평균)$=\frac{(\text{전체 자료의 합})}{(\text{전체 자료의 개수})}$임을 이용한다.

5회째 시험에서의 점수를 x점이라 하면 4회의 시험 성적의 총합은 $75\times 4=300$(점)이므로
$\frac{300+x}{5}\geq 77$ $\quad\therefore x\geq 85$
따라서 5회째 시험에서 85점 이상을 받아야 한다.

04 Action 사람의 몸무게와 상자 여러 개의 무게의 합은 480 kg 이하이다.

상자의 개수를 x개라 하면
$90+20x\leq 480$ $\quad\therefore x\leq \frac{39}{2}$
따라서 한 번에 최대 19개의 상자를 운반할 수 있다.

05 Action 볼펜의 수를 x자루라 하고 색연필의 수를 x를 이용하여 나타낸다.

볼펜의 수를 x자루라 하면 색연필의 수는 $(14-x)$자루이므로
$1000(14-x)+1600x\leq 19100$ $\quad\therefore x\leq \frac{17}{2}$
따라서 볼펜은 최대 8자루까지 살 수 있다.

06 Action 사탕과 초콜릿의 개수의 비가 3 : 1이므로 사탕과 초콜릿의 개수를 각각 $3k$개, k개(k는 자연수)로 놓는다.

사탕과 초콜릿을 3 : 1의 비로 사야 하므로 사야 할 사탕과 초콜릿의 개수를 각각 $3k$개, k개(k는 자연수)라 하면
$300\times 3k+700\times k\leq 10000$ $\quad\therefore k\leq \frac{25}{4}$
이때 k는 자연수이고, 사탕을 최대로 사려면 k의 값도 최대이어야 하므로 $k=6$
따라서 사탕은 최대 $3\times 6=18$(개)까지 살 수 있다.

07 Action (총 대여 요금)=(기본 요금)+(연체료)×(연체 기간)임을 이용한다.

책을 x일 동안 대여한다고 하면
$1200+700(x-3)\leq 5400$ $\quad\therefore x\leq 9$
따라서 최대 9일 동안 대여할 수 있다.

08 Action 증명사진을 x장 인화한다고 할 때, 10장까지는 5000원이고 $(x-10)$장은 한 장당 300원임을 이용한다.

증명사진을 x장 인화한다고 하면
$5000+300(x-10)\leq 400x$ $\quad\therefore x\geq 20$
따라서 증명사진을 20장 이상 인화해야 한다.

09 Action x개월 후의 형과 동생의 예금액을 각각 구한다.

x개월 후부터 형의 예금액이 동생의 예금액의 2배보다 적어진다고 하면
$30000+3000x<2(10000+2000x)$ …… 60%
$\therefore x>10$
따라서 형의 예금액이 동생의 예금액의 2배보다 적어지는 것은 11개월 후부터이다. …… 40%

10 Action (집 근처 가게에서 산 음료수의 가격)>(할인 매장에서 산 음료수의 가격)+(왕복 교통비)임을 이용한다.

음료수를 x캔 산다고 하면
$800x>500x+1200$ $\quad\therefore x>4$
따라서 음료수를 5캔 이상 살 경우 할인 매장에서 사는 것이 유리하다.

11 Action (비회원 배송료)=(배송료)×(주문 횟수)이고 (회원 배송료)=(연회비)+(배송료)×(주문 횟수)임을 이용한다.

일 년에 책을 주문하는 횟수를 x회라 하면
$2000x>6000+1000x$ $\quad\therefore x>6$
따라서 일년에 7회 이상 책을 주문하면 회원으로 가입하는 것이 유리하다.

12 Action (한 달 요금)=(기본료)+(초당 통화 요금)×(통화 시간)임을 이용한다.

한 달 동안 이용한 통화 시간을 x분이라 하면
A요금제를 이용할 때의 한 달 요금은
$12000+3\times60x=12000+180x$(원)
B요금제를 이용할 때의 한 달 요금은
$15000+2\times60x=15000+120x$(원)
A요금제를 선택하는 것이 유리하려면
$12000+180x<15000+120x \qquad \therefore x<50$
따라서 한 달 동안 이용한 통화 시간이 50분 미만일 때, A요금제를 선택하는 것이 유리하다.

13 Action 입장하는 사람 수를 x명이라 하고 x명의 입장료와 20명의 단체 입장료를 각각 구하여 부등식을 세운다.

입장하는 사람 수를 x명이라 하면
$5000x>5000\times\frac{80}{100}\times20$ …… 60%
$\therefore x>16$
따라서 17명 이상이면 20명의 단체 입장권을 사는 것이 유리하다. …… 40%

14 Action (정가)=(원가)+(이익)이고
(판매 가격)=(정가)−(할인 금액)임을 이용한다.

원가를 x원이라 하면 정가는 $x\left(1+\frac{18}{100}\right)$원이므로
$x\left(1+\frac{18}{100}\right)-3000\geq x\left(1+\frac{12}{100}\right) \qquad \therefore x\geq50000$
따라서 원가는 50000원 이상이다.

15 Action 원가에 x %의 이익을 붙여 정가를 정한다고 하고 부등식을 세운다.

원가에 x %의 이익을 붙여 정가를 정한다고 하면 정가는
$2500\left(1+\frac{x}{100}\right)$원이므로
$2500\left(1+\frac{x}{100}\right)\times0.8\geq2500\times1.04 \qquad \therefore x\geq30$
따라서 원가에 30 % 이상의 이익을 붙여 정가를 정해야 한다.

16 Action (사다리꼴의 넓이)$=\frac{1}{2}\times${(윗변의 길이)+(아랫변의 길이)}×(높이)임을 이용한다.

아랫변의 길이를 x cm라 하면
$\frac{1}{2}\times(6+x)\times8\geq64 \qquad \therefore x\geq10$
따라서 아랫변의 길이는 10 cm 이상이어야 한다.

17 Action 만들어지는 회전체는 원기둥임을 이용한다.

$\overline{AB}$의 길이를 x cm라 하면 만들어지는 회전체는 밑면의 반지름의 길이가 4 cm이고 높이가 x cm인 원기둥이므로
$\pi\times4^2\times x\leq112\pi \qquad \therefore x\leq7$
따라서 $\overline{AB}$의 길이는 7 cm 이하이어야 한다.

18 Action (시간)$=\frac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$임을 이용하여 부등식을 세운다.

시속 4 km로 걸은 거리를 x km라 하면 시속 5 km로 걸은 거리는 $(13-x)$ km이므로
$\frac{x}{4}+\frac{13-x}{5}\leq3 \qquad \therefore x\leq8$
따라서 시속 4 km로 걸은 거리는 8 km 이하이다.

19 Action (올라갈 때 걸린 시간)+(내려올 때 걸린 시간)이 6시간 이내임을 이용하여 부등식을 세운다.

x km까지 올라갔다 내려온다고 하면
$\frac{x}{2.4}+\frac{x}{4}\leq6 \qquad \therefore x\leq9$
따라서 최대 9 km까지 올라갔다 내려올 수 있다.

20 Action 15분은 $\frac{15}{60}$시간임을 이용하여 단위를 통일시킨다.

역에서 서점까지의 거리를 x km라 하면
$\frac{x}{2}+\frac{15}{60}+\frac{x}{4}\leq1$ …… 60%
$\therefore x\leq1$
따라서 역에서 1 km 이내에 있는 서점을 이용할 수 있다.
…… 40%

21 Action (거리)=(속력)×(시간)임을 이용하여 부등식을 세운다.

x분 동안 걷는다고 하면
$3\times\frac{x}{60}+4\times\frac{x}{60}\geq2.8 \qquad \therefore x\geq24$
따라서 24분 이상 걸어야 한다.

22 Action (설탕의 양)$=\frac{(\text{설탕물의 농도})}{100}\times$(설탕물의 양)임을 이용하여 부등식을 세운다.

8 %의 설탕물을 x g 섞는다고 하면 14 %의 설탕물은 $(300-x)$ g 섞으므로
$\frac{8}{100}\times x+\frac{14}{100}\times(300-x)\leq\frac{12}{100}\times300$
$\therefore x\geq100$
따라서 8 %의 설탕물은 100 g 이상 섞어야 한다.

23 Action 물을 증발시키면 소금의 양은 변하지 않고 소금물의 양은 증발시킨 물의 양만큼 줄어든다.

증발시켜야 하는 물의 양을 x g이라 하면
$\frac{5}{100}\times200\geq\frac{8}{100}\times(200-x) \qquad \therefore x\geq75$
따라서 증발시켜야 하는 물의 양은 75 g 이상이다.

24 **Action** 증발시키는 물의 양만큼 소금을 더 넣으므로 전체 소금물의 양은 변하지 않음을 이용한다.

증발시켜야 하는 물의 양을 x g이라 하면 더 넣은 소금의 양도 x g이므로

(소금물의 양)$=400-x+x=400$ (g)

(소금의 양)$=\frac{5}{100}\times400+x=20+x$ (g)

$\frac{20+x}{400}\times100\geq10$ $\quad\therefore x\geq20$

따라서 최소 20 g의 물을 증발시켜야 한다.

최고수준 완성하기

Ⓟ 58–Ⓟ 59

01 $\frac{19}{9}$점	**02** 14회	**03** 45명	**04** 14개
05 5명	**06** 2시간	**07** 10 km	**08** 100 g

01 **Action** (가산점의 합)=(가산점의 평균)×(심판 수)임을 이용한다.

A대회에서 6명의 심판에게 받은 가산점의 합은

$\frac{11}{6}\times6=11$(점)

B대회에서 9명의 심판에게 받은 가산점의 평균을 x점이라 하면 가산점의 합은 $x\times9=9x$(점)

A, B 두 대회에서 받은 가산점의 평균이 2점 이상이어야 하므로

$\frac{11+9x}{15}\geq2$ $\quad\therefore x\geq\frac{19}{9}$

따라서 B대회에서 받은 가산점의 평균은 $\frac{19}{9}$점 이상이어야 한다.

02 **Action** 지수가 이긴 횟수를 x회로 놓고, 지수가 진 횟수, 건우가 이긴 횟수, 건우가 진 횟수를 각각 x를 사용하여 나타낸다.

지수가 이긴 횟수를 x회라 하면 지수가 진 횟수는 $(20-x)$회이고, 건우가 이긴 횟수는 $(20-x)$회, 건우가 진 횟수는 x회이다.

20회에 걸쳐 지수가 얻은 점수는

$4x+2(20-x)=2x+40$(점)

건우가 얻은 점수는 $4(20-x)+2x=80-2x$(점)

이때 지수가 15점 이상의 차로 이겼으므로

$2x+40-(80-2x)\geq15$ $\quad\therefore x\geq\frac{55}{4}$

따라서 지수가 이긴 횟수는 최소 14회이다.

03 **Action** 단체의 인원 수를 x명으로 놓고, x명이 10 %를 할인 받은 입장료와 50명이 20 %를 할인 받은 입장료를 각각 구하여 부등식을 세운다.

단체의 인원 수를 x명$(30\leq x<50)$이라 하면

$1200\times\frac{90}{100}\times x>1200\times\frac{80}{100}\times50$ $\quad\therefore x>\frac{400}{9}$

따라서 45명 이상이면 50명의 단체 입장료를 내는 것이 유리하다.

04 **Action** 4000원을 할인 받을 때와 6 %를 할인 받을 때의 가격을 각각 구하여 부등식을 세운다.

학용품을 x개 산다고 하면

$5000x-4000>5000x\times\frac{94}{100}$ $\quad\therefore x>\frac{40}{3}$

따라서 학용품을 14개 이상 구입할 때, 6 %를 할인해 주는 쿠폰을 사용하는 것이 유리하다.

05 **Action** 전체 일의 양을 1로 놓고 남자 1명, 여자 1명이 하루에 하는 일의 양을 각각 구해 본다.

전체 일의 양을 1이라 하면 남자 1명이 하루에 하는 일의 양은 $\frac{1}{10}$이고, 여자 1명이 하루에 하는 일의 양은 $\frac{1}{7}$이다.

여자를 x명이라 하면 남자는 $(8-x)$명이므로

$\frac{1}{10}\times(8-x)+\frac{1}{7}x\geq1$ $\quad\therefore x\geq\frac{14}{3}$

따라서 여자는 5명 이상 필요하다.

06 **Action** (시속 40 km로 달릴 때 걸린 시간)−(시속 50 km로 달릴 때 걸린 시간)이 15분 이상임을 이용하여 부등식을 세운다.

집에서 할머니 댁까지의 거리를 x km라 하면

$\frac{x}{40}-\frac{x}{50}\geq\frac{15}{60}$ $\quad\therefore x\geq50$

따라서 집에서 할머니 댁까지의 거리는 50 km 이상이므로 시속 25 km로 달리면 최소 $\frac{50}{25}=2$(시간)이 걸린다.

07 **Action** 배가 거슬러 올라갈 때와 내려올 때의 속력을 각각 구해 본다.

강을 거슬러 올라갈 때의 속력은 $12-8=4$, 즉 시속 4 km이고 강을 따라 내려올 때의 속력은 $12+8=20$, 즉 시속 20 km이다. …… 20%

x km까지 거슬러 올라갔다 내려온다고 하면

$\frac{x}{4}+\frac{x}{20}\leq3$ …… 50%

$\therefore x\leq10$

따라서 최대 10 km까지 거슬러 올라갔다 내려올 수 있다. …… 30%

Lecture

(1) (강을 거슬러 올라갈 때의 속력)
=(정지한 물에서의 배의 속력)−(강물의 속력)
(2) (강을 따라 내려올 때의 속력)
=(정지한 물에서의 배의 속력)+(강물의 속력)

08 **Action** 4 %의 소금물의 양을 x g으로 놓고, 8 %의 소금물의 양을 x를 사용하여 나타낸다.

4 %의 소금물을 x g 섞는다고 하면 8 %의 소금물은 $(300-x)$ g 섞는다.
또, 4 %, 8 %, 5 %의 소금물을 섞어서 소금물 500 g을 만들려면 5 %의 소금물은 200 g을 섞어야 하므로

$$\frac{4}{100}\times x+\frac{8}{100}\times(300-x)+\frac{5}{100}\times 200\geq\frac{6}{100}\times 500$$

$\therefore x\leq 100$
따라서 4 %의 소금물은 최대 100 g 섞어야 한다.

최고 수준 뛰어넘기

P 60

01 28개 **02** 5개 **03** 102분 40초 후

01 **Action** 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원기둥의 겉넓이를 S라 하면 $S=2\pi r^2+2\pi rh$이다.

처음 원기둥의 겉넓이는
$(\pi\times 7^2)\times 2+2\pi\times 7\times 8=98\pi+112\pi=210\pi\ (\mathrm{cm}^2)$
구멍을 x개 뚫는다고 하면 구멍을 뚫은 입체도형의 겉넓이는

$$\left\{\pi\times 7^2-\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times x\right\}\times 2+\left(2\pi\times 7\times 8+2\pi\times\frac{1}{2}\times 8\times x\right)$$

$$=\left(49\pi-\frac{1}{4}\pi x\right)\times 2+(112\pi+8\pi x)$$

$$=98\pi-\frac{1}{2}\pi x+112\pi+8\pi x$$

$$=210\pi+\frac{15}{2}\pi x\ (\mathrm{cm}^2)$$

이때 구멍을 뚫은 입체도형의 겉넓이가 처음 원기둥의 겉넓이의 2배 이상이 되어야 하므로

$210\pi+\frac{15}{2}\pi x\geq 2\times 210\pi \qquad \therefore x\geq 28$

따라서 구멍을 28개 이상 뚫어야 한다.

02 **Action** 먼저 한 개의 수문에서 1분 동안 흘려보내는 물의 양을 구한다.

한 개의 수문에서 1분 동안 흘려보내는 물의 양을 p톤이라 하면 3개의 수문을 동시에 열어 20분 만에 모두 흘려보냈으므로
$3\times p\times 20=3000+150\times 20$
$60p=6000 \qquad \therefore p=100$
즉 한 개의 수문에서 1분 동안 100톤의 물을 흘려보낼 수 있다.
5000톤의 물과 1분 동안에 300톤씩 유입되는 물을 x개의 수문을 열어 30분 이내에 모두 흘려보낸다고 하면
$x\times 100\times 30\geq 5000+300\times 30 \qquad \therefore x\geq\frac{14}{3}$
따라서 최소 5개의 수문을 열어야 한다.

03 **Action** 처음으로 두 사람 A, B가 같은 구간에 있게 되려면 A가 걸은 거리와 B가 걸은 거리의 차가 28 m보다 작아야 한다.

B가 출발한 지 t분 후에 처음으로 두 사람 A, B가 같은 구간에 있게 된다고 하면 A가 걸은 거리와 B가 걸은 거리의 차는 28 m보다 작아야 하므로
$35(t+30)-45t<28 \qquad \therefore t>\frac{511}{5}$
한편, A가 k번째 구간에 있다고 하면 A가 B보다 앞에 있으므로 처음으로 두 사람 A, B가 같은 구간에 있게 되는 것은 B가 k번째 전신주에서 출발하는 때이다.
즉 $45t=28(k-1)$이므로 $t=\frac{28}{45}(k-1)$
$t=\frac{28}{45}(k-1)$을 $t>\frac{511}{5}$에 대입하면
$\frac{28}{45}(k-1)>\frac{511}{5} \qquad \therefore k>\frac{661}{4}$
이때 k는 자연수이므로 k의 최솟값은 166이다.
$\therefore t=\frac{28}{45}\times(166-1)=102\frac{2}{3}$
따라서 처음으로 두 사람 A, B가 같은 구간에 있게 되는 것은 B가 출발한 지 102분 40초 후이다.

교과서 속 창의 사고력

P 61 – P 62

01 $a_1<a_2<a_3$ **02** $12<k\leq 15$
03 8송이 **04** 35 %

01 **Action** a_2-a_3, a_1-a_2의 부호를 각각 구한다.

(가)의 $a_1+a_2+b_3=a_1+b_2+a_3$에서
$a_2-a_3=b_2-b_3$

이때 (나)에 의하여 $b_2<b_3$

즉 $b_2-b_3<0$이므로

$a_2-a_3<0$ $\quad\therefore a_2<a_3$

(가)의 $a_1+b_2+a_3=b_1+a_2+a_3$에서

$a_1-a_2=b_1-b_2$

이때 (나)에 의하여 $b_1<b_2$

즉 $b_1-b_2<0$이므로

$a_1-a_2<0$ $\quad\therefore a_1<a_2$

$\therefore a_1<a_2<a_3$

Lecture

두 수 a, b에 대하여

(1) $a-b>0$이면 $a>b$

(2) $a-b<0$이면 $a<b$

02 Action 약속에 따라 주어진 부등식을 간단히 한다.

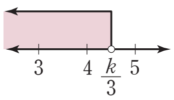
$(2x+1)\triangle(5x-2)>3\triangle k$에서

$(2x+1)-(5x-2)+1>3-k+1$

$2x+1-5x+2+1>4-k,\ -3x+4>4-k$

$-3x>-k$ $\quad\therefore x<\dfrac{k}{3}$

이 부등식을 만족시키는 x의 값 중 가장 큰 정수가 4이므로 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $4<\dfrac{k}{3}\le5$이므로 $12<k\le15$

03 Action 장미꽃을 x송이 산다고 하면 6송이는 묶음으로 구매하고, $(x-6)$송이는 낱개로 구매한다.

2묶음으로 된 장미꽃 6송이의 가격은

$2000\times2=4000$(원)

장미꽃을 x송이 산다고 하면 묶음이 아닌 장미꽃 $(x-6)$송이의 가격은

$800(x-6)=800x-4800$(원)

장미꽃 한 송이의 가격이 700원 이하가 되어야 하므로

$4000+(800x-4800)\le700x$ $\quad\therefore x\le8$

따라서 장미꽃은 최대 8송이까지 살 수 있다.

04 Action (판매 가격)=(도매가격)$\times\left\{1+\dfrac{(\text{이익률})}{100}\right\}$임을 이용한다.

달걀 한 개의 도매가격을 A원이라 하고 x %의 이익을 붙인다고 하면

$2500\times A\times\left(1+\dfrac{x}{100}\right)\ge2700\times A\times\left(1+\dfrac{25}{100}\right)$

$25Ax\ge875A$

이때 $A>0$이므로 $x\ge35$

따라서 달걀 한 개의 도매가격에 35 % 이상의 이익을 붙여 판매 가격을 정해야 한다.

Ⅳ. 연립일차방정식

1. 연립일차방정식

최고수준 입문하기

P 66 – P 70

01 ㉡, ㉣, ㉤	**02** ⑤	**03** 7개	**04** 10
05 $(3, 4)$	**06** 0	**07** 5	**08** 2
09 -2	**10** 1	**11** -4	**12** 3
13 3	**14** -5	**15** 12	**16** 9
17 $x=25, y=-18$		**18** 4	**19** 3
20 $\dfrac{11}{2}$	**21** -1	**22** 1	**23** 9
24 -3	**25** $x=3, y=1$	**26** 18	**27** -6
28 -8	**29** $a=1, b\ne-7$		**30** -1

01 Action 등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이 $ax+by+c=0$(단, a, b, c는 상수, $a\ne0$, $b\ne0$)인지 확인한다.

㉠ 다항식

㉢ xy가 있으므로 일차방정식이 아니다.

㉣ $4x+y-6=3y-4x$에서 $8x-2y-6=0$

➡ 미지수가 2개인 일차방정식

㉥ $x-2y=2(x-y)$에서 $x-2y=2x-2y$

$-x=0$ ➡ 미지수가 1개인 일차방정식

따라서 미지수가 2개인 일차방정식은 ㉡, ㉣, ㉤이다.

02 Action 미지수가 2개인 일차방정식이 되려면 미지수가 2개이고 그 차수가 모두 1인 방정식이어야 한다.

$ax+3y-2=3(x-y)-4$에서 $ax+3y-2=3x-3y-4$

$\therefore (a-3)x+6y+2=0$

이 식이 미지수가 2개인 일차방정식이 되려면 $a-3\ne0$이어야 한다.

$\therefore a\ne3$

03 Action x, y가 자연수임을 이용하여 x, y의 값을 각각 구한다.

$4x+3y=96$에서 $4x=96-3y$ $\quad\therefore x=24-\dfrac{3}{4}y$

이때 x의 값이 자연수이므로 y의 값은 4의 배수이어야 한다.

즉 $y=4, 8, 12, \cdots$를 $x=24-\dfrac{3}{4}y$에 차례로 대입하여 x의 값을 구하면 다음 표와 같다.

x	21	18	15	12	9	6	3	0	$\cdots$
y	4	8	12	16	20	24	28	32	$\cdots$

따라서 x, y가 자연수인 해는 $(21, 4)$, $(18, 8)$, $(15, 12)$, $(12, 16)$, $(9, 20)$, $(6, 24)$, $(3, 28)$의 7개이다.

04 Action 주어진 해를 일차방정식에 대입하여 a, b의 값을 구한다.

$x=3$, $y=6$을 $ax-2y=3$에 대입하면

$3a-12=3$ $\quad\therefore a=5$ …… 40%

즉 $x=b$, $y=11$을 $5x-2y=3$에 대입하면

$5b-22=3$ $\quad\therefore b=5$ …… 40%

$\therefore a+b=5+5=10$ …… 20%

05 Action x, y가 자연수일 때, 연립방정식의 각 방정식의 해를 구한 후 공통인 해를 구한다.

x, y가 자연수일 때,

$2x+y=10$의 해는 $(1, 8)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 2)$

$3x-2y=1$의 해는 $(1, 1)$, $(3, 4)$, $(5, 7)$, $(7, 10)$, $\cdots$

따라서 연립방정식의 해는 $(3, 4)$이다.

06 Action $x=p-1$, $y=-1$을 $2x+(p-2)y=3$에 대입하여 연립방정식의 해를 구한다.

$x=p-1$, $y=-1$을 $2x+(p-2)y=3$에 대입하면

$2(p-1)-(p-2)=3$ $\quad\therefore p=3$

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $(2, -1)$이므로

$x=2$, $y=-1$을 $qx-2y=8$에 대입하면

$2q+2=8$, $2q=6$ $\quad\therefore q=3$

$\therefore p-q=3-3=0$

07 Action x, y에 대한 연립방정식에서 한 일차방정식이 $x=(y$에 대한 식$)$ 또는 $y=(x$에 대한 식$)$의 꼴로 되어 있을 때, 이 식을 다른 일차방정식에 대입한다.

㉠을 ㉡에 대입하면

$3x-2(11-x)=-2$, $5x=20$ $\quad\therefore a=5$

08 Action 주어진 연립방정식을 대입법 또는 가감법으로 풀어 본다.

$\begin{cases} 2x+y=7 & \cdots ㉠ \\ x-2y=1 & \cdots ㉡ \end{cases}$에서

㉠$-$㉡$\times 2$를 하면 $5y=5$ $\quad\therefore y=1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x-2=1$ $\quad\therefore x=3$

$\therefore x-y=3-1=2$

09 Action 주어진 연립방정식의 해는 연립방정식 $\begin{cases} 2x+5y=-9 \\ x-4y=2 \end{cases}$의 해와 같다.

주어진 연립방정식의 해는 세 방정식을 모두 만족시키므로

연립방정식 $\begin{cases} 2x+5y=-9 & \cdots ㉠ \\ x-4y=2 & \cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠$-$㉡$\times 2$를 하면 $13y=-13$ $\quad\therefore y=-1$

$y=-1$을 ㉡에 대입하면 $x+4=2$ $\quad\therefore x=-2$

따라서 $x=-2$, $y=-1$을 $ax-3y=7$에 대입하면

$-2a+3=7$, $-2a=4$ $\quad\therefore a=-2$

Lecture

연립방정식의 해를 해로 갖는 일차방정식이 주어질 때

❶ 세 일차방정식 중 미지수가 없는 두 일차방정식으로 연립방정식을 세워 해를 구한다.

❷ ❶에서 구한 해를 나머지 일차방정식에 대입하여 미지수의 값을 구한다.

10 Action $(1, -2)$, $(5, -4)$의 좌표를 일차방정식에 각각 대입한다.

$(1, -2)$, $(5, -4)$의 좌표를 $ax+by=3$에 각각 대입하면

$\begin{cases} a-2b=3 & \cdots ㉠ \\ 5a-4b=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 2-$㉡을 하면 $-3a=3$ $\quad\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$-1-2b=3$, $-2b=4$ $\quad\therefore b=-2$

$\therefore a-b=-1-(-2)=1$

11 Action 주어진 해를 연립방정식에 대입한다.

$x=2$, $y=3$을 $\begin{cases} ax+by=2 \\ bx-ay=10 \end{cases}$에 대입하면

$\begin{cases} 2a+3b=2 \\ 2b-3a=10 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} 2a+3b=2 & \cdots ㉠ \\ -3a+2b=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 3+$㉡$\times 2$를 하면

$13b=26$ $\quad\therefore b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$2a+6=2$, $2a=-4$ $\quad\therefore a=-2$

$\therefore ab=-2\times 2=-4$

12 Action 분배법칙을 이용하여 괄호를 풀고 동류항끼리 간단히 한 후 연립방정식을 푼다.

$\begin{cases} 2(3x+y)+2y=10 \\ 2x+3(y-5)=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=5 & \cdots ㉠ \\ 2x+3y=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 2-$㉡$\times 3$을 하면

$-5y=-20$ $\quad\therefore y=4$

$y=4$를 ㉠에 대입하면

$3x+8=5$, $3x=-3$ $\quad\therefore x=-1$

따라서 $a=-1$, $b=4$이므로

$a+b=-1+4=3$

13 Action 연립방정식의 해를 구한 후 그 해를 주어진 일차방정식에 대입하여 미지수의 값을 구한다.

$\begin{cases} 3(x-2y)=2(1-2y) \\ 4(2x-y)-6=x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-2y=2 & \cdots ㉠ \\ 7x-5y=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

…… 30%

㉠$\times 5-$㉡$\times 2$를 하면 $x=-2$

$x=-2$를 ㉠에 대입하면

$-6-2y=2$, $-2y=8$ $\quad\therefore y=-4$ …… 50%

따라서 $x=-2$, $y=-4$를 $ax-y=-2$에 대입하면

$-2a+4=-2$, $-2a=-6$ $\quad\therefore a=3$ …… 20%

14 Action 계수가 분수인 연립방정식은 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 계수를 모두 정수로 바꾼 후 푼다.

$\begin{cases} x-2(x-y)=-4 & \cdots ㉠ \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{1}{2} & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 정리하면 $-x+2y=-4$ $\cdots$ ㉢

㉡$\times 12$를 하면 $3x-4y=6$ $\cdots$ ㉣

㉢$\times 3+$㉣을 하면 $2y=-6$ $\quad\therefore y=-3$

$y=-3$을 ㉢에 대입하면 $-x-6=-4$ $\quad\therefore x=-2$

따라서 $a=-2$, $b=-3$이므로

$a+b=-2+(-3)=-5$

15 Action 계수가 소수인 연립방정식은 양변에 10, 100, 1000, …과 같이 적당한 수를 곱하여 계수를 모두 정수로 바꾼 후 푼다.

$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=\dfrac{5}{2} & \cdots ㉠ \\ 0.3x+0.4(y-3)=-1.5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 6$을 하면 $2x-3y=15$ $\cdots$ ㉢

㉡$\times 10$을 하여 정리하면 $3x+4y=-3$ $\cdots$ ㉣

㉢$\times 3-$㉣$\times 2$를 하면 $-17y=51$ $\quad\therefore y=-3$

$y=-3$을 ㉢에 대입하면

$2x+9=15$, $2x=6$ $\quad\therefore x=3$

따라서 $x=3$, $y=-3$을 $3x-y=k$에 대입하면

$9+3=k$ $\quad\therefore k=12$

16 Action 비례식에서 (내항의 곱)=(외항의 곱)임을 이용하여 비례식을 일차방정식으로 나타낸다.

$\begin{cases} (x-1):(2x+y)=2:3 & \cdots ㉠ \\ 3x+2y=7 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2(2x+y)=3(x-1)$

$4x+2y=3x-3$, $x+2y=-3$ $\cdots$ ㉢

㉡$-$㉢을 하면 $2x=10$ $\quad\therefore x=5$

$x=5$를 ㉢에 대입하면

$5+2y=-3$, $2y=-8$ $\quad\therefore y=-4$

따라서 $m=5$, $n=-4$이므로

$m-n=5-(-4)=9$

17 Action 방정식 $A=B=C$는 연립방정식 $\begin{cases} A=B \\ A=C \end{cases}$, $\begin{cases} A=B \\ B=C \end{cases}$, $\begin{cases} A=C \\ B=C \end{cases}$ 중 간단한 것을 선택하여 푼다.

$\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{2x+y}{4} & \cdots ㉠ \\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{x-y+5}{6} & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 12$를 하여 정리하면 $2x+3y=-4$ $\cdots$ ㉢

㉡$\times 6$을 하여 정리하면 $x+y=7$ $\cdots$ ㉣

㉢$-$㉣$\times 2$를 하면 $y=-18$

$y=-18$을 ㉣에 대입하면 $x-18=7$ $\quad\therefore x=25$

18 Action 먼저 방정식을 연립방정식으로 바꿔서 해를 구한다.

$\begin{cases} 3(x-3)+2(y-1)=5x-4y-11 \\ 2x-(3-y)=5x-4y-11 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x-3y=0 & \cdots ㉠ \\ 3x-5y=8 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 3-$㉡을 하면 $-4y=-8$ $\quad\therefore y=2$

$y=2$를 ㉠에 대입하면 $x-6=0$ $\quad\therefore x=6$

따라서 $a=6$, $b=2$이므로

$a-b=6-2=4$

19 Action $x=2$, $y=-2$를 주어진 방정식에 대입하여 a, b에 대한 연립방정식을 세운다.

$x=2$, $y=-2$를 주어진 방정식에 대입하면

$2a-2b-2=6b-2a-2=0$

$\begin{cases} 2a-2b-2=0 \\ 6b-2a-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=1 & \cdots ㉠ \\ -a+3b=1 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$+$㉡을 하면 $2b=2$ $\quad\therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $a-1=1$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore a+b=2+1=3$

20 Action $x:y=1:3$이므로 $y=3x$임을 이용한다.

$x:y=1:3$이므로 $y=3x$

$y=3x$를 $2x-y=6$에 대입하면

$2x-3x=6$ $\quad\therefore x=-6$

$x=-6$을 $y=3x$에 대입하면 $y=-18$

따라서 $x=-6$, $y=-18$을 $ax-2y=3$에 대입하면

$-6a+36=3$, $-6a=-33$ $\quad\therefore a=\dfrac{11}{2}$

Lecture

(1) y의 값이 x의 값의 a배이다. $\Rightarrow y=ax$

(2) y의 값이 x의 값보다 b만큼 크다. $\Rightarrow y=x+b$

(3) x의 값과 y의 값의 차가 c이다. (단, $x\geq y$) $\Rightarrow x-y=c$

(4) x의 값과 y의 값의 비가 $m:n$이다.

$\Rightarrow x:y=m:n$, 즉 $my=nx$에서 $y=\dfrac{n}{m}x$

21 Action y의 값이 x의 값의 2배이므로 $y=2x$임을 이용한다.

y의 값이 x의 값의 2배이므로 $y=2x$

$y=2x$를 $3x+y=10$에 대입하면

$3x+2x=10$, $5x=10$ $\quad\therefore x=2$

$x=2$를 $y=2x$에 대입하면 $y=4$

따라서 $x=2$, $y=4$를 $x+3y=a+15$에 대입하면

$2+12=a+15$ $\quad\therefore a=-1$

22 Action y의 값이 x의 값보다 3만큼 크므로 $y=x+3$임을 이용한다.

$\begin{cases} \frac{1}{5}x+0.6y=k \\ x+2y=3 \end{cases}$ ➡ $\begin{cases} x+3y=5k & \cdots ㉠ \\ x+2y=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$

y의 값이 x의 값보다 3만큼 크므로 $y=x+3$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x+2(x+3)=3$, $x+2x+6=3$

$3x=-3$ $\therefore x=-1$

$x=-1$을 ㉢에 대입하면 $y=-1+3=2$

따라서 $x=-1$, $y=2$를 ㉠에 대입하면

$-1+6=5k$, $5k=5$ $\therefore k=1$

23 Action x의 값과 y의 값이 서로 같으므로 $y=x$임을 이용한다.

x의 값과 y의 값이 서로 같으므로 $y=x$

주어진 연립방정식에 $y=x$를 대입하면

$\begin{cases} ax-x=4 & \cdots ㉠ \\ 3x+ax=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면 $-4x=-2$ $\therefore x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ ⋯⋯ 60%

따라서 $x=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}=4$, $\frac{1}{2}a=\frac{9}{2}$ $\therefore a=9$ ⋯⋯ 40%

24 Action ㉡의 y의 계수 3을 a로 잘못 보았다고 하고 $x=2$를 주어진 연립방정식에 대입한다.

㉡의 y의 계수 3을 a로 잘못 보았다고 하면

$2x+ay=-8$ ⋯ ㉢

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $6-y=2$ $\therefore y=4$

이때 $x=2$, $y=4$를 ㉢에 대입하면

$4+4a=-8$, $4a=-12$ $\therefore a=-3$

따라서 ㉡의 y의 계수 3을 -3으로 잘못 보고 풀었다.

25 Action 주어진 연립방정식에서 a, b를 서로 바꾸어 연립방정식을 만들고, 주어진 해를 대입한다.

$x=1$, $y=3$은 $\begin{cases} bx+ay=1 \\ ax+by=-5 \end{cases}$의 해이므로

$\begin{cases} 3a+b=1 & \cdots ㉠ \\ a+3b=-5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡$\times 3$을 하면 $-8b=16$ $\therefore b=-2$

$b=-2$를 ㉡에 대입하면

$a-6=-5$ $\therefore a=1$

따라서 처음 연립방정식은 $\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉢ \\ -2x+y=-5 & \cdots ㉣ \end{cases}$

㉢$\times 2+$㉣을 하면 $-3y=-3$ $\therefore y=1$

$y=1$을 ㉢에 대입하면 $x-2=1$ $\therefore x=3$

따라서 처음 연립방정식의 해는 $x=3$, $y=1$

26 Action 주어진 두 연립방정식의 해는 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=9 \\ x-y=3 \end{cases}$의 해와 같다.

주어진 두 연립방정식의 해는 연립방정식

$\begin{cases} x+2y=9 & \cdots ㉠ \\ x-y=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠$-$㉡을 하면 $3y=6$ $\therefore y=2$

$y=2$를 ㉡에 대입하면 $x-2=3$ $\therefore x=5$

$x=5$, $y=2$를 $3x+y=a$에 대입하면

$15+2=a$ $\therefore a=17$

$x=5$, $y=2$를 $x+by=7$에 대입하면

$5+2b=7$, $2b=2$ $\therefore b=1$

$\therefore a+b=17+1=18$

Lecture

두 연립방정식의 해가 서로 같을 때

두 연립방정식의 해가 서로 같을 때, 네 일차방정식 중에서 미지수를 포함하지 않은 두 일차방정식으로 연립방정식을 세워 해를 구한 후 그 해를 나머지 두 일차방정식에 각각 대입하여 미지수의 값을 구한다.

27 Action 주어진 네 일차방정식의 공통인 해는 연립방정식 $\begin{cases} 2x+3y=-5 \\ 5x+2y=4 \end{cases}$의 해와 같다.

주어진 네 일차방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} 2x+3y=-5 & \cdots ㉠ \\ 5x+2y=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠$\times 5-$㉡$\times 2$를 하면

$11y=-33$ $\therefore y=-3$

$y=-3$을 ㉠에 대입하면

$2x-9=-5$, $2x=4$ $\therefore x=2$ ⋯⋯ 40%

$x=2$, $y=-3$을 $ax-y=3(a-1)$에 대입하면

$2a+3=3(a-1)$, $2a+3=3a-3$

$\therefore a=6$ ⋯⋯ 20%

$x=2$, $y=-3$, $a=6$을 $bx+(1-a)y=13$에 대입하면

$2b+15=13$, $2b=-2$

$\therefore b=-1$ ⋯⋯ 20%

$\therefore ab=6\times(-1)=-6$ ⋯⋯ 20%

28 Action 연립방정식의 한 일차방정식에 적당한 수를 곱하였을 때, 나머지 일차방정식과 일치하면 해가 무수히 많다.

$\begin{cases} 2x-y=a+4 \\ 6x-3y=-12 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} 6x-3y=3(a+4) \\ 6x-3y=-12 \end{cases}$의 해가 무수히 많으므로

$3(a+4)=-12$, $3a+12=-12$

$3a=-24$ $\therefore a=-8$

29 **Action** 연립방정식의 한 일차방정식에 적당한 수를 곱하였을 때, x, y의 계수는 각각 같고 상수항이 다르면 해가 없다.

$\begin{cases} (a-3)x+y=3 \\ 4x-2y=a+b \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} -2(a-3)x-2y=-6 \\ 4x-2y=a+b \end{cases}$의 해가 없으려면 $-2(a-3)=4$, $-6\neq a+b$이어야 한다.

$-2(a-3)=4$에서 $-2a+6=4$

$-2a=-2$ $\quad\therefore a=1$

$-6\neq a+b$에서 $-6\neq 1+b$ $\quad\therefore b\neq -7$

30 **Action** 연립방정식이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지므로 해가 무수히 많다.

$\begin{cases} 2x+y=0 \\ 3x+2y=kx \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} 4x+2y=0 \\ (3-k)x+2y=0 \end{cases}$이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지므로 해가 무수히 많다.

따라서 $4=3-k$이므로 $k=-1$

최고수준 완성하기 (P71 – P74)

01 $a=1, b\neq 1$	**02** 15	**03** $(1, 5), (3, 2)$	
04 -4	**05** -4	**06** 6	**07** -16
08 5	**09** 13	**10** 5	**11** -1
12 2	**13** $x=1, y=0, z=2$		**14** 4
15 11	**16** 1		

01 **Action** 등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 동류항끼리 정리한 후 두 미지수 x, y의 차수가 1이 되는 조건을 구한다.

$x^2+4x-y+5=ax^2-3x-by+1$에서

$(1-a)x^2+7x+(b-1)y+4=0$

이 식이 미지수가 2개인 일차방정식이 되려면 $1-a=0$, $b-1\neq 0$이어야 한다.

$\therefore a=1$, $b\neq 1$

02 **Action** $2x-3y=21$에서 x를 y에 대한 식으로 나타낸 후 x, y가 자연수임을 이용하여 x, y의 값을 각각 구한다.

$2x-3y=21$에서 $2x=3y+21$ $\quad\therefore x=\dfrac{3y+21}{2}$

이때 x가 자연수이므로 $3y+21$의 값은 2의 배수이어야 한다. 즉 y의 값은 홀수이어야 한다.

72를 소인수분해하면 $72=2^3\times 3^2$이므로 y의 값이 될 수 있는 수는 1, 3, 9이다.

$y=1, 3, 9$를 $x=\dfrac{3y+21}{2}$에 차례로 대입하여 x의 값을 구하면 오른쪽 표와 같다.

x	12	15	24
y	1	3	9

이때 x, y의 최소공배수가 72인 것은 $x=24$, $y=9$이므로

$x-y=24-9=15$

03 **Action** 먼저 주어진 약속에 따라 일차방정식을 세운다.

$2*x=4-3x+6=-3x+10$

$y*3=2y-9+6=2y-3$

$2*x=y*3$에서 $-3x+10=2y-3$

$\therefore 3x+2y=13$

이때 x, y는 자연수이므로 $3x+2y=13$의 해는

$(1, 5)$, $(3, 2)$

04 **Action** 지수법칙을 이용하여 x, y에 대한 일차방정식을 세운다.

$3^x\times 27^y=9^5$에서 $3^x\times(3^3)^y=(3^2)^5$

$3^x\times 3^{3y}=3^{10}$, $3^{x+3y}=3^{10}$

$\therefore x+3y=10$

따라서 주어진 연립방정식의 해는 연립방정식

$\begin{cases} 4x+3y=13 & \cdots ㉠ \\ x+3y=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠－㉡을 하면 $3x=3$ $\quad\therefore x=1$

$x=1$을 ㉡에 대입하면

$1+3y=10$, $3y=9$ $\quad\therefore y=3$

$x=1$, $y=3$을 $ax+y=-1$에 대입하면

$a+3=-1$ $\quad\therefore a=-4$

> **Lecture**
>
> **지수법칙**
>
> $a\neq 0$이고, m, n이 자연수일 때
>
> (1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$
>
> (2) $(a^m)^n=a^{mn}$
>
> (3) $a^m\div a^n=\begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$

05 **Action** 분배법칙을 이용하여 괄호를 풀고 동류항끼리 간단히 한 후 연립방정식을 푼다.

$\begin{cases} 4(x-1)=2x-3y+4 \\ 6x-4y+3=x-3(y-2) \end{cases}$ ➡ $\begin{cases} 2x+3y=8 & \cdots ㉠ \\ 5x-y=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠＋㉡×3을 하면 $17x=17$ $\quad\therefore x=1$

$x=1$을 ㉡에 대입하면 $5-y=3$ $\quad\therefore y=2$

따라서 $x=1$, $y=2$를 $x+ay+7=0$에 대입하면

$1+2a+7=0$, $2a=-8$ $\quad\therefore a=-4$

06 **Action** $x=p$, $y=2p$를 주어진 연립방정식에 대입한다.

$x=p$, $y=2p$를 주어진 연립방정식에 대입하면

$\begin{cases} p(a-6)+2p(3-a)=-2 \\ 2ap-6p(a-2)=-4 \end{cases}$ ➡ $\begin{cases} ap=2 & \cdots ㉠ \\ ap-3p=1 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면 $2-3p=1$, $-3p=-1$ $\therefore p=\frac{1}{3}$

$p=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{3}a=2$ $\therefore a=6$

07 Action 계수를 모두 정수로 바꾼 후 연립방정식을 푼다.

$$\begin{cases} 0.\dot{2}x-0.\dot{3}y=1.\dot{1} & \cdots ㉠ \\ \frac{x-1}{8}-\frac{y+1}{4}=\frac{1}{8} & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\frac{2}{9}x-\frac{3}{9}y=\frac{11-1}{9}$, $2x-3y=10$ $\cdots$ ㉢

㉡$\times 8$을 하여 정리하면 $x-2y=4$ $\cdots$ ㉣

㉢$-$㉣$\times 2$를 하면 $y=2$

$y=2$를 ㉣에 대입하면 $x-4=4$ $\therefore x=8$ …… 60%

이때

$3(x-2y)-2(x+3y)=3x-6y-2x-6y$

$=x-12y$ …… 20%

$x=8$, $y=2$를 위의 식에 대입하면

$x-12y=8-12\times 2=-16$ …… 20%

08 Action 연립방정식 $\begin{cases} \frac{x-2}{2}=\frac{x+y}{3} \\ y+2=2(x-2) \end{cases}$의 해가 $x=p$, $y=q$이면 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=4 \\ bx-ay=6 \end{cases}$의 해는 $x=-p$, $y=-q$이다.

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2}=\frac{x+y}{3} & \cdots ㉠ \\ y+2=2(x-2) & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠$\times 6$을 하여 정리하면 $x-2y=6$ $\cdots$ ㉢

㉡을 정리하면 $2x-y=6$ $\cdots$ ㉣

㉢$\times 2-$㉣을 하면 $-3y=6$ $\therefore y=-2$

$y=-2$를 ㉢에 대입하면 $x+4=6$ $\therefore x=2$

따라서 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=4 \\ bx-ay=6 \end{cases}$의 해는 $x=-2$, $y=2$이므로

$$\begin{cases} -2a+2b=4 \\ -2b-2a=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=-2 & \cdots ㉤ \\ a+b=-3 & \cdots ㉥ \end{cases}$$

㉤$+$㉥을 하면 $2a=-5$ $\therefore a=-\frac{5}{2}$

$a=-\frac{5}{2}$를 ㉥에 대입하면

$-\frac{5}{2}+b=-3$ $\therefore b=-\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{a}{b}=a\div b=-\frac{5}{2}\div\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{2}\times(-2)=5$

09 Action $x>y$이고 x의 값과 y의 값의 차가 3이므로 $x-y=3$, 즉 $x=y+3$임을 이용한다.

$$\begin{cases} 2x+1=y+a & \cdots ㉠ \\ (2x-a):(y-3)=5:3 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 정리하면 $2x-y=a-1$ $\cdots$ ㉢

㉡에서 $5(y-3)=3(2x-a)$, $5y-15=6x-3a$

$\therefore 6x-5y=3a-15$ $\cdots$ ㉣

$x>y$이고 x의 값과 y의 값의 차가 3이므로

$x-y=3$ $\therefore x=y+3$

$x=y+3$을 ㉢에 대입하면 $2(y+3)-y=a-1$

$\therefore y=a-7$ $\cdots$ ㉤

$x=y+3$을 ㉣에 대입하면 $6(y+3)-5y=3a-15$

$\therefore y=3a-33$ $\cdots$ ㉥

㉤, ㉥에서 $a-7=3a-33$, $-2a=-26$ $\therefore a=13$

10 Action $x:y=2:3$이므로 $3x=2y$임을 이용한다.

$$\begin{cases} 2x+ay=19 \\ 3x+2y+7=19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+ay=19 & \cdots ㉠ \\ 3x+2y=12 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

$x:y=2:3$이므로 $3x=2y$ $\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$2y+2y=12$, $4y=12$ $\therefore y=3$

$y=3$을 ㉢에 대입하면 $3x=6$ $\therefore x=2$

$x=2$, $y=3$을 ㉠에 대입하면

$4+3a=19$, $3a=15$ $\therefore a=5$

11 Action 주어진 방정식을 연립방정식으로 바꿔서 해를 a의 식으로 나타낸 후 $x=\frac{2}{3}$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

$$\begin{cases} \frac{x-2y+4}{2}=y+a & \cdots ㉠ \\ \frac{2x+y+a}{3}=y+a & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠$\times 2$를 하여 정리하면 $x-4y=2a-4$ $\cdots$ ㉢

㉡$\times 3$을 하여 정리하면 $x-y=a$ $\cdots$ ㉣

㉢$-$㉣을 하면 $-3y=a-4$ $\therefore y=\frac{4-a}{3}$

$y=\frac{4-a}{3}$를 ㉣에 대입하면

$x-\frac{4-a}{3}=a$ $\therefore x=\frac{2a+4}{3}$

따라서 $\frac{2a+4}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$2a+4=2$, $2a=-2$ $\therefore a=-1$

12 Action $\frac{1}{x}=A$, $\frac{1}{y}=B$로 놓고 A, B에 대한 연립방정식을 푼다.

$\frac{1}{x}=A$, $\frac{1}{y}=B$라 하면 $\begin{cases} 3A+2B=8 & \cdots ㉠ \\ A-4B=-2 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡$\times 3$을 하면 $14B=14$ $\therefore B=1$

$B=1$을 ㉡에 대입하면 $A-4=-2$ $\therefore A=2$

즉 $\frac{1}{x}=2$, $\frac{1}{y}=1$이므로 연립방정식의 해는 $x=\frac{1}{2}$, $y=1$

따라서 $p=\frac{1}{2}$, $q=1$이므로 $2p+q=2\times\frac{1}{2}+1=2$

13 Action x, y, z 중 한 문자를 없애고 미지수가 2개인 연립방정식을 만든다.

$\begin{cases} x+y=1 & \cdots ㉠ \\ y+z=2 & \cdots ㉡ \\ z+x=3 & \cdots ㉢ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $x-z=-1$ ⋯ ㉣

㉢+㉣을 하면 $2x=2$ ∴ $x=1$

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $1+y=1$ ∴ $y=0$

$x=1$을 ㉢에 대입하면 $z+1=3$ ∴ $z=2$

따라서 연립방정식의 해는 $x=1, y=0, z=2$

다른 풀이

㉠+㉡+㉢을 하면 $2(x+y+z)=6$

∴ $x+y+z=3$ ⋯ ㉤

㉤−㉠을 하면 $z=2$

㉤−㉡을 하면 $x=1$

㉤−㉢을 하면 $y=0$

따라서 연립방정식의 해는 $x=1, y=0, z=2$

Lecture

미지수가 3개인 연립방정식

세 미지수 중 한 미지수를 소거하여 미지수가 2개인 연립방정식을 만들고 해를 구한 후 그 해를 세 일차방정식 중 가장 간단한 일차방정식에 대입하여 나머지 미지수의 값을 구한다.

14 Action $2^x=A$, $3^y=B$로 놓고 A, B에 대한 연립방정식을 푼다.

$2^{x+1}=2\times2^x$, $3^{y+2}=3^2\times3^y=9\times3^y$이므로

$2^x=A$, $3^y=B$라 하면

$\begin{cases} A+9B=85 & \cdots ㉠ \\ 2A-B=-1 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×2−㉡을 하면

$19B=171$ ∴ $B=9$

$B=9$를 ㉠에 대입하면

$A+81=85$ ∴ $A=4$

즉 $2^x=4=2^2$, $3^y=9=3^2$이므로 $x=2, y=2$

∴ $xy=2\times2=4$

15 Action 연립방정식의 해가 무수히 많은 경우와 해가 없는 경우의 조건을 찾는다.

$\begin{cases} x+3y=-a \\ 3x-by=6 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} 3x+9y=-3a \\ 3x-by=6 \end{cases}$의 해가 무수히 많으므로

$9=-b$, $-3a=6$ ∴ $a=-2, b=-9$ ⋯⋯ 60%

$\begin{cases} cx+6y=-2 \\ 2x+3y=-4 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} cx+6y=-2 \\ 4x+6y=-8 \end{cases}$의 해가 없으므로

$c=4$ ⋯⋯ 30%

∴ $a-b+c=-2-(-9)+4=11$ ⋯⋯ 10%

16 Action 연립방정식의 한 일차방정식에 적당한 수를 곱하였을 때, 나머지 일차방정식과 일치하면 연립방정식의 해가 무수히 많다.

$\begin{cases} ax-by=a \\ bx-ay=-a \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} ax-by=a \\ -bx+ay=a \end{cases}$의 해가 무수히 많으므로

$a=-b$

$a=-b$를 $ax-by=a$에 대입하면

$-bx-by=-b$

이때 $b\neq0$이므로 양변을 $-b$로 나누면

$x+y=1$

Lecture

$ab\neq0$이면 $a\neq0$이고 $b\neq0$이다.

최고수준 뛰어넘기

P 75− P 76

01 $(a-1)$개 **02** $x=-\frac{13}{4}, y=\frac{15}{4}$ **03** 15

04 85 **05** 1

06 $x=3, y=3$ 또는 $x=-3, y=1$

01 Action $x+3y=3a$, 즉 $x=3a-3y$에 $y=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입한 후 x의 값이 자연수임을 이용한다.

$x+3y=3a$에서 $x=3a-3y$

$y=1, 2, 3, \cdots$을 $x=3a-3y$에 차례로 대입하면

$y=1$일 때, $x=3a-3$

$y=2$일 때, $x=3a-6$

$y=3$일 때, $x=3a-9$

⋮

$y=a-1$일 때, $x=3a-3(a-1)=3$

$y=a$일 때, $x=3a-3a=0$

따라서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는 $(a-1)$개이다.

02 Action $x>y$, $x<y$일 때로 나누어 푼다.

(i) $x>y$일 때, $\max(x, y)=x$, $\min(x, y)=y$이므로

$\begin{cases} x=2x+3y-1 \\ y=-2x-y-6 \end{cases}$ ➡ $\begin{cases} x+3y=1 & \cdots ㉠ \\ x+y=-3 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면

$2y=4$ ∴ $y=2$

$y=2$를 ㉡에 대입하면

$x+2=-3$ ∴ $x=-5$

이때 $x<y$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x<y$일 때, $\max(x, y)=y$, $\min(x, y)=x$이므로

$\begin{cases} y=2x+3y-1 \\ x=-2x-y-6 \end{cases}$ ➡ $\begin{cases} 2x+2y=1 & \cdots ㉢ \\ 3x+y=-6 & \cdots ㉣ \end{cases}$

㉢$-$㉣$\times 2$를 하면 $-4x=13$ $\quad \therefore x=-\dfrac{13}{4}$

$x=-\dfrac{13}{4}$을 ㉣에 대입하면

$-\dfrac{39}{4}+y=-6$ $\quad \therefore y=\dfrac{15}{4}$

(i), (ii)에 의하여 연립방정식의 해는 $x=-\dfrac{13}{4}$, $y=\dfrac{15}{4}$

03

Action 연립방정식 $\begin{cases} x-3y=-9 \\ 6x+ay=10 \end{cases}$의 해가 $x=m$, $y=n$이면 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=-5 \\ 2x+7y=35 \end{cases}$의 해는 $x=m+3$, $y=n+3$이다.

$\begin{cases} x-3y=-9 \\ 6x+ay=10 \end{cases}$의 해를 $x=m$, $y=n$이라 하면

$\begin{cases} m-3n=-9 & \cdots ㉠ \\ 6m+an=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$

$\begin{cases} ax+by=-5 \\ 2x+7y=35 \end{cases}$의 해는 $x=m+3$, $y=n+3$이므로

$\begin{cases} a(m+3)+b(n+3)=-5 \\ 2(m+3)+7(n+3)=35 \end{cases}$

➡ $\begin{cases} am+bn=-3a-3b-5 & \cdots ㉢ \\ 2m+7n=8 & \cdots ㉣ \end{cases}$

㉠$\times 2-$㉣을 하면

$-13n=-26$ $\quad \therefore n=2$

$n=2$를 ㉠에 대입하면

$m-6=-9$ $\quad \therefore m=-3$

$m=-3$, $n=2$를 ㉡에 대입하면

$-18+2a=10$, $2a=28$ $\quad \therefore a=14$

$m=-3$, $n=2$, $a=14$를 ㉢에 대입하면

$-42+2b=-42-3b-5$, $5b=-5$ $\quad \therefore b=-1$

$\therefore a-b=14-(-1)=15$

04

Action x, z를 y에 대한 식으로 각각 나타낸 후 $x:y:z$를 가장 간단한 자연수의 비로 나타낸다.

$\begin{cases} x+4y-3z=0 & \cdots ㉠ \\ 4x-8y+3z=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$+$㉡을 하면 $5x-4y=0$, $5x=4y$ $\quad \therefore x=\dfrac{4}{5}y$

$x=\dfrac{4}{5}y$를 ㉠에 대입하면

$\dfrac{4}{5}y+4y-3z=0$, $3z=\dfrac{24}{5}y$ $\quad \therefore z=\dfrac{8}{5}y$

따라서 $x:y:z=\dfrac{4}{5}y:y:\dfrac{8}{5}y=4:5:8$이므로

$x=4k$, $y=5k$, $z=8k$(k는 자연수)라 하면 x, y, z의 최소공배수는 $40k$이다.

이때 $40k=200$이므로 $k=5$

따라서 $x=20$, $y=25$, $z=40$이므로

$x+y+z=20+25+40=85$

05

Action $\dfrac{1}{x+y}=A$, $\dfrac{1}{x-y}=B$로 놓고 A, B에 대한 연립방정식을 풀어 $x+y$, $x-y$의 값을 각각 구한다.

$\dfrac{1}{x+y}=A$, $\dfrac{1}{x-y}=B$라 하면 $\begin{cases} 2A-2B=5 & \cdots ㉠ \\ 3A+2B=15 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$+$㉡을 하면 $5A=20$ $\quad \therefore A=4$

$A=4$를 ㉠에 대입하면

$8-2B=5$, $-2B=-3$ $\quad \therefore B=\dfrac{3}{2}$

즉 $\dfrac{1}{x+y}=4$, $\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{3}{2}$이므로 $\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{4} & \cdots ㉢ \\ x-y=\dfrac{2}{3} & \cdots ㉣ \end{cases}$

㉢$+$㉣을 하면 $2x=\dfrac{11}{12}$ $\quad \therefore x=\dfrac{11}{24}$

$x=\dfrac{11}{24}$을 ㉢에 대입하면

$\dfrac{11}{24}+y=\dfrac{1}{4}$ $\quad \therefore y=-\dfrac{5}{24}$

따라서 $x=\dfrac{11}{24}$, $y=-\dfrac{5}{24}$를 $2x-\dfrac{2}{5}py=1$에 대입하면

$\dfrac{11}{12}+\dfrac{1}{12}p=1$, $\dfrac{1}{12}p=\dfrac{1}{12}$ $\quad \therefore p=1$

06

Action $x-1\ge 0$일 때와 $x-1<0$일 때로 나누어 푼다.

(i) $x-1\ge 0$일 때

$\begin{cases} x-1+y=5 \\ x-3y=-6 \end{cases}$ ➡ $\begin{cases} x+y=6 & \cdots ㉠ \\ x-3y=-6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면

$4y=12$ $\quad \therefore y=3$

$y=3$을 ㉠에 대입하면

$x+3=6$ $\quad \therefore x=3$

(ii) $x-1<0$일 때

$\begin{cases} -(x-1)+y=5 \\ x-3y=-6 \end{cases}$ ➡ $\begin{cases} -x+y=4 & \cdots ㉢ \\ x-3y=-6 & \cdots ㉣ \end{cases}$

㉢$+$㉣을 하면

$-2y=-2$ $\quad \therefore y=1$

$y=1$을 ㉢에 대입하면

$-x+1=4$ $\quad \therefore x=-3$

(i), (ii)에 의하여 연립방정식의 해는

$x=3$, $y=3$ 또는 $x=-3$, $y=1$

Lecture

$|A|=\begin{cases} A & (A\ge 0) \\ -A & (A<0) \end{cases}$

2. 연립일차방정식의 활용

최고수준 입문하기

P 78 – P 82

01 42 **02** 54 **03** 연필 : 350원, 공책 : 1200원
04 1200원 **05** 5개 **06** 46세
07 노새 : 7자루, 당나귀 : 5자루 **08** 남학생 : 18명, 여학생 : 12명
09 8문제 **10** 28 cm^2 **11** 7문제 **12** 8회
13 630명 **14** 308개 **15** 18400원
16 13200원, 8800원 **17** 24개 **18** 10일
19 60분 **20** 180 km **21** 4.5 km **22** 15분
23 10분 **24** 승호 : 분속 120 m, 연주 : 분속 80 m
25 배 : 시속 $\frac{50}{3}$ km, 강물 : 시속 $\frac{10}{3}$ km **26** 570 m
27 3 %의 설탕물 : 500 g, 6 %의 설탕물 : 250 g
28 280 g **29** 10 %
30 합금 A : 1500 g, 합금 B : 750 g

01 Action 큰 수를 x, 작은 수를 y로 놓고 연립방정식을 세운다.

큰 수를 x, 작은 수를 y라 하면

$$\begin{cases} x=4y+2 \\ 10y=2x+12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-4y=2 \\ x-5y=-6 \end{cases}$$

$\therefore x=34,\ y=8$

따라서 두 수의 합은

$34+8=42$

02 Action 처음 두 자리의 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y로 놓고 연립방정식을 세운다.

처음 두 자리의 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면

$$\begin{cases} 10x+y=6(x+y) \\ 10y+x=10x+y-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-5y=0 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$\therefore x=5,\ y=4$

따라서 처음 두 자리의 자연수는 54이다.

03 Action 연필 1자루의 가격을 x원, 공책 1권의 가격을 y원으로 놓고 연립방정식을 세운다.

연필 1자루의 가격을 x원, 공책 1권의 가격을 y원이라 하면

$$\begin{cases} 2x+y=1900 \\ 4x+3y=5000 \end{cases}$$

$\therefore x=350,\ y=1200$

따라서 연필 1자루의 가격은 350원, 공책 1권의 가격은 1200원이다.

04 Action 어른 1명의 입장료를 x원, 어린이 1명의 입장료를 y원으로 놓고 연립방정식을 세운다.

어른 1명의 입장료를 x원, 어린이 1명의 입장료를 y원이라 하면

$$\begin{cases} 3x+5y=7600 \\ 2x=3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+5y=7600 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$$

$\therefore x=1200,\ y=800$

따라서 어른 1명의 입장료는 1200원이다.

05 Action 사과를 x개, 배를 y개 샀다고 놓고 연립방정식을 세운다.

사과를 x개, 배를 y개 샀다고 하면

$$\begin{cases} 600x+1000y+2000=11200 \\ x+y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+5y=46 \\ x+y=12 \end{cases}$$

$\therefore x=7,\ y=5$

따라서 배를 5개 샀다.

06 Action 현재와 6년 전의 어머니와 아들의 나이에 대한 연립방정식을 세운다.

현재 어머니의 나이를 x세, 아들의 나이를 y세라 하면

$$\begin{cases} x+y=60 \\ x-6=5(y-6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=60 \\ x-5y=-24 \end{cases}$$

$\therefore x=46,\ y=14$

따라서 현재 어머니의 나이는 46세이다.

07 Action 노새의 짐을 x자루, 당나귀의 짐의 수를 y자루로 놓고 연립방정식을 세운다.

노새의 짐을 x자루, 당나귀의 짐을 y자루라 하면

$$\begin{cases} x+1=2(y-1) \\ x-1=y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-3 \\ x-y=2 \end{cases}$$

$\therefore x=7,\ y=5$

따라서 노새의 짐은 7자루, 당나귀의 짐은 5자루이다.

08 Action 주희네 반 학생 수와 평균에 대한 연립방정식을 세운다.

주희네 반 남학생 수를 x명, 여학생 수를 y명이라 하면

$$\begin{cases} x+y=30 \\ 65x+60y=63\times30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=30 \\ 13x+12y=378 \end{cases}$$

$\therefore x=18,\ y=12$

따라서 주희네 반 남학생 수는 18명, 여학생 수는 12명이다.

09 Action 문제의 수와 점수에 대한 연립방정식을 세운다.

객관식 문제 중 3점짜리 문제의 수를 x문제, 5점짜리 문제의 수를 y문제라 하면

$$\begin{cases} x+y=20 \\ 3x+5y+8\times3=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=20 \\ 3x+5y=76 \end{cases}$$

$\therefore x=12,\ y=8$

따라서 객관식 문제 중 5점짜리 문제의 수는 8문제이다.

10 Action 처음 직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm로 놓고 연립방정식을 세운다.

처음 직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면

$\begin{cases} 2(x+y)=22 \\ 2\{(x-2)+2y\}=26 \end{cases}$ ➡ $\begin{cases} x+y=11 \\ x+2y=15 \end{cases}$

$\therefore x=7, y=4$ …… 80%

따라서 처음 직사각형의 가로의 길이는 7 cm, 세로의 길이는 4 cm이므로 넓이는 $7\times4=28\ (\text{cm}^2)$ …… 20%

Lecture

(1) (직사각형의 둘레의 길이)
　$=2\times\{$(가로의 길이)$+$(세로의 길이)$\}$

(2) (직사각형의 넓이)
　$=$(가로의 길이)$\times$(세로의 길이)

11 Action 맞히면 a점을 얻고, 틀리면 b점을 잃는 시험에서 맞힌 문제가 x문제, 틀린 문제가 y문제일 때, 받은 점수는 $(ax-by)$점이다.

현성이가 맞힌 문제의 수를 x문제, 틀린 문제의 수를 y문제라 하면

$\begin{cases} x+y=20 \\ 5x-3y=44 \end{cases}$ $\therefore x=13, y=7$

따라서 현성이가 틀린 문제의 수는 7문제이다.

12 Action 계단을 올라가는 것을 $+$, 내려가는 것을 $-$로 생각하여 연립방정식을 세운다.

수경이가 이긴 횟수를 x회, 진 횟수를 y회라 하면 동환이가 이긴 횟수는 y회, 진 횟수는 x회이므로

$\begin{cases} 2x-y=14 \\ 2y-x=-4 \end{cases}$ $\therefore x=8, y=2$

따라서 수경이가 이긴 횟수는 8회이다.

Lecture

계단에 대한 문제

(1) 계단을 올라가는 것을 $+$, 내려가는 것을 $-$로 생각한다.

(2) 가위바위보를 하여 이기면 a계단 올라가고, 지면 b계단 내려갈 때, x회 이기고 y회 졌다면 위치의 변화는 $ax-by$이다.

(3) A, B 두 사람이 가위바위보를 할 때, A가 이긴 횟수를 x회, 진 횟수를 y회라 하면 B가 이긴 횟수는 y회, 진 횟수는 x회이다.
(단, 비기는 경우는 없다.)

13 Action 작년의 학생 수와 학생 수의 증가량에 대한 연립방정식을 세운다.

작년의 남학생 수를 x명, 여학생 수를 y명이라 하면

$\begin{cases} x+y=1000 \\ \frac{5}{100}x-\frac{10}{100}y=-10 \end{cases}$ ➡ $\begin{cases} x+y=1000 \\ x-2y=-200 \end{cases}$

$\therefore x=600, y=400$

따라서 작년의 남학생 수는 600명이므로 올해의 남학생 수는 $\left(1+\frac{5}{100}\right)\times600=630$(명)

14 Action 지난달 A제품의 생산량을 x개, B제품의 생산량을 y개로 놓고 연립방정식을 세운다.

지난달 A제품의 생산량을 x개, B제품의 생산량을 y개라 하면

$\begin{cases} x+y=500 \\ \left(1-\frac{12}{100}\right)x+\left(1+\frac{28}{100}\right)y=500 \end{cases}$

➡ $\begin{cases} x+y=500 \\ 11x+16y=6250 \end{cases}$

$\therefore x=350, y=150$

따라서 A제품의 지난달 생산량은 350개이므로 A제품의 이번 달 생산량은 $\left(1-\frac{12}{100}\right)\times350=308$(개)

15 Action 이번 달 통신 요금에 대한 연립방정식을 세운다.

진희의 지난달 휴대전화 사용 요금을 x원, 인터넷 사용 요금을 y원이라 하면

$\begin{cases} \left(1+\frac{15}{100}\right)x+\left(1+\frac{24}{100}\right)y=43200 \\ \left(1+\frac{20}{100}\right)(x+y)=43200 \end{cases}$

➡ $\begin{cases} 115x+124y=4320000 \\ x+y=36000 \end{cases}$

$\therefore x=16000, y=20000$

따라서 진희의 이번 달 휴대전화 사용 요금은

$\left(1+\frac{15}{100}\right)\times16000=18400$(원)

16 Action 두 티셔츠의 원가를 각각 x원, y원$(x>y)$으로 놓고 연립방정식을 세운다.

두 티셔츠의 원가를 각각 x원, y원$(x>y)$이라 하면

$\begin{cases} \left(1+\frac{10}{100}\right)x+\left(1+\frac{10}{100}\right)y=22000 \\ x-y=4000 \end{cases}$

➡ $\begin{cases} x+y=20000 \\ x-y=4000 \end{cases}$

$\therefore x=12000, y=8000$

따라서 두 티셔츠의 정가는 각각

$\left(1+\frac{10}{100}\right)\times12000=13200$(원),

$\left(1+\frac{10}{100}\right)\times8000=8800$(원)

17 Action 상품 A를 x개, 상품 B를 y개 판매하였다고 놓고 연립방정식을 세운다.

상품 A를 x개, 상품 B를 y개 판매하였다고 하면

$$\begin{cases} x+y=54 \\ \frac{50}{100}\times 300x+\frac{30}{100}\times 700y=9900 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=54 \\ 5x+7y=330 \end{cases}$$

$\therefore x=24,\ y=30$

따라서 상품 A를 24개 판매하였다.

18 Action 전체 일의 양을 1로 놓고 세준이와 재환이가 하루에 할 수 있는 일의 양을 각각 x, y라 한다.

전체 일의 양을 1로 놓고 세준이와 재환이가 하루에 할 수 있는 일의 양을 각각 x, y라 하면

$$\begin{cases} 6x+6y=1 \\ 9x+4y=1 \end{cases} \quad \therefore x=\frac{1}{15},\ y=\frac{1}{10}$$ …… 80%

따라서 재환이가 혼자서 이 일을 끝마치려면 10일이 걸린다.

…… 20%

19 Action 물탱크에 물을 가득 채웠을 때의 물의 양을 1로 놓는다.

물탱크에 물을 가득 채웠을 때의 물의 양을 1로 놓고 두 수도꼭지 A, B로 1분 동안 채울 수 있는 물의 양을 각각 x, y라 하면

$$\begin{cases} 20x+12(x+y)=1 \\ 30x+15y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32x+12y=1 \\ 30x+15y=1 \end{cases}$$

$\therefore x=\frac{1}{40},\ y=\frac{1}{60}$

따라서 수도꼭지 B로만 물을 가득 채우는 데 60분이 걸린다.

20 Action 버스를 타고 간 거리를 x km, 걸어간 거리를 y km로 놓고 연립방정식을 세운다.

버스를 타고 간 거리를 x km, 걸어간 거리를 y km라 하면

$$\begin{cases} x+y=183 \\ \frac{x}{60}+\frac{y}{3}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=183 \\ x+20y=240 \end{cases}$$

$\therefore x=180,\ y=3$

따라서 버스를 타고 간 거리는 180 km이다.

21 Action 거리, 속력, 시간의 단위를 맞춘 후 연립방정식을 세운다.

갈 때 걸은 거리를 x km, 올 때 걸은 거리를 y km라 하면

$$\begin{cases} y=x+0.5 \\ \frac{x}{4}+\frac{1}{6}+\frac{y}{3}=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x+0.5 \\ 3x+4y=16 \end{cases}$$

$\therefore x=2,\ y=2.5$

따라서 건우가 걸은 총 거리는

$2+2.5=4.5\,(\text{km})$

22 Action 두 사람이 만날 때까지 걸린 시간이 같음을 이용하여 연립방정식을 세운다.

성준이가 걸은 거리를 x m, 미영이가 걸은 거리를 y m라 하면

$$\begin{cases} x+y=2100 \\ \frac{x}{80}=\frac{y}{60} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2100 \\ 3x-4y=0 \end{cases}$$

$\therefore x=1200,\ y=900$ …… 80%

따라서 두 사람이 만날 때까지 걸린 시간은

$\frac{1200}{80}=15$(분) …… 20%

23 Action 형과 동생이 이동한 거리는 같음을 이용하여 연립방정식을 세운다.

형과 동생이 출발한 후 학교 정문에 도착할 때까지 걸린 시간을 각각 x분, y분이라 하면

$$\begin{cases} x=y+20 \\ 50x=150y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y+20 \\ x=3y \end{cases}$$

$\therefore x=30,\ y=10$

따라서 동생이 출발한 후 학교 정문에 도착할 때까지 걸린 시간은 10분이다.

24 Action 승호의 속력을 분속 x m, 연주의 속력을 분속 y m로 놓고 연립방정식을 세운다.

승호의 속력을 분속 x m, 연주의 속력을 분속 y m라 하면

$$\begin{cases} 10x+10y=2000 \\ 50x-50y=2000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=200 \\ x-y=40 \end{cases}$$

$\therefore x=120,\ y=80$

따라서 승호의 속력은 분속 120 m, 연주의 속력은 분속 80 m이다.

Lecture

트랙을 도는 문제

A, B 두 사람이 트랙의 같은 지점에서 동시에 출발하였을 때,

(1) 반대 방향으로 돌다 처음으로 만나면
(A, B가 이동한 거리의 합)=(트랙의 둘레의 길이)

(2) 같은 방향으로 돌다 처음으로 만나면
(A, B가 이동한 거리의 차)=(트랙의 둘레의 길이)

25 Action 강을 거슬러 올라갈 때와 강을 따라 내려올 때, 배의 속력과 강물의 속력 사이의 관계를 생각하여 연립방정식을 세운다.

정지한 물에서의 배의 속력을 시속 x km, 강물의 속력을 시속 y km라 하면

$$\begin{cases} 3(x-y)=40 \\ 2(x+y)=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-3y=40 \\ x+y=20 \end{cases}$$

$\therefore x=\frac{50}{3},\ y=\frac{10}{3}$

따라서 정지한 물에서의 배의 속력은 시속 $\frac{50}{3}$ km, 강물의 속력은 시속 $\frac{10}{3}$ km이다.

Lecture

흐르는 강물에서의 배의 속력에 대한 문제

정지한 물에서의 배의 속력을 시속 x km, 강물의 속력을 시속 y km라 하면

(1) 강을 거슬러 올라갈 때의 속력 ➡ 시속 $(x-y)$ km

(2) 강을 따라 내려올 때의 속력 ➡ 시속 $(x+y)$ km

26 Action (다리의 길이)+(열차의 길이)=(열차가 이동한 거리)임을 이용하여 연립방정식을 세운다.

다리의 길이를 x m, 화물 열차의 속력을 초속 y m라 하면 특급 열차의 속력은 초속 $2y$ m이므로

$$\begin{cases} x+180=50y \\ x+120=23\times 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-50y=-180 \\ x-46y=-120 \end{cases}$$

$\therefore x=570,\ y=15$

따라서 다리의 길이는 570 m이다.

27 Action 설탕물의 양과 설탕의 양에 대한 연립방정식을 세운다.

3 %의 설탕물의 양을 x g, 6 %의 설탕물의 양을 y g이라 하면

$$\begin{cases} x+y=750 \\ \frac{3}{100}x+\frac{6}{100}y=\frac{4}{100}\times 750 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=750 \\ x+2y=1000 \end{cases}$$

$\therefore x=500,\ y=250$

따라서 3 %의 설탕물 500 g, 6 %의 설탕물 250 g을 섞으면 된다.

Lecture

농도에 대한 문제

(1) (소금물 A의 양)+(소금물 B의 양)=(전체 소금물의 양)

(2) (소금물 A에 들어 있는 소금의 양)
+(소금물 B에 들어 있는 소금의 양)
=(전체 소금의 양)

28 Action 물을 더 넣어도 소금의 양은 변하지 않음을 이용하여 연립방정식을 세운다.

5 %의 소금물의 양을 x g, 10 %의 소금물의 양을 y g이라 하면 더 넣은 물의 양은 $2x$ g이므로

$$\begin{cases} x+y+2x=500 \\ \frac{5}{100}x+\frac{10}{100}y=\frac{3}{100}\times 500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y=500 \\ x+2y=300 \end{cases}$$

$\therefore x=140,\ y=80$ …… 80%

따라서 더 넣은 물의 양은

$2x=2\times 140=280$ (g) …… 20%

Lecture

소금의 양에 대한 문제

농도가 다른 두 소금물을 섞으면 농도는 변하지만 소금의 양은 변하지 않는다. 또, 소금물에 물을 더 넣거나 소금물의 물을 증발시켜도 소금의 양은 변하지 않는다.

29 Action 섞은 두 소금물의 소금의 양에 대한 연립방정식을 세운다.

그릇 A에 들어 있는 소금물의 농도를 x %, 그릇 B에 들어 있는 소금물의 농도를 y %라 하면

$$\begin{cases} \frac{x}{100}\times 100+\frac{y}{100}\times 200=\frac{8}{100}\times 300 \\ \frac{x}{100}\times 200+\frac{y}{100}\times 100=\frac{6}{100}\times 300 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y=24 \\ 2x+y=18 \end{cases}$$

$\therefore x=4,\ y=10$

따라서 그릇 B에 들어 있는 소금물의 농도는 10 %이다.

30 Action 구리와 아연의 양에 대한 연립방정식을 세운다.

필요한 합금 A의 양을 x g, 합금 B의 양을 y g이라 하면

$$\begin{cases} \frac{15}{100}x+\frac{10}{100}y=300 \\ \frac{15}{100}x+\frac{30}{100}y=450 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=6000 \\ x+2y=3000 \end{cases}$$

$\therefore x=1500,\ y=750$

따라서 합금 A는 1500 g, 합금 B는 750 g이 필요하다.

Lecture

합금과 식품에 대한 문제

(1) (금속의 양)$=\frac{(\text{금속의 백분율})}{100}\times$(합금의 양)

(2) (영양소의 양)$=\frac{(\text{영양소의 백분율})}{100}\times$(식품의 양)

최고 수준 완성하기

P 83–P 85

01 24 **02** 사과 : 6개, 복숭아 : 9개 **03** 26.6점
04 200명 **05** 600명
06 상품 A : 6000원, 상품 B : 2000원 **07** 26
08 1시간 12분 **09** 준석 : 분속 300 m, 시연 : 분속 150 m
10 140 m **11** 8 % **12** 560 kcal

01 Action 처음 수의 백의 자리의 숫자, 십의 자리의 숫자, 일의 자리의 숫자를 각각 x, y, z로 놓고 연립방정식을 세운다.

처음 수의 백의 자리의 숫자를 x, 십의 자리의 숫자를 y, 일의 자리의 숫자를 z라 하면

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ y+z=2x \\ 100z+10y+x=100x+10y+z+99 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=9 & \cdots ㉠ \\ 2x-y-z=0 & \cdots ㉡ \\ x-z=-1 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠+㉡을 하면 $3x=9$ $\quad\therefore x=3$

$x=3$을 ㉢에 대입하면

$3-z=-1$ $\quad\therefore z=4$

$x=3$, $z=4$를 ㉠에 대입하면

$3+y+4=9$ $\quad\therefore y=2$

따라서 처음 수의 각 자리의 숫자의 곱은 $3\times2\times4=24$

02 Action 주문한 사과와 복숭아의 개수와 금액에 대한 연립방정식을 세운다.

처음 주문한 사과의 개수를 x개, 복숭아의 개수를 y개라 하면

$$\begin{cases} x+y=15 \\ 800x+1000y=1000x+800y+600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=15 \\ x-y=-3 \end{cases}$$

$\therefore x=6$, $y=9$

따라서 처음 주문한 사과의 개수는 6개, 복숭아의 개수는 9개이다.

03 Action 합격자의 평균을 x점, 불합격자의 평균을 y점으로 놓고 연립방정식을 세운다.

합격자의 평균을 x점, 불합격자의 평균을 y점이라 하면

(전체 지원자의 평균)$=\dfrac{10x+50y}{60}=\dfrac{x+5y}{6}$(점)

(합격자의 최저 점수)$=\dfrac{x+5y}{6}+1=x-5$이므로

$5x-5y=36$ $\quad\cdots ㉠$

또, $3y=2x+10$이므로 $2x-3y=-10$ $\quad\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=\dfrac{158}{5}=31.6$, $y=\dfrac{122}{5}=24.4$

따라서 합격자의 최저 점수는 $31.6-5=26.6$(점)

04 Action 지원자의 수를 x명, 불합격자의 수를 y명으로 놓고 연립방정식을 세운다.

지원자의 수를 x명, 불합격자의 수를 y명이라 하면

$$\begin{cases} x=100+y \\ \dfrac{5}{8}x=\dfrac{3}{5}\times100+\dfrac{7}{11}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=100 \\ 55x-56y=5280 \end{cases}$$

$\therefore x=320$, $y=220$ $\quad\cdots\cdots$ 80%

따라서 남자 지원자의 수는

$\dfrac{5}{8}\times320=200$(명) $\quad\cdots\cdots$ 20%

Lecture

비율에 대한 문제

A와 B의 비가 $m:n$일 때

$A=\dfrac{m}{m+n}\times(A+B)$, $B=\dfrac{n}{m+n}\times(A+B)$

05 Action 올해 두 기숙사에 있는 학생 수에 대한 연립방정식을 세운다.

작년에 A기숙사에 있던 학생 수를 x명, B기숙사에 있던 학생 수를 y명이라 하면

$$\begin{cases} \dfrac{70}{100}x+\dfrac{40}{100}y=580 \\ \dfrac{30}{100}x+\dfrac{60}{100}y=420 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x+4y=5800 \\ x+2y=1400 \end{cases}$$

$\therefore x=600$, $y=400$

따라서 작년에 A기숙사에 있던 학생 수는 600명이다.

06 Action 상품 A의 원가를 x원, 상품 B의 원가를 y원으로 놓고 연립방정식을 세운다.

상품 A의 원가를 x원, 상품 B의 원가를 y원이라 하면

$$\begin{cases} x+y=8000 \\ \left(1+\dfrac{30}{100}\right)\times\left(1-\dfrac{10}{100}\right)x+\left(1+\dfrac{30}{100}\right)\times\left(1-\dfrac{20}{100}\right)y \\ \qquad =8000+1100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=8000 \\ 9x+8y=70000 \end{cases}$$

$\therefore x=6000$, $y=2000$

따라서 상품 A의 원가는 6000원, 상품 B의 원가는 2000원이다.

07 Action 전체 일의 양을 1로 놓고 연립방정식을 세운다.

전체 일의 양을 1이라 하면 소희는 하루에 $\dfrac{1}{x}$만큼, 유이는 하루에 $\dfrac{1}{y}$만큼 일을 하므로

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{13}{84} \\ 5\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{13}{84} \\ \dfrac{7}{x}+\dfrac{6}{y}=1 \end{cases}$$

$\dfrac{1}{x}=X$, $\dfrac{1}{y}=Y$라 하면

$$\begin{cases} X+Y=\dfrac{13}{84} \\ 7X+6Y=1 \end{cases} \quad \therefore X=\dfrac{1}{14},\ Y=\dfrac{1}{12}$$

따라서 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{14}$, $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12}$이므로 $x=14$, $y=12$

$\therefore x+y=14+12=26$

08 Action 전체 일의 양을 1로 놓고 A, B, C 세 사람이 1시간 동안 할 수 있는 일의 양을 각각 x, y, z로 놓는다.

전체 일의 양을 1로 놓고 A, B, C 세 사람이 1시간 동안 할 수 있는 일의 양을 각각 x, y, z라 하면

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \frac{3}{2}(x+y)=1 \\ 2(y+z)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 & \cdots ㉠ \\ 3x+3y=2 & \cdots ㉡ \\ 2y+2z=1 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠×3−㉡을 하면 $3z=1$ $\quad\therefore z=\frac{1}{3}$

$z=\frac{1}{3}$을 ㉢에 대입하면 $2y+\frac{2}{3}=1,\ 2y=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore y=\frac{1}{6}$

$y=\frac{1}{6}$을 ㉡에 대입하면 $3x+\frac{1}{2}=2,\ 3x=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}$

따라서 A, C 두 사람이 1시간 동안 할 수 있는 일의 양은 각각 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$이므로 A, C 두 사람이 같이 도배를 할 때 걸리는 시간은 $1\div\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{6}{5}$(시간), 즉 1시간 12분이다.

09 Action 두 사람이 40분 동안 걸은 거리의 합은 호수의 둘레의 길이의 2배와 같음을 이용하여 연립방정식을 세운다.

준석이의 속력을 분속 x m, 시연이의 속력을 분속 y m라 하면

$$\begin{cases} 40x+40y=18000 \\ 50x-40y=9000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=450 \\ 5x-4y=900 \end{cases}$$

$\therefore x=300,\ y=150$

따라서 준석이의 속력은 분속 300 m, 시연이의 속력은 분속 150 m이다.

10 Action 두 열차가 이동한 거리에 대한 연립방정식을 세운다.

A열차의 길이를 x m, 속력을 초속 y m라 하면 B열차의 길이는 $(x-40)$ m, 속력은 초속 $(y+10)$ m이므로

$$\begin{cases} x+500=16y \\ (x-40)+500=12(y+10) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-16y=-500 \\ x-12y=-340 \end{cases}$$

$\therefore x=140,\ y=40$

따라서 A열차의 길이는 140 m이다.

11 Action 소금의 양은 변하지 않음을 이용하여 연립방정식을 세운다.

5 %의 소금물 x g과 10 %의 소금물 y g을 섞어서 7 %의 소금물을 만들려고 했다고 하면

$\frac{5}{100}x+\frac{10}{100}y=\frac{7}{100}(x+y)$ $\quad\therefore x=\frac{3}{2}y$ $\quad\cdots ㉠$

한편, 두 소금물의 양을 바꾸어 넣었을 때 만들어지는 소금물의 농도를 a %라 하면

$\frac{5}{100}y+\frac{10}{100}x=\frac{a}{100}(x+y)$

$\therefore a(x+y)=10x+5y$ $\quad\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면 $a\left(\frac{3}{2}y+y\right)=10\times\frac{3}{2}y+5y$

$\frac{5}{2}ay=20y$ $\quad\therefore a=8$

따라서 두 소금물의 양을 바꾸어 넣었을 때 만들어지는 소금물의 농도는 8 %이다.

12 Action 철분의 양과 가격의 비에 대한 연립방정식을 세운다.

구매한 식품 A의 양을 x g, 식품 B의 양을 y g이라 하면

$$\begin{cases} \frac{0.4}{100}x+\frac{0.8}{100}y=13.6 \\ \frac{380}{100}x : \frac{950}{100}y=1:3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3400 \\ 6x-5y=0 \end{cases}$$

$\therefore x=1000,\ y=1200$ ······ 80%

따라서 구매한 두 식품 A, B의 열량의 합은

$\frac{32}{100}\times1000+\frac{20}{100}\times1200=560$ (kcal) ······ 20%

최고 수준 뛰어넘기

P 86– P 87

01 10곡	**02** $a=8,\ b=500$	**03** 95만 원
04 120분	**05** 시속 $\frac{70}{3}$ km	**06** $a=20,\ b=5$

01 Action 시간을 분으로 바꾼 후 시간에 대한 연립방정식을 세운다.

처음에 8분짜리 x곡과 6분짜리 y곡을 연주하기로 계획했었다고 하면 곡과 곡 사이에 1분 동안 쉬는 시간이 있으므로 총 쉬는 시간은 $(x+y-1)$분이다.

처음 계획대로 연주하는 데 걸리는 시간은 1시간 45분, 즉 105분이므로

$8x+6y+(x+y-1)=105$ $\quad\therefore 9x+7y=106$ $\quad\cdots ㉠$

곡의 수가 바뀌어 연주되었을 때 걸린 시간은 1시간 57분, 즉 117분이므로

$6x+8y+(x+y-1)=117$ $\quad\therefore 7x+9y=118$ $\quad\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=4,\ y=10$

따라서 처음에 연주하려고 계획했었던 6분짜리 곡은 모두 10곡이었다.

02 Action 9월 추가 요금은 $(89-a)b$원, 10월 추가 요금은 $(102-a)b$원이다.

$$\begin{cases} 3500+(89-a)b=44000 \\ 3500+(102-a)b=50500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 89b-ab=40500 \\ 102b-ab=47000 \end{cases}$$

$\therefore a=8,\ b=500$

03 Action 목수 1명, 미장공 1명, 철근공 1명의 1일 임금을 각각 x만 원, y만 원, z만 원으로 놓고 연립방정식을 세운다.

목수 1명, 미장공 1명, 철근공 1명의 1일 임금을 각각 x만 원, y만 원, z만 원이라 하면

$$\begin{cases} 5x+3y+2z=78 & \cdots ㉠ \\ 6x+y+5z=91 & \cdots ㉡ \\ 4x+5y+2z=89 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠$\times 5-$㉡$\times 2$를 하면 $13x+13y=208$

$\therefore x+y=16$ $\cdots$ ㉣

㉠$-$㉢을 하면 $x-2y=-11$ $\cdots$ ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $x=7$, $y=9$

$x=7$, $y=9$를 ㉠에 대입하면

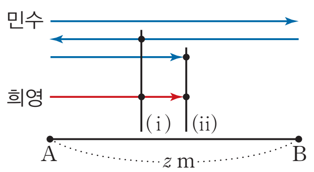
$35+27+2z=78$, $2z=16$ $\quad\therefore z=8$

따라서 오늘 받을 총 임금은

$5x+4y+3z=35+36+24=95$(만 원)

04 Action 민수와 희영이가 처음 만날 때와 두 번째 만날 때, 이동 거리에 대한 연립방정식을 세운다.

민수의 속력을 분속 x m, 희영이의 속력을 분속 y m, A, B 두 지점 사이의 거리를 z m라 하자.



(i) 민수와 희영이가 처음 만날 때,
민수와 희영이가 40분 동안 이동한 거리의 합은 A, B 두 지점 사이의 거리의 2배이므로
$40x+40y=2z$ $\quad\therefore 20x+20y=z$ $\cdots$ ㉠

(ii) 민수와 희영이가 두 번째 만날 때,
민수가 20분 동안 이동한 거리는 희영이가 40분 동안 이동한 거리의 2배와 20분 동안 이동한 거리의 합과 같으므로
$20x=2\times 40y+20y$ $\quad\therefore x=5y$ $\cdots$ ㉡

(i), (ii)에 의하여 ㉡을 ㉠에 대입하면

$100y+20y=z$ $\quad\therefore y=\dfrac{z}{120}$

따라서 희영이가 A지점에서 B지점까지 가는 데 걸리는 시간은 $\dfrac{z}{y}=z\div y=z\div\dfrac{z}{120}=z\times\dfrac{120}{z}=120$(분)이다.

05 Action 떠내려간 시간을 제외하고 거슬러 올라갈 때와 내려갈 때 걸린 시간을 각각 구해 본다.

정지한 물에서의 배의 속력을 시속 x km, 강물의 속력을 시속 y km라 하자.

떠내려간 시간을 제외하면 거슬러 올라갈 때 걸린 시간은 $2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$(시간), 내려갈 때 걸린 시간은 $2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$(시간)이다.

또, 20분간 떠내려간 거리는 $\dfrac{1}{3}y$ km이므로 거슬러 올라간 거리는 $\left(20+\dfrac{1}{3}y\right)$ km, 내려간 거리는 20 km이다.

$$\begin{cases} \dfrac{4}{3}(x-y)=20+\dfrac{1}{3}y \\ \dfrac{2}{3}(x+y)=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-5y=60 \\ x+y=30 \end{cases}$$

$\therefore x=\dfrac{70}{3}$, $y=\dfrac{20}{3}$

따라서 정지한 물에서의 배의 속력은 시속 $\dfrac{70}{3}$ km이다.

06 Action 두 비커 A, B에 들어 있는 소금물을 섞은 후 각각의 소금물의 농도에 대한 연립방정식을 세운다.

(i) 비커 A에 들어 있는 소금물의 반을 비커 B에 넣었을 때,
비커 A의 소금물의 양 : 400 g
비커 A의 소금의 양 : $\dfrac{a}{100}\times 400=4a$ (g)
비커 B의 소금물의 양 : $400+800=1200$ (g)
비커 B의 소금의 양 :
$\dfrac{a}{100}\times 400+\dfrac{b}{100}\times 800=4a+8b$ (g)

(ii) 비커 B에 들어 있는 소금물의 반을 비커 A에 넣었을 때,
비커 A의 소금물의 양 : $400+600=1000$ (g)
비커 A의 소금의 양 : $4a+\dfrac{1}{2}(4a+8b)=6a+4b$ (g)
비커 B의 소금물의 양 : 600 g
비커 B의 소금의 양 : $\dfrac{1}{2}(4a+8b)=2a+4b$ (g)

이때 비커 A에 들어 있는 소금물의 농도는 14 %이므로

$\dfrac{6a+4b}{1000}\times 100=14$ $\quad\therefore 3a+2b=70$ $\cdots$ ㉠

비커 B에 들어 있는 소금물의 농도는 10 %이므로

$\dfrac{2a+4b}{600}\times 100=10$ $\quad\therefore a+2b=30$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=20$, $b=5$

교과서 속 창의 사고력 P 88– P 90

01 181	**02** ㉠ 3, ㉡ 0	**03** 10	**04** 8명
05 15 km	**06** 약품 A : 25 g, 약품 B : 175 g		

01 Action 다섯 개의 방정식을 각 변끼리 더하여 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$의 값을 먼저 구한다.

다섯 개의 방정식을 각 변끼리 더하면

$6(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=186$

$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=31 \quad \cdots ㉠$

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=48 & \cdots ㉡ \\ x_1+x_2+x_3+x_4+2x_5=96 & \cdots ㉢ \end{cases}$

㉠을 ㉡, ㉢에 대입하면

$x_4+31=48 \qquad \therefore x_4=17$

$x_5+31=96 \qquad \therefore x_5=65$

$\therefore 3x_4+2x_5=3\times17+2\times65=181$

02 Action 천의 자리의 덧셈과 일의 자리의 덧셈을 이용하여 연립방정식을 세운다.

천의 자리의 덧셈에서 $1+B=A$

$\therefore A-B=1 \quad \cdots ①$

이때 $A>B$이므로 일의 자리의 덧셈에서 $A+A=10+B$

$\therefore 2A-B=10 \quad \cdots ②$

①, ②를 연립하여 풀면 $A=9$, $B=8$

$A=9$, $B=8$을 주어진 식에 대입하면 오른쪽과 같다.

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & \boxed{㉠} & 8 & 9 \\ + & 8 & 0 & 1 & 9 \\ \hline & 9 & 4 & \boxed{㉡} & 8 \end{array}$$

$9+9=18$이므로

$1+8+1=10 \qquad \therefore ㉡=0$

$1+㉠+0=4 \qquad \therefore ㉠=3$

03 Action 서로 다른 4개의 자연수를 $a, b, c, d\,(a<b<c<d)$로 놓고 서로 다른 두 수의 합을 이용하여 연립방정식을 세운다.

서로 다른 4개의 자연수를 $a, b, c, d\,(a<b<c<d)$라 하면 서로 다른 두 수의 합은 $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$, $c+d$이다.

$a<b<c<d$에서 $a+b<a+c<a+d<b+d<c+d$, $a+b<a+c<b+c<b+d<c+d$이므로

$\begin{cases} a+b=15 & \cdots ㉠ \\ a+c=20 & \cdots ㉡ \\ b+d=35 & \cdots ㉢ \\ c+d=40 & \cdots ㉣ \end{cases}$

이때 $a+d$와 $b+c$는 25 또는 30 중 하나이다.

a, b, c, d 중 짝수는 하나뿐이고, (짝수)+(홀수)=(홀수), (홀수)+(홀수)=(짝수)이므로 a, c, d는 홀수이고, b는 짝수이다.

따라서 $a+d$는 짝수이므로 $a+d=30 \quad \cdots ㉤$

$b+c$는 홀수이므로 $b+c=25$

㉠+㉢을 하면 $a+2b+d=50 \quad \cdots ㉥$

㉤을 ㉥에 대입하면

$2b+30=50$, $2b=20 \qquad \therefore b=10$

따라서 구하는 짝수는 10이다.

04 Action 각 요일을 신청한 학생 수를 미지수로 놓고 연립방정식을 세운다.

월요일, 화요일, 수요일, 목요일, 금요일을 신청한 학생 수를 각각 a명, b명, c명, d명, e명이라 하면

$\begin{cases} a+b+c+d+e=34 & \cdots ㉠ \\ a+c=17 & \cdots ㉡ \\ a+e=13 & \cdots ㉢ \\ b+c+d=21 & \cdots ㉣ \\ d+e=9 & \cdots ㉤ \end{cases}$

㉡+㉢+㉣+㉤을 하면 $2a+b+2c+2d+2e=60 \quad \cdots ㉥$

㉠×2−㉥을 하면 $b=8$

따라서 화요일을 신청한 학생 수는 8명이다.

05 Action 배를 타고 하류로 내려가는 속력과 상류로 올라오는 속력을 각각 구해 본다.

정지한 물에서의 배의 속력을 시속 x km, 강물의 속력을 시속 y km라 하면

$\begin{cases} 3(x+y)=30 \\ 4(x-y)=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=10 \\ x-y=\dfrac{15}{2} \end{cases}$

즉 배를 타고 하류로 내려가는 속력은 시속 10 km, 상류로 올라오는 속력은 시속 $\dfrac{15}{2}$ km이다.

이때 왕복하는 데 3시간 30분이 걸리는 관광 코스를 짜려고 할 때, 선착장에서 배를 타고 하류로 a km를 내려갔다가 돌아온다고 하면

$\dfrac{a}{10}+\dfrac{2a}{15}=\dfrac{7}{2}$, $7a=105 \qquad \therefore a=15$

따라서 선착장에서 배를 타고 하류로 15 km를 내려갔다가 돌아오면 된다.

06 Action 먼저 만들려고 하는 약품 200 g에 들어 있는 원료 a와 원료 b의 양을 각각 구해 본다.

만들려고 하는 약품 200 g에 들어 있는 원료 a와 원료 b의 양의 비가 7 : 3이므로

원료 a의 양은 $200\times\dfrac{7}{7+3}=140$ (g)

원료 b의 양은 $200\times\dfrac{3}{7+3}=60$ (g)

필요한 약품 A의 양을 x g, 약품 B의 양을 y g이라 하면

	약품 A	약품 B	만들려고 하는 약품
원료 a	$\frac{3}{5}x$ g	$\frac{5}{7}y$ g	140 g
원료 b	$\frac{2}{5}x$ g	$\frac{2}{7}y$ g	60 g

$\begin{cases} \dfrac{3}{5}x+\dfrac{5}{7}y=140 \\ \dfrac{2}{5}x+\dfrac{2}{7}y=60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21x+25y=4900 \\ 7x+5y=1050 \end{cases}$

$\therefore x=25$, $y=175$

따라서 약품 A는 25 g, 약품 B는 175 g이 필요하다.

V. 함수

1. 일차함수와 그래프 (1)

최고수준 입문하기

P 94 – P 97

01 ②, ⑤	**02** 0	**03** 5	
04 $M=4,\ m=1$		**05** ②, ④	**06** $a=0,\ b\neq3$
07 -4	**08** 6	**09** $\frac{1}{2}$	**10** $(1,\ 1)$
11 10	**12** $a=\frac{7}{3},\ b=7$		**13** 6
14 4	**15** $-\frac{2}{5}$	**16** 4	**17** 12
18 $\frac{4}{5}$	**19** ㉡, ㉢	**20** 제3사분면	**21** 제3사분면
22 $a=-\frac{3}{2},\ b\neq-4$		**23** 0	**24** -5

01 Action x의 값이 변함에 따라 y의 값이 하나씩 정해지는지 알아본다.

① 자연수 x의 값이 정해짐에 따라 y의 값이 0, 1 중 오직 하나로 정해지므로 y는 x의 함수이다.

② $x=4$일 때, $y=1,\ 2,\ 4$로 y의 값이 하나로 정해지지 않는다. 즉 y는 x의 함수가 아니다.

③ $y=100x$

④ $16=\frac{1}{2}\times x\times y \qquad \therefore\ y=\frac{32}{x}$

⑤ $x=3$일 때, $y=-3,\ 3$으로 y의 값이 하나로 정해지지 않는다. 즉 y는 x의 함수가 아니다.

따라서 y가 x의 함수가 아닌 것은 ②, ⑤이다.

02 Action $f(2),\ f(3)$의 값을 각각 구하여 k의 값을 구한다.

$f(2)-f(3)=3\times2-3\times3=-3$

따라서 $k=-3$이므로

$g(k)=g(-3)=\frac{6}{-3}+2=0$

> **Lecture**
> 함수 $y=f(x)$에서 $x=a$에서의 함숫값
> ➡ $x=a$에서의 y의 값
> ➡ $f(a)$

03 Action $f(4)=7$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

$f(4)=4a+2-(a+4)=7$에서

$3a-2=7,\ 3a=9$

$\therefore\ a=3$

따라서 $f(x)=3x+2-(3+x)=2x-1$이므로

$f(3)=6-1=5$

04 Action $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10$의 약수의 개수를 각각 구한다.

$f(1)=1$

$f(2)=f(3)=f(5)=f(7)=2$

$f(4)=f(9)=3$

$f(6)=f(8)=f(10)=4$

$\therefore\ M=4,\ m=1$

05 Action 일차함수는 x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내었을 때, $y=ax+b(a\neq0)$의 꼴이다.

① $y=60x$

② $y=x^2$

③ $y=24-x$

④ $xy=100$에서 $y=\frac{100}{x}$

⑤ $y=2(5+x)$에서 $y=2x+10$

따라서 y가 x에 대한 일차함수가 아닌 것은 ②, ④이다.

06 Action 함수 $y=ax^2+bx+c$가 x에 대한 일차함수가 되려면 $a=0,\ b\neq0$이어야 한다.

$y=x(ax+3)-bx+8$에서 $y=ax^2+(3-b)x+8$

이 함수가 x에 대한 일차함수가 되려면

$a=0,\ 3-b\neq0 \qquad \therefore\ a=0,\ b\neq3$

07 Action 일차함수의 식에 $x=1,\ y=-2$와 $x=3,\ y=6$을 각각 대입한다.

$f(1)=-2$에서 $a+b=-2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(3)=6$에서 $3a+b=6$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=-6$ $\cdots\cdots$ 40%

따라서 $f(x)=4x-6$이므로

$f(2)=8-6=2,\ f(0)=0-6=-6$ $\cdots\cdots$ 40%

$\therefore\ f(2)+f(0)=2+(-6)=-4$ $\cdots\cdots$ 20%

08 Action $f(2)=-2,\ g(4)=5$를 이용하여 $a,\ b$의 값을 각각 구한다.

$f(2)=-2$에서 $2a+4=-2$

$2a=-6 \qquad \therefore\ a=-3$

$g(4)=5$에서 $6+b=5 \qquad \therefore\ b=-1$

따라서 $f(x)=-3x+4,\ g(x)=\frac{3}{2}x-1$이므로

$f(-1)=3+4=7$

$g(1)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

$\therefore\ f(-1)-2g(1)=7-2\times\frac{1}{2}=6$

09 Action 평행이동한 그래프의 식을 구하고 $x=-k,\ y=k$를 대입한다.

$y=3x-1$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=3x-1+3 \qquad \therefore\ y=3x+2$

$y=3x+2$에 $x=-k$, $y=k$를 대입하면

$k=-3k+2$, $4k=2$ $\quad\therefore k=\dfrac{1}{2}$

Lecture

일차함수의 그래프의 평행이동

(1) $y=ax \xrightarrow[k\text{만큼 평행이동}]{y\text{축의 방향으로}} y=ax+k$

(2) $y=ax+b \xrightarrow[k\text{만큼 평행이동}]{y\text{축의 방향으로}} y=ax+b+k$

10 Action x좌표와 y좌표가 같은 점의 좌표를 (a, a)로 놓는다.

$y=-3x+k$에 $x=-2$, $y=10$을 대입하면

$10=6+k$ $\quad\therefore k=4$

$y=-3x+4$의 그래프 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 같은 점의 좌표를 (a, a)라 하면

$a=-3a+4$, $4a=4$ $\quad\therefore a=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(1, 1)$이다.

11 Action 평행이동한 그래프의 식에서 x절편, y절편을 각각 구한다.

$y=\dfrac{2}{3}x-1$의 그래프를 y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\dfrac{2}{3}x-1+5$ $\quad\therefore y=\dfrac{2}{3}x+4$

$y=\dfrac{2}{3}x+4$에 $y=0$을 대입하면

$0=\dfrac{2}{3}x+4$ $\quad\therefore x=-6$

$y=\dfrac{2}{3}x+4$에 $x=0$을 대입하면 $y=4$

따라서 $a=-6$, $b=4$이므로 $b-a=4-(-6)=10$

Lecture

(1) x절편 : 일차함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표
➡ $y=0$일 때의 x의 값

(2) y절편 : 일차함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표
➡ $x=0$일 때의 y의 값

12 Action 일차함수의 그래프의 x절편이 m이면 그래프가 점 $(m, 0)$을 지난다.

$y=2x+6$에 $y=0$을 대입하면

$0=2x+6$ $\quad\therefore x=-3$

즉 $y=ax+7$의 그래프의 x절편이 -3이므로

$y=ax+7$에 $x=-3$, $y=0$을 대입하면

$0=-3a+7$ $\quad\therefore a=\dfrac{7}{3}$

이때 $y=\dfrac{7}{3}x+7$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{3}x+b$의 그래프와 y절편이 같으므로 $b=7$

13 Action 일차함수 $y=ax+b$의 그래프의 기울기는 $\dfrac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}=a$이다.

$y=ax-5$에 $x=3$, $y=-3$을 대입하면

$-3=3a-5$, $3a=2$ $\quad\therefore a=\dfrac{2}{3}$

즉 $(\text{기울기})=\dfrac{(y\text{의 값의 증가량})}{7-(-2)}=\dfrac{2}{3}$이므로

$(y\text{의 값의 증가량})=6$

14 Action $f(b)-4b=f(a)-4a$에서 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$의 값을 구한다.

$f(b)-4b=f(a)-4a$에서

$f(b)-f(a)=4(b-a)$ $\quad\therefore \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=4$

즉 일차함수 $y=f(x)$의 그래프의 기울기는 4이다.

$\therefore \dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=(\text{기울기})=4$

15 Action 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 일차함수의 기울기는 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)$이다. (단, $x_1\neq x_2$)

$y=ax+1$의 그래프가 두 점 $(-1, k+1)$, $(4, k)$를 지나므로

$a=(\text{기울기})=\dfrac{k-(k+1)}{4-(-1)}=-\dfrac{1}{5}$

즉 $y=-\dfrac{1}{5}x+1$에 $x=4$, $y=k$를 대입하면

$k=-\dfrac{4}{5}+1=\dfrac{1}{5}$

$\therefore a-k=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5}=-\dfrac{2}{5}$

16 Action 세 점이 한 직선 위에 있으므로 세 점 중 어느 두 점을 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는 모두 같다.

세 점이 한 직선 위에 있으므로 두 점 $(-1, -2)$, $(2, 7)$을 지나는 일차함수의 그래프의 기울기와 두 점 $(2, 7)$, $(k, 2k+5)$를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는 같다.

두 점 $(-1, -2)$, $(2, 7)$을 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는

$\dfrac{7-(-2)}{2-(-1)}=\dfrac{9}{3}=3$

두 점 $(2, 7)$, $(k, 2k+5)$를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기도 3이므로

$\dfrac{2k+5-7}{k-2}=3$, $\dfrac{2k-2}{k-2}=3$

$2k-2=3(k-2)$, $2k-2=3k-6$

$\therefore k=4$

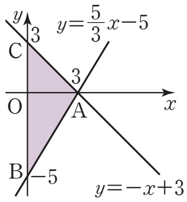
Lecture

한 직선 위에 있는 세 점

세 점이 한 직선 위에 있으면 어느 두 점을 택하여 기울기를 구해도 기울기는 항상 같다.
즉 세 점 A, B, C를 지나는 직선에서
(두 점 A, B를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기)
=(두 점 B, C를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기)
=(두 점 A, C를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기)

17 **Action** 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 구한다.

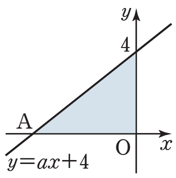
$y=\frac{5}{3}x-5$의 그래프의 x절편은 3,
y절편은 -5이므로
$A(3, 0)$, $B(0, -5)$
$y=-x+3$의 그래프의 x절편은 3,
y절편은 3이므로 $C(0, 3)$



$\therefore\ \triangle ACB=\frac{1}{2}\times\{3-(-5)\}\times3=12$

18 **Action** $a>0$이고 y절편이 4임을 이용하여 그래프를 그려 본다.

$y=ax+4$의 그래프의 y절편이 4이고, $a>0$이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이때 색칠한 부분의 넓이가 10이므로



$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times4=10 \qquad \therefore\ \overline{OA}=5$
따라서 점 A의 좌표가 $(-5, 0)$이므로
$y=ax+4$에 $x=-5$, $y=0$을 대입하면
$0=-5a+4 \qquad \therefore\ a=\frac{4}{5}$

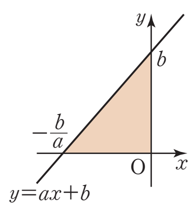
다른 풀이

일차함수 $y=ax+4$의 그래프의 x절편은 $-\frac{4}{a}$, y절편은 4이므로 색칠한 부분의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\left|-\frac{4}{a}\right|\times4=10$
이때 $a>0$이므로 $\frac{1}{2}\times\frac{4}{a}\times4=10$
$\frac{8}{a}=10 \qquad \therefore\ a=\frac{4}{5}$

Lecture

일차함수의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이

일차함수 $y=ax+b$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림과 같이 항상 직각삼각형이다.
$\therefore$ (넓이)$=\frac{1}{2}\times|x$절편$|\times|y$절편$|$
$=\frac{1}{2}\times\left|-\frac{b}{a}\right|\times|b|$



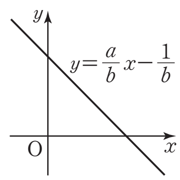
19 **Action** 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 $a>0$일 때 오른쪽 위로 향하는 직선이고, $a<0$일 때 오른쪽 아래로 향하는 직선이다.

㉠ $y=2x+1$의 그래프를 y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이다.
㉡ 기울기가 2이므로 x의 값이 2만큼 증가할 때, y의 값은 4만큼 증가한다.
㉢ $-1=2\times2-5$이므로 점 $(2, -1)$을 지난다.
또, 기울기가 양수이므로 오른쪽 위로 향하는 직선이다.
㉣ $y=2x-5$에 $y=0$을 대입하면
$0=2x-5$, $2x=5 \qquad \therefore\ x=\frac{5}{2}$
$y=-2x-5$에 $y=0$을 대입하면
$0=-2x-5$, $2x=-5 \qquad \therefore\ x=-\frac{5}{2}$
즉 $y=2x-5$의 그래프의 x절편은 $\frac{5}{2}$이고, $y=-2x-5$의 그래프의 x절편은 $-\frac{5}{2}$이므로 x축 위에서 만나지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢이다.

20 **Action** 그래프의 모양과 그래프가 y축과 만나는 부분을 확인하여 a, b의 부호를 각각 구한다.

$y=-ax+b$의 그래프가 오른쪽 아래로 향하는 직선이므로
$-a<0 \qquad \therefore\ a>0$ …… 25%
또, y축과 음의 부분에서 만나므로 $b<0$ …… 25%
즉 $\frac{a}{b}<0$, $-\frac{1}{b}>0$이므로 일차함수
$y=\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. …… 30%



따라서 제 3사분면을 지나지 않는다. …… 20%

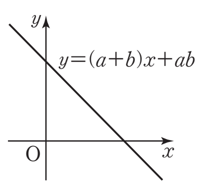
Lecture

일차함수 $y=ax+b$의 그래프의 성질

일차함수 $y=ax+b$의 그래프가
(1) 오른쪽 위로 향하는 직선이면 ➡ $a>0$
오른쪽 아래로 향하는 직선이면 ➡ $a<0$
(2) y축과 양의 부분에서 만나면 ➡ $b>0$
y축과 음의 부분에서 만나면 ➡ $b<0$
(3) 원점을 지나면 ➡ $b=0$

21 **Action** a, b의 부호를 이용하여 $a+b$, ab의 부호를 각각 구한다.

$a<0$, $b<0$이므로 $a+b<0$, $ab>0$
즉 일차함수 $y=(a+b)x+ab$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 제 3사분면을 지나지 않는다.



22 **Action** 두 일차함수의 그래프가 서로 만나지 않으려면 두 그래프가 평행해야 한다.

두 일차함수의 그래프가 서로 만나지 않으려면 두 그래프가 평행해야 하므로 기울기는 같고 y절편은 달라야 한다.
따라서 $2a=-3$, $-4\neq b$이므로
$a=-\frac{3}{2}$, $b\neq-4$

23 **Action** 두 일차함수 $y=ax+b$, $y=cx+d$의 그래프가 평행하면 $a=c$, $b\neq d$이다.

$y=(a-b)x+(2a+b)$의 그래프와 $y=-6x+3$의 그래프가 평행하므로 두 그래프의 기울기가 같다.
$\therefore a-b=-6$ $\cdots\cdots$ ㉠
또, $y=(a-b)x+(2a+b)$에 $x=-1$, $y=3$을 대입하면
$3=-(a-b)+2a+b$
$\therefore a+2b=3$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=3$
$\therefore a+b=-3+3=0$

24 **Action** 두 일차함수 $y=ax+b$, $y=cx+d$의 그래프가 일치하면 $a=c$, $b=d$이다.

$y=ax+3$에 $x=1$, $y=4$를 대입하면
$4=a+3$ $\quad\therefore a=1$
이때 $y=x+3$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=x+3+b$
$y=x+3+b$의 그래프가 $y=cx-4$의 그래프와 일치하므로
$1=c$, $3+b=-4$ $\quad\therefore b=-7$, $c=1$
$\therefore a+b+c=1+(-7)+1=-5$

최고 수준 완성하기

P 98 – P 100

01 5	**02** $\frac{11}{2}$	**03** $D\left(\frac{30}{13}, \frac{18}{13}\right)$	
04 -1	**05** -6	**06** -14, -2	**07** 8
08 -1	**09** 제3사분면	**10** 5	**11** ㉠, ㉣
12 $-\frac{13}{4}$			

01 **Action** 주어진 조건을 이용하여 $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 각각 구한다.

$f(1)=2$이므로
$f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)-1\times1=2+2-1=3$
$f(4)=f(2+2)=f(2)+f(2)-2\times2=3+3-4=2$
$f(5)=f(1+4)=f(1)+f(4)-1\times4=2+2-4=0$
$\therefore f(2)+f(4)+f(5)=3+2+0=5$

02 **Action** $\frac{3x+2}{x-1}=1$을 만족시키는 x의 값을 구한다.

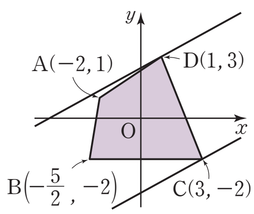
$\frac{3x+2}{x-1}=1$에서 $3x+2=x-1$
$2x=-3$ $\quad\therefore x=-\frac{3}{2}$
$\therefore f(1)=-3\times\left(-\frac{3}{2}\right)+1$
$=\frac{9}{2}+1=\frac{11}{2}$

03 **Action** $B(a, 0)$, $C(b, 0)$으로 놓고 두 점 A, D의 좌표를 a, b의 식으로 각각 나타낸다.

$B(a, 0)$, $C(b, 0)$이라 하면
$A\left(a, \frac{3}{2}a\right)$, $D(b, -2b+6)$
사각형 ABCD가 정사각형이므로
$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\frac{3}{2}a=b-a$
$\therefore b=\frac{5}{2}a$ $\cdots\cdots$ ㉠
또, $\overline{BC}=\overline{DC}$에서 $b-a=-2b+6$
$\therefore a=3b-6$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{12}{13}$, $b=\frac{30}{13}$
따라서 점 D의 좌표는 $\left(\frac{30}{13}, \frac{18}{13}\right)$이다.

04 **Action** 좌표평면 위에 사각형 ABCD를 그린 후 일차함수 $y=\frac{1}{2}x+k$의 그래프를 y축의 방향으로 움직여 본다.

네 점 A, B, C, D를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 일차함수 $y=\frac{1}{2}x+k$의 그래프가 점 $D(1, 3)$을 지날 때 k의 값은 최대가 되고, 점 $C(3, -2)$를 지날 때 k의 값은 최소가 된다.



(i) $y=\frac{1}{2}x+k$의 그래프가 점 $D(1, 3)$을 지날 때,
$3=\frac{1}{2}+k$ $\quad\therefore k=\frac{5}{2}$
(ii) $y=\frac{1}{2}x+k$의 그래프가 점 $C(3, -2)$를 지날 때,
$-2=\frac{3}{2}+k$ $\quad\therefore k=-\frac{7}{2}$
(i), (ii)에 의하여 k의 최댓값은 $\frac{5}{2}$, 최솟값은 $-\frac{7}{2}$이므로 그 합은 $\frac{5}{2}+\left(-\frac{7}{2}\right)=-1$

05 Action x절편, y절편을 이용하여 a, b를 각각 c의 식으로 나타낸다.

x절편이 -2이므로

$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$에 $x=-2$, $y=0$을 대입하면

$0=\frac{2a}{b}+\frac{c}{b}$, $2a=-c$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}c$

또, y절편이 3이므로

$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$에 $x=0$, $y=3$을 대입하면

$3=\frac{c}{b}$, $3b=c$ $\quad\therefore b=\frac{1}{3}c$

$\therefore \frac{c}{a+b}=c\div(a+b)=c\div\left(-\frac{1}{2}c+\frac{1}{3}c\right)$

$=c\div\left(-\frac{1}{6}c\right)=c\times\left(-\frac{6}{c}\right)=-6$

06 Action 일차함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표는 (x절편, 0)이다.

$y=-\frac{3}{2}x+6$에 $y=0$을 대입하면

$0=-\frac{3}{2}x+6$, $\frac{3}{2}x=6$ $\quad\therefore x=4$

$\therefore$ P$(4, 0)$

$y=2x+a$에 $y=0$을 대입하면

$0=2x+a$, $-2x=a$ $\quad\therefore x=-\frac{a}{2}$

$\therefore$ Q$\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$

이때 $\overline{\text{PQ}}=3$이므로 점 Q의 좌표는 $(7, 0)$ 또는 $(1, 0)$이다.

따라서 $-\frac{a}{2}=7$ 또는 $-\frac{a}{2}=1$이므로

$a=-14$ 또는 $a=-2$

07 Action 일차함수의 그래프에서 (기울기)$=\frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}$임을 이용한다.

(가)에서 $f(2p)+4p=f(2q)+4q$이므로

$f(2p)-f(2q)=-4p+4q$

$f(2p)-f(2q)=-2(2p-2q)$

$\therefore \frac{f(2p)-f(2q)}{2p-2q}=-2$

따라서 일차함수 $y=f(x)$의 그래프의 기울기는 -2이므로

$a=-2$

(나)에서 $y=-2x+b$에 $x=2$, $y=3$을 대입하면

$3=-4+b$ $\quad\therefore b=7$

$y=-2x+7$에 $x=c$, $y=9$를 대입하면

$9=-2c+7$, $2c=-2$ $\quad\therefore c=-1$

(다)에서 $\frac{k}{2}=-2$이므로 $k=-4$

$\therefore a+b+c-k=-2+7+(-1)-(-4)=8$

08 Action 규칙에 따라 세 점이 이동한 점의 좌표를 각각 구한다.

점 (x, y)를 점 $(x+y, ax-y)$로 옮기는 규칙에 따라 각 점을 이동시키면 다음과 같다.

$(0, 0)$ ➡ $(0+0, a\times0-0)$, 즉 $(0, 0)$

$(1, 4)$ ➡ $(1+4, a\times1-4)$, 즉 $(5, a-4)$

$(3, 0)$ ➡ $(3+0, a\times3-0)$, 즉 $(3, 3a)$

이때 세 점이 한 직선 위에 있으므로 두 점 $(0, 0)$, $(5, a-4)$를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기와 두 점 $(0, 0)$, $(3, 3a)$를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는 같다.

따라서 $\frac{a-4}{5}=\frac{3a}{3}$, 즉 $\frac{a-4}{5}=a$이므로

$a-4=5a$, $-4a=4$ $\quad\therefore a=-1$

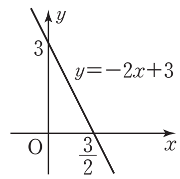
09 Action 서영이는 b를 바르게 보았고, 호준이는 a를 바르게 보았다.

서영이는 b, 즉 y절편을 바르게 보았으므로 $b=3$

호준이는 a, 즉 기울기를 바르게 보았으므로

$a=\frac{-6-0}{2-(-1)}=\frac{-6}{3}=-2$

따라서 일차함수 $y=-2x+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 3사분면을 지나지 않는다.



10 Action 먼저 두 점 A, C의 좌표를 구한 후 △ABC의 넓이를 구한다.

$y=-\frac{1}{3}x+2$의 그래프의 x절편은 6, y절편은 2이므로

A$(6, 0)$, C$(0, 2)$

$\therefore \triangle\text{ACO}=\frac{1}{2}\times6\times2=6$

이때 $\triangle\text{ABC} : \triangle\text{ACO}=2:1$이므로 $\triangle\text{ABC} : 6=2:1$

$\therefore \triangle\text{ABC}=12$

$\triangle\text{ABO}=\triangle\text{ABC}+\triangle\text{ACO}=12+6=18$에서

$\frac{1}{2}\times6\times\overline{\text{OB}}=18$ $\quad\therefore \overline{\text{OB}}=6$, 즉 B$(0, 6)$

따라서 $y=ax+b$의 그래프가 A$(6, 0)$, B$(0, 6)$을 지나므로

$y=ax+b$에 $x=6$, $y=0$을 대입하면

$0=6a+b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$y=ax+b$에 $x=0$, $y=6$을 대입하면

$6=b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=6$

$\therefore a+b=-1+6=5$

11 Action 두 일차함수의 그래프의 기울기, 함숫값, x절편 등을 비교해 본다.

㉠ $y=ax+b$, $y=cx+d$의 그래프는 모두 오른쪽 위로 향하는 직선이므로 $a>0$, $c>0$이고, $y=cx+d$의 그래프가 $y=ax+b$의 그래프보다 y축에 더 가까우므로 $a<c$

㉡ $y=ax+b$의 그래프에서 $x=-1$일 때 $y>0$이므로
$-a+b>0$　　$\therefore a-b<0$
㉢ $y=cx+d$의 그래프에서 $x=-1$일 때 $y<0$이므로
$-c+d<0$　　$\therefore c-d>0$
㉣ $y=ax+b$, $y=cx+d$의 그래프의 x절편은 각각 $-\dfrac{b}{a}$, $-\dfrac{d}{c}$이고, $-\dfrac{b}{a}<-\dfrac{d}{c}$이므로 $\dfrac{b}{a}>\dfrac{d}{c}$
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉣이다.

Lecture
일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서 b의 값이 일정할 때, $|a|$가 클수록 그래프는 y축에 가깝고, $|a|$가 작을수록 그래프는 x축에 가깝다.

12 **Action** 두 일차함수의 그래프가 평행하면 기울기가 같다.

두 일차함수 $y=ax-5$, $y=-2x+5$의 그래프가 평행하므로 기울기가 같다.
$\therefore a=-2$ ······ 40%
두 일차함수 $y=-2x-5$, $y=\dfrac{1}{2}x-b$의 그래프가 x축 위에서 만나므로 x절편이 같다.
$y=-2x-5$에 $y=0$을 대입하면
$0=-2x-5$　　$\therefore x=-\dfrac{5}{2}$
$y=\dfrac{1}{2}x-b$에 $y=0$을 대입하면
$0=\dfrac{1}{2}x-b$　　$\therefore x=2b$
$-\dfrac{5}{2}=2b$이므로 $b=-\dfrac{5}{4}$ ······ 40%
$\therefore a+b=-2+\left(-\dfrac{5}{4}\right)=-\dfrac{13}{4}$ ······ 20%

최고 수준 뛰어넘기

P 101

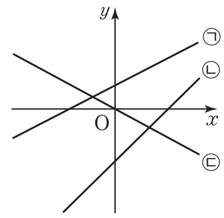
01 48　　**02** ㉠, ㉢　　**03** 4

01 **Action** $3.24=\dfrac{324}{100}$로 나타낸 후 주어진 조건을 이용하여 $f(3.24)$를 변형한다.

$$\begin{aligned}f(3.24)&=f\left(\frac{324}{100}\right)\\&=f(324)-f(100)\\&=f(2^2\times3^4)-f(10^2)\\&=f(2^2)+f(3^4)-f(10^2)\\&=2f(2)+4f(3)-2f(10)\\&=2\times0.30+4\times0.47-2\times1\\&=0.60+1.88-2=0.48\end{aligned}$$
따라서 $a=0.48$이므로 $100a=48$

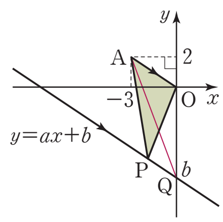
02 **Action** x절편, y절편, 기울기의 부호를 알아본다.

일차함수 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$의 그래프의 기울기는 $-\dfrac{a}{b}$, x절편은 $-\dfrac{c}{a}$, y절편은 $-\dfrac{c}{b}$이다.



㉠ $ac>0$이면 $-\dfrac{c}{a}<0$이므로 x절편은 음수이고,
$bc<0$이면 $-\dfrac{c}{b}>0$이므로 y절편은 양수이다.
따라서 그래프는 제 1, 2, 3사분면을 지난다.
㉡ $ab<0$이면 $-\dfrac{a}{b}>0$이므로 기울기는 양수이고,
$bc>0$이면 $-\dfrac{c}{b}<0$이므로 y절편은 음수이다.
따라서 그래프는 제 1, 3, 4사분면을 지난다.
㉢ $ab>0$이면 $-\dfrac{a}{b}<0$이므로 기울기는 음수이고,
$bc=0$이면 $b\neq0$이므로 $c=0$, 즉 $-\dfrac{c}{b}=0$이므로 원점을 지난다.
따라서 그래프는 제 2, 4사분면을 지난다.
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

03 **Action** $\overline{OA}$를 밑변으로 하는 삼각형의 넓이가 항상 일정하려면 높이가 일정해야 한다.



$\overline{OA}$를 밑변으로 하는 삼각형의 넓이가 항상 일정하려면 높이가 일정해야 하므로 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$와 평행해야 한다.
즉 $\overline{OA}$의 기울기는 $-\dfrac{2}{3}$이므로
$a=-\dfrac{2}{3}$
$\triangle OAP$의 넓이가 항상 9이므로
$\triangle OAP=\triangle OAQ=\dfrac{1}{2}\times|b|\times3=9$
이때 $b<0$이므로
$b=-6$
$\therefore ab=-\dfrac{2}{3}\times(-6)=4$

Lecture
$\triangle OAP$와 $\triangle OAQ$는 밑변의 길이가 $|b|$이고 높이가 3이므로 넓이가 같다.

2. 일차함수와 그래프 (2)

최고 수준 입문하기

P 103 – P 105

01 5	02 -6	03 $y=\frac{5}{3}x+5$	
04 x절편 : 1, y절편 : 2		05 $y=\frac{1}{3}x+2$	
06 8	07 3	08 2	09 $y=\frac{2}{3}x+2$
10 (1) $y=50-\frac{1}{12}x$ (2) 20 L		11 24 cm	12 35년 후
13 4600 m	14 24시간 48분		15 24 ℃
16 오후 4시 55분		17 44개	18 2초 후

01 Action 일차함수 $y=-3x+4$의 그래프와 평행하므로 기울기는 -3이다.

기울기가 -3, y절편이 k이므로
$y=-3x+k$로 놓고 $x=-2$, $y=11$을 대입하면
$11=6+k \qquad \therefore k=5$

02 Action 일차함수의 그래프에서 $(\text{기울기})=\dfrac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}$이다.

$f(x)=\frac{1}{2}x+b$라 하면 $f(-2)=1$이므로
$\frac{1}{2}\times(-2)+b=1 \qquad \therefore b=2$
따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x+2$이므로 $f(k)=-1$에서
$\frac{1}{2}k+2=-1$, $\frac{1}{2}k=-3 \qquad \therefore k=-6$

03 Action 주어진 그래프의 기울기를 구한다.

주어진 그래프가 두 점 $(-2, -1)$, $(1, 4)$를 지나므로
$(\text{기울기})=\dfrac{4-(-1)}{1-(-2)}=\dfrac{5}{3}$
$y=x+5$의 그래프와 y축 위에서 만나므로 y절편은 5이다.
따라서 구하는 일차함수의 식은 $y=\frac{5}{3}x+5$

> **Lecture**
> 일차함수 $y=ax+b$의 그래프와 y축 위에서 만난다.
> ➡ y절편이 b이다.

04 Action 먼저 두 점을 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구한다.

두 점 $(-2, 6)$, $(3, -4)$를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는 $\dfrac{-4-6}{3-(-2)}=-2$
$y=-2x+b$로 놓고 $x=-2$, $y=6$을 대입하면
$6=4+b \qquad \therefore b=2$
$y=-2x+2$에 $y=0$을 대입하면
$0=-2x+2$, $2x=2 \qquad \therefore x=1$
$y=-2x+2$에 $x=0$을 대입하면 $y=2$
따라서 일차함수 $y=-2x+2$의 그래프의 x절편은 1, y절편은 2이다.

05 Action 먼저 두 점을 지나는 직선의 기울기를 구한다.

두 점 $(3k-5, -k)$, $(3k+1, -k+2)$를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는
$\dfrac{(-k+2)-(-k)}{(3k+1)-(3k-5)}=\dfrac{1}{3}$
$y=\frac{1}{3}x+b$로 놓고 $x=3$, $y=3$을 대입하면
$3=1+b \qquad \therefore b=2$
따라서 구하는 일차함수의 식은 $y=\frac{1}{3}x+2$

06 Action 먼저 주어진 두 점을 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구한 후 평행이동한 그래프의 식을 구한다.

두 점 $(-3, 1)$, $(2, 6)$을 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는 $\dfrac{6-1}{2-(-3)}=1$
$y=x+b$로 놓고 $x=-3$, $y=1$을 대입하면
$1=-3+b \qquad \therefore b=4$
$\therefore y=x+4$ …… 50%
$y=x+4$의 그래프를 y축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=x+4+(-7) \qquad \therefore y=x-3$ …… 20%
따라서 $y=x-3$에 $x=k$, $y=5$를 대입하면
$5=k-3 \qquad \therefore k=8$ …… 30%

07 Action 먼저 k의 값을 구한 후 두 점을 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구한다.

$y=-\frac{1}{2}x+4$에 $x=2$, $y=k$를 대입하면
$k=-1+4=3$ …… 20%
$y=ax+b$의 그래프가 두 점 $(2, 3)$, $(-1, -6)$을 지나므로
$(\text{기울기})=\dfrac{-6-3}{-1-2}=3 \qquad \therefore a=3$ …… 30%
$y=3x+b$에 $x=2$, $y=3$을 대입하면
$3=6+b \qquad \therefore b=-3$ …… 30%
$\therefore a+b+k=3+(-3)+3=3$ …… 20%

08 Action x축 위에서 만나는 두 일차함수의 그래프는 x절편이 서로 같다.

$y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$에 $y=0$을 대입하면
$0=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}x=\frac{3}{2} \qquad \therefore x=2$

따라서 $y=ax+b$의 그래프는 두 점 $(2, 0)$, $(0, 4)$를 지나므로 $(기울기)=\frac{4-0}{0-2}=-2$

$\therefore y=-2x+4$

따라서 $a=-2$, $b=4$이므로

$a+b=-2+4=2$

09 Action 주어진 그래프의 y절편을 구한다.

주어진 그래프가 두 점 $(2, 1)$, $(4, 0)$을 지나므로

$(기울기)=\frac{0-1}{4-2}=-\frac{1}{2}$

$y=-\frac{1}{2}x+b$로 놓고 $x=4$, $y=0$을 대입하면

$0=-2+b \qquad \therefore b=2$

따라서 구하는 일차함수의 그래프는 두 점 $(-3, 0)$, $(0, 2)$를 지나므로

$(기울기)=\frac{2-0}{0-(-3)}=\frac{2}{3}$

$\therefore y=\frac{2}{3}x+2$

10 Action 자동차가 1 km를 이동하는 데 몇 L의 휘발유가 필요한지 알아본다.

(1) 1 L의 휘발유로 12 km를 이동하므로 1 km를 이동하는 데 $\frac{1}{12}$ L의 휘발유가 필요하다.

$\therefore y=50-\frac{1}{12}x$

(2) $y=50-\frac{1}{12}x$에 $x=360$을 대입하면

$y=50-\frac{1}{12}\times 360=20$

따라서 남아 있는 휘발유의 양은 20 L이다.

11 Action 무게가 1 g 늘어날 때마다 용수철의 길이는 몇 cm씩 늘어나는지 알아본다.

무게가 3 g 늘어날 때마다 용수철의 길이는 1 cm씩 늘어나므로 무게가 1 g 늘어날 때마다 용수철의 길이는 $\frac{1}{3}$ cm씩 늘어난다.

즉 x g짜리 추를 매달았을 때 용수철의 길이를 y cm라 하면

$y=20+\frac{1}{3}x$

$y=20+\frac{1}{3}x$에 $x=12$를 대입하면

$y=20+\frac{1}{3}\times 12=24$

따라서 용수철의 길이는 24 cm이다.

12 Action 종유석이 1년에 몇 cm씩 자라는지 알아본다.

종유석이 10년에 4 cm씩 자라므로 1년에 $\frac{2}{5}$ cm씩 자란다.

즉 x년 후의 종유석의 길이를 y cm라 하면

$y=38+\frac{2}{5}x$

$y=38+\frac{2}{5}x$에 $y=52$를 대입하면

$52=38+\frac{2}{5}x$, $\frac{2}{5}x=14$

$\therefore x=35$

따라서 이 종유석의 길이가 52 cm가 되는 것은 35년 후이다.

13 Action 1 m 높아질 때마다 기온은 몇 ℃씩 내려가는지 알아본다.

지면으로부터 100 m 높아질 때마다 기온은 0.5 ℃씩 내려가므로 1 m 높아질 때마다 기온은 0.005 ℃씩 내려간다.

즉 지면의 기온이 13 ℃일 때 지면으로부터 높이가 x m인 곳의 기온을 y ℃라 하면

$y=13-0.005x$

$y=13-0.005x$에 $y=-10$을 대입하면

$-10=13-0.005x$, $0.005x=23$

$\therefore x=4600$

따라서 기온이 -10 ℃인 곳의 높이는 지면으로부터 4600 m이다.

14 Action (거리)=(속력)×(시간)임을 이용한다.

x시간 후 서울과 태풍 사이의 거리를 y km라 하면

$y=620-25x$

태풍이 서울에 도달했을 때, 서울과 태풍 사이의 거리는 0 km이므로 $y=620-25x$에 $y=0$을 대입하면

$0=620-25x$, $25x=620$

$\therefore x=24.8$

따라서 태풍이 제주도에서 서울에 도달할 때까지 걸리는 시간은 24시간 48분이다.

Lecture

0.8시간=0.8×60분=48분이므로
24.8시간=24시간 48분

15 Action 표를 이용하여 기온이 1 ℃ 높아질 때마다 소리의 속력은 초속 몇 m씩 증가하는지 알아본다.

주어진 표에서 기온이 5 ℃ 높아질 때마다 소리의 속력이 초속 3 m씩 증가하므로 기온이 1 ℃ 높아질 때마다 소리의 속력은 초속 $\frac{3}{5}$ m씩 증가한다. …… 20%

즉 기온이 x ℃일 때의 소리의 속력을 초속 y m라 하면 기온이 0 ℃일 때의 소리의 속력이 초속 331 m이므로

$y=331+\frac{3}{5}x$ …… 50%

$y=331+\frac{3}{5}x$에 $y=345.4$를 대입하면

$345.4=331+\frac{3}{5}x$, $\frac{3}{5}x=14.4$

$\therefore\ x=24$

따라서 소리의 속력이 초속 345.4 m일 때의 기온은 24 ℃이다. …… 30%

16 Action 링거 주사를 다 맞는 데 몇 분이 걸리는지 구한다.

링거 주사를 x분 동안 맞았을 때, 병에 남아 있는 주사약의 양을 y mL라 하면 $y=500-4x$

링거 주사를 다 맞았을 때, 병에 남아 있는 주사약의 양은 0 mL이므로 $y=500-4x$에 $y=0$을 대입하면

$0=500-4x$, $4x=500$

$\therefore\ x=125$

따라서 링거 주사를 다 맞는 데 125분, 즉 2시간 5분이 걸리므로 링거 주사를 맞기 시작한 시각은 오후 4시 55분이다.

17 Action 각 단계별로 필요한 타일의 개수를 구하여 규칙을 찾는다.

x단계에서 필요한 타일의 개수를 y개라 하고 표를 만들면 다음과 같다.

x(단계)	1	2	3	4	…
y(개)	8	12	16	20	…

x의 값이 1씩 증가할 때, y의 값은 4씩 증가하므로

$y=8+4(x-1)=4x+4$

$y=4x+4$에 $x=10$을 대입하면

$y=4\times10+4=44$

따라서 10단계에서 필요한 타일의 개수는 44개이다.

18 Action (사다리꼴의 넓이)$=\frac{1}{2}\times${(윗변의 길이)+(아랫변의 길이)}$\times$(높이)임을 이용한다.

x초 후의 사각형 APCD의 넓이를 $y\ \text{cm}^2$라 하면 x초 후 점 P가 움직인 거리는 $3x$ cm이므로

$\overline{PC}=(9-3x)$ cm

$\therefore\ y=\frac{1}{2}\times\{9+(9-3x)\}\times6=54-9x$

$y=54-9x$에 $y=36$을 대입하면

$36=54-9x$, $9x=18$

$\therefore\ x=2$

따라서 사각형 APCD의 넓이가 $36\ \text{cm}^2$가 되는 것은 점 P가 꼭짓점 B를 출발한 지 2초 후이다.

최고 수준 완성하기

P 106–P 107

01 $y=3x-8$ **02** 16 **03** -1 **04** $y=x-3$

05 32 ℃ **06** $\frac{65}{3}$분 **07** 51분

08 $y=\begin{cases}4x & (0<x\le6)\\ 24 & (6<x\le14)\\ 80-4x & (14<x<20)\end{cases}$

01 Action 평행사변형의 마주 보는 두 변은 서로 평행하다.

사각형 OABC가 평행사변형이므로 두 점 O, C를 지나는 일차함수의 그래프와 두 점 A, B를 지나는 일차함수의 그래프는 서로 평행하다.

두 점 O(0, 0), C(1, 3)을 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는 $\frac{3-0}{1-0}=3$

두 점 A, B를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기도 3이므로 두 점 A, B를 지나는 일차함수의 식을 $y=3x+b$라 하자.

직선 $y=3x+b$는 점 A(3, 1)을 지나므로

$y=3x+b$에 $x=3$, $y=1$을 대입하면

$1=9+b$ $\quad\therefore\ b=-8$

따라서 구하는 일차함수의 식은

$y=3x-8$

02 Action 규진이와 성현이가 그린 일차함수의 그래프의 식을 구한 후 규진이는 b를 바르게 보았고, 성현이는 a를 바르게 보았음을 이용하여 a, b의 값을 각각 구한다.

두 점 $(1, -6)$, $(2, -4)$를 지나는 일차함수의 식은

$y=2x-8$

이때 규진이는 b를 바르게 보았으므로 $b=-8$

두 점 $(-3, 4)$, $(0, 8)$을 지나는 일차함수의 식은

$y=\frac{4}{3}x+8$

이때 성현이는 a를 바르게 보았으므로 $a=\frac{4}{3}$

따라서 $y=\frac{4}{3}x-8$에 $x=18$, $y=k$를 대입하면

$k=24-8=16$

03 Action 조건 (가)와 $y=ax+b$의 그래프의 y절편은 b임을 이용하여 x절편을 구한다.

(가)에서 $y=ax+b$의 그래프의 y절편은 b이므로 x절편은 $-b$이다.

즉 $y=ax+b$의 그래프는 두 점 $(-b, 0)$, $(0, b)$를 지나므로

(기울기)$=\frac{b-0}{0-(-b)}=1$ $\quad\therefore\ a=1$

(나)에서 $y=x+b$에 $x=2$, $y=4$를 대입하면

$4=2+b \qquad \therefore b=2$

$\therefore a-b=1-2=-1$

04 Action $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$이므로 $\mathrm{A}(0, -k)$, $\mathrm{B}(k, 0)$ $(k>0)$으로 놓고 일차함수의 식을 구한다.

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$이므로 $\mathrm{A}(0, -k)$, $\mathrm{B}(k, 0)$ $(k>0)$이라 하면

두 점 A, B를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는

$\dfrac{0-(-k)}{k-0}=1$

이때 y절편은 $-k$이므로 $y=x-k$

원 O의 반지름의 길이는 k이므로

$$(\text{색칠한 부분의 넓이})=(\pi\times k^2)\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times k\times k$$
$$=\frac{k^2}{4}\pi-\frac{k^2}{2}$$

$\dfrac{k^2}{4}\pi-\dfrac{k^2}{2}=\dfrac{9}{4}\pi-\dfrac{9}{2}$에서

$k^2=9 \qquad \therefore k=3\ (\because\ k>0)$

따라서 구하는 일차함수의 식은 $y=x-3$

05 Action 온도가 $1\,^\circ\mathrm{C}$ 올라갈 때마다 기체의 부피는 몇 cm^3만큼 증가하는지 알아본다.

온도가 $1\,^\circ\mathrm{C}$ 올라갈 때마다 기체의 부피는

$1638\times\dfrac{1}{273}=6\,(\mathrm{cm}^3)$만큼 증가하므로 온도가 $x\,^\circ\mathrm{C}$ 올라갔을 때 이 기체의 부피를 $y\,\mathrm{cm}^3$라 하면

$y=1638+6x$

$y=1638+6x$에 $y=1830$을 대입하면

$1830=1638+6x$, $6x=192$

$\therefore x=32$

따라서 기체의 부피가 $1830\,\mathrm{cm}^3$가 되는 온도는 $32\,^\circ\mathrm{C}$이다.

06 Action 1분 동안 줄어든 수면의 높이를 알아본다.

5분 동안 줄어든 수면의 높이는 $50-35=15\,(\mathrm{cm})$이므로 1분 동안 줄어든 수면의 높이는 $3\,\mathrm{cm}$이다.

처음 수면의 높이는 $50+15=65\,(\mathrm{cm})$이고, x분 후의 수면의 높이를 $y\,\mathrm{cm}$라 하면

$y=65-3x$

물통에서 물이 다 빠져나갔을 때의 수면의 높이는 $0\,\mathrm{cm}$이므로

$y=65-3x$에 $y=0$을 대입하면

$0=65-3x$, $3x=65$

$\therefore x=\dfrac{65}{3}$

따라서 물통에서 물이 다 빠져나갈 때까지 걸리는 시간은 $\dfrac{65}{3}$분이다.

Lecture

1분 동안 줄어든 수면의 높이는 $3\,\mathrm{cm}$이므로 5분 동안 줄어든 수면의 높이는 $3\times5=15\,(\mathrm{cm})$이다.

5분 후 수면의 높이는 $50\,\mathrm{cm}$이므로 처음 수면의 높이는 $50+15=65\,(\mathrm{cm})$이다.

07 Action 물을 데울 때와 물을 식힐 때로 나누어 걸린 시간을 각각 구한다.

(i) 물을 데울 때, 4분마다 물의 온도가 $6\,^\circ\mathrm{C}$씩 올라가므로

1분마다 물의 온도가 $\dfrac{3}{2}\,^\circ\mathrm{C}$씩 올라간다.

즉 x분 후의 물의 온도를 $y\,^\circ\mathrm{C}$라 하면

$y=20+\dfrac{3}{2}x$ …… 20%

$y=20+\dfrac{3}{2}x$에 $y=65$를 대입하면

$65=20+\dfrac{3}{2}x$, $\dfrac{3}{2}x=45$

$\therefore x=30$

따라서 $20\,^\circ\mathrm{C}$에서 $65\,^\circ\mathrm{C}$까지 물을 데우는 데 걸린 시간은 30분이다. …… 20%

(ii) 물을 식힐 때, 3분마다 물의 온도가 $4\,^\circ\mathrm{C}$씩 내려가므로

1분마다 물의 온도가 $\dfrac{4}{3}\,^\circ\mathrm{C}$씩 내려간다.

즉 x분 후의 물의 온도를 $y\,^\circ\mathrm{C}$라 하면

$y=65-\dfrac{4}{3}x$ …… 20%

$y=65-\dfrac{4}{3}x$에 $y=37$을 대입하면

$37=65-\dfrac{4}{3}x$, $\dfrac{4}{3}x=28$

$\therefore x=21$

따라서 $65\,^\circ\mathrm{C}$에서 $37\,^\circ\mathrm{C}$까지 물을 식히는 데 걸린 시간은 21분이다. …… 20%

(i), (ii)에 의하여 총 걸린 시간은

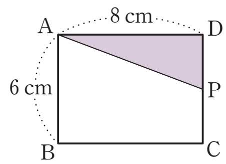
$30+21=51$(분) …… 20%

08 Action 점 P가 $\overline{\mathrm{DC}}$, $\overline{\mathrm{CB}}$, $\overline{\mathrm{BA}}$ 위에 있을 때로 나누어 생각한다.

(i) 점 P가 $\overline{\mathrm{DC}}$ 위에 있을 때,

$y=\dfrac{1}{2}\times8\times x=4x$

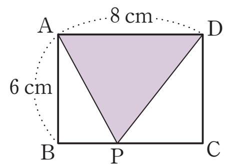
$(0<x\le6)$



(ii) 점 P가 $\overline{\mathrm{CB}}$ 위에 있을 때,

$y=\dfrac{1}{2}\times8\times6=24$

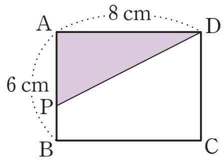
$(6<x\le14)$



(iii) 점 P가 $\overline{BA}$ 위에 있을 때,

$y=\frac{1}{2}\times8\times(20-x)$

$=80-4x\ (14<x<20)$



(i) ~ (iii)에 의하여

$$y=\begin{cases}4x & (0<x\le6)\\ 24 & (6<x\le14)\\ 80-4x & (14<x<20)\end{cases}$$

Lecture

(ii) $\overline{AD}$를 △APD의 밑변으로 생각하면 점 P가 $\overline{BC}$ 위에 있으므로 높이가 6으로 일정하다.

(iii) $\overline{AP}=\overline{DC}+\overline{CB}+\overline{BA}-x=6+8+6-x=20-x\ (\text{cm})$

최고 수준 뛰어넘기

P 108

01 P(3, 0), Q(0, 2) **02** $y=-\frac{2}{5}x+\frac{17}{5}$

03 50 m^3

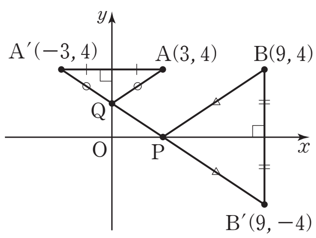
01 **Action** 점 A와 y축에 대칭인 점과 점 B와 x축에 대칭인 점의 좌표를 각각 구한다.

점 A와 y축에 대칭인 점을 A′이라 하면

A′(−3, 4)

점 B와 x축에 대칭인 점을 B′이라 하면

B′(9, −4)



이때 위의 그림에서

$\overline{AQ}=\overline{A'Q}$, $\overline{BP}=\overline{B'P}$이고,

$\overline{AQ}+\overline{QP}+\overline{PB}=\overline{A'Q}+\overline{QP}+\overline{PB'}\ge\overline{A'B'}$이므로

$\overline{AQ}+\overline{QP}+\overline{PB}$의 길이가 최소가 되게 하려면 두 점 P, Q가 직선 A′B′ 위에 있어야 한다.

두 점 A′(−3, 4), B′(9, −4)를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는 $\frac{-4-4}{9-(-3)}=-\frac{2}{3}$

$y=-\frac{2}{3}x+b$로 놓고 $x=-3$, $y=4$를 대입하면

$4=2+b \qquad \therefore b=2$

$\therefore y=-\frac{2}{3}x+2$

$y=-\frac{2}{3}x+2$에 $y=0$을 대입하면

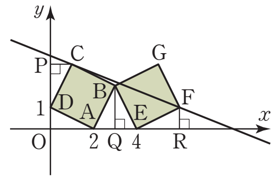
$0=-\frac{2}{3}x+2,\ \frac{2}{3}x=2 \qquad \therefore x=3$

$y=-\frac{2}{3}x+2$에 $x=0$을 대입하면 $y=2$

따라서 일차함수 $y=-\frac{2}{3}x+2$의 그래프의 x절편은 3, y절편은 2이므로 P(3, 0), Q(0, 2)

02 **Action** 합동인 삼각형을 찾아 두 점 C, F의 좌표를 각각 구한다.

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 P, 두 점 B, F에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하자.



△CPD와 △DOA에서

$\overline{CD}=\overline{DA}$, ∠PCD=90°−∠CDP=∠ODA,

∠CDP=90°−∠PCD=90°−∠ODA=∠DAO

∴ △CPD≡△DOA (ASA 합동)

같은 방법으로

△CPD≡△DOA≡△AQB

≡△EQB≡△FRE (ASA 합동)

따라서 $\overline{CP}=\overline{AQ}=\overline{EQ}=\overline{FR}=\overline{DO}=1$,

$\overline{PD}=\overline{QB}=\overline{RE}=\overline{OA}=2$

즉 점 C의 좌표는 (1, 3), 점 F의 좌표는 (6, 1)이다.

두 점 C(1, 3), F(6, 1)을 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는 $\frac{1-3}{6-1}=-\frac{2}{5}$

$y=-\frac{2}{5}x+b$로 놓고 $x=1$, $y=3$을 대입하면

$3=-\frac{2}{5}+b \qquad \therefore b=\frac{17}{5}$

$\therefore y=-\frac{2}{5}x+\frac{17}{5}$

03 **Action** 먼저 펌프 수리 후 1시간에 넣는 물의 양을 구한다.

펌프 수리 후 1시간에 넣는 물의 양은

$10+10\times\frac{20}{100}=12\ (m^3)$

펌프 수리 후 물이 가득 찰 때까지 물을 넣은 시간을 x시간, 물탱크에 물이 가득 찼을 때의 물의 부피를 y m^3라 하면

y=(처음 1시간 동안 넣은 물의 양)

+(펌프 수리 후 x시간 동안 넣은 물의 양)

$=10+12x$ ······ ㉠

한편, 펌프가 고장나지 않았다면 물탱크에 물을 가득 채우는 데 걸리는 시간은 $\left(1+\frac{50}{60}+x\right)-\frac{10}{60}=x+\frac{5}{3}$(시간)이므로

$y=10\left(x+\frac{5}{3}\right)=10x+\frac{50}{3}$ ······ ㉡

이때 물탱크에 물이 가득 찼을 때의 물의 부피는 같으므로

㉠, ㉡에서 $10+12x=10x+\frac{50}{3}$

$2x=\frac{20}{3} \qquad \therefore x=\frac{10}{3}$

즉 펌프 수리 후 $\frac{10}{3}$시간 동안 물을 넣으면 물탱크에 물이 가득 차므로 $y=10+12x$에 $x=\frac{10}{3}$을 대입하면

$y=10+12\times\frac{10}{3}=50$

따라서 물탱크에 물이 가득 찼을 때의 물의 부피는 50 m^3이다.

3. 일차함수와 일차방정식의 관계

최고 수준 입문하기

P 110 – P 113

01 ㉠, ㉣	**02** 5	**03** $\frac{9}{4}$	**04** 7
05 $x=-1$	**06** 4	**07** 제 3사분면	**08** ③
09 제 1, 2, 3사분면		**10** $y=\frac{3}{2}x+3$	**11** $\frac{2}{3}\le a\le 5$
12 -1	**13** 5	**14** $y=-1$	**15** -3
16 -2	**17** 6	**18** $a=\frac{1}{2}, b\ne 3$	
19 $a=\frac{3}{4}, b=-6$		**20** 8	**21** $\frac{27}{2}$
22 2	**23** -4	**24** $\frac{50}{3}$분 후	

01 Action 일차방정식을 $y=mx+n$의 꼴로 나타내어 본다.

$2x-3y+12=0$에서 $y=\frac{2}{3}x+4$

㉠ $y=\frac{2}{3}x+4$에 $y=0$을 대입하면

$0=\frac{2}{3}x+4$ $\quad\therefore x=-6$

따라서 x절편은 -6이다.

㉡ y절편은 4이다.

㉢ 기울기와 y절편이 모두 양수이므로 제 1, 2, 3사분면을 지난다.

㉣ 기울기가 같고 y절편이 다르므로 $y=\frac{2}{3}x$의 그래프와 평행하다.

㉤ 기울기가 양수이므로 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가한다.

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉣이다.

Lecture

일차함수와 일차방정식

일차방정식 $ax+by+c=0$(a, b, c는 상수 $a\ne 0, b\ne 0$)에서 y를 x의 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$ax+by+c=0 \Rightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

02 Action 일차방정식의 그래프의 기울기와 y절편이 주어지면 일차방정식을 $y=mx+n$의 꼴로 나타낸다.

$ax-by-8=0$에서 $y=\frac{a}{b}x-\frac{8}{b}$

$\frac{a}{b}=-\frac{3}{4}$, $-\frac{8}{b}=2$이므로

$a=3, b=-4$

$\therefore 3a+b=3\times 3-4=5$

03 Action 일차방정식의 그래프가 지나는 점의 좌표를 일차방정식에 대입한다.

$3x-4y-a=0$의 그래프가 점 $(1, 3)$을 지나므로

$3-12-a=0$ $\quad\therefore a=-9$

따라서 $3x-4y+9=0$에서 $y=\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}$이므로 y절편은 $\frac{9}{4}$이다.

04 Action 먼저 일차방정식을 $y=mx+n$의 꼴로 나타내어 a의 값을 구한다.

$x-ay-20=0$에서 $y=\frac{x}{a}-\frac{20}{a}$

$y=\frac{1}{5}x+3$의 그래프와 평행하므로

$\frac{1}{a}=\frac{1}{5}$ $\quad\therefore a=5$ 40%

$y=\frac{1}{5}x-4$에 $x=10, y=b$를 대입하면

$b=2-4=-2$ 40%

$\therefore a-b=5-(-2)=7$ 20%

05 Action y축에 평행한 직선 위의 두 점의 x좌표는 서로 같다.

두 점을 지나는 직선이 y축에 평행하므로 두 점의 x좌표가 서로 같아야 한다.

$-a-4=a+2$에서 $-2a=6$ $\quad\therefore a=-3$

따라서 두 점 $(-1, -2)$, $(-1, 4)$를 지나고 y축에 평행한 직선의 방정식은 $x=-1$

Lecture

축에 평행한 직선

(1) x축에 평행 ➡ 직선 위의 두 점의 y좌표가 서로 같다.

(2) y축에 평행 ➡ 직선 위의 두 점의 x좌표가 서로 같다.

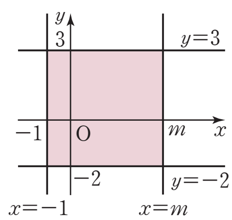
06 Action $x=p, y=q$의 꼴로 나타낸 후 네 직선을 좌표평면 위에 나타내어 본다.

$x+1=0$에서 $x=-1$

$y-3=0$에서 $y=3$

$2y+4=0$에서 $2y=-4$ $\quad\therefore y=-2$

따라서 네 직선을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 도형의 넓이가 25이므로



$\{m-(-1)\}\times\{3-(-2)\}=25$

$(m+1)\times 5=25$, $5m+5=25$

$5m=20$ $\quad\therefore m=4$

07 Action 주어진 그래프를 보고 기울기와 y절편의 부호를 확인한다.

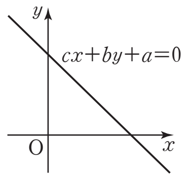
$ax-by-c=0$에서 $y=\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

그래프가 오른쪽 아래로 향하는 직선이므로 $\frac{a}{b}<0$

y축과 음의 부분에서 만나므로 $-\frac{c}{b}<0$

$cx+by+a=0$에서 $y=-\frac{c}{b}x-\frac{a}{b}$

이때 $-\frac{c}{b}<0$, $-\frac{a}{b}>0$이므로 일차 방정식 $cx+by+a=0$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 제 3사분면을 지나지 않는다.

08 Action 그래프가 x축에 수직이므로 $x=p(p\neq0)$의 꼴이다.

$ax+by-3=0$의 그래프가 x축에 수직이므로 $b=0$

$ax-3=0$에서 $x=\frac{3}{a}$

그래프가 제 1, 4사분면만을 지나려면

$\frac{3}{a}>0$ $\quad\therefore a>0$

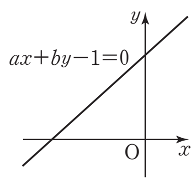
09 Action 먼저 a, b의 부호를 각각 구한다.

점 $(ab, a-b)$가 제 3사분면 위의 점이므로

$ab<0$, $a-b<0$ $\quad\therefore a<0$, $b>0$ …… 20%

$ax+by-1=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}$ …… 20%

이때 $-\frac{a}{b}>0$, $\frac{1}{b}>0$이므로 일차방정식 $ax+by-1=0$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. …… 40%



따라서 제 1, 2, 3사분면을 지난다. …… 20%

Lecture

각 사분면 위의 점의 x좌표와 y좌표의 부호

	제 1사분면	제 2사분면	제 3사분면	제 4사분면
x좌표	+	−	−	+
y좌표	+	+	−	−

10 Action 먼저 $4x-5y+8=0$의 그래프의 x절편과 $5x+3y-9=0$의 그래프의 y절편을 각각 구한다.

$4x-5y+8=0$에 $y=0$을 대입하면

$4x+8=0$, $4x=-8$ $\quad\therefore x=-2$

$5x+3y-9=0$에 $x=0$을 대입하면

$3y-9=0$, $3y=9$ $\quad\therefore y=3$

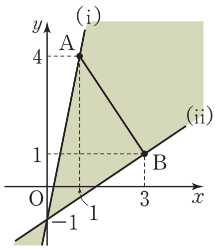
따라서 구하는 직선은 두 점 $(-2, 0)$, $(0, 3)$을 지나는 직선이므로 (기울기)$=\frac{3-0}{0-(-2)}=\frac{3}{2}$

이때 y절편이 3이므로 구하는 직선의 방정식은

$y=\frac{3}{2}x+3$

11 Action 직선 $y=ax-1$이 점 A를 지날 때와 점 B를 지날 때의 a의 값을 각각 구한다.

직선 $y=ax-1$이 선분 AB와 만나려면 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 있어야 한다.



(i) 직선 $y=ax-1$이 점 A$(1, 4)$를 지날 때,

$4=a-1$ $\quad\therefore a=5$

(ii) 직선 $y=ax-1$이 점 B$(3, 1)$을 지날 때,

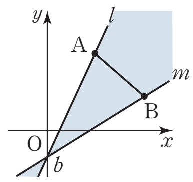
$1=3a-1$, $3a=2$ $\quad\therefore a=\frac{2}{3}$

(i), (ii)에 의하여 $\frac{2}{3}\leq a\leq5$

Lecture

직선 $y=ax+b$가 선분 AB와 만날 때, 상수 a의 값의 범위는

(m의 기울기)$\leq a\leq$(l의 기울기)



12 Action 먼저 두 일차방정식의 그래프의 교점의 x좌표를 이용하여 교점의 좌표를 구한다.

두 일차방정식의 교점의 x좌표가 2이므로

$x+2y=4$에 $x=2$를 대입하면

$2+2y=4$, $2y=2$ $\quad\therefore y=1$

따라서 두 일차방정식의 교점의 좌표는 $(2, 1)$이다.

$ax+y=-1$에 $x=2$, $y=1$을 대입하면

$2a+1=-1$, $2a=-2$ $\quad\therefore a=-1$

13 Action 두 직선의 교점의 좌표를 직선의 방정식에 대입하여 미지수 a, b의 값을 각각 구한다.

두 직선의 교점의 좌표가 $(4, 2)$이므로

$2x-3y=2a$에 $x=4$, $y=2$를 대입하면

$8-6=2a$, $2a=2$ $\quad\therefore a=1$

$x+y=3b$에 $x=4$, $y=2$를 대입하면

$4+2=3b$, $3b=6$ $\quad\therefore b=2$

따라서 두 직선 $2x-3y=2$, $x+y=6$이 x축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(1, 0)$, $(6, 0)$이므로 두 점 사이의 거리는
$6-1=5$

14 Action 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 그래프의 교점의 좌표는 연립방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$의 해와 같다.

연립방정식 $\begin{cases} x-3y=4 \\ 2x+y=1 \end{cases}$을 풀면 $x=1$, $y=-1$
따라서 두 직선의 교점 $(1, -1)$을 지나며 x축에 평행한 직선의 방정식은 $y=-1$

15 Action 먼저 두 일차방정식의 그래프의 교점의 좌표를 구한 후 교점과 주어진 점을 지나는 직선의 방정식을 구한다.

연립방정식 $\begin{cases} 2x-y+7=0 \\ x+4y-10=0 \end{cases}$을 풀면 $x=-2$, $y=3$
…… 30%
구하는 직선이 두 점 $(-2, 3)$, $(-1, 6)$을 지나므로
(기울기)$=\dfrac{6-3}{-1-(-2)}=3$ …… 20%
$y=3x+b$로 놓고 $x=-2$, $y=3$을 대입하면
$3=-6+b$ $\quad\therefore b=9$ …… 20%
$y=3x+9$에 $y=0$을 대입하면
$0=3x+9$, $-3x=9$ $\quad\therefore x=-3$
따라서 직선 $y=3x+9$의 x절편은 -3이다. …… 30%

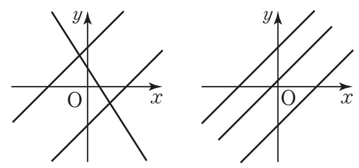
16 Action 두 직선의 교점이 다른 직선 위에 있으므로 세 직선은 한 점에서 만난다.

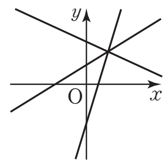
두 직선 $y=-x+4$, $y=ax+2$의 교점이 직선 $y=2x+10$ 위에 있으므로 세 직선은 한 점에서 만난다.
연립방정식 $\begin{cases} y=-x+4 \\ y=2x+10 \end{cases}$을 풀면 $x=-2$, $y=6$
따라서 세 직선의 교점의 좌표는 $(-2, 6)$이므로
$y=ax+2$에 $x=-2$, $y=6$을 대입하면
$6=-2a+2$, $2a=-4$ $\quad\therefore a=-2$

Lecture
한 점에서 만나는 세 직선
❶ 미지수를 포함하지 않은 두 직선의 교점의 좌표를 구한다.
❷ 미지수를 포함한 직선의 방정식에 ❶에서 구한 교점의 좌표를 대입하여 미지수의 값을 구한다.

17 Action 주어진 세 직선 중 어느 두 직선도 평행하지 않음을 이용한다.

$x-3y=4$에서 $y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{4}{3}$
$2x+y=1$에서 $y=-2x+1$
$5x-y=a$에서 $y=5x-a$
이때 세 직선 중 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 한 점에서 만날 때 삼각형이 만들어지지 않는다.
연립방정식 $\begin{cases} x-3y=4 \\ 2x+y=1 \end{cases}$을 풀면 $x=1$, $y=-1$
따라서 세 직선의 교점의 좌표는 $(1, -1)$이므로
$5x-y=a$에 $x=1$, $y=-1$을 대입하면
$a=5-(-1)=6$

Lecture
세 직선에 의하여 삼각형이 만들어지지 않는 경우는 다음과 같다.
(1) 어느 두 직선이 평행하거나 세 직선이 평행한 경우


(2) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우


18 Action 두 직선의 교점이 존재하지 않으려면 두 직선은 평행해야 한다.

$(2-a)x+y=6$에서 $y=-(2-a)x+6$
$3x+2y=4b$에서 $y=-\dfrac{3}{2}x+2b$
이때 두 직선의 교점이 존재하지 않으려면 두 직선은 평행해야 하므로 기울기가 같고 y절편이 다르다.
즉 $-(2-a)=-\dfrac{3}{2}$, $6\neq 2b$이므로
$a=\dfrac{1}{2}$, $b\neq 3$

Lecture
연립방정식의 해의 개수와 그래프
연립방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b} \\ y=-\dfrac{a'}{b'}x-\dfrac{c'}{b'} \end{cases}$에서
(1) 연립방정식의 해가 한 쌍이다.
➡ 두 일차방정식의 그래프가 한 점에서 만난다.
➡ $-\dfrac{a}{b}\neq-\dfrac{a'}{b'}$
(2) 연립방정식의 해가 없다.
➡ 두 일차방정식의 그래프가 평행하다.
➡ $-\dfrac{a}{b}=-\dfrac{a'}{b'}$, $-\dfrac{c}{b}\neq-\dfrac{c'}{b'}$
(3) 연립방정식의 해가 무수히 많다.
➡ 두 일차방정식의 그래프가 일치한다.
➡ $-\dfrac{a}{b}=-\dfrac{a'}{b'}$, $-\dfrac{c}{b}=-\dfrac{c'}{b'}$

19 **Action** 두 일차방정식의 그래프가 일치하므로 기울기와 y절편이 각각 같다.

$(a-1)x+y=2$에서 $y=-(a-1)x+2$

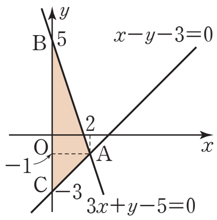
$ax-3y=b$에서 $y=\frac{a}{3}x-\frac{b}{3}$

두 일차방정식의 그래프가 일치하므로 기울기와 y절편이 각각 같다.

즉 $-(a-1)=\frac{a}{3}$, $2=-\frac{b}{3}$이므로

$a=\frac{3}{4}$, $b=-6$

20 **Action** 먼저 연립방정식을 풀어 두 직선의 교점 A의 좌표를 구한다.



연립방정식 $\begin{cases} 3x+y-5=0 \\ x-y-3=0 \end{cases}$을 풀면 $x=2$, $y=-1$

따라서 두 직선의 교점 A의 좌표는 $(2, -1)$이다.

직선 $3x+y-5=0$의 y절편은 5이므로 $\mathrm{B}(0, 5)$

직선 $x-y-3=0$의 y절편은 -3이므로 $\mathrm{C}(0, -3)$

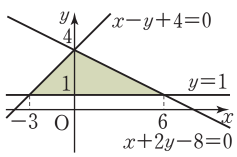
$\therefore \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times8\times2=8$

21 **Action** 좌표평면 위에 세 직선을 그려 세 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

두 직선 $x-y+4=0$, $x+2y-8=0$의 교점의 좌표는 $(0, 4)$

두 직선 $x-y+4=0$, $y=1$의 교점의 좌표는 $(-3, 1)$

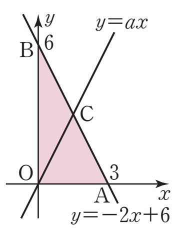
두 직선 $x+2y-8=0$, $y=1$의 교점의 좌표는 $(6, 1)$



따라서 세 직선으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times9\times3=\frac{27}{2}$

22 **Action** 먼저 $\triangle$BOA의 넓이를 구한 후 두 직선의 교점의 좌표를 구한다.



직선 $y=-2x+6$의 x절편은 3, y절편은 6이므로 $\mathrm{A}(3, 0)$, $\mathrm{B}(0, 6)$

$\therefore \triangle\mathrm{BOA}=\frac{1}{2}\times3\times6=9$

두 직선 $y=-2x+6$, $y=ax$의 교점을 C라 하면

$\triangle\mathrm{COA}=\frac{9}{2}$

점 C의 y좌표를 k라 하면

$\frac{1}{2}\times3\times k=\frac{9}{2}$ $\quad\therefore k=3$

$y=-2x+6$에 $y=3$을 대입하면

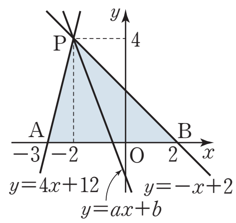
$3=-2x+6$, $2x=3$ $\quad\therefore x=\frac{3}{2}$

$\therefore \mathrm{C}\left(\frac{3}{2}, 3\right)$

따라서 직선 $y=ax$가 점 $\mathrm{C}\left(\frac{3}{2}, 3\right)$을 지나므로

$3=\frac{3}{2}a$ $\quad\therefore a=2$

23 **Action** 먼저 세 점 P, A, B의 좌표를 각각 구한다.



연립방정식 $\begin{cases} y=4x+12 \\ y=-x+2 \end{cases}$를 풀면

$x=-2$, $y=4$

따라서 두 직선의 교점 P의 좌표는 $(-2, 4)$이다.

직선 $y=4x+12$의 x절편은 -3이므로 $\mathrm{A}(-3, 0)$

직선 $y=-x+2$의 x절편은 2이므로 $\mathrm{B}(2, 0)$

이때 직선 $y=ax+b$가 점 $\mathrm{P}(-2, 4)$를 지나면서 $\triangle$PAB의 넓이를 이등분하려면 점 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$을 지나야 한다.

즉 직선 $y=ax+b$는 두 점 $(-2, 4)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$을 지나므로

$a=\dfrac{0-4}{-\frac{1}{2}-(-2)}=-\frac{8}{3}$

$y=-\frac{8}{3}x+b$에 $x=-\frac{1}{2}$, $y=0$을 대입하면

$0=\frac{4}{3}+b$ $\quad\therefore b=-\frac{4}{3}$

$\therefore a+b=-\frac{8}{3}+\left(-\frac{4}{3}\right)=-4$

Lecture

직선 $y=ax+b$가 점 P를 지나면서 $\triangle$PAB의 넓이를 이등분하려면 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 지나야 한다.

$\overline{\mathrm{AB}}=2-(-3)=5$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{BM}}=\frac{5}{2}$

따라서 점 M의 x좌표는 $-3+\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{M}\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

24 **Action** 먼저 형과 동생의 그래프의 식을 각각 구한다.

형의 그래프는 두 점 $(0, 0)$, $(50, 3000)$을 지나므로

$y=60x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

동생의 그래프는 두 점 $(10, 0)$, $(30, 3000)$을 지나므로

$y=150x-1500$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\dfrac{50}{3}$, $y=1000$

따라서 형이 출발한 지 $\dfrac{50}{3}$분 후에 형과 동생이 만난다.

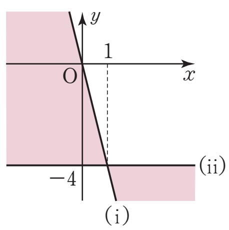
최고 수준 완성하기

Ⓟ 114-Ⓟ 116

01 5개	**02** $y=-1$	**03** $\frac{1}{5}\le k\le 1$	**04** $\frac{1}{2}$
05 $-\frac{4}{3}$	**06** $-\frac{1}{3}$	**07** 12	**08** $\frac{3}{2}$
09 $\frac{25}{3}\pi$	**10** $a=\frac{1}{4}, b=\frac{13}{4}$		**11** ㉡, ㉣

01 Action 점 $(1, -4)$를 지나고, 제 1사분면을 지나지 않도록 일차방정식의 그래프를 그려 본다.

$ax-y-b=0$, 즉 $y=ax-b$의 그래프가 점 $(1, -4)$를 지나고, 제 1사분면을 지나지 않아야 하므로 그래프는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분에 있어야 한다.



(i) $y=ax-b$의 그래프가 두 점 $(0, 0)$, $(1, -4)$를 지날 때,

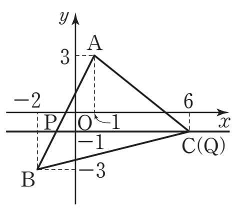
$a=\dfrac{-4-0}{1-0}=-4$

(ii) $y=ax-b$의 그래프가 두 점 $(0, -4)$, $(1, -4)$를 지날 때, x축에 평행하므로 $a=0$

(i), (ii)에 의하여 $-4\le a\le 0$이어야 하므로 조건을 만족시키는 정수 a는 -4, -3, -2, -1, 0의 5개이다.

02 Action $\triangle ABC$를 좌표평면 위에 나타내고 $\overline{PQ}$의 길이가 최대가 되도록 하는 직선을 찾는다.

세 점 $A(1, 3)$, $B(-2, -3)$, $C(6, -1)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$는 오른쪽 그림과 같으므로 $\overline{PQ}$의 길이가 최대가 되도록 하는 직선은 점 C를 지난다.



따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-1$

03 Action 네 직선으로 둘러싸인 도형을 좌표평면 위에 나타낸다.

$x-3=0$에서 $x=3$

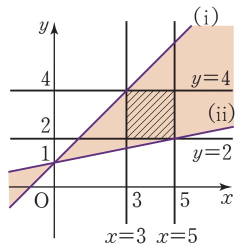
$y-2=0$에서 $y=2$

$2x=10$에서 $x=5$

$3y-12=0$에서 $y=4$

$kx-y+1=0$에서 $y=kx+1$

이 그래프는 항상 점 $(0, 1)$을 지나므로 주어진 네 직선으로 둘러싸인 도형과 만나려면 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 있어야 한다.



(i) $y=kx+1$의 그래프가 점 $(3, 4)$를 지날 때,

$4=3k+1$, $3k=3$ $\quad\therefore k=1$

(ii) $y=kx+1$의 그래프가 점 $(5, 2)$를 지날 때,

$2=5k+1$, $5k=1$ $\quad\therefore k=\dfrac{1}{5}$

(i), (ii)에 의하여 $\dfrac{1}{5}\le k\le 1$

04 Action 먼저 두 직선 l, m의 방정식을 구한다.

직선 l의 x절편은 4, y절편은 4이므로 직선 l의 방정식은

$y=-x+4$ $\cdots\cdots$ 20%

직선 m의 x절편은 $-\dfrac{1}{2}$, y절편은 1이므로 직선 m의 방정식은 $y=2x+1$ $\cdots\cdots$ 20%

연립방정식 $\begin{cases} y=-x+4 \\ y=2x+1 \end{cases}$을 풀면 $x=1$, $y=3$ $\cdots\cdots$ 40%

따라서 직선 l과 직선 m의 교점의 좌표는 $(1, 3)$이므로

$y=2ax+2$에 $x=1$, $y=3$을 대입하면

$3=2a+2$, $2a=1$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ 20%

05 Action 세 직선으로 삼각형을 만들 수 없는 경우를 모두 생각해 본다.

세 직선으로 삼각형을 만들 수 없는 경우는 세 직선 중 두 직선이 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나는 경우이다.

(i) 두 직선 $x+3y-4=0$, $ax-y-2=0$이 평행한 경우

$x+3y-4=0$에서 $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$

$ax-y-2=0$에서 $y=ax-2$

따라서 두 직선의 기울기는 같으므로 $a=-\dfrac{1}{3}$

(ii) 두 직선 $x-2y+2=0$, $ax-y-2=0$이 평행한 경우

$x-2y+2=0$에서 $y=\dfrac{1}{2}x+1$

$ax-y-2=0$에서 $y=ax-2$

따라서 두 직선의 기울기는 같으므로 $a=\dfrac{1}{2}$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

연립방정식 $\begin{cases} x+3y-4=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases}$을 풀면 $x=\frac{2}{5}$, $y=\frac{6}{5}$

따라서 세 직선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$이므로

$ax-y-2=0$에 $x=\frac{2}{5}$, $y=\frac{6}{5}$을 대입하면

$\frac{2}{5}a-\frac{6}{5}-2=0$, $\frac{2}{5}a=\frac{16}{5}$ $\quad\therefore a=8$

(i)~(iii)에 의하여 모든 a의 값의 곱은

$-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 8=-\frac{4}{3}$

06 Action 연립방정식의 해가 무수히 많으므로 두 일차방정식의 그래프는 일치한다.

$3x-by=2$에서 $y=\frac{3}{b}x-\frac{2}{b}$

연립방정식의 해가 무수히 많으려면 두 일차방정식의 그래프가 일치해야 하므로

$-a=\frac{3}{b}$, $4=-\frac{2}{b}$ $\quad\therefore a=6$, $b=-\frac{1}{2}$

$x+ay-b=0$에 $a=6$, $b=-\frac{1}{2}$을 대입하면

$x+6y+\frac{1}{2}=0$, 즉 $y=-\frac{1}{6}x-\frac{1}{12}$

또, $kx-2y=0$에서 $y=\frac{k}{2}x$

이때 두 직선 $y=-\frac{1}{6}x-\frac{1}{12}$, $y=\frac{k}{2}x$가 평행하므로

$-\frac{1}{6}=\frac{k}{2}$ $\quad\therefore k=-\frac{1}{3}$

07 Action 먼저 세 직선의 교점의 좌표를 구한다.

연립방정식 $\begin{cases} x-y+2=0 \\ 4x-y-4=0 \end{cases}$을 풀면 $x=2$, $y=4$

따라서 두 직선 $x-y+2=0$, $4x-y-4=0$의 교점의 좌표는 $(2, 4)$이다. …… 20%

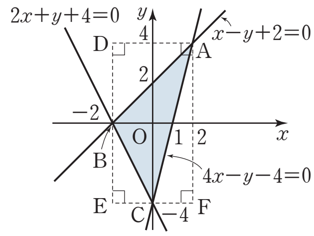
연립방정식 $\begin{cases} x-y+2=0 \\ 2x+y+4=0 \end{cases}$을 풀면 $x=-2$, $y=0$

따라서 두 직선 $x-y+2=0$, $2x+y+4=0$의 교점의 좌표는 $(-2, 0)$이다. …… 20%

연립방정식 $\begin{cases} 4x-y-4=0 \\ 2x+y+4=0 \end{cases}$을 풀면 $x=0$, $y=-4$

따라서 두 직선 $4x-y-4=0$, $2x+y+4=0$의 교점의 좌표는 $(0, -4)$이다. …… 20%

따라서 세 직선으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



(사각형 DEFA의 넓이)

$-\triangle DBA-\triangle BEC$

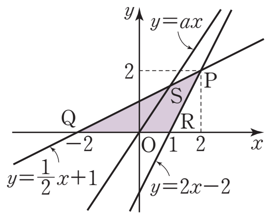
$-\triangle ACF$

$=4\times 8-\frac{1}{2}\times 4\times 4-\frac{1}{2}\times 2\times 4-\frac{1}{2}\times 2\times 8$

$=32-8-4-8=12$ …… 40%

08 Action 세 점 P, Q, R의 좌표를 구하여 △PQR의 넓이를 구한다.

연립방정식 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+1 \\ y=2x-2 \end{cases}$를



풀면 $x=2$, $y=2$

따라서 두 직선의 교점 P의 좌표는 $(2, 2)$이다.

직선 $y=\frac{1}{2}x+1$의 x절편은 -2이므로 $Q(-2, 0)$

직선 $y=2x-2$의 x절편은 1이므로 $R(1, 0)$

$\therefore \triangle PQR=\frac{1}{2}\times 3\times 2=3$

두 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$, $y=ax$가 만나는 점을 S라 하면

$\triangle SQO=\frac{3}{2}$

점 S의 y좌표를 k라 하면

$\frac{1}{2}\times 2\times k=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore k=\frac{3}{2}$

$y=\frac{1}{2}x+1$에 $y=\frac{3}{2}$을 대입하면

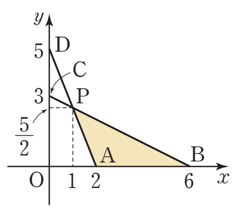
$\frac{3}{2}=\frac{1}{2}x+1$, $\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore x=1$

$\therefore S\left(1, \frac{3}{2}\right)$

따라서 직선 $y=ax$가 점 $S\left(1, \frac{3}{2}\right)$을 지나므로 $a=\frac{3}{2}$

09 Action 네 점 A, B, C, D를 좌표평면 위에 나타내고 점 P의 좌표를 구한다.

두 점 $A(2, 0)$, $D(0, 5)$를 지나는 직선의 방정식은



$y=-\frac{5}{2}x+5$

두 점 $B(6, 0)$, $C(0, 3)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x+3$

연립방정식 $\begin{cases} y=-\dfrac{5}{2}x+5 \\ y=-\dfrac{1}{2}x+3 \end{cases}$ 을 풀면 $x=1,\ y=\dfrac{5}{2}$

따라서 두 직선의 교점 P의 좌표는 $\left(1,\ \dfrac{5}{2}\right)$이다.

즉 $\triangle$PAB를 x축을 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 입체도형의 부피는

$$\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{5}{2}\right)^2\times5-\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{5}{2}\right)^2\times1=\frac{125}{12}\pi-\frac{25}{12}\pi$$
$$=\frac{25}{3}\pi$$

10

Action 먼저 두 직선의 교점의 좌표를 구한다.

두 직선 $y=ax+2b,\ y=bx+2a$의 교점의 x좌표는

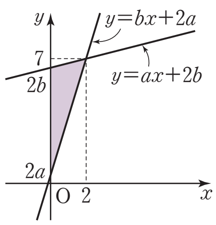
$ax+2b=bx+2a,\ (a-b)x=2(a-b)$

$\therefore x=2\ (\because a\neq b)$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(2,\ 7)$이다.

$y=ax+2b$에 $x=2,\ y=7$을 대입하면

$7=2a+2b$ …… ㉠



이때 $0<a<b$에서 $2a<2b$이므로 두 직선의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

한편, 두 직선과 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 6이므로

$\dfrac{1}{2}\times(2b-2a)\times2=6$

$2b-2a=6,\ 2(b-a)=6 \quad \therefore b-a=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{1}{4},\ b=\dfrac{13}{4}$

11

Action 두 물통 A, B의 그래프의 식을 각각 구한다.

물통 A의 그래프는 두 점 $(10,\ 0),\ (0,\ 120)$을 지나므로

$y=-12x+120$ …… ①

물통 B의 그래프는 두 점 $(20,\ 0),\ (0,\ 80)$을 지나므로

$y=-4x+80$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $x=5,\ y=60$

㉠, ㉣ 물을 빼내기 시작한 지 5분 후에 두 물통에 남아 있는 물의 양은 60 L로 같아진다.

㉡ 물통 A는 1분에 12 L씩, 물통 B는 1분에 4 L씩 물이 빠지므로 물통 A가 물통 B보다 물이 빠르게 빠진다.

㉢ ①에 $x=8$을 대입하면 $y=-12\times8+120=24$
따라서 물을 빼내기 시작한 지 8분이 지난 후 물통 A에 남아 있는 물의 양은 24 L이다.
②에 $x=8$을 대입하면 $y=-4\times8+80=48$
따라서 물을 빼내기 시작한 지 8분이 지난 후 물통 B에 남아 있는 물의 양은 48 L이다.
즉 물통 A에 남아 있는 물의 양이 물통 B에 남아 있는 물의 양보다 적다.

따라서 옳은 것은 ㉡, ㉣이다.

최고 수준 뛰어넘기

P 117

01 P$(1,\ 3)$ **02** 3 **03** $\dfrac{28}{15}$

01

Action 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$로 놓고 네 점 A, B, C, D의 좌표를 각각 $a,\ b$의 식으로 나타낸다.

$5x-3y+6=0$에서 $y=\dfrac{5}{3}x+2$

$3x-4y+4=0$에서 $y=\dfrac{3}{4}x+1$

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{5}(b-2),\ b\right)$,

$\mathrm{B}\left(\dfrac{4}{3}(b-1),\ b\right),\ \mathrm{C}\left(a,\ \dfrac{5}{3}a+2\right),\ \mathrm{D}\left(a,\ \dfrac{3}{4}a+1\right)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{4}{3}(b-1)-\dfrac{3}{5}(b-2)=\dfrac{11}{15}b-\dfrac{2}{15}$

$\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{5}{3}a+2-\left(\dfrac{3}{4}a+1\right)=\dfrac{11}{12}a+1$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{31}{15}$이므로 $\dfrac{11}{15}b-\dfrac{2}{15}=\dfrac{31}{15}$

$\dfrac{11}{15}b=\dfrac{33}{15} \quad \therefore b=3$

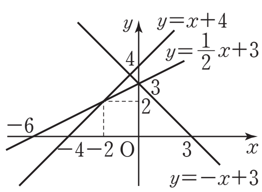
$\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{23}{12}$이므로 $\dfrac{11}{12}a+1=\dfrac{23}{12}$

$\dfrac{11}{12}a=\dfrac{11}{12} \quad \therefore a=1$

따라서 점 P의 좌표는 $(1,\ 3)$이다.

02

Action 세 직선을 좌표평면 위에 나타내어 본다.



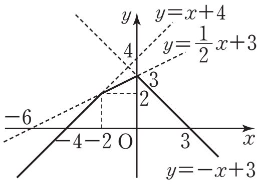
세 직선 $y=x+4$, $y=\dfrac{1}{2}x+3,\ y=-x+3$을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

연립방정식 $\begin{cases} y=x+4 \\ y=\dfrac{1}{2}x+3 \end{cases}$ 을 풀면 $x=-2,\ y=2$

따라서 두 직선 $y=x+4,\ y=\dfrac{1}{2}x+3$의 교점의 좌표는 $(-2,\ 2)$이다.

또, 두 직선 $y=\dfrac{1}{2}x+3,\ y=-x+3$은 y절편이 같으므로 교점의 좌표는 $(0,\ 3)$이다.

이때 $\min\{a, b, c\}$는 a, b, c 중 가장 작은 수를 나타내므로 오른쪽 그림에서

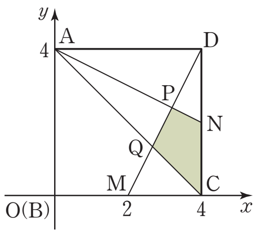


$$f(x)=\begin{cases} x+4 & (x\le -2) \\ \frac{1}{2}x+3 & (-2<x\le 0) \\ -x+3 & (x>0) \end{cases}$$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $x=0$일 때 3이다.

03

Action 점 B를 원점, 직선 AB를 y축, 직선 BC를 x축으로 하는 좌표평면 위에 사각형 ABCD를 나타내어 본다.



오른쪽 그림과 같이 점 B를 원점, 직선 AB를 y축, 직선 BC를 x축으로 하는 좌표평면을 그려 보면 A$(0, 4)$, C$(4, 0)$, D$(4, 4)$, M$(2, 0)$, N$(4, 2)$이다.

두 점 D$(4, 4)$, M$(2, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=2x-4$ ······ ㉠

두 점 A$(0, 4)$, N$(4, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x+4$ ······ ㉡

두 점 A$(0, 4)$, C$(4, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-x+4$ ······ ㉢

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{16}{5}$, $y=\frac{12}{5}$

$\therefore$ P$\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=\frac{8}{3}$, $y=\frac{4}{3}$

$\therefore$ Q$\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$\therefore$ (사각형 PQCN의 넓이)

$=\triangle$DQC$-\triangle$DPN

$=\frac{1}{2}\times 4\times\left(4-\frac{8}{3}\right)-\frac{1}{2}\times 2\times\left(4-\frac{16}{5}\right)$

$=\frac{8}{3}-\frac{4}{5}=\frac{28}{15}$

교과서 속 창의 사고력

P 118~P 120

01 240 **02** 71 **03** $x\le -\frac{11}{17}$

04 $y=\frac{1}{2}x-1$ **05** 22 L **06** $\frac{5}{6}$

01

Action $f(3), f(4), f(5)$의 값을 각각 구하여 규칙을 찾는다.

$f(3)$은 3 이하의 자연수 2개와 3을 가지고 만들 수 있는 삼각형의 개수이므로

$(3, 3, 3), (3, 3, 2), (3, 3, 1)$ ➡ 3개

$(3, 2, 2)$ ➡ 1개

$\therefore f(3)=3+1=4$

$f(4)$는 4 이하의 자연수 2개와 4를 가지고 만들 수 있는 삼각형의 개수이므로

$(4, 4, 4), (4, 4, 3), (4, 4, 2), (4, 4, 1)$ ➡ 4개

$(4, 3, 3), (4, 3, 2)$ ➡ 2개

$\therefore f(4)=4+2=6$

$f(5)$는 5 이하의 자연수 2개와 5를 가지고 만들 수 있는 삼각형의 개수이므로

$(5, 5, 5), (5, 5, 4), (5, 5, 3), (5, 5, 2), (5, 5, 1)$ ➡ 5개

$(5, 4, 4), (5, 4, 3), (5, 4, 2)$ ➡ 3개

$(5, 3, 3)$ ➡ 1개

$\therefore f(5)=5+3+1=9$

같은 방법으로

$$\begin{aligned} f(30)&=30+28+26+\cdots+4+2 \\ &=(30+2)+(28+4)+\cdots+(18+14)+16 \\ &=32\times 7+16 \\ &=240 \end{aligned}$$

02

Action n에 2, 3, 4를 각각 대입한 후 a, b, c의 값의 범위를 각각 구한다.

$f_2(a)=\left[\frac{a}{2}\right]=1$에서 $1\le\frac{a}{2}<2$

$\therefore 2\le a<4$

$f_3(b)=\left[\frac{b}{3}\right]=a$에서 $2\le\left[\frac{b}{3}\right]<4$

즉 $2\le\frac{b}{3}<4$ $\quad\therefore 6\le b<12$

$f_4(c)=\left[\frac{c}{4}\right]=b$에서 $6\le\left[\frac{c}{4}\right]<12$

즉 $6\le\frac{c}{4}<12$ $\quad\therefore 24\le c<48$

이때 정수 c의 최댓값은 47, 최솟값은 24이므로

$M=47$, $m=24$

$\therefore M+m=47+24=71$

Lecture

$[x]$: x보다 크지 않은 최대의 정수

➡ x 이하의 최대의 정수

➡ x를 넘지 않는 최대의 정수

03

Action 두 일차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 식을 각각 구한다.

일차함수 $y=f(x)$의 그래프는 x의 값이 4만큼 증가할 때 y의 값은 3만큼 감소하므로 기울기가 $-\frac{3}{4}$이다.

$f(x)=-\frac{3}{4}x+a$로 놓으면 $f(1)=4$이므로

$4=-\frac{3}{4}+a \qquad \therefore a=\frac{19}{4}$

$\therefore f(x)=-\frac{3}{4}x+\frac{19}{4}$

일차함수 $y=g(x)$의 그래프는 y절편이 2이다.

$g(x)=bx+2$로 놓으면 $g(1)=-3$이므로

$-3=b+2 \qquad \therefore b=-5$

$\therefore g(x)=-5x+2$

따라서 $f(x)\le g(x)$에서 $-\frac{3}{4}x+\frac{19}{4}\le -5x+2$

$\frac{17}{4}x\le -\frac{11}{4} \qquad \therefore x\le -\frac{11}{17}$

04 **Action** 먼저 점 P의 좌표가 $(2, 0)$일 때, 점 P가 점 A로부터 떨어진 거리를 $\overline{AO}$의 길이를 이용하여 나타내어 본다.

점 P의 좌표가 $(2, 0)$일 때, 점 P는 점 A에서 $\overline{AO}$의 $\frac{4}{5}$만큼 떨어져 있다.

이때 점 P가 점 A를 출발하여 점 O에 도착하는 데 걸리는 시간과 점 Q가 점 A를 출발하여 점 B에 도착하는 데 걸리는 시간이 같으므로 점 Q는 점 A에서 $\overline{AB}$의 $\frac{4}{5}$만큼 떨어져 있다.

즉 점 Q의 좌표는 $(10, 4)$이다.

두 점 $P(2, 0)$, $Q(10, 4)$를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는 $\frac{4-0}{10-2}=\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}x+b$로 놓고 $x=2$, $y=0$을 대입하면

$0=1+b \qquad \therefore b=-1$

따라서 구하는 일차함수의 식은 $y=\frac{1}{2}x-1$

05 **Action** 먼저 연료를 더 넣은 후의 연료의 양을 구한 후 x km를 이동하였을 때, 남아 있는 연료의 양을 y L로 놓고 x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내어 본다.

자동차에 들어 있는 연료의 양은 연료통의 부피의 $\frac{1}{5}$이었고, 20 L의 연료를 더 넣었더니 연료통의 부피의 $\frac{3}{5}$이 되었으므로 더 넣은 연료의 양은 연료통의 부피의 $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$이다.

즉 20 L의 연료가 연료통의 부피의 $\frac{2}{5}$이므로 10 L의 연료는 연료통의 부피의 $\frac{1}{5}$이다.

따라서 처음 연료의 양은 10 L이고, 연료를 더 넣은 후 들어 있는 연료의 양은 $10+20=30$ (L)이다.

이때 15 km를 가는 데 2 L의 연료가 필요하므로 1 km를 가는 데 $\frac{2}{15}$ L의 연료가 필요하다.

즉 x km를 가는 데 $\frac{2}{15}x$ L의 연료가 필요하므로 남아 있는 연료의 양을 y L라 하면 $y=30-\frac{2}{15}x$

$y=30-\frac{2}{15}x$에 $x=60$을 대입하면 $y=30-8=22$

따라서 남아 있는 연료의 양은 22 L이다.

06 **Action** 서로 다른 세 직선에 의하여 좌표평면이 여섯 부분으로 나누어지는 경우는 세 직선이 한 점에서 만나거나 두 직선이 평행하고 다른 한 직선은 두 직선과 평행하지 않은 경우이다.

서로 다른 세 직선에 의하여 좌표평면이 여섯 부분으로 나누어지는 경우는 세 직선이 한 점에서 만나거나 두 직선이 평행하고 다른 한 직선은 두 직선과 평행하지 않은 경우이다.

(i) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

연립방정식 $\begin{cases} x+py-3=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases}$을 풀면 $x=3$, $y=0$

따라서 세 직선의 교점의 좌표는 $(3, 0)$이므로

$px+y-1=0$에 $x=3$, $y=0$을 대입하면

$3p-1=0$, $3p=1 \qquad \therefore p=\frac{1}{3}$

(ii) 두 직선 $px+y-1=0$, $x+py-3=0$이 평행할 때,

즉 두 직선 $y=-px+1$, $y=-\frac{1}{p}x+\frac{3}{p}$이 평행한 경우

$-p=-\frac{1}{p}$, $1\ne\frac{3}{p} \qquad \therefore p=1$ 또는 $p=-1$

이때 직선 $x+2y-3=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

따라서 직선 $x+2y-3=0$은 나머지 두 직선과 평행하지 않으므로 조건을 만족시킨다.

(iii) 두 직선 $px+y-1=0$, $x+2y-3=0$이 평행할 때,

즉 두 직선 $y=-px+1$, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$이 평행한 경우

$-p=-\frac{1}{2}$, $1\ne\frac{3}{2} \qquad \therefore p=\frac{1}{2}$

이때 $x+py-3=0$에 $p=\frac{1}{2}$을 대입하면

$x+\frac{1}{2}y-3=0$, 즉 $y=-2x+6$의 기울기는 -2이다.

따라서 직선 $x+py-3=0$은 나머지 두 직선과 평행하지 않으므로 조건을 만족시킨다.

(iv) 두 직선 $x+py-3=0$, $x+2y-3=0$이 평행할 때,

즉 두 직선 $y=-\frac{1}{p}x+\frac{3}{p}$, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$이 평행한 경우

$-\frac{1}{p}=-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{p}\ne\frac{3}{2}$

따라서 가능한 p의 값은 없다.

(i)~(iv)에 의하여 모든 상수 p의 값은 $\frac{1}{3}$, 1, -1, $\frac{1}{2}$이므로

그 합은 $\frac{1}{3}+1+(-1)+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$