체크체크 기출심화 N제

정답과 해설

중 3-1

빠른 정답

1 제곱근과 실수

01 | 제곱근의 뜻과 성질

개념 확인 7쪽

01 ①, ③ **02** -4 **03** ④ **04** ⑤ **05** ①, ⑤
06 ③

적중 & 심화 유형 연습 8쪽~14쪽

01 ③ **02** ㉡−㉣−㉤−㉠−㉢ **03** $4a$ **04** $-a$
05 ① **06** ⑤ **07** ⑤ **08** $-2a+1$ **09** ③
10 $-4b$ **11** ④ **12** $a-4b$ **13** 6
14 $a=20$, $k=70$ **15** 90 **16** 6 **17** ④
18 24 **19** 8 **20** ④ **21** 5개 **22** ④
23 ① **24** 28 **25** 1 **26** ③ **27** -1
28 ① **29** 4 **30** 11 **31** 8 **32** ②
33 ① **34** $4a$ **35** $\frac{1}{6}$ **36** 10, 40, 90
37 200 **38** 142 **39** 34 **40** -6
41 (1) 3 (2) 12 **42** 29 **43** 70 **44** ⑤

적중 & 심화 실전 TEST 15쪽~17쪽

01 10 **02** ㉠, ㉣ **03** ⑤ **04** ㉡ **05** ①
06 $a+2b$ **07** ③ **08** ③ **09** $\frac{1}{2}+\sqrt{7}$
10 (1) $9<x<16$ (2) 5, 12, 17, 20 (3) 12 **11** ①
12 $7a$ **13** 80 **14** $\frac{8}{5}$ **15** 56 **16** $\frac{1}{6}$
17 12, 27, 75 **18** ④

02 | 무리수와 실수

개념 확인 19쪽

01 (1) ㉡ (2) ㉡, ㉢, ㉦, ㉨ (3) ㉠, ㉣, ㉤, ㉥, ㉧
02 ㉡, ㉢, ㉤ **03** ⑤ **04** P: $-1-\sqrt{10}$, Q: $1+\sqrt{13}$
05 ②, ⑤ **06** (1) $5-\sqrt{2}<4$ (2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}>-3+\sqrt{5}$

적중 & 심화 유형 연습 20쪽~24쪽

01 ③ **02** ②, ③ **03** ⑤ **04** $4-\sqrt{5}$
05 $-1+\sqrt{5}$ **06** ⑤ **07** ⑤ **08** ④, ⑤ **09** ②
10 ⑤ **11** ④
12 (1), (2) 풀이 참조 (3) $-4+\sqrt{5}<-2+\sqrt{2}$ **13** ①
14 ② **15** $a<c<b$ **16** ④ **17** ⑤
18 $1-\sqrt{5}$ **19** ④ **20** ⑤ **21** ②, ⑤ **22** 84개
23 27개 **24** 85개 **25** 83개 **26** ⑤ **27** ②
28 4개 **29** ① **30** 11개 **31** ②

적중 & 심화 실전 TEST 25쪽~26쪽

01 4 **02** ㉠, ㉢ **03** $1-\sqrt{5}$ **04** ㉡, ㉤ **05** ③
06 $b<a<c$ **07** ④ **08** 33개 **09** ② **10** ②
11 15 **12** ①

학교 시험 최상위 기출 도전 27쪽~28쪽

01 $3a+1$ **02** ① **03** ② **04** ② **05** 84
06 19 **07** 78개 **08** ㉠, ㉣, ㉤ **09** 12

2 근호를 포함한 식의 계산

01 | 근호를 포함한 식의 곱셈과 나눗셈

개념 확인 31쪽

01 ⑤ **02** $\frac{3\sqrt{10}}{4}$ **03** ③ **04** ② **05** ㉠, ㉣
06 1635

적중 & 심화 유형 연습 32쪽~35쪽

01 $\frac{1}{5}$ **02** 12 **03** 48 **04** 1 **05** ①
06 $5x-7y$ **07** 5 **08** ⑤ **09** 30 **10** 45
11 -2 **12** ⑤ **13** ④ **14** 672 **15** 85900
16 5.222 **17** $20\sqrt{2}\text{ cm}^3$ **18** 3 **19** ⑤ **20** ②
21 $5\sqrt{6}\text{ cm}$ **22** $\sqrt{6}\text{ cm}$ **23** ⑤ **24** $\sqrt{70}\text{ cm}$

적중 & 심화 실전 TEST
36쪽~37쪽

01 28 **02** $\frac{7}{5}$ **03** ④ **04** ② **05** ㉡, ㉣
06 357 **07** 240 **08** $2\sqrt{2}$ **09** $8\sqrt{10}$ **10** $8\sqrt{2}$
11 $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ cm **12** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

02 | 근호를 포함한 식의 덧셈과 뺄셈

개념 확인
39쪽

01 ⑤ **02** 4 **03** 14 **04** ④ **05** -2
06 $8-\sqrt{8}<1+\sqrt{18}$

적중 & 심화 유형 연습
40쪽~46쪽

01 ④ **02** $-2\sqrt{6}$ **03** 2 **04** 175 **05** ①
06 $2\sqrt{6}-3\sqrt{3}$ **07** ⑤ **08** $10-\sqrt{3}$ **09** $\frac{13}{6}$
10 $2\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ **11** 3 **12** ⑤ **13** -6
14 ④ **15** $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ **16** 6 **17** 5 **18** ⑤
19 $20\sqrt{7}$ cm **20** $6\sqrt{15}$ cm^2 **21** ② **22** $7+2\sqrt{13}$
23 $5-2\sqrt{2}$ **24** (1) $-2-\sqrt{2}$ (2) $-1+2\sqrt{2}$
25 $2-3\sqrt{5}$ **26** $-2\sqrt{2}+\sqrt{5}$ **27** ④
28 $B<A<C$ **29** ④
30 (1) $2\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (2) $2\sqrt{5}-5$ (3) $5-\sqrt{3}$ **31** $26\sqrt{2}$ cm
32 $(48\sqrt{2}+32)$ cm **33** $4-2\sqrt{5}$ **34** 30 cm^2 **35** ③
36 $\sqrt{2}$ **37** $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ **38** $\frac{28\sqrt{3}}{3}$ **39** ②
40 $7-2\sqrt{3}$ **41** $3\sqrt{2}+4$ **42** $6\sqrt{5}-15$

적중 & 심화 실전 TEST
47쪽~48쪽

01 $16\sqrt{3}$ **02** $\frac{5\sqrt{2}}{2}-1$ **03** ② **04** $\frac{2}{9}$ **05** 6
06 $(16\sqrt{3}+12\sqrt{2})$ cm **07** $-2+\sqrt{2}$ **08** $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+1$
09 $22\sqrt{2}$ cm **10** $(5\sqrt{2}+2\sqrt{10})$ cm **11** $8\sqrt{3}$ **12** ④

학교 시험 최상위 기출 도전
49쪽~50쪽

01 6 **02** ④ **03** $2\sqrt{5}-2$ **04** $1-\sqrt{2}$
05 $2\sqrt{6}$ cm **06** $14\sqrt{3}+6\sqrt{6}$ **07** $20+8\sqrt{2}$ **08** ⑤

3 다항식의 곱셈

01 | 다항식의 곱셈과 곱셈 공식의 활용

개념 확인
53쪽

01 3 **02** ⑤ **03** ② **04** ③
05 $4-\sqrt{15}$ **06** 12

적중 & 심화 유형 연습
54쪽~62쪽

01 -2 **02** 36 **03** 2 **04** ② **05** ①
06 ⑤ **07** 24 **08** -3 **09** ⑤ **10** -21
11 2 **12** 4 **13** ② **14** 8 **15** ⑤
16 4 cm^2 **17** ④ **18** $16x^2+8x-2$
19 a^2+4a+3 **20** 4 **21** ④ **22** ③
23 9 **24** 3 **25** 39 **26** 12 **27** 15
28 ② **29** $2\sqrt{11}$ **30** $-3\sqrt{5}$ **31** $\frac{5}{3}$ **32** -3
33 ④ **34** 5 **35** $2\sqrt{2}+1$ **36** 16 **37** 9
38 12 **39** -10 **40** 176 **41** 42
42 (1) $2\sqrt{5}$ (2) 1 (3) 18 **43** 11 **44** 16 **45** ④
46 89 **47** $x^2+4x+4-y^2$ **48** ④
49 $x^4-2x^3-13x^2+14x+24$ **50** 1 **51** 0
52 $\pm\sqrt{23}$ **53** $-\sqrt{5}$ **54** 10 **55** $\sqrt{3}-1$

적중 & 심화 실전 TEST
63쪽~65쪽

01 -2 **02** 16 **03** 4 **04** a^2+2a-3
05 $-2a^2+7ab-6b^2$ **06** 2 **07** $20+2\sqrt{10}$
08 -29 **09** 34 **10** $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ **11** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$
12 194 **13** 9 **14** $-\frac{31}{3}$ **15** 8
16 $x^4+10x^3+23x^2-10x-24$ **17** 10 **18** $\frac{2}{3}$

학교 시험 최상위 기출 도전
66쪽

01 37 **02** ① **03** 6 **04** $(9-3\sqrt{3})$ cm
05 14

4 인수분해

01 | 인수분해 공식

개념 확인 69쪽

01 ④ **02** ⑤ **03** ③ **04** ③ **05** 4
06 ±10

적중 & 심화 유형 연습 70쪽~75쪽

01 ② **02** ② **03** ④ **04** ③
05 $(x+2)(3x-2)$ **06** $11x+6$ **07** ① **08** ④
09 ④ **10** $a=\pm24,\ b=36$ **11** $\frac{9}{4}$ **12** 10
13 $\frac{26}{5},\ -\frac{22}{5}$ **14** 49 **15** 6 **16** 1
17 40 **18** $(2x-3)(3x-1)$ **19** 7 **20** -12
21 -7 **22** -2 **23** $(x+2)(x-4)$
24 $2(x-4)(x+6)$ **25** 7 **26** ③ **27** ④
28 ③ **29** ④ **30** ③ **31** $M=11,\ m=-11$
32 ④ **33** -48 **34** 5 **35** $2a+\frac{1}{6}$ **36** $\frac{2}{a}$

적중 & 심화 실전 TEST 76쪽~77쪽

01 ②, ⑤ **02** $4x+6$ **03** 24 **04** ④ **05** ①, ③
06 55 **07** ④ **08** -4 **09** $(3x+2)(6x+5)$
10 $(4a-10)$ cm **11** 30 **12** $a-b+\frac{1}{2}$

02 | 인수분해 공식의 활용

개념 확인 79쪽

01 ③ **02** 144 **03** 10000 **04** (1) $20\sqrt{2}$ (2) 16
05 ②, ⑤ **06** $2(a-1)(a+2)$

적중 & 심화 유형 연습 80쪽~86쪽

01 1 **02** 55 **03** 2752 **04** 16 **05** 524
06 $33+12\sqrt{66}$ **07** $3+\sqrt{3}$ **08** 5 **09** $\sqrt{2}$
10 192 **11** 12 **12** 2π **13** $52\pi r^2\ \mathrm{cm}^2$
14 $(x-1)(y+1)$ **15** ② **16** $(x-1)(2x+3)$
17 ④ **18** $(2x-y+1)(2x-y-5)$ **19** ④
20 25 **21** ⑤ **22** 10
23 $(x^2+3x-3)(x^2+3x+5)$ **24** 19
25 ㉡, ㉣, ㉤ **26** ①
27 $(x-y)(a^4+1)(a^2+1)(a+1)(a-1)$ **28** ⑤
29 ④ **30** $3\sqrt{5}$ **31** 10 **32** 4 **33** $24\sqrt{3}$
34 33 **35** $-\frac{11}{4}$ **36** 5 **37** 16 **38** 64
39 (1) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ (2) 224 **40** $\frac{50}{99}$
41 $(x+2)(x-4y-4)$ **42** ①, ④ **43** 3 **44** ⑤

적중 & 심화 실전 TEST 87쪽~88쪽

01 9 **02** 811 **03** $-\frac{1}{4}$ **04** $16\sqrt{3}$ **05** ①
06 3 **07** ㉡, ㉢ **08** ④ **09** -4 **10** 3개
11 33 **12** -8

학교 시험 최상위 기출 도전 89쪽~90쪽

01 11개 **02** 1 **03** 5 **04** $\frac{195}{14}$ **05** 461
06 30 **07** $-\frac{1}{3}$ **08** $\frac{5}{36}$
09 $a=1,\ b=3,\ c=9$ / 부피: 27

5 이차방정식

01 | 이차방정식의 뜻과 그 풀이

개념 확인 93쪽

01 ⑤ **02** ③ **03** ④ **04** ④
05 $x=9$ 또는 $x=-\frac{6}{5}$ **06** $x=3\pm\sqrt{7}$ **07** ⑤

적중 & 심화 유형 연습 94쪽~101쪽

01 ㉠, ㉢ **02** ④ **03** ② **04** ② **05** ③
06 -4 **07** 15 **08** -4 **09** -8 **10** 2
11 5 **12** 13 **13** -1 **14** 2
15 $x=2$ 또는 $x=3$ **16** $x=1$ 또는 $x=-3$ **17** -16
18 10 **19** ③ **20** -2 **21** 3 **22** -1
23 3 **24** 1 **25** 9 **26** -3 **27** -5
28 -11 **29** ② **30** ①, ④ **31** -4 **32** -3
33 7 **34** 21 **35** 4
36 (1) $a=-2,\ b=12$ (2) $x=-4$ 또는 $x=\frac{3}{2}$ (3) $\frac{11}{2}$

37 7 **38** 5 **39** 3 **40** $x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

41 -1 **42** $x=-1$ **43** $\frac{1}{16}$ **44** 8 **45** $\frac{25}{9}$

46 ① **47** 3 **48** ③

적중 & 심화 실전 TEST 102쪽~103쪽

01 40 **02** 3 **03** 36 **04** -2 **05** 36

06 12 **07** ② **08** 2 **09** 8

10 (1) 4 (2) $a=3, b=1$ (3) $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ **11** 28

12 123

02 | 이차방정식의 활용

개념 확인 105쪽

01 (1) $ax^2+bx=-c$ (2) $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

(3) $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

(4) $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ (5) $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(6) $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

02 $x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$ **03** $x=\frac{7\pm\sqrt{29}}{10}$ **04** $x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{4}$

05 $x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}$ **06** 구각형

적중 & 심화 유형 연습 106쪽~115쪽

01 0 **02** -1 **03** 1 **04** -3 **05** ⑤

06 24 **07** $x=\frac{5}{3}$ **08** 49 **09** $x=4\pm\sqrt{19}$

10 ⑤ **11** ㉠ **12** 0 **13** 4 **14** 7

15 $\frac{13}{2}$ **16** -11 **17** $x=3\pm2\sqrt{2}$ **18** -2

19 3 **20** 3 **21** $x=-2$ 또는 $x=5$

22 $x=1\pm\sqrt{2}$ **23** $x=\frac{-9\pm\sqrt{57}}{2}$ **24** 28

25 21 **26** 8 **27** 47 **28** ② **29** 16명

30 13명 **31** 7월 16일 **32** 1050 **33** ⑤ **34** 5초 후

35 4초 **36** 5초 **37** 4 cm **38** 72 cm **39** 14 cm

40 144 m^2 **41** 27 m^2 **42** 4 **43** 16초 후 **44** 6 cm

45 8초 후 **46** 2 m **47** 7 cm **48** $\frac{3}{2}$ m

49 $x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{5}$ **50** -4 **51** $-1+\sqrt{2}$

52 $(-1+\sqrt{5})$ cm **53** $6-2\sqrt{3}$ **54** $(10-5\sqrt{2})$ cm

55 $\sqrt{2}$ **56** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **57** $-2+2\sqrt{5}$

58 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ **59** -4 **60** 14

적중 & 심화 실전 TEST 116쪽~118쪽

01 (1) $x=3\pm\sqrt{7-a}$ (2) $7-a$가 0 또는 제곱수이어야 한다.
(3) 3, 6, 7

02 $x=4\pm\sqrt{15}$ **03** $\frac{1}{18}$ **04** 5 **05** 10

06 19 **07** 20 **08** 3초 **09** 35 cm **10** 5 cm

11 4초 후 **12** $5-\sqrt{10}$ **13** 2 **14** $(-6+3\sqrt{10})$ cm

15 $9-3\sqrt{5}$ **16** $(-5+5\sqrt{5})$ cm **17** -1 **18** $(3, 8)$

학교 시험 최상위 기출 도전 119쪽~120쪽

01 2022 **02** $\frac{83}{9}$ **03** 11 **04** 6

05 (1) $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원 (2) $b\left(1-\frac{x}{400}\right)$개 (3) 20 %

06 3 **07** $\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$ cm **08** 250보

6 이차함수

01 | 이차함수와 그 그래프

개념 확인 123쪽

01 ③ **02** -4 **03** ④ **04** ③ **05** ③

06 ㉡과 ㉤과 ㉥

적중 & 심화 유형 연습 124쪽~132쪽

01 0, 4 **02** ①, ④ **03** 8 **04** 1 **05** ①

06 ① **07** $a<b<d<c$ **08** ②

09 (1) $-\frac{4}{9}$ (2) $\pm3\sqrt{2}$ **10** ④ **11** 6 **12** $\frac{13}{3}$

13 ⑤ **14** $-\frac{5}{4}$ **15** 4, 30 **16** $-\frac{1}{2}$ **17** ④

18 ①, ④ **19** -5 **20** -6 **21** 6 **22** ⑤

23 $(0, 5)$ **24** -2 **25** 5 **26** ② **27** 1

28 6 **29** ③ **30** $x<8$ **31** $x<3$

32 $a>0, p>0, q<0$ **33** ⑤ **34** ③ **35** ③

36 ③, ④ **37** (1) $y=x^2+x+2$ (2) 932개

38 $y=2x^2-x$ **39** -9 **40** 18

41 $B(1+\sqrt{5}, 20)$, $a=\frac{5(3-\sqrt{5})}{2}$ **42** $(3, 3)$ **43** $\frac{48}{7}$
44 3 **45** 18 **46** 54 **47** 2 **48** 8
49 20 **50** 8 **51** $6\sqrt{3}$ **52** $a\le-3$
53 $0<a<\frac{5}{4}$

적중 & 심화 실전 TEST
133쪽~135쪽

01 ④ **02** ③ **03** -1 **04** 14 **05** -24
06 2 **07** ⑤ **08** ㉢, ㉣
09 (1) $y=2x^2+2x+1$ (2) 11단계 **10** 16 **11** $\frac{16}{3}$
12 $-2+2\sqrt{5}$ **13** $\frac{8}{3}$ **14** $-\frac{1}{4}$ **15** $\frac{4}{5}$ **16** 8
17 24 **18** $-\frac{3}{4}<a<0$

학교 시험 최상위 기출 도전
136쪽

01 $\frac{2}{7}$ **02** $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{16}\right)$ **03** 15 **04** -2499

7 이차함수의 활용

01 | 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

개념 확인
139쪽

01 (1) $y=2(x+3)^2-10$ (2) $(-3, -10)$ (3) $x=-3$ (4) $(0, 8)$
02 ④ **03** $a<0, b>0, c>0$ **04** $y=-x^2+4x-5$
05 $y=-2x^2-8x+1$ **06** $y=x^2-4x+1$

적중 & 심화 유형 연습
140쪽~147쪽

01 ③, ④ **02** ④ **03** -1 **04** 3 **05** 6
06 꼭짓점의 좌표 : $\left(\frac{3}{2}, \frac{19}{4}\right)$, 축의 방정식 : $x=\frac{3}{2}$ **07** 1
08 5 **09** -23 **10** $x>2$ **11** $x>-4$ **12** 2
13 -2 **14** $x=-2$ **15** 4 **16** -10 **17** $\frac{3}{4}$
18 30 **19** 6 **20** ①, ⑤ **21** ② **22** ②
23 2 **24** -12 **25** $y=2x^2+4x+2$ **26** 13 m
27 -6 **28** 7 **29** 3 **30** 24 **31** $(1, 3)$
32 2 **33** 3 **34** 2 **35** 9 **36** -1
37 8 **38** 4 **39** $(4, 6)$ **40** ②

41 제3사분면 **42** -36 **43** $a=-2, b=12, c=-17$
44 -20 **45** 5 **46** -5 **47** 2

적중 & 심화 실전 TEST
148쪽~150쪽

01 ② **02** 8 **03** 6 **04** -1 **05** 8
06 5 **07** 8 **08** ③, ⑤ **09** ⑤ **10** ②
11 2 **12** 9 **13** 7 **14** ① **15** 12
16 8 **17** 7

학교 시험 최상위 기출 도전
151쪽~152쪽

01 $(2, 8)$ **02** 54 **03** $\frac{1}{72}$ **04** -21 **05** -9
06 $-\frac{6}{5}$ **07** 7 **08** -2

1 제곱근과 실수

01 | 제곱근의 뜻과 성질

개념 확인 7쪽

01 답 ①, ③

① 0의 제곱근은 0이다.

③ $(\sqrt{3})^2=3$, $(-\sqrt{3})^2=3$이므로 제곱하여 3이 되는 수는 $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$이다.

⑤ $\frac{64}{25}$의 제곱근은 $\sqrt{\frac{64}{25}}=\frac{8}{5}$, $-\sqrt{\frac{64}{25}}=-\frac{8}{5}$의 2개이고, 그 합은 $\frac{8}{5}+\left(-\frac{8}{5}\right)=0$이다.

따라서 옳지 않은 것은 ①, ③이다.

02 답 -4

$\sqrt{(-9)^2}=9$이므로 9의 음의 제곱근은

$-\sqrt{9}=-3 \quad \therefore a=-3$

$\sqrt{\frac{256}{81}}=\frac{16}{9}$이므로 $\frac{16}{9}$의 양의 제곱근은

$\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3} \quad \therefore b=\frac{4}{3}$

$\therefore ab=-3\times\frac{4}{3}=-4$

03 답 ④

① $-\sqrt{5^2}=-5$ ② $-(\sqrt{5})^2=-5$

③ $-\sqrt{(-5)^2}=-5$ ④ $(-\sqrt{5})^2=5$

⑤ $-(-\sqrt{5})^2=-5$

따라서 나머지 넷과 값이 다른 하나는 ④이다.

04 답 ⑤

⑤ $-\sqrt{(-a)^2}=-\sqrt{a^2}=-a$

05 답 ①, ⑤

① $(\sqrt{6})^2-\sqrt{12^2}=6-12=-6$

② $(-\sqrt{3})^2+\sqrt{100}=3+10=13$

③ $\sqrt{(-9)^2}\times\sqrt{121}=9\times11=99$

④ $\sqrt{(-2)^2}\div\sqrt{\frac{9}{25}}=2\div\frac{3}{5}=2\times\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$

⑤ $\sqrt{(-9)^2}\times\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=9\times\frac{2}{3}=6$

따라서 옳은 것은 ①, ⑤이다.

06 답 ③

① $2=\sqrt{4}$이므로 $\sqrt{7}>2$

② $0.1=\sqrt{0.01}$이므로 $\sqrt{0.1}>0.1$

③ $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$이므로 $\sqrt{\frac{1}{4}}>\frac{1}{4} \quad \therefore -\sqrt{\frac{1}{4}}<-\frac{1}{4}$

④ $\sqrt{36}=6$이므로 $\sqrt{36}<7 \quad \therefore -\sqrt{36}>-7$

⑤ $\sqrt{(-2)^2}=2$이므로 $\sqrt{(-2)^2}>1$

따라서 두 수의 대소 관계가 옳은 것은 ③이다.

적중 & 심화 유형 연습 8쪽~14쪽

01 답 ③

① $\sqrt{64}-(-\sqrt{3})^2=8-3=5$

② $\sqrt{9}\times\sqrt{(-5)^2}=3\times5=15$

③ $\sqrt{(-12)^2}\div\sqrt{(-6)^2}=12\div6=2$

④ $\sqrt{(-7)^2}+(-\sqrt{5})^2+\sqrt{2^2}=7+5+2=14$

⑤ $\sqrt{(-5)^2}-(\sqrt{11})^2+\sqrt{81}\div(-\sqrt{3^2})=5-11+9\div(-3)$
$=-6+(-3)=-9$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

02 답 ㉡-㉣-㉤-㉠-㉢

㉠ $(-\sqrt{3})^2+\sqrt{49}=3+7=10$

㉡ $(\sqrt{1.5})^2-\sqrt{(-5)^2}=1.5-5=-3.5$

㉢ $\sqrt{(-6)^2}\times\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2=6\times\frac{5}{2}=15$

㉣ $\sqrt{(-2)^2}\div\left(-\sqrt{\frac{9}{16}}\right)=2\div\left(-\frac{3}{4}\right)$
$=2\times\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{8}{3}$

㉤ $(-\sqrt{6})^2\times\sqrt{0.5^2}-\sqrt{16}\div\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=6\times0.5-4\div\frac{4}{3}$
$=3-4\times\frac{3}{4}$
$=3-3=0$

따라서 계산 결과가 작은 순서대로 나열하면 ㉡-㉣-㉤-㉠-㉢이다.

03 답 $4a$

$a<0$일 때, $2a<0$, $-6a>0$이므로

$\sqrt{4a^2}-\sqrt{(-6a)^2}=\sqrt{(2a)^2}-\sqrt{(-6a)^2}$
$=-2a-(-6a)$
$=-2a+6a=4a$

04 답 $-a$

$a<0$일 때, $-a>0$, $|a|=-a$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2}-\sqrt{(-a)^2}+|a| &= -a-(-a)+(-a)\\ &= -a+a-a\\ &= -a\end{aligned}$$

05 답 ①

$a>0$, $b<0$일 때, $2b<0$, $-2a<0$, $-3b>0$이므로

$$\begin{aligned}&\sqrt{a^2}-\sqrt{4b^2}-\sqrt{(-2a)^2}+\sqrt{(-3b)^2}\\ &=\sqrt{a^2}-\sqrt{(2b)^2}-\sqrt{(-2a)^2}+\sqrt{(-3b)^2}\\ &=a-(-2b)-\{-(-2a)\}+(-3b)\\ &=a+2b-2a-3b\\ &=-a-b\end{aligned}$$

06 답 ⑤

$x>1$일 때, $x-1>0$, $1-x<0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(1-x)^2} &= x-1-(1-x)\\ &= x-1-1+x\\ &= 2x-2\end{aligned}$$

07 답 ⑤

$0<a<3$일 때, $a-3<0$, $3-a>0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(a-3)^2}+\sqrt{(3-a)^2}+3 &= -(a-3)+(3-a)+3\\ &= -a+3+3-a+3\\ &= -2a+9\end{aligned}$$

08 답 $-2a+1$

$-3<a<4$일 때, $4-a>0$, $-3-a<0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(4-a)^2}-\sqrt{(-3-a)^2} &= 4-a-\{-(-3-a)\}\\ &= 4-a-3-a\\ &= -2a+1\end{aligned}$$

09 답 ③

$a<0$, $b>0$일 때, $2a<0$, $a-b<0$, $4b>0$이므로

$$\begin{aligned}&\sqrt{(2a)^2}-\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{16b^2}\\ &=-2a-\{-(a-b)\}+\sqrt{(4b)^2}\\ &=-2a+a-b+4b\\ &=-a+3b\end{aligned}$$

10 답 $-4b$

$a>b$, $ab<0$일 때, $a>0$, $b<0$이므로

$a-2b>0$, $2b<0$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{(a-2b)^2}-\sqrt{a^2}+|2b| &= a-2b-a-2b\\ &= -4b\end{aligned}$$

11 답 ④

$a<b$, $ab<0$일 때, $a<0$, $b>0$이므로

$b-a>0$, $-a>0$

$$\begin{aligned}&\therefore \sqrt{(b-a)^2}+\sqrt{(-a)^2}+(-\sqrt{b})^2\\ &=b-a+(-a)+b\\ &=-2a+2b\end{aligned}$$

12 답 $a-4b$

$a-b>0$, $ab<0$일 때, $a>0$, $b<0$이므로 …… ❶

$-2a<0$, $b-a<0$, $5b<0$ …… ❷

$$\begin{aligned}&\therefore \sqrt{(-2a)^2}-\sqrt{(b-a)^2}+\sqrt{25b^2}\\ &=-(-2a)-\{-(b-a)\}+\sqrt{(5b)^2}\\ &=2a+b-a-5b\\ &=a-4b\end{aligned}$$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ a, b의 부호 파악하기	20 %
❷ $-2a$, $b-a$, $5b$의 부호 파악하기	30 %
❸ 주어진 식 간단히 하기	50 %

13 답 6

$\sqrt{24n}=\sqrt{2^3\times3\times n}$이 자연수가 되려면

$n=2\times3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.

따라서 가장 작은 자연수 n의 값은 $2\times3=6$

14 답 $a=20$, $k=70$

$k=\sqrt{245a}=\sqrt{5\times7^2\times a}$이므로 k가 자연수가 되려면

$a=5\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다. 즉

5, $5\times2^2=20$, $5\times3^2=45$, $\cdots$

따라서 두 번째로 작은 자연수 a의 값은 20이고 그때의 k의 값은

$\sqrt{245\times20}=\sqrt{4900}=\sqrt{70^2}=70$

15 답 90

$\sqrt{\dfrac{72}{5}n}=\sqrt{\dfrac{2^3\times3^2}{5}\times n}$이 자연수가 되려면

$n=2\times5\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다. 즉

$2\times5=10$, $2\times5\times2^2=40$, $2\times5\times3^2=90$, $2\times5\times4^2=160$, $\cdots$

따라서 가장 큰 두 자리 자연수 n의 값은 90이다.

16 답 6

$\sqrt{\dfrac{216}{x}}=\sqrt{\dfrac{2^3\times3^3}{x}}$이 자연수가 되려면 x는 216의 약수이면서

$x=2\times3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.

따라서 가장 작은 자연수 x의 값은 $2\times3=6$이다.

17 답 ④

$\sqrt{\dfrac{500}{x}}=\sqrt{\dfrac{2^2\times5^3}{x}}$이 자연수가 되려면 x는 500의 약수이면서

$x=5\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다. 즉

5, $5\times2^2=20$, $5^3=125$, $2^2\times5^3=500$

따라서 x의 값이 아닌 것은 ④이다.

18 답 24

$\sqrt{\frac{5400}{x}}=\sqrt{\frac{2^3\times3^3\times5^2}{x}}$이 자연수가 되려면 x는 5400의 약수이면서 $x=2\times3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다. 즉 …… ❶

$2\times3=6,\ 2^3\times3=24,\ 2\times3^3=54,\ 2\times3\times5^2=150,\ \cdots$

따라서 가장 작은 두 자리 자연수 x의 값은 24이다. …… ❷

채점 기준	비율
❶ $\sqrt{\frac{5400}{x}}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 조건 구하기	50 %
❷ 가장 작은 두 자리 자연수 x의 값 구하기	50 %

19 답 8

$\sqrt{17+x}$가 자연수가 되려면 $17+x$는 17보다 큰 제곱수이어야 한다. 즉

$17+x=25,\ 36,\ 49,\ \cdots$

$\therefore x=8,\ 19,\ 32,\ \cdots$

따라서 가장 작은 자연수 x의 값은 8이다.

20 답 ④

$\sqrt{20-x}$가 정수가 되려면 $20-x$는 0이거나 20보다 작은 제곱수이어야 한다. 즉

$20-x=0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16$

$\therefore x=20,\ 19,\ 16,\ 11,\ 4$

따라서 구하는 자연수 x의 값의 합은

$4+11+16+19+20=70$

100점 TIP

$\sqrt{20-x}$가 정수가 되어야 하므로 $\sqrt{20-x}=0$이 되는 경우를 빠뜨리지 않도록 주의한다.

21 답 5개

$1\le x\le100$에서 $2\le2x\le200$이므로

$17\le15+2x\le215$

이때 $\sqrt{15+2x}$가 자연수가 되려면 $15+2x$는 17 이상 215 이하의 제곱수이어야 한다. 즉

$15+2x=25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ 121,\ 144,\ 169,\ 196$

$2x=10,\ 21,\ 34,\ 49,\ 66,\ 85,\ 106,\ 129,\ 154,\ 181$

$\therefore x=5,\ \frac{21}{2},\ 17,\ \frac{49}{2},\ 33,\ \frac{85}{2},\ 53,\ \frac{129}{2},\ 77,\ \frac{181}{2}$

따라서 구하는 자연수 x의 개수는 5, 17, 33, 53, 77의 5개이다.

다른 풀이

$15+2x=25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ 121,\ 144,\ 169,\ 196$에서

x가 자연수이려면 우변이 홀수이어야 하므로

$15+2x=25,\ 49,\ 81,\ 121,\ 169$

$\therefore x=5,\ 17,\ 33,\ 53,\ 77$

따라서 구하는 자연수 x의 개수는 5개이다.

22 답 ④

$\sqrt{200-4x}$가 정수가 되려면 $200-4x$는 0이거나 200보다 작은 제곱수이어야 한다. 즉

$200-4x=0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ 121,\ 144,\ 169,\ 196$

$4x=200,\ 199,\ 196,\ 191,\ 184,\ 175,\ 164,\ 151,\ 136,\ 119,\ 100,\ 79,\ 56,\ 31,\ 4$

$\therefore x=50,\ \frac{199}{4},\ 49,\ \frac{191}{4},\ 46,\ \frac{175}{4},\ 41,\ \frac{151}{4},\ 34,\ \frac{119}{4},\ 25,\ \frac{79}{4},\ 14,\ \frac{31}{4},\ 1$

따라서 구하는 자연수 x의 개수는 50, 49, 46, 41, 34, 25, 14, 1의 8개이다.

다른 풀이

$200-4x=0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ 121,\ 144,\ 169,\ 196$

에서 x가 자연수이려면 우변이 0 또는 4의 배수이어야 하므로

$200-4x=0,\ 4,\ 16,\ 36,\ 64,\ 100,\ 144,\ 196$

$\therefore x=50,\ 49,\ 46,\ 41,\ 34,\ 25,\ 14,\ 1$

따라서 구하는 자연수 x의 개수는 8개이다.

23 답 ①

$0<a<1$이므로

$a^2<a<1,\ \sqrt{a^2}<\sqrt{a}<1 \qquad \therefore a<\sqrt{a}<1$

또 $\frac{1}{a}>1$이므로 $a^2<a<\sqrt{a}<\frac{1}{a}$

따라서 가장 큰 수는 $\frac{1}{a}$, 가장 작은 수는 a^2이므로 구하는 곱은

$\frac{1}{a}\times a^2=a$

다른 풀이

$a=\frac{1}{4}$이라 하면

$\sqrt{a}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2},\ a^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16},\ \frac{1}{a}=4$

따라서 가장 큰 수는 $\frac{1}{a}$, 가장 작은 수는 a^2이므로 구하는 곱은

$\frac{1}{a}\times a^2=a$

24 답 28

$-\sqrt{9}=-3$이므로 $-\sqrt{9}>-4$

$3=\sqrt{9}$이므로 $\sqrt{0.16}<\sqrt{\frac{36}{5}}<3<\sqrt{12}$

따라서 가장 큰 수는 $\sqrt{12}$, 가장 작은 수는 -4이므로

$x=\sqrt{12},\ y=-4$ …… ❶

$\therefore x^2+y^2=(\sqrt{12})^2+(-4)^2=12+16=28$ …… ❷

채점 기준	비율
❶ $x,\ y$의 값 각각 구하기	80 %
❷ x^2+y^2의 값 구하기	20 %

25 답 1

$4<\sqrt{23}<5$이므로 $5-\sqrt{23}>0$, $-\sqrt{23}+4<0$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{(5-\sqrt{23})^2}+\sqrt{(-\sqrt{23}+4)^2}&=5-\sqrt{23}-(-\sqrt{23}+4)\\&=5-\sqrt{23}+\sqrt{23}-4\\&=1\end{aligned}$$

26 답 ③

$2<\sqrt{5}<3$이므로 $\sqrt{5}-3<0$, $\sqrt{5}-2>0$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}&=\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}\\&=-(\sqrt{5}-3)+(\sqrt{5}-2)\\&=-\sqrt{5}+3+\sqrt{5}-2\\&=1\end{aligned}$$

27 답 -1

$3<\sqrt{11}<4$이므로 $4-\sqrt{11}>0$, $3-\sqrt{11}<0$

$$\begin{aligned}\therefore -\sqrt{(4-a)^2}-\sqrt{(3-a)^2}&=-\sqrt{(4-\sqrt{11})^2}-\sqrt{(3-\sqrt{11})^2}\\&=-(4-\sqrt{11})-\{-(3-\sqrt{11})\}\\&=-4+\sqrt{11}+3-\sqrt{11}\\&=-1\end{aligned}$$

28 답 ①

$4<\sqrt{x}\le 5$에서 $\sqrt{16}<\sqrt{x}\le\sqrt{25}$이므로

$16<x\le 25$

따라서 부등식을 만족하는 자연수 x의 개수는 17, 18, 19, $\cdots$, 25의 9개이다.

29 답 4

$2<\sqrt{2n}<3$에서 $\sqrt{4}<\sqrt{2n}<\sqrt{9}$이므로

$4<2n<9$ $\quad\therefore 2<n<\dfrac{9}{2}$

따라서 부등식을 만족하는 자연수 n의 값 중에서 가장 큰 수는 4이다.

30 답 11

$4<\sqrt{5x+1}<9$에서 $\sqrt{16}<\sqrt{5x+1}<\sqrt{81}$이므로

$16<5x+1<81$, $15<5x<80$ $\quad\therefore 3<x<16$

따라서 부등식을 만족하는 자연수 x의 값 중에서 가장 큰 수는 15, 가장 작은 수는 4이므로 $a=15$, $b=4$

$\therefore a-b=15-4=11$

31 답 8

(i) $6<\sqrt{x}\le 7$에서 $\sqrt{36}<\sqrt{x}\le\sqrt{49}$이므로

$36<x\le 49$

즉 $6<\sqrt{x}\le 7$을 만족하는 자연수 x의 개수는

$49-36=13$(개)

(ii) $7<\sqrt{x}\le 8$에서 $\sqrt{49}<\sqrt{x}\le\sqrt{64}$이므로

$49<x\le 64$

즉 $7<\sqrt{x}\le 8$을 만족하는 자연수 x의 개수는

$64-49=15$(개)

(iii) $8<\sqrt{x}\le 9$에서 $\sqrt{64}<\sqrt{x}\le\sqrt{81}$이므로

$64<x\le 81$

즉 $8<\sqrt{x}\le 9$를 만족하는 자연수 x의 개수는

$81-64=17$(개)

따라서 $n<\sqrt{x}\le n+1$을 만족하는 자연수 x의 개수가 17개일 때, n의 값은 8이다.

다른 풀이

$2<\sqrt{x}\le 3$을 만족하는 자연수 x의 개수는 5개,

$3<\sqrt{x}\le 4$를 만족하는 자연수 x의 개수는 7개,

$4<\sqrt{x}\le 5$를 만족하는 자연수 x의 개수는 9개,

$\vdots$

$n<\sqrt{x}\le n+1$을 만족하는 자연수 x의 개수는 $(2n+1)$개

즉 $2n+1=17$에서 $2n=16$ $\quad\therefore n=8$

32 답 ②

$a>1$일 때, $0<\dfrac{1}{a}<1$이므로

$\dfrac{1}{a}-a<0$, $\dfrac{1}{a}+a>0$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{\left(\frac{1}{a}-a\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{1}{a}+a\right)^2}&=-\left(\frac{1}{a}-a\right)-\left(\frac{1}{a}+a\right)\\&=-\frac{1}{a}+a-\frac{1}{a}-a\\&=-\frac{2}{a}\end{aligned}$$

33 답 ①

$a>1$일 때, $0<\dfrac{1}{a}<1$이므로

$1-a<0$, $a-\dfrac{1}{a}>0$, $\dfrac{1}{a}-1<0$

$$\begin{aligned}&\therefore \sqrt{(1-a)^2}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{1}{a}-1\right)^2}\\&=-(1-a)+\left(a-\frac{1}{a}\right)-\left\{-\left(\frac{1}{a}-1\right)\right\}\\&=-1+a+a-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-1\\&=2a-2\end{aligned}$$

34 답 $4a$

$0<a<1$일 때, $\dfrac{1}{a}>1$이므로

$a+\dfrac{1}{a}>0$, $a-\dfrac{1}{a}<0$, $2a>0$

$$\begin{aligned}&\therefore \sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}+\sqrt{4a^2}\\&=a+\frac{1}{a}-\left\{-\left(a-\frac{1}{a}\right)\right\}+\sqrt{(2a)^2}\\&=a+\frac{1}{a}+a-\frac{1}{a}+2a\\&=4a\end{aligned}$$

35 답 $\frac{1}{6}$

모든 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)

$\sqrt{72ab}=\sqrt{2^3\times3^2\times ab}$가 자연수가 되려면 $ab=2\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.

이때 a, b는 주사위의 눈의 수이므로 ab가 될 수 있는 수는 $2, 2^3=8, 2\times3^2=18$이고 각각의 경우에 가능한 a, b의 값을 순서쌍 (a, b)로 나타내면 다음과 같다.

(i) $ab=2$일 때, $(1, 2), (2, 1)$의 2가지

(ii) $ab=8$일 때, $(2, 4), (4, 2)$의 2가지

(iii) $ab=18$일 때, $(3, 6), (6, 3)$의 2가지

따라서 (i)~(iii)에 의하여 $\sqrt{72ab}$가 자연수가 되는 경우의 수는 6가지이므로 구하는 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

참고

$1\le ab\le36$이므로 $ab=2\times4^2=32$까지 ab의 값으로 생각하기 쉽지만 a, b는 6 이하의 자연수이므로 $ab=32$를 만족하는 두 수 a, b는 없다.

36 답 10, 40, 90

$v=\sqrt{2\times9.8\times h}=\sqrt{\frac{98}{5}h}=\sqrt{\frac{2\times7^2}{5}\times h}$가 자연수가 되려면

$h=2\times5\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다. 즉

$2\times5=10,\ 2\times5\times2^2=40,\ 2\times5\times3^2=90,\ 2\times5\times4^2=160, \cdots$

따라서 v가 자연수가 되도록 하는 두 자리 자연수 h의 값은 10, 40, 90이다.

37 답 200

$\sqrt{\frac{800}{x}}=\sqrt{\frac{2^5\times5^2}{x}}$이 1보다 큰 자연수가 되려면 x는 800을 제외한 800의 약수이면서 $x=2\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다. …… ❶

즉 $2, 2^3=8, 2^5=32, 2\times5^2=50, 2^3\times5^2=200$

따라서 구하는 가장 큰 자연수 x의 값은 200이다. …… ❷

채점 기준	비율
❶ $\sqrt{\frac{800}{x}}$이 1보다 큰 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 조건 구하기	60 %
❷ 가장 큰 자연수 x의 값 구하기	40 %

38 답 142

$\sqrt{\frac{58-x}{3}}$가 자연수가 되려면 $58-x$는 58보다 작으면서 $3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다. 즉

$58-x=3, 3\times2^2, 3^3, 3\times4^2$

$\therefore x=55, 46, 31, 10$

따라서 구하는 합은

$10+31+46+55=142$

39 답 34

$\sqrt{\frac{120}{a}}=\sqrt{\frac{2^3\times3\times5}{a}}$가 자연수가 되려면 a는 120의 약수이면서 $a=2\times3\times5\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.

따라서 가장 작은 자연수 a의 값은 $2\times3\times5=30$이다.

또 $\sqrt{16-3b}$가 자연수가 되려면 $16-3b$는 16보다 작은 제곱수이어야 한다. 즉

$16-3b=1, 4, 9\qquad\therefore b=5, 4, \frac{7}{3}$

따라서 가장 작은 자연수 b의 값은 4이다.

$\therefore a+b=30+4=34$

40 답 -6

$\sqrt{300-x}-\sqrt{220+y}$가 가장 큰 정수가 되려면 $300-x$는 300보다 작은 제곱수 중에서 가장 큰 수이어야 하고, $220+y$는 220보다 큰 제곱수 중에서 가장 작은 수이어야 한다.

(i) 300보다 작은 제곱수 중에서 가장 큰 수는 $17^2=289$이므로
$300-x=289\qquad\therefore x=11$

(ii) 220보다 큰 제곱수 중에서 가장 작은 수는 $15^2=225$이므로
$220+y=225\qquad\therefore y=5$

$\therefore y-x=5-11=-6$

41 답 (1) 3 (2) 12

(1) 정사각형 EFGH의 한 변의 길이는
$\sqrt{48n}=\sqrt{2^4\times3\times n}$이므로 $n=3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.
따라서 구하는 가장 작은 자연수 n의 값은 3이다. …… ❶

(2) 정사각형 EFGH의 한 변의 길이는
$\sqrt{48\times3}=\sqrt{144}=12$ …… ❷

채점 기준	비율
❶ $\sqrt{48n}$이 자연수가 되는 가장 작은 자연수 n의 값 구하기	70 %
❷ $\sqrt{48n}$에 $n=3$을 대입하여 정사각형 EFGH의 한 변의 길이 구하기	30 %

42 답 29

$2<\sqrt{5}<\sqrt{6}<\sqrt{7}<\sqrt{8}<3$이므로

$N(5)=N(6)=N(7)=N(8)=2$

$\sqrt{9}(=3)<\sqrt{10}<\sqrt{11}<\sqrt{12}<\sqrt{13}<\sqrt{14}<\sqrt{15}<4$이므로

$N(9)=N(10)=N(11)=N(12)=N(13)=N(14)$
$=N(15)=3$

$\therefore N(5)+N(6)+N(7)+\cdots+N(15)$
$=2\times4+3\times7=29$

43 답 70

$\sqrt{1}=1$이므로 $N(1)=0$

$1<\sqrt{2}<\sqrt{3}<\sqrt{4}(=2)$이므로

$N(2)=N(3)=N(4)=1$

$2<\sqrt{5}<\sqrt{6}<\sqrt{7}<\sqrt{8}<\sqrt{9}(=3)$이므로

$N(5)=N(6)=N(7)=N(8)=N(9)=2$
$3<\sqrt{10}<\sqrt{11}<\cdots<\sqrt{15}<\sqrt{16}(=4)$이므로
$N(10)=N(11)=\cdots=N(15)=N(16)=3$
$4<\sqrt{17}<\sqrt{18}<\cdots<\sqrt{24}<\sqrt{25}(=5)$이므로
$N(17)=N(18)=\cdots=N(24)=N(25)=4$
$\therefore N(1)+N(2)+N(3)+\cdots+N(25)$
$=0+1\times3+2\times5+3\times7+4\times9$
$=70$

44 답 ⑤

$5<\sqrt{26}<\sqrt{27}<\cdots<\sqrt{35}<\sqrt{36}(=6)$이므로
$f(26)=f(27)=f(28)=\cdots=f(36)=5$
따라서 $f(x)=5$를 만족하는 자연수 x는 $26, 27, 28, \cdots, 36$의 11개이다.

적중 & 심화 실전 TEST

15쪽~17쪽

01 답 10

$A=\sqrt{0.2^2}-\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}\times\sqrt{\frac{9}{25}}+(-\sqrt{15})^2$
$=0.2-\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+15$
$=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}+15=15$
$B=\sqrt{144}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\times(-\sqrt{6})^2-2\sqrt{(-5)^2}$
$=12+\frac{1}{2}\times6-2\times5$
$=12+3-10=5$
$\therefore A-B=15-5=10$

02 답 ㉠, ㉣

㉠ $a>0, b<0$일 때, $-a<0$이므로
$\sqrt{(-a)^2}+\sqrt{b^2}=-(-a)+(-b)=a-b$
㉡ $a>0, b>0$이므로
$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}=a+b$
㉢ $a<0, b<0$일 때, $-a>0, -b>0$이므로
$-\sqrt{(-a)^2}+\sqrt{(-b)^2}=-(-a)+(-b)=a-b$
㉣ $a>0, b<0$이므로
$-\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}=-a-(-b)=-a+b$
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉣이다.

03 답 ⑤

$a-b>0, ab<0$일 때, $a>0, b<0$이므로
$2a>0, -3a<0, -2b>0$
$\therefore \sqrt{4a^2}-\sqrt{b^2}+\sqrt{(-3a)^2}-\sqrt{(-2b)^2}$
$=\sqrt{(2a)^2}-(-b)-(-3a)-(-2b)$
$=2a+b+3a+2b$
$=5a+3b$

04 답 ㉡

㉠ $x>2$이면 $2+x>0, 2-x<0$이므로
$A=\sqrt{(2+x)^2}-\sqrt{(2-x)^2}$
$=2+x-\{-(2-x)\}$
$=2+x+2-x=4$
㉡ $-2<x<2$이면 $2+x>0, 2-x>0$이므로
$A=\sqrt{(2+x)^2}-\sqrt{(2-x)^2}$
$=2+x-(2-x)$
$=2+x-2+x=2x$
㉢ $x<-2$이면 $2+x<0, 2-x>0$이므로
$A=\sqrt{(2+x)^2}-\sqrt{(2-x)^2}$
$=-(2+x)-(2-x)$
$=-2-x-2+x=-4$
따라서 옳은 것은 ㉡이다.

05 답 ①

$a<b, ab<0$일 때, $a<0, b>0$이므로
$-2a>0, 4b>0, 3a-b<0, 2b-3a>0$
$\therefore \sqrt{(-2a)^2}-\sqrt{16b^2}+\sqrt{(3a-b)^2}-\sqrt{(2b-3a)^2}$
$=-2a-\sqrt{(4b)^2}-(3a-b)-(2b-3a)$
$=-2a-4b-3a+b-2b+3a$
$=-2a-5b$

참고
$a<0, b>0$일 때
$3a<0, -b<0$이므로 $3a-b<0$
$2b>0, -3a>0$이므로 $2b-3a>0$

06 답 $a+2b$

$\sqrt{(-a)^2}=-a$이므로 $-a>0$ $\quad\therefore a<0$
$\sqrt{b^2}=b$이므로 $b>0$
따라서 $b-2a>0, 3b>0$이므로
$|a|-\sqrt{(b-2a)^2}+\sqrt{9b^2}=-a-(b-2a)+\sqrt{(3b)^2}$
$=-a-b+2a+3b$
$=a+2b$

07 답 ③

$a>0, b>0, c<0$일 때, $a+b>0, b-c>0, c-a<0$이므로
$\sqrt{(a+b)^2}+\sqrt{(b-c)^2}-\sqrt{(c-a)^2}$
$=a+b+(b-c)-\{-(c-a)\}$
$=a+b+b-c+c-a$
$=2b$

08 답 ③

$0<x<1$이므로

$x^2<x<1$, $\sqrt{x^2}<\sqrt{x}<1$ $\quad\therefore x<\sqrt{x}<1$

또 $\frac{1}{x}>1$이므로

$1<\frac{1}{x}<\frac{1}{x^2}$, $1<\sqrt{\frac{1}{x}}<\sqrt{\frac{1}{x^2}}$ $\quad\therefore 1<\sqrt{\frac{1}{x}}<\frac{1}{x}$

따라서 $x^2<x<\sqrt{x}<\sqrt{\frac{1}{x}}<\frac{1}{x}$이므로 두 번째로 작은 수는 x이다.

다른 풀이

$x=\frac{1}{4}$이라 하면

$\sqrt{x}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{x}=4$, $x^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$, $\sqrt{\frac{1}{x}}=\sqrt{4}=2$

따라서 $x^2<x<\sqrt{x}<\sqrt{\frac{1}{x}}<\frac{1}{x}$이므로 두 번째로 작은 수는 x이다.

09 답 $\frac{1}{2}+\sqrt{7}$

$2<\sqrt{7}<3$이므로 $\frac{7}{2}-\sqrt{7}>0$, $\sqrt{7}-1>0$, $2-\sqrt{7}<0$

$\therefore \sqrt{\left(\frac{7}{2}-\sqrt{7}\right)^2}+\sqrt{(\sqrt{7}-1)^2}+\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$

$=\frac{7}{2}-\sqrt{7}+(\sqrt{7}-1)-(2-\sqrt{7})$

$=\frac{7}{2}-\sqrt{7}+\sqrt{7}-1-2+\sqrt{7}$

$=\frac{1}{2}+\sqrt{7}$

10 답 (1) $9<x<16$ (2) 5, 12, 17, 20 (3) 12

(1) $3<\sqrt{x}<4$에서 $\sqrt{9}<\sqrt{x}<\sqrt{16}$이므로 $9<x<16$

(2) $\sqrt{21-x}$가 자연수가 되려면 $21-x$는 21보다 작은 제곱수이어야 한다. 즉

$21-x=1, 4, 9, 16$

$\therefore x=20, 17, 12, 5$

(3) 조건 (가), (나)를 모두 만족하는 자연수 x의 값은 12이다.

11 답 ①

$3<\sqrt{a+3b}<4$에서 $\sqrt{9}<\sqrt{a+3b}<\sqrt{16}$이므로 $9<a+3b<16$

(i) $a+3b=10$을 만족하는 두 소수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 없다.

(ii) $a+3b=11$을 만족하는 두 소수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(5, 2)$, $(2, 3)$의 2개이다.

(iii) $a+3b=12$를 만족하는 두 소수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(3, 3)$의 1개이다.

(iv) $a+3b=13$을 만족하는 두 소수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(7, 2)$의 1개이다.

(v) $a+3b=14$를 만족하는 두 소수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(5, 3)$의 1개이다.

(vi) $a+3b=15$를 만족하는 두 소수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 없다.

따라서 (i)~(vi)에 의하여 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는 5개이다.

12 답 $7a$

$0<a<1$일 때, $\frac{1}{a}>1$이므로

$3a>0$, $-2a<0$, $a+\frac{1}{a}>0$, $a-\frac{1}{a}<0$ …… ❶

$\therefore \sqrt{9a^2}+\sqrt{(-2a)^2}+\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}$

$=\sqrt{(3a)^2}-(-2a)+\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left\{-\left(a-\frac{1}{a}\right)\right\}$

$=3a+2a+a+\frac{1}{a}+a-\frac{1}{a}$

$=7a$ …… ❷

채점 기준	비율
❶ $3a$, $-2a$, $a+\frac{1}{a}$, $a-\frac{1}{a}$의 부호 판단하기	50 %
❷ 주어진 식 간단히 하기	50 %

13 답 80

(i) $\sqrt{99-x}$가 자연수가 되려면 $99-x$는 99보다 작은 제곱수이어야 한다. 즉

$99-x=1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$

$\therefore x=98, 95, 90, 83, 74, 63, 50, 35, 18$

(ii) $\sqrt{8x}=\sqrt{2^3\times x}$가 자연수가 되려면 $x=2\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다. 즉

2, $2^3=8$, $2\times3^2=18$, $2\times4^2=32$, $2\times5^2=50$, $2\times6^2=72$, $2\times7^2=98$, $\cdots$

이때 (i), (ii)를 모두 만족하는 자연수 x의 값은 18, 50, 98이므로 가장 큰 값은 98, 가장 작은 값은 18이다. 따라서 그 차는

$98-18=80$

14 답 $\frac{8}{5}$

$\sqrt{\frac{240}{a}}=\sqrt{\frac{2^4\times3\times5}{a}}$가 자연수가 되려면 a는 240의 약수이면서 $a=3\times5\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다. 즉

$3\times5=15$, $2^2\times3\times5=60$, $2^4\times3\times5=240$

$\sqrt{25-b}$가 자연수가 되려면 $25-b$는 25보다 작은 제곱수이어야 한다. 즉

$25-b=1, 4, 9, 16$

$\therefore b=24, 21, 16, 9$

이때 $\frac{b}{a}$의 값이 최댓값이 되려면 a는 가장 작은 수, b는 가장 큰 수이어야 하므로

$\frac{b}{a}=\frac{24}{15}=\frac{8}{5}$

15 답 56

$\sqrt{\frac{1004-4x}{5}}$가 정수가 되려면 $\frac{1004-4x}{5}$는 0 또는 $\frac{1004}{5}$ 이하의 제곱수이어야 한다. 즉

$\dfrac{1004-4x}{5}=0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144,$
$169, 196$

$1004-4x=0, 5, 20, 45, 80, 125, 180, 245, 320, 405, 500, 605,$
$720, 845, 980$

$\therefore x=251, \dfrac{999}{4}, 246, \dfrac{959}{4}, 231, \dfrac{879}{4}, 206, \dfrac{759}{4}, 171, \dfrac{599}{4},$
$126, \dfrac{399}{4}, 71, \dfrac{159}{4}, 6$

이때 x는 자연수이므로 만족하는 x의 값은 251, 246, 231, 206, 171, 126, 71, 6이고 그때의 정수 a의 값은 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14이다.
따라서 구하는 정수 a의 값의 합은
$0+2+4+6+8+10+12+14=56$

다른 풀이

$1004-4x=0, 5, 20, 45, 80, 125, 180, 245, 320, 405, 500, 605,$
$720, 845, 980$

에서 x가 자연수이려면 우변이 0 또는 4의 배수이어야 하므로
$1004-4x=0, 20, 80, 180, 320, 500, 720, 980$
$\therefore x=251, 246, 231, 206, 171, 126, 71, 6$
따라서 구하는 정수 a의 값은 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14이므로 그 합은
$0+2+4+6+8+10+12+14=56$

16 답 $\dfrac{1}{6}$

모든 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)
$\sqrt{37-mn}$이 자연수가 되려면 $37-mn$은 37 이하의 제곱수이어야 한다. 즉
$37-mn=1, 4, 9, 16, 25, 36$
$\therefore mn=36, 33, 28, 21, 12, 1$
이때 m, n은 주사위의 눈의 수이므로 mn이 될 수 있는 수는 1, 12, 36이고 각각의 경우에 가능한 m, n의 값을 순서쌍 (m, n)으로 나타내면 다음과 같다.
(i) $mn=1$일 때, $(1, 1)$의 1가지
(ii) $mn=12$일 때, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$의 4가지
(iii) $mn=36$일 때, $(6, 6)$의 1가지
따라서 (i)~(iii)에 의하여 $\sqrt{37-mn}$이 자연수가 되는 경우의 수는 6가지이므로 구하는 확률은
$\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

참고

$1\le mn\le36$이지만 m, n은 6 이하의 자연수이므로 $mn=21$ 또는 $mn=28$ 또는 $mn=33$을 만족하는 두 수 m, n은 없다.

17 답 12, 27, 75

정사각형 A의 한 변의 길이는 $\sqrt{76-x}$이고 정사각형 B의 한 변의 길이는 $\sqrt{3x}$이다. 이때 두 정사각형의 각 변의 길이가 모두 자연수가 되려면 $76-x$는 76보다 작은 제곱수이면서 $x=3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.
(i) $\sqrt{76-x}$가 자연수인 경우
$76-x=1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64$
$\therefore x=75, 72, 67, 60, 51, 40, 27, 12$
(ii) $\sqrt{3x}$가 자연수인 경우
$x=3, 3\times2^2, 3^3, 3\times4^2, 3\times5^2, \cdots$
$\therefore x=3, 12, 27, 48, 75, \cdots$
따라서 (i), (ii)를 모두 만족하는 자연수 x의 값은 12, 27, 75이다.

18 답 ④

$6<\sqrt{37}<\sqrt{38}<\sqrt{39}<\cdots<\sqrt{48}<\sqrt{49}(=7)$이므로
$f(37)=f(38)=f(39)=\cdots=f(48)=f(49)=6$
따라서 $f(x)=6$을 만족하는 자연수 x는 37, 38, 39, $\cdots$, 49의 13개이다.

02 | 무리수와 실수

개념 확인

19쪽

01 답 (1) ㉡ (2) ㉡, ㉢, ㉦, ㉧ (3) ㉠, ㉣, ㉤, ㉥, ㉧

(1) ㉡ $-\sqrt{100}=-10$이므로 정수이다.
(2) ㉧ $-\sqrt{\dfrac{1}{9}}=-\dfrac{1}{3}$이므로 유리수이다.

02 답 ㉡, ㉢, ㉤

㈎에 해당하는 것은 무리수이다.
㉠ 순환소수는 유리수이다.
㉣ $-\sqrt{16}=-4$이므로 유리수이다.
㉥ $-3+\sqrt{4}=-3+2=-1$이므로 유리수이다.
따라서 무리수인 것은 ㉡, ㉢, ㉤이다.

03 답 ⑤

⑤ $\sqrt{3}$은 무리수이므로 분모, 분자가 정수인 분수로 나타낼 수 없다.

04 답 P: $-1-\sqrt{10}$, Q: $1+\sqrt{13}$

피타고라스 정리에 의해 $\overline{AB}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$이므로
$\overline{AP}=\overline{AB}=\sqrt{10}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(-1-\sqrt{10})$
피타고라스 정리에 의해 $\overline{CD}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$이므로
$\overline{CQ}=\overline{CD}=\sqrt{13}$ $\quad\therefore \mathrm{Q}(1+\sqrt{13})$

05 답 ②, ⑤

① $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다.

③ 무한소수 중 순환소수는 유리수이다.
④ 실수만으로 수직선을 메울 수 있다.

06 답 (1) $5-\sqrt{2}<4$ (2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}>-3+\sqrt{5}$

(1) $5-\sqrt{2}-4=1-\sqrt{2}$
이때 $1<\sqrt{2}$, 즉 $1-\sqrt{2}<0$이므로 $5-\sqrt{2}<4$
(2) $-\sqrt{2}>-3$이므로 양변에 $\sqrt{5}$를 더하면
$\sqrt{5}-\sqrt{2}>-3+\sqrt{5}$

적중 & 심화 유형 연습 20쪽~24쪽

01 답 ③

① $0.\dot{5}=\frac{5}{9}$ ➡ 유리수
② 3.14 ➡ 유리수
④ $-\sqrt{0.01}=-0.1$ ➡ 유리수
⑤ $-\sqrt{9}=-3$ ➡ 유리수
따라서 무리수만으로 짝 지어진 것은 ③이다.

02 답 ②, ③

② 무한소수 중 순환소수는 유리수이다.
③ $\sqrt{4}=2$와 같이 근호가 있는 수 중에는 유리수도 있다.

03 답 ⑤

①, ② 학생 수와 나이는 자연수로 나타나므로 유리수이다.
③ 한 변의 길이가 2인 정사각형의 넓이는 $2^2=4$이므로 유리수이다.
④ 넓이가 5인 원을 반으로 자른 반원의 넓이는 $\frac{5}{2}$이므로 유리수이다.
⑤ 반지름의 길이가 3인 원 모양의 바퀴가 두 바퀴 굴러간 거리는 $(2\pi\times3)\times2=12\pi$이므로 무리수이다.
따라서 무리수인 것은 ⑤이다.

04 답 $4-\sqrt{5}$

$\overline{QC}=\overline{AC}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$이고 점 Q에 대응하는 수가 $4+\sqrt{5}$이므로 점 C에 대응하는 수는 4이다.
이때 $\overline{PC}=\overline{AC}=\sqrt{5}$이므로 점 P에 대응하는 수는 $4-\sqrt{5}$이다.

05 답 $-1+\sqrt{5}$

$\overline{AP}=\overline{AD}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이고 점 P에 대응하는 수가 $-2-\sqrt{2}$이므로 점 A에 대응하는 수는 -2이다.
이때 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형이므로 점 E에 대응하는 수는 -1이고, $\overline{EQ}=\overline{EF}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$이므로 점 Q에 대응하는 수는 $-1+\sqrt{5}$이다.

06 답 ⑤

한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
⑤ $E(1-\sqrt{2})$

07 답 ⑤

⑤ 두 자연수 1과 100 사이에는 자연수가 2, 3, 4, ⋯ , 99의 98개 존재한다.

08 답 ④, ⑤

① $2<\sqrt{5}<3$이므로 -1과 $\sqrt{5}$ 사이에는 정수가 0, 1, 2의 3개 있다.
② $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.
③ 연속하는 두 정수 사이에는 정수가 없다.

09 답 ②

② $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$과 같이 서로 다른 두 무리수의 합이 무리수가 아닌 경우도 있다.

10 답 ⑤

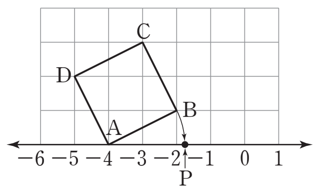
① $1+\sqrt{5}-3=\sqrt{5}-2>0$
$\therefore 1+\sqrt{5}>3$
② $\sqrt{7}-\sqrt{3}-(4-\sqrt{3})=\sqrt{7}-4<0$
$\therefore \sqrt{7}-\sqrt{3}<4-\sqrt{3}$
③ $5-\sqrt{13}-(5-\sqrt{10})=-\sqrt{13}+\sqrt{10}<0$
$\therefore 5-\sqrt{13}<5-\sqrt{10}$
④ $\sqrt{8}+\sqrt{6}-(\sqrt{8}+2)=\sqrt{6}-2>0$
$\therefore \sqrt{8}+\sqrt{6}>\sqrt{8}+2$
⑤ $\sqrt{2}-\sqrt{11}-(\sqrt{2}-\sqrt{15})=-\sqrt{11}+\sqrt{15}>0$
$\therefore \sqrt{2}-\sqrt{11}>\sqrt{2}-\sqrt{15}$
따라서 대소 관계가 옳은 것은 ⑤이다.

11 답 ④

① $6<7$이므로 $\sqrt{6}<\sqrt{7}$
② $3+\sqrt{5}-(\sqrt{6}+\sqrt{5})=3-\sqrt{6}>0$
$\therefore 3+\sqrt{5}>\sqrt{6}+\sqrt{5}$
③ $4-\sqrt{7}-(\sqrt{15}-\sqrt{7})=4-\sqrt{15}>0$
$\therefore 4-\sqrt{7}>\sqrt{15}-\sqrt{7}$
④ $1<\sqrt{3}<2$에서 $0<\sqrt{3}-1<1$
$\therefore 0<\frac{\sqrt{3}-1}{2}<\frac{1}{2}$ ⋯⋯ ㉠
$1<\sqrt{2}<2$에서 $2<\sqrt{2}+1<3$
$\therefore 1<\frac{\sqrt{2}+1}{2}<\frac{3}{2}$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}<\frac{\sqrt{2}+1}{2}$
⑤ $\sqrt{6}-2-(\sqrt{6}+1)=-3<0$
$\therefore \sqrt{6}-2<\sqrt{6}+1$
따라서 대소 관계가 옳은 것은 ④이다.

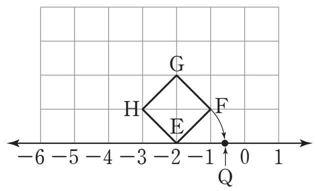
12 답 (1), (2) 풀이 참조 (3) $-4+\sqrt{5}<-2+\sqrt{2}$

(1)



...... ❶

(2)



...... ❷

(3) 수직선 위에서 오른쪽에 있는 수가 더 큰 수이므로
$-4+\sqrt{5}<-2+\sqrt{2}$ ...... ❸

채점 기준	비율
❶ $-4+\sqrt{5}$에 대응하는 점 P 나타내기	40 %
❷ $-2+\sqrt{2}$에 대응하는 점 Q 나타내기	40 %
❸ $-4+\sqrt{5}$, $-2+\sqrt{2}$의 대소 비교하기	20 %

13 답 ①

(ⅰ) $a-b=\sqrt{5}+\sqrt{2}-(\sqrt{2}+3)=\sqrt{5}-3<0$
$\therefore a<b$
(ⅱ) $b-c=\sqrt{2}+3-5=\sqrt{2}-2<0$
$\therefore b<c$
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a<b<c$이다.

14 답 ②

(ⅰ) $a-b=\sqrt{5}+\sqrt{7}-(\sqrt{5}+2)=\sqrt{7}-2>0$
$\therefore a>b$
(ⅱ) $a-c=\sqrt{5}+\sqrt{7}-(3+\sqrt{7})=\sqrt{5}-3<0$
$\therefore a<c$
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $b<a<c$이다.

15 답 $a<c<b$

(ⅰ) $a-c=\sqrt{3}+\sqrt{6}-(\sqrt{3}+\sqrt{7})=\sqrt{6}-\sqrt{7}<0$
$\therefore a<c$ ...... ❶
(ⅱ) $b-c=\sqrt{7}+2-(\sqrt{3}+\sqrt{7})=2-\sqrt{3}>0$
$\therefore b>c$ ...... ❷
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a<c<b$이다. ...... ❸

채점 기준	비율
❶ 두 실수 a, c의 대소 비교하기	40 %
❷ 두 실수 b, c의 대소 비교하기	40 %
❸ 세 실수 a, b, c의 대소 관계 나타내기	20 %

16 답 ④

$\sqrt{36}<\sqrt{40}<\sqrt{49}$, 즉 $6<\sqrt{40}<7$이므로 수직선 위에서 $\sqrt{40}$에 대응하는 점이 있는 구간은 D이다.

17 답 ⑤

$\sqrt{9}<\sqrt{15}<\sqrt{16}$, 즉 $3<\sqrt{15}<4$이므로 $2<-1+\sqrt{15}<3$
따라서 $-1+\sqrt{15}$에 대응하는 점은 수직선 위에서 2와 3 사이의 점인 E이다.

18 답 $1-\sqrt{5}$

$1<\sqrt{2}<2$이므로 $E(\sqrt{2})$
$0<-1+\sqrt{2}<1$이므로 $D(-1+\sqrt{2})$
$-1<-2+\sqrt{2}<0$이므로 $C(-2+\sqrt{2})$
$-3<-\sqrt{5}<-2$이므로 $A(-\sqrt{5})$
$-2<1-\sqrt{5}<-1$이므로 $B(1-\sqrt{5})$
따라서 점 B에 해당하는 수는 $1-\sqrt{5}$이다.

19 답 ④

① $-\sqrt{3}a=(-\sqrt{3})^2=3$ ➡ 유리수
② $(-a)^2=\{-(-\sqrt{3})\}^2=(\sqrt{3})^2=3$ ➡ 유리수
③ $a+\sqrt{3}=-\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$ ➡ 유리수
④ $3-a=3-(-\sqrt{3})=3+\sqrt{3}$ ➡ 무리수
⑤ $\sqrt{a^2+13}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+13}=\sqrt{3+13}=\sqrt{16}=4$ ➡ 유리수
따라서 무리수인 것은 ④이다.

20 답 ⑤

① $a=2$, $b=\sqrt{2}$이면
$\dfrac{b}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ ➡ 유리수
② $a=2$, $b=\sqrt{2}$이면
$a+b^2=2+(\sqrt{2})^2=2+2=4$ ➡ 유리수
③ $a=2$, $b=\sqrt{2}$이면
$a^2b^2=2^2\times(\sqrt{2})^2=4\times2=8$ ➡ 유리수
④ $a=2$, $b=\sqrt{2}$이면
$\sqrt{a}-b=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ ➡ 유리수
⑤ $a(a+3b)=a^2+3ab$에서 a^2은 유리수, $3ab$는 무리수이므로 (유리수)+(무리수)=(무리수), 즉 항상 무리수이다.
따라서 항상 무리수인 것은 ⑤이다.

21 답 ②, ⑤

① $x=0$, $y=\sqrt{2}$이면 $xy=0$이므로 유리수이다.
② (유리수)+(무리수)=(무리수)이므로 $x+y$는 무리수이다.
③ $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$이면 $xy=(\sqrt{2})^2=2$이므로 유리수이다.
④ $x=\pi$이면 $x^2=\pi^2$이므로 무리수이다.
⑤ $xy=1$에서 $y=\dfrac{1}{x}$이므로 x가 무리수이면 y도 무리수이다.
따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다.

22 답 84개

조건 ㈎에서 두 자리의 자연수는 10, 11, 12, ⋯ , 99의 90개이다.
조건 ㈏에서 $\sqrt{x}$가 무리수가 되려면 x는 제곱수가 아니어야 하고 두 자리의 자연수 중 제곱수는 16, 25, 36, 49, 64, 81의 6개이므로 조건을 모두 만족하는 x의 개수는
$90-6=84$(개)

참고
$\sqrt{x}$가 유리수가 되려면 x는 제곱수이어야 하므로 $\sqrt{x}$가 무리수가 되려면 x는 제곱수가 아니어야 한다.

23 답 27개

$\sqrt{2a}$가 유리수가 되려면 $a=2\times$(자연수$)^2$의 꼴이어야 한다. 즉
$2,\ 2^3=8,\ 2\times3^2=18,\ 2\times4^2=32,\ \cdots$
따라서 $\sqrt{2a}$가 유리수가 되도록 하는 1 이상 30 이하의 자연수 a는 2, 8, 18의 3개이므로 $\sqrt{2a}$가 무리수가 되도록 하는 1 이상 30 이하의 자연수 a의 개수는
$30-3=27$(개)

24 답 85개

(ⅰ) $\sqrt{3x}$가 유리수가 되려면 $x=3\times$(자연수$)^2$의 꼴이어야 한다. 즉
$3,\ 3\times2^2=12,\ 3^3=27,\ 3\times4^2=48,\ 3\times5^2=75,\ 3\times6^2=108,\ \cdots$
따라서 $\sqrt{3x}$가 유리수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 x는 3, 12, 27, 48, 75의 5개이다.
(ⅱ) $\sqrt{4x}$가 유리수가 되려면 $x=$(자연수$)^2$의 꼴이어야 한다. 즉
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ⋯
따라서 $\sqrt{4x}$가 유리수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 x는 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100의 10개이다.
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\sqrt{3x}$, $\sqrt{4x}$가 모두 무리수가 되는 100 이하의 자연수 x의 개수는
$100-5-10=85$(개)

25 답 83개

조건 ㈎에서 두 자리의 자연수는 10, 11, 12, ⋯, 99의 90개이다. ⋯⋯ ❶
$\sqrt{x-2}$가 유리수가 되려면 $x-2=$(자연수$)^2$의 꼴이어야 한다. 즉
$x-2=1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ \cdots$
$\therefore\ x=3,\ 6,\ 11,\ 18,\ 27,\ 38,\ 51,\ 66,\ 83,\ 102,\ \cdots$
따라서 $\sqrt{x-2}$가 유리수가 되도록 하는 두 자리의 자연수 x는 11, 18, 27, 38, 51, 66, 83의 7개이므로 ⋯⋯ ❷
$\sqrt{x-2}$가 무리수가 되도록 하는 두 자리의 자연수 x의 개수는
$90-7=83$(개) ⋯⋯ ❸

채점 기준	비율
❶ 두 자리의 자연수의 개수 구하기	10 %
❷ $\sqrt{x-2}$가 유리수가 되도록 하는 두 자리의 자연수 x의 개수 구하기	60 %
❸ $\sqrt{x-2}$가 무리수가 되도록 하는 두 자리의 자연수 x의 개수 구하기	30 %

26 답 ⑤

⑤ $\sqrt{9.5}>\sqrt{9}$, 즉 $\sqrt{9.5}>3$이므로 2와 3 사이에 있는 수가 아니다.

참고
② $\sqrt{4}<\sqrt{\frac{21}{5}}<\sqrt{9}$, 즉 $2<\sqrt{\frac{21}{5}}<3$
④ $\sqrt{4}<\sqrt{\frac{63}{10}}<\sqrt{9}$, 즉 $2<\sqrt{\frac{63}{10}}<3$

27 답 ②

② $3-\sqrt{3}=3-1.732=1.268$
④ $\sqrt{2}+0.3=1.414+0.3=1.714$
⑤ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}=\frac{1.414+1.732}{2}=1.573$
따라서 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에 있는 수가 아닌 것은 ②이다.

28 답 4개

$2<\sqrt{6}<3$에서 $-3<-\sqrt{6}<-2$
또 $-1<-\sqrt{\frac{2}{3}}<0$이므로 $-\sqrt{6}<-1<-\sqrt{\frac{2}{3}}<0$
$\sqrt{4}<\sqrt{\frac{42}{5}}<\sqrt{9}$, 즉 $2<\sqrt{\frac{42}{5}}<3$
$\sqrt{11}>3$이므로 $\sqrt{11}$은 $-\sqrt{6}$과 3 사이에 있지 않다.
따라서 $-\sqrt{6}$과 3 사이에 있는 수는 $-\sqrt{\frac{2}{3}},\ 0,\ \sqrt{\frac{42}{5}},\ -1$의 4개이다.

29 답 ①

$3<\sqrt{14}<4$에서 $-4<-\sqrt{14}<-3$
$\therefore\ -3<1-\sqrt{14}<-2$
$2<\sqrt{7}<3$에서 $3<1+\sqrt{7}<4$
따라서 $1-\sqrt{14}$와 $1+\sqrt{7}$ 사이에 있는 정수가 아닌 것은 ①이다.

참고
$1-\sqrt{14}$와 $1+\sqrt{7}$ 사이에 있는 정수는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$이다.

30 답 11개

$3<\sqrt{13}<4$에서 $-4<-\sqrt{13}<-3$
$\therefore\ 5<2+\sqrt{13}<6,\ -6<-2-\sqrt{13}<-5$ ⋯⋯ ❶
따라서 $-2-\sqrt{13}$과 $2+\sqrt{13}$ 사이에 있는 정수는 $-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$의 11개이다. ⋯⋯ ❷

채점 기준	비율
❶ $-2-\sqrt{13}$과 $2+\sqrt{13}$의 범위 각각 구하기	50 %
❷ $-2-\sqrt{13}$과 $2+\sqrt{13}$ 사이에 있는 정수의 개수 구하기	50 %

31 답 ②

$2<\sqrt{7}<3$에서 $-3<-\sqrt{7}<-2$
$\therefore\ -2<1-\sqrt{7}<-1$
또 $2<\sqrt{5}<3$이므로 $1-\sqrt{7}$과 $\sqrt{5}$ 사이에 있는 정수는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$이고 그 합은
$-1+0+1+2=2$

적중 & 심화 실전 TEST 25쪽~26쪽

01 답 4

$2+\sqrt{9}=2+3=5$ ➡ 정수(유리수)
$\sqrt{2.89}=\sqrt{1.7^2}=1.7$ ➡ 유리수
$-\sqrt{169}=-\sqrt{13^2}=-13$ ➡ 정수(유리수)
$-\sqrt{5^2}+1=-5+1=-4$ ➡ 정수(유리수)
따라서 무리수는 $-\sqrt{0.4}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$, 4π의 3개이므로 $a=3$
유리수는 $2+\sqrt{9}$, $\sqrt{2.89}$, $-\sqrt{169}$, $-\sqrt{5^2}+1$, $0.\dot{4}$의 5개이므로
$b=5$
정수는 $2+\sqrt{9}$, $-\sqrt{169}$, $-\sqrt{5^2}+1$의 3개이므로 $c=3$
$\therefore 2a-b+c=2\times3-5+3=4$

02 답 ㉠, ㉢

㉠ 가로의 길이, 세로의 길이가 각각 3, 1인 직사각형의 대각선의 길이는
$\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ ➡ 무리수
㉡ 넓이가 49인 정사각형의 한 변의 길이는
$\sqrt{49}=7$ ➡ 유리수
㉢ 반지름의 길이가 4인 원 모양의 바퀴가 한 바퀴 굴러간 거리는
$2\pi\times4=8\pi$ ➡ 무리수
㉣ 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 6, 8인 직각삼각형의 빗변의 길이는
$\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10$ ➡ 유리수
따라서 무리수인 것은 ㉠, ㉢이다.

03 답 $1-\sqrt{5}$

$\overline{EQ}=\overline{ED}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이고 점 Q에 대응하는 수가 $2+\sqrt{2}$이므로 점 E에 대응하는 수는 2이다.
이때 모눈종이의 한 눈금의 길이가 1이므로 점 C에 대응하는 수는 1이고, $\overline{CP}=\overline{CA}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$이므로 점 P에 대응하는 수는 $1-\sqrt{5}$이다.

04 답 ㉡, ㉤

㉡ 무리수에 대응하는 점만으로는 수직선을 완전히 메울 수 없다.
㉤ 수직선 위의 점에 대응하는 수는 모두 실수이다.

05 답 ③

① $\sqrt{11}+1-4=\sqrt{11}-3>0$
$\quad\therefore \sqrt{11}+1>4$
② $4-\sqrt{20}-(-2)=6-\sqrt{20}>0$
$\quad\therefore 4-\sqrt{20}>-2$
③ $\sqrt{5}+2-(\sqrt{5}+\sqrt{6})=2-\sqrt{6}<0$
$\quad\therefore \sqrt{5}+2<\sqrt{5}+\sqrt{6}$
④ $11-\sqrt{3}-(-\sqrt{3}+\sqrt{26})=11-\sqrt{26}>0$
$\quad\therefore 11-\sqrt{3}>-\sqrt{3}+\sqrt{26}$
⑤ $\sqrt{29}-\sqrt{17}-(-\sqrt{17}+5)=\sqrt{29}-5>0$
$\quad\therefore \sqrt{29}-\sqrt{17}>-\sqrt{17}+5$
따라서 부등호의 방향이 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

06 답 $b<a<c$

(i) $a-b=\sqrt{5}-\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})=\sqrt{5}-2>0$
$\quad\therefore a>b$
(ii) $a-c=\sqrt{5}-\sqrt{3}-(\sqrt{5}-1)=-\sqrt{3}+1<0$
$\quad\therefore a<c$
따라서 (i), (ii)에 의하여 $b<a<c$이다.

07 답 ④

① $a=2$, $b=\sqrt{2}$이면
$\quad b-\sqrt{a}=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ ➡ 유리수
② $a=4$, $b=\sqrt{2}$이면
$\quad \sqrt{a}-b^2=\sqrt{4}-(\sqrt{2})^2=2-2=0$ ➡ 유리수
③ $a=2$, $b=\sqrt{2}$이면 $\frac{b}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ ➡ 유리수
④ (유리수)+(무리수)=(무리수)이므로 $a+b$는 항상 무리수이다.
⑤ $a=2$, $b=\sqrt{2}$이면 $b\sqrt{a}=(\sqrt{2})^2=2$ ➡ 유리수
따라서 항상 무리수인 것은 ④이다.

08 답 33개

조건 (가)에서 10 이상 50 이하의 자연수 n의 개수는
$50-10+1=41$(개)
(i) $\sqrt{2n}$이 유리수가 되려면 $n=2\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다. 즉
$\quad 2$, $2^3=8$, $2\times3^2=18$, $2\times4^2=32$, $2\times5^2=50$, $\cdots$
$\quad$따라서 $\sqrt{2n}$이 유리수가 되도록 하는 10 이상 50 이하의 자연수 n은 18, 32, 50의 3개이다.
(ii) $\sqrt{3n-8}$이 유리수가 되려면 $3n-8=$(자연수)^{2}의 꼴이어야 하고, $22\le 3n-8\le 142$이므로
$\quad 3n-8=25, 36, 49, 64, 81, 100, 121$
$\quad 3n=33, 44, 57, 72, 89, 108, 129$
$\quad\therefore n=11, \frac{44}{3}, 19, 24, \frac{89}{3}, 36, 43$
$\quad$따라서 $\sqrt{3n-8}$이 유리수가 되도록 하는 10 이상 50 이하의 자연수 n은 11, 19, 24, 36, 43의 5개이다.
따라서 (i), (ii)에 의하여 $\sqrt{2n}$, $\sqrt{3n-8}$이 모두 무리수가 되도록 하는 10 이상 50 이하의 자연수 n의 개수는
$41-3-5=33$(개)

09 답 ②

① $\sqrt{3}+0.5=1.732+0.5=2.232$
② $\sqrt{3}+1=1.732+1=2.732$
④ $\sqrt{5}-0.5=2.236-0.5=1.736$
⑤ $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}=\frac{1.732+2.236}{2}=1.984$

따라서 $\sqrt{3}$과 $\sqrt{5}$ 사이에 있는 수가 아닌 것은 ②이다.

10 답 ②

$2<\sqrt{8}<3$에서 $-3<-\sqrt{8}<-2$

$\therefore\ -2<1-\sqrt{8}<-1,\ 4<\sqrt{8}+2<5$

따라서 $1-\sqrt{8}$과 $\sqrt{8}+2$ 사이에 있는 정수는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4$의 6개이다.

11 답 15

$2<\sqrt{5}<3$에서 $-3<-\sqrt{5}<-2$

$\therefore\ -1<2-\sqrt{5}<0$

$2<\sqrt{6}<3$에서 $5<3+\sqrt{6}<6$ …… ❶

따라서 $2-\sqrt{5}$와 $3+\sqrt{6}$ 사이에 있는 정수는 $0, 1, 2, 3, 4, 5$이므로 그 합은

$0+1+2+3+4+5=15$ …… ❷

채점 기준	비율
❶ $2-\sqrt{5}$, $3+\sqrt{6}$의 범위 각각 구하기	50 %
❷ $2-\sqrt{5}$와 $3+\sqrt{6}$ 사이에 있는 모든 정수의 합 구하기	50 %

12 답 ①

$1=\sqrt{1},\ 2=\sqrt{4}$이므로 1과 2 사이에 있는 점의 개수는

$4-1-1=2$(개)

$2=\sqrt{4},\ 3=\sqrt{9}$이므로 2와 3 사이에 있는 점의 개수는

$9-4-1=4$(개)

$3=\sqrt{9},\ 4=\sqrt{16}$이므로 3과 4 사이에 있는 점의 개수는

$16-9-1=6$(개)

⋮

$37=\sqrt{1369},\ 38=\sqrt{1444}$이므로 37과 38 사이에 있는 점의 개수는

$1444-1369-1=74$(개)

학교 시험 최상위 기출 도전 27쪽~28쪽

01 답 $3a+1$

[전략] $-1<a<0$일 때, $a+1,\ a-\dfrac{1}{a},\ a+\dfrac{1}{a}$의 부호를 판단한다.

$-1<a<0$일 때, $\dfrac{1}{a}<-1$이므로

$a+1>0,\ a-\dfrac{1}{a}>0,\ a+\dfrac{1}{a}<0$

$$\therefore \sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}$$
$$=a+1+\left(a-\frac{1}{a}\right)-\left\{-\left(a+\frac{1}{a}\right)\right\}$$
$$=a+1+a-\frac{1}{a}+a+\frac{1}{a}$$
$$=3a+1$$

02 답 ①

[전략] $a<b,\ ab<0,\ bc>0$일 때, a, b, c의 부호를 판단한다.

$a<b,\ ab<0,\ bc>0$일 때, $a<0,\ b>0,\ c>0$이므로

$a-b<0,\ b+c>0,\ c-a>0,\ 2a<0$

$$\therefore \sqrt{(a-b)^2}-\sqrt{(b+c)^2}+\sqrt{(c-a)^2}+\sqrt{(2a)^2}$$
$$=-(a-b)-(b+c)+(c-a)-2a$$
$$=-a+b-b-c+c-a-2a$$
$$=-4a$$

03 답 ②

[전략] 자연수 A에 대하여 $\sqrt{Ax}$의 꼴이 자연수가 되려면 A를 소인수분해한 후, 소인수의 지수가 모두 짝수가 되도록 하는 x의 값을 구한다.

$f(n)=2$, 즉 $\sqrt{na}$가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 a가 2가 되려면 $n=2\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다. 즉

$2,\ 2^3=8,\ 2\times3^2=18,\ 2\times4^2=32,\ \cdots$

따라서 조건을 만족하는 300 이하의 자연수 n은 2, 8, 18, 32, 50, 72, 98, 128, 162, 200, 242, 288의 12개이다.

04 답 ②

[전략] a, b, c가 $a<b<c$인 연속하는 세 자연수이므로 $a=n-1,\ b=n,\ c=n+1$로 놓고 $\sqrt{a+b+c}$, 즉 $\sqrt{3n}$이 자연수가 되는 n의 조건을 구한다.

a, b, c가 연속하는 세 자연수이면서 $a<b<c$이므로

$a=n-1,\ b=n,\ c=n+1$($n\geq2$인 자연수)이라 하면

$\sqrt{a+b+c}=\sqrt{(n-1)+n+(n+1)}=\sqrt{3n}$

이때 $\sqrt{3n}$이 자연수가 되려면 $n=3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.

즉 $3,\ 3\times2^2=12,\ 3^3=27,\ 3\times4^2=48,\ \cdots$

이때 $a+b+c<100$이므로 $3n<100$ $\quad\therefore n<\dfrac{100}{3}$

따라서 $\sqrt{a+b+c}$가 자연수가 되도록 하는 자연수 n은 3, 12, 27이고 이때의 순서쌍 (a, b, c)는 각각 $(2, 3, 4)$, $(11, 12, 13)$, $(26, 27, 28)$이다.

즉 $k=3$이므로 $4k+1=4\times3+1=13$

05 답 84

[전략] $\sqrt{20n}$과 $\sqrt{56-n}$을 모두 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구한다.

(i) 정사각형 모양의 거실의 넓이가 $20n$이므로 거실의 한 변의 길이는 $\sqrt{20n}$이고, $\sqrt{20n}=\sqrt{2^2\times5\times n}$이 자연수가 되려면 $n=5\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다. 즉

$5,\ 5\times2^2=20,\ 5\times3^2=45,\ 5\times4^2=80,\ \cdots$

(ii) 정사각형 모양의 화장실의 넓이가 $56-n$이므로 화장실의 한 변의 길이는 $\sqrt{56-n}$이고, $\sqrt{56-n}$이 자연수가 되려면 $56-n$은 56보다 작은 제곱수이어야 한다. 즉

$56-n=1, 4, 9, 16, 25, 36, 49$

$\therefore n=55, 52, 47, 40, 31, 20, 7$

이때 (ⅰ), (ⅱ)를 모두 만족하는 자연수 n의 값은 20이므로
거실의 한 변의 길이는 $\sqrt{20\times20}=20$,
화장실의 한 변의 길이는 $\sqrt{56-20}=\sqrt{36}=6$
따라서 구하는 주방의 넓이는
$6\times(20-6)=84$

06 답 19

[전략] $2=\sqrt{4}$, $3=\sqrt{9}$, $4=\sqrt{16}$, $5=\sqrt{25}$임을 이용한다.
(ⅰ) $n=16$일 때
$1<\sqrt{3}<\sqrt{4}(=2)$이므로
$f(3)=f(4)=1$
$2<\sqrt{5}<\sqrt{6}<\sqrt{7}<\sqrt{8}<\sqrt{9}(=3)$이므로
$f(5)=f(6)=f(7)=f(8)=f(9)=2$
$3<\sqrt{10}<\sqrt{11}<\sqrt{12}<\cdots<\sqrt{15}<\sqrt{16}(=4)$이므로
$f(10)=f(11)=f(12)=\cdots=f(15)=f(16)=3$
$\therefore f(3)+f(4)+\cdots+f(16)$
$=1\times2+2\times5+3\times7=33$
이때 $33<45$이므로 $n>16$
(ⅱ) $n=25$일 때
$4<\sqrt{17}<\sqrt{18}<\cdots<\sqrt{24}<\sqrt{25}(=5)$이므로
$f(17)=f(18)=\cdots=f(24)=f(25)=4$
$\therefore f(3)+f(4)+\cdots+f(25)$
$=1\times2+2\times5+3\times7+4\times9=69$
이때 $45<69$이므로 $n<25$
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $16<n<25$이다.
한편 $45=33+12=33+4\times3$이므로 4가 3번 더해져야 한다.
$\therefore n=19$
따라서 $f(3)+f(4)+\cdots+f(n)=45$를 만족하는 자연수 n의 값은 19이다.

07 답 78개

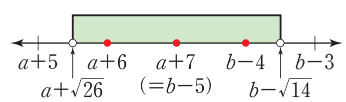
[전략] $\sqrt{2n}$, $\sqrt{3n}$, $\sqrt{4n}$이 유리수가 되는 100 이하의 자연수 n의 개수를 먼저 구한다.
(ⅰ) $\sqrt{2n}$이 유리수가 되려면 $n=2\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다. 즉 2, $2^3=8$, $2\times3^2=18$, $\cdots$
이때 n은 100 이하의 자연수이므로 2, 8, 18, 32, 50, 72, 98의 7개이다.
(ⅱ) $\sqrt{3n}$이 유리수가 되려면 $n=3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다. 즉 3, $2^2\times3=12$, $3^3=27$, $\cdots$
이때 n은 100 이하의 자연수이므로 3, 12, 27, 48, 75의 5개이다.
(ⅲ) $\sqrt{4n}=\sqrt{2^2\times n}$이 유리수가 되려면 n은 제곱수이어야 한다.
이때 n은 100 이하의 자연수이므로 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100의 10개이다.
따라서 (ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 $\sqrt{2n}$, $\sqrt{3n}$, $\sqrt{4n}$이 모두 무리수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 n의 개수는
$100-7-5-10=78$(개)

08 답 ㉠, ㉣, ㉤

[전략] 수직선 위에서 점 P에 대응하는 수 a의 값을 구한다.
$\overline{AP}=\overline{AB}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$
즉 점 P에 대응하는 수는 $\sqrt{10}$이므로 $a=\sqrt{10}$
㉠ $\sqrt{10}<\sqrt{12}<\sqrt{16}$, 즉 $\sqrt{10}<\sqrt{12}<4$
㉡ $\frac{1}{2}+\sqrt{5}=0.5+2.236=2.736<\sqrt{10}$
㉢ $a+\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{10}+\frac{2.236}{2}=3.162+1.118=4.28>4$
㉣ $a+0.1=\sqrt{10}+0.1=3.162+0.1=3.262$
㉤ $\frac{a}{2}+2=\frac{\sqrt{10}}{2}+2=\frac{3.162}{2}+2=1.581+2=3.581$
㉥ $\frac{a+1}{2}=\frac{\sqrt{10}+1}{2}=\frac{3.162+1}{2}=2.081<\sqrt{10}$
따라서 a와 4 사이에 있는 무리수는 ㉠, ㉣, ㉤이다.

09 답 12

[전략] $a+\sqrt{26}$과 $b-\sqrt{14}$의 값의 범위를 확인한다.
$5<\sqrt{26}<6$에서 $a+5<a+\sqrt{26}<a+6$
$-4<-\sqrt{14}<-3$에서 $b-4<b-\sqrt{14}<b-3$
두 수 $a+\sqrt{26}$과 $b-\sqrt{14}$ 사이에 있는 정수가 3개가 되도록 두 수를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 $a+7=b-5$이므로
$b-a=12$

100점 TIP
두 자연수 a, b의 값을 각각 구하기보다 문제에 주어진 조건을 만족하도록 두 수 $a+\sqrt{26}$과 $b-\sqrt{14}$를 수직선 위에 나타낸다.

2 근호를 포함한 식의 계산

01 | 근호를 포함한 식의 곱셈과 나눗셈

개념 확인 31쪽

01 답 ⑤

① $\sqrt{3}\sqrt{6}=\sqrt{3\times6}=\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times2}=3\sqrt{2}$

② $\sqrt{\frac{25}{4}}\sqrt{\frac{12}{5}}=\sqrt{\frac{25}{4}\times\frac{12}{5}}=\sqrt{15}$

③ $\sqrt{42}\div\sqrt{7}=\sqrt{\frac{42}{7}}=\sqrt{6}$

④ $\sqrt{7}\times\sqrt{21}\div\sqrt{27}=\sqrt{7}\times\sqrt{21}\times\frac{1}{\sqrt{27}}$
$=\sqrt{7\times21\times\frac{1}{27}}=\sqrt{\frac{49}{9}}=\frac{7}{3}$

⑤ $2\sqrt{18}\div\sqrt{6}\times2=2\sqrt{18}\times\frac{1}{\sqrt{6}}\times2=2\times2\times\sqrt{\frac{18}{6}}=4\sqrt{3}$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

02 답 $\frac{3\sqrt{10}}{4}$

$a=\sqrt{15}\times\sqrt{\frac{2}{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{1}{4}\times\sqrt{15\times\frac{2}{5}\times5}=\frac{\sqrt{30}}{4}$

$b=\frac{\sqrt{10}}{3}\div\sqrt{\frac{4}{3}}\div\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{3}\div\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}\div\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$
$=\frac{\sqrt{10}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{3}\times\sqrt{10\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \frac{a}{b}=a\div b=\frac{\sqrt{30}}{4}\div\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{30}}{4}\times\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{10}}{4}$

03 답 ③

① $\sqrt{50}=\sqrt{2\times5^2}=5\sqrt{2}$

② $\sqrt{\frac{27}{100}}=\sqrt{\frac{3^3}{10^2}}=\frac{3\sqrt{3}}{10}$

③ $\sqrt{0.24}=\sqrt{\frac{24}{100}}=\sqrt{\frac{6}{25}}=\sqrt{\frac{6}{5^2}}=\frac{\sqrt{6}}{5}$

④ $-4\sqrt{3}=-\sqrt{4^2\times3}=-\sqrt{48}$

⑤ $-\sqrt{\frac{75}{4}}=-\sqrt{\frac{3\times5^2}{2^2}}=-\frac{5\sqrt{3}}{2}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

04 답 ②

② $\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$

③ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$

④ $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{6}$

⑤ $\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{2}\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{7}\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{42}}{6}=\frac{\sqrt{42}}{3}$

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

05 답 ㉠, ㉣

㉠ $\frac{\sqrt{3}}{3}\div\left(-\sqrt{\frac{27}{4}}\right)\times\frac{9}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)\times\frac{9}{\sqrt{6}}$
$=-\frac{2}{\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

㉡ $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{24}}\times\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{15}}\div\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\times\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{15}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=1$

㉢ $\frac{14}{\sqrt{7}}\times\frac{3}{\sqrt{2}}\div\sqrt{\frac{3}{56}}=\frac{14}{\sqrt{7}}\times\frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{3}}=\frac{84}{\sqrt{3}}=28\sqrt{3}$

㉣ $4\sqrt{3}\div\frac{6}{\sqrt{2}}\times\frac{3}{\sqrt{15}}=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{6}\times\frac{3}{\sqrt{15}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉣이다.

06 답 1635

$\sqrt{4.32}=2.078$이므로 $a=2.078$

$\sqrt{4.43}=2.105$이므로 $b=4.43$

$\therefore 1000a-100b=1000\times2.078-100\times4.43$
$=2078-443=1635$

적중 & 심화 유형 연습 32쪽~35쪽

01 답 $\frac{1}{5}$

$\sqrt{24}=\sqrt{2^2\times6}=2\sqrt{6}$이므로 $x=2$

$5\sqrt{2}=\sqrt{5^2\times2}=\sqrt{50}$이므로 $y=50$

$\therefore \sqrt{\frac{x}{y}}=\sqrt{\frac{2}{50}}=\sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{1}{5}$

02 답 12

$\sqrt{72}=\sqrt{6^2\times2}=6\sqrt{2}$이므로 $a=6$, $b=2$

$4\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{4^2\times\frac{1}{2}}=\sqrt{8}$이므로 $c=8$

$\therefore a-b+c=6-2+8=12$

03 답 48

$2\sqrt{10+a}=10\sqrt{2}$에서

$\sqrt{2^2\times(10+a)}=\sqrt{10^2\times2}$

$40+4a=200$, $4a=160$ $\therefore a=40$

$\sqrt{20-b}=2\sqrt{3}$에서

$\sqrt{20-b}=\sqrt{2^2\times3}$

$20-b=12 \qquad \therefore b=8$

$\therefore a+b=40+8=48$

04 답) 1

$\sqrt{7000}=\sqrt{10^2\times70}=10\sqrt{70}$이므로 $A=10$

$\dfrac{\sqrt{0.7}}{\sqrt{70}}=\sqrt{\dfrac{7}{10}\times\dfrac{1}{70}}=\sqrt{\dfrac{1}{100}}=\dfrac{1}{10}$이므로 $B=\dfrac{1}{10}$

$\therefore AB=10\times\dfrac{1}{10}=1$

05 답) ①

$\sqrt{60}=\sqrt{2^2\times3\times5}=(\sqrt{2})^2\sqrt{3}\sqrt{5}=\sqrt{3}a^2b$

06 답) $5x-7y$

$\sqrt{50}-\sqrt{147}=\sqrt{2\times5^2}-\sqrt{3\times7^2}$

$=5\sqrt{2}-7\sqrt{3}$

$=5x-7y$

07 답) 5

$\sqrt{392}=\sqrt{2^3\times7^2}=(\sqrt{2})^3(\sqrt{7})^2=a^3b^2$

따라서 $x=3$, $y=2$이므로

$x+y=3+2=5$

08 답) ⑤

$\sqrt{0.108}=\sqrt{\dfrac{108}{1000}}=\sqrt{\dfrac{27}{250}}=\sqrt{\dfrac{3^3}{2\times5^3}}$

$=\dfrac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{30}}{50}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}}{50}=\dfrac{3abc}{50}$

09 답) 30

$\dfrac{15}{\sqrt{2}}\times\sqrt{\dfrac{2}{3}}\div\dfrac{\sqrt{10}}{2}=\dfrac{15}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\dfrac{2}{\sqrt{10}}=\dfrac{30}{\sqrt{30}}=\sqrt{30}$

$\therefore a=30$

10 답) 45

$\sqrt{15}\times\sqrt{a}\times\sqrt{96}=180\sqrt{2}$에서

$\sqrt{15\times a\times96}=\sqrt{180^2\times2}$

$1440a=64800 \qquad \therefore a=45$

11 답) -2

$A=\dfrac{5}{\sqrt{52}}\div\left(-\sqrt{\dfrac{3}{4}}\right)\times\sqrt{39}$

$=\dfrac{5}{2\sqrt{13}}\times\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\times\sqrt{39}=-5$ …… ❶

$B=\sqrt{\dfrac{45}{7}}\times\sqrt{\dfrac{3}{28}}\div\dfrac{\sqrt{15}}{14}$

$=\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\times\dfrac{14}{\sqrt{15}}=3$ …… ❷

$\therefore A+B=-5+3=-2$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ 식 A 계산하기	45 %
❷ 식 B 계산하기	45 %
❸ $A+B$의 값 구하기	10 %

12 답) ⑤

① $\sqrt{0.006}=\sqrt{\dfrac{60}{10000}}=\dfrac{\sqrt{60}}{100}=\dfrac{7.746}{100}=0.07746$

② $\sqrt{0.06}=\sqrt{\dfrac{6}{100}}=\dfrac{\sqrt{6}}{10}=\dfrac{2.449}{10}=0.2449$

③ $\sqrt{0.6}=\sqrt{\dfrac{60}{100}}=\dfrac{\sqrt{60}}{10}=\dfrac{7.746}{10}=0.7746$

④ $\sqrt{600}=10\sqrt{6}=10\times2.449=24.49$

⑤ $\sqrt{6000}=10\sqrt{60}=10\times7.746=77.46$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

13 답) ④

① $\sqrt{0.07}=\sqrt{\dfrac{7}{100}}=\dfrac{\sqrt{7}}{10}=\dfrac{2.646}{10}=0.2646$

② $\sqrt{28}=\sqrt{2^2\times7}=2\sqrt{7}=2\times2.646=5.292$

③ $\sqrt{63}=\sqrt{3^2\times7}=3\sqrt{7}=3\times2.646=7.938$

⑤ $\sqrt{700}=10\sqrt{7}=10\times2.646=26.46$

따라서 $\sqrt{7}=2.646$임을 이용하여 그 값을 구할 수 없는 것은 ④이다.

14 답) 672

$25.92=10\times2.592=10\sqrt{6.72}=\sqrt{10^2\times6.72}=\sqrt{672}$

$\therefore a=672$

15 답) 85900

$293.1^2=(100\times2.931)^2$

$=(100\sqrt{8.59})^2$

$=10000\times8.59$

$=85900$

16 답) 5.222

$\sqrt{24.1}=\sqrt{\dfrac{96.4}{4}}=\dfrac{\sqrt{96.4}}{2}=\dfrac{9.818}{2}=4.909$

$\sqrt{0.098}=\sqrt{\dfrac{9.8}{100}}=\dfrac{\sqrt{9.8}}{10}=\dfrac{3.130}{10}=0.3130$

$\therefore \sqrt{24.1}+\sqrt{0.098}=4.909+0.3130=5.222$

17 답 $20\sqrt{2}\text{ cm}^3$

(직육면체의 부피)$=\sqrt{20}\times\sqrt{8}\times\sqrt{5}$

$=2\sqrt{5}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{5}$

$=20\sqrt{2}\ (\text{cm}^3)$

18 답 3

$\frac{1}{2}\times\sqrt{32}\times\sqrt{27}=\sqrt{24}\times x$이므로

$x=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times3\sqrt{3}\times\frac{1}{2\sqrt{6}}=3$

19 답 ⑤

원기둥의 높이를 h cm라 하면

원기둥의 부피가 $36\sqrt{2}\pi\text{ cm}^3$이므로

$\pi\times(2\sqrt{3})^2\times h=36\sqrt{2}\pi$

$12\pi h=36\sqrt{2}\pi \qquad \therefore h=\frac{36\sqrt{2}\pi}{12\pi}=3\sqrt{2}$

$\therefore$ (원기둥의 옆넓이)$=2\pi\times2\sqrt{3}\times3\sqrt{2}=12\sqrt{6}\pi\ (\text{cm}^2)$

20 답 ②

정사각형 C의 넓이가 10 cm^2이므로 정사각형 C의 한 변의 길이는 $\sqrt{10}$ cm

정사각형 A의 한 변의 길이를 a cm라 하면 직사각형 B의 넓이가 $2\sqrt{5}\text{ cm}^2$이므로

$a\times\sqrt{10}=2\sqrt{5}$

$\therefore a=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

따라서 정사각형 A의 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$ cm이므로 정사각형 A의 넓이는

$(\sqrt{2})^2=2\ (\text{cm}^2)$

21 답 $5\sqrt{6}$ cm

정사각형의 각 변의 중점을 연결하여 생긴 정사각형의 넓이는 처음 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로

$\square\text{IJKL}=\square\text{ABCD}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=(10\sqrt{6})^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=600\times\frac{1}{4}=150\ (\text{cm}^2)$

따라서 $\square$IJKL의 한 변의 길이는 $\sqrt{150}=5\sqrt{6}$ (cm)

다른 풀이

$\overline{\text{AE}}=\overline{\text{AH}}=\frac{1}{2}\overline{\text{AB}}=\frac{1}{2}\times10\sqrt{6}=5\sqrt{6}$ (cm)

$\triangle$AEH에서 $\overline{\text{EH}}=\sqrt{(5\sqrt{6})^2+(5\sqrt{6})^2}=\sqrt{300}=10\sqrt{3}$ (cm)

$\overline{\text{EI}}=\overline{\text{EL}}=\frac{1}{2}\overline{\text{EH}}=\frac{1}{2}\times10\sqrt{3}=5\sqrt{3}$ (cm)

$\triangle$EIL에서 $\overline{\text{IL}}=\sqrt{(5\sqrt{3})^2+(5\sqrt{3})^2}=\sqrt{150}=5\sqrt{6}$ (cm)

22 답 $\sqrt{6}$ cm

한 변의 길이가 $8\sqrt{3}$ cm인 정사각형의 넓이는

$(8\sqrt{3})^2=192\ (\text{cm}^2)$

이때 단계를 거듭할수록 넓이는 $\frac{1}{2}$배씩 줄어들므로 [5단계]에서 생기는 정사각형의 넓이는 처음 정사각형의 넓이의 $\left(\frac{1}{2}\right)^5$배이다.

즉 $192\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=192\times\frac{1}{32}=6\ (\text{cm}^2)$

따라서 [5단계]에서 생기는 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{6}$ cm 이다.

23 답 ⑤

넓이가 300 cm^2인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{300}=10\sqrt{3}$ (cm) 이므로 사다리꼴의 높이는 $10\sqrt{3}$ cm이다.

사다리꼴의 윗변의 길이와 아랫변의 길이의 비가 2 : 3이므로 윗변의 길이를 $2k$ cm, 아랫변의 길이를 $3k$ cm라 하자. (단, $k>0$)

사다리꼴의 넓이가 300 cm^2이므로

$\frac{1}{2}\times(2k+3k)\times10\sqrt{3}=300$

$25\sqrt{3}k=300 \qquad \therefore k=\frac{300}{25\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$

따라서 사다리꼴의 아랫변의 길이는

$3k=3\times4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$ (cm)

24 답 $\sqrt{70}$ cm

직육면체의 높이를 h cm라 하면

직육면체의 부피가 $30\sqrt{5}\text{ cm}^3$이므로

$2\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times h=30\sqrt{5}$

$10h=30\sqrt{5} \qquad \therefore h=\frac{30\sqrt{5}}{10}=3\sqrt{5}$

$\therefore \overline{\text{AB}}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2+(3\sqrt{5})^2}=\sqrt{70}$ (cm)

적중 & 심화 실전 TEST

36쪽~37쪽

01 답 28

$3\sqrt{20+a}=6\sqrt{7}$에서

$\sqrt{3^2\times(20+a)}=\sqrt{6^2\times7}$

$180+9a=252,\ 9a=72 \qquad \therefore a=8$

$\sqrt{6b-36}=6\sqrt{5}$에서

$\sqrt{6b-36}=\sqrt{6^2\times5}$

$6b-36=180,\ 6b=216 \qquad \therefore b=36$

$\therefore b-a=36-8=28$

02 답 $\frac{7}{5}$

$\sqrt{0.08}=\sqrt{\frac{8}{100}}=\sqrt{\frac{2}{25}}=\frac{\sqrt{2}}{5}$이므로 $a=\frac{1}{5}$

$\sqrt{245}=\sqrt{5\times7^2}=7\sqrt{5}$이므로 $b=7$

$\therefore ab=\frac{1}{5}\times7=\frac{7}{5}$

03 답 ④

$\sqrt{108a}=\sqrt{2^2\times3^3\times a}$가 $b\sqrt{2}$가 되려면 근호 안에 지수가 홀수인 소인수는 2뿐이어야 하므로 $a=2\times3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.
즉 a의 값 중 가장 작은 자연수는 $2\times3=6$이므로
$\sqrt{108a}=\sqrt{2^3\times3^4}=18\sqrt{2}$ $\qquad\therefore b=18$
따라서 $a+b$의 값 중 가장 작은 값은
$6+18=24$

04 답 ②

$$\begin{aligned}\sqrt{425}-\sqrt{2.8}&=\sqrt{5^2\times17}-\sqrt{\frac{280}{100}}\\&=5\sqrt{17}-\sqrt{\frac{70}{25}}\\&=5\sqrt{17}-\frac{\sqrt{70}}{5}\\&=5a-\frac{b}{5}\end{aligned}$$

05 답 ㉡, ㉣

㉠ $3\sqrt{2}\times\sqrt{5}\div\sqrt{40}=3\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\frac{1}{2\sqrt{10}}=\frac{3}{2}$

㉡ $\sqrt{70}\div\sqrt{5}\times3\sqrt{2}=\sqrt{70}\times\frac{1}{\sqrt{5}}\times3\sqrt{2}=3\sqrt{28}=6\sqrt{7}$

㉢ $\sqrt{108}\div\sqrt{12}\times\sqrt{54}=6\sqrt{3}\times\frac{1}{2\sqrt{3}}\times3\sqrt{6}=9\sqrt{6}$

㉣ $\frac{1}{\sqrt{3}}\div\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times\sqrt{10}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\times\sqrt{10}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

㉤ $\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{\frac{2}{3}}\div\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{2}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{15}$

㉥ $\frac{\sqrt{12}}{2}\div\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\times\frac{\sqrt{27}}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

따라서 옳지 않은 것은 ㉡, ㉣이다.

06 답 357

$18.89=10\times1.889=10\sqrt{3.57}=\sqrt{10^2\times3.57}=\sqrt{357}$
$\therefore a=357$

07 답 240

$2.4^2=5.76$이므로 $2.4=\sqrt{5.76}$
$\therefore \sqrt{57600}=\sqrt{10000\times5.76}=100\sqrt{5.76}=100\times2.4=240$

08 답 $2\sqrt{2}$

$\overline{OF}=\overline{EF}=x$라 하면 $\triangle OEF$에서
$\overline{OE}=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}x$
$\overline{DE}=\overline{OE}=\sqrt{2}x$이므로 $\triangle ODE$에서
$\overline{OD}=\sqrt{(\sqrt{2}x)^2+(\sqrt{2}x)^2}=\sqrt{2x^2+2x^2}=\sqrt{4x^2}=2x$
$\overline{CD}=\overline{OD}=2x$이므로 $\triangle OCD$에서
$\overline{OC}=\sqrt{(2x)^2+(2x)^2}=\sqrt{4x^2+4x^2}=\sqrt{8x^2}=2\sqrt{2}x$
$\overline{BC}=\overline{OC}=2\sqrt{2}x$이므로 $\triangle OBC$에서
$\overline{OB}=\sqrt{(2\sqrt{2}x)^2+(2\sqrt{2}x)^2}=\sqrt{8x^2+8x^2}=\sqrt{16x^2}=4x$
$\overline{AB}=\overline{OB}=4x$이므로 $\triangle OAB$에서
$\overline{OA}=\sqrt{(4x)^2+(4x)^2}=\sqrt{16x^2+16x^2}=\sqrt{32x^2}=4\sqrt{2}x$
즉 $4\sqrt{2}x=16$이므로 $x=\frac{16}{4\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$
따라서 $\overline{OF}$의 길이는 $2\sqrt{2}$이다.

09 답 $8\sqrt{10}$

정사각형의 각 변의 중점을 연결하여 생긴 정사각형의 넓이는 처음 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로
$\square IJKL=\square ABCD\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$
$\therefore \square ABCD=4\square IJKL=4\times(4\sqrt{10})^2=640$
따라서 $\square ABCD$의 한 변의 길이는
$\sqrt{640}=8\sqrt{10}$

10 답 $8\sqrt{2}$

한 변의 길이가 $16\sqrt{2}$인 정사각형의 넓이는
$(16\sqrt{2})^2=512$
이때 단계를 거듭할수록 넓이는 $\frac{1}{2}$배씩 줄어들므로 [3단계]에서 생기는 정사각형의 넓이는 처음 정사각형의 넓이의 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$배이다.
즉 $512\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=512\times\frac{1}{8}=64$
따라서 [3단계]에서 생기는 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{64}=8$이므로 구하는 대각선의 길이는
$\sqrt{8^2+8^2}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$

11 답 $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ cm

넓이가 200 cm^2인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{200}=10\sqrt{2}$ (cm)이므로 사다리꼴의 높이는 $10\sqrt{2}$ cm이다.
사다리꼴의 윗변의 길이와 아랫변의 길이의 비가 3 : 5이므로 윗변의 길이를 $3k$ cm, 아랫변의 길이를 $5k$ cm라 하자. (단, $k>0$)
사다리꼴의 넓이가 200 cm^2이므로
$\frac{1}{2}\times(3k+5k)\times10\sqrt{2}=200$
$40\sqrt{2}k=200 \qquad \therefore k=\frac{200}{40\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

따라서 사다리꼴의 윗변의 길이는

$3k=3\times\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{15\sqrt{2}}{2}$ (cm)

12 답 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

원기둥 모양의 그릇의 부피는

$\pi\times(\sqrt{2})^2\times3\sqrt{3}=6\sqrt{3}\pi$

원뿔 모양의 그릇의 높이를 h라 하면 두 그릇의 부피가 같으므로

$6\sqrt{3}\pi=\frac{1}{3}\pi\times(2\sqrt{2})^2\times h$, $6\sqrt{3}\pi=\frac{8}{3}\pi h$

$\therefore h=6\sqrt{3}\pi\div\frac{8}{3}\pi=6\sqrt{3}\pi\times\frac{3}{8\pi}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$

따라서 원뿔 모양의 그릇의 높이는 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$이다.

02 | 근호를 포함한 식의 덧셈과 뺄셈

개념 확인 39쪽

01 답 ⑤

① $5\sqrt{3}-\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

② $2\sqrt{2}+4\sqrt{3}$은 더 이상 계산할 수 없다.

③ $\sqrt{3}(\sqrt{11}-\sqrt{8})=\sqrt{3}(\sqrt{11}-2\sqrt{2})=\sqrt{33}-2\sqrt{6}$

④ $\sqrt{32}+2\sqrt{18}=4\sqrt{2}+6\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

⑤ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

02 답 4

$\sqrt{72}+\sqrt{8}-4\sqrt{2}=6\sqrt{2}+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

$\therefore a=4$

03 답 14

$$\frac{\sqrt{48}+3}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{3}+3}{\sqrt{5}}=\frac{(4\sqrt{3}+3)\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{15}+3\sqrt{5}}{5}$$

따라서 $a=\frac{4}{5}$, $b=\frac{3}{5}$이므로

$10(a+b)=10\times\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)=10\times\frac{7}{5}=14$

04 답 ④

① $\sqrt{\frac{6}{7}}\times5\sqrt{7}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}\times5\sqrt{7}=5\sqrt{6}$

② $\frac{\sqrt{35}}{2\sqrt{6}}\div\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{35}}{2\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$

③ $\sqrt{15}-\sqrt{7}+\sqrt{60}=\sqrt{15}-\sqrt{7}+2\sqrt{15}=3\sqrt{15}-\sqrt{7}$

④ $(-4\sqrt{3}+\sqrt{2})\times\sqrt{12}=(-4\sqrt{3}+\sqrt{2})\times2\sqrt{3}=-24+2\sqrt{6}$

⑤ $8\div\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}-\sqrt{8}\right)+3\sqrt{2}=8\div\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}-2\sqrt{2}\right)+3\sqrt{2}$
$=8\div\left(-\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)+3\sqrt{2}$
$=8\times\left(-\frac{4}{5\sqrt{2}}\right)+3\sqrt{2}$
$=-\frac{32}{5\sqrt{2}}+3\sqrt{2}$
$=-\frac{16\sqrt{2}}{5}+3\sqrt{2}$
$=-\frac{\sqrt{2}}{5}$

따라서 옳은 것은 ④이다.

05 답 -2

$\overline{AB}=\overline{AD}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로

$a=-1-\sqrt{2}$, $b=-1+\sqrt{2}$

$\therefore a+b=(-1-\sqrt{2})+(-1+\sqrt{2})=-2$

06 답 $8-\sqrt{8}<1+\sqrt{18}$

$(8-\sqrt{8})-(1+\sqrt{18})=(8-2\sqrt{2})-(1+3\sqrt{2})$
$=8-2\sqrt{2}-1-3\sqrt{2}$
$=7-5\sqrt{2}$
$=\sqrt{49}-\sqrt{50}<0$

$\therefore 8-\sqrt{8}<1+\sqrt{18}$

적중 & 심화 유형 연습 40쪽~46쪽

01 답 ④

$2\sqrt{12}+3\sqrt{75}-5\sqrt{20}-4\sqrt{27}+7\sqrt{5}$
$=4\sqrt{3}+15\sqrt{3}-10\sqrt{5}-12\sqrt{3}+7\sqrt{5}$
$=7\sqrt{3}-3\sqrt{5}$

따라서 $a=7$, $b=3$이므로

$a-b=7-3=4$

02 답 $-2\sqrt{6}$

$\frac{18}{\sqrt{6}}-\sqrt{96}-\sqrt{54}+\frac{12}{\sqrt{6}}=3\sqrt{6}-4\sqrt{6}-3\sqrt{6}+2\sqrt{6}$
$=-2\sqrt{6}$

03 답 2

$$\sqrt{75}-\frac{4}{\sqrt{2}}+2\sqrt{18}+\frac{6}{\sqrt{12}}=5\sqrt{3}-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}+\frac{6}{2\sqrt{3}}$$
$$=5\sqrt{3}-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}+\sqrt{3}$$
$$=4\sqrt{2}+6\sqrt{3}$$

따라서 $a=4$, $b=6$이므로

$b-a=6-4=2$

04 답 175

$\sqrt{63}+\sqrt{a}-\sqrt{700}=-2\sqrt{7}$에서

$$\sqrt{a}=-2\sqrt{7}-\sqrt{63}+\sqrt{700}$$
$$=-2\sqrt{7}-3\sqrt{7}+10\sqrt{7}$$
$$=5\sqrt{7}=\sqrt{175}$$

$\therefore a=175$

05 답 ①

$\sqrt{3}<2$이므로 $\sqrt{3}-2<0$

$3<\sqrt{12}$이므로 $3-\sqrt{12}<0$

$$\therefore \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}+\sqrt{(3-\sqrt{12})^2}=-(\sqrt{3}-2)-(3-\sqrt{12})$$
$$=-(\sqrt{3}-2)-(3-2\sqrt{3})$$
$$=-\sqrt{3}+2-3+2\sqrt{3}$$
$$=\sqrt{3}-1$$

06 답 $2\sqrt{6}-3\sqrt{3}$

두 대각선의 위치에 있는 세 수의 합이 서로 같으므로

$\sqrt{48}+(3\sqrt{6}-6\sqrt{3})+x=\sqrt{24}+(3\sqrt{6}-6\sqrt{3})+\frac{\sqrt{27}}{3}$에서 … ❶

$$x=\sqrt{24}+\frac{\sqrt{27}}{3}-\sqrt{48}$$
$$=2\sqrt{6}+\sqrt{3}-4\sqrt{3}$$
$$=2\sqrt{6}-3\sqrt{3}$$ …… ❷

채점 기준	비율
❶ 두 대각선의 위치에 있는 세 수의 합이 서로 같음을 이용하여 식 세우기	60 %
❷ x의 값 구하기	40 %

07 답 ⑤

$$\sqrt{2}(2\sqrt{2}-4)-2(\sqrt{2}+5)=4-4\sqrt{2}-2\sqrt{2}-10$$
$$=-6-6\sqrt{2}$$

08 답 $10-\sqrt{3}$

$$\frac{5-\sqrt{15}}{\sqrt{5}}+\sqrt{5}(\sqrt{20}-1)=\frac{(5-\sqrt{15})\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}+\sqrt{5}(2\sqrt{5}-1)$$
$$=\frac{5\sqrt{5}-5\sqrt{3}}{5}+10-\sqrt{5}$$
$$=\sqrt{5}-\sqrt{3}+10-\sqrt{5}$$
$$=10-\sqrt{3}$$

09 답 $\frac{13}{6}$

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{2}-3}{\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{6})\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}-\frac{(2\sqrt{2}-3)\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{2}-\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{2}+\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{6}}{3}+\sqrt{3}$$
$$=2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}$$

따라서 $a=2$, $b=-\frac{1}{6}$이므로

$a-b=2-\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{13}{6}$

10 답 $2\sqrt{2}-3\sqrt{3}$

$$\sqrt{27}+\sqrt{6}(\sqrt{3}-3\sqrt{2})-\frac{2}{\sqrt{2}}=3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-6\sqrt{3}-\sqrt{2}$$
$$=2\sqrt{2}-3\sqrt{3}$$

11 답 3

$$\frac{4}{\sqrt{2}}(\sqrt{6}-\sqrt{3})+(12-9\sqrt{2})\div\sqrt{3}$$
$$=\frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{\sqrt{2}}+\frac{12-9\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+\frac{(12-9\sqrt{2})\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$$
$$=\frac{8\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{2}+\frac{12\sqrt{3}-9\sqrt{6}}{3}$$
$$=4\sqrt{3}-2\sqrt{6}+4\sqrt{3}-3\sqrt{6}$$
$$=8\sqrt{3}-5\sqrt{6}$$

따라서 $a=8$, $b=-5$이므로

$a+b=8+(-5)=3$

12 답 ⑤

① $2\sqrt{6}\times3\sqrt{2}\div3=2\sqrt{6}\times3\sqrt{2}\times\frac{1}{3}=4\sqrt{3}$

② $\sqrt{28}\div\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{5}}{2}=2\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{15}$

③ $\sqrt{32}+2\sqrt{18}-\sqrt{72}=4\sqrt{2}+6\sqrt{2}-6\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

④ $\left(\sqrt{75}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\div\sqrt{3}=\left(5\sqrt{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\times\frac{1}{\sqrt{3}}=5+\frac{1}{6}=\frac{31}{6}$

⑤ $\sqrt{27}\left(\sqrt{6}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)-\frac{3}{\sqrt{2}}(\sqrt{8}-2)$

$$=3\sqrt{3}\left(\sqrt{6}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)-\frac{3}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}-2)$$
$$=9\sqrt{2}-6-6+\frac{6}{\sqrt{2}}$$
$$=9\sqrt{2}-6-6+3\sqrt{2}$$
$$=12\sqrt{2}-12$$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

13 답 -6

$\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-\sqrt{2}\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}+\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$

$=\frac{\sqrt{10}}{2}-2-\frac{3\sqrt{10}}{2}-5$

$=-7-\sqrt{10}$

따라서 $a=-7$, $b=-1$이므로

$a-b=-7-(-1)=-6$

14 답 ④

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\div\left(\frac{2}{\sqrt{6}}-\sqrt{\frac{1}{24}}\right)+\sqrt{18}(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}\div\left(\frac{2}{\sqrt{6}}-\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)+3\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}\div\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{12}\right)+6-3\sqrt{6}$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}\div\frac{\sqrt{6}}{4}+6-3\sqrt{6}$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{4}{\sqrt{6}}+6-3\sqrt{6}$

$=2+6-3\sqrt{6}$

$=8-3\sqrt{6}$

15 답 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

$A=\frac{2\sqrt{2}-3}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

$=\frac{(2\sqrt{2}-3)\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{6})\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$=\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{2\sqrt{6}}{3}-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{6}}{2}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

$B=\frac{6}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}(2-\sqrt{2})-\sqrt{50}$

$=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2-5\sqrt{2}=-2$

$\therefore\ AB=\frac{\sqrt{6}}{6}\times(-2)=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

16 답 6

$\sqrt{3}(5\sqrt{3}-6)-a(1-\sqrt{3})=15-6\sqrt{3}-a+a\sqrt{3}$

$=(15-a)+(-6+a)\sqrt{3}$

이것이 유리수가 되려면 $-6+a=0$이어야 하므로

$a=6$

17 답 5

$\sqrt{5}(\sqrt{10}-a\sqrt{5})-(a\sqrt{2}+3)$

$=5\sqrt{2}-5a-a\sqrt{2}-3$

$=(-5a-3)+(5-a)\sqrt{2}$ …… ❶

이것이 유리수가 되려면 $5-a=0$이어야 하므로 …… ❷

$a=5$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 간단히 하기	40 %
❷ 유리수가 되기 위한 조건 알기	40 %
❸ a의 값 구하기	20 %

18 답 ⑤

$\sqrt{40}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}-\sqrt{10}\right)-\frac{a}{\sqrt{3}}(\sqrt{12}-\sqrt{15})$

$=2\sqrt{10}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}-\sqrt{10}\right)-\frac{a}{\sqrt{3}}(2\sqrt{3}-\sqrt{15})$

$=\frac{4\sqrt{5}}{5}-20-2a+a\sqrt{5}$

$=(-20-2a)+\left(\frac{4}{5}+a\right)\sqrt{5}$

이것이 유리수가 되려면 $\frac{4}{5}+a=0$이어야 하므로

$a=-\frac{4}{5}$

19 답 $20\sqrt{7}$ cm

넓이가 28 cm^2인 정사각형의 한 변의 길이는

$\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ (cm)

넓이가 63 cm^2인 정사각형의 한 변의 길이는

$\sqrt{63}=3\sqrt{7}$ (cm)

따라서 두 정사각형의 둘레의 길이의 합은

$4\times2\sqrt{7}+4\times3\sqrt{7}=8\sqrt{7}+12\sqrt{7}=20\sqrt{7}$ (cm)

20 답 $6\sqrt{15}$ cm^2

(사다리꼴의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\{\sqrt{20}+(\sqrt{45}+\sqrt{5})\}\times\sqrt{12}$

$=\frac{1}{2}\times\{2\sqrt{5}+(3\sqrt{5}+\sqrt{5})\}\times2\sqrt{3}$

$=\frac{1}{2}\times6\sqrt{5}\times2\sqrt{3}$

$=6\sqrt{15}$ (cm^2)

21 답 ②

(직육면체의 겉넓이)

$=2\times\{(2\sqrt{2}+\sqrt{5})\times2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\times2\sqrt{5}+(2\sqrt{2}+\sqrt{5})\times2\sqrt{5}\}$

$=2\times\{(8+2\sqrt{10})+4\sqrt{10}+(4\sqrt{10}+10)\}$

$=2\times(18+10\sqrt{10})$

$=36+20\sqrt{10}$ (cm^2)

22 답 $7+2\sqrt{13}$

$\overline{AB}=\overline{DF}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$이므로

$p=2-\sqrt{13}$, $q=9+\sqrt{13}$

$\therefore\ q-p=(9+\sqrt{13})-(2-\sqrt{13})=7+2\sqrt{13}$

23 답 $5-2\sqrt{2}$

$\overline{AC}=\overline{FH}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로

점 P에 대응하는 수는 $-2+\sqrt{2}$, 점 Q에 대응하는 수는 $3-\sqrt{2}$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$(3-\sqrt{2})-(-2+\sqrt{2})=3-\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=5-2\sqrt{2}$

24 답 (1) $-2-\sqrt{2}$ (2) $-1+2\sqrt{2}$

(1) $\overline{AC}=\overline{BD}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로 …… ❶

점 A에 대응하는 수는 $(-3+\sqrt{2})-\sqrt{2}=-3$,

점 B에 대응하는 수는 $-3+1=-2$

따라서 점 Q에 대응하는 수는 $-2-\sqrt{2}$ …… ❷

(2) $\overline{PQ}=(-3+\sqrt{2})-(-2-\sqrt{2})$

$=-3+\sqrt{2}+2+\sqrt{2}$

$=-1+2\sqrt{2}$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 길이 구하기	10 %
❷ 점 Q에 대응하는 수 구하기	60 %
❸ $\overline{PQ}$의 길이 구하기	30 %

25 답 $2-3\sqrt{5}$

$\overline{AB}=\overline{AD}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로

$a=2-\sqrt{5}$, $b=2+\sqrt{5}$

$\therefore\ 2a-b=2(2-\sqrt{5})-(2+\sqrt{5})$

$=4-2\sqrt{5}-2-\sqrt{5}=2-3\sqrt{5}$

26 답 $-2\sqrt{2}+\sqrt{5}$

$\overline{AD}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로 점 P에 대응하는 수는 $-2-\sqrt{5}$

한편 점 A에 대응하는 수가 -2이므로 점 E에 대응하는 수는

$-2+3=1$

$\overline{EF}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로 점 Q에 대응하는 수는 $1+\sqrt{2}$

따라서 $a=-2-\sqrt{5}$, $b=1+\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{2}a+\sqrt{5}b=\sqrt{2}(-2-\sqrt{5})+\sqrt{5}(1+\sqrt{2})$

$=-2\sqrt{2}-\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{10}$

$=-2\sqrt{2}+\sqrt{5}$

27 답 ④

① $(\sqrt{10}-\sqrt{9})-1=\sqrt{10}-3-1=\sqrt{10}-4=\sqrt{10}-\sqrt{16}<0$

$\therefore \sqrt{10}-\sqrt{9}<1$

② $(3\sqrt{2}-3)-(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}-2=\sqrt{8}-\sqrt{4}>0$

$\therefore 3\sqrt{2}-3>\sqrt{2}-1$

③ $(3\sqrt{5}-2\sqrt{6})-(4\sqrt{5}-3\sqrt{6})=-\sqrt{5}+\sqrt{6}>0$

$\therefore 3\sqrt{5}-2\sqrt{6}>4\sqrt{5}-3\sqrt{6}$

④ $(5\sqrt{3}-\sqrt{18})-(\sqrt{2}+\sqrt{12})=5\sqrt{3}-3\sqrt{2}-\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

$=3\sqrt{3}-4\sqrt{2}$

$=\sqrt{27}-\sqrt{32}<0$

$\therefore 5\sqrt{3}-\sqrt{18}<\sqrt{2}+\sqrt{12}$

⑤ $(\sqrt{250}-\sqrt{108})-(\sqrt{90}-\sqrt{12})=5\sqrt{10}-6\sqrt{3}-3\sqrt{10}+2\sqrt{3}$

$=2\sqrt{10}-4\sqrt{3}$

$=\sqrt{40}-\sqrt{48}<0$

$\therefore \sqrt{250}-\sqrt{108}<\sqrt{90}-\sqrt{12}$

따라서 대소 관계가 옳은 것은 ④이다.

28 답 $B<A<C$

(i) $A-B=(1+4\sqrt{5})-(2+3\sqrt{5})=-1+\sqrt{5}>0$

$\therefore A>B$

(ii) $A-C=(1+4\sqrt{5})-(-1+5\sqrt{5})=2-\sqrt{5}=\sqrt{4}-\sqrt{5}<0$

$\therefore A<C$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $B<A<C$

29 답 ④

(i) $a-b=(5+4\sqrt{6})-(5+6\sqrt{3})$

$=4\sqrt{6}-6\sqrt{3}=\sqrt{96}-\sqrt{108}<0$

$\therefore a<b$

(ii) $a-c=(5+4\sqrt{6})-(7+3\sqrt{6})$

$=-2+\sqrt{6}=-\sqrt{4}+\sqrt{6}>0$

$\therefore a>c$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $c<a<b$

30 답 (1) $2\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (2) $2\sqrt{5}-5$ (3) $5-\sqrt{3}$

(1) 양수는 $2\sqrt{5}-\sqrt{3}$, $3(\sqrt{5}-\sqrt{3})$, $4\sqrt{2}-3\sqrt{3}$이므로 세 수의 대소를 비교하였을 때 가장 큰 수가 수직선의 맨 오른쪽에 있는 수이다.

(i) $(2\sqrt{5}-\sqrt{3})-3(\sqrt{5}-\sqrt{3})=-\sqrt{5}+2\sqrt{3}=-\sqrt{5}+\sqrt{12}>0$

$\therefore 2\sqrt{5}-\sqrt{3}>3(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

(ii) $3(\sqrt{5}-\sqrt{3})-(4\sqrt{2}-3\sqrt{3})=3\sqrt{5}-4\sqrt{2}=\sqrt{45}-\sqrt{32}>0$

$\therefore 3(\sqrt{5}-\sqrt{3})>4\sqrt{2}-3\sqrt{3}$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $4\sqrt{2}-3\sqrt{3}<3(\sqrt{5}-\sqrt{3})<2\sqrt{5}-\sqrt{3}$이므로 수직선의 맨 오른쪽에 있는 수는 $2\sqrt{5}-\sqrt{3}$이다. …… ❶

(2) 음수는 $2\sqrt{5}-5$, $3-\sqrt{20}$이므로 두 수의 대소를 비교하였을 때 더 큰 수가 수직선의 왼쪽에서 두 번째에 있는 수이다.

$(2\sqrt{5}-5)-(3-\sqrt{20})=2\sqrt{5}-5-3+2\sqrt{5}$

$=4\sqrt{5}-8=\sqrt{80}-\sqrt{64}>0$

따라서 $2\sqrt{5}-5>3-\sqrt{20}$이므로 수직선의 왼쪽에서 두 번째에 있는 수는 $2\sqrt{5}-5$이다. …… ❷

(3) $2\sqrt{5}-\sqrt{3}-(2\sqrt{5}-5)=5-\sqrt{3}$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ 수직선의 맨 오른쪽에 있는 수 구하기	40 %
❷ 수직선의 왼쪽에서 두 번째에 있는 수 구하기	40 %
❸ (1), (2)에서 구한 두 수의 차 구하기	20 %

참고

$2\sqrt{5}-5=\sqrt{20}-\sqrt{25}<0$, $2\sqrt{5}-\sqrt{3}=\sqrt{20}-\sqrt{3}>0$,

$3-\sqrt{20}=\sqrt{9}-\sqrt{20}<0$, $\sqrt{5}-\sqrt{3}>0$이므로 $3(\sqrt{5}-\sqrt{3})>0$,

$4\sqrt{2}-3\sqrt{3}=\sqrt{32}-\sqrt{27}>0$

31 답 $26\sqrt{2}$ cm

넓이가 8 cm^2, 18 cm^2, 32 cm^2인 세 정사각형의 한 변의 길이는 각각 $2\sqrt{2}$ cm, $3\sqrt{2}$ cm, $4\sqrt{2}$ cm이다.
따라서 새로운 도형의 둘레의 길이는
$$(2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times 2+4\sqrt{2}\times 2=18\sqrt{2}+8\sqrt{2}$$
$$=26\sqrt{2}\text{ (cm)}$$

32 답 $(48\sqrt{2}+32)$ cm

한 변의 길이가 16 cm인 정사각형의 넓이는
$16^2=256\text{ (cm}^2)$
이 정사각형 안에 연속하여 그린 세 정사각형의 넓이는 차례로
$256\times\frac{1}{2}=128\text{ (cm}^2)$, $128\times\frac{1}{2}=64\text{ (cm}^2)$,
$64\times\frac{1}{2}=32\text{ (cm}^2)$
넓이가 128 cm^2, 64 cm^2, 32 cm^2인 세 정사각형의 한 변의 길이는 각각 $8\sqrt{2}$ cm, 8 cm, $4\sqrt{2}$ cm이다.
따라서 색칠한 부분의 둘레의 길이는
$$8\sqrt{2}\times 4+8\times 4+4\sqrt{2}\times 4=32\sqrt{2}+32+16\sqrt{2}$$
$$=48\sqrt{2}+32\text{ (cm)}$$

33 답 $4-2\sqrt{5}$

사분원 A의 반지름의 길이는 2
사분원 B의 반지름의 길이는 $(5-\sqrt{5})-2=3-\sqrt{5}$
사분원 C의 반지름의 길이는 $2-(3-\sqrt{5})=-1+\sqrt{5}$
따라서 사분원 D의 반지름의 길이는
$(3-\sqrt{5})-(-1+\sqrt{5})=4-2\sqrt{5}$

34 답 30 cm^2

정사각형 FBEG의 넓이가 108 cm^2이므로
$\overline{FG}=\overline{GE}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}\text{ (cm)}$
정사각형 HECI의 넓이가 12 cm^2이므로
$\overline{HE}=\overline{HI}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\text{ (cm)}$
직사각형 AFGJ의 넓이가 18 cm^2이므로
$\overline{FG}\times\overline{JG}=18$에서 $6\sqrt{3}\times\overline{JG}=18$
$\therefore\ \overline{JG}=\frac{18}{6\sqrt{3}}=\sqrt{3}\text{ (cm)}$
$\overline{JH}=\overline{JG}+\overline{GE}-\overline{HE}=\sqrt{3}+6\sqrt{3}-2\sqrt{3}=5\sqrt{3}\text{ (cm)}$
따라서 직사각형 JHID의 넓이는
$\overline{JH}\times\overline{HI}=5\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}=30\text{ (cm}^2)$

35 답 ③

$$a\sqrt{\frac{12b}{a}}+b\sqrt{\frac{3a}{b}}=\sqrt{a^2\times\frac{12b}{a}}+\sqrt{b^2\times\frac{3a}{b}}$$
$$=\sqrt{12ab}+\sqrt{3ab}$$
$$=\sqrt{12\times 18}+\sqrt{3\times 18}$$
$$=6\sqrt{6}+3\sqrt{6}$$
$$=9\sqrt{6}$$

36 답 $\sqrt{2}$

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{8a}{b}}+\frac{3}{b}\sqrt{\frac{2b}{a}}=\sqrt{\frac{1}{a^2}\times\frac{8a}{b}}+3\sqrt{\frac{1}{b^2}\times\frac{2b}{a}}$$
$$=\sqrt{\frac{8}{ab}}+3\sqrt{\frac{2}{ab}}$$
$$=\sqrt{\frac{8}{25}}+3\sqrt{\frac{2}{25}}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{5}+\frac{3\sqrt{2}}{5}$$
$$=\sqrt{2}$$

37 답 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

$$a\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{\sqrt{b}}{b\sqrt{a}}=\sqrt{a^2\times\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{b}{b^2\times a}}$$
$$=\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$$
$$=\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

38 답 $\frac{28\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{1}{m}\sqrt{27mn}+\frac{1}{n}\sqrt{3mn}=\sqrt{\frac{1}{m^2}\times 27mn}+\sqrt{\frac{1}{n^2}\times 3mn}$$
$$=\sqrt{27\times\frac{n}{m}}+\sqrt{3\times\frac{m}{n}}$$
$$=\sqrt{27\times 9}+\sqrt{3\times\frac{1}{9}}$$
$$=9\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{28\sqrt{3}}{3}$$

39 답 ②

$2<\sqrt{6}<3$이므로 $a=\sqrt{6}-2$
$$\therefore\ 3a+1=3(\sqrt{6}-2)+1$$
$$=3\sqrt{6}-6+1$$
$$=3\sqrt{6}-5$$

40 답 $7-2\sqrt{3}$

$-2<-\sqrt{3}<-1$에서 $3<5-\sqrt{3}<4$이므로
$a=3$, $b=(5-\sqrt{3})-3=2-\sqrt{3}$
$$\therefore\ a+2b=3+2(2-\sqrt{3})$$
$$=3+4-2\sqrt{3}$$
$$=7-2\sqrt{3}$$

41 답 $3\sqrt{2}+4$

$4<3\sqrt{2}<5$에서 $6<3\sqrt{2}+2<7$이므로
$a=6$, $b=(3\sqrt{2}+2)-6=3\sqrt{2}-4$

$\therefore \sqrt{2}a-b=\sqrt{2}\times 6-(3\sqrt{2}-4)$
$=6\sqrt{2}-3\sqrt{2}+4$
$=3\sqrt{2}+4$

42 답 $6\sqrt{5}-15$

$6<\sqrt{45}<7$이므로
$a=\sqrt{45}-6=3\sqrt{5}-6$ …… ❶
$-3<-\sqrt{5}<-2$에서 $1<4-\sqrt{5}<2$이므로
$b=(4-\sqrt{5})-1=3-\sqrt{5}$ …… ❷
$\therefore a-3b=(3\sqrt{5}-6)-3(3-\sqrt{5})$
$=3\sqrt{5}-6-9+3\sqrt{5}$
$=6\sqrt{5}-15$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ a의 값 구하기	30 %
❷ b의 값 구하기	30 %
❸ $a-3b$의 값 구하기	40 %

적중 & 심화 실전 TEST

47쪽~48쪽

01 답 $16\sqrt{3}$

$3\sqrt{3}-\frac{3}{\sqrt{3}}=(\sqrt{108}-3\sqrt{27})+C$에서
$C=3\sqrt{3}-\frac{3}{\sqrt{3}}-(\sqrt{108}-3\sqrt{27})$
$=3\sqrt{3}-\sqrt{3}-6\sqrt{3}+9\sqrt{3}=5\sqrt{3}$
$B=5\sqrt{3}+\left(2\sqrt{75}-\frac{6}{\sqrt{12}}\right)$
$=5\sqrt{3}+10\sqrt{3}-\frac{3}{\sqrt{3}}$
$=5\sqrt{3}+10\sqrt{3}-\sqrt{3}=14\sqrt{3}$
$\therefore A=\left(3\sqrt{3}-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)+14\sqrt{3}$
$=3\sqrt{3}-\sqrt{3}+14\sqrt{3}=16\sqrt{3}$

02 답 $\frac{5\sqrt{2}}{2}-1$

$2\sqrt{2}-3=\sqrt{8}-\sqrt{9}<0$이므로
$\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}+\sqrt{27}\times\frac{3}{\sqrt{6}}-\sqrt{20}\div\frac{\sqrt{5}}{2}$
$=-(2\sqrt{2}-3)+3\sqrt{3}\times\frac{3}{\sqrt{6}}-2\sqrt{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}$
$=-2\sqrt{2}+3+\frac{9\sqrt{2}}{2}-4$
$=\frac{5\sqrt{2}}{2}-1$

03 답 ②

$-\sqrt{75}\times\frac{3}{\sqrt{12}}\div\frac{\sqrt{54}}{2}+\frac{2\sqrt{8}-4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
$=-5\sqrt{3}\times\frac{3}{2\sqrt{3}}\times\frac{2}{3\sqrt{6}}+\frac{(4\sqrt{2}-4\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$
$=-\frac{5}{\sqrt{6}}+\frac{8-4\sqrt{6}}{2}$
$=-\frac{5\sqrt{6}}{6}+4-2\sqrt{6}$
$=4-\frac{17\sqrt{6}}{6}$
따라서 $a=4$, $b=-\frac{17}{6}$이므로
$a+b=4+\left(-\frac{17}{6}\right)=\frac{7}{6}$

04 답 $\frac{2}{9}$

$\frac{1}{\sqrt{3}}(a\sqrt{12}+2\sqrt{5})-\sqrt{5}(3a\sqrt{3}-\sqrt{20})$
$=2a+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}-3a\sqrt{15}+10$
$=2a+\frac{2\sqrt{15}}{3}-3a\sqrt{15}+10$
$=(2a+10)+\left(\frac{2}{3}-3a\right)\sqrt{15}$
이것이 유리수가 되려면 $\frac{2}{3}-3a=0$이어야 하므로
$3a=\frac{2}{3}$ $\therefore a=\frac{2}{9}$

05 답 6

$(4+\sqrt{10})x+(6-\sqrt{10})y=28+2\sqrt{10}$에서
$(4x+6y)+(x-y)\sqrt{10}=28+2\sqrt{10}$
즉 $\begin{cases}4x+6y=28\\x-y=2\end{cases}$ ➡ $\begin{cases}2x+3y=14\\x-y=2\end{cases}$이므로 두 식을 연립하여 풀면
$x=4$, $y=2$
$\therefore x+y=4+2=6$

06 답 $(16\sqrt{3}+12\sqrt{2})$ cm

밑면의 세로의 길이를 x cm라 하면
직육면체의 부피가 $36\sqrt{2}$ cm^{3}이므로
$\sqrt{12}\times x\times 3\sqrt{2}=36\sqrt{2}$, $6\sqrt{6}x=36\sqrt{2}$
$\therefore x=\frac{36\sqrt{2}}{6\sqrt{6}}=2\sqrt{3}$
따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은
$(\sqrt{12}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2})\times 4=(2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2})\times 4$
$=(4\sqrt{3}+3\sqrt{2})\times 4$
$=16\sqrt{3}+12\sqrt{2}$ (cm)

07 답 $-2+\sqrt{2}$

$\overline{AB}=\overline{CD}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$이므로

점 P에 대응하는 수는 $-1+2\sqrt{2}$,
점 Q에 대응하는 수는 $3-2\sqrt{2}$

$\therefore \overline{PQ}=-1+2\sqrt{2}-(3-2\sqrt{2})$
$=-1+2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}$
$=-4+4\sqrt{2}$ …… ❶

$\overline{EF}=\overline{GH}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로
점 R에 대응하는 수는 $4+\sqrt{2}$,
점 S에 대응하는 수는 $6-\sqrt{2}$

$\therefore \overline{RS}=4+\sqrt{2}-(6-\sqrt{2})$
$=4+\sqrt{2}-6+\sqrt{2}$
$=-2+2\sqrt{2}$ …… ❷

따라서 $\overline{PQ}$와 $\overline{RS}$의 길이의 차는
$-4+4\sqrt{2}-(-2+2\sqrt{2})=-4+4\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}$
$=-2+2\sqrt{2}$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ $\overline{PQ}$의 길이 구하기	40 %
❷ $\overline{RS}$의 길이 구하기	40 %
❸ $\overline{PQ}$와 $\overline{RS}$의 길이의 차 구하기	20 %

08 답 $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+1$

[전략] 네 실수 a, b, c, d에 대하여 $a<b, b<c, c<d$이면 $a<b<c<d$이다.

(i) $\sqrt{12}-1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})=2\sqrt{3}-1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$
$=\sqrt{3}-(1+\sqrt{2})<0$
$\therefore \sqrt{12}-1<\sqrt{2}+\sqrt{3}$

(ii) $\sqrt{12}-1-(2\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}+\sqrt{2}$
$=-1+\sqrt{2}>0$
$\therefore \sqrt{12}-1>2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(iii) $\sqrt{2}+\sqrt{3}-(\sqrt{8}+1)=\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{2}-1$
$=\sqrt{3}-(\sqrt{2}+1)<0$
$\therefore \sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{8}+1$

따라서 (i)~(iii)에 의하여 $2\sqrt{3}-\sqrt{2}<\sqrt{12}-1<\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{8}+1$이므로 $M=\sqrt{8}+1$, $m=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$\therefore M-m=\sqrt{8}+1-(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$
$=2\sqrt{2}+1-2\sqrt{3}+\sqrt{2}$
$=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+1$

참고
$1<\sqrt{2}<2$이므로 $2<1+\sqrt{2}<3$
$1<\sqrt{3}<2$이므로 $\sqrt{3}-(1+\sqrt{2})<0$

09 답 $22\sqrt{2}$ cm

꽃밭 C의 넓이가 32 cm^2이므로
꽃밭 B의 넓이는 $32\times\frac{1}{4}=8\ (cm^2)$,
꽃밭 A의 넓이는 $8\times\frac{1}{4}=2\ (cm^2)$
넓이가 32 cm^2, 8 cm^2, 2 cm^2인 세 정사각형의 한 변의 길이는 각각 $4\sqrt{2}$ cm, $2\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{2}$ cm이다.
따라서 전체 꽃밭의 둘레의 길이는
$(4\sqrt{2}+2\sqrt{2}+\sqrt{2})\times2+4\sqrt{2}\times2=14\sqrt{2}+8\sqrt{2}=22\sqrt{2}\ (cm)$

10 답 $(5\sqrt{2}+2\sqrt{10})$ cm

직각이등변삼각형 ABC의 넓이가 1 cm^2이므로
$\frac{1}{2}\overline{AC}^2=1$에서 $\overline{AC}^2=2$
$\therefore \overline{AC}=\sqrt{2}\ (cm)\ (\because \overline{AC}>0)$
직각이등변삼각형 CDE의 넓이가 5 cm^2이므로
$\frac{1}{2}\overline{CD}^2=5$에서 $\overline{CD}^2=10$
$\therefore \overline{CD}=\sqrt{10}\ (cm)\ (\because \overline{CD}>0)$
직각이등변삼각형 EFG의 넓이가 16 cm^2이므로
$\frac{1}{2}\overline{EG}^2=16$에서 $\overline{EG}^2=32$
$\therefore \overline{EG}=4\sqrt{2}\ (cm)\ (\because \overline{EG}>0)$
$\therefore \overline{AD}+\overline{DG}=(\overline{AC}+\overline{CD})+(\overline{DE}+\overline{EG})$
$=\overline{AC}+2\overline{CD}+\overline{EG}$
$=\sqrt{2}+2\sqrt{10}+4\sqrt{2}$
$=5\sqrt{2}+2\sqrt{10}\ (cm)$

11 답 $8\sqrt{3}$

$a\frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{a}}+b\frac{\sqrt{18a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a^2\times2b}{a}}+\sqrt{\frac{b^2\times18a}{b}}$
$=\sqrt{2ab}+\sqrt{18ab}$
$=\sqrt{2\times6}+\sqrt{18\times6}$
$=\sqrt{12}+\sqrt{108}$
$=2\sqrt{3}+6\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

12 답 ④

$7<\sqrt{50}<8$이므로 $f(50)=7$
$4<\sqrt{20}<5$이므로 $g(20)=\sqrt{20}-4=2\sqrt{5}-4$
$\therefore f(50)\times\sqrt{5}-g(20)=7\sqrt{5}-(2\sqrt{5}-4)$
$=7\sqrt{5}-2\sqrt{5}+4$
$=5\sqrt{5}+4$

학교 시험 최상위 기출 도전

49쪽~50쪽

01 답 6

[전략] 주어진 표에서 $100\times560=56000$이 어느 두 값 사이에 있는지 확인하여 $10\sqrt{560}$이 속하는 범위를 찾는다.

$55696<56000<56169$이고 주어진 표에서 $\sqrt{55696}=236$, $\sqrt{56169}=237$이므로
$\sqrt{55696}<\sqrt{56000}<\sqrt{56169}$
$236<10\sqrt{560}<237$, $23.6<\sqrt{560}<23.7$
따라서 $\sqrt{560}=23.6\times\times$이므로 소수점 아래 첫째 자리의 숫자는 6이다.

02 답 ④

[전략] 두 닮은 도형의 닮음비가 $a:b$이면 부피의 비는 $a^3:b^3$이다.

처음 사각뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\times\sqrt{15}\times\sqrt{12}\times\sqrt{27}=\frac{1}{3}\times\sqrt{15}\times2\sqrt{3}\times3\sqrt{3}=6\sqrt{15}$

처음 사각뿔과 잘라 낸 사각뿔은 닮은 도형이고 닮음비는 $3:1$이므로 부피의 비는 $3^3:1^3=27:1$이다. 즉 남은 입체도형의 부피는 처음 사각뿔의 부피의 $\frac{26}{27}$이다.

$\therefore$ (남은 입체도형의 부피)$=6\sqrt{15}\times\frac{26}{27}=\frac{52\sqrt{15}}{9}$

03 답 $2\sqrt{5}-2$

[전략] $\sqrt{A^2}=\begin{cases}A & (A\ge0)\\ -A & (A<0)\end{cases}$임을 이용한다.

$M(2,\sqrt{5})$

$=\frac{1}{2}\{(2+\sqrt{5})+\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}\}$

$=\frac{1}{2}\times\{2+\sqrt{5}-(2-\sqrt{5})\}$ ($\because 2-\sqrt{5}<0$)

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}=\sqrt{5}$

$M(2-\sqrt{5},\sqrt{5}-2)$

$=\frac{1}{2}\left[(2-\sqrt{5}+\sqrt{5}-2)+\sqrt{\{2-\sqrt{5}-(\sqrt{5}-2)\}^2}\right]$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{(4-2\sqrt{5})^2}$

$=\frac{1}{2}\times\{-(4-2\sqrt{5})\}$ ($\because 4-2\sqrt{5}<0$)

$=-2+\sqrt{5}$

$\therefore M(2,\sqrt{5})+M(2-\sqrt{5},\sqrt{5}-2)=\sqrt{5}+(-2+\sqrt{5})$

$=2\sqrt{5}-2$

04 답 $1-\sqrt{2}$

[전략] 중심이 O인 큰 원의 반지름의 길이는 정사각형의 대각선의 길이와 같고 중심이 O인 작은 원의 반지름의 길이는 정사각형의 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$과 같다.

한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로 점 A에 대응하는 수는 $-\sqrt{2}$

점 C에 대응하는 수는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $c=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{PB}=\overline{PA}=\sqrt{2}-1$이므로 점 B에 대응하는 수는

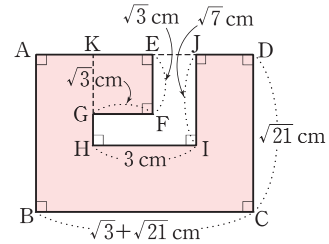
$-1+(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}-2$ $\quad\therefore b=\sqrt{2}-2$

$\therefore bc=(\sqrt{2}-2)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$

05 답 $2\sqrt{6}$ cm

[전략] (도형의 넓이)$=\square$ABCD$-\square$KHIJ$+\square$KGFE

다음 그림과 같이 $\overline{GH}$의 연장선이 $\overline{AE}$와 만나는 점을 K라 하자.



(주어진 도형의 넓이)

$=(\sqrt{3}+\sqrt{21})\times\sqrt{21}$

$\quad-3\times\sqrt{7}+\sqrt{3}\times\sqrt{3}$

$=3\sqrt{7}+21-3\sqrt{7}+3$

$=24\ (\text{cm}^2)$

따라서 주어진 도형과 넓이가 같은 정사각형의 한 변의 길이는

$\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ (cm)

06 답 $14\sqrt{3}+6\sqrt{6}$

[전략] (새로 만든 도형의 둘레의 길이)

$=$(처음 네 정사각형의 둘레의 길이의 합)

$-$(겹치는 부분의 세 정사각형의 둘레의 길이의 합)

넓이가 3, 6, 24, 27인 네 정사각형의 한 변의 길이는 차례로 $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $2\sqrt{6}$, $3\sqrt{3}$이고 겹치는 부분의 세 정사각형의 한 변의 길이는 각각 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\sqrt{6}$이다.

$\therefore$ (새로 만든 도형의 둘레의 길이)

$=(\sqrt{3}+\sqrt{6}+2\sqrt{6}+3\sqrt{3})\times4-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}+\sqrt{6}\right)\times4$

$=(4\sqrt{3}+3\sqrt{6})\times4-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)\times4$

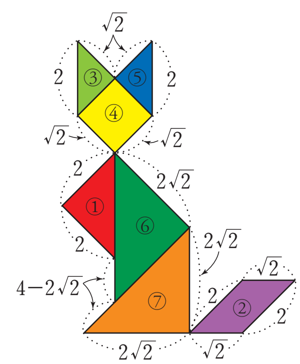
$=16\sqrt{3}+12\sqrt{6}-2\sqrt{3}-6\sqrt{6}$

$=14\sqrt{3}+6\sqrt{6}$

07 답 $20+8\sqrt{2}$

[전략] 칠교 조각의 변의 길이를 각각 구한 후 [그림 B]의 둘레의 길이를 구한다.

모눈 한 칸의 대각선의 길이는 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로 [그림 B]의 각 부분의 길이는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 둘레의 길이는

$2\times6+\sqrt{2}\times6+(4-2\sqrt{2})\times2$

$\quad+2\sqrt{2}\times3$

$=12+6\sqrt{2}+8-4\sqrt{2}+6\sqrt{2}$

$=20+8\sqrt{2}$

08 답 ⑤

[전략] (무리수)$=$(정수 부분)$+$(소수 부분)이므로

(소수 부분)$=$(무리수)$-$(정수 부분)

$a=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13$

$b=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+(4\sqrt{3})^2}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$

$\therefore a-b=13-5\sqrt{3}$

$-9<-5\sqrt{3}<-8$에서 $4<13-5\sqrt{3}<5$

따라서 $a-b$의 정수 부분은 4이므로 $a-b$의 소수 부분은

$(13-5\sqrt{3})-4=9-5\sqrt{3}$

3 다항식의 곱셈

01 | 다항식의 곱셈과 곱셈 공식의 활용

개념 확인

53쪽

01 답 3

$(x+2)(2y-3)=2xy-3x+4y-6$이므로

$a=2,\ b=-3,\ c=4$

$\therefore a+b+c=2+(-3)+4=3$

02 답 ⑤

xy항이 나오는 부분만 전개하면

① $(x-y)(4x+2y)$에서

$x\times 2y+(-y)\times 4x=2xy-4xy=-2xy$

② $(2x-y)(x+3y)$에서

$2x\times 3y+(-y)\times x=6xy-xy=5xy$

③ $(x+3y)(2x-5y)$에서

$x\times(-5y)+3y\times 2x=-5xy+6xy=xy$

④ $(x+y+1)(4x-3y+2)$에서

$x\times(-3y)+y\times 4x=-3xy+4xy=xy$

⑤ $(4x+3y)(5x-3y+7)$에서

$4x\times(-3y)+3y\times 5x=-12xy+15xy=3xy$

따라서 xy의 계수가 3인 것은 ⑤이다.

03 답 ②

② $(3x-1)(3x+1)=9x^2-1$

04 답 ③

$$\begin{aligned}103\times 97&=(100+3)\times(100-3)\\&=100^2-3^2\\&=10000-9\\&=9991\end{aligned}$$

따라서 103×97을 계산하려고 할 때, 가장 편리한 곱셈 공식은 ③이다.

05 답 $4-\sqrt{15}$

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{5-2\sqrt{15}+3}{5-3}$$

$$=\frac{8-2\sqrt{15}}{2}=4-\sqrt{15}$$

06 답 12

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=(a-b)^2+4ab\\&=2^2+4\times 2=12\end{aligned}$$

적중 & 심화 유형 연습

54쪽~62쪽

01 답 -2

$(2x-y+3)(x-2y-1)$

$=2x^2-4xy-2x-xy+2y^2+y+3x-6y-3$

$=2x^2-5xy+2y^2+x-5y-3$

이므로 $a=-5,\ b=1,\ c=2$

$\therefore a+b+c=-5+1+2=-2$

02 답 36

$(4x+ay-2b)(x-ay+b)$

$=4x^2-4axy+4bx+axy-a^2y^2+aby-2bx+2aby-2b^2$

$=4x^2-3axy-a^2y^2+2bx+3aby-2b^2$

이때 xy의 계수가 -9이므로 $-3a=-9\qquad\therefore a=3$

x의 계수가 8이므로 $2b=8\qquad\therefore b=4$

따라서 y의 계수는 $3ab=3\times 3\times 4=36$

03 답 2

$(x-3by-2)(x+ay+2)$

$=x^2+axy+2x-3bxy-3aby^2-6by-2x-2ay-4$

$=x^2+(a-3b)xy-3aby^2+(-2a-6b)y-4$ …… ❶

xy의 계수와 y의 계수가 모두 4이므로

$a-3b=4,\ -2a-6b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1$이므로 …… ❷

$a-b=1-(-1)=2$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 식 전개하기	50 %
❷ a, b의 값 각각 구하기	30 %
❸ $a-b$의 값 구하기	20 %

04 답 ②

② $(2x-3)^2=4x^2-12x+9$

③ $(3x+1)(-3x+1)=(1+3x)(1-3x)=1-9x^2$

따라서 식을 전개한 것이 옳지 않은 것은 ②이다.

05 답 ①

① $(-5x-2y)^2=25x^2+\boxed{20}xy+4y^2$

② $(-4x+y)^2=\boxed{16}x^2-8xy+y^2$

③ $(x-2y)(4x-3y)=4x^2-\boxed{11}xy+6y^2$

④ $(x-6)(x+3)=x^2-3x-\boxed{18}$

⑤ $(2x+3y)(3x-5y)=6x^2-xy-\boxed{15}y^2$

따라서 □ 안에 들어갈 수가 가장 큰 것은 ①이다.

06 답 ⑤

① $\{-(a-b)\}^2=a^2-2ab+b^2$

② $(b-a)^2=a^2-2ab+b^2$

③ $(a+b)^2-4ab=a^2+2ab+b^2-4ab=a^2-2ab+b^2$

④ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

⑤ $-(-b+a)^2=-(a^2-2ab+b^2)=-a^2+2ab-b^2$

따라서 전개식이 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

07 답 24

$(3x+2)(x-5)-2(x-2)^2$
$=3x^2-13x-10-2(x^2-4x+4)$
$=x^2-5x-18$

따라서 $A=1$, $B=-5$, $C=-18$이므로

$A-B-C=1-(-5)-(-18)=1+5+18=24$

08 답 -3

$(2x+a)(bx+7)=2bx^2+(14+ab)x+7a$에서

$2b=6$, $14+ab=c$, $7a=-35$이므로

$a=-5$, $b=3$, $c=-1$

$\therefore a+b+c=-5+3+(-1)=-3$

09 답 ⑤

① $(a-\square b)^2=a^2-2\times\square\times ab+\square^2\times b^2$에서
  $-2\times\square\times ab=-10ab$ $\therefore \square=5$

② $(a+9)(a-4)=a^2+5a-36$이므로 $\square=5$

③ $(x+2)(x+\square)=x^2+(2+\square)x+2\times\square$에서
  $2\times\square=10$ $\therefore \square=5$

④ $\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{7}{2}\right)=x^2+5x+\frac{21}{4}$이므로 $\square=5$

⑤ $(x+\square y)(x-4y)=x^2+(\square-4)xy-4\times\square\times y^2$에서
  $-4\times\square\times y^2=-8y^2$ $\therefore \square=2$

따라서 $\square$ 안에 들어갈 수가 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

10 답 -21

$(-2x+ay)(5x-7y)=-10x^2+(14+5a)xy-7ay^2$에서

$14+5a=29$이므로 $5a=15$ $\therefore a=3$

따라서 y^2의 계수는 $-7a=-7\times3=-21$

11 답 2

$(3x+a)(5x-2)=15x^2+(-6+5a)x-2a$에서

$-6+5a=-2a+8$이므로 $7a=14$ $\therefore a=2$

12 답 4

$(2x-3)(ax+b)=2ax^2+(-3a+2b)x-3b$에서

$-3b=-3$, $-3a+2b=-3b-1$이므로 $a=2$, $b=1$

따라서 x^2의 계수는 $2a=2\times2=4$

13 답 ②

$(x+A)(x+B)=x^2+(A+B)x+AB$에서

$A+B=C$, $AB=-8$이므로 가능한 정수 A, B의 값을 순서쌍 (A, B)로 나타내면 $(-8, 1)$, $(-4, 2)$, $(-2, 4)$, $(-1, 8)$, $(1, -8)$, $(2, -4)$, $(4, -2)$, $(8, -1)$이다.

따라서 가능한 C의 값은 -7, -2, 2, 7이다.

14 답 8

$(2x+a)(3x+b)=6x^2+(3a+2b)x+ab$에서

$3a+2b=k$, $ab=-7$이므로 가능한 정수 a, b의 값을 순서쌍 (a, b)로 나타내면 $(1, -7)$, $(7, -1)$이다. …… ❶

(i) $a=1$, $b=-7$일 때
  $k=3a+2b=3\times1+2\times(-7)=-11$

(ii) $a=7$, $b=-1$일 때
  $k=3a+2b=3\times7+2\times(-1)=19$ …… ❷

따라서 (i), (ii)에 의하여 k의 값이 될 수 있는 수는 -11, 19이므로 그 합은

$-11+19=8$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ 가능한 정수 a, b의 순서쌍 모두 구하기	40 %
❷ ❶의 각 경우에 대해 k의 값 구하기	40 %
❸ k의 값의 합 구하기	20 %

15 답 ⑤

(직사각형의 넓이)$=(2x+3)(x+5)$
$=2x^2+13x+15$

16 답 4 cm^2

처음 정사각형의 넓이는

$(3x)^2=9x$ (cm^2)

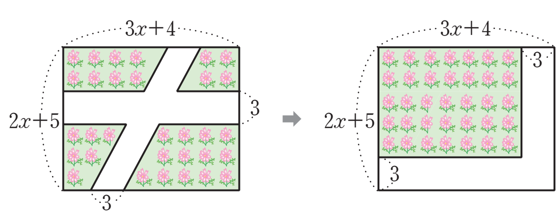
새로 만든 직사각형의 넓이는

$(3x+2)(3x-2)=9x^2-4$ (cm^2)

따라서 구하는 넓이의 차는

$9x^2-(9x^2-4)=9x^2-9x^2+4=4$ (cm^2)

17 답 ④



(꽃밭의 넓이)$=(3x+4-3)(2x+5-3)$
$=(3x+1)(2x+2)$
$=6x^2+8x+2$

18 답) $16x^2+8x-2$

(직육면체의 겉넓이)

$=2\{(2x+1)(x+1)+(2x+1)(2x-1)+(x+1)(2x-1)\}$

$=2(2x^2+3x+1+4x^2-1+2x^2+x-1)$

$=2(8x^2+4x-1)$

$=16x^2+8x-2$

19 답) a^2+4a+3

$\overline{EC}=\overline{CD}=2a+4$이므로

$\overline{BE}=\overline{BC}-\overline{EC}=3a+7-(2a+4)=a+3$ …… ❶

$\overline{EF}=\overline{CD}=2a+4$, $\overline{FG}=\overline{AF}=\overline{BE}=a+3$이므로

$\overline{GE}=\overline{EF}-\overline{FG}=2a+4-(a+3)=a+1$ …… ❷

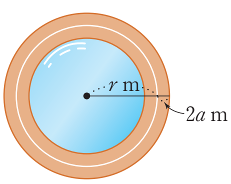
$\therefore \square BEGH=\overline{BE}\times\overline{GE}$

$=(a+3)(a+1)$

$=a^2+4a+3$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ $\overline{BE}$의 길이 구하기	30 %
❷ $\overline{GE}$의 길이 구하기	30 %
❸ $\square BEGH$의 넓이 구하기	40 %

20 답) 4



길의 한가운데를 지나는 원의 반지름의 길이를 r m라 하면

$2\pi r=50\pi \quad \therefore r=25$

이때 길의 넓이가 800π m^2이므로

$\pi(25+2a)^2-\pi(25-2a)^2=800\pi$

$\pi(625+100a+4a^2)-\pi(625-100a+4a^2)=800\pi$

$200\pi a=800\pi \quad \therefore a=4$

21 답) ④

① $87^2=(90-3)^2=90^2-2\times90\times3+3^2=90^2-2\times270+9$

② $78\times82=(80-2)(80+2)=80^2-4$

③ $103\times105=(100+3)(100+5)=100^2+8\times100+15$

④ $97\times98=(100-3)(100-2)=100^2-5\times100+6$

⑤ $98\times104=(100-2)(100+4)=100^2+2\times100-8$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

22 답) ③

$$\frac{3456}{123456^2-123458\times123454}$$

$$=\frac{3456}{123456^2-(123456+2)(123456-2)}$$

$$=\frac{3456}{123456^2-(123456^2-2^2)}$$

$$=\frac{3456}{2^2}=864$$

23 답) 9

$315\times319-312\times318-1260$

$=315(315+4)-(315-3)(315+3)-4\times315$ …… ❶

$=315^2+4\times315-(315^2-3^2)-4\times315$

$=3^2=9$ …… ❷

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 315를 이용하여 나타내기	50 %
❷ 곱셈 공식을 이용하여 계산하기	50 %

24 답) 3

$$\frac{1}{2}(\sqrt{12}+3\sqrt{2})(\sqrt{18}-2\sqrt{3})=\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$$

$$=\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$$

$$=\frac{1}{2}\{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2\}$$

$$=\frac{1}{2}\times6$$

$$=3$$

25 답) 39

$$(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2-\frac{\sqrt{12}-\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$$

$=(3\sqrt{2})^2-2\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{4}-\sqrt{6})$

$=18-12\sqrt{6}+12-2+\sqrt{6}$

$=28-11\sqrt{6}$

따라서 $a=28$, $b=-11$이므로

$a-b=28-(-11)=39$

26 답) 12

(직사각형의 넓이)$=(\sqrt{15}+\sqrt{3})(\sqrt{15}-\sqrt{3})$

$=(\sqrt{15})^2-(\sqrt{3})^2$

$=15-3$

$=12$

27 답) 15

$(3+2\sqrt{3})(a-4\sqrt{3})-3\sqrt{3}(6+\sqrt{3})$

$=3a+(2a-12)\sqrt{3}-24-18\sqrt{3}-9$

$=3a-33+(2a-30)\sqrt{3}$ …… ❶

이것이 유리수가 되려면 $2a-30=0$이어야 하므로

$2a=30 \quad \therefore a=15$ …… ❷

채점 기준	비율
❶ 주어진 식 간단히 하기	50 %
❷ a의 값 구하기	50 %

28 답 ②

$$(2\sqrt{2}+3)^3(2\sqrt{2}-3)^4=\{(2\sqrt{2}+3)(2\sqrt{2}-3)\}^3(2\sqrt{2}-3)$$
$$=\{(2\sqrt{2})^2-3^2\}^3(2\sqrt{2}-3)$$
$$=(8-9)^3(2\sqrt{2}-3)$$
$$=-(2\sqrt{2}-3)$$
$$=3-2\sqrt{2}$$

29 답 $2\sqrt{11}$

$$\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$$
$$=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{10}}{(\sqrt{11}+\sqrt{10})(\sqrt{11}-\sqrt{10})}+\frac{\sqrt{11}+\sqrt{10}}{(\sqrt{11}-\sqrt{10})(\sqrt{11}+\sqrt{10})}$$
$$=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{10}}{11-10}+\frac{\sqrt{11}+\sqrt{10}}{11-10}$$
$$=\sqrt{11}-\sqrt{10}+\sqrt{11}+\sqrt{10}$$
$$=2\sqrt{11}$$

30 답 $-3\sqrt{5}$

$$\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}-\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{(3-\sqrt{5})^2}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}-\frac{(3+\sqrt{5})^2}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$$
$$=\frac{9-6\sqrt{5}+5}{9-5}-\frac{9+6\sqrt{5}+5}{9-5}$$
$$=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$
$$=\frac{-6\sqrt{5}}{2}=-3\sqrt{5}$$

31 답 $\frac{5}{3}$

$$\frac{\sqrt{6}-1}{3-\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{6}-1)(3+\sqrt{6})}{(3-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})}$$
$$=\frac{6+2\sqrt{6}-3}{9-6}$$
$$=\frac{3+2\sqrt{6}}{3}$$
$$=1+\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

따라서 $a=1$, $b=\frac{2}{3}$이므로

$a+b=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$

32 답 -3

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+2}-\frac{2}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{7}(\sqrt{7}-2)}{(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)}-\frac{2(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}$$
$$=\frac{7-2\sqrt{7}}{7-4}-\frac{2\sqrt{7}+4}{7-4}$$
$$=\frac{3-4\sqrt{7}}{3}=1-\frac{4}{3}\sqrt{7} \quad \cdots\cdots ❶$$

따라서 $a=1$, $b=-\frac{4}{3}$이므로 …… ❷

$a+3b=1+3\times\left(-\frac{4}{3}\right)=-3$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 분모를 유리화하기	50 %
❷ a, b의 값 각각 구하기	30 %
❸ $a+3b$의 값 구하기	20 %

33 답 ④

$2<\sqrt{5}<3$에서 $3<1+\sqrt{5}<4$이므로

$1+\sqrt{5}$의 소수 부분은 $1+\sqrt{5}-3=\sqrt{5}-2$

$-3<-\sqrt{5}<-2$에서 $0<3-\sqrt{5}<1$이므로

$3-\sqrt{5}$의 소수 부분은 $3-\sqrt{5}$

따라서 $a=\sqrt{5}-2$, $b=3-\sqrt{5}$이므로

$$\frac{b}{a}=\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}=\frac{(3-\sqrt{5})(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}$$
$$=\frac{6+\sqrt{5}-5}{5-4}=\sqrt{5}+1$$

34 답 5

$$\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}b\right)\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{4}b\right)=\frac{4}{9}a^2-\frac{1}{16}b^2$$
$$=\frac{4}{9}\times18-\frac{1}{16}\times48$$
$$=8-3$$
$$=5$$

35 답 $2\sqrt{2}+1$

$$x=\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$$
$$y=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$$
$$\therefore x+y+xy=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$$
$$=2\sqrt{2}+2-1$$
$$=2\sqrt{2}+1$$

36 답 16

$$x=\frac{4}{7-3\sqrt{5}}=\frac{4(7+3\sqrt{5})}{(7-3\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}=\frac{4(7+3\sqrt{5})}{4}=7+3\sqrt{5}$$
$$y=\frac{4}{7+3\sqrt{5}}=\frac{4(7-3\sqrt{5})}{(7+3\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})}=\frac{4(7-3\sqrt{5})}{4}=7-3\sqrt{5}$$

즉 $x+y=(7+3\sqrt{5})+(7-3\sqrt{5})=14$,

$x-y=(7+3\sqrt{5})-(7-3\sqrt{5})=6\sqrt{5}$

이므로

$$(x+y)^2-(x-y)^2=14^2-(6\sqrt{5})^2$$
$$=196-180$$
$$=16$$

37 답 9

$x=\sqrt{7}+3$에서 $x-3=\sqrt{7}$

양변을 제곱하면 $(x-3)^2=(\sqrt{7})^2$

$x^2-6x+9=7$, $x^2-6x=-2$

$\therefore x^2-6x+11=-2+11=9$

다른 풀이

$$x^2-6x+11=(\sqrt{7}+3)^2-6(\sqrt{7}+3)+11$$
$$=7+6\sqrt{7}+9-6\sqrt{7}-18+11$$
$$=9$$

38 답 12

$$x=\frac{4}{2+\sqrt{2}}=\frac{4(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\frac{4(2-\sqrt{2})}{2}=4-2\sqrt{2}$$

이므로 $x-4=-2\sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $(x-4)^2=(-2\sqrt{2})^2$

$x^2-8x+16=8$, $x^2-8x=-8$

$\therefore x^2-8x+20=-8+20=12$

39 답 -10

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$에서

$29=(-7)^2+2ab$, $2ab=-20$

$\therefore ab=-10$

40 답 176

$$A=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$
$$=6^2-2\times7=22$$
$$B=(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$$
$$=6^2-4\times7=8$$

$\therefore AB=22\times8=176$

41 답 42

$(x+1)(y+1)=20$에서 $xy+(x+y)+1=20$

$xy+8+1=20$ $\therefore xy=11$

$$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$
$$=8^2-2\times11=42$$

42 답 (1) $2\sqrt{5}$ (2) 1 (3) 18

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\sqrt{5}-2$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}+2$$ …… ❶

(1) $x+y=(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{5}+2)=2\sqrt{5}$ …… ❷

(2) $xy=(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)=5-4=1$ …… ❸

(3) $$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$$
$$=\frac{(2\sqrt{5})^2-2\times1}{1}=18$$ …… ❹

채점 기준	비율
❶ x, y의 분모를 각각 유리화하기	30 %
❷ $x+y$의 값 구하기	20 %
❸ xy의 값 구하기	20 %
❹ $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$의 값 구하기	30 %

43 답 11

$$a=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

$$b=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

즉 $a-b=(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$,

$ab=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$

이므로

$$a^2-3ab+b^2=(a-b)^2-ab$$
$$=(2\sqrt{3})^2-1=11$$

44 답 16

$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^8-1)(2^8+1)$

$=2^{16}-1$

$\therefore n=16$

45 답 ④

$(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$

$=\frac{1}{2}(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$

$=\frac{1}{2}(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$

$=\frac{1}{2}(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)$

$=\frac{1}{2}(3^8-1)(3^8+1)$

$=\frac{3^{16}-1}{2}$

46 답 89

$$97\times103\times(10^4+9)=(100-3)(100+3)(10^4+9)$$
$$=(10^4-9)(10^4+9)$$
$$=10^8-81$$

따라서 $a=8$, $b=81$이므로

$a+b=8+81=89$

47 답 $x^2+4x+4-y^2$

$x+2=A$로 치환하면

$$\begin{aligned}(x-y+2)(x+y+2)&=(A-y)(A+y)\\&=A^2-y^2\\&=(x+2)^2-y^2\\&=x^2+4x+4-y^2\end{aligned}$$

48 답 ④

$a=x(x+2)=x^2+2x$

$(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)$

$=\{(x-2)(x+4)\}\{(x-3)(x+5)\}$

$=(x^2+2x-8)(x^2+2x-15)$

$=(a-8)(a-15)$ ← $x^2+2x=a$로 치환한다.

$=a^2-23a+120$

49 답 $x^4-2x^3-13x^2+14x+24$

$(x+1)(x+3)(x-2)(x-4)$

$=\{(x+1)(x-2)\}\{(x+3)(x-4)\}$

$=(x^2-x-2)(x^2-x-12)$

$=(A-2)(A-12)$ ← $x^2-x=A$로 치환한다.

$=A^2-14A+24$

$=(x^2-x)^2-14(x^2-x)+24$

$=x^4-2x^3-13x^2+14x+24$

50 답 1

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=(\sqrt{5})^2-4=1$$

51 답 0

$$\begin{aligned}2x^2+\frac{2}{x^2}&=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}\\&=2\{(\sqrt{2})^2-2\}=0\end{aligned}$$

52 답 $\pm\sqrt{23}$

$$\left(x-\frac{1}{2x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2x}\right)^2-2=5^2-2=23$$

$$\therefore\ x-\frac{1}{2x}=\pm\sqrt{23}$$

100점 TIP

$\left(x-\dfrac{1}{2x}\right)^2=x^2-1+\dfrac{1}{4x^2}$이고

$\left(x+\dfrac{1}{2x}\right)^2=x^2+1+\dfrac{1}{4x^2}$이므로

$\left(x-\dfrac{1}{2x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{2x}\right)^2-2$

53 답 $-\sqrt{5}$

$x^2-3x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-3+\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore\ x+\dfrac{1}{x}=3$ …… ❶

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4=3^2-4=5$ …… ❷

$\therefore\ x-\dfrac{1}{x}=\pm\sqrt{5}$

이때 $0<x<1$이므로 $x-\dfrac{1}{x}=-\sqrt{5}$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ $x+\dfrac{1}{x}$의 값 구하기	40 %
❷ $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2$의 값 구하기	40 %
❸ 조건에 맞는 $x-\dfrac{1}{x}$의 값 구하기	20 %

54 답 10

$$\begin{aligned}f(n)&=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\\&=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}\\&=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\end{aligned}$$

$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(120)$

$=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots+(\sqrt{121}-\cancel{\sqrt{120}})$

$=-\sqrt{1}+\sqrt{121}$

$=-1+11=10$

55 답 $\sqrt{3}-1$

$$\frac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{12}-\sqrt{10}}{(\sqrt{12}+\sqrt{10})(\sqrt{12}-\sqrt{10})}+\frac{\sqrt{10}-\sqrt{8}}{(\sqrt{10}+\sqrt{8})(\sqrt{10}-\sqrt{8})}$$

$$+\frac{\sqrt{8}-\sqrt{6}}{(\sqrt{8}+\sqrt{6})(\sqrt{8}-\sqrt{6})}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{4}}{(\sqrt{6}+\sqrt{4})(\sqrt{6}-\sqrt{4})}$$

$$=\frac{(\sqrt{12}-\cancel{\sqrt{10}})+(\cancel{\sqrt{10}}-\cancel{\sqrt{8}})+(\cancel{\sqrt{8}}-\cancel{\sqrt{6}})+(\cancel{\sqrt{6}}-\sqrt{4})}{2}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-2}{2}=\sqrt{3}-1$$

적중 & 심화 실전 TEST

63쪽~65쪽

01 답 -2

$(x+ay-5)(x-2y+3)$

$=x^2-2xy+3x+axy-2ay^2+3ay-5x+10y-15$

$=x^2+(a-2)xy-2ay^2-2x+(3a+10)y-15$

이때 상수항을 제외한 각 항의 계수의 총합이 3이므로

$1+(a-2)-2a-2+(3a+10)=3$

$2a=-4 \qquad \therefore\ a=-2$

02 답 16

$(x+5y)^2-(2x-y)(2x+y)$

$=x^2+10xy+25y^2-(4x^2-y^2)$

$=-3x^2+10xy+26y^2$ …… ❶

따라서 $a=26$, $b=10$이므로 …… ❷

$a-b=26-10=16$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 식 전개하기	60 %
❷ a, b의 값 각각 구하기	20 %
❸ $a-b$의 값 구하기	20 %

03 답 4

$\left(\frac{1}{3}x+A\right)^2=\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{3}Ax+A^2$

에서 $\frac{2}{3}A=-B$, $A^2=C$

이때 $B=A+5$이므로 세 식을 연립하여 풀면

$A=-3$, $B=2$, $C=9$

$\therefore A-B+C=-3-2+9=4$

04 답 a^2+2a-3

$\overline{BF}=\overline{JF}=\overline{AB}=3a+5$이므로

$\overline{EG}=\overline{EF}=\overline{FC}=\overline{BC}-\overline{BF}=5a+7-(3a+5)=2a+2$

또 $\overline{IH}=\overline{EH}=\overline{JE}=\overline{JF}-\overline{EF}=3a+5-(2a+2)=a+3$

이므로

$\overline{HG}=\overline{EG}-\overline{EH}=2a+2-(a+3)=a-1$

$\therefore \square HGDI=\overline{IH}\times\overline{HG}$

$=(a+3)(a-1)$

$=a^2+2a-3$

05 답 $-2a^2+7ab-6b^2$

$\overline{BF}=\overline{EF}=\overline{AB}=b$이므로

$\overline{EG}=\overline{GH}=\overline{FC}=\overline{BC}-\overline{BF}=a-b$

또 $\overline{HI}=\overline{IJ}=\overline{GF}=\overline{EF}-\overline{EG}=b-(a-b)=2b-a$이므로

$\overline{GI}=\overline{GH}-\overline{HI}=a-b-(2b-a)=2a-3b$

$\therefore \square GFJI=\overline{GF}\times\overline{GI}$

$=(2b-a)(2a-3b)$

$=-2a^2+7ab-6b^2$

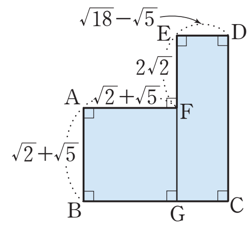
06 답 2

$$\frac{4048}{2025\times2028-2026^2}=\frac{4048}{(2026-1)(2026+2)-2026^2}$$

$$=\frac{4048}{2026^2+2026-2-2026^2}$$

$$=\frac{4048}{2024}=2$$

07 답 $20+2\sqrt{10}$



(도형의 넓이)

$=\square ABGF+\square EGCD$

$=(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2$

$\quad+(\sqrt{18}-\sqrt{5})(2\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{5})$

$=(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2+(3\sqrt{2}-\sqrt{5})(3\sqrt{2}+\sqrt{5})$

$=(2+2\sqrt{10}+5)+(18-5)$

$=20+2\sqrt{10}$

08 답 -29

$(2\sqrt{6}+5)^{49}(2\sqrt{6}-5)^{51}=\{(2\sqrt{6}+5)(2\sqrt{6}-5)\}^{49}(2\sqrt{6}-5)^2$

$=(24-25)^{49}(24-20\sqrt{6}+25)$

$=-49+20\sqrt{6}$

따라서 $a=-49$, $b=20$이므로

$a+b=-49+20=-29$

09 답 34

$(1+2\sqrt{2})(3-a\sqrt{2})-(4\sqrt{2}+5)^2-\frac{a(6\sqrt{2}-4)}{\sqrt{2}}$

$=3+(6-a)\sqrt{2}-4a-(32+40\sqrt{2}+25)-(6a-2a\sqrt{2})$

$=-54-10a+(a-34)\sqrt{2}$

이것이 유리수가 되려면 $a-34=0$이어야 하므로 $a=34$

10 답 $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

$\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이고 $\overline{AP}=\overline{AQ}=\overline{AB}$이므로

$a=-1-\sqrt{5}$, $b=-1+\sqrt{5}$이다. …… ❶

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{-1-\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}=\frac{-(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$

$=\frac{-6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ …… ❷

채점 기준	비율
❶ a, b의 값 각각 구하기	60 %
❷ $\frac{a}{b}$의 값 구하기	40 %

11 답 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$(\sqrt{a}-2)^2=a-4\sqrt{a}+4$이므로

$a+4=7 \qquad \therefore a=3$

$(\sqrt{b}+2)(\sqrt{b}-3)=b-\sqrt{b}-6$이므로

$b-6=-4 \qquad \therefore b=2$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

12 답 194

$$a=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=7-4\sqrt{3}$$

$$b=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=7+4\sqrt{3}$$

$$\therefore a^2+b^2=(7-4\sqrt{3})^2+(7+4\sqrt{3})^2$$
$$=49-56\sqrt{3}+48+49+56\sqrt{3}+48$$
$$=194$$

다른 풀이

$a=7-4\sqrt{3}$, $b=7+4\sqrt{3}$이므로

$a+b=(7-4\sqrt{3})+(7+4\sqrt{3})=14$

$ab=(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})=49-48=1$

$$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$
$$=14^2-2\times1=194$$

13 답 9

$-2<-\sqrt{3}<-1$에서 $3<5-\sqrt{3}<4$이므로

$5-\sqrt{3}$의 소수 부분은 $5-\sqrt{3}-3=2-\sqrt{3}$

즉 $x=2-\sqrt{3}$에서 $x-2=-\sqrt{3}$

양변을 제곱하면 $(x-2)^2=(-\sqrt{3})^2$

$x^2-4x+4=3$

양변에 3을 곱하면 $3(x^2-4x+4)=3\times3$

$\therefore 3x^2-12x+12=9$

다른 풀이

$x=2-\sqrt{3}$이므로

$$3x^2-12x+12=3(2-\sqrt{3})^2-12(2-\sqrt{3})+12$$
$$=3(4-4\sqrt{3}+3)-24+12\sqrt{3}+12$$
$$=9$$

14 답 $-\frac{31}{3}$

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$이므로

$37=5^2-4xy$, $4xy=-12$ $\quad\therefore xy=-3$

$$\therefore \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x-y)^2+2xy}{xy}$$
$$=\frac{37+2\times(-3)}{-3}=-\frac{31}{3}$$

15 답 8

$9\times11\times101\times10001$

$=(10-1)(10+1)(100+1)(10000+1)$

$=(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)$

$=(10^4-1)(10^4+1)$

$=10^8-1$

$=99999999$

따라서 8자리의 자연수이므로 $n=8$

16 답 $x^4+10x^3+23x^2-10x-24$

$(x-1)(x+1)(x+4)(x+6)$

$=\{(x-1)(x+6)\}\{(x+1)(x+4)\}$

$=(x^2+5x-6)(x^2+5x+4)$ $\quad$ $x^2+5x=A$로 치환한다.

$=(A-6)(A+4)$

$=A^2-2A-24$

$=(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)-24$

$=x^4+10x^3+23x^2-10x-24$

17 답 10

$x-\frac{1}{x}=2$의 양변에 x를 곱하면

$x^2-1=2x$, $x^2-2x=1$

$$\therefore 5x^2-8x+\frac{1}{x^2}=(4x^2-8x)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=4(x^2-2x)+\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right\}$$
$$=4\times1+2^2+2=10$$

18 답 $\frac{2}{3}$

$$\frac{1}{1+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{13}}+\frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{19}}+\frac{1}{\sqrt{19}+5}$$
$$=\frac{1-\sqrt{7}}{(1+\sqrt{7})(1-\sqrt{7})}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{13}}{(\sqrt{7}+\sqrt{13})(\sqrt{7}-\sqrt{13})}$$
$$+\frac{\sqrt{13}-\sqrt{19}}{(\sqrt{13}+\sqrt{19})(\sqrt{13}-\sqrt{19})}+\frac{\sqrt{19}-5}{(\sqrt{19}+5)(\sqrt{19}-5)}$$
$$=\frac{(1-\cancel{\sqrt{7}})+(\cancel{\sqrt{7}}-\cancel{\sqrt{13}})+(\cancel{\sqrt{13}}-\cancel{\sqrt{19}})+(\cancel{\sqrt{19}}-5)}{-6}$$
$$=\frac{-4}{-6}=\frac{2}{3}$$

학교 시험 최상위 기출 도전

66쪽

01 답 37

[전략] (사건 A가 일어날 확률)$=\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{전체 경우의 수})}$임을 이용한다.

모든 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)

$(ax+2)(bx+1)=abx^2+(a+2b)x+2$가 x의 계수가 2인 이차식이 되려면 $ab\neq0$, $a+2b=2$이어야 한다.

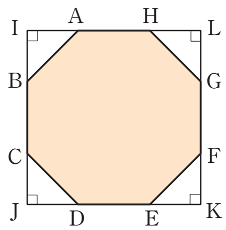
$ab\neq0$, $a+2b=2$를 만족하는 순서쌍 (a, b)는 $(-2, 2)$의 1가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{36}$이므로 $p=36$, $q=1$

$\therefore p+q=36+1=37$

02 답 ①

[전략] 주어진 도형에 적당한 보조선을 그어 넓이를 구할 수 있는 간단한 도형을 찾아 본다.



오른쪽 그림과 같이 정팔각형 ABCDEFGH에서 $\overline{AH}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$, $\overline{GF}$의 연장선의 교점을 각각 I, J, K, L이라 하면 □IJKL은 정사각형이다.

이때 정팔각형의 한 변의 길이는 $\frac{a}{8}$이므로 △IAB, △JCD, △KEF, △LGH는 모두 빗변의 길이가 $\frac{a}{8}$인 직각이등변삼각형이다.

△IAB에서 $\overline{IA}=\overline{IB}=x$라 하면

$x^2+x^2=\left(\frac{a}{8}\right)^2$

$2x^2=\frac{a^2}{64}$, $x^2=\frac{a^2}{128}$

$\therefore x=\frac{\sqrt{2}}{16}a$

따라서 구하는 정팔각형의 넓이는

□IJKL-4△IAB

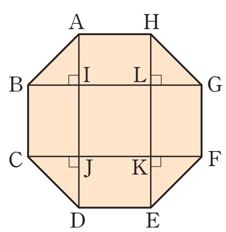
$=\left(\frac{\sqrt{2}}{16}a+\frac{a}{8}+\frac{\sqrt{2}}{16}a\right)^2-4\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{16}a\right)^2$

$=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{8}a\right)^2-2\times\frac{a^2}{128}$

$=\frac{3+2\sqrt{2}}{64}a^2-\frac{a^2}{64}$

$=\frac{1+\sqrt{2}}{32}a^2$

다른 풀이



오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$, $\overline{HE}$를 긋고 이때 생기는 교점을 각각 I, J, K, L이라 하자.

이때 정팔각형의 한 변의 길이는 $\frac{a}{8}$이므로 △IAB, △JCD, △KEF, △LGH는 모두 빗변의 길이가 $\frac{a}{8}$인 직각이등변삼각형이다.

△IAB에서 $\overline{IA}=\overline{IB}=x$라 하면

$x^2+x^2=\left(\frac{a}{8}\right)^2$

$2x^2=\frac{a^2}{64}$, $x^2=\frac{a^2}{128}$ $\quad\therefore x=\frac{\sqrt{2}}{16}a$

따라서 구하는 정팔각형의 넓이는

□ADEH$+4$△IAB$+2$□BCJI

$=\frac{a}{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{16}a+\frac{a}{8}+\frac{\sqrt{2}}{16}a\right)+4\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{16}a\right)^2+2\times\left(\frac{a}{8}\times\frac{\sqrt{2}}{16}a\right)$

$=\frac{1+\sqrt{2}}{64}a^2+\frac{a^2}{64}+\frac{\sqrt{2}}{64}a^2$

$=\frac{1+\sqrt{2}}{32}a^2$

03 답 6

[전략] $a^x\times a^y=a^{x+y}$임을 이용한다.

$2^x\times2^y=(5\sqrt{3}-\sqrt{11})(5\sqrt{3}+\sqrt{11})$

$=75-11=64$

한편 $2^x\times2^y=2^{x+y}$이므로

$2^{x+y}=64=2^6$

$\therefore x+y=6$

04 답 $(9-3\sqrt{3})$ cm

[전략] 닮은 도형에서 넓이의 비가 $m:n$이면 길이의 비는 $\sqrt{m}:\sqrt{n}$임을 이용한다.

정사각형끼리는 항상 닮은 도형이므로 두 정사각형의 넓이의 비가 4 : 3이면 한 변의 길이의 비는 $2:\sqrt{3}$이다.

작은 정사각형을 만드는 데 사용한 끈의 길이는

$(12+12\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=(12+12\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$=\sqrt{3}(12+12\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$

$=\sqrt{3}(24+12\sqrt{3}-36)$

$=36-12\sqrt{3}$ (cm)

따라서 작은 정사각형의 한 변의 길이는

$\frac{36-12\sqrt{3}}{4}=9-3\sqrt{3}$ (cm)

05 답 14

[전략] $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용한다.

$3002^2-12004-(998\times1002+4)$

$=(3000+2)^2-(12000+4)-\{(1000-2)(1000+2)+4\}$

$=9000000+12000+4-(12000+4)-(1000000-4+4)$

$=8000000$

$=8\times10^6$

따라서 $a=8$, $n=6$이므로

$a+n=8+6=14$

4 인수분해

01 | 인수분해 공식

개념 확인 69쪽

01 답 ④

④ $x-2$는 다항식 $6x^3y-9x^2y-6xy$의 인수이다.

02 답 ⑤

$x^3y-xy^2=xy(x^2-y)$

③ $x^3-xy=x(x^2-y)$이므로 x^3y-xy^2의 인수이다.

④ $x^2y-y^2=y(x^2-y)$이므로 x^3y-xy^2의 인수이다.

따라서 x^3y-xy^2의 인수가 아닌 것은 ⑤이다.

03 답 ③

③ $-3x^2-12xy-12y^2=-3(x^2+4xy+4y^2)=-3(x+2y)^2$

④ $2a^2-8ab-24b^2=2(a^2-4ab-12b^2)$
$=2(a-6b)(a+2b)$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

04 답 ③

① $x^2+x+\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

② $9x^2-12x+4=(3x-2)^2$

④ $2x^2-4xy+2y^2=2(x^2-2xy+y^2)=2(x-y)^2$

⑤ $9x^2+6x+1=(3x+1)^2$

05 답 4

$k=\left(\frac{-4}{2}\right)^2=4$

06 답 ±10

$-a=\pm2\sqrt{25}=\pm10 \qquad \therefore a=\pm10$

적중 & 심화 유형 연습 70쪽~75쪽

01 답 ②

① $x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

② $ax^2-6ax+9a=a(x^2-6x+9)=a(x-3)^2$

③ $x^2-7x+6=(x-1)(x-6)$

④ $-x^2+16y^2=16y^2-x^2=(4y+x)(4y-x)$

⑤ $15x^2-2xy-y^2=(3x-y)(5x+y)$

따라서 인수분해를 바르게 한 것은 ②이다.

02 답 ②

① $5x^2+8x-4=(5x-2)(x+\boxed{2})$

② $a^2-5a-14=(a-\boxed{7})(a+2)$

③ $3x^2-75=3(x^2-25)=3(x+5)(x-\boxed{5})$

④ $6x^2+5xy-6y^2=(2x+\boxed{3}y)(3x-2y)$

⑤ $25x^2-40x+16=(5x-\boxed{4})^2$

따라서 $\boxed{}$ 안에 들어갈 수가 가장 큰 것은 ②이다.

03 답 ④

① $x^2-9=(x+3)(x-3)$

② $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

③ $x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$

④ $2x^2-5x+3=(x-1)(2x-3)$

⑤ $3x^2-10x+3=(x-3)(3x-1)$

따라서 $x-3$을 인수로 갖지 않는 것은 ④이다.

04 답 ③

$8abx^2-26abx+18ab=2ab(4x^2-13x+9)$
$=2ab(x-1)(4x-9)$

따라서 $8abx^2-26abx+18ab$의 인수가 아닌 것은 ③이다.

05 답 $(x+2)(3x-2)$

$(x+3)(3x-5)+11=3x^2+4x-15+11$
$=3x^2+4x-4$
$=(x+2)(3x-2)$

06 답 $11x+6$

$(2x+7)(5x-1)+16=10x^2+33x-7+16$
$=10x^2+33x+9$
$=(x+3)(10x+3)$ …… ❶

따라서 두 일차식의 합은

$(x+3)+(10x+3)=11x+6$ …… ❷

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 전개하여 인수분해하기	60 %
❷ 인수분해된 두 일차식의 합 구하기	40 %

07 답 ①

$8x^2+6xy-5y^2=(2x-y)(4x+5y)$

$12x^2-5xy-25y^2=(3x-5y)(4x+5y)$

따라서 공통으로 들어 있는 인수는 $4x+5y$이다.

08 답 ④

$3x^2+11x-20=(x+5)(3x-4)$

① $x^2-100=(x+10)(x-10)$
② $x^2+3x-40=(x+8)(x-5)$
③ $x^2-10x+25=(x-5)^2$
④ $9x^2-16=(3x+4)(3x-4)$
⑤ $9x^2+24x+16=(3x+4)^2$
따라서 $3x^2+11x-20$과 공통인 인수를 갖는 다항식은 ④이다.

09 답 ④

① $\square=\left(\frac{6}{2}\right)^2=9$
② $\square=2\times\sqrt{1}=2$
③ $\square x^2-16x+4=\square x^2-2\times 4x\times 2+2^2$에서
$\square x^2=(4x)^2=16x^2 \qquad \therefore \square=16$
④ $\square=\left(\frac{22}{2}\right)^2=121$
⑤ $\square=2\times\sqrt{4\times 25}=2\times\sqrt{100}=20$
따라서 $\square$ 안에 들어갈 양수가 가장 큰 것은 ④이다.

10 답 $a=\pm24,\ b=36$

$x^2+ax+144$가 완전제곱식이 되려면
$a=\pm2\times\sqrt{144}=\pm24$
이때 $4x^2\pm24x+b=(2x)^2\pm2\times 2x\times 6+b$
이 식이 완전제곱식이 되려면 $b=6^2=36$

11 답 $\frac{9}{4}$

$ax^2+12x+16=ax^2+2\times\frac{3}{2}x\times 4+4^2$
이 식이 완전제곱식으로 인수분해되려면
$ax^2=\left(\frac{3}{2}x\right)^2=\frac{9}{4}x^2 \qquad \therefore a=\frac{9}{4}$

12 답 10

$4x^2-36x+8k+1=(2x)^2-2\times 2x\times 9+8k+1$
이 식이 완전제곱식이 되려면
$8k+1=9^2,\ 8k+1=81 \qquad \therefore k=10$

13 답 $\frac{26}{5},\ -\frac{22}{5}$

$9x^2+(5k-2)x+16$이 완전제곱식이 되려면
$5k-2=\pm2\times\sqrt{9\times 16}=\pm2\sqrt{144}=\pm24$
$5k=26$ 또는 $5k=-22 \qquad \therefore k=\frac{26}{5}$ 또는 $k=-\frac{22}{5}$

14 답 49

$(4x-8)(9x+3)+k=36x^2-60x-24+k$
$=(6x)^2-2\times 6x\times 5-24+k$
이 식이 완전제곱식이 되려면
$-24+k=5^2,\ -24+k=25 \qquad \therefore k=49$

15 답 6

$2x^2+9x+a=(2x+3)(x+b)$
$=2x^2+(2b+3)x+3b$
이므로 $2b+3=9,\ a=3b$
따라서 $a=9,\ b=3$이므로
$a-b=9-3=6$

16 답 1

$2x^2+(3a+5)x-15=(2x+3)(x-b)$
$=2x^2+(-2b+3)x-3b$
이므로 $3a+5=-2b+3,\ -15=-3b$
따라서 $a=-4,\ b=5$이므로
$a+b=-4+5=1$

17 답 40

$4x^2+ax-15=(bx+3)(2x+c)$
$=2bx^2+(bc+6)x+3c$
이므로 $4=2b,\ a=bc+6,\ -15=3c$
따라서 $a=-4,\ b=2,\ c=-5$이므로
$abc=-4\times2\times(-5)=40$

18 답 $(2x-3)(3x-1)$

$2x^2+7xy+ay^2=(x+2y)(bx+cy)$
$=bx^2+(2b+c)xy+2cy^2$
이므로 $2=b,\ 7=2b+c,\ a=2c$
따라서 $a=6,\ b=2,\ c=3$이므로
$6x^2-11x+3$을 인수분해하면
$6x^2-11x+3=(2x-3)(3x-1)$

19 답 7

$12x^2+ax-10=(3x-2)(4x+\square)$로 놓으면
$-2\times\square=-10 \qquad \therefore \square=5$
즉 $(3x-2)(4x+5)=12x^2+7x-10$이므로 $a=7$

20 답 -12

$x^2-5x+a=(x+1)(x+\square)$로 놓으면
$\square+1=-5 \qquad \therefore \square=-6$
즉 $(x+1)(x-6)=x^2-5x-6$이므로 $a=-6$
$3x^2+bx-1=(x+1)(3x+\triangle)$로 놓으면
$1\times\triangle=-1 \qquad \therefore \triangle=-1$
즉 $(x+1)(3x-1)=3x^2+2x-1$이므로 $b=2$
$\therefore ab=(-6)\times2=-12$

21 답 -7

$2x^2-x+p=(2x+3)(x+\square)$로 놓으면
$2\times\square+3=-1 \qquad \therefore \square=-2$

즉 $(2x+3)(x-2)=2x^2-x-6$이므로 $p=-6$
$6x^2+qx-15=(2x+3)(3x+\triangle)$로 놓으면
$3\times\triangle=-15$ $\therefore \triangle=-5$
즉 $(2x+3)(3x-5)=6x^2-x-15$이므로 $q=-1$
$\therefore p+q=-6+(-1)=-7$

22 답 -2

$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$
$2x^2-x-3=(x+1)(2x-3)$
이므로 세 다항식의 공통인 인수는 $x+1$이다. …… ❶
$x^2+mx-3=(x+1)(x+\square)$로 놓으면
$1\times\square=-3$ $\therefore \square=-3$
즉 $(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$이므로 $m=-2$ …… ❷

채점 기준	비율
❶ 세 다항식의 공통인 인수 구하기	40 %
❷ m의 값 구하기	60 %

23 답 $(x+2)(x-4)$

채원이는 상수항을 잘못 보았으므로
$(x+3)(x-5)=x^2-2x-15$에서 x^2의 계수는 1, x의 계수는 -2이다.
예나는 x의 계수를 잘못 보았으므로
$(x+4)(x-2)=x^2+2x-8$에서 x^2의 계수는 1, 상수항은 -8이다.
따라서 처음 이차식은 x^2-2x-8이므로
$x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$

24 답 $2(x-4)(x+6)$

희정이는 x의 계수를 잘못 보았으므로
$2(x-2)(x+12)=2x^2+20x-48$에서 상수항은 -48이다.
우재는 상수항을 잘못 보았으므로
$2(x-3)(x+5)=2x^2+4x-30$에서 x의 계수는 4이다.
따라서 처음 이차식은 $2x^2+4x-48$이므로
$2x^2+4x-48=2(x^2+2x-24)=2(x-4)(x+6)$

25 답 7

현진이는 x의 계수를 잘못 보았으므로
$2(x-4)(2x-1)=4x^2-18x+8$에서 x^2의 계수는 4, 상수항은 8이다.
승민이는 상수항을 잘못 보았으므로
$(2x-3)^2=4x^2-12x+9$에서 x^2의 계수는 4, x의 계수는 -12이다. …… ❶
따라서 처음 이차식은 $4x^2-12x+8$이므로
$4x^2-12x+8=4(x-1)(x-2)$ …… ❷
즉 $a=4$, $b=1$, $c=2$ 또는 $a=4$, $b=2$, $c=1$이므로
$a+b+c=4+1+2=7$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ 처음 이차식의 x^2의 계수, x의 계수, 상수항 각각 구하기	40 %
❷ 처음 이차식을 구하고 바르게 인수분해하기	40 %
❸ $a+b+c$의 값 구하기	20 %

26 답 ③

$2a^2+7a+3=(a+3)(2a+1)$
이므로 직사각형 세로의 길이는 $2a+1$이다.
따라서 직사각형의 둘레의 길이는
$2\{(a+3)+(2a+1)\}=6a+8$

27 답 ④

$6x^2+4x-10=\frac{1}{2}\times\{(x+4)+(2x+1)\}\times(\text{높이})$에서
$2(x-1)(3x+5)=\frac{1}{2}\times(3x+5)\times(\text{높이})$
$\therefore$ (높이)$=4(x-1)=4x-4$

28 답 ③

(직사각형의 넓이)$=3x^2+7x+4=(x+1)(3x+4)$
이므로 둘레의 길이는
$2\{(x+1)+(3x+4)\}=8x+10$

29 답 ④

두 정사각형 A, B의 넓이의 차는
$(3x+4)^2-3^2=9x^2+24x+16-9$
$=9x^2+24x+7$
$=(3x+1)(3x+7)$
따라서 직사각형 C의 세로의 길이는 $3x+1$이다.

30 답 ③

$x^2+mx-15=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
에서 $a+b=m$, $ab=-15$
이때 $ab=-15$를 만족하는 두 정수 a, b의 값을 순서쌍 (a, b)로 나타내면 다음과 같다.
$(-15, 1)$, $(-5, 3)$, $(-3, 5)$, $(-1, 15)$, $(1, -15)$, $(3, -5)$, $(5, -3)$, $(15, -1)$
따라서 정수 m의 값이 될 수 있는 것은 -14, -2, 2, 14이다.

31 답 $M=11$, $m=-11$

$x^2+kx+10=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
에서 $a+b=k$, $ab=10$
이때 $ab=10$을 만족하는 두 정수 a, b의 값을 순서쌍 (a, b)로 나타내면 다음과 같다.
$(-10, -1)$, $(-5, -2)$, $(-2, -5)$, $(-1, -10)$, $(1, 10)$, $(2, 5)$, $(5, 2)$, $(10, 1)$

따라서 상수 k의 값이 될 수 있는 것은 -11, -7, 7, 11이므로
$M=11$, $m=-11$

32 답 ④

$x^2+(3p+2)x-6=(x+a)(x+b)$
$=x^2+(a+b)x+ab$
에서 $a+b=3p+2$, $ab=-6$
이때 $ab=-6$을 만족하는 두 정수 a, b의 값을 순서쌍 (a, b)로 나타내면 다음과 같다.
$(-6, 1)$, $(-3, 2)$, $(-2, 3)$, $(-1, 6)$, $(1, -6)$, $(2, -3)$, $(3, -2)$, $(6, -1)$
따라서 $3p+2$의 값이 될 수 있는 것은 -5, -1, 1, 5이므로
p의 값이 될 수 있는 것은 $-\frac{7}{3}$, -1, $-\frac{1}{3}$, 1이다.

33 답 -48

$4x^2+ax-25=(2x+b)(2x+c)$
$=4x^2+(2b+2c)x+bc$
에서 $2b+2c=a$, $bc=-25$
이때 $bc=-25$를 만족하는 두 정수 b, c의 값을 순서쌍 (b, c)로 나타내면 다음과 같다.
$(-25, 1)$, $(-5, 5)$, $(-1, 25)$, $(1, -25)$, $(5, -5)$, $(25, -1)$
따라서 a의 값이 될 수 있는 것은 -48, 0, 48이므로 구하는 가장 작은 수는 -48이다.

34 답 5

$-2<a<3$일 때, $a-3<0$, $a+2>0$이므로
$$\sqrt{a^2-6a+9}+\sqrt{a^2+4a+4}=\sqrt{(a-3)^2}+\sqrt{(a+2)^2}$$
$$=-(a-3)+(a+2)$$
$$=-a+3+a+2$$
$$=5$$

35 답 $2a+\frac{1}{6}$

$0<a<\frac{1}{3}$일 때, $a+\frac{1}{2}>0$, $a-\frac{1}{3}<0$이므로
$$\sqrt{a^2+a+\frac{1}{4}}-\sqrt{a^2-\frac{2}{3}a+\frac{1}{9}}=\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(a-\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$=\left(a+\frac{1}{2}\right)-\left\{-\left(a-\frac{1}{3}\right)\right\}$$
$$=a+\frac{1}{2}+a-\frac{1}{3}$$
$$=2a+\frac{1}{6}$$

36 답 $\frac{2}{a}$

$0<a<1$일 때, $\frac{1}{a}>1$이므로 $a+\frac{1}{a}>0$, $a-\frac{1}{a}<0$
$$\therefore \sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}+\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}$$
$$=\sqrt{a^2+2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{a^2-2+\frac{1}{a^2}}$$
$$=\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}$$
$$=\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left\{-\left(a-\frac{1}{a}\right)\right\}$$
$$=a+\frac{1}{a}-a+\frac{1}{a}$$
$$=\frac{2}{a}$$

적중 & 심화 실전 TEST

76쪽~77쪽

01 답 ②, ⑤

$A=a^2b-ab^2=ab(a-b)$
$B=a^3-ab^2=a(a^2-b^2)=a(a+b)(a-b)$
① 식 A의 인수는 1, a, b, $a-b$, ab, $a(a-b)$, $b(a-b)$, $ab(a-b)$의 8개이다.
③ ab는 식 B의 인수가 아니다.
④ $A-B=(a^2b-ab^2)-(a^3-ab^2)=a^2b-a^3=a^2(b-a)$
이므로 ab는 식 $A-B$의 인수가 아니다.

02 답 $4x+6$

$(x+3)(3x-5)+8(2x+1)=3x^2+4x-15+16x+8$
$=3x^2+20x-7$
$=(x+7)(3x-1)$
따라서 두 일차식의 합은
$(x+7)+(3x-1)=4x+6$

03 답 24

[전략] 소수는 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 수이므로 두 자연수 A, B에 대하여 $AB=$(소수)가 되려면 $A=1$ 또는 $B=1$이다.
$n^2+10n-56=(n-4)(n+14)$
이 식의 값이 소수가 되려면
$n-4=1$ 또는 $n+14=1$, 즉 $n=5$ 또는 $n=-13$이어야 한다.
그런데 n이 자연수이므로 $n=5$
이때 $a=(5-4)\times(5+14)=19$이므로
$n+a=5+19=24$

04 답 ④

$6x^2-xy-2y^2=(2x+y)(3x-2y)$
$16x^2-4y^2=4(2x+y)(2x-y)$
따라서 두 다항식의 공통인 인수는 $2x+y$이다.

05 답 ①, ③

$x^2+(2p+1)x+16=(x+q)^2$이므로

$x^2+(2p+1)x+16$이 완전제곱식이 되려면

$2p+1=\pm 2\sqrt{16}=\pm 8$

$2p=7$ 또는 $2p=-9$ $\quad \therefore p=\frac{7}{2}$ 또는 $p=-\frac{9}{2}$

(i) $p=\frac{7}{2}$일 때, $x^2+8x+16=(x+4)^2$이므로 $q=4$

$\therefore pq=\frac{7}{2}\times 4=14$

(ii) $p=-\frac{9}{2}$일 때, $x^2-8x+16=(x-4)^2$이므로 $q=-4$

$\therefore pq=-\frac{9}{2}\times(-4)=18$

따라서 (i), (ii)에 의하여 pq의 값이 될 수 있는 것은 14, 18이다.

06 답 55

$x^2-5ax-b+(ax+3b)=x^2-4ax+2b$

이 식이 완전제곱식으로 인수분해되려면

$2b=\left(\frac{-4a}{2}\right)^2=4a^2 \qquad \therefore b=2a^2$

이때 $b=2a^2$을 만족하는 50 이하의 자연수 a, b의 값을 순서쌍 (a, b)로 나타내면 다음과 같다.

$(1, 2)$, $(2, 8)$, $(3, 18)$, $(4, 32)$, $(5, 50)$

따라서 $a+b$의 최댓값은 $5+50=55$이다.

07 답 ④

$2x^2+(a-6)x-15=(x-5)(bx+c)$

$=bx^2+(c-5b)x-5c$

이므로 $2=b$, $a-6=c-5b$, $-15=-5c$

$\therefore a=-1$, $b=2$, $c=3$

① $a-b-c=-1-2-3=-6$

② $a-b+c=-1-2+3=0$

③ $a+b-c=-1+2-3=-2$

④ $-a+b+c=-(-1)+2+3=6$

⑤ $-a-b+c=-(-1)-2+3=2$

따라서 식의 값이 가장 큰 것은 ④이다.

08 답 -4

$x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$

(i) 두 다항식의 공통인 인수가 $x-3$인 경우

$x^2+ax+45=(x-3)(x+\square)$로 놓으면

$-3\times\square=45 \qquad \therefore \square=-15$

즉 $(x-3)(x-15)=x^2-18x+45$이므로 $a=-18$

(ii) 두 다항식의 공통인 인수가 $x+5$인 경우

$x^2+ax+45=(x+5)(x+\triangle)$로 놓으면

$5\times\triangle=45 \qquad \therefore \triangle=9$

즉 $(x+5)(x+9)=x^2+14x+45$이므로 $a=14$

따라서 (i), (ii)에 의하여 가능한 모든 정수 a의 값의 합은

$-18+14=-4$

09 답 $(3x+2)(6x+5)$

강찬이는 x의 계수를 잘못 보았으므로

$2(3x+1)(3x+5)=18x^2+36x+10$에서 상수항은 10이다.

소율이는 상수항을 잘못 보았으므로

$9(2x+1)(x+1)=18x^2+27x+9$에서 x의 계수는 27이다.

따라서 처음 이차식은 $18x^2+27x+10$이므로

$18x^2+27x+10=(3x+2)(6x+5)$

10 답 $(4a-10)$ cm

$4a^2-4a-15=\frac{1}{2}\times(2a+3)\times$(밑변의 길이)에서

$(2a+3)(2a-5)=\frac{1}{2}\times(2a+3)\times$(밑변의 길이)

$\therefore$ (밑변의 길이)$=2(2a-5)=4a-10$ (cm)

11 답 30

$x^2+11x+k=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

이므로 $a+b=11$, $ab=k$

이때 $a+b=11$을 만족하는 두 자연수 a, b의 값을 순서쌍 (a, b)로 나타내면 다음과 같다.

$(1, 10)$, $(2, 9)$, $(3, 8)$, $(4, 7)$, $(5, 6)$, $(6, 5)$, $(7, 4)$, $(8, 3)$, $(9, 2)$, $(10, 1)$

따라서 k의 값이 될 수 있는 것은 10, 18, 24, 28, 30이므로 구하는 최댓값은 30이다.

12 답 $a-b+\frac{1}{2}$

$ab<0$, $a-b<0$에서 $a<0$, $b>0$이므로

$a-\frac{1}{2}<0$, $b-2a>0$ …… ❶

$\therefore \sqrt{a^2-a+\frac{1}{4}}-\sqrt{(b+2a)^2-8ab}$

$=\sqrt{a^2-a+\frac{1}{4}}-\sqrt{b^2-4ab+4a^2}$

$=\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}-\sqrt{(b-2a)^2}$

$=-\left(a-\frac{1}{2}\right)-(b-2a)$

$=-a+\frac{1}{2}-b+2a$

$=a-b+\frac{1}{2}$ …… ❷

채점 기준	비율
❶ $ab<0$, $a-b<0$에서 $a-\frac{1}{2}$, $b-2a$의 부호를 각각 판단하기	50 %
❷ 주어진 식 간단히 하기	50 %

02 | 인수분해 공식의 활용

개념 확인 79쪽

01 답 ③

$67^2-33^2=(67+33)(67-33)=100\times34=3400$

따라서 주어진 식을 계산하는 데 이용되는 가장 편리한 인수분해 공식은 ③이다.

02 답 144

$$\begin{aligned}1867^2-2\times1867\times1879+1879^2&=(1867-1879)^2\\&=(-12)^2=144\end{aligned}$$

03 답 10000

$x^2+8x+16=(x+4)^2=(96+4)^2=100^2=10000$

04 답 (1) $20\sqrt{2}$ (2) 16

$x+y=(5+\sqrt{2})+(5-\sqrt{2})=10$

$x-y=(5+\sqrt{2})-(5-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

(1) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=10\times2\sqrt{2}=20\sqrt{2}$

(2) $2x^2-4xy+2y^2=2(x^2-2xy+y^2)=2(x-y)^2$
$=2\times(2\sqrt{2})^2=16$

05 답 ②, ⑤

$$\begin{aligned}ax-bx-a+b&=(a-b)x-(a-b)\\&=(a-b)(x-1)\end{aligned}$$

따라서 $ax-bx-a+b$의 인수인 것은 ②, ⑤이다.

06 답 $2(a-1)(a+2)$

$a-1=A$로 치환하면

$(3a+1)(a-1)+(3-a)(a-1)$
$=(3a+1)A+(3-a)A$
$=A(3a+1+3-a)$
$=(a-1)(2a+4)$
$=2(a-1)(a+2)$

적중 & 심화 유형 연습 80쪽~86쪽

01 답 1

$$\begin{aligned}\frac{2024\times2025+2024}{2025^2-1}&=\frac{2024(2025+1)}{(2025+1)(2025-1)}\\&=\frac{2024\times2026}{2026\times2024}=1\end{aligned}$$

02 답 55

$$\begin{aligned}\sqrt{25\times61^2-60^2\times25}&=\sqrt{25(61^2-60^2)}\\&=\sqrt{25(61+60)(61-60)}\\&=\sqrt{25\times121\times1}\\&=\sqrt{(5\times11)^2}=55\end{aligned}$$

03 답 2752

$$\begin{aligned}A&=365\times2.75-365\times0.75\\&=365(2.75-0.75)\\&=365\times2=730\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=\sqrt{2020\times2024+4}\\&=\sqrt{2020(2020+4)+4}\\&=\sqrt{2020^2+2\times2020\times2+2^2}\\&=\sqrt{(2020+2)^2}\\&=2022\end{aligned}$$

$\therefore A+B=730+2022=2752$

04 답 16

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}&=\sqrt{\frac{2^{30}+2^{20}}{2^{12}+2^{22}}}=\sqrt{\frac{2^{20}(2^{10}+1)}{2^{12}(1+2^{10})}}\\&=\sqrt{2^8}=2^4=16\end{aligned}$$

05 답 524

$$\begin{aligned}523\times525+1&=523(523+2)+1\\&=523^2+2\times523+1\\&=523^2+2\times523\times1+1^2\\&=(523+1)^2=524^2\end{aligned}$$

따라서 어떤 자연수는 524이다.

06 답 $33+12\sqrt{66}$

$$\begin{aligned}4A^2-B^2&=(2A+B)(2A-B)\\&=\{2(\sqrt{11}+\sqrt{6})+(-\sqrt{11}+2\sqrt{6})\}\\&\quad\times\{2(\sqrt{11}+\sqrt{6})-(-\sqrt{11}+2\sqrt{6})\}\\&=(\sqrt{11}+4\sqrt{6})\times3\sqrt{11}\\&=33+12\sqrt{66}\end{aligned}$$

07 답 $3+\sqrt{3}$

$x=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$이므로

$$\begin{aligned}x^2-3x+2&=(x-1)(x-2)\\&=(2+\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3}-2)\\&=(\sqrt{3}+1)\times\sqrt{3}\\&=3+\sqrt{3}\end{aligned}$$

08 답 5

$2<\sqrt{7}<3$, 즉 $\sqrt{7}$의 정수 부분은 2이므로 $a=2$

$2<\sqrt{5}<3$에서 $6<4+\sqrt{5}<7$, 즉 $4+\sqrt{5}$의 정수 부분은 6이므로

$b=4+\sqrt{5}-6=\sqrt{5}-2$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^2+2ab+b^2&=(a+b)^2\\&=\{2+(\sqrt{5}-2)\}^2\\&=(\sqrt{5})^2=5\end{aligned}$$

09 답 $\sqrt{2}$

$x=\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$,

$y=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

이므로

$xy=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$,

$x+y=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}+\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}=\dfrac{4}{2}=2$,

$x-y=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}-\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^3y-xy^3&=xy(x^2-y^2)\\&=xy(x+y)(x-y)\\&=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}\end{aligned}$$

10 답 192

$x=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=7+4\sqrt{3}$,

$y=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=7-4\sqrt{3}$

이므로 …… ❶

$$\begin{aligned}x^2-2xy+y^2&=(x-y)^2\\&=\{(7+4\sqrt{3})-(7-4\sqrt{3})\}^2\\&=(8\sqrt{3})^2=192\end{aligned}$$ …… ❷

채점 기준	비율
❶ x, y의 분모를 유리화하기	60 %
❷ 인수분해 공식을 이용하여 $x^2-2xy+y^2$의 값 구하기	40 %

11 답 12

두 정사각형의 둘레의 길이의 합이 56이므로

$4x+4y=56\qquad\therefore\ x+y=14$

두 정사각형의 넓이의 차가 42이므로

$x^2-y^2=42$

이때 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$이므로

$42=14(x-y)\qquad\therefore\ x-y=3$

따라서 두 정사각형의 둘레의 길이의 차는

$4x-4y=4(x-y)=4\times3=12$

12 답 2π

(색칠한 부분의 넓이)

$=\pi\times(2.75)^2\times\dfrac{120}{360}-\pi\times(1.25)^2\times\dfrac{120}{360}$

$=\dfrac{\pi}{3}\times(2.75^2-1.25^2)$

$=\dfrac{\pi}{3}\times(2.75+1.25)(2.75-1.25)$

$=\dfrac{\pi}{3}\times4\times1.5=2\pi$

13 답 $52\pi r^2\ \text{cm}^2$

작은 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{17}{2}r-4r=\dfrac{9}{2}r\ (\text{cm})$이므로

$$\begin{aligned}(\text{색칠한 부분의 넓이})&=\pi\times\left(\frac{17}{2}r\right)^2-\pi\times\left(\frac{9}{2}r\right)^2\\&=\pi\times\left\{\left(\frac{17}{2}r\right)^2-\left(\frac{9}{2}r\right)^2\right\}\\&=\pi\times\left(\frac{17}{2}r+\frac{9}{2}r\right)\left(\frac{17}{2}r-\frac{9}{2}r\right)\\&=\pi\times13r\times4r\\&=52\pi r^2\ (\text{cm}^2)\end{aligned}$$

14 답 $(x-1)(y+1)$

$$\begin{aligned}xy+x-y-1&=x(y+1)-(y+1)\\&=(x-1)(y+1)\end{aligned}$$

15 답 ②

$x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

$$\begin{aligned}xy-x-2y+2&=x(y-1)-2(y-1)\\&=(x-2)(y-1)\end{aligned}$$

따라서 공통인 인수는 $x-2$이다.

16 답 $(x-1)(2x+3)$

$x+1=A$로 치환하면

$$\begin{aligned}2(x+1)^2-3(x+1)-2&=2A^2-3A-2\\&=(A-2)(2A+1)\\&=(x+1-2)\{2(x+1)+1\}\\&=(x-1)(2x+3)\end{aligned}$$

17 답 ④

$(x^2-3x)^2-25x^2+75x-84$

$=(x^2-3x)^2-25(x^2-3x)-84$ $x^2-3x=A$로 치환한다.

$=A^2-25A-84$

$=(A-28)(A+3)$

$=(x^2-3x-28)(x^2-3x+3)$

$=(x+4)(x-7)(x^2-3x+3)$

18 답 $(2x-y+1)(2x-y-5)$

$2x-y=A$로 치환하면

$$\begin{aligned}(2x-y)(2x-y-4)-5&=A(A-4)-5\\&=A^2-4A-5\\&=(A+1)(A-5)\\&=(2x-y+1)(2x-y-5)\end{aligned}$$

19 답 ④

$x-y=A$로 치환하면

$$\begin{aligned}(x-y+5)(x-y-2)-30&=(A+5)(A-2)-30\\&=A^2+3A-40\\&=(A-5)(A+8)\\&=(x-y-5)(x-y+8)\end{aligned}$$

20 답 25

$2x+3=A$, $x-1=B$로 치환하면 …… ❶

$(2x+3)^2-(x-1)^2$

$=A^2-B^2$

$=(A+B)(A-B)$

$=\{(2x+3)+(x-1)\}\{(2x+3)-(x-1)\}$

$=(3x+2)(x+4)$ …… ❷

따라서 $a=3$, $b=4$이므로 …… ❸

$a^2+b^2=3^2+4^2=25$ …… ❹

채점 기준	비율
❶ $2x+3=A$, $x-1=B$로 치환하기	10 %
❷ $(2x+3)^2-(x-1)^2$을 인수분해하기	50 %
❸ a, b의 값 각각 구하기	20 %
❹ a^2+b^2의 값 구하기	20 %

21 답 ⑤

$x^2=A$로 치환하면

$$\begin{aligned}x^4-1&=A^2-1\\&=(A+1)(A-1)\\&=(x^2+1)(x^2-1)\\&=(x^2+1)(x+1)(x-1)\end{aligned}$$

따라서 인수가 아닌 것은 ⑤이다.

22 답 10

$x-1=A$, $y+1=B$로 치환하면

$5(x-1)^2-(x-1)(y+1)-4(y+1)^2$

$=5A^2-AB-4B^2$

$=(A-B)(5A+4B)$

$=\{(x-1)-(y+1)\}\{5(x-1)+4(y+1)\}$

$=(x-y-2)(5x+4y-1)$

따라서 $a=5$, $b=4$, $c=1$이므로

$a+b+c=5+4+1=10$

23 답 $(x^2+3x-3)(x^2+3x+5)$

$x(x+1)(x+2)(x+3)-15$

$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}-15$

$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)-15$

$x^2+3x=A$로 치환한다.

$=A(A+2)-15$

$=A^2+2A-15$

$=(A-3)(A+5)$

$=(x^2+3x-3)(x^2+3x+5)$

24 답 19

$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+16$

$=\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+16$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+16$

$x^2+8x=A$로 치환한다.

$=(A+7)(A+15)+16$

$=A^2+22A+121$

$=(A+11)^2$

$=(x^2+8x+11)^2$

따라서 $a=8$, $b=11$이므로

$a+b=8+11=19$

25 답 ㉡, ㉣, ㉤

$$\begin{aligned}x^3-3x^2-4x+12&=x^2(x-3)-4(x-3)\\&=(x-3)(x^2-4)\\&=(x-3)(x+2)(x-2)\end{aligned}$$

따라서 $x^3-3x^2-4x+12$의 인수인 것은 ㉡, ㉣, ㉤이다.

26 답 ①

$$\begin{aligned}x^2y-4y+4-x^2&=y(x^2-4)-(x^2-4)\\&=(x^2-4)(y-1)\\&=(x+2)(x-2)(y-1)\end{aligned}$$

따라서 $x^2y-4y+4-x^2$의 인수가 아닌 것은 ①이다.

27 답 $(x-y)(a^4+1)(a^2+1)(a+1)(a-1)$

$$\begin{aligned}a^8x+y-a^8y-x&=a^8(x-y)-(x-y)\\&=(x-y)(a^8-1)\\&=(x-y)(a^4+1)(a^4-1)\\&=(x-y)(a^4+1)(a^2+1)(a^2-1)\\&=(x-y)(a^4+1)(a^2+1)(a+1)(a-1)\end{aligned}$$

28 답 ⑤

$$\begin{aligned}4x^2+y^2-4-4xy&=(4x^2-4xy+y^2)-4\\&=(2x-y)^2-2^2\\&=(2x-y+2)(2x-y-2)\end{aligned}$$

29 답 ④

$$\begin{aligned}9-4a^2+12ab-9b^2&=9-(4a^2-12ab+9b^2)\\&=3^2-(2a-3b)^2\\&=\{3+(2a-3b)\}\{3-(2a-3b)\}\\&=(2a-3b+3)(-2a+3b+3)\end{aligned}$$

30 답 $3\sqrt{5}$

$$\begin{aligned}x^3+x^2y+xy^2+y^3&=x^2(x+y)+y^2(x+y)\\&=(x+y)(x^2+y^2)\end{aligned}$$

이때 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{5})^2-2\times1=3$이므로

(주어진 식)$=\sqrt{5}\times3=3\sqrt{5}$

31 답 10

$3<\sqrt{10}<4$에서 $2<\sqrt{10}-1<3$이므로

$x=(\sqrt{10}-1)-2=\sqrt{10}-3$

$x-1=A$로 치환하면

$$\begin{aligned}(x-1)^2+8(x-1)+16&=A^2+8A+16\\&=(A+4)^2\\&=(x-1+4)^2=(x+3)^2\\&=\{(\sqrt{10}-3)+3\}^2\\&=(\sqrt{10})^2=10\end{aligned}$$

32 답 4

$$a=\frac{3}{\sqrt{7}-2}=\frac{3(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}=\sqrt{7}+2$$

$2<\sqrt{7}<3$에서 $1<\sqrt{7}-1<2$, 즉 $\sqrt{7}-1$의 정수 부분은 1이므로

$b=(\sqrt{7}-1)-1=\sqrt{7}-2$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{a^2-b^2+a-b}{a+b+1}&=\frac{(a+b)(a-b)+(a-b)}{a+b+1}\\&=\frac{(a-b)(a+b+1)}{a+b+1}\\&=a-b\\&=(\sqrt{7}+2)-(\sqrt{7}-2)=4\end{aligned}$$

33 답 $24\sqrt{3}$

$x=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$,

$y=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$ …… ❶

이고

$(x+2y)^2-(2x+y)^2$

$=\{(x+2y)+(2x+y)\}\{(x+2y)-(2x+y)\}$

$=(3x+3y)(-x+y)$

$=-3(x+y)(x-y)$ …… ❷

이때 $x+y=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=4$,

$x-y=(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$이므로 …… ❸

(주어진 식)$=-3\times4\times(-2\sqrt{3})=24\sqrt{3}$ …… ❹

채점 기준	비율
❶ x, y의 분모를 유리화하기	20 %
❷ 주어진 식 인수분해하기	40 %
❸ $x+y$, $x-y$의 값 각각 구하기	20 %
❹ 주어진 식의 값 구하기	20 %

34 답 33

[전략] $x^2y+xy^2-6(x+y)=50$의 좌변을 먼저 인수분해한다.

$$\begin{aligned}x^2y+xy^2-6(x+y)&=xy(x+y)-6(x+y)\\&=(x+y)(xy-6)\end{aligned}$$

이때 $(x+y)(xy-6)=50$이므로

$(x+y)\times(-4-6)=50$ $\quad\therefore x+y=-5$

$$\begin{aligned}\therefore x^2+y^2&=(x+y)^2-2xy\\&=(-5)^2-2\times(-4)=33\end{aligned}$$

35 답 $-\dfrac{11}{4}$

$$\begin{aligned}a(a-1)-b(b+1)&=a^2-a-b^2-b\\&=(a^2-b^2)-(a+b)\\&=(a+b)(a-b)-(a+b)\\&=(a+b)(a-b-1)\end{aligned}$$

이때 $(a+b)(a-b-1)=25$이므로 $5(a-b-1)=25$

$a-b-1=5$ $\quad\therefore a-b=6$

$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$에서 $5^2=6^2+4ab$

$4ab=-11$ $\quad\therefore ab=-\dfrac{11}{4}$

36 답 5

$\sqrt{3}+2\sqrt{5}=A$, $\sqrt{3}+\sqrt{5}=B$로 치환하면

$(\sqrt{3}+2\sqrt{5})^2-2(\sqrt{3}+2\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$

$=A^2-2AB+B^2$

$=(A-B)^2$

$=\{(\sqrt{3}+2\sqrt{5})-(\sqrt{3}+\sqrt{5})\}^2$

$=(\sqrt{5})^2=5$

37 답 16

$200=A$로 치환하면

$$\begin{aligned}399+199^2&=(2A-1)+(A-1)^2\\&=2A-1+A^2-2A+1\\&=A^2=200^2\\&=40000=4\times10^4\end{aligned}$$

따라서 $a=4$, $b=4$이므로

$ab=4\times4=16$

38 답 64

$$\begin{aligned}2^{20}-1&=(2^{10}+1)(2^{10}-1)\\&=(2^{10}+1)(2^5+1)(2^5-1)\end{aligned}$$

이때 $2^5+1=33$, $2^5-1=31$이므로 $2^{20}-1$은 30과 40 사이의 두 자연수 31, 33으로 나누어떨어진다.
따라서 이 두 자연수의 합은
$31+33=64$

39 답 (1) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ (2) 224

(2) $21^2-19^2+17^2-15^2+13^2-11^2+9^2-7^2$
$=(21+19)(21-19)+(17+15)(17-15)+(13+11)(13-11)+(9+7)(9-7)$
$=2(21+19+17+15+13+11+9+7)$
$=2\times112=224$

40 답 $\frac{50}{99}$

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{99^2}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{99}\right)\left(1+\frac{1}{99}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\times\cdots\times\frac{\cancel{98}}{\cancel{99}}\times\frac{100}{99}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{100}{99}=\frac{50}{99}$$

41 답 $(x+2)(x-4y-4)$

$x^2-4xy-8y-2x-8$
$=(x^2-2x-8)-4y(x+2)$
$=(x-4)(x+2)-4y(x+2)$
$=(x+2)(x-4y-4)$

42 답 ①, ④

$2x^2-xy+5x-3y-3$
$=(2x^2+5x-3)-y(x+3)$
$=(x+3)(2x-1)-y(x+3)$
$=(x+3)(2x-y-1)$
따라서 $2x^2-xy+5x-3y-3$의 인수인 것은 ①, ④이다.

43 답 3

$16x^2-8xy+y^2-12x+3y-28$
$=(4x-y)^2-3(4x-y)-28$ $4x-y=A$로 치환한다.
$=A^2-3A-28$
$=(A+4)(A-7)$
$=(4x-y+4)(4x-y-7)$
따라서 두 일차식의 합은
$(4x-y+4)+(4x-y-7)=8x-2y-3$
이므로 $a=8$, $b=-2$, $c=-3$
$\therefore a+b+c=8+(-2)+(-3)=3$

44 답 ⑤

$a^2-b^2-c^2+2a+2bc+1$
$=(a^2+2a+1)-(b^2-2bc+c^2)$
$=(a+1)^2-(b-c)^2$
$=\{(a+1)+(b-c)\}\{(a+1)-(b-c)\}$
$=(a+b-c+1)(a-b+c+1)$

적중 & 심화 실전 TEST

87쪽~88쪽

01 답 9

$$\sqrt{\frac{3^{10}-3^6}{8(3^4+3^2)}}=\sqrt{\frac{3^6(3^4-1)}{8\times3^2(3^2+1)}}=\sqrt{\frac{3^6(3^2+1)(3^2-1)}{8\times3^2(3^2+1)}}=\sqrt{3^4}=9$$

02 답 811

$A^2=851^2+14\times851+7^2$
$=851^2+2\times7\times851+7^2$
$=(851+7)^2=858^2$
$\therefore A=858$ ($\because A>0$)
$B^2=53\times41+36$
$=(47+6)(47-6)+6^2$
$=47^2-6^2+6^2=47^2$
$\therefore B=47$ ($\because B>0$)
$\therefore A-B=858-47=811$

03 답 $-\frac{1}{4}$

$$\frac{a+b}{a^2+4ab+3b^2}=\frac{a+b}{(a+b)(a+3b)}=\frac{1}{a+3b} \quad \cdots\cdots ❶$$
$$=\frac{1}{(5-3\sqrt{3})+3(\sqrt{3}-3)}=\frac{1}{5-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}-9}=-\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ❷$$

채점 기준	비율
❶ 인수분해를 이용하여 주어진 식 간단히 하기	50 %
❷ $a=5-3\sqrt{3}$, $b=3\sqrt{3}-3$을 대입하여 식의 값 구하기	50 %

04 답 $16\sqrt{3}$

$$x=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}=\frac{7-4\sqrt{3}}{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}=7-4\sqrt{3},$$
$$y=\frac{1}{7-4\sqrt{3}}=\frac{7+4\sqrt{3}}{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}=7+4\sqrt{3}$$이므로

$$\sqrt{4x^2-8xy+4y^2}=\sqrt{4(x-y)^2}$$
$$=-2(x-y)\ (\because x-y<0)$$
$$=-2\{(7-4\sqrt{3})-(7+4\sqrt{3})\}$$
$$=16\sqrt{3}$$

05 답 ①

$$\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{a+b}{2},$$

$\overline{DB}=\overline{AB}-\overline{AD}=a-\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{a-b}{2}$이므로

$$S_1-S_2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$
$$=\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)$$
$$=ab$$

06 답 3

$\overline{AD}$를 지름으로 하는 원의 둘레의 길이가 16π cm이므로

$2\pi\times\frac{\overline{AD}}{2}=16\pi$에서 $\overline{AD}=16$ (cm)

$\therefore$ $\overline{AC}=(16-a)$ cm, $\overline{AB}=(16+a)$ cm

색칠한 부분의 넓이가 48π cm^2이므로

$$\pi\times\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2-\pi\times\left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2=48\pi$$
$$\pi\times\left(\frac{16+a}{2}\right)^2-\pi\times\left(\frac{16-a}{2}\right)^2=48\pi$$
$$\pi\left\{\left(\frac{16+a}{2}\right)^2-\left(\frac{16-a}{2}\right)^2\right\}=48\pi$$
$$\pi\left(\frac{16+a}{2}+\frac{16-a}{2}\right)\left(\frac{16+a}{2}-\frac{16-a}{2}\right)=48\pi$$
$$\pi\times16\times a=48\pi\qquad\therefore a=3$$

07 답 ㉡, ㉢

㉠ $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

㉡ $3x^2-7x+4=(x-1)(3x-4)$

㉢ $3x^2+xy-3x-y=x(3x+y)-(3x+y)=(x-1)(3x+y)$

㉣ $x+1=A$, $x-1=B$로 치환하면

$$(x+1)^2-(x-1)^2=A^2-B^2$$
$$=(A+B)(A-B)$$
$$=\{(x+1)+(x-1)\}\{(x+1)-(x-1)\}$$
$$=2x\times2=4x$$

따라서 $x-1$을 인수로 갖는 것은 ㉡, ㉢이다.

08 답 ④

$$16x^4-y^8=(4x^2)^2-(y^4)^2$$
$$=(4x^2+y^4)(4x^2-y^4)$$
$$=(4x^2+y^4)(2x+y^2)(2x-y^2)$$

따라서 $16x^4-y^8$의 인수가 아닌 것은 ④이다.

09 답 −4

$x-2=A$로 치환하면

$$(x-2)^2+2(x-2)-24=A^2+2A-24$$
$$=(A+6)(A-4)$$
$$=(x-2+6)(x-2-4)$$
$$=(x+4)(x-6)$$

이 식의 값이 소수가 되려면

$x+4=1$ 또는 $x-6=1$, 즉 $x=-3$ 또는 $x=7$이어야 한다.

그런데 x가 자연수이므로 $x=7$

따라서 $a=7$, $b=(7+4)\times(7-6)=11$이므로

$a-b=7-11=-4$

10 답 3개

$$xy-2x-2y+4=x(y-2)-2(y-2)$$
$$=(x-2)(y-2)$$

이때 $(x-2)(y-2)=4$이고 x, y가 자연수이므로

$x-2=1$, $y-2=4$ 또는 $x-2=2$, $y-2=2$

또는 $x-2=4$, $y-2=1$

따라서 조건을 만족하는 순서쌍 (x, y)는 $(3, 6)$, $(4, 4)$, $(6, 3)$의 3개이다.

11 답 33

$$\frac{4^2-1}{3^2}\times\frac{6^2-1}{5^2}\times\frac{8^2-1}{7^2}\times\cdots\times\frac{98^2-1}{97^2}$$
$$=\frac{(4-1)(4+1)}{3^2}\times\frac{(6-1)(6+1)}{5^2}\times\frac{(8-1)(8+1)}{7^2}\times\cdots\times\frac{(98-1)(98+1)}{97^2}$$
$$=\frac{3\times5}{3^2}\times\frac{5\times7}{5^2}\times\frac{7\times9}{7^2}\times\cdots\times\frac{97\times99}{97^2}$$
$$=\frac{99}{3}=33$$

12 답 −8

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2-y^2+6x+2y+8=x^2+6x-(y^2-2y-8)$$
$$=x^2+6x-(y+2)(y-4)$$
$$=(x+y+2)\{x-(y-4)\}$$
$$=(x+y+2)(x-y+4)$$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=-1$, $d=4$이므로

$abcd=2\times1\times(-1)\times4=-8$

다른 풀이

$$x^2-y^2+6x+2y+8=(x^2+6x+9)-(y^2-2y+1)$$
$$=(x+3)^2-(y-1)^2$$
$$=(x+3+y-1)\{x+3-(y-1)\}$$
$$=(x+y+2)(x-y+4)$$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=-1$, $d=4$이므로

$abcd=2\times1\times(-1)\times4=-8$

학교 시험 최상위 기출 도전

89쪽~90쪽

01 답 11개

[전략] 주어진 각각의 다항식이 $(x+a)(x+b)$ (단, a, b는 $a>b$인 정수)로 인수분해된다고 놓고, $a+b=-2$를 만족하는 두 정수 a, b를 생각한다.

주어진 150개의 다항식 $x^2-2x-k\,(k=1, 2, 3, \cdots, 150)$가 $(x+a)(x+b)$ (단, a, b는 $a>b$인 정수)로 인수분해된다고 하면

$$x^2-2x-k=(x+a)(x+b)$$
$$=x^2+(a+b)x+ab$$

이때 $a+b=-2$, $ab=-k$를 만족하는 세 수 a, b, k의 값을 순서쌍 (a, b, k)로 나타내면 다음과 같다.

$(1, -3, 3)$, $(2, -4, 8)$, $(3, -5, 15)$, $(4, -6, 24)$, $(5, -7, 35)$, $(6, -8, 48)$, $(7, -9, 63)$, $(8, -10, 80)$, $(9, -11, 99)$, $(10, -12, 120)$, $(11, -13, 143)$

따라서 구하는 다항식의 개수는 11개이다.

02 답 1

[전략] 조건 (가)에서 두 다항식의 상수항은 모두 -3이고, a, b가 정수이므로 $3=1\times(-3)=(-1)\times 3$임을 이용한다.

(i) $x^2+bx-3=(x+1)(x-3)$으로 인수분해되는 경우

㉠ $x+1$이 공통인 인수일 때
$2x^2+ax-3=(x+1)(2x-3)$
$\therefore a=-1, b=-2$

㉡ $x-3$이 공통인 인수일 때
$2x^2+ax-3=(x-3)(2x+1)$
$\therefore a=-5, b=-2$

(ii) $x^2+bx-3=(x-1)(x+3)$으로 인수분해되는 경우

㉢ $x-1$이 공통인 인수일 때
$2x^2+ax-3=(x-1)(2x+3)$
$\therefore a=1, b=2$

㉣ $x+3$이 공통인 인수일 때
$2x^2+ax-3=(x+3)(2x-1)$
$\therefore a=5, b=2$

㉠~㉣에서 x^2+ax+b가 계수가 정수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 것은 ㉠이므로

$a-b=-1-(-2)=1$

03 답 5

[전략] $\sqrt{x}=a-1$이므로 $x=(a-1)^2$임을 이용한다.

$\sqrt{x}=a-1$에서 $x=(a-1)^2$

$$\sqrt{x+6a+3}+\sqrt{x-4a+8}$$
$$=\sqrt{(a-1)^2+6a+3}+\sqrt{(a-1)^2-4a+8}$$
$$=\sqrt{a^2+4a+4}+\sqrt{a^2-6a+9}$$
$$=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(a-3)^2}$$

이때 $1<a<3$에서 $a+2>0$, $a-3<0$이므로

$$\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(a-3)^2}=(a+2)-(a-3)$$
$$=5$$

04 답 $\dfrac{195}{14}$

[전략] $196=14^2$, $194=196-2$임을 이용한다.

$$\sqrt{194+\frac{1}{196}}=\sqrt{196-2+\frac{1}{196}}$$
$$=\sqrt{14^2-2+\frac{1}{14^2}}$$
$$=\sqrt{\left(14-\frac{1}{14}\right)^2}$$
$$=14-\frac{1}{14}$$
$$=\frac{195}{14}$$

05 답 461

[전략] $20=x$로 놓고 21, 22, 23을 각각 x를 사용하여 나타낸다.

$20=x$로 놓으면

$$\sqrt{20\times 21\times 22\times 23+1}$$
$$=\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}$$
$$=\sqrt{\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1}$$
$$=\sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1}$$

$x^2+3x=A$로 치환한다.

$$=\sqrt{A(A+2)+1}$$
$$=\sqrt{A^2+2A+1}$$
$$=\sqrt{(A+1)^2}$$
$$=\sqrt{(x^2+3x+1)^2}$$
$$=x^2+3x+1\ (\because x^2+3x+1>0)$$
$$=20^2+3\times 20+1$$
$$=461$$

06 답 30

[전략] 조건 (나)에서 $a-b=1$임을 이용한다.

$$a^{16}-b^{16}=(a^8+b^8)(a^8-b^8)$$
$$=(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^4-b^4)$$
$$=(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a^2-b^2)$$
$$=(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$$

이때 조건 (나)에서 $a^{16}-b^{16}=(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$이므로

$a-b=1$ ⋯⋯ ㉠

따라서 조건 (가)의 식과 ㉠을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=5$

$\therefore ab=6\times 5=30$

07 답 $-\dfrac{1}{3}$

[전략] $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{3c^2-3(a+b)^2}+\frac{b^2-(c-a)^2}{3a^2-3(b+c)^2}+\frac{c^2-(a-b)^2}{3b^2-3(c+a)^2}$$
$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{3(c+a+b)(c-a-b)}+\frac{(b+c-a)(b-c+a)}{3(a+b+c)(a-b-c)}$$
$$+\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{3(b+c+a)(b-c-a)}$$
$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{-3(a+b+c)(a+b-c)}+\frac{-(a-b-c)(a+b-c)}{3(a+b+c)(a-b-c)}$$
$$+\frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{-3(a+b+c)(a-b+c)}$$
$$=-\frac{a-b+c}{3(a+b+c)}-\frac{a+b-c}{3(a+b+c)}-\frac{-a+b+c}{3(a+b+c)}$$
$$=-\frac{a+b+c}{3(a+b+c)}=-\frac{1}{3}$$

08 답 $\frac{5}{36}$

[전략] $xy-2x-3y+6$을 인수분해한다.

모든 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)

$$\sqrt{xy-2x-3y+6}=\sqrt{x(y-2)-3(y-2)}$$
$$=\sqrt{(x-3)(y-2)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠이 자연수가 되려면 $(x-3)(y-2)$가 제곱수이어야 한다.

한편 x, y는 1부터 6 사이의 자연수이므로 순서쌍 (x, y)는 다음과 같다.

(i) $(x-3)(y-2)=1$일 때
$(2, 1)$, $(4, 3)$의 2가지

(ii) $(x-3)(y-2)=4$일 때
$(4, 6)$, $(5, 4)$의 2가지

(iii) $(x-3)(y-2)=9$일 때
$(6, 5)$의 1가지

따라서 (i)~(iii)에 의하여 $\sqrt{xy-2x-3y+6}$의 값이 자연수가 되는 경우는 5가지이므로 구하는 확률은 $\frac{5}{36}$이다.

09 답 $a=1$, $b=3$, $c=9$ / 부피: 27

[전략] 주어진 식의 좌변을 a에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

$abc+2ab+2bc+2ca+4a+4b+4c=157$
$a(bc+2b+2c+4)+(2bc+4b+4c)=157$
$a(bc+2b+2c+4)+(2bc+4b+4c+8-8)=157$
$a\{b(c+2)+2(c+2)\}+\{2b(c+2)+4(c+2)\}-8=157$
$a(b+2)(c+2)+2(b+2)(c+2)=165$
$(a+2)(b+2)(c+2)=165$

이때 $165=3\times5\times11$이고 a, b, c가 $a<b<c$인 자연수이므로
$a+2=3$, $b+2=5$, $c+2=11$
$\therefore a=1$, $b=3$, $c=9$

따라서 구하는 직육면체의 부피는
$abc=1\times3\times9=27$

5 이차방정식

01 | 이차방정식의 뜻과 그 풀이

개념 확인

93쪽

01 답 ⑤

① 이차방정식이다.
② $x^2=3x^2-3$에서 $-2x^2+3=0$이므로 이차방정식이다.
③ $x(x-4)=x-4$에서 $x^2-4x=x-4$
즉 $x^2-5x+4=0$이므로 이차방정식이다.
④ $x^3+6=x(x^2+3x)$에서 $x^3+6=x^3+3x^2$
즉 $-3x^2+6=0$이므로 이차방정식이다.
⑤ $4x^2-3x+1=(2x+1)(2x-1)$에서
$4x^2-3x+1=4x^2-1$
즉 $-3x+2=0$이므로 일차방정식이다.

따라서 이차방정식이 아닌 것은 ⑤이다.

02 답 ③

$(a-3)x^2+4x-1=0$이 x에 대한 이차방정식이 되려면
(x^2의 계수)$\neq0$이어야 하므로
$a-3\neq0 \qquad \therefore a\neq3$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

03 답 ④

$x=1$을 각 이차방정식에 대입하면
① $1^2-2\neq0$
② $1^2+2\times1\neq4$
③ $(1-3)^2\neq5$
④ $1^2+1-2=0$
⑤ $1\times(1+1)\neq3$

따라서 $x=1$을 근으로 갖는 이차방정식은 ④이다.

04 답 ④

각 이차방정식의 해를 구하면
① $x=4$ 또는 $x=-3$
② $x=-\frac{1}{4}$ 또는 $x=3$
③ $x=3$ 또는 $x=-\frac{3}{4}$
④ $x=\frac{3}{4}$ 또는 $x=-3$
⑤ $x=-3$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 이차방정식은 ④이다.

05 답 $x=9$ 또는 $x=-\frac{6}{5}$

$5x^2-39x-54=0$에서 $(x-9)(5x+6)=0$

$\therefore x=9$ 또는 $x=-\frac{6}{5}$

06 답 $x=3\pm\sqrt{7}$

$2(x-3)^2=14$에서 $(x-3)^2=7$

$x-3=\pm\sqrt{7}$ $\quad\therefore x=3\pm\sqrt{7}$

07 답 ⑤

$2x^2-8x+3=0$에서 $2x^2-8x=-3$

$x^2-4x=\boxed{① -\frac{3}{2}}$

$x^2-4x+\boxed{② 4}=\boxed{③ \frac{5}{2}}$

$(x-\boxed{④ 2})^2=\boxed{③ \frac{5}{2}}$

$x-2=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$ $\quad\therefore x=\boxed{⑤ 2\pm\frac{\sqrt{10}}{2}}$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

적중 & 심화 유형 연습

94쪽~101쪽

01 답 ㉠, ㉢

㉠ $-2x+3=2x^2$에서 $-2x^2-2x+3=0$이므로 이차방정식이다.

㉡ $(x-1)(x+2)=x^2+x-2$
즉 이차식이다.

㉢ $(x+1)^2=-x^2+2$에서 $x^2+2x+1=-x^2+2$
즉 $2x^2+2x-1=0$이므로 이차방정식이다.

㉣ $x(x+3)=6+x^2$에서 $x^2+3x=6+x^2$
즉 $3x-6=0$이므로 일차방정식이다.

㉤ $2x(x+1)=5+2x^2$에서 $2x^2+2x=5+2x^2$
즉 $2x-5=0$이므로 일차방정식이다.

㉥ $x^2+(x-3)(x-1)=x^2+x^2-4x+3=2x^2-4x+3$
즉 이차식이다.

따라서 이차방정식인 것은 ㉠, ㉢이다.

02 답 ④

$3x(ax-1)=(a+1)x^2-x$에서

$3ax^2-3x=(a+1)x^2-x$

$(2a-1)x^2-2x=0$

이 방정식이 x에 대한 이차방정식이 되려면

$2a-1\neq0$ $\quad\therefore a\neq\frac{1}{2}$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ④이다.

03 답 ②

$2ax^2-3x+4=6x(x+1)$에서

$2ax^2-3x+4=6x^2+6x$

$2(a-3)x^2-9x+4=0$

이 방정식이 x에 대한 이차방정식이 되려면

$a-3\neq0$ $\quad\therefore a\neq3$

04 답 ②

$x=-2$를 각 이차방정식에 대입하면

① $3\times(-2)^2\neq15$

② $\{3\times(-2)+4\}^2=(-2)^2$

③ $2\times(-2)^2+(-2)-1\neq0$

④ $(-2)\times\{2\times(-2)+1\}\neq-(-2)$

⑤ $(-2)^2+3\times(-2)-10\neq0$

따라서 $x=-2$를 해로 갖는 이차방정식은 ②이다.

05 답 ③

① $x(x+1)=0$에 $x=0$을 대입하면
$0\times(0+1)=0$

② $x^2-7=0$에 $x=\sqrt{7}$을 대입하면
$(\sqrt{7})^2-7=0$

③ $x^2+x=6$에 $x=-2$를 대입하면
$(-2)^2+(-2)\neq6$

④ $4x^2-1=0$에 $x=-\frac{1}{2}$을 대입하면
$4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1=0$

⑤ $x(3x+2)=1$에 $x=-1$을 대입하면
$-1\times\{3\times(-1)+2\}=1$

따라서 [ ] 안의 수가 주어진 이차방정식의 해가 아닌 것은 ③이다.

06 답 -4

$x^2+4x-2k-5=0$에 $x=-1$을 대입하면

$1-4-2k-5=0$

$-2k=8$ $\quad\therefore k=-4$

07 답 15

$x^2-ax-3a+3=-8$에 $x=-2$를 대입하면

$4+2a-3a+3=-8$

$-a=-15$ $\quad\therefore a=15$

08 답 -4

$x^2+3x+1=0$에 $x=m$을 대입하면

$m^2+3m+1=0$에서 $m^2+3m=-1$

$\therefore 4m^2+12m=4(m^2+3m)=4\times(-1)=-4$

09 답 -8

$x^2+4x+1=0$에 $x=a$를 대입하면
$a^2+4a+1=0$에서 $a^2+4a=-1$
$x^2+4x+1=0$에 $x=b$를 대입하면
$b^2+4b+1=0$에서 $b^2+4b=-1$
$\therefore (a^2+4a+3)(b^2+4b-3)=(-1+3)\times(-1-3)$
$=2\times(-4)=-8$

10 답 2

$x^2-4x+2=0$에 $x=a$를 대입하면
$a^2-4a+2=0$에서 $a^2-4a=-2$
$2x^2-5x-1=0$에 $x=b$를 대입하면
$2b^2-5b-1=0$에서 $2b^2-5b=1$
$\therefore 3a^2-12a-2b^2+5b+9=3(a^2-4a)-(2b^2-5b)+9$
$=3\times(-2)-1+9=2$

11 답 5

$3x^2-5x-1=0$에 $x=p$를 대입하면
$3p^2-5p-1=0$
이때 $p\neq0$이므로 양변을 p로 나누면
$3p-5-\dfrac{1}{p}=0$
$\therefore 3p-\dfrac{1}{p}=5$

12 답 13

$x^2-3x-2=0$에 $x=a$를 대입하면
$a^2-3a-2=0$ …… ❶
이때 $a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면
$a-3-\dfrac{2}{a}=0$, $a-\dfrac{2}{a}=3$ …… ❷
$\therefore a^2+\dfrac{4}{a^2}=\left(a-\dfrac{2}{a}\right)^2+4=3^2+4=13$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ $x^2-3x-2=0$에 $x=a$를 대입하기	30 %
❷ $a^2-3a-2=0$의 양변을 a로 나누어 $a-\dfrac{2}{a}$의 값 구하기	30 %
❸ $a^2+\dfrac{4}{a^2}$의 값 구하기	40 %

13 답 -1

$(x-4)(x+1)=-x+11$에서 $x^2-3x-4=-x+11$
$x^2-2x-15=0$, $(x+3)(x-5)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=5$
따라서 $a=-3$, $b=5$이므로
$2a+b=2\times(-3)+5=-1$

14 답 2

$3x^2-5x-12=0$에서 $(x-3)(3x+4)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=-\dfrac{4}{3}$
따라서 두 근 사이에 있는 정수는 -1, 0, 1, 2이므로 그 합은
$-1+0+1+2=2$

15 답 $x=2$ 또는 $x=3$

$x^2-x-30=0$에서 $(x+5)(x-6)=0$
$\therefore x=-5$ 또는 $x=6$
따라서 $a=-5$, $b=6$이므로 이차방정식 $x^2-5x+6=0$을 풀면
$(x-2)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=3$

16 답 $x=1$ 또는 $x=-3$

$(x+1)(x-2)=-2x+4$에서 $x^2-x-2=-2x+4$
$x^2+x-6=0$, $(x-2)(x+3)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=-3$
따라서 $a=2$, $b=-3$이므로 이차방정식 $x^2+2x-3=0$을 풀면
$(x-1)(x+3)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=-3$

17 답 -16

$x^2-3x+a=0$에 $x=-1$을 대입하면
$1+3+a=0$ $\quad\therefore a=-4$
즉 $x^2-3x-4=0$에서 $(x+1)(x-4)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$
따라서 다른 한 근은 $x=4$이므로 구하는 곱은
$-4\times4=-16$

18 답 10

$x^2-ax-5a-13=0$에 $x=-4$를 대입하면
$16+4a-5a-13=0$ $\quad\therefore a=3$ …… ❶
즉 $x^2-3x-28=0$에서 $(x+4)(x-7)=0$
$\therefore x=-4$ 또는 $x=7$
따라서 다른 한 근은 $x=7$이므로 구하는 합은 …… ❷
$3+7=10$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ $x^2-ax-5a-13=0$에 $x=-4$를 대입하여 a의 값 구하기	40 %
❷ 이차방정식의 다른 한 근 구하기	40 %
❸ a의 값과 다른 한 근의 합 구하기	20 %

19 답 ③

$4x^2+(2a-1)x-4a+1=0$에 $x=-3$을 대입하면

$36-3(2a-1)-4a+1=0$, $36-6a+3-4a+1=0$
$40-10a=0$ $\therefore a=4$
즉 $4x^2+7x-15=0$에서 $(x+3)(4x-5)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{5}{4}$
따라서 다른 한 근은 $x=\frac{5}{4}$이다.

20 답 -2

$2x^2+(2a^2-1)x+2(a-4)=0$에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2a^2-1)+2(a-4)=0$, $\frac{1}{2}+a^2-\frac{1}{2}+2a-8=0$
$a^2+2a-8=0$, $(a-2)(a+4)=0$
$\therefore a=2$ 또는 $a=-4$
따라서 a의 값이 될 수 있는 수는 2, -4이므로 그 합은
$2+(-4)=-2$

21 답 3

$x^2+kx-2k^2-4=0$에 $x=-3$을 대입하면
$9-3k-2k^2-4=0$, $2k^2+3k-5=0$
$(k-1)(2k+5)=0$ $\therefore k=1$ 또는 $k=-\frac{5}{2}$
이때 양수 k의 값은 1이므로
$x^2+x-6=0$에서 $(x-2)(x+3)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=-3$
따라서 다른 한 근은 $x=2$이므로 구하는 합은
$1+2=3$

22 답 -1

$(2x+3)(3x-1)=-4$에서 $6x^2+7x-3=-4$
$6x^2+7x+1=0$, $(x+1)(6x+1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{6}$
이때 두 근 중 작은 근은 $x=-1$이므로
$2x^2+(k+1)x+2k=0$에 $x=-1$을 대입하면
$2-(k+1)+2k=0$, $2-k-1+2k=0$
$\therefore k=-1$

23 답 3

$3x^2+5x-2=0$에서 $(x+2)(3x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{3}$
이때 두 근 중 음수인 근은 $x=-2$이므로
$x^2-(a+2)x+a+1=0$에 $x=-2$를 대입하면
$4+2(a+2)+a+1=0$, $4+2a+4+a+1=0$
$3a+9=0$ $\therefore a=-3$
또 $3x^2+5x-2=0$의 두 근 중 양수인 근은 $x=\frac{1}{3}$이므로
$3x^2+(b-1)x-2=0$에 $x=\frac{1}{3}$을 대입하면
$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(b-1)-2=0$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}b-\frac{1}{3}-2=0$
$\frac{1}{3}b-2=0$ $\therefore b=6$
$\therefore a+b=-3+6=3$

24 답 1

$x^2-ax-15=0$에 $x=-5$를 대입하면
$25+5a-15=0$, $5a=-10$ $\therefore a=-2$ …… ❶
즉 $x^2+2x-15=0$에서 $(x-3)(x+5)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=-5$
따라서 다른 한 근은 $x=3$이므로 …… ❷
$x^2-2x+b=0$에 $x=3$을 대입하면
$9-6+b=0$ $\therefore b=-3$ …… ❸
$\therefore a-b=-2-(-3)=1$ …… ❹

채점 기준	비율
❶ $x^2-ax-15=0$에 $x=-5$를 대입하여 a의 값 구하기	30 %
❷ $x^2-ax-15=0$의 다른 한 근 구하기	30 %
❸ ❷의 다른 한 근을 $x^2-2x+b=0$에 대입하여 b의 값 구하기	30 %
❹ $a-b$의 값 구하기	10 %

25 답 9

$x^2-7x+m=0$에 $x=2$를 대입하면
$4-14+m=0$ $\therefore m=10$
$2x^2+nx-6=0$에 $x=2$를 대입하면
$8+2n-6=0$, $2n=-2$ $\therefore n=-1$
$\therefore m+n=10+(-1)=9$

26 답 -3

$x^2+11x+18=0$에서 $(x+2)(x+9)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=-9$
$5x^2+7x-6=0$에서 $(x+2)(5x-3)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{3}{5}$
따라서 두 이차방정식의 공통인 해는 $x=-2$이므로
$(m+2)x^2-mx+10=0$에 $x=-2$를 대입하면
$4(m+2)+2m+10=0$, $4m+8+2m+10=0$
$6m+18=0$ $\therefore m=-3$

27 답 -5

$x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$ …… ❶
(i) 공통인 해가 $x=-1$일 때
$2x^2+kx-6=0$에 $x=-1$을 대입하면
$2-k-6=0$ $\therefore k=-4$ …… ❷

(ⅱ) 공통인 해가 $x=2$일 때

$2x^2+kx-6=0$에 $x=2$를 대입하면

$8+2k-6=0,\ 2k=-2 \qquad \therefore k=-1$ …… ❸

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 k의 값은 $-4, -1$이므로 그 합은

$-4+(-1)=-5$ …… ❹

채점 기준	비율
❶ $x^2-x-2=0$의 해 구하기	30 %
❷ $x=-1$일 때, k의 값 구하기	30 %
❸ $x=2$일 때, k의 값 구하기	30 %
❹ k의 값의 합 구하기	10 %

28 답 -11

$x^2+x+a=0$에 $x=3$을 대입하면

$9+3+a=0 \qquad \therefore a=-12$

즉 $x^2+x-12=0$에서 $(x-3)(x+4)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=-4$

한편 두 이차방정식의 모든 근이 $-4, 2, 3$이므로 $x^2+bx+c=0$의 근은 $x=2$ 또는 $x=3$이다.

$x^2+bx+c=0$에 $x=2$를 대입하면

$4+2b+c=0$에서 $2b+c=-4$ …… ㉠

$x^2+bx+c=0$에 $x=3$을 대입하면

$9+3b+c=0$에서 $3b+c=-9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=-5,\ c=6$

$\therefore a+b+c=-12+(-5)+6=-11$

29 답 ②

① $9-x^2=6(x+3)$에서 $9-x^2=6x+18$

$x^2+6x+9=0,\ (x+3)^2=0 \qquad \therefore x=-3$

② $3(x+2)^2=12$에서 $3x^2+12x+12=12$

$3x^2+12x=0,\ 3x(x+4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-4$

③ $x(x-6)=-9$에서 $x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0 \qquad \therefore x=3$

④ $8-4x=(x-3)^2$에서 $8-4x=x^2-6x+9$

$x^2-2x+1=0,\ (x-1)^2=0 \qquad \therefore x=1$

⑤ $2(x+6)^2=0$에서 $x=-6$

따라서 중근을 갖지 않는 것은 ②이다.

30 답 ①, ④

① $x^2+12x=-36$에서 $x^2+12x+36=0$

$(x+6)^2=0 \qquad \therefore x=-6$

② $x(x+10)=-21$에서 $x^2+10x+21=0$

$(x+3)(x+7)=0 \qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=-7$

③ $x^2-4=0$에서 $(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

④ $2x^2-x+2=-9x-6$에서 $2x^2+8x+8=0$

$x^2+4x+4=0,\ (x+2)^2=0 \qquad \therefore x=-2$

⑤ $3x^2-9x-3=9$에서 $3x^2-9x-12=0$

$x^2-3x-4=0,\ (x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 중근을 갖는 것은 ①, ④이다.

31 답 -4

$x(x-6)=k-5$에서 $x^2-6x-k+5=0$

이 이차방정식이 중근을 가지려면

$-k+5=\left(\frac{-6}{2}\right)^2$이어야 하므로

$-k+5=9 \qquad \therefore k=-4$

32 답 -3

$x^2+4(x-k)+10=0$에서 $x^2+4x-4k+10=0$

이 이차방정식이 중근을 가지려면

$-4k+10=\left(\frac{4}{2}\right)^2$이어야 하므로

$-4k+10=4,\ -4k=-6 \qquad \therefore k=\frac{3}{2}$

즉 $x^2+4x+4=0$에서 $(x+2)^2=0$

$\therefore x=-2$, 즉 $m=-2$

$\therefore km=\frac{3}{2}\times(-2)=-3$

33 답 7

$x^2-2(a-2)x+25=0$이 중근을 가지려면

$25=\left\{\frac{-2(a-2)}{2}\right\}^2$이어야 하므로

$(a-2)^2=25,\ a^2-4a+4=25$

$a^2-4a-21=0,\ (a+3)(a-7)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=7$

따라서 양수 a의 값은 7이다.

34 답 21

$4(x-a)^2=b$에서 $(x-a)^2=\frac{b}{4}$

$x-a=\pm\frac{\sqrt{b}}{2} \qquad \therefore x=a\pm\frac{\sqrt{b}}{2}$

이때 $x=a\pm\frac{\sqrt{b}}{2}=3\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$이므로 $a=3,\ b=7$

$\therefore ab=3\times7=21$

35 답 4

$3(x-5)^2=a$에서 $(x-5)^2=\frac{a}{3}$

$x-5=\pm\sqrt{\frac{a}{3}} \qquad \therefore x=5\pm\sqrt{\frac{a}{3}}$

이때 $x=5\pm\sqrt{\frac{a}{3}}=b\pm\sqrt{3}$이므로 $a=9$, $b=5$

$\therefore a-b=9-5=4$

36 답 (1) $a=-2$, $b=12$ (2) $x=-4$ 또는 $x=\frac{3}{2}$ (3) $\frac{11}{2}$

(1) $(x+a)^2=b$에서 $x+a=\pm\sqrt{b}$

$\therefore x=-a\pm\sqrt{b}$

이때 $x=-a\pm\sqrt{b}=2\pm2\sqrt{3}$이므로 $a=-2$, $b=12$ …… ❶

(2) $-2x^2-5x+12=0$에서 $2x^2+5x-12=0$

$(x+4)(2x-3)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=\frac{3}{2}$ …… ❷

(3) (두 근의 차)$=\frac{3}{2}-(-4)=\frac{11}{2}$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ a, b의 값 각각 구하기	40 %
❷ $ax^2-5x+b=0$ 풀기	40 %
❸ ❷의 두 근의 차 구하기	20 %

37 답 7

$(x-2)(x-4)=9$에서 $x^2-6x+8=9$

$x^2-6x=1$, $x^2-6x+9=1+9$

$(x-3)^2=10$

따라서 $p=-3$, $q=10$이므로

$p+q=-3+10=7$

38 답 5

$-2x^2+8x-3=0$에서 $x^2-4x+\frac{3}{2}=0$

$x^2-4x=-\frac{3}{2}$, $x^2-4x+4=-\frac{3}{2}+4$

$(x-2)^2=\frac{5}{2}$

따라서 $a=2$, $b=\frac{5}{2}$이므로

$ab=2\times\frac{5}{2}=5$

39 답 3

$x^2-2x=1$에서 $x^2-2x+1=1+1$

$(x-1)^2=2$, $x-1=\pm\sqrt{2}$

$\therefore x=1\pm\sqrt{2}$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로

$a+b=1+2=3$

40 답 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

$2x^2-2x-1=0$에서 $x^2-x-\frac{1}{2}=0$

$x^2-x=\frac{1}{2}$, $x^2-x+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ …… ❶

$x-\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ …… ❷

채점 기준	비율
❶ 주어진 이차방정식을 완전제곱식의 꼴로 나타내기	70 %
❷ 완전제곱식을 이용하여 해 구하기	30 %

41 답 -1

$x^2-4x+5k+3=0$에서 $x^2-4x=-5k-3$

$x^2-4x+4=-5k-3+4$, $(x-2)^2=-5k+1$

$x-2=\pm\sqrt{-5k+1}$ $\quad\therefore x=2\pm\sqrt{-5k+1}$

이때 $-5k+1=6$이므로

$-5k=5$ $\quad\therefore k=-1$

42 답 $x=-1$

$2x^2+6x+3=0$에서 $x^2+3x+\frac{3}{2}=0$

$x^2+3x=-\frac{3}{2}$, $x^2+3x+\frac{9}{4}=-\frac{3}{2}+\frac{9}{4}$

$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ …… ㉠

$x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}$ $\quad\therefore x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{3}{4}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{3}{4}$, $c=-\frac{3}{2}$, $d=\frac{3}{4}$이므로

이차방정식 $\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}=-\frac{3}{2}$을 풀면

$3x^2+6x-3=-6$, $3x^2+6x+3=0$

$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$

43 답 $\frac{1}{16}$

$(x-3)^2=4a$에서 $x-3=\pm2\sqrt{a}$

$\therefore x=3\pm2\sqrt{a}$

두 근의 차가 1이므로

$3+2\sqrt{a}-(3-2\sqrt{a})=1$에서 $4\sqrt{a}=1$

$\sqrt{a}=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{16}$

44 답 8

$2(x-3)^2=a$에서 $(x-3)^2=\frac{a}{2}$

$x-3=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$ $\quad\therefore x=3\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$ …… ❶

두 근의 곱이 5이므로

$\left(3+\sqrt{\frac{a}{2}}\right)\left(3-\sqrt{\frac{a}{2}}\right)=5$에서 $9-\frac{a}{2}=5$

$-\frac{a}{2}=-4$ $\quad\therefore a=8$ …… ❷

채점 기준	비율
❶ $2(x-3)^2=a$의 해를 a를 사용하여 나타내기	50 %
❷ a의 값 구하기	50 %

45 답 $\frac{25}{9}$

$16(x-5)^2=p$에서 $(x-5)^2=\frac{p}{16}$

$x-5=\pm\frac{\sqrt{p}}{4}$ $\quad\therefore x=5\pm\frac{\sqrt{p}}{4}$

이때 $a>b$이므로 $a=5+\frac{\sqrt{p}}{4}$, $b=5-\frac{\sqrt{p}}{4}$

$8a-4b=25$에 $a=5+\frac{\sqrt{p}}{4}$, $b=5-\frac{\sqrt{p}}{4}$를 대입하면

$8\left(5+\frac{\sqrt{p}}{4}\right)-4\left(5-\frac{\sqrt{p}}{4}\right)=25$

$40+2\sqrt{p}-20+\sqrt{p}=25$, $3\sqrt{p}=5$

$\sqrt{p}=\frac{5}{3}$ $\quad\therefore p=\frac{25}{9}$

46 답 ①

$(x-9)^2=3k$에서 $x-9=\pm\sqrt{3k}$

$\therefore x=9\pm\sqrt{3k}$

이때 $9+\sqrt{3k}$, $9-\sqrt{3k}$가 모두 자연수가 되려면 $\sqrt{3k}$가 8 이하의 자연수이어야 한다.

즉 $\sqrt{3k}=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$이므로

$3k=1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64$

$\therefore k=\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 3, \frac{16}{3}, \frac{25}{3}, 12, \frac{49}{3}, \frac{64}{3}$

따라서 가능한 자연수 k의 값은 3, 12의 2개이다.

47 답 3

$(x-1)^2=5k+1$에서 $x-1=\pm\sqrt{5k+1}$

$\therefore x=1\pm\sqrt{5k+1}$

이때 해가 모두 정수가 되려면 $5k+1$이 0 또는 제곱수이어야 한다.

즉 $5k+1=0, 1, 4, 9, 16, \cdots$이므로

$5k=-1, 0, 3, 8, 15, \cdots$

$\therefore k=-\frac{1}{5}, 0, \frac{3}{5}, \frac{8}{5}, 3, \cdots$

따라서 가장 작은 자연수 k의 값은 3이다.

48 답 ③

$(x-2)^2=k-2$에서 $x-2=\pm\sqrt{k-2}$

$\therefore x=2\pm\sqrt{k-2}$

이때 해가 모두 정수가 되려면 $k-2$가 0 또는 제곱수이어야 한다.

즉 $k-2=0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \cdots$이므로

$k=2, 3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, 66, 83, 102, \cdots$

따라서 두 자리 자연수 k의 개수는 11, 18, 27, 38, 51, 66, 83의 7개이다.

적중 & 심화 실전 TEST

102쪽~103쪽

01 답 40

$x^2-2x+2b=ax-1$에 $x=3$을 대입하면

$9-6+2b=3a-1$에서 $3a-2b=4$

$3x^2+abx-5=0$에 $x=1$을 대입하면

$3+ab-5=0$에서 $ab=2$

$\therefore 9a^2+4b^2=(3a-2b)^2+12ab=4^2+12\times2=40$

02 답 3

$x^2-\sqrt{5}x+1=0$에 $x=a$를 대입하면

$a^2-\sqrt{5}a+1=0$

이때 $a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면

$a-\sqrt{5}+\frac{1}{a}=0$, $a+\frac{1}{a}=\sqrt{5}$

$\therefore a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=(\sqrt{5})^2-2=3$

03 답 36

$x^2-(k+6)x+6k=0$에서 $(x-k)(x-6)=0$

$\therefore x=k$ 또는 $x=6$

이때 두 근의 비가 $1:3$이므로

(i) $k:6=1:3$인 경우

$3k=6$ $\quad\therefore k=2$

(ii) $6:k=1:3$인 경우 $k=18$

따라서 (i), (ii)에 의하여 가능한 모든 k의 값의 곱은 $2\times18=36$

04 답 -2

$ax^2+3x+b=0$에 $x=1$을 대입하면

$a+3+b=0$에서 $a+b=-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$bx^2+3x+a=0$에 $x=-\frac{1}{2}$을 대입하면

$\frac{1}{4}b-\frac{3}{2}+a=0$에서 $4a+b=6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-6$

즉 $3x^2+3x-6=0$에서 $x^2+x-2=0$

$(x-1)(x+2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-2$, 즉 $p=-2$

또 $-6x^2+3x+3=0$에서 $2x^2-x-1=0$

$(x-1)(2x+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$, 즉 $q=1$

$\therefore pq=-2\times1=-2$

05 답 36

$x^2+(a+3)x+2a-2=0$에 $x=-1$을 대입하면

$1-(a+3)+2a-2=0$, $1-a-3+2a-2=0$

$\therefore a=4$

즉 $x^2+7x+6=0$에서 $(x+1)(x+6)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-6$

이때 다른 한 근은 $x=-6$이므로

$x^2+(b+4)x+5b-3=0$에 $x=-6$을 대입하면

$36-6(b+4)+5b-3=0$, $36-6b-24+5b-3=0$

$\therefore b=9$

$\therefore ab=4\times9=36$

06 답 12

$x^2+ax-5=0$에 $x=1$을 대입하면

$1+a-5=0 \qquad \therefore a=4$

즉 $x^2+4x-5=0$에서 $(x-1)(x+5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-5$

한편 두 이차방정식의 모든 근이 -5, 1, $\frac{3}{2}$이므로 $2x^2-bx+c=0$의 두 근은 $x=1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$이다.

$2x^2-bx+c=0$에 $x=1$을 대입하면

$2-b+c=0$에서 $b-c=2$ …… ㉠

$2x^2-bx+c=0$에 $x=\frac{3}{2}$을 대입하면

$\frac{9}{2}-\frac{3}{2}b+c=0$에서 $3b-2c=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=5$, $c=3$

$\therefore a+b+c=4+5+3=12$

07 답 ②

$12x^2-4x-5=0$에서 $(2x+1)(6x-5)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{6}$

$6x^2-7x-5=0$에서 $(2x+1)(3x-5)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

따라서 두 이차방정식을 모두 참이 되게 하는 해는 $x=-\frac{1}{2}$이므로 주어진 이차방정식 중 $x=-\frac{1}{2}$을 중근으로 갖는 것을 찾는다.

① $4x^2-4x+1=0$에서 $(2x-1)^2=0 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}$

② $4x^2+4x+1=0$에서 $(2x+1)^2=0 \qquad \therefore x=-\frac{1}{2}$

③ $4x^2-20x+25=0$에서 $(2x-5)^2=0 \qquad \therefore x=\frac{5}{2}$

④ $9x^2-30x+25=0$에서 $(3x-5)^2=0 \qquad \therefore x=\frac{5}{3}$

⑤ $36x^2-60x+25=0$에서 $(6x-5)^2=0 \qquad \therefore x=\frac{5}{6}$

08 답 2

$x^2+(2a+6)x+4a^2=0$이 중근을 가지려면

$4a^2=\left(\frac{2a+6}{2}\right)^2$이어야 하므로

$4a^2=(a+3)^2$, $4a^2=a^2+6a+9$

$3a^2-6a-9=0$, $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 모든 a의 값의 합은 $-1+3=2$

09 답 8

$x^2+4mx+5=0$에서 $x^2+4mx=-5$

$x^2+4mx+4m^2=-5+4m^2$

$(x+2m)^2=-5+4m^2$

즉 $2m=n$, $-5+4m^2=2n+3$이므로

$-5+4m^2=2n+3$에 $n=2m$을 대입하면

$-5+4m^2=4m+3$, $4m^2-4m-8=0$

$m^2-m-2=0$, $(m+1)(m-2)=0$

$\therefore m=-1$ 또는 $m=2$

이때 m은 자연수이므로 $m=2$, $n=4$

$\therefore mn=2\times4=8$

10 답 (1) 4 (2) $a=3$, $b=1$ (3) $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

(1) $4(x-2)^2=k$에서 $(x-2)^2=\frac{k}{4}$

$x-2=\pm\frac{\sqrt{k}}{2} \qquad \therefore x=2\pm\frac{\sqrt{k}}{2}$

두 근의 차가 2이므로

$2+\frac{\sqrt{k}}{2}-\left(2-\frac{\sqrt{k}}{2}\right)=2$에서

$\sqrt{k}=2 \qquad \therefore k=4$ …… ❶

(2) $x=2\pm\frac{\sqrt{4}}{2} \qquad \therefore x=3$ 또는 $x=1$

이때 $a>b$이므로 $a=3$, $b=1$ …… ❷

(3) $x^2+3x+1=0$에서 $x^2+3x=-1$

$x^2+3x+\frac{9}{4}=-1+\frac{9}{4}$, $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

$x+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ k의 값 구하기	30 %
❷ a, b의 값 각각 구하기	30 %
❸ 완전제곱식을 이용하여 $x^2+ax+b=0$ 풀기	40 %

11 답 28

$(x-7)^2=2k$에서 $x-7=\pm\sqrt{2k}$

$\therefore x=7\pm\sqrt{2k}$

이때 $7+\sqrt{2k}$, $7-\sqrt{2k}$가 모두 자연수가 되려면 $\sqrt{2k}$가 6 이하의 자연수이어야 한다.

즉 $\sqrt{2k}=1, 2, 3, 4, 5, 6$이므로

$2k=1, 4, 9, 16, 25, 36$

$\therefore k=\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}, 8, \frac{25}{2}, 18$

따라서 가능한 자연수 k의 값은 2, 8, 18이므로 그 합은
$2+8+18=28$

12 답 123

$(x-5)^2=\frac{k}{3}+10$에서 $x-5=\pm\sqrt{\frac{k}{3}+10}$

$\therefore x=5\pm\sqrt{\frac{k}{3}+10}$

이때 두 근이 모두 정수가 되려면 $\frac{k}{3}+10$이 0 또는 제곱수이어야 한다.

즉 $\frac{k}{3}+10=0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \cdots$이므로

$\frac{k}{3}=-10, -9, -6, -1, 6, 15, 26, 39, \cdots$

$\therefore k=-30, -27, -18, -3, 18, 45, 78, 117, \cdots$

한편 $30\le k\le 90$이므로 조건을 만족하는 k의 값은 45, 78이다.

따라서 구하는 합은 $45+78=123$

02 | 이차방정식의 활용

개념 확인 105쪽

01 답 (1) $ax^2+bx=-c$

(2) $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

(3) $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

(4) $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

(5) $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(6) $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

02 답 $x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$$

03 답 $x=\frac{7\pm\sqrt{29}}{10}$

$0.5x^2-0.7x+0.1=0$의 양변에 10을 곱하면

$5x^2-7x+1=0$

$$\therefore x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times5\times1}}{2\times5}=\frac{7\pm\sqrt{29}}{10}$$

04 답 $x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{4}$

$\frac{2}{3}x^2-x-\frac{1}{2}=0$의 양변에 6을 곱하면

$4x^2-6x-3=0$

$$\therefore x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times(-3)}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{21}}{4}$$

05 답 $x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}$

$\frac{1}{5}x^2-0.7x=-0.4$의 양변에 10을 곱하면

$2x^2-7x=-4$, $2x^2-7x+4=0$

$$\therefore x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times2\times4}}{2\times2}=\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}$$

06 답 구각형

구하는 다각형을 n각형이라 하면 n각형의 대각선의 개수는

$\frac{n(n-3)}{2}$개이므로

$\frac{n(n-3)}{2}=27$

$n(n-3)=54$, $n^2-3n-54=0$

$(n+6)(n-9)=0$ $\quad\therefore n=-6$ 또는 $n=9$

이때 n은 자연수이므로 $n=9$

따라서 구하는 다각형은 구각형이다.

적중 & 심화 유형 연습 106쪽~115쪽

01 답 0

$(x+1)(2x-5)=x(x+2)$에서 $2x^2-3x-5=x^2+2x$

$x^2-5x-5=0$

$$\therefore x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times(-5)}}{2\times1}=\frac{5\pm3\sqrt{5}}{2}$$

따라서 $p=5$, $q=5$이므로

$p-q=5-5=0$

02 답 -1

$2x^2+3x+k=0$에서

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times2\times k}}{2\times2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8k}}{4}$$

따라서 $9-8k=17$이므로

$-8k=8$ $\quad\therefore k=-1$

03 답 1

$3x^2-6x+a=0$에서

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-3\times a}}{3}=\frac{3\pm\sqrt{9-3a}}{3} \quad\cdots\cdots ❶$$

따라서 $b=3$, $9-3a=15$이므로 $a=-2$ …… ❷

$\therefore a+b=-2+3=1$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ 근의 공식을 이용하여 $3x^2-6x+a=0$의 해를 a를 사용하여 나타내기	50 %
❷ a, b의 값 각각 구하기	30 %
❸ $a+b$의 값 구하기	20 %

04 답 -3

$x^2-ax+b=0$에서

$x=\dfrac{-(-a)\pm\sqrt{(-a)^2-4\times1\times b}}{2\times1}=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$

따라서 $a=2$, $a^2-4b=10$이므로 $b=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore ab=2\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-3$

05 답 ⑤

$x^2+4x-2=0$에서

$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\times(-2)}=-2\pm\sqrt{6}$

$2<\sqrt{6}<3$이므로 $0<-2+\sqrt{6}<1$

$-3<-\sqrt{6}<-2$이므로 $-5<-2-\sqrt{6}<-4$

따라서 두 근 사이에 있는 정수는 -4, -3, -2, -1, 0의 5개이다.

06 답 24

$\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{4}=0$의 양변에 12를 곱하면

$6x^2-4x-3=0$

$\therefore x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-6\times(-3)}}{6}=\dfrac{2\pm\sqrt{22}}{6}$

따라서 $p=2$, $q=22$이므로

$p+q=2+22=24$

07 답 $x=\dfrac{5}{3}$

$4x^2-3(x+2)=2x(2-x)-1$에서

$4x^2-3x-6=4x-2x^2-1$

$6x^2-7x-5=0$, $(2x+1)(3x-5)=0$

$\therefore x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}$

$0.3x^2+0.1x-1=0$의 양변에 10을 곱하면

$3x^2+x-10=0$, $(x+2)(3x-5)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}$

따라서 두 이차방정식의 공통인 해는 $x=\dfrac{5}{3}$이다.

08 답 49

$\dfrac{1}{5}x^2+0.5x=\dfrac{3}{4}x+0.05$의 양변에 20을 곱하면

$4x^2+10x=15x+1$, $4x^2-5x-1=0$

$\therefore x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times4\times(-1)}}{2\times4}=\dfrac{5\pm\sqrt{41}}{8}$

따라서 $A=8$, $B=41$이므로

$A+B=8+41=49$

09 답 $x=4\pm\sqrt{19}$

$\dfrac{(x-1)(x-4)}{2}-\dfrac{x(x+1)}{6}=3$의 양변에 6을 곱하면 …… ❶

$3(x-1)(x-4)-x(x+1)=18$

$3(x^2-5x+4)-(x^2+x)-18=0$

$3x^2-15x+12-x^2-x-18=0$

$2x^2-16x-6=0$

$x^2-8x-3=0$ …… ❷

$\therefore x=-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-1\times(-3)}=4\pm\sqrt{19}$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 양변에 6 곱하기	20 %
❷ $ax^2+bx+c=0$의 꼴로 정리하기	50 %
❸ 근의 공식을 이용하여 해 구하기	30 %

10 답 ⑤

$x^2+6x-5+2a=0$이 서로 다른 두 근을 가지려면

$6^2-4\times1\times(-5+2a)>0$이어야 하므로

$36+20-8a>0$, $-8a>-56$ $\quad\therefore a<7$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

11 답 ㉠

㉠ $k=4$이면 $x^2-4x+3=0$에서

$(-4)^2-4\times1\times3=4>0$이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.

㉡ $k=2$이면 $x^2-4x+1=0$에서

$(-4)^2-4\times1\times1=12>0$이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.

㉢ $k=-3$이면 $x^2-4x-4=0$에서

$(-4)^2-4\times1\times(-4)=32>0$이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㉠이다.

12 답 0

$(k-1)x^2+2kx+k+3=0$이 근을 가지려면

$(2k)^2-4(k-1)(k+3)\geq0$이어야 하므로

$4k^2-4(k^2+2k-3)\geq0$, $-8k+12\geq0$

$\therefore k\leq\dfrac{3}{2}$

이때 주어진 식이 x에 대한 이차방정식이므로 $k\neq1$

따라서 조건을 만족하는 가장 큰 정수 k의 값은 0이다.

100점 TIP

주어진 식이 x에 대한 이차방정식이므로 (x^2의 계수)$\neq 0$이어야 함에 주의한다.
즉 $k\neq 1$이므로 조건을 만족하는 k의 값의 범위는 $k<1$ 또는 $1<k\leq\frac{3}{2}$이다.

13 답 4

$x^2-(k-2)x+16=0$이 중근을 가지려면
$\{-(k-2)\}^2-4\times1\times16=0$이어야 하므로
$k^2-4k+4-64=0$, $k^2-4k-60=0$
$(k+6)(k-10)=0$ $\quad\therefore k=-6$ 또는 $k=10$
따라서 구하는 k의 값의 합은 $-6+10=4$

다른 풀이

$x^2-(k-2)x+16=0$이 중근을 가지려면
$16=\left\{\frac{-(k-2)}{2}\right\}^2$이어야 하므로
$16=\frac{k^2-4k+4}{4}$, $k^2-4k+4=64$
$k^2-4k-60=0$, $(k+6)(k-10)=0$
$\therefore k=-6$ 또는 $k=10$

14 답 7

$3x^2-12x+2m-5=-7$에서 $3x^2-12x+2m+2=0$이 중근을 가지려면
$(-12)^2-4\times3\times(2m+2)=0$이어야 하므로
$144-24m-24=0$
$24m=120$ $\quad\therefore m=5$ …… ❶
즉 $3x^2-12x+12=0$에서 $x^2-4x+4=0$
$(x-2)^2=0$ $\quad\therefore x=2$
따라서 $a=2$이므로 …… ❷
$a+m=2+5=7$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ m의 값 구하기	40 %
❷ a의 값 구하기	40 %
❸ $a+m$의 값 구하기	20 %

15 답 $\frac{13}{2}$

$x^2+(5-k)x+k^2-\frac{9}{2}k-\frac{35}{4}=0$이 중근을 가지려면
$(5-k)^2-4\times1\times\left(k^2-\frac{9}{2}k-\frac{35}{4}\right)=0$이어야 하므로
$25-10k+k^2-4k^2+18k+35=0$
$3k^2-8k-60=0$, $(k-6)(3k+10)=0$
$\therefore k=6$ 또는 $k=-\frac{10}{3}$
이때 $k>0$이므로 조건을 만족하는 k의 값은 6이다.
즉 $x^2-x+\frac{1}{4}=0$에서 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}$
따라서 $a=\frac{1}{2}$이므로
$a+k=\frac{1}{2}+6=\frac{13}{2}$

16 답 -11

x^2의 계수가 1이고 해가 $x=3$ 또는 $x=-4$인 이차방정식은
$(x-3)(x+4)=0$ $\quad\therefore x^2+x-12=0$
따라서 $a=1$, $b=-12$이므로
$a+b=1+(-12)=-11$

다른 풀이

$x^2+ax+b=0$에 $x=3$을 대입하면
$9+3a+b=0$에서 $3a+b=-9$ …… ㉠
$x^2+ax+b=0$에 $x=-4$를 대입하면
$16-4a+b=0$에서 $4a-b=16$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-12$

17 답 $x=3\pm2\sqrt{2}$

x^2의 계수가 1이고 해가 $x=-3$ 또는 $x=2$인 이차방정식은
$(x+3)(x-2)=0$ $\quad\therefore x^2+x-6=0$
따라서 $a=1$, $b=-6$이므로 이차방정식 $x^2-6x+1=0$을 풀면
$x=-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\times1}=3\pm2\sqrt{2}$

18 답 -2

x^2의 계수가 2이고 해가 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$인 이차방정식은
$2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$, $2\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)=0$
$\therefore 2x^2+x-1=0$
따라서 $a=1$, $b=-1$이므로
$b-a=-1-1=-2$

19 답 3

x^2의 계수가 3이고 $x=-6$을 중근으로 갖는 이차방정식은
$3(x+6)^2=0$, $3(x^2+12x+36)=0$
$3x^2+36x+108=0$
따라서 $a=36$, $b=108$이므로
$\frac{b}{a}=\frac{108}{36}=3$

20 답 3

x^2의 계수가 a이고 해가 $x=1$ 또는 $x=4$인 이차방정식은
$a(x-1)(x-4)=0$, $a(x^2-5x+4)=0$
$\therefore ax^2-5ax+4a=0$
이때 $-5a=b$, $4a=-12$이므로 $a=-3$, $b=15$
$\therefore 4a+b=4\times(-3)+15=3$

21 답 $x=-2$ 또는 $x=5$

x^2의 계수가 1이고 해가 $x=-5$ 또는 $x=2$인 이차방정식은
$(x+5)(x-2)=0$ $\quad \therefore x^2+3x-10=0$
이때 상수항은 바르게 보았으므로 $b=-10$
x^2의 계수가 1이고 해가 $x=-1$ 또는 $x=4$인 이차방정식은
$(x+1)(x-4)=0$ $\quad \therefore x^2-3x-4=0$
이때 x의 계수는 바르게 보았으므로 $a=-3$
따라서 처음 이차방정식 $x^2-3x-10=0$의 해를 구하면
$(x+2)(x-5)=0$ $\quad \therefore x=-2$ 또는 $x=5$

22 답 $x=1\pm\sqrt{2}$

$x^2+kx-(k+3)=0$에 $x=-1$을 대입하면
$1-k-(k+3)=0$
$-2k-2=0$ $\quad \therefore k=-1$
따라서 처음 이차방정식 $x^2-2x-1=0$을 풀면
$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\times(-1)}=1\pm\sqrt{2}$

23 답 $x=\dfrac{-9\pm\sqrt{57}}{2}$

$x^2+(k-3)x+k=0$이 중근을 가지려면
$(k-3)^2-4\times1\times k=0$이어야 하므로 ...... ❶
$k^2-6k+9-4k=0$, $k^2-10k+9=0$
$(k-1)(k-9)=0$ $\quad \therefore k=1$ 또는 $k=9$ ...... ❷
이때 $k>3$이므로 $k=9$ ...... ❸
따라서 처음 이차방정식 $x^2+9x+6=0$의 해를 구하면
$x=\dfrac{-9\pm\sqrt{9^2-4\times1\times6}}{2\times1}=\dfrac{-9\pm\sqrt{57}}{2}$ ...... ❹

채점 기준	비율
❶ $x^2+(k-3)x+k=0$이 중근을 가질 조건 구하기	25 %
❷ k에 대한 이차방정식 풀기	25 %
❸ 조건에 맞는 k의 값 고르기	25 %
❹ 처음 이차방정식의 해 구하기	25 %

24 답 28

연속하는 두 홀수를 x, $x+2$라 하면
$x(x+2)=195$
$x^2+2x-195=0$, $(x-13)(x+15)=0$
$\therefore x=13$ 또는 $x=-15$
이때 x는 홀수이므로 $x=13$
따라서 두 홀수는 13, 15이므로 구하는 합은
$13+15=28$

25 답 21

연속하는 세 자연수를 $x-1$, x, $x+1$이라 하면
$(x+1)^2=2x(x-1)-20$
$x^2+2x+1=2x^2-2x-20$, $x^2-4x-21=0$
$(x+3)(x-7)=0$ $\quad \therefore x=-3$ 또는 $x=7$
이때 x는 자연수이므로 $x=7$
따라서 세 자연수는 6, 7, 8이므로 구하는 합은
$6+7+8=21$

26 답 8

연속하는 4개의 자연수를 $x-1$, x, $x+1$, $x+2$라 하면
$(x+2)^2-(x-1)^2=x(x+1)-3$
$x^2+4x+4-x^2+2x-1=x^2+x-3$
$x^2-5x-6=0$, $(x+1)(x-6)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=6$
이때 x는 자연수이므로 $x=6$
따라서 가장 큰 수는 $6+2=8$이다.

27 답 47

조건 (가)에서 십의 자리의 숫자를 x라 하면 일의 자리의 숫자는
$11-x$이다. ...... ❶
조건 (나)에서 $x(11-x)=\{10x+(11-x)\}-19$
$11x-x^2=9x-8$, $x^2-2x-8=0$
$(x+2)(x-4)=0$ $\quad \therefore x=-2$ 또는 $x=4$ ...... ❷
이때 x는 자연수이므로 $x=4$ ...... ❸
따라서 십의 자리의 숫자는 4, 일의 자리의 숫자는 7이므로
구하는 두 자리 자연수는 47이다. ...... ❹

채점 기준	비율
❶ 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 각각 x를 사용하여 나타내기	30 %
❷ 이차방정식을 세우고 풀기	30 %
❸ 조건에 맞는 x의 값 구하기	20 %
❹ 두 자리 자연수 구하기	20 %

28 답 ②

연수의 나이를 x세라 하면 언니의 나이는 $(x+11)$세이므로
$x(x+11)=80$
$x^2+11x-80=0$, $(x-5)(x+16)=0$
$\therefore x=5$ 또는 $x=-16$
이때 x는 자연수이므로 $x=5$
따라서 연수의 나이는 5세, 언니의 나이는 16세이므로 두 사람의 나이의 합은
$5+16=21$(세)

29 답 16명

학생 수를 x명이라 하면 학생 한 명이 받은 초콜릿의 개수는
$(x+4)$개이므로
$x(x+4)=320$
$x^2+4x-320=0$, $(x-16)(x+20)=0$
$\therefore x=16$ 또는 $x=-20$

이때 x는 자연수이므로 $x=16$
따라서 학생 수는 16명이다.

30 답 13명

경연 대회에 참가한 학생 수를 n명이라 하면 n명이 한 악수의 횟수는 $\frac{n(n-1)}{2}$회이므로

$\frac{n(n-1)}{2}=78$

$n(n-1)=156$, $n^2-n-156=0$

$(n+12)(n-13)=0$ $\quad\therefore n=-12$ 또는 $n=13$

이때 n은 자연수이므로 $n=13$

따라서 경연 대회에 참가한 학생은 13명이다.

31 답 7월 16일

태주의 생일을 7월 x일이라 하면

$x(x-7)=144$

$x^2-7x-144=0$, $(x+9)(x-16)=0$

$\therefore x=-9$ 또는 $x=16$

이때 x는 자연수이므로 $x=16$

따라서 태주의 생일은 7월 16일이다.

32 답 1050

$(1800-x)\left(250+\frac{1}{3}x\right)=1800\times250$에서

$450000+350x-\frac{1}{3}x^2=450000$, $\frac{1}{3}x^2-350x=0$

$x^2-1050x=0$, $x(x-1050)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1050$

이때 $x>0$이므로 $x=1050$

33 답 ⑤

$\left(1+\frac{20}{100}\right)x\times(2x-500)=x\times2x$에서

$\frac{12}{5}x^2-600x=2x^2$, $\frac{2}{5}x^2-600x=0$

$x^2-1500x=0$, $x(x-1500)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1500$

이때 $x>0$이므로 $x=1500$

따라서 인상한 금액은 $1500\times\frac{20}{100}=300$(원)이다.

34 답 5초 후

$60t-5t^2=175$에서 $5t^2-60t+175=0$

$t^2-12t+35=0$, $(t-5)(t-7)=0$

$\therefore t=5$ 또는 $t=7$

따라서 지면으로부터 공의 높이가 처음으로 175 m가 되는 것은 공을 던진 지 5초 후이다.

35 답 4초

$-5x^2+20x+25=25$에서 $-5x^2+20x=0$

$x^2-4x=0$, $x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

이때 $x>0$이므로 $x=4$

따라서 쏘아 올린 물로켓이 다시 건물의 옥상으로 떨어질 때까지 걸린 시간은 4초이다.

36 답 5초

$-3x^2+27x+20=80$에서 $3x^2-27x+60=0$

$x^2-9x+20=0$, $(x-4)(x-5)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=5$

따라서 쏘아 올린 물로켓이 내려오면서 지면으로부터 80 m의 높이에 도달하는 데 걸리는 시간은 5초이다.

100점 TIP
쏘아 올린 물로켓이 지면으로부터 80 m의 높이에 도달하는 것은 올라가면서(4초) 한 번, 내려오면서(5초) 한 번, 총 2번이다.

37 답 4 cm

작은 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 큰 정사각형의 한 변의 길이는 $(11-x)$ cm이므로

$x^2+(11-x)^2=65$

$2x^2-22x+56=0$, $x^2-11x+28=0$

$(x-4)(x-7)=0$ $\quad\therefore x=4$ 또는 $x=7$

그런데 $x<\frac{11}{2}$이므로 $x=4$

따라서 작은 정사각형의 한 변의 길이는 4 cm이다.

38 답 72 cm

큰 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 작은 정사각형의 한 변의 길이는 $(x-6)$ cm이므로 …… ❶

$x^2+(x-6)^2=468$

$2x^2-12x-432=0$, $x^2-6x-216=0$

$(x+12)(x-18)=0$ $\quad\therefore x=-12$ 또는 $x=18$ …… ❷

그런데 $x>6$이므로 $x=18$

따라서 큰 정사각형의 한 변의 길이는 18 cm이므로 그 둘레의 길이는

$4\times18=72$ (cm) …… ❸

채점 기준	비율
❶ 두 정사각형의 한 변의 길이를 각각 x를 사용하여 나타내기	30 %
❷ 두 정사각형의 넓이의 합을 이용하여 이차방정식 세우고 풀기	50 %
❸ 큰 정사각형의 둘레의 길이 구하기	20 %

39 답 14 cm

$\overline{AC}=x$ cm라 하면 $\overline{BC}=(22-x)$ cm이므로

$\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{22}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{22-x}{2}\right)^2=28\pi$

$22^2-x^2-(22-x)^2=224,\ -2x^2+44x=224$

$x^2-22x+112=0,\ (x-8)(x-14)=0$

$\therefore\ x=8$ 또는 $x=14$

이때 $x>11$이므로 $x=14$

따라서 $\overline{AC}$의 길이는 14 cm이다.

40 답 144 m^2

정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 x m라 하면

$\overline{DE}=(x-4)$ m, $\overline{DF}=(x-3)$ m이므로

$x^2-\frac{1}{2}(x-4)(x-3)=108$

$2x^2-(x^2-7x+12)=216,\ x^2+7x-228=0$

$(x-12)(x+19)=0\qquad\therefore\ x=12$ 또는 $x=-19$

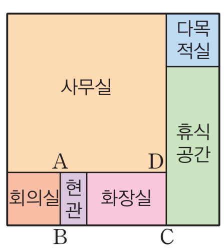
이때 $x>4$이므로 $x=12$

따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 12 m이므로 그 넓이는

$12^2=144\ (m^2)$

41 답 27 m^2

사무실의 한 변의 길이를 x m라 하면 다목적실, 회의실의 한 변의 길이는 모두 $(12-x)$ m이다.



오른쪽 그림과 같이 현관과 화장실을 합한 직사각형 ABCD에서

$\overline{AB}=(12-x)$ m,

$\overline{AD}=x-(12-x)=2x-12$ (m)

이고 $\overline{AB}\times\overline{AD}=18$이므로

$(12-x)(2x-12)=18$

$2x^2-36x+162=0$

$x^2-18x+81=0,\ (x-9)^2=0$

$\therefore\ x=9$

즉 사무실의 한 변의 길이가 9 m이므로 다목적실의 한 변의 길이는 $12-9=3$ (m)이다.

따라서 휴식 공간의 가로의 길이는 3 m, 세로의 길이는 $12-3=9$ (m)이므로 구하는 넓이는

$3\times9=27\ (m^2)$

42 답 4

$(8+x)(5+x)=8\times5+68$에서

$x^2+13x-68=0,\ (x-4)(x+17)=0$

$\therefore\ x=4$ 또는 $x=-17$

이때 $x>0$이므로 $x=4$

43 답 16초 후

x초 후에 처음 직사각형과 넓이가 같아진다고 하면

$(8+x)(12-0.5x)=8\times12$

$8x-0.5x^2=0,\ x^2-16x=0,\ x(x-16)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=16$

이때 $x>0$이므로 $x=16$

따라서 처음 직사각형과 넓이가 같아지는 것은 16초 후이다.

44 답 6 cm

처음 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$\pi(r+6)^2=4\pi r^2$

$r^2+12r+36=4r^2,\ 3r^2-12r-36=0$

$r^2-4r-12=0,\ (r+2)(r-6)=0$

$\therefore\ r=-2$ 또는 $r=6$

이때 $r>0$이므로 $r=6$

따라서 처음 원의 반지름의 길이는 6 cm이다.

45 답 8초 후

x초 후에 △PBQ의 넓이가 8 cm^2가 된다고 하면

$\overline{AP}=x$ cm에서 $\overline{PB}=(12-x)$ cm

$\overline{CQ}=2x$ cm에서 $\overline{BQ}=(20-2x)$ cm이므로

$\frac{1}{2}(12-x)(20-2x)=8$

$x^2-22x+112=0,\ (x-8)(x-14)=0$

$\therefore\ x=8$ 또는 $x=14$

이때 $x<10$이므로 $x=8$

따라서 △PBQ의 넓이가 8 cm^2가 되는 것은 8초 후이다.

참고

점 P가 점 A에서 점 B로 초속 1 cm씩 움직이므로 $x<12$

점 Q가 점 C에서 점 B로 초속 2 cm씩 움직이므로 $2x<20$

$\therefore\ x<10$

46 답 2 m

길의 폭을 x m라 하면 정원의 넓이는 가로의 길이가 $(20-x)$ m, 세로의 길이가 $(15-x)$ m인 직사각형의 넓이와 같으므로

$(20-x)(15-x)=234$

$x^2-35x+66=0,\ (x-2)(x-33)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=33$

이때 $x<15$이므로 $x=2$

따라서 길의 폭은 2 m이다.

47 답 7 cm

처음 직사각형 모양의 종이의 세로의 길이를 x cm라 하면 가로의 길이는 $(x+3)$ cm이므로

$2(x-4)\{(x+3)-4\}=36$

$(x-4)(x-1)=18,\ x^2-5x-14=0$

$(x+2)(x-7)=0\qquad\therefore\ x=-2$ 또는 $x=7$

이때 $x>4$이므로 $x=7$

따라서 처음 직사각형 모양의 종이의 세로의 길이는 7 cm이다.

48 답 $\frac{3}{2}$ m

길의 폭을 x m라 하면

$(9+2x)(6+2x)-9\times6=54$ ...... ❶

$4x^2+30x-54=0$, $2x^2+15x-27=0$

$(x+9)(2x-3)=0$ $\quad\therefore x=-9$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

이때 $x>0$이므로 $x=\frac{3}{2}$

따라서 길의 폭은 $\frac{3}{2}$ m이다. ...... ❷

채점 기준	비율
❶ 직사각형의 넓이를 이용하여 이차방정식 세우기	50 %
❷ 이차방정식을 풀고 길의 폭 구하기	50 %

49 답 $x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{5}$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4\left(x-\frac{1}{2}\right)-1=0$ $\quad x-\frac{1}{2}=A$로 치환한다.

$A^2+4A-1=0$

$\therefore A=-2\pm\sqrt{2^2-1\times(-1)}=-2\pm\sqrt{5}$

즉 $x-\frac{1}{2}=-2\pm\sqrt{5}$이므로

$x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{5}$

50 답 -4

$(x-2y)(x-2y+1)=12$ $\quad x-2y=A$로 치환한다.

$A(A+1)=12$ ...... ❶

$A^2+A-12=0$, $(A-3)(A+4)=0$

$\therefore A=3$ 또는 $A=-4$ ...... ❷

즉 $x-2y=3$ 또는 $x-2y=-4$

이때 $x<2y$이므로 $x-2y=-4$ ...... ❸

채점 기준	비율
❶ $x-2y=A$로 치환하기	20 %
❷ A의 값 구하기	50 %
❸ 조건에 맞는 $x-2y$의 값 구하기	30 %

51 답 $-1+\sqrt{2}$

$(x-y)^2+4xy+2x+2y=1$

$(x+y)^2+2(x+y)-1=0$ $\quad x+y=A$로 치환한다.

$A^2+2A-1=0$

$\therefore A=-1\pm\sqrt{1^2-1\times(-1)}=-1\pm\sqrt{2}$

즉 $x+y=-1+\sqrt{2}$ 또는 $x+y=-1-\sqrt{2}$

이때 $x+y>0$이므로 $x+y=-1+\sqrt{2}$

52 답 $(-1+\sqrt{5})$ cm

도현이가 만든 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 현빈이가 만든 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{16-4x}{4}=4-x$ (cm)이므로

$x^2:(4-x)^2=1:5$에서 $5x^2=(4-x)^2$

$4x^2+8x-16=0$, $x^2+2x-4=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{1^2-1\times(-4)}=-1\pm\sqrt{5}$

이때 $x>0$이므로 $x=-1+\sqrt{5}$

따라서 도현이가 만든 정사각형의 한 변의 길이는 $(-1+\sqrt{5})$ cm 이다.

다른 풀이 1

도현이가 가져간 끈의 길이를 x cm라 하면 현빈이가 가져간 끈의 길이는 $(16-x)$ cm이다.

이때 도현이가 만든 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{x}{4}$ cm, 현빈이가 만든 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{16-x}{4}$ cm이므로

$\left(\frac{x}{4}\right)^2:\left(\frac{16-x}{4}\right)^2=1:5$에서 $x^2:(16-x)^2=1:5$

$5x^2=(16-x)^2$, $4x^2+32x-256=0$

$x^2+8x-64=0$

$\therefore x=-4\pm\sqrt{4^2-1\times(-64)}=-4\pm4\sqrt{5}$

이때 $x>0$이므로 $x=-4+4\sqrt{5}$

따라서 도현이가 만든 정사각형의 한 변의 길이는

$\frac{-4+4\sqrt{5}}{4}=-1+\sqrt{5}$ (cm)

다른 풀이 2

두 정사각형의 넓이의 비가 $1:5$이므로 두 정사각형의 한 변의 길이의 비는 $1:\sqrt{5}$이다.

도현이가 만든 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 현빈이가 만든 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{5}x$ cm이므로 도현이와 현빈이가 나눈 끈의 길이는 각각 $4x$ cm, $4\sqrt{5}x$ cm이다.

즉 $4x+4\sqrt{5}x=16$에서 $4(1+\sqrt{5})x=16$

$\therefore x=\frac{16}{4(1+\sqrt{5})}=\frac{4(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}=-1+\sqrt{5}$

따라서 도현이가 만든 정사각형의 한 변의 길이는 $(-1+\sqrt{5})$ cm 이다.

53 답 $6-2\sqrt{3}$

큰 원의 반지름의 길이를 r라 하면 둘레의 길이는 $2\pi r$이므로 작은 원의 둘레의 길이는 $8\pi-2\pi r$이다.

즉 작은 원의 반지름의 길이는 $\frac{8\pi-2\pi r}{2\pi}=4-r$이므로

$\pi(4-r)^2:\pi r^2=1:3$에서

$(4-r)^2:r^2=1:3$, $3(4-r)^2=r^2$

$2r^2-24r+48=0$, $r^2-12r+24=0$

$\therefore r=-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-1\times24}=6\pm2\sqrt{3}$

그런데 $2<r<4$이므로 $r=6-2\sqrt{3}$

따라서 큰 원의 반지름의 길이는 $6-2\sqrt{3}$이다.

참고

큰 원과 작은 원의 반지름의 길이의 합이 $r+(4-r)=4$이므로 $r<4$이어야 한다.

이때 $r>4-r$이어야 하므로 $r>2$

$\therefore 2<r<4$

54 답 $(10-5\sqrt{2})$ cm

큰 정삼각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 작은 정삼각형의 한 변의 길이는 $\frac{15-3x}{3}=5-x$ (cm)이다.

이때 작은 정삼각형과 큰 정삼각형의 닮음비는 $(5-x):x$이고 넓이의 비가 $1:2$이므로

$(5-x)^2:x^2=1:2$에서

$2(5-x)^2=x^2$, $x^2-20x+50=0$

$\therefore x=-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-1\times50}=10\pm5\sqrt{2}$

그런데 $\frac{5}{2}<x<5$이므로 $x=10-5\sqrt{2}$

따라서 큰 정삼각형의 한 변의 길이는 $(10-5\sqrt{2})$ cm이다.

참고

① 닮음비가 $m:n$인 두 닮은 도형의 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다.

② 두 정삼각형의 한 변의 길이의 합은 $x+(5-x)=5$이므로 $x<5$이어야 한다.

이때 $x>5-x$이어야 하므로 $x>\frac{5}{2}$

$\therefore \frac{5}{2}<x<5$

55 답 $\sqrt{2}$

$x:1=1:\frac{x}{2}$에서 $\frac{x^2}{2}=1$

$x^2=2$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{2}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\sqrt{2}$

56 답 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\overline{AB}:\overline{AP}=\overline{AP}:\overline{PB}$에서

$(x+1):x=x:1$

$x+1=x^2$, $x^2-x-1=0$

$\therefore x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

57 답 $-2+2\sqrt{5}$

□ABCD∽□FCDE이므로

$\overline{AB}:\overline{FC}=\overline{AD}:\overline{FE}$에서 $x:(4-x)=4:x$

$x^2=4(4-x)$, $x^2+4x-16=0$

$\therefore x=-2\pm\sqrt{2^2-1\times(-16)}=-2\pm2\sqrt{5}$

그런데 $x>0$이므로 $x=-2+2\sqrt{5}$

58 답 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

△ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$\angle B=\angle ACB=\frac{1}{2}\times(180^\circ-36^\circ)=72^\circ$

$\therefore \angle ACD=\angle DCB=\frac{1}{2}\times72^\circ=36^\circ$

△CDB에서 $\angle BDC=180^\circ-(36^\circ+72^\circ)=72^\circ$

즉 $\angle B=\angle BDC$이므로 $\overline{CD}=\overline{CB}=1$

△ADC에서 $\angle A=\angle ACD$이므로 $\overline{AD}=\overline{CD}=1$

이때 △ABC∽△CDB (AA 닮음)이므로

$\overline{BD}=x$라 하면 $\overline{AB}:\overline{CD}=\overline{BC}:\overline{DB}$에서

$(1+x):1=1:x$

$x(1+x)=1$, $x^2+x-1=0$

$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

이때 $x>0$이므로 $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

따라서 $\overline{BD}$의 길이는 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$이다.

참고

△ABC와 △CDB에서

$\angle A=\angle DCB=36^\circ$, $\angle B=\angle CDB=72^\circ$

∴ △ABC∽△CDB (AA 닮음)

59 답 -4

$y=ax+1$에 $x=a-3$, $y=2a^2-3$을 대입하면

$2a^2-3=a(a-3)+1$, $2a^2-3=a^2-3a+1$

$a^2+3a-4=0$, $(a-1)(a+4)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=-4$

이때 일차함수 $y=ax+1$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 $a<0$이어야 하므로 $a=-4$

60 답 14

점 P의 x좌표를 $a(a>0)$라 하면 점 P의 y좌표는 $-2a+14$이므로 $Q(a, 0)$, $R(0, -2a+14)$이다.

$a(-2a+14)=24$에서

$2a^2-14a+24=0$, $a^2-7a+12=0$

$(a-3)(a-4)=0$ $\quad\therefore a=3$ 또는 $a=4$

(i) $a=3$일 때, 점 P의 y좌표는 $-2\times3+14=8$

(ii) $a=4$일 때, 점 P의 y좌표는 $-2\times4+14=6$

따라서 (i), (ii)에 의하여 가능한 점 P의 y좌표는 6, 8이므로 그 합은 $6+8=14$

적중 & 심화 실전 TEST

116쪽~118쪽

01 답 (1) $x=3\pm\sqrt{7-a}$

(2) $7-a$가 0 또는 제곱수이어야 한다.

(3) 3, 6, 7

(1) $x^2-6x+a+2=0$에서

$x=-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\times(a+2)}$

$=3\pm\sqrt{7-a}$ ...... ❶

(2) 해가 모두 정수가 되려면 $7-a$가 0 또는 제곱수이어야 한다. ...... ❷

(3) $7-a=0, 1, 4, 9, \cdots$이어야 하므로

$a=7, 6, 3, -2, \cdots$

따라서 조건을 만족하는 자연수 a의 값은 3, 6, 7이다. ...... ❸

채점 기준	비율
❶ 근의 공식을 이용하여 이차방정식의 해를 a를 사용하여 나타내기	30 %
❷ 해가 모두 정수가 될 조건 말하기	30 %
❸ 해가 모두 정수가 되도록 하는 자연수 a의 값 구하기	40 %

02 답 $x=4\pm\sqrt{15}$

$\dfrac{x(x+2)}{3}-\dfrac{2x+1}{6}=\dfrac{x(x-2)}{2}$의 양변에 6을 곱하면

$2x(x+2)-(2x+1)=3x(x-2)$

$2x^2+4x-2x-1=3x^2-6x$, $x^2-8x+1=0$

$\therefore x=-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-1\times1}=4\pm\sqrt{15}$

03 답 $\dfrac{1}{18}$

모든 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)

$x^2+ax+b=0$이 중근을 가지려면 $a^2-4b=0$이어야 하므로

$a^2=4b$를 만족하는 a, b의 값을 순서쌍 (a, b)로 나타내면 $(2, 1)$, $(4, 4)$의 2가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$

04 답 5

x^2의 계수가 a이고 해가 $x=2$ 또는 $x=-4$인 이차방정식은

$a(x-2)(x+4)=0$ $\quad\therefore ax^2+2ax-8a=0$

즉 $-b=2a$, $-8a=-24$이므로 $a=3$, $b=-6$

따라서 이차방정식 $x^2-5x=-6$의 해를 구하면

$x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

따라서 $p=2$, $q=3$ 또는 $p=3$, $q=2$이므로

$p+q=2+3=5$

05 답 10

$x(x+5)=50$에서 $x^2+5x-50=0$

$(x-5)(x+10)=0$ $\quad\therefore x=5$ 또는 $x=-10$

이때 x는 자연수이므로 $x=5$

따라서 바르게 계산한 값은

$5\times(5-3)=10$

06 답 19

연속하는 두 자연수 k, $k+1$이 이차방정식 $x^2+Ax+B=0$의 두 근이라 하면

$(k+1)^2-k^2=11$에서 $2k+1=11$

$2k=10$ $\quad\therefore k=5$

즉 x^2의 계수가 1이고 근이 $x=5$ 또는 $x=6$인 이차방정식은

$(x-5)(x-6)=0$ $\quad\therefore x^2-11x+30=0$

따라서 $A=-11$, $B=30$이므로

$A+B=-11+30=19$

07 답 20

$8000\left(1+\dfrac{a}{100}\right)\left(1-\dfrac{a}{100}\right)=8000-320$에서 ...... ❶

$8000\left(1-\dfrac{a^2}{10000}\right)=7680$

$8000-\dfrac{4}{5}a^2=7680$, $\dfrac{4}{5}a^2=320$

$a^2=400$ $\quad\therefore a=\pm20$ ...... ❷

이때 $a>0$이므로 $a=20$ ...... ❸

채점 기준	비율
❶ a에 대한 이차방정식 세우기	40 %
❷ a에 대한 이차방정식 풀기	40 %
❸ 조건에 맞는 a의 값 구하기	20 %

08 답 3초

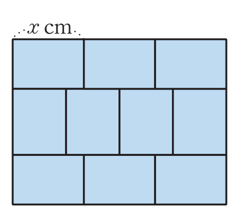
$-0.5x^2+6.5x=20$에서 $5x^2-65x+200=0$

$x^2-13x+40=0$, $(x-5)(x-8)=0$

$\therefore x=5$ 또는 $x=8$

따라서 쏘아 올린 공이 지면으로부터 20 m가 되는 지점을 지나는 시간은 공을 쏘아올린 지 5초 후, 8초 후이므로 20 m 이상의 높이에서 머무르는 시간은 $8-5=3$(초) 동안이다.

09 답 35 cm



오른쪽 그림과 같이 직사각형 모양의 타일 1장의 가로의 길이를 x cm라 하면 세로의 길이는 $\dfrac{3}{4}x$ cm이므로

$10\times x\times\dfrac{3}{4}x=750$

$\dfrac{15}{2}x^2=750$, $x^2=100$ $\quad\therefore x=\pm10$

이때 $x>0$이므로 $x=10$

따라서 타일 1장의 가로의 길이는 10 cm, 세로의 길이는

$\dfrac{3}{4}\times10=\dfrac{15}{2}$ (cm)이므로 그 둘레의 길이는

$2\times\left(10+\dfrac{15}{2}\right)=35$ (cm)

참고

타일 3장의 가로의 길이의 합과 타일 4장의 세로의 길이의 합이 같으므로

$3x=4\times$(세로의 길이) $\quad\therefore$ (세로의 길이)$=\frac{3}{4}x$ (cm)

10 답 5 cm

$\overline{EB}=x$ cm라 하면 $\triangle ABC\backsim\triangle AED$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{BC}:\overline{ED}$에서 $14:(14-x)=28:\overline{ED}$

$14\overline{ED}=28(14-x)\quad\therefore \overline{ED}=2(14-x)=28-2x$ (cm)

직사각형 EBFD의 넓이가 90 cm^{2}이므로

$x(28-2x)=90$

$2x^2-28x+90=0,\ x^2-14x+45=0$

$(x-5)(x-9)=0\quad\therefore x=5$ 또는 $x=9$

이때 $x<7$이므로 $x=5$

따라서 $\overline{EB}$의 길이는 5 cm이다.

11 답 4초 후

x초 후에 $\triangle$PBQ의 넓이와 오각형 APQCD의 넓이의 비가 3 : 22가 된다고 하면 $\overline{AP}=3x$ cm, $\overline{BQ}=4x$ cm이므로

$\triangle PBQ=\frac{1}{2}\times(30-3x)\times4x=60x-6x^2$

즉 $(60x-6x^2):\{1200-(60x-6x^2)\}=3:22$에서

$22(60x-6x^2)=3\{1200-(60x-6x^2)\}$

$1320x-132x^2=3600-180x+18x^2$

$150x^2-1500x+3600=0,\ x^2-10x+24=0$

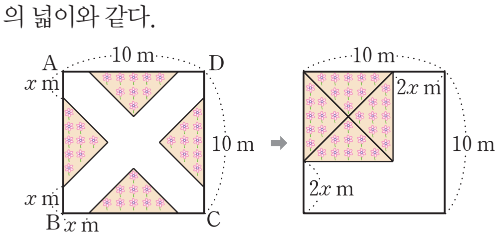
$(x-4)(x-6)=0\quad\therefore x=4$ 또는 $x=6$

따라서 $\triangle$PBQ의 넓이와 오각형 APQCD의 넓이의 비가 처음으로 3 : 22가 되는 것은 4초 후이다.

12 답 $5-\sqrt{10}$

[전략] 4개의 꽃밭을 한쪽으로 이동시킨 후 꽃밭과 길의 넓이를 각각 구한다.

꽃밭의 넓이는 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 $(10-2x)$ m인 정사각형의 넓이와 같다.



이때 길의 넓이는 $10^2-(10-2x)^2=40x-4x^2$ (m)이므로

$(10-2x)^2:(40x-4x^2)=2:3$에서

$3(10-2x)^2=2(40x-4x^2)$

$300-120x+12x^2=80x-8x^2$

$20x^2-200x+300=0,\ x^2-10x+15=0$

$\therefore x=-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-1\times15}=5\pm\sqrt{10}$

이때 $x<5$이므로 $x=5-\sqrt{10}$

13 답 2

$x^2+4xy+4y^2+3x+6y-10=0$

$(x^2+4xy+4y^2)+(3x+6y)-10=0$

$(x+2y)^2+3(x+2y)-10=0$

$x+2y=A$로 치환한다.

$A^2+3A-10=0$

$(A-2)(A+5)=0\quad\therefore A=2$ 또는 $A=-5$

즉 $x+2y=2$ 또는 $x+2y=-5$

그런데 x, y는 모두 양수이므로 $x+2y=2$

14 답 $(-6+3\sqrt{10})$ cm

작은 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 큰 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{36-4x}{4}=9-x$ (cm)이므로

$(9-x)^2:x^2=5:2$에서 $2(9-x)^2=5x^2$

$3x^2+36x-162=0,\ x^2+12x-54=0$

$\therefore x=-6\pm\sqrt{6^2-1\times(-54)}=-6\pm3\sqrt{10}$

이때 $x>0$이므로 $x=-6+3\sqrt{10}$

따라서 작은 정사각형의 한 변의 길이는 $(-6+3\sqrt{10})$ cm이다.

15 답 $9-3\sqrt{5}$

$\overline{DC}=\overline{AB}=\overline{AE}=\overline{AD}-\overline{ED}=6-x$이고

$\square ABCD\backsim\square DEFC$이므로

$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{AD}:\overline{DC}$에서 $(6-x):x=6:(6-x)$

$(6-x)^2=6x,\ x^2-18x+36=0$

$\therefore x=-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-1\times36}=9\pm3\sqrt{5}$

이때 $x<6$이므로 $x=9-3\sqrt{5}$

16 답 $(-5+5\sqrt{5})$ cm

$\triangle$ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$\angle ABC=\angle C=\frac{1}{2}\times(180^\circ-36^\circ)=72^\circ$

$\therefore \angle ABD=\angle DBC=\frac{1}{2}\times72^\circ=36^\circ$

$\triangle$BCD에서 $\angle BDC=180^\circ-(36^\circ+72^\circ)=72^\circ$

$\overline{BC}=x$ cm라 하면 $\angle C=\angle BDC$이므로

$\overline{BD}=\overline{BC}=x$ cm

$\triangle$ABD에서 $\angle A=\angle ABD$이므로

$\overline{AD}=\overline{BD}=x$ cm

이때 $\triangle ABC\backsim\triangle BCD$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{CD}$에서 $10:x=x:(10-x)$

$10(10-x)=x^2,\ x^2+10x-100=0$

$\therefore x=-5\pm\sqrt{5^2-1\times(-100)}=-5\pm5\sqrt{5}$

이때 $x>0$이므로 $x=-5+5\sqrt{5}$

따라서 $\overline{BC}$의 길이는 $(-5+5\sqrt{5})$ cm이다.

17 답 -1

$2mx+my-4=0$에 $x=m,\ y=m-1$을 대입하면

$2m^2+m(m-1)-4=0$

$3m^2-m-4=0$, $(m+1)(3m-4)=0$

$\therefore m=-1$ 또는 $m=\frac{4}{3}$

이때 일차방정식 $2mx+my-4=0$의 그래프, 즉 직선 $y=-2x+\frac{4}{m}$가 제3사분면을 지나려면 $\frac{4}{m}<0$, 즉 $m<0$이어야 한다.

따라서 구하는 상수 m의 값은 -1이다.

18 답 $(3, 8)$

직선 $y=ax+b$가 두 점 $(9, 0)$, $(0, 12)$를 지나므로

$a=-\frac{4}{3}$, $b=12$ $\quad\therefore y=-\frac{4}{3}x+12$

점 P의 x좌표를 $c(c>0)$라 하면 점 P의 y좌표는 $-\frac{4}{3}c+12$이므로

$Q(c, 0)$, $R\left(0, -\frac{4}{3}c+12\right)$이다.

$\frac{1}{2}\times c\times\left(-\frac{4}{3}c+12\right)=12$에서

$-\frac{2}{3}c^2+6c=12$, $c^2-9c+18=0$

$(c-3)(c-6)=0$ $\quad\therefore c=3$ 또는 $c=6$

(i) $c=3$일 때, 점 P의 y좌표는

$-\frac{4}{3}\times3+12=8$

(ii) $c=6$일 때, 점 P의 y좌표는

$-\frac{4}{3}\times6+12=4$

이때 $\overline{PR}<\overline{PQ}$이므로 점 P의 좌표는 $(3, 8)$이다.

학교 시험 최상위 기출 도전 119쪽~120쪽

01 답 2022

[전략] $2022\times2024=(2023-1)(2023+1)$임을 이용하여 전개한 후 공통인 인수를 찾는다.

$x^2-2022x-2023=0$에서 $(x+1)(x-2023)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2023$, 즉 $m=2023$

$2023^2x^2+2022\times2024x-1=0$에서

$2023^2x^2+(2023-1)(2023+1)x-1=0$

$2023^2x^2+(2023^2-1)x-1=0$

$(x+1)(2023^2x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2023^2}$, 즉 $n=-1$

$\therefore m+n=2023+(-1)=2022$

02 답 $\frac{83}{9}$

[전략] 분모의 유리화를 이용하여 α의 값을 간단히 한 후 주어진 이차방정식에 대입하여 a의 값을 구한다.

$$\alpha=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+10}$$

$$=\frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}+\frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}+\cdots+\frac{\sqrt{99}-10}{(\sqrt{99}+10)(\sqrt{99}-10)}$$

$$=-\{(1-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{3}})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{2})+\cdots+(\cancel{\sqrt{99}}-10)\}$$

$$=-(1-10)=9$$

즉 $(a+2)x^2-(a^2+4a+2)x-18=0$의 한 근이 $x=9$이므로 이것을 대입하면

$81(a+2)-9(a^2+4a+2)-18=0$

$-9a^2+45a+126=0$, $a^2-5a-14=0$

$(a+2)(a-7)=0$ $\quad\therefore a=-2$ 또는 $a=7$

이때 (x^2의 계수)$\neq0$이어야 하므로 $a=7$

$(a+2)x^2-(a^2+4a+2)x-18=0$에 $a=7$을 대입하면

$9x^2-79x-18=0$, $(x-9)(9x+2)=0$

$\therefore x=9$ 또는 $x=-\frac{2}{9}$, 즉 $\beta=-\frac{2}{9}$

$\therefore \alpha-\beta=9-\left(-\frac{2}{9}\right)=\frac{83}{9}$

03 답 11

[전략] 주어진 식을 먼저 공통부분이 생기도록 일차식을 두 개씩 짝 지어 전개한다.

$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=155^2$에서

$\{n(n+3)\}\{(n+1)(n+2)\}+1=155^2$

$(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1=155^2$

$n^2+3n=A$로 치환한다.

$A(A+2)+1=155^2$

$A^2+2A+1=155^2$

$(A+1)^2=155^2$

$A+1=\pm155$

$\therefore A=-156$ 또는 $A=154$

즉 $n^2+3n=-156$ 또는 $n^2+3n=154$

그런데 n은 자연수이므로 $n^2+3n>0$

$\therefore n^2+3n=154$

$n^2+3n-154=0$에서 $(n-11)(n+14)=0$

$\therefore n=11$ 또는 $n=-14$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 11이다.

04 답 6

[전략] 근의 공식 유도 과정을 거꾸로 이용하여 이차방정식을 구한다.

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{3a}$에서 $3ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$

$3ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$, $(3ax+b)^2=b^2-4ac$
$9a^2x^2+6abx+b^2=b^2-4ac$, $9a^2x^2+6abx+4ac=0$
$\therefore\ 9ax^2+6bx+4c=0$
x^2의 계수가 $9a$이고 해가 $x=-\frac{2}{5}$ 또는 $x=\frac{1}{4}$인 이차방정식은
$9a\left(x+\frac{2}{5}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=0$
$9a\left(x^2+\frac{3}{20}x-\frac{1}{10}\right)=0$
$9ax^2+\frac{27}{20}ax-\frac{9}{10}a=0$
즉 $6b=\frac{27}{20}a$, $4c=-\frac{9}{10}a$이므로
$b=\frac{9}{40}a$, $c=-\frac{9}{40}a$
따라서 처음 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에 $b=\frac{9}{40}a$, $c=-\frac{9}{40}a$를 대입하면
$ax^2+\frac{9}{40}ax-\frac{9}{40}a=0$
$40x^2+9x-9=0$, $(8x-3)(5x+3)=0$
$\therefore\ x=\frac{3}{8}$ 또는 $x=-\frac{3}{5}$
따라서 $\alpha=\frac{3}{8}$, $\beta=-\frac{3}{5}$이므로
$8\alpha-5\beta=8\times\frac{3}{8}-5\times\left(-\frac{3}{5}\right)=6$

다른 풀이

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{3}{2}\times\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{3a}$
즉 옳은 근은 근의 공식을 잘못 적용한 근의 $\frac{3}{2}$배이므로
$-\frac{2}{5}\times\frac{3}{2}=-\frac{3}{5}$, $\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{8}$,
즉 $\alpha=\frac{3}{8}$, $\beta=-\frac{3}{5}$이다.
$\therefore\ 8\alpha-5\beta=8\times\frac{3}{8}-5\times\left(-\frac{3}{5}\right)=6$

05 답 (1) $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원 (2) $b\left(1-\frac{x}{400}\right)$개 (3) 20 %

[전략] (a원에서 x % 인상한 가격)$=a+a\times\frac{x}{100}$
$=a\left(1+\frac{1}{100}x\right)$(원)

(1) 작년 도넛의 가격 a원에서 x % 인상한 올해 도넛의 가격은
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원이다.

(2) 작년 도넛의 판매량 b개에서 $\frac{1}{4}x$ % 감소한 올해 도넛의 판매량은
$b\left(1-\frac{1}{100}\times\frac{x}{4}\right)=b\left(1-\frac{x}{400}\right)$(개)이다.

(3) $a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{400}\right)=ab\left(1+\frac{14}{100}\right)$에서
$\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{400}\right)=\frac{57}{50}$
$1+\frac{3}{400}x-\frac{1}{40000}x^2=\frac{57}{50}$
$x^2-300x+5600=0$, $(x-20)(x-280)=0$
$\therefore\ x=20$ 또는 $x=280$
이때 $x<100$이므로 $x=20$
따라서 올해 도넛의 가격을 작년보다 20 % 올렸다.

06 답 3

[전략] 5초 후 $\overline{BC}=\overline{CF}$임을 이용하여 $\overline{BF}$의 길이를 구한다.
점 C가 출발한 지 5초 후에 두 정사각형의 넓이가 같아지므로
$\overline{CF}=\overline{BC}=2\times5=10$ (cm)
$\therefore\ \overline{BF}=\overline{BC}+\overline{CF}=10+10=20$ (cm)
x초 후에 두 정사각형의 넓이의 합이 218 cm^2가 된다고 하면
$\overline{BC}=2x$ cm, $\overline{CF}=(20-2x)$ cm이므로
$(2x)^2+(20-2x)^2=218$
$4x^2+4x^2-80x+400=218$, $8x^2-80x+182=0$
$4x^2-40x+91=0$, $(2x-7)(2x-13)=0$
$\therefore\ x=\frac{7}{2}$ 또는 $x=\frac{13}{2}$
따라서 $a=\frac{7}{2}$, $b=\frac{13}{2}$이므로
$b-a=\frac{13}{2}-\frac{7}{2}=3$

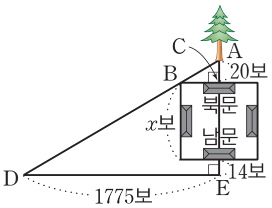
07 답 $\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$ cm

[전략] △ABE와 △BCA는 이등변삼각형임을 이용하여 $\overline{EP}$의 길이를 구하고, △PAB∽△ABE (AA 닮음)임을 이용한다.
$\overline{AE}=\overline{AB}=\overline{BC}=3$ cm이므로 △ABE와 △BCA는 이등변삼각형이다.
이때 $\angle EAB=\angle ABC=\frac{180^\circ\times(5-2)}{5}=108^\circ$이므로
$\angle ABE=\angle AEB=\angle BAC=\angle BCA$
$=\frac{1}{2}\times(180^\circ-108^\circ)=36^\circ$
△EAP에서
$\angle EAP=108^\circ-36^\circ=72^\circ$,
$\angle EPA=180^\circ-(72^\circ+36^\circ)=72^\circ$
즉 $\angle EAP=\angle EPA$이므로 $\overline{EP}=\overline{EA}=3$ cm
또 △PAB∽△ABE (AA 닮음)이므로
$\overline{PA}=x$ cm라 하면 $\overline{PB}=\overline{PA}=x$ cm이고
$\overline{PA}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{BE}$에서 $x:3=3:(3+x)$
$x(3+x)=9$, $x^2+3x-9=0$
$\therefore\ x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-9)}}{2\times1}=\frac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}$
이때 $x>0$이므로 $x=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$
따라서 $\overline{AP}$의 길이는 $\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$ cm이다.

08 답 250보

[전략] 성벽의 한 변의 길이를 x보로 놓고 x에 대한 이차방정식을 세운다.

문제 상황을 그림으로 나타내면 다음 그림과 같다.



성벽의 한 변의 길이를 x보라 하면

$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AC} : \overline{AE} = \overline{BC} : \overline{DE}$에서

$20 : (34+x) = \frac{x}{2} : 1775$

$\frac{x}{2}(34+x) = 1775 \times 20$

$x^2 + 34x - 71000 = 0$

$(x+284)(x-250) = 0$

$\therefore x = -284$ 또는 $x = 250$

이때 $x > 0$이므로 $x = 250$

따라서 성벽의 한 변의 길이는 250보이다.

참고

$\triangle ABC$와 $\triangle ADE$에서

$\angle A$는 공통, $\angle ACB = \angle AED = 90^\circ$

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADE$ (AA 닮음)

6 이차함수

01 | 이차함수와 그 그래프

개념 확인

123쪽

01 답 ③

① $y = -x(x+2) + x^2 = -x^2 - 2x + x^2 = -2x$

③ $y = x(5-x) = 5x - x^2$

④ $y = (x+1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$

⑤ $y = x^3 - (x-1)^2 = x^3 - (x^2 - 2x + 1) = x^3 - x^2 + 2x - 1$

따라서 이차함수인 것은 ③이다.

02 답 -4

$f(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) + 6 = 5$

$f(1) = 1^2 + 2 \times 1 + 6 = 9$

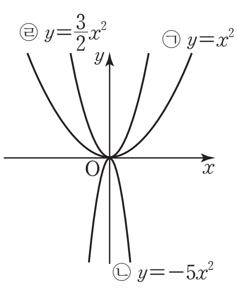
$\therefore f(-1) - f(1) = 5 - 9 = -4$

03 답 ④

①, ③ $\left|-\frac{2}{3}\right| < |1| < \left|\frac{3}{2}\right| < |-5| = |5| < |6|$이므로 폭이 가장 넓은 것은 ㉥이고, x축에 서로 대칭인 것은 ㉡, ㉤이다.

④ ㉠, ㉡, ㉣의 그래프를 좌표평면 위에 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 ㉣은 ㉠과 ㉡ 사이에 있지 않다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.



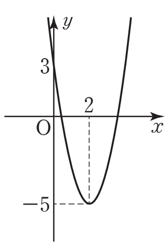
04 답 ③

③ 3

05 답 ③

$y = 2(x-2)^2 - 5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 그래프가 지나지 않는 사분면은 제3사분면이다.



06 답 ㉡과 ㉤과 ㉥

평행이동하여 완전히 포개어지는 이차함수의 그래프는 모양과 폭이 같으므로 그래프의 식의 x^2의 계수가 같다.

따라서 x^2의 계수가 같은 것끼리 짝 지으면 ㉡과 ㉤과 ㉥이다.

적중 & 심화 유형 연습

124쪽~132쪽

01 답 0, 4

$y=k^2x^2-4k(x-1)^2=(k^2-4k)x^2+8kx-4k$
이 함수가 x에 대한 이차함수가 되려면
$k^2-4k\neq0$, $k(k-4)\neq0$ $\quad\therefore k\neq0$이고 $k\neq4$
따라서 x에 대한 이차함수가 될 수 없는 상수 k의 값은 0, 4이다.

02 답 ①, ④

① $y^2=x \quad \therefore y=\pm\sqrt{x}$
② $y=4x(x+2)=4x^2+8x$
③ $y=\dfrac{x(x-3)}{2}=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x$
④ $y=(x+5)^2-x^2=10x+25$
⑤ $y=\pi\times x^2\times7=7\pi x^2$
따라서 y가 x에 대한 이차함수가 아닌 것은 ①, ④이다.

03 답 8

$f(1)=a\times1^2+1+1=a+2$
$a+2=3$에서 $a=1$
즉 $f(x)=x^2+x+1$이므로
$f(2)=2^2+2+1=7 \quad \therefore b=7$
$\therefore a+b=1+7=8$

04 답 1

$f(a)=a^2+a\times a+4a-2=2a^2+4a-2$
즉 $2a^2+4a-2=4$에서 $2a^2+4a-6=0$
$a^2+2a-3=0$, $(a+3)(a-1)=0$
$\therefore a=-3$ 또는 $a=1$
따라서 양수 a의 값은 1이다.

05 답 ①

$y=ax^2$의 그래프가 $y=-3x^2$의 그래프보다 폭이 넓고 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$의 그래프보다 폭이 좁으려면 $-3<a<-\dfrac{1}{2}$이어야 한다.
따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

06 답 ①

$y=ax^2$의 그래프가 색칠한 부분에 있으려면
(i) $a>0$인 경우 $y=ax^2$의 그래프의 폭이 $y=4x^2$의 그래프의 폭보다 넓어야 하므로 $0<a<4$
(ii) $a<0$인 경우 $y=ax^2$의 그래프의 폭이 $y=-x^2$의 그래프의 폭보다 넓어야 하므로 $-1<a<0$
따라서 (i), (ii)에 의하여 $-1<a<0$ 또는 $0<a<4$이어야 하므로 그래프가 색칠한 부분에 있지 않은 것은 ①이다.

07 답 $a<b<d<c$

(i) 위로 볼록한 두 이차함수 $y=ax^2$, $y=bx^2$의 그래프 중 $y=ax^2$의 그래프의 폭이 더 좁으므로
$|a|>|b| \quad \therefore a<b<0$
(ii) 아래로 볼록한 두 이차함수 $y=cx^2$, $y=dx^2$의 그래프 중 $y=cx^2$의 그래프의 폭이 더 좁으므로
$|c|>|d| \quad \therefore 0<d<c$
따라서 (i), (ii)에 의하여 $a<b<d<c$

08 답 ②

① $y=-2x^2$의 그래프는 제3사분면과 제4사분면을 지난다.
③ $\left|-\dfrac{1}{3}\right|<|-3|$이므로 $y=-\dfrac{1}{3}x^2$의 그래프의 폭은 $y=-3x^2$의 그래프의 폭보다 넓다.
④ $y=-\dfrac{1}{2}x^2$의 그래프와 $y=2x^2$의 그래프는 원점에서 만난다.
⑤ $y=\dfrac{1}{2}x^2$의 그래프는 $x>0$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

09 답 (1) $-\dfrac{4}{9}$ (2) $\pm3\sqrt{2}$

(1) $y=ax^2$의 그래프가 점 $(3, -4)$를 지나므로
$-4=a\times3^2 \quad \therefore a=-\dfrac{4}{9}$ …… ❶
(2) $y=-\dfrac{4}{9}x^2$의 그래프가 점 $(m, -8)$을 지나므로
$-8=-\dfrac{4}{9}m^2$, $m^2=18$
$\therefore m=\pm3\sqrt{2}$ …… ❷

채점 기준	비율
❶ 상수 a의 값 구하기	40 %
❷ m의 값 구하기	60 %

10 답 ④

① 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$이다.
② 축의 방정식은 $x=0$이다.
③ $a<0$일 때, 위로 볼록한 포물선이다.
⑤ $y=-ax^2$의 그래프와 x축에 서로 대칭이다.

11 답 6

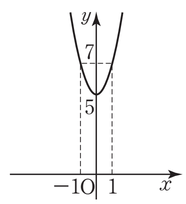
$y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=ax^2-4$
이 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로
$2=a\times1^2-4 \quad \therefore a=6$

12 답) $\frac{13}{3}$

$y=ax^2+q$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(0, 4)$이므로 $q=4$
즉 $y=ax^2+4$의 그래프가 점 $(6, 16)$을 지나므로
$16=a\times 6^2+4$, $36a=12$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$
$\therefore a+q=\frac{1}{3}+4=\frac{13}{3}$

13 답) ⑤

③ $y=2x^2+5$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면과 제2사분면을 지난다.



④ $y=2x^2+5$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(0, 5)$이므로 $y=x+5$에 $x=0$, $y=5$를 대입하면
$5=0+5$
즉 꼭짓점이 $y=x+5$의 그래프 위에 있다.
⑤ $y=2x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

14 답) $-\frac{5}{4}$

$y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=a(x-p)^2$
이 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2, 0)$이므로 $p=-2$
즉 $y=a(x+2)^2$의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로
$3=a\times(0+2)^2$, $4a=3$ $\quad\therefore a=\frac{3}{4}$
$\therefore a+p=\frac{3}{4}+(-2)=-\frac{5}{4}$

15 답) 4, 30

$y=3x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=3(x-p)^2$
이 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로
$3=3\times(2-p)^2$, $(2-p)^2=1$
$2-p=\pm1$ $\quad\therefore p=1$ 또는 $p=3$
(i) $p=1$일 때, $y=3(x-1)^2$의 그래프가 점 $(0, q)$를 지나므로
$q=3\times(0-1)^2=3$
$\therefore p+q=1+3=4$
(ii) $p=3$일 때, $y=3(x-3)^2$의 그래프가 점 $(0, q)$를 지나므로
$q=3\times(0-3)^2=27$
$\therefore p+q=3+27=30$
따라서 (i), (ii)에 의하여 $p+q$의 값을 모두 구하면 4, 30이다.

16 답) $-\frac{1}{2}$

$y=(a+1)x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=(a+1)(x+3)^2$
이 그래프가 점 $(-1, 2)$를 지나므로
$2=(a+1)\times(-1+3)^2$, $4a+4=2$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$

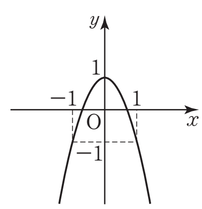
17 답) ④

① 꼭짓점의 좌표는 $(1, 0)$이다.
② 축의 방정식은 $x=1$이다.
③ 아래로 볼록한 포물선이다.
⑤ $y=2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

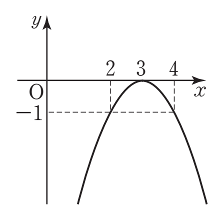
18 답) ①, ④

각 이차함수의 그래프를 그리면 다음과 같다.

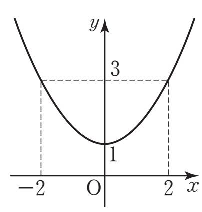
① $y=-2x^2+1$



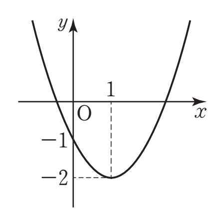
② $y=-(x-3)^2$



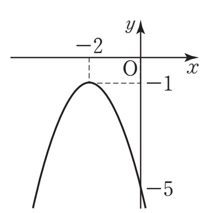
③ $y=\frac{1}{2}x^2+1$



④ $y=(x-1)^2-2$



⑤ $y=-(x+2)^2-1$



따라서 그래프가 모든 사분면을 지나는 것은 ①, ④이다.

19 답) -5

$y=\frac{1}{3}(x-p)^2+q$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-2$이므로
$p=-2$
즉 $y=\frac{1}{3}(x+2)^2+q$의 그래프가 점 $(1, 0)$을 지나므로
$0=\frac{1}{3}\times(1+2)^2+q$ $\quad\therefore q=-3$
$\therefore p+q=-2+(-3)=-5$

20 답 -6

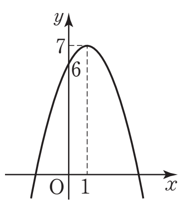
$y=a(x+b)^2+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-4, 4)$이므로
$-b=-4$, $c=4$ $\quad\therefore b=4$, $c=4$
즉 $y=a(x+4)^2+4$의 그래프가 점 $(0, -2)$를 지나므로
$-2=a\times(0+4)^2+4$, $16a=-6$ $\quad\therefore a=-\frac{3}{8}$
$\therefore abc=-\frac{3}{8}\times4\times4=-6$

21 답 6

$y=\frac{1}{4}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\frac{1}{4}(x-3)^2-8$
이 그래프가 점 $(a, 1)$을 지나므로
$1=\frac{1}{4}\times(a-3)^2-8$, $\frac{1}{4}(a-3)^2=9$
$(a-3)^2=36$, $a-3=\pm6$ $\quad\therefore a=9$ 또는 $a=-3$
따라서 모든 a의 값의 합은 $9+(-3)=6$

22 답 ⑤

① 축의 방정식은 $x=1$이다.
② 꼭짓점의 좌표는 $(1, 7)$이다.
③ $y=-(x-1)^2+7$에 $x=0$을 대입하면
$y=-(0-1)^2+7=6$, 즉 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 6)$이다.
④ $x<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
⑤ 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 모든 사분면을 지난다.
따라서 옳은 것은 ⑤이다.



23 답 $(0, 5)$

$y=2(x-3)^2+1$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=2(x-3+1)^2+1-4=2(x-2)^2-3$
$y=2(x-2)^2-3$에 $x=0$을 대입하면
$y=2\times(0-2)^2-3=5$
따라서 이 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 5)$이다.

> **100점 TIP**
> $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=a(x-p-m)^2+q+n$

24 답 -2

$y=a(x-2)^2+1$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=a(x-2-1)^2+1-2=a(x-3)^2-1$ …… ❶
이 식이 $y=2(x+b)^2+c$와 일치하므로
$a=2$, $b=-3$, $c=-1$ …… ❷
$\therefore a+b+c=2+(-3)+(-1)=-2$ …… ❸

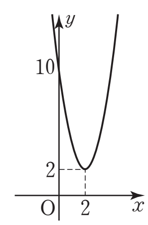
채점 기준	비율
❶ $y=a(x-2)^2+1$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식 구하기	60 %
❷ a, b, c의 값 각각 구하기	30 %
❸ $a+b+c$의 값 구하기	10 %

25 답 5

$y=-(x+2)^2-8$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-(x+2-m)^2-8+3=-(x+2-m)^2-5$
이 그래프가 점 $(-1, -21)$을 지나므로
$-21=-(-1+2-m)^2-5$, $(-m+1)^2=16$
$-m+1=\pm4$ $\quad\therefore m=-3$ 또는 $m=5$
따라서 양수 m의 값은 5이다.

26 답 ②

$y=2(x-5)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=2(x-5+3)^2+2=2(x-2)^2+2$
② 축의 방정식은 $x=2$이다.
③ $y=2(x-2)^2+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면과 제2사분면을 지난다.
④ $y=2(x-2)^2+2$에 $x=0$을 대입하면
$y=2\times(0-2)^2+2=10$
즉 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 10)$이다.
따라서 옳지 않은 것은 ②이다.



27 답 1

$y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 x축에 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=\frac{1}{2}x^2$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x^2$이므로 $a=-\frac{1}{2}$
이때 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프가 점 $(-2, b)$를 지나므로
$b=-\frac{1}{2}\times(-2)^2=-2$
$\therefore ab=-\frac{1}{2}\times(-2)=1$

28 답 6

$y=3x^2$의 그래프를 x축에 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=3x^2$, 즉 $y=-3x^2$
$y=-3x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-3(x+2)^2+k$
이 그래프가 점 $(-1, 3)$을 지나므로
$3=-3\times(-1+2)^2+k$ $\quad\therefore k=6$

29 답 ③

$y=3(x-2)^2-4$의 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=3(x-2)^2-4-4=3(x-2)^2-8$
이 그래프를 y축에 대칭이동한 그래프의 식은
$y=3(-x-2)^2-8=3(x+2)^2-8$
③ $y=3(x+2)^2-8$에 $x=-1$, $y=-1$을 대입하면
$-1\neq3\times(-1+2)^2-8$

30 답 $x<8$

$y=-(x-8)^2-4$의 그래프는 위로 볼록하고 축의 방정식이 $x=8$이므로 $x<8$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

31 답 $x<3$

$y=2(x-3)^2+5$의 그래프는 아래로 볼록하고 축의 방정식이 $x=3$이므로 $x<3$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

32 답 $a>0$, $p>0$, $q<0$

그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$
꼭짓점 (p, q)가 제4사분면 위에 있으므로 $p>0$, $q<0$

33 답 ⑤

그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
꼭짓점 (p, q)가 제1사분면 위에 있으므로 $p>0$, $q>0$
① $ap<0$
② $apq<0$
③ $p+q>0$
④ $x=0$일 때, $y>0$이므로 $ap^2+q>0$
⑤ $x=1$일 때, $y>0$이므로 $a(1-p)^2+q>0$
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

34 답 ③

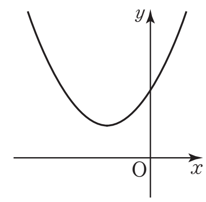
$y=ax+b$의 그래프에서 $a>0$, $b<0$
따라서 $y=a(x+b)^2$의 그래프는 $a>0$이므로 아래로 볼록하고, 꼭짓점의 좌표가 $(-b, 0)$이므로 꼭짓점이 x축 위에 있으면서 y축보다 오른쪽에 있다.

35 답 ③

$y=a(x-p)^2$의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
꼭짓점 $(p, 0)$이 y축보다 오른쪽에 있으므로 $p>0$
따라서 $y=ax^2+p$의 그래프는 $a<0$이므로 위로 볼록하고, 꼭짓점의 좌표가 $(0, p)$이므로 y축 위에 있으면서 x축보다 위에 있다.

36 답 ③, ④

$y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
꼭짓점 (p, q)가 제1사분면 위에 있으므로 $p>0$, $q>0$
따라서 $y=q(x-a)^2+p$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면과 제4사분면을 지나지 않는다.



37 답 (1) $y=x^2+x+2$ (2) 932개

(1) 각 단계의 도형을 만들기 위해 이어 붙인 정사각형의 개수는 다음과 같다.
[1단계] $2^2-0=(1+1)^2-(1-1)$(개)
[2단계] $3^2-1=(2+1)^2-(2-1)$(개)
[3단계] $4^2-2=(3+1)^2-(3-1)$(개)
⋮
[x단계] $(x+1)^2-(x-1)$(개)
$\therefore y=x^2+x+2$
(2) $y=x^2+x+2$에 $x=30$을 대입하면 $y=30^2+30+2=932$
따라서 30단계의 도형을 만들기 위해 이어 붙인 정사각형의 개수는 932개이다.

38 답 $y=2x^2-x$

세로의 길이가 1, 2, 3, 4, …일 때, 가로의 길이는 1, 3, 5, 7, …이다.
즉 세로의 길이가 x일 때, 가로의 길이는 $2x-1$이므로
$y=x(2x-1)=2x^2-x$

39 답 -9

$y=\frac{2}{3}x^2$의 그래프는 y축에 대칭이므로
$A(m, n)$이면 $B(-m, n)$
이때 $\overline{AB}=6$이므로 $-2m=6$ $\therefore m=-3$
즉 점 $A(-3, n)$이 $y=\frac{2}{3}x^2$의 그래프 위의 점이므로
$n=\frac{2}{3}\times(-3)^2=6$
$\therefore m-n=-3-6=-9$

40 답 18

점 A의 y좌표가 k이므로 점 A의 좌표를 (a, k)라 하면
$\overline{AB}=3$이므로 점 B의 좌표는 $(a+3, k)$
점 A가 $y=2x^2$의 그래프 위의 점이므로 $k=2a^2$ …… ㉠
점 B가 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프 위의 점이므로 $k=\frac{1}{2}(a+3)^2$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $2a^2=\frac{1}{2}(a+3)^2$이므로
$3a^2-6a-9=0$, $a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$
그런데 두 점 A, B는 제1사분면 위의 점이므로 $a=3$
$\therefore k=2\times3^2=18$

41 답 $B(1+\sqrt{5}, 20)$, $a=\frac{5(3-\sqrt{5})}{2}$

점 A의 x좌표가 2이므로 $y=5x^2$에 $x=2$를 대입하면
$y=5\times2^2=20 \qquad \therefore A(2, 20)$
점 C의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같으므로 $y=x^2$에 $y=20$을 대입하면
$20=x^2 \qquad \therefore x=2\sqrt{5}\ (\because x>0)$
이때 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로 점 B의 x좌표는
$\frac{2+2\sqrt{5}}{2}=1+\sqrt{5}$
점 $B(1+\sqrt{5}, 20)$이 $y=ax^2$의 그래프 위의 점이므로
$20=a(1+\sqrt{5})^2$

$$\therefore a=\frac{20}{(1+\sqrt{5})^2}=\frac{20}{6+2\sqrt{5}}=\frac{10}{3+\sqrt{5}}=\frac{10(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\frac{10(3-\sqrt{5})}{4}=\frac{5(3-\sqrt{5})}{2}$$

42 답 $(3, 3)$

점 P의 x좌표를 a라 하면 $P\left(a, \frac{1}{3}a^2\right)$
$\triangle POA$의 넓이가 12이므로
$\frac{1}{2}\times8\times\frac{1}{3}a^2=12$
$a^2=9 \qquad \therefore a=\pm3$
그런데 점 P는 제1사분면 위의 점이므로 $a=3 \qquad \therefore P(3, 3)$

43 답 $\frac{48}{7}$

점 D의 x좌표를 $a(a>0)$라 하면
$D(a, 2a^2)$, $A(-a, 2a^2)$, $B\left(-a, -\frac{1}{3}a^2\right)$, $C\left(a, -\frac{1}{3}a^2\right)$
이때 $\overline{AD}=a-(-a)=2a$, $\overline{CD}=2a^2-\left(-\frac{1}{3}a^2\right)=\frac{7}{3}a^2$이고
$\overline{AD}=\overline{CD}$이므로 $2a=\frac{7}{3}a^2 \qquad \therefore a=\frac{6}{7}$
따라서 정사각형 ABCD의 둘레의 길이는
$4\overline{AD}=4\times2a=8a=8\times\frac{6}{7}=\frac{48}{7}$

44 답 3

점 B의 x좌표를 $a(a>0)$라 하면
$B\left(a, \frac{3}{2}a^2\right)$, $A\left(-a, \frac{3}{2}a^2\right)$, $C(-a, 0)$, $D(a, 0)$
이때 $\overline{AB}=a-(-a)=2a$, $\overline{BD}=\frac{3}{2}a^2$이고
□ACDB의 둘레의 길이가 7이므로
$2(\overline{AB}+\overline{BD})=7$에서 $2\left(2a+\frac{3}{2}a^2\right)=7$
$3a^2+4a-7=0$, $(a-1)(3a+7)=0 \qquad \therefore a=1\ (\because a>0)$
$\therefore$ □ACDB$=\overline{AB}\times\overline{BD}=2a\times\frac{3}{2}a^2=3a^3=3$

45 답 18

$y=ax^2$의 그래프가 점 $A(-2, 1)$을 지나므로
$1=a\times(-2)^2 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$, 즉 $y=\frac{1}{4}x^2$ …… ❶
$\overline{CD}=8$이므로 점 C의 x좌표는 $\frac{1}{2}\times8=4$
$y=\frac{1}{4}x^2$에 $x=4$를 대입하면
$y=\frac{1}{4}\times4^2=4 \qquad \therefore C(4, 4)$ …… ❷
$\therefore$ (사다리꼴 ABCD의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(8+4)\times(4-1)$
$=18$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ a의 값 구하기	40 %
❷ 점 C(또는 점 D)의 좌표 구하기	40 %
❸ 사다리꼴 ABCD의 넓이 구하기	20 %

46 답 54

$\overline{AD}$는 x축과 평행하므로 점 D의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같다.
즉 점 D의 좌표를 $(a, 12)(a>0)$라 하면
$12=\frac{1}{3}a^2$, $a^2=36 \qquad \therefore a=6\ (\because a>0)$
□ABCD가 평행사변형이므로 $\overline{BC}=\overline{AD}=6$
이때 점 C의 x좌표는 $\frac{1}{2}\times6=3$이므로
$y=\frac{1}{3}x^2$에 $x=3$을 대입하면
$y=\frac{1}{3}\times3^2=3 \qquad \therefore C(3, 3)$
$\therefore$ □ABCD$=6\times(12-3)=54$

47 답 2

$y=x^2-4$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0, -4)$이고
$y=a(x-p)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(p, 0)$이다.
$y=x^2-4$의 그래프가 점 $(p, 0)$을 지나므로
$0=p^2-4 \qquad \therefore p=-2\ (\because p<0)$
$y=a(x+2)^2$의 그래프가 점 $(0, -4)$를 지나므로
$-4=a\times(0+2)^2 \qquad \therefore a=-1$
$\therefore ap=-1\times(-2)=2$

48 답 8

$y=(x-2)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2, 0)$이고
$y=a(x+1)^2+b$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, b)$이다.
$y=(x-2)^2$의 그래프가 점 $(-1, b)$를 지나므로
$b=(-1-2)^2=9$
$y=a(x+1)^2+9$의 그래프가 점 $(2, 0)$을 지나므로
$0=a\times(2+1)^2+9$, $9a=-9 \qquad \therefore a=-1$
$\therefore a+b=-1+9=8$

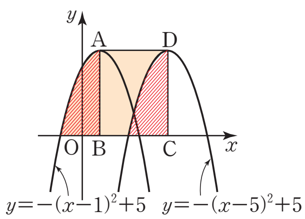
49 답 20

$y=-(x-5)^2+5$의 그래프는 $y=-(x-1)^2+5$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 색칠한 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.

이때 $\mathrm{A}(1, 5)$, $\mathrm{B}(1, 0)$, $\mathrm{C}(5, 0)$, $\mathrm{D}(5, 5)$이므로 색칠한 부분의 넓이는

$\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=5\times(5-1)=20$



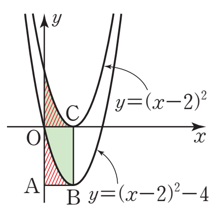
50 답 8

$y=(x-2)^2-4$의 그래프는 $y=(x-2)^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 색칠한 부분의 넓이는 직사각형 OABC의 넓이와 같다.

이때 $\mathrm{A}(0, -4)$, $\mathrm{B}(2, -4)$, $\mathrm{C}(2, 0)$이므로 색칠한 부분의 넓이는

$\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}=4\times2=8$



51 답 $6\sqrt{3}$

$y=x^2-3$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

$y=x^2-3$의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하면

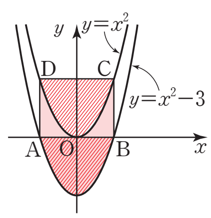
$x^2-3=0$에서 $x=\pm\sqrt{3}$

$\therefore$ $\mathrm{A}(-\sqrt{3}, 0)$, $\mathrm{B}(\sqrt{3}, 0)$

오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 색칠한 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.

이때 $\mathrm{C}(\sqrt{3}, 3)$, $\mathrm{D}(-\sqrt{3}, 3)$이므로 색칠한 부분의 넓이는

$\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{3}\times3=6\sqrt{3}$



52 답 $a\le-3$

$y=a(x-1)^2+3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 3)$이므로 꼭짓점은 제1사분면 위에 있다.

이때 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 위로 볼록해야 하므로 $a<0$ …… ㉠

또 y축과의 교점이 원점이거나 x축보다 아래쪽에 있어야 하므로

$a\times(0-1)^2+3\le0$ $\quad\therefore a\le-3$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 상수 a의 값의 범위는 $a\le-3$

53 답 $0<a<\frac{5}{4}$

$y=a(x+2)^2-5$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2, -5)$이므로 꼭짓점은 제3사분면 위에 있다.

이때 그래프가 모든 사분면을 지나려면 아래로 볼록해야 하므로

$a>0$ …… ㉠

또 y축과의 교점이 x축보다 아래쪽에 있어야 하므로

$a\times(0+2)^2-5<0$ $\quad\therefore a<\frac{5}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 상수 a의 값의 범위는 $0<a<\frac{5}{4}$

적중 & 심화 실전 TEST

133쪽~135쪽

01 답 ④

$y=2m^2(x-1)^2-6m(x^2+1)$

$=(2m^2-6m)x^2-4m^2x+(2m^2-6m)$

이 함수가 x에 대한 이차함수가 되려면 $2m^2-6m\neq0$

$m(m-3)\neq0$ $\quad\therefore m\neq0$이고 $m\neq3$

02 답 ③

$y=ax^2$과 $y=dx^2$의 그래프가 x축에 서로 대칭이므로 $d=-a$

$y=bx^2$과 $y=cx^2$의 그래프가 x축에 서로 대칭이므로 $c=-b$

$y=ax^2$과 $y=bx^2$의 그래프는 아래로 볼록한 포물선이고 $y=ax^2$의 폭이 더 좁으므로 $0<b<a$

$y=cx^2$과 $y=dx^2$의 그래프는 위로 볼록한 포물선이고 $y=dx^2$의 폭이 더 좁으므로 $d<c<0$

$\therefore d<c<0<b<a$

① $ac<0$

② $|d|=|a|$이고 $|a|>|b|$이므로 $|b|<|d|$

③ $a+b+c+d=a+b+(-b)+(-a)=0$

④ 네 그래프의 축은 모두 y축이다.

⑤ a, b, c, d 중 가장 큰 값은 a이다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

03 답 -1

$y=2x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2x^2-3$

이 그래프가 점 $(-m, m)$을 지나므로

$m=2\times(-m)^2-3$, $2m^2-m-3=0$

$(m+1)(2m-3)=0$ $\quad\therefore m=-1$ 또는 $m=\frac{3}{2}$

그런데 점 $(-m, m)$은 제4사분면 위의 점이므로 $m=-1$

04 답 14

$y=-(x-p)^2+q$의 그래프가 직선 $x=3$을 축으로 하므로 $p=3$

$y=-3(x+1)^2+5$에 $x=0$을 대입하면

$y=-3\times(0+1)^2+5=2$

즉 $y=-(x-3)^2+q$의 그래프와 y축 위의 점 $(0, 2)$에서 만난다.

$y=-(x-3)^2+q$에 $x=0$, $y=2$를 대입하면

$2=-(0-3)^2+q \qquad \therefore q=11$

$\therefore p+q=3+11=14$

05 답 -24

$y=-4(x-5)^2+7$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-4(x-5-m)^2+7+n$

이 식이 $y=a(x+5)^2-3$과 일치하므로

$-4=a$, $-5-m=5$, $7+n=-3$에서

$a=-4$, $m=-10$, $n=-10$

$\therefore a+m+n=-4+(-10)+(-10)=-24$

06 답 2

$y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2$ …… ❶

$y=-\frac{1}{2}(x+3)^2$의 그래프를 x축에 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=-\frac{1}{2}(x+3)^2$, 즉 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2$ …… ❷

이 그래프가 점 $(a-2, 2a+2)$를 지나므로

$2a+2=\frac{1}{2}(a-2+3)^2$, $4a+4=(a+1)^2$, $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=3$ …… ❸

따라서 모든 a의 값의 합은 $-1+3=2$ …… ❹

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식 구하기	30 %
❷ 대칭이동한 그래프의 식 구하기	30 %
❸ a의 값 구하기	30 %
❹ 모든 a의 값의 합 구하기	10 %

07 답 ⑤

그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

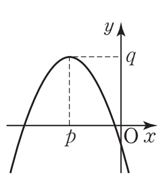
꼭짓점 $(-b, 0)$이 y축보다 오른쪽에 있으므로

$-b>0 \qquad \therefore b<0$

따라서 $y=-bx^2-a$의 그래프는 $-b>0$이므로 아래로 볼록하고 꼭짓점의 좌표가 $(0, -a)$이므로 꼭짓점은 y축 위에 있으면서 x축보다 아래쪽에 있다. 즉 모든 사분면을 지난다.

08 답 ㉢, ㉣

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 지나지 않는 사분면이 제1사분면뿐이려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 그래프가 위로 볼록해야 하므로 $a<0$

또 꼭짓점 (p, q)가 제2사분면 위에 있어야 하므로 $p<0$, $q>0$

㉢, ㉣ $a<0$, $p<0$, $q>0$이므로

$apq>0$, $ap-pq>0$

㉤ $x=0$일 때, $y\le0$이므로 $ap^2+q\le0$

이때 $p<0$이므로 $p(ap^2+q)\ge0$

따라서 옳지 않은 것은 ㉢, ㉣이다.

09 답 (1) $y=2x^2+2x+1$ (2) 11단계

(1) 각 단계에서 사용한 바둑돌의 개수를 검은 바둑돌 개수와 흰 바둑돌 개수의 합으로 나타내면

[1단계] $1+4=1^2+2^2$(개)

[2단계] $4+9=2^2+3^2$(개)

[3단계] $9+16=3^2+4^2$(개)

⋮

[x단계] $x^2+(x+1)^2$(개)

$\therefore y=x^2+(x+1)^2=2x^2+2x+1$ …… ❶

(2) $y=2x^2+2x+1$에 $y=265$를 대입하면

$265=2x^2+2x+1$, $2x^2+2x-264=0$

$x^2+x-132=0$, $(x-11)(x+12)=0$

$\therefore x=11$ 또는 $x=-12$

그런데 x는 자연수이므로 $x=11$

따라서 사용한 바둑돌의 개수가 265개인 단계는 11단계이다. …… ❷

채점 기준	비율
❶ y를 x의 식으로 나타내기	50 %
❷ 사용한 바둑돌의 개수가 265개인 단계 구하기	50 %

10 답 16

점 A의 y좌표가 k이므로 점 A의 좌표를 (a, k)라 하면

$\overline{AB}=6$이므로 점 B의 좌표는 $(a+6, k)$

점 A가 $y=4x^2$의 그래프 위의 점이므로 $k=4a^2$ …… ㉠

점 B가 $y=\frac{1}{4}x^2$의 그래프 위의 점이므로 $k=\frac{1}{4}(a+6)^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $4a^2=\frac{1}{4}(a+6)^2$이므로

$15a^2-12a-36=0$, $5a^2-4a-12=0$

$(a-2)(5a+6)=0 \qquad \therefore a=2$ 또는 $a=-\frac{6}{5}$

그런데 두 점 A, B는 제1사분면 위의 점이므로 $a=2$

$\therefore k=4\times2^2=16$

11 답 $\frac{16}{3}$

$y=\frac{4}{3}x^2$에 $y=3$을 대입하면

$3=\frac{4}{3}x^2$, $x^2=\frac{9}{4} \qquad \therefore x=\pm\frac{3}{2}$

즉 $E\left(\frac{3}{2}, 3\right)$이므로

점 D의 x좌표는 $\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ $\quad\therefore D\left(\frac{3}{4}, 3\right)$

따라서 이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 점 $D\left(\frac{3}{4}, 3\right)$을 지나므로

$3=a\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$ $\quad\therefore a=\frac{16}{3}$

12 답 $-2+2\sqrt{5}$

점 D의 좌표를 $(a, 0)(a>0)$이라 하면

$A(a, -a^2+4)$, $C(-a, 0)$, $B(-a, -a^2+4)$

이때 $\overline{AB}=a-(-a)=2a$, $\overline{AD}=-a^2+4$이고

$\overline{AB}=\overline{AD}$이므로

$2a=-a^2+4$, $a^2+2a-4=0$

$\therefore a=-1\pm\sqrt{1^2-1\times(-4)}=-1\pm\sqrt{5}$

그런데 점 A는 제1사분면 위의 점이므로 $a=-1+\sqrt{5}$

따라서 □ABCD의 한 변의 길이는

$2a=2\times(-1+\sqrt{5})=-2+2\sqrt{5}$

13 답 $\frac{8}{3}$

점 B의 x좌표를 $a(a>0)$라 하면 점 D의 x좌표는 점 B의 x좌표의 2배이므로

$B\left(a, \frac{1}{2}a^2\right)$, $D(2a, 2a^2)$, $A(a, 2a^2)$, $C\left(2a, \frac{1}{2}a^2\right)$

이때 $\overline{BC}=2a-a=a$, $\overline{CD}=2a^2-\frac{1}{2}a^2=\frac{3}{2}a^2$이고

$\overline{BC}=\overline{CD}$이므로

$a=\frac{3}{2}a^2$, $3a^2-2a=0$

$a(3a-2)=0$ $\quad\therefore a=\frac{2}{3}$ $(\because a>0)$

따라서 □ABCD의 둘레의 길이는

$4a=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$

14 답 $-\frac{1}{4}$

넓이가 64인 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $\sqrt{64}=8$이다.

즉 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{AD}=8$

$y=ax^2$의 그래프가 y축에 대칭이므로

$\overline{OF}=\frac{1}{2}\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}\times8=4$ $\quad\therefore F(4, 0)$

또 □AEFD : □EBCF$=1:3$이므로 $\overline{DF}:\overline{CF}=1:3$에서

$\overline{DF}=\frac{1}{4}\overline{CD}=\frac{1}{4}\times8=2$, $\overline{CF}=\frac{3}{4}\overline{CD}=\frac{3}{4}\times8=6$

$\therefore D(4, 2)$, $C(4, -6)$

점 $D(4, 2)$가 $y=ax^2$의 그래프 위의 점이므로

$2=a\times4^2$ $\quad\therefore a=\frac{1}{8}$

점 $C(4, -6)$이 $y=bx^2$의 그래프 위의 점이므로

$-6=b\times4^2$ $\quad\therefore b=-\frac{3}{8}$

$\therefore a+b=\frac{1}{8}+\left(-\frac{3}{8}\right)=-\frac{1}{4}$

15 답 $\frac{4}{5}$

점 P의 x좌표를 $a(a>0)$라 하면

$P(a, 3a^2)$, $C(0, 3a^2)$ $\quad\therefore \overline{PC}=a$

□PABC가 정사각형이므로 □PABC의 둘레의 길이는

$4\overline{PC}=4a$

$2\overline{PC}=3\overline{EC}$이므로 $\overline{QD}=\overline{EC}=\frac{2}{3}\overline{PC}=\frac{2}{3}a$

$\therefore Q\left(-\frac{2}{3}a, \frac{4}{3}a^2\right)$, $D\left(0, \frac{4}{3}a^2\right)$

□QDCE에서

$\overline{EC}=\overline{QD}=\frac{2}{3}a$, $\overline{EQ}=\overline{CD}=3a^2-\frac{4}{3}a^2=\frac{5}{3}a^2$

이므로 □QDCE의 둘레의 길이는

$2\left(\frac{2}{3}a+\frac{5}{3}a^2\right)=\frac{4}{3}a+\frac{10}{3}a^2$

이때 □PABC와 □QDCE의 둘레의 길이가 서로 같으므로

$4a=\frac{4}{3}a+\frac{10}{3}a^2$, $12a=4a+10a^2$

$10a^2-8a=0$, $a(5a-4)=0$ $\quad\therefore a=\frac{4}{5}$ $(\because a>0)$

따라서 점 P의 x좌표는 $\frac{4}{5}$이다.

다른 풀이

$2\overline{PC}=3\overline{EC}$에서 $\overline{PC}:\overline{EC}=3:2$

$\overline{PC}=3k$, $\overline{EC}=2k(k>0)$라 하면

□PABC와 □QDCE의 둘레의 길이가 같으므로

$4\overline{PC}=2(\overline{EC}+\overline{CD})$에서

$4\times3k=2(2k+\overline{CD})$ $\quad\therefore \overline{CD}=4k$

이때 $P(3k, 27k^2)$이므로 $Q(-2k, 27k^2-4k)$ …… ㉠

한편 $y=3x^2$에 $x=-2k$를 대입하면

$y=3\times(-2k)^2=12k^2$ $\quad\therefore Q(-2k, 12k^2)$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $27k^2-4k=12k^2$이므로 $15k^2-4k=0$

$k(15k-4)=0$ $\quad\therefore k=\frac{4}{15}$ $(\because k>0)$

따라서 점 P의 x좌표는 $3\times\frac{4}{15}=\frac{4}{5}$

16 답 8

$y=a(x-p)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(p, 0)$이고

$y=-(x-3)^2+9$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3, 9)$이다.

$y=-(x-3)^2+9$의 그래프가 점 $(p, 0)$을 지나므로

$0=-(p-3)^2+9$, $p^2-6p=0$

$p(p-6)=0$ $\quad\therefore p=6$ $(\because p>0)$

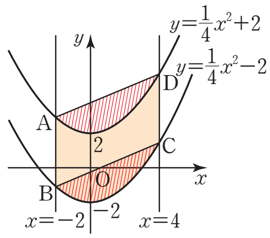
$y=a(x-6)^2$의 그래프가 점 $(3, 9)$를 지나므로

$9=a\times(3-6)^2$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore 2a+p=2\times1+6=8$

17 답 24

오른쪽 그림과 같이 두 이차함수 $y=\frac{1}{4}x^2+2$, $y=\frac{1}{4}x^2-2$의 그래프와 두 직선 $x=-2$, $x=4$의 교점을 각각 A, B, C, D라 하자.



$y=\frac{1}{4}x^2+2$의 그래프는 $y=\frac{1}{4}x^2-2$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 빗금친 부분의 넓이는 서로 같다. 즉 색칠한 부분의 넓이는 □ABCD의 넓이와 같다.

이때 $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이고 $\overline{AB}=\overline{CD}=4$이므로 □ABCD는 평행사변형이다.

따라서 색칠한 부분의 넓이는 $4\times\{4-(-2)\}=24$

18 답 $-\frac{3}{4}<a<0$

$y=a(x-2)^2+3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2, 3)$이므로 꼭짓점은 제1사분면 위에 있다.

이때 그래프가 모든 사분면을 지나려면 위로 볼록해야 하므로

$a<0$ ⋯⋯ ㉠

또 y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있어야 하므로

$a\times(0-2)^2+3>0$　　$\therefore a>-\frac{3}{4}$ ⋯⋯ ㉡

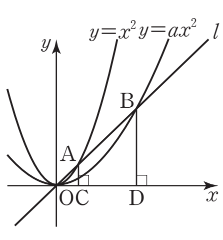
㉠, ㉡에 의하여 상수 a의 값의 범위는 $-\frac{3}{4}<a<0$

학교 시험 최상위 기출 도전　136쪽

01 답 $\frac{2}{7}$

[전략] 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하면 △AOC∽△BOD (AA 닮음)이고 $\overline{OA}:\overline{AB}=2:5$이므로 $\overline{OC}:\overline{OD}=2:7$임을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하면



△AOC∽△BOD (AA 닮음)

이때 $\overline{OA}:\overline{AB}=2:5$이므로

$\overline{OC}:\overline{OD}=2:(2+5)=2:7$

점 C의 좌표를 $(2k, 0)(k>0)$이라 하면

$A(2k, 4k^2)$, $D(7k, 0)$, $B(7k, 49ak^2)$

$\overline{AC}:\overline{BD}=\overline{OC}:\overline{OD}=2:7$에서

$4k^2:49ak^2=2:7$, $98ak^2=28k^2$

$\therefore a=\frac{28k^2}{98k^2}=\frac{2}{7}$

02 답 $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{16}\right)$

[전략] 점 A의 x좌표를 $a(a>0)$로 놓고, 나머지 세 점 B, C, D의 좌표를 a를 사용하여 나타낸다.

점 A의 x좌표를 $a(a>0)$라 하면

$A(a, a^2)$, $D(a, 9a^2)$

$\therefore \overline{AD}=9a^2-a^2=8a^2$

이때 점 C의 y좌표는 $9a^2$이므로 $y=x^2$에 $y=9a^2$을 대입하면

$9a^2=x^2$, $x=\pm3a$

그런데 $a>0$이므로 $x=3a$

$\therefore B(3a, a^2)$, $C(3a, 9a^2)$

□ABCD는 정사각형이므로 $\overline{AB}=\overline{AD}$에서

$3a-a=8a^2$, $8a^2-2a=0$

$4a^2-a=0$, $a(4a-1)=0$　　$\therefore a=\frac{1}{4}$ ($\because a>0$)

따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{16}\right)$이다.

03 답 15

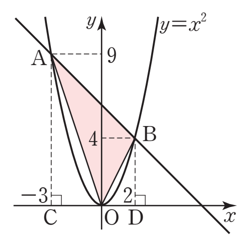
[전략] 두 점 A, B의 좌표를 a를 사용하여 나타내고, 직선 AB의 기울기가 -1임을 이용하여 a의 값을 구한다.

$A(a, a^2)$, $B(a+5, (a+5)^2)$이고 직선 AB의 기울기가 -1이므로

$\frac{(a+5)^2-a^2}{(a+5)-a}=\frac{10a+25}{5}=2a+5$

즉 $2a+5=-1$에서 $a=-3$

따라서 $A(-3, 9)$, $B(2, 4)$이므로 오른쪽 그림과 같이 두 점에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하면



△AOB

$=$□ACDB$-$△OAC$-$△OBD

$=\frac{1}{2}\times(9+4)\times5-\frac{1}{2}\times3\times9-\frac{1}{2}\times2\times4$

$=\frac{65}{2}-\frac{27}{2}-4=15$

04 답 -2499

[전략] 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 사이에는 어떤 관계가 있는지 생각한다.

$y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$f(x+1)=g(x)$

$$\frac{g(1)g(2)g(3)\cdots g(100)}{f(1)f(2)f(3)\cdots f(100)}=\frac{g(1)g(2)g(3)\cdots g(100)}{g(0)g(1)g(2)\cdots g(99)}$$
$$=\frac{g(100)}{g(0)}=\frac{-100^2+4}{-0^2+4}$$
$$=\frac{-9996}{4}=-2499$$

7 이차함수의 활용

01 | 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

개념 확인 139쪽

01 답 (1) $y=2(x+3)^2-10$ (2) $(-3, -10)$
(3) $x=-3$ (4) $(0, 8)$

(1) $y=2x^2+12x+8$
$=2(x^2+6x+9-9)+8$
$=2(x+3)^2-10$

(4) $y=2x^2+12x+8$에 $x=0$을 대입하면 $y=8$
따라서 y축과의 교점의 좌표는 $(0, 8)$이다.

02 답 ④

각 이차함수의 축의 방정식을 구하면 다음과 같다.

① $x=0$
② $x=-1$
③ $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+2=-\frac{1}{2}(x+2)^2+4$이므로
축의 방정식은 $x=-2$
④ $y=-3x^2+6x-4=-3(x-1)^2-1$이므로
축의 방정식은 $x=1$
⑤ $y=x^2+6x-5=(x+3)^2-14$이므로
축의 방정식은 $x=-3$

따라서 그래프의 축이 가장 오른쪽에 있는 것은 ④이다.

03 답 $a<0, b>0, c>0$

그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0$ $\quad\therefore b>0$
y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $c>0$

04 답 $y=-x^2+4x-5$

꼭짓점의 좌표가 $(2, -1)$이므로
$y=a(x-2)^2-1$로 놓고 $x=0, y=-5$를 대입하면
$-5=4a-1 \quad\therefore a=-1$
$\therefore y=-(x-2)^2-1=-x^2+4x-5$

05 답 $y=-2x^2-8x+1$

축의 방정식이 $x=-2$이므로 $y=a(x+2)^2+q$로 놓고
$x=1, y=-9$를 대입하면 $-9=9a+q$ …… ㉠
$x=-3, y=7$을 대입하면 $7=a+q$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2, q=9$
$\therefore y=-2(x+2)^2+9=-2x^2-8x+1$

06 답 $y=x^2-4x+1$

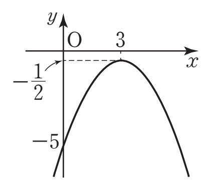
$y=ax^2+bx+c$에 $x=0, y=1$을 대입하면 $c=1$
즉 $y=ax^2+bx+1$에
$x=2, y=-3$을 대입하면 $-3=4a+2b+1$ …… ㉠
$x=-1, y=6$을 대입하면 $6=a-b+1$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=-4$
$\therefore y=x^2-4x+1$

적중 & 심화 유형 연습 140쪽~147쪽

01 답 ③, ④

$y=-\frac{1}{2}x^2+3x-5=-\frac{1}{2}(x-3)^2-\frac{1}{2}$

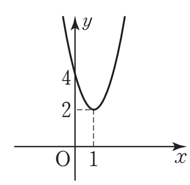
③ y축과 점 $(0, -5)$에서 만난다.
④ 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같이
제3사분면과 제4사분면을 지난다.



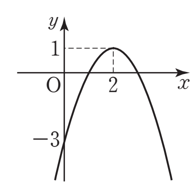
02 답 ④

각 이차함수의 그래프를 그리면 다음과 같다.

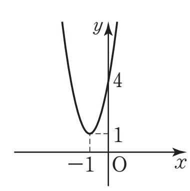
① $y=2x^2-4x+4$
$=2(x-1)^2+2$



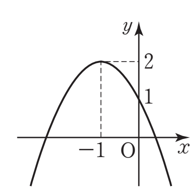
② $y=-x^2+4x-3$
$=-(x-2)^2+1$



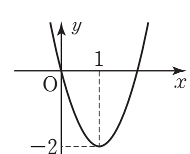
③ $y=3x^2+6x+4$
$=3(x+1)^2+1$



④ $y=-x^2-2x+1$
$=-(x+1)^2+2$



⑤ $y=2x^2-4x$
$=2(x-1)^2-2$



따라서 그래프가 모든 사분면을 지나는 것은 ④이다.

03 답 -1

$y=x^2+4x+c=(x+2)^2-4+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, -4+c)$이므로

$-2=p$, $-4+c=-3$ $\quad\therefore p=-2, c=1$

$\therefore p+c=-2+1=-1$

04 답 3

$y=-x^2+2kx-20=-(x-k)^2+k^2-20$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 (k, k^2-20)이므로

조건 (나)에 의하여 $k^2-20=-11$, $k^2=9$ $\quad\therefore k=\pm3$

조건 (가)에 의하여 꼭짓점이 제4사분면 위의 점이므로 $k>0$

$\therefore k=3$

05 답 6

$y=-3x^2-12x+m=-3(x+2)^2+12+m$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 12+m)$

$y=x^2-2nx+8=(x-n)^2-n^2+8$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(n, -n^2+8)$

이때 두 그래프의 꼭짓점이 일치하므로

$-2=n$, $12+m=-n^2+8$ $\quad\therefore m=-8, n=-2$

$\therefore n-m=-2-(-8)=6$

06 답 꼭짓점의 좌표 : $\left(\frac{3}{2}, \frac{19}{4}\right)$, 축의 방정식 : $x=\frac{3}{2}$

$y=ax^2+bx+7$에

$x=-1$, $y=11$을 대입하면 $11=a-b+7$ …… ㉠

$x=1$, $y=5$를 대입하면 $5=a+b+7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$ …… ❶

따라서 $y=x^2-3x+7=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{19}{4}$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, \frac{19}{4}\right)$이고 축의 방정식은 $x=\frac{3}{2}$이다. …… ❷

채점 기준	비율
❶ a, b의 값 각각 구하기	60 %
❷ 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표, 축의 방정식 각각 구하기	40 %

07 답 1

$y=-3x^2-12x-3=-3(x+2)^2+9$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-3(x+2+1)^2+9+4$

$=-3(x+3)^2+13$

$=-3x^2-18x-14$

따라서 $a=-3$, $b=-18$, $c=-14$이므로

$a-b+c=-3-(-18)+(-14)=1$

08 답 5

$y=x^2-8x+12=(x-4)^2-4$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=(x-4+2)^2-4-3=(x-2)^2-7$

이 그래프가 점 $(m, 2)$를 지나므로

$2=(m-2)^2-7$, $(m-2)^2=9$

$m-2=\pm3$ $\quad\therefore m=-1$ 또는 $m=5$

따라서 양수 m의 값은 5이다.

09 답 -23

$y=2x^2-8x+4=2(x-2)^2-4$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2(x-2-p)^2-4+q$

한편 $y=2x^2-16x+3=2(x-4)^2-29$이므로

$-2-p=-4$, $-4+q=-29$ $\quad\therefore p=2, q=-25$

$\therefore p+q=2+(-25)=-23$

10 답 $x>2$

$y=\frac{3}{4}x^2-3x+8=\frac{3}{4}(x-2)^2+5$의 그래프는 아래로 볼록하고 축의 방정식은 $x=2$이므로 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 x의 값의 범위는 $x>2$이다.

11 답 $x>-4$

$y=ax^2-4x+1$에 $x=-2$, $y=7$을 대입하면

$7=4a+8+1$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$

즉 $y=-\frac{1}{2}x^2-4x+1=-\frac{1}{2}(x+4)^2+9$의 그래프는 위로 볼록하고 축의 방정식은 $x=-4$이므로 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하는 x의 값의 범위는 $x>-4$이다.

12 답 2

$y=-2x^2+2kx+3k-2=-2\left(x-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{k^2}{2}+3k-2$의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{k}{2}$이므로

$\frac{k}{2}=\frac{1}{2}$에서 $k=1$

따라서 $y=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$이므로 $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{3}{2}$

$\therefore p+q=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$

13 답 -2

$y=-3x^2-6x+2a+1=-3(x+1)^2+2a+4$의 그래프의 꼭짓점이 x축 위에 있으려면 꼭짓점의 y좌표가 0이어야 하므로

$2a+4=0$ $\quad\therefore a=-2$

14 답 $x=-2$

$y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}kx-k+1=-\frac{1}{4}(x+k)^2+\frac{k^2}{4}-k+1$의 그래프의 꼭짓점이 x축과 한 점에서 만나려면 꼭짓점의 y좌표가 0이어야 하므로

$\frac{k^2}{4}-k+1=0$, $k^2-4k+4=0$

$(k-2)^2=0$ $\quad\therefore k=2$ …… ❶

따라서 이 그래프의 축의 방정식은 $x=-2$이다. …… ❷

채점 기준	비율
❶ k의 값 구하기	80 %
❷ 축의 방정식 구하기	20 %

15 답 4

$y=3x^2+ax-9$에 $x=-1$, $y=0$을 대입하면

$0=3-a-9$ $\quad\therefore a=-6$

즉 $y=3x^2-6x-9$에 $y=0$을 대입하면

$3x^2-6x-9=0$, $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 점 B의 좌표는 $(3, 0)$이므로

$\overline{AB}=3-(-1)=4$

16 답 -10

$y=2x^2-8x+k=2(x-2)^2+k-8$의 그래프의 축의 방정식은 $x=2$이므로 x축과 만나는 두 점은 직선 $x=2$에 서로 대칭이다. 이때 두 점 사이의 거리가 6이므로 축에서 두 점까지의 거리는 각각 $\frac{6}{2}=3$이다.

따라서 x축과 만나는 두 점의 좌표는

$(2+3, 0)$, $(2-3, 0)$, 즉 $(5, 0)$, $(-1, 0)$이다.

$y=2x^2-8x+k$에 $x=5$, $y=0$을 대입하면

$0=50-40+k$ $\quad\therefore k=-10$

17 답 $\frac{3}{4}$

$y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x+1)^2+2$이므로 $A(-1, 2)$

$y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$에 $x=0$을 대입하면 $y=\frac{3}{2}$, 즉 $B\left(0, \frac{3}{2}\right)$

$\therefore \triangle AOB=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times1=\frac{3}{4}$

18 답 30

$y=-x^2+4x+5=-(x-2)^2+9$이므로 $A(2, 9)$

$y=-x^2+4x+5$에 $x=0$을 대입하면 $y=5$, 즉 $B(0, 5)$

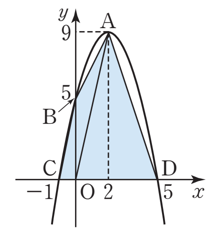
$y=-x^2+4x+5$에 $y=0$을 대입하면

$-x^2+4x+5=0$, $x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

즉 $C(-1, 0)$, $D(5, 0)$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AO}$를 그으면



$\square ABCD$

$=\triangle BCO+\triangle ABO+\triangle AOD$

$=\frac{1}{2}\times1\times5+\frac{1}{2}\times5\times2+\frac{1}{2}\times5\times9$

$=30$

19 답 6

$y=-2x^2-4x+6=-2(x+1)^2+8$이므로 $A(-1, 8)$

$y=-2x^2-4x+6$에 $x=0$을 대입하면 $y=6$, 즉 $B(0, 6)$

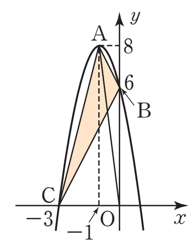
$y=-2x^2-4x+6$에 $y=0$을 대입하면

$-2x^2-4x+6=0$, $x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

즉 $C(-3, 0)$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AO}$를 그으면



$\triangle ACB$

$=\triangle ACO+\triangle AOB-\triangle BCO$

$=\frac{1}{2}\times3\times8+\frac{1}{2}\times6\times1-\frac{1}{2}\times3\times6$

$=6$

20 답 ①, ⑤

① 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

② 축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $ab>0$ $\quad\therefore b<0$

③ y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $c>0$

④ $x=1$일 때 $y<0$이므로 $a+b+c<0$

⑤ $x=-2$일 때 $y>0$이므로 $4a-2b+c>0$

따라서 옳지 않은 것은 ①, ⑤이다.

21 답 ②

$y=ax^2+bx+c$의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $ab>0$ $\quad\therefore b>0$

y축과의 교점이 x축보다 아래쪽에 있으므로 $c<0$

$y=cx^2+bx+a$의 그래프는

$c<0$이므로 위로 볼록하고

$b>0$이므로 $bc<0$, 즉 축이 y축의 오른쪽에 있으며

$a>0$이므로 y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있다.

따라서 $y=cx^2+bx+a$의 그래프로 적당한 것은 ②이다.

22 답 ②

$y=ax^2+bx+c$의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0$ $\quad\therefore b>0$

y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $c>0$

$y=\left(x-\frac{a}{b}\right)^2-ac$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{a}{b}, -ac\right)$이고

$\frac{a}{b}<0$, $-ac>0$이므로 꼭짓점은 제2사분면 위에 있다.

23 답 2

꼭짓점의 좌표가 $(-2, 3)$이므로

$y=a(x+2)^2+3$으로 놓고 $x=0$, $y=1$을 대입하면

$1=4a+3 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

즉 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3=-\frac{1}{2}x^2-2x+1$이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=-2$, $c=1$

$\therefore 2a-b+c=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-(-2)+1=2$

24 답 -12

$y=(x-2)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2, 0)$이므로

$y=a(x-2)^2$으로 놓고 $x=4$, $y=-12$를 대입하면

$-12=4a \qquad \therefore a=-3$

즉 $y=-3(x-2)^2$에 $x=0$을 대입하면 $y=-12$

따라서 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는 -12이다.

25 답 $y=2x^2+4x+2$

꼭짓점이 x축 위에 있고, 축의 방정식이 $x=-1$이므로

꼭짓점의 좌표는 $(-1, 0)$이다. …… ❶

$y=a(x+1)^2$으로 놓고 $x=1$, $y=8$을 대입하면

$8=4a \qquad \therefore a=2$ …… ❷

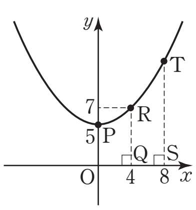
$\therefore y=2(x+1)^2=2x^2+4x+2$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ 꼭짓점의 좌표 알기	40 %
❷ $y=a(x+1)^2$으로 놓고 $x=1$, $y=8$을 대입하여 a의 값 구하기	40 %
❸ $y=ax^2+bx+c$의 꼴로 나타내기	20 %

26 답 13 m

[전략] 주어진 그림에서 지면을 x축, 직선 PO를 y축, 지점 O를 원점으로 하는 좌표평면을 생각한다.

주어진 그림에서 지면을 x축, 직선 PO를 y축, 지점 O를 원점으로 하는 좌표평면 위에 레일을 나타내면 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점이 $P(0, 5)$이고 한 점 $R(4, 7)$을 지나는 포물선이다.



주어진 포물선을 나타내는 이차함수의 식을 $y=ax^2+5$로 놓고 $x=4$, $y=7$을 대입하면

$7=a\times4^2+5 \qquad \therefore a=\frac{1}{8}$

점 T의 x좌표가 8이므로 $y=\frac{1}{8}x^2+5$에 $x=8$을 대입하면

$y=\frac{1}{8}\times8^2+5=13 \qquad \therefore T(8, 13)$

따라서 지점 S에서 지점 T까지의 높이는 13 m이다.

27 답 -6

축의 방정식이 $x=-2$이므로 $y=a(x+2)^2+q$로 놓고

$x=-1$, $y=2$를 대입하면 $2=a+q$ …… ㉠

$x=0$, $y=-1$을 대입하면 $-1=4a+q$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $q=3$

$\therefore y=-(x+2)^2+3=-x^2-4x-1$

따라서 $a=-1$, $b=-4$, $c=-1$이므로

$a+b+c=-1+(-4)+(-1)=-6$

28 답 7

축의 방정식이 $x=2$이므로 $y=a(x-2)^2+q$로 놓고

$x=0$, $y=6$을 대입하면 $6=4a+q$ …… ㉠

$x=6$, $y=0$을 대입하면 $0=16a+q$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2}$, $q=8$

$\therefore y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+8=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=2$, $c=6$이므로

$2a+b+c=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2+6=7$

29 답 3

축의 방정식이 $x=-1$이므로 $y=a(x+1)^2+q$로 놓고

$x=1$, $y=5$를 대입하면 $5=4a+q$ …… ㉠

$x=0$, $y=-1$을 대입하면 $-1=a+q$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $q=-3$

$\therefore y=2(x+1)^2-3$ …… ❶

따라서 이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, -3)$이므로

$p=-1$, $q=-3$ …… ❷

$\therefore pq=(-1)\times(-3)=3$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ 이차함수의 식 구하기	60 %
❷ p, q의 값 각각 구하기	30 %
❸ pq의 값 구하기	10 %

30 답 24

그래프가 점 $(0, 6)$을 지나므로 $c=6$

즉 $y=ax^2+bx+6$에

$x=-4$, $y=6$을 대입하면 $6=16a-4b+6$ …… ㉠

$x=-1$, $y=3$을 대입하면 $3=a-b+6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=4$

$\therefore abc=1\times4\times6=24$

31 답 $(1, 3)$

$y=ax^2+bx+c$로 놓고 $x=0$, $y=5$를 대입하면 $c=5$

즉 $y=ax^2+bx+5$에

$x=-1$, $y=11$을 대입하면 $11=a-b+5$ …… ㉠

$x=2$, $y=5$를 대입하면 $5=4a+2b+5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-4$

$\therefore y=2x^2-4x+5=2(x-1)^2+3$

따라서 구하는 꼭짓점의 좌표는 $(1, 3)$이다.

32 답 2

$y=ax^2+bx+c$로 놓고 $x=0$, $y=3$을 대입하면 $c=3$

즉 $y=ax^2+bx+3$에

$x=-1$, $y=8$을 대입하면 $8=a-b+3$ ⋯⋯ ㉠

$x=2$, $y=-1$을 대입하면 $-1=4a+2b+3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-4$

즉 $y=x^2-4x+3$에 $y=0$을 대입하면

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 $A(1, 0)$, $B(3, 0)$ 또는 $A(3, 0)$, $B(1, 0)$이므로

$\overline{AB}=3-1=2$

33 답 3

x축과의 교점의 좌표가 $(-3, 0)$, $(2, 0)$이므로

$y=a(x+3)(x-2)$로 놓고 $x=-2$, $y=2$를 대입하면

$2=-4a \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore y=-\frac{1}{2}(x+3)(x-2)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+3$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=3$이므로

$a-b+c=-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)+3=3$

34 답 2

x축과의 교점의 좌표가 $(1, 0)$, $(4, 0)$이므로

$y=a(x-1)(x-4)$로 놓고 $x=2$, $y=-1$을 대입하면

$-1=-2a \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

즉 $y=\frac{1}{2}(x-1)(x-4)$에 $x=0$을 대입하면 $y=2$

따라서 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는 2이다.

35 답 9

$y=x^2+4x+2m-1=(x+2)^2+2m-5$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 2m-5)$이고, 이 꼭짓점이 직선 $2x+y=9$ 위에 있으므로

$2\times(-2)+(2m-5)=9$, $2m=18 \qquad \therefore m=9$

36 답 -1

$y=-2x^2-4ax+2a^2=-2(x+a)^2+4a^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-a, 4a^2)$이고, 이 꼭짓점이 일차함수 $y=3x+1$의 그래프 위에 있으므로

$4a^2=3\times(-a)+1$, $4a^2+3a-1=0$

$(a+1)(4a-1)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{4}$

따라서 정수 a의 값은 -1이다.

37 답 8

$y=ax^2-8ax+3b-1$에 $x=0$, $y=8$을 대입하면

$8=3b-1 \qquad \therefore b=3$

즉 $y=ax^2-8ax+8=a(x-4)^2-16a+8$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(4, -16a+8)$이고, 이 꼭짓점이 일차함수 $y=-x+6$의 그래프 위에 있으므로

$-16a+8=-4+6 \qquad \therefore a=\frac{3}{8}$

$\therefore \frac{b}{a}=b\times\frac{1}{a}=3\times\frac{8}{3}=8$

38 답 4

$y=-\frac{1}{3}x^2-2x+k=-\frac{1}{3}(x+3)^2+3+k$이므로

$A(-3, 3+k)$

$y=-\frac{1}{3}x^2-2x+k$에 $x=0$을 대입하면 $B(0, k)$

이때 $\triangle AOB$의 넓이가 6이므로

$\frac{1}{2}\times k\times 3=6 \qquad \therefore k=4$

39 답 $(4, 6)$

$y=-2x^2+4px-2p^2+p+2=-2(x-p)^2+p+2$이므로

$A(p, p+2)$, $H(p, 0)$

이때 $\triangle AOH$의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}p(p+2)=12$, $p^2+2p-24=0$

$(p+6)(p-4)=0 \qquad \therefore p=-6$ 또는 $p=4$

이때 점 A가 제1사분면 위의 점이므로 $p=4$, 즉 $A(4, 6)$

40 답 ②

$y=ax+b$의 그래프가 오른쪽 위로 향하므로 $a>0$

y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $b>0$

즉 $y=x^2-ax-b$의 그래프는

$1>0$이므로 아래로 볼록하고

$-a<0$이므로 축이 y축의 오른쪽에 있으며

$-b<0$이므로 y축과의 교점이 x축보다 아래쪽에 있다.

따라서 $y=x^2-ax-b$의 그래프로 적당한 것은 ②이다.

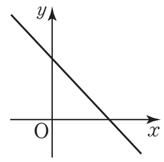
41 답 제3사분면

$y=x^2+ax-b$의 그래프가 아래로 볼록하고 축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $a<0$

y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $-b>0$,

즉 $b<0$ ⋯⋯ ❶

이때 $y=bx-a$의 그래프는 $b<0$이므로 오른쪽 아래로 향하는 직선이고, $-a>0$이므로 y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있다.
따라서 $y=bx-a$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 지나지 않는 사분면은 제3사분면이다.



…… ❷

채점 기준	비율
❶ a, b의 부호 판단하기	50 %
❷ $y=bx-a$의 그래프가 지나지 않는 사분면 구하기	50 %

42 답) -36

x축과의 교점의 좌표가 $(2,0)$, $(4,0)$이므로

$y=a(x-2)(x-4)$
$\;=ax^2-6ax+8a$
$\;=a(x-3)^2-a$

이때 꼭짓점의 y좌표가 12이므로 $a=-12$

$\therefore y=-12x^2+72x-96$

따라서 $a=-12$, $b=72$, $c=-96$이므로

$a+b+c=-12+72+(-96)=-36$

다른 풀이

x축과의 교점의 좌표가 $(2,0)$, $(4,0)$이므로 축의 방정식은

$x=\dfrac{2+4}{2}=3$

즉 꼭짓점의 좌표는 $(3,12)$이므로 $y=a(x-3)^2+12$로 놓고 $x=2$, $y=0$을 대입하면

$0=a+12 \qquad \therefore a=-12$

$\therefore y=-12(x-3)^2+12=-12x^2+72x-96$

따라서 $a=-12$, $b=72$, $c=-96$이므로

$a+b+c=-12+72+(-96)=-36$

43 답) $a=-2$, $b=12$, $c=-17$

조건 ㈎에 의하여 $a=\pm2$

조건 ㈏에 의하여 $a=-2$이고 축의 방정식은 $x=3$

$y=-2(x-3)^2+q$로 놓고 조건 ㈐에 의하여 $x=4$, $y=-1$을 대입하면

$-1=-2+q \qquad \therefore q=1$

$\therefore y=-2(x-3)^2+1=-2x^2+12x-17$

$\therefore a=-2$, $b=12$, $c=-17$

44 답) -20

두 점 A, B의 y좌표가 같으므로 주어진 이차함수 그래프의 축의 방정식은

$x=\dfrac{2+6}{2}=4$

즉 꼭짓점의 좌표가 $(4,2)$이므로 $y=a(x-4)^2+2$로 놓고 $x=2$, $y=4$를 대입하면

$4=4a+2 \qquad \therefore a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore y=\dfrac{1}{2}(x-4)^2+2=\dfrac{1}{2}x^2-4x+10$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-4$, $c=10$이므로

$abc=\dfrac{1}{2}\times(-4)\times10=-20$

100점 TIP

이차함수의 그래프 위의 점들 중 y좌표가 같은 두 점은 그래프의 축에 대칭이다.

45 답) 5

축의 방정식이 $x=1$이고, x축과 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리가 8이므로 축에서 두 점까지의 거리는 각각 $\dfrac{8}{2}=4$이다.

이때 x축과 만나는 두 점의 좌표는

$(1-4,0)$, $(1+4,0)$, 즉 $(-3,0)$, $(5,0)$이다.

$y=a(x+3)(x-5)$로 놓고 $x=3$, $y=3$을 대입하면

$3=-12a \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore y=-\dfrac{1}{4}(x+3)(x-5)=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{15}{4}$

따라서 $a=-\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{1}{2}$, $c=\dfrac{15}{4}$이므로

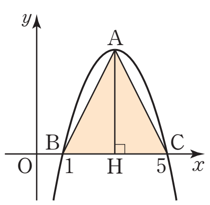
$-a+2b+c=-\left(-\dfrac{1}{4}\right)+2\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{15}{4}=5$

46 답) -5

B$(1,0)$, C$(5,0)$이므로 축의 방정식은

$x=\dfrac{1+5}{2}=3$, 즉 꼭짓점 A의 x좌표는 3이다.

한편 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle$ABC의 넓이가 8이므로



$\dfrac{1}{2}\times4\times\overline{AH}=8 \qquad \therefore \overline{AH}=4$

따라서 꼭짓점 A의 좌표는 $(3,4)$이므로

$y=a(x-3)^2+4$로 놓고 $x=1$, $y=0$을 대입하면

$0=4a+4 \qquad \therefore a=-1$

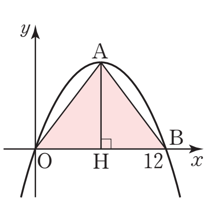
따라서 $y=-(x-3)^2+4$에 $x=0$을 대입하면 $y=-5$이므로 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는 -5이다.

47 답) 2

O$(0,0)$, B$(12,0)$이므로 축의 방정식은

$x=\dfrac{0+12}{2}=6$, 즉 꼭짓점 A의 x좌표는 6이다.

한편 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle$AOB의 넓이가 48이므로



$\dfrac{1}{2}\times12\times\overline{AH}=48 \qquad \therefore \overline{AH}=8$

즉 꼭짓점 A의 좌표는 $(6,8)$이므로

$y=a(x-6)^2+8$로 놓고 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$0=36a+8 \qquad \therefore a=-\frac{2}{9}$

$\therefore y=-\frac{2}{9}(x-6)^2+8=-\frac{2}{9}x^2+\frac{8}{3}x$

따라서 $a=-\frac{2}{9}$, $b=\frac{8}{3}$, $c=0$이므로

$3a+b+c=3\times\left(-\frac{2}{9}\right)+\frac{8}{3}+0=2$

적중 & 심화 실전 TEST

148쪽~150쪽

01 답 ②

$y=\frac{1}{2}x^2+2x+k=\frac{1}{2}(x+2)^2+k-2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, k-2)$이다.

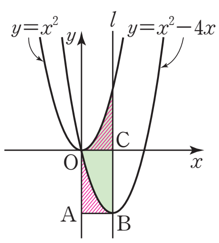
이때 꼭짓점이 제3사분면 위에 있으므로

$k-2<0 \qquad \therefore k<2$

02 답 8

$y=x^2-4x=(x-2)^2-4$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 색칠한 부분의 넓이는 직사각형 OABC의 넓이와 같다.



이때 $A(0, -4)$, $B(2, -4)$, $C(2, 0)$이므로 색칠한 부분의 넓이는

$\overline{OA}\times\overline{AB}=4\times2=8$

03 답 6

$y=-\frac{1}{2}x^2+6x+7=-\frac{1}{2}(x-6)^2+25$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{1}{2}(x-6-p)^2+25+q$

이 식이 $y=ax^2+4x+4$와 일치하므로 $a=-\frac{1}{2}$

즉 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x+4=-\frac{1}{2}(x-4)^2+12$이므로

$-6-p=-4$, $25+q=12 \qquad \therefore p=-2$, $q=-13$

$\therefore 10a+p-q=10\times\left(-\frac{1}{2}\right)+(-2)-(-13)=6$

04 답 -1

$y=2x^2-4x+7=2(x-1)^2+5$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2(x-1-p)^2+5+q$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(1+p, 5+q)$이고 이 꼭짓점이 직선 $y=x+5$ 위에 있으므로

$5+q=1+p+5 \qquad \therefore p-q=-1$

다른 풀이

$y=2x^2-4x+7=2(x-1)^2+5$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 5)$이고, 이 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1+p, 5+q)$이다.

이 꼭짓점이 직선 $y=x+5$ 위에 있으므로

$5+q=1+p+5 \qquad \therefore p-q=-1$

05 답 8

$y=x^2+(k-4)x+9=\left(x-\frac{k-4}{2}\right)^2-\frac{(k-4)^2}{4}+9$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나려면 꼭짓점의 y좌표가 0이어야 하므로

$-\frac{(k-4)^2}{4}+9=0$, $(k-4)^2=36$

$k-4=\pm6 \qquad \therefore k=-2$ 또는 $k=10$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 $-2+10=8$

06 답 5

$y=x^2-2kx+3k+1=(x-k)^2-k^2+3k+1$의 그래프의 축의 방정식은 $x=k$이고, $\overline{AB}=6$이므로 축에서 두 점 A, B까지의 거리는 각각 $\frac{6}{2}=3$이다.

$\therefore A(k-3, 0)$, $B(k+3, 0)$ 또는 $A(k+3, 0)$, $B(k-3, 0)$ …… ❶

$y=(x-k)^2-k^2+3k+1$에 $x=k-3$, $y=0$을 대입하면

$0=9-k^2+3k+1$, $k^2-3k-10=0$

$(k+2)(k-5)=0 \qquad \therefore k=-2$ 또는 $k=5$

따라서 양수 k의 값은 5이다. …… ❷

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B의 좌표를 k를 사용하여 나타내기	50 %
❷ 양수 k의 값 구하기	50 %

07 답 8

$y=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$이고, $\overline{AB}=4$이므로 축에서 두 점 A, B까지의 거리는 각각 $\frac{4}{2}=2$이다.

$\therefore A(1-2, 0)$, $B(1+2, 0)$, 즉 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$

$y=(x-1)^2+k-1$의 그래프가 점 $A(-1, 0)$을 지나므로

$0=4+k-1 \qquad \therefore k=-3$

따라서 $y=(x-1)^2-4$이므로 $C(1, -4)$

$\therefore \triangle ACB=\frac{1}{2}\times4\times4=8$

08 답 ③, ⑤

① 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

② y축과의 교점이 x축보다 아래쪽에 있으므로

$-c<0 \qquad \therefore c>0$

③ $x=1$일 때 $y>0$이므로 $a-b-c>0$

④ $x=-1$일 때 $y<0$이므로 $a+b-c<0$

⑤ $x=2$일 때 $y<0$이므로 $4a-2b-c<0$

따라서 옳은 것은 ③, ⑤이다.

09 답 ⑤

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -4)$이므로 $y=a(x-2)^2-4$로 놓고, 이 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 아래로 볼록해야 하므로

$a>0$ …… ㉠

또 y축과의 교점이 x축 위에 있거나 x축보다 위쪽에 있어야 하므로 $y=a(x-2)^2-4$에 $x=0$을 대입하면

$4a-4\geq 0 \qquad \therefore a\geq 1$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 구하는 a의 값의 범위는 $a\geq 1$

10 답 ②

그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로 $c=-1$

즉 $y=ax^2+bx-1$에

$x=-6,\ y=-7$을 대입하면 $-7=36a-6b-1$ …… ㉠

$x=2,\ y=-7$을 대입하면 $-7=4a+2b-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2},\ b=-2$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x^2-2x-1$

① $a+b+c=-\frac{1}{2}+(-2)+(-1)=-\frac{7}{2}<0$

② $y=-\frac{1}{2}x^2-2x-1$에 $x=4,\ y=-17$을 대입하면

$-17=-\frac{1}{2}\times 4^2-2\times 4-1$이므로 점 $(4,\ -17)$을 지난다.

③, ④ $y=-\frac{1}{2}x^2-2x-1=-\frac{1}{2}(x+2)^2+1$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-2$이고, 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ 1)$이다.

⑤ x^2의 계수가 서로 다르므로 평행이동하여 포개어지지 않는다.

따라서 옳은 것은 ②이다.

11 답 2

주어진 일차함수의 그래프의 식은

$y=\frac{4-0}{0-(-2)}x+4=2x+4$

$y=x^2-2px+3p^2=(x-p)^2+2p^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(p,\ 2p^2)$이고, 이 꼭짓점이 일차함수 $y=2x+4$의 그래프 위에 있으므로

$2p^2=2p+4,\ p^2-p-2=0$

$(p+1)(p-2)=0 \qquad \therefore p=-1$ 또는 $p=2$

따라서 양수 p의 값은 2이다.

12 답 9

$y=ax^2-2ax+b$에 $x=-1,\ y=13$을 대입하면

$13=a+2a+b \qquad \therefore 3a+b=13$ …… ㉠

$y=ax^2-2ax+b=a(x-1)^2-a+b$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ -a+b)$이고, 이 꼭짓점이 일차함수 $y=-2x+7$의 그래프 위에 있으므로

$-a+b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=7$

$\therefore a+b=2+7=9$

13 답 7

$y=-\frac{1}{2}x^2+kx+5=-\frac{1}{2}(x-k)^2+\frac{k^2}{2}+5$이므로

$A\left(k,\ \frac{k^2}{2}+5\right)$

$y=-\frac{1}{2}x^2+kx+5$에 $x=0$을 대입하면 $y=5$, 즉 $B(0,\ 5)$

한편 $\triangle ABO$의 넓이가 5이므로

$\frac{1}{2}\times 5\times k=5 \qquad \therefore k=2$

따라서 점 A의 y좌표는

$\frac{k^2}{2}+5=\frac{1}{2}\times 2^2+5=7$

14 답 ①

직선 $y=ax+b$는 오른쪽 아래로 향하므로 $a<0$

y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $b>0$

직선 $y=c$는 x축보다 위쪽에 있으므로 $c>0$

즉 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는

$a<0$이므로 위로 볼록하고

$b>0$, 즉 $ab<0$이므로 축이 y축의 오른쪽에 있으며

$c>0$이므로 y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있다.

따라서 $y=ax^2+bx+c$의 그래프로 적당한 것은 ①이다.

15 답 12

꼭짓점의 x좌표가 2이므로 $y=a(x-2)^2+q$로 놓고

$x=6,\ y=0$을 대입하면 $0=16a+q$ …… ㉠

$x=0,\ y=-6$을 대입하면 $-6=4a+q$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2},\ q=-8$

$\therefore A(2,\ -8)$

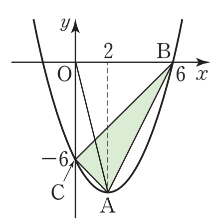
오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$를 그으면

$\triangle ABC$

$=\triangle OAB+\triangle OCA-\triangle OCB$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 8+\frac{1}{2}\times 6\times 2-\frac{1}{2}\times 6\times 6$

$=12$



16 답 8

$y=2x+10$에 $x=-1$을 대입하면 $y=2\times(-1)+10=8$

$y=2x+10$에 $x=2$를 대입하면 $y=2\times 2+10=14$

즉 이차함수의 그래프와 일차함수의 그래프가 만나는 두 점의 좌표는 $(-1,\ 8),\ (2,\ 14)$이다.

이때 구하는 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이므로

$y=a(x-1)^2+q$로 놓고

$x=-1$, $y=8$을 대입하면 $8=4a+q$ …… ㉠

$x=2$, $y=14$를 대입하면 $14=a+q$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $q=16$

$\therefore y=-2(x-1)^2+16=-2x^2+4x+14$

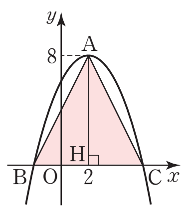
따라서 $a=-2$, $b=4$, $c=14$이므로

$a-b+c=-2-4+14=8$

17 답 7

$y=-x^2+4x+4=-(x-2)^2+8$이므로 $\mathrm{A}(2, 8)$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\mathrm{H}(2, 0)$이고 $\overline{\mathrm{AH}}=8$



$\triangle$ABC의 넓이가 32이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times8=32$ $\quad\therefore \overline{\mathrm{BC}}=8$

이때 축 $x=2$에서 두 점 B, C까지의 거리는 각각 $\frac{8}{2}=4$이므로

$\mathrm{B}(2-4, 0)$, $\mathrm{C}(2+4, 0)$, 즉 $\mathrm{B}(-2, 0)$, $\mathrm{C}(6, 0)$

구하는 이차함수의 식을 $y=a(x-2)^2+8$로 놓고 $x=-2$, $y=0$을 대입하면

$0=16a+8$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+8=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=2$, $c=6$이므로

$2a+b+c=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2+6=7$

학교 시험 최상위 기출 도전 151쪽~152쪽

01 답 (2, 8)

[전략] □ABCD는 직사각형이므로 두 점 B, C와 두 점 A, D는 축에 대칭임을 이용한다.

$y=-x^2+6x=-(x-3)^2+9$의 그래프의 축의 방정식이 $x=3$이므로 두 점 B, C의 좌표를 각각 $\mathrm{B}(3-k, 0)$, $\mathrm{C}(3+k, 0)$이라 하면

$\mathrm{A}(3-k, -k^2+9)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=-k^2+9$, $\overline{\mathrm{BC}}=3+k-(3-k)=2k$

이때 직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 20이므로

$2(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}})=20$에서

$2(-k^2+9+2k)=20$, $k^2-2k+1=0$

$(k-1)^2=0$ $\quad\therefore k=1$

따라서 점 A의 좌표는 $(2, 8)$이다.

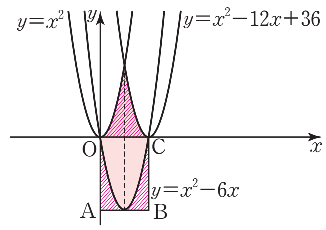
02 답 54

[전략] 평행이동한 이차함수의 그래프는 폭과 모양이 같음을 이용하여 넓이가 같은 부분을 찾는다.

$y=x^2-6x=(x-3)^2-9$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -9만큼 평행이동한 그래프이다.

$y=x^2-12x+36=(x-6)^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼 평행이동한 그래프이다.

오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이가 같으므로 색칠한 부분의 넓이는 □OABC의 넓이와 같다.



이때 $\mathrm{A}(0, -9)$, $\mathrm{B}(6, -9)$, $\mathrm{C}(6, 0)$이므로 색칠한 부분의 넓이는

$6\times9=54$

03 답 $\frac{1}{72}$

[전략] $y=x^2-2x+1$을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳐서 꼭짓점의 좌표를 확인한다.

모든 경우의 수는 $6\times6\times6=216$(가지)

$y=x^2-2x+1=(x-1)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 0)$

$y=ax^2-bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1, 0)$이 되려면

$y=ax^2-bx+c=a(x-1)^2=ax^2-2ax+a$의 꼴이어야 한다.

이때 $b=2a$, $c=a$를 만족하는 세 수 a, b, c의 값을 순서쌍 (a, b, c)로 나타내면 $(1, 2, 1)$, $(2, 4, 2)$, $(3, 6, 3)$의 3가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{216}=\frac{1}{72}$이다.

04 답 -21

[전략] $y=\frac{1}{3}x^2+2x-4$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치고, x축에 대칭이므로 y 대신 $-y$를 대입한다.

$y=\frac{1}{3}x^2+2x-4=\frac{1}{3}(x+3)^2-7$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{1}{3}(x+3-m)^2-7+n$

이 그래프를 다시 x축에 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\frac{1}{3}(x+3-m)^2-7+n$

$\therefore y=-\frac{1}{3}(x+3-m)^2+7-n$

이 식이 $y=ax^2+4x-12$와 일치하므로 $a=-\frac{1}{3}$

즉 $y=-\frac{1}{3}x^2+4x-12=-\frac{1}{3}(x-6)^2$이므로

$3-m=-6$, $7-n=0$ $\quad\therefore m=9$, $n=7$

$\therefore amn=-\frac{1}{3}\times9\times7=-21$

05 답 -9

[전략] 직선 $y=ax+b$가 $\triangle ABC$의 한 꼭짓점 C를 지나므로 직선 $y=ax+b$가 $\overline{AB}$의 중점을 지날 때, $\triangle ABC$의 넓이가 이등분됨을 이용한다.

$y=x^2-2x-3$에 $y=0$을 대입하면
$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$, 즉 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$
$y=x^2-2x-3$에 $x=0$을 대입하면 $y=-3$, 즉 $C(0, -3)$
한편 직선 $y=ax+b$가 $\triangle ABC$의 한 꼭짓점 C를 지나므로 직선 $y=ax+b$가 $\overline{AB}$의 중점을 지날 때 $\triangle ABC$의 넓이가 이등분된다.
$\overline{AB}=3-(-1)=4$이므로 $\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면
$M\left(-1+\frac{4}{2}, 0\right)$, 즉 $M(1, 0)$
따라서 직선 $y=ax+b$는 두 점 $C(0, -3)$, $M(1, 0)$을 지나므로
$-3=b$, $0=a+b$ $\quad\therefore a=3, b=-3$
$\therefore ab=3\times(-3)=-9$

06 답 $-\frac{6}{5}$

[전략] $\triangle ACB$와 $\triangle ADB$의 밑변이 $\overline{AB}$로 같고 넓이의 비가 $2:3$이므로 높이의 비도 $2:3$임을 이용한다.

$y=\frac{1}{2}x^2-bx+c=\frac{1}{2}(x-b)^2-\frac{b^2}{2}+c$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 -3이므로 $b=-3$
$\therefore y=\frac{1}{2}(x+3)^2-\frac{9}{2}+c$
한편 $\triangle ACB$와 $\triangle ADB$의 밑변이 $\overline{AB}$로 같고 넓이의 비가 $2:3$이므로 높이의 비는 $2:3$이다.
이때 $C(0, c)$, $D\left(-3, -\frac{9}{2}+c\right)$이므로
$c:-\left(-\frac{9}{2}+c\right)=2:3$에서
$3c=9-2c$, $5c=9$ $\quad\therefore c=\frac{9}{5}$
$\therefore b+c=-3+\frac{9}{5}=-\frac{6}{5}$

07 답 7

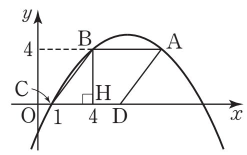
[전략] 이차함수의 그래프는 축에 대칭임을 이용한다.

조건 (나)에 의하여 $\overline{AB}=8-2=6$이므로
$\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QB}=\frac{1}{3}\times6=2$
$\therefore P(4, 2)$, $Q(6, 2)$
한편 두 점 P, Q는 이차함수의 그래프 위의 점이고, y좌표가 같으므로 축의 방정식은
$x=\frac{4+6}{2}=5$ …… ㉠
따라서 ㉠과 조건 (가)에 의하여 꼭짓점의 좌표는 $(5, 5)$이므로
$p=5$, $q=5$
$y=a(x-5)^2+5$에 $x=4$, $y=2$를 대입하면
$2=a+5$ $\quad\therefore a=-3$
$\therefore a+p+q=-3+5+5=7$

08 답 -2

[전략] 점 B에서 x축에 수선의 발을 내리고, 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{BC}$의 길이를 구한다. 또 마름모는 네 변의 길이가 모두 같고 두 쌍의 대변이 각각 평행함을 이용하여 점 A의 좌표를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면
$H(4, 0)$이므로
$\overline{BH}=4$, $\overline{CH}=4-1=3$
$\triangle BCH$는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해
$\overline{BC}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$



이때 □ABCD는 마름모이므로 $\overline{BA}/\!/\overline{CD}$, $\overline{AB}=\overline{BC}=5$
따라서 점 A의 좌표는 $A(4+5, 4)$, 즉 $A(9, 4)$이다.
$y=ax^2+bx+c$로 놓고 이 그래프가 지나는 세 점의 좌표 $A(9, 4)$, $B(4, 4)$, $C(1, 0)$을 각각 대입하면
$4=81a+9b+c$, $4=16a+4b+c$, $0=a+b+c$
위의 세 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{6}$, $b=\frac{13}{6}$, $c=-2$
따라서 $y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{13}{6}x-2$에 $x=0$을 대입하면 $y=-2$이므로 주어진 이차함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는 -2이다.

MEMO

MEMO