개념.ZIP

정답과 해설

공통수학 1

1 다항식의 연산

특강 확인 문제 p. 11

1

(1) $(-2x+1)^2=(-2x)^2+2\times(-2x)\times1+1^2$
$=4x^2-4x+1$

(2) $(3a+2)^2=(3a)^2+2\times3a\times2+2^2$
$=9a^2+12a+4$

(3) $(-x-2)^2=(-x)^2-2\times(-x)\times2+2^2$
$=x^2+4x+4$

(4) $(4a-5)^2=(4a)^2-2\times4a\times5+5^2$
$=16a^2-40a+25$

(5) $(3x+1)(3x-1)=(3x)^2-1^2=9x^2-1$

(6) $(a-2b)(-a-2b)=(-2b+a)(-2b-a)$
$=(-2b)^2-a^2$
$=4b^2-a^2$

(7) $(2x-3)(4x+1)=8x^2+(2-12)x-3$
$=8x^2-10x-3$

(8) $(3a+b)(-a+2b)=-3a^2+(6-1)ab+2b^2$
$=-3a^2+5ab+2b^2$

답 (1) $4x^2-4x+1$ (2) $9a^2+12a+4$
(3) x^2+4x+4 (4) $16a^2-40a+25$
(5) $9x^2-1$ (6) $4b^2-a^2$
(7) $8x^2-10x-3$ (8) $-3a^2+5ab+2b^2$

2

색칠한 부분의 넓이는
$(2a-b)^2+b^2=4a^2-4ab+b^2+b^2$
$=4a^2-4ab+2b^2$

답 $4a^2-4ab+2b^2$

3

(1) $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2=x^2+8x+b$이므로
$-2a=8,\ a^2=b$
$\therefore\ a=-4,\ b=a^2=(-4)^2=16$

(2) $(ax+3)(ax-3)=(ax)^2-3^2$
$=a^2x^2-9$
$=16x^2-b$
이므로 $a^2=16,\ 9=b$
$\therefore\ a=4\ (\because\ a>0),\ b=9$

답 (1) $a=-4,\ b=16$ (2) $a=4,\ b=9$

4

(1) $(x+3)(x-a)=x^2+(3-a)x-3a=x^2-x-b$
이므로 $3-a=-1,\ 3a=b$
$\therefore\ a=4,\ b=3a=3\times4=12$

(2) $(ax-1)(3x+2)=3ax^2+(2a-3)x-2$
$=6x^2+bx+c$
이므로 $3a=6,\ 2a-3=b,\ -2=c$
$\therefore\ a=2,\ b=2a-3=2\times2-3=1,\ c=-2$

답 (1) $a=4,\ b=12$ (2) $a=2,\ b=1,\ c=-2$

확인 문제 p. 14~30

01

$A=x^3+x^2-2x+1,\ B=x^3-2x^2-3x,$
$C=2x^3-x^2-4$이므로

(1) $A+B-2(B-C)$
$=A+B-2B+2C$
$=A-B+2C$
$=(x^3+x^2-2x+1)-(x^3-2x^2-3x)$
$+2(2x^3-x^2-4)$
$=x^3+x^2-2x+1-x^3+2x^2+3x+4x^3-2x^2-8$
$=4x^3+x^2+x-7$

(2) $A-\{2B-(A-C)\}$
$=A-(2B-A+C)$
$=A-2B+A-C$
$=2A-2B-C$
$=2(x^3+x^2-2x+1)-2(x^3-2x^2-3x)$
$-(2x^3-x^2-4)$
$=2x^3+2x^2-4x+2-2x^3+4x^2+6x-2x^3+x^2+4$
$=-2x^3+7x^2+2x+6$

답 (1) $4x^3+x^2+x-7$ (2) $-2x^3+7x^2+2x+6$

02

$2X-A=3B$에서 $2X=A+3B$

$\therefore\ X=\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}B$
$=\frac{1}{2}(2x^2+x-6)+\frac{3}{2}(x^2-3x+5)$
$=x^2+\frac{1}{2}x-3+\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{15}{2}$
$=\frac{5}{2}x^2-4x+\frac{9}{2}$

답 $\frac{5}{2}x^2-4x+\frac{9}{2}$

03

$A-2B=3x^2-4x-4$ ······ ㉠

$2A+B=-4x^2-3x+7$ ······ ㉡

㉠$+2\times$㉡을 하면

$$5A=(3x^2-4x-4)+2(-4x^2-3x+7)$$
$$=3x^2-4x-4-8x^2-6x+14$$
$$=-5x^2-10x+10$$

$\therefore A=-x^2-2x+2$

이때 ㉡에서

$$B=(-4x^2-3x+7)-2A$$
$$=(-4x^2-3x+7)-2(-x^2-2x+2)$$
$$=-4x^2-3x+7+2x^2+4x-4$$
$$=-2x^2+x+3$$

$$\therefore A-(2A+B)=A-2A-B$$
$$=-A-B$$
$$=-(-x^2-2x+2)-(-2x^2+x+3)$$
$$=x^2+2x-2+2x^2-x-3$$
$$=3x^2+x-5$$

답 $3x^2+x-5$

04

$A+B=3x^2+2x-1$ ······ ㉠

$A-B=x^2+4x-1$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2A=(3x^2+2x-1)+(x^2+4x-1)=4x^2+6x-2$

$\therefore A=2x^2+3x-1$

이때 ㉠에서

$$B=(3x^2+2x-1)-A$$
$$=(3x^2+2x-1)-(2x^2+3x-1)$$
$$=3x^2+2x-1-2x^2-3x+1$$
$$=x^2-x$$

$X-2A=B$에서

$$X=2A+B$$
$$=2(2x^2+3x-1)+(x^2-x)$$
$$=4x^2+6x-2+x^2-x$$
$$=5x^2+5x-2$$

답 $5x^2+5x-2$

05

(1) $(x+y+5)(3x-y+2)$의 전개식에서 xy항은

$x\times(-y)+y\times3x=2xy$

따라서 xy의 계수는 2이다.

(2) $(x^2-x+4)(2x^2+3x-1)$의 전개식에서 x^3항은

$x^2\times3x+(-x)\times2x^2=x^3$ $\quad\therefore a=1$

$(x^2-x+4)(2x^2+3x-1)$의 전개식에서 x항은

$-x\times(-1)+4\times3x=13x$ $\quad\therefore b=13$

$\therefore ab=1\times13=13$

답 (1) 2 (2) 13

06

$(4x^2-ax+1)(x^2+x-7)$의 전개식에서 x^3항은

$4x^2\times x+(-ax)\times x^2=(4-a)x^3$

이때 x^3의 계수가 6이므로

$4-a=6$ $\quad\therefore a=-2$

즉 $(4x^2+2x+1)(x^2+x-7)$의 전개식에서 x항은

$2x\times(-7)+1\times x=-13x$

따라서 x의 계수는 -13이다.

답 -13

07

(1) $(2x-y+2)^2$
$$=(2x)^2+(-y)^2+2^2+2\times2x\times(-y)+2\times(-y)\times2+2\times2\times2x$$
$$=4x^2+y^2+4-4xy-4y+8x$$

(2) $(x+2y+z)^2$
$$=x^2+(2y)^2+z^2+2\times x\times2y+2\times2y\times z+2\times z\times x$$
$$=x^2+4y^2+z^2+4xy+4yz+2zx$$

(3) $(x-3)(x^2+3x+9)=(x-3)(x^2+x\times3+3^2)$
$$=x^3-3^3$$
$$=x^3-27$$

(4) $(3a-b)^3=(3a)^3-3\times(3a)^2\times b+3\times3a\times b^2-b^3$
$$=27a^3-27a^2b+9ab^2-b^3$$

(5) $(x+y)^2(x-y)^2=\{(x+y)(x-y)\}^2$
$$=(x^2-y^2)^2$$
$$=(x^2)^2-2\times x^2\times y^2+(y^2)^2$$
$$=x^4-2x^2y^2+y^4$$

(6) $(x+2)^2(x^2-2x+4)^2$
$$=\{(x+2)(x^2-2x+4)\}^2$$
$$=\{(x+2)(x^2-x\times2+2^2)\}^2$$
$$=(x^3+2^3)^2$$
$$=(x^3+8)^2$$
$$=(x^3)^2+2\times x^3\times8+8^2$$
$$=x^6+16x^3+64$$

답 (1) $4x^2+y^2+4-4xy-4y+8x$
(2) $x^2+4y^2+z^2+4xy+4yz+2zx$
(3) x^3-27
(4) $27a^3-27a^2b+9ab^2-b^3$
(5) $x^4-2x^2y^2+y^4$
(6) x^6+16x^3+64

08

$(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
$=\{(x+1)(x^2-x+1)\}\{(x-1)(x^2+x+1)\}$
$=(x^3+1)(x^3-1)$
$=(x^3)^2-1$
$=x^6-1$

답 x^6-1

09

(1) 공통부분이 x^2+2x이므로 $x^2+2x=X$로 놓으면
$(x^2+2x+3)(x^2+2x-5)$
$=(X+3)(X-5)$
$=X^2-2X-15$
$=(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-15$ ← $X=x^2+2x$ 대입
$=x^4+4x^3+4x^2-2x^2-4x-15$
$=x^4+4x^3+2x^2-4x-15$

(2) 공통부분이 x^2+x이므로 $x^2+x=X$로 놓으면
$(x^2+x)(x^2+x-3)+2$
$=X(X-3)+2$
$=X^2-3X+2$
$=(x^2+x)^2-3(x^2+x)+2$ ← $X=x^2+x$ 대입
$=x^4+2x^3+x^2-3x^2-3x+2$
$=x^4+2x^3-2x^2-3x+2$

(3) 상수항의 합이 같도록 짝을 지어 두 개씩 먼저 정리하여 공통부분이 있게 만들면
$x(x+1)(x-1)(x-2)$
$=\{x(x-1)\}\{(x+1)(x-2)\}$
$=(x^2-x)(x^2-x-2)$
공통부분이 x^2-x이므로 $x^2-x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=X(X-2)$
$=X^2-2X$
$=(x^2-x)^2-2(x^2-x)$ ← $X=x^2-x$ 대입
$=x^4-2x^3+x^2-2x^2+2x$
$=x^4-2x^3-x^2+2x$

(4) 상수항의 합이 같도록 짝을 지어 두 개씩 먼저 정리하여 공통부분이 있게 만들면
$(x+3)(x+2)(x-2)(x-3)$
$=\{(x+3)(x-3)\}\{(x+2)(x-2)\}$
$=(x^2-9)(x^2-4)$
공통부분이 x^2이므로 $x^2=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X-9)(X-4)$
$=X^2-13X+36$
$=(x^2)^2-13x^2+36$ ← $X=x^2$ 대입
$=x^4-13x^2+36$

답 (1) $x^4+4x^3+2x^2-4x-15$
(2) $x^4+2x^3-2x^2-3x+2$
(3) $x^4-2x^3-x^2+2x$
(4) x^4-13x^2+36

10

(1) $a+b=4$, $a^3+b^3=28$이므로
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$에서
$28=4^3-3ab\times4$ $\quad\therefore ab=3$

(2) $x-y=-3$, $x^2+y^2=13$이므로
$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$에서
$(-3)^2=13-2xy$ $\quad\therefore xy=2$
$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=(-3)^3+3\times2\times(-3)$
$=-45$

(3) $a+b=3$, $a^2+b^2=15$이므로
$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$에서
$3^2=15+2ab$ $\quad\therefore ab=-3$
$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=3^3-3\times(-3)\times3$
$=54$

(4) $x-y=2$, $x^3-y^3=6$이므로
$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$에서
$6=2^3+3xy\times2$ $\quad\therefore xy=-\frac{1}{3}$
$\therefore x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$
$=2^2+2\times\left(-\frac{1}{3}\right)$
$=\frac{10}{3}$

답 (1) 3 (2) -45 (3) 54 (4) $\frac{10}{3}$

11

(1) $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$이므로

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=\left(\frac{5}{2}\right)^3-3\times\frac{5}{2}$$
$$=\frac{65}{8}$$

(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4$에서

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=5^2+4=29$

$\therefore x+\frac{1}{x}=\sqrt{29}$ ($\because x>0$)

$\therefore x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$
$=\sqrt{29}\times5=5\sqrt{29}$

답 (1) $\frac{65}{8}$ (2) $5\sqrt{29}$

12

$x^2-3x+1=0$에서 $x^2+1=3x$

$x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면 $x+\frac{1}{x}=3$

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=3^3-3\times3=18$

답 18

13

(1) $a+b+c=5$, $ab+bc+ca=2$이므로

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=5^2-2\times2=21$

(2) $a-b=1+\sqrt{2}$ ...... ㉠

$b-c=-2\sqrt{2}$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$a-c=1-\sqrt{2}$ $\quad\therefore c-a=-1+\sqrt{2}$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{(1+\sqrt{2})^2+(-2\sqrt{2})^2+(-1+\sqrt{2})^2\}$

$=\frac{1}{2}(3+2\sqrt{2}+8+3-2\sqrt{2})$

$=7$

(3) $a+b+c=5$, $ab+bc+ca=-1$이므로

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=5^2-2\times(-1)$
$=27$

$\therefore a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=5\{27-(-1)\}+3\times(-5)$
$=125$

답 (1) 21 (2) 7 (3) 125

14

$a+b+c=2$, $a^2+b^2+c^2=14$이므로

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$14=2^2-2(ab+bc+ca)$, $2(ab+bc+ca)=-10$

$\therefore ab+bc+ca=-5$

이때 $a+b+c=2$에서

$a+b=2-c$, $b+c=2-a$, $c+a=2-b$이므로

$(a+b)(b+c)(c+a)$
$=(2-c)(2-a)(2-b)$
$=2^3-(a+b+c)\times2^2+(ab+bc+ca)\times2-abc$
$=8-2\times4+(-5)\times2-(-6)$
$=-4$

답 -4

15

직육면체의 세 모서리의 길이를 각각 a, b, c로 놓으면

(i) 직육면체의 겉넓이가 22이므로

$2(ab+bc+ca)=22$

$\therefore ab+bc+ca=11$

(ii) $\overline{\mathrm{EC}}=\sqrt{14}$이므로 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{14}$

$\therefore a^2+b^2+c^2=14$

이때 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$(a+b+c)^2=14+2\times11=36$

$\therefore a+b+c=6$ ($\because a>0, b>0, c>0$)

따라서 직육면체 ABCD$-$EFGH의 모든 모서리의 길이의 합은

$4(a+b+c)=4\times6=24$

답 24

16

(1)
$$\begin{array}{r|l} & x+2 \\ \hline 3x-5 & 3x^2+x-3 \\ & 3x^2-5x \\ \hline & \quad 6x-3 \\ & \quad 6x-10 \\ \hline & \qquad 7 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $x+2$, 나머지: 7

(2)
$$\begin{array}{r} x^2 \qquad\quad +1 \\ x^2-2x\,\big)\overline{x^4-2x^3+x^2+\ x-5} \\ \underline{x^4-2x^3 \qquad\qquad\qquad} \\ x^2+\ x-5 \\ \underline{x^2-2x \quad\ \ } \\ 3x-5 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2+1, 나머지: $3x-5$

답 (1) 몫: $x+2$, 나머지: 7 (2) 몫: x^2+1, 나머지: $3x-5$

17

$$\begin{array}{r} x^2 \qquad\quad +2 \\ x^2-3x+2\,\big)\overline{x^4-3x^3+4x^2+\ x+5} \\ \underline{x^4-3x^3+2x^2 \qquad\qquad} \\ 2x^2+\ x+5 \\ \underline{2x^2-6x+4} \\ 7x+1 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2+2, 나머지: $7x+1$

따라서 $Q(x)=x^2+2$, $R(x)=7x+1$이므로

$Q(-1)+R(-1)=(-1)^2+2+7\times(-1)+1=-3$

답 -3

18

(1) 다항식 $f(x)$를 x^2-x로 나누었을 때의 몫은 $x+2$이고 나머지는 $3x-2$이므로 $f(x)$를 나눗셈식으로 나타내면

$$\begin{aligned} f(x)&=(x^2-x)(x+2)+3x-2 \\ &=x^3+2x^2-x^2-2x+3x-2 \\ &=x^3+x^2+x-2 \end{aligned}$$

(2) $f(x)=x^3+x^2+x-2$를 $x+3$으로 직접 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} x^2-2x\ +7 \\ x+3\,\big)\overline{x^3+\ x^2+\ x-\ 2} \\ \underline{x^3+3x^2 \qquad\qquad\quad} \\ -2x^2+\ x-\ 2 \\ \underline{-2x^2-6x \qquad} \\ 7x-\ 2 \\ \underline{7x+21} \\ -23 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2-2x+7, 나머지: -23

답 (1) x^3+x^2+x-2

(2) 몫: x^2-2x+7, 나머지: -23

19

다항식 $2x^3+x^2+2x-7$을 다항식 A로 나누었을 때의 몫은 $2x-1$이고 나머지는 $3x-7$이므로 나눗셈식으로 나타내면

$2x^3+x^2+2x-7=A(2x-1)+3x-7$

$$\begin{aligned} \therefore A(2x-1)&=2x^3+x^2+2x-7-(3x-7) \\ &=2x^3+x^2-x \end{aligned}$$

즉 다항식 A는 $2x^3+x^2-x$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫이므로 $2x^3+x^2-x$를 $2x-1$로 직접 나누면 오른쪽과 같다.

$$\begin{array}{r} x^2+\ x \\ 2x-1\,\big)\overline{2x^3+\ x^2-x} \\ \underline{2x^3-\ x^2 \qquad} \\ 2x^2-x \\ \underline{2x^2-x} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore A=x^2+x$

답 x^2+x

20

(1) $2x^3-3x^2+x+2$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ & & -2 & 5 & -6 \\ \hline & 2 & -5 & 6 & \boxed{-4} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $2x^2-5x+6$, 나머지: -4

(2) $2x+1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$이므로 $2x^3-5x^2+2x-1$을 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 2 & -5 & 2 & -1 \\ & & -1 & 3 & -\frac{5}{2} \\ \hline & 2 & -6 & 5 & \boxed{-\frac{7}{2}} \end{array}$$

이를 식으로 나타내면

$$\begin{aligned} 2x^3-5x^2+2x-1&=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-6x+5)-\frac{7}{2} \\ &=(2x+1)\left(x^2-3x+\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2} \end{aligned}$$

$\therefore$ 몫: $x^2-3x+\frac{5}{2}$, 나머지: $-\frac{7}{2}$

답 (1) 몫: $2x^2-5x+6$, 나머지: -4

(2) 몫: $x^2-3x+\frac{5}{2}$, 나머지: $-\frac{7}{2}$

21

다항식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2+4x-8$이고 나머지는 -7이므로 $f(x)$를 나눗셈식으로 나타내면

$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+4x-8)-7$

$\quad\;=(2x-1)(x^2+2x-4)-7$

따라서 다항식 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은

x^2+2x-4이고 나머지는 -7이다.

답 몫: x^2+2x-4, 나머지: -7

연습문제

p.31~35

1

$A=-x^2+2xy-3y^2$, $B=2x^2+5xy-y^2$이므로

$2A-(3B+A)$

$=2A-3B-A$

$=A-3B$

$=(-x^2+2xy-3y^2)-3(2x^2+5xy-y^2)$

$=-x^2+2xy-3y^2-6x^2-15xy+3y^2$

$=-7x^2-13xy$

따라서 $a=-7$, $b=-13$, $c=0$이므로

$a-b+c=-7-(-13)+0=6$

답 6

2

$A+B-X=3B$에서

$X=A+B-3B$

$\;=A-2B$

$\;=(x^3+2x-3)-2(x^3+2x^2+x-5)$

$\;=x^3+2x-3-2x^3-4x^2-2x+10$

$\;=-x^3-4x^2+7$

답 $-x^3-4x^2+7$

3

$A=2(x-2y)^3=2(x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3)$

$\;=2x^3-12x^2y+24xy^2-16y^3$

$B=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

$\;=x^3-(2y)^3$

$\;=x^3-8y^3$

$\therefore\ -A+2B$

$\;=-(2x^3-12x^2y+24xy^2-16y^3)+2(x^3-8y^3)$

$\;=-2x^3+12x^2y-24xy^2+16y^3+2x^3-16y^3$

$\;=12x^2y-24xy^2$

답 ⑤

4

$3x^3+x^2-3x+3$을 x^2-x+1로 직접 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} & 3x+4 \\ \hline x^2-x+1 & 3x^3+x^2-3x+3 \\ & 3x^3-3x^2+3x \\ \hline & \quad 4x^2-6x+3 \\ & \quad 4x^2-4x+4 \\ \hline & \qquad\quad -2x-1 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $3x+4$, 나머지: $-2x-1$

답 ③

5

$x^3+ax^2+bx+c=(x^2-3)(x+7)+4x-2$

$\qquad\qquad\qquad=x^3+7x^2-3x-21+4x-2$

$\qquad\qquad\qquad=x^3+7x^2+x-23$

따라서 $a=7$, $b=1$, $c=-23$이므로

$a+b-c=7+1-(-23)=31$

답 31

6

$A-B=x^3-2x^2+5x+1 \quad \cdots\cdots ㉠$

$2A+B=2x^3-x^2-5x+5 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠+㉡을 하면 $3A=3x^3-3x^2+6$

$\therefore\ A=x^3-x^2+2$

이때 ㉠에서

$B=A-(x^3-2x^2+5x+1)$

$\;=(x^3-x^2+2)-(x^3-2x^2+5x+1)$

$\;=x^3-x^2+2-x^3+2x^2-5x-1$

$\;=x^2-5x+1$

따라서 두 다항식 A, B의 상수항은 각각 2, 1이므로 상수항의 곱은

$2\times1=2$

답 ④

7

$(x+2)^2(x^2-2x+4)^2$

$=(x^2+4x+4)(x^4-4x^3+12x^2-16x+16)$

이 식의 전개식에서 x^3항은

$x^2\times(-16x)+4x\times12x^2+4\times(-4x^3)$

$=-16x^3+48x^3-16x^3$

$=16x^3$

따라서 x^3의 계수는 16이다.

답 ③

다른 풀이

$(x+2)^2(x^2-2x+4)^2=\{(x+2)(x^2-2x+4)\}^2$
$=(x^3+8)^2$
$=x^6+16x^3+64$

따라서 x^3의 계수는 16이다.

8

$x+y=5$, $x^3+y^3=65$이므로
$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$에서
$5^3=65+3xy\times5$, $125=65+15xy$
$15xy=60 \quad \therefore xy=4$
$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=5^2-2\times4=17$

답 ③

9

$x=-2-\sqrt{3}$, $y=-2+\sqrt{3}$이므로
$x+y=(-2-\sqrt{3})+(-2+\sqrt{3})=-4$
$xy=(-2-\sqrt{3})(-2+\sqrt{3})=4-3=1$

$$\therefore \frac{y^2}{x}+\frac{x^2}{y}=\frac{x^3+y^3}{xy}=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}=\frac{(-4)^3-3\times1\times(-4)}{1}=-52$$

답 -52

10

$(a-2b+c)^2=a^2+4b^2+c^2-4ab-4bc+2ca$이므로
$a^2+4b^2+c^2=(a-2b+c)^2+4ab+4bc-2ca$
$=16+30=46$

답 46

11

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로
$1=1^2-2ab \quad \therefore ab=0$
이때 주어진 조건에서 $a+b=1$이므로 $ab=0$인 경우는
$a=1$, $b=0$ 또는 $a=0$, $b=1$
(i) $a=1$, $b=0$일 때
$a^{25}+b^{25}=1^{25}+0^{25}=1$
(ii) $a=0$, $b=1$일 때
$a^{25}+b^{25}=0^{25}+1^{25}=1$
(i), (ii)에서 $a^{25}+b^{25}=1$

답 ④

다른 풀이

$a+b=1$에서 $b=1-a$
이 식을 $a^2+b^2=1$에 대입하면 $a^2+(1-a)^2=1$
$2a^2-2a+1=1$, $a^2-a=0 \quad \therefore a^2=a$
이때
$a^3=a^2a=a\times a=a^2=a$
$a^4=a^3a=a\times a=a^2=a$
$a^5=a^4a=a\times a=a^2=a$
⋮
$a^{25}=a$
같은 방법으로 $b^{25}=b$
$\therefore a^{25}+b^{25}=a+b=1$

12

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$의 양변에 abc를 곱하면
$ab+bc+ca=\frac{1}{2}abc$
$\therefore (2-a)(2-b)(2-c)$
$=8-4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)-abc$
$=8-4\times1+2\times\frac{1}{2}abc-abc=4$

답 ②

13

$\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{BF}=c$로 놓으면
(i) 직육면체의 겉넓이가 148이므로
$2(ab+bc+ca)=148 \quad \therefore ab+bc+ca=74$
(ii) 모든 모서리의 길이의 합이 60이므로
$4(a+b+c)=60 \quad \therefore a+b+c=15$
(i), (ii)에서
$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=15^2-2\times74=77$ ⋯⋯ ㉠
$\therefore \overline{BG}^2+\overline{GD}^2+\overline{DB}^2$
$=(b^2+c^2)+(a^2+c^2)+(a^2+b^2)$
$=2(a^2+b^2+c^2)$
$=2\times77=154$ ($\because$ ㉠)

답 ④

14

두 정육면체의 부피의 합이 351이므로
$a^3+b^3=351$
이때 $a+b=9$이므로
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$에서
$351=9^3-3ab\times9$, $351=729-27ab$

$27ab=378 \qquad \therefore ab=14$

따라서 두 정육면체의 겉넓이의 합은

$6a^2+6b^2=6(a^2+b^2)=6\{(a+b)^2-2ab\}$

$\qquad =6\times(9^2-2\times14)=318$

답 ④

15

$2x+1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$이므로 $2x^3+5x^2-8x-10$을 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 2 & 5 & -8 & -10 \\ & & -1 & -2 & 5 \\ \hline & 2 & 4 & -10 & \boxed{-5} \end{array}$$

이를 식으로 나타내면

$2x^3+5x^2-8x-10=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2+4x-10)-5$

$\qquad =(2x+1)(x^2+2x-5)-5$

따라서 $Q(x)=x^2+2x-5$, $R=-5$이므로

$Q(3)+R=(9+6-5)+(-5)=5$

답 ②

16

$A=2x^2-xy+3y^2$, $B=3x^2+2xy+y^2$, $C=5x^2-2y^2$ 이므로

$2A-\{B+2C-(A+2B)\}$

$=2A-(B+2C-A-2B)$

$=2A-B-2C+A+2B$

$=3A+B-2C$

$=3(2x^2-xy+3y^2)+(3x^2+2xy+y^2)-2(5x^2-2y^2)$

$=6x^2-3xy+9y^2+3x^2+2xy+y^2-10x^2+4y^2$

$=-x^2-xy+14y^2$

답 $-x^2-xy+14y^2$

17

$(2x^3-x^2+4x-3)(x^4-x^3+4x^2+3x-3)$의 전개식에서 x^2항은

$-x^2\times(-3)+4x\times3x+(-3)\times4x^2=3x^2$

$\therefore a=3$

$(2x^3-x^2+4x-3)(x^4-x^3+4x^2+3x-3)$의 전개식에서 x^3항은

$2x^3\times(-3)+(-x^2)\times3x+4x\times4x^2+(-3)\times(-x^3)$

$=10x^3$

$\therefore b=10$

$\therefore a+b=3+10=13$

답 13

18

Step by Step

새롭게 정의된 연산에 따라 계산한다.

↓

x항이 나오는 경우만 찾아 계산한다.

↓

동류항끼리 계산하여 x항을 구한다.

$\langle x^2+2x-1,\ x^2+2\rangle$

$=(x^2+2x-1)^2-(x^2+2x-1)(x^2+2)+(x^2+2)^2$

$=(x^2+2x-1)(x^2+2x-1)-(x^2+2x-1)(x^2+2)$

$\qquad +(x^2+2)(x^2+2)$

위의 식에서 x항은

$2x\times(-1)+(-1)\times2x-2x\times2=-8x$

따라서 x의 계수는 -8이다.

답 ①

19

(나)에서 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$

$a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore a=b=c$ ······ ❶

이때 (가)에서 $a+b+c=18$이므로

$a=b=c=6$ ······ ❷

따라서 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로

$\triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2=9\sqrt{3}$ ······ ❸

답 $9\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ (나)의 식을 정리하여 a, b, c사이의 관계식을 구할 수 있다.	50%
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 삼각형 ABC의 넓이를 구할 수 있다.	20%

20

$x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=16$이므로

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$에서

$16=2^2-2(xy+yz+zx) \qquad \therefore xy+yz+zx=-6$

$\therefore x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$
$=(xy+yz+zx)^2-2(xy^2z+yz^2x+zx^2y)$
$=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$
$=(-6)^2-2\times(-4)\times2$
$=52$

답 52

21

다항식 $f(x)$를 $x+\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$, 나머지는 3이므로 $f(x)$를 나눗셈식으로 나타내면

$f(x)=\left(x+\frac{1}{3}\right)Q(x)+3$
$=(3x+1)\times\frac{1}{3}Q(x)+3$

이때 $f(x)=(3x+1)(x^2+1)+R$이므로
$\frac{1}{3}Q(x)=x^2+1$, $3=R$
$\therefore Q(x)=3x^2+3$, $R=3$

답 ⑤

22

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로
$3^2=13+2(ab+bc+ca)$
$\therefore ab+bc+ca=-2$ ······ ㉠
$(a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\}$
$=a^3+b^3+c^3-3abc$
이므로 $3\times\{13-(-2)\}=27-3abc$
$\therefore abc=-6$ ······ ㉡
$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$
$=(ab+bc+ca)^2-2(ab^2c+bc^2a+ca^2b)$
$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$
$=(-2)^2-2\times(-6)\times3$
$=40$ ······ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서
$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3$
$=(ab+bc+ca)$
$\{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-(ab^2c+bc^2a+ca^2b)\}+3a^2b^2c^2$
$=(ab+bc+ca)\{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c)\}$
$+3a^2b^2c^2$
$=-2\times\{40-(-6)\times3\}+3\times(-6)^2$
$=-8$

답 ⑤

23

$A=1+x+x^2+x^3$이라 하면
$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3=(A+x^4)^3$
$=A^3+3A^2x^4+3Ax^8+x^{12}$
이 전개식에서 x^3항은 A^3, 즉 $(1+x+x^2+x^3)^3$에만 존재한다.
따라서 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$,
$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$의 전개식에서 x^3의 계수는 서로 같으므로 $a=b$
$\therefore a-b=0$

답 ③

Level Up 연습문제

p.36

1

$A=x^3-4x^2+6x-2=x^3+2(-2x^2+3x-1)$
$=x^3+2B$
이므로 $A-2B=x^3$
$\therefore A^3-8B^3=(A-2B)^3+3A\times2B(A-2B)$
$=(x^3)^3+6ABx^3$
$=x^9+6(x^3+2B)Bx^3$
$=x^9+6x^6B+12x^3B^2$
이때 x^5항, x^4항은 $12x^3B^2$을 전개한 식에서만 존재한다.
$12x^3B^2=12x^3(-2x^2+3x-1)^2$
$=12x^3(-2x^2+3x-1)(-2x^2+3x-1)$
이 식의 전개식에서 x^5항은
$12x^3\{-2x^2\times(-1)+3x\times3x+(-1)\times(-2x^2)\}$
$=156x^5$
$\therefore p=156$
또 x^4항은
$12x^3\{3x\times(-1)+(-1)\times3x\}=-72x^4$
$\therefore q=-72$
$\therefore p+q=156+(-72)=84$

답 84

2

ㄱ. $(ac+bd)(ad+bc)=a^2cd+abc^2+abd^2+b^2cd$
$=(a^2+b^2)cd+ab(c^2+d^2)$
$=1\times cd+ab\times1$
$=ab+cd$
이때 $ac+bd=0$이므로 $ab+cd=0$

ㄴ. ㄱ에서 $ab+cd=0$이므로

$(ab+cd)^2=a^2b^2+2abcd+c^2d^2=0$ …… ㉠

또 $ac+bd=0$이므로

$(ac+bd)^2=a^2c^2+2abcd+b^2d^2=0$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$a^2b^2+c^2d^2-a^2c^2-b^2d^2=0$

$a^2(b^2-c^2)-d^2(b^2-c^2)=0$

$(a^2-d^2)(b^2-c^2)=0$

$\therefore a^2=d^2$ 또는 $b^2=c^2$

$a^2+b^2=1$에서 $b^2=1-a^2$

$c^2+d^2=1$에서 $c^2=1-d^2$

이때 $a^2=d^2$이면 $1-a^2=1-d^2$이므로 $b^2=c^2$

마찬가지로 $b^2=c^2$이면 $a^2=d^2$

$\therefore a^2=d^2,\ b^2=c^2$

ㄷ. ㄴ에서 $a^2=d^2,\ b^2=c^2$이므로

$a^2+b^2=1,\ c^2+d^2=1$에서

$a^2+c^2=1,\ b^2+d^2=1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

3

$x+\dfrac{1}{x}=1$의 양변에 x를 곱하면

$x^2+1=x \qquad \therefore x^2-x+1=0$

이 식의 양변에 $x+1$을 곱하면

$(x+1)(x^2-x+1)=0,\ x^3+1=0$

$\therefore x^3=-1$

$f(n)=\dfrac{x^{2n}+1}{2x^n}$이므로

$$f(1)=\frac{x^2+1}{2x}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$f(2)=\frac{x^4+1}{2x^2}=\frac{-x+1}{2x^2}=\frac{-x^2}{2x^2}=-\frac{1}{2}$$

$$f(3)=\frac{x^6+1}{2x^3}=\frac{1+1}{-2}=-1$$

$$f(4)=\frac{x^8+1}{2x^4}=\frac{x^2+1}{-2x}=\frac{x}{-2x}=-\frac{1}{2}$$

$$f(5)=\frac{x^{10}+1}{2x^5}=\frac{-x+1}{-2x^2}=\frac{-x^2}{-2x^2}=\frac{1}{2}$$

$$f(6)=\frac{x^{12}+1}{2x^6}=\frac{1+1}{2}=1$$

$$f(7)=\frac{x^{14}+1}{2x^7}=\frac{x^2+1}{2x}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

즉 자연수 k에 대하여

$$f(6k-5)+f(6k-4)+f(6k-3)+f(6k-2)+f(6k-1)+f(6k)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1=0$$

이때 $1000=6\times166+4$이므로

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(1000)$$
$$=\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(996)\}+f(997)+f(998)+f(999)+f(1000)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

답 $-\dfrac{3}{2}$

4

세 정사각형 OABC, ODEF, OGHI의 한 변의 길이를 각각 $a,\ b,\ c$라 하면

$$\triangle\mathrm{OCD}=\frac{1}{2}ab\sin30^\circ=\frac{1}{2}ab\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}ab$$

$$\triangle\mathrm{OFG}=\frac{1}{2}bc\sin30^\circ=\frac{1}{2}bc\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}bc$$

$$\triangle\mathrm{OIA}=\frac{1}{2}ca\sin30^\circ=\frac{1}{2}ca\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}ca$$

$$\therefore \triangle\mathrm{OCD}+\triangle\mathrm{OFG}+\triangle\mathrm{OIA}=\frac{1}{4}ab+\frac{1}{4}bc+\frac{1}{4}ca=\frac{1}{4}(ab+bc+ca)$$

이때 세 삼각형의 넓이의 합이 20이므로

$\dfrac{1}{4}(ab+bc+ca)=20$

$\therefore ab+bc+ca=80$ …… ㉠

또 세 정사각형의 둘레의 길이의 합이 80이므로

$4a+4b+4c=80$

$\therefore a+b+c=20$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 세 정사각형의 넓이의 합은

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

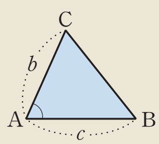
$\qquad=20^2-2\times80=240$

답 240

Lecture 삼각형의 넓이

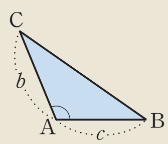
삼각형 ABC에서 두 변의 길이가 각각 $b,\ c$이고 그 끼인각이 $\angle$A일 때, 삼각형 ABC의 넓이 S는 다음과 같다.

(1) $\angle$A가 예각일 때



$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

(2) $\angle$A가 둔각일 때



$S=\dfrac{1}{2}bc\sin(180^\circ-A)$

2 항등식과 나머지정리

확인 문제

p.40 ~ 55

01

(1) 주어진 등식의 우변을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2+ax+b=cx^2+(1-2c)x-2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$2=c,\ a=1-2c,\ b=-2$

$\therefore\ a=-3,\ b=-2,\ c=2$

(2) 주어진 등식의 우변을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$4x^3+ax^2-6x+4$

$=cx^3+(bc-10)x^2+(4-10b)x+4b$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$4=c,\ a=bc-10,\ -6=4-10b,\ 4=4b$

$\therefore\ a=-6,\ b=1,\ c=4$

답 (1) $a=-3,\ b=-2,\ c=2$ (2) $a=-6,\ b=1,\ c=4$

02

주어진 등식의 양변에

$x=0$을 대입하면 $8=2a$ $\quad\therefore\ a=4$

$x=1$을 대입하면 $9=-b$ $\quad\therefore\ b=-9$

$x=2$를 대입하면 $14=2c$ $\quad\therefore\ c=7$

답 $a=4,\ b=-9,\ c=7$

03

주어진 등식의 양변에

$x=0$을 대입하면 $-1=c$ $\quad\therefore\ c=-1$

$x=1$을 대입하면 $a=4c$ $\quad\therefore\ a=-4$

$x=-1$을 대입하면 $-a=2b$

$4=2b$ $\quad\therefore\ b=2$

답 $a=-4,\ b=2,\ c=-1$

04

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$2a-b=0,\ 2-b=0,\ c+3=0$

$\therefore\ a=1,\ b=2,\ c=-3$

$\therefore\ a+b+c=1+2+(-3)=0$

답 0

05

주어진 등식의 양변에

$x=-2$를 대입하면 $0=16+4a+b$

$\therefore\ 4a+b=-16$ ······ ㉠

$x^2=3$을 대입하면 $0=9+3a+b$

$\therefore\ 3a+b=-9$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-7,\ b=12$

$\therefore\ a+b=-7+12=5$

답 5

06

주어진 등식의 좌변을 정리하면

$(a+b-2)x+(ab+1)y=0$

이 등식이 $x,\ y$에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a+b-2=0,\ ab+1=0$

$\therefore\ a+b=2,\ ab=-1$

$\therefore\ a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=2^3-3\times(-1)\times2=14$

답 14

07

등식 $(k-2)x+(3-k)y+2k-3=0$이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 주어진 등식은 k에 대한 항등식이다.

주어진 등식을 k에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(x-y+2)k+(-2x+3y-3)=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x-y+2=0,\ -2x+3y-3=0$

$\therefore\ x-y=-2,\ 2x-3y=-3$

두 식을 연립하여 풀면

$x=-3,\ y=-1$

답 $x=-3,\ y=-1$

08

등식 $ak+ab=(2-b)k-5$가 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 주어진 등식은 k에 대한 항등식이다.

주어진 등식을 k에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(a+b-2)k+(ab+5)=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$a+b-2=0,\ ab+5=0$

$\therefore\ a+b=2,\ ab=-5$

$\therefore\ a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2^2-2\times(-5)=14$

답 14

09

이차방정식 $x^2-2(k+a)x+ak+b=0$의 근이 1이므로

$1-2(k+a)+ak+b=0$

이 등식을 k에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(-2+a)k+(1-2a+b)=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$-2+a=0,\ 1-2a+b=0$

$\therefore\ a=2,\ b=3$

$\therefore\ a+b=2+3=5$ 답 5

10

주어진 등식은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 x에 대한 항등식이다.

(1) 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$1^3=a_0 \qquad \therefore\ a_0=1$

(2) 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$3^3=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9$

$\therefore\ a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=27$ ······ ㉠

(3) 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^3=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9$

$\therefore\ a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9=-1$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면 $2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8)=26$

$\therefore\ a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=13$

답 (1) 1 (2) 27 (3) 13

11

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$(3+a)^3=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9$

$\therefore\ a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=(a+3)^3$ ······ ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1-a)^3=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_9$

$\therefore\ a_0-a_1+a_2-\cdots-a_9=-(a+1)^3$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8)=(a+3)^3-(a+1)^3$

이때 $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=1$이므로

$(a+3)^3-(a+1)^3=2$

$(a^3+9a^2+27a+27)-(a^3+3a^2+3a+1)=2$

$6a^2+24a+24=0,\ a^2+4a+4=0$

$(a+2)^2=0 \qquad \therefore\ a=-2$ 답 -2

12

x^3+ax^2+bx-2를 x^2-2x+3으로 나누었을 때의 몫이 $x-1$, 나머지가 $2x+1$이므로

$x^3+ax^2+bx-2=(x^2-2x+3)(x-1)+2x+1$

$=x^3-3x^2+7x-2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면 $a=-3,\ b=7$

답 $a=-3,\ b=7$

13

$2x^3-5x^2+ax+b$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$2x^3-5x^2+ax+b=(x-1)(x+2)Q(x)+x-3$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=1$을 대입하면

$-3+a+b=-2 \qquad \therefore\ a+b=1$ ······ ㉠

양변에 $x=-2$를 대입하면

$-36-2a+b=-5 \qquad \therefore\ 2a-b=-31$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-10,\ b=11$

답 $a=-10,\ b=11$

14

다항식 x^3-x^2+2x-4를 $x-1$로 나누는 조립제법을 몫에 대하여 연속으로 하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & -1 & 2 & -4 \\
 & & 1 & 0 & 2 \\ \hline
1 & 1 & 0 & 2 & \boxed{-2} \leftarrow d \\
 & & 1 & 1 & \\ \hline
1 & 1 & 1 & \boxed{3} \leftarrow c & \\
 & & 1 & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{2} \leftarrow b & & \\
 & \uparrow & & & \\
 & a & & &
\end{array}$$

$\therefore\ x^3-x^2+2x-4$

$=(x-1)^3+2(x-1)^2+3(x-1)-2$

따라서 $a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=-2$이므로

$ab-cd=1\times2-3\times(-2)=8$ 답 8

15

$f(x)=x^3-10x^2-18x+30$을 $x-9$로 나누는 조립제법을 몫에 대하여 연속으로 하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc}
9 & 1 & -10 & -18 & 30 \\
 & & 9 & -9 & -243 \\ \hline
9 & 1 & -1 & -27 & \boxed{-213} \\
 & & 9 & 72 & \\ \hline
9 & 1 & 8 & \boxed{45} & \\
 & & 9 & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{17} & &
\end{array}$$

$\therefore f(x)=x^3-10x^2-18x+30$

$=(x-9)^3+17(x-9)^2+45(x-9)-213$

$\therefore f(9)=-213$

답 -213

16

$f(x)=x^3+ax+3$이라 하면 나머지정리에 의하여

$f(1)=1+a+3=a+4$

$f(-2)=-8-2a+3=-2a-5$

이때 나머지가 서로 같으므로 $a+4=-2a-5$

$3a=-9 \qquad \therefore a=-3$

답 -3

17

$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$이라 하면 나머지정리에 의하여

$f(1)=8,\ f(-2)=5$

$f(1)=8$에서 $1+a+b-3=8$

$\therefore a+b=10$ …… ㉠

$f(-2)=5$에서 $-8+4a-2b-3=5$

$\therefore 2a-b=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=4$

답 $a=6,\ b=4$

18

다항식 $f(x)$를 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2+2x-3)Q(x)+ax+b$

$=(x-1)(x+3)Q(x)+ax+b$

$f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 5이고, $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 -3이므로 나머지정리에 의하여 $f(-3)=5,\ f(1)=-3$

$f(-3)=5$에서 $-3a+b=5$ …… ㉠

$f(1)=-3$에서 $a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=-1$

따라서 $f(x)$를 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 나머지는 $-2x-1$이다.

답 $-2x-1$

19

다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 나머지정리에 의하여 $f(2)=3$ …… ㉠

$f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-4x+3)Q_1(x)-x+3$

$=(x-1)(x-3)Q_1(x)-x+3$

$\therefore f(1)=2$ …… ㉡

$f(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$

$=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$

㉠에서 $f(2)=2a+b=3$ …… ㉢

㉡에서 $f(1)=a+b=2$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=1$

따라서 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 나머지는 $x+1$이다.

답 $x+1$

20

다항식 $f(x)$를 $(3x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $2x-3$이므로

$f(x)=(3x-1)(x+2)Q(x)+2x-3$ …… ㉠

나머지정리에 의하여 $f(6x-5)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f\left(6\times\frac{1}{2}-5\right)=f(-2)$

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면 구하는 나머지는

$f(-2)=-4-3=-7$

답 -7

다른 풀이

위의 ㉠의 양변에 x 대신 $6x-5$를 대입하면

$f(6x-5)$

$=(18x-16)(6x-3)Q(6x-5)+12x-13$

$=6(9x-8)(2x-1)Q(6x-5)+6(2x-1)-7$

$=(2x-1)\{6(9x-8)Q(6x-5)+6\}-7$

따라서 $f(6x-5)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 나머지는 -7이다.

21

다항식 $f(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $-2x+3$이므로

$f(x)=(x^2-2x-3)Q(x)-2x+3$

$=(x+1)(x-3)Q(x)-2x+3$ …… ㉠

나머지정리에 의하여 $(x-3)f(2x+1)$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$(1-3)f(2\times1+1)=-2f(3)$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=-2\times3+3=-3$

따라서 구하는 나머지는

$-2f(3)=-2\times(-3)=6$

답 6

22

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 4이므로

$f(x)=(x-2)Q(x)+4$ ⋯⋯ ㉠

$Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $g(x)$라 하면 나머지가 -3이므로

$Q(x)=(x+1)g(x)-3$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x-2)\{(x+1)g(x)-3\}+4$

$\quad=(x-2)(x+1)g(x)-3x+10$

따라서 $f(x)$를 $(x-2)(x+1)$로 나누었을 때의 나머지는 $-3x+10$이다.

답 $-3x+10$

23

$f(x)=x^3-3x+a$라 하면 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로 나머지정리에 의하여 $f(2)=5$

$f(2)=8-6+a=5 \qquad \therefore a=3$

$\therefore f(x)=x^3-3x+3$

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 5이므로

$f(x)=(x-2)Q(x)+5$ ⋯⋯ ㉠

$Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 $Q(3)$이므로 ㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=Q(3)+5$

이때 $f(3)=27-9+3=21$이므로

$21=Q(3)+5 \qquad \therefore Q(3)=16$

따라서 $Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 16이다.

답 16

24

$f(x)$를 $(x+1)(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x+1)(x-1)^2Q(x)+ax^2+bx+c$

이때 $(x+1)(x-1)^2Q(x)$는 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 ax^2+bx+c를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지와 같다. 즉 ax^2+bx+c를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 0이므로

$ax^2+bx+c=a(x-1)^2$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-1)^2Q(x)+a(x-1)^2$

또 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로 나머지정리에 의하여 $f(-1)=4$

이때 $f(-1)=4a$이므로 $4a=4 \qquad \therefore a=1$

따라서 구하는 나머지는

$(x-1)^2=x^2-2x+1$

답 x^2-2x+1

25

$f(x)$를 $(x-2)(x^2+x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x-2)(x^2+x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$

이때 $(x-2)(x^2+x+1)Q(x)$는 x^2+x+1로 나누어떨어지므로 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지는 ax^2+bx+c를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지와 같다. 즉 ax^2+bx+c를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지가 $3x+4$이므로

$ax^2+bx+c=a(x^2+x+1)+3x+4$

$\therefore f(x)=(x-2)(x^2+x+1)Q(x)$
$\qquad\qquad +a(x^2+x+1)+3x+4$

또 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 나머지정리에 의하여 $f(2)=3$

이때 $f(2)=7a+10$이므로 $7a+10=3 \qquad \therefore a=-1$

따라서 구하는 나머지는

$-(x^2+x+1)+3x+4=-x^2+2x+3$

답 $-x^2+2x+3$

26

$f(x)=x^3+3x^2-2x-k$라 하면 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 가지므로 인수정리에 의하여 $f(1)=0$

$f(1)=1+3-2-k=0 \qquad \therefore k=2$

답 2

27

$f(x)=x^3-2ax^2+bx+6$이라 하면 $f(x)$는 $x+1$, $x-1$을 인수로 가지므로 인수정리에 의하여

$f(-1)=0$, $f(1)=0$

$f(-1)=0$에서 $-1-2a-b+6=0$

$\therefore 2a+b=5$ ⋯⋯ ㉠

$f(1)=0$에서 $1-2a+b+6=0$

$\therefore 2a-b=7$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

$\therefore a+b=3+(-1)=2$

답 2

28

$f(x)=2x^3+ax^2-3x+b$라 하면 $f(x)$가 x^2+x-2, 즉 $(x-1)(x+2)$로 나누어떨어지므로 $f(x)$는 $x-1$과 $x+2$로 각각 나누어떨어진다.

이때 인수정리에 의하여 $f(1)=0$, $f(-2)=0$

$f(1)=0$에서 $2+a-3+b=0$

$\therefore a+b=1$ ······ ㉠

$f(-2)=0$에서 $-16+4a+6+b=0$

$\therefore 4a+b=10$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$

답 $a=3$, $b=-2$

연습문제

p. 56~59

1

주어진 등식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$ax^2-(2a-b)x+a-b+c=x^2-3x+2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a=1$, $2a-b=3$, $a-b+c=2$

$\therefore a=1$, $b=-1$, $c=0$

$\therefore ab+c=1\times(-1)+0=-1$

답 -1

2

등식 $(2k-1)x-(1-k)y+k-5=0$이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 주어진 등식은 k에 대한 항등식이다.

주어진 등식의 좌변을 k에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(2x+y+1)k-x-y-5=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$2x+y+1=0$, $-x-y-5=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=-9$

$\therefore x-y=4-(-9)=13$

답 13

3

주어진 등식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(a+b+c+2)x+(-ab-bc-ca-1)=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b+c+2=0$, $-ab-bc-ca-1=0$

$\therefore a+b+c=-2$, $ab+bc+ca=-1$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=(-2)^2-2\times(-1)=6$

답 ③

4

$f(x)=x^4-2x^2+ax+5$라 하면 나머지정리에 의하여

$f(-2)=3$

$f(-2)=16-8-2a+5=3$ $\quad\therefore a=5$

답 5

다른 풀이

다항식 x^4-2x^2+ax+5를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 3이므로

$x^4-2x^2+ax+5=(x+2)Q(x)+3$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-2$를 대입하면 $16-8-2a+5=3$ $\quad\therefore a=5$

5

다항식 x^3+ax^2+bx+c를 x^2-3으로 나누었을 때의 몫이 $x+2$, 나머지가 $4x-3$이므로

$x^3+ax^2+bx+c=(x^2-3)(x+2)+4x-3$
$=x^3+2x^2+x-9$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면 $a=2$, $b=1$, $c=-9$

답 $a=2$, $b=1$, $c=-9$

6

$2x^3-3x^2+1=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)$
$+d(x-1)(x-2)(x-3)$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=1$을 대입하면 $2-3+1=a$

$\therefore a=0$

양변에 $x=2$를 대입하면 $16-12+1=a+b$

$a+b=5$ $\quad\therefore b=5$

양변에 $x=3$을 대입하면 $54-27+1=a+2b+2c$

$a+2b+2c=28$, $10+2c=28$ $\quad\therefore c=9$

양변에 $x=0$을 대입하면 $1=a-b+2c-6d$

$1=-5+18-6d$ $\quad\therefore d=2$

$\therefore a+b+c+d=0+5+9+2=16$

답 ⑤

7

다항식 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫이 x^2+1, 나머지가 2이므로

$f(x)=(x+2)(x^2+1)+2$

따라서 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(2)=4\times5+2=22$

답 ③

8

다항식 x^3+ax^2-x+b를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $x+3$이므로

$x^3+ax^2-x+b=(x+1)(x-2)Q(x)+x+3$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1+a+1+b=2 \quad \therefore a+b=2$ …… ㉠

양변에 $x=2$를 대입하면

$8+4a-2+b=5 \quad \therefore 4a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1, b=3$

답 $a=-1, b=3$

9

다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $4x+3$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+4x+3$ …… ㉠

$f(2x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $f(2\times1)=f(2)$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 구하는 나머지는

$f(2)=4\times2+3=11$

답 11

10

삼차식 $f(x)$를 x^2-5x+6, 즉 $(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$

이 식의 양변에 $x=2$, $x=3$을 각각 대입하면

$f(2)=2a+b$, $f(3)=3a+b$

(나)의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(2)=f(0)+0=2$ ($\because$ (가))

$\therefore 2a+b=2$ …… ㉠

(나)의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(3)=f(2)+1=2+1=3$

$\therefore 3a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=0$

따라서 $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나누었을 때의 나머지는 x이다.

답 ①

11

다항식 $f(x)$를 $(x-2)(3x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-2)(3x+1)Q(x)+ax+b$ …… ❶

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 8이고, $3x+1$로 나누었을 때의 나머지는 1이므로 나머지정리에 의하여

$f(2)=8, f\left(-\frac{1}{3}\right)=1$ …… ❷

$f(2)=8$에서 $2a+b=8$ …… ㉠

$f\left(-\frac{1}{3}\right)=1$에서 $-\frac{1}{3}a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3, b=2$

따라서 $f(x)$를 $(x-2)(3x+1)$로 나누었을 때의 나머지는 $3x+2$이다. …… ❸

답 $3x+2$

채점 기준	비율
❶ 나눗셈에 대한 등식을 세울 수 있다.	20%
❷ $f(2)$, $f\left(-\frac{1}{3}\right)$의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $f(x)$를 $(x-2)(3x+1)$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	60%

12

나머지정리에 의하여

$f(a)=a^3+a^2+2a+1=R_1$

$f(-a)=-a^3+a^2-2a+1=R_2$

이때 $R_1+R_2=6$이므로

$2a^2+2=6 \quad \therefore a^2=2$

따라서 $f(x)$를 $x-a^2$으로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(a^2)=f(2)=8+4+4+1=17$

답 17

13

다항식 $f(x)+x-2$는 x^2-9, 즉 $(x-3)(x+3)$으로 나누어떨어지므로 $f(x)+x-2$는 $x-3$과 $x+3$으로 각각 나누어떨어진다.

이때 인수정리에 의하여

$f(3)+3-2=0 \quad \therefore f(3)=-1$ …… ㉠

$f(-3)-3-2=0 \quad \therefore f(-3)=5$ …… ㉡

다항식 $f(x-1)$을 x^2-2x-8, 즉 $(x-4)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x-1)=(x-4)(x+2)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=4$, $x=-2$를 각각 대입하면

$f(3)=4a+b \quad \therefore -1=4a+b$ ($\because$ ㉠) …… ㉢

$f(-3)=-2a+b \quad \therefore 5=-2a+b$ ($\because$ ㉡) …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-1, b=3$

따라서 $R(x)=-x+3$이므로

$R(-3)=3+3=6$

답 ①

14

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$1^3\times(-3)^3=a_0$ $\quad\therefore a_0=-27$ ...... ㉠

등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$(-1)^3\times(-1)^3=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{15}$

$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{15}=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15}=(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{15})-a_0$

$=1-(-27)=28$

답 ⑤

15

(가), (나)에 의하여

$x^2f(x)+(3x^2+4x)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$

$(4x^2+4x)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$

$\therefore 4x(x+1)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$

등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $b=0$

등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1+a-2+b=0$ $\quad\therefore a=3$

$\therefore 4x(x+1)f(x)=x^3+3x^2+2x=x(x+1)(x+2)$

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

$f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ $\quad\therefore g(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2$ ($\because$ (가))

따라서 $g(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$g(4)=16+8=24$

답 ⑤

16

Step by Step

(가), (나)를 이용하여 $P(x)Q(x)$를 구한다.

↓

나머지정리를 이용하여 나머지를 구한다.

$\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3=12x^4+24x^3+12x^2+16$에서

$\{P(x)+Q(x)\}^3-3P(x)Q(x)\{P(x)+Q(x)\}$

$=12x^4+24x^3+12x^2+16$

이때 $P(x)+Q(x)=4$이므로

$64-12P(x)Q(x)=12x^4+24x^3+12x^2+16$

$-12P(x)Q(x)=12x^4+24x^3+12x^2-48$

$\therefore P(x)Q(x)=-x^4-2x^3-x^2+4$

따라서 $P(x)Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$P(2)Q(2)=-16-16-4+4=-32$

답 -32

17

나머지정리에 의하여 $P(2)=3$, $P(3)=5$, $P(4)=7$

즉 $P(2)-3=0$, $P(3)-5=0$, $P(4)-7=0$이므로

$P(x)-(2x-1)$은 $x-2$, $x-3$, $x-4$를 인수로 갖는다.

이때 $P(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차식이므로

$P(x)-(2x-1)=(x-2)(x-3)(x-4)$

$\therefore P(x)=(x-2)(x-3)(x-4)+2x-1$

따라서 $P(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$P(5)=3\times2\times1+9=15$

답 15

Lecture 나머지정리와 인수정리

다항식 $f(x)$에 대하여

$f(a)=b$, 즉 $f(a)-b=0$

➡ 다항식 $f(x)-b$는 $x-a$를 인수로 갖는다.

18

(가)에서 $f(x)$를 x^3+2x^2+3x, 즉 $x(x^2+2x+3)$으로 나누었을 때의 몫이 $x+2$이므로 나머지를

ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=x(x^2+2x+3)(x+2)+ax^2+bx+c$

이때 (나)에서 $f(x)$를 x^2+2x+3으로 나누었을 때의 나머지가 $x-2$이므로 ax^2+bx+c를 x^2+2x+3으로 나누었을 때의 나머지도 $x-2$이다.

즉 $ax^2+bx+c=a(x^2+2x+3)+x-2$이므로

$f(x)=x(x^2+2x+3)(x+2)$

$+a(x^2+2x+3)+x-2$ ...... ㉠

(다)에서 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로 나머지정리에 의하여 $f(1)=5$

㉠에서 $f(1)=18+6a-1=5$이므로 $a=-2$

따라서

$f(x)=x(x^2+2x+3)(x+2)-2(x^2+2x+3)+x-2$

이므로 $f(-2)=-2\times3+(-2)-2=-10$

답 -10

19

$2^{103}=(2^2)^{51}\times2=2\times4^{51}$

$2x^{51}$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 $2x^{51}=(x+1)Q(x)+R$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$2\times(-1)^{51}=R$ $\quad\therefore R=-2$

$\therefore 2x^{51}=(x+1)Q(x)-2$ ...... ㉡

㉡의 양변에 $x=4$를 대입하면

$2\times4^{51}=5Q(4)-2$
$=5\{Q(4)-1\}+5-2$
$=5\{Q(4)-1\}+3$

따라서 2^{103}을 5로 나누었을 때의 나머지는 3이다.

답 ③

20

$x^{20}+x^{19}+x+2$
$=x^{20}-1+x^{19}-1+x+4$
$=(x-1)(x^{19}+x^{18}+\cdots+x+1)$
$+(x-1)(x^{18}+x^{17}+\cdots+x+1)+x+4$
$=(x-1)(x^{19}+x^{18}+x^{17})+(x-1)(x^{16}+x^{15}+x^{14})$
$+\cdots+(x-1)(x^4+x^3+x^2)+(x-1)(x+1)$
$+(x-1)(x^{18}+x^{17}+x^{16})+(x-1)(x^{15}+x^{14}+x^{13})$
$+\cdots+(x-1)(x^3+x^2+x)+(x-1)\times1+x+4$

즉 $x^{20}+x^{19}+x+2$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지는 $(x-1)(x+1)+(x-1)\times1+x+4=x^2+2x+2$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때 $x^2+2x+2=(x^2+x+1)+x+1$이므로

구하는 나머지는 $x+1$이다.

답 ⑤

Level Up 연습문제

p. 60

1

$f(x)=x^3+9x^2+4x-45$이므로

$f(x+a)$
$=(x+a)^3+9(x+a)^2+4(x+a)-45$
$=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3+9x^2+18ax+9a^2$
$+4x+4a-45$
$=x^3+(3a+9)x^2+(3a^2+18a+4)x$
$+a^3+9a^2+4a-45$

이때 $f(x+a)=x^3+bx-3$이 x에 대한 항등식이므로

$3a+9=0$, $3a^2+18a+4=b$, $a^3+9a^2+4a-45=-3$

세 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-23$

$\therefore a+b=-3+(-23)=-26$

답 ①

2

ㄱ. 주어진 등식의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$a_0=(-3)^{100}+11=3^{100}+11$

ㄴ. 주어진 등식의 양변에 $x=-4$를 대입하면

$4^{100}+11$
$=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{99}+a_{100}$
$=(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100})$
$-(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99})$

이때 $4^{100}+11>0$이므로

$(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100})$
$-(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99})>0$

$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}>a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}$

ㄷ. 주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$2^{100}+11=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{100}$ …… ㉠

ㄴ에서

$4^{100}+11=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{100}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2^{200}+2^{100}+22=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100})$

$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2^{199}+2^{99}+11$

ㄱ에서 $a_0=3^{100}+11$이므로

$a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2^{199}+2^{99}-3^{100}$

이때 2^{199}, 2^{99}은 짝수이고 3^{100}은 홀수이므로

$a_2+a_4+\cdots+a_{100}$은 홀수이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

3

$f(x)$를 n차식이라 하면 $f(-x^2+1)$은 $2n$차식이고

$x^2f(x)-2$는 $(n+2)$차식이므로

$2n=n+2$ $\therefore n=2$

즉 $f(x)$가 이차식이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)

라 하자.

이때 $f(-x^2+1)=x^2f(x)-2$에서

$a(-x^2+1)^2+b(-x^2+1)+c=x^2(ax^2+bx+c)-2$

$ax^4+(-2a-b)x^2+a+b+c=ax^4+bx^3+cx^2-2$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$0=b,\ -2a-b=c,\ a+b+c=-2$

세 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=0,\ c=-4$

따라서 $f(x)=2x^2-4$이므로 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(2)=8-4=4$

답 4

4

$P(x)=\frac{1}{2}(x-1)$에서

$2P(x^2)=x^2-1=(x+1)(x-1)$

$\{P(x)\}^{1000}$을 $2P(x^2)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}\{P(x)\}^{1000}&=2P(x^2)Q(x)+R(x)\\&=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b\end{aligned}$$

양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$\{P(-1)\}^{1000}=-a+b,\ \{P(1)\}^{1000}=a+b$ ······ ㉠

이때

$P(-1)=\frac{1}{2}(-1-1)=-1,\ P(1)=\frac{1}{2}(1-1)=0$

이므로 이를 ㉠에 대입하면

$-a+b=1,\ a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$

따라서 $R(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$이므로

$R(3)=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-1$

답 -1

③ 인수분해

특강 확인 문제 p. 65

1

(1) $x^2+4x+4=x^2+2\times x\times 2+2^2=(x+2)^2$

(2) $9x^2+6x+1=(3x)^2+2\times 3x\times 1+1^2$
$\qquad=(3x+1)^2$

(3) $x^2-2x+1=x^2-2\times x\times 1+1^2=(x-1)^2$

(4) $2x^2-20x+50=2(x^2-10x+25)=2(x-5)^2$

(5) $a^2-64=a^2-8^2=(a+8)(a-8)$

(6) $-4a^2+b^2=-(4a^2-b^2)$
$\qquad=-\{(2a)^2-b^2\}$
$\qquad=-(2a+b)(2a-b)$

(7) $x^2-9x+14=(x-2)(x-7)$

$$\begin{array}{lcl} x & -2 \longrightarrow & -2x \\ x & -7 \longrightarrow & \underline{-7x}\ (+ \\ & & -9x \end{array}$$

(8) $x^2+4x-32=(x+8)(x-4)$

$$\begin{array}{lcl} x & 8 \longrightarrow & 8x \\ x & -4 \longrightarrow & \underline{-4x}\ (+ \\ & & 4x \end{array}$$

(9) $2x^2+7x+3=(x+3)(2x+1)$

$$\begin{array}{lcl} x & 3 \longrightarrow & 6x \\ 2x & 1 \longrightarrow & \underline{x}\ (+ \\ & & 7x \end{array}$$

(10) $6x^2-11x-7=(2x+1)(3x-7)$

$$\begin{array}{lcl} 2x & 1 \longrightarrow & 3x \\ 3x & -7 \longrightarrow & \underline{-14x}\ (+ \\ & & -11x \end{array}$$

답 (1) $(x+2)^2$ (2) $(3x+1)^2$
(3) $(x-1)^2$ (4) $2(x-5)^2$
(5) $(a+8)(a-8)$ (6) $-(2a+b)(2a-b)$
(7) $(x-2)(x-7)$ (8) $(x+8)(x-4)$
(9) $(x+3)(2x+1)$ (10) $(2x+1)(3x-7)$

2

직사각형의 넓이를 인수분해하면

$3x^2+7x-6=(x+3)(3x-2)$

가로의 길이가 $x+3$이므로 세로의 길이는 $3x-2$이다.

따라서 직사각형의 둘레의 길이는

$2\{(x+3)+(3x-2)\}=2(4x+1)=8x+2$

답 $8x+2$

3

(1) $a=\left(\frac{-18}{2}\right)^2=(-9)^2=81$

(2) $4x^2+x+a=(2x)^2+2\times 2x\times\frac{1}{4}+a$에서

$a=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$

즉 $4x^2+x+\frac{1}{16}=\left(2x+\frac{1}{4}\right)^2$이므로 $b=\frac{1}{4}$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{16}}=4$

답 (1) 81 (2) 4

4

(1) $x^2+ax+12=(x+3)(x+b)$

$$\begin{array}{cccl} x & \nearrow & 3 & \longrightarrow 3x \\ x & \searrow & b & \longrightarrow \underline{bx\ (+} \\ & & & \quad ax \end{array}$$

즉 $a=3+b$, $12=3b$이므로 $a=7$, $b=4$

$\therefore a-b=7-4=3$

(2) $8x^2-ax-3=(2x+b)(cx-3)$

$$\begin{array}{cccl} 2x & \nearrow & b & \longrightarrow bcx \\ cx & \searrow & -3 & \longrightarrow \underline{-6x\ (+} \\ & & & \quad -ax \end{array}$$

즉 $-a=bc-6$, $-3=-3b$, $8=2c$이므로

$a=2$, $b=1$, $c=4$

$\therefore a+b+c=2+1+4=7$

답 (1) 3 (2) 7

확인 문제

p. 68~78

01

(1) $4x^3y-25xy^3=xy(4x^2-25y^2)$

$=xy\{(2x)^2-(5y)^2\}$

$=xy(2x+5y)(2x-5y)$

(2) $16x^2-(2x-y)^2$

$=(4x)^2-(2x-y)^2$

$=\{4x+(2x-y)\}\{4x-(2x-y)\}$

$=(6x-y)(2x+y)$

(3) $(a-b)^3-8b^3$

$=(a-b)^3-(2b)^3$

$=\{(a-b)-2b\}\{(a-b)^2+(a-b)\times 2b+(2b)^2\}$

$=(a-3b)(a^2-2ab+b^2+2ab-2b^2+4b^2)$

$=(a-3b)(a^2+3b^2)$

(4) $(a+b)^3+(a-b)^3$

$=\{(a+b)+(a-b)\}$

$\{(a+b)^2-(a+b)(a-b)+(a-b)^2\}$

$=2a\{a^2+2ab+b^2-(a^2-b^2)+a^2-2ab+b^2\}$

$=2a(a^2+3b^2)$

답 (1) $xy(2x+5y)(2x-5y)$
(2) $(6x-y)(2x+y)$
(3) $(a-3b)(a^2+3b^2)$
(4) $2a(a^2+3b^2)$

02

(1) $x^3y+2x^2y^2-8xy^3$에서 xy가 각 항의 공통인수이므로

$x^3y+2x^2y^2-8xy^3=xy(x^2+2xy-8y^2)$

$=xy(x+4y)(x-2y)$

(2) $9(x+y)^2-6(x+y)+1=\{3(x+y)-1\}^2$

$=(3x+3y-1)^2$

(3) $2x^2+3x(y+1)-2(y+1)^2$

$=\{2x-(y+1)\}\{x+2(y+1)\}$

$=(2x-y-1)(x+2y+2)$

(4) $x^2+(a+4)x-(2a+1)(a-3)$

$=\{x+(2a+1)\}\{x-(a-3)\}$

$=(x+2a+1)(x-a+3)$

답 (1) $xy(x+4y)(x-2y)$
(2) $(3x+3y-1)^2$
(3) $(2x-y-1)(x+2y+2)$
(4) $(x+2a+1)(x-a+3)$

03

(1) $27x^3+27x^2+9x+1$

$=(3x)^3+3\times(3x)^2\times 1+3\times 3x\times 1^2+1^3$

$=(3x+1)^3$

(2) $(x+y)^3-3(x+y)^2+3(x+y)-1$

$=(x+y-1)^3$

(3) $x^2+4y^2-9-4xy$

$=(x^2-4xy+4y^2)-9$

$=(x-2y)^2-3^2$

$=(x-2y+3)(x-2y-3)$

(4) $30xy+4-9x^2-25y^2$
$=4-(9x^2-30xy+25y^2)$
$=2^2-(3x-5y)^2$
$=\{2+(3x-5y)\}\{2-(3x-5y)\}$
$=(2+3x-5y)(2-3x+5y)$

답 (1) $(3x+1)^3$
(2) $(x+y-1)^3$
(3) $(x-2y+3)(x-2y-3)$
(4) $(2+3x-5y)(2-3x+5y)$

04

(1) $x^2-x=X$로 놓으면
(주어진 식)
$=X^2+X-6$
$=(X+3)(X-2)$
$=(x^2-x+3)(x^2-x-2)$ ← $X=x^2-x$ 대입
$=(x-2)(x+1)(x^2-x+3)$

(2) $x^2+x=X$로 놓으면
(주어진 식)
$=(X-5)(X-13)+7$
$=X^2-18X+72$
$=(X-6)(X-12)$
$=(x^2+x-6)(x^2+x-12)$ ← $X=x^2+x$ 대입
$=(x+3)(x-2)(x+4)(x-3)$

(3) $x^2+3x=X$로 놓으면
(주어진 식)
$=(X+4)(X-2)-27$
$=X^2+2X-35$
$=(X+7)(X-5)$
$=(x^2+3x+7)(x^2+3x-5)$ ← $X=x^2+3x$ 대입

(4) 상수항의 합이 같은 두 식끼리 묶으면
(주어진 식)
$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}-8$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-8$
$=(X+4)(X+6)-8$ ← $x^2+5x=X$로 치환
$=X^2+10X+16$
$=(X+2)(X+8)$
$=(x^2+5x+2)(x^2+5x+8)$ ← $X=x^2+5x$ 대입

답 (1) $(x-2)(x+1)(x^2-x+3)$
(2) $(x+3)(x-2)(x+4)(x-3)$
(3) $(x^2+3x+7)(x^2+3x-5)$
(4) $(x^2+5x+2)(x^2+5x+8)$

05

$(x^2-x)(x^2-5x+6)-24$
$=x(x-1)(x-2)(x-3)-24$
상수항의 합이 같은 두 식끼리 묶으면
(주어진 식)
$=\{x(x-3)\}\{(x-1)(x-2)\}-24$
$=(x^2-3x)(x^2-3x+2)-24$
$=X(X+2)-24$ ← $x^2-3x=X$로 치환
$=X^2+2X-24$
$=(X+6)(X-4)$
$=(x^2-3x+6)(x^2-3x-4)$ ← $X=x^2-3x$ 대입
$=(x-4)(x+1)(x^2-3x+6)$
따라서 $a=-4$, $b=1$, $c=-3$, $d=6$ 또는
$a=1$, $b=-4$, $c=-3$, $d=6$이므로
$ab-cd=-4\times1-(-3)\times6$
$=-4-(-18)=14$

답 14

06

(1) $x^4-10x^2+9=X^2-10X+9$ ← $x^2=X$로 치환
$=(X-1)(X-9)$
$=(x^2-1)(x^2-9)$ ← $X=x^2$ 대입
$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

(2) $x^4-6x^2+8=X^2-6X+8$ ← $x^2=X$로 치환
$=(X-2)(X-4)$
$=(x^2-2)(x^2-4)$ ← $X=x^2$ 대입
$=(x^2-2)(x+2)(x-2)$

(3) $x^4-11x^2+25=(x^4-10x^2+25)-x^2$
$=(x^2-5)^2-x^2$
$=(x^2+x-5)(x^2-x-5)$

(4) $x^4+5x^2+9=(x^4+6x^2+9)-x^2$
$=(x^2+3)^2-x^2$
$=(x^2+x+3)(x^2-x+3)$

답 (1) $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$
(2) $(x^2-2)(x+2)(x-2)$
(3) $(x^2+x-5)(x^2-x-5)$
(4) $(x^2+x+3)(x^2-x+3)$

07

$x^4+4y^4=(x^4+4x^2y^2+4y^4)-4x^2y^2$
$=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2$
$=(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$
따라서 $a=2$, $b=-2$, $c=2$이므로
$a^3+b^3+c^3=2^3+(-2)^3+2^3=8$

답 8

08

(1) b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2-ab+2bc-4c^2$

$=-(a-2c)b+a^2-4c^2$

$=-(a-2c)b+(a+2c)(a-2c)$

$=(a-2c)(a-b+2c)$

(2) x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-xy-2y^2+3x+9y-10$

$=x^2-(y-3)x-2y^2+9y-10$

$=x^2-(y-3)x-(2y-5)(y-2)$

$=\{x-(2y-5)\}\{x+(y-2)\}$

$=(x-2y+5)(x+y-2)$

(3) a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

$=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

답 (1) $(a-2c)(a-b+2c)$
(2) $(x-2y+5)(x+y-2)$
(3) $(b-c)(a-b)(a-c)$

09

(1) $f(x)=x^3-3x^2-10x+24$라 하면

$f(2)=8-12-20+24=0$

이므로 $f(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

오른쪽과 같이 조립제법을 이용하면 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫은 x^2-x-12이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -3 & -10 & 24 \\ & & 2 & -2 & -24 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-3x^2-10x+24=(x-2)(x^2-x-12)$

$=(x-2)(x+3)(x-4)$

(2) $f(x)=2x^3-7x^2-5x+4$라 하면

$f(-1)=-2-7+5+4=0$

이므로 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

오른쪽과 같이 조립제법을 이용하면 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2-9x+4$이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -7 & -5 & 4 \\ & & -2 & 9 & -4 \\ \hline & 2 & -9 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$2x^3-7x^2-5x+4=(x+1)(2x^2-9x+4)$

$=(x+1)(x-4)(2x-1)$

(3) $f(x)=x^4+x^3-7x^2-x+6$이라 하면

$f(1)=1+1-7-1+6=0$,

$f(-1)=1-1-7+1+6=0$

이므로 $f(x)$는 $x-1$, $x+1$을 인수로 갖는다.

다음과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & -7 & -1 & 6 \\ & & 1 & 2 & -5 & -6 \\ \hline -1 & 1 & 2 & -5 & -6 & \boxed{0} \\ & & -1 & -1 & 6 & \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)$를 $(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 몫은 x^2+x-6이므로

$x^4+x^3-7x^2-x+6$

$=(x-1)(x+1)(x^2+x-6)$

$=(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$

(4) $f(x)=x^4-3x^3-3x^2+11x-6$이라 하면

$f(1)=1-3-3+11-6=0$,

$f(3)=81-81-27+33-6=0$

이므로 $f(x)$는 $x-1$, $x-3$을 인수로 갖는다.

다음과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -3 & -3 & 11 & -6 \\ & & 1 & -2 & -5 & 6 \\ \hline 3 & 1 & -2 & -5 & 6 & \boxed{0} \\ & & 3 & 3 & -6 & \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)$를 $(x-1)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫은 x^2+x-2이므로

$x^4-3x^3-3x^2+11x-6$

$=(x-1)(x-3)(x^2+x-2)$

$=(x-1)(x-3)(x-1)(x+2)$

$=(x-1)^2(x+2)(x-3)$

답 (1) $(x-2)(x+3)(x-4)$
(2) $(x+1)(x-4)(2x-1)$
(3) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$
(4) $(x-1)^2(x+2)(x-3)$

10

a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$b^2-ab-c^2+ac=-(b-c)a+b^2-c^2$

$=-(b-c)a+(b+c)(b-c)$

$=(b-c)(-a+b+c)$

$=0$

이때 $-a+b+c=0$, 즉 $a=b+c$이면 삼각형 ABC가 만들어지지 않으므로

$b-c=0 \qquad \therefore b=c$

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

답 ⑤

11

a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c-a)$

$=a^2b+ab^2-b^2c-bc^2-c^2a+ca^2$

$=(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-b^2c-bc^2$

$=(b+c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b-c)a-bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a-c)$

$=0$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$에서 $b+c\neq0$, $a+b\neq0$이므로

$a-c=0 \qquad \therefore a=c$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다.

답 $a=c$인 이등변삼각형

12

(1) $18=x$로 놓으면

$18^3+6\times18^2+12\times18+8$

$=x^3+6x^2+12x+8$

$=(x+2)^3$

$=(18+2)^3$ ← $x=18$ 대입

$=20^3$

$=8000$

(2) $104=x$로 놓으면

$\dfrac{104^2-4^2}{100^2}\times\dfrac{104^3-4^3}{104^2+4\times104+4^2}$

$=\dfrac{x^2-4^2}{(x-4)^2}\times\dfrac{x^3-4^3}{x^2+4x+4^2}$

$=\dfrac{(x+4)(x-4)}{(x-4)^2}\times\dfrac{(x-4)(x^2+4x+4^2)}{x^2+4x+4^2}$

$=x+4$

$=104+4$ ← $x=104$ 대입

$=108$

답 (1) 8000 (2) 108

13

$27=x$로 놓으면

$27\times29\times31\times33+16$

$=x(x+2)(x+4)(x+6)+16$

$=\{x(x+6)\}\{(x+2)(x+4)\}+16$

$=(x^2+6x)(x^2+6x+8)+16$ ← $x^2+6x=X$로 치환

$=X(X+8)+16=X^2+8X+16$

$=(X+4)^2$

$=(x^2+6x+4)^2$ ← $X=x^2+6x$ 대입

$=(27^2+6\times27+4)^2$ ← $x=27$ 대입

$=895^2$

$\therefore N=895$

답 895

14

$a^4-3a^2b+3ab^2-b^4$

$=a^4-b^4-3ab(a-b)$

$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)-3ab(a-b)$

$=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)-3ab(a-b)$

$=(a-b)\{(a+b)(a^2+b^2)-3ab\}$

이때 $a=2+\sqrt{3}$, $b=2-\sqrt{3}$이므로

$a+b=4$, $a-b=2\sqrt{3}$, $ab=1$, $a^2+b^2=14$

$\therefore a^4-3a^2b+3ab^2-b^4$

$=(a-b)\{(a+b)(a^2+b^2)-3ab\}$

$=2\sqrt{3}(4\times14-3)$

$=106\sqrt{3}$

답 $106\sqrt{3}$

연습문제

p. 79~83

1

$a^2+4b^2+16c^2-4ab-16bc+8ca$

$=a^2+(-2b)^2+(4c)^2+2\times a\times(-2b)$
$\qquad +2\times(-2b)\times4c+2\times4c\times a$

$=(a-2b+4c)^2$

답 ④

2

$8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$

$=(2x)^3+3\times(2x)^2\times y+3\times2x\times y^2+y^3$

$=(2x+y)^3$

답 ②

3

$(x^2+3x+2)(x^2+9x+20)-10$
$=(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)-10$
$=\{(x+1)(x+5)\}\{(x+2)(x+4)\}-10$
$=(x^2+6x+5)(x^2+6x+8)-10$
$=(X+5)(X+8)-10$ ← $x^2+6x=X$로 치환
$=X^2+13X+30$
$=(X+3)(X+10)$
$=(x^2+6x+3)(x^2+6x+10)$ ← $X=x^2+6x$ 대입
$f(x)=x^2+6x+3$, $g(x)=x^2+6x+10$이라 하면
$f(2)+g(2)=(4+12+3)+(4+12+10)=45$

답 45

4

(1) $(x-2y)(x-2y-5)+4$
$=X(X-5)+4$ ← $x-2y=X$로 치환
$=X^2-5X+4$
$=(X-1)(X-4)$
$=(x-2y-1)(x-2y-4)$ ← $X=x-2y$ 대입

(2) $x^4-3x^2+1=(x^4-2x^2+1)-x^2$
$=(x^2-1)^2-x^2$
$=(x^2+x-1)(x^2-x-1)$

답 (1) $(x-2y-1)(x-2y-4)$
(2) $(x^2+x-1)(x^2-x-1)$

5

$x^2+x=X$로 놓으면
$(x^2+x-11)(x^2+x-7)-5$
$=(X-11)(X-7)-5$
$=X^2-18X+72$
$=(X-6)(X-12)$
$=(x^2+x-6)(x^2+x-12)$ ← $X=x^2+x$ 대입
$=(x+3)(x-2)(x+4)(x-3)$
따라서 $(x^2+x-11)(x^2+x-7)-5$의 인수가 아닌 것은 $x+2$이다.

답 ③

6

$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)-144$
$=\{(x-3)(x+4)\}\{(x-1)(x+2)\}-144$
$=(x^2+x-12)(x^2+x-2)-144$
$=(X-12)(X-2)-144$ ← $x^2+x=X$로 치환
$=X^2-14X-120$
$=(X-20)(X+6)$
$=(x^2+x-20)(x^2+x+6)$ ← $X=x^2+x$ 대입
$=(x+5)(x-4)(x^2+x+6)$
따라서 $a=5$, $b=4$, $c=1$, $d=6$이므로
$ab-cd=5\times4-1\times6=14$

답 ④

7

x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2-4xy+3y^2+x+y-2$
$=x^2+(-4y+1)x+3y^2+y-2$
$=x^2+(-4y+1)x+(3y-2)(y+1)$
$=(x-3y+2)(x-y-1)$
따라서 $a=-3$, $b=-1$이므로
$a-b=-3-(-1)=-2$

답 -2

8

(1) $P(x)=x^4+3x^3+x^2+x-6$에서
$P(1)=1+3+1+1-6=0$,
$P(-3)=81-81+9-3-6=0$
이므로 $P(x)=0$을 만족시키는 정수 x의 값은 -3, 1이다.

(2) $P(1)=0$, $P(-3)=0$이므로 $P(x)$는 $x-1$, $x+3$을 인수로 갖는다.
다음과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & 3 & 1 & 1 & -6 \\
 & & 1 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
-3 & 1 & 4 & 5 & 6 & \boxed{0} \\
 & & -3 & -3 & -6 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$P(x)$를 $(x-1)(x+3)$으로 나누었을 때의 몫은 x^2+x+2이므로
$P(x)=(x-1)(x+3)(x^2+x+2)$

답 (1) -3, 1 (2) $P(x)=(x-1)(x+3)(x^2+x+2)$

9

$x^3-2x^2-5x+a=(x-1)(x-3)(x+b)$
양변에 $x=1$을 대입하면 $1-2-5+a=0$ $\therefore a=6$
$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$이라 하면
$f(1)=0$, $f(3)=0$이므로 $f(x)$는 $x-1$, $x-3$을 인수로 갖는다.
다음과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\
 & & 1 & -1 & -6 \\
\hline
3 & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \\
 & & 3 & 6 & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} &
\end{array}$$

즉 $f(x)=(x-1)(x-3)(x+2)$이므로 $b=2$

$\therefore a+b=6+2=8$ 답 8

10

$2023=x$로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{2023^3-8}{2023\times2025+4}&=\frac{x^3-8}{x(x+2)+4}\\&=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4}\\&=x-2\\&=2023-2 \leftarrow x=2023\text{ 대입}\\&=2021\end{aligned}$$

답 2021

11

$$\begin{aligned}4x^4+81y^4&=(4x^4+36x^2y^2+81y^4)-36x^2y^2\\&=(2x^2+9y^2)^2-(6xy)^2\\&=(2x^2+6xy+9y^2)(2x^2-6xy+9y^2)\end{aligned}$$

따라서 $a=6$, $b=9$이므로

$a+b=6+9=15$ 답 15

12

$(x^2-4)(x^2-2x-3)+k$

$=(x-2)(x+2)(x-3)(x+1)+k$

$=\{(x+2)(x-3)\}\{(x-2)(x+1)\}+k$

$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)+k$

$=(X-6)(X-2)+k \leftarrow x^2-x=X$로 치환

$=X^2-8X+12+k$ …… ❶

이때 주어진 식이 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면 $X^2-8X+12+k$가 X에 대한 일차식의 완전제곱식으로 인수분해되어야 하므로

$12+k=\left(\frac{-8}{2}\right)^2=16 \qquad \therefore k=4$ …… ❷

즉

$$\begin{aligned}X^2-8X+16&=(X-4)^2\\&=(x^2-x-4)^2 \leftarrow X=x^2-x\text{ 대입}\end{aligned}$$

이므로 $f(x)=x^2-x-4$ …… ❸

따라서 $k=4$, $f(1)=-4$이므로

$k+f(1)=4+(-4)=0$ …… ❹

답 0

채점 기준	비율
❶ 공통부분을 치환하여 이차식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	30%
❹ $k+f(1)$의 값을 구할 수 있다.	10%

Lecture 완전제곱식이 되는 조건

x^2+ax+b가 완전제곱식이 되기 위한 b의 조건

➡ $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$

13

직육면체의 세 모서리의 길이가 각각 x, x, $x+3$이므로

직육면체의 부피는 $x^2(x+3)$

나무 블록의 부피를 $f(x)$라 하면

$f(x)=x^2(x+3)-1^3\times2=x^3+3x^2-2$

이때 $f(-1)=-1+3-2=0$이므로

$f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

오른쪽과 같이 조립제법을 이용하면 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 x^2+2x-2이므로

$$\begin{array}{r|rrrr}-1 & 1 & 3 & 0 & -2\\ & & -1 & -2 & 2\\\hline & 1 & 2 & -2 & \boxed{0}\end{array}$$

$x^3+3x^2-2=(x+1)(x^2+2x-2)$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=-2$이므로

$$\begin{aligned}a\times b\times c&=1\times2\times(-2)\\&=-4\end{aligned}$$

답 ②

14

$15=x$로 놓으면

$\sqrt{15\times17\times19\times21+16}$

$=\sqrt{x(x+2)(x+4)(x+6)+16}$

$=\sqrt{\{x(x+6)\}\{(x+2)(x+4)\}+16}$

$=\sqrt{(x^2+6x)(x^2+6x+8)+16}$

$=\sqrt{X(X+8)+16} \leftarrow x^2+6x=X$로 치환

$=\sqrt{X^2+8X+16}$

$=\sqrt{(X+4)^2}$

$=X+4$

$=x^2+6x+4 \leftarrow X=x^2+6x$ 대입

$=15^2+6\times15+4 \leftarrow x=15$ 대입

$=319$

답 ⑤

15

y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2+5xy+ky^2+x-y-1$

$=ky^2+(5x-1)y+2x^2+x-1$

$=ky^2+(5x-1)y+(2x-1)(x+1)$

이 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 다음과 같아야 한다.

$$\begin{array}{lcl} y & 2x-1 \longrightarrow & k(2x-1)y \\ ky & x+1 \longrightarrow & \underline{\quad (x+1)y \quad} \ (+ \\ & & \{(2k+1)x-k+1\}y \end{array}$$

즉 $5x-1=(2k+1)x-k+1$이므로

$2k+1=5,\ -k+1=-1$

$\therefore\ k=2$

답 ③

참고 $ky^2+(5x-1)y+(2x-1)(x+1)$을 x, y에 대한 두 이차식의 곱으로 인수분해하는 방법은 여러 가지가 존재한다. 예를 들어 다음과 같이 인수분해할 수도 있다.

$$\begin{array}{lcl} y & -(2x-1) \longrightarrow & -k(2x-1)y \\ ky & -(x+1) \longrightarrow & \underline{\quad -(x+1)y \quad} \ (+ \\ & & \{(-2k-1)x+k-1\}y \end{array}$$

즉 $5x-1=(-2k-1)x+k-1$이므로

$-2k-1=5,\ k-1=-1$

그런데 위의 두 식을 동시에 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

16

$a^2(b+c)-b^2(a+c)+c^2(a-b)$

$=a^2b+a^2c-b^2a-b^2c+c^2a-c^2b$

$=(b+c)a^2-(b^2-c^2)a-b^2c-c^2b$

$=(b+c)a^2-(b+c)(b-c)a-bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2-(b-c)a-bc\}$

$=(b+c)(a-b)(a+c)=0$

이때 $a>0, b>0, c>0$에서 $b+c\neq0, a+c\neq0$이므로

$a-b=0 \qquad \therefore\ a=b$

따라서 주어진 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 ①

17

$42=x$로 놓으면

$42\times(42-1)\times(42+6)+5\times42-5$

$=x(x-1)(x+6)+5x-5$

$=x^3+5x^2-x-5$

$=x^2(x+5)-(x+5)$

$=(x+5)(x^2-1)$

$=(x-1)(x+1)(x+5)$

$=41\times43\times47$ ← $x=42$ 대입

$\therefore\ p+q+r=41+43+47=131$

답 ①

18

b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2b+2ab+a^2+2a+b+1$

$=(a^2+2a+1)b+a^2+2a+1$

$=(b+1)(a^2+2a+1)$

$=(b+1)(a+1)^2$

이때 $245=5\times7^2$이므로

$a+1=7,\ b+1=5$

따라서 $a=6, b=4$이므로

$a+b=10$

답 10

19

$N=2\times3^6-4\times2^5$

$=2(3^6-2^6)$

$=y(x^6-y^6)$ ← $3=x, 2=y$로 치환

$=y(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=y(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=2\times5\times7\times19$ ← $x=3, y=2$ 대입

따라서 N의 양의 약수의 개수는

$2\times2\times2\times2=16$

답 ⑤

Lecture 양의 약수의 개수

자연수 N이

$N=a^pb^q$ (a, b는 서로 다른 소수, p, q는 자연수)

꼴로 소인수분해될 때, 자연수 N의 양의 약수의 개수

➡ $(p+1)(q+1)$

20

(가)에서

$a^3-ab^2-b^2c+a^2c=a(a^2-b^2)+c(a^2-b^2)$

$=(a+c)(a^2-b^2)$

$=(a+c)(a+b)(a-b)$

$=0$

이때 $a>0, b>0, c>0$에서 $a+c\neq0, a+b\neq0$이므로

$a-b=0 \qquad \therefore\ a=b$ …… ㉠

(나)에서

$a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2$

$=a^3+b^3+ab(a+b)-c^2(a+b)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)+ab(a+b)-c^2(a+b)$

$=(a+b)(a^2+b^2-c^2)$

$=0$

이때 $a>0, b>0$에서 $a+b\neq0$이므로

$a^2+b^2-c^2=0 \qquad \therefore\ c^2=a^2+b^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 c인 직각이등변삼각형이다.
따라서 $c=8$일 때, $a=b=4\sqrt{2}$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=16$

답 16

21

Step by Step

수를 문자로 치환하여 인수분해한다.
↓
문자에 수를 대입하여 계산한다.
↓
3^6-1의 약수 중 두 자리 자연수인 것을 찾는다.

$3=x$로 놓으면

$3^6-1=x^6-1$
$=(x^3+1)(x^3-1)$
$=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$
$=4\times7\times2\times13$ ← $x=3$ 대입
$=2^3\times7\times13$

두 자리 자연수 중에서 3^6-1을 나누어떨어지도록 하는 자연수는
13, $2\times7=14$, $2\times13=26$, $2^2\times7=28$, $2^2\times13=52$, $2^3\times7=56$, $7\times13=91$
이므로 그 개수는 7이다.

답 ③

22

① $99=x$로 놓으면

$99^3+3\times99^2+3\times99+1$
$=x^3+3x^2+3x+1$
$=(x+1)^3$
$=(99+1)^3$ ← $x=99$ 대입
$=100^3$

② $98=x$로 놓으면

$98^3-2\times98^2-5\times98+6=x^3-2x^2-5x+6$
$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$이라 하면
$f(1)=1-2-5+6=0$이므로
$f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.
다음과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2-x-6)$
$=(x-1)(x-3)(x+2)$
$\therefore f(98)=97\times95\times100$

③ $101=x$로 놓으면

$101^3+4\times101^2-101-4$
$=x^3+4x^2-x-4$
$=x^2(x+4)-(x+4)$
$=(x+4)(x^2-1)$
$=(x+4)(x+1)(x-1)$
$=105\times102\times100$ ← $x=101$ 대입

④ $102=x$로 놓으면

$102^3-6\times102^2+12\times102-8$
$=x^3-6x^2+12x-8$
$=x^3-3\times x^2\times2+3\times x\times2^2-2^3$
$=(x-2)^3$
$=(102-2)^3$ ← $x=102$ 대입
$=100^3$

⑤ $99=x$, $10=y$, $11=z$로 놓으면

$99^2+10^2+11^2+2\times990+2\times110+2\times99\times11$
$=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$
$=(x+y+z)^2$
$=(99+10+11)^2$ ← $x=99$, $y=10$, $z=11$ 대입
$=120^2$

따라서 가장 큰 값은 ③이다.

답 ③

23

$a+2b=X$로 놓으면

$(a+2b-7)(a+2b+1)-9$
$=(X-7)(X+1)-9$
$=X^2-6X-16$
$=(X-8)(X+2)$
$=(a+2b-8)(a+2b+2)$ ← $X=a+2b$ 대입

이때 $a+2b-8<a+2b+2$이고 주어진 수가 소수가 되려면
$a+2b-8=1$이고 $a+2b+2$는 소수이어야 하므로
$a+2b-8=1$, 즉 $a+2b=9$를 만족시키는 자연수 a, b와 $a+2b+2$의 값은 다음과 같다.

a	1	3	5	7
b	4	3	2	1
$a+2b+2$	11	11	11	11

따라서 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 4)$, $(3, 3)$, $(5, 2)$, $(7, 1)$이므로 그 개수는 4이다.

답 4

1

$x^3(y-z)^3+y^3(z-x)^3+z^3(x-y)^3$

$=(xy-zx)^3+(yz-xy)^3+(zx-yz)^3$

이때 $(xy-zx)+(yz-xy)+(zx-yz)=0$이므로

(주어진 식)$=3(xy-zx)(yz-xy)(zx-yz)$

$=3xyz(x-y)(y-z)(z-x)$

답 $3xyz(x-y)(y-z)(z-x)$

2

$15=x$로 놓으면

$15^3+15^2-15+2=x^3+x^2-x+2$

$f(x)=x^3+x^2-x+2$라 하면

$f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ & & -2 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+2)(x^2-x+1)$

$\therefore f(15)=(15+2)(15^2-15+1)=17\times211$

따라서 $a=17$, $b=211$ 또는 $a=211$, $b=17$이므로

$a+b=228$

답 228

3

$f(x)=2x^3+(k-2)x^2+(5-k)x-5$라 하면

$f(1)=0$이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & k-2 & 5-k & -5 \\ & & 2 & k & 5 \\ \hline & 2 & k & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(2x^2+kx+5)$

이때 $2x^2+kx+5=(2x+a)(x+b)$ (a, b는 정수)라 하면

$2x^2+kx+5=2x^2+(a+2b)x+ab$에서

$k=a+2b$, $5=ab$

따라서 $a=1$, $b=5$일 때, $M=1+2\times5=11$,

$a=-1$, $b=-5$일 때, $m=-1+2\times(-5)=-11$

이므로

$M-m=11-(-11)=22$

답 22

4

n^4+n^2-2가 $(n-1)(n-2)$의 배수이므로 $\leftarrow n\neq1, n\neq2$

$n^4+n^2-2=k(n-1)(n-2)$(k는 자연수)라 하자.

$n^2=t$로 놓으면

(좌변)$=t^2+t-2=(t+2)(t-1)$

$=(n^2+2)(n^2-1)$

$=(n^2+2)(n+1)(n-1)$

이므로

$(n^2+2)(n+1)(n-1)=k(n-1)(n-2)$

$\therefore k=\dfrac{(n^2+2)(n+1)}{n-2}$

$(n^2+2)(n+1)$, 즉 n^3+n^2+2n+2를 $n-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 오른쪽과 같으므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ & & 2 & 6 & 16 \\ \hline & 1 & 3 & 8 & \boxed{18} \end{array}$$

$k=\dfrac{(n-2)(n^2+3n+8)+18}{n-2}$

$=n^2+3n+8+\dfrac{18}{n-2}$

이때 k는 자연수이므로 $n-2$가 18의 약수이어야 한다.

$n-2=18$일 때, n은 최댓값을 가지므로 구하는 n의 값은 20이다.

답 20

1 복소수

확인 문제 p. 88 ~ 102

01

ㄷ. $i^2=-1$이므로 i^2은 실수이다.
ㄹ. $2i$의 실수부분은 0, 허수부분은 2이므로 $2i$는 허수이다.
ㅁ. $1+4i$의 실수부분은 1, 허수부분은 4이므로 $1+4i$는 허수이다.
따라서 허수인 것은 ㄹ, ㅁ이다.

답 ㄹ, ㅁ

02

(4) $2i^2=-2$이므로 $\overline{2i^2}=\overline{-2}=-2$

답 (1) $2-3i$ (2) $-5i$ (3) 2023 (4) -2 (5) $2+3i$ (6) $\sqrt{3}-5i$

03

(1) $(2x-4)+(x+y)i=2+5i$에서 x, y는 실수이므로 두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$2x-4=2$ ······ ㉠
$x+y=5$ ······ ㉡
㉠에서 $x=3$
$x=3$을 ㉡에 대입하면
$3+y=5$ $\therefore y=2$

(2) $(x-y+1)+(2x+y)i=10i$에서 x, y는 실수이므로 두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x-y+1=0$ ······ ㉠
$2x+y=10$ ······ ㉡
㉠에서 $x-y=-1$ ······ ㉢
㉡+㉢을 하면 $3x=9$ $\therefore x=3$
$x=3$을 ㉡에 대입하면
$6+y=10$ $\therefore y=4$

답 (1) $x=3$, $y=2$ (2) $x=3$, $y=4$

04

$(x+2)-(xy-y^2)i=5+4i$에서 x, y는 실수이므로 두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x+2=5$ ······ ㉠
$-xy+y^2=4$ ······ ㉡
㉠에서 $x=3$
$x=3$을 ㉡에 대입하면
$-3y+y^2=4$, $y^2-3y-4=0$
$(y+1)(y-4)=0$ $\therefore y=-1$ 또는 $y=4$
이때 $xy<0$이므로 $y=-1$
따라서 $x=3$, $y=-1$이므로
$x+y=3+(-1)=2$

답 2

05

$(x^2-y^2-2x+2y)+(1-xy)i=3i$에서 x, y가 서로 다른 실수이므로 두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x^2-y^2-2x+2y=0$ ······ ㉠
$1-xy=3$ ······ ㉡
㉠에서 $(x-y)(x+y)-2(x-y)=0$
$(x-y)(x+y-2)=0$ $\therefore x+y=2$ ($\because x\neq y$)
㉡에서 $xy=-2$

$$\begin{aligned}\therefore x^3+y^3&=(x+y)^3-3xy(x+y)\\&=2^3-3\times(-2)\times2\\&=20\end{aligned}$$

답 20

06

(1) $$\begin{aligned}(2+3i)-(3-i)&=(2-3)+\{3-(-1)\}i\\&=-1+4i\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}2(3-4i)+3(1+2i)&=6-8i+3+6i\\&=9-2i\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}(2-i)\overline{(2-i)}&=(2-i)(2+i)\\&=2^2-i^2\\&=4-(-1)\\&=5\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\frac{5}{2-i}&=\frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)}\\&=\frac{10+5i}{2^2-i^2}\\&=\frac{10+5i}{4-(-1)}\\&=\frac{10+5i}{5}\\&=2+i\end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned}\frac{1-2i}{2+i}&=\frac{(1-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}\\&=\frac{2-i-4i+2i^2}{2^2-i^2}\\&=\frac{2-5i+2\times(-1)}{4-(-1)}\\&=\frac{-5i}{5}\\&=-i\end{aligned}$$

(6) $\frac{3}{1+\sqrt{2}i}-\frac{3}{1-\sqrt{2}i}$

$=\frac{3(1-\sqrt{2}i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}-\frac{3(1+\sqrt{2}i)}{(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)}$

$=\frac{3(1-\sqrt{2}i)}{1-(\sqrt{2}i)^2}-\frac{3(1+\sqrt{2}i)}{1-(\sqrt{2}i)^2}$

$=\frac{3(1-\sqrt{2}i)}{1-(-2)}-\frac{3(1+\sqrt{2}i)}{1-(-2)}$

$=\frac{3(1-\sqrt{2}i)-3(1+\sqrt{2}i)}{3}$

$=1-\sqrt{2}i-(1+\sqrt{2}i)$

$=-2\sqrt{2}i$

답 (1) $-1+4i$ (2) $9-2i$ (3) 5
(4) $2+i$ (5) $-i$ (6) $-2\sqrt{2}i$

07

$x+y=(1-i)+(1+i)=2$

$x-y=(1-i)-(1+i)=-2i$

$xy=(1-i)(1+i)=1-i^2=1-(-1)=2$

$\therefore \frac{y}{x}-\frac{x}{y}=\frac{y^2-x^2}{xy}=-\frac{x^2-y^2}{xy}$

$=-\frac{(x+y)(x-y)}{xy}$

$=-\frac{2\times(-2i)}{2}=2i$

답 $2i$

08

$z=(1-3i)(4+xi)=4+xi-12i-3xi^2$

$=(3x+4)+(x-12)i$

(1) z가 실수가 되려면 $x-12=0$이어야 하므로
$x=12$

(2) z가 순허수가 되려면 $3x+4=0$, $x-12\neq0$이어야 하므로 $x=-\frac{4}{3}$

답 (1) 12 (2) $-\frac{4}{3}$

09

$z=x(1-i)+2(-4+i)=x-xi-8+2i$

$=(x-8)+(-x+2)i$

z^2이 음의 실수가 되려면 z는 순허수이어야 하므로

$x-8=0$, $-x+2\neq0$

$\therefore x=8$

답 8

10

(1) $(1-2i)(x+yi)=3+4i$에서 좌변을 전개하여 정리하면

$(1-2i)(x+yi)=x+yi-2xi-2yi^2$

$=x+yi-2xi+2y$

$=(x+2y)+(-2x+y)i$

즉 $(x+2y)+(-2x+y)i=3+4i$에서 x, y는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+2y=3$, $-2x+y=4$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=2$

(2) $\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-i}=5+i$에서 좌변을 정리하면

$\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-i}=\frac{x(1-i)+y(1+i)}{(1+i)(1-i)}$

$=\frac{x-xi+y+yi}{1-i^2}$

$=\frac{(x+y)+(-x+y)i}{2}$

즉 $\frac{(x+y)+(-x+y)i}{2}=5+i$에서 x, y는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=10$, $-x+y=2$

두 식을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=6$

(3) $\overline{(2-3i)}(x+yi)=2-3i$에서 좌변을 전개하여 정리하면

$\overline{(2-3i)}(x+yi)=(2+3i)(x+yi)$

$=2x+2yi+3xi+3yi^2$

$=(2x-3y)+(3x+2y)i$

즉 $(2x-3y)+(3x+2y)i=2-3i$에서 x, y는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x-3y=2$, $3x+2y=-3$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-\frac{5}{13}$, $y=-\frac{12}{13}$

(4) $\frac{x}{1+2i}+\frac{y}{1-2i}=\frac{3-4i}{5}$에서 좌변을 정리하면

$\frac{x}{1+2i}+\frac{y}{1-2i}$

$=\frac{x(1-2i)+y(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

$=\frac{x-2xi+y+2yi}{1-4i^2}$

$=\frac{(x+y)+2(-x+y)i}{5}$

즉 $\frac{(x+y)+2(-x+y)i}{5}=\frac{3-4i}{5}$에서 x, y는 실수이므로 두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=3,\ -x+y=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $x=\frac{5}{2},\ y=\frac{1}{2}$

답 (1) $x=-1,\ y=2$ (2) $x=4,\ y=6$

(3) $x=-\frac{5}{13},\ y=-\frac{12}{13}$ (4) $x=\frac{5}{2},\ y=\frac{1}{2}$

11

(1) $x=-1+2i$에서 $x+1=2i$

양변을 제곱하면 $(x+1)^2=(2i)^2$

$x^2+2x+1=-4$ $\quad\therefore\ x^2+2x+5=0$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^3+2x^2+6x+5&=x(x^2+2x+5)+x+5\\&=x\times0+x+5\\&=0+(-1+2i)+5\\&=4+2i\end{aligned}$$

(2) $x=2-\sqrt{3}i$에서 $x-2=-\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $(x-2)^2=(-\sqrt{3}i)^2$

$x^2-4x+4=-3$ $\quad\therefore\ x^2-4x+7=0$

$$\begin{aligned}\therefore\ 3x^3-12x^2+20x-1&=3x(x^2-4x+7)-x-1\\&=3x\times0-x-1\\&=0-(2-\sqrt{3}i)-1\\&=-3+\sqrt{3}i\end{aligned}$$

답 (1) $4+2i$ (2) $-3+\sqrt{3}i$

12

$x+y=(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)=2$

$xy=(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=1-(\sqrt{2}i)^2=1-(-2)=3$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{y^2}{x}+\frac{x^2}{y}&=\frac{x^3+y^3}{xy}\\&=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}\\&=\frac{2^3-3\times3\times2}{3}\\&=-\frac{10}{3}\end{aligned}$$

답 $-\frac{10}{3}$

13

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}&=\overline{\alpha}(\alpha-\beta)-\overline{\beta}(\alpha-\beta)\\&=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})\\&=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})\end{aligned}$$

이때 $\alpha=3-i,\ \beta=4+3i$이므로

$\alpha-\beta=(3-i)-(4+3i)=-1-4i$

$\overline{\alpha-\beta}=\overline{-1-4i}=-1+4i$

$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}&=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})\\&=(-1-4i)(-1+4i)\\&=1-16i^2\\&=1-(-16)\\&=17\end{aligned}$$

답 17

14

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\overline{\beta}+\alpha\beta+\beta\overline{\beta}&=\overline{\alpha}(\alpha+\overline{\beta})+\beta(\alpha+\overline{\beta})\\&=(\alpha+\overline{\beta})(\overline{\alpha}+\beta)\end{aligned}$$

이때 $\alpha+\overline{\beta}=5-\sqrt{3}i$이므로

$\overline{\alpha+\overline{\beta}}=\overline{5-\sqrt{3}i}$, 즉 $\overline{\alpha}+\beta=5+\sqrt{3}i$

$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\overline{\beta}+\alpha\beta+\beta\overline{\beta}&=(\alpha+\overline{\beta})(\overline{\alpha}+\beta)\\&=(5-\sqrt{3}i)(5+\sqrt{3}i)\\&=25-(\sqrt{3}i)^2\\&=25-(-3)\\&=28\end{aligned}$$

답 28

15

(1) $z=a+bi$(a, b는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$$\begin{aligned}(2-i)z+i\overline{z}&=(2-i)(a+bi)+i(a-bi)\\&=2a+2bi-ai-bi^2+ai-bi^2\\&=(2a+2b)+2bi\end{aligned}$$

즉 $(2a+2b)+2bi=10+4i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a+2b=10,\ 2b=4$

두 식을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=2$

$\therefore\ z=3+2i$

(2) $z=a+bi$(a, b는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$$\begin{aligned}(1+i)\overline{z}+2iz&=(1+i)(a-bi)+2i(a+bi)\\&=a-bi+ai-bi^2+2ai+2bi^2\\&=(a-b)+(3a-b)i\end{aligned}$$

즉 $(a-b)+(3a-b)i=2+8i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-b=2,\ 3a-b=8$

두 식을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=1$

$\therefore\ z=3+i$

답 (1) $3+2i$ (2) $3+i$

16

$z=a+bi$(a, b는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$z+\bar{z}=8$에서

$(a+bi)+(a-bi)=2a=8 \qquad \therefore a=4$

$z\bar{z}=25$에서

$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2=25 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$a=4$를 ㉠에 대입하여 풀면

$b^2=9 \qquad \therefore b=\pm 3$

따라서 복소수 z는 $4+3i$, $4-3i$이다.

답 $4+3i$, $4-3i$

17

(1) $1+i^2=1-1=0$이므로

$$\begin{aligned}&1+i^2+i^4+\cdots+i^{98}+i^{100}\\&=(1+i^2)+i^4(1+i^2)+\cdots+i^{96}(1+i^2)+i^{100}\\&=i^{100}\\&=(i^4)^{25}\\&=1\end{aligned}$$

(2) $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1=0$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{1}{i^{503}}\\&=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)\\&\quad+\cdots+\frac{1}{i^{496}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)\\&\quad+\frac{1}{i^{500}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}\right)\\&=\frac{1}{i^{500}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}\right)\\&=\frac{1}{(i^4)^{125}}\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}\right)\\&=1\times(-1)\\&=-1\end{aligned}$$

답 (1) 1 (2) -1

18

$$\begin{aligned}&1+2i+3i^2+4i^3+5i^4+\cdots+98i^{97}+99i^{98}+100i^{99}\\&=1+2i+3i^2+4i^3+5+6i+7i^2+8i^3\\&\quad+\cdots+97+98i+99i^2+100i^3\\&=1+2i-3-4i+5+6i-7-8i\\&\quad+\cdots+97+98i-99-100i\\&=(1-3+5-7+\cdots+97-99)\\&\quad+(2-4+6-8+\cdots+98-100)i\\&=(-2)\times 25+(-2)\times 25\times i\\&=-50-50i\end{aligned}$$

따라서 $a=-50$, $b=-50$이므로

$a+b=-50+(-50)=-100$

답 -100

19

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$$

(1) $$\begin{aligned}\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{21}&=(-i)^{20}+i^{21}\\&=1+i\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{99}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{99}&=i^{99}-(-i)^{99}\\&=i^3+i^3\\&=-i-i\\&=-2i\end{aligned}$$

답 (1) $1+i$ (2) $-2i$

20

$$\begin{aligned}z^2&=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{(1-i)^2}{2}\\&=\frac{-2i}{2}=-i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z^4&=(z^2)^2=(-i)^2\\&=i^2=-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z^6&=z^4\times z^2\\&=-1\times(-i)=i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z^8&=(z^4)^2\\&=(-1)^2=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore 2z^2+4z^4+6z^6+8z^8&=-2i-4+6i+8\\&=4+4i\end{aligned}$$

답 $4+4i$

21

(1) $$\begin{aligned}&(1+\sqrt{-2})(1-\sqrt{-2})+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}+\sqrt{-3}\sqrt{6}\\&=(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}i}+\sqrt{3}i\times\sqrt{6}\\&=1-2i^2+\frac{\sqrt{2}}{i}+3\sqrt{2}i\\&=1+2-\sqrt{2}i+3\sqrt{2}i\\&=3+2\sqrt{2}i\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{\sqrt{-5}(\sqrt{15}+\sqrt{-3})+\sqrt{15}}{\sqrt{-3}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}i(\sqrt{15}+\sqrt{3}i)+\sqrt{15}}{\sqrt{3}i}$

$=\dfrac{5\sqrt{3}i-\sqrt{15}+\sqrt{15}}{\sqrt{3}i}$

$=\dfrac{5\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i}$

$=5$

답 (1) $3+2\sqrt{2}i$ (2) 5

22

$\dfrac{2}{1+i}+\sqrt{8}\sqrt{-2}-\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}$

$=\dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}+2\sqrt{2}\times\sqrt{2}i-\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}$

$=\dfrac{2(1-i)}{1-i^2}+4i-\dfrac{2}{i}$

$=\dfrac{2(1-i)}{2}+4i-\dfrac{2i}{-1}$

$=1-i+4i+2i$

$=1+5i$

따라서 $a=1$, $b=5$이므로

$a+b=1+5=6$

답 6

23

$\sqrt{x-2}\sqrt{x-6}+\sqrt{x^2-8x+12}=0$에서

$\sqrt{x-2}\sqrt{x-6}+\sqrt{(x-2)(x-6)}=0$

$\therefore \sqrt{x-2}\sqrt{x-6}=-\sqrt{(x-2)(x-6)}$

이때 $(x-2)(x-6)\neq0$이므로

$x-2<0$, $x-6<0$

$\therefore \sqrt{(x-6)^2}+|x-2|+x+3$

$=-(x-6)-(x-2)+x+3$

$=-x+6-x+2+x+3$

$=-x+11$

답 $-x+11$

24

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$, $a\neq0$, $b\neq0$에서 $a<0$, $b<0$

$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{c}{b}}$, $b\neq0$, $c\neq0$에서 $b<0$, $c>0$

이때 $a+b<0$, $b-c<0$, $-a-b+c=-(a+b)+c>0$

이므로

$|a+b|+|b-c|-\sqrt{(-a-b+c)^2}$

$=|a+b|+|b-c|-|-a-b+c|$

$=-(a+b)-(b-c)-(-a-b+c)$

$=-a-b-b+c+a+b-c$

$=-b$

답 $-b$

연습문제

p. 103 ~ 107

1

ㄱ. $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하자.

z가 실수가 아닌 복소수이려면 $b\neq0$

즉 허수단위가 포함되어 있으므로 실수가 아닌 복소수는 허수이다.

ㄴ. $2+i$의 실수부분은 2, 허수부분은 1이다.

ㄷ. $z=1-3i$에서 $\overline{z}=\overline{1-3i}=1+3i$

ㄹ. $a=5i$, $b=-4i$라 하면

$a+bi=5i+(-4i)\times i=4+5i$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

2

$(4+3i)^2-(4-3i)^2$

$=(16+24i+9i^2)-(16-24i+9i^2)$

$=(7+24i)-(7-24i)$

$=48i$

답 ⑤

3

$\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+2i+i^2}{1-i^2}$

$=\dfrac{1+2i-1}{1-(-1)}=\dfrac{2i}{2}=i$

$\therefore \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{1998}=i^{1998}=(i^4)^{499}\times i^2=i^2=-1$

답 ①

4

$(5+2i)(2+3i)+(3+2i)(3-2i)$
$=10+15i+4i+6i^2+9-4i^2$
$=10+19i-6+9+4$
$=17+19i$
따라서 $a=17$, $b=19$이므로
$b-a=19-17=2$

답 2

5

$(x+1)+\sqrt{3}i=2+yi$에서 x, y는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x+1=2$, $\sqrt{3}=y$ $\quad\therefore x=1$, $y=\sqrt{3}$
$\therefore z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$
이때
$z^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{1-2\sqrt{3}i-3}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$
이므로
$z^3=z\times z^2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$
$=\dfrac{(-1)^2-(\sqrt{3}i)^2}{4}=\dfrac{1+3}{4}=1$

답 1

6

$\sqrt{-1}\sqrt{-9}+\sqrt{2}\sqrt{-8}+\dfrac{\sqrt{-18}}{\sqrt{-2}}+\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{-4}}$
$=i\times 3i+\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}i+\dfrac{3\sqrt{2}i}{\sqrt{2}i}+\dfrac{4}{2i}$
$=3i^2+4i+3+\dfrac{2i}{i^2}$
$=-3+4i+3-2i$
$=2i$

답 ③

7

$\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}=-\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}$이므로
$x+1>0$, $x-3<0$ 또는 $x+1=0$
(i) $x+1>0$, $x-3<0$인 경우
$\quad|x-3|+2+\sqrt{(x+1)^2}=-(x-3)+2+(x+1)$
$\quad=6$
(ii) $x+1=0$, 즉 $x=-1$인 경우
$\quad|x-3|+2+\sqrt{(x+1)^2}=6$
(i), (ii)에서 $|x-3|+2+\sqrt{(x+1)^2}=6$

답 6

8

$\alpha\overline{\alpha}=3$에서 $\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{\overline{\alpha}}{3}$
$\beta\overline{\beta}=3$에서 $\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\overline{\beta}}{3}$
$\therefore (\alpha+\beta)\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)=(\alpha+\beta)\left(\dfrac{\overline{\alpha}}{3}+\dfrac{\overline{\beta}}{3}\right)$
$=\dfrac{1}{3}(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$
$=\dfrac{1}{3}(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$
$=\dfrac{1}{3}\times 3$
$=1$

답 1

9

$\alpha+\overline{\alpha}=0$, $\beta-\overline{\beta}=0$에서 $\alpha-\beta+\overline{\alpha}+\overline{\beta}=0$
$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-(\alpha-\beta)=-(1+\sqrt{3}i)$
$\therefore \overline{\alpha}+\overline{\beta}=-1-\sqrt{3}i$
이때 $\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{\alpha+\beta}$이므로
$\alpha+\beta=\overline{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}=\overline{-1-\sqrt{3}i}=-1+\sqrt{3}i$
두 식 $\alpha-\beta=1+\sqrt{3}i$, $\alpha+\beta=-1+\sqrt{3}i$를 연립하여 풀면
$\alpha=\sqrt{3}i$, $\beta=-1$
$\therefore \dfrac{\overline{\beta}}{\alpha}-\dfrac{\overline{\alpha}}{\beta}=\dfrac{-1}{\sqrt{3}i}-\dfrac{-\sqrt{3}i}{-1}$
$=\dfrac{-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}i)^2}-\sqrt{3}i$
$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}i-\sqrt{3}i$
$=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}i$

답 ②

10

$1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+i}}=1+\dfrac{1}{\dfrac{1+i-1}{1+i}}=1+\dfrac{1+i}{i}$
$=1+\dfrac{(1+i)i}{i^2}=1+\dfrac{i-1}{-1}$
$=1-i+1$
$=2-i$
따라서 $a=2$, $b=-1$이므로
$a+b=2+(-1)=1$

답 ④

11

$xy<0$이므로 $x<0$, $y>0$ 또는 $x>0$, $y<0$

(i) $x<0$, $y>0$인 경우

$|x-y|+(x-1)i=-(x-y)+(x-1)i$

즉 $-(x-y)+(x-1)i=3-2i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-x+y=3$, $x-1=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=2$

(ii) $x>0$, $y<0$인 경우

$|x-y|+(x-1)i=(x-y)+(x-1)i$

즉 $(x-y)+(x-1)i=3-2i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-y=3$, $x-1=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=-4$

이때 $x>0$, $y<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $x=-1$, $y=2$이므로

$x+y=-1+2=1$

답 1

12

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$$\begin{aligned}(2-i)z+3i\overline{z}&=(2-i)(a+bi)+3i(a-bi)\\&=2a+2bi-ai-bi^2+3ai-3bi^2\\&=(2a+4b)+(2a+2b)i \quad \cdots\cdots ❶\end{aligned}$$

즉 $(2a+4b)+(2a+2b)i=10+6i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a+4b=10$, $2a+2b=6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$ ······ ❷

$\therefore z=1+2i$ ······ ❸

답 $1+2i$

채점 기준	비율
❶ $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 주어진 식에 대입하여 정리할 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 복소수 z를 구할 수 있다.	20%

13

$z=(1+i)x^2-4x+3-i=(x^2-4x+3)+(x^2-1)i$

z^2이 음의 실수이려면 z는 순허수이어야 하므로

$x^2-4x+3=0$, $x^2-1\neq0$

$x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

이때 $x^2\neq1$, 즉 $x\neq-1$이고 $x\neq1$이므로

$x=3$

답 ⑤

14

$-2<x<2$에서

$x+2>0$, $x-2<0$, $2-x>0$, $-2-x<0$이므로

$$\begin{aligned}&\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}\sqrt{2-x}\sqrt{-2-x}\\&=\sqrt{x+2}\times\sqrt{2-x}\,i\times\sqrt{2-x}\times\sqrt{x+2}\,i\\&=(x+2)(2-x)i^2\\&=(4-x^2)\times(-1)\\&=x^2-4\end{aligned}$$

답 ①

15

ㄱ. $z_2=\left(\dfrac{\sqrt{2}\,i}{1+i}\right)^2=\dfrac{2i^2}{1+2i+i^2}=i$

ㄴ. $z_4=\left(\dfrac{\sqrt{2}\,i}{1+i}\right)^4=\left\{\left(\dfrac{\sqrt{2}\,i}{1+i}\right)^2\right\}^2$

$=z_2^{\,2}=i^2=-1$

ㄷ. $z_6=\left(\dfrac{\sqrt{2}\,i}{1+i}\right)^6=\left(\dfrac{\sqrt{2}\,i}{1+i}\right)^2\times\left(\dfrac{\sqrt{2}\,i}{1+i}\right)^4$

$=i\times(-1)=-i=-z_2$

ㄹ. $z_1=\dfrac{\sqrt{2}\,i}{1+i}$, $z_2=\left(\dfrac{\sqrt{2}\,i}{1+i}\right)^2=i$,

$z_4=\left(\dfrac{\sqrt{2}\,i}{1+i}\right)^4=z_2^{\,2}=i^2=-1$,

$z_8=\left(\dfrac{\sqrt{2}\,i}{1+i}\right)^8=z_4^{\,2}=(-1)^2=1$,

⋮

이므로 자연수 n에 대하여

$z_{n+8}=z_n$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

16

$x=1-2i$에서 $x-1=-2i$

양변을 제곱하면 $(x-1)^2=(-2i)^2$

$x^2-2x+1=-4 \qquad \therefore x^2-2x+5=0$

$$\begin{aligned}\therefore\ &x^4-4x^3+10x^2-17x+11\\&=x^2(x^2-2x+5)-2x^3+5x^2-17x+11\\&=-2x^3+5x^2-17x+11\\&=-2x(x^2-2x+5)+x^2-7x+11\\&=x^2-7x+11\\&=(x^2-2x+5)-5x+6\\&=-5x+6\\&=-5(1-2i)+6\ (\because x=1-2i)\\&=1+10i\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=10$이므로

$a+b=1+10=11$

답 ①

17

$\dfrac{z}{1+z^2}$가 실수이려면 $\dfrac{z}{1+z^2}=\overline{\dfrac{z}{1+z^2}}$

$\dfrac{z}{1+z^2}=\dfrac{\overline{z}}{1+(\overline{z})^2}$, $z(1+\overline{z}^2)=\overline{z}(1+z^2)$

$z+z\overline{z}^2=\overline{z}+\overline{z}z^2$, $z-\overline{z}=\overline{z}z^2-z\overline{z}^2$

$z-\overline{z}=z\overline{z}(z-\overline{z})$, $(z-\overline{z})(1-z\overline{z})=0$

$\therefore$ $z=\overline{z}$ 또는 $z\overline{z}=1$

이때 $z=\overline{z}$이면 복소수 z는 실수이므로 주어진 조건에 맞지 않는다.

$\therefore$ $z\overline{z}=1$

답 ③

18

Step by Step

$z=a+2bi$를 조건에 대입한다.
↓
a와 b에 대한 관계식을 구하고 주어진 식에 대입한다.
↓
주어진 식의 최솟값을 구한다.

$z^2+(\overline{z})^2=0$에서 $z^2=-(\overline{z})^2$

$z=a+2bi$에서 $\overline{z}=a-2bi$이므로 이를 위의 식에 대입하면

$(a+2bi)^2=-(a-2bi)^2$

$a^2+4abi-4b^2=-(a^2-4abi-4b^2)$

$2a^2-8b^2=0$, $a^2-4b^2=0$ $\quad\therefore$ $b^2=\dfrac{1}{4}a^2$

이때

$$\begin{aligned}6a+12b^2+11&=3a^2+6a+11 \leftarrow b^2=\tfrac{1}{4}a^2\text{을 대입}\\&=3(a^2+2a+1)+8\\&=3(a+1)^2+8\end{aligned}$$

이므로 $a=-1$에서 최솟값 8을 갖는다.

답 ③

19

$\dfrac{1}{z}=-z$에서 $z^2=-1$

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$(a+bi)^2=-1$, $a^2+2abi+(bi)^2=-1$

$a^2-b^2+2abi=-1$

이때 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=-1$에서 $b^2-a^2=1$

$2ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$

이때 $b=0$인 경우 $a^2=-1$이므로 실수 a의 값이 존재하지 않는다.

즉 $a=0$, $b=\pm1$이므로 $z=i$ 또는 $z=-i$

(i) $z=i$일 때

$$\begin{aligned}&-2+1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2019}\\&=-2+1+(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)\\&\qquad+\cdots+i^{2012}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{2016}(i+i^2+i^3)\\&=-2+1+0\times504+i+i^2+i^3\\&=-2+1+i+(-1)+(-i)\\&=-2\end{aligned}$$

(ii) $z=-i$일 때

$$\begin{aligned}&-2+1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2019}\\&=-2+1+\{(-i)+(-i)^2+(-i)^3+(-i)^4\}\\&\qquad+(-i)^4\{(-i)+(-i)^2+(-i)^3+(-i)^4\}\\&\qquad+\cdots+(-i)^{2012}\{(-i)+(-i)^2+(-i)^3+(-i)^4\}\\&\qquad+(-i)^{2016}\{(-i)+(-i)^2+(-i)^3\}\\&=-2+1+\{(-i)+(-1)+i+1\}\\&\qquad+\{(-i)+(-1)+i+1\}\\&\qquad+\cdots+\{(-i)+(-1)+i+1\}\\&\qquad+(-i)+(-i)^2+(-i)^3\\&=-2+1+0\times504+(-i)+(-i)^2+(-i)^3\\&=-2+1+(-i)+(-1)+i\\&=-2\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 값은 -2이다.

답 ①

20

$$\begin{aligned}z&=\frac{2}{-1-\sqrt{3}i}\\&=\frac{2(-1+\sqrt{3}i)}{(-1-\sqrt{3}i)(-1+\sqrt{3}i)}\\&=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z^2&=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2\\&=\frac{1-2\sqrt{3}i+(\sqrt{3}i)^2}{4}\\&=\frac{1-2\sqrt{3}i+(-3)}{4}\\&=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

$z^3=z\times z^2$

$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$=\frac{(-1)^2-(\sqrt{3}i)^2}{4}$

$=\frac{1-(-3)}{4}=1$

$\therefore z^{100}+\frac{1}{z^{100}}$

$=(z^3)^{33}\times z+\frac{1}{(z^3)^{33}\times z}$

$=z+\frac{1}{z}$

$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{2}{-1+\sqrt{3}i}$

$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{2(-1-\sqrt{3}i)}{(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)}$

$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$=\frac{-2}{2}=-1$

답 ③

21

주사위를 던져서 0, 3, 5가 적어도 한 번 나오면 나온 수들의 곱이 -32가 될 수 없다.

또

$(2i)^2=-4$,

$(1+i)^2\times 2i=2i\times 2i=-4$,

$(1+i)^4=\{(1+i)^2\}^2=(2i)^2=-4$

이므로 $n\geq 5$이어야 한다.

(i) 2가 3번, $2i$가 2번 나오는 경우

$2^3\times(2i)^2=8\times(-4)=-32 \qquad \therefore n=5$

(ii) 2가 3번, $1+i$가 2번, $2i$가 1번 나오는 경우

$2^3\times(1+i)^2\times 2i=8\times(-4)=-32 \qquad \therefore n=6$

(iii) 2가 3번, $1+i$가 4번 나오는 경우

$2^3\times(1+i)^4=8\times(-4)=-32 \qquad \therefore n=7$

(i)~(iii)에서 가능한 n의 값은 5, 6, 7이므로 그 합은

$5+6+7=18$ 답 18

22

$i^7=i^4\times i^3=-i$이므로

$z=i^7(x+5i)^2$

$=-i(x^2+10xi-25)$

$=10x+(25-x^2)i$

이때 $z^2\geq 0$이려면 z는 실수이어야 한다.

즉 $25-x^2=0$이므로

$x^2=25 \qquad \therefore x=\pm 5$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$-5+5=0$

답 0

Lecture

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

(1) $a=0$, $b=0$일 때 ➡ $z^2=0$

(2) $a\neq 0$, $b=0$일 때 ➡ $z^2=a^2>0$

(3) $a=0$, $b\neq 0$일 때 ➡ $z^2=(bi)^2=-b^2<0$

(4) $a\neq 0$, $b\neq 0$일 때 ➡ $z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$ (허수)

즉 (1), (2), (3)인 경우 z^2은 실수이고, (4)인 경우 z^2은 허수이다.

23

$z_1=\frac{\sqrt{2}}{1+i}=\frac{\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{\sqrt{2}(1-i)}{1-(-1)}=\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}$

${z_1}^2=\left\{\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}\right\}^2=\frac{(1-i)^2}{2}=\frac{1-2i-1}{2}=-i$

${z_1}^3=z_1\times{z_1}^2=\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}\times(-i)=\frac{\sqrt{2}(-1-i)}{2}$

${z_1}^4=({z_1}^2)^2=(-i)^2=i^2=-1$

${z_1}^5=z_1\times{z_1}^4=\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}\times(-1)=\frac{\sqrt{2}(-1+i)}{2}$

${z_1}^6=({z_1}^2)^3=(-i)^3=-i^3=-(-i)=i$

${z_1}^7={z_1}^3\times{z_1}^4=\frac{\sqrt{2}(-1-i)}{2}\times(-1)=\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$

${z_1}^8=({z_1}^4)^2=(-1)^2=1$

⋮

$\therefore {z_1}^{8k}=1$ (k는 자연수)

또

$z_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

${z_2}^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{3}i-3}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

${z_2}^3=z_2\times{z_2}^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$=\frac{(-1)^2-(\sqrt{3}i)^2}{4}=\frac{1-(-3)}{4}=1$

⋮

$\therefore {z_2}^{3k}=1$ (k는 자연수)

즉 ${z_1}^n={z_2}^n$을 만족시키는 자연수 n은 8과 3의 공배수이다.

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 8과 3의 최소공배수인 24이다. 답 ②

Level UP 연습문제

p. 108

1

$\omega=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$\overline{\omega}+1=\overline{a+bi}+1=a+1-bi$이므로

$$f(\overline{\omega}+1)=f(a+1-bi)$$
$$=a+1-bi-2(a+1+bi)+3i$$
$$=(-a-1)+(-3b+3)i$$

즉 $(-a-1)+(-3b+3)i=1+6i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-a-1=1$, $-3b+3=6$

$\therefore a=-2$, $b=-1$

따라서 $\omega=-2-i$이므로

$$f(-\omega)=f(2+i)$$
$$=2+i-2(2-i)+3i$$
$$=-2+6i$$

답 $-2+6i$

2

$\alpha\overline{\beta}=2$, $\overline{\alpha}\beta=2$에서 $\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{\overline{\beta}}{2}$, $\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\overline{\alpha}}{2}$

$$\therefore \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^{1790}=\left(\frac{\overline{\beta}}{2}+\frac{\overline{\alpha}}{2}\right)^{1790}$$
$$=\left(\frac{\overline{\alpha+\beta}}{2}\right)^{1790}$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{1790}$$

이때

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt{3}i-3}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$=\frac{-1-3}{4}=-1$$
$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^4=-1\times\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$
$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^5=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times(-1)$$
$$=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$
$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^6=\left\{\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3\right\}^2$$
$$=(-1)^2=1$$
$$\vdots$$

$$\therefore \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{1790}=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{6\times298+2}$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

답 $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

3

$$\left\{i^n+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n}\right\}^m=\left\{i^n+\left(\frac{1}{i^2}\right)^n\right\}^m=\{i^n+(-1)^n\}^m$$

$z_n=i^n+(-1)^n$으로 놓으면

$z_1=i+(-1)=-1+i$

$z_2=i^2+(-1)^2=-1+1=0$

$z_3=i^3+(-1)^3=-i+(-1)=-1-i$

$z_4=i^4+(-1)^4=1+1=2$

$z_5=i^5+(-1)^5=i^4\times i+(-1)=-1+i$

$\vdots$

이므로

$z_{4k-3}=-1+i$, $z_{4k-2}=0$, $z_{4k-1}=-1-i$, $z_{4k}=2$

(k는 자연수)

이때 $(z_n)^m$의 값이 음의 실수가 되려면

$z_n=z_{4k-3}$ 또는 $z_n=z_{4k-1}$, 즉 n이 홀수이고,

$m=4l$ (l은 홀수인 자연수)이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n은 1, 3, 5, $\cdots$, 47, 49의 25개이고 자연수 m은 4, 12, 20, 28, 36, 44의 6개이므로 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$6\times25=150$

답 150

4

$z_1=a+bi$, $z_2=c+di$에서 $\overline{z_1}=a-bi$, $\overline{z_2}=c-di$

$z_1\overline{z_2}=10$이므로 $(a+bi)(c-di)=10$

$(ac+bd)+(bc-ad)i=10$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$ac+bd=10$, $ad-bc=0$ …… ㉠

ㄱ. $a=1$, $b=2$, $c=2$, $d=4$일 때,

㉠을 만족시키지만 $a^2+b^2=5\neq10$

ㄴ. $z_1+\overline{z_2}=3$에서 $(a+bi)+(c-di)=3$

$(a+c)+(b-d)i=3$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+c=3$, $b-d=0$

a, b, c, d는 자연수이고 $b=d$이므로
㉠에서 $a=c$
이때 $a=c$를 $a+c=3$에 대입하면
$a=c=\frac{3}{2}$
즉 a, c의 값이 자연수가 아니므로 $z_1+\overline{z_2}=3$을 만족시키는 복소수 z_1, z_2는 존재하지 않는다.

ㄷ. $(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=41$에서 $(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=41$
$z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=41$ ······ ㉡
또 $z_1\overline{z_2}=10$에서 $\overline{z_1\overline{z_2}}=\overline{10}$
$\therefore \overline{z_1}z_2=10$
$z_1\overline{z_2}=10$, $\overline{z_1}z_2=10$을 ㉡에 대입하면
$z_1\overline{z_1}+10+10+z_2\overline{z_2}=41$, $z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=21$
$\therefore z_2\overline{z_2}=21-z_1\overline{z_1}$
이때 $z_1=a+bi$이므로
$z_2\overline{z_2}=21-(a+bi)(a-bi)$
$=21-(a^2+b^2)$
$\leq 21-(1^2+1^2)=19$ ($\because$ a, b는 자연수)
즉 $z_2\overline{z_2}\leq 19$이므로 $z_2\overline{z_2}$의 최댓값은 19이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

2 이차방정식

확인 문제 p. 111~126

01

(1) $x(x-2)-3=2(x-3)$에서
$x^2-2x-3=2x-6$
$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

(2) $2(x+3)^2-5=-x+20$에서
$2x^2+12x+18-5=-x+20$
$2x^2+13x-7=0$, $(x+7)(2x-1)=0$
$\therefore x=-7$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

(3) $3x(x-2)+4=x(x+1)$에서
$3x^2-6x+4=x^2+x$, $2x^2-7x+4=0$
$\therefore x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times2\times4}}{2\times2}=\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}$

(4) $\sqrt{3}x^2+(3-\sqrt{3})x-3=0$의 양변에 $\sqrt{3}$을 곱하면
$3x^2+(3\sqrt{3}-3)x-3\sqrt{3}=0$
$x^2+(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{3}=0$, $(x+\sqrt{3})(x-1)=0$
$\therefore x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=1$

답 (1) $x=1$ 또는 $x=3$
(2) $x=-7$ 또는 $x=\frac{1}{2}$
(3) $x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}$
(4) $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=1$

02

$x=2$를 $x^2-kx+4k^2-10=0$에 대입하면
$4-2k+4k^2-10=0$, $2k^2-k-3=0$
$(k+1)(2k-3)=0$
$\therefore k=\frac{3}{2}$ ($\because k>0$)

답 $\frac{3}{2}$

03

$x=-1$을 $(k-2)x^2+6x+k^2+2=0$에 대입하면
$k-2-6+k^2+2=0$, $k^2+k-6=0$
$(k+3)(k-2)=0$ $\quad\therefore k=-3$ 또는 $k=2$
그런데 x에 대한 이차방정식이므로
$k-2\neq0$, 즉 $k\neq2$ $\quad\therefore k=-3$
$k=-3$을 $(k-2)x^2+6x+k^2+2=0$에 대입하면

$-5x^2+6x+11=0$, $5x^2-6x-11=0$

$(x+1)(5x-11)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=\dfrac{11}{5}$

즉 다른 한 근은 $\dfrac{11}{5}$이므로 $\alpha=\dfrac{11}{5}$

$\therefore k+\alpha=-3+\dfrac{11}{5}=-\dfrac{4}{5}$

답 $-\dfrac{4}{5}$

04

(1) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 구하면 $x-3=0$에서 $x=3$

(i) $x<3$일 때, $-(x-3)=-3x+5$이므로

$-x+3=-3x+5$, $2x=2$ $\quad\therefore x=1$

(ii) $x\geq3$일 때, $x-3=-3x+5$이므로

$4x=8$ $\quad\therefore x=2$

그런데 $x\geq3$이므로 $x=2$는 방정식의 해가 아니다.

(i), (ii)에서 $x=1$

(2) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 구하면 $2x-1=0$에서 $x=\dfrac{1}{2}$

(i) $x<\dfrac{1}{2}$일 때, $x^2+(2x-1)=3-x$이므로

$x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

그런데 $x<\dfrac{1}{2}$이므로 $x=-4$

(ii) $x\geq\dfrac{1}{2}$일 때, $x^2-(2x-1)=3-x$이므로

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

그런데 $x\geq\dfrac{1}{2}$이므로 $x=2$

(i), (ii)에서 $x=-4$ 또는 $x=2$

답 (1) $x=1$ (2) $x=-4$ 또는 $x=2$

05

$x^2-|x-2|=6-\sqrt{x^2}$에서 $x^2-|x-2|=6-|x|$

(i) $x<0$일 때, $x^2+(x-2)=6+x$이므로

$x^2=8$ $\quad\therefore x=\pm2\sqrt{2}$

그런데 $x<0$이므로 $x=-2\sqrt{2}$

(ii) $0\leq x<2$일 때, $x^2+(x-2)=6-x$이므로

$x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

그런데 $0\leq x<2$이므로 이를 만족시키는 해는 없다.

(iii) $x\geq2$일 때, $x^2-(x-2)=6-x$이므로

$x^2=4$ $\quad\therefore x=\pm2$

그런데 $x\geq2$이므로 $x=2$

(i)~(iii)에서 $x=-2\sqrt{2}$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 정수 x의 값은 2이다.

답 2

06

직사각형의 세로의 길이를 x cm라 하면 가로의 길이는 $(x+4)$ cm

이때 직사각형의 넓이가 192 cm^2이므로

$x(x+4)=192$, $x^2+4x-192=0$

$(x+16)(x-12)=0$ $\quad\therefore x=-16$ 또는 $x=12$

그런데 $x>0$이므로 $x=12$

따라서 세로의 길이가 12 cm, 가로의 길이가 16 cm인 직사각형의 둘레의 길이는

$2(12+16)=56$(cm)

답 56 cm

07

t초가 지난 후의 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이는 각각

$(60-2t)$ cm, $(33+3t)$ cm

t초가 지난 후의 직사각형의 넓이가 처음 직사각형의 넓이와 같아지므로

$(60-2t)(33+3t)=60\times33$

$-6t^2+114t+60\times33=60\times33$

$-6t^2+114t=0$, $t^2-19t=0$

$t(t-19)=0$ $\quad\therefore t=0$ 또는 $t=19$

그런데 $t>0$이므로 $t=19$

답 19

08

이차방정식 $x^2+2(k+2)x+k^2-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(k+2)^2-(k^2-3)=4k+7$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=4k+7>0$ $\quad\therefore k>-\dfrac{7}{4}$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=4k+7=0$ $\quad\therefore k=-\dfrac{7}{4}$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=4k+7<0$ $\quad\therefore k<-\frac{7}{4}$

답 (1) $k>-\frac{7}{4}$ (2) $k=-\frac{7}{4}$ (3) $k<-\frac{7}{4}$

09

이차방정식 $x^2+kx+2k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4(2k+5)=k^2-8k-20$

중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$k^2-8k-20=0$, $(k+2)(k-10)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=10$

따라서 구하는 양수 k의 값은 10이다.

답 10

10

이차방정식 $x^2+(2k+1)x+k^2+2k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2k+1)^2-4(k^2+2k)=-4k+1$

실근을 가지려면 $D\geq0$이어야 하므로

$-4k+1\geq0$ $\quad\therefore k\leq\frac{1}{4}$

답 $k\leq\frac{1}{4}$

11

이차방정식 $x^2+(2k+m)x+k^2+k+n=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2k+m)^2-4(k^2+k+n)$

$=4k^2+4km+m^2-4k^2-4k-4n$

$=4km+m^2-4k-4n$

중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$4km+m^2-4k-4n=0$, 즉 $(4m-4)k+m^2-4n=0$

이 식이 k에 대한 항등식이므로

$4m-4=0$, $m^2-4n=0$ $\quad\therefore m=1$, $n=\frac{1}{4}$

답 $m=1$, $n=\frac{1}{4}$

12

이차방정식 $x^2-2(k+a)x+k^2+a^2-2b+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+a)^2-(k^2+a^2-2b+4)$

$=k^2+2ak+a^2-k^2-a^2+2b-4$

$=2ak+2b-4$

중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$2ak+2b-4=0$

이 식이 k에 대한 항등식이므로

$a=0$, $2b-4=0$

$\therefore a=0$, $b=2$

답 $a=0$, $b=2$

13

(1) 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $x^2+(k+5)x+2k+6=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=(k+5)^2-4(2k+6)=0$

$k^2+10k+25-8k-24=0$

$k^2+2k+1=0$, $(k+1)^2=0$

$\therefore k=-1$

(2) 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $(k-1)x^2-4(k-1)x+3k+1=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-2(k-1)\}^2-(k-1)(3k+1)=0$

$4k^2-8k+4-(3k^2-2k-1)=0$

$k^2-6k+5=0$, $(k-1)(k-5)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=5$

이때 주어진 식이 이차식이므로

$k-1\neq0$에서 $k\neq1$

따라서 구하는 실수 k의 값은 5이다.

답 (1) -1 (2) 5

14

이차방정식 $x^2+3x+5=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=5$

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=5\times(-3)$

$=-15$

(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-3)^2-2\times5$

$=-1$

(3) $\frac{\alpha^3+\beta^3}{(\alpha-1)(\beta-1)}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$

$=\frac{(-3)^3-3\times5\times(-3)}{5-(-3)+1}$

$=2$

(4) $\dfrac{\beta}{\alpha+1}+\dfrac{\alpha}{\beta+1}=\dfrac{\beta(\beta+1)+\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\alpha+\beta}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$$

$$=\frac{(-3)^2-2\times5-3}{5-3+1}$$

$$=-\frac{4}{3}$$

답 (1) -15 (2) -1 (3) 2 (4) $-\dfrac{4}{3}$

15

이차방정식 $x^2-5x+7=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-5\alpha+7=0$, $\beta^2-5\beta+7=0$

$\therefore$ $\alpha^2-4\alpha+7=\alpha$, $\beta^2-4\beta+7=\beta$

또 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=7$

$\therefore$ $\dfrac{\beta}{\alpha^2-4\alpha+7}+\dfrac{\alpha}{\beta^2-4\beta+7}=\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{5^2-2\times7}{7}=\frac{11}{7}$$

답 $\dfrac{11}{7}$

16

이차방정식 $x^2+3x+k=0$의 두 근이 2, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2+\alpha=-3$, $2\alpha=k$ $\quad\therefore$ $\alpha=-5$, $k=-10$

$\therefore$ $k+\alpha=-10+(-5)=-15$

답 -15

17

이차방정식 $x^2+ax+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=3$ ······ ㉠

또 이차방정식 $x^2+6x+b=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+1)+(\beta+1)=-6$, $(\alpha+1)(\beta+1)=b$

$\therefore$ $\alpha+\beta=-8$, $\alpha\beta+\alpha+\beta+1=b$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $-a=-8$, $3-a+1=b$

따라서 $a=8$, $b=-4$이므로

$a-b=8-(-4)=12$

답 12

18

이차방정식 $x^2-kx+5k-4=0$의 두 근의 비가 $2:3$이므로 이 이차방정식의 두 근을 2α, $3\alpha(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+3\alpha=k$ $\quad\therefore$ $k=5\alpha$ ······ ㉠

$2\alpha\times3\alpha=5k-4$ $\quad\therefore$ $6\alpha^2=5k-4$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $6\alpha^2=5\times5\alpha-4$

$6\alpha^2-25\alpha+4=0$, $(6\alpha-1)(\alpha-4)=0$

$\therefore$ $\alpha=\dfrac{1}{6}$ 또는 $\alpha=4$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $k=\dfrac{5}{6}$ 또는 $k=20$

따라서 구하는 정수 k의 값은 20이다.

답 20

19

이차방정식 $x^2+kx+2k-7=0$의 두 근의 차가 4이므로 이 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+4$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+4)=-k$ $\quad\therefore$ $k=-2\alpha-4$ ······ ㉠

$\alpha(\alpha+4)=2k-7$ $\quad\therefore$ $\alpha^2+4\alpha=2k-7$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\alpha^2+4\alpha=2(-2\alpha-4)-7$

$\alpha^2+8\alpha+15=0$, $(\alpha+3)(\alpha+5)=0$

$\therefore$ $\alpha=-3$ 또는 $\alpha=-5$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $k=2$ 또는 $k=6$

따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은

$2+6=8$

답 8

20

이차방정식 $x^2+3x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-1$

(1) 두 근 $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$의 합과 곱을 구하면

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{-3}{-1}=3$

$\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha\beta}=-1$

따라서 두 수 $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-3x-1=0$

(2) 두 근 α^2, β^2의 합과 곱을 구하면

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-3)^2-2\times(-1)$

$=11$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-1)^2=1$

따라서 두 수 α^2, β^2을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-11x+1=0$

답 (1) $x^2-3x-1=0$　(2) $x^2-11x+1=0$

21

이차방정식 $x^2-4x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-2$

두 근 $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$의 합과 곱을 구하면

$$\alpha+\frac{1}{\beta}+\beta+\frac{1}{\alpha}=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$
$$=4+\frac{4}{-2}=2$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+2+\frac{1}{\alpha\beta}=-2+2+\frac{1}{-2}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

따라서 두 수 $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-2x-\frac{1}{2}=0$

답 $x^2-2x-\frac{1}{2}=0$

22

(1) 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 근을 구하면 근의 공식에 의하여

$x=1\pm\sqrt{1-3}=1\pm\sqrt{2}i$

$\therefore x^2-2x+3=(x-1+\sqrt{2}i)(x-1-\sqrt{2}i)$

(2) 이차방정식 $x^2-6x+7=0$의 근을 구하면 근의 공식에 의하여

$x=3\pm\sqrt{9-7}=3\pm\sqrt{2}$

$\therefore x^2-6x+7=(x-3+\sqrt{2})(x-3-\sqrt{2})$

(3) 이차방정식 $2x^2-4x+1=0$의 근을 구하면 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-2}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore 2x^2-4x+1=2\left(x-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$$

(4) 이차방정식 $2x^2-5x+4=0$의 근을 구하면 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-32}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{7}i}{4}$$

$$\therefore 2x^2-5x+4=2\left(x-\frac{5-\sqrt{7}i}{4}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{7}i}{4}\right)$$

답 (1) $(x-1+\sqrt{2}i)(x-1-\sqrt{2}i)$
(2) $(x-3+\sqrt{2})(x-3-\sqrt{2})$
(3) $2\left(x-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$
(4) $2\left(x-\frac{5-\sqrt{7}i}{4}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{7}i}{4}\right)$

23

(1) 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-\sqrt{2}$이고 a, b가 유리수이므로 다른 한 근은 $2+\sqrt{2}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})=-a$, $(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})=b$

$\therefore a=-4$, $b=2$

(2) 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $3+i$이고 a, b가 실수이므로 다른 한 근은 $3-i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+i)+(3-i)=-a$, $(3+i)(3-i)=b$

$\therefore a=-6$, $b=10$

답 (1) $a=-4$, $b=2$　(2) $a=-6$, $b=10$

24

이차방정식 $x^2+2ax+b-1=0$의 한 근이 $2+i$이고 a, b가 실수이므로 다른 한 근은 $2-i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+i)+(2-i)=-2a$, $(2+i)(2-i)=b-1$

$4=-2a$, $5=b-1$　　$\therefore a=-2$, $b=6$

즉 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근이 -2, 6이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+6=-p$, $-2\times6=q$

$\therefore p=-4$, $q=-12$

$\therefore p+q=-4+(-12)=-16$

답 -16

25

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 -2, 4이므로

$f(x)=a(x+2)(x-4)$ $(a\neq0)$로 놓으면

$f(3x+1)=a(3x+3)(3x-3)$
$=9a(x+1)(x-1)$

$f(3x+1)=0$에서 $9a(x+1)(x-1)=0$

즉 $x+1=0$ 또는 $x-1=0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=1$

답 $x=-1$ 또는 $x=1$

26

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(a\neq 0)$로 놓으면

$f(2x-3)=a(2x-3-\alpha)(2x-3-\beta)$

$f(2x-3)=0$에서 $a(2x-3-\alpha)(2x-3-\beta)=0$

즉 $2x-3=\alpha$ 또는 $2x-3=\beta$이므로

$x=\dfrac{\alpha+3}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+3}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x-3)=0$의 두 근의 합은

$\dfrac{\alpha+3}{2}+\dfrac{\beta+3}{2}=\dfrac{\alpha+\beta+6}{2}=\dfrac{5+6}{2}=\dfrac{11}{2}$

답 $\dfrac{11}{2}$

연습문제

p. 127~131

1

$x=1$을 $x^2-mx+2m+1=0$에 대입하면

$1-m+2m+1=0$ $\quad\therefore m=-2$

$m=-2$를 $x^2-mx+2m+1=0$에 대입하면

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 다른 한 근은 -3이다.

답 ⑤

2

이차방정식 $x^2-2(a+4)x+a^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a+4)^2-a^2=8a+16$

서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$8a+16<0$ $\quad\therefore a<-2$

답 ①

3

이차방정식 $x^2-5x+15-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4(15-k)=4k-35$

서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$4k-35>0$ $\quad\therefore k>\dfrac{35}{4}$

따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 9이다.

답 ④

4

이차방정식 $x^2-4=a(x-2)$, 즉 $x^2-ax+2a-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-4(2a-4)=a^2-8a+16$

중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$a^2-8a+16=0$, $(a-4)^2=0$

$\therefore a=4$

답 ③

5

이차방정식 $x^2-5x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=-2$

$$\therefore \frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}=\frac{\alpha+1+\beta+1}{(\alpha+1)(\beta+1)}=\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}=\frac{5+2}{-2+5+1}=\frac{7}{4}$$

답 ④

6

이차방정식 $x^2+7x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-7$, $\alpha\beta=1$

$\therefore (\alpha^2+\beta^2)+7(\alpha+\beta)$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+7(\alpha+\beta)$

$=(-7)^2-2\times1+7\times(-7)$

$=-2$

답 ②

7

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2+3=-a$, $2\times3=b$

$\therefore a=-5$, $b=6$

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+2=0$, 즉

$-5x^2+6x+2=0$의 두 근의 합은 근과 계수의 관계에 의하여

$-\dfrac{6}{-5}=\dfrac{6}{5}$

답 ⑤

8

이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $2-pi$이고 p, q가 실수이므로 다른 한 근은 $2+pi$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-pi)+(2+pi)=-p$, $(2-pi)(2+pi)=q$

$4=-p$, $4+p^2=q$ $\quad\therefore p=-4$, $q=20$

$\therefore 2p+q=2\times(-4)+20=12$

답 ②

9

이차방정식 $x^2+2(a+k)x+k^2-2k-a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+k)^2-(k^2-2k-a)$

$\quad=a^2+2ak+k^2-k^2+2k+a$

$\quad=a^2+2ak+2k+a$

중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$a^2+2ak+2k+a=0$, 즉 $(2a+2)k+a^2+a=0$

이 식이 k에 대한 항등식이므로

$2a+2=0$, $a^2+a=0$ $\quad\therefore a=-1$

답 ②

10

이차방정식 $x^2-2(k-1)x+k^2+2k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2+2k-3)$

$\quad=k^2-2k+1-k^2-2k+3$

$\quad=-4k+4$

실근을 가지려면 $D\geq0$이어야 하므로

$-4k+4\geq0$ $\quad\therefore k\leq1$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+2kx+k+6=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=k^2-(k+6)=k^2-k-6$

중근을 가지려면 $D'=0$이어야 하므로

$k^2-k-6=0$, $(k+2)(k-3)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 실수 k의 값은 -2이다.

답 ①

11

방정식 $3|x+1|+x-3=0$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 구하면

$x=-1$

(i) $x<-1$일 때, $-3(x+1)+x-3=0$이므로

$\quad -2x-6=0$ $\quad\therefore x=-3$

(ii) $x\geq-1$일 때, $3(x+1)+x-3=0$이므로

$\quad 4x=0$ $\quad\therefore x=0$

(i), (ii)에서 $x=-3$ 또는 $x=0$ …… ❶

이때 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -3, 0이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+0=-a$, $-3\times0=b$

$\therefore a=3$, $b=0$ …… ❷

$\therefore a+b=3+0=3$ …… ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 절댓값이 포함된 방정식의 해를 구할 수 있다.	50%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

12

Step by Step

두 근의 조건을 이용하여 두 근을 α에 대한 식으로 나타낸다.

↓

근과 계수의 관계를 이용한다.

↓

조건에 맞는 미정계수를 구한다.

이차방정식 $x^2-(a^2+3a-18)x-a-6=0$의 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르므로 두 근을 $-\alpha$, $\alpha(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$-\alpha+\alpha=a^2+3a-18$ …… ㉠

$-\alpha\times\alpha=-a-6$ …… ㉡

㉠에서 $a^2+3a-18=0$이므로

$(a+6)(a-3)=0$ $\quad\therefore a=-6$ 또는 $a=3$

(i) $a=-6$일 때

$\quad$㉡에 대입하면 $-\alpha^2=0$ $\quad\therefore \alpha=0$

$\quad$즉 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=3$일 때

$\quad$㉡에 대입하면 $-\alpha^2=-9$

$\quad\alpha^2=9$ $\quad\therefore \alpha=\pm3$

(i), (ii)에서 구하는 상수 a의 값은 3이다.

답 ③

13

주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면

이차방정식 $x^2+2(a+k)x+k^2+a^2-b-5=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+k)^2-(k^2+a^2-b-5)=0$

$a^2+2ak+k^2-k^2-a^2+b+5=0$
$2ak+b+5=0$
이 식이 k에 대한 항등식이므로
$2a=0,\ b+5=0 \qquad \therefore a=0,\ b=-5$
$\therefore a+b=0+(-5)=-5$

답 -5

14

이차방정식 $x^2+2(a+b)x+(b+c)^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+b)^2-(b+c)^2$
$=\{(a+b)+(b+c)\}\{(a+b)-(b+c)\}$
$=(a+2b+c)(a-c)$

중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로
$(a+2b+c)(a-c)=0$
이때 $a+2b+c\neq 0$이므로
$a-c=0 \qquad \therefore a=c$
따라서 삼각형 ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다.

답 ④

15

이차방정식 $x^2-2kx+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2k,\ \alpha\beta=3$ …… ㉠
$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha+\beta=24$에서
$\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha+\beta=24$
$(\alpha+\beta)(\alpha\beta+1)=24$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $2k\times(3+1)=24$
$8k=24 \qquad \therefore k=3$
따라서 $\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=3$이므로
$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=6^3-3\times3\times6$
$=162$

답 162

16

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 a, c를 바르게 보고 풀었을 때의 두 근이 -3, $\frac{1}{2}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은
$\frac{c}{a}=-3\times\frac{1}{2} \qquad \therefore c=-\frac{3}{2}a$ …… ㉠
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 a, b를 바르게 보고 풀었을 때의 두 근이 1, $\frac{3}{2}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은
$-\frac{b}{a}=1+\frac{3}{2} \qquad \therefore b=-\frac{5}{2}a$ …… ㉡
㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면 처음 이차방정식은
$ax^2-\frac{5}{2}ax-\frac{3}{2}a=0$, 즉 $a\left(x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)=0$
따라서 최고차항의 계수가 2인 이차방정식은
$2\left(x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)=0$
$\therefore 2x^2-5x-3=0$

답 $2x^2-5x-3=0$

17

이차방정식 $x^2+4x-7=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-4,\ \alpha\beta=-7$
즉 $f(-4)=f(-7)=0$이고 x^2의 계수가 1인 이차식 $f(x)$는
$f(x)=(x+4)(x+7)$
$\therefore f(1)=5\times8=40$

답 40

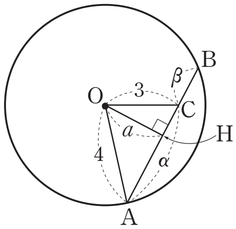
18

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=1$
$\therefore \alpha=1-\beta,\ \beta=1-\alpha$
이때 $f(\alpha)=\beta,\ f(\beta)=\alpha$이므로
$f(\alpha)=1-\alpha,\ f(\beta)=1-\beta$
$\therefore f(\alpha)+\alpha-1=0,\ f(\beta)+\beta-1=0$
즉 이차방정식 $f(x)+x-1=0$의 두 근이 α, β이고
$f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로
$f(x)+x-1=(x-\alpha)(x-\beta)$ …… ㉠
또 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근이 α, β이므로
$x^2-x+1=(x-\alpha)(x-\beta)$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $f(x)+x-1=x^2-x+1$이므로
$f(x)=x^2-2x+2$
따라서 이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^2-2x+2=0$의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 2이다.

답 ⑤

19

오른쪽 그림에서



$\alpha=\overline{\text{AH}}+\overline{\text{CH}}$

$=\sqrt{16-a^2}+\sqrt{9-a^2}$

$\beta=\overline{\text{BH}}-\overline{\text{CH}}$

$=\overline{\text{AH}}-\overline{\text{CH}}$

$=\sqrt{16-a^2}-\sqrt{9-a^2}$

이므로

$\alpha+\beta=2\sqrt{16-a^2}$

$\alpha\beta=(16-a^2)-(9-a^2)=7$

이차방정식 $bx^2-12x+14=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{12}{b}$에서 $2\sqrt{16-a^2}=\frac{12}{b}$

$b\sqrt{16-a^2}=6 \qquad \therefore b^2(16-a^2)=36$ …… ㉠

$\alpha\beta=\frac{14}{b}$에서 $7=\frac{14}{b} \qquad \therefore b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$4(16-a^2)=36$, $16-a^2=9 \qquad \therefore a^2=7$

$\therefore a^2+b=7+2=9$

답 ③

20

이차방정식 $(x+p)(x+q)-2=0$, 즉

$x^2+(p+q)x+pq-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-(p+q)$, $\alpha\beta=pq-2$ …… ㉠

$(x-\alpha)(x-\beta)+2=0$에서

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+2=0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $x^2+(p+q)x+pq=0$

$(x+p)(x+q)=0 \qquad \therefore x=-p$ 또는 $x=-q$

따라서 구하는 두 근은 $-p$, $-q$이다.

답 ③

21

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4b$

허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$a^2-4b<0 \qquad \therefore a^2<4b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+4x+b=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=2^2-b=4-b$

실근을 가지려면 $D'\geq 0$이어야 하므로

$4-b\geq 0 \qquad \therefore b\leq 4$

이때 b는 자연수이므로 $b=1, 2, 3, 4$

(i) $b=1$일 때

㉠에서 $a^2<4$이고 a는 자연수이므로

$a=1$

즉 순서쌍 (a, b)는 $(1, 1)$이므로 그 개수는 1이다.

(ii) $b=2$일 때

㉠에서 $a^2<8$이고 a는 자연수이므로

$a=1, 2$

즉 순서쌍 (a, b)는 $(1, 2)$, $(2, 2)$이므로 그 개수는 2이다.

(iii) $b=3$일 때

㉠에서 $a^2<12$이고 a는 자연수이므로

$a=1, 2, 3$

즉 순서쌍 (a, b)는 $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$이므로 그 개수는 3이다.

(iv) $b=4$일 때

㉠에서 $a^2<16$이고 a는 자연수이므로

$a=1, 2, 3$

즉 순서쌍 (a, b)는 $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$이므로 그 개수는 3이다.

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$1+2+3+3=9$

답 ④

22

(가)에서 나머지정리에 의하여 $f(1)=9$이므로

$1+m+n=9 \qquad \therefore m+n=8$ …… ㉠

(나)에서 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 한 근이 $a+3i$이고 m, n이 실수이므로 다른 한 근은 $a-3i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a+3i)+(a-3i)=-m$, $(a+3i)(a-3i)=n$

$\therefore m=-2a$, $n=a^2+9$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $-2a+a^2+9=8$

$a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면

$m=-2$, $n=10$

$\therefore 2m+n=2\times(-2)+10=6$

답 6

23

이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-p,\ \alpha\beta=q$ ...... ㉠

$|\alpha-\beta|=2$의 양변을 제곱하면

$(\alpha-\beta)^2=4,\ (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4$

$\therefore\ p^2-4q=4\ (\because$ ㉠$)$ ...... ㉡

$\alpha^2+\beta^2=34$에서 $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=34$

$\therefore\ p^2-2q=34\ (\because$ ㉠$)$ ...... ㉢

㉢$-$㉡을 하면 $2q=30\qquad\therefore\ q=15$

$q=15$를 ㉢에 대입하면

$p^2-30=34\qquad\therefore\ p^2=64$

$\therefore\ p^2+q^2=64+225=289$

답 ⑤

24

이차방정식 $x^2-px+p=0$의 한 근이 다른 근의 제곱과 같으므로 이 이차방정식의 두 근을 $\alpha,\ \alpha^2\ (\alpha\neq0)$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\alpha^2=p,\ \alpha\times\alpha^2=p$

$\alpha+\alpha^2=\alpha^3$에서 $\alpha^3-\alpha^2-\alpha=0$

이때 $\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면

$\alpha^2-\alpha-1=0$ ...... ㉠

α에 대한 이차방정식 $\alpha^2-\alpha-1=0$의 근을 구하면 근의 공식에 의하여

$\alpha=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

이때 $p=\alpha+\alpha^2=\alpha+(\alpha+1)=2\alpha+1\ (\because$ ㉠$)$이므로

$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$일 때, $p=2\times\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}+1=2-\sqrt{5}$

$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$일 때, $p=2\times\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+1=2+\sqrt{5}$

따라서 구하는 모든 실수 p의 값의 합은

$(2-\sqrt{5})+(2+\sqrt{5})=4$

답 ③

25

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=b$ ...... ㉠

이차방정식 $x^2+2\sqrt{10}x+6=0$의 두 근이 $\alpha+\beta,\ \alpha-\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=-2\sqrt{10}$에서

$2\alpha=-2\sqrt{10}\qquad\therefore\ \alpha=-\sqrt{10}$

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=6$에서

$\alpha^2-\beta^2=6\qquad\therefore\ \beta^2=\alpha^2-6$ ...... ㉡

$\alpha=-\sqrt{10}$을 ㉡에 대입하면

$\beta^2=10-6=4\qquad\therefore\ \beta=2\ (\because\ \beta>0)$

$\alpha=-\sqrt{10},\ \beta=2$를 ㉠에 대입하면

$a=\alpha+\beta=2-\sqrt{10}$

$b=\alpha\beta=-\sqrt{10}\times2=-2\sqrt{10}$

$\therefore\ a^2-2b=(2-\sqrt{10})^2-2\times(-2\sqrt{10})$

$=14-4\sqrt{10}+4\sqrt{10}$

$=14$

답 ③

26

이차방정식 $x^2+3x+k=0$의 서로 다른 두 실근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=k$

ㄱ. $k<0$에서 $\alpha\beta<0$

즉 $\alpha,\ \beta$의 부호가 서로 다르므로

$|\alpha+\beta|\neq|\alpha|+|\beta|$

ㄴ. $\alpha^2+\beta^2-2k=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$

$=(\alpha-\beta)^2$

이때 $\alpha,\ \beta$가 서로 다른 실수이므로

$(\alpha-\beta)^2>0$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2-2k>0$

ㄷ. $k<0$에서 $\alpha\beta<0$이므로 $\alpha<0$이면 $\beta>0$

$\therefore\ |\alpha|-|\beta|=-\alpha-\beta=-(\alpha+\beta)$

$=-(-3)=3>0$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

Level UP 연습문제

p. 132

1

이차방정식 $x^2+ax-2b=0$의 두 실근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=-2b$ ...... ㉠

이때 $\alpha,\ \beta$의 부호가 서로 다르므로 $\alpha<0<\beta$라 하면

$|\alpha|=-\alpha,\ |\beta|=\beta$

또 이차방정식 $x^2-(4a+2b)x+16b=0$의 두 근이

$|\alpha|+|\beta|,\ |\alpha\beta|$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$|\alpha|+|\beta|+|\alpha\beta|=-\alpha+\beta-\alpha\beta=4a+2b$ ...... ㉡

$(|\alpha|+|\beta|)\times|\alpha\beta|=(-\alpha+\beta)\times(-\alpha\beta)$

$=\alpha\beta(\alpha-\beta)=16b$ ...... ㉢

㉠을 ㉡, ㉢에 각각 대입하면
$-\alpha+\beta+2b=4a+2b$에서 $\alpha-\beta=-4a$
$-2b(\alpha-\beta)=16b$에서 $\alpha-\beta=-8$ ($\because b\neq 0$)
즉 $-4a=-8$이므로 $a=2$
따라서 구하는 $\alpha+\beta$의 값은 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-a=-2$

답 -2

2

5초 후 $\overline{\mathrm{AP}}=5a^2$, $\overline{\mathrm{CQ}}=25a$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=h$라 하면
(사다리꼴 PABQ의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BQ}})\times\overline{\mathrm{AB}}$
$=\frac{1}{2}\times\{5a^2+(120-25a)\}\times h$
$=\frac{5}{2}h(a^2-5a+24)$
(사다리꼴 PQCD의 넓이)
$=\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{CQ}}+\overline{\mathrm{PD}})\times\overline{\mathrm{AB}}$
$=\frac{1}{2}\times\{25a+(120-5a^2)\}\times h$
$=\frac{5}{2}h(-a^2+5a+24)$
두 사다리꼴 PABQ와 PQCD의 넓이의 비가 $5:7$이므로
$\frac{5}{2}h(a^2-5a+24):\frac{5}{2}h(-a^2+5a+24)=5:7$
$7(a^2-5a+24)=5(-a^2+5a+24)$
$12a^2-60a+48=0$, $a^2-5a+4=0$
$(a-1)(a-4)=0 \qquad \therefore a=1$ 또는 $a=4$
따라서 모든 a의 값의 합은
$1+4=5$

답 ④

3

이차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$이고 계수가 실수이므로 다른 한 근은 $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$이다.
$\frac{1-\sqrt{3}i}{2}+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=1$, $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\times\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=1$이므로 $f(x)=a(x^2-x+1)$ $(a\neq 0)$로 놓을 수 있다.
$f(\alpha)=0$이므로 $\alpha^2-\alpha+1=0$
이 식의 양변에 $\alpha+1$을 곱하면
$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$
$\alpha^3+1=0 \qquad \therefore \alpha^3=-1$
따라서 $\alpha^6=(\alpha^3)^2=(-1)^2=1$이므로
$f(\alpha^6+\alpha^2)=f(1+\alpha^2)=f(\alpha)=0$

답 ③

4

이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 한 근이 α이고 계수가 실수이므로 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이다.
$\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq 0$)라 하면 $\overline{\alpha}=a-bi$이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\overline{\alpha}=a+bi+(a-bi)=2a=p$
$\therefore a=\frac{p}{2}$ ⋯⋯ ㉠
$\alpha\times\overline{\alpha}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=p+3$ ⋯⋯ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $\left(\frac{p}{2}\right)^2+b^2=p+3$
$\therefore b^2=-\frac{p^2}{4}+p+3$ ⋯⋯ ㉢
한편
$\alpha^3=(a+bi)^3$
$=a^3+3a^2bi+3a(bi)^2+(bi)^3$
$=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i$
$=a^3-3ab^2+(3a^2b-b^3)i$
α^3이 실수가 되려면 $3a^2b-b^3=0$이어야 하므로
$b(3a^2-b^2)=0$, $3a^2=b^2$ ($\because b\neq 0$)
$\therefore b^2=3\times\left(\frac{p}{2}\right)^2=\frac{3}{4}p^2$ ($\because$ ㉠) ⋯⋯ ㉣
㉢, ㉣에서 $\frac{3}{4}p^2=-\frac{p^2}{4}+p+3$이므로
$p^2-p-3=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-4\times 1\times(-3)=13>0$
따라서 이차방정식 $p^2-p-3=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 모든 실수 p의 값의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여
$\frac{-3}{1}=-3$

답 ②

3 이차방정식과 이차함수

특강 확인 문제 p. 137

1

(1) 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이므로 $x=1$에서 최댓값 2를 갖는다.
즉 이차함수의 식은
$y=-(x-1)^2+2=-x^2+2x+1$
따라서 $a=2$, $b=1$이므로
$a-b=2-1=1$

(2) $y=3x^2+6x+k=3(x+1)^2+k-3$
즉 $x=-1$에서 최솟값 $k-3$을 가지므로
$k-3=7 \qquad \therefore k=10$

답 (1) 1 (2) 10

2

(1) 이차함수의 식을 $y=ax^2+4$(a는 상수)로 놓으면 이 함수의 그래프가 점 $(-1, 3)$을 지나므로
$3=a+4 \qquad \therefore a=-1$
따라서 구하는 이차함수의 식은
$y=-x^2+4$

(2) 이차함수의 식을 $y=a(x+1)(x-5)$(a는 상수)로 놓으면 이 함수의 그래프가 점 $(-2, 14)$를 지나므로
$14=7a \qquad \therefore a=2$
따라서 구하는 이차함수의 식은
$y=2(x+1)(x-5)$

(3) 이차함수의 식을 $y=a(x-3)^2$(a는 상수)으로 놓으면 이 함수의 그래프가 점 $(2, -1)$을 지나므로
$-1=a\times(-1)^2 \qquad \therefore a=-1$
따라서 구하는 이차함수의 식은
$y=-(x-3)^2$

(4) 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2+n$(a, n은 상수)으로 놓으면 이 함수의 그래프가 두 점 $(0, 3)$, $(-1, 9)$를 지나므로
$3=a+n$, $9=4a+n$
두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $n=1$
따라서 구하는 이차함수의 식은
$y=2(x-1)^2+1$

(5) 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$(a, b, c는 상수)로 놓으면 이 함수의 그래프가 세 점 $(1, 1)$, $(2, 12)$, $(0, -4)$를 지나므로
$1=a+b+c$, $12=4a+2b+c$, $-4=c$
세 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$, $c=-4$
따라서 구하는 이차함수의 식은
$y=3x^2+2x-4$

답 (1) $y=-x^2+4$ (2) $y=2(x+1)(x-5)$
(3) $y=-(x-3)^2$ (4) $y=2(x-1)^2+1$
(5) $y=3x^2+2x-4$

3

(1) 주어진 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서
그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
축이 y축의 오른쪽에 있으므로
$-\frac{b}{2a}>0 \qquad \therefore b>0$
y축과의 교점이 x축의 위쪽에 있으므로 $c>0$

(2) 주어진 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서
그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$
축이 y축의 왼쪽에 있으므로
$-\frac{b}{2a}<0 \qquad \therefore b>0$
y축과의 교점이 원점이므로 $c=0$

(3) 주어진 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서
그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$
축이 y축의 오른쪽에 있으므로
$-\frac{b}{2a}>0 \qquad \therefore b<0$
y축과의 교점이 x축의 아래쪽에 있으므로 $c<0$

답 (1) $a<0$, $b>0$, $c>0$
(2) $a>0$, $b>0$, $c=0$
(3) $a>0$, $b<0$, $c<0$

확인 문제 p. 140~153

01

이차함수 $y=x^2-4x-2$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, β이므로 이차방정식 $x^2-4x-2=0$의 두 실근은 α, β이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-2$
$\therefore \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-2\times4=-8$

답 -8

02

이차함수 $y=x^2+ax-6$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -3, b이므로 이차방정식 $x^2+ax-6=0$의 두 실근은 -3, b이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-3+b=-a$, $-3\times b=-6$
두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

답 $a=1$, $b=2$

03

이차함수 $y=x^2+2x-5$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 α, β라 하면 이차방정식 $x^2+2x-5=0$의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-5$
따라서 두 교점 사이의 거리는

$$\begin{aligned}|\alpha-\beta|&=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}\\&=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\\&=\sqrt{(-2)^2-4\times(-5)}\\&=\sqrt{24}=2\sqrt{6}\end{aligned}$$

답 $2\sqrt{6}$

04

이차함수 $y=x^2-4kx-3k+4$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 α, β라 하면 이차방정식 $x^2-4kx-3k+4=0$의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=4k$, $\alpha\beta=-3k+4$ ...... ㉠
이때 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{7}$이므로
$|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}$
양변을 제곱하면
$(\alpha-\beta)^2=28$, $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=28$
위 식에 ㉠을 대입하면
$(4k)^2-4(-3k+4)=28$
$16k^2+12k-44=0$ $\quad\therefore 4k^2+3k-11=0$
이차방정식 $4k^2+3k-11=0$의 판별식을 D라 하면
$D=3^2-4\times4\times(-11)=185>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 곱은
$\dfrac{-11}{4}=-\dfrac{11}{4}$

답 $-\dfrac{11}{4}$

05

이차방정식 $x^2-2kx+k^2-k+2=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-(k^2-k+2)=k-2$
x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로
$k-2>0$ $\quad\therefore k>2$

답 $k>2$

06

이차방정식 $x^2-ax+a=0$의 판별식을 D라 하면
$D=a^2-4a$
x축에 접하려면 $D=0$이어야 하므로
$a^2-4a=0$, $a(a-4)=0$ $\quad\therefore a=0$ 또는 $a=4$
따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $0+4=4$

답 4

07

이차방정식 $x^2+2(a-4)x+a^2+a-1=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(a-4)^2-(a^2+a-1)=-9a+17$
x축과 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로
$-9a+17<0$ $\quad\therefore a>\dfrac{17}{9}$
따라서 정수 a의 최솟값은 2이다.

답 2

08

이차함수 $y=3x^2-mx+1$의 그래프와 직선 $y=2x-n$의 두 교점의 x좌표가 -2, 3이므로 이차방정식
$3x^2-mx+1=2x-n$, 즉 $3x^2-(m+2)x+n+1=0$
의 두 실근은 -2, 3이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-2+3=\dfrac{m+2}{3}$에서 $m=1$
$-2\times3=\dfrac{n+1}{3}$에서 $n=-19$
$\therefore m+n=1+(-19)=-18$

답 -18

09

이차함수 $y=x^2+x+m$의 그래프와 직선 $y=nx+1$의 두 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+x+m=nx+1$, 즉
$x^2+(1-n)x+m-1=0$ ...... ㉠
의 두 실근과 같다.

이때 이차방정식 ㉠의 한 근이 $1-\sqrt{5}$이고 계수가 유리수이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{5}$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})=-(1-n)$에서
$2=-1+n \qquad \therefore n=3$
$(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})=m-1$에서
$-4=m-1 \qquad \therefore m=-3$

답 $m=-3, n=3$

10
이차방정식 $2x^2+ax+1=5x-1$, 즉
$2x^2+(a-5)x+2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(a-5)^2-4\times2\times2$
$\quad=a^2-10a+9$
이차함수의 그래프와 직선이 한 점에서 만나려면 $D=0$이어야 하므로
$a^2-10a+9=0, (a-1)(a-9)=0$
$\therefore a=1$ 또는 $a=9$
따라서 모든 실수 a의 값의 합은
$1+9=10$

답 10

11
이차방정식 $x^2-x+2=3x-a$, 즉 $x^2-4x+2+a=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-(2+a)$
$\quad=2-a$
이차함수의 그래프와 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로
$2-a>0 \qquad \therefore a<2$

답 $a<2$

12
이차방정식 $x^2+2ax-1=2x-a^2+a$, 즉
$x^2+2(a-1)x+a^2-a-1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a^2-a-1)$
$\quad=-a+2$
이차함수의 그래프와 직선이 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로
$-a+2<0 \qquad \therefore a>2$
따라서 정수 a의 최솟값은 3이다.

답 3

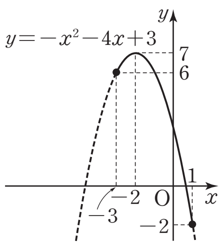
13
직선 $y=3x+5$에 평행한 직선의 기울기는 3이므로
$a=3$
직선 $y=3x+b$가 이차함수 $y=-x^2+4x$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-x^2+4x=3x+b$,
즉 $x^2-x+b=0$의 판별식을 D라 하면 $D=0$
$D=(-1)^2-4b=0 \qquad \therefore b=\frac{1}{4}$
$\therefore a+b=3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$

답 $\frac{13}{4}$

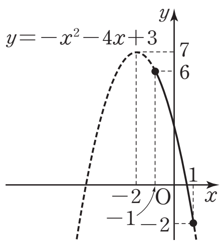
14
구하는 직선의 방정식을 $y=ax+b\,(a>0)$로 놓으면 이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로
$0=a+b \qquad \therefore b=-a$
직선 $y=ax-a$가 이차함수 $y=x^2-2x+2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-2x+2=ax-a$, 즉
$x^2-(a+2)x+a+2=0$의 판별식을 D라 하면 $D=0$
$D=(a+2)^2-4(a+2)=0$
$(a+2)(a-2)=0 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y=2x-2$

답 $y=2x-2$

15
$y=-x^2-4x+3=-(x+2)^2+7$이므로 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 -2이다.
(1) 꼭짓점의 x좌표 -2가
$-3\le x\le1$에 포함된다.
$x=-3$일 때 $y=6$
$x=-2$일 때 $y=7$
$x=1$일 때 $y=-2$
따라서 최댓값은 7,
최솟값은 -2이다.



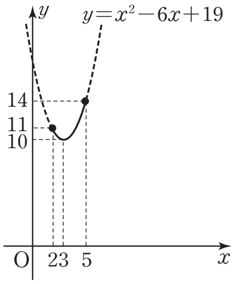
(2) 꼭짓점의 x좌표 -2가
$-1\le x\le1$에 포함되지
않는다.
$x=-1$일 때 $y=6$
$x=1$일 때 $y=-2$
따라서 최댓값은 6,
최솟값은 -2이다.



답 (1) 최댓값: 7, 최솟값: -2 (2) 최댓값: 6, 최솟값: -2

16

$y=x^2-6x+19=(x-3)^2+10$이므로 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 3이 $2\le x\le 5$에 포함된다.



$x=2$일 때 $y=11$

$x=3$일 때 $y=10$

$x=5$일 때 $y=14$

따라서 최댓값은 14, 최솟값은 10이므로 그 합은

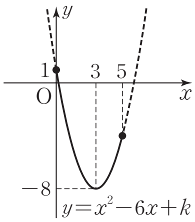
$14+10=24$

답 24

17

$y=x^2-6x+k=(x-3)^2+k-9$

이므로 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 3이 $0\le x\le 5$에 포함된다.



$x=0$일 때 $y=k$

$x=3$일 때 $y=k-9$

$x=5$일 때 $y=k-5$

즉 최솟값은 $x=3$일 때 $k-9$이므로

$k-9=-8 \qquad \therefore k=1$

따라서 $y=x^2-6x+1$이고, 이 함수의 최댓값은 $x=0$일 때 1이다.

답 1

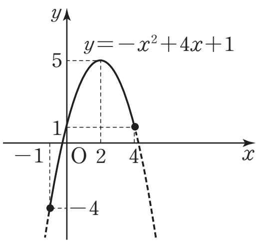
18

이차함수 $y=-x^2+ax+1$이 $x=2$일 때 최댓값 5를 가지므로

$y=-(x-2)^2+5=-x^2+4x+1$

$\therefore a=4$

이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 2가 $-1\le x\le 4$에 포함되므로



$x=-1$일 때 $y=-4$

$x=2$일 때 $y=5$

$x=4$일 때 $y=1$

즉 최솟값은 $x=-1$일 때 -4이므로

$m=-4$

$\therefore a+m=4+(-4)=0$

답 0

19

$x^2+2x=t$로 놓으면

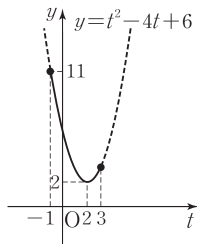
$t=x^2+2x=(x+1)^2-1$

$-3\le x\le 0$에서 t의 값의 범위는 $-1\le t\le 3$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-4t+6$

$\quad=(t-2)^2+2\ (-1\le t\le 3)$



이므로 오른쪽 그림에서

$t=-1$일 때 최댓값 11,

$t=2$일 때 최솟값 2

를 갖는다.

따라서 $M=11$, $m=2$이므로

$M+m=11+2=13$

답 13

20

$x^2-2x-1=t$로 놓으면

$t=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$이므로 t의 값의 범위는

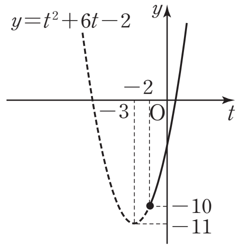
$t\ge -2$

이때 주어진 함수는

$y=t(t+6)-2$

$\quad=t^2+6t-2$

$\quad=(t+3)^2-11\ (t\ge -2)$



이므로 $t=-2$일 때

최솟값 -10을 갖는다.

$t=-2$일 때 x의 값을 구하면

$-2=x^2-2x-1$에서 $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0 \qquad \therefore x=1$

따라서 주어진 함수는 $x=1$에서 최솟값 -10을 가지므로

$a=1$, $b=-10$

$\therefore a+b=1+(-10)=-9$

답 -9

21

$3x^2+y^2-6x+2y-1$

$=3(x^2-2x+1)+(y^2+2y+1)-5$

$=3(x-1)^2+(y+1)^2-5$

이때 x, y가 실수이므로

$(x-1)^2\ge 0$, $(y+1)^2\ge 0$

$\therefore 3x^2+y^2-6x+2y-1\ge -5$

따라서 주어진 식은 $x=1$, $y=-1$일 때 최솟값 -5를 갖는다.

답 -5

22

$4x-2x^2+4y-y^2-5$

$=-2(x^2-2x+1)-(y^2-4y+4)+1$

$=-2(x-1)^2-(y-2)^2+1$

이때 x, y가 실수이므로

$(x-1)^2\geq0$, $(y-2)^2\geq0$

$\therefore\ 4x-2x^2+4y-y^2-5\leq1$

따라서 주어진 식은 $x=1$, $y=2$일 때 최댓값 1을 갖는다.

답 1

23

x^2+6x+y^2-4y+k

$=(x^2+6x+9)+(y^2-4y+4)+k-13$

$=(x+3)^2+(y-2)^2+k-13$

이때 x, y가 실수이므로

$(x+3)^2\geq0$, $(y-2)^2\geq0$

$\therefore\ x^2+6x+y^2-4y+k\geq k-13$

따라서 주어진 식은 $x=-3$, $y=2$일 때 최솟값 $k-13$을 가지므로

$k-13=0 \qquad \therefore\ k=13$

답 13

24

$x+2y=3$에서 $x=3-2y$이므로

$2y^2-x^2=2y^2-(3-2y)^2$

$=-2y^2+12y-9$

$=-2(y^2-6y+9)+9$

$=-2(y-3)^2+9$

따라서 주어진 식은 $y=3$일 때 최댓값 9를 갖는다.

답 9

25

$x+3y=6$에서 $x=6-3y$이므로

$x^2+9y^2=(6-3y)^2+9y^2$

$=18y^2-36y+36$

$=18(y^2-2y+1)+18$

$=18(y-1)^2+18\ (0\leq y\leq2)$

따라서 주어진 식은

$y=1$일 때 최솟값 18,

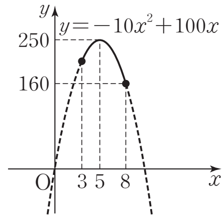
$y=0$ 또는 $y=2$일 때 최댓값 36

을 가지므로 최솟값과 최댓값의 합은

$18+36=54$

답 54

26



$y=-10x^2+100x$

$=-10(x^2-10x+25)+250$

$=-10(x-5)^2+250$

이때 꼭짓점의 x좌표 5가 $3\leq x\leq8$에 포함되므로

$x=5$일 때 최댓값 250,

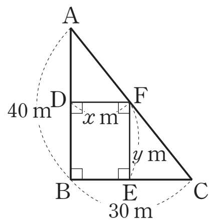
$x=8$일 때 최솟값 160을 갖는다.

따라서 판매 수익의 최댓값은 250만 원, 최솟값은 160만 원이다.

답 최댓값: 250만 원, 최솟값: 160만 원

27

다음 그림과 같이 화단의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 x m, y m라 하자.



$\triangle ADF \backsim \triangle ABC$이므로

$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DF}:\overline{BC}$

$(40-y):40=x:30$

$40x=30(40-y)$

$\therefore\ x=\dfrac{3(40-y)}{4}$

이때 변의 길이는 항상 양수이므로 $0<y<40$

직사각형 DBEF의 넓이는

$xy=\dfrac{3(40-y)}{4}y$

$=\dfrac{3}{4}(-y^2+40y)$

$=-\dfrac{3}{4}(y^2-40y+400)+300$

$=-\dfrac{3}{4}(y-20)^2+300\ (0<y<40)$

따라서 직사각형 DBEF의 넓이는 $y=20$일 때 최댓값 300을 가지므로 구하는 화단의 넓이의 최댓값은 300 m^2이다.

답 300 m^2

참고 사각형 DBEF는 직사각형이므로
$\angle ADF=\angle ABC=90^\circ$, $\angle A$는 공통
따라서 $\triangle ADF \backsim \triangle ABC$(AA닮음)이다.

연습문제 p. 154~159

1

이차함수 $y=x^2+2x+a$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 1, b이므로 이차방정식 $x^2+2x+a=0$의 두 실근은 1, b이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+b=-2,\ 1\times b=a$

$\therefore a=-3,\ b=-3$

답 $a=-3,\ b=-3$

2

$y=x^2+2x-5=(x+1)^2-6$이므로 꼭짓점 A의 좌표는 $(-1,\ -6)$

이차함수 $y=x^2+2x-5$의 그래프와 x축의 두 교점을 $\mathrm{B}(\alpha,\ 0)$, $\mathrm{C}(\beta,\ 0)$이라 하면 이차방정식 $x^2+2x-5=0$의 두 실근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-5$

이때 $\overline{\mathrm{BC}}=|\alpha-\beta|$이고

$$\begin{aligned}|\alpha-\beta|&=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}\\&=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\\&=\sqrt{(-2)^2-4\times(-5)}\\&=\sqrt{24}\\&=2\sqrt{6}\end{aligned}$$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times6=6\sqrt{6}$

답 ②

3

이차함수 $y=2x^2+ax-1$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 $\alpha,\ \beta$라 하면 이차방정식 $2x^2+ax-1=0$의 두 실근은 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{a}{2}$

이때 $\alpha+\beta=-1$이므로

$-\frac{a}{2}=-1 \qquad \therefore a=2$

답 2

4

이차방정식 $-x^2-x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times(-1)\times k=4k+1$

이차함수의 그래프가 x축과 적어도 한 점에서 만나려면 $D\geq0$이어야 하므로

$4k+1\geq0 \qquad \therefore k\geq-\frac{1}{4}$

따라서 정수 k의 최솟값은 0이다.

답 ②

5

이차함수 $y=x^2-ax+1$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 $\alpha,\ \beta$라 하면 이차방정식 $x^2-ax+1=0$의 두 실근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=1$ …… ㉠

이때 두 점 사이의 거리가 $3\sqrt{5}$이므로

$|\alpha-\beta|=3\sqrt{5}$

양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=45$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=45$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2-4=45,\ a^2=49$

$\therefore a=7\ (\because a>0)$

답 7

6

이차함수 $y=3x^2-ax+2$의 그래프와 직선 $y=2x+b$의 두 교점의 x좌표가 -1, 4이므로 이차방정식 $3x^2-ax+2=2x+b$, 즉 $3x^2-(a+2)x+2-b=0$의 두 실근은 -1, 4이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+4=\frac{a+2}{3}$에서 $a=7$

$-1\times4=\frac{2-b}{3}$에서 $b=14$

$\therefore ab=7\times14=98$

답 98

7

이차방정식 $ax^2+2ax+3b=0$의 두 실근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2a}{a}=-2 \qquad \therefore \beta=-\alpha-2$

이때 $-1<\alpha<0$이므로 $-2<-\alpha-2<-1$

$\therefore -2<\beta<-1$

답 ②

8

이차함수 $y=x^2-2x+a$의 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=x^2-2x+a-4$

이차방정식 $x^2-2x+a-4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(a-4)$

$\quad=5-a$

이차함수의 그래프가 x축에 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$5-a=0$

$\therefore a=5$

답 ⑤

9

직선 $y=x+k$가 이차함수 $y=x^2-2x+4$의 그래프와 만나야 하므로 이차방정식 $x^2-2x+4=x+k$, 즉 $x^2-3x+4-k=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-3)^2-4\times1\times(4-k)\geq0$

$4k-7\geq0$

$\therefore k\geq\frac{7}{4}$ …… ㉠ …… ❶

직선 $y=x+k$가 이차함수 $y=x^2-5x+15$의 그래프와 만나지 않아야 하므로 이차방정식 $x^2-5x+15=x+k$, 즉 $x^2-6x+15-k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-3)^2-(15-k)<0$

$k-6<0$

$\therefore k<6$ …… ㉡ …… ❷

㉠, ㉡에서 정수 k의 값은 2, 3, 4, 5이므로

그 개수는 4이다. …… ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 직선 $y=x+k$가 이차함수 $y=x^2-2x+4$의 그래프와 만나도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❷ 직선 $y=x+k$가 이차함수 $y=x^2-5x+15$의 그래프와 만나지 않도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20%

10

$f(x)=x^2-6x+k=(x-3)^2+k-9$이므로

이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 3이 $0\leq x\leq4$에 포함된다.

$x=0$일 때 $f(0)=k$

$x=3$일 때 $f(3)=k-9$

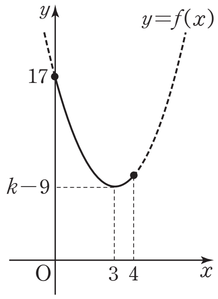
$x=4$일 때 $f(4)=k-8$

즉 최댓값은 $x=0$일 때 k이므로

$k=17$

따라서 구하는 이차함수 $f(x)$의 최솟값은

$x=3$일 때 $k-9=17-9=8$



답 ⑤

11

Step by Step

조건식을 x 또는 y에 대하여 정리한다.

↓

주어진 식에 대입하여 한 문자에 대한 식으로 나타낸다.

↓

최댓값을 구한다.

$x+y-2=0$에서 $x=2-y$이므로

$x^2-2y^2=(2-y)^2-2y^2$

$\quad=-y^2-4y+4$

$\quad=-(y^2+4y+4)+8$

$\quad=-(y+2)^2+8$

따라서 주어진 식은 $y=-2$일 때 최댓값 8을 갖는다.

답 ③

12

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(-1, 6)$을 지나므로

$6=a-b+c$ …… ㉠

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(2, 0)$에서 직선 $y=x-2$와 접하므로 이차방정식

$ax^2+bx+c=x-2$, 즉 $ax^2+(b-1)x+c+2=0$

은 중근 $x=2$를 갖는다.

즉 $ax^2+(b-1)x+c+2=a(x-2)^2$이므로

$ax^2+(b-1)x+c+2=ax^2-4ax+4a$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$b-1=-4a$, $c+2=4a$

$\therefore b=-4a+1$, $c=4a-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-3$, $c=2$

$\therefore a+2b+3c=1+2\times(-3)+3\times2=1$

답 1

13

이차방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $h(x)=f(x)-g(x)=0$의 두 실근이 2, 6이므로

$$h(x)=-(x-2)(x-6)$$
$$=-x^2+8x-12$$
$$=-(x-4)^2+4$$

즉 함수 $h(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 4를 가지므로

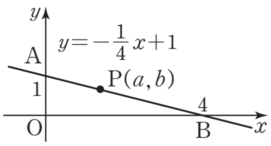
$p=4$, $q=4$

$\therefore p+q=4+4=8$

답 ①

14

오른쪽 그림과 같이 $\mathrm{A}(0, 1)$, $\mathrm{B}(4, 0)$이고 점 $\mathrm{P}(a, b)$는 직선 $y=-\frac{1}{4}x+1$ 위의 점이므로



$b=-\frac{1}{4}a+1$ ······ ㉠

㉠을 a^2+8b에 대입하면

$$a^2+8b=a^2+8\left(-\frac{1}{4}a+1\right)$$
$$=a^2-2a+8$$
$$=(a-1)^2+7$$

이때 $\mathrm{A}(0, 1)$, $\mathrm{B}(4, 0)$이므로 $0\le a\le 4$

따라서 a^2+8b는 $a=1$일 때 최솟값 7을 갖는다.

답 ④

15

(가)에서 $f(x)=k(x-3)^2+n$ (k, n은 상수)이라 하자.

(나)에서 이차방정식 $k(x-3)^2+n=x+1$,

즉 $kx^2-(6k+1)x+9k+n-1=0$의 두 근이 -1, 6이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+6=\frac{6k+1}{k}$에서 $5k=6k+1$ $\quad\therefore k=-1$

$-1\times6=\frac{9k+n-1}{k}$에서 $-6=\frac{-9+n-1}{-1}$

$6=n-10$ $\quad\therefore n=16$

$\therefore f(x)=-(x-3)^2+16=-x^2+6x+7$ ······ ㉠

이때 이차함수 ㉠의 그래프와 직선 $y=2x+a$가 한 점에서 만나므로 이차방정식 $-x^2+6x+7=2x+a$,

즉 $x^2-4x+a-7=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(a-7)=11-a=0$

$\therefore a=11$

답 ①

16

(가)에서 $f(x)=a(x-1)^2+9$ $(a<0)$라 하자.

(나)를 만족시키는 직선의 방정식을 $y=bx+9$라 하면 이 직선이 직선 $2x-y+1=0$, 즉 $y=2x+1$과 평행하므로 $b=2$

$\therefore y=2x+9$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x+9$가 접하므로 이차방정식 $a(x-1)^2+9=2x+9$,

즉 $ax^2-2(a+1)x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-a^2=2a+1=0$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+9$이므로

$f(2)=-\frac{1}{2}+9=\frac{17}{2}$

답 ⑤

17

(가)에서 $f(x)=a(x+2)(x-8)$ $(a\ne0)$이라 하면

$$f(x)=a(x+2)(x-8)$$
$$=a(x^2-6x-16)$$
$$=a(x^2-6x+9)-25a$$
$$=a(x-3)^2-25a$$

(i) $a<0$인 경우

$4\le x\le6$에서 이차함수 $f(x)$는 $x=6$일 때 최솟값을 가지므로

$f(6)=-16a=32$ $\quad\therefore a=-2$

(ii) $a>0$인 경우

$4\le x\le6$에서 이차함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최솟값을 가지므로

$f(4)=-24a=32$ $\quad\therefore a=-\frac{4}{3}$

그런데 $a>0$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-2$

따라서 $f(x)=-2(x+2)(x-8)$이므로

$f(-3)=-2\times(-1)\times(-11)=-22$

답 ①

18

점 A의 좌표를 $(a, 0)$ $(0<a<4)$이라 하면

$\mathrm{D}(a, -a^2+8a)$, $\mathrm{B}(8-a, 0)$

$\overline{\mathrm{AD}}=-a^2+8a$

$\overline{\mathrm{AB}}=(8-a)-a=8-2a$

즉 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}2(\overline{AD}+\overline{AB})&=2\{(-a^2+8a)+(8-2a)\}\\&=-2a^2+12a+16\\&=-2(a^2-6a+9)+34\\&=-2(a-3)^2+34\end{aligned}$$

이때 $0<a<4$이므로 $a=3$일 때 최댓값 34를 갖는다.

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 34이다.

답 34

19

점 P의 좌표를 (a, a^2+2) $(-1\le a\le 1)$라 하면

$Q(a, a-2)$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{PQ}&=a^2+2-(a-2)\\&=a^2-a+4\\&=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\end{aligned}$$

이때 $-1\le a\le 1$이므로 $a=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $\frac{15}{4}$를 갖는다.

따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 $\frac{15}{4}$이다.

답 ②

20

이차방정식 $x^2-4kx+4k^2+k=2ax+b$, 즉

$x^2-2(2k+a)x+4k^2+k-b=0$의 판별식을 D라 하면

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=\{-(2k+a)\}^2-(4k^2+k-b)\\&=(4a-1)k+a^2+b\end{aligned}$$

이차함수의 그래프와 직선이 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$(4a-1)k+a^2+b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4a-1=0,\ a^2+b=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{4},\ b=-\frac{1}{16}$

$\therefore a+b=\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{16}\right)=\frac{3}{16}$

답 ②

Lecture 항등식의 성질

(1) $ax+b=0$이 x에 대한 항등식일 때 ➡ $a=0, b=0$

(2) $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식일 때

➡ $a=0, b=0, c=0$

(3) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식일 때

➡ $a=a', b=b', c=c'$

21

이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$f(x)=(x-2)^2+k$

로 놓을 수 있다.

이때 꼭짓점의 x좌표 2가 $0\le x\le 3$에 포함되므로

$x=0$일 때 $f(0)=k+4$

$x=2$일 때 $f(2)=k$

$x=3$일 때 $f(3)=k+1$

즉 최댓값은 $x=0$일 때 $k+4$이므로

$k+4=8 \qquad \therefore k=4$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=(x-2)^2+4\\&=x^2-4x+8\end{aligned}$$

따라서 $a=-4, b=8$이므로

$a+b=-4+8=4$

답 ①

22

$$\begin{aligned}y&=(x^2-1)(x^2+8x+15)+k\\&=(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)+k\\&=(x^2+4x-5)(x^2+4x+3)+k\end{aligned}$$

$x^2+4x=t$로 놓으면

$$\begin{aligned}t&=x^2+4x\\&=(x+2)^2-4\end{aligned}$$

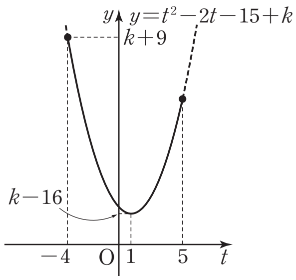
$-3\le x\le 1$에서 t의 값의 범위는

$-4\le t\le 5$

주어진 함수는

$$\begin{aligned}y&=(t-5)(t+3)+k\\&=t^2-2t-15+k\\&=(t-1)^2+k-16\\&\qquad(-4\le t\le 5)\end{aligned}$$

이므로



$t=1$일 때 최솟값 $k-16$,

$t=-4$일 때 최댓값 $k+9$

를 갖는다.

이때 최솟값이 4이므로

$k-16=4 \qquad \therefore k=20$

즉 $t=-4$일 때 최댓값 $k+9=20+9=29$를 갖는다.

$t=-4$일 때 x의 값을 구하면

$x^2+4x=-4$에서 $x^2+4x+4=0$

$(x+2)^2=0 \qquad \therefore x=-2$

따라서 $a=-2, b=29, k=20$이므로

$a+b+k=-2+29+20=47$

답 47

23

이차함수 $y=x^2-6x+a$의 그래프와 x축의 두 교점을 $\mathrm{A}(\alpha, 0)$, $\mathrm{B}(\beta, 0)$이라 하자.

이차방정식 $x^2-6x+a=0$의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=a$ …… ㉠

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=|\alpha-\beta|=8$이므로

양변을 제곱하면

$(\alpha-\beta)^2=64$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=64$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $6^2-4a=64$

$-4a=28$ $\quad\therefore a=-7$

이차방정식 $x^2-6x-7=0$의 두 실근은

$(x+1)(x-7)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=7$

$\therefore \mathrm{A}(-1, 0)$, $\mathrm{B}(7, 0)$

이때 직선 $y=-x+b$는 점 $\mathrm{B}(7, 0)$을 지나므로

$0=-7+b$ $\quad\therefore b=7$

이차방정식 $x^2-6x-7=-x+7$에서

$x^2-5x-14=0$, $(x+2)(x-7)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=7$

즉 점 C의 x좌표는 -2이므로

$\mathrm{C}(-2, 9)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times8\times9=36$

답 ③

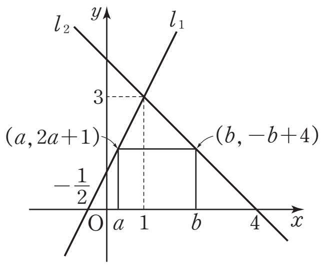
24

두 직선 l_1, l_2의 방정식을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=3$

즉 두 직선 l_1, l_2의 교점의 좌표는 $(1, 3)$이고 각각의 x절편이 $-\frac{1}{2}$, 4이므로 x축 위에 있는 직사각형의 두 꼭짓점의 x좌표를 각각 a, $b\left(-\frac{1}{2}<a<1,\ 1<b<4\right)$라 하면 나머지 두 꼭짓점의 좌표는

$(a, 2a+1)$, $(b, -b+4)$



이때 두 꼭짓점의 y좌표는 같으므로

$2a+1=-b+4$ $\quad\therefore b=-2a+3$

직사각형의 가로의 길이는

$b-a=(-2a+3)-a=-3a+3$

세로의 길이는 $2a+1$이므로

직사각형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$$\begin{aligned} S(a)&=(-3a+3)(2a+1)\\ &=-3(a-1)(2a+1)\\ &=-3(2a^2-a-1)\\ &=-6\left(a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{16}-\frac{9}{16}\right)\\ &=-6\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{27}{8} \end{aligned}$$

이때 $-\frac{1}{2}<a<1$이므로 $a=\frac{1}{4}$일 때 최댓값 $\frac{27}{8}$을 갖는다.

따라서 직사각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{27}{8}$이다.

답 ⑤

Level Up 연습문제

p. 160

1

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 α, β이고 x^2의 계수가 1이므로

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$

이차함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 α, γ이고 x^2의 계수가 1이므로

$g(x)=(x-\alpha)(x-\gamma)$

$2f(x)=g(x)$에서 $2f(x)-g(x)=0$이므로

$2(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\alpha)(x-\gamma)=0$

$(x-\alpha)\{2(x-\beta)-(x-\gamma)\}=0$

$(x-\alpha)(x-2\beta+\gamma)=0$

$\therefore x=\alpha$ 또는 $x=2\beta-\gamma$

따라서 방정식 $2f(x)=g(x)$의 한 근은 α이고 α 이외의 근은 $2\beta-\gamma$이다.

답 $2\beta-\gamma$

2

두 점 A, B를 지나는 직선, 즉 직선 $y=x+1$과 평행한 직선이 점 C에서 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프에 접할 때 삼각형 ABC의 넓이는 최대가 된다.

기울기가 1이고 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 $y=x+k$라 하자.

이차방정식 $x^2-2x-3=x+k$, 즉 $x^2-3x-3-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4(-3-k)=0$

$4k+21=0 \qquad \therefore k=-\frac{21}{4}$

즉 직선의 방정식은 $y=x-\frac{21}{4}$

이때 $x^2-2x-3=x-\frac{21}{4}$에서

$x^2-3x+\frac{9}{4}=0$, $4x^2-12x+9=0$

$(2x-3)^2=0 \qquad \therefore x=\frac{3}{2}$

따라서 점 C는 x좌표는 $\frac{3}{2}$이고, 점 C는 직선 $y=x-\frac{21}{4}$ 위의 점이므로 점 C의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)$이다.

답 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)$

3

㈎의 $f(x)=f(-2-x)$에 x 대신 $x-1$을 대입하면

$f(x-1)=f(-2-(x-1))$

$\therefore f(-1+x)=f(-1-x)$

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이므로

$f(x)=a(x+1)^2+b\ (a\neq0)$

로 놓을 수 있다.

(i) $a>0$일 때

㈏에서 함수 $f(x)$는 $x=-4$일 때 최댓값 8, $x=-1$일 때 최솟값 -1을 가지므로

$f(-4)=8$에서 $9a+b=8$ …… ㉠

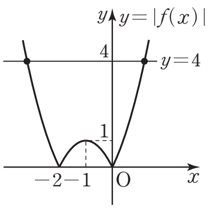
$f(-1)=-1$에서 $b=-1$

$b=-1$을 ㉠에 대입하면

$9a-1=8 \qquad \therefore a=1$

$\therefore f(x)=(x+1)^2-1$

이때 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=4$의 교점은 2개이므로 ㈐를 만족시키지 않는다.



(ii) $a<0$일 때

㈏에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 8, $x=-4$일 때 최솟값 -1을 가지므로

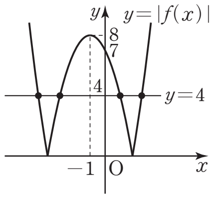
$f(-1)=8$에서 $b=8$

$f(-4)=-1$에서 $9a+b=-1$ …… ㉡

$b=8$을 ㉡에 대입하면 $9a+8=-1 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore f(x)=-(x+1)^2+8$

이때 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=4$의 교점은 4개이므로 ㈐를 만족시킨다.



(i), (ii)에서 $f(x)=-(x+1)^2+8=-x^2-2x+7$

따라서 이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $-x^2-2x+7=0$의 두 실근의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 -2이다.

답 -2

4

$\overline{BQ}=x\ (0<x<3\sqrt{2})$라 하면

$\overline{PQ}=x$, $\overline{BP}=\sqrt{2}x$

$\overline{AB}=6$이므로 $\overline{AP}=6-\sqrt{2}x$

$\overline{PR}=\sqrt{2}(6-\sqrt{2}x)=6\sqrt{2}-2x$이고

$\overline{QC}=\overline{BC}-\overline{BQ}=6\sqrt{2}-x$이므로

(사각형 PQCR의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times(\overline{PR}+\overline{QC})\times\overline{PQ}$

$=\frac{1}{2}\times\{(6\sqrt{2}-2x)+(6\sqrt{2}-x)\}\times x$

$=6\sqrt{2}x-\frac{3}{2}x^2$

$=-\frac{3}{2}(x^2-4\sqrt{2}x+8)+12$

$=-\frac{3}{2}(x-2\sqrt{2})^2+12$

따라서 구하는 넓이의 최댓값은 $x=2\sqrt{2}$일 때 12이다.

답 12

4 삼차방정식과 사차방정식

확인 문제

p. 164~177

01

(1) 좌변을 인수분해하면

$(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

(2) $f(x)=x^3+4x^2+x-6$으로 놓으면

$f(1)=1+4+1-6=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 4 & 1 & -6 \\ & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+5x+6)$

$=(x-1)(x+2)(x+3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x+2)(x+3)=0$이므로

$x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-3$

(3) $f(x)=2x^3-2x^2-3x+1$로 놓으면

$f(-1)=-2-2+3+1=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -2 & -3 & 1 \\ & & -2 & 4 & -1 \\ \hline & 2 & -4 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(2x^2-4x+1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(2x^2-4x+1)=0$이므로

$x=-1$ 또는 $2x^2-4x+1=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

답 (1) $x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

(2) $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$

(3) $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

02

$f(x)=x^4+3x^3+3x^2-x-6$으로 놓으면

$f(1)=1+3+3-1-6=0$,

$f(-2)=16-24+12+2-6=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 3 & 3 & -1 & -6 \\ & & 1 & 4 & 7 & 6 \\ \hline -2 & 1 & 4 & 7 & 6 & \boxed{0} \\ & & -2 & -4 & -6 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x+2)(x^2+2x+3)$

이때 두 허근 α, β는 $x^2+2x+3=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$

$\therefore \alpha^3\beta+\beta^3\alpha=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$

$=\alpha\beta\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$

$=3\times\{(-2)^2-2\times3\}$

$=-6$

답 -6

03

(1) $x^2+3x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+1)^2-4X-9=0$, $X^2-2X-8=0$

$(X+2)(X-4)=0$ $\therefore X=-2$ 또는 $X=4$

(i) $X=-2$일 때, $x^2+3x=-2$

$x^2+3x+2=0$, $(x+2)(x+1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

(ii) $X=4$일 때, $x^2+3x=4$

$x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서

$x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

(2) $x^2-2x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X-5)(X-6)=6$, $X^2-11X+24=0$

$(X-3)(X-8)=0$ $\therefore X=3$ 또는 $X=8$

(i) $X=3$일 때, $x^2-2x=3$

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

(ii) $X=8$일 때, $x^2-2x=8$

$x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서

$x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$

답 (1) $x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

(2) $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$

04

(1) 두 일차식의 상수항의 합이 같은 것끼리 곱하면

$\{(x+1)(x-3)\}\{(x+2)(x-4)\}=24$

$(x^2-2x-3)(x^2-2x-8)=24$

$x^2-2x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X-3)(X-8)=24,\ X^2-11X=0$

$X(X-11)=0 \qquad \therefore X=0$ 또는 $X=11$

(i) $X=0$일 때, $x^2-2x=0$

$x(x-2)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=2$

(ii) $X=11$일 때, $x^2-2x=11$

$x^2-2x-11=0 \qquad \therefore x=1\pm2\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm2\sqrt{3}$

(2) 두 일차식의 상수항의 합이 같은 것끼리 곱하면

$\{(x-3)(x+5)\}\{(x-1)(x+3)\}+11=0$

$(x^2+2x-15)(x^2+2x-3)+11=0$

$x^2+2x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X-15)(X-3)+11=0,\ X^2-18X+56=0$

$(X-4)(X-14)=0 \qquad \therefore X=4$ 또는 $X=14$

(i) $X=4$일 때, $x^2+2x=4$

$x^2+2x-4=0 \qquad \therefore x=-1\pm\sqrt{5}$

(ii) $X=14$일 때, $x^2+2x=14$

$x^2+2x-14=0 \qquad \therefore x=-1\pm\sqrt{15}$

(i), (ii)에서 $x=-1\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{15}$

답 (1) $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm2\sqrt{3}$

(2) $x=-1\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{15}$

05

(1) $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은 $X^2-6X+8=0$

$(X-2)(X-4)=0 \qquad \therefore X=2$ 또는 $X=4$

따라서 $x^2=2$ 또는 $x^2=4$이므로

$x=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm2$

(2) $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은 $2X^2-7X+3=0$

$(2X-1)(X-3)=0 \qquad \therefore X=\frac{1}{2}$ 또는 $X=3$

따라서 $x^2=\frac{1}{2}$ 또는 $x^2=3$이므로

$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

(3) $x^4-14x^2+25=0$에서 $(x^4-10x^2+25)-4x^2=0$

$(x^2-5)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x-5)(x^2-2x-5)=0$

$\therefore x^2+2x-5=0$ 또는 $x^2-2x-5=0$

(i) $x^2+2x-5=0$에서 $x=-1\pm\sqrt{6}$

(ii) $x^2-2x-5=0$에서 $x=1\pm\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 $x=-1\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{6}$

(4) $x^4-x^2+16=0$에서 $(x^4+8x^2+16)-9x^2=0$

$(x^2+4)^2-(3x)^2=0$

$(x^2+3x+4)(x^2-3x+4)=0$

$\therefore x^2+3x+4=0$ 또는 $x^2-3x+4=0$

(i) $x^2+3x+4=0$에서 $x=\frac{-3\pm\sqrt{7}i}{2}$

(ii) $x^2-3x+4=0$에서 $x=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}$

(i), (ii)에서 $x=\frac{-3\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}$

답 (1) $x=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm2$

(2) $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

(3) $x=-1\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{6}$

(4) $x=\frac{-3\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}$

06

(1) $x\neq0$이므로 방정식 $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-2x-1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$

$\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면 $X^2-2X-3=0$

$(X+1)(X-3)=0 \qquad \therefore X=-1$ 또는 $X=3$

(i) $X=-1$일 때, $x+\frac{1}{x}=-1$

$x^2+x+1=0 \qquad \therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ii) $X=3$일 때, $x+\frac{1}{x}=3$

$x^2-3x+1=0 \qquad \therefore x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(i), (ii)에서 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(2) $x\neq0$이므로 방정식 $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-3x+4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$

$\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면 $X^2-3X+2=0$

$(X-1)(X-2)=0 \qquad \therefore X=1$ 또는 $X=2$

(i) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$

$x^2-x+1=0 \qquad \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ii) $X=2$일 때, $x+\frac{1}{x}=2$

$x^2-2x+1=0,\ (x-1)^2=0 \qquad \therefore x=1$

(i), (ii)에서 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=1$

답 (1) $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(2) $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=1$

07

$x^3+ax^2+2x+b=0$에 $x=1$을 대입하면

$1+a+2+b=0 \qquad \therefore a+b=-3$ …… ㉠

$x=2$를 대입하면

$8+4a+4+b=0 \qquad \therefore 4a+b=-12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=0$

즉 주어진 방정식은 $x^3-3x^2+2x=0$이므로

$x(x^2-3x+2)=0,\ x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 나머지 한 근은 0이다.

답 $a=-3,\ b=0$, 나머지 한 근: 0

08

$x^3-2x^2+ax+6=0$에 $x=2$를 대입하면

$8-8+2a+6=0 \qquad \therefore a=-3$

즉 주어진 방정식은 $x^3-2x^2-3x+6=0$이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -2 & -3 & 6 \\ & & 2 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore (x-2)(x^2-3)=0$

이때 나머지 두 근 $\alpha,\ \beta$는 $x^2-3=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=0,\ \alpha\beta=-3$

$\therefore -3(\alpha+1)(\beta+1)=-3(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)$

$=-3(-3+0+1)$

$=6$

답 6

09

$x^4+ax^3+4x^2-4x+b=0$에 $x=1$을 대입하면

$1+a+4-4+b=0 \qquad \therefore a+b=-1$ …… ㉠

$x=3$을 대입하면

$81+27a+36-12+b=0$

$\therefore 27a+b=-105$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4,\ b=3$

즉 주어진 방정식은 $x^4-4x^3+4x^2-4x+3=0$이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & -4 & 4 & -4 & 3 \\ & & 1 & -3 & 1 & -3 \\ \hline 3 & 1 & -3 & 1 & -3 & \boxed{0} \\ & & 3 & 0 & 3 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore (x-1)(x-3)(x^2+1)=0$

이때 나머지 두 근 $\alpha,\ \beta$는 $x^2+1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=1$

답 1

10

$f(x)=x^3+x^2+(3a-2)x-3a$로 놓으면

$f(1)=1+1+(3a-2)-3a=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & 3a-2 & -3a \\ & & 1 & 2 & 3a \\ \hline & 1 & 2 & 3a & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+2x+3a)$

이때 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 허근을 가지려면 방정식 $x^2+2x+3a=0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-3a<0 \qquad \therefore a>\frac{1}{3}$

답 $a>\frac{1}{3}$

11

$f(x)=x^3-9(m+1)x+27m$으로 놓으면

$f(3)=27-27(m+1)+27m=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & 0 & -9(m+1) & 27m \\ & & 3 & 9 & -27m \\ \hline & 1 & 3 & -9m & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-3)(x^2+3x-9m)$

이때 삼차방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2+3x-9m=0$이 $x=3$을 근으로 갖는 경우

$9+9-9m=0 \qquad \therefore m=2$

(ii) 방정식 $x^2+3x-9m=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\times(-9m)=0,\ 36m=-9$

$\therefore m=-\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 합은

$2+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{4}$

답 $\frac{7}{4}$

12

$f(x)=x^3+5x^2+(k-1)x-k-5$로 놓으면

$f(1)=1+5+(k-1)-k-5=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 5 & k-1 & -k-5 \\ & & 1 & 6 & k+5 \\ \hline & 1 & 6 & k+5 & 0 \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+6x+k+5)$

이때 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 방정식 $x^2+6x+k+5=0$이 $x\neq1$인 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-(k+5)>0 \qquad \therefore k<4$ …… ㉠

또 이차방정식 $x^2+6x+k+5=0$에 $x=1$을 대입했을 때 성립하지 않아야 하므로

$1+6+k+5\neq0 \qquad \therefore k\neq-12$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 자연수 k의 값은 1, 2, 3이므로 그 합은

$1+2+3=6$

답 6

13

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=5,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\ \alpha\beta\gamma=-2$

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{0}{-2}=0$

(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=5^2-2\times0=25$

(3) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$

$=-2+0+5+1=4$

답 (1) 0 (2) 25 (3) 4

14

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1,\ \alpha\beta\gamma=-1$

$\therefore \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$=1^2-2\times(-1)\times1$

$=3$

답 3

15

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4,\ \alpha\beta\gamma=2$

이때 $\alpha+\beta+\gamma=1$에서

$\beta+\gamma=1-\alpha,\ \gamma+\alpha=1-\beta,\ \alpha+\beta=1-\gamma$

$\therefore \frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$

$=\frac{1-\alpha}{\alpha}+\frac{1-\beta}{\beta}+\frac{1-\gamma}{\gamma}$

$=\frac{\beta\gamma(1-\alpha)+\gamma\alpha(1-\beta)+\alpha\beta(1-\gamma)}{\alpha\beta\gamma}$

$=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-3\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}$

$=\frac{4-3\times2}{2}$

$=-1$

답 -1

16

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1,\ \alpha\beta\gamma=-1$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $\alpha\beta,\ \beta\gamma,\ \gamma\alpha$이므로

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$

$\alpha\beta\times\beta\gamma+\beta\gamma\times\gamma\alpha+\gamma\alpha\times\alpha\beta$

$=\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$=-1\times2=-2$

$\alpha\beta\times\beta\gamma\times\gamma\alpha=(\alpha\beta\gamma)^2=(-1)^2=1$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3-x^2-2x-1=0$

답 $x^3-x^2-2x-1=0$

17

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,\ \alpha\beta\gamma=1$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $\frac{1}{\alpha\beta},\ \frac{1}{\beta\gamma},\ \frac{1}{\gamma\alpha}$이므로

$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-2}{1}=-2$

$\frac{1}{\alpha\beta}\times\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\times\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{1}{\gamma\alpha}\times\frac{1}{\alpha\beta}$

$=\frac{1}{\alpha\beta^2\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2\beta\gamma}$

$=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{(\alpha\beta\gamma)^2}=\frac{3}{1^2}=3$

$\frac{1}{\alpha\beta}\times\frac{1}{\beta\gamma}\times\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{1}{(\alpha\beta\gamma)^2}=\frac{1}{1^2}=1$

따라서 구하는 삼차방정식은

$-(x^3+2x^2+3x-1)=0$, 즉 $-x^3-2x^2-3x+1=0$

답 $-x^3-2x^2-3x+1=0$

18

삼차방정식의 계수가 유리수이고 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로 $2-\sqrt{3}$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=6 \qquad \therefore \alpha=6$

$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})+\alpha=-a$에서

$4+\alpha=-a \qquad \therefore a=-10$

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+\alpha(2+\sqrt{3})+\alpha(2-\sqrt{3})=b$에서

$4\alpha+1=b \qquad \therefore b=25$

$\therefore ab=-10\times25=-250$

답 -250

19

삼차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $2-i$이므로 $2+i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-i)+(2+i)+\alpha=-1$에서

$4+\alpha=-1 \qquad \therefore \alpha=-5$

$(2-i)(2+i)+\alpha(2-i)+\alpha(2+i)=a$에서

$5+4\alpha=a \qquad \therefore a=-15$

$\alpha(2-i)(2+i)=b$에서 $5\alpha=b \qquad \therefore b=-25$

$\therefore a+b=-15+(-25)=-40$

답 -40

20

방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore 1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{101}$

$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{99}(1+\omega+\omega^2)$

$=0+1\times0+1\times0+\cdots+1\times0=0$

답 0

21

방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^3-1=0 \qquad \therefore \omega^3=1$

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^2+\omega+1=0$

또 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

(1) $1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega^2+\omega+1}{\omega^2}=0$이므로

$1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}+\cdots+\frac{1}{\omega^{18}}$

$=\left(1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)+\frac{1}{\omega^3}\left(1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)+\cdots+\frac{1}{\omega^{15}}\left(1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)+\frac{1}{\omega^{18}}$

$=0+1\times0+1\times0+\cdots+1\times0+1=1$

(2) $\frac{1}{1-\omega}+\frac{1}{1-\overline{\omega}}=\frac{1-\overline{\omega}+1-\omega}{(1-\omega)(1-\overline{\omega})}$

$=\frac{2-(\omega+\overline{\omega})}{1-(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}$

$=\frac{2-(-1)}{1-(-1)+1}$

$=1$

답 (1) 1 (2) 1

22

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $\omega-1$을 곱하면

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega^3-1=0 \qquad \therefore \omega^3=1$

$\therefore \frac{\omega^{10}+1}{\omega^2}=\frac{(\omega^3)^3\times\omega+1}{\omega^2}=\frac{\omega+1}{\omega^2}$

이때 ㉠에서 $\omega+1=-\omega^2$이므로

$\frac{\omega^{10}+1}{\omega^2}=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

답 -1

23

방정식 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=-1$

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

이때 ω는 방정식 $x^2-x+1=0$의 근이므로

$\omega^2-\omega+1=0$

(1) $\omega^{20}=(\omega^3)^6\times\omega^2=\omega^2$, $\omega^{10}=(\omega^3)^3\times\omega=-\omega$

$\therefore\ \omega^{20}+\omega^{10}+1=\omega^2-\omega+1=0$

(2) $\omega\neq0$이므로 $\omega^2-\omega+1=0$의 양변을 ω로 나누면

$\omega-1+\dfrac{1}{\omega}=0 \qquad \therefore\ \omega+\dfrac{1}{\omega}=1$

답 (1) 0　(2) 1

24

$x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

이때 α는 방정식 $x^2-x+1=0$의 근이므로

$\alpha^2-\alpha+1=0 \qquad \therefore\ \alpha^2-\alpha=-1$

또 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=1$, $\alpha\overline{\alpha}=1$

$\therefore\ \alpha^2-\alpha+\alpha\overline{\alpha}=-1+1=0$

답 0

25

방정식 $x^3+1=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^3+1=0 \qquad \therefore\ \omega^3=-1$

$x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

이때 ω는 방정식 $x^2-x+1=0$의 근이므로

$\omega^2-\omega+1=0$

$\omega\neq0$이므로 위의 식의 양변을 ω로 나누면

$\omega-1+\dfrac{1}{\omega}=0 \qquad \therefore\ \omega+\dfrac{1}{\omega}=1$

$$\begin{aligned}\therefore\ \omega^{20}+\frac{1}{\omega^{20}}&=(\omega^3)^6\times\omega^2+\frac{1}{(\omega^3)^6\times\omega^2}\\&=\omega^2+\frac{1}{\omega^2}\\&=\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2-2\\&=1^2-2=-1\end{aligned}$$

답 -1

연습문제

p. 178 ~ 181

1

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=1$

$\therefore\ \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{2}{1}=2$

답 2

2

$f(x)=x^3-2x^2+3x-2$로 놓으면

$f(1)=1-2+3-2=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ & & 1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ f(x)=(x-1)(x^2-x+2)$

이때 두 허근 α, β는 $x^2-x+2=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=2$

$\therefore\ \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{2}$

답 ③

3

$x^2-x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-5X+6=0$, $(X-2)(X-3)=0$

$\therefore\ X=2$ 또는 $X=3$

(i) $X=2$일 때, $x^2-x=2$

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $X=3$일 때, $x^2-x=3$

$x^2-x-3=0 \qquad \therefore\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

(i), (ii)에서 모든 정수 x의 값의 합은

$-1+2=1$

답 1

4

삼차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $1-i$이므로 $1+i$도 근이다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-i)+(1+i)+\alpha=1$에서 $2+\alpha=1 \qquad \therefore\ \alpha=-1$

$\alpha(1-i)(1+i)=k$에서 $2\alpha=k \qquad \therefore\ k=-2$

$\therefore\ k+\alpha=-2+(-1)=-3$

답 -3

5

$f(x)=2x^3+x^2+2x+3$으로 놓으면

$f(-1)=-2+1-2+3=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ & & -2 & 1 & -3 \\ \hline & 2 & -1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ f(x)=(x+1)(2x^2-x+3)$

이때 허근 α는 $2x^2-x+3=0$의 한 근이므로

$2\alpha^2-\alpha+3=0$

$\therefore 4\alpha^2-2\alpha+7=2(2\alpha^2-\alpha+3)+1=1$ 답 ①

6

Step by Step

주어진 사차방정식의 양변을 x^2으로 나눈다.

↓

$x+\frac{1}{x}=X$로 치환한다.

↓

X의 값을 구한 후 $x+\frac{1}{x}=X$에 대입한다.

↓

이차방정식의 근을 판별하여 $\alpha+\frac{1}{\alpha}$의 값을 구한다.

$x\neq0$이므로 방정식 $x^4+4x^3-3x^2+4x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+4x-3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면 $X^2+4X-5=0$

$(X+5)(X-1)=0 \qquad \therefore X=-5$ 또는 $X=1$

(i) $X=-5$일 때, $x+\frac{1}{x}=-5$

$\therefore x^2+5x+1=0$

이때 이차방정식 $x^2+5x+1=0$의 판별식을 D라 하면 $D=5^2-4=21>0$이므로 이 이차방정식은 실근 α를 갖는다.

$\therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=-5$

(ii) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$

$\therefore x^2-x+1=0$

이때 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 판별식을 D'이라 하면 $D'=(-1)^2-4=-3<0$이므로 이 이차방정식은 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=-5$ 답 ①

7

$f(x)=x^3-4x^2+(k+4)x-2k$로 놓으면

$f(2)=8-16+2(k+4)-2k=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -4 & k+4 & -2k \\ & & 2 & -4 & 2k \\ \hline & 1 & -2 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-2)(x^2-2x+k)$ …… ❶

이때 삼차방정식 $f(x)=0$의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-2x+k=0$이 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-k\geq0$ …… ❷

$\therefore k\leq1$ …… ❸

답 $k\leq1$

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40%
❷ 판별식을 이용하여 k에 대한 식을 세울 수 있다.	40%
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%

8

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3,\ \alpha\beta\gamma=-4$

$\therefore (3+\alpha)(3+\beta)(3+\gamma)$

$=27+9(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma$

$=27+9\times(-2)+3\times(-3)+(-4)$

$=-4$ 답 ②

다른 풀이

삼차방정식 $x^3+2x^2-3x+4=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$x^3+2x^2-3x+4=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

위의 식의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$-27+18+9+4=(-3-\alpha)(-3-\beta)(-3-\gamma)$

$(-3-\alpha)(-3-\beta)(-3-\gamma)=4$

$-(3+\alpha)(3+\beta)(3+\gamma)=4$

$\therefore (3+\alpha)(3+\beta)(3+\gamma)=-4$

9

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=k,\ \alpha\beta\gamma=1$

이때 $\alpha+\beta+\gamma=2$에서

$\alpha+\beta=2-\gamma,\ \beta+\gamma=2-\alpha,\ \gamma+\alpha=2-\beta$

$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(2-\gamma)(2-\alpha)(2-\beta)$

$=8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=8-4\times2+2k-1$

$=2k-1$

따라서 $2k-1=5$이므로 $k=3$ 답 ③

10

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=k+1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=k-1$, $\alpha\beta\gamma=1$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\&=(k+1)^2-2(k-1)\\&=k^2+3\end{aligned}$$

따라서 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$은 $k=0$일 때 최솟값 3을 갖는다.

답 3

11

방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^3=1$ ...... ㉠

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^2+\omega+1=0$ ...... ㉡

㉡에서 $\omega+1=-\omega^2$, $\omega^2+1=-\omega$이므로

$(\omega+1)^4+(\omega^2+1)^2+1$

$=(-\omega^2)^4+(-\omega)^2+1$

$=\omega^8+\omega^2+1$

$=(\omega^3)^2\times\omega^2+\omega^2+1$

$=\omega^2+\omega^2+1$ ($\because$ ㉠)

$=2\omega^2+1$

$=2(-\omega-1)+1$ ($\because$ ㉡)

$=-1-2\omega$

따라서 $-1-2\omega=a+b\omega$이므로

$a=-1$, $b=-2$

답 $a=-1$, $b=-2$

12

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

이때 ω는 방정식 $x^2-x+1=0$의 근이므로

$\omega^2-\omega+1=0$ ...... ㉠

① ㉠에서 $\omega-\omega^2=1$

②, ③ 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근이 ω이므로 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다. 이때 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

④ $\omega\neq0$이므로 ㉠의 양변을 ω로 나누면

$\omega-1+\dfrac{1}{\omega}=0$ $\quad\therefore \omega+\dfrac{1}{\omega}=1$

⑤ ④에서 $\omega+\dfrac{1}{\omega}=1$이므로 양변을 제곱하면

$\left(\omega+\dfrac{1}{\omega}\right)^2=1$, $\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}+2=1$

$\therefore \omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=-1$

따라서 그 값이 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

답 ⑤

13

$x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

이때 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 다른 한 허근은 $\overline{\omega}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\overline{\omega}}{\omega^2+\omega}+\frac{\omega^6}{1+\omega}&=\frac{\overline{\omega}}{-1}+\frac{\omega^3\times\omega^3}{-\omega^2}\\&=-\overline{\omega}-\omega\\&=-(\omega+\overline{\omega})\\&=1\end{aligned}$$

답 1

14

$f(x)=x^3-x^2+kx-k$로 놓으면

$f(1)=1-1+k-k=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & k & -k \\ & & 1 & 0 & k \\ \hline & 1 & 0 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+k)$

$\therefore a=1$

즉 허근 $3i$는 방정식 $x^2+k=0$의 근이므로

$(3i)^2+k=0$ $\quad\therefore k=9$

$\therefore k+a=9+1=10$ 답 10

다른 풀이

$3i$가 $x^3-x^2+kx-k=0$의 허근이므로

$(3i)^3-(3i)^2+3ki-k=0$

$(9-k)+(3k-27)i=0$

$9-k=0$, $3k-27=0$이므로 $k=9$

즉 방정식 $x^3-x^2+9x-9=0$에서

$x^2(x-1)+9(x-1)=0$, $(x-1)(x^2+9)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\pm3i$

따라서 방정식의 실근은 1이므로 $a=1$

$\therefore k+a=9+1=10$

15

삼차방정식 $f(x)=0$의 계수가 실수이고 한 허근이 $3-i$이므로 $3+i$도 근이다.

즉 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근이 $1,\ 3-i,\ 3+i$이고

$1+(3-i)+(3+i)=7$

$1\times(3-i)+(3-i)(3+i)+(3+i)\times 1=16$

$1\times(3-i)(3+i)=10$

이때 x^3의 계수가 1이므로 삼차방정식 $f(x)=0$은

$x^3-7x^2+16x-10=0$

따라서 $f(x)=x^3-7x^2+16x-10$이므로

$f(2)=8-28+32-10=2$

답 ④

16

$f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=3$이므로

$f(\alpha)-3=f(\beta)-3=f(\gamma)-3=0$

즉 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$는 방정식 $f(x)-3=0$의 근이고, x^3의 계수가 1이므로

$f(x)-3=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$\therefore\ f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+3$

이때 $g(x)=x^3-3x^2+4x-2$라 하면

삼차방정식 $g(x)=0$의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$이므로

$g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

따라서

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+3\\&=g(x)+3\\&=(x^3-3x^2+4x-2)+3\\&=x^3-3x^2+4x+1\end{aligned}$$

이므로

$f(-1)=-1-3-4+1=-7$

답 -7

17

$x^2+x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X-1)(X+3)-5=0,\ X^2+2X-8=0$

$(X-2)(X+4)=0 \qquad \therefore\ X=2$ 또는 $X=-4$

(i) $X=2$일 때, $x^2+x=2$

$\therefore\ x^2+x-2=0$

이때 이차방정식 $x^2+x-2=0$의 판별식을 D라 하면 $D=1^2-4\times(-2)=9>0$이므로 이 이차방정식은 두 실근을 갖는다.

(ii) $X=-4$일 때, $x^2+x=-4$

$\therefore\ x^2+x+4=0$

이때 이차방정식 $x^2+x+4=0$의 판별식을 D'이라 하면 $D'=1^2-4\times4=-15<0$이므로 이 이차방정식은 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 두 허근 $\alpha,\ \beta$는 $x^2+x+4=0$의 두 근이므로 $\overline{\alpha}=\beta,\ \overline{\beta}=\alpha$이고 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=4$

$\therefore\ \alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=\alpha\beta+\beta\alpha=2\alpha\beta=2\times4=8$

답 ⑤

18

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 다른 허근은 $\overline{\omega}$이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

또 $z=\dfrac{\overline{\omega}+1}{2\omega+1}$이므로 $\overline{z}=\overline{\left(\dfrac{\overline{\omega}+1}{2\omega+1}\right)}=\dfrac{\omega+1}{2\overline{\omega}+1}$

$$\begin{aligned}\therefore\ z\overline{z}&=\frac{\overline{\omega}+1}{2\omega+1}\times\frac{\omega+1}{2\overline{\omega}+1}\\&=\frac{(\overline{\omega}+1)(\omega+1)}{(2\omega+1)(2\overline{\omega}+1)}\\&=\frac{\omega\overline{\omega}+\omega+\overline{\omega}+1}{4\omega\overline{\omega}+2(\omega+\overline{\omega})+1}\\&=\frac{1+(-1)+1}{4\times1+2\times(-1)+1}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{1}{3}$

19

삼차방정식 $3x^3-9x+2=0$의 한 근이 k이므로

$3k^3-9k+2=0$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-kx+1=0$의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-k\alpha+1=0$

이때 $\alpha\neq0$이므로 위의 식의 양변을 α로 나누면

$\alpha-k+\dfrac{1}{\alpha}=0 \qquad \therefore\ \alpha+\dfrac{1}{\alpha}=k$ …… ㉡

$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}&=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^3-3\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\\&=k^3-3k\ (\because ㉡)\end{aligned}$$

㉠의 양변을 3으로 나누면

$k^3-3k+\dfrac{2}{3}=0 \qquad \therefore\ k^3-3k=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ \alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}=k^3-3k=-\dfrac{2}{3}$

답 $-\dfrac{2}{3}$

20

$f(2)=f(5)=-8$이므로

$f(2)+8=0,\ f(5)+8=0$

즉 2, 5는 이차방정식 $f(x)+8=0$의 두 근이므로

$f(x)+8=a(x-2)(x-5)\ (a\neq 0)$로 놓으면

$f(x)=a(x-2)(x-5)-8$

이때 $f(4)=-12$이므로

$f(4)=a\times 2\times(-1)-8=-12$

$-2a-8=-12 \qquad \therefore a=2$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=2(x-2)(x-5)-8\\&=2(x^2-7x+10)-8\\&=2(x^2-7x+6)\\&=2(x-1)(x-6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x^2+2)&=2(x^2+2-1)(x^2+2-6)\\&=2(x^2+1)(x^2-4)\end{aligned}$$

이때 $f(x^2+2)=0$에서 $2(x^2+1)(x^2-4)=0$

$\therefore x^2+1=0$ 또는 $x^2-4=0$

즉 방정식 $f(x^2+2)=0$의 두 실근은 이차방정식 $x^2-4=0$의 두 근이므로 구하는 두 실근의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 0이다.

답 0

21

$f(x)=x^3+x^2+(a-2)x-a$로 놓으면

$f(1)=1+1+(a-2)-a=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & a-2 & -a \\ & & 1 & 2 & a \\ \hline & 1 & 2 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+2x+a)$

즉 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+2x+a)=0$이므로

$x=1$ 또는 $x^2+2x+a=0$

ㄱ. 주어진 삼차방정식은 적어도 하나의 실근 1을 갖는다.

ㄴ. 주어진 삼차방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2x+a=0$이 허근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-a<0 \qquad \therefore a>1$

즉 정수 a의 최솟값은 2이다.

ㄷ. 주어진 삼차방정식이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2+2x+a=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우

$1+2+a=0 \qquad \therefore a=-3$

(ii) 방정식 $x^2+2x+a=0$이 중근을 갖는 경우
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-a=0 \qquad \therefore a=1$

(i), (ii)에서 실수 a는 -3, 1이므로 그 개수는 2이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

22

방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

$\therefore \omega^2+\omega+1=0,\ \overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

ㄱ. $\overline{\omega}^2=-\overline{\omega}-1$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\omega}^3&=\overline{\omega}^2\times\overline{\omega}=(-\overline{\omega}-1)\times\overline{\omega}\\&=-\overline{\omega}^2-\overline{\omega}\\&=1\end{aligned}$$

ㄴ. $\frac{1}{\omega}+\left(\frac{1}{\omega}\right)^2=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

$\frac{1}{\overline{\omega}}+\left(\frac{1}{\overline{\omega}}\right)^2=\frac{1}{\overline{\omega}}+\frac{1}{\overline{\omega}^2}=\frac{\overline{\omega}+1}{\overline{\omega}^2}=\frac{-\overline{\omega}^2}{\overline{\omega}^2}=-1$

$\therefore \frac{1}{\omega}+\left(\frac{1}{\omega}\right)^2=\frac{1}{\overline{\omega}}+\left(\frac{1}{\overline{\omega}}\right)^2$

ㄷ. $-\omega-1=\omega^2$이므로 $(-\omega-1)^n=(\omega^2)^n$

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 $\omega,\ \overline{\omega}$이므로
근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$$\begin{aligned}\therefore \left(\frac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n&=(-\overline{\omega})^n\\&=(\omega+1)^n\\&=(-\omega^2)^n\\&=(-1)^n\times(\omega^2)^n\end{aligned}$$

즉 $(-\omega-1)^n=\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n$에서

$(\omega^2)^n=(-1)^n\times(\omega^2)^n$

$\therefore 1=(-1)^n$

따라서 $(-\omega-1)^n=\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n$을 만족시키는 자연수 n은 짝수이고, 100 이하의 짝수 n의 개수는 50이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

Level Up 연습문제

p. 182

1

방정식 $x^9=1$, 즉 $x^9-1=0$의 근이

$1, z_1, z_2, z_3, \cdots, z_8$이므로

$x^9-1=(x-1)(x-z_1)(x-z_2)\cdots(x-z_8)$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1-1=(-1-1)(-1-z_1)(-1-z_2)\cdots(-1-z_8)$

$-2=-2(-1-z_1)(-1-z_2)\cdots(-1-z_8)$

$-2=-2\times(-1)^8\times(1+z_1)(1+z_2)\cdots(1+z_8)$

$-2=-2(z_1+1)(z_2+1)(z_3+1)\cdots(z_8+1)$

$\therefore (z_1+1)(z_2+1)(z_3+1)\cdots(z_8+1)=1$

답 1

2

삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ (a\neq0)$

양변에 x 대신 $x+1$을 대입하면

$f(x+1)=a(x+1-\alpha)(x+1-\beta)(x+1-\gamma)$

즉 삼차방정식 $f(x+1)=0$의 근은

$x=\alpha-1$ 또는 $x=\beta-1$ 또는 $x=\gamma-1$

이때 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta\gamma=0$이므로

삼차방정식 $f(x+1)=0$의 세 근의 곱은

$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

$=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1$

$=-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta\gamma)-1$

$=-2+0-1$

$=-3$

답 -3

3

$f(x)=x^3+x^2-x+2$로 놓으면

$f(-2)=-8+4+2+2=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ & & -2 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+2)(x^2-x+1)$

이때 두 허근 α, β는 $x^2-x+1=0$의 두 근이므로

$\alpha^2-\alpha+1=0$ ······ ㉠

$\beta^2-\beta+1=0$ ······ ㉡

㉠의 양변에 $\alpha+1$을 곱하면

$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$

$\alpha^3+1=0 \qquad \therefore \alpha^3=-1$

㉡의 양변에 $\beta+1$을 곱하면

$(\beta+1)(\beta^2-\beta+1)=0$

$\beta^3+1=0 \qquad \therefore \beta^3=-1$

$\therefore \dfrac{\alpha^7}{\alpha^{14}+\alpha^6}+\dfrac{\beta^4}{\beta^{20}+\beta^{18}}$

$=\dfrac{(\alpha^3)^2\times\alpha}{(\alpha^3)^4\times\alpha^2+(\alpha^3)^2}+\dfrac{\beta^3\times\beta}{(\beta^3)^6\times\beta^2+(\beta^3)^6}$

$=\dfrac{\alpha}{\alpha^2+1}-\dfrac{\beta}{\beta^2+1}$

$=\dfrac{\alpha}{\alpha}-\dfrac{\beta}{\beta}$

$=1-1$

$=0$

답 ④

4

$x^{2n}+1+(x+1)^{2n}$을 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{2n}+1+(x+1)^{2n}=(x^2+x+1)Q(x)$ ······ ㉠

이때 $x^2+x+1=0$의 한 근을 ω라 하면

$\omega^2+\omega+1=0$

위 식의 양변에 $\omega-1$을 곱하면

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega^3-1=0$

$\therefore \omega^3=1$

㉠의 양변에 $x=\omega$를 대입하면

$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=0$ ······ ㉡

이때 $\omega+1=-\omega^2$이므로

$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=\omega^{2n}+1+(-\omega^2)^{2n}$

$=\omega^{4n}+\omega^{2n}+1$

(i) $n=3k+1\ (k=0, 1, 2, \cdots)$일 때

$\omega^{4n}+\omega^{2n}+1=\omega^{12k+4}+\omega^{6k+2}+1$

$=\omega^4+\omega^2+1$

$=\omega+\omega^2+1$

$=0$

(ii) $n=3k+2\ (k=0, 1, 2, \cdots)$일 때

$\omega^{4n}+\omega^{2n}+1=\omega^{12k+8}+\omega^{6k+4}+1$

$=\omega^8+\omega^4+1$

$=\omega^2+\omega+1$

$=0$

(iii) $n=3k$ ($k=1, 2, 3, \cdots$)일 때

$\omega^{4n}+\omega^{2n}+1=\omega^{12k}+\omega^{6k}+1$

$=1+1+1=3$

(i)~(iii)에서 ㉡을 만족시키는 n은 3의 배수가 아니어야 한다.

이때 n은 두 자리 자연수이므로 구하는 n의 개수는

$90-30=60$

답 60

5

$f(x)=x^3-(2k+2)x^2+(8k-3)x-8k+6$으로 놓으면 $f(2)=8-4(2k+2)+2(8k-3)-8k+6=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -2k-2 & 8k-3 & -8k+6 \\ & & 2 & -4k & 8k-6 \\ \hline & 1 & -2k & 4k-3 & 0 \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-2)(x^2-2kx+4k-3)$

즉 주어진 삼차방정식은

$(x-2)(x^2-2kx+4k-3)=0$

이때 이 삼차방정식의 세 근이 이등변삼각형의 세 변의 길이이므로 이 삼차방정식은 중근을 갖는다.

(i) $x^2-2kx+4k-3=0$이 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-2kx+4k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(4k-3)=0$, $k^2-4k+3=0$

$(k-1)(k-3)=0$ $\therefore k=1$ 또는 $k=3$

$k=1$이면 $x^2-2x+1=0$에서

$(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$

그런데 $1+1=2$이므로 세 변의 길이가 1, 1, 2인 삼각형은 존재하지 않는다.

$k=3$이면 $x^2-6x+9=0$에서

$(x-3)^2=0$ $\therefore x=3$

이때 $3<3+2$이므로 세 변의 길이가 3, 3, 2인 삼각형은 존재한다.

(ii) $x^2-2kx+4k-3=0$의 한 근이 2인 경우

$4-4k+4k-3\neq0$이므로 이를 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $k=3$

답 3

5 연립이차방정식

특강 확인 문제 p. 187

1

(1) $\begin{cases} x=-y+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+2y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면 $3(-y+2)+2y=2$

$-y+6=2$ $\therefore y=4$

$y=4$를 ㉠에 대입하면 $x=-2$

따라서 연립방정식의 해는

$x=-2, y=4$

(2) $\begin{cases} x+y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2y=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡$-$㉠을 하면 $y=4$

$y=4$를 ㉠에 대입하면

$x+4=3$ $\therefore x=-1$

따라서 연립방정식의 해는

$x=-1, y=4$

(3) $\begin{cases} 2x=3y-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x=-y+11 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$3y-1=-y+11$, $4y=12$ $\therefore y=3$

$y=3$을 ㉠에 대입하면

$2x=8$ $\therefore x=4$

따라서 연립방정식의 해는

$x=4, y=3$

(4) $\begin{cases} x+y=11 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-2y=-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times2+$㉡을 하면 $5x=20$ $\therefore x=4$

$x=4$를 ㉠에 대입하면

$4+y=11$ $\therefore y=7$

따라서 연립방정식의 해는

$x=4, y=7$

(5) $\begin{cases} x-3y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-2y=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times2-$㉡을 하면 $-4y=1$ $\therefore y=-\frac{1}{4}$

$y=-\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면

$x+\frac{3}{4}=2$ $\therefore x=\frac{5}{4}$

따라서 연립방정식의 해는

$x=\frac{5}{4}, y=-\frac{1}{4}$

(6) $\begin{cases} 3x+2y=23 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x-2y=17 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $8x=40$ $\quad\therefore x=5$

$x=5$를 ㉠에 대입하면

$15+2y=23, 2y=8$ $\quad\therefore y=4$

따라서 연립방정식의 해는

$x=5, y=4$

(7) $\begin{cases} 5x+2y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 7x+5y=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×5−㉡×2를 하면 $11x=-11$ $\quad\therefore x=-1$

$x=-1$을 ㉠에 대입하면

$-5+2y=-1, 2y=4$ $\quad\therefore y=2$

따라서 연립방정식의 해는

$x=-1, y=2$

(8) $\begin{cases} 5x-3y=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+2y=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×2+㉡×3을 하면 $19x=38$ $\quad\therefore x=2$

$x=2$를 ㉡에 대입하면 $6+2y=6$

$2y=0$ $\quad\therefore y=0$

따라서 연립방정식의 해는

$x=2, y=0$

답 (1) $x=-2, y=4$ (2) $x=-1, y=4$
(3) $x=4, y=3$ (4) $x=4, y=7$
(5) $x=\frac{5}{4}, y=-\frac{1}{4}$ (6) $x=5, y=4$
(7) $x=-1, y=2$ (8) $x=2, y=0$

2

(1) $\begin{cases} 3x-4(x+2y)=1 \\ 2(x-y)=11-5y \end{cases}$에서 $\begin{cases} -x-8y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+3y=11 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×2+㉡을 하면 $-13y=13$ $\quad\therefore y=-1$

$y=-1$을 ㉠에 대입하면 $-x+8=1$ $\quad\therefore x=7$

따라서 연립방정식의 해는

$x=7, y=-1$

(2) $\begin{cases} 2x-3(x-y)=9 \\ 4(x+3)=3y-6 \end{cases}$에서 $\begin{cases} -x+3y=9 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x-3y=-18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $3x=-9$ $\quad\therefore x=-3$

$x=-3$을 ㉠에 대입하면

$3+3y=9, 3y=6$ $\quad\therefore y=2$

따라서 연립방정식의 해는

$x=-3, y=2$

(3) $\begin{cases} 3(x-y)=-2y-5 \\ 2x-3y-6=0 \end{cases}$에서 $\begin{cases} 3x-y=-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-3y=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×3−㉡을 하면 $7x=-21$ $\quad\therefore x=-3$

$x=-3$을 ㉠에 대입하면

$-9-y=-5, -y=4$ $\quad\therefore y=-4$

따라서 연립방정식의 해는

$x=-3, y=-4$

(4) $\begin{cases} 0.2x-0.3y=-1 \\ 0.4x-5y=6.8 \end{cases}$에서 $\begin{cases} 2x-3y=-10 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-25y=34 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $22y=-44$ $\quad\therefore y=-2$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면

$2x+6=-10, 2x=-16$ $\quad\therefore x=-8$

따라서 연립방정식의 해는

$x=-8, y=-2$

(5) $\begin{cases} 0.3x-y=0.8 \\ 0.3x-1.5y=0.1 \end{cases}$에서 $\begin{cases} 3x-10y=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-15y=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $5y=7$ $\quad\therefore y=\frac{7}{5}$

$y=\frac{7}{5}$을 ㉠에 대입하면

$3x-14=8, 3x=22$ $\quad\therefore x=\frac{22}{3}$

따라서 연립방정식의 해는

$x=\frac{22}{3}, y=\frac{7}{5}$

(6) $\begin{cases} 0.4x+0.1y=0.2 \\ 0.5x+0.2y=0.7 \end{cases}$에서 $\begin{cases} 4x+y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+2y=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×2−㉡을 하면 $3x=-3$ $\quad\therefore x=-1$

$x=-1$을 ㉠에 대입하면 $-4+y=2$ $\quad\therefore y=6$

따라서 연립방정식의 해는

$x=-1, y=6$

(7) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{6}y=\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y=\frac{5}{6} \end{cases}$에서 $\begin{cases} 3x-y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x-3y=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×3−㉡을 하면 $5x=2$ $\quad\therefore x=\frac{2}{5}$

$x=\frac{2}{5}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{6}{5}-y=4$ $\quad\therefore y=-\frac{14}{5}$

따라서 연립방정식의 해는

$x=\frac{2}{5}, y=-\frac{14}{5}$

(8) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=3 \\ \frac{x}{2}-\frac{y}{8}=1 \end{cases}$에서 $\begin{cases} 2x+3y=18 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x-y=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$+$㉡$\times 3$을 하면 $14x=42$ $\quad\therefore x=3$

$x=3$을 ㉡에 대입하면 $12-y=8$ $\quad\therefore y=4$

따라서 연립방정식의 해는 $x=3,\ y=4$

답 (1) $x=7,\ y=-1$ (2) $x=-3,\ y=2$
(3) $x=-3,\ y=-4$ (4) $x=-8,\ y=-2$
(5) $x=\frac{22}{3},\ y=\frac{7}{5}$ (6) $x=-1,\ y=6$
(7) $x=\frac{2}{5},\ y=-\frac{14}{5}$ (8) $x=3,\ y=4$

확인 문제

p. 190 ~ 198

01

(1) $\begin{cases} x+y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+y^2=19 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $2x^2+(-x+2)^2=19$

$3x^2-4x-15=0,\ (3x+5)(x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=3$

(ⅰ) $x=-\frac{5}{3}$를 ㉢에 대입하면 $y=\frac{11}{3}$

(ⅱ) $x=3$을 ㉢에 대입하면 $y=-1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-\frac{5}{3} \\ y=\frac{11}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3xy+y^2=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-3$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+3x(x-3)+(x-3)^2=-1$

$5x^2-15x+10=0,\ x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=2$

(ⅰ) $x=1$을 ㉢에 대입하면 $y=-2$

(ⅱ) $x=2$를 ㉢에 대입하면 $y=-1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

답 (1) $\begin{cases} x=-\frac{5}{3} \\ y=\frac{11}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

02

(1) $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-3xy+4y^2=18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x+y)(x-y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=y$

(ⅰ) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$(-y)^2-3(-y)\times y+4y^2=18,\ 8y^2=18$

$y^2=\frac{9}{4}$ $\quad\therefore y=\pm\frac{3}{2}$

$x=-y$이므로 $x=\pm\frac{3}{2},\ y=\mp\frac{3}{2}$ (복부호동순)

(ⅱ) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2-3\times y\times y+4y^2=18,\ 2y^2=18$

$y^2=9$ $\quad\therefore y=\pm 3$

$x=y$이므로 $x=\pm 3,\ y=\pm 3$ (복부호동순)

(ⅰ), (ⅱ)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 5x^2-y^2=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-3xy+y^2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡의 좌변을 인수분해하면 $(x-y)(2x-y)=0$

$\therefore y=x$ 또는 $y=2x$

(ⅰ) $y=x$를 ㉠에 대입하면

$5x^2-x^2=4,\ 4x^2=4,\ x^2=1$ $\quad\therefore x=\pm 1$

$y=x$이므로 $x=\pm 1,\ y=\pm 1$ (복부호동순)

(ⅱ) $y=2x$를 ㉠에 대입하면

$5x^2-(2x)^2=4,\ x^2=4$ $\quad\therefore x=\pm 2$

$y=2x$이므로 $x=\pm 2,\ y=\pm 4$ (복부호동순)

(ⅰ), (ⅱ)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$

답 (1) $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$

03

(1) 주어진 연립방정식에서 $\begin{cases} x+y=4 \\ (x+y)^2-xy=13 \end{cases}$

$x+y=p,\ xy=q$라 하면 $\begin{cases} p=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ p^2-q=13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면 $16-q=13$ $\therefore q=3$

$p=4$, $q=3$, 즉 $x+y=4$, $xy=3$일 때, x, y는 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-3)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(2) 주어진 연립방정식에서 $\begin{cases} (x+y)^2-2xy=13 \\ xy=-6 \end{cases}$

$x+y=p$, $xy=q$라 하면 $\begin{cases} p^2-2q=13 & \cdots\cdots ㉠ \\ q=-6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면

$p^2+12=13$, $p^2=1$ $\therefore p=\pm1$

(i) $p=1$, $q=-6$, 즉 $x+y=1$, $xy=-6$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-t-6=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-3)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

(ii) $p=-1$, $q=-6$, 즉 $x+y=-1$, $xy=-6$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2+t-6=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-2)=0$에서 $t=-3$ 또는 $t=2$

$\therefore \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

답 (1) $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

04

$\begin{cases} x+2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=1-2y$

이 식을 ㉡에 대입하면

$(1-2y)^2+(1-2y)y+y^2=a$

$\therefore 3y^2-3y+1-a=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

이때 이차방정식 ㉢이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times3\times(1-a)\geq0$, $12a-3\geq0$

$\therefore a\geq\frac{1}{4}$

답 $a\geq\frac{1}{4}$

05

$\begin{cases} 2x-y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2y=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2x-5$

이 식을 ㉡에 대입하면

$x^2-2(2x-5)=k$

$\therefore x^2-4x+10-k=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

이때 이차방정식 ㉢을 만족시키는 x의 값이 오직 하나이어야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(10-k)=0$

$k-6=0$ $\therefore k=6$

$k=6$을 ㉢에 대입하면 $x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$ $\therefore x=2$

$x=2$를 $y=2x-5$에 대입하면 $y=-1$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=-1$, $k=6$이므로

$\alpha+\beta+k=2+(-1)+6=7$

답 7

06

두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$\begin{cases} \alpha^2-k\alpha-2k=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2-(k-1)\alpha+3k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $-\alpha-5k=0$ $\therefore \alpha=-5k$

$\alpha=-5k$를 ㉠에 대입하면

$(-5k)^2-k\times(-5k)-2k=0$

$30k^2-2k=0$, $2k(15k-1)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=\frac{1}{15}$

이때 $k=0$이면 $\alpha=0$이므로 0이 아닌 공통근을 갖는다는 조건에 맞지 않는다.

따라서 구하는 상수 k의 값은 $\frac{1}{15}$이다.

답 $\frac{1}{15}$

07

두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$\begin{cases} \alpha^2-(k+1)\alpha-4k=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+(2k-1)\alpha+2k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $-3k\alpha-6k=0$

$-3k(\alpha+2)=0$ $\therefore k=0$ 또는 $\alpha=-2$

(i) $k=0$일 때

두 이차방정식이 모두 $x^2-x=0$으로 일치하므로 오

직 하나의 공통근을 가질 수 없다.

(ii) $\alpha=-2$일 때

$\alpha=-2$를 ㉠에 대입하면 $4+2(k+1)-4k=0$

$2k=6 \qquad \therefore k=3$

이때 두 이차방정식 $x^2-4x-12=0$, $x^2+5x+6=0$은 공통근 -2를 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 두 이차방정식이 오직 하나의 공통근을 가지려면 $k=3$이어야 하고 그때의 공통근은 -2이다.

답 $k=3$, 공통근: -2

08

$xy+x+y=5$에서

$x(y+1)+(y+1)=6$

$\therefore (x+1)(y+1)=6$

이때 x, y가 자연수이므로 $x+1$, $y+1$의 값은 다음과 같다.

$x+1$	2	3
$y+1$	3	2

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

09

이차방정식 $x^2-2mx+2m-3=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2m$ ······ ㉠

$\alpha\beta=2m-3$ ······ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $\alpha+\beta-\alpha\beta=3$

$-\alpha(\beta-1)+(\beta-1)=2$

$\therefore (1-\alpha)(\beta-1)=2$

이때 α, β가 정수이므로 $1-\alpha$, $\beta-1$의 값은 다음과 같다.

$1-\alpha$	-2	-1	1	2
$\beta-1$	-1	-2	2	1

$\therefore \begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=2 \end{cases}$

즉 $\alpha+\beta=1$ 또는 $\alpha+\beta=3$이므로

㉠에서 $1=2m$ 또는 $3=2m$

$\therefore m=\frac{1}{2}$ 또는 $m=\frac{3}{2}$

따라서 모든 실수 m의 값의 합은

$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$

답 2

10

$4x^2+y^2-16x+6y+25=0$에서

$4(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=0$

$\therefore 4(x-2)^2+(y+3)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로 $x-2$, $y+3$도 실수이다.

따라서 $x-2=0$, $y+3=0$이므로

$x=2$, $y=-3$

답 $x=2$, $y=-3$

11

$5x^2-4xy+y^2+4x+4=0$에서

$(4x^2-4xy+y^2)+(x^2+4x+4)=0$

$\therefore (2x-y)^2+(x+2)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로 $2x-y$, $x+2$도 실수이다.

따라서 $2x-y=0$, $x+2=0$이므로

$x=-2$, $y=-4$

답 $x=-2$, $y=-4$

다른 풀이

주어진 방정식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$5x^2+4(1-y)x+y^2+4=0$ ······ ㉠

이때 x가 실수이므로 x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{2(1-y)\}^2-5(y^2+4)=-y^2-8y-16\geq 0$

즉 $(y+4)^2\leq 0$이고 $y+4$가 실수이므로

$y+4=0 \qquad \therefore y=-4$

$y=-4$를 ㉠에 대입하면 $5x^2+20x+20=0$

$x^2+4x+4=0$, $(x+2)^2=0 \qquad \therefore x=-2$

연습문제

p. 199~201

1

$\begin{cases} 2x-y=1 & \text{······ ㉠} \\ 4x^2-x-y^2=5 & \text{······ ㉡} \end{cases}$

㉠에서 $y=2x-1$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $4x^2-x-(2x-1)^2=5$

$3x-1=5$, $3x=6 \qquad \therefore x=2$

$x=2$를 ㉢에 대입하면 $y=3$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=3$이므로

$\alpha\beta=2\times3=6$

답 ①

2

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-4y^2=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $(2y+1)^2-4y^2=9$

$4y+1=9$, $4y=8$ $\therefore y=2$

$y=2$를 ㉢에 대입하면 $x=5$

따라서 $\alpha=5$, $\beta=2$이므로

$\alpha+\beta=5+2=7$ 답 ⑤

3

$\begin{cases} 2x^2-3xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+y^2=36 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면

$(2x+y)(x-2y)=0$

$\therefore x=-\dfrac{y}{2}$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-\dfrac{y}{2}$를 ㉡에 대입하면

$2\times\dfrac{y^2}{4}+y^2=36$, $\dfrac{3}{2}y^2=36$

$y^2=24$ $\therefore y=\pm2\sqrt{6}$

$x=-\dfrac{y}{2}$이므로 $x=\pm\sqrt{6}$, $y=\mp2\sqrt{6}$ (복부호동순)

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$2\times(2y)^2+y^2=36$, $9y^2=36$

$y^2=4$ $\therefore y=\pm2$

$x=2y$이므로 $x=\pm4$, $y=\pm2$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식을 만족시키는 양수 x, y는 $x=4$, $y=2$

$\therefore xy=4\times2=8$ 답 ②

4

Step by Step

일차방정식을 한 미지수에 대하여 정리한다.

↓

이차방정식에 대입한다.

↓

정리한 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D=0$임을 이용한다.

$\begin{cases} 2x+y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-ky=-6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-2x+1$

이 식을 ㉡에 대입하면

$x^2-k(-2x+1)=-6$

$\therefore x^2+2kx-k+6=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

이때 이차방정식 ㉢을 만족시키는 x의 값이 오직 하나이어야 하므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-(-k+6)=0$, $k^2+k-6=0$

$(k+3)(k-2)=0$ $\therefore k=-3$ 또는 $k=2$

따라서 양수 k의 값은 2이다. 답 ②

5

$xy-4x-3y+5=0$에서 $x(y-4)-3(y-4)=7$

$\therefore (x-3)(y-4)=7$

이때 x, y가 자연수이므로 $x-3$, $y-4$의 값은 다음과 같다.

$x-3$	1	7
$y-4$	7	1

$\therefore \begin{cases} x=4 \\ y=11 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=10 \\ y=5 \end{cases}$

따라서 xy의 최댓값은 50이다.

답 ③

6

$3x^2+y^2-2xy-8x+8=0$에서

$(x^2-2xy+y^2)+2(x^2-4x+4)=0$

$\therefore (x-y)^2+2(x-2)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로 $x-y$, $x-2$도 실수이다.

따라서 $x-y=0$, $x-2=0$이므로

$x=2$, $y=2$ 답 $x=2$, $y=2$

7

$\begin{cases} x^2+y^2-16=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y-4k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=-x+4k$

이 식을 ㉠에 대입하면 $x^2+(-x+4k)^2-16=0$

$\therefore x^2-4kx+8k^2-8=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

이때 이차방정식 ㉢을 만족시키는 실수 x의 값이 존재해야 하므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2k)^2-(8k^2-8)\ge0$

$-4k^2+8\ge0$ $\therefore k^2\le2$

따라서 정수 k는 -1, 0, 1이므로 그 개수는 3이다.

답 ③

8

$x+y=p$, $xy=q$라 하면 $\begin{cases} p+q=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2p-q=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $3p=12$ $\quad\therefore p=4$

$p=4$를 ㉠에 대입하면 $4+q=8$ $\quad\therefore q=4$

$p=4$, $q=4$, 즉 $x+y=4$, $xy=4$일 때, x, y는 이차방정식 $t^2-4t+4=0$의 두 근이므로

$(t-2)^2=0$에서 $t=2$ $\quad\therefore x=2, y=2$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=2$이므로

$\alpha^2+\beta^2=2^2+2^2=8$

답 ①

9

두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} 2x+2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해와 같다.

㉠에서 $y=-x+\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2-\left(-x+\frac{1}{2}\right)^2=-1$

$x^2-\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)=-1$, $x-\frac{1}{4}=-1$ $\quad\therefore x=-\frac{3}{4}$

$x=-\frac{3}{4}$을 ㉢에 대입하면 $y=\frac{5}{4}$

$x=-\frac{3}{4}$, $y=\frac{5}{4}$를 $3x+y=a$, $x-y=b$에 각각 대입하면

$a=3\times\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{5}{4}=-1$, $b=-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}=-2$

$\therefore ab=(-1)\times(-2)=2$

답 ②

10

주어진 연립방정식에서 $\begin{cases} (x+y)^2-2xy=34 \\ xy=15 \end{cases}$

$x+y=p$, $xy=q$라 하면 $\begin{cases} p^2-2q=34 & \cdots\cdots ㉠ \\ q=15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면

$p^2-30=34$, $p^2=64$ $\quad\therefore p=\pm8$ $\cdots\cdots$ ❶

(i) $p=8$, $q=15$, 즉 $x+y=8$, $xy=15$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-8t+15=0$의 두 근이므로

$(t-3)(t-5)=0$에서 $t=3$ 또는 $t=5$

$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$ $\cdots\cdots$ ❷

(ii) $p=-8$, $q=15$, 즉 $x+y=-8$, $xy=15$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2+8t+15=0$의 두 근이므로

$(t+5)(t+3)=0$에서 $t=-5$ 또는 $t=-3$

$\therefore \begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases}$ $\cdots\cdots$ ❸

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases}$

따라서 $2x+y$의 값은 -13, -11, 11, 13이므로 구하는 최댓값은 13이다. $\cdots\cdots$ ❹

답 13

채점 기준	비율
❶ $x+y=p$, $xy=q$로 놓고 p, q의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $p=8$, $q=15$인 경우 x, y의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $p=-8$, $q=15$인 경우 x, y의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $2x+y$의 최댓값을 구할 수 있다.	10%

11

두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$\begin{cases} \alpha^2-2a\alpha-4b=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+2b\alpha+4a=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡−㉠을 하면 $2(a+b)\alpha+4(a+b)=0$

$(a+b)\alpha+2(a+b)=0$, $(a+b)(\alpha+2)=0$

$\therefore a=-b$ 또는 $\alpha=-2$

(i) $a=-b$일 때

두 이차방정식이 모두 $x^2+2bx-4b=0$으로 일치하므로 오직 하나의 공통근을 가질 수 없다.

(ii) $\alpha=-2$일 때

$\alpha=-2$를 ㉠에 대입하면

$4+4a-4b=0$ $\quad\therefore a-b=-1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢의 $b=a+1$을 $x^2-2ax-4b=0$에 대입하면

$x^2-2ax-4(a+1)=0$, $x^2-4-2a(x+2)=0$

$(x+2)(x-2)-2a(x+2)=0$

$(x+2)(x-2-2a)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2+2a$

㉢의 $a=b-1$을 $x^2+2bx+4a=0$에 대입하면

$x^2+2bx+4(b-1)=0$

$x^2-4+2b(x+2)=0$

$(x+2)(x-2)+2b(x+2)=0$

$(x+2)(x-2+2b)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2-2b$

(i), (ii)에서 공통근이 아닌 두 근은 $2+2a$, $2-2b$이므로

$(2a+2)+(2-2b)=4+2(a-b)$

$=4+2\times(-1)$ ($\because$ ㉢)

$=2$

답 2

12

이차방정식 $x^2+(m+1)x+2m-1=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-m-1$ …… ㉠

$\alpha\beta=2m-1$ …… ㉡

㉠$\times 2+$㉡을 하면 $2(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-3$

$\alpha(\beta+2)+2(\beta+2)=1$

$\therefore (\alpha+2)(\beta+2)=1$

이때 α, β가 정수이므로 $\alpha+2$, $\beta+2$의 값은 다음과 같다.

$\alpha+2$	-1	1
$\beta+2$	-1	1

$\therefore \begin{cases}\alpha=-3\\ \beta=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=-1\end{cases}$

즉 $\alpha+\beta=-6$ 또는 $\alpha+\beta=-2$이므로

$-6=-m-1$ 또는 $-2=-m-1$ ($\because$ ㉠)

$\therefore m=5$ 또는 $m=1$

따라서 모든 정수 m의 값의 합은 $5+1=6$ 답 ①

13

직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면 대각선의 길이가 15 cm, 넓이가 108 cm^{2}이므로

$\begin{cases}x^2+y^2=225\\ xy=108\end{cases}$

$x+y=p$, $xy=q$라 하면 $\begin{cases}p^2-2q=225 & \cdots\cdots ㉠\\ q=108 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면 $p^2-216=225$

$p^2=441$ $\quad\therefore p=21$ ($\because p>0$)

$p=21$, $q=108$, 즉 $x+y=21$, $xy=108$일 때, x, y는 이차방정식 $t^2-21t+108=0$의 두 근이므로

$(t-9)(t-12)=0$에서 $t=9$ 또는 $t=12$

$\begin{cases}x=9\\ y=12\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=12\\ y=9\end{cases}$

이때 $x>y$이므로 구하는 세로의 길이는 9 cm이다.

답 9 cm

14

주어진 연립방정식에서 $\begin{cases}(x+y)^2-2xy+x+y=2\\ (x+y)^2-xy=1\end{cases}$

$x+y=p$, $xy=q$라 하면

$\begin{cases}p^2-2q+p=2 & \cdots\cdots ㉠\\ p^2-q=1 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면 $-q+p=1$

$\therefore q=p-1$ …… ㉢

이를 ㉡에 대입하면 $p^2-(p-1)=1$

$p^2-p=0$, $p(p-1)=0$ $\quad\therefore p=0$ 또는 $p=1$

이를 ㉢에 대입하면 $q=-1$ 또는 $q=0$

(ⅰ) $p=0$, $q=-1$, 즉 $x+y=0$, $xy=-1$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-1=0$의 두 근이므로

$(t+1)(t-1)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}$

(ⅱ) $p=1$, $q=0$, 즉 $x+y=1$, $xy=0$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-t=0$의 두 근이므로

$t(t-1)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$

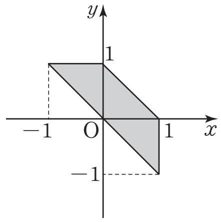
(ⅰ), (ⅱ)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$

이때 네 점 $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$을 꼭짓점으로 하는 사각형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 사각형의 넓이는

$3\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times 1\right)=\frac{3}{2}$



답 $\frac{3}{2}$

15

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 계수가 모두 실수이므로 한 근이 $2-i$이면 다른 한 근은 $2+i$이다.

나머지 한 실근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(2-i)+(2+i)=-a$ $\quad\therefore \alpha+4=-a$ …… ㉠

$\alpha(2-i)+(2-i)(2+i)+\alpha(2+i)=b$

$\therefore 5+4\alpha=b$ …… ㉡

$\alpha(2-i)(2+i)=-c$ $\quad\therefore 5\alpha=-c$ …… ㉢

이차방정식 $x^2+ax+8=0$과의 공통인 실근은 α이므로

$\alpha^2+a\alpha+8=0$ …… ㉣

㉠에서 $a=-\alpha-4$를 ㉣에 대입하면

$\alpha^2+(-\alpha-4)\alpha+8=0$, $-4\alpha+8=0$ $\quad\therefore \alpha=2$

$\alpha=2$를 ㉠, ㉡, ㉢에 각각 대입하면

$a=-6$, $b=13$, $c=-10$

$\therefore a+b-c=-6+13-(-10)=17$ 답 17

Level Up 연습문제 p. 202

1

$$\begin{cases} x^2+y^2-7x+y=-10 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2-x-2y=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠−㉡을 하면

$-6x+3y=-15 \qquad \therefore y=2x-5 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(2x-5)^2-7x+(2x-5)=-10$

$5x^2-25x+30=0,\ x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0 \qquad \therefore x=2$ 또는 $x=3$

(i) $x=2$를 ㉢에 대입하면 $y=-1$

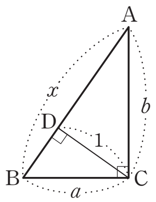
(ii) $x=3$을 ㉢에 대입하면 $y=1$

(i), (ii)에서 $\alpha=2,\ \beta=-1$ 또는 $\alpha=3,\ \beta=1$

따라서 $\alpha^2+\beta^2$의 값은 5, 10이므로 구하는 최댓값은 10이다.

답 10

2



오른쪽 그림과 같이

$\overline{AB}=x,\ \overline{BC}=a,\ \overline{AC}=b$라 하면

삼각형 ABC의 넓이에서

$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}x \qquad \therefore ab=x \qquad \cdots\cdots ㉠$

삼각형 ABC의 둘레의 길이가 5이므로

$a+b+x=5 \qquad \therefore a+b=5-x \qquad \cdots\cdots ㉡$

직각삼각형 ABC에서 $a^2+b^2=x^2$이므로

$x^2=(a+b)^2-2ab$

이 식에 ㉠, ㉡을 대입하면 $x^2=(5-x)^2-2x$

$12x=25 \qquad \therefore x=\frac{25}{12}$

답 ③

3

두 삼차방정식의 공통근을 α라 하면

$$\begin{cases} \alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+1=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^3+b\alpha^2+a\alpha+1=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠−㉡을 하면

$(a-b)\alpha^2-(a-b)\alpha=0,\ (a-b)\alpha(\alpha-1)=0$

$\therefore a=b$ 또는 $\alpha=0$ 또는 $\alpha=1$

(i) $a=b$일 때

두 삼차방정식이 모두 $x^3+ax^2+bx+1=0$으로 일치하므로 오직 하나의 공통근을 가질 수 없다.

(ii) $\alpha=0$일 때

㉠에 $\alpha=0$을 대입하면 등식이 성립하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\alpha=1$

$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면

$1+a+b+1=0 \qquad \therefore a+b=-2$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(-2)^2-2\times(-3)$

$=10$

답 ②

4

$$\begin{cases} x^2-xy=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ y^2-xy=-4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠×4+㉡×5를 하면 $4x^2-9xy+5y^2=0$

$(x-y)(4x-5y)=0 \qquad \therefore y=x$ 또는 $y=\frac{4}{5}x$

(i) $y=x$를 ㉠에 대입하면

$x^2-x\times x=5$, 즉 $0\times x^2=5$이므로 해는 존재하지 않는다.

(ii) $y=\frac{4}{5}x$를 ㉠에 대입하면

$x^2-x\times\frac{4}{5}x=5,\ \frac{1}{5}x^2=5,\ x^2=25$

$\therefore x=\pm5,\ y=\pm4$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 $\begin{cases} \alpha=5 \\ \beta=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=-5 \\ \beta=-4 \end{cases}$

$\therefore \alpha\beta=20$

답 20

6 연립일차부등식

특강 확인 문제

p. 205

1

(1) $3x-5\geq x+7$에서 $2x\geq 12$

양변을 2로 나누면 $x\geq 6$

(2) $3x-2>5x+8$에서 $-2x>10$

양변을 -2로 나누면 $x<-5$

(3) $2x-3\leq 4x+5$에서 $-2x\leq 8$

양변을 -2로 나누면 $x\geq -4$

(4) $1-4x<8+3x$에서 $-7x<7$

양변을 -7로 나누면 $x>-1$

답 (1) $x\geq 6$ (2) $x<-5$ (3) $x\geq -4$ (4) $x>-1$

2

(1) $-2x+6\leq -4x+11$에서 $2x\leq 5$

양변을 2로 나누면 $x\leq \frac{5}{2}$

따라서 자연수 x는 1, 2이므로 그 개수는 2이다.

(2) $5x-17<3x-3$에서 $2x<14$ $\therefore x<7$

따라서 정수 x의 최댓값은 6이다.

답 (1) 2 (2) 6

3

(1) $3(x-2)-4\leq -1$에서 $3x-10\leq -1$, $3x\leq 9$

양변을 3으로 나누면 $x\leq 3$

(2) $-(x-4)>3(x+2)+6$에서

$-x+4>3x+12$, $-4x>8$

양변을 -4로 나누면 $x<-2$

(3) $0.5x-0.8>0.3x$의 양변에 10을 곱하면

$5x-8>3x$, $2x>8$

양변을 2로 나누면 $x>4$

(4) $0.4x+1.5<0.7x+2.1$의 양변에 10을 곱하면

$4x+15<7x+21$, $-3x<6$

양변을 -3으로 나누면 $x>-2$

(5) $0.1(x-3)\leq 2+0.3x$의 양변에 10을 곱하면

$x-3\leq 20+3x$, $-2x\leq 23$

양변을 -2로 나누면 $x\geq -\frac{23}{2}$

(6) $\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\leq \frac{3}{4}x-\frac{1}{3}$의 양변에 분모의 최소공배수 12를 곱하면 $4x-6\leq 9x-4$, $-5x\leq 2$

양변을 -5로 나누면 $x\geq -\frac{2}{5}$

(7) $\frac{3}{5}x-0.2\geq \frac{1}{3}x+0.3$에서 $\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}\geq \frac{1}{3}x+\frac{3}{10}$

양변에 분모의 최소공배수 30을 곱하면

$18x-6\geq 10x+9$, $8x\geq 15$

양변을 8로 나누면 $x\geq \frac{15}{8}$

(8) $-\frac{2}{5}x+1.2\leq 0.5x-\frac{1}{2}$에서

$-\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}\leq \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

양변에 분모의 최소공배수 10을 곱하면

$-4x+12\leq 5x-5$, $-9x\leq -17$

양변을 -9로 나누면 $x\geq \frac{17}{9}$

답 (1) $x\leq 3$ (2) $x<-2$ (3) $x>4$ (4) $x>-2$ (5) $x\geq -\frac{23}{2}$ (6) $x\geq -\frac{2}{5}$ (7) $x\geq \frac{15}{8}$ (8) $x\geq \frac{17}{9}$

확인 문제

p. 207~220

01

$a>b>0$, $c>d>0$이므로

ㄱ. $a>b$의 양변을 양수 c로 나누면

$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ $\therefore$ 참

ㄴ. $c>d>0$이므로 $c>d$의 양변을 제곱하면

$c^2>d^2$ $\therefore$ 참

ㄷ. $a>b$의 양변에 양수 c를 곱하면

$ac>bc$ …… ㉠

$c>d$의 양변에 양수 b를 곱하면

$bc>bd$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $ac>bc>bd$이므로

$ac>bd$ $\therefore$ 거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

02

(1) $ax-2>bx-3$에서 $(a-b)x>-1$

(i) $a-b>0$, 즉 $a>b$일 때, $x>-\frac{1}{a-b}$

(ii) $a-b=0$, 즉 $a=b$일 때, $0\times x>-1$이므로 해는 모든 실수이다.

(iii) $a-b<0$, 즉 $a<b$일 때, $x<-\frac{1}{a-b}$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 부등식의 해는

$$\begin{cases} a>b\text{일 때, } x>-\dfrac{1}{a-b} \\ a=b\text{일 때, 모든 실수} \\ a<b\text{일 때, } x<-\dfrac{1}{a-b} \end{cases}$$

(2) $ax+1>x+a^2$에서 $ax-x>a^2-1$

$\therefore (a-1)x>(a+1)(a-1)$

(ⅰ) $a-1>0$, 즉 $a>1$일 때, $x>a+1$

(ⅱ) $a-1=0$, 즉 $a=1$일 때, $0\times x>0$이므로 해는 없다.

(ⅲ) $a-1<0$, 즉 $a<1$일 때, $x<a+1$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 부등식의 해는

$$\begin{cases} a>1\text{일 때, } x>a+1 \\ a=1\text{일 때, 해는 없다.} \\ a<1\text{일 때, } x<a+1 \end{cases}$$

답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

03

$(a-b)x-a-2b<0$에서 $(a-b)x<a+2b$ ······ ㉠

$a+b=0$에서 $b=-a$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $2ax<-a$

이때 $a<0$이므로 $x>-\frac{1}{2}$

답 $x>-\frac{1}{2}$

04

$ax+1>3x+2a$에서 $(a-3)x>2a-1$ ······ ㉠

주어진 부등식의 해가 $x<1$이므로 $a-3<0$

㉠의 양변을 $a-3$으로 나누면 $x<\frac{2a-1}{a-3}$

즉 $\frac{2a-1}{a-3}=1$이므로 $2a-1=a-3$

$\therefore a=-2$

답 -2

05

$(a-2b)x+3a+4b<0$에서

$(a-2b)x<-3a-4b$ ······ ㉠

주어진 부등식의 해가 $x<-1$이므로

$a-2b>0$ ······ ㉡

㉠의 양변을 $a-2b$로 나누면 $x<\frac{-3a-4b}{a-2b}$

즉 $\frac{-3a-4b}{a-2b}=-1$이므로 $-3a-4b=-a+2b$

$-2a=6b$ $\quad\therefore a=-3b$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $-3b-2b>0$

$-5b>0$ $\quad\therefore b<0$

㉢을 부등식 $(a+2b)x+b-2a>0$에 대입하면

$(-3b+2b)x+b+6b>0$, $-bx>-7b$

$\therefore x>7\,(\because b<0)$

답 $x>7$

06

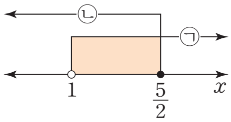
(1) $-x+1<2x-2$에서 $-3x<-3$

$\therefore x>1$ ······ ㉠

$9-5x\ge -x-1$에서 $-4x\ge -10$

$\therefore x\le \frac{5}{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는



$1<x\le \frac{5}{2}$

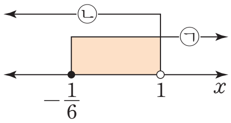
(2) $5-2(3x+1)\le 4$에서 $-6x+3\le 4$

$-6x\le 1$ $\quad\therefore x\ge -\frac{1}{6}$ ······ ㉠

$x+3<4(2-x)$에서 $x+3<8-4x$

$5x<5$ $\quad\therefore x<1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는



$-\frac{1}{6}\le x<1$

답 (1) $1<x\le \frac{5}{2}$ (2) $-\frac{1}{6}\le x<1$

07

$1.5x-2\ge 2(0.3x-0.1)$의 양변에 10을 곱하면

$15x-20\ge 2(3x-1)$, $15x-20\ge 6x-2$

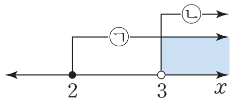
$9x\ge 18$ $\quad\therefore x\ge 2$ ······ ㉠

$3-\frac{x-3}{4}<\frac{x+3}{2}$의 양변에 4를 곱하면

$12-(x-3)<2(x+3)$, $-x+15<2x+6$

$-3x<-9$ $\quad\therefore x>3$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 $x>3$



답 $x>3$

08

(1) $\begin{cases} 1-\dfrac{x}{4}\le \dfrac{3}{4}x-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{3}{4}x-1<\dfrac{x+1}{2} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

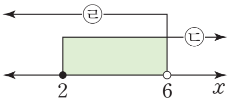
㉠의 양변에 4를 곱하면 $4-x\le 3x-4$

$-4x\le -8 \quad \therefore x\ge 2$ …… ㉢

㉡의 양변에 4를 곱하면 $3x-4<2(x+1)$

$3x-4<2x+2 \quad \therefore x<6$ …… ㉣

㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$2\le x<6$

(2) $\begin{cases} 0.1x-2<-x+\dfrac{1}{5} & \cdots\cdots ㉠ \\ -x+\dfrac{1}{5}\le 0.8x-1.6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\dfrac{1}{10}x-2<-x+\dfrac{1}{5}$

양변에 10을 곱하면 $x-20<-10x+2$

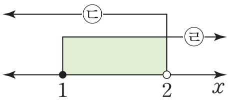
$11x<22 \quad \therefore x<2$ …… ㉢

㉡에서 $-x+\dfrac{1}{5}\le \dfrac{4}{5}x-\dfrac{8}{5}$

양변에 5를 곱하면 $-5x+1\le 4x-8$

$-9x\le -9 \quad \therefore x\ge 1$ …… ㉣

㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$1\le x<2$

답 (1) $2\le x<6$ (2) $1\le x<2$

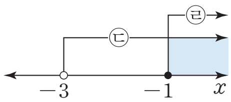
09

$\begin{cases} 5x-6<7x & \cdots\cdots ㉠ \\ 7x\le 10x+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-2x<6 \quad \therefore x>-3$ …… ㉢

㉡에서 $-3x\le 3 \quad \therefore x\ge -1$ …… ㉣

㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$x\ge -1$

따라서 정수 x의 최솟값은 -1이다.

답 -1

10

(1) $3(x-1)+5\le -(x-2)$에서 $3x+2\le -x+2$

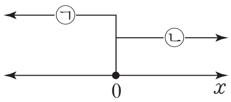
$4x\le 0 \quad \therefore x\le 0$ …… ㉠

$-\dfrac{x-2}{2}\le x+1$의 양변에 2를 곱하면

$-(x-2)\le 2(x+1)$, $-x+2\le 2x+2$

$-3x\le 0 \quad \therefore x\ge 0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는



$x=0$

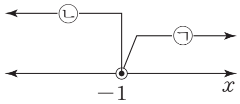
(2) $2(2x+3)>1-x$에서 $4x+6>1-x$

$5x>-5 \quad \therefore x>-1$ …… ㉠

$\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}\le \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{6}$의 양변에 6을 곱하면

$4x+2\le 3x+1 \quad \therefore x\le -1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 없다.



답 (1) $x=0$ (2) 해는 없다.

11

$2x+a<x-1$에서 $x<-a-1$

$1-\dfrac{x-1}{4}<x+5$의 양변에 4를 곱하면

$4-(x-1)<4x+20$, $-x+5<4x+20$

$-5x<15 \quad \therefore x>-3$

주어진 연립부등식의 해가 $b<x<1$이므로

$-a-1=1$, $b=-3 \quad \therefore a=-2$, $b=-3$

$\therefore ab=-2\times(-3)=6$

답 6

12

$\begin{cases} 3x-2<5x-8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x-8\le 4x+a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-2x<-6 \quad \therefore x>3$

㉡에서 $x\le a+8$

주어진 부등식의 해가 $b<x\le 9$이므로

$a+8=9$, $b=3 \quad \therefore a=1$, $b=3$

$\therefore a+b=1+3=4$

답 4

13

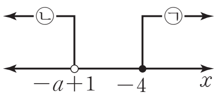
$\dfrac{5x+6}{2}\ge 2x+1$의 양변에 2를 곱하면

$5x+6\ge 4x+2 \quad \therefore x\ge -4$ …… ㉠

$2x-a>3x-1$에서 $-x>a-1$

$\therefore x<-a+1$ …… ㉡

연립부등식의 해가 없어야 하므로 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $-a+1\le -4$이므로

$-a\le -5$ $\quad\therefore a\ge 5$

따라서 실수 a의 최솟값은 5이다. 답 5

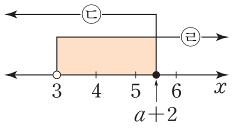
14

$\begin{cases} 4x-a\le 3x+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+2<5x-4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\le a+2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $-2x<-6$ $\quad\therefore x>3$ $\cdots\cdots$ ㉣

부등식을 만족시키는 정수 x가 2개가 되도록 ㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉 $5\le a+2<6$이므로 $3\le a<4$ 답 $3\le a<4$

15

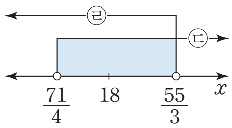
주어진 조건으로 연립부등식을 세우면

$\begin{cases} 4x-6>65 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-5<50 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $4x>71$ $\quad\therefore x>\frac{71}{4}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $3x<55$ $\quad\therefore x<\frac{55}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는



$\frac{71}{4}<x<\frac{55}{3}$

따라서 정수 x의 값은 18이다. 답 18

16

학생을 x명이라 하면 사탕은 $(4x+13)$개이다. 사탕을 6개씩 나누어 주면 마지막 한 명은 1개 이상 5개 이하의 사탕을 받게 되므로

$6(x-1)+1\le 4x+13\le 6(x-1)+5$

$6x-5\le 4x+13\le 6x-1$

위의 부등식에서 $\begin{cases} 6x-5\le 4x+13 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+13\le 6x-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2x\le 18$ $\quad\therefore x\le 9$

㉡에서 $-2x\le -14$ $\quad\therefore x\ge 7$

$\therefore 7\le x\le 9$

따라서 학생은 최소 7명, 최대 9명이므로

$a=7,\ b=9$

$\therefore a+b=7+9=16$ 답 16

17

9 %의 설탕물 400 g에 x g의 물을 더 넣는다고 하면 설탕물의 양은 $(400+x)$ g이 되므로

$\frac{5}{100}\times(400+x)\le\frac{9}{100}\times 400\le\frac{8}{100}\times(400+x)$

$5(400+x)\le 3600\le 8(400+x)$

$2000+5x\le 3600\le 3200+8x$

위의 부등식에서 $\begin{cases} 2000+5x\le 3600 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3600\le 3200+8x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $5x\le 1600$ $\quad\therefore x\le 320$

㉡에서 $-8x\le -400$ $\quad\therefore x\ge 50$

$\therefore 50\le x\le 320$

따라서 더 넣어야 할 물의 양은 50 g 이상 320 g 이하이므로 $a=50,\ b=320$

$\therefore b-a=320-50=270$

답 270

18

(1) $|3x-4|<5$에서 $-5<3x-4<5$

$-1<3x<9$ $\quad\therefore -\frac{1}{3}<x<3$

(2) $1<\left|1-\frac{2}{3}x\right|<3$에서

$-3<1-\frac{2}{3}x<-1$ 또는 $1<1-\frac{2}{3}x<3$

$-3<1-\frac{2}{3}x<-1$에서

$-4<-\frac{2}{3}x<-2$ $\quad\therefore 3<x<6$

$1<1-\frac{2}{3}x<3$에서

$0<-\frac{2}{3}x<2$ $\quad\therefore -3<x<0$

$\therefore -3<x<0$ 또는 $3<x<6$

답 (1) $-\frac{1}{3}<x<3$ (2) $-3<x<0$ 또는 $3<x<6$

19

$|2x-a|\le 5$에서 $-5\le 2x-a\le 5$

$a-5\le 2x\le a+5$ $\quad\therefore \frac{a-5}{2}\le x\le\frac{a+5}{2}$

주어진 부등식의 해가 $b\le x\le 2$이므로

$\frac{a-5}{2}=b,\ \frac{a+5}{2}=2$ $\quad\therefore a=-1,\ b=-3$

$\therefore a+b=-1+(-3)=-4$

답 -4

20

절댓값 기호 안의 식의 값이 0인 x의 값은 $x=\frac{5}{2}$이므로 x의 값의 범위를 $x<\frac{5}{2}$, $x\ge\frac{5}{2}$일 때로 나누어 푼다.

(i) $x<\frac{5}{2}$일 때

$x-(2x-5)\le4$에서 $-x+5\le4$

$-x\le-1$ $\quad\therefore x\ge1$

그런데 $x<\frac{5}{2}$이므로 $1\le x<\frac{5}{2}$ ······ ㉠

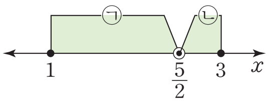
(ii) $x\ge\frac{5}{2}$일 때

$x+(2x-5)\le4$에서 $3x-5\le4$

$3x\le9$ $\quad\therefore x\le3$

그런데 $x\ge\frac{5}{2}$이므로 $\frac{5}{2}\le x\le3$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 부등식의 해는



$1\le x\le3$

따라서 정수 x의 값은 1, 2, 3이므로 그 합은

$1+2+3=6$

답 6

21

(1) 두 절댓값 기호 안의 식의 값이 0인 x의 값은 각각 $x=1$, $x=2$이므로 x의 값의 범위를 $x<1$, $1\le x<2$, $x\ge2$일 때로 나누어 푼다.

(i) $x<1$일 때

$-(x-1)-(x-2)<3$에서 $-2x+3<3$

$-2x<0$ $\quad\therefore x>0$

그런데 $x<1$이므로 $0<x<1$ ······ ㉠

(ii) $1\le x<2$일 때

$(x-1)-(x-2)<3$에서 $0\times x<2$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $1\le x<2$이므로 $1\le x<2$ ······ ㉡

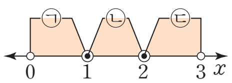
(iii) $x\ge2$일 때

$(x-1)+(x-2)<3$에서 $2x-3<3$

$2x<6$ $\quad\therefore x<3$

그런데 $x\ge2$이므로 $2\le x<3$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 부등식의 해는



$0<x<3$

(2) 두 절댓값 기호 안의 식의 값이 0인 x의 값은 각각 $x=0$, $x=3$이므로 x의 값의 범위를 $x<0$, $0\le x<3$, $x\ge3$일 때로 나누어 푼다.

(i) $x<0$일 때

$-x-\left(\frac{x}{3}-1\right)<3$에서 $-\frac{4}{3}x+1<3$

$-\frac{4}{3}x<2$ $\quad\therefore x>-\frac{3}{2}$

그런데 $x<0$이므로 $-\frac{3}{2}<x<0$ ······ ㉠

(ii) $0\le x<3$일 때

$x-\left(\frac{x}{3}-1\right)<3$에서 $\frac{2}{3}x+1<3$

$\frac{2}{3}x<2$ $\quad\therefore x<3$

그런데 $0\le x<3$이므로 $0\le x<3$ ······ ㉡

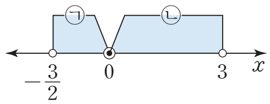
(iii) $x\ge3$일 때

$x+\left(\frac{x}{3}-1\right)<3$에서 $\frac{4}{3}x-1<3$

$\frac{4}{3}x<4$ $\quad\therefore x<3$

그런데 $x\ge3$이므로 해는 없다.

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 부등식의 해는



$-\frac{3}{2}<x<3$

답 (1) $0<x<3$ (2) $-\frac{3}{2}<x<3$

연습문제

p. 221 ~ 223

1

ㄱ. $a>b$, $b>c$에서 $a>c$

$a>c$, $c>d$에서 $a>d$ $\quad\therefore$ 참

ㄴ. $a>b>0$이므로 $ab>0$

$b<a$의 양변을 양수 ab로 나누면 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ $\quad\therefore$ 참

ㄷ. $a>b>0$에서 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ ······ ㉠

$c>d>0$에서 $\frac{1}{c}<\frac{1}{d}$ ······ ㉡

㉠의 양변에 양수 $\frac{1}{c}$을 곱하면 $\frac{1}{ac}<\frac{1}{bc}$

㉡의 양변에 양수 $\frac{1}{b}$을 곱하면 $\frac{1}{bc}<\frac{1}{bd}$

$\therefore \frac{1}{ac}<\frac{1}{bd}$ $\quad\therefore$ 참

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

2

$ax-1>-2x+3a$에서 $(a+2)x>3a+1$ …… ㉠

주어진 부등식의 해가 $x>-2$이므로 $a+2>0$

㉠의 양변을 $a+2$로 나누면 $x>\frac{3a+1}{a+2}$

즉 $\frac{3a+1}{a+2}=-2$이므로 $3a+1=-2(a+2)$

$3a+1=-2a-4$, $5a=-5$

$\therefore a=-1$

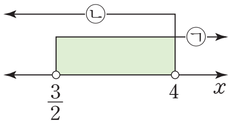
답 -1

3

$x+3<3x$에서 $-2x<-3$ $\quad\therefore x>\frac{3}{2}$ …… ㉠

$3x+4<2x+8$에서 $x<4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립 부등식의 해는 $\frac{3}{2}<x<4$



따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=4$이므로 $ab=\frac{3}{2}\times4=6$

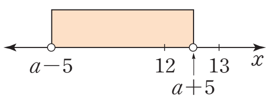
답 ①

4

$|x-a|<5$에서 $-5<x-a<5$

$\therefore a-5<x<a+5$

정수 x의 최댓값이 12이므로 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $12<a+5\le13$이므로 $7<a\le8$

따라서 정수 a의 값은 8이다.

답 8

5

두 절댓값 기호 안의 식의 값이 0인 x의 값은 각각 $x=1$, $x=3$이므로 x의 값의 범위를 $x<1$, $1\le x<3$, $x\ge3$일 때로 나누어 푼다.

(i) $x<1$일 때

$-(x-1)-(x-3)<4$에서 $-2x+4<4$

$-2x<0$ $\quad\therefore x>0$

그런데 $x<1$이므로 $0<x<1$ …… ㉠

(ii) $1\le x<3$일 때

$(x-1)-(x-3)<4$에서 $0\times x<2$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $1\le x<3$이므로 $1\le x<3$ …… ㉡

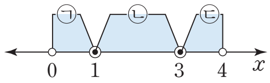
(iii) $x\ge3$일 때

$(x-1)+(x-3)<4$에서 $2x-4<4$

$2x<8$ $\quad\therefore x<4$

그런데 $x\ge3$이므로 $3\le x<4$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 부등식의 해는



$0<x<4$

따라서 정수 x의 값은 1, 2, 3이므로 그 개수는 3이다.

답 3

6

절댓값 기호 안의 식의 값이 0인 x의 값은 $x=-\frac{1}{3}$이므로 x의 값의 범위를 $x<-\frac{1}{3}$, $x\ge-\frac{1}{3}$일 때로 나누어 푼다.

(i) $x<-\frac{1}{3}$일 때

$x>-(3x+1)-7$에서 $x>-3x-8$

$4x>-8$ $\quad\therefore x>-2$

그런데 $x<-\frac{1}{3}$이므로 $-2<x<-\frac{1}{3}$ …… ㉠

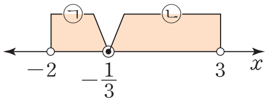
(ii) $x\ge-\frac{1}{3}$일 때

$x>(3x+1)-7$에서 $x>3x-6$

$-2x>-6$ $\quad\therefore x<3$

그런데 $x\ge-\frac{1}{3}$이므로 $-\frac{1}{3}\le x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 부등식의 해는



$-2<x<3$

따라서 정수 x의 값은 -1, 0, 1, 2이므로 그 합은

$-1+0+1+2=2$

답 ⑤

7

방을 x개라 하면 학생은 $(6x+11)$명이다.

한 방에 7명씩 자면 마지막 한 방에서는 2명 이상 5명 이하의 학생이 자게 되므로

$7(x-1)+2\le6x+11\le7(x-1)+5$

위의 부등식에서

$\begin{cases} 7(x-1)+2 \le 6x+11 & \cdots\cdots ㉠ \\ 6x+11 \le 7(x-1)+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

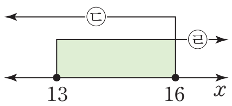
㉠에서 $7x-5 \le 6x+11$

$\therefore x \le 16$ ······ ㉢

㉡에서 $6x+11 \le 7x-2$

$-x \le -13 \qquad \therefore x \ge 13$ ······ ㉣

㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 $13 \le x \le 16$



따라서 학교에 배정된 방의 최대 개수는 16이다.

답 ③

8

Step by Step

이차방정식의 해를 구한다.
↓
연립부등식의 해를 구한다.
↓
두 해를 비교하여 상수 a, b의 값을 구한다.

$(x-1)^2=8(x-3)$에서 $x^2-2x+1=8x-24$

$x^2-10x+25=0$, $(x-5)^2=0 \qquad \therefore x=5$ ······ ❶

$\begin{cases} \dfrac{a-2x}{5} \ge \dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{3} & \cdots\cdots ㉠ \\ 7x \ge 2(3x+b)+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $3(a-2x) \ge 5x+5$

$3a-6x \ge 5x+5$, $-11x \ge 5-3a \qquad \therefore x \le \dfrac{3a-5}{11}$

㉡에서 $7x \ge 6x+2b+3 \qquad \therefore x \ge 2b+3$ ······ ❷

주어진 연립부등식의 해가 $x=5$이므로

$\dfrac{3a-5}{11}=5$, $2b+3=5 \qquad \therefore a=20$, $b=1$ ······ ❸

$\therefore a-b=20-1=19$ ······ ❹

답 19

채점 기준	비율
❶ 이차방정식의 해를 구할 수 있다.	20%
❷ 연립부등식을 이루는 각각의 부등식의 해를 구할 수 있다.	40%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10%

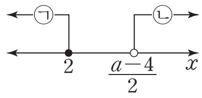
9

$1-3x \ge -5$에서 $-3x \ge -6 \qquad \therefore x \le 2$ ······ ㉠

$4x-a > 2(x-2)$에서 $4x-a > 2x-4$

$2x > a-4 \qquad \therefore x > \dfrac{a-4}{2}$ ······ ㉡

연립부등식이 해를 갖지 않아야 하므로 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $\dfrac{a-4}{2} \ge 2$이므로 $a-4 \ge 4 \qquad \therefore a \ge 8$

답 $a \ge 8$

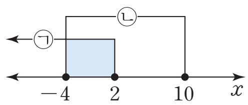
10

$2x+5 \le 9$에서 $2x \le 4 \qquad \therefore x \le 2$ ······ ㉠

$|x-3| \le 7$에서 $-7 \le x-3 \le 7$

$\therefore -4 \le x \le 10$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는



$-4 \le x \le 2$

따라서 정수 x의 값은 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2이므로 그 개수는 7이다.

답 7

11

$ax+2b < -4bx+3a-12$에서

$(a+4b)x < 3a-2b-12$ ······ ㉠

$a+b=0$에서 $b=-a$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $(a-4a)x < 3a+2a-12$

$\therefore -3ax < 5a-12$ ······ ㉢

주어진 부등식의 해가 $x < -3$이므로

$-3a > 0 \qquad \therefore a < 0$

㉢의 양변을 $-3a$로 나누면 $x < \dfrac{5a-12}{-3a}$

즉 $\dfrac{5a-12}{-3a}=-3$이므로 $5a-12=9a$

$-4a=12 \qquad \therefore a=-3$

이때 ㉡에서 $b=-a$이므로 $b=3$

$\therefore ab=-3 \times 3=-9$

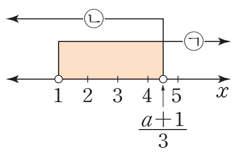
답 -9

12

$x+2 > 3$에서 $x > 1$ ······ ㉠

$3x < a+1$에서 $x < \dfrac{a+1}{3}$ ······ ㉡

연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 9가 되어야 하므로 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $4<\dfrac{a+1}{3}\le 5$이므로 $12<a+1\le 15$

$\therefore\ 11<a\le 14$

따라서 자연수 a의 최댓값은 14이다.

답 14

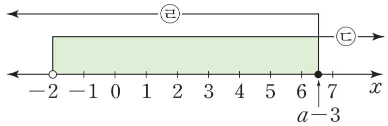
13

$\begin{cases} 3x-1<5x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+3\le 4x+a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-2x<4$　　$\therefore\ x>-2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $x\le a-3$ $\cdots\cdots$ ㉣

부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 8이 되어야 하므로 ㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같아야 한다.



즉 $6\le a-3<7$이므로 $9\le a<10$

따라서 자연수 a의 값은 9이다.

답 9

14

8 %의 소금물을 x g이라 하면 14 %의 소금물은 $(300-x)$ g이므로

$$\frac{10}{100}\times 300\le\frac{8}{100}\times x+\frac{14}{100}\times(300-x)\le\frac{12}{100}\times 300$$

$3000\le 8x+4200-14x\le 3600$

$3000\le -6x+4200\le 3600$

$-1200\le -6x\le -600$

$\therefore\ 100\le x\le 200$

따라서 8 %의 소금물을 100 g 이상 200 g 이하로 넣어야 한다.

답 100 g 이상 200 g 이하

15

두 절댓값 기호 안의 식의 값이 0인 x의 값은 각각 $x=-1$, $x=5$이므로 x의 값의 범위를 $x<-1$, $-1\le x<5$, $x\ge 5$일 때로 나누어 푼다.

(i) $x<-1$일 때

$-2(x+1)-(5-x)\le a$에서

$-2x-2-5+x\le a$, $-x\le a+7$　　$\therefore\ x\ge -a-7$

이때 $a>12$에서 $-a<-12$이므로 $-a-7<-19$

그런데 $x<-1$이므로 $-a-7\le x<-1$ $\cdots\cdots$ ㉠

(ii) $-1\le x<5$일 때

$2(x+1)-(5-x)\le a$에서

$2x+2-5+x\le a$, $3x\le a+3$　　$\therefore\ x\le\dfrac{a+3}{3}$

이때 $a>12$에서 $a+3>15$이므로 $\dfrac{a+3}{3}>5$

그런데 $-1\le x<5$이므로 $-1\le x<5$ $\cdots\cdots$ ㉡

(iii) $x\ge 5$일 때

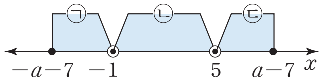
$2(x+1)+(5-x)\le a$에서

$2x+2+5-x\le a$　　$\therefore\ x\le a-7$

이때 $a>12$에서 $a-7>5$

그런데 $x\ge 5$이므로 $5\le x\le a-7$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같으므로 부등식의 해는 $-a-7\le x\le a-7$



따라서 정수 x의 개수가 33이 되려면

$a-7-(-a-7)+1=33$

$2a+1=33$　　$\therefore\ a=16$

답 16

Level Up 연습문제 p. 224

1

$\begin{cases} ax+4\le 2x+2a & \cdots\cdots ㉠ \\ bx-1<3ax+a+3b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(a-2)x\le 2(a-2)$

(i) $a-2>0$, 즉 $a>2$일 때, $x\le 2$

이때 연립부등식의 해가 $x<6$이 될 수 없다.

(ii) $a-2=0$, 즉 $a=2$일 때, $0\times x\le 0$이므로 해는 모든 실수이다.

이때 연립부등식의 해가 $x<6$이 될 수 있다.

(iii) $a-2<0$, 즉 $a<2$일 때, $x\ge 2$

이때 연립부등식의 해가 $x<6$이 될 수 없다.

(i)～(iii)에서 $a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면 $bx-1<6x+2+3b$

$\therefore\ (b-6)x<3b+3$ $\cdots\cdots$ ㉢

주어진 연립부등식의 해가 $x<6$이므로 $b-6>0$

㉢의 양변을 $b-6$으로 나누면 $x<\frac{3b+3}{b-6}$

즉 $\frac{3b+3}{b-6}=6$이므로 $3b+3=6(b-6)$

$3b+3=6b-36,\ -3b=-39 \qquad \therefore b=13$

$\therefore ab=2\times13=26$

답 26

2

$\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$이므로 주어진 부등식은

$||x+2|+|x-3||\le5$

$\therefore 0\le|x+2|+|x-3|\le5$

두 절댓값 기호 안의 식의 값이 0인 x의 값은 각각 $x=-2$, $x=3$이므로 x의 값의 범위를 $x<-2$, $-2\le x<3$, $x\ge3$일 때로 나누어 푼다.

(i) $x<-2$일 때

$0\le-(x+2)-(x-3)\le5$에서 $0\le-2x+1\le5$

$-1\le-2x\le4 \qquad \therefore -2\le x\le\frac{1}{2}$

그런데 $x<-2$이므로 해는 없다.

(ii) $-2\le x<3$일 때

$0\le(x+2)-(x-3)\le5$에서 $0\le0\times x+5\le5$

이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $-2\le x<3$이므로 $-2\le x<3$

(iii) $x\ge3$일 때

$0\le(x+2)+(x-3)\le5$에서 $0\le2x-1\le5$

$1\le2x\le6 \qquad \therefore \frac{1}{2}\le x\le3$

그런데 $x\ge3$이므로 $x=3$

(i)~(iii)에서 부등식의 해는 $-2\le x\le3$이므로

$a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-2\times3=-6$

답 -6

3

$f(n, n+6)$의 값은 부등식 $|x|+|x-n|<n+6$을 만족시키는 정수 x의 개수와 같다.

두 절댓값 기호 안의 식의 값이 0인 x의 값은 각각 $x=0$, $x=n$이므로 x의 값의 범위를 $x<0$, $0\le x<n$, $x\ge n$일 때로 나누어 푼다.

(i) $x<0$일 때

$-x-(x-n)<n+6$에서 $-2x+n<n+6$

$-2x<6 \qquad \therefore x>-3$

그런데 $x<0$이므로 $-3<x<0$

(ii) $0\le x<n$일 때

$x-(x-n)<n+6$에서 $0\times x<6$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $0\le x<n$이므로 $0\le x<n$

(iii) $x\ge n$일 때

$x+(x-n)<n+6$에서 $2x-n<n+6$

$2x<2n+6 \qquad \therefore x<n+3$

그런데 $x\ge n$이므로 $n\le x<n+3$

(i)~(iii)에서 부등식의 해는 $-3<x<n+3$이므로

정수 x의 개수 $f(n, n+6)$은

$f(n, n+6)=(n+3)-(-3)-1=n+5$

즉 $n+5=15$이므로 $n=10$

답 10

4

$\overline{\mathrm{AP}}=|x-3|$, $\overline{\mathrm{BP}}=|x-7|$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}\le8$에서 $|x-3|+|x-7|\le8$

두 절댓값 기호 안의 식의 값이 0인 x의 값은 각각 $x=3$, $x=7$이므로 x의 값의 범위를 $x<3$, $3\le x<7$, $x\ge7$일 때로 나누어 푼다.

(i) $x<3$일 때

$-(x-3)-(x-7)\le8$에서 $-2x+10\le8$

$-2x\le-2 \qquad \therefore x\ge1$

그런데 $x<3$이므로 $1\le x<3$

(ii) $3\le x<7$일 때

$(x-3)-(x-7)\le8$에서 $0\times x\le4$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $3\le x<7$이므로 $3\le x<7$

(iii) $x\ge7$일 때

$(x-3)+(x-7)\le8$에서 $2x-10\le8$

$2x\le18 \qquad \therefore x\le9$

그런데 $x\ge7$이므로 $7\le x\le9$

(i)~(iii)에서 부등식의 해는 $1\le x\le9$

이때 $\overline{\mathrm{OP}}=|x|$이므로 $1\le\overline{\mathrm{OP}}\le9$

따라서 선분 OP의 길이의 최댓값과 최솟값의 합은

$9+1=10$

답 ④

7 이차부등식

확인 문제 p. 227~248

01

부등식 $f(x)<g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $4<x<15$

따라서 $a=4$, $b=15$이므로

$a+b=4+15=19$ 답 19

02

$ax^2+(b-m)x+c-n\le0$에서

$ax^2+bx-mx+c-n\le0$

$\therefore ax^2+bx+c\le mx+n$

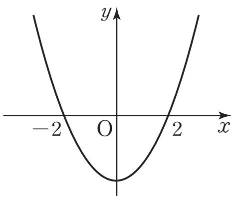
따라서 주어진 이차부등식의 해는

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x\le-1$ 또는 $x\ge3$ 답 $x\le-1$ 또는 $x\ge3$

03

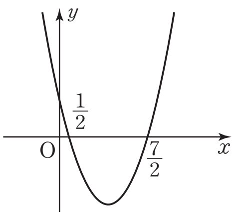
(1) $y=(x+2)(x-2)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



부등식 $(x+2)(x-2)>0$의 해는 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x<-2$ 또는 $x>2$

(2) $y=(2x-1)(2x-7)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



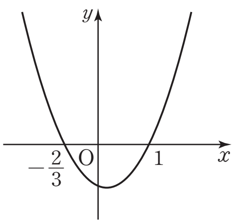
부등식 $(2x-1)(2x-7)\le0$의 해는 그래프가 x축보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로

$\frac{1}{2}\le x\le\frac{7}{2}$

(3) $y=3x^2-x-2$

$=(3x+2)(x-1)$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



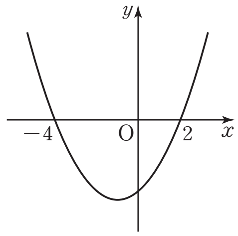
부등식 $3x^2-x-2>0$의 해는 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x<-\frac{2}{3}$ 또는 $x>1$

(4) $y=x^2+2x-8$

$=(x+4)(x-2)$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



부등식 $x^2+2x-8\le0$의 해는 그래프가 x축보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로 $-4\le x\le2$

답 (1) $x<-2$ 또는 $x>2$ (2) $\frac{1}{2}\le x\le\frac{7}{2}$
(3) $x<-\frac{2}{3}$ 또는 $x>1$ (4) $-4\le x\le2$

04

(1) $x^2+4x>6(1+x)$에서 $x^2+4x>6+6x$

$x^2-2x-6>0$, $\{x-(1-\sqrt{7})\}\{x-(1+\sqrt{7})\}>0$

$\therefore x<1-\sqrt{7}$ 또는 $x>1+\sqrt{7}$

(2) $16x+x^2>-64$에서 $x^2+16x+64>0$

$\therefore (x+8)^2>0$

따라서 주어진 이차부등식의 해는 $x\ne-8$인 모든 실수이다.

(3) $x^2+3\ge2\sqrt{2}x$에서 $x^2-2\sqrt{2}x+3\ge0$

$\therefore (x-\sqrt{2})^2+1\ge0$

따라서 주어진 이차부등식의 해는 모든 실수이다.

답 (1) $x<1-\sqrt{7}$ 또는 $x>1+\sqrt{7}$
(2) $x\ne-8$인 모든 실수
(3) 모든 실수

05

(1) (i) $x<0$일 때, $x^2+4x-5<0$

$(x+5)(x-1)<0$ $\quad\therefore -5<x<1$

그런데 $x<0$이므로 $-5<x<0$

(ii) $x\ge0$일 때, $x^2-4x-5<0$

$(x+1)(x-5)<0$ $\quad\therefore -1<x<5$

그런데 $x\ge0$이므로 $0\le x<5$

(i), (ii)에서 부등식의 해는 $-5<x<5$

(2) (i) $x<\frac{1}{2}$일 때, $x^2-x-5\ge-(2x-1)$

$x^2+x-6\ge0$, $(x+3)(x-2)\ge0$

$\therefore x\le-3$ 또는 $x\ge2$

그런데 $x<\frac{1}{2}$이므로 $x\le-3$

(ii) $x \geq \frac{1}{2}$일 때, $x^2-x-5 \geq 2x-1$

$x^2-3x-4 \geq 0$, $(x+1)(x-4) \geq 0$

$\therefore x \leq -1$ 또는 $x \geq 4$

그런데 $x \geq \frac{1}{2}$이므로 $x \geq 4$

(i), (ii)에서 부등식의 해는 $x \leq -3$ 또는 $x \geq 4$

답 (1) $-5 < x < 5$ (2) $x \leq -3$ 또는 $x \geq 4$

다른 풀이

(1) $x^2 = |x|^2$이므로 $|x|^2-4|x|-5<0$에서

$(|x|+1)(|x|-5)<0$

그런데 $|x|+1>0$이므로 $|x|-5<0$

$|x|<5$ $\therefore -5<x<5$

06

자동차의 정지거리가 80 m 이하이어야 하므로

$\frac{1}{100}x^2+\frac{1}{5}x \leq 80$, $x^2+20x-8000 \leq 0$

$(x+100)(x-80) \leq 0$

$\therefore -100 \leq x \leq 80$

그런데 $x>0$이므로 $0<x \leq 80$

따라서 자동차가 달릴 수 있는 최대 속력은 시속 80 km 이다.

답 시속 80 km

07

라면 한 그릇의 가격을 $100x$원 내린다고 하면

할인된 라면 한 그릇의 가격은 $(2000-100x)$원

하루 판매량은 $(200+20x)$그릇

이때 하루의 라면 판매액의 합계가 442000원 이상이 되려면

$(2000-100x)(200+20x) \geq 442000$

$400000+20000x-2000x^2 \geq 442000$

$2000x^2-20000x+42000 \leq 0$

$x^2-10x+21 \leq 0$

$(x-3)(x-7) \leq 0$

$\therefore 3 \leq x \leq 7$

따라서 라면 한 그릇의 가격의 최댓값은

$2000-100 \times 3 = 1700$(원)

답 1700원

08

해가 $x \leq -\frac{1}{4}$ 또는 $x \geq 5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x+\frac{1}{4}\right)(x-5) \geq 0$ $\therefore x^2-\frac{19}{4}x-\frac{5}{4} \geq 0$ …… ㉠

㉠과 주어진 이차부등식 $ax^2-19x+b \geq 0$의 부등호의 방향이 같으므로 $a>0$

㉠의 양변에 a를 곱하면 $ax^2-\frac{19}{4}ax-\frac{5}{4}a \geq 0$

이 부등식이 $ax^2-19x+b \geq 0$과 일치하므로

$-19=-\frac{19}{4}a$, $b=-\frac{5}{4}a$ $\therefore a=4$, $b=-5$

답 $a=4$, $b=-5$

09

해가 $-\frac{1}{4}<x<1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x+\frac{1}{4}\right)(x-1)<0$ $\therefore x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}<0$ …… ㉠

㉠과 주어진 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 부등호의 방향이 다르므로 $a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면 $ax^2-\frac{3}{4}ax-\frac{1}{4}a>0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c>0$과 일치하므로

$b=-\frac{3}{4}a$, $c=-\frac{1}{4}a$

이를 $cx^2-bx+a>0$에 대입하면

$-\frac{1}{4}ax^2+\frac{3}{4}ax+a>0$

양변을 $-a$로 나누면

$\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x-1>0$ ($\because -a>0$)

$x^2-3x-4>0$, $(x+1)(x-4)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>4$

답 $x<-1$ 또는 $x>4$

10

이차부등식 $ax^2+4x+a-3 \leq 0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면

$a<0$ …… ㉠

또 이차방정식 $ax^2+4x+a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-a(a-3) \leq 0$, $a^2-3a-4 \geq 0$

$(a+1)(a-4) \geq 0$ $\therefore a \leq -1$ 또는 $a \geq 4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a \leq -1$

답 $a \leq -1$

11

$(k-1)x^2+2kx>2x-5$에서

$(k-1)x^2+2(k-1)x+5>0$ …… ㉠

(i) $k-1=0$, 즉 $k=1$일 때

$0\times x^2+2\times 0\times x+5>0$에서 $5>0$이므로 ㉠은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $k-1\neq 0$, 즉 $k\neq 1$일 때

부등식 ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$k-1>0$ $\quad\therefore k>1$ …… ㉡

또 이차방정식 $(k-1)x^2+2(k-1)x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-5(k-1)<0$, $k^2-7k+6<0$

$(k-1)(k-6)<0$ $\quad\therefore 1<k<6$ …… ㉢

㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면 $1<k<6$

(i), (ii)에서 실수 k의 값의 범위는 $1\le k<6$

답 $1\le k<6$

12

이차부등식 $kx^2+(k+2)x+k\ge 0$이 단 한 개의 실근을 가지려면

$k<0$ …… ㉠

또 이차방정식 $kx^2+(k+2)x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+2)^2-4k^2=0$, $-3k^2+4k+4=0$

$3k^2-4k-4=0$, $(3k+2)(k-2)=0$

$\therefore k=-\frac{2}{3}$ ($\because$ ㉠)

답 $-\frac{2}{3}$

13

이차부등식 $x^2-kx+k+3\le 0$의 해가 존재하지 않으므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2-kx+k+3>0$이 성립한다.

이때 이차방정식 $x^2-kx+k+3=0$의 판별식을 D라 하면

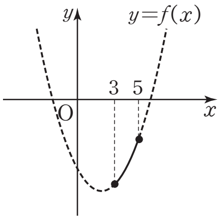
$D=k^2-4(k+3)<0$, $k^2-4k-12<0$

$(k+2)(k-6)<0$ $\quad\therefore -2<k<6$

답 $-2<k<6$

14

$f(x)=x^2-4x-4k+3$이라 하면 $3\le x\le 5$에서 $f(x)\le 0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f(3)\le 0$에서

$9-12-4k+3\le 0$

$-4k\le 0$ $\quad\therefore k\ge 0$ …… ㉠

(ii) $f(5)\le 0$에서 $25-20-4k+3\le 0$

$8-4k\le 0$, $-4k\le -8$

$\therefore k\ge 2$ …… ㉡

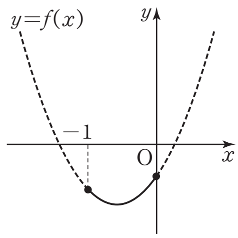
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $k\ge 2$

따라서 실수 k의 최솟값은 2이다.

답 2

15

$f(x)=2x^2-4ax+a^2-7$이라 하면 $-1\le x\le 0$에서 $f(x)<0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f(-1)<0$에서

$2+4a+a^2-7<0$

$a^2+4a-5<0$, $(a+5)(a-1)<0$

$\therefore -5<a<1$ …… ㉠

(ii) $f(0)<0$에서 $a^2-7<0$

$(a+\sqrt{7})(a-\sqrt{7})<0$

$\therefore -\sqrt{7}<a<\sqrt{7}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-\sqrt{7}<a<1$

답 $-\sqrt{7}<a<1$

16

$f(x)<0$의 해가 $-5<x<3$이므로

$f(x)=a(x+5)(x-3)$ $(a>0)$이라 하면

$f(2x-3)=a(2x-3+5)(2x-3-3)$

$\qquad\qquad=4a(x+1)(x-3)$

부등식 $f(2x-3)<0$, 즉 $4a(x+1)(x-3)<0$에서

$(x+1)(x-3)<0$ ($\because a>0$)

$\therefore -1<x<3$

답 $-1<x<3$

17

$f(x)\ge 0$의 해가 $2\le x\le 5$이므로

$f(x)=a(x-2)(x-5)$ $(a<0)$이라 하면

$f\left(\frac{3-x}{2}\right)=a\left(\frac{3-x}{2}-2\right)\left(\frac{3-x}{2}-5\right)$

$\qquad=a\left(\frac{-x-1}{2}\right)\left(\frac{-x-7}{2}\right)$

$\qquad=\frac{a}{4}(x+1)(x+7)$

부등식 $f\left(\frac{3-x}{2}\right)\le 0$, 즉 $\frac{a}{4}(x+1)(x+7)\le 0$에서

$(x+1)(x+7) \geq 0$ ($\because a<0$)

$\therefore x \leq -7$ 또는 $x \geq -1$

답 $x \leq -7$ 또는 $x \geq -1$

18

(1) $x^2-2 \leq 2x^2-3x$에서 $x^2-3x+2 \geq 0$

$(x-1)(x-2) \geq 0$

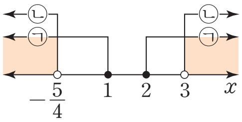
$\therefore x \leq 1$ 또는 $x \geq 2$ …… ㉠

$4x^2>7x+15$에서 $4x^2-7x-15>0$

$(4x+5)(x-3)>0$

$\therefore x<-\frac{5}{4}$ 또는 $x>3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는



$x<-\frac{5}{4}$ 또는 $x>3$

(2) $\begin{cases} -5<x^2+2x-8 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2x-8 \leq 7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2+2x-3>0$

$(x+3)(x-1)>0$

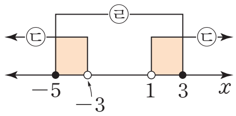
$\therefore x<-3$ 또는 $x>1$ …… ㉢

㉡에서 $x^2+2x-15 \leq 0$

$(x+5)(x-3) \leq 0$

$\therefore -5 \leq x \leq 3$ …… ㉣

㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는



$-5 \leq x<-3$ 또는 $1<x \leq 3$

답 (1) $x<-\frac{5}{4}$ 또는 $x>3$

(2) $-5 \leq x<-3$ 또는 $1<x \leq 3$

19

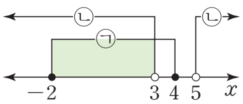
$|x-1| \leq 3$에서 $-3 \leq x-1 \leq 3$

$\therefore -2 \leq x \leq 4$ …… ㉠

$x^2-8x+15>0$에서 $(x-3)(x-5)>0$

$\therefore x<3$ 또는 $x>5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는



$-2 \leq x<3$

따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2이므로 그 개수는 5이다.

답 5

20

$\begin{cases} x^2+3x-10>0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-(a+3)x+3a<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+5)(x-2)>0$ $\therefore x<-5$ 또는 $x>2$

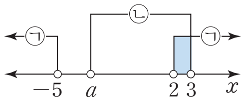
㉡에서 $(x-a)(x-3)<0$

(i) $a>3$일 때, $3<x<a$

(ii) $a=3$일 때, 해는 없다.

(iii) $a<3$일 때, $a<x<3$

연립부등식의 해가 $2<x<3$이어야 하므로 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 부등식 ㉡의 해는 $a<x<3$이고 실수 a의 값의 범위는 $-5 \leq a \leq 2$

답 $-5 \leq a \leq 2$

21

연립부등식 $\begin{cases} x^2+ax+5 \geq 0 \\ x^2-x+b<0 \end{cases}$의 해가

$-5<x \leq 1$ 또는 $5 \leq x<6$이므로

$x^2+ax+5 \geq 0$의 해는 $x \leq 1$ 또는 $x \geq 5$ …… ㉠

$x^2-x+b<0$의 해는 $-5<x<6$ …… ㉡

㉠에서 $(x-1)(x-5) \geq 0$, 즉 $x^2-6x+5 \geq 0$이므로

$a=-6$

㉡에서 $(x+5)(x-6)<0$, 즉 $x^2-x-30<0$이므로

$b=-30$

$\therefore a-b=-6-(-30)=24$

답 24

22

$x^2-3x-4<0$에서

$(x+1)(x-4)<0$

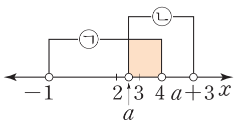
$\therefore -1<x<4$ …… ㉠

$x^2-(2a+3)x+a(a+3)<0$에서

$(x-a)(x-a-3)<0$

$\therefore a<x<a+3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 값이 3뿐이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$2 \leq a<3$

따라서 실수 a의 최솟값은 2이다.

답 2

23

$x^2-x-2\le0$에서 $(x+1)(x-2)\le0$

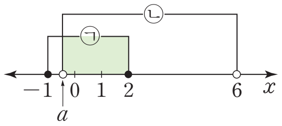
$\therefore\ -1\le x\le2$ …… ㉠

$x^2-(a+6)x+6a<0$에서

$(x-a)(x-6)<0$

(i) $a<6$일 때, $a<x<6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 개수가 3이 되려면 다음 그림과 같아야 하므로 $-1\le a<0$

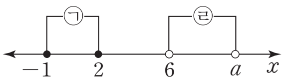


(ii) $a=6$일 때, 해는 없다. …… ㉢

㉠, ㉢을 동시에 만족시키는 정수 x는 없으므로 조건에 맞지 않는다.

(iii) $a>6$일 때, $6<x<a$ …… ㉣

다음 그림과 같이 ㉠, ㉣을 동시에 만족시키는 정수 x는 없으므로 조건에 맞지 않는다.



(i)~(iii)에서 실수 a의 값의 범위는

$-1\le a<0$

답 $-1\le a<0$

24

이차방정식 $x^2-kx+1=0$이 허근을 가지므로 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-k)^2-4<0,\ (k+2)(k-2)<0$

$\therefore\ -2<k<2$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+2(k-1)x+2k+6=0$이 허근을 가지므로 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(k-1)^2-(2k+6)<0,\ k^2-4k-5<0$

$(k+1)(k-5)<0\quad \therefore\ -1<k<5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-1<k<2$

답 $-1<k<2$

25

이차방정식 $x^2+(a+2)x-a+1=0$이 허근을 가지므로 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(a+2)^2-4(-a+1)<0,\ a^2+8a<0$

$a(a+8)<0\quad \therefore\ -8<a<0$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+2ax+2a+3=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=a^2-(2a+3)>0,\ a^2-2a-3>0$

$(a+1)(a-3)>0\quad \therefore\ a<-1$ 또는 $a>3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-8<a<-1$

답 $-8<a<-1$

26

이차방정식 $x^2-2ax+a+6=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) 실근을 가지므로 $\frac{D}{4}=(-a)^2-(a+6)\ge0$

$a^2-a-6\ge0,\ (a+2)(a-3)\ge0$

$\therefore\ a\le-2$ 또는 $a\ge3$ …… ㉠

(ii) 두 근이 모두 양수가 되려면

$\alpha+\beta=2a>0$에서 $a>0$

$\alpha\beta=a+6>0$에서 $a>-6$

$\therefore\ a>0$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a\ge3$

답 $a\ge3$

27

이차방정식 $x^2-2(k-3)x+k^2=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) 실근을 가지므로 $\frac{D}{4}=\{-(k-3)\}^2-k^2\ge0$

$-6k+9\ge0\quad \therefore\ k\le\frac{3}{2}$ …… ㉠

(ii) 두 근이 모두 음수가 되려면

$\alpha+\beta=2(k-3)<0$에서 $k<3$

$\alpha\beta=k^2>0$에서 $k\ne0$

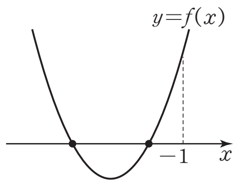
$\therefore\ k<0$ 또는 $0<k<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $k<0$ 또는 $0<k\le\frac{3}{2}$

답 $k<0$ 또는 $0<k\le\frac{3}{2}$

28

$f(x)=x^2-2kx+5-4k$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -1보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $x^2-2kx+5-4k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(5-4k)\geq 0$

$k^2+4k-5\geq 0$, $(k+5)(k-1)\geq 0$

$\therefore k\leq -5$ 또는 $k\geq 1$ ...... ㉠

(ii) $f(-1)>0$에서 $1+2k+5-4k>0$

$6-2k>0$ $\quad \therefore k<3$ ...... ㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로 $k<-1$ ...... ㉢

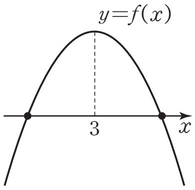
㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면

$k\leq -5$

답 $k\leq -5$

29

$f(x)=-x^2+(k-1)x+k^2+2$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 3이 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $f(3)>0$이므로 $-9+3(k-1)+k^2+2>0$

$k^2+3k-10>0$, $(k+5)(k-2)>0$

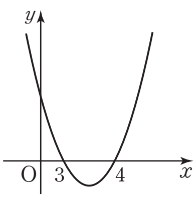
$\therefore k<-5$ 또는 $k>2$

답 $k<-5$ 또는 $k>2$

연습문제 p. 249 ~ 253

1

$y=x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



부등식 $x^2-7x+12\geq 0$의 해는 그래프가 x축보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x\leq 3$ 또는 $x\geq 4$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=4$이므로

$\beta-\alpha=4-3=1$

답 ①

2

$f(x)=ax(x-2)$ $(a<0)$이므로

$f(x+1)=a(x+1)(x-1)$

$f(x)\leq f(x+1)$에서 $ax(x-2)\leq a(x+1)(x-1)$

$x(x-2)\geq (x+1)(x-1)$ ($\because a<0$)

$x^2-2x\geq x^2-1$, $-2x\geq -1$ $\quad \therefore x\leq \frac{1}{2}$

답 ④

3

해가 $-3\leq x\leq 0$이고 x^2의 계수가 a $(a>0)$인 이차부등식은 $ax(x+3)\leq 0$

$\therefore f(x)=ax(x+3)$ $(a>0)$

이때 $f(1)=8$이므로

$4a=8$ $\quad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=2x(x+3)$이므로

$f(4)=2\times 4\times 7=56$

답 56

4

(i) $x<\frac{1}{2}$일 때, $x^2-(2x-1)\leq 2$

$x^2-2x-1\leq 0$, $(x-1)^2\leq 2$

$\therefore 1-\sqrt{2}\leq x\leq 1+\sqrt{2}$

그런데 $x<\frac{1}{2}$이므로 $1-\sqrt{2}\leq x<\frac{1}{2}$

(ii) $x\geq \frac{1}{2}$일 때, $x^2+(2x-1)\leq 2$

$x^2+2x-3\leq 0$, $(x+3)(x-1)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 1$

그런데 $x\geq \frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$

(i), (ii)에서 부등식의 해는 $1-\sqrt{2}\leq x\leq 1$

따라서 $\alpha=1-\sqrt{2}$, $\beta=1$이므로

$(\beta-\alpha)^2=\{1-(1-\sqrt{2})\}^2=2$

답 ②

5

해가 $b\leq x\leq 6$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-b)(x-6)\leq 0$ $\quad \therefore x^2-(b+6)x+6b\leq 0$

이 부등식이 $x^2-8x+a\leq 0$과 일치하므로

$b+6=8$, $6b=a$

따라서 $a=12$, $b=2$이므로

$a+b=12+2=14$

답 14

6

$2x-1\geq 7$에서 $2x\geq 8$ $\quad \therefore x\geq 4$ ...... ㉠

$(x-3)(x-7)\leq 0$에서 $3\leq x\leq 7$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $4\leq x\leq 7$

따라서 실수 x의 최솟값은 4, 최댓값은 7이므로

$m=4$, $M=7$ $\quad \therefore Mm=7\times 4=28$

답 28

7

$\begin{cases} 0 \le -x^2+5x & \cdots\cdots ㉠ \\ -x^2+5x < -x+9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

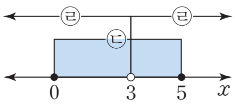
㉠에서 $x^2-5x \le 0$

$x(x-5) \le 0 \qquad \therefore 0 \le x \le 5$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $x^2-6x+9>0$

$(x-3)^2>0 \qquad \therefore x \ne 3$인 모든 실수 $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 부등식의 해는



$0 \le x < 3$ 또는 $3 < x \le 5$

따라서 정수 x의 값은 0, 1, 2, 4, 5이므로 그 합은

$0+1+2+4+5=12$ 답 ④

8

해가 $x=2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-2)^2 \le 0 \qquad \therefore x^2-4x+4 \le 0$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠과 주어진 이차부등식의 부등호의 방향이 다르므로

$a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면 $ax^2-4ax+4a \ge 0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c \ge 0$과 일치하므로

$b=-4a, c=4a$

이를 $4ax^2+3bx+2c \ge 0$에 대입하면

$4ax^2-12ax+8a \ge 0$

양변을 $4a$로 나누면 $x^2-3x+2 \le 0$ ($\because a<0$)

$(x-1)(x-2) \le 0 \qquad \therefore 1 \le x \le 2$

따라서 정수 x는 1, 2이므로 그 개수는 2이다.

답 ②

9

이차부등식 $x^2+8x+a-6<0$이 해를 갖지 않으므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2+8x+a-6 \ge 0$이 성립한다.

이때 이차방정식 $x^2+8x+a-6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-(a-6) \le 0,\ 22-a \le 0$

$\therefore a \ge 22$

따라서 실수 a의 최솟값은 22이다. 답 22

10

해가 $x<-2$ 또는 $x>3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-3)>0 \qquad \therefore x^2-x-6>0$

이 부등식이 $x^2+ax+b>0$과 일치하므로

$a=-1, b=-6$

즉 이차부등식 $x^2-3x-7<0$의 해가 $\alpha<x<\beta$이므로

이차방정식 $x^2-3x-7=0$의 두 근은 α, β이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3, \alpha\beta=-7$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\times(-7)=23$

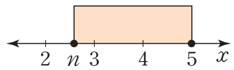
답 23

11

$x^2-(n+5)x+5n \le 0$에서 $(x-5)(x-n) \le 0$

(i) $n<5$일 때, $n \le x \le 5$

정수 x의 개수가 3이 되려면 정수 x가 3, 4, 5이어야 하므로 $2<n \le 3$

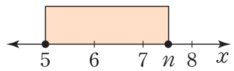


(ii) $n=5$일 때, $x=5$

이때 정수 x는 5뿐이므로 주어진 조건에 맞지 않는다.

(iii) $n>5$일 때, $5 \le x \le n$

정수 x의 개수가 3이 되려면 정수 x가 5, 6, 7이어야 하므로 $7 \le n < 8$



(i)~(iii)에서 자연수 n의 값은 3, 7이므로 그 합은

$3+7=10$ 답 ③

12

공의 높이가 30 m 이상이므로 $25t-5t^2 \ge 30$

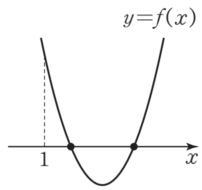
$5t^2-25t+30 \le 0,\ t^2-5t+6 \le 0$

$(t-2)(t-3) \le 0 \qquad \therefore 2 \le t \le 3$

따라서 공의 높이가 30 m 이상인 시간은 2초부터 3초까지이므로 $3-2=1$(초) 동안이다. 답 1

13

$f(x)=x^2-2(a+1)x+3$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $x^2-2(a+1)x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-3 \ge 0,\ (a+1)^2 \ge 3$

$\therefore a \le -1-\sqrt{3}$ 또는 $a \ge -1+\sqrt{3}$ $\cdots\cdots$ ㉠

(ii) $f(1)>0$에서 $1-2(a+1)+3>0$

$-2a+2>0 \qquad \therefore a<1$ $\cdots\cdots$ ㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이

$x=a+1$이므로 $a+1>1$　　$\therefore a>0$　　⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면 $-1+\sqrt{3} \le a < 1$

따라서 $\alpha=-1+\sqrt{3}$, $\beta=1$이므로

$(\alpha+\beta)^2=\{(-1+\sqrt{3})+1\}^2=3$　　답 3

14

(나)에서 $f(x)=a(x-2)^2\ (a>0)$

이때 (가)에서 $f(0)=8$이므로

$4a=8$　　$\therefore a=2$

따라서 $f(x)=2(x-2)^2$이므로

$f(5)=2\times3^2=18$　　답 ④

15

$(k-1)x^2+2(k-1)x<3$에서

$(k-1)x^2+2(k-1)x-3<0$　　⋯⋯ ㉠

(i) $k-1=0$, 즉 $k=1$일 때

$0\times x^2+2\times0\times x-3<0$에서 $-3<0$이므로 ㉠은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $k-1\neq0$, 즉 $k\neq1$일 때

부등식 ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$k-1<0$　　$\therefore k<1$　　⋯⋯ ㉡

또 이차방정식 $(k-1)x^2+2(k-1)x-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2+3(k-1)<0$, $k^2+k-2<0$

$(k+2)(k-1)<0$　　$\therefore -2<k<1$　　⋯⋯ ㉢

㉡, ㉢에서 공통 범위를 구하면 $-2<k<1$

(i), (ii)에서 실수 k의 값의 범위는 $-2<k\le1$

답 ③

16

Step by Step

그래프를 그린다.

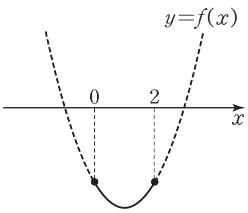
↓

양 끝의 함숫값을 구한다.

↓

a의 값의 범위를 구한다.

$f(x)=2x^2+ax-a^2$이라 하면 $0\le x\le2$에서 $f(x)<0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $f(0)<0$에서

$-a^2<0$　　$\therefore a^2>0$

즉 실수 a는 $a\neq0$인 모든 실수　　⋯⋯ ㉠

(ii) $f(2)<0$에서 $8+2a-a^2<0$

$a^2-2a-8>0$, $(a+2)(a-4)>0$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>4$　　⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a<-2$ 또는 $a>4$

답 $a<-2$ 또는 $a>4$

17

세 수 $2x-1$, $2x$, $2x+1$이 둔각삼각형의 세 변의 길이이므로

$(2x+1)^2>(2x-1)^2+(2x)^2$

$4x^2+4x+1>4x^2-4x+1+4x^2$

$4x^2-8x<0$, $4x(x-2)<0$

$\therefore 0<x<2$　　⋯⋯ ㉠

이때 $2x-1>0$이므로 $x>\dfrac{1}{2}$　　⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\dfrac{1}{2}<x<2$

해가 $\dfrac{1}{2}<x<2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x-2)<0$

$\therefore x^2-\dfrac{5}{2}x+1<0$　　⋯⋯ ㉢

㉢과 주어진 이차부등식의 부등호의 방향이 다르므로

$p<0$

㉢의 양변에 p를 곱하면 $px^2-\dfrac{5}{2}px+p>0$

이 부등식이 $px^2+qx-14>0$과 일치하므로

$q=-\dfrac{5}{2}p$, $-14=p$

따라서 $p=-14$, $q=35$이므로

$p+q=-14+35=21$

답 21

18

$f\left(\dfrac{x-1}{3}\right)\ge0$의 해가 $-2\le x\le4$이므로

$f\left(\dfrac{x-1}{3}\right)=a(x+2)(x-4)\ (a<0)$　　⋯⋯ ❶

x 대신 $3x+1$을 대입하면

$f(x)=a(3x+3)(3x-3)=9a(x+1)(x-1)$　⋯⋯ ❷

부등식 $f(2x+1)<0$, 즉 $36ax(x+1)<0$에서

$x(x+1)>0\ (\because a<0)$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>0$　　⋯⋯ ❸

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=0$이므로

$\alpha+\beta=-1$ …… ❹

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f\left(\frac{x-1}{3}\right)$을 이차식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $f(x)$를 이차식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ 부등식 $f(2x+1)<0$의 해를 구할 수 있다.	30%
❹ $\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	10%

19

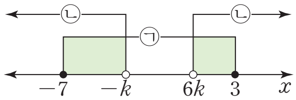
$x^2+4x-21\le0$에서 $(x+7)(x-3)\le0$

$\therefore -7\le x\le3$ …… ㉠

$x^2-5kx-6k^2>0$에서 $(x+k)(x-6k)>0$

$\therefore x<-k$ 또는 $x>6k$ ($\because k>0$) …… ㉡

연립부등식의 해가 존재해야 하므로 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같아야 한다.



즉 $-k>-7$ 또는 $6k<3$이므로

$k<7$ 또는 $k<\frac{1}{2}$

따라서 양의 정수 k는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 그 개수는 6이다.

답 ③

20

$\begin{cases} x^2-ax+4a\le4x & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x<x^2+2x-3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $x^2-2x-3>0$, $(x+1)(x-3)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>3$

㉠에서 $x^2-(a+4)x+4a\le0$

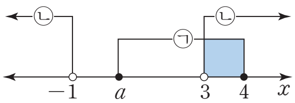
$\therefore (x-a)(x-4)\le0$

(i) $a<4$일 때, $a\le x\le4$

(ii) $a=4$일 때, $x=4$

(iii) $a>4$일 때, $4\le x\le a$

부등식의 해가 $3<x\le4$이어야 하므로 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같아야 한다.



즉 부등식 ㉠의 해는 $a\le x\le4$이고 실수 a의 값의 범위는

$-1\le a\le3$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2, 3이므로 그 개수는 5이다.

답 5

21

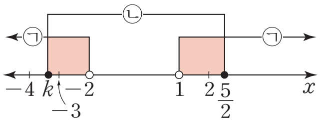
$x^2+x-2>0$에서 $(x+2)(x-1)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>1$ …… ㉠

$(2x-5)(x-k)\le0$에서

(i) $k<\frac{5}{2}$일 때, $k\le x\le\frac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 개수가 2가 되려면 다음 그림과 같아야 하므로 $-4<k\le-3$

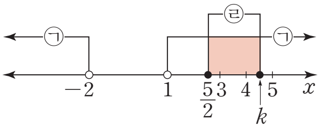


(ii) $k=\frac{5}{2}$일 때, $x=\frac{5}{2}$ …… ㉢

㉠, ㉢을 동시에 만족시키는 정수 x는 없다.

(iii) $k>\frac{5}{2}$일 때, $\frac{5}{2}\le x\le k$ …… ㉣

㉠, ㉣을 동시에 만족시키는 정수 x의 개수가 2가 되려면 다음 그림과 같아야 하므로 $4\le k<5$



(i)~(iii)에서 정수 k는 -3, 4이므로 그 곱은

$-3\times4=-12$

답 ④

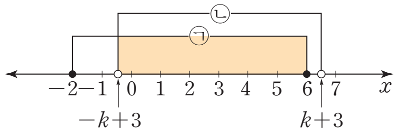
22

$x^2-4x-12\le0$에서 $(x+2)(x-6)\le0$

$\therefore -2\le x\le6$ …… ㉠

$|x-3|<k$에서 $-k+3<x<k+3$ …… ㉡

이때 ㉡에서 x의 값의 범위는 3을 기준으로 같은 거리만큼 떨어져 있는 구간이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 7이려면 다음 그림과 같아야 한다.



즉 $-1\le-k+3<0$이고 $6<k+3\le7$이므로

$3<k\le4$

따라서 양수 k의 최댓값은 4이다.

답 ④

23

이차방정식 $x^2+2kx+k+2=0$이 허근을 가지려면 판별식을 D_1이라 할 때,

$\dfrac{D_1}{4}=k^2-(k+2)<0,\ k^2-k-2<0$

$(k+1)(k-2)<0 \qquad \therefore -1<k<2$ ...... ㉠

이차방정식 $x^2+(k-1)x+k^2=0$이 허근을 가지려면 판별식을 D_2라 할 때,

$D_2=(k-1)^2-4k^2<0$

$-3k^2-2k+1<0,\ 3k^2+2k-1>0$

$(k+1)(3k-1)>0$

$\therefore k<-1$ 또는 $k>\dfrac{1}{3}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\dfrac{1}{3}<k<2$

즉 두 이차방정식 중 적어도 하나가 실근을 가질 실수 k의 값의 범위는 $k\le\dfrac{1}{3}$ 또는 $k\ge2$

따라서 $\alpha=\dfrac{1}{3},\ \beta=2$이므로

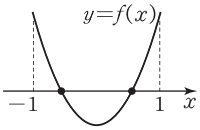
$\beta-\alpha=2-\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$

답 ②

24

$f(x)=x^2+(k-3)x+k^2-3k$라 하면

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -1과 1 사이에 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $x^2+(k-3)x+k^2-3k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-3)^2-4(k^2-3k)\ge0$

$-3k^2+6k+9\ge0,\ k^2-2k-3\le0$

$(k+1)(k-3)\le0 \qquad \therefore -1\le k\le3$ ...... ㉠

(ii) $f(-1)>0$에서 $1-(k-3)+k^2-3k>0$

$k^2-4k+4>0,\ (k-2)^2>0$

즉 실수 k는 $k\ne2$인 모든 실수 ...... ㉡

(iii) $f(1)>0$에서 $1+(k-3)+k^2-3k>0$

$k^2-2k-2>0,\ (k-1)^2>3$

$\therefore k<1-\sqrt{3}$ 또는 $k>1+\sqrt{3}$ ...... ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면

$-1\le k<1-\sqrt{3}$ 또는 $1+\sqrt{3}<k\le3$

답 $-1\le k<1-\sqrt{3}$ 또는 $1+\sqrt{3}<k\le3$

25

$\begin{cases}-x^2+3x+2\le mx+n & \cdots\cdots ㉠\\ mx+n\le x^2-x+4 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $x^2+(m-3)x+n-2\ge0$

모든 실수 x에 대하여 이 이차부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+(m-3)x+n-2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(m-3)^2-4(n-2)\le0$

$(m-3)^2\le4(n-2)$

$\therefore (m-3)^2+8\le4n$ ...... ㉢

㉡에서 $x^2-(m+1)x-n+4\ge0$

모든 실수 x에 대하여 이 이차부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-(m+1)x-n+4=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=\{-(m+1)\}^2-4(-n+4)\le0$

$4n-16\le-(m+1)^2$

$\therefore 4n\le16-(m+1)^2$ ...... ㉣

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면

$(m-3)^2+8\le4n\le16-(m+1)^2$ ...... ㉤

즉 $(m-3)^2+8\le16-(m+1)^2$이므로

$m^2-6m+17\le-m^2-2m+15$

$2m^2-4m+2\le0,\ m^2-2m+1\le0$

$(m-1)^2\le0 \qquad \therefore m=1$

$m=1$을 ㉤에 대입하면

$12\le4n\le12$이므로 $n=3$

따라서 $m=1,\ n=3$이므로

$m^2+n^2=1^2+3^2=10$

답 ②

Level Up 연습문제

p. 254

1

ㄱ. $f(x)g(x)<0$에서

$f(x)>0,\ g(x)<0$ 또는 $f(x)<0,\ g(x)>0$

(i) $f(x)>0,\ g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는 $x<a$ 또는 $x>d$

(ii) $f(x)<0,\ g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는 $c<x<d$

(i), (ii)에서 $f(x)g(x)<0$의 해는

$x<a$ 또는 $c<x<d$ 또는 $x>d$

ㄴ. $\{f(x)\}^2=f(x)g(x)$에서

$\{f(x)\}^2-f(x)g(x)=0$

$f(x)\{f(x)-g(x)\}=0$

$\therefore f(x)=0$ 또는 $f(x)=g(x)$

$f(x)=0$에서 $x=c$ 또는 $x=d$
$f(x)=g(x)$에서 $x=b$ 또는 $x=d$
즉 $f(x)^2=f(x)g(x)$의 해는
$x=b$ 또는 $x=c$ 또는 $x=d$
ㄷ. (i) $f(x)<0$, 즉 $c<x<d$일 때
$h(x)=\dfrac{f(x)-f(x)}{2}=0$
$h(x)\le 0$에서 $0\le 0$이므로 해는 모든 실수이다.
그런데 $c<x<d$이므로 $c<x<d$
(ii) $f(x)\ge 0$, 즉 $x\le c$ 또는 $x\ge d$일 때
$h(x)=\dfrac{f(x)+f(x)}{2}=f(x)$
$h(x)\le 0$에서 $f(x)\le 0$ $\quad\therefore c\le x\le d$
그런데 $x\le c$ 또는 $x\ge d$이므로 $x=c$ 또는 $x=d$
(i), (ii)에서 $c\le x\le d$
따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ②

2

$\sqrt{(m+2)x^2-2(m+2)x+4}$가 0이 아닌 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 부등식
$(m+2)x^2-2(m+2)x+4>0$ ...... ㉠
이 성립해야 한다.
(i) $m=-2$일 때
$0\times x^2-2\times 0\times x+4>0$에서 $4>0$이므로 ㉠은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.
(ii) $m\ne -2$일 때
모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하려면
$m+2>0$ $\quad\therefore m>-2$
이차방정식 $(m+2)x^2-2(m+2)x+4=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=\{-(m+2)\}^2-4(m+2)<0$
$m^2-4<0$, $(m+2)(m-2)<0$
$\therefore -2<m<2$
그런데 $m>-2$이므로 $-2<m<2$
(i), (ii)에서 $-2\le m<2$

답 $-2\le m<2$

3

$x^2-x-n-n^2\ge 0$에서 $(x+n)(x-n-1)\ge 0$
$\therefore x\le -n$ 또는 $x\ge n+1$ ($\because n\ge 2$) ...... ㉠
$x^2+n(3-n)x-3n^3<0$에서 $(x+3n)(x-n^2)<0$
$\therefore -3n<x<n^2$ ($\because n\ge 2$) ...... ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$-3n<x\le -n$ 또는 $n+1\le x<n^2$ ($\because n\ge 2$)
즉 정수 x의 개수는
$\{-n-(-3n)\}+\{n^2-(n+1)\}=n^2+n-1$
이때 $n^2+n-1>55$이어야 하므로
$n^2+n-56>0$, $(n+8)(n-7)>0$
$\therefore n>7$ ($\because n\ge 2$)
따라서 자연수 n의 최솟값은 8이다.

답 8

4

$\overline{QC}=a$이므로 $0<a<12$
$\triangle$ABC가 직각이등변삼각형이므로 $\triangle$APR, $\triangle$PBQ도 직각이등변삼각형이다.
$\therefore \overline{AR}=\overline{PR}=a$, $\overline{PQ}=\overline{BQ}=12-a$
$\square$PQCR의 넓이는 $\overline{QC}\times\overline{PQ}=a(12-a)$
$\triangle$APR의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\overline{PR}\times\overline{AR}=\dfrac{1}{2}a^2$
$\triangle$PBQ의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\overline{BQ}\times\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}(12-a)^2$
이때 $\square$PQCR$>\triangle$APR에서
$a(12-a)>\dfrac{1}{2}a^2$, $2a(12-a)>a^2$
$a^2-8a<0$, $a(a-8)<0$
$\therefore 0<a<8$ ...... ㉠
$\square$PQCR$>\triangle$PBQ에서
$a(12-a)>\dfrac{1}{2}(12-a)^2$, $2a(12-a)>144-24a+a^2$
$a^2-16a+48<0$, $(a-4)(a-12)<0$
$\therefore 4<a<12$ ...... ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$4<a<8$
따라서 자연수 a는 5, 6, 7이므로 그 합은
$5+6+7=18$

답 18

1 경우의 수와 순열

확인 문제

p. 258 ~ 273

01

두 주사위의 눈의 수의 합이 소수인 경우는 두 눈의 수의 합이 2 또는 3 또는 5 또는 7 또는 11일 때이다.

(i) 두 눈의 수의 합이 2인 경우는

(1, 1)의 1가지

(ii) 두 눈의 수의 합이 3인 경우는

(1, 2), (2, 1)의 2가지

(iii) 두 눈의 수의 합이 5인 경우는

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지

(iv) 두 눈의 수의 합이 7인 경우는

(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)의 6가지

(v) 두 눈의 수의 합이 11인 경우는

(5, 6), (6, 5)의 2가지

(i)~(v)는 동시에 일어나는 경우가 없으므로 구하는 경우의 수는 $1+2+4+6+2=15$

답 15

02

공에 적힌 두 수의 합이 3의 배수인 경우는 두 수의 합이 3 또는 6 또는 9일 때이다.

(i) 두 수의 합이 3인 경우는

(1, 2)의 1가지

(ii) 두 수의 합이 6인 경우는

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2)의 4가지

(iii) 두 수의 합이 9인 경우는

(4, 5)의 1가지

(i)~(iii)은 동시에 일어나는 경우가 없으므로 구하는 경우의 수는 $1+4+1=6$

답 6

03

(i) 두 수의 차가 3인 경우는

(1, 4), (4, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 6), (6, 3), (4, 7), (7, 4)의 8가지

(ii) 두 수의 차가 5인 경우는

(1, 6), (6, 1), (2, 7), (7, 2)의 4가지

(i), (ii)는 동시에 일어나는 경우가 없으므로 구하는 경우의 수는 $8+4=12$

답 12

04

카드에 적힌 수가 2의 배수인 경우는

2, 4, 6, ⋯, 40의 20가지

카드에 적힌 수가 3의 배수인 경우는

3, 6, 9, ⋯, 39의 13가지

카드에 적힌 수가 2의 배수인 동시에 3의 배수인 경우는 6의 배수인 경우이므로 6, 12, 18, ⋯, 36의 6가지

따라서 구하는 경우의 수는 $20+13-6=27$

답 27

05

(i) 두 눈의 수의 합이 4의 배수일 때

두 눈의 수의 합이 4인 경우는

(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지

두 눈의 수의 합이 8인 경우는

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지

두 눈의 수의 합이 12인 경우는 (6, 6)의 1가지

즉 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우의 수는

$3+5+1=9$

(ii) 두 눈의 수의 합이 6의 배수일 때

두 눈의 수의 합이 6인 경우는

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지

두 눈의 수의 합이 12인 경우는 (6, 6)의 1가지

즉 두 눈의 수의 합이 6의 배수인 경우의 수는

$5+1=6$

(iii) 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 동시에 6의 배수인 경우는 12의 배수인 경우이므로

(6, 6)의 1가지

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$9+6-1=14$

답 14

06

(i) $x=0$일 때, $y+z=8$이므로 순서쌍 (y, z)는

(0, 8), (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1), (8, 0)의 9개

(ii) $x=1$일 때, $y+z=5$이므로 순서쌍 (y, z)는

(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)의 6개

(iii) $x=2$일 때, $y+z=2$이므로 순서쌍 (y, z)는

(0, 2), (1, 1), (2, 0)의 3개

(i)~(iii)에서 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$9+6+3=18$

답 18

07

(ⅰ) $x=1$일 때, $2\le y\le 5$이므로 $y=2, 3, 4, 5$의 4개

(ⅱ) $x=2$일 때, $1\le y\le 4$이므로 $y=1, 2, 3, 4$의 4개

(ⅲ) $x=3$일 때, $0\le y\le 3$이므로 $y=1, 2, 3$의 3개

(ⅳ) $x=4$일 때, $-1\le y\le 2$이므로 $y=1, 2$의 2개

(ⅴ) $x=5$일 때, $-2\le y\le 1$이므로 $y=1$의 1개

(ⅰ)~(ⅴ)에서 순서쌍 (x, y)의 개수는

$4+4+3+2+1=14$

답 14

08

5 g, 10 g, 15 g짜리 추의 개수를 각각 x개, y개, z개라 하면 $5x+10y+15z=50$

이때 x, y, z는 10 이하의 음이 아닌 정수이므로

(ⅰ) $z=0$일 때, $5x+10y=50$, 즉 $x+2y=10$이므로 순서쌍 (x, y)는 $(10, 0)$, $(8, 1)$, $(6, 2)$, $(4, 3)$, $(2, 4)$, $(0, 5)$의 6개

(ⅱ) $z=1$일 때, $5x+10y=35$, 즉 $x+2y=7$이므로 순서쌍 (x, y)는 $(7, 0)$, $(5, 1)$, $(3, 2)$, $(1, 3)$의 4개

(ⅲ) $z=2$일 때, $5x+10y=20$, 즉 $x+2y=4$이므로 순서쌍 (x, y)는 $(4, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 2)$의 3개

(ⅳ) $z=3$일 때, $5x+10y=5$, 즉 $x+2y=1$이므로 순서쌍 (x, y)는 $(1, 0)$의 1개

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는

$6+4+3+1=14$

답 14

09

(1) $(a+b)(p+q)^2(x+y)$

$=(a+b)(p^2+2pq+q^2)(x+y)$

이므로 a, b 중 어느 하나를 택하면 그 각각에 대하여 p^2, $2pq$, q^2의 3가지 중 하나를 선택할 수 있고, 또 그 각각에 대하여 x, y의 2가지 중 하나를 선택할 수 있다.

따라서 구하는 항의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times 3\times 2=12$

(2) $(a+b+c)^2(x+y)$

$=(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)(x+y)$

이므로 a^2, b^2, c^2, $2ab$, $2bc$, $2ca$ 중 어느 하나를 택하면 그 각각에 대하여 x, y의 2가지 중 하나를 선택할 수 있다.

따라서 구하는 항의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$6\times 2=12$

답 (1) 12 (2) 12

10

(1) 120을 소인수분해하면 $120=2^3\times 3\times 5$

2^3의 양의 약수는 $1, 2, 2^2, 2^3$의 4개

3의 양의 약수는 1, 3의 2개

5의 양의 약수는 1, 5의 2개

따라서 구하는 양의 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times 2\times 2=16$

(2) 252를 소인수분해하면 $252=2^2\times 3^2\times 7$

2^2의 양의 약수는 $1, 2, 2^2$의 3개

3^2의 양의 약수는 $1, 3, 3^2$의 3개

7의 양의 약수는 1, 7의 2개

따라서 구하는 양의 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times 3\times 2=18$

답 (1) 16 (2) 18

Lecture **자연수의 양의 약수의 개수**

자연수 N이 $N=a^pb^qc^r$(a, b, c는 서로 다른 소수, p, q, r는 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, 자연수 N의 양의 약수의 개수는 $(p+1)(q+1)(r+1)$

11

$2^3\times 3^2\times 5^x$의 양의 약수의 개수는

$(3+1)\times(2+1)\times(x+1)$

즉 $12(x+1)=72$이므로 $x+1=6$

$\therefore x=5$

답 5

12

집에서 학교로 가는 방법은

집 → A → 학교, 집 → B → 학교,

집 → A → B → 학교, 집 → B → A → 학교

의 4가지가 있다.

(ⅰ) 집 → A → 학교로 가는 경우

집 → A로 가는 방법의 수는 2이고, 그 각각에 대하여 A → 학교로 가는 방법의 수는 1이므로

$2\times 1=2$

(ⅱ) 집 → B → 학교로 가는 경우

집 → B로 가는 방법의 수는 3이고, 그 각각에 대하여 B → 학교로 가는 방법의 수는 2이므로

$3\times 2=6$

(ⅲ) 집 → A → B → 학교로 가는 경우

A → B로 가는 방법의 수는 1이므로

$2\times 1\times 2=4$

(ⅳ) 집 → B → A → 학교로 가는 경우

B → A로 가는 방법의 수는 1이므로

$3\times1\times1=3$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 방법의 수는 합의 법칙에 의하여

$2+6+4+3=15$

답 15

13

P 도시에서 S 도시로 가는 방법은

P → Q → R → S, P → R → S, P → S

의 3가지가 있다.

(ⅰ) P → Q → R → S로 가는 경우

P → Q로 가는 방법의 수는 4이고, 그 각각에 대하여 Q → R로 가는 방법의 수는 2, 또 그 각각에 대하여 R → S로 가는 방법의 수는 3이므로

$4\times2\times3=24$

(ⅱ) P → R → S로 가는 경우

P → R로 가는 방법의 수는 2이고, 그 각각에 대하여 R → S로 가는 방법의 수는 3이므로

$2\times3=6$

(ⅲ) P → S로 가는 경우

P → S로 가는 방법의 수는 2이다.

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 방법의 수는 합의 법칙에 의하여

$24+6+2=32$

답 32

14

오른쪽 그림과 같이 각 영역을 A, B, C, D, E라 하면 같은 색을 중복하여 사용할 수 있으므로 인접한 영역이 많은 B → C → D → E → A의 순서로 칠하면 된다.

A	B	C	D	E

B에 칠할 수 있는 색은 5가지

C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 4가지

D에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 4가지

E에 칠할 수 있는 색은 D에 칠한 색을 제외한 4가지

A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 4가지

따라서 구하는 방법의 수는

$5\times4\times4\times4\times4=1280$

답 1280

15

같은 색을 중복하여 사용할 수 있으므로 인접한 영역이 많은 A → C → D → E → B의 순서로 칠하면 된다.

A에 칠할 수 있는 색은 5가지

C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지

D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지

E에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 3가지

B에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지

따라서 구하는 방법의 수는

$5\times4\times3\times3\times3=540$

답 540

16

500원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액과 100원짜리 동전 5개로 지불할 수 있는 금액이 같다.

즉 500원짜리 동전 1개를 100원짜리 동전 5개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 100원짜리 동전 12개, 10원짜리 동전 6개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

100원짜리 동전 12개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원, …, 1200원의 13가지

10원짜리 동전 6개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원, …, 60원의 7가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는

$13\times7-1=90$

답 90

17

(ⅰ) 1000원짜리 지폐로 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

5000원짜리 지폐로 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장, 4장의 5가지

10000원짜리 지폐로 지불하는 방법은

0장, 1장의 2가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$4\times5\times2-1=39$ $\quad\therefore a=39$

(ⅱ) 10000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액과 5000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액이 같다.

즉 10000원짜리 지폐 1장을 5000원짜리 지폐 2장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 5000원짜리 지폐 6장, 1000원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

5000원짜리 지폐 6장으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 5000원, 10000원, …, 30000원의 7가지

1000원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 1000원, 2000원, 3000원의 4가지
이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는
$7\times4-1=27$ $\quad\therefore b=27$
$\therefore a-b=39-27=12$

답 12

18

(1) ${}_n\mathrm{P}_5=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$,
${}_n\mathrm{P}_3=n(n-1)(n-2)$이므로
$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$
$=20n(n-1)(n-2)$
$n\geq5$이므로 양변을 $n(n-1)(n-2)$로 나누면
$(n-3)(n-4)=20$
$n^2-7n-8=0$, $(n+1)(n-8)=0$
$\therefore n=8$ $(\because n\geq5)$

(2) ${}_n\mathrm{P}_4 : {}_{n-1}\mathrm{P}_2=4:1$에서 $4{}_{n-1}\mathrm{P}_2={}_n\mathrm{P}_4$
${}_{n-1}\mathrm{P}_2=(n-1)(n-2)$,
${}_n\mathrm{P}_4=n(n-1)(n-2)(n-3)$
이므로
$4(n-1)(n-2)=n(n-1)(n-2)(n-3)$
$n\geq4$이므로 양변을 $(n-1)(n-2)$로 나누면
$4=n(n-3)$
$n^2-3n-4=0$, $(n+1)(n-4)=0$
$\therefore n=4$ $(\because n\geq4)$

답 (1) 8 (2) 4

19

${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$,

${}_{n-2}\mathrm{P}_{r-2}=\dfrac{(n-2)!}{\{(n-2)-(r-2)\}!}=\dfrac{(n-2)!}{(n-r)!}$이므로

$\dfrac{n!}{(n-r)!}=42\times\dfrac{(n-2)!}{(n-r)!}$, $n!=42(n-2)!$

$n(n-1)=7\times6$ $\quad\therefore n=7$

답 7

20

6자루에서 4자루를 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_6\mathrm{P}_4=6\times5\times4\times3=360$

답 360

21

7명의 농구 선수 중에서 3명을 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_7\mathrm{P}_3=7\times6\times5=210$

답 210

22

n명에서 3명을 택하는 순열의 수가 720이므로
${}_n\mathrm{P}_3=720$, $n(n-1)(n-2)=720$
이때 $720=10\times9\times8$이므로
$n=10$

답 10

23

수학책 2권을 한 묶음으로 생각하여 6권을 일렬로 꽂는 경우의 수는
$6!=720$

수학	수학	국어	국어	국어	국어	국어

그 각각에 대하여 수학책끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$720\times2=1440$

답 1440

24

(1) 이웃해도 되는 배구 선수 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$

∨ 배구 ∨ 배구 ∨ 배구 ∨ 배구 ∨

축구 선수는 배구 선수의 양 끝이나 배구 선수 사이사이에 한 명씩 서야 한다. 즉 5곳의 자리 중에서 4곳을 택하여 축구 선수를 세우면 되므로
${}_5\mathrm{P}_4=120$
따라서 구하는 경우의 수는 $24\times120=2880$

(2) w, a, t, e, r의 5개의 문자 중 모음 a, e를 제외한 3개의 자음을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$3!=6$

∨ 자음 ∨ 자음 ∨ 자음 ∨

모음은 자음의 양 끝이나 자음 사이사이에 한 개씩 나열해야 한다. 즉 4곳의 자리 중에서 2곳을 택하여 모음 a, e를 나열하면 되므로
${}_4\mathrm{P}_2=12$
따라서 구하는 경우의 수는 $6\times12=72$

답 (1) 2880 (2) 72

25

(1) i로 시작하여 a로 끝나는 경우는 i와 a를 제외한 6개의 문자를 i와 a 사이에 일렬로 나열하는 경우와 같으

므로 구하는 경우의 수는

$6!=720$

(2) b□□□d를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

b □□□ d ○○○

$4!=24$

b와 d를 제외한 나머지 6개의 문자 중 3개를 선택하여 b와 d 사이에 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_6P_3=120$

이때 b와 d가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times120\times2=5760$

답 (1) 720　(2) 5760

26

남학생 4명 중 2명을 뽑아 양 끝에 세우는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

양 끝의 남학생 2명을 제외한 나머지 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times24=288$

답 ③

27

남학생 3명과 여학생 3명을 일렬로 세울 때, 남학생과 여학생이 교대로 서는 경우는 다음과 같다.

(i) 남학생이 제일 앞에 서는 경우

남	여	남	여	남	여

먼저 남학생 3명을 일렬로 세우고 그 사이사이와 마지막 자리에 여학생 3명을 일렬로 세우면 되므로 구하는 경우의 수는

$3!\times3!=6\times6=36$

(ii) 여학생이 제일 앞에 서는 경우

여	남	여	남	여	남

먼저 여학생 3명을 일렬로 세우고 그 사이사이와 마지막 자리에 남학생 3명을 일렬로 세우면 되므로 구하는 경우의 수는

$3!\times3!=6\times6=36$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$36+36=72$

답 72

28

적어도 한쪽 끝에 자음이 오는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 양 끝에 모음이 오는 경우의 수를 빼면 된다.

5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

양 끝에 모음인 a, e의 2개의 문자를 나열하는 경우의 수는

${}_2P_2=2$

가운데에 나머지 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-2\times6=108$

답 108

29

적어도 한쪽 끝에 남학생이 서는 경우의 수는 전체 학생을 일렬로 세우는 경우의 수에서 양 끝에 여학생이 서는 경우의 수를 빼면 된다.

전체 학생 7명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$7!=5040$

양 끝에 여학생 4명 중 2명이 서는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

가운데에 나머지 학생 5명을 세우는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$5040-12\times120=3600$

답 ④

30

5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로

${}_5P_3=60$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리의 숫자 5를 제외한 4개이다.

그 각각에 대하여 백의 자리, 십의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수는 나머지 4개의 숫자에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로

${}_4P_2=12$

$\therefore 4\times12=48$

(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$60+48=108$

답 108

Lecture 배수 판정법

(1) 3의 배수: 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수인 수
(2) 4의 배수: 끝의 두 자리의 수가 4의 배수인 수
(3) 5의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 5인 수
(4) 9의 배수: 각 자리의 숫자의 합이 9의 배수인 수

31

3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

0, 1, 2, 3, 4의 숫자가 적힌 5장의 카드에서 서로 다른 3장의 카드를 뽑았을 때, 그 숫자의 합이 3의 배수가 되는 경우는

$(0, 1, 2)$, $(0, 2, 4)$, $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$이다.

(i) $(0, 1, 2)$인 경우: $2\times2!=2\times2=4$

(ii) $(0, 2, 4)$인 경우: $2\times2!=2\times2=4$

(iii) $(1, 2, 3)$인 경우: $3!=6$

(iv) $(2, 3, 4)$인 경우: $3!=6$

(i)~(iv)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$4+4+6+6=20$

답 ⑤

32

b□□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $5!=120$

e□□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $5!=120$

m□□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $5!=120$

nb□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

ne□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

nm□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

nr□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

nub□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$

nue□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$

즉 b□□□□□ 꼴인 문자열에서 nue□□□ 꼴인 문자열까지의 개수는

$120+120+120+24+24+24+24+6+6=468$

이때 number는 num□□□ 꼴에서 첫 번째에 오는 문자열이므로 number까지의 문자열의 개수는

$468+1=469$

따라서 number는 469번째에 온다.

답 469번째

33

1□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

2□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

31□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

32□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

즉 1□□□□ 꼴인 자연수에서 32□□□ 꼴인 자연수까지의 개수는 $24+24+6+6=60$

이때 34152는 341□□ 꼴에서 두 번째에 오는 자연수이므로 34152까지의 자연수의 개수는

$60+2=62$

따라서 34152는 62번째 수이다.

답 ③

연습문제

p. 274~277

1

경훈이를 회장으로 뽑은 후 나머지 9명 중에서 부회장 1명, 총무 1명을 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_9P_2=72$

답 ③

2

${}_{n+2}P_4=(n+2)(n+1)n(n-1)$, ${}_nP_2=n(n-1)$이므로

$(n+2)(n+1)n(n-1)=56n(n-1)$

$n\geq2$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$(n+2)(n+1)=56$, $n^2+3n-54=0$

$(n+9)(n-6)=0$ $\quad\therefore n=6\ (\because n\geq2)$

답 ③

3

(i) $x=1$일 때, $2y+z=15$이므로 순서쌍 (y, z)는

$(1, 13)$, $(2, 11)$, $(3, 9)$, $(4, 7)$, $(5, 5)$, $(6, 3)$, $(7, 1)$의 7개

(ii) $x=2$일 때, $2y+z=12$이므로 순서쌍 (y, z)는

$(1, 10)$, $(2, 8)$, $(3, 6)$, $(4, 4)$, $(5, 2)$의 5개

(iii) $x=3$일 때, $2y+z=9$이므로 순서쌍 (y, z)는

$(1, 7)$, $(2, 5)$, $(3, 3)$, $(4, 1)$의 4개

(iv) $x=4$일 때, $2y+z=6$이므로 순서쌍 (y, z)는

$(1, 4)$, $(2, 2)$의 2개

(v) $x=5$일 때, $2y+z=3$이므로 순서쌍 (y, z)는

$(1, 1)$의 1개

(i)~(v)에서 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$7+5+4+2+1=19$

답 ①

4
여학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 5명이 순서를 정하는 경우의 수는

$5!=120$

그 각각에 대하여 여학생끼리 순서를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times2=240$

답 240

5
A 도시를 출발하여 D 도시로 가는 방법은

$A\to B\to D$, $A\to B\to C\to D$,

$A\to C\to D$, $A\to C\to B\to D$

의 4가지가 있다.

(i) $A\to B\to D$로 가는 경우

$A\to B$로 가는 방법의 수는 2이고, 그 각각에 대하여 $B\to D$로 가는 방법의 수는 1이므로

$2\times1=2$

(ii) $A\to B\to C\to D$로 가는 경우

$A\to B$로 가는 방법의 수는 2이고, 그 각각에 대하여 $B\to C$로 가는 방법의 수는 2, 또 그 각각에 대하여 $C\to D$로 가는 방법의 수는 2이므로

$2\times2\times2=8$

(iii) $A\to C\to D$로 가는 경우

$A\to C$로 가는 방법의 수는 2이고, 그 각각에 대하여 $C\to D$로 가는 방법의 수는 2이므로

$2\times2=4$

(iv) $A\to C\to B\to D$로 가는 경우

$A\to C$로 가는 방법의 수는 2이고, 그 각각에 대하여 $C\to B$로 가는 방법의 수는 2, 또 그 각각에 대하여 $B\to D$로 가는 방법의 수는 1이므로

$2\times2\times1=4$

(i)~(iv)에서 구하는 방법의 수는 합의 법칙에 의하여

$2+8+4+4=18$

답 ④

6
(i) $y=1$일 때, $3\le x\le8$이므로 $x=3, 4, 5, 6$의 4개

(ii) $y=2$일 때, $1\le x\le6$이므로 $x=1, 2, 3, 4, 5, 6$의 6개

(iii) $y=3$일 때, $-1\le x\le4$이므로 $x=1, 2, 3, 4$의 4개

(iv) $y=4$일 때, $-3\le x\le2$이므로 $x=1, 2$의 2개

(i)~(iv)에서 순서쌍 (x, y)의 개수는

$4+6+4+2=16$

답 16

7
10원짜리 동전으로 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

100원짜리 동전으로 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

500원짜리 동전으로 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개의 3가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는 $5\times4\times3-1=59$

답 ⑤

8
백의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수는 소수 2, 3, 5 중에서 2개를 택하여 나열하는 순열의 수와 같으므로

${}_3P_2=6$ ...... ❶

나머지 네 자리에 올 수 있는 숫자의 개수는 백의 자리와 일의 자리에 놓인 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로

$4!=24$ ...... ❷

따라서 구하는 자연수의 개수는

$6\times24=144$ ...... ❸

답 144

채점 기준	비율
❶ 백의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수를 구할 수 있다.	40%
❷ 나머지 네 자리에 올 수 있는 숫자의 개수를 구할 수 있다.	40%
❸ 일의 자리의 숫자와 백의 자리의 숫자가 모두 소수인 여섯 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20%

9
3학년 2명을 첫 번째와 마지막 자리에 세우는 경우의 수는 $2!=2$

가운데에는 1학년은 서로 이웃하지 않게 1학년 2명, 2학년 3명을 세우면 된다.

이웃해도 되는 2학년 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=6$

1학년은 2학년의 양 끝이나 2학년 사이사이에 한 명씩 서야 한다. 즉 4곳의 자리 중에서 2곳을 택하여 1학년을 세우면 되므로

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times6\times12=144$

답 144

10

5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

만의 자리, 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5개의 숫자 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로

${}_5P_4=120$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리의 숫자 5를 제외한 4개이다.

그 각각에 대하여 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수는 나머지 4개의 숫자에서 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 ${}_4P_3=24$

$\therefore 4\times24=96$

(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$120+96=216$

답 ③

11

적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 양 끝에 자음이 오는 경우의 수를 빼면 된다.

6개의 문자 중에서 4개의 문자를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_6P_4=360$

양 끝에 자음인 b, c, d, f의 4개의 문자 중에서 2개의 문자를 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

가운데에 나머지 4개의 문자 중에서 2개의 문자를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$360-12\times12=216$

답 ③

12

(i) 1□□ 꼴인 자연수

십의 자리, 일의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수는 백의 자리에 온 숫자 1을 제외한 9개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 ${}_9P_2=72$

(ii) 2□□ 꼴인 자연수

십의 자리, 일의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수는 백의 자리에 온 숫자 2를 제외한 9개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 ${}_9P_2=72$

(i), (ii)에서 1□□ 또는 2□□ 꼴인 자연수의 개수는 $72+72=144$이므로 150번째의 수는 백의 자리의 숫자가 3이고, 작은 수부터 6번째 숫자이다.

이때 백의 자리의 숫자가 3인 자연수는

301, 302, 304, 305, 306, 307, 308, …

이므로 150번째에 나열되는 수는 307이다.

답 307

13

(i) 앞줄에 2명, 뒷줄에 1명이 앉는 경우

앞줄에는 A, C에 앉으면 된다. 즉 3명의 선수 중 2명을 택하여 A, C에 앉히면 되므로

${}_3P_2=6$

그 각각에 대하여 나머지 1명이 뒷줄에 앉는 방법의 수는 3이므로

$6\times3=18$

(ii) 앞줄에 1명, 뒷줄에 2명이 앉는 경우

뒷줄에는 D, F에 앉으면 된다. 즉 3명의 선수 중 2명을 택하여 D, F에 앉히면 되므로

${}_3P_2=6$

그 각각에 대하여 나머지 1명이 앞줄에 앉는 방법의 수는 3이므로

$6\times3=18$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$18+18=36$

답 36

14

Step by Step

이차방정식의 판별식 D의 부호를 구한다.

↓

b에 수를 대입하여 순서쌍 (a, c)의 개수를 구한다.

↓

순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구한다.

$1\le a\le3$이므로 이차방정식 $ax^2-2bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-b)^2-ac\le0 \qquad \therefore b^2\le ac$

(i) $b=1$일 때, $1\le ac$이므로 순서쌍 (a, c)는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$의 9개

(ii) $b=2$일 때, $4\le ac$이므로 순서쌍 (a, c)는

$(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$의 4개

(iii) $b=3$일 때, $9\le ac$이므로 순서쌍 (a, c)는

$(3, 3)$의 1개

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$9+4+1=14$

답 ②

Lecture 이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여

(1) $ax^2+bx+c>0$이 성립할 조건 ➡ $a>0$, $D<0$

(2) $ax^2+bx+c\ge 0$이 성립할 조건 ➡ $a>0$, $D\le 0$

(3) $ax^2+bx+c<0$이 성립할 조건 ➡ $a<0$, $D<0$

(4) $ax^2+bx+c\le 0$이 성립할 조건 ➡ $a<0$, $D\le 0$

15

A는 맨 앞에 세우고, B, C, D, E를 오른쪽 그림의 ○에 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

이때 F는 위의 그림과 같이 A의 옆을 제외한 나머지 학생의 사이사이나 맨 끝에 세우면 되므로 그 경우의 수는 4이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times 4=96$

답 ④

16

(i) 첫 번째에 남자가 입장하는 경우

첫 번째에 남자 1명이 입장하는 경우의 수는 3

나머지 4명이 입장하는 경우의 수는 $4!=24$

$\therefore 3\times 24=72$

(ii) 네 번째에 남자가 입장하는 경우

네 번째에 남자 1명이 입장하는 경우의 수는 3

나머지 4명이 입장하는 경우의 수는 $4!=24$

$\therefore 3\times 24=72$

(iii) 첫 번째와 네 번째에 남자가 입장하는 경우

첫 번째에 남자 1명, 네 번째에 남자 1명이 입장하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2=6$

나머지 3명이 입장하는 경우의 수는 $3!=6$

$\therefore 6\times 6=36$

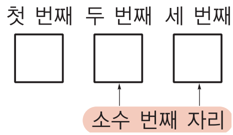
(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$72+72-36=108$

답 ③

17

세 자리 자연수의 자릿수는 오른쪽 그림과 같고, 소수는 두 번째, 세 번째에 배치할 수 없으므로 소수는 첫 번째에만 배치되어야 한다.



첫 번째에 소수를 배치하는 경우의 수는 소수인 2, 3, 5, 7의 4개의 숫자 중 하나를 배치하면 되므로 4이다.

두 번째와 세 번째에 소수를 제외한 1, 4, 6의 3개의 숫자 중 2개를 배치하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2=6$

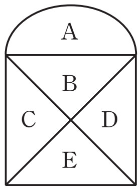
따라서 구하는 경우의 수는

$4\times 6=24$

답 24

18

오른쪽 그림과 같이 각 영역을 A, B, C, D, E라 하자.



(i) C, D에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 3가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 2가지

C, D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 2가지

E에 칠할 수 있는 색은 C, D에 칠한 색을 제외한 2가지

$\therefore 3\times 2\times 2\times 2=24$

(ii) C, D에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 3가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 2가지

C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 2가지

D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 1가지

E에 칠할 수 있는 색은 C, D에 칠한 색을 제외한 1가지

$\therefore 3\times 2\times 2\times 1\times 1=12$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$24+12=36$

답 36

19

세 종류의 상품 3개씩을 각각 aaa, bbb, ccc라 하면 맨 아래 칸에 하나씩 진열하는 방법의 수는

$3!=6$

이때 오른쪽 그림과 같이 맨 아래 칸에 abc의 순서로 진열되어 있다면 ①, ②, ③에 들어가는 순서는 bca, cab의 2가지이다.

④	⑤	⑥
①	②	③
a	b	c

①, ②, ③에 bca의 순서로 진열되어 있다면 ④, ⑤, ⑥에 들어가는 순서는 abc, cab의 2가지이다.
따라서 구하는 방법의 수는
$6\times2\times2=24$

답 ①

Level Up 연습문제

p. 278

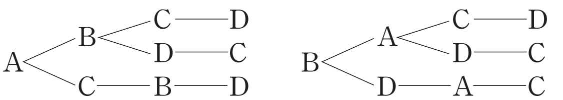
1

다섯 자리 자연수 □□□□□에서 2, 4가 들어갈 곳을 택하는 방법의 수는 ${}_5P_2=20$
2, 4가 들어간 자리를 제외한 세 곳에 1, 3, 5를 작은 것부터 순서대로 나열하는 방법의 수는 1
따라서 구하는 자연수의 개수는 $20\times1=20$

답 20

2

주어진 조건에 따라 차량이 빠져나오는 순서를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 6이다.

답 ②

3

A−B−C−D−E의 순서로 칠할 때, A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.
이때 D, E에 색을 칠하는 방법은 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.
(i) B와 D가 다른 색일 때
D에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, B, D에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 경우의 수는
$5\times4\times3\times2\times2=240$
(ii) B와 D가 같은 색일 때
D에 칠할 수 있는 색은 B와 같은 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 경우의 수는
$5\times4\times3\times1\times3=180$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $240+180=420$

답 420

4

특정한 남학생을 A, 여학생을 B라 하면
AB의 순서로 서는 경우는 다음과 같다.
(남 여 남 여 A B), (여 남 여 A B 남),
(남 여 A B 남 여), (여 A B 남 여 남),
(A B 남 여 남 여)
즉 경우의 수는 $2!\times2!\times5=2\times2\times5=20$
같은 방법으로 BA의 순서로 서는 경우의 수는
$2!\times2!\times5=2\times2\times5=20$
따라서 구하는 경우의 수는 $20+20=40$

답 40

5

6권의 책을 일렬로 세우는 방법의 수는 $6!=720$
(i) 만화책 2권 사이에 소설책을 한 권도 세우지 않는 경우
만화책 2권을 한 묶음으로 생각하여 5권을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5!=120$
만화책 2권의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
즉 만화책 2권 사이에 소설책을 한 권도 세우지 않는 방법의 수는
$120\times2=240$
(ii) 만화책 2권 사이에 소설책을 한 권만 세우는 경우
만화책 2권 사이에 세울 소설책 한 권을 택하는 방법의 수는 4
'만화책 $\boxed{\text{소설책}}$ 만화책'을 한 묶음으로 생각하여 4권을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$
만화책 2권의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
즉 만화책 2권 사이에 소설책을 한 권만 세우는 방법의 수는
$4\times24\times2=192$
(i), (ii)에서 만화책 2권 사이에 소설책을 한 권도 세우지 않거나 한 권만 세우는 방법의 수는 $240+192=432$
따라서 구하는 방법의 수는 $720-432=288$

답 288

다른 풀이
(i) 만화책 2권 사이에 소설책을 2권 세우는 경우
만화책 2권 사이에 세울 소설책 2권을 택하는 방법의 수는 ${}_4P_2=12$
'만화책 $\boxed{\text{소설책}}\boxed{\text{소설책}}$ 만화책'을 한 묶음으로 생각하여 3권을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$
만화책 2권의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
즉 만화책 2권 사이에 소설책을 2권 세우는 방법의 수는 $12\times6\times2=144$

(ii) 만화책 2권 사이에 소설책을 3권 세우는 경우

만화책 2권 사이에 세울 소설책 3권을 택하는 방법의 수는

${}_4P_3=24$

'만화책 $\boxed{\text{소설책}}\boxed{\text{소설책}}\boxed{\text{소설책}}$ 만화책'을 한 묶음으로 생각하여 2권을 일렬로 세우는 방법의 수는 $2!=2$

만화책 2권의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

즉 만화책 2권 사이에 소설책을 3권 세우는 방법의 수는 $24\times2\times2=96$

(iii) 만화책 2권 사이에 소설책을 4권 세우는 경우

만화책 2권 사이에 소설책 4권을 모두 세우는 방법의 수는

$4!=24$

만화책 2권의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

즉 만화책 2권 사이에 소설책을 4권 세우는 방법의 수는 $24\times2=48$

(i)~(iii)에서 만화책 2권 사이에 적어도 2권의 소설책을 세우는 방법의 수는

$144+96+48=288$

2 조합

확인 문제 p. 283~291

01

${}_3P_2\times{}_4C_1=(3\times2)\times4=24$

답 24

02

${}_{11}C_n={}_{11}C_{11-n}$이므로 ${}_{11}C_{11-n}={}_{11}C_{n-3}$

즉 $11-n=n-3$이므로 $2n=14$

$\therefore n=7$

답 7

03

(1) $2\times\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=3n(n-1)$

$n\ge3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$\dfrac{n-2}{3}=3$, $n-2=9$

$\therefore n=11$

(2) ${}_nC_{n-3}={}_nC_3$이므로

$$n(n-1)+5\times\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=n(n-1)(n-2)$$

$n\ge3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$1+\dfrac{5(n-2)}{6}=n-2$, $6+5(n-2)=6(n-2)$

$5n-4=6n-12$

$\therefore n=8$

답 (1) 11 (2) 8

04

(1) 색이 모두 다른 7자루의 색연필 중에서 3자루를 선택하는 경우의 수는

${}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

(2) 빵 5종류 중에서 3종류를 선택하는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

아이스크림 4종류 중에서 2종류를 선택하는 경우의 수는

${}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times6=60$

답 (1) 35 (2) 60

05

파란 공 n개 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{n}C_{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

흰 공 4개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{4}C_{2}=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

이때 파란 공 3개와 흰 공 2개를 꺼내는 경우의 수가 120 이므로 $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\times6=120$

$n(n-1)(n-2)=6\times5\times4$

$\therefore n=6$

답 6

06

A를 먼저 뽑고, B, C를 제외한 나머지 7명 중에서 2명을 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_{7}C_{2}=\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

답 21

07

철수를 제외한 나머지 남학생 3명 중에서 2명을 뽑으면 되므로 남학생 대표를 뽑는 경우의 수는

${}_{3}C_{2}={}_{3}C_{1}=3$

영희를 먼저 뽑고 나머지 여학생 5명 중에서 1명을 뽑으면 되므로 여학생 대표를 뽑는 경우의 수는

${}_{5}C_{1}=5$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times5=15$

답 15

08

전체 10명 중에서 대표 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{10}C_{3}=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$$

남학생 6명 중에서 대표 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{6}C_{3}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-20=100$

답 100

09

12장의 카드에서 3장을 뽑는 경우의 수는

$${}_{12}C_{3}=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$$

3의 배수가 적힌 카드는 3, 6, 9, 12의 4장이므로 3의 배수가 아닌 수가 적힌 카드 8장 중에서 3장을 뽑는 경우의 수는

$${}_{8}C_{3}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

따라서 구하는 경우의 수는

$220-56=164$

답 164

10

9명의 학생 중에서 대표 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{9}C_{3}=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

2학년 학생 수를 x라 하면 x명의 2학년 학생 중에서 대표 3명을 뽑는 경우의 수가 ${}_{x}C_{3}$이므로

$$84-{}_{x}C_{3}=74,\ 84-\frac{x(x-1)(x-2)}{3\times2\times1}=74$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{6}=10,\ x(x-1)(x-2)=60$$

이때 $60=5\times4\times3$이므로 $x=5$

따라서 9명의 학생 중에서 2학년 학생이 5명이므로 1학년 학생 수는 4이다.

답 4

11

어른 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{5}C_{2}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

어린이 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{4}C_{2}=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

뽑은 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times6\times24=1440$

답 1440

12

자음 n, g, h 중에서 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_{3}C_{2}={}_{3}C_{1}=3$

모음 e, o, u 중에서 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_{3}C_{2}={}_{3}C_{1}=3$

자음 2개를 하나로 생각하여 3개를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $3!=6$

이때 자음 2개가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times3\times6\times2=108$

답 108

13

두 평행선 위의 점을 각각 하나씩 택하여 연결하면 한 개의 직선을 만들 수 있으므로

${}_3C_1 \times {}_5C_1 = 3 \times 5 = 15$

한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하여 연결한 직선의 개수는 2

따라서 구하는 직선의 개수는

$15+2=17$

답 17

다른 풀이

8개의 점 중에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_8C_2 = \dfrac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$

(i) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우

3개의 점 중에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

이때 한 직선 위의 3개의 점으로 만들 수 있는 직선은 1개이다.

(ii) 한 직선 위에 5개의 점이 있는 경우

5개의 점 중에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_5C_2 = \dfrac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

이때 한 직선 위의 5개의 점으로 만들 수 있는 직선은 1개이다.

따라서 구하는 직선의 개수는

$28-3-10\boxed{+2}=17$

중복으로 세어진 직선을 모두 뺐으므로 (i), (ii)에 대한 직선 2개를 더해 준다.

14

9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_9C_3 = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

이때 한 직선 위에 4개의 점이 있는 경우는 3가지이고 한 직선 위에 있는 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$84-3 \times 4=72$

답 72

15

직선 l 위의 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2 = \dfrac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$

직선 m 위의 6개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_2 = \dfrac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$6 \times 15 = 90$

답 90

16

(1) 가로선 3개 중에서 2개, 세로선 4개 중에서 2개를 택하면 하나의 직사각형이 결정되므로 구하는 직사각형의 개수는

${}_3C_2 \times {}_4C_2 = {}_3C_1 \times {}_4C_2 = 3 \times \dfrac{4 \times 3}{2 \times 1} = 18$

(2) 처음 직사각형의 가로의 길이를 3, 세로의 길이를 2라 하면

한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는 6,

한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는 2

이므로 정사각형의 개수는 $6+2=8$

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$18-8=10$

답 (1) 18 (2) 10

17

8종류의 꽃을 3종류, 3종류, 2종류씩 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_3 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = {}_8C_3 \times {}_5C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 1 \times \frac{1}{2}$$

$$=280$$

답 280

18

서로 다른 종류의 과일 7개를 3개, 3개, 1개씩 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_3 \times {}_4C_3 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = {}_7C_3 \times {}_4C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times 4 \times 1 \times \frac{1}{2}$$

$$=70$$

이때 세 묶음으로 나누어진 과일을 세 명에게 나누어 주는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$70 \times 6 = 420$

답 420

연습문제

p. 292~295

1

${}_{10}C_3=\frac{{}_{10}P_3}{3!}$이므로 ${}_{10}P_3=n\times\frac{{}_{10}P_3}{3!}$

$\therefore n=6$

답 ③

2

${}_{n+2}C_n+{}_nC_{n-2}+{}_nC_{n-1}$

$={}_{n+2}C_n+{}_{n+1}C_{n-1}$

$={}_{n+2}C_2+{}_{n+1}C_2$

$=\frac{(n+2)(n+1)}{2\times1}+\frac{(n+1)n}{2\times1}=100$

$(n+1)(n+2)+n(n+1)=200$

$(n+1)(2n+2)=200,\ 2(n+1)^2=200$

$(n+1)^2=100,\ n+1=10\ (\because n\geq2)$ $\therefore n=9$

답 ④

3

서로 다른 종류의 과자 5봉지 중에서 2봉지를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

서로 다른 종류의 음료수 3개 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times3=30$

답 30

4

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x, y, z의 순서쌍의 개수는 1부터 10까지의 정수 중에서 서로 다른 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_{10}C_3=120$

답 ③

5

(i) A회사, B회사에서 각각 한 종류의 우유를 선택하는 경우

A회사는 우유 4종류, B회사는 우유 2종류를 판매하므로 ${}_4C_1\times{}_2C_1=4\times2=8$

(ii) B회사, C회사에서 각각 한 종류의 우유를 선택하는 경우

B회사는 우유 2종류, C회사는 우유 3종류를 판매하므로 ${}_2C_1\times{}_3C_1=2\times3=6$

(iii) C회사, A회사에서 각각 한 종류의 우유를 선택하는 경우

C회사는 우유 3종류, A회사는 우유 4종류를 판매하므로 ${}_3C_1\times{}_4C_1=3\times4=12$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$8+6+12=26$

답 26

6

(i) 점수의 합이 6점인 경우

주머니에서 빨간 공 2개, 흰 공 2개를 꺼내는 경우이므로

${}_4C_2\times{}_6C_2=6\times15=90$

(ii) 점수의 합이 7점인 경우

주머니에서 빨간 공 3개, 흰 공 1개를 꺼내는 경우이므로

${}_4C_3\times{}_6C_1={}_4C_1\times{}_6C_1=4\times6=24$

(iii) 점수의 합이 8점인 경우

주머니에서 빨간 공 4개를 꺼내는 경우이므로

${}_4C_4=1$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$90+24+1=115$

답 115

> 참고 빨간 공의 개수를 x라 하면 흰 공의 개수는 $(4-x)$
> 즉 점수의 합은 $2\times x+1\times(4-x)=x+4$
> 이때 점수의 합이 6점 이상이므로 $x+4\geq6$
> $\therefore x\geq2$

7

A, B를 먼저 뽑고, C, D, E, F를 제외한 나머지 9명 중에서 7명을 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_9C_7={}_9C_2=36$

답 ②

8

4를 이미 선택했다고 생각하고 나머지 8개의 자연수 중에서 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_8C_2=28$

선택한 3개의 자연수를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$28\times6=168$

답 ⑤

9

학생 10명 중에서 3명을 선택하는 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$

같은 학교의 학생을 동시에 선택하는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

이때 같은 학교의 학생 2명을 제외한 나머지 8명 중에서

1명을 선택하는 경우의 수는

$_8C_1=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-5\times8=80$

답 80

다른 풀이

서로 다른 5개의 학교 중에서 3개의 학교를 선택하는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

같은 학교의 학생 2명 중에서 한 명을 선택하는 경우의 수는

$_2C_1=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times2\times2\times2=80$

10

10장의 카드 중에서 2장을 꺼내는 경우의 수는

$_{10}C_2=45$

홀수가 적힌 카드는 1, 3, 5, 7, 9의 5장이므로 두 수의 곱이 홀수가 되도록 카드 2장을 꺼내는 경우의 수는

$_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$45-10=35$

답 ②

11

서로 다른 인형 5개를 3개의 가방 A, B, C에 적어도 1개 이상 넣는 경우는 다음과 같다.

(i) 3개, 1개, 1개로 나누어 넣는 경우

$$\left({}_5C_3\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}\right)\times3!=\left(10\times2\times1\times\frac{1}{2}\right)\times6$$
$$=60$$

(ii) 2개, 2개, 1개로 나누어 넣는 경우

$$\left({}_5C_2\times{}_3C_2\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}\right)\times3!=\left(10\times3\times1\times\frac{1}{2}\right)\times6$$
$$=90$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$60+90=150$

답 150

12

가로선 4개 중에서 2개, 세로선 5개 중에서 2개를 택하면 하나의 직사각형이 결정되므로 직사각형의 개수는

$_4C_2\times{}_5C_2=6\times10=60$ …… ①

한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는 12,

한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는 6,

한 변의 길이가 3인 정사각형의 개수는 2

이므로 정사각형의 개수는 $12+6+2=20$ …… ②

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$60-20=40$ …… ③

답 40

채점 기준	비율
① 직사각형의 개수를 구할 수 있다.	30%
② 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	30%
③ 정사각형이 아닌 직사각형의 개수를 구할 수 있다.	40%

13

1, 3, 5, 7번째의 네 곳 중에서 e가 놓일 두 곳을 택하는 경우의 수는

$_4C_2=6$

나머지 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times120=720$

답 ④

14

9개의 자연수 중에서 3개의 수를 뽑을 때, 세 수의 곱이 10의 배수이려면 하나는 반드시 5를 뽑아야 한다.

5를 제외한 나머지 2개의 수를 뽑는 경우의 수는

$_8C_2=28$

5를 제외한 2의 배수가 아닌 자연수는 1, 3, 7, 9이므로 세 수의 곱이 10의 배수가 아닌 경우의 수는

$_4C_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$28-6=22$

답 22

15

남학생 4명을 2명, 1명, 1명으로 나누면 되므로 남학생을 세 개의 모둠으로 나누는 경우의 수는

$$_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=6\times2\times1\times\frac{1}{2}=6$$

여학생은 각 모둠에 한 명씩 들어가면 되므로 그 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times6=36$

답 ④

16

A, B를 같은 모둠에 배정하는 경우는 다음과 같다.

(i) A, B를 3명인 모둠에 배정하는 경우

나머지 8명을 1명, 3명, 4명으로 나누면 되므로

${}_8C_1 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4 = 8 \times 35 \times 1 = 280$

(ii) A, B를 4명인 모둠에 배정하는 경우

나머지 8명을 3명, 3명, 2명으로 나누면 되므로

$$\begin{aligned} {}_8C_3 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} &= {}_8C_3 \times {}_5C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \\ &= 56 \times 10 \times 1 \times \frac{1}{2} \\ &= 280 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$280 + 280 = 560$

답 560

17

Step by Step

6개의 팀을 3개, 3개로 나누는 경우의 수를 구한다.

↓

3개의 팀을 2개, 1개로 나누는 경우의 수를 구한다.

↓

두 경우의 수를 곱한다.

6개의 팀을 3개, 3개씩 두 묶음으로 나누는 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} &= 20 \times 1 \times \frac{1}{2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

나누어진 3개의 팀을 2개, 1개씩 두 묶음으로 나누는 경우의 수는

${}_3C_2 \times {}_1C_1 = 3 \times 1 = 3$

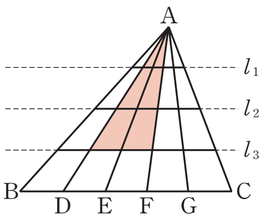
따라서 구하는 경우의 수는

$10 \times 3 \times 3 = 90$

답 ②

18

다음 그림과 같이 선분 BC 위의 네 점을 각각 D, E, F, G라 하고, 선분 AB 위의 세 점과 선분 AC 위의 세 점을 연결하는 3개의 직선을 각각 l_1, l_2, l_3이라 하자.



이때 삼각형을 만들려면 6개의 직선 AB, AD, AE, AF, AG, AC 중에서 서로 다른 2개의 직선을 택하고, 4개의 직선 l_1, l_2, l_3, BC 중에서 1개의 직선을 택하면 된다.

따라서 이 도형의 선들로 만들 수 있는 삼각형의 개수는

${}_6C_2 \times {}_4C_1 = 15 \times 4 = 60$

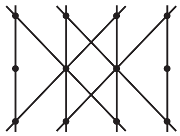
답 ④

19

12개의 점 중에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_{12}C_2 = 66$

(i) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우

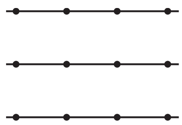


3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

이때 3개의 점을 지나는 직선의 개수는 8이다.

(ii) 한 직선 위에 4개의 점이 있는 경우



4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2 = 6$

이때 4개의 점을 지나는 직선의 개수는 3이다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$66 - 3 \times 8 - 6 \times 3 + \boxed{8+3} = 35$

중복으로 세어진 직선을 모두 뺐으므로 (i), (ii)의 직선 11개를 더해 준다.

답 ①

Level Up 연습문제

p. 296

1

(i) $ba\square a\square a\square a\square a\square a\square a\square a$ 꼴일 때

7개의 □ 중에서 b를 놓을 자리 3곳을 정하면 되므로 그 경우의 수는

${}_7C_3 = 35$

(ii) $a\square a\square a\square a\square a\square a\square a\square a\square$ 꼴일 때

8개의 □ 중에서 b를 놓을 자리 4곳을 정하면 되므로 그 경우의 수는

${}_8C_4 = 70$

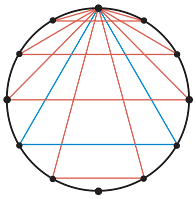
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$35 + 70 = 105$

답 ②

2

오른쪽 그림과 같이 1개의 점을 기준으로 5개의 이등변삼각형이 생기고, 이 중에서 파란색과 같은 정삼각형은 1개 생기므로 정삼각형을 제외한 이등변삼각형의 개수는 4이다.



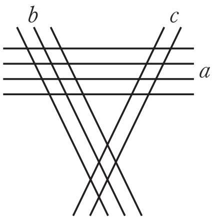
12개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_{12}C_1=12$이고, 파란색과 같은 정삼각형은 총 4개가 생기므로 구하는 이등변삼각형의 개수는

$4\times12+4=52$

답 52

3

오른쪽 그림과 같이 4개의 평행선, 3개의 평행선, 2개의 평행선을 각각 a, b, c라 하면 평행사변형이 아닌 사다리꼴을 만드는 방법은 다음과 같다.



(ⅰ) a에서 2개, b, c에서 각각 1개씩을 택하여 만들 수 있는 사다리꼴의 개수는

${}_4C_2\times{}_3C_1\times{}_2C_1=6\times3\times2=36$

(ⅱ) b에서 2개, a, c에서 각각 1개씩을 택하여 만들 수 있는 사다리꼴의 개수는

${}_3C_2\times{}_4C_1\times{}_2C_1=3\times4\times2=24$

(ⅲ) c에서 2개, a, b에서 각각 1개씩을 택하여 만들 수 있는 사다리꼴의 개수는

${}_2C_2\times{}_4C_1\times{}_3C_1=1\times4\times3=12$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 $p=36+24+12=72$

또 평행사변형을 만드는 방법은 다음과 같다.

(ⅳ) a에서 2개, b에서 2개를 택하여 만들 수 있는 평행사변형의 개수는

${}_4C_2\times{}_3C_2=6\times3=18$

(ⅴ) a에서 2개, c에서 2개를 택하여 만들 수 있는 평행사변형의 개수는

${}_4C_2\times{}_2C_2=6\times1=6$

(ⅵ) b에서 2개, c에서 2개를 택하여 만들 수 있는 평행사변형의 개수는

${}_3C_2\times{}_2C_2=3\times1=3$

(ⅳ)~(ⅵ)에서 $q=18+6+3=27$

$\therefore p-q=72-27=45$

답 45

4

어른들을 두 팀으로 나누는 방법의 수는

${}_3C_1\times{}_2C_2=3\times1=3$

두 팀으로 나눈 어른들과 각각 탑승할 어린이들을 두 팀으로 나누는 방법의 수는

${}_5C_1\times{}_4C_4+{}_5C_2\times{}_3C_3+{}_5C_3\times{}_2C_2$

$=5\times1+10\times1+10\times1$

$=25$

8대 중에서 2대를 선택하는 방법의 수는

${}_8C_2=28$

두 개의 팀이 두 대의 차량에 나누어 탑승하는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$3\times25\times28\times2=4200$이므로

$n=4200 \qquad \therefore \frac{n}{10}=420$

답 420

참고 어른 2명과 탑승할 어린이의 수를 a, 어른 1명과 탑승할 어린이의 수를 b라 하자.
가능한 경우를 순서쌍 (a, b)로 나타내면
$(1, 4), (2, 3), (3, 2)$
따라서 조건을 만족시키도록 어린이들을 두 팀으로 나누는 방법의 수는
${}_5C_1\times{}_4C_4+{}_5C_2\times{}_3C_3+{}_5C_3\times{}_2C_2=25$

1 행렬과 그 연산

확인 문제 p.300~312

01

(1) $(2, 3)$ 성분은 3이고, $(1, 2)$ 성분은 -1이다.

(2) $a_{11}=2,\ a_{12}=-1,\ a_{21}=-2,\ a_{23}=3$

(3) $a_{11}=2,\ a_{22}=5$

답 (1) $(2, 3)$ 성분: 3, $(1, 2)$ 성분: -1
(2) $a_{11}=2,\ a_{12}=-1,\ a_{21}=-2,\ a_{23}=3$
(3) $a_{11}=2,\ a_{22}=5$

02

(가)에서 행렬 A의 모든 성분의 합이 7이므로

$2+a+b+5=7 \quad \therefore a+b=0$ ······ ㉠

(나)에서 $a_{11}-a_{12}+a_{21}-a_{22}=13$이므로

$2-a+b-5=13 \quad \therefore -a+b=16$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-8,\ b=8$

답 $a=-8,\ b=8$

03

(1) $a_{11}=1-3=-2,\ a_{12}=1-6=-5$

$a_{21}=4-3=1,\ a_{22}=4-6=-2$

$\therefore A=\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

(2) $a_{11}=1,\ a_{12}=1$

$a_{21}=1,\ a_{22}=2$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

04

$a_{ij}=\begin{cases} i+2j & (i \ge j) \\ 3 & (i<j) \end{cases}$에 $i=1, 2,\ j=1, 2$를 각각 대입하면

$a_{11}=1+2=3,\ a_{12}=3$

$a_{21}=2+2=4,\ a_{22}=2+4=6$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$3+3+4+6=16$

답 16

05

$a_{11}=1,\ a_{12}=2$

$a_{21}=1,\ a_{22}=2$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

06

$a_{11}=2+(-1)+k=1+k,$

$a_{12}=2+1+k=3+k,$

$a_{13}=2+(-1)+k=1+k$

이때 행렬 A의 제1행의 모든 성분의 합이 8이므로

$a_{11}+a_{12}+a_{13}=(1+k)+(3+k)+(1+k)$

$=5+3k=8$

$\therefore k=1$

따라서 $a_{ij}=2i+(-1)^j+1$이므로

$a_{22}=4+1+1=6$

답 6

07

(1) 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a+1=2,\ b=3,\ -4=c,\ 1=c+5d$

네 식을 동시에 만족시키는 a, b, c, d의 값을 구하면

$a=1,\ b=3,\ c=-4,\ d=1$

(2) 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a+1=3,\ b+2=2b,\ -6=c-1,\ -1=c-d$

네 식을 동시에 만족시키는 a, b, c, d의 값을 구하면

$a=2,\ b=2,\ c=-5,\ d=-4$

답 (1) $a=1,\ b=3,\ c=-4,\ d=1$
(2) $a=2,\ b=2,\ c=-5,\ d=-4$

08

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a-b=1,\ 5=ab,\ 2=cd,\ c+d=5$

이때

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=1^2+2\times5=11$

$c^2+d^2=(c+d)^2-2cd=5^2-2\times2=21$

$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2=11+21=32$

답 32

09

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-2 & 2-5 \\ 3-1 & 4+3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -5 & 0 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4+2 & -3+0 & 2+1 \\ -5+0 & 0+3 & 6-1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ -5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ -5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

10

$A+B=\begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & b \\ 4 & a \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2+1 & a+b \\ 0+4 & 1+a \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & a+b \\ 4 & 1+a \end{pmatrix}$

이때 $A+B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$이므로

$a+b=2$, $1+a=5$

두 식을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=-2$

답 $a=4$, $b=-2$

11

(1) $O-A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

(2) $C-(-B)=C+B$

$=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2+2 & 0+0 \\ 0+1 & -1-2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

(3) $A-(B-C)$

$=A-B+C$

$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1-2-2 & 2-0+0 \\ 3-1+0 & 4+2-1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

12

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}-X=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에서

$X=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2-1-3 & 3-3-0 \\ 5-2-0 & -4-0-1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

13

(1) $3(-2A)=-6A$

$=-6\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -12 & -6 \\ 18 & -6 \end{pmatrix}$

(2) $A-3B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $3A+B-2(A-B)$

$=A+3B$

$=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} -12 & -6 \\ 18 & -6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

14

$A+2B=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a+8 & -4 \\ 3 & -1+2b \end{pmatrix}$

이때 행렬 $A+2B$의 모든 성분의 합이 5이므로

$(a+8)+(-4)+3+(-1+2b)=a+2b+6=5$

$\therefore a+2b=-1$ 답 -1

15

(1) $3X=A-2(B+X)$에서 $3X=A-2B-2X$

$5X=A-2B \qquad \therefore X=\frac{1}{5}A-\frac{2}{5}B$

$$\therefore X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}-\frac{2}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{11}{5} \end{pmatrix}$$

(2) $X-2(A+X)+3B=O$에서

$X-2A-2X+3B=O \qquad \therefore X=-2A+3B$

$$\therefore X=-2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -13 \\ -6 & 17 \end{pmatrix}$$

답 (1) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{11}{5} \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 4 & -13 \\ -6 & 17 \end{pmatrix}$

16

$2(A+B)=3(-X+A)$에서 $2A+2B=-3X+3A$

$3X=A-2B \qquad \therefore X=\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}B$

$$\therefore X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$-1+\left(-\frac{2}{3}\right)+0+\frac{1}{3}+(-1)+\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{8}{3}$

답 $-\frac{8}{3}$

17

$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ...... ㉠

$A-B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$$2A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$을 ㉠에 대입하여 풀면

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

답 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

18

$A-3B=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$ ...... ㉠

$2A-B=\begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ ...... ㉡

㉡$-$㉠$\times 2$를 하면

$$5B=\begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 28 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & -20 \end{pmatrix}$$

$\therefore B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$를 ㉠에 대입하여 풀면

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & -12 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A-B=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A-B$의 모든 성분의 합은

$6+2+2+6=16$

답 16

19

$$xA+yB=x\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -5\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}x & 2x\\ 2x & -x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & y\\ 2y & -5y\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}x & 2x+y\\ 2x+2y & -x-5y\end{pmatrix}$$

즉 $\begin{pmatrix}3 & 7\\ 8 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 2x+y\\ 2x+2y & -x-5y\end{pmatrix}$에서

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3=x$, $7=2x+y$, $8=2x+2y$, $-8=-x-5y$

네 식을 동시에 만족시키는 x, y의 값을 구하면

$x=3$, $y=1$

$\therefore 3x-2y=3\times3-2\times1=7$

답 7

20

$$xA+yB=x\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & a\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2x & x\\ 0 & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y & 0\\ 4y & ay\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2x+y & x\\ 4y & x+ay\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 4 & 7\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x+y=5$, $x=2$, $4y=4$, $x+ay=7$

$\therefore x=2$, $y=1$

$x=2$, $y=1$을 $x+ay=7$에 대입하면

$2+a=7 \qquad \therefore a=5$

답 5

연습문제

p.313~315

1

$a_{11}=1+1=2$, $a_{12}=-a_{21}=-(2+1)=-3$

$a_{21}=2+1=3$, $a_{22}=2+2=4$

$\therefore A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

2

$a_{11}=\dfrac{1-0}{1-0}=1$, $a_{12}=\dfrac{2-0}{1-0}=2$

$a_{21}=\dfrac{1-0}{2-0}=\dfrac{1}{2}$, $a_{22}=\dfrac{2-0}{2-0}=1$

$\therefore A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$

3

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a+\sqrt{2}=1+\sqrt{c}$, $4=b^2$, $b\sqrt{2}=d-2\sqrt{2}$

이때 a, b, c, d가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=1$, $c=2$, $b=-2$, $d=0$

$\therefore a+b+c+d=1+(-2)+2+0=1$

답 1

> **참고** $b=2$이면 $2\sqrt{2}=d-2\sqrt{2}$ $\quad\therefore d=4\sqrt{2}$
> 즉 d가 유리수인 조건에 맞지 않는다.

4

$$A+2B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}4 & -3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & -6\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -4\\ 3 & -5\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A+2B$의 모든 성분의 합은

$7+(-4)+3+(-5)=1$

답 ①

5

$A-2B=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}-2B=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$2B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore B=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & 0\\ -2 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

따라서 행렬 B의 모든 성분의 합은

$\dfrac{5}{2}+0+(-2)+\dfrac{1}{2}=1$

답 ②

6

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a-b=1,\ 3=ab$

$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=1^3+3\times3\times1=10$ 답 ③

7

$2(A+B)-X=3A$에서

$2A+2B-X=3A \qquad \therefore X=-A+2B$ ...... ❶

$\therefore X=-\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1&0\\-3&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&2\\2&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&2\\-1&-1\end{pmatrix}$ ...... ❷

따라서 $a=3,\ b=2,\ c=-1,\ d=-1$이므로

$a^2-b^2+c^2-d^2=9-4+1-1=5$ ...... ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ X를 A와 B에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ A, B를 대입하여 행렬 $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$를 구할 수 있다.	40%
❸ $a^2-b^2+c^2-d^2$의 값을 구할 수 있다.	20%

8

$A+X=B$에서 $X=B-A$

$Y+2B=-A$에서 $Y=-A-2B$

$\therefore X+Y=B-A+(-A-2B)=-2A-B$

$=-2\begin{pmatrix}2&-4\\3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-4&8\\-6&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-5&8\\-6&-5\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $X+Y$의 모든 성분의 합은

$-5+8+(-6)+(-5)=-8$ 답 -8

9

$A-B=\begin{pmatrix}6&4\\-2&2\end{pmatrix}$ ...... ㉠

$2A+B=\begin{pmatrix}3&-1\\2&4\end{pmatrix}$ ...... ㉡

㉠$\times2-$㉡을 하면

$-3B=2\begin{pmatrix}6&4\\-2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-1\\2&4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}12&8\\-4&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-1\\2&4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}9&9\\-6&0\end{pmatrix}$

$\therefore B=\begin{pmatrix}-3&-3\\2&0\end{pmatrix}$

따라서 $a=-3,\ b=-3,\ c=2,\ d=0$이므로

$a+b+c+d=-3+(-3)+2+0=-4$

답 ④

10

Step by Step

좌변에 행렬을 대입하여 정리한다.

↓

두 행렬이 서로 같을 조건을 이용한다.

↓

연립방정식을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

$xA+yB=x\begin{pmatrix}-1&2\\4&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0&3\\2&a\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-x&2x\\4x&x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3y\\2y&ay\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-x&2x+3y\\4x+2y&x+ay\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&0\\-8&11\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-x=3,\ 2x+3y=0,\ 4x+2y=-8,\ x+ay=11$

$\therefore x=-3,\ y=2$

$x=-3,\ y=2$를 $x+ay=11$에 대입하면

$-3+2a=11,\ 2a=14 \qquad \therefore a=7$

$\therefore a+x+y=7+(-3)+2=6$ 답 6

11

(가)에서 $a_{11}=a_{22}=a_{33}=1$

(나)에서

$a_{12}=3,\ a_{13}=3\times2=6$

$a_{21}=3,\ a_{23}=2$

$a_{31}=2\times3=6,\ a_{32}=2$

$\therefore A=\begin{pmatrix}1&3&6\\3&1&2\\6&2&1\end{pmatrix}$ 답 ①

Level Up 연습문제

p.316

1

$X+Y=\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ...... ㉠

$Y+Z=\begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ...... ㉡

$Z+X=\begin{pmatrix} 5 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ...... ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$$2(X+Y+Z)=\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 4 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$\therefore X+Y+Z=\begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ...... ㉣

㉣−㉠을 하면 $Z=\begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

㉣−㉡을 하면 $X=\begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

㉣−㉢을 하면 $Y=\begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\therefore 2X-Y-Z=2\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1 \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $2X-Y-Z$의 모든 성분의 곱은

$1\times 4\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

답 ④

2

$X=mA+nB$에서

$$\begin{pmatrix} x & -5 \\ 3 & y \end{pmatrix}=m\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+n\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x & -5 \\ 3 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4m+n & -3m-n \\ -m+2n & 2m+5n \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x=4m+n$, $-5=-3m-n$, $3=-m+2n$,

$y=2m+5n$

$-3m-n=-5$, $-m+2n=3$을 연립하여 풀면

$m=1$, $n=2$

$m=1$, $n=2$를 $x=4m+n$, $y=2m+5n$에 대입하면

$x=6$, $y=12$ $\quad\therefore x+y=6+12=18$

답 18

3

a_{ij}는 x에 대한 방정식 $x^2+2ix+j^2-1=0$의 서로 다른 실근의 개수이므로

(i) $i=1$, $j=1$일 때, $x^2+2x=0$에서

$x(x+2)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

$\therefore a_{11}=2$

(ii) $i=1$, $j=2$일 때, $x^2+2x+3=0$에서

이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-1\times 3=-2<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 가진다.

$\therefore a_{12}=0$

(iii) $i=2$, $j=1$일 때, $x^2+4x=0$에서

$x(x+4)=0$ $\quad\therefore x=-4$ 또는 $x=0$

$\therefore a_{21}=2$

(iv) $i=2$, $j=2$일 때, $x^2+4x+3=0$에서

$(x+3)(x+1)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$

$\therefore a_{22}=2$

(i)~(iv)에서 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$2+0+2+2=6$

답 6

4

$a_{ij}+a_{ji}=0$에서

$i=j=1$일 때, $a_{11}+a_{11}=0$, $2a_{11}=0$ $\quad\therefore a_{11}=0$

$i=j=2$일 때, $a_{22}+a_{22}=0$, $2a_{22}=0$ $\quad\therefore a_{22}=0$

$i=1$, $j=2$일 때, $a_{12}+a_{21}=0$ $\quad\therefore a_{21}=-a_{12}$

또 $b_{ij}-b_{ji}=0$에서

$i=1$, $j=2$일 때, $b_{12}-b_{21}=0$ $\quad\therefore b_{21}=b_{12}$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$

$$2A-B=2\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -b_{11} & 2a_{12}-b_{12} \\ -2a_{12}-b_{12} & -b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-b_{11}=1$, $2a_{12}-b_{12}=2$, $-2a_{12}-b_{12}=-2$, $-b_{22}=4$

$\therefore a_{12}=1$, $b_{12}=0$, $b_{11}=-1$, $b_{22}=-4$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2 행렬의 곱셈

확인 문제 p.320~332

01

(1) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3\times(-1)+2\times3 & -3\times2+2\times4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 9 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times3+1\times(-1) \\ 1\times3+2\times(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2\times2+(-1)\times1 & 2\times(-1)+(-1)\times(-3) \\ 3\times2+2\times1 & 3\times(-1)+2\times(-3) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} 9 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$

02

이차방정식 $x^2-4x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-1$

이때 $A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\beta & \alpha^2+\beta^2 \\ 0 & \alpha\beta \end{pmatrix}$이므로

행렬 A의 모든 성분의 합은

$\alpha\beta+(\alpha^2+\beta^2)+0+\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2=4^2=16$

답 16

Lecture 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

(1) $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$

(2) $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

03

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$2B=2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore AB-2B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $AB-2B$의 모든 성분의 합은

$2+(-1)+2+3=6$

답 6

04

$AB=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore AB-BA=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

05

$\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & z \\ 3y & -y \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} 4x & -1 \\ xy+3 & -y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & z \\ 3y & -y \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$4x=8$, $-1=z$, $xy+3=3y$

세 식을 동시에 만족시키는 x, y, z의 값을 구하면

$x=2$, $y=3$, $z=-1$

답 $x=2$, $y=3$, $z=-1$

06

$\begin{pmatrix} x & y \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 10 & 6-x \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 2x \\ 4 & x \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} x^2+y^2 & xy \\ 2x+y & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 & 12-2x \\ 6 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 2x \\ 4 & x \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x^2+y^2 & xy \\ 2x+y & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25 & 12 \\ 10 & x \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+y^2=25$, $xy=12$, $2x+y=10$

$2x+y=10$에서 $y=10-2x$ ⋯⋯ ㉠

㉠을 $x^2+y^2=25$에 대입하면 $x^2+(10-2x)^2=25$

$x^2-8x+15=0$, $(x-3)(x-5)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=5$

$x=5$일 때, $y=0$이지만 $xy=12$인 조건에 맞지 않는다.

$x=3$일 때, $y=4$이므로

$x-y=3-4=-1$

답 -1

07

$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$=-A$

$A^4=A^3A=-AA=-A^2$

$A^5=A^4A=-A^2A=-A^3=-(-A)=A$

$\therefore A^5+A^{10}=A^5+(A^5)^2$

$=A+A^2$

$=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

08

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$A^n=A^{n-1}A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}$

따라서 $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$을 만족시키는 자연수 n의 값은 10이다.

답 10

09

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -9 & -14 \end{pmatrix}$

$B^2=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$

$\therefore A^2+AB+B^2$

$=\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -9 & -14 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^2+AB+B^2의 모든 성분의 합은

$9+6+9+18=42$

답 42

10

$A+B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore (A+B)(A-B)=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $(A+B)(A-B)$의 모든 성분의 합은

$1+4+(-4)+8=9$

답 9

11

$(A-B)^2=(A-B)(A-B)$

$=A^2-AB-BA+B^2$

$=(A^2+B^2)-(AB+BA)$

$=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

12

두 행렬 A, B에 대하여 덧셈에 대한 교환법칙이 성립하므로

$A+B=B+A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$\therefore A^2+AB=A(A+B)$

$$=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}10&-4\\14&-4\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A^2+AB의 모든 성분의 합은

$10+(-4)+14+(-4)=16$ 답 16

13

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$에서

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}A\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

$A\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ $\quad\therefore A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

다른 풀이

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$로 놓으면

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ $\quad\therefore a=3, c=-1$

$A\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2b\\2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$ $\quad\therefore b=-1, d=3$

따라서 $A=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

14

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$로 놓으면

$A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a-b\\c-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\quad\therefore a-b=2, c-d=1$

$A^2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$에서 $AA\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2a+b\\2c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ $\quad\therefore 2a+b=4, 2c+d=5$

$a-b=2$, $2a+b=4$를 연립하여 풀면

$a=2, b=0$

$c-d=1$, $2c+d=5$를 연립하여 풀면

$c=2, d=1$

따라서 $A=\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\15\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}12\\15\end{pmatrix}$

15

$A+B=E$에서 $B=E-A$ ······ ㉠

㉠을 $AB=O$에 대입하면 $A(E-A)=O$

$A-A^2=O$ $\quad\therefore A^2=A$

$\therefore A^3=A^2A=AA=A^2=A$

같은 방법으로 $B^3=B$

$\therefore A^3+B^3=A+B=E$ 답 E

16

$A=\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\-3&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-2&1\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$

$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}$

$=A+A^2+E+A+A^2+E+A+A^2+E+A$

$=3(A+A^2+E)+A$

$=3\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&1\\-3&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}+\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}$

$=3\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}$의 모든 성분의 곱은

$1\times(-1)\times3\times(-2)=6$ 답 6

17

〈표 1〉, 〈표 2〉를 각각 행렬 A, B로 나타내면

$$A=\begin{pmatrix} 8000 & 6000 \\ 10000 & 7000 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

이때 9명이 평일과 주말에 각각 과학공원을 관람한다고 할 때 지불해야 하는 금액은 두 행렬의 곱 AB의 성분과 같으므로

$$\begin{aligned} AB&=\begin{pmatrix} 8000 & 6000 \\ 10000 & 7000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 8000\times4+6000\times5 \\ 10000\times4+7000\times5 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 62000 \\ 75000 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 9명이 평일에 과학공원을 관람하는 비용은 62000원, 주말에 과학공원을 관람하는 비용은 75000원이므로 9명이 평일에 과학공원을 관람한다면 주말에 관람하는 것에 비해 절약할 수 있는 금액은

75000−62000=13000(원)

답 13000원

18

케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(2+2)A+\{2\times2-(-1)\times3\}E=O$이므로

$A^2-4A+7E=O$

$\therefore p=-4,\ q=7$

답 $p=-4,\ q=7$

19

케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-\{-2+(-1)\}A+\{(-2)\times(-1)-(-1)\times3\}E=O$

이므로 $A^2+3A+5E=O$

$$\begin{aligned} \therefore A^3+3A^2+3A+E&=A(A^2+3A+5E)-2A+E \\ &=-2A+E \\ &=-2\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

답 $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

연습문제

p.333~336

1

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB+BA&=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 행렬 $AB+BA$의 $(2,\ 1)$ 성분은 -4이다.

답 -4

2

$$\begin{aligned} BAB&=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 79 & -27 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 행렬 BAB의 모든 성분의 합은

$1+(-4)+79+(-27)=49$

답 49

3

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 32 & 16 \\ 64 & 32 \end{pmatrix}$$

이때 $A^3=pA$이므로

$$\begin{pmatrix} 32 & 16 \\ 64 & 32 \end{pmatrix}=p\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2p & p \\ 4p & 2p \end{pmatrix}$$

$\therefore p=16$

답 ④

다른 풀이

케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(2+2)A+(2\times2-1\times4)E=O$

$A^2-4A=O \qquad \therefore A^2=4A$

$\therefore A^3=A^2A=(4A)A=4A^2=4(4A)=16A$

$\therefore p=16$

4

$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$A^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

즉 $a_n=2^n$, $b_n=1$이므로

$a_5=2^5=32$, $b_5=1$

$\therefore a_5+b_5=32+1=33$

답 33

5

$(A+B)^2=(A+B)(A+B)$

$=A^2+AB+BA+B^2$

$=A^2+B^2+2AB$ ($\because AB=BA$)

$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $(A+B)^2$의 모든 성분의 합은

$3+(-2)+(-3)+0=-2$

답 ①

6

ㄱ. $A^7=A^5A^2$에서 $E=EA^2$ $\quad\therefore A^2=E$

$A^5=(A^2)^2A$에서 $E=E^2A$ $\quad\therefore A=E$

ㄴ. $AB\neq BA$이므로

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$

ㄷ. $(kA)B=(Ak)B=A(kB)=k(AB)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

7

케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(0+1)A+\{0\times1-(-1)\times2\}E=O$이므로

$A^2-A+2E=O$

$\therefore A^3-A^2+2A+E=A(A^2-A+2E)+E$

$=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$1+0+0+1=2$

답 2

8

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$에서

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

$A\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

따라서 $p=2$, $q=3$이므로

$p+q=2+3=5$

답 5

9

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$로 놓으면 $a+b+c+d=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 $A^2+A^3=-3A-3E$이므로

$A^4+A^5=A^2(A^2+A^3)$

$=A^2(-3A-3E)$

$=-3A^3-3A^2$

$=-3(A^3+A^2)$

$=-3(-3A-3E)$

$=9(A+E)$

$=9\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$=9\begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^4+A^5의 모든 성분의 합은

$9\{(a+1)+b+c+(d+1)\}=9(a+b+c+d+2)$

$=9\times2$ ($\because$ ㉠)

$=18$

답 18

10

$A\begin{pmatrix} 3a-c \\ 3b-d \end{pmatrix}=A\left\{\begin{pmatrix} 3a \\ 3b \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right\}$

$=A\begin{pmatrix} 3a \\ 3b \end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$=3A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$이므로 ㉠에 대입하면

$$3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은

$7+(-2)=5$

답 ⑤

11

$A+B=3E$에서 $B=3E-A$ ...... ㉠

㉠을 $AB=4B$에 대입하면

$A(3E-A)=4(3E-A)$

$3A-A^2=12E-4A$

$\therefore A^2-7A+12E=O$ ...... ㉡ ...... ❶

$$\begin{aligned}\therefore B^2+B+kE&=(3E-A)^2+(3E-A)+kE\\&=9E-6A+A^2+3E-A+kE\\&=A^2-7A+12E+kE\\&=kE\ (\because ㉡)\\&=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\end{aligned}$$ ...... ❷

이때 행렬 B^2+B+kE의 모든 성분의 합이 10이므로

$2k=10$ $\therefore k=5$ ...... ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 이용하여 (행렬 A에 대한 이차식)$=O$의 꼴로 나타낼 수 있다.	40%
❷ 행렬 B^2+B+kE를 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20%

12

ㄱ. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$일 때

$A^2B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=O$이고

$A\neq -E$이지만

$A\neq O$

ㄴ. $A^2+B=A+B$에서 $A^2=A$

$\therefore A^2B=AB$

ㄷ. $(A+E)(A-E)=E$에서 $A^2-E^2=E$

$A^2-E=E$ $\therefore A^2=2E$

이때 $A^2B=(2E)B=2B$, $BA^2=B(2E)=2B$이므로 $A^2B=BA^2$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

13

Step by Step

$n=1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 행렬 A^n을 구한다.
↓
주어진 식을 덧셈 기호를 기준으로 2개씩 묶어 계산한다.
↓
a, b, c, d의 값을 구한다.

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\therefore A-A^2+A^3-A^4+\cdots+A^{1003}-A^{1004}&=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\\&\quad+\cdots+\begin{pmatrix} 1 & -1003 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1004 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\\&=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{502\text{개}}\\&=502\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 502 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 $a=0$, $b=502$, $c=0$, $d=0$이므로

$a+b+c+d=502$

답 502

14

$A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$로 놓으면

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2z & y+2w \\ 2x+z & 2y+w \end{pmatrix}$$

이때 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}A$의 모든 성분의 합이 27이므로

$(x+2z)+(y+2w)+(2x+z)+(2y+w)=27$

$3x+3y+3z+3w=27$

$\therefore\ x+y+z+w=9$ ······ ㉠

$A+B=2E$에서 $B=2E-A$

$B=2E-A$를 $AB=E$에 대입하면

$A(2E-A)=E,\ 2A-A^2=E$

$\therefore\ A^2=2A-E$ ······ ㉡

이때

$$\begin{aligned} A^3=A^2A&=(2A-E)A\ (\because ㉡) \\ &=2A^2-A \\ &=2(2A-E)-A\ (\because ㉡) \\ &=3A-2E \\ &=3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 3x-2 & 3y \\ 3z & 3w-2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이므로 행렬 A^3의 모든 성분의 합은

$(3x-2)+3y+3z+(3w-2)$

$=3(x+y+z+w)-4$

$=3\times9-4\ (\because ㉠)$

$=23$

답 23

15

$A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$로 놓으면

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x+2y \\ z+2w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad\therefore\ x+2y=2,\ z+2w=3$

$A\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3x+4y \\ 3z+4w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad\therefore\ 3x+4y=4,\ 3z+4w=5$

$x+2y=2,\ 3x+4y=4$를 연립하여 풀면

$x=0,\ y=1$

$z+2w=3,\ 3z+4w=5$를 연립하여 풀면

$z=-1,\ w=2$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

이때 $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$이므로

$A+A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

$\therefore\ (A+A^2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

따라서 $a=5,\ b=7$이므로

$a+b=5+7=12$

답 12

16

1차 조사 결과 찬성과 반대를 행렬로 나타낸 것은

$A=(0.6\quad 0.4)$

2차 조사 결과 1차 조사와 달리 찬반 의견을 바꾼 비율을 행렬로 나타낸 것은

$B=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$

3차 조사 결과 2차 조사와 달리 찬반 의견을 바꾼 비율을 행렬로 나타낸 것은

$C=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$

즉 2차 조사에서 찬성한 사원의 비율과 반대한 사원의 비율을 나타내는 행렬은 AB이고, 3차 조사에서 찬성한 사원의 비율과 반대한 사원의 비율을 나타내는 행렬은 ABC이다.

따라서 3차 조사 결과 전체 사원 중에서 찬성하는 사원들의 비율은 행렬

$ABC=(0.6\quad 0.4)\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$

의 $(1,\ 1)$ 성분과 같다.

답 ①

Level Up 연습문제

p.337

1

이차방정식 $x^2+x-6=0$의 두 근이 $a,\ d$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a+d=-1,\ ad=-6$

이차방정식 $x^2-8x-7=0$의 두 근이 b, c이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$b+c=8, bc=-7$

이때 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

$A^2-(-1)A+\{-6-(-7)\}E=O$

$\therefore A^2+A+E=O$

위 식의 양변에 $A-E$를 곱하면

$(A-E)(A^2+A+E)=O$

$A^3-E=O \qquad \therefore A^3=E$

$$\begin{aligned}\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{10} &= (A+A^2+E)+(A+A^2+E) \\ &\qquad +(A+A^2+E)+A \\ &= A \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$$\begin{aligned}a+b+c+d &= (a+d)+(b+c) \\ &= -1+8=7\end{aligned}$$

답 7

2

a_{11}: 제품 ㉮의 제조 원가

a_{12}: 제품 ㉯의 제조 원가

a_{21}: 제품 ㉮의 판매 가격

a_{22}: 제품 ㉯의 판매 가격

b_{11}: 제품 ㉮의 상반기 판매량

b_{12}: 제품 ㉮의 하반기 판매량

b_{21}: 제품 ㉯의 상반기 판매량

b_{22}: 제품 ㉯의 하반기 판매량

ㄱ. $a=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}$

=(상반기에 판매된 제품 ㉮, ㉯의 제조 원가의 합)

$b=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}$

=(하반기에 판매된 제품 ㉮, ㉯의 제조 원가의 합)

즉 $a+b$는 지난해 1년 동안 판매된 제품의 제조 원가 총액이다.

ㄴ. $c=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}$

=(상반기에 판매된 제품 ㉮, ㉯의 판매 가격의 합)

$d=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}$

=(하반기에 판매된 제품 ㉮, ㉯의 판매 가격의 합)

즉 $c+d$는 지난해 1년 동안 판매된 제품의 판매 총액이다.

ㄷ. (판매 이익금)=(판매 가격)−(제조 원가)이므로

$d-b$는 지난해 하반기에 판매된 제품의 판매 이익금 총액이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④