개념.ZIP

정답과 해설

공통수학 2

1 평면좌표

확인 문제 p. 9 ~ 24

01

$\overline{AB}=7$이므로 $\sqrt{(a+1+2)^2+(4-a)^2}=7$

양변을 제곱하면

$a^2+6a+9+a^2-8a+16=49$, $2a^2-2a-24=0$

$a^2-a-12=0$, $(a+3)(a-4)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=4$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-3+4=1$

답 1

02

세 점 $A(1, -2)$, $B(2, a)$, $C(5, 0)$에서

$\overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(a+2)^2}=\sqrt{a^2+4a+5}$

$\overline{BC}=\sqrt{(5-2)^2+(0-a)^2}=\sqrt{a^2+9}$

이때 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{a^2+4a+5}=\sqrt{a^2+9}$

양변을 제곱하면

$a^2+4a+5=a^2+9$, $4a=4$

$\therefore a=1$

답 1

03

점 P의 좌표를 $(a, 0)$으로 놓으면

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+3)^2+(0-0)^2=(a-1)^2+(0-4)^2$

$a^2+6a+9=a^2-2a+1+16$, $8a=8$

$\therefore a=1$, 즉 $P(1, 0)$

점 Q의 좌표를 $(0, b)$로 놓으면

$\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(0+3)^2+(b-0)^2=(0-1)^2+(b-4)^2$

$9+b^2=1+b^2-8b+16$, $8b=8$

$\therefore b=1$, 즉 $Q(0, 1)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(0-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$

답 $\sqrt{2}$

04

점 P의 좌표를 $(a, 2a+1)$로 놓으면

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-5)^2+(2a+1+3)^2=(a-1)^2+(2a+1-1)^2$

$a^2-10a+25+4a^2+16a+16=a^2-2a+1+4a^2$

$8a=-40 \qquad \therefore a=-5$

$\therefore P(-5, -9)$

답 $(-5, -9)$

05

점 P의 좌표를 $(a, 0)$으로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2&=(a+3)^2+(0-1)^2+(a-1)^2+(0-4)^2\\&=2a^2+4a+27\\&=2(a^2+2a+1-1)+27\\&=2(a+1)^2+25\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a=-1$일 때 최솟값 25를 갖고 그 때의 점 P의 좌표는 $(-1, 0)$이다.

답 $(-1, 0)$

06

점 Q의 좌표를 (a, a)로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2&=(a+1)^2+(a-5)^2+(a-3)^2+(a-1)^2\\&=4a^2-16a+36\\&=4(a^2-4a+4-4)+36\\&=4(a-2)^2+20\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2$은 $a=2$일 때 최솟값 20을 갖고 그때의 점 Q의 좌표는 $(2, 2)$이다.

답 최솟값: 20, $Q(2, 2)$

07

세 점 $A(2, 1)$, $B(1, -1)$, $C(3, -1)$에서

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 구하면

$\overline{AB}=\sqrt{(1-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{5}$

$\overline{BC}=\sqrt{(3-1)^2+(-1+1)^2}=\sqrt{4}=2$

$\overline{CA}=\sqrt{(2-3)^2+(1+1)^2}=\sqrt{5}$

$\therefore \overline{AB}=\overline{CA}$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{CA}$인 이등변삼각형이다.

답 $\overline{AB}=\overline{CA}$인 이등변삼각형

08

세 점 $A(0, -1)$, $B(4, 2)$, $C(a, 3)$에서

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 구하면

$\overline{AB}=\sqrt{(4-0)^2+(2+1)^2}=\sqrt{25}=5$

$\overline{BC}=\sqrt{(a-4)^2+(3-2)^2}=\sqrt{a^2-8a+17}$

$\overline{CA}=\sqrt{(0-a)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{a^2+16}$

이때 삼각형 ABC가 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$이 성립한다.

즉 $25=(a^2-8a+17)+(a^2+16)$이므로

$2a^2-8a+8=0$, $a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0 \qquad \therefore a=2$

답 2

09

세 점 A$(2, 1)$, B$(4, -3)$, C$(5, 0)$에서

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 구하면

$\overline{AB}=\sqrt{(4-2)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\overline{BC}=\sqrt{(5-4)^2+(0+3)^2}=\sqrt{10}$

$\overline{CA}=\sqrt{(2-5)^2+(1-0)^2}=\sqrt{10}$

$\therefore \overline{BC}=\overline{CA}$, $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$

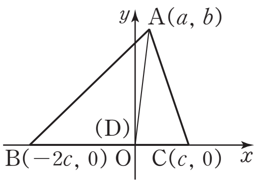
즉 삼각형 ABC는 $\overline{BC}=\overline{CA}$이고 $\overline{AB}$를 빗변으로 하는 $\angle C=90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.

따라서 구하는 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}=5$

답 5

10



오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 생각하면 D$(0, 0)$이다.

A(a, b), B$(-2c, 0)$, C$(c, 0)$ $(c>0)$으로 놓으면

$\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=\{(a+2c)^2+b^2\}+2\{(a-c)^2+b^2\}$

$\qquad\qquad\qquad =3a^2+3b^2+6c^2=3(a^2+b^2+2c^2)$

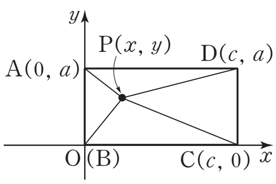
또 $\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2=(a^2+b^2)+2c^2$이므로

$3(\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2)=3(a^2+b^2+2c^2)$

$\therefore \overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2)$

답 풀이 참조

11



오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 생각하면 B$(0, 0)$이다.

P(x, y), A$(0, a)$, C$(c, 0)$, D(c, a) $(a>0, c>0)$로 놓으면

$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\{x^2+(y-a)^2\}+\{(x-c)^2+y^2\}$

$\qquad =x^2+y^2-2ay+a^2+x^2-2cx+c^2+y^2$

$\qquad =2x^2+2y^2-2cx-2ay+a^2+c^2$

$\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=(x^2+y^2)+\{(x-c)^2+(y-a)^2\}$

$\qquad =x^2+y^2+x^2-2cx+c^2+y^2-2ay+a^2$

$\qquad =2x^2+2y^2-2cx-2ay+a^2+c^2$

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$

답 풀이 참조

12

두 점 A$(2, 5)$, B$(6, -3)$에 대하여 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$P\left(\frac{3\times6+1\times2}{3+1}, \frac{3\times(-3)+1\times5}{3+1}\right)$

$\therefore$ P$(5, -1)$

중점 M의 좌표는 $M\left(\frac{2+6}{2}, \frac{5-3}{2}\right)$

$\therefore$ M$(4, 1)$

답 P$(5, -1)$, M$(4, 1)$

13

선분 AB의 삼등분점이 차례로 C, D이므로 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 C, $2:1$로 내분하는 점이 D이다.

점 C의 좌표는 $C\left(\frac{1\times5+2\times(-1)}{1+2}, \frac{1\times3+2\times15}{1+2}\right)$

$\therefore$ C$(1, 11)$

점 D의 좌표는 $D\left(\frac{2\times5+1\times(-1)}{2+1}, \frac{2\times3+1\times15}{2+1}\right)$

$\therefore$ D$(3, 7)$

답 C$(1, 11)$, D$(3, 7)$

14

$2\overline{AP}=\overline{PB}$에서 $\overline{AP}:\overline{PB}=1:2$

즉 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 P이므로 점 P의 좌표는

$P\left(\frac{1\times8+2\times(-1)}{1+2}, \frac{1\times4+2\times(-2)}{1+2}\right)$

$\therefore$ P$(2, 0)$

답 $(2, 0)$

15

두 점 A$(5, a)$, B$(b, 3)$에 대하여 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점이 P이므로

$P\left(\frac{1\times b+3\times5}{1+3}, \frac{1\times3+3\times a}{1+3}\right)$

$\therefore P\left(\frac{b+15}{4}, \frac{3a+3}{4}\right)$

즉 $7=\frac{b+15}{4}$, $-3=\frac{3a+3}{4}$이므로

$a=-5$, $b=13$

$\therefore a+b=-5+13=8$ 답 8

16

두 점 $A(2, -5)$, $B(a, 1)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 P이므로

$P\left(\frac{2\times a+1\times 2}{2+1}, \frac{2\times 1+1\times(-5)}{2+1}\right)$

$\therefore P\left(\frac{2a+2}{3}, -1\right)$

즉 $6=\frac{2a+2}{3}$, $b=-1$이므로

$a=8$, $b=-1$

따라서 $B(8, 1)$, $P(6, -1)$이므로 선분 BP의 중점 M의 좌표는

$M\left(\frac{8+6}{2}, \frac{1-1}{2}\right)$ $\therefore M(7, 0)$

답 $(7, 0)$

17

선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{t\times 2+(1-t)\times(-3)}{t+(1-t)}, \frac{t\times(-5)+(1-t)\times 1}{t+(1-t)}\right)$

$\therefore (5t-3, -6t+1)$

이 점이 제3사분면 위에 있으려면

$5t-3<0$, $-6t+1<0$

$\therefore \frac{1}{6}<t<\frac{3}{5}$ …… ㉠

한편 $t:(1-t)$에서 $t>0$, $1-t>0$이므로

$0<t<1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{6}<t<\frac{3}{5}$

따라서 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{3}{5}$이므로

$ab=\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$ 답 $\frac{1}{10}$

18

선분 AB를 $k:(1-k)$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{k\times 2+(1-k)\times(-4)}{k+(1-k)}, \frac{k\times 3+(1-k)\times(-1)}{k+(1-k)}\right)$

$\therefore (6k-4, 4k-1)$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$6k-4<0$, $4k-1>0$

$\therefore \frac{1}{4}<k<\frac{2}{3}$ …… ㉠

한편 $k:(1-k)$에서 $k>0$, $1-k>0$이므로

$0<k<1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{4}<k<\frac{2}{3}$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{2}{3}$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{2}{3}\div\frac{1}{4}=\frac{2}{3}\times 4=\frac{8}{3}$ 답 $\frac{8}{3}$

19

(1) 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2m-4n}{m+n}, \frac{-m+3n}{m+n}\right)$

이 점이 x축 위의 점이므로

$\frac{-m+3n}{m+n}=0$, $-m+3n=0$

$\therefore m=3n$

이를 비례식으로 나타내면 $m:n=3:1$

따라서 $m=3$, $n=1$이므로

$m-n=3-1=2$

(2) 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2m-4n}{m+n}, \frac{-m+3n}{m+n}\right)$

이 점이 y축 위의 점이므로

$\frac{2m-4n}{m+n}=0$, $2m-4n=0$

$\therefore m=2n$

이를 비례식으로 나타내면 $m:n=2:1$

따라서 $m=2$, $n=1$이므로

$m+n=2+1=3$

답 (1) 2 (2) 3

20

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times 5+1\times(-1)}{2+1}, \frac{2\times a+1\times(-2)}{2+1}\right)$

$\therefore \left(3, \frac{2a-2}{3}\right)$

이 점이 직선 $y=-x+5$ 위의 점이므로

$\frac{2a-2}{3}=-3+5$에서 $2a-2=6$

$2a=8$ $\therefore a=4$ 답 4

21

사각형 ABCD가 평행사변형이므로 두 대각선의 중점이 일치한다.

즉 $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{6+4}{2}\right)=\left(\frac{-4+a}{2}, \frac{5+b}{2}\right)$이므로

$2=-4+a,\ 10=5+b \qquad \therefore a=6,\ b=5$

따라서 D$(6, 5)$이므로 대각선 BD의 길이는

$\sqrt{(6+4)^2+(5-5)^2}=\sqrt{100}=10$ 답 10

22

사각형 ABCD가 마름모이므로 두 대각선의 중점이 일치한다.

즉 $\left(\frac{-4+b}{2}, \frac{0+2}{2}\right)=\left(\frac{-2+a}{2}, \frac{4-2}{2}\right)$이므로

$-4+b=-2+a \qquad \therefore b-a=2$ ...... ㉠

또 이웃한 두 변의 길이가 서로 같으므로

$\overline{AB}=\overline{BC}$에서

$\sqrt{(-2+4)^2+(4-0)^2}=\sqrt{(b+2)^2+(2-4)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4+16=(b+2)^2+4$

$20=b^2+4b+8,\ b^2+4b-12=0$

$(b+6)(b-2)=0 \qquad \therefore b=-6\ (\because b<0)$

$b=-6$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-8$

$\therefore ab=-8\times(-6)=48$ 답 48

23

$\overline{AC}$는 $\angle$A의 이등분선이므로 $\overline{AO} : \overline{AB}=\overline{OC} : \overline{BC}$

$\overline{AO}=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10$

$\overline{AB}=\sqrt{(9-6)^2+(4-8)^2}=\sqrt{25}=5$

$\therefore \overline{OC} : \overline{BC}=\overline{AO} : \overline{AB}=10 : 5=2 : 1$

따라서 점 C는 $\overline{OB}$를 $2 : 1$로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표는

C$\left(\frac{2\times9+1\times0}{2+1}, \frac{2\times4+1\times0}{2+1}\right) \qquad \therefore$ C$\left(6, \frac{8}{3}\right)$

답 $\left(6, \frac{8}{3}\right)$

24

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(2, -1)$이므로

$\frac{1+6+b}{3}=2,\ \frac{a+5-2}{3}=-1$

$\therefore a=-6,\ b=-1$

$\therefore a+b=-6+(-1)=-7$ 답 -7

25

삼각형의 무게중심은 세 중선의 교점이므로 무게중심 G는 $\overline{AM}$을 $2 : 1$로 내분하는 점이다.

즉 점 G의 좌표는 $\left(\frac{2\times1+1\times a}{2+1}, \frac{2\times(-2)+1\times b}{2+1}\right)$

$\therefore$ G$\left(\frac{a+2}{3}, \frac{b-4}{3}\right)$

이때 점 G가 원점과 일치하므로

$\frac{a+2}{3}=0,\ \frac{b-4}{3}=0 \qquad \therefore a=-2,\ b=4$

$\therefore b-a=4-(-2)=6$ 답 6

26

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓으면

$\overline{PA}^2=(x+1)^2+(y-4)^2=x^2+2x+y^2-8y+17$

$\overline{PB}^2=(x+2)^2+(y-3)^2=x^2+4x+y^2-6y+13$

$\overline{PC}^2=(x-9)^2+(y-8)^2=x^2-18x+y^2-16y+145$

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=3x^2-12x+3y^2-30y+175$

$=3(x^2-4x+4)+3(y^2-10y+25)+88$

$=3(x-2)^2+3(y-5)^2+88$

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은 $x=2,\ y=5$일 때 최솟값 88을 갖고 그때의 점 P의 좌표는 $(2, 5)$이다.

답 최솟값: 88, P$(2, 5)$

다른 풀이

삼각형 ABC와 이 삼각형의 내부의 임의의 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소일 때의 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로 점 P의 좌표는

P$\left(\frac{-1-2+9}{3}, \frac{4+3+8}{3}\right) \qquad \therefore$ P$(2, 5)$

즉 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은 P$(2, 5)$일 때 최솟값을 가지므로 최솟값은

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=\{(2+1)^2+(5-4)^2\}+\{(2+2)^2+(5-3)^2\}$
$+\{(2-9)^2+(5-8)^2\}$

$=10+20+58=88$

연습문제

p. 25~27

1

세 점 A$(-1, -2)$, B$(1, 2)$, C$(5, 0)$에서

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 구하면

$\overline{AB}=\sqrt{(1+1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\overline{BC}=\sqrt{(5-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\overline{CA}=\sqrt{(-1-5)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}, \overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}$이고 $\overline{CA}$를 빗변으로 하는 $\angle B=90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.

답 $\angle B=90^\circ$인 직각이등변삼각형

2

선분 AB를 4 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{4\times(-9)+3\times a}{4+3}, \frac{4\times 0+3\times 4}{4+3}\right)$

$\therefore \left(\frac{3a-36}{7}, \frac{12}{7}\right)$

이때 이 점이 y축 위에 있으므로

$\frac{3a-36}{7}=0 \qquad \therefore a=12$

답 ④

3

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(4, 0)$이므로

$\frac{a-1+4}{3}=4, \frac{3+b-5}{3}=0 \qquad \therefore a=9, b=2$

$\therefore a+b=9+2=11$

답 11

4

변 BC의 중점 M의 좌표는

$M\left(\frac{3-2}{2}, \frac{7+3}{2}\right) \qquad \therefore M\left(\frac{1}{2}, 5\right)$

따라서 선분 AM을 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times\frac{1}{2}+1\times 2}{2+1}, \frac{2\times 5+1\times 5}{2+1}\right) \qquad \therefore (1, 5)$

답 $(1, 5)$

다른 풀이

선분 AM을 2 : 1로 내분하는 점은 삼각형 ABC의 무게중심이므로 구하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2+3-2}{3}, \frac{5+7+3}{3}\right) \qquad \therefore (1, 5)$

5

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 선분 AC의 중점의 좌표와 선분 BD의 중점의 좌표가 같다.

즉 $\left(\frac{0+7}{2}, \frac{6+5}{2}\right)=\left(\frac{6+x}{2}, \frac{-2+y}{2}\right)$이므로

$7=6+x, 11=-2+y \qquad \therefore x=1, y=13$

따라서 점 D의 좌표는 $(1, 13)$이다.

답 $(1, 13)$

6

삼각형 ABC의 무게중심, $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$를 각각 1 : 2로 내분하는 점을 이은 삼각형의 무게중심, 세 변 AB, BC, CA의 중점을 이은 삼각형의 무게중심은 모두 일치한다.

따라서 구하는 삼각형의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{1+6+8}{3}, \frac{5+3-2}{3}\right) \qquad \therefore (5, 2)$

답 $(5, 2)$

7

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓으면

$\overline{AP}^2=(x-1)^2+(y-5)^2$
$\quad =x^2-2x+y^2-10y+26$ …… ❶

$\overline{BP}^2=(x-3)^2+(y-3)^2$
$\quad =x^2-6x+y^2-6y+18$ …… ❷

$\therefore \overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2x^2-8x+2y^2-16y+44$
$\quad =2(x^2-4x+4)+2(y^2-8y+16)+4$
$\quad =2(x-2)^2+2(y-4)^2+4$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $x=2, y=4$일 때 최솟값 4를 갖고 그때의 점 P의 좌표는 $(2, 4)$이다. …… ❸

답 $(2, 4)$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 좌표를 (x, y)로 놓고 $\overline{AP}^2$을 x, y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $\overline{BP}^2$을 x, y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	40%

8

$\angle POQ$의 이등분선과 선분 PQ의 교점을 R라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{OP} : \overline{OQ}=\overline{PR} : \overline{QR}$

이때 $\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5, \overline{OQ}=\sqrt{12^2+5^2}=13$이므로

$\overline{PR} : \overline{QR}=\overline{OP} : \overline{OQ}=5 : 13$

즉 점 R는 선분 PQ를 5 : 13으로 내분하는 점이므로 점 R의 x좌표는

$\frac{5\times 12+13\times 3}{5+13}=\frac{11}{2}$

따라서 $a=2, b=11$이므로

$a+b=2+11=13$

답 13

9

$\triangle ABP=3\triangle APC$이므로 $\triangle ABP : \triangle APC=3 : 1$

이때 두 삼각형 ABP와 APC의 높이는 같으므로 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

즉 점 P는 선분 BC를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$P\left(\dfrac{3\times5+1\times1}{3+1}, \dfrac{3\times6+1\times(-2)}{3+1}\right)$ $\therefore$ P$(4, 4)$

답 $(4, 4)$

10

삼각형 ABC의 외심의 좌표를 $P(x, y)$로 놓으면

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(x+2)^2+(y+1)^2=(x-5)^2+y^2$

$x^2+4x+4+y^2+2y+1=x^2-10x+25+y^2$

$14x+2y=20$ $\therefore 7x+y=10$ …… ㉠

$\overline{BP}=\overline{CP}$에서 $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$(x-5)^2+y^2=(x-2)^2+(y-1)^2$

$x^2-10x+25+y^2=x^2-4x+4+y^2-2y+1$

$6x-2y=20$ $\therefore 3x-y=10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2, y=-4$

따라서 삼각형 ABC의 외심의 좌표는 $(2, -4)$이다.

답 $(2, -4)$

11

선분 AC의 중점을 M이라 하면 $\overline{BM}$은 $\angle$B의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AM}:\overline{MC}=1:1$ $\therefore \overline{AB}=\overline{BC}$

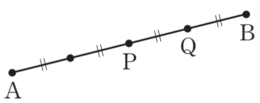
이때 $\overline{AB}=\sqrt{(-3-0)^2+(0-a)^2}=\sqrt{a^2+9}$, $\overline{BC}=4$이므로 $\sqrt{a^2+9}=4$, $a^2+9=16$

$a^2=7$ $\therefore a=\sqrt{7}\ (\because a>0)$

답 ③

12

오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 중점을 $P(1, 2)$, 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점을 $Q(4, 3)$이라 하면 점 Q는 선분 PB의 중점이므로



$\overline{AB}=2\overline{PB}=4\overline{PQ}$

이때 $\overline{PQ}=\sqrt{(4-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$이므로

$\overline{AB}=4\overline{PQ}=4\sqrt{10}$ $\therefore \overline{AB}^2=160$

답 160

13

사각형 OABC가 마름모이므로 두 대각선의 중점이 일치한다.

즉 $\left(\dfrac{b}{2}, \dfrac{c}{2}\right)=\left(\dfrac{a+5}{2}, \dfrac{7+5}{2}\right)$이므로

$b=a+5, c=12$ …… ㉠

또 이웃한 두 변의 길이가 서로 같으므로

$\overline{OA}=\overline{OC}$에서 $\sqrt{a^2+7^2}=\sqrt{5^2+5^2}$

$a^2+49=50, a^2=1$ $\therefore a=1\ (\because a>0)$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=6$

$\therefore a+b+c=1+6+12=19$

답 19

14

두 점 B, C의 좌표를 각각 (a_1, b_1), (a_2, b_2)라 하자.

점 $M(x_1, y_1)$은 변 AB의 중점이므로

$\dfrac{a_1+1}{2}=x_1, \dfrac{b_1+6}{2}=y_1$

$\therefore a_1+1=2x_1, b_1+6=2y_1$

점 $N(x_2, y_2)$는 변 AC의 중점이므로

$\dfrac{a_2+1}{2}=x_2, \dfrac{b_2+6}{2}=y_2$

$\therefore a_2+1=2x_2, b_2+6=2y_2$

이때 $x_1+x_2=2, y_1+y_2=4$이므로

$2(x_1+x_2)=a_1+a_2+2$에서

$a_1+a_2=2$

$2(y_1+y_2)=b_1+b_2+12$에서

$b_1+b_2=-4$

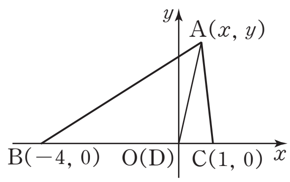
따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{1+a_1+a_2}{3}, \dfrac{6+b_1+b_2}{3}\right)$ $\therefore \left(1, \dfrac{2}{3}\right)$

답 ③

15

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 생각하면 점 D는 원점이다.



$A(x, y), B(-4, 0), C(1, 0)$으로 놓으면

$\overline{AB}^2+4\overline{AC}^2=\{(x+4)^2+y^2\}+4\{(x-1)^2+y^2\}$

$=5x^2+5y^2+20$

$\overline{AD}^2+4\overline{DC}^2=(x^2+y^2)+4\times1^2$

$=x^2+y^2+4$

이때 $\overline{AB}^2+4\overline{AC}^2=k(\overline{AD}^2+4\overline{DC}^2)$이므로

$5x^2+5y^2+20=k(x^2+y^2+4)$

$\therefore k=5$

답 5

16

Step by Step

두 교점의 좌표를 α, β를 사용하여 나타낸다.

↓

근과 계수의 관계를 이용한다.

↓

무게중심의 좌표를 구한다.

이차함수 $y=x^2-8x+1$의 그래프와 직선 $y=2x+6$의 두 교점 A, B의 좌표를 각각 $(\alpha, 2\alpha+6)$, $(\beta, 2\beta+6)$이라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-8x+1=2x+6$, 즉 $x^2-10x-5=0$의 서로 다른 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=10$

이때 점 (a, b)가 삼각형 OAB의 무게중심이므로

$$a=\frac{\alpha+\beta+0}{3}=\frac{10}{3}$$

$$b=\frac{(2\alpha+6)+(2\beta+6)+0}{3}=\frac{2(\alpha+\beta)+12}{3}$$

$$=\frac{2\times10+12}{3}=\frac{32}{3}$$

$$\therefore a+b=\frac{10}{3}+\frac{32}{3}=14$$

답 14

Level Up 연습문제

p. 28

1

$A(4, 0)$, $P(a+1, a)$, $Q(0, b)$, $B(-1, 3)$이라 하면

$\sqrt{(a-3)^2+a^2}=\overline{AP}$, $\sqrt{(b-a)^2+(a+1)^2}=\overline{PQ}$,

$\sqrt{(b-3)^2+1}=\overline{QB}$

$$\therefore \sqrt{(a-3)^2+a^2}+\sqrt{(b-a)^2+(a+1)^2}+\sqrt{(b-3)^2+1}$$

$$=\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$$

$$\geq\overline{AB}=\sqrt{(-1-4)^2+(3-0)^2}$$

$$=\sqrt{34}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{34}$이다.

답 $\sqrt{34}$

2

$P(a, b)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{DP}^2$

$$=\{(a-2)^2+(b-4)^2\}+\{(a+1)^2+(b-2)^2\}$$

$$+\{(a+1)^2+(b+3)^2\}+\{(a-4)^2+(b+2)^2\}$$

$$=4a^2-8a+4b^2-2b+55$$

$$=4(a^2-2a+1)+4\left(b^2-\frac{1}{2}b+\frac{1}{16}\right)+\frac{203}{4}$$

$$=4(a-1)^2+4\left(b-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{203}{4}$$

이때 a, b가 실수이므로 $(a-1)^2\geq0$, $\left(b-\frac{1}{4}\right)^2\geq0$

즉 $a=1$, $b=\frac{1}{4}$일 때, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{DP}^2$의 값은 최소가 된다.

따라서 점 P의 좌표는 $\left(1, \frac{1}{4}\right)$이다.

답 $\left(1, \frac{1}{4}\right)$

3

$A(0, 3)$, $B(-5, -9)$, $C(4, 0)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(-5-0)^2+(-9-3)^2}=13$

$\overline{AC}=\sqrt{(4-0)^2+(0-3)^2}=5$

$\overline{AD}=\overline{AC}=5$ $\quad\therefore \overline{BD}=13-5=8$

선분 AP와 선분 DC가 평행하므로

$\overline{BD}:\overline{AD}=\overline{BC}:\overline{PC}=8:5$

즉 점 C는 선분 BP를 $8:5$로 내분하는 점이다.

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓으면

$$\left(\frac{8\times x+5\times(-5)}{8+5}, \frac{8\times y+5\times(-9)}{8+5}\right)=(4, 0)$$

즉 $\frac{8x-25}{13}=4$, $\frac{8y-45}{13}=0$이므로

$x=\frac{77}{8}$, $y=\frac{45}{8}$ $\quad\therefore P\left(\frac{77}{8}, \frac{45}{8}\right)$

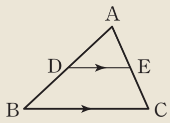
답 ⑤

Lecture 평행선 사이의 선분의 길이의 비

$\triangle$ABC에서 두 점 D, E가 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 위의 점일 때, $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{DE}$이면

$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{BC}:\overline{DE}$

$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$



4

점 G가 삼각형 ABC의 무게중심이므로 $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$는 삼각형 ABC의 세 중선이다.

즉 $\overline{AG}:\overline{GP}=2:1$이므로 $\overline{AG}=2\overline{GP}=12$

마찬가지 방법으로 $\overline{GB}=8$, $\overline{GC}=16$

또 $\overline{BP}=\overline{CP}$이므로 삼각형 GBC에서

$\overline{GB}^2+\overline{GC}^2=2(\overline{GP}^2+\overline{BP}^2)$

$8^2+16^2=2(6^2+\overline{BP}^2)$, $\overline{BP}^2=124$

$\therefore \overline{BP}=2\sqrt{31}$ $(\because \overline{BP}>0)$

$\therefore \overline{BC}=2\overline{BP}=4\sqrt{31}$

답 $4\sqrt{31}$

2 직선의 방정식

특강 확인 문제

p. 31

1

x절편은 직선의 방정식에 $y=0$을 대입했을 때 x의 값이고 y절편은 $x=0$을 대입했을 때 y의 값이다.

(1) 직선 $y=\frac{1}{3}x-4$의 x절편은 12, y절편은 -4

(2) 직선 $y=-3x+6$의 x절편은 2, y절편은 6

(3) 직선 $y=-\frac{1}{2}x+4$의 x절편은 8, y절편은 4

(4) 직선 $y=3x-12$의 x절편은 4, y절편은 -12

(5) 직선 $y=\frac{1}{3}x-2$의 x절편은 6, y절편은 -2

(6) 직선 $y=-\frac{5}{4}x+5$의 x절편은 4, y절편은 5

답 (1) x절편: 12, y절편: -4
(2) x절편: 2, y절편: 6
(3) x절편: 8, y절편: 4
(4) x절편: 4, y절편: -12
(5) x절편: 6, y절편: -2
(6) x절편: 4, y절편: 5

2

(1) (직선의 기울기)$=\frac{1-4}{5-(-2)}=-\frac{3}{7}$

(2) (직선의 기울기)$=\frac{3-1}{4-0}=\frac{1}{2}$

(3) (직선의 기울기)$=\frac{8-2}{3-1}=3$

(4) (직선의 기울기)$=\frac{-2-(-4)}{4-0}=\frac{1}{2}$

(5) (직선의 기울기)$=\frac{3-2}{4-1}=\frac{1}{3}$

(6) (직선의 기울기)$=\frac{-3-0}{0-5}=\frac{3}{5}$

답 (1) $-\frac{3}{7}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 3 (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{1}{3}$ (6) $\frac{3}{5}$

3

(1) 직선 $y=-x+b$의 y절편이 2이므로 $b=2$

$\therefore y=-x+2$

따라서 구하는 x절편은 2이다.

(2) 직선 $y=2x-b$의 x절편이 -4이므로

$0=-8-b \qquad \therefore b=-8$

$\therefore y=2x+8$

따라서 구하는 y절편은 8이다.

(3) $y=\frac{1}{4}x+3$에서 기울기는 $\frac{1}{4}$이므로 x의 값이 4만큼 증가할 때, y의 값은 1만큼 증가한다.

따라서 구하는 y의 값의 증가량은 1이다.

(4) $y=-2x+3$에서 기울기는 -2이므로 x의 값이 3만큼 증가할 때, y의 값은 6만큼 감소한다.

따라서 구하는 y의 값의 증가량은 -6이다.

답 (1) 2 (2) 8 (3) 1 (4) -6

확인 문제

p. 34~53

01

(1) 두 점 $(3, -2)$, $(-1, 6)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3-1}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) \qquad \therefore (1, 2)$

즉 점 $(1, 2)$를 지나고 기울기가 $\frac{1}{3}$인 직선의 방정식은

$y-2=\frac{1}{3}(x-1)$

$\therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

(2) x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 $60°$이므로 직선의 기울기는 $\tan 60°=\sqrt{3}$

즉 점 $(5, -\sqrt{3})$을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선의 방정식은

$y+\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-5)$

$\therefore y=\sqrt{3}x-6\sqrt{3}$

답 (1) $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ (2) $y=\sqrt{3}x-6\sqrt{3}$

02

두 점 $A(-3, 4)$, $B(0, -2)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times0+2\times(-3)}{1+2}, \frac{1\times(-2)+2\times4}{1+2}\right)$

$\therefore (-2, 2)$

즉 점 $(-2, 2)$를 지나고 기울기가 -3인 직선의 방정식은

$y-2=-3(x+2)$

$\therefore y=-3x-4$

답 $y=-3x-4$

03

두 점 $(-2,\ -3)$, $(-1,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-0=\frac{0-(-3)}{-1-(-2)}(x+1)$$

$\therefore\ y=3x+3$

직선 $y=3x+3$이 점 $(a,\ a-3)$을 지나므로

$a-3=3a+3,\ 2a=-6$

$\therefore\ a=-3$

답 -3

04

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-3+3}{2},\ \frac{2-4}{2}\right) \qquad \therefore\ (0,\ -1)$$

즉 두 점 $(0,\ -1)$, $(2,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y+1=\frac{3-(-1)}{2-0}(x-0)$$

$\therefore\ y=2x-1$

따라서 구하는 직선의 x절편은 $\frac{1}{2}$이다.

답 $\frac{1}{2}$

05

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

(직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)

이어야 하므로

$$\frac{(a+1)-a}{3-1}=\frac{5-(a+1)}{(a+2)-3},\ \frac{1}{2}=\frac{-a+4}{a-1}$$

$a-1=2(-a+4),\ a-1=-2a+8$

$3a=9 \qquad \therefore\ a=3$

답 3

06

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

(직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)

이어야 하므로

$$\frac{a-(-2)}{1-(-1)}=\frac{6-a}{(a+1)-1},\ \frac{a+2}{2}=\frac{6-a}{a}$$

$a(a+2)=2(6-a),\ a^2+4a-12=0$

$(a+6)(a-2)=0$

$\therefore\ a=-6$ 또는 $a=2$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-6+2=-4$

답 -4

07

x절편이 3, y절편이 a이므로 직선의 방정식은

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{a}=1$$

이 직선이 점 $(-1,\ 4)$를 지나므로

$$\frac{-1}{3}+\frac{4}{a}=1,\ \frac{4}{a}=\frac{4}{3} \qquad \therefore\ a=3$$

답 3

08

점 A는 직선 $y=3x-6$과 x축이 만나는 점이므로

$A(2,\ 0)$

점 B는 직선 $y=\frac{1}{3}x+2$와 y축이 만나는 점이므로

$B(0,\ 2)$

즉 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

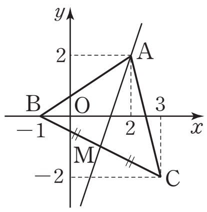
$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1,\ x+y=2$$

$\therefore\ y=-x+2$

답 $y=-x+2$

09

점 A를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점을 지나야 한다.



선분 BC의 중점을 M이라 하면

$$M\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{0-2}{2}\right)$$

$\therefore\ M(1,\ -1)$

즉 두 점 $A(2,\ 2)$, $M(1,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{-1-2}{1-2}(x-2)$$

$\therefore\ y=3x-4$

답 $y=3x-4$

10

정사각형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선은 두 대각선 AC, BD의 교점을 지난다.

정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 M이라 하면

$$M\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{1+5}{2}\right) \qquad \therefore\ M(1,\ 3)$$

직선 $y=2x+a$가 점 $M(1,\ 3)$을 지나므로

$3=2+a \qquad \therefore\ a=1$

답 1

11

$k(x+y+1)+(x-y-3)=0$이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+y+1=0$, $x-y-3=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-2$

따라서 점 P의 좌표는 $(1,\ -2)$이다.

답 $(1,\ -2)$

12

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$k(x+2y-4)+(-3x+y+5)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+2y-4=0$, $-3x+y+5=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=1$

$\therefore$ P$(2,\ 1)$

따라서 점 P와 원점 사이의 거리는

$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

답 $\sqrt{5}$

13

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$k(x+3)+(x+y-2)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+3=0$, $x+y-2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-3$, $y=5$

$\therefore$ P$(-3,\ 5)$

즉 두 점 P$(-3,\ 5)$, $(-1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{1-5}{-1-(-3)}(x+1)$$

$\therefore y=-2x-1$

답 $y=-2x-1$

14

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$3x+y+4+k(x-y+2)=0$ (k는 실수) $\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$3+2+4+k(1-2+2)=0$, $9+k=0$

$\therefore k=-9$

$k=-9$를 ㉠에 대입하면

$3x+y+4-9(x-y+2)=0$

$-6x+10y-14=0$

$\therefore 3x-5y+7=0$

답 $3x-5y+7=0$

15

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$2x+y-3+k(x-2y-4)=0$ (k는 실수) $\cdots\cdots$ ㉠

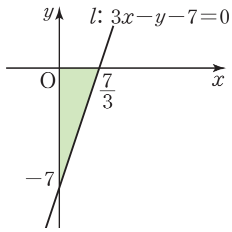
이 직선이 점 $(3,\ 2)$를 지나므로

$6+2-3+k(3-4-4)=0$, $5-5k=0$ $\quad\therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$2x+y-3+(x-2y-4)=0$

$\therefore l: 3x-y-7=0$



오른쪽 그림과 같이 직선 l과 x축, y축으로 이루어진 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{7}{3}\times7=\frac{49}{6}$

답 $\frac{49}{6}$

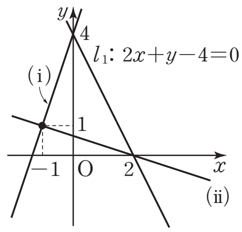
16

l_2: $mx-y+m+1=0$에서 $m(x+1)+(-y+1)=0$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+1=0$, $-y+1=0$ $\quad\therefore x=-1$, $y=1$

즉 직선 l_2는 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 1)$을 지난다.



오른쪽 그림과 같이 직선 l_2가 직선 l_1: $2x+y-4=0$과 제1사분면에서 만나도록 직선 l_2를 움직여 보면

(i) 직선 l_2가 점 $(0,\ 4)$를 지날 때,

$-4+m+1=0$ $\quad\therefore m=3$

(ii) 직선 l_2가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때,

$2m+m+1=0$ $\quad\therefore m=-\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 구하는 실수 m의 값의 범위는

$-\frac{1}{3}<m<3$

답 $-\frac{1}{3}<m<3$

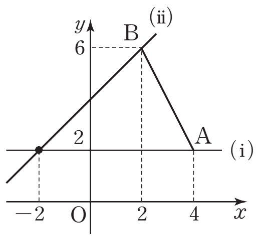
17

$y=a(x+2)+2$에서 $a(x+2)+(-y+2)=0$

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+2=0$, $-y+2=0$ $\quad\therefore x=-2$, $y=2$

즉 직선 $y=a(x+2)+2$는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 2)$를 지난다.



오른쪽 그림과 같이 선분 AB와 직선 $y=a(x+2)+2$가 만나도록 직선을 움직여 보면

(ⅰ) 직선이 점 A(4, 2)를 지날 때,

$2=6a+2 \qquad \therefore a=0$

(ⅱ) 직선이 점 B(2, 6)을 지날 때,

$6=4a+2 \qquad \therefore a=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$0\le a\le 1$

답 $0\le a\le 1$

18

(1) 두 점 (2, 0), (0, −3)을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-3-0}{0-2}=\frac{3}{2}$

즉 기울기가 $\frac{3}{2}$이고 점 (−1, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{3}{2}(x+1) \qquad \therefore y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$

(2) 두 점 (−2, 1), (3, 4)를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{4-1}{3-(-2)}=\frac{3}{5}$

즉 기울기가 $\frac{3}{5}$이고 y절편이 3인 직선의 방정식은

$y=\frac{3}{5}x+3$

답 (1) $y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$ (2) $y=\frac{3}{5}x+3$

19

(1) 직선 $2x+3y-5=0$에서 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$이므로

이 직선에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$-\frac{2}{3}m=-1 \qquad \therefore m=\frac{3}{2}$

즉 기울기가 $\frac{3}{2}$이고 점 (4, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{3}{2}(x-4) \qquad \therefore y=\frac{3}{2}x-5$

(2) 직선 $3y-x+2=0$에서 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$이므로

이 직선에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$\frac{1}{3}m=-1 \qquad \therefore m=-3$

즉 기울기가 −3이고 점 (2, −1)을 지나는 직선의 방정식은

$y+1=-3(x-2) \qquad \therefore y=-3x+5$

답 (1) $y=\frac{3}{2}x-5$ (2) $y=-3x+5$

20

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1-5}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) \qquad \therefore (-2, 0)$

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1-(-1)}{-5-1}=-\frac{1}{3}$

이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 3이다.

즉 기울기가 3이고 점 (−2, 0)을 지나는 직선의 방정식은

$y=3(x+2) \qquad \therefore 3x-y+6=0$

따라서 $a=-1$, $b=6$이므로

$4a-b=-10$

답 −10

21

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{4+0}{2}, \frac{1+3}{2}\right) \qquad \therefore (2, 2)$

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{3-1}{0-4}=-\frac{1}{2}$

이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 2이다.

즉 기울기가 2이고 점 (2, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=2(x-2) \qquad \therefore y=2x-2$

이때 점 $(a, 1)$이 이 직선 위에 있으므로

$1=2a-2 \qquad \therefore a=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

22

(1) 두 직선이 평행하려면 $\frac{1}{k}=\frac{k}{2k+3}\ne\frac{-1}{-3}$

$\frac{1}{k}=\frac{k}{2k+3}$에서 $k^2=2k+3$

$k^2-2k-3=0$, $(k+1)(k-3)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=3$

그런데 $\frac{1}{k}\ne\frac{-1}{-3}$, 즉 $k\ne3$이므로 $k=-1$

(2) 두 직선이 일치하려면 $\frac{1}{k}=\frac{k}{2k+3}=\frac{-1}{-3}$

$\frac{1}{k}=\frac{-1}{-3}$에서 $k=3$

(3) 두 직선이 수직이려면 $1\times k+k(2k+3)=0$

$2k^2+4k=0$, $k(k+2)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=0$

답 (1) −1 (2) 3 (3) −2 또는 0

23

(i) 두 직선이 평행하려면 $\frac{k-1}{2}=\frac{2}{k+2}\neq\frac{3}{6}$

$\frac{k-1}{2}=\frac{2}{k+2}$에서 $(k-1)(k+2)=4$

$k^2+k-6=0$, $(k+3)(k-2)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=2$

그런데 $\frac{k-1}{2}\neq\frac{3}{6}$, 즉 $k\neq2$이므로 $k=-3$

$\therefore \alpha=-3$

(ii) 두 직선이 수직이려면 $(k-1)\times2+2\times(k+2)=0$

$4k+2=0$ $\quad\therefore k=-\frac{1}{2}$

$\therefore \beta=-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $\alpha\beta=-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

24

세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음 세 가지가 있다.

(i) 세 직선이 모두 평행할 때

두 직선 $2x+y=3$, $3x-y=2$의 기울기가 각각 -2, 3이므로 서로 평행하지 않다.

따라서 세 직선이 모두 평행하지는 않다.

(ii) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때

두 직선 $2x+y=3$, $ax+y=0$이 평행한 경우

$\frac{a}{2}=\frac{1}{1}\neq\frac{0}{3}$ $\quad\therefore a=2$

두 직선 $3x-y=2$, $ax+y=0$이 평행한 경우

$\frac{a}{3}=\frac{1}{-1}\neq\frac{0}{2}$ $\quad\therefore a=-3$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때

두 직선 $2x+y=3$, $3x-y=2$의 교점의 좌표는 $(1, 1)$

직선 $ax+y=0$이 점 $(1, 1)$을 지나면 되므로

$a+1=0$ $\quad\therefore a=-1$

(i)~(iii)에서 $a=2$ 또는 $a=-3$ 또는 $a=-1$

답 -3 또는 -1 또는 2

25

서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누려면 세 직선이 모두 평행해야 한다.

따라서 직선 $ax+y+5=0$, 즉 $y=-ax-5$의 기울기가 2이어야 하므로

$-a=2$ $\quad\therefore a=-2$

답 -2

참고 서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누는 경우 ➡ 세 직선이 모두 평행할 때

26

점 $(a, 2)$와 직선 $3x-4y+1=0$ 사이의 거리가 2이므로

$\frac{|3a-8+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$, $|3a-7|=10$

$3a-7=-10$ 또는 $3a-7=10$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{17}{3}$

이때 점 $(a, 2)$가 제2사분면 위의 점이므로 $a<0$

$\therefore a=-1$

답 -1

27

원점을 지나는 직선의 기울기를 m이라 하면

$y=mx$, 즉 $mx-y=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 직선과 점 $(0, 6)$ 사이의 거리가 3이므로

$\frac{|-6|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$, $\sqrt{m^2+1}=2$

양변을 제곱하면 $m^2+1=4$, $m^2=3$ $\quad\therefore m=\pm\sqrt{3}$

$m=\pm\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$\sqrt{3}x-y=0$ 또는 $\sqrt{3}x+y=0$

답 $\sqrt{3}x-y=0$ 또는 $\sqrt{3}x+y=0$

28

두 직선 $x-2y+1=0$, $x-2y-3=0$이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-2y+1=0$ 위의 한 점 $(-1, 0)$과 직선 $x-2y-3=0$ 사이의 거리와 같다.

$\therefore \frac{|-1-2\times0-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

답 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

29

두 직선 $3x+y-6=0$, $3x+y-k=0$이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x+y-6=0$ 위의 한 점 $(0, 6)$과 직선 $3x+y-k=0$ 사이의 거리와 같다.

이때 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\frac{|3\times0+6-k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$, $|k-6|=10$

$k-6=-10$ 또는 $k-6=10$

$\therefore k=-4$ 또는 $k=16$

그런데 $k<0$이므로 $k=-4$

답 -4

30

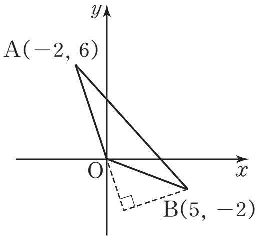
$\overline{OA}=\sqrt{(-2)^2+6^2}=2\sqrt{10}$

직선 OA의 방정식은

$y=-3x$, 즉 $3x+y=0$

점 $B(5, -2)$와 직선 OA

사이의 거리는



$$\frac{|3\times5+(-2)|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{13}{\sqrt{10}}=\frac{13\sqrt{10}}{10}$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times2\sqrt{10}\times\frac{13\sqrt{10}}{10}=13$$

답 13

> **참고** 세 점 $O(0, 0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

31

$\overline{AB}=\sqrt{(4-0)^2+(1-4)^2}=5$

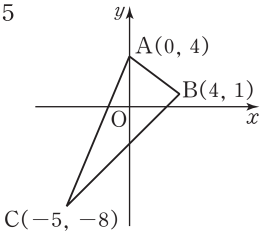
직선 AB의 방정식은

$y=\frac{1-4}{4-0}x+4$, 즉

$3x+4y-16=0$

점 $C(-5, -8)$과

직선 AB 사이의 거리는



$$\frac{|3\times(-5)+4\times(-8)-16|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{63}{5}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times5\times\frac{63}{5}=\frac{63}{2}$$

답 $\frac{63}{2}$

32

각의 이등분선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$라 하면

점 P에서 두 직선 $3x+y-1=0$, $x-3y-2=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3x+y-1|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|x-3y-2|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}$$

$|3x+y-1|=|x-3y-2|$

$3x+y-1=x-3y-2$

또는 $3x+y-1=-(x-3y-2)$

$\therefore 2x+4y+1=0$ 또는 $4x-2y-3=0$

답 $2x+4y+1=0$ 또는 $4x-2y-3=0$

33

각의 이등분선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$라 하면

점 P에서 두 직선 $2x-y+2=0$과 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$, 즉

$x-2y+3=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2x-y+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|x-2y+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$|2x-y+2|=|x-2y+3|$

$2x-y+2=x-2y+3$

또는 $2x-y+2=-(x-2y+3)$

$\therefore x+y-1=0$ 또는 $3x-3y+5=0$

따라서 기울기가 양수인 직선의 방정식은

$3x-3y+5=0$

답 $3x-3y+5=0$

연습문제

p. 54~57

1

두 점 $(-2, 5)$, $(1, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{2-5}{1-(-2)}(x-1)$ $\quad\therefore y=-x+3$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로

$a-b=-1-3=-4$

답 ①

2

두 점 $A(3, 1)$, $B(5, -3)$을 이은 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+5}{2}, \frac{1-3}{2}\right)$ $\quad\therefore (4, -1)$

즉 점 $(4, -1)$을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y+1=-2(x-4)$ $\quad\therefore 2x+y-7=0$

답 ④

3

$3x+y+2=0$에서 $y=-3x-2$이므로

이 직선에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$-3m=-1$ $\quad\therefore m=\frac{1}{3}$

즉 기울기가 $\frac{1}{3}$이고 점 $(3, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+2=\frac{1}{3}(x-3)$ $\quad\therefore x-3y-9=0$

답 ①

4

두 점 $(-2, 2)$, $(3, a)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{a-2}{3-(-2)}(x+2)$

$\therefore y=\frac{a-2}{5}x+\frac{2a+6}{5}$

이 직선이 점 $(0, 4)$를 지나므로

$4=\frac{2a+6}{5}$, $2a+6=20$

$2a=14$ $\quad\therefore a=7$

답 ②

5

두 직선 $ax+y+1=0$, $3x-(b-1)y-2=0$이 수직이려면 $a\times 3-(b-1)=0$

$3a-b+1=0$ $\quad\therefore b=3a+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

두 직선 $ax+y+1=0$, $4x+ay-2=0$이 평행하려면

$\frac{a}{4}=\frac{1}{a}\neq\frac{1}{-2}$

$\frac{a}{4}=\frac{1}{a}$에서 $a^2=4$ $\quad\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

그런데 $\frac{1}{a}\neq\frac{1}{-2}$, 즉 $a\neq-2$이므로 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=7$

$\therefore a+b=2+7=9$

답 ④

6

점 $(a, 3)$과 두 직선 $2x-y+1=0$, $x+2y-1=0$ 사이의 거리가 같으므로

$\frac{|2a-3+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|a+6-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

$|2a-2|=|a+5|$

$2a-2=a+5$ 또는 $2a-2=-a-5$

$\therefore a=7$ 또는 $a=-1$

그런데 $a>0$이므로 $a=7$

답 7

7

ㄱ. $a=0$일 때 l: $y=2$, m: $x=-2$이므로
두 직선 l과 m은 서로 수직이다.

ㄴ. l: $ax-y+a+2=0$에서 $a(x+1)-y+2=0$
이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x+1=0$, $-y+2=0$ $\quad\therefore x=-1, y=2$
따라서 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 2)$를 지난다.

ㄷ. 두 직선 l과 m이 평행하려면 $\frac{a}{4}=\frac{-1}{a}\neq\frac{a+2}{3a+8}$
$\frac{a}{4}=\frac{-1}{a}$에서 $a^2=-4$
이때 실수 a의 값이 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

8

주어진 두 직선이 만나는 점을 지나는 직선의 방정식은

$x-2y+2+k(2x+y-6)=0$ (k는 실수) $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$1+2+k(2-6)=0$, $-4k+3=0$ $\quad\therefore k=\frac{3}{4}$

$k=\frac{3}{4}$을 ㉠에 대입하면

$x-2y+2+\frac{3}{4}(2x+y-6)=0$ $\quad\therefore 2x-y-2=0$

따라서 구하는 y절편은 -2이다.

답 -2

9

$x-2y+1=0$, $-x+y+3=0$을 연립하여 풀면

$x=7, y=4$

즉 두 직선의 교점의 좌표는 $(7, 4)$이다.

직선 $x-3y+6=0$에서 $y=\frac{1}{3}x+2$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$\frac{1}{3}m=-1$ $\quad\therefore m=-3$

즉 기울기가 -3이고 점 $(7, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=-3(x-7)$ $\quad\therefore y=-3x+25$

따라서 구하는 x절편은 $\frac{25}{3}$이다.

답 ⑤

10

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$k(2x-y-5)+x+y-4=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x-y-5=0$, $x+y-4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=1$ $\quad\therefore \mathrm{P}(3, 1)$

즉 기울기가 -3이고 점 $\mathrm{P}(3, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=-3(x-3)$ $\quad\therefore y=-3x+10$

따라서 구하는 y절편은 10이다.

답 10

11

$3x+4y+1=0$에서 $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

이 직선과 평행한 직선의 방정식을 $y=-\frac{3}{4}x+a$로 놓으면 $3x+4y-4a=0$

점 $(1, -1)$과 이 직선 사이의 거리가 2이므로

$\frac{|3\times1+4\times(-1)-4a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$, $|-4a-1|=10$

$-4a-1=10$ 또는 $-4a-1=-10$

$\therefore a=-\frac{11}{4}$ 또는 $a=\frac{9}{4}$

이때 y절편이 양수이므로 $a=\frac{9}{4}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}$

답 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}$

12

직선 $3x+2y-4=0$에 수직인 직선의 방정식이

$2x+ay+b=0$이므로

$3\times2+2\times a=0$

$2a=-6$ $\therefore a=-3$

직선 $2x+ay+b=0$이 점 $(2, 5)$를 지나므로

$4+5a+b=0$ $\therefore b=-5a-4$ ······ ㉠

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $b=11$

$\therefore a+b=-3+11=8$

답 8

13

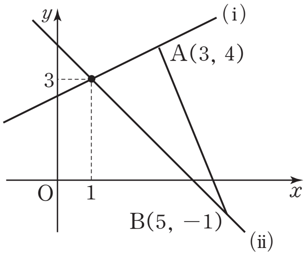
$y=m(x-1)+3$에서 $m(x-1)-y+3=0$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x-1=0$, $-y+3=0$ $\therefore x=1, y=3$

즉 직선 $y=m(x-1)+3$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 3)$을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 선분 AB와 직선 $y=m(x-1)+3$이 만나도록 직선을 움직여 보면



(i) 직선이 점 A(3, 4)를 지날 때,

$4=2m+3$ $\therefore m=\frac{1}{2}$

(ii) 직선이 점 B(5, −1)을 지날 때,

$-1=4m+3$ $\therefore m=-1$

(i), (ii)에서 실수 m의 값의 범위는 $-1\le m\le\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로

$\alpha-2\beta=-1-2\times\frac{1}{2}=-2$

답 ①

14

세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음 세 가지가 있다.

(i) 세 직선이 모두 평행할 때

두 직선 $2x-y+4=0$, $3x-2y+6=0$의 기울기가 각각 2, $\frac{3}{2}$이므로 서로 평행하지 않다.

따라서 세 직선이 모두 평행하지는 않다.

(ii) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때

두 직선 $2x-y+4=0$, $mx-y+1=0$이 평행한 경우

$\frac{2}{m}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{4}{1}$ $\therefore m=2$

두 직선 $3x-2y+6=0$, $mx-y+1=0$이 평행한 경우

$\frac{3}{m}=\frac{-2}{-1}\neq\frac{6}{1}$ $\therefore m=\frac{3}{2}$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때

두 직선 $2x-y+4=0$, $3x-2y+6=0$의 교점의 좌표는 $(-2, 0)$

직선 $mx-y+1=0$이 점 $(-2, 0)$을 지나면 되므로

$-2m+1=0$ $\therefore m=\frac{1}{2}$

(i)~(iii)에서 $m=2$ 또는 $m=\frac{3}{2}$ 또는 $m=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 모든 상수 m의 값의 곱은

$2\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

답 ③

15

점 $(1, 0)$을 지나는 직선의 방정식을

$y=a(x-1)$로 놓으면 $ax-y-a=0$ ······ ㉠

이때 직선 $(3k+2)x-y+2=0$과 y축의 교점의 좌표가 $(0, 2)$이므로 $x=0$, $y=2$를 ㉠에 대입하면

$-2-a=0$ $\therefore a=-2$

$\therefore -2x-y+2=0$

이 직선과 직선 $(3k+2)x-y+2=0$이 서로 수직이므로

$-2\times(3k+2)+(-1)\times(-1)=0$

$-6k-3=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{2}$

답 ②

16

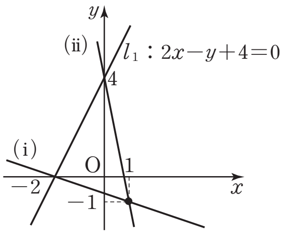
l_2: $mx-y-m-1=0$에서 $m(x-1)-y-1=0$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x-1=0,\ -y-1=0 \qquad \therefore x=1,\ y=-1$

즉 직선 l_2는 m의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ -1)$을 지난다.

직선 l_2가 직선 l_1: $2x-y+4=0$과 제2사분면에서 만나도록 직선 l_2를 움직여 보면 오른쪽 그림과 같다.



(i) 직선 l_2가 점 $(-2,\ 0)$을 지날 때,

$-2m-m-1=0 \qquad \therefore m=-\frac{1}{3}$

(ii) 직선 l_2가 점 $(0,\ 4)$를 지날 때,

$-4-m-1=0 \qquad \therefore m=-5$

(i), (ii)에서 실수 m의 값의 범위는

$-5<m<-\frac{1}{3}$

따라서 정수 m의 값은 $-4,\ -3,\ -2,\ -1$이므로 그 개수는 4이다.

답 ④

17

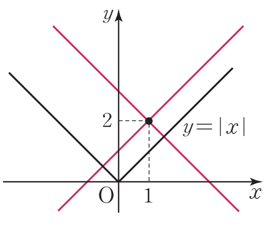
$y=ax+2-a$에서 $a(x-1)-y+2=0$

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x-1=0,\ -y+2=0 \qquad \therefore x=1,\ y=2$

즉 직선 $y=ax+2-a$는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 2)$를 지난다.

오른쪽 그림에서 직선 $y=ax+2-a$가 직선 $y=-x$ 또는 직선 $y=x$와 평행할 때, 즉 $a=-1$ 또는 $a=1$일 때 함수 $y=|x|$의 그래프와 직선 $y=ax+2-a$는 한 점에서 만난다.



따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$-1<a<1$

답 ②

18

두 직선 $ax+2y-1=0,\ 3x+(a-1)y-1=0$이 평행하므로

$\frac{a}{3}=\frac{2}{a-1}\neq\frac{-1}{-1}$

$\frac{a}{3}=\frac{2}{a-1}$에서 $a(a-1)=6$

$a^2-a-6=0,\ (a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

그런데 $\frac{a}{3}\neq\frac{-1}{-1}$, 즉 $a\neq3$이므로 $a=-2$

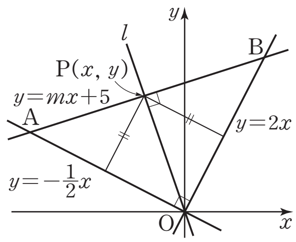
즉 두 직선 사이의 거리는 직선 $-2x+2y-1=0$ 위의 한 점 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$과 직선 $3x-3y-1=0$ 사이의 거리와 같다.

$$\therefore \frac{\left|3\times0-3\times\frac{1}{2}-1\right|}{\sqrt{3^2+(-3)^2}}=\frac{5}{6\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{12}$$

답 $\frac{5\sqrt{2}}{12}$

19

다음 그림과 같이 직선 $y=mx+5$와 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x$, $y=2x$가 만나는 점을 각각 A, B라 하면 두 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$가 서로 수직이므로 세 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$, $y=mx+5$로 둘러싸인 삼각형 AOB는 직각이등변삼각형이다.



$\angle$AOB를 이등분하는 직선 l과 직선 $y=mx+5$는 수직으로 만나고 그 점을 P$(x,\ y)$라 하면 점 P$(x,\ y)$와 두 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$, 즉 $2x-y=0,\ x+2y=0$ 사이의 거리가 같으므로

$\frac{|2x-y|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|x+2y|}{\sqrt{1^2+2^2}},\ |2x-y|=|x+2y|$

$2x-y=x+2y$ 또는 $2x-y=-(x+2y)$

$\therefore y=\frac{1}{3}x$ 또는 $y=-3x$

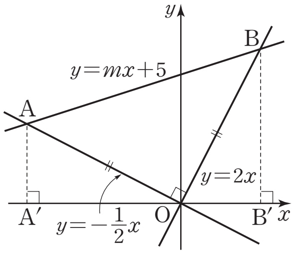
이때 $m>0$이므로 직선 l의 방정식은 $y=-3x$

$\therefore m=\frac{1}{3}$

답 ①

다른 풀이

다음 그림과 같이 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A$'$, B$'$이라 하면 삼각형 AA$'$O와 삼각형 OB$'$B는 서로 합동이다.



이때 점 B의 좌표를 $(a, 2a)$ $(a>0)$로 놓으면

$A(-2a, a)$

$\therefore m=\dfrac{2a-a}{a-(-2a)}=\dfrac{1}{3}$

Level Up 연습문제

p. 58

1

직사각형 A와 정사각형 B의 넓이를 동시에 이등분하려면 두 사각형의 대각선의 교점을 모두 지나야 한다.

직사각형 A의 두 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\dfrac{-6-2}{2}, \dfrac{-3-1}{2}\right) \quad \therefore (-4, -2)$

정사각형 B의 두 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\dfrac{0+2}{2}, \dfrac{0+2}{2}\right) \quad \therefore (1, 1)$

즉 두 점 $(-4, -2)$, $(1, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\dfrac{1-(-2)}{1-(-4)}(x-1) \quad \therefore y=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{2}{5}$

따라서 $a=\dfrac{3}{5}$, $b=\dfrac{2}{5}$이므로

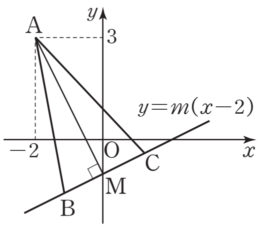
$a-b=\dfrac{3}{5}-\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}$

답 $\dfrac{1}{5}$

2

오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점을 M이라 하면 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로 삼각형 ABC는 이등변삼각형이고

$\overline{BC}\perp\overline{AM}$ …… ㉠



점 M은 직선 $y=m(x-2)$와 y축이 만나는 점이므로 $M(0, -2m)$

이때 직선 AM의 기울기는

$\dfrac{-2m-3}{0-(-2)}=-\dfrac{2m+3}{2}$이므로

$-\dfrac{2m+3}{2}\times m=-1$ ($\because$ ㉠)

$2m^2+3m=2$, $2m^2+3m-2=0$

$(m+2)(2m-1)=0$

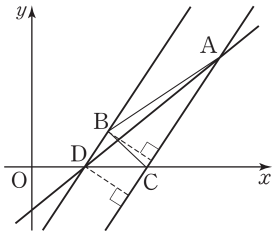
$\therefore m=\dfrac{1}{2}$ ($\because m>0$)

답 ③

3

삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ADC의 넓이가 같으므로 직선 BD와 직선 AC가 평행해야 한다.

즉 두 직선 BD, AC의 기울기가 같아야 하므로



D$(a, 0)$이라 하면 $\dfrac{0-1}{a-2}=\dfrac{0-3}{3-5}$

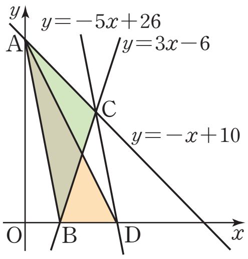
$3(a-2)=-2$, $3a-6=-2 \quad \therefore a=\dfrac{4}{3}$

따라서 직선 AD의 기울기는 $\dfrac{0-3}{\frac{4}{3}-5}=\dfrac{9}{11}$

답 ⑤

4

오른쪽 그림과 같이 x축 위의 점 D$(a, 0)$ $(a>2)$에 대하여 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ABD의 넓이가 같으려면 점 C와 직선 AB 사이의 거리와 점 D와 직선 AB 사이의 거리가 같아야 하므로 점 C를 지나고 직선 AB에 평행한 직선 위에 점 D가 있어야 한다.



직선 $y=-x+10$의 y절편이 10이므로 A$(0, 10)$

직선 $y=3x-6$의 x절편이 2이므로 B$(2, 0)$

직선 AB의 기울기는 $\dfrac{0-10}{2-0}=-5$이고 두 직선 $y=-x+10$, $y=3x-6$의 교점 C의 좌표는 $(4, 6)$이므로 점 C를 지나고 직선 AB에 평행한 직선의 방정식은

$y-6=-5(x-4) \quad \therefore y=-5x+26$

이때 점 D$(a, 0)$이 직선 $y=-5x+26$ 위의 점이므로

$0=-5a+26 \quad \therefore a=\dfrac{26}{5}$

답 ②

3 원의 방정식

확인 문제

p. 62~89

01

(1) 구하는 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y+2)^2=3^2$

$\therefore (x-3)^2+(y+2)^2=9$

(2) 원의 반지름의 길이를 $r\,(r>0)$라 하면 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-1)^2=r^2$

이 원이 점 $(1, 5)$를 지나므로 $x=1$, $y=5$를 대입하면 $(1+2)^2+(5-1)^2=r^2$ $\quad\therefore r^2=25$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-1)^2=25$

답 (1) $(x-3)^2+(y+2)^2=9$ (2) $(x+2)^2+(y-1)^2=25$

02

원의 중심의 좌표를 $(0, b)$, 반지름의 길이를 $r\,(r>0)$라 하면 원의 방정식은 $x^2+(y-b)^2=r^2$

이 원이 두 점 $(1, 5)$, $(1, 3)$을 지나므로

$x=1$, $y=5$를 대입하면 $1+(5-b)^2=r^2$ ⋯⋯ ㉠

$x=1$, $y=3$을 대입하면 $1+(3-b)^2=r^2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=4$, $r^2=2$

따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+(y-4)^2=2$

답 $x^2+(y-4)^2=2$

03

(1) 원의 중심의 좌표는 $\overline{AB}$의 중점의 좌표와 같으므로

$\left(\frac{2-2}{2}, \frac{3-1}{2}\right)$, 즉 $(0, 1)$

원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(-2-2)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+(y-1)^2=8$

(2) 원의 중심의 좌표는 $\overline{AB}$의 중점의 좌표와 같으므로

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{8+10}{2}\right)$, 즉 $(3, 9)$

원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(5-1)^2+(10-8)^2}=\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-9)^2=5$

답 (1) $x^2+(y-1)^2=8$ (2) $(x-3)^2+(y-9)^2=5$

04

원의 중심의 좌표는 $\overline{AB}$의 중점의 좌표와 같으므로

$\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{2-4}{2}\right)$, 즉 $(0, -1)$

원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(3+3)^2+(-4-2)^2}=3\sqrt{2}$

즉 원의 방정식은 $x^2+(y+1)^2=18$

이 원이 점 $(2, a)$를 지나므로 $x=2$, $y=a$를 대입하면

$4+(a+1)^2=18$, $(a+1)^2=14$

$a+1=\pm\sqrt{14}$ $\quad\therefore a=-1\pm\sqrt{14}$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-1-\sqrt{14}+(-1+\sqrt{14})=-2$

답 -2

05

원의 중심의 좌표를 $(a, a+1)$이라 하면 원의 중심에서 두 점 $(1, 0)$, $(1, -2)$에 이르는 거리가 같으므로

$\sqrt{(a-1)^2+(a+1)^2}=\sqrt{(a-1)^2+(a+3)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$2=4a+10$ $\quad\therefore a=-2$

즉 원의 중심의 좌표는 $(-2, -1)$

이때 원의 반지름의 길이는 원의 중심 $(-2, -1)$과 점 $(1, 0)$ 사이의 거리와 같으므로 반지름의 길이는

$\sqrt{(-2-1)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{10}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y+1)^2=10$

답 $(x+2)^2+(y+1)^2=10$

06

원의 중심을 $C(a, -a+2)$라 하면 $\overline{AC}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{(a-6)^2+(-a-1)^2}=\sqrt{(a-8)^2+(-a+3)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$-10a+37=-22a+73$ $\quad\therefore a=3$

즉 원의 중심이 $C(3, -1)$이므로 반지름의 길이는

$\overline{AC}=\sqrt{(3-6)^2+(-1-3)^2}=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+1)^2=25$

답 $(x-3)^2+(y+1)^2=25$

07

$x^2+y^2+2x+ay-6=0$에서

$(x^2+2x+1)+\left(y^2+ay+\frac{a^2}{4}\right)=7+\frac{a^2}{4}$

$\therefore (x+1)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=7+\frac{a^2}{4}$

즉 원의 중심의 좌표는 $\left(-1, -\frac{a}{2}\right)$이므로

$-1=b, -\frac{a}{2}=3 \qquad \therefore a=-6, b=-1$

또 반지름의 길이는 $\sqrt{7+\frac{a^2}{4}}$이므로

$r=\sqrt{7+\frac{a^2}{4}}=\sqrt{7+\frac{(-6)^2}{4}}=\sqrt{16}=4$

$\therefore a+b+r=-6+(-1)+4=-3$ 답 -3

08

원의 반지름의 길이를 r라 하면 넓이가 4π이므로

$\pi r^2=4\pi \qquad \therefore r^2=4$

$x^2+y^2+kx-2y+k=0$에서

$\left(x^2+kx+\frac{k^2}{4}\right)+(y^2-2y+1)=\frac{k^2}{4}-k+1$

$\therefore \left(x+\frac{k}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{k^2}{4}-k+1$

즉 $\frac{k^2}{4}-k+1=4$이므로 $k^2-4k-12=0$

$(k+2)(k-6)=0 \qquad \therefore k=-2$ 또는 $k=6$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-2+6=4$

답 4

09

$x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$에서

$\{x^2+2(m-1)x+(m-1)^2\}+(y^2-2my+m^2)$
$=-m^2-2m+3$

$\therefore (x+m-1)^2+(y-m)^2=-m^2-2m+3$

이 방정식이 원을 나타내려면 $-m^2-2m+3>0$

$m^2+2m-3<0, (m+3)(m-1)<0$

$\therefore -3<m<1$

따라서 정수 m의 값은 $-2, -1, 0$이므로 그 개수는 3이다.

답 3

10

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면

세 점 $(0, -3), (-1, 0), (2, 1)$을 지나므로

$9-3B+C=0$ ...... ㉠

$1-A+C=0$ ...... ㉡

$5+2A+B+C=0$ ...... ㉢

㉡에서 $C=A-1$을 ㉠, ㉢에 각각 대입하여 정리하면

$A-3B+8=0$ ...... ㉣

$3A+B+4=0$ ...... ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $A=-2, B=2$

$A=-2$를 ㉡에 대입하여 풀면 $C=-3$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2-2x+2y-3=0$

답 $x^2+y^2-2x+2y-3=0$

11

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면

세 점 $(3, 4), (2, -1), (-3, 0)$을 지나므로

$25+3A+4B+C=0$ ...... ㉠

$5+2A-B+C=0$ ...... ㉡

$9-3A+C=0$ ...... ㉢

㉢에서 $C=3A-9$를 ㉠, ㉡에 각각 대입하여 정리하면

$3A+2B+8=0$ ...... ㉣

$5A-B-4=0$ ...... ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $A=0, B=-4$

$A=0$을 ㉢에 대입하여 풀면 $C=-9$

즉 원의 방정식은 $x^2+y^2-4y-9=0$이므로

$x^2+(y^2-4y+4)=13$

$\therefore x^2+(y-2)^2=13$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(0, 2)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$이므로 $a=0, b=2, r=\sqrt{13}$

$\therefore a+b+r^2=0+2+13=15$ 답 15

12

$x^2+y^2+4x-2y+k=0$에서

$(x^2+4x+4)+(y^2-2y+1)=-k+5$

$\therefore (x+2)^2+(y-1)^2=-k+5$

이 원이 y축에 접하므로 $\sqrt{-k+5}=|-2|=2$

$-k+5=4 \qquad \therefore k=1$ 답 1

13

원의 중심의 좌표를 $(a, a-1)$이라 하면 원이 y축에 접하므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a+1)^2=a^2$

이 원이 점 $(4, 1)$을 지나므로 $(4-a)^2+(2-a)^2=a^2$

$a^2-12a+20=0, (a-2)(a-10)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=10$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 또는 $(x-10)^2+(y-9)^2=100$

답 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 또는 $(x-10)^2+(y-9)^2=100$

14

$x^2+y^2+2x-2y+k=0$에서

$(x^2+2x+1)+(y^2-2y+1)=-k+2$

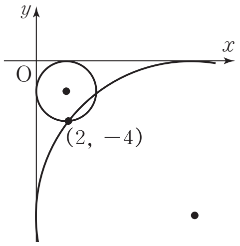
$\therefore (x+1)^2+(y-1)^2=-k+2$

이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로 $\sqrt{-k+2}=1$

$-k+2=1 \qquad \therefore k=1$

답 1

15



점 $(2, -4)$는 제4사분면 위의 점이므로 점 $(2, -4)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원은 오른쪽 그림과 같다. 원의 반지름의 길이를 $r\,(r>0)$라 하면 중심의 좌표는 $(r, -r)$이므로 원의 방정식은

$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

이 원이 점 $(2, -4)$를 지나므로

$(2-r)^2+(-4+r)^2=r^2$

$r^2-12r+20=0$, $(r-2)(r-10)=0$

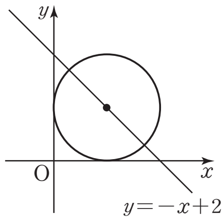
$\therefore r=2$ 또는 $r=10$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(2, -2)$, $(10, -10)$이므로 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(10-2)^2+(-10+2)^2}=8\sqrt{2}$

답 $8\sqrt{2}$

16



중심이 직선 $y=-x+2$ 위에 있고 x축과 y축에 동시에 접하는 원은 오른쪽 그림과 같이 중심이 제1사분면 위에 있어야 한다.

원의 반지름의 길이를 $r\,(r>0)$라 하면 중심의 좌표는 (r, r)이다.

이때 원의 중심이 직선 $y=-x+2$ 위에 있으므로 $x=r$, $y=r$를 대입하면

$r=-r+2 \qquad \therefore r=1$

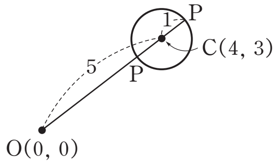
따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times 1^2=\pi$

답 π

17

원 $(x-4)^2+(y-3)^2=1$의 반지름의 길이는 1이고, 원의 중심을 C라 하면 원의 중심 C$(4, 3)$과 원점 O$(0, 0)$ 사이의 거리는 $\overline{OC}=\sqrt{4^2+3^2}=5$



따라서 오른쪽 그림에서 원 위의 임의의 점 P와 원점 O 사이의 거리의 최댓값 M과 최솟값 m은

$M=\overline{OC}+$(반지름의 길이)

$\quad =5+1=6$

$m=\overline{OC}-$(반지름의 길이)$=5-1=4$

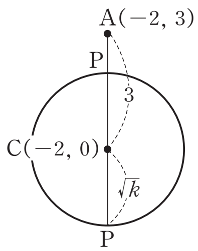
$\therefore M+m=6+4=10$

답 10

18

원의 중심을 C라 하면 원의 중심 C$(-2, 0)$과 점 A$(-2, 3)$ 사이의 거리는

$\overline{AC}=\sqrt{(-2+2)^2+(0-3)^2}=3$



따라서 오른쪽 그림에서 원 위의 임의의 점 P와 점 A 사이의 거리, 즉 $\overline{AP}$의 길이의 최댓값과 최솟값은

(최댓값)$=\overline{AC}+$(반지름의 길이)

$\qquad =3+\sqrt{k}$

(최솟값)$=\overline{AC}-$(반지름의 길이)

$\qquad =3-\sqrt{k}$

즉 $3-\sqrt{k}\le\overline{AP}\le 3+\sqrt{k}$이므로

$3-\sqrt{k}=1$, $3+\sqrt{k}=5$

$\therefore k=4$

답 4

19

$\overline{AP}:\overline{BP}=2:3$에서 $3\overline{AP}=2\overline{BP}$

$\therefore 9\overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$9\{(x-1)^2+y^2\}=4\{(x-6)^2+y^2\}$

$9x^2-18x+9+9y^2=4x^2-48x+144+4y^2$

$5x^2+5y^2+30x-135=0$, $x^2+y^2+6x-27=0$

$\therefore (x+3)^2+y^2=36$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $(-3, 0)$이고 반지름의 길이가 6인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$\pi\times 6^2=36\pi$

답 36π

20

$\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$에서 $2\overline{AP}=3\overline{BP}$

$\therefore 4\overline{AP}^2=9\overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

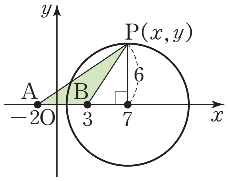
$4\{(x+2)^2+y^2\}=9\{(x-3)^2+y^2\}$

$4x^2+16x+16+4y^2=9x^2-54x+81+9y^2$

$5x^2+5y^2-70x+65=0$, $x^2+y^2-14x+13=0$

$\therefore (x-7)^2+y^2=36$

즉 점 P는 중심이 점 $(7, 0)$이고 반지름의 길이가 6인 원 위의 점이므로 오른쪽 그림과 같이 삼각형 PAB의 넓이는 높이가 원의 반지름의 길이와 같을 때 최대이다.



따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times5\times6=15$

답 15

21

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-2x+10y+1-(x^2+y^2-6x+ay+9)=0$

$\therefore 4x+(10-a)y-8=0$

이 직선과 직선 $y=-2x+1$, 즉 $2x+y-1=0$이 수직이므로 $4\times2+(10-a)\times1=0$

$18-a=0 \qquad \therefore a=18$

답 18

Lecture 두 직선의 위치 관계

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$에 대하여

(1) 평행: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

(2) 수직: $aa'+bb'=0$

22

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+2x+ay-3-(x^2+y^2+2y-9)=0$

$\therefore 2x+(a-2)y+6=0$

이 직선이 점 $(0, -3)$을 지나므로

$-3(a-2)+6=0 \qquad \therefore a=4$

답 4

23

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+5x+y-6+k(x^2+y^2-x-y-2)=0$

$(k\neq-1) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

으로 놓으면 이 원이 점 $(4, 2)$를 지나므로

$16+4+20+2-6+k(16+4-4-2-2)=0$

$36+12k=0 \qquad \therefore k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2+5x+y-6-3(x^2+y^2-x-y-2)=0$

$\therefore x^2+y^2-4x-2y=0$

답 $x^2+y^2-4x-2y=0$

24

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2-4x+6y-12+k(x^2+y^2+4x-8y-28)=0$

$(k\neq-1) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

으로 놓으면

$(k+1)x^2+(k+1)y^2+(4k-4)x$

$+(-8k+6)y-28k-12=0$

이 원의 중심이 y축 위에 있으므로 원의 중심의 x좌표는 0이다.

즉 x의 계수가 0이므로

$4k-4=0 \qquad \therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-4x+6y-12+(x^2+y^2+4x-8y-28)=0$

$x^2+y^2-y-20=0 \qquad \therefore x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{81}{4}$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\frac{9}{2}$이므로 원의 넓이는

$\pi\times\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{81}{4}\pi$

답 $\frac{81}{4}\pi$

25

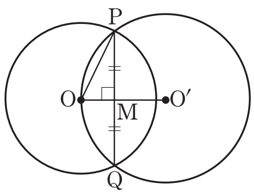
두 원의 중심을 지나는 직선은 공통인 현을 수직이등분한다.

두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-5-(x^2+y^2-3x+4y)=0$

$\therefore 3x-4y-5=0$

오른쪽 그림과 같이 두 원의 교점을 각각 P, Q라 하고 $\overline{PQ}$의 중점을 M이라 하면 $\overline{OM}$은 원 $x^2+y^2=5$의 중심 $O(0, 0)$에서 공통인 현에 이르는 거리이므로



$\overline{OM}=\frac{|-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$

또 $\overline{OP}=$(반지름의 길이)$=\sqrt{5}$이므로

직각삼각형 OMP에서

$\overline{PM}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OM}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$

따라서 구하는 공통인 현의 길이는

$\overline{PQ}=2\overline{PM}=2\times2=4$

답 4

26

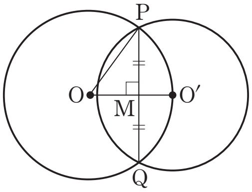
두 원의 중심을 지나는 직선은 공통인 현을 수직이등분한다.

두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-5-\{(x+2)^2+(y+1)^2-4\}=0$

$-4x-2y-6=0 \qquad \therefore 2x+y+3=0$

오른쪽 그림에서 두 원의 교점을 각각 P, Q라 하고 $\overline{PQ}$의 중점을 M이라 하면 $\overline{OM}$은 원 $x^2+y^2=5$의 중심 O$(0, 0)$에서 공통인 현에 이르는 거리이므로



$\overline{OM}=\dfrac{|3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

또 $\overline{OP}$=(반지름의 길이)$=\sqrt{5}$이므로

직각삼각형 OMP에서

$\overline{PM}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OM}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

이때 두 원의 두 교점을 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 경우는 공통인 현이 그 원의 지름일 때이므로 구하는 원의 넓이는

$\pi\times\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2=\dfrac{16}{5}\pi$

답 $\dfrac{16}{5}\pi$

27

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 0)$, $(0, a)$이므로 중심 사이의 거리는 a이다. 또 두 원의 반지름의 길이는 각각 2, 1이다.

(1) 두 원이 내접하려면 중심 사이의 거리가 두 원의 반지름의 길이의 차와 같아야 하므로 $a=2-1=1$

(2) 두 원이 외접하려면 중심 사이의 거리가 두 원의 반지름의 길이의 합과 같아야 하므로 $a=2+1=3$

답 (1) 1 (2) 3

28

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(a, 0)$, $(0, -b)$이므로 중심 사이의 거리는 $\sqrt{a^2+b^2}$이다.

또 두 원의 반지름의 길이는 각각 2, 3이다.

이때 두 원이 외접하려면 중심 사이의 거리가 두 원의 반지름의 길이의 합과 같아야 하므로 $\sqrt{a^2+b^2}=2+3$

$\therefore a^2+b^2=25$

답 25

29

두 원 $(x+3)^2+y^2=4$, $x^2+(y-4)^2=r^2$의 중심의 좌표는 각각 $(-3, 0)$, $(0, 4)$이므로 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(0+3)^2+(4-0)^2}=5$

이때 두 원의 반지름의 길이는 각각 2, r이므로 $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값은 $5+2+r=r+7$

즉 $r+7=12$이므로 $r=5$

답 5

30

두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표는 각각 $(-1, 0)$, $(2, 4)$이므로 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(2+1)^2+(4-0)^2}=5$

이때 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이는 각각 3, r이고 두 원 C_1, C_2가 서로 외접하므로 $3+r=5 \qquad \therefore r=2$

따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값은

$5+3+2=10$

답 10

31

$y=2x+k$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+(2x+k)^2=1 \qquad \therefore 5x^2+4kx+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-1)=-k^2+5$

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$-k^2+5>0$, $k^2<5 \qquad \therefore -\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$

(2) 원과 직선이 접하려면

$-k^2+5=0$, $k^2=5 \qquad \therefore k=\pm\sqrt{5}$

(3) 원과 직선이 만나지 않으려면 $-k^2+5<0$

$k^2>5 \qquad \therefore k<-\sqrt{5}$ 또는 $k>\sqrt{5}$

답 (1) $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$ (2) $k=\pm\sqrt{5}$
(3) $k<-\sqrt{5}$ 또는 $k>\sqrt{5}$

32

원 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$의 중심 $(-1, 2)$와 직선 $2x+y+k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\dfrac{|-2+2+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}$

이때 원과 직선이 만나므로 $d\le$(반지름의 길이)이어야 한다.

즉 $\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}\le 2$이므로 $|k|\le 2\sqrt{5}$

$\therefore\ -2\sqrt{5}\le k\le 2\sqrt{5}$

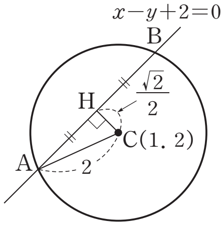
따라서 실수 k의 최댓값과 최솟값은 각각 $2\sqrt{5}$, $-2\sqrt{5}$이므로 그 곱은 $2\sqrt{5}\times(-2\sqrt{5})=-20$

답 -20

33

$x^2+y^2-2x-4y+1=0$에서 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C, 원과 직선이 만나는 두 점을 A, B라 하고, 원의 중심 C$(1, 2)$에서 직선 $x-y+2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

직각삼각형 ACH에서

$$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

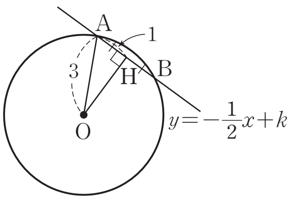
따라서 구하는 현의 길이는

$$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2\times\frac{\sqrt{14}}{2}=\sqrt{14}$$

답 $\sqrt{14}$

34

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O, 원과 직선이 만나는 두 점을 A, B라 하고, 원의 중심 O에서 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+k$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\times 2=1$$

직각삼각형 AOH에서

$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

이때 $\overline{\mathrm{OH}}$의 길이는 원의 중심 O$(0, 0)$과 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+k$, 즉 $x+2y-2k=0$ 사이의 거리이므로

$$\frac{|-2k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|-2k|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{2}$$

$|-2k|=2\sqrt{10}\qquad\therefore\ k=\sqrt{10}\ (\because\ k>0)$

답 $\sqrt{10}$

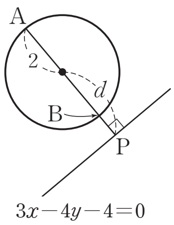
35

$x^2+y^2+2x-4y+1=0$에서 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$

원의 중심 $(-1, 2)$와 직선 $3x-4y-4=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|-3-8-4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-15|}{5}=3$$

따라서 오른쪽 그림에서 원 위의 점과 직선 사이의 거리의



(최댓값)$=\overline{\mathrm{AP}}=d+2$

$=3+2=5$

(최솟값)$=\overline{\mathrm{BP}}=d-2$

$=3-2=1$

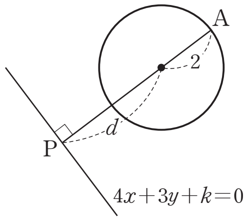
답 최댓값: 5, 최솟값: 1

36

원 $x^2+y^2=4$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $4x+3y+k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|k|}{5}$$

오른쪽 그림에서 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은



$$\overline{\mathrm{AP}}=d+2=\frac{|k|}{5}+2$$

즉 $\dfrac{|k|}{5}+2=6$이므로

$\dfrac{|k|}{5}=4$, $|k|=20$

$\therefore\ k=20\ (\because\ k>0)$

답 20

37

원 $x^2+y^2=5$의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이고, x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 45°인 직선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{5}\sqrt{1^2+1}$

$\therefore\ y=x\pm\sqrt{10}$

답 $y=x\pm\sqrt{10}$

Lecture 직선의 기울기

직선이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 θ일 때

(기울기)$=\tan\theta$

38

직선 $x-3y+6=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+2$에 수직인 직선의 기울기는 -3이다.
접선의 방정식을 $y=-3x+n$이라 하면 원의 중심 $(1, 0)$과 직선 $y=-3x+n$, 즉 $3x+y-n=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{10}$과 같으므로

$\frac{|3-n|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$, $|n-3|=10$

$\therefore n=-7$ 또는 $n=13$

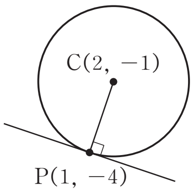
따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-3x-7$ 또는 $y=-3x+13$

답 $y=-3x-7$ 또는 $y=-3x+13$

39

(1) 원의 중심 $C(2, -1)$과 원 위의 점 $P(1, -4)$에 대하여 직선 CP의 기울기는



$\frac{-4-(-1)}{1-2}=3$

이므로 접선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

따라서 점 $(1, -4)$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{3}$인 접선의 방정식은

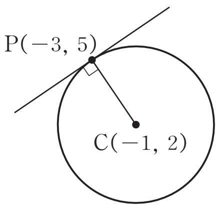
$y+4=-\frac{1}{3}(x-1)$

$\therefore y=-\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}$

(2) $x^2+y^2+2x-4y-8=0$에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=13$

원의 중심 $C(-1, 2)$와 원 위의 점 $P(-3, 5)$에 대하여 직선 CP의 기울기는



$\frac{5-2}{-3-(-1)}=-\frac{3}{2}$

이므로 접선의 기울기는 $\frac{2}{3}$이다.

따라서 점 $(-3, 5)$를 지나고 기울기가 $\frac{2}{3}$인 접선의 방정식은

$y-5=\frac{2}{3}(x+3)$ $\therefore y=\frac{2}{3}x+7$

답 (1) $y=-\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}$ (2) $y=\frac{2}{3}x+7$

다른 풀이

공식을 이용하면

(1) $(1-2)(x-2)+(-4+1)(y+1)=10$

$-x-3y-11=0$ $\therefore y=-\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}$

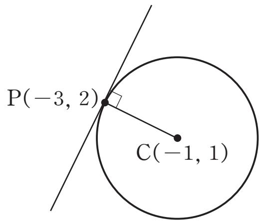
(2) $(-3+1)(x+1)+(5-2)(y-2)=13$

$-2x+3y-21=0$ $\therefore y=\frac{2}{3}x+7$

40

$x^2+y^2+2x-2y-3=0$에서 $(x+1)^2+(y-1)^2=5$

원의 중심 $C(-1, 1)$과 원 위의 점 $P(-3, 2)$에 대하여 직선 CP의 기울기는



$\frac{2-1}{-3-(-1)}=-\frac{1}{2}$

이므로 접선의 기울기는 2이다.

따라서 점 $(-3, 2)$를 지나고 기울기가 2인 접선의 방정식은

$y-2=2(x+3)$ $\therefore y=2x+8$

이 직선이 점 $(a, 10)$을 지나므로

$10=2a+8$ $\therefore a=1$

답 1

41

접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(3, 1)$을 지나는 접선의 방정식은 $y-1=m(x-3)$

$\therefore mx-y-3m+1=0$

원의 중심 $O(0, 0)$과 직선 $mx-y-3m+1=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같으므로

$\frac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|3m-1|=\sqrt{5m^2+5}$

양변을 제곱하면 $9m^2-6m+1=5m^2+5$

$2m^2-3m-2=0$, $(2m+1)(m-2)=0$

$\therefore m=-\frac{1}{2}$ 또는 $m=2$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$-\frac{1}{2}\times 2=-1$

답 -1

42

접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(5, 2)$를 지나는 접선의 방정식은 $y-2=m(x-5)$

$\therefore mx-y-5m+2=0$ ······ ㉠

원의 중심 C$(2, 1)$과 직선 $mx-y-5m+2=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{2}$와 같으므로

$$\frac{|2m-1-5m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2},\ |3m-1|=\sqrt{2m^2+2}$$

양변을 제곱하면 $9m^2-6m+1=2m^2+2$

$7m^2-6m-1=0,\ (7m+1)(m-1)=0$

$\therefore m=-\frac{1}{7}$ 또는 $m=1$

따라서 기울기가 양수인 접선의 방정식은 $m=1$을 ㉠에 대입하면

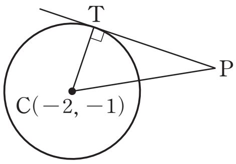
$x-y-5+2=0 \qquad \therefore y=x-3$

답 $y=x-3$

43

$x^2+y^2+4x+2y+1=0$에서 $(x+2)^2+(y+1)^2=4$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하면 C$(-2,\ -1)$이므로



$\overline{\text{CP}}=\sqrt{(2+2)^2+(0+1)^2}$

$=\sqrt{17}$

$\overline{\text{CT}}$는 원의 반지름이므로

$\overline{\text{CT}}=2$

$\overline{\text{CT}}\perp\overline{\text{PT}}$이므로 직각삼각형 CPT에서 피타고라스 정리에 의하여

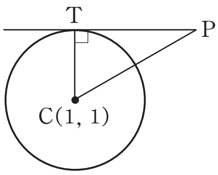
$\overline{\text{PT}}=\sqrt{\overline{\text{CP}}^2-\overline{\text{CT}}^2}=\sqrt{(\sqrt{17})^2-2^2}=\sqrt{13}$

답 $\sqrt{13}$

44

$x^2+y^2-2x-2y-7=0$에서 $(x-1)^2+(y-1)^2=9$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하면 C$(1,\ 1)$이므로



$\overline{\text{CP}}=\sqrt{(5-1)^2+(4-1)^2}$

$=5$

$\overline{\text{CT}}$는 원의 반지름이므로

$\overline{\text{CT}}=3$

$\overline{\text{CT}}\perp\overline{\text{PT}}$이므로 직각삼각형 CPT에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\text{PT}}=\sqrt{\overline{\text{CP}}^2-\overline{\text{CT}}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

답 4

45

$x^2+y^2+6x-2y+6=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

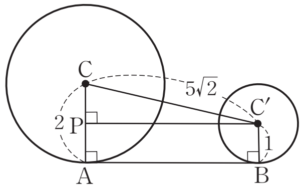
$x^2+y^2-8x+15=0$에서

$(x-4)^2+y^2=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이는 각각 2, 1이고, 중심을 각각 C, C′이라 하면 C$(-3, 1)$, C′$(4, 0)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$\overline{\text{CC}'}=\sqrt{(4+3)^2+(0-1)^2}=5\sqrt{2}$

(i) [그림 1]과 같이 두 원 ㉠, ㉡의 공통외접선의 접점을 각각 A, B라 하고 점 C′에서 $\overline{\text{CA}}$에 내린 수선의 발을 P라 하면



[그림 1]

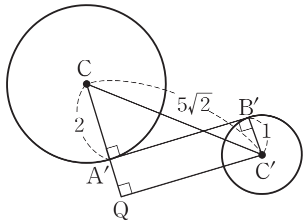
$\overline{\text{AB}}=\overline{\text{PC}'}=\sqrt{\overline{\text{CC}'}^2-\overline{\text{CP}}^2}$

$=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-(2-1)^2}$

$=7$

즉 공통외접선의 길이는 7이다.

(ii) [그림 2]와 같이 두 원 ㉠, ㉡의 공통내접선의 접점을 각각 A′, B′이라 하고 점 C′에서 $\overline{\text{CA}'}$의 연장선에 내린 수선의 발을 Q라 하면



[그림 2]

$\overline{\text{A}'\text{B}'}=\overline{\text{QC}'}=\sqrt{\overline{\text{CC}'}^2-\overline{\text{CQ}}^2}$

$=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-(2+1)^2}$

$=\sqrt{41}$

즉 공통내접선의 길이는 $\sqrt{41}$이다.

답 공통외접선의 길이: 7, 공통내접선의 길이: $\sqrt{41}$

연습문제

p. 90~93

1

두 원의 중심의 좌표는 각각 $(-2,\ 1)$, $(2,\ -2)$이므로 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(2+2)^2+(-2-1)^2}=5$

답 ⑤

2

원의 반지름의 길이를 $r(r>0)$라 하면 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y-3)^2=r^2$

이 원이 원점을 지나므로 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$(-4)^2+(-3)^2=r^2$

$\therefore r^2=25$

즉 원의 방정식은 $(x-4)^2+(y-3)^2=25$이므로

$x^2+y^2-8x-6y=0$

따라서 $a=-8$, $b=-6$, $c=0$이므로

$a+b+c=-8+(-6)+0=-14$

답 ⑤

3

$x^2+y^2+6x-2y-6=0$에서

$(x^2+6x+9)+(y^2-2y+1)=16$

$\therefore (x+3)^2+(y-1)^2=16$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(-3, 1)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{16}=4$이므로 $a=-3$, $b=1$, $r=4$

$\therefore a+b+r=-3+1+4=2$

답 2

4

원의 반지름의 길이를 $r(r>0)$라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a+3)^2=r^2$

이 원이 두 점 $(0, 3)$, $(4, 3)$을 지나므로

$x=0$, $y=3$을 대입하면

$a^2+(-a+6)^2=r^2$ ······ ㉠

$x=4$, $y=3$을 대입하면

$(4-a)^2+(-a+6)^2=r^2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $r^2=20$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

답 ⑤

5

원의 중심의 좌표는 $\overline{AB}$의 중점의 좌표와 같으므로

$\left(\frac{2-4}{2}, \frac{3-5}{2}\right)$, 즉 $(-1, -1)$

$\therefore a=-1$, $b=-1$

원의 반지름의 길이 r는

$r=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(-4-2)^2+(-5-3)^2}=5$

$\therefore a+b+r=-1+(-1)+5=3$

답 3

6

$x^2+y^2-4x-2ay-19=0$에서

$(x^2-4x+4)+(y^2-2ay+a^2)=a^2+23$

$\therefore (x-2)^2+(y-a)^2=a^2+23$

즉 원의 중심의 좌표는 $(2, a)$이므로 $x=2$, $y=a$를 $y=2x+3$에 대입하면 $a=4+3=7$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{a^2+23}=\sqrt{7^2+23}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

이므로 원의 넓이는

$\pi\times(6\sqrt{2})^2=72\pi$

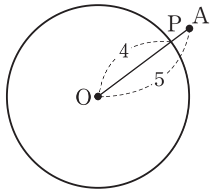
답 72π

7

원 $x^2+y^2=16$의 반지름의 길이는 4이고, 원의 중심은 $O(0, 0)$이므로 점 $O(0, 0)$과 점 $A(4, 3)$ 사이의 거리는

$\overline{OA}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

따라서 오른쪽 그림에서 원 위의 점 P와 점 A 사이의 거리, 즉 $\overline{AP}$의 길이의 최솟값은



$\overline{OA}-$(반지름의 길이)

$=5-4=1$

답 ①

8

원 $(x+2)^2+(y-3)^2=1$의 중심 $(-2, 3)$과 직선 $3x+4y-k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|-6+12-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|6-k|}{5}$

이때 원과 직선이 만나므로 $d\leq$(반지름의 길이)이어야 한다.

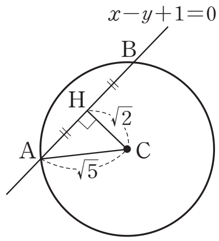
즉 $\frac{|6-k|}{5}\leq 1$이므로 $|6-k|\leq 5$

$-5\leq 6-k\leq 5$ $\quad\therefore 1\leq k\leq 11$

답 ⑤

9

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C, 원과 직선이 만나는 두 점을 A, B라 하고, 원의 중심 $C(1, 0)$에서 직선 $y=x+1$, 즉 $x-y+1=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CH}=\frac{|1-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

직각삼각형 ACH에서

$\overline{AH}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$

따라서 구하는 현의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AH}=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ 답 ⑤

10

원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(3, 1)$에서의 접선의 방정식은

$3x+y=10$ $\quad\therefore y=-3x+10$

이 접선에 평행한 직선의 기울기는 -3이므로

$a=-3$ …… ❶

두 직선 $y=x+7$, $y=2x+3$의 교점의 x좌표는

$x+7=2x+3$에서 $x=4$

$x=4$를 $y=x+7$에 대입하면 $y=4+7=11$

즉 두 직선 $y=x+7$, $y=2x+3$의 교점의 좌표는

$(4, 11)$이다. …… ❷

직선 $y=-3x+b$가 점 $(4, 11)$을 지나므로 $x=4$, $y=11$을 대입하면

$11=-12+b$ $\quad\therefore b=23$ …… ❸

$\therefore a+b=-3+23=20$ …… ❹

답 20

채점 기준	비율
❶ 직선의 기울기 a의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ 주어진 두 직선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

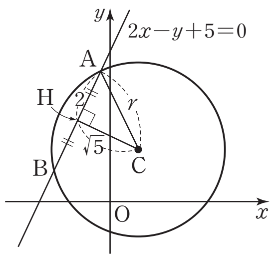
11

$x^2+y^2-2x-4y+k=0$에서

$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)=5-k$

$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=5-k$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 C(1, 2)에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AB}=4$이므로



$\overline{AH}=\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

$=\frac{1}{2}\times4=2$

이때 $\overline{CH}$의 길이는 점 C(1, 2)와 직선 $2x-y+5=0$ 사이의 거리이므로

$\overline{CH}=\frac{|2-2+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{CA}=r$이므로

직각삼각형 CAH에서

$r^2=(\sqrt{5})^2+2^2=9$

이때 $r^2=5-k$이므로 $5-k=9$

$\therefore k=-4$ 답 ①

12

원 $x^2+y^2=10$과 직선 $y=x-2$의 교점의 x좌표는

$x^2+(x-2)^2=10$에서 $2x^2-4x-6=0$

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$x=-1$을 $y=x-2$에 대입하면

$y=-1-2=-3$

$x=3$을 $y=x-2$에 대입하면

$y=3-2=1$

즉 교점의 좌표는 $(-1, -3)$, $(3, 1)$이다.

점 $(-1, -3)$에서의 접선의 방정식은

$-x+(-3)\times y=10$

$\therefore x+3y=-10$ …… ㉠

점 $(3, 1)$에서의 접선의 방정식은

$3x+y=10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=5$, $y=-5$

따라서 두 접선 l_1, l_2의 교점의 좌표는 P$(5, -5)$이므로

$\overline{OP}^2=5^2+(-5)^2=50$

답 50

13

중심이 제1사분면 위에 있고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $r(r>0)$라 하면 중심의 좌표는 (r, r)이므로 원의 방정식은

$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

이 원이 직선 $6x+8y-11=0$에 접하므로 원의 중심과 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

즉 $\frac{|6r+8r-11|}{\sqrt{6^2+8^2}}=r$이므로 $|14r-11|=10r$

$14r-11=10r$ 또는 $14r-11=-10r$

$\therefore r=\frac{11}{4}$ 또는 $r=\frac{11}{24}$

따라서 $r_1=\frac{11}{4}$, $r_2=\frac{11}{24}$ $(\because r_1>r_2)$이므로

$\frac{r_1}{r_2}=\frac{\frac{11}{4}}{\frac{11}{24}}=6$

답 6

14

삼각형 ABC의 외접원은 세 점 A, B, C를 지나는 원과 같으므로 삼각형 ABC의 외접원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하자.
이 원이 세 점 A$(-3,\ -1)$, B$(-2,\ 6)$, C$(4,\ -2)$를 지나므로

$10-3A-B+C=0$ …… ㉠

$40-2A+6B+C=0$ …… ㉡

$20+4A-2B+C=0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$A=-2,\ B=-4,\ C=-20$
즉 원의 방정식은 $x^2+y^2-2x-4y-20=0$이므로
$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)=25$
$\therefore\ (x-1)^2+(y-2)^2=25$
따라서 외심의 좌표는 P$(1,\ 2)$이고 외접원의 반지름의 길이는 5이므로 $a=1,\ b=2,\ r=5$
$\therefore\ abr=1\times2\times5=10$

답 10

15

원 $x^2+y^2=45$ 위의 점 $(3,\ 6)$에서의 접선 l의 방정식은

$3x+6y=45 \qquad \therefore\ y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{15}{2}$

즉 직선 l의 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$이므로 직선 l과 수직인 직선의 기울기는 2이다.
구하는 직선의 방정식을 $y=2x+k$라 하면 이 직선이 원 $x^2+y^2=45$에 접하므로 원의 중심 O$(0,\ 0)$과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

즉 $\dfrac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$이므로 $|k|=15$

$\therefore\ k=-15$ 또는 $k=15$
그런데 직선이 제2사분면을 지나므로
$k=15$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y=2x+15$

답 $y=2x+15$

16

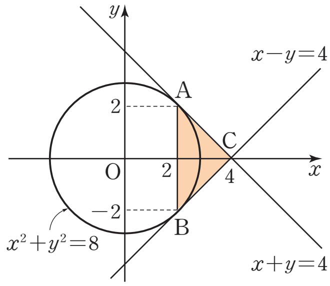
원 $x^2+y^2=8$ 위의 점 A$(2,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$2x+2y=8 \qquad \therefore\ x+y=4$ …… ㉠

원 $x^2+y^2=8$ 위의 점 B$(2,\ -2)$에서의 접선의 방정식은 $2x-2y=8 \qquad \therefore\ x-y=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=4,\ y=0$
$\therefore$ C$(4,\ 0)$
따라서 다음 그림에서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times4\times2=4$

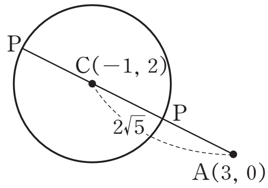


답 ③

17

$x^2+y^2+2x-4y+k=0$에서
$(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)=5-k$
$\therefore\ (x+1)^2+(y-2)^2=5-k$
원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5-k}$이므로 원의 넓이는
$\pi\times(\sqrt{5-k})^2=5\pi,\ 5-k=5 \qquad \therefore\ k=0$
즉 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이다.
이때 $(p-3)^2+q^2$은 두 점 $(p,\ q)$, $(3,\ 0)$ 사이의 거리의 제곱이므로 두 점 $(p,\ q)$, $(3,\ 0)$ 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 구하면 된다.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하고 P$(p,\ q)$, A$(3,\ 0)$이라 하면



$\overline{\text{AC}}$
$=\sqrt{(-1-3)^2+(2-0)^2}$
$=2\sqrt{5}$

따라서 두 점 $(p,\ q)$, $(3,\ 0)$ 사이의 거리, 즉 $\overline{\text{AP}}$의 길이의
(최댓값)$=\overline{\text{AC}}+$(반지름의 길이)$=2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$
(최솟값)$=\overline{\text{AC}}-$(반지름의 길이)$=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$
이므로 $M=(3\sqrt{5})^2=45,\ m=(\sqrt{5})^2=5$

$\therefore\ \dfrac{M}{m}=\dfrac{45}{5}=9$

답 9

18

접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(2,\ 3)$을 지나는 접선의 방정식은 $y-3=m(x-2)$

$\therefore\ mx-y-2m+3=0$ …… ㉠

원의 중심 $(1, -1)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|m+1-2m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$$|-m+4|=2\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$m^2-8m+16=4m^2+4$$

$$\therefore 3m^2+8m-12=0$$

즉 이차방정식 $3m^2+8m-12=0$의 두 근이 두 접선의 기울기이므로 두 접선의 기울기의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{-12}{3}=-4$$

답 -4

19

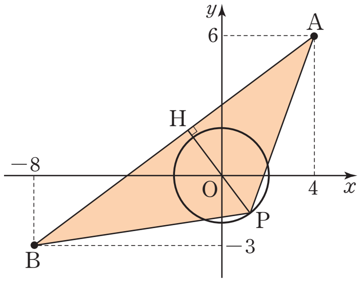
두 점 $A(4, 6)$, $B(-8, -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-6=\frac{-3-6}{-8-4}(x-4),\ y=\frac{3}{4}x+3$$

$$\therefore 3x-4y+12=0$$

다음 그림과 같이 삼각형 PAB의 밑변을 $\overline{AB}$라 하면

$$\overline{AB}=\sqrt{(-8-4)^2+(-3-6)^2}=15$$



이때 점 P와 $\overline{AB}$ 사이의 거리가 최대일 때 삼각형 PAB의 넓이가 최대가 된다.

원의 중심 $O(0, 0)$에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 원의 중심 $O(0, 0)$과 직선 $3x-4y+12=0$ 사이의 거리는

$$\overline{OH}=\frac{|12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{12}{5}$$

즉 점 P와 $\overline{AB}$ 사이의 거리의 최댓값은

$$\overline{OH}+(\text{반지름의 길이})=\frac{12}{5}+2=\frac{22}{5}$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times15\times\frac{22}{5}=33$$

답 ⑤

20

Step by Step

원 C의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구한다.
↓
직각삼각형의 닮음을 이용하여 점 P의 좌표를 구한다.
↓
직선 CP의 기울기를 이용하여 접선의 기울기를 구한다.

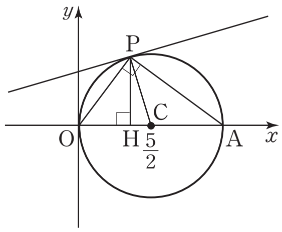
$x^2+y^2-5x=0$에서

$$\left(x^2-5x+\frac{25}{4}\right)+y^2=\frac{25}{4}$$

$$\therefore \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

즉 원 C의 중심의 좌표는 $C\left(\frac{5}{2}, 0\right)$이고 반지름의 길이는 $\frac{5}{2}$이다.

다음 그림과 같이 원 C가 x축과 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



점 P가 원 C 위의 점이고 $\overline{OA}$가 원 C의 지름이므로

$\angle OPA=90°$

$$\overline{OA}=2\times\frac{5}{2}=5$$

(가)에서 $\overline{OP}=3$이므로 직각삼각형 OAP에서

$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

이때 △OAP와 △OPH에서

$\angle OPA=\angle OHP=90°$, $\angle AOP=\angle POH$(공통)

이므로 △OAP∽△OPH

즉 $\overline{OA}:\overline{OP}=\overline{OP}:\overline{OH}$이므로

$5:3=3:\overline{OH}$

$$5\overline{OH}=9 \qquad \therefore \overline{OH}=\frac{9}{5}$$

또 $\overline{OP}:\overline{OH}=\overline{PA}:\overline{HP}$이므로

$$3:\frac{9}{5}=4:\overline{HP}$$

$$3\overline{HP}=\frac{36}{5} \qquad \therefore \overline{HP}=\frac{12}{5}$$

즉 점 P의 좌표는 $\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$이므로 직선 CP의 기울기는

$$\frac{\frac{12}{5}-0}{\frac{9}{5}-\frac{5}{2}}=\frac{\frac{12}{5}}{-\frac{7}{10}}=-\frac{24}{7}$$

이때 점 P에서의 접선과 직선 CP가 서로 수직이므로 점 P에서의 접선의 기울기는 $\frac{7}{24}$이다.

따라서 $p=24$, $q=7$이므로

$p+q=24+7=31$

답 31

Level Up 연습문제

p. 94

1

$(x-1)^2+(y+1)^2=8$에서

$x^2+y^2-2x+2y-6=0$

이므로 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-2x+2y-6)=0$

$\therefore x-y+1=0$

이때 두 원의 교점 A, B는 직선 $x-y+1=0$과 원 $x^2+y^2=4$의 교점과 같다.

$y=x+1$을 $x^2+y^2=4$에 대입하면

$x^2+(x+1)^2=4 \qquad \therefore 2x^2+2x-3=0$

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1$

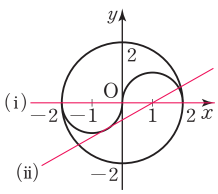
따라서 $\overline{AB}$의 중점의 x좌표는

$\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

2

직선 $y=a(x-1)$은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 서로 다른 다섯 점에서 만나려면 다음 그림의 (i)과 (ii) 사이의 직선이어야 한다.



(i)의 경우는 기울기가 0이므로 $a=0$

(ii)의 경우는 직선 $y=a(x-1)$, 즉 $ax-y-a=0$이 원 $(x+1)^2+y^2=1$에 접할 때이므로 원의 중심 $(-1,\ 0)$과 직선 $ax-y-a=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 1과 같다.

즉 $\frac{|-a-0-a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=1$이므로 $|-2a|=\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하면 $4a^2=a^2+1$

$3a^2=1 \qquad \therefore a^2=\frac{1}{3}$

이때 $a>0$이므로 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 상수 a의 값의 범위는

$0<a<\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 ②

3

삼각형 ABC의 밑변을 $\overline{BC}$라 하면 점 A와 직선 $y=x-4$, 즉 $x-y-4=0$ 사이의 거리가 높이이다.

이때 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x-y-4=0$ 사이의 거리는

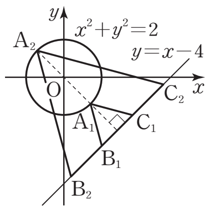
$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

다음 그림에서 삼각형 $A_1B_1C_1$일 때 삼각형 ABC의 넓이는 최소가 되며, 그 높이는

$2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$

또 삼각형 $A_2B_2C_2$일 때 삼각형 ABC의 넓이는 최대가 되며, 그 높이는

$2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$



닮은 두 삼각형의 넓이의 비는 높이의 제곱의 비와 같으므로

$\frac{M}{m}=\frac{(3\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2}=9$

답 9

4 도형의 이동

확인 문제 p. 97~110

01
점 $(4, a)$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(b, -2)$이므로
$4-3=b, a+1=-2$ $\quad\therefore a=-3, b=1$

답 $a=-3, b=1$

02
점 $(1, 4)$를 점 $(-1, 5)$로 옮기는 평행이동을
$(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$이라 하면
$1+m=-1, 4+n=5$ $\quad\therefore m=-2, n=1$
즉 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x-2, y+1)$에 의하여
점 $(a, 3)$이 점 $(2, b)$로 옮겨지므로
$a-2=2, 3+1=b$ $\quad\therefore a=4, b=4$
$\therefore a+b=4+4=8$

답 8

03
점 $(1, -1)$을 점 $(3, -2)$로 옮기는 평행이동을
$(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$이라 하면
$1+m=3, -1+n=-2$ $\quad\therefore m=2, n=-1$
y축 위의 점 P의 좌표를 $(0, a)$라 하면
평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+2, y-1)$에 의하여
점 $P(0, a)$가 옮겨지는 점의 좌표는
$(0+2, a-1)$, 즉 $(2, a-1)$
이 점이 직선 $y=-2x+1$ 위의 점이므로
$a-1=-4+1$ $\quad\therefore a=-2$
따라서 점 P의 좌표는 $(0, -2)$이다.

답 $(0, -2)$

04
직선 $x-3y+2=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$(x-a)-3(y+4)+2=0$
$\therefore x-3y-a-10=0$
이 직선이 점 $(2, -3)$을 지나므로
$2+9-a-10=0$ $\quad\therefore a=1$

답 1

05
점 $(2, -5)$를 점 $(1, -1)$로 옮기는 평행이동을
$(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$이라 하면
$2+m=1, -5+n=-1$ $\quad\therefore m=-1, n=4$
즉 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x-1, y+4)$에 의하여 직선 $x+2y+5=0$이 옮겨지는 직선의 방정식은
$(x+1)+2(y-4)+5=0$
$\therefore x+2y-2=0$

답 $x+2y-2=0$

06
직선 $3x+ay+3=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$3(x-2)+a(y+4)+3=0$
$\therefore 3x+ay+4a-3=0$
이 직선이 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=4$의 넓이를 이등분하므로 원의 중심 $(-1, -1)$을 지나야 한다.
즉 $-3-a+4a-3=0$이므로
$3a=6$ $\quad\therefore a=2$

답 2

07
원 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x+1-1)^2+(y-3-2)^2=4$ $\quad\therefore x^2+(y-5)^2=4$
이 원의 중심 $(0, 5)$가 직선 $y=2x+k$ 위에 있으므로
$5=0+k$ $\quad\therefore k=5$

답 5

08
$x^2+y^2+6x-4y+a=0$에서
$(x+3)^2+(y-2)^2=13-a$
이 원이 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+4, y-3)$에 의하여 옮겨지는 원의 방정식은
$(x-4+3)^2+(y+3-2)^2=13-a$
$\therefore (x-1)^2+(y+1)^2=13-a$
이 원이 원 $(x-1)^2+(y-b)^2=9$와 일치하므로
$1=-b, 13-a=9$ $\quad\therefore a=4, b=-1$
$\therefore ab=4\times(-1)=-4$

답 -4

09
원의 중심은 원의 중심으로 옮겨지므로 점 $(-1, 0)$은 점 $(2, -1)$로 옮겨진다.
평행이동을 $(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$이라 하면

$-1+m=2,\ 0+n=-1 \qquad \therefore m=3,\ n=-1$

즉 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+3, y-1)$에 의하여 직선 $y=2x+6$이 옮겨지는 직선의 방정식은

$y+1=2(x-3)+6 \qquad \therefore y=2x-1$

따라서 $a=2,\ b=-1$이므로

$a+b=2+(-1)=1$

답 1

10

직선 $4x-3y+1=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$4(x-a)-3(y-2)+1=0$

$\therefore 4x-3y-4a+7=0$

이 직선이 원 $(x-5)^2+y^2=1$에 접하므로 원의 중심 $(5, 0)$과 직선 사이의 거리는 반지름의 길이 1과 같다.

즉 $\dfrac{|20-4a+7|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=1$이므로 $|4a-27|=5$

$4a-27=\pm5 \qquad \therefore a=\dfrac{11}{2}$ 또는 $a=8$

따라서 정수 a의 값은 8이다.

답 8

11

원 $x^2+(y-3)^2=5$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y+2-3)^2=5$

$\therefore (x-a)^2+(y-1)^2=5$

이 원이 직선 $2x-y-2=0$에 접하므로 원의 중심 $(a, 1)$과 직선 사이의 거리는 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같다.

즉 $\dfrac{|2a-1-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$이므로 $|2a-3|=5$

$2a-3=\pm5 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=4$

따라서 양수 a의 값은 4이다.

답 4

12

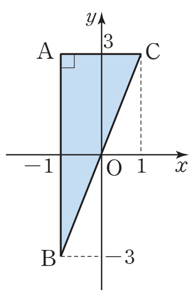
점 $A(-1, 3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$(-1, -3)$

점 $A(-1, 3)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는

$(1, 3)$

따라서 오른쪽 그림에서 삼각형 ABC의 넓이는



$\dfrac{1}{2}\times2\times6=6$

답 6

13

점 $(3, 4)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-3, 4)$

이 점을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-4, 3)$

이 점이 포물선 $y=x^2+ax+7$ 위의 점이므로

$3=16-4a+7$

$4a=20 \qquad \therefore a=5$

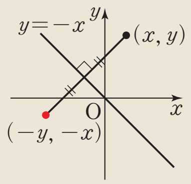
답 5

Lecture 직선 $y=-x$에 대한 점의 대칭이동

점 (x, y)를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점을 (x', y')이라 하면 부호를 각각 바꾸고 x좌표와 y좌표를 서로 바꾸면 되므로

$x'=-y,\ y'=-x$

$\therefore (x', y')=(-y, -x)$



14

점 $(2, -3)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-2, 3)$

이 점을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-3=-(x+2) \qquad \therefore y=-x+1$

따라서 $a=-1,\ b=1$이므로

$a^2+b^2=(-1)^2+1^2=2$

답 2

15

직선 $y=ax+b$를 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=ax+b \qquad \therefore ax+y+b=0$

이 직선이 직선 $2x+y+3=0$과 일치하므로

$a=2,\ b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$

답 5

16

직선 $y=mx+n$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=m(-x)+n \qquad \therefore y=mx-n$

이 직선이 직선 $y=3x+11$과 평행하므로 $m=3$

또 점 $(1, -1)$을 지나므로 $-1=m-n$ …… ㉠

$m=3$을 ㉠에 대입하면

$-1=3-n \qquad \therefore n=4$

답 $m=3,\ n=4$

17

원 $(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=9$를 x축, y축에 대하여 각각 대칭이동한 원 C_1, C_2의 방정식은

C_1: $(x-1)^2+(-y-\sqrt{3})^2=9$

$\therefore$ C_1: $(x-1)^2+(y+\sqrt{3})^2=9$

C_2: $(-x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=9$

$\therefore$ C_2: $(x+1)^2+(y-\sqrt{3})^2=9$

두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표가 각각 $(1, -\sqrt{3})$, $(-1, \sqrt{3})$이므로 구하는 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-1-1)^2+(\sqrt{3}+\sqrt{3})^2}=4$

답 4

18

원 $x^2+y^2+6x-4y-3=0$, 즉 $(x+3)^2+(y-2)^2=16$을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+3)^2+(-y-2)^2=16$

$\therefore$ $(x-3)^2+(y+2)^2=16$

이 원의 중심 $(3, -2)$가 직선 $y=-2x+a$ 위에 있으므로

$-2=-6+a$ $\quad\therefore$ $a=4$

답 4

19

점 $(2, a)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(2+3, a-2)$, 즉 $(5, a-2)$

이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a-2, 5)$

이 점이 점 $(6, b)$와 일치하므로

$a-2=6$, $5=b$ $\quad\therefore$ $a=8$, $b=5$

$\therefore$ $a-b=8-5=3$

답 3

20

직선 $2x-5y+1=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$2(x-2)-5(y-a)+1=0$

$\therefore$ $2x-5y+5a-3=0$

이 직선을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$2x-5(-y)+5a-3=0$

$\therefore$ $2x+5y+5a-3=0$

이 직선이 직선 $2x+by+2=0$과 일치하므로

$5=b$, $5a-3=2$ $\quad\therefore$ $a=1$, $b=5$

$\therefore$ $ab=1\times5=5$

답 5

21

원 $x^2+y^2-4x-6y+12=0$, 즉 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-2)^2+(y-3)^2=1$

$\therefore$ $(x+2)^2+(y-3)^2=1$

이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a+2)^2+(y-b-3)^2=1$

이 원이 원 $x^2+y^2=1$과 일치하므로

$-a+2=0$, $-b-3=0$

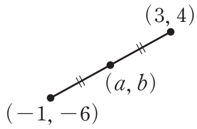
$\therefore$ $a=2$, $b=-3$

$\therefore$ $a+b=2+(-3)=-1$

답 -1

22

오른쪽 그림과 같이 두 점 $(3, 4)$, $(-1, -6)$을 이은 선분의 중점이 점 (a, b)이므로



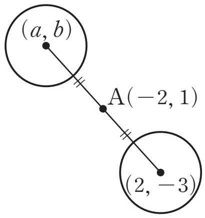
$a=\dfrac{3-1}{2}=1$, $b=\dfrac{4-6}{2}=-1$

$\therefore$ $a+b=1+(-1)=0$

답 0

23

다음 그림과 같이 원 $(x-2)^2+(y+3)^2=9$의 중심 $(2, -3)$을 점 $A(-2, 1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면 점 A는 두 점 $(2, -3)$, (a, b)를 이은 선분의 중점이다.



즉 $\dfrac{2+a}{2}=-2$, $\dfrac{-3+b}{2}=1$이므로

$a=-6$, $b=5$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(-6, 5)$이고 반지름의 길이가 3이므로 구하는 도형의 방정식은

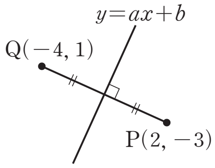
$(x+6)^2+(y-5)^2=9$

답 $(x+6)^2+(y-5)^2=9$

참고 원의 대칭이동은 원의 중심의 대칭이동만 생각한다. 이때 반지름의 길이는 변하지 않는다.

24

(i) 선분 PQ의 중점



$\left(\frac{2-4}{2}, \frac{-3+1}{2}\right)$,

즉 $(-1, -1)$은 직선

$y=ax+b$ 위의 점이므로

$-1=-a+b$

$\therefore a-b=1$ …… ㉠

(ii) 두 점 P, Q를 지나는 직선은 직선 $y=ax+b$와 서로 수직이므로

$\frac{1-(-3)}{-4-2}\times a=-1$ $\qquad\therefore a=\frac{3}{2}$

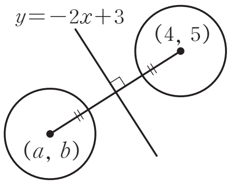
$a=\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$

답 2

25

원 $(x-4)^2+(y-5)^2=9$의 중심 $(4, 5)$를 직선 $y=-2x+3$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면



(i) 두 점 $(4, 5)$, (a, b)를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{4+a}{2}, \frac{5+b}{2}\right)$는 직선 $y=-2x+3$ 위의 점이므로

$\frac{5+b}{2}=-2\times\frac{4+a}{2}+3$

$\therefore 2a+b=-7$ …… ㉠

(ii) 두 점 $(4, 5)$, (a, b)를 지나는 직선은 직선 $y=-2x+3$과 서로 수직이므로

$\frac{b-5}{a-4}\times(-2)=-1$ $\qquad\therefore a-2b=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4, b=1$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(-4, 1)$이고 반지름의 길이가 3이므로 구하는 도형의 방정식은

$(x+4)^2+(y-1)^2=9$

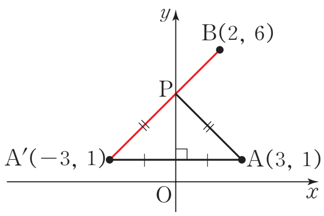
답 $(x+4)^2+(y-1)^2=9$

26

점 A$(3, 1)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

A′$(-3, 1)$

오른쪽 그림에서



$\overline{\text{AP}}=\overline{\text{A'P}}$이므로

$\overline{\text{AP}}+\overline{\text{BP}}=\overline{\text{A'P}}+\overline{\text{BP}}\geq\overline{\text{A'B}}$

$=\sqrt{(2+3)^2+(6-1)^2}=5\sqrt{2}$

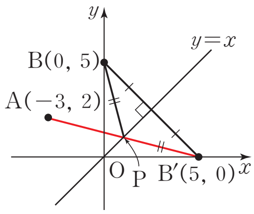
따라서 $\overline{\text{AP}}+\overline{\text{BP}}$의 최솟값은 $5\sqrt{2}$이다.

답 $5\sqrt{2}$

27

점 B$(0, 5)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 B′$(5, 0)$

오른쪽 그림에서



$\overline{\text{BP}}=\overline{\text{B'P}}$이므로

$\overline{\text{AP}}+\overline{\text{BP}}=\overline{\text{AP}}+\overline{\text{B'P}}\geq\overline{\text{AB'}}$

$=\sqrt{(5+3)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{17}$

따라서 $\overline{\text{AP}}+\overline{\text{BP}}$의 최솟값은 $2\sqrt{17}$이다.

답 $2\sqrt{17}$

연습문제

p. 111 ~ 113

1

점 $(3, -5)$를 점 $(2, -4)$로 옮기는 평행이동을

$(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$이라 하면

$3+m=2$, $-5+n=-4$ $\qquad\therefore m=-1, n=1$

즉 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x-1, y+1)$에 의하여

점 (a, b)가 점 $(-3, 6)$으로 옮겨지므로

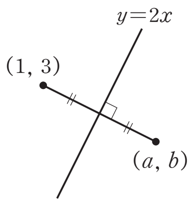
$a-1=-3$, $b+1=6$ $\qquad\therefore a=-2, b=5$

$\therefore a+b=-2+5=3$

답 ②

2

(i) 두 점 $(1, 3)$, (a, b)를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{1+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$는 직선 $y=2x$ 위의 점이므로



$\frac{3+b}{2}=2\times\frac{1+a}{2}$

$\therefore 2a-b=1$ …… ㉠

(ii) 두 점 $(1, 3)$, (a, b)를 지나는 직선은 직선 $y=2x$와 서로 수직이므로

$\frac{b-3}{a-1}\times 2=-1$ $\qquad\therefore a+2b=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{9}{5}$, $b=\frac{13}{5}$

$\therefore a+b=\frac{9}{5}+\frac{13}{5}=\frac{22}{5}$ 답 ⑤

3

직선 $x+3y+1=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$(x-2)+3(y+2)+1=0$

$\therefore x+3y+5=0$ …… ❶

이 직선을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$x+3(-y)+5=0$ $\quad\therefore x-3y+5=0$ …… ❷

따라서 $a=-3$, $b=5$이므로

$a+2b=-3+2\times5=7$ …… ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+2b$의 값을 구할 수 있다.	20%

4

원의 중심은 원의 중심으로 옮겨지므로 점 $(0, 0)$은 점 $(2, -1)$로 옮겨진다.

평행이동을 $(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$이라 하면

$0+m=2$, $0+n=-1$ $\quad\therefore m=2$, $n=-1$

즉 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+2, y-1)$에 의하여 직선 $y=ax+5$가 옮겨지는 직선의 방정식은

$y+1=a(x-2)+5$ $\quad\therefore y=ax-2a+4$

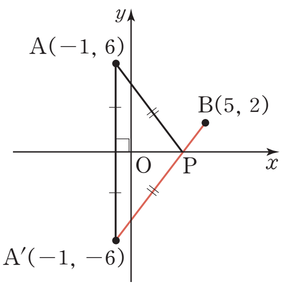
이 직선이 직선 $y=2x+b$와 일치하므로

$a=2$, $-2a+4=b$ $\quad\therefore a=2$, $b=0$

$\therefore a^2+b^2=2^2+0^2=4$ 답 4

5

점 $\mathrm{A}(-1, 6)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 $\mathrm{A}'(-1, -6)$



오른쪽 그림에서

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$

$=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{A'B}}$

$=\sqrt{(5+1)^2+(2+6)^2}$

$=10$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 10이다.

답 10

6

Step by Step

포물선 $f(x, y)=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은 $f(x, -y)=0$이다.

↓

대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구한다.

↓

주어진 꼭짓점의 좌표와 비교하여 a, b의 값을 구한다.

포물선 $y=-x^2+2ax+b$를 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=-x^2+2ax+b$ $\quad\therefore y=x^2-2ax-b$

이때 $y=x^2-2ax-b=(x-a)^2-a^2-b$이므로

포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(a, -a^2-b)$

이 점이 $(2, 7)$과 일치하므로

$2=a$, $7=-a^2-b$ $\quad\therefore a=2$, $b=-11$

$\therefore a-b=2-(-11)=13$

답 ⑤

다른 풀이

포물선을 대칭이동하면 포물선의 꼭짓점은 포물선의 꼭짓점으로 이동된다.

포물선 $y=-x^2+2ax+b$, 즉 $y=-(x-a)^2+a^2+b$의 꼭짓점 (a, a^2+b)를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(2, 7)$이므로

$a=2$, $-a^2-b=7$ $\quad\therefore a=2$, $b=-11$

$\therefore a-b=2-(-11)=13$

7

직선 $x-2y=9$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y-2x=9$ $\quad\therefore 2x-y+9=0$

이 직선이 원 $(x-3)^2+(y+5)^2=k$에 접하므로 원의 중심 $(3, -5)$와 직선 사이의 거리는 반지름의 길이 $\sqrt{k}$와 같다.

즉 $\frac{|6+5+9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{k}$이므로

$20=\sqrt{5k}$, $5k=400$ $\quad\therefore k=80$

답 ①

8

점 $\mathrm{A}(-3, 1)$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 $(-1, 3)$

점 $\mathrm{B}(1, k)$를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 점 Q

의 좌표는 $(1, k-5)$

직선 BP의 기울기는 $\dfrac{3-k}{-1-1}=\dfrac{k-3}{2}$

직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{(k-5)-3}{1-(-1)}=\dfrac{k-8}{2}$

이때 직선 BP와 직선 PQ가 서로 수직이 되려면

$\dfrac{k-3}{2}\times\dfrac{k-8}{2}=-1$, $(k-3)(k-8)=-4$

$k^2-11k+28=0$, $(k-4)(k-7)=0$

$\therefore k=4$ 또는 $k=7$

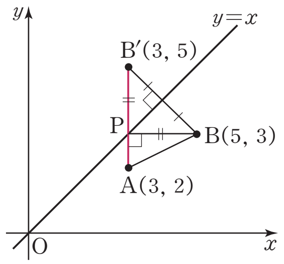
따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 곱은

$4\times7=28$

답 28

9

점 B$(5, 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 B′$(3, 5)$



오른쪽 그림에서

$\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}$

$=\overline{AP}+\overline{B'P}\ge\overline{AB'}$

이때 $\overline{AB'}$과 직선 $y=x$가 만나는 점이 P일 때, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소이고, 직선 AB′의 방정식은 $x=3$이므로 P$(3, 3)$

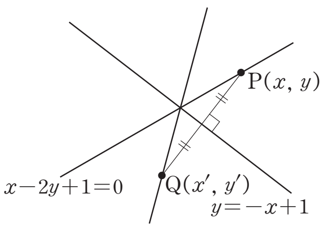
따라서 삼각형 ABP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2\times1=1$

답 ①

10

오른쪽 그림과 같이 직선 $x-2y+1=0$ 위의 점 P(x, y)를 직선 $y=-x+1$에 대하여 대칭이동한 점을 Q(x', y')이라 하자.



(i) 선분 PQ의 중점 $\left(\dfrac{x+x'}{2}, \dfrac{y+y'}{2}\right)$은 직선 $y=-x+1$ 위의 점이므로

$\dfrac{y+y'}{2}=-\dfrac{x+x'}{2}+1$

$\therefore x+y=-x'-y'+2$ …… ㉠

(ii) 직선 PQ는 직선 $y=-x+1$과 서로 수직이므로

$\dfrac{y'-y}{x'-x}\times(-1)=-1$

$\therefore x-y=x'-y'$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-y'+1$, $y=-x'+1$

이때 점 P(x, y)는 직선 $x-2y+1=0$ 위의 점이므로

$-y'+1-2(-x'+1)+1=0$ $\quad\therefore 2x'-y'=0$

즉 점 Q(x', y')은 직선 $2x-y=0$ 위의 점이므로 구하는 직선의 방정식은

$2x-y=0$

답 $2x-y=0$

11

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 원의 방정식은

C: $(x-3-a)^2+(y+8-b)^2=b^2$

이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$b=|a+3|=|b-8|$

$b=|a+3|$에서 a는 양수이므로

$b=a+3$ …… ㉠

$b=|b-8|$에서 $b=-(b-8)$이므로

$2b=8$ $\quad\therefore b=4$

㉠에 $b=4$를 대입하면

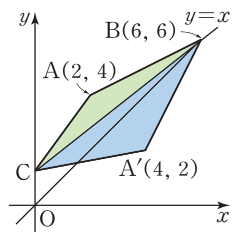
$a=1$

$\therefore a+b=1+4=5$

답 ①

12

점 A$(2, 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 A′의 좌표는 $(4, 2)$



직선 AB의 방정식은

$y-4=\dfrac{6-4}{6-2}(x-2)$

$\therefore x-2y+6=0$

직선 A′B의 방정식은

$y-2=\dfrac{6-2}{6-4}(x-4)$ $\quad\therefore 2x-y-6=0$

이때 $\overline{AB}=\overline{A'B}$이고 (나)에서 삼각형 A′BC의 넓이는 삼각형 ACB의 넓이의 2배이므로 점 C와 직선 A′B 사이의 거리는 점 C와 직선 AB 사이의 거리의 2배이다.

즉 $\dfrac{|-k-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\times\dfrac{|-2k+6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$이므로

$|k+6|=2|-2k+6|$

$k+6=2(-2k+6)$ ($\because$ (가))

$k+6=-4k+12$ $\quad\therefore k=\dfrac{6}{5}$

답 ③

13

점 A$(3, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A$'$이라 하면 A$'(3, -2)$

점 A$(3, 2)$를 직선 $y=x+1$에 대하여 대칭이동한 점을 A$''(a, b)$라 하면

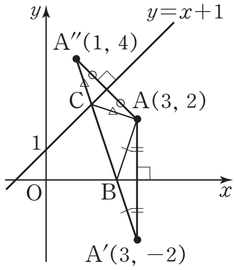
(i) 선분 AA$''$의 중점 $\left(\frac{3+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$는 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로

$\frac{2+b}{2}=\frac{3+a}{2}+1 \qquad \therefore a-b=-3 \qquad \cdots\cdots ㉠$

(ii) 두 점 A, A$''$을 지나는 직선은 직선 $y=x+1$과 서로 수직이므로

$\frac{b-2}{a-3}\times 1=-1 \qquad \therefore a+b=5 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=4 \qquad \therefore$ A$''(1, 4)$



오른쪽 그림에서

$\overline{AB}=\overline{A'B}$, $\overline{AC}=\overline{A''C}$이므로

($\triangle$ABC의 둘레의 길이)

$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$

$=\overline{A'B}+\overline{BC}+\overline{CA''}$

$\geq\overline{A'A''}$

$=\sqrt{(1-3)^2+(4+2)^2}$

$=2\sqrt{10}$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{10}$이다.

답 $2\sqrt{10}$

Level Up 연습문제

p. 114

1

(i) 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x, -y)=0$

(ii) 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, y)=0$

이 도형을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(2-x, y)=0$

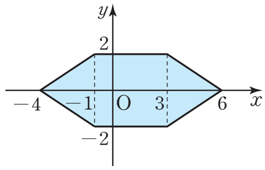
(iii) 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, -y)=0$

이 도형을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(2-x, -y)=0$

(i)~(iii)에서 네 방정식

$f(x, y)=0$, $f(x, -y)=0$, $f(2-x, y)=0$, $f(2-x, -y)=0$이 나타내는 도형으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같으므로 그 넓이는



$2\times\left\{\frac{1}{2}\times(4+10)\times 2\right\}=28$

답 28

2

두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\overline{OA}=\overline{OD}$, $\overline{OB}=\overline{OC}$

원점 O가 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{OC}=x$라 하면 $\overline{OA}=2x$

$\therefore \square\text{ADCB}=\frac{1}{2}\times 3x\times 2x+\frac{1}{2}\times 3x\times x$

$=\frac{9}{2}x^2$

이때 사각형 ADCB의 넓이가 18이므로

$\frac{9}{2}x^2=18$, $x^2=4 \qquad \therefore x=2\ (\because x>0)$

즉 A$(-4, 0)$, B$(0, 2)$, C$(2, 0)$, D$(0, -4)$

직선 AB의 방정식은

$y=\frac{0-2}{-4-0}x+2 \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x+2$

직선 CD의 방정식은

$y=\frac{0-(-4)}{2-0}x-4 \qquad \therefore y=2x-4$

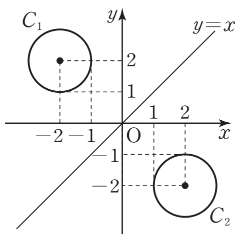
따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=2$, $c=2$, $d=-4$이므로

$a+b+c+d=\frac{1}{2}+2+2+(-4)=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

3

오른쪽 그림과 같이 원 C_1을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 C_2라 하자.



원 C_2를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원이 제4사분면 위에 있으려면

$1+m\geq 0$, $-1+n\leq 0$

$\therefore m\geq -1$, $n\leq 1$ ······ ㉠

또 원 C_1을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원을 C_3이라 하면 원 C_3이 제1사분면 위에 있어야 원 C_3을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원이 제1사분면 위에 있게 되므로

$-3+m\geq 0$, $1+n\geq 0$

$\therefore m\geq 3$, $n\geq -1$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $m\geq 3$, $-1\leq n\leq 1$이므로

$m+n\geq 2$

따라서 $m+n$의 최솟값은 2이다.

답 2

4

중심의 좌표가 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$이고 반지름의 길이가 1인 원 O_1의 방정식은

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$

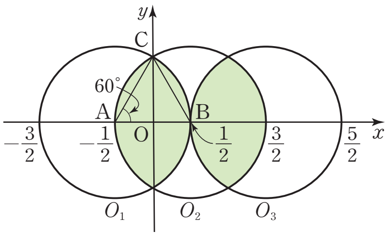
원 O_1을 y축에 대하여 대칭이동한 원 O_2의 방정식은

$\left(-x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$ $\quad\therefore \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$

원 O_1을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원 O_3의 방정식은

$\left(x-2+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$ $\quad\therefore \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=1$

원 O_1의 내부와 원 O_2의 내부의 공통부분, 원 O_2의 내부와 원 O_3의 내부의 공통부분은 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



삼각형 ABC는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로

(삼각형ABC의 넓이)$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$

이때 $\angle CAB=60^\circ$이므로

(부채꼴 CAB의 넓이)$=\pi\times 1^2\times\frac{60}{360}=\frac{\pi}{6}$

따라서 구하는 넓이는

$4\left\{\frac{\pi}{6}+\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\}=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

답 ③

1 집합의 뜻과 포함 관계

확인 문제 p. 118~132

01

ㄱ. 5보다 작은 자연수의 모임은 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$를 나타낸다.

ㄴ, ㄷ. '높은', '가까운'의 기준이 명확하지 않으므로 집합이 아니다.

ㄹ. 16의 양의 약수는 1, 2, 4, 8, 16이므로 10보다 작은 16의 양의 약수의 모임은 집합 $\{1, 2, 4, 8\}$을 나타낸다.

ㅁ. $x^2+4x+4\leq 0$에서 $(x+2)^2\leq 0$ $\quad\therefore x=-2$

즉 주어진 모임은 집합 $\{-2\}$를 나타낸다.

따라서 집합인 것은 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㄹ, ㅁ

02

① 4의 배수의 모임은 $\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$이므로 집합이다.

② 5의 소인수의 모임은 $\{5\}$이므로 집합이다.

③ '귀여운'의 기준이 명확하지 않으므로 집합이 아니다.

④ 12의 약수 중 5의 배수는 없으므로 공집합이다.

⑤ 일의 자리의 숫자가 2인 자연수의 모임은 $\{2, 12, 22, 32, \cdots\}$이므로 집합이다.

따라서 집합이 아닌 것은 ③이다.

답 ③

03

$A=\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 19\}$

따라서 ③ $9\not\in A$이다.

답 ③

04

③ 2는 집합 A의 원소가 아니므로 $2\not\in A$

답 ③

05

④ $\{1\}$은 집합 A의 원소가 아니므로 $\{1\}\not\in A$

답 ④

06

(1) $\{x\,|\,x$는 8의 양의 약수$\}$

(2) $\{x\,|\,x$는 5의 배수$\}$

(3) 20과 30의 공약수는 두 수의 최대공약수인 10의 양의 약수와 같으므로 $\{1, 2, 5, 10\}$

(4) 100보다 작은 제곱수인 자연수는
$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2$이므로
$\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$

답 (1) $\{x \mid x$는 8의 양의 약수$\}$
(2) $\{x \mid x$는 5의 배수$\}$
(3) $\{1, 2, 5, 10\}$
(4) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$

07

$A=\{2^1, 2^2, 2^3, 2^4\}=\{2, 4, 8, 16\}$

② 3은 집합 A의 원소가 아니므로 $3 \notin A$

답 ②

08

② $\{2, 3, 4\}$

답 ②

09

$A=\{-1, 0, 1\}$,
$B=\{2, 3, 5\}$
$a \in A$, $b \in B$에 대하여
ab의 값은 오른쪽 표와 같으므로

b \ a	-1	0	1
2	-2	0	2
3	-3	0	3
5	-5	0	5

$C=\{-5, -3, -2, 0, 2, 3, 5\}$
따라서 집합 C의 모든 원소의 합은
$-5+(-3)+(-2)+0+2+3+5=0$

답 0

10

$x \in A$, $y \in A$에 대하여
$2x-y+3$의 값은 오른쪽 표와 같으므로

y \ x	2	3
2	5	7
3	4	6

$B=\{4, 5, 6, 7\}$
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은
$4+5+6+7=22$

답 22

11

$a \in A$, $b \in B$에 대하여
$a+b$의 값은 오른쪽 표와 같으므로

b \ a	-2	-1	0
1	-1	0	1
2	0	1	2

$S=\{-1, 0, 1, 2\}$
따라서 집합 S의 모든 원소의 합은
$-1+0+1+2=2$

답 2

12

(1) $\{10, 12, 14, 16, \cdots\}$이므로 무한집합이다.

(2) $\{2, 3, 5, 7\}$이므로 유한집합이고 원소의 개수는 4이다.

(3) 공집합이므로 유한집합이고 원소의 개수는 0이다.

(4) $1<x<3$인 유리수 x는 무수히 많으므로 무한집합이다.

답 (1) 무한집합
(2) 유한집합, 원소의 개수: 4
(3) 유한집합, 원소의 개수: 0
(4) 무한집합

13

① $A=\{0\}$

② 0보다 작은 자연수는 없으므로 $B=\varnothing$

③ $C=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$

④ $D=\{1, 19\}$

⑤ $E=\{5\}$

따라서 공집합인 것은 ②이다.

답 ②

14

① 공집합은 원소의 개수가 0이므로 $n(\varnothing)=0$

② $n(\{6\})=1$

③ $n(\{1, 2, 3, 4, \cdots, 100\})=100$

④ $n(\{1, 2, 3\})-n(\{1, 2\})=3-2=1$

⑤ $A=\{1, 2, 4\}$이므로 $n(A)=3$

따라서 옳은 것은 ①이다.

답 ①

15

$A=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$이므로 $n(A)=6$
또 $x^2+x-6<0$에서 $(x+3)(x-2)<0$
$\therefore -3<x<2$
즉 $B=\{-2, -1, 0, 1\}$이므로 $n(B)=4$
$\therefore n(A)-n(B)=6-4=2$

답 2

16

$A=\varnothing$이므로 $n(A)=0$
$B=\{9, 18, 27, 36, 45\}$이므로 $n(B)=5$
$C=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$이므로 $n(C)=5$

$\therefore n(A)+n(B)-n(C)=0+5-5=0$

답 0

17

$A=\{2, 3, 5, 7\}$

① 2는 집합 A의 원소이므로 $2\in A$

② 3은 집합 A의 원소이므로 $3\in A$

③ $3\in A$, $7\in A$이므로 $\{3, 7\}\subset A$

④ $1\notin A$이므로 $\{1, 3, 5, 7\}\not\subset A$

⑤ $2\in A$, $3\in A$, $5\in A$, $7\in A$이므로
$\{2, 3, 5, 7\}\subset A$

따라서 옳지 않은 것은 ①, ④이다.

답 ①, ④

18

ㄱ. $\varnothing$는 집합 A의 원소이므로 $\varnothing\in A$

ㄴ. 공집합 $\varnothing$는 모든 집합의 부분집합이므로
$\varnothing\subset A$

ㄷ. $\varnothing\in A$이므로 $\{\varnothing\}\subset A$

ㄹ. $\{\varnothing\}\in A$이므로 $\{\{\varnothing\}\}\subset A$

ㅁ. $\varnothing\in A$, $1\in A$이므로 $\{\varnothing, 1\}\subset A$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

19

$A\subset B$이려면 $2\in B$이어야 하므로

$a=2$ 또는 $a+2=2$

(ⅰ) $a=2$일 때
$A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 4\}$이므로 $A\subset B$

(ⅱ) $a+2=2$, 즉 $a=0$일 때
$A=\{1, 2\}$, $B=\{0, 1, 2\}$이므로 $A\subset B$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=0$ 또는 $a=2$

답 0 또는 2

20

$A\subset B$이려면 $3\in B$이어야 하므로

$a+1=3$ 또는 $2a+1=3$

(ⅰ) $a+1=3$, 즉 $a=2$일 때
$A=\{1, 3\}$, $B=\{1, 3, 5\}$이므로 $A\subset B$

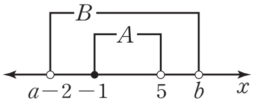
(ⅱ) $2a+1=3$, 즉 $a=1$일 때
$A=\{0, 3\}$, $B=\{1, 2, 3\}$이므로 $A\not\subset B$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=2$

답 2

21

$A\subset B$가 되도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a-2<-1$, $b\geq 5$

$\therefore a<1$, $b\geq 5$

따라서 정수 a의 최댓값은 0, 정수 b의 최솟값은 5이다.

답 a의 최댓값: 0, b의 최솟값: 5

22

$8\in A$이므로 $8\in B$이어야 한다.

즉 $b+3=8$이므로 $b=5$

또 $2\in B$이므로 $2\in A$이어야 한다.

즉 $4-a=2$이므로 $a=2$

$\therefore a-b=2-5=-3$

답 -3

23

$A\subset B$, $B\subset A$이므로 $A=B$이다.

이때 $8\in A$이므로 $8\in B$이어야 한다.

즉 $a^2-2a=8$에서 $a^2-2a-8=0$

$(a+2)(a-4)=0 \qquad \therefore a=-2$ 또는 $a=4$

(ⅰ) $a=-2$일 때
$A=\{-1, 5, 8\}$, $B=\{-1, 5, 8\}$이므로 $A=B$

(ⅱ) $a=4$일 때
$A=\{-7, 5, 8\}$, $B=\{-1, 5, 8\}$이므로 $A\neq B$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=-2$

답 -2

24

$A\subset B$, $B\subset A$이므로 $A=B$이다.

$\therefore a-2=0$, $2b-1=a+1$

$a-2=0$에서 $a=2$

$a=2$를 $2b-1=a+1$에 대입하면

$2b-1=3 \qquad \therefore b=2$

답 $a=2$, $b=2$

25

$A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

이때 집합 A의 6개의 원소 중 4개의 원소로 이루어진 부분집합의 개수는 서로 다른 6개에서 4개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_6C_4={}_6C_2=15$

답 15

26

집합 A의 원소의 개수를 n이라 하면 집합 A의 n개의 원소 중 2개의 원소로 이루어진 부분집합의 개수는 서로 다른 n개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}$

즉 $\frac{n(n-1)}{2}=21$이므로

$n(n-1)=42=7\times6 \qquad \therefore n=7$

따라서 집합 A의 진부분집합의 개수는

$2^7-1=127$

답 127

27

집합 A의 부분집합 중 2는 반드시 원소로 갖고 4는 원소로 갖지 않는 부분집합은 원소 2, 4를 제외한 집합 $\{6, 8, 10\}$의 부분집합 각각에 원소 2를 넣어서 만든 집합과 같으므로 집합 X의 개수는

$2^{5-1-1}=2^3=8$ 답 8

28

$A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

(1) 집합 A의 부분집합 중 1, 5, 7을 반드시 원소로 갖는 부분집합은 원소 1, 5, 7을 제외한 집합 $\{3, 9, 11, 13\}$의 부분집합 각각에 원소 1, 5, 7을 넣어서 만든 집합과 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^{7-3}=2^4=16$

(2) 집합 A의 부분집합 중 3, 9는 반드시 원소로 갖고 11은 원소로 갖지 않는 부분집합은 원소 3, 9, 11을 제외한 집합 $\{1, 5, 7, 13\}$의 부분집합 각각에 원소 3, 9를 넣어서 만든 집합과 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^{7-2-1}=2^4=16$

답 (1) 16 (2) 16

29

$A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

집합 A의 부분집합 중 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합은 집합 A의 부분집합 중 짝수만으로 이루어진 집합, 즉 $\{2, 6, 18\}$의 부분집합을 제외한 것과 같다.

따라서 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^6-2^3=64-8=56$

답 56

30

집합 A의 부분집합 중 a 또는 b를 포함하는 부분집합은 집합 A의 부분집합 중 원소 a, b를 제외한 집합 $\{c, d\}$의 부분집합을 제외한 것과 같다.

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$2^4-2^2=16-4=12$

답 12

31

$\{1, 5\}\subset A\subset\{1, 2, 3, 4, 5\}$를 만족시키는 집합 A는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중에서 집합 $\{1, 5\}$의 원소 1, 5를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 구하는 집합 A의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

답 8

32

$A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$

$A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X는 집합 B의 부분집합 중에서 집합 A의 원소 1, 2, 3, 6을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{10-4}=2^6=64$

답 64

33

$A=\{3, 7\}$, $B=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X는 집합 B의 부분집합 중에서 집합 A의 원소 3, 7을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$

답 16

연습문제

p. 133 ~ 135

1

① 1보다 크고 2보다 작은 자연수는 없으므로 공집합, 즉 유한집합이다.

② $\{x|x$는 3보다 크지 않은 자연수$\}=\{1, 2, 3\}$이므로 $3\in\{x|x$는 3보다 크지 않은 자연수$\}$

③ $\{x|x$는 9의 양의 약수$\}=\{1, 3, 9\}$이므로 $\{x|x$는 9의 양의 약수$\}\not\subset\{1, 3\}$

④ 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로

$\varnothing \subset \{0, 1, 2, 3\}$

⑤ $n(\{0\})=1$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

2

① 공집합은 원소가 하나도 없으므로 $0 \notin \varnothing$

② $1 \notin \{2, 3\}$이므로 $\{1\} \not\subset \{2, 3\}$

③ 2는 집합 $\{3, 4\}$의 원소가 아니므로 $2 \notin \{3, 4\}$

④ 2는 집합 $\{2, 3\}$의 원소이므로 $2 \in \{2, 3\}$

⑤ 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset \{3\}$

따라서 옳은 것은 ②, ③이다.

답 ②, ③

3

$A=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$, $B=\{1, 5\}$, $C=\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$

이므로 $B \subset A \subset C$

답 ③

4

$2 \in A$이므로 $2 \in B$이어야 한다.

즉 $b-2=2$이므로 $b=4$

또 $4 \in B$이므로 $4 \in A$이어야 한다.

즉 $3a+1=4$이므로 $a=1$

$\therefore a+b=1+4=5$

답 5

5

$A \subset X \subset B$를 만족시키는 집합 X는 집합 B의 부분집합 중에서 집합 A의 원소 1, 4를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

답 ④

6

$\{a, b\} \subset X \subset \{a, b, c, d\}$를 만족시키는 집합 X는 집합 $\{a, b, c, d\}$의 부분집합 중에서 집합 $\{a, b\}$의 원소 a, b를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X가 될 수 있는 것은

$\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, c, d\}$

이므로 집합 X가 될 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

7

$A=\{1, 2a\}$, $B=\{1, 2, 4, 8\}$ …… ❶

$A \subset B$가 성립하려면 $2a \in B$이어야 하므로

$2a=1$ 또는 $2a=2$ 또는 $2a=4$ 또는 $2a=8$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=4$

이때 a는 자연수이므로

$a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=4$ …… ❷

따라서 구하는 모든 자연수 a의 값의 합은

$1+2+4=7$ …… ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ 집합 B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 모든 자연수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

8

집합 A의 부분집합도 되고 집합 B의 부분집합도 되는 집합은 두 집합 A, B에 동시에 속해 있는 원소 3, 4로 이루어진 집합 $\{3, 4\}$의 부분집합과 같다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^2=4$

답 4

9

집합 Z의 원소는 $2^n \times 3^m$ (n, m은 자연수)의 꼴이다.

주어진 수를 각각 소인수분해 하면

① $108=2^2 \times 3^3$　② $126=2 \times 3^2 \times 7$

③ $144=2^4 \times 3^2$　④ $162=2 \times 3^4$

⑤ $216=2^3 \times 3^3$

따라서 집합 Z의 원소가 아닌 것은 ②이다.

답 ②

10

$2 \in B$이므로 $2 \in A$이어야 한다.

즉 $a+2=2$ 또는 $a^2-2=2$이므로

$a=0$ 또는 $a^2=4$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a=0$일 때

$A=\{-2, 2\}$, $B=\{2, 6\}$이므로 $A \neq B$

(ii) $a=-2$일 때

$A=\{0, 2\}$, $B=\{2, 8\}$이므로 $A \neq B$

(iii) $a=2$일 때

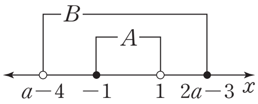
$A=\{2, 4\}$, $B=\{2, 4\}$이므로 $A=B$

(i)~(iii)에서 $a=2$

답 ⑤

11

$A \subset B$가 되도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a-4<-1$, $2a-3 \geq 1$

$a-4<-1$에서 $a<3$

$2a-3 \geq 1$에서 $a \geq 2$

$\therefore 2 \leq a < 3$

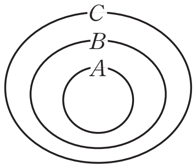
답 ②

12

① 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset A$

② 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이므로 $A \subset A$

③ $A \subset B$, $B \subset C$이면 오른쪽 벤 다이어그램에서 $A \subset C$



④ $A \subset B$, $B \subset A$이면 두 집합 A, B는 서로 같은 집합이므로 $A=B$

⑤ $A \subset B$, $B \subset C$이면 $A \subset C$

즉 $A \subset C$, $C \subset A$이므로 $A=C$ …… ㉠

또 $B \subset C$, $C \subset A$이면 $B \subset A$

즉 $B \subset A$, $A \subset B$이므로 $A=B$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $A=B=C$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

답 ①

13

집합 A의 부분집합 중 홀수가 한 개 이상 속해 있는 부분집합은 집합 A의 부분집합 중 짝수만으로 이루어진 집합, 즉 $\{2, 4, 6\}$의 부분집합을 제외한 것과 같다.

따라서 홀수가 한 개 이상 속해 있는 부분집합의 개수는

$2^7-2^3=128-8=120$

답 120

14

Step by Step

주어진 집합을 원소나열법으로 나타낸다.

↓

$a+b+c$의 값을 구한다.

↓

집합 A의 원소 중 가장 큰 수를 구한다.

집합 $A=\{a, b, c\}$에 대하여 $a<b<c$라 하고 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내면

$\{x+y \mid x \in A, y \in A, x \neq y\}=\{a+b, a+c, b+c\}$

이때 $a+b<a+c<b+c$이므로

$a+b=11$ …… ㉠

$a+c=13$ …… ㉡

$b+c=16$ …… ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면 $2(a+b+c)=40$

$\therefore a+b+c=20$ …… ㉣

㉠을 ㉣에 대입하면 $11+c=20$ $\quad \therefore c=9$

따라서 집합 A의 원소 중 가장 큰 수는 9이다.

답 ②

15

$B \subset X \subset A$를 만족시키는 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 집합 B의 원소 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

즉 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 원소 1, 2를 제외한 집합 $\{3, 4, 5\}$의 부분집합 각각에 원소 1, 2를 넣어서 만든 집합과 같다.

이때 $n(X) \geq 4$이므로 집합 $\{3, 4, 5\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2 또는 3인 집합의 개수를 구하면 된다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

${}_3C_2+{}_3C_3=3+1=4$

답 4

Level Up 연습문제

p. 136

1

$X=\{x+y \mid x \in A, y \in B\}$

$\quad =\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a+1, a+3, a+5\}$

자연수 a에 대하여 $n(X)=10$이 되려면

$a+5=2$ 또는 $a+5=3$ 또는 $a+1=8$ 또는 $a+1=9$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=7$ 또는 $a=8$

따라서 자연수 a의 최댓값은 8이다.

답 8

2

k와 $10-k$가 모두 자연수이므로

$k \geq 1$, $10-k \geq 1$ $\quad \therefore 1 \leq k \leq 9$

즉 집합 S의 원소가 될 수 있는 것은 1, 2, 3, …, 9이다.

$1 \in S$이면 $10-1=9 \in S$

$2\in S$이면 $10-2=8\in S$
$3\in S$이면 $10-3=7\in S$
$4\in S$이면 $10-4=6\in S$
즉 1과 9, 2와 8, 3과 7, 4와 6은 어느 하나가 S의 원소이면 나머지 하나도 반드시 S의 원소이다.
또 $5\in S$이면 $10-5=5\in S$
따라서 집합 S의 개수는 집합
{(1과 9), (2와 8), (3과 7), (4와 6), 5}
의 부분집합에서 공집합을 제외한 것의 개수와 같으므로
$2^5-1=31$

답 31

참고 집합 S를 만들면 다음과 같다.
예 {(1과 9), (2와 8)}일 때, $S=\{1, 2, 8, 9\}$
{(1과 9), 5}일 때, $S=\{1, 5, 9\}$

3

$A=\{1, 2, 3, \cdots, 9, 10\}$
집합 A의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2이면서 1을 원소로 갖는 부분집합은
$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \cdots, \{1, 10\}$의 9개이다.
즉 $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ 중에서 1을 원소로 갖는 집합은 위의 9개이다.
마찬가지로 2, 3, 4, ⋯, 9, 10을 원소로 갖는 집합도 각각 9개씩 있다.
$\therefore S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n$
$=9(1+2+3+\cdots+9+10)$
$=9\times55$
$=495$

답 495

4

(나)에서 집합 X의 모든 원소의 곱이 6의 배수이므로 $6\in X$인 경우와 $6\notin X$인 경우로 나누어 생각한다.
(i) $6\in X$인 경우
집합 X의 개수는 $2^{5-1}-1=2^4-1=15$
(ii) $6\notin X$인 경우
집합 X는 원소 3, 4를 반드시 포함해야 하므로 집합 X의 개수는 $2^{5-1-2}=2^2=4$
(i), (ii)에서 집합 X의 개수는
$15+4=19$

답 ②

2 집합의 연산

확인 문제

p. 141 ~ 158

01

$A=\{0, 1, 2\}, B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$이므로
$A\cup B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}, A\cap B=\{0, 1, 2\}$

답 $A\cup B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}, A\cap B=\{0, 1, 2\}$

02

$A=\{0, 1, 2\}, B=\{-1, 1\}, C=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
(1) $A\cup B=\{-1, 0, 1, 2\}$이므로
$(A\cup B)\cup C=\{-1, 0, 1, 2\}\cup\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
$=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
(2) $A\cup B=\{-1, 0, 1, 2\}$이므로
$(A\cup B)\cap C=\{-1, 0, 1, 2\}\cap\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
$=\{-1, 0, 1, 2\}$

답 (1) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ (2) $\{-1, 0, 1, 2\}$

03

$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, B=\{0, 3, 6, 9\}$,
$C=\{2, 4, 6, 8\}$
(1) $A\cap B=\{3, 6\}$이므로
$(A\cap B)\cup C=\{3, 6\}\cup\{2, 4, 6, 8\}$
$=\{2, 3, 4, 6, 8\}$
(2) $B\cup C=\{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$이므로
$A\cap(B\cup C)$
$=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}\cap\{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$
$=\{2, 3, 4, 6\}$

답 (1) $\{2, 3, 4, 6, 8\}$ (2) $\{2, 3, 4, 6\}$

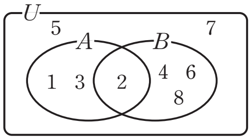
04

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, A=\{2, 3, 5, 7\}$이므로
$A^C=\{1, 4, 6\}$ $\quad\therefore n(A^C)=3$

답 3

05

전체집합 U와 두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(1) $B^C=\{1, 3, 5, 7\}$이므로
$A\cup B^C=\{1, 2, 3, 5, 7\}$
(2) $A^C=\{4, 5, 6, 7, 8\}, B^C=\{1, 3, 5, 7\}$이므로

$B^C - A^C = \{1, 3\}$

(3) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$이므로

$(A \cup B)^C = \{5, 7\}$

답 (1) $\{1, 2, 3, 5, 7\}$ (2) $\{1, 3\}$ (3) $\{5, 7\}$

06

집합 A와 각각의 집합의 교집합을 구하면 다음과 같다.

① $A \cap \{3\} = \{3\}$

② $A \cap \{1, 3, 5\} = \{3\}$

③ $\{2, 3, 5, 7\}$이므로 $A \cap \{2, 3, 5, 7\} = \{3\}$

④ $\{1, 2, 4\}$이므로 $A \cap \{1, 2, 4\} = \{4\}$

⑤ $\{5, 10\}$이므로 $A \cap \{5, 10\} = \varnothing$

따라서 집합 A와 서로소인 집합은 ⑤이다.

답 ⑤

07

$A = \{1, 2, 3, \cdots, 9\}$, $B = \{1, 2, 4, 8, 16\}$

조건을 만족시키는 집합을 X라 하면

$X \subset A$이고 $X \cap B = \varnothing$

즉 X는 집합 A의 부분집합 중 집합 B의 원소 1, 2, 4, 8을 모두 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{9-4} = 2^5 = 32$

답 32

08

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{3, 6, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$

$C \subset U$이고 $C \cap A = \varnothing$, $C \cap B = \varnothing$이므로 집합 C는 전체집합 U의 부분집합 중 두 집합 A, B의 원소 1, 2, 3, 6, 9를 제외한 집합 $\{4, 5, 7, 8, 10\}$의 부분집합이다.

이때 집합 C의 모든 원소의 합이 최대이려면

$C = \{4, 5, 7, 8, 10\}$

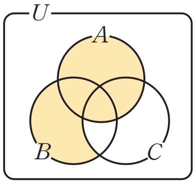
따라서 집합 C의 모든 원소의 합의 최댓값은

$4 + 5 + 7 + 8 + 10 = 34$

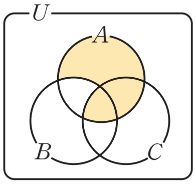
답 34

09

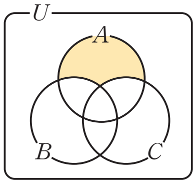
① $A \cup (B - C)$



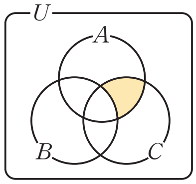
② $A - (B - C)$



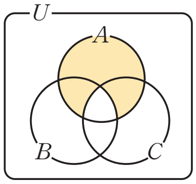
③ $A - (B \cup C)$



④ $A - (B \cup C^C)$



⑤ $A - (B \cap C)$

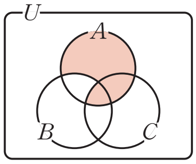


따라서 주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ②이다.

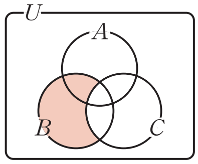
답 ②

10

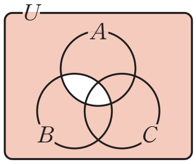
① $A \cap (B - C)^C$



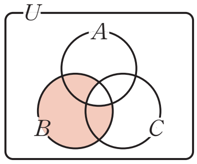
② $B \cap (B \cap C)^C$



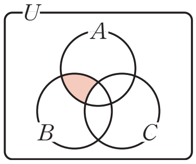
③ $(A^C \cap B) \cup (A \cap B)^C$



④ $B - (A \cap C)$



⑤ $(A \cap B) \cap C^C$

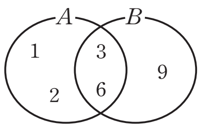


따라서 주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ②이다.

답 ②

11

두 집합 A, B를 주어진 조건에 맞게 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



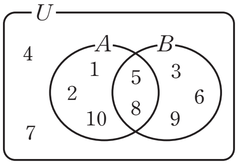
$\therefore B = \{3, 6, 9\}$

답 $\{3, 6, 9\}$

12

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

전체집합 U와 두 부분집합 A, B를 주어진 조건에 맞게 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



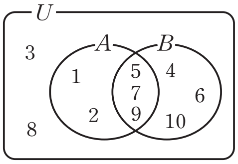
$\therefore A=\{1, 2, 5, 8, 10\}$

답 $\{1, 2, 5, 8, 10\}$

13

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

전체집합 U와 두 부분집합 A, B를 주어진 조건에 맞게 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore B=\{4, 5, 6, 7, 9, 10\}$

답 $\{4, 5, 6, 7, 9, 10\}$

14

$A-B=\{4\}$이므로 $4\in A$ $\quad\therefore a=4$

즉 $A=\{2, 3, 4\}$이고 $A-B=\{4\}$이므로

$2\in B$, $3\in B$ $\quad\therefore b=2$

답 $a=4$, $b=2$

15

$A\cap B=\{4\}$이므로 $4\in B$

즉 $a^2-3a=4$에서 $a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0$ $\quad\therefore a=-1$ 또는 $a=4$

(i) $a=-1$일 때

$A=\{1, 4\}$, $B=\{1, 2, 4\}$이므로

$A\cap B=\{1, 4\}$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=4$일 때

$A=\{4, 16\}$, $B=\{1, 2, 4\}$이므로

$A\cap B=\{4\}$가 되어 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $A=\{4, 16\}$, $B=\{1, 2, 4\}$이므로

$A\cup B=\{1, 2, 4, 16\}$

따라서 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은

$1+2+4+16=23$

답 23

16

$A\cap B=\{5\}$이므로 $5\in B$

즉 $a^2-4a=5$에서 $a^2-4a-5=0$

$(a+1)(a-5)=0$ $\quad\therefore a=-1$ 또는 $a=5$

(i) $a=-1$일 때

$A=\{-7, -1, 1\}$, $B=\{1, 5\}$이므로

$A\cap B=\{1\}$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=5$일 때

$A=\{-1, 5, 13\}$, $B=\{1, 5\}$이므로

$A\cap B=\{5\}$가 되어 조건을 만족시킨다.

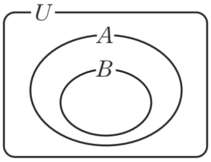
(i), (ii)에서 $a=5$

답 5

17

$B-A=\varnothing$이므로 $B\subset A$

주어진 조건을 만족시키는 두 집합 A, B의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄴ. $A^C\subset B^C$

ㅁ. $B\subset A$이므로 $n(A)\ge n(B)$

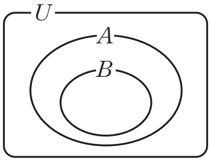
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

18

$A\cup B=A$이므로 $B\subset A$

주어진 조건을 만족시키는 두 집합 A, B의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $A^C\subset B^C$

② $A^C\cup B\neq U$

③ $A\cup B=A$이므로 $(A\cup B)\not\subset B$

④ $A\cap B=B$이므로 $B\subset(A\cap B)$

⑤ $A\cap B=B$이므로 $(A\cap B)\cup B=B$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

답 ④

19

$A\cup X=A$에서 $X\subset A$

$B\cap X=B$에서 $B\subset X$

이므로 $B\subset X\subset A$

즉 $\{1, 5\}\subset X\subset\{1, 3, 5, 7, 9\}$를 만족시키는 집합 X는 집합 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$의 부분집합 중에서 1, 5를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

답 8

20

$A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

$(A-B)\cup X=X$에서 $(A-B)\subset X$

$(A\cup B)\cap X=X$에서 $X\subset(A\cup B)$

이므로 $(A-B)\subset X\subset(A\cup B)$

즉 $\{2\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$를 만족시키는 집합 X는 집합 $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$의 부분집합 중에서 2를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{6-1}=2^5=32$

답 32

21

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A\cup C=B\cup C$에서

$\{1, 3, 5, 7, 9\}\cup C=\{3, 6, 8, 9, 10\}\cup C$

즉 집합 C는 두 집합 A, B에 공통으로 들어 있는 원소 3, 9를 제외한 나머지 원소인 1, 5, 6, 7, 8, 10을 반드시 포함해야 한다.

따라서 집합 C는 전체집합 U의 부분집합 중에서 1, 5, 6, 7, 8, 10을 반드시 원소로 갖는 집합이므로 구하는 집합 C의 개수는

$2^{10-6}=2^4=16$

답 16

22

$A\cap(A\cap B)^C=A\cap(A^C\cup B^C)$ ← 드모르간의 법칙

$=(A\cap A^C)\cup(A\cap B^C)$ ← 분배법칙

$=\varnothing\cup(A-B)$

$=A-B$

답 풀이 참조

23

$(A-B)-C=(A\cap B^C)\cap C^C$ ← 차집합의 성질

$=A\cap(B^C\cap C^C)$ ← 결합법칙

$=A\cap(B\cup C)^C$ ← 드모르간의 법칙

따라서 $(A-B)-C$와 항상 같은 것은 ③이다.

답 ③

24

(1) $(A-B)\cup(A-B^C)$

$=(A\cap B^C)\cup(A\cap B)$ ← 차집합의 성질

$=A\cap(B^C\cup B)$ ← 분배법칙

$=A\cap U=A$

(2) $\{A\cap(B-A)^C\}\cup\{(B-A)\cap A\}$

$=\{A\cap(B-A)^C\}\cup\{A\cap(B-A)\}$ ← 교환법칙

$=A\cap\{(B-A)^C\cup(B-A)\}$ ← 분배법칙

$=A\cap U=A$

답 (1) A (2) A

25

$(A-B)\cup(A\cap B)=(A\cap B^C)\cup(A\cap B)$ ← 차집합의 성질

$=A\cap(B^C\cup B)$ ← 분배법칙

$=A\cap U=A$

즉 $A=\varnothing$

① $A\cup B=\varnothing\cup B=B$

② $A\cup C=\varnothing\cup C=C$

③ $B-A=B-\varnothing=B$

④ $A^C\cap C=\varnothing^C\cap C=U\cap C=C$

⑤ 두 집합 B, C의 관계는 알 수 없다.

따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

답 ④

26

$\{(A\cup B)\cap(A^C\cup B)\}\cup A$

$=\{(A\cap A^C)\cup B\}\cup A$ ← 분배법칙

$=(\varnothing\cup B)\cup A$

$=B\cup A$

즉 $A\cup B=A$이므로 $B\subset A$

따라서 $B\subset A$일 때 항상 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

27

$(A_2\cup A_3)\cap A_4=(A_2\cap A_4)\cup(A_3\cap A_4)$

$A_2\cap A_4$는 2와 4의 공배수, 즉 4의 배수의 집합이고

$A_3\cap A_4$는 3과 4의 공배수, 즉 12의 배수의 집합이므로

$(A_2\cup A_3)\cap A_4=(A_2\cap A_4)\cup(A_3\cap A_4)=A_4\cup A_{12}$

이때 12가 4의 배수이므로 $A_4\cup A_{12}$는 4의 배수의 집합이다.

따라서 30 이하의 자연수 중 4의 배수는 4, 8, 12, ⋯, 28의 7개이므로 구하는 원소의 개수는 7이다.

답 7

28

(1) $A\bigstar U=(A-U)\cup(U-A)=\varnothing\cup A^C=A^C$이므로

$A\bigstar U=A^C=\{2, 4, 5\}$

(2) $A^C\bigstar B^C=(A^C-B^C)\cup(B^C-A^C)$

$=(A^C\cap B)\cup(B^C\cap A)$

$=(B-A)\cup(A-B)$

이때 $B-A=\{4, 5\}$, $A-B=\{1\}$이므로

$A^C\bigstar B^C=(B-A)\cup(A-B)$

$=\{1, 4, 5\}$

답 (1) $\{2, 4, 5\}$ (2) $\{1, 4, 5\}$

29

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cap B)=n(B)-n(B-A)=13-7=6$

$\therefore n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=21-6=15$

답 15

30

(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$50=45+30-n(A\cap B)$ $\quad\therefore n(A\cap B)=25$

$\therefore n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)$

$=n(U)-n(A\cap B)$

$=60-25=35$

(2) $n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A^C\cap B^C)$

$=30-14=16$

이때 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$16=9+12-n(A\cap B)$ $\quad\therefore n(A\cap B)=5$

$\therefore n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$=9-5=4$

답 (1) 35 (2) 4

31

$A\cap C=\varnothing$이므로 $A\cap B\cap C=\varnothing$

$\therefore n(A\cap C)=0$, $n(A\cap B\cap C)=0$

이때 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$17=10+11-n(A\cap B)$ $\quad\therefore n(A\cap B)=4$

$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$이므로

$14=11+8-n(B\cap C)$ $\quad\therefore n(B\cap C)=5$

$\therefore n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$\quad -n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=10+11+8-4-5-0+0$

$=20$

답 20

32

서연이네 학교 학생 80명의 집합을 U, 트위터 계정을 가지고 있는 학생의 집합을 A, 인스타그램 계정을 가지고 있는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=n(A\cup B)=80$, $n(A)=52$, $n(B)=45$

(1) 트위터 계정과 인스타그램 계정을 모두 가지고 있는 학생 수는 $n(A\cap B)$이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=52+45-80=17$

(2) 트위터 계정만 가지고 있는 학생 수는 $n(A-B)$이므로

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$=52-17=35$

답 (1) 17 (2) 35

33

여행 동호회의 전체 회원 40명의 집합을 U, A지역을 여행한 경험이 있는 회원의 집합을 A, B지역을 여행한 경험이 있는 회원의 집합을 B라 하면

$n(U)=40$, $n(A)=19$, $n(B)=25$, $n(A^C\cap B^C)=4$

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로

$4=40-n(A\cup B)$ $\quad\therefore n(A\cup B)=36$

$\therefore n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=19+25-36=8$

이때 A지역과 B지역 중 한 지역만 여행한 경험이 있는 회원 수는 $n((A-B)\cup(B-A))$이므로

$n((A-B)\cup(B-A))=n(A\cup B)-n(A\cap B)$

$=36-8=28$

답 28

34

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=35+28-n(A\cap B)$

$=63-n(A\cap B)$

(i) $n(A\cup B)$의 최댓값

$n(A\cap B)$의 값이 최소일 때, $n(A\cup B)$는 최댓값을 갖는다.

$n(A\cap B)\ge13$에서 $n(A\cap B)=13$일 때

$n(A\cup B)$는 최댓값을 가지므로

$n(A\cup B)$의 최댓값은 $63-13=50$

(ii) $n(A\cup B)$의 최솟값

$n(A\cap B)$의 값이 최대일 때, $n(A\cup B)$는 최솟값을 갖는다.

$n(A\cap B)$의 값이 최대인 경우는 $B\subset A$일 때, 즉 $n(A\cap B)=n(B)=28$일 때이므로

$n(A\cup B)$의 최솟값은 $63-28=35$

(i), (ii)에서 $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$50+35=85$

답 85

35

민호네 고등학교 학생 360명의 집합을 U, 축구에 흥미가 있는 학생의 집합을 A, 농구에 흥미가 있는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=360$, $n(A)=270$, $n(B)=160$

이때 축구와 농구에 모두 흥미가 있는 학생 수는 $n(A\cap B)$이다.

(i) $n(A\cap B)\le n(A)$, $n(A\cap B)\le n(B)$이므로

$n(A\cap B)\le 160$

(ii) $n(A\cup B)\le n(U)$이므로

$n(A)+n(B)-n(A\cap B)\le n(U)$

$270+160-n(A\cap B)\le 360$

$\therefore n(A\cap B)\ge 70$

(i), (ii)에 의하여 $70\le n(A\cap B)\le 160$

따라서 $n(A\cap B)$의 최댓값은 160, 최솟값은 70이므로 그 합은

$160+70=230$

답 230

연습문제

p. 159 ~ 161

1

$A^C=\{3, 4, 5\}$이므로 $A^C\cup B=\{2, 3, 4, 5\}$

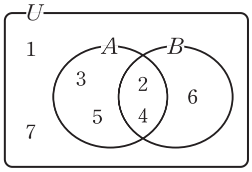
따라서 집합 $A^C\cup B$의 원소의 개수는 4이다.

답 ④

2

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

전체집합 U와 두 부분집합 A, B를 주어진 조건에 맞게 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore B=\{2, 4, 6\}$

답 ⑤

3

$3\in(A\cap B)$, $1\notin(A\cap B)$이므로 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합이 8이려면 $a\in(A\cap B)$이어야 한다.

즉 $A\cap B=\{3, a\}$이므로

$3+a=8 \qquad \therefore a=5$

답 ②

4

Step by Step

$A\cap X=X$이면 $X\subset A$
↓
$(A-B)\cup X=X$이면 $(A-B)\subset X$
↓
$(A-B)\subset X\subset A$를 만족시키는 집합 X의 개수를 구한다.

$A\cap X=X$에서 $X\subset A$

$(A-B)\cup X=X$에서 $(A-B)\subset X$

이므로 $(A-B)\subset X\subset A$

즉 $\{1, 3, 5, 7\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$을 만족시키는 집합 X는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중에서 1, 3, 5, 7을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{7-4}=2^3=8$

답 8

5

$\{3, 4, 5\}\cap A=\varnothing$이므로 두 집합 $\{3, 4, 5\}$, A는 서로소이다. 즉 집합 A는 전체집합 U에서 원소 3, 4, 5를 제외한 집합 $\{1, 2\}$의 부분집합이므로 구하는 집합 A의 개수는

$2^2=4$

답 ②

6

$(A\cap B^C)^C=U$이므로 $A\cap B^C=\varnothing$

즉 $A-B=\varnothing$이므로 $A\subset B$

① $A\cap B=A$

② $A\subset B$이므로 $B^C\subset A^C$　　$\therefore A^C\cup B^C=A^C$
③ $A-B=\varnothing$
④ $A\cup B=B$
⑤ $B\cap A^C=B-A$
따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

답 ②

7

$(A\cap B)\cup B=B=\{1, 2, 3, 4\}$
$A^C-B^C=A^C\cap B=B-A=\{2, 4\}$
즉 집합 A는 전체집합 U의 부분집합 중 1, 3은 반드시 원소로 갖고 2, 4는 원소로 갖지 않는 집합이므로 구하는 집합 A의 개수는
$2^{8-2-2}=2^4=16$

답 16

8

$\{(A^C\cup B)\cap B^C\}^C$
$=\{(A^C\cap B^C)\cup(B\cap B^C)\}^C$ ← 분배법칙
$=\{(A^C\cap B^C)\cup\varnothing\}^C$
$=(A^C\cap B^C)^C$
$=A\cup B$ ← 드모르간의 법칙
따라서 항상 같은 것은 ④이다.

답 ④

9

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$
이므로
$18=30-n(A\cup B)$　　$\therefore n(A\cup B)=12$　　…… ❶
이때 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로
$12=n(A)+n(B)-8$
$\therefore n(A)+n(B)=20$　　…… ❷

답 20

채점 기준	비율
❶ $n(A\cup B)$의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ $n(A)+n(B)$의 값을 구할 수 있다.	50%

10

(가)에서 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=n(A)$이므로
$n(A\cap B)=0$
(나), (다)에 의하여
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=4+5-0=9$

답 ⑤

11

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$
(가)에서 $A-X=\varnothing$이므로 $A\subset X$
(나)에서 두 집합 B, X는 서로소이다.
즉 집합 X는 전체집합 U의 부분집합 중 집합 A의 원소 1, 2, 3은 반드시 원소로 갖고 집합 B의 원소 4, 5, 6은 원소로 갖지 않는 집합이므로 구하는 집합 X의 개수는
$2^{10-3-3}=2^4=16$

답 16

12

ㄱ. $A^C-B=A^C\cap B^C$
$=(A\cup B)^C$ ← 드모르간의 법칙
ㄴ. $(A-B)-C=(A\cap B^C)\cap C^C$
$=A\cap(B^C\cap C^C)$ ← 결합법칙
$=A\cap(B\cup C)^C$ ← 드모르간의 법칙
$=A-(B\cup C)$
ㄷ. $A\cup(A\cup B)^C$
$=A\cup(A^C\cap B^C)$ ← 드모르간의 법칙
$=(A\cup A^C)\cap(A\cup B^C)$ ← 분배법칙
$=U\cap(A\cup B^C)$
$=A\cup B^C$
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

13

$A_3\cap(A_4\cup A_6)=(A_3\cap A_4)\cup(A_3\cap A_6)$
$=A_{12}\cup A_6=A_6$
전체집합 U의 원소 중 6의 배수는 6, 12, 18, $\cdots$, 96의 16개이므로 구하는 원소의 개수는 16이다.

답 16

14

학생 56명의 집합을 U, 동아리 A에 가입한 학생의 집합을 A, 동아리 B에 가입한 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=56$, $n(A)=35$, $n(B)=27$
(가)에 의하여 $n(A\cup B)=n(U)=56$

이때 동아리 A에만 가입한 학생 수는 $n(A-B)$이므로

$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$

$=56-27=29$

답 29

15

$(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$

$=\{1, 3, 8\}$

이때 $n(A)=3$, $n(B)=2$이므로 $n(A\cap B)=1$이어야 하고 $a-1\in(A\cap B)$, $8\in B$

또 $a-1$은 집합 B의 원소 중 어느 하나와 같아야 한다.

이때 $a-1\neq a+2$이므로 $a-1=a^2-4a-7$

$a^2-5a-6=0$, $(a+1)(a-6)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=6$

(i) $a=-1$일 때

$A=\{-2, 1, 3\}$, $B=\{-2, 1\}$이므로 두 집합 A, B는 전체집합 U의 부분집합이 아니게 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=6$일 때

$A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{5, 8\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{1, 3, 8\}$이 되어 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=6$

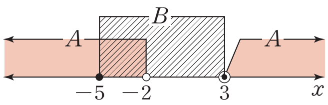
답 6

16

$x^2-x-6>0$에서 $(x+2)(x-3)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>3$

즉 $A=\{x|x<-2$ 또는 $x>3\}$이므로 (가), (나)를 만족시키도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서

$B=\{x|-5\leq x\leq 3\}$

$=\{x|(x+5)(x-3)\leq 0\}$

$=\{x|x^2+2x-15\leq 0\}$

이므로

$a=2$, $b=-15$

$\therefore a-b=2-(-15)=17$

답 17

Level Up 연습문제

p. 162

1

(가)에서 $A\cap B=\{3, 5\}$이므로 $S(A\cap B)=3+5=8$

(나)에서 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{1, 7\}$

즉 $A\cup B=\{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$이므로

$S(A\cup B)=2+3+4+5+6+8=28$

$\therefore S(A)+S(B)=S(A\cup B)+S(A\cap B)$

$=28+8=36$

이때 $S(A)=2S(B)$이므로 $S(B)=\frac{1}{2}S(A)$

$S(B)=\frac{1}{2}S(A)$를 $S(A)+S(B)=36$에 대입하면

$S(A)+\frac{1}{2}S(A)=36$, $\frac{3}{2}S(A)=36$

$\therefore S(A)=24$

답 24

2

(가)에서 $A\cap B=\{4, 6\}$이므로

$A=\{a, b, 4, 6\}$ (a, b는 자연수)이라 하자.

$B=\{x+k|x\in A\}$이므로

$B=\{a+k, b+k, 4+k, 6+k\}$

집합 A의 모든 원소의 합은 $a+b+4+6=21$이므로

$a+b=11$ …… ㉠

집합 B의 모든 원소의 합은

$(a+k)+(b+k)+(4+k)+(6+k)$

$=a+b+4k+10$

$=11+4k+10$ ($\because$ ㉠)

$=4k+21$

이때

($A\cup B$의 모든 원소의 합)$=$(A의 모든 원소의 합)

$+$(B의 모든 원소의 합)$-$($A\cap B$의 모든 원소의 합)

이므로

$40=21+(4k+21)-(4+6)$ $\quad\therefore k=2$

즉 $B=\{a+2, b+2, 6, 8\}$이고 $A\cap B=\{4, 6\}$이므로

$a+2$, $b+2$ 중에서 어느 하나가 4이어야 한다.

(i) $a+2=4$인 경우

$a=2$이므로 ㉠에서 $b=9$

(ii) $b+2=4$인 경우

$b=2$이므로 ㉠에서 $a=9$

(i), (ii)에서 $A=\{2, 4, 6, 9\}$

따라서 집합 A의 모든 원소의 곱은

$2\times 4\times 6\times 9=432$

답 432

3

ㄱ. m, n이 서로소이면 m, n의 공약수는 1이므로
$A_m \cap A_n = \{1\}$

ㄴ. n이 m의 배수이면 m은 n의 약수이다.
즉 m의 약수의 집합은 n의 약수의 집합에 포함되므로
$A_m \subset A_n$

ㄷ. $k \in (A_m \cap A_n)$이라 하면 k는 m과 n의 공약수이므로 $m=km'$, $n=kn'$ 꼴로 나타낼 수 있다.
이때 $m+n=km'+kn'=k(m'+n')$이므로 k는 $m+n$의 약수이다.
즉 $k \in A_{m+n}$이므로 $(A_m \cap A_n) \subset A_{m+n}$이다.

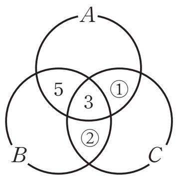
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

4

책 A, B, C를 읽은 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면
$n(A)=10$, $n(B)=11$, $n(C)=12$,
$n(A \cap B)=8$, $n(A \cap B \cap C)=3$

각 영역에 해당하는 원소의 개수를 오른쪽 그림과 같이 벤 다이어그램으로 나타내면



$n(A)=10$이므로 ①에 들어갈 수는
0 이상 $10-(5+3)=2$ 이하이고
$n(B)=11$이므로 ②에 들어갈 수는
0 이상 $11-(5+3)=3$ 이하이다.
따라서 C만 읽은 학생 수의 최댓값은 ①=②=0일 때이므로 $M=12-3=9$
또 최솟값은 ①=2, ②=3일 때이므로
$m=12-(2+3+3)=4$
$\therefore M+m=9+4=13$

답 13

③ 명제

확인 문제 p. 167 ~ 186

01

(1) $\sqrt{2}$는 무리수이므로 참인 명제이다.
(2) 6의 양의 약수는 1, 2, 3, 6이지만 2, 6은 3의 양의 약수가 아니다. 즉 거짓인 명제이다.
(3) 마름모는 네 변의 길이가 같고 두 쌍의 대변이 각각 평행하므로 평행사변형이다. 즉 참인 명제이다.
(4) x의 값에 따라 참, 거짓이 판별되므로 명제가 아니다.

답 풀이 참조

02

(1) 주어진 명제의 부정은 '$\sqrt{2}+\sqrt{3} \neq \sqrt{5}$'이고, 이것은 참인 명제이다.
(2) 주어진 명제의 부정은 '4의 양의 약수는 8의 양의 약수가 아니다.'이고, 이것은 거짓인 명제이다.
(3) 주어진 명제의 부정은 '서울은 대한민국의 수도가 아니다.'이고, 이것은 거짓인 명제이다.
(4) 주어진 명제의 부정은 '$2+\sqrt{3}$은 유리수가 아니다.'이고, 이것은 참인 명제이다.

답 풀이 참조

03

조건 p의 진리집합을 P라 하면
$P=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$
이때 조건 $\sim p$의 진리집합은 P^C이므로
$P^C=\{4, 8\}$
따라서 구하는 모든 원소의 합은
$4+8=12$

답 12

04

$U=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
p: $|x| \le 3$에서 $-3 \le x \le 3$
$\therefore P=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
q: $x^2-3x-4=0$에서 $(x+1)(x-4)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$
$\therefore Q=\{-1, 4\}$

(1) 조건 $\sim p$의 진리집합은 P^C이므로

$P^C=\{-4, 4, 5\}$

(2) 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은 $P\cap Q$이므로

$P\cap Q=\{-1\}$

(3) 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합은 $P^C\cup Q$이므로

$P^C\cup Q=\{-4, -1, 4, 5\}$

답 (1) $\{-4, 4, 5\}$ (2) $\{-1\}$ (3) $\{-4, -1, 4, 5\}$

05

ㄱ. p: $x=2$, q: $x^2=4$라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{2\}$, $Q=\{-2, 2\}$

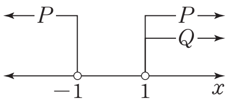
$\therefore P\subset Q$

즉 주어진 명제는 참이다.

ㄴ. p: $|x|>1$, q: $x>1$이라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,x<-1$ 또는 $x>1\}$, $Q=\{x\,|\,x>1\}$

두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 $P\not\subset Q$

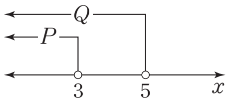


즉 주어진 명제는 거짓이다.

ㄷ. p: $2x-1<5$, q: $x+2<7$이라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,x<3\}$, $Q=\{x\,|\,x<5\}$

두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 $P\subset Q$



즉 주어진 명제는 참이다.

ㄹ. [반례] $x=\sqrt{2}$이면 x^2은 유리수이지만 x는 무리수이다.

즉 주어진 명제는 거짓이다.

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

06

ㄱ. [반례] $a=1$, $b=3$, $c=2$이면 $ab>ac$이지만 $a<b$이다.

즉 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

ㄴ. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

$\therefore P=\{1, 3\}$

q: $0<x<4$에서 $Q=\{x\,|\,0<x<4\}$

즉 $P\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

ㄷ. [반례] $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$이면 a, b는 무리수이지만 $a+b$는 무리수가 아니다.

즉 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

ㄹ. [반례] $x=2$이면 x는 소수이지만 x는 홀수가 아니다.

즉 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

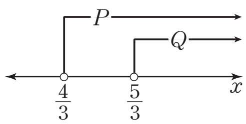
답 풀이 참조

07

p: $x>\frac{4}{3}$, q: $x>\frac{5}{3}$라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\left\{x\,\middle|\,x>\frac{4}{3}\right\}$, $Q=\left\{x\,\middle|\,x>\frac{5}{3}\right\}$

두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 명제가 거짓이 되도록 하는 x의 값의 범위는



$\frac{4}{3}<x\leq\frac{5}{3}$

따라서 $\alpha=\frac{4}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}$이므로

$\beta-\alpha=\frac{5}{3}-\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

08

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $x^2-3x-18<0$에서 $(x+3)(x-6)<0$

$\therefore -3<x<6$

$\therefore P=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

q: $2x-5>0$에서 $x>\frac{5}{2}$

$\therefore Q=\{3, 4, 5, 6, \cdots\}$

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 거짓이 되도록 하는 x의 값은 P의 원소 중에서 Q^C의 원소가 아닌 것, 즉

$P-Q^C=P\cap(Q^C)^C=P\cap Q$

의 원소와 같다.

이때 $P\cap Q=\{3, 4, 5\}$이므로 구하는 모든 정수 x의 값의 합은

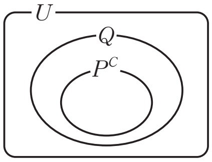
$3+4+5=12$

답 12

09

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 $P^C \subset Q$

이것을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 항상 옳은 것은

④ $P \cup Q = U$이다.

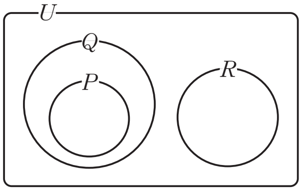
답 ④

10

$P \cap Q = P$이므로 $P \subset Q$

또 $Q - R = Q$이므로 $Q \cap R = \varnothing$

이것을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



① $P \subset Q$　② $P^C \not\subset R$　③ $R \subset Q^C$

④ $Q^C \subset P^C$　⑤ $P \subset R^C$

따라서 항상 참이라고 할 수 없는 명제는 ②이다.

답 ②

11

p: $x = a$, q: $x^2 - 5x - 14 = 0$이라 하면

q: $x^2 - 5x - 14 = 0$에서 $(x+2)(x-7) = 0$

$\therefore x = -2$ 또는 $x = 7$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P = \{a\}$, $Q = \{-2, 7\}$

이때 주어진 명제가 참이려면 $P \subset Q$이어야 하므로

$a = -2$ 또는 $a = 7$

따라서 구하는 양수 a의 값은 7이다.

답 7

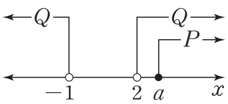
12

p: $x \geq a$, q: $x < -1$ 또는 $x > 2$라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P = \{x \mid x \geq a\}$

$Q = \{x \mid x < -1$ 또는 $x > 2\}$

주어진 명제가 참이려면 $P \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서 $a > 2$



따라서 정수 a의 최솟값은 3이다.

답 3

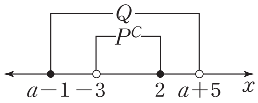
13

p: $x \leq -3$ 또는 $x > 2$이므로 $\sim p$: $-3 < x \leq 2$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P^C = \{x \mid -3 < x \leq 2\}$, $Q = \{x \mid a-1 \leq x < a+5\}$

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이려면 $P^C \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a - 1 \leq -3$, $a + 5 > 2$

$\therefore -3 < a \leq -2$

답 $-3 < a \leq -2$

14

(1) $x = 0$이면 $|x| > 0$이 성립하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다.

주어진 명제의 부정은

'어떤 실수 x에 대하여 $|x| \leq 0$이다.'

이고, $x = 0$이면 $|x| \leq 0$이므로 주어진 명제의 부정은 참이다.

(2) n^2이 짝수인 홀수 n은 존재하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다.

주어진 명제의 부정은

'모든 홀수 n에 대하여 n^2은 짝수가 아니다.'

이고, $n = 2k+1$ (k는 정수)이라 하면

$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

즉 n^2은 짝수가 아니므로 주어진 명제의 부정은 참이다.

(3) 이차방정식 $x^2 + 4x + 5 = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = 2^2 - 5 = -1 < 0$

즉 모든 실수 x에 대하여 $x^2 + 4x + 5 > 0$이므로 주어진 명제는 참이다.

주어진 명제의 부정은

'어떤 실수 x에 대하여 $x^2 + 4x + 5 \leq 0$이다.'

이고, $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 \geq 1$'이므로 주어진 명제의 부정은 거짓이다.

(4) $x^2 \leq x - 1$에서 $x^2 - x + 1 \leq 0$

이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$의 판별식을 D라 하면

$D = (-1)^2 - 4 = -3 < 0$

즉 모든 실수 x에 대하여 $x^2 - x + 1 > 0$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

주어진 명제의 부정은

'모든 실수 x에 대하여 $x^2 > x - 1$이다.'

이고, 이 명제는 참이므로 주어진 명제의 부정은 참이다.

답 풀이 참조

15

모든 자연수 x에 대하여 $x>k-5$가 성립하려면

$k-5<1$이어야 하므로 $k<6$

따라서 자연수 k는 $1, 2, 3, 4, 5$이므로 그 합은

$1+2+3+4+5=15$

답 15

16

명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2+8x+2k-1\le 0$이다.'가 거짓이 되려면 이차함수 $y=x^2+8x+2k-1$의 그래프가 x축과 만나지 않아야 한다.

이차방정식 $x^2+8x+2k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4^2-(2k-1)<0 \qquad \therefore k>\dfrac{17}{2}$

따라서 정수 k의 최솟값은 9이다.

답 9

17

(1) 명제: $x=2$이면 $x^2=4$이다. (참)

역: $x^2=4$이면 $x=2$이다. (거짓)

[반례] $x=-2$이면 $x^2=4$이지만 $x\ne 2$이다.

대우: $x^2\ne 4$이면 $x\ne 2$이다. (참)

(2) 명제: $|x|>1$이면 $x>1$이다. (거짓)

[반례] $x=-2$이면 $|x|>1$이지만 $x\le 1$이다.

역: $x>1$이면 $|x|>1$이다. (참)

대우: $x\le 1$이면 $|x|\le 1$이다. (거짓)

(3) 명제: x가 유리수이면 x^2은 유리수이다. (참)

역: x^2이 유리수이면 x는 유리수이다. (거짓)

[반례] $x=\sqrt{2}$이면 x^2은 유리수이지만 x는 무리수이다.

대우: x^2이 무리수이면 x는 무리수이다. (참)

답 풀이 참조

18

(1) 명제: $x^2>y^2$이면 $x>y>0$이다. (거짓)

[반례] $x=-3, y=-2$이면 $x^2>y^2$이지만 $x<y<0$이다.

역: $x>y>0$이면 $x^2>y^2$이다. (참)

대우: $x\le y$ 또는 $y\le 0$이면 $x^2\le y^2$이다. (거짓)

(2) 명제: $xy>1, x+y>2$이면 $x>1, y>1$이다. (거짓)

[반례] $x=3,\ y=\dfrac{1}{2}$이면 $xy>1,\ x+y>2$이지만 $x>1, y<1$이다.

역: $x>1, y>1$이면 $xy>1, x+y>2$이다. (참)

대우: $x\le 1$ 또는 $y\le 1$이면 $xy\le 1$ 또는 $x+y\le 2$이다. (거짓)

(3) 명제: $xy<0$이면 $x^2+y^2>0$이다. (참)

역: $x^2+y^2>0$이면 $xy<0$이다. (거짓)

[반례] $x=1, y=2$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $xy>0$이다.

대우: $x^2+y^2\le 0$이면 $xy\ge 0$이다. (참)

답 풀이 참조

19

주어진 명제의 대우는

'$x+3=0$이면 $x^2-ax+6=0$이다.'

명제가 참이면 그 대우도 참이므로

$x=-3$일 때 $x^2-ax+6=0$에서

$9+3a+6=0 \qquad \therefore a=-5$

답 -5

20

주어진 명제의 대우는

'$x\le a$이고 $y\le 1$이면 $x+y\le 5$이다.'

명제가 참이면 그 대우도 참이므로

$x\le a, y\le 1$에서 $x+y\le a+1$

즉 $a+1\le 5$이므로 $a\le 4$

답 $a\le 4$

21

명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다. 즉 두 명제 $r \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 항상 참인 것은 ③이다.

답 ③

22

ㄱ. 명제 $\sim p \longrightarrow r$가 참이므로 $P^C\subset R$

ㄴ. 두 명제 $\sim p \longrightarrow r$, $r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 참이다.

이때 그 대우 $q \longrightarrow p$도 참이므로 $Q\subset P$

ㄷ. ㄴ에서 $Q\subset P$이므로 $P\cap Q=Q$

이때 명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim r$도 참이다. $\qquad \therefore Q\subset R^C$

$\therefore (P\cap Q)\subset R^C$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

23

(1) p: $x>y>0 \Longrightarrow q$: $x^2>y^2$

p: $x>y>0 \not\Longleftarrow q$: $x^2>y^2$

[$\longleftarrow$의 반례: $x=2$, $y=-1$]

즉 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(2) p: $x^2=y^2 \not\Longrightarrow q$: $x^3=y^3$

[$\longrightarrow$의 반례: $x=1$, $y=-1$]

p: $x^2=y^2 \Longleftarrow q$: $x^3=y^3$

즉 p는 q이기 위한 필요조건이다.

(3) $|x+y|=|x|+|y|$의 양변을 제곱하면

$x^2+2xy+y^2=x^2+2|xy|+y^2$

$xy=|xy|$ $\quad\therefore xy\ge 0$

p: $xy>0 \Longrightarrow q$: $|x+y|=|x|+|y|$

p: $xy>0 \not\Longleftarrow q$: $|x+y|=|x|+|y|$

[$\longleftarrow$의 반례: $x=0$, $y=0$]

즉 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(4) $x^2+xy+y^2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2=0$에서

$x+\dfrac{y}{2}=0$, $y=0$ $\quad\therefore x=0$, $y=0$

p: $x^2+xy+y^2=0 \Longleftrightarrow q$: $x=0$, $y=0$

즉 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

(5) p: $\angle B=90^\circ \Longrightarrow q$: $\triangle ABC$는 직각삼각형

p: $\angle B=90^\circ \not\Longleftarrow q$: $\triangle ABC$는 직각삼각형

[$\longleftarrow$의 반례: $\angle A=30^\circ$, $\angle B=60^\circ$, $\angle C=90^\circ$]

즉 p는 q이기 위한 충분조건이다.

답 (1) 충분조건 (2) 필요조건 (3) 충분조건 (4) 필요충분조건 (5) 충분조건

24

① p: $|x|>y \not\Longrightarrow q$: $y<0$

[$\longrightarrow$의 반례: $x=-2$, $y=1$]

p: $|x|>y \Longleftarrow q$: $y<0$

즉 p는 q이기 위한 필요조건이다.

② p: $xy=|xy| \not\Longrightarrow q$: $x>0$, $y>0$

[$\longrightarrow$의 반례: $x=0$, $y=1$]

p: $xy=|xy| \Longleftarrow q$: $x>0$, $y>0$

즉 p는 q이기 위한 필요조건이다.

③ $x^2=y^2$에서 $x=\pm y$ $\quad\therefore |x|=|y|$

p: $x^2=y^2 \Longleftrightarrow q$: $|x|=|y|$

즉 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

④ p: $x>y \not\Longrightarrow q$: $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}$

[$\longrightarrow$의 반례: $x=1$, $y=-1$]

p: $x>y \not\Longleftarrow q$: $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}$

[$\longleftarrow$의 반례: $x=-1$, $y=1$]

즉 아무 조건도 아니다.

⑤ p: $A\subset B$, $A\subset C \Longrightarrow q$: $A\subset(B\cup C)$

p: $A\subset B$, $A\subset C \not\Longleftarrow q$: $A\subset(B\cup C)$

[$\longleftarrow$의 반례: $A=\{1\}$, $B=\{1, 2\}$, $C=\{3\}$]

즉 p는 q이기 위한 충분조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

25

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid x^2-a=0\}$, $Q=\{2\}$

p는 q이기 위한 필요조건이므로

$p \Longleftarrow q$, 즉 $Q\subset P$

따라서 $2^2-a=0$이므로 $a=4$

답 4

26

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid (x+2)^2=a\}$, $Q=\{1, b\}$

p는 q이기 위한 필요충분조건이므로

$p \Longleftrightarrow q$, 즉 $P=Q$

따라서 이차방정식 $(x+2)^2=a$, 즉 $x^2+4x+4-a=0$의 두 근이 1, b이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+b=-4$, $1\times b=4-a$

두 식을 연립하여 풀면

$a=9$, $b=-5$

$\therefore a+b=9+(-5)=4$

답 4

27

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x \mid -2<x\le 1$ 또는 $x\ge 5\}$

$Q=\{x \mid x>a\}$

$R=\{x \mid x\ge b\}$

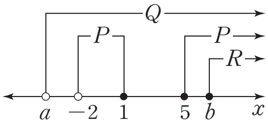
p는 q이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow q$, 즉 $P\subset Q$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

p는 r이기 위한 필요조건이므로

$r \Longrightarrow p$, 즉 $R\subset P$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 만족시키도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a \le -2,\ b \ge 5$

따라서 실수 a의 최댓값은 -2이고 실수 b의 최솟값은 5이다.

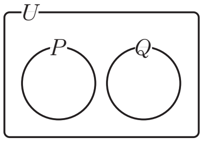
답 a의 최댓값: -2, b의 최솟값: 5

28

p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow \sim q \qquad \therefore P \subset Q^C$

이것을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 옳은 것은 ② $P-Q=P$이다.



답 ②

29

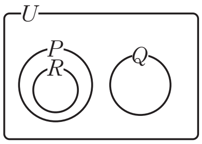
$\sim q$는 p이기 위한 필요조건이므로

$p \Longrightarrow \sim q \qquad \therefore P \subset Q^C$

r는 p이기 위한 충분조건이므로

$r \Longrightarrow p \qquad \therefore R \subset P$

이것을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 옳은 것은 ⑤ $(Q-R) \subset P^C$이다.



답 ⑤

30

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow q$

r는 q이기 위한 필요조건이므로 $q \Longrightarrow r$

$p \Longrightarrow q$이고 $q \Longrightarrow r$이므로 $p \Longrightarrow r$

⑤ $p \Longrightarrow r$이므로 $\sim r \Longrightarrow \sim p$

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

31

ㄱ. $\sim r \Longrightarrow \sim q$에서 $q \Longrightarrow r$

$p \Longrightarrow q$이고 $q \Longrightarrow r$이므로 $p \Longrightarrow r$

즉 p는 r이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $\sim s \Longrightarrow \sim r$에서 $r \Longrightarrow s$

$r \Longrightarrow s$이고 $s \Longrightarrow r$이므로 $r \Longleftrightarrow s$

$q \Longrightarrow r$이고 $r \Longleftrightarrow s$이므로 $q \Longrightarrow s$

즉 s는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $p \Longrightarrow r$, $r \Longleftrightarrow s$이므로 $p \Longrightarrow s$

즉 p는 s이기 위한 충분조건이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

연습문제

p. 187 ~ 189

1

p: $x^2+3x-18<0$에서

$(x+6)(x-3)<0 \qquad \therefore -6<x<3$

$\therefore P=\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

q: $2x+1>0$에서 $x>-\dfrac{1}{2}$

$\therefore Q=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

따라서 $P \cap Q=\{0, 1, 2\}$이므로

$n(P \cap Q)=3$

답 3

2

① [반례] 9는 3의 배수이지만 6의 배수가 아니다.

따라서 거짓인 명제는 ①이다.

답 ①

3

p: $x=4$, q: $2x^2-ax+12=0$이라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{4\}$, $Q=\{x \mid 2x^2-ax+12=0\}$

이때 주어진 명제가 참이 되려면 $P \subset Q$이어야 하므로

$32-4a+12=0$, $4a=44$

$\therefore a=11$

답 ③

4

조건 p의 진리집합을 P라 하면

$P=\{x \mid x^2-3x-15 \le 0\}$

이때 진리집합 P의 원소가 아니려면 $x^2-3x-15\le 0$을 만족시키지 않으면 된다.

⑤ $x=6$이면 $36-18-15=3>0$이므로 $6\notin P$

답 ⑤

5

두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$도 참이다.

이때 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 항상 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

6

주어진 명제의 부정은

'모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+a-1\ge 0$이다.' …… ❶

이 부정이 참이므로 이차방정식 $x^2+ax+a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4(a-1)=a^2-4a+4\le 0$ …… ❷

$(a-2)^2\le 0 \qquad \therefore a=2$ …… ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 부정을 구할 수 있다.	50%
❷ ❶의 명제가 참이 되는 조건을 구할 수 있다.	30%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

7

① 역: $x\ge 2$이면 $x\ge 4$이다.
[반례] $x=3$이면 $x\ge 2$이지만 $x<4$이다.

② 역: $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$이면 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$이다.
[반례] 세 변의 길이가 3, 4, 5인 직각삼각형 ABC와 세 변의 길이가 6, 8, 10인 직각삼각형 DEF는 서로 닮음이지만 합동은 아니다.

③ 역: $x^2-4=0$이면 $x-2=0$이다.
[반례] $x=-2$이면 $x^2-4=0$이지만 $x-2\ne 0$이다.

④ 역: $a\ne 0$ 또는 $b\ne 0$이면 $a^2+b^2>0$이다. (참)

⑤ 역: $ax=ay$이면 $x=y$이다.
[반례] $a=0$, $x=1$, $y=2$이면 $ax=ay$이지만 $x\ne y$이다.

따라서 역이 참인 것은 ④이다.

답 ④

8

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

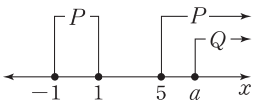
$P=\{x\,|\,-1\le x\le 1$ 또는 $x\ge 5\}$

$Q=\{x\,|\,x\ge a\}$

q는 p이기 위한 충분조건이므로

$q \Longrightarrow p$, 즉 $Q\subset P$ …… ㉠

㉠을 만족시키도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 $a\ge 5$



답 ⑤

9

Step by Step

벤 다이어그램을 이용하여 집합 P, Q, R와 P^C, Q^C, R^C의 포함 관계를 구한다.

↓

세 조건 p, q, r와 그 부정 $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$의 관계를 구한다.

① $R\subset P^C$이므로 $r \Longrightarrow \sim p$
즉 r는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.

② $R\subset Q$이므로 $r \Longrightarrow q$
즉 r는 q이기 위한 충분조건이다.

③ $P\subset R^C$이므로 $p \Longrightarrow \sim r$
즉 $\sim r$는 p이기 위한 필요조건이다.

④ $Q^C\subset R^C$이므로 $\sim q \Longrightarrow \sim r$
즉 $\sim q$는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

⑤ $P\not\subset Q^C$, $Q^C\not\subset P$이므로 p는 $\sim q$이기 위한 아무 조건도 아니다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

10

$P=\{2, 3, 5, 7\}$, $Q=\{2, 4, 6, 8\}$

명제 $q \longrightarrow \sim p$가 거짓임을 보이려면 Q의 원소 중에서 P^C의 원소가 아닌 것, 즉 $Q-P^C$의 원소를 찾으면 된다.

이때 $Q-P^C=Q\cap(P^C)^C=Q\cap P=\{2\}$이므로 구하는 원소는 2이다.

답 ①

11

ㄱ. p: $a^2+b^2=0 \Longrightarrow q$: $a=b$
p: $a^2+b^2=0 \not\Longleftarrow q$: $a=b$
[$\longleftarrow$의 반례: $a=1$, $b=1$]
즉 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. p: $ab<0 \Longrightarrow q$: $a<0$ 또는 $b<0$

p: $ab<0 \not\Longleftarrow q$: $a<0$ 또는 $b<0$

[$\longleftarrow$의 반례: $a=-1$, $b=-1$]

즉 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄷ. p: $a^3-b^3=0 \Longrightarrow q$: $a^2-b^2=0$

p: $a^3-b^3=0 \not\Longleftarrow q$: $a^2-b^2=0$

[$\longleftarrow$의 반례: $a=1$, $b=-1$]

즉 p는 q이기 위한 충분조건이다.

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

12

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x|x\geq a\}$

$Q=\{x|-4<x<3\}$

$R=\{x|b\leq x\leq 2\}$

p는 q이기 위한 필요조건이므로

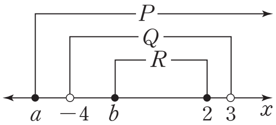
$q \Longrightarrow p$, 즉 $Q\subset P$

r는 q이기 위한 충분조건이므로

$r \Longrightarrow q$, 즉 $R\subset Q$

$\therefore R\subset Q\subset P$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 만족시키도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore a\leq -4$, $-4<b<2$ ($\because b<2$)

따라서 정수 a의 최댓값은 -4, 정수 b의 최솟값은 -3이므로 그 합은

$-4+(-3)=-7$

답 -7

13

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|k+2<x<k+5\}$

$Q=\{x|x<-4$ 또는 $x>6\}$

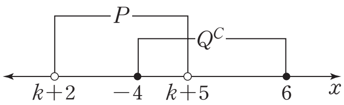
명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이 되려면

$P-Q\neq\varnothing$, 즉 $P\cap Q^C\neq\varnothing$이어야 한다.

이때 $Q^C=\{x|-4\leq x\leq 6\}$이므로 $P\cap Q^C\neq\varnothing$를 만족시키도록 두 집합 P, Q^C를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.

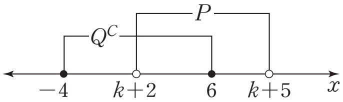
(i) 다음 그림에서 $k+5>-4$이므로

$k>-9$



(ii) 다음 그림에서 $k+2<6$이므로

$k<4$



(i), (ii)에서 $-9<k<4$

따라서 정수 k는 -8, -7, -6, $\cdots$, 0, 1, 2, 3이므로 그 개수는 12이다.

답 ⑤

Level Up 연습문제

p. 190

1

p는 q이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow q$, 즉 $P\subset Q$ $\cdots\cdots$ ㉠

r는 p이기 위한 필요조건이므로

$p \Longrightarrow r$, 즉 $P\subset R$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $a^2-1=3$ 또는 $b=3$

(i) $a^2-1=3$일 때

$a^2=4$에서 $a=-2$ 또는 $a=2$

$\therefore R=\{-2, -2b\}$ 또는 $R=\{2, 2b\}$

이때 ㉡에서 $-2b=3$ 또는 $2b=3$이므로

$a=-2$, $b=-\dfrac{3}{2}$ 또는 $a=2$, $b=\dfrac{3}{2}$

(ⅱ) $b=3$일 때

$R=\{a, 3a\}$

이때 ㉡에서 $a=3$ 또는 $3a=3$이므로

$a=3, b=3$ 또는 $a=1, b=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a+b$의 최솟값은

$-2+\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{7}{2}$

답 ⑤

2

p: $|a|+|b|=0$에서 $a=0$이고 $b=0$

q: $a^2-2ab+b^2=0$에서 $(a-b)^2=0$

$\therefore a=b$

r: $|a+b|=|a-b|$에서

$|a+b|^2=|a-b|^2$, $(a+b)^2=(a-b)^2$

$2ab=-2ab$, $ab=0$ $\quad\therefore a=0$ 또는 $b=0$

ㄱ. $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. p: $a=0$이고 $b=0$에서 $\sim p$: $a\neq0$ 또는 $b\neq0$

r: $a=0$ 또는 $b=0$에서 $\sim r$: $a\neq0$이고 $b\neq0$

즉 $\sim r \Longrightarrow \sim p$이므로 $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. q이고 r: $a=b=0$

즉 q이고 r는 p이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

3

A의 말이 진실이면 A는 Q섬에서 왔으므로 Q섬에 사는 사람들은 거짓을 말한다는 조건에 모순이다.

즉 A의 말은 거짓이고, A는 거짓을 말했으므로 Q섬에서 왔다.

이때 A의 말이 거짓이므로 적어도 한 사람은 P섬에서 왔다. ⋯⋯ ㉠

B의 말이 진실이면 B는 P섬에서 왔고 C는 Q섬에서 왔다.

만약 B의 말이 거짓이면 B는 Q섬에서 왔고 ㉠에서 적어도 한 사람은 P섬에서 왔으므로 C는 P섬에서 왔다.

그런데 B의 말이 거짓이므로 모순이다.

따라서 A의 말은 거짓이고 B의 말은 진실이므로 B는 P섬, A, C는 Q섬에서 왔다.

답 ④

4 절대부등식

확인 문제 p. 194~204

01

(1) 주어진 명제의 대우는

'실수 x, y에 대하여 x, y가 모두 1보다 작거나 같으면 $x+y\leq2$이다.'

(2) $x\leq1$, $y\leq1$이므로 두 부등식을 변끼리 더하면

$x+y\leq2$

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 명제도 참이다.

답 풀이 참조

02

양의 정수 a, b, c에 대하여 주어진 명제의 대우

'a, b, c가 모두 홀수이면 $a^2+b^2\neq c^2$이다.'

가 참임을 보이면 된다.

a, b, c가 모두 홀수이면 a^2, b^2, c^2도 모두 홀수이므로

a^2+b^2은 짝수이고 c^2은 홀수가 되어 $a^2+b^2\neq c^2$이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 명제도 참이다.

답 풀이 참조

03

(1) $\sqrt{3}$이 유리수라고 가정하면

$\sqrt{3}=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)으로 나타낼 수 있다.

$\sqrt{3}=\frac{n}{m}$의 양변을 제곱하여 정리하면

$n^2=3m^2$ ⋯⋯ ㉠

이때 n^2이 3의 배수이므로 n도 3의 배수이다.

$n=3k$ (k는 자연수)로 놓고 이것을 ㉠에 대입하면

$(3k)^2=3m^2$ $\quad\therefore m^2=3k^2$

이때 m^2이 3의 배수이므로 m도 3의 배수이다.

이것은 m, n이 서로소라는 가정에 모순이다.

따라서 $\sqrt{3}$은 무리수이다.

(2) n이 짝수가 아니라고 가정하면

$n=2k-1$ (k는 자연수)로 놓을 수 있다. 이때

$n^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1=2(2k^2-2k)+1$

이므로 n^2은 홀수이다.

이것은 n^2이 짝수라는 가정에 모순이다.

따라서 자연수 n에 대하여 n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.

답 풀이 참조

04

(1) $(a^2+1)(b^2+1)-(ab+1)^2$

$=a^2b^2+a^2+b^2+1-(a^2b^2+2ab+1)$

$=a^2-2ab+b^2$

$=(a-b)^2 \geq 0$ ($\because$ a, b는 실수)

$\therefore (a^2+1)(b^2+1) \geq (ab+1)^2$

여기서 등호는 $a-b=0$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.

(2) $(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-b-(a-2\sqrt{ab}+b)$

$=2(\sqrt{ab}-b)$

$a>b>0$이므로 $ab>b^2$, $\sqrt{ab}>b$ $\quad\therefore \sqrt{ab}-b>0$

즉 $(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$이므로

$\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$

답 풀이 참조

05

$3a>0$, $6b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3a+6b \geq 2\sqrt{18ab}$

(단, 등호는 $3a=6b$, 즉 $a=2b$일 때 성립)

그런데 $ab=2$이므로

$3a+6b \geq 2\sqrt{18 \times 2}=12$

따라서 $3a+6b$의 최솟값은 12이다.

답 12

06

$x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2}=2|xy|$

(단, 등호는 $x^2=y^2$, 즉 $x=\pm y$일 때 성립)

그런데 $x^2+y^2=10$이므로

$10 \geq 2|xy|$, $5 \geq |xy|$ $\quad\therefore -5 \leq xy \leq 5$, $xy \neq 0$

따라서 xy의 최댓값은 5이다.

답 5

07

(1) $(x+y)\left(\frac{4}{x}+\frac{9}{y}\right)=4+\frac{9x}{y}+\frac{4y}{x}+9$

$=\frac{9x}{y}+\frac{4y}{x}+13$

이때 $\frac{x}{y}>0$, $\frac{y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{9x}{y}+\frac{4y}{x}+13 \geq 2\sqrt{\frac{9x}{y} \times \frac{4y}{x}}+13$

$=2 \times 6+13=25$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{9x}{y}=\frac{4y}{x}\text{, 즉 } 3x=2y\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $(x+y)\left(\frac{4}{x}+\frac{9}{y}\right)$의 최솟값은 25이다.

(2) $\left(2x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+8y\right)=2+16xy+\frac{1}{xy}+8$

$=16xy+\frac{1}{xy}+10$

이때 $xy>0$, $\frac{1}{xy}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$16xy+\frac{1}{xy}+10 \geq 2\sqrt{16xy \times \frac{1}{xy}}+10$

$=2 \times 4+10$

$=18$

$\left(\text{단, 등호는 } 16xy=\frac{1}{xy}\text{, 즉 } xy=\frac{1}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\left(2x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+8y\right)$의 최솟값은 18이다.

답 (1) 25 (2) 18

08

$x+\frac{4}{x+3}=x+3+\frac{4}{x+3}-3$

이때 $x>-3$에서 $x+3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+3+\frac{4}{x+3}-3 \geq 2\sqrt{(x+3) \times \frac{4}{x+3}}-3$

$=2 \times 2-3=1$

$\left(\text{단, 등호는 } x+3=\frac{4}{x+3}\text{, 즉 } x=-1\text{일 때 성립}\right)$

즉 $x+\frac{4}{x+3}$는 $x=-1$일 때 최솟값 1을 갖는다.

따라서 $a=-1$, $b=1$이므로

$a+b=-1+1=0$

답 0

09

$x^2-x+\frac{9}{x^2-x+1}=x^2-x+1+\frac{9}{x^2-x+1}-1$

이때 모든 실수 x에 대하여 $x^2-x+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2-x+1+\dfrac{9}{x^2-x+1}-1$

$\geq 2\sqrt{(x^2-x+1)\times\dfrac{9}{x^2-x+1}}-1$

$=2\times3-1=5$

따라서 $x^2-x+\dfrac{9}{x^2-x+1}$의 최솟값은 5이다.

한편 등호는 $x^2-x+1=\dfrac{9}{x^2-x+1}$일 때 성립하므로

$(x^2-x+1)^2=9$에서 $x^2-x+1=3$ ($\because$ $x^2-x+1>0$)

$\therefore$ $x^2-x-2=0$

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 등호가 성립할 때의 모든 x의 값의 합은 1이다.

따라서 $a=5$, $b=1$이므로

$a+b=5+1=6$ 답 6

10

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+3^2)(x^2+y^2)\geq(2x+3y)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}\text{일 때 성립}\right)$

그런데 $x^2+y^2=2$이므로

$13\times2\geq(2x+3y)^2$, $(2x+3y)^2\leq26$

$\therefore$ $-\sqrt{26}\leq2x+3y\leq\sqrt{26}$

따라서 $2x+3y$의 최댓값은 $\sqrt{26}$, 최솟값은 $-\sqrt{26}$이다.

답 최댓값: $\sqrt{26}$, 최솟값: $-\sqrt{26}$

11

a, b, c가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+3^2+2^2)(a^2+b^2+c^2)\geq(a+3b+2c)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{2}\text{일 때 성립}\right)$

그런데 $a^2+b^2+c^2=8$이므로

$14\times8\geq(a+3b+2c)^2$, $(a+3b+2c)^2\leq112$

$\therefore$ $-4\sqrt{7}\leq a+3b+2c\leq4\sqrt{7}$

따라서 $a+3b+2c$의 최댓값은 $4\sqrt{7}$, 최솟값은 $-4\sqrt{7}$이다.

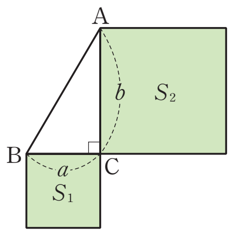
답 최댓값: $4\sqrt{7}$, 최솟값: $-4\sqrt{7}$

12

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$라 하면 직각삼각형 ABC의 넓이가 2이므로

$\dfrac{1}{2}ab=2$

$\therefore$ $ab=4$ ······ ㉠



$S_1=a^2$, $S_2=b^2$이므로

$(S_1+1)(S_2+1)=(a^2+1)(b^2+1)$

$=a^2b^2+a^2+b^2+1$

$=4^2+a^2+b^2+1$ ($\because$ ㉠)

$=a^2+b^2+17$

이때 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2+17\geq2\sqrt{a^2\times b^2}+17$

$=2ab+17$

$=2\times4+17$ ($\because$ ㉠)

$=25$

(단, 등호는 $a^2=b^2$, 즉 $a=b$일 때 성립)

따라서 $(S_1+1)(S_2+1)$의 최솟값은 25이다.

답 25

연습문제

p. 205~207

1

n이 3의 배수가 아니라고 가정하면

$n=\boxed{(가)\ 3k+1}$ 또는 $n=\boxed{(나)\ 3k+2}$

(k는 음이 아닌 정수)

(i) $n=\boxed{(가)\ 3k+1}$일 때

$n^2=(\boxed{(가)\ 3k+1})^2=9k^2+6k+1$

$=3(3k^2+2k)+1$

이므로 n^2은 3의 배수가 아니다.

(ii) $n=\boxed{(나)\ 3k+2}$일 때

$n^2=(\boxed{(나)\ 3k+2})^2=9k^2+12k+4$

$=3(3k^2+4k+1)+1$

이므로 n^2은 3의 배수가 아니다.

(i), (ii)에서 n^2이 3의 배수라는 가정에 모순이다.

따라서 주어진 명제는 참이다.

즉 $f(k)=3k+1$, $g(k)=3k+2$이므로

$f(2)+g(2)=7+8=15$ 답 ④

2

$a>0$, $\dfrac{1}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4a+\dfrac{1}{a}+1\geq2\sqrt{4a\times\dfrac{1}{a}}+1=2\times2+1=5$

$\left(\text{단, 등호는 } 4a=\dfrac{1}{a}\text{, 즉 } a=\dfrac{1}{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $4a+\dfrac{1}{a}+1$의 최솟값은 5이다. 답 ①

3

$$A-B=a^2+b^2-(a-2b+k)$$
$$=a^2-a+b^2+2b-k$$
$$=\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)+(b^2+2b+1)-k-\frac{5}{4}$$
$$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+(b+1)^2-k-\frac{5}{4}$$

이때 $\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2\geq 0$, $(b+1)^2\geq 0$이므로

$A-B\geq -k-\dfrac{5}{4}$

$A\geq B$, 즉 $A-B\geq 0$이 항상 성립해야 하므로

$-k-\dfrac{5}{4}\geq 0 \qquad \therefore k\leq -\dfrac{5}{4}$

따라서 k의 최댓값은 $-\dfrac{5}{4}$이다. 답 ①

4

Step by Step

주어진 식을 전개한다.
↓
산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있는지 확인한다.
↓
주어진 식의 최솟값을 구한다.

$$\left(4x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+16y\right)=4+64xy+\frac{1}{xy}+16$$
$$=64xy+\frac{1}{xy}+20$$

이때 $xy>0$, $\dfrac{1}{xy}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$64xy+\frac{1}{xy}+20\geq 2\sqrt{64xy\times\frac{1}{xy}}+20$$
$$=2\times 8+20=36$$

$\left(\text{단, 등호는 } 64xy=\dfrac{1}{xy},\ \text{즉 } xy=\dfrac{1}{8}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\left(4x+\dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x}+16y\right)$의 최솟값은 36이다. 답 ②

5

$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$

$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(\boxed{(가)\ |ab|-ab})$

그런데 $\boxed{(나)\ |ab|\geq ab}$이므로 $2(\boxed{(가)\ |ab|-ab})\geq 0$

따라서 $(|a|+|b|)^2\geq|a+b|^2$이고

$|a|+|b|\geq 0$, $|a+b|\geq 0$이므로 $|a|+|b|\geq|a+b|$

이다.

여기서 등호는 $\boxed{(다)\ |ab|=ab}$, 즉 $\boxed{(라)\ ab\geq 0}$일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) $|ab|-ab$ (나) $|ab|\geq ab$

(다) $|ab|=ab$ (라) $ab\geq 0$

답 ①

6

$ab=8$이므로 $a\neq 0$, $b\neq 0$

즉 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+4b^2\geq 2\sqrt{a^2\times 4b^2}=4ab=4\times 8=32$

(단, 등호는 $a^2=4b^2$일 때 성립)

따라서 a^2+4b^2의 최솟값은 32이다.

답 32

7

$4x>0$, $\dfrac{a}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4x+\frac{a}{x}\geq 2\sqrt{4x\times\frac{a}{x}}=2\sqrt{4a}=4\sqrt{a}$$

$\left(\text{단, 등호는 } 4x=\dfrac{a}{x}\text{일 때 성립}\right)$

즉 $4x+\dfrac{a}{x}$의 최솟값이 $4\sqrt{a}$이므로

$4\sqrt{a}=2$, $\sqrt{a}=\dfrac{1}{2} \qquad \therefore a=\dfrac{1}{4}$

답 ①

8

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+4^2)(x^2+y^2)\geq(3x+4y)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}\text{일 때 성립}\right)$ ⋯⋯ ❶

그런데 $x^2+y^2=9$이므로

$25\times 9\geq(3x+4y)^2$, $(3x+4y)^2\leq 225$

$\therefore -15\leq 3x+4y\leq 15$ ⋯⋯ ❷

즉 $3x+4y$의 최댓값은 15이고, 이때 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}$이므로

$3x+4y=15$, $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}$를 연립하여 풀면

$x=\frac{9}{5}, y=\frac{12}{5}$ …… ❸

$\therefore x+y=\frac{9}{5}+\frac{12}{5}=\frac{21}{5}$ …… ❹

답 $\frac{21}{5}$

채점 기준	비율
❶ 코시-슈바르츠의 부등식을 이용할 수 있다.	30%
❷ $3x+4y$의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❸ 연립방정식을 풀어 x, y의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $x+y$의 값을 구할 수 있다.	10%

9

주어진 그림에서

$\overline{CO}=\overline{DO}=\boxed{(가)\ \frac{a+b}{2}}$

$\overline{MO}=\overline{BM}-\overline{BO}=b-\frac{a+b}{2}=\boxed{(나)\ \frac{b-a}{2}}$

$\triangle$DOM은 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{DM}^2&=\overline{DO}^2-\overline{MO}^2\\&=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}b^2-\left(\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}a^2\right)\\&=\boxed{(다)\ ab}\end{aligned}$$

$\therefore \overline{DM}=\sqrt{\boxed{(다)\ ab}}$

이때 $\overline{CO}\ge\overline{DM}$이므로 $\boxed{(가)\ \frac{a+b}{2}}\ge\sqrt{\boxed{(다)\ ab}}$

$\therefore$ (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) $\frac{b-a}{2}$ (다) ab

답 ④

10

$$\begin{aligned}\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}&=1\times\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\\&=(3a+2b)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\ (\because 3a+2b=1)\\&=\frac{3}{2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{2}{3}\\&=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{13}{6}\end{aligned}$$

이때 $a>0, b>0$에서 $\frac{a}{b}>0, \frac{b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{13}{6}\ge2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}+\frac{13}{6}=2+\frac{13}{6}=\frac{25}{6}$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{b}=\frac{b}{a}, \text{ 즉 } a=b\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}$의 최솟값은 $\frac{25}{6}$이다.

답 $\frac{25}{6}$

다른 풀이

$3a+2b=1$의 양변을 6으로 나누면 $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}=\frac{1}{6}$

이때 a, b는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)\ge\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{\frac{1}{3b}}\sqrt{\frac{b}{3}}\right)^2$$

(단, 등호는 $a^2=b^2$, 즉 $a=b$일 때 성립)

$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\ge\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2$, $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\ge\frac{25}{36}$

$\therefore \frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\ge\frac{25}{6}$

따라서 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}$의 최솟값은 $\frac{25}{6}$이다.

11

이차방정식 $x^2-2x+a=0$이 허근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-a<0 \qquad \therefore a-1>0$

이때 $a+\frac{1}{a-1}=a-1+\frac{1}{a-1}+1$이고 $a-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}a-1+\frac{1}{a-1}+1&\ge2\sqrt{(a-1)\times\frac{1}{a-1}}+1\\&=2+1=3\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } a-1=\frac{1}{a-1}, \text{ 즉 } a=2\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $a+\frac{1}{a-1}$은 $a=2$일 때 최솟값 3을 가지므로

$k=2, l=3$

$\therefore k+l=2+3=5$

답 5

12

$\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$라 하면 직각삼각형 ABC의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}ab=16 \qquad \therefore ab=32$

$\overline{AB}$가 직각삼각형 ABC의 빗변이므로

$\overline{AB}^2=a^2+b^2$

이때 $a^2>0, b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2\ge2\sqrt{a^2\times b^2}=2ab=2\times32=64$

(단, 등호는 $a^2=b^2$, 즉 $a=b$일 때 성립)

따라서 $\overline{AB}^2$의 최솟값은 64이다.

답 ③

Level Up 연습문제

p. 208

1

$x\neq 0$이므로 $\frac{3x}{3x^2+5x+27}$의 분자와 분모를 x로 나누면

$$\frac{3x}{3x^2+5x+27}=\frac{3}{3x+\frac{27}{x}+5}$$

이때 $x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3x+\frac{27}{x}\geq 2\sqrt{3x\times\frac{27}{x}}$$
$$=2\times 9=18$$
$$\left(\text{단, 등호는 } 3x=\frac{27}{x}\text{, 즉 } x=3\text{일 때 성립}\right)$$

즉 $3x+\frac{27}{x}\geq 18$이므로 $3x+\frac{27}{x}+5\geq 23$

$$\therefore \frac{3}{3x+\frac{27}{x}+5}\leq\frac{3}{23}$$

따라서 $\frac{3x}{3x^2+5x+27}$는 $x=3$일 때 최댓값 $\frac{3}{23}$을 가지므로

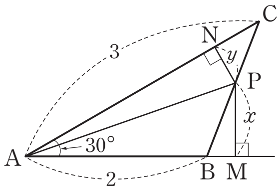
$\alpha=3$, $\beta=\frac{3}{23}$

$\therefore \alpha\beta=3\times\frac{3}{23}=\frac{9}{23}$

답 ①

2

다음 그림과 같이 $\overline{\text{PM}}=x$, $\overline{\text{PN}}=y$라 하자.



$\triangle\text{ABC}=\triangle\text{ABP}+\triangle\text{APC}$

이므로

$$\frac{1}{2}\times 2\times 3\times\sin 30°=\frac{1}{2}\times 2\times x+\frac{1}{2}\times 3\times y$$

$\frac{3}{2}=x+\frac{3}{2}y \qquad \therefore 2x+3y=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{\overline{\text{AB}}}{\overline{\text{PM}}}+\frac{\overline{\text{AC}}}{\overline{\text{PN}}}=\frac{2}{x}+\frac{3}{y}$에서

$$3\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)=(2x+3y)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)\ (\because ㉠)$$
$$=4+\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}+9$$
$$=\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}+13$$

이때 $\frac{6x}{y}>0$, $\frac{6y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}+13\geq 2\sqrt{\frac{6x}{y}\times\frac{6y}{x}}+13$$
$$=2\times 6+13=25$$
$$\left(\text{단, 등호는 }\frac{6x}{y}=\frac{6y}{x}\text{, 즉 } x=y\text{일 때 성립}\right)$$

즉 $3\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)\geq 25$이므로 $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\geq\frac{25}{3}$

따라서 $\frac{\overline{\text{AB}}}{\overline{\text{PM}}}+\frac{\overline{\text{AC}}}{\overline{\text{PN}}}$, 즉 $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}$의 최솟값은 $\frac{25}{3}$이므로

$p=3$, $q=25$

$\therefore p+q=3+25=28$

답 28

3

원의 지름의 길이, 즉 원에 내접하는 직사각형의 대각선의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 a, b라 하면

$a^2+b^2=20$

정사각기둥의 밑면의 한 변의 길이는 $\frac{a}{4}$이고 높이는 b이므로 상자의 모든 모서리의 길이의 합 l은

$l=8\times\frac{a}{4}+4\times b=2a+4b$

a, b는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(2^2+4^2)(a^2+b^2)\geq(2a+4b)^2$$
$$\left(\text{단, 등호는 }\frac{a}{2}=\frac{b}{4}\text{, 즉 } 2a=b\text{일 때 성립}\right)$$

$20\times 20\geq(2a+4b)^2$, $(2a+4b)^2\leq 400$

이때 $a>0$, $b>0$이므로

$0<2a+4b\leq 20$

따라서 l의 최댓값은 20이다.

답 20

4

ㄱ. 삼각형 GDH와 삼각형 FCG는 직각이등변삼각형이므로

$\angle\text{DGH}=\angle\text{CGF}=45° \qquad \therefore \angle\text{FGH}=90°$

또 점 M은 선분 FH의 중점이므로 세 점 F, G, H는 중심이 점 M인 한 원 위에 있다.

$\therefore \overline{\text{FM}}=\overline{\text{GM}}$

ㄴ. $\triangle\text{AEH}$와 $\triangle\text{BFE}$가 합동이므로

$\angle\text{AEH}+\angle\text{BEF}=90°$

또 $\overline{\mathrm{EH}}=\overline{\mathrm{EF}}=\sqrt{a^2+b^2}$이므로 $\triangle$EFH는 직각이등변삼각형이다.

$\therefore\ \triangle\mathrm{EFH}=\frac{1}{2}\times\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{a^2+b^2}$

$=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

$\overline{\mathrm{EM}}$이 $\triangle$EFH의 넓이를 이등분하므로

$\triangle\mathrm{EFM}=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$

한편 $\triangle$FGH는 직각삼각형이므로

$\triangle\mathrm{FGH}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}a\times\sqrt{2}b=ab$

$\overline{\mathrm{GM}}$이 $\triangle$FGH의 넓이를 이등분하므로

$\triangle\mathrm{FGM}=\frac{1}{2}ab$

이때 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{1}{4}(a^2+b^2)\geq\frac{1}{4}\times2\sqrt{a^2\times b^2}=\frac{1}{2}ab$

(단, 등호는 $a^2=b^2$, 즉 $a=b$일 때 성립)

$\therefore\ \triangle\mathrm{EFM}\geq\triangle\mathrm{FGM}$

ㄷ. $\overline{\mathrm{FH}}$는 직각이등변삼각형 EFH의 빗변이므로

$\overline{\mathrm{FH}}=6\sqrt{2}$에서 $\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}=6\sqrt{2}$

$\therefore\ a^2+b^2=36$

$a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2\geq2\sqrt{a^2\times b^2}=2ab$에서

$36\geq2ab$

$\therefore\ ab\leq18$ (단, 등호는 $a^2=b^2$, 즉 $a=b$일 때 성립)

이때 $\triangle$FGM의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이므로 $\triangle$FGM의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{2}\times18=9$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

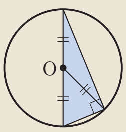
Lecture

(1) 삼각형의 외심의 성질

① 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만난다.

② 외심에서 삼각형의 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

(2) 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이다.



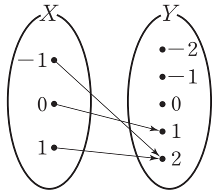
1 함수

확인 문제

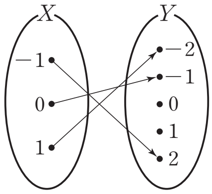
p. 213~223

01

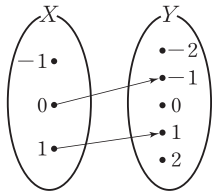
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



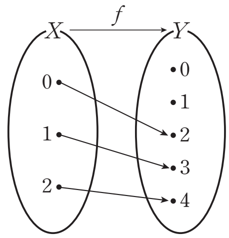
ㄷ. X의 원소 -1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

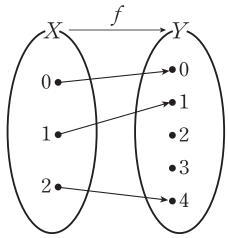
답 ㄱ, ㄴ

02

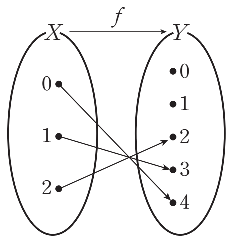
①



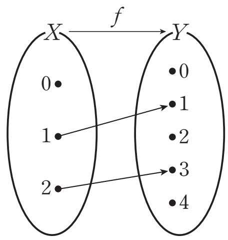
②



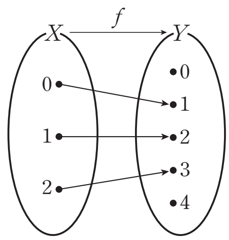
③



④



⑤



④ X의 원소 0에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 X에서 Y로의 함수 f가 아닌 것은 ④이다.

답 ④

03

$f(-1)=2-(-1)=3,\ f(3)=2\times3-1=5$

$\therefore f(-1)+f(3)=3+5=8$

답 8

04

$X=\{1, 2, 3, 6\}$에 대하여

$f(x)=\begin{cases} 2^x & (x\text{는 홀수}) \\ x-1 & (x\text{는 짝수}) \end{cases}$이므로

$f(1)=2^1=2,\ f(2)=2-1=1$

$f(3)=2^3=8,\ f(6)=6-1=5$

따라서 함수 f의 치역은 $\{1, 2, 5, 8\}$이므로 모든 원소의 합은

$1+2+5+8=16$

답 16

05

$f=g$이려면 정의역의 각 원소에 대한 함숫값이 서로 같아야 한다.

$f(1)=g(1)$에서

$a+b=3$ …… ㉠

$f(2)=g(2)$에서

$2a+b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=1$

$\therefore a-b=2-1=1$

답 1

06

$f=g$이려면 정의역의 각 원소에 대한 함숫값이 서로 같아야 한다.

$f(a)=g(a)$에서 $2a^2-1=2a+3$

$2a^2-2a-4=0 \qquad \therefore a^2-a-2=0$

$f(b)=g(b)$에서 $2b^2-1=2b+3$

$2b^2-2b-4=0 \qquad \therefore b^2-b-2=0$

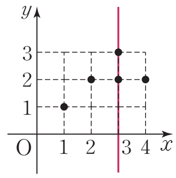
따라서 이차방정식 $x^2-x-2=0$의 두 근이 a, b이므로 근과 계수의 관계에 의하여

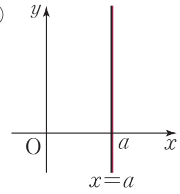
$ab=\dfrac{-2}{1}=-2$

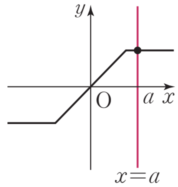
답 -2

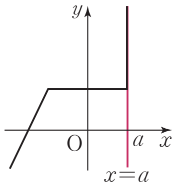
07

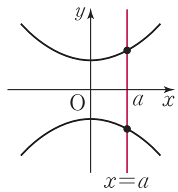
주어진 그래프에 y축에 평행한 직선 $x=a$를 그어 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.

①


②


③


④


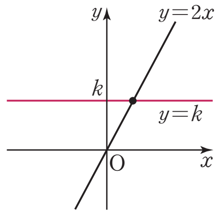
⑤


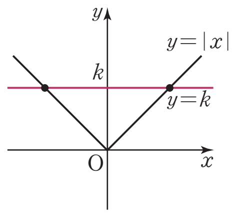
따라서 함수의 그래프인 것은 ③이다.

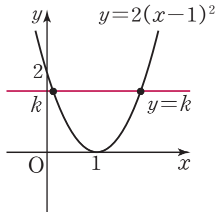
답 ③

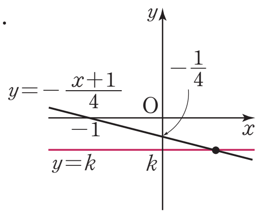
08

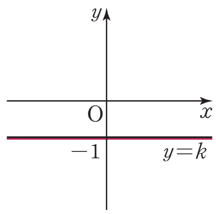
각 보기의 함수의 그래프를 그리면 다음과 같다.

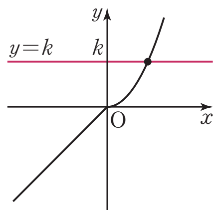
ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄹ.


ㅁ.


ㅂ.


(1) 일대일함수의 그래프는 치역의 한 원소 k에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나므로 ㄱ, ㄹ, ㅂ이다.

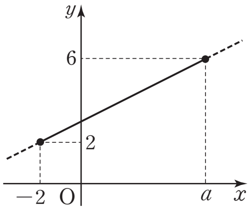
(2) 일대일대응은 일대일함수이고 치역과 공역이 같은 함수이므로 ㄱ, ㄹ, ㅂ이다.

(3) 상수함수는 치역의 원소가 1개인 함수이므로 ㅁ이다.

답 (1) ㄱ, ㄹ, ㅂ (2) ㄱ, ㄹ, ㅂ (3) ㅁ

09

함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(-2)=2$에서

$-1+b=2 \quad \therefore b=3$

$f(a)=6$에서

$\frac{1}{2}a+b=6$ ······ ㉠

$b=3$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{2}a+3=6 \quad \therefore a=6$

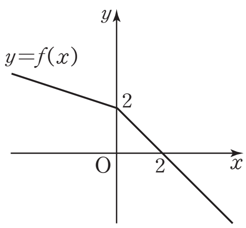
$\therefore a+b=6+3=9$

답 9

> **참고** 함수 f가 일대일대응이려면
> (1) x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 증가하거나 감소해야 한다.
> (2) 정의역의 양 끝 값의 함숫값이 공역의 양 끝 값과 같아야 한다.

10

$x\geq 0$에서 $f(x)=-x+2$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $|a|-3<0$이므로

$|a|<3 \quad \therefore -3<a<3$

따라서 정수 a는 $-2, -1, 0, 1, 2$이므로 그 개수는 5이다.

답 5

11

함수 f는 항등함수이므로 $f(-2)=-2$

함수 g는 상수함수이고 $f(3)=3$에서 $g(3)=3$이므로

$g(5)=g(3)=3$

$\therefore f(-2)+g(5)=-2+3=1$

답 1

12

함수 f는 상수함수이고 $f(2)=4$이므로

$f(1)=f(2)=f(3)=\cdots=f(10)=4$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)=4\times 10=40$

답 40

13

함수 f는 항등함수이므로 $f(4)=4$

즉 $g(2)=4$이고 함수 g는 상수함수이므로 $g(x)=4$

$\therefore f(6)+g(8)=6+4=10$

답 10

14

집합 X에 대하여 X에서 X로의 함수를 f라 하면

(i) $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3 중 하나이므로 3개
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3 중 하나이므로 3개
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3 중 하나이므로 3개
즉 함수의 개수는 $3\times 3\times 3=3^3=27$

(ii) $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3 중 하나이므로 3개
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 2개
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 1개
즉 일대일대응의 개수는 $3\times 2\times 1=6$

(iii) $f(x)=x$에서 $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$
즉 항등함수의 개수는 1이다.

(iv) $f(1)=f(2)=f(3)=k$라 하면
k의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3 중 하나이므로 3개
즉 상수함수의 개수는 3이다.

(i)~(iv)에서 $p=27$, $q=6$, $r=1$, $s=3$

$\therefore p+q+r+s=27+6+1+3=37$

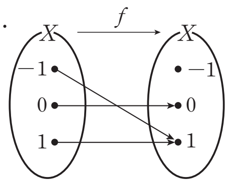
답 37

연습문제

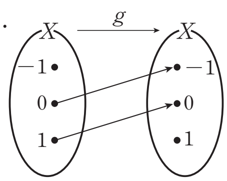
p. 224~225

1

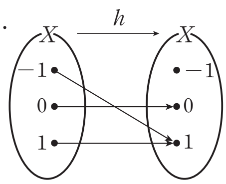
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



ㄴ. X의 원소 -1에 대응하는 X의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 X에서 X로의 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

2

5는 유리수이므로

$f(5)=5-3=2$

$\sqrt{5}-2$는 무리수이므로

$f(\sqrt{5}-2)=-(\sqrt{5}-2)=2-\sqrt{5}$

$\therefore f(5)-f(\sqrt{5}-2)=2-(2-\sqrt{5})=\sqrt{5}$

답 $\sqrt{5}$

3

ㄱ. $f(x)=|x|$에서

$f(-1)=|-1|=1$,

$f(1)=|1|=1$

$\therefore f(-1)=f(1)$

ㄴ. $f(x)=x^3-x$에서

$f(-1)=0$, $f(0)=0$, $f(1)=0$

즉 함수 $f(x)=x^3-x$의 치역은 $\{0\}$이다.

ㄷ. $f(x)=x^3$에서

$f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$

즉 함수 $f(x)=x^3$은 일대일함수이고

(치역)=(공역)이므로 일대일대응이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

4

Step by Step

$f(1)$, $f(2)$, $g(1)$, $g(2)$의 값을 각각 구한다.

↓

$f(1)=g(1)$, $f(2)=g(2)$를 만족시키는 식을 구한다.

↓

연립방정식을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

$f=g$이려면 정의역의 각 원소에 대한 함숫값이 서로 같아야 한다.

$f(1)=g(1)$에서 $2=a+b$ …… ㉠

$f(2)=g(2)$에서 $16=4a+2b$

$\therefore 8=2a+b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=6$, $b=-4$

$\therefore a^2+b^2=6^2+(-4)^2=52$

답 52

5

함수 g는 항등함수이므로 $g(3)=3$

(나)에서 $f(6)=h(9)=3$

함수 h는 상수함수이므로 $h(x)=3$

(다)에서 $f(3)+3=f(9)$이고 함수 f는 일대일대응이므로

$f(3)=6$, $f(9)=9$

$\therefore 3f(3)+2g(6)+h(9)=3\times6+2\times6+3=33$

답 33

6

$f=g$이려면 정의역의 각 원소에 대한 함숫값이 서로 같아야 한다.

$f(0)=g(0)$에서 $3=a+b$ …… ㉠

$f(1)=g(1)$에서 $1=b$

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$3=a+1$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore 2a-b=2\times2-1=3$

답 ④

7

$f(1)+f(4)=7$이고 (나)에서 $f(4)\neq4$이므로

$f(1)=4$, $f(4)=3$

$f(2)\neq2$, $f(3)\neq3$이므로

$f(2)=1$, $f(3)=2$

$\therefore f(1)+f(2)=4+1=5$ 답 5

8

(나)에서 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=-f(0)$, $2f(0)=0$ $\quad\therefore f(0)=0$

(가)에서 함수 f는 일대일대응이므로

$f(-2)$의 값이 될 수 있는 것은 -2, -1, 0, 1, 2 중 $f(0)$의 값을 제외한 4개

(나)에서 양변에 $x=-2$를 대입하면

$f(2)=-f(-2)$

즉 $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $-f(-2)$의 값과 같으므로 1개

$f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 -2, -1, 0, 1, 2 중 $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$의 값을 제외한 2개

(나)에서 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(1)=-f(-1)$

즉 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-f(-1)$의 값과 같으므로 1개

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$4\times1\times2\times1=8$ 답 8

참고 $f(0)=0$이므로 $f(-2)$의 값이 될 수 있는 것은 -2, -1, 1, 2 중 하나이다.
이때 f는 일대일대응이므로 각 경우의 $f(-2)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(1)$의 값을 정하면 다음과 같다.

$f(-2)$	$f(2)$	$f(-1)$	$f(1)$
-2	2	-1	1
		1	-1
2	-2	-1	1
		1	-1
-1	1	-2	2
		2	-2
1	-1	-2	2
		2	-2

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 8이다.

9

(i) $a>0$일 때

$f(-1)=-1$에서 $-a+b=-1$

$f(2)=5$에서 $2a+b=5$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$ ...... ❶

(ii) $a<0$일 때

$f(-1)=5$에서 $-a+b=5$

$f(2)=-1$에서 $2a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=3$ ...... ❷

(i), (ii)에서 ab의 값은 2, -6이므로 ab의 최댓값은 2이다. ...... ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $a>0$일 때, a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $a<0$일 때, a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

10

X에서 X로의 함수의 개수는 $3^3=27$

$\{f(-1)+1\}\{f(1)-1\}=0$에서

$f(-1)=-1$ 또는 $f(1)=1$

(i) $f(-1)=-1$일 때

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 -1, 0, 1 중 하나이므로 3개

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 -1, 0, 1 중 하나이므로 3개

즉 함수의 개수는 $3\times3=9$

(ii) $f(1)=1$일 때

$f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 -1, 0, 1 중 하나이므로 3개

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 -1, 0, 1 중 하나이므로 3개

즉 함수의 개수는 $3\times3=9$

(iii) $f(-1)=-1$, $f(1)=1$일 때

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 -1, 0, 1 중 하나이므로 3개

즉 함수의 개수는 3이다.

(i)~(iii)에서 $\{f(-1)+1\}\{f(1)-1\}=0$을 만족시키는 함수의 개수는 $9+9-3=15$

따라서 $\{f(-1)+1\}\{f(1)-1\}\neq0$을 만족시키는 함수 f의 개수는 $27-15=12$

답 12

다른 풀이

$\{f(-1)+1\}\{f(1)-1\}\neq0$에서

$f(-1)\neq-1$, $f(1)\neq1$

$f(-1)\neq-1$에서 $f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1 중 하나이므로 2개

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 -1, 0, 1 중 하나이므로 3개

$f(1)\neq1$에서 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 -1, 0 중 하나이므로 2개

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

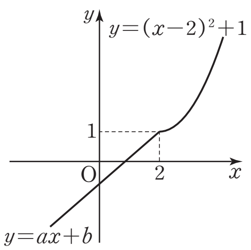
$2\times3\times2=12$

Level Up 연습문제

p.226

1

$x\ge2$에서 $f(x)=(x-2)^2+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x<2$에서 직선 $y=ax+b$의 기울기 a는 양수이어야 한다.



$\therefore a>0$ ...... ㉠

또 (치역)=(공역)이려면

직선 $y=ax+b$가 점 $(2, 1)$을 지나야 하므로

$1=2a+b$ $\qquad\therefore a=\dfrac{1-b}{2}$ ...... ㉡

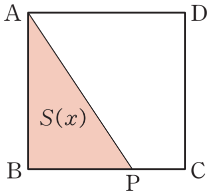
㉡을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{1-b}{2}>0$ $\qquad\therefore b<1$

답 $b<1$

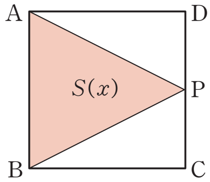
2

(i) $0<x<2$일 때



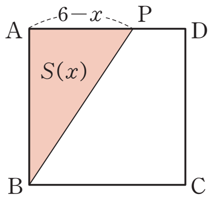
$$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BP}$$
$$=\frac{1}{2}\times2\times x$$
$$=x$$

(ii) $2\le x<4$일 때



$$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}$$
$$=\frac{1}{2}\times2\times2$$
$$=2$$

(iii) $4\le x<6$일 때



$$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AP}$$
$$=\frac{1}{2}\times2\times(6-x)$$
$$=6-x$$

(i)~(iii)에서 $S(x)=\begin{cases} x & (0<x<2) \\ 2 & (2\le x<4) \\ 6-x & (4\le x<6)\end{cases}$

ㄱ. $S(1)=1$, $S(2)=2$이므로
$2S(1)=S(2)$

ㄴ. $2\le x<4$일 때, $S(x)=2$이므로 상수함수이다.

ㄷ. $4\le x<6$일 때, $S(x)=6-x$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

> **참고** (iii) $4\le x<6$일 때, 점 P는 $\overline{AD}$ 위에 있으므로
> $\overline{PD}=x-4$
> $\therefore \overline{AP}=\overline{AD}-\overline{PD}=2-(x-4)=6-x$

3

두 함수 f, g에 대하여 $f=g$를 만족시키는 공집합이 아닌 집합 X의 개수가 7이므로 방정식 $f(x)=g(x)$는 서로 다른 3개의 실근을 가져야 한다.

$f(x)=g(x)$에서

$x^3-x^2+2x-2=2kx^2-3kx+k$

$x^3-(2k+1)x^2+(3k+2)x-k-2=0$

$\therefore (x-1)(x^2-2kx+k+2)=0$

이 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-2kx+k+2=0$은 $x=1$이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x=1$을 $x^2-2kx+k+2=0$에 대입하면

$1-2k+k+2=0$에서 $k=3$

$\therefore k\ne3$ ······ ㉠

$x^2-2kx+k+2=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k+2)>0$, $k^2-k-2>0$

$(k+1)(k-2)>0$ $\therefore k<-1$ 또는 $k>2$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $k<-1$ 또는 $2<k<3$ 또는 $k>3$

답 $k<-1$ 또는 $2<k<3$ 또는 $k>3$

4

집합 $X=\{\alpha, \beta, \gamma\}$에서 정의된 함수 f가 항등함수가 되기 위해서는 $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$, $f(\gamma)=\gamma$가 성립해야 하므로 $\alpha<\beta<\gamma$인 세 실수 α, β, γ는 삼차방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 세 실근이다.

$f(x)=x$에서 $x^3+(2k-1)x^2+4x-2k-3=x$

$x^3+(2k-1)x^2+3x-2k-3=0$ ······ ㉠

이때 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-(2k-1)$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$

$\alpha\beta\gamma=2k+3$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=\{-(2k-1)\}^2-2\times3$
$=4k^2-4k-5$

이때 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=19$이므로

$4k^2-4k-5=19$, $k^2-k-6=0$

$(k+2)(k-3)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=3$

(i) $k=-2$일 때

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$x^3-5x^2+3x+1=0$, $(x-1)(x^2-4x-1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2\pm\sqrt{5}$

즉 서로 다른 세 실근 α, β, γ가 존재하고

$\alpha=2-\sqrt{5}$ ($\because \alpha<\beta<\gamma$)

(ii) $k=3$일 때

$k=3$을 ㉠에 대입하면

$x^3+5x^2+3x-9=0$, $(x-1)(x+3)^2=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-3$ (중근)

즉 $\alpha<\beta<\gamma$인 세 실근이 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\alpha=2-\sqrt{5}$

답 $2-\sqrt{5}$

② 합성함수와 역함수

확인 문제

p. 230 ~ 244

01

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(2)=0$
$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(1)=2$
$\therefore (g\circ f)(1)+(f\circ g)(1)=0+2=2$

답 2

02

$(f\circ g)(1)=f(g(1))$
$=f(3a+1)$
$=2(3a+1)-1$
$=6a+1$
$(f\circ g)(1)=3$이므로
$6a+1=3 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$
따라서 $g(x)=x^2+1$이므로 $g(0)=1$

답 1

03

$g(2)=3\times2^2-2\times2+2=10$, $f(1)=1-2=-1$이므로
$(f\circ g)(2)+(g\circ f)(1)$
$=f(g(2))+g(f(1))$
$=f(10)+g(-1)$
$=-2\times10+7+3\times(-1)^2-2\times(-1)+2$
$=-6$

답 -6

04

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$
$=f(ax-6)$
$=-(ax-6)+a$
$=-ax+a+6$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))$
$=g(-x+a)$
$=a(-x+a)-6$
$=-ax+a^2-6$
$f\circ g=g\circ f$이므로 $-ax+a+6=-ax+a^2-6$에서
$a+6=a^2-6$, $a^2-a-12=0$
$(a+3)(a-4)=0 \qquad \therefore a=4\ (\because a>0)$

답 4

05

$g(-1)=1$에서 $-a+b=1$ …… ㉠
$(f\circ g)(x)=f(g(x))$
$=f(ax+b)$
$=2(ax+b)-3$
$=2ax+2b-3$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))$
$=g(2x-3)$
$=a(2x-3)+b$
$=2ax-3a+b$
$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이므로
$2ax+2b-3=2ax-3a+b$에서
$2b-3=-3a+b \qquad \therefore 3a+b=3$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$
따라서 $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$이므로
$g(5)=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$

답 4

06

(1) $(f\circ h)(x)=f(h(x))=-h(x)+2=g(x)$이므로
$-h(x)+2=3x-1 \qquad \therefore h(x)=-3x+3$
(2) $(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(-x+2)=g(x)$이므로
$h(-x+2)=3x-1$ …… ㉠
$-x+2=t$로 놓으면 $x=-t+2$이므로 이를 ㉠에 대입하면
$h(t)=3(-t+2)-1=-3t+5$
$\therefore h(x)=-3x+5$

답 (1) $h(x)=-3x+3$ (2) $h(x)=-3x+5$

07

(1) $\frac{x-1}{2}=-1$에서
$x-1=-2 \qquad \therefore x=-1$
따라서 $f\left(\frac{x-1}{2}\right)=3x+2$에 $x=-1$을 대입하면
$f(-1)=3\times(-1)+2=-1$
(2) $\frac{x-1}{2}=t$로 놓으면 $x=2t+1$이므로
이를 $f\left(\frac{x-1}{2}\right)=3x+2$에 대입하면
$f(t)=3(2t+1)+2=6t+5$
$\therefore f\left(\frac{x+2}{3}\right)=6\times\frac{x+2}{3}+5=2x+9$

답 (1) -1 (2) $f\left(\frac{x+2}{3}\right)=2x+9$

08

$f^1(x)=f(x)=x+3$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)$
$=f(f(x))$
$=f(x+3)$
$=(x+3)+3$
$=x+6$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)$
$=f(f^2(x))$
$=f(x+6)$
$=(x+6)+3$
$=x+9$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)$
$=f(f^3(x))$
$=f(x+9)$
$=(x+9)+3$
$=x+12$

⋮

$\therefore\ f^n(x)=x+3n$ (n은 자연수)

따라서 $f^{15}(x)=x+45$이므로

$f^{15}(a)=a+45=50 \qquad \therefore\ a=5$

답 5

09

$f(0)=2,\ f(1)=1-1=0,\ f(2)=2-1=1$이므로

$f^2(0)=(f\circ f^1)(0)=f(2)=1$

$f^3(0)=(f\circ f^2)(0)=f(1)=0$

$f^4(0)=(f\circ f^3)(0)=f(0)=2$

⋮

즉 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$일 때, $f^n(0)$의 값은 2, 1, 0이 순서대로 반복된다.

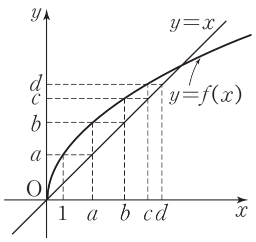
이때 $100=3\times 33+1$이므로

$f^{100}(0)=f(0)=2$

답 2

10

(1) $f(1)=a,\ f(a)=b,$
$f(b)=c$이므로
$(f\circ f\circ f)(1)$
$=f(f(f(1)))$
$=f(f(a))$
$=f(b)=c$



(2) $f(x)=t$라 하면
$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(t)=d$
$f(t)=d$인 t의 값은 $t=c$
따라서 $f(x)=c$인 x의 값은 $x=b$

답 (1) c (2) b

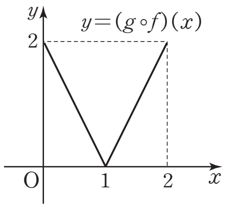
11

주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (0\le x<1) \\ -2x+4 & (1\le x\le 2)\end{cases},\ g(x)=-x+2$$

$$\therefore\ (g\circ f)(x)=g(f(x))=-f(x)+2$$
$$=\begin{cases} -2x+2 & (0\le x<1) \\ -(-2x+4)+2 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$
$$=\begin{cases} -2x+2 & (0\le x<1) \\ 2x-2 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

12

$f^{-1}(3)=m$이라 하면 $f(m)=3$이므로

$m+1=3 \qquad \therefore\ m=2$

$g^{-1}(3)=n$이라 하면 $g(n)=3$이므로

$2n-3=3 \qquad \therefore\ n=3$

$\therefore\ f^{-1}(3)+g^{-1}(3)=2+3=5$

답 5

13

$f(6)=2$에서 $6a+b=2$ ······ ㉠

$f^{-1}(-1)=3$에서 $f(3)=-1$이므로

$3a+b=-1$ ······ ㉡

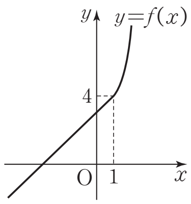
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-4$

$\therefore\ a+b=1+(-4)=-3$

답 -3

14

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $x<1$에서 직선

$y=(-2k-1)x+k^2+2$의 기울기가 양수이어야 하므로

$-2k-1>0 \qquad \therefore k<-\frac{1}{2}$ ······ ㉠

또 (치역)=(공역)이려면 직선 $y=(-2k-1)x+k^2+2$가 점 $(1, 4)$를 지나야 하므로

$4=(-2k-1)+k^2+2$, $k^2-2k-3=0$

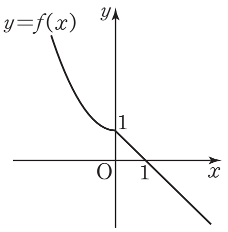
$(k+1)(k-3)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=3$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $k=-1$

답 -1

15



함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉 $x<0$에서 곡선 $y=(4-a)x^2+1$의 모양이 아래로 볼록이어야 하므로

$4-a>0 \qquad \therefore a<4$

이때 $a>0$이므로 $0<a<4$

따라서 정수 a의 값은 1, 2, 3이므로 그 합은

$1+2+3=6$

답 6

16

$y=ax+b$를 x에 대하여 정리하면

$ax=y-b \qquad \therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$

따라서 $\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}=\frac{1}{3}x-1$이므로

$\frac{1}{a}=\frac{1}{3}$, $\frac{b}{a}=1 \qquad \therefore a=3, b=3$

$\therefore a+b=3+3=6$

답 6

17

$f(2x+4)=4x+1$에서 $2x+4=t$로 놓으면

$2x=t-4 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}t-2$

이것을 $f(2x+4)=4x+1$에 대입하면

$f(t)=4\left(\frac{1}{2}t-2\right)+1=2t-7 \qquad \therefore f(x)=2x-7$

$y=2x-7$로 놓고 x에 대하여 정리하면

$2x=y+7 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}y+\frac{7}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

답 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

18

$(f\circ g^{-1})(a)=-1$에서 $f(g^{-1}(a))=-1$

$g^{-1}(a)=t$라 하면

$f(t)=-1$에서 $t+1=-1 \qquad \therefore t=-2$

따라서 $g^{-1}(a)=-2$이므로

$a=g(-2)=3\times(-2)+2=-4$

답 -4

19

(1) $(f^{-1}\circ g)^{-1}(-5)=(g^{-1}\circ f)(-5)$
$=g^{-1}(f(-5))$
$=g^{-1}(-6)$

$g^{-1}(-6)=k$라 하면 $g(k)=-6$

즉 $-k+1=-6$이므로 $k=7$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(-5)=g^{-1}(-6)=7$

(2) $(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(3)=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(3)$
$=(f^{-1}\circ g)(3)$
$=f^{-1}(g(3))$
$=f^{-1}(-2)$

$f^{-1}(-2)=k$라 하면 $f(k)=-2$

즉 $2k+4=-2$이므로 $k=-3$

$\therefore (g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(3)=f^{-1}(-2)=-3$

답 (1) 7 (2) -3

20

$((f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f)(-1)=(g^{-1}\circ f\circ f)(-1)$
$=g^{-1}(f(f(-1)))$
$=g^{-1}(f(1))$
$=g^{-1}(3)$

$g^{-1}(3)=k$라 하면 $g(k)=3$

즉 $k-1=3$이므로 $k=4$

$\therefore ((f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f)(-1)=g^{-1}(3)=4$

답 4

21

$(f\circ f)^{-1}(e)=(f^{-1}\circ f^{-1})(e)=f^{-1}(f^{-1}(e))$에서

$f^{-1}(e)=k$라 하면 $f(k)=e$

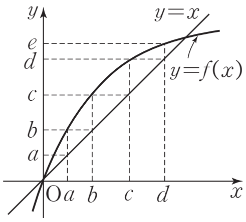
오른쪽 그림에서 $f(d)=e$이므로 $k=d$

즉 $f^{-1}(f^{-1}(e))=f^{-1}(d)$

$f^{-1}(d)=l$이라 하면

$f(l)=d$

오른쪽 그림에서 $f(c)=d$이므로 $l=c$



$\therefore (f\circ f)^{-1}(e)=f^{-1}(f^{-1}(e))=f^{-1}(d)=c$

답 c

22

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=2$이고 $f(1)=2$이므로

$g(1)=1$

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=1$이고 $f(5)=1$이므로

$g(2)=5$

$(f\circ g)(3)=f(g(3))=4$이고 $f(2)=4$이므로

$g(3)=2$

$(f\circ g)(4)=f(g(4))=3$이고 $f(3)=3$이므로

$g(4)=3$

$(f\circ g)(5)=f(g(5))=5$이고 $f(4)=5$이므로

$g(5)=4$

따라서

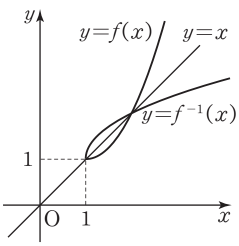
$$\begin{aligned}(g\circ f)^{-1}(1)&=(f^{-1}\circ g^{-1})(1)\\&=f^{-1}(g^{-1}(1))\\&=f^{-1}(1)=5\end{aligned}$$

이므로 $g(2)+(g\circ f)^{-1}(1)=5+5=10$

답 10

23

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



즉 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 방정식 $f(x)=x$의 근과 같으므로

$x^2-2x+2=x$에서 $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

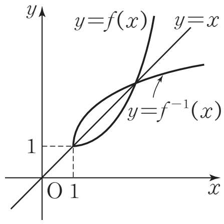
따라서 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 모든 근의 합은

$1+2=3$

답 3

24

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



즉 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로 교점의 x좌표는

$\frac{1}{2}(x-1)^2+1=x$에서 $x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $(1,1)$, $(3,3)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

연습문제

p. 245~249

1

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(5)=2$

답 ②

2

$(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(2a-1)=(2a-1)^2+3$

이므로 $(2a-1)^2+3=12$, $4a^2-4a+1+3=12$

$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

답 2

3

$(f^{-1}\circ g)(6)=f^{-1}(g(6))=f^{-1}(4)=1$

답 ①

4

$(f\circ h)(x)=f(h(x))=\frac{1}{2}h(x)+1$이고

$(f\circ h)(x)=g(x)$이므로

$\frac{1}{2}h(x)+1=-x^2+5 \qquad \therefore h(x)=-2x^2+8$

$\therefore h(3)=-2\times 3^2+8=-10$

답 -10

5

$f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$로 놓으면 $f(14)=3$이므로

$14a+b=3$ …… ㉠

또 $g(2)=11$에서 $g^{-1}(11)=f(11)=2$이므로

$11a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{5}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$ …… ❶

$g(6)=k$라 하면 $g^{-1}(k)=f(k)=6$

즉 $\frac{1}{3}k-\frac{5}{3}=6$이므로 $k=23$

$\therefore g(6)=23$ …… ❷

답 23

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	50%
❷ $g(6)$의 값을 구할 수 있다.	50%

6

$g(x)=x-3$에서 $y=x-3$으로 놓고 x에 대하여 정리하면

$x=y+3$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=x+3\qquad \therefore g^{-1}(x)=x+3$

$$\begin{aligned}\therefore (f\circ g^{-1})(x)&=f(g^{-1}(x))\\&=2g^{-1}(x)+1\\&=2(x+3)+1\\&=2x+7\end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=7$이므로 $ab=2\times 7=14$

답 ⑤

7

모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)=x$를 만족시키므로 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

$f(x)=ax-6$에서 $y=ax-6$으로 놓고 x에 대하여 정리하면

$ax=y+6\qquad \therefore x=\frac{y}{a}+\frac{6}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{x}{a}+\frac{6}{a}\qquad \therefore f^{-1}(x)=\frac{x}{a}+\frac{6}{a}$

이때 $g=f^{-1}$이므로

$\frac{x}{2}+b=\frac{x}{a}+\frac{6}{a}$ …… ㉠

㉠은 x에 대한 항등식이므로

$a=2$, $b=\frac{6}{a}\qquad \therefore a=2$, $b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$

답 5

8

$(h\circ f)(3)=h(f(3))=h(2)$

한편 $f\circ h=g$이므로

$(f\circ h)(2)=g(2)=3$, 즉 $f(h(2))=3$

이때 $f(1)=3$이므로 $h(2)=1$

$\therefore (h\circ f)(3)=h(2)=1$

답 ①

9

f^{-1}는 f의 역함수이므로

$(f\circ f^{-1})(a)=f(f^{-1}(a))=a$

$$\begin{aligned}\therefore (f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(a)&=f^{-1}(f(f^{-1}(a)))\\&=f^{-1}(a)\\&=3\end{aligned}$$

$f^{-1}(a)=3$에서 $f(3)=a$이므로

$a=f(3)=3^3+1=28$

답 28

10

$2x-1=1$에서

$2x=2\qquad \therefore x=1$

$h(2x-1)=2x^2-3$에 $x=1$을 대입하면

$h(1)=2\times 1^2-3=-1$

$$\begin{aligned}\therefore ((f\circ g)\circ h)(1)&=f(g(h(1)))=f(g(-1))\\&=f(-5)=17\end{aligned}$$

답 17

11

$g(g(x))=x$이므로 $g\circ g$는 항등함수이고 $g=g^{-1}$이다.

즉 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

또 $g(0)=1$에서 $g(g(0))=g(1)=0$

두 점 $(0, 1)$, $(1, 0)$을 지나고 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 함수의 그래프는 두 점을 지나는 직선이다.

이 직선의 방정식은

$y-1=\frac{0-1}{1-0}(x-0)\qquad \therefore y=-x+1$

따라서 $g(x)=-x+1$이므로

$g(-1)=-(-1)+1=2$

답 ⑤

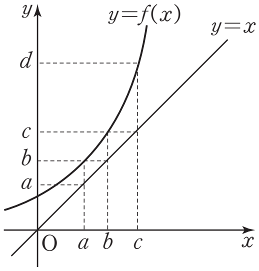
12

$(f \circ f)(b) = f(f(b))$
$= f(c) = d$

또

$(f \circ f)^{-1}(c)$
$= (f^{-1} \circ f^{-1})(c)$
$= f^{-1}(f^{-1}(c))$

에서



$f^{-1}(c) = k$라 하면 $f(k) = c$
위의 그림에서 $f(b) = c$이므로 $k = b$
즉 $f^{-1}(f^{-1}(c)) = f^{-1}(b)$
$f^{-1}(b) = l$이라 하면 $f(l) = b$
위의 그림에서 $f(a) = b$이므로 $l = a$
$\therefore (f \circ f)(b) + (f \circ f)^{-1}(c) = a + d$ 답 ②

13

$f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$이므로
$f^2(1) = f(f(1)) = f(2) = 3$
$f^3(1) = f(f^2(1)) = f(3) = 1$
$f^4(1) = f(f^3(1)) = f(1) = 2$
$\vdots$
즉 $n = 1, 2, 3, \cdots$일 때, $f^n(1)$의 값은 2, 3, 1이 순서대로 반복된다.
이때 $97 = 3 \times 32 + 1$, $99 = 3 \times 33$이므로
$f^{97}(1) = f(1) = 2$, $f^{99}(1) = f^3(1) = 1$
$\therefore f^{97}(1) + f^{99}(1) = 2 + 1 = 3$ 답 ②

14

$g(2) = 3$, $g^{-1}(1) = 3$에서 $g(3) = 1$
$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = 2$에서 $f(2) = 1$이므로
$g(1) = 2$
이때 함수 g의 역함수가 존재하므로 함수 g는 일대일대응이다.
즉 $g(4) = 4$, $g^{-1}(4) = 4$
$\therefore g^{-1}(4) + (f \circ g)(2) = 4 + f(g(2)) = 4 + f(3)$
$= 4 + 3 = 7$ 답 7

15

$h(x) = 2x + 3$으로 놓으면 $f(2x+3)$의 역함수는
$(f \circ h)^{-1}(x) = (h^{-1} \circ f^{-1})(x)$
$= h^{-1}(f^{-1}(x))$
$= h^{-1}(g(x))$

$y = 2x + 3$으로 놓고 x에 대하여 정리하면
$2x = y - 3 \qquad \therefore x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
즉 $h^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$이므로
$h^{-1}(g(x)) = \frac{1}{2}g(x) - \frac{3}{2}$
따라서 $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$이므로
$a + b = \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$ 답 -1

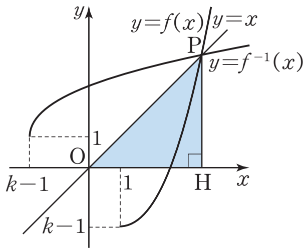
16

함수 f의 역함수가 존재하므로 함수 f는 일대일대응이다.
즉 함수 f의 치역과 공역은 같으므로 정의역의 양 끝값에서의 함숫값은 공역의 최댓값과 최솟값이다.
직선 $y = f(x)$의 기울기가 양수이므로
$f(-3) = 2 \times (-3) + b = b - 6 = -a$
$\therefore a + b = 6$ ······ ㉠
$f(5) = 2 \times 5 + b = 10 + b = a \qquad \therefore a - b = 10$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 8$, $b = -2$
$\therefore a^2 + b^2 = 8^2 + (-2)^2 = 68$

답 68

17

$f(x) = x^2 - 2x + k = (x-1)^2 + k - 1 \ (x \geq 1)$
함수 $y = f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y = f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = x$의 교점과 같다.
즉 점 P는 직선 $y = x$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 (t, t)라 하면 삼각형 POH의 넓이가 8이므로
$\frac{1}{2} \times t \times t = 8$, $t^2 = 16 \qquad \therefore t = 4 \ (\because t \geq 1)$
이때 점 $P(4, 4)$는 함수 $f(x) = x^2 - 2x + k$의 그래프 위의 점이므로
$f(4) = 4^2 - 2 \times 4 + k = 4$
$\therefore k = -4$ 답 ③

18

Step by Step

꺾인 점을 기준으로 정의역의 범위를 나눈다.

↓

함수 $f(f(x))$의 식을 구한다.

↓

함수 $y=f(f(x))$의 그래프를 그린다.

주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (0\le x<1) \\ -x+3 & (1\le x\le 2) \end{cases}$$

$$\therefore f(f(x))=\begin{cases} 2f(x) & (0\le f(x)<1) \\ -f(x)+3 & (1\le f(x)\le 2) \end{cases}$$

(i) $0\le x<\frac{1}{2}$일 때, $0\le f(x)=2x<1$이므로

$f(f(x))=2f(x)=2\times 2x=4x$

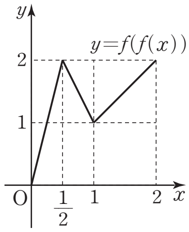
(ii) $\frac{1}{2}\le x<1$일 때, $1\le f(x)=2x<2$이므로

$f(f(x))=-f(x)+3=-2x+3$

(iii) $1\le x\le 2$일 때, $1\le f(x)=-x+3\le 2$이므로

$f(f(x))=-f(x)+3=-(-x+3)+3=x$

(i)~(iii)에서 함수 $y=f(f(x))$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



답 ③

19

(가)에서 함수 f는 일대일대응이다.

(나)에서 x의 값이 홀수이면 $f(x)$의 값은 짝수이어야 한다.

(가), (나)에 의하여 $f(3)$의 값은 2, 4, 6 중 하나이고

$f(5)$의 값은 $f(3)$의 값을 제외한 두 개의 짝수인 원소 중 하나이다.

$f(2)$, $f(4)$, $f(6)$은 나머지 세 개의 원소에 각각 하나씩 대응해야 한다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$3\times 2\times 3\times 2\times 1=36$

답 ④

20

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & (0\le x<1) \\ 2x-2 & (1\le x\le 2) \end{cases}$$

$$\therefore (f\circ f)(x)=f(f(x))$$

$$=\begin{cases} -f(x)+1 & (0\le f(x)<1) \\ 2f(x)-2 & (1\le f(x)\le 2) \end{cases}$$

(i) $0\le x<1$일 때, $0<f(x)=-x+1\le 1$이므로

$(f\circ f)(x)=-f(x)+1=-(-x+1)+1=x$

(ii) $1\le x<\frac{3}{2}$일 때, $0\le f(x)=2x-2<1$이므로

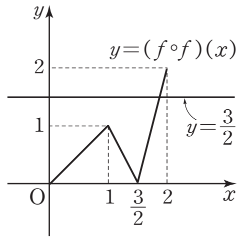
$(f\circ f)(x)=-f(x)+1=-(2x-2)+1$

$=-2x+3$

(iii) $\frac{3}{2}\le x\le 2$일 때, $1\le f(x)=2x-2\le 2$이므로

$(f\circ f)(x)=2f(x)-2=2(2x-2)-2=4x-6$

(i)~(iii)에서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{2}$은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 교점의 개수는 1이다.



답 1

Level Up 연습문제

p. 250

1

주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases} -3x+3 & (0\le x<1) \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2} & (1\le x\le 3) \end{cases}$$

$f(f(x))=2-f(x)$에서 $f(x)=t$ $(0\le t\le 3)$라 하면

$f(t)=2-t$

(i) $0\le t<1$일 때, $-3t+3=2-t$

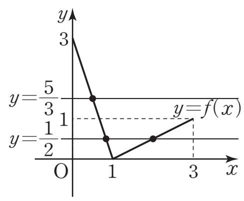
$2t=1 \qquad \therefore t=\frac{1}{2}$

(ii) $1\le t\le 3$일 때, $\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}=2-t$

$\frac{3}{2}t=\frac{5}{2} \qquad \therefore t=\frac{5}{3}$

(i), (ii)에서 방정식 $f(f(x))=2-f(x)$의 해는 방정식 $f(x)=\frac{1}{2}$ 또는 $f(x)=\frac{5}{3}$의 해와 같다.

이때 오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=\frac{1}{2}$과 서로 다른 두 점에서 만나고, 직선 $y=\frac{5}{3}$와 한 점에서 만나므로 방정식 $f(f(x))=2-f(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



답 ③

2

함수 f는 일대일대응이고 $f(1)=3$이므로

$f(2)=1$, $f(3)=2$ 또는 $f(2)=2$, $f(3)=1$

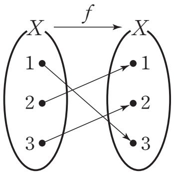
이때 $f(2)=2$, $f(3)=1$이면

$f^3(1)=f(f(f(1)))=f(f(3))=f(1)=3$이므로

$f^3(1)\neq 1$

$\therefore f(2)=1$, $f(3)=2$

따라서 f의 대응 관계는 오른쪽 그림과 같으므로 f의 역함수 g에 대하여



$g(1)=2$, $g(2)=3$, $g(3)=1$

$$\begin{aligned}(f\circ f\circ f)^{-1}&=f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1}\\&=g\circ g\circ g\\&=g^3=I\end{aligned}$$

이므로 $g^3(x)=x$

$$\begin{aligned}\therefore g^{10}(2)+g^{11}(3)&=g(2)+g^2(3)\\&=g(2)+g(g(3))\\&=g(2)+g(1)\\&=3+2=5\end{aligned}$$

답 5

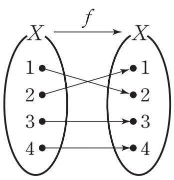
3

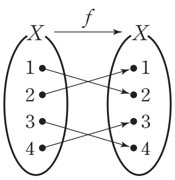
ㄱ. 함수 f가 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
(가)에서 집합 X의 모든 원소 x에 대하여
$(f\circ f)(x)=x$이므로 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=f^{-1}(x)$
$\therefore f(3)=f^{-1}(3)$

ㄴ. (나)에서 집합 X의 원소 중 $f(x)=2x(\in X)$를 만족시키는 원소는 1 또는 2이다.
따라서 $f(1)=2$와 $f(2)=4$ 중 적어도 하나는 성립하므로 $f(1)=3(\neq 2)$이면 $f(2)=4$이어야 한다.

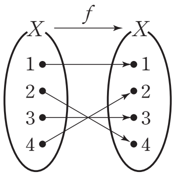
ㄷ. (나)에서 $f(1)=2$와 $f(2)=4$ 중 적어도 하나는 성립하므로

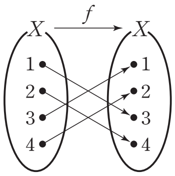
(i) $f(1)=2$이고 $f(2)\neq 4$일 때
(가)에서 $(f\circ f)(1)=1$이므로
$f(f(1))=f(2)=1$
이때 $f(3)=3$, $f(4)=4$ 또는 $f(3)=4$, $f(4)=3$
이므로 함수 f의 개수는 2이다.





(ii) $f(1)\neq 2$이고 $f(2)=4$일 때
(가)에서 $(f\circ f)(2)=2$이므로
$f(f(2))=f(4)=2$
이때 $f(1)=1$, $f(3)=3$ 또는 $f(1)=3$, $f(3)=1$
이므로 함수 f의 개수는 2이다.





(iii) $f(1)=2$이고 $f(2)=4$일 때
$f(f(1))=f(2)=4(\neq 1)$이므로
$(f\circ f)(1)=1$이 성립하지 않는다.

(i)~(iii)에서 가능한 함수 f의 개수는
$2+2=4$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

3 유리식과 유리함수

확인 문제 p. 254 ~ 274

01

(1) (주어진 식)$=\dfrac{1}{x(x-2)}+\dfrac{1}{x(x+2)}$

$=\dfrac{x+2+x-2}{x(x-2)(x+2)}$

$=\dfrac{2x}{x(x-2)(x+2)}$

$=\dfrac{2}{(x-2)(x+2)}$

(2) (주어진 식)$=\dfrac{x+4}{(x+1)(x-2)}-\dfrac{x+3}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{(x+4)(x-1)-(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$

$=\dfrac{x^2+3x-4-(x^2+x-6)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$

$=\dfrac{2x+2}{(x+1)(x-1)(x-2)}$

$=\dfrac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$

$=\dfrac{2}{(x-1)(x-2)}$

(3) (주어진 식)

$=\dfrac{2}{x(x+4)}-\dfrac{1}{x(x+2)}+\dfrac{2}{(x+4)(x+8)}$

$=\dfrac{2(x+2)(x+8)-(x+4)(x+8)+2x(x+2)}{x(x+2)(x+4)(x+8)}$

$=\dfrac{2x^2+20x+32-(x^2+12x+32)+2x^2+4x}{x(x+2)(x+4)(x+8)}$

$=\dfrac{3x^2+12x}{x(x+2)(x+4)(x+8)}$

$=\dfrac{3x(x+4)}{x(x+2)(x+4)(x+8)}$

$=\dfrac{3}{(x+2)(x+8)}$

답 풀이 참조

02

(1) (주어진 식)$=\dfrac{x+2}{(x+1)(x-3)}\times\dfrac{(x-1)(x-3)}{x(x+2)}$

$=\dfrac{x-1}{x(x+1)}$

(2) (주어진 식)

$=\dfrac{x-1}{(2x+1)(2x-1)}\times\dfrac{(2x-1)(x+1)}{x(x-1)}$

$=\dfrac{x+1}{x(2x+1)}$

(3) (주어진 식)

$=\dfrac{(x-5)(x+1)}{(x+3)(x-3)}\times\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x+5)(x-5)}\times\dfrac{x-3}{x-2}$

$=\dfrac{x+1}{x+5}$

답 풀이 참조

03

주어진 식의 우변의 분모를 통분하여 정리하면

$\dfrac{b}{2x-1}+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{b(x+1)+2(2x-1)}{(2x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{(b+4)x+b-2}{2x^2+x-1}$

즉 $\dfrac{x+a}{2x^2+x-1}=\dfrac{(b+4)x+b-2}{2x^2+x-1}$가 x에 대한 항등식이므로

$b+4=1,\ b-2=a$

따라서 $a=-5,\ b=-3$이므로

$a+b=-8$

답 -8

04

$x^3-x=x(x-1)(x+1)$이므로 주어진 식의 양변에 $x(x-1)(x+1)$을 곱하여 정리하면

$2(x-1)(x+1)+ax(x+1)+bx(x-1)=-2x-2$

$\therefore\ (2+a+b)x^2+(a-b)x-2=-2x-2$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$2+a+b=0,\ a-b=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=0$

$\therefore\ a^2+b^2=4$

답 4

05

(1) (주어진 식)

$=\dfrac{(x+1)-1}{x+1}+\dfrac{(x+2)-1}{x+2}-\dfrac{(x-3)-1}{x-3}$
$-\dfrac{(x+6)-1}{x+6}$

$=\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)+\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)-\left(1-\dfrac{1}{x-3}\right)$
$-\left(1-\dfrac{1}{x+6}\right)$

$$=\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)$$
$$=\frac{x+1-(x+6)}{(x+1)(x+6)}+\frac{x+2-(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$
$$=\frac{-5}{(x+1)(x+6)}+\frac{5}{(x-3)(x+2)}$$
$$=\frac{-5(x-3)(x+2)+5(x+1)(x+6)}{(x+1)(x+2)(x-3)(x+6)}$$
$$=\frac{40x+60}{(x+1)(x+2)(x-3)(x+6)}$$
$$=\frac{20(2x+3)}{(x+1)(x+2)(x-3)(x+6)}$$

(2) (주어진 식) $=\frac{x(x+1)+1}{x+1}-\frac{x(x+2)+2}{x+2}$

$$=\left(x+\frac{1}{x+1}\right)-\left(x+\frac{2}{x+2}\right)$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}$$
$$=\frac{x+2-2(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{-x}{(x+1)(x+2)}$$

답 풀이 참조

06

(1) (주어진 식)

$$=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)+\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}\right)+\left(\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+3}\right)+\left(\frac{1}{a+3}-\frac{1}{a+4}\right)$$
$$=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+4}$$
$$=\frac{a+4-a}{a(a+4)}$$
$$=\frac{4}{a(a+4)}$$

(2) (주어진 식)

$$=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)+\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+3}\right)+\left(\frac{1}{a+3}-\frac{1}{a+6}\right)+\left(\frac{1}{a+6}-\frac{1}{a+10}\right)$$
$$=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+10}$$
$$=\frac{a+10-a}{a(a+10)}$$
$$=\frac{10}{a(a+10)}$$

답 풀이 참조

07

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(101)$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{102}-\frac{1}{103}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{103}=\frac{101}{206}$$

따라서 $p=206$, $q=101$이므로

$p-q=105$

답 105

08

$$\frac{1}{(x-3)(x-1)}+\frac{1}{(x-1)(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+3)}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)+\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{x+3-(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$
$$=\frac{3}{(x-3)(x+3)}$$

즉 $\frac{3}{(x-3)(x+3)}=\frac{b}{(x+a)(x+3)}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=-3$, $b=3$ $\quad\therefore a+b=0$

답 0

09

(1) $\frac{2}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{2}{1-\frac{1}{\frac{x+1}{x}}}=\frac{2}{1-\frac{x}{x+1}}$

$$=\frac{2}{\frac{x+1-x}{x+1}}=\frac{2}{\frac{1}{x+1}}=2x+2$$

(2) $1-\frac{1+\frac{1}{a+1}}{1-\frac{1}{a+1}}=1-\frac{\frac{a+1+1}{a+1}}{\frac{a+1-1}{a+1}}=1-\frac{\frac{a+2}{a+1}}{\frac{a}{a+1}}$

$$=1-\frac{a+2}{a}=\frac{a-(a+2)}{a}=-\frac{2}{a}$$

답 (1) $2x+2$ (2) $-\frac{2}{a}$

10

$$\frac{47}{15}=3+\frac{2}{15}=3+\frac{1}{\frac{15}{2}}=3+\frac{1}{7+\frac{1}{2}}$$

따라서 $a=3$, $b=7$, $c=2$이므로 $a+b+c=12$

답 12

11

$x^2-x-1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-1-\frac{1}{x}=0$ $\quad\therefore x-\frac{1}{x}=1$

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=1^2+2=3$

(2) $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)=1^3+3\times1=4$

(3) $x^6+\frac{1}{x^6}=\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)^2+2=4^2+2=18$

답 (1) 3 (2) 4 (3) 18

12

$x^2-\sqrt{5}x-1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-\sqrt{5}-\frac{1}{x}=0$ $\quad\therefore x-\frac{1}{x}=\sqrt{5}$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=5+4=9$

$\therefore x+\frac{1}{x}=3$ ($\because x>0$)

$$\begin{aligned}\therefore x^2-2x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}&=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)\\&=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)\\&=3^2-2-2\times3=1\end{aligned}$$

답 1

13

$\frac{x-2y}{5x-6y}=\frac{1}{2}$에서 $2(x-2y)=5x-6y$

$2x-4y=5x-6y$, $3x=2y$ $\quad\therefore y=\frac{3}{2}x$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{3x^2+2xy}{x^2+xy}&=\frac{3x^2+2x\times\frac{3}{2}x}{x^2+x\times\frac{3}{2}x}=\frac{6x^2}{\frac{5}{2}x^2}\\&=\frac{6}{\frac{5}{2}}=\frac{12}{5}\end{aligned}$$

답 $\frac{12}{5}$

14

$a+b+c=0$에서 $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}&=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}\\&=-1-1-1=-3\end{aligned}$$

답 -3

15

$$\begin{cases}x-y+z=0 & \cdots\cdots ㉠\\ 2x-3y+z=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉡$-$㉠을 하면 $x-2y=0$ $\quad\therefore x=2y$

$x=2y$를 ㉠에 대입하여 풀면 $z=-y$

$$\begin{aligned}\therefore &\frac{x^2-y^2+2z^2}{2xy+yz-3zx}\\&=\frac{(2y)^2-y^2+2(-y)^2}{2\times2y\times y+y\times(-y)-3\times(-y)\times2y}\\&=\frac{5y^2}{9y^2}=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

답 ③

16

$\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{5}=k\,(k\neq0)$로 놓으면

$x+y=3k$ $\cdots\cdots$ ㉠

$y+z=4k$ $\cdots\cdots$ ㉡

$z+x=5k$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠$+$㉡$+$㉢을 하면 $2(x+y+z)=12k$

$\therefore x+y+z=6k$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉠, ㉡, ㉢을 각각 ㉣에 대입하여 정리하면

$x=2k$, $y=k$, $z=3k$

$\therefore \frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=\frac{(2k)^3+k^3+(3k)^3}{2k\times k\times3k}=\frac{36k^3}{6k^3}=6$

답 6

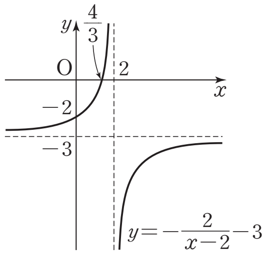
17

(1) 함수 $y=-\frac{2}{x-2}-3$의 그래프는 함수 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=-3$이다.

x절편과 y절편을 구하면

$y=0$일 때 $x=\frac{4}{3}$,

$x=0$일 때 $y=-2$이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

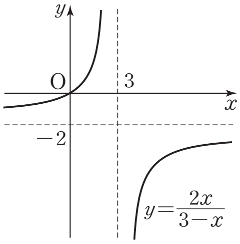


∴ 정의역: $\{x \mid x \neq 2$인 실수$\}$

　치역: $\{y \mid y \neq -3$인 실수$\}$

(2) $y=\dfrac{2x}{3-x}=\dfrac{-2(3-x)+6}{3-x}=-\dfrac{6}{x-3}-2$

따라서 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=-2$이다.



x절편과 y절편을 구하면 $y=0$일 때 $x=0$이므로 그래프는 위의 그림과 같다.

∴ 정의역: $\{x \mid x \neq 3$인 실수$\}$

　치역: $\{y \mid y \neq -2$인 실수$\}$

답 풀이 참조

18

$y=\dfrac{ax-3}{x-1}=\dfrac{a(x-1)+a-3}{x-1}=\dfrac{a-3}{x-1}+a$

이 함수의 그래프는 함수 $y=\dfrac{a-3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=a$이다.

$y=\dfrac{-x}{x+b}=\dfrac{-(x+b)+b}{x+b}=\dfrac{b}{x+b}-1$

이 함수의 그래프는 함수 $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은 $x=-b$, $y=-1$이다.

따라서 $-b=1$, $a=-1$이므로 $a=-1$, $b=-1$

∴ $ab=1$

답 1

19

① $y=\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+2$이므로

함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

② $y=\dfrac{3x-3}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+3}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}+3$이므로

함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

③ $y=\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{x-3+3}{x-3}=\dfrac{3}{x-3}+1$이므로

함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=\dfrac{x+4}{x+1}=\dfrac{x+1+3}{x+1}=\dfrac{3}{x+1}+1$이므로

함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\dfrac{-2x-1}{x+2}=\dfrac{-2(x+2)+3}{x+2}=\dfrac{3}{x+2}-2$이므로

함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동하여 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프와 겹쳐질 수 없는 것은 ①이다.

답 ①

20

$y=\dfrac{4x+1}{x-3}=\dfrac{4(x-3)+13}{x-3}=\dfrac{13}{x-3}+4$이므로

$y=\dfrac{4x+1}{x-3}$의 그래프는 $y=\dfrac{13}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $p=3$, $q=4$, $k=13$이므로

$p+q+k=20$

답 20

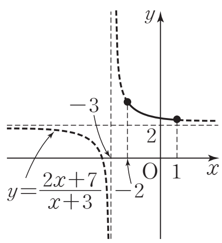
21

$y=\dfrac{2x+7}{x+3}=\dfrac{2(x+3)+1}{x+3}=\dfrac{1}{x+3}+2$이므로

$y=\dfrac{2x+7}{x+3}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-2 \le x \le 1$에서

$y=\dfrac{2x+7}{x+3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-2$일 때,

최댓값은 $\dfrac{-4+7}{-2+3}=3$

$x=1$일 때, 최솟값은 $\dfrac{2+7}{1+3}=\dfrac{9}{4}$

답 최댓값: 3, 최솟값: $\dfrac{9}{4}$

22

$y=\dfrac{1}{x-1}+3$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

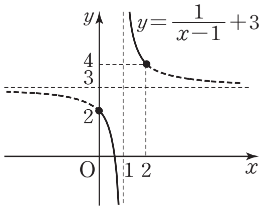
즉 $y\le 2$ 또는 $y\ge 4$에서

$y=\dfrac{1}{x-1}+3$의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

정의역은

$\{x\mid 0\le x<1$ 또는 $1<x\le 2\}$



따라서 정의역에 속하는 정수는 0, 2이므로 그 개수는 2이다.

답 2

23

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=2$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x+1}+2\ (k\ne 0)$ ...... ㉠

로 놓으면 ㉠의 그래프가 점 $(0, 6)$을 지나므로

$6=k+2 \qquad \therefore k=4$

따라서 $p=-1$, $q=2$, $k=4$이므로

$pqk=-8$

답 -8

24

점근선의 방정식이 $x=2$, $y=3$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-2}+3\ (k\ne 0)$ ...... ㉠

으로 놓으면 ㉠의 그래프가 점 $(5, 1)$을 지나므로

$1=\dfrac{k}{3}+3 \qquad \therefore k=-6$

$k=-6$을 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-6}{x-2}+3=\dfrac{-6+3(x-2)}{x-2}=\dfrac{3x-12}{x-2}$

이 식을 주어진 식 $y=\dfrac{bx+c}{x+a}$와 비교하면

$a=-2$, $b=3$, $c=-12$

답 $a=-2$, $b=3$, $c=-12$

25

$y=\dfrac{2x+3}{x+4}=\dfrac{2(x+4)-5}{x+4}$

$=-\dfrac{5}{x+4}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 두 점근선 $x=-4$, $y=2$의 교점 $(-4, 2)$를 지나고 기울기가 ± 1인 직선, 즉 두 직선 $y=\pm(x+4)+2$에 대하여 대칭이다.

이때 두 직선 $y=x+6$, $y=-x-2$에서 $a>0$이므로

$a=1$, $b=6 \qquad \therefore a+b=7$

답 7

26

$y=\dfrac{4x+1}{-x+3}=\dfrac{-4x-1}{x-3}$

$=\dfrac{-4(x-3)-13}{x-3}$

$=-\dfrac{13}{x-3}-4$

이므로 주어진 함수의 그래프는 두 점근선 $x=3$, $y=-4$의 교점 $(3, -4)$를 지나고 기울기가 1인 직선

$y=(x-3)-4$, 즉 $y=x-7$에 대하여 대칭이다.

따라서 $p=3$, $q=-4$, $r=-7$이므로

$p+q+r=-8$

답 -8

27

$y=\dfrac{3x+k-10}{x+1}$

$=\dfrac{3(x+1)+k-13}{x+1}$

$=\dfrac{k-13}{x+1}+3$

즉 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\dfrac{k-13}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=3$이다.

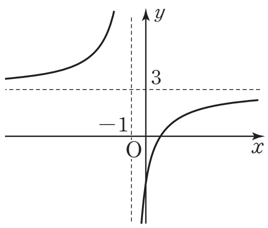
$k-13\ge 0$, 즉 $k\ge 13$이면 함수 $y=\dfrac{3x+k-10}{x+1}$의 그래프는 제4사분면을 지나지 않으므로 $k-13<0$

$\therefore k<13$ ...... ㉠

그래프의 y절편이 0보다 작을 때만 이 함수의 그래프가 제4사분면을 지나므로

$k-10<0$

$\therefore k<10$ ...... ㉡



㉠, ㉡의 공통 범위는 $k<10$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 8, 9이므로 그 개수는 9이다.

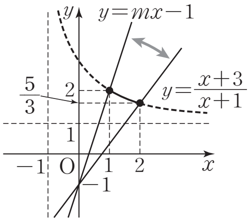
답 9

28

$$y=\frac{x+3}{x+1}=\frac{(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+1$$

이므로 $1\le x\le 2$에서

$y=\dfrac{x+3}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



또 직선 $y=mx-1$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ -1)$을 지나므로 위의 그림에서 그래프와 직선이 만나려면 기울기 m은 점 $\left(2,\ \dfrac{5}{3}\right)$를 지날 때보다 크거나 같고 점 $(1,\ 2)$를 지날 때보다 작거나 같아야 한다.

(i) 직선 $y=mx-1$이 점 $\left(2,\ \dfrac{5}{3}\right)$를 지날 때

$\dfrac{5}{3}=2m-1$에서 $m=\dfrac{4}{3}$

(ii) 직선 $y=mx-1$이 점 $(1,\ 2)$를 지날 때

$2=m-1$에서 $m=3$

(i), (ii)에서 $\dfrac{4}{3}\le m\le 3$

답 $\dfrac{4}{3}\le m\le 3$

29

$m\neq 0$일 때와 $m=0$일 때로 나누어 생각한다.

(i) $m\neq 0$일 때

$\dfrac{x+2}{x+1}=mx+1$에서 $x+2=(mx+1)(x+1)$

$mx^2+mx-1=0$

이차방정식 $mx^2+mx-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=m^2+4m<0,\ m(m+4)<0$

$\therefore\ -4<m<0$

(ii) $m=0$일 때

$$y=\frac{x+2}{x+1}=\frac{(x+1)+1}{x+1}=\frac{1}{x+1}+1$$

이므로 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-1,\ y=1$

이때 $m=0$이면 직선의 방정식은 $y=1$

즉 함수 $y=\dfrac{x+2}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=1$은 만나지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 실수 m의 값의 범위는

$-4<m\le 0$

답 $-4<m\le 0$

30

$$f_2(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x+1}}$$

$$=\frac{x}{2x+1}$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=f\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$

$$=\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}=\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{3x+1}{2x+1}}$$

$$=\frac{x}{3x+1}$$

$\vdots$

$\therefore\ f_n(x)=\dfrac{x}{nx+1}$

$\therefore\ f_{20}(1)=\dfrac{1}{20\times 1+1}=\dfrac{1}{21}$

답 $\dfrac{1}{21}$

31

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)$$

$$=\frac{\frac{x+2}{2x-1}+2}{2\times\frac{x+2}{2x-1}-1}=\frac{\frac{5x}{2x-1}}{\frac{5}{2x-1}}$$

$$=\frac{5x}{5}=x$$

$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x)$$

$\vdots$

$$\therefore\ f^n(x)=\begin{cases} x & (n\text{이 짝수}) \\ f(x) & (n\text{이 홀수}) \end{cases}$$

$\therefore\ f^{55}(1)=f(1)=3$

답 3

32

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1}{\frac{-x}{1-x}}$$

$$=\frac{x-1}{x}$$

$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f\left(\frac{x-1}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=\frac{1}{\frac{1}{x}}$$
$$=x$$
$$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))=f(x)$$
$$\vdots$$
$$\therefore f^n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & (n=3k-2)\\[2mm] \dfrac{x-1}{x} & (n=3k-1)\\[2mm] x & (n=3k)\end{cases}\ (k\text{는 자연수})$$
$$\therefore f^{2024}(3)=f^{3\times 675-1}(3)=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

33

$(f\circ g)(x)=x$에서 $g(x)=f^{-1}(x)$

$y=\dfrac{3x+5}{x-1}$로 놓으면 $y(x-1)=3x+5$

$(y-3)x=y+5 \qquad \therefore x=\dfrac{y+5}{y-3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{x+5}{x-3}$

$\therefore g(x)=\dfrac{x+5}{x-3}$

$\therefore (g\circ g)(2)=g(g(2))=g(-7)=\dfrac{1}{5}$

답 $\frac{1}{5}$

다른 풀이

$(f\circ g)(x)=x$에서 $g(x)=f^{-1}(x)$

$f(x)=\dfrac{3x+5}{x-1}$에서 $f^{-1}(x)=\dfrac{x+5}{x-3}$

$\therefore g(x)=\dfrac{x+5}{x-3}$

$\therefore (g\circ g)(2)=g(g(2))=g(-7)=\dfrac{1}{5}$

34

$f(x)=\dfrac{x+3}{ax+b}$의 그래프가 점 $(1, 1)$을 지나므로

$f(1)=\dfrac{4}{a+b}=1$

$\therefore a+b=4$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$y=\dfrac{x+3}{ax+b}$으로 놓고 x에 대하여 정리하면

$y(ax+b)=x+3,\ (ay-1)x=-by+3$

$\therefore x=\dfrac{-by+3}{ay-1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{-bx+3}{ax-1}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-bx+3}{ax-1}$

이때 $f=f^{-1}$이므로 $\dfrac{x+3}{ax+b}=\dfrac{-bx+3}{ax-1}$

$\therefore b=-1$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $a=5$

$\therefore ab=-5$

답 -5

연습문제

p. 275~277

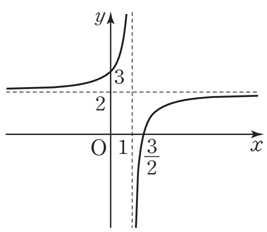
1

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)\times\frac{2x}{1-x}+\frac{x}{1+\frac{1}{x-1}}$$
$$=\frac{x-1}{x}\times\frac{2x}{1-x}+\frac{x}{\frac{x-1+1}{x-1}}$$
$$=-2+\frac{x}{\frac{x}{x-1}}=-2+x-1$$
$$=x-3$$

답 ①

2

$$y=\frac{2x-3}{x-1}$$
$$=\frac{2(x-1)-1}{x-1}$$
$$=-\frac{1}{x-1}+2$$



이므로 함수 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 그래프가 지나지 않는 사분면은 제3사분면이다.

답 ③

3

Step by Step

좌변의 분모를 통분한다.
↓
양변의 분자의 동류항의 계수를 비교한다.
↓
$a+b+c$의 값을 구한다.

주어진 식의 좌변의 분모를 통분하여 정리하면

$$\frac{1}{(x-2)(x-1)}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{(x+1)(x+2)+2(x-2)(x+2)+(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{(x^2+3x+2)+2(x^2-4)+(x^2-3x+2)}{(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{4(x^2-1)}{(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{4(x-1)(x+1)}{(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{4}{(x-2)(x+2)}$$

즉 $\frac{4}{(x-2)(x+2)}=\frac{c}{(x-a)(x+b)}$가 x에 대한 항등식이므로 $a=2$, $b=2$, $c=4$

$\therefore a+b+c=8$

답 8

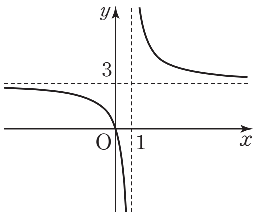
4

$$y=\frac{3x}{x-1}=\frac{3(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+3$$

① 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=3$이다.

② 정의역은 $\{x\,|\,x\neq1$인 실수$\}$이다.

③ 함수 $y=\frac{3x}{x-1}$의 그래프는 원점 $(0, 0)$을 지나므로 오른쪽 그림과 같다. 따라서 제1, 2, 4사분면을 지난다.



④ $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\frac{3x}{x-1}$를 x에 대하여 정리하면

$y(x-1)=3x$, $(y-3)x=y$ $\qquad\therefore x=\frac{y}{y-3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{x}{x-3}$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

5

함수 $y=\frac{2}{x+3}+1$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-3$, $y=1$

$$y=\frac{-2x+6}{x-a}=\frac{-2(x-a)+6-2a}{x-a}=\frac{6-2a}{x-a}-2$$

이므로 함수 $y=\frac{-2x+6}{x-a}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=-2$

네 직선 $x=-3$, $x=a$, $y=1$, $y=-2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 12이므로

$3(a+3)=12$, $a+3=4$ $\qquad\therefore a=1$

답 1

6

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+1+\frac{1}{x^2}=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}+1$$
$$=(4^2-2)+1=15$$

답 15

7

두 점 P, Q의 좌표는 $\mathrm{P}(1, a)$, $\mathrm{Q}\left(2, \frac{a}{2}\right)$이므로

$a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}=\frac{3}{2}$ $\qquad\therefore a=3$

답 3

8

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$에서 $b(a+b)-a(a+b)=ab$

$ab+b^2-a^2-ab=ab$ $\qquad\therefore ab=b^2-a^2$

$\therefore \frac{b}{a}-\frac{a}{b}=\frac{b^2-a^2}{ab}=\frac{b^2-a^2}{b^2-a^2}=1$

답 ④

9

$$f(x)=\frac{ax+b}{x-2}=\frac{a(x-2)+2a+b}{x-2}=\frac{2a+b}{x-2}+a$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=a$이다.

$\therefore a=1$, 즉 $f(x)=\frac{x+b}{x-2}$

또 점 $(3, 2)$를 지나므로

$f(3)=2$에서 $3+b=2$

$\therefore b=-1$

$\therefore f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$

이때 $f^{-1}(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$이므로

$f^{-1}(2)=3$ 답 ③

다른 풀이

$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$이므로

$\dfrac{k-1}{k-2}=2$, $k-1=2(k-2)$

$k-1=2k-4$ $\therefore k=3$, 즉 $f^{-1}(2)=3$

10

$f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$에서 $f^{-1}(x)=\dfrac{-x+2}{x-1}$

$f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+1$

$f^{-1}(x)=\dfrac{-x+2}{x-1}=\dfrac{-(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}-1$

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\dfrac{1}{x-m+1}+1+n$

이 식이 $y=f^{-1}(x)$와 일치하므로

$-m+1=-1$, $1+n=-1$

따라서 $m=2$, $n=-2$이므로

$m-n=4$

답 ③

11

주어진 등식의 좌변을 계산하면

$$\frac{x}{1+\dfrac{2}{x+1}}=\frac{x}{\dfrac{(x+1)+2}{x+1}}=\frac{x}{\dfrac{x+3}{x+1}}$$

$$=\frac{x(x+1)}{x+3}=\frac{x(x+3)-2x}{x+3}$$

$$=x+\frac{-2x}{x+3}=x+\frac{-2(x+3)+6}{x+3}$$

$$=x-2+\frac{6}{x+3}$$

즉 $x-2+\dfrac{6}{x+3}=x+a+\dfrac{b}{x+3}$가 x에 대한 항등식이므로 $a=-2$, $b=6$

$\therefore a+b=4$

답 4

12

$y=\dfrac{ax+b}{x+c}=\dfrac{a(x+c)+b-ac}{x+c}=\dfrac{b-ac}{x+c}+a$이므로

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-c$, $y=a$ …… ❶

유리함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-c, a)$를 지나고 기울기가 1 또는 -1인 직선에 대하여 대칭이므로 두 직선 $y=x+1$, $y=-x+3$은 점 $(-c, a)$를 지난다.

즉 $a=-c+1$, $a=c+3$이므로 연립하여 풀면

$a=2$, $c=-1$

이때 $y=\dfrac{2x+b}{x-1}$의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3=\dfrac{b}{-1}$ $\therefore b=-3$ …… ❷

$\therefore a-b+c=4$ …… ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ $a-b+c$의 값을 구할 수 있다.	10%

13

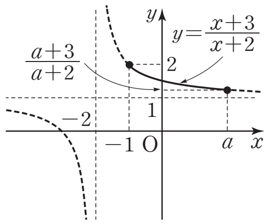
$y=\dfrac{x+3}{x+2}=\dfrac{(x+2)+1}{x+2}=\dfrac{1}{x+2}+1$이므로

$y=\dfrac{x+3}{x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le a$에서

$y=\dfrac{x+3}{x+2}$의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로



$x=-1$일 때

최댓값은 2,

$x=a$일 때

최솟값은 $\dfrac{a+3}{a+2}$

이때 최댓값은 b, 최솟값은 $\dfrac{5}{4}$이므로

$a=2$, $b=2$ $\therefore a+b=4$ 답 4

14

$a+\dfrac{1}{b}=4$ …… ㉠, $b+\dfrac{1}{c}=1$ …… ㉡,

$c+\dfrac{1}{a}=\dfrac{7}{3}$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 양변을 각각 곱하면

$$abc+a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc}=\frac{28}{3} \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉠, ㉡, ㉢의 양변을 각각 더하면

$$a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{22}{3} \quad \cdots\cdots ㉤$$

㉤을 ㉣에 대입하면

$abc+\frac{1}{abc}+\frac{22}{3}=\frac{28}{3}$, $abc+\frac{1}{abc}=2$

$(abc)^2-2abc+1=0$, $(abc-1)^2=0$ $\quad \therefore abc=1$

답 1

15

$f(x)=\frac{x-1}{6x-1}$로 놓고

$f^1=f$, $f^{n+1}=f\circ f^n$(n은 자연수)라 하면

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x-1}{6x-1}\right)$$

$$=\frac{\frac{x-1}{6x-1}-1}{6\times\frac{x-1}{6x-1}-1}$$

$$=\frac{x-1-(6x-1)}{6(x-1)-(6x-1)}$$

$$=\frac{-5x}{-5}=x$$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x)$

$\vdots$

$$\therefore f^n(x)=\begin{cases} f(x) & (n\text{이 홀수}) \\ x & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$$

따라서 $\frac{2}{3}$를 입력하여 2010번째로 출력되어 나오는 결과는

$f^{2010}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$

답 ⑤

16

두 분수함수 $y=\frac{ax+1}{2x-6}$, $y=\frac{bx+1}{2x+6}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이면 두 함수는 서로 역함수이다.

$y=\frac{ax+1}{2x-6}$을 x에 대하여 정리하면

$y(2x-6)=ax+1$, $(2y-a)x=6y+1$

$\therefore x=\frac{6y+1}{2y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{6x+1}{2x-a}$

즉 두 함수 $y=\frac{6x+1}{2x-a}$과 $y=\frac{bx+1}{2x+6}$이 같아야 하므로

$a=-6$, $b=6$

$\therefore b-a=12$

답 12

다른 풀이

두 함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이면 점근선의 교점도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$y=\frac{ax+1}{2x-6}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3$,

$y=\frac{a}{2}$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $\left(3, \frac{a}{2}\right)$

$y=\frac{bx+1}{2x+6}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-3$,

$y=\frac{b}{2}$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $\left(-3, \frac{b}{2}\right)$

이때 두 점 $\left(3, \frac{a}{2}\right)$, $\left(-3, \frac{b}{2}\right)$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이려면 $3=\frac{b}{2}$, $\frac{a}{2}=-3$이어야 하므로

$a=-6$, $b=6$

$\therefore b-a=12$

Level Up 연습문제

p. 278

1

두 점 Q, R 사이의 거리는

$\sqrt{\{0-(-1)\}^2+(-4-0)^2}=\sqrt{17}$

두 점 Q, R를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{-1}+\frac{y}{-4}=1$ $\quad \therefore 4x+y+4=0$

함수 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$의 그래프 위의 점 P의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{t}\right)$이라 하면 점 P와 직선 $4x+y+4=0$ 사이의 거리 h는

$$h=\frac{\left|4t+\frac{1}{t}+4\right|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{\left|4t+\frac{1}{t}+4\right|}{\sqrt{17}}$$

이때 $t>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4t+\frac{1}{t}\geq 2\sqrt{4t\times\frac{1}{t}}=4$ $\left(\text{단, 등호는 } t=\frac{1}{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 h의 최솟값은 $\frac{|4+4|}{\sqrt{17}}=\frac{8}{\sqrt{17}}$이므로

구하는 $\triangle$PQR의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2}\times\sqrt{17}\times\frac{8}{\sqrt{17}}=4$

답 4

2

두 함수 $y=\frac{2}{x+1}+1$, $y=m(x+1)+1$의 그래프가 만나려면 방정식 $\frac{2}{x+1}+1=m(x+1)+1$의 실근이 존재해야 한다.

$\frac{2}{x+1}+1=m(x+1)+1$에서 $\frac{2}{x+1}=m(x+1)$

$2=m(x+1)^2$, $m(x^2+2x+1)-2=0$

$\therefore mx^2+2mx+m-2=0$ ······ ㉠

(i) $m=0$일 때

㉠에 대입하면 $-2=0$이므로 실근이 존재하지 않는다.

(ii) $m\neq0$일 때

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=m^2-m(m-2)=2m\geq0$, $m\geq0$

이때 $m\neq0$이므로 $m>0$

(i), (ii)에서 실수 m의 값의 범위는 $m>0$

따라서 m의 값으로 적당한 것은 ⑤이다.

답 ⑤

3

$\mathrm{P}\left(a, \frac{2}{a-1}\right)$라 하면 사각형 OAPB의 둘레의 길이는

$2a+\frac{4}{a-1}$

$a>1$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}2a+\frac{4}{a-1}&=2(a-1)+2+\frac{4}{a-1}\\&\geq2\sqrt{2(a-1)\times\frac{4}{a-1}}+2\\&=4\sqrt{2}+2\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } 2(a-1)=\frac{4}{a-1}\text{일 때 성립}\right)$

$2(a-1)=\frac{4}{a-1}$에서 $(a-1)^2=2$

$\therefore a=1+\sqrt{2}$ ($\because a>1$)

따라서 $a=1+\sqrt{2}$, 즉 $\mathrm{P}(1+\sqrt{2}, \sqrt{2})$일 때

사각형 OAPB의 둘레의 길이가 최소이므로

이때의 사각형 OAPB의 넓이는

$(1+\sqrt{2})\times\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$

답 $2+\sqrt{2}$

4

$y=\frac{-x+1}{x+1}=\frac{-(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}-1$이므로

$y=\frac{-x+1}{x+1}$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

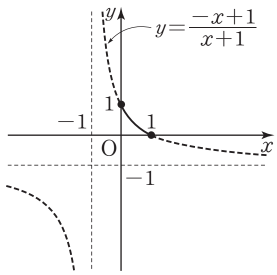
따라서 $0\leq x\leq1$에서

$y=\frac{-x+1}{x+1}$의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$x=0$일 때 최댓값은 1,

$x=1$일 때 최솟값은 0이다.



$\therefore 0\leq y\leq1$

$0\leq x\leq1$에서

$-2\leq x-2\leq-1$

$\therefore -1\leq\frac{1}{x-2}\leq-\frac{1}{2}$

이때 $0\leq y\leq1$에서 $-2\leq y-2\leq-1$

$\therefore \frac{1}{2}\leq\frac{y-2}{x-2}\leq2$

따라서 최댓값은 2, 최솟값은 $\frac{1}{2}$이므로

$a=2$, $b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

④ 무리식과 무리함수

확인 문제 p. 281 ~ 294

01

(1) $(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})$

$=(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x})^2$

$=x+2-x=2$

(2) $(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})$

$=x^2-(\sqrt{x^2-1})^2$

$=x^2-(x^2-1)$

$=1$

답 (1) 2 (2) 1

02

$\sqrt{a^2-2a+1}+\sqrt{a^2-10a+25}$

$=\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a-5)^2}$

$=|a-1|+|a-5|$

이때 $1<a<5$이므로 $a-1>0$, $a-5<0$

$\therefore$ (주어진 식)$=|a-1|+|a-5|=a-1-(a-5)$

$=4$

답 4

03

$\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$

$=\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)-(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\dfrac{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1-(x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1)}{x-1}$

$=\dfrac{2x-2}{x-1}=\dfrac{2(x-1)}{x-1}=2$

답 2

04

(1) $\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{x}}=\dfrac{(2+\sqrt{x})+(2-\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}=\dfrac{4}{4-x}$

(2) $\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

$=\dfrac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})^2+(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}$

$=\dfrac{(x+2)+2\sqrt{x+2}\sqrt{x}+x+(x+2)-2\sqrt{x+2}\sqrt{x}+x}{(x+2)-x}$

$=\dfrac{4(x+1)}{2}=2(x+1)$

답 (1) $\dfrac{4}{4-x}$ (2) $2(x+1)$

05

(1) $\dfrac{1}{2-\sqrt{4-x}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{4-x}}$

$=\dfrac{(2+\sqrt{4-x})+(2-\sqrt{4-x})}{(2-\sqrt{4-x})(2+\sqrt{4-x})}$

$=\dfrac{4}{4-(4-x)}$

$=\dfrac{4}{x}$

이 식에 $x=2-2\sqrt{2}$를 대입하면

$\dfrac{4}{2-2\sqrt{2}}=\dfrac{2(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{1-2}$

$=-2-2\sqrt{2}$

(2) $x=\sqrt{2}-1$에서 $x+1=\sqrt{2}$이므로

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2+2x-1=0$

$\therefore 2x^3+4x^2-x+1=2x(x^2+2x-1)+x+1$

$=x+1=\sqrt{2}$

답 (1) $-2-2\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{2}$

06

$x=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}$

$=-1-\sqrt{2}$

$y=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}$

$=-1+\sqrt{2}$

$\therefore x+y=(-1-\sqrt{2})+(-1+\sqrt{2})=-2$,

$xy=(-1-\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})=-1$

따라서 구하는 식의 값은

$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy$

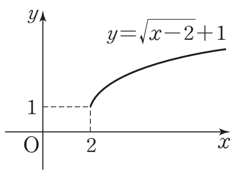
$=(-2)^2-(-1)$

$=5$

답 5

07

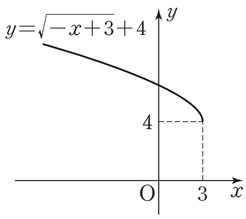
(1) $y=\sqrt{x-2}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x|x\geq 2\}$, 치역: $\{y|y\geq 1\}$

(2) $y=\sqrt{-x+3}+4=\sqrt{-(x-3)}+4$

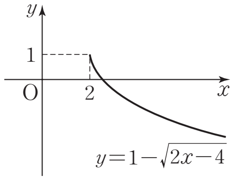
따라서 $y=\sqrt{-x+3}+4$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x|x\le 3\}$, 치역: $\{y|y\ge 4\}$

(3) $y=1-\sqrt{2x-4}=-\sqrt{2(x-2)}+1$

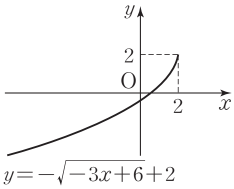
따라서 $y=1-\sqrt{2x-4}$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x|x\ge 2\}$, 치역: $\{y|y\le 1\}$

(4) $y=-\sqrt{-3x+6}+2=-\sqrt{-3(x-2)}+2$

따라서 $y=-\sqrt{-3x+6}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x|x\le 2\}$, 치역: $\{y|y\le 2\}$

답 풀이 참조

08

함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{2(x-2)}-1$

이 그래프가 점 $(10, k)$를 지나므로

$k=\sqrt{2(10-2)}-1=\sqrt{16}-1=3$

답 3

09

함수 $y=-\sqrt{x-4}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\sqrt{(x-1)-4}-3=-\sqrt{x-5}-3$

따라서 이 그래프와 $y=-\sqrt{ax-b}+c$의 그래프가 겹쳐지므로 $a=1$, $b=5$, $c=-3$

$\therefore abc=1\times5\times(-3)=-15$

답 -15

10

함수 $y=\sqrt{ax+1}+3$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{a(x-1)+1}+3-1=\sqrt{ax-a+1}+2$

이 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=\sqrt{a(-x)-a+1}+2=\sqrt{-ax-a+1}+2$

이 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$2=\sqrt{-a-a+1}+2$, $\sqrt{-2a+1}=0$

$-2a+1=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

11

$ax+4\ge 0$에서 $ax\ge -4$

이때 주어진 함수의 정의역이 $\{x|x\le 2\}$이므로 $a<0$이고

$x\le -\frac{4}{a}$에서 $-\frac{4}{a}=2 \qquad \therefore a=-2$

$\sqrt{ax+4}\ge 0$이므로 $\sqrt{ax+4}-3\ge -3$

따라서 치역은 $\{y|y\ge -3\}$이므로 $b=-3$

$\therefore a+b=-5$

답 -5

12

$ax+b\ge 0$에서 $ax\ge -b$

이때 주어진 함수의 정의역이 $\{x|x\ge -2\}$이므로 $a>0$이고 $x\ge -\frac{b}{a}$에서

$-\frac{b}{a}=-2 \qquad \therefore b=2a$ ...... ㉠

$-\sqrt{ax+b}\le 0$이므로 $-\sqrt{ax+b}+c\le c$

즉 치역은 $\{y|y\le c\}$이므로 $c=1$

$\therefore y=-\sqrt{ax+b}+1$

또 이 함수의 그래프가 점 $(-1, -1)$을 지나므로

$-1=-\sqrt{-a+b}+1$, $\sqrt{-a+b}=2$

$\therefore -a+b=4$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=8$

$\therefore a+b+c=4+8+1=13$

답 13

13

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\,(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 $y=\sqrt{a(x+1)}-1$ ...... ㉠

이때 ㉠의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=\sqrt{a}-1$에서 $\sqrt{a}=3 \qquad \therefore a=9$

$a=9$를 ㉠에 대입하면 $y=\sqrt{9x+9}-1$
따라서 $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{9x+9}-1$이므로
$a=9,\ b=9,\ c=-1$
$\therefore\ a+b+c=17$

답 17

14

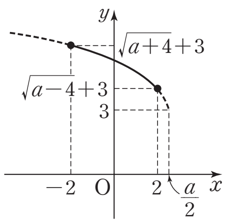
주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\,(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $y=-\sqrt{a(x-4)}+2$ ······ ㉠
이때 ㉠의 그래프가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로
$-2=-\sqrt{-4a}+2$에서 $\sqrt{-4a}=4$
$-4a=16$ $\quad\therefore\ a=-4$
$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $y=-\sqrt{-4(x-4)}+2$
따라서 $f(x)=-\sqrt{-4(x-4)}+2$이므로
$f(-5)=-\sqrt{-4\times(-9)}+2=-6+2=-4$

답 -4

15

$y=\sqrt{-2x+a}+3=\sqrt{-2\left(x-\frac{a}{2}\right)}+3$이므로
$y=\sqrt{-2x+a}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{a}{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-2\le x\le 2$에서
$y=\sqrt{-2x+a}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

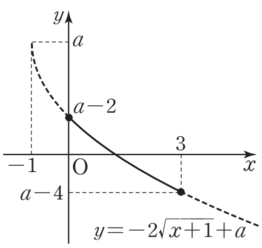


이때 최댓값이 6이므로
$\sqrt{a+4}+3=6$ $\quad\therefore\ a=5$
$\therefore$ (최솟값)$=\sqrt{5-4}+3=4$

답 4

16

$y=-2\sqrt{x+1}+a$의 그래프는 $y=-2\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $0\le x\le 3$에서 $y=-2\sqrt{x+1}+a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



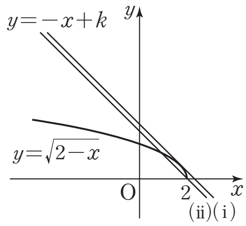
이때 최댓값은 $a-2$이므로 $a-2=1$ $\quad\therefore\ a=3$

또 최솟값은 $a-4=3-4=-1$이므로 $b=-1$
$\therefore\ a+b=3-1=2$

답 2

17

함수 $y=\sqrt{2-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $y=\sqrt{2-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때
$-x+k=\sqrt{2-x}$의 양변을 제곱하면
$x^2-2kx+k^2=2-x,\ x^2-(2k-1)x+k^2-2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(2k-1)^2-4(k^2-2)=0,\ -4k+9=0$
$\therefore\ k=\frac{9}{4}$

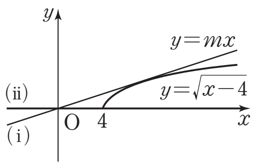
(ii) 직선 $y=-x+k$가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때
$0=-2+k$ $\quad\therefore\ k=2$

따라서 한 점에서 만날 때는 직선이 (i)이거나 (ii)보다 아래쪽에 있을 때이므로 $k=\frac{9}{4}$ 또는 $k<2$

답 $k=\frac{9}{4}$ 또는 $k<2$

18

함수 $y=\sqrt{x-4}$의 그래프와 직선 $y=mx$는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $y=\sqrt{x-4}$의 그래프와 직선 $y=mx$가 접할 때
$mx=\sqrt{x-4}$의 양변을 제곱하면
$m^2x^2=x-4,\ m^2x^2-x+4=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-16m^2=0,\ m^2=\frac{1}{16}$
$\therefore\ m=\frac{1}{4}\ (\because\ m>0)$

(ii) 직선 $y=mx$가 점 $(4,\ 0)$을 지날 때
$0=4m$ $\quad\therefore\ m=0$

따라서 만나지 않을 때는 m의 값이 (i)의 기울기보다 크거나 (ii)의 기울기보다 작을 때이므로
$m>\frac{1}{4}$ 또는 $m<0$

답 $m>\frac{1}{4}$ 또는 $m<0$

19

$y=3-\sqrt{2x-5}$에서 $3-y=\sqrt{2x-5}$

양변을 제곱하면 $(3-y)^2=2x-5$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}(y-3)^2+\frac{5}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{5}{2}$

한편 함수 $y=3-\sqrt{2x-5}$의 치역은 $\{y\,|\,y\le 3\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\le 3\}$이다.

따라서 주어진 함수의 역함수는

$y=\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{5}{2}\ (x\le 3)$이므로

$a=\frac{1}{2},\ b=-3,\ c=\frac{5}{2},\ d=3$

$\therefore\ a+b+c+d=3$

답 3

20

주어진 두 함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수이다.

$y=\sqrt{x+a}+b$에서 $y-b=\sqrt{x+a}$

양변을 제곱하면 $(y-b)^2=x+a$

$\therefore\ x=(y-b)^2-a$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=(x-b)^2-a=x^2-2bx-a+b^2$

즉 $2b=4,\ -a+b^2=1$이므로 $b=2,\ a=3$

$\therefore\ a+b=3+2=5$

답 5

21

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 따라서 두 함수의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{2x+3}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{2x+3}=x$의 양변을 제곱하면 $2x+3=x^2$

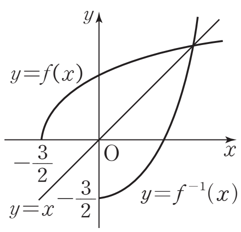
$x^2-2x-3=0,\ (x+1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 오른쪽 그림에서 교점의 x좌표가 0보다 크므로

$x=3,\ y=3$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(3, 3)$이다.

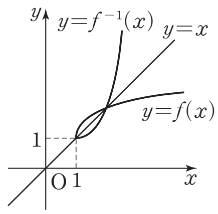


답 $(3, 3)$

22

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 함수의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{x-1}+1$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{x-1}+1=x$에서

$\sqrt{x-1}=x-1$

양변을 제곱하면

$x-1=x^2-2x+1$

$x^2-3x+2=0,\ (x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2$

따라서 두 함수의 그래프는 두 점 $(1, 1),\ (2, 2)$에서 만나므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$

답 $\sqrt{2}$

연습문제

p. 295~297

1

$$(\text{주어진 식})=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})+(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$$
$$=\frac{2\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2}$$
$$=\frac{2\sqrt{x+1}}{(x+1)-x}$$
$$=2\sqrt{x+1}$$

따라서 $x=8$일 때 구하는 값은 6

답 ②

2

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$$
$$=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2}$$
$$=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(x+1)-x}$$
$$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x} \qquad \cdots\cdots ❶$$

$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(15)$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$

$=-1+\sqrt{16}$

$=-1+4=3 \qquad \cdots\cdots ❷$

답 3

채점 기준	비율
❶ 분모의 유리화를 이용하여 $f(x)$의 식을 변형할 수 있다.	50%
❷ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(15)$의 값을 구할 수 있다.	50%

3

$-2x-2\ge0$에서 $-2x\ge2$ $\therefore x\le-1$

주어진 함수의 정의역이 $\{x|x\le a\}$이므로

$a=-1$

$\sqrt{-2x-2}\ge0$이므로 $\sqrt{-2x-2}+1\ge1$

주어진 함수의 치역이 $\{y|y\ge b\}$이므로

$b=1$

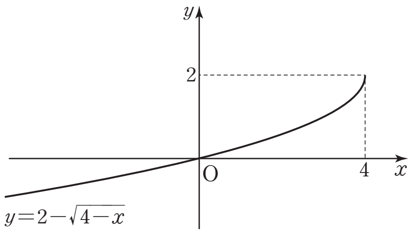
$\therefore a+b=-1+1=0$

답 ③

4

$y=2-\sqrt{4-x}=-\sqrt{-(x-4)}+2$

즉 $y=2-\sqrt{4-x}$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=2-\sqrt{4-x}$의 그래프가 지나는 사분면은 제1, 3사분면이다.

답 ②

5

함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동하면 $y=\sqrt{3(x-m)}=\sqrt{3x-3m}$

이 함수의 그래프가 함수 $y=\sqrt{3x-27}$의 그래프와 일치하므로 $3m=27$ $\therefore m=9$

답 9

6

함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 $y=\sqrt{a(x-1)}-2$

이 그래프가 원점을 지나므로 $0=\sqrt{-a}-2$

$\sqrt{-a}=2$, $-a=4$

$\therefore a=-4$

답 -4

7

주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이므로 $y=-\sqrt{2(x-2)}+b=-\sqrt{2x-4}+b$

따라서 $a=-4$, $b=3$이므로

$a+b=-4+3=-1$ 답 -1

8

Step by Step

그래프가 시작하는 점의 좌표 (p, q)를 구한다.

↓

$y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 나타낸다.

↓

$f(7)$의 값을 구한다.

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 $y=\sqrt{x+2}-1$

따라서 $f(x)=\sqrt{x+2}-1$이므로

$f(7)=\sqrt{9}-1=3-1=2$

답 ②

9

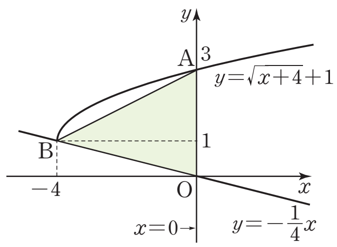
$f^{-1}(10)=3$이므로 $f(3)=10$

이때 $f(3)=a\sqrt{4}+2=2a+2$이므로

$2a+2=10$ $\therefore a=4$ 답 ④

10

함수 $y=\sqrt{x+4}+1$의 그래프와 두 직선 $x=0$, $y=-\frac{1}{4}x$를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times4=6$ 답 6

11

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{kx^2-kx+3}$의 값이 실수가 되려면 $kx^2-kx+3\ge0$ ······ ㉠

(i) $k=0$인 경우

$k=0$을 ㉠에 대입하면 $3\geq 0$

즉 $k=0$이면 ㉠은 항상 성립한다.

(ii) $k\neq 0$인 경우

부등식 ㉠이 항상 성립하려면 $k>0$

이때 이차방정식 $kx^2-kx+3=0$의 판별식을 D라 하면 $D=(-k)^2-4\times k\times 3\leq 0$

$k^2-12k\leq 0$, $k(k-12)\leq 0$

$\therefore 0<k\leq 12$ ($\because k\neq 0$)

(i), (ii)에서 $0\leq k\leq 12$

따라서 정수 k의 값은 $0, 1, 2, \cdots, 12$이므로 그 개수는 13이다.

답 ④

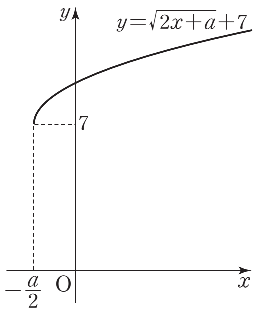
12

$$(\text{주어진 식})=\frac{(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$
$$=\frac{x-2\sqrt{x}+1+x+2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x})^2-1}$$
$$=\frac{2x+2}{x-1}$$
$$=\frac{2(-1+\sqrt{6})+2}{(-1+\sqrt{6})-1} \leftarrow x=-1+\sqrt{6}\text{ 대입}$$
$$=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}-2}$$
$$=\frac{2\sqrt{6}(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}$$
$$=\frac{12+4\sqrt{6}}{2}$$
$$=6+2\sqrt{6}$$
$$=2(3+\sqrt{6})$$

답 ①

13

함수 $y=\sqrt{2x+a}+7$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉 함수 $y=\sqrt{2x+a}+7$은 $x=-\frac{a}{2}$에서 최솟값 7을 가지므로 $-\frac{a}{2}=-2$, $m=7$ $\quad\therefore a=4$, $m=7$

$\therefore a+m=4+7=11$

답 11

14

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=2$이므로 함수의 식을

$y=\frac{k}{x-1}+2$ $(k\neq 0)$ ······ ㉠

로 놓으면 ㉠의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

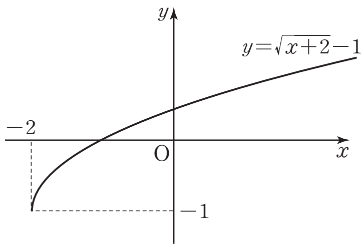
$1=-k+2$ $\quad\therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$y=\frac{1}{x-1}+2=\frac{1+2(x-1)}{x-1}=\frac{2x-1}{x-1}$

즉 $a=1$, $b=2$, $c=-1$이므로 이것을 $y=\sqrt{ax+b}+c$에 대입하면 $y=\sqrt{x+2}-1$

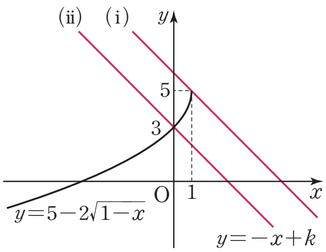
따라서 함수 $y=\sqrt{x+2}-1$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 함수 $y=\sqrt{x+2}-1$의 그래프가 지나지 않는 사분면은 제4사분면이다.



답 ④

15

함수 $y=5-2\sqrt{1-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나는 경우는 직선 $y=-x+k$가 다음 그림의 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있을 때이다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(1, 5)$를 지날 때

$5=-1+k$ $\quad\therefore k=6$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 점 $(0, 3)$을 지날 때

$3=0+k$ $\quad\therefore k=3$

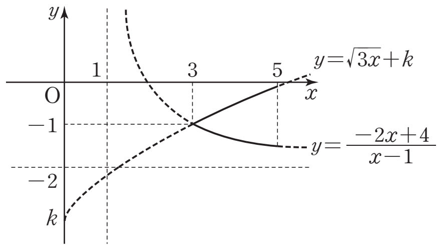
(i), (ii)에서 $3<k\le 6$

따라서 정수 k의 값은 4, 5, 6이므로 그 합은

$4+5+6=15$ 답 15

16

$3\le x\le 5$에서 함수 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}-2$의 그래프는 다음 그림과 같다.



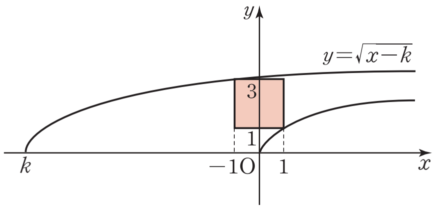
이때 함수 $y=\sqrt{3x}+k$의 그래프가 점 $(3,\ -1)$을 지날 때, 실수 k가 최댓값을 가지므로

$-1=\sqrt{9}+k$ $\quad\therefore k=-4$, 즉 $M=-4$

$\therefore M^2=(-4)^2=16$ 답 16

17

두 집합 A, B를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y=\sqrt{x-k}$의 그래프가 점 $(-1, 3)$을 지날 때 k의 값은 최소가 되므로 $3=\sqrt{-1-k}$

$9=-1-k$ $\quad\therefore k=-10$

따라서 k의 최솟값은 -10이다. 답 ①

Level Up 연습문제

p.298

1

주어진 함수의 정의역이 실수 전체의 집합이므로 모든 실수 x에 대하여 $(a-1)x^2+2(a-1)x+3\ge 0$

(i) $a-1=0$, 즉 $a=1$일 때

$3\ge 0$으로 부등식이 성립한다.

(ii) $a-1>0$, 즉 $a>1$일 때

x에 대한 이차방정식 $(a-1)x^2+2(a-1)x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a-1)^2-3(a-1)\le 0$

$a^2-5a+4\le 0$

$(a-1)(a-4)\le 0$

$\therefore 1<a\le 4$ ($\because a>1$)

(i), (ii)에서 $1\le a\le 4$

답 $1\le a\le 4$

2

함수 $f(x)=\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k\,(x\ge 0)$의 역함수는 $g(x)=\sqrt{5x-k}$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

$\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k=x$에서 $x^2-5x+k=0$ ······ ㉠

이때 이차방정식 ㉠은 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4k=25-4k>0$ $\quad\therefore k<\dfrac{25}{4}$

또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 k이므로 $k\ge 0$

$\therefore 0\le k<\dfrac{25}{4}$

따라서 정수 k의 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 그 개수는 7이다.

답 ②

3

두 점 A, B의 좌표는 $\mathrm{A}(a, \sqrt{a})$, $\mathrm{B}(a, \sqrt{3a})$

점 C의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로

$\sqrt{3a}=\sqrt{x}$에서 $x=3a$

$\therefore \mathrm{C}(3a, \sqrt{3a})$

점 D의 x좌표는 점 C의 x좌표와 같으므로 점 D의 좌표는 $\mathrm{D}(3a, 3\sqrt{a})$

두 점 A, D를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{3\sqrt{a}-\sqrt{a}}{3a-a}=\dfrac{2\sqrt{a}}{2a}=\dfrac{\sqrt{a}}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ ($\because a>0$)

즉 $\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{1}{4}$이므로 $\sqrt{a}=4$ $\quad\therefore a=16$

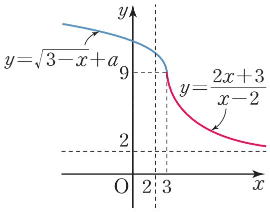
답 16

4

$x>3$일 때,

$$f(x)=\frac{2x+3}{x-2}=\frac{2(x-2)+7}{x-2}=\frac{7}{x-2}+2$$

(가)에서 치역이 $\{y|y>2\}$이고, (나)에서 함수 f는 일대일 함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$x=3$일 때

$\frac{2\times3+3}{3-2}=\sqrt{3-3}+a$이므로

$a=9$

즉 $x\leq3$일 때, $f(x)=\sqrt{3-x}+9$이므로

$f(2)f(k)=40$에서 $(\sqrt{3-2}+9)f(k)=40$

$10f(k)=40 \qquad \therefore f(k)=4$

따라서 $2<4<9$에서 $k>3$이어야 하므로

$\frac{2k+3}{k-2}=4$, $2k+3=4k-8$

$\therefore k=\frac{11}{2}$

답 ⑤

memo