: 개념 해결의 법칙

정답과 해설

1 다항식의 연산

1 다항식의 덧셈과 뺄셈

개념 확인 8~9쪽

1 (1) 3 (2) $-2y$ (3) 4 (4) $5x^3+3$
2 (1) $3x^2y^3+2xy-5y^2+1$ (2) $1-5y^2+2xy+3x^2y^3$
(3) $3x^2y^3-5y^2+2xy+1$ (4) $1+2xy-5y^2+3x^2y^3$
3 (1) $5x^2-3x+1$ (2) $-2x^2+x+2$
4 (1) $3x^2-2x+2$ (2) $3x^2-10x+7$

2 여러 가지 문자를 포함한 다항식을 내림차순이나 오름차순으로 정리할 때, 정리할 한 문자를 정하면 그 문자를 제외한 나머지 문자는 모두 상수로 생각한다.

3 (1) $(4x^2+2x-1)+(x^2-5x+2)$
$=4x^2+2x-1+x^2-5x+2$
$=(4x^2+x^2)+(2x-5x)+(-1+2)$
$=5x^2-3x+1$
(2) $(3x^2-2x+4)-(5x^2-3x+2)$
$=3x^2-2x+4-5x^2+3x-2$
$=(3x^2-5x^2)+(-2x+3x)+(4-2)$
$=-2x^2+x+2$

4 (1) $A+B=(2x^2-4x+3)+(x^2+2x-1)$
$=2x^2-4x+3+x^2+2x-1$
$=(2x^2+x^2)+(-4x+2x)+3-1$
$=3x^2-2x+2$
(2) $2A-B=2(2x^2-4x+3)-(x^2+2x-1)$
$=4x^2-8x+6-x^2-2x+1$
$=(4x^2-x^2)+(-8x-2x)+6+1$
$=3x^2-10x+7$

개념 드릴 10쪽

1 (1) $3x^2-x+1$ (2) $4x^3+x^2-5x+2$
(3) $2x^2-4xy+y^2+2$ (4) $-x^2+(2y+1)x+3y^2-5$
2 (1) $5+x-3x^2$ (2) $4-3x+2x^2+x^3$
(3) $-2y-xy+4x^2+x^3$ (4) $y^2+(3y-1)x+2x^2$
3 (1) $3x^3-x^2+2x-5$ (2) $-x^3+3x^2-4x-5$
(3) $4x^3+x-10$ (4) $-5x^3+7x^2-10x-5$
4 (1) $5x^2+6xy+4y^2$ (2) $-4x^2+5xy-13y^2$
(3) $-x^2+10xy-12y^2$ (4) $-7x^2+7xy-21y^2$

3 (1) $A+B=(x^3+x^2-x-5)+(2x^3-2x^2+3x)$
$=x^3+x^2-x-5+2x^3-2x^2+3x$
$=3x^3-x^2+2x-5$
(2) $A-B=(x^3+x^2-x-5)-(2x^3-2x^2+3x)$
$=x^3+x^2-x-5-2x^3+2x^2-3x$
$=-x^3+3x^2-4x-5$
(3) $2A+B=2(x^3+x^2-x-5)+(2x^3-2x^2+3x)$
$=2x^3+2x^2-2x-10+2x^3-2x^2+3x$
$=4x^3+x-10$
(4) $A-3B=(x^3+x^2-x-5)-3(2x^3-2x^2+3x)$
$=x^3+x^2-x-5-6x^3+6x^2-9x$
$=-5x^3+7x^2-10x-5$

4 (1) $A+3B=(-x^2+3xy-5y^2)+3(2x^2+xy+3y^2)$
$=-x^2+3xy-5y^2+6x^2+3xy+9y^2$
$=5x^2+6xy+4y^2$
(2) $2A-B=2(-x^2+3xy-5y^2)-(2x^2+xy+3y^2)$
$=-2x^2+6xy-10y^2-2x^2-xy-3y^2$
$=-4x^2+5xy-13y^2$
(3) $3A+B=3(-x^2+3xy-5y^2)+(2x^2+xy+3y^2)$
$=-3x^2+9xy-15y^2+2x^2+xy+3y^2$
$=-x^2+10xy-12y^2$
(4) $3A-2B=3(-x^2+3xy-5y^2)-2(2x^2+xy+3y^2)$
$=-3x^2+9xy-15y^2-4x^2-2xy-6y^2$
$=-7x^2+7xy-21y^2$

필수 예제 01 다항식의 덧셈과 뺄셈 11쪽

01-1 답 (1) $-8x^2+2xy+16y^2$ (2) $24x^2-12xy-6y^2$
|전략| 구하는 식을 먼저 간단히 정리하고 대입한다.

(1) $A-\{B+2C-(A-B)\}$
$=A-(B+2C-A+B)$
$=A-(-A+2B+2C)$
$=A+A-2B-2C$
$=2A-2B-2C$
$=2(3x^2-2xy+4y^2)-2(5x^2-3xy+y^2)-2(2x^2-5y^2)$
$=6x^2-4xy+8y^2-10x^2+6xy-2y^2-4x^2+10y^2$
$=-8x^2+2xy+16y^2$
(2) $6A+2\{B+C-(3A-B)\}$
$=6A+2(B+C-3A+B)$
$=6A+2(-3A+2B+C)$
$=6A-6A+4B+2C$
$=4B+2C$
$=4(5x^2-3xy+y^2)+2(2x^2-5y^2)$
$=20x^2-12xy+4y^2+4x^2-10y^2$
$=24x^2-12xy-6y^2$

참고 주어진 식에 세 다항식 A, B, C를 바로 대입하여 계산해도 되지만, 주어진 식을 먼저 간단히 정리한 후 세 다항식 A, B, C를 대입하는 것이 계산이 더 간편하다.

01-2 답 $-x^3+6x^2-10x+10$

|전략| X를 A, B에 대한 식으로 나타낸 후 다항식 X를 구한다.

$A-2(X-B)=3A$에서

$A-2X+2B=3A$, $2X=-2A+2B$

$\therefore X=-A+B$

$=-(x^3-3x^2+x-4)+(3x^2-9x+6)$

$=-x^3+3x^2-x+4+3x^2-9x+6$

$=-x^3+6x^2-10x+10$

2 다항식의 곱셈

개념 확인 12~14쪽

1 (1) $6x^3+3x^2-12x$ (2) $x^4y-3x^3y^2+5xy^3$

2 (1) $6x^2-13x-5$ (2) $2x^2+x^2y+xy+2xy^2-6y^2$

3 (1) $a^2+b^2+4c^2+2ab+4bc+4ca$ (2) $x^3+9x^2+27x+27$ (3) $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$ (4) x^3+64 (5) x^3-8y^3 (6) x^3+2x^2-5x-6 (7) $x^3+y^3-3xy+1$ (8) x^4+x^2+1

4 (1) 2 (2) 80

5 (1) 5 (2) 38

2 (1) $(2x-5)(3x+1)=6x^2+2x-15x-5$

$=6x^2-13x-5$

(2) $(x+2y)(2x+xy-3y)$

$=2x^2+x^2y-3xy+4xy+2xy^2-6y^2$

$=2x^2+x^2y+xy+2xy^2-6y^2$

3 (1) $(a+b+2c)^2$

$=a^2+b^2+(2c)^2+2\times a\times b+2\times b\times 2c+2\times 2c\times a$

$=a^2+b^2+4c^2+2ab+4bc+4ca$

(2) $(x+3)^3=x^3+3\times x^2\times 3+3\times x\times 3^2+3^3$

$=x^3+9x^2+27x+27$

(3) $(a-2b)^3=a^3-3\times a^2\times 2b+3\times a\times(2b)^2-(2b)^3$

$=a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$

(4) $(x+4)(x^2-4x+16)=(x+4)(x^2-x\times 4+4^2)$

$=x^3+4^3$

$=x^3+64$

(5) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=(x-2y)\{x^2+x\times 2y+(2y)^2\}$

$=x^3-(2y)^3$

$=x^3-8y^3$

(6) $(x+1)(x-2)(x+3)$

$=x^3+(1-2+3)x^2+\{1\times(-2)+(-2)\times 3+3\times 1\}x$
$+1\times(-2)\times 3$

$=x^3+2x^2-5x-6$

(7) $(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-y-x)$

$=(x+y+1)(x^2+y^2+1^2-x\times y-y\times 1-1\times x)$

$=x^3+y^3+1^3-3\times x\times y\times 1$

$=x^3+y^3-3xy+1$

(8) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$=(x^2+x\times 1+1^2)(x^2-x\times 1+1^2)$

$=x^4+x^2\times 1^2+1^4$

$=x^4+x^2+1$

4 (1) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=2^2+2\times(-1)=2$

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=5^3-3\times 3\times 5=80$

5 (1) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=3^2-2\times 2=5$

(2) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=5^2-2\times 6=13$

$\therefore a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=5\times(13-6)+3\times 1=38$

개념 드릴 15쪽

1 (1) $-2x^3+2x$ (2) $-6x^5+3x^4+3x^2$ (3) $a^3b-2a^2b-ab^3$ (4) $3a^3b-6a^2b^2-15ab^3$

2 (1) $-2x^3+2x^2y^2+3xy-3y^3$ (2) $4x^3-x^2y^2+4xy-y^3$ (3) $3a^4-a^3b+9ab-3b^2$ (4) $2a^3+5a^2b^2-2ab-5b^3$ (5) $x^3-2x^2y+2xy^2-y^3$ (6) $2x^4-x^3+7x^2-3x+3$

3 (1) $4a^2-4+\frac{1}{a^2}$ (2) x^2-25y^2 (3) $6x^2-x-2$ (4) x^4-16

4 (1) $a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca$ (2) $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$ (3) $8x^3-1$ (4) x^3y^3+8 (5) $a^3-b^3+c^3+3abc$ (6) $x^4+4x^2y^2+16y^4$

2 (3) $(3a-b)(a^3+3b)=3a^4+9ab-a^3b-3b^2$

$=3a^4-a^3b+9ab-3b^2$

(4) $(a^2-b)(2a+5b^2)=2a^3+5a^2b^2-2ab-5b^3$

(5) $(x^2-xy+y^2)(x-y)=x^3-x^2y-x^2y+xy^2+xy^2-y^3$

$=x^3-2x^2y+2xy^2-y^3$

(6) $(x^2+3)(2x^2-x+1)=2x^4-x^3+x^2+6x^2-3x+3$

$=2x^4-x^3+7x^2-3x+3$

3 (1) $\left(2a-\frac{1}{a}\right)^2=(2a)^2-2\times2a\times\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{a}\right)^2$

$=4a^2-4+\frac{1}{a^2}$

(2) $(x+5y)(x-5y)=x^2-(5y)^2=x^2-25y^2$

(3) $(2x+1)(3x-2)$

$=2\times3\times x^2+\{2\times(-2)+1\times3\}x+1\times(-2)$

$=6x^2-x-2$

(4) $(x-2)(x+2)(x^2+4)=(x^2-2^2)(x^2+4)$

$=(x^2-4)(x^2+4)$

$=(x^2)^2-4^2=x^4-16$

4 (1) $(a-b+2c)^2$

$=a^2+(-b)^2+(2c)^2+2\times a\times(-b)$

$+2\times(-b)\times2c+2\times2c\times a$

$=a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca$

(2) $(2a-b)^3=(2a)^3-3\times(2a)^2\times b+3\times2a\times b^2-b^3$

$=8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$

(3) $(2x-1)(4x^2+2x+1)=(2x-1)\{(2x)^2+2x\times1+1^2\}$

$=(2x)^3-1^3=8x^3-1$

(4) $(xy+2)(x^2y^2-2xy+4)=(xy+2)\{(xy)^2-xy\times2+2^2\}$

$=(xy)^3+2^3=x^3y^3+8$

(5) $(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)$

$=(a-b+c)\{a^2+(-b)^2+c^2-a\times(-b)-(-b)\times c-c\times a\}$

$=a^3+(-b)^3+c^3-3\times a\times(-b)\times c$

$=a^3-b^3+c^3+3abc$

(6) $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

$=\{x^2+x\times2y+(2y)^2\}\{x^2-x\times2y+(2y)^2\}$

$=x^4+x^2\times(2y)^2+(2y)^4$

$=x^4+4x^2y^2+16y^4$

필수 예제 01 다항식의 전개식에서 계수 구하기

16쪽

01-1

답 (1) -15 (2) 4

|전략| 특정한 항이 나오는 항들만 전개한다.

(1) $(x^2-3x+5)(2x^2-x+1)$의 전개식에서

x^3항은 $x^2\times(-x)-3x\times2x^2=-7x^3$

$\therefore a=-7$

x항은 $-3x\times1+5\times(-x)=-8x$

$\therefore b=-8$

$\therefore a+b=-15$

(2) $(x^2-2x+4)(x^3-x^2-3)$의 전개식에서

x^4항은 $x^2\times(-x^2)-2x\times x^3=-3x^4$

$\therefore a=-3$

x^2항은 $x^2\times(-3)+4\times(-x^2)=-7x^2$

$\therefore b=-7$

$\therefore a-b=4$

01-2

답 (1) 1 (2) 6

|전략| (1) x^2항이 나오는 항들만 전개한다.

(2) x^3항이 나오는 항들만 전개한다.

(1) $(2x^2+x+3)(x^2+2x-k)$의 전개식에서

x^2항은 $2x^2\times(-k)+x\times2x+3\times x^2=(5-2k)x^2$

x^2의 계수가 3이므로

$5-2k=3 \qquad \therefore k=1$

(2) $(x^2-kx+3)(x^3+x^2-2x+1)$의 전개식에서

x^3항은 $x^2\times(-2x)-kx\times x^2+3\times x^3=(1-k)x^3$

x^3의 계수가 -5이므로

$1-k=-5 \qquad \therefore k=6$

필수 예제 02 곱셈 공식

17쪽

02-1

답 (1) $x^2+4y^2+4xy-2x-4y+1$

(2) $27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$ (3) $8x^3-27$

(4) $x^3+8y^3+27z^3-18xyz$ (5) x^8-y^8

|전략| 곱셈 공식을 이용하여 주어진 식을 전개한다.

(1) $(x+2y-1)^2=x^2+(2y)^2+(-1)^2+2\times x\times2y$

$+2\times2y\times(-1)+2\times(-1)\times x$

$=x^2+4y^2+4xy-2x-4y+1$

(2) $(3x+2y)^3=(3x)^3+3\times(3x)^2\times2y+3\times3x\times(2y)^2+(2y)^3$

$=27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$

(3) $(2x-3)(4x^2+6x+9)=(2x-3)\{(2x)^2+2x\times3+3^2\}$

$=(2x)^3-3^3$

$=8x^3-27$

(4) $(x+2y+3z)(x^2+4y^2+9z^2-2xy-6yz-3zx)$

$=(x+2y+3z)\{x^2+(2y)^2+(3z)^2-x\times2y-2y\times3z-3z\times x\}$

$=x^3+(2y)^3+(3z)^3-3\times x\times2y\times3z$

$=x^3+8y^3+27z^3-18xyz$

(5) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

$=(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

$=\{(x^2)^2-(y^2)^2\}(x^4+y^4)$

$=(x^4-y^4)(x^4+y^4)$

$=(x^4)^2-(y^4)^2$

$=x^8-y^8$

02-2

답 5

|전략| 먼저 $(x+2y)^3$을 전개한 후 x^3y항이 나오는 항들만 전개하여 계수를 구한다.

$(x+2y)^3(x-y)$

$=\{x^3+3\times x^2\times2y+3\times x\times(2y)^2+(2y)^3\}(x-y)$

$=(x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3)(x-y)$

의 전개식에서 x^3y항은

$x^3\times(-y)+6x^2y\times x=5x^3y$

따라서 x^3y의 계수는 5이다.

필수 예제 03 공통부분이 있는 식의 전개 18쪽

03-1 답 (1) $x^4+2x^3-x^2-2x-3$ (2) $x^2-y^2-z^2+2yz$
(3) $x^4+2x^3-11x^2-12x$

|전략| (1) 공통부분을 X로 치환하여 전개한다.
(2), (3) 공통부분이 생기도록 식을 변형한 후 치환하여 전개한다.

(1) $(x^2+x+1)(x^2+x-3)$
$=(X+1)(X-3)$ ← $x^2+x=X$로 치환
$=X^2-2X-3$
$=(x^2+x)^2-2(x^2+x)-3$ ← $X=x^2+x$ 대입
$=x^4+2x^3+x^2-2x^2-2x-3=x^4+2x^3-x^2-2x-3$

(2) $(x+y-z)(x-y+z)$
$=\{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}$
$=(x+X)(x-X)$ ← $y-z=X$로 치환
$=x^2-X^2$
$=x^2-(y-z)^2$ ← $X=y-z$ 대입
$=x^2-(y^2-2yz+z^2)=x^2-y^2-z^2+2yz$

(3) $x(x+1)(x-3)(x+4)$
$=\{x(x+1)\}\{(x-3)(x+4)\}$
$=(x^2+x)(x^2+x-12)$
$=X(X-12)$ ← $x^2+x=X$로 치환
$=X^2-12X$
$=(x^2+x)^2-12(x^2+x)$ ← $X=x^2+x$ 대입
$=x^4+2x^3+x^2-12x^2-12x=x^4+2x^3-11x^2-12x$

필수 예제 04 곱셈 공식의 변형 (1) 19쪽

04-1 답 (1) 2 (2) 3 (3) 20

|전략| (1) 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값을 구한다.
(2), (3) 곱셈 공식의 변형을 이용하여 먼저 xy, ab의 값을 각각 구한다.

(1) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$에서
$40=4^3-3ab\times4$, $12ab=24$ $\quad\therefore ab=2$

(2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서
$-4=(-1)^3-3xy\times(-1)$, $3xy=-3$ $\quad\therefore xy=-1$
$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=(-1)^2-2\times(-1)=3$

(3) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$에서
$8=2^2+2ab$, $2ab=4$ $\quad\therefore ab=2$
$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)=2^3+3\times2\times2=20$

04-2 답 (1) $\sqrt{13}$ (2) 36

|전략| 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값을 구한다.

(1) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+4=3^2+4=13$
$\therefore x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{13}$ ($\because x>0$)

(2) $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=3^3+3\times3=36$

필수 예제 05 곱셈 공식의 변형 (2) 20쪽

05-1 답 (1) -6 (2) 32 (3) 52

|전략| 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값을 구한다.

(1) $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$에서
$16=2^2-2(xy+yz+zx)$ $\quad\therefore xy+yz+zx=-6$

(2) $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$
$=2\times\{16-(-6)\}+3\times(-4)=32$

(3) $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2$
$=(xy+yz+zx)^2-2(xy^2z+yz^2x+zx^2y)$
$=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$
$=(-6)^2-2\times(-4)\times2=52$

05-2 답 1

|전략| $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{ab+bc+ca}{abc}$이므로 곱셈 공식의 변형을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값을 구한다.

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서
$18=4^2-2(ab+bc+ca)$ $\quad\therefore ab+bc+ca=-1$
$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=\dfrac{-1}{-1}=1$

필수 예제 06 곱셈 공식을 이용한 수의 계산 21쪽

06-1 답 (1) 999902 (2) 99

|전략| (1), (2) 수 또는 식을 변형한 후 반복되는 수는 같은 문자로 생각한다.

(1) $101=100+1$, $10000=100^2$, $99=100-1$이므로 $100=a$로 놓으면
$101\times(10000-100+1)-99=(a+1)(a^2-a+1)-(a-1)$
$=(a^3+1)-(a-1)=a^3-a+2$
$=100^3-100+2=999902$

(2) $97=99-2$, $101=99+2$이므로 $99=a$로 놓으면
$\dfrac{99^3}{97\times101+4}=\dfrac{a^3}{(a-2)(a+2)+4}$
$=\dfrac{a^3}{a^2-4+4}=\dfrac{a^3}{a^2}=a=99$

06-2 답 (1) $\dfrac{255}{128}$ (2) 6305

|전략| (1), (2) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하기 위하여 주어진 식에 적당한 값을 곱한다.

(1) 주어진 식에 $2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=1$을 곱하면
$2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)$
$=2\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)$
$=2\left(1-\dfrac{1}{2^4}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)=2\left(1-\dfrac{1}{2^8}\right)$
$=2\times\dfrac{2^8-1}{2^8}=\dfrac{255}{128}$

(2) 주어진 식에 $3-2=1$을 곱하면

$$\begin{aligned}&(3-2)(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)\\&=(3^2-2^2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)\\&=(3^4-2^4)(3^4+2^4)=3^8-2^8\\&=6561-256=6305\end{aligned}$$

필수 예제 07 곱셈 공식의 도형에의 응용 22쪽

07-1 답 60

|전략| 직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b로 놓고 조건을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면 직사각형의 대각선의 길이가 13이므로

$a^2+b^2=13^2=169$

또, 직사각형의 둘레의 길이가 34이므로

$2(a+b)=34 \qquad \therefore a+b=17$

이때, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$169=17^2-2ab \qquad \therefore ab=60$

따라서 직사각형의 넓이는 60이다.

07-2 답 14

|전략| 직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b로 놓고 주어진 조건을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면 직사각형의 대각선의 길이는 사분원의 반지름의 길이와 같으므로

$a^2+b^2=6^2=36$

또, 직사각형의 둘레의 길이가 16이므로

$2(a+b)=16 \qquad \therefore a+b=8$

이때, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$36=8^2-2ab \qquad \therefore ab=14$

따라서 직사각형의 넓이는 14이다.

07-3 답 95

|전략| 두 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 a, b로 놓고 주어진 조건을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

두 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 a, b라 하면 한 정육면체의 모서리의 개수는 12이고, 두 정육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 60이므로

$12a+12b=60 \qquad \therefore a+b=5$

또, 한 정육면체의 면의 개수는 6이고, 두 정육면체의 겉넓이의 합이 126이므로

$6a^2+6b^2=126 \qquad \therefore a^2+b^2=21$

이때, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$21=5^2-2ab \qquad \therefore ab=2$

$$\begin{aligned}\therefore a^3+b^3&=(a+b)^3-3ab(a+b)\\&=5^3-3\times2\times5=95\end{aligned}$$

따라서 두 정육면체의 부피의 합은 95이다.

3 다항식의 나눗셈

개념 확인 23~24쪽

1 (1) 몫: $x+3$, 나머지: 2 (2) 몫: $2x+2$, 나머지: -1

2 $2x^3+3x^2+6x+1$

3 (1) 몫: x^2-3x-1, 나머지: 2 (2) 몫: $2x^2-2x+4$, 나머지: -9

(3) 몫: $2x^2+3$, 나머지: 4 (4) 몫: $\frac{2}{3}x^2-x+1$, 나머지: -2

1 (1)

$$\begin{array}{r}x+3\\x+1\,\overline{)\,x^2+4x+5}\\\underline{x^2+\ \ x}\\3x+5\\\underline{3x+3}\\2\end{array}$$

$\therefore$ 몫: $x+3$, 나머지: 2

(2)

$$\begin{array}{r}2x+2\\x-1\,\overline{)\,2x^2-3}\\\underline{2x^2-2x}\\2x-3\\\underline{2x-2}\\-1\end{array}$$

$\therefore$ 몫: $2x+2$, 나머지: -1

2 다항식 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫이 x^2+2x+4이고 나머지가 5이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=(2x-1)(x^2+2x+4)+5\\&=2x^3+4x^2+8x-x^2-2x-4+5=2x^3+3x^2+6x+1\end{aligned}$$

3 (1)

$$\begin{array}{r|rrrr}1&1&-4&2&3\\&&1&-3&-1\\\hline&1&-3&-1&\boxed{2}\end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2-3x-1, 나머지: 2

(2)

$$\begin{array}{r|rrrr}-2&2&2&0&-1\\&&-4&4&-8\\\hline&2&-2&4&\boxed{-9}\end{array}$$

$\therefore$ 몫: $2x^2-2x+4$, 나머지: -9

(3)

$$\begin{array}{r|rrrr}\frac{1}{2}&4&-2&6&1\\&&2&0&3\\\hline&4&0&6&\boxed{4}\end{array}$$

$$\begin{aligned}4x^3-2x^2+6x+1&=\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x^2+6)+4\\&=(2x-1)(2x^2+3)+4\end{aligned}$$

$\therefore$ 몫: $2x^2+3$, 나머지: 4

(4)

$$\begin{array}{r|rrrr}-2&2&1&-3&4\\&&-4&6&-6\\\hline&2&-3&3&\boxed{-2}\end{array}$$

$$\begin{aligned}2x^3+x^2-3x+4&=(x+2)(2x^2-3x+3)-2\\&=(3x+6)\left(\frac{2}{3}x^2-x+1\right)-2\end{aligned}$$

$\therefore$ 몫: $\frac{2}{3}x^2-x+1$, 나머지: -2

개념 드릴 25쪽

1 풀이 참조

2 (1) 몫: $2x^2-5x+9$, 나머지: -8 (2) 몫: x^2+2x-2, 나머지: 4

(3) 몫: $2x^2+x+3$, 나머지: 11 (4) 몫: $\frac{1}{2}x^2-x+1$, 나머지: -1

(5) 몫: x^2-x+2, 나머지: -3

1 (1)

$$\begin{array}{rl} & x^2 \qquad\quad +4 \\ x-2 & \overline{)\,x^3-2x^2+4x+1} \\ & \underline{\;x^3-2x^2\qquad\qquad} \\ & \qquad\qquad 4x+1 \\ & \qquad\qquad \underline{4x-8} \\ & \qquad\qquad\qquad 9 \end{array}$$

$Q=x^2+4$, $R=9$이므로

$x^3-2x^2+4x+1=(x-2)(x^2+4)+9$

(2)

$$\begin{array}{rl} & 4x^2-5x\;+\;5 \\ x+2 & \overline{)\,4x^3+3x^2-\;5x+\;2} \\ & \underline{\;4x^3+8x^2\qquad\qquad\quad} \\ & \qquad -5x^2-\;5x \\ & \qquad \underline{-5x^2-10x} \\ & \qquad\qquad\quad 5x+\;2 \\ & \qquad\qquad\quad \underline{5x+10} \\ & \qquad\qquad\qquad\; -8 \end{array}$$

$Q=4x^2-5x+5$, $R=-8$이므로

$4x^3+3x^2-5x+2=(x+2)(4x^2-5x+5)-8$

(3)

$$\begin{array}{rl} & 2x^2+2x\;+5 \\ x-1 & \overline{)\,2x^3\qquad\;+3x+4} \\ & \underline{\;2x^3-2x^2\qquad\qquad} \\ & \qquad 2x^2+3x \\ & \qquad \underline{2x^2-2x} \\ & \qquad\qquad 5x+4 \\ & \qquad\qquad \underline{5x-5} \\ & \qquad\qquad\qquad 9 \end{array}$$

$Q=2x^2+2x+5$, $R=9$이므로

$2x^3+3x+4=(x-1)(2x^2+2x+5)+9$

(4)

$$\begin{array}{rl} & 2x\;+1 \\ x^2+x+1 & \overline{)\,2x^3+3x^2+2x-1} \\ & \underline{\;2x^3+2x^2+2x\qquad} \\ & \qquad\quad x^2\qquad -1 \\ & \qquad\quad \underline{x^2+\;x+1} \\ & \qquad\qquad -\;x-2 \end{array}$$

$Q=2x+1$, $R=-x-2$이므로

$2x^3+3x^2+2x-1=(x^2+x+1)(2x+1)-x-2$

2 (1)

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ & & -2 & 5 & -9 \\ \hline & 2 & -5 & 9 & \boxed{-8} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $2x^2-5x+9$, 나머지: -8

(2)

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -6 & 8 \\ & & 2 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & -2 & \boxed{4} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2+2x-2, 나머지: 4

(3)

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -5 & 0 & 2 \\ & & 6 & 3 & 9 \\ \hline & 2 & 1 & 3 & \boxed{11} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $2x^2+x+3$, 나머지: 11

(4)

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ & & -2 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \boxed{-1} \end{array}$$

$x^3-2x+3=(x+2)(x^2-2x+2)-1$

$\qquad\qquad\;\; =(2x+4)\left(\frac{1}{2}x^2-x+1\right)-1$

$\therefore$ 몫: $\frac{1}{2}x^2-x+1$, 나머지: -1

(5)

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{3} & 3 & -4 & 7 & -5 \\ & & 1 & -1 & 2 \\ \hline & 3 & -3 & 6 & \boxed{-3} \end{array}$$

$3x^3-4x^2+7x-5=\left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2-3x+6)-3$

$\qquad\qquad\qquad\qquad =(3x-1)(x^2-x+2)-3$

$\therefore$ 몫: x^2-x+2, 나머지: -3

필수 예제 01 다항식의 나눗셈 26쪽

01-1 답 $a=-1$, $b=2$

|전략| $(x^4-2x^3+x^2-x+1)\div(x^2-x-1)$을 직접 계산한다.

$$\begin{array}{rl} & x^2-\;\;x+1 \\ x^2-x-1 & \overline{)\,x^4-2x^3+\;x^2-\;x+1} \\ & \underline{\;x^4-\;x^3-\;x^2\qquad\qquad} \\ & \quad -\;x^3+2x^2-\;x \\ & \quad \underline{-\;x^3+\;x^2+\;x} \\ & \qquad\qquad x^2-2x+1 \\ & \qquad\qquad \underline{x^2-\;x-1} \\ & \qquad\qquad\quad -\;x+2 \end{array}$$

따라서 몫이 x^2-x+1, 나머지가 $-x+2$이므로

$a=-1$, $b=2$

01-2 답 몫: $x-1$, 나머지: $-x$

|전략| 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 $A=BQ+R$임을 이용한다.

다항식 A를 $x+2$로 나누었을 때의 몫이 x^2-2x-1, 나머지가 5이므로

$A=(x+2)(x^2-2x-1)+5=x^3-5x+3$

다항식 $A=x^3-5x+3$을 x^2+x-3으로 나누면

$$\begin{array}{rl} & x\;-1 \\ x^2+x-3 & \overline{)\,x^3\qquad\;-5x+3} \\ & \underline{\;x^3+x^2-3x\qquad} \\ & \quad -x^2-2x+3 \\ & \quad \underline{-x^2-\;x+3} \\ & \qquad\qquad -\;x \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $x-1$, 나머지: $-x$

필수 예제 02 조립제법을 이용한 다항식의 나눗셈 27쪽

02-1 답 (1) 몫: x^2+2x-3, 나머지: -2 (2) 몫: x^2-x, 나머지: 4

|전략| 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구한다.

(1) 조립제법을 이용하여

$2x^3+5x^2-4x-5$를 $x+\frac{1}{2}$로

나누면 오른쪽과 같으므로

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 2 & 5 & -4 & -5 \\ & & -1 & -2 & 3 \\ \hline & 2 & 4 & -6 & \boxed{-2} \end{array}$$

$2x^3+5x^2-4x-5=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2+4x-6)-2$

$=(2x+1)(x^2+2x-3)-2$

$\therefore$ 몫: x^2+2x-3, 나머지: -2

(2) 조립제법을 이용하여

$3x^3-5x^2+2x+4$를 $x-\frac{2}{3}$로 나누면 오른쪽과 같으므로

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{2}{3} & 3 & -5 & 2 & 4 \\ & & 2 & -2 & 0 \\ \hline & 3 & -3 & 0 & \boxed{4} \end{array}$$

$3x^3-5x^2+2x+4=\left(x-\frac{2}{3}\right)(3x^2-3x)+4$

$=(3x-2)(x^2-x)+4$

$\therefore$ 몫: x^2-x, 나머지: 4

02-2 답 몫: $3x^2-x+1$, 나머지: -1

|전략| 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구한다.

조립제법을 이용하여 $9x^3+2x$를 $x+\frac{1}{3}$로 나누면 오른쪽과 같으므로

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{3} & 9 & 0 & 2 & 0 \\ & & -3 & 1 & -1 \\ \hline & 9 & -3 & 3 & \boxed{-1} \end{array}$$

$9x^3+2x$

$=\left(x+\frac{1}{3}\right)(9x^2-3x+3)-1$

$=(3x+1)(3x^2-x+1)-1$

$\therefore$ 몫: $3x^2-x+1$, 나머지: -1

개념 정리 28~29쪽

01 내림차순	**02** 오름차순	**03** 동류항	**04** 교환
05 결합	**06** ㉢	**07** ㉡	**08** ㉠
09 2	**10** 3, 3	**11** +, −	**12** −, +
13 내림차순	**14** 낮다	**15** 일차식	**16** 0
17 −1, 4			

06 $(x+1)(x^2-2)=x^3-2x+x^2-2=x^3+x^2-2x-2$

07 $(x-3)(x^2+x-5)=x^3+x^2-5x-3x^2-3x+15$

$=x^3-2x^2-8x+15$

08 $(x^2-3x+1)(x+4)=x^3+4x^2-3x^2-12x+x+4$

$=x^3+x^2-11x+4$

중단원 마무리 30~32쪽

01 ⑤	**02** ⑤	**03** ④	**04** -4
05 ④	**06** ①	**07** ②	**08** 5
09 ③	**10** ③	**11** ②	**12** 7
13 ③	**14** $2\sqrt{5}$	**15** ①	**16** ④
17 12	**18** ③	**19** ①	**20** 5
21 35	**22** 6	**23** $3\sqrt{5}$	**24** 11

LEVEL 1

01 $3(A+B)-2(C-2A)$

$=3A+3B-2C+4A$

$=7A+3B-2C$

$=7(-x^3+2x^2-x)+3(x^3-4x^2+1)-2(-3x^3-x+2)$

$=-7x^3+14x^2-7x+3x^3-12x^2+3+6x^3+2x-4$

$=2x^3+2x^2-5x-1$

02 $(x-2y-3)^2$

$=x^2+(-2y)^2+(-3)^2+2\times x\times(-2y)$

$+2\times(-2y)\times(-3)+2\times(-3)\times x$

$=x^2+4y^2-4xy-6x+12y+9$

따라서 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은

$a=1+4+(-4)+(-6)+12+9=16$,

xy의 계수는 $b=-4$이므로

$a+b=12$

참고 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은 $(x-2y-3)^2$에 $x=1$, $y=1$을 대입한 값과 같다.

03 ① $(4a-b)(4a+b)=(4a)^2-b^2=16a^2-b^2$

② $(2a+5)(3a-1)=6a^2+(-2+15)a-5=6a^2+13a-5$

③ $(2x-y)^3=(2x)^3-3\times(2x)^2\times y+3\times 2x\times y^2-y^3$

$=8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

④ $(a-2)(a^2+2a+4)=(a-2)(a^2+a\times 2+2^2)$

$=a^3-2^3=a^3-8$

⑤ $(x-y-2)^2=x^2+(-y)^2+(-2)^2+2\times x\times(-y)$

$+2\times(-y)\times(-2)+2\times(-2)\times x$

$=x^2+y^2-2xy-4x+4y+4$

04 $x(x-2)(x+2)(x+4)$

$=\{x(x+2)\}\{(x-2)(x+4)\}$

$=(x^2+2x)(x^2+2x-8)$

$=X(X-8)$ ← $x^2+2x=X$로 치환

$=X^2-8X$

$=(x^2+2x)^2-8(x^2+2x)$ ← $X=x^2+2x$ 대입

$=x^4+4x^3+4x^2-8x^2-16x$

$=x^4+4x^3-4x^2-16x$

따라서 x^2의 계수는 -4이다.

다른 풀이 치환하지 않고 직접 전개하면

$$\begin{aligned} x(x-2)(x+2)(x+4) &= \{(x-2)(x+2)\}\{x(x+4)\} \\ &= (x^2-4)(x^2+4x) \\ &= x^4+4x^3-4x^2-16x \end{aligned}$$

따라서 x^2의 계수는 -4이다.

05
$$\begin{aligned} (x+1)^2+(y+1)^2 &= x^2+2x+1+y^2+2y+1 \\ &= (x^2+y^2)+2(x+y)+2 \\ &= \{(x+y)^2-2xy\}+2(x+y)+2 \\ &= \{2^2-2\times(-1)\}+2\times 2+2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

06
$$\begin{aligned} (a-1)(a+1)(a^4+a^2+1) &= (a^2-1)(a^4+a^2+1) \\ &= (a^2)^3-1^3 \\ &= a^6-1 \end{aligned}$$

이때, $a^3=9$이므로

$a^6-1=(a^3)^2-1=9^2-1=80$

07 직육면체의 가로의 길이와 세로의 길이, 높이를 각각 x, y, z라 하면 직육면체의 겉넓이가 130이므로

$2(xy+yz+zx)=130$

삼각형 BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합이 190이므로

$(\sqrt{x^2+y^2})^2+(\sqrt{y^2+z^2})^2+(\sqrt{z^2+x^2})^2=190$

$(x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(z^2+x^2)=190$

$\therefore x^2+y^2+z^2=95$

이때, $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에서

$(x+y+z)^2=95+130=225$

$\therefore x+y+z=15$ ($\because x+y+z>0$)

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$4(x+y+z)=60$

Lecture

세 모서리의 길이가 a, b, c인 직육면체에서

(1) 모서리 길이의 총합 ➡ $4(a+b+c)$

(2) 대각선의 길이 ➡ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

(3) 겉넓이 ➡ $2(ab+bc+ca)$

(4) 부피 ➡ abc

08

$$\begin{array}{r|l} & x\ -1 \\ \hline x^3-2 & x^4-x^3+2x^2-3x+\quad a \\ & x^4 \qquad\qquad\quad -2x \\ \hline & \quad -x^3+2x^2-\ x+\quad a \\ & \quad -x^3 \qquad\qquad\quad +\quad 2 \\ \hline & \qquad\qquad 2x^2-\ x+a-2 \end{array}$$

따라서 주어진 다항식을 x^3-2로 나누었을 때의 나머지가 $2x^2-x+a-2$이므로

$-1=b$, $a-2=4$ $\qquad\therefore a=6$, $b=-1$

$\therefore a+b=5$

LEVEL 2

09 $A+B=-2x^2+xy+7y^2$ ······ ㉠

$A-B=4x^2-3xy-y^2$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2A=2x^2-2xy+6y^2 \qquad \therefore A=x^2-xy+3y^2$

이것을 ㉠에 대입하면

$(x^2-xy+3y^2)+B=-2x^2+xy+7y^2$

$$\begin{aligned} \therefore B &= -2x^2+xy+7y^2-(x^2-xy+3y^2) \\ &= -3x^2+2xy+4y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2A-B &= 2(x^2-xy+3y^2)-(-3x^2+2xy+4y^2) \\ &= 2x^2-2xy+6y^2+3x^2-2xy-4y^2 \\ &= 5x^2-4xy+2y^2 \end{aligned}$$

10 $(x^3+ax^2+1)(x^2-x+b)$의 전개식에서

x^4항은 $x^3\times(-x)+ax^2\times x^2=(a-1)x^4$

x^2항은 $ax^2\times b+1\times x^2=(ab+1)x^2$

x^4의 계수와 x^2의 계수가 모두 -2이므로

$a-1=-2$, $ab+1=-2$

$a-1=-2$에서 $a=-1$

$a=-1$을 $ab+1=-2$에 대입하면

$-b+1=-2 \qquad \therefore b=3$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+3^2=10$

11 $\langle x^2+3x+1,\ x-1\rangle$

$=(x-1)^3+2(x^2+3x+1)(x-1)$

$=x^3-3x^2+3x-1+2(x^3+2x^2-2x-1)$

$=x^3-3x^2+3x-1+2x^3+4x^2-4x-2$

$=3x^3+x^2-x-3$

따라서 x의 계수는 -1이다.

다른 풀이 다항식 $<x^2+3x+1,\ x-1>$의 전개식에서 x의 계수는 x^2과 관계없이 결정된다.

즉, $<x^2+3x+1,\ x-1>$의 전개식에서의 x의 계수와 $<3x+1,\ x-1>$의 전개식에서의 x의 계수는 서로 같으므로

$<3x+1,\ x-1>$

$=(x-1)^3+2(3x+1)(x-1)$

$=x^3-3x^2+3x-1+2(3x^2-2x-1)$

$=x^3+3x^2-x-3$

따라서 주어진 식의 전개식에서 x의 계수는 -1이다.

12 $(a+b-1)\{(a+b)^2+a+b+1\}=6$에서

$a+b=X$라 하면 $(X-1)(X^2+X+1)=6$

$X^3-1=6 \qquad \therefore X^3=7$

따라서 $X=a+b$이므로 $(a+b)^3=7$

13 $x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$에서 $x+y=4$, $xy=1$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2} &= \frac{x^3+y^3}{x^2y^2}=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{(xy)^2} \\ &= \frac{4^3-3\times1\times4}{1^2}=52 \end{aligned}$$

14 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=3$이므로

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=3+2=5$

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}\ (\because x>0)$

$$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=(\sqrt{5})^3-3\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

15 $a^2+b^2+4c^2=(a+b+2c)^2-2(ab+2bc+2ca)$에서

$25=1^2-2(ab+2bc+2ca)$

$\therefore ab+2bc+2ca=-12$

이때, $a+b+2c=1$에서 $a+b=1-2c$, $b+2c=1-a$,

$2c+a=1-b$이므로

$(a+b)(b+2c)(2c+a)$

$=(1-2c)(1-a)(1-b)$

$=1-(a+b+2c)+(ab+2bc+2ca)-2abc$

$=1-1-12-2\times3=-18$

16 $(a+b-c)(a-b+c)=c(2b+c)+(b+a)(b-a)$에서

$\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}=2bc+c^2+b^2-a^2$

$a^2-(b-c)^2=-a^2+b^2+c^2+2bc$

$a^2-b^2+2bc-c^2=-a^2+b^2+c^2+2bc$

$2a^2=2b^2+2c^2 \qquad \therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 이 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

Lecture

변의 길이에 따른 삼각형의 종류

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c일 때

(1) $a=b=c$ ➡ 정삼각형

(2) $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ➡ 이등변삼각형

(3) $c^2=a^2+b^2$ ➡ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

17 $$(5+1)(5^2+1)(5^4+1)=\frac{1}{4}(5-1)(5+1)(5^2+1)(5^4+1)$$
$$=\frac{1}{4}(5^2-1)(5^2+1)(5^4+1)$$
$$=\frac{1}{4}(5^4-1)(5^4+1)$$
$$=\frac{1}{4}(5^8-1)=\frac{5^8-1}{4}$$

따라서 $a=4$, $b=8$이므로

$a+b=12$

참고 주어진 식에 적당한 값을 곱하여 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하는 경우에는 등식이 성립하도록 곱한 값만큼 반드시 나누어야 한다.

18 $P(x)+5x=3x^3+x+11+5x=3x^3+6x+11$이므로

$P(x)+5x=3x^3+6x+11$을 다항식 $Q(x)=x^2-x+1$로 직접 나누면

$$\begin{array}{r|l} & 3x+3 \\ \hline x^2-x+1 & 3x^3+6x+11 \\ & 3x^3-3x^2+3x \\ \hline & 3x^2+3x+11 \\ & 3x^2-3x+3 \\ \hline & 6x+8 \end{array}$$

따라서 $P(x)+5x$를 $Q(x)$로 나누었을 때의 나머지는 $6x+8$이므로 $a=8$

19 다항식 $f(x)$를 $x+\dfrac{2}{3}$로 나누었을 때의 몫과 나머지가 각각 $Q(x)$, R이므로

$$f(x)=\left(x+\frac{2}{3}\right)Q(x)+R$$
$$=\frac{1}{3}(3x+2)Q(x)+R$$
$$=(3x+2)\frac{1}{3}Q(x)+R$$

따라서 $f(x)$를 $3x+2$로 나누었을 때의 몫은 $\dfrac{1}{3}Q(x)$, 나머지는 R이다.

Lecture

(1) 다항식 $f(x)$를 $x+\dfrac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

➡ 다항식 $f(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫은 $\dfrac{1}{a}Q(x)$, 나머지는 R이다.

(2) 다항식 $f(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

➡ 다항식 $f(x)$를 $x+\dfrac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫은 $aQ(x)$, 나머지는 R이다.

20 조립제법을 이용하여 다항식 $2x^3+ax^2+x+b$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 과정이 오른쪽과 같으므로 $c=2$

$$\begin{array}{c|cccc} c & 2 & a & 1 & b \\ & & 4 & d & 10 \\ \hline & 2 & 2 & e & \boxed{6} \end{array}$$

$a+4=2$에서 $a=-2$

$d=2c=2\times2=4$

$e=1+d=1+4=5$

$b+10=6$에서 $b=-4$

$\therefore a+b+c+d+e=-2+(-4)+2+4+5=5$

서술형

21 $(x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})^2$

$=(x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})(x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})$

이 식의 전개식에서 x^6항은

$x\times5x^5+2x^2\times4x^4+3x^3\times3x^3+4x^4\times2x^2+5x^5\times x$

$=35x^6$ … ❶

따라서 x^6의 계수는 35이다. … ❷

채점 기준	비율
❶ 주어진 다항식의 전개식에서 x^6항을 구할 수 있다.	80 %
❷ x^6의 계수를 구할 수 있다.	20 %

22 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$12=2^2-2(ab+bc+ca)$ $\quad\therefore ab+bc+ca=-4$ ⋯ ❶

이때, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=2$이므로

$\frac{-4}{abc}=2$ $\quad\therefore abc=-2$ ⋯ ❷

$$\therefore \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$
$$=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-\frac{2(a+b+c)}{abc}$$
$$=2^2-\frac{2\times 2}{-2}=6$$ ⋯ ❸

채점 기준	비율
❶ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ abc의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

23 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$라 하면 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$이므로

$a^2+b^2=25$ ⋯ ❶

또, 삼각형 ABC의 넓이가 5이므로

$\frac{1}{2}ab=5$ $\quad\therefore ab=10$ ⋯ ❷

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$\quad\quad=25+2\times 10=45$

$\therefore a+b=3\sqrt{5}$ ($\because a>0, b>0$)

따라서 $\overline{AC}+\overline{BC}$의 값은 $3\sqrt{5}$이다. ⋯ ❸

채점 기준	비율
❶ $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\overline{AC}\times\overline{BC}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\overline{AC}+\overline{BC}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

24 $1.03^3=(1+0.03)^3$ ⋯ ❶

$\quad=1^3+3\times 1^2\times 0.03+3\times 1\times 0.03^2+0.03^3$

$\quad=1+0.09+0.0027+0.000027$

$\quad=1.092727$ ⋯ ❷

따라서 1.03^3의 소수점 아래 첫째, 둘째, 셋째 자리의 숫자는 각각 0, 9, 2이므로 그 합은 11이다. ⋯ ❸

채점 기준	비율
❶ $1.03^3=(1+0.03)^3$으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 곱셈 공식을 이용하여 $(1+0.03)^3$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 1.03^3의 소수점 아래 첫째, 둘째, 셋째 자리의 숫자의 합을 구할 수 있다.	30 %

2 항등식과 나머지정리

1 항등식

개념 확인 34~35쪽

1 ㄴ, ㄹ

2 (1) $a=3$, $b=2$ (2) $a=2$, $b=-5$

3 (1) ① $a=3$, $b=6$ ② $a=3$, $b=6$

(2) ① $a=5$, $b=-3$ ② $a=5$, $b=-3$

(3) ① $a=1$, $b=6$ ② $a=1$, $b=6$

(4) ① $a=-3$, $b=-4$ ② $a=-3$, $b=-4$

3 (1) ① 계수비교법

주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$ax+a+3=3x+b$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a=3$, $a+3=b$

$\therefore a=3$, $b=6$

② 수치대입법

등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$3=-3+b$ $\quad\therefore b=6$

등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$a+3=b$ $\quad\therefore a=3$

(2) ① 계수비교법

주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$(a+b)x-a-2b=2x+1$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a+b=2$, $-a-2b=1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=5$, $b=-3$

② 수치대입법

등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$-b=3$ $\quad\therefore b=-3$

등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$a=5$

(3) ① 계수비교법

주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면

$x^2+4x+a=x^2+(b-2)x+1$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$4=b-2$, $a=1$

$\therefore a=1$, $b=6$

② 수치대입법

등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$a=1$

등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$5+a=b$ $\quad\therefore b=6$

(4) ① 계수비교법

주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면

$x^3+3x^2-6=x^3+3x^2+(a+3)x+a+b+1$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$0=a+3,\ -6=a+b+1$

$\therefore\ a=-3,\ b=-4$

② 수치대입법

등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-4=b$

등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-6=a+b+1\qquad \therefore\ a=-3$

개념 드릴 36쪽

1 (1) × (2) ○ (3) ○ (4) ×

2 (1) $a=-2,\ b=-3$ (2) $a=-1,\ b=2,\ c=0$

(3) $a=2,\ b=4$ (4) $a=5,\ b=2,\ c=2$

3 (1) ① $a=2,\ b=3$ ② $a=2,\ b=3$

(2) ① $a=1,\ b=1$ ② $a=1,\ b=1$

(3) ① $a=1,\ b=2,\ c=5$ ② $a=1,\ b=2,\ c=5$

1 (1) 주어진 등식은 $x=-3$일 때에만 성립하므로 항등식이 아니다.

(2) 주어진 등식은 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하므로 항등식이다.

(3) 주어진 등식의 좌변을 전개하면 $x^2+2x+1=x^2+2x+1$

이 등식은 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하므로 항등식이다.

(4) 주어진 등식의 우변을 전개하면 $x^2+x+2=x^2-x-2$

이 식을 정리하면 $2x=-4$

이 등식은 $x=-2$일 때에만 성립하므로 항등식이 아니다.

2 (1) $(a+2)x+b+3=0$에서

$a+2=0,\ b+3=0\qquad \therefore\ a=-2,\ b=-3$

(2) $(a+1)x^2+(b-2)x+c=0$에서

$a+1=0,\ b-2=0,\ c=0\qquad \therefore\ a=-1,\ b=2,\ c=0$

(3) $3ax+2b=6x+8$에서

$3a=6,\ 2b=8\qquad \therefore\ a=2,\ b=4$

(4) $(a-1)x^2+(b-3)x+4c=4x^2-x+8$에서

$a-1=4,\ b-3=-1,\ 4c=8$

$\therefore\ a=5,\ b=2,\ c=2$

3 (1) ① 계수비교법

주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$ax^2+(-2a+b)x+a-2b=2x^2-x-4$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a=2,\ -2a+b=-1,\ a-2b=-4$

$\therefore\ a=2,\ b=3$

② 수치대입법

등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$-b=-3\qquad \therefore\ b=3$

등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$a=2$

(2) ① 계수비교법

주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$ax^2+(a+b)x+2b=x^2+2x+2$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a=1,\ a+b=2,\ 2b=2$

$\therefore\ a=1,\ b=1$

② 수치대입법

등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$2b=2\qquad \therefore\ b=1$

등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$2a=2\qquad \therefore\ a=1$

(3) ① 계수비교법

주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$ax^2+(-2a+b)x-2b+c=x^2+1$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a=1,\ -2a+b=0,\ -2b+c=1$

$\therefore\ a=1,\ b=2,\ c=5$

② 수치대입법

등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $-2b+c=1$

등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $-a-b+c=2$

등식의 양변에 $x=2$를 대입하면 $c=5$

$\therefore\ a=1,\ b=2,\ c=5$

필수 예제 01 ~의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식 37쪽

01-1 답 $x=2,\ y=-1$

| 전략 | 주어진 등식을 ($\quad$)$k+$($\quad$)$=0$ 꼴로 정리한다.

$(2k-1)x+(k+3)y=3k-5$에서

$(2k-1)x+(k+3)y-3k+5=0$의 좌변을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y-3)k+(-x+3y+5)=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$2x+y-3=0,\ -x+3y+5=0$

$\therefore\ x=2,\ y=-1$

01-2 답 $a=3,\ b=1,\ c=-1$

| 전략 | 주어진 등식의 좌변을 ($\quad$)$x+$($\quad$)$y+$($\quad$) 꼴로 정리한다.

$a(2x+y)+b(x-2y)-1=7x+y+c$의 좌변을 $x,\ y$에 대하여 정리하면

$(2a+b)x+(a-2b)y-1=7x+y+c$

이 등식이 $x,\ y$에 대한 항등식이므로

$2a+b=7,\ a-2b=1,\ -1=c$

$\therefore\ a=3,\ b=1,\ c=-1$

필수 예제 02 항등식에서 미정계수 구하기 38쪽

02-1 답 (1) $a=3,\ b=1,\ c=-2$ (2) $a=1,\ b=1,\ c=2$
(3) $a=1,\ b=-2,\ c=2$

|전략| 전개하기 쉬우면 계수비교법을, 어려우면 수치대입법을 이용한다.

(1) 주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면
$3x^2-5x=ax^2-(2a-b)x+a-b+c$
양변의 동류항의 계수를 비교하면
$3=a,\ 5=2a-b,\ 0=a-b+c$
$\therefore\ a=3,\ b=1,\ c=-2$

(2) 주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면
$x^3+x-2=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$
양변의 동류항의 계수를 비교하면
$1=a,\ 0=b-a,\ 1=c-b,\ 2=c$
$\therefore\ a=1,\ b=1,\ c=2$

(3) 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$4=-2b \qquad \therefore\ b=-2$
등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$6=3c \qquad \therefore\ c=2$
등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면
$6=6a \qquad \therefore\ a=1$

참고 계수비교법을 이용할 수도 있지만 우변을 전개하는 것이 복잡하므로 수치대입법을 이용하는 것이 편리하다.

필수 예제 03 다항식의 나눗셈과 항등식 39쪽

03-1 답 $a=3,\ b=6$

|전략| 삼차식을 이차식으로 나누었으므로 몫을 일차식으로 놓는다.

두 식 x^3+ax^2+bx-2, x^2+2x+3의 최고차항의 계수가 모두 1이므로 x^3+ax^2+bx-2를 x^2+2x+3으로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)로 놓자.
이때, 나머지가 $x-5$이므로
$x^3+ax^2+bx-2=(x^2+2x+3)(x+c)+x-5$
우변을 전개하여 정리하면
$x^3+ax^2+bx-2=x^3+(c+2)x^2+(2c+4)x+3c-5$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면
$a=c+2,\ b=2c+4,\ -2=3c-5$
$c=1$이므로 $a=3,\ b=6$

Lecture

다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면
$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$ (단, ($R(x)$의 차수)<($g(x)$의 차수))
이때, $f(x)$가 n차, $g(x)$가 m차이면 $Q(x)$는 $(n-m)$차이고, $R(x)$는 $(m-1)$차 이하의 식이다.
예를 들어 $f(x)$가 4차, $g(x)$가 2차이면 $Q(x)=ax^2+bx+c$, $R(x)=px+q$로 놓고 항등식의 성질을 이용하여 $Q(x)$, $R(x)$를 구한다.

03-2 답 $a=1,\ b=-1$

|전략| x^3의 계수가 2인 삼차식을 x^2의 계수가 1인 이차식으로 나누었으므로 몫을 x의 계수가 2인 일차식으로 놓는다. 한편, 나누어떨어진다는 것은 나머지가 0임을 뜻한다.

$2x^3+x^2+ax+b$의 최고차항의 계수가 2이고 x^2+x+1의 최고차항의 계수가 1이므로 $2x^3+x^2+ax+b$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫을 $2x+c$ (c는 상수)로 놓자.
이때, 나머지가 0이므로
$2x^3+x^2+ax+b=(x^2+x+1)(2x+c)$
우변을 전개하여 정리하면
$2x^3+x^2+ax+b=2x^3+(c+2)x^2+(c+2)x+c$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면
$1=c+2,\ a=c+2,\ b=c$
$c=-1$이므로 $a=1,\ b=-1$

다른 풀이 직접 나눗셈을 하여 나머지가 0인 것을 이용하자.

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & 2x-1 \\ \cline{2-2}
x^2+x+1 \big) & 2x^3+x^2+ax+b \\
 & 2x^3+2x^2+2x \\ \cline{2-2}
 & -x^2+(a-2)x+b \\
 & -x^2-x-1 \\ \cline{2-2}
 & (a-1)x+b+1
\end{array}
$$

즉, $(a-1)x+b+1=0$이고 이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a-1=0,\ b+1=0 \qquad \therefore\ a=1,\ b=-1$

2 나머지정리와 인수정리

개념 확인 40~41쪽

1 (1) 2 (2) $-\frac{38}{9}$
2 (1) -5 (2) 1
3 (1) ○ (2) × (3) ○
4 (1) 9 (2) 1

1 (1) $f(2)=4+2-4=2$
(2) $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}-\frac{1}{3}-4=-\frac{38}{9}$

2 (1) $f(-1)=-2-3-1+1=-5$
(2) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+1=1$

3 (1) $f(-1)=-1-8+7+2=0$
즉, $x+1$은 $f(x)$의 인수이다.
(2) $f(4)=-64+80-20=-4\neq 0$
즉, $x-4$는 $f(x)$의 인수가 아니다.
(3) $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}+\frac{4}{3}-4=0$
즉, $3x-2$는 $f(x)$의 인수이다.

4 (1) $f(1)=0$에서
$1+2-a+6=0 \qquad \therefore\ a=9$
(2) $f(-3)=0$에서
$-27+18+3a+6=0 \qquad \therefore\ a=1$

개념 드릴 42쪽

1 (1) 3 (2) -25 (3) $-\frac{15}{8}$

2 (1) -10 (2) 11 (3) $\frac{1}{2}$

3 (1) 1 (2) 3 (3) -1

4 (1) 1 (2) -4 (3) -1

1 (1) $f(1)=1+1+2-1=3$

(2) $f(-3)=-27+9-6-1=-25$

(3) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1-1=-\frac{15}{8}$

2 (1) $f(-1)=-2-3-4-1=-10$

(2) $f(2)=16-12+8-1=11$

(3) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+2-1=\frac{1}{2}$

3 (1) $f(-1)=1$에서 $-1+a+2-1=1$ $\therefore a=1$

(2) $f(1)=3$에서 $2-a+4=3$ $\therefore a=3$

(3) $f\left(-\frac{1}{3}\right)=2$에서 $\frac{1}{9}+\frac{a}{9}-3+5=2$ $\therefore a=-1$

4 (1) $f(-1)=0$에서 $-2-a+3=0$ $\therefore a=1$

(2) $f(3)=0$에서 $27+9a+9=0$ $\therefore a=-4$

(3) $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$에서 $\frac{1}{2}-\frac{a}{2}-1=0$ $\therefore a=-1$

필수 예제 01 나머지정리 – 일차식으로 나누는 경우 43쪽

01-1 답 $a=10,\ b=1$

|전략| 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$이다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx-2$라 하면 나머지정리에 의하여

$f(1)=10,\ f(-1)=6$

$f(1)=10$에서

$1+a+b-2=10$ $\therefore a+b=11$ …… ㉠

$f(-1)=6$에서

$-1+a-b-2=6$ $\therefore a-b=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=10,\ b=1$

01-2 답 -6

|전략| 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$이다.

$f(x)=x^4-3x^2+ax+4$라 하면 나머지정리에 의하여

$f(1)=1-3+a+4=a+2$

$f(2)=16-12+2a+4=2a+8$

$f(1)=f(2)$이므로 $a+2=2a+8$

$\therefore a=-6$

01-3 답 -10

|전략| 나머지정리에 의하여 $f\left(-\frac{2}{3}\right)=5$임을 이용하여 먼저 상수 a의 값을 구한다.

$f(x)=-9x^3+ax+1$에서 나머지정리에 의하여 $f\left(-\frac{2}{3}\right)=5$이므로

$\frac{8}{3}-\frac{2}{3}a+1=5,\ \frac{2}{3}a=-\frac{4}{3}$ $\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=-9x^3-2x+1$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(1)=-9-2+1=-10$

필수 예제 02 나머지정리 – 이차식으로 나누는 경우 44쪽

02-1 답 $-x+4$

|전략| 다항식 $f(x)$를 이차식으로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓는다.

$f(x)$를 $(x+4)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x+4)(x-2)Q(x)+ax+b$

이때, 나머지정리에 의하여

$f(-4)=8,\ f(2)=2$

$f(-4)=8$에서 $-4a+b=8$ …… ㉠

$f(2)=2$에서 $2a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=4$

따라서 $f(x)$를 $(x+4)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지는

$-x+4$이다.

02-2 답 (1) $2x+3$ (2) 21

|전략| (1) 다항식 $f(x)$를 이차식으로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓는다.

(2) 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$이다.

(1) $f(x)$를 x^2-x-6으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이므로 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-x-6)Q(x)+ax+b$

$=(x+2)(x-3)Q(x)+ax+b$

이때, 나머지정리에 의하여

$f(-2)=-1,\ f(3)=9$

$f(-2)=-1$에서 $-2a+b=-1$ …… ㉠

$f(3)=9$에서 $3a+b=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=3$

$\therefore R(x)=2x+3$

(2) $Q(x)=3x-2$이고 $R(x)=2x+3$이므로

$f(x)=(x^2-x-6)(3x-2)+2x+3$

따라서 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-1)=(1+1-6)\times(-3-2)-2+3=21$

필수 예제 03 나머지정리 – $f(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누는 경우

45쪽

03-1 답 5

|전략| $f(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a\alpha+b)$이다.

$f(2x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(2\times1)=f(2)$

$f(x)$를 $2x^2-3x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $3x-1$이므로

$f(x)=(2x^2-3x-2)Q(x)+3x-1$

$\quad=(2x+1)(x-2)Q(x)+3x-1$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=3\times2-1=5$

따라서 $f(2x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 5이다.

다른 풀이 ㉠의 양변에 x 대신 $2x$를 대입하면

$f(2x)=(4x+1)(2x-2)Q(2x)+6x-1$

$\quad=2(4x+1)(x-1)Q(2x)+6(x-1)+5$

$\quad=(x-1)\{2(4x+1)Q(2x)+6\}+5$

따라서 $f(2x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 5이다.

03-2 답 20

|전략| $f(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a\alpha+b)$이다.

$f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 4이므로 나머지정리에 의하여

$f(3)=4$ …… ㉠

한편, $xf(x-2)$를 $x-5$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$xf(x-2)=(x-5)Q(x)+R$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=5$를 대입하면

$R=5f(3)=5\times4=20$ ($\because$ ㉠)

따라서 $xf(x-2)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는 20이다.

필수 예제 04 인수정리 – 일차식으로 나누는 경우

46쪽

04-1 답 8

|전략| $f(x)$가 $x-\alpha$를 인수로 가지면 $f(\alpha)=0$이다.

$f(x)=x^3-x^2-ax+6$이라 하면 $f(x)$가 $x-3$을 인수로 가지므로 인수정리에 의하여

$f(3)=0$

$27-9-3a+6=0 \qquad \therefore a=8$

04-2 답 4

|전략| $f(x)$가 $x-\alpha$를 인수로 가지면 $f(\alpha)=0$이다.

$f(x)=x^3+ax+2$가 $x+2$를 인수로 가지므로 인수정리에 의하여

$f(-2)=0$

$-8-2a+2=0 \qquad \therefore a=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x+2$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2)=8-6+2=4$

04-3 답 $a=0$, $b=4$

|전략| $f(x)=x^3+ax^2-6x+b$로 놓고 인수정리와 나머지정리에 의하여 $f(2)=0$, $f(1)=-1$임을 이용한다.

$f(x)=x^3+ax^2-6x+b$라 하면 인수정리와 나머지정리에 의하여

$f(2)=0$, $f(1)=-1$

$f(2)=0$에서

$8+4a-12+b=0 \qquad \therefore 4a+b=4$ …… ㉠

$f(1)=-1$에서

$1+a-6+b=-1 \qquad \therefore a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=4$

필수 예제 05 인수정리 – 이차식으로 나누는 경우

47쪽

05-1 답 $a=-7$, $b=6$

|전략| $f(x)$가 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누어떨어지면 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이다.

$f(x)=x^3+ax+b$라 하면 $f(x)$가 $(x-2)(x+3)$으로 나누어떨어지므로 $f(x)$는 $x-2$, $x+3$으로 각각 나누어떨어진다.

따라서 인수정리에 의하여

$f(2)=0$, $f(-3)=0$

$f(2)=0$에서

$8+2a+b=0 \qquad \therefore 2a+b=-8$ …… ㉠

$f(-3)=0$에서

$-27-3a+b=0 \qquad \therefore 3a-b=-27$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-7$, $b=6$

다른 풀이 다항식 x^3+ax+b가 $(x-2)(x+3)$으로 나누어떨어지므로 x^3+ax+b를 $(x-2)(x+3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^3+ax+b=(x-2)(x+3)Q(x)$

오른쪽 조립제법에 의하여

$2a+b+8=0$, $a+7=0$

$\therefore a=-7$, $b=6$

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & 0 & a & b \\
 & & 2 & 4 & 2a+8 \\
\hline
-3 & 1 & 2 & a+4 & \boxed{2a+b+8} \\
 & & -3 & 3 & \\
\hline
 & 1 & -1 & \boxed{a+7} &
\end{array}$$

05-2 답 $a=-9$, $b=12$

|전략| $f(x)$가 $(x-\alpha)(x-\beta)$를 인수로 가지면 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이다.

$f(x)=x^4+ax^2+bx-4$라 하면 $f(x)$는 x^2-3x+2, 즉 $(x-1)(x-2)$를 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)$는 $x-1$과 $x-2$로 각각 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(1)=0$, $f(2)=0$

$f(1)=0$에서

$1+a+b-4=0 \qquad \therefore a+b=3$ …… ㉠

$f(2)=0$에서

$16+4a+2b-4=0 \qquad \therefore 2a+b=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-9$, $b=12$

다른 풀이 다항식 x^4+ax^2+bx-4가 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지므로 x^4+ax^2+bx-4를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^4+ax^2+bx-4=(x-1)(x-2)Q(x)$

오른쪽 조립제법에 의하여

$a+b-3=0$

$3a+b+15=0$

$\therefore a=-9,\ b=12$

1	1	0	a	b	-4
		1	1	$a+1$	$a+b+1$
2	1	1	$a+1$	$a+b+1$	$\boxed{a+b-3}$
		2	6	$2a+14$	
	1	3	$a+7$	$\boxed{3a+b+15}$	

개념 정리

48~49쪽

01 항등식	**02** 방정식	**03** 0	**04** b'
05 0	**06** c'	**07** 1, -5	**08** 1, -3
09 $f(\alpha)$	**10** $ax+b$	**11** ㄷ	**12** ㄱ
13 ㄴ	**14** 2	**15** 0	**16** -1, 2

[11~13] 다항식 $f(x)=2x^3+x^2-x+3$에 대하여

11 $f(1)=2+1-1+3=5$

12 $f(-2)=-16+4+2+3=-7$

13 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+3=3$

중단원 마무리

50~52쪽

01 ①	**02** ②	**03** 33	**04** ⑤
05 ⑤	**06** ④	**07** ①	**08** 12
09 ①	**10** ⑤	**11** ③	**12** ①
13 2	**14** 14	**15** 3	**16** ④
17 36	**18** ①	**19** ②	**20** ⑤
21 11	**22** 9	**23** $-x+7$	**24** 5

LEVEL 1

01 $(k+3)x+2(k+1)y+5k-1=0$의 좌변을 k에 대하여 정리하면

$(x+2y+5)k+(3x+2y-1)=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x+2y+5=0,\ 3x+2y-1=0$

두 식을 연립하여 풀면

$x=3,\ y=-4$

$\therefore x+y=-1$

02 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$(x-a)(x^2+4x+b)=x^3+(4-a)x^2+(b-4a)x-ab$

이므로

$x^3+(4-a)x^2+(b-4a)x-ab=x^3+cx-32$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$4-a=0,\ b-4a=c,\ -ab=-32$

따라서 $a=4,\ b=8,\ c=-8$이므로

$a+b+c=4$

03 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-1=a_0$

등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$32=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=32-a_0$

$=32-(-1)=33$

참고 **항등식에서 계수의 합 구하기**

등식 $(x+a)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$에서

① $x=0$을 대입하면 $a^n=a_0$

② $x=1$을 대입하면 $(1+a)^n=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n$

04 다항식 $f(x)$를 $2x^2-ax+1$로 나누었을 때의 몫이 $x+4$, 나머지가 $8x+3$이므로

$f(x)=(2x^2-ax+1)(x+4)+8x+3$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=(3-a)\times5+11$

이때, $f(1)=1$이므로 $-5a+26=1$

$-5a=-25 \qquad \therefore a=5$

05 등식에서 좌변이 삼차식이고 x^3의 계수가 1이므로 우변도 삼차식이고 x^3의 계수가 1이다.

따라서 $f(x)$는 x의 계수가 1인 일차식이므로

$f(x)=x+c$ (c는 상수)라 하면 주어진 등식은

$x^3+ax^2+b=(x^2+x-1)(x+c)+4x$

이 등식의 우변을 전개하여 정리하면

$(x^2+x-1)(x+c)+4x=x^3+(c+1)x^2+(c+3)x-c$

즉, 등식 $x^3+ax^2+b=x^3+(c+1)x^2+(c+3)x-c$가 x에 대한 항등식이므로

$a=c+1,\ c+3=0,\ b=-c \qquad \therefore a=-2,\ b=3,\ c=-3$

$\therefore b-a=5$

06 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 5이므로

$f(3)=5$

또, $g(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 -1이므로

$g(3)=-1$

따라서 $2f(x)+g(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 $2f(3)+g(3)$이므로

$2f(3)+g(3)=2\times5+(-1)=9$

07 다항식 x^3+ax^2-5x+3을 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -2이므로

$x^3+ax^2-5x+3=(x-1)Q(x)-2$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a-5+3=-2 \quad \therefore a=-1$

따라서 ㉠은 $x^3-x^2-5x+3=(x-1)Q(x)-2$ …… ㉡

이때, $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-1)$이므로 ㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1-1+5+3=-2Q(-1)-2$

$2Q(-1)=-8 \quad \therefore Q(-1)=-4$

따라서 $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 -4이다.

다른 풀이 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 x^3-x^2-5x+3을 $x-1$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$를 구하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & -5 & 3 \\ & & 1 & 0 & -5 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & \boxed{-2} \end{array}$$

$Q(x)=x^2-5$

따라서 $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$Q(-1)=1-5=-4$

08 $f(x)=x^3-5x^2+ax+b$가 $x^2-3x-10$, 즉 $(x+2)(x-5)$로 나누어떨어지므로 $f(x)$는 $x+2$, $x-5$로 각각 나누어떨어진다.

즉, 인수정리에 의하여

$f(-2)=0, f(5)=0$

$f(-2)=0$에서

$-8-20-2a+b=0 \quad \therefore 2a-b=-28$ …… ㉠

$f(5)=0$에서

$125-125+5a+b=0 \quad \therefore 5a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4, b=20$

따라서 $f(x)=x^3-5x^2-4x+20$이므로

$f(1)=1-5-4+20=12$

LEVEL 2

09 $x-y=1$에서 $x=y+1$ …… ㉠

㉠을 $ax^2+by^2+6y+3=0$에 대입하면

$a(y+1)^2+by^2+6y+3=0$

$\therefore (a+b)y^2+(2a+6)y+a+3=0$

이 등식이 y에 대한 항등식이므로

$a+b=0, 2a+6=0, a+3=0 \quad \therefore a=-3, b=3$

$\therefore ab=-9$

10 이차방정식 $x^2-(k-2)x+b(2k+3)-2a+1=0$이 항상 2를 근으로 가지므로

$4-2(k-2)+b(2k+3)-2a+1=0$

$\therefore (2b-2)k-2a+3b+9=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$2b-2=0, -2a+3b+9=0 \quad \therefore a=6, b=1$

$\therefore a-b=5$

11 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & -3 & 6 \\ & & 2 & 2 & -2 \\ \hline 2 & 1 & 1 & -1 & \boxed{4} \\ & & 2 & 6 & \\ \hline 2 & 1 & 3 & \boxed{5} & \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{5} & & \end{array}$$

$x^3-x^2-3x+6=(x-2)(x^2+x-1)+4$

$=(x-2)\{(x-2)(x+3)+5\}+4$

$=(x-2)[(x-2)\{(x-2)+5\}+5]+4$

$=(x-2)\{(x-2)^2+5(x-2)+5\}+4$

$=(x-2)^3+5(x-2)^2+5(x-2)+4$

따라서 $a=1, b=5, c=5, d=4$이므로

$ab+cd=25$

다른 풀이 $x-2=y$로 놓으면 $x=y+2$

주어진 항등식에 대입하면

$(y+2)^3-(y+2)^2-3(y+2)+6=ay^3+by^2+cy+d$

등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$y^3+6y^2+12y+8-y^2-4y-4-3y-6+6=y^3+5y^2+5y+4$

이므로 $y^3+5y^2+5y+4=ay^3+by^2+cy+d$

따라서 $a=1, b=5, c=5, d=4$이므로

$ab+cd=25$

참고 **조립제법의 활용**

다항식 ax^3+bx^2+cx+d를 $x-\alpha$에 대하여 내림차순으로 정리하려면 조립제법을 반복하여 이용하는 것이 편리하다.

$$\begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ & & e & f & g \\ \hline \alpha & a & h & i & \boxed{C} \\ & & j & k & \\ \hline \alpha & a & l & \boxed{B} & \\ & & m & & \\ \hline & a & \boxed{A} & & \end{array}$$

$\Rightarrow ax^3+bx^2+cx+d$

$=a(x-\alpha)^3+A(x-\alpha)^2+B(x-\alpha)+C$

12 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{12}$ …… ㉠

등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$81=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{12}$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$-80=2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11})$

$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}=-40$

13 다항식 $f(x)=x^3+x^2+2x+1$을 $x-a$, $x+a$로 나누었을 때의 나머지가 각각 R_1, R_2이므로

$R_1=f(a)=a^3+a^2+2a+1$ …… ㉠

$R_2=f(-a)=-a^3+a^2-2a+1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 변끼리 더하면

$R_1+R_2=2a^2+2$

이때, $R_1+R_2=10$이므로

$2a^2+2=10, a^2=4$

$\therefore a=2 \ (\because a>0)$

14 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫과 나머지를 $g(x)$라 하면

$f(x)=(x-1)^2g(x)+g(x)$

$f(x)$가 삼차식이므로 $g(x)$는 일차식이고 등식의 양변의 x^3의 계수를 비교하면 $g(x)$의 x의 계수는 2이다.

즉, $g(x)=2x+a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)^2(2x+a)+2x+a$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2+a=5$ ($\because f(1)=5$) $\quad \therefore a=3$

따라서 $f(x)=(x-1)^2(2x+3)+2x+3$이므로 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2)=1\times7+7=14$

15 $x^{10}-1$을 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$x^{10}-1=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$

$\qquad=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $-1=c$

등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $0=a+b+c$

등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $0=a-b+c$

$\therefore a=1, b=0, c=-1$

따라서 $R(x)=x^2-1$이므로 $R(2)=3$

참고 다항식 $f(x)$를 삼차식으로 나누었을 때의 나머지 $R(x)$는 이차 이하의 다항식이므로 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓는다.

16 다항식 $P(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-4x+3)Q(x)+R(x)$

$\qquad=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$

ㄱ. $P(1)=0\times Q(1)+R(1)=R(1)$ (참)

ㄴ. $P(3)=0\times Q(3)+R(3)=R(3)=3a+b$

ㄱ에서 $P(1)=R(1)=a+b$이고,

$R(2)=2a+b$이므로

$P(1)+R(2)=(a+b)+(2a+b)=3a+2b$

$\therefore P(3)\neq P(1)+R(2)$ (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $P(3)=3a+b$이므로

$2P(3)-R(5)=2(3a+b)-(5a+b)$

$\qquad=a+b=R(1)=P(1)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17 다항식 $f(x)$를 x^2+x-6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $5x-1$이므로

$f(x)=(x^2+x-6)Q(x)+5x-1$

$\qquad=(x+3)(x-2)Q(x)+5x-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=9$

따라서 다항식 $x^2f(3x-4)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$2^2\times f(3\times2-4)=4f(2)=4\times9=36$

18 $100=x$라 하면 $99=x-1$

다항식 $(x-1)^{20}$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$(x-1)^{20}=xQ(x)+R$

등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$(-1)^{20}=R \quad \therefore R=1$

따라서 99^{20}을 100으로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

Lecture

수의 나눗셈에서 나머지정리의 활용

나누는 수를 x에 대한 일차식으로 나타낸 후, x를 이용하여 나누어지는 수를 x에 대한 다항식으로 나타낸다.

19 다항식 $f(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로

$f(1)=1+a-9+b=0 \quad \therefore b=-a+8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

즉, $f(x)=x^3+ax^2-9x-a+8$이므로 조립제법을 이용하면

1	1	a	-9	$-a+8$
		1	$a+1$	$a-8$
	1	$a+1$	$a-8$	0

$\therefore f(x)=(x-1)\{x^2+(a+1)x+a-8\}$

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$Q(x)=x^2+(a+1)x+a-8$

이때, $Q(x)$도 $x-1$로 나누어떨어지므로

$Q(1)=1+a+1+a-8=0 \quad \therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=5$

$\therefore ab=15$

다른 풀이 다항식 $f(x)=x^3+ax^2-9x+b$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

x^3+ax^2-9x+b를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면

$x^3+ax^2-9x+b=(x-1)^2Q'(x)$

이때, 조립제법을 이용하면

1	1	a	-9	b
		1	$a+1$	$a-8$
1	1	$a+1$	$a-8$	$a+b-8$
		1	$a+2$	
	1	$a+2$	$2a-6$	

따라서 $a+b-8=0$, $2a-6=0$이므로 $a=3$, $b=5$

$\therefore ab=15$

20 $f(-2)=f(0)=f(1)=3$에서 나머지정리에 의하여 $f(x)$를 $x+2$, x, $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 모두 3이므로

$f(x)-3$은 $x+2$, x, $x-1$로 각각 나누어떨어진다.

즉, 인수정리에 의하여 $f(x)-3$은 $x+2$, x, $x-1$을 인수로 가지고, $f(x)$가 x^3의 계수가 1인 삼차식이므로 $f(x)-3$도 x^3의 계수가 1인 삼차식이다.

$\therefore f(x)-3=x(x+2)(x-1)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $f(-1)$이므로 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)-3=-1\times1\times(-2)$

$\therefore f(-1)=5$

따라서 구하는 나머지는 5이다.

서술형

21 $(x^2-1)(x^2-3)f(x)=x^6+ax^2+b$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x^2=1$을 대입하면

$0=1+a+b \quad \therefore a+b=-1$ …… ㉠

$x^2=3$을 대입하면

$0=27+3a+b \quad \therefore 3a+b=-27$ …… ㉡ … ❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-13$, $b=12$ … ❷

$\therefore a+2b=11$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 등식의 양변에 $x^2=1$, $x^2=3$을 각각 대입하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50 %
❷ 연립방정식을 풀어 a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+2b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

22 다항식 $f(x)$를 $x+4$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -3이므로

$f(x)=(x+4)Q(x)-3$ …… ㉠

또, $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 2이므로

$Q(x)=(x-2)Q'(x)+2$ …… ㉡ … ❶

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x+4)\{(x-2)Q'(x)+2\}-3$

$\quad=(x+4)(x-2)Q'(x)+2(x+4)-3$

$\quad=(x^2+2x-8)Q'(x)+2x+5$

따라서 $f(x)$를 x^2+2x-8로 나누었을 때의 나머지는 $2x+5$이므로 $R(x)=2x+5$ … ❷

$\therefore R(2)=2\times2+5=9$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 몫과 나머지를 이용하여 $f(x)$, $Q(x)$의 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$를 x^2+2x-8로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40 %
❸ $R(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 다항식 $f(x)$를 $x+4$로 나누었을 때의 나머지가 -3이므로 $f(x)=(x+4)Q(x)-3$ …… ㉠

$\therefore f(-4)=-3$

또, $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 2이므로 $Q(2)=2$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=6Q(2)-3=6\times2-3=9$

$f(x)$를 x^2+2x-8로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지 $R(x)$는 일차 이하의 다항식이다.

$R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2+2x-8)Q'(x)+ax+b$

$\quad=(x+4)(x-2)Q'(x)+ax+b$

이므로

$f(-4)=-4a+b=-3$ …… ㉡

$f(2)=2a+b=9$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=5$

따라서 $R(x)=2x+5$이므로 $R(2)=2\times2+5=9$

23 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 6이므로

$f(1)=6$

$f(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-x-2)Q_1(x)+3x-1$

$\quad=(x+1)(x-2)Q_1(x)+3x-1$

이므로 $f(2)=5$ … ❶

이때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$

$\quad=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$ … ❷

$f(1)=6$에서

$a+b=6$ …… ㉠

$f(2)=5$에서

$2a+b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=7$

따라서 구하는 나머지는 $-x+7$이다. … ❸

채점 기준	비율
❶ 나머지정리를 이용하여 $f(1)$, $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 식을 구할 수 있다.	20 %
❸ $f(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40 %

24 다항식 $f(x)-5$가 x^2+2x-3, 즉 $(x+3)(x-1)$로 나누어떨어지므로 $f(x)-5$는 $x+3$, $x-1$로 각각 나누어떨어진다.

즉, 인수정리에 의하여

$f(-3)-5=0$, $f(1)-5=0$

$\therefore f(-3)=5$, $f(1)=5$ …… ㉠ … ❶

이때, $f(x-3)$을 x^2-4x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x-3)=(x^2-4x)Q(x)+ax+b$

$\quad=x(x-4)Q(x)+ax+b$ …… ㉡ … ❷

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(-3)=b=5$ ($\because$ ㉠)

㉡의 양변에 $x=4$를 대입하면

$f(1)=4a+b=5$ ($\because$ ㉠)

$4a+5=5 \quad \therefore a=0$

따라서 구하는 나머지는 5이다. … ❸

채점 기준	비율
❶ 인수정리를 이용하여 $f(-3)$, $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(x-3)$을 x^2-4x로 나누었을 때의 식을 구할 수 있다.	20 %
❸ $f(x-3)$을 x^2-4x로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40 %

Lecture

(1) 다항식 $f(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지

➡ $f(a\alpha+b)$

(2) 다항식 $f(x)$가 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누어떨어지면

➡ $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

3 인수분해

1 인수분해

개념 확인 54~58쪽

1 (1) $ab(5-3a^2)$ (2) $4xy^2(2y^2+x-3)$ (3) $(1-a)(2-b)$
(4) $(1+x)(1+y)$ (5) $(a+d)(b-c)$

2 (1) $(5x+1)^2$ (2) $(2x-3y)^2$ (3) $(a+4b)(a-4b)$
(4) $(3x+7)(2x-1)$

3 (1) $(x+2y+z)^2$ (2) $(x+1)^3$ (3) $(x-3y)^3$
(4) $(4a+b)(16a^2-4ab+b^2)$ (5) $(x-2)(x^2+2x+4)$
(6) $(a+b+1)(a^2+b^2-ab-a-b+1)$

4 (1) $(a+b-1)^2$ (2) $8ab$ (3) $(x^2+x+4)(x^2+x-1)$
(4) $(x-2y+9)(x-2y-2)$

5 (1) $(x+1)(x-1)(x^2-3)$ (2) $(x^2+2x-2)(x^2-2x-2)$

6 (1) $(a+b)(ab+c)$ (2) $(x+y)(x-y)(x-z)$
(3) $(x+3y-2)(x-2y+3)$ (4) $(a+b)(b+c)(c+a)$

7 (가) $x-1$ (나) 3

8 (1) $(x+1)(x^2-4x+5)$ (2) $(x-1)(x+2)(x+4)$

1 (1) $5ab-3a^3b=ab(5-3a^2)$

(2) $8xy^4+4x^2y^2-12xy^2=4xy^2(2y^2+x-3)$

(3) $2(1-a)+b(a-1)=2(1-a)-b(1-a)$
$=(1-a)(2-b)$

(4) $1+x+y+xy=(1+x)+y(1+x)$
$=(1+x)(1+y)$

(5) $ab-cd+bd-ac=ab+bd-ac-cd$
$=b(a+d)-c(a+d)$
$=(a+d)(b-c)$

2 (1) $25x^2+10x+1=(5x)^2+2\times5x\times1+1^2$
$=(5x+1)^2$

(2) $4x^2-12xy+9y^2=(2x)^2-2\times2x\times3y+(3y)^2$
$=(2x-3y)^2$

(3) $a^2-16b^2=a^2-(4b)^2$
$=(a+4b)(a-4b)$

(4) $6x^2+11x-7=(3x+7)(2x-1)$

$$\begin{array}{cccc} 3 & \searrow\!\!\!\nearrow & 7 & \to 14 \\ 2 & & -1 & \to \underline{-3}\,(+ \\ & & & 11 \end{array}$$

3 (1) $x^2+4y^2+z^2+4xy+4yz+2zx$
$=x^2+(2y)^2+z^2+2\times x\times2y+2\times2y\times z+2\times z\times x$
$=(x+2y+z)^2$

(2) $x^3+3x^2+3x+1=x^3+3\times x^2\times1+3\times x\times1^2+1^3$
$=(x+1)^3$

(3) $x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$
$=x^3-3\times x^2\times3y+3\times x\times(3y)^2-(3y)^3$
$=(x-3y)^3$

(4) $64a^3+b^3=(4a)^3+b^3$
$=(4a+b)\{(4a)^2-4a\times b+b^2\}$
$=(4a+b)(16a^2-4ab+b^2)$

(5) $x^3-8=x^3-2^3$
$=(x-2)(x^2+x\times2+2^2)$
$=(x-2)(x^2+2x+4)$

(6) $a^3+b^3+1-3ab$
$=a^3+b^3+1^3-3\times a\times b\times1$
$=(a+b+1)(a^2+b^2+1^2-a\times b-b\times1-1\times a)$
$=(a+b+1)(a^2+b^2-ab-a-b+1)$

4 (1) $(a+b)^2-2(a+b)+1=X^2-2X+1$ ← $a+b=X$로 치환
$=(X-1)^2$
$=(a+b-1)^2$ ← $X=a+b$ 대입

(2) $(2a+b)^2-(2a-b)^2$
$=A^2-B^2$ ← $2a+b=A$, $2a-b=B$로 치환
$=(A+B)(A-B)$
$=\{(2a+b)+(2a-b)\}\{(2a+b)-(2a-b)\}$ ← $A=2a+b$, $B=2a-b$ 대입
$=8ab$

(3) $(x^2+x)^2+3(x^2+x)-4$
$=X^2+3X-4$ ← $x^2+x=X$로 치환
$=(X+4)(X-1)$
$=(x^2+x+4)(x^2+x-1)$ ← $X=x^2+x$ 대입

(4) $(x-2y)(x-2y+7)-18$
$=X(X+7)-18$ ← $x-2y=X$로 치환
$=X^2+7X-18$
$=(X+9)(X-2)$
$=(x-2y+9)(x-2y-2)$ ← $X=x-2y$ 대입

5 (1) $x^4-4x^2+3=X^2-4X+3$ ← $x^2=X$로 치환
$=(X-1)(X-3)$
$=(x^2-1)(x^2-3)$ ← $X=x^2$ 대입
$=(x+1)(x-1)(x^2-3)$

다른 풀이 $x^4-4x^2+3=x^4-4x^2+4-1$
$=(x^2-2)^2-1^2$ ← A^2-B^2 꼴로 변형
$=(x^2-2+1)(x^2-2-1)$
$=(x^2-1)(x^2-3)$
$=(x+1)(x-1)(x^2-3)$

(2) $x^4-8x^2+4=(x^4-4x^2+4)-4x^2$
$=(x^2-2)^2-(2x)^2$ ← A^2-B^2 꼴로 변형
$=(x^2+2x-2)(x^2-2x-2)$

6 (1) $a^2b+ac+ab^2+bc=c(a+b)+ab(a+b)$
$=(a+b)(ab+c)$

(2) $x^3-xy^2-x^2z+y^2z=-z(x^2-y^2)+x(x^2-y^2)$
$=(x^2-y^2)(x-z)$
$=(x+y)(x-y)(x-z)$

(3) $x^2+xy-6y^2+x+13y-6$

$=x^2+(y+1)x-(6y^2-13y+6)$

$=x^2+(y+1)x-(3y-2)(2y-3)$

$$\begin{array}{ccccl} x & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 3y-2 & \rightarrow & (3y-2)x \\ x & & -(2y-3) & \rightarrow & \underline{-(2y-3)x\ (+} \\ & & & & (y+1)x \end{array}$$

$=(x+3y-2)(x-2y+3)$

(4) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc)a+bc(b+c)$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$

8 (1) $f(x)=x^3-3x^2+x+5$로 놓으면

$f(-1)=-1-3-1+5=0$

이므로 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

따라서 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 1 & 5 \\ & & -1 & 4 & -5 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

x^3-3x^2+x+5

$=(x+1)(x^2-4x+5)$

(2) $f(x)=x^3+5x^2+2x-8$로 놓으면

$f(1)=1+5+2-8=0$

이므로 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.

따라서 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 5 & 2 & -8 \\ & & 1 & 6 & 8 \\ \hline & 1 & 6 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

x^3+5x^2+2x-8

$=(x-1)(x^2+6x+8)$

$=(x-1)(x+2)(x+4)$

개념 드릴

59쪽

1 (1) $(3a+2b)^2$ (2) $(6a+5b)(6a-5b)$ (3) $(3a+2)(2a-1)$

2 (1) $(x+2y+3z)^2$ (2) $(2x+1)^3$ (3) $(5x-y)^3$
(4) $(a+4)(a^2-4a+16)$ (5) $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$
(6) $(a-b+2c)(a^2+b^2+4c^2+ab+2bc-2ca)$

3 (1) $(a+b+7)^2$ (2) $(x-y+3)(x-y-5)$ (3) $(a+1)^2(a-2)^2$

4 (1) $(x^2+4)(x^2-3)$ (2) $(x^2+x-1)(x^2-x-1)$

5 (1) $(a-b)(a-b+c)$ (2) $(2x+y+1)(x+y+2)$

6 (1) $(x+1)(x+2)(x-3)$ (2) $(x-3)(x+2)(x+3)$

1 (1) $9a^2+12ab+4b^2=(3a)^2+2\times3a\times2b+(2b)^2$

$=(3a+2b)^2$

(2) $36a^2-25b^2=(6a)^2-(5b)^2$

$=(6a+5b)(6a-5b)$

(3) $6a^2+a-2=(3a+2)(2a-1)$

2 (1) $x^2+4y^2+9z^2+4xy+12yz+6zx$

$=x^2+(2y)^2+(3z)^2+2\times x\times2y+2\times2y\times3z+2\times3z\times x$

$=(x+2y+3z)^2$

(2) $8x^3+12x^2+6x+1$

$=(2x)^3+3\times(2x)^2\times1+3\times2x\times1^2+1^3$

$=(2x+1)^3$

(3) $125x^3-75x^2y+15xy^2-y^3$

$=(5x)^3-3\times(5x)^2\times y+3\times5x\times y^2-y^3$

$=(5x-y)^3$

(4) $a^3+64=a^3+4^3$

$=(a+4)(a^2-4a+16)$

(5) $27x^3-8y^3=(3x)^3-(2y)^3$

$=(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

(6) $a^3-b^3+8c^3+6abc$

$=a^3+(-b)^3+(2c)^3-3\times a\times(-b)\times2c$

$=(a-b+2c)(a^2+b^2+4c^2+ab+2bc-2ca)$

3 (1) $(a+b)^2+14(a+b)+49$

$=X^2+14X+49$ ← $a+b=X$로 치환

$=(X+7)^2$

$=(a+b+7)^2$ ← $X=a+b$ 대입

(2) $(x-y)^2-2(x-y)-15$

$=X^2-2X-15$ ← $x-y=X$로 치환

$=(X+3)(X-5)$

$=(x-y+3)(x-y-5)$ ← $X=x-y$ 대입

(3) $(a^2-a)^2-4(a^2-a)+4$

$=X^2-4X+4$ ← $a^2-a=X$로 치환

$=(X-2)^2$

$=(a^2-a-2)^2$ ← $X=a^2-a$ 대입

$=\{(a+1)(a-2)\}^2$

$=(a+1)^2(a-2)^2$

4 (1) $x^4+x^2-12=X^2+X-12$ ← $x^2=X$로 치환

$=(X+4)(X-3)$

$=(x^2+4)(x^2-3)$ ← $X=x^2$ 대입

(2) $x^4-3x^2+1=(x^4-2x^2+1)-x^2$

$=(x^2-1)^2-x^2$ ← A^2-B^2 꼴로 변형

$=(x^2+x-1)(x^2-x-1)$

5 (1) $a^2+b^2+ac-bc-2ab=c(a-b)+a^2-2ab+b^2$

$=c(a-b)+(a-b)^2$

$=(a-b)(a-b+c)$

(2) $2x^2+3xy+5x+y^2+3y+2$

$=2x^2+(3y+5)x+y^2+3y+2$

$=2x^2+(3y+5)x+(y+1)(y+2)$

$$\begin{array}{ccccl} 2x & \diagdown\!\!\!\!\diagup & y+1 & \rightarrow & (y+1)x \\ x & & y+2 & \rightarrow & \underline{(2y+4)x\ (+} \\ & & & & (3y+5)x \end{array}$$

$=(2x+y+1)(x+y+2)$

6 (1) $f(x)=x^3-7x-6$으로 놓으면

$f(-1)=-1+7-6=0$

이므로 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

따라서 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -7 & -6 \\ & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-7x-6=(x+1)(x^2-x-6)$

$=(x+1)(x+2)(x-3)$

(2) $f(x)=x^3+2x^2-9x-18$로 놓으면

$f(3)=27+18-27-18=0$

이므로 $f(x)$는 $x-3$을 인수로 갖는다.

따라서 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 2 & -9 & -18 \\ & & 3 & 15 & 18 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3+2x^2-9x-18$

$=(x-3)(x^2+5x+6)$

$=(x-3)(x+2)(x+3)$

필수 예제 01 공식을 이용한 인수분해 60쪽

01-1 답 (1) $(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab-2bc+ca)$

(2) $(x-3y)(x^2+9y^2+3xy-x+3y)$

(3) $(2a-b+2c)^2$

(4) $(x+2y+4)(x^2+4y^2-2xy-4x-8y+16)$

|전략| 인수분해 공식을 이용한다.

(1) $a^3+(b-c)^3=\{a+(b-c)\}\{a^2-a\times(b-c)+(b-c)^2\}$

$=(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab-2bc+ca)$

(2) $x^3-x^2+6xy-27y^3-9y^2$

$=x^3-(3y)^3-(x^2-6xy+9y^2)$

$=(x-3y)\{x^2+x\times3y+(3y)^2\}-(x-3y)^2$

$=(x-3y)\{(x^2+3xy+9y^2)-(x-3y)\}$

$=(x-3y)(x^2+9y^2+3xy-x+3y)$

(3) $4a^2+b^2+4c^2-4ab-4bc+8ca$

$=(2a)^2+(-b)^2+(2c)^2+2\times2a\times(-b)+2\times(-b)\times2c+2\times2c\times2a$

$=(2a-b+2c)^2$

(4) $x^3+8y^3-24xy+64$

$=x^3+(2y)^3+4^3-3\times x\times2y\times4$

$=(x+2y+4)(x^2+4y^2-2xy-4x-8y+16)$

01-2 답 ㄱ, ㄷ

|전략| $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$을 이용하여 인수분해한다.

$x^3+216=x^3+6^3=(x+6)(x^2-6\times x+6^2)$

$=(x+6)(x^2-6x+36)$

따라서 인수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

필수 예제 02 공통부분이 있는 식의 인수분해 61쪽

02-1 답 (1) $(x^2+5x+8)(x^2+5x-2)$

(2) $(x^2+2x-4)(x^2+2x-7)$

|전략| (1) 공통부분을 X로 치환한 후 인수분해한다.

(2) 공통부분이 생기도록 식을 묶어 전개한 후 공통부분을 X로 치환한다.

(1) $(x^2+5x+4)(x^2+5x+2)-24$

$=(X+4)(X+2)-24$ ← $x^2+5x=X$로 치환

$=X^2+6X-16$

$=(X+8)(X-2)$

$=(x^2+5x+8)(x^2+5x-2)$ ← $X=x^2+5x$ 대입

(2) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+4$

$=\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}+4$

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)+4$

$=(X-3)(X-8)+4$ ← $x^2+2x=X$로 치환

$=X^2-11X+28$

$=(X-4)(X-7)$

$=(x^2+2x-4)(x^2+2x-7)$ ← $X=x^2+2x$ 대입

02-2 답 9

|전략| 이차식 x^2+bx+c가 완전제곱 꼴이 되려면 $c=\left(\frac{b}{2}\right)^2$이어야 한다.

$(x+1)(x+2)(x-4)(x-5)+k$

$=\{(x+1)(x-4)\}\{(x+2)(x-5)\}+k$

$=(x^2-3x-4)(x^2-3x-10)+k$

$=(X-4)(X-10)+k$ ← $x^2-3x=X$로 치환

$=X^2-14X+40+k$ ⋯⋯ ㉠

주어진 식이 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면 ㉠이 X에 대한 완전제곱식이 되어야 하므로

$40+k=7^2$ $\therefore k=9$

참고 $k=9$일 때

(주어진 식)$=X^2-14X+49$

$=(X-7)^2$

$=(x^2-3x-7)^2$ ← $X=x^2-3x$ 대입

이므로 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되는 것을 확인할 수 있다.

필수 예제 03 x^4+ax^2+b 꼴의 식의 인수분해 62쪽

03-1 답 (1) $(x^2+2)(x+2)(x-2)$

(2) $(x^2-2)(x+4)(x-4)$

(3) $(x^2+3x+5)(x^2-3x+5)$

(4) $(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$

|전략| $x^2=X$로 치환하거나 A^2-B^2 꼴로 변형하여 인수분해한다.

(1) $x^4-2x^2-8=X^2-2X-8$ ← $x^2=X$로 치환

$=(X+2)(X-4)$

$=(x^2+2)(x^2-4)$ ← $X=x^2$ 대입

$=(x^2+2)(x+2)(x-2)$

(2) $x^4-18x^2+32=X^2-18X+32$ ← $x^2=X$로 치환

$=(X-2)(X-16)$

$=(x^2-2)(x^2-16)$ ← $X=x^2$ 대입

$=(x^2-2)(x+4)(x-4)$

(3) $x^4+x^2+25=(x^4+10x^2+25)-9x^2$

$=(x^2+5)^2-(3x)^2$ ← A^2-B^2 꼴로 변형

$=(x^2+3x+5)(x^2-3x+5)$

(4) $x^4+4y^4=(x^4+4x^2y^2+4y^4)-4x^2y^2$

$=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2$ ← A^2-B^2 꼴로 변형

$=(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$

03-2 답 ㄴ, ㄷ

|전략| $x^2=X$, $y^2=Y$로 치환하여 인수분해한다.

$x^4+x^2y^2-20y^4=X^2+XY-20Y^2$ ← $x^2=X$, $y^2=Y$로 치환

$=(X+5Y)(X-4Y)$

$=(x^2+5y^2)(x^2-4y^2)$ ← $X=x^2$, $Y=y^2$ 대입

$=(x^2+5y^2)(x+2y)(x-2y)$

따라서 인수가 아닌 것은 ㄴ, ㄷ이다.

필수 예제 04 여러 개의 문자를 포함한 식의 인수분해 63쪽

04-1 답 (1) $(a^2+b)(c-ab)$

(2) $(x+3y-2)(x+y+1)$

(3) $(x-y)(x-y+2z)$

(4) $-(a+b)(b+c)(c-a)$

|전략| 문자의 차수가 다르면 낮은 차수의 문자에 대하여 내림차순으로 정리하고, 차수가 같으면 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

(1) $a^2c-ab^2-a^3b+bc=(a^2+b)c-ab^2-a^3b$

$=(a^2+b)c-ab(a^2+b)$

$=(a^2+b)(c-ab)$

(2) $x^2+4xy+3y^2-x+y-2$

$=x^2+(4y-1)x+3y^2+y-2$

$=x^2+(4y-1)x+(3y-2)(y+1)$

$=(x+3y-2)(x+y+1)$

(3) $x^2+y^2-2yz+2zx-2xy$

$=2(x-y)z+x^2-2xy+y^2$

$=2(x-y)z+(x-y)^2$

$=(x-y)(x-y+2z)$

(4) $ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c-a)$

$=a^2b+ab^2-b^2c-bc^2-c^2a+ca^2$

$=(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b+c)$

$=(b+c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b-c)a-bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a-c)$

$=-(a+b)(b+c)(c-a)$

필수 예제 05 인수정리와 조립제법을 이용한 인수분해 64쪽

05-1 답 (1) $(x-2)(x+2)(x-3)$ (2) $(x-1)(x+3)(2x+1)$

(3) $(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$

|전략| $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값을 찾은 후 인수정리와 조립제법을 이용하여 인수분해한다.

(1) $f(x)=x^3-3x^2-4x+12$로 놓으면

$f(2)=8-12-8+12=0$

이므로 $f(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

따라서 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -3 & -4 & 12 \\ & & 2 & -2 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$x^3-3x^2-4x+12$

$=(x-2)(x^2-x-6)=(x-2)(x+2)(x-3)$

(2) $f(x)=2x^3+5x^2-4x-3$으로 놓으면

$f(1)=2+5-4-3=0$

이므로 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.

따라서 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ & & 2 & 7 & 3 \\ \hline & 2 & 7 & 3 & 0 \end{array}$$

$2x^3+5x^2-4x-3$

$=(x-1)(2x^2+7x+3)=(x-1)(x+3)(2x+1)$

(3) $f(x)=x^4+5x^3+5x^2-5x-6$으로 놓으면

$f(1)=1+5+5-5-6=0$, $f(-1)=1-5+5+5-6=0$

이므로 $f(x)$는 $x-1$, $x+1$을 각각 인수로 갖는다.

따라서 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 5 & 5 & -5 & -6 \\ & & 1 & 6 & 11 & 6 \\ \hline -1 & 1 & 6 & 11 & 6 & 0 \\ & & -1 & -5 & -6 & \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 & \end{array}$$

$x^4+5x^3+5x^2-5x-6$

$=(x-1)(x+1)(x^2+5x+6)$

$=(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$

필수 예제 06 인수분해를 이용한 수의 계산 65쪽

06-1 답 (1) 100 (2) -27 (3) 125000

|전략| (1) $103=x$로 놓은 후 인수분해 공식을 이용한다.

(2) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$임을 이용한다.

(3) $48=x$로 놓은 후 인수분해 공식을 이용한다.

(1) $103=x$로 놓으면

$\frac{101^2-1}{103^2-1}\times\frac{103^3+1}{103^2-103+1}$

$=\frac{(x-2)^2-1}{x^2-1}\times\frac{x^3+1}{x^2-x+1}$

$=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)}\times\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$

$=x-3=103-3=100$

(2) $2^2-3^2+4^2-5^2+6^2-7^2$

$=(2-3)(2+3)+(4-5)(4+5)+(6-7)(6+7)$

$=-1\times(5+9+13)=-27$

(3) $48=x$로 놓으면

$48^3+6\times48^2+12\times48+8=x^3+6x^2+12x+8$

$=(x+2)^3=50^3=125000$

개념 정리

66~67쪽

01 ㉢ **02** ㉠ **03** ㉡ **04** ㉣

05 2 **06** 2 **07** 3 **08** 9

09 공통부분 **10** A^2-B^2 **11** 다르면, 내림차순

12 $2, 1, y$ **13** $2, 2y+1, x+y+2$

14 인수, 최고차항, $x-\alpha$, $Q(x)$

05 $a^3+6a^2+12a+8$

$=a^3+3\times a^2\times 2+3\times a\times 2^2+2^3$

$=(a+2)^3$

06 $8a^3-12a^2+6a-1$

$=(2a)^3-3\times(2a)^2\times 1+3\times 2a\times 1^2-1^3$

$=(2a-1)^3$

07 $a^2+9b^2+c^2-6ab+6bc-2ca$

$=a^2+(-3b)^2+(-c)^2+2\times a\times(-3b)$
$+2\times(-3b)\times(-c)+2\times(-c)\times a$

$=(a-3b-c)^2$

08 $a^3+27=a^3+3^3$

$=(a+3)(a^2-a\times 3+3^2)$

$=(a+3)(a^2-3a+9)$

13 x와 y의 차수는 모두 $\boxed{2}$이므로 x, y 중 한 문자 x에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$x^2+3xy+2y^2+3x+5y+2$

$=x^2+(3y+3)x+2y^2+5y+2$

$=x^2+(3y+3)x+(y+2)(\boxed{2y+1})$

$=\{x+(y+2)\}\{x+(2y+1)\}$

$=(\boxed{x+y+2})(x+2y+1)$

중단원 마무리

68~70쪽

01 ③ **02** ③ **03** ② **04** ④

05 ③ **06** ④ **07** ④ **08** ①

09 ⑤ **10** -6 **11** ② **12** ④

13 ② **14** ① **15** ① **16** 70

17 ④ **18** ③ **19** 46 **20** ⑤

21 $(a+2b-c)^2$ **22** 19 **23** -36

24 33

LEVEL 1

01 ③ $27x^3+8y^3=(3x)^3+(2y)^3$

$=(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$

⑤ $x^3-y^3-3xy-1$

$=x^3+(-y)^3+(-1)^3-3\times x\times(-y)\times(-1)$

$=(x-y-1)(x^2+y^2+1+xy-y+x)$

$=(x-y-1)(x^2+y^2+xy+x-y+1)$

02 $(x^2+x-5)(x^2+x-3)-3$

$=(X-5)(X-3)-3$ ← $x^2+x=X$로 치환

$=X^2-8X+12$

$=(X-2)(X-6)$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-6)$ ← $X=x^2+x$ 대입

$=(x+2)(x-1)(x+3)(x-2)$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ③이다.

03 $x^4+9x^2+25=(x^4+10x^2+25)-x^2$

$=(x^2+5)^2-x^2$ ← A^2-B^2 꼴로 변형

$=(x^2+x+5)(x^2-x+5)$

따라서 $a=1$, $b=5$, $c=5$이므로

$a+b+c=11$

04 $x^2+xy-2y^2+3x+3y+2$

$=x^2+(y+3)x-(2y^2-3y-2)$

$=x^2+(y+3)x-(2y+1)(y-2)$

$=\{x+(2y+1)\}\{x-(y-2)\}$

$=(x+2y+1)(x-y+2)$

따라서 두 일차식의 합은

$(x+2y+1)+(x-y+2)=2x+y+3$

05 $f(x)=x^3+ax^2-7x+12$로 놓으면 $f(x)$가 $x-3$을 인수로 가지므로 $f(3)=0$에서

$27+9a-21+12=0$ $\therefore a=-2$

$\therefore f(x)=x^3-2x^2-7x+12$

오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

3	1	-2	-7	12
		3	3	-12
	1	1	-4	0

$f(x)=(x-3)(x^2+x-4)$

따라서 $b=1$이므로

$b-a=3$

다른 풀이 $x^3+ax^2-7x+12=(x-3)(x^2+bx-4)$이므로 우변을 전개하면 $x^3+ax^2-7x+12=x^3+(b-3)x^2-(3b+4)x+12$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a=b-3$, $7=3b+4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$이므로 $b-a=3$

06 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=3^2-2\times(-2)=13$

$\therefore a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=(a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\}$

$=3\times\{13-(-2)\}=45$

07 $20=x$로 놓으면

$$\begin{aligned}20\times21\times22\times23+1&=x(x+1)(x+2)(x+3)+1\\&=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1\\&=X(X+2)+1 \leftarrow x^2+3x=X\text{로 치환}\\&=X^2+2X+1\\&=(X+1)^2\\&=(x^2+3x+1)^2 \leftarrow X=x^2+3x\text{ 대입}\\&=(20^2+3\times20+1)^2=461^2\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{20\times21\times22\times23+1}=\sqrt{461^2}=461$

08 주어진 식의 좌변을 b에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$\begin{aligned}a^3+a^2b-c^2a-bc^2&=(a^2-c^2)b+a(a^2-c^2)\\&=(a^2-c^2)(a+b)\\&=(a+c)(a-c)(a+b)\end{aligned}$$

즉, $(a+c)(a-c)(a+b)=0$

이때, $a>0$, $b>0$, $c>0$에서 $a+b\neq0$, $a+c\neq0$이므로

$a-c=0 \qquad \therefore a=c$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다.

LEVEL 2

09 ① $ax-ay+3by-3bx=a(x-y)-3b(x-y)$
$=(x-y)(a-3b)$

② $(2a-3)^3=(2a)^3-3\times(2a)^2\times3+3\times2a\times3^2-3^3$
$=8a^3-36a^2+54a-27$

이므로 $8a^3-12a^2+27a-27\neq(2a-3)^3$

③ $27x^3-1=(3x-1)(9x^2+3x+1)$

④ $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca=(a-b+c)^2$

10 $(x^2-x+1)^2-16(x^2-x)+23$

$$\begin{aligned}&=(X+1)^2-16X+23 \leftarrow x^2-x=X\text{로 치환}\\&=X^2-14X+24\\&=(X-2)(X-12)\\&=(x^2-x-2)(x^2-x-12) \leftarrow X=x^2-x\text{ 대입}\\&=(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)\end{aligned}$$

따라서 $a=-2$, $b=-4$ 또는 $a=-4$, $b=-2$이므로

$a+b=-6$

11 $(x+1)^4+(x+1)^2-12$

$$\begin{aligned}&=X^2+X-12 \leftarrow (x+1)^2=X\text{로 치환}\\&=(X+4)(X-3)\\&=\{(x+1)^2+4\}\{(x+1)^2-3\} \leftarrow X=(x+1)^2\text{ 대입}\\&=(x^2+2x+5)(x^2+2x-2)\end{aligned}$$

따라서 $P(x)=x^2+2x+5$, $Q(x)=x^2+2x-2$ 또는

$P(x)=x^2+2x-2$, $Q(x)=x^2+2x+5$이므로

$P(2)+Q(2)=(2^2+2\times2+5)+(2^2+2\times2-2)=19$

12 $g(x)=2x^4-5x^3-6x^2+ax+4$로 놓으면 $g(x)$가 $x+1$, $x-1$을 각각 인수로 가지므로

$g(-1)=0$, $g(1)=0$

$g(1)=0$에서

$2-5-6+a+4=0 \qquad \therefore a=5$

즉, $g(x)=2x^4-5x^3-6x^2+5x+4$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}-1 & 2 & -5 & -6 & 5 & 4\\ & & -2 & 7 & -1 & -4\\ \hline 1 & 2 & -7 & 1 & 4 & \boxed{0}\\ & & 2 & -5 & -4 & \\ \hline & 2 & -5 & -4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore g(x)=(x+1)(x-1)(2x^2-5x-4)$

따라서 $f(x)=2x^2-5x-4$이므로

$f(-1)=2+5-4=3$

13 $x^4-2x^3-x^2-2x+1$

$$\begin{aligned}&=x^2\left(x^2-2x-1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\\&=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\right\}\\&=x^2\left(x+\frac{1}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)\\&=(x^2+x+1)(x^2-3x+1)\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=-3$, $c=1$이므로

$abc=-3$

Lecture

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$ 꼴의 인수분해

계수가 대칭인 사차식은 다음과 같은 순서로 인수분해한다.

(i) 가운데 항이 상수가 되도록 x^2으로 묶는다.

(ii) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$임을 이용하여

$x+\dfrac{1}{x}$ 또는 $x-\dfrac{1}{x}$에 대한 이차식으로 정리하여 인수분해한다.

(iii) 각 인수가 다항식이 되도록 x를 곱하여 식을 다시 정리한다.

14 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x^2+kxy-2y^2+2x-5y-3\\&=x^2+(ky+2)x-(2y^2+5y+3)\\&=x^2+(ky+2)x-(2y+3)(y+1)\end{aligned}$$

이 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$(2y+3)-(y+1)=ky+2 \qquad \therefore k=1$

15 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$\begin{aligned}3y^2+2xy+3yz+x^2&=y(3y+2x+3z)+x^2\\&=y\{3(x+y+z)-x\}+x^2\\&=-xy+x^2\ (\because x+y+z=0)\\&=x(x-y)\\&=-(y+z)(x-y)\ (\because x=-(y+z))\\&=(y+z)(y-x)\end{aligned}$$

따라서 $x^2+3y^2+2xy+3yz$와 같은 것은 ①이다.

다른 풀이 $x+y+z=0$에서 $x=-y-z$

$\therefore x^2+3y^2+2xy+3yz$

$=(-y-z)^2+3y^2+2(-y-z)y+3yz$

$=y^2+2yz+z^2+3y^2-2y^2-2yz+3yz$

$=2y^2+3yz+z^2$

$=(2y+z)(y+z)$

$=(y+y+z)(y+z)$

$=(y-x)(y+z)\,(\because x=-y-z)$

$=(y+z)(y-x)$

16 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2b-ab^2+c^2a-ca^2+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=(a-b)(b-c)(a-c)$

이때, 두 식 $a-b=5$, $b-c=2$의 양변을 각각 더하면

$a-c=7$

$\therefore$ (주어진 식)$=(a-b)(b-c)(a-c)=5\times2\times7=70$

17 $P(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로 $P(2)=0$

$P(2)=16-8a-4a+14+6=0 \qquad \therefore a=3$

즉, $P(x)=x^4-3x^3-3x^2+7x+6$에서 $P(2)=0$,

$P(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -3 & -3 & 7 & 6 \\ & & 2 & -2 & -10 & -6 \\ \hline -1 & 1 & -1 & -5 & -3 & \boxed{0} \\ & & -1 & 2 & 3 & \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore x^4-3x^3-3x^2+7x+6=(x-2)(x+1)(x^2-2x-3)$

$=(x-2)(x+1)(x+1)(x-3)$

$=(x+1)^2(x-2)(x-3)$

따라서 $P(x)$의 인수가 아닌 것은 ④이다.

참고 인수끼리의 곱도 인수이므로

$P(x)=(x+1)^2(x-2)(x-3)$에서

$(x+1)(x-2)=x^2-x-2$, $(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$,

$(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$도 $P(x)$의 인수이다.

18 $a^3-b^3+a^2b-ab^2+ac^2+bc^2$

$=c^2(a+b)+a^3+a^2b-ab^2-b^3$

$=c^2(a+b)+a^2(a+b)-b^2(a+b)$

$=(a+b)(a^2-b^2+c^2)$

즉, $(a+b)(a^2-b^2+c^2)=0$

이때, $a>0$, $b>0$에서 $a+b\neq0$이므로

$a^2-b^2+c^2=0 \qquad \therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 b이고, 직각을 낀 두 변의 길이가 a, c인 직각삼각형이므로 이 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}ac$

19 $47=x$로 놓으면

$\frac{47^4+47^2+1}{47^2+47+1}=\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}$

$=\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2+x+1}$

$=x^2-x+1$

$=47^2-47+1$

$=47\times(47-1)+1$

$=47\times46+1$

따라서 $47\times46+1=46\times(46+1)+1=n(n+1)+1$을 만족시키는 자연수 n의 값은 $n=46$이다.

20 주어진 직육면체의 부피를 $f(x)=x^3+4x^2-11x-30$으로 놓으면 직육면체의 높이가 $x+2$이므로 부피 $f(x)$는 $x+2$를 인수로 갖는다.

즉, $f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 4 & -11 & -30 \\ & & -2 & -4 & 30 \\ \hline & 1 & 2 & -15 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^3+4x^2-11x-30=(x+2)(x^2+2x-15)$

$=(x+2)(x+5)(x-3)$

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$4\{(x+2)+(x+5)+(x-3)\}=12x+16$

서술형

21 $[a, c, c]+4[b, -c, a]$

$=(a+c)(a+c)+4(b-c)(b+a)$ … ❶

$=(a^2+2ac+c^2)+4(b^2+ab-bc-ca)$

$=a^2+2ac+c^2+4b^2+4ab-4bc-4ca$

$=a^2+4b^2+c^2+4ab-4bc-2ca$ … ❷

$=a^2+(2b)^2+(-c)^2$

$+2\times a\times2b+2\times2b\times(-c)+2\times(-c)\times a$

$=(a+2b-c)^2$ … ❸

채점 기준	비율
❶ $[a, c, c]+4[b, -c, a]$를 다항식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 나타낸 다항식을 바르게 전개할 수 있다.	20 %
❸ 전개한 다항식을 바르게 인수분해할 수 있다.	50 %

22 $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+a$

$=\{(x-1)(x-7)\}\{(x-3)(x-5)\}+a$

$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+a$

$=(X+7)(X+15)+a$ ← $x^2-8x=X$로 치환

$=X^2+22X+105+a$ …… ㉠ … ❶

이 식이 $(x^2+bx+c)^2$, 즉 x에 대한 이차식의 완전제곱식 꼴이 되려면 ㉠이 X에 대한 완전제곱식이어야 하므로

$105+a=11^2 \qquad \therefore a=16$ … ❷

따라서 ㉠에서

$X^2+22X+105+16=X^2+22X+121$

$=(X+11)^2$

$=(x^2-8x+11)^2$ ← $X=x^2-8x$ 대입

이므로 $b=-8$, $c=11$ … ❸

$\therefore a+b+c=19$ … ❹

채점 기준	비율
❶ 주어진 다항식을 전개할 수 있다.	20 %
❷ 주어진 다항식이 완전제곱식이 되도록 하는 a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 인수분해를 하여 b, c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

Lecture

일차식이 4개 곱해져 있는 식에서 공통부분 찾기

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ 꼴이 있으면 두 일차식의 상수항의 합이 서로 같아지도록 두 개씩 짝을 지은 후, 식을 전개하여 공통부분을 찾는다.

23 다항식 x^4-13x^2+a가 $(x^2+bx-2)(x^2+cx-2)$로 인수분해되므로

$x^4-13x^2+a=(x^2+bx-2)(x^2+cx-2)$

위의 등식에서 양변의 상수항을 비교하면

$a=(-2)\times(-2)=4$ … ❶

$\therefore x^4-13x^2+4=(x^4-4x^2+4)-9x^2$

$=(x^2-2)^2-(3x)^2$ ← A^2-B^2 꼴로 변형

$=(x^2+3x-2)(x^2-3x-2)$

따라서 $b=3$, $c=-3$ 또는 $b=-3$, $c=3$이므로 … ❷

$abc=-36$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 상수항끼리 비교하여 a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 인수분해하여 b, c의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	20 %

24 $5^4-3^4=(5^2+3^2)(5^2-3^2)=(5^2+3^2)(5+3)(5-3)$

$=34\times8\times2=2\times16\times17$ … ❶

즉, 5^4-3^4을 나누어떨어지게 하는 10과 30 사이에 있는 자연수 n은 16, 17이다. … ❷

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은

$16+17=33$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 인수분해를 활용하여 5^4-3^4을 적당한 수들의 곱으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ 10과 30 사이에 있는 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

참고 $5^4-3^4=34\times8\times2=2^5\times17$의 약수를 직접 구해 보면

×	1	2	2^2	2^3	2^4	2^5
1	1	2	4	8	16	32
17	17	34	68	136	272	544

따라서 5^4-3^4을 나누어떨어지게 하는 10과 30 사이에 있는 자연수는 16, 17임을 알 수 있다.

4 복소수

1 복소수의 뜻과 그 연산

개념 확인 72~76쪽

1 (1) 실수부분: $\sqrt{5}$, 허수부분: 0 (2) 실수부분: -1, 허수부분: -1
(3) 실수부분: $\sqrt{2}$, 허수부분: 2 (4) 실수부분: 0, 허수부분: -4
실수: (1), 허수: (2), (3), (4)

2 ㄱ, ㄹ, ㅁ

3 (1) $x=1$, $y=-6$ (2) $x=-4$, $y=2$
(3) $x=0$, $y=-1$ (4) $x=2$, $y=3$

4 (1) $3+2i$ (2) $-i-\sqrt{2}$ (3) -2 (4) $-5i$

5 (1) $1+5i$ (2) $3-4i$ (3) $3+6i$ (4) $2-2i$

6 (1) $2+3i$ (2) $1-9i$ (3) $4+3i$ (4) $-11-6i$

7 (1) $-3+2i$ (2) $8+2i$ (3) $16-2i$ (4) $35+12i$

8 (1) $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$ (2) $\frac{1}{25}+\frac{7}{25}i$ (3) $\frac{1}{2}+\frac{5}{4}i$ (4) $-\frac{9}{10}+\frac{7}{10}i$

9 (1) 2 (2) 5 (3) $-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

10 (1) $5-3i$ (2) $10-10i$ (3) $\frac{1}{10}+\frac{7}{10}i$

1 (1) $\sqrt{5}=\sqrt{5}+0\times i$이므로 $\sqrt{5}$의 실수부분은 $\sqrt{5}$, 허수부분은 0이고, $\sqrt{5}$는 실수이다.
(2) $-1-i$의 실수부분은 -1, 허수부분은 -1이고, $-1-i$는 허수이다.
(3) $\sqrt{2}+2i$의 실수부분은 $\sqrt{2}$, 허수부분은 2이고, $\sqrt{2}+2i$는 허수이다.
(4) $-4i=0-4i$이므로 $-4i$의 실수부분은 0, 허수부분은 -4이고, $-4i$는 허수이다.
따라서 (1)~(4)의 복소수 중 실수는 (1), 허수는 (2), (3), (4)이다.

2 ㄴ. $-2i$의 실수부분은 0, 허수부분은 -2이다.
ㄷ. $i^2=-1$이므로 실수이다.
ㅂ. $-\sqrt{6}$은 실수이므로 복소수이다.

3 (3) $2x=0$, $y+1=0$이므로 $x=0$, $y=-1$
(4) $x-2=0$, $y-3=0$이므로 $x=2$, $y=3$

4 (1) $\overline{3-2i}=3+2i$
(2) $\overline{i-\sqrt{2}}=-i-\sqrt{2}$
(3) $-2=-2+0\times i$이므로 $\overline{-2}=-2$
(4) $5i=0+5i$이므로 $\overline{5i}=-5i$

5 (1) $(-1+2i)+(2+3i)=(-1+2)+(2+3)i=1+5i$
(2) $(-7i+7)+(3i-4)=\{7+(-4)\}+\{(-7)+3\}i=3-4i$
(3) $(1+i)+(2+5i)=(1+2)+(1+5)i=3+6i$
(4) $(3+i)+(-1-3i)=\{3+(-1)\}+\{1+(-3)\}i=2-2i$

6 (1) $(-2i+4)-(2-5i)=(4-2)+\{-2-(-5)\}i$
$=2+3i$
(2) $(5-8i)-(4+i)=(5-4)+(-8-1)i$
$=1-9i$
(3) $(1+2i)-(-3-i)=\{1-(-3)\}+\{2-(-1)\}i$
$=4+3i$
(4) $(-i-8)-(5i+3)=(-8-3)+(-1-5)i$
$=-11-6i$

7 (1) $i(2+3i)=2i+3i^2=-3+2i$
(2) $(1-i)(3+5i)=3+5i-3i-5i^2$
$=3+5i-3i+5=8+2i$
(3) $(2+3i)(2-4i)=4-8i+6i-12i^2$
$=4-8i+6i+12=16-2i$
(4) $(6+i)^2=36+12i+i^2$
$=36+12i-1=35+12i$

8 (1) $\dfrac{3i}{2+i}=\dfrac{3i(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{6i-3i^2}{2^2-i^2}$
$=\dfrac{3+6i}{5}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{6}{5}i$
(2) $\dfrac{1+i}{4-3i}=\dfrac{(1+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\dfrac{4+3i+4i+3i^2}{4^2-(3i)^2}$
$=\dfrac{1+7i}{25}=\dfrac{1}{25}+\dfrac{7}{25}i$
(3) $\dfrac{-5+2i}{4i}=\dfrac{(-5+2i)i}{4i\times i}=\dfrac{-5i+2i^2}{4i^2}$
$=\dfrac{-2-5i}{-4}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{4}i$
(4) $\dfrac{2-3i}{-3+i}=\dfrac{(2-3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}=\dfrac{-6-2i+9i+3i^2}{(-3)^2-i^2}$
$=\dfrac{-9+7i}{10}=-\dfrac{9}{10}+\dfrac{7}{10}i$

9 $z=1+2i$이므로 $\overline{z}=1-2i$
(1) $z+\overline{z}=(1+2i)+(1-2i)=2$
(2) $z\overline{z}=(1+2i)(1-2i)=1^2-(2i)^2=1+4=5$
(3) $\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{1+2i}{1-2i}=\dfrac{(1+2i)^2}{(1-2i)(1+2i)}=\dfrac{1+4i+4i^2}{1^2-(2i)^2}$
$=\dfrac{-3+4i}{5}=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$

10 (1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}=(3+i)+(2-4i)$
$=(3+2)+(1-4)i=5-3i$
(2) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}=(3+i)(2-4i)$
$=6-12i+2i-4i^2=6-12i+2i+4=10-10i$
(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\dfrac{3+i}{2-4i}=\dfrac{(3+i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)}$
$=\dfrac{6+12i+2i+4i^2}{2^2-(4i)^2}=\dfrac{2+14i}{20}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{7}{10}i$

개념 드릴

77~78쪽

1 (1) 실수부분: 3, 허수부분: 6
(2) 실수부분: $-\sqrt{5}$, 허수부분: 2
(3) 실수부분: -8, 허수부분: 0
(4) 실수부분: 0, 허수부분: $\sqrt{10}$
(5) 실수부분: 5, 허수부분: -2
(6) 실수부분: 0, 허수부분: -3

2 (1) $5+\sqrt{3}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (2) $9i$, $-\sqrt{5}i$ (3) $\sqrt{2}+4i$, i^2-i

3 (1) $x=-3$, $y=-4$ (2) $x=1$, $y=-\dfrac{1}{3}$
(3) $x=1$, $y=8$ (4) $x=-1$, $y=-4$

4 (1) $-3-11i$ (2) $-9i+1$ (3) 4
(4) $\sqrt{2}i$ (5) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{3}i$ (6) $-3i-\sqrt{2}$

5 (1) $5+2i$ (2) -4 (3) $3-\dfrac{2}{3}i$ (4) $7+4i$

6 (1) $1+5i$ (2) $-7-7i$ (3) $2+i$ (4) $1-i$

7 (1) $-5+5i$ (2) $4+3i$ (3) 6

8 (1) $-\dfrac{3}{13}+\dfrac{2}{13}i$ (2) $\sqrt{2}-i$ (3) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (4) $\dfrac{1}{5}-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}i$

9 (1) $6+5i$ (2) 20

1 (1) $3+6i$의 실수부분은 3, 허수부분은 6이다.
(2) $-\sqrt{5}+2i$의 실수부분은 $-\sqrt{5}$, 허수부분은 2이다.
(3) $-8=-8+0\times i$이므로 -8의 실수부분은 -8, 허수부분은 0이다.
(4) $\sqrt{10}i=0+\sqrt{10}i$이므로 $\sqrt{10}i$의 실수부분은 0, 허수부분은 $\sqrt{10}$이다.
(5) $5-2i$의 실수부분은 5, 허수부분은 -2이다.
(6) $-3i=0-3i$이므로 $-3i$의 실수부분은 0, 허수부분은 -3이다.

2 (3) $i^2-i=-1-i$이므로 i^2-i는 순허수가 아닌 허수이다.

3 (1) $-x=3$, $y=-4$이므로 $x=-3$, $y=-4$
(2) $x-1=0$, $3y+1=0$이므로 $x=1$, $y=-\dfrac{1}{3}$
(3) $2x+1=3$, $y-3=5$이므로 $x=1$, $y=8$
(4) $x+y=-5$, $x-y=3$이므로 $x=-1$, $y=-4$

4 (1) $\overline{-3+11i}=-3-11i$
(2) $\overline{9i+1}=-9i+1$
(3) $4=4+0\times i$이므로 $\overline{4}=4$
(4) $-\sqrt{2}i=0-\sqrt{2}i$이므로 $\overline{-\sqrt{2}i}=\sqrt{2}i$
(5) $\overline{\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{3}i}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{3}i$
(6) $\overline{3i-\sqrt{2}}=-3i-\sqrt{2}$

5 (1) $(3-i)+(2+3i)=(3+2)+(-1+3)i=5+2i$
(2) $(4i-2)+(-2-4i)=\{-2+(-2)\}+\{4+(-4)\}i$
$=-4$

(3) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i\right)+\left(\frac{7}{2}-\frac{4}{3}i\right)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}\right)+\left\{\frac{2}{3}+\left(-\frac{4}{3}\right)\right\}i$

$=3-\frac{2}{3}i$

(4) $\overline{4-6i}+(3-2i)=(4+6i)+(3-2i)$

$=(4+3)+\{6+(-2)\}i$

$=7+4i$

6 (1) $(2+i)-(1-4i)=(2-1)+\{1-(-4)\}i$

$=1+5i$

(2) $(-3-2i)-(4+5i)=(-3-4)+(-2-5)i$

$=-7-7i$

(3) $\left(\frac{8}{5}+\frac{3}{4}i\right)-\left(-\frac{2}{5}-\frac{1}{4}i\right)=\left\{\frac{8}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)\right\}+\left\{\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}i$

$=2+i$

(4) $(5-4i)-\overline{4+3i}=(5-4i)-(4-3i)$

$=(5-4)+\{-4-(-3)\}i$

$=1-i$

7 (1) $(-1+3i)(2+i)=-2-i+6i+3i^2$

$=-2-i+6i-3=-5+5i$

(2) $(2-i)(1+2i)=2+4i-i-2i^2$

$=2+4i-i+2=4+3i$

(3) $(1+\sqrt{5}i)(1-\sqrt{5}i)=1^2-(\sqrt{5}i)^2=1-5i^2$

$=1+5=6$

8 (1) $\frac{i}{2-3i}=\frac{i(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{2i+3i^2}{2^2-(3i)^2}$

$=\frac{-3+2i}{13}=-\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i$

(2) $\frac{3}{\sqrt{2}+i}=\frac{3(\sqrt{2}-i)}{(\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i)}=\frac{3(\sqrt{2}-i)}{(\sqrt{2})^2-i^2}$

$=\frac{3(\sqrt{2}-i)}{3}=\sqrt{2}-i$

(3) $\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}=\frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{1^2-(\sqrt{3}i)^2}$

$=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(4) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}i}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)}=\frac{3-2\sqrt{6}i+2i^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}i)^2}$

$=\frac{1-2\sqrt{6}i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{2\sqrt{6}}{5}i$

9 $z=2+i$이므로 $\overline{z}=2-i$

(1) $4z-\overline{z}=4(2+i)-(2-i)=(8+4i)-(2-i)$

$=(8-2)+\{4-(-1)\}i=6+5i$

(2) $z\overline{z}=(2+i)(2-i)=2^2-i^2=5$

$z+\overline{z}=(2+i)+(2-i)=(2+2)+\{1+(-1)\}i$

$=4$

$\therefore z\overline{z}(z+\overline{z})=5\times 4=20$

필수 예제 01 복소수의 사칙연산 79쪽

01-1 답 (1) $1+10i$ (2) 10 (3) $7+i$

|전략| i를 문자처럼 생각하고 계산한 후 $i^2=-1$임을 이용한다.

(1) $i-7+(2-5i)(-1+2i)=-7+i+(-2+4i+5i-10i^2)$

$=-7+i+(-2+4i+5i+10)$

$=-7+i+(8+9i)$

$=1+10i$

(2) $(3+2i)^2-(2+3i)^2=(9+12i+4i^2)-(4+12i+9i^2)$

$=(9+12i-4)-(4+12i-9)$

$=(5+12i)-(-5+12i)$

$=10$

(3) $\frac{3+i}{1-i}+\frac{1+6i}{i}=\frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}+\frac{(1+6i)i}{i\times i}$

$=\frac{3+3i+i+i^2}{1^2-i^2}+\frac{i+6i^2}{i^2}$

$=\frac{2+4i}{2}+\frac{-6+i}{-1}$

$=(1+2i)+(6-i)$

$=7+i$

참고 분모가 허수일 때, 분모와 분자에 분모의 켤레복소수를 각각 곱하여 분모를 실수화한다.
즉, a, b가 실수일 때,

$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$ (단, $a+bi\neq 0$)

로 계산한다.

01-2 답 $-1-5i$

|전략| i를 문자처럼 생각하고 계산한 후 $i^2=-1$임을 이용한다.

$(1-i)(\overline{3+2i})+i(1+i)^2=(1-i)(3-2i)+i(1+i)^2$

$=(3-2i-3i+2i^2)+i(1+2i+i^2)$

$=(3-2i-3i-2)+i(1+2i-1)$

$=(1-5i)+i\times 2i$

$=1-5i+2i^2$

$=1-5i-2$

$=-1-5i$

필수 예제 02 복소수가 실수 또는 순허수가 될 조건 80쪽

02-1 답 (1) $a=4$, $b=6$ (2) $a=-\frac{1}{4}$, $b=4$

|전략| 주어진 복소수를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 정리한 후 조건을 만족시키는 x의 값을 구한다.

(1) $z=x(1+i)-2(3+2i)=(x-6)+(x-4)i$

z가 실수가 되려면 $x-4=0$이어야 하므로

$x=4$ $\quad\therefore a=4$

z가 순허수가 되려면 $x-6=0$, $x-4\neq 0$이어야 하므로

$x=6$ $\quad\therefore b=6$

(2) $z=(1-xi)(-4+i)=-4+i+4xi-xi^2=(x-4)+(4x+1)i$

z가 실수가 되려면 $4x+1=0$이어야 하므로

$x=-\frac{1}{4}\qquad \therefore a=-\frac{1}{4}$

z가 순허수가 되려면 $x-4=0$, $4x+1\neq 0$이어야 하므로

$x=4\qquad \therefore b=4$

02-2 답 1

|전략| $a+bi$ (a, b는 실수)가 순허수일 때 $a=0$, $b\neq 0$임을 이용한다.

$z=(a^2-1)+(a^2+a)i$가 순허수이려면

$a^2-1=0$, $a^2+a\neq 0$이어야 하므로

$a^2-1=0$에서 $(a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$ ...... ㉠

$a^2+a\neq 0$에서 $a(a+1)\neq 0$

$\therefore a\neq -1$이고 $a\neq 0$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1$

02-3 답 $\frac{3}{2}$

|전략| z^2이 음의 실수이면 z는 순허수임을 이용한다.

z^2이 음의 실수가 되려면 z가 순허수이어야 하므로

$-2x^2+x+3=0$, $x+1\neq 0$

$-2x^2+x+3=0$에서 $2x^2-x-3=0$

$(x+1)(2x-3)=0\qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$ ...... ㉠

$x+1\neq 0$에서 $x\neq -1$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $x=\frac{3}{2}$

참고 복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

(1) z^2이 음의 실수이면 ➡ z는 순허수

(2) z^2이 양의 실수이면 ➡ z는 0이 아닌 실수

필수 예제 03 복소수가 서로 같을 조건 81쪽

03-1 답 (1) $x=-1$, $y=2$ (2) $x=3$, $y=-1$

|전략| 좌변을 정리한 후 실수부분과 허수부분이 각각 같음을 이용한다.

(1) $(1+i)x+(1-i)y=1-3i$에서

$x+xi+y-yi=1-3i$

$(x+y)+(x-y)i=1-3i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=1$, $x-y=-3$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=2$

(2) $(x+2i)(1-i)=5+yi$에서

$x-xi+2i-2i^2=5+yi$

$(x+2)+(-x+2)i=5+yi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+2=5$, $-x+2=y$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=-1$

03-2 답 80

|전략| 등식의 좌변을 정리한 후 실수부분과 허수부분이 각각 같음을 이용한다.

$$\frac{x}{1-i}+\frac{y}{1+i}=\frac{x(1+i)+y(1-i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{x+xi+y-yi}{1^2-i^2}$$
$$=\frac{(x+y)+(x-y)i}{2}=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}i$$

즉, $\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}i=4+5i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\frac{x+y}{2}=4$, $\frac{x-y}{2}=5\qquad \therefore x+y=8$, $x-y=10$

두 식을 연립하여 풀면 $x=9$, $y=-1$

$\therefore x^2-y^2=81-1=80$

참고 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$를 이용하여 구할 수도 있다.

즉, $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=8\times 10=80$

필수 예제 04 복소수가 주어질 때의 식의 값 82쪽

04-1 답 (1) $\frac{2}{7}$ (2) 20

|전략| $x+y$, xy의 값을 구한 후 곱셈 공식의 변형을 이용하여 계산한다.

$x+y=(-2+\sqrt{3}i)+(-2-\sqrt{3}i)=-4$

$xy=(-2+\sqrt{3}i)(-2-\sqrt{3}i)=4-3i^2=7$

(1) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$

$=\frac{(-4)^2-2\times 7}{7}=\frac{2}{7}$

(2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=(-4)^3-3\times 7\times(-4)=20$

Lecture

곱셈 공식의 변형

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

04-2 답 $1+i$

|전략| $x=a+bi$ (a, b는 실수) 꼴이 주어지면 우변에 순허수만 남도록 식을 변형한 후 양변을 제곱하여 이차방정식을 만들어 해결한다.

$x=-1+i$에서 $x+1=i$

양변을 제곱하면

$(x+1)^2=i^2$, $x^2+2x+1=-1$

$\therefore x^2+2x+2=0$

$\therefore x^3+2x^2+3x+2=x(x^2+2x+2)+x+2$

$=x\times 0+x+2=x+2$

$=(-1+i)+2=1+i$

다른 풀이 $x=-1+i$를 x^3+2x^2+3x+2에 바로 대입하면

(주어진 식) $=(-1+i)^3+2(-1+i)^2+3(-1+i)+2$

$=-1+3i+3-i+2(1-2i-1)-3+3i+2$

$=2+2i-4i-3+3i+2$

$=1+i$

필수 예제 05 결레복소수의 성질을 이용한 식의 값 83쪽

05-1 답 -8

|전략| 인수분해를 이용하여 주어진 식을 간단히 한 후 켤레복소수를 이용해 식의 값을 구한다.

$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\beta+\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=\alpha(\beta+\overline{\beta})+\overline{\alpha}(\beta+\overline{\beta})$
$=(\alpha+\overline{\alpha})(\beta+\overline{\beta})$

$\alpha=-1+2i$, $\beta=2-i$이므로

$\alpha+\overline{\alpha}=(-1+2i)+(-1-2i)=-2$

$\beta+\overline{\beta}=(2-i)+(2+i)=4$

$\therefore\ \alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\beta+\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=(\alpha+\overline{\alpha})(\beta+\overline{\beta})$
$=-2\times4=-8$

05-2 답 5

|전략| 인수분해를 이용하여 주어진 식을 간단히 한 후 켤레복소수를 이용해 식의 값을 구한다.

$\alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=\overline{\alpha}(\alpha-\beta)-\overline{\beta}(\alpha-\beta)$
$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$
$=(2+i)(2-i)=4-i^2$
$=4+1=5$

필수 예제 06 주어진 등식을 만족시키는 복소수 z 구하기 84쪽

06-1 답 (1) $1-2i$ (2) $2-i$

|전략| $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 z, $\overline{z}$를 등식에 대입한다.

(1) $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$

$5z+2\overline{z}=5(a+bi)+2(a-bi)$
$=5a+5bi+2a-2bi$
$=7a+3bi$

즉, $7a+3bi=7-6i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$7a=7$, $3b=-6$ $\quad\therefore\ a=1$, $b=-2$

$\therefore\ z=1-2i$

(2) $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$

$(1-i)\overline{z}+2iz=(1-i)(a-bi)+2i(a+bi)$
$=a-bi-ai-b+2ai-2b$
$=(a-3b)+(a-b)i$

즉, $(a-3b)+(a-b)i=5+3i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-3b=5$, $a-b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

$\therefore\ z=2-i$

06-2 답 $3+4i$, $3-4i$

|전략| $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 z, $\overline{z}$를 각 등식에 대입한다.

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$

$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$

즉, $2a=6$이므로 $a=3$

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

즉, $a^2+b^2=25$이고 $a=3$이므로

$b^2=16$ $\quad\therefore\ b=\pm4$

따라서 구하는 복소수 z는 $z=3+4i$ 또는 $z=3-4i$이다.

2 i의 거듭제곱 및 음수의 제곱근

개념 확인 85~87쪽

1 (1) -1 (2) -1 (3) $-i$ (4) i (5) -64 (6) 0
2 (1) $\sqrt{5}i$ (2) $2\sqrt{2}i$ (3) $4i$ (4) $-5i$
3 (1) $\pm2i$ (2) $\pm\sqrt{6}i$ (3) $\pm3\sqrt{3}i$ (4) $\pm6i$
4 (1) $3\sqrt{3}i$ (2) $6\sqrt{5}i$ (3) $3\sqrt{2}i$ (4) $\sqrt{6}i$
5 (1) $2\sqrt{3}i$ (2) $2\sqrt{3}i$ (3) $-2\sqrt{3}$ (4) $\sqrt{7}i$ (5) $-\sqrt{7}i$ (6) $\sqrt{7}$

1 (1) $i^{14}=(i^4)^3\times i^2=i^2=-1$
(2) $(-i)^{18}=i^{18}=(i^4)^4\times i^2=i^2=-1$
(3) $i^{23}=(i^4)^5\times i^3=i^3=-i$
(4) $i^5\times i^8=i^{13}=(i^4)^3\times i=i$
(5) $(-2i)^6=(-2)^6\times i^6=(-2)^6\times i^4\times i^2=64\times i^2=-64$
(6) $i+i^2+i^3+i^4=i+(-1)+(-i)+1=0$

2 (1) $\sqrt{-5}=\sqrt{5}i$
(2) $\sqrt{-8}=\sqrt{8}i=2\sqrt{2}i$
(3) $\sqrt{-16}=\sqrt{16}i=4i$
(4) $-\sqrt{-25}=-\sqrt{25}i=-5i$

3 (1) $\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{4}i=\pm2i$
(2) $\pm\sqrt{-6}=\pm\sqrt{6}i$
(3) $\pm\sqrt{-27}=\pm\sqrt{27}i=\pm3\sqrt{3}i$
(4) $\pm\sqrt{-36}=\pm\sqrt{36}i=\pm6i$

4 (1) $\sqrt{-3}+\sqrt{-12}=\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i=3\sqrt{3}i$
(2) $\sqrt{-125}+\sqrt{-5}=5\sqrt{5}i+\sqrt{5}i=6\sqrt{5}i$
(3) $\sqrt{-32}-\sqrt{-2}=4\sqrt{2}i-\sqrt{2}i=3\sqrt{2}i$
(4) $\sqrt{-54}-\sqrt{-24}=3\sqrt{6}i-2\sqrt{6}i=\sqrt{6}i$

5 (1) $\sqrt{-4}\times\sqrt{3}=\sqrt{(-4)\times3}=\sqrt{-12}=2\sqrt{3}i$
(2) $\sqrt{4}\times\sqrt{-3}=\sqrt{4\times(-3)}=\sqrt{-12}=2\sqrt{3}i$
(3) $\sqrt{-4}\times\sqrt{-3}=-\sqrt{(-4)\times(-3)}=-\sqrt{12}=-2\sqrt{3}$
(4) $\dfrac{\sqrt{-14}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{-14}{2}}=\sqrt{-7}=\sqrt{7}i$
(5) $\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{-2}}=-\sqrt{\dfrac{14}{-2}}=-\sqrt{-7}=-\sqrt{7}i$
(6) $\dfrac{\sqrt{-14}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\dfrac{-14}{-2}}=\sqrt{7}$

개념 드릴 88쪽

1 (1) i (2) $4\sqrt{2}i$ (3) $-i$ (4) 1 (5) 2 (6) $-2i$ (7) 0
2 (1) $6i$ (2) $-\sqrt{10}$ (3) $3\sqrt{5}i$ (4) $3i$ (5) $-\sqrt{2}i$ (6) $2\sqrt{6}$

1 (1) $i^{25}=(i^4)^6\times i=i$

(2) $(\sqrt{2}i)^5=(\sqrt{2})^5\times i^5=4\sqrt{2}\times i^4\times i=4\sqrt{2}i$

(3) $(-i)^{17}=-i^{17}=-(i^4)^4\times i=-i$

(4) $\left(\frac{1}{i}\right)^{100}=\frac{1}{i^{100}}=\frac{1}{(i^4)^{25}}=\frac{1}{1}=1$

(5) $i^{20}+i^{40}=(i^4)^5+(i^4)^{10}=1+1=2$

(6) $i^7+(-i)^9=i^7-i^9=i^4\times i^3-(i^4)^2\times i$
$=i^3-i=-i-i=-2i$

(7) $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1$
$=-i-1+i+1=0$

2 (1) $\sqrt{-4}\sqrt{9}=\sqrt{(-4)\times 9}=\sqrt{-36}=\sqrt{36}i=6i$

(2) $\sqrt{-2}\sqrt{-5}=-\sqrt{(-2)\times(-5)}=-\sqrt{10}$

(3) $\sqrt{3}\sqrt{-15}=\sqrt{3\times(-15)}=\sqrt{-45}=\sqrt{45}i=3\sqrt{5}i$

(4) $\frac{\sqrt{-27}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{-27}{3}}=\sqrt{-9}=\sqrt{9}i=3i$

(5) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-5}}=-\sqrt{\frac{10}{-5}}=-\sqrt{-2}=-\sqrt{2}i$

(6) $\frac{\sqrt{-48}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\frac{-48}{-2}}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

필수 예제 01 i의 거듭제곱 89쪽

01-1 답 (1) $10-10i$ (2) $-2i$

|전략| (1) 항을 네 개씩 묶어 간단히 한 후 계산한다.
(2) 괄호 안의 식을 간단히 한 후 i의 거듭제곱을 계산한다.

(1) $i+2i^2+3i^3+4i^4+5i^5+\cdots+20i^{20}$
$=(i+2i^2+3i^3+4i^4)+(5i^5+6i^6+7i^7+8i^8)+\cdots+(17i^{17}+18i^{18}+19i^{19}+20i^{20})$
$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)+\cdots+(17i-18-19i+20)$
$=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)$
$=5(2-2i)$
$=10-10i$

(2) $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\therefore \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{15}=(-i)^5+i^{15}$
$=-i^4\times i+(i^4)^3\times i^3$
$=-i+i^3$
$=-i-i=-2i$

필수 예제 02 음수의 제곱근의 계산 90쪽

02-1 답 (1) $-2\sqrt{2}+2i$ (2) $-8+i$

|전략| ① $a>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$
② $a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$
③ $a>0$, $b<0$일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

(1) $\sqrt{-2}\sqrt{-4}+\sqrt{2}\sqrt{-8}+\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}$
$=-\sqrt{8}+\sqrt{-16}-\sqrt{-4}=-2\sqrt{2}+\sqrt{16}i-\sqrt{4}i$
$=-2\sqrt{2}+4i-2i=-2\sqrt{2}+2i$

(2) $\sqrt{-6}\sqrt{-24}+\sqrt{-5}\sqrt{5}+\frac{\sqrt{-48}}{\sqrt{-3}}+\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{-3}}$
$=-\sqrt{144}+\sqrt{-25}+\sqrt{16}-\sqrt{-16}$
$=-12+\sqrt{25}i+4-\sqrt{16}i$
$=-12+5i+4-4i=-8+i$

02-2 답 $a=-5$, $b=-2$

|전략| ① $a>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$
② $a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$
③ $a>0$, $b<0$일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

$\sqrt{-3}\sqrt{-27}+(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})+\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{-8}}$
$=-\sqrt{81}+(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)-\sqrt{-4}$
$=-9+1-3i^2-\sqrt{4}i$
$=-9+1+3-2i=-5-2i$
$\therefore a=-5$, $b=-2$

필수 예제 03 음수의 제곱근의 성질 91쪽

03-1 답 $-a$

|전략| 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$일 때, $a<0$, $b<0$임을 이용한다.

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$, $a\neq0$, $b\neq0$에서 $a<0$, $b<0$이므로 $a+b<0$
따라서 $\sqrt{(a+b)^2}=|a+b|=-(a+b)$, $|b|=-b$이므로
$\sqrt{(a+b)^2}-|b|=-(a+b)-(-b)$
$=-a-b+b=-a$

03-2 답 0

|전략| 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$일 때, $a>0$, $b<0$임을 이용한다.

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$, $a\neq0$, $b\neq0$에서 $a>0$, $b<0$이므로 $a-b>0$
따라서 $|-a|=|a|=a$, $|b|=-b$, $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=a-b$이므로
$|-a|+|b|-\sqrt{(a-b)^2}=a+(-b)-(a-b)$
$=a-b-a+b=0$

개념 정리

92~93쪽

01 -1, 허수단위		**02** 실수부분, 허수부분	
03 $b=0$	**04** $a=0$	**05** $b\neq0$	**06** c, b
07 0, 0	**08** ㉢	**09** ㉡	**10** ㉠
11 $b+d$, $a-c$	**12** ad, $bc-ad$	**13** z_1	**14** 실수, 실수
15 $\overline{z_2}$	**16** $\overline{z_1}$	**17** -1, 1	**18** i, $-i$
19 $a<0$, $b<0$	**20** $a>0$, $b<0$		

08 $\overline{2+3i}=2-3i$

09 $\overline{1-2i}=1+2i$

10 $-7i=0-7i$이므로 $\overline{-7i}=7i$

중단원 마무리

94~96쪽

01 ④	**02** ②	**03** ⑤	**04** ②
05 ③	**06** $1-2i$, $-1-2i$		**07** -1
08 ③	**09** ①	**10** ④	**11** ⑤
12 ③	**13** 1	**14** 2	**15** ③
16 ①	**17** 25	**18** 1	**19** ④
20 ④	**21** $\frac{9}{4}$	**22** 15	**23** $-i$
24 0			

LEVEL 1

01 $(3-2i)(4+i)+\dfrac{-1+5i}{1-i}$

$=12+3i-8i+2+\dfrac{(-1+5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$=14-5i+\dfrac{-1-i+5i-5}{2}$

$=14-5i+\dfrac{-6+4i}{2}$

$=14-5i-3+2i=11-3i$

따라서 $a=11$, $b=-3$이므로

$a-b=14$

02 $z=i(x+i)^2=i(x^2+2xi-1)=x^2i-2x-i$

$=-2x+(x^2-1)i$

z가 실수가 되려면 $x^2-1=0$이어야 하므로

$(x+1)(x-1)=0 \qquad \therefore x=1\ (\because x>0)$

$x=1$일 때, $z=-2$

따라서 $a=1$, $b=-2$이므로

$a+b=-1$

03 $(x-i)(2+6i)-(2-yi)=2x+6xi-2i+6-2+yi$

$=(2x+4)+(6x+y-2)i$

즉, $(2x+4)+(6x+y-2)i=0$이므로

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x+4=0$, $6x+y-2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=14$

$\therefore x+y=12$

04 $\alpha+\beta=(1+3i)+(1-3i)=2$

$\alpha\beta=(1+3i)(1-3i)=1+9=10$

$\therefore \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=10\times2=20$

05 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$

ㄱ. $z-\bar{z}=0$에서 $(a+bi)-(a-bi)=0$

$2bi=0 \qquad \therefore b=0$

즉, z는 실수이다. (참)

ㄴ. $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

즉, $z+\bar{z}$와 $z\bar{z}$는 모두 실수이다. (참)

ㄷ. $iz=\bar{z}$에서 $\dfrac{\bar{z}}{z}=i$, $\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{1}{i}=-i$

$\therefore \dfrac{\bar{z}}{z}+\dfrac{z}{\bar{z}}=i-i=0$

즉, $iz=\bar{z}$이면 $\dfrac{\bar{z}}{z}+\dfrac{z}{\bar{z}}$는 실수이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

06 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$

$z-\bar{z}=-4i$에서 $(a+bi)-(a-bi)=4i$

$2bi=-4i$, $2b=-4 \qquad \therefore b=-2$

$z\bar{z}=5$에서 $(a+bi)(a-bi)=5$

$a^2+b^2=5$, $a^2=1$ ($\because b=-2$)

$\therefore a=\pm1$

따라서 구하는 복소수 z는 $z=1-2i$ 또는 $z=-1-2i$

07 $i+2i^2+3i^3+\cdots+50i^{50}$

$=(i+2i^2+3i^3+4i^4)+(5i+6i^6+7i^7+8i^8)$

$+\cdots+(45i^{45}+46i^{46}+47i^{47}+48i^{48})+49i^{49}+50i^{50}$

$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)$

$+\cdots+(45i-46-47i+48)+49i-50$

$=12(2-2i)+49i-50=-26+25i$

따라서 $a=-26$, $b=25$이므로 $a+b=-1$

08 $a\neq0$, $b\neq0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0$, $b<0$

① $ab>0$이므로 $|ab|=ab$

② $\sqrt{a^2}+|b|=|a|+|b|=-a-b$

③ $a+b<0$이므로 $|a+b|=-a-b$

$|a|+|b|=-a-b \qquad \therefore |a+b|=|a|+|b|$

④ $-a>0$, $b<0$이므로 $\sqrt{-a}\sqrt{b}=\sqrt{-ab}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

LEVEL 2

09 $(a-i)(a+i)(a^4-a^2+1)=(a^2+1)(a^4-a^2+1)=a^6+1$

이때, $a^3=2i$이므로

(주어진 식)$=a^6+1=(a^3)^2+1=(2i)^2+1$

$=-4+1=-3$

10 $(a+i)(b+i)=2-5i$에서

$(a+i)(b+i)=ab+ai+bi-1=(ab-1)+(a+b)i$

즉, $(ab-1)+(a+b)i=2-5i$이므로

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$ab-1=2$, $a+b=-5$이므로

$ab=3$, $a+b=-5$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(-5)^2-2\times3=19$

11 $z=(1+i)x^2-2(1-i)x-8$

$=(x^2-2x-8)+(x^2+2x)i$

z^2이 음의 실수가 되려면 z가 순허수이어야 하므로

$x^2-2x-8=0$, $x^2+2x\neq0$

$x^2-2x-8=0$에서 $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$ …… ㉠

$x^2+2x\neq0$에서 $x(x+2)\neq0$

$\therefore x\neq0$이고 $x\neq-2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x=4$

12 $x=\dfrac{5}{2-i}=\dfrac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{5(2+i)}{5}=2+i$

즉, $x=2+i$에서 $x-2=i$

양변을 제곱하면 $(x-2)^2=i^2$

$x^2-4x+4=-1$ $\quad\therefore x^2-4x+5=0$

$\therefore x^3-4x^2+5x+9=x(x^2-4x+5)+9$

$=x\times0+9=9$

다른 풀이 $x=\dfrac{5}{2-i}=\dfrac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{5(2+i)}{5}=2+i$

$x=2+i$를 x^3-4x^2+5x+9에 바로 대입하면

$(2+i)^3-4(2+i)^2+5(2+i)+9$

$=8+12i-6-i-4(4+4i-1)+10+5i+9=9$

13 $\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\alpha+\beta$에서 $\overline{\alpha+\beta}=\alpha+\beta$이므로 $\alpha+\beta$는 실수이다.

즉, $\alpha+\beta=(x-2i)+(3+yi)=(x+3)+(-2+y)i$에서

$\alpha+\beta$가 실수이므로

$-2+y=0$ $\quad\therefore y=2$

또, $\overline{\alpha}\times\overline{\beta}=\alpha\beta$에서 $\overline{\alpha\beta}=\alpha\beta$이므로 $\alpha\beta$는 실수이다.

즉, $\alpha\beta=(x-2i)(3+yi)=(3x+2y)+(xy-6)i$에서

$\alpha\beta$가 실수이므로

$xy-6=0$, $2x-6=0$ ($\because y=2$) $\quad\therefore x=3$

$\therefore x-y=1$

Lecture

(1) 0이 아닌 복소수 z의 켤레복소수를 $\overline{z}$라 할 때

① $z=\overline{z}$ ➡ z는 실수 ② $z=-\overline{z}$ ➡ z는 순허수

(2) 두 복소수 z_1, z_2의 켤레복소수를 각각 $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$라 할 때

① $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

② $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq0$)

14 $z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{3}$이므로

$\omega=\dfrac{6z+1}{3z-1}=\dfrac{2(1+\sqrt{3}i)+1}{(1+\sqrt{3}i)-1}=\dfrac{3+2\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i}$

$=\dfrac{(3+2\sqrt{3}i)\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i\times\sqrt{3}i}=\dfrac{-6+3\sqrt{3}i}{-3}=2-\sqrt{3}i$

따라서 $\overline{\omega}=2+\sqrt{3}i$이므로

$\omega^2+\overline{\omega}^2=(2-\sqrt{3}i)^2+(2+\sqrt{3}i)^2$

$=4-4\sqrt{3}i-3+4+4\sqrt{3}i-3=2$

15 $\dfrac{1}{z^2-1}$이 실수이므로 $\dfrac{1}{z^2-1}=\overline{\left(\dfrac{1}{z^2-1}\right)}$

이때, $\overline{\left(\dfrac{1}{z^2-1}\right)}=\dfrac{\overline{1}}{\overline{z^2-1}}=\dfrac{1}{\overline{z^2}-1}=\dfrac{1}{\overline{z}^2-1}$이므로

$\dfrac{1}{z^2-1}=\dfrac{1}{\overline{z}^2-1}$

즉, $z^2-1=\overline{z}^2-1$에서

$z^2-\overline{z}^2=0$ $\quad\therefore (z+\overline{z})(z-\overline{z})=0$

그런데 z는 실수가 아닌 복소수이므로 $z-\overline{z}\neq0$

$\therefore z+\overline{z}=0$

16 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$

ㄱ. $z\overline{z}=0$에서 $(a+bi)(a-bi)=0$

$a^2+b^2=0$ $\quad\therefore a=0$, $b=0$

즉, $z=0$이다. (참)

ㄴ. z가 순허수가 아닌 허수이므로 $a\neq0$, $b\neq0$

$z^2+z=(a+bi)^2+(a+bi)=a^2+2abi-b^2+a+bi$

$=(a^2-b^2+a)+b(2a+1)i$

이때, z^2+z가 실수이므로

$b(2a+1)=0$에서 $2a+1=0$ ($\because b\neq0$) $\quad\therefore a=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$

$=2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$ (거짓)

ㄷ. $z^2=(a+bi)^2=a^2+2abi-b^2=(a^2-b^2)+2abi$

z^2이 순허수이므로 $a^2-b^2=0$, $ab\neq0$

$\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{a+bi}{a-bi}=\dfrac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}$

$=\dfrac{(a^2-b^2)+2abi}{a^2+b^2}=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}i$ ($\because a^2-b^2=0$)

즉, $ab\neq0$이므로 $\dfrac{z}{\overline{z}}$는 순허수이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

다른 풀이 ㄷ. [반례] $z=1+i$라 하면

$z^2=(1+i)^2=1+2i-1=2i$이므로 z^2은 순허수이다.

이때, $\frac{z}{\bar{z}}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$\frac{z}{\bar{z}}$는 순허수이다. (거짓)

17 주어진 등식에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 대입하면

$n=1$일 때, $i+\frac{1}{i}=i-i=0$

$n=2$일 때, $i^2+\frac{1}{i^2}=-1+\frac{1}{-1}=-2$

$n=3$일 때, $i^3+\frac{1}{i^3}=-i+\frac{1}{-i}=-i+i=0$

$n=4$일 때, $i^4+\frac{1}{i^4}=1+\frac{1}{1}=2$

$n=5$일 때, $i^5+\frac{1}{i^5}=i+\frac{1}{i}=0$

⋮

따라서 주어진 등식이 성립하는 10 이하의 자연수 n은 1, 3, 5, 7, 9이므로 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$1+3+5+7+9=25$

참고 $\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i$, $\frac{1}{i^2}=\frac{1}{-1}=-1$,

$\frac{1}{i^3}=\frac{1}{-i}=\frac{i}{-i^2}=i$, $\frac{1}{i^4}=\frac{1}{1}=1$이므로

(1) 음이 아닌 정수 k에 대하여

$$\frac{1}{i}=\frac{1}{i^5}=\frac{1}{i^9}=\cdots=\frac{1}{i^{4k+1}}=-i$$

$$\frac{1}{i^2}=\frac{1}{i^6}=\frac{1}{i^{10}}=\cdots=\frac{1}{i^{4k+2}}=-1$$

$$\frac{1}{i^3}=\frac{1}{i^7}=\frac{1}{i^{11}}=\cdots=\frac{1}{i^{4k+3}}=i$$

$$\frac{1}{i^4}=\frac{1}{i^8}=\frac{1}{i^{12}}=\cdots=\frac{1}{i^{4k+4}}=1$$

(2) $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=-i-1+i+1=0$

18 $\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\frac{4}{i^4}+\cdots+\frac{30}{i^{30}}$

$$=\left(\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\frac{4}{i^4}\right)+\left(\frac{5}{i^5}+\frac{6}{i^6}+\frac{7}{i^7}+\frac{8}{i^8}\right)+\cdots+\left(\frac{25}{i^{25}}+\frac{26}{i^{26}}+\frac{27}{i^{27}}+\frac{28}{i^{28}}\right)+\frac{29}{i^{29}}+\frac{30}{i^{30}}$$

$$=(-i-2+3i+4)+(-5i-6+7i+8)+\cdots+(-25i-26+27i+28)-29i-30$$

$=(2+2i)+(2+2i)+\cdots+(2+2i)-29i-30$

$=7(2+2i)-29i-30$

$=14+14i-29i-30$

$=-16-15i$

따라서 $a=-16$, $b=-15$이므로

$b-a=1$

19 $a\neq0$, $b\neq0$일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이므로 $a>0$, $b<0$

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

② $\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=|a|\times|b|=a\times(-b)=-ab$

③ $a>0$, $-b>0$이므로 $\sqrt{a}\sqrt{-b}=\sqrt{-ab}$

④ $-a<0$, $-b>0$이므로 $\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{ab}$

⑤ $a-b>0$이므로 $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=a-b$

20 (가)에서 $\sqrt{a}\sqrt{-b}=-\sqrt{-ab}$이므로

$a<0$, $-b<0$ $\quad\therefore a<0$, $b>0$ ······ ㉠

(나)에서 $a=b+c$이므로

$b=a-c>0$ $\quad\therefore a>c$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $c<a<b$

서술형

21 $\bar{\alpha}=\alpha$이므로 α는 실수이고, ··· ❶

$\bar{\beta}=-\beta$이므로 β는 순허수이다. ··· ❷

즉, $\alpha=a$, $\beta=bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)로 놓으면

$\overline{\alpha+\beta}=3-2i$에서

$\overline{a+bi}=3-2i$, $a-bi=3-2i$

$\therefore a=3$, $b=2$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=2i$이므로 ··· ❸

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{3}{2i}\times\overline{\left(\frac{3}{2i}\right)}$$

$$=-\frac{3}{2}i\times\frac{3}{2}i=\frac{9}{4}$$ ··· ❹

채점 기준	비율
❶ α가 실수임을 알 수 있다.	20 %
❷ β가 순허수임을 알 수 있다.	20 %
❸ 주어진 조건을 이용하여 α, β를 구할 수 있다.	30 %
❹ $\frac{\alpha}{\beta}\times\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

22 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$z^2=a^2+2abi-b^2=(a^2-b^2)+2abi$

즉, $z^2=9+12i$에서 $(a^2-b^2)+2abi=9+12i$이므로

$a^2-b^2=9$, $ab=6$ ··· ❶

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$에서

$(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+4a^2b^2$

$=9^2+4\times6^2=225$ ··· ❷

$\therefore z\bar{z}=a^2+b^2=15$ ($\because z\bar{z}=a^2+b^2>0$) ··· ❸

채점 기준	비율
❶ $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 곱셈 공식을 이용하여 $(a^2+b^2)^2$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $z\bar{z}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

23 처음 프로그램에 입력한 복소수를 z라 하고 z를 입력하여 출력하는 과정을 n번 시행하였을 때 출력되는 복소수를 z_n이라 하면
입력하여 출력하는 과정을 1번 시행하여 나온 결과는
$z_1=z(1+i)$
입력하여 출력하는 과정을 2번 시행하여 나온 결과는
$z_2=z_1(1+i)=z(1+i)\times(1+i)=z(1+i)^2$
입력하여 출력하는 과정을 3번 시행하여 나온 결과는
$z_3=z_2(1+i)=z(1+i)^2\times(1+i)=z(1+i)^3$
⋮
이와 같이 이 프로그램에 z를 입력하여 출력하는 과정을 10번 시행하여 나온 결과는 $z(1+i)^{10}$이다.
$\therefore z(1+i)^{10}=32$ …… ㉠ … ❶
이때, $(1+i)^2=1+2i-1=2i$이므로
$$z(1+i)^{10}=z\{(1+i)^2\}^5=z(2i)^5=2^5i^5z=32i\times z$$
㉠에서 $32i\times z=32$이므로
$$z=\frac{32}{32i}=\frac{1}{i}=-i$$
따라서 이 프로그램에 처음 입력한 복소수는 $-i$이다. … ❷

채점 기준	비율
❶ 프로그램에 처음 입력한 복소수를 z라 할 때, 입력하여 출력하는 과정을 10번 시행하여 나온 결과를 z에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ 프로그램에 처음 입력한 복소수 z를 구할 수 있다.	50 %

24 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$
$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$
이므로 $f(n)=(-i)^n+i^n$ … ❶
(i) n이 홀수일 때,
$f(n)=(-i)^n+i^n=-i^n+i^n=0$
(ii) n이 짝수일 때,
$f(n)=(-i)^n+i^n=i^n+i^n=2i^n$ … ❷
$$\begin{aligned}\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)&=f(2)+f(4)+f(6)+\cdots+f(100)\\&=2i^2+2i^4+2i^6+2i^8+\cdots+2i^{100}\\&=2(i^2+i^4)+2(i^6+i^8)+\cdots+2(i^{98}+i^{100})\\&=2(-1+1)+2(-1+1)+\cdots+2(-1+1)\\&=0\end{aligned}$$ … ❸

채점 기준	비율
❶ $f(n)$을 간단히 정리할 수 있다.	30 %
❷ n이 홀수일 때와 짝수일 때의 $f(n)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

참고 복소수 z에 대하여 z^n (n은 자연수)의 값을 구할 때는 다음을 이용한다.
(1) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$ 꼴 ➡ $\frac{1+i}{1-i}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=-i$임을 이용한다.
(2) $(1+i)^n$, $(1-i)^n$ 꼴 ➡ $(1+i)^2=2i$, $(1-i)^2=-2i$임을 이용한다.

5 이차방정식

Review 일차방정식의 풀이

개념 확인 98~99쪽

1 (1) (i) $a\neq3$일 때, $x=-\frac{2}{a-3}$
(ii) $a=3$일 때, 해가 없다.
(2) (i) $a\neq-1$일 때, $x=a-1$
(ii) $a=-1$일 때, 해가 무수히 많다.

2 (1) $x=-2$ 또는 $x=6$ (2) $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$
(3) $x=\frac{1}{2}$ (4) $x=-3$ 또는 $x=2$

1 (1) $(a-3)x=-2$에서
(i) $a-3\neq0$, 즉 $a\neq3$일 때, $x=-\frac{2}{a-3}$
(ii) $a-3=0$, 즉 $a=3$일 때, $0\times x=-2$
이를 만족시키는 x의 값은 존재하지 않으므로 해가 없다.
(2) $(a+1)x=(a+1)(a-1)$에서
(i) $a+1\neq0$, 즉 $a\neq-1$일 때,
$x=\frac{(a+1)(a-1)}{a+1}=a-1$
(ii) $a+1=0$, 즉 $a=-1$일 때, $0\times x=0$
이를 만족시키는 x의 값은 무수히 많으므로 해가 무수히 많다.

2 (1) $|x-2|=4$에서 $x-2=\pm4$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=6$
(2) $|2x-1|=x$에서
(i) $x<\frac{1}{2}$일 때, $2x-1<0$이므로
$-(2x-1)=x$, $3x=1$ $\therefore x=\frac{1}{3}$
이때, $x=\frac{1}{3}$은 $x<\frac{1}{2}$을 만족시키므로 해이다.
(ii) $x\geq\frac{1}{2}$일 때, $2x-1\geq0$이므로
$2x-1=x$ $\therefore x=1$
이때, $x=1$은 $x\geq\frac{1}{2}$을 만족시키므로 해이다.
(i), (ii)에서 구하는 해는 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$
(3) $|x+1|=3x$에서
(i) $x<-1$일 때, $x+1<0$이므로
$-(x+1)=3x$, $4x=-1$ $\therefore x=-\frac{1}{4}$
그런데 $x=-\frac{1}{4}$은 $x<-1$을 만족시키지 않으므로 해가 아니다.

(ii) $x \ge -1$일 때, $x+1 \ge 0$이므로

$x+1=3x$, $2x=1$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}$

이때, $x=\frac{1}{2}$은 $x \ge -1$을 만족시키므로 해이다.

(i), (ii)에서 구하는 해는 $x=\frac{1}{2}$

(4) $|x+2|+|x-1|=5$에서

(i) $x<-2$일 때, $x+2<0$, $x-1<0$이므로

$-(x+2)-(x-1)=5$, $-2x=6$ $\quad\therefore x=-3$

이때, $x=-3$은 $x<-2$를 만족시키므로 해이다.

(ii) $-2 \le x<1$일 때, $x+2 \ge 0$, $x-1<0$이므로

$(x+2)-(x-1)=5$, $0 \times x=2$

이를 만족시키는 x의 값은 존재하지 않으므로 해가 없다.

(iii) $x \ge 1$일 때, $x+2>0$, $x-1 \ge 0$이므로

$(x+2)+(x-1)=5$, $2x=4$ $\quad\therefore x=2$

이때, $x=2$는 $x \ge 1$을 만족시키므로 해이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 해는 $x=-3$ 또는 $x=2$

1 이차방정식의 풀이

개념 확인 100쪽

1 (1) $x=-4$ 또는 $x=2$ (2) $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$

(3) $x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ (4) $x=-2\pm\sqrt{3}i$

1 (1) $(x+4)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

(2) $(2x+1)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$

(3) $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

(4) $x=-2\pm\sqrt{2^2-1\times7}=-2\pm\sqrt{3}i$

개념 드릴

101쪽

1 (1) $x=-1$ 또는 $x=3$ (2) $x=-2$ 또는 $x=2$

(3) $x=-1$ 또는 $x=5$ (4) $x=-2$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

(5) $x=\frac{3}{2}$ (중근) (6) $x=-\frac{5}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

2 (1) $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ (2) $x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$ (3) $x=\frac{1\pm\sqrt{35}i}{6}$

(4) $x=-3\pm2\sqrt{2}$ (5) $x=2\pm\sqrt{10}$ (6) $x=1\pm2i$

1 (1) $(x+1)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

(2) $(x+2)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

(3) $(x+1)(x-5)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

(4) $(x+2)(3x-2)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

(5) $\frac{4}{3}x^2-4x+3=0$의 양변에 3을 곱하면

$4x^2-12x+9=0$, $(2x-3)^2=0$ $\quad\therefore x=\frac{3}{2}$ (중근)

(6) $(2x+5)(2x-5)=0$ $\quad\therefore x=-\frac{5}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

2 (1) $x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

(2) $x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times2\times1}}{2\times2}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$

(3) $x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times3\times3}}{2\times3}=\frac{1\pm\sqrt{35}i}{6}$

(4) $x=-3\pm\sqrt{3^2-1\times1}=-3\pm2\sqrt{2}$

(5) $\frac{1}{2}x^2-2x-3=0$의 양변에 2를 곱하면

$x^2-4x-6=0$

$\therefore x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\times(-6)}=2\pm\sqrt{10}$

(6) $x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\times5}=1\pm2i$

필수 예제 01 이차방정식의 풀이

102쪽

01-1 답 (1) $x=-1$ 또는 $x=4$ (2) $x=-1\pm i$

(3) $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{2}$

|전략| 인수분해 또는 근의 공식을 이용하여 해를 구한다.

(1) $x^2+x=4(x+1)$에서

$x^2+x=4x+4$, $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

(2) $\frac{(x-2)^2}{2}=-3x+1$의 양변에 2를 곱하면

$(x-2)^2=-6x+2$

$x^2-4x+4=-6x+2$, $x^2+2x+2=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{1^2-1\times2}=-1\pm i$

(3) $(\sqrt{2}+1)x^2-x-2-\sqrt{2}=0$의 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면

$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2-(\sqrt{2}-1)x-(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)=0$

$\therefore x^2-(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$

좌변을 실수의 범위에서 인수분해하면

$(x+1)(x-\sqrt{2})=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=\sqrt{2}$

필수 예제 02 이차방정식의 한 근이 주어질 때 미정계수 구하기

103쪽

02-1 답 (1) $k=1$, 다른 한 근: 2 (2) -4

|전략| 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 α이면 $f(\alpha)=0$을 만족시킨다.

(1) $x^2+kx-3k-3=0$에 $x=-3$을 대입하면

$(-3)^2-3k-3k-3=0$

$-6k+6=0$ $\quad\therefore k=1$

$k=1$을 주어진 방정식에 대입하면

$x^2+x-6=0$, $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 다른 한 근은 2이다.

(2) $x^2+(2a-1)x+a^2-8=0$에 $x=1$을 대입하면

$1^2+(2a-1)+a^2-8=0$

$a^2+2a-8=0$, $(a+4)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

$a=2$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

따라서 다른 한 근은 -4이다.

02-2 답 -1

|전략| $x=-2$를 주어진 이차방정식에 대입하여 상수 k의 값을 먼저 구한다.

$kx^2-2x+k^2=0$에 $x=-2$를 대입하면

$4k+4+k^2=0$, $(k+2)^2=0$　　$\therefore k=-2$

$k=-2$를 주어진 방정식에 대입하면

$-2x^2-2x+4=0$, $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$　　$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 다른 한 근은 1이므로 $\alpha=1$

$\therefore k+\alpha=-1$

필수 예제 03 절댓값 기호를 포함한 이차방정식의 풀이 104쪽

03-1 답 (1) $x=-1$ 또는 $x=1$　(2) $x=-1-\sqrt{5}$ 또는 $x=\sqrt{2}$　(3) $x=-1$ 또는 $x=5$　(4) $x=-1$ 또는 $x=0$

|전략| 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나누어 절댓값 기호를 없앤 다음 푼다. 이때, 범위를 만족시키는 것만 주어진 방정식의 해이다.

(1) $x^2+|x|-2=0$에서

(i) $x<0$일 때

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1\ (\because x<0)$

(ii) $x\geq0$일 때

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=1\ (\because x\geq0)$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $x=-1$ 또는 $x=1$

다른 풀이 $x^2+|x|-2=0$에서 $x^2=|x|^2$이므로

$|x|^2+|x|-2=0$, $(|x|+2)(|x|-1)=0$

$\therefore |x|=-2$ 또는 $|x|=1$

그런데 $|x|\geq0$이므로 $|x|=1$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

(2) $x^2+x-3=|x-1|$에서

(i) $x<1$일 때

$x^2+x-3=-(x-1)$, $x^2+2x-4=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{1^2-1\times(-4)}=-1\pm\sqrt{5}$

그런데 $x<1$이어야 하므로 $x=-1-\sqrt{5}$

(ii) $x\geq1$일 때

$x^2+x-3=x-1$, $x^2-2=0$

$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$　　$\therefore x=\sqrt{2}\ (\because x\geq1)$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $x=-1-\sqrt{5}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

(3) $x^2-4x+1=2|x-2|$에서

(i) $x<2$일 때

$x^2-4x+1=-2(x-2)$, $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$　　$\therefore x=-1\ (\because x<2)$

(ii) $x\geq2$일 때

$x^2-4x+1=2(x-2)$, $x^2-6x+5=0$

$(x-1)(x-5)=0$　　$\therefore x=5\ (\because x\geq2)$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $x=-1$ 또는 $x=5$

(4) $x^2+|3x+2|-2=0$에서

(i) $x<-\frac{2}{3}$일 때

$x^2-(3x+2)-2=0$, $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$　　$\therefore x=-1\left(\because x<-\frac{2}{3}\right)$

(ii) $x\geq-\frac{2}{3}$일 때

$x^2+(3x+2)-2=0$, $x^2+3x=0$

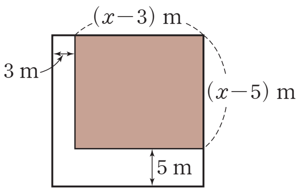
$x(x+3)=0$　　$\therefore x=0\left(\because x\geq-\frac{2}{3}\right)$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $x=-1$ 또는 $x=0$

필수 예제 04 이차방정식의 활용 105쪽

04-1 답 $400\ \mathrm{m}^2$

|전략| 처음 토지의 한 변의 길이를 x m로 놓고 방정식을 세운다.



처음 토지의 한 변의 길이를 x m $(x>5)$라 하면 길을 제외한 토지의 모양은 오른쪽 그림과 같다.

길을 제외한 토지의 넓이가 $255\ \mathrm{m}^2$이므로

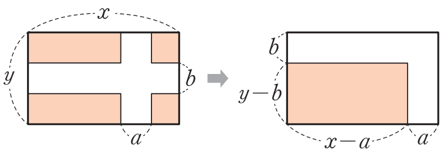
$(x-3)(x-5)=255$

$x^2-8x+15=255$, $x^2-8x-240=0$

$(x+12)(x-20)=0$　　$\therefore x=20\ (\because x>5)$

따라서 처음 토지의 한 변의 길이가 20 m이므로 처음 토지의 넓이는 $400\ \mathrm{m}^2$이다.

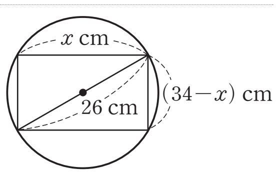
참고 일정한 간격만큼 떨어져 있는 도형의 넓이는 떨어져 있는 도형을 이동하여 붙여서 생각한다.



(색칠한 부분의 넓이) $=$ $(x-a)(y-b)$

04-2 답 24 cm

|전략| 직사각형의 가로의 길이를 x cm라 하면 세로의 길이는 $(34-x)$ cm이다. 또, 직사각형의 대각선의 길이는 원의 지름의 길이와 같다.



직사각형의 가로의 길이를 x cm라 하면 직사각형의 둘레의 길이가 68 cm이므로 세로의 길이는 $(34-x)$ cm이다.

직사각형의 대각선의 길이는 원의 지름의 길이와 같은 26 cm이므로
$x^2+(34-x)^2=26^2$, $x^2+1156-68x+x^2=676$
$x^2-34x+240=0$, $(x-10)(x-24)=0$
$\therefore$ $x=10$ 또는 $x=24$
이때, 직사각형의 가로의 길이가 세로의 길이보다 길어야 하므로 구하는 직사각형의 가로의 길이는 24 cm이다.

2 이차방정식의 판별식

개념 확인 106~107쪽

1 (1) 서로 다른 두 실근 (2) 중근 (3) 서로 다른 두 허근
2 ㄱ, ㄹ, ㅁ
3 (1) -1, 7 (2) 3 (3) -9, -1 (4) 1, 3

1 (1) $2x^2-2x-1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\times(-1)=3>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(2) $x^2+4x+4=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-1\times4=0$
이므로 중근을 갖는다.
(3) $x^2-x+2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-4\times1\times2=-7<0$
이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

2 ㄱ. $x^2-5x+2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-5)^2-4\times1\times2=17>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄴ. $x^2+6x+10=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=3^2-1\times10=-1<0$
이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.
ㄷ. $2x^2-4x+3=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-2\times3=-2<0$
이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.
ㄹ. $4x^2+3x-1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=3^2-4\times4\times(-1)=25>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㅁ. $6x^2-x-2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-4\times6\times(-2)=49>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㅂ. $9x^2-6x+1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-3)^2-9\times1=0$
이므로 중근을 갖는다.
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다.

3 (1) 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식
$x^2+(k+1)x+2(k+1)=0$의 판별식을 D라 할 때
$D=(k+1)^2-4\times1\times2(k+1)=0$
$k^2-6k-7=0$, $(k+1)(k-7)=0$
$\therefore$ $k=-1$ 또는 $k=7$
(2) 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식
$x^2-2kx+k^2-2k+6=0$의 판별식을 D라 할 때
$\frac{D}{4}=(-k)^2-1\times(k^2-2k+6)=0$
$2k-6=0$ $\therefore$ $k=3$
(3) 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식
$x^2+(k-3)x-4k=0$의 판별식을 D라 할 때
$D=(k-3)^2-4\times1\times(-4k)=0$
$k^2+10k+9=0$, $(k+9)(k+1)=0$
$\therefore$ $k=-9$ 또는 $k=-1$
(4) 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식
$x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4=0$의 판별식을 D라 할 때
$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-1\times(2k^2-6k+4)=0$
$k^2-4k+3=0$, $(k-1)(k-3)=0$
$\therefore$ $k=1$ 또는 $k=3$

개념 드릴 108쪽

1 (1) 서로 다른 두 실근 (2) 서로 다른 두 허근
(3) 서로 다른 두 실근 (4) 중근
(5) 서로 다른 두 허근 (6) 중근
(7) 서로 다른 두 허근
2 (1) $k<-\frac{3}{4}$ (2) $k=-\frac{3}{4}$ (3) $k>-\frac{3}{4}$
3 (1) $k>-2$ (2) $k=-2$ (3) $k<-2$

1 (1) $x^2-3x-2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-3)^2-4\times1\times(-2)=17>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(2) $x^2-5x+7=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-5)^2-4\times1\times7=-3<0$
이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.
(3) $3x^2+6x+2=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=3^2-3\times2=3>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(4) $4x^2+4x+1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-4\times1=0$
이므로 중근을 갖는다.

(5) $5x^2+2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-5\times1=-4<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(6) $x^2-4\sqrt{2}x+8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2\sqrt{2})^2-1\times8=0$

이므로 중근을 갖는다.

(7) $2x^2-7x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-7)^2-4\times2\times9=-23<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

2 $x^2-3x+k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times1\times(k+3)=-4k-3$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$-4k-3>0 \quad \therefore k<-\frac{3}{4}$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$-4k-3=0 \quad \therefore k=-\frac{3}{4}$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$-4k-3<0 \quad \therefore k>-\frac{3}{4}$

3 $2x^2+4x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-2\times(-k)=2k+4$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$2k+4>0 \quad \therefore k>-2$

(2) 중근을 가지려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$2k+4=0 \quad \therefore k=-2$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$2k+4<0 \quad \therefore k<-2$

필수 예제 01 이차방정식의 근의 판별 109쪽

01-1 답 (1) $k<-2$ 또는 $-2<k<\frac{2}{3}$ (2) $k=\frac{2}{3}$ (3) $k>\frac{2}{3}$

|전략| 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 실근, 허근을 가지는 경우를 따질 때는 판별식 $D=b^2-4ac$의 부호를 조사한다. 이때, $a\neq0$임에 주의한다.

$(k+2)x^2-2(k-2)x+k=0$이 이차방정식이므로

$k+2\neq0 \quad \therefore k\neq-2$

$(k+2)x^2-2(k-2)x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-2)\}^2-(k+2)\times k=-6k+4$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$-6k+4>0 \quad \therefore k<\frac{2}{3}$

그런데 $k\neq-2$이므로 $k<-2$ 또는 $-2<k<\frac{2}{3}$

(2) 중근을 가지려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$-6k+4=0 \quad \therefore k=\frac{2}{3}$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$-6k+4<0 \quad \therefore k>\frac{2}{3}$

01-2 답 $-\frac{9}{4}\leq a<0$ 또는 $a>0$

|전략| 이차방정식 $ax^2-3x-1=0$이 실근을 가지려면 판별식 D가 $D\geq0$이어야 한다. 이때, $a\neq0$임에 주의한다.

$ax^2-3x-1=0$이 이차방정식이므로 $a\neq0$

$ax^2-3x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times a\times(-1)=4a+9$

이 이차방정식이 실근을 가지려면 $D\geq0$이어야 하므로

$4a+9\geq0 \quad \therefore a\geq-\frac{9}{4}$

그런데 $a\neq0$이므로 $-\frac{9}{4}\leq a<0$ 또는 $a>0$

01-3 답 5

|전략| 이차방정식 $kx^2+6kx+3k+12=0$이 중근을 가지려면 판별식 D가 $D=0$이어야 한다. 이때, $k\neq0$임에 주의한다.

$kx^2+6kx+3k+12=0$이 이차방정식이므로 $k\neq0$

$kx^2+6kx+3k+12=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(3k)^2-k(3k+12)=6k^2-12k$

이 이차방정식이 중근을 가지려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$6k^2-12k=0,\ k(k-2)=0 \quad \therefore k=0$ 또는 $k=2$

그런데 $k\neq0$이므로 $k=2$

$k=2$를 주어진 방정식에 대입하면

$2x^2+12x+18=0,\ (x+3)^2=0 \quad \therefore x=-3$ (중근)

따라서 $\alpha=-3$이므로 $k-\alpha=5$

필수 예제 02 이차식이 완전제곱식이 될 조건 110쪽

02-1 답 (1) 2, 10 (2) -2 (3) $\frac{7}{3}$

|전략| 이차식이 완전제곱식이 된다는 것은 (이차식)$=0$이 중근을 가진다는 뜻이므로 판별식 $D=0$이다.

(1) 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $x^2+(k-4)x+k-1=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때

$D=(k-4)^2-4(k-1)=0$

$k^2-12k+20=0,\ (k-2)(k-10)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=10$

(2) $kx^2-4kx-8$이 이차식이므로 $k\neq0$
주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식
$kx^2-4kx-8=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때
$\frac{D}{4}=(-2k)^2+8k=0$
$4k^2+8k=0,\ k(k+2)=0\qquad \therefore k=0$ 또는 $k=-2$
그런데 $k\neq0$이므로 $k=-2$

(3) $(k+3)x^2+(k+3)x+k-1$이 이차식이므로
$k+3\neq0\qquad \therefore k\neq-3$
주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식
$(k+3)x^2+(k+3)x+k-1=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때
$D=(k+3)^2-4(k+3)(k-1)=0$
$(k+3)\{k+3-4(k-1)\}=0,\ (k+3)(-3k+7)=0$
$\therefore k=-3$ 또는 $k=\frac{7}{3}$
그런데 $k\neq-3$이므로 $k=\frac{7}{3}$

3 이차방정식의 근과 계수의 관계

개념 확인 111~113쪽

1 (1) $\alpha+\beta=-7,\ \alpha\beta=-2$ (2) $\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=\frac{1}{2}$
(3) $\alpha+\beta=\frac{3}{2},\ \alpha\beta=-\frac{5}{2}$ (4) $\alpha+\beta=\frac{2}{3},\ \alpha\beta=\frac{4}{3}$
2 $a=6,\ b=2$
3 (1) $x^2-4x+3=0$ (2) $x^2-2x-1=0$
4 $5x^2+3x-2=0$
5 (1) $(x+2-\sqrt{11})(x+2+\sqrt{11})$ (2) $(x-1-3i)(x-1+3i)$
6 (1) $1+\sqrt{3}$ (2) $-2-\sqrt{2}$ (3) $-\sqrt{7}+3$ (4) $-4+\sqrt{5}$
7 (1) $1-2i$ (2) $-3-4i$ (3) $2+\sqrt{2}i$ (4) $-\sqrt{7}i-\sqrt{5}$

2 (두 근의 합)$=-\frac{-3}{a}=\frac{1}{2}\qquad \therefore a=6$
(두 근의 곱)$=\frac{b}{a}=\frac{1}{3},\ \frac{b}{6}=\frac{1}{3}\qquad \therefore b=2$

3 (1) (두 근의 합)$=1+3=4$, (두 근의 곱)$=1\times3=3$
이므로 구하는 이차방정식은 $x^2-4x+3=0$
(2) (두 근의 합)$=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$
(두 근의 곱)$=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$
이므로 구하는 이차방정식은 $x^2-2x-1=0$

4 (두 근의 합)$=-1+\frac{2}{5}=-\frac{3}{5}$
(두 근의 곱)$=-1\times\frac{2}{5}=-\frac{2}{5}$
이므로 구하는 이차방정식은 $5\left(x^2+\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}\right)=0$
$\therefore 5x^2+3x-2=0$

5 (1) $x^2+4x-7=0$의 근을 구하면
$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\times(-7)}=-2\pm\sqrt{11}$
$\therefore x^2+4x-7=\{x-(-2+\sqrt{11})\}\{x-(-2-\sqrt{11})\}$
$=(x+2-\sqrt{11})(x+2+\sqrt{11})$
(2) $x^2-2x+10=0$의 근을 구하면
$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\times10}=1\pm3i$
$\therefore x^2-2x+10=\{x-(1+3i)\}\{x-(1-3i)\}$
$=(x-1-3i)(x-1+3i)$

개념 드릴 114쪽

1 (1) $\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-5$ (2) $\alpha+\beta=\frac{3}{2},\ \alpha\beta=2$
(3) $\alpha+\beta=\frac{1}{3},\ \alpha\beta=\frac{1}{3}$ (4) $\alpha+\beta=-\sqrt{2},\ \alpha\beta=\frac{3}{2}$
2 (1) $x^2-3x-4=0$ (2) $x^2+\frac{7}{6}x-\frac{1}{2}=0$
(3) $x^2-4x+1=0$ (4) $x^2-6x+13=0$
3 (1) $(x-1-\sqrt{6})(x-1+\sqrt{6})$
(2) $(x+3-\sqrt{2}i)(x+3+\sqrt{2}i)$
(3) $(2x-1-\sqrt{2}i)(2x-1+\sqrt{2}i)$
4 (1) $3+\sqrt{6}$ (2) $-1+\sqrt{5}$ (3) $-\sqrt{3}-4$
5 (1) $-1+2i$ (2) $i+5$ (3) $-\sqrt{5}i-\sqrt{3}$

2 (1) (두 근의 합)$=-1+4=3$
(두 근의 곱)$=-1\times4=-4$
이므로 구하는 이차방정식은 $x^2-3x-4=0$
(2) (두 근의 합)$=-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{7}{6}$
(두 근의 곱)$=-\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}$
이므로 구하는 이차방정식은 $x^2+\frac{7}{6}x-\frac{1}{2}=0$
(3) (두 근의 합)$=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$
(두 근의 곱)$=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$
이므로 구하는 이차방정식은 $x^2-4x+1=0$
(4) (두 근의 합)$=(3+2i)+(3-2i)=6$
(두 근의 곱)$=(3+2i)(3-2i)=13$
이므로 구하는 이차방정식은 $x^2-6x+13=0$

3 (1) $x^2-2x-5=0$의 근을 구하면 $x=1\pm\sqrt{6}$
$\therefore x^2-2x-5=\{x-(1+\sqrt{6})\}\{x-(1-\sqrt{6})\}$
$=(x-1-\sqrt{6})(x-1+\sqrt{6})$
(2) $x^2+6x+11=0$의 근을 구하면 $x=-3\pm\sqrt{2}i$
$\therefore x^2+6x+11=\{x-(-3+\sqrt{2}i)\}\{x-(-3-\sqrt{2}i)\}$
$=(x+3-\sqrt{2}i)(x+3+\sqrt{2}i)$
(3) $4x^2-4x+3=0$의 근을 구하면
$x=\frac{2\pm2\sqrt{2}i}{4}=\frac{1\pm\sqrt{2}i}{2}$
$\therefore 4x^2-4x+3=4\left(x-\frac{1+\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{2}i}{2}\right)$
$=(2x-1-\sqrt{2}i)(2x-1+\sqrt{2}i)$

필수 예제 01 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기

115쪽

01-1 답 (1) $-\frac{4}{3}$ (2) 22 (3) $\frac{100}{9}$ (4) -6

|전략| 주어진 식을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 포함하는 식으로 변형하여 근과 계수의 관계를 이용한다.

$x^2-4x-3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-3$

(1) $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}$

$=-3+2-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$

(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=4^2-2\times(-3)=16+6=22$

(3) $\frac{\beta}{\alpha^2}+\frac{\alpha}{\beta^2}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}$

$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2}$

$=\frac{4^3-3\times(-3)\times 4}{(-3)^2}=\frac{64+36}{9}=\frac{100}{9}$

(4) $(\alpha^2-5\alpha)(\beta^2-5\beta)=\alpha^2\beta^2-5\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2+25\alpha\beta$

$=\alpha\beta\{\alpha\beta-5(\alpha+\beta)+25\}$

$=-3\times\{-3-5\times 4+25\}$

$=-3\times 2=-6$

다른 풀이 $x^2-4x-3=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-4\alpha-3=0$, $\beta^2-4\beta-3=0$

따라서 $\alpha^2-5\alpha=-\alpha+3$, $\beta^2-5\beta=-\beta+3$이므로

$(\alpha^2-5\alpha)(\beta^2-5\beta)=(-\alpha+3)(-\beta+3)$

$=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9$

$=-3-3\times 4+9=-6$

필수 예제 02 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수 구하기

116쪽

02-1 답 -2, 6

|전략| 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha^2+\beta^2=14$를 k에 대한 식으로 변형한다.

$x^2-(k+2)x+4k+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k+2$, $\alpha\beta=4k+1$

$\alpha^2+\beta^2=14$이고, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$이므로

$(k+2)^2-2(4k+1)=14$

$k^2-4k-12=0$, $(k+2)(k-6)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=6$

02-2 답 1

|전략| 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta=\alpha^2+\beta^2$을 a에 대한 식으로 변형한다.

$x^2+ax+a=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=a$

$\alpha+\beta=\alpha^2+\beta^2$이고, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$이므로

$-a=(-a)^2-2a$, $a^2-a=0$

$a(a-1)=0$ $\quad\therefore a=0$ 또는 $a=1$

이때, $a=0$이면 $x^2=0$에서 $\alpha=\beta=0$이 되어 주어진 조건 $\alpha\neq\beta$에 맞지 않으므로

$a=1$

02-3 답 $a=1$, $b=2$

|전략| 주어진 식을 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b에 대한 식으로 변형한 후 연립하여 푼다.

$x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=2$에서

$b-a+1=2$ $\quad\therefore a-b=-1$ …… ㉠

$(2\alpha+1)(2\beta+1)=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1=7$에서

$4b-2a+1=7$ $\quad\therefore a-2b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=2$

필수 예제 03 두 근이 주어진 이차방정식

117쪽

03-1 답 $a=2$, $b=-1$

|전략| 이차방정식 $x^2+ax+3=0$의 두 근이 α, β이므로 $\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=3$이고, 이차방정식 $x^2+bx-6=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 $(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-b$, $(\alpha+\beta)\alpha\beta=-6$이다.

$x^2+ax+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=3$ …… ㉠

$x^2+bx-6=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-b$, $(\alpha+\beta)\alpha\beta=-6$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a+3=-b$, $-3a=-6$

$\therefore a=2$, $b=-1$

03-2 답 $a=1$, $b=1$

|전략| 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 $\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$이고, 이차방정식 $x^2-bx+a=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로 $(\alpha+1)+(\beta+1)=b$, $(\alpha+1)(\beta+1)=a$이다.

$x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$ …… ㉠

$x^2-bx+a=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+1)+(\beta+1)=b$, $(\alpha+1)(\beta+1)=a$

$\therefore (\alpha+\beta)+2=b$, $\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=a$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a+2=b$, $b-a+1=a$

$\therefore a=1$, $b=1$

필수 예제 04 두 근 사이의 관계가 주어진 이차방정식 118쪽

04-1 답 -8

|전략| 이차방정식의 두 근을 α, $2\alpha\,(\alpha\neq0)$로 놓는다.

$x^2-6x-k=0$의 두 근의 비가 $1:2$이므로 두 근을 α, $2\alpha\,(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=\alpha+2\alpha=6$에서

$3\alpha=6 \qquad \therefore \alpha=2$

(두 근의 곱)$=\alpha\times2\alpha=-k$에서

$k=-2\alpha^2=-2\times2^2=-8$

04-2 답 -2

|전략| 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+3$으로 놓는다.

$x^2-5x+2k+8=0$의 두 근의 차가 3이므로 두 근을 α, $\alpha+3$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=\alpha+(\alpha+3)=5$에서

$2\alpha=2 \qquad \therefore \alpha=1$

(두 근의 곱)$=\alpha(\alpha+3)=2k+8$에서

$2k+8=4 \qquad \therefore k=-2$

참고 두 근을 α, $\alpha-3$으로 놓고 풀어도 결과는 같다.

$\alpha+(\alpha-3)=5$에서

$2\alpha-3=5 \qquad \therefore \alpha=4$

$\alpha(\alpha-3)=2k+8$에서

$2k+8=4 \qquad \therefore k=-2$

필수 예제 05 두 수를 근으로 하는 이차방정식 119쪽

05-1 답 $x^2-5x+6=0$

|전략| 두 근이 α, β이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$이다.

$x^2-2x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=3$

두 근 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 합과 곱을 구하면

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=2+3=5$, $(\alpha+\beta)\alpha\beta=2\times3=6$

따라서 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-5x+6=0$

05-2 답 $2x^2+3x-1=0$

|전략| 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한 후 주어진 두 근의 합과 곱을 구한다.

$x^2-3x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-2$

두 근 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$의 합과 곱을 구하면

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}$

$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)=0 \qquad \therefore 2x^2+3x-1=0$

필수 예제 06 이차방정식 $f(x)=0$과 $f(ax+b)=0$의 관계 120쪽

06-1 답 2

|전략| 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이면 이차방정식 $f(ax+b)=0$의 두 근은 $\frac{\alpha-b}{a}$, $\frac{\beta-b}{a}$이다.

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$ ⋯⋯ ㉠

두 근의 합이 2이므로 $\alpha+\beta=2$

㉠에 의하여 이차방정식 $f(4x-3)=0$의 두 근은

$4x-3=\alpha$ 또는 $4x-3=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha+3}{4}$ 또는 $x=\frac{\beta+3}{4}$

따라서 이차방정식 $f(4x-3)=0$의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha+3}{4}+\frac{\beta+3}{4}=\frac{\alpha+\beta+6}{4}=\frac{2+6}{4}=2$$

06-2 답 $\frac{5}{3}$

|전략| 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이면 이차방정식 $f(ax+b)=0$의 두 근은 $\frac{\alpha-b}{a}$, $\frac{\beta-b}{a}$이다.

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근은

$3x-1=\alpha$ 또는 $3x-1=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha+1}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+1}{3}$

따라서 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha+1}{3}\times\frac{\beta+1}{3}=\frac{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}{9}=\frac{6+8+1}{9}=\frac{5}{3}$$

필수 예제 07 이차방정식의 켤레근의 성질 121쪽

07-1 답 (1) $a=2$, $b=-2$ (2) $a=4$, $b=-1$

|전략| 계수가 유리수인 이차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 유리수이고

(1) 한 근이 $-1-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $-1+\sqrt{3}$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=(-1-\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})=-a \qquad \therefore a=2$

(두 근의 곱)$=(-1-\sqrt{3})(-1+\sqrt{3})=b \qquad \therefore b=-2$

(2) 한 근이 $\sqrt{5}-2$, 즉 $-2+\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $-2-\sqrt{5}$
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=(-2+\sqrt{5})+(-2-\sqrt{5})=-a$ $\quad \therefore a=4$
(두 근의 곱)$=(-2+\sqrt{5})(-2-\sqrt{5})=b$ $\quad \therefore b=-1$

참고 켤레근의 성질을 이용하지 않고 주어진 근을 직접 이차방정식에 대입하여 a, b의 값을 구해도 된다.
예를 들어 (1)의 경우 $x=-1-\sqrt{3}$을 $x^2+ax+b=0$에 대입하면
$(-1-\sqrt{3})^2+a(-1-\sqrt{3})+b=0$에서 $(-a+b+4)+(2-a)\sqrt{3}=0$
이때, a, b는 유리수이므로
$-a+b+4=0$, $2-a=0$ $\quad \therefore a=2$, $b=-2$
그러나 켤레근의 성질을 이용하는 것이 더 간단하다.

07-2

답 (1) $a=-2$, $b=5$ (2) $a=-4$, $b=13$

| 전략 | 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 다른 한 근은 $p-qi$이다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 실수이고
(1) 한 근이 $1+2i$이므로 다른 한 근은 $1-2i$
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=(1+2i)+(1-2i)=-a$ $\quad \therefore a=-2$
(두 근의 곱)$=(1+2i)(1-2i)=b$ $\quad \therefore b=5$
(2) 한 근이 $3i+2$, 즉 $2+3i$이므로 다른 한 근은 $2-3i$
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=(2+3i)+(2-3i)=-a$ $\quad \therefore a=-4$
(두 근의 곱)$=(2+3i)(2-3i)=b$ $\quad \therefore b=13$

개념 정리

122~123쪽

01 복소수	**02** 실근, 허근, 중근		**03** 실근
04 b^2-4ac, 판별식		**05** b'^2-ac	
06 서로 다른 두 실근		**07** 중근	
08 서로 다른 두 허근		**09** b	**10** c
11 -5, -2	**12** 4, $\frac{1}{2}$	**13** ㉡	**14** ㉢
15 ㉠	**16** 유리수	**17** 실수	

11 이차방정식 $x^2+5x-2=0$의 두 근을 α, β라 하면
(두 근의 합)$=\alpha+\beta=-5$, (두 근의 곱)$=\alpha\beta=-2$

12 이차방정식 $2x^2-8x+1=0$의 두 근을 α, β라 하면
(두 근의 합)$=\alpha+\beta=-\frac{-8}{2}=4$
(두 근의 곱)$=\alpha\beta=\frac{1}{2}$

13 두 수 1, 3을 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
(두 근의 합)$=1+3=4$, (두 근의 곱)$=1\times3=3$
이므로 $x^2-4x+3=0$

14 두 수 -3, 3을 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
(두 근의 합)$=-3+3=0$, (두 근의 곱)$=-3\times3=-9$
이므로 $x^2-9=0$

15 두 수 $2+i$, $2-i$를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
(두 근의 합)$=(2+i)+(2-i)=4$
(두 근의 곱)$=(2+i)(2-i)=5$
이므로 $x^2-4x+5=0$

중단원 마무리

124~126쪽

01 $\sqrt{2}$	**02** ③	**03** $2-\sqrt{2}$	**04** ⑤
05 ⑤	**06** -8	**07** ②	
08 $x^2+3x-2=0$		**09** 4	**10** ②
11 42	**12** ④	**13** 1	
14 빗변의 길이가 c인 직각삼각형			**15** ④
16 9	**17** ③	**18** $x=-3\pm\sqrt{7}$	
19 ①	**20** ⑤	**21** 3 m	**22** 2
23 $x^2-40=0$	**24** 2		

LEVEL 1

01 이차방정식 $\sqrt{2}(x^2-2x+1)=-x^2+x$에서
$(\sqrt{2}+1)x^2-(2\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$
양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면
$x^2-(3-\sqrt{2})x+2-\sqrt{2}=0$, $(x-1)\{x-(2-\sqrt{2})\}=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2-\sqrt{2}$
이때, $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=1$, $\beta=2-\sqrt{2}$
$\therefore 2\alpha-\beta=\sqrt{2}$

다른 풀이 $\sqrt{2}(x^2-2x+1)=-x^2+x$에서
$\sqrt{2}(x-1)^2=-x(x-1)$, $(x-1)\{\sqrt{2}(x-1)+x\}=0$
$(x-1)\{(\sqrt{2}+1)x-\sqrt{2}\}=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=2-\sqrt{2}$
이때, $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=1$, $\beta=2-\sqrt{2}$
$\therefore 2\alpha-\beta=\sqrt{2}$

02 $x^2+ax+a-1=0$에 $x=-2$를 대입하면
$4-2a+a-1=0$ $\quad \therefore a=3$
$bx^2-2x+b+3=0$에 $x=1$을 대입하면
$b-2+b+3=0$ $\quad \therefore b=-\frac{1}{2}$
$\therefore a+b=\frac{5}{2}$

03 $x^2+|2x-1|-2=0$에서
(i) $x<\frac{1}{2}$일 때
$x^2-(2x-1)-2=0$, $x^2-2x-1=0$
$\therefore x=1-\sqrt{2}\left(\because x<\frac{1}{2}\right)$

(ⅱ) $x \geq \frac{1}{2}$일 때

$x^2+(2x-1)-2=0$, $x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0 \qquad \therefore x=1 \left(\because x \geq \frac{1}{2}\right)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 방정식의 해는 $x=1-\sqrt{2}$ 또는 $x=1$이므로 구하는 모든 근의 합은 $2-\sqrt{2}$이다.

04 $x^2+(2k-5)x+k^2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-5)^2-4k^2=-20k+25$

서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$-20k+25<0$, $20k>25$

$\therefore k>\frac{5}{4}$

따라서 정수 k의 최솟값은 2이다.

05 $x^2-7x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=7$, $\alpha\beta=1$ …… ㉠

$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$

$=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}$ ($\because$ ㉠에서 $\alpha>0$, $\beta>0$)

$=7-2\times1=5$

$\therefore \sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}=\sqrt{5}$ ($\because \alpha>\beta$)

06 $x^2-2ax+6=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=6$ …… ㉠

$x^2+bx+12=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-b$, $(\alpha+\beta)\alpha\beta=12$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2a+6=-b$, $12a=12 \qquad \therefore a=1, b=-8$

$\therefore ab=-8$

07 $x^2-4x+2k-5=0$의 한 근이 다른 한 근의 3배이므로 두 근을 α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=\alpha+3\alpha=4$에서

$4\alpha=4 \qquad \therefore \alpha=1$

(두 근의 곱)$=\alpha\times3\alpha=2k-5$에서

$2k-5=3 \qquad \therefore k=4$

08 $x^2+5x+2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=2$

두 근 $\alpha+1$, $\beta+1$의 합과 곱을 구하면

$(\alpha+1)+(\beta+1)=(\alpha+\beta)+2=-5+2=-3$

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=2-5+1=-2$

따라서 $\alpha+1$, $\beta+1$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2+3x-2=0$

LEVEL 2

09 $x^2-2mx+m+2=0$에 $x=5$를 대입하면

$25-10m+m+2=0 \qquad \therefore m=3$

$m=3$을 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-6x+5=0$, $(x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

따라서 다른 한 근은 1이므로 $\alpha=1$

$\therefore m+\alpha=4$

10 $(k-1)x^2+(a-3)x+(b+2)k=0$에 $x=1$을 대입하면

$k-1+a-3+(b+2)k=0$

$(b+3)k+a-4=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$b+3=0$, $a-4=0 \qquad \therefore a=4, b=-3$

$\therefore ab=-12$

11 $x^2-5x=|x+3|$에서

(ⅰ) $x<-3$일 때

$x^2-5x=-(x+3)$, $x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=3$

그런데 $x=1$, $x=3$은 $x<-3$을 만족시키지 않으므로 해가 아니다.

(ⅱ) $x\geq-3$일 때

$x^2-5x=x+3$, $x^2-6x-3=0$

$\therefore x=-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\times(-3)}=3\pm2\sqrt{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 해는 $x=3\pm2\sqrt{3}$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(3+2\sqrt{3})^2+(3-2\sqrt{3})^2=42$

12 처음 물건의 가격을 A원이라 하면 x % 인하한 가격은

$A\left(1-\frac{x}{100}\right)$원

이 가격에서 다시 x % 인상한 가격은

$A\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)$원

이 가격이 처음 가격보다 9 % 낮아졌으므로

$A\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)=A\left(1-\frac{9}{100}\right)$

$(100-x)(100+x)=9100$, $x^2=900$

$\therefore x=30$ ($\because x>0$)

13 $x^2+2(k+a)x+k^2+a^2+b-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+a)^2-(k^2+a^2+b-1)=2ak-b+1$

중근을 가지려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$2ak-b+1=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2a=0$, $-b+1=0 \qquad \therefore a=0, b=1$

$\therefore b-a=1$

14 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $(c-b)x^2+2ax+b+c=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=a^2-(c-b)(b+c)=0$

$a^2-(c^2-b^2)=0,\ a^2-c^2+b^2=0 \qquad \therefore c^2=a^2+b^2$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

15 $x^2+3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+3\alpha+1=0,\ \beta^2+3\beta+1=0$

또, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=1$

$\therefore \frac{\beta}{\alpha^2+4\alpha+1}+\frac{\alpha}{\beta^2+4\beta+1}$

$=\frac{\beta}{(\alpha^2+3\alpha+1)+\alpha}+\frac{\alpha}{(\beta^2+3\beta+1)+\beta}$

$=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\frac{(-3)^2-2\times1}{1}=7$

16 이차방정식 $2x^2-4x+k=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{-4}{2}=2,\ \alpha\beta=\frac{k}{2}$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=2^3-3\times\frac{k}{2}\times2=8-3k$

이때, $\alpha^3+\beta^3=-19$이므로 $8-3k=-19$

$\therefore k=9$

17 이차방정식 $x^2-2(k+3)x-32=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $-32<0$이므로 두 근의 부호는 서로 다르다.

즉, 두 근의 절댓값의 비가 2 : 1이므로 주어진 이차방정식의 두 근을 2α, $-\alpha$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+(-\alpha)=2(k+3) \qquad \therefore \alpha=2k+6$ …… ㉠

$2\alpha\times(-\alpha)=-32$

$\alpha^2=16 \qquad \therefore \alpha=\pm4$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

(i) $\alpha=4$일 때

$4=2k+6 \qquad \therefore k=-1$

(ii) $\alpha=-4$일 때

$-4=2k+6 \qquad \therefore k=-5$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 $-1\times(-5)=5$이다.

18 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서

(i) 상훈이는 상수항 b를 바르게 보고 풀었으므로

(두 근의 곱)$=b=\frac{1}{2}\times4=2$

(ii) 민주는 x의 계수 a를 바르게 보고 풀었으므로

(두 근의 합)$=-a=(-3+i)+(-3-i)=-6$

$\therefore a=6$

(i), (ii)에서 처음 주어진 이차방정식은 $x^2+6x+2=0$이므로 근의 공식을 이용하여 올바른 해를 구하면

$x=-3\pm\sqrt{3^2-1\times2}=-3\pm\sqrt{7}$

19 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 2α, 2β이므로 이차방정식 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=0$의 두 근은

$\frac{x+1}{2}=2\alpha$ 또는 $\frac{x+1}{2}=2\beta$

$\therefore x=4\alpha-1$ 또는 $x=4\beta-1$

따라서 이차방정식 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=0$의 두 근의 곱은

$(4\alpha-1)(4\beta-1)=16\alpha\beta-4(\alpha+\beta)+1$

$=16\times3-4\times9+1=13$

20 이차방정식 $x^2-ax+b=0$에서 a, b가 유리수이고 한 근이 $3-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $3+\sqrt{2}$이다.

이때, 근과 계수의 관계에 의하여

$a=(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})=6$

$b=(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})=7$

이차방정식 $x^2+bx+a=0$, 즉 $x^2+7x+6=0$에서

$(x+6)(x+1)=0 \qquad \therefore x=-6$ 또는 $x=-1$

따라서 이차방정식 $x^2+7x+6=0$의 두 근의 차는

$-1-(-6)=5$

서술형

21 길의 폭을 x m $(0<x<10)$라 하면 길을 제외한 공원의 넓이는 $(15-x)(10-x)$ m^{2}이므로

$(15-x)(10-x)=84$ … ❶

$x^2-25x+66=0,\ (x-3)(x-22)=0$

$\therefore x=3\ (\because 0<x<10)$ … ❷

따라서 길의 폭은 3 m이다. … ❸

채점 기준	비율
❶ 길의 폭을 x m라 놓고 x에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 이차방정식을 풀 수 있다.	50 %
❸ 길의 폭을 구할 수 있다.	10 %

22 주어진 방정식이 이차방정식이므로

$k-1\neq0 \qquad \therefore k\neq1$ … ❶

이차방정식 $(k-1)x^2+2kx+k-3=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(k-1)(k-3)>0$

$4k-3>0 \qquad \therefore k>\frac{3}{4}$ … ❷

그런데 $k\neq1$이므로 $\frac{3}{4}<k<1$ 또는 $k>1$ ⋯ ❸

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다. ⋯ ❹

채점 기준	비율
❶ x^2의 계수가 0이 아님을 이용하여 k의 값에 대한 조건을 구할 수 있다.	20 %
❷ 판별식을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ 조건을 만족시키는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ 자연수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

23 이차방정식 $x^2-6x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=-1$ ⋯ ❶

두 근 $\alpha+\frac{1}{\alpha}$, $\beta+\frac{1}{\beta}$의 합과 곱을 구하면

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$
$$=6+\frac{6}{-1}=0$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=\alpha\beta+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}$$
$$=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$
$$=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$
$$=-1+(-1)+\frac{6^2-2\times(-1)}{-1}$$
$$=-40$$ ⋯ ❷

따라서 $\alpha+\frac{1}{\alpha}$, $\beta+\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-40=0$이다. ⋯ ❸

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 구하는 이차방정식의 두 근의 합과 두 근의 곱을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\alpha+\frac{1}{\alpha}$, $\beta+\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구할 수 있다.	30 %

24 $\frac{2i}{1+i}=\frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=i(1-i)=1+i$ ⋯ ❶

즉, 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 실수이고 한 근이 $1+i$이므로 다른 한 근은 $1-i$이다. ⋯ ❷

이때, 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=(1+i)+(1-i)=2$ $\quad\therefore a=-2$

$b=(1+i)(1-i)=2$ ⋯ ❸

따라서 $f(x)=x^2-2x+2$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2)=2^2-2\times2+2=2$ ⋯ ❹

채점 기준	비율
❶ $\frac{2i}{1+i}$를 간단히 정리할 수 있다.	20 %
❷ 켤레근의 성질을 이용하여 다른 한 근을 구할 수 있다.	20 %
❸ 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	30 %

6 이차방정식과 이차함수

Review 이차함수의 그래프

개념 확인 128~130쪽

1 풀이 참조

2 $k<0$

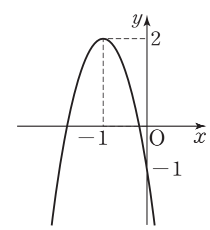
3 (1) $a<0$ (2) $b>0$ (3) $c>0$ (4) $a-b+c<0$
(5) $4a+2b+c<0$ (6) $a+3b+9c>0$

4 (1) $y=4x^2-8x+3$ (2) $y=x^2+4x+5$
(3) $y=-x^2+6x-5$ (4) $y=x^2+x$

1 $y=-3x^2-6x-1$
$=-3(x^2+2x)-1$
$=-3(x^2+2x+1)+2$
$=-3(x+1)^2+2$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 2)$, 축의 방정식은 $x=-1$이고, y축과의 교점의 좌표는 $(0, -1)$이다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$y=-3x^2-6x-1$

2 $y=x^2-2kx+k^2+4$
$=(x^2-2kx+k^2)+4$
$=(x-k)^2+4$

따라서 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(k, 4)$이다.

이때, 꼭짓점 $(k, 4)$가 제2사분면 위에 있으므로

$k<0$

3 (1) 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

(2) 축 $x=-\frac{b}{2a}$가 y축의 오른쪽에 있으므로 $-\frac{b}{2a}>0$

즉, a, b는 서로 다른 부호이다.

따라서 $a<0$이므로 $b>0$

(3) y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있으므로

$c>0$

(4) $a-b+c$는 $x=-1$일 때의 함숫값이므로

$a-b+c<0$

(5) $4a+2b+c$는 $x=2$일 때의 함숫값이므로

$4a+2b+c<0$

(6) $x=\frac{1}{3}$일 때 $y>0$이므로 $\frac{1}{9}a+\frac{1}{3}b+c>0$

따라서 $\frac{1}{9}(a+3b+9c)>0$이므로

$a+3b+9c>0$

4 (1) 꼭짓점의 좌표가 $(1, -1)$이므로 이차함수의 식을

$y=a(x-1)^2-1$이라 하면

함수의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로

$3=a-1$ $\quad\therefore a=4$

따라서 구하는 이차함수의 식은

$y=4(x-1)^2-1$ $\quad\therefore y=4x^2-8x+3$

(2) 축의 방정식이 $x=-2$이므로 이차함수의 식을

$y=a(x+2)^2+n$이라 하면

함수의 그래프가 두 점 $(-1, 2)$, $(1, 10)$을 지나므로

$2=a+n$, $10=9a+n$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $n=1$

따라서 구하는 이차함수의 식은

$y=(x+2)^2+1$ $\quad\therefore y=x^2+4x+5$

(3) x축과 두 점 $(1, 0)$, $(5, 0)$에서 만나므로 이차함수의 식을

$y=a(x-1)(x-5)$라 하면

함수의 그래프가 점 $(0, -5)$를 지나므로

$-5=5a$ $\quad\therefore a=-1$

따라서 구하는 이차함수의 식은

$y=-(x-1)(x-5)$ $\quad\therefore y=-x^2+6x-5$

(4) 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$라 하면

함수의 그래프가 점 $(0, 0)$을 지나므로 $c=0$

즉, 이차함수 $y=ax^2+bx$의 그래프가 두 점 $(-3, 6)$, $(1, 2)$를 지나므로 $6=9a-3b$, $2=a+b$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=x^2+x$

1 이차함수와 이차방정식의 관계

개념 확인 131~133쪽

1 (1) $x=1$ 또는 $x=4$ (2) $x=-3$ 또는 $x=2$

2 (1) -4, 3 (2) $-\frac{3}{2}$, 1 (3) 3

3 (1) 2 (2) 0 (3) 1

4 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 한 점에서 만난다. (3) 만나지 않는다.

5 (1) 4 (2) -6, -1

6 (1) 만나지 않는다. (2) 서로 다른 두 점에서 만난다. (3) 한 점에서 만난다.

2 (1) 이차방정식 $x^2+x-12=0$에서

$(x+4)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-4$ 또는 $x=3$

따라서 교점의 x좌표는 -4, 3이다.

(2) 이차방정식 $-2x^2-x+3=0$에서

$2x^2+x-3=0$, $(2x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=1$

따라서 교점의 x좌표는 $-\frac{3}{2}$, 1이다.

(3) 이차방정식 $3x^2-18x+27=0$에서

$3(x^2-6x+9)=0$, $3(x-3)^2=0$

$\therefore x=3$ (중근)

따라서 교점의 x좌표는 3이다.

3 (1) 이차방정식 $x^2+3x-8=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\times1\times(-8)=41>0$

이므로 교점의 개수는 2이다.

(2) 이차방정식 $2x^2-5x+6=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\times2\times6=-23<0$

이므로 교점의 개수는 0이다.

(3) 이차방정식 $-\frac{1}{4}x^2+2x-4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-\left(-\frac{1}{4}\right)\times(-4)=0$

이므로 교점의 개수는 1이다.

4 (1) 이차방정식 $x^2-x-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times(-3)=13>0$

이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 이차방정식 $9x^2+6x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-9\times1=0$

이므로 한 점에서 만난다.

(3) 이차방정식 $-3x^2+4x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(-3)\times(-2)=-2<0$

이므로 만나지 않는다.

5 (1) 이차방정식 $x^2-7x+8=x-8$, 즉 $x^2-8x+16=0$에서

$(x-4)^2=0$ $\quad\therefore x=4$ (중근)

따라서 교점의 x좌표는 4이다.

(2) 이차방정식 $-x^2-4x+1=3x+7$, 즉 $x^2+7x+6=0$에서

$(x+6)(x+1)=0$ $\quad\therefore x=-6$ 또는 $x=-1$

따라서 교점의 x좌표는 -6, -1이다.

6 (1) 이차방정식 $x^2+2x-1=3x-2$, 즉 $x^2-x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times1=-3<0$

이므로 만나지 않는다.

(2) 이차방정식 $2x^2-3x-4=-x+2$, 즉 $2x^2-2x-6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\times(-6)=13>0$

이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.

(3) 이차방정식 $-3x^2-2x-2=4x+1$, 즉 $3x^2+6x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-3\times3=0$

이므로 한 점에서 만난다.

개념 드릴 134쪽

1 (1) $-3, 1$ (2) $2, 4$ (3) $-4, 0$

2 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 한 점에서 만난다. (3) 만나지 않는다.

3 (1) $-2, 1$ (2) -1 (3) $1, 5$

4 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 만나지 않는다. (3) 한 점에서 만난다.

1 (1) 이차방정식 $x^2+2x-3=0$에서

$(x+3)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 교점의 x좌표는 $-3, 1$이다.

(2) 이차방정식 $-x^2+6x-8=0$에서

$x^2-6x+8=0$, $(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 교점의 x좌표는 $2, 4$이다.

(3) 이차방정식 $-(x+2)^2+4=0$에서

$x^2+4x=0$, $x(x+4)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=0$

따라서 교점의 x좌표는 $-4, 0$이다.

2 (1) 이차방정식 $x^2-5x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\times1\times5=5>0$

이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 이차방정식 $-2x^2+16x-32=0$, 즉 $x^2-8x+16=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-1\times16=0$

이므로 한 점에서 만난다.

(3) 이차방정식 $-3x^2-7x-6=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-7)^2-4\times(-3)\times(-6)=-23<0$

이므로 만나지 않는다.

3 (1) 이차방정식 $-3x^2-x+7=2x+1$, 즉 $3x^2+3x-6=0$에서

$3(x+2)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 교점의 x좌표는 $-2, 1$이다.

(2) 이차방정식 $2x^2+3x+4=-x+2$, 즉 $2x^2+4x+2=0$에서

$2(x^2+2x+1)=0$, $2(x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$ (중근)

따라서 교점의 x좌표는 -1이다.

(3) 이차방정식 $-(x-2)^2+8=-2x+9$, 즉 $x^2-6x+5=0$에서

$(x-1)(x-5)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=5$

따라서 교점의 x좌표는 $1, 5$이다.

4 (1) 이차방정식 $x^2-x-2=2x-3$, 즉 $x^2-3x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times1\times1=5>0$

이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 이차방정식 $2x^2+3x+1=-x-2$, 즉 $2x^2+4x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-2\times3=-2<0$

이므로 만나지 않는다.

(3) 이차방정식 $-x^2-2x=-4x+1$, 즉 $x^2-2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times1=0$

이므로 한 점에서 만난다.

필수 예제 01 이차함수의 그래프와 x축의 교점 135쪽

01-1 답 $a=-1, b=3$

|전략| 이차방정식 $x^2+ax-6=0$의 두 실근이 $-2, b$이다.

이차함수 $y=x^2+ax-6$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 $-2, b$이므로 이차방정식 $x^2+ax-6=0$의 두 실근이 $-2, b$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+b=-a$, $-2b=-6$

$\therefore a=-1, b=3$

01-2 답 $a=4, b=-6$

|전략| 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식의 실근과 같다.

이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -3, 1이므로 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 실근이 $-3, 1$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+1=-\frac{a}{2}$, $-3\times1=\frac{b}{2}$

$\therefore a=4, b=-6$

다른 풀이 두 근이 $-3, 1$이고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2(x+3)(x-1)=0$, 즉 $2x^2+4x-6=0$

이 방정식이 $2x^2+ax+b=0$과 같으므로 $a=4, b=-6$

필수 예제 02 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계 136쪽

02-1 답 (1) $k<-2$ (2) $k=-2$ (3) $k>-2$

|전략| 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식의 판별식의 부호를 조사한다.

이차방정식 $x^2-2(k-1)x+k^2+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k^2+5)=-2k-4$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로

$-2k-4>0$ $\quad\therefore k<-2$

(2) 한 점에서 만나려면 $D=0$이어야 하므로

$-2k-4=0$ $\quad\therefore k=-2$

(3) 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로

$-2k-4<0$ $\quad\therefore k>-2$

02-2 답 24

|전략| x축과 접하는 것은 x축과 한 점에서 만나는 것이므로 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이다.

이차방정식 $2x^2+mx+3m+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=m^2-4\times2\times(3m+2)=m^2-24m-16$

이차함수의 그래프가 x축과 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$m^2-24m-16=0$을 만족시키는 모든 실수 m의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 24이다.

참고 m에 대한 이차방정식 $m^2-24m-16=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=(-12)^2-1\times(-16)=160>0$

즉, 이차방정식 $m^2-24m-16=0$을 만족시키는 m은 모두 실수이므로 모든 '실수' m의 값의 합을 구할 때 근과 계수의 관계를 이용해도 된다.

필수 예제 03 이차함수의 그래프와 이차방정식의 실근의 합 137쪽

03-1 답 (1) 12 (2) $-\frac{10}{3}$

|전략| 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=0$의 실근과 같다.

(1) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점 $(-1, 0)$, $(5, 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x+1)(x-5)$ $(a>0)$라 하면

$f(x-4)=a(x-4+1)(x-4-5)$

$\qquad\quad=a(x-3)(x-9)$

$f(x-4)=0$에서 $a(x-3)(x-9)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=9$

따라서 두 실근의 합은 $3+9=12$

(2) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점 $(-4, 0)$, $(2, 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x+4)(x-2)$ $(a<0)$라 하면

$f(3x+4)=a(3x+4+4)(3x+4-2)$

$\qquad\quad=a(3x+8)(3x+2)$

$f(3x+4)=0$에서 $a(3x+8)(3x+2)=0$

$\therefore x=-\frac{8}{3}$ 또는 $x=-\frac{2}{3}$

따라서 두 실근의 합은 $-\frac{8}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{10}{3}$

필수 예제 04 이차함수의 그래프와 직선의 교점 138쪽

04-1 답 $a=1$, $b=14$

|전략| 이차함수의 식과 직선의 방정식을 연립한 이차방정식의 두 실근이 -2, 5이다.

이차방정식 $x^2+ax+4=4x+b$, 즉 $x^2+(a-4)x+4-b=0$의 두 실근이 -2, 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+5=-(a-4)$, $-2\times5=4-b$

$\therefore a=1$, $b=14$

04-2 답 7

|전략| 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x좌표는 -3, 1이다.

주어진 그림에서 이차함수 $y=x^2+ax+1$의 그래프와 직선 $y=x+b$의 교점의 x좌표가 -3, 1이므로 이차방정식 $x^2+ax+1=x+b$, 즉 $x^2+(a-1)x+1-b=0$의 두 실근이 -3, 1이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+1=-(a-1)$, $-3\times1=1-b$ $\qquad\therefore a=3$, $b=4$

$\therefore a+b=7$

필수 예제 05 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 139쪽

05-1 답 2

|전략| 이차함수의 그래프가 직선과 접하므로 이차함수의 식과 직선의 방정식을 연립한 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D=0$임을 이용한다.

이차방정식 $x^2-2x+2=2x-k$, 즉 $x^2-4x+2+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(2+k)=-k+2$

이차함수 $y=x^2-2x+2$의 그래프와 직선 $y=2x-k$가 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$-k+2=0$ $\qquad\therefore k=2$

05-2 답 7

|전략| 이차함수의 그래프와 직선이 만나지 않으므로 이차함수의 식과 직선의 방정식을 연립한 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D<0$임을 이용한다.

이차방정식 $-x^2+5x-3=-x+k$, 즉 $x^2-6x+k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(k+3)=-k+6$

이차함수 $y=-x^2+5x-3$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로

$-k+6<0$ $\qquad\therefore k>6$

따라서 정수 k의 최솟값은 7이다.

05-3 답 $k\geq-\frac{9}{4}$

|전략| 이차함수의 그래프와 직선이 만나므로 이차함수의 식과 직선의 방정식을 연립한 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D\geq0$임을 이용한다.

이차방정식 $x^2+2x-1=3x+k+1$, 즉 $x^2-x-k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times(-k-2)=4k+9$

이차함수 $y=x^2+2x-1$의 그래프와 직선 $y=3x+k+1$이 만나려면 $D\geq0$이어야 하므로

$4k+9\geq0$ $\qquad\therefore k\geq-\frac{9}{4}$

참고 이차함수의 그래프와 직선이 만나려면 서로 다른 두 점에서 만나거나 한 점에서 만나야 한다.

즉, 이차함수의 식과 직선의 방정식을 연립한 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D>0$ 또는 $D=0$ ➡ $D\geq0$

필수 예제 06 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식 140쪽

06-1 답 $y=-5x-1$

|전략| 구하는 직선의 방정식을 $y=-5x+b$로 놓고, 이 직선이 주어진 이차함수의 그래프에 접할 조건을 이용한다.

직선의 기울기가 -5이므로 직선의 방정식을 $y=-5x+b$ (b는 상수)라 하자.
직선 $y=-5x+b$가 이차함수 $y=-3x^2+x-4$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-3x^2+x-4=-5x+b$, 즉 $3x^2-6x+b+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-3(b+4)=0$

$-3b-3=0 \qquad \therefore b=-1$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-5x-1$이다.

06-2 답 $a=2$, $b=-2$

|전략| 평행한 두 직선의 기울기는 서로 같음을 이용한다.

직선 $y=ax+b$가 직선 $y=2x+3$에 평행하므로 $a=2$
직선 $y=2x+b$가 이차함수 $y=x^2-1$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-1=2x+b$, 즉 $x^2-2x-b-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-b-1)=0 \qquad \therefore b=-2$

06-3 답 -32

|전략| 구하는 직선의 방정식을 $y=ax+2$로 놓고, 이 직선이 주어진 이차함수의 그래프에 접할 조건을 이용한다.

점 $(0, 2)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=ax+2$ (a는 상수)라 하자.
직선 $y=ax+2$가 이차함수 $y=-x^2+2x-7$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-x^2+2x-7=ax+2$, 즉 $x^2+(a-2)x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-2)^2-4\times1\times9=0$

$a^2-4a-32=0$, $(a+4)(a-8)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=8$

따라서 구하는 두 직선의 기울기의 곱은

$-4\times8=-32$

2 이차함수의 최대·최소

개념 확인 141~142쪽

1 (1) 최댓값: 없다, 최솟값: 3 (2) 최댓값: -5, 최솟값: 없다.
(3) 최댓값: 4, 최솟값: 없다. (4) 최댓값: 없다, 최솟값: $\frac{9}{8}$

2 (1) $y=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$
(2) 최댓값은 없고, $x=-\frac{5}{2}$일 때 최솟값은 $-\frac{13}{4}$이다.

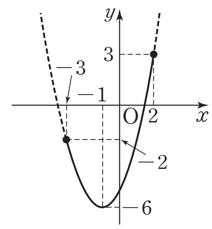
3 (1) 최댓값: 3, 최솟값: -6 (2) 최댓값: 2, 최솟값: -6

4 (1) 최댓값: 14, 최솟값: 6 (2) 최댓값: 9, 최솟값: 5

1 (1) $x=1$일 때 최솟값은 3, 최댓값은 없다.
(2) $x=-2$일 때 최댓값은 -5, 최솟값은 없다.
(3) $x=\frac{3}{2}$일 때 최댓값은 4, 최솟값은 없다.
(4) $x=-\frac{1}{4}$일 때 최솟값은 $\frac{9}{8}$, 최댓값은 없다.

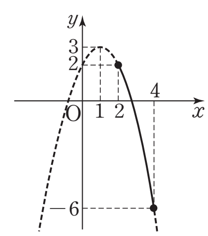
2 (1) $y=x^2+5x+3=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+3$
$=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$

3 (1) $-3\le x\le2$일 때, $y=(x+1)^2-6$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 꼭짓점의 x좌표 -1이 $-3\le x\le2$에 포함되므로



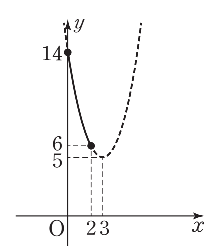
$x=-3$일 때, $y=-2$
$x=-1$일 때, $y=-6$
$x=2$일 때, $y=3$
따라서 최댓값은 3, 최솟값은 -6이다.

(2) $2\le x\le4$일 때, $y=-(x-1)^2+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 꼭짓점의 x좌표 1이 $2\le x\le4$에 포함되지 않으므로



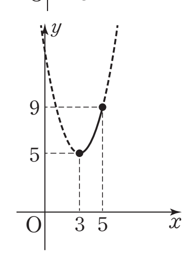
$x=2$일 때, $y=2$
$x=4$일 때, $y=-6$
따라서 최댓값은 2, 최솟값은 -6이다.

4 $y=x^2-6x+14=(x-3)^2+5$
(1) $0\le x\le2$일 때, 꼭짓점의 x좌표 3이 $0\le x\le2$에 포함되지 않으므로



$x=0$일 때, $y=14$
$x=2$일 때, $y=6$
따라서 최댓값은 14, 최솟값은 6이다.

(2) $3\le x\le5$일 때, 꼭짓점의 x좌표 3이 $3\le x\le5$에 포함되므로



$x=3$일 때, $y=5$
$x=5$일 때, $y=9$
따라서 최댓값은 9, 최솟값은 5이다.

개념 드릴 143쪽

1 (1) 최댓값: 4, 최솟값: 없다. (2) 최댓값: 없다, 최솟값: 3
(3) 최댓값: 없다, 최솟값: 1 (4) 최댓값: -1, 최솟값: 없다.
(5) 최댓값: 없다, 최솟값: 4 (6) 최댓값: -8, 최솟값: 없다.

2 (1) 최댓값: 2, 최솟값: -2 (2) 최댓값: 6, 최솟값: -2
(3) 최댓값: 4, 최솟값: -4 (4) 최댓값: 8, 최솟값: -4
(5) 최댓값: 5, 최솟값: -3 (6) 최댓값: 4, 최솟값: 2

1 (1) $x=0$일 때 최댓값은 4, 최솟값은 없다.

(2) $x=0$일 때 최솟값은 3, 최댓값은 없다.

(3) $y=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$

따라서 $x=-1$일 때 최솟값은 1, 최댓값은 없다.

(4) $y=-x^2+4x-5=-(x-2)^2-1$

따라서 $x=2$일 때 최댓값은 -1, 최솟값은 없다.

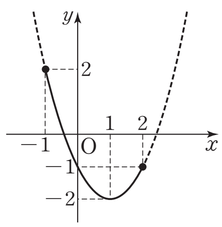
(5) $y=\frac{1}{3}x^2+2x+7=\frac{1}{3}(x+3)^2+4$

따라서 $x=-3$일 때 최솟값은 4, 최댓값은 없다.

(6) $y=-4x^2-4x-9=-4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-8$

따라서 $x=-\frac{1}{2}$일 때 최댓값은 -8, 최솟값은 없다.

2 (1) $y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$



꼭짓점의 x좌표 1이 $-1\le x\le 2$에 포함되므로

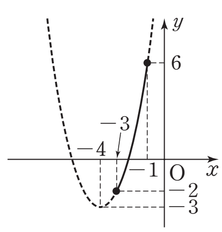
$x=-1$일 때 $y=2$

$x=1$일 때 $y=-2$

$x=2$일 때 $y=-1$

따라서 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.

(2) $y=x^2+8x+13=(x+4)^2-3$



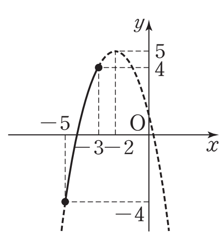
꼭짓점의 x좌표 -4가 $-3\le x\le -1$에 포함되지 않으므로

$x=-3$일 때 $y=-2$

$x=-1$일 때 $y=6$

따라서 최댓값은 6, 최솟값은 -2이다.

(3) $y=-x^2-4x+1=-(x+2)^2+5$



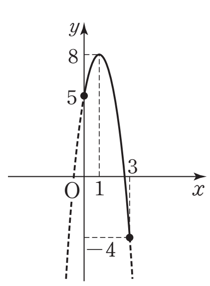
꼭짓점의 x좌표 -2가 $-5\le x\le -3$에 포함되지 않으므로

$x=-5$일 때 $y=-4$

$x=-3$일 때 $y=4$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 -4이다.

(4) $y=-3x^2+6x+5=-3(x-1)^2+8$



꼭짓점의 x좌표 1이 $0\le x\le 3$에 포함되므로

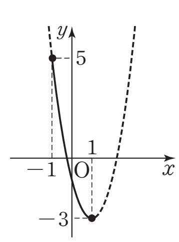
$x=0$일 때 $y=5$

$x=1$일 때 $y=8$

$x=3$일 때 $y=-4$

따라서 최댓값은 8, 최솟값은 -4이다.

(5) $y=2x^2-4x-1=2(x-1)^2-3$



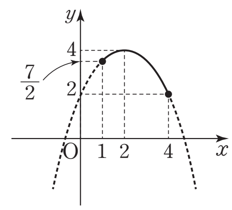
꼭짓점의 x좌표 1이 $-1\le x\le 1$에 포함되므로

$x=-1$일 때 $y=5$

$x=1$일 때 $y=-3$

따라서 최댓값은 5, 최솟값은 -3이다.

(6) $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+2=-\frac{1}{2}(x-2)^2+4$



꼭짓점의 x좌표 2가 $1\le x\le 4$에 포함되므로

$x=1$일 때, $y=\frac{7}{2}$

$x=2$일 때, $y=4$

$x=4$일 때, $y=2$

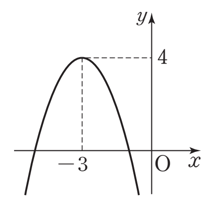
따라서 최댓값은 4, 최솟값은 2이다.

필수 예제 01 이차함수의 최대·최소 144쪽

01-1 답 (1) -5 (2) $a=3$, $b=-1$

|전략| 이차함수의 최대·최소는 $y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형하여 구한다.

(1) $y=-x^2-6x+k$

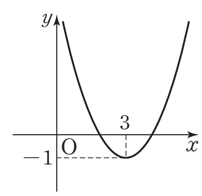


$=-(x+3)^2+k+9$

$x=-3$일 때 최댓값은 $k+9$이므로

$k+9=4$ $\therefore k=-5$

(2) $y=x^2-2ax+8$



$=(x-a)^2-a^2+8$

$x=a$일 때 최솟값은 $-a^2+8$이므로

$a=3$, $b=-a^2+8$

$\therefore a=3$, $b=-3^2+8=-1$

01-2 답 최댓값: 9, 최솟값: 없다.

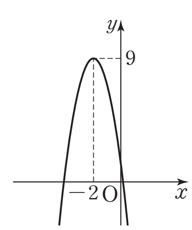
|전략| 이차함수의 최대·최소는 $y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형하여 구한다.

$y=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$

$x=2$일 때 최솟값은 $a-4$이므로

$a-4=-6$ $\therefore a=-2$

따라서



$y=ax^2-8x+1=-2x^2-8x+1$

$=-2(x+2)^2+9$

이므로 $x=-2$일 때 최댓값은 9, 최솟값은 없다.

필수 예제 02 제한된 범위에서의 이차함수의 최대·최소 145쪽

02-1 답 6

|전략| $y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형한 후 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 포함되는지 확인한다.

$y=x^2+8x-3k+1=(x+4)^2-3k-15$

꼭짓점의 x좌표 -4가 $-3\le x\le -1$에 포함되지 않으므로 $x=-3$일 때 최솟값 $-3k-14$를 갖는다.

$-3k-14=-2$ $\therefore k=-4$

따라서 주어진 함수는 $y=(x+4)^2-3$이므로 최댓값은 $x=-1$일 때 6이다.

02-2 답 -2

|전략| 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 포함되면 범위의 양 끝에서의 함숫값과 꼭짓점의 y좌표를 비교한다.

$y=-x^2+2x+m-3=-(x-1)^2+m-2$

꼭짓점의 x좌표 1이 $-1\le x\le 2$에 포함되므로 $x=1$일 때 최댓값 $m-2$를 갖는다.

$m-2=2 \qquad \therefore m=4$

따라서 주어진 함수는 $y=-(x-1)^2+2$이고,

$x=-1$일 때 $y=-2$

$x=2$일 때 $y=1$

이므로 최솟값은 -2이다.

참고 $y=-x^2+2x+m-3$은 위로 볼록한 포물선이므로 축에 가까울수록 함숫값이 크다.

필수 예제 03 공통부분이 있는 함수의 최대·최소 146쪽

03-1 답 (1) 최댓값: 32, 최솟값: -4 (2) 최댓값: 12, 최솟값: -4

|전략| 공통부분을 t로 치환하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

(1) $x^2-2x=t$로 놓으면

$t=x^2-2x=(x-1)^2-1$

$-2\le x\le 2$이므로 [그림 1]에서

$-1\le t\le 8$

이때, 주어진 함수를 t에 대한 함수로 나타내면

$y=t^2-4t$

$=(t-2)^2-4\ (-1\le t\le 8)$

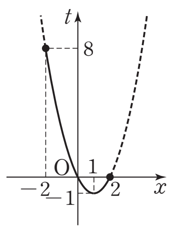
이므로 [그림 2]에서

$t=-1$일 때 $y=5$

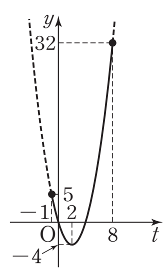
$t=2$일 때 $y=-4$

$t=8$일 때 $y=32$

따라서 최댓값은 32, 최솟값은 -4이다.



[그림 1]



[그림 2]

(2) $x^2-2x+3=t$로 놓으면

$t=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$

$-1\le x\le 2$이므로 [그림 1]에서

$2\le t\le 6$

이때, 주어진 함수를 t에 대한 함수로 나타내면

$y=-t^2+4t+8$

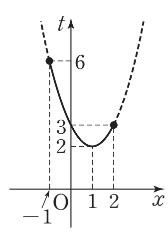
$=-(t-2)^2+12\ (2\le t\le 6)$

이므로 [그림 2]에서

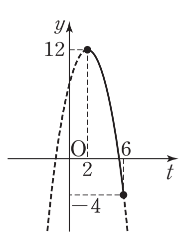
$t=2$일 때 $y=12$

$t=6$일 때 $y=-4$

따라서 최댓값은 12, 최솟값은 -4이다.



[그림 1]



[그림 2]

03-2 답 13

|전략| 공통부분을 t로 치환하여 최솟값을 구한다.

$x^2+2=t$로 놓으면

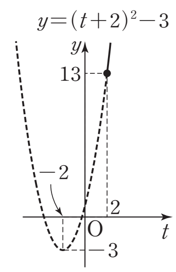
$t\ge 2$

이때, 주어진 함수를 t에 대한 함수로 나타내면

$y=t^2+4t+1$

$=(t+2)^2-3\ (t\ge 2)$

따라서 최솟값은 $t=2$일 때 13이다.



참고 x의 값의 범위가 제한되지 않은 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 바꿀 때도 t의 값의 범위를 따로 생각해야 한다.

필수 예제 04 조건식이 주어진 이차식의 최대·최소 147쪽

04-1 답 최댓값: 6, 최솟값: -2

|전략| 주어진 조건식을 이차식에 대입하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

$y=x-4$를 x^2+xy에 대입하면

$x^2+xy=x^2+x(x-4)$

$=2x^2-4x$

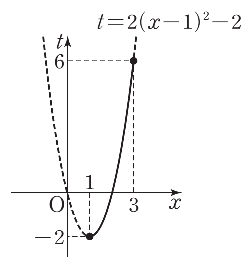
$=2(x-1)^2-2\ (1\le x\le 3)$

$x^2+xy=t$라 하면 $t=2(x-1)^2-2$이고, $1\le x\le 3$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=1$일 때 $t=-2$

$x=3$일 때 $t=6$

따라서 x^2+xy의 최댓값은 6, 최솟값은 -2이다.



04-2 답 3

|전략| 조건식을 한 문자에 대하여 정리한 후 이차식에 대입한다.

$2x+y+3=0$, 즉 $y=-2x-3$을 $2x^2+y^2$에 대입하면

$2x^2+y^2=2x^2+(-2x-3)^2$

$=6x^2+12x+9$

$=6(x+1)^2+3$

$2x^2+y^2=t$라 하면 $t=6(x+1)^2+3$

따라서 $2x^2+y^2$의 최솟값은 $x=-1$일 때 3이다.

04-3 답 -6

|전략| 점 $\mathrm{P}(a, b)$가 직선 $2x-y-1=0$ 위를 움직이면 $2a-b-1=0$이 성립한다. 이 식을 한 문자에 대하여 정리한 후 이차식에 대입한다.

점 $\mathrm{P}(a, b)$가 직선 $2x-y-1=0$ 위를 움직이므로 $2a-b-1=0$, 즉 $b=2a-1$을 a^2-3b에 대입하면

$a^2-3b=a^2-3(2a-1)$

$=a^2-6a+3$

$=(a-3)^2-6$

$a^2-3b=t$라 하면 $t=(a-3)^2-6$

따라서 a^2-3b의 최솟값은 $a=3$일 때 -6이다.

필수 예제 05 완전제곱식을 이용한 이차식의 최대·최소 148쪽

05-1 답 9

|전략| x, y에 대한 완전제곱식 꼴, 즉 $(\quad)^2+(\quad)^2+m$ 꼴로 변형하여 $(\text{실수})^2\ge 0$임을 이용한다.

$2x^2+2y^2+8x-8y+k$
$=2(x^2+4x+4)+2(y^2-4y+4)+k-16$
$=2(x+2)^2+2(y-2)^2+k-16$
이때, x, y는 실수이므로 $(x+2)^2\ge 0$, $(y-2)^2\ge 0$
$\therefore\ 2x^2+2y^2+8x-8y+k\ge k-16$
주어진 식의 최솟값이 -7이므로
$k-16=-7 \qquad \therefore\ k=9$

05-2 답 -24

|전략| x, y에 대한 완전제곱식 꼴, 즉 $(\quad)^2+(\quad)^2+m$ 꼴로 변형하여 $(\text{실수})^2\ge 0$임을 이용한다.

$6x-4y-x^2-y^2-9=-(x^2-6x+9)-(y^2+4y+4)+4$
$=-(x-3)^2-(y+2)^2+4$
이때, x, y는 실수이므로 $(x-3)^2\ge 0$, $(y+2)^2\ge 0$에서
$-(x-3)^2\le 0$, $-(y+2)^2\le 0$
$\therefore\ 6x-4y-x^2-y^2-9\le 4$
즉, 주어진 식은 $x=3$, $y=-2$일 때 최댓값 4를 갖는다.
따라서 $a=3$, $b=-2$, $c=4$이므로
$abc=-24$

필수 예제 06 이차함수의 최대·최소의 활용 149쪽

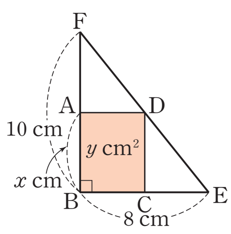
06-1 답 45 m

|전략| 주어진 이차함수의 최댓값을 구한다.

$y=-5t^2+30t=-5(t-3)^2+45\ (0\le t\le 6)$
즉, 이차함수 $y=-5(t-3)^2+45$는 $t=3$일 때 최댓값 45를 가지므로 물체가 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 45 m이다.

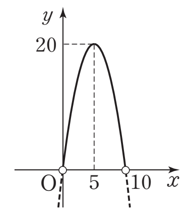
06-2 답 20 cm²

|전략| $\overline{AB}=x$ cm, (직사각형 ABCD의 넓이)$=y$ cm²라 하고 삼각형의 닮음을 이용하여 식을 세운다.



오른쪽 그림과 같이
$\overline{AB}=x$ cm,
(직사각형 ABCD의 넓이)$=y$ cm²라 하자.
$\triangle FAD\backsim\triangle FBE$ (AA 닮음)이므로
$\overline{FA}:\overline{FB}=\overline{AD}:\overline{BE}$에서
$(10-x):10=\overline{AD}:8$
$10\overline{AD}=8(10-x) \qquad \therefore\ \overline{AD}=8-\frac{4}{5}x$
이때, 변의 길이는 양수이므로
$x>0$, $8-\frac{4}{5}x>0 \qquad \therefore\ 0<x<10$

$\therefore\ y=x\left(8-\frac{4}{5}x\right)=-\frac{4}{5}x^2+8x$
$=-\frac{4}{5}(x-5)^2+20\ (0<x<10)$



따라서 오른쪽 그림에서 이차함수
$y=-\frac{4}{5}(x-5)^2+20$은 $x=5$일 때 최댓값 20을 가지므로 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 20 cm²이다.

다른 풀이 $\triangle FAD\backsim\triangle FBE$이므로
$\overline{FA}:\overline{AD}=\overline{FB}:\overline{BE}=10:8=5:4$
이때, $0<x<2$인 x에 대하여 $\overline{FA}=5x$ cm, $\overline{AD}=4x$ cm라 하면
$\overline{AB}=(10-5x)$ cm
직사각형 ABCD의 넓이를 y cm²라 하면
$y=4x(10-5x)=-20x^2+40x$
$=-20(x-1)^2+20\ (0<x<2)$
따라서 이차함수 $y=-20(x-1)^2+20$은 $x=1$일 때 최댓값 20을 가지므로 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 20 cm²이다.

Lecture
삼각형에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값은 삼각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이다.

개념 정리 150~151쪽

01 y좌표, x좌표 **02** $y=0$, 실근 **03** x축, 실근
04 b^2-4ac **05** $D>0$ **06** $D=0$ **07** $D<0$
08 서로 다른 두 점에서 만난다. **09** 한 점에서 만난다.
10 만나지 않는다. **11** $a>0$
12 최댓값, 최솟값 **13** $f(\beta)$ **14** $f(\alpha)$

13~14

x의 값의 범위가 $\alpha\le x\le\beta$로 제한된 경우
이차함수 $f(x)=a(x-m)^2+n$은 꼭짓점의 x좌표 또는 범위의 끝값에서 최댓값 또는 최솟값을 가지므로 꼭짓점의 x좌표가 범위에 속하는지의 여부에 따라 꼭짓점의 y좌표, 즉 $f(m)$과 범위의 양 끝값에서의 함숫값 $f(\alpha)$, $f(\beta)$를 구하여 대소를 비교한다.

중단원 마무리 152~154쪽

01 ③	**02** -4	**03** 5	**04** ①
05 ⑤	**06** ②	**07** -20	**08** 128
09 ②	**10** ③	**11** 5	**12** ④
13 ④	**14** 8	**15** ①	**16** -4
17 1	**18** 1	**19** ④	**20** 1900원
21 6	**22** 4	**23** 10	**24** 2

LEVEL 1

01 이차함수 $y=-2x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -2, 3이므로 이차방정식 $-2x^2+ax+b=0$의 두 실근이 -2, 3이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-2+3=-\dfrac{a}{-2}$, $-2\times3=\dfrac{b}{-2}$
따라서 $a=2$, $b=12$이므로
$ab=24$

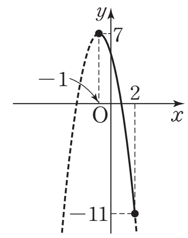
02 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2-8=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k^2-8)=2k+9$
이차함수의 그래프가 x축과 만나려면 $D\geq0$이어야 하므로
$2k+9\geq0 \qquad \therefore k\geq-\dfrac{9}{2}$
따라서 정수 k의 최솟값은 -4이다.

03 이차방정식 $-x^2+3mx+1=-x+n$, 즉
$x^2-(3m+1)x+n-1=0$의 두 실근이 1, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$1+3=3m+1$, $1\times3=n-1$
따라서 $m=1$, $n=4$이므로
$m+n=5$

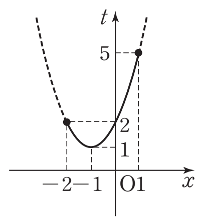
04 이차함수 $y=-2x^2-x+a$의 그래프가 점 $(-1, 3)$을 지나므로
$3=-2\times(-1)^2-(-1)+a \qquad \therefore a=4$
이차방정식 $-2x^2-x+4=3x+b$, 즉 $2x^2+4x+b-4=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=2^2-2(b-4)=-2b+12$
이차함수 $y=-2x^2-x+4$의 그래프와 직선 $y=3x+b$가 접하려면 $D=0$이어야 하므로
$-2b+12=0 \qquad \therefore b=6$
$\therefore a-b=-2$

05 직선 $y=ax+k$가 직선 $y=5x-2$에 평행하므로 $a=5$
이차방정식 $-x^2+2x+3k=5x+k$,
즉 $x^2+3x-2k=0$의 판별식을 D라 하면
$D=3^2-4\times1\times(-2k)=8k+9$
직선 $y=5x+k$가 이차함수 $y=-x^2+2x+3k$의 그래프에 접하려면 $D=0$이어야 하므로
$8k+9=0 \qquad \therefore k=-\dfrac{9}{8}$
$\therefore a-8k=5-8\times\left(-\dfrac{9}{8}\right)=14$

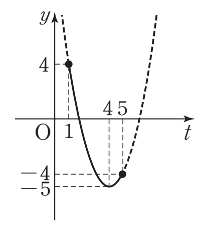
06 $y=-2x^2-4x+5=-2(x+1)^2+7$
이므로 $-1\leq x\leq2$에서 $x=-1$일 때 최댓값 7, $x=2$일 때 최솟값 -11을 갖는다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은
$7+(-11)=-4$



07 $x^2+2x+2=t$로 놓으면
$t=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$
$-2\leq x\leq1$이므로 [그림 1]에서
$1\leq t\leq5$
이때, 주어진 함수를 t에 대한 함수로 나타내면
$y=t^2-8(t-2)-5=t^2-8t+11$
$\quad=(t-4)^2-5\ (1\leq t\leq5)$
이므로 [그림 2]에서
$t=1$일 때 $y=4$
$t=4$일 때 $y=-5$
$t=5$일 때 $y=-4$
따라서 최댓값은 4, 최솟값은 -5이므로 최댓값과 최솟값의 곱은
$4\times(-5)=-20$



[그림 1]



[그림 2]

참고 $x^2+2x=t$로 치환해도 답은 같다.
$t=x^2+2x=(x+1)^2-1$이므로 $-2\leq x\leq1$에서 $-1\leq t\leq3$
이때, 주어진 함수는
$y=(t+2)^2-8t-5=t^2-4t-1=(t-2)^2-5\ (-1\leq t\leq3)$
이므로 $t=-1$일 때 최댓값 4를 갖고, $t=2$일 때 최솟값 -5를 갖는다.
따라서 최댓값과 최솟값의 곱은 $4\times(-5)=-20$

08 $\overline{AP}=x$라 하면 $\overline{PB}=16-x$
이때, 변의 길이는 양수이므로
$x>0$, $16-x>0$에서 $0<x<16$
두 정사각형의 넓이의 합을 y라 하면
$y=x^2+(16-x)^2=2x^2-32x+256$
$\quad=2(x-8)^2+128$
따라서 이차함수 $y=2(x-8)^2+128$은 $x=8$일 때 최솟값 128을 가지므로 두 정사각형의 넓이의 합의 최솟값은 128이다.

LEVEL 2

09 이차함수 $y=x^2+mx+n$의 그래프가 점 $(-1, 1)$을 지나므로
$1=(-1)^2-m+n \qquad \therefore m=n$ ······ ㉠
이차함수 $y=x^2+mx+n$의 그래프가 x축에 접하므로
이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 판별식을 D라 하면
$D=m^2-4n=0$ ······ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$m^2-4m=0$, $m(m-4)=0 \qquad \therefore m=4\ (\because m\neq0)$
㉠에서 $m=n$이므로 $n=4$
$\therefore m+n=8$

10 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점 $(-3,\ 0)$, $(1,\ 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x+3)(x-1)$ $(a<0)$이라 하면

$f(x+p)=a(x+p+3)(x+p-1)$

$f(x+p)=0$에서 $a(x+p+3)(x+p-1)=0$

$\therefore x=-p-3$ 또는 $x=-p+1$

이때, 이차방정식 $f(x+p)=0$의 두 실근의 합이 4이므로

$(-p-3)+(-p+1)=4$, $2p=-6$

$\therefore p=-3$

11 이차방정식 $x^2-x-1=-2x+k$, 즉 $x^2+x-k-1=0$의 두 실근은 이차함수 $y=x^2-x-1$의 그래프와 직선 $y=-2x+k$의 교점의 x좌표인 x_1, x_2와 같으므로 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=-1$, $x_1x_2=-k-1$ …… ㉠

이때, $|x_1-x_2|=5$의 양변을 제곱하면

$(x_1-x_2)^2=25$이고, $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$이므로

$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=25$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$1-4(-k-1)=25$, $4k=20$

$\therefore k=5$

12 이차방정식 $-2x^2+5x+4=3x+k$, 즉

$2x^2-2x+k-4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2(k-4)=-2k+9$

이차함수 $y=-2x^2+5x+4$의 그래프와 직선 $y=3x+k$가 적어도 한 점에서 만나려면 $D\geq0$이어야 하므로

$-2k+9\geq0$ $\quad\therefore k\leq\frac{9}{2}$

따라서 자연수 k의 최댓값은 4이다.

13 이차방정식 $x^2-2kx+k^2-1=mx+n$, 즉

$x^2-(2k+m)x+k^2-n-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2k+m)\}^2-4\times1\times(k^2-n-1)=0$

$\therefore 4mk+m^2+4n+4=0$

위 식은 k에 대한 항등식이므로

$4m=0$, $m^2+4n+4=0$

따라서 $m=0$, $n=-1$이므로

$m-n=1$

14 $y=ax^2-4ax+b=a(x-2)^2-4a+b$

$a>0$이므로 $0\leq x\leq5$에서 $x=5$일 때 최댓값 $5a+b$, $x=2$일 때 최솟값 $-4a+b$를 갖는다.

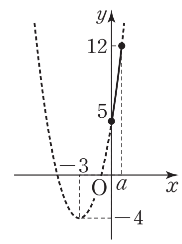
즉, $5a+b=20$, $-4a+b=-7$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=5$

$\therefore a+b=8$

15 $y=x^2+6x+5=(x+3)^2-4$

이므로 $0\leq x\leq a$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, 꼭짓점의 x좌표 -3이 $0\leq x\leq a$에 포함되지 않으므로 $x=0$일 때 최솟값 5, $x=a$일 때 최댓값 a^2+6a+5를 갖는다.

즉, $a^2+6a+5=12$에서 $a^2+6a-7=0$

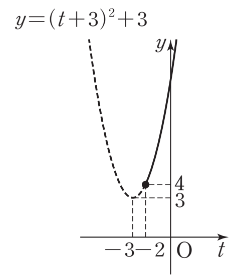
$(a+7)(a-1)=0$ $\quad\therefore a=1$ ($\because a>0$)

16 $x^2+2x-1=t$로 놓으면

$t=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$

$\therefore t\geq-2$

이때, 주어진 함수를 t에 대한 함수로 나타내면



$y=t^2+6(t+1)+6=t^2+6t+12$

$\quad=(t+3)^2+3$ $(t\geq-2)$

이므로 $t=-2$일 때 최솟값 4를 갖는다.

$t=-2$일 때, $x^2+2x-1=-2$에서

$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$

따라서 $a=-1$, $b=4$이므로

$ab=-4$

17 $y^2+2x=2$에서 $y^2=-2x+2$

$y^2\geq0$이므로 $-2x+2\geq0$ $\quad\therefore x\leq1$

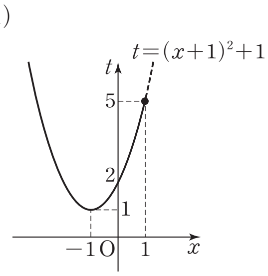
$y^2=-2x+2$를 x^2+y^2+4x에 대입하면

$x^2+y^2+4x=x^2-2x+2+4x=x^2+2x+2$

$\qquad=(x+1)^2+1$ $(x\leq1)$

$x^2+y^2+4x=t$라 하면

$t=(x+1)^2+1$이고, $x\leq1$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



x^2+y^2+4x의 최솟값은 1이다.

참고 실수 x, y에 대한 조건식을 $y^2=(x$에 대한 식$)$으로 정리했을 때, $y^2\geq0$이므로 이를 이용하여 x의 값의 범위를 반드시 구해야 한다.

18 $x^2-2x+2y^2-4y+k^2-k+1$

$=(x^2-2x+1)+2(y^2-2y+1)+k^2-k-2$

$=(x-1)^2+2(y-1)^2+k^2-k-2$

이때, x, y는 실수이므로 $(x-1)^2\geq0$, $(y-1)^2\geq0$

$\therefore x^2-2x+2y^2-4y+k^2-k+1\geq k^2-k-2$

주어진 식의 최솟값이 0이므로 $k^2-k-2=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 1이다.

다른 풀이 $k^2-k-2=0$에서 $(k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=2$

따라서 모든 k의 값의 합은 $-1+2=1$

19 점 C의 좌표를 $(k, 0)$ $(0<k<\sqrt{5})$이라 하면

$\overline{BC}=2k$, $\overline{CD}=-k^2+5$

직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 l이라 하면

$l=2(\overline{BC}+\overline{CD})=2\{2k+(-k^2+5)\}$

$=-2k^2+4k+10=-2(k-1)^2+12$

이때, $0<k<\sqrt{5}$이므로 $k=1$일 때 최댓값 12를 갖는다.

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 12이다.

20 참가비를 $100x$원 내리면 신청 학생 수는 $10x$명 증가하므로

(참가비)$=3000-100x$(원)

(신청 학생 수)$=80+10x$(명) (단, $0\le x\le 30$)

참가비 총액을 y원이라 하면

$y=(3000-100x)(80+10x)$

$=-1000x^2+22000x+240000$

$=-1000(x-11)^2+361000$

이때, $0\le x\le 30$이므로 $x=11$일 때 최댓값 361000을 갖는다.

따라서 참가비 총액이 최대가 될 때의 참가비는

$3000-100\times 11=1900$(원)

서술형

21 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -5, 1이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 실근이 -5, 1이다. 즉, 근과 계수의 관계에 의하여

$-5+1=-a$, $(-5)\times 1=b$

$\therefore$ $a=4$, $b=-5$ ··· ❶

이차함수 $y=x^2-bx+a$, 즉 $y=x^2+5x+4$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+5x+4=0$의 실근이므로

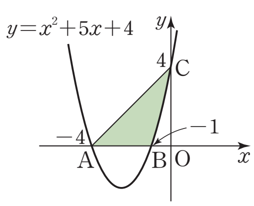
$(x+4)(x+1)=0$

$\therefore$ $x=-4$ 또는 $x=-1$

따라서 A$(-4, 0)$, B$(-1, 0)$

또는 A$(-1, 0)$, B$(-4, 0)$

이고, C$(0, 4)$ ··· ❷



$\therefore$ $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$ ··· ❸

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 세 점 A, B, C의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 삼각형 ABC의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

22 이차함수 $y=x^2-a$의 그래프와 직선 $y=bx$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-a=bx$, 즉 $x^2-bx-a=0$의 실근과 같다.

이때, a, b는 유리수이고 이차방정식 $x^2-bx-a=0$의 한 근이 $2+\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{5}$이다. ··· ❶

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=b$ $\therefore$ $b=4$

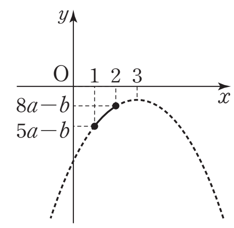
$(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=-a$ $\therefore$ $a=1$ ··· ❷

$\therefore$ $ab=4$ ··· ❸

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $x^2-bx-a=0$의 다른 한 근을 구할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

23 $y=-ax^2+6ax-b=-a(x-3)^2+9a-b$

$a>0$이므로 $1\le x\le 2$에서 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, 꼭짓점의 x좌표 3이 $1\le x\le 2$에 포함되지 않으므로

$x=2$일 때 최댓값 $8a-b$

$x=1$일 때 최솟값 $5a-b$

즉, 주어진 이차함수의 최댓값이 -3, 최솟값이 -6이므로

$8a-b=-3$ ······ ㉠

$5a-b=-6$ ······ ㉡ ··· ❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=11$ ··· ❷

$\therefore$ $b-a=10$ ··· ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 최댓값과 최솟값을 이용하여 ㉠, ㉡의 식을 세울 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20 %

24 주어진 이차함수의 그래프가 y축과 만나는 점이 C이므로

C$(0, 3)$

주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 두 점이 A, B이므로

$x^2+4x+3=0$에서

$(x+3)(x+1)=0$ $\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=-1$

$\therefore$ A$(-3, 0)$, B$(-1, 0)$ ··· ❶

한편, 점 P(a, b)는 $y=x^2+4x+3$의 그래프 위의 점이고

점 P가 점 A에서 점 C까지 움직이므로

$b=a^2+4a+3$ $(-3\le a\le 0)$ ··· ❷

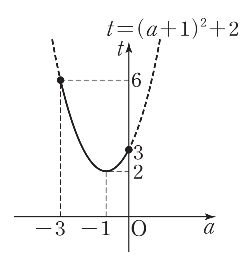
$\therefore$ $-2a+b=-2a+a^2+4a+3$

$=a^2+2a+3$

$=(a+1)^2+2$ $(-3\le a\le 0)$

$-2a+b=t$라 하면

$t=(a+1)^2+2$이고 $-3\le a\le 0$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, 꼭짓점의 a좌표 -1이 $-3\le a\le 0$에 포함되므로 구하는 최솟값은 2이다. ··· ❸

채점 기준	비율
❶ 세 점 A, B, C의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ $-2a+b$의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

7 여러 가지 방정식

1 삼차방정식과 사차방정식의 풀이

개념 확인 156~157쪽

1 (1) $x=-2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=5$ (2) $x=1$ 또는 $x=2\pm\sqrt{2}$
(3) $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=6$ (4) $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=9$
2 (1) $x=-5$ 또는 $x=-4$ 또는 $x=0$ 또는 $x=5$
(2) $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\pm i$
3 (1) $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
(2) $x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$
(3) $x=\pm 2$ 또는 $x=\pm\sqrt{7}$
(4) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

1 (1) $x+2=0$ 또는 $x-3=0$ 또는 $x-5=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=5$
(2) $x-1=0$ 또는 $x^2-4x+2=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2\pm\sqrt{2}$
(3) $x^3-8x^2+12x=0$에서 $x(x-2)(x-6)=0$이므로
$x=0$ 또는 $x-2=0$ 또는 $x-6=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=6$
(4) $f(x)=x^3-9x^2-x+9$로 놓으면 $f(1)=1-9-1+9=0$
이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -9 & -1 & 9 \\ & & 1 & -8 & -9 \\ \hline & 1 & -8 & -9 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-8x-9)$
$=(x-1)(x+1)(x-9)$
즉, $(x+1)(x-1)(x-9)=0$에서
$x+1=0$ 또는 $x-1=0$ 또는 $x-9=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=9$

2 (1) $x(x+5)(x^2-x-20)=0$에서
$x(x+5)(x+4)(x-5)=0$이므로
$x=0$ 또는 $x+5=0$ 또는 $x+4=0$ 또는 $x-5=0$
$\therefore x=-5$ 또는 $x=-4$ 또는 $x=0$ 또는 $x=5$
(2) $x^4-1=0$에서 $(x^2+1)(x+1)(x-1)=0$이므로
$x^2+1=0$ 또는 $x+1=0$ 또는 $x-1=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\pm i$

3 (1) $(x^2+x)^2-2(x^2+x)=0$에서 $x^2+x=X$로 놓으면
$X^2-2X=0$, $X(X-2)=0$
$\therefore X=0$ 또는 $X=2$
(i) $X=0$일 때, $x^2+x=0$에서
$x(x+1)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=0$
(ii) $X=2$일 때, $x^2+x=2$에서
$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$
(i), (ii)에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
(2) $(x^2-1)^2+(x^2-1)-6=0$에서 $x^2-1=X$로 놓으면
$X^2+X-6=0$, $(X+3)(X-2)=0$
$\therefore X=-3$ 또는 $X=2$
(i) $X=-3$일 때, $x^2-1=-3$에서
$x^2=-2$ $\therefore x=\pm\sqrt{2}i$
(ii) $X=2$일 때, $x^2-1=2$에서
$x^2=3$ $\therefore x=\pm\sqrt{3}$
(i), (ii)에서 $x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$
(3) $x^4-11x^2+28=0$에서 $x^2=X$로 놓으면
$X^2-11X+28=0$, $(X-4)(X-7)=0$
$\therefore X=4$ 또는 $X=7$
(i) $X=4$일 때, $x^2=4$ $\therefore x=\pm 2$
(ii) $X=7$일 때, $x^2=7$ $\therefore x=\pm\sqrt{7}$
(i), (ii)에서 $x=\pm 2$ 또는 $x=\pm\sqrt{7}$
(4) $x^4+3x^2+4=0$에서 $(x^4+4x^2+4)-x^2=0$
$(x^2+2)^2-x^2=0$, $(x^2+x+2)(x^2-x+2)=0$
$\therefore x^2+x+2=0$ 또는 $x^2-x+2=0$
(i) $x^2+x+2=0$에서 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$
(ii) $x^2-x+2=0$에서 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$
(i), (ii)에서 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

개념 드릴 158쪽

1 (1) $x=-7$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$ (2) $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}i$
(3) $x=-5$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{5}}{2}$
2 (1) $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$
(2) $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$
(3) $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$
(4) $x=-6$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$
3 (1) $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=5$
(2) $x=-5$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$
(3) $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$
4 (1) $x=\pm 2i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$ (2) $x=\pm i$ 또는 $x=\pm 2i$
(3) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$
(4) $x=-1\pm 2i$ 또는 $x=1\pm 2i$

1 (1) $x+7=0$ 또는 $x-1=0$ 또는 $x-4=0$
$\therefore x=-7$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$
(2) $x=0$ 또는 $x^2+3=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}i$
(3) $x+5=0$ 또는 $x^2-3x-9=0$
$\therefore x=-5$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{5}}{2}$

2 (1) $f(x)=x^3-3x^2-6x+8$로 놓으면

$f(1)=1-3-6+8=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & -6 & 8 \\ & & 1 & -2 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-2x-8)$

$\quad=(x-1)(x+2)(x-4)$

즉, $(x+2)(x-1)(x-4)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$

(2) $f(x)=x^3-4x^2+x+6$으로 놓으면

$f(-1)=-1-4-1+6=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2-5x+6)$

$\quad=(x+1)(x-2)(x-3)$

즉, $(x+1)(x-2)(x-3)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

(3) $f(x)=x^4+2x^3-12x^2+7x+2$로 놓으면

$f(1)=1+2-12+7+2=0$,

$f(2)=16+16-48+14+2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & -12 & 7 & 2 \\ & & 1 & 3 & -9 & -2 \\ \hline 2 & 1 & 3 & -9 & -2 & \boxed{0} \\ & & 2 & 10 & 2 & \\ \hline & 1 & 5 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^3+3x^2-9x-2)$

$\quad=(x-1)(x-2)(x^2+5x+1)$

즉, $(x-1)(x-2)(x^2+5x+1)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x^2+5x+1=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

(4) $f(x)=x^4+7x^3+2x^2-28x-24$로 놓으면

$f(-1)=1-7+2+28-24=0$,

$f(2)=16+56+8-56-24=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 7 & 2 & -28 & -24 \\ & & -1 & -6 & 4 & 24 \\ \hline 2 & 1 & 6 & -4 & -24 & \boxed{0} \\ & & 2 & 16 & 24 & \\ \hline & 1 & 8 & 12 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x^3+6x^2-4x-24)$

$\quad=(x+1)(x-2)(x^2+8x+12)$

$\quad=(x+1)(x-2)(x+2)(x+6)$

즉, $(x+6)(x+2)(x+1)(x-2)=0$에서

$x=-6$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$

3 (1) $(x^2-4x)^2-2(x^2-4x)-15=0$에서 $x^2-4x=X$로 놓으면

$X^2-2X-15=0$, $(X+3)(X-5)=0$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=5$

(i) $X=-3$일 때, $x^2-4x=-3$에서

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

(ii) $X=5$일 때, $x^2-4x=5$에서

$x^2-4x-5=0$, $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

(i), (ii)에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=5$

(2) $(x^2+3x)^2-8(x^2+3x)-20=0$에서 $x^2+3x=X$로 놓으면

$X^2-8X-20=0$, $(X+2)(X-10)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=10$

(i) $X=-2$일 때, $x^2+3x=-2$에서

$x^2+3x+2=0$, $(x+1)(x+2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-2$

(ii) $X=10$일 때, $x^2+3x=10$에서

$x^2+3x-10=0$, $(x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 $x=-5$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$

(3) $(x^2-2x)^2-11(x^2-2x)+24=0$에서 $x^2-2x=X$로 놓으면

$X^2-11X+24=0$, $(X-3)(X-8)=0$

$\therefore X=3$ 또는 $X=8$

(i) $X=3$일 때, $x^2-2x=3$에서

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

(ii) $X=8$일 때, $x^2-2x=8$에서

$x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$

4 (1) $x^2=X$로 놓으면

$X^2+X-12=0$, $(X+4)(X-3)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=3$

(i) $X=-4$일 때, $x^2=-4$ $\quad\therefore x=\pm 2i$

(ii) $X=3$일 때, $x^2=3$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 $x=\pm 2i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

(2) $x^2=X$로 놓으면

$X^2+5X+4=0$, $(X+1)(X+4)=0$

$\therefore X=-1$ 또는 $X=-4$

(i) $X=-1$일 때, $x^2=-1$ $\quad\therefore x=\pm i$

(ii) $X=-4$일 때, $x^2=-4$ $\quad\therefore x=\pm 2i$

(i), (ii)에서 $x=\pm i$ 또는 $x=\pm 2i$

(3) $x^4-13x^2+4=0$에서

$(x^4-4x^2+4)-9x^2=0$, $(x^2-2)^2-(3x)^2=0$

$(x^2+3x-2)(x^2-3x-2)=0$

$\therefore x^2+3x-2=0$ 또는 $x^2-3x-2=0$

(i) $x^2+3x-2=0$에서 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$

(ii) $x^2-3x-2=0$에서 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

(i), (ii)에서 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

(4) $x^4+6x^2+25=0$에서

$(x^4+10x^2+25)-4x^2=0$, $(x^2+5)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x+5)(x^2-2x+5)=0$

$\therefore$ $x^2+2x+5=0$ 또는 $x^2-2x+5=0$

(i) $x^2+2x+5=0$에서 $x=-1\pm 2i$

(ii) $x^2-2x+5=0$에서 $x=1\pm 2i$

(i), (ii)에서 $x=-1\pm 2i$ 또는 $x=1\pm 2i$

필수 예제 01 인수정리를 이용한 삼차방정식과 사차방정식의 풀이 159쪽

01-1 답 (1) $x=2$ 또는 $x=-2\pm 2i$ (2) $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(3) $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$(중근)

(4) $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$

| 전략 | 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한 후 근을 구한다.

(1) $f(x)=x^3+2x^2-16$으로 놓으면

$f(2)=8+8-16=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & 0 & -16 \\ & & 2 & 8 & 16 \\ \hline & 1 & 4 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2+4x+8)$

즉, $(x-2)(x^2+4x+8)=0$에서

$x=2$ 또는 $x^2+4x+8=0$

$\therefore$ $x=2$ 또는 $x=-2\pm 2i$

(2) $f(x)=2x^3+x^2-3x+1$로 놓으면

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+1=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 1 & -3 & 1 \\ & & 1 & 1 & -1 \\ \hline & 2 & 2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x-2)$

$=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+x-1)$

즉, $2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+x-1)=0$에서

$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x^2+x-1=0$

$\therefore$ $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(3) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-x+2$로 놓으면

$f(1)=1+1-3-1+2=0$,

$f(-1)=1-1-3+1+2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ & & 1 & 2 & -1 & -2 \\ \hline -1 & 1 & 2 & -1 & -2 & \boxed{0} \\ & & -1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore$ $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+x-2)$

$=(x-1)^2(x+1)(x+2)$

즉, $(x-1)^2(x+1)(x+2)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$(중근)

참고 사차방정식 $f(x)=0$의 해를 구할 때는 $f(x)$를 일차식 또는 이차식의 곱으로 나타낼 수 있을 때까지 인수분해한다.

(4) $f(x)=x^4+x^3+2x-4$로 놓으면

$f(1)=1+1+2-4=0$,

$f(-2)=16-8-4-4=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & -4 \\ & & 1 & 2 & 2 & 4 \\ \hline -2 & 1 & 2 & 2 & 4 & \boxed{0} \\ & & -2 & 0 & -4 & \\ \hline & 1 & 0 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore$ $f(x)=(x-1)(x+2)(x^2+2)$

즉, $(x-1)(x+2)(x^2+2)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x^2+2=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$

필수 예제 02 공통부분이 있는 사차방정식의 풀이 160쪽

02-1 답 (1) $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

(2) $x=-6$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-4\pm\sqrt{6}$

| 전략 | (1) 공통부분을 치환하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한 후 근을 구한다.

(2) 공통부분이 생기도록 식을 묶어 전개한 후 공통부분을 치환한다.

(1) $(x^2+x+2)^2-12(x^2+x)+8=0$에서 $x^2+x=X$로 놓으면

$(X+2)^2-12X+8=0$, $X^2-8X+12=0$

$(X-2)(X-6)=0$ $\therefore$ $X=2$ 또는 $X=6$

(i) $X=2$일 때, $x^2+x=2$

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=1$

(ii) $X=6$일 때, $x^2+x=6$

$x^2+x-6=0$, $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

(2) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=-15$에서

$\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}=-15$

$(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)=-15$

$x^2+8x=X$로 놓으면

$(X+7)(X+15)=-15$, $X^2+22X+120=0$

$(X+12)(X+10)=0$ $\therefore$ $X=-12$ 또는 $X=-10$

(i) $X=-12$일 때, $x^2+8x=-12$

$x^2+8x+12=0$, $(x+6)(x+2)=0$

$\therefore$ $x=-6$ 또는 $x=-2$

(ii) $X=-10$일 때, $x^2+8x=-10$

$x^2+8x+10=0$ $\therefore$ $x=-4\pm\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 $x=-6$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-4\pm\sqrt{6}$

필수 예제 03 $x^4+ax^2+b=0$ 꼴의 방정식의 풀이 161쪽

03-1
답 (1) $x=\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=\pm1$

(2) $x=\pm2i$ 또는 $x=\pm\sqrt{7}$

(3) $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(4) $x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

|전략| $x^2=X$로 치환하여 좌변이 인수분해되면 인수분해하여 근을 구하고, 인수분해되지 않으면 $A^2-B^2=0$ 꼴로 변형하여 인수분해한 후 근을 구한다.

(1) $x^2=X$로 놓으면

$X^2+4X-5=0$, $(X+5)(X-1)=0$

$\therefore X=-5$ 또는 $X=1$

(i) $X=-5$일 때, $x^2=-5$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{5}i$

(ii) $X=1$일 때, $x^2=1$ $\quad\therefore x=\pm1$

(i), (ii)에서 $x=\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=\pm1$

(2) $x^2=X$로 놓으면

$X^2-3X-28=0$, $(X+4)(X-7)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=7$

(i) $X=-4$일 때, $x^2=-4$ $\quad\therefore x=\pm2i$

(ii) $X=7$일 때, $x^2=7$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{7}$

(i), (ii)에서 $x=\pm2i$ 또는 $x=\pm\sqrt{7}$

(3) $x^4+x^2+1=0$에서 $(x^4+2x^2+1)-x^2=0$

$(x^2+1)^2-x^2=0$, $(x^2+x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x^2+x+1=0$ 또는 $x^2-x+1=0$

(i) $x^2+x+1=0$에서 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ii) $x^2-x+1=0$에서 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(4) $x^4-15x^2+25=0$에서 $(x^4+10x^2+25)-25x^2=0$

$(x^2+5)^2-(5x)^2=0$, $(x^2+5x+5)(x^2-5x+5)=0$

$\therefore x^2+5x+5=0$ 또는 $x^2-5x+5=0$

(i) $x^2+5x+5=0$에서 $x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$

(ii) $x^2-5x+5=0$에서 $x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

(i), (ii)에서 $x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

03-2
답 0

|전략| $A^2-B^2=0$ 꼴로 변형한 후 인수분해한다.

$x^4-12x^2+4=0$에서 $(x^4+4x^2+4)-16x^2=0$

$(x^2+2)^2-(4x)^2=0$, $(x^2+4x+2)(x^2-4x+2)=0$

$\therefore x^2+4x+2=0$ 또는 $x^2-4x+2=0$

(i) $x^2+4x+2=0$에서 $x=-2\pm\sqrt{2}$

(ii) $x^2-4x+2=0$에서 $x=2\pm\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $x=-2\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=2\pm\sqrt{2}$

따라서 가장 큰 근은 $2+\sqrt{2}$, 가장 작은 근은 $-2-\sqrt{2}$이므로 가장 큰 근과 가장 작은 근의 합은 $(2+\sqrt{2})+(-2-\sqrt{2})=0$

필수 예제 04 삼차방정식과 사차방정식의 근이 주어질 때 미정계수 구하기 162쪽

04-1
답 $k=4$, 두 근의 곱: -1

|전략| 주어진 근을 방정식에 대입하여 미정계수를 구한 후 방정식의 좌변을 인수분해한다.

$x^3-kx^2+(k-1)x+2=0$의 한 근이 2이므로 $x=2$를 대입하면

$8-4k+2k-2+2=0$ $\quad\therefore k=4$

따라서 주어진 방정식은

$x^3-4x^2+3x+2=0$이고 이 방정식의 한 근이 2이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면 $(x-2)(x^2-2x-1)=0$

2	1	-4	3	2
		2	-4	-2
	1	-2	-1	0

이때, 주어진 방정식의 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 두 근의 곱은 -1이다.

04-2
답 $a=9$, $b=-3$, 두 근의 합: 0

|전략| 주어진 근을 방정식에 대입하여 미정계수를 구한 후 방정식의 좌변을 인수분해한다.

$x^4+x^3-ax^2+bx+18=0$의 두 근이 -3, 2이므로

$x=-3$을 대입하면

$81-27-9a-3b+18=0$ $\quad\therefore 3a+b=24$ ...... ㉠

$x=2$를 대입하면

$16+8-4a+2b+18=0$ $\quad\therefore 2a-b=21$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=9$, $b=-3$

따라서 주어진 방정식은 $x^4+x^3-9x^2-3x+18=0$이고 이 방정식의 두 근이 -3, 2이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

-3	1	1	-9	-3	18
		-3	6	9	-18
2	1	-2	-3	6	0
		2	0	-6	
	1	0	-3	0	

$\therefore (x+3)(x-2)(x^2-3)=0$

이때, 주어진 방정식의 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2-3=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 두 근의 합은 0이다.

필수 예제 05 삼차방정식의 근의 조건 163쪽

05-1
답 $k>-1$

|전략| $f(x)=x^3+x^2+kx-k-2$로 놓고 $f(x)$를 인수분해한 후 $f(x)=0$이 허근을 가질 조건을 구한다.

$f(x)=x^3+x^2+kx-k-2$로 놓으면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	1	k	$-k-2$
		1	2	$k+2$
	1	2	$k+2$	0

$f(x)=(x-1)(x^2+2x+k+2)$

이때, 방정식 $f(x)=0$이 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2x+k+2=0$이 허근을 가져야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(k+2)<0$, $-k-1<0$ $\quad\therefore k>-1$

05-2 답 $k\le -\frac{1}{4}$

|전략| $f(x)=x^3+3kx+3k+1$로 놓고 $f(x)$를 인수분해한 후 $f(x)=0$의 근이 모두 실수일 조건을 구한다.

$f(x)=x^3+3kx+3k+1$로 놓으면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & 3k & 3k+1 \\ & & -1 & 1 & -3k-1 \\ \hline & 1 & -1 & 3k+1 & 0 \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x^2-x+3k+1)$

이때, 방정식 $f(x)=0$의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-x+3k+1=0$이 실근을 가져야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4(3k+1)\ge 0,\ -12k-3\ge 0 \qquad \therefore k\le -\frac{1}{4}$

2 삼차방정식의 근과 계수의 관계

개념 확인 164~166쪽

1 (1) -3 (2) -12 (3) 5

2 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 0 (3) -2

3 $x^3-8x^2+17x-10=0$

4 (1) $1+\sqrt{2}$ (2) $1-i$

5 (1) -1 (2) -1 (3) 2

6 (1) -1 (2) 1 (3) 0

3 $x^3-(1+2+5)x^2+(1\times2+2\times5+5\times1)x-1\times2\times5=0$

$\therefore x^3-8x^2+17x-10=0$

4 (1) 삼차방정식의 모든 계수가 유리수이므로 $1-\sqrt{2}$가 근이면 $1+\sqrt{2}$도 근이다.

(2) 삼차방정식의 모든 계수가 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다.

5 $\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$이므로

(1) $\omega+\omega^2=-1$

(2) $\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$

(3) $\omega^3+\omega^6=\omega^3+(\omega^3)^2=1+1^2=2$

6 $\omega^3=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$이므로

(1) $\omega^2-\omega=-1$

(2) $\omega^{12}=(\omega^3)^4=(-1)^4=1$

(3) $\omega^{10}+\omega^8+\omega^6=(\omega^3)^3\times\omega+(\omega^3)^2\times\omega^2+(\omega^3)^2$

$=(-1)^3\times\omega+(-1)^2\times\omega^2+(-1)^2$

$=-\omega+\omega^2+1=0$

개념 드릴 167쪽

1 (1) 2 (2) 0 (3) -5

2 (1) $x^3-6x^2+5x=0$ (2) $x^3-4x^2+x+6=0$

(3) $x^3-5x^2+3x+1=0$ (4) $x^3-2x^2+x-2=0$

3 (1) $a=0,\ b=-6,\ c=-4$ (2) $a=-1,\ b=0,\ c=2$

(3) $a=-8,\ b=25,\ c=-26$

4 (1) 1 (2) -1 (3) 0 (4) -1

2 (1) (세 근의 합)$=0+1+5=6$

(두 근끼리의 곱의 합)$=0\times1+1\times5+5\times0=5$

(세 근의 곱)$=0\times1\times5=0$

x^3의 계수가 1이므로 $x^3-6x^2+5x=0$

(2) (세 근의 합)$=-1+2+3=4$

(두 근끼리의 곱의 합)$=-1\times2+2\times3+3\times(-1)=1$

(세 근의 곱)$=-1\times2\times3=-6$

x^3의 계수가 1이므로 $x^3-4x^2+x+6=0$

(3) (세 근의 합)$=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})+1=5$

(두 근끼리의 곱의 합)

$=(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})\times1+1\times(2+\sqrt{5})=3$

(세 근의 곱)$=(2+\sqrt{5})\times(2-\sqrt{5})\times1=-1$

x^3의 계수가 1이므로 $x^3-5x^2+3x+1=0$

(4) (세 근의 합)$=i+(-i)+2=2$

(두 근끼리의 곱의 합)$=i\times(-i)+(-i)\times2+2\times i=1$

(세 근의 곱)$=i\times(-i)\times2=2$

x^3의 계수가 1이므로 $x^3-2x^2+x-2=0$

3 (1) 삼차방정식의 모든 계수가 유리수이므로 $1+\sqrt{3}$이 근이면 $1-\sqrt{3}$도 근이다.

$-2+(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=-a \qquad \therefore a=0$

$-2(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})-2(1-\sqrt{3})=b$

$\therefore b=-6$

$-2(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-c \qquad \therefore c=-4$

(2) 삼차방정식의 모든 계수가 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다.

$-1+(1+i)+(1-i)=-a \qquad \therefore a=-1$

$-(1+i)+(1+i)(1-i)-(1-i)=b \qquad \therefore b=0$

$-(1+i)(1-i)=-c \qquad \therefore c=2$

(3) 삼차방정식의 모든 계수가 실수이므로 $3-2i$가 근이면 $3+2i$도 근이다.

$2+(3-2i)+(3+2i)=-a \qquad \therefore a=-8$

$2(3-2i)+(3-2i)(3+2i)+2(3+2i)=b \qquad \therefore b=25$

$2(3-2i)(3+2i)=-c \qquad \therefore c=-26$

4 $\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$이므로

(1) $\omega^9=(\omega^3)^3=1^3=1$

(2) $\omega^8+\omega^7=(\omega^3)^2\times\omega^2+(\omega^3)^2\times\omega=\omega^2+\omega=-1$

(3) $\omega^{10}+\omega^5+1=(\omega^3)^3\times\omega+\omega^3\times\omega^2+1=\omega+\omega^2+1=0$

(4) $\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^4+1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^3\times\omega+1}{\omega^2}$
$=\dfrac{\omega+1}{\omega^2}=\dfrac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

필수 예제 01 삼차방정식의 근과 계수의 관계 168쪽

01-1 답 (1) 0 (2) 15

|전략| 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값을 구한다.

삼차방정식 $x^3-3x^2+x+1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=-1$
(1) $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$
$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
$=1-3+1-(-1)=0$

다른 풀이 $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$가 모두 x^3-3x^2+x+1의 인수이므로
$x^3-3x^2+x+1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ ······ ㉠
$x=1$을 ㉠에 대입하면 $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1^3-3\times1^2+1+1=0$

(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$
$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$
$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$
$=3\times(3^2-3\times1)+3\times(-1)=15$

참고 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

01-2 답 -2

|전략| 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 주어진 식을 변형한다.

삼차방정식 $x^3-2x+k=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta\gamma=-k$
이때, $\alpha+\beta=-\gamma$, $\beta+\gamma=-\alpha$, $\gamma+\alpha=-\beta$이므로
$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(-\gamma)\times(-\alpha)\times(-\beta)=-\alpha\beta\gamma=-2$
$\therefore k=-\alpha\beta\gamma=-2$

필수 예제 02 세 수를 근으로 하는 삼차방정식 169쪽

02-1 답 $x^3-5x^2-2x+1=0$

|전략| 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 삼차방정식의 각 항의 계수를 구한다.

삼차방정식 $x^3-2x^2-5x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5$, $\alpha\beta\gamma=-1$
구하는 삼차방정식의 세 근이 $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$, $\dfrac{1}{\gamma}$이므로
(세 근의 합)$=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{-5}{-1}=5$
(두 근끼리의 곱의 합)$=\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}=\dfrac{\gamma+\alpha+\beta}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{2}{-1}=-2$
(세 근의 곱)$=\dfrac{1}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{1}{-1}=-1$
따라서 구하는 삼차방정식은 $x^3-5x^2-2x+1=0$

02-2 답 $x^3-2x-1=0$

|전략| 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$를 세 근으로 하는 삼차방정식의 각 항의 계수를 구한다.

삼차방정식 $x^3+2x^2-1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha\beta\gamma=1$
구하는 삼차방정식의 세 근이 $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$이므로
(세 근의 합)$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$
(두 근끼리의 곱의 합)$=\alpha\beta^2\gamma+\beta\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2\beta$
$=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=1\times(-2)=-2$
(세 근의 곱)$=\alpha\beta\times\beta\gamma\times\gamma\alpha=(\alpha\beta\gamma)^2=1^2=1$
따라서 구하는 삼차방정식은 $x^3-2x-1=0$

필수 예제 03 삼차방정식의 켤레근의 성질 170쪽

03-1 답 -6

|전략| 켤레근의 성질과 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수를 구한다.

계수가 유리수이고 한 근이 $\sqrt{3}-1$이므로 $-\sqrt{3}-1$도 근이다.
따라서 나머지 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$(\sqrt{3}-1)+(-\sqrt{3}-1)+\alpha=-1$에서 $\alpha=1$
$(\sqrt{3}-1)(-\sqrt{3}-1)+\alpha(-\sqrt{3}-1)+\alpha(\sqrt{3}-1)=a$에서
$a=-2-2\alpha=-2-2\times1=-4$
$\alpha(\sqrt{3}-1)(-\sqrt{3}-1)=-b$에서 $b=2\alpha=2\times1=2$
$\therefore a-b=-6$

다른 풀이 $x=\sqrt{3}-1$을 $x^3+x^2+ax+b=0$에 대입하면
$(\sqrt{3}-1)^3+(\sqrt{3}-1)^2+a(\sqrt{3}-1)+b=0$
$\therefore (-a+b-6)+(a+4)\sqrt{3}=0$
a, b가 유리수이므로
$-a+b-6=0$, $a+4=0$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=2$
$\therefore a-b=-6$

03-2 답 -35

|전략| 켤레근의 성질과 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수를 구한다.

계수가 실수이고 한 근이 $1+2i$이므로 $1-2i$도 근이다.
따라서 나머지 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$(1+2i)+(1-2i)+\alpha=3$에서 $\alpha=1$
$(1+2i)(1-2i)+\alpha(1-2i)+\alpha(1+2i)=a$에서
$a=5+2\alpha=5+2\times1=7$
$\alpha(1+2i)(1-2i)=-b$에서 $b=-5\alpha=-5\times1=-5$
$\therefore ab=-35$

다른 풀이 $x=1+2i$를 $x^3-3x^2+ax+b=0$에 대입하면
$(1+2i)^3-3(1+2i)^2+a(1+2i)+b=0$
$\therefore (a+b-2)+(2a-14)i=0$
a, b가 실수이므로
$a+b-2=0$, $2a-14=0$
두 식을 연립하여 풀면 $a=7$, $b=-5$
$\therefore ab=-35$

필수 예제 04 방정식 $x^3=1$, $x^3=-1$의 허근의 성질 171쪽

04-1 답 (1) -1 (2) 1

|전략| 방정식 $x^3=1$의 허근의 성질을 이용한다.

(1) $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

따라서 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이므로

$$\omega^{10}+\frac{1}{\omega^{10}}=(\omega^3)^3\times\omega+\frac{1}{(\omega^3)^3\times\omega}=\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}$$
$$=\frac{-\omega}{\omega}=-1$$

(2) $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 다른 한 허근은 $\overline{\omega}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$이므로

$$\frac{1}{1+\omega}+\frac{1}{1+\overline{\omega}}=\frac{(1+\overline{\omega})+(1+\omega)}{(1+\omega)(1+\overline{\omega})}$$
$$=\frac{2+(\omega+\overline{\omega})}{1+(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}=\frac{2+(-1)}{1+(-1)+1}=1$$

04-2 답 (1) 1 (2) 1

|전략| 방정식 $x^3=-1$의 허근의 성질을 이용한다.

(1) $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

따라서 $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$이므로

$$\frac{\omega^{34}+\omega^{36}}{\omega^{35}}=\frac{(\omega^3)^{11}\times\omega+(\omega^3)^{12}}{(\omega^3)^{11}\times\omega^2}=\frac{-\omega+1}{-\omega^2}=\frac{-\omega^2}{-\omega^2}=1$$

(2) $x^2-x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 다른 한 허근은 $\overline{\omega}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$이므로

$$\frac{1}{1-\omega}+\frac{1}{1-\overline{\omega}}=\frac{(1-\overline{\omega})+(1-\omega)}{(1-\omega)(1-\overline{\omega})}$$
$$=\frac{2-(\omega+\overline{\omega})}{1-(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}=\frac{2-1}{1-1+1}=1$$

Review 연립일차방정식

개념 확인 172~173쪽

1 (1) $x=2$, $y=-1$ (2) $x=1$, $y=-1$

2 (1) $x=-3$, $y=-1$ (2) $x=1$, $y=3$

(3) $x=2$, $y=1$ (4) $x=2$, $y=2$

1 (1) $\begin{cases} x-2y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-y=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+4$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $3(2y+4)-y=7$

$5y=-5$ $\therefore y=-1$

$y=-1$을 ㉢에 대입하면 $x=2\times(-1)+4=2$

따라서 연립방정식의 해는 $x=2$, $y=-1$

(2) $\begin{cases} x+2y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-y=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=-2y-1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $2(-2y-1)-y=3$

$5y=-5$ $\therefore y=-1$

$y=-1$을 ㉢에 대입하면 $x=-2\times(-1)-1=1$

따라서 연립방정식의 해는 $x=1$, $y=-1$

2 (1) $\begin{cases} x-4y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+4y=-19 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $6x=-18$ $\therefore x=-3$

$x=-3$을 ㉠에 대입하면 $-3-4y=1$ $\therefore y=-1$

따라서 연립방정식의 해는 $x=-3$, $y=-1$

(2) $\begin{cases} 2x+y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-2y=-3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×2+㉡을 하면 $7x=7$ $\therefore x=1$

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $2\times1+y=5$ $\therefore y=3$

따라서 연립방정식의 해는 $x=1$, $y=3$

(3) $\begin{cases} 5x-4y=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-y=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡×4를 하면 $-3x=-6$ $\therefore x=2$

$x=2$를 ㉡에 대입하면 $2\times2-y=3$ $\therefore y=1$

따라서 연립방정식의 해는 $x=2$, $y=1$

(4) $\begin{cases} 3x+2y=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x-3y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×3+㉡×2를 하면 $17x=34$ $\therefore x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $3\times2+2y=10$ $\therefore y=2$

따라서 연립방정식의 해는 $x=2$, $y=2$

3 연립이차방정식

개념 확인 174~176쪽

1 (1) $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=-\sqrt{6} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=\sqrt{6} \end{cases}$

2 (1) $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

3 (1) $x=-1$ (2) $x=-2$

4 2

1 (1) $\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x-2)^2=10$, $2x^2-4x+4=10$

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

(ⅰ) $x=-1$을 ㉢에 대입하면 $y=-3$

(ⅱ) $x=3$을 ㉢에 대입하면 $y=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (x-y)(x+y)=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+2y^2=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x$ 또는 $y=-x$

(ⅰ) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2+2x^2=12$, $x^2=3$ $\therefore x=\pm\sqrt{3}$

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$, $y=\pm\sqrt{3}$ (복호동순)

(ii) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x^2+2x^2=12$, $x^2=6$　　$\therefore x=\pm\sqrt{6}$

$\therefore x=\pm\sqrt{6}$, $y=\mp\sqrt{6}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=\sqrt{3}\\y=\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\y=-\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\sqrt{6}\\y=-\sqrt{6}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\sqrt{6}\\y=\sqrt{6}\end{cases}$

2 (1) $x+y=-1$, $xy=-6$이므로 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+t-6=0$의 두 근이다.

$(t+3)(t-2)=0$에서 $t=-3$ 또는 $t=2$

$\therefore \begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$

다른 풀이 $\begin{cases}x+y=-1 & \cdots\cdots ㉠\\xy=-6 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=-1-x$를 ㉡에 대입하면 $x(-1-x)=-6$

$-x-x^2=-6$, $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$　　$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

$x=-3$일 때 $y=-1-(-3)=2$

$x=2$일 때 $y=-1-2=-3$

따라서 구하는 해는 $\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$

(2) $x+y=p$, $xy=q$라 하면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases}p+2q=10 & \cdots\cdots ㉠\\3p-q=9 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠+㉡×2를 하면 $7p=28$　　$\therefore p=4$

$p=4$를 ㉠에 대입하면 $q=3$

따라서 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로 $(t-1)(t-3)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$

3 (1) $x^2+x=0$, 즉 $x(x+1)=0$의 근은

$x=0$ 또는 $x=-1$

$x^2-4x-5=0$, 즉 $(x+1)(x-5)=0$의 근은

$x=-1$ 또는 $x=5$

따라서 두 이차방정식의 공통근은 $x=-1$

(2) $x^2-x-6=0$, 즉 $(x+2)(x-3)=0$의 근은

$x=-2$ 또는 $x=3$

$x^2+5x+6=0$, 즉 $(x+2)(x+3)=0$의 근은

$x=-3$ 또는 $x=-2$

따라서 두 이차방정식의 공통근은 $x=-2$

4 두 이차방정식 $x^2-x-k=0$, $x^2-3x+k=0$의 0이 아닌 공통근을 α라 하면

$\alpha^2-\alpha-k=0$　　$\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha^2-3\alpha+k=0$　　$\cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면 $2\alpha^2-4\alpha=0$

$2\alpha(\alpha-2)=0$　　$\therefore \alpha=2$ ($\because \alpha\neq 0$)

따라서 $\alpha=2$를 ㉠에 대입하면

$2^2-2-k=0$　　$\therefore k=2$

개념 드릴

177쪽

1 (1) $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x=-3\\y=-5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=-2\\y=-6\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=6\\y=2\end{cases}$　(4) $\begin{cases}x=0\\y=-4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x=-1\\y=-4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$

2 (1) $\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\y=\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\\y=-\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\sqrt{3}\\y=2\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-4\sqrt{3}\\y=-2\sqrt{3}\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=\sqrt{2}\\y=\sqrt{2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\y=-\sqrt{2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\sqrt{5}\\y=-3\sqrt{5}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\sqrt{5}\\y=3\sqrt{5}\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\sqrt{3}\\y=\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3\sqrt{3}\\y=-\sqrt{3}\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$

1 (1) $\begin{cases}y=x-1 & \cdots\cdots ㉠\\x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면 $x^2+(x-1)^2=5$

$2x^2-2x+1=5$, $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$　　$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(i) $x=-1$을 ㉠에 대입하면 $y=-2$

(ii) $x=2$를 ㉠에 대입하면 $y=1$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는 $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

(2) $\begin{cases}y=x-2 & \cdots\cdots ㉠\\x^2+y^2=34 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면 $x^2+(x-2)^2=34$

$2x^2-4x+4=34$, $x^2-2x-15=0$

$(x+3)(x-5)=0$　　$\therefore x=-3$ 또는 $x=5$

(i) $x=-3$을 ㉠에 대입하면 $y=-5$

(ii) $x=5$를 ㉠에 대입하면 $y=3$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는 $\begin{cases}x=-3\\y=-5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x-y=4 & \cdots\cdots ㉠\\x^2+y^2=40 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=x-4$　　$\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2+(x-4)^2=40$

$2x^2-8x+16=40$, $x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$　　$\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

(i) $x=-2$를 ㉢에 대입하면 $y=-6$

(ii) $x=6$을 ㉢에 대입하면 $y=2$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는 $\begin{cases}x=-2\\y=-6\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=6\\y=2\end{cases}$

(4) $\begin{cases}y-3x=-4 & \cdots\cdots ㉠\\x^2+2x-y=4 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=3x-4$　　$\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2+2x-(3x-4)=4$

$x^2-x=0,\ x(x-1)=0 \qquad \therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

(i) $x=0$을 ㉢에 대입하면 $y=-4$

(ii) $x=1$을 ㉢에 대입하면 $y=-1$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는 $\begin{cases}x=0\\y=-4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x-y=3 & \cdots\cdots ㉠\\ 2x^2+3x-5y=19 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=x-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $2x^2+3x-5(x-3)=19$

$2x^2-2x-4=0,\ x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0 \qquad \therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

(i) $x=-1$을 ㉢에 대입하면 $y=-4$

(ii) $x=2$를 ㉢에 대입하면 $y=-1$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는 $\begin{cases}x=-1\\y=-4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$

2 (1) $\begin{cases}(x+y)(x-2y)=0 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-2xy+y^2=12 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $x=-y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+2y^2+y^2=12,\ y^2=3 \qquad \therefore\ y=\pm\sqrt{3}$

$\therefore\ x=\mp\sqrt{3},\ y=\pm\sqrt{3}$ (복호동순)

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$4y^2-4y^2+y^2=12,\ y^2=12 \qquad \therefore\ y=\pm2\sqrt{3}$

$\therefore\ x=\pm4\sqrt{3},\ y=\pm2\sqrt{3}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\y=\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\\y=-\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\sqrt{3}\\y=2\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-4\sqrt{3}\\y=-2\sqrt{3}\end{cases}$

(2) $\begin{cases}(x-y)(x+y)=0 & \cdots\cdots ㉠\\ 2x^2-xy+y^2=4 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=x$ 또는 $y=-x$

(i) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$2x^2-x^2+x^2=4,\ x^2=2 \qquad \therefore\ x=\pm\sqrt{2}$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{2},\ y=\pm\sqrt{2}$ (복호동순)

(ii) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$2x^2+x^2+x^2=4,\ x^2=1 \qquad \therefore\ x=\pm1$

$\therefore\ x=\pm1,\ y=\mp1$ (복호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=\sqrt{2}\\y=\sqrt{2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\y=-\sqrt{2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2+3xy+y^2=5 & \cdots\cdots ㉠\\ (x-y)(3x+y)=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉡에서 $y=x$ 또는 $y=-3x$

(i) $y=x$를 ㉠에 대입하면

$x^2+3x^2+x^2=5,\ x^2=1 \qquad \therefore\ x=\pm1$

$\therefore\ x=\pm1,\ y=\pm1$ (복호동순)

(ii) $y=-3x$를 ㉠에 대입하면

$x^2-9x^2+9x^2=5,\ x^2=5 \qquad \therefore\ x=\pm\sqrt{5}$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{5},\ y=\mp3\sqrt{5}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\sqrt{5}\\y=-3\sqrt{5}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\sqrt{5}\\y=3\sqrt{5}\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x^2-4xy+3y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-3xy-y^2=-3 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면

$(x-y)(x-3y)=0 \qquad \therefore\ x=y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2-3y^2-y^2=-3,\ y^2=1 \qquad \therefore\ y=\pm1$

$\therefore\ x=\pm1,\ y=\pm1$ (복호동순)

(ii) $x=3y$를 ㉡에 대입하면

$9y^2-9y^2-y^2=-3,\ y^2=3 \qquad \therefore\ y=\pm\sqrt{3}$

$\therefore\ x=\pm3\sqrt{3},\ y=\pm\sqrt{3}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\sqrt{3}\\y=\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3\sqrt{3}\\y=-\sqrt{3}\end{cases}$

(5) $\begin{cases}2x^2-2xy+y^2=5 & \cdots\cdots ㉠\\ 3x^2-7xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉡의 좌변을 인수분해하면

$(x-2y)(3x-y)=0 \qquad \therefore\ x=2y$ 또는 $y=3x$

(i) $x=2y$를 ㉠에 대입하면

$8y^2-4y^2+y^2=5,\ y^2=1 \qquad \therefore\ y=\pm1$

$\therefore\ x=\pm2,\ y=\pm1$ (복호동순)

(ii) $y=3x$를 ㉠에 대입하면

$2x^2-6x^2+9x^2=5,\ x^2=1 \qquad \therefore\ x=\pm1$

$\therefore\ x=\pm1,\ y=\pm3$ (복호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$

필수 예제 01 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식

178쪽

01-1 답 (1) $\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=-\frac{22}{5}\\y=\frac{4}{5}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$

|전략| 일차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 후 이차방정식에 대입한다.

(1) $\begin{cases}x-y=-2 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-xy+2y^2=4 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $x=y-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $(y-2)^2-y(y-2)+2y^2=4$

$2y^2-2y=0,\ y(y-1)=0$

$\therefore\ y=0$ 또는 $y=1$

(i) $y=0$을 ㉢에 대입하면 $x=-2$

(ii) $y=1$을 ㉢에 대입하면 $x=-1$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는 $\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-2y=-6 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2+y^2=20 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉠에서 $x=2y-6$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $(2y-6)^2+y^2=20$

$5y^2-24y+16=0$, $(5y-4)(y-4)=0$

$\therefore y=\frac{4}{5}$ 또는 $y=4$

(i) $y=\frac{4}{5}$를 ㉢에 대입하면 $x=-\frac{22}{5}$

(ii) $y=4$를 ㉢에 대입하면 $x=2$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=-\frac{22}{5} \\ y=\frac{4}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

참고 (1)에서 $y=x+2$를 ㉡에 대입해도 되고,
(2)에서 $y=\frac{1}{2}x+3$을 ㉡에 대입해도 된다.

01-2 답 5

|전략| 일차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 후 이차방정식에 대입한다.

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2-2y^2=1 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉠에서 $x=y+1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $(y+1)^2-2y^2=1$

$-y^2+2y=0$, $y(y-2)=0$

$\therefore y=0$ 또는 $y=2$

(i) $y=0$을 ㉢에 대입하면 $x=1$

(ii) $y=2$를 ㉢에 대입하면 $x=3$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

이때, α, β는 자연수이므로 $\alpha=3$, $\beta=2$

$\therefore \alpha+\beta=5$

필수 예제 02 하나의 이차방정식이 인수분해되는 연립이차방정식 179쪽

02-1 답 (1) $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=3\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$

|전략| 한 이차방정식을 인수분해하여 얻은 각각의 일차방정식과 다른 이차방정식을 연립한다.

(1) $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2-xy+2y^2=8 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면

$(x-y)(x+y)=0$ $\quad\therefore x=y$ 또는 $x=-y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2-y^2+2y^2=8$, $y^2=4$ $\quad\therefore y=\pm2$

$\therefore x=\pm2$, $y=\pm2$ (복호동순)

(ii) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+y^2+2y^2=8$, $y^2=2$ $\quad\therefore y=\pm\sqrt{2}$

$\therefore x=\mp\sqrt{2}$, $y=\pm\sqrt{2}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+xy=24 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2-2xy-3y^2=0 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉡의 좌변을 인수분해하면

$(x+y)(x-3y)=0$ $\quad\therefore x=-y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=-y$를 ㉠에 대입하면

$y^2-y^2=24$, $0\times y^2=24$

이를 만족시키는 y의 값은 없다. 즉, 해가 없다.

(ii) $x=3y$를 ㉠에 대입하면

$9y^2+3y^2=24$, $y^2=2$ $\quad\therefore y=\pm\sqrt{2}$

$\therefore x=\pm3\sqrt{2}$, $y=\pm\sqrt{2}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=3\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$

02-2 답 4

|전략| 한 이차방정식을 인수분해하여 얻은 각각의 일차방정식과 다른 이차방정식을 연립한다.

$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면

$(x+y)(x-2y)=0$ $\quad\therefore x=-y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+y^2=10$, $y^2=5$ $\quad\therefore y=\pm\sqrt{5}$

$\therefore x=\mp\sqrt{5}$, $y=\pm\sqrt{5}$ (복호동순)

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$4y^2+y^2=10$, $y^2=2$ $\quad\therefore y=\pm\sqrt{2}$

$\therefore x=\pm2\sqrt{2}$, $y=\pm\sqrt{2}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$

따라서 xy의 값은

$-\sqrt{5}\times\sqrt{5}=-5$ 또는 $\sqrt{5}\times(-\sqrt{5})=-5$

또는 $2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4$ 또는 $-2\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=4$

이므로 xy의 최댓값은 4이다.

필수 예제 03 대칭식으로 이루어진 연립이차방정식 180쪽

03-1 답 (1) $\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-5 \end{cases}$

|전략| $x+y=p$, $xy=q$라 하고 x, y는 $t^2-pt+q=0$의 두 근임을 이용한다.

(1) $x+y=p$, $xy=q$라 하면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} p+q=-7 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 2p-q=16 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $3p=9$ $\quad\therefore p=3$

$p=3$을 ㉠에 대입하면 $q=-10$

따라서 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-3t-10=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-5)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=5$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$

(2) $x+y=p$, $xy=q$라 하면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} p^2-2q=61 & \cdots\cdots ㉠ \\ q=30 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면 $p^2-60=61$

$p^2=121 \qquad \therefore p=\pm 11$

(ⅰ) $p=11$, $q=30$, 즉 $x+y=11$, $xy=30$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-11t+30=0$의 두 근이므로

$(t-5)(t-6)=0$에서 $t=5$ 또는 $t=6$

$\therefore \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=5 \end{cases}$

(ⅱ) $p=-11$, $q=30$, 즉 $x+y=-11$, $xy=30$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+11t+30=0$의 두 근이므로

$(t+5)(t+6)=0$에서 $t=-5$ 또는 $t=-6$

$\therefore \begin{cases} x=-5 \\ y=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-5 \end{cases}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-5 \end{cases}$

다른 풀이 $xy=30$에서 $y=\frac{30}{x}$을 $x^2+y^2=61$에 대입하면

$x^2+\frac{900}{x^2}=61$, 즉 $x^4-61x^2+900=0$이므로

$(x^4-60x^2+900)-x^2=0$, $(x^2-30)^2-x^2=0$

$(x^2+x-30)(x^2-x-30)=0$

$(x+6)(x-5)(x+5)(x-6)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=5$ 또는 $x=-5$ 또는 $x=6$

$\therefore \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-5 \end{cases}$

필수 예제 04 연립이차방정식의 해의 조건 181쪽

04-1 답 2

|전략| 일차방정식을 이차방정식에 대입하여 얻은 새로운 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 오직 하나의 해를 가지려면 $D=0$이다.

$\begin{cases} x+y=k & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+k$

$y=-x+k$를 ㉡에 대입하여 정리하면

$x^2+(-x+k)^2=2$, $x^2+x^2-2kx+k^2-2=0$

$\therefore 2x^2-2kx+k^2-2=0 \quad \cdots\cdots ㉢$

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 ㉢을 만족시키는 x의 값이 오직 하나 존재해야 하므로 이차방정식 ㉢의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-2)=0$, $k^2-4=0$

$(k+2)(k-2)=0 \qquad \therefore k=-2$ 또는 $k=2$

따라서 구하는 양수 k의 값은 2이다.

04-2 답 $\frac{9}{5}$

|전략| 일차방정식을 이차방정식에 대입하여 얻은 새로운 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 실근을 가지려면 $D\ge 0$이다.

$\begin{cases} x-2y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+3$

$x=2y+3$을 ㉡에 대입하여 정리하면

$(2y+3)^2+y^2=k$, $4y^2+12y+9+y^2-k=0$

$\therefore 5y^2+12y+9-k=0 \quad \cdots\cdots ㉢$

주어진 연립방정식이 실근을 가지려면 ㉢을 만족시키는 실수 y의 값이 존재해야 하므로 이차방정식 ㉢의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=6^2-5(9-k)\ge 0$, $5k\ge 9 \qquad \therefore k\ge\frac{9}{5}$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\frac{9}{5}$이다.

04-3 답 $k<-7$

|전략| 일차방정식을 이차방정식에 대입하여 얻은 새로운 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 실근이 존재하지 않으려면 $D<0$이다.

$\begin{cases} 3x+y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2y=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-3x-1$

$y=-3x-1$을 ㉡에 대입하여 정리하면

$x^2-2(-3x-1)=k \qquad \therefore x^2+6x+2-k=0 \quad \cdots\cdots ㉢$

주어진 연립방정식의 실근이 존재하지 않으려면 ㉢을 만족시키는 실수 x의 값이 존재하지 않아야 하므로 이차방정식 ㉢의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-(2-k)<0 \qquad \therefore k<-7$

필수 예제 05 연립이차방정식의 활용 182쪽

05-1 답 4 cm

|전략| 두 정사각형의 한 변의 길이를 각각 x cm, y cm라 하고, 주어진 조건을 이용하여 x, y에 대한 연립방정식을 세운다.

두 정사각형의 한 변의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면

$\begin{cases} 4x+4y=80 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=272 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x+y=20 \qquad \therefore y=-x+20 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(-x+20)^2=272$, $2x^2-40x+400=272$

$x^2-20x+64=0$, $(x-4)(x-16)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=16$

㉢에서 $\begin{cases} x=4 \\ y=16 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=16 \\ y=4 \end{cases}$

따라서 작은 정사각형의 한 변의 길이는 4 cm이다.

참고 $x+y=p$, $xy=q$로 놓고 $\begin{cases} 4p=80 \\ p^2-2q=272 \end{cases}$를 풀어도 된다.
이때, $p=20$, $q=64$이므로 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-20t+64=0$의 두 근이다.

필수 예제 06 공통근을 갖는 방정식 183쪽

06-1 답 $k=-\frac{3}{4}$, 공통근: $x=-1$

|전략| 공통근을 α라 하고 두 이차방정식에 $x=\alpha$를 대입하여 연립한다.

두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$\alpha^2+4k\alpha-4=0$ ...... ㉠, $\alpha^2+4\alpha-4k=0$ ...... ㉡

㉠−㉡을 하면 $4\alpha(k-1)+4(k-1)=0$

$4(k-1)(\alpha+1)=0$ $\therefore k=1$ 또는 $\alpha=-1$

(i) $k=1$일 때, 두 방정식이 $x^2+4x-4=0$으로 일치하므로 공통근은 2개이다. 즉, 오직 하나의 공통근을 갖는다는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha=-1$일 때, 이 값을 ㉠에 대입하면

$1-4k-4=0$ $\therefore k=-\frac{3}{4}$

(i), (ii)에서 $k=-\frac{3}{4}$이고 그때의 공통근은 $x=-1$이다.

06-2 답 0, -2

|전략| 공통근을 α라 하고 두 이차방정식에 $x=\alpha$를 대입하여 연립한다.

두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$\alpha^2+(k-1)\alpha+2k=0$ ...... ㉠, $\alpha^2-(k-3)\alpha-2k=0$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면 $2\alpha^2+2\alpha=0$, $2\alpha(\alpha+1)=0$

$\therefore \alpha=0$ 또는 $\alpha=-1$

(i) $\alpha=0$일 때, 이 값을 ㉠에 대입하면 $k=0$

(ii) $\alpha=-1$일 때, 이 값을 ㉠에 대입하면

$(-1)^2-(k-1)+2k=0$ $\therefore k=-2$

(i), (ii)에서 $k=0$ 또는 $k=-2$

4 부정방정식

개념 드릴 185쪽

1 (1) $\begin{cases}x=-3\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=-4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=-3\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=-5\\y=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=0\\y=5\end{cases}$

또는 $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x=-8\\y=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-5\\y=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-4\\y=6\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3\\y=9\end{cases}$

또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$

2 (1) $x=-1$, $y=1$ (2) $x=-1$, $y=2$ (3) $x=1$, $y=1$

(4) $x=-3$, $y=4$ (5) $x=2$, $y=-6$

1 (2)

x	-2	-1	1	2
$y-1$	-1	-2	2	1

$\therefore \begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$

(3)

$x-1$	-2	-1	1	2
$y+2$	1	2	-2	-1

$\therefore \begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=-4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=-3\end{cases}$

(4) $xy-x+y=5$에서 $x(y-1)+(y-1)=4$

$\therefore (x+1)(y-1)=4$

이때, x, y는 정수이므로 $x+1$, $y-1$의 값은 다음 표와 같다.

$x+1$	-4	-2	-1	1	2	4
$y-1$	-1	-2	-4	4	2	1

$\therefore \begin{cases}x=-5\\y=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}$

또는 $\begin{cases}x=0\\y=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$

(5) $xy-3x+2y=0$에서 $x(y-3)+2(y-3)=-6$

$\therefore (x+2)(y-3)=-6$

이때, x, y는 정수이므로 $x+2$, $y-3$의 값은 다음 표와 같다.

$x+2$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$y-3$	1	2	3	6	-6	-3	-2	-1

$\therefore \begin{cases}x=-8\\y=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-5\\y=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-4\\y=6\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3\\y=9\end{cases}$

또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$

2 (4) $x^2+y^2+6x-8y+25=0$에서

$(x^2+6x+9)+(y^2-8y+16)=0$

$\therefore (x+3)^2+(y-4)^2=0$

이때, x, y는 실수이므로 $x+3=0$, $y-4=0$

$\therefore x=-3$, $y=4$

(5) $x^2+y^2-4x+12y+40=0$에서

$(x^2-4x+4)+(y^2+12y+36)=0$

$\therefore (x-2)^2+(y+6)^2=0$

이때, x, y는 실수이므로 $x-2=0$, $y+6=0$

$\therefore x=2$, $y=-6$

다른 풀이 (4) $x^2+y^2+6x-8y+25=0$에서

$x^2+6x+(y^2-8y+25)=0$ ...... ㉠

이때, x는 실수이므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-(y^2-8y+25)\geq 0$, $-(y^2-8y+16)\geq 0$

즉, $(y-4)^2\leq 0$이므로 $y-4=0$ $\therefore y=4$

$y=4$를 ㉠에 대입하면 $x^2+6x+9=0$, $(x+3)^2=0$ $\therefore x=-3$

(5) $x^2+y^2-4x+12y+40=0$에서 $x^2-4x+(y^2+12y+40)=0$ ...... ㉠

이때, x는 실수이므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(y^2+12y+40)\geq 0$, $-(y^2+12y+36)\geq 0$

즉, $(y+6)^2\leq 0$이므로 $y+6=0$ $\therefore y=-6$

$y=-6$을 ㉠에 대입하면 $x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$ $\therefore x=2$

필수 예제 01 정수 조건의 부정방정식 186쪽

01-1 답 $\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=7\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=8\\y=3\end{cases}$

|전략| 주어진 방정식을 (일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 변형한다.

$xy-2x-3y+1=0$에서 $x(y-2)-3(y-2)-5=0$

$\therefore (x-3)(y-2)=5$

이때, x, y는 정수이므로 $x-3$, $y-2$의 값은 다음 표와 같다.

$x-3$	-5	-1	1	5
$y-2$	-1	-5	5	1

$\therefore \begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=7\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=8\\y=3\end{cases}$

01-2 답 $x=1$, $y=2$

|전략| 주어진 방정식을 (일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 변형한다.

$6xy+4x-3y-10=0$에서 $2x(3y+2)-(3y+2)-8=0$

$\therefore (2x-1)(3y+2)=8$

이때, x, y는 자연수이므로

$2x-1=1$, $3y+2=8$ ($\because 2x-1\geq1$, $3y+2\geq5$)

$\therefore x=1$, $y=2$

01-3 답 $\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=7\\y=7\end{cases}$

|전략| 주어진 방정식을 (일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 변형한다.

$xy=x^2-y+7$에서 $xy+y-x^2=7$, $y(x+1)-(x^2-1)=8$

$y(x+1)-(x+1)(x-1)=8$ $\quad\therefore (x+1)(y-x+1)=8$

이때, x, y는 자연수이고 $x+1\geq2$이므로 $x+1$, $y-x+1$의 값은 다음 표와 같다.

$x+1$	2	4	8
$y-x+1$	4	2	1

$\therefore \begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=7\\y=7\end{cases}$

필수 예제 02 실수 조건의 부정방정식 187쪽

02-1 답 $x=3$, $y=1$

|전략| $A^2+B^2=0$ 꼴로 정리한 후 $A=0$, $B=0$임을 이용한다.

$2x^2-6xy+9y^2-6x+9=0$에서

$(x^2-6xy+9y^2)+(x^2-6x+9)=0$

$\therefore (x-3y)^2+(x-3)^2=0$

이때, x, y는 실수이므로

$x-3y=0$, $x-3=0$ $\quad\therefore x=3$, $y=1$

다른 풀이 $2x^2-6xy+9y^2-6x+9=0$에서

$2x^2-6(y+1)x+9(y^2+1)=0$ ······ ㉠

이때, x는 실수이므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-3(y+1)\}^2-18(y^2+1)\geq0$, $-9(y^2-2y+1)\geq0$

즉, $(y-1)^2\leq0$이므로 $y-1=0$ $\quad\therefore y=1$

$y=1$을 ㉠에 대입하면 $2x^2-12x+18=0$, $2(x-3)^2=0$ $\quad\therefore x=3$

02-2 답 $x=1$, $y=-1$

|전략| 양변에 2를 곱하여 $A^2+B^2=0$ 꼴로 정리한 후 $A=0$, $B=0$임을 이용한다.

주어진 방정식의 양변에 2를 곱하면

$2x^2+2xy+2y^2-2x+2y+2=0$

$(x^2+2xy+y^2)+(x^2-2x+1)+(y^2+2y+1)=0$

$\therefore (x+y)^2+(x-1)^2+(y+1)^2=0$

이때, x, y는 실수이므로

$x+y=0$, $x-1=0$, $y+1=0$ $\quad\therefore x=1$, $y=-1$

다른 풀이 $x^2+xy+y^2-x+y+1=0$에서

$x^2+(y-1)x+y^2+y+1=0$ ······ ㉠

이때, x는 실수이므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(y-1)^2-4(y^2+y+1)\geq0$, $-3(y^2+2y+1)\geq0$

즉, $(y+1)^2\leq0$이므로 $y+1=0$ $\quad\therefore y=-1$

$y=-1$을 ㉠에 대입하면 $x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$ $\quad\therefore x=1$

개념 정리 188~189쪽

01 $B=0$, $A=0$		**02** 복소수	**03** $x-\alpha$
04 x^2+x	**05** x^2-x	**06** ㉠	**07** ㉢
08 ㉡	**09** 1, 0, 1, 0	**10** -1, 1	
11 $x=2y-4$, $y=\frac{1}{2}x+2$		**12** $x^2-3xy+2y^2=0$, $x^2+y^2=10$	
13 정수	**14** $A^2+B^2=0$, $D\geq0$		

05 $x(x+1)(x-1)(x-2)=24$에서 공통부분이 생기도록 식을 변형하면 $\{x(x-1)\}\{(x+1)(x-2)\}=24$

$\therefore (x^2-x)(x^2-x-2)=24$

[09~10] $x^3=1$, 즉 $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

따라서 $\omega^3=1$이고, ω와 $\overline{\omega}$는 $x^2+x+1=0$의 두 근이다.

09 $\omega^3=\boxed{1}$, $\omega^2+\omega+1=\boxed{0}$

$\overline{\omega}^3=\boxed{1}$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=\boxed{0}$

10 $\omega+\overline{\omega}=\boxed{-1}$, $\omega\overline{\omega}=\boxed{1}$

중단원 마무리 190~192쪽

01 ③	**02** -7	**03** ③	**04** ④
05 ①	**06** ④	**07** ①	**08** 5
09 ③	**10** ②	**11** ①	**12** ②
13 ②	**14** $2+\sqrt{3}i$	**15** ①	**16** ①
17 $(-1, 2)$, $(2, -1)$		**18** ③	**19** ③
20 ⑤	**21** $\frac{7}{8}$	**22** -15	**23** -18
24 17			

LEVEL 1

01 $x^3-4x^2-x+4=0$에서 $x^2(x-4)-(x-4)=0$

$(x^2-1)(x-4)=0$, $(x+1)(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$

$\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|=6$

참고 $f(x)=x^3-4x^2-x+4$로 놓으면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해할 수도 있다.

02 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$에서

$\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}=3$

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=3$

$x^2+5x=X$로 놓으면

$(X+4)(X+6)=3$, $X^2+10X+21=0$

$(X+7)(X+3)=0 \qquad \therefore X=-7$ 또는 $X=-3$

(i) $X=-7$일 때, $x^2+5x=-7$

$x^2+5x+7=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=5^2-4\times1\times7=-3<0$

이므로 이 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=-3$일 때, $x^2+5x=-3$

$x^2+5x+3=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=5^2-4\times1\times3=13>0$

이므로 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 한 허근 α는 방정식 $x^2+5x+7=0$의 근이므로

$\alpha^2+5\alpha+7=0 \qquad \therefore \alpha^2+5\alpha=-7$

03 $x^3+ax^2+(a-3)x+6=0$의 한 근이 1이므로 $x=1$을 대입하면

$1+a+(a-3)+6=0$, $2a=-4 \qquad \therefore a=-2$

따라서 주어진 방정식은

$x^3-2x^2-5x+6=0$이고 이 방정식의 한 근이 1이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-1)(x^2-x-6)=0$

$(x-1)(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 방정식 $x^3-2x^2-5x+6=0$의 세 근이 $-2, 1, 3$이므로

$\alpha=3, \beta=-2$ ($\because \alpha>\beta$)

$\therefore \alpha^2-\beta^2=3^2-(-2)^2=5$

04 삼차방정식 $x^3+x^2-6x+6=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-6$, $\alpha\beta\gamma=-6$

$$\therefore \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}+\frac{\gamma+\alpha}{\gamma\alpha}$$
$$=\frac{\gamma(\alpha+\beta)+\alpha(\beta+\gamma)+\beta(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$$
$$=\frac{\gamma\alpha+\beta\gamma+\alpha\beta+\gamma\alpha+\beta\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$$
$$=\frac{2\times(-6)}{-6}=2$$

05 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 다른 한 허근은 $\overline{\omega}$이다.

$\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega+1=-\omega^2$

$\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$에서 $\overline{\omega}^2+1=-\overline{\omega}$

$$\therefore \frac{\omega+1}{\omega^2}+\frac{\overline{\omega}^2+1}{\overline{\omega}}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}+\frac{-\overline{\omega}}{\overline{\omega}}$$
$$=-1+(-1)=-2$$

06 $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면

$(x+y)(x-3y)=0 \qquad \therefore x=-y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$y^2-y^2+y^2=13$, $y^2=13 \qquad \therefore y=\pm\sqrt{13}$

$\therefore x=\mp\sqrt{13}$, $y=\pm\sqrt{13}$ (복호동순)

(ii) $x=3y$를 ㉡에 대입하면

$9y^2+3y^2+y^2=13$, $y^2=1 \qquad \therefore y=\pm1$

$\therefore x=\pm3$, $y=\pm1$ (복호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-\sqrt{13} \\ y=\sqrt{13} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{13} \\ y=-\sqrt{13} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$

따라서 주어진 연립방정식을 만족시키는 정수 x, y는

$x=3, y=1$ 또는 $x=-3, y=-1$이므로 $xy=3$

07 두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$\alpha^2-2k\alpha-k=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\alpha^2-\alpha+k-1=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠$-$㉡을 하면 $(1-2k)\alpha+(1-2k)=0$

$(1-2k)(\alpha+1)=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$ 또는 $\alpha=-1$

(i) $k=\frac{1}{2}$일 때, 두 방정식이 $x^2-x-\frac{1}{2}=0$으로 일치하므로 공통근은 2개이다. 즉, 오직 하나의 공통근을 갖는다는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha=-1$일 때, 이 값을 ㉠에 대입하면

$1+2k-k=0 \qquad \therefore k=-1$

(i), (ii)에서 $k=-1$

$\therefore k+\alpha=-2$

08 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{3}$에서 $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{3}$

$3(a+b)=ab$, $ab-3a-3b=0$

$a(b-3)-3(b-3)-9=0 \qquad \therefore (a-3)(b-3)=9$

이때, a, b는 0이 아닌 정수이므로 $a-3, b-3$의 값은 다음 표와 같다.

$a-3$	-9	-1	1	3	9
$b-3$	-1	-9	9	3	1

따라서 주어진 방정식을 만족시키는 0이 아닌 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 $(-6, 2)$, $(2, -6)$, $(4, 12)$, $(6, 6)$, $(12, 4)$의 5이다.

LEVEL 2

09 $f(x)=x^4-4x^3+7x^2-8x+4$로 놓으면

$f(1)=1-4+7-8+4=0$,

$f(2)=16-32+28-16+4=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -4 & 7 & -8 & 4 \\ & & 1 & -3 & 4 & -4 \\ \hline 2 & 1 & -3 & 4 & -4 & \boxed{0} \\ & & 2 & -2 & 4 & \\ \hline & 1 & -1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x^2-x+2)$

즉, 주어진 사차방정식의 두 실근은 1, 2이므로 두 실근의 합은 $a=1+2=3$

또, 주어진 사차방정식의 두 허근은 이차방정식 $x^2-x+2=0$의 두 허근이므로 두 허근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $b=2$

$\therefore a-b=1$

10 $x^4-22x^2+9=0$에서 $(x^4-6x^2+9)-16x^2=0$

$(x^2-3)^2-(4x)^2=0$, $(x^2+4x-3)(x^2-4x-3)=0$

$\therefore x^2+4x-3=0$ 또는 $x^2-4x-3=0$

(ⅰ) $x^2+4x-3=0$에서 $x=-2\pm\sqrt{7}$

(ⅱ) $x^2-4x-3=0$에서 $x=2\pm\sqrt{7}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=-2\pm\sqrt{7}$ 또는 $x=2\pm\sqrt{7}$

따라서 양의 근은 $-2+\sqrt{7}$, $2+\sqrt{7}$ ($\because 2<\sqrt{7}<3$)이므로 모든 양의 근의 곱은 $(-2+\sqrt{7})(2+\sqrt{7})=3$

11 $f(x)=x^3+(2k-1)x-2k$로 놓으면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 2k-1 & -2k \\ & & 1 & 1 & 2k \\ \hline & 1 & 1 & 2k & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+x+2k)$

이때, 방정식 $f(x)=0$이 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+x+2k=0$이 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-8k<0 \qquad \therefore k>\dfrac{1}{8}$

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다.

12 $x^3-ax^2+(a+1)x+b=0$의 한 근이 $2i$이므로 $x=2i$를 대입하면 $(2i)^3-a\times(2i)^2+(a+1)\times 2i+b=0$

$-8i+4a+(2a+2)i+b=0 \qquad \therefore (4a+b)+(2a-6)i=0$

이때, a, b는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$4a+b=0$, $2a-6=0 \qquad \therefore a=3$, $b=-12$

즉, 주어진 방정식은 $x^3-3x^2+4x-12=0$이므로

$x^2(x-3)+4(x-3)=0$, $(x^2+4)(x-3)=0$

$\therefore x=\pm 2i$ 또는 $x=3$

따라서 $\alpha=3$이므로 $a+b+\alpha=-6$

다른 풀이 계수가 실수이고 한 근이 $2i$이므로 $-2i$도 근이다. 나머지 한 실근이 α이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2i+(-2i)+\alpha=a$에서 $a=\alpha$

$2i\times(-2i)+\alpha\times(-2i)+\alpha\times 2i=a+1$에서

$a+1=4 \qquad \therefore a=3$

즉, $\alpha=a=3$이고, $2i\times(-2i)\times\alpha=-b$에서

$b=-4\alpha=-4\times 3=-12$

$\therefore a+b+\alpha=-6$

13 $x^4+3x^3-2x^2+3x+1=0$에서 $x\neq 0$이므로 양변을 x^2으로 나누면 $x^2+3x-2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2=0$, $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-4=0$

$x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면 $X^2+3X-4=0$

$(X+4)(X-1)=0 \qquad \therefore X=-4$ 또는 $X=1$

(ⅰ) $X=-4$, 즉 $x+\dfrac{1}{x}=-4$일 때

$x^2+4x+1=0 \qquad \therefore x=-2\pm\sqrt{3}$

(ⅱ) $X=1$, 즉 $x+\dfrac{1}{x}=1$일 때

$x^2-x+1=0 \qquad \therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 실근의 제곱의 합은

$(-2+\sqrt{3})^2+(-2-\sqrt{3})^2=14$

Lecture

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ ($a\neq 0$) 꼴의 방정식의 풀이

(ⅰ) 양변을 x^2으로 나눈다.

(ⅱ) $x+\dfrac{1}{x}=X$로 치환한 후 X에 대한 방정식을 푼다.

➡ $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$임을 이용한다.

(ⅲ) 주어진 사차방정식의 근을 구한다.

14 계수가 실수이고 한 근이 $2-\sqrt{3}i$이므로 $2+\sqrt{3}i$도 근이다.

따라서 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{3}i)+(2+\sqrt{3}i)+\alpha=5 \qquad \therefore \alpha=1$

따라서 나머지 두 근의 곱은

$(2+\sqrt{3}i)\times 1=2+\sqrt{3}i$

참고 a, b의 값을 구해 보자.

삼차방정식 $x^3-5x^2+ax+b=0$의 세 근이 1, $2+\sqrt{3}i$, $2-\sqrt{3}i$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a=(2+\sqrt{3}i)+(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)=11$

$-b=1\times(2+\sqrt{3}i)\times(2-\sqrt{3}i) \qquad \therefore b=-7$

15 삼차방정식 $x^3+ax^2-2x+2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$, $\alpha\beta\gamma=-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

삼차방정식 $x^3-2x^2+bx+c=0$의 세 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$이므로

$(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=2$에서 $\alpha+\beta+\gamma=-1$

$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)=b$에서

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+2(\alpha+\beta+\gamma)+3=b$

$\therefore\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b-1$

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=-c$에서

$\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1=-c$

$\therefore\ \alpha\beta\gamma=-b-c+1$

이때, ㉠에 의하여 $-1=-a$, $b-1=-2$, $-b-c+1=-2$

따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=4$이므로 $abc=-4$

16 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식

$$\begin{cases} x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

의 해와 같다.

㉠에서 $y=x-1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x-1)^2=13$, $2x^2-2x-12=0$

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=3$

㉢에서 $x=-2$이면 $y=-3$, $x=3$이면 $y=2$

(i) $x=-2$, $y=-3$일 때

$-2+(-3)=a \qquad \therefore\ a=-5$

$(-2)^2-b\times(-3)^2=5 \qquad \therefore\ b=-\dfrac{1}{9}$

(ii) $x=3$, $y=2$일 때

$3+2=a \qquad \therefore\ a=5$

$3^2-b\times 2^2=5 \qquad \therefore\ b=1$

따라서 a, b는 자연수이므로 $a=5$, $b=1$

$\therefore\ a+b=6$

17 $x+y=p$, $xy=q$라 하면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} p^2+p-2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ q=-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $(p+2)(p-1)=0$

$\therefore\ p=-2$ 또는 $p=1$

(i) $p=-2$, $q=-2$, 즉 $x+y=-2$, $xy=-2$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+2t-2=0$의 두 근이므로

$t=-1\pm\sqrt{3}$

$\therefore\ \begin{cases} x=-1+\sqrt{3} \\ y=-1-\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1-\sqrt{3} \\ y=-1+\sqrt{3} \end{cases}$

(ii) $p=1$, $q=-2$, 즉 $x+y=1$, $xy=-2$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-t-2=0$의 두 근이므로

$(t+1)(t-2)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=2$

$\therefore\ \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-1+\sqrt{3} \\ y=-1-\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1-\sqrt{3} \\ y=-1+\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

따라서 주어진 연립방정식을 만족시키는 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(-1, 2)$, $(2, -1)$이다.

18 $$\begin{cases} x+y=k & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2x+4y=13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=-x+k$

$y=-x+k$를 ㉡에 대입하여 정리하면

$x^2+2x+4(-x+k)=13$

$\therefore\ x^2-2x+4k-13=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

주어진 연립방정식이 실근을 가지려면 ㉢을 만족시키는 실수 x의 값이 존재해야 하므로 이차방정식 ㉢의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-(4k-13)\ge 0$, $-4k+14\ge 0$

$4k\le 14 \qquad \therefore\ k\le\dfrac{7}{2}$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k는 1, 2, 3이므로

구하는 합은 $1+2+3=6$

19 처음 땅의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면 대각선의 길이가 5 m이므로

$x^2+y^2=5^2 \qquad \therefore\ x^2+y^2=25$ $\cdots\cdots$ ㉠

처음 땅의 넓이는 xy m^2이고, 가로의 길이를 2 m 늘이고 세로의 길이를 1 m 줄인 땅의 넓이는

$(x+2)(y-1)$ m^2

이 넓이가 처음 땅의 넓이보다 3 m^2만큼 넓으므로

$(x+2)(y-1)=xy+3$

$xy-x+2y-2=xy+3$

$\therefore\ -x+2y=5$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $x=2y-5$를 ㉠에 대입하면

$(2y-5)^2+y^2=25$, $5y^2-20y=0$

$5y(y-4)=0 \qquad \therefore\ y=4$ ($\because$ $y>1$)

$y-1>0$에서 $y>1$

$y=4$를 ㉡에 대입하면 $x=3$

따라서 처음 땅의 넓이는 $3\times 4=12\,(\text{m}^2)$

$\therefore\ k=12$

20 $x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5=0$에서

$x^2-2(2y-1)x+5y^2-8y+5=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때, x는 실수이므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{-(2y-1)\}^2-(5y^2-8y+5)\ge 0$, $-(y^2-4y+4)\ge 0$

즉, $(y-2)^2\le 0$이므로

$y-2=0 \qquad \therefore\ y=2$

$y=2$를 ㉠에 대입하면

$x^2-6x+9=0$, $(x-3)^2=0 \qquad \therefore\ x=3$

$\therefore\ x+y=5$

다른 풀이 $x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5=0$에서

$\{x^2-2(2y-1)x+(2y-1)^2\}+(y^2-4y+4)=0$

$\therefore\ (x-2y+1)^2+(y-2)^2=0$

이때, x, y는 실수이므로

$x-2y+1=0$, $y-2=0$

따라서 $x=3$, $y=2$이므로

$x+y=5$

서술형

21 $f(x)=x^3+(4k-1)x^2-4k$ 로 놓으면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 4k-1 & 0 & -4k \\ & & 1 & 4k & 4k \\ \hline & 1 & 4k & 4k & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+4kx+4k)$ ⋯ ①

이때, 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면 이차방정식 $x^2+4kx+4k=0$이 $x=1$을 근으로 갖거나 중근을 가져야 한다.

(i) $x^2+4kx+4k=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우

$1+4k+4k=0,\ 8k=-1 \qquad \therefore k=-\dfrac{1}{8}$ ⋯ ②

(ii) $x^2+4kx+4k=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2k)^2-4k=0,\ 4k^2-4k=0$

$4k(k-1)=0 \qquad \therefore k=0$ 또는 $k=1$ ⋯ ③

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값은 1, 최솟값은 $-\dfrac{1}{8}$이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$1+\left(-\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{7}{8}$ ⋯ ④

채점 기준	비율
① 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	20 %
② $x^2+4kx+4k=0$이 $x=1$을 근으로 가질 때 k의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $x^2+4kx+4k=0$이 중근을 가질 때 k의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ k의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	20 %

22 $x^3=1$에서 $x^3-1=0,\ (x-1)(x^2+x+1)=0$

따라서 $\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$이므로 ⋯ ①

$f(n)=\dfrac{\omega^n}{\omega^{2n}+1}$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하면

$f(1)=\dfrac{\omega}{\omega^2+1}=\dfrac{\omega}{-\omega}=-1$

$f(2)=\dfrac{\omega^2}{\omega^4+1}=\dfrac{\omega^2}{\omega^3\times\omega+1}=\dfrac{\omega^2}{\omega+1}=\dfrac{\omega^2}{-\omega^2}=-1$

$f(3)=\dfrac{\omega^3}{\omega^6+1}=\dfrac{\omega^3}{(\omega^3)^2+1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

$f(4)=\dfrac{\omega^4}{\omega^8+1}=\dfrac{\omega^3\times\omega}{(\omega^3)^2\times\omega^2+1}=\dfrac{\omega}{\omega^2+1}=f(1)$

$f(5)=\dfrac{\omega^5}{\omega^{10}+1}=\dfrac{\omega^3\times\omega^2}{(\omega^3)^3\times\omega+1}=\dfrac{\omega^2}{\omega+1}=f(2)$

$f(6)=\dfrac{\omega^6}{\omega^{12}+1}=\dfrac{(\omega^3)^2}{(\omega^3)^4+1}=\dfrac{1}{1+1}=f(3)$

$\vdots$ ⋯ ②

$\therefore f(1)+f(2)+\cdots+f(30)=10\{f(1)+f(2)+f(3)\}$

$=10\times\left(-1-1+\dfrac{1}{2}\right)=-15$ ⋯ ③

채점 기준	비율
① $\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$임을 알 수 있다.	20 %
② $f(1), f(2), f(3), \cdots$의 값을 구하여 $f(1), f(2), f(3)$의 값이 차례대로 반복됨을 알 수 있다.	50 %
③ $f(1)+f(2)+\cdots+f(30)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

23 $\begin{cases} x+y+xy=5 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$에서 $\begin{cases} x+y+xy=5 \\ (x+y)^2-2xy=25 \end{cases}$

이때, $x+y=p,\ xy=q$라 하면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} p+q=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ p^2-2q=25 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $q=5-p$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $p^2-2(5-p)=25$

$p^2+2p-35=0,\ (p+7)(p-5)=0 \qquad \therefore p=-7$ 또는 $p=5$

$p=-7$을 ㉢에 대입하면 $q=12$

$p=5$를 ㉢에 대입하면 $q=0$ ⋯ ①

(i) $p=-7,\ q=12$, 즉 $x+y=-7,\ xy=12$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+7t+12=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t+4)=0 \qquad \therefore t=-4$ 또는 $t=-3$

$\therefore \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$

(ii) $p=5,\ q=0$, 즉 $x+y=5,\ xy=0$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-5t=0$의 두 근이므로

$t(t-5)=0 \qquad \therefore t=0$ 또는 $t=5$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases}$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases}$ ⋯ ②

따라서 $2x+3y$의 값은 $x=-3,\ y=-4$일 때 최소이므로

구하는 최솟값은 $2\times(-3)+3\times(-4)=-18$ ⋯ ③

채점 기준	비율
① $x+y=p,\ xy=q$로 놓고 p, q의 값을 구할 수 있다.	30 %
② 주어진 연립방정식의 해를 구할 수 있다.	50 %
③ $2x+3y$의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

24 $x^2-(n-2)x+n+1=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\begin{cases} \alpha+\beta=n-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha\beta=n+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡$-$㉠을 하면 $\alpha\beta-\alpha-\beta=3,\ \alpha(\beta-1)-(\beta-1)=4$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=4$ ⋯ ①

이때, α, β는 자연수이고 $\alpha-1\ge0,\ \beta-1\ge0$이므로

$\alpha-1,\ \beta-1$의 값은 다음 표와 같다.

$\alpha-1$	1	2	4
$\beta-1$	4	2	1

$\therefore \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=5 \\ \beta=2 \end{cases}$ ⋯ ②

$\alpha=2,\ \beta=5$ 또는 $\alpha=5,\ \beta=2$를 ㉠에 대입하면 $n=9$

$\alpha=3,\ \beta=3$을 ㉠에 대입하면 $n=8$

따라서 모든 정수 n의 값의 합은 $9+8=17$ ⋯ ③

채점 기준	비율
① 주어진 이차방정식의 두 근을 이용하여 부정방정식을 세울 수 있다.	40 %
② 부정방정식의 해를 모두 구할 수 있다.	40 %
③ 모든 정수 n의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

8 연립일차부등식

1 일차부등식

개념 확인 194~195쪽

1 ㄴ, ㅁ

2 (1) $-4\le x+2\le 14$ (2) $-7\le x-1\le 11$
(3) $-18\le 3x\le 36$ (4) $-12\le -x\le 6$
(5) $-\frac{3}{2}\le\frac{x}{4}\le 3$ (6) $-6\le -\frac{x}{2}\le 3$

3 (1) $x<\frac{11}{2}$ (2) $x\ge -1$

4 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

1 $a>b$일 때
ㄴ. $a-4>b-4$ (거짓)
ㅁ. $c>0$이면 $ac>bc$, $c<0$이면 $ac<bc$ (거짓)

2 $-6\le x\le 12$이므로
(1) $-6+2\le x+2\le 12+2$ $\therefore -4\le x+2\le 14$
(2) $-6-1\le x-1\le 12-1$ $\therefore -7\le x-1\le 11$
(3) $3\times(-6)\le 3x\le 3\times 12$ $\therefore -18\le 3x\le 36$
(4) $(-1)\times 12\le -x\le(-1)\times(-6)$ $\therefore -12\le -x\le 6$
(5) $\frac{-6}{4}\le\frac{x}{4}\le\frac{12}{4}$ $\therefore -\frac{3}{2}\le\frac{x}{4}\le 3$
(6) $-\frac{12}{2}\le -\frac{x}{2}\le -\frac{-6}{2}$ $\therefore -6\le -\frac{x}{2}\le 3$

3 (1) $2x+7>4x-4$에서
$2x-4x>-4-7$, $-2x>-11$
$\therefore x<\frac{11}{2}$
(2) $3(x-1)\le 6x$에서
$3x-3\le 6x$, $3x-6x\le 3$
$-3x\le 3$ $\therefore x\ge -1$

4 (1) (i) $a-3>0$, 즉 $a>3$일 때, $x>\frac{1}{a-3}$
(ii) $a-3<0$, 즉 $a<3$일 때, $x<\frac{1}{a-3}$
(iii) $a-3=0$, 즉 $a=3$일 때, $0\times x>1$이므로 해는 없다.
(2) (i) $a+1>0$, 즉 $a>-1$일 때, $x\le\frac{2}{a+1}$
(ii) $a+1<0$, 즉 $a<-1$일 때, $x\ge\frac{2}{a+1}$
(iii) $a+1=0$, 즉 $a=-1$일 때, $0\times x\le 2$이므로 해는 모든 실수이다.

참고 부등식 $ax>b$에서
(1) 해가 없을 조건 ➡ $a=0$, $b\ge 0$
(2) 해가 모든 실수일 조건 ➡ $a=0$, $b<0$

개념 드릴 196쪽

1 (1) $1\le 2x-5<7$ (2) $1<-\frac{x}{3}+3\le 2$
(3) $11\le 3x+2<20$ (4) $-11<-2x+1\le -5$

2 (1) $x\ge -2$ (2) $x>1$ (3) $x\le\frac{1}{4}$

3 (1) $x\ge -1$ (2) $x<9$ (3) $x<10$

4 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조 (3) 풀이 참조

1 $3\le x<6$에서
(1) $6\le 2x<12$ $\therefore 1\le 2x-5<7$
(2) $-2<-\frac{x}{3}\le -1$ $\therefore 1<-\frac{x}{3}+3\le 2$
(3) $9\le 3x<18$ $\therefore 11\le 3x+2<20$
(4) $-12<-2x\le -6$ $\therefore -11<-2x+1\le -5$

2 (1) $3x-1\le 5x+3$에서
$-2x\le 4$ $\therefore x\ge -2$
(2) $4-2x<3x-1$에서
$-5x<-5$ $\therefore x>1$
(3) $-4x+9\ge 5x-(x-7)$에서
$-4x+9\ge 5x-x+7$, $-8x\ge -2$
$\therefore x\le\frac{1}{4}$

3 (1) $\frac{1}{2}x+1\ge\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}$의 양변에 6을 곱하면
$3x+6\ge x+4$, $2x\ge -2$ $\therefore x\ge -1$
(2) $\frac{1}{3}x-2<\frac{x-4}{5}$의 양변에 15를 곱하면
$5x-30<3(x-4)$, $2x<18$ $\therefore x<9$
(3) $0.2x+1>0.5x-2$의 양변에 10을 곱하면
$2x+10>5x-20$, $-3x>-30$ $\therefore x<10$

4 (1) $ax+2\ge 2x+1$에서 $(a-2)x\ge -1$
(i) $a-2>0$, 즉 $a>2$일 때, $x\ge -\frac{1}{a-2}$
(ii) $a-2<0$, 즉 $a<2$일 때, $x\le -\frac{1}{a-2}$
(iii) $a-2=0$, 즉 $a=2$일 때, $0\times x\ge -1$이므로 해는 모든 실수이다.
(2) $ax-a<-x-1$에서 $(a+1)x<a-1$
(i) $a+1>0$, 즉 $a>-1$일 때, $x<\frac{a-1}{a+1}$
(ii) $a+1<0$, 즉 $a<-1$일 때, $x>\frac{a-1}{a+1}$
(iii) $a+1=0$, 즉 $a=-1$일 때, $0\times x<-2$이므로 해는 없다.
(3) $3x-2a>-ax+6$에서 $(a+3)x>2(a+3)$
(i) $a+3>0$, 즉 $a>-3$일 때, $x>2$
(ii) $a+3<0$, 즉 $a<-3$일 때, $x<2$
(iii) $a+3=0$, 즉 $a=-3$일 때, $0\times x>0$이므로 해는 없다.

필수 예제 01 부등식의 성질 197쪽

01-1 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

|전략| 부등식의 성질을 이용한다.

ㄱ. $a>b$이면 $a-c>b-c$ (참)

ㄴ. [반례] $a=-1$, $b=-2$이면 $a>b$이지만 $|a|<|b|$ (거짓)

ㄷ. $a>b$, $d>0$이므로 $\frac{a}{d}>\frac{b}{d}$ …… ㉠

$c>d>0$이므로 $\frac{1}{d}>\frac{1}{c}$

이때, $b>0$이므로 $\frac{b}{d}>\frac{b}{c}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{a}{d}>\frac{b}{d}>\frac{b}{c}$

∴ $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$ (참)

ㄹ. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=(a-b)\left\{\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right\}$

이때, $a>b$이므로 $a-b>0$, $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2>0$

즉, $a>b$이면 $a^3-b^3>0$에서 $a^3>b^3$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

참고 ㄹ. $a>b$이면 $a=b=0$일 수 없으므로 $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2>0$이다.

필수 예제 02 미정계수를 포함한 일차부등식의 풀이 198쪽

02-1 답 풀이 참조

|전략| x의 계수가 양수, 음수, 0인 경우로 나누어 해를 구한다.

$ax+a>a^2+x$에서 $ax-x>a^2-a$

$(a-1)x>a(a-1)$

(i) $a-1>0$, 즉 $a>1$일 때, $x>a$

(ii) $a-1<0$, 즉 $a<1$일 때, $x<a$

(iii) $a-1=0$, 즉 $a=1$일 때, $0\times x>0$이므로 해는 없다.

02-2 답 $x<-\frac{1}{2}$

|전략| 주어진 부등식의 부등호의 방향과 해의 부등호의 방향이 다르면 x의 계수는 음수이다.

$ax+b>0$에서 $ax>-b$ …… ㉠

이 부등식의 해가 $x<-3$이므로 $a<0$

㉠의 양변을 a로 나누면 $x<-\frac{b}{a}$ …… ㉡

㉡과 $x<-3$이 일치하므로

$-\frac{b}{a}=-3$ ∴ $b=3a$

부등식 $(a+b)x-(a-b)>0$에 $b=3a$를 대입하여 풀면

$(a+3a)x-(a-3a)>0$, $4ax-(-2a)>0$

$4ax>-2a$ ∴ $x<-\frac{1}{2}$ (∵ $a<0$)

2 연립일차부등식

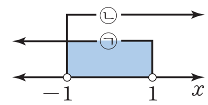
개념 확인 199쪽

1 (1) -1, $-1<x<1$ (2) $x=5$

1 (1) $2x+1<3$에서 $x<1$ …… ㉠

$3x>2x-1$에서 $x>\boxed{-1}$ …… ㉡

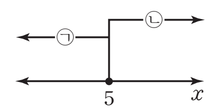
㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 $\boxed{-1<x<1}$



(2) $x-1\le4$에서 $x\le5$ …… ㉠

$2x\ge x+5$에서 $x\ge5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 $\boxed{x=5}$



개념 드릴 200쪽

1 (1) $1<x<3$ (2) $-\frac{2}{3}\le x<-\frac{1}{2}$ (3) $x\le2$

(4) $1<x\le\frac{3}{2}$ (5) $x\ge4$ (6) $-2\le x<1$

2 (1) $x=1$ (2) 해는 없다. (3) $x=-2$

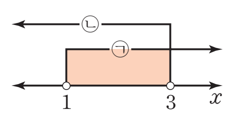
(4) 해는 없다. (5) 해는 없다. (6) 해는 없다.

1 (1) $x+3>4$에서 $x>1$ …… ㉠

$-2x>-6$에서 $x<3$ …… ㉡

따라서 연립부등식의 해는

$1<x<3$

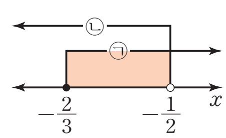


(2) $-2x+1\le x+3$에서 $-3x\le2$ ∴ $x\ge-\frac{2}{3}$ …… ㉠

$5x-1<3x-2$에서 $2x<-1$ ∴ $x<-\frac{1}{2}$ …… ㉡

따라서 연립부등식의 해는

$-\frac{2}{3}\le x<-\frac{1}{2}$



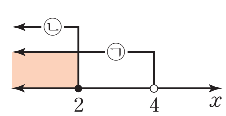
(3) $3x-4<8$에서 $3x<12$ ∴ $x<4$ …… ㉠

$3(x-1)\le x+1$에서 $3x-3\le x+1$

$2x\le4$ ∴ $x\le2$ …… ㉡

따라서 연립부등식의 해는

$x\le2$

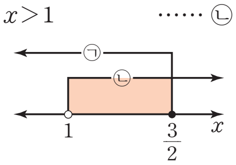


(4) $2(x-1)\le1$에서 $2x-2\le1$ ∴ $x\le\frac{3}{2}$ …… ㉠

$1-3x<-2$에서 $-3x<-3$ ∴ $x>1$ …… ㉡

따라서 연립부등식의 해는

$1<x\le\frac{3}{2}$



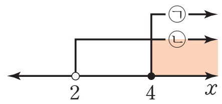
(5) $0.2x+0.2\ge1$의 양변에 10을 곱하면

$2x+2\ge10$에서 $2x\ge8$ $\quad\therefore x\ge4$ ...... ㉠

$5x-7>3$에서 $5x>10$ $\quad\therefore x>2$ ...... ㉡

따라서 연립부등식의 해는

$x\ge4$



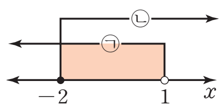
(6) $\frac{4}{3}x<\frac{x}{2}+\frac{5}{6}$의 양변에 6을 곱하면

$8x<3x+5$에서 $5x<5$ $\quad\therefore x<1$ ...... ㉠

$3x\ge2x-2$에서 $x\ge-2$ ...... ㉡

따라서 연립부등식의 해는

$-2\le x<1$

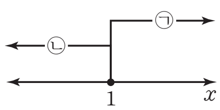


2 (1) $x+1\ge2$에서 $x\ge1$ ...... ㉠

$2x+3\le5$에서 $2x\le2$ $\quad\therefore x\le1$ ...... ㉡

따라서 연립부등식의 해는

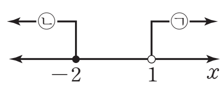
$x=1$



(2) $3x-2>1$에서 $3x>3$ $\quad\therefore x>1$ ...... ㉠

$-x+2\ge4$에서 $-x\ge2$ $\quad\therefore x\le-2$ ...... ㉡

따라서 연립부등식의 해는 없다.

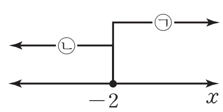


(3) $4x+7\ge-1$에서 $4x\ge-8$ $\quad\therefore x\ge-2$ ...... ㉠

$x-4\ge3x$에서 $-2x\ge4$ $\quad\therefore x\le-2$ ...... ㉡

따라서 연립부등식의 해는

$x=-2$

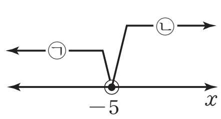


(4) $-2(x+3)>x+9$에서 $-2x-6>x+9$

$-3x>15$ $\quad\therefore x<-5$ ...... ㉠

$5x\le6x+5$에서 $-x\le5$ $\quad\therefore x\ge-5$ ...... ㉡

따라서 연립부등식의 해는 없다.

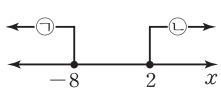


(5) $0.2x-0.1\ge0.3x+0.7$의 양변에 10을 곱하면

$2x-1\ge3x+7$에서 $-x\ge8$ $\quad\therefore x\le-8$ ...... ㉠

$8-x\le5x-4$에서 $-6x\le-12$ $\quad\therefore x\ge2$ ...... ㉡

따라서 연립부등식의 해는 없다.

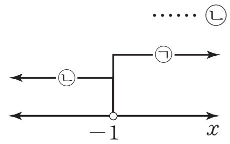


(6) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}>\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$의 양변에 4를 곱하면

$2x-1>x-2$에서 $x>-1$ ...... ㉠

$x+2<1$에서 $x<-1$ ...... ㉡

따라서 연립부등식의 해는 없다.



필수 예제 01 연립일차부등식의 풀이 201쪽

01-1 답 (1) $3\le x\le6$ (2) $x<2$

|전략| 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분을 찾는다.

(1) $2(x-4)\le x-2$에서

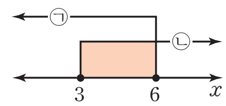
$2x-8\le x-2$ $\quad\therefore x\le6$ ...... ㉠

$7+3x\ge2(x+5)$에서

$7+3x\ge2x+10$ $\quad\therefore x\ge3$ ...... ㉡

따라서 연립부등식의 해는

$3\le x\le6$



(2) $1.5x-1<0.6x+0.8$의 양변에 10을 곱하면

$15x-10<6x+8$, $9x<18$ $\quad\therefore x<2$ ...... ㉠

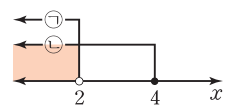
$2-\frac{x-2}{4}\ge\frac{x-1}{2}$의 양변에 4를 곱하면

$8-(x-2)\ge2(x-1)$, $8-x+2\ge2x-2$

$-3x\ge-12$ $\quad\therefore x\le4$ ...... ㉡

따라서 연립부등식의 해는

$x<2$



01-2 답 $M=10$, $m=4$

|전략| 연립부등식의 해를 구한 후 해의 범위에 포함되는 정수를 생각한다.

$3(x-2)-1\ge1+x$에서 $3x-6-1\ge1+x$

$2x\ge8$ $\quad\therefore x\ge4$ ...... ㉠

$\frac{2x-7}{3}<\frac{x-3}{2}+1$의 양변에 6을 곱하면

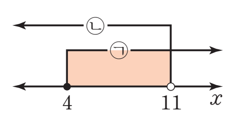
$2(2x-7)<3(x-3)+6$

$4x-14<3x-9+6$ $\quad\therefore x<11$ ...... ㉡

따라서 연립부등식의 해는

$4\le x<11$이므로

$M=10$, $m=4$



필수 예제 02 특수한 해를 갖는 연립일차부등식의 풀이 202쪽

02-1 답 (1) 해는 없다. (2) $x=1$

|전략| 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분을 찾는다.

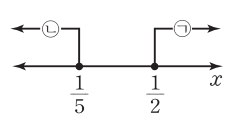
(1) $\frac{1}{5}x+1\le x+0.6$에서 $x+5\le5x+3$

$-4x\le-2$ $\quad\therefore x\ge\frac{1}{2}$ ...... ㉠

$3(x+3)\le-2(x-5)$에서 $3x+9\le-2x+10$

$5x\le1$ $\quad\therefore x\le\frac{1}{5}$ ...... ㉡

따라서 연립부등식의 해는 없다.



(2) $0.4x\le x-\frac{3}{5}$에서 $2x\le 5x-3$

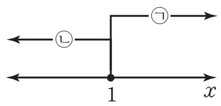
$-3x\le -3 \qquad \therefore x\ge 1$ …… ㉠

$-4+x\ge 3(x-2)$에서 $-4+x\ge 3x-6$

$-2x\ge -2 \qquad \therefore x\le 1$ …… ㉡

따라서 연립부등식의 해는

$x=1$



필수 예제 03 해가 주어진 연립일차부등식 203쪽

03-1 답 3

|전략| 각 부등식의 해를 구한 후 주어진 해와 비교하여 a의 값을 구한다.

$4(x-a)<5x-1$에서 $4x-4a<5x-1$

$-x<4a-1 \qquad \therefore x>-4a+1$

$-x+2\ge 2x-7$에서

$-3x\ge -9 \qquad \therefore x\le 3$

이때, 연립부등식의 해가 $-11<x\le 3$이므로

$-4a+1=-11,\ -4a=-12$

$\therefore a=3$

참고 연립부등식 $\begin{cases} ax+b<0 \\ cx+d\ge 0 \end{cases}$의 해가 $\alpha<x\le\beta$이면 α는 방정식 $ax+b=0$의 해이고 β는 방정식 $cx+d=0$의 해이다.

03-2 답 $a=1,\ b=7$

|전략| 각 부등식의 해를 구한 후 주어진 해와 비교하여 a, b의 값을 구한다.

$3x-a<11$에서

$3x<a+11 \qquad \therefore x<\frac{a+11}{3}$

$x-b<3(x-3)$에서

$-2x<b-9 \qquad \therefore x>\frac{b-9}{-2}$

이때, 연립부등식의 해가 $1<x<4$이므로

$\frac{a+11}{3}=4,\ \frac{b-9}{-2}=1$

$\therefore a=1,\ b=7$

03-3 답 $a=6,\ b=-1$

|전략| 각 부등식의 해를 구한 후 주어진 해와 비교하여 a, b의 값을 구한다.

$3x+2\le x+a$에서

$2x\le a-2 \qquad \therefore x\le\frac{a-2}{2}$

$2x+8>-4x+2$에서

$6x>-6 \qquad \therefore x>-1$

이때, 연립부등식의 해가 $b<x\le 2$이므로

$\frac{a-2}{2}=2,\ b=-1$

$\therefore a=6,\ b=-1$

필수 예제 04 해의 조건이 주어진 연립일차부등식 204쪽

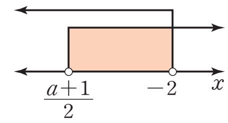
04-1 답 $a<-5$

|전략| 연립부등식이 해를 가지려면 공통부분이 있어야 한다.

$\frac{1-x}{3}>1$에서 $1-x>3,\ -x>2 \qquad \therefore x<-2$

$3x+a<5x-1$에서 $-2x<-a-1 \qquad \therefore x>\frac{a+1}{2}$

이때, 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{a+1}{2}<-2 \qquad \therefore a<-5$

참고 $\frac{a+1}{2}=-2$이면 $\begin{cases} x<-2 \\ x>-2 \end{cases}$가 되어 연립부등식의 해는 없다.

04-2 답 $a>-1$

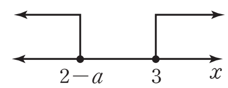
|전략| 연립부등식의 해가 없으려면 공통부분이 없어야 한다.

$2-x\ge a$에서 $-x\ge -2+a \qquad \therefore x\le 2-a$

$\frac{x}{3}+\frac{5-x}{2}\le 2$에서 $2x+3(5-x)\le 12$

$2x+15-3x\le 12,\ -x\le -3 \qquad \therefore x\ge 3$

이때, 연립부등식의 해가 없으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$2-a<3 \qquad \therefore a>-1$

04-3 답 $1\le a<3$

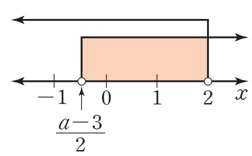
|전략| 각 부등식의 해를 구한 후 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개가 되도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.

$0.3(x+1)>x-1.1$에서 $3(x+1)>10x-11$

$3x+3>10x-11,\ -7x>-14 \qquad \therefore x<2$

$4x+3>2x+a,\ 2x>a-3 \qquad \therefore x>\frac{a-3}{2}$

이때, 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-1\le\frac{a-3}{2}<0,\ -2\le a-3<0$

$\therefore 1\le a<3$

참고 $\frac{a-3}{2}=0$이면 $\begin{cases} x<2 \\ x>0 \end{cases}$이 되어 연립부등식의 해는 $0<x<2$이다. 즉, 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 1개이다.

필수 예제 05 연립일차부등식의 활용 205쪽

05-1 답 10

|전략| 상자의 개수를 x로 놓고 주어진 조건을 이용하여 연립부등식을 세운다.

상자의 개수를 x라 하면

$\begin{cases} 50x+40\le 740 \\ 75x-10\ge 740 \end{cases}$

$50x+40\le 740$에서 $50x\le 700$ $\quad\therefore x\le 14$ $\cdots\cdots$ ㉠
$75x-10\ge 740$에서 $75x\ge 750$ $\quad\therefore x\ge 10$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $10\le x\le 14$
따라서 상자의 최소 개수는 10이다.

05-2 답 10

|전략| 연속하는 세 자연수를 x, $x+1$, $x+2$로 놓고 주어진 조건을 이용하여 연립부등식을 세운다.

연속하는 세 자연수를 x, $x+1$, $x+2$라 하면

$$\begin{cases} x+(x+1)+(x+2)\ge 30 \\ \{x+(x+1)\}-(x+2)<9 \end{cases}$$

$x+(x+1)+(x+2)\ge 30$에서 $3x+3\ge 30$ $\quad\therefore x\ge 9$ $\cdots\cdots$ ㉠
$\{x+(x+1)\}-(x+2)<9$에서 $x-1<9$ $\quad\therefore x<10$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $9\le x<10$이므로 $x=9$
따라서 세 자연수는 9, 10, 11이므로 가운데 수는 10이다.

참고 연속하는 세 자연수를 $x-1$, x, $x+1$로 놓고 풀어도 된다.

3 절댓값 기호를 포함한 일차부등식

개념 확인 206쪽

1 (1) $-2\le x\le 2$ (2) $x<-3$ 또는 $x>5$ (3) $x\le -4$ 또는 $x\ge 3$

1 (2) $|x-1|>4$에서 $x-1<-4$ 또는 $x-1>4$
$\therefore x<-3$ 또는 $x>5$
(3) $|2x+1|\ge 7$에서 $2x+1\le -7$ 또는 $2x+1\ge 7$
$\therefore x\le -4$ 또는 $x\ge 3$

개념 드릴 207쪽

1 (1) $x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>\frac{1}{2}$ (2) $-5<x<5$ (3) $x\le -4$ 또는 $x\ge 4$
2 (1) $x<-4$ 또는 $x>2$ (2) $-4<x<-1$ (3) $-\frac{2}{3}\le x\le 2$
3 (1) $x<1$ (2) $x>\frac{3}{2}$ (3) $x\le 3$
4 (1) $-\frac{3}{2}\le x\le\frac{7}{2}$ (2) $x<-2$ 또는 $x>1$

1 (1) $|2x|>1$에서
$2x<-1$ 또는 $2x>1$ $\quad\therefore x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>\frac{1}{2}$
(2) $|x|-5<0$, 즉 $|x|<5$에서 $-5<x<5$
(3) $|2x|-8\ge 0$, 즉 $|2x|\ge 8$에서
$2x\le -8$ 또는 $2x\ge 8$ $\quad\therefore x\le -4$ 또는 $x\ge 4$

2 (1) $|x+1|>3$에서
$x+1<-3$ 또는 $x+1>3$ $\quad\therefore x<-4$ 또는 $x>2$
(2) $|2x+5|<3$에서
$-3<2x+5<3$, $-8<2x<-2$ $\quad\therefore -4<x<-1$
(3) $|3x-2|\le 4$에서
$-4\le 3x-2\le 4$, $-2\le 3x\le 6$ $\quad\therefore -\frac{2}{3}\le x\le 2$

3 (1) $|x+1|>2x$에서
(i) $x<-1$일 때, $-(x+1)>2x$
$-3x>1$ $\quad\therefore x<-\frac{1}{3}$
그런데 $x<-1$이므로 $x<-1$
(ii) $x\ge -1$일 때, $x+1>2x$
$-x>-1$ $\quad\therefore x<1$
그런데 $x\ge -1$이므로 $-1\le x<1$
(i), (ii)에서 $x<1$
(2) $|x-3|<x$에서
(i) $x<3$일 때, $-(x-3)<x$
$-2x<-3$ $\quad\therefore x>\frac{3}{2}$
그런데 $x<3$이므로 $\frac{3}{2}<x<3$
(ii) $x\ge 3$일 때, $x-3<x$
$0\times x<3$이므로 해는 모든 실수이다.
그런데 $x\ge 3$이므로 $x\ge 3$
(i), (ii)에서 $x>\frac{3}{2}$
(3) $|2x+3|\ge 3x$에서
(i) $x<-\frac{3}{2}$일 때, $-(2x+3)\ge 3x$
$-5x\ge 3$ $\quad\therefore x\le -\frac{3}{5}$
그런데 $x<-\frac{3}{2}$이므로 $x<-\frac{3}{2}$
(ii) $x\ge -\frac{3}{2}$일 때, $2x+3\ge 3x$
$-x\ge -3$ $\quad\therefore x\le 3$
그런데 $x\ge -\frac{3}{2}$이므로 $-\frac{3}{2}\le x\le 3$
(i), (ii)에서 $x\le 3$

4 (1) $|x|+|x-2|\le 5$에서
(i) $x<0$일 때, $-x-(x-2)\le 5$
$-2x\le 3$ $\quad\therefore x\ge -\frac{3}{2}$
그런데 $x<0$이므로 $-\frac{3}{2}\le x<0$
(ii) $0\le x<2$일 때, $x-(x-2)\le 5$
$0\times x\le 3$이므로 해는 모든 실수이다.
그런데 $0\le x<2$이므로 $0\le x<2$
(iii) $x\ge 2$일 때, $x+(x-2)\le 5$
$2x\le 7$ $\quad\therefore x\le\frac{7}{2}$
그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x\le\frac{7}{2}$
(i), (ii), (iii)에서 $-\frac{3}{2}\le x\le\frac{7}{2}$

(2) $|x+2|+|x-1|>3$에서

(i) $x<-2$일 때, $-(x+2)-(x-1)>3$

$-2x>4 \quad \therefore x<-2$

그런데 $x<-2$이므로 $x<-2$

(ii) $-2\le x<1$일 때, $(x+2)-(x-1)>3$

$0\times x>0$이므로 해는 없다.

(iii) $x\ge 1$일 때, $(x+2)+(x-1)>3$

$2x>2 \quad \therefore x>1$

그런데 $x\ge 1$이므로 $x>1$

(i), (ii), (iii)에서 $x<-2$ 또는 $x>1$

필수 예제 01 절댓값 기호를 1개 포함한 일차부등식의 풀이

208쪽

01-1 답 (1) $-3\le x<-1$ 또는 $2<x\le 4$ (2) $1\le x\le 3$

|전략| 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나눈다.

(1) $3<|2x-1|\le 7$에서

(i) $x<\frac{1}{2}$일 때, $3<-(2x-1)\le 7$

$3<-2x+1\le 7,\ 2<-2x\le 6 \quad \therefore -3\le x<-1$

그런데 $x<\frac{1}{2}$이므로 $-3\le x<-1$

(ii) $x\ge\frac{1}{2}$일 때, $3<2x-1\le 7$

$4<2x\le 8 \quad \therefore 2<x\le 4$

그런데 $x\ge\frac{1}{2}$이므로 $2<x\le 4$

(i), (ii)에서 $-3\le x<-1$ 또는 $2<x\le 4$

(2) $x+|2x-5|\le 4$에서

(i) $x<\frac{5}{2}$일 때, $x-(2x-5)\le 4$

$-x\le -1 \quad \therefore x\ge 1$

그런데 $x<\frac{5}{2}$이므로 $1\le x<\frac{5}{2}$

(ii) $x\ge\frac{5}{2}$일 때, $x+(2x-5)\le 4$

$3x\le 9 \quad \therefore x\le 3$

그런데 $x\ge\frac{5}{2}$이므로 $\frac{5}{2}\le x\le 3$

(i), (ii)에서 $1\le x\le 3$

필수 예제 02 절댓값 기호를 2개 포함한 일차부등식의 풀이

209쪽

02-1 답 $a=-3,\ b=5$

|전략| 절댓값 기호를 2개 포함하는 일차부등식은 x의 값의 범위를 3개로 나누어 푼다.

$|x+2|+|x-4|\le 8$에서

(i) $x<-2$일 때, $-(x+2)-(x-4)\le 8$

$-2x\le 6 \quad \therefore x\ge -3$

그런데 $x<-2$이므로 $-3\le x<-2$

(ii) $-2\le x<4$일 때, $(x+2)-(x-4)\le 8$

$0\times x\le 2$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $-2\le x<4$이므로 $-2\le x<4$

(iii) $x\ge 4$일 때, $(x+2)+(x-4)\le 8$

$2x\le 10 \quad \therefore x\le 5$

그런데 $x\ge 4$이므로 $4\le x\le 5$

(i), (ii), (iii)에서 $-3\le x\le 5$

$\therefore a=-3,\ b=5$

02-2 답 $x<2$

|전략| 절댓값 기호를 2개 포함하는 일차부등식은 x의 값의 범위를 3개로 나누어 푼다.

$|x+1|<2+|3-x|$에서

(i) $x<-1$일 때, $-(x+1)<2+(3-x)$

$0\times x<6$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $x<-1$이므로 $x<-1$

(ii) $-1\le x<3$일 때, $x+1<2+(3-x)$

$2x<4 \quad \therefore x<2$

그런데 $-1\le x<3$이므로 $-1\le x<2$

(iii) $x\ge 3$일 때, $x+1<2-(3-x)$

$0\times x<-2$이므로 해는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 $x<2$

개념 정리

210~211쪽

01 $x>\frac{b}{a}$ **02** $x<\frac{b}{a}$ **03** 없다

04 모든 실수이다 **05** 연립부등식, 연립일차부등식

06 수직선, 공통부분 **07** 없다 **08** 등호

09 $5,\ -3,\ -3,\ 5$ **10** $-a,\ a$

11 $<,\ >$ **12** $\ge,\ x-a$ **13** 0

14 $1,\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{5}$

09 $3x-6<9$에서 $3x<15 \quad \therefore x<\boxed{5}$

$4x+5\ge -7$에서 $4x\ge -12 \quad \therefore x\ge\boxed{-3}$

따라서 연립부등식의 해는

$\boxed{-3}\le x<\boxed{5}$

14 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값인 $x=\boxed{1}$을 기준으로 범위를 나누어 푼다.

(i) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로

$-(x-1)<4x,\ -x+1<4x$

$-5x<-1 \quad \therefore x>\boxed{\frac{1}{5}}$

그런데 $x<1$이므로 $\frac{1}{5}<x<1$

(ii) $x\geq1$일 때, $x-1\geq0$이므로

$x-1<4x,\ -3x<1 \qquad \therefore\ x>\boxed{-\frac{1}{3}}$

그런데 $x\geq1$이므로 $x\geq1$

(i), (ii)에서 $x>\boxed{\frac{1}{5}}$

중단원 마무리

212~214쪽

01 ④	**02** -3	**03** ③	**04** $a\geq-6$
05 ①	**06** 9송이	**07** ⑤	**08** ④
09 $x<\frac{4}{3}$	**10** ⑤	**11** 3	**12** ②
13 4	**14** ①	**15** $a<3$	**16** ④
17 ①	**18** ③	**19** ③	**20** ③
21 -3	**22** 5	**23** 12	**24** 5

LEVEL 1

01 ㄱ. $a>b$이므로 $3a>3b$

$\therefore\ 3a-2>3b-2$ (참)

ㄴ. $a<b,\ c<0$이므로 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

$\therefore\ \frac{a}{c}+1>\frac{b}{c}+1$ (거짓)

ㄷ. $a>b$이므로 $a+c>b+c$이고, $c>d$이므로 $b+c>b+d$

$\therefore\ a+c>b+d$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

02 부등식 $(a-2)x>a^2(a-2)$의 해가 $x<9$이므로 $a-2<0$

주어진 부등식의 양변을 $a-2$로 나누면

$x<a^2$ …… ㉠

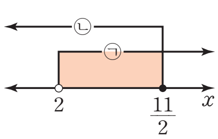
㉠과 $x<9$가 일치하므로

$a^2=9 \qquad \therefore\ a=-3\ (\because\ a-2<0)$

03 $3x-1>2x+1$에서 $x>2$ …… ㉠

$2x-4\geq4x-15$에서 $-2x\geq-11 \qquad \therefore\ x\leq\frac{11}{2}$ …… ㉡

따라서 연립부등식의 해는



$2<x\leq\frac{11}{2}$이므로

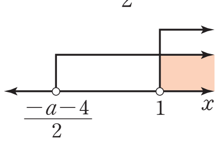
$a=3,\ b=5$

$\therefore\ a+b=8$

04 $7x-4>2x+1$에서 $5x>5 \qquad \therefore\ x>1$

$4(x+1)>2x-a$에서 $2x>-a-4 \qquad \therefore\ x>\frac{-a-4}{2}$

이때, 연립부등식의 해가 $x>1$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{-a-4}{2}\leq1 \qquad \therefore\ a\geq-6$

05 $x+7\geq3(x-1)$에서 $-2x\geq-10 \qquad \therefore\ x\leq5$

$5x+a\geq4x+1$에서 $x\geq1-a$

이때, 연립부등식의 해가 오직 1개이므로

$1-a=5 \qquad \therefore\ a=-4$

참고 $a=-4$이면 연립부등식의 해는 $x=5$로 오직 1개이다.

06 카네이션을 x송이 산다고 하면 장미는 $(15-x)$송이를 사야 하므로

$$\begin{cases}1200(15-x)+1500x<21000\\x>15-x\end{cases}$$

$1200(15-x)+1500x<21000$에서

$300x<3000 \qquad \therefore\ x<10$ …… ㉠

$x>15-x$에서 $2x>15 \qquad \therefore\ x>\frac{15}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{15}{2}<x<10$

따라서 카네이션은 최대 9송이까지 살 수 있다.

07 $|2x-5|\leq1$에서 $-1\leq2x-5\leq1$

$4\leq2x\leq6 \qquad \therefore\ 2\leq x\leq3$

따라서 $a=2,\ b=3$이므로 $ab=6$

08 $|x-1|+|x-2|<x+2$에서

(i) $x<1$일 때, $-(x-1)-(x-2)<x+2$

$-3x<-1 \qquad \therefore\ x>\frac{1}{3}$

그런데 $x<1$이므로 $\frac{1}{3}<x<1$

(ii) $1\leq x<2$일 때, $(x-1)-(x-2)<x+2$

$-x<1 \qquad \therefore\ x>-1$

그런데 $1\leq x<2$이므로 $1\leq x<2$

(iii) $x\geq2$일 때, $(x-1)+(x-2)<x+2 \qquad \therefore\ x<5$

그런데 $x\geq2$이므로 $2\leq x<5$

(i), (ii), (iii)에서 $\frac{1}{3}<x<5$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 1, 2, 3, 4이므로 개수는 4이다.

LEVEL 2

09 $(a-b)x+4a-3b>0$에서 $(a-b)x>-4a+3b$ …… ㉠

이 부등식의 해가 $x<-2$이므로 $a-b<0$

㉠의 양변을 $a-b$로 나누면 $x<\frac{-4a+3b}{a-b}$ …… ㉡

㉡과 $x<-2$가 일치하므로

$\frac{-4a+3b}{a-b}=-2,\ -4a+3b=-2(a-b) \qquad \therefore\ b=2a$

이때, $a-b<0$에 $b=2a$를 대입하면

$a-2a<0 \qquad \therefore\ a>0$

따라서 $(2b-a)x<2a+b$에 $b=2a$를 대입하여 풀면

$(4a-a)x<2a+2a,\ 3ax<4a \qquad \therefore\ x<\frac{4}{3}$

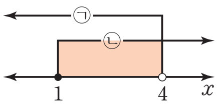
10 $3(2-x)>x-10$에서 $6-3x>x-10$

$-4x>-16$ $\quad \therefore x<4$ $\quad$ …… ㉠

$\dfrac{x+3}{2}\geq\dfrac{5+x}{3}$에서 $3(x+3)\geq 2(5+x)$

$3x+9\geq 10+2x$ $\quad \therefore x\geq 1$ $\quad$ …… ㉡

따라서 연립부등식의 해는 $1\leq x<4$ 이므로 구하는 모든 정수 x의 값의 합은



$1+2+3=6$

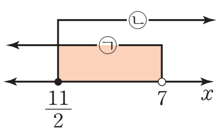
11 $\dfrac{x+1}{4}-\dfrac{x-2}{5}<1$에서 $5(x+1)-4(x-2)<20$

$5x+5-4x+8<20$ $\quad \therefore x<7$ $\quad$ …… ㉠

$0.8(x-1)\geq 0.6x+0.3$에서 $8(x-1)\geq 6x+3$

$8x-8\geq 6x+3,\ 2x\geq 11$ $\quad \therefore x\geq\dfrac{11}{2}$ $\quad$ …… ㉡

주어진 연립부등식의 해는 $\dfrac{11}{2}\leq x<7$이므로 정수 x의 값은 6이다.



따라서 $x=6$이 방정식 $x+3=2x-a$의 해이므로 대입하면

$6+3=12-a$ $\quad \therefore a=3$

12 $ax-4<2x+4$에서 $(a-2)x<8$ $\quad$ …… ㉠

$x-6\leq bx+2$에서 $(1-b)x\leq 8$ $\quad$ …… ㉡

이때, 수직선 위에 나타내어진 연립부등식의 해가

$-2\leq x<4$이므로

$a-2>0,\ 1-b<0$

㉠에서 $x<\dfrac{8}{a-2}$이고, 이 해가 $x<4$와 일치하므로

$\dfrac{8}{a-2}=4$ $\quad \therefore a=4$

㉡에서 $x\geq\dfrac{8}{1-b}$이고, 이 해가 $x\geq -2$와 일치하므로

$\dfrac{8}{1-b}=-2$ $\quad \therefore b=5$

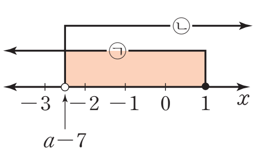
$\therefore ab=20$

13 $1-3x\geq 2x-4$에서 $-5x\geq -5$ $\quad \therefore x\leq 1$ $\quad$ …… ㉠

$5x+2a<7(x+2)$에서 $5x+2a<7x+14$

$-2x<-2a+14$ $\quad \therefore x>a-7$ $\quad$ …… ㉡

이때, 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 4개이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-3\leq a-7<-2$

$\therefore 4\leq a<5$

따라서 실수 a의 최솟값은 4이다.

참고 $a-7=-2$이면 $\begin{cases}x\leq 1\\ x>-2\end{cases}$가 되어 연립부등식의 해는 $-2<x\leq 1$이다. 즉, 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1$이므로 개수는 3이다.

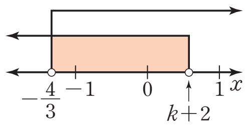
14 $2x+7>-x+3$에서

$3x>-4$ $\quad \therefore x>-\dfrac{4}{3}$

$3x-1<\dfrac{5x+k}{2}$에서

$6x-2<5x+k$ $\quad \therefore x<k+2$

이때, 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 -1과 0뿐이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$0<k+2\leq 1$ $\quad \therefore -2<k\leq -1$

따라서 $a=-2,\ b=-1$이므로

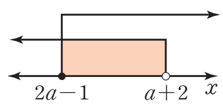
$b-a=1$

15 $4x-2<x+3a+4$에서

$3x<3a+6$ $\quad \therefore x<a+2$

$2x+5\geq x+2(a+2)$에서 $x\geq 2a-1$

이때, 주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$2a-1<a+2$ $\quad \therefore a<3$

16 바구니의 개수를 x라 하면 사과의 개수는 $5x+12$이다.

사과를 7개씩 담으면 마지막 바구니에 1개 이상 3개 미만이 담기므로

$\begin{cases}7(x-1)+1\leq 5x+12\\ 7(x-1)+3>5x+12\end{cases}$

$7(x-1)+1\leq 5x+12$에서 $2x\leq 18$ $\quad \therefore x\leq 9$ $\quad$ …… ㉠

$7(x-1)+3>5x+12$에서 $2x>16$ $\quad \therefore x>8$ $\quad$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $8<x\leq 9$이므로 $x=9$이다.

즉, 바구니의 개수는 9이고, 사과의 개수는

$5\times 9+12=57$이다.

따라서 바구니의 개수와 사과의 개수의 합은

$9+57=66$

17 $|x-a|\leq 2$에서 $-2\leq x-a\leq 2$

$\therefore a-2\leq x\leq a+2$

a는 정수이므로 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 값은

$a-2,\ a-1,\ a,\ a+1,\ a+2$

이때, 모든 정수 x의 값의 합이 45이므로

$(a-2)+(a-1)+a+(a+1)+(a+2)=45$

$5a=45$ $\quad \therefore a=9$

18 $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$이므로 주어진 부등식은

$|x-1|+|x+2|<5$

(i) $x<-2$일 때, $-(x-1)-(x+2)<5$

$-2x<6$ $\quad \therefore x>-3$

그런데 $x<-2$이므로 $-3<x<-2$

(ii) $-2\leq x<1$일 때, $-(x-1)+(x+2)<5$

$0\times x<2$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $-2\leq x<1$이므로 $-2\leq x<1$

(iii) $x \geq 1$일 때, $(x-1)+(x+2)<5$

$2x<4 \quad \therefore x<2$

그런데 $x \geq 1$이므로 $1 \leq x<2$

(i), (ii), (iii)에서 $-3<x<2$

따라서 $a=-3$, $b=2$이므로 $a+2b=1$

19 $2|x+3|+x<3|x-4|$에서

(i) $x<-3$일 때, $-2(x+3)+x<-3(x-4)$

$-2x-6+x<-3x+12$, $2x<18 \quad \therefore x<9$

그런데 $x<-3$이므로 $x<-3$

(ii) $-3 \leq x<4$일 때, $2(x+3)+x<-3(x-4)$

$2x+6+x<-3x+12$, $6x<6 \quad \therefore x<1$

그런데 $-3 \leq x<4$이므로 $-3 \leq x<1$

(iii) $x \geq 4$일 때, $2(x+3)+x<3(x-4)$

$2x+6+x<3x-12$에서 $0 \times x<-18$이므로 해는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 $x<1$

따라서 정수 x의 최댓값은 0이다.

20 $||x-3|-2| \leq 4$에서 $-4 \leq |x-3|-2 \leq 4$

$\therefore -2 \leq |x-3| \leq 6$

그런데 $|x-3| \geq 0$이므로 $0 \leq |x-3| \leq 6$

$-6 \leq x-3 \leq 6 \quad \therefore -3 \leq x \leq 9$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 $-3, -2, \cdots, 9$이므로 개수는 13이다.

다른 풀이 $||x-3|-2| \leq 4$에서

(i) $x<3$일 때, $|-(x-3)-2| \leq 4$

$|-x+1| \leq 4$, $-4 \leq -x+1 \leq 4$

$-5 \leq -x \leq 3 \quad \therefore -3 \leq x \leq 5$

그런데 $x<3$이므로 $-3 \leq x<3$

(ii) $x \geq 3$일 때, $|(x-3)-2| \leq 4$

$|x-5| \leq 4$, $-4 \leq x-5 \leq 4 \quad \therefore 1 \leq x \leq 9$

그런데 $x \geq 3$이므로 $3 \leq x \leq 9$

(i), (ii)에서 $-3 \leq x \leq 9$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 $-3, -2, \cdots, 9$이므로 개수는 13이다.

참고 $m<n$이고, m, n이 정수일 때, 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 다음과 같이 구할 수 있다.

(1) $m<x<n \Rightarrow (n-m-1)$개

(2) $m \leq x<n$ 또는 $m<x \leq n \Rightarrow (n-m)$개

(3) $m \leq x \leq n \Rightarrow (n-m+1)$개

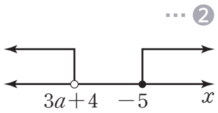
서술형

21 $\dfrac{x-4}{3}<a$에서 $x<3a+4$ ··· ❶

$2(x-3) \leq 5(x+1)+4$에서 $2x-6 \leq 5x+9$

$-3x \leq 15 \quad \therefore x \geq -5$ ··· ❷

이때, 주어진 연립부등식의 해가 없으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$3a+4 \leq -5$, $3a \leq -9 \quad \therefore a \leq -3$ ··· ❸

따라서 실수 a의 최댓값은 -3이다. ··· ❹

채점 기준	비율
❶ 부등식 $\frac{x-4}{3}<a$의 해를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 부등식 $2(x-3) \leq 5(x+1)+4$의 해를 구할 수 있다.	20 %
❸ 연립부등식의 해를 수직선 위에 나타내고 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❹ 실수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

22 $3(x-5)<-x+1$에서 $3x-15<-x+1$

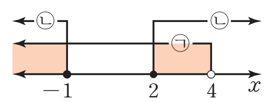
$4x<16 \quad \therefore x<4$ ······ ㉠ ··· ❶

$|2x-1| \geq 3$에서 $2x-1 \leq -3$ 또는 $2x-1 \geq 3$

$\therefore x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$ ······ ㉡ ··· ❷

따라서 연립부등식의 해는

$x \leq -1$ 또는 $2 \leq x<4$ ··· ❸



이므로 구하는 모든 자연수 x의 값의 합은 $2+3=5$ ··· ❹

채점 기준	비율
❶ 부등식 $3(x-5)<-x+1$의 해를 구할 수 있다.	30 %
❷ 부등식 $\|2x-1\| \geq 3$의 해를 구할 수 있다.	30 %
❸ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %
❹ 모든 자연수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

23 연속하는 세 짝수를 $x-2$, x, $x+2$라 하면

$\begin{cases} (x-2)+x+(x+2)>36 \\ 2(x+2)+5<39 \end{cases}$ ··· ❶

$(x-2)+x+(x+2)>36$에서 $3x>36 \quad \therefore x>12$ ······ ㉠

$2(x+2)+5<39$에서 $2x+9<39 \quad \therefore x<15$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $12<x<15$ ··· ❷

이때, x는 짝수이므로 $x=14$

따라서 세 짝수 중 가장 작은 수는 12이다. ··· ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 이용하여 연립부등식을 세울 수 있다.	50 %
❷ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❸ 세 짝수 중 가장 작은 수를 구할 수 있다.	20 %

24 $|ax-1|<b$에서 $-b<ax-1<b$, $1-b<ax<1+b$

$\therefore \dfrac{1-b}{a}<x<\dfrac{1+b}{a}$ ($\because a>0$) ··· ❶

이 부등식의 해가 $-1<x<2$이므로 $\dfrac{1-b}{a}=-1$, $\dfrac{1+b}{a}=2$

$\dfrac{1-b}{a}=-1$에서 $a-b=-1$ ······ ㉠

$\dfrac{1+b}{a}=2$에서 $2a-b=1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$ ··· ❷

$\therefore a+b=5$ ··· ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식의 해를 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

9 이차부등식과 연립이차부등식

1 이차부등식

개념 확인 216~219쪽

1 (1) $x<-3$ 또는 $x>1$ (2) $-3<x<1$
(3) $x\le -3$ 또는 $x\ge 1$ (4) $-3\le x\le 1$

2 (1) $x\le 3$ 또는 $x\ge 5$ (2) $-2<x<8$ (3) $x=5$
(4) $x\neq 2$인 모든 실수 (5) 모든 실수 (6) 해는 없다.

3 (1) $x^2-6x+8\le 0$ (2) $x^2+2x-8>0$
(3) $x^2+8x+7\ge 0$ (4) $x^2-2x-15<0$

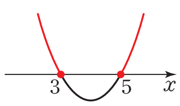
4 (1) $2x^2-7x+3\le 0$ (2) $2x^2-x-3\ge 0$

5 (1) $-4\le k\le 4$ (2) $-2\le k\le 2$

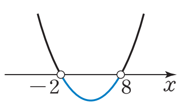
6 $-4<a\le 0$

1 (1) $y=x^2+2x-3$의 그래프에서 $y>0$인 x의 값의 범위는
$x<-3$ 또는 $x>1$
(2) $y=x^2+2x-3$의 그래프에서 $y<0$인 x의 값의 범위는
$-3<x<1$
(3) $y=x^2+2x-3$의 그래프에서 $y\ge 0$인 x의 값의 범위는
$x\le -3$ 또는 $x\ge 1$
(4) $y=x^2+2x-3$의 그래프에서 $y\le 0$인 x의 값의 범위는
$-3\le x\le 1$

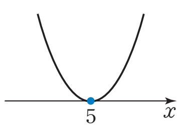
2 (1) 이차함수 $y=(x-3)(x-5)$의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.
따라서 $(x-3)(x-5)\ge 0$의 해는
$x\le 3$ 또는 $x\ge 5$



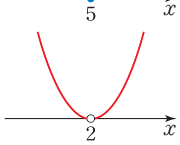
(2) 이차함수 $y=(x+2)(x-8)$의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.
따라서 $(x+2)(x-8)<0$의 해는
$-2<x<8$



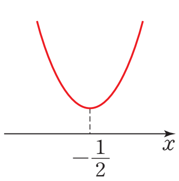
(3) 이차함수 $y=(x-5)^2$의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.
따라서 $(x-5)^2\le 0$의 해는 $x=5$



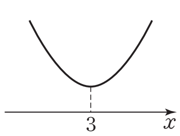
(4) 이차함수 $y=(x-2)^2$의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.
따라서 $(x-2)^2>0$의 해는
$x\neq 2$인 모든 실수



(5) 이차함수 $y=x^2+x+4=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$
의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x^2+x+4\ge 0$의 해는
모든 실수



(6) 이차함수 $y=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$
의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x^2-6x+10<0$의 해는 없다.



3 (1) 해가 $2\le x\le 4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-2)(x-4)\le 0$ $\quad\therefore x^2-6x+8\le 0$
(2) 해가 $x<-4$ 또는 $x>2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+4)(x-2)>0$ $\quad\therefore x^2+2x-8>0$
(3) 해가 $x\le -7$ 또는 $x\ge -1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+7)(x+1)\ge 0$ $\quad\therefore x^2+8x+7\ge 0$
(4) 해가 $-3<x<5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+3)(x-5)<0$ $\quad\therefore x^2-2x-15<0$

4 (1) 해가 $\frac{1}{2}\le x\le 3$이고 x^2의 계수가 2인 이차부등식은
$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)\le 0$, $(2x-1)(x-3)\le 0$
$\therefore 2x^2-7x+3\le 0$
(2) 해가 $x\le -1$ 또는 $x\ge\frac{3}{2}$이고 x^2의 계수가 2인 이차부등식은
$2(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)\ge 0$, $(x+1)(2x-3)\ge 0$
$\therefore 2x^2-x-3\ge 0$

5 (1) 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-kx+4\ge 0$이 성립하려면 이차함수 $y=x^2-kx+4$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 위쪽에 있어야 한다.
따라서 이차방정식 $x^2-kx+4=0$의 판별식을 D라 하면
$D\le 0$이어야 하므로
$D=(-k)^2-4\times 1\times 4\le 0$
$k^2-16\le 0$, $(k+4)(k-4)\le 0$
$\therefore -4\le k\le 4$
(2) 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $-x^2+kx-1\le 0$이 성립하려면 이차함수 $y=-x^2+kx-1$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 아래쪽에 있어야 한다.
따라서 이차방정식 $-x^2+kx-1=0$의 판별식을 D라 하면
$D\le 0$이어야 하므로
$D=k^2-4\times(-1)\times(-1)\le 0$
$k^2-4\le 0$, $(k+2)(k-2)\le 0$
$\therefore -2\le k\le 2$

참고 다음은 모두 같은 표현이다.
(1) 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립한다.
(2) x의 값에 관계없이 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립한다.
(3) 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해는 모든 실수이다.

6 (i) $a=0$일 때
$0\times x^2+0\times x-1=-1<0$이므로 주어진 부등식은
모든 실수 x에 대하여 성립한다.
(ii) $a\neq 0$일 때
모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+ax-1<0$이 성립하려면 이차함수 $y=ax^2+ax-1$의 그래프가 위로 볼록하고 x축보다 아래쪽에 있어야 한다.
즉, 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$ …… ㉠

또, 이차방정식 $ax^2+ax-1=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$D=a^2-4\times a\times(-1)<0$

$a^2+4a<0$, $a(a+4)<0$

$\therefore -4<a<0$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-4<a<0$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값의 범위는 $-4<a\le 0$

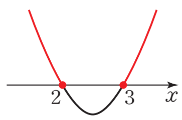
개념 드릴 220쪽

1 (1) $x\le 2$ 또는 $x\ge 3$ (2) $x\ne 4$인 모든 실수 (3) $-1<x<1$
(4) $x=-2$ (5) 해는 없다. (6) $-1\le x\le 5$ (7) 모든 실수

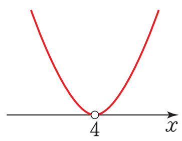
2 (1) $x^2-4x+3<0$ (2) $x^2-7x+10>0$
(3) $x^2+2x\le 0$ (4) $x^2+x-2\ge 0$

3 (1) $-2<k<2$ (2) $k\ge 1$ (3) $k>3$ (4) $-6\le k\le 6$

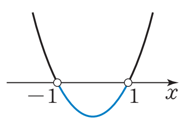
1 (1) 이차함수 $y=(x-2)(x-3)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $(x-2)(x-3)\ge 0$의 해는
$x\le 2$ 또는 $x\ge 3$



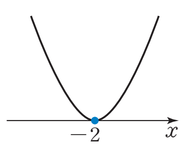
(2) 이차함수 $y=(x-4)^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $(x-4)^2>0$의 해는
$x\ne 4$인 모든 실수



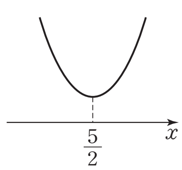
(3) 이차함수 $y=2(x+1)(x-1)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $2(x+1)(x-1)<0$의 해는
$-1<x<1$



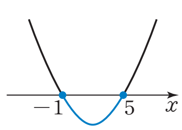
(4) 이차함수 $y=3(x+2)^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $3(x+2)^2\le 0$의 해는
$x=-2$



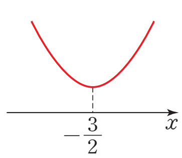
(5) 이차함수 $y=x^2-5x+7=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x^2-5x+7<0$의 해는 없다.



(6) $-x^2+4x+5\ge 0$에서 $x^2-4x-5\le 0$
이차함수 $y=x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x^2-4x-5\le 0$의 해는
$-1\le x\le 5$



(7) $-x^2-3x-5<0$에서 $x^2+3x+5>0$
이차함수 $y=x^2+3x+5=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x^2+3x+5>0$의 해는
모든 실수



2 (1) 해가 $1<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-1)(x-3)<0$ $\therefore x^2-4x+3<0$

(2) 해가 $x<2$ 또는 $x>5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-2)(x-5)>0$ $\therefore x^2-7x+10>0$

(3) 해가 $-2\le x\le 0$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$x(x+2)\le 0$ $\therefore x^2+2x\le 0$

(4) 해가 $x\le -2$ 또는 $x\ge 1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+2)(x-1)\ge 0$ $\therefore x^2+x-2\ge 0$

3 (1) 이차방정식 $x^2-2kx+4=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-k)^2-1\times 4<0$

$k^2-4<0$, $(k+2)(k-2)<0$ $\therefore -2<k<2$

(2) 이차방정식 $x^2+2x+k=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1^2-1\times k\le 0$ $\therefore k\ge 1$

(3) 이차방정식 $-x^2-6x-3k=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(-1)\times(-3k)<0$

$9-3k<0$ $\therefore k>3$

(4) 이차방정식 $-x^2+kx-9=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$D=k^2-4\times(-1)\times(-9)\le 0$

$k^2-36\le 0$, $(k+6)(k-6)\le 0$ $\therefore -6\le k\le 6$

필수 예제 01 그래프를 이용한 이차부등식의 풀이 221쪽

01-1 답 (1) $x\le -1$ 또는 $x\ge \frac{13}{4}$
(2) $x<-2$ 또는 $-\frac{1}{2}<x<2$ 또는 $x>5$

|전략| (1) 부등식 $f(x)\ge g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프와 만나거나 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같다.
(2) 부등식 $f(x)g(x)<0$의 해는 $f(x)>0$, $g(x)<0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위와 같다.

(1) $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프와 만나거나 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 $x\le -1$ 또는 $x\ge \frac{13}{4}$

(2) 주어진 부등식의 해는 $f(x)>0$, $g(x)<0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위이다.

(i) $f(x)>0$, $g(x)<0$일 때
$f(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는
$x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>5$ …… ㉠
$g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는
$x<-2$ 또는 $x>2$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $x<-2$ 또는 $x>5$

(ii) $f(x)<0$, $g(x)>0$일 때

$f(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는 $-\frac{1}{2}<x<5$ …… ㉢

$g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는 $-2<x<2$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $-\frac{1}{2}<x<2$

(i), (ii)에서 구하는 부등식의 해는

$x<-2$ 또는 $-\frac{1}{2}<x<2$ 또는 $x>5$

필수 예제 02 이차부등식의 풀이 222쪽

02-1 답 (1) $1<x<4$ (2) 해는 없다. (3) $x=\sqrt{3}$ (4) 모든 실수

|전략| 부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 후 해를 구한다.

(1) $x-x^2>4(1-x)$에서 $x^2-5x+4<0$

$(x-1)(x-4)<0$ ∴ $1<x<4$

(2) $4x-2\ge 1+4x^2$에서 $4x^2-4x+3\le 0$

$4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2\le 0$ ∴ 해는 없다.

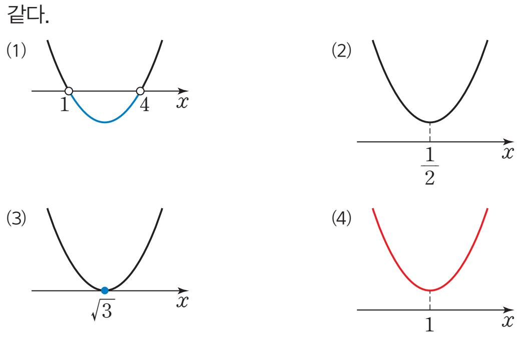
(3) $x^2+3\le 2\sqrt{3}x$에서 $x^2-2\sqrt{3}x+3\le 0$

$(x-\sqrt{3})^2\le 0$ ∴ $x=\sqrt{3}$

(4) $-x^2+2x-6<0$에서 $x^2-2x+6>0$

$(x-1)^2+5>0$ ∴ 모든 실수

참고 주어진 이차부등식을 풀기 위해 이차함수의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



02-2 답 $-5<x<5$

|전략| 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 경계로 범위를 나누어 이차부등식의 해를 구한다.

$x^2-4|x|-5<0$에서

(i) $x<0$일 때

$x^2+4x-5<0$, $(x+5)(x-1)<0$

∴ $-5<x<1$

그런데 $x<0$이므로 $-5<x<0$

(ii) $x\ge 0$일 때

$x^2-4x-5<0$, $(x+1)(x-5)<0$

∴ $-1<x<5$

그런데 $x\ge 0$이므로 $0\le x<5$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-5<x<5$

다른 풀이 $x^2-4|x|-5<0$에서 $x^2=|x|^2$이므로

$|x|^2-4|x|-5<0$, $(|x|+1)(|x|-5)<0$

이때, $|x|+1>0$이므로 $|x|-5<0$

$|x|<5$ ∴ $-5<x<5$

참고 절댓값을 포함한 부등식은 일반적으로 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 경계로 범위를 나누어 풀지만 부등식의 형태에 따라 $x^2=|x|^2$을 이용하여 풀 수도 있다.

필수 예제 03 해가 주어진 이차부등식 223쪽

03-1 답 $a=-1$, $b=6$

|전략| 주어진 해를 이용하여 x^2의 계수가 1인 이차부등식을 작성한 후 주어진 부등식과 비교한다.

해가 $x<-2$ 또는 $x>3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-3)>0$ ∴ $x^2-x-6>0$ …… ㉠

이때, ㉠과 주어진 이차부등식의 부등호의 방향이 다르므로

$a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면 $ax^2-ax-6a<0$

이 부등식이 $ax^2+x+b<0$과 일치하므로

$-a=1$, $-6a=b$ ∴ $a=-1$, $b=6$

다른 풀이 이차방정식 $ax^2+x+b=0$의 두 근이 -2, 3이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+3=-\frac{1}{a}$, $(-2)\times 3=\frac{b}{a}$ ∴ $a=-1$, $b=6$

03-2 답 $x\le 1$ 또는 $x\ge 5$

|전략| 주어진 해를 이용하여 x^2의 계수가 1인 이차부등식을 작성한 후 주어진 부등식과 비교한다.

해가 $\frac{3}{2}<x<4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-4)<0$ ∴ $x^2-\frac{11}{2}x+6<0$ …… ㉠

이때, ㉠과 이차부등식 $ax^2-11x+b<0$의 부등호의 방향이 같으므로

$a>0$

㉠의 양변에 a를 곱하면 $ax^2-\frac{11}{2}ax+6a<0$

이 부등식이 $ax^2-11x+b<0$과 일치하므로

$\frac{11}{2}a=11$, $6a=b$ ∴ $a=2$, $b=12$ …… ㉡

㉡을 $ax^2-bx+10\ge 0$에 대입하면

$2x^2-12x+10\ge 0$, $2(x^2-6x+5)\ge 0$, $2(x-1)(x-5)\ge 0$

∴ $x\le 1$ 또는 $x\ge 5$

필수 예제 04 이차부등식이 항상 성립할 조건 224쪽

04-1 답 (1) $1\le a<4$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le a\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

|전략| 이차항의 계수가 0일 때와 0이 아닐 때로 나누어 푼다.

(1) (i) $a-1=0$, 즉 $a=1$일 때

$0\times x^2-2\times 0\times x+3>0$에서 $3>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $a-1\neq 0$, 즉 $a\neq 1$일 때

주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$a-1>0 \quad \therefore a>1$ …… ㉠

또, 이차방정식 $(a-1)x^2-2(a-1)x+3=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-3(a-1)<0,\ a^2-5a+4<0$

$(a-1)(a-4)<0 \quad \therefore 1<a<4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1<a<4$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값의 범위는

$1\le a<4$

참고 문제에서 이차부등식이라는 조건이 주어진 경우 이차항의 계수는 0이 아니다. 즉, 이차부등식이라는 조건이 주어지면 (ii)의 경우만 생각하면 되므로 이 문제의 답은 $1<a<4$이다.

(2) $ax^2+2ax-a\le x^2+1$에서

$(a-1)x^2+2ax-a-1\le 0$

(i) $a-1=0$, 즉 $a=1$일 때

$0\times x^2+2\times 1\times x-1-1\le 0$이므로

$2x-2\le 0 \quad \therefore x\le 1$

따라서 $a=1$이면 $x\le 1$인 범위에서만 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $a-1\neq 0$, 즉 $a\neq 1$일 때

주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$a-1<0 \quad \therefore a<1$ …… ㉠

또, 이차방정식 $(a-1)x^2+2ax-a-1=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-(a-1)(-a-1)\le 0$

$2a^2-1\le 0,\ (\sqrt{2}a+1)(\sqrt{2}a-1)\le 0$

$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2}\le a\le \frac{\sqrt{2}}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le a\le \frac{\sqrt{2}}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값의 범위는

$-\frac{\sqrt{2}}{2}\le a\le \frac{\sqrt{2}}{2}$

참고 문제에서 이차부등식이라는 조건이 주어진 경우 이차항의 계수는 0이 아니다. 즉, 이차부등식이라는 조건이 주어지면 (ii)의 경우만 생각하면 되므로 이 문제의 답은 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le a\le \frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

04-2 답 3

|전략| 이차부등식 $ax^2+bx+c\le 0\,(a<0)$이 항상 성립할 조건은 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D\le 0$임을 이용한다.

$-x^2+2(n-3)x\le 1$, 즉 $-x^2+2(n-3)x-1\le 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $-x^2+2(n-3)x-1=0$의 판별식을 D라 할 때, $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(n-3)^2-(-1)\times(-1)\le 0$

$n^2-6n+8\le 0,\ (n-2)(n-4)\le 0$

$\therefore 2\le n\le 4$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n은 2, 3, 4이므로 개수는 3이다.

다른 풀이 $-x^2+2(n-3)x\le 1$에서 $x^2-2(n-3)x+1\ge 0$

$x^2-2(n-3)x+1=\{x-(n-3)\}^2-(n-3)^2+1$

$=\{x-(n-3)\}^2-n^2+6n-8\ge 0$

이므로 이차부등식 $x^2-2(n-3)x+1\ge 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 $-n^2+6n-8\ge 0$이어야 한다. 즉,

$n^2-6n+8\le 0,\ (n-2)(n-4)\le 0$

$\therefore 2\le n\le 4$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n은 2, 3, 4이므로 개수는 3이다.

참고 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\le 0$이 항상 성립할 조건

$\Longleftrightarrow$ $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축에 접하거나 아래쪽에 있다.

$\Longleftrightarrow$ $a<0$, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D\le 0$

필수 예제 05 두 그래프의 위치 관계와 이차부등식 225쪽

05-1 답 $a=5,\ b=2$

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 부등식 $f(x)<g(x)$의 해와 같다.

이차함수 $y=-x^2+2x+a$의 그래프가 직선 $y=x+3$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는

$-x^2+2x+a<x+3$, 즉 $x^2-x+3-a>0$ …… ㉠

의 해이다.

이때, 해가 $x<-1$ 또는 $x>b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-b)>0 \quad \therefore x^2+(1-b)x-b>0$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로 $-1=1-b,\ 3-a=-b$

$\therefore a=5,\ b=2$

05-2 답 $2<a<10$

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립한다.

이차함수 $y=x^2+6x-1$의 그래프가 직선 $y=ax-5$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+6x-1>ax-5$, 즉 $x^2+(6-a)x+4>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+(6-a)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(6-a)^2-4\times 1\times 4<0$

$a^2-12a+20<0,\ (a-2)(a-10)<0$

$\therefore 2<a<10$

05-3 답 $a<-1$

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있으면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)<g(x)$가 성립한다.

이차함수 $y=-x^2+3x-3$의 그래프가 직선 $y=-x-a$보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $-x^2+3x-3<-x-a$, 즉 $-x^2+4x+a-3<0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $-x^2+4x+a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(-1)\times(a-3)<0$

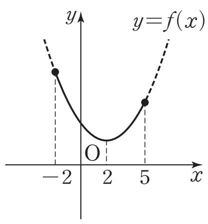
$a+1<0 \quad \therefore a<-1$

필수 예제 06 제한된 범위에서 이차부등식이 항상 성립할 조건
226쪽

06-1 답 $k<-\frac{1}{4}$

|전략| $\alpha\le x\le\beta$에서 부등식 $f(x)>0$이 항상 성립하면 $\alpha\le x\le\beta$에서의 $(f(x)$의 최솟값$)>0$

$f(x)=x^2-4x-4k+3$이라 하면
$f(x)=(x-2)^2-4k-1$
$-2\le x\le 5$에서 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

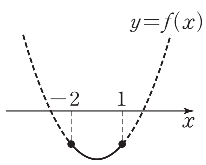


$-2\le x\le 5$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최소이므로 $f(2)>0$에서
$-4k-1>0\qquad \therefore k<-\frac{1}{4}$

06-2 답 $-1<a<2$

|전략| $f(x)$에서 x의 계수에 미지수가 있으면 주어진 범위에서 이차부등식 $f(x)<0$이 항상 성립할 때의 $y=f(x)$의 그래프를 그려본다.

$f(x)=x^2+ax+a^2-7$이라 하자.
$-2\le x\le 1$에서 $f(x)<0$이 항상 성립하려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f(-2)<0$에서 $4-2a+a^2-7<0$, $a^2-2a-3<0$
$(a+1)(a-3)<0\qquad \therefore -1<a<3$
(ii) $f(1)<0$에서 $1+a+a^2-7<0$, $a^2+a-6<0$
$(a+3)(a-2)<0\qquad \therefore -3<a<2$
(i), (ii)에서 구하는 a의 값의 범위는 $-1<a<2$

필수 예제 07 이차부등식의 활용
227쪽

07-1 답 500명 이상 1000명 이하

|전략| 주어진 조건을 이용하여 근로자의 수 x에 대한 이차부등식을 세운다.

근로자의 수 x명에 대한 수익 A만 원이 10억 원 이상이어야 하므로
$-0.2x^2+300x\ge 100000$
$x^2-1500x+500000\le 0$, $(x-500)(x-1000)\le 0$
$\therefore 500\le x\le 1000$
따라서 필요한 근로자는 500명 이상 1000명 이하이다.

07-2 답 10 m 이상 60 m 이하

|전략| 꽃밭의 가로의 길이를 x m라 하고 주어진 조건을 이용하여 x에 대한 이차부등식을 세운다.

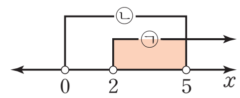
꽃밭의 가로의 길이를 x m라 하면 세로의 길이는 $(70-x)$ m이다.
이때, 꽃밭의 넓이가 600 m^2 이상이어야 하므로
$x(70-x)\ge 600$, $-x^2+70x-600\ge 0$
$x^2-70x+600\le 0$, $(x-10)(x-60)\le 0$
$\therefore 10\le x\le 60$
따라서 꽃밭의 가로의 길이의 범위는 10 m 이상 60 m 이하이다.

2 연립이차부등식

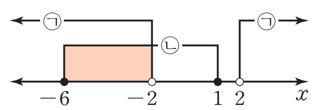
개념 확인
228~230쪽

1 (1) $2<x<5$ (2) $-6\le x<-2$ **2** $3<k\le 4$
3 $k>\frac{3}{4}$ **4** $-1<k\le 0$ **5** $k<-1$

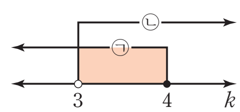
1 (1) $x+1>3$에서 $x>2$ ······ ㉠
$x(x-5)<0$에서 $0<x<5$ ······ ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$2<x<5$



(2) $x^2-4>0$에서 $(x+2)(x-2)>0$
$\therefore x<-2$ 또는 $x>2$ ······ ㉠
$x^2+5x-6\le 0$에서 $(x+6)(x-1)\le 0$
$\therefore -6\le x\le 1$ ······ ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$-6\le x<-2$

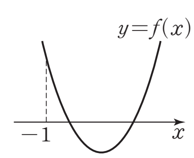


2 이차방정식 $x^2+2x+k-3=0$의 두 근을 α, β, 판별식을 D라 하면
(i) $\frac{D}{4}=1^2-(k-3)\ge 0$
$-k+4\ge 0\qquad \therefore k\le 4$ ······ ㉠
(ii) $\alpha+\beta=-2<0$
(iii) $\alpha\beta=k-3>0\qquad \therefore k>3$ ······ ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$3<k\le 4$

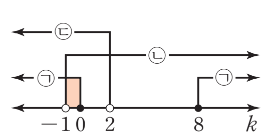


3 이차방정식 $2x^2-3x-4k+3=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha\beta=\frac{-4k+3}{2}<0$
$-4k+3<0\qquad \therefore k>\frac{3}{4}$

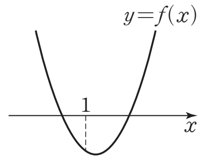
4 $f(x)=x^2+kx+2k$라 하면
$f(x)=0$의 두 근이 모두 -1보다 크므로
$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$D=k^2-8k\ge 0$
$k(k-8)\ge 0\qquad \therefore k\le 0$ 또는 $k\ge 8$ ······ ㉠
(ii) $f(-1)=1-k+2k=k+1>0\qquad \therefore k>-1$ ······ ㉡
(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{k}{2}$이므로
$-\frac{k}{2}>-1$에서 $k<2$ ······ ㉢
㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면
$-1<k\le 0$



5 $f(x)=x^2-2kx+3k$라 하면 $f(x)=0$의 두 근 사이에 1이 있으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(1)=1-2k+3k<0$

$\therefore k<-1$

개념 드릴 231쪽

1 (1) $2<x\le 4$ (2) $x\ge 2$ (3) $x\le -2$ (4) $1<x\le 3$

(5) $-1<x<\frac{4}{3}$

2 (1) $-5<x\le 0$ (2) $-\frac{1}{3}\le x<2$ (3) $-6<x<0$ 또는 $1<x<4$

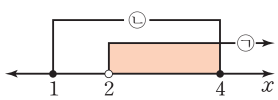
(4) $-1\le x<1$ 또는 $2<x\le 5$ (5) $-1\le x\le \frac{1}{2}$

1 (1) $x-1>1$에서 $x>2$ ...... ㉠

$(x-1)(x-4)\le 0$에서 $1\le x\le 4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2<x\le 4$



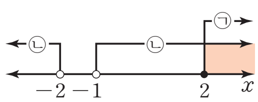
(2) $2x+1\ge 5$에서 $2x\ge 4$

$\therefore x\ge 2$ ...... ㉠

$(x+2)(x+1)>0$에서 $x<-2$ 또는 $x>-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x\ge 2$



(3) $2x-4<0$에서 $2x<4$

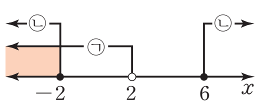
$\therefore x<2$ ...... ㉠

$x^2-4x-12\ge 0$에서 $(x+2)(x-6)\ge 0$

$\therefore x\le -2$ 또는 $x\ge 6$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x\le -2$



(4) $3x-4<4x-5$에서 $-x<-1$

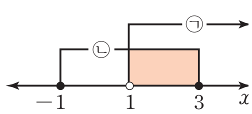
$\therefore x>1$ ...... ㉠

$x^2-2x-3\le 0$에서 $(x+1)(x-3)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 3$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1<x\le 3$



(5) $x+3>-x+1$에서 $2x>-2$

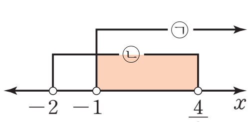
$\therefore x>-1$ ...... ㉠

$3x^2+2x-8<0$에서 $(x+2)(3x-4)<0$

$\therefore -2<x<\frac{4}{3}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1<x<\frac{4}{3}$

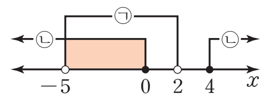


2 (1) $(x+5)(x-2)<0$에서 $-5<x<2$ ...... ㉠

$x(x-4)\ge 0$에서 $x\le 0$ 또는 $x\ge 4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5<x\le 0$



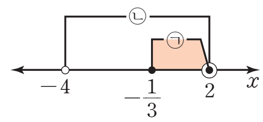
(2) $(3x+1)(x-2)\le 0$에서 $-\frac{1}{3}\le x\le 2$ ...... ㉠

$x^2+2x-8<0$에서 $(x+4)(x-2)<0$

$\therefore -4<x<2$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-\frac{1}{3}\le x<2$



(3) $x^2-x>0$에서 $x(x-1)>0$

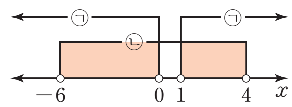
$\therefore x<0$ 또는 $x>1$ ...... ㉠

$x^2+2x-24<0$에서 $(x+6)(x-4)<0$

$\therefore -6<x<4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-6<x<0$ 또는 $1<x<4$



(4) $x^2-4x-5\le 0$에서 $(x+1)(x-5)\le 0$

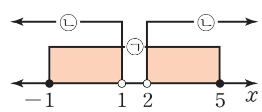
$\therefore -1\le x\le 5$ ...... ㉠

$-x^2+3x-2<0$, 즉 $x^2-3x+2>0$에서

$(x-1)(x-2)>0$ $\therefore x<1$ 또는 $x>2$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1\le x<1$ 또는 $2<x\le 5$



(5) $2x^2-5x+2\ge 0$에서 $(2x-1)(x-2)\ge 0$

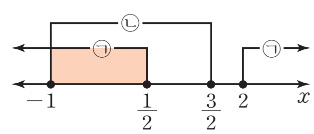
$\therefore x\le \frac{1}{2}$ 또는 $x\ge 2$ ...... ㉠

$2x^2-x-3\le 0$에서 $(x+1)(2x-3)\le 0$

$\therefore -1\le x\le \frac{3}{2}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1\le x\le \frac{1}{2}$



필수 예제 01 연립이차부등식의 풀이 232쪽

01-1 답 (1) $-3<x<0$ 또는 $1<x<2$ (2) $2\le x<8$

|전략| 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.

(1) $x^2<6-x$에서 $x^2+x-6<0$

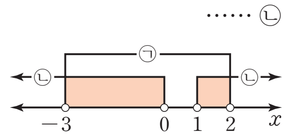
$(x+3)(x-2)<0$ $\therefore -3<x<2$ ...... ㉠

$x^2-x>0$에서 $x(x-1)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>1$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3<x<0$ 또는 $1<x<2$



(2) $-x^2+1\le 3x-9$에서 $x^2+3x-10\ge 0$

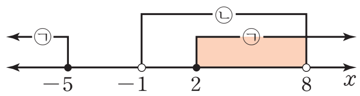
$(x+5)(x-2)\ge 0$ $\quad\therefore x\le -5$ 또는 $x\ge 2$ …… ㉠

$x^2-6<7x+2$에서 $x^2-7x-8<0$

$(x+1)(x-8)<0$ $\quad\therefore -1<x<8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2\le x<8$



01-2 답 (1) $-1<x\le 4$ (2) $-1\le x<3$

|전략| 절댓값 기호를 포함한 부등식은 절댓값의 성질을 이용하여 x의 값의 범위에 따라 절댓값 기호를 포함하지 않는 식으로 고쳐서 푼다.

(1) $|x-1|\le 3$에서 $-3\le x-1\le 3$

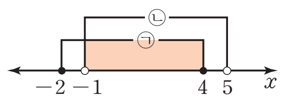
$\therefore -2\le x\le 4$ …… ㉠

$-x^2+4x+5>0$에서 $x^2-4x-5<0$

$(x+1)(x-5)<0$ $\quad\therefore -1<x<5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1<x\le 4$



(2) $|x+1|+|x-2|<5$에서

(i) $x<-1$일 때

$-(x+1)-(x-2)<5$에서 $x>-2$

그런데 $x<-1$이므로 $-2<x<-1$

(ii) $-1\le x<2$일 때

$(x+1)-(x-2)<5$에서 $0\times x+3<5$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $-1\le x<2$이므로 $-1\le x<2$

(iii) $x\ge 2$일 때

$(x+1)+(x-2)<5$에서 $x<3$

그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x<3$

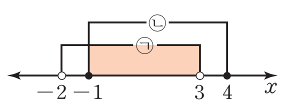
(i), (ii), (iii)에서 $-2<x<3$ …… ㉠

$x^2-3x-4\le 0$에서 $(x+1)(x-4)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1\le x<3$



필수 예제 02 해가 주어진 연립이차부등식 233쪽

02-1 답 $k\le -1$

|전략| 주어진 조건을 만족시키도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타낸다.

$\begin{cases} x^2-2x-8<0 \\ x^2-(2k-1)x-2k\ge 0 \end{cases}$

$x^2-2x-8<0$에서 $(x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$ …… ㉠

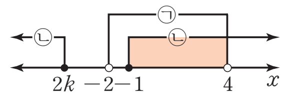
$x^2-(2k-1)x-2k\ge 0$에서 $(x+1)(x-2k)\ge 0$

(i) $2k<-1$일 때, $x\le 2k$ 또는 $x\ge -1$

(ii) $2k=-1$일 때, $(x+1)^2\ge 0$이므로 해는 모든 실수 …… ㉡

(iii) $2k>-1$일 때, $x\le -1$ 또는 $x\ge 2k$

연립부등식의 해가 $-1\le x<4$가 되도록 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 ㉡에서



$x\le 2k$ 또는 $x\ge -1$

따라서 해가 $-1\le x<4$가 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$2k\le -2$ $\quad\therefore k\le -1$

02-2 답 $1\le k<2$

|전략| 주어진 조건을 만족시키도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타낸다.

$\begin{cases} x^2-8x+15>0 \\ x^2-(k+4)x+4k<0 \end{cases}$

$x^2-8x+15>0$에서 $(x-3)(x-5)>0$

$\therefore x<3$ 또는 $x>5$ …… ㉠

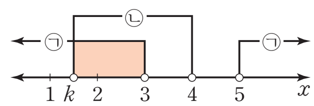
$x^2-(k+4)x+4k<0$에서 $(x-k)(x-4)<0$

(i) $k<4$일 때, $k<x<4$

(ii) $k=4$일 때, $(x-4)^2<0$이므로 해는 없다. …… ㉡

(iii) $k>4$일 때, $4<x<k$

연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값이 2뿐이도록 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 ㉡에서 $k<x<4$



따라서 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값이 2뿐일 때, 실수 k의 값의 범위는 $1\le k<2$

참고 $k=1$일 때, 연립부등식의 해는 $1<x<3$이므로 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 2뿐이다.
$k=2$일 때, 연립부등식의 해는 $2<x<3$이므로 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 없다.

필수 예제 03 연립이차부등식의 활용 234쪽

03-1 답 4 이상 5 이하

|전략| 직사각형의 가로의 길이를 x라 하고 주어진 조건을 이용하여 x에 대한 연립이차부등식을 세운다.

로고가 들어갈 직사각형의 가로의 길이를 x라 하면 세로의 길이는 $x-3$이다. 이때, 직사각형의 넓이는 4 이상 10 이하이므로

$\begin{cases} x(x-3)\ge 4 \\ x(x-3)\le 10 \end{cases}$

$x(x-3)\ge 4$에서 $x^2-3x-4\ge 0$

$(x+1)(x-4)\ge 0$ $\quad\therefore x\le -1$ 또는 $x\ge 4$

그런데 $x-3>0$, 즉 $x>3$이므로

$x\ge 4$ …… ㉠

$x(x-3)\le 10$에서 $x^2-3x-10\le 0$

$(x+2)(x-5)\le 0$ $\quad\therefore -2\le x\le 5$

그런데 $x-3>0$, 즉 $x>3$이므로

$3<x\le 5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$4\le x\le 5$

따라서 로고가 들어갈 직사각형의 가로의 길이는 4 이상 5 이하이다.

03-2 답 $2<x<12$

|전략| 주어진 조건을 이용하여 x에 대한 연립이차부등식을 세운다.

$3x-1,\ x,\ 3x+1$이 변의 길이이므로 $x>\frac{1}{3}$ …… ㉠

삼각형이 되려면

$3x+1<(3x-1)+x \qquad \therefore x>2$ …… ㉡

또한, 둔각삼각형이 되려면 $(3x+1)^2>(3x-1)^2+x^2$

$9x^2+6x+1>9x^2-6x+1+x^2,\ x^2-12x<0$

$x(x-12)<0 \qquad \therefore 0<x<12$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$2<x<12$

참고 가장 긴 변의 길이가 c이고 나머지 두 변의 길이가 a, b인 삼각형이

(1) 예각삼각형일 때 ➡ $a^2+b^2>c^2$

(2) 직각삼각형일 때 ➡ $a^2+b^2=c^2$

(3) 둔각삼각형일 때 ➡ $a^2+b^2<c^2$

필수 예제 04 이차방정식의 근의 판별과 이차부등식 235쪽

04-1 답 $\sqrt{3}<a<5$

|전략| 이차방정식이 허근을 가질 때 판별식 $D<0$임을 이용한다.

두 이차방정식 $x^2+2ax+a+20=0,\ x^2-2x+a^2-2=0$이 모두 허근을 가지므로 두 이차방정식의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-(a+20)<0$에서

$a^2-a-20<0,\ (a+4)(a-5)<0$

$\therefore -4<a<5$ …… ㉠

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-(a^2-2)<0$에서

$a^2-3>0,\ (a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})>0$

$\therefore a<-\sqrt{3}$ 또는 $a>\sqrt{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-4<a<-\sqrt{3}$ 또는 $\sqrt{3}<a<5$

$\therefore \sqrt{3}<a<5\ (\because a>0)$

04-2 답 $-7<a<-3$

|전략| 이차방정식이 허근을 가질 때는 판별식 $D<0$, 서로 다른 두 실근을 가질 때는 판별식 $D>0$임을 이용한다.

이차방정식 $x^2+(a+1)x-a+2=0$이 허근을 갖고, 이차방정식 $x^2+2ax+a+12=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 이차방정식의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$D_1=(a+1)^2-4(-a+2)<0$에서

$a^2+6a-7<0,\ (a+7)(a-1)<0$

$\therefore -7<a<1$ …… ㉠

$\frac{D_2}{4}=a^2-(a+12)>0$에서

$a^2-a-12>0,\ (a+3)(a-4)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-7<a<-3$

필수 예제 05 이차방정식의 실근의 부호 236쪽

05-1 답 $k>3$

|전략| 서로 다른 두 근이 모두 양수일 조건은 (판별식)>0, (두 근의 합)>0, (두 근의 곱)>0이다.

이차방정식 $x^2-2(k-2)x+1=0$의 서로 다른 두 근을 α, β, 판별식을 D라 하면

(i) $\frac{D}{4}=\{-(k-2)\}^2-1>0$

$k^2-4k+3>0,\ (k-1)(k-3)>0$

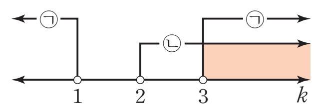
$\therefore k<1$ 또는 $k>3$ …… ㉠

(ii) $\alpha+\beta=2(k-2)>0 \qquad \therefore k>2$ …… ㉡

(iii) $\alpha\beta=1>0$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$k>3$



05-2 답 -3

|전략| 두 근이 서로 다른 부호이고 절댓값이 같으면 (두 근의 곱)<0, (두 근의 합)$=0$이다.

이차방정식 $x^2-(9-k^2)x+k^2+6k-16=0$의 두 근을 α, β라 하면

(i) 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=k^2+6k-16<0,\ (k+8)(k-2)<0$

$\therefore -8<k<2$

(ii) 두 근의 절댓값이 같으므로

$\alpha+\beta=9-k^2=0,\ (k+3)(k-3)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=3$

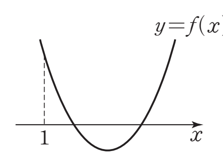
(i), (ii)에서 구하는 k의 값은 -3

필수 예제 06 이차방정식의 근의 위치 237쪽

06-1 답 (1) $k\ge 2$ (2) $k\ge 1$ (3) $k>1$

|전략| 판별식의 부호, 경곗값의 부호, 축의 위치를 조사한다.

(1) $f(x)=x^2-2(k+1)x+2k+5$라 하면 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 크므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(2k+5)\ge 0$

$k^2-4\ge 0,\ (k+2)(k-2)\ge 0$

$\therefore k\le -2$ 또는 $k\ge 2$ …… ㉠

(ii) $f(1)=1-2(k+1)+2k+5=4>0$이므로 항상 성립한다.

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k+1$이므로

$k+1>1 \qquad \therefore k>0$ …… ㉡

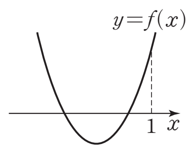
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$k\ge 2$

(2) $f(x)=x^2+2kx+2-k$라 하면

$f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 작으므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(2-k)\geq 0$

$k^2+k-2\geq 0$, $(k+2)(k-1)\geq 0$

$\therefore k\leq -2$ 또는 $k\geq 1$ …… ㉠

(ii) $f(1)=1+2k+2-k>0$에서

$k>-3$ …… ㉡

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-k$이므로

$-k<1$ $\quad\therefore k>-1$ …… ㉢

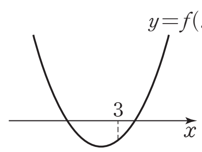
㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$k\geq 1$

(3) $f(x)=x^2-2kx+3k-6$이라 하면

$f(x)=0$의 두 근 사이에 3이 있으므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(3)=9-6k+3k-6<0$, $-3k+3<0$

$\therefore k>1$

개념 정리 238~239쪽

01 위쪽	**02** 아래쪽	**03** $x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$	
04 $\alpha<x<\beta$	**05** ㉡	**06** ㉠	**07** $a>0$
08 $D<0$	**09** 이차부등식	**10** 공통부분	**11** $D\geq 0$
12 $\alpha+\beta<0$	**13** $\alpha\beta<0$	**14** $\geq$	**15** $<$
16 $<$			

05 해가 $x<-1$ 또는 $x>4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-4)>0$ $\quad\therefore x^2-3x-4>0$

06 해가 $-1<x<4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-4)<0$ $\quad\therefore x^2-3x-4<0$

중단원 마무리 240~242쪽

01 $0\leq x\leq 6$	**02** $-\frac{1}{3}\leq x\leq 2$		**03** ③
04 ①	**05** 80	**06** ④	**07** $x>3$
08 ⑤	**09** $x<-2$ 또는 $x>3$		**10** ②
11 ④	**12** 12	**13** $3<k\leq 5$	**14** ③
15 ⑤	**16** ②	**17** ①	**18** ⑤
19 60	**20** ①	**21** 4	**22** $1<a\leq 2$
23 12	**24** $2<k<7$		

LEVEL 1

01 $f(x)-g(x)\leq 0$에서 $f(x)\leq g(x)$

부등식 $f(x)\leq g(x)$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$의 그래프와 만나거나 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$0\leq x\leq 6$

02 $a<0$이므로 $3ax^2-5ax-2a\geq 0$의 양변을 a로 나누면

$3x^2-5x-2\leq 0$에서 $(3x+1)(x-2)\leq 0$

$\therefore -\frac{1}{3}\leq x\leq 2$

03 해가 $-1<x<2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-2)<0$ $\quad\therefore x^2-x-2<0$

이 부등식이 $x^2+ax+b<0$과 일치하므로

$a=-1$, $b=-2$ …… ㉠

㉠을 $x^2+bx+3a>0$에 대입하면

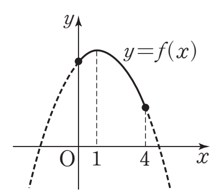
$x^2-2x-3>0$, $(x+1)(x-3)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>3$

04 $f(x)=-x^2+2x+2-k$라 하면

$f(x)=-(x-1)^2+3-k$

$0\leq x\leq 4$에서 $f(x)\geq 0$이 항상 성립하려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$0\leq x\leq 4$에서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최소이므로

$f(4)\geq 0$에서

$-16+8+2-k\geq 0$ $\quad\therefore k\leq -6$

따라서 구하는 실수 k의 최댓값은 -6이다.

05 정지거리가 80 m 이하이어야 하므로

$\frac{1}{100}x^2+\frac{1}{5}x\leq 80$, $x^2+20x-8000\leq 0$

$(x+100)(x-80)\leq 0$ $\quad\therefore -100\leq x\leq 80$

그런데 $x\geq 0$이므로 $0\leq x\leq 80$

따라서 조건을 만족시키는 자동차의 최대 속력은 시속 80 km이다.

$\therefore a=80$

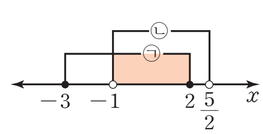
06 $x^2+x-6\leq 0$에서 $(x+3)(x-2)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 2$ …… ㉠

$2x^2-3x-5<0$에서 $(x+1)(2x-5)<0$

$\therefore -1<x<\frac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$-1<x\leq 2$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로

$a+b=1$

07 x, $x+1$, $x+2$가 변의 길이이므로 $x>0$ …… ㉠

삼각형이 되려면

$x+2<x+(x+1)$ $\quad\therefore x>1$ …… ㉡

또, 예각삼각형이 되려면 $(x+2)^2<x^2+(x+1)^2$

$x^2+4x+4<x^2+x^2+2x+1$, $x^2-2x-3>0$

$(x+1)(x-3)>0$ $\quad\therefore x<-1$ 또는 $x>3$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $x>3$

08 이차방정식 $x^2-2(k-2)x+k^2-5k+4=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=k^2-5k+4<0$, $(k-1)(k-4)<0$

$\therefore 1<k<4$

따라서 정수 k는 2, 3이므로 구하는 합은 $2+3=5$

LEVEL 2

09 주어진 부등식의 해는 $f(x)>0$, $g(x)<0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위이다.

(i) $f(x)>0$, $g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는 주어진 그래프에서 $g(x)\ge 0$이므로 존재하지 않는다.

(ii) $f(x)<0$, $g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는 $x<-2$ 또는 $x>3$

(i), (ii)에서 구하는 부등식의 해는

$x<-2$ 또는 $x>3$

10 부등식 $x^2-2x-2<|x-4|$에서

(i) $x<4$일 때, $x^2-2x-2<-(x-4)$

$x^2-x-6<0$, $(x+2)(x-3)<0$ $\quad\therefore -2<x<3$

그런데 $x<4$이므로 $-2<x<3$

(ii) $x\ge 4$일 때, $x^2-2x-2<x-4$

$x^2-3x+2<0$, $(x-1)(x-2)<0$ $\quad\therefore 1<x<2$

그런데 $x\ge 4$이므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2<x<3$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 -1, 0, 1, 2이므로 개수는 4이다.

11 주어진 이차부등식의 해가 1개뿐이므로 이차방정식 $2x^2+kx+8=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\times 2\times 8=0$

$k^2=64$ $\quad\therefore k=8$ ($\because k>0$)

다른 풀이 $2x^2+kx+8\le 0$에서 $2\left(x+\frac{k}{4}\right)^2-\frac{k^2}{8}+8\le 0$

이 이차부등식의 해가 1개뿐이므로

$-\frac{k^2}{8}+8=0$, $k^2=64$ $\quad\therefore k=8$($\because k>0$)

Lecture

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

(1) 이차부등식 $ax^2+bx+c\le 0$의 해가 오직 한 개이다.

➡ $a>0$, $D=0$

(2) 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge 0$의 해가 오직 한 개이다.

➡ $a<0$, $D=0$

12 이차함수 $y=x^2-ax+4$의 그래프가 직선 $y=x-2$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는

$x^2-ax+4>x-2$, 즉 $x^2-(a+1)x+6>0$ …… ㉠

의 해이다.

이때, 해가 $x<2$ 또는 $x>b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-2)(x-b)>0$ $\quad\therefore x^2-(b+2)x+2b>0$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$a+1=b+2$, $6=2b$ $\quad\therefore a=4$, $b=3$

$\therefore ab=12$

13 이차부등식 $(k-3)x^2-2(k-3)x+2<0$이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $(k-3)x^2-2(k-3)x+2\ge 0$이 성립해야 하므로

(i) $k-3>0$ $\quad\therefore k>3$ …… ㉠

(ii) 이차방정식 $(k-3)x^2-2(k-3)x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-3)\}^2-2(k-3)\le 0$, $k^2-8k+15\le 0$

$(k-3)(k-5)\le 0$ $\quad\therefore 3\le k\le 5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $3<k\le 5$

14 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{(2-a)x^2-2(2-a)x-3}$이 허수가 되려면 $(2-a)x^2-2(2-a)x-3<0$이어야 한다.

(i) $2-a=0$, 즉 $a=2$일 때

$0\times x^2-2\times 0\times x-3<0$에서 $-3<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $2-a\ne 0$, 즉 $a\ne 2$일 때

부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$2-a<0$ $\quad\therefore a>2$ …… ㉠

또, 이차방정식 $(2-a)x^2-2(2-a)x-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(2-a)\}^2+3(2-a)<0$, $a^2-7a+10<0$

$(a-2)(a-5)<0$ $\quad\therefore 2<a<5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2<a<5$

(i), (ii)에서 a의 값의 범위는 $2\le a<5$

따라서 정수 a는 2, 3, 4이므로 구하는 합은 $2+3+4=9$

15 $f(x)=x^2-2(k+1)x+2k-6$이라 하면

$f(x)=\{x-(k+1)\}^2-k^2-7$

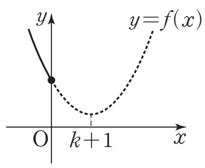
$x\le 0$에서 $f(x)>0$이어야 하므로

(i) $k+1\ge 0$, 즉 $k\ge -1$일 때

$x\le 0$에서 $f(x)$의 최솟값이 $f(0)$이므로 $f(0)>0$에서

$2k-6>0$ $\quad\therefore k>3$

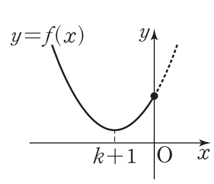
그런데 $k\ge -1$이므로 $k>3$



(ii) $k+1<0$, 즉 $k<-1$일 때

$x\le 0$에서 $f(x)$의 최솟값이 $f(k+1)$이므로 $f(k+1)>0$에서

$-k^2-7>0$, $k^2+7<0$



이때, $k^2+7<0$을 만족시키는 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $k>3$

따라서 정수 k의 최솟값은 4이다.

16 $x^2+2x-3\le 0$에서 $(x+3)(x-1)\le 0$

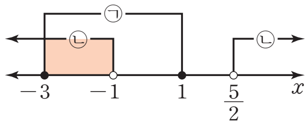
$\therefore -3\le x\le 1$ …… ㉠

$2x^2-3x-5>0$에서 $(x+1)(2x-5)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>\dfrac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\le x<-1$



따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 -3, -2이므로 구하는 곱은

$(-3)\times(-2)=6$

17 $\begin{cases} x^2-5x+4<0 \\ x^2+(a-3)x-3a>0 \end{cases}$

$x^2-5x+4<0$에서 $(x-1)(x-4)<0$

$\therefore 1<x<4$ …… ㉠

$x^2+(a-3)x-3a>0$에서 $(x+a)(x-3)>0$

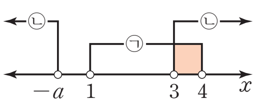
(i) $-a<3$일 때, $x<-a$ 또는 $x>3$

(ii) $-a=3$일 때, $(x-3)^2>0$이므로

해는 $x\ne 3$인 모든 실수 …… ㉡

(iii) $-a>3$일 때, $x<3$ 또는 $x>-a$

연립부등식의 해가 $3<x<4$가 되도록 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



㉡에서 $x<-a$ 또는 $x>3$

즉, 해가 $3<x<4$가 되도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$-a\le 1$이므로 $a\ge -1$

따라서 실수 a의 최솟값은 -1이다.

18 두 이차방정식 $x^2+2ax-a+12=0$, $x^2-ax+a=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=a^2-(-a+12)<0$에서 $a^2+a-12<0$

$(a+4)(a-3)<0 \qquad \therefore -4<a<3$ …… ㉠

$D_2=(-a)^2-4a<0$에서

$a^2-4a<0$, $a(a-4)<0 \qquad \therefore 0<a<4$ …… ㉡

두 이차방정식 중 적어도 하나가 허근을 가져야 하므로 ㉠, ㉡의 합친 부분을 구하면 $-4<a<4$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3이므로 개수는 7이다.

19 이차방정식 $x^2-(k^2-4k-12)x-2k+5=0$의 두 근을 α, β라 하면

(i) 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=-2k+5<0 \qquad \therefore k>\dfrac{5}{2}$

(ii) 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크므로

$\alpha+\beta=k^2-4k-12<0$

$(k+2)(k-6)<0 \qquad \therefore -2<k<6$

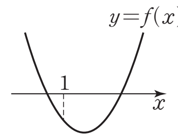
(i), (ii)에서 $\dfrac{5}{2}<k<6$

따라서 정수 k는 3, 4, 5이므로 구하는 곱은 $3\times 4\times 5=60$

20 $f(x)=x^2+a^2x+a-7$이라 하면

$f(x)=0$의 두 근 사이에 1이 있으므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(1)<0$이어야 하므로

$f(1)=1+a^2+a-7<0$, $a^2+a-6<0$

$(a+3)(a-2)<0 \qquad \therefore -3<a<2$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 -2이다.

서술형

21 (i) $a-3=0$, 즉 $a=3$일 때, $0\times x^2+0\times x-1<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다. … ❶

(ii) $a-3\ne 0$, 즉 $a\ne 3$일 때, 주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$a-3<0 \qquad \therefore a<3$ …… ㉠

또, 이차방정식 $(a-3)x^2+(a-3)x-1=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$D=(a-3)^2+4(a-3)<0$, $a^2-2a-3<0$

$(a+1)(a-3)<0 \qquad \therefore -1<a<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-1<a<3$ … ❷

(i), (ii)에서 $-1<a\le 3$이므로 구하는 정수 a는 0, 1, 2, 3이므로 개수는 4이다. … ❸

채점 기준	비율
❶ $a=3$일 때 조건을 만족시키는지 확인할 수 있다.	30 %
❷ $a\ne 3$일 때 조건을 만족시키는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

22 $\begin{cases} x^2-4x-5\le 0 \\ (x-6)(x-a)\le 0 \end{cases}$

$x^2-4x-5\le 0$에서 $(x+1)(x-5)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 5$ …… ㉠ … ❶

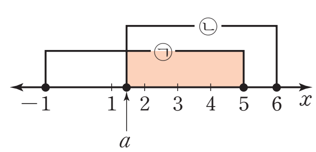
$(x-6)(x-a)\le 0$에서

(i) $a>6$일 때, $6\le x\le a$

(ii) $a=6$일 때, $(x-6)^2\le 0$에서 $x=6$ …… ㉡ … ❷

(iii) $a<6$일 때, $a\le x\le 6$

연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 4가 되도록 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



㉡에서 $a\le x\le 6$

따라서 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 4가 되도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $1<a\le 2$ … ❸

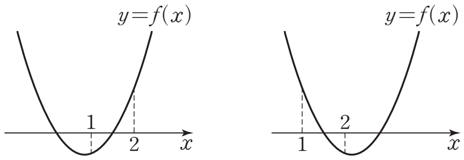
채점 기준	비율
❶ 이차부등식 $x^2-4x-5\leq0$의 해를 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 나누어 이차부등식 $(x-6)(x-a)\leq0$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %

참고 (1) $a=1$일 때, ㉡에서 $1\leq x\leq6$
즉, ㉠, ㉡의 공통부분은 $1\leq x\leq5$
따라서 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 5이다.
(2) $a=2$일 때, ㉡에서 $2\leq x\leq6$
즉, ㉠, ㉡의 공통부분은 $2\leq x\leq5$
따라서 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 4이다.

23 $\overline{QC}=a$이므로 $0<a<12$
이때, $\triangle APR$는 직각이등변삼각형이므로
$\overline{AR}=\overline{PR}=a$, $\overline{RC}=12-a$
직사각형 PQCR의 넓이는 $a(12-a)$ … ❶
이때, 직사각형 PQCR의 넓이가 32 이상 36 이하이므로
$\begin{cases} a(12-a)\geq32 \\ a(12-a)\leq36 \end{cases}$ … ❷
$a(12-a)\geq32$에서 $a^2-12a+32\leq0$
$(a-4)(a-8)\leq0$ $\quad\therefore 4\leq a\leq8$ …… ㉠
$a(12-a)\leq36$에서 $a^2-12a+36\geq0$
이때, $(a-6)^2\geq0$이므로 이 부등식은 모든 실수 a에 대하여 성립한다. …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $4\leq a\leq8$ … ❸
따라서 a의 최댓값과 최솟값의 합은
$8+4=12$ … ❹

채점 기준	비율
❶ 직사각형 PQCR의 넓이를 a에 대한 식으로 표현할 수 있다.	20 %
❷ 주어진 조건을 이용하여 연립이차부등식을 세울 수 있다.	20 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❹ a의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	20 %

24 $x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ … ❶
즉, 이차방정식 $x^2+kx-8=0$의 한 근만이 1과 2 사이에 있어야 하므로 $f(x)=x^2+kx-8$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $f(1)f(2)<0$이므로 $(k-7)(2k-4)<0$ … ❷
$(k-2)(k-7)<0$ $\quad\therefore 2<k<7$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 두 근을 구할 수 있다.	30 %
❷ k에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	40 %
❸ 실수 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %

10 경우의 수와 순열

1 경우의 수

개념 확인 244~245쪽

1 5 **2** 16 **3** 12
4 8 **5** 15

1 3의 배수는 3, 6, 9이고, 4의 배수는 4, 8이므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$3+2=5$

2 두 개의 주사위에서 나온 눈의 수를 각각 a, b라 하고, 이를 순서쌍 (a, b)로 나타내면
(ⅰ) 두 눈의 수의 차가 1인 경우는
$(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$, $(6, 5)$, $(5, 4)$, $(4, 3)$, $(3, 2)$, $(2, 1)$의 10가지
(ⅱ) 두 눈의 수의 차가 3인 경우는
$(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 1)$, $(5, 2)$, $(6, 3)$의 6가지
(ⅰ), (ⅱ)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$10+6=16$

3 햄버거가 4종류이고, 그 각각에 대하여 선택하는 음료수가 3종류이므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$4\times3=12$

4 상의가 4가지이고, 그 각각에 대하여 입는 하의가 2가지이므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$4\times2=8$

5 수학 문제집은 5권이고, 그 각각에 대하여 고르는 영어 문제집이 3권이므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$5\times3=15$

개념 드릴 246쪽

1 (1) 9 (2) 6 (3) 9 (4) 9 (5) 4
2 (1) 56 (2) 12 (3) 9 (4) 15 (5) 120

1 (1) 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$3+4+2=9$

(2) (i) 카드에 적힌 수가 소수인 경우는

2, 3, 5, 7의 4가지

(ii) 카드에 적힌 수가 4의 배수인 경우는

4, 8의 2가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$4+2=6$

(3) 두 개의 주사위에서 나온 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 두 눈의 수의 합이 7인 경우는

(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)의 6가지

(ii) 두 눈의 수의 합이 10인 경우는

(4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$6+3=9$

(4) (i) 공에 적힌 수가 6의 배수인 경우는

6, 12, 18, 24, 30의 5가지

(ii) 공에 적힌 수가 7의 배수인 경우는

7, 14, 21, 28의 4가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$5+4=9$

(5) 세 개의 주사위에서 나온 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 세 눈의 수의 합이 4인 경우는

(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)의 3가지

(ii) 세 눈의 수의 합이 3인 경우는

(1, 1, 1)의 1가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$3+1=4$

2 (1) 중학생 한 명을 뽑는 방법은 8가지이고, 그 각각에 대하여 고등학생 한 명을 뽑는 방법은 7가지이므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$8\times7=56$

(2) 자음이 3가지이고, 그 각각에 대하여 짝 지을 수 있는 모음이 4가지이므로 만들 수 있는 글자의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times4=12$

(3) 나온 눈의 수의 곱이 홀수이려면 (홀수)×(홀수)이어야 하고 홀수는 1, 3, 5이므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times3=9$

(4) 십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 3, 6, 9이고, 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7, 9이므로 구하는 자연수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times5=15$

(5) 커피를 고르는 방법은 6가지, 생과일주스를 고르는 방법은 4가지, 조각 케이크를 고르는 방법은 5가지이므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$6\times4\times5=120$

필수 예제 01 합의 법칙 247쪽

01-1 답 13

|전략| 동시에 일어나지 않는 두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n일 때, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

공에 적힌 수의 차가 1 이하인 경우는 1, 0일 때이다. 두 개의 주머니에서 꺼낸 공에 적힌 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 공에 적힌 수의 차가 1인 경우는

(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)의 8가지

(ii) 공에 적힌 수의 차가 0인 경우는

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)의 5가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$8+5=13$

01-2 답 47

|전략| 두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이고, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수가 l일 때, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n-l$이다.

카드에 적힌 수가 3의 배수인 경우는

3, 6, 9, ⋯, 99의 33가지

카드에 적힌 수가 5의 배수인 경우는

5, 10, 15, ⋯, 100의 20가지

카드에 적힌 수가 3과 5의 최소공배수인 15의 배수인 경우는

15, 30, 45, 60, 75, 90의 6가지

따라서 구하는 경우의 수는

$33+20-6=47$

필수 예제 02 방정식, 부등식을 만족시키는 순서쌍의 개수 248쪽

02-1 답 (1) 9 (2) 16

|전략| 계수의 절댓값이 가장 큰 문자부터 값을 정한다.

(1) x, y, z가 음이 아닌 정수이므로 $x\geq0$, $y\geq0$, $z\geq0$

주어진 방정식에서 z의 계수의 절댓값이 가장 크므로 z가 될 수 있는 음이 아닌 정수를 구하면

$4z\leq9$에서 $z=0$ 또는 $z=1$ 또는 $z=2$

(i) $z=0$일 때, $x+2y=9$이므로 순서쌍 (x, y)는

(9, 0), (7, 1), (5, 2), (3, 3), (1, 4)의 5개

(ii) $z=1$일 때, $x+2y=5$이므로 순서쌍 (x, y)는

(5, 0), (3, 1), (1, 2)의 3개

(iii) $z=2$일 때, $x+2y=1$이므로 순서쌍 (x, y)는

(1, 0)의 1개

따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$5+3+1=9$

참고 주어진 방정식은 방정식의 개수가 미지수의 개수보다 적어서 그 해가 무수히 많아 해를 정할 수 없는 부정방정식이다. 부정방정식은 정수 조건, 실수 조건 등을 이용하여 푼다.

(2) x, y가 자연수이므로 $x \geq 1$, $y \geq 1$
주어진 부등식에서 x의 계수의 절댓값이 더 크므로 x가 될 수 있는 자연수를 구하면
$2x < 10$에서 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$
(i) $x=1$일 때, $y<8$이므로 y는
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개
(ii) $x=2$일 때, $y<6$이므로 y는
1, 2, 3, 4, 5의 5개
(iii) $x=3$일 때, $y<4$이므로 y는
1, 2, 3의 3개
(iv) $x=4$일 때, $y<2$이므로 y는
1의 1개
따라서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는
$7+5+3+1=16$

02-2 답 9

|전략| 100원짜리, 500원짜리, 1000원짜리 학용품을 각각 x개, y개, z개 산다고 하고 방정식을 세운다.

100원짜리, 500원짜리, 1000원짜리 학용품을 각각 x개, y개, z개 산다고 할 때, 그 금액의 합이 4000원이므로
$100x+500y+1000z=4000$
$\therefore x+5y+10z=40$ ······ ㉠
이때, 3종류의 학용품을 적어도 하나씩 사야 하므로 x, y, z는 $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$인 자연수이다.
따라서 구하는 방법의 수는 방정식 ㉠을 만족시키는 세 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수와 같다.
㉠에서 z의 계수의 절댓값이 가장 크므로 z가 될 수 있는 자연수를 구하면
$10z<40$에서 $z=1$ 또는 $z=2$ 또는 $z=3$
(i) $z=1$일 때, $x+5y=30$이므로 순서쌍 (x, y)는
(25, 1), (20, 2), (15, 3), (10, 4), (5, 5)의 5개
(ii) $z=2$일 때, $x+5y=20$이므로 순서쌍 (x, y)는
(15, 1), (10, 2), (5, 3)의 3개
(iii) $z=3$일 때, $x+5y=10$이므로 순서쌍 (x, y)는
(5, 1)의 1개
따라서 구하는 방법의 수는
$5+3+1=9$

필수 예제 03 곱의 법칙 249쪽

03-1 답 (1) 24 (2) 12

|전략| 곱의 법칙을 이용하여 서로 다른 항의 개수를 구한다.

(1) $(a+b)(p+q+r+s)(x+y+z)$에서
a, b 중 어느 하나를 택하면 그 각각에 대하여 p, q, r, s의 4가지 중 하나를 선택할 수 있고, 또 그 각각에 대하여 x, y, z의 3가지 중 하나를 선택할 수 있으므로 구하는 항의 개수는
$2 \times 4 \times 3=24$

(2) $(a+b)^2(x+y)^3=(a^2+2ab+b^2)(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)$에서
a^2, $2ab$, b^2 중 어느 하나를 택하면 그 각각에 대하여 x^3, $3x^2y$, $3xy^2$, y^3의 4가지 중 하나를 선택할 수 있으므로 구하는 항의 개수는
$3 \times 4=12$

Lecture
(2)에서 주어진 식을 $(a+b)(a+b)(x+y)(x+y)(x+y)$로 변형하면 각 항이 모두 다른 문자가 아니므로 곱의 법칙을 바로 적용할 수 없다. 하지만 주어진 식을 $(a^2+2ab+b^2)(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)$으로 변형하면 각 항이 모두 다른 문자이므로 바로 곱의 법칙을 적용하여 서로 다른 항의 개수를 구할 수 있다.

03-2 답 3

|전략| 자연수 $N=a^p b^q c^r$ (a, b, c는 서로 다른 소수, p, q, r는 자연수)의 양의 약수의 개수는 $(p+1)(q+1)(r+1)$이다.

$2^4 \times 3^x \times 5^2$의 양의 약수의 개수는
$(4+1)(x+1)(2+1)$
즉, $15(x+1)=60$에서
$x+1=4 \qquad \therefore x=3$

필수 예제 04 지불 방법의 수와 지불 금액의 수 250쪽

04-1 답 (1) 99 (2) 59

|전략| 1000원짜리 지폐 p장, 500원짜리 동전 q개, 100원짜리 동전 r개가 있을 때 (단, 0원을 지불하는 경우는 제외)
(1) 지불 방법의 수 : $(p+1)(q+1)(r+1)-1$
(2) 지불 금액의 수 : 금액이 중복되는 경우 큰 단위의 화폐를 작은 단위의 화폐로 바꿔서 지불하는 방법과 같이 계산한다.

(1) 1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은
0장, 1장, 2장, 3장, 4장의 5가지
500원짜리 동전을 지불하는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
100원짜리 동전을 지불하는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지
이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로
$5 \times 4 \times 5-1=99$

(2) 500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 1000원짜리 지폐 4장을 500원짜리 동전 8개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 11개, 100원짜리 동전 4개로 지불하는 방법의 수와 같다.
500원짜리 동전을 지불하는 방법은
0개, 1개, 2개, ···, 11개의 12가지
100원짜리 동전을 지불하는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지
이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로
$12 \times 5-1=59$

04-2 답 $a=35$, $b=27$

|전략| 100원짜리 동전 2개를 50원짜리 동전 4개로 바꾸어 지불할 수 있는 금액의 수를 생각해 본다.

(ⅰ) 지불 방법의 수

100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

50원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

10원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$a=3\times3\times4-1=35$

(ⅱ) 지불 금액의 수

100원짜리 동전 2개로 지불하는 금액과 50원짜리 동전 4개로 지불하는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 2개를 50원짜리 동전 4개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜리 동전 6개, 10원짜리 동전 3개로 지불하는 방법의 수와 같다.

50원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, …, 6개의 7가지

10원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$b=7\times4-1=27$

필수 예제 05 도로망에서의 방법의 수 251쪽

05-1 답 26

|전략| B도시를 먼저 지나고 C도시를 지날 때와 C도시를 먼저 지나고 B도시를 지날 때로 나누어 생각한다.

(ⅰ) A → B → C → D로 가는 방법의 수는

$2\times2\times2=8$

(ⅱ) A → C → B → D로 가는 방법의 수는

$3\times2\times3=18$

(ⅰ), (ⅱ)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 방법의 수는

$8+18=26$

05-2 답 100

|전략| C지점 또는 D지점만 지나서 A지점으로 돌아올 때와 C지점과 D지점을 모두 한 번씩 지나 A지점으로 돌아올 때로 나누어 생각한다.

(ⅰ) A → C → B → C → A로 가는 방법의 수는

$2\times2\times2\times2=16$

(ⅱ) A → D → B → D → A로 가는 방법의 수는

$3\times2\times2\times3=36$

(ⅲ) A → C → B → D → A로 가는 방법의 수는

$2\times2\times2\times3=24$

(ⅳ) A → D → B → C → A로 가는 방법의 수는

$3\times2\times2\times2=24$

(ⅰ)~(ⅳ)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 방법의 수는

$16+36+24+24=100$

다른 풀이 (ⅰ) A → C → B로 가는 방법의 수는 $2\times2=4$

(ⅱ) A → D → B로 가는 방법의 수는 $3\times2=6$

(ⅰ), (ⅱ)는 동시에 일어날 수 없으므로 A지점에서 B지점으로 가는 방법의 수는 $4+6=10$이다.

마찬가지로 B지점에서 A지점으로 가는 방법의 수도 10이므로 구하는 방법의 수는

$10\times10=100$

필수 예제 06 도형에서 색칠하는 방법의 수 252쪽

06-1 답 48

|전략| 이웃하는 영역이 가장 많은 B부터 칠한다.

B에 칠할 수 있는 색 ➡ 4가지

C에 칠할 수 있는 색 ➡ $4-1=3$(가지)
└→ B에 칠한 색 제외

A에 칠할 수 있는 색 ➡ $4-2=2$(가지)
└→ B와 C에 칠한 색 제외

D에 칠할 수 있는 색 ➡ $4-2=2$(가지)
└→ B와 C에 칠한 색 제외

따라서 구하는 방법의 수는

$4\times3\times2\times2=48$

참고 B와 C가 이웃하는 영역의 수가 같으므로 C부터 색을 칠해도 된다.

06-2 답 540

|전략| 이웃하는 영역이 가장 많은 A부터 칠한다.

A에 칠할 수 있는 색 ➡ 5가지

B에 칠할 수 있는 색 ➡ $5-1=4$(가지)
└→ A에 칠한 색 제외

C에 칠할 수 있는 색 ➡ $5-2=3$(가지)
└→ A와 B에 칠한 색 제외

D에 칠할 수 있는 색 ➡ $5-2=3$(가지)
└→ A와 C에 칠한 색 제외

E에 칠할 수 있는 색 ➡ $5-2=3$(가지)
└→ A와 D에 칠한 색 제외

따라서 구하는 방법의 수는

$5\times4\times3\times3\times3=540$

필수 예제 07 수형도를 이용하는 경우의 수 253쪽

07-1 답 2

|전략| 수형도를 이용하여 경우의 수를 구한다.

$a_1\neq1$, $a_2\neq2$, $a_3\neq3$인 경우는 다음과 같다.

a_1 a_2 a_3

2 ── 3 ── 1

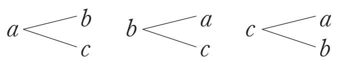
3 ── 1 ── 2

따라서 구하는 자연수의 개수는 2이다.

07-2 답 6

|전략| a, b, c를 각각 가지의 시작으로 하여 수형도를 그린다.

a, b, c를 각각 가지의 시작으로 하면 a 뒤에는 b와 c가, b 뒤에는 a와 c가, 그리고 c 뒤에는 a와 b가 각각 올 수 있다.



(i) $a-b$의 경우: 남은 것은 a, c 두 개이므로 $a-c$와 $c-a$ 둘 다 가능하다.

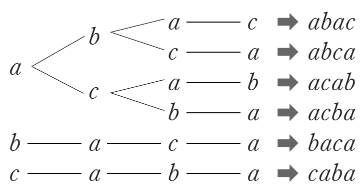
(ii) $a-c$의 경우: 남은 것은 a, b 두 개이므로 $a-b$와 $b-a$ 둘 다 가능하다.

(iii) $b-a$의 경우: 남은 것은 a, c 두 개이고 같은 문자끼리는 이웃할 수 없으므로 $c-a$만 가능하다.

(iv) $b-c$의 경우: 남은 것은 a, a이고 같은 문자끼리는 이웃할 수 없으므로 불가능하다.

(v) $c-a$의 경우: 남은 것은 a, b 두 개이고 같은 문자끼리는 이웃할 수 없으므로 $b-a$만 가능하다.

(vi) $c-b$의 경우: 남은 것은 a, a이고 같은 문자끼리는 이웃할 수 없으므로 불가능하다.



따라서 구하는 경우의 수는 6이다.

2 순열

개념 확인 254~255쪽

1 (1) 120 (2) 8 (3) 90 (4) 120
2 (1) 720 (2) 336 (3) 1 (4) 6 **3** (1) 2 (2) 5

1 (1) ${}_6P_3=6\times5\times4=120$ (2) ${}_8P_1=8$
(3) ${}_{10}P_2=10\times9=90$ (4) ${}_5P_4=5\times4\times3\times2=120$

2 (1) $6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$

(2) $\dfrac{8!}{5!}=\dfrac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1}$
$=8\times7\times6=336$

(3) ${}_4P_0=1$

(4) ${}_3P_3=3!=3\times2\times1=6$

3 (1) ${}_5P_3=\dfrac{5!}{(5-3)!}=\dfrac{5!}{2!}$
$\therefore \square=2$

(2) ${}_7P_{\square}=\dfrac{7!}{(7-\square)!}=\dfrac{7!}{2!}$이므로
$7-\square=2$ $\therefore \square=5$

개념 드릴 256쪽

1 (1) ${}_5P_2$ (2) ${}_9P_5$ (3) ${}_{30}P_{30}$ (4) ${}_{25}P_4$ (5) ${}_7P_3$
2 (1) 5040 (2) 120 (3) 1680 (4) 420
3 (1) $n=6$ (2) $n=5$ (3) $r=4$ (4) $r=3$

1 (1) 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_5P_2$
(2) 서로 다른 9개에서 5개를 택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_9P_5$
(3) 서로 다른 30개에서 30개를 택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_{30}P_{30}$
(4) 서로 다른 25개에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_{25}P_4$
(5) 서로 다른 7개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_7P_3$

2 (1) $7!=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$
(2) $\dfrac{6!}{3!}=\dfrac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1}=120$
(3) ${}_8P_4=8\times7\times6\times5=1680$
(4) ${}_7P_3\times2!=(7\times6\times5)\times(2\times1)=420$

3 (1) ${}_nP_2=n(n-1)=30=6\times5$이므로 $n=6$
(2) ${}_nP_3=n(n-1)(n-2)=60=5\times4\times3$이므로 $n=5$
(3) ${}_6P_r=360=6\times5\times4\times3$이므로 $r=4$
(4) ${}_{11}P_r=990=11\times10\times9$이므로 $r=3$

필수 예제 01 ${}_nP_r$의 계산 257쪽

01-1 답 (1) 11 (2) 12 (3) 7 (4) 9

|전략| ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$임을 이용한다.

(1) ${}_nP_2=10n$에서
$n(n-1)=10n$
$n\ge2$이므로 양변을 n으로 나누면
$n-1=10$ $\therefore n=11$

(2) $3{}_nP_3=4{}_{n-1}P_3$에서
$3n(n-1)(n-2)=4(n-1)(n-2)(n-3)$
$n\ge4$이므로 양변을 $(n-1)(n-2)$로 나누면
$3n=4(n-3)$, $3n=4n-12$
$\therefore n=12$

(3) ${}_nP_4=20{}_nP_2$에서
$n(n-1)(n-2)(n-3)=20n(n-1)$
$n\ge4$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면
$(n-2)(n-3)=20$, $n^2-5n-14=0$
$(n+2)(n-7)=0$
$\therefore n=7$ ($\because n\ge4$)

(4) ${}_{n+1}P_2+{}_nP_2=162$에서
$(n+1)n+n(n-1)=162$
$2n^2-162=0$, $n^2-81=0$
$(n+9)(n-9)=0$
$\therefore n=9$ ($\because n\ge2$)

01-2 답 8

|전략| $a:b=c:d$이면 $ad=bc$이다.

${}_n\mathrm{P}_3 : {}_{n-1}\mathrm{P}_2=8:1$에서 ${}_n\mathrm{P}_3=8{}_{n-1}\mathrm{P}_2$

$n(n-1)(n-2)=8(n-1)(n-2)$

$n\geq3$이므로 양변을 $(n-1)(n-2)$로 나누면

$n=8$

필수 예제 02 순열을 이용한 경우의 수 258쪽

02-1 답 (1) 24 (2) 56 (3) 1320

|전략| 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_n\mathrm{P}_r$이다.

(1) 4명을 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

$4!=4\times3\times2\times1=24$

(2) 8개의 역 중에서 2개를 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

${}_8\mathrm{P}_2=8\times7=56$

(3) 12개의 아이스크림 중에서 3개를 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

${}_{12}\mathrm{P}_3=12\times11\times10=1320$

02-2 답 (1) 9 (2) 7

|전략| 순열의 수를 이용하여 식을 세우고 주어진 경우의 수를 연속하는 자연수의 곱으로 나타내본다.

(1) 서로 다른 n종류의 체험 프로그램 중에서 2종류를 선택하여 체험 순서를 정하는 경우의 수는 서로 다른 n개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_n\mathrm{P}_2=72$, $n(n-1)=9\times8$

$\therefore n=9$

(2) 서로 다른 n권의 책 중에서 3권을 뽑아 책꽂이에 일렬로 꽂는 경우의 수는 서로 다른 n개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_n\mathrm{P}_3=210$, $n(n-1)(n-2)=7\times6\times5$

$\therefore n=7$

필수 예제 03 이웃하거나 이웃하지 않는 순열의 수 259쪽

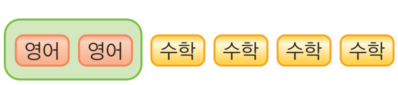
03-1 답 (1) 240 (2) 480

|전략| (1) 이웃하는 것을 하나로 묶어서 생각한다. 이때, 묶음 안의 순서도 고려한다.

(2) 이웃해도 되는 것을 먼저 나열하고, 그 사이사이와 양 끝에 이웃하지 않아야 하는 것을 나열하는 경우의 수를 구한다.

(1) 영어책 2권을 한 권으로 생각하여 5권을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$



그 각각에 대하여 영어책끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2\times1=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times2=240$

(2) 수학책 4권을 책꽂이에 꽂는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

수학책 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중에서 2개의 자리에 영어책을 꽂는 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_2=5\times4=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times20=480$

다른 풀이 영어책 2권이 서로 이웃하지 않게 꽂는 경우의 수는 수학책 4권과 영어책 2권을 꽂는 전체 경우의 수에서 영어책 2권이 서로 이웃하도록 꽂는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

$6!-240=720-240=480$

03-2 답 144

|전략| 어른 3명이 일렬로 서고, 그 사이사이와 양 끝에 어린이 4명을 세우면 된다.

어른 3명이 일렬로 서는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

어른 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 어린이 4명을 세우는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times24=144$

참고 두 집단의 구성원이 교대로 서는 순열의 수

(1) 두 집단의 구성원 수가 각각 n일 때 ➡ $2\times n!\times n!$

(2) 두 집단의 구성원 수가 각각 n, $n-1$일 때 ➡ $n!\times(n-1)!$

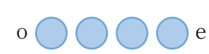
필수 예제 04 자리가 정해진 순열의 수 260쪽

04-1 답 (1) 24 (2) 144

|전략| (1) o와 e를 먼저 나열한다.

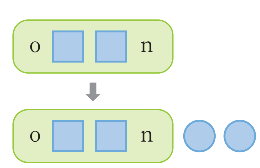
(2) o와 n 사이에 2개의 문자를 나열한 후 이를 한 묶음으로 생각한다.

(1) o로 시작하여 e로 끝나는 경우는 o와 e를 제외한 나머지 4개의 문자를 o와 e 사이에 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 구하는 경우의 수는



$4!=4\times3\times2\times1=24$

(2) o와 n을 제외한 나머지 4개의 문자 중에서 2개를 택하여 o와 n 사이에 일렬로 나열하는 경우의 수는



${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$

o□□n을 한 문자로 생각하고, 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

이때, o와 n이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2\times1=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times6\times2=144$

04-2 답 288

|전략| 양 끝에 자음을 먼저 나열한 후 그 사이에 나머지 문자를 나열한다.

자음 g, r, n, d 중에서 2개를 택하여 양 끝에 나열하는 경우의 수는
$_4P_2=4\times3=12$
양 끝의 자음을 제외한 나머지 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$4!=4\times3\times2\times1=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$12\times24=288$

필수 예제 05 '적어도'의 조건이 있는 순열의 수 261쪽

05-1 답 84

|전략| 5개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수에서 양 끝에 모두 홀수가 오는 경우의 수를 뺀다.

5개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$
양 끝에 홀수 1, 3, 5 중에서 2개를 택하여 나열하는 경우의 수는
$_3P_2=3\times2=6$
양 끝의 홀수를 제외한 나머지 숫자 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$3!=3\times2\times1=6$
즉, 양 끝에 모두 홀수가 오는 경우의 수는
$6\times6=36$
따라서 구하는 경우의 수는
$120-36=84$

다른 풀이 (i) 왼쪽 끝에 짝수, 오른쪽 끝에 홀수가 오는 경우의 수는
$2\times3\times3!=2\times3\times6=36$
(ii) 왼쪽 끝에 홀수, 오른쪽 끝에 짝수가 오는 경우의 수는
$3\times2\times3!=3\times2\times6=36$
(iii) 양 끝에 모두 짝수가 오는 경우의 수는
$_2P_2\times3!=2\times6=12$
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $36+36+12=84$

05-2 답 432

|전략| 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수에서 양 끝에 모두 자음이 오는 경우의 수를 뺀다.

6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$
양 끝에 자음 x, p, r, t 중에서 2개를 택하여 나열하는 경우의 수는
$_4P_2=4\times3=12$
양 끝의 자음을 제외한 나머지 문자 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$4!=4\times3\times2\times1=24$
즉, 양 끝에 모두 자음이 오는 경우의 수는
$12\times24=288$
따라서 구하는 경우의 수는
$720-288=432$

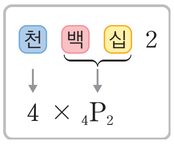
다른 풀이 (i) 왼쪽 끝에 자음, 오른쪽 끝에 모음이 오는 경우의 수는
$4\times2\times4!=4\times2\times24=192$
(ii) 왼쪽 끝에 모음, 오른쪽 끝에 자음이 오는 경우의 수는
$2\times4\times4!=2\times4\times24=192$
(iii) 양 끝에 모두 모음이 오는 경우의 수는
$_2P_2\times4!=2\times24=48$
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $192+192+48=432$

필수 예제 06 자연수의 개수 262쪽

06-1 답 (1) 156 (2) 108

|전략| (1) 일의 자리의 숫자가 0인 경우와 2 또는 4인 경우로 나누어 생각한다.
(2) 일의 자리의 숫자가 0인 경우와 5인 경우로 나누어 생각한다.

(1) 짝수는 일의 자리의 숫자가 0, 2, 4이므로 □□□0, □□□2, □□□4 꼴이다.
(i) □□□0 꼴
천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에는 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는
$_5P_3=5\times4\times3=60$
(ii) □□□2, □□□4 꼴
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중 하나이고, 그 각각에 대하여 백의 자리, 십의 자리에는 나머지 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는



$2\times4\times{}_4P_2=8\times12=96$
(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는
$60+96=156$
(2) 5의 배수는 일의 자리의 숫자가 0, 5이므로 □□□0, □□□5 꼴이다.
(i) □□□0 꼴
천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에는 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는
$_5P_3=5\times4\times3=60$
(ii) □□□5 꼴
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 5를 제외한 4개의 숫자 중 하나이고, 그 각각에 대하여 백의 자리, 십의 자리에는 나머지 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는
$4\times{}_4P_2=4\times12=48$
(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는
$60+48=108$

Lecture
배수의 판정
(1) 2의 배수 ➡ 일의 자리의 숫자가 0 또는 2의 배수인 수
(2) 3의 배수 ➡ 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수인 수
(3) 4의 배수 ➡ 끝의 두 자리의 수가 00 또는 4의 배수인 수
(4) 5의 배수 ➡ 일의 자리의 숫자가 0 또는 5인 수

필수 예제 07 사전식 배열의 경우의 수
263쪽

07-1 답 14번째

|전략| a□□□ 꼴인 문자열부터 ma□□ 꼴인 문자열까지의 배열을 생각한다.

a□□□ 꼴인 문자열의 개수 ➡ $3!=6$
h□□□ 꼴인 문자열의 개수 ➡ $3!=6$
이때, math는 ma□□ 꼴에서 두 번째에 오는 문자열이므로
$6+6+2=14$(번째)
에 오는 문자열이다.

07-2 답 (1) 84 (2) 53142

|전략| (1) 24□□□ 꼴인 자연수부터 5□□□□ 꼴인 자연수까지의 배열을 생각한다.
(2) 1□□□□, 2□□□□, … 꼴의 자연수의 개수를 차례로 구해본다.

(1) 24□□□ 꼴인 자연수의 개수 ➡ $3!=6$
25□□□ 꼴인 자연수의 개수 ➡ $3!=6$
3□□□□ 꼴인 자연수의 개수 ➡ $4!=24$
4□□□□ 꼴인 자연수의 개수 ➡ $4!=24$
5□□□□ 꼴인 자연수의 개수 ➡ $4!=24$
따라서 24000보다 큰 자연수의 개수는
$6+6+24+24+24=84$
(2) 1□□□□ 꼴인 자연수의 개수 ➡ $4!=24$
2□□□□ 꼴인 자연수의 개수 ➡ $4!=24$
3□□□□ 꼴인 자연수의 개수 ➡ $4!=24$
4□□□□ 꼴인 자연수의 개수 ➡ $4!=24$
51□□□ 꼴인 자연수의 개수 ➡ $3!=6$
52□□□ 꼴인 자연수의 개수 ➡ $3!=6$
이때, $24+24+24+24+6+6=108$이므로 110번째 오는 자연수는 53□□□ 꼴인 수 중 두 번째 수인 53142이다.

개념 정리
264~265쪽

01 $m+n$	**02** $m+n-l$	**03** 3	**04** 2
05 4	**06** $m\times n$	**07** 곱의 법칙	**08** 3
09 3	**10** 9	**11** n	**12** $n-r+1$
13 ${}_6P_2$	**14** ${}_4P_4$	**15** $n!$, $n-2$	**16** $(n-r)!$
17 $n!$	**18** 1	**19** 1	

05 짝수의 눈이 나오는 경우는 2, 4, 6의 3가지이고, 3의 배수의 눈이 나오는 경우는 3, 6의 2가지
짝수이면서 3의 배수인 눈이 나오는 경우는 6의 1가지
따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$3+2-1=4$

10 첫 번째에 홀수의 눈이 나오는 경우는 1, 3, 5의 3가지
두 번째에 소수의 눈이 나오는 경우는 2, 3, 5의 3가지
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$3\times3=9$

13 학생 6명 중에서 반장, 부반장을 한 명씩 뽑는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 2개를 택하는 순열의 수 ${}_6P_2$와 같다.

14 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적힌 4장의 카드를 일렬로 나열하여 네 자리 자연수를 만드는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 4개를 택하는 순열의 수 ${}_4P_4$와 같다.

중단원 마무리
266~268쪽

01 ④	**02** ①	**03** ⑤	**04** 12
05 ④	**06** 576	**07** ③	**08** ④
09 ②	**10** 20	**11** ③	**12** 64
13 ⑤	**14** 13	**15** ②	**16** ③
17 4	**18** ④	**19** ③	**20** ①
21 10	**22** 420	**23** 1440	**24** 20

LEVEL 1

01 카드에 적힌 수가 2의 배수인 경우는
2, 4, 6, …, 50의 25가지
카드에 적힌 수가 5의 배수인 경우는
5, 10, 15, …, 50의 10가지
카드에 적힌 수가 2와 5의 최소공배수인 10의 배수인 경우는
10, 20, 30, 40, 50의 5가지
따라서 구하는 경우의 수는
$25+10-5=30$

02 x, y, z가 자연수이므로 $x\geq1$, $y\geq1$, $z\geq1$
주어진 방정식에서 x의 계수의 절댓값이 가장 크므로 x가 될 수 있는 자연수를 구하면
$3x<15$에서 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$
(i) $x=1$일 때, $y+2z=12$이므로 순서쌍 (y, z)는
$(10, 1)$, $(8, 2)$, $(6, 3)$, $(4, 4)$, $(2, 5)$의 5개
(ii) $x=2$일 때, $y+2z=9$이므로 순서쌍 (y, z)는
$(7, 1)$, $(5, 2)$, $(3, 3)$, $(1, 4)$의 4개
(iii) $x=3$일 때, $y+2z=6$이므로 순서쌍 (y, z)는
$(4, 1)$, $(2, 2)$의 2개
(iv) $x=4$일 때, $y+2z=3$이므로 순서쌍 (y, z)는
$(1, 1)$의 1개
따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
$5+4+2+1=12$

03 (i) 1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장, 4장의 5가지

5000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장, 4장, 5장의 6가지

10000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$a=5\times6\times4-1=119$

(ii) 지불 금액의 수

5000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액과 10000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 10000원짜리 지폐 3장을 5000원짜리 지폐 6장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 5000원짜리 지폐 11장, 1000원짜리 지폐 4장으로 지불하는 방법의 수와 같다.

5000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, ⋯, 11장의 12가지

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장, 4장의 5가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$b=12\times5-1=59$

$\therefore a-b=119-59=60$

04 (i) $\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}$로 가는 방법의 수는

$3\times2=6$

(ii) $\mathrm{A}\to\mathrm{D}\to\mathrm{C}$로 가는 방법의 수는

$2\times3=6$

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 방법의 수는

$6+6=12$

05 맨 앞에 j가 오도록 나열하는 경우는 j를 제외한 나머지 5개의 문자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 구하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_2=5\times4=20$

06 구하는 경우의 수는 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수에서 a, b, c가 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$

a, b, c를 제외한 나머지 3개의 문자를 나열하는 경우의 수는 $3!=3\times2\times1=6$이고, 이 세 문자 사이사이와 양 끝의 4개의 자리 중에서 3개의 자리에 a, b, c를 나열하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_3=4\times3\times2=24$이므로 a, b, c가 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는

$6\times24=144$

따라서 구하는 경우의 수는

$720-144=576$

07 홀수는 일의 자리의 숫자가 1, 3이므로 □□□1, □□□3 꼴이다.

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자 중 하나이고, 그 각각에 대하여 백의 자리, 십의 자리에는 나머지 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 구하는 홀수의 개수는

$2\times3\times{}_3\mathrm{P}_2=6\times6=36$

08 1□□□ 꼴인 자연수의 개수 ➡ ${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60$

2□□□ 꼴인 자연수의 개수 ➡ ${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60$

31□□ 꼴인 자연수의 개수 ➡ ${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$

32□□ 꼴인 자연수의 개수 ➡ ${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$

따라서 3400보다 작은 자연수의 개수는

$60+60+12+12=144$

LEVEL 2

09 두 눈의 수의 합이 6의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 눈의 수의 합이 6인 경우는

$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$의 5가지

(ii) 눈의 수의 합이 12인 경우는

$(6, 6)$의 1가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$5+1=6$

10 x, y가 음이 아닌 정수이므로 $x\ge0$, $y\ge0$

주어진 부등식에서 y의 계수의 절댓값이 더 크므로 y가 될 수 있는 음이 아닌 정수를 구하면

$2y\le7$에서 $y=0$ 또는 $y=1$ 또는 $y=2$ 또는 $y=3$

(i) $y=0$일 때, $x\le7$이므로 x는

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 8개

(ii) $y=1$일 때, $x\le5$이므로 x는

0, 1, 2, 3, 4, 5의 6개

(iii) $y=2$일 때, $x\le3$이므로 x는

0, 1, 2, 3의 4개

(iv) $y=3$일 때, $x\le1$이므로 x는

0, 1의 2개

따라서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$8+6+4+2=20$

11 810을 소인수분해하면 $810=2\times3^4\times5$

홀수는 2를 소인수로 갖지 않으므로 810의 양의 약수 중 홀수의 개수는 $3^4\times5$의 양의 약수의 개수와 같다.

따라서 810의 양의 약수 중 홀수의 개수는

$(4+1)\times(1+1)=10$

Lecture

자연수 N이 $N=a^pb^qc^r$ (a, b, c는 서로 다른 소수, p, q, r는 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, N의 양의 약수의 개수는

$(p+1)(q+1)(r+1)$

12 (ⅰ) 집 → 병원 → 집으로 가는 방법의 수는

$2\times2=4$

(ⅱ) 집 → 학교 → 병원 → 집으로 가는 방법의 수는

$3\times2\times2=12$

(ⅲ) 집 → 병원 → 학교 → 집으로 가는 방법의 수는

$2\times2\times3=12$

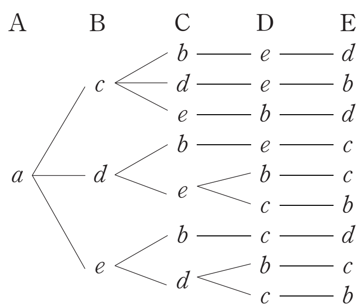
(ⅳ) 집 → 학교 → 병원 → 학교 → 집으로 가는 방법의 수는

$3\times2\times2\times3=36$

(ⅰ)~(ⅳ)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 방법의 수는

$4+12+12+36=64$

13 학생 A, B, C, D, E가 가져온 우산을 차례로 a, b, c, d, e라 하자. 한 학생은 자신이 가져온 우산을 가져가고 나머지 네 학생은 다른 사람의 우산을 가져가야 하므로, 먼저 A만 자신이 가져온 우산을 가져가게 되는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



즉, A만 자신이 가져온 우산을 가져가게 되는 경우는 9가지이고, 같은 방법으로 B 또는 C 또는 D 또는 E만 자신이 가져온 우산을 가져가게 되는 경우도 각각 9가지씩 있으므로 구하는 경우의 수는

$9\times5=45$

참고 경우의 수를 구할 때, 규칙성을 찾기 어려운 경우 수형도나 표를 이용하면 어떤 사건도 빠뜨리지 않고 중복되지 않게 나열할 수 있어 편리하다.

14 주어진 등식의 좌변에서

$${}_{n+1}\mathrm{P}_{n-1}=\frac{(n+1)!}{\{n+1-(n-1)\}!}=\frac{(n+1)!}{2!}$$

즉, $\dfrac{(n+1)!}{2!}=7\times n!$에서 $(n+1)!=14\times n!$

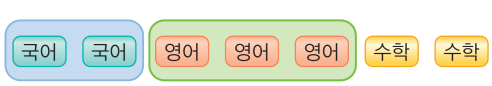
$(n+1)\times n!=14\times n!$

양변을 $n!$로 나누면

$n+1=14 \qquad \therefore n=13$

15 국어책 2권을 한 권으로, 영어책 3권을 한 권으로 생각하여 4권을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$



그 각각에 대하여 국어책 2권의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2\times1=2$

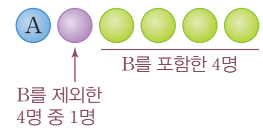
영어책 3권의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times2\times6=288$

16 A를 맨 앞에 세우고 B는 A와 이웃하지 않게 세우는 경우는 두 번째에 학생 B를 제외한 4명 중 한 명을 세우고, 나머지 4명을 일렬로 세우는 경우와 같으므로 구하는 경우의 수는



$4\times4!=4\times24=96$

17 킥보드 3대 중에서 2대를 택하여 양 끝에 세우는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$

나머지 $(n+1)$대를 일렬로 세우는 경우의 수는

$(n+1)!$

즉, 구하는 경우의 수가 720이므로

$6\times(n+1)!=720$, $(n+1)!=120$

이때, $120=5\times4\times3\times2\times1$이므로

$(n+1)!=5!$에서 $n+1=5$

$\therefore n=4$

18 7명의 학생 중에서 반장 1명, 부반장 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_7\mathrm{P}_2=7\times6=42$

반장, 부반장 모두 남학생이 뽑히는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$42-6=36$

다른 풀이 (ⅰ) 반장, 부반장 모두 여학생이 뽑히는 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$

(ⅱ) 반장에 남학생, 부반장에 여학생이 뽑히는 경우의 수는

$3\times4=12$

(ⅲ) 반장에 여학생, 부반장에 남학생이 뽑히는 경우의 수는

$4\times3=12$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$12+12+12=36$

19 백의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자의 곱이 홀수이려면 백의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자는 모두 홀수이어야 한다.

즉, 백의 자리와 십의 자리에는 홀수 1, 3, 5의 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$

천의 자리와 일의 자리에는 백의 자리와 십의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$6\times12=72$

20 A□□□□ 꼴인 문자열의 개수 ➡ $4!=24$

B□□□□ 꼴인 문자열의 개수 ➡ $4!=24$

C□□□□ 꼴인 문자열의 개수 ➡ $4!=24$

D□□□□ 꼴인 문자열의 개수 ➡ $4!=24$

EAB□□ 꼴인 문자열의 개수 ➡ $2!=2$

이때, EACBD는 EAC□□ 꼴에서 첫 번째에 오는 문자열이므로 EACBD보다 앞에 오는 문자열의 개수는

$24+24+24+24+2=98$

서술형

21 $(a+b)(p-q)$에서 a, b 중 어느 하나를 택하면 그 각각에 대하여 p, $-q$의 2가지 중 하나를 선택할 수 있으므로 항의 개수는

$2\times2=4$ … ❶

$(c-d)(x+y+z)$에서 c, $-d$ 중 어느 하나를 택하면 그 각각에 대하여 x, y, z의 3가지 중 하나를 선택할 수 있으므로 항의 개수는 $2\times3=6$ … ❷

이때, 곱해지는 각 항이 모두 서로 다른 문자이므로 동류항은 없다.

따라서 구하는 항의 개수는

$4+6=10$ … ❸

채점 기준	비율
❶ $(a+b)(p-q)$의 항의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ $(c-d)(x+y+z)$의 항의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 다항식의 서로 다른 항의 개수를 구할 수 있다.	20 %

22 B는 C, E와는 이웃하지만, D와는 이웃하지 않으므로 B와 D에 같은 색을 칠하는 경우와 다른 색을 칠하는 경우로 나누어 구해야 한다.

(i) B, D에 같은 색을 칠할 경우

A에 칠할 수 있는 색 ➡ 5가지

B에 칠할 수 있는 색 ➡ $5-1=4$(가지)
└→ A에 칠한 색 제외

C에 칠할 수 있는 색 ➡ $5-2=3$(가지)
└→ A와 B에 칠한 색 제외

D에 칠할 수 있는 색 ➡ 1가지
└→ B에 칠한 색

E에 칠할 수 있는 색 ➡ $5-2=3$(가지)
└→ A와 B(D)에 칠한 색 제외

따라서 방법의 수는

$5\times4\times3\times1\times3=180$ … ❶

(ii) B, D에 서로 다른 색을 칠할 경우

A에 칠할 수 있는 색 ➡ 5가지

B에 칠할 수 있는 색 ➡ $5-1=4$(가지)
└→ A에 칠한 색 제외

C에 칠할 수 있는 색 ➡ $5-2=3$(가지)
└→ A와 B에 칠한 색 제외

D에 칠할 수 있는 색 ➡ $5-3=2$(가지)
└→ A와 B와 C에 칠한 색 제외

E에 칠할 수 있는 색 ➡ $5-3=2$(가지)
└→ A와 B와 D에 칠한 색 제외

따라서 방법의 수는

$5\times4\times3\times2\times2=240$ … ❷

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 방법의 수는

$180+240=420$ … ❸

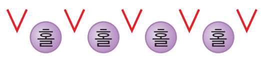
참고 C, E에 같은 색을 칠할 경우와 C, E에 서로 다른 색을 칠할 경우로 나누어서 구해도 된다.

채점 기준	비율
❶ B, D에 같은 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ B, D에 서로 다른 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 조건을 만족시키는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

23 홀수 1, 3, 5, 7을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$ … ❶

홀수 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중에서 3개의 자리에 짝수를 나열하는 경우의 수는



${}_5P_3=5\times4\times3=60$ … ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times60=1440$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 홀수 1, 3, 5, 7을 일렬로 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 짝수를 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

24 3의 배수는 각 자리의 숫자를 더한 값이 3의 배수인 수이다.

0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 3개의 숫자의 순서쌍을 (x, y, z)라 할 때

(i) 0을 포함하는 경우

각 자리의 숫자의 합이 3의 배수인 경우는

$(0, 1, 2)$, $(0, 2, 4)$의 2가지

이때, 백의 자리에 0이 올 수 없으므로 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 2개이고, 그 각각에 대하여 십의 자리, 일의 자리에는 백의 자리에 온 숫자를 제외한 2개의 숫자를 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는

$2\times2\times2!=8$ … ❶

(ii) 0을 포함하지 않는 경우

각 자리의 숫자의 합이 3의 배수인 경우는

$(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$의 2가지

구하는 3의 배수는 서로 다른 세 숫자를 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는

$2\times3!=12$ … ❷

(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$8+12=20$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 3의 배수 중 0을 포함하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 3의 배수 중 0을 포함하지 않는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 세 자리 자연수 중 3의 배수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

11 조합

1 조합

개념 확인 270~272쪽

1 (1) 10 (2) 4 (3) 4 (4) 1
2 (1) 15 (2) 28 (3) 6 (4) 20
3 (1) 7 (2) 6
4 (1) 1260 (2) 315 (3) 280
5 90

1 (1) ${}_5C_2=\frac{{}_5P_2}{2!}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

(2) ${}_4C_3=\frac{{}_4P_3}{3!}=\frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}=4$

(3) ${}_4C_1=4$

(4) ${}_7C_7=1$

2 (1) ${}_6C_4={}_6C_2=\frac{{}_6P_2}{2!}=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

(2) ${}_8C_6={}_8C_2=\frac{{}_8P_2}{2!}=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

(3) ${}_3C_1+{}_3C_2={}_4C_2=\frac{{}_4P_2}{2!}=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

(4) ${}_5C_2+{}_5C_3={}_6C_3=\frac{{}_6P_3}{3!}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

3 (1) ${}_nC_2=\frac{{}_nP_2}{2!}=21$에서

$\frac{n(n-1)}{2\times1}=21$, $n(n-1)=42$

이때, $42=7\times6$이므로 $n=7$

(2) ${}_nC_2=\frac{{}_nP_2}{2!}=\frac{n(n-1)}{2}$

${}_nC_4=\frac{{}_nP_4}{4!}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}$

$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$

이므로 ${}_nC_2={}_nC_4$에서

$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$

이때, $n\geq4$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$\frac{1}{2}=\frac{(n-2)(n-3)}{24}$, $(n-2)(n-3)=4\times3$

$n-2=4$ $\quad\therefore n=6$

다른 풀이 ${}_nC_2={}_nC_{n-2}$이므로 ${}_nC_{n-2}={}_nC_4$에서

$n-2=4$ $\quad\therefore n=6$

4 (1) 9명을 2명, 3명, 4명으로 나누는 경우의 수는

${}_9C_2\times{}_7C_3\times{}_4C_4=\frac{9\times8}{2\times1}\times\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times1=1260$

(2) 9명을 1명, 4명, 4명으로 나누는 경우의 수는

${}_9C_1\times{}_8C_4\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}=9\times\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{2\times1}=315$

(3) 9명을 3명, 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는

${}_9C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{3!}=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\times\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{3\times2\times1}$

$=280$

5 5개의 빵을 1개, 2개, 2개의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

${}_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=5\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2\times1}=15$

세 묶음을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times6=90$

개념 드릴 273쪽

1 (1) ${}_{10}C_4$ (2) ${}_7C_2$ (3) ${}_{12}C_3\times{}_{13}C_2$ (4) ${}_6C_1\times{}_4C_2$ (5) ${}_4C_1\times{}_3C_1\times{}_6C_4$
2 (1) 45 (2) 1 (3) 1 (4) 7 (5) 35 (6) 84
3 (1) $n=11$ (2) $n=3$ (3) $r=4$ (4) $n=12$

1 (1) 서로 다른 10개에서 4개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{10}C_4$

(2) 서로 다른 7개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_7C_2$

(3) 남학생 12명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{12}C_3$
여학생 13명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{13}C_2$
따라서 구하는 경우의 수는 ${}_{12}C_3\times{}_{13}C_2$

(4) 빨간색 공 6개 중에서 1개를 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_1$
파란색 공 4개 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_2$
따라서 구하는 경우의 수는 ${}_6C_1\times{}_4C_2$

(5) 볼펜 4자루 중에서 1자루를 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_1$
연필 3자루 중에서 1자루를 뽑는 경우의 수는 ${}_3C_1$
샤프 6자루 중에서 4자루를 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_4$
따라서 구하는 경우의 수는 ${}_4C_1\times{}_3C_1\times{}_6C_4$

2 (1) ${}_{10}C_2=\frac{{}_{10}P_2}{2!}=\frac{10\times9}{2\times1}=45$

(2) ${}_{12}C_0=1$

(3) ${}_8C_8=1$

(4) ${}_7C_6={}_7C_1=7$

(5) ${}_6C_3+{}_6C_4={}_7C_4={}_7C_3=\frac{{}_7P_3}{3!}=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

(6) ${}_8C_2+{}_8C_3={}_9C_3=\frac{{}_9P_3}{3!}=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

3 (1) ${}_nC_3=\frac{{}_nP_3}{3!}=165$에서

$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=165$, $n(n-1)(n-2)=990$

이때, $990=11\times10\times9$이므로 $n=11$

(2) ${}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_2$이므로 ${}_{n+2}C_2=\dfrac{{}_{n+2}P_2}{2!}=10$에서

$\dfrac{(n+2)(n+1)}{2\times1}=10$, $(n+2)(n+1)=20$

이때, $20=5\times4$이므로

$n+2=5 \qquad \therefore n=3$

(3) ${}_8C_r=70$에서

$\dfrac{8!}{r!(8-r)!}=70$, $70\times r!(8-r)!=8!$

$7\times5\times2\times r!(8-r)!=8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$

$r!(8-r)!=8\times6\times4\times3\times1$

$r!(8-r)!=(4\times3\times2\times1)\times(4\times3\times2\times1)$

$r!(8-r)!=4!\times4!$

$\therefore r=4$

(4) ${}_{11}C_9+{}_{11}C_1={}_{11}C_2+{}_{11}C_1=\dfrac{{}_{11}P_2}{2!}+11$

$=\dfrac{11\times10}{2\times1}+11=66$

즉, ${}_nC_2=\dfrac{{}_nP_2}{2!}=66$이므로

$\dfrac{n(n-1)}{2\times1}=66$, $n(n-1)=132$

이때, $132=12\times11$이므로 $n=12$

다른 풀이 ${}_{11}C_9+{}_{11}C_1={}_{11}C_2+{}_{11}C_1={}_{12}C_2$

$\therefore n=12$

필수 예제 01 ${}_nC_r$의 계산 274쪽

01-1 답 12

|전략| 조합의 수를 식으로 나타낸다.

${}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_{n+2-n}={}_{n+2}C_2$이고

${}_{n+1}C_{n-1}={}_{n+1}C_{n+1-(n-1)}={}_{n+1}C_2$이므로

${}_{n+2}C_n+{}_{n+1}C_{n-1}=169$, 즉 ${}_{n+2}C_2+{}_{n+1}C_2=169$에서

$\dfrac{(n+2)(n+1)}{2\times1}+\dfrac{(n+1)n}{2\times1}=169$

$\dfrac{n+1}{2}\{(n+2)+n\}=169$, $(n+1)^2=13^2$

$n+1=13$ ($\because n+1\geq2$) $\qquad \therefore n=12$

다른 풀이 $\dfrac{(n+2)(n+1)}{2\times1}+\dfrac{(n+1)n}{2\times1}=169$에서

$(n+2)(n+1)+n(n+1)=338$, $2n^2+4n-336=0$

$n^2+2n-168=0$, $(n+14)(n-12)=0$

$\therefore n=12$ ($\because n$은 자연수)

01-2 답 8

|전략| 조합의 수와 순열의 수를 식으로 나타낸다.

${}_nC_2+{}_{n+1}C_3=2{}_nP_2$에서

$\dfrac{n(n-1)}{2\times1}+\dfrac{(n+1)n(n-1)}{3\times2\times1}=2n(n-1)$

$n\geq2$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{n+1}{6}=2$, $3+n+1=12 \qquad \therefore n=8$

필수 예제 02 조합을 이용한 경우의 수 275쪽

02-1 답 360

|전략| n명 중에서 r명을 뽑는 경우의 수는 ${}_nC_r$이다.

10명 중에서 회장 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_1=10$

회장 1명을 제외한 나머지 9명 중에서 부회장 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_9C_2=\dfrac{9\times8}{2\times1}=36$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times36=360$

02-2 답 21

|전략| 모두 남학생을 뽑는 경우의 수와 모두 여학생을 뽑는 경우의 수를 구한다.

남학생 6명 중에서 2명의 대표를 뽑는 경우의 수는

${}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

여학생 4명 중에서 2명의 대표를 뽑는 경우의 수는

${}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$15+6=21$

필수 예제 03 특정한 것을 포함하거나 포함하지 않는 조합의 수 276쪽

03-1 답 (1) 36 (2) 126

|전략| (2) 서로 다른 n개에서 r개를 뽑을 때, 특정한 k개가 포함되지 않는 경우의 수는 $(n-k)$개에서 r개를 뽑는 경우의 수와 같다.

(1) 특정한 색의 공 3개를 먼저 꺼내고 나머지 9개 중에서 2개를 꺼내면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_9C_2=\dfrac{9\times8}{2\times1}=36$

(2) 특정한 색의 공 3개를 제외한 나머지 9개 중에서 5개를 꺼내면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_9C_5={}_9C_4=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

참고 서로 다른 n개에서 r개를 뽑을 때

(1) 특정한 k개를 포함하여 뽑는 방법의 수 ➡ ${}_{n-k}C_{r-k}$

(2) 특정한 k개를 제외하고 뽑는 방법의 수 ➡ ${}_{n-k}C_r$

03-2 답 15

|전략| A는 포함되므로 나머지 9명 중에서 B, C, D가 포함되지 않게 2명을 뽑는다.

A를 먼저 뽑고, A, B, C, D를 제외한 나머지 6명 중에서 2명을 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

필수 예제 04 '적어도'의 조건이 있는 조합의 수 277쪽

04-1 답 74

|전략| 전체 경우의 수에서 모두 소수가 아닌 카드를 뽑는 경우의 수를 뺀다.

9장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수는

$_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

소수가 아닌 수, 즉 1, 4, 6, 8, 9의 숫자가 적힌 5장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$84-10=74$

다른 풀이 소수 2, 3, 5, 7이 적힌 카드 4장, 소수가 아닌 수 1, 4, 6, 8, 9가 적힌 카드 5장 중에서 소수가 적힌 카드를 적어도 1장 뽑는 경우는

(i) 소수가 적힌 카드 1장, 소수가 아닌 수가 적힌 카드 2장을 뽑는 경우

$_4C_1\times{}_5C_2=4\times\frac{5\times4}{2\times1}=40$

(ii) 소수가 적힌 카드 2장, 소수가 아닌 수가 적힌 카드 1장을 뽑는 경우

$_4C_2\times{}_5C_1=\frac{4\times3}{2\times1}\times5=30$

(iii) 소수가 적힌 카드 3장을 뽑는 경우

$_4C_3={}_4C_1=4$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$40+30+4=74$

04-2 답 455

|전략| 전체 경우의 수에서 야구 동아리 학생만 뽑는 경우의 수와 농구 동아리 학생만 뽑는 경우의 수를 뺀다.

전체 12명의 학생 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$_{12}C_4=\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}=495$

(i) 야구 동아리 학생 7명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$_7C_4={}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

(ii) 농구 동아리 학생 5명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$_5C_4={}_5C_1=5$

(i), (ii)에서 야구 동아리에 가입한 학생만 4명을 뽑거나 농구 동아리에 가입한 학생만 4명을 뽑는 경우의 수는

$35+5=40$

따라서 구하는 경우의 수는

$495-40=455$

필수 예제 05 뽑아서 나열하는 경우의 수 278쪽

05-1 답 960

|전략| 4권의 책을 뽑는 경우의 수와 일렬로 꽂는 경우의 수를 구한다.

5권의 소설책 중에서 3권을 뽑는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

4권의 시집 중에서 1권을 뽑는 경우의 수는

$_4C_1=4$

뽑힌 4권을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times4\times24=960$

참고 서로 다른 n개에서 r개, 서로 다른 k개에서 l개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수 ➡ $_nC_r\times{}_kC_l\times(r+l)!$

05-2 답 180

|전략| A, B를 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 6명 중에서 2명을 뽑는다.

A, B를 먼저 뽑고 나머지 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

A, B를 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

그 각각의 경우에 대하여 A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2\times1=2$

즉, A, B가 서로 이웃하도록 세우는 경우의 수는

$6\times2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times12=180$

필수 예제 06 직선 또는 삼각형의 개수 279쪽

06-1 답 17

|전략| 일직선 위에 있는 점 중에서 2개의 점을 이어 만드는 직선은 모두 같은 직선이다.

8개의 점 중에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는

$_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는

$_3C_2={}_3C_1=3$

일직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는

$_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

이때, 일직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

$28-3-10+1+1=17$

다른 풀이 주어진 그림에서 3개의 점이 있는 직선을 l_1, 5개의 점이 있는 직선을 l_2라 하자.

직선 l_1 위의 한 점과 직선 l_2 위의 한 점을 택하는 경우의 수는

$_3C_1\times{}_5C_1=3\times5=15$

직선 l_1 위의 점으로 만들 수 있는 직선이 1개, 직선 l_2 위의 점으로 만들 수 있는 직선이 1개이므로 구하는 직선의 개수는

$15+1+1=17$

06-2 답 72

|전략| 일직선 위에 있는 점들로는 삼각형이 만들어지지 않는다.

9개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

이때, 일직선 위에 4개의 점이 있는 경우는 3가지이므로 구하는 삼각형의 개수는

$84-3\times4=72$

필수 예제 07 사각형의 개수 280쪽

07-1 답 90

|전략| m개의 평행선과 이와 평행하지 않은 n개의 평행선으로 만들어지는 평행사변형의 개수는 ${}_mC_2\times{}_nC_2$이다.

가로 방향의 4개의 평행선에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

세로 방향의 6개의 평행선에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

$6\times15=90$

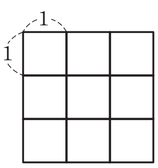
07-2 답 (1) 36 (2) 22

|전략| (2) 가로선과 세로선 사이의 간격을 1이라 하면 한 변의 길이가 1, 2, 3인 정사각형이 만들어진다.

(1) 가로선 4개 중에서 2개, 세로선 4개 중에서 2개를 택하면 하나의 직사각형이 결정되므로 구하는 직사각형의 개수는

${}_4C_2\times{}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}=36$

(2) 가로선과 세로선 사이의 간격이 일정하므로 간격을 1이라 하면 이 선들로 한 변의 길이가 1, 2, 3인 정사각형이 각각 9개, 4개, 1개 만들어진다.



따라서 정사각형의 개수는

$9+4+1=14$

이므로 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$36-14=22$

필수 예제 08 분할과 분배 281쪽

08-1 답 434

|전략| 먼저 12명을 두 개의 조로 나누는 경우의 수를 생각해 본다.

12명의 학생을 6명, 6명의 두 개의 조로 나누는 경우의 수는

${}_{12}C_6\times{}_6C_6\times\frac{1}{2!}=\frac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{6\times5\times4\times3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{2\times1}=462$

남학생으로만 이루어진 조가 있도록 나누는 경우의 수는

${}_8C_6\times{}_2C_2={}_8C_2\times{}_2C_2=\frac{8\times7}{2\times1}\times1=28$

따라서 구하는 경우의 수는

$462-28=434$

08-2 답 630

|전략| 7종류의 옷을 세 묶음으로 나누는 경우의 수와 3개의 상자에 나누어 담는 경우의 수를 곱한다.

서로 다른 7종류의 옷을 3종류, 2종류, 2종류로 나누는 경우의 수는

${}_7C_3\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2\times1}=105$

3개의 상자에 나누어 담는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$105\times6=630$

08-3 답 45

|전략| 먼저 6명을 2명, 4명의 두 개의 조로 나눈 후 4명을 다시 2명, 2명의 두 개의 조로 나눈다.

6명을 2명, 4명의 두 개의 조로 나누는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_4=\frac{6\times5}{2\times1}\times1=15$

나누어진 4명을 다시 2명, 2명의 두 개의 조로 나누는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2\times1}=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times3=45$

다른 풀이 6명을 2명, 2명, 2명의 세 개의 조로 나누는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=\frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{3\times2\times1}=15$

이때, 세 개의 조 중에서 부전승으로 올라갈 한 조를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times3=45$

개념 정리 282~283쪽

01 조합	**02** ${}_nC_r$	**03** ㉢	**04** ㉡
05 ㉠	**06** $n!$	**07** 1	**08** 1
09 3, 84	**10** 2, 55	**11** $n-r$	**12** $n-1$, r
13 1	**14** 7	**15** 3	**16** 20
17 $n-p$	**18** $2!$	**19** $3!$	

03 서로 다른 8장의 카드에서 4장을 뽑는 경우의 수는 서로 다른 8개에서 4개를 택하는 조합의 수 ${}_8C_4$와 같다.

04 7종류의 음료수 중에서 3종류를 고르는 경우의 수는 서로 다른 7개에서 3개를 택하는 조합의 수 ${}_7C_3$과 같다.

05 5명의 학생 중에서 2명의 당번을 뽑는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 조합의 수 ${}_5C_2$와 같다.

중단원 마무리 284~286쪽

01 5	**02** ⑤	**03** ④	**04** ③
05 ①	**06** 195	**07** ②	**08** 40
09 5	**10** ②	**11** ①	**12** 60
13 115	**14** ④	**15** ②	**16** 52
17 185	**18** ④	**19** ③	**20** 90
21 13	**22** 77	**23** 21600	**24** 80

LEVEL 1

01 ${}_{n}P_{2}+4{}_{n}C_{3}={}_{n}P_{3}$에서

$n(n-1)+4\times\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=n(n-1)(n-2)$

$n\ge3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$1+\dfrac{2(n-2)}{3}=n-2$, $3+2n-4=3n-6$

$\therefore n=5$

02 11명 중에서 주장 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_{11}C_{1}=11$

주장 1명을 제외한 나머지 10명 중에서 부주장 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_{3}=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$11\times120=1320$

03 사과 5개 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_{5}C_{2}=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

배 8개 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_{8}C_{2}=\dfrac{8\times7}{2\times1}=28$

따라서 구하는 경우의 수는

$10+28=38$

04 서울을 먼저 고르고 대전을 제외한 나머지 7개 중에서 4개를 고르면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_{7}C_{4}={}_{7}C_{3}=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

05 알파벳 $a, b, c, \cdots, i$ 중에서 모음은 a, e, i의 3개이고, 자음은 6개이다.

공 9개 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

${}_{9}C_{3}=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

자음이 적힌 공 6개 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

${}_{6}C_{3}=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$84-20=64$

06 전체 10명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_{4}=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

20대 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$210-15=195$

07 5개의 풍선에서 3개의 풍선을 택하는 경우의 수는

${}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

3개의 깃발에서 2개의 깃발을 택하는 경우의 수는

${}_{3}C_{2}={}_{3}C_{1}=3$

5개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

따라서 구하는 신호의 가짓수는

$10\times3\times120=3600$

08 가로로 놓인 선 4개 중에서 2개를 택하고, 세로로 놓인 선 5개 중에서 2개를 택하면 하나의 직사각형이 결정되므로 직사각형의 개수는

${}_{4}C_{2}\times{}_{5}C_{2}=\dfrac{4\times3}{2\times1}\times\dfrac{5\times4}{2\times1}=6\times10=60$

이때, 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 1이라 하면 한 변의 길이가 1, 2, 3인 정사각형의 개수는 각각 12, 6, 2이므로 정사각형의 개수는

$12+6+2=20$

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$60-20=40$

LEVEL 2

09 ${}_{n+1}C_{n-1}={}_{n+1}C_{n+1-(n-1)}={}_{n+1}C_{2}$이므로

${}_{n-1}P_{2}+3={}_{n+1}C_{n-1}$, 즉 ${}_{n-1}P_{2}+3={}_{n+1}C_{2}$에서

$(n-1)(n-2)+3=\dfrac{(n+1)n}{2}$

$2n^2-6n+4+6=n^2+n$

$n^2-7n+10=0$, $(n-2)(n-5)=0$

$\therefore n=5$ ($\because n\ge3$)

10 두 수가 모두 짝수이거나 한 수가 짝수이고 다른 한 수가 홀수면 두 수의 곱이 짝수이다.

(i) 두 수가 모두 짝수일 때

4개의 서로 다른 짝수 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_{4}C_{2}=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

(ii) 한 수가 짝수이고 다른 한 수가 홀수일 때

4개의 서로 다른 짝수와 5개의 서로 다른 홀수를 각각 하나씩 택하는 경우의 수는

$4\times5=20$

(ⅰ), (ⅱ)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$6+20=26$

다른 풀이 9개의 자연수 중에서 두 수를 택할 때, 택한 두 수의 곱이 짝수인 경우의 수는 뽑을 수 있는 모든 경우의 수에서 두 수의 곱이 홀수인 경우의 수를 뺀 것과 같다.

이때, 9개의 자연수 중에서 두 수를 택하는 경우의 수는

${}_9C_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$

두 수의 곱이 홀수가 되려면 두 수가 모두 홀수여야 하므로

5개의 서로 다른 홀수에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$36-10=26$

11 7일 중에서 5일을 택하여 축구를 하는 경우의 수는

${}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

축구를 하지 않는 2일 동안 네 가지 운동 중에서 서로 다른 두 가지를 택하여 하루에 하나씩 하는 경우의 수는

${}_4P_2=4\times3=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$21\times12=252$

12 A가 5개의 체험 프로그램 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

B가 A가 택한 2개의 체험 프로그램 중에서 하나를 택하고, A가 택하지 않은 3개의 프로그램 중에서 하나를 택하는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_3C_1=2\times3=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times6=60$

13 10개의 구슬 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

(ⅰ) 노란색 구슬이 포함되지 않도록 4개를 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

(ⅱ) 노란색 구슬이 1개 포함되도록 4개를 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_6C_3=4\times\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=80$

(ⅰ), (ⅱ)에서 노란색 구슬이 0개 또는 1개 포함되도록 꺼내는 경우의 수는

$15+80=95$

따라서 구하는 경우의 수는

$210-95=115$

14 남학생 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

여학생 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

남학생과 여학생을 번갈아 세우려면 남학생 3명을 일렬로 세우고 그 사이사이에 여학생 2명을 세우면 되므로 그 경우의 수는

$3!\times2!=(3\times2\times1)\times(2\times1)=6\times2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times15\times12=1800$

15 A, B, C를 제외한 7명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

뽑은 5명을 일렬로 세울 때 A, B, C가 이웃하도록 세우는 경우의 수는

$3!\times3!=(3\times2\times1)\times(3\times2\times1)=6\times6=36$

따라서 구하는 경우의 수는

$21\times36=756$

16 8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_3=1$

일직선 위에 3개의 점이 있는 경우는 4가지이므로 구하는 삼각형의 개수는

$56-4\times1=52$

17 10개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

${}_{10}C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_4=1$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개의 점을 택하고 곡선 위에 있는 6개의 점 중에서 1개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_4C_3\times{}_6C_1={}_4C_1\times6=4\times6=24$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$210-1-24=185$

18 서로 다른 3개의 사탕과 5개의 초콜릿을 4개씩 같은 모양의 2개의 상자에 나누어 담는 경우의 수는

${}_8C_4\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{2\times1}=35$

서로 다른 5개의 초콜릿을 1개, 4개로 나누는 경우의 수는

${}_5C_1\times{}_4C_4=5\times1=5$

따라서 구하는 경우의 수는

$35-5=30$

19 각각의 유적지를 선택하는 사람 수가 모두 다르고 아무도 선택하지 않은 유적지가 없으므로 각각의 유적지를 선택한 사람 수는 1, 2, 3이어야 한다.

6명을 1명, 2명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$_{6}C_{1}\times{}_{5}C_{2}\times{}_{3}C_{3}=6\times\dfrac{5\times4}{2\times1}\times1=60$

1명, 2명, 3명으로 나누어진 사람들이 3개의 유적지를 선택하는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$60\times6=360$

20 6개의 팀을 3팀, 3팀의 두 개의 조로 나누는 경우의 수는

$_{6}C_{3}\times{}_{3}C_{3}\times\dfrac{1}{2!}=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\dfrac{1}{2\times1}=10$

각 조에서 나누어진 3팀을 2팀, 1팀의 두 개의 조로 나누는 경우의 수는

$({}_{3}C_{2}\times{}_{1}C_{1})\times({}_{3}C_{2}\times{}_{1}C_{1})=({}_{3}C_{1}\times{}_{1}C_{1})\times({}_{3}C_{1}\times{}_{1}C_{1})$

$=(3\times1)\times(3\times1)=9$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times9=90$

다른 풀이 6개의 팀을 3팀, 3팀의 두 개의 조로 나누는 경우의 수는

$_{6}C_{3}\times{}_{3}C_{3}\times\dfrac{1}{2!}=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\dfrac{1}{2\times1}=10$

이때, 각 조에서 부전승으로 올라갈 1팀을 택하는 경우의 수는

$_{3}C_{1}\times{}_{3}C_{1}=3\times3=9$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times9=90$

서술형

21 $_{n}C_{r}=\dfrac{_{n}P_{r}}{r!}$ …… ㉠

$_{n}C_{r}=120$, $_{n}P_{r}=720$을 ㉠에 대입하면

$120=\dfrac{720}{r!}$, $r!=6$

이때, $6=3\times2\times1=3!$이므로 $r=3$ … ❶

$_{n}P_{3}=720=10\times9\times8$이므로 $n=10$ … ❷

$\therefore n+r=13$ … ❸

채점 기준	비율
❶ r의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $n+r$의 값을 구할 수 있다.	10 %

22 9개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$_{9}C_{3}=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$ … ❶

1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적힌 9개의 공 중에서 꺼낸 3개의 공에 적힌 수가 연속된 세 자연수인 경우는

(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6), (5, 6, 7), (6, 7, 8), (7, 8, 9)의 7가지 … ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$84-7=77$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 9개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 3개의 공에 적힌 수가 연속된 세 자연수인 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 3개의 공에 적힌 수가 연속된 세 자연수가 되지 않도록 꺼내는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

23 A를 제외한 남학생 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$_{5}C_{2}=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$ … ❶

B를 제외한 여학생 3명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$_{3}C_{2}={}_{3}C_{1}=3$ … ❷

A, B를 포함하여 뽑힌 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$ … ❸

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times3\times720=21600$ … ❹

채점 기준	비율
❶ A를 제외한 남학생 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ B를 제외한 여학생 3명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ A, B를 포함하여 뽑힌 6명을 일렬로 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❹ A, B를 모두 포함하여 남학생 3명과 여학생 3명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

24 정십각형의 10개의 꼭짓점 중에서 3개의 점을 선택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$_{10}C_{3}=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$ … ❶

정십각형에 외접하는 외접원에 대하여 10개의 점으로 만들 수 있는 지름은 5개이고, 1개의 지름에 대하여 8개의 직각삼각형을 만들 수 있으므로 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는

$5\times8=40$ … ❷

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$120-40=80$ … ❸

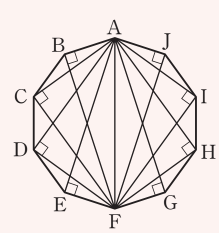
채점 기준	비율
❶ 정십각형의 10개의 꼭짓점으로 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 정십각형의 10개의 꼭짓점으로 만들 수 있는 직각삼각형의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 만들어진 삼각형 중에서 직각삼각형이 아닌 것의 개수를 구할 수 있다.	20 %

Lecture

오른쪽 그림과 같이 선분 AF를 그으면 원의 지름에 대한 원주각의 크기가 90°이므로

$\angle AJF=\angle AIF=\cdots=\angle ABF=90^\circ$

이다. 즉, 선분 AF를 빗변으로 하는 직각삼각형 8개를 만들 수 있다.



따라서 선분 BG, CH, DI, EJ에 대하여도 마찬가지로 생각할 수 있으므로 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는 $8\times5=40$

12 행렬과 그 연산

1 행렬의 뜻

개념 확인 288~289쪽

1 (1) 1×2 행렬 (2) 2×2 행렬, 이차정사각행렬
(3) 3×2 행렬 (4) 2×3 행렬

2 (1) $(1, 2)$ 성분: -3, $(2, 1)$ 성분: 2
(2) $(1, 2)$ 성분: 8, $(2, 1)$ 성분: 3

3 (1) $a=-4$, $b=3$ (2) $a=1$, $b=7$

4 (1) $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

5 $\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

6 $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

3 (2) 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$a+2=3$, $b-2=5$
$\therefore a=1, b=7$

4 (1) $A+B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} -1+5 & 0-4 \\ -3+2 & 2-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A-B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} -1-5 & 0-(-4) \\ -3-2 & 2-(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

5 $-A+2B=-\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

6 $(A+B)+C=(A+C)+B$
$=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

개념 드릴 290쪽

1 (1) 1×3 행렬 (2) 2×2 행렬, 이차정사각행렬
(3) 3×1 행렬 (4) 3×3 행렬, 삼차정사각행렬

2 (1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) -1

3 (1) $x=-3$, $y=2$ (2) $x=4$, $y=-3$ (3) $x=-1$, $y=-6$

4 (1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (2) $(5 \quad -6)$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$
(5) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

5 (1) $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 4 & -16 \\ -12 & -8 \end{pmatrix}$
(3) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$

3 (2) 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$x=4$, $x+y=1$
$\therefore x=4, y=-3$
(3) 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$y=-6$, $x-y=5$
$\therefore x=-1, y=-6$

4 (1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 \\ 5-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(2) $(3 \quad -2)-(-2 \quad 4)=(3+2 \quad -2-4)=(5 \quad -6)$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2 & 2-1 \\ 0+5 & 3-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-3 & 3+2 \\ 1-5 & 4+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 1+4 & 3+1 & -1+2 \\ 2+3 & -1-5 & 2-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-1 & 3-2 \\ 4-3 & 1+1 \\ 5+4 & 7+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

5 (1) $2A=2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $-4A=-4\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -16 \\ -12 & -8 \end{pmatrix}$

(3) $\frac{1}{3}A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

(4) $-\frac{1}{2}A=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$

필수 예제 01 행렬의 뜻과 성분 291쪽

01-1 답 (1) -7 (2) 5

|전략| (i, j) 성분은 행렬의 제 i행과 제 j열이 만나는 위치에 있는 성분이다.

(1) $(1, 3)$ 성분은 -1, $(2, 2)$ 성분은 -6이므로 구하는 합은
$-1+(-6)=-7$

(2) $i+j=3$ ($i=1, 2, j=1, 2, 3$)을 만족시키는 순서쌍 (i, j)는 $(1, 2), (2, 1)$이고, $a_{12}=1, a_{21}=4$이므로 구하는 합은
$1+4=5$

01-2 답 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

|전략| $i=1, 2, j=1, 2, 3$이므로 행렬 A는 2×3 행렬이다.

$a_{11}=1^2+2\times1-5=-2$, $a_{12}=1^2+2\times2-5=0$
$a_{13}=1^2+2\times3-5=2$, $a_{21}=2^2+2\times1-5=1$
$a_{22}=2^2+2\times2-5=3$, $a_{23}=2^2+2\times3-5=5$
$\therefore A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

01-3 답 $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

|전략| 행렬 A가 이차정사각행렬이므로 $i=1, 2, j=1, 2$이다.

$a_{11}=1-1=0$, $a_{12}=1+2=3$
$a_{21}=2-1=1$, $a_{22}=2-2=0$
$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

필수 예제 02 서로 같은 행렬 292쪽

02-1 답 5

|전략| 서로 같은 두 행렬은 대응하는 성분이 각각 같음을 이용한다.

행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$2x=-3y+1$, $x+y=4x-7$
즉, $2x+3y=1$, $3x-y=7$
위의 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-1$
$\therefore x^2+y^2=2^2+(-1)^2=5$

02-2 답 10

|전략| 두 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 $x+y$, xy의 값을 구한 후 주어진 식을 $x+y$, xy에 대한 식으로 변형한다.

행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$x=6-y$, $y=\frac{3}{x}$, 즉 $x+y=6$, $xy=3$
$\therefore \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{6^2-2\times3}{3}=10$

02-3 답 13

|전략| 두 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 a를 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

$A=B$에서 $\begin{pmatrix} x+y & 5 \\ x^2+y^2 & xy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ a & -2 \end{pmatrix}$
행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$x+y=3$, $x^2+y^2=a$, $xy=-2$
$\therefore a=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\times(-2)=13$

필수 예제 03 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배 (1) 293쪽

03-1 답 $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$

|전략| 주어진 식을 간단히 정리한 후 행렬 A, B, C를 대입한다.

$3(A-B-C)-A+2B+6C$
$=3A-3B-3C-A+2B+6C=2A-B+3C$
$=2\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} -4 & 10 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 15 & -9 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 15 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$

03-2 답 (1) $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$

|전략| 주어진 식을 정리하여 X를 A, B에 대한 식으로 나타낸다.

(1) $X+A=B$에서
$X=B-A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$

(2) $2X-A=3B$에서 $2X=A+3B$
$\therefore X=\frac{1}{2}(A+3B)=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}\right\}$
$=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -18 & 12 \end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -18 & 10 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $B+2X=3(X-A)$에서 $B+2X=3X-3A$
$\therefore X=3A+B=3\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$

필수 예제 04 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배 (2) 294쪽

04-1 답 $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

|전략| 주어진 두 식을 연립하여 행렬 X, Y를 두 행렬 A, B로 나타낸다.

$X+Y=A$ ⋯⋯ ㉠, $X-2Y=B$ ⋯⋯ ㉡
㉠$\times2+$㉡을 하면
$3X=2A+B$ $\quad\therefore X=\frac{1}{3}(2A+B)$
㉠$-$㉡을 하면
$3Y=A-B$ $\quad\therefore Y=\frac{1}{3}(A-B)$
$\therefore 2X+Y=\frac{2}{3}(2A+B)+\frac{1}{3}(A-B)=\frac{1}{3}(5A+B)$
$=\frac{1}{3}\left\{5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\right\}$
$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 18 & 18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

04-2 답 $x=-1$, $y=3$

|전략| 주어진 식을 정리한 후 행렬이 서로 같을 조건을 이용한다.

$xA+yB=x\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+y & 3x-y \\ 2y & x+3y \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 2x+y & 3x-y \\ 2y & x+3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$에서 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x+y=1$, $3x-y=-6$, $2y=6$, $x+3y=8$

$\therefore x=-1$, $y=3$

2 행렬의 곱셈

개념 확인 295~296쪽

1 (1) $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $(10 \quad 2)$ (3) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

2 (1) $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

3 풀이 참조

4 풀이 참조

1 (1) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)\times5+1\times2 \\ (-1)\times5+3\times2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $(1 \quad 3)\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=(1\times4+3\times2 \quad 1\times5+3\times(-1))$

$=(10 \quad 2)$

(3) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}(2 \quad 1)=\begin{pmatrix} 3\times2 & 3\times1 \\ 4\times2 & 4\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times3+2\times1 & 1\times(-1)+2\times2 \\ 0\times3+4\times1 & 0\times(-1)+4\times2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

2 (1) $A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1\times1+3\times(-1) & 1\times3+3\times(-2) \\ (-1)\times1+(-2)\times(-1) & (-1)\times3+(-2)\times(-2) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} (-2)\times1+(-3)\times(-1) & (-2)\times3+(-3)\times(-2) \\ 1\times1+1\times(-1) & 1\times3+1\times(-2) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1\times1+0\times(-1) & 1\times3+0\times(-2) \\ 0\times1+1\times(-1) & 0\times3+1\times(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

(4) $(2A)^3=2^3A^3=8A^3=8\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

3 $AB=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore AB\neq BA$

4 $AE=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=A$

$EA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=A$

$\therefore AE=EA=A$

개념 드릴 297쪽

1 (1) $(5 \quad -6)$ (2) $\begin{pmatrix} 26 \\ -16 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$

2 (1) $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 20 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 26 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

3 (1) $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -10 & 7 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -10 & 7 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

4 (1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1 (1) $(2 \quad 1)\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$=(2\times3+1\times(-1) \quad 2\times(-4)+1\times2)=(5 \quad -6)$

(2) $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} (-3)\times(-2)+5\times4 \\ 4\times(-2)+(-2)\times4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 \\ -16 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2\times1+3\times2 & 2\times(-2)+3\times3 \\ (-2)\times1+4\times2 & (-2)\times(-2)+4\times3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2\times1+1\times5 & 2\times(-3)+1\times2 \\ (-4)\times1+0\times5 & (-4)\times(-3)+0\times2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$

2 (1) $AB=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

(2) $BA=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $A+B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$이므로

$(A+B)^2=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

(4) $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$,

$B^2=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$이고

$AB=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$이므로

$A^2+2AB+B^2$

$=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 12 & -8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

주의 $AB\neq BA$이므로 $A^2+2AB+B^2$을 $(A+B)^2$으로 변형하여 계산하지 않도록 주의한다.

3 (1) $B+C=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore A(B+C)=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$AC=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore AB+AC=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $(AB)C=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 & 7 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $BC=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore A(BC)=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 & 7 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

4 (1) $-E=-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $E^3=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $(-E)^5=-E^5=-E=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $E^{10}+(-E)^{10}=E^{10}+E^{10}=2E^{10}=2E$

$=2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

필수 예제 01 행렬의 곱셈 298쪽

01-1 답 -13

|전략| CA, BC를 각각 계산하여 $CA+BC$를 구한다.

$CA=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & -9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$BC=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & 9 \\ 9 & -13 \end{pmatrix}$

$\therefore CA+BC=\begin{pmatrix} -8 & -9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -7 & 9 \\ 9 & -13 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 12 & -10 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $CA+BC$의 모든 성분의 합은

$-15+0+12+(-10)=-13$

01-2 답 $x=4$, $y=-2$

|전략| 두 행렬 A, B를 곱한 결과의 모든 성분이 0임을 이용한다.

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & y \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & y+2 \\ 4-x & 2y+x \end{pmatrix}$

즉, $\begin{pmatrix} 0 & y+2 \\ 4-x & 2y+x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$y+2=0$, $4-x=0$, $2y+x=0$ $\quad\therefore x=4$, $y=-2$

01-3 답 $a=2$, $b=3$, $c=1$

|전략| 행렬의 곱셈을 한 후 행렬이 서로 같을 조건을 이용한다.

$\begin{pmatrix} a & -2 \\ 3 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-2 & a-2 \\ 3c+b & 3+b \end{pmatrix}$

즉, $\begin{pmatrix} ac-2 & a-2 \\ 3c+b & 3+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$이므로

$ac-2=0$, $a-2=0$, $3c+b=6$, $3+b=6$ $\quad\therefore a=2$, $b=3$, $c=1$

필수 예제 02 행렬의 거듭제곱 299쪽

02-1 답 $-\frac{1}{2}$

|전략| A^2을 구한 후 모든 성분이 0임을 이용한다.

$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2a & 0 \\ 0 & 2a+1 \end{pmatrix}$

즉, $\begin{pmatrix} 1+2a & 0 \\ 0 & 2a+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$1+2a=0$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$

02-2 답 62

|전략| A^2, A^3, A^4, $\cdots$을 차례로 구하여 A^n의 규칙성을 찾는다.

$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^{20}=\begin{pmatrix} 1 & 60 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^{20}의 모든 성분의 합은

$1+60+0+1=62$

필수 예제 03 행렬의 곱셈의 성질 300쪽

03-1 답 (1) $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

|전략| 행렬의 곱셈에서 분배법칙이 성립함을 이용한다.

(1) $AC+BC=(A+B)C$이므로

$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$\therefore AC+BC=(A+B)C$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

(2) $AB-AC=A(B-C)$이므로

$$B-C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore AB-AC=A(B-C)$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

03-2 답 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

|전략| 주어진 두 식을 변형하여 $AB+BA$를 구한다.

$$(A-B)^2=(A-B)(A-B)$$
$$=A^2-AB-BA+B^2$$
$$=A^2+B^2-(AB+BA)$$

$\therefore AB+BA=(A^2+B^2)-(A-B)^2$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

필수 예제 04 $AB=BA$가 성립하는 경우 301쪽

04-1 답 $x=1$, $y=2$

|전략| AB, BA를 구한 후 행렬이 서로 같을 조건을 이용한다.

$$AB=\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+2y & 4x-y \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+4 & 3y-4 \\ 2x-1 & 2y+1 \end{pmatrix}$$

즉, $\begin{pmatrix} 3x+2y & 4x-y \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+4 & 3y-4 \\ 2x-1 & 2y+1 \end{pmatrix}$이므로

$3x+2y=3x+4$, $4x-y=3y-4$, $1=2x-1$, $5=2y+1$

$\therefore x=1$, $y=2$

04-2 답 $x=-2$, $y=-3$

|전략| $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$이 성립하므로 $AB=BA$이다.

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)$$
$$=A^2+AB+BA+B^2$$
$$=A^2+2AB+B^2$$

이므로 $AB=BA$

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ y & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & x-2 \\ y+9 & xy-3 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ y & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+xy & 2+3x \\ 3-y & 3 \end{pmatrix}$$

즉, $\begin{pmatrix} 7 & x-2 \\ y+9 & xy-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+xy & 2+3x \\ 3-y & 3 \end{pmatrix}$이므로

$7=1+xy$, $x-2=2+3x$, $y+9=3-y$, $xy-3=3$

$\therefore x=-2$, $y=-3$

필수 예제 05 단위행렬과 행렬의 곱셈 302쪽

05-1 답 $\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

|전략| 단위행렬과의 곱셈에서는 인수분해 공식을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있다.

$$A^3+3A^2+3A+E=A^3+3A^2E+3AE^2+E^3$$
$$=(A+E)^3$$

이때, $A+E=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이므로

$$(A+E)^2=(A+E)(A+E)$$
$$=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=2E$$

$\therefore$ (주어진 식)$=(A+E)^3=(A+E)^2(A+E)$

$$=2E(A+E)=2(A+E)$$
$$=2\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

05-2 답 8

|전략| 곱셈 공식을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$(A+2E)(A-2E)=A^2-(2E)^2=A^2-4E$이므로

$A^2-4E=-2E \qquad \therefore A^2=2E$

즉, $A^6=(A^2)^3=(2E)^3=2^3E^3=8E$이므로 $k=8$

05-3 답 2

|전략| A^2, A^3, $\cdots$을 구해 A^n이 E 또는 $-E$가 되는 자연수 n을 찾는다.

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$$

$$\therefore A^{30}=(A^3)^{10}=(-E)^{10}=E^{10}=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A^{30}의 모든 성분의 합은

$1+0+0+1=2$

필수 예제 06 케일리-해밀턴의 정리 303쪽

06-1 답 $p=-3$, $q=1$

|전략| 케일리-해밀턴의 정리를 이용하여 주어진 식의 차수를 낮춘다.

케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(3+2)A+(3\times2-1\times5)E=O$이므로

$A^2-5A+E=O \qquad \therefore A^2=5A-E$

$\therefore A^3-6A^2+3A=A^2A-6A^2+3A$

$$=(5A-E)A-6A^2+3A$$
$$=5A^2-A-6A^2+3A$$
$$=-A^2+2A$$
$$=-(5A-E)+2A$$
$$=-3A+E$$

$\therefore p=-3$, $q=1$

06-2 답 $a=2$, $b=1$

|전략| $A\neq kE$이므로 케일리-해밀턴의 정리를 이용하여 a, b의 값을 구한다.

$A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 1 \end{pmatrix}\neq kE$ (k는 실수)이므로 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(a+1)A+(a-2b)E=O$

이 식이 $A^2-3A=O$와 같으므로

$a+1=3$, $a-2b=0$ $\quad\therefore a=2$, $b=1$

개념 정리 304~305쪽

01 성분	**02** 행, 열	**03** m, n	**04** $=$
05 ㉡	**06** ㉠	**07** ㉢	**08** 7, 6
09 2, 2, -3	**10** 2, 8, 6	**11** 열, 행	**12** $a_{12}b_{22}$, $a_{21}b_{11}$
13 $m+n$, mn	**14** $\neq$	**15** BC	**16** AC
17 $=$, $=$	**18** 1, 0	**19** A	

08 $A+B=\begin{pmatrix} 4+2 & -1+7 \\ 3+(-1) & 2+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

09 $A-B=\begin{pmatrix} 4-2 & -1-7 \\ 3-(-1) & 2-5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

10 $2A=\begin{pmatrix} 2\times 4 & 2\times(-1) \\ 2\times 3 & 2\times 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

중단원 마무리 306~308쪽

01 27	**02** 2	**03** $\begin{pmatrix} -4 & -20 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}$	
04 ③	**05** $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$	**06** ①	**07** ①
08 6	**09** ⑤	**10** -1	**11** ㄴ, ㄷ, ㅁ
12 ④	**13** -10	**14** ②	**15** 100
16 ③	**17** $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	**18** 16	**19** ④
20 ④	**21** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -4 & 5 & 5 \\ -5 & -5 & 8 \end{pmatrix}$		**22** -5
23 9	**24** -1		

LEVEL 1

01 $a_{11}=1^2+1=2$, $a_{12}=1^2+2=3$, $a_{13}=1^2+3=4$

$a_{21}=2^2+1=5$, $a_{22}=2^2+2=6$, $a_{23}=2^2+3=7$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$2+3+4+5+6+7=27$

02 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a+4=2$, $-b+1=b-1$에서 $a=-2$, $b=1$ ⋯⋯ ㉠

따라서 $ax+b=-3$이므로 ㉠을 대입하면

$-2x+1=-3$ $\quad\therefore x=2$

03 $2A+3(B-2C)$

$=2A+3B-6C$

$=2\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}-6\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -6 & 18 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -20 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}$

04 $2(A-2X)+X-B=-A+5B$에서

$2A-4X+X-B=-A+5B$, $3X=3A-6B$

$\therefore X=A-2B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$0+(-1)+4+3=6$

05 $2X+Y=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ ⋯⋯ ㉠

$X-Y=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ⋯⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$3X=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

$\therefore X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

㉠−㉡×2를 하면

$3Y=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore Y=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore -X+2Y=-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

06 $A^2=AA=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix}$

이때, 행렬 A^2의 모든 성분의 합이 6이므로

$2a+2=6$ $\quad\therefore a=2$

07 $(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-BA+B^2$

$=A^2-2AB+B^2$

이므로 $AB=BA$

$AB=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ x & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & y \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -y+8 \\ 3x-2 & xy-4 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 3 & y \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ x & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xy-3 & -2y+12 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}$

즉, $\begin{pmatrix} 1 & -y+8 \\ 3x-2 & xy-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xy-3 & -2y+12 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$1=xy-3$, $-y+8=-2y+12$, $3x-2=2x-1$, $xy-4=0$

위의 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=4$

$\therefore x-y=-3$

08 케일리-해밀턴의 정리에 의하여 $A^2-A+E=O$

$\therefore A^3-A^2+3A+3E=A(A^2-A+E-E)+3A+3E$
$=-A+3A+3E=2A+3E$

따라서 $p=2$, $q=3$이므로 $pq=6$

LEVEL 2

09 $a_{11}=(1$ 마을에서 1 마을로 가는 길의 개수$)=1$

$a_{12}=(1$ 마을에서 2 마을로 가는 길의 개수$)=1$

$a_{13}=(1$ 마을에서 3 마을로 가는 길의 개수$)=2$

마찬가지 방법으로

$a_{21}=0$, $a_{22}=0$, $a_{23}=2$, $a_{31}=2$, $a_{32}=1$, $a_{33}=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&2\\2&1&0\end{pmatrix}$

10 $x\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1&-2\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y&x-2y\\3x+y&-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&8\\3&3\end{pmatrix}$

$2x+y=1$, $x-2y=8$, $3x+y=3$, $-y=3$이므로

위의 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-3$

$\therefore x+y=-1$

11 두 행렬 P, Q의 곱 PQ가 정의되려면 행렬 P의 열의 개수와 행렬 Q의 행의 개수가 같아야 하므로 정의될 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ이다.

참고 ㄴ. 행렬 BA는 3×2 행렬이다.
ㄷ. 행렬 BC는 3×1 행렬이다.
ㅁ. 행렬 A^2은 2×2 행렬이다.

12 $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&-1\\\beta&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta^2&-\alpha-\beta\\\alpha+\beta&-2\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta^2&-\alpha-\beta\\\alpha+\beta&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$이므로

$a=\alpha^2+\beta^2$, $d=-2$

이때, 이차방정식 $x^2-x-4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-4$

$\therefore a+d=\alpha^2+\beta^2-2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2$
$=1^2-2\times(-4)-2=7$

13 $A-\frac{1}{2}B=\begin{pmatrix}3&-1\\0&1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4&4\\2&2\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}3&-1\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-3\\-1&0\end{pmatrix}$

이므로

$B\left(A-\frac{1}{2}B\right)=\begin{pmatrix}-4&4\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-3\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-24&12\\8&-6\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $B\left(A-\frac{1}{2}B\right)$의 모든 성분의 합은

$-24+12+8+(-6)=-10$

14 $A^2=AA=\begin{pmatrix}a&-4\\1&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&-4\\1&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2-4&-4a-4b\\a+b&-4+b^2\end{pmatrix}$

즉, $\begin{pmatrix}a^2-4&-4a-4b\\a+b&-4+b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$이므로

$a^2-4=0$에서 $a^2=4$ $\quad\therefore a=\pm2$

$-4+b^2=0$에서 $b^2=4$ $\quad\therefore b=\pm2$

이때, $a+b=0$에서 $b=-a$이므로

$a=2$, $b=-2$ 또는 $a=-2$, $b=2$

$\therefore |a-b|=4$

15 $A^2=AA=\begin{pmatrix}1&0\\5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\10&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\10&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\15&1\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&0\\15&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\20&1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^{20}=\begin{pmatrix}1&0\\100&1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^{20}의 $(2, 1)$ 성분은 100이다.

16 $ACA-BCA=(A-B)CA$

이때, $A-B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&-2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-1&0\end{pmatrix}$이고,

$CA=\begin{pmatrix}1&-3\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-3\\8&4\end{pmatrix}$이므로

$ACA-BCA=(A-B)CA$
$=\begin{pmatrix}2&2\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&-3\\8&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&2\\5&3\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $ACA-BCA$의 모든 성분의 합은

$6+2+5+3=16$

17 $A^2+AB-BA-B^2=A(A+B)-B(A+B)$
$=(A-B)(A+B)$

이때, $A-B=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&-1\end{pmatrix}$,

$A+B=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$이므로

(주어진 식)$=(A-B)(A+B)$
$=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\-2&0\end{pmatrix}$

18 $A^2=AA=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$

$\therefore A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$

따라서 $A^n=E$를 만족시키는 100 이하의 자연수 n은 6, 12, 18, $\cdots$, 96이므로 개수는 16이다.

19 ㄱ. [반례] $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이면

$AB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이고 $A\neq O$이지만

$B\neq O$이다. (거짓)

ㄴ. $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+AB+B^2$

$=A^2+2AB+B^2$

이므로 $AB=BA$

$\therefore (A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

$=A^2-B^2$ (참)

ㄷ. $AB+BA=O$에서 $BA=-AB$이므로

$(AB)^2=(AB)(AB)=A(BA)B$

$=A(-AB)B=-A^2B^2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

20 (i) $A\neq kE$ (k는 실수)일 때

케일리－해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-2aA+(a^2-b^2)E=O$

이 식이 $A^2-6A+8E=O$와 같으므로

$2a=6$, $a^2-b^2=8$ $\quad\therefore a=3, b=\pm1$

즉, 순서쌍 (a, b)는 $(3, -1)$, $(3, 1)$이다.

(ii) $A=kE$ (k는 실수)일 때

$A^2-6A+8E=O$에 $A=kE$를 대입하면

$k^2E-6kE+8E=O$, $(k^2-6k+8)E=O$

$k^2-6k+8=0$, $(k-2)(k-4)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=4$

즉, $A=2E=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 또는 $A=4E=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$이므로

순서쌍 (a, b)는 $(2, 0)$, $(4, 0)$이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는 4이다.

서술형

21 $a_{ij}=\begin{cases} j+2 & (i<j) \\ 3i-1 & (i=j) \\ -a_{ji} & (i>j) \end{cases}$ $(i=1, 2, 3, j=1, 2, 3)$에서

$a_{11}=3\times1-1=2$, $a_{12}=2+2=4$, $a_{13}=3+2=5$

$a_{21}=-a_{12}=-4$, $a_{22}=3\times2-1=5$, $a_{23}=3+2=5$

$a_{31}=-a_{13}=-5$, $a_{32}=-a_{23}=-5$, $a_{33}=3\times3-1=8$ ··· ❶

$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -4 & 5 & 5 \\ -5 & -5 & 8 \end{pmatrix}$ ··· ❷

채점 기준	비율
❶ $i=1, 2, 3, j=1, 2, 3$을 대입하여 성분 a_{ij}를 각각 구할 수 있다.	70 %
❷ 행렬 A를 구할 수 있다.	30 %

22 $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ······ ㉠

$A-B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ······ ㉡

㉠＋㉡을 하면

$2A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ··· ❶

㉠－㉡을 하면

$2B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ··· ❷

$\therefore A^2-B^2=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^2-B^2의 모든 성분의 합은

$-3+1+(-6)+3=-5$ ··· ❸

채점 기준	비율
❶ 행렬 A를 구할 수 있다.	30 %
❷ 행렬 B를 구할 수 있다.	30 %
❸ 행렬 A^2-B^2의 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	40 %

23 $(2A+E)^2=(2A)^2+2\times2A\times E+E^2$

$=4A^2+4A+E$ ··· ❶

이때, $A^2=AA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$ ··· ❷

$\therefore (2A+E)^2=4A^2+4A+E=4E+4A+E$

$=4A+5E$ ··· ❸

따라서 $p=4$, $q=5$이므로 $p+q=9$ ··· ❹

채점 기준	비율
❶ $(2A+E)^2$을 전개하여 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $A^2=E$임을 알 수 있다.	30 %
❸ $(2A+E)^2=pA+qE$ 꼴로 나타낼 수 있다.	30 %
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

24 케일리－해밀턴의 정리에 의하여

$A^2+A+E=O$ ··· ❶

양변에 $A-E$를 곱하면

$(A-E)(A^2+A+E)=O$

$A^3-E=O$ $\quad\therefore A^3=E$ ··· ❷

$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{50}$

$=(A+A^2+E)+(A+A^2+E)+\cdots+A^{49}+A^{50}$

$=16(A^2+A+E)+A+A^2$

$=A^2+A=-E$

따라서 $kE=-E$이므로 $k=-1$ ··· ❸

채점 기준	비율
❶ 케일리－해밀턴의 정리를 이용할 수 있다.	20 %
❷ 식을 변형하여 $A^3=E$임을 알 수 있다.	40 %
❸ 주어진 등식을 만족시키는 실수 k의 값을 구할 수 있다.	40 %