이 책의
정답과 해설
공통수학 1

Ⅰ 다항식

Ⅱ 방정식과 부등식

Ⅲ 경우의 수

Ⅳ 행렬

1 다항식의 연산

본책 8~21쪽

STEP 1 개념 마스터

0001

(1) x에 대하여 차수가 높은 항부터 나열하면

$-x^2+(2y+1)x+2y^2+1$

(2) x에 대하여 차수가 낮은 항부터 나열하면

$2y^2+1+(2y+1)x-x^2$

답 (1) $-x^2+(2y+1)x+2y^2+1$ (2) $2y^2+1+(2y+1)x-x^2$

0002 답 $4x^2+4xy+y^2$

0003

$(x^2-3xy+y^2)-(-3x^2-5xy+2y^2)$

$=x^2-3xy+y^2+3x^2+5xy-2y^2$

$=4x^2+2xy-y^2$ 답 $4x^2+2xy-y^2$

0004

$(7x^2+xy-y^2)+(xy-5y^2)-(x^2+4xy)$

$=7x^2+xy-y^2+xy-5y^2-x^2-4xy$

$=6x^2-2xy-6y^2$ 답 $6x^2-2xy-6y^2$

0005

$-3A+2B$

$=-3(2x^3+3x^2-5x+1)+2(-x^3-4x^2+3)$

$=-6x^3-9x^2+15x-3-2x^3-8x^2+6$

$=-8x^3-17x^2+15x+3$ 답 $-8x^3-17x^2+15x+3$

0006

$5B-(2A+B)$

$=5B-2A-B=-2A+4B$

$=-2(2x^3+3x^2-5x+1)+4(-x^3-4x^2+3)$

$=-4x^3-6x^2+10x-2-4x^3-16x^2+12$

$=-8x^3-22x^2+10x+10$ 답 $-8x^3-22x^2+10x+10$

0007

$4x(x^2+x-2)=4x^3+4x^2-8x$ 답 $4x^3+4x^2-8x$

0008

$-3x^2(2x^3-x^2-1)=-6x^5+3x^4+3x^2$ 답 $-6x^5+3x^4+3x^2$

0009

$(a-2)(a^2+1)=a^3-2a^2+a-2$ 답 a^3-2a^2+a-2

0010

$(2x+1)(3y-4)=6xy-8x+3y-4$ 답 $6xy-8x+3y-4$

0011

$(-x+y^2)(2x^2-3y)=-2x^3+2x^2y^2+3xy-3y^3$

답 $-2x^3+2x^2y^2+3xy-3y^3$

0012

$(2a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=2a^3+2a^2b+2ab^2-a^2b-ab^2-b^3$

$=2a^3+a^2b+ab^2-b^3$ 답 $2a^3+a^2b+ab^2-b^3$

0013

$(2x+1)^2=(2x)^2+2\cdot2x\cdot1+1^2$

$=4x^2+4x+1$ 답 $4x^2+4x+1$

0014

$(3x-1)^2=(3x)^2-2\cdot3x\cdot1+1^2$

$=9x^2-6x+1$ 답 $9x^2-6x+1$

0015

$(4x-3)(4x+3)=(4x)^2-3^2$

$=16x^2-9$ 답 $16x^2-9$

0016

$(5x+2y)(5x-2y)=(5x)^2-(2y)^2$

$=25x^2-4y^2$ 답 $25x^2-4y^2$

0017

$(x+4)(x-6)=x^2+(4-6)x+4\cdot(-6)$

$=x^2-2x-24$ 답 $x^2-2x-24$

0018

$(2x+3)(4x-7)=2\cdot4x^2+(-14+12)x+3\cdot(-7)$

$=8x^2-2x-21$ 답 $8x^2-2x-21$

0019

$(x+2y+3z)^2$

$=x^2+(2y)^2+(3z)^2+2\cdot x\cdot2y+2\cdot2y\cdot3z+2\cdot3z\cdot x$

$=x^2+4y^2+9z^2+4xy+12yz+6zx$

답 $x^2+4y^2+9z^2+4xy+12yz+6zx$

0020

$(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot2+3\cdot x\cdot2^2+2^3$

$=x^3+6x^2+12x+8$ 답 $x^3+6x^2+12x+8$

0021

$(3x-4y)^3=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 4y+3\cdot 3x\cdot(4y)^2-(4y)^3$

$=27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3$

답 $27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3$

0022

$(x+3)(x^2-3x+9)=x^3+3^3=x^3+27$ 답 x^3+27

0023

$(5x-2)(25x^2+10x+4)=(5x)^3-2^3$

$=125x^3-8$ 답 $125x^3-8$

0024

$(x+1)(x+3)(x+5)$

$=x^3+(1+3+5)x^2+(1\cdot 3+3\cdot 5+5\cdot 1)x+1\cdot 3\cdot 5$

$=x^3+9x^2+23x+15$ 답 $x^3+9x^2+23x+15$

0025

$(1+x)(1+y)(1-z)$

$=1^3+(x+y-z)\cdot 1^2+(xy-yz-zx)\cdot 1-xyz$

$=1+x+y-z+xy-yz-zx-xyz$

답 $1+x+y-z+xy-yz-zx-xyz$

0026

$(x-y+1)(x^2+y^2+xy-x+y+1)$

$=\{x+(-y)+1\}\{x^2+(-y)^2+1^2-x\cdot(-y)-(-y)\cdot 1-1\cdot x\}$

$=x^3+(-y)^3+1^3-3\cdot x\cdot(-y)\cdot 1$

$=x^3-y^3+3xy+1$ 답 $x^3-y^3+3xy+1$

0027

$(9x^2+6xy+4y^2)(9x^2-6xy+4y^2)$

$=\{(3x)^2+3x\cdot 2y+(2y)^2\}\{(3x)^2-3x\cdot 2y+(2y)^2\}$

$=(3x)^4+(3x)^2(2y)^2+(2y)^4$

$=81x^4+36x^2y^2+16y^4$ 답 $81x^4+36x^2y^2+16y^4$

0028

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\cdot 1=7$

(2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=3^3-3\cdot 1\cdot 3=18$

답 (1) 7 (2) 18

0029

(1) $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=4^2+2\cdot(-2)=12$

(2) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=4^3+3\cdot(-2)\cdot 4=40$

답 (1) 12 (2) 40

0030

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}=6^2-2=34$

(2) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\cdot x\cdot\frac{1}{x}=6^2-4=32$

$\therefore x-\frac{1}{x}=\pm 4\sqrt{2}$ 답 (1) 34 (2) $\pm 4\sqrt{2}$

0031

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}=2^2+2=6$

(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\cdot x\cdot\frac{1}{x}=2^2+4=8$

$\therefore x+\frac{1}{x}=\pm 2\sqrt{2}$ 답 (1) 6 (2) $\pm 2\sqrt{2}$

0032

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=9^2-2\cdot 8=65$ 답 65

0033 답 (가) 4 (나) 4 (다) 2

0034

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-x-1 \\ \hline
x+2 & x^3+x^2-3x+5 \\
 & x^3+2x^2 \\ \hline
 & -x^2-3x \\
 & -x^2-2x \\ \hline
 & -x+5 \\
 & -x-2 \\ \hline
 & 7
\end{array}
$$

$\therefore$ 몫 : x^2-x-1, 나머지 : 7 답 몫 : x^2-x-1, 나머지 : 7

0035

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+2 \\ \hline
x^2-x-1 & x^3+x^2-x+3 \\
 & x^3-x^2-x \\ \hline
 & 2x^2+3 \\
 & 2x^2-2x-2 \\ \hline
 & 2x+5
\end{array}
$$

$\therefore$ 몫 : $x+2$, 나머지 : $2x+5$ 답 몫 : $x+2$, 나머지 : $2x+5$

0036

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x-2 \\ \hline
x^2+x+2 & 2x^3-4x+1 \\
 & 2x^3+2x^2+4x \\ \hline
 & -2x^2-8x+1 \\
 & -2x^2-2x-4 \\ \hline
 & -6x+5
\end{array}
$$

$\therefore$ 몫 : $2x-2$, 나머지 : $-6x+5$ 답 몫 : $2x-2$, 나머지 : $-6x+5$

0037 답 (가) 3 (나) 3 (다) -9 (라) -2 (마) -10 (바) x^2-2x-3 (사) -10

0038

1	1	-2	1	6
		1	-1	0
	1	-1	0	6

$\therefore$ 몫 : x^2-x, 나머지 : 6

답 몫 : x^2-x, 나머지 : 6

0039

-2	3	4	0	-5
		-6	4	-8
	3	-2	4	-13

$\therefore$ 몫 : $3x^2-2x+4$, 나머지 : -13

답 몫 : $3x^2-2x+4$, 나머지 : -13

0040

$\frac{1}{2}$	2	1	-5	-4
		1	1	-2
	2	2	-4	-6

$\therefore$ 몫 : $2x^2+2x-4$, 나머지 : -6

답 몫 : $2x^2+2x-4$, 나머지 : -6

0041

$-\frac{2}{3}$	3	-4	-1	0
		-2	4	-2
	3	-6	3	-2

$\therefore$ 몫 : $3x^2-6x+3$, 나머지 : -2

답 몫 : $3x^2-6x+3$, 나머지 : -2

STEP 2 유형 마스터

유형 01, 02 다항식의 덧셈과 뺄셈(1), (2) 개념 01

(i) 구하는 식을 간단히 정리한다.
(ii) 주어진 다항식을 정리한 식에 대입하여 계산한다.

0042

$3A-2(2A-B)+C$
$=3A-4A+2B+C=-A+2B+C$
$=-(3x^2-2xy+4y^2)+2(5x^2-3xy+y^2)+(-2x^2-5y^2)$
$=-3x^2+2xy-4y^2+10x^2-6xy+2y^2-2x^2-5y^2$
$=5x^2-4xy-7y^2$

답 ①

0043

$2A+B-2C$
$=2(x^2-2x+y^2)+(3x-y+2y^2)-2(3x^2+2y^2)$
$=2x^2-4x+2y^2+3x-y+2y^2-6x^2-4y^2$
$=-4x^2-x-y$

답 $-4x^2-x-y$

0044

$A-2(X-B)=2A$에서
$A-2X+2B=2A$, $2X=-A+2B$
$\therefore X=-\frac{1}{2}A+B$
$=-\frac{1}{2}(2x^3+4x^2-6)+(x^3-x^2+2x+3)$
$=-x^3-2x^2+3+x^3-x^2+2x+3$
$=-3x^2+2x+6$

답 ①

0045

$A+B=3x^2+5x+7$ …… ㉠
$A-B=x^2-3x-3$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면
$2A=4x^2+2x+4$ $\therefore A=2x^2+x+2$

답 ④

0046

$A+B=x^2+xy+y^2$ …… ㉠
$B+C=4x^2-3xy+y^2$ …… ㉡
$C+A=-3x^2+4y^2$ …… ㉢
㉠+㉡+㉢을 하면
$2(A+B+C)=2x^2-2xy+6y^2$
$\therefore A+B+C=x^2-xy+3y^2$

답 ④

0047

$2A+B=x^2+8x-3$ …… ㉠
$A-B=2x^2+x-12$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면
$3A=3x^2+9x-15$ $\therefore A=x^2+3x-5$ … ❶
이것을 ㉡에 대입하면
$(x^2+3x-5)-B=2x^2+x-12$
$\therefore B=x^2+3x-5-(2x^2+x-12)=-x^2+2x+7$ … ❷
$\therefore 3A+2B=3(x^2+3x-5)+2(-x^2+2x+7)$
$=3x^2+9x-15-2x^2+4x+14$
$=x^2+13x-1$ … ❸

답 $x^2+13x-1$

채점 기준	비율
❶ 다항식 A를 구할 수 있다.	40 %
❷ 다항식 B를 구할 수 있다.	30 %
❸ $3A+2B$를 계산할 수 있다.	30 %

유형 03 다항식의 전개식에서 특정항의 계수 구하기 개념 02

주어진 식을 모두 전개하지 않고 분배법칙을 이용하여 구하고자 하는 항이 나오도록 각 다항식에서 하나씩 선택하여 곱한다.

0048

$(x^3+2x^2-x+4)(2x^2+3x-5)$의 전개식에서 x^3항은
$x^3\cdot(-5)+2x^2\cdot 3x+(-x)\cdot 2x^2=-5x^3+6x^3-2x^3=-x^3$
따라서 x^3의 계수는 -1이다.

답 -1

0049

$(3x^2+3x+4)(2x^2+kx-7)$의 전개식에서 x^2항은

$3x^2\cdot(-7)+3x\cdot kx+4\cdot 2x^2=(3k-13)x^2$

이때, x^2의 계수가 5이므로

$3k-13=5 \qquad \therefore k=6$

답 6

0050

$(1+2x+3x^2+4x^3)^2=(1+2x+3x^2+4x^3)(1+2x+3x^2+4x^3)$

이 식의 전개식에서 x^2항은

$1\cdot 3x^2+2x\cdot 2x+3x^2\cdot 1=3x^2+4x^2+3x^2=10x^2$

$(1+2x+3x^2)^2=(1+2x+3x^2)(1+2x+3x^2)$

이 식의 전개식에서 x^2항은

$1\cdot 3x^2+2x\cdot 2x+3x^2\cdot 1=3x^2+4x^2+3x^2=10x^2$

따라서 두 다항식 $(1+2x+3x^2+4x^3)^2$, $(1+2x+3x^2)^2$의 전개식에서 x^2의 계수는 모두 10이므로 주어진 식의 x^2의 계수는 0이다.

답 ①

다른 풀이 $(1+2x+3x^2+4x^3)^2$의 전개식에서 x^2의 계수는 $4x^3$과 관계없이 결정되므로 $(1+2x+3x^2+4x^3)^2$과 $(1+2x+3x^2)^2$의 전개식에서 x^2의 계수는 서로 같다. 따라서 주어진 식의 x^2의 계수는 0이다.

0051

$(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+10)$의 전개식에서 x^9항은

$x^9\cdot 10+x^9\cdot 9+x^9\cdot 8+\cdots+x^9\cdot 2+x^9\cdot 1$

$=(1+2+\cdots+8+9+10)x^9=55x^9$

따라서 x^9의 계수는 55이다.

답 ③

유형 04 곱셈 공식을 이용한 식의 전개 개념 02

곱셈 공식을 이용하여 식을 전개할 때는 곱셈 공식들 중 어느 공식을 이용하는 꼴인지 확인하고, 부호에 주의한다.

0052

① $(x-1)(x+2)(x-4)$

$=x^3+(-1+2-4)x^2+\{(-1)\cdot 2+2\cdot(-4)+(-4)\cdot(-1)\}x+(-1)\cdot 2\cdot(-4)$

$=x^3-3x^2-6x+8$

② $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)=(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

$=(a^4-b^4)(a^4+b^4)$

$=a^8-b^8$

④ $(x-2y)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot(2y)^2-(2y)^3$

$=x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

⑤ $(x-2)(x^2+2x+4)=x^3-2^3=x^3-8$

답 ③

0053

$(x+y-2)^2$

$=x^2+y^2+(-2)^2+2\cdot x\cdot y+2\cdot y\cdot(-2)+2\cdot(-2)\cdot x$

$=x^2+y^2+2xy-4x-4y+4$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=-4$이므로 $abc=-8$

답 -8

0054

$(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

$=\{(x-y)(x^2+xy+y^2)\}\{(x+y)(x^2-xy+y^2)\}$

$=(x^3-y^3)(x^3+y^3)$

$=(x^3)^2-(y^3)^2=x^6-y^6$

답 ①

0055

$(x^2-4)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

$=(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

$=\{(x-2)(x^2+2x+4)\}\{(x+2)(x^2-2x+4)\}$

$=(x^3-8)(x^3+8)=(x^3)^2-8^2=x^6-64$

$=65-64$ ($\because x^6=65$)

$=1$

답 ①

유형 05 공통부분이 있는 식의 전개 개념 02

(1) 공통부분이 있는 식을 전개할 때는

⇨ 공통부분을 t로 놓고 곱셈 공식을 이용하여 전개한 후 치환한 식을 대입하여 원래의 문자에 대한 식으로 나타낸다.

(2) 공통부분이 없는 경우에는 공통부분이 생기도록 식을 변형한다.

0056

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$

$x^2+5x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t+4)(t+6)=t^2+10t+24$

$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24$

$=x^4+10x^3+25x^2+10x^2+50x+24$

$=x^4+10x^3+35x^2+50x+24$

답 $x^4+10x^3+35x^2+50x+24$

0057

$(a-b+c)(a+b-c)=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$

$b-c=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(a-t)(a+t)=a^2-t^2$

$=a^2-(b-c)^2$

$=a^2-(b^2-2bc+c^2)$

$=a^2-b^2+2bc-c^2$

전개한 식을 b에 대한 내림차순으로 정리하면

$-b^2+2bc+a^2-c^2$

답 ③

0058

$x^2-2x=t$로 놓으면

$(x^2-2x+3)(x^2-2x-1)=(t+3)(t-1)=t^2+2t-3$

$=(x^2-2x)^2+2(x^2-2x)-3$

$=x^4-4x^3+4x^2+2x^2-4x-3$

$=x^4-4x^3+6x^2-4x-3$

따라서 $a=6$, $b=-4$이므로 $2a+b=8$

답 8

0059

$(5+3a)^3=A$, $(5-3a)^3=B$로 놓으면

$\{(5+3a)^3-(5-3a)^3\}^2-\{(5+3a)^3+(5-3a)^3\}^2$

$=(A-B)^2-(A+B)^2=-4AB$

$=-4(5+3a)^3(5-3a)^3$

$=-4\{(5+3a)(5-3a)\}^3$

$=-4(25-9a^2)^3$

$=-4\cdot(25-9\cdot3)^3$ ($\because a=\sqrt{3}$)

$=-4\cdot(-8)=32$

답 32

유형 06 곱셈 공식의 변형을 이용한 식의 값 구하기 – 두 문자인 경우 (개념 03)

a^2+b^2, a^3+b^3, a^3-b^3의 값을 구할 때는 $a+b$, $a-b$, ab의 값을 이용할 수 있도록 다음과 같이 식을 변형한다.

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

0060

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$4=(2\sqrt{2})^2-2xy$ $\quad\therefore xy=2$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=(2\sqrt{2})^3-3\cdot2\cdot2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

답 ④

0061

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$에서

$4=1^3+3xy\cdot1$ $\quad\therefore xy=1$

$\therefore \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{y^2+x^2}{xy}=\dfrac{(x-y)^2+2xy}{xy}$

$=\dfrac{1^2+2\cdot1}{1}=3$

답 ⑤

0062

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$7=1^3-3xy\cdot1$ $\quad\therefore xy=-2$ … ❶

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1^2-2\cdot(-2)=5$ … ❷

$\therefore x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$

$=5^2-2\cdot(-2)^2=17$ … ❸

답 17

채점 기준	비율
❶ xy의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ x^2+y^2의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ x^4+y^4의 값을 구할 수 있다.	40 %

0063

$a=2+\sqrt{3}$, $b=2-\sqrt{3}$에서 $a+b=4$, $ab=1$

$\therefore \dfrac{b}{a^2}+\dfrac{a}{b^2}=\dfrac{b^3+a^3}{a^2b^2}=\dfrac{(a+b)^3-3ab(a+b)}{(ab)^2}$

$=\dfrac{4^3-3\cdot1\cdot4}{1^2}=52$

답 52

유형 07 곱셈 공식의 변형을 이용한 식의 값 구하기 – $x\pm\dfrac{1}{x}$ 꼴을 포함한 경우 (개념 03)

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값을 구할 때는 $x+\dfrac{1}{x}$ 또는 $x-\dfrac{1}{x}$의 값을 이용할 수 있도록 다음과 같이 식을 변형한다.

① $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$

② $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

(2) $x^2-kx+1=0$ 꼴의 조건식이 주어진 경우에는 양변을 $x(x\neq0)$로 나누어 조건식을 $x+\dfrac{1}{x}=k$ 꼴로 만든 후 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값을 구한다.

0064

$x\neq0$이므로 $x^2-3x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-3+\dfrac{1}{x}=0$ $\quad\therefore x+\dfrac{1}{x}=3$

$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=3^3-3\cdot3=18$

답 ⑤

참고 $x=0$을 $x^2-3x+1=0$에 대입하면 $1\neq0$이므로 $x\neq0$이다.

0065

$x\neq0$이므로 $x^2+2x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x+2-\dfrac{1}{x}=0$ $\quad\therefore x-\dfrac{1}{x}=-2$

$\therefore x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=(-2)^3+3\cdot(-2)=-14$

답 ②

참고 $x^3-\dfrac{1}{x^3}$의 값을 구할 때는 $x-\dfrac{1}{x}$의 값을 이용할 수 있도록 다음과 같이 식을 변형한다.

$x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

0066

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=3+2=5$

그런데 $x>0$이므로 $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$

$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=(\sqrt{5})^3-3\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

답 ②

0067

$x\neq0$이므로 $x^2-x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-1-\dfrac{1}{x}=0$ $\quad\therefore x-\dfrac{1}{x}=1$

$\therefore x^2+2x-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2+2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=1^2+2+2\cdot1=5$

답 ⑤

발전 유형 08 곱셈 공식의 변형을 이용한 식의 값 구하기 – 세 문자인 경우 개념 03

$a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구할 때는 $a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc의 값을 이용할 수 있도록 다음과 같이 식을 변형한다.

(1) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

(2) $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

이때, 곱셈 공식 (2)에서

$a+b+c=0$ 또는 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$이면

$a^3+b^3+c^3=3abc$

0068

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$(-1)^2=5+2(ab+bc+ca) \qquad \therefore ab+bc+ca=-2$

$\therefore a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$\qquad\qquad\qquad =-1\cdot\{5-(-2)\}+3\cdot 2=-1$

답 ②

0069

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$1^2=2+2(ab+bc+ca) \qquad \therefore ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$에서

$3=1\cdot\left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}+3abc$, $3abc=\frac{1}{2}$

$\therefore abc=\frac{1}{6}$

답 $\frac{1}{6}$

0070

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$1^2=7+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=-3$ …… ㉠

㉠의 양변을 제곱하여 정리하면

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(ab^2c+abc^2+a^2bc)=9$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=9$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2\cdot 1\cdot 1=9$

$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=7$

답 7

Plus⁺ 다음 등식을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

(1) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

(2) $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

0071

$a-b=2$, $b-c=3$을 변끼리 더하면 $a-c=5$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\cdot\{2^2+3^2+(-5)^2\}=19$

답 19

유형 09 곱셈 공식을 이용한 수의 계산 개념 02

곱셈 공식을 이용할 수 있도록 식을 변형하거나 하나의 수를 두 수의 합 또는 차로 나타낸다.

특히, 주어진 식에 $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\cdots$ 꼴이 있는 경우 $a-b$를 곱하여 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용한다.

0072

$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=\underbrace{(2-1)}_{2-1=1}(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=(2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=(2^{16}-1)(2^{16}+1)$

$=2^{32}-1$

답 ④

참고 주어진 식에 적당한 값을 곱하여 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하는 경우에는 등식이 성립하도록 곱한 값만큼 반드시 나누어야 한다.

0073

$100=a$로 놓으면

$101\times 9901-99\times 10101$

$=(100+1)(100^2-100+1)-(100-1)(100^2+100+1)$

$=(a+1)(a^2-a+1)-(a-1)(a^2+a+1)$

$=a^3+1-(a^3-1)$

$=2$

답 2

참고 복잡한 수의 계산에서 반복되는 수가 있으면 이 수를 문자로 놓고 간단히 정리하여 계산한다.

0074

$9\times 11\times 101\times 10001$

$=(10-1)(10+1)(100+1)(10000+1)$

$=(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)$

$=(10^4-1)(10^4+1)$

$=10^8-1$

답 ②

0075

$1.02^3=(1+0.02)^3$

$\quad =1^3+3\times 1^2\times 0.02+3\times 1\times 0.02^2+0.02^3$

$\quad =1+0.06+0.0012+0.000008$

$\quad =1.061208$ … ❶

즉, 소수점 아래 둘째, 셋째, 넷째 자리의 숫자는 각각 6, 1, 2이다. … ❷

따라서 구하는 합은 9이다. … ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 1.02^3을 곱셈 공식을 이용하여 계산할 수 있다.	50 %
❷ 소수점 아래 둘째, 셋째, 넷째 자리의 숫자를 각각 구할 수 있다.	30 %
❸ 소수점 아래 둘째, 셋째, 넷째 자리의 숫자의 합을 구할 수 있다.	20 %

유형 10 곱셈 공식의 도형에의 응용 개념 03

삼각형의 세 변의 길이, 직육면체의 세 모서리의 길이 등을 a, b, c로 놓고, 주어진 길이, 넓이, 부피 등을 a, b, c에 대한 식으로 나타낸 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

0076

직육면체의 세 모서리의 길이를 각각 a, b, c라 하면
모든 모서리의 길이의 합이 32이므로
$4(a+b+c)=32 \qquad \therefore a+b+c=8$
또, 직육면체의 겉넓이가 36이므로
$2(ab+bc+ca)=36$
이때, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서
$8^2=a^2+b^2+c^2+36 \qquad \therefore a^2+b^2+c^2=28$
$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

답 $2\sqrt{7}$

Lecture

세 모서리의 길이가 각각 a, b, c인 직육면체에서
(1) 모서리의 길이의 총합 ⇨ $4(a+b+c)$
(2) 대각선의 길이 ⇨ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
(3) 겉넓이 ⇨ $2(ab+bc+ca)$
(4) 부피 ⇨ abc

0077

직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면
직사각형의 대각선의 길이가 19이므로
$a^2+b^2=19^2=361$
또, 직사각형의 둘레의 길이가 42이므로
$2(a+b)=42 \qquad \therefore a+b=21$
이때, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서
$361=21^2-2ab \qquad \therefore ab=40$
따라서 직사각형의 넓이는 40이다.

답 40

0078

세 삼각형 A, B, C는 각각 한 변의 길이가 a, b, c인 정삼각형이므로
세 정삼각형의 넓이의 합은
$\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+c^2)$
세 정삼각형의 넓이의 합이 $25\sqrt{3}$이므로
$\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+c^2)=25\sqrt{3} \qquad \therefore a^2+b^2+c^2=100$ ⋯ ❶
세 정삼각형의 둘레의 길이의 합은 36이므로
$3(a+b+c)=36 \qquad \therefore a+b+c=12$ ⋯ ❷
이때, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서
$12^2=100+2(ab+bc+ca)$
$\therefore ab+bc+ca=22$ ⋯ ❸

답 22

채점 기준	비율
❶ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 11 다항식의 나눗셈 – 몫과 나머지 개념 04

다항식을 내림차순으로 정리하여 쓰되 계수가 0인 항은 비워 두고, 같은 차수끼리 자리를 맞추어 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.
이때, 나머지의 차수가 나누는 식의 차수보다 낮아질 때까지 나눈다.

0079

$$\begin{array}{rr} & x-1 \\ \cline{2-2} x^2-2x+2 \,\big) & x^3-3x^2+5x-4 \\ & x^3-2x^2+2x \\ \cline{2-2} & -x^2+3x-4 \\ & -x^2+2x-2 \\ \cline{2-2} & x-2 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=x-1$, $R(x)=x-2$이므로
$Q(2)+R(3)=1+1=2$

답 2

0080

$$\begin{array}{rr} & x^2+2x-2 \\ \cline{2-2} 2x+2 \,\big) & 2x^3+6x^2 \qquad -7 \\ & 2x^3+2x^2 \\ \cline{2-2} & 4x^2 \\ & 4x^2+4x \\ \cline{2-2} & -4x-7 \\ & -4x-4 \\ \cline{2-2} & -3 \end{array}$$

$\therefore a=2, b=4, c=4, d=7, e=-3$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0081

$$\begin{array}{rr} & 2x-3 \\ \cline{2-2} x^2-x-5 \,\big) & 2x^3-5x^2+x-1 \\ & 2x^3-2x^2-10x \\ \cline{2-2} & -3x^2+11x-1 \\ & -3x^2+3x+15 \\ \cline{2-2} & 8x-16 \end{array}$$

따라서 몫은 $2x-3$, 나머지는 $8x-16$이므로
$a=2, b=-3, c=8, d=-16$
$\therefore a+b+c+d=-9$

답 ①

유형 12 다항식의 나눗셈 – $A=BQ+R$ 개념 04

다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면
⇨ $A=BQ+R$ (단, (R의 차수)<(B의 차수))

0082

$x^3-x^2-2x+1=A(x+2)+3x-1$이므로
$A(x+2)=x^3-x^2-2x+1-(3x-1)$
$\qquad\quad =x^3-x^2-5x+2$
$\therefore A=(x^3-x^2-5x+2)\div(x+2)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-3x+1 \\ \hline
x+2 & x^3-x^2-5x+2 \\
 & x^3+2x^2 \\ \hline
 & -3x^2-5x \\
 & -3x^2-6x \\ \hline
 & x+2 \\
 & x+2 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore A=x^2-3x+1$ 답 ⑤

0083

$f(x)=(x-1)(3x-4)+5=3x^2-7x+9$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x-10 \\ \hline
x+1 & 3x^2-7x+9 \\
 & 3x^2+3x \\ \hline
 & -10x+9 \\
 & -10x-10 \\ \hline
 & 19
\end{array}
$$

따라서 $f(x)=3x^2-7x+9$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 $3x-10$, 나머지는 19이다. 답 몫 : $3x-10$, 나머지 : 19

0084

직육면체의 높이를 A라 하면

$(x+1)(x+2)A=2x^3+5x^2+x-2$

$\therefore A=(2x^3+5x^2+x-2)\div(x^2+3x+2)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x-1 \\ \hline
x^2+3x+2 & 2x^3+5x^2+x-2 \\
 & 2x^3+6x^2+4x \\ \hline
 & -x^2-3x-2 \\
 & -x^2-3x-2 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

따라서 직육면체의 높이는 $2x-1$이다. 답 $2x-1$

다른 풀이 $2x^3+5x^2+x-2$에서 x^3의 계수가 2이므로 구하는 높이를 $2x+k$ (k는 상수)라 하면

$(x+1)(x+2)(2x+k)=2x^3+5x^2+x-2$

양변의 상수항을 비교하면

$2k=-2 \qquad \therefore k=-1$

따라서 직육면체의 높이는 $2x-1$이다.

0085

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+x+3 \\ \hline
x^2+x-1 & 2x^4+3x^3+2x^2+2x-1 \\
 & 2x^4+2x^3-2x^2 \\ \hline
 & x^3+4x^2+2x \\
 & x^3+x^2-x \\ \hline
 & 3x^2+3x-1 \\
 & 3x^2+3x-3 \\ \hline
 & 2
\end{array}
$$

$\therefore 2x^4+3x^3+2x^2+2x-1=(x^2+x-1)(2x^2+x+3)+2$

이때, $x^2+x-1=0$이므로 구하는 식의 값은 2이다. 답 ②

유형 13 몫과 나머지의 변형 개념 04

다항식 $f(x)$를 일차식 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R일 때, $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 몫과 나머지는 다음과 같다.

$$f(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$$

$$\times a \qquad \times\frac{1}{a}$$

$$f(x)=(ax+b)\underbrace{\left\{\frac{1}{a}\cdot Q(x)\right\}}_{\text{몫}}+\underbrace{R}_{\text{나머지}}$$

0086

다항식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫과 나머지가 각각 $Q(x)$, R이므로

$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R=\frac{1}{2}(2x-1)Q(x)+R$

$\quad=(2x-1)\cdot\frac{1}{2}Q(x)+R$

따라서 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{2}Q(x)$, 나머지는 R이다. 답 ①

0087

다항식 $f(x)$를 $5x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지가 각각 $Q(x)$, R이므로

$f(x)=(5x-2)Q(x)+R$ … ❶

$\quad=5\left(x-\frac{2}{5}\right)Q(x)+R$

$\quad=\left(x-\frac{2}{5}\right)\cdot 5Q(x)+R$ … ❷

따라서 $f(x)$를 $x-\frac{2}{5}$로 나누었을 때의 몫은 $5Q(x)$, 나머지는 R이다. … ❸

답 몫 : $5Q(x)$, 나머지 : R

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 $5x-2$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$를 $x-\frac{2}{5}$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ $f(x)$를 $x-\frac{2}{5}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 수 있다.	20 %

0088

다항식 $f(x)$를 $3x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지가 각각 $Q(x)$, R이므로

$f(x)=(3x-1)Q(x)+R$

이 식의 양변에 x를 곱하면

$xf(x)=x(3x-1)Q(x)+Rx$

$\quad=3x\left(x-\frac{1}{3}\right)Q(x)+R\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}R$

$\quad=\left(x-\frac{1}{3}\right)\{3xQ(x)+R\}+\frac{1}{3}R$

따라서 $xf(x)$를 $x-\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫은 $3xQ(x)+R$, 나머지는 $\frac{1}{3}R$이다. 답 ④

유형 14 조립제법을 이용한 다항식의 나눗셈 개념 05

다항식을 일차식으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 때는 조립제법을 이용하면 편리하다. 이때, 차수가 높은 항의 계수부터 차례대로 적고, 해당되는 차수의 항이 없으면 그 자리에 0을 적는다.

0089

다항식 $3x^3+ax^2+bx-6$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & a & b & -6 \\ & & -3 & -a+3 & a-b-3 \\ \hline & 3 & a-3 & b-a+3 & \boxed{a-b-9} \end{array}$$

이때, $k=-1$, $c=-3$, $-a+3=1$, $b-a+3=-5$, $a-b-3=d$이므로

$k=-1$, $a=2$, $b=-6$, $c=-3$, $d=5$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

0090

주어진 조립제법에서 미정계수를 구하면 오른쪽과 같으므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ & & 2 & 10 & 16 \\ \hline & 1 & 5 & 8 & \boxed{18} \end{array}$$

$a=1$, $b=3$, $c=-2$, $d=2$

$\therefore a+b+c+d=4$

답 4

0091

주어진 조립제법에 의하여

$$f(x)=\left(x+\frac{2}{3}\right)(px+q)+r=3\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}(px+q)+r$$

$$=(3x+2)\left(\frac{1}{3}px+\frac{1}{3}q\right)+r$$

따라서 $f(x)$를 $3x+2$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{3}px+\frac{1}{3}q$, 나머지는 r이다.

답 몫 : $\frac{1}{3}px+\frac{1}{3}q$, 나머지 : r

STEP 3 내신 마스터

0092

유형 01 다항식의 덧셈과 뺄셈 (1)

|전략| 먼저 주어진 식을 간단히 정리한 후 A, B, C에 각 다항식을 대입하여 계산한다.

$2(A+B)-\{B-(A-C)\}$

$=2A+2B-(B-A+C)$

$=2A+2B-B+A-C$

$=3A+B-C$

$=3(2x^2+5xy+y^2)+(x^2-3xy+2y^2)-(-x^2+xy-3y^2)$

$=6x^2+15xy+3y^2+x^2-3xy+2y^2+x^2-xy+3y^2$

$=8x^2+11xy+8y^2$

답 ⑤

0093

유형 03 다항식의 전개식에서 특정항의 계수 구하기 + 04 곱셈 공식을 이용한 식의 전개

|전략| 곱셈 공식을 이용하여 식을 전개하고, x^4항과 x항이 나오는 부분만 찾아 계수를 구한다.

$(2x-1)^3(x+3)^2=(8x^3-12x^2+6x-1)(x^2+6x+9)$

이 식의 전개식에서

x^4항은 $8x^3\cdot 6x+(-12x^2)\cdot x^2=48x^4-12x^4=36x^4$

x항은 $6x\cdot 9+(-1)\cdot 6x=54x-6x=48x$

따라서 x^4의 계수는 36, x의 계수는 48이므로

$a=36$, $b=48$ $\quad\therefore a+b=84$

답 ③

0094

유형 05 공통부분이 있는 식의 전개

|전략| 공통부분이 생기도록 두 일차식끼리 적당히 묶어 전개한다.

$(x+2)(x+3)(x-1)(x-2)$

$=\{(x+2)(x-1)\}\{(x+3)(x-2)\}$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-6)$

$x^2+x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-2)(t-6)=t^2-8t+12$

$=(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$

$=x^4+2x^3+x^2-8x^2-8x+12$

$=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

따라서 $a=2$, $b=-7$, $c=-8$이므로

$a+b-c=3$

답 ③

0095

유형 06 곱셈 공식의 변형을 이용한 식의 값 구하기 – 두 문자인 경우

|전략| 먼저 곱셈 공식의 변형을 이용하여 ab의 값을 구한다.

$a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab$에서

$13=4^2-ab$ $\quad\therefore ab=3$

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=4^3-3\cdot 3\cdot 4=28$

답 ③

0096

유형 06 곱셈 공식의 변형을 이용한 식의 값 구하기 – 두 문자인 경우

|전략| $x+y$, xy의 값을 구하고 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$$

따라서 $x+y=2\sqrt{2}$, $xy=1$이므로

$x^4+x^3y+xy^3+y^4=x^3(x+y)+y^3(x+y)$

$=(x^3+y^3)(x+y)$

$=\{(x+y)^3-3xy(x+y)\}(x+y)$

$=\{(2\sqrt{2})^3-3\cdot 1\cdot 2\sqrt{2}\}\cdot 2\sqrt{2}$

$=10\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=40$

답 ④

0097

유형 07 곱셈 공식의 변형을 이용한 식의 값 구하기 – $x\pm\frac{1}{x}$ 꼴을 포함한 경우

| 전략 | $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$, $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$임을 이용한다.

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=5^2-2=23$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=5^3-3\cdot5=110$$

따라서 $a=23$, $b=110$이므로 $a+b=133$ 답 ④

0098

유형 08 곱셈 공식의 변형을 이용한 식의 값 구하기 – 세 문자인 경우

| 전략 | 주어진 조건식에서 $ab+bc+ca$, abc의 값을 구한다.

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$5^2=9+2(ab+bc+ca)\qquad \therefore ab+bc+ca=8$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$에서

$2=\frac{8}{abc}\qquad \therefore abc=4$

$$\begin{aligned}\therefore a^3+b^3+c^3&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc\\&=5\cdot(9-8)+3\cdot4=17\end{aligned}$$

답 ②

0099

유형 08 곱셈 공식의 변형을 이용한 식의 값 구하기 – 세 문자인 경우

| 전략 | $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$임을 이용한다.

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\\&=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca)\\&=\frac{1}{2}\{(a^2+2ab+b^2)+(b^2+2bc+c^2)+(c^2+2ca+a^2)\}\\&=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}\\&=\frac{1}{2}\{(2-\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})^2+3^2\}\\&=\frac{1}{2}(7-4\sqrt{3}+7+4\sqrt{3}+9)=\frac{23}{2}\end{aligned}$$

답 ②

0100

유형 09 곱셈 공식을 이용한 수의 계산

| 전략 | 주어진 식에 $\frac{1}{3}(4-1)$을 곱하여 곱셈 공식을 이용한다.

$$\begin{aligned}&(4+1)(4^2+1)(4^4+1)(4^8+1)\\&=\underbrace{\frac{1}{3}(4-1)}_{\frac{1}{3}(4-1)=1}(4+1)(4^2+1)(4^4+1)(4^8+1)\\&=\frac{1}{3}(4^2-1)(4^2+1)(4^4+1)(4^8+1)\\&=\frac{1}{3}(4^4-1)(4^4+1)(4^8+1)\\&=\frac{1}{3}(4^8-1)(4^8+1)\\&=\frac{1}{3}(4^{16}-1)=\frac{2^{32}-1}{3}\end{aligned}$$

따라서 $a=3$, $b=32$이므로 $a+b=35$ 답 ③

0101

유형 09 곱셈 공식을 이용한 수의 계산

| 전략 | $201^2=(200+1)^2$, $98\times102=(100-2)(100+2)$이므로 곱셈 공식을 이용한다.

$$\begin{aligned}201^2+98\times102&=(200+1)^2+(100-2)(100+2)\\&=40000+400+1+10000-4\\&=50397\end{aligned}$$

따라서 다섯 자리 자연수이므로 $n=5$ 답 ②

0102

유형 10 곱셈 공식의 도형에의 응용

| 전략 | 공통부분이 생기도록 적당히 항을 묶은 후 곱셈 공식을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$(a-b+c)(a-b-c)=(a+b+c)(c-b-a)$에서

$\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}=\{c+(a+b)\}\{c-(a+b)\}$

$(a-b)^2-c^2=c^2-(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2-c^2=c^2-(a^2+2ab+b^2)$

$2a^2+2b^2=2c^2\qquad \therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다. 답 ④

0103

유형 12 다항식의 나눗셈 – $A=BQ+R$

| 전략 | 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 $A=BQ+R$이다. (단, (R의 차수)<(B의 차수))

$x^4+x^3+2x^2+x+2=A(x^2-1)+2x+5$이므로

$$\begin{aligned}A(x^2-1)&=x^4+x^3+2x^2+x+2-(2x+5)\\&=x^4+x^3+2x^2-x-3\end{aligned}$$

$\therefore A=(x^4+x^3+2x^2-x-3)\div(x^2-1)$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+x+3\\ \hline
x^2-1 & x^4+x^3+2x^2-x-3\\
 & x^4\qquad\;\; -x^2\\ \hline
 & x^3+3x^2-x\\
 & x^3\qquad\;\; -x\\ \hline
 & 3x^2\quad -3\\
 & 3x^2\quad -3\\ \hline
 & 0
\end{array}$$

$\therefore A=x^2+x+3$ 답 ①

0104

유형 13 몫과 나머지의 변형

| 전략 | 다항식 $f(x)$를 $ax+b$와 $Q(x)$, R에 대한 식으로 나타낸 후 $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 찾는다.

$$\begin{aligned}f(x)&=(ax+b)Q(x)+R=a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R\\&=\left(x+\frac{b}{a}\right)\cdot aQ(x)+R\end{aligned}$$

따라서 $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫은 $aQ(x)$, 나머지는 R이다. 답 ④

0105

유형 13 몫과 나머지의 변형 + 14 조립제법을 이용한 다항식의 나눗셈

|전략| 주어진 다항식을 $x-\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하고, 이를 변형하여 $3x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구한다.

주어진 다항식을 $x-\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{3} & 3 & 5 & -11 & 2 \\ & & 1 & 2 & -3 \\ \hline & 3 & 6 & -9 & \boxed{-1} \end{array}$$

$3x^3+5x^2-11x+2=\left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2+6x-9)-1$

$=\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot 3(x^2+2x-3)-1$

$=(3x-1)(x^2+2x-3)-1$

따라서 $Q_1(x)=3x^2+6x-9$, $R_1=-1$, $Q_2(x)=x^2+2x-3$, $R_2=-1$이므로

$Q_1(x)R_2+Q_2(x)R_1$

$=(3x^2+6x-9)\cdot(-1)+(x^2+2x-3)\cdot(-1)$

$=-3x^2-6x+9-x^2-2x+3$

$=-4x^2-8x+12$

답 ②

0106

유형 03 다항식의 전개식에서 특정항의 계수 구하기

|전략| x^3항과 x항이 나오는 부분만 찾아 구한 계수가 각각 5, 4임을 이용하여 상수 m, n의 값을 구한다.

$(x^2+mx+2n)(2x^2-3x+n)$의 전개식에서

x^3항은 $x^2\cdot(-3x)+mx\cdot 2x^2=(-3+2m)x^3$

이때, x^3의 계수가 5이므로

$-3+2m=5$ $\therefore m=4$ … ❶

또, x항은 $mx\cdot n+2n\cdot(-3x)=(mn-6n)x$

이때, x의 계수가 4이므로

$mn-6n=4$, $4n-6n=4$ $\therefore n=-2$ … ❷

$\therefore m-2n=4-2\cdot(-2)=8$ … ❸

답 8

채점 기준	배점
❶ x^3항의 계수를 이용하여 m의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ x항의 계수를 이용하여 n의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ $m-2n$의 값을 구할 수 있다.	1점

0107

유형 06 곱셈 공식의 변형을 이용한 식의 값 구하기 – 두 문자인 경우

|전략| 먼저 곱셈 공식의 변형을 이용하여 a^2+b^2, x^2+y^2의 값을 구한다.

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(-1)^2-2\cdot(-1)=3$ … ❶

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$=3^2+2\cdot 3=15$ … ❷

$\therefore (ax+by)(bx+ay)=abx^2+a^2xy+b^2xy+aby^2$

$=ab(x^2+y^2)+(a^2+b^2)xy$

$=(-1)\cdot 15+3\cdot 3=-6$ … ❸

답 -6

채점 기준	배점
❶ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ x^2+y^2의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $(ax+by)(bx+ay)$의 값을 구할 수 있다.	3점

0108

유형 10 곱셈 공식의 도형에의 응용

|전략| 직육면체의 세 모서리의 길이를 각각 a, b, c라 하고 주어진 조건을 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다.

$\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{BF}=c$라 하면

직육면체의 겉넓이가 42이므로

$2(ab+bc+ca)=42$ $\therefore ab+bc+ca=21$ … ❶

삼각형 BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합은 44이므로 $\overline{DB}^2+\overline{BG}^2+\overline{GD}^2$

$(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)=44$

$\therefore a^2+b^2+c^2=22$ … ❷

이때, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$(a+b+c)^2=22+2\cdot 21=64$

$\therefore a+b+c=8$ ($\because a+b+c>0$) … ❸

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)$이므로

$4(a+b+c)=4\cdot 8=32$ … ❹

답 32

채점 기준	배점
❶ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	2점
❹ 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합을 구할 수 있다.	1점

0109

유형 07 곱셈 공식의 변형을 이용한 식의 값 구하기 – $x\pm\frac{1}{x}$ 꼴을 포함한 경우

|전략| 양변을 x로 나누어 $x+\frac{1}{x}$의 값을 구한 후 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값을 구한다.

(1) $x\neq 0$이므로 $x^2-4x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-4+\frac{1}{x}=0$ $\therefore x+\frac{1}{x}=4$

(2) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4^3-3\cdot 4=52$

(3) $x+2x^2+3x^3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$

$=4+2\cdot 14+3\cdot 52=188$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) $x+\frac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	3점
(2) $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값을 각각 구할 수 있다.	4점
(3) $x+2x^2+3x^3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$의 값을 구할 수 있다.	3점

0110

유형 11 다항식의 나눗셈 – 몫과 나머지
+ 12 다항식의 나눗셈 – $A=BQ+R$

|전략| 다항식의 나눗셈은 각 다항식을 내림차순으로 정리한 후 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 한다.

(1) $A=(x+1)(x+2)+3$
$=x^2+3x+5$

(2) $B=(x+1)(3x-1)+5$
$=3x^2+2x+4$

(3) $xA+B=x(x^2+3x+5)+(3x^2+2x+4)$
$=x^3+3x^2+5x+3x^2+2x+4$
$=x^3+6x^2+7x+4$

이므로

$$\begin{array}{r|l} & x+7 \\ x^2-x+1 & x^3+6x^2+7x+4 \\ & x^3-x^2+x \\ \hline & 7x^2+6x+4 \\ & 7x^2-7x+7 \\ \hline & 13x-3 \end{array}$$

따라서 $xA+B$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫은 $x+7$, 나머지는 $13x-3$이다.

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 다항식 A를 구할 수 있다.	3점
(2) 다항식 B를 구할 수 있다.	3점
(3) $xA+B$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 수 있다.	6점

창의·융합 실력 마스터

0111

|전략| 세 구의 반지름의 길이를 각각 a, b, c로 놓고, 주어진 조건을 이용하여 $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구한다.

세 구의 반지름의 길이를 각각 a, b, c라 하면

$a+b+c=9$

$4\pi(a^2+b^2+c^2)=156\pi \quad \therefore a^2+b^2+c^2=39$

$\frac{4}{3}\pi(a^3+b^3+c^3)=268\pi \quad \therefore a^3+b^3+c^3=201$

이때, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$9^2=39+2(ab+bc+ca) \quad \therefore ab+bc+ca=21$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$에서

$9\cdot(39-21)=201-3ab \quad \therefore abc=13$

따라서 세 구의 반지름의 길이의 곱은 13이다.

답 13

Lecture

구의 반지름의 길이 r에 대하여
(1) 겉넓이 $S=4\pi r^2$
(2) 부피 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

0112

|전략| $ad-bc=4$의 양변을 제곱하여 $a^2d^2+b^2c^2$의 값을 구한다.

두 직사각형 P, Q의 대각선의 길이가 모두 $\sqrt{5}$이므로

$a^2+b^2=5,\ c^2+d^2=5$

즉, $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=25$이므로

$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=25$ ...... ㉠

또, $ad-bc=4$의 양변을 제곱하면 $(ad-bc)^2=16$

$a^2d^2-2abcd+b^2c^2=16$

$\therefore a^2d^2+b^2c^2=16+2abcd$

이 식을 ㉠에 대입하면

$a^2c^2+b^2d^2+16+2abcd=25$

$(ac+bd)^2+16=25 \quad \therefore (ac+bd)^2=9$

그런데 $ac+bd>0$이므로 $ac+bd=3$

답 3

0113

|전략| 곱셈 공식의 변형을 이용하여 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$에서

$6=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3\cdot2$

$\therefore (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

그런데 $a+b+c\neq0$이므로

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

즉, $\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$이므로

$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0 \quad \therefore a=b=c$

실수 A, B, C에 대하여 $A^2+B^2+C^2=0$이면 $A=B=C=0$

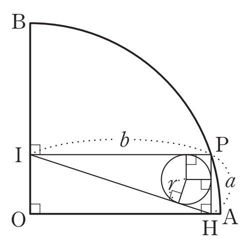
이때, $abc=2$이므로 $a^3=2$

$\therefore (a+b)(b+c)(c+a)=2a\cdot2a\cdot2a=8a^3$
$=8\cdot2=16$

답 ④

0114

|전략| $\overline{PH}=a$, $\overline{PI}=b$라 하고 직각삼각형과 내접원의 성질을 이용하여 a^2+b^2, ab의 값을 구한다.



사각형 PIOH는 직사각형($\because \angle HPI=90^\circ$)이므로

부채꼴 OAB의 반지름의 길이가 4이므로 $\overline{HI}=\overline{OP}=4$

$\overline{HI}=\overline{OP}$에서 $\overline{HI}=4$

$\overline{PH}=a$, $\overline{PI}=b$라 하면 직각삼각형 PIH에서 피타고라스 정리에 의해

$a^2+b^2=16$ ...... ㉠

직각삼각형 PIH의 내접원의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$이므로 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2=\frac{\pi}{4}$에서 $r^2=\frac{1}{4}$

$\therefore r=\frac{1}{2}\ (\because r>0)$

직각삼각형 PIH의 넓이는 $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot(a+b+4)\cdot\frac{1}{2}$이므로

$ab=\frac{1}{2}(a+b+4) \quad \therefore a+b=2ab-4$ ...... ㉡

이때, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$16=(2ab-4)^2-2ab$에서

$4a^2b^2-18ab=0,\ 4ab\left(ab-\frac{9}{2}\right)=0$

$\therefore\ ab=\frac{9}{2}\ (\because\ ab\neq 0)$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$a+b=2\cdot\frac{9}{2}-4=5$

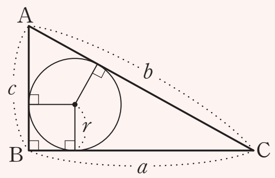
$\therefore\ \overline{PH}^3+\overline{PI}^3=a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=5^3-3\cdot\frac{9}{2}\cdot 5=\frac{115}{2}$

답 ②

Lecture

직각삼각형의 넓이와 내접원의 반지름 r 사이의 관계



직각삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}ac=\frac{1}{2}(a+b+c)r$

0115

|전략| 직사각형의 둘레의 길이를 이용하여 $\overline{AB}$의 길이를 구하고, 색칠한 부분의 넓이를 식으로 나타낸다.

직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 $8x$이므로

$2\overline{AD}+2\overline{AB}=8x$

이때, $\overline{AD}=3x+1$이므로 $2(3x+1)+2\overline{AB}=8x$

$2\overline{AB}=2x-2$ $\quad\therefore\ \overline{AB}=x-1$

$\overline{PA}=P(x)$라 하면 색칠한 부분의 넓이가 $-x^3+6x-5$이므로

$(3x+1)(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)P(x)\cdot 2=-x^3+6x-5$

$3x^2-2x-1-(x-1)P(x)=-x^3+6x-5$

$(x-1)P(x)=x^3+3x^2-8x+4$

$\therefore\ P(x)=(x^3+3x^2-8x+4)\div(x-1)$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+4x-4 \\ \hline x-1 & x^3+3x^2-8x+4 \\ & x^3-\ x^2 \\ \hline & 4x^2-8x \\ & 4x^2-4x \\ \hline & -4x+4 \\ & -4x+4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\therefore\ P(x)=x^2+4x-4$

따라서 선분 PA의 길이는 x^2+4x-4이다. 답 x^2+4x-4

참고 다음과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 구할 수도 있다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & -8 & 4 \\ & & 1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & 4 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ P(x)=x^2+4x-4$

2 항등식과 나머지정리

본책 24~37쪽

STEP 1 개념 마스터

0116

답 (1) 방정식 (2) 항등식

0117

ㄴ. 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$3(x-2)+2=3x-4$

이므로 x의 값에 관계없이 등식이 항상 성립한다.

ㅁ. 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$(x-1)^2+(x+1)=x^2-2x+1+x+1=x^2-x+2$

이므로 x의 값에 관계없이 등식이 항상 성립한다.

따라서 항등식은 ㄴ, ㅁ이다. 답 ㄴ, ㅁ

0118

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2=a+b,\ 3=b$

$\therefore\ a=-1,\ b=3$ 답 $a=-1,\ b=3$

0119

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a-b=4,\ -b=1$

$\therefore\ a=3,\ b=-1$ 답 $a=3,\ b=-1$

0120

$ax-b(x-1)=4x+2$이므로

$(a-b)x+b=4x+2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a-b=4,\ b=2$

$\therefore\ a=6,\ b=2$ 답 $a=6,\ b=2$

0121

$3x+4=a(x+1)+bx$이므로

$3x+4=(a+b)x+a$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=3,\ a=4$

$\therefore\ a=4,\ b=-1$ 답 $a=4,\ b=-1$

0122

$-4x+3=b(x+2)+a-b$이므로

$-4x+3=bx+a+b$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$b=-4,\ a+b=3$

$\therefore\ a=7,\ b=-4$ 답 $a=7,\ b=-4$

0123

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a-2=1, a+b=0, c-1=3$

$\therefore a=3, b=-3, c=4$ 답 $a=3, b=-3, c=4$

0124

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=1, b+2=1, c-5=1$

$\therefore a=2, b=-1, c=6$ 답 $a=2, b=-1, c=6$

0125

주어진 등식의 우변을 전개하면

$x^2+c(x+2)+1=x^2+cx+2c+1$이므로

$ax^2-3x+b-1=x^2+cx+2c+1$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=1, -3=c, b-1=2c+1$

$\therefore a=1, b=-4, c=-3$ 답 $a=1, b=-4, c=-3$

0126

주어진 등식의 양변에 $x=0, x=1, x=2$를 각각 대입하면

$1=-c, 1=b, 3=2a+2b+c$

$\therefore a=1, b=1, c=-1$ 답 $a=1, b=1, c=-1$

0127

주어진 등식의 양변에 $x=-1, x=0, x=1$을 각각 대입하면

$-4=-(b-1), -1=c, 6=2a+b-1+2c$

$\therefore a=2, b=5, c=-1$ 답 $a=2, b=5, c=-1$

0128

주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+4=3, b-3=-1, c+1=5$

$\therefore a=-1, b=2, c=4$ 답 $a=-1, b=2, c=4$

0129

주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-2=-1, b+4=1, c-2=7$

$\therefore a=1, b=-3, c=9$ 답 $a=1, b=-3, c=9$

0130

주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면

$a(x+y)-b(x-y)+1=(a-b)x+(a+b)y+1$이므로

$(a-b)x+(a+b)y+1=3x-5y+c$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-b=3, a+b=-5, 1=c$

$\therefore a=-1, b=-4, c=1$ 답 $a=-1, b=-4, c=1$

0131 답 (가) $-\frac{b}{a}$ (나) $\frac{b}{a}$

0132

(1) $f(1)=1-2-3+5=1$

(2) $f(-2)=-8-8+6+5=-5$ 답 (1) 1 (2) -5

0133

(1) $f(-1)=-1+1-2-6=-8$

(2) $f(3)=27+9+6-6=36$ 답 (1) -8 (2) 36

0134

(1) $f\left(-\frac{1}{4}\right)=8\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2+2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+1=1$

(2) $f\left(\frac{1}{2}\right)=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}+1=4$ 답 (1) 1 (2) 4

0135

$f(x)=x^3-kx^2+3x-1$로 놓으면 $f(2)=5$이므로

$8-4k+6-1=5 \quad \therefore k=2$ 답 2

0136

$f(x)=x^3+6x^2+5x+k$로 놓으면 $f(-3)=11$이므로

$-27+54-15+k=11 \quad \therefore k=-1$ 답 -1

0137

$f(x)=x^3+3x^2+kx-1$로 놓으면 $f(1)=0$이므로

$1+3+k-1=0 \quad \therefore k=-3$ 답 -3

0138

$f(x)=2x^3-3x^2+k$로 놓으면 $f(-1)=0$이므로

$-2-3+k=0 \quad \therefore k=5$ 답 5

STEP 2 유형 마스터

유형 01 항등식에서 미정계수 구하기 – 계수비교법 개념 01

주어진 식을 전개하여 내림차순으로 정리하고, 양변의 계수를 비교한다.

⇨ 계수비교법을 이용하는 경우

(1) 식이 간단하여 전개하기 쉬운 경우

(2) 양변을 내림차순으로 정리하기 쉬운 경우

0139

주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$(x+a)(bx^2-27x+9)=bx^3+(ab-27)x^2+(9-27a)x+9a$

이므로

$bx^3+(ab-27)x^2+(9-27a)x+9a=7x^3+cx^2-99x+36$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$b=7, ab-27=c, 9-27a=-99, 9a=36$

따라서 $a=4, b=7, c=1$이므로

$a+b+c=12$ 답 12

0140

주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$a(x-3y)-b(x-y)-1=(a-b)x+(-3a+b)y-1$

이므로 $(a-b)x+(-3a+b)y-1=-7x+y+c$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-b=-7,\ -3a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3, b=10$

또, $c=-1$이므로

$a+b-c=14$ 답 14

0141

$x^3-ax+b=(x^2-x+1)f(x)+x+2$가 x에 대한 항등식이므로 $f(x)$는 x에 대한 일차식이어야 한다.

이때, 좌변의 x^3의 계수가 1이므로 $f(x)=x+c$ (c는 상수)로 놓으면

$$x^3-ax+b=(x^2-x+1)(x+c)+x+2$$
$$=x^3+(c-1)x^2+(2-c)x+c+2$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$0=c-1,\ -a=2-c,\ b=c+2$

따라서 $a=-1, b=3, c=1$이므로

$ab=-3$ 답 -3

0142

$\dfrac{ax+by+6}{x+2y+2}=k$ (k는 상수)로 놓으면

$ax+by+6=k(x+2y+2)$

$\therefore ax+by+6=kx+2ky+2k$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a=k, b=2k, 6=2k$

따라서 $k=3, a=3, b=6$이므로

$b-a=3$ 답 3

유형 02 항등식에서 미정계수 구하기 – 수치대입법 개념 01

항등식의 문자에 곱의 인수를 0으로 하는 값을 대입한다.

⇨ 수치대입법을 이용하는 경우

(1) 적당한 값을 대입하면 식이 간단해지는 경우

(2) 여러 개의 다항식의 곱으로 되어 있어 전개하기 어려운 경우

0143

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-1=-c \qquad \therefore c=1$

양변에 $x=1$을 대입하면

$2=2b \qquad \therefore b=1$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-2=2a \qquad \therefore a=-1$

$\therefore abc=-1$ 답 ②

참고 우변을 전개하여 계수비교법으로도 구할 수 있다.

0144

주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$c=-4$ …… ㉠

양변에 $x=0$을 대입하면

$2b+c=-2$ …… ㉡

양변에 $x=1$을 대입하면

$3a+3b+c=2$ …… ㉢

㉠을 ㉡에 대입하면

$2b-4=-2 \qquad \therefore b=1$

$b=1, c=-4$를 ㉢에 대입하면

$3a+3-4=2 \qquad \therefore a=1$

$\therefore a+b+c=-2$ 답 -2

다른 풀이 $ax(x+2)+b(x+2)+c=ax^2+(2a+b)x+2b+c$이므로

$ax^2+(2a+b)x+2b+c=x^2+3x-2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=1, 2a+b=3, 2b+c=-2$

따라서 $a=1, b=1, c=-4$이므로 $a+b+c=-2$

0145

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=1+a+b \qquad \therefore a+b=-1$ …… ㉠

양변에 $x=\sqrt{2}$, 즉 $x^2=2$를 대입하면

$0=4+2a+b \qquad \therefore 2a+b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3, b=2$

$\therefore ab=-6$ 답 ②

0146

주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$-8-4a+b=2 \qquad \therefore 4a-b=-10$ …… ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$1-a+b=-1 \qquad \therefore a-b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4, b=-6$

$\therefore x^3+4x^2-6=(x+2)(x-1)f(x)-x$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$8+16-6=4f(2)-2,\ 4f(2)=20$

$\therefore f(2)=5$ 답 ⑤

유형 03 ~의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식 개념 01

'x의 값에 관계없이 항상 성립한다.'라는 표현이 있는 경우

⇨ $(\quad)x+(\quad)=0$ 꼴로 정리하여 항등식의 성질을 이용한다.

0147

주어진 등식을 k에 대하여 정리하면

$(2x-y-3)k+(3x-y-2)=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$2x-y-3=0,\ 3x-y-2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1, y=-5$

$\therefore xy=5$ 답 5

0148

주어진 등식의 좌변을 k에 대한 내림차순으로 정리하면

$xk^2+3(-x+y)k-2x+z=2k^2-3$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x=2,\ -x+y=0,\ -2x+z=-3$

따라서 $x=2,\ y=2,\ z=1$이므로

$x+y+z=5$ 답 ⑤

0149

주어진 등식을 k에 대하여 정리하면

$(x^2-16)k+3y^2-12=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x^2-16=0,\ 3y^2-12=0$, 즉 $x^2=16,\ y^2=4$

$\therefore x=\pm4,\ y=\pm2$

따라서 $x+y$의 최댓값은 6 답 ⑤

0150

주어진 등식을 x, y에 대하여 정리하면

$(6-2k)x+(a-3k)y-2b-2k=0$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$6-2k=0,\ a-3k=0,\ -2b-2k=0$

따라서 $k=3,\ a=9,\ b=-3$이므로

$a-b=12$ 답 12

유형 04 조건식을 만족시키는 항등식 개념 01

조건식을 한 문자에 대하여 정리한 후 주어진 식에 대입하여 항등식의 성질을 이용한다.

0151

$x+y=0$에서 $y=-x$

이것을 주어진 식에 대입하면

$ax^2-3x(-x)+(-x)^2+x+b(-x)=0$

$(a+4)x^2+(1-b)x=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+4=0,\ 1-b=0$

따라서 $a=-4,\ b=1$이므로

$ab=-4$ 답 -4

0152

$2x+y=1$에서 $y=1-2x$

이것을 주어진 식에 대입하면

$(2a+b)x-b(1-2x)+2=0$

$(2a+3b)x-(b-2)=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2a+3b=0,\ b-2=0$

따라서 $a=-3,\ b=2$이므로

$a^2-b^2=5$ 답 ⑤

0153

$x-y=1$에서 $y=x-1$

이것을 주어진 식에 대입하면

$ax^2+bx+(x-1)^2-2x(x-1)+c(x-1)+2=0$

$(a-1)x^2+(b+c)x-(c-3)=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a-1=0,\ b+c=0,\ c-3=0$

따라서 $a=1,\ b=-3,\ c=3$이므로

$a+b+c=1$ 답 ①

0154

$\dfrac{x+1}{3}=y+2$에서 $x=3y+5$

이것을 주어진 식에 대입하면

$a(3y+5)+by-5=0,\ (3a+b)y+5a-5=0$

이 등식이 y에 대한 항등식이므로

$3a+b=0,\ 5a-5=0$

따라서 $a=1,\ b=-3$이므로

$ab=-3$ 답 ③

유형 05 항등식에서 계수의 합 구하기 개념 01

$\{f(x)\}^k=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 꼴

⇨ 주어진 등식의 양변에 적당한 수를 대입하여 계수에 대한 식으로 나타낸다.

(1) 상수항 : $\{f(0)\}^k=a_0$

(2) 계수의 총합 : $\{f(1)\}^k=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$

(3) 짝수차 항의 계수의 총합 : $\dfrac{\{f(1)\}^k+\{f(-1)\}^k}{2}=a_0+a_2+a_4+\cdots$

(4) 홀수차 항의 계수의 총합 : $\dfrac{\{f(1)\}^k-\{f(-1)\}^k}{2}=a_1+a_3+a_5+\cdots$

0155

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$(1+3)^3=a_9+a_8+a_7+\cdots+a_1+a_0$ …… ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1+3)^3=-a_9+a_8-a_7+\cdots-a_1+a_0$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$72=2(a_8+a_6+a_4+a_2+a_0)$

$\therefore a_8+a_6+a_4+a_2+a_0=36$ 답 36

0156

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$(2-1-1)^5=a_{10}+a_9+a_8+\cdots+a_1+a_0$ …… ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$(2+1-1)^5=a_{10}-a_9+a_8-\cdots-a_1+a_0$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$-32=2(a_9+a_7+a_5+a_3+a_1)$

$\therefore a_9+a_7+a_5+a_3+a_1=-16$ 답 -16

0157

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^{2000}+1=a_{2000}+a_{1999}+\cdots+a_1+a_0$

양변에 $x=1$을 대입하면 $2=a_0$

$\therefore a_{2000}+a_{1999}+\cdots+a_1=2^{2000}+1-2$

$=2^{2000}-1$

답 ①

0158

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=(1+2)^3\cdot(2-1)^2=27$

이때,

$(x+2)^3(2x-1)^2=(x^3+6x^2+12x+8)(4x^2-4x+1)$ …… ㉠

이므로 ㉠의 전개식에서 x^3항은

$x^3\cdot 1+6x^2\cdot(-4x)+12x\cdot 4x^2=25x^2$ $\therefore a_3=25$

또, ㉠의 전개식에서 상수항은

$8\cdot 1=8$ $\therefore a_0=8$

$\therefore a_5+a_4+a_2+a_1=(a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0)-a_3-a_0$

$=27-25-8=-6$

답 -6

유형 06 다항식의 나눗셈과 항등식 개념 01

다항식 $A(x)$를 $B(x)$ $(B(x)\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 할 때,

(i) $A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$ 꼴로 나타낸다.

(ii) (i)의 식이 x에 대한 항등식임을 이용한다.

0159

x^3+2x^2+ax+b를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+2x^2+ax+b=(x^2+x+1)(x+c)$

$=x^3+(c+1)x^2+(c+1)x+c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2=c+1$, $a=c+1$, $b=c$

따라서 $c=1$, $a=2$, $b=1$이므로

$ab=2$

답 2

다른 풀이

$$
\begin{array}{r|l}
 & x\ +1 \\
\cline{2-2}
x^2+x+1 & x^3+2x^2+\quad ax+b \\
 & x^3+\ x^2+\quad x \\
\cline{2-2}
 & \quad x^2+(a-1)x+b \\
 & \quad x^2+\quad x+1 \\
\cline{2-2}
 & \quad (a-2)x+b-1
\end{array}
$$

이때, 나머지가 0이어야 하므로 $(a-2)x+b-1=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 $a-2=0$, $b-1=0$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로 $ab=2$

Lecture

다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $R(x)$이면

$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$ (단, ($g(x)$의 차수)>($R(x)$의 차수))

이때, $n\geq m$인 자연수 m, n에 대하여 $f(x)$가 n차식, $g(x)$가 m차식이면 $Q(x)$는 $(n-m)$차식이고, $R(x)$는 최대 $(m-1)$차식이다.

0160

x^3+ax^2+b를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+ax^2+b=(x^2-x-2)(x+c)+x+2$

$=(x+1)(x-2)(x+c)+x+2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1+a+b=1$ $\therefore a+b=2$ …… ㉠

양변에 $x=2$를 대입하면

$8+4a+b=4$ $\therefore 4a+b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=4$

$\therefore a+2b=6$

답 ⑤

0161

$x^4+ax^3+bx^2-x+2$를 x^2+2x+3으로 나누었을 때의 몫을 x^2+cx+d (c, d는 상수)라 하면

$x^4+ax^3+bx^2-x+2$

$=(x^2+2x+3)(x^2+cx+d)+3x+8$

$=x^4+(2+c)x^3+(d+2c+3)x^2+(2d+3c+3)x+3d+8$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=2+c$, $b=d+2c+3$, $-1=2d+3c+3$, $2=3d+8$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=0$, $d=-2$이므로

$b-a=-1$

답 ②

유형 07 나머지정리 – 일차식으로 나누는 경우 개념 02

(1) $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지 ⇨ $f(\alpha)$

(2) $f(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지 ⇨ $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

0162

나머지정리에 의하여 $f(3)=2$, $g(3)=-1$

따라서 $5f(x)+4g(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$5f(3)+4g(3)=5\cdot 2+4\cdot(-1)=6$

답 6

0163

나머지정리에 의하여 $f(1)=12$

따라서 $(x+1)f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$2f(1)=2\cdot 12=24$

답 ④

0164

나머지정리에 의하여

$R_1=f(a)=a^3+a^2+2a+1$

$R_2=f(-a)=-a^3+a^2-2a+1$

이때, $R_1+R_2=6$이므로

$R_1+R_2=(a^3+a^2+2a+1)+(-a^3+a^2-2a+1)=2a^2+2=6$

$\therefore a^2=2$

따라서 $f(x)$를 $x-a^2$, 즉 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2)=8+4+4+1=17$

답 17

0165

나머지정리에 의하여

$f(2)+g(2)=-1,\ \{f(2)\}^2+\{g(2)\}^2=13$

$f(2)=a, g(2)=b$라 하면

$a+b=-1, a^2+b^2=13$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$13=(-1)^2-2ab \qquad \therefore ab=-6$

따라서 $\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$\{f(2)\}^3+\{g(2)\}^3=a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=(-1)^3-3\cdot(-6)\cdot(-1)$

$=-19$ 답 -19

참고 $ab=-6$이므로 $f(x)g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 -6이다.

유형 08 나머지정리를 이용하여 미정계수 구하기 (개념 02)

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지가 $f(\alpha)$임을 이용하여 $f(x)$의 미정계수를 구한다.

0166

$f(x)=ax^3+2x^2+bx-4$라 하면 나머지정리에 의하여

$f(1)=7, f(-2)=4$이므로

$f(1)=a+2+b-4=7$

$\therefore a+b=9$ …… ㉠

$f(-2)=-8a+8-2b-4=4$

$\therefore 4a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3, b=12$

$\therefore ab=-36$ 답 -36

0167

$f(x)=x^3+ax^2-4x+5$라 하면 나머지정리에 의하여

$f(2)=f(-1)$이므로

$f(2)=8+4a-8+5=4a+5$

$f(-1)=-1+a+4+5=a+8$

즉, $4a+5=a+8$에서 $3a=3$

$\therefore a=1$ 답 ④

0168

나머지정리에 의하여 $3f(2)=6, -3f(-1)=12$

$\therefore f(2)=2, f(-1)=-4$

$f(x)=x^2+ax+b$에서

$f(2)=4+2a+b=2$

$\therefore 2a+b=-2$ …… ㉠

$f(-1)=1-a+b=-4$

$\therefore a-b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=-4$

$\therefore a+b=-3$ 답 ③

유형 09 나머지정리 – 이차식으로 나누는 경우 (개념 02)

(1) 다항식 $f(x)$를 이차식으로 나누었을 때의 나머지 $R(x)$

⇨ $R(x)$는 일차 이하의 다항식이다.

⇨ $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)

(2) 다항식 $f(x)$를 이차식 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누었을 때의 나머지

⇨ 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓고 $f(\alpha), f(\beta)$의 값을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

0169

나머지정리에 의하여 $f(2)=5, f(4)=7$

$f(x)$를 x^2-6x+8로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-6x+8)Q(x)+R(x)$

$=(x-2)(x-4)Q(x)+ax+b$

$f(2)=2a+b=5$ …… ㉠

$f(4)=4a+b=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=3$

따라서 $R(x)=x+3$이므로 $R(1)=4$ 답 4

0170

나머지정리에 의하여 $2f(1)=6, 5f(-1)=5$

$\therefore f(1)=3, f(-1)=1$

$f(x)$를 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$

$f(1)=a+b=3$ …… ㉠

$f(-1)=-a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=2$

따라서 구하는 나머지는 $x+2$이다. 답 ③

0171

나머지정리에 의하여 $f(-2)=2, f(2)=-2$ … ❶

다항식 $(x^2-x+1)f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$(x^2-x+1)f(x)=(x^2-4)Q(x)+ax+b$

$=(x+2)(x-2)Q(x)+ax+b$ … ❷

양변에 $x=-2$를 대입하면 $7f(-2)=-2a+b$

$\therefore -2a+b=14$ …… ㉠

양변에 $x=2$를 대입하면 $3f(2)=2a+b$

$\therefore 2a+b=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5, b=4$

따라서 구하는 나머지는 $-5x+4$이다. … ❸

답 $-5x+4$

채점 기준	비율
❶ $f(-2), f(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ x에 대한 항등식을 세울 수 있다.	30 %
❸ $(x^2-x+1)f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40 %

0172

$f(x)$를 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$f(x)=(x^2+2x-3)Q_1(x)+2x+5$

$\quad=(x+3)(x-1)Q_1(x)+2x+5$

$\therefore f(-3)=-1,\ f(1)=7$

$f(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-x-2)Q_2(x)+3x-2$

$\quad=(x+1)(x-2)Q_2(x)+3x-2$

$\therefore f(-1)=-5,\ f(2)=4$

$f(x)$를 x^2+x-6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2+x-6)Q(x)+R(x)$

$\quad=(x+3)(x-2)Q(x)+ax+b$

$f(-3)=-3a+b=-1$ …… ㉠

$f(2)=2a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=2$

따라서 $R(x)=x+2$이므로 $R(-1)=1$ **답** 1

발전 유형 10 나머지정리 – 삼차식으로 나누는 경우 (개념 02)

(1) 다항식 $f(x)$를 삼차식으로 나누었을 때의 나머지 $R(x)$

⇨ $R(x)$는 이차 이하의 다항식이다.

⇨ $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)

(2) 다항식 $f(x)$를

$f(x)=g(x)P(x)+R(x)$ (단, ($g(x)$의 차수)$=$($R(x)$의 차수))

로 나타낼 때, $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나누었을 때의 나머지는 다항식 $R(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 나머지와 같다.

0173

$f(x)$를 $(x^2-1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-1)(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$

이때, $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지가 $3x-1$이므로 ax^2+bx+c를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지도 $3x-1$이다.

x^2의 계수가 같아야 한다.

즉, $ax^2+bx+c=a(x^2-1)+3x-1$이므로

$f(x)=(x^2-1)(x+2)Q(x)+a(x^2-1)+3x-1$ …… ㉠

또, $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 2이므로 나머지정리에 의하여 $f(-2)=2$

㉠에서 $f(-2)=3a-7=2$이므로 $a=3$

따라서 구하는 나머지는

$R(x)=3(x^2-1)+3x-1=3x^2+3x-4$ **답** $3x^2+3x-4$

참고 ax^2+bx+c를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지가 $3x-1$이 되는지 확인해 보자.

이차식이므로 x^2-1로 나누어진다.

$f(x)=(x^2-1)(x+2)Q(x)+\underline{ax^2+bx+c}$

$\quad=(x^2-1)(x+2)Q(x)+\underline{a(x^2-1)+R(x)}$

$\quad=(x^2-1)\underbrace{\{(x+2)Q(x)+a\}}_{f(x)\text{를 } x^2-1\text{로 나누었을 때의 몫}}+3x-1$

$\quad=(x^2-1)(x+2)Q(x)+\underline{a(x^2-1)+3x-1}$

$\therefore ax^2+bx+c=a(x^2-1)+3x-1$

0174

$x^7+x^5+x^3+x$를 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$x^7+x^5+x^3+x=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$

$\quad=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=c$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1-1-1-1=a-b+c$

$c=0$이므로 $a-b=-4$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+1+1+1=a+b+c$

$c=0$이므로 $a+b=4$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=4$

따라서 $R(x)=4x$이므로 $R(2)=8$ **답** ②

0175

$f(x)+2x^2+x$를 $(x^2+x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)+2x^2+x=(x^2+x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

$\therefore f(x)=(x^2+x+1)(x-1)Q(x)+(a-2)x^2+(b-1)x+c$

이때, $f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지가 $2x-4$이므로 $(a-2)x^2+(b-1)x+c$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지도 $2x-4$이다. 즉,

x^2의 계수가 같아야 한다.

$(a-2)x^2+(b-1)x+c=(a-2)(x^2+x+1)+2x-4$ …… ㉠

$\therefore f(x)=(x^2+x+1)(x-1)Q(x)+(a-2)(x^2+x+1)+2x-4$ …… ㉡

또, $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 1이므로 나머지정리에 의하여 $f(1)=1$

㉡에서 $f(1)=3(a-2)-2=1$이므로 $a=3$

이것을 ㉠에 대입하면

$x^2+(b-1)x+c=x^2+x+1+2x-4=x^2+3x-3$

이므로

$b-1=3,\ c=-3 \qquad \therefore b=4,\ c=-3$

$\therefore a+2b+3c=3+2\cdot4+3\cdot(-3)=2$ **답** 2

유형 11 나머지정리 – $f(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누는 경우 (개념 02)

다항식 $f(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지

⇨ $f(a\alpha+b)$

0176

$f(x+1)$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $f(1+1)=f(2)$

$f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-4)Q(x)-4x+3$

$\quad=(x+2)(x-2)Q(x)-4x+3$

따라서 구하는 나머지는

$f(2)=-4\cdot2+3=-5$ **답** ①

0177

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 25, $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 18이므로

$f(1)=25$, $f(2)=18$

따라서 $f(2x-5)+f(x-1)$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(2\cdot3-5)+f(3-1)=f(1)+f(2)$

$=25+18=43$

답 43

0178

$f(x+2021)$을 $x+2023$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(-2023+2021)=f(-2)$ $\quad\therefore f(-2)=-6$

$f(x+2023)$을 $x+2021$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-2021+2023)=f(2)$ $\quad\therefore f(2)=6$

이때, $f(x)=x^2+ax+b$에서

$f(-2)=4-2a+b=-6$

$\therefore 2a-b=10$ …… ㉠

$f(2)=4+2a+b=6$

$\therefore 2a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-4$

$\therefore ab=-12$

답 -12

0179

$f(x)+g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 7이므로

$f(-2)+g(-2)=7$ …… ㉠

$f(x)-g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 3이므로

$f(-2)-g(-2)=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $f(-2)=5$, $g(-2)=2$

따라서 $xf\left(\frac{1}{2}x\right)$를 $x+4$로 나누었을 때의 나머지는

$-4f(-2)=-4\cdot5=-20$

답 -20

유형 12 나머지정리 – 몫 $Q(x)$를 $x-\alpha$로 나누는 경우

개념 02

다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$Q(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지 ⇨ $Q(\alpha)$

0180

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이므로

$f(x)=(x-1)Q(x)+2$ …… ㉠

또, $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 3이므로

$Q(x)=(x-2)Q'(x)+3$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x-1)\{(x-2)Q'(x)+3\}+2$

$=(x-1)(x-2)Q'(x)+3x-1$

따라서 $f(2)=5$이므로 $xf(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$2f(2)=2\cdot5=10$

답 10

다른 풀이 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이므로

$f(x)=(x-1)Q(x)+2$ …… ㉠

또, $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로

$Q(2)=3$ …… ㉡

이때, ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=Q(2)+2=3+2=5$ ($\because$ ㉡)

따라서 $xf(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$2f(2)=2\cdot5=10$

0181

$f(x)=x^{2024}+x^{2023}+x$라 하면 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지는 $f(1)=3$이므로

$f(x)=(x-1)Q(x)+3$ …… ㉠

$Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-1)$이므로 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=-2Q(-1)+3$

이때, $f(-1)=1-1-1=-1$이므로

$-1=-2Q(-1)+3$, $2Q(-1)=4$

$\therefore Q(-1)=2$

답 2

0182

$f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $2x-5$이므로

$f(x)=(x^2+x+1)Q(x)+2x-5$ …… ㉠

또, $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 4이므로

$Q(x)=(x-1)Q'(x)+4$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x^2+x+1)\{(x-1)Q'(x)+4\}+2x-5$

$=(x^3-1)Q'(x)+4x^2+6x-1$

따라서 $R(x)=4x^2+6x-1$이므로

$R(-1)=4-6-1=-3$

답 ②

0183

x^3-2x^2+mx-4를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$x^3-2x^2+mx-4=(x-1)Q(x)+R$

또, $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 -5이므로

$Q(x)=(x+1)Q'(x)-5$

$\therefore x^3-2x^2+mx-4=(x-1)\{(x+1)Q'(x)-5\}+R$

$=(x-1)(x+1)Q'(x)-5(x-1)+R$

양변에 $x=1$을 대입하면

$m-5=R$ …… ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-m-7=10+R$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=-6$, $R=-11$

답 -6

유형 13 수의 나눗셈에서 나머지정리의 활용 개념 02

나누는 수를 x에 대한 일차식으로 나타낸 후, 이 x를 이용하여 나누어 주는 수를 x에 대한 다항식으로 나타낸다.

0184

$x=1000$이라 하면 $1000^{11}=x^{11}$, $998=x-2$

$f(x)=x^{11}$이라 할 때, $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2)=2^{11}$이므로 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{11}=(x-2)Q(x)+2^{11}$

위의 식의 양변에 $x=1000$을 대입하면

$1000^{11}=998Q(1000)+2^{11}$

이때, 1000^{11}을 998로 나누었을 때의 나머지를 r라 하면 $0\le r<998$이므로

$1000^{11}=998Q(1000)+2^{11}$

$\quad=998\{Q(1000)+2\}+52$

따라서 1000^{11}을 998로 나누었을 때의 나머지는 52이다. 답 ②

Lecture

자연수의 나눗셈

자연수 a를 자연수 b로 나누었을 때의 몫을 q, 나머지를 r라 하면

$a=bq+r\,(0\le r<b)$

가 성립한다.

0185

$x=100$이라 하면 $100^7=x^7$, $98=x-2$

$f(x)=x^7$이라 할 때, $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2)=2^7=128$이므로 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^7=(x-2)Q(x)+128$

위의 식의 양변에 $x=100$을 대입하면

$100^7=98Q(100)+128$

이때, 100^7을 98로 나누었을 때의 나머지를 r라 하면 $0\le r<98$이므로

$100^7=98Q(100)+128$

$\quad=98\{Q(100)+1\}+30$

따라서 100^7을 98로 나누었을 때의 나머지는 30이다. 답 ④

0186

$x=37$이라 하면 $37^{55}=x^{55}$, $38=x+1$

$f(x)=x^{55}$이라 할 때, $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-1)=-1$이므로 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{55}=(x+1)Q(x)-1$

위의 식의 양변에 $x=37$을 대입하면

$37^{55}=38Q(37)-1$

이때, 37^{55}을 38로 나누었을 때의 나머지를 r라 하면 $0\le r<38$이므로

$37^{55}=38Q(37)-1=38\{Q(37)-1\}+38-1$

$\quad=38\{Q(37)-1\}+37$

따라서 37^{55}을 38로 나누었을 때의 나머지는 37이다. 답 ⑤

유형 14 인수정리 – 일차식으로 나누는 경우 개념 02

다항식 $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

$\Longleftrightarrow$ $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 갖는다.

$\Longleftrightarrow$ $f(\alpha)=0$

$\Longleftrightarrow$ $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$

0187

$f(x)=2x^3+3x^2+ax-5$라 하면 $f(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로 $f(-1)=0$

$-2+3-a-5=0 \qquad \therefore a=-4$

따라서 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-2-5=-6$ 답 ②

0188

$f(x-1)f(x+1)$이 $x-1$로 나누어떨어지므로

$f(1-1)f(1+1)=0$, 즉 $f(0)f(2)=0$

$\therefore f(0)=0$ 또는 $f(2)=0$

이때, $f(x)=x^3+x^2-ax+2$에 대하여 $f(0)=2$이므로

$f(2)=0$

따라서 $f(2)=8+4-2a+2=0$에서 $a=7$ 답 7

0189

$f(x)=3x^3+5x^2-ax+b$라 하면 $f(x)$가 $3x-1$, $x+3$으로 각각 나누어떨어지므로 $f\left(\frac{1}{3}\right)=0$, $f(-3)=0$ … ❶

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}+\frac{5}{9}-\frac{a}{3}+b=0$

$\therefore -a+3b=-2$ …… ㉠

$f(-3)=-81+45+3a+b=0$

$\therefore 3a+b=36$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=11$, $b=3$ … ❷

$\therefore a+b=14$ … ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ 인수정리를 이용할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

Plus+ x^3의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$에 대하여

$f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$, $f(\gamma)=\gamma$이면 $f(\alpha)-\alpha=f(\beta)-\beta=f(\gamma)-\gamma=0$

이므로 다항식 $f(x)-x$는 $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$로 나누어떨어진다.

즉, $f(x)-x=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$이므로

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+x$

0190

$f(x)$를 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 각각 1, 2, 3이므로 나머지정리에 의하여 $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$

즉, $f(1)-1=f(2)-2=f(3)-3=0$이므로

$f(x)-x$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 나누어떨어진다.

이때, $f(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차다항식이므로
$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+x$
따라서 $f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는
$f(4)=3\cdot2\cdot1+4=10$ 답 10

유형 15 인수정리 – 이차식으로 나누는 경우 개념 02

다항식 $f(x)$가 이차식 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누어떨어진다.
$\Longleftrightarrow f(\alpha)=0, f(\beta)=0$

0191

$f(x)=2x^3+ax^2-x+b$라 하면
$f(x)$가 x^2-x-2, 즉 $(x+1)(x-2)$로 나누어떨어지므로
$f(-1)=0, f(2)=0$
$f(-1)=-2+a+1+b=0$
$\therefore a+b=1$ ······ ㉠
$f(2)=16+4a-2+b=0$
$\therefore 4a+b=-14$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5, b=6$
$\therefore ab=-30$ 답 ①

다른 풀이 다항식 $2x^3+ax^2-x+b$가 x^2-x-2로 나누어떨어지므로
$2x^3+ax^2-x+b$를 x^2-x-2로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면
$2x^3+ax^2-x+b=(x^2-x-2)Q(x)$
$=(x+1)(x-2)Q(x)$
즉, $x+1, x-2$로 나누어떨어지므로 나머지가 0이어야 한다.
조립제법을 이용하면

-1	2	a	-1	b
		-2	$-a+2$	$a-1$
2	2	$a-2$	$-a+1$	$a+b-1$
		4	$2a+4$	
	2	$a+2$	$a+5$	

즉, $a+b-1=0, a+5=0$이므로
$a=-5, b=6$ $\therefore ab=-30$

0192

$f(x)-2$가 x^2-5x+6, 즉 $(x-2)(x-3)$으로 나누어떨어지므로
$f(2)-2=0, f(3)-2=0$
$\therefore f(2)=2, f(3)=2$
$f(x+2)$를 x^2-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를
$ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x+2)=(x^2-x)Q(x)+ax+b$
$=x(x-1)Q(x)+ax+b$
양변에 $x=0$을 대입하면
$f(2)=b$ $\therefore b=2$
양변에 $x=1$을 대입하면
$f(3)=a+b,\ a+b=2$
$a+2=2$ $\therefore a=0$
따라서 구하는 나머지는 2이다. 답 ②

0193

$6-f(x)$가 x^2-2x-3, 즉 $(x+1)(x-3)$으로 나누어떨어지므로
$6-f(-1)=0, 6-f(3)=0$
$\therefore f(-1)=6, f(3)=6$
$f(x)+3$은 삼차다항식이므로 $f(x)+3$을 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면
$f(x)+3=(x-2)^2(ax+b)$
양변에 $x=-1$을 대입하면
$f(-1)+3=(-3)^2\cdot(-a+b)$
$\therefore -a+b=1$ ······ ㉠
양변에 $x=3$을 대입하면
$f(3)+3=1^2\cdot(3a+b)$
$\therefore 3a+b=9$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, b=3$
따라서 $f(x)=(x-2)^2(2x+3)-3$이므로
$f(1)=(-1)^2\cdot5-3=2$ 답 2

유형 16 조립제법과 내림차순 꼴의 항등식 개념 02

조립제법을 연속으로 이용하면 내림차순으로 정리한 식에서 미정계수를 구할 수 있다.

0194

조립제법을 이용하면

1	1	-1	1	2
		1	0	1
1	1	0	1	$3 \rightarrow d$
		1	1	
1	1	1	$2 \rightarrow c$	
		1		
	1	$2 \rightarrow b$		
	$a \leftarrow$			

x^3-x^2+x+2
$=(x-1)(x^2+1)+3$
$=(x-1)\{(x-1)(x+1)+2\}+3$
$=(x-1)[(x-1)\{(x-1)+2\}+2]+3$
$=(x-1)\{(x-1)^2+2(x-1)+2\}+3$
$=(x-1)^3+2(x-1)^2+2(x-1)+3$
따라서 $a=1, b=2, c=2, d=3$이므로
$abcd=12$ 답 12

다른 풀이 $x-1=y$로 놓으면 $x=y+1$
주어진 항등식에 대입하면
$(y+1)^3-(y+1)^2+(y+1)+2=ay^3+by^2+cy+d$
등식의 좌변을 전개하여 정리하면
$y^3+3y^2+3y+1-y^2-2y-1+y+1+2=y^3+2y^2+2y+3$
이므로 $y^3+2y^2+2y+3=ay^3+by^2+cy+d$
따라서 $a=1, b=2, c=2, d=3$이므로
$abcd=12$

0195

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\
 & & -2 & 6 & -8 \\ \hline
-2 & 1 & -3 & 4 & \boxed{-7} \to d \\
 & & -2 & 10 & \\ \hline
-2 & 1 & -5 & \boxed{14} \to c & \\
 & & -2 & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{-7} \to b & & \\
 & a \leftarrow & & &
\end{array}$$

x^3-x^2-2x+1

$=(x+2)(x^2-3x+4)-7$

$=(x+2)\{(x+2)(x-5)+14\}-7$

$=(x+2)[(x+2)\{(x+2)-7\}+14]-7$

$=(x+2)\{(x+2)^2-7(x+2)+14\}-7$

$=(x+2)^3-7(x+2)^2+14(x+2)-7$

따라서 $a=1$, $b=-7$, $c=14$, $d=-7$이므로

$a-b+c-d=29$ 답 ④

0196

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
\frac{1}{3} & 27 & -18 & -6 & 9 \\
 & & 9 & -3 & -3 \\ \hline
\frac{1}{3} & 27 & -9 & -9 & \boxed{6} \\
 & & 9 & 0 & \\ \hline
\frac{1}{3} & 27 & 0 & \boxed{-9} & \\
 & & 9 & & \\ \hline
 & 27 & \boxed{9} & &
\end{array}$$

$27x^3-18x^2-6x+9$

$=\left(x-\frac{1}{3}\right)(27x^2-9x-9)+6$

$=\left(x-\frac{1}{3}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot 27x-9\right\}+6$

$=\left(x-\frac{1}{3}\right)\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)\left\{27\left(x-\frac{1}{3}\right)+9\right\}-9\right]+6$

$=\left(x-\frac{1}{3}\right)\left\{27\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+9\left(x-\frac{1}{3}\right)-9\right\}+6$

$=\underbrace{27}_{3^3}\left(x-\frac{1}{3}\right)^3+\underbrace{9}_{3^2}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\underbrace{9}_{3\cdot 3}\left(x-\frac{1}{3}\right)+6$

$=(3x-1)^3+(3x-1)^2-3(3x-1)+6$

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=-3$, $d=6$이므로

$ad-bc=9$ 답 9

주의 다항식을 $3x-1$에 대하여 내림차순으로 정리한 꼴이므로 조립제법을 반복하여 이용하면 미정계수를 구할 수 있다. 이때, $3x-1=0$인 x의 값 $\frac{1}{3}$로 조립제법을 이용하면 나누는 식이 $x-\frac{1}{3}$임에 주의하여 식을 정리해야 한다.

STEP 3 내신 마스터

0197

유형 01 항등식에서 미정계수 구하기 – 계수비교법

|전략| 모든 실수 x, y에 대하여 주어진 등식이 성립하므로 주어진 등식은 x, y에 대한 항등식이다.

주어진 등식을 x, y에 대하여 정리하면

$(a-b+2)x-(2a-3b+3)y=0$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-b+2=0$ …… ㉠

$2a-3b+3=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-1$

$\therefore a+b=-4$ 답 ②

0198

유형 01 항등식에서 미정계수 구하기 – 계수비교법

|전략| 주어진 등식의 우변을 전개하여 정리한 후 양변의 동류항의 계수를 비교한다.

주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면

$(x^2-3)(x^2+4)=x^4+x^2-12$이므로

$x^4-ax^2+b=x^4+x^2-12$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=-1$, $b=-12$ $\quad\therefore ab=12$ 답 ②

0199

유형 02 항등식에서 미정계수 구하기 – 수치대입법

|전략| 주어진 등식의 양변에 적당한 값을 대입한다.

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2-3-2=3b$ $\quad\therefore b=-1$

양변에 $x=-2$를 대입하면

$8+6-2=6c$ $\quad\therefore c=2$

양변에 $x=0$을 대입하면

$-2=-2a$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore a-b+c=4$ 답 ④

다른 풀이 $2x^2-3x-2=a(x+2)(x-1)+bx(x+2)+cx(x-1)$

$=(a+b+c)x^2+(a+2b-c)x-2a$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2=a+b+c$, $-3=a+2b-c$, $-2=-2a$

따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=2$이므로

$a-b+c=4$

0200

유형 02 항등식에서 미정계수 구하기 – 수치대입법

|전략| 주어진 등식의 양변에 적당한 값을 대입한다.

주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$-32+4a+b=-8$ $\quad\therefore 4a+b=24$ …… ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b=1$ $\quad\therefore a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $b=-8$이므로
$x^5+8x^2-8=(x+2)(x-1)f(x)+x^3$
주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면
$32+32-8=4f(2)+8$, $4f(2)=48$ $\therefore f(2)=12$
$\therefore a-b+f(2)=28$ 답 ①

0201

유형 03 ~의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식

|전략| 주어진 이차방정식에 $x=-1$을 대입한 식이 k에 대한 항등식임을 이용한다.

이차방정식 $x^2-(k+1)x-a(k-1)+b=0$의 근이 -1이므로
$1+(k+1)-a(k-1)+b=0$
이 식을 k에 대하여 정리하면
$(1-a)k+2+a+b=0$
이 등식이 k에 대한 항등식이므로
$1-a=0$, $2+a+b=0$
따라서 $a=1$, $b=-3$이므로 $ab=-3$ 답 ③

0202

유형 04 조건식을 만족시키는 항등식

|전략| $x+y=1$을 x에 대하여 정리한 후 주어진 식에 대입하여 항등식의 성질을 이용한다.

$x+y=1$에서 $y=1-x$
이것을 주어진 식에 대입하면
$ax^2-b(1-x)+c=x$, $ax^2+(b-1)x-b+c=0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=0$, $b-1=0$, $-b+c=0$
따라서 $a=0$, $b=1$, $c=1$이므로 $a+b+c=2$ 답 ②

0203

유형 05 항등식에서 계수의 합 구하기

|전략| 구하려는 계수의 합을 얻기 위해 주어진 등식의 양변에 대입할 x의 값을 찾는다.

ㄱ. 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$(-1)^{10}=a_0$, 즉 $a_0=1$ (참)
ㄴ. 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$(1+2-1)^{10}=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}$
$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}=2^{10}$
그런데 ㄱ에서 $a_0=1$이므로
$a_1+a_2+\cdots+a_{20}=2^{10}-1$ (거짓)
ㄷ. 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$(1+2-1)^{10}=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{19}+a_{20}$ …… ㉠
양변에 $x=-1$을 대입하면
$(1-2-1)^{10}=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{19}+a_{20}$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면 $2\cdot 2^{10}=2(a_0+a_2+\cdots+a_{20})$
$\therefore a_0+a_2+\cdots+a_{20}=2^{10}$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 답 ①

0204

유형 07 나머지정리 – 일차식으로 나누는 경우

|전략| 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$임을 이용한다.

나머지정리에 의하여 $f(-2)=-3$, $g(-2)=2$
따라서 $(x^2-1)f(x)-(x-3)g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는
$\{(-2)^2-1\}\cdot f(-2)-(-2-3)\cdot g(-2)$
$=3\cdot(-3)-(-5)\cdot 2=1$ 답 ①

0205

유형 08 나머지정리를 이용하여 미정계수 구하기

|전략| 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$임을 이용한다.

$f(x)=ax^7+bx^5+cx^3+dx+3$이라 하면 나머지정리에 의하여
$f(1)=2$이므로
$a+b+c+d+3=2$ $\therefore a+b+c+d=-1$
따라서 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는
$f(-1)=-a-b-c-d+3=-(a+b+c+d)+3$
$=-(-1)+3=4$ 답 ④

0206

유형 07 나머지정리 – 일차식으로 나누는 경우
+ 09 나머지정리 – 이차식으로 나누는 경우

|전략| 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$임을 이용한다.

$f(x)$를 $6x^2-5x-6$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지는 $9x+7$이므로
$f(x)=(6x^2-5x-6)Q(x)+9x+7$
$=(3x+2)(2x-3)Q(x)+9x+7$
따라서 $f(x)$를 $3x+2$로 나누었을 때의 나머지는
$f\left(-\frac{2}{3}\right)=9\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+7=1$ 답 ①

0207

유형 09 나머지정리 – 이차식으로 나누는 경우

|전략| 다항식 $f(x)$를 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓는다.

나머지정리에 의하여 $f(2)=3$, $f(3)=4$
$f(x)$를 $(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$
$f(2)=2a+b=3$ …… ㉠
$f(3)=3a+b=4$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$
$\therefore f(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+x+1$
따라서 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는
$f(1)=(-1)\cdot(-2)Q(1)+1+1$
$=2Q(1)+2$ 답 ④

2 항등식과 나머지정리

0208

유형 11 나머지정리 – $f(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누는 경우

|전략| 다항식 $f(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a\alpha+b)$이다.

$f(2x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $f(2\cdot1)=f(2)$

$f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+5x-4$

따라서 구하는 나머지는 $f(2)=5\cdot2-4=6$ 답 ③

0209

유형 12 나머지정리 – 몫 $Q(x)$를 $x-\alpha$로 나누는 경우

|전략| 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이면 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$임을 이용한다.

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q_1(x)$, 나머지가 10이므로

$f(x)=(x-1)Q_1(x)+10$ …… ㉠

$f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q_2(x)$, 나머지가 6이므로

$f(x)=(x-3)Q_2(x)+6$ …… ㉡

이때, $Q_1(x)+Q_2(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$Q_1(2)+Q_2(2)$이므로 ㉠, ㉡에 $x=2$를 각각 대입하면

$f(2)=Q_1(2)+10=-Q_2(2)+6$

$\therefore Q_1(2)+Q_2(2)=-4$ 답 ②

0210

유형 13 수의 나눗셈에서 나머지정리의 활용

|전략| 나누는 수 8에 가장 가까운 3^n 꼴의 수는 9이므로 $3^{199}+3^{200}+3^{201}$을 $k\cdot9^n$ (k는 상수) 꼴로 변형시킨다.

$$3^{199}+3^{200}+3^{201}=3\cdot3^{198}+3^2\cdot3^{198}+3^3\cdot3^{198}=(3+3^2+3^3)\cdot3^{198}$$
$$=39\cdot(3^2)^{99}=39\cdot9^{99}$$

$f(x)=39x^{99}$이라 할 때, $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)=39$이므로 몫을 $Q(x)$라 하면

$39x^{99}=(x-1)Q(x)+39$

위의 식의 양변에 $x=9$를 대입하면

$39\cdot9^{99}=8Q(9)+39=8\{Q(9)+4\}+7$

따라서 $3^{199}+3^{200}+3^{201}$을 8로 나누었을 때의 나머지는 7이다. 답 ⑤

0211

유형 14 인수정리 – 일차식으로 나누는 경우

|전략| $f(0)=f(2)=f(4)=k$라 하면 $f(x)-k$는 x, $x-2$, $x-4$를 인수로 갖는다.

$f(0)=f(2)=f(4)=k$라 하면 $f(x)$를 x, $x-2$, $x-4$로 나누었을 때의 나머지는 각각 k이다.

즉, $f(x)-k$는 x, $x-2$, $x-4$로 나누어떨어진다.

이때, $f(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차다항식이므로

$f(x)=x(x-2)(x-4)+k$

$f(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로 $f(-1)=0$

$(-1)\cdot(-3)\cdot(-5)+k=0$ $\quad\therefore k=15$

따라서 $f(x)=x(x-2)(x-4)+15$이므로

$f(1)=1\cdot(-1)\cdot(-3)+15=18$ 답 ②

0212

유형 10 나머지정리 – 삼차식으로 나누는 경우

|전략| 다항식 $f(x)$를 삼차식으로 나누었을 때의 나머지는 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)로 놓는다.

$f(x)$를 $(x-2)^2(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x-2)^2(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$

이때, $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x-6$이므로

ax^2+bx+c를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지도 $x-6$이다.

즉, $ax^2+bx+c=a(x-2)^2+x-6$이므로

$f(x)=(x-2)^2(x+1)Q(x)+a(x-2)^2+x-6$ …… ㉠

… ❶

또, $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 2이므로 나머지정리에 의하여 $f(-1)=2$

㉠에서 $f(-1)=9a-7=2$이므로 $a=1$ … ❷

따라서 구하는 나머지는

$(x-2)^2+x-6=x^2-3x-2$ … ❸

답 x^2-3x-2

채점 기준	배점
❶ 주어진 조건을 만족시키는 다항식 $f(x)$의 식을 나타낼 수 있다.	4점
❷ $f(x)$를 $(x-2)^2(x+1)$로 나누었을 때의 나머지의 x^2의 계수를 구할 수 있다.	2점
❸ $f(x)$를 $(x-2)^2(x+1)$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	1점

0213

유형 14 인수정리 – 일차식으로 나누는 경우

|전략| $f(3)=f(4)=0$임을 이용하여 $f(x)$의 식을 나타낸다.

$f(3)=f(4)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-3)(x-4)$로 나누어떨어진다.

이때, x^2의 계수가 5이므로

$f(x)=5(x-3)(x-4)$ … ❶

따라서 $f(x)$를 $x-7$로 나누었을 때의 나머지는

$f(7)=5\cdot4\cdot3=60$ … ❷

답 60

채점 기준	배점
❶ 주어진 조건을 만족시키는 다항식 $f(x)$의 식을 나타낼 수 있다.	4점
❷ $f(x)$를 $x-7$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	2점

0214

유형 15 인수정리 – 이차식으로 나누는 경우

|전략| 다항식 $f(x)$가 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누어떨어지면 $f(x)$는 $x-\alpha$, $x-\beta$로 각각 나누어떨어지므로 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$임을 이용한다.

$f(x)=x^3+ax^2-x+b$라 하면 $f(x)$가 $(x+1)(x-3)$으로 나누어떨어지므로 $f(-1)=0$, $f(3)=0$ … ❶

$f(-1)=-1+a+1+b=0$ $\quad\therefore a+b=0$ …… ㉠

$f(3)=27+9a-3+b=0$ $\quad\therefore 9a+b=-24$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=3$ … ❷

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-x+3$이므로 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2)=8-12-2+3=-3$ … ❸

답 -3

채점 기준	배점
❶ 인수정리를 이용할 수 있다.	3점
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ 주어진 다항식을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	2점

0215

유형 06 다항식의 나눗셈과 항등식 + 15 인수정리 – 이차식으로 나누는 경우

|전략| 다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어지면 인수정리를 두 번 이용한다.

(1) 다항식 $f(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로

$f(1)=1+a+b=0 \qquad \therefore b=-a-1$ ...... ㉠

(2) 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & a & -a-1 \\ & & 1 & 1 & a+1 \\ \hline & 1 & 1 & a+1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)\{x^2+x+(a+1)\}$

(3) $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$Q(x)=x^2+x+(a+1)$

이때, $Q(x)$도 $x-1$로 나누어떨어지므로

$Q(1)=1+1+a+1=0 \qquad \therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $b=2$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 인수정리를 이용하여 b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	3점
(2) 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $f(x)=(x-1)Q(x)$ 꼴로 나타낼 수 있다.	5점
(3) a, b의 값을 구할 수 있다.	4점

다른 풀이 $f(x)=x^3+ax+b$를 $(x-1)^2$, 즉 x^2-2x+1로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+ax+b=(x^2-2x+1)(x+c)$

$\qquad\qquad =x^3+(c-2)x^2+(-2c+1)x+c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 $0=c-2$, $a=-2c+1$, $b=c$

$\therefore a=-3, b=2, c=2$

0216

유형 16 조립제법과 내림차순 꼴의 항등식

|전략| 조립제법을 연속으로 이용하고 내림차순으로 정리한다.

(1) 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -5 & 10 & -5 \\ & & 2 & -6 & 8 \\ \hline 2 & 1 & -3 & 4 & \boxed{3} \to d \\ & & 2 & -2 & \\ \hline 2 & 1 & -1 & \boxed{2} \to c & \\ & & 2 & & \\ \hline a \leftarrow & 1 & \boxed{1} \to b & & \end{array}$$

$x^3-5x^2+10x-5$

$=(x-2)(x^2-3x+4)+3$

$=(x-2)\{(x-2)(x-1)+2\}+3$

$=(x-2)[(x-2)\{(x-2)+1\}+2]+3$

$=(x-2)\{(x-2)^2+(x-2)+2\}+3$

$=(x-2)^3+(x-2)^2+2(x-2)+3$

이므로 $a=1, b=1, c=2, d=3$

(2) $f(x)=(x-2)^3+(x-2)^2+2(x-2)+3$이므로

$f(2.1)=0.1^3+0.1^2+2\cdot0.1+3=3.211$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 조립제법을 이용하여 a, b, c, d의 값을 구할 수 있다.	7점
(2) $f(2.1)$의 값을 구할 수 있다.	3점

다른 풀이 (1) $x-2=y$로 놓으면 $x=y+2$

주어진 항등식에 대입하면

$(y+2)^3-5(y+2)^2+10(y+2)-5=ay^3+by^2+cy+d$

이 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$y^3+6y^2+12y+8-5y^2-20y-20+10y+20-5$

$=y^3+y^2+2y+3$

이므로 $y^3+y^2+2y+3=ay^3+by^2+cy+d$

$\therefore a=1, b=1, c=2, d=3$

창의·융합 실력 마스터

0217

|전략| 정의된 연산에 따라 주어진 등식을 x, y에 대하여 정리한다.

$(x\triangle p)+(3\triangle x)=(y\triangle q)+(2\triangle 1)$에서

$(xp-x-p)+(3x-3-x)=(yq-y-q)+(2-2-1)$

$xp+x-p-yq+y+q-2=0$

$\therefore (p+1)x-(q-1)y-(p-q+2)=0$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$p+1=0$, $q-1=0$, $p-q+2=0$

따라서 $p=-1$, $q=1$이므로 $p+q=0$

답 0

0218

|전략| 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $x+k$ (k는 상수)로 놓고 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$의 식을 세운다.

(나)에서 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $x+k$ (k는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)^2(x+k)+3(x-1)$

(가)에서 $f(0)=0$이므로

$(-1)^2\cdot k+3\cdot(-1)=0 \qquad \therefore k=3$

$\therefore f(x)=(x-1)^2(x+3)+3(x-1)$

$\qquad =(x-1)\{(x-1)(x+3)+3\}$

$\qquad =(x-1)(x^2+2x)=x(x-1)(x+2)$

따라서 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$는

$Q(x)=x(x-1)$이므로

$Q(3)=3\cdot2=6$

답 6

0219

|전략| $f(x)$를 n차식이라 할 때, 주어진 등식의 좌변과 우변의 차수가 같음을 이용하여 n의 값을 구한다.

$f(x)$를 n차식(n은 자연수)이라 하면 $f(x^2+x)$는 $2n$차식이고

$x^2f(x)$는 $(n+2)$차식이다.

주어진 등식의 좌변과 우변의 차수가 같으므로

$2n=n+2$에서 $n=2$

즉, $f(x)$는 이차식이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f(x^2+x)=x^2f(x)+2x+3$에서

$a(x^2+x)^2+b(x^2+x)+c=x^2(ax^2+bx+c)+2x+3$

$ax^4+2ax^3+(a+b)x^2+bx+c=ax^4+bx^3+cx^2+2x+3$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2a=b, a+b=c, b=2, c=3 \qquad \therefore a=1, b=2, c=3$

$\therefore f(x)=x^2+2x+3$

따라서 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-2)=4-4+3=3$ 답 ③

0220

|전략| 다항식 $f(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면 $f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$임을 이용한다.

$x^n(x^2-ax+b)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^n(x^2-ax+b)=(x-2)^2Q(x)+2^n(x-2)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $2^n(4-2a+b)=0$

$4-2a+b=0$ ($\because 2^n\neq0$) $\qquad \therefore b=2a-4$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^n(x^2-ax+2a-4)=(x-2)^2Q(x)+2^n(x-2)$

$x^n(x-2)(x-a+2)=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^n\}$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$x^n(x-a+2)=(x-2)Q(x)+2^n$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=2$를 대입하면 $2^n(2-a+2)=2^n$

$4-a=1$ ($\because 2^n\neq0$) $\qquad \therefore a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면 $b=2$

$\therefore a+b=5$ 답 5

참고 $x^n(x-2)(x-a+2)=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^n\}$은 x에 대한 항등식이므로 양변에서 공통인 인수 $x-2$를 제외한 나머지 부분도 같아야 한다. 따라서 $x^n(x-a+2)=(x-2)Q(x)+2^n$이고, 이 등식도 x에 대한 항등식이다.

0221

|전략| $\{f(x)\}^{100}$을 $\frac{1}{2}f(x^2)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓은 후 $\{f(-1)\}^{100}$, $\{f(1)\}^{100}$을 구한다.

$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$에 대하여

$\frac{1}{2}f(x^2)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}$

$\qquad=\frac{1}{4}(x^2-1)=\frac{1}{4}(x+1)(x-1)$

$\{f(x)\}^{100}$을 $\frac{1}{2}f(x^2)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$\{f(x)\}^{100}=\frac{1}{2}f(x^2)Q(x)+R(x)$

$\qquad=\frac{1}{4}(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$

위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$\{f(-1)\}^{100}=-a+b$ …… ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$\{f(1)\}^{100}=a+b$ …… ㉡

이때, $f(-1)=-1, f(1)=0$이므로 이를 ㉠, ㉡에 각각에 대입하면

$-a+b=1, a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$

따라서 $R(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$이므로

$R(5)=-2$ 답 ②

0222

|전략| 인수정리를 이용하여 $P(2), P(-2)$의 값을 구하고, 삼차다항식 $P(x)$에 대한 식을 세운다.

$P(x)+2$가 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지므로

$P(-2)+2=0 \qquad \therefore P(-2)-(-2)=0$

$2-P(x)$가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어지므로

$2-P(2)=0 \qquad \therefore P(2)-2=0$

따라서 인수정리에 의하여 삼차다항식 $P(x)-x$는 $x+2$, $x-2$로 나누어떨어지므로

$P(x)-x=(ax+b)(x+2)(x-2)$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$P(x)+2=(ax+b)(x+2)(x-2)+x+2$

$\qquad=(x+2)\{(ax+b)(x-2)+1\}$

이때, $P(x)+2$가 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지므로 $x+2$가

$(ax+b)(x-2)+1$의 인수이어야 한다.

즉, $(ax+b)(x-2)+1$에 $x=-2$를 대입하면

$-4(-2a+b)+1=0$

$\therefore 8a-4b=-1$ …… ㉠

또한,

$2-P(x)=2-\{(ax+b)(x+2)(x-2)+x\}$

$\qquad=-(ax+b)(x+2)(x-2)-x+2$

$\qquad=-(x-2)\{(ax+b)(x+2)+1\}$

이때, $2-P(x)$가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어지므로 $x-2$가

$-\{(ax+b)(x+2)+1\}$의 인수이어야 한다.

즉, $-\{(ax+b)(x+2)+1\}$에 $x=2$를 대입하면

$-\{4(2a+b)+1\}=0$

$\therefore 8a+4b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{8}, b=0$

따라서 $P(x)=-\frac{1}{8}x(x+2)(x-2)+x$이므로

$P(3)=-\frac{1}{8}\cdot3\cdot5\cdot1+3=\frac{9}{8}$ 답 $\frac{9}{8}$

3 인수분해

본책 40~51쪽

STEP 1 개념 마스터

0223

$4x^2+4x+1=(2x)^2+2\cdot2x\cdot1+1^2$

$=(2x+1)^2$ 답 $(2x+1)^2$

0224

$4x^2-12xy+9y^2=(2x)^2-2\cdot2x\cdot3y+(3y)^2$

$=(2x-3y)^2$ 답 $(2x-3y)^2$

0225

$16x^2-y^2=(4x)^2-y^2=(4x+y)(4x-y)$ 답 $(4x+y)(4x-y)$

0226

$(x-2)^2-(2y+1)^2=(x-2+2y+1)(x-2-2y-1)$

$=(x+2y-1)(x-2y-3)$

답 $(x+2y-1)(x-2y-3)$

0227

$2x^2-5x-3=(2x+1)(x-3)$ 답 $(2x+1)(x-3)$

0228

$x^2-5xy-6y^2=(x+y)(x-6y)$ 답 $(x+y)(x-6y)$

0229

$6x^2+7xy-5y^2=(3x+5y)(2x-y)$ 답 $(3x+5y)(2x-y)$

0230

$x^2+y^2+2xy+2x+2y+1$

$=x^2+y^2+1^2+2\cdot x\cdot y+2\cdot y\cdot1+2\cdot1\cdot x$

$=(x+y+1)^2$ 답 $(x+y+1)^2$

0231

$4x^2+y^2+4xy-4x-2y+1$

$=(2x)^2+y^2+(-1)^2+2\cdot2x\cdot y+2\cdot y\cdot(-1)+2\cdot(-1)\cdot2x$

$=(2x+y-1)^2$ 답 $(2x+y-1)^2$

0232

$x^2+y^2+4z^2+2xy-4yz-4zx$

$=x^2+y^2+(-2z)^2+2\cdot x\cdot y+2\cdot y\cdot(-2z)+2\cdot(-2z)\cdot x$

$=(x+y-2z)^2$ 답 $(x+y-2z)^2$

0233

$x^2+4y^2+9z^2-4xy-12yz+6zx$

$=x^2+(-2y)^2+(3z)^2+2\cdot x\cdot(-2y)+2\cdot(-2y)\cdot3z+2\cdot3z\cdot x$

$=(x-2y+3z)^2$ 답 $(x-2y+3z)^2$

0234

$x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

$=x^3+3\cdot x^2\cdot2y+3\cdot x\cdot(2y)^2+(2y)^3$

$=(x+2y)^3$ 답 $(x+2y)^3$

0235

$x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$

$=x^3-3\cdot x^2\cdot3y+3\cdot x\cdot(3y)^2-(3y)^3$

$=(x-3y)^3$ 답 $(x-3y)^3$

0236

$8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$

$=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot y+3\cdot2x\cdot y^2+y^3$

$=(2x+y)^3$ 답 $(2x+y)^3$

0237

$27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$

$=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot(2y)+3\cdot3x\cdot(2y)^2-(2y)^3$

$=(3x-2y)^3$ 답 $(3x-2y)^3$

0238

$x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x+1)$ 답 $(x+1)(x^2-x+1)$

0239

$8x^3-1=(2x)^3-1^3=(2x-1)(4x^2+2x+1)$

답 $(2x-1)(4x^2+2x+1)$

0240

$x^3-64y^3=x^3-(4y)^3=(x-4y)(x^2+4xy+16y^2)$

답 $(x-4y)(x^2+4xy+16y^2)$

0241

$27x^3+125y^3=(3y)^3+(5y)^3=(3x+5y)(9x^2-15xy+25y^2)$

답 $(3x+5y)(9x^2-15xy+25y^2)$

0242

$x^3+y^3-3xy+1=x^3+y^3+1^3-3\cdot x\cdot y\cdot1$

$=(x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)$

답 $(x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)$

0243

$16x^4+4x^2y^2+y^4=(2x)^4+(2x)^2\cdot y^2+y^4$
$=(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)$

답 $(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)$

0244

$x-2=t$로 놓으면

$(x-2)^2-(x-2)-6=t^2-t-6$
$=(t+2)(t-3)$
$=(x-2+2)(x-2-3)$
$=x(x-5)$

답 $x(x-5)$

0245

$3x+1=t$로 놓으면

$(3x+1)^2+(3x+1)-2=t^2+t-2$
$=(t+2)(t-1)$
$=(3x+1+2)(3x+1-1)$
$=(3x+3)\cdot 3x$
$=9x(x+1)$

답 $9x(x+1)$

0246

$x^2-x=t$로 놓으면

$(x^2-x-5)(x^2-x-3)-3=(t-5)(t-3)-3$
$=t^2-8t+12=(t-2)(t-6)$
$=(x^2-x-2)(x^2-x-6)$
$=(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$

답 $(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$

0247

$x-2=A$, $y+1=B$로 놓으면

$(x-2)^2+(x-2)(y+1)-2(y+1)^2$
$=A^2+AB-2B^2$
$=(A+2B)(A-B)$
$=(x-2+2y+2)(x-2-y-1)$
$=(x+2y)(x-y-3)$

답 $(x+2y)(x-y-3)$

0248

$x^2=X$로 놓으면

$x^4-13x^2+36=X^2-13X+36=(X-4)(X-9)$
$=(x^2-4)(x^2-9)$
$=(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$

답 $(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$

0249

$x^4+9x^2+25=(x^4+10x^2+25)-x^2$
$=(x^2+5)^2-x^2$
$=(x^2+x+5)(x^2-x+5)$

답 $(x^2+x+5)(x^2-x+5)$

0250

$a^3-ab^2-b^2c+a^2c=c(a^2-b^2)+a^3-ab^2$
$=c(a^2-b^2)+a(a^2-b^2)$
$=(a^2-b^2)(c+a)$
$=(a+b)(a-b)(a+c)$

답 $(a+b)(a-b)(a+c)$

0251

$x^2-2xy+y^2-3x+3y+2$
$=x^2-(2y+3)x+y^2+3y+2$
$=x^2-(2y+3)x+(y+1)(y+2)$
$=\{x-(y+1)\}\{x-(y+2)\}$
$=(x-y-1)(x-y-2)$

답 $(x-y-1)(x-y-2)$

0252

$x^2-xy-2y^2+x+4y-2$
$=x^2-(y-1)x-2(y^2-2y+1)$
$=x^2-(y-1)x-2(y-1)^2$
$=\{x-2(y-1)\}\{x+(y-1)\}$
$=(x-2y+2)(x+y-1)$

답 $(x-2y+2)(x+y-1)$

0253

$2x^2+3xy+y^2+7x+5y+6$
$=2x^2+(3y+7)x+(y^2+5y+6)$
$=2x^2+(3y+7)x+(y+2)(y+3)$
$=(x+y+2)(2x+y+3)$

답 $(x+y+2)(2x+y+3)$

0254

$f(x)=x^3+3x^2-6x-8$이라 하면
$f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	3	-6	-8
		-1	-2	8
	1	2	-8	0

$f(x)=(x+1)(x^2+2x-8)$
$=(x+1)(x+4)(x-2)$

답 $(x+1)(x+4)(x-2)$

0255

$f(x)=x^3-13x+12$라 하면
$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	0	-13	12
		1	1	-12
	1	1	-12	0

$f(x)=(x-1)(x^2+x-12)$
$=(x-1)(x+4)(x-3)$

답 $(x-1)(x+4)(x-3)$

0256

$f(x)=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$라 하면 $f(1)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	2	-7	-8	12
		1	3	-4	-12
2	1	3	-4	-12	0
		2	10	12	
	1	5	6	0	

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x^2+5x+6)$

$=(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)$

답 $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)$

0257

$f(x)=x^4+4x^3-3x^2-14x-8$이라 하면 $f(-1)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	4	-3	-14	-8
		-1	-3	6	8
2	1	3	-6	-8	0
		2	10	8	
	1	5	4	0	

$\therefore f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+5x+4)$

$=(x+1)^2(x-2)(x+4)$

답 $(x+1)^2(x-2)(x+4)$

STEP 2 유형 마스터

유형 01 공식을 이용한 인수분해 (개념 01)

(1) 인수분해 공식을 적용한다.
(2) 인수분해 공식을 바로 적용할 수 없으면 식을 적당히 변형하여 공식을 적용한다.

0258

ㄱ. $(a-b)c+b(b-a)=(a-b)c-b(a-b)$

$=(a-b)(c-b)$

ㄴ. $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca=(a-b+c)^2$

ㄷ. $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3=(x-2y)^3$

ㄹ. $x^5+x^3y^2+xy^4=x(x^4+x^2y^2+y^4)$

$=x(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

따라서 인수분해가 바르게 된 것은 ㄷ, ㄹ의 2개이다.

답 ③

0259

$x^2-(2a+5)x+(a+1)(a+4)=(x-a-1)(x-a-4)$

즉, $(x-a-1)+(x-a-4)=2x+1$이므로

$2x-2a-5=2x+1$, $-2a=6$

$\therefore a=-3$

답 -3

0260

$x^6-3^6=(x^3)^2-(3^3)^2$

$=(x^3+3^3)(x^3-3^3)$

$=(x+3)(x-3)(x^2-3x+9)(x^2+3x+9)$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ③이다.

답 ③

0261

$a^2b+b^2c-b^3-a^2c=(a^2b-a^2c)+(b^2c-b^3)$

$=a^2(b-c)-b^2(b-c)$

$=(a^2-b^2)(b-c)$

$=(a+b)(a-b)(b-c)$

답 $(a+b)(a-b)(b-c)$

참고 항이 4개이고 주어진 식에 바로 인수분해 공식을 적용할 수 없는 경우에는 다음과 같이 인수분해한다.
(1) 두 개씩 짝을 지어 공통인수를 찾는다.
(2) 완전제곱식을 찾아서 A^2-B^2 꼴로 변형한 후 인수분해한다.

유형 02 공통부분이 있는 식의 인수분해 (개념 02)

(1) ① 공통부분이 있는 경우 ⇨ 공통부분을 치환하여 인수분해한다.
② 공통부분이 없는 경우 ⇨ 공통부분이 생기도록 식을 적당히 변형한 후 공통부분을 치환하여 인수분해한다.
(2) 일차식 4개가 곱해져 있는 식의 인수분해
⇨ 두 일차식의 상수항의 합이 같아지도록 두 개씩 짝지어 전개하면 공통부분이 생겨 치환을 이용하여 인수분해할 수 있다.

0262

$(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)+21$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+21$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+21$

$x^2+x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-2)(t-12)+21$

$=t^2-14t+45$

$=(t-5)(t-9)$

$=(x^2+x-5)(x^2+x-9)$

$\therefore a+b+c+d=1+(-5)+1+(-9)=-12$

답 -12

Lecture

일차식 4개가 곱해져 있는 식의 인수분해

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ 꼴의 다항식을 공통부분이 생기도록 변형할 때, a, b, c, d 중 두 개씩 짝을 지은 두 수의 합이 같아지도록 묶은 뒤, 짝지은 두 식끼리 먼저 전개한다.

0263

$a+b+2=t$로 놓으면

$(a+b+2)^2+2(a+b+2)-3=t^2+2t-3$

$=(t+3)(t-1)$

$=(a+b+2+3)(a+b+2-1)$

$=(a+b+5)(a+b+1)$

답 ③

0264

$x^2+x=t$로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2+x-15)(x^2+x+1)+39&=(t-15)(t+1)+39\\&=t^2-14t+24\\&=(t-2)(t-12)\\&=(x^2+x-2)(x^2+x-12)\\&=(x+2)(x-1)(x+4)(x-3)\end{aligned}$$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

0265

$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+k$

$=\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+k$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+k$ … ❶

$x^2+8x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t+7)(t+15)+k$

$=t^2+22t+105+k$ …… ㉠ … ❷

주어진 식이 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면 ㉠이 t에 대한 완전제곱식이 되어야 하므로

$105+k=\left(\frac{22}{2}\right)^2=121$ $\therefore k=16$ … ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 공통부분이 생기도록 짝을 지어 전개할 수 있다.	40 %
❷ 공통부분을 치환하여 전개할 수 있다.	20 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

참고 x^2+ax+b가 완전제곱식이 되려면 $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$이어야 한다.

유형 03 복이차식(x^4+ax^2+b 꼴)의 인수분해 개념 02

x^4+ax^2+b에서 $x^2=X$로 치환한 식 X^2+aX+b가

(1) 인수분해되는 경우 ⇨ 인수분해 공식을 적용한다.

(2) 인수분해되지 않는 경우 ⇨ x^4+ax^2+b에서 이차항 ax^2을 적당히 분리하여 A^2-B^2 꼴로 변형한 다음 인수분해한다.

0266

$x^2=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}x^4+4x^2-5&=X^2+4X-5\\&=(X-1)(X+5)\\&=(x^2-1)(x^2+5)\\&=(x+1)(x-1)(x^2+5)\end{aligned}$$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

다른 풀이 $x^4+4x^2-5=x^4+4x^2+4-9$

$$\begin{aligned}&=(x^2+2)^2-3^2\\&=(x^2+2+3)(x^2+2-3)\\&=(x^2+5)(x^2-1)\\&=(x^2+5)(x+1)(x-1)\end{aligned}$$

0267

$$\begin{aligned}x^4-9x^2+16&=x^4-8x^2+16-x^2\\&=(x^2-4)^2-x^2\\&=(x^2+x-4)(x^2-x-4)\end{aligned}$$

따라서 $a=1, b=-4, c=-4$이므로

$a+b+c=-7$ 답 -7

0268

$$\begin{aligned}x^4-7x^2y^2+9y^4&=x^4-6x^2y^2+9y^4-x^2y^2\\&=(x^2-3y^2)^2-(xy)^2\\&=(x^2+xy-3y^2)(x^2-xy-3y^2)\end{aligned}$$

따라서 $a=1, b=-3$ 또는 $a=-1, b=-3$이므로

$a^2+b^2=1+9=10$ 답 ②

0269

$x+2=A,\ x-2=B$로 놓으면

$(x+2)^4-14(x+2)^2(x-2)^2+(x-2)^4$

$=A^4-14A^2B^2+B^4$

$=A^4+2A^2B^2+B^4-16A^2B^2$

$=(A^2+B^2)^2-(4AB)^2$

$=(A^2+4AB+B^2)(A^2-4AB+B^2)$

$=\{(x+2)^2+4(x+2)(x-2)+(x-2)^2\}$

$\times\{(x+2)^2-4(x+2)(x-2)+(x-2)^2\}$

$=-4(3x^2-4)(x^2-12)$ 답 ②

유형 04 여러 개의 문자가 포함된 식의 인수분해 개념 02

(1) 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

(2) 차수가 모두 같을 때는 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

0270

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$x^2-3xy+2y^2+4x-5y+3$

$=x^2-(3y-4)x+(2y^2-5y+3)$

$=x^2-(3y-4)x+(y-1)(2y-3)$

$=\{x-(y-1)\}\{x-(2y-3)\}$

$=(x-y+1)(x-2y+3)$

따라서 $a=1, b=1, c=-2, d=3$이므로

$a+b+c+d=3$ 답 3

0271

주어진 식을 y에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$x^3-(y-1)x^2-(y+2)x+2y$

$=y(-x^2-x+2)+x^3+x^2-2x$

$=-y(x^2+x-2)+x(x^2+x-2)$

$=(x-y)(x^2+x-2)$

$=(x-y)(x+2)(x-1)$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ①이다. 답 ①

0272

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$x^2+xy-2y^2-2x+8y-8$

$=x^2+(y-2)x-2(y^2-4y+4)$

$=x^2+(y-2)x-2(y-2)^2$

$=\{x+2(y-2)\}\{x-(y-2)\}$

$=(x+2y-4)(x-y+2)$

따라서 두 인수의 합은

$(x+2y-4)+(x-y+2)=2x+y-2$ 답 ②

0273

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2-3xy+y^2+ax+3y-10$

$=2x^2-(3y-a)x+y^2+3y-10$

$=2x^2-(3y-a)x+(y+5)(y-2)$

주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면

(i) $-2(y-2)-(y+5)=-(3y-a)$일 때

$-2y+4-y-5=-3y+a \qquad \therefore a=-1$

(ii) $-2(y+5)-(y-2)=-(3y-a)$일 때

$-2y-10-y+2=-3y+a \qquad \therefore a=-8$

(i), (ii)에서 모든 정수 a의 값의 합은

$-1+(-8)=-9$ 답 -9

유형 05 인수정리와 조립제법을 이용한 인수분해 개념 02

삼차 이상의 다항식 $f(x)$를 인수분해할 때는 인수정리와 조립제법을 이용한다.

(i) 다항식 $f(x)$에서 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 상수 α의 값을 구한다.

(ii) 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$를 구한 후 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 꼴로 인수분해한다.

0274

$f(x)=2x^3+x^2-8x-4$라 하면 $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 1 & -8 & -4 \\ & & 4 & 10 & 4 \\ \hline & 2 & 5 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(2x^2+5x+2)$

$=(x-2)(x+2)(2x+1)$

따라서 $a=-2$, $b=2$, $c=1$ 또는 $a=2$, $b=-2$, $c=1$이므로

$a+b+c=1$ 답 1

0275

$f(x)=3x^3+10x^2+9x+2$라 하면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & 10 & 9 & 2 \\ & & -3 & -7 & -2 \\ \hline & 3 & 7 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(3x^2+7x+2)$

$=(x+1)(x+2)(3x+1)$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=3$ 또는 $a=2$, $b=1$, $c=3$이므로

$abc=6$ 답 ③

0276

$f(x)=x^4+5x^3+3x^2-5x-4$라 하면 $f(1)=0$, $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 5 & 3 & -5 & -4 \\ & & 1 & 6 & 9 & 4 \\ \hline -1 & 1 & 6 & 9 & 4 & \boxed{0} \\ & & -1 & -5 & -4 & \\ \hline & 1 & 5 & 4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+5x+4)$

$=(x+1)^2(x-1)(x+4)$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ①이다. 답 ①

유형 06 인수정리와 인수분해를 이용하여 미정계수 구하기 개념 02

다항식 $f(x)$가 $g(x)r(x)$로 인수분해되면 $f(x)=g(x)r(x)$는 x에 대한 항등식이다.

주어진 식의 인수나 인수분해된 식을 이용하여 식을 세운 후 수치대입법 또는 조립제법을 이용하여 미정계수를 구한다.

0277

$f(x)=2x^3+5x^2+ax-3$이라 하면 $f(x)$가 $x-1$을 인수로 가지므로

$f(1)=2+5+a-3=0 \qquad \therefore a=-4$

즉, $f(x)=2x^3+5x^2-4x-3$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ & & 2 & 7 & 3 \\ \hline & 2 & 7 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(2x^2+7x+3)$

$=(x-1)(x+3)(2x+1)$

따라서 $b=1$이므로

$b-a=5$ 답 ③

다른 풀이 $2x^3+5x^2+ax-3=(x+3)(x-1)(2x+b)$에서

$2x^3+5x^2+ax-3=(x^2+2x-3)(2x+b)$

$=2x^3+(b+4)x^2+(2b-6)x-3b$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$5=b+4$, $a=2b-6$, $3=3b \qquad \therefore a=-4, b=1$

$\therefore b-a=5$

0278

$f(x)=x^4+ax^2+b$라 하면 $f(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로

$f(1)=1+a+b=0 \qquad \therefore b=-a-1$ ...... ㉠

즉, $f(x)=x^4+ax^2-a-1$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & a & 0 & -a-1 \\ & & 1 & 1 & a+1 & a+1 \\ \hline & 1 & 1 & a+1 & a+1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)\{x^3+x^2+(a+1)x+a+1\}$

이때, $x^3+x^2+(a+1)x+a+1$도 $x-1$을 인수로 가지므로

$1+1+(a+1)+a+1=0 \qquad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore a^2+b^2=4+1=5$ 답 ②

다른 풀이 x^4+ax^2+b가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로
$x^4+ax^2+b=(x-1)^2Q(x)$ 꼴로 나타낼 수 있다.
조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & 0 & a & 0 & b \\ & & 1 & 1 & a+1 & a+1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & a+1 & a+1 & \boxed{a+b+1} \\ & & 1 & 2 & a+3 & \\ \hline & 1 & 2 & a+3 & \boxed{2a+4} & \end{array}$$

이때, 나머지가 모두 0이므로
$a+b+1=0,\ 2a+4=0 \qquad \therefore a=-2,\ b=1$
$\therefore a^2+b^2=4+1=5$

0279

$P(x)=x^4-x^3+3x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 $x+1$, $x-1$을 인수로 가지므로
$P(-1)=1+1+3-a+b=0$
$\therefore -a+b=-5$ …… ㉠
$P(1)=1-1+3+a+b=0$
$\therefore a+b=-3$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-4$ … ❶
즉, $P(x)=x^4-x^3+3x^2+x-4$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 1 & -1 & 3 & 1 & -4 \\ & & -1 & 2 & -5 & 4 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 5 & -4 & \boxed{0} \\ & & 1 & -1 & 4 & \\ \hline & 1 & -1 & 4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-1)(x^2-x+4)$
따라서 $f(x)=x^2-x+4$이므로
$f(1)=1-1+4=4$ … ❷
$\therefore 2a-b+f(1)=2\cdot1-(-4)+4=10$ … ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ 인수정리를 이용하여 a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 조립제법을 이용하여 $f(x)$와 $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $2a-b+f(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $x^4-x^3+3x^2+ax+b=(x+1)(x-1)f(x)$이므로
$f(x)=x^2+cx+d$ (c, d는 상수)로 놓으면
$$\begin{aligned}(x+1)(x-1)f(x)&=(x^2-1)(x^2+cx+d)\\&=x^4+cx^3+(d-1)x^2-cx-d\end{aligned}$$
$\therefore x^4-x^3+3x^2+ax+b=x^4+cx^3+(d-1)x^2-cx-d$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$-1=c,\ 3=d-1,\ a=-c,\ b=-d$
$\therefore c=-1,\ d=4,\ a=1,\ b=-4$
따라서 $f(x)=x^2-x+4$이므로
$f(1)=1-1+4=4$
$\therefore 2a-b+f(1)=2\cdot1-(-4)+4=10$

유형 07 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$ 꼴의 인수분해 개념 02

계수가 대칭인 사차식은 다음과 같은 순서로 인수분해한다.
(i) 가운데 항이 상수가 되도록 x^2으로 묶는다.
(ii) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$임을 이용하여 $x+\dfrac{1}{x}$ 또는 $x-\dfrac{1}{x}$에 대한 이차식으로 정리하여 인수분해한다.
(iii) 각 인수가 다항식이 되도록 x를 곱하여 식을 다시 정리한다.

0280

$$\begin{aligned}x^4-3x^3-2x^2-3x+1&=x^2\left(x^2-3x-2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\\&=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\right\}\\&=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\right\}\\&=x^2\left(x+\frac{1}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}-4\right)\\&=(x^2+x+1)(x^2-4x+1)\end{aligned}$$

이때, $a>0$이므로 $a=1,\ b=1,\ c=-4,\ d=1$
$\therefore ad-bc=1\cdot1-1\cdot(-4)=5$

답 5

0281

$$\begin{aligned}x^4+7x^3+12x^2+7x+1&=x^2\left(x^2+7x+12+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\\&=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}+7\left(x+\frac{1}{x}\right)+12\right\}\\&=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+7\left(x+\frac{1}{x}\right)+10\right\}\\&=x^2\left(x+\frac{1}{x}+2\right)\left(x+\frac{1}{x}+5\right)\\&=(x^2+2x+1)(x^2+5x+1)\\&=(x+1)^2(x^2+5x+1)\end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이 $f(x)=x^4+7x^3+12x^2+7x+1$이라 하면
$f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 1 & 7 & 12 & 7 & 1 \\ & & -1 & -6 & -6 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 6 & 6 & 1 & \boxed{0} \\ & & -1 & -5 & -1 & \\ \hline & 1 & 5 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)^2(x^2+5x+1)$

0282

$$\begin{aligned}x^4-2x^3-5x^2+2x+1&=x^2\left(x^2-2x-5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\\&=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-5\right\}\\&=x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-3\right\}\\&=x^2\left(x-\frac{1}{x}+1\right)\left(x-\frac{1}{x}-3\right)\\&=(x^2+x-1)(x^2-3x-1)\end{aligned}$$

답 ④

유형 08 순환하는 꼴의 다항식의 인수분해 개념 02

a, b, c의 차수가 같으면서 순환하는 꼴의 다항식은 주어진 식을 전개하고 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

0283

주어진 식을 a에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$
$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$
$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=(a-b)(b-c)(a-c)$ 답 ⑤

참고 b 또는 c에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해해도 그 결과는 같다.

0284

주어진 식을 a에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$
$=a^2(b+c)+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+2abc$
$=(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc)a+b^2c+bc^2$
$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$
$=(a+b)(b+c)(c+a)$ 답 $(a+b)(b+c)(c+a)$

0285

주어진 식을 a에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$
$=abc+a^2b+ac^2+a^2c+b^2c+ab^2+bc^2+abc+abc$
$=(b+c)a^2+(b^2+c^2+3bc)a+bc(b+c)$
$=\{(b+c)a+bc\}(a+b+c)$
$=(ab+bc+ca)(a+b+c)$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ④이다. 답 ④

다른 풀이 $a+b+c=t$로 놓으면

$a+b=t-c, b+c=t-a, c+a=t-b$이므로

$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(t-c)(t-a)(t-b)+abc$
$=t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t$
$=(ab+bc+ca)t$ ($\because a+b+c=t$)
$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

0286

주어진 식의 분자를 a에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$
$=-(b-c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b-c)$
$=-(b-c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b-c)$
$=-(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=-(b-c)(a-b)(a-c)$
$=(a-b)(b-c)(c-a)$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1$ 답 1

발전 유형 09 인수분해를 이용한 식의 변형 – 조건식이 주어진 경우 개념 02

(1) 주어진 조건을 한 문자에 대하여 정리한 후 다항식에 대입하여 인수분해한다.
(2) 다항식을 먼저 인수분해한 후 주어진 조건을 대입하여 식을 정리한다.

0287

$ab+c=1$에서 $c=1-ab, ab=1-c$

$\therefore 2ab-a^2b-ab^2-abc=2ab-a^2b-ab^2-ab(1-ab)$
$=ab(2-a-b-1+ab)$
$=ab(1-a-b+ab)$
$=ab(1-a)(1-b)$
$=(1-c)(1-a)(1-b)$
$=(1-a)(1-b)(1-c)$ 답 ④

0288

$a+b+c=0$에서 $a=-(b+c)$

$\therefore 2a^2+bc=2\{-(b+c)\}^2+bc$
$=2b^2+5bc+2c^2$
$=(2b+c)(b+2c)$
$=(b-a)(c-a)$ ($\because b+c=-a$)
$=(a-b)(a-c)$ 답 ④

0289

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$2x^2+xy-y^2-7x-y+6=2x^2+(y-7)x-(y^2+y-6)$
$=2x^2+(y-7)x-(y+3)(y-2)$
$=\{x+(y-2)\}\{2x-(y+3)\}$
$=(x+y-2)(2x-y-3)$

이때, $x-y-2=0$에서 $x=y+2$

$\therefore$ (주어진 식)$=(y+2+y-2)\{2(y+2)-y-3\}$
$=2y(y+1)$ 답 ⑤

다른 풀이 $x-y-2=0$에서 $y=x-2$

$\therefore 2x^2+xy-y^2-7x-y+6$
$=2x^2+x(x-2)-(x-2)^2-7x-(x-2)+6$
$=2x^2+x^2-2x-x^2+4x-4-7x-x+2+6$
$=2x^2-6x+4=2(x^2-3x+2)$
$=2(x-1)(x-2)$
$=2y(y+1)$ ($\because x=y+2$)

0290

주어진 식을 z에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$xyz+x^2y-xy+x+z-1=(xy+1)z+(x^2y-xy+x-1)$
$=(xy+1)z+\{xy(x-1)+(x-1)\}$
$=(xy+1)z+(x-1)(xy+1)$
$=(xy+1)(z+x-1)$

이때, $x+y+z=1$에서 $x+z=1-y$

$\therefore$ (주어진 식)$=(xy+1)(1-y-1)=-y(xy+1)$ 답 ⑤

3 인수분해

유형 10 **인수분해를 이용하여 삼각형의 모양 판단하기** 개념 01, 02

주어진 식을 인수분해한 후 다음을 이용하여 삼각형의 모양을 판단한다.
삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c일 때
(1) $a=b=c \Longleftrightarrow$ 정삼각형
(2) $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a \Longleftrightarrow$ 이등변삼각형
(3) $a^2+b^2=c^2 \Longleftrightarrow$ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

0291
주어진 등식의 좌변을 c에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면
$a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2$
$=-(a+b)c^2+a^3+a^2b+ab^2+b^3$
$=-(a+b)c^2+a^2(a+b)+b^2(a+b)$
$=(a+b)(a^2+b^2-c^2)$
이때, $(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$에서
$a>0, b>0$이므로 $a+b\neq0$
즉, $a^2+b^2-c^2=0$이므로 $a^2+b^2=c^2$
따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.
답 ⑤

0292
주어진 등식의 좌변을 인수분해하면
$a^2-ac-b^2+bc=-c(a-b)+a^2-b^2$
$=-c(a-b)+(a+b)(a-b)$
$=(a-b)(a+b-c)$ ··· ❶
이때, $(a-b)(a+b-c)=0$에서 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로
$a+b>c \qquad \therefore a+b-c\neq0$
즉, $a-b=0$이므로 $a=b$ ··· ❷
따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형이다. ··· ❸
답 $a=b$인 이등변삼각형

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40 %
❷ a, b, c 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 삼각형의 모양을 판단할 수 있다.	20 %

0293
주어진 등식의 좌변을 a에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면
$a^2(b-c)-b^2(a+c)-c^2(a-b)+2abc$
$=(b-c)a^2-(b^2+c^2-2bc)a-b^2c+bc^2$
$=(b-c)a^2-(b-c)^2a-bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-(b-c)a-bc\}$
$=(b-c)(a-b)(a+c)$
이때, $(b-c)(a-b)(a+c)=0$에서
$a>0, c>0$이므로 $a+c\neq0$
즉, $b-c=0$ 또는 $a-b=0$이므로 $a=b$ 또는 $b=c$
따라서 보기 중 이 삼각형이므로 가능한 삼각형은 ㄱ, ㄴ이다.
답 ③

유형 11 **인수분해를 이용하여 식의 값 구하기** 개념 01, 02

곱셈 공식과 인수분해 공식을 이용하여 식을 변형한 후 주어진 조건을 식에 대입하여 계산한다.

0294
$a^3+b^3+c^3=3abc$에서 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$이므로
$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$
이때, $a>0, b>0, c>0$에서 $a+b+c\neq0$이므로
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$
따라서 $a=b=c$이므로
$\frac{b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{3a}{c}=1+2+3=6$
답 6

0295
$a^3+b^3+a^2b+ab^2=(a^3+a^2b)+(b^3+ab^2)$
$=a^2(a+b)+b^2(a+b)=(a+b)(a^2+b^2)$
$=(a+b)\{(a+b)^2-2ab\}$
$=5\cdot(5^2-2\cdot2)=105$
답 105

다른 풀이 $a^3+b^3+a^2b+ab^2=(a+b)(a^2-ab+b^2)+ab(a+b)$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2+ab)$
$=(a+b)(a^2+b^2)$
$=(a+b)\{(a+b)^2-2ab\}$
$=5\cdot(5^2-2\cdot2)=105$

0296
$a-b=3, b-c=1$이므로 두 식을 변끼리 더하면
$a-c=4$, 즉 $c-a=-4$
주어진 식을 a에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면
$ab^2-a^2b+bc^2-b^2c+ca^2-c^2a$
$=-(b-c)a^2+(b^2-c^2)a-b^2c+bc^2$
$=-(b-c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b-c)$
$=-(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=-(b-c)(a-b)(a-c)$
$=(a-b)(b-c)(c-a)$
$\therefore$ (주어진 식)$=(a-b)(b-c)(c-a)$
$=3\cdot1\cdot(-4)=-12$
답 ①

0297
$a+b+c=0$에서 $b+c=-a, c+a=-b, a+b=-c$이므로
$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)=-a^3-b^3-c^3$
한편, $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
에서 $a+b+c=0$이므로
$a^3+b^3+c^3-3abc=0 \qquad \therefore a^3+b^3+c^3=3abc$
$\therefore$ (주어진 식)$=-(a^3+b^3+c^3)=-3abc$
$=-3\cdot(-3)=9$
답 ⑤

유형 12 인수분해를 이용한 수의 계산 개념 01, 02

수의 계산이 복잡한 경우

⇨ 수를 문자로 치환한 후 주어진 식을 인수분해하여 식을 간단히 정리한 다음 원래의 수를 대입하여 계산한다.

0298

$11=x$로 놓으면

$11^3+3\cdot11^2-2\cdot11-2=x^3+3x^2-2x-2$

$f(x)=x^3+3x^2-2x-2$라 하면

$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & -2 & -2 \\ & & 1 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & 4 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+4x+2)$

$\therefore 11^3+3\cdot11^2-2\cdot11-2=(11-1)\cdot(11^2+4\cdot11+2)$

$=10\cdot(121+44+2)$

$=1670$

답 1670

0299

$6999=x$로 놓으면

$$\frac{6999^3+1}{6998\times6999+1}=\frac{x^3+1}{(x-1)x+1}$$

$$=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$

$=x+1$ ($\because x^2-x+1\neq0$)

$=6999+1=7000$

답 ③

0300

$50=x$로 놓으면

$50\times51\times52\times53+1=x(x+1)(x+2)(x+3)+1$

$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1$

$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$ $x^2+3x=t$로 치환

$=t(t+2)+1$

$=t^2+2t+1=(t+1)^2$

$=(x^2+3x+1)^2$

$=(50^2+3\cdot50+1)^2$

$=2651^2$

$\therefore \sqrt{50\times51\times52\times53+1}=2651$

답 ④

0301

$f(x)=x^4+6x^3-24x^2+26x-9$에 대하여 $f(1)=0$, $f(-9)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 6 & -24 & 26 & -9 \\ & & 1 & 7 & -17 & 9 \\ \hline -9 & 1 & 7 & -17 & 9 & \boxed{0} \\ & & -9 & 18 & -9 & \\ \hline & 1 & -2 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+9)(x^2-2x+1)=(x-1)^3(x+9)$

$\therefore f(1.1)=(1.1-1)^3\cdot(1.1+9)$

$=0.1^3\times10.1=0.0101$

답 ⑤

STEP 3 내신 마스터

0302

유형 01 공식을 이용한 인수분해

|전략| 공통인수를 묶어낸 후 인수분해 공식을 적용한다.

① $(x-y)x^2-(x-y)y^2=(x-y)(x^2-y^2)$

$=(x-y)(x+y)(x-y)$

$=(x+y)(x-y)^2$

③ $27x^3-y^3=(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$

따라서 인수분해가 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

0303

유형 01 공식을 이용한 인수분해

|전략| 인수분해 공식 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$을 이용한다.

$(x-2y)^3-64y^3$

$=(x-2y)^3-(4y)^3$

$=(x-2y-4y)\{(x-2y)^2+(x-2y)\cdot4y+(4y)^2\}$

$=(x-6y)(x^2-4xy+4y^2+4xy-8y^2+16y^2)$

$=(x-6y)(x^2+12y^2)$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0304

유형 02 공통부분이 있는 식의 인수분해

|전략| 공통부분이 생기도록 적당히 두 일차식을 두 개씩 짝 지어 전개한 후 공통부분을 치환하여 인수분해한다.

$(x^2+4x+3)(x^2+12x+35)+15$

$=(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

$=\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+15$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$

$x^2+8x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t+7)(t+15)+15$

$=t^2+22t+120$

$=(t+12)(t+10)$

$=(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)$

$=(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$

따라서 $a=6$, $b=8$, $c=10$이므로

$a+b+c=24$

답 ④

0305

유형 03 복이차식(x^4+ax^2+b 꼴)의 인수분해

|전략| 주어진 식에 $4x^2y^2$을 더하고 빼서 A^2-B^2 꼴로 변형한 후 인수분해한다.

$x^4+4y^4=x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2$

$=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2$

$=(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$

따라서 $a=2$, $b=2$ 또는 $a=-2$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=4+4=8$

답 ②

3 인수분해

0306

유형 03 복이차식(x^4+ax^2+b 꼴)의 인수분해

|전략| x^4+5x^2+9는 x^2항을 적당히 분리하여 A^2-B^2 꼴로 변형한 후 인수분해하고, $x^4+2x^3+x^2-9$는 공통인수 x^2을 묶어 인수분해 공식을 이용한다.

$$\begin{aligned}x^4+5x^2+9&=x^4+6x^2+9-x^2\\&=(x^2+3)^2-x^2\\&=(\underline{x^2+x+3})(x^2-x+3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^4+2x^3+x^2-9&=x^2(x^2+2x+1)-9\\&=\{x(x+1)\}^2-3^2\\&=\{x(x+1)+3\}\{x(x+1)-3\}\\&=(\underline{x^2+x+3})(x^2+x-3)\end{aligned}$$

따라서 두 다항식의 공통인 인수는 x^2+x+3이다. 답 ③

0307

유형 04 여러 개의 문자가 포함된 식의 인수분해

|전략| 주어진 식을 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$\begin{aligned}&2x^2+xy-y^2+2x-7y-12\\&=2x^2+(y+2)x-(y^2+7y+12)\\&=2x^2+(y+2)x-(y+3)(y+4)\\&=\{x+(y+3)\}\{2x-(y+4)\}\\&=(x+y+3)(2x-y-4)\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=3$, $c=2$, $d=-4$이므로

$a+b+c+d=2$ 답 ①

다른 풀이 주어진 식을 y에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$\begin{aligned}&2x^2+xy-y^2+2x-7y-12\\&=-y^2+(x-7)y+2x^2+2x-12\\&=-y^2+(x-7)y+2(x^2+x-6)\\&=-\{y^2-(x-7)y-2(x+3)(x-2)\}\\&=-\{y+(x+3)\}\{y-2(x-2)\}\\&=(x+y+3)(2x-y-4)\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=3$, $c=2$, $d=-4$이므로

$a+b+c+d=2$

0308

유형 05 인수정리와 조립제법을 이용한 인수분해

|전략| 식의 값을 0으로 만드는 x의 값을 찾아 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 식을 인수분해한다.

$f(x)=2x^4+5x^3-8x^2-17x-6$이라 하면 $f(-1)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	2	5	-8	-17	-6
		-2	-3	11	6
2	2	3	-11	-6	0
		4	14	6	
	2	7	3	0	

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=(x+1)(x-2)(2x^2+7x+3)\\&=(x+1)(x-2)(2x+1)(x+3)\end{aligned}$$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ④이다. 답 ④

0309

유형 05 인수정리와 조립제법을 이용한 인수분해

|전략| (직육면체의 부피)=(밑넓이)×(높이)이므로 인수정리와 조립제법을 이용하여 부피를 인수분해하고, 밑면의 한 변의 길이와 높이를 구한다.

$f(x)=x^3+5x^2+7x+3$이라 하면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	5	7	3
		-1	-4	-3
	1	4	3	0

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+1)(x^2+4x+3)\\&=(x+1)(x+1)(x+3)\\&=(x+1)^2(x+3)\end{aligned}$$

이때, 주어진 직육면체의 밑면의 한 변의 길이는 $x+1$, 높이는 $x+3$이므로 겉넓이는

$$\begin{aligned}2(x+1)^2+4(x+1)(x+3)&=2(x+1)\{(x+1)+2(x+3)\}\\&=2(x+1)(3x+7)\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=3$, $c=7$이므로

$a+b+c=11$ 답 ④

Lecture

(1) (직육면체의 겉넓이)$=2\times$(밑넓이)$+$(옆넓이)

(2) (직육면체의 부피)$=$(밑넓이)$\times$(높이)

0310

유형 06 인수정리와 인수분해를 이용하여 미정계수 구하기

|전략| $f(x)=ax+b$로 놓고 $x^3-x^2+2f(x)$가 $x-1$을 인수로 가짐을 이용하여 인수분해한다.

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$$\begin{aligned}x^3-x^2+2f(x)&=x^3-x^2+2(ax+b)\\&=x^3-x^2+2ax+2b\end{aligned}$$

이 식이 $x-1$을 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	-1	$2a$	$2b$
		1	0	$2a$
	1	0	$2a$	$2a+2b$

$\therefore x^3-x^2+2ax+2b=(x-1)(x^2+2a)$

이때, 위의 조립제법에서 나머지가 0이므로

$2a+2b=0$ $\quad\therefore a+b=0$ ······ ㉠

또, $(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+2a$이므로

$x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=x^2+2a$에서

$\alpha+\beta=0$, $\alpha\beta=2a$

그런데 $\alpha\beta=-2$이므로 $a=-1$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore f(x)=-x+1$ 답 ③

다른 풀이 $x^3-x^2+2f(x)$가 $(x-1)(x+\alpha)(x+\beta)$로 인수분해되므로

$$\begin{aligned}x^3-x^2+2f(x)&=(x-1)(x+\alpha)(x+\beta)\\&=(x-1)\{x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\\&=x^3+(\alpha+\beta-1)x^2-(\alpha+\beta-\alpha\beta)x-\alpha\beta\end{aligned}$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 $\alpha+\beta-1=-1$에서 $\alpha+\beta=0$

따라서 $\alpha\beta=-2$이므로

$2f(x)=-(\alpha+\beta-\alpha\beta)x-\alpha\beta=-2x+2$

$\therefore f(x)=-x+1$

0311

유형 07 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$ 꼴의 인수분해

|전략| 주어진 식을 x^2으로 묶어낸 후 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$임을 이용하여 인수분해한다.

$$\begin{aligned}x^4-x^3-4x^2+x+1&=x^2\left(x^2-x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\\&=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-\left(x-\frac{1}{x}\right)-4\right\}\\&=x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)-2\right\}\\&=x^2\left(x-\frac{1}{x}+1\right)\left(x-\frac{1}{x}-2\right)\\&=(x^2+x-1)(x^2-2x-1)\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=-1$이므로

$a+b+c=-1$ 답 ②

0312

유형 08 순환하는 꼴의 다항식의 인수분해

|전략| 주어진 식을 전개한 후 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해한다.

주어진 식을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$\begin{aligned}&(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3\\&=(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)+(y^3-3y^2z+3yz^2-z^3)\\&\qquad+(z^3-3z^2x+3zx^2-x^3)\\&=-3x^2y+3xy^2-3y^2z+3yz^2-3z^2x+3zx^2\\&=-3(y-z)x^2+3(y^2-z^2)x-3y^2z+3yz^2\\&=-3(y-z)x^2+3(y+z)(y-z)x-3yz(y-z)\\&=-3(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}\\&=-3(y-z)(x-y)(x-z)\\&=3(x-y)(y-z)(z-x)\end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이 $x-y=a$, $y-z=b$, $z-x=c$로 놓으면

$a+b+c=(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$

$$\begin{aligned}\therefore\ &(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3\\&=a^3+b^3+c^3\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc\\&=3abc\ (\because a+b+c=0)\\&=3(x-y)(y-z)(z-x)\end{aligned}$$

0313

유형 09 인수분해를 이용한 식의 변형 — 조건식이 주어진 경우

|전략| 조건식을 변형하여 주어진 식에 대입한 후 인수분해한다.

$x-y+3z=0$에서 $y=x+3z$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^2+y^2+3zx&=x^2+(x+3z)^2+3zx\\&=x(x+3z)+(x+3z)^2\\&=(x+3z)(x+x+3z)\\&=(x+3z)(2x+3z)\\&=y(2x+3z)\ (\because y=x+3z)\end{aligned}$$

답 ③

0314

유형 11 인수분해를 이용하여 식의 값 구하기

|전략| 먼저 곱셈 공식의 변형 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$를 이용하여 $ab+bc+ca$의 값을 구한다.

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$26=8^2-2(ab+bc+ca)\qquad \therefore ab+bc+ca=19$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}-3&=\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{abc}\\&=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{abc}\\&=\frac{8\cdot(26-19)}{14}=4\end{aligned}$$

답 ②

0315

유형 12 인수분해를 이용한 수의 계산

|전략| 49를 문자로 치환한 후 인수분해 공식을 이용한다.

$49=x$로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{49^4+49^2+1}{49^2+49+1}=\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}&=\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2+x+1}\\&=x^2-x+1\ (\because x^2+x+1\neq0)\\&=x^2+2x+1-3x=(x+1)^2-3x\\&=(49+1)^2-3\cdot49\\&=50^2-147\end{aligned}$$

$\therefore A=147$ 답 ④

0316

유형 12 인수분해를 이용한 수의 계산

|전략| 인수분해 공식을 이용하여 주어진 식을 인수분해하고, 10과 30 사이의 자연수 중에서 3^6-1의 인수를 찾는다.

$$\begin{aligned}3^6-1&=(3^3)^2-1^2\\&=(3^3+1)\times(3^3-1)\\&=(3+1)\times(3^2-3+1^2)\times(3-1)\times(3^2+3+1^2)\\&=4\times7\times2\times13\end{aligned}$$

따라서 10과 30 사이에 있는 자연수 중에서 3^6-1을 나누어떨어지도록 하는 자연수는 13, 14, 26, 28의 4개이다. 답 ②

0317

유형 04 여러 개의 문자가 포함된 식의 인수분해

|전략| 주어진 식을 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2-2xy+y^2+ax-4y-5$

$=x^2-(2y-a)x+y^2-4y-5$

$=x^2-(2y-a)x+(y+1)(y-5)$ … ❶

주어진 식이 x, y에 대한 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$-(y+1)-(y-5)=-2y+a\qquad \therefore a=4$ … ❷

답 4

채점 기준	배점
❶ 주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리할 수 있다.	4점
❷ a의 값을 구할 수 있다.	2점

3 인수분해

0318

유형 05 인수정리와 조립제법을 이용한 인수분해

| 전략 | 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 식을 인수분해하고, $f(0)\neq 0$, $g(3)\neq 0$임을 이용하여 이차식 $f(x)$, $g(x)$를 구한다.

$x^4+x^3-8x^2-12x=x(x^3+x^2-8x-12)$

$h(x)=x^3+x^2-8x-12$라 하면

$h(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-2	1	1	-8	-12
		-2	2	12
	1	-1	-6	0

$h(x)=(x+2)(x^2-x-6)$

$=(x+2)(x+2)(x-3)$

$=(x+2)^2(x-3)$

$\therefore x^4+x^3-8x^2-12x=x(x+2)^2(x-3)$ … ❶

$f(x)$, $g(x)$는 각각 이차식이고 $f(0)\neq 0$, $g(3)\neq 0$이므로 $f(x)$는 x를 인수로 갖지 않고, $g(x)$는 $x-3$을 인수로 갖지 않는다. 즉,

$f(x)=(x+2)(x-3)$, $g(x)=x(x+2)$ … ❷

$\therefore f(1)+g(1)=-6+3=-3$ … ❸

답 -3

채점 기준	배점
❶ 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	3점
❷ $f(x)$, $g(x)$를 구할 수 있다.	2점
❸ $f(1)+g(1)$의 값을 구할 수 있다.	2점

0319

유형 11 인수분해를 이용하여 식의 값 구하기

| 전략 | $x+y$, xy의 값을 구하여 주어진 식을 인수분해한 식에 대입한다.

$x=1+\sqrt{3}$, $y=1-\sqrt{3}$에서

$x+y=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=2$

$xy=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-2$ … ❶

$\therefore x(y^2-2)+y(x^2-2)=xy^2-2x+x^2y-2y$

$=(xy^2+x^2y)-(2x+2y)$

$=xy(x+y)-2(x+y)$

$=(x+y)(xy-2)$ … ❷

$=2\cdot(-2-2)=-8$ … ❸

답 -8

채점 기준	배점
❶ $x+y$, xy의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	3점
❸ ❷의 식에 $x+y$, xy의 값을 대입하여 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	2점

0320

유형 06 인수정리와 인수분해를 이용하여 미정계수 구하기

| 전략 | $x^4+ax^3+bx^2-8x-12=(x+2)(x-2)f(x)$는 x에 대한 항등식이므로 주어진 식에 $x=-2$, $x=2$를 각각 대입하여 상수 a, b의 값을 구한다.

(1) $P(x)=x^4+ax^3+bx^2-8x-12$라 하면 $P(x)$가 $x+2$, $x-2$를 각각 인수로 가지므로

$P(-2)=16-8a+4b+16-12=0$

$\therefore -2a+b=-5$ …… ㉠

$P(2)=16+8a+4b-16-12=0$

$\therefore 2a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

(2) $P(x)=x^4+2x^3-x^2-8x-12$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-2	1	2	-1	-8	-12
		-2	0	2	12
2	1	0	-1	-6	0
		2	4	6	
	1	2	3	0	

$\therefore P(x)=(x+2)(x-2)(x^2+2x+3)$

따라서 $f(x)=x^2+2x+3$이므로

$f(2)=2^2+2\cdot 2+3=11$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 상수 a, b의 값을 구할 수 있다.	4점
(2) $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	6점

다른 풀이 (1) $x^4+ax^3+bx^2-8x-12=(x+2)(x-2)f(x)$이므로

$f(x)=x^2+cx+d$ (c, d는 상수)로 놓으면

$(x+2)(x-2)f(x)=(x+2)(x-2)(x^2+cx+d)$

$=(x^2-4)(x^2+cx+d)$

$=x^4+cx^3+(d-4)x^2-4cx-4d$

$\therefore x^4+ax^3+bx^2-8x-12=x^4+cx^3+(d-4)x^2-4cx-4d$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c$, $b=d-4$, $-8=-4c$, $-12=-4d$

$\therefore a=2$, $b=-1$, $c=2$, $d=3$

(2) $f(x)=x^2+2x+3$이므로

$f(2)=2^2+2\cdot 2+3=11$

0321

유형 10 인수분해를 이용하여 삼각형의 모양 판단하기

| 전략 | 주어진 등식의 좌변을 인수분해하여 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

(1) 주어진 등식의 좌변을 c에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$a^4+a^2c^2+b^2c^2-b^4=(a^2+b^2)c^2+a^4-b^4$

$=(a^2+b^2)c^2+(a^2+b^2)(a^2-b^2)$

$=(a^2+b^2)(c^2+a^2-b^2)$

이때, $(a^2+b^2)(c^2+a^2-b^2)=0$에서

$a>0$, $b>0$이므로 $a^2+b^2\neq 0$

즉, $c^2+a^2-b^2=0$이므로 $a^2+c^2=b^2$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.

(2) 빗변의 길이가 b인 직각삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ac$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 주어진 등식의 좌변을 인수분해하여 삼각형의 모양을 판단할 수 있다.	8점
(2) 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.	4점

창의·융합 실력 마스터

0322

|전략| $x^2+x-n=(x+a)(x-b)$ (a, b는 자연수)를 만족시키는 a, b의 값을 구한다.

$f_n(x)=x^2+x-n=(x+a)(x-b)$ (a, b는 자연수)에서

$x^2+x-n=x^2+(a-b)x-ab$

$\therefore a-b=1,\ ab=n$

이때, ab의 값은 1000 이하인 자연수이고, $a-b=1$인 a, b의 값을 구해 보면 다음 표와 같다.

a	2	3	4	$\cdots$	31	32
b	1	2	3	$\cdots$	30	31
ab	2	6	12	$\cdots$	930	992

따라서 1000개의 다항식 중 $(x+a)(x-b)$ 꼴로 인수분해되는 $f_n(x)$의 개수는 31이다. 답 ③

0323

|전략| n^4-6n^2+25의 값이 소수이려면 인수는 1과 자기 자신뿐이어야 함을 이용한다.

$$n^4-6n^2+25=n^4+10n^2+25-16n^2$$
$$=(n^2+5)^2-(4n)^2$$
$$=(n^2+4n+5)(n^2-4n+5)$$

이때, n^4-6n^2+25가 소수이므로

$n^2+4n+5=1$ 또는 $n^2-4n+5=1$

이어야 한다.

(i) $n^2+4n+5=1$일 때

$n^2+4n+4=(n+2)^2=0$에서 $n=-2$

(ii) $n^2-4n+5=1$일 때

$n^2-4n+4=(n-2)^2=0$에서 $n=2$

(i), (ii)에서 $n=-2$ 또는 $n=2$일 때, $n^4-6n^2+25=17$로 소수가 되므로 조건을 만족시킨다.

따라서 구하는 정수 n은 -2, 2의 2개이다. 답 2

0324

|전략| 주어진 식을 차수가 가장 낮은 b에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하고, $363=11^2\cdot3$임을 이용한다.

주어진 식을 b에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$$a^2b+2ab+a^2+2a+b+1=(a^2+2a+1)b+a^2+2a+1$$
$$=(a^2+2a+1)(b+1)$$
$$=(a+1)^2(b+1)$$

즉, $(a+1)^2(b+1)$의 값이 $363=11^2\cdot3$이므로

$(a+1)^2(b+1)=11^2\cdot3$

이때, a, b는 자연수이므로

$a+1=11,\ b+1=3$

따라서 $a=10$, $b=2$이므로

$a+b=12$ 답 12

0325

|전략| 나무 블록의 부피는 직육면체의 부피에서 정육면체 모양의 구멍의 부피를 빼서 구한다.

직육면체의 부피는 $x^2(x+3)$

정육면체 모양의 구멍 한 개의 부피는 1

$\therefore$ (나무 블록의 부피)$=x^2(x+3)-2\cdot1=x^3+3x^2-2$

$f(x)=x^3+3x^2-2$라 하면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ & & -1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x^2+2x-2)$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=-2$이므로

$abc=-4$ 답 ②

0326

|전략| 인수정리와 조립제법을 이용하여 $x^3+(a-1)x^2+(2-a)x-2$를 인수분해하고, 서로 다른 세 일차식의 곱으로 인수분해되도록 하는 상수 a의 값을 구한다.

$f(x)=x^3+(a-1)x^2+(2-a)x-2$라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a-1 & 2-a & -2 \\ & & 1 & a & 2 \\ \hline & 1 & a & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+ax+2)$

이때, $x^2+ax+2=(x+p)(x+q)$ (p, q는 정수)라 하면

$x^2+ax+2=x^2+(p+q)x+pq$에서

$a=p+q$ ...... ㉠

$2=pq$ ...... ㉡

그런데 ㉡에서 $p=-2$, $q=-1$ 또는 $p=-1$, $q=-2$일 때는 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$가 되어 $f(x)$가 서로 다른 세 일차식의 곱으로 인수분해된다는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $p=1$, $q=2$ 또는 $p=2$, $q=1$이므로 ㉠에서

$a=1+2=3$ 답 3

0327

|전략| $14=x$로 놓고 $(x^2+2x)^2-18(x^2+2x)+45$를 인수분해한다.

$14=x$로 놓으면

$(14^2+2\times14)^2-18\times(14^2+2\times14)+45$

$=(x^2+2x)^2-18(x^2+2x)+45$

$x^2+2x=t$로 치환

$=t^2-18t+45$

$=(t-3)(t-15)$

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-15)$

$=(x+3)(x-1)(x+5)(x-3)$

$x=14$를 대입하면

$(14+3)\times(14-1)\times(14+5)\times(14-3)=17\times13\times19\times11$

$\therefore a+b+c+d=60$ 답 ③

4 복소수

본책 54~63쪽

STEP 1 개념 마스터

0328 답 실수부분 : 0, 허수부분 : 9

0329 답 실수부분 : -3, 허수부분 : $\sqrt{5}$

0330 답 실수부분 : 2, 허수부분 : $-\sqrt{7}$

0331 답 실수부분 : $\frac{7}{2}$, 허수부분 : $-\frac{3}{2}$

0332 답 실수부분 : $-\frac{5}{3}$, 허수부분 : $\frac{2}{3}$

0333 답 실수부분 : $2+\sqrt{3}$, 허수부분 : 0

0334 답 ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅂ

0335

$(x+2y)-4i=-1+2yi$에서

$x+2y=-1,\ 2y=-4$

$\therefore x=3,\ y=-2$ 답 $x=3,\ y=-2$

0336

$(x+3y)+(-2x+y)i=2+3i$에서

$x+3y=2,\ -2x+y=3$

$\therefore x=-1,\ y=1$ 답 $x=-1,\ y=1$

0337

$(3x-y)+(2x+3y)i=7+i$에서

$3x-y=7,\ 2x+3y=1$

$\therefore x=2,\ y=-1$ 답 $x=2,\ y=-1$

0338

$(2x-y)+(x+3y)i=4-5i$에서

$2x-y=4,\ x+3y=-5$

$\therefore x=1,\ y=-2$ 답 $x=1,\ y=-2$

0339

$\overline{5+2i}=5-2i$ 답 $5-2i$

0340

$\overline{-3+4i}=-3-4i$ 답 $-3-4i$

0341

$\overline{-3i}=3i$ 답 $3i$

0342

$\overline{5i}=-5i$ 답 $-5i$

0343

$\overline{4i-\sqrt{3}}=\overline{-\sqrt{3}+4i}=-\sqrt{3}-4i$ 답 $-\sqrt{3}-4i$

0344

$\overline{2i+\sqrt{5}}=\overline{\sqrt{5}+2i}=\sqrt{5}-2i$ 답 $\sqrt{5}-2i$

0345

$(5-i)+(2+4i)=(5+2)+(-1+4)i$

$=7+3i$ 답 $7+3i$

0346

$(1-2i)-(-3+4i)=(1+3)+(-2-4)i$

$=4-6i$ 답 $4-6i$

0347

$(3+i)(2-i)=6-3i+2i-i^2=6-i-(-1)$

$=7-i$ 답 $7-i$

0348

$(4+i)(5-2i)=20-8i+5i-2i^2=20-3i-2\cdot(-1)$

$=22-3i$ 답 $22-3i$

0349

$\frac{1+i}{1+2i}=\frac{(1+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{1-2i+i-2i^2}{1-4i^2}$

$=\frac{3-i}{5}=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i$ 답 $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i$

0350

$\frac{1-i}{1-3i}=\frac{(1-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{1+3i-i-3i^2}{1-9i^2}$

$=\frac{4+2i}{10}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$ 답 $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$

0351

(1) $x^2+y^2=(1+i)^2+(1-i)^2=2i-2i=0$

(2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}=\frac{1-i+1+i}{(1+i)(1-i)}$

$=\frac{2}{1-i^2}=\frac{2}{2}=1$

답 (1) 0 (2) 1

다른 풀이 $x=1+i,\ y=1-i$이므로

$x+y=(1+i)+(1-i)=2,\ xy=(1+i)(1-i)=2$

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=2^2-2\cdot2=0$

(2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{2}{2}=1$

0352

(1) $x^2-y^2=(2+3i)^2-(2-3i)^2=24i$

(2) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2+3i}-\frac{1}{2-3i}=\frac{2-3i-2-3i}{(2+3i)(2-3i)}$

$=\frac{-6i}{4-9i^2}=-\frac{6}{13}i$ 답 (1) $24i$ (2) $-\frac{6}{13}i$

다른 풀이 $x=2+3i$, $y=2-3i$이므로

$x+y=(2+3i)+(2-3i)=4$, $x-y=(2+3i)-(2-3i)=6i$

$xy=(2+3i)(2-3i)=13$

(1) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=4\cdot 6i=24i$

(2) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{-(x-y)}{xy}=-\frac{6}{13}i$

0353

$i^{12}=(i^4)^3=1$ 답 1

0354

$(-i)^5=-i^5=-i^4\cdot i=-i$ 답 $-i$

0355

$i^{50}=(i^4)^{12}\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1$ 답 -1

0356

$i^{100}+i^{300}=(i^4)^{25}+(i^4)^{75}=1+1=2$ 답 2

0357

$\sqrt{-7}=\sqrt{7}i$ 답 $\sqrt{7}i$

0358

$\sqrt{-16}=\sqrt{16}i=4i$ 답 $4i$

0359

$-\sqrt{-32}=-\sqrt{32}i=-4\sqrt{2}i$ 답 $-4\sqrt{2}i$

0360

$-\sqrt{-40}=-\sqrt{40}i=-2\sqrt{10}i$ 답 $-2\sqrt{10}i$

0361

$\sqrt{-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}i=\frac{3}{5}i$ 답 $\frac{3}{5}i$

0362

$\sqrt{-\frac{49}{64}}=\sqrt{\frac{49}{64}}i=\frac{7}{8}i$ 답 $\frac{7}{8}i$

0363

$\pm\sqrt{-2}=\pm\sqrt{2}i$ 답 $\pm\sqrt{2}i$

0364

$\pm\sqrt{-7}=\pm\sqrt{7}i$ 답 $\pm\sqrt{7}i$

0365

$\pm\sqrt{-16}=\pm\sqrt{16}i=\pm 4i$ 답 $\pm 4i$

0366

$\pm\sqrt{-36}=\pm\sqrt{36}i=\pm 6i$ 답 $\pm 6i$

0367

$\sqrt{-2}\sqrt{-8}=-\sqrt{(-2)\cdot(-8)}=-\sqrt{16}=-4$ 답 -4

다른 풀이 $\sqrt{-2}\sqrt{-8}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{8}i=\sqrt{16}i^2=-4$

0368

$\sqrt{-4}\sqrt{-9}=-\sqrt{(-4)\cdot(-9)}=-\sqrt{36}=-6$ 답 -6

0369

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=-\sqrt{\frac{2}{-3}}=-\sqrt{\frac{2}{3}}i=-\frac{\sqrt{6}}{3}i$ 답 $-\frac{\sqrt{6}}{3}i$

다른 풀이 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{3}i^2}=-\frac{\sqrt{6}}{3}i$

0370

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}=-\sqrt{\frac{3}{-5}}=-\sqrt{\frac{3}{5}}i=-\frac{\sqrt{15}}{5}i$ 답 $-\frac{\sqrt{15}}{5}i$

STEP 2 유형 마스터

유형 01 복소수의 정의

개념 01

복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)
- 실수 a $(b=0)$
- 허수
  - 순허수 bi $(a=0, b\neq 0)$
  - 순허수가 아닌 허수 $a+bi$ $(a\neq 0, b\neq 0)$

0371

① $5-2i$의 실수부분은 5이고, 허수부분은 -2이다.

② 모든 실수는 복소수에 포함되므로 0도 복소수이다.

③ $1+2i$는 순허수가 아니다.

④ $a=2i$, $b=0$이면 $a+bi=2i$는 순허수이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

a가 실수라는 조건이 없으므로 허수일 수도 있다.

0372

허수는 $-i$, $1+3i$, $\sqrt{2}i$, $2-\frac{3}{4}i$이고, 이 중 순허수는 $-i$, $\sqrt{2}i$이므로

보기 중 순허수가 아닌 허수는 $1+3i$, $2-\frac{3}{4}i$의 2개이다. 답 2

유형 02 복소수의 사칙연산 개념 02

(1) i를 문자와 같이 생각하여 계산하고 $i^2=-1$로 고친다.
(2) 분모에 허수가 있는 경우에는 먼저 분모와 분자에 분모의 켤레복소수를 곱하여 분모를 실수로 만들어 준다. (분모의 실수화)

0373

$$(2+3i)(5-i)+\frac{2(-3+2i)}{1+i}$$
$$=10-2i+15i+3+\frac{2(-3+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=13+13i+\frac{2(-3+3i+2i+2)}{2}$$
$$=13+13i-1+5i$$
$$=12+18i$$

따라서 $a=12$, $b=18$이므로

$a+b=30$ 답 30

Lecture

분모의 실수화

분모와 분자에 분모의 켤레복소수를 곱하여 분모를 실수로 만든다.

예) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

0374

$$(1+2i)(2-\sqrt{3}i)^2(2+\sqrt{3}i)^2$$
$$=(1+2i)\{(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)\}^2$$
$$=(1+2i)(4+3)^2$$
$$=49+98i$$

따라서 $a=49$, $b=98$이므로

$a-b=-49$ 답 ②

0375

$$\frac{1-\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}+\frac{1+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}=\frac{(1-\sqrt{2}i)^2+(1+\sqrt{2}i)^2}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}$$
$$=\frac{1-2\sqrt{2}i-2+1+2\sqrt{2}i-2}{1+2}$$
$$=-\frac{2}{3}$$

답 ①

0376

$$z=\frac{3+i}{1-i}=\frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3+3i+i-1}{2}$$
$$=\frac{2+4i}{2}=1+2i$$ … ❶

따라서 $a=1$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=1^2+2^2=5$ … ❷

답 5

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 만족시키는 복소수 z를 구할 수 있다.	70 %
❷ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 03 복소수가 주어질 때의 식의 값 개념 02

(1) 복소수가 주어질 때의 식의 값
$x=a+bi$ (a, b는 실수)에서 $x-a=bi$ 꼴로 변형한 후 양변을 제곱하여 x에 대한 이차방정식을 만들고 이것을 주어진 식에 대입한다.
(2) 켤레복소수가 주어질 때의 식의 값
두 복소수의 합(또는 차)과 곱을 구하여 주어진 식에 대입한다.

0377

$x=\frac{3+i}{2}$에서 $2x-3=i$

양변을 제곱하면

$4x^2-12x+9=-1$

$4x^2-12x=-10$ $\quad\therefore 2x^2-6x=-5$

$$\therefore 6x^2-18x+14=3(2x^2-6x)+14$$
$$=3\cdot(-5)+14=-1$$

답 -1

다른 풀이 $x=\frac{3+i}{2}$를 $6x^2-18x+14$에 대입하면

$$6\left(\frac{3+i}{2}\right)^2-18\left(\frac{3+i}{2}\right)+14=6\cdot\left(\frac{8+6i}{4}\right)-9(3+i)+14$$
$$=3(4+3i)-27-9i+14$$
$$=12+9i-27-9i+14$$
$$=-1$$

0378

$\alpha+\beta=(2+i)+(2-i)=4$

$\alpha\beta=(2+i)(2-i)=5$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{4^2-2\cdot5}{5}=\frac{6}{5}$$

답 $\frac{6}{5}$

다른 풀이 $$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2-i}{2+i}+\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2-i)^2+(2+i)^2}{(2+i)(2-i)}$$
$$=\frac{3-4i+3+4i}{5}=\frac{6}{5}$$

유형 04 복소수가 실수 또는 순허수가 될 조건 개념 01, 02

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여
(1) z가 실수가 되기 위한 조건 ⇨ $b=0$
(2) z가 순허수가 되기 위한 조건 ⇨ $a=0$, $b\neq0$

0379

$$(1+i)x^2+(3-i)x+2(1-i)$$
$$=x^2+x^2i+3x-xi+2-2i$$
$$=(x^2+3x+2)+(x^2-x-2)i$$

이 복소수가 순허수가 되려면

$x^2+3x+2=0$ ……㉠, $x^2-x-2\neq0$ ……㉡

㉠에서 $(x+2)(x+1)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

㉡에서 $(x+1)(x-2)\neq0$ $\quad\therefore x\neq-1$, $x\neq2$

따라서 구하는 x의 값은 $x=-2$ 답 -2

0380

$z=i(x-2i)^2=i(x^2-4xi-4)=4x+(x^2-4)i$

z가 실수가 되려면

$x^2-4=0$, $(x+2)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

이때, 음수 x의 값이 a이므로 $a=-2$

또, $x=-2$를 $z=4x+(x^2-4)i$에 대입하면

$z=-8$, 즉 $b=-8$

$\therefore a-b=-2-(-8)=6$ 답 6

발전 유형 05 복소수 z^2이 실수가 될 조건 개념 01, 02

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

(1) z^2이 실수 ⇨ z가 실수 또는 순허수 ⇨ $a=0$ 또는 $b=0$

(2) z^2이 음의 실수 ⇨ z가 순허수 ⇨ $a=0$, $b\neq0$

0381

z^2이 실수가 되려면 z는 실수이거나 순허수이어야 한다.

$z=a(1+i)-3(1-i)=(a-3)+(a+3)i$에서

(i) z가 실수일 때

$a+3=0$ $\quad\therefore a=-3$

(ii) z가 순허수일 때

$a-3=0$이고 $a+3\neq0$ $\quad\therefore a=3$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $-3+3=0$ 답 ②

다른 풀이 $z^2=(a-3)^2+2(a-3)(a+3)i-(a+3)^2$

z^2이 실수가 되려면

$2(a-3)(a+3)=0$ $\quad\therefore a=-3$ 또는 $a=3$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $-3+3=0$

0382

$z=a^2(1-2i)+a(1+i)-(2-i)$

$\quad=a^2-2a^2i+a+ai-2+i$

$\quad=(a^2+a-2)+(-2a^2+a+1)i$

z^2이 음의 실수가 되려면 z는 순허수이어야 하므로

$a^2+a-2=0$ …… ㉠, $-2a^2+a+1\neq0$ …… ㉡

㉠에서 $(a+2)(a-1)=0$ $\quad\therefore a=-2$ 또는 $a=1$

㉡에서 $(2a+1)(a-1)\neq0$ $\quad\therefore a\neq-\frac{1}{2}$, $a\neq1$

따라서 구하는 a의 값은 $a=-2$ 답 ①

Lecture

「복소수 z에 대하여 z^2이 음의 실수이면 z는 순허수이다.」를 설명해 보자.

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$

z^2이 음의 실수가 되려면

$a^2-b^2<0$ …… ㉠, $2ab=0$ …… ㉡

㉡에서 $a=0$ 또는 $b=0$

이때, $b=0$이면 ㉠에서 $a^2<0$이 되어 성립하지 않는다. ($\because a^2\geq0$)

따라서 $a=0$이고 ㉠에서 $-b^2<0$이므로 $b\neq0$

즉, $a=0$, $b\neq0$이므로 z는 순허수이다.

유형 06 복소수가 서로 같을 조건 개념 01, 02

복소수를 포함한 등식에서 실수인 미지수의 값을 구할 때는

⇨ 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 정리하여 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

0383

$(1+2i)x+(2-i)y=-5+10i$에서

$x+2xi+2y-yi=-5+10i$

$(x+2y)+(2x-y)i=-5+10i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+2y=-5$, $2x-y=10$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=-4$

$\therefore x+y=-1$ 답 ②

0384

$(3+xi)(2-i)=13+yi$에서

$6-3i+2xi+x=13+yi$

$(x+6)+(2x-3)i=13+yi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+6=13$, $2x-3=y$

두 식을 연립하여 풀면 $x=7$, $y=11$

$\therefore y-x=4$ 답 4

0385

$$\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-i}=\frac{x(1-i)+y(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{(x+y)+(-x+y)i}{2}$$

즉, $\frac{x+y}{2}+\frac{-x+y}{2}i=3-i$이므로

$(x+y)+(-x+y)i=6-2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=6$, $-x+y=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=2$

$\therefore xy=8$ 답 8

0386

$x^2+y^2i+x+yi-2-6i=0$에서

$(x^2+x-2)+(y^2+y-6)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+x-2=0$, $y^2+y-6=0$

$x^2+x-2=0$에서 $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

$y^2+y-6=0$에서 $(y+3)(y-2)=0$

$\therefore y=-3$ 또는 $y=2$

따라서 $x+y$의 값은

$-2-3=-5$ 또는 $-2+2=0$ 또는 $1-3=-2$ 또는 $1+2=3$

이므로 $x+y$의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

유형 07 켤레복소수의 성질 개념 01, 02

복소수 z의 켤레복소수를 $\bar{z}$라 할 때
(1) $z+\bar{z}=$(실수) (2) $z\bar{z}=$(실수)
(3) $z=\bar{z}$ ⇨ z는 실수 (4) $z=-\bar{z}$ ⇨ z는 순허수 또는 0

0387

$z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

ㄱ. $a+bi=-(a-bi)$에서 $2a=0$ $\quad\therefore a=0$
따라서 $z=bi$이므로 z는 순허수 또는 0이다. (거짓)

ㄴ. $(a+bi)-(a-bi)=0$에서 $2bi=0$ $\quad\therefore b=0$
따라서 $z=a$이므로 z는 실수이다. (참)

ㄷ. $z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$
z^2이 실수이므로 $2ab=0$ $\quad\therefore a=0$ 또는 $b=0$
$(z+1)^2=z^2+2z+1=a^2-b^2+2(a+bi)+1$
$=a^2+2a-b^2+1+2bi$
이때, $b\neq0$이면 $(z+1)^2$은 실수가 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 답 ②

다른 풀이 ㄱ. (반례) $z=i$이면 $\bar{z}=-i$이므로 $z=-\bar{z}$이지만 z는 실수가 아니다. (거짓)
ㄷ. (반례) $z=i$이면 $z^2=-1$로 실수이지만 $(z+1)^2=(i+1)^2=2i$이므로 $(z+1)^2$은 실수가 아니다. (거짓)

0388

$z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

ㄱ. $(z+1)(\bar{z}+1)=z\bar{z}+z+\bar{z}+1$
$=(a+bi)(a-bi)+a+bi+a-bi+1$
$=a^2+b^2+2a+1$ (실수)

ㄴ. $(z+1)(\bar{z}-1)=z\bar{z}-z+\bar{z}-1$
$=(a+bi)(a-bi)-(a+bi)+a-bi-1$
$=a^2+b^2-1-2bi$
이때, $b\neq0$이면 실수가 아니다.

ㄷ. $(2z+1)(\bar{z}+1)-z=2z\bar{z}+2z+\bar{z}+1-z$
$=2z\bar{z}+z+\bar{z}+1$
$=2(a+bi)(a-bi)+a+bi+a-bi+1$
$=2(a^2+b^2)+2a+1$ (실수)

따라서 항상 실수인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0389

복소수 $\frac{1}{1-z^2}$이 실수이므로

$\frac{1}{1-z^2}=\overline{\left(\frac{1}{1-z^2}\right)}$, $\frac{1}{1-z^2}=\frac{1}{\overline{1-z^2}}$

$1-z^2=\overline{1-z^2}$, $1-z^2=1-\bar{z}^2$

$z^2-\bar{z}^2=0$ $\quad\therefore (z+\bar{z})(z-\bar{z})=0$

그런데 z는 허수이므로 $z\neq\bar{z}$

$\therefore z+\bar{z}=0$

이때, $z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$z+\bar{z}=2a=0$ $\quad\therefore a=0$

따라서 z의 실수부분은 0이다. 답 0

유형 08 켤레복소수의 성질을 이용한 연산 개념 01, 02

복소수가 주어지고 켤레복소수를 포함한 식의 값을 구할 때는 다음 성질을 이용하여 식을 간단히 한 후 복소수를 대입한다.
⇨ 두 복소수 z_1, z_2의 켤레복소수를 각각 $\bar{z_1}$, $\bar{z_2}$라 할 때
(1) $\overline{(\bar{z_1})}=z_1$
(2) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z_1}+\bar{z_2}$, $\overline{z_1-z_2}=\bar{z_1}-\bar{z_2}$
(3) $\overline{z_1z_2}=\bar{z_1}\cdot\bar{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$ (단, $z_2\neq0$)

0390

$\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta}=\bar{\alpha}(\alpha+\beta)+\bar{\beta}(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$
$=(\alpha+\beta)\overline{(\alpha+\beta)}$

이때, $\alpha=-2-3i$, $\beta=3+2i$이므로

$\alpha+\beta=1-i$, $\overline{\alpha+\beta}=1+i$

$\therefore$ (주어진 식)$=(1-i)(1+i)=2$ 답 ①

0391

$\bar{z_1}-\bar{z_2}=\overline{z_1-z_2}=3+2i$이므로 $z_1-z_2=3-2i$

$\bar{z_1}\cdot\bar{z_2}=\overline{z_1z_2}=6+i$이므로 $z_1z_2=6-i$

$\therefore (2z_1+1)(2z_2-1)=4z_1z_2-2(z_1-z_2)-1$
$=4(6-i)-2(3-2i)-1=17$ 답 ②

0392

$z=\frac{\bar{w}+1}{2w-1}=\frac{1-\sqrt{2}i+1}{2(1+\sqrt{2}i)-1}=\frac{2-\sqrt{2}i}{1+2\sqrt{2}i}$

$\therefore z\bar{z}=\frac{2-\sqrt{2}i}{1+2\sqrt{2}i}\cdot\overline{\left(\frac{2-\sqrt{2}i}{1+2\sqrt{2}i}\right)}=\frac{2-\sqrt{2}i}{1+2\sqrt{2}i}\cdot\frac{\overline{2-\sqrt{2}i}}{\overline{1+2\sqrt{2}i}}$

$=\frac{2-\sqrt{2}i}{1+2\sqrt{2}i}\cdot\frac{2+\sqrt{2}i}{1-2\sqrt{2}i}=\frac{4+2}{1+8}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

다른 풀이 $\bar{z}=\overline{\left(\frac{\bar{w}+1}{2w-1}\right)}=\frac{\overline{\bar{w}+1}}{\overline{2w-1}}=\frac{w+1}{2\bar{w}-1}$에서

$z\bar{z}=\frac{\bar{w}+1}{2w-1}\cdot\frac{w+1}{2\bar{w}-1}=\frac{w\bar{w}+w+\bar{w}+1}{4w\bar{w}-2(w+\bar{w})+1}$

이때, $w+\bar{w}=(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)=2$,

$w\bar{w}=(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=3$이므로

(주어진 식)$=\frac{3+2+1}{4\cdot3-2\cdot2+1}=\frac{2}{3}$

0393

$\alpha\bar{\alpha}=3$, $\beta\bar{\beta}=3$에서 $\alpha=\frac{3}{\bar{\alpha}}$, $\beta=\frac{3}{\bar{\beta}}$

$\alpha+\beta=6i$에서 $\frac{3}{\bar{\alpha}}+\frac{3}{\bar{\beta}}=6i$

$\frac{3(\bar{\alpha}+\bar{\beta})}{\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}}=6i$, $3\overline{(\alpha+\beta)}=6i\overline{\alpha\beta}$, $3\cdot\overline{6i}=6i\overline{\alpha\beta}$

$3\cdot(-6i)=6i\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\alpha\beta}=-3$ $\quad\therefore \alpha\beta=-3$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{6i}{-3}=-2i$ 답 $-2i$

다른 풀이 $\alpha\bar{\alpha}=3$, $\beta\bar{\beta}=3$에서 $\frac{1}{\alpha}=\frac{\bar{\alpha}}{3}$, $\frac{1}{\beta}=\frac{\bar{\beta}}{3}$이므로

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\bar{\alpha}}{3}+\frac{\bar{\beta}}{3}=\frac{1}{3}(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=\frac{1}{3}\overline{(\alpha+\beta)}$

$=\frac{1}{3}\cdot\overline{6i}=\frac{1}{3}\cdot(-6i)=-2i$

유형 09 $z=a+bi$로 놓고 조건을 만족시키는 복소수 z 구하기 개념 01, 02

복소수 z에 대한 등식이 주어지면
(i) $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 등식에 대입한다.
(ii) 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

0394

$z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로
$(1+2i)z+3\overline{z}i=6i+2$에서
$(1+2i)(a+bi)+3(a-bi)i=6i+2$
$a+bi+2ai-2b+3ai+3b=2+6i$
$(a+b)+(5a+b)i=2+6i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a+b=2$, $5a+b=6$
두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$
$\therefore z=1+i$

답 ④

0395

$z=a+bi$ (a, b는 실수, $b>0$)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로
$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=8$ $\quad\therefore a=4$
$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=16+b^2=20$
$b^2=4$ $\quad\therefore b=2$ ($\because b>0$)
따라서 $z=4+2i$이므로
$\dfrac{z}{1-i}=\dfrac{(4+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2+6i}{2}=1+3i$

답 ③

0396

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면
$z+zi=(a+bi)+(a+bi)i=(a-b)+(a+b)i$
이므로
$\overline{z+zi}=(a-b)-(a+b)i=1-3i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a-b=1$, $a+b=3$
두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$
따라서 $z=2+i$이므로
$z+\dfrac{5}{z}=2+i+\dfrac{5}{2+i}=2+i+2-i=4$

답 4

0397

$z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로
$(2+i)z+(3-2i)\overline{z}=2-2i$에서
$(2+i)(a+bi)+(3-2i)(a-bi)=2-2i$
$2a+2bi+ai-b+3a-3bi-2ai-2b=2-2i$
$(5a-3b)-(a+b)i=2-2i$ … ❶
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$5a-3b=2$, $a+b=2$
두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$ … ❷

즉, $z=1+i$이므로
$z^2=(1+i)^2=1+2i-1=2i$
$z^4=z^2\cdot z^2=2i\cdot 2i=-4$
$z^8=z^4\cdot z^4=(-4)\cdot(-4)=16$
따라서 z^n이 양수가 되는 자연수 n의 최솟값은 8이다. … ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ $z=a+bi$로 놓고 주어진 등식에 대입하여 식을 정리할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ z^n이 양수가 되는 자연수 n의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

참고 허수는 수직선 위에 나타낼 수 없으므로 허수부분이 0이 아닌 복소수 사이에는 '서로 같다'만 나타낼 수 있고, '크다', '작다' 등의 대소 관계는 비교할 수 없다. 즉, 허수부분이 0이 아닌 복소수에서는 '양수', '음수'의 개념이 존재하지 않으므로 '양수', '음수'라는 표현은 '양의 실수', '음의 실수'를 나타낸다.

유형 10 i의 거듭제곱 개념 03

n이 음이 아닌 정수일 때,
$i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$, $i^{4n+4}=1$
임을 이용하여 네 항씩 묶어서 계산한다.

0398

$1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{3050}$
$=(1+i+i^2+i^3)+(i^4+i^5+i^6+i^7)+\cdots+i^{3048}+i^{3049}+i^{3050}$
$=(1+i-1-i)+(1+i-1-i)+\cdots+1+i-1$
$=i$

답 i

0399

$1-i+i^2-i^3+\cdots+i^{2022}-i^{2023}$
$=(1-i+i^2-i^3)+(i^4-i^5+i^6-i^7)$
$\qquad+\cdots+(i^{2020}-i^{2021}+i^{2022}-i^{2023})$
$=(1-i-1+i)+(1-i-1+i)+\cdots+(1-i-1+i)$
$=0$

답 ③

0400

$\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}+\cdots+\dfrac{1}{i^{102}}$
$=\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{i^{97}}+\dfrac{1}{i^{98}}+\dfrac{1}{i^{99}}+\dfrac{1}{i^{100}}\right)$
$\qquad+\dfrac{1}{i^{101}}+\dfrac{1}{i^{102}}$
$=\left(\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1\right)+\dfrac{1}{i}-1$
$=\dfrac{1}{i}-1=-1-i$
따라서 $a=-1$, $b=-1$이므로
$a+b=-2$

답 -2

0401

$i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+13i^{13}$

$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)+(9i-10-11i+12)+13i^{13}$

$=(2-2i)+(2-2i)+(2-2i)+13i$

$=3(2-2i)+13i=6+7i$

따라서 $a=6$, $b=7$이므로

$2a-b=5$

답 ①

유형 11 복소수의 거듭제곱 (개념 03)

복소수 z에 대하여 z^n (n은 자연수)의 값을 구할 때는 다음을 이용한다.

(1) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$ 꼴 ⇨ $\frac{1+i}{1-i}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=-i$

(2) $(1+i)^n$, $(1-i)^n$ 꼴 ⇨ $(1+i)^2=2i$, $(1-i)^2=-2i$

0402

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1000}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1010}=i^{1000}+(-i)^{1010}$

$=(i^4)^{250}+\{(-i)^4\}^{252}\cdot(-i)^2$

$=1+i^2$

$=1+(-1)$

$=0$

답 ④

0403

$(1-i)^{300}=\{(1-i)^2\}^{150}=(-2i)^{150}$

$=(-2)^{150}\cdot(i^4)^{37}\cdot i^2=-2^{150}$

$(1+i)^{300}=\{(1+i)^2\}^{150}=(2i)^{150}$

$=2^{150}\cdot(i^4)^{37}\cdot i^2=-2^{150}$

$\therefore (1-i)^{300}-(1+i)^{300}=-2^{150}-(-2^{150})=0$

답 0

0404

$z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$이므로 $z^4=(z^2)^2=i^2=-1$ … ❶

$\therefore 1+z+z^2+\cdots+z^8$

$=(1+z+z^2+z^3)+z^4(1+z+z^2+z^3)+z^8$

$=(1+z+i+zi)-(1+z+i+zi)+z^8$

$=z^8=(z^4)^2=(-1)^2$

$=1$ … ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ z^2, z^4의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	60 %

0405

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\therefore f(n)=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4n}-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n}$

$=(-i)^{4n}-i^{2n}=1-(-1)^n$

즉, n이 짝수일 때 $f(n)=0$이고, n이 홀수일 때 $f(n)=2$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)=2+0+2+\cdots+0$

$=2\cdot50$

$=100$

답 100

유형 12 음수의 제곱근의 계산 (개념 04)

(1) $a>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$임을 이용하여 주어진 식을 허수단위 i를 사용하여 나타낸다.

(2) 음수의 제곱근의 성질을 이용하여 계산한다.

① $a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

② $a>0$, $b<0$일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

0406

① $\sqrt{-2}\sqrt{-5}=-\sqrt{(-2)\cdot(-5)}=-\sqrt{10}$

② $\sqrt{-5}\sqrt{20}=\sqrt{(-5)\cdot20}=\sqrt{-100}=10i$

③ $(-\sqrt{-2})^2=(\sqrt{-2})^2=(\sqrt{2}i)^2=2i^2=-2$

④ $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}=-\sqrt{\frac{8}{-2}}=-\sqrt{-4}=-2i$

⑤ $\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{-8}{2}}=\sqrt{-4}=2i$

따라서 옳은 것은 ③이다.

답 ③

참고 ①, ②, ④, ⑤ $a>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$임을 이용하여 계산해도 된다.

0407

$\sqrt{-3}\sqrt{12}+\sqrt{-3}\sqrt{-12}+\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{12}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-12}}$

$=\sqrt{(-3)\cdot12}-\sqrt{(-3)\cdot(-12)}+\sqrt{\frac{-3}{12}}-\sqrt{\frac{3}{-12}}$

$=\sqrt{-36}-\sqrt{36}+\sqrt{-\frac{1}{4}}-\sqrt{-\frac{1}{4}}$

$=-6+6i$ … ❶

따라서 $-6+6i=a+bi$이므로

$a=-6$, $b=6$ … ❷

$\therefore a+b=0$ … ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 13 음수의 제곱근의 성질 개념 04

0이 아닌 실수 a, b에 대하여

(1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab} \Rightarrow a<0,\ b<0$

(2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}} \Rightarrow a>0,\ b<0$

0408

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이므로 $a>0,\ b<0$

$\therefore \sqrt{(a-b)^2}+|a|-\sqrt{b^2}=|a-b|+|a|-|b|$

$=a-b+a-(-b)$

$=2a$

답 $2a$

0409

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0,\ b<0$

ㄱ. $a+b<0$ (참)

ㄴ. $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ (거짓)

ㄷ. $\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=|a|\cdot|b|=(-a)\cdot(-b)=ab$ (거짓)

ㄹ. $a+b<0$이므로

$|a+b|=-a-b,\ |a|+|b|=-a-b$

$\therefore |a+b|=|a|+|b|$ (참)

ㅁ. $-a>0,\ b<0$이므로 $\sqrt{-a}\sqrt{b}=\sqrt{-ab}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

STEP 3 내신 마스터

0410

유형 02 복소수의 사칙연산

| 전략 | 복소수의 나눗셈은 분모, 분자에 분모의 켤레복소수를 곱하여 계산한다.

$3-2i+\dfrac{1-2i}{1-i}+3i+\dfrac{-1+2i}{1+i}$

$=3-2i+\dfrac{(1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}+3i+\dfrac{(-1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$=3-2i+\dfrac{3-i}{2}+3i+\dfrac{1+3i}{2}$

$=5+2i$

답 ⑤

0411

유형 02 복소수의 사칙연산

| 전략 | 규칙을 찾아 주어진 등식을 간단히 한다.

$f(1,\ 2)=\dfrac{1-2i}{1+2i},\ f(2,\ 4)=\dfrac{2-4i}{2+4i}=\dfrac{1-2i}{1+2i},\ \cdots,$

$f(5,\ 10)=\dfrac{5-10i}{5+10i}=\dfrac{1-2i}{1+2i}$

이때, $\dfrac{1-2i}{1+2i}=\dfrac{(1-2i)^2}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{-3-4i}{5}$이므로

(주어진 식)$=5\cdot\dfrac{-3-4i}{5}=-3-4i$

답 ①

다른 풀이 $f(a,\ b)=\dfrac{a-bi}{a+bi}=\dfrac{(a-bi)^2}{(a+bi)(a-bi)}$

$=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\dfrac{2ab}{a^2+b^2}i$

이때, $b=2a$이면

$f(a,\ 2a)=\dfrac{a^2-(2a)^2}{a^2+(2a)^2}-\dfrac{4a^2}{a^2+(2a)^2}i=\dfrac{-3-4i}{5}\ (\because a\neq0)$

따라서 $f(1,\ 2)=f(2,\ 4)=\cdots=f(5,\ 10)=\dfrac{-3-4i}{5}$이므로

(주어진 식)$=5\cdot\dfrac{-3-4i}{5}=-3-4i$

0412

유형 03 복소수가 주어질 때의 식의 값

| 전략 | x, y가 서로 켤레복소수이므로 $x+y$, xy의 값을 이용하여 식의 값을 구한다.

$x+y=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$

$xy=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{4}{4}=1$

$\therefore x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy$

$=1^2-3\cdot1=-2$

답 ②

다른 풀이 x^2-xy+y^2

$=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}+\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2$

$=\dfrac{-2+2\sqrt{3}i}{4}-\dfrac{4}{4}+\dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=-2$

0413

유형 05 복소수 z^2이 실수가 될 조건

| 전략 | 복소수 z에 대하여 z^2이 양의 실수이면 z는 0이 아닌 실수이어야 한다.

$z=(a+2i)(1-2i)=a-2ai+2i+4$

$=(a+4)-2(a-1)i$

z^2이 양의 실수가 되려면 z는 0이 아닌 실수이어야 하므로

$a+4\neq0,\ a-1=0$

$\therefore a=1$

답 ⑤

0414

유형 06 복소수가 서로 같을 조건

| 전략 | 좌변을 정리하여 $a+bi$ 꼴로 나타낸 후 $a+bi=c+di$ (a, b, c, d는 실수)이면 $a=c,\ b=d$임을 이용한다.

$(x+i)(2i-y)+(2y-x)i=2+4i$에서

$2xi-xy-2-yi+2yi-xi=2+4i$

$(-xy-2)+(x+y)i=2+4i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-xy-2=2,\ x+y=4$이므로

$xy=-4,\ x+y=4$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{4}{-4}=-1$

답 ②

0415

유형 07 켤레복소수의 성질

|전략| $\alpha=a+bi$(a, b는 실수)로 놓고 복소수의 연산과 켤레복소수의 성질을 이용한다.

ㄱ. (반례) $\alpha=i$이면 $\alpha-\overline{\alpha}=i-(-i)=2i$이므로 허수이다. (거짓)

ㄴ. $\alpha=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\overline{\alpha}=a-bi$이므로

$\alpha\overline{\alpha}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

따라서 $\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2=0$이면 $a=b=0$이므로 $\alpha=0$ (참)

ㄷ. (반례) $\alpha=0$이면 $\alpha^2-\overline{\alpha}^2=0$이므로 실수이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

0416

유형 08 켤레복소수의 성질을 이용한 연산

|전략| 주어진 식을 간단히 정리한 후 $\alpha+\beta$와 $\overline{\alpha+\beta}$의 값을 대입한다.

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}&=\overline{\alpha}(\alpha+\beta)+\overline{\beta}(\alpha+\beta)\\&=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})=(\alpha+\beta)\overline{(\alpha+\beta)}\\&=(5+\sqrt{3}i)(5-\sqrt{3}i)=28\end{aligned}$$

답 ③

0417

유형 04 복소수가 실수 또는 순허수가 될 조건 + 09 $z=a+bi$로 놓고 조건을 만족시키는 복소수 z 구하기

|전략| $z=a+bi$(a, b는 실수, $b\neq0$)로 놓고 $\frac{z}{2}+\frac{2}{z}$에 대입한 식이 실수이려면 허수부분이 0이어야 함을 이용한다.

$z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면

$$\begin{aligned}\frac{z}{2}+\frac{2}{z}&=\frac{a+bi}{2}+\frac{2}{a+bi}\\&=\frac{a+bi}{2}+\frac{2(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}\\&=\frac{a+bi}{2}+\frac{2a-2bi}{a^2+b^2}\\&=\left(\frac{a}{2}+\frac{2a}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{b}{2}-\frac{2b}{a^2+b^2}\right)i\end{aligned}$$

이때, $\frac{z}{2}+\frac{2}{z}$가 실수이려면

$\frac{b}{2}-\frac{2b}{a^2+b^2}=0$, $\frac{2}{a^2+b^2}=\frac{1}{2}$ ($\because b\neq0$) $\qquad\therefore a^2+b^2=4$

$\therefore z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=4$

답 ④

0418

유형 10 i의 거듭제곱

|전략| 괄호 안의 앞쪽 수들과 뒤쪽 수들끼리 각각 모은 다음 음이 아닌 정수 n에 대하여 $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$, $i^{4n+4}=1$임을 이용하여 식을 정리한 후 네 항씩 묶어 계산한다.

$(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})$

$=(i+i^2+\cdots+i^{18})+(i^2+i^3+\cdots+i^{19})$

$=\{(i+i^2+\cdots+i^{16})+i^{17}+i^{18}\}+\{i(i+i^2+\cdots+i^{16})+i^{18}+i^{19}\}$

$=\{4(i+i^2+i^3+i^4)+i+i^2\}+\{4i(i+i^2+i^3+i^4)+i^2+i^3\}$

$=i-1+(-1-i)=-2$

따라서 $a=-2$, $b=0$이므로

$4(a+b)^2=4\cdot(-2)^2=16$

답 ②

0419

유형 10 i의 거듭제곱 + 11 복소수의 거듭제곱

|전략| $\frac{1+i}{1-i}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=-i$임을 이용하여 식을 간단히 정리한다.

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)&=f(i)=i^5+i^4+i^3+i^2+i+1\\&=i+(1-i-1+i)+1=1+i\end{aligned}$$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)&=f(-i)\\&=(-i)^5+(-i)^4+(-i)^3+(-i)^2+(-i)+1\\&=-i+(1+i-1-i)+1=1-i\end{aligned}$$

$\therefore f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)=(1+i)+(1-i)=2$

답 ④

0420

유형 13 음수의 제곱근의 성질

|전략| $a<0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이고, $a>0$, $b<0$이면 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$임을 이용한다.

$0<x<y$에서 $-x<0$, $-4y<0$, $x-y<0$, $y-x>0$이므로

$$\begin{aligned}&\sqrt{x^2}+\sqrt{-x}\sqrt{-x}+\frac{\sqrt{-4y}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y-x}}{\sqrt{x-y}}\\&=x-\sqrt{x^2}+\sqrt{\frac{-4y}{y}}-\sqrt{\frac{y-x}{x-y}}\\&=x-|x|+\sqrt{-4}-\sqrt{-1}\\&=x-x+2i-i=i\end{aligned}$$

답 ④

0421

유형 09 $z=a+bi$로 놓고 조건을 만족시키는 복소수 z 구하기

|전략| $z=a+bi$(a, b는 실수)로 놓고 주어진 식에 대입한 후 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$(2+i)z+(1-i)\overline{z}=1+4i$에서

$(2+i)(a+bi)+(1-i)(a-bi)=1+4i$

$2a+2bi+ai-b+a-bi-ai-b=1+4i$

$(3a-2b)+bi=1+4i$ ··· ❶

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3a-2b=1$, $b=4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=4$ ··· ❷

$\therefore z\overline{z}=(3+4i)(3-4i)=25$ ··· ❸

답 25

채점 기준	배점
❶ $z=a+bi$로 놓고 주어진 등식에 대입하여 식을 정리할 수 있다.	3점
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $z\overline{z}$의 값을 구할 수 있다.	1점

0422

유형 11 복소수의 거듭제곱

|전략| $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=i$임을 이용하여 $f(n+k)=f(n)$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값을 구한다.

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$이므로

$f(n)=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=i^n$ … ❶

$f(n+k)=f(n)$에서 $i^{n+k}=i^n$ $\quad\therefore i^k=1$

이것을 만족시키는 k의 값은 4의 배수이므로 자연수 k의 최솟값은 4이다. … ❷

답 4

채점 기준	배점
❶ $f(n)$을 간단히 할 수 있다.	3점
❷ $f(n+k)=f(n)$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	4점

0423

유형 13 음수의 제곱근의 성질

|전략| 음수의 제곱근의 성질을 이용하여 a, b, c의 부호를 결정한다.

(1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0, b<0$

$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{c}{b}}$에서 $b<0, c>0$

$\therefore a<0, b<0, c>0$

$a<0, b<0, c>0$에서
$a+b<0, -c<0$이므로
$a+b-c<0$
$\therefore |a+b-c|=-(a+b-c)$

(2) $\sqrt{a^2}+|b|-\sqrt{(a+b-c)^2}=|a|+|b|-|a+b-c|$

$=-a-b+(a+b-c)$

$=-c$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) a, b, c의 부호를 결정할 수 있다.	4점
(2) 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	6점

창의·융합 실력 마스터

0424

|전략| $z=a+bi$ (a, b는 실수)가 주어지고 z에 대한 식의 값을 구할 때는 $z-a=bi$ 꼴로 변형하여 양변을 제곱한다.

$z^2=-3+2i$에서 $z^2+3=2i$

양변을 제곱하면 $z^4+6z^2+9=-4$

$\therefore z^4+6z^2+13=0$

이 식의 양변을 z로 나누면 $z^3+6z+\frac{13}{z}=0$

$\therefore z^4+z^3+2z^2+6z+\frac{13}{z}=z^4+2z^2+\left(z^3+6z+\frac{13}{z}\right)$

$=(-6z^2-13)+2z^2$

$=-4z^2-13$

$=-4(-3+2i)-13$

$=-1-8i$

답 $-1-8i$

0425

|전략| z_1+z_2, z_1z_2가 모두 실수이므로 z_1+z_2, z_1z_2의 허수부분이 0임을 이용한다.

$z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ (a, b, c, d는 실수)라 하면 두 복소수 z_1, z_2는 실수가 아니므로 $b\neq0$, $d\neq0$

$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$에서 z_1+z_2는 실수이므로

$b+d=0$ $\quad\therefore b=-d$ …… ㉠

$z_1z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$에서 z_1z_2는 실수이므로

$ad+bc=0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $ad-cd=0$, $d(a-c)=0$

$a-c=0$ ($\because d\neq0$) $\quad\therefore a=c$

따라서 $z_1=a+bi$이면 $z_2=a-bi=\overline{z_1}$이다.

ㄱ. z_1z_2는 실수이므로 $z_1z_2=\overline{z_1z_2}$ (참)

ㄴ. $z_1\overline{z_2}=z_1\cdot z_1=z_1^2$, $\overline{z_1}z_2=\overline{z_1}\cdot\overline{z_1}=\overline{z_1}^2$이므로

$z_1\overline{z_2}\neq\overline{z_1}z_2$ (거짓)

ㄷ. $\overline{z_1}+z_2=\overline{z_1}+\overline{z_1}=2\overline{z_1}$, $z_1+\overline{z_2}=z_1+z_1=2z_1$이므로

$\overline{z_2}=\overline{(\overline{z_1})}=z_1$

$\overline{z_1}+z_2\neq z_1+\overline{z_2}$ (거짓)

ㄹ. $\overline{z_1}-z_2=\overline{z_1}-\overline{z_1}=0$, $z_1-\overline{z_2}=z_1-z_1=0$이므로

$\overline{z_1}-z_2=z_1-\overline{z_2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

0426

|전략| $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $\overline{z}=a-bi$임을 이용하여 z_n (n은 자연수)의 규칙성을 찾는다.

$z_2=\overline{(1+2i)}+(1+i)=(1-2i)+(1+i)=2-i$

$z_3=\overline{(2-i)}+(1+i)=(2+i)+(1+i)=3+2i$

$z_4=\overline{(3+2i)}+(1+i)=(3-2i)+(1+i)=4-i$

$z_5=\overline{(4-i)}+(1+i)=(4+i)+(1+i)=5+2i$

⋮

이때, z_2, z_3, z_4, z_5, …에서 실수부분은 2, 3, 4, 5, …로 나타나고, 허수부분은 -1, 2가 반복되어 나타난다.

$\therefore z_{100}=100-i$

답 $100-i$

0427

|전략| 음이 아닌 정수 k에 대하여 $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$, $i^{4k+4}=1$임을 이용하여 S_n을 구한다.

$S_n=i-1-i+1+\cdots+i^n$

$=\begin{cases} i & (n=4m-3) \\ -1+i & (n=4m-2) \\ -1 & (n=4m-1) \\ 0 & (n=4m) \end{cases}$ (m은 자연수)

ㄱ. $20=4\cdot5$이므로 $S_{20}=0$ (참)

ㄴ. $S_n=i$를 만족시키는 경우는 $n=4m-3$일 때이므로 50 이하의 자연수 n은 1, 5, 9, …, 49의 13개이다. (거짓)

ㄷ. $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{40}$

$=(i-1+i-1+0)+(i-1+i-1+0)+\cdots$

$+(i-1+i-1+0)$

$=(-2+2i)\cdot10=-20+20i$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0428

|전략| $z=\frac{1-i}{1+i}=-i$이므로 m이 자연수일 때, $(-i)^{4m}=1$, $(-i)^{4m-1}=i$, $(-i)^{4m-2}=-1$, $(-i)^{4m-3}=-i$임을 이용하여 z^n+z를 구한다.

$z=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로 $z^n+z=(-i)^n-i$

(i) $n=4m$(m은 자연수)일 때, $(-i)^{4m}=1$이므로

$z^n+z=1-i$

(ii) $n=4m-1$(m은 자연수)일 때, $(-i)^{4m-1}=i$이므로

$z^n+z=i-i=0$

(iii) $n=4m-2$(m은 자연수)일 때, $(-i)^{4m-2}=-1$이므로

$z^n+z=-1-i$

(iv) $n=4m-3$(m은 자연수)일 때, $(-i)^{4m-3}=-i$이므로

$z^n+z=(-i)-i=-2i$

(i)~(iv)에서 $z^n+z=0$을 만족시키는 경우는 $n=4m-1$(m은 자연수)일 때이므로 100 이하의 자연수 중 조건을 만족시키는 자연수 n은 3, 7, 11, 15, ⋯, 99의 25개이다. 답 ③

다른 풀이 $z=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$z^2=z\cdot z=-1$, $z^3=z^2\cdot z=i$, $z^4=z^3\cdot z=1$, $z^5=z^4\cdot z=z=-i$,

$z^6=z^4\cdot z^2=z^2=-1$, $z^7=z^4\cdot z^3=z^3=i$, ⋯

이때, $z^n+z=0$이려면 $z^n=-z=i$이어야 한다.

$z^3=z^7=z^{11}=\cdots=z^{99}=i$이므로 구하는 100 이하의 자연수 n은 3, 7, 11, ⋯, 99의 25개이다.

0429

|전략| 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 a, b의 값을 구한 후 $(z^2+1)^n$(n은 자연수)의 규칙성을 찾는다.

$z^2+\bar{z}=(a+bi)^2+(a-bi)=(a^2-b^2+a)+(2ab-b)i$

$z^2+\bar{z}=0$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2+a=0$ ⋯⋯ ㉠

$2ab-b=0$ $\therefore b(2a-1)=0$ ⋯⋯ ㉡

$b>0$이므로 ㉡에서 $2a-1=0$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

㉠에 $a=\frac{1}{2}$을 대입하여 정리하면 $b^2=\frac{3}{4}$ $\therefore b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(\because b>0)$

$\therefore z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$z^2+1=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2+1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$(z^2+1)^2=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$(z^2+1)^3=(z^2+1)(z^2+1)^2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=-1$

$(z^2+1)^4=(z^2+1)(z^2+1)^3=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(-1)=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$(z^2+1)^5=(z^2+1)^2(z^2+1)^3=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(-1)=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$(z^2+1)^6=\{(z^2+1)^3\}^2=(-1)^2=1$

⋮

이므로 $(z^2+1)^n$이 정수이려면 n은 3의 배수이어야 한다.

즉, 구하는 자연수 n의 개수는 50 이하의 자연수 중 3의 배수의 개수와 같으므로 16이다. 답 16

5 이차방정식

본책 66~83쪽

STEP 1 개념 마스터 ❶

0430

$x^2+x-6=0$에서 $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$ 답 $x=-3$ 또는 $x=2$

0431

$x^2+2x-15=0$에서 $(x+5)(x-3)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=3$ 답 $x=-5$ 또는 $x=3$

0432

$3x^2+5x-2=0$에서 $(x+2)(3x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{3}$ 답 $x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

0433

$5x^2-3x-2=0$에서 $(5x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{2}{5}$ 또는 $x=1$ 답 $x=-\frac{2}{5}$ 또는 $x=1$

0434

$4x^2-4x+1=0$에서 $(2x-1)^2=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ (중근) 답 $x=\frac{1}{2}$ (중근)

0435

$\frac{1}{2}x^2-3x+4=0$의 양변에 2를 곱하면

$x^2-6x+8=0$, $(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$ 답 $x=2$ 또는 $x=4$

0436

$x^2-4x-3=0$에서 $x^2+2\cdot(-2)x-3=0$이므로

$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-3)}}{1}=2\pm\sqrt{7}$ 답 $x=2\pm\sqrt{7}$

0437

$x^2+x+2=0$에서

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}$

$=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 답 $x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

0438

$x^2+6x+11=0$에서 $x^2+2\cdot3x+11=0$이므로

$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-1\cdot11}}{1}=-3\pm\sqrt{-2}$

$=-3\pm\sqrt{2}i$ 답 $x=-3\pm\sqrt{2}i$

0439
$9x^2-6\sqrt{3}x+2=0$에서 $9x^2+2\cdot(-3\sqrt{3})x+2=0$이므로

$$x=\frac{-(-3\sqrt{3})\pm\sqrt{(-3\sqrt{3})^2-9\cdot 2}}{9}=\frac{3\sqrt{3}\pm 3}{9}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pm 1}{3}$$

답 $x=\frac{\sqrt{3}\pm 1}{3}$

0440
$2x^2-5x+2=0$에서 $(2x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$ (실근)

답 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$ (실근)

0441
$x^2-6x+3=0$에서 $x^2+2\cdot(-3)x+3=0$이므로

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot 3}}{1}=3\pm\sqrt{6}\text{ (실근)}$$

답 $x=3\pm\sqrt{6}$ (실근)

0442
$3x^2-4x-1=0$에서 $3x^2+2\cdot(-2)x-1=0$이므로

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\cdot(-1)}}{3}=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}\text{ (실근)}$$

답 $x=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$ (실근)

0443
$x^2+5=0$에서 $x^2=-5$

$\therefore x=\pm\sqrt{-5}=\pm\sqrt{5}i$ (허근)

답 $x=\pm\sqrt{5}i$ (허근)

0444
$x^2-2x+7=0$에서 $x^2+2\cdot(-1)x+7=0$이므로

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot 7}}{1}=1\pm\sqrt{-6}$$

$=1\pm\sqrt{6}i$ (허근)

답 $x=1\pm\sqrt{6}i$ (허근)

0445
$3x^2+4x+2=0$에서 $3x^2+2\cdot 2x+2=0$이므로

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-3\cdot 2}}{3}=\frac{-2\pm\sqrt{-2}}{3}$$

$=\frac{-2\pm\sqrt{2}i}{3}$ (허근)

답 $x=\frac{-2\pm\sqrt{2}i}{3}$ (허근)

0446
$|x+1|=3x-1$에서

(i) $x<-1$일 때, $-x-1=3x-1$

$4x=0 \qquad \therefore x=0$

그런데 $x<-1$이므로 해가 없다.

(ii) $x\geq -1$일 때, $x+1=3x-1$

$2x=2 \qquad \therefore x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=1$

답 $x=1$

0447
$|x+2|=2x+3$에서

(i) $x<-2$일 때, $-x-2=2x+3$

$3x=-5 \qquad \therefore x=-\frac{5}{3}$

그런데 $x<-2$이므로 해가 없다.

(ii) $x\geq -2$일 때, $x+2=2x+3$

$\therefore x=-1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-1$

답 $x=-1$

0448
$|2x-1|=x+3$에서

(i) $x<\frac{1}{2}$일 때, $-2x+1=x+3$

$3x=-2 \qquad \therefore x=-\frac{2}{3}$

(ii) $x\geq\frac{1}{2}$일 때, $2x-1=x+3$

$\therefore x=4$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=4$

답 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=4$

0449
$x^2-|x|-2=0$에서

(i) $x<0$일 때, $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$

그런데 $x<0$이므로 $x=-2$

(ii) $x\geq 0$일 때, $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$

그런데 $x\geq 0$이므로 $x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\pm 2$

답 $x=\pm 2$

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 방정식은

$|x|^2-|x|-2=0$, $(|x|+1)(|x|-2)=0$

그런데 $|x|\geq 0$이므로 $|x|=2$

$\therefore x=\pm 2$

0450
$x^2+3|x|-4=0$에서

(i) $x<0$일 때, $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=4$

그런데 $x<0$이므로 $x=-1$

(ii) $x\geq 0$일 때, $x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-4$ 또는 $x=1$

그런데 $x\geq 0$이므로 $x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\pm 1$

답 $x=\pm 1$

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 방정식은

$|x|^2+3|x|-4=0$, $(|x|+4)(|x|-1)=0$

그런데 $|x|\ge 0$이므로 $|x|=1$

$\therefore x=\pm 1$

0451

$x^2-5|x|-6=0$에서

(i) $x<0$일 때, $x^2+5x-6=0$

$(x+6)(x-1)=0$ $\therefore x=-6$ 또는 $x=1$

그런데 $x<0$이므로 $x=-6$

(ii) $x\ge 0$일 때, $x^2-5x-6=0$

$(x+1)(x-6)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=6$

그런데 $x\ge 0$이므로 $x=6$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\pm 6$ 답 $x=\pm 6$

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 방정식은

$|x|^2-5|x|-6=0$, $(|x|+1)(|x|-6)=0$

그런데 $|x|\ge 0$이므로 $|x|=6$

$\therefore x=\pm 6$

0452

보기에 주어진 각 이차방정식의 판별식을 D라 하면

ㄱ. $D=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 2=17>0$

ㄴ. $\frac{D}{4}=(-4)^2-1\cdot 16=0$

ㄷ. $\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot 1=-1<0$

ㄹ. $D=3^2-4\cdot 4\cdot 1=-7<0$

ㅁ. $\frac{D}{4}=3^2-2\cdot 3=3>0$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로 ㄱ, ㅁ이다.

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로 ㄴ이다.

(3) 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로 ㄷ, ㄹ이다.

답 (1) ㄱ, ㅁ (2) ㄴ (3) ㄷ, ㄹ

0453

이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot k=1-k$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1-k>0$ $\therefore k<1$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1-k=0$ $\therefore k=1$

(3) 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1-k<0$ $\therefore k>1$

답 (1) $k<1$ (2) 1 (3) $k>1$

STEP 2 유형 마스터 ①

유형 01 이차방정식의 풀이 개념 01

(1) 이차방정식을 (x에 대한 이차식)$=0$ 꼴로 정리한다.

(2) (i) 인수분해가 되는 경우 ⇨ 좌변을 두 일차식의 곱의 꼴로 인수분해하여 근을 구한다.

(ii) 인수분해가 되지 않는 경우 ⇨ 근의 공식을 이용한다.

0454

$2(x+2)^2-3=3x+8$에서

$2(x^2+4x+4)-3=3x+8$

$2x^2+5x-3=0$, $(x+3)(2x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 답 ①

0455

$x^2-5x+7=0$에서 근의 공식을 이용하면

$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 7}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{3}i}{2}$

p, q는 유리수이므로 $p=5$, $q=3$

$\therefore p+q=8$ 답 8

유형 02 이차항의 계수가 무리수인 이차방정식의 풀이 개념 01

이차항의 계수가 무리수이면 $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b$임을 이용하여 이차항의 계수를 유리화한 후 근을 구한다.

0456

주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면

$x^2+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)x-(\sqrt{2}-1)=0$

$x^2+(2-\sqrt{2})x-\sqrt{2}+1=0$

$(x+1)(x-\sqrt{2}+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\sqrt{2}-1$ 답 $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{2}-1$

다른 풀이 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면

$x^2+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)x-(\sqrt{2}-1)=0$

$x^2+(2-\sqrt{2})x-\sqrt{2}+1=0$

근의 공식을 이용하면

$x=\frac{-(2-\sqrt{2})\pm\sqrt{(2-\sqrt{2})^2-4\cdot 1\cdot(-\sqrt{2}+1)}}{2\cdot 1}$

$=\frac{(-2+\sqrt{2})\pm\sqrt{2}}{2}$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\sqrt{2}-1$

0457

주어진 방정식의 양변에 $2+\sqrt{3}$을 곱하면

$x^2-(3-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})x+2+\sqrt{3}=0$

$x^2-(3+\sqrt{3})x+2+\sqrt{3}=0$

$(x-1)(x-2-\sqrt{3})=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2+\sqrt{3}$

이때, $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=2+\sqrt{3}$, $\beta=1$

$\therefore \alpha-2\beta=2+\sqrt{3}-2=\sqrt{3}$ 답 ②

유형 03 이차방정식의 한 근이 주어질 때 미정계수 구하기 (개념 01)

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 α일 때

⇨ $x=\alpha$를 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면 주어진 등식이 성립한다.

⇨ $a\alpha^2+b\alpha+c=0$

0458

이차방정식 $x^2-2ax-a+1=0$의 한 근이 -1이므로

$(-1)^2-2a\cdot(-1)-a+1=0 \quad \therefore a=-2$

$a=-2$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2+4x+3=0$, $(x+3)(x+1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$

따라서 다른 한 근은 -3이다.

답 ②

0459

이차방정식 $x^2+kx+\sqrt{2}-2=0$의 한 근이 $-1+\sqrt{2}$이므로

$(-1+\sqrt{2})^2+(-1+\sqrt{2})k+\sqrt{2}-2=0$

$1-2\sqrt{2}+2+(-1+\sqrt{2})k+\sqrt{2}-2=0$

$1-\sqrt{2}+(-1+\sqrt{2})k=0$

$(-1+\sqrt{2})k=-1+\sqrt{2}$

$\therefore k=1$

답 1

주의 이차방정식의 켤레근의 성질을 이용하려면 계수가 모두 유리수이어야 하므로 다른 한 근을 $-1-\sqrt{2}$로 생각하여 문제를 해결하지 않도록 주의한다.

0460

이차방정식 $mx^2-3x+m-9=0$의 한 근이 -1이므로

$(-1)^2\cdot m-3\cdot(-1)+m-9=0$, $2m=6$

$\therefore m=3$ … ❶

$m=3$을 주어진 방정식에 대입하면

$3x^2-3x-6=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 다른 한 근은 2이므로 $\alpha=2$ … ❷

$\therefore m+\alpha=5$ … ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ α의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $m+\alpha$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0461

$x=1$이 이차방정식 $kx^2+ax+(k+1)b=0$의 근이므로

$k+a+(k+1)b=0$

$(b+1)k+(a+b)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식

$b+1=0$, $a+b=0$

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로

$a-b=2$

답 ②

유형 04 절댓값 기호를 포함한 이차방정식의 풀이 (개념 02)

$|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$임을 이용하여 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나누어 절댓값 기호를 없앤 다음 푼다.

이때, 범위를 만족시키는 것만을 근으로 택한다.

0462

(i) $x<\frac{1}{2}$일 때, $x^2-(2x-1)=7$

$x^2-2x-6=0 \quad \therefore x=1\pm\sqrt{7}$

그런데 $x<\frac{1}{2}$이므로 $x=1-\sqrt{7}$

(ii) $x\geq\frac{1}{2}$일 때, $x^2+(2x-1)=7$

$x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

그런데 $x\geq\frac{1}{2}$이므로 $x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=1-\sqrt{7}$ 또는 $x=2$

$\therefore \alpha+\beta=(1-\sqrt{7})+2=3-\sqrt{7}$

답 $3-\sqrt{7}$

0463

(i) $x<0$일 때, $2x^2-5x+3=0$

$(x-1)(2x-3)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

그런데 $x<0$이므로 해가 없다.

(ii) $x\geq 0$일 때, $2x^2+5x+3=0$

$(2x+3)(x+1)=0 \quad \therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

그런데 $x\geq 0$이므로 해가 없다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식은 해가 없다.

답 해가 없다.

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 방정식은

$2|x|^2+5|x|+3=0$, $(2|x|+3)(|x|+1)=0$

그런데 $|x|\geq 0$이므로 주어진 방정식은 해가 없다.

0464

$|x-3|=x^2-3x$에서

(i) $x<3$일 때, $-x+3=x^2-3x$

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 $x<3$이므로 $x=-1$

(ii) $x\geq 3$일 때, $x-3=x^2-3x$

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

그런데 $x\geq 3$이므로 $x=3$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-1$ 또는 $x=3$

답 ④

0465

$\sqrt{x^2}=|x|$이므로 주어진 방정식은

$x^2-|x|=|x-1|+3$

(i) $x<0$일 때, $x^2-(-x)=-(x-1)+3$

$x^2+2x-4=0$ $\qquad\therefore x=-1\pm\sqrt{5}$

그런데 $x<0$이므로 $x=-1-\sqrt{5}$

(ii) $0\le x<1$일 때, $x^2-x=-(x-1)+3$

$x^2=4$ $\qquad\therefore x=\pm2$

그런데 $0\le x<1$이므로 해가 없다.

(iii) $x\ge1$일 때, $x^2-x=x-1+3$

$x^2-2x-2=0$ $\qquad\therefore x=1\pm\sqrt{3}$

그런데 $x\ge1$이므로 $x=1+\sqrt{3}$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-1-\sqrt{5}$ 또는 $x=1+\sqrt{3}$

따라서 모든 근의 합은

$(-1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{3})=\sqrt{3}-\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{3}-\sqrt{5}$

Lecture

절댓값 기호를 2개 포함한 방정식

절댓값 기호를 2개 포함한 방정식 $|x-a|+|x-b|=c\,(a<b,\ c>0)$는 $x<a$, $a\le x<b$, $x\ge b$로 범위를 나누어 방정식을 푼다. 이때, 각각의 범위에서 구한 x의 값 중 해당 범위에 속하는 것만이 방정식의 근이다.

발전 유형 05 가우스 기호를 포함한 이차방정식의 풀이 개념 02

(i) 주어진 방정식에서 $[x]$의 값을 구한다.

(ii) $[x]$의 값이 정수인 것만을 택한다.

(iii) $[x]=n$(n은 정수)이면 $n\le x<n+1$임을 이용하여 x의 값의 범위를 구한다.

0466

(i) $2\le x<3$일 때, $[x]=2$이므로

$x^2-2x-2=0$

근의 공식을 이용하여 풀면

$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-2)}}{1}=1\pm\sqrt{3}$

그런데 $2\le x<3$이므로 $x=1+\sqrt{3}$

(ii) $3\le x<4$일 때, $[x]=3$이므로

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 $3\le x<4$이므로 $x=3$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=1+\sqrt{3}$ 또는 $x=3$ 답 $x=1+\sqrt{3}$ 또는 $x=3$

0467

$2[x]^2+[x]-3=0$에서 $(2[x]+3)([x]-1)=0$

$\therefore [x]=-\dfrac{3}{2}$ 또는 $[x]=1$

그런데 $[x]$는 정수이므로 $[x]=1$

$\therefore 1\le x<2$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로 $ab=2$ 답 2

0468

$[x]^2-3[x]-10=0$에서 $([x]+2)([x]-5)=0$

$\therefore [x]=-2$ 또는 $[x]=5$

$[x]=-2$에서 $-2\le x<-1$

$[x]=5$에서 $5\le x<6$

$\therefore -2\le x<-1$ 또는 $5\le x<6$

따라서 주어진 방정식의 해가 아닌 것은 ③이다. 답 ③

0469

(i) $0\le x<1$일 때, $[x]=0$이므로

$2x^2=x+3\cdot0$

$2x^2-x=0$, $x(2x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

(ii) $1\le x<2$일 때, $[x]=1$이므로

$2x^2=x+3\cdot1$

$2x^2-x-3=0$, $(x+1)(2x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}$

그런데 $1\le x<2$이므로 $x=\dfrac{3}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=0$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}$

따라서 모든 근의 합은

$0+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}=2$ 답 ④

유형 06 이차방정식의 활용 개념 01

(i) 문제의 뜻을 파악하여 구하는 값을 미지수 x로 놓는다.

(ii) 주어진 조건을 이용하여 x에 대한 방정식을 세운다.

(iii) 방정식을 풀고 구한 해가 문제의 조건에 맞는지 확인한다.

0470

처음 토지의 한 변의 길이를 x m라 하면 길을 제외한 토지의 넓이는 $(x-3)(x-5)\ \mathrm{m}^2$

길을 제외한 토지의 넓이가 처음 토지의 넓이의 $\dfrac{3}{4}$이므로

$(x-3)(x-5)=\dfrac{3}{4}x^2$

$4x^2-32x+60=3x^2$

$x^2-32x+60=0$, $(x-2)(x-30)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=30$

이때, $x>5$이므로 $x=30$

따라서 처음 토지의 한 변의 길이는 30 m이므로 그 넓이는 900 m^2이다. 답 900 m^2

주의 구하는 값이 길이, 인원수, 물건의 개수, 시간, 거리 등인 경우에는 그 값이 양수이어야 함에 주의한다.

0471

길의 폭을 x m라 하면 길을 제외한 부분의 가로, 세로의 길이는 각각 $(30-x)$ m, $(20-2x)$ m이므로

$(30-x)(20-2x)=448$

$2x^2-80x+152=0$, $x^2-40x+76=0$

$(x-2)(x-38)=0$

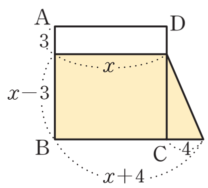
$\therefore x=2$ 또는 $x=38$

그런데 세로의 길이에서 $0<2x<20$, 즉 $0<x<10$이므로

$x=2$

따라서 구하는 길의 폭은 2 m이다. 답 2 m

0472



오른쪽 그림에서 처음 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면 색칠한 부분은

(윗변의 길이)$=x$,

(아랫변의 길이)$=x+4$,

(높이)$=x-3$

인 사다리꼴이므로

$\frac{1}{2}\{x+(x+4)\}(x-3)=\frac{7}{8}x^2$, $(x+2)(x-3)=\frac{7}{8}x^2$

$8x^2-8x-48=7x^2$, $x^2-8x-48=0$

$(x+4)(x-12)=0$ $\quad\therefore x=-4$ 또는 $x=12$

이때, $x>3$이므로 $x=12$

따라서 처음 정사각형의 한 변의 길이는 12이다. 답 12

0473

케이크의 밑면의 가로와 세로의 길이를 각각 x cm씩 줄였을 때, 줄인 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이는 각각 $(16-x)$ cm, $(20-x)$ cm이므로 케이크의 부피는

$10(16-x)(20-x)\ \text{cm}^3$ … ❶

부피를 40 % 줄인 케이크의 부피는

$\frac{60}{100}\cdot16\cdot20\cdot10=1920\ (\text{cm}^3)$ … ❷

즉, $10(16-x)(20-x)=1920$이므로 … ❸

$x^2-36x+128=0$, $(x-4)(x-32)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=32$

그런데 밑면의 가로의 길이에서 $0<x<16$이므로 $x=4$

따라서 케이크의 밑면의 가로, 세로의 길이는 각각 4 cm씩 줄여야 한다. … ❹

답 4 cm

채점 기준	비율
❶ 케이크의 밑면의 가로와 세로의 길이를 각각 x cm씩 줄였을 때, 줄인 케이크의 부피를 x로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 처음 케이크에서 부피를 40 % 줄인 케이크의 부피를 구할 수 있다.	10 %
❸ 주어진 조건을 이용하여 x에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❹ 방정식을 풀어 x의 값을 구할 수 있다.	20 %

0474

처음 청바지의 가격을 A원이라 하면

x % 내린 가격은 $A\left(1-\frac{x}{100}\right)$원

다시 이 가격에서 x % 올린 가격은 $A\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)$원

이 가격이 처음 청바지의 가격 A원보다 4 % 낮으므로

$A\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)=A\left(1-\frac{4}{100}\right)$

$(100-x)(100+x)=9600$

$10000-x^2=9600$, $x^2=400$ $\quad\therefore x=\pm20$

이때, $x>0$이므로 구하는 x의 값은 20이다. 답 20

다른 풀이 처음 가격에서 $\frac{x}{100}$만큼 내린 후 다시 $\frac{x}{100}$만큼 올린 가격이 처음 가격보다 $\frac{4}{100}$만큼 낮아졌으므로

$\left(-\frac{x}{100}\right)\cdot\frac{x}{100}=-\frac{4}{100}$, $x^2=400$

$\therefore x=\pm20$

이때, $x>0$이므로 구하는 x의 값은 20이다.

유형 07 판별식을 이용한 이차방정식의 근의 판별 개념 03

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$의 부호를 조사한다.

(1) $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 실근

(2) $D=0 \Longleftrightarrow$ 중근 (서로 같은 두 실근)

(1), (2): $D\geq0 \Longleftrightarrow$ 실근을 갖는다.

(3) $D<0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 허근

0475

이차방정식 $x^2+2(k-1)x+k^2+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2+2)>0$

$k^2-2k+1-k^2-2>0$, $-2k-1>0$

$\therefore k<-\frac{1}{2}$

따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다. 답 ②

0476

이차방정식 $x^2-k(x+1)+3=0$, 즉 $x^2-kx+3-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4(3-k)=0$

$k^2+4k-12=0$, $(k+6)(k-2)=0$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=2$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $-6+2=-4$ 답 -4

0477

이차방정식 $x^2-2ax+a^2-a+6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(a^2-a+6)<0$

$a^2-a^2+a-6<0$, $a-6<0$

$\therefore a<6$

따라서 자연수 a는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다. 답 5

0478

이차방정식 $x^2-2(k-a)x+k^2+a^2-b+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-a)\}^2-(k^2+a^2-b+1)=0$

$k^2-2ak+a^2-k^2-a^2+b-1=0$

$-2ak+b-1=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-2a=0,\ b-1=0$

따라서 $a=0,\ b=1$이므로

$a+b=1$ 답 ②

0479

$(m^2-1)x^2+2(m-1)x+2=0$이 이차방정식이므로

$m^2-1\neq0,\ (m+1)(m-1)\neq0$

$\therefore m\neq-1,\ m\neq1$ …… ㉠

이 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(m-1)^2-2(m^2-1)=0$

$m^2-2m+1-2m^2+2=0$

$m^2+2m-3=0,\ (m+3)(m-1)=0$

$\therefore m=-3$ 또는 $m=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $m=-3$ 답 ①

0480

$(k-1)x^2+2(k+1)x+k+2=0$이 이차방정식이므로

$k-1\neq0\qquad\therefore k\neq1$ …… ㉠

이 이차방정식이 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k-1)(k+2)\geq0$

$k^2+2k+1-(k^2+k-2)\geq0$

$k+3\geq0\qquad\therefore k\geq-3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 실수 k의 값의 범위는

$-3\leq k<1$ 또는 $k>1$ 답 $-3\leq k<1$ 또는 $k>1$

유형 08 계수가 문자인 이차방정식의 근의 판별 (개념 03)

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 판별

⇨ b^2-4ac의 부호를 조사한다.

0481

이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 실근을 가지므로 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=a^2-4b\geq0$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+(a-2)x-a+b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(a-2)^2-4(-a+b)$

$\quad=a^2-4a+4+4a-4b$

$\quad=a^2-4b+4>0\ (\because$ ㉠$)$

따라서 이차방정식 $x^2+(a-2)x-a+b=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 ③

0482

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$D=b^2-4ac$ …… ㉠

$b=a+c$를 ㉠에 대입하면

$D=(a+c)^2-4ac=a^2-2ac+c^2=(a-c)^2$

이때, $a,\ c$가 서로 다른 실수이므로

$D=(a-c)^2>0$

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 서로 다른 두 실근

0483

$\sqrt{ab}=-\sqrt{a}\sqrt{b}$이므로 $a<0,\ b<0\ (\because ab\neq0)$

ㄱ. 이차방정식 $x^2-bx+a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-b)^2-4a=b^2-4a>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. 이차방정식 $x^2+ax-b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=a^2-4\cdot(-b)=a^2+4b$

a^2+4b의 값의 부호는 알 수 없으므로 이 이차방정식의 근을 판별할 수 없다.

ㄷ. 이차방정식 $ax^2+bx-1=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$D_3=b^2-4a\cdot(-1)=b^2+4a$

b^2+4a의 값의 부호는 알 수 없으므로 이 이차방정식의 근을 판별할 수 없다.

ㄹ. 이차방정식 $bx^2+x-a=0$의 판별식을 D_4라 하면

$D_4=1^2-4b\cdot(-a)=1+4ab>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 항상 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

유형 09 이차식이 완전제곱식이 될 조건 (개념 03)

이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이 되려면

⇨ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=0$이어야 한다.

0484

주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식

$x^2-(2k+a)x+(k+1)^2+a^2-b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2k+a)\}^2-4\{(k+1)^2+a^2-b\}=0$

$4k^2+4ka+a^2-4k^2-8k-4-4a^2+4b=0$

$(4a-8)k-3a^2+4b-4=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4a-8=0,\ -3a^2+4b-4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=4$

$\therefore a-b=-2$ 답 -2

Lecture

x에 대한 이차식 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a,b,c는 실수)에 대하여

이차식 $f(x)$가 완전제곱식이 된다.

$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f(x)=0$이 중근을 갖는다.

$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식 $D=0$이다.

0485
주어진 이차식이 $(x+a)^2$으로 인수분해되려면 완전제곱식이 되어야 한다.
x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(2k^2-6k+4)=0$

$k^2-4k+3=0$, $(k-1)(k-3)=0$

$\therefore k=3$ ($\because k>1$)

이때, 주어진 이차식은 x^2-4x+4, 즉 $(x-2)^2$으로 인수분해되므로

$a=-2$

$\therefore k+a=1$

답 ①

0486
$(k-2)x^2+(4k-8)x+3k-2$가 이차식이므로 $k\neq2$
또, 이 식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식
$(k-2)x^2+(4k-8)x+3k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k-4)^2-(k-2)(3k-2)=0$

$k^2-8k+12=0$, $(k-2)(k-6)=0$

$\therefore k=6$ ($\because k\neq2$)

답 ④

0487
주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식
$x^2+2(a+b+c)x+3(ab+bc+ca)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$, $\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

이때, a, b, c가 실수이므로

$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$

$\therefore a=b=c$

답 $a=b=c$

유형 10 이차방정식의 판별식과 삼각형의 모양 (개념 03)

판별식을 이용하여 주어진 이차방정식의 미정계수 사이의 관계를 파악한 후 다음을 이용하여 삼각형의 모양을 판단한다.
삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c $(a\le b\le c)$일 때
(1) $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ⇨ 이등변삼각형
(2) $a=b=c$ ⇨ 정삼각형
(3) $a^2+b^2=c^2$ ⇨ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

0488
주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 x에 대한 이차방정식
$(a-c)x^2-2bx+a+c=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-b)^2-(a-c)(a+c)=0$

$b^2-(a^2-c^2)=0$

$\therefore b^2+c^2=a^2$

따라서 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

답 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

0489
$c(x^2-1)+2ax+b(1+x^2)=0$에서

$(b+c)x^2+2ax+b-c=0$

이 이차방정식이 허근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(b+c)(b-c)<0$, $a^2-b^2+c^2<0$

$\therefore a^2+c^2<b^2$

따라서 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형은 둔각삼각형이다.

답 둔각삼각형

Lecture
변의 길이에 따른 삼각형의 종류
삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$이고 c가 가장 긴 변의 길이일 때
(1) $a=b=c$ ⇨ 삼각형 ABC는 정삼각형
(2) $a^2+b^2>c^2$ ⇨ 삼각형 ABC는 예각삼각형
(3) $a^2+b^2=c^2$ ⇨ 삼각형 ABC는 직각삼각형
(4) $a^2+b^2<c^2$ ⇨ 삼각형 ABC는 둔각삼각형

유형 11 이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해될 조건 (개념 03)

x, y에 대한 이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때
(ⅰ) 이차식을 x 또는 y에 대하여 내림차순으로 정리한다.
(ⅱ) (이차식)$=0$의 판별식 D가 완전제곱식이어야 한다.
(ⅲ) $D=0$의 판별식 $D'=0$임을 이용한다.

0490
$2x^2+xy-y^2-3x+ky$를 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2+(y-3)x+(-y^2+ky)$

이때, x에 대한 이차방정식 $2x^2+(y-3)x+(-y^2+ky)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(y-3)^2-8(-y^2+ky)=9y^2-2(4k+3)y+9$

가 완전제곱식이 되어야 한다.
즉, y에 대한 이차방정식 $9y^2-2(4k+3)y+9=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=\{-(4k+3)\}^2-81=0$, $16k^2+24k-72=0$

$2k^2+3k-9=0$, $(k+3)(2k-3)=0$

$\therefore k=-3$ ($\because k<0$)

답 -3

0491
$x^2+xy+3x-2y^2+3y+k$를 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2+(y+3)x+(-2y^2+3y+k)$

이때, x에 대한 이차방정식 $x^2+(y+3)x+(-2y^2+3y+k)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(y+3)^2-4(-2y^2+3y+k)=9y^2-6y+9-4k$

가 완전제곱식이 되어야 한다.
즉, y에 대한 이차방정식 $9y^2-6y+9-4k=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=(-3)^2-9(9-4k)=0$

$-72+36k=0$ $\qquad\therefore k=2$

답 ④

0492

이차방정식 $x^2-3x-2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=-2$

(1) $\alpha+\beta-\alpha\beta=3-(-2)=5$

(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\cdot(-2)=13$

(3) $|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{|1|}=\sqrt{17}$

(4) $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$

$=-2-3+1=-4$

답 (1) 5 (2) 13 (3) $\sqrt{17}$ (4) -4

다른 풀이 (3) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$(\alpha-\beta)^2=3^2-4\cdot(-2)=17$ $\quad\therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{17}$

0493

이차방정식 $x^2+2x+3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=3$

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=3\cdot(-2)=-6$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\dfrac{2}{3}$

(3) $(2\alpha-1)(2\beta-1)=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1$

$=4\cdot3-2\cdot(-2)+1=17$

(4) $\left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\dfrac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+\dfrac{1}{\alpha\beta}+2$

$=3+\dfrac{1}{3}+2=\dfrac{16}{3}$

답 (1) -6 (2) $-\dfrac{2}{3}$ (3) 17 (4) $\dfrac{16}{3}$

0494

$x^2-(1+5)x+1\cdot5=0$

$\therefore x^2-6x+5=0$ 답 $x^2-6x+5=0$

0495

$x^2-(-1+4)x+(-1)\cdot4=0$

$\therefore x^2-3x-4=0$ 답 $x^2-3x-4=0$

0496

$x^2-\{(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\}x+(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=0$

$\therefore x^2-2x-2=0$ 답 $x^2-2x-2=0$

0497

$x^2-\{(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})\}x+(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=0$

$\therefore x^2-4x-1=0$ 답 $x^2-4x-1=0$

0498

$x^2-\{(-3+\sqrt{2})+(-3-\sqrt{2})\}x+(-3+\sqrt{2})(-3-\sqrt{2})=0$

$\therefore x^2+6x+7=0$ 답 $x^2+6x+7=0$

0499

$x^2-\{(2+i)+(2-i)\}x+(2+i)(2-i)=0$

$\therefore x^2-4x+5=0$ 답 $x^2-4x+5=0$

0500

$x^2-\{(1+3i)+(1-3i)\}x+(1+3i)(1-3i)=0$

$\therefore x^2-2x+10=0$ 답 $x^2-2x+10=0$

0501

$4\left\{x^2-\left(-1+\dfrac{1}{4}\right)x+(-1)\cdot\dfrac{1}{4}\right\}=0$

$4\left(x^2+\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}\right)=0$

$\therefore 4x^2+3x-1=0$ 답 $4x^2+3x-1=0$

0502

$6\left\{x^2-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\right)x+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\right\}=0$

$6\left(x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}\right)=0$

$\therefore 6x^2-5x+1=0$ 답 $6x^2-5x+1=0$

0503

두 수 α, β를 근으로 하는 x에 대한 이차방정식은 근과 계수의 관계에 의하여 $x^2-4x-3=0$

$\therefore x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-3)}=2\pm\sqrt{7}$

이때, $\alpha<\beta$이므로

$\alpha=2-\sqrt{7},\ \beta=2+\sqrt{7}$ 답 $\alpha=2-\sqrt{7},\ \beta=2+\sqrt{7}$

0504

두 수 α, β를 근으로 하는 x에 대한 이차방정식은 근과 계수의 관계에 의하여 $x^2+6x-2=0$

$\therefore x=-3\pm\sqrt{3^2-1\cdot(-2)}=3\pm\sqrt{11}$

이때, $\alpha<\beta$이므로

$\alpha=-3-\sqrt{11},\ \beta=-3+\sqrt{11}$ 답 $\alpha=-3-\sqrt{11},\ \beta=-3+\sqrt{11}$

0505

$x^2-x-1=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore x^2-x-1=\left(x-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

답 $\left(x-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

0506

$x^2+49=0$에서 $x^2=-49$

$\therefore x=\pm\sqrt{-49}=\pm7i$

$\therefore x^2+49=(x+7i)(x-7i)$ 답 $(x+7i)(x-7i)$

0507

$x^2-4x-1=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-1)}=2\pm\sqrt{5}$

$\therefore x^2-4x-1=\{x-(2+\sqrt{5})\}\{x-(2-\sqrt{5})\}$

$=(x-2-\sqrt{5})(x-2+\sqrt{5})$

답 $(x-2-\sqrt{5})(x-2+\sqrt{5})$

0508

$x^2+2x-6=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-6)}=-1\pm\sqrt{7}$

$\therefore x^2+2x-6=\{x-(-1+\sqrt{7})\}\{x-(-1-\sqrt{7})\}$

$=(x+1-\sqrt{7})(x+1+\sqrt{7})$

답 $(x+1-\sqrt{7})(x+1+\sqrt{7})$

0509

$4x^2-8x+5=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot5}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{4}$

$=\frac{4\pm2i}{4}=\frac{2\pm i}{2}$

$\therefore 4x^2-8x+5=4\left(x-\frac{2+i}{2}\right)\left(x-\frac{2-i}{2}\right)$

$=(2x-2-i)(2x-2+i)$

답 $(2x-2-i)(2x-2+i)$

0510

a, b가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=-a$, $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=b$

$\therefore a=-2, b=-1$

답 $a=-2, b=-1$

0511

a, b가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $2-\sqrt{7}$이므로 다른 한 근은 $2+\sqrt{7}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{7})+(2+\sqrt{7})=-a$, $(2-\sqrt{7})(2+\sqrt{7})=b$

$\therefore a=-4, b=-3$

답 $a=-4, b=-3$

0512

a, b가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $4+\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $4-\sqrt{2}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(4+\sqrt{2})+(4-\sqrt{2})=-a$, $(4+\sqrt{2})(4-\sqrt{2})=b$

$\therefore a=-8, b=14$

답 $a=-8, b=14$

0513

a, b가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $-1-i$이므로 다른 한 근은 $-1+i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1-i)+(-1+i)=-a$, $(-1-i)(-1+i)=b$

$\therefore a=2, b=2$

답 $a=2, b=2$

0514

a, b가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $2+3i$이므로 다른 한 근은 $2-3i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+3i)+(2-3i)=-a$, $(2+3i)(2-3i)=b$

$\therefore a=-4, b=13$

답 $a=-4, b=13$

0515

a, b가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $5-2i$이므로 다른 한 근은 $5+2i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(5-2i)+(5+2i)=-a$, $(5-2i)(5+2i)=b$

$\therefore a=-10, b=29$

답 $a=-10, b=29$

STEP 2 유형 마스터 ❷

유형 12 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기 개념 04

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이면

⇨ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

0516

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{2}{3}$, $\alpha\beta=\frac{4}{3}$

$\therefore \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}}=-\frac{5}{3}$

답 $-\frac{5}{3}$

0517

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

① $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{1}=3$

② $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=1-3+1=-1$

③ $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=3^2-4\cdot1=5$

$\therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{5}$

④ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=3^3-3\cdot1\cdot3=18$

⑤ $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta=3^2-3\cdot1=6$

답 ③

0518

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=1$ …… ㉠

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$

$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$ (∵ ㉠에서 $\alpha>0,\ \beta>0$)

$=4+2\cdot1=6$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{6}$

답 ③

0519

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-3$ … ❶

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-1)^2-4\cdot(-3)=13$

$\therefore \alpha-\beta=\sqrt{13}$ ($\because \alpha>\beta$) … ❷

$\therefore \alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

$=(\sqrt{13})^3+3\cdot(-3)\cdot\sqrt{13}=4\sqrt{13}$ … ❸

답 $4\sqrt{13}$

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\alpha-\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\alpha^3-\beta^3$의 값을 구할 수 있다.	40 %

유형 13 이차방정식의 근의 성질과 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기 개념 04

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α,β라 할 때

(1) $a\alpha^2+b\alpha+c=0,\ a\beta^2+b\beta+c=0$

(2) $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

를 이용하여 식의 값을 구한다.

0520

이차방정식 $x^2-5x+2=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha^2-5\alpha+2=0$에서 $\alpha^2-4\alpha+1=\alpha-1$

$\beta^2-5\beta+2=0$에서 $\beta^2-4\beta+1=\beta-1$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=2$

$\therefore (\alpha^2-4\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)=(\alpha-1)(\beta-1)$

$=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$

$=2-5+1=-2$

답 ③

0521

α가 이차방정식 $x^2+3x-5=0$의 근이므로

$\alpha^2+3\alpha-5=0 \qquad \therefore \alpha^2=-3\alpha+5$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$

$\therefore \alpha^2-3\beta=-3\alpha+5-3\beta$

$=-3(\alpha+\beta)+5$

$=(-3)\cdot(-3)+5=14$

답 ④

0522

이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha^2-2\alpha+3=0$에서 $\alpha^2+\alpha+3=3\alpha$

$\beta^2-2\beta+3=0$에서 $\beta^2+\beta+3=3\beta$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$\therefore \dfrac{9\beta}{\alpha^2+\alpha+3}+\dfrac{9\alpha}{\beta^2+\beta+3}$

$=\dfrac{9\beta}{3\alpha}+\dfrac{9\alpha}{3\beta}=\dfrac{3\beta}{\alpha}+\dfrac{3\alpha}{\beta}$

$=\dfrac{3(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta}=\dfrac{3\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{3\cdot(2^2-2\cdot3)}{3}=-2$

답 ②

0523

이차방정식 $x^2+x-1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta(\alpha\neq0,\ \beta\neq0)$이므로

$\alpha^2+\alpha-1=0$에서 $\alpha^3+\alpha^2-\alpha=0$

$\therefore \alpha^3+\alpha^2=\alpha$

$\beta^2+\beta-1=0$에서 $\beta^3+\beta^2-\beta=0$

$\therefore \beta^3+\beta^2=\beta$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-1$

$\therefore (1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)(1+\beta+\beta^2+\beta^3)$

$=(1+\alpha+\alpha)(1+\beta+\beta)$

$=(1+2\alpha)(1+2\beta)$

$=1+2(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=1+2\cdot(-1)+4\cdot(-1)=-5$

답 ①

유형 14 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수 구하기 – 두 이차방정식이 주어진 경우 개념 04

이차방정식이 2개 주어지고 각 이차방정식의 근이 모두 α,β로 나타내어져 있으면

⇨ 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수 사이의 관계식을 세운다.

0524

이차방정식 $x^2-2ax-1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=-1$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+3x+b=0$의 두 근이 $\alpha^2\beta,\ \alpha\beta^2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-3,\ \alpha^2\beta\cdot\alpha\beta^2=b$

$\therefore \alpha\beta(\alpha+\beta)=-3,\ \alpha^3\beta^3=b$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-1\cdot2a=-3,\ (-1)^3=b$

$\therefore a=\dfrac{3}{2},\ b=-1$

$\therefore ab=-\dfrac{3}{2}$

답 ③

0525

이차방정식 $3x^2-ax+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{a}{3}$, $\alpha\beta=\frac{4}{3}$ ······ ㉠

이차방정식 $4x^2+2x+b=0$의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{b}{4}$

$\therefore \alpha+\beta=-\frac{1}{2}\alpha\beta$, $\alpha\beta=\frac{4}{b}$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{a}{3}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}=\frac{4}{b}$

$\therefore a=-2, b=3$

$\therefore a+b=1$ 답 ③

0526

이차방정식 $x^2-mx+n=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=n$ ······ ㉠ ··· ❶

이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\alpha\beta=4$, $(\alpha+\beta)\cdot\alpha\beta=2$ ······ ㉡ ··· ❷

㉠을 ㉡에 대입하면

$m+n=4$, $mn=2$

$\therefore m^2+n^2=(m+n)^2-2mn$

$=4^2-2\cdot2=12$ ··· ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 ㉠을 구할 수 있다.	40 %
❷ 근과 계수의 관계를 이용하여 ㉡을 구할 수 있다.	40 %
❸ m^2+n^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

0527

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$ ······ ㉠

이차방정식 $x^2-(b-3)x+2a+4=0$의 두 근이 $\alpha-1$, $\beta-1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha-1)+(\beta-1)=b-3$, $(\alpha-1)(\beta-1)=2a+4$

$\therefore \alpha+\beta-2=b-3$, $\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=2a+4$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a-2=b-3$, $b+a+1=2a+4$

$a+b=1$, $-a+b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

$\therefore a^2+b^2=5$ 답 5

0528

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ ······ ㉠

이차방정식 $ax^2-bx+c=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=\frac{b}{a}$, $\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{c}{a}$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-(\alpha+\beta)$ ······ ㉢

$\alpha\beta(\alpha+\beta)=\alpha\beta$ ······ ㉣

㉣에서 $\alpha+\beta=1$이므로 이를 ㉢에 대입하면 $\alpha\beta=-2$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1^3-3\cdot1\cdot(-2)=7$ 답 ①

참고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이고 $c\neq0$이므로

$\alpha\neq0$, $\beta\neq0$

즉, $\alpha\beta\neq0$이므로 ㉣에서 $\alpha+\beta=1$

유형 15 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수 구하기 – 근의 관계식이 주어진 경우 개념 04

근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 합과 곱을 미정계수로 나타내고, 근의 관계식에 이를 대입하여 미정계수를 구한다.

0529

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2m$, $\alpha\beta=15-4m^2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=18$에서 $(-2m)^2-2(15-4m^2)=18$

$12m^2-30=18$, $m^2=4$

$\therefore m=2$ ($\because m>0$) 답 ②

0530

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k+1$, $\alpha\beta=k-4$

$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+2\alpha+2\beta=\alpha\beta(\alpha+\beta)+2(\alpha+\beta)$

$=(\alpha\beta+2)(\alpha+\beta)$

$=(k-2)(2k+1)=2k^2-3k-2$

즉, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+2\alpha+2\beta=3$에서 $2k^2-3k-2=3$

$2k^2-3k-5=0$, $(2k-5)(k+1)=0$

$\therefore k=-1$ ($\because k$는 정수) 답 -1

0531

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k+1$, $\alpha\beta=4k-1$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=21$에서 $(2k+1)^2-4(4k-1)=21$

$4k^2+4k+1-16k+4=21$, $4k^2-12k-16=0$

$k^2-3k-4=0$, $(k+1)(k-4)=0$

$\therefore k=4$ ($\because k$는 자연수) 답 4

5 이차방정식

0532

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2k,\ \alpha\beta=k^2-2k+2$

$|\alpha|+|\beta|=2\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면

$|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2=8$

$\alpha^2+\beta^2+2|\alpha\beta|=8$에서 $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=8$이므로

$(-2k)^2-2(k^2-2k+2)+2|k^2-2k+2|=8$

이때, $k^2-2k+2=(k-1)^2+1>0$이므로

$(-2k)^2-2(k^2-2k+2)+2(k^2-2k+2)=8$

$(-2k)^2=8,\ 4k^2=8,\ k^2=2$

$\therefore k=\sqrt{2}\ (\because k>0)$ 답 ②

유형 16 두 근의 조건이 주어진 이차방정식 개념 04

(1) 두 근의 차가 k ⇨ 두 근을 $\alpha,\ \alpha+k$로 놓는다.
(2) 두 근의 비가 $m:n$ ⇨ 두 근을 $m\alpha,\ n\alpha(\alpha\neq0)$로 놓는다.
(3) 한 근이 다른 근의 k배 ⇨ 두 근을 $\alpha,\ k\alpha(\alpha\neq0)$로 놓는다.
(4) 두 근이 연속인 정수일 때 ⇨ 두 근을 $\alpha,\ \alpha+1$ (α는 정수)로 놓는다.

0533

주어진 방정식의 두 근을 $3\alpha,\ 2\alpha\ (\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$3\alpha+2\alpha=10k$ …… ㉠

$3\alpha\cdot2\alpha=-k^2+1$ …… ㉡

㉠에서 $\alpha=2k$이므로 ㉡에 대입하면

$6\cdot(2k)^2=-k^2+1,\ 25k^2=1$

$k^2=\frac{1}{25}\qquad\therefore k=\frac{1}{5}\ (\because k>0)$ 답 ①

0534

주어진 방정식의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+3$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+3)=2k-1$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+3)=k^2$ …… ㉡ … ❶

㉠에서 $\alpha=k-2$이므로 ㉡에 대입하면

$(k-2)(k+1)=k^2,\ k^2-k-2=k^2,\ -k-2=0$

$\therefore k=-2$ … ❷

답 -2

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha,\ k$에 관한 식을 세울 수 있다.	80 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 주어진 방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta(\alpha>\beta)$라 하면

$\alpha-\beta=3$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k-1,\ \alpha\beta=k^2$

이때, $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$3^2=(2k-1)^2-4k^2$

$-4k=8\qquad\therefore k=-2$

0535

주어진 방정식의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+1$ (α는 정수)이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=k$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+1)=k+11$ …… ㉡

㉠에서 $k=2\alpha+1$이므로 ㉡에 대입하면

$\alpha^2+\alpha=2\alpha+12,\ \alpha^2-\alpha-12=0$

$(\alpha+3)(\alpha-4)=0\qquad\therefore \alpha=-3$ 또는 $\alpha=4$

(i) $\alpha=-3$일 때, $k=-5$

(ii) $\alpha=4$일 때, $k=9$

(i), (ii)에서 k는 양수이므로 $k=9$ 답 ③

참고 두 근이 연속인 정수인 경우 ⇨ 두 근은 $\alpha,\ \alpha+1$ 또는 $\alpha-1,\ \alpha$ (α는 정수)로 놓는다.

0536

주어진 방정식의 두 근을 $\alpha,\ 4\alpha\ (\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+4\alpha=5(k-1)$ …… ㉠

$\alpha\cdot4\alpha=-16k$ …… ㉡

㉠에서 $\alpha=k-1$이므로 ㉡에 대입하면

$4(k-1)^2=-16k,\ (k-1)^2=-4k$

$k^2+2k+1=0,\ (k+1)^2=0$

$\therefore k=-1$ 답 ②

0537

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $-18<0$이므로 두 근의 부호는 서로 다르다.

주어진 방정식의 두 근을 $\alpha,\ -2\alpha$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-2\alpha)=-(k-5)\qquad\therefore \alpha=k-5$ …… ㉠

$\alpha\cdot(-2\alpha)=-18,\ \alpha^2=9$

$\therefore \alpha=-3$ 또는 $\alpha=3$

(i) $\alpha=-3$일 때, ㉠에 대입하면 $k=2$

(ii) $\alpha=3$일 때, ㉠에 대입하면 $k=8$

(i), (ii)에서 $k=2$ 또는 $k=8$이므로 모든 실수 k의 값의 합은

$2+8=10$ 답 10

Lecture

두 근의 부호가 서로 다를 경우

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 부호가 서로 다르면

(두 근의 곱)$=\frac{c}{a}<0$

이 부등식의 양변에 양수인 a^2을 곱해도 부등호의 방향이 바뀌지 않으므로

$a^2\cdot\frac{c}{a}<0$에서 $ac<0$

이때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$D=b^2-4ac>0\ (\because ac<0)$

즉, 두 근의 부호가 서로 다를 경우 두 근의 곱이 음수가 되고, 이때의 판별식은 항상 양수이다.

따라서 두 근의 곱이 음수라는 조건만 따지면 된다.

유형 17 이차방정식의 작성 개념 05

x^2의 계수가 1인 이차방정식의 두 근이 주어지면 두 근의 합과 곱을 구하여 이차방정식을 만든다.

⇨ $x^2-(\text{두 근의 합})x+(\text{두 근의 곱})=0$

참고 두 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$과 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$은 같은 해를 가지는 방정식이다.
따라서 주어진 두 수를 근으로 하는 이차방정식을 만드는 문제에서 x^2의 계수 조건이 없다면 x^2의 계수를 1로 생각해도 된다.

0538

이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$

이때, α^2, β^2을 두 근으로 하는 이차방정식에 대하여

$(\text{두 근의 합})=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=(-2)^2-2\cdot3=-2$

$(\text{두 근의 곱})=\alpha^2\cdot\beta^2=(\alpha\beta)^2=3^2=9$

따라서 α^2, β^2을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+2x+9=0$ 답 ④

0539

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$

이때, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식에 대하여

$(\text{두 근의 합})=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{a}{b}$

$(\text{두 근의 곱})=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{b}$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2-\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}=0$, 즉

$bx^2-ax+1=0$이다. 답 ⑤

Lecture

이차방정식의 계수와 두 근과의 관계

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이면 이차방정식 $bx^2-ax+1=0$의 두 근은 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$임을 증명해 보자.

x^2의 계수가 b이고, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식은 근과 계수의 관계에 의하여

$b\left\{x^2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x+\frac{1}{\alpha\beta}\right\}=0$

즉, $b\left(x^2-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x+\frac{1}{\alpha\beta}\right)=0$ …… ㉠

$x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=a$ …… ㉡

$\alpha\beta=b$ …… ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$b\left(x^2-\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}\right)=0$, $bx^2-ax+1=0$

따라서 $bx^2-ax+1=0$의 두 근은 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이다.

0540

$\overline{AE}=\alpha$, $\overline{AH}=\beta$라 하면

$\overline{PF}=10-\alpha$, $\overline{PG}=10-\beta$

직사각형 PFCG의 둘레의 길이가 24이므로

$2(10-\alpha)+2(10-\beta)=24$

$\therefore \alpha+\beta=8$ …… ㉠ … ❶

또한, 직사각형 PFCG의 넓이가 33이므로

$(10-\alpha)(10-\beta)=33$

$100-10(\alpha+\beta)+\alpha\beta=33$, $100-10\cdot8+\alpha\beta=33$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \alpha\beta=13$ …… ㉡ … ❷

㉠, ㉡에 의하여 $\overline{AE}=\alpha$, $\overline{AH}=\beta$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-8x+13=0$ … ❸

답 $x^2-8x+13=0$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AE}$, $\overline{AH}$의 길이의 합을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\overline{AE}$, $\overline{AH}$의 길이의 곱을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\overline{AE}$, $\overline{AH}$의 길이를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구할 수 있다.	20 %

0541

이차방정식 $x^2-3x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-2$

이때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하는 이차방정식에 대하여

$(\text{두 근의 합})=\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$
$=3+\frac{3}{-2}=\frac{3}{2}$

$(\text{두 근의 곱})=\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+2+\frac{1}{\alpha\beta}$
$=-2+2+\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은 $2\left(x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)=0$, 즉 $2x^2-3x-1=0$이다.

답 $2x^2-3x-1=0$

0542

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2+\alpha=-a$, $2\alpha=b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+(b-1)x+2a+3=0$의 두 근이 -1, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+\beta=-(b-1)$, $-\beta=2a+3$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-1+\beta=-(2\alpha-1)$, $-\beta=2(-2-\alpha)+3$

$\therefore 2\alpha+\beta=2$, $-2\alpha+\beta=1$

두 식을 연립하여 풀면 $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{3}{2}$

따라서 α, β, 즉 $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 8인 이차방정식은 $8\left\{x^2-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)x+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\right\}=0$에서

$8\left(x^2-\frac{7}{4}x+\frac{3}{8}\right)=0$, $8x^2-14x+3=0$

이므로 $m=-14$, $n=3$

$\therefore m+n=-11$ 답 -11

발전 유형 18 잘못 보고 푼 이차방정식 개념 05

바르게 보고 푼 계수와 근과 계수의 관계를 이용하여 원래의 방정식을 구한다.

(1) x의 계수를 잘못 보고 구한 두 근의 곱
⇨ 원래 방정식의 두 근의 곱과 같다.

(2) 상수항을 잘못 보고 구한 두 근의 합
⇨ 원래 방정식의 두 근의 합과 같다.

0543

대한이는 방정식의 x^2의 계수와 상수항을 바르게 보고 풀었으므로

(두 근의 곱)$=\frac{c}{a}=(1+\sqrt{6})(1-\sqrt{6})=-5$

$\therefore c=-5a$ …… ㉠

또, 민국이는 방정식의 x^2의 계수와 x의 계수를 바르게 보고 풀었으므로

(두 근의 합)$=-\frac{b}{a}=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

$\therefore b=-\frac{4}{3}a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2-\frac{4}{3}ax-5a=0$

이때, $a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면

$x^2-\frac{4}{3}x-5=0$, $3x^2-4x-15=0$

$(3x+5)(x-3)=0$ $\therefore x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=3$

답 $x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=3$

0544

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식을 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$로 잘못 적용하여 얻은 두 근이 -1, 6이므로

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=\frac{b^2-(b^2-ac)}{4a^2}=\frac{ac}{4a^2}$$
$$=\frac{c}{4a}=-6$$

이때, 이 이차방정식에서 원래의 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$이므로

$\frac{c}{4a}=-6$에서 $\frac{c}{a}=-24$

따라서 이 이차방정식의 원래의 두 근의 곱은 -24이다. 답 ①

다른 풀이 근의 공식에서 $\sqrt{b^2-4ac}$를 $\sqrt{b^2-ac}$로 잘못 적용하였다는 것은 c의 값을 $\frac{1}{4}c$로 잘못 대입한 것과 같다.

-1, 6을 두 근으로 하고, x^2의 계수가 a인 이차방정식은

$a(x+1)(x-6)=0$, $ax^2-5ax-6a=0$

이때, $-6a$ 대신에 $(-6a)\cdot4$를 대입하면 원래의 방정식의 상수항이 된다.

즉, 원래의 방정식은 $ax^2-5ax-24a=0$

따라서 이 이차방정식의 원래의 두 근의 곱은 $\frac{-24a}{a}=-24$

유형 19 이차방정식 $f(x)=0$과 $f(ax+b)=0$의 관계 개념 04

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이면 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로
이차방정식 $f(ax+b)=0$의 두 근은

⇨ $ax+b=\alpha$, $ax+b=\beta$에서 $x=\frac{\alpha-b}{a}$ 또는 $x=\frac{\beta-b}{a}$

0545

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=3$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(2x+1)=0$이려면

$2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta-1}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합은

$\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0546

방정식 $f(x)=0$이 -1을 근으로 가지므로 $f(-1)=0$

이때, 선택지의 각 식의 좌변에 $x=-1$을 대입하여 $f(-1)=0$을 만족하는 것을 찾으면 ⑤이다. 답 ⑤

0547

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha\beta=9$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x)=0$이려면

$3x=\alpha$ 또는 $3x=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta}{3}$

따라서 이차방정식 $f(3x)=0$의 두 근의 곱은

$\frac{\alpha}{3}\cdot\frac{\beta}{3}=\frac{\alpha\beta}{9}=\frac{9}{9}=1$ 답 ①

0548

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

즉, $f(2x-2)=0$이려면 $2x-2=\alpha$ 또는 $2x-2=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha+2}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta+2}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x-2)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha+2}{2}\cdot\frac{\beta+2}{2}=\frac{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4}{4}$$
$$=\frac{4+2\cdot2+4}{4}\ (\because \alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=4)$$
$$=3$$

답 3

다른 풀이 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2, 두 근의 곱이 4이므로 0이 아닌 상수 a에 대하여 $f(x)=a(x^2-2x+4)$이다.

$\therefore f(2x-2)=a\{(2x-2)^2-2(2x-2)+4\}$
$=a(4x^2-12x+12)$

따라서 이차방정식 $f(2x-2)=0$의 두 근의 곱은 $\frac{12a}{4a}=3$

유형 20 이차방정식의 켤레근 개념 06

(1) 계수가 유리수인 이차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$
⇨ 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$(p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)
(2) 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 $p+qi$
⇨ 다른 한 근은 $p-qi$(p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

0549

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

계수가 실수인 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 한 근이 i이면 다른 한 근은 $-i$이다.
이때, 근과 계수의 관계에 의하여
$i+(-i)=-a \qquad \therefore a=0$
$i\cdot(-i)=b \qquad \therefore b=1$
$\therefore a-b=-1$ 답 -1

다른 풀이 $\frac{1+i}{1-i}=i$이므로 주어진 이차방정식에 대입하면
$i^2+ai+b=0$, $(b-1)+ai=0$
a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$b-1=0$, $a=0 \qquad \therefore a=0$, $b=1$
$\therefore a-b=-1$

0550

계수가 실수인 이차방정식 $x^2+ax+2b=0$에서 한 근이 $2+ai$이면 다른 한 근은 $2-ai$이다.
이때, 근과 계수의 관계에 의하여
$(2+ai)+(2-ai)=-a \qquad \therefore a=-4$
$(2+ai)(2-ai)=2b$
즉, $4+a^2=2b$에서
$4+(-4)^2=2b \qquad \therefore b=10$
$\therefore a+b=6$ 답 ②

0551

$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$ … ❶

계수가 유리수인 이차방정식 $x^2+2ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다. … ❷
이때, 근과 계수의 관계에 의하여
$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=-2a \qquad \therefore a=-1$
$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=b \qquad \therefore b=-1$ … ❸

따라서 이차방정식 $x^2+bx+a=0$, 즉 $x^2-x-1=0$의 근은
$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ … ❹

답 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$의 분모를 유리화할 수 있다.	20 %
❷ 켤레근의 성질을 이용하여 다른 한 근을 구할 수 있다.	30 %
❸ 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 근을 구할 수 있다.	20 %

0552

계수가 실수인 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 한 근이 $-1+2i$이면 다른 한 근은 $-1-2i$이다.
이때, 근과 계수의 관계에 의하여
$(-1+2i)+(-1-2i)=-m \qquad \therefore m=2$
$(-1+2i)(-1-2i)=n \qquad \therefore n=5$
$\therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$
$\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$
즉, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)x+\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}=0$에서
$x^2-\frac{7}{10}x+\frac{1}{10}=0$
즉 $a=-\frac{7}{10}$, $b=\frac{1}{10}$이므로
$5(a-b)=5\cdot\left(-\frac{7}{10}-\frac{1}{10}\right)=-4$ 답 ②

STEP 3 내신 마스터

0553

유형 02 이차항의 계수가 무리수인 이차방정식의 풀이
| 전략 | 이차항의 계수를 유리수로 고친 후 주어진 이차방정식의 근을 구한다.

주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}$를 곱하면
$\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}(2-\sqrt{6})x-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=0$
$4x^2+(2\sqrt{2}-2\sqrt{3})x-\sqrt{6}=0$
$(2x+\sqrt{2})(2x-\sqrt{3})=0$
$\therefore x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$
따라서 $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로
$2\alpha^2-\beta^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$ 답 ①

참고 x에 대한 이차방정식에서 x^2의 계수가 무리수 $\sqrt{a}$이면 양변에 $\sqrt{a}$를 곱하고, 무리수 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$이면 양변에 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$를 곱하여 x^2의 계수를 유리수로 고친다.

0554

유형 03 이차방정식의 한 근이 주어질 때 미정계수 구하기

|전략| $x=1$을 주어진 이차방정식에 대입한다.

이차방정식 $x^2-(a+5)x+a^2-2a=0$의 한 근이 1이므로

$1-(a+5)+a^2-2a=0$

$a^2-3a-4=0$, $(a+1)(a-4)=0$　　$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

$a=4$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-9x+8=0$, $(x-1)(x-8)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=8$

따라서 다른 한 근은 8이므로 $\alpha=8$

$\therefore a+\alpha=12$　　답 ③

0555

유형 03 이차방정식의 한 근이 주어질 때 미정계수 구하기

|전략| $x=\alpha$, $x=\beta$를 주어진 식에 각각 대입한 후 식을 변형하거나 양변을 β로 나눈다.

$x^2-3x+1=0$의 한 근이 α이므로 $\alpha^2-3\alpha+1=0$

$\therefore \alpha^2=3\alpha-1$　　…… ㉠

$x^2-\alpha x+1=0$의 한 근이 β이므로 $\beta^2-\alpha\beta+1=0$

이때, $\beta\neq0$이므로 양변을 β로 나누면

$\beta-\alpha+\frac{1}{\beta}=0$　　$\therefore \beta+\frac{1}{\beta}=\alpha$　　…… ㉡

㉠, ㉡에서

$3\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)-\alpha^2=3\alpha-(3\alpha-1)=1$　　답 ④

0556

유형 05 가우스 기호를 포함한 이차방정식의 풀이

|전략| 정수 n에 대하여 $n\le x<n+1$일 때, $[x]=n$이므로 $0<x<1$, $1\le x<2$, $2\le x<3$인 경우로 구간을 나누어 푼다.

(i) $0<x<1$일 때, $[x]=0$이므로

　$x^2=2$　　$\therefore x=\pm\sqrt{2}$

　그런데 $0<x<1$이므로 해는 없다.

(ii) $1\le x<2$일 때, $[x]=1$이므로

　$x^2-1=2$, $x^2=3$　　$\therefore x=\pm\sqrt{3}$

　그런데 $1\le x<2$이므로 $x=\sqrt{3}$

(iii) $2\le x<3$일 때, $[x]=2$이므로

　$x^2-2=2$, $x^2=4$　　$\therefore x=\pm2$

　그런데 $2\le x<3$이므로 $x=2$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 근은 $x=\sqrt{3}$ 또는 $x=2$이므로

$\alpha=\sqrt{3}$, $\beta=2$ 또는 $\alpha=2$, $\beta=\sqrt{3}$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=7$　　답 ②

Lecture

가우스 기호를 포함한 방정식의 풀이

(1) x의 값의 범위가 주어지지 않는 경우

　⇨ $[x]=n$ (n은 정수)으로 놓고 푼다.

(2) x의 값의 범위가 주어지는 경우

　⇨ 구간을 나누어 $[x]$의 값을 구한 후 방정식에 대입하여 푼다.

0557

유형 06 이차방정식의 활용

|전략| (나중 호박밭의 넓이)$=\frac{1}{3}$(처음 호박밭의 넓이)임을 이용하여 x에 대한 방정식을 세운다.

새로 만든 호박밭의 넓이가 $(12-x)(10+x)$ m^2이므로

$(12-x)(10+x)=\frac{1}{3}\cdot12\cdot10$

$120+2x-x^2=40$, $x^2-2x-80=0$

$(x+8)(x-10)=0$

$\therefore x=-8$ 또는 $x=10$

그런데 $0<x<12$이므로 $x=10$　　답 ③

0558

유형 07 판별식을 이용한 이차방정식의 근의 판별

|전략| 이차방정식의 판별식을 D라 하면 이차방정식이 중근을 가질 조건은 $D=0$, 허근을 가질 조건은 $D<0$이다.

이차방정식 $x^2-2(a+2)x+2a^2-1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=\{-(a+2)\}^2-(2a^2-1)=0$

$a^2+4a+4-2a^2+1=0$

$a^2-4a-5=0$, $(a+1)(a-5)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=5$　　…… ㉠

이차방정식 $x^2+2x+2a+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=1^2-(2a+1)<0$, $-2a<0$

$\therefore a>0$　　…… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=5$　　답 ⑤

0559

유형 07 판별식을 이용한 이차방정식의 근의 판별

|전략| 주어진 이차방정식을 (이차식)$=0$의 꼴로 나타내고, 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D>0$이다.

$(a^2-9)x^2=a+3$에서 $(a+3)(a-3)x^2=a+3$

이때, a는 자연수이므로 $a+3>0$

$(a-3)x^2=1$, $(a-3)x^2-1=0$

이차방정식 $(a-3)x^2-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=0^2+4(a-3)=4a-12>0$　　$\therefore a>3$

따라서 10보다 작은 자연수 a는 4, 5, 6, 7, 8, 9의 6개이다.

답 ④

다른 풀이 $(a^2-9)x^2=a+3$에서 $(a+3)(a-3)x^2=a+3$

이때, a는 자연수이므로 $a+3>0$

$(a-3)x^2=1$, $(a-3)x^2-1=0$

$\therefore x^2=\frac{1}{a-3}$

이차방정식이 두 실근을 가지므로 $\frac{1}{a-3}>0$

$a-3>0$　　$\therefore a>3$

따라서 10보다 작은 자연수 a는 4, 5, 6, 7, 8, 9의 6개이다.

0560

유형 09 이차식이 완전제곱식이 될 조건

+ 10 이차방정식의 판별식과 삼각형의 모양

|전략| 이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=0$이므로 a, b, c 사이의 관계를 알아본다.

주어진 식을 x에 대하여 정리하면

$x^2-(a+c)x+ac+2x^2-(a+2b+c)x+ab+bc$

$\therefore 3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)$

주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식

$3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=\{-(a+b+c)\}^2-3(ab+bc+ca)=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

a, b, c가 실수이므로 $a-b=0, b-c=0, c-a=0$

$\therefore a=b=c$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

답 ⑤

0561

유형 11 이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해될 조건

|전략| 주어진 식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 (주어진 식)$=0$의 판별식 D가 완전제곱식이 되어야 한다.

$2x^2+3xy+y^2-x+k$를 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2+(3y-1)x+y^2+k$

이때, x에 대한 이차방정식 $2x^2+(3y-1)x+y^2+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(3y-1)^2-4\cdot2\cdot(y^2+k)=y^2-6y+1-8k$

가 완전제곱식이 되어야 한다.

즉, y에 대한 이차방정식 $y^2-6y+1-8k=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=(-3)^2-(1-8k)=0$

$8k+8=0 \qquad \therefore k=-1$

답 ②

0562

유형 12 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기

|전략| 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta, \alpha\beta$의 값을 구하고, 이를 이용하여 α, β의 부호를 결정한다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-6, \alpha\beta=3$

이때, 이차방정식 $x^2+6x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-1\cdot3=6>0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

즉, α, β는 모두 실수이고 $\alpha+\beta<0, \alpha\beta>0$이므로

$\alpha<0, \beta<0$

$$\therefore \frac{1}{|\alpha|}+\frac{1}{|\beta|}=\frac{1}{-\alpha}+\frac{1}{-\beta}=-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$=-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{-6}{3}=2$$

답 ④

0563

유형 14 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수 구하기

– 두 이차방정식이 주어진 경우

|전략| 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수 사이의 관계식을 세운다.

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a, \alpha\beta=b$ ...... ㉠

이차방정식 $x^2-bx+a=0$의 두 근이 $\alpha+3, \beta+3$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+3)+(\beta+3)=b, (\alpha+3)(\beta+3)=a$

$\therefore \alpha+\beta+6=b, \alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9=a$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a+6=b, b+3a+9=a$

$a-b=-6, 2a+b=-9$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-5, b=1$

$\therefore ab=-5$

답 ①

0564

유형 14 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수 구하기

– 두 이차방정식이 주어진 경우

+ 15 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수 구하기

– 근의 관계식이 주어진 경우

|전략| 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha, \beta, \gamma, a, b$의 관계식을 찾고 주어진 관계식을 이용한다.

이차방정식 $x^2+(a-4)x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a+4$ ...... ㉠

$\alpha\beta=-1$ ...... ㉡

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\gamma=-a$ ...... ㉢

$\alpha\gamma=b$ ...... ㉣

㉠$-$㉢을 하면 $\beta-\gamma=4$

이때, $2\alpha=\beta-\gamma$이므로

$2\alpha=4 \qquad \therefore \alpha=2$

$\alpha=2$를 ㉡에 대입하면 $\beta=-\frac{1}{2}$

$\alpha=2, \beta=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{5}{2}$

$\alpha=2, a=\frac{5}{2}$를 ㉢에 대입하면 $\gamma=-\frac{9}{2}$

$\alpha=2, \gamma=-\frac{9}{2}$를 ㉣에 대입하면 $b=-9$

$\therefore 2a-b=14$

답 ③

0565

유형 16 두 근의 조건이 주어진 이차방정식

|전략| 주어진 이차방정식의 두 근의 절댓값의 비가 $3:2$이고, 두 근의 부호가 서로 다르므로 두 근을 $3\alpha, -2\alpha$로 놓는다.

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $-\frac{3}{m}<0$ ($\because m$은 자연수)

이므로 두 근의 부호는 서로 다르다.

주어진 방정식의 두 근을 3α, $-2\alpha(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$3\alpha+(-2\alpha)=-\dfrac{2m-3}{m}$ $\quad\therefore\ \alpha=\dfrac{-2m+3}{m}$

$3\alpha\cdot(-2\alpha)=-\dfrac{3}{m}$ $\quad\therefore\ \alpha^2=\dfrac{1}{2m}$

즉, $\left(\dfrac{-2m+3}{m}\right)^2=\dfrac{1}{2m}$이므로

$2(4m^2-12m+9)=m,\ 8m^2-25m+18=0$

$(8m-9)(m-2)=0$ $\quad\therefore\ m=\dfrac{9}{8}$ 또는 $m=2$

따라서 자연수 m의 값은 2이다. 답 ②

참고 주어진 이차방정식의 두 근을 -3α, $2\alpha(\alpha\neq0)$로 놓고 위와 같은 방법으로 풀 수도 있다.

0566

유형 19 이차방정식 $f(x)=0$과 $f(ax+b)=0$의 관계

|전략| 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로 $f(4x-3)=0$의 근은 $4x-3=\alpha$, $4x-3=\beta$를 만족시키는 x의 값이 된다.

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

즉, $f(4x-3)=0$이려면

$4x-3=\alpha$ 또는 $4x-3=\beta$

$\therefore\ x=\dfrac{\alpha+3}{4}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+3}{4}$

따라서 이차방정식 $f(4x-3)=0$의 두 근의 합은

$\dfrac{\alpha+3}{4}+\dfrac{\beta+3}{4}=\dfrac{\alpha+\beta+6}{4}=\dfrac{6+6}{4}$ $(\because\ \alpha+\beta=6)$

$=3$ 답 ④

다른 풀이 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로 0이 아닌 상수 k에 대하여 $f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$로 놓을 수 있다.

이때, $f(x)$에 x 대신 $4x-3$을 대입하면

$f(4x-3)=k(4x-3-\alpha)(4x-3-\beta)$

이므로 이차방정식 $f(4x-3)=0$, 즉 $k(4x-3-\alpha)(4x-3-\beta)=0$의 두 근은

$x=\dfrac{\alpha+3}{4}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+3}{4}$

따라서 이차방정식 $f(4x-3)=0$의 두 근의 합은

$\dfrac{\alpha+3}{4}+\dfrac{\beta+3}{4}=\dfrac{\alpha+\beta+6}{4}=\dfrac{6+6}{4}$ $(\because\ \alpha+\beta=6)$

$=3$

0567

유형 04 절댓값 기호를 포함한 이차방정식의 풀이

|전략| 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나눈다.

$\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$이므로 주어진 방정식은

$x^2+|x+1|=|x-1|-1$

(i) $x<-1$일 때, $x^2-(x+1)=-(x-1)-1$

$x^2=1$ $\quad\therefore\ x=\pm1$

그런데 $x<-1$이므로 해가 없다. … ❶

(ii) $-1\leq x<1$일 때, $x^2+x+1=-(x-1)-1$

$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$

$\therefore\ x=-1$ (중근) … ❷

(iii) $x\geq1$일 때, $x^2+x+1=x-1-1$

$x^2=-3$에서 x는 실수이므로 해가 없다. … ❸

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 근은 $x=-1$ … ❹

답 $x=-1$

채점 기준	배점
❶ $x<-1$일 때 방정식을 풀 수 있다.	2점
❷ $-1\leq x<1$일 때 방정식을 풀 수 있다.	2점
❸ $x\geq1$일 때 방정식을 풀 수 있다.	2점
❹ 방정식의 근을 구할 수 있다.	1점

0568

유형 08 계수가 문자인 이차방정식의 근의 판별

|전략| 두 이차방정식의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면 $D_1=0$일 때, D_2의 부호를 조사한다.

이차방정식 $x^2-ax+b^2+1=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-a)^2-4(b^2+1)=0$

$\therefore\ a^2=4(b^2+1)$ …… ㉠ … ❶

이차방정식 $x^2+2ax+2b+3=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=a^2-(2b+3)=a^2-2b-3$

$=4(b^2+1)-2b-3$ $(\because$ ㉠$)$

$=4b^2-2b+1$

$=4\left(b-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ $\left(\because\ \left(b-\dfrac{1}{4}\right)^2\geq0\right)$ … ❷

따라서 이차방정식 $x^2+2ax+2b+3=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. … ❸

답 서로 다른 두 실근

채점 기준	배점
❶ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	2점
❷ 이차방정식 $x^2+2ax+2b+3=0$의 판별식의 부호를 조사할 수 있다.	3점
❸ 이차방정식 $x^2+2ax+2b+3=0$의 근을 판별할 수 있다.	1점

Lecture

자주 쓰이는 실수의 성질

a, b가 실수일 때,

① $a>b \Longleftrightarrow a-b>0$ ② $a^2\geq0$, $a^2+b^2\geq0$

③ $a^2+b^2=0 \Longleftrightarrow a=0, b=0$ ④ $|a|^2=a^2$, $|ab|=|a||b|$

⑤ $a>0$, $b>0$일 때, $a>b \Longleftrightarrow a^2>b^2$

0569

유형 12 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기 + 20 이차방정식의 켤레근

|전략| 이차방정식의 켤레근의 성질을 이용하여 a, b의 값을 구하고, $x^2+bx+a=0$에서 근과 계수의 관계를 이용한다.

계수가 유리수인 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $2+\sqrt{2}$이다.

이때, 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})=-a \qquad \therefore a=-4$

$(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})=b \qquad \therefore b=2$ ··· ❶

따라서 이차방정식 $x^2+bx+a=0$, 즉 $x^2+2x-4=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-4$ ··· ❷

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-2)^2-4\cdot(-4)=20$ ··· ❸

답 20

채점 기준	배점
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ 이차방정식 $x^2+bx+a=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 합과 곱을 구할 수 있다.	2점
❸ 이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 두 근의 차의 제곱의 값을 구할 수 있다.	2점

0570

유형 17 이차방정식의 작성

|전략| 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$이다.

(1) 이차방정식 $x^2+3x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=4$

(2) $\dfrac{\beta}{\alpha+1}$, $\dfrac{\alpha}{\beta+1}$를 두 근으로 하는 이차방정식에 대하여

$$(\text{두 근의 합})=\frac{\beta}{\alpha+1}+\frac{\alpha}{\beta+1}=\frac{\beta(\beta+1)+\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$
$$=\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\alpha+\beta}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$$
$$=\frac{(-3)^2-2\cdot4+(-3)}{4+(-3)+1}=-1$$
$$(\text{두 근의 곱})=\frac{\beta}{\alpha+1}\cdot\frac{\alpha}{\beta+1}=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$
$$=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}=\frac{4}{4+(-3)+1}=2$$

(3) $\dfrac{\beta}{\alpha+1}$, $\dfrac{\alpha}{\beta+1}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+x+2=0$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	4점
(2) $\dfrac{\beta}{\alpha+1}$, $\dfrac{\alpha}{\beta+1}$를 두 근으로 하는 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 구할 수 있다.	6점
(3) $\dfrac{\beta}{\alpha+1}$, $\dfrac{\alpha}{\beta+1}$를 두 근으로 하는 이차방정식을 구할 수 있다.	2점

0571

유형 18 잘못 보고 푼 이차방정식

|전략| 연진이는 x^2의 계수와 상수항을, 민수는 x^2의 계수와 x의 계수를 바르게 보았으므로 바르게 본 계수와 근과 계수의 관계를 이용하여 원래의 이차방정식을 구한다.

(1) 연진이는 방정식의 x^2의 계수와 상수항을 바르게 보고 풀었으므로

$(\text{두 근의 곱})=\dfrac{c}{a}=2\cdot(-4)=-8 \qquad \therefore c=-8a$

(2) 민수는 방정식의 x^2의 계수와 x의 계수를 바르게 보고 풀었으므로

$(\text{두 근의 합})=-\dfrac{b}{a}=(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)=2$

$\therefore b=-2a$

(3) $b=-2a$, $c=-8a$를 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

구하는 이차방정식은 $ax^2-2ax-8a=0$, 즉 $a(x^2-2x-8)=0$이므로

$(x+2)(x-4)=0$ ($\because a\neq0$) $\qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 음수인 근은 -2이다.

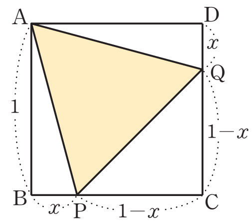
답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) c를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	3점
(2) b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	3점
(3) 처음 이차방정식의 올바른 두 근 중 음수인 근을 구할 수 있다.	4점

창의·융합 실력 마스터

0572

|전략| $\overline{BP}=x$라 하고 합동인 두 삼각형을 찾아 피타고라스 정리를 이용한다.



삼각형 ABP와 삼각형 ADQ에서

$\overline{AB}=\overline{AD}$, $\overline{AP}=\overline{AQ}$, $\angle B=\angle D=90°$

$\therefore \triangle ABP\equiv\triangle ADQ$ (RHS 합동)

$\overline{BP}=\overline{DQ}=x$라 하면

$\overline{CP}=\overline{CQ}=1-x$

삼각형 APQ가 정삼각형이므로

$\overline{AP}=\overline{PQ}$, 즉 $\overline{AP}^2=\overline{PQ}^2$에서 $1+x^2=(1-x)^2+(1-x)^2$

$x^2-4x+1=0 \qquad \therefore x=2\pm\sqrt{3}$

이때, $0<x<1$이므로 $x=2-\sqrt{3}$

따라서 선분 BP의 길이는 $2-\sqrt{3}$이다.

답 ①

0573

|전략| 두 이차방정식의 판별식을 이용하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 확인한다.

ㄱ. $b=a+c$이므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2+(a+c)x+c=0$, $(ax+c)(x+1)=0$

$\therefore x=-\dfrac{c}{a}$ 또는 $x=-1$

이때, $0<a<c$이므로 $\dfrac{c}{a}>1$에서 $-\dfrac{c}{a}<-1$

즉, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 -1보다 작은 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=b^2-ac=0 \qquad \therefore b^2=ac$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=b^2-4ac=ac-4ac=-3ac$

이때, $0<a<c$이므로 $ac>0$

즉, $D_2=b^2-4ac=-3ac<0$

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 허근을 갖는다. (참)

ㄷ. 두 이차방정식의 공통인 실근을 α라 하면

$a\alpha^2+b\alpha+c=0$ …… ㉠

$a\alpha^2+2b\alpha+c=0$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면 $b\alpha=0$

이때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 곱)$=\frac{c}{a}$이고, $0<a<c$에서 $\frac{c}{a}\neq 0$이므로 $\alpha\neq 0$

$\therefore b=0$

$b=0$을 ㉠에 대입하면 $\alpha^2=-\frac{c}{a}<-1$이므로 α는 허근이다.

이는 α가 실근이라는 조건을 만족하지 않는다.

즉, 두 이차방정식은 공통인 실근을 갖지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0574

|전략| 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha_n+\beta_n$을 n에 대한 식으로 나타낸 후 이를 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

이차방정식 $\{\sqrt{n(n+1)}+n\}x^2-\sqrt{n}x-n=0$의 두 실근이 α_n, β_n이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\alpha_n+\beta_n&=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}+n}\\&=\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n(n+1)}-n)}{(\sqrt{n(n+1)}+n)(\sqrt{n(n+1)}-n)}\\&=\frac{\sqrt{n^2(n+1)}-n\sqrt{n}}{n(n+1)-n^2}\\&=\frac{n\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}}{n}\ (\because n\text{은 자연수})\\&=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\end{aligned}$$

이때, $n=1, 2, 3, \cdots, 48$을 차례로 대입하면

$\alpha_1+\beta_1=\sqrt{2}-\sqrt{1}$

$\alpha_2+\beta_2=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$\alpha_3+\beta_3=\sqrt{4}-\sqrt{3}$

⋮

$\alpha_{48}+\beta_{48}=\sqrt{49}-\sqrt{48}$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{주어진 식})&=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+(\alpha_{48}+\beta_{48})\\&=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+\cdots+(\sqrt{49}-\cancel{\sqrt{48}})\\&=\sqrt{49}-\sqrt{1}=7-1=6\end{aligned}$$

답 6

0575

|전략| 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β 사이의 관계식을 찾고 서로 다른 두 실근 α, β의 부호를 이용한다.

이차방정식 $x^2+ax+2b=0$의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=2b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-(5a-2b)x-10b=0$의 두 근이 $|\alpha|+|\beta|$, $|\alpha\beta|$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(|\alpha|+|\beta|)+|\alpha\beta|=5a-2b$

$(|\alpha|+|\beta|)\cdot|\alpha\beta|=-10b$

이때, α, β의 부호가 서로 다르므로 $\alpha<0<\beta$라 하면

$-\alpha+\beta-\alpha\beta=5a-2b$ …… ㉡

$(-\alpha+\beta)\cdot(-\alpha\beta)=-10b$ …… ㉢

㉠의 $\alpha\beta=2b$를 ㉢에 대입하면

$(-\alpha+\beta)\cdot(-2b)=-10b$

$\therefore -\alpha+\beta=5\ (\because b\neq 0)$ …… ㉣

$-\alpha+\beta=5$와 ㉠의 $\alpha\beta=2b$를 ㉡에 대입하면

$5-2b=5a-2b \qquad \therefore a=1$

㉠에서 $\alpha+\beta=-a$, 즉 $\alpha+\beta=-1$이므로 ㉣과 연립하여 풀면

$\alpha=-3$, $\beta=2$

㉠에서 $\alpha\beta=2b$이므로 $-3\cdot2=2b \qquad \therefore b=-3$

$\therefore a-b=4$ 답 4

0576

|전략| 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β 사이의 관계식을 구하여 $f(x)$를 찾는다.

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

$\alpha+\beta=3$에서 $\alpha=3-\beta$, $\beta=3-\alpha$

즉, $f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$에 $\alpha=3-\beta$, $\beta=3-\alpha$를 대입하면

$f(\alpha)=3-\alpha$, $f(\beta)=3-\beta$이므로

$f(\alpha)+\alpha-3=0$, $f(\beta)+\beta-3=0$

따라서 α, β는 이차방정식 $f(x)+x-3=0$의 두 근이므로 $f(x)$의 x^2의 계수를 a(a는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$f(x)+x-3=a(x^2-3x+1)$

$\therefore f(x)=a(x^2-3x+1)-x+3$

이때, $f(0)=2$이므로 $a+3=2 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $f(x)=-(x^2-3x+1)-x+3=-x^2+2x+2$이므로

$f(2)=-2^2+2\cdot2+2=2$ 답 2

Lecture

x에 대한 이차식 $f(x)$와 0이 아닌 상수 k, a에 대하여

(1) $f(\alpha)=k\alpha$, $f(\beta)=k\beta$가 성립하면 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)+kx$

(2) $f(\alpha)=k\alpha^2$, $f(\beta)=k\beta^2$이 성립하면 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)+kx^2$

(3) $f(\alpha)=k\beta$, $f(\beta)=k\alpha$가 성립하면

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)+k(\alpha+\beta-x)$

로 놓고 문제를 푼다.

0577

|전략| 지름에 대한 원주각의 크기가 90°이므로 삼각형 APB가 직각삼각형임을 이용하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$, $\overline{AP}$, $\overline{BP}$의 값을 구한다.

$\angle$APB는 원의 지름에 대한 원주각이므로 $\angle APB=90^\circ$

즉, 삼각형 APB는 직각삼각형이므로 $\overline{AP}=\alpha$, $\overline{BP}=\beta$라 하면

$\triangle APB=\frac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{BP}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{PH}$에서

$\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\beta=\frac{1}{2}\cdot5\cdot2 \qquad \therefore \alpha\beta=10$ …… ㉠

또, 직각삼각형 APB에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{AB}^2$이므로 $\alpha^2+\beta^2=25$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=25$, $(\alpha+\beta)^2=45\ (\because$ ㉠$)$

$\therefore \alpha+\beta=3\sqrt{5}\ (\because \alpha+\beta>0)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{AP}=\alpha$, $\overline{BP}=\beta$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-3\sqrt{5}x+10=0$ 답 ④

6 이차방정식과 이차함수

본책 86~99쪽

STEP 1 개념 마스터

0578

(1) $y=x^2-4x+9=(x-2)^2+5$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(2, 5)$, 축의 방정식은 $x=2$이다.

(2) $y=-3x^2-6x-1=-3(x+1)^2+2$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 2)$, 축의 방정식은 $x=-1$이다.

답 (1) 꼭짓점의 좌표 : $(2, 5)$, 축의 방정식 : $x=2$
(2) 꼭짓점의 좌표 : $(-1, 2)$, 축의 방정식 : $x=-1$

0579

(1) 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

(2) 그래프의 축 $x=-\frac{b}{2a}$가 y축의 오른쪽에 있으므로 $-\frac{b}{2a}>0$

이때, $a<0$이므로 $b>0$

(3) 그래프와 y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $c>0$

(4) $a+b+c$는 $x=1$일 때의 함숫값이므로

$a+b+c>0$

(5) $4a-2b+c$는 $x=-2$일 때의 함숫값이므로

$4a-2b+c<0$

(6) $x=\frac{1}{2}$일 때 $y>0$이므로 $\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c>0$

즉, $\frac{1}{4}(a+2b+4c)>0$이므로 $a+2b+4c>0$

답 풀이 참조

0580

이차방정식 $x^2+7x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=7^2-4\cdot1\cdot(-2)=57>0$

이므로 방정식 $x^2+7x-2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 2개이다. 답 2

0581

이차방정식 $2x^2-3x+6=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot6=-39<0$

이므로 방정식 $2x^2-3x+6=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 없다. 답 0

0582

이차방정식 $-9x^2+6x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-(-9)\cdot(-1)=0$

이므로 방정식 $-9x^2+6x-1=0$은 중근을 갖는다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 1개이다. 답 1

0583

이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot k=4-k$

(1) $4-k>0$ $\therefore k<4$

(2) $4-k=0$ $\therefore k=4$

(3) $4-k<0$ $\therefore k>4$

답 (1) $k<4$ (2) $k=4$ (3) $k>4$

0584

$x^2-5x+1=-x-3$에서 $x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$ $\therefore x=2$ 답 2

0585

$x^2+3x-2=x+6$에서 $x^2+2x-8=0$

$(x+4)(x-2)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=2$ 답 $-4, 2$

0586

$-x^2+x+5=-3x+8$에서 $x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=3$ 답 1, 3

0587

$2x^2+3x-9=2x-3$에서 $2x^2+x-6=0$

$(x+2)(2x-3)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{3}{2}$ 답 $-2, \frac{3}{2}$

0588

$-5x^2+7x+12=4x-2$에서 $5x^2-3x-14=0$

$(5x+7)(x-2)=0$ $\therefore x=-\frac{7}{5}$ 또는 $x=2$ 답 $-\frac{7}{5}, 2$

0589

이차방정식 $x^2+2x-1=x-3$, 즉 $x^2+x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

답 만나지 않는다.

0590

이차방정식 $2x^2-5x-3=-2x+1$, 즉 $2x^2-3x-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot(-4)=41>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다. 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

0591

이차방정식 $-4x^2-3x+2=x-5$, 즉 $4x^2+4x-7=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-4\cdot(-7)=32>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 서로 다른 두 점에서 만난다.

0592

이차방정식 $-x^2-7x+4=-3x+8$, 즉 $x^2+4x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot4=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.(접한다.)

답 한 점에서 만난다.(접한다.)

0593

이차방정식 $x^2+7x-3=x+k$, 즉 $x^2+6x-k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-1\cdot(-k-3)=k+12$

(1) $k+12>0$ $\quad\therefore k>-12$

(2) $k+12=0$ $\quad\therefore k=-12$

(3) $k+12<0$ $\quad\therefore k<-12$

답 (1) $k>-12$ (2) $k=-12$ (3) $k<-12$

0594

이차방정식 $2x^2+3x-1=-x+k$, 즉 $2x^2+4x-1-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-2\cdot(-1-k)=2k+6$

주어진 이차함수의 그래프와 직선이 만나려면 $D\geq0$이어야 하므로

$2k+6\geq0$ $\quad\therefore k\geq-3$

답 $k\geq-3$

0595

이차방정식 $-3x^2-5x-5=x-k$, 즉 $3x^2+6x-k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-3\cdot(-k+5)=3k-6$

주어진 이차함수의 그래프와 직선이 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로

$3k-6<0$ $\quad\therefore k<2$

답 $k<2$

0596

(1) $y=2x^2+4x+7=2(x+1)^2+5$

(2) 최솟값은 5이고, 그때의 x의 값은 -1이다.

답 (1) $y=2(x+1)^2+5$ (2) 최솟값 : 5, x의 값 : -1

0597

(1) $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-3=-\frac{1}{2}(x-2)^2-1$

(2) 최댓값은 -1이고, 그때의 x의 값은 2이다.

답 (1) $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2-1$ (2) 최댓값 : -1, x의 값 : 2

0598

$y=x^2-6x+3=(x-3)^2-6$

따라서 $x=3$일 때 최솟값은 -6이고, 최댓값은 없다.

답 최솟값 : -6, 최댓값 : 없다.

0599

$y=2x^2+8x+9=2(x+2)^2+1$

따라서 $x=-2$일 때 최솟값은 1이고, 최댓값은 없다.

답 최솟값 : 1, 최댓값 : 없다.

0600

$y=-x^2+2x-10=-(x-1)^2-9$

따라서 $x=1$일 때 최댓값은 -9이고, 최솟값은 없다.

답 최댓값 : -9, 최솟값 : 없다.

0601

$y=-3x^2+12x-7=-3(x-2)^2+5$

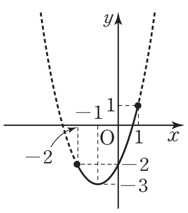
따라서 $x=2$일 때 최댓값은 5이고, 최솟값은 없다.

답 최댓값 : 5, 최솟값 : 없다.

0602

$f(x)=x^2+2x-2=(x+1)^2-3$

이므로 $-2\leq x\leq1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



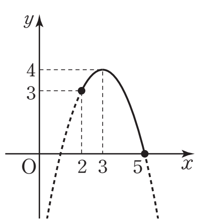
따라서 $f(-2)=-2$, $f(-1)=-3$, $f(1)=1$이므로 $f(x)$의 최댓값은 1, 최솟값은 -3이다.

답 최댓값 : 1, 최솟값 : -3

0603

$f(x)=-x^2+6x-5=-(x-3)^2+4$

이므로 $2\leq x\leq5$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



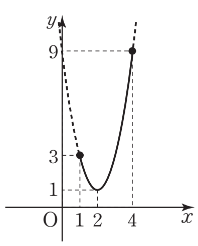
따라서 $f(2)=3$, $f(3)=4$, $f(5)=0$이므로 $f(x)$의 최댓값은 4, 최솟값은 0이다.

답 최댓값 : 4, 최솟값 : 0

0604

$f(x)=2x^2-8x+9=2(x-2)^2+1$

이므로 $1\leq x\leq4$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(1)=3$, $f(2)=1$, $f(4)=9$이므로 $f(x)$의 최댓값은 9, 최솟값은 1이다.

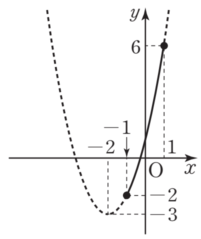
답 최댓값 : 9, 최솟값 : 1

0605

$f(x)=x^2+4x+1=(x+2)^2-3$

이므로 $-1\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $f(-1)=-2$, $f(1)=6$이므로 $f(x)$의 최댓값은 6, 최솟값은 -2이다.



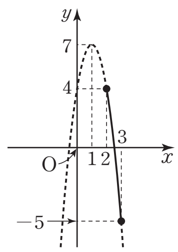
답 최댓값 : 6, 최솟값 : -2

0606

$f(x)=-3x^2+6x+4=-3(x-1)^2+7$

이므로 $2\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $f(2)=4$, $f(3)=-5$이므로 $f(x)$의 최댓값은 4, 최솟값은 -5이다.



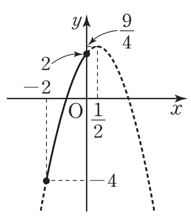
답 최댓값 : 4, 최솟값 : -5

0607

$f(x)=-x^2+x+2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

이므로 $-2\le x\le 0$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $f(-2)=-4$, $f(0)=2$이므로 $f(x)$의 최댓값은 2, 최솟값은 -4이다.



답 최댓값 : 2, 최솟값 : -4

STEP 2 유형 마스터

유형 01 이차함수의 그래프와 x축의 교점 (개념 02)

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, β일 때
⇨ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계를 이용한다.

0608

이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -2, 1이므로 -2, 1은 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+1=-\frac{a}{2}$, $(-2)\cdot 1=\frac{b}{2}$ $\quad\therefore a=2,\ b=-4$

$\therefore ab=-8$

답 -8

다른 풀이 이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프가 두 점 $(-2,\ 0)$, $(1,\ 0)$을 지나므로 이차함수의 식은

$y=2(x+2)(x-1)$ $\quad\therefore y=2x^2+2x-4$

따라서 $a=2$, $b=-4$이므로 $ab=-8$

0609

이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 2, 3이므로 2, 3은 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$2+3=a$, $2\cdot 3=b$ $\quad\therefore a=5,\ b=6$

이차함수 $y=x^2-bx+a$, 즉 $y=x^2-6x+5$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-6x+5=0$의 근이므로

$(x-1)(x-5)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=5$

따라서 두 점 사이의 거리는 $5-1=4$

답 ④

0610

이차함수 $y=-x^2+x+k$의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ $(\alpha>\beta)$이라 하면 이차방정식 $-x^2+x+k=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-k$ …… ㉠

이때, 주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 4이므로 $\alpha-\beta=4$

양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=16$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $1^2+4k=16$

$\therefore k=\frac{15}{4}$

답 $\frac{15}{4}$

다른 풀이 이차함수 $y=-x^2+x+k$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 4이므로 두 점의 x좌표를 α, $\alpha+4$라 하면 이차방정식 $-x^2+x+k=0$의 두 근이 α, $\alpha+4$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+4)=1$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+4)=-k$ …… ㉡

㉠에서 $2\alpha=-3$ $\quad\therefore \alpha=-\frac{3}{2}$

$\alpha=-\frac{3}{2}$을 ㉡에 대입하면

$-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}+4\right)=-k$, $-\frac{15}{4}=-k$

$\therefore k=\frac{15}{4}$

0611

꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 9)$이므로 주어진 이차함수를 $y=a(x-1)^2+9$라 하면

$y=a(x-1)^2+9=ax^2-2ax+a+9$ …… ㉠

이때, 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이고 $\overline{AB}=6$이므로 두 점 A, B의 x좌표는 -2, 4이다.

-2, 4는 이차방정식 $ax^2-2ax+a+9=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-2\cdot 4=\frac{a+9}{a}$, $a+9=-8a$, $9a=-9$ $\quad\therefore a=-1$ … ❶

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $y=-x^2+2x+8$

따라서 $b=2$, $c=8$이므로 … ❷

$abc=-1\cdot 2\cdot 8=-16$ … ❸

답 -16

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ b, c의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이고 $\overline{AB}=6$이므로 두 점 A, B의 x좌표는 -2, 4이다.

이차함수의 식을 $y=a(x+2)(x-4)$로 놓으면 이 이차함수의 그래프가 점 $(1,\ 9)$를 지나므로

$9=-9a \qquad \therefore a=-1$

즉, $y=-(x+2)(x-4)=-x^2+2x+8$이므로

$b=2$, $c=8$

$\therefore abc=-1\cdot2\cdot8=-16$

유형 02 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계 개념 02

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식 D를 이용한다.

(1) $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0 \Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다.(접한다.)

(3) $D<0 \Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.

0612

이차함수 $y=x^2+2kx+k^2-3k+9$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+2kx+k^2-3k+9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(k^2-3k+9)>0$, $3k-9>0 \qquad \therefore k>3$ 답 ④

0613

이차함수 $y=x^2+ax+2a-3$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+2a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4(2a-3)=0$, $a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0 \qquad \therefore a=2$ 또는 $a=6$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 8이다. 답 8

0614

이차함수 $y=x^2-2bx-a^2+12$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2-2bx-a^2+12=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-b)^2-(-a^2+12)<0$, $a^2+b^2-12<0$

$\therefore a^2+b^2<12$ …… ㉠

㉠을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$의 6개이다. 답 ③

0615

이차함수 $y=x^2-2(a+k)x+k^2-2k+b$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2-2(a+k)x+k^2-2k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+k)\}^2-(k^2-2k+b)=0$

$a^2+2ak+k^2-k^2+2k-b=0$

$\therefore (2a+2)k+a^2-b=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2a+2=0$, $a^2-b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

$\therefore ab=-1$ 답 ②

Lecture

항등식의 성질

(1) $ax+b=0$이 x에 대한 항등식일 때 ⇨ $a=0$, $b=0$

(2) $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식일 때 ⇨ $a=0$, $b=0$, $c=0$

(3) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식일 때
⇨ $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

유형 03 이차함수의 그래프와 이차방정식의 실근의 합 개념 02

(1) 방정식 $f(x)=0$의 실근의 합
⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표의 합

(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 합
⇨ 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표의 합

0616

$f(x)-g(x)=0$에서 $f(x)=g(x)$ …… ㉠

㉠을 만족시키는 근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이므로

$x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 모든 근의 합은 0이다. 답 ④

0617

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x+1)(x-3)$ ($a>0$인 상수)이라 하면

$f(x+5)=a(x+5+1)(x+5-3)$
$\qquad =a(x+6)(x+2)$

따라서 이차방정식 $f(x+5)=0$의 두 실근은 -6, -2이므로 그 합은 -8이다. 답 ②

참고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(\alpha,0)$, $(\beta,0)$에서 만나면
⇨ 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근은 α, β

0618

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점 $(x_1,\ 0)$, $(x_2,\ 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ ($a\neq0$인 상수)라 하면

$$f\left(\frac{x-2}{3}\right)=a\left(\frac{x-2}{3}-x_1\right)\left(\frac{x-2}{3}-x_2\right)$$
$$=\frac{1}{9}a(x-2-3x_1)(x-2-3x_2)$$

따라서 이차방정식 $f\left(\frac{x-2}{3}\right)=0$의 두 실근은 $2+3x_1$, $2+3x_2$이므로 그 합은

$(2+3x_1)+(2+3x_2)=4+3(x_1+x_2)$
$\qquad =4+3\cdot(-2)=-2$ 답 ②

유형 04 이차함수의 그래프와 직선의 교점 개념 03

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표가 α, β일 때

⇨ 이차방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계를 이용한다.

0619

이차방정식 $x^2-2x+a=bx+2$, 즉 $x^2-(b+2)x+a-2=0$의 두 근이 -1, 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+4=b+2$에서 $b=1$

$(-1)\cdot4=a-2$에서 $a=-2$

$\therefore a-b=-3$

답 -3

0620

이차방정식 $-x^2+3x+4=ax+b$, 즉 $x^2+(a-3)x+b-4=0$의 두 근이 -1, 2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+2=-a+3$에서 $a=2$

$(-1)\cdot2=b-4$에서 $b=2$

$\therefore ab=4$

답 4

0621

이차방정식 $x^2+b=ax$, 즉 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이고 a, b는 유리수이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=a$에서 $a=4$

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=b$에서 $b=1$

$\therefore a+b=5$

답 ⑤

Lecture

이차방정식의 켤레근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 a, b, c가 유리수일 때, $p+q\sqrt{m}$이 근이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다. (단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)

0622

이차함수 $y=x^2+x-4$의 그래프와 직선 $y=-3x+k$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만나므로 두 점 A, B의 x좌표는 이차방정식 $x^2+x-4=-3x+k$, 즉 $x^2+4x-k-4=0$의 두 근과 같다.

이때, 점 A의 x좌표가 1이므로

$x^2+4x-k-4=0$에 $x=1$을 대입하면

$1+4-k-4=0 \qquad \therefore k=1$ … ❶

$k=1$을 $x^2+4x-k-4=0$에 대입하면

$x^2+4x-5=0$, $(x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=1$

따라서 점 B의 x좌표는 -5이다. … ❷

답 -5

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 B의 x좌표를 구할 수 있다.	60 %

유형 05 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 개념 03

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 위치 관계는 이차방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 판별식 D를 이용한다.

(1) $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0 \Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다.(접한다.)

(3) $D<0 \Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.

0623

이차함수 $y=x^2-3x+6$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2-3x+6=-x+k$, 즉 $x^2-2x-k+6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-k+6)<0$, $k-5<0$

$\therefore k<5$

따라서 정수 k의 최댓값은 4이다.

답 4

0624

이차함수 $y=x^2+2kx-3k$의 그래프와 직선 $y=2x-7$이 접하므로 이차방정식 $x^2+2kx-3k=2x-7$, 즉 $x^2+2(k-1)x-3k+7=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(-3k+7)=0$, $k^2+k-6=0$

$(k+3)(k-2)=0 \qquad \therefore k=-3$ 또는 $k=2$

그런데 $k>0$이므로 $k=2$

답 ②

0625

이차함수 $y=x^2+2ax+a^2$의 그래프와 직선 $y=2x+1$이 적어도 한 점에서 만나야 하므로 이차방정식 $x^2+2ax+a^2=2x+1$, 즉 $x^2+2(a-1)x+a^2-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a^2-1)\geq0$, $-2a+2\geq0$

$\therefore a\leq1$

답 $a\leq1$

Lecture

방정식의 실근의 개수

① 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수

⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수

② 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수

⇨ 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수

0626

이차함수 $y=(k-1)x^2+4kx+3$의 그래프와 직선 $y=4x-4k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 이차방정식 $(k-1)x^2+4kx+3=4x-4k$, 즉 $(k-1)x^2+4(k-1)x+4k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{2(k-1)\}^2-(k-1)(4k+3)>0$

$-7k+7>0 \qquad \therefore k<1$

따라서 구하는 a의 값은 1이다.

답 ①

유형 06 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식 개념 03

이차함수 $y=f(x)$의 그래프에 접하는 직선의 방정식 구하기
(i) 주어진 조건을 이용하여 직선의 방정식을 $y=g(x)$로 놓는다.
(ii) 이차방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 판별식이 0임을 이용한다.

0627

직선 $y=ax+b$가 직선 $y=-2x-\frac{1}{2}$에 평행하므로 $a=-2$

직선 $y=-2x+b$가 이차함수 $y=x^2-4x+2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-4x+2=-2x+b$, 즉 $x^2-2x-b+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-b+2)=0,\ b-1=0 \qquad \therefore b=1$

$\therefore ab=-2$

답 -2

0628

직선 $y=-x+2$를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y=-x+2+m$

이 직선이 이차함수 $y=x^2-3x$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-3x=-x+2+m$, 즉 $x^2-2x-2-m=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-2-m)=0,\ m+3=0 \qquad \therefore m=-3$

답 ①

0629

기울기가 m인 직선의 방정식을 $y=mx+b$ (b는 상수)라 하면 이 직선이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$1=2m+b \qquad \therefore b=-2m+1$

직선 $y=mx-2m+1$이 이차함수 $y=-x^2+2x-3$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-x^2+2x-3=mx-2m+1$, 즉

$x^2+(m-2)x-2m+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(m-2)^2-4(-2m+4)=0,\ m^2+4m-12=0$

$(m+6)(m-2)=0 \qquad \therefore m=-6$ 또는 $m=2$

따라서 두 직선의 기울기의 차는 8이다.

답 8

0630

직선 $y=mx+n$이 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2+2a-1$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+2a-1=mx+n$, 즉

$x^2-(2a+m)x+a^2+2a-n-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2a+m)\}^2-4(a^2+2a-n-1)=0$

$\therefore (4m-8)a+m^2+4n+4=0$ … ❶

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4m-8=0,\ m^2+4n+4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $m=2,\ n=-2$

$\therefore m-n=4$ … ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ 직선이 주어진 이차함수의 그래프에 접하기 위한 조건을 이용하여 식을 세울 수 있다.	70 %
❷ $m-n$의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 07 이차함수의 최댓값과 최솟값 개념 04

이차함수의 식이 $y=ax^2+bx+c$ 꼴이면
⇨ $y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 고친다.
(1) $a>0$이면 ⇨ 최댓값은 없고, 최솟값은 n이다.
(2) $a<0$이면 ⇨ 최댓값은 n이고, 최솟값은 없다.

0631

$y=-2x^2+4x=-2(x-1)^2+2$이므로

$x=1$일 때 최댓값 2를 갖는다. $\qquad \therefore M=2$

$y=\frac{1}{2}x^2-4x+3=\frac{1}{2}(x-4)^2-5$이므로

$x=4$일 때 최솟값 -5를 갖는다. $\qquad \therefore m=-5$

$\therefore M-m=7$

답 7

0632

$y=x^2+2ax+2a+5=(x+a)^2-a^2+2a+5$

이므로 $x=-a$일 때 최솟값 $-a^2+2a+5$를 갖는다.

$\therefore f(a)=-a^2+2a+5=-(a-1)^2+6$

따라서 $f(a)$는 $a=1$일 때 최댓값 6을 갖는다.

답 ③

유형 08 이차함수의 식을 구하여 최댓값 또는 최솟값 구하기 개념 04

주어진 조건에 맞는 이차함수의 식을 구한 후 $y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형하여 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

0633

주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=3$이므로

이차함수의 식을 $y=\frac{1}{2}(x-3)^2+n$ (n은 상수)으로 놓으면

$\frac{1}{2}(x-3)^2+n=\frac{1}{2}x^2-(k+1)x+2$에서

$\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{9}{2}+n=\frac{1}{2}x^2-(k+1)x+2$

이므로 $-3=-(k+1),\ \frac{9}{2}+n=2$

$\therefore k=2,\ n=-\frac{5}{2}$

따라서 주어진 이차함수 $y=\frac{1}{2}(x-3)^2-\frac{5}{2}$는

$x=3$일 때 최솟값 $-\frac{5}{2}$를 갖는다.

답 $-\frac{5}{2}$

0634

이차함수 $y=2x^2-4x+k=2(x-1)^2+k-2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1, k-2)$

이때, 이 꼭짓점이 직선 $y=-x-3$ 위에 있으므로

$k-2=-1-3 \qquad \therefore k=-2$

따라서 이차함수 $y=2(x-1)^2-4$는 $x=1$일 때 최솟값 -4를 가지므로 최솟값과 상수 k의 값의 합은

$-4+(-2)=-6$

답 -6

유형 09 최댓값 또는 최솟값이 주어질 때 미지수의 값 구하기 개념 04

(1) 이차함수의 식을 $y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형했을 때
⇨ n의 값이 최댓값 또는 최솟값임을 이용하여 미지수의 값을 구한다.
(2) 이차함수가 $x=m$에서 최댓값 또는 최솟값 n을 갖는다.
⇨ 이차함수의 식을 $y=a(x-m)^2+n$으로 놓고 주어진 이차함수의 식과 계수를 비교하여 미지수의 값을 구한다.

0635

$y=-x^2+2kx+2k+3=-(x-k)^2+k^2+2k+3$
이때, 이 이차함수의 최댓값이 18이므로
$k^2+2k+3=18,\ k^2+2k-15=0$
$(k+5)(k-3)=0 \qquad \therefore k=3\ (\because k>0)$

답 3

0636

$y=ax^2+8ax+7=a(x+4)^2-16a+7$
이 이차함수의 최솟값이 -1이므로 $a>0$이고,
$-16a+7=-1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

Lecture
이차함수 $y=a(x-m)^2+n$에 대하여
n의 값이 최댓값이라 하면 ⇨ $a<0$
n의 값이 최솟값이라 하면 ⇨ $a>0$

0637

$y=\frac{1}{3}x^2-4x+3+k=\frac{1}{3}(x-6)^2-9+k$이므로
$x=6$일 때 최솟값 $-9+k$를 갖는다.
$y=-4x^2+8x-7-2k=-4(x-1)^2-3-2k$이므로
$x=1$일 때 최댓값 $-3-2k$를 갖는다.
이때, 두 이차함수의 최솟값과 최댓값이 같으므로
$-9+k=-3-2k$
$3k=6 \qquad \therefore k=2$

답 ①

0638

$y=2x^2+2ax=2\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}$
이 이차함수의 최솟값이 -8이므로
$-\frac{a^2}{2}=-8,\ a^2=16 \qquad \therefore a=-4\ (\because a<0)$
따라서 $y=2x^2-8x$의 그래프가 점 $(-1,\ b)$를 지나므로
$b=2\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)=10$
$\therefore b-a=14$

답 14

0639

이차함수 $y=ax^2+bx-3$이 $x=2$에서 최댓값 5를 가지므로
$y=a(x-2)^2+5=ax^2-4ax+4a+5$
즉, $b=-4a,\ -3=4a+5$이므로
두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=8$
$\therefore a+b=6$

답 6

0640

이차함수 $f(x)=-x^2+ax+b$의 그래프의 축의 방정식이 $x=2$이고, 최댓값이 3이므로 $x=2$일 때 최댓값 3을 갖는다.
즉, $f(x)=-(x-2)^2+3=-x^2+4x-1$에서 $a=4,\ b=-1$
$\therefore f(3)=-9+12-1=2$
$\therefore a-b+f(3)=7$

답 ②

0641

이차함수 $y=2x^2-4(a+1)x+1$이 $x=b$일 때 최솟값 -17을 가지므로
$y=2(x-b)^2-17=2x^2-4bx+2b^2-17$
$\therefore -4b=-4(a+1)$ ······ ㉠, $2b^2-17=1$ ······ ㉡
㉡에서 $2b^2=18,\ b^2=9 \qquad \therefore b=3(\because b>0)$
$b=3$을 ㉠에 대입하면 $-4\cdot3=-4(a+1) \qquad \therefore a=2$
$\therefore ab=6$

답 ③

0642

이차함수 $f(x)=-x^2+ax+b$에 대하여 $f(-1)=f(3)$이므로
$-1-a+b=-9+3a+b$
$-4a=-8 \qquad \therefore a=2$ ··· ❶
$f(x)=-x^2+2x+b=-(x-1)^2+b+1$이므로 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 $b+1$을 갖는다.
즉, $\alpha=1,\ b+1=2$에서 $\alpha=1,\ b=1$ ··· ❷
$\therefore a+\alpha+b=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\alpha,\ b$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+\alpha+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 10 최댓값 또는 최솟값이 주어질 때 이차함수의 식 구하기 개념 04

이차함수가 $x=m$에서 최댓값 또는 최솟값 n을 갖는다.
⇨ 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(m,\ n)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-m)^2+n$으로 놓고 a의 값을 구한다.

0643

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 $x=1$에서 최솟값 1을 가지므로
$f(x)=a(x-1)^2+1$ ······ ㉠
$f(2)=3$에서 $a+1=3 \qquad \therefore a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면
$f(x)=2(x-1)^2+1=2x^2-4x+3$
이므로 $b=-4,\ c=3$
$\therefore a-b+c=9$

답 ⑤

Lecture
이차함수의 식의 작성
(1) 꼭짓점의 좌표 (m, n) 또는 축의 방정식 $x=m$이 주어지는 경우
⇨ $y=a(x-m)^2+n$
(2) x축과의 두 교점 $(\alpha, 0), (\beta, 0)$이 주어지는 경우
⇨ $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

0644

이차함수 $y=ax^2+bx+c$가 $x=-1$에서 최댓값 -4를 가지므로

$y=a(x+1)^2-4$

그래프가 점 $(-2,\ -6)$을 지나므로

$-6=a-4 \qquad \therefore a=-2$

따라서 $y=-2(x+1)^2-4=-2x^2-4x-6$이므로

$b=-4,\ c=-6$

$\therefore abc=-48$ 답 -48

0645

구하는 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=3$이고, 최솟값이 5이므로 $x=3$에서 최솟값 5를 갖는다.

즉, 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 5)$이다.

이차함수의 식을 $y=a(x-3)^2+5$로 놓으면

$y=3x^2+2$의 그래프와 폭이 같으므로 $a=3$ ($\because a>0$)

$\therefore y=3(x-3)^2+5=3x^2-18x+32$

따라서 $b=-18,\ c=32$이므로

$a+b+c=17$ 답 17

참고 이차함수의 그래프의 폭이 같으면 x^2의 계수의 절댓값이 같다.

0646

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 -1, 3이므로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 -1, 3이다.

$\therefore y=a(x+1)(x-3)=a(x^2-2x-3)$

$=a(x-1)^2-4a$

이때, 이 이차함수의 최댓값이 12이므로

$-4a=12 \qquad \therefore a=-3$

따라서 $y=-3(x^2-2x-3)=-3x^2+6x+9$이므로

$b=6,\ c=9$

$\therefore ab+c=-9$ 답 -9

다른 풀이 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식은

$x=\frac{-1+3}{2}=1$

이고, 최댓값이 12이므로 $x=1$에서 최댓값 12를 갖는다.

즉, 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2+12$로 놓을 수 있다.

이때, 이 이차함수의 그래프가 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=4a+12 \qquad \therefore a=-3$

따라서 $y=-3(x-1)^2+12=-3x^2+6x+9$이므로

$b=6,\ c=9$

$\therefore ab+c=-9$

Lecture

- 이차함수의 그래프가 x축과 두 점 $(m,\ 0)$, $(n,\ 0)$에서 만난다.
  ⇨ 축의 방정식 : $x=\frac{m+n}{2}$, 꼭짓점의 x좌표 : $\frac{m+n}{2}$
- x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수의 최댓값 또는 최솟값이 k이다.
  ⇨ 꼭짓점의 y좌표 : k

유형 11 제한된 범위에서의 이차함수의 최대·최소 개념 05

$\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-m)^2+n$의 최대·최소

(1) $\alpha\le m\le\beta$일 때

⇨ $f(m)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

(2) $m<\alpha$ 또는 $m>\beta$일 때

⇨ $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

0647

$f(x)=x^2+6x+k=(x+3)^2+k-9$

그래프의 꼭짓점의 x좌표 -3이 $-2\le x\le1$에 속하지 않으므로

$f(-2)$, $f(1)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

$f(-2)=k-8$, $f(1)=k+7$이므로 최솟값은 $k-8$, 최댓값은 $k+7$이다.

이때, 최솟값이 -2이므로

$k-8=-2 \qquad \therefore k=6$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $k+7=6+7=13$ 답 ⑤

0648

$y=-3x^2+6x+k=-3(x-1)^2+k+3$

$1\le x\le4$이므로 $x=1$일 때 최댓값 $k+3$, $x=4$일 때 최솟값 $k-24$이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 차는

$k+3-(k-24)=27$ 답 27

참고 꼭짓점이 주어진 범위에 포함되면 꼭짓점에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다.

0649

$y=-2x^2+4x+k-1=-2(x-1)^2+k+1$

그래프의 꼭짓점의 x좌표 1이 $-3\le x\le2$에 속하므로 $x=1$일 때 최댓값 $k+1$을 갖는다.

이때, 최댓값이 5이므로

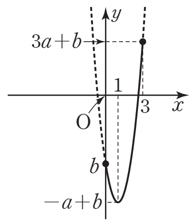
$k+1=5 \qquad \therefore k=4$ 답 ⑤

0650

$f(x)=ax^2-2ax+b$라 하면

$f(x)=a(x-1)^2-a+b$ $(a>0)$이므로

$0\le x\le3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $3a+b$,

$x=1$일 때 최솟값 $-a+b$를 가지므로

$3a+b=4,\ -a+b=-8$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=-5$ … ❶

$\therefore a+b=-2$ … ❷

답 -2

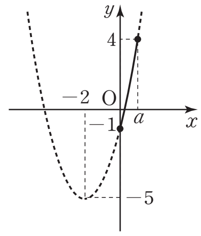
채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	80 %
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0651

$f(x)=x^2+4x-1$이라 하면

$f(x)=(x+2)^2-5$이므로

$0\le x\le a$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, 꼭짓점의 x좌표 -2가 $0\le x\le a$에 포함되지 않으므로 $x=0$일 때 최솟값 -1,

$x=a$일 때 최댓값 a^2+4a-1을 갖는다.

즉, $x=a$일 때 최댓값 4를 가지므로

$a^2+4a-1=4,\ a^2+4a-5=0$

$(a+5)(a-1)=0 \qquad \therefore a=-5$ 또는 $a=1$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

답 ①

0652

$f(x)=x^2-2|x|+3$이라 하면

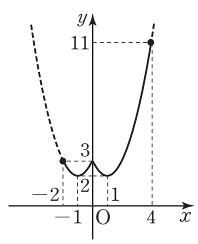
(i) $-2\le x<0$일 때

$f(x)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$

(ii) $0\le x\le 4$일 때

$f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$

(i), (ii)에서 $-2\le x\le 4$일 때 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는



$x=4$일 때 최댓값 $M=11$,

$x=-1$ 또는 $x=1$일 때 최솟값 $m=2$

를 갖는다.

$\therefore Mm=11\cdot 2=22$

답 ⑤

Lecture

$y=x^2-2|x|+3$의 그래프는 $y=x^2-2x+3$의 그래프에서 $x\ge0$인 부분은 그대로 두고, $x<0$인 부분은 $x\ge0$인 부분을 y축에 대하여 대칭시켜 그린 것이다.

0653

$y=-x^2+2kx=-(x-k)^2+k^2$

(i) $k<3$일 때

꼭짓점의 x좌표 k가 $x\ge3$에 속하지 않으므로 주어진 함수는 $x=3$일 때 최댓값 $-9+6k$를 갖는다.

즉, $-9+6k=9$이므로 $k=3$

이때, $k<3$이므로 조건을 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $k\ge3$일 때

꼭짓점의 x좌표 k가 $x\ge3$에 속하므로 주어진 함수는 $x=k$일 때 최댓값 k^2을 갖는다.

즉, $k^2=9$이므로 $k=\pm3$

이때, $k\ge3$이므로 $k=3$

(i), (ii)에서 $k=3$

답 3

참고 꼭짓점의 x좌표가 문자일 때

⇨ 꼭짓점이 제한된 범위에 포함될 때와 포함되지 않을 때로 나누어 생각한다.

0654

$y=x^2-2ax+a^2+3=(x-a)^2+3$

(i) $a<0$일 때

꼭짓점의 x좌표 a가 $0\le x\le1$에 속하지 않으므로 주어진 함수는 $x=0$일 때 최솟값 7을 갖는다.

즉, $a^2+3=7$이므로 $a^2=4 \qquad \therefore a=\pm2$

이때, $a<0$이므로 $a=-2$

(ii) $0\le a\le1$일 때

꼭짓점의 x좌표 a가 $0\le x\le1$에 속하므로 주어진 함수는 $x=a$일 때 최솟값 3을 갖는다. 그런데, 최솟값은 7이므로 모순이다.

따라서 $0\le a\le1$에서 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $a>1$일 때

꼭짓점의 x좌표 a가 $0\le x\le1$에 속하지 않으므로 주어진 함수는 $x=1$일 때 최솟값 7을 갖는다.

즉, $(1-a)^2+3=7$이므로 $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=3$

이때, $a>1$이므로 $a=3$

(i), (ii), (iii)에서 모든 실수 a의 값의 합은 $-2+3=1$

답 1

유형 12 치환을 이용한 함수의 최대·최소 개념 05

(i) 주어진 식에서 공통부분을 t로 치환한 후 t의 값의 범위를 구한다.

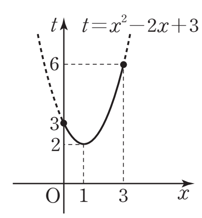
(ii) (i)에서 구한 범위 내에서 치환한 식의 최대·최소를 구한다.

0655

$x^2-2x+3=t$로 놓으면

$t=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$

$0\le x\le3$이므로 오른쪽 그림에서

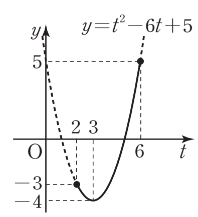


$2\le t\le6$

이때, 주어진 함수는

$y=t^2-6t+5=(t-3)^2-4$

$2\le t\le6$이므로 오른쪽 그림에서



$t=6$일 때 최댓값 $M=5$,

$t=3$일 때 최솟값 $m=-4$

를 갖는다.

$\therefore M+m=1$

답 1

0656

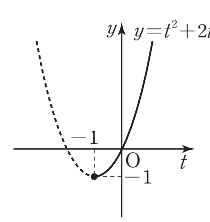
$y=(x^2-2x)^2+2x^2-4x=(x^2-2x)^2+2(x^2-2x)$

$x^2-2x=t$로 놓으면

$t=x^2-2x=(x-1)^2-1$이므로 $t\ge-1$

이때, 주어진 함수는

$y=t^2+2t=(t+1)^2-1$



$t\ge-1$이므로 오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

$t=-1$에서 $x^2-2x=-1$

$x^2-2x+1=0,\ (x-1)^2=0 \qquad \therefore x=1$

따라서 $a=1,\ b=-1$이므로 $a-b=2$

답 ④

0657

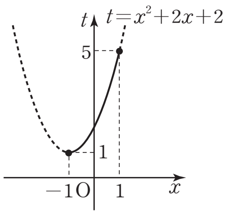
$x^2+2x+2=t$로 놓으면

$t=x^2+2x+2$

$=(x+1)^2+1$

$-1\le x\le 1$이므로 오른쪽 그림에서

$1\le t\le 5$

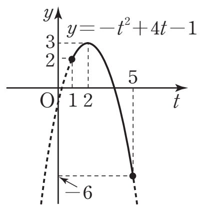


이때, 주어진 함수는

$y=-t^2+4(t-3)+11$

$=-t^2+4t-1$

$=-(t-2)^2+3$



$1\le t\le 5$이므로 오른쪽 그림에서 $t=2$일 때 최댓값 3, $t=5$일 때 최솟값 -6을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$3\cdot(-6)=-18$ 답 -18

0658

$x^2-4x+2=t$로 놓으면

$t=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$이므로 $t\ge -2$

이때, 주어진 함수는

$y=t^2-8(t-2)+k-4=t^2-8t+k+12$

$=(t-4)^2+k-4\ (t\ge -2)$

따라서 $t=4$일 때 최솟값 -7을 가지므로

$k-4=-7$ $\therefore k=-3$ 답 ③

유형 13 완전제곱식을 이용한 이차식의 최대·최소 개념 05

x, y가 실수일 때, $ax^2+by^2+cx+dy+e$의 최대·최소

⇨ $a(x-m)^2+b(y-n)^2+k$ 꼴로 변형한 후 (실수)$^2\ge 0$임을 이용한다.

⇨ $x=m, y=n$일 때, 최댓값 또는 최솟값은 k이다.

0659

$2x^2+y^2-8x+4y+9$

$=2(x^2-4x+4)+(y^2+4y+4)-3$

$=2(x-2)^2+(y+2)^2-3$

이때, x, y가 실수이므로

$(x-2)^2\ge 0,\ (y+2)^2\ge 0$

$\therefore 2x^2+y^2-8x+4y+9\ge -3$

따라서 $x=2, y=-2$일 때 주어진 식의 최솟값은 -3이다. 답 ①

0660

$-x^2-y^2-2x+6y-5$

$=-(x^2+2x+1)-(y^2-6y+9)+5$

$=-(x+1)^2-(y-3)^2+5$

이때, x, y가 실수이므로

$(x+1)^2\ge 0,\ (y-3)^2\ge 0$

$\therefore -x^2-y^2-2x+6y-5\le 5$ $-(x+1)^2\le 0,\ -(y-3)^2\le 0$

따라서 $x=-1, y=3$일 때 주어진 식의 최댓값은 5이므로

$\alpha=-1, \beta=3, \gamma=5$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma=7$ 답 7

유형 14 조건식이 주어진 이차식의 최대·최소 개념 05

(i) 주어진 조건식을 한 문자에 대하여 정리한다.

(ii) (i)의 식을 이차식에 대입하여 한 문자에 대한 이차식으로 나타낸다.

(iii) (ii)의 식의 최대·최소를 구한다.

0661

$2x-y-1=0$에서 $y=2x-1$

$y=2x-1$을 x^2-xy에 대입하면

$x^2-xy=x^2-x(2x-1)=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

이때, $1\le x\le 2$이므로 $x=1$일 때 최댓값 0, $x=2$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $0+(-2)=-2$ 답 ①

0662

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 직선 $x-2y+6=0$ 위를 움직이므로

$a-2b+6=0$에서 $a=2b-6$

$a=2b-6$을 a^2+2b^2에 대입하면

$a^2+2b^2=(2b-6)^2+2b^2=6b^2-24b+36=6(b-2)^2+12$

따라서 $b=2$일 때 최솟값 12를 갖는다. 답 ④

유형 15 이차함수의 최대·최소의 활용 개념 05

(i) 주어진 문제에서 미지수를 정한다.

(ii) 주어진 조건을 이용하여 함수식을 세우고, 미지수의 값의 범위를 정한다.

(iii) 제한된 범위에서의 이차함수의 최대·최소를 구한다.

0663

이차방정식 $-x^2+6x=0$에서 $-x(x-6)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=6$

따라서 이차함수 $y=-x^2+6x$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 0, 6이다.

$y=-x^2+6x=-(x-3)^2+9$에서 그래프의 축의 방정식이 $x=3$

점 $\mathrm{B}(a,\ 0)\,(0<a<3)$이라 하면

$\mathrm{A}(a,\ -a^2+6a)$, $\mathrm{C}(6-a,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=-a^2+6a$, $\overline{\mathrm{BC}}=(6-a)-a=6-2a$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}})=2\{(-a^2+6a)+(6-2a)\}=-2a^2+8a+12$

$=-2(a-2)^2+20$

이때, $0<a<3$이므로 $a=2$일 때 최댓값 20을 갖는다.

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 20이다. 답 ④

0664

$h(t)=-5t^2+20t+25=-5(t-2)^2+45$

즉, $t=2$일 때 최댓값은 45이므로 공이 최고 높이에 도달하는 것은 2초 후이다.

공이 지면에 떨어지는 것은 $h(t)=0$일 때

$-5t^2+20t+25=0$에서 $t^2-4t-5=0$

$(t+1)(t-5)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=5$

그런데 $t>0$이므로 공이 지면에 떨어지는 것은 5초 후이다.

따라서 이 공은 최고 높이에 도달한 지 $5-2=3$(초) 후에 지면에 떨어진다. 답 3초 후

0665

입장료를 $100x$원 올릴 때의 수입을 y원이라 하면

(수입)$=$(입장료)$\times$(관람객의 수)이므로

$y=(3000+100x)(2000-50x)=5000(30+x)(40-x)$

$\quad=5000(-x^2+10x+1200)$

$\quad=-5000(x-5)^2+6125000$

이때, $0\le x\le 40$이므로 $x=5$일 때 y가 최대이다.

$2000-50x\ge 0$에서 $x\le 40$

따라서 수입을 최대로 하는 입장료는

$3000+100\cdot 5=3500$(원)

답 ⑤

0666

꽃밭에서 직각을 낀 한 변의 길이를 x m라 하면 다른 한 변의 길이는 $(120-x)$ m이다.

꽃밭의 넓이를 y m^{2}라 하면

$y=\frac{1}{2}x(120-x)=-\frac{1}{2}x^2+60x$

$\quad=-\frac{1}{2}(x-60)^2+1800$ ··· ❶

이때, $0<x<120$이므로 $x=60$일 때 최댓값 1800을 갖는다.

따라서 꽃밭의 넓이의 최댓값은 1800 m^{2}이다. ··· ❷

답 1800 m^2

채점 기준	비율
❶ 꽃밭의 넓이를 이차식으로 나타낼 수 있다.	70 %
❷ 꽃밭의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

0667

물받이의 높이를 x cm라 하면 색칠한 단면은 가로의 길이가 $(24-2x)$ cm, 세로의 길이가 x cm인 직사각형이다.

색칠한 단면의 넓이를 y cm^{2}라 하면

$y=x(24-2x)=-2x^2+24x=-2(x-6)^2+72$

이때, $0<x<12$이므로 $x=6$일 때 최댓값 72를 갖는다.

따라서 색칠한 단면의 넓이가 최대가 될 때의 물받이의 높이는 6 cm이다.

$24-2x>0$에서 $x<12$

답 ⑤

0668

$\overline{AP}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$

$\overline{PQ}=x$이므로 $\overline{AQ}^2=(\sqrt{3}-x)^2$

$\overline{BQ}^2=\overline{CQ}^2=1^2+x^2$

$\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2+\overline{CQ}^2=(\sqrt{3}-x)^2+2(1+x^2)$

$\quad=3x^2-2\sqrt{3}x+5$

$\quad=3\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+4$

이때, $0<x<\sqrt{3}$이므로 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때 최솟값 4를 갖는다.

따라서 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $m=4$이므로 $\frac{m}{a}=4\sqrt{3}$이다.

답 ③

참고 정삼각형의 한 변의 길이를 a라 하면

⇨ 정삼각형의 높이 : $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, 정삼각형의 넓이 : $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

STEP 3 내신 마스터

0669

유형 02 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계

|전략| 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하면 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이다.

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 점 $(1,\ 4)$를 지나므로

$4=1+a+b \quad \therefore b=3-a$ ······ ㉠

또, 이차함수의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식

$x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4b=0$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2-4(3-a)=0$, $a^2+4a-12=0$

$(a+6)(a-2)=0 \quad \therefore a=2\ (\because a>0)$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore a-b=1$

답 ④

0670

유형 03 이차함수의 그래프와 이차방정식의 실근의 합

|전략| 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=0$의 실근과 같다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-3,0)$, $(1,0)$에서 만나므로 $f(x)=a(x+3)(x-1)$ (a는 상수, $a<0$)이라 하면

$f(x+p)=a(x+p+3)(x+p-1)$

따라서 $f(x+p)=0$의 두 실근은 $x+p=-3$, $x+p=1$에서

$x=-3-p$, $x=1-p$이고, 그 합이 6이므로

$(-3-p)+(1-p)=6 \quad \therefore p=-4$

답 ①

참고 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식 $f(x+p)=0$의 두 근은 ⇨ $x=\alpha-p$ 또는 $x=\beta-p$

0671

유형 04 이차함수의 그래프와 직선의 교점

|전략| 이차방정식 $x^2+ax-2=-3x-b$, 즉 $x^2+(a+3)x+b-2=0$의 두 실근의 합과 곱이 주어져 있으므로 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차함수 $y=x^2+ax-2$의 그래프와 직선 $y=-3x-b$의 두 교점의 x좌표의 합이 2이고, 곱이 -6이므로 이차방정식

$x^2+ax-2=-3x-b$, 즉 $x^2+(a+3)x+b-2=0$의 두 근의 합이 2, 두 근의 곱이 -6이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-(a+3)=2$, $b-2=-6 \quad \therefore a=-5$, $b=-4$

$\therefore a^2+b^2=41$

답 ⑤

0672

유형 05 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

|전략| 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하면 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이다.

이차함수 $y=x^2+ax+a$의 그래프와 직선 $y=2x+2$가 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+a=2x+2$, 즉 $x^2+(a-2)x+a-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-2)^2-4(a-2)=0$

6 이차방정식과 이차함수

$a^2-8a+12=0$, $(a-2)(a-6)=0$

$\therefore a=6$ ($\because a>3$)

$a=6$을 $x^2+(a-2)x+a-2=0$에 대입하면

$x^2+4x+4=0$, $(x+2)^2=0$

$\therefore x=-2$

$x=-2$를 $y=2x+2$에 대입하면 $y=-2$

따라서 이차함수의 그래프와 직선이 점 $(-2,\ -2)$에서 접하므로

$m=-2$, $n=-2$

$\therefore m+n=-4$

답 ②

0673

유형 06 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식

|전략| 점 $(-1,\ 1)$을 지나고 기울기가 a인 직선의 방정식을 구한 후 이차함수의 식과 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식이 0임을 이용한다.

직선 $y=ax+b$가 점 $(-1, 1)$을 지나므로

$1=-a+b \qquad \therefore b=a+1$ ⋯⋯ ㉠

직선 $y=ax+b$, 즉 $y=ax+a+1$이 이차함수 $y=2x^2+6x+5$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $2x^2+6x+5=ax+a+1$, 즉 $2x^2+(6-a)x-a+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(6-a)^2-8(-a+4)=0$

$a^2-4a+4=0$, $(a-2)^2=0$

$\therefore a=2$

㉠에 $a=2$를 대입하면 $b=3$

$\therefore ab=6$

답 ②

0674

유형 01 이차함수의 그래프와 x축의 교점
+ 08 이차함수의 식을 구하여 최댓값 또는 최솟값 구하기

|전략| 두 점 P, Q의 x좌표가 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이므로 켤레근의 성질을 이용하여 점 Q의 x좌표를 구한다.

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 x축과 두 점 P, Q에서 만나므로 두 점 P, Q의 x좌표는 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이다.

즉, 점 P의 x좌표가 $1-\sqrt{3}$이므로 $1-\sqrt{3}$은 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이다.

이때, 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1-\sqrt{3}$이면 다른 한 근은 $1+\sqrt{3}$이므로 점 Q의 x좌표는 $1+\sqrt{3}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})=-a \qquad \therefore a=-2$

$(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=b \qquad \therefore b=-2$

따라서 이차함수 $y=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$은 $x=1$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

답 ⑤

Lecture

이차함수의 최대·최소

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는

(1) $a>0$일 때 $x=p$에서 최솟값 q를 갖는다.

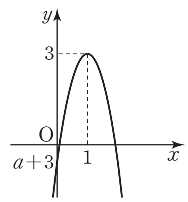
(2) $a<0$일 때 $x=p$에서 최댓값 q를 갖는다.

0675

유형 10 최댓값 또는 최솟값이 주어질 때 이차함수의 식 구하기

|전략| 이차함수의 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 (x^2의 계수)<0, (y축과의 교점의 y좌표)≤ 0이어야 한다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$가 $x=1$에서 최댓값 3을 가지므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 3)$이고 $a<0$이다.



따라서 이차함수 $y=a(x-1)^2+3$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 (y축과의 교점의 y좌표)≤ 0이어야 하므로

$a+3\le 0 \qquad \therefore a\le -3$

답 ③

0676

유형 11 제한된 범위에서의 이차함수의 최대·최소

|전략| 주어진 이차함수의 식을 $f(x)=k(x-m)^2+n$ 꼴로 변형한 후 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하는지 확인한다.

$f(x)=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$

$b<-1$이므로 그래프의 꼭짓점의 x좌표 -1은 $b\le x\le 0$에 속한다.

따라서 이차함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값 $a-1$을 갖는다.

이때, 최솟값이 -3이므로

$a-1=-3 \qquad \therefore a=-2$

또, $f(x)=x^2+2x-2$에서 최댓값은 $f(0)$, $f(b)$ 중 큰 값이고 $f(0)=-2$이므로 최댓값이 6이 되려면 $f(b)=6$이어야 한다.

즉, $f(b)=b^2+2b-2=6$에서 $b^2+2b-8=0$

$(b+4)(b-2)=0 \qquad \therefore b=-4$ ($\because b<-1$)

$\therefore b-a=-2$

답 ②

0677

유형 13 완전제곱식을 이용한 이차식의 최대·최소

|전략| 주어진 식을 $p(x-m)^2+q(y-n)^2+r(z-l)^2+k$ 꼴로 변형한 후 (실수)$^2\ge 0$임을 이용한다.

$-x^2-y^2-2z^2+2x-6y+8z-10$

$=-(x-1)^2-(y+3)^2-2(z-2)^2+8$

이때, x, y, z가 실수이므로

$(x-1)^2\ge 0$, $(y+3)^2\ge 0$, $2(z-2)^2\ge 0$

$-(x-1)^2\le 0$, $-(y+3)^2\le 0$, $-2(z-2)^2\le 0$

$\therefore -x^2-y^2-2z^2+2x-6y+8z-10\le 8$

따라서 $x=1$, $y=-3$, $z=2$일 때 주어진 식의 최댓값은 8이므로

$a=1$, $b=-3$, $c=2$, $d=8$

$\therefore a+b+c+d=8$

답 ④

0678

유형 14 조건식이 주어진 이차함수의 최대·최소

|전략| $x+y^2=4$임을 이용하여 x^2+x+3y^2을 x에 대한 식으로 나타낸 후 최솟값을 구한다.

$x+y^2=4$에서 $y^2=4-x$

$y^2\ge 0$이므로 $4-x\ge 0$에서 $x\le 4$

$x^2+x+3y^2=x^2+x+3(4-x)=x^2-2x+12$

$=(x-1)^2+11$

따라서 $x\le 4$이므로 $x=1$일 때 최솟값 11을 갖는다.

답 ③

0679

유형 15 이차함수의 최대·최소의 활용

|전략| 직선 $4x+y=2$ 위의 점 A의 좌표를 $(a,\ 2-4a)$라 놓고, 삼각형 OAB의 넓이를 a에 대한 이차식으로 나타낸다.

직선 $4x+y=2$ 위의 점 A의 좌표를 $(a, 2-4a)$라 하면 점 A가 제1사분면 위의 점이므로

$a>0,\ 2-4a>0 \qquad \therefore 0<a<\frac{1}{2}$

이때, $B(a,\ 0)$이고 $\overline{AB}=2-4a$이므로

$\triangle OAB=\frac{1}{2}a(2-4a)=-2a^2+a=-2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$

따라서 $0<a<\frac{1}{2}$이므로 삼각형 OAB의 넓이의 최댓값은 $a=\frac{1}{4}$일 때 $\frac{1}{8}$이다.

답 ①

0680

유형 02 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계
+ 05 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

|전략| x축$(y=0)$ 또는 직선의 방정식을 각각 이차함수의 식과 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식의 부호를 이용한다.

이차함수 $y=x^2+px+q$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=p^2-4q=0 \qquad \therefore q=\frac{1}{4}p^2$ …… ㉠ … ❶

또, 이차함수 $y=x^2+px+q$의 그래프와 직선 $y=-x$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+px+q=-x$, 즉 $x^2+(p+1)x+q=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(p+1)^2-4q>0$ … ❷

위 부등식에 ㉠을 대입하면

$(p+1)^2-p^2>0,\ 2p+1>0 \qquad \therefore p>-\frac{1}{2}$

따라서 정수 p의 최솟값은 0이다. … ❸

답 0

채점 기준	배점
❶ 주어진 이차함수의 그래프가 x축에 접하도록 하는 조건을 구할 수 있다.	2점
❷ 주어진 이차함수의 그래프와 직선 $y=-x$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 조건을 구할 수 있다.	2점
❸ 정수 p의 최솟값을 구할 수 있다.	2점

0681

유형 14 조건식이 주어진 이차식의 최대·최소

|전략| $y=3-x$를 주어진 이차식에 대입하여 x에 대한 이차식으로 나타낸 후 최댓값과 최솟값을 구한다.

$x+y=3$에서 $y=3-x$ …… ㉠

$x\geq 0,\ y=3-x\geq 0$이므로 $0\leq x\leq 3$ … ❶

㉠을 $2x^2+y^2$에 대입하면

$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3x^2-6x+9=3(x-1)^2+6$ … ❷

이때, $0\leq x\leq 3$이므로 $x=3$일 때 최댓값 $M=18$, $x=1$일 때 최솟값 $m=6$을 갖는다.

$\therefore M+m=24$ … ❸

답 24

채점 기준	배점
❶ y를 x에 대한 식으로 나타내고, x의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점
❷ $2x^2+y^2$을 x에 대한 이차식으로 나타낼 수 있다.	2점
❸ $2x^2+y^2$의 최댓값 M과 최솟값 m을 구하여 그 합을 계산할 수 있다.	3점

0682

유형 07 이차함수의 최댓값과 최솟값
+ 11 제한된 범위에서의 이차함수의 최대·최소

|전략| 주어진 이차함수의 식을 $y=k(x-m)^2+n\ (k>0)$ 꼴로 변형한 후 $-4\leq a\leq 4$에서 n의 최댓값과 최솟값을 구한다.

(1) $y=2x^2-4ax+a^2-4a+1$
$\quad =2(x-a)^2-a^2-4a+1$
이므로 $x=a$일 때 최솟값 $-a^2-4a+1$을 갖는다.

(2) $g(a)=-a^2-4a+1$
$\quad =-(a+2)^2+5$
따라서 $-4\leq a\leq 4$에서 $g(a)$는 $a=-2$일 때 최댓값 5, $a=4$일 때 최솟값 -31을 가지므로 $g(a)$의 최댓값과 최솟값의 합은 -26이다.

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 주어진 이차함수의 최솟값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	4점
(2) $-4\leq a\leq 4$에서 $g(a)$의 최댓값과 최솟값을 구하여 그 합을 계산할 수 있다.	6점

창의·융합 실력 마스터

0683

|전략| 주어진 함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 이용하여 x^2의 계수의 절댓값이 같은 세 이차함수 $f(x), g(x), h(x)$를 각각 구한다.

세 이차함수 $y=f(x),\ y=g(x),\ y=h(x)$의 x^2의 계수의 절댓값이 같으므로 $f(x)$의 x^2의 계수를 $a(a>0)$라 하면

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1, 0), (1, 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x+1)(x-1)$

이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-2, 0), (1, 0)$에서 만나므로

$y=g(x)$의 그래프가 위로 볼록하므로 x^2의 계수가 음수이다.

$g(x)=\underline{-a(x+2)(x-1)}$

이차함수 $y=h(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(1, 0), (2, 0)$에서 만나므로

$y=h(x)$의 그래프가 아래로 볼록하므로 x^2의 계수가 양수이다.

$h(x)=\underline{a(x-1)(x-2)}$

$\therefore f(x)+g(x)+h(x)$
$\quad =a(x+1)(x-1)-a(x+2)(x-1)+a(x-1)(x-2)$
$\quad =a(x-1)\{(x+1)-(x+2)+(x-2)\}$
$\quad =a(x-1)(x-3)$

방정식 $f(x)+g(x)+h(x)=0$에서

$a(x-1)(x-3)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 모든 실근의 합은 $1+3=4$

답 ④

6 이차방정식과 이차함수

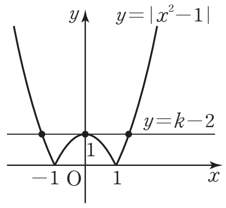
0684

|전략| 방정식 $|x^2-1|=k-2$의 실근의 개수는 두 함수 $y=|x^2-1|$, $y=k-2$의 그래프의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

방정식 $|x^2-1|-k+2=0$에서 $|x^2-1|=k-2$이므로 방정식의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 직선 $y=k-2$의 교점의 개수와 같다.

함수 $y=|x^2-1|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면

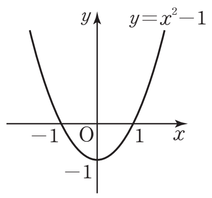
$k-2=1$ $\qquad\therefore k=3$

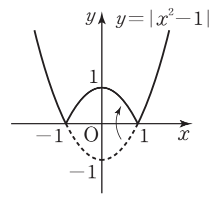


답 ②

참고 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프는 다음과 같은 순서로 그릴 수 있다.

[1단계] $y=x^2-1$의 그래프를 그린다. [2단계] $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭시킨다.





0685

|전략| 근과 계수의 관계를 이용하여 $(\alpha-1)(\beta-1)$을 a에 대한 식으로 나타낸다.

이차방정식 $x^2+(3a-1)x+a^2-a=0$이 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=(3a-1)^2-4(a^2-a)\ge 0$

$5a^2-2a+1\ge 0$ $\qquad\therefore 5\left(a-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\ge 0$

위 부등식은 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로 a는 모든 실수이다.

(실수)$^2\ge 0$이므로 $5\left(a-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\ge\frac{4}{5}$

이때, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-(3a-1)$, $\alpha\beta=a^2-a$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=a^2-a+(3a-1)+1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad=a^2+2a=(a+1)^2-1$

따라서 $(\alpha-1)(\beta-1)$의 최솟값은 $a=-1$일 때 -1이다. 답 ⑤

0686

|전략| $f(x)=(x-p)^2+q$ 꼴로 나타낸 후 $0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값 M, 최솟값 m을 구하여 $M+m$을 a에 대한 식으로 나타낸다.

$f(x)=x^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$

$0\le a\le 2$에서 $0\le\frac{a}{2}\le 1$이므로 꼭짓점의 x좌표 $\frac{a}{2}$는 $0\le x\le 3$에 속한다.

따라서 최댓값 $M=f(3)=9-3a$, 최솟값 $m=f\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}$이므로

$M+m=(9-3a)+\left(-\frac{a^2}{4}\right)=-\frac{1}{4}(a+6)^2+18$

이때, $0\le a\le 2$이므로 $M+m$은 $a=0$일 때 최댓값 9를 갖는다.

답 ②

0687

|전략| 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 함수 $y=-x^2-2x+3$의 그래프 위의 점임을 이용하여 $a+b$를 a에 대한 식으로 나타낸다.

점 B는 이차함수 $y=-x^2-2x+3$의 그래프와 y축의 교점이므로 $\mathrm{B}(0,\ 3)$

두 점 A, C는 이차함수 $y=-x^2-2x+3$의 그래프와 x축의 교점이므로 $-x^2-2x+3=0$에서

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

$\therefore \mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{C}(1,\ 0)$

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 이차함수 $y=-x^2-2x+3$의 그래프 위의 점이므로

$b=-a^2-2a+3$

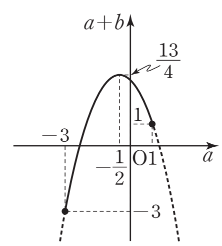
이때, 점 P가 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$에서 점 $\mathrm{C}(1,\ 0)$까지 움직이므로

$-3\le a\le 1$

$\therefore a+b=a+(-a^2-2a+3)$

$\qquad\qquad=-a^2-a+3$

$\qquad\qquad=-\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$



따라서 $-3\le a\le 1$에서 $a+b$는

$a=-\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{13}{4}$,

$a=-3$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

답 최댓값 : $\frac{13}{4}$, 최솟값 : -3

0688

|전략| 직각이등변삼각형의 성질을 이용하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=x$라 할 때 사각형 PQAR의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

직각이등변삼각형 ABC에서

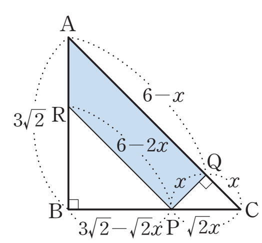
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=3\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=6$

$\overline{\mathrm{PQ}}=x$라 하면 삼각형 PCQ가 직각이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{CQ}}$에서

$\overline{\mathrm{AQ}}=6-x$, $\overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{2}x$

$\therefore \overline{\mathrm{BP}}=3\sqrt{2}-\sqrt{2}x=\sqrt{2}(3-x)$



또 삼각형 BPR도 직각이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}(3-x)=6-2x$

사각형 PQAR는 사다리꼴이므로 그 넓이는

$\frac{1}{2}\{(6-2x)+(6-x)\}\cdot x=\frac{1}{2}(12-3x)x$

$\qquad\qquad\qquad\qquad=6x-\frac{3}{2}x^2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad=-\frac{3}{2}(x-2)^2+6$

이때, $x>0$, $6-2x>0$에서 $0<x<3$이므로

사각형 PQAR의 넓이의 최댓값은 $x=2$일 때 6이다. 답 ①

Lecture

사다리꼴의 넓이 공식

(사다리꼴의 넓이)$=\frac{1}{2}\cdot$ {(윗변의 길이)+(아랫변의 길이)} $\cdot$ (높이)

7 여러 가지 방정식

본책 102~117쪽

STEP 1 개념 마스터 ①

0689

$x^3+8=0$에서 $(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$ 답 $x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

0690

$x^3-x^2-12x=0$에서

$x(x^2-x-12)=0$, $x(x+3)(x-4)=0$

$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$ 답 $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$

0691

$x^3+x^2-20x=0$에서

$x(x^2+x-20)=0$, $x(x+5)(x-4)=0$

$\therefore$ $x=-5$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$ 답 $x=-5$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$

0692

$x^3+3x^2-x-3=0$에서

$x^2(x+3)-(x+3)=0$, $(x+3)(x^2-1)=0$

$(x+3)(x+1)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

답 $x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

0693

$x^4-64x=0$에서

$x(x^3-64)=0$, $x(x-4)(x^2+4x+16)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=4$ 또는 $x=-2\pm2\sqrt{3}i$

답 $x=0$ 또는 $x=4$ 또는 $x=-2\pm2\sqrt{3}i$

0694

$x^4-5x^3-4x^2+20x=0$에서

$x(x^3-5x^2-4x+20)=0$, $x\{x^2(x-5)-4(x-5)\}=0$

$x(x-5)(x^2-4)=0$, $x(x-5)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=5$

답 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=5$

0695

$f(x)=x^3-2x^2+1$로 놓으면

$f(1)=1-2+1=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	-2	0	1
		1	-1	-1
	1	-1	-1	0

$f(x)=(x-1)(x^2-x-1)$

즉, $(x-1)(x^2-x-1)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 답 $x=1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

0696

$f(x)=x^3-3x^2+x+5$로 놓으면

$f(-1)=-1-3-1+5=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	-3	1	5
		-1	4	-5
	1	-4	5	0

$f(x)=(x+1)(x^2-4x+5)$

즉, $(x+1)(x^2-4x+5)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2\pm i$ 답 $x=-1$ 또는 $x=2\pm i$

0697

$f(x)=2x^3+x^2-5x+2$로 놓으면

$f(1)=2+1-5+2=0$

$f(-2)=-16+4+10+2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	2	1	-5	2
		2	3	-2
-2	2	3	-2	0
		-4	2	
	2	-1	0	

$f(x)=(x-1)(x+2)(2x-1)$

즉, $(x-1)(x+2)(2x-1)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ 답 $x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

0698

$f(x)=x^4-4x^2-x+2$로 놓으면

$f(-1)=1-4+1+2=0$, $f(2)=16-16-2+2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	0	-4	-1	2
		-1	1	3	-2
2	1	-1	-3	2	0
		2	2	-2	
	1	1	-1	0	

$\therefore$ $f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+x-1)$

즉, $(x+1)(x-2)(x^2+x-1)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

답 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

0699

$f(x)=x^4+x^3-5x^2+x-6$으로 놓으면

$f(-3)=81-27-45-3-6=0$, $f(2)=16+8-20+2-6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-3	1	1	-5	1	-6
		-3	6	-3	6
2	1	-2	1	-2	0
		2	0	2	
	1	0	1	0	

$\therefore$ $f(x)=(x+3)(x-2)(x^2+1)$

즉, $(x+3)(x-2)(x^2+1)=0$에서

$x=-3$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\pm i$

답 $x=-3$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\pm i$

0700

$x^2-x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-8t+12=0$, $(t-2)(t-6)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=6$

(i) $t=2$, 즉 $x^2-x=2$일 때

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $t=6$, 즉 $x^2-x=6$일 때

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

답 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

0701

$x^2+2x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-3t-4=0$, $(t+1)(t-4)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=4$

(i) $t=-1$, 즉 $x^2+2x=-1$일 때

$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$ (중근)

(ii) $t=4$, 즉 $x^2+2x=4$일 때

$x^2+2x-4=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{5}$

(i), (ii)에서 $x=-1$ (중근) 또는 $x=-1\pm\sqrt{5}$

답 $x=-1$ (중근) 또는 $x=-1\pm\sqrt{5}$

0702

$x^2-3x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+t-2=0$, $(t+2)(t-1)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

(i) $t=-2$, 즉 $x^2-3x=-2$일 때

$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

(ii) $t=1$, 즉 $x^2-3x=1$일 때

$x^2-3x-1=0$

$\therefore x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

답 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

0703

$x^2+4x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+2t-3=0$, $(t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

(i) $t=-3$, 즉 $x^2+4x=-3$일 때

$x^2+4x+3=0$, $(x+3)(x+1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$

(ii) $t=1$, 즉 $x^2+4x=1$일 때

$x^2+4x-1=0$

$\therefore x=-2\pm\sqrt{5}$

(i), (ii)에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{5}$

답 $x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{5}$

0704

$x^2+5x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+10t=0$, $t(t+10)=0$

$\therefore t=-10$ 또는 $t=0$

(i) $t=-10$, 즉 $x^2+5x=-10$일 때

$x^2+5x+10=0$

$\therefore x=\dfrac{-5\pm\sqrt{15}i}{2}$

(ii) $t=0$, 즉 $x^2+5x=0$일 때

$x(x+5)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=0$

(i), (ii)에서 $x=-5$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{15}i}{2}$

답 $x=-5$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{15}i}{2}$

0705

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-6t+9=0$, $(t-3)^2=0$

$\therefore t=3$ (중근)

즉, $x^2=3$이므로 $x=-\sqrt{3}$ (중근) 또는 $x=\sqrt{3}$ (중근)

답 $x=-\sqrt{3}$ (중근) 또는 $x=\sqrt{3}$ (중근)

0706

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+t-2=0$, $(t+2)(t-1)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

즉, $x^2=-2$ 또는 $x^2=1$이므로 $x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm1$

답 $x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm1$

0707

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-3t-4=0$, $(t+1)(t-4)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=4$

즉, $x^2=-1$ 또는 $x^2=4$이므로

$x=\pm i$ 또는 $x=\pm2$

답 $x=\pm i$ 또는 $x=\pm2$

0708

$x^4-3x^2+1=0$에서 $x^4-2x^2+1-x^2=0$

$(x^2-1)^2-x^2=0$, $(x^2+x-1)(x^2-x-1)=0$

$x^2+x-1=0$ 또는 $x^2-x-1=0$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

답 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

0709

$x^4+7x^2+16=0$에서 $x^4+8x^2+16-x^2=0$

$(x^2+4)^2-x^2=0$, $(x^2+x+4)(x^2-x+4)=0$

$x^2+x+4=0$ 또는 $x^2-x+4=0$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{15}i}{2}$

답 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{15}i}{2}$

0710

$x^4+3x^2+4=0$에서 $x^4+4x^2+4-x^2=0$

$(x^2+2)^2-x^2=0$, $(x^2+x+2)(x^2-x+2)=0$

$x^2+x+2=0$ 또는 $x^2-x+2=0$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

답 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

0711

$x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+2x-1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$, $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1=0$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-\boxed{(가)\ 3}=0$

이때, $x+\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 위의 방정식은

$t^2+2t-\boxed{(가)\ 3}=0$, $(t+3)(t-\boxed{(나)\ 1})=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=\boxed{(나)\ 1}$

(i) $t=-3$, 즉 $x+\dfrac{1}{x}=-3$일 때

$x^2+3x+1=0$ $\quad\therefore x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

(ii) $t=\boxed{(나)\ 1}$, 즉 $x+\dfrac{1}{x}=1$일 때

$x^2-x+\boxed{(다)\ 1}=0$ $\quad\therefore x=\boxed{(라)\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

(i), (ii)에서 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\boxed{(라)\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

답 풀이 참조

0712

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(1) $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{-1}{1}=1$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{2}{1}=2$

(3) $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{3}{1}=-3$

답 (1) 1 (2) 2 (3) -3

0713

x^3의 계수가 1이고 세 근이 1, 2, 4인 삼차방정식은

$x^3-(1+2+4)x^2+(1\cdot2+2\cdot4+4\cdot1)x-1\cdot2\cdot4=0$

$\therefore x^3-7x^2+14x-8=0$

답 $x^3-7x^2+14x-8=0$

0714

x^3의 계수가 1이고 세 근이 -1, $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$인 삼차방정식은

$x^3-(-1+1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3})x^2$

$+\{(-1)\cdot(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\cdot(-1)\}x$

$-(-1)\cdot(1+\sqrt{3})\cdot(1-\sqrt{3})=0$

$\therefore x^3-x^2-4x-2=0$

답 $x^3-x^2-4x-2=0$

0715

x^3의 계수가 1이고 세 근이 1, $1+5i$, $1-5i$인 삼차방정식은

$x^3-\{1+(1+5i)+(1-5i)\}x^2$

$+\{1\cdot(1+5i)+(1+5i)\cdot(1-5i)+(1-5i)\cdot1\}x$

$-1\cdot(1+5i)\cdot(1-5i)=0$

$\therefore x^3-3x^2+28x-26=0$

답 $x^3-3x^2+28x-26=0$

0716

x^3의 계수가 1이고 세 근이 2, $2+\sqrt{3}i$, $2-\sqrt{3}i$인 삼차방정식은

$x^3-\{2+(2+\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)\}x^2$

$+\{2\cdot(2+\sqrt{3}i)+(2+\sqrt{3}i)\cdot(2-\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)\cdot2\}x$

$-2\cdot(2+\sqrt{3}i)\cdot(2-\sqrt{3}i)=0$

$\therefore x^3-6x^2+15x-14=0$

답 $x^3-6x^2+15x-14=0$

0717

삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $1+\sqrt{3}$이 근이면 $1-\sqrt{3}$도 근이다.

따라서 세 근이 2, $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2\cdot(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})\cdot(1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\cdot2=a$ $\quad\therefore a=2$

$2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot(1-\sqrt{3})=-b$ $\quad\therefore b=4$

$\therefore a+b=6$

답 6

0718

삼차방정식의 계수가 실수이므로 $1-i$가 근이면 $1+i$도 근이다.

따라서 세 근이 1, $1-i$, $1+i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1\cdot(1-i)+(1-i)\cdot(1+i)+(1+i)\cdot1=-a$ $\quad\therefore a=-4$

$1\cdot(1-i)\cdot(1+i)=b$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore ab=-8$

답 -8

0719

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

(1) ω는 $x^2+x+1=0$의 한 근이므로 $\omega^2+\omega+1=0$

(2), (3) $x^2+x+1=0$의 두 근이 ω, $\bar{\omega}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\bar{\omega}=-1$, $\omega\bar{\omega}=1$

(4) $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이므로

$\omega^5+\omega^4+\omega^3=\omega^3\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega+\omega^3=\omega^2+\omega+1=0$

(5) $\omega^3=1$이고, $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2+\omega=-1$이므로

$\omega^{14}+\omega^{10}=(\omega^3)^4\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega=\omega^2+\omega=-1$

7 여러 가지 방정식

(6) $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2+1=-\omega$이므로

$$\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$$

(7) $\omega^{10}+\frac{1}{\omega^{10}}=(\omega^3)^3\cdot\omega+\frac{1}{(\omega^3)^3\cdot\omega}=\omega+\frac{1}{\omega}=-1$

(8) $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2+1=-\omega$이고

$\omega+\overline{\omega}=-1$에서 $\overline{\omega}+1=-\omega$이므로

$$\frac{\omega^2+1}{\overline{\omega}+1}=\frac{-\omega}{-\omega}=1$$

답 (1) 0 (2) −1 (3) 1 (4) 0 (5) −1 (6) −1 (7) −1 (8) 1

0720

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

(1) ω는 $x^2-x+1=0$의 한 근이므로 $\omega^2-\omega+1=0$

(2), (3) $x^2-x+1=0$의 두 근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

(4) $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$이므로

$\omega^5-\omega^4+\omega^3=\omega^3\cdot\omega^2-\omega^3\cdot\omega+\omega^3=-(\omega^2-\omega+1)=0$

(5) $\omega^3=-1$이고, $\omega^2-\omega+1=0$에서 $\omega^2-\omega=-1$이므로

$\omega^{14}+\omega^{10}=(\omega^3)^4\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega=\omega^2-\omega=-1$

(6) $\omega^2-\omega+1=0$에서 $\omega^2+1=\omega$이므로

$$\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{\omega}{\omega}=1$$

(7) $\omega^{10}+\frac{1}{\omega^{10}}=(\omega^3)^3\cdot\omega+\frac{1}{(\omega^3)^3\cdot\omega}=-\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)=-1$

(8) $\omega^2-\omega+1=0$에서 $\omega^2+1=\omega$이고

$\omega+\overline{\omega}=1$에서 $\overline{\omega}-1=-\omega$이므로

$$\frac{\omega^2+1}{\overline{\omega}-1}=\frac{\omega}{-\omega}=-1$$

답 (1) 0 (2) 1 (3) 1 (4) 0 (5) −1 (6) 1 (7) −1 (8) −1

STEP 2 유형 마스터 ❶

유형 01 삼·사차방정식의 풀이 개념 01

삼·사차방정식 $f(x)=0$은 다음과 같은 방법으로 푼다.

(1) $f(x)$를 공통인수로 묶거나 인수분해 공식을 이용하여 인수분해한다.

(2) $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값을 찾은 후 인수정리와 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해한다.

⇨ $ABC=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$ 또는 $C=0$임을 이용한다.

0721

$f(x)=x^3-3x^2-13x+15$로 놓으면

$f(1)=1-3-13+15=0$, $f(-3)=-27-27+39+15=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & -3 & -13 & 15 \\
 & & 1 & -2 & -15 \\ \hline
-3 & 1 & -2 & -15 & 0 \\
 & & -3 & 15 & \\ \hline
 & 1 & -5 & 0 &
\end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+3)(x-5)$

즉, $(x-1)(x+3)(x-5)=0$에서

$x=-3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=5$

따라서 $\alpha=5$, $\beta=-3$이므로 $\alpha+\beta=2$

답 ①

0722

$f(x)=x^3-6x^2+13x-10$으로 놓으면

$f(2)=8-24+26-10=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -6 & 13 & -10 \\
 & & 2 & -8 & 10 \\ \hline
 & 1 & -4 & 5 & 0
\end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2-4x+5)$

즉, $(x-2)(x^2-4x+5)=0$에서

$x=2$ 또는 $x=2\pm i$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=2$이므로

$\alpha\beta=4$

답 ③

0723

$f(x)=x^4+3x^3+3x^2-3x-4$로 놓으면

$f(1)=1+3+3-3-4=0$, $f(-1)=1-3+3+3-4=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & 3 & 3 & -3 & -4 \\
 & & 1 & 4 & 7 & 4 \\ \hline
-1 & 1 & 4 & 7 & 4 & 0 \\
 & & -1 & -3 & -4 & \\ \hline
 & 1 & 3 & 4 & 0 &
\end{array}$$

$\therefore$ $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+3x+4)$

즉, $(x-1)(x+1)(x^2+3x+4)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{7}i}{2}$

따라서 모든 실근의 합은

$-1+1=0$

답 ⑤

0724

$f(x)=x^4-4x^3+6x^2-5x+2$로 놓으면

$f(1)=1-4+6-5+2=0$, $f(2)=16-32+24-10+2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -4 & 6 & -5 & 2 \\
 & & 1 & -3 & 3 & -2 \\ \hline
2 & 1 & -3 & 3 & -2 & 0 \\
 & & 2 & -2 & 2 & \\ \hline
 & 1 & -1 & 1 & 0 &
\end{array}$$

$\therefore$ $f(x)=(x-1)(x-2)(x^2-x+1)$ … ❶

즉, $(x-1)(x-2)(x^2-x+1)=0$에서 α, β는 $x^2-x+1=0$의 두 허근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=1$ … ❷

$\therefore$ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=1^2-2\cdot1=-1$ … ❸

답 −1

채점 기준	비율
❶ 인수정리와 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해할 수 있다.	50 %
❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 02 치환을 이용한 사차방정식의 풀이 개념 01

공통부분이 있거나 공통부분이 생기도록 변형할 수 있는 사차방정식은 공통부분을 t로 치환한 후 t에 대한 방정식을 푼다.

0725

$x^2+x=t$로 놓으면 주어진 방정식은 $t^2-14t+24=0$

$(t-2)(t-12)=0 \qquad \therefore t=2$ 또는 $t=12$

(i) $t=2$, 즉 $x^2+x=2$일 때 $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$

(ii) $t=12$, 즉 $x^2+x=12$일 때 $x^2+x-12=0$

$(x+4)(x-3)=0 \qquad \therefore x=-4$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서 모든 양의 근의 합은 $1+3=4$

답 4

0726

$x^2+3x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$(t+2)(t-1)-4=0,\ t^2+t-6=0$

$(t+3)(t-2)=0 \qquad \therefore t=-3$ 또는 $t=2$

(i) $t=-3$, 즉 $x^2+3x=-3$일 때

$x^2+3x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\cdot1\cdot3=-3<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $t=2$, 즉 $x^2+3x=2$일 때

$x^2+3x-2=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=3^2-4\cdot1\cdot(-2)=17>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 -2이다.

(i), (ii)에서 모든 실근의 곱은 -2이다.

답 ③

Lecture

이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식의 판별식을 D라 하면

(1) $D>0$ ⇨ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $D=0$ ⇨ 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.

(3) $D<0$ ⇨ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

0727

$x^2-x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$(t+4)(t-3)-8=0,\ t^2+t-20=0$

$(t+5)(t-4)=0 \qquad \therefore t=-5$ 또는 $t=4$

(i) $t=-5$, 즉 $x^2-x=-5$일 때

$x^2-x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot5=-19<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이때, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 허근의 곱은 5이다.

(ii) $t=4$, 즉 $x^2-x=4$일 때

$x^2-x-4=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-4)=17>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 모든 허근의 곱은 5이다.

답 ⑤

0728

$x(x-1)(x-2)(x-3)-15=0$에서

$\{x(x-3)\}\{(x-1)(x-2)\}-15=0$

$(x^2-3x)(x^2-3x+2)-15=0$

이때, $x^2-3x=t$로 놓으면 위의 방정식은

$t(t+2)-15=0,\ t^2+2t-15=0$

$(t+5)(t-3)=0 \qquad \therefore t=-5$ 또는 $t=3$

(i) $t=-5$, 즉 $x^2-3x=-5$일 때

$x^2-3x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot5=-11<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이때, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 허근의 곱은 5이다.

(ii) $t=3$, 즉 $x^2-3x=3$일 때

$x^2-3x-3=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-3)=21>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은 3이다.

(i), (ii)에서 $a=3,\ b=5$이므로

$a-b=-2$

답 ②

참고 (   )(   )(   )(   ) 꼴의 전개

⇨ 공통부분이 생기도록 두 개씩 묶어 전개하고, 공통부분을 치환한다.

유형 03 $x^4+ax^2+b=0(a\neq0)$ 꼴의 방정식의 풀이 개념 02

(1) $x^2=t$로 치환한 후 좌변을 인수분해하여 푼다.

(2) (1)의 방법으로 풀 수 없는 경우에는 $A^2-B^2=0$ 꼴로 변형한 후 좌변을 인수분해하여 푼다.

0729

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-13t+36=0,\ (t-4)(t-9)=0$

$\therefore t=4$ 또는 $t=9$

즉, $x^2=4$ 또는 $x^2=9$이므로

$x=\pm2$ 또는 $x=\pm3$

$\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|$

$=|2|+|-2|+|3|+|-3|=10$

답 ③

0730

$x^4-7x^2+1=0$에서 $(x^4+2x^2+1)-9x^2=0$

$(x^2+1)^2-(3x)^2=0,\ (x^2+3x+1)(x^2-3x+1)=0$

$x^2+3x+1=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하고, $x^2-3x+1=0$의 두 근을 $\gamma,\ \delta$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=1,\ \gamma+\delta=3,\ \gamma\delta=1$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}\right)$$

$$=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}$$

$$=\frac{-3}{1}+\frac{3}{1}=0$$

답 0

7 여러 가지 방정식

유형 04 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0(a\neq0)$ 꼴의 방정식의 풀이 개념 02

(ⅰ) 양변을 x^2으로 나눈다.

(ⅱ) $x+\frac{1}{x}=t$로 치환한 후 t에 대한 방정식을 푼다.

⇨ $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$임을 이용한다.

(ⅲ) 주어진 사차방정식의 근을 구한다.

0731

$x^4+5x^3-4x^2+5x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+5x-4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$x^2+\frac{1}{x^2}+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$

이때, $x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면 위의 방정식은

$t^2+5t-6=0$, $(t+6)(t-1)=0$

$\therefore t=-6$ 또는 $t=1$

(ⅰ) $t=-6$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-6$일 때

$x^2+6x+1=0 \qquad \therefore x=-3\pm2\sqrt{2}$

(ⅱ) $t=1$, 즉 $x+\frac{1}{x}=1$일 때

$x^2-x+1=0 \qquad \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 실근의 차는

$(-3+2\sqrt{2})-(-3-2\sqrt{2})=4\sqrt{2}$

답 $4\sqrt{2}$

0732

$9x^4-24x^3-2x^2-24x+9=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$9x^2-24x-2-\frac{24}{x}+\frac{9}{x^2}=0$

$9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-24\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$

$9\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-24\left(x+\frac{1}{x}\right)-20=0$

이때, $x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면 위의 방정식은

$9t^2-24t-20=0$, $(3t+2)(3t-10)=0 \quad \therefore t=-\frac{2}{3}$ 또는 $t=\frac{10}{3}$

(ⅰ) $t=-\frac{2}{3}$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-\frac{2}{3}$일 때

$3x^2+2x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-3\cdot3=-8<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ⅱ) $t=\frac{10}{3}$, 즉 $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$일 때

$3x^2-10x+3=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=(-5)^2-3\cdot3=16>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 α는 $3x^2-10x+3=0$, 즉 $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$의 한 실근이므로

$\alpha+\frac{1}{\alpha}=\frac{10}{3}$

답 $\frac{10}{3}$

유형 05 삼·사차방정식의 근이 주어질 때 미정계수 구하기 개념 01

(1) 삼차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 α이다. ⇨ $f(\alpha)=0$

(2) 사차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이다. ⇨ $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

0733

$x=-2$를 $x^3-kx^2-(k+1)x+10=0$에 대입하면

$-8-4k+2(k+1)+10=0$, $-2k+4=0 \qquad \therefore k=2$

따라서 주어진 방정식은 $x^3-2x^2-3x+10=0$

$f(x)=x^3-2x^2-3x+10$으로 놓으면

$f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & -2 & -3 & 10 \\
 & & -2 & 8 & -10 \\
\hline
 & 1 & -4 & 5 & \boxed{0}
\end{array}$$

$f(x)=(x+2)(x^2-4x+5)$

즉, $(x+2)(x^2-4x+5)=0$

이때, α, β는 이차방정식 $x^2-4x+5=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$

$\therefore k+\alpha+\beta=6$

답 ①

0734

$x=1$을 $x^3-5x^2+2ax+a^2=0$에 대입하면

$1-5+2a+a^2=0 \qquad \therefore a^2+2a-4=0$

근의 공식을 이용하여 해를 구하면

$a=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-4)}=-1\pm\sqrt{5}$

$\therefore a=-1+\sqrt{5}$ ($\because a>0$)

답 $-1+\sqrt{5}$

0735

$f(x)=x^4+ax^3-x^2+ax+b$로 놓으면

$f(-1)=0$에서 $1-a-1-a+b=0$

$\therefore 2a-b=0$ …… ㉠

$f(2)=0$에서 $16+8a-4+2a+b=0$

$\therefore 10a+b=-12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$ … ❶

즉, $f(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\
 & & -1 & 2 & -1 & 2 \\
\hline
2 & 1 & -2 & 1 & -2 & \boxed{0} \\
 & & 2 & 0 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+1)$ … ❷

이때, 나머지 두 근은 $x^2+1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 나머지 두 근의 곱은 1이다. … ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	30 %
❸ 나머지 두 근의 곱을 구할 수 있다.	20 %

0736

$x=3$을 $x^4-5x^3+4ax^2-(3a+1)x+3=0$에 대입하면

$81-135+36a-3(3a+1)+3=0$

$27a-54=0\qquad \therefore a=2$

즉, 주어진 방정식은 $x^4-5x^3+8x^2-7x+3=0$

$f(x)=x^4-5x^3+8x^2-7x+3$으로 놓으면 $f(3)=0$이고,

$f(1)=1-5+8-7+3=0$이므로 조립제법을 이용하여

$f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
3 & 1 & -5 & 8 & -7 & 3 \\
 & & 3 & -6 & 6 & -3 \\ \hline
1 & 1 & -2 & 2 & -1 & \multicolumn{1}{|r}{0} \\
 & & 1 & -1 & 1 & \\ \hline
 & 1 & -1 & 1 & \multicolumn{1}{|r}{0} &
\end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-3)(x-1)(x^2-x+1)$

따라서 주어진 방정식은 $(x-3)(x-1)(x^2-x+1)=0$이고, 이 방정식의 허근은 $x^2-x+1=0$의 두 근이므로 두 허근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 1이다. 답 ③

유형 06 삼차방정식의 근의 조건이 주어질 때 미정계수 구하기 개념 01

삼차방정식의 근의 판별 ⇨ 삼차방정식을 $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)=0$ 꼴로 변형한 후 이차방정식의 판별식을 이용한다.

0737

$f(x)=x^3+(3-k)x^2+kx-4$로 놓으면

$f(1)=1+(3-k)+k-4=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & 3-k & k & -4 \\
 & & 1 & 4-k & 4 \\ \hline
 & 1 & 4-k & 4 & \multicolumn{1}{|r}{0}
\end{array}$$

$f(x)=(x-1)\{x^2+(4-k)x+4\}$

이때, 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면

(i) 이차방정식 $x^2+(4-k)x+4=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우

$1+(4-k)+4=0\qquad \therefore k=9$

(ii) 이차방정식 $x^2+(4-k)x+4=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(4-k)^2-4\cdot1\cdot4=0,\ k^2-8k=0$

$k(k-8)=0\qquad \therefore k=8\ (\because k$는 자연수$)$

(i), (ii)에서 자연수 k는 8, 9의 2개이다. 답 2

0738

$f(x)=2x^3+(1-a)x+a-3$으로 놓으면

$f(1)=2+(1-a)+a-3=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 2 & 0 & 1-a & a-3 \\
 & & 2 & 2 & 3-a \\ \hline
 & 2 & 2 & 3-a & \multicolumn{1}{|r}{0}
\end{array}$$

$f(x)=(x-1)(2x^2+2x+3-a)$

이때, 방정식 $f(x)=0$의 근이 모두 실수이려면 이차방정식 $2x^2+2x+3-a=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-2\cdot(3-a)\ge0,\ 2a-5\ge0\qquad \therefore a\ge\frac{5}{2}$ 답 ⑤

0739

$f(x)=x^3+(2a-5)x^2+(a^2-4a+6)x-2a^2$으로 놓으면

$f(2)=8+4(2a-5)+2(a^2-4a+6)-2a^2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & 2a-5 & a^2-4a+6 & -2a^2 \\
 & & 2 & 4a-6 & 2a^2 \\ \hline
 & 1 & 2a-3 & a^2 & \multicolumn{1}{|r}{0}
\end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-2)\{x^2+(2a-3)x+a^2\}$

이때, 방정식 $f(x)=0$이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+(2a-3)x+a^2=0$이 두 개의 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2a-3)^2-4\cdot1\cdot a^2<0$

$-12a+9<0\qquad \therefore a>\frac{3}{4}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 1이다. 답 ①

0740

$f(x)=x^3+(2k-1)x+2k$로 놓으면

$f(-1)=-1-(2k-1)+2k=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 0 & 2k-1 & 2k \\
 & & -1 & 1 & -2k \\ \hline
 & 1 & -1 & 2k & \multicolumn{1}{|r}{0}
\end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2-x+2k)$

이때, 방정식 $f(x)=0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면

(i) 이차방정식 $x^2-x+2k=0$이 실근을 갖지 않는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot2k<0\qquad \therefore k>\frac{1}{8}$

(ii) 이차방정식 $x^2-x+2k=0$이 $x=-1$을 중근으로 갖는 경우

$x=-1$을 $x^2-x+2k=0$에 대입하면

$1+1+2k=0\qquad \therefore k=-1$

그런데 $x^2-x+2k=0$에 $k=-1$을 대입하면 $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0\qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$

즉, 이차방정식 $x^2-x+2k=0$은 $k=-1$일 때 중근을 갖지 않는다.

(i), (ii)에서 $k>\frac{1}{8}$ 답 $k>\frac{1}{8}$

유형 07 삼차방정식의 근과 계수의 관계 개념 03

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\qquad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

0741

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1,\ \alpha\beta\gamma=4$이므로

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=1-(-2)+1-4=0$ 답 ③

다른 풀이 $x^3+2x^2+x-4=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1+2+1-4=0$

0742

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=5$

이때, $\alpha+\beta=2-\gamma$, $\beta+\gamma=2-\alpha$, $\gamma+\alpha=2-\beta$이므로

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(2-\gamma)(2-\alpha)(2-\beta)$

$=8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=8-4\cdot2+2\cdot3-5=1$ 답 ①

0743

주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 2α, $3\alpha(\alpha\neq0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha+3\alpha=12$, $6\alpha=12$ $\quad\therefore \alpha=2$

따라서 세 근이 2, 4, 6이므로

$2\cdot4+4\cdot6+6\cdot2=a$, $2\cdot4\cdot6=-b$

$\therefore a=44$, $b=-48$

$\therefore 2a+b=40$ 답 ②

0744

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=p$

주어진 삼차방정식의 세 근을 α, β, γ라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta\gamma=-2$

$\alpha+\beta+\gamma=3$에서 $\alpha+\beta=2$이므로 $\gamma=1$

$\alpha\beta\gamma=-2$에서 $\alpha\beta=p$, $\gamma=1$이므로 $p=-2$

이때, $\gamma=1$에서 $x=1$이 $x^3-3x^2+qx+2=0$의 근이므로

$1-3+q+2=0$ $\quad\therefore q=0$

$\therefore p^2+q^2=4$ 답 4

유형 08 삼차방정식의 작성

개념 03

세 수 α, β, γ를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$

$\iff x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$

0745

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=1$이므로

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3}{1}=3$

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{1}=2$

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=1$

즉, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-3x^2+2x-1=0$

따라서 $a=-3$, $b=2$, $c=-1$이므로

$abc=6$ 답 6

0746

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=7$이므로

$(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=(\alpha+\beta+\gamma)+3$

$=-3+3=0$

$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)+3$

$=3+2\cdot(-3)+3=0$

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$

$=7+3+(-3)+1=8$

즉, $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3-8=0$ 답 $x^3-8=0$

0747

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=7$, $\alpha\beta\gamma=-6$이므로

$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=2(\alpha+\beta+\gamma)=0$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$

$=(-\gamma)\cdot(-\alpha)+(-\alpha)\cdot(-\beta)+(-\beta)\cdot(-\gamma)$

$\alpha+\beta+\gamma=0$에서
$\alpha+\beta=-\gamma$
$\beta+\gamma=-\alpha$
$\gamma+\alpha=-\beta$

$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=7$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(-\gamma)\cdot(-\alpha)\cdot(-\beta)$

$=-\alpha\beta\gamma=6$

즉, $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3+7x-6=0$

따라서 $a=0$, $b=7$, $c=-6$이므로

$a+b+c=1$ 답 1

다른 풀이 $\alpha+\beta+\gamma=0$에서

$\alpha+\beta=-\gamma$, $\beta+\gamma=-\alpha$, $\gamma+\alpha=-\beta$이므로

구하는 방정식은 $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식이다.

(세 근의 합)$=-\alpha-\beta-\gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)=0$

(두 근끼리의 곱의 합)$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=7$

(세 근의 곱)$=-\alpha\beta\gamma=6$

따라서 구하는 삼차방정식은 $x^3+7x-6=0$이므로 $a=0$, $b=7$, $c=-6$

$\therefore a+b+c=1$

0748

$f(1)=f(3)=f(5)=4$에서

$f(1)-4=f(3)-4=f(5)-4=0$이므로 삼차방정식 $f(x)-4=0$의 세 근이 1, 3, 5이다.

이때, 1, 3, 5를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(1+3+5)x^2+(1\cdot3+3\cdot5+5\cdot1)x-1\cdot3\cdot5=0$

$\therefore x^3-9x^2+23x-15=0$

즉, $f(x)-4=x^3-9x^2+23x-15$이므로

$f(x)=x^3-9x^2+23x-11$

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 11이다. 답 11

유형 09 삼차방정식의 켤레근 개념 04

(1) 계수가 유리수인 삼차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$

⇨ 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$ (단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)

(2) 계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $p+qi$

⇨ 다른 한 근은 $p-qi$ (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

0749

주어진 삼차방정식의 계수가 모두 유리수이므로 한 근이 $2+\sqrt{3}$이면 $2-\sqrt{3}$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})+\alpha=2$ ······ ㉠

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\alpha+\alpha(2+\sqrt{3})=a$ ······ ㉡

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\alpha=-b$ ······ ㉢

㉠에서 $\alpha=-2$

$\alpha=-2$를 ㉡, ㉢에 대입하면 $a=-7$, $b=2$

$\therefore ab=-14$ 답 ②

0750

주어진 삼차방정식의 계수가 모두 실수이므로 한 근이 $1-\sqrt{3}i$이면 $1+\sqrt{3}i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-\sqrt{3}i)\cdot(1+\sqrt{3}i)\cdot\alpha=4$ $\quad\therefore \alpha=1$

따라서 나머지 두 근의 합은 $(1+\sqrt{3}i)+1=2+\sqrt{3}i$ 답 $2+\sqrt{3}i$

0751

주어진 삼차방정식의 계수가 모두 유리수이므로 한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 $1-\sqrt{2}$도 근이다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})+2=-\dfrac{b}{a}$ ······ ㉠

$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\cdot2+2\cdot(1+\sqrt{2})=\dfrac{c}{a}$ ······ ㉡

$(1+\sqrt{2})\cdot(1-\sqrt{2})\cdot2=-\dfrac{2}{a}$ ······ ㉢

㉢에서 $a=1$

$a=1$을 ㉠, ㉡에 대입하면 $b=-4$, $c=3$

$\therefore a+b+c=0$ 답 0

0752

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$(a, b, c는 실수)라 하면

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 계수가 모두 실수이므로 한 근이 $1-2i$이면 $1+2i$도 근이다.

즉, 주어진 방정식의 세 근이 -1, $1-2i$, $1+2i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1)+(1-2i)+(1+2i)=-a$

$(-1)\cdot(1-2i)+(1-2i)\cdot(1+2i)+(1+2i)\cdot(-1)=b$

$(-1)\cdot(1-2i)\cdot(1+2i)=-c$

$\therefore a=-1$, $b=3$, $c=5$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+3x+5$이므로 $f(1)=8$ 답 ⑤

유형 10 방정식 $x^3=1$, $x^3=-1$의 허근의 성질 개념 05

(1) 방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 하면 (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수)

① $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$ ② $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

③ $\omega^2=\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}$

(2) 방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라 하면 (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수)

① $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$ ② $\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

③ $\omega^2=-\overline{\omega}=-\dfrac{1}{\omega}$

0753

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이고, 방정식의 계수가 모두 실수이므로 ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 근이다. 즉,

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$, $\overline{\omega}^3=1$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

ㄱ. $1+\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^2+\omega+1}{\omega^2}=0$이므로

$1+\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}+\dfrac{1}{\omega^3}+\cdots+\dfrac{1}{\omega^{21}}$

$=\left(1+\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}\right)+\dfrac{1}{\omega^3}\left(1+\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}\right)$

$+\cdots+\dfrac{1}{(\omega^3)^6}\left(1+\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}\right)+\dfrac{1}{\omega^{21}}$

$=\dfrac{1}{\omega^{21}}=\dfrac{1}{(\omega^3)^7}=1$ (거짓)

ㄴ. $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)(1+\omega^6)$

$=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+1)(1+\omega)(1+\omega^2)(1+1)$

$=4(1+\omega)^2(1+\omega^2)^2$

$=4(-\omega^2)^2(-\omega)^2$

$=4\omega^6=4(\omega^3)^2=4$ (참)

ㄷ. $\dfrac{1+\omega^2}{\omega}+\dfrac{1+\overline{\omega}}{\overline{\omega}^2}=\dfrac{-\omega}{\omega}+\dfrac{-\overline{\omega}^2}{\overline{\omega}^2}=-1+(-1)=-2$ (거짓)

ㄹ. $\dfrac{\omega^2+1}{\omega+1}+\dfrac{\omega+1}{\omega^2+1}=\dfrac{-\omega}{-\omega^2}+\dfrac{-\omega^2}{-\omega}=\dfrac{1}{\omega}+\omega$

$=\dfrac{1+\omega^2}{\omega}=\dfrac{-\omega}{\omega}=-1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

참고 방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 하면 ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^3=1$의 근이다.

① $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$의 양변을 $\overline{\omega}$로 나누면 $\overline{\omega}+\dfrac{1}{\overline{\omega}}=-1$

② $\omega^3=1$, $\overline{\omega}^3=1$, $\omega\overline{\omega}=1$이므로

$\omega^2=\dfrac{1}{\omega}=\overline{\omega}$, $\overline{\omega}^2=\dfrac{1}{\overline{\omega}}=\omega$

0754

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^2-x+1=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\therefore \omega^6+2\omega^5+3\omega^4+4\omega^3+5\omega^2+6\omega+7$

$=(\omega^3)^2+2\omega^3\cdot\omega^2+3\omega^3\cdot\omega+4\omega^3+5\omega^2+6\omega+7$

$=1-2\omega^2-3\omega-4+5\omega^2+6\omega+7$

$=3\omega^2+3\omega+4$

$=3(\omega-1)+3\omega+4=6\omega+1$

따라서 $a=6$, $b=1$이므로 $ab=6$ 답 ②

0755

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

즉, $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

이때,

$f(1)=\dfrac{\omega^2}{1+\omega^2}=\dfrac{\omega^2}{-\omega}=-\omega$

$f(2)=\dfrac{\omega^4}{1+\omega^4}=\dfrac{\omega}{1+\omega}=\dfrac{\omega}{-\omega^2}=-\dfrac{1}{\omega}$

$f(3)=\dfrac{\omega^6}{1+\omega^6}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

이고,

$f(4)=\dfrac{\omega^8}{1+\omega^8}=\dfrac{\omega^2}{1+\omega^2}=f(1)$

$f(5)=\dfrac{\omega^{10}}{1+\omega^{10}}=\dfrac{\omega}{1+\omega}=f(2)$

$f(6)=\dfrac{\omega^{12}}{1+\omega^{12}}=\dfrac{1}{1+1}=f(3)$

$\vdots$

이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(9)$

$=3\{f(1)+f(2)+f(3)\}=3\left(-\omega-\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{2}\right)$

$=3\left(\dfrac{-\omega^2-1}{\omega}+\dfrac{1}{2}\right)=3\left(\dfrac{\omega}{\omega}+\dfrac{1}{2}\right)$

$=3\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9}{2}$

$\therefore 2\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(9)\}=2\cdot\dfrac{9}{2}=9$

답 9

유형 11 삼·사차방정식의 활용 개념 01

(i) 구하려는 것을 x로 놓고, 주어진 조건에 맞게 방정식을 세운다.

(ii) 방정식을 풀어 근을 구한다.

(iii) 구한 근이 조건에 맞는지 확인한다.

0756

반지름의 길이를 x cm만큼 늘였다고 하면 두 구의 부피의 합이 처음 두 구의 부피의 합보다 240π cm^{3}만큼 늘어났으므로

$\dfrac{4}{3}\pi(1+x)^3+\dfrac{4}{3}\pi(2+x)^3=\dfrac{4}{3}\pi\cdot1^3+\dfrac{4}{3}\pi\cdot2^3+240\pi$

$2x^3+9x^2+15x-180=0$

$f(x)=2x^3+9x^2+15x-180$이라 하면

$f(3)=54+81+45-180=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 2 & 9 & 15 & -180 \\ & & 6 & 45 & 180 \\ \hline & 2 & 15 & 60 & 0 \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-3)(2x^2+15x+60)$

즉, $(x-3)(2x^2+15x+60)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=\dfrac{-15\pm\sqrt{255}i}{4}$

그런데 x는 양의 실수이므로 $x=3$

따라서 반지름의 길이를 3 cm만큼 늘였다.

답 3 cm

참고 구의 겉넓이와 부피

반지름의 길이가 r인 구의 겉넓이를 S, 부피를 V라 하면

① $S=4\pi r^2$ ② $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

0757

밑면의 가로의 길이가 $(8-2x)$ cm, 세로의 길이가 $(6-2x)$ cm이고, 높이가 x cm인 직육면체 모양의 뚜껑 없는 상자의 부피가 16 cm^{3}이므로

$(8-2x)(6-2x)x=16$ $\quad\therefore x^3-7x^2+12x-4=0$ ··· ❶

$f(x)=x^3-7x^2+12x-4$라 하면

$f(2)=8-28+24-4=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -7 & 12 & -4 \\ & & 2 & -10 & 4 \\ \hline & 1 & -5 & 2 & 0 \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-2)(x^2-5x+2)$

즉, $(x-2)(x^2-5x+2)=0$에서

$x=2$ 또는 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$ ··· ❷

그런데 x는 $0<x<3$인 자연수이므로 $x=2$ ··· ❸

길이는 모두 양수이므로 $x>0$, $8-2x>0$, $6-2x>0$
$\therefore 0<x<3$

답 2

채점 기준	비율
❶ x에 대한 삼차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ ❶의 삼차방정식의 근을 구할 수 있다.	40 %
❸ 자연수 x의 값을 구할 수 있다.	20 %

0758

한 모서리의 길이가 x cm인 정육면체의 부피는 x^3 cm^{3}이므로

$A=3x^3$

앞쪽과 뒤쪽에 보이는 도형의 겉넓이는

$2x^2+2x^2=4x^2(\text{cm}^2)$

왼쪽과 오른쪽에 보이는 도형의 겉넓이는

$3x^2+3x^2=6x^2(\text{cm}^2)$

위쪽과 아래쪽에 보이는 도형의 겉넓이는

$2x^2+2x^2=4x^2(\text{cm}^2)$

$\therefore B=4x^2+6x^2+4x^2=14x^2$

이때, $B-A=45$이므로

$14x^2-3x^3=45$, $3x^3-14x^2+45=0$

$f(x)=3x^3-14x^2+45$라 하면

$f(3)=81-126+45=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 3 & -14 & 0 & 45 \\ & & 9 & -15 & -45 \\ \hline & 3 & -5 & -15 & 0 \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-3)(3x^2-5x-15)$

즉, $(x-3)(3x^2-5x-15)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{205}}{6}$

그런데 x는 자연수이므로 $x=3$

답 3

0759

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x-1)^2=13,\ 2x^2-2x-12=0$

$x^2-x-6=0,\ (x+2)(x-3)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=3$

㉢에서 $x=-2$이면 $y=-3$, $x=3$이면 $y=2$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

0760

$\begin{cases} x+y=-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-3y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x-2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-3(-x-2)^2=4,\ 2x^2+12x+16=0$

$x^2+6x+8=0,\ (x+4)(x+2)=0 \quad \therefore x=-4$ 또는 $x=-2$

㉢에서 $x=-4$이면 $y=2$, $x=-2$이면 $y=0$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$

0761

$\begin{cases} 2x-y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x^2-y^2=11 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2x-3$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$3x^2-(2x-3)^2=11,\ x^2-12x+20=0$

$(x-2)(x-10)=0 \quad \therefore x=2$ 또는 $x=10$

㉢에서 $x=2$이면 $y=1$, $x=10$이면 $y=17$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=10 \\ y=17 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=10 \\ y=17 \end{cases}$

0762

$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3y^2=28 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x-2y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+3x^2=28,\ 4x^2=28$

$x^2=7 \quad \therefore x=\pm\sqrt{7}$

$\therefore x=\pm\sqrt{7},\ y=\pm\sqrt{7}$ (복호동순)

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$(2y)^2+3y^2=28,\ 7y^2=28$

$y^2=4 \quad \therefore y=\pm2$

$\therefore x=\pm4,\ y=\pm2$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

0763

$\begin{cases} 3x^2-7xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-2y)(3x-y)=0$

$\therefore x=2y$ 또는 $3x=y$

(i) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$(2y)^2+y^2=20,\ 5y^2=20$

$y^2=4 \quad \therefore y=\pm2$

$\therefore x=\pm4,\ y=\pm2$ (복호동순)

(ii) $3x=y$를 ㉡에 대입하면

$x^2+(3x)^2=20,\ 10x^2=20$

$x^2=2 \quad \therefore x=\pm\sqrt{2}$

$\therefore x=\pm\sqrt{2},\ y=\pm3\sqrt{2}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-3\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=3\sqrt{2} \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-3\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=3\sqrt{2} \end{cases}$

0764

$\begin{cases} x^2-4xy+3y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+2y^2=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x-3y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2-y\cdot y+2y^2=8,\ 2y^2=8$

$y^2=4 \quad \therefore y=\pm2$

$\therefore x=\pm2,\ y=\pm2$ (복호동순)

(ii) $x=3y$를 ㉡에 대입하면

$(3y)^2-3y\cdot y+2y^2=8,\ 8y^2=8$

$y^2=1 \quad \therefore y=\pm1$

$\therefore x=\pm3,\ y=\pm1$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

0765

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-3t-10=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-5)=0$ $\quad\therefore t=-2$ 또는 $t=5$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$ 답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$

0766

$x+xy+y=-26$에서 $x+y=-2$이므로

$xy=-24$

즉, x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+2t-24=0$의 두 근이므로

$(t+6)(t-4)=0$ $\quad\therefore t=-6$ 또는 $t=4$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-6 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-6 \end{cases}$ 답 $\begin{cases} x=-6 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-6 \end{cases}$

0767

$2x+y=9$에서 $y=-2x+9$

y는 자연수이므로 $-2x+9\geq1$ $\quad\therefore x\leq4$

x는 자연수이므로 $x=1, 2, 3, 4$

x	1	2	3	4
y	7	5	3	1

위의 표에서 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(1,\ 7), (2,\ 5), (3,\ 3), (4,\ 1)$의 4개이다. 답 4

0768

$(x-2)(y+1)=3$에서 x, y는 정수이므로 $x-2, y+1$도 정수이다.

$x-2$	-3	-1	1	3
$y+1$	-1	-3	3	1

위의 표에서 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(-1,\ -2), (1,\ -4), (3,\ 2), (5,\ 0)$의 4개이다. 답 4

0769

$x^2+2x+y^2-4y+5=0$에서

$(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)=0$

$\therefore (x+1)^2+(y-2)^2=0$

이때, x, y는 실수이므로 $x+1, y-2$도 실수이다.

$x+1=0, y-2=0$

$\therefore x=-1, y=2$ 답 $x=-1, y=2$

0770

$x^2-6xy+10y^2+2y+1=0$에서

$(x^2-6xy+9y^2)+(y^2+2y+1)=0$

$\therefore (x-3y)^2+(y+1)^2=0$

이때, x, y는 실수이므로 $x-3y, y+1$도 실수이다.

$x-3y=0, y+1=0$

$\therefore x=-3, y=-1$ 답 $x=-3, y=-1$

다른 풀이 $x^2-6xy+10y^2+2y+1=0$ …… ㉠

x가 실수이므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3y)^2-1\cdot(10y^2+2y+1)\geq0$

$y^2+2y+1\leq0$ $\quad\therefore (y+1)^2\leq0$

이때, y는 실수이므로 $y+1$도 실수이다.

$y+1=0$ $\quad\therefore y=-1$

$y=-1$을 ㉠에 대입하면

$x^2+6x+9=0, (x+3)^2=0$ $\quad\therefore x=-3$

STEP 2 유형 마스터 ②

유형 12 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식 개념 06

(ⅰ) 일차방정식을 x 또는 y에 대하여 정리한다.

(ⅱ) (ⅰ)을 이차방정식에 대입하여 푼다.

0771

$\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-2$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2+(x-2)^2=10, 2x^2-4x-6=0$

$x^2-2x-3=0, (x+1)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

㉢에서 $x=-1$이면 $y=-3$, $x=3$이면 $y=1$

따라서 $\alpha>0, \beta>0$에서 $\alpha=3, \beta=1$이므로 $\alpha-2\beta=1$ 답 ④

0772

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2xy=-8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-1$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2-2x(x-1)=-8, x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

㉢에서 $x=-2$이면 $y=-3$, $x=4$이면 $y=3$

따라서 $\alpha>0, \beta>0$에서 $\alpha=4, \beta=3$이므로 $\alpha^2+\beta^2=25$ 답 ④

0773

$\begin{cases} ax+y=1 \\ x+y=8 \end{cases}$의 해가 $\begin{cases} x-y=b \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$의 해가 되므로 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식 $\begin{cases} x+y=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=34 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠에서 $y=8-x$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2+(8-x)^2=34, 2x^2-16x+30=0$

$x^2-8x+15=0, (x-3)(x-5)=0$ $\quad\therefore x=3$ 또는 $x=5$

㉢에서 $x=3$이면 $y=5$, $x=5$이면 $y=3$

그런데 $b=x-y>0$이므로 $x=5, y=3$ $\quad\therefore b=5-3=2$

또, $ax+y=1$에서 $5a+3=1$ $\quad\therefore a=-\frac{2}{5}$

$\therefore a-b=-\frac{12}{5}$ 답 $-\frac{12}{5}$

0774

$$\begin{cases} 2x+y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2xy-3y=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=-2x+1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+2x(-2x+1)-3(-2x+1)=1$

$3x^2-8x+4=0$, $(3x-2)(x-2)=0$

$\therefore x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

㉢에서 $x=\frac{2}{3}$이면 $y=-\frac{1}{3}$, $x=2$이면 $y=-3$ $\cdots$ ❶

따라서 $x+y$의 값은 $\frac{1}{3}$ 또는 -1이므로 최댓값은 $\frac{1}{3}$이다. $\cdots$ ❷

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 연립방정식의 해를 구할 수 있다.	70 %
❷ $x+y$의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

유형 13 하나의 이차방정식이 인수분해되는 연립이차방정식

개념 06

(ⅰ) 인수분해가 되는 이차방정식을 두 일차식의 곱으로 인수분해하여 일차방정식을 얻는다.

(ⅱ) (ⅰ)에서 얻은 일차방정식을 다른 이차방정식에 대입하여 푼다.

0775

$$\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+y^2=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $(x+y)(x-y)=0$

$\therefore y=-x$ 또는 $y=x$

(ⅰ) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2+x^2=9$, $x^2=3$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{3}$

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$, $y=\mp\sqrt{3}$ (복호동순)

(ⅱ) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x^2+x^2=9$, $x^2=9$ $\quad\therefore x=\pm3$

$\therefore x=\pm3$, $y=\pm3$ (복호동순)

(ⅰ), (ⅱ)에서 $M=3+3=6$, $m=-3-3=-6$이므로

$Mm=-36$

답 -36

0776

$$\begin{cases} x^2+y^2=40 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x^2+y^2=4xy & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $4x^2-4xy+y^2=0$

$(2x-y)^2=0$ $\quad\therefore y=2x$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(2x)^2=40$, $x^2=8$ $\quad\therefore x=\pm2\sqrt{2}$

$\therefore x=\pm2\sqrt{2}$, $y=\pm4\sqrt{2}$ (복호동순)

따라서 $\alpha=2\sqrt{2}$, $\beta=4\sqrt{2}$ 또는 $\alpha=-2\sqrt{2}$, $\beta=-4\sqrt{2}$이므로

$\alpha^2-\beta^2=8-32=-24$

답 ②

0777

$$\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3xy+2y^2=30 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $(x-y)(x-4y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=4y$

(ⅰ) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+3\cdot y\cdot y+2y^2=30$, $y^2=5$ $\quad\therefore y=\pm\sqrt{5}$

$\therefore x=\pm\sqrt{5}$, $y=\pm\sqrt{5}$ (복호동순)

(ⅱ) $x=4y$를 ㉡에 대입하면

$(4y)^2+3\cdot4y\cdot y+2y^2=30$, $y^2=1$ $\quad\therefore y=\pm1$

$\therefore x=\pm4$, $y=\pm1$ (복호동순)

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\alpha+\beta$의 값은 $2\sqrt{5}$ 또는 $-2\sqrt{5}$ 또는 5 또는 -5이므로 $\alpha+\beta$의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0778

$$\begin{cases} 2x^2-2y^2+x+y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+xy-2y^2=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $2(x+y)(x-y)+x+y=0$

$(x+y)(2x-2y+1)=0$ $\quad\therefore y=-x$ 또는 $y=x+\frac{1}{2}$

(ⅰ) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$2x^2+x\cdot(-x)-2\cdot(-x)^2=-1$, $x^2=1$ $\quad\therefore x=\pm1$

$\therefore x=\pm1$, $y=\mp1$ (복호동순)

(ⅱ) $y=x+\frac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면

$2x^2+x\left(x+\frac{1}{2}\right)-2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-1$, $2x^2-3x+1=0$

$(2x-1)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$\therefore x=\frac{1}{2}$, $y=1$ 또는 $x=1$, $y=\frac{3}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $xy<0$이므로 $x=\pm1$, $y=\mp1$ (복호동순)

$\therefore x^2+y^2=1+1=2$

답 2

유형 14 x, y에 대한 대칭식인 연립이차방정식

개념 06

(ⅰ) $x+y=u$, $xy=v$로 놓는다.

(ⅱ) 주어진 식을 u, v에 대한 식으로 바꾸어 연립방정식을 푼다.

(ⅲ) x, y가 t에 대한 이차방정식 $t^2-ut+v=0$의 두 근을 이용하여 x, y의 값을 구한다.

0779

$x+y=u$, $xy=v$라 하면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u-v=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy$
$=u^2-v$

㉠에서 $v=u-1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$u^2-(u-1)=13$, $u^2-u-12=0$

$(u+3)(u-4)=0$ $\quad\therefore u=-3$ 또는 $u=4$

㉢에서 $u=-3$이면 $v=-4$, $u=4$이면 $v=3$

(i) $u=-3$, $v=-4$, 즉 $x+y=-3$, $xy=-4$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+3t-4=0$의 두 근이므로

$(t+4)(t-1)=0$ $\therefore t=-4$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$

(ii) $u=4$, $v=3$, 즉 $x+y=4$, $xy=3$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-3)=0$ $\therefore t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(i), (ii)에서 x^2-y^2의 최솟값은

$1^2-(-4)^2=-15$ 답 -15

0780

$x+y=u$, $xy=v$라 하면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} v=15 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-2v=34 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$u^2-30=34$, $u^2=64$ $\therefore u=\pm 8$

(i) $u=8$, $v=15$, 즉 $x+y=8$, $xy=15$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-8t+15=0$의 두 근이므로

$(t-3)(t-5)=0$ $\therefore t=3$ 또는 $t=5$

$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$

(ii) $u=-8$, $v=15$, 즉 $x+y=-8$, $xy=15$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+8t+15=0$의 두 근이므로

$(t+5)(t+3)=0$ $\therefore t=-5$ 또는 $t=-3$

$\therefore \begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases}$

(i), (ii)에서 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(3, 5)$, $(5, 3)$ 답 $(3, 5)$, $(5, 3)$

0781

$x+y=u$, $xy=v$라 하면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2+u-2v=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $v=u^2-1$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$u^2+u-2(u^2-1)=2$, $u^2-u=0$

$u(u-1)=0$ $\therefore u=0$ 또는 $u=1$

㉢에서 $u=0$이면 $v=-1$, $u=1$이면 $v=0$

(i) $u=0$, $v=-1$, 즉 $x+y=0$, $xy=-1$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-1=0$의 두 근이므로

$(t+1)(t-1)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

(ii) $u=1$, $v=0$, 즉 $x+y=1$, $xy=0$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-t=0$의 두 근이므로

$t(t-1)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

(i), (ii)에서 $|x-y|$의 값은 2 또는 1이므로 최댓값은 2이다. 답 ②

0782

$\begin{cases} (x-y)^2+xy=12 \\ (x-1)^2+(y-1)^2=10 \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} x^2-xy+y^2=12 \\ x^2+y^2-2(x+y)=8 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} (x+y)^2-3xy=12 \\ (x+y)^2-2(x+y)-2xy=8 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$라 하면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2-3v=12 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-2u-2v=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면 $2u-v=4$

$\therefore v=2u-4$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $u^2-3(2u-4)=12$, $u^2-6u=0$

$u(u-6)=0$ $\therefore u=0$ 또는 $u=6$

㉢에서 $u=0$이면 $v=-4$, $u=6$이면 $v=8$

(i) $u=0$, $v=-4$, 즉 $x+y=0$, $xy=-4$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-4=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-2)=0$ $\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$

(ii) $u=6$, $v=8$, 즉 $x+y=6$, $xy=8$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-6t+8=0$의 두 근이므로

$(t-2)(t-4)=0$ $\therefore t=2$ 또는 $t=4$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)는 $(-2, 2)$, $(2, -2)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$의 4개이다. 답 4

유형 15 연립이차방정식의 해의 조건 개념 06

(i) 일차방정식을 이차방정식에 대입한다.

(ii) 해의 조건을 만족시키도록 (i)에서 구한 이차방정식의 판별식을 이용한다.

0783

$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+y=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=-2x+k$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(-2x+k)^2=5$, $5x^2-4kx+k^2-5=0$

이를 만족시키는 x의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5\cdot(k^2-5)=0$, $k^2=25$ $\therefore k=\pm 5$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 $5\cdot(-5)=-25$ 답 ①

0784

$$\begin{cases} x-2y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+m=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x=2y-1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(2y-1)^2+(2y-1)y+m=0$, $6y^2-5y+m+1=0$

이 이차방정식의 실근이 존재하지 않아야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\cdot6\cdot(m+1)<0$

$\therefore m>\frac{1}{24}$

따라서 정수 m의 최솟값은 1이다. 답 ④

0785

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-(2a+2)t+a^2+11=0$의 두 근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-1\cdot(a^2+11)<0$, $2a-10<0$ $\cdots$ ❶

$\therefore a<5$ $\cdots$ ❷

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 a의 값의 합은

$1+2+3+4=10$ $\cdots$ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ 판별식을 이용하여 조건을 만족시키기 위한 식을 세울 수 있다.	50 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❸ 조건을 만족시키는 모든 자연수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	30 %

다른 풀이 $\begin{cases} x+y=2a+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy=a^2+11 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+2a+2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x(-x+2a+2)=a^2+11$, $x^2-2(a+1)x+a^2+11=0$

이 이차방정식의 실근이 존재하지 않아야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-1\cdot(a^2+11)<0$, $2a-10<0$

$\therefore a<5$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 a의 값의 합은

$1+2+3+4=10$

0786

$$\begin{cases} x+y=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy+x+y=2k+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$xy+6=2k+3$ $\quad\therefore xy=2k-3$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢을 만족시키는 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-6t+2k-3=0$의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot(2k-3)\geq0$

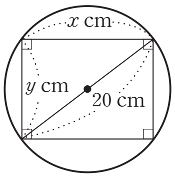
$\therefore k\leq6$ 답 $k\leq6$

유형 16 연립이차방정식의 활용 개념 06

(i) 구하려는 것을 미지수로 놓고 주어진 조건에 맞게 연립이차방정식을 세운다.

(ii) 연립이차방정식을 풀어 해를 구한다.

0787



넓이가 100π cm^{2}인 원의 반지름의 길이는 10 cm이므로 이 원의 지름의 길이는 20 cm이다. 직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면

직사각형의 둘레의 길이가 56 cm이므로

$2(x+y)=56$ $\quad\therefore y=28-x$ $\cdots\cdots$ ㉠

직사각형의 대각선의 길이가 원의 지름의 길이와 같으므로

$x^2+y^2=20^2$ $\quad\therefore x^2+y^2=400$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2+(28-x)^2=400$, $x^2-28x+192=0$

$(x-12)(x-16)=0$ $\quad\therefore x=12$ 또는 $x=16$

㉠에서 $x=12$이면 $y=16$, $x=16$이면 $y=12$

따라서 직사각형의 이웃하는 두 변의 길이의 차는

$16-12=4$(cm) 답 ④

0788

두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면 각 자리의 숫자의 제곱의 합이 53이므로

$x^2+y^2=53$ $\cdots\cdots$ ㉠

일의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자를 바꾼 수와 처음 수의 합이 99이므로

$(10y+x)+(10x+y)=99$ $\quad\therefore y=9-x$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^2+(9-x)^2=53$, $x^2-9x+14=0$

$(x-2)(x-7)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=7$

㉡에서 $x=2$이면 $y=7$, $x=7$이면 $y=2$

그런데 $x<y$이므로 $x=2$, $y=7$

따라서 처음 수는 27이다. 답 27

0789

처음 땅의 가로의 길이를 x km, 세로의 길이를 y km라 하면

$x^2+y^2=160$ $\cdots\cdots$ ㉠

이 땅의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 1 km씩 줄인 땅의 넓이가 처음 땅의 넓이보다 15 km^{2}만큼 작으므로

$(x-1)(y-1)=xy-15$

$x+y=16$ $\quad\therefore y=16-x$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^2+(16-x)^2=160$, $x^2-16x+48=0$

$(x-4)(x-12)=0$ $\quad\therefore x=4$ 또는 $x=12$

㉡에서 $x=4$이면 $y=12$, $x=12$이면 $y=4$

따라서 처음 땅의 가로의 길이와 세로의 길이 중 긴 변의 길이는 12 km이다. 답 12 km

발전 유형 17 공통근을 가지는 방정식

개념 06

두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$이 공통근을 가지는 경우

(i) 공통근을 α로 놓고 $f(\alpha)=0$, $g(\alpha)=0$임을 이용하여 연립방정식을 세운다.

(ii) (i)에서 세운 연립방정식을 푼다.

(iii) (ii)에서 구한 값이 조건에 맞는지 확인한다.

0790

공통근이 α이므로 주어진 방정식에 대입하면

$3\alpha^2-(k+1)\alpha+4k=0$ …… ㉠

$3\alpha^2+(2k-1)\alpha+k=0$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $-3k\alpha+3k=0$

$3k(1-\alpha)=0$ $\quad\therefore k=0$ 또는 $\alpha=1$

(i) $k=0$을 ㉠에 대입하면

$3\alpha^2-\alpha=0$, $\alpha(3\alpha-1)=0$ $\quad\therefore \alpha=0$ 또는 $\alpha=\frac{1}{3}$

즉, 공통근이 0, $\frac{1}{3}$의 2개이므로 조건에 맞지 않는다.

(ii) $\alpha=1$을 ㉠에 대입하면

$3-(k+1)+4k=0$ $\quad\therefore k=-\frac{2}{3}$

(i), (ii)에서 $k=-\frac{2}{3}$, $\alpha=1$이므로

$3k+\alpha=3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+1=-1$

답 ①

Lecture

공통근을 구하는 방법

(1) 두 방정식이 인수분해가 가능한 경우 ⇨ 인수분해 후 공통근을 구한다.

(2) 두 방정식이 인수분해가 불가능한 경우

⇨ 최고차항 또는 상수항을 소거하여 인수분해한 후 공통근을 구한다.

0791

$x^2-x-2=0$ …… ㉠

$x^3-2(a+1)x^2+a^2=0$ …… ㉡

㉠에서 $(x+1)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(i) 공통근이 -1일 때, ㉡에 대입하면

$-1-2(a+1)+a^2=0$에서 $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$ $\quad\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

(ii) 공통근이 2일 때, ㉡에 대입하면

$8-8(a+1)+a^2=0$에서 $a^2-8a=0$

$a(a-8)=0$ $\quad\therefore a=0$ 또는 $a=8$

(i), (ii)에서 정수 a의 개수는 4이다.

답 4

0792

두 방정식의 공통근을 $\alpha(\alpha\neq0)$라 하면

$\alpha^2+2(k-2)\alpha-3k=0$ …… ㉠

$\alpha^2-2(k+1)\alpha+3k=0$ …… ㉡

㉠$+$㉡을 하면 $2\alpha^2-6\alpha=0$, $2\alpha(\alpha-3)=0$ $\quad\therefore \alpha=3\ (\because \alpha\neq0)$

$\alpha=3$을 ㉠에 대입하면

$9+6(k-2)-3k=0$ $\quad\therefore k=1$

답 1

0793

두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 공통근을 α라 하면

$\alpha^2+m\alpha+2n=0$ …… ㉠

$\alpha^2+n\alpha+2m=0$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $(m-n)\alpha+2(n-m)=0$

$(m-n)(\alpha-2)=0$ $\quad\therefore m=n$ 또는 $\alpha=2$

그런데 $m=n$이면 두 방정식이 일치하므로 서로 다른 두 이차식이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore \alpha=2$

공통근이 아닌 $f(x)=0$의 근과 $g(x)=0$의 근의 비가 2 : 1이므로 두 근을 $2t$, $t(t\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+2t=-m$, $2\cdot2t=2n$ $\quad\therefore m=-2t-2$, $n=2t$

$2+t=-n$, $2\cdot t=2m$ $\quad\therefore n=-t-2$, $m=t$

즉, $-2t-2=t$이므로 $t=-\frac{2}{3}$

따라서 $m=-\frac{2}{3}$, $n=-\frac{4}{3}$이므로

$mn=\frac{8}{9}$

답 $\frac{8}{9}$

유형 18 정수 조건의 부정방정식

개념 07

(일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 변형하여 곱해서 정수가 되는 두 일차식의 값을 구한다.

0794

$xy+x-y=3$에서 $x(y+1)-(y+1)+1=3$

$\therefore (x-1)(y+1)=2$ $x-1$, $y+1$은 정수이고 2의 약수이다.

이때, x, y는 정수이므로

$x-1$	-2	-1	1	2
$y+1$	-1	-2	2	1

$\therefore \begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=0\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$

따라서 $x-y$의 최솟값은 1이다.

답 ④

0795

$3(x+y)=xy$에서 $xy-3x-3y=0$

$x(y-3)-3(y-3)-9=0$

$\therefore (x-3)(y-3)=9$

이때, x, y는 자연수이므로

$x-3$	1	3	9
$y-3$	9	3	1

따라서 순서쌍 (x, y)는 $(4, 12)$, $(6, 6)$, $(12, 4)$의 3개이다.

답 3

주의

$x-3$	-9	-3	-1
$y-3$	-1	-3	-9

위의 경우에서 순서쌍 (x, y)는 $(-6, 2)$, $(0, 0)$, $(2, -6)$이므로 x, y가 자연수라는 조건에 맞지 않는다.

0796

$x^2+y^2-2x+4y=0$에서 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$

이때, x, y는 정수이므로

$x-1$	-2	-2	-1	-1	1	1	2	2
$y+2$	-1	1	-2	2	-2	2	-1	1

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

따라서 $x+y$의 최댓값은 2, 최솟값은 -4이므로 그 합은

$2+(-4)=-2$ 답 -2

0797

이차방정식 $x^2-(m+1)x+2m=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m+1$ ······ ㉠

$\alpha\beta=2m$ ······ ㉡

㉠$\times 2-$㉡을 하면 $2\alpha+2\beta-\alpha\beta=2$

$\alpha\beta-2\alpha-2\beta=-2$, $\alpha(\beta-2)-2(\beta-2)-4=-2$

$\therefore (\alpha-2)(\beta-2)=2$

이때, α, β는 정수이므로

$\alpha-2$	-2	-1	1	2
$\beta-2$	-1	-2	2	1

$\therefore \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=4 \\ \beta=3 \end{cases}$

이것을 ㉡에 대입하면 $m=0$ 또는 $m=6$

따라서 모든 실수 m의 값의 합은 $0+6=6$ 답 6

유형 19 실수 조건의 부정방정식 개념 07

(1) 실수 x, y에 대한 이차방정식으로 주어지면 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 판별식 $D\geq 0$임을 이용하여 푼다.

(2) A, B가 실수이고 $A^2+B^2=0$ 꼴이면 $A=0, B=0$임을 이용하여 푼다.

0798

주어진 방정식의 좌변을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2+4(y-1)x+5y^2+2y+5=0$ ······ ㉠

이때, x는 실수이므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{2(y-1)\}^2-2\cdot(5y^2+2y+5)\geq 0$, $-6y^2-12y-6\geq 0$

$y^2+2y+1\leq 0$ $\therefore (y+1)^2\leq 0$

y는 실수이므로 $y=-1$

$y=-1$을 ㉠에 대입하면

$2x^2-8x+8=0$, $x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$ $\therefore x=2$

$\therefore x-y=3$ 답 ④

다른 풀이 $2x^2+4xy+5y^2-4x+2y+5=0$에서

$(x^2+4xy+4y^2)+(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=0$

$\therefore (x+2y)^2+(x-2)^2+(y+1)^2=0$

이때, x, y가 실수이므로

$x+2y=0$, $x-2=0$, $y+1=0$ $\therefore x=2, y=-1$

$\therefore x-y=3$

0799

$(x-y+4)^2+(x^2+y^2-40)^2=0$에서

x, y가 실수이므로

$x-y+4=0$, $x^2+y^2-40=0$

$\therefore \begin{cases} x-y=-4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=40 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x+4$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x+4)^2=40$, $2x^2+8x-24=0$

$x^2+4x-12=0$, $(x+6)(x-2)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=2$

$x=-6$일 때 $y=-2$, $x=2$일 때 $y=6$

$\therefore xy=12$ 답 12

0800

주어진 방정식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(y-1)x+2y^2-6y+5=0$ ······ ㉠

이때, x는 실수이므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(y-1)^2-1\cdot(2y^2-6y+5)\geq 0$, $-y^2+4y-4\geq 0$

$y^2-4y+4\leq 0$ $\therefore (y-2)^2\leq 0$

y는 실수이므로 $y=2$ ··· ❶

$y=2$를 ㉠에 대입하면

$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$ $\therefore x=-1$ ··· ❷

$\therefore x^2+y^2=5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ y의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ x^2+y^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

0801

$x^2(1+y^2)=14xy+2x-50$에서

$x^2+x^2y^2-14xy-2x+50=0$

$(x^2y^2-14xy+49)+(x^2-2x+1)=0$

$\therefore (xy-7)^2+(x-1)^2=0$

이때, x, y는 실수이므로

$xy=7$, $x=1$ $\therefore x=1, y=7$

$\therefore x+y=8$ 답 ⑤

STEP 3 내신 마스터

0802

유형 01 삼·사차방정식의 풀이

| 전략 | 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

$f(x)=x^3-4x^2+x+6$으로 놓으면

$f(-1)=-1-4-1+6=0,\ f(2)=8-16+2+6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline 2 & 1 & -5 & 6 & \multicolumn{1}{|r}{0} \\ & & 2 & -6 & \\ \hline & 1 & -3 & \multicolumn{1}{|r}{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-2)(x-3)$

즉, $(x+1)(x-2)(x-3)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=2,\ \gamma=3$이므로 $\alpha+\beta-\gamma=-2$ 답 ①

Lecture

계수가 모두 정수인 다항식 $f(x)$를 인수분해할 때, $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값은 $\pm\dfrac{(f(x)\text{의 상수항의 약수})}{(f(x)\text{의 최고차항의 계수의 약수})}$ 중에서 찾는다.

0803

유형 02 치환을 이용한 사차방정식의 풀이

| 전략 | 먼저 주어진 두 이차식을 인수분해한 후 공통부분이 생기도록 일차식을 2개씩 다시 묶는다.

$(x^2+4x+3)(x^2+6x+8)=3$에서

$(x+1)(x+3)(x+2)(x+4)=3$

$\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}=3$

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=3$

이때, $x^2+5x=t$로 놓으면 위의 방정식은

$(t+4)(t+6)=3,\ t^2+10t+21=0$

$(t+7)(t+3)=0 \qquad \therefore t=-7$ 또는 $t=-3$

(i) $t=-7$, 즉 $x^2+5x=-7$일 때

$x^2+5x+7=0$의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4\cdot1\cdot7=-3<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $t=-3$, 즉 $x^2+5x=-3$일 때

$x^2+5x+3=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=5^2-4\cdot1\cdot3=13>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 두 실근 $\alpha,\ \beta$는 $x^2+5x+3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-5,\ \alpha\beta=3$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-5)^2-4\cdot3=13$ 답 ③

0804

유형 03 $x^4+ax^2+b=0(a\neq0)$ 꼴의 풀이

| 전략 | $x^2=t$로 치환한 후 좌변을 인수분해한다.

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-7t-18=0,\ (t+2)(t-9)=0 \qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=9$

즉, $x^2=-2$ 또는 $x^2=9$이므로

$x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm3$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=-2+(-2)+9+9=14$ 답 ⑤

0805

유형 05 삼·사차방정식의 근이 주어질 때 미정계수 구하기

| 전략 | 삼차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 α이면 $f(\alpha)=0$임을 이용한다.

$f(x)=x^3+ax^2-x+b$로 놓으면

$f(1)=0$에서 $1+a-1+b=0$

$\therefore a+b=0$ …… ㉠

$f(2)=0$에서 $8+4a-2+b=0$

$\therefore 4a+b=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=2$

$\therefore ab=-4$ 답 ①

0806

유형 06 삼차방정식의 근의 조건이 주어질 때 미정계수 구하기

| 전략 | 삼차방정식의 근을 판별할 때는 삼차방정식을 $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)=0$ 꼴로 인수분해한 후 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 이용한다.

$f(x)=x^3+x^2+2(k-1)x-2k$로 놓으면

$f(1)=1+1+2(k-1)-2k=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 2k-2 & -2k \\ & & 1 & 2 & 2k \\ \hline & 1 & 2 & 2k & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+2x+2k)$

ㄱ. 방정식 $f(x)=0$은 항상 $x=1$을 근으로 가지므로 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면

(i) 이차방정식 $x^2+2x+2k=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우

$1+2+2k=0 \qquad \therefore k=-\dfrac{3}{2}$

(ii) 이차방정식 $x^2+2x+2k=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2-1\cdot2k=0,\ 2k=1 \qquad \therefore k=\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 실수 k의 값은 $-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}$의 2개이다. (거짓)

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$의 근이 모두 실수이려면 이차방정식 $x^2+2x+2k=0$의 근이 모두 실수이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=1^2-1\cdot2k\geq0,\ 2k\leq1 \qquad \therefore k\leq\dfrac{1}{2}$

즉, 실수 k의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0807

유형 07 삼차방정식의 근과 계수의 관계

| 전략 | 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$일 때, $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$임을 이용한다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2,\ \alpha\beta\gamma=-3$이므로

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$

$=1\cdot\{1^2-3\cdot(-2)\}+3\cdot(-3)=-2$ 답 ①

0808

유형 07 삼차방정식의 근과 계수의 관계

|**전략**| 주어진 삼차방정식의 세 근을 $\alpha-1, \alpha, \alpha+1$이라 하고 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

주어진 삼차방정식의 세 근이 연속한 정수이므로 세 근을 $\alpha-1, \alpha, \alpha+1$($\alpha$는 정수)이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha-1)+\alpha+(\alpha+1)=a \qquad \therefore a=3\alpha$ ...... ㉠

$\alpha(\alpha-1)+\alpha(\alpha+1)+(\alpha+1)(\alpha-1)=26$

$3\alpha^2-1=26, \alpha^2=9 \qquad \therefore \alpha=-3$ 또는 $\alpha=3$

(i) $\alpha=-3$일 때, ㉠에서 $a=-9$

그런데 $a>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha=3$일 때, ㉠에서 $a=9$

따라서 세 근은 $2, 3, 4$이므로

$2\cdot3\cdot4=-b \qquad \therefore b=-24$

$\therefore a+b=-15$

답 ⑤

0809

유형 10 방정식 $x^3=1, x^3=-1$의 허근의 성질

|**전략**| $x^3=-1$의 한 허근이 ω이면 $\overline{\omega}$도 $x^3=-1$의 한 허근임을 이용한다.
(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0, (x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^2-x+1=0$의 한 허근이 ω이고, 계수가 실수이므로 나머지 한 허근은 $\overline{\omega}$이다.

즉, $\omega^3=-1, \omega^2-\omega+1=0, \overline{\omega}^3=-1, \overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0, \omega\overline{\omega}=1$이므로

$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6+\omega^7+\omega^8$

$=1+\omega+\omega^2-1-\omega-\omega^2+1+\omega+\omega^2$

$=1+\omega+\omega^2=1+\omega+(\omega-1)=2\omega$

같은 방법으로 $1+\overline{\omega}+\overline{\omega}^2+\cdots+\overline{\omega}^8=2\overline{\omega}$

$\therefore (1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^8)(1+\overline{\omega}+\overline{\omega}^2+\cdots+\overline{\omega}^8)$

$=2\omega\cdot2\overline{\omega}=4\omega\overline{\omega}=4\cdot1=4$

답 ④

0810

유형 15 연립이차방정식의 해의 조건

|**전략**| 일차방정식을 이차방정식에 대입하여 얻은 새로운 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 실근을 가지면 $D\geq0$이다.

주어진 연립방정식을 만족시키는 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+2(a-5)t+(a^2+5)=0$의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-5)^2-1\cdot(a^2+5)\geq0, -10a+20\geq0 \qquad \therefore a\leq2$

따라서 실수 a의 최댓값은 2이다.

답 ②

다른 풀이 $\begin{cases} x+y=2(5-a) & \cdots\cdots ㉠ \\ xy=a^2+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+2(5-a)$ ...... ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x\{-x+2(5-a)\}=a^2+5, x^2+2(a-5)x+a^2+5=0$

이 이차방정식이 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-5)^2-1\cdot(a^2+5)\geq0, -10a+20\geq0 \qquad \therefore a\leq2$

따라서 실수 a의 최댓값은 2이다.

0811

유형 16 연립이차방정식의 활용

|**전략**| $\overline{CD}=x, \overline{AB}=y$라 하고 주어진 조건을 이용하여 연립이차방정식을 세운다.

두 삼각형 ABC, DBA에서

$\angle BCA=\angle BAD$, $\angle B$는 공통이므로

$\triangle ABC \backsim \triangle DBA$ (AA 닮음)

$\overline{CD}=x, \overline{AB}=y$라 하면 $\overline{AC}=x-1$

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{DB}:\overline{DA}$이므로 $y:(x-1)=8:6$

$8(x-1)=6y \qquad \therefore x=\frac{3}{4}y+1$ ...... ㉠

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DB}:\overline{BA}$이므로 $y:(8+x)=8:y$

$8(8+x)=y^2 \qquad \therefore y^2=8x+64$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $y^2=8\times\left(\frac{3}{4}y+1\right)+64$

$y^2-6y-72=0, (y-12)(y+6)=0$

$\therefore y=12 \ (\because y>0)$

$y=12$를 ㉠에 대입하면 $x=10$

$\therefore \overline{AB}=12, \overline{BC}=8+10=18, \overline{CA}=10-1=9$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

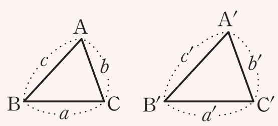
$12+18+9=39$

답 ③

Lecture

삼각형의 닮음 조건

다음 각 조건을 만족시킬 때, 두 삼각형은 서로 닮음이다.



① 세 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같다.
$a:a'=b:b'=c:c'$

② 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고 그 끼인각의 크기가 같다.
$a:a'=c:c'$, $\angle B=\angle B'$

③ 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같다.
$\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$

0812

유형 18 정수 조건의 부정방정식

|**전략**| 근과 계수의 관계를 이용하여 (일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 고치고 두 근을 구한다.

이차방정식 $x^2-(a+1)x-2a+1=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a+1$ ...... ㉠

$\alpha\beta=-2a+1$ ...... ㉡

㉠×2+㉡을 하면 $2\alpha+2\beta+\alpha\beta=3$

$\alpha(\beta+2)+2(\beta+2)-4=3 \qquad \therefore (\alpha+2)(\beta+2)=7$

이때, α, β는 음의 정수이므로

$\alpha+2$	-7	-1
$\beta+2$	-1	-7

$\therefore \begin{cases} \alpha=-9 \\ \beta=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=-3 \\ \beta=-9 \end{cases}$

㉠에서 $-9+(-3)=a+1$

$\therefore a=-13$

답 ④

0813

유형 08 삼차방정식의 작성

|전략| 세 수 α, β, γ를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$이다.

삼차방정식 $x^3-2x^2+7x+a=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta+\gamma=2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=7, \alpha\beta\gamma=-a$ … ❶

삼차방정식 $x^3+bx^2+cx-14=0$의 세 근이 $\alpha+1, \beta+1, \gamma+1$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=-b$에서

$\alpha+\beta+\gamma+3=-b \quad \therefore b=-5$

$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)=c$에서

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+2(\alpha+\beta+\gamma)+3=c \quad \therefore c=14$

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=14$에서

$\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1=14$

$-a+10=14 \quad \therefore a=-4$ … ❷

$\therefore a+b+c=5$ … ❸

답 5

채점 기준	배점
❶ 삼차방정식 $x^3-2x^2+7x+a=0$에서 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	2점
❷ 삼차방정식 $x^3+bx^2+cx-14=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b, c의 값을 구할 수 있다.	4점
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	1점

0814

유형 16 연립이차방정식의 활용

|전략| 처음 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm라 하고 주어진 조건을 이용하여 연립이차방정식을 세운다.

처음 직육면체의 밑면의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면 밑면의 대각선의 길이가 10 cm이므로

$x^2+y^2=100$ …… ㉠

밑면의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 1 cm씩 줄였더니 부피가 처음 직육면체의 부피보다 65 cm³만큼 줄어들었으므로

$5(x-1)(y-1)=5xy-65 \quad \therefore y=14-x$ …… ㉡ … ❶

㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2+(14-x)^2=100$

$x^2-14x+48=0, (x-6)(x-8)=0 \quad \therefore x=6$ 또는 $x=8$

㉡에서 $x=6$이면 $y=8$, $x=8$이면 $y=6$ … ❷

따라서 처음 직육면체의 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이의 차는

$8-6=2$(cm) … ❸

답 2 cm

채점 기준	배점
❶ 연립방정식을 세울 수 있다.	3점
❷ 연립방정식의 해를 구할 수 있다.	3점
❸ 처음 직육면체의 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이의 차를 구할 수 있다.	1점

0815

유형 09 삼차방정식의 켤레근

|전략| 계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $2-i$이므로 $2+i$도 근이다.

(1) 주어진 삼차방정식의 계수가 모두 실수이므로 한 근이 $2-i$이면 $2+i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(2-i)+(2+i)=-1 \quad \therefore \alpha=-5$

따라서 주어진 삼차방정식의 나머지 두 근은 $2+i$, -5이다.

(2) $a=(-5)\cdot(2-i)+(2-i)\cdot(2+i)+(2+i)\cdot(-5)=-15$

$-b=(-5)\cdot(2-i)\cdot(2+i)=-25 \quad \therefore b=25$

$\therefore a+b=10$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 삼차방정식의 켤레근과 나머지 한 근을 구할 수 있다.	5점
(2) $a+b$의 값을 구할 수 있다.	5점

창의·융합 **실력 마스터**

0816

|전략| 인수정리와 조립제법을 이용하여 구한 삼차방정식의 근 중 삼각형의 결정 조건을 만족시키는 x의 값을 찾는다.

$f(x)=x^3-8x^2-(k-12)x+2k$로 놓으면

$f(2)=8-32-2k+24+2k=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -8 & -k+12 & 2k \\ & & 2 & -12 & -2k \\ \hline & 1 & -6 & -k & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2-6x-k)$

즉, $(x-2)(x^2-6x-k)=0$에서

$x=2$ 또는 $x^2-6x-k=0$

이등변삼각형의 세 변의 길이가 주어진 방정식의 세 근이므로

(i) 두 변의 길이가 모두 2일 때

$x^2-6x-k=0$의 한 근이 $x=2$이므로

$4-12-k=0 \quad \therefore k=-8$

$x^2-6x+8=0$에서 $(x-2)(x-4)=0 \quad \therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 삼차방정식의 세 근이 2, 2, 4이다.

그런데 세 변의 길이가 2, 2, 4이면 삼각형이 결정되지 않는다.

(ii) 등변이 아닌 다른 한 변의 길이가 2일 때

$x^2-6x-k=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot(-k)=0 \quad \therefore k=-9$

$x^2-6x+9=0$에서 $(x-3)^2=0 \quad \therefore x=3$ (중근)

따라서 삼차방정식의 세 근은 2, 3, 3이다.

이때, 세 변의 길이가 2, 3, 3이면 삼각형이 결정된다.

(i), (ii)에서 구하는 k의 값은 -9이다.

답 -9

0817

|전략| 인수정리와 삼차방정식의 켤레근의 성질을 이용하여 방정식 $f(x)=0$의 세 근을 구한다.

조건 (가)에서 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 가지므로 -1은 방정식 $f(x)=0$의 한 근이다.

조건 (나)에서 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $1-\sqrt{2}i$이고 계수가 모두 실수이므로 $1+\sqrt{2}i$도 근이다.

삼차방정식 $f(2x+3)=0$에서

$2x+3=-1$ 또는 $2x+3=1-\sqrt{2}i$ 또는 $2x+3=1+\sqrt{2}i$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\dfrac{-2-\sqrt{2}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-2+\sqrt{2}i}{2}$

따라서 구하는 모든 근의 곱은

$(-2)\cdot\dfrac{-2-\sqrt{2}i}{2}\cdot\dfrac{-2+\sqrt{2}i}{2}=-3$ 답 -3

0818

| 전략 | 직육면체의 세 모서리의 길이를 a cm, b cm, c cm라 하고, 모든 모서리의 길이의 합, 겉넓이, 부피를 각각 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다.

직육면체의 세 모서리의 길이를 a cm, b cm, c cm라 하면

모든 모서리의 길이의 합이 56 cm이므로

$4(a+b+c)=56 \qquad \therefore a+b+c=14$

겉넓이가 112 cm^{2}이므로

$2(ab+bc+ca)=112 \qquad \therefore ab+bc+ca=56$

부피가 64 cm^{3}이므로 $abc=64$

이때, a, b, c를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-14x^2+56x-64=0$

$f(x)=x^3-14x^2+56x-64$라 하면
$f(2)=8-56+112-64=0$

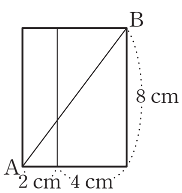
$(x-2)(x^2-12x+32)=0$, $(x-2)(x-4)(x-8)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=8$

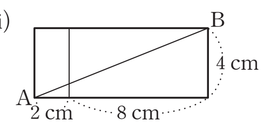
즉, 직육면체의 세 모서리의 길이는 2 cm, 4 cm, 8 cm이다.

전개도를 이용하여 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B에 이르는 가장 짧은 거리를 구하면

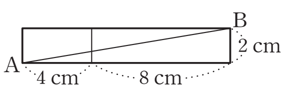
(i)



(ii)



(iii)



(i)에서 $\overline{AB}=\sqrt{6^2+8^2}=10$(cm)

(ii)에서 $\overline{AB}=\sqrt{10^2+4^2}=2\sqrt{29}$(cm)

(iii)에서 $\overline{AB}=\sqrt{12^2+2^2}=2\sqrt{37}$(cm)

따라서 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B에 이르는 가장 짧은 거리는 10 cm이다. 답 ②

0819

| 전략 | $x>y$일 때와 $x<y$일 때로 나누어 각 연립방정식을 푼다.

(i) $x>y$일 때

$x\vee y=x$이므로 $2x^2+y^2=x$ …… ㉠

$x\wedge y=y$이므로 $2x^2+y^2-1=y$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$x-y=1 \qquad \therefore y=x-1$

이것을 ㉠에 대입하면

$2x^2+(x-1)^2=x \qquad \therefore 3x^2-3x+1=0$

이때, 이차방정식 $3x^2-3x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot3\cdot1=-3<0$이므로 실수 x는 존재하지 않는다.

(ii) $x<y$일 때

$x\vee y=y$이므로 $2x^2+y^2=y$ …… ㉢

$x\wedge y=x$이므로 $2x^2+y^2-1=x$ …… ㉣

㉢$-$㉣을 하면

$y-x=1 \qquad \therefore y=x+1$ …… ㉤

이것을 ㉢에 대입하면

$2x^2+(x+1)^2=x+1$, $3x^2+x=0$

$x(3x+1)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=-\dfrac{1}{3}$

㉤에서 $x=0$이면 $y=1$, $x=-\dfrac{1}{3}$이면 $y=\dfrac{2}{3}$

(i), (ii)에서 α, β는 정수이므로 $\alpha=0$, $\beta=1$

$\therefore \alpha+\beta=1$ 답 1

0820

| 전략 | 직사각형 EBCI의 넓이는 a, 정사각형 EFGH의 넓이는 b^2임을 이용하여 연립방정식을 세운다.

$\overline{AB}=a$, $\overline{EF}=b$이고 $\overline{AF}=5$, $\overline{EB}=1$이므로

$a+b=5+1 \qquad \therefore a=6-b$ …… ㉠

직사각형 EBCI의 넓이는 a, 정사각형 EFGH의 넓이는 b^2이고,

$1\cdot a=a$

직사각형 EBCI의 넓이가 정사각형 EFGH의 넓이의 $\dfrac{1}{4}$이므로

$a=\dfrac{1}{4}b^2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $6-b=\dfrac{1}{4}b^2$

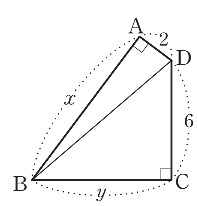
$b^2+4b-24=0 \qquad \therefore b=-2\pm2\sqrt{7}$

이때, ㉠과 $a<b$에 의하여 $6-b<b$이므로 $b>3$이다.

$\therefore b=-2+2\sqrt{7}$ 답 ③

0821

| 전략 | $\overline{BD}$를 그은 후 $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=y$라 하고 피타고라스 정리를 이용하여 방정식을 세운다.



$\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=y$라 하고 $\overline{BD}$를 그으면

두 직각삼각형에서 피타고라스 정리에 의하여

$x^2+2^2=y^2+6^2$, $x^2-y^2=32$

$\therefore (x+y)(x-y)=32$

이때, x, y는 자연수이고 $x+y>x-y$이므로

$x+y$	8	16	32
$x-y$	4	2	1

$\begin{cases}x+y=8\\x-y=4\end{cases}$에서 $x=6$, $y=2$

$\begin{cases}x+y=16\\x-y=2\end{cases}$에서 $x=9$, $y=7$

$\begin{cases}x+y=32\\x-y=1\end{cases}$에서 $x=\dfrac{33}{2}$, $y=\dfrac{31}{2}$

$\therefore \begin{cases}x=6\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=9\\y=7\end{cases}$ ($\because x$, y는 자연수)

따라서 사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은

$2+6+x+y=2+6+9+7=24$ 답 24

8 연립일차부등식

본책 120~131쪽

STEP 1 개념 마스터

0822 답 $-2<x\le3$

0823 답 $x>4$

0824 답 $x\le-3$

0825 답 $1<x<3$

0826 답 $-2<x\le5$

0827 답 $x<1$

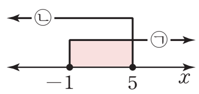
0828 답 $x\ge2$

0829

$\begin{cases} x+4\ge3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x\le10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\ge-1$

㉡에서 $x\le5$



따라서 주어진 연립부등식의 해는

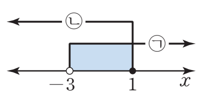
$-1\le x\le5$ 답 $-1\le x\le5$

0830

$\begin{cases} 2x+7>1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-1\le2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x>-3$

㉡에서 $x\le1$



따라서 주어진 연립부등식의 해는

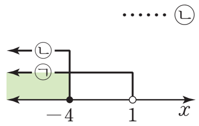
$-3<x\le1$ 답 $-3<x\le1$

0831

$\begin{cases} 4x-1<3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+5\le x-3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x<1$

㉡에서 $x\le-4$



따라서 주어진 연립부등식의 해는

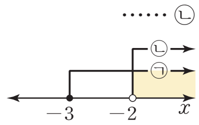
$x\le-4$ 답 $x\le-4$

0832

$\begin{cases} 3x+7\ge x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+1>3x-3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\ge-3$

㉡에서 $x>-2$



따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x>-2$ 답 $x>-2$

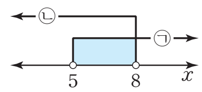
0833

$\begin{cases} 4+3x<5x-6 & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{x-1}{7}>\dfrac{x-5}{3} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x>5$

㉡의 양변에 21을 곱하면

$3x-3>7x-35$ $\therefore x<8$



따라서 주어진 연립부등식의 해는

$5<x<8$ 답 $5<x<8$

0834

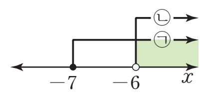
$\begin{cases} 0.7x+5.9\ge1 & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{x+2}{4}-\dfrac{x-3}{3}<2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 양변에 10을 곱하면

$7x+59\ge10$ $\therefore x\ge-7$

㉡의 양변에 12를 곱하면

$3x+6-4x+12<24$ $\therefore x>-6$



따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x>-6$ 답 $x>-6$

0835 답 $x=2$

0836 답 해가 없다.

0837 답 해가 없다.

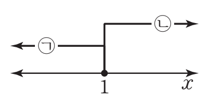
0838 답 해가 없다.

0839

$\begin{cases} 5-3x\ge2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+3\ge5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\le1$

㉡에서 $x\ge1$



따라서 주어진 연립부등식의 해는

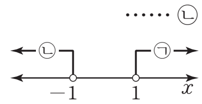
$x=1$ 답 $x=1$

0840

$\begin{cases} 5x+1>6 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-11<-13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x>1$

㉡에서 $x<-1$



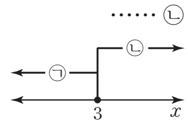
따라서 주어진 연립부등식은 해가 없다. 답 해가 없다.

0841

$\begin{cases} 4x-5\le7 & \cdots\cdots ㉠ \\ 10-2x\le x+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\le3$

㉡에서 $x\ge3$



따라서 주어진 연립부등식의 해는

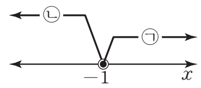
$x=3$ 답 $x=3$

0842

$\begin{cases} 3-4x\le 7 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x-2<3x-4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\ge -1$

㉡에서 $x<-1$



따라서 주어진 연립부등식은 해가 없다.

답 해가 없다.

0843

$|5-x|\le 2$에서 $-2\le 5-x\le 2$

$-7\le -x\le -3$ $\qquad \therefore 3\le x\le 7$

답 $3\le x\le 7$

0844

$|3x+1|\ge 4$에서 $3x+1\le -4$ 또는 $3x+1\ge 4$

$3x\le -5$ 또는 $3x\ge 3$ $\qquad \therefore x\le -\frac{5}{3}$ 또는 $x\ge 1$

답 $x\le -\frac{5}{3}$ 또는 $x\ge 1$

0845

$|x-3|<3x$에서

(i) $x<3$일 때, $-(x-3)<3x$

$-4x<-3$ $\qquad \therefore x>\frac{3}{4}$

그런데 $x<3$이므로 $\frac{3}{4}<x<3$

(ii) $x\ge 3$일 때, $x-3<3x$

$-2x<3$ $\qquad \therefore x>-\frac{3}{2}$

그런데 $x\ge 3$이므로 $x\ge 3$

(i), (ii)에서 $x>\frac{3}{4}$

답 $x>\frac{3}{4}$

0846

(1) $x<-1$이면 $x+1<0$, $x-2<0$이므로 주어진 부등식은

$-(x+1)-(x-2)<5$, $-x-1-x+2<5$

$-2x<4$ $\qquad \therefore x>-2$

그런데 $x<-1$이므로 $-2<x<-1$

(2) $-1\le x<2$이면 $x+1\ge 0$, $x-2<0$이므로 주어진 부등식은

$x+1-(x-2)<5$, $x+1-x+2<5$

즉, $0\cdot x<2$이므로 부등식의 해는 모든 실수이다.

그런데 $-1\le x<2$이므로 $-1\le x<2$

(3) $x\ge 2$이면 $x+1>0$, $x-2\ge 0$이므로 주어진 부등식은

$x+1+x-2<5$

$2x<6$ $\qquad \therefore x<3$

그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x<3$

(4) (1), (2), (3)에서 주어진 부등식의 해는 $-2<x<3$

답 풀이 참조

STEP 2 유형 마스터

유형 01 연립일차부등식의 풀이 (개념 02)

(i) 각 일차부등식의 해를 구한다.

(ii) (i)의 해를 수직선 위에 나타낸다.

(iii) 공통부분을 찾아 연립부등식의 해를 구한다.

0847

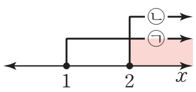
$\begin{cases} 5(x+1)\ge x+9 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+3\le 3(x-1)+2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $5x+5\ge x+9$ $\qquad \therefore x\ge 1$

㉡에서 $x+3\le 3x-1$ $\qquad \therefore x\ge 2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x\ge 2$



답 $x\ge 2$

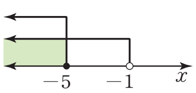
0848

① $-3x+4>7$에서 $x<-1$

$2x\le -10$에서 $x\le -5$

따라서 연립부등식의 해는

$x\le -5$

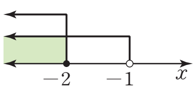


② $3x>5x+2$에서 $x<-1$

$x-5\le -7$에서 $x\le -2$

따라서 연립부등식의 해는

$x\le -2$

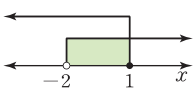


③ $x+4>2$에서 $x>-2$

$3x-1\le 2$에서 $x\le 1$

따라서 연립부등식의 해는

$-2<x\le 1$

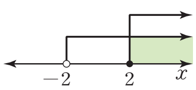


④ $2x\ge 4$에서 $x\ge 2$

$3x+2>-4$에서 $x>-2$

따라서 연립부등식의 해는

$x\ge 2$

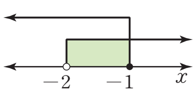


⑤ $7-x<9$에서 $x>-2$

$3x+8\le 5$에서 $x\le -1$

따라서 연립부등식의 해는

$-2<x\le -1$



답 ③

0849

$\begin{cases} -x+1\le 2x-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3(2x+1)-4(x+1)\le 7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

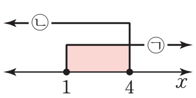
㉠에서 $x\ge 1$

㉡에서 $6x+3-4x-4\le 7$ $\qquad \therefore x\le 4$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$1\le x\le 4$이므로 x의 값이 될 수 없는 것은

⑤이다.



답 ⑤

0850

$$\begin{cases} 4x-(-2-9x)<3x+7 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5(x-1)\geq x-9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

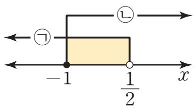
㉠에서 $4x+2+9x<3x+7$

$10x<5 \qquad \therefore x<\frac{1}{2}$

㉡에서 $5x-5\geq x-9$

$4x\geq -4 \qquad \therefore x\geq -1$

따라서 주어진 연립부등식의 해는



$-1\leq x<\frac{1}{2}$이므로

$M=0,\ m=-1$

$\therefore M-m=1$

답 1

유형 02 계수가 유리수 또는 무리수인 연립일차부등식의 풀이

개념 02

(1) 계수가 분수일 때 ⇨ 양변에 분모의 최소공배수를 곱한다.
(2) 계수가 소수일 때 ⇨ 양변에 10의 거듭제곱을 곱한다.
(3) 계수가 무리수일 때 ⇨ 분모의 유리화를 이용한다.

0851

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3}-\frac{5x-3}{4}<1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 0.5(x-1)+0.8\geq 0.2(x+3) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 12를 곱하면

$4(x-2)-3(5x-3)<12,\ 4x-8-15x+9<12$

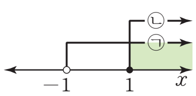
$-11x<11 \qquad \therefore x>-1$

㉡의 양변에 10을 곱하면

$5(x-1)+8\geq 2(x+3),\ 5x-5+8\geq 2x+6$

$3x\geq 3 \qquad \therefore x\geq 1$

따라서 주어진 연립부등식의 해는



$x\geq 1$

답 ⑤

0852

$$\begin{cases} 2(3x-1)-6<12x+5 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{x-2}{2}-\frac{x+1}{3}\leq\frac{1}{6} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $6x-2-6<12x+5$

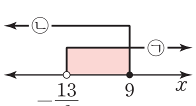
$-6x<13 \qquad \therefore x>-\frac{13}{6}$

㉡의 양변에 6을 곱하면

$3(x-2)-2(x+1)\leq 1$

$3x-6-2x-2\leq 1 \qquad \therefore x\leq 9$

따라서 주어진 연립부등식의 해는



$-\frac{13}{6}<x\leq 9$

이므로 정수 x의 최댓값은 9이다.

답 ④

0853

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x-2.1<x+4.4 & \cdots\cdots ㉠ \\ \sqrt{2}x\leq 3(\sqrt{2}x-1)+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 10을 곱하면

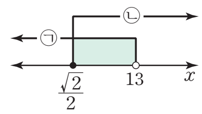
$15x-21<10x+44$

$5x<65 \qquad \therefore x<13$

㉡에서 $\sqrt{2}x\leq 3\sqrt{2}x-3+1$

$2\sqrt{2}x\geq 2 \qquad \therefore x\geq\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 주어진 연립부등식의 해는



$\frac{\sqrt{2}}{2}\leq x<13$

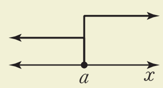
이므로 정수 x는 1, 2, 3, ⋯, 12의 12개이다.

답 12

유형 03 특수한 해를 갖는 연립일차부등식의 풀이

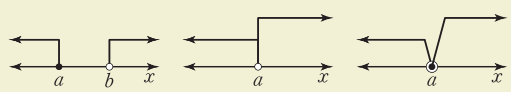
개념 03

(1) 연립부등식의 해가 한 개인 경우



⇨ 공통부분이 $x=a$뿐이다.

(2) 연립부등식의 해가 없는 경우



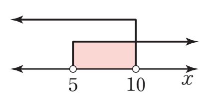
⇨ 공통부분이 없다.

0854

① $x-2>3$에서 $x>5$

$2x-6<14$에서 $x<10$

따라서 연립부등식의 해는



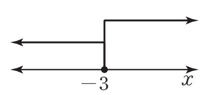
$5<x<10$

② $3x-1\geq 5(x+1)$에서 $3x-1\geq 5x+5$

$-2x\geq 6 \qquad \therefore x\leq -3$

$3x+4\geq -2+x$에서 $x\geq -3$

따라서 연립부등식의 해는

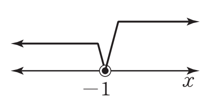


$x=-3$

③ $2x+3<-x$에서 $x<-1$

$3(1-x)\leq 2(2-x)$에서

$3-3x\leq 4-2x \qquad \therefore x\geq -1$



따라서 연립부등식의 해가 없다.

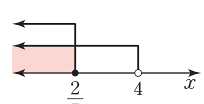
④ $5+2x>-(8-5x)+1$에서 $5+2x>-8+5x+1$

$-3x>-12 \qquad \therefore x<4$

$5-2(x+2)\geq 3x-1$에서 $5-2x-4\geq 3x-1$

$-5x\geq -2 \qquad \therefore x\leq\frac{2}{5}$

따라서 연립부등식의 해는



$x\leq\frac{2}{5}$

⑤ $2(3x-1) \le 4(x+1)$에서 $6x-2 \le 4x+4$

$2x \le 6 \qquad \therefore x \le 3$

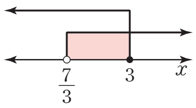
$1-\dfrac{x-4}{2} < \dfrac{2x-1}{2}$의 양변에 2를 곱하면

$2-(x-4) < 2x-1,\ 2-x+4 < 2x-1$

$-3x < -7 \qquad \therefore x > \dfrac{7}{3}$

따라서 연립부등식의 해는

$\dfrac{7}{3} < x \le 3$



답 ③

0855

$$\begin{cases} 2(x+5) > 7x & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{3(1-x)}{2} \le -(x+1) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $2x+10 > 7x \qquad \therefore x < 2$

㉡의 양변에 2를 곱하면

$3(1-x) \le -2(x+1)$

$3-3x \le -2x-2 \qquad \therefore x \ge 5$

따라서 주어진 연립부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 ④와 같다.

답 ④

0856

$$\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2} \le \dfrac{2x+3}{5} & \cdots\cdots ㉠ \\ 3-\dfrac{1}{4}(x+1) \le \dfrac{1}{2}(2x+3) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 10을 곱하면

$5(3x-1) \le 2(2x+3),\ 15x-5 \le 4x+6$

$11x \le 11 \qquad \therefore x \le 1$

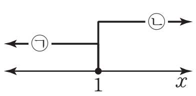
㉡의 양변에 4를 곱하면

$12-(x+1) \le 2(2x+3),\ 12-x-1 \le 4x+6$

$-5x \le -5 \qquad \therefore x \ge 1$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x=1$



답 $x=1$

유형 04 해가 주어진 연립일차부등식

개념 02, 03

각 일차부등식을 풀어 공통부분을 구한 후 이 공통부분을 주어진 연립일차부등식의 해와 비교하여 미정계수의 값을 구한다.

0857

$$\begin{cases} x-a < 3x-4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x-7 < 13-x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x > \dfrac{4-a}{2}$

㉡에서 $x < 4$

이때, 주어진 연립부등식의 해가 $-1 < x < 4$이므로

$\dfrac{4-a}{2} = -1,\ 4-a=-2 \qquad \therefore a=6$

답 6

0858

$$\begin{cases} x+a < 2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-\sqrt{2} \le 3x-b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x < 2-a$

㉡에서 $x \ge \dfrac{b-\sqrt{2}}{2}$

이때, 수직선 위에 나타낸 연립부등식의 해가 $\sqrt{2} \le x < 5$이므로

$2-a=5,\ \dfrac{b-\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

따라서 $a=-3,\ b=3\sqrt{2}$이므로

$ab=-9\sqrt{2}$

답 $-9\sqrt{2}$

0859

$$\begin{cases} 2x-a \le x+3a & \cdots\cdots ㉠ \\ x-b \le 3x-a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x \le 4a$ … ❶

㉡에서 $x \ge \dfrac{a-b}{2}$ … ❷

이때, 주어진 연립부등식의 해가 $5 \le x \le 12$이므로

$4a=12,\ \dfrac{a-b}{2}=5$

따라서 $a=3,\ b=-7$이므로

$ab=-21$ … ❸

답 -21

채점 기준	비율
❶ ㉠의 해를 구할 수 있다.	30 %
❷ ㉡의 해를 구할 수 있다.	30 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	40 %

0860

$2(x-5)^2-15=-4x+3$에서

$2(x^2-10x+25)-15=-4x+3$

$x^2-8x+16=0,\ (x-4)^2=0$

$\therefore x=4$

한편, $\begin{cases} 6x+a \le 2(x+7) & \cdots\cdots ㉠ \\ 2(x+1) \le 7x+b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $6x+a \le 2x+14 \qquad \therefore x \le \dfrac{14-a}{4}$

㉡에서 $2x+2 \le 7x+b \qquad \therefore x \ge \dfrac{2-b}{5}$

이때, 주어진 연립부등식의 해가 $x=4$이므로

$\dfrac{14-a}{4}=4,\ \dfrac{2-b}{5}=4$

$14-a=16,\ 2-b=20$

따라서 $a=-2,\ b=-18$이므로

$a+b=-20$

답 ①

유형 05 해를 갖거나 갖지 않는 연립일차부등식 개념 02, 03

(1) 연립부등식의 해가 없는 경우
⇨ 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내었을 때 공통부분이 없어야 한다.
(2) 연립부등식이 해를 갖는 경우
⇨ 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내었을 때 공통부분이 생겨야 한다.

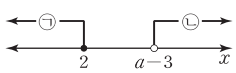
0861

$\begin{cases} 2(5-x)\ge 3x & \cdots\cdots ㉠ \\ x-a>-3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $10-2x\ge 3x$ $\quad\therefore x\le 2$

㉡에서 $x>a-3$

주어진 연립부등식의 해가 없으려면 오른쪽 그림에서



$a-3\ge 2$ $\quad\therefore a\ge 5$

답 ⑤

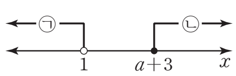
0862

$\begin{cases} 3x+2<x+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+3\le 2x-a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x<1$

㉡에서 $x\ge a+3$

주어진 연립부등식의 해가 없으려면 오른쪽 그림에서



$a+3\ge 1$ $\quad\therefore a\ge -2$

따라서 음의 정수 a는 -2, -1의 2개이다.

답 ①

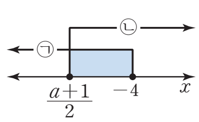
0863

$\begin{cases} 4(x-1)\ge 5x & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+1\ge a+2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $4x-4\ge 5x$ $\quad\therefore x\le -4$

㉡에서 $x\ge \dfrac{a+1}{2}$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$\dfrac{a+1}{2}\le -4$, $a+1\le -8$

$\therefore a\le -9$

답 $a\le -9$

0864

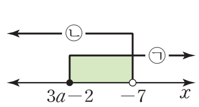
$\begin{cases} \dfrac{x+2}{3}\ge a & \cdots\cdots ㉠ \\ 2(x-3)>3x+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 양변에 3을 곱하면

$x+2\ge 3a$ $\quad\therefore x\ge 3a-2$

㉡에서 $2x-6>3x+1$ $\quad\therefore x<-7$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$3a-2<-7$, $3a<-5$ $\quad\therefore a<-\dfrac{5}{3}$

따라서 정수 a의 최댓값은 -2이다.

답 -2

유형 06 정수인 해의 개수가 주어진 연립일차부등식 개념 02

정수인 해의 개수가 n개일 때
⇨ 공통부분이 n개의 정수를 포함하도록 연립일차부등식의 해를 수직선 위에 나타낸다.

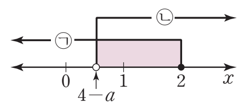
0865

$\begin{cases} 3x+5\le 11 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+a>x+4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\le 2$

㉡에서 $x>4-a$

이때, 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이려면 오른쪽 그림에서



$0\le 4-a<1$, $-4\le -a<-3$

$\therefore 3<a\le 4$

답 $3<a\le 4$

Lecture

실수 p에 대하여 $x<a<y$일 때
(1) $x+p<a+p<y+p$
(2) $p>0$이면 $\quad px<pa<py$
$\quad p<0$이면 $\quad py<pa<px$

0866

$\begin{cases} 3x+21\le 5(x+3) & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x-a\le 2(x-5) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

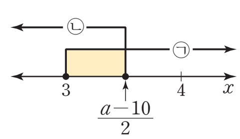
㉠에서 $3x+21\le 5x+15$

$-2x\le -6$ $\quad\therefore x\ge 3$

㉡에서 $4x-a\le 2x-10$

$2x\le a-10$ $\quad\therefore x\le \dfrac{a-10}{2}$

이때, 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 1개뿐이려면 오른쪽 그림에서



$3\le \dfrac{a-10}{2}<4$, $6\le a-10<8$

$\therefore 16\le a<18$

따라서 a의 값이 될 수 있는 것은 ④이다.

답 ④

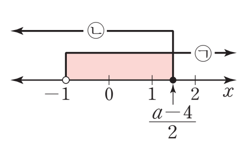
0867

$\begin{cases} 6-2x<7-x & \cdots\cdots ㉠ \\ 4-3x\le -5x+a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x>-1$

㉡에서 $2x\le a-4$ $\quad\therefore x\le \dfrac{a-4}{2}$

이때, 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이려면 오른쪽 그림에서



$1\le \dfrac{a-4}{2}<2$, $2\le a-4<4$

$\therefore 6\le a<8$

따라서 실수 a의 최솟값은 6이다.

답 6

0868

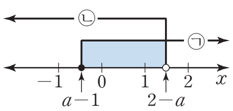
$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}\ge\dfrac{x}{6}+\dfrac{a}{3} & \cdots\cdots ㉠ \\ 2(x+1)>3x+a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 6을 곱하면

$3x+2\ge x+2a$ $\quad\therefore x\ge a-1$

㉡에서 $2x+2>3x+a$ $\quad\therefore x<2-a$ ··· ❶

이때, 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 0과 1뿐이려면 오른쪽 그림에서



(i) $-1<a-1\le 0$ $\quad\therefore 0<a\le 1$

(ii) $1<2-a\le 2$, $-1<-a\le 0$ $\quad\therefore 0\le a<1$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $0<a<1$ ··· ❸

답 $0<a<1$

채점 기준	비율
❶ 주어진 연립부등식의 각각의 해를 a로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 주어진 조건을 만족시키는 연립부등식의 해의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 실수 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %

유형 07 연립일차부등식의 활용 (개념 02)

(i) 구하고자 하는 값을 미지수 x로 놓는다.
(ii) 주어진 조건에 맞게 연립부등식을 세운다.
(iii) 연립부등식을 풀어 문제의 답을 구한다.

0869

연속하는 세 정수를 $x-1$, x, $x+1$이라 하면

$$\begin{cases} (x-1)+x+(x+1)\ge 33 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-1)+x-(x+1)<10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $3x\ge 33$ $\quad\therefore x\ge 11$

㉡에서 $x-2<10$ $\quad\therefore x<12$

$\therefore 11\le x<12$

이때, x는 정수이므로 $x=11$

따라서 세 정수 중 가운데 수는 11이다.

답 ①

0870

우유를 x개 산다고 하면 빵은 $(10-x)$개 살 수 있으므로

$$\begin{cases} 800(10-x)+1000x\le 9200 & \cdots\cdots ㉠ \\ x>10-x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $8000-800x+1000x\le 9200$

$200x\le 1200$ $\quad\therefore x\le 6$

㉡에서 $2x>10$ $\quad\therefore x>5$

$\therefore 5<x\le 6$

따라서 우유는 6개 살 수 있다.

답 ①

0871

2 %의 소금물을 x g 섞는다고 하면

$$\begin{cases} \dfrac{10}{100}\times 300+\dfrac{2}{100}x\ge\dfrac{5}{100}(300+x) & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{10}{100}\times 300+\dfrac{2}{100}x\le\dfrac{7}{100}(300+x) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $3000+2x\ge 1500+5x$

$3x\le 1500$ $\quad\therefore x\le 500$

㉡에서 $3000+2x\le 2100+7x$

$5x\ge 900$ $\quad\therefore x\ge 180$

$\therefore 180\le x\le 500$

따라서 2 %의 소금물을 180 g 이상 500 g 이하로 섞어야 한다.

답 ④

Lecture

(1) (소금물의 농도) $=\dfrac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})}\times 100$ (%)

(2) (소금의 양) $=\dfrac{(\text{소금물의 농도})}{100}\times$ (소금물의 양)

0872

섭취해야 하는 식품 A의 양을 x g이라 하면 식품 B는 $(200-x)$ g 섭취해야 하므로

$$\begin{cases} \dfrac{170}{100}x+\dfrac{370}{100}(200-x)\ge 400 & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{20}{100}x+\dfrac{10}{100}(200-x)\ge 30 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $17x+7400-37x\ge 4000$

$-20x\ge -3400$ $\quad\therefore x\le 170$

㉡에서 $2x+200-x\ge 300$ $\quad\therefore x\ge 100$

$\therefore 100\le x\le 170$

따라서 섭취해야 하는 식품 A의 양은 100 g 이상 170 g 이하이다.

답 100 g 이상 170 g 이하

0873

상자의 개수를 x라 하면

$$\begin{cases} 30x+60\le 1500 & \cdots\cdots ㉠ \\ 36x-210\ge 1500 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $30x\le 1440$ $\quad\therefore x\le 48$

㉡에서 $36x\ge 1710$ $\quad\therefore x\ge\dfrac{95}{2}$

$\therefore \dfrac{95}{2}\le x\le 48$

이때, x는 자연수이므로 $x=48$

따라서 상자는 48개이다.

답 48개

0874

의자의 개수를 x라 하면 학생은 $(4x+6)$명이다.

이때 한 의자에 5명씩 앉으면 의자 4개가 남고 마지막 의자에는 최소 1명에서 최대 5명까지 앉을 수 있으므로

$$\begin{cases} 5(x-5)+1\le 4x+6 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+6\le 5(x-5)+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $5x-24\le 4x+6$ $\quad\therefore x\le 30$

㉡에서 $4x+6\le 5x-20$ $\quad\therefore x\ge 26$

$\therefore 26\le x\le 30$

이때, x는 자연수이므로 $x=26, 27, 28, 29, 30$

따라서 의자의 개수가 될 수 있는 것은 ②이다.

답 ②

유형 08 $|ax+b|<c$, $|ax+b|>c$ 꼴의 부등식의 풀이

개념 04

$|ax+b|<c$ 또는 $|ax+b|>c$ $(c>0)$꼴의 부등식은 다음을 이용하여 절댓값 기호를 없앤 후 푼다.

(1) $|ax+b|<c \Rightarrow -c<ax+b<c$

(2) $|ax+b|>c \Rightarrow ax+b<-c$ 또는 $ax+b>c$

0875

$|2-3x|\le 4$에서 $-4\le 2-3x\le 4$

$-6\le -3x\le 2$ $\quad\therefore -\frac{2}{3}\le x\le 2$

따라서 정수 x는 0, 1, 2의 3개이다.

답 ③

0876

$|2x+a|\ge 3$에서 $2x+a\le -3$ 또는 $2x+a\ge 3$

$\therefore x\le \frac{-3-a}{2}$ 또는 $x\ge \frac{3-a}{2}$

주어진 부등식의 해가 $x\le -1$ 또는 $x\ge b$이므로

$\frac{-3-a}{2}=-1$, $\frac{3-a}{2}=b$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로

$b-a=3$

답 ④

0877

$ab<0$이므로 $b\ne 0$

$b<0$이면 $|ax-1|\le b$의 해가 존재하지 않으므로 $b>0$

이때, $ab<0$이므로 $a<0$

$|ax-1|\le b$에서 $-b\le ax-1\le b$

$1-b\le ax\le 1+b$

$\therefore \frac{1+b}{a}\le x\le \frac{1-b}{a}$ $(\because a<0)$

주어진 부등식의 해가 $-3\le x\le 2$이므로

$\frac{1+b}{a}=-3$, $\frac{1-b}{a}=2$

$\therefore 3a+b=-1$, $2a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=5$

$\therefore ab=-10$

답 -10

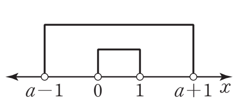
참고 절댓값은 항상 0보다 크거나 같으므로 $b\ge 0$이어야 한다.
이때, $ab<0$에서 $b\ne 0$이므로 $b>0$이다.

0878

$|x-a|<1$에서 $-1<x-a<1$

$\therefore a-1<x<a+1$

$a-1<x<a+1$이 $0<x<1$을 포함하려면 오른쪽 그림에서



(i) $a-1\le 0$ $\quad\therefore a\le 1$

(ii) $a+1\ge 1$ $\quad\therefore a\ge 0$

(i), (ii)에서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$0\le a\le 1$

답 $0\le a\le 1$

유형 09 $|ax+b|<cx+d$ 꼴의 부등식의 풀이

개념 04

$|ax+b|<cx+d$ 꼴의 부등식

⇨ 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값인 $-\frac{b}{a}$를 기준으로 x의 값의 범위를 $x<-\frac{b}{a}$, $x\ge -\frac{b}{a}$로 나누어 푼다.

0879

$2|x-2|<-x+5$에서

(i) $x<2$일 때, $-2(x-2)<-x+5$

$-x<1$ $\quad\therefore x>-1$

그런데 $x<2$이므로 $-1<x<2$

(ii) $x\ge 2$일 때, $2(x-2)<-x+5$

$3x<9$ $\quad\therefore x<3$

그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x<3$

(i), (ii)에서 $-1<x<3$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로

$a+b=2$

답 ⑤

0880

$|4-x|\le 8-x$에서

(i) $x<4$일 때, $4-x\le 8-x$

$0\cdot x\le 4$ $\quad\therefore$ 해는 모든 실수

그런데 $x<4$이므로 $x<4$

(ii) $x\ge 4$일 때, $-(4-x)\le 8-x$

$2x\le 12$ $\quad\therefore x\le 6$

그런데 $x\ge 4$이므로 $4\le x\le 6$

(i), (ii)에서 $x\le 6$

따라서 자연수 x는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

답 ③

0881

$|2x-3|\ge x+4$에서

(i) $x<\frac{3}{2}$일 때, $-(2x-3)\ge x+4$

$-3x\ge 1$ $\quad\therefore x\le -\frac{1}{3}$

그런데 $x<\frac{3}{2}$이므로 $x\le -\frac{1}{3}$

(ii) $x\ge \frac{3}{2}$일 때, $2x-3\ge x+4$ $\quad\therefore x\ge 7$

그런데 $x\ge \frac{3}{2}$이므로 $x\ge 7$

(i), (ii)에서 $x\le -\frac{1}{3}$ 또는 $x\ge 7$

따라서 자연수 x의 최솟값은 7이다.

답 7

0882

$2|x-1|<3x-7$에서

(i) $x<1$일 때, $-2(x-1)<3x-7$

$-5x<-9$ $\quad\therefore x>\frac{9}{5}$

그런데 $x<1$이므로 해는 없다.

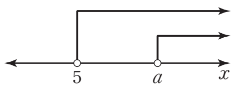
(ii) $x\ge1$일 때, $2(x-1)<3x-7$

$-x<-5$　　$\therefore x>5$

그런데 $x\ge1$이므로 $x>5$

(i), (ii)에서 $x>5$

따라서 $x>5$가 $x>a$를 포함하려면 오른쪽 그림에서



$a\ge5$

답 ④

유형 10 절댓값 기호를 2개 포함한 부등식의 풀이 개념 04

일차식 $f(x), g(x)$에 대하여 $f(a)=0, g(b)=0\,(a<b)$일 때,
$|f(x)|+|g(x)|<c\,(c>0)$ 꼴의 부등식
⇨ x의 값의 범위를 $x<a$, $a\le x<b$, $x\ge b$인 경우로 나누어 푼다.

0883

$2|x-1|+3|x+1|\le6$에서

(i) $x<-1$일 때, $-2(x-1)-3(x+1)\le6$

$-5x\le7$　　$\therefore x\ge-\frac{7}{5}$

그런데 $x<-1$이므로 $-\frac{7}{5}\le x<-1$

(ii) $-1\le x<1$일 때, $-2(x-1)+3(x+1)\le6$　　$\therefore x\le1$

그런데 $-1\le x<1$이므로 $-1\le x<1$

(iii) $x\ge1$일 때, $2(x-1)+3(x+1)\le6$

$5x\le5$　　$\therefore x\le1$

그런데 $x\ge1$이므로 $x=1$

(i), (ii), (iii)에서 $-\frac{7}{5}\le x\le1$

따라서 정수 x는 $-1, 0, 1$의 3개이다.　　답 ③

0884

$|2x+3|-|x-3|>9$에서

(i) $x<-\frac{3}{2}$일 때, $-(2x+3)+(x-3)>9$

$-x>15$　　$\therefore x<-15$

그런데 $x<-\frac{3}{2}$이므로 $x<-15$　　… ❶

(ii) $-\frac{3}{2}\le x<3$일 때, $2x+3+(x-3)>9$

$3x>9$　　$\therefore x>3$

그런데 $-\frac{3}{2}\le x<3$이므로 해는 없다.　　… ❷

(iii) $x\ge3$일 때, $2x+3-(x-3)>9$　　$\therefore x>3$

그런데 $x\ge3$이므로 $x>3$　　… ❸

(i), (ii), (iii)에서 $x<-15$ 또는 $x>3$　　… ❹

답 $x<-15$ 또는 $x>3$

채점 기준	비율
❶ $x<-\frac{3}{2}$일 때의 부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❷ $-\frac{3}{2}\le x<3$일 때의 부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❸ $x\ge3$일 때의 부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❹ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	10 %

0885

$2\sqrt{(x+1)^2}+|x-4|\le8$에서 $2|x+1|+|x-4|\le8$

(i) $x<-1$일 때, $-2(x+1)-(x-4)\le8$

$-3x\le6$　　$\therefore x\ge-2$

그런데 $x<-1$이므로 $-2\le x<-1$

(ii) $-1\le x<4$일 때, $2(x+1)-(x-4)\le8$　　$\therefore x\le2$

그런데 $-1\le x<4$이므로 $-1\le x\le2$

(iii) $x\ge4$일 때, $2(x+1)+x-4\le8$

$3x\le10$　　$\therefore x\le\frac{10}{3}$

그런데 $x\ge4$이므로 해는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 $-2\le x\le2$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=2$이므로

$\alpha+\beta=0$　　답 ③

Lecture

실수 A에 대하여 $\sqrt{A^2}=|A|=\begin{cases} A\ (A\ge0) \\ -A\ (A<0)\end{cases}$

0886

$||x-2|-1|\le2$에서 $-2\le|x-2|-1\le2$

$\therefore -1\le|x-2|\le3$

그런데 $|x-2|\ge0$이므로 $0\le|x-2|\le3$

$-3\le x-2\le3$　　$\therefore -1\le x\le5$

따라서 정수 x는 $-1, 0, 1, \cdots, 5$이므로 그 합은 14이다.　　답 14

다른 풀이 $||x-2|-1|\le2$에서

(i) $x<2$일 때, $-2\le|-(x-2)-1|\le2$, $-2\le|-x+1|\le2$

이때, $|-x+1|\ge0$이므로 $0\le|-x+1|\le2$

$-2\le-x+1\le2$, $-3\le-x\le1$

$\therefore -1\le x\le3$

그런데 $x<2$이므로 $-1\le x<2$

(ii) $x\ge2$일 때, $-2\le|x-2-1|\le2$, $-2\le|x-3|\le2$

이때, $|x-3|\ge0$이므로 $0\le|x-3|\le2$

$-2\le x-3\le2$

$\therefore 1\le x\le5$

그런데 $x\ge2$이므로 $2\le x\le5$

(i), (ii)에서 $-1\le x\le5$

따라서 정수 x는 $-1, 0, 1, \cdots, 5$이므로 그 합은 14이다.

유형 11 절댓값 기호를 포함한 부등식의 해의 조건이 주어진 경우 개념 04

(1) $|ax+b|<c$의 해가 없다. ⇨ $c\le0$
(2) $|ax+b|\le c$의 해가 없다. ⇨ $c<0$
(3) $|ax+b|>c$의 해가 모든 실수이다. ⇨ $c<0$
(4) $|ax+b|\ge c$의 해가 모든 실수이다. ⇨ $c\le0$

0887

$|2x+1|>a+2$의 해가 모든 실수이려면

$a+2<0$　　$\therefore a<-2$　　답 ①

0888

$|4x-1|\geq 0$이므로 $|4x-1|\leq 9-3k$의 해가 존재하지 않으려면

$9-3k<0 \qquad \therefore k>3$

따라서 정수 k의 최솟값은 4이다. 답 4

0889

$\sqrt{(3x+2)^2}\leq 2a-6$에서 $|3x+2|\leq 2a-6$

그런데 $|3x+2|\geq 0$이므로 이 부등식의 해가 존재하려면

$2a-6\geq 0 \qquad \therefore a\geq 3$ 답 $a\geq 3$

0890

$|x-a|\geq 0$이므로 $|x-a|\leq a^2-7a$를 만족시키는 해가 오직 한 개만 존재하려면

$a^2-7a=0,\ a(a-7)=0 \qquad \therefore a=0$ 또는 $a=7$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 7이다. 답 7

참고 $a=0$일 때, $|x|\leq 0 \qquad \therefore x=0$

$a=7$일 때, $|x-7|\leq 0 \qquad \therefore x=7$

STEP 3 내신 마스터

0891

유형 01 연립일차부등식의 풀이

|전략| 각 일차부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.

$$\begin{cases} x-2>4x-17 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3(x-2)-2\geq 2x-5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

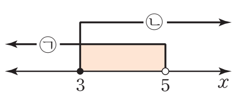
㉠에서 $x<5$

㉡에서 $3x-6-2\geq 2x-5 \qquad \therefore x\geq 3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$3\leq x<5$이므로 $a=3,\ b=5$

$\therefore a+b=8$



답 ④

0892

유형 01 연립일차부등식의 풀이

|전략| 각 일차부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾고 정수 x의 최댓값과 최솟값을 찾는다.

$$\begin{cases} 3x-1-(x-2)<4x+7 & \cdots\cdots ㉠ \\ 6(x+1)-2<4x+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $3x-1-x+2<4x+7$

$-2x<6 \qquad \therefore x>-3$

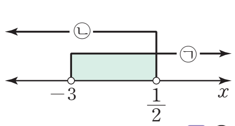
㉡에서 $6x+6-2<4x+5$

$2x<1 \qquad \therefore x<\frac{1}{2}$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-3<x<\frac{1}{2}$이므로 $M=0,\ m=-2$

$\therefore M+m=-2$



답 ②

0893

유형 02 계수가 유리수 또는 무리수인 연립일차부등식의 풀이

|전략| 먼저 연립부등식의 해를 구하고 부등식의 성질을 이용하여 $A=-2x+3$의 최솟값을 구한다.

$$\begin{cases} \sqrt{3}(x+\sqrt{3})>2(x+2) & \cdots\cdots ㉠ \\ -2-\dfrac{x+2}{3}\geq\dfrac{x-4}{9} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\sqrt{3}x+3>2x+4$

$\sqrt{3}-2<0$이므로 부등호의 방향이 바뀜.

$(\sqrt{3}-2)x>1 \qquad \therefore x<\frac{1}{\sqrt{3}-2}=-2-\sqrt{3}$

㉡의 양변에 9를 곱하면

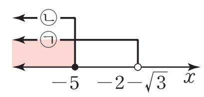
$-18-3(x+2)\geq x-4$

$-18-3x-6\geq x-4 \qquad \therefore x\leq -5$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x\leq -5$이므로

$-2x\geq 10 \qquad \therefore -2x+3\geq 13$



즉, $A\geq 13$이므로 A의 최솟값은 13이다. 답 ⑤

0894

유형 04 해가 주어진 연립일차부등식

|전략| 각 부등식의 해의 공통부분이 $x<-2$임을 이용한다.

$$\begin{cases} \dfrac{3x-a}{2}>4x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{2x-1}{3}\leq\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{x-1}{6} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 2를 곱하면

$3x-a>2(4x+3)$

$3x-a>8x+6 \qquad \therefore x<-\frac{a+6}{5}$

㉡의 양변에 6을 곱하면

$2(2x-1)\leq 2(x+1)+x-1$

$4x-2\leq 2x+2+x-1 \qquad \therefore x\leq 3$

이때, 주어진 연립부등식의 해가 $x<-2$이므로

$-\frac{a+6}{5}=-2 \qquad \therefore a=4$ 답 ④

0895

유형 03 특수한 해를 갖는 연립일차부등식의 풀이 + 04 해가 주어진 연립일차부등식

|전략| 연립부등식의 해를 구하고 이를 이용하여 중근을 갖는 이차방정식을 작성한다.

$$\begin{cases} 2(x+1)\geq 3x-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x-6\geq 2(x-1)+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $2x+2\geq 3x-1 \qquad \therefore x\leq 3$

㉡에서 $5x-6\geq 2x-2+5$

$3x\geq 9 \qquad \therefore x\geq 3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $x=3$이므로 이차방정식

$x^2+ax+b=0$은 $x=3$을 중근으로 갖는다.

즉, $(x-3)^2=x^2-6x+9=0$이 구하는 이차방정식과 같으므로

$a=-6,\ b=9 \qquad \therefore b-a=15$ 답 ④

0896

유형 06 정수인 해의 개수가 주어진 연립일차부등식

|전략| 각 부등식의 해를 구한 후 모든 정수 x의 값의 합이 9가 되도록 수직선 위에 나타내어 실수 a의 값의 범위를 구한다.

$\begin{cases} 2x+3>5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x<a+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x>1$

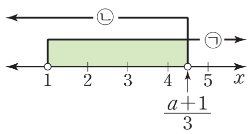
㉡에서 $x<\dfrac{a+1}{3}$

연립부등식이 해를 가져야 하므로

$1<x<\dfrac{a+1}{3}$

이때, 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 9가 되어야 하므로 정수 x의 값은 2, 3, 4이다.

즉, 오른쪽 그림에서



$4<\dfrac{a+1}{3}\le 5$ $\quad\therefore 11<a\le 14$

따라서 자연수 a의 최댓값은 14이다.

답 ⑤

0897

유형 07 연립일차부등식의 활용

|전략| 물을 x g 더 넣는다고 하고 설탕물의 농도에 대한 연립부등식을 세운다.

7 %의 설탕물 300 g에 들어 있는 설탕의 양은

$\dfrac{7}{100}\times 300=21\ (\text{g})$

물을 x g 더 넣는다고 하면

$\begin{cases} \dfrac{21}{300+x}\times 100\ge 4 & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{21}{300+x}\times 100\le 6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $4(300+x)\le 2100$

$4x\le 900$ $\quad\therefore x\le 225$

㉡에서 $6(300+x)\ge 2100$

$6x\ge 300$ $\quad\therefore x\ge 50$

$\therefore 50\le x\le 225$

따라서 $a=50$, $b=225$이므로

$a+b=275$

답 ④

0898

유형 07 연립일차부등식의 활용

|전략| 연속하는 네 홀수를 $x-3$, $x-1$, $x+1$, $x+3$으로 놓고 주어진 조건에 맞게 연립부등식을 세운다.

연속하는 네 홀수를 $x-3$, $x-1$, $x+1$, $x+3$ (x는 짝수)이라 하면

$\begin{cases} (x-3)+(x-1)+(x+1)+(x+3)>24 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2(x+3)>(x-3)+(x-1)+(x+1) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $4x>24$ $\quad\therefore x>6$

㉡에서 $2x+6>3x-3$ $\quad\therefore x<9$

$\therefore 6<x<9$

이때, x는 짝수이므로 $x=8$

따라서 네 홀수는 5, 7, 9, 11이므로 가장 큰 수는 11이다.

답 ②

0899

유형 08 $|ax+b|<c$, $|ax+b|>c$ 꼴의 부등식의 풀이

|전략| 부등식 $|ax-2|>b$의 해를 이용하여 상수 a, b의 부호를 결정한다.

$b<0$이면 $|ax-2|>b$의 해가 모든 실수이므로 $b>0$

이때, $ab>0$이므로 $a>0$

$|ax-2|>b$에서 $ax-2<-b$ 또는 $ax-2>b$

$\therefore x<\dfrac{-b+2}{a}$ 또는 $x>\dfrac{b+2}{a}$

주어진 부등식의 해가 $x<-1$ 또는 $x>3$이므로

$\dfrac{-b+2}{a}=-1$, $\dfrac{b+2}{a}=3$

$\therefore a-b=-2$, $3a-b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$

$\therefore ab=8$

답 ②

0900

유형 08 $|ax+b|<c$, $|ax+b|>c$ 꼴의 부등식의 풀이

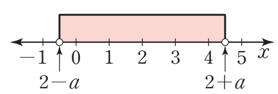
|전략| 주어진 부등식의 해를 만족시키는 정수가 5개 포함되도록 수직선 위에 나타내 본다.

$a\le 0$이면 $|x-2|<a$의 해가 존재하지 않으므로 $a>0$

$|x-2|<a$에서 $-a<x-2<a$

$\therefore 2-a<x<2+a$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이려면 오른쪽 그림에서



(i) $-1\le 2-a<0$

$-3\le -a<-2$ $\quad\therefore 2<a\le 3$

(ii) $4<2+a\le 5$ $\quad\therefore 2<a\le 3$

(i), (ii)에서 $2<a\le 3$

따라서 정수 a의 값은 3이다.

답 ③

0901

유형 05 해를 갖거나 갖지 않는 연립일차부등식 + 09 $|ax+b|<cx+d$ 꼴의 부등식의 풀이

|전략| 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분이 존재하지 않도록 수직선 위에 나타내 본다.

$\begin{cases} |x-1|\le 2x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2(x+1)<x-a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서

(i) $x<1$일 때, $-(x-1)\le 2x+1$ $\quad\therefore x\ge 0$

그런데 $x<1$이므로 $0\le x<1$

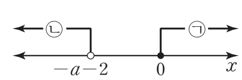
(ii) $x\ge 1$일 때, $x-1\le 2x+1$ $\quad\therefore x\ge -2$

그런데 $x\ge 1$이므로 $x\ge 1$

(i), (ii)에서 $x\ge 0$

㉡에서 $2x+2<x-a$ $\quad\therefore x<-a-2$

이때, 주어진 연립부등식의 해가 없으려면 ㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않아야 하므로 오른쪽 그림에서



$-a-2\le 0$ $\quad\therefore a\ge -2$

답 ③

0902

유형 10 절댓값 기호를 2개 포함한 부등식의 풀이

|전략| $x<0$, $0\le x<\frac{1}{2}$, $x\ge\frac{1}{2}$로 범위를 나누어 푼다.

$|2x-1|-|x|\ge2$에서

(i) $x<0$일 때, $-(2x-1)+x\ge2$

$-x\ge1$ $\quad\therefore x\le-1$

그런데 $x<0$이므로 $x\le-1$

(ii) $0\le x<\frac{1}{2}$일 때, $-(2x-1)-x\ge2$

$-3x\ge1$ $\quad\therefore x\le-\frac{1}{3}$

그런데 $0\le x<\frac{1}{2}$이므로 해는 없다.

(iii) $x\ge\frac{1}{2}$일 때, $2x-1-x\ge2$ $\quad\therefore x\ge3$

그런데 $x\ge\frac{1}{2}$이므로 $x\ge3$

(i), (ii), (iii)에서 $x\le-1$ 또는 $x\ge3$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로

$a-b=-4$

답 ①

0903

유형 08 $|ax+b|<c$, $|ax+b|>c$ 꼴의 부등식의 풀이

\+ **10** 절댓값 기호를 2개 포함한 부등식의 풀이

|전략| 두 부등식의 해를 각각 구하여 해가 같아지는 상수 k의 값을 구한다.

$3|x+1|\le2|x+2|$에서

(i) $x<-2$일 때, $-3(x+1)\le-2(x+2)$

$-x\le-1$ $\quad\therefore x\ge1$

그런데 $x<-2$이므로 해는 없다.

(ii) $-2\le x<-1$일 때, $-3(x+1)\le2(x+2)$

$-5x\le7$ $\quad\therefore x\ge-\frac{7}{5}$

그런데 $-2\le x<-1$이므로 $-\frac{7}{5}\le x<-1$

(iii) $x\ge-1$일 때, $3(x+1)\le2(x+2)$ $\quad\therefore x\le1$

그런데 $x\ge-1$이므로 $-1\le x\le1$

(i), (ii), (iii)에서 $-\frac{7}{5}\le x\le1$ ······ ㉠

$|5x+k|\le6$에서 $-6\le5x+k\le6$

$-6-k\le5x\le6-k$ $\quad\therefore \frac{-6-k}{5}\le x\le\frac{6-k}{5}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{-6-k}{5}=-\frac{7}{5}$, $\frac{6-k}{5}=1$이므로

$k=1$

답 ③

0904

유형 11 절댓값 기호를 포함한 부등식의 해의 조건이 주어진 경우

|전략| $x<0$, $0\le x<2$, $x\ge2$로 범위를 나누어 해가 존재할 조건을 구한다.

$|x|+|x-2|\le a$에서

(i) $x<0$일 때, $-x-(x-2)\le a$ $\quad\therefore x\ge\frac{2-a}{2}$

그런데 $x<0$이므로 해가 존재하려면

$\frac{2-a}{2}<0$ $\quad\therefore a>2$

(ii) $0\le x<2$일 때, $x-(x-2)\le a$, $0\cdot x\le a-2$

해가 존재하려면

$a-2\ge0$ $\quad\therefore a\ge2$

(iii) $x\ge2$일 때, $x+x-2\le a$ $\quad\therefore x\le\frac{a+2}{2}$

그런데 $x\ge2$이므로 해가 존재하려면

$\frac{a+2}{2}\ge2$ $\quad\therefore a\ge2$

(i), (ii), (iii)에서 $a\ge2$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

답 ①

0905

유형 01 연립일차부등식의 풀이

|전략| 각 일차부등식을 풀어 a, b의 값을 구하고, 이를 대입한 연립부등식의 해를 구한다.

$-3x+1<-5$에서 $x>2$ $\quad\therefore a=2$ ··· ❶

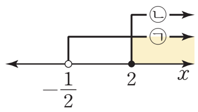
$2x+\frac{2}{3}\le x-\frac{1}{3}$에서 $x\le-1$ $\quad\therefore b=-1$ ··· ❷

$a=2$, $b=-1$을 주어진 연립부등식에 대입하면

$$\begin{cases}2x+1>0 & \cdots\cdots ㉠\\ -x+2\le0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $x>-\frac{1}{2}$

㉡에서 $x\ge2$



따라서 구하는 연립부등식의 해는

$x\ge2$ ··· ❸

답 $x\ge2$

채점 기준	배점
❶ a의 값을 구할 수 있다.	1점
❷ b의 값을 구할 수 있다.	1점
❸ 연립일차부등식의 해를 구할 수 있다.	4점

0906

유형 06 정수인 해의 개수가 주어진 연립일차부등식

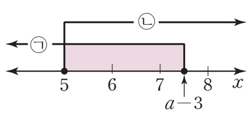
|전략| 각 부등식의 해를 구한 후 정수가 3개 포함되도록 수직선 위에 나타내 본다.

$$\begin{cases}x+a\ge3+2x & \cdots\cdots ㉠\\ 2(x-1)\ge x+3 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $x\le a-3$ ··· ❶

㉡에서 $2x-2\ge x+3$ $\quad\therefore x\ge5$ ··· ❷

이때, 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이려면 오른쪽 그림에서



$7\le a-3<8$

$\therefore 10\le a<11$ ··· ❸

답 $10\le a<11$

채점 기준	배점
❶ ㉠의 해를 구할 수 있다.	1점
❷ ㉡의 해를 구할 수 있다.	1점
❸ 조건을 만족시키는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	4점

0907

유형 10 절댓값 기호를 2개 포함한 부등식의 풀이

|전략| $x<-1$, $-1\leq x<2$, $x\geq 2$로 범위를 나누어 푼다.

$2|x+1|+|2-x|<6$에서

(i) $x<-1$일 때, $-2(x+1)+2-x<6$

$-3x<6$ $\quad\therefore x>-2$

그런데 $x<-1$이므로 $-2<x<-1$ … ❶

(ii) $-1\leq x<2$일 때, $2(x+1)+2-x<6$ $\quad\therefore x<2$

그런데 $-1\leq x<2$이므로 $-1\leq x<2$ … ❷

(iii) $x\geq 2$일 때, $2(x+1)-(2-x)<6$

$3x<6$ $\quad\therefore x<2$

그런데 $x\geq 2$이므로 해는 없다. … ❸

(i), (ii), (iii)에서 $-2<x<2$

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로

$ab=-4$ … ❹

답 -4

채점 기준	배점
❶ $x<-1$일 때의 부등식의 해를 구할 수 있다.	2점
❷ $-1\leq x<2$일 때의 부등식의 해를 구할 수 있다.	2점
❸ $x\geq 2$일 때의 부등식의 해를 구할 수 있다.	2점
❹ 주어진 부등식의 해를 구하고 ab의 값을 구할 수 있다.	2점

0908

유형 02 계수가 유리수 또는 무리수인 연립일차부등식의 풀이

|전략| 이차방정식의 양의 실근 α를 구하고, 이를 연립부등식에 대입하여 해를 구한다.

(1) 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 해는

$x=1\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-1)}=1\pm\sqrt{2}$

$\therefore \alpha=1+\sqrt{2}$ ($\because \alpha>0$)

(2) $\alpha=1+\sqrt{2}$를 $\dfrac{2x-\alpha}{2}\leq\sqrt{2}(x-1)$에 대입하여 정리하면

$2x-1-\sqrt{2}\leq 2\sqrt{2}(x-1)$, $2x-1-\sqrt{2}\leq 2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}$

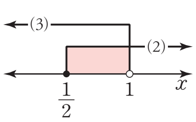
$2(\sqrt{2}-1)x\geq\sqrt{2}-1$ $\quad\therefore x\geq\dfrac{1}{2}$ ($\because \sqrt{2}-1>0$)

(3) $\alpha=1+\sqrt{2}$를 $2x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}x-\alpha)+2$에 대입하여 정리하면

$4x-\sqrt{2}<\sqrt{2}(\sqrt{2}x-1-\sqrt{2})+4$, $4x-\sqrt{2}<2x-\sqrt{2}+2$

$2x<2$ $\quad\therefore x<1$

(4) (2), (3)에서 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는



$\dfrac{1}{2}\leq x<1$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 이차방정식을 풀어 α의 값을 구할 수 있다.	2점
(2) $\dfrac{2x-\alpha}{2}\leq\sqrt{2}(x-1)$의 해를 구할 수 있다.	3점
(3) $2x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}x-\alpha)+2$의 해를 구할 수 있다.	3점
(4) 주어진 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	2점

0909

유형 07 연립일차부등식의 활용

|전략| 상자의 개수를 이용하여 사과의 개수를 나타낸다.

(1) 상자의 개수를 x라 하면 사과는 $(9x+3)$개

이때, 사과를 한 상자에 12개씩 넣으면 상자 2개가 남고 마지막 상자에는 최소 1개에서 최대 12개까지 넣을 수 있으므로

$$\begin{cases}12(x-3)+1\leq 9x+3 & \cdots\cdots ㉠\\ 9x+3\leq 12(x-3)+12 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

(2) ㉠에서 $12x-36+1\leq 9x+3$ $\quad\therefore x\leq\dfrac{38}{3}$

㉡에서 $9x+3\leq 12x-36+12$ $\quad\therefore x\geq 9$

$\therefore 9\leq x\leq\dfrac{38}{3}$

(3) x는 자연수이므로 상자의 최대 개수는 12이다.

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 주어진 조건에 맞게 연립부등식을 세울 수 있다.	4점
(2) (1)에서 세운 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	4점
(3) 상자의 최대 개수를 구할 수 있다.	2점

창의·융합 실력 마스터

0910

|전략| $a+2b>0$, $a+2b<0$인 경우로 나누어 부등식을 푼다.

(i) $a+2b>0$일 때, $\dfrac{2a+5b-5}{a+2b}<x<\dfrac{a+b-1}{a+2b}$

이때, 부등식의 해가 $4<x<5$이므로

$\dfrac{2a+5b-5}{a+2b}=4$에서 $2a+5b-5=4a+8b$

$\therefore 2a+3b=-5$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

$\dfrac{a+b-1}{a+2b}=5$에서 $a+b-1=5a+10b$

$\therefore 4a+9b=-1$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-7$, $b=3$

그런데 $a+2b=-7+6=-1<0$이므로 $a+2b>0$이 성립하지 않는다.

(ii) $a+2b<0$일 때, $\dfrac{a+b-1}{a+2b}<x<\dfrac{2a+5b-5}{a+2b}$

이때, 부등식의 해가 $4<x<5$이므로

$\dfrac{a+b-1}{a+2b}=4$에서 $a+b-1=4a+8b$

$\therefore 3a+7b=-1$ $\quad\cdots\cdots ㉢$

$\dfrac{2a+5b-5}{a+2b}=5$에서 $2a+5b-5=5a+10b$

$\therefore 3a+5b=-5$ $\quad\cdots\cdots ㉣$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=2$

이때, $a+2b=-5+4=-1<0$이므로 $a+2b<0$이 성립한다.

(i), (ii)에서 $a=-5$, $b=2$

$\therefore a+b=-3$

답 -3

0911

|전략| 각 부등식의 해의 공통부분이 $x<5$임을 이용한다.

$\begin{cases} ax+2\le x+2a & \cdots\cdots ㉠ \\ bx-a<3ax+4b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(a-1)x\le 2(a-1)$ ⋯⋯ ㉢

(ⅰ) $a<1$일 때, $a-1<0$이므로 부등식 ㉢의 해는 $x\ge 2$
이때, 연립부등식의 해는 $x<5$가 될 수 없다.

(ⅱ) $a=1$일 때, $0\cdot x\le 0$이므로 부등식 ㉢의 해는 모든 실수
이때, 연립부등식의 해는 $x<5$가 될 수 있다.

(ⅲ) $a>1$일 때, $a-1>0$이므로 부등식 ㉢의 해는 $x\le 2$
이때, 연립부등식의 해는 $x<5$가 될 수 없다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면

$bx-1<3x+4b$에서 $(b-3)x<4b+1$

이 부등식의 해가 $x<5$이어야 하므로 $b-3>0$

따라서 $x<\frac{4b+1}{b-3}$이므로 $\frac{4b+1}{b-3}=5$

$4b+1=5b-15$ $\therefore b=16$

$\therefore b-a=15$

답 ③

0912

|전략| 이차방정식이 허근을 가지려면 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+(2k-3)x+k^2+2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(2k-3)^2-4(k^2+2)<0$

$-12k+1<0$ $\therefore k>\frac{1}{12}$ ⋯⋯ ㉠

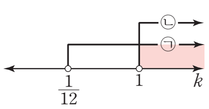
이차방정식 $x^2+2(k-2)x+k^2+k-1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(k-2)^2-(k^2+k-1)<0$

$-5k+5<0$ $\therefore k>1$ ⋯⋯ ㉡

따라서 주어진 두 이차방정식이 모두 허근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$k>1$



답 $k>1$

0913

|전략| 주어진 부등식에서 절댓값을 없앤 후 $\left[\frac{x}{4}-1\right]$은 정수임을 이용한다.

$\left|\left[\frac{x}{4}-1\right]-4\right|<2$에서 $-2<\left[\frac{x}{4}-1\right]-4<2$

$\therefore 2<\left[\frac{x}{4}-1\right]<6$

이때, $\left[\frac{x}{4}-1\right]$은 정수이므로

$\left[\frac{x}{4}-1\right]=3$ 또는 $\left[\frac{x}{4}-1\right]=4$ 또는 $\left[\frac{x}{4}-1\right]=5$

(ⅰ) $\left[\frac{x}{4}-1\right]=3$일 때, $3\le\frac{x}{4}-1<4$이므로

$4\le\frac{x}{4}<5$ $\therefore 16\le x<20$

(ⅱ) $\left[\frac{x}{4}-1\right]=4$일 때, $4\le\frac{x}{4}-1<5$이므로

$5\le\frac{x}{4}<6$ $\therefore 20\le x<24$

(ⅲ) $\left[\frac{x}{4}-1\right]=5$일 때, $5\le\frac{x}{4}-1<6$이므로

$6\le\frac{x}{4}<7$ $\therefore 24\le x<28$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $16\le x<28$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 16, 17, 18, ⋯, 27의 12개이다.

답 12

0914

|전략| $x<2$, $2\le x<5$, $x\ge 5$로 범위를 나누어 주어진 부등식의 해가 존재하지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구한다.

(ⅰ) $x<2$일 때, $-(x-2)-(x-5)=-2x+7$
이때, $x<2$이므로 $-2x>-4$, $-2x+7>3$
$\therefore |x-2|+|x-5|>3$

(ⅱ) $2\le x<5$일 때, $x-2-(x-5)=3$
$\therefore |x-2|+|x-5|=3$

(ⅲ) $x\ge 5$일 때, $x-2+x-5=2x-7$
이때, $x\ge 5$이므로 $2x\ge 10$, $2x-7\ge 3$
$\therefore |x-2|+|x-5|\ge 3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $|x-2|+|x-5|\ge 3$

즉, 주어진 부등식의 해가 존재하지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $a<3$

따라서 정수 a의 최댓값은 2이다.

답 2

0915

|전략| $\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$임을 이용하여 주어진 부등식을 정리한 후 절댓값 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나눈다.

$\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$이므로 주어진 부등식은

$\big||x+3|+|x-2|\big|\le 5$

$\therefore \underline{0\le|x+3|+|x-2|}\le 5$ $|x+3|\ge 0$, $|x-2|\ge 0$이므로 $|x+3|+|x-2|\ge 0$

(ⅰ) $x<-3$일 때, $0\le -(x+3)-(x-2)\le 5$

$1\le -2x\le 6$ $\therefore -3\le x\le -\frac{1}{2}$

그런데 $x<-3$이므로 해가 없다.

(ⅱ) $-3\le x<2$일 때, $0\le x+3-(x-2)\le 5$

$\therefore 0\le 0\cdot x+5\le 5$

즉, 부등식의 해는 모든 실수이다.

그런데 $-3\le x<2$이므로 $-3\le x<2$

(ⅲ) $x\ge 2$일 때, $0\le x+3+x-2\le 5$

$-1\le 2x\le 4$ $\therefore -\frac{1}{2}\le x\le 2$

그런데 $x\ge 2$이므로 $x=2$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $-3\le x\le 2$

따라서 $a=-3$, $b=2$이므로

$ab=-6$

답 ②

9 이차부등식과 연립이차부등식

본책 134~153쪽

STEP 1 개념 마스터 ❶

0916

(1) $f(x)>0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $x<-1$ 또는 $x>3$

(2) $f(x)<0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $-1<x<3$

(3) $f(x)\geq 0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나거나 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 3$

(4) $f(x)\leq 0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나거나 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $-1\leq x\leq 3$

답 풀이 참조

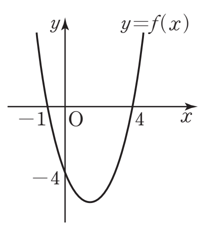
0917

이차방정식 $x^2-3x-4=0$에서

$(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

$f(x)=x^2-3x-4$라 하면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 이차부등식 $f(x)<0$의 해는 $-1<x<4$이다.



답 $-1<x<4$

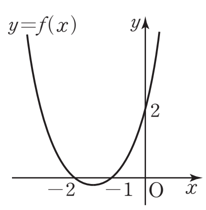
0918

이차방정식 $x^2+3x+2=0$에서

$(x+2)(x+1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

$f(x)=x^2+3x+2$라 하면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 이차부등식 $f(x)\geq 0$의 해는 $x\leq -2$ 또는 $x\geq -1$이다.



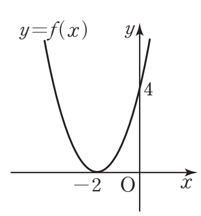
답 $x\leq -2$ 또는 $x\geq -1$

0919

$f(x)=x^2+4x+4$라 하면

$f(x)=(x+2)^2$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 이차부등식 $f(x)>0$의 해는 $x\neq -2$인 모든 실수이다.



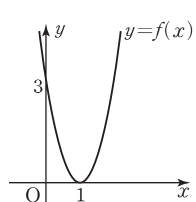
답 $x\neq -2$인 모든 실수

0920

$f(x)=3x^2-6x+3$이라 하면

$f(x)=3(x-1)^2$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 이차부등식 $f(x)<0$의 해는 없다.



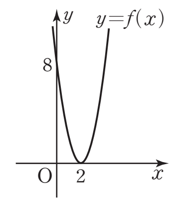
답 해는 없다.

0921

$f(x)=2x^2-8x+8$이라 하면

$f(x)=2(x-2)^2$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 이차부등식 $f(x)\leq 0$의 해는 $x=2$이다.



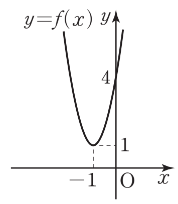
답 $x=2$

0922

$f(x)=3x^2+6x+4$라 하면

$f(x)=3(x+1)^2+1$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 이차부등식 $f(x)\geq 0$의 해는 모든 실수이다.



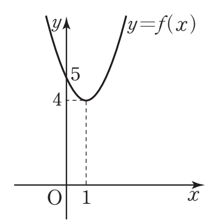
답 모든 실수

0923

$f(x)=x^2-2x+5$라 하면

$f(x)=(x-1)^2+4$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 이차부등식 $f(x)<0$의 해는 없다.



답 해는 없다.

0924

$x^2-3x-10>0$에서 $(x+2)(x-5)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>5$

답 $x<-2$ 또는 $x>5$

0925

$3x^2-7x+2\leq 0$에서 $(3x-1)(x-2)\leq 0$

$\therefore \frac{1}{3}\leq x\leq 2$

답 $\frac{1}{3}\leq x\leq 2$

0926

$10x^2-11x-6\geq 0$에서 $(5x+2)(2x-3)\geq 0$

$\therefore x\leq -\frac{2}{5}$ 또는 $x\geq \frac{3}{2}$

답 $x\leq -\frac{2}{5}$ 또는 $x\geq \frac{3}{2}$

0927

$-2x^2+5x+3<0$에서 $2x^2-5x-3>0$

$(2x+1)(x-3)>0$ $\quad\therefore x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>3$

답 $x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>3$

0928

$x^2-6x+9=(x-3)^2\geq 0$

따라서 $x^2-6x+9>0$의 해는 $x\neq 3$인 모든 실수이다.

답 $x\neq 3$인 모든 실수

0929

$x^2+4x+6=(x+2)^2+2\ge2$

따라서 $x^2+4x+6<0$의 해는 없다. 답 해는 없다.

0930

$4x^2+4x+1=(2x+1)^2\ge0$

따라서 $4x^2+4x+1\le0$의 해는 $x=-\frac{1}{2}$이다. 답 $x=-\frac{1}{2}$

0931

$2x^2+2x+1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}$

따라서 $2x^2+2x+1\ge0$의 해는 모든 실수이다. 답 모든 실수

0932

$(x+7)(x-1)<0$에서

$x^2+6x-7<0$ 답 $x^2+6x-7<0$

0933

$(x+3)(x-6)\ge0$에서

$x^2-3x-18\ge0$ 답 $x^2-3x-18\ge0$

0934

$4x^2+ax+b\le0$의 해가 $\frac{1}{4}\le x\le3$이므로

$4\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-3)\le0,\ 4\left(x^2-\frac{13}{4}x+\frac{3}{4}\right)\le0$

즉, $4x^2-13x+3\le0$에서

$a=-13,\ b=3$ 답 $a=-13,\ b=3$

0935

$6x^2+ax+b>0$의 해가 $x<-\frac{1}{3}$ 또는 $x>\frac{1}{2}$이므로

$6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)>0,\ 6\left(x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}\right)>0$

즉, $6x^2-x-1>0$에서

$a=-1,\ b=-1$ 답 $a=-1,\ b=-1$

0936

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+4x+k^2-5>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+4x+k^2-5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(k^2-5)<0,\ -k^2+9<0$

$(k+3)(k-3)>0$ $\therefore k<-3$ 또는 $k>3$

답 $k<-3$ 또는 $k>3$

0937

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-kx+4\ge0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-kx+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-16\le0,\ k^2-16\le0$

$(k+4)(k-4)\le0$ $\therefore -4\le k\le4$ 답 $-4\le k\le4$

0938

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $-x^2+kx-k-3<0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $-x^2+kx-k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2+4(-k-3)<0,\ k^2-4k-12<0$

$(k+2)(k-6)<0$ $\therefore -2<k<6$ 답 $-2<k<6$

참고 $-x^2+kx-k-3<0$에서 $x^2-kx+k+3>0$이므로
모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-kx+k+3>0$이 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구해도 된다.

0939

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $2x^2+kx-k\ge0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $2x^2+kx-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2+8k\le0,\ k(k+8)\le0$

$\therefore -8\le k\le0$ 답 $-8\le k\le0$

STEP 2 유형 마스터 ①

유형 01 그래프를 이용한 이차부등식의 풀이 개념 01

(1) 부등식 $f(x)>0$의 해
⇨ $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위
(2) 부등식 $f(x)>g(x)$의 해
⇨ $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위

0940

이차부등식 $f(x)\le0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나거나 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$-3\le x\le2$

따라서 $\alpha=-3,\ \beta=2$이므로

$\alpha\beta=-6$ 답 -6

0941

$ax^2+(b-m)x+c-n\ge0$에서 $ax^2+bx+c\ge mx+n$

따라서 주어진 이차부등식의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$과 만나거나 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $x\le-6$ 또는 $x\ge2$ 답 ④

0942

$f(x)g(x)<0$에서 $f(x)>0,\ g(x)<0$ 또는 $f(x)<0,\ g(x)>0$

(i) $f(x)>0,\ g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$x<-2$ 또는 $x>4$

(ii) $f(x)<0,\ g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$-2<x<0$

(i), (ii)에서 $x<-2$ 또는 $-2<x<0$ 또는 $x>4$

답 $x<-2$ 또는 $-2<x<0$ 또는 $x>4$

유형 02 이차부등식의 풀이 (개념 02)

x^2의 계수가 $a(a>0)$인 이차식 $f(x)$에 대하여 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때, 이차부등식의 해는 다음과 같이 구한다.
(1) $D>0$이면 인수분해 또는 근의 공식을 이용하여 해를 구한다.
이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$일 때
① $a(x-\alpha)(x-\beta)>0 \Rightarrow x<\alpha$ 또는 $x>\beta$
② $a(x-\alpha)(x-\beta)<0 \Rightarrow \alpha<x<\beta$
(2) $D\le 0$이면 $f(x)=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 해를 구한다.

0943

이차방정식 $x^2-2x-5=0$의 해는 $x=1\pm\sqrt{6}$이므로 이차부등식 $x^2-2x-5>0$의 해는
$x<1-\sqrt{6}$ 또는 $x>1+\sqrt{6}$
따라서 $\alpha=1-\sqrt{6}$, $\beta=1+\sqrt{6}$이므로
$\beta-\alpha=2\sqrt{6}$

답 $2\sqrt{6}$

0944

$(x+4)(x-1)<4x+8$에서 $x^2+3x-4<4x+8$
$x^2-x-12<0$, $(x+3)(x-4)<0$
$\therefore -3<x<4$
따라서 정수 x는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$의 6개이다.

답 6

0945

ㄱ. $x^2-8x+16=(x-4)^2\ge 0$
즉, $x^2-8x+16\le 0$의 해는 $x=4$이다.
ㄴ. $9x^2+6x+1=(3x+1)^2\ge 0$
즉, $9x^2+6x+1<0$의 해는 없다.
ㄷ. $x^2+2x+3=(x+1)^2+2\ge 2$
즉, $x^2+2x+3>0$의 해는 모든 실수이다.
ㄹ. $-3x^2+2x-3>0$에서 $3x^2-2x+3<0$
그런데 $3x^2-2x+3=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{3}\ge\frac{8}{3}$이므로
$3x^2-2x+3<0$, 즉 $-3x^2+2x-3>0$의 해는 없다.
따라서 해가 없는 부등식은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

다른 풀이 ㄱ. 이차방정식 $x^2-8x+16=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-4)^2-16=0$
이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2-8x+16\ge 0$
즉, $x^2-8x+16\le 0$의 해는 $x=4$이다.
ㄴ. 이차방정식 $9x^2+6x+1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=3^2-9=0$
이므로 모든 실수 x에 대하여 $9x^2+6x+1\ge 0$
즉, $9x^2+6x+1<0$의 해는 없다.
ㄷ. 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1^2-3=-2<0$
이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2x+3>0$
즉, $x^2+2x+3>0$의 해는 모든 실수이다.
ㄹ. $-3x^2+2x-3>0$에서 $3x^2-2x+3<0$
이차방정식 $3x^2-2x+3=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-9=-8<0$
이므로 모든 실수 x에 대하여 $3x^2-2x+3>0$에서 $-3x^2+2x-3<0$
즉, $-3x^2+2x-3>0$의 해는 없다.

0946

$x^2+2x-24\le 0$에서 $(x+6)(x-4)\le 0$
$\therefore -6\le x\le 4$
① $|x-2|\le 3$에서 $-3\le x-2\le 3$이므로 $-1\le x\le 5$
② $|x-1|\le 4$에서 $-4\le x-1\le 4$이므로 $-3\le x\le 5$
③ $|x-1|\le 5$에서 $-5\le x-1\le 5$이므로 $-4\le x\le 6$
④ $|x+1|\le 4$에서 $-4\le x+1\le 4$이므로 $-5\le x\le 3$
⑤ $|x+1|\le 5$에서 $-5\le x+1\le 5$이므로 $-6\le x\le 4$
따라서 주어진 이차부등식과 해가 같은 부등식은 ⑤이다.

답 ⑤

0947

$a<0$이므로 $ax^2-4a^2x-21a^3\ge 0$의 양변을 a로 나누면
$x^2-4ax-21a^2\le 0$, $(x-7a)(x+3a)\le 0$
이때, $7a<-3a$이므로 구하는 해는 $7a\le x\le -3a$

답 $7a\le x\le -3a$

0948

α, β가 이차방정식 $x^2-5ax+6a^2=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=5a$, $\alpha\beta=6a^2$
$(\alpha-1)(\beta-1)\le 0$에서 $\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\le 0$
$6a^2-5a+1\le 0$, $(3a-1)(2a-1)\le 0$
$\therefore \frac{1}{3}\le a\le\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{3}\le a\le\frac{1}{2}$

다른 풀이 $x^2-5ax+6a^2=0$에서 $(x-2a)(x-3a)=0$
$\therefore \alpha=2a, \beta=3a$ 또는 $\alpha=3a, \beta=2a$
이것을 $(\alpha-1)(\beta-1)\le 0$에 대입하면
$(2a-1)(3a-1)\le 0$ $\quad\therefore \frac{1}{3}\le a\le\frac{1}{2}$

유형 03 해가 주어진 이차부등식 (개념 03)

(1) 해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식
$\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)<0$
(2) 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta\,(\alpha<\beta)$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식
$\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)>0$

0949

$x^2+ax+b<0$의 해가 $-1<x<3$이므로 $(x+1)(x-3)<0$
즉, $x^2-2x-3<0$에서 $a=-2, b=-3$
이것을 $ax^2+x-b>0$에 대입하면
$-2x^2+x+3>0$, $2x^2-x-3<0$
$(x+1)(2x-3)<0$ $\quad\therefore -1<x<\frac{3}{2}$
따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\frac{3}{2}$이므로 $2\beta-\alpha=4$

답 4

0950

$ax^2+4x+b>0$의 해가 $-\frac{1}{4}<x<\frac{5}{4}$이므로

$a<0$이고 $a\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{5}{4}\right)>0$ ··· ❶

즉, $ax^2-ax-\frac{5}{16}a>0$에서

$-a=4,\ -\frac{5}{16}a=b$ $\quad\therefore a=-4,\ b=\frac{5}{4}$ ··· ❷

$\therefore ab=-5$ ··· ❸

답 -5

채점 기준	비율
❶ 조건을 만족시키는 이차부등식을 세울 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0951

$ax^2+6x-4>0$의 해가 $1<x<b$이므로

$a<0$이고 $a(x-1)(x-b)>0$

즉, $ax^2-a(b+1)x+ab>0$에서

$-a(b+1)=6,\ ab=-4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=2$

$\therefore a+b=0$ 답 ③

다른 풀이 $ax^2+6x-4>0$의 해가 $1<x<b$이므로 1, b는 이차방정식 $ax^2+6x-4=0$의 두 근이다.

이 이차방정식에 $x=1$을 대입하면

$a+6-4=0$ $\quad\therefore a=-2$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1\cdot b=\frac{-4}{a}=2$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore a+b=0$

0952

$ax^2+bx+c\le 0$의 해가 $x\le 2$ 또는 $x\ge 5$이므로

$a<0$이고 $a(x-2)(x-5)\le 0$

즉, $ax^2-7ax+10a\le 0$에서 $b=-7a,\ c=10a$

$\therefore \frac{b}{c}=\frac{-7a}{10a}=-\frac{7}{10}$ 답 ②

0953

$ax^2+bx+c>0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>7$이므로

$a>0$이고 $a(x+2)(x-7)>0$

즉, $ax^2-5ax-14a>0$에서 $b=-5a,\ c=-14a$

이것을 $bx^2-cx+3a>0$에 대입하면

$-5ax^2+14ax+3a>0$

이때, $-a<0$이므로 $5x^2-14x-3<0$

$(5x+1)(x-3)<0$ $\quad\therefore -\frac{1}{5}<x<3$

따라서 정수 x는 $0,\ 1,\ 2$의 3개이다. 답 3

0954

$ax^2+bx+c>0$의 해가 $-4<x<1$이므로

$a<0$이고 $a(x+4)(x-1)>0$

즉, $ax^2+3ax-4a>0$에서 $b=3a,\ c=-4a$

이것을 $(b+c)x^2+(a+2c)x-2b>0$에 대입하면

$-ax^2-7ax-6a>0$

이때, $-a>0$이므로 $x^2+7x+6>0$

$(x+6)(x+1)>0$ $\quad\therefore x<-6$ 또는 $x>-1$

답 $x<-6$ 또는 $x>-1$

유형 04 부등식 $f(x)<0$과 부등식 $f(ax+b)<0$의 관계 개념 03

[방법 1] (i) 주어진 해를 이용하여 이차식 $f(x)$를 작성한다.
(ii) $f(x)$에 x 대신 $ax+b$를 대입하여 $f(ax+b)<0$의 해를 구한다.

[방법 2] 주어진 해에 x 대신 $ax+b$를 대입하여 $f(ax+b)<0$의 해를 구한다.

0955

$f(x)\le 0$의 해가 $-1\le x\le 3$이므로 양수 a에 대하여

$f(x)=a(x+1)(x-3)$이라 하면

$f(2x+1)=a(2x+1+1)(2x+1-3)$

$=4a(x+1)(x-1)$

부등식 $f(2x+1)\le 0$, 즉 $4a(x+1)(x-1)\le 0$에서

$(x+1)(x-1)\le 0$ $\quad\therefore -1\le x\le 1$

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=1$이므로

$\beta-\alpha=2$ 답 2

다른 풀이 $f(x)\le 0$의 해가 $-1\le x\le 3$이므로

$f(2x+1)\le 0$의 해는 $-1\le 2x+1\le 3$에서

$-2\le 2x\le 2$ $\quad\therefore -1\le x\le 1$

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=1$이므로

$\beta-\alpha=2$

0956

$f(x)<0$의 해가 $x<-3$ 또는 $x>6$이므로 음수 a에 대하여

$f(x)=a(x+3)(x-6)$이라 하면

$f(-3x)=a(-3x+3)(-3x-6)$

$=9a(x-1)(x+2)$

부등식 $f(-3x)\ge 0$, 즉 $9a(x-1)(x+2)\ge 0$에서

$(x-1)(x+2)\le 0$ $\quad\therefore -2\le x\le 1$

따라서 $f(-3x)\ge 0$을 만족시키는 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1$이므로 그 합은 -2이다. 답 -2

다른 풀이 $f(x)<0$의 해가 $x<-3$ 또는 $x>6$이므로

$f(x)\ge 0$의 해는 $-3\le x\le 6$

$f(-3x)\ge 0$의 해는 $-3\le -3x\le 6$에서 $-2\le x\le 1$

따라서 $f(-3x)\ge 0$을 만족시키는 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1$이므로 그 합은 -2이다.

0957

$ax^2+bx+c<0$의 해가 $-1<x<2$이므로

$a>0$이고 $ax^2+bx+c=a(x+1)(x-2)$이다. 이때,

$$a(x-2)^2+b(x-2)+c=a(x-2+1)(x-2-2)$$
$$=a(x-1)(x-4)$$

이므로 부등식 $a(x-2)^2+b(x-2)+c<0$,

즉 $a(x-1)(x-4)<0$에서

$(x-1)(x-4)<0$ $\quad\therefore 1<x<4$ 답 $1<x<4$

다른 풀이 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

부등식 $a(x-2)^2+b(x-2)+c<0$은 $f(x-2)<0$이다.

$f(x)<0$의 해가 $-1<x<2$이므로

$f(x-2)<0$의 해는 $-1<x-2<2$에서 $1<x<4$

0958

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 3이므로 양수 a에 대하여 $f(x)=a(x+1)(x-3)$이라 하면

$$f\left(\frac{2x-k}{3}\right)=a\left(\frac{2x-k}{3}+1\right)\left(\frac{2x-k}{3}-3\right)$$
$$=\frac{1}{9}a(2x-k+3)(2x-k-9)$$

부등식 $f\left(\frac{2x-k}{3}\right)\le 0$, 즉 $\frac{1}{9}a(2x-k+3)(2x-k-9)\le 0$에서

$(2x-k+3)(2x-k-9)\le 0$

$\therefore \frac{k-3}{2}\le x\le \frac{k+9}{2}$

즉, 부등식의 해가 $0\le x\le 6$이므로

$\frac{k-3}{2}=0$, $\frac{k+9}{2}=6$ $\quad\therefore k=3$ 답 3

다른 풀이 $\frac{2x-k}{3}=t$로 놓으면 $f\left(\frac{2x-k}{3}\right)\le 0$에서 $f(t)\le 0$

주어진 그래프에서 $f(t)\le 0$을 만족시키는 t의 값의 범위는 $-1\le t\le 3$이므로

$-1\le\frac{2x-k}{3}\le 3$ $\quad\therefore \frac{k-3}{2}\le x\le\frac{k+9}{2}$

즉, 부등식의 해가 $0\le x\le 6$이므로

$\frac{k-3}{2}=0$, $\frac{k+9}{2}=6$ $\quad\therefore k=3$

유형 05 절댓값 기호를 포함한 이차부등식의 풀이 개념 02

$|A|=\begin{cases} A\ (A\ge 0) \\ -A\ (A<0)\end{cases}$임을 이용하여 절댓값 기호를 없앤다.

이때, A가 x에 대한 다항식이면 $A=0$이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 푼다.

0959

$x^2-2x<|x+4|$에서

(i) $x<-4$일 때, $x^2-2x<-(x+4)$

$x^2-x+4<0$

그런데 $x^2-x+4=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\ge\frac{15}{4}$이므로 해는 없다.

(ii) $x\ge -4$일 때, $x^2-2x<x+4$

$x^2-3x-4<0$, $(x+1)(x-4)<0$

$\therefore -1<x<4$

그런데 $x\ge -4$이므로 $-1<x<4$

(i), (ii)에서 $-1<x<4$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=4$이므로 $3\alpha+\beta=1$ 답 ①

0960

$x^2-5|x|-6<0$에서

(i) $x<0$일 때, $x^2+5x-6<0$

$(x+6)(x-1)<0$ $\quad\therefore -6<x<1$

그런데 $x<0$이므로 $-6<x<0$

(ii) $x\ge 0$일 때, $x^2-5x-6<0$

$(x+1)(x-6)<0$ $\quad\therefore -1<x<6$

그런데 $x\ge 0$이므로 $0\le x<6$

(i), (ii)에서 $-6<x<6$

따라서 정수 x는 $-5, -4, -3, \cdots, 5$의 11개이다. 답 ②

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 부등식은 $|x|^2-5|x|-6<0$

$(|x|+1)(|x|-6)<0$ $\quad\therefore -1<|x|<6$

그런데 $|x|\ge 0$이므로 $0\le|x|<6$

따라서 $|x|<6$에서 $-6<x<6$이므로 정수 x는 $-5, -4, -3, \cdots, 5$의 11개이다.

0961

$x^2-4|x|\le 0$에서

(i) $x<0$일 때, $x^2+4x\le 0$

$x(x+4)\le 0$ $\quad\therefore -4\le x\le 0$

그런데 $x<0$이므로 $-4\le x<0$

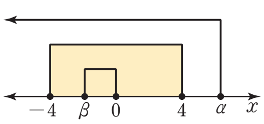
(ii) $x\ge 0$일 때, $x^2-4x\le 0$

$x(x-4)\le 0$ $\quad\therefore 0\le x\le 4$

그런데 $x\ge 0$이므로 $0\le x\le 4$

(i), (ii)에서 $-4\le x\le 4$

주어진 조건이 성립하려면 오른쪽 그림에서



$\alpha\ge 4$, $-4\le\beta<0$

따라서 $\alpha+\beta$의 최솟값은 $4+(-4)=0$ 답 ③

발전 유형 06 가우스 기호를 포함한 이차부등식의 풀이 개념 02

x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$라 할 때, 정수 n에 대하여

$[x]=n$이면 ⇨ $n\le x<n+1$

0962

$2[x]^2-[x]-1<0$에서 $(2[x]+1)([x]-1)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<[x]<1$

$[x]$는 정수이므로 $[x]=0$

$\therefore 0\le x<1$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=1$이므로 $\alpha+\beta=1$ 답 ④

0963

$[x]^2-[x]-6<0$에서 $([x]+2)([x]-3)<0$

$\therefore\ -2<[x]<3$

$[x]$는 정수이므로 $[x]=-1, 0, 1, 2$

$[x]=-1$에서 $-1\le x<0$

$[x]=0$에서 $0\le x<1$

$[x]=1$에서 $1\le x<2$

$[x]=2$에서 $2\le x<3$

따라서 구하는 부등식의 해는 $-1\le x<3$ 답 $-1\le x<3$

0964

$[x]^2+n[x]\le 0$에서 $[x]([x]+n)\le 0$

$\therefore\ -n\le[x]\le 0$ ($\because$ n은 자연수)

$[x]$는 정수이므로 $[x]=-n, -n+1, -n+2, \cdots, 0$

$[x]=-n$에서 $-n\le x<-n+1$

$[x]=-n+1$에서 $-n+1\le x<-n+2$

$[x]=-n+2$에서 $-n+2\le x<-n+3$

$\vdots$

$[x]=0$에서 $0\le x<1$

따라서 부등식 $[x]^2+n[x]\le 0$의 해는 $-n\le x<1$

이때, 부등식의 해가 $-5\le x<a$이므로

$n=5, a=1$ $\therefore\ n+a=6$ 답 ④

유형 07 이차부등식이 해를 한 개만 가질 조건 개념 02

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

(1) $ax^2+bx+c\ge 0$의 해가 오직 한 개일 조건 ⇨ $a<0, D=0$

(2) $ax^2+bx+c\le 0$의 해가 오직 한 개일 조건 ⇨ $a>0, D=0$

0965

이차부등식 $x^2-(k+1)x+2k+2\le 0$의 해가 오직 한 개이므로

이차방정식 $x^2-(k+1)x+2k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+1)^2-4(2k+2)=0, k^2-6k-7=0$

$(k+1)(k-7)=0$ $\therefore\ k=-1$ 또는 $k=7$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 6이다. 답 6

0966

이차부등식 $ax^2-2(a+4)x+2a+2\ge 0$의 해가 $x=b$, 즉 오직 한 개이므로

$a<0$

이차방정식 $ax^2-2(a+4)x+2a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+4)^2-a(2a+2)=0, a^2-6a-16=0$

$(a+2)(a-8)=0$ $\therefore\ a=-2$ ($\because$ $a<0$)

이것을 주어진 부등식에 대입하면

$-2x^2-4x-2\ge 0, x^2+2x+1\le 0$ $\therefore\ (x+1)^2\le 0$

따라서 $x=-1$이므로 $b=-1$

$\therefore\ ab=2$ 답 2

0967

이차부등식 $ax^2+bx+c\le 0$의 해가 $x=-2$뿐이므로 $a>0$이고

$a(x+2)^2\le 0$ 꼴이어야 한다.

즉, $ax^2+bx+c\le 0$이 $ax^2+4ax+4a\le 0$과 같으므로

$b=4a, c=4a$

이것을 $cx^2-4ax-2b\le 0$에 대입하면

$4ax^2-4ax-8a\le 0, x^2-x-2\le 0$ ($\because$ $a>0$)

$(x+1)(x-2)\le 0$ $\therefore\ -1\le x\le 2$

따라서 정수 x는 $-1, 0, 1, 2$의 4개이다. 답 4

0968

이차부등식 $ax^2+2(a-3)x+4>0$을 만족시키지 않는 x의 값이 오직 한 개이면 이차부등식 $ax^2+2(a-3)x+4\le 0$의 해가 오직 한 개이므로 $a>0$ ··· ❶

이차방정식 $ax^2+2(a-3)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-3)^2-4a=0, a^2-10a+9=0$

$(a-1)(a-9)=0$ $\therefore\ a=1$ 또는 $a=9$ ··· ❷

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 10이다. ··· ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ a의 부호를 알 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 모든 실수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

유형 08 이차부등식이 해를 가질 조건 개념 02

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 해를 가질 조건

(1) $a>0$이면 ⇨ 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(2) $a<0$이면 ⇨ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, $D>0$이어야 한다.

0969

이차부등식 $-3x^2+2ax+a>0$, 즉 $3x^2-2ax-a<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $3x^2-2ax-a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2+3a>0, a(a+3)>0$

$\therefore\ a<-3$ 또는 $a>0$

따라서 자연수 a의 최솟값은 1이다. 답 ①

0970

이차부등식 $x^2-2(a-2)x+1\le 0$이 해를 가지려면 이차방정식 $x^2-2(a-2)x+1=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-2)\}^2-1\ge 0, a^2-4a+3\ge 0$

$(a-1)(a-3)\ge 0$ $\therefore\ a\le 1$ 또는 $a\ge 3$ 답 $a\le 1$ 또는 $a\ge 3$

0971

$(a-3)x^2-4x+a<0$에서

(ⅰ) $a-3>0$, 즉 $a>3$일 때

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $(a-3)x^2-4x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-a(a-3)>0$, $a^2-3a-4<0$

$(a+1)(a-4)<0$ $\quad\therefore -1<a<4$

그런데 $a>3$이므로 $3<a<4$

(ⅱ) $a-3<0$, 즉 $a<3$일 때

이차함수 $y=(a-3)x^2-4x+a$의 그래프는 위로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a<3$ 또는 $3<a<4$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

참고 $a=3$이면 주어진 부등식이 이차부등식이 아니므로 $a\neq3$이다.

0972

$(a-1)x^2+2(a-1)x-9>0$에서

(ⅰ) $a-1>0$, 즉 $a>1$일 때

이차함수 $y=(a-1)x^2+2(a-1)x-9$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ⅱ) $a-1=0$, 즉 $a=1$일 때

$0\cdot x^2+0\cdot x-9=-9<0$이므로 부등식의 해는 없다.

(ⅲ) $a-1<0$, 즉 $a<1$일 때

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $(a-1)x^2+2(a-1)x-9=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2+9(a-1)>0$, $a^2+7a-8>0$

$(a+8)(a-1)>0$ $\quad\therefore a<-8$ 또는 $a>1$

그런데 $a<1$이므로 $a<-8$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $a<-8$ 또는 $a>1$ 답 ④

유형 09 이차부등식이 항상 성립할 조건 개념 04

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여

(1) $ax^2+bx+c>0$이 성립할 조건 ⇨ $a>0$, $D<0$

(2) $ax^2+bx+c\geq0$이 성립할 조건 ⇨ $a>0$, $D\leq0$

(3) $ax^2+bx+c<0$이 성립할 조건 ⇨ $a<0$, $D<0$

(4) $ax^2+bx+c\leq0$이 성립할 조건 ⇨ $a<0$, $D\leq0$

0973

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k+2)x-k>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+2(k+2)x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+2)^2+k<0$, $k^2+5k+4<0$

$(k+4)(k+1)<0$ $\quad\therefore -4<k<-1$ 답 $-4<k<-1$

0974

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-kx+5k>2k-7$, 즉 $x^2-kx+3k+7>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-kx+3k+7=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4(3k+7)<0$, $k^2-12k-28<0$

$(k+2)(k-14)<0$ $\quad\therefore -2<k<14$

따라서 정수 k는 $-1, 0, 1, \cdots, 13$의 15개이다. 답 ②

0975

$-x^2+2(k+1)x-7k+5\leq0$에서 $x^2-2(k+1)x+7k-5\geq0$

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-2(k+1)x+7k-5\geq0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+7k-5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(7k-5)\leq0$, $k^2-5k+6\leq0$

$(k-2)(k-3)\leq0$ $\quad\therefore 2\leq k\leq3$

따라서 정수 k는 2, 3이므로 그 합은 5이다. 답 ⑤

0976

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{x^2-(k-1)x+k+2}$가 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-(k-1)x+k+2\geq0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-(k-1)x+k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k-1)\}^2-4(k+2)\leq0$, $k^2-6k-7\leq0$

$(k+1)(k-7)\leq0$ $\quad\therefore -1\leq k\leq7$

따라서 정수 k는 $-1, 0, 1, \cdots, 7$의 9개이다. 답 9

0977

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2-5x+a<0$이 성립해야 하므로 $a<0$

이차방정식 $ax^2-5x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4a^2<0$, $4a^2-25>0$

$(2a+5)(2a-5)>0$ $\quad\therefore a<-\frac{5}{2}$ 또는 $a>\frac{5}{2}$

그런데 $a<0$이므로 $a<-\frac{5}{2}$

따라서 정수 a의 최댓값은 -3이다. 답 ③

0978

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $a(x^2-2x+2)>2x$, 즉 $ax^2-2(a+1)x+2a>0$이 성립해야 하므로 $a>0$

이차방정식 $ax^2-2(a+1)x+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-2a^2<0$, $a^2-2a-1>0$

이때, 이차방정식 $a^2-2a-1=0$의 해는 $a=1\pm\sqrt{2}$이므로

이차부등식 $a^2-2a-1>0$의 해는

$a<1-\sqrt{2}$ 또는 $a>1+\sqrt{2}$

그런데 $a>0$이므로 $a>\underline{1+\sqrt{2}}$

$1<\sqrt{2}<2$에서 $2<1+\sqrt{2}<3$

따라서 정수 a의 최솟값은 3이다. 답 ②

0979

$(k+3)x^2+2(k+3)x+4>0$에서

(i) $k=-3$일 때, $0\cdot x^2+0\cdot x+4=4>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립한다. ··· ❶

(ii) $k\neq-3$일 때, 모두 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하려면

$k+3>0 \qquad \therefore k>-3$

이차방정식 $(k+3)x^2+2(k+3)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+3)^2-4(k+3)<0$, $k^2+2k-3<0$

$(k+3)(k-1)<0 \qquad \therefore -3<k<1$

그런데 $k>-3$이므로 $-3<k<1$ ··· ❷

(i), (ii)에서 $-3\leq k<1$ ··· ❸

따라서 정수 k는 -3, -2, -1, 0이므로 그 합은 -6이다. ··· ❹

답 -6

채점 기준	비율
❶ $k=-3$일 때, 이차부등식이 항상 성립함을 알 수 있다.	30 %
❷ $k\neq-3$일 때, 이차부등식이 항상 성립할 조건을 구할 수 있다.	40 %
❸ 조건을 만족시키는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❹ 모든 정수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

유형 10 이차부등식이 해를 갖지 않을 조건 개념 04

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 해를 갖지 않으려면

⇨ 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\leq0$이 성립한다.

⇨ $a<0$, $D\leq0$

0980

$-x^2+2(k+8)x+4(k+5)>0$에서

$x^2-2(k+8)x-4(k+5)<0$

이 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-2(k+8)x-4(k+5)\geq0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2(k+8)x-4(k+5)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+8)\}^2+4(k+5)\leq0$, $k^2+20k+84\leq0$

$(k+14)(k+6)\leq0 \qquad \therefore -14\leq k\leq-6$

따라서 $M=-6$, $m=-14$이므로

$M-m=8$

답 ④

0981

이차부등식 $x^2-2ax+a+12\leq0$이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-2ax+a+12>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2ax+a+12=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(a+12)<0$, $a^2-a-12<0$

$(a+3)(a-4)<0 \qquad \therefore -3<a<4$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2, 3이므로 그 합은 3이다.

답 ④

0982

$kx^2+2kx+3<(x+1)^2$에서 $(k-1)x^2+2(k-1)x+2<0$

이 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $(k-1)x^2+2(k-1)x+2\geq0$이 성립해야 하므로

$k-1>0 \qquad \therefore k>1$

이차방정식 $(k-1)x^2+2(k-1)x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-2(k-1)\leq0$, $k^2-4k+3\leq0$

$(k-1)(k-3)\leq0 \qquad \therefore 1\leq k\leq3$

그런데 $k>1$이므로 $1<k\leq3$

답 ③

유형 11 제한된 범위에서 이차부등식이 항상 성립할 조건 개념 01

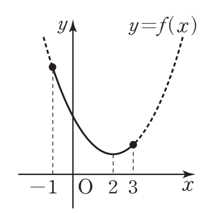
(1) $p\leq x\leq q$에서 이차부등식 $f(x)>0$이 항상 성립한다.

⇨ $p\leq x\leq q$에서 ($f(x)$의 최솟값)>0

(2) $p\leq x\leq q$에서 이차부등식 $f(x)<0$이 항상 성립한다.

⇨ $p\leq x\leq q$에서 ($f(x)$의 최댓값)<0

0983



$f(x)=x^2-4x+2a-3$이라 하면

$f(x)=(x-2)^2+2a-7$

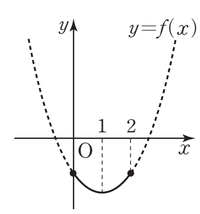
$-1\leq x\leq3$에서 $f(x)>0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

이때, 최솟값은 $f(2)$이므로 $f(2)>0$에서

$2a-7>0 \qquad \therefore a>\frac{7}{2}$

답 $a>\frac{7}{2}$

0984



$f(x)=2x^2-4x+a^2-3a+2$라 하면

$f(x)=2(x-1)^2+a^2-3a$

$0\leq x\leq2$에서 $f(x)<0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

이때, 최댓값은 $f(0)$ 또는 $f(2)$이고

$f(0)=f(2)=a^2-3a+2$이므로 $f(0)<0$에서

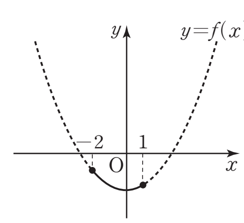
$a^2-3a+2<0$, $(a-1)(a-2)<0$

$\therefore 1<a<2$

답 $1<a<2$

참고 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $f(0)=f(2)$

0985



$x^2+ax<-a+8$에서

$x^2+ax+a-8<0$

$f(x)=x^2+ax+a-8$이라 하면

$-2\leq x\leq1$에서 $f(x)<0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

이때, 최댓값은 $f(-2)$ 또는 $f(1)$이므로

(i) $f(-2)<0$에서 $-a-4<0 \qquad \therefore a>-4$

(ii) $f(1)<0$에서 $2a-7<0$ $\quad \therefore a<\frac{7}{2}$

(i), (ii)에서 $-4<a<\frac{7}{2}$

따라서 정수 a의 최솟값은 -3이다. 답 ①

0986

$f(x)=x^2-2(a+1)x+a+3$이라 하면

$f(x)=\{x-(a+1)\}^2-a^2-a+2$

$x\ge 0$에서 $f(x)\ge 0$이어야 하므로

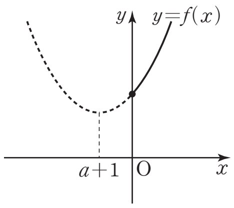
(i) $a+1<0$, 즉 $a<-1$일 때

$f(x)$의 최솟값이 $f(0)$이므로

$f(0)\ge 0$에서

$a+3\ge 0 \quad \therefore a\ge -3$

그런데 $a<-1$이므로 $-3\le a<-1$



(ii) $a+1\ge 0$, 즉 $a\ge -1$일 때

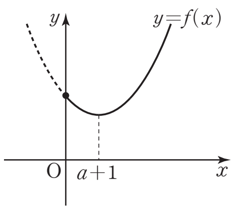
$f(x)$의 최솟값이 $f(a+1)$이므로

$f(a+1)\ge 0$에서

$-a^2-a+2\ge 0$, $(a+2)(a-1)\le 0$

$\therefore -2\le a\le 1$

그런데 $a\ge -1$이므로 $-1\le a\le 1$



(i), (ii)에서 $-3\le a\le 1$

따라서 정수 a는 $-3, -2, -1, 0, 1$이므로 그 합은 -5이다.

답 -5

유형 12 이차부등식과 두 그래프의 위치 관계 – 만나는 경우 개념 01, 03

함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 부등식 $f(x)>g(x)$의 해와 같다.

0987

$x^2-ax-b>-2x+3$에서 $x^2+(-a+2)x-b-3>0$ ...... ㉠

해가 $x<-5$ 또는 $x>1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+5)(x-1)>0 \quad \therefore x^2+4x-5>0$ ...... ㉡

㉠과 ㉡이 일치해야 하므로

$-a+2=4$, $-b-3=-5 \quad \therefore a=-2, b=2$

$\therefore a+2b=2$ 답 ④

0988

$2x^2-5x-9<-x^2+3x+7$에서 $3x^2-8x-16<0$

$(3x+4)(x-4)<0 \quad \therefore -\frac{4}{3}<x<4$ 답 $-\frac{4}{3}<x<4$

0989

$x^2-2x<a$에서 $x^2-2x-a<0$ ...... ㉠

해가 $-1<x<b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-b)<0 \quad \therefore x^2+(-b+1)x-b<0$ ...... ㉡

㉠과 ㉡이 일치해야 하므로

$-2=-b+1$, $-a=-b \quad \therefore a=3, b=3$

$\therefore ab=9$ 답 ③

0990

$mx^2+x+mn>(1-n)x-2$에서

$mx^2+nx+mn+2>0$ ...... ㉠

이 이차부등식의 해가 $-1<x<3$이므로 $m<0$

해가 $-1<x<3$이고 x^2의 계수가 $m(m<0)$인 이차부등식은

$m(x+1)(x-3)>0 \quad \therefore mx^2-2mx-3m>0$ ...... ㉡

㉠과 ㉡이 일치해야 하므로

$n=-2m$, $mn+2=-3m$

$n=-2m$을 $mn+2=-3m$에 대입하면

$-2m^2+2=-3m$, $2m^2-3m-2=0$

$(2m+1)(m-2)=0 \quad \therefore m=-\frac{1}{2}\ (\because m<0)$

따라서 $n=-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=1$이므로 $m-n=-\frac{3}{2}$ 답 $-\frac{3}{2}$

유형 13 이차부등식과 두 그래프의 위치 관계 – 만나지 않는 경우 개념 01, 04

함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있다.
⇨ 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립한다.

0991

$x^2-2ax+1>2x+a$에서 $x^2-2(a+1)x-a+1>0$

이 이차부등식이 항상 성립해야 하므로 이차방정식

$x^2-2(a+1)x-a+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-(-a+1)<0$, $a^2+3a<0$

$a(a+3)<0 \quad \therefore -3<a<0$

따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다. 답 -1

0992

$-2x^2+4x-5<2ax+3$에서 $2x^2+2(a-2)x+8>0$

$\therefore x^2+(a-2)x+4>0$ ... ❶

이 이차부등식이 항상 성립해야 하므로 이차방정식

$x^2+(a-2)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-2)^2-16<0$, $a^2-4a-12<0$

$(a+2)(a-6)<0 \quad \therefore -2<a<6$ ... ❷

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=6$이므로 $\beta-\alpha=8$ ... ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 만족시키는 이차부등식을 세울 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\beta-\alpha$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0993

$ax^2+7x+2a+3<3x+a$에서 $ax^2+4x+a+3<0$

이 이차부등식이 항상 성립해야 하므로 $a<0$

이차방정식 $ax^2+4x+a+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-a(a+3)<0$, $a^2+3a-4>0$

$(a+4)(a-1)>0 \quad \therefore a<-4$ 또는 $a>1$

그런데 $a<0$이므로 $a<-4$ 답 $a<-4$

0994

$kx^2+kx-1<x^2+x+1$에서 $(k-1)x^2+(k-1)x-2<0$

이 부등식이 항상 성립해야 하므로

(i) $k=1$일 때, $0\cdot x^2+0\cdot x-2=-2<0$이므로 위의 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $k\neq1$일 때, 위의 부등식이 항상 성립하려면

$k-1<0 \qquad \therefore k<1$

이차방정식 $(k-1)x^2+(k-1)x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-1)^2+8(k-1)<0$, $k^2+6k-7<0$

$(k+7)(k-1)<0 \qquad \therefore -7<k<1$

그런데 $k<1$이므로 $-7<k<1$

(i), (ii)에서 $-7<k\leq1$

따라서 정수 k는 $-6, -5, -4, \cdots, 1$의 8개이다. 답 ④

유형 14 이차부등식의 활용 개념 02

(i) 주어진 조건에 맞게 부등식을 세운다.

(ii) 부등식을 풀어 해를 구한다. 이때, 미지수의 범위에 주의한다.

0995

텃밭의 둘레의 길이가 20 m이므로 가로의 길이를 x m라 하면 세로의 길이는 $\dfrac{20-2x}{2}=10-x$ (m)

이때, 텃밭의 넓이가 24 m² 이상이 되어야 하므로

$x(10-x)\geq24$, $x^2-10x+24\leq0$

$(x-4)(x-6)\leq0 \qquad \therefore 4\leq x\leq6$

따라서 가로의 길이의 최댓값과 최솟값의 차는

$6-4=2$(m) 답 ②

0996

t초 후의 수면으로부터의 높이가 $(-5t^2+6t+10)$ m이므로 수면에서 2 m 이상의 높이에 있으려면

$-5t^2+6t+10\geq2$에서 $5t^2-6t-8\leq0$

$(5t+4)(t-2)\leq0 \qquad \therefore -\dfrac{4}{5}\leq t\leq2$

그런데 $t\geq0$이므로 $0\leq t\leq2$

따라서 다이빙 선수가 2 m 이상의 높이에 있는 시간은 2초 동안이다.

답 2초

0997

가격을 올리기 전의 상품의 가격을 A원, 판매량을 B개라 하면

x % 올린 가격은 $A\left(1+\dfrac{x}{100}\right)$원

$\dfrac{2x}{3}$ % 감소한 판매량은 $B\left(1-\dfrac{2x}{300}\right)$개

총 판매 금액이 가격을 올리기 전의 총 판매 금액 이상이 되어야 하므로

$A\left(1+\dfrac{x}{100}\right)\cdot B\left(1-\dfrac{2x}{300}\right)\geq AB$

$(100+x)(300-2x)\geq30000$, $x^2-50x\leq0$

$x(x-50)\leq0 \qquad \therefore 0\leq x\leq50$

따라서 x의 최댓값은 50이다. 답 ⑤

STEP 1 개념 마스터 ②

0998

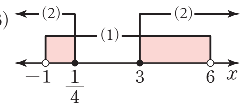
(1) $x^2-5x-6<0$에서 $(x+1)(x-6)<0$

$\therefore -1<x<6$

(2) $4x^2-13x+3\geq0$에서 $(4x-1)(x-3)\geq0$

$\therefore x\leq\dfrac{1}{4}$ 또는 $x\geq3$

(3)



(4) (3)에서 (1), (2)에서 구한 해의 공통부분을 구하면

$-1<x\leq\dfrac{1}{4}$ 또는 $3\leq x<6$

답 풀이 참조

0999

$3x-6<0$에서 $x<2$ ...... ㉠

$x^2-16\geq0$에서 $(x+4)(x-4)\geq0$

$\therefore x\leq-4$ 또는 $x\geq4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $x\leq-4$ 답 $x\leq-4$

1000

$2x-1\geq x$에서 $x\geq1$ ...... ㉠

$x^2-x-6>0$에서 $(x+2)(x-3)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>3$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $x>3$ 답 $x>3$

1001

$x+1\geq4x-3$에서 $x\leq\dfrac{4}{3}$ ...... ㉠

$2x^2-3x-9<0$에서 $(2x+3)(x-3)<0$

$\therefore -\dfrac{3}{2}<x<3$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-\dfrac{3}{2}<x\leq\dfrac{4}{3}$ 답 $-\dfrac{3}{2}<x\leq\dfrac{4}{3}$

1002

$2x-3<3x-2$에서 $x>-1$ ...... ㉠

$x^2-3x+2>0$에서 $(x-1)(x-2)>0$ ...... ㉡

$\therefore x<1$ 또는 $x>2$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-1<x<1$ 또는 $x>2$

답 $-1<x<1$ 또는 $x>2$

1003

$x^2-4x\geq0$에서 $x(x-4)\geq0$

$\therefore x\leq0$ 또는 $x\geq4$ ...... ㉠

$x^2+3x-10<0$에서 $(x+5)(x-2)<0$

$\therefore -5<x<2$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-5<x\leq0$ 답 $-5<x\leq0$

1004

$x^2+4>5x$에서 $x^2-5x+4>0$

$(x-1)(x-4)>0 \qquad \therefore x<1$ 또는 $x>4$ ...... ㉠

$x^2<8x-7$에서 $x^2-8x+7<0$

$(x-1)(x-7)<0 \qquad \therefore 1<x<7$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $4<x<7$

답 $4<x<7$

1005

$x^2-2x-8<0$에서 $(x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$ ...... ㉠

$2x^2-x-6\ge 0$에서 $(2x+3)(x-2)\ge 0$

$\therefore x\le -\frac{3}{2}$ 또는 $x\ge 2$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-2<x\le -\frac{3}{2}$ 또는 $2\le x<4$

답 $-2<x\le -\frac{3}{2}$ 또는 $2\le x<4$

1006

$2x^2+7x\le x$에서 $x(x+3)\le 0 \qquad \therefore -3\le x\le 0$ ...... ㉠

$x^2+2x-1\ge 3x+1$에서 $(x+1)(x-2)\ge 0$

$\therefore x\le -1$ 또는 $x\ge 2$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-3\le x\le -1$

답 $-3\le x\le -1$

1007

주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(1) (i) $D=(k-1)^2-16\ge 0$, $k^2-2k-15\ge 0$

$(k+3)(k-5)\ge 0 \qquad \therefore k\le -3$ 또는 $k\ge 5$

(ii) $\alpha+\beta=-(k-1)>0 \qquad \therefore k<1$

(iii) $\alpha\beta=4>0$

(i), (ii), (iii)에서 $k\le -3$

(2) (i) $D=(k-1)^2-16\ge 0$, $k^2-2k-15\ge 0$

$(k+3)(k-5)\ge 0 \qquad \therefore k\le -3$ 또는 $k\ge 5$

(ii) $\alpha+\beta=-(k-1)<0 \qquad \therefore k>1$

(iii) $\alpha\beta=4>0$

(i), (ii), (iii)에서 $k\ge 5$

답 (1) $k\le -3$ (2) $k\ge 5$

1008

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha\beta=k^2+k-2<0$, $(k+2)(k-1)<0$

$\therefore -2<k<1$

답 $-2<k<1$

1009

(1) 이차방정식 $f(x)=0$이 실근을 가져야 하므로 $D\ge 0$

주어진 그림에서 $f(1)\boxed{>}0$, $k\boxed{>}1$

(2) 이차방정식 $f(x)=0$이 실근을 가져야 하므로 $D\ge 0$

주어진 그림에서 $f(1)\boxed{>}0$, $k\boxed{<}1$

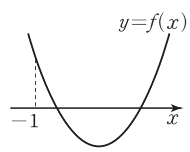
(3) 주어진 그림에서 $f(1)\boxed{<}0$

(4) 이차방정식 $f(x)=0$이 실근을 가져야 하므로 $D\ge 0$

주어진 그림에서 $f(-1)\boxed{>}0$, $f(1)\boxed{>}0$, $-1<k<1$

답 (1) $>$, $>$ (2) $>$, $<$ (3) $<$ (4) $>$, $>$

1010



$f(x)=x^2-2x+k-1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -1보다 크므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(k-1)\ge 0 \qquad \therefore k\le \boxed{\text{(가)}\ 2}$

(ii) $f(-1)=2+k>0$에서 $k>\boxed{\text{(나)}\ -2}$

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이므로

$1>-1$

(i), (ii), (iii)에서 $\boxed{\text{(다)}\ -2<k\le 2}$

답 풀이 참조

STEP 2 유형 마스터 ❷

유형 15 연립이차부등식의 풀이 개념 05

연립부등식 $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$의 풀이

⇨ 두 부등식 $f(x)>0$, $g(x)>0$을 풀어 공통부분을 구한다.

1011

$x^2-3x-4\ge 0$에서 $(x+1)(x-4)\ge 0$

$\therefore x\le -1$ 또는 $x\ge 4$ ...... ㉠

$3x^2-5x-12<0$에서 $(3x+4)(x-3)<0$

$\therefore -\frac{4}{3}<x<3$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-\frac{4}{3}<x\le -1$

따라서 $a=-\frac{4}{3}$, $b=-1$이므로

$ab=\frac{4}{3}$

답 ④

1012

$x^2-6x\ge 7$에서 $x^2-6x-7\ge 0$

$(x+1)(x-7)\ge 0 \qquad \therefore x\le -1$ 또는 $x\ge 7$ ...... ㉠

$-x^2+9x>8$에서 $x^2-9x+8<0$

$(x-1)(x-8)<0 \qquad \therefore 1<x<8$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $7\le x<8$

답 $7\le x<8$

1013

$6x-9\ge -x^2+x+5$에서 $x^2+5x-14\ge 0$

$(x+7)(x-2)\ge 0$ $\quad\therefore x\le -7$ 또는 $x\ge 2$ ······ ㉠

$4x^2-4x+3<2x^2+7x-2$에서 $2x^2-11x+5<0$

$(2x-1)(x-5)<0$ $\quad\therefore \frac{1}{2}<x<5$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2\le x<5$

따라서 정수 x는 2, 3, 4의 3개이다.

답 ③

1014

$x^2-4\le 0$에서 $(x+2)(x-2)\le 0$

$\therefore -2\le x\le 2$ ······ ㉠

$x^2+5x-6\ge 0$에서 $(x+6)(x-1)\ge 0$

$\therefore x\le -6$ 또는 $x\ge 1$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1\le x\le 2$ ··· ❶

이때, 이차부등식 $ax^2+3bx-4\ge 0$의 해가 $1\le x\le 2$이므로

$a<0$이고 $a(x-1)(x-2)\ge 0$ ··· ❷

즉, $ax^2-3ax+2a\ge 0$에서 $3b=-3a$, $-4=2a$

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로

$2a+b=-2$ ··· ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 주어진 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ 조건을 만족시키는 이차부등식을 세울 수 있다.	40 %
❸ $2a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 16 해가 주어진 연립이차부등식 개념 05

연립부등식을 풀어 해를 수직선 위에 나타낸 후 주어진 해와 비교하여 미정 계수의 범위를 결정한다.

1015

$x^2-2x\le 0$에서 $x(x-2)\le 0$

$\therefore 0\le x\le 2$ ······ ㉠

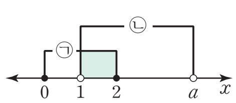
$x^2-(a+1)x+a<0$에서

$(x-1)(x-a)<0$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 $1<x\le 2$이므로

오른쪽 그림에서

$a>2$



답 $a>2$

1016

$|x-2|<a$에서 $-a<x-2<a$

$\therefore 2-a<x<2+a$ ······ ㉠

$x^2-2x-3\le 0$에서 $(x+1)(x-3)\le 0$

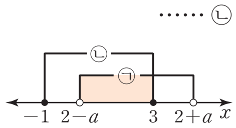
$\therefore -1\le x\le 3$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 $0<x\le 3$이므로

오른쪽 그림에서

$2-a=0$, $2+a>3$

$\therefore a=2$



답 ②

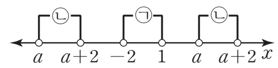
1017

$x^2+x-2<0$에서 $(x+2)(x-1)<0$

$\therefore -2<x<1$ ······ ㉠

$(x-a)(x-a-2)<0$에서 $a<x<a+2$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않으려면 오른쪽 그림에서



$a+2\le -2$ 또는 $a\ge 1$

$\therefore a\le -4$ 또는 $a\ge 1$

따라서 자연수 a의 최솟값은 1이다.

답 ①

유형 17 정수인 해의 조건이 주어진 연립이차부등식 개념 05

연립부등식을 만족시키는 정수인 해가 n개일 때

(i) 각 부등식의 해를 구한 후 수직선 위에 나타낸다.

(ii) 공통부분이 n개의 정수를 포함하도록 하는 미지수의 범위를 구한다.

1018

$2x^2+3x>0$에서 $x(2x+3)>0$ $\quad\therefore x<-\frac{3}{2}$ 또는 $x>0$

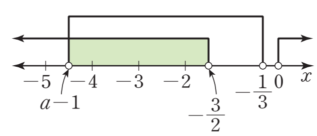
$3x^2-(3a-4)x-a+1<0$에서 $(3x+1)(x-a+1)<0$

(i) $a-1<-\frac{1}{3}$, 즉 $a<\frac{2}{3}$일 때

오른쪽 그림에서

$-5\le a-1<-4$

$\therefore -4\le a<-3$



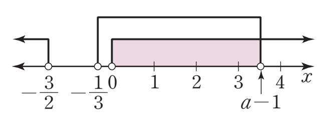
(ii) $a-1=-\frac{1}{3}$, 즉 $a=\frac{2}{3}$일 때, $(3x+1)^2<0$이 되어 해가 존재하지 않으므로 $a\ne\frac{2}{3}$

(iii) $a-1>-\frac{1}{3}$, 즉 $a>\frac{2}{3}$일 때

오른쪽 그림에서

$3<a-1\le 4$

$\therefore 4<a\le 5$



(i), (ii), (iii)에서 $-4\le a<-3$ 또는 $4<a\le 5$

답 $-4\le a<-3$ 또는 $4<a\le 5$

1019

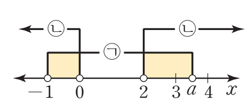
$x^2+(1-a)x-a<0$에서 $(x+1)(x-a)<0$ ······ ㉠

$x^2-2x>0$에서 $x(x-2)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>2$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분에 속하는 정수가 3뿐이므로 오른쪽 그림에서

$3<a\le 4$



답 $3<a\le 4$

1020

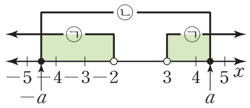
$x^2-x-6>0$에서 $(x+2)(x-3)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>3$ ······ ㉠

$x^2-a^2\le 0$에서 $(x+a)(x-a)\le 0$

$\therefore -a\le x\le a$ ($\because a>0$) ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분에 속하는 정수가 3개 이상이려면 오른쪽 그림에서



$a \geq 4$

따라서 양수 a의 최솟값은 4이다. 답 ④

유형 18 연립이차부등식의 활용 개념 05

(i) 구하는 값을 x로 놓고 연립부등식을 세운다.
(ii) 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분을 찾는다.

1021

$2x-1$, x, $2x+1$이 변의 길이이므로 $x>\frac{1}{2}$ …… ㉠

이때, 세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $2x+1$

삼각형이 만들어질 조건에 의하여

(가장 긴 변의 길이)<(나머지 두 변의 길이의 합)

$2x+1<x+(2x-1)$ $\therefore x>2$ …… ㉡

둔각삼각형이려면 $x^2+(2x-1)^2<(2x+1)^2$

$x^2-8x<0$, $x(x-8)<0$ $\therefore 0<x<8$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $2<x<8$

따라서 자연수 x는 3, 4, 5, 6, 7의 5개이다. 답 5

1022

보행로의 넓이는 $15x+10x-x^2=25x-x^2$ (m^2)

보행로의 넓이가 46 m^2 이상 84 m^2 이하여야 하므로

$\begin{cases} 25x-x^2 \geq 46 & \cdots\cdots ㉠ \\ 25x-x^2 \leq 84 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2-25x+46 \leq 0$

$(x-2)(x-23) \leq 0$ $\therefore 2 \leq x \leq 23$

그런데 $x<10$이므로 $2 \leq x<10$ …… ㉢

㉡에서 $x^2-25x+84 \geq 0$

$(x-4)(x-21) \geq 0$ $\therefore x \leq 4$ 또는 $x \geq 21$

그런데 $x<10$이므로 $x \leq 4$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $2 \leq x \leq 4$ 답 $2 \leq x \leq 4$

1023

상품 A kg을 $100x$ km 운송하는 데 드는 비용이

자동차는 $A(x^2+2x+2)$만 원, 철도는 $A(x+14)$만 원,

선박은 $A\left(\frac{1}{2}x+16\right)$만 원이므로

$\begin{cases} A(x+14)<A(x^2+2x+2) & \cdots\cdots ㉠ \\ A(x+14)<A\left(\frac{1}{2}x+16\right) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2+x-12>0$, $(x+4)(x-3)>0$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>3$

그런데 $x>0$이므로 $x>3$ …… ㉢

㉡에서 $x+14<\frac{1}{2}x+16$ $\therefore x<4$

그런데 $x>0$이므로 $0<x<4$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $3<x<4$

따라서 구하는 운송 거리는 300 km 초과 400 km 미만이다. 답 ③

유형 19 이차방정식의 근의 판별 개념 05

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$의 부호를 조사한다.
(1) $D>0$ ⇨ 서로 다른 두 실근
(2) $D=0$ ⇨ 중근(서로 같은 두 실근)
$D \geq 0$ ⇨ 실근을 갖는다.
(3) $D<0$ ⇨ 서로 다른 두 허근

1024

이차방정식 $x^2+kx+4=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=k^2-16>0$, $(k+4)(k-4)>0$

$\therefore k<-4$ 또는 $k>4$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-2kx+k+20=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-k)^2-(k+20)<0$, $k^2-k-20<0$

$(k+4)(k-5)<0$ $\therefore -4<k<5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $4<k<5$ 답 $4<k<5$

1025

$ax^2+(a+1)x+2a-1=0$이 이차방정식이므로 $a \neq 0$ …… ㉠

이차방정식 $ax^2+(a+1)x+2a-1=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a+1)^2-4a(2a-1) \geq 0$, $7a^2-6a-1 \leq 0$

$(7a+1)(a-1) \leq 0$ $\therefore -\frac{1}{7} \leq a \leq 1$

㉠에 의하여 $-\frac{1}{7} \leq a<0$ 또는 $0<a \leq 1$이므로 정수 a는 1의 1개이다. 답 1

1026

이차방정식 $x^2+2(k-1)x+4=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(k-1)^2-4<0$, $k^2-2k-3<0$

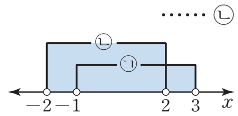
$(k+1)(k-3)<0$ $\therefore -1<k<3$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-kx+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-k)^2-4<0$, $(k+2)(k-2)<0$

$\therefore -2<k<2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 두 이차방정식 중 적어도 하나가 허근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $-2<k<3$



답 ②

1027

이차방정식 $x^2-2kx+2k(k-1)=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-2k(k-1) \geq 0$, $k^2-2k \leq 0$

$k(k-2) \leq 0$ $\therefore 0 \leq k \leq 2$ …… ㉠

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2k$, $\alpha\beta=2k(k-1)$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(2k)^2-2\cdot 2k(k-1)=4k$

㉠에서 $0 \leq 4k \leq 8$이므로 $\alpha^2+\beta^2$의 최댓값은 8이다. 답 8

유형 20 이차방정식의 실근의 부호 개념 06

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 실수)의 두 실근을 α, β라 하면

(1) 두 근이 모두 양수 ⇨ $D=b^2-4ac\ge0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

(2) 두 근이 모두 음수 ⇨ $D=b^2-4ac\ge0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

(3) 두 근이 서로 다른 부호 ⇨ $\alpha\beta<0$

1028

주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(3m+1)^2-3(m+1)\ge0$, $9m^2+3m-2\ge0$

$(3m+2)(3m-1)\ge0$ $\therefore m\le-\frac{2}{3}$ 또는 $m\ge\frac{1}{3}$

(ii) $\alpha+\beta=-\frac{2(3m+1)}{3}<0$ $\therefore m>-\frac{1}{3}$

(iii) $\alpha\beta=\frac{m+1}{3}>0$ $\therefore m>-1$

(i), (ii), (iii)에서 $m\ge\frac{1}{3}$

답 $m\ge\frac{1}{3}$

1029

주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(k+1)^2-(2k+5)\ge0$, $k^2-4\ge0$

$(k+2)(k-2)\ge0$ $\therefore k\le-2$ 또는 $k\ge2$

(ii) $\alpha+\beta=-2(k+1)>0$ $\therefore k<-1$

(iii) $\alpha\beta=2k+5>0$ $\therefore k>-\frac{5}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 $-\frac{5}{2}<k\le-2$

따라서 정수 k의 값은 -2이다.

답 -2

1030

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=m^2-16<0$, $(m+4)(m-4)<0$

$\therefore -4<m<4$ …… ㉠

또, 두 근의 절댓값이 같으므로

$\alpha+\beta=-(m^2-6m+5)=0$, $(m-1)(m-5)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $m=5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $m=1$

답 ①

1031

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=k^2-9<0$, $(k+3)(k-3)<0$

$\therefore -3<k<3$ …… ㉠

또, 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 크므로

$\alpha+\beta=k^2+2k-8<0$, $(k+4)(k-2)<0$

$\therefore -4<k<2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-3<k<2$

따라서 정수 k는 $-2, -1, 0, 1$이므로 그 합은 -2이다.

답 ①

유형 21 이차방정식의 근의 위치 개념 06

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 판별식을 D라 하고, $f(x)=ax^2+bx+c$라 할 때,

(1) 두 근이 모두 p보다 크다. ⇨ $D\ge0$, $f(p)>0$, $-\frac{b}{2a}>p$

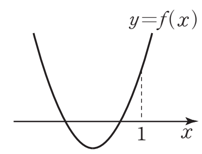
(2) 두 근이 모두 p보다 작다. ⇨ $D\ge0$, $f(p)>0$, $-\frac{b}{2a}<p$

(3) 두 근 사이에 p가 있다. ⇨ $f(p)<0$

1032

$f(x)=x^2-2mx+m+6$이라 하면

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 작으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-m)^2-(m+6)\ge0$, $m^2-m-6\ge0$

$(m+2)(m-3)\ge0$ $\therefore m\le-2$ 또는 $m\ge3$

(ii) $f(1)=-m+7>0$에서 $m<7$

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=m$이므로

$m<1$

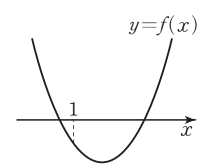
(i), (ii), (iii)에서 $m\le-2$

답 $m\le-2$

1033

$f(x)=x^2+a^2x-2a-16$이라 하면

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 1이 있으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(1)=1+a^2-2a-16<0$에서 $a^2-2a-15<0$

$(a+3)(a-5)<0$ $\therefore -3<a<5$

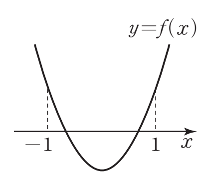
따라서 정수 a의 최댓값은 4이다.

답 4

1034

$f(x)=x^2-kx+2k$라 하면

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -1과 1 사이에 있으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-8k\ge0$, $k(k-8)\ge0$

$\therefore k\le0$ 또는 $k\ge8$

(ii) $f(-1)=3k+1>0$에서 $k>-\frac{1}{3}$

(iii) $f(1)=k+1>0$에서 $k>-1$

(iv) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{k}{2}$이므로

$-1<\frac{k}{2}<1$ $\therefore -2<k<2$

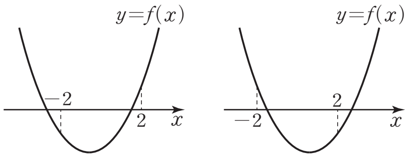
(i)~(iv)에서 $-\frac{1}{3}<k\le0$

답 ④

1035

$x^2-4=0$에서 $(x+2)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=\pm2$ ⋯ ❶

즉, $x^2+ax-6=0$의 두 근 중 한 근만이 -2와 2 사이에 있어야 하므로 $f(x)=x^2+ax-6$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(-2)f(2)<0$에서 $(-2a-2)(2a-2)<0$

$(a+1)(a-1)>0$ $\quad\therefore a<-1$ 또는 $a>1$ ⋯ ❷

따라서 자연수 a의 최솟값은 2이다. ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $x^2-4=0$의 두 근을 구할 수 있다.	30 %
❷ a에 대한 이차부등식을 세우고, 그 해를 구할 수 있다.	50 %
❸ 자연수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

참고 이차방정식 $x^2+ax-6=0$의 판별식을 D라 하면 $D=a^2+24$
모든 실수 a에 대하여 $D>0$이므로 x축과 서로 다른 두 점에서 만나고 조건을 만족시키는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같이 두 가지 경우로 그려질 수 있다. 이때, $f(-2)$와 $f(2)$의 부호가 서로 다르므로 $f(-2)f(2)<0$이다.

발전 유형 22 사차방정식의 근의 판별 개념 06

계수가 실수인 사차방정식 $x^4+ax^2+b=0$이
(1) 서로 다른 네 실근을 갖는다.
⇨ $x^2=t$로 놓으면 이차방정식 $t^2+at+b=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.
(2) 서로 다른 두 실근과 두 허근을 갖는다.
⇨ $x^2=t$로 놓으면 이차방정식 $t^2+at+b=0$의 두 근이 서로 다른 부호이다.

1036

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+(k-2)t-2k+1=0$ ⋯⋯ ㉠

이때, 주어진 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 방정식 ㉠은 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로

(ⅰ) ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(k-2)^2-4(-2k+1)>0,\ k^2+4k>0$

$k(k+4)>0$ $\quad\therefore k<-4$ 또는 $k>0$

(ⅱ) (두 근의 합)$=-(k-2)>0$ $\quad\therefore k<2$

(ⅲ) (두 근의 곱)$=-2k+1>0$ $\quad\therefore k<\frac{1}{2}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $k<-4$ 또는 $0<k<\frac{1}{2}$

답 $k<-4$ 또는 $0<k<\frac{1}{2}$

참고 방정식 ㉠이 서로 다른 양의 실근 α, β를 가진다고 하면
$t=\alpha$ 또는 $t=\beta$이므로 $x^2=t$에서 $x^2=\alpha$ 또는 $x^2=\beta$
$\therefore x=\pm\sqrt{\alpha}$ 또는 $x=\pm\sqrt{\beta}$
따라서 주어진 사차방정식은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

1037

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+(k+1)t+2k^2-5k-3=0$ ⋯⋯ ㉠

이때, 주어진 사차방정식이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면 방정식 ㉠은 서로 다른 부호의 두 실근을 가져야 하므로

(두 근의 곱)$=2k^2-5k-3<0$, $(2k+1)(k-3)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<k<3$

따라서 정수 k는 0, 1, 2의 3개이다.

답 ③

1038

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-2kt+2k^2-4=0$ ⋯⋯ ㉠

이때, 주어진 사차방정식이 실근만을 가지려면 방정식 ㉠은 음이 아닌 실근을 가져야 하므로

(ⅰ) ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(2k^2-4)\geq0,\ k^2-4\leq0$

$(k+2)(k-2)\leq0$ $\quad\therefore -2\leq k\leq2$

(ⅱ) (두 근의 합)$=2k\geq0$ $\quad\therefore k\geq0$

(ⅲ) (두 근의 곱)$=2k^2-4\geq0,\ k^2\geq2$

$\therefore k\leq-\sqrt{2}$ 또는 $k\geq\sqrt{2}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\sqrt{2}\leq k\leq2$

따라서 정수 k의 값은 2이다.

답 ④

STEP 3 내신 마스터

1039

유형 01 그래프를 이용한 이차부등식의 풀이

|전략| 부등식 $f(x)<g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.

$f(x)<g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $1<x<6$

따라서 $a=1$, $b=6$이므로

$a+b=7$

답 ④

1040

유형 03 해가 주어진 이차부등식

|전략| 먼저 주어진 해를 이용하여 x^2의 계수의 부호를 조사한다.

이차부등식 $ax^2+bx+c\geq0$의 해가 $x=2$뿐이므로

$a<0$이고 $a(x-2)^2\geq0$

즉, $ax^2-4ax+4a\geq0$에서 $b=-4a$, $c=4a$

이것을 $cx^2+bx-8a>0$에 대입하면

$4ax^2-4ax-8a>0$

이때, $4a<0$이므로 $x^2-x-2<0$

$(x+1)(x-2)<0$ $\quad\therefore -1<x<2$

따라서 정수 x는 0, 1이므로 그 합은 1이다.

답 ④

9 이차부등식과 연립이차부등식

1041

유형 01 그래프를 이용한 이차부등식의 풀이 + 04 부등식 $f(x)<0$과 부등식 $f(ax+b)<0$의 관계

|전략| 주어진 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 $f(x)$를 작성한 후 x에 $\frac{x-1}{3}$을 대입하여 $f\left(\frac{x-1}{3}\right)<0$의 해를 구한다.

$f(x)=a(x+2)(x-1)\ (a>0)$이라 하면

$f\left(\frac{x-1}{3}\right)=a\left(\frac{x-1}{3}+2\right)\left(\frac{x-1}{3}-1\right)=\frac{1}{9}a(x+5)(x-4)$

부등식 $f\left(\frac{x-1}{3}\right)<0$, 즉 $\frac{1}{9}a(x+5)(x-4)<0$에서

$(x+5)(x-4)<0\ \left(\because \frac{1}{9}a>0\right)$ $\quad\therefore -5<x<4$ 답 ③

다른 풀이 $\frac{x-1}{3}=t$로 놓으면 $f\left(\frac{x-1}{3}\right)<0$에서 $f(t)<0$

주어진 그래프에서 $f(t)<0$을 만족시키는 t의 값의 범위는 $-2<t<1$이므로 $-2<\frac{x-1}{3}<1$에서

$-6<x-1<3 \quad\therefore -5<x<4$

1042

유형 03 해가 주어진 이차부등식 + 05 절댓값 기호를 포함한 이차부등식의 풀이

|전략| $x<1$일 때와 $x\geq1$일 때로 나누어 절댓값 기호를 풀어 이차부등식의 해를 구하고, 그 해를 이용하여 x^2의 계수가 a인 이차부등식을 작성한다.

부등식 $x^2-2x-3>3|x-1|$에서

(i) $x<1$일 때, $x^2-2x-3>-3(x-1)$

$x^2+x-6>0$, $(x+3)(x-2)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>2$

그런데 $x<1$이므로 $x<-3$

(ii) $x\geq1$일 때, $x^2-2x-3>3(x-1)$

$x^2-5x>0$, $x(x-5)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>5$

그런데 $x\geq1$이므로 $x>5$

(i), (ii)에서 $x<-3$ 또는 $x>5$

이때, 부등식 $ax^2+2x+b<0$의 해가 $x<-3$ 또는 $x>5$이므로

$a<0$이고 $a(x+3)(x-5)<0$

즉, $ax^2-2ax-15a<0$에서 $-2a=2$, $-15a=b$

따라서 $a=-1$, $b=15$이므로

$a+b=14$ 답 ②

1043

유형 07 이차부등식이 해를 한 개만 가질 조건

|전략| 이차부등식 $ax^2+bx+c\leq0$이 단 하나의 실근을 가지려면 $a>0$, $D=b^2-4ac=0$이어야 한다.

이차부등식 $(k+2)x^2-2(k+2)x+1\leq0$의 해가 오직 한 개이므로

$k+2>0 \quad\therefore k>-2$

이차방정식 $(k+2)x^2-2(k+2)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+2)\}^2-(k+2)=0$, $k^2+3k+2=0$

$(k+2)(k+1)=0 \quad\therefore k=-2$ 또는 $k=-1$

그런데 $k>-2$이므로 $k=-1$ 답 ③

1044

유형 09 이차부등식이 항상 성립할 조건

|전략| 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\leq0$이 성립하면 $a<0$, $D=b^2-4ac\leq0$이어야 한다.

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2-4x+a+3\leq0$이 성립해야 하므로 $a<0$

이차방정식 $ax^2-4x+a+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-a(a+3)\leq0$, $a^2+3a-4\geq0$

$(a+4)(a-1)\geq0 \quad\therefore a\leq-4$ 또는 $a\geq1$

그런데 $a<0$이므로 $a\leq-4$

따라서 정수 a의 최댓값은 -4이다. 답 ①

1045

유형 10 이차부등식이 해를 갖지 않을 조건

|전략| 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$이 해를 갖지 않으려면 $a>0$, $D=b^2-4ac\leq0$이어야 한다.

이차부등식 $(k^2-k)x^2-2kx+2<0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $(k^2-k)x^2-2kx+2\geq0$이 성립해야 하므로

$k^2-k>0$, $k(k-1)>0 \quad\therefore k<0$ 또는 $k>1$ …… ㉠

이차방정식 $(k^2-k)x^2-2kx+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-k)\leq0$, $k^2-2k\geq0$

$k(k-2)\geq0 \quad\therefore k\leq0$ 또는 $k\geq2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $k<0$ 또는 $k\geq2$ 답 ⑤

1046

유형 12 이차부등식과 두 그래프의 위치 관계 – 만나는 경우

|전략| 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 이차함수 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 이차부등식 $f(x)<g(x)$의 해와 같다.

$2x^2+5x-9<-x^2+ax+b$에서

$3x^2+(5-a)x-b-9<0$ …… ㉠

해가 $-4<x<1$이고 x^2의 계수가 3인 이차부등식은

$3(x+4)(x-1)<0 \quad\therefore 3x^2+9x-12<0$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 일치해야 하므로 $5-a=9$, $-b-9=-12$

따라서 $a=-4$, $b=3$이므로

$b-a=7$ 답 ②

1047

유형 13 이차부등식과 두 그래프의 위치 관계 – 만나지 않는 경우

|전략| 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 항상 위쪽에 있으면 이차부등식 $f(x)>g(x)$가 항상 성립한다.

$x^2+(k-3)x+5>2x+1$에서 $x^2+(k-5)x+4>0$

이 이차부등식이 항상 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+(k-5)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-5)^2-16<0$, $k^2-10k+9<0$

$(k-1)(k-9)<0 \quad\therefore 1<k<9$

따라서 정수 k의 최솟값은 2이다. 답 ⑤

1048

유형 15 연립이차부등식의 풀이

|전략| 각 이차부등식의 해를 구하여 공통부분을 구한다.

$|2x-1|<7$에서 $-7<2x-1<7$

$\therefore -3<x<4$ ······ ㉠

$x^2-4\geq 0$에서 $(x+2)(x-2)\geq 0$

$\therefore x\leq -2$ 또는 $x\geq 2$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3<x\leq -2$ 또는 $2\leq x<4$

따라서 정수 x는 $-2, 2, 3$의 3개이다. 답 ②

1049

유형 02 이차부등식의 풀이 + 16 해가 주어진 연립이차부등식

|전략| 먼저 이차부등식의 해를 구하고 이 해가 연립부등식의 해가 되도록 수직선 위에 나타내 본다.

$x^2-13x+40<0$에서 $(x-5)(x-8)<0$ $\therefore 5<x<8$

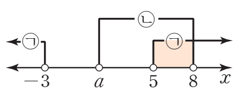
즉, 주어진 연립부등식의 해는 $5<x<8$이다.

$x^2-2x-15>0$에서 $(x+3)(x-5)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>5$ ······ ㉠

$(x-a)(x-8)<0$에서 $a<x<8$ 또는 $8<x<a$ ······ ㉡

그런데 ㉠, ㉡의 공통부분이 $5<x<8$이므로 오른쪽 그림에서



$-3\leq a\leq 5$

따라서 실수 a의 최댓값은 5이다. 답 ③

1050

유형 18 연립이차부등식의 활용

|전략| 새로 만든 직육면체의 부피와 처음 정육면체의 부피를 구하고 조건에 맞는 부등식을 세운다.

새로 만든 직육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이, 높이는 각각 $a+6$, a, $a-4$이므로

$a-4>0$ $\therefore a>4$ ······ ㉠

이 직육면체의 부피는 $a(a+6)(a-4)$이고 처음 정육면체의 부피는 a^3이므로

$a(a+6)(a-4)<a^3$, $2a^2-24a<0$

$2a(a-12)<0$ $\therefore 0<a<12$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $4<a<12$

따라서 자연수 a는 $5, 6, 7, \cdots, 11$의 7개이다. 답 ①

1051

유형 20 이차방정식의 실근의 부호

|전략| 이차방정식의 두 실근 α, β가 모두 양수이면 판별식 $D\geq 0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이다.

주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $D=(k-6)^2-4(k-3)\geq 0$, $k^2-16k+48\geq 0$

$(k-4)(k-12)\geq 0$ $\therefore k\leq 4$ 또는 $k\geq 12$

(ii) $\alpha+\beta=-(k-6)>0$ $\therefore k<6$

(iii) $\alpha\beta=k-3>0$ $\therefore k>3$

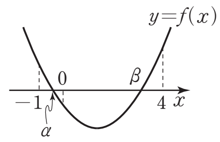
(i), (ii), (iii)에서 $3<k\leq 4$ 답 ④

1052

유형 21 이차방정식의 근의 위치

|전략| $f(x)=x^2-4kx+k^2-1$이라 하고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 조건에 맞게 그려 본다.

$f(x)=x^2-4kx+k^2-1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 α, β가 $-1<\alpha<0<\beta<4$를 만족시키므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $f(-1)=k^2+4k>0$에서 $k(k+4)>0$

$\therefore k<-4$ 또는 $k>0$

(ii) $f(0)=k^2-1<0$에서 $(k+1)(k-1)<0$

$\therefore -1<k<1$

(iii) $f(4)=k^2-16k+15>0$에서 $(k-1)(k-15)>0$

$\therefore k<1$ 또는 $k>15$

(i), (ii), (iii)에서 $0<k<1$ 답 ④

1053

유형 22 사차방정식의 근의 판별

|전략| $x^2=t$로 치환한 t에 대한 이차방정식이 서로 다른 부호의 두 실근을 갖거나 0과 음의 실근을 가져야 한다.

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-(2k-3)t+k^2-3k-4=0$ ······ ㉠

이때, 주어진 사차방정식이 실근과 허근을 모두 가지려면 방정식 ㉠은 서로 다른 부호의 두 실근을 갖거나 0과 음의 실근을 가져야 한다.

(i) 서로 다른 부호의 두 실근을 가질 때

(두 근의 곱)$=k^2-3k-4<0$

$(k+1)(k-4)<0$ $\therefore -1<k<4$

(ii) 0과 음의 실근을 가질 때

(두 근의 합)$=2k-3<0$ $\therefore k<\frac{3}{2}$

(두 근의 곱)$=k^2-3k-4=0$

$(k+1)(k-4)=0$ $\therefore k=-1$ 또는 $k=4$

그런데 $k<\frac{3}{2}$이므로 $k=-1$

(i), (ii)에서 $-1\leq k<4$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=4$이므로 $\alpha^2+\beta^2=17$ 답 ⑤

1054

유형 02 이차부등식의 풀이

|전략| 주어진 이차부등식을 풀어 정수 해의 합이 9가 되도록 하는 정수 a의 값을 구한다.

$x^2-2(a+1)x+a^2+2a\leq 0$에서 $x^2-2(a+1)x+a(a+2)\leq 0$

$(x-a)(x-a-2)\leq 0$ $\therefore a\leq x\leq a+2$ ··· ❶

이때, 주어진 이차부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 9이므로 $a+(a+1)+(a+2)=9$

$3a+3=9$ $\therefore a=2$ ··· ❷

답 2

채점 기준	배점
❶ 주어진 이차부등식을 풀 수 있다.	4점
❷ 실수 a의 값을 구할 수 있다.	2점

1055

유형 08 이차부등식이 해를 가질 조건

|전략| $a>0$, $a<0$일 때로 나누어 이차방정식이 해를 가질 조건을 구한다.

$ax^2+6x+a>0$에서

(i) $a>0$일 때, 이차함수 $y=ax^2+6x+a$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다. ⋯ ❶

(ii) $a<0$일 때, 주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+6x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-a^2>0$, $(a+3)(a-3)<0$ $\quad \therefore -3<a<3$

그런데 $a<0$이므로 $-3<a<0$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 $-3<a<0$ 또는 $a>0$ ⋯ ❸

답 $-3<a<0$ 또는 $a>0$

채점 기준	배점
❶ $a>0$일 때, 이차부등식이 항상 해를 가짐을 알 수 있다.	3점
❷ $a<0$일 때, 이차부등식이 해를 가질 조건을 구할 수 있다.	3점
❸ 실수 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점

1056

유형 11 제한된 범위에서 이차부등식이 항상 성립할 조건

|전략| $p\le x\le q$에서 이차부등식 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 $p\le x\le q$에서 ($f(x)$의 최솟값)>0이어야 한다.

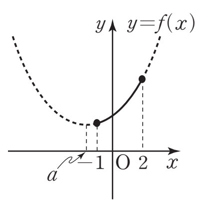
$f(x)=x^2-2ax+2a+3$이라 하면

$f(x)=(x-a)^2-a^2+2a+3$

$-1\le x\le 2$에서 $f(x)>0$이어야 하므로

(i) $a\le -1$일 때

$-1\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

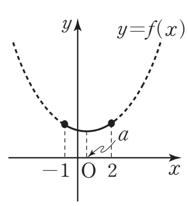


$f(-1)=4a+4>0$에서 $a>-1$

그런데 $a\le -1$이므로 만족시키는 a의 값은 없다. ⋯ ❶

(ii) $-1<a<2$일 때

$-1\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(a)=-a^2+2a+3>0$에서

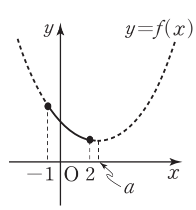
$a^2-2a-3<0$, $(a+1)(a-3)<0$

$\therefore -1<a<3$

그런데 $-1<a<2$이므로 $-1<a<2$ ⋯ ❷

(iii) $a\ge 2$일 때

$-1\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(2)=-2a+7>0$에서 $a<\frac{7}{2}$

그런데 $a\ge 2$이므로 $2\le a<\frac{7}{2}$ ⋯ ❸

(i), (ii), (iii)에서 $-1<a<\frac{7}{2}$

따라서 정수 a의 최댓값은 3이다. ⋯ ❹

답 3

채점 기준	배점
❶ $a\le -1$일 때, 만족시키는 a의 값이 없음을 알 수 있다.	2점
❷ $-1<a<2$일 때, a의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점
❸ $a\ge 2$일 때, a의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점
❹ 정수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	1점

1057

유형 16 해가 주어진 연립이차부등식

|전략| 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분이 없도록 수직선 위에 나타내 본다.

(1) $x^2-9x-36>0$에서 $(x+3)(x-12)>0$

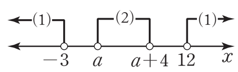
$\therefore x<-3$ 또는 $x>12$

(2) $x^2-2(a+2)x+a^2+4a<0$에서

$x^2-2(a+2)x+a(a+4)<0$

$(x-a)(x-a-4)<0$ $\quad \therefore a<x<a+4$

(3) (1), (2)에서 구한 해의 공통부분이 없으려면 오른쪽 그림에서



$-3\le a$, $a+4\le 12$

따라서 $-3\le a\le 8$이므로

$M=8$, $m=-3$ $\quad \therefore M+m=5$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) $x^2-9x-36>0$의 해를 구할 수 있다.	3점
(2) $x^2-2(a+2)x+a^2+4a<0$의 해를 구할 수 있다.	3점
(3) $M+m$의 값을 구할 수 있다.	5점

1058

유형 19 이차방정식의 근의 판별

|전략| 이차방정식이 허근을 가지려면 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 한다.

(1) 이차방정식 $x^2-(a-1)x+4=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=\{-(a-1)\}^2-16<0$, $a^2-2a-15<0$

$(a+3)(a-5)<0$ $\quad \therefore -3<a<5$

(2) 이차방정식 $x^2-(a+1)x+a^2-1=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=\{-(a+1)\}^2-4(a^2-1)<0$, $3a^2-2a-5>0$

$(a+1)(3a-5)>0$ $\quad \therefore a<-1$ 또는 $a>\frac{5}{3}$

(3) (1), (2)에서 구한 해의 공통부분을 구하면

$-3<a<-1$ 또는 $\frac{5}{3}<a<5$

따라서 정수 a는 -2, 2, 3, 4의 4개이다.

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) $x^2-(a-1)x+4=0$이 허근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	3점
(2) $x^2-(a+1)x+a^2-1=0$이 허근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	3점
(3) 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	4점

창의·융합 실력 마스터

1059

|전략| 부등식 $f(x)>0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위임을 이용한다.

ㄱ. $f(x)g(x)>0$에서

$f(x)>0,\ g(x)>0$ 또는 $f(x)<0,\ g(x)<0$

(i) $f(x)>0,\ g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는 $a<x<c$

(ii) $f(x)<0,\ g(x)<0$을 만족시키는 x는 없다.

(i), (ii)에서 부등식 $f(x)g(x)>0$의 해는 $a<x<c$ (참)

ㄴ. $\{f(x)\}^2=f(x)g(x)$에서 $\{f(x)\}^2-f(x)g(x)=0$

$f(x)\{f(x)-g(x)\}=0 \qquad \therefore f(x)=0$ 또는 $f(x)=g(x)$

$f(x)=0$에서 $x=c$ 또는 $x=d$

$f(x)=g(x)$에서 $x=b$ 또는 $x=d$

즉, 방정식 $\{f(x)\}^2=f(x)g(x)$의 해는

$x=b$ 또는 $x=c$ 또는 $x=d$ (거짓)

ㄷ. (i) $f(x)<0$, 즉 $c<x<d$일 때

$$h(x)=\frac{f(x)-f(x)}{2}=0$$

$h(x)\le 0$에서 $0\le 0$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $c<x<d$이므로 $c<x<d$

(ii) $f(x)\ge 0$, 즉 $x\le c$ 또는 $x\ge d$일 때

$$h(x)=\frac{f(x)+f(x)}{2}=f(x)$$

$h(x)\le 0$에서 $f(x)\le 0 \qquad \therefore c\le x\le d$

그런데 $x\le c$ 또는 $x\ge d$이므로 $x=c$ 또는 $x=d$

(i), (ii)에서 $c\le x\le d$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

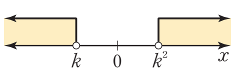
1060

|전략| $k<0,\ 0<k<1,\ k>1$인 경우로 나누어 부등식을 푼다.

(i) $k<0$일 때, $k<0<k^2$이므로

$(x-k)(x-k^2)>0 \qquad \therefore x<k$ 또는 $x>k^2$

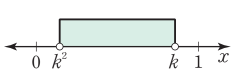
오른쪽 그림에서 이를 만족시키는 정수 x는 무수히 많이 존재한다.



(ii) $0<k<1$일 때, $0<k^2<k<1$이므로

$(x-k)(x-k^2)<0 \qquad \therefore k^2<x<k$

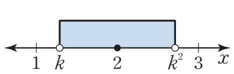
오른쪽 그림에서 이를 만족시키는 정수 x는 존재하지 않는다.



(iii) $k>1$일 때, $1<k<k^2$이므로

$(x-k)(x-k^2)<0 \qquad \therefore k<x<k^2$

오른쪽 그림에서 이를 만족시키는 정수 x의 값이 2뿐이려면



$1\le k<2,\ 2<k^2\le 3$

$\therefore \sqrt{2}<k\le\sqrt{3}\ (\because k>1)$

(i), (ii), (iii)에서 $\sqrt{2}<k\le\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{2}<k\le\sqrt{3}$

참고 $k=1$이면 주어진 이차부등식은 $(x-1)^2<0$

그런데 모든 실수 x에 대하여 $(x-1)^2\ge 0$이므로 이를 만족시키는 정수 x는 존재하지 않는다.

1061

|전략| 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax\ge b$가 성립할 조건은 $a=0,\ b\le 0$이다.

$x-2\le g(x)$에서 $x-2\le(a-1)x+b$

$\therefore (a-2)x\ge -b-2$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로

$a-2=0,\ -b-2\le 0 \qquad \therefore a=2,\ b\ge -2$ …… ㉠

$g(x)\le f(x)$에서 $(a-1)x+b\le 2x^2+5x+2$

이때, $a=2$이므로 $x+b\le 2x^2+5x+2$

$\therefore 2x^2+4x+2-b\ge 0$

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $2x^2+4x+2-b\ge 0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $2x^2+4x+2-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-2(2-b)\le 0 \qquad \therefore b\le 0$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-2\le b\le 0$

따라서 $\alpha=-2,\ \beta=0$이므로 $\beta-\alpha=2$ 답 2

1062

|전략| 연립부등식의 해를 구한 후 주어진 해와 비교하여 $a,\ c$의 값을 구한다.

$x^2-(a+b)x+ab>0$에서 $(x-a)(x-b)>0$

$\therefore x<a$ 또는 $x>b$ …… ㉠

$x^2-(b+c)x+bc>0$에서 $(x-b)(x-c)>0$

$\therefore x<b$ 또는 $x>c$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $x<a$ 또는 $x>c$

이때, 주어진 연립부등식의 해가 $x<-3$ 또는 $x>2$이므로

$a=-3,\ c=2$

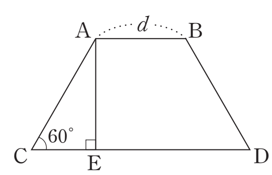
즉, 이차부등식 $x^2-ax+c<0$은 $x^2+3x+2<0$이므로

$(x+2)(x+1)<0 \qquad \therefore -2<x<-1$ 답 $-2<x<-1$

1063

|전략| 등변사다리꼴 ACDB의 넓이를 d에 관한 식으로 나타낸다.

점 A에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 E라 하면 사각형 ACDB는 등변사다리꼴이고, 선분 AB의 길이가 d $(d>0)$이므로



$\overline{CE}=10-\frac{1}{2}d,\ \overline{AC}=2\left(10-\frac{1}{2}d\right)=20-d$

$\cos 60^\circ=\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}=\frac{1}{2}$이므로 $\overline{AC}=2\overline{CE}$

$\overline{AE}=\sqrt{3}\left(10-\frac{1}{2}d\right)=10\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}d$

$\tan 60^\circ=\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}=\sqrt{3}$이므로 $\overline{AE}=\sqrt{3}\,\overline{CE}$

이때, $\overline{AB}\le 4\overline{AC}$이므로

$d\le 4(20-d) \qquad \therefore d\le 16$

그런데 $d>0$이므로 $0<d\le 16$ …… ㉠

또, 사다리꼴 ACDB의 넓이가 $75\sqrt{3}$ 이하이므로

$\frac{1}{2}\cdot(d+20)\cdot\left(10\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}d\right)\le 75\sqrt{3}$

$d^2-100\ge 0,\ (d+10)(d-10)\ge 0 \qquad \therefore d\le -10$ 또는 $d\ge 10$

그런데 $d>0$이므로 $d\ge 10$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $10\le d\le 16$

따라서 d의 최댓값과 최솟값의 합은 $10+16=26$ 답 ③

10 경우의 수와 순열

본책 156~169쪽

STEP 1 개념 마스터 ❶

1064
두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 차가 3이 되는 경우

$(1,\ 4), (2,\ 5), (3,\ 6), (4,\ 1), (5,\ 2), (6,\ 3)$의 6가지

(ii) 눈의 수의 차가 4가 되는 경우

$(1,\ 5), (2,\ 6), (5,\ 1), (6,\ 2)$의 4가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$6+4=10$ 답 10

1065
두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 6이 되는 경우

$(1,\ 5), (2,\ 4), (3,\ 3), (4,\ 2), (5,\ 1)$의 5가지

(ii) 눈의 수의 합이 9가 되는 경우

$(3,\ 6), (4,\ 5), (5,\ 4), (6,\ 3)$의 4가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$5+4=9$ 답 9

1066
두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 5가 되는 경우

$(1,\ 4), (2,\ 3), (3,\ 2), (4,\ 1)$의 4가지

(ii) 눈의 수의 합이 10이 되는 경우

$(4,\ 6), (5,\ 5), (6,\ 4)$의 3가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$4+3=7$ 답 7

1067
7의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

7, 14, 21, ⋯, 49의 7가지

11의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

11, 22, 33, 44의 4가지

두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$7+4=11$ 답 11

1068
3의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

3, 6, 9, ⋯, 48의 16가지

4의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

4, 8, 12, ⋯, 48의 12가지

3과 4의 최소공배수인 12의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

12, 24, 36, 48의 4가지

따라서 구하는 경우의 수는

$16+12-4=24$ 답 24

1069
50의 양의 약수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

1, 2, 5, 10, 25, 50의 6가지

5의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

5, 10, 15, ⋯, 50의 10가지

50의 양의 약수이면서 5의 배수인 수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

5, 10, 25, 50의 4가지

따라서 구하는 경우의 수는

$6+10-4=12$ 답 12

1070
서울에서 대전으로 가는 버스 노선은 $a,\ b,\ c,\ d$의 4가지이고, 대전에서 서울로 오는 기차 노선은 $x,\ y$의 2가지이므로 구하는 경우의 수는

$4\cdot2=8$ 답 8

1071
$(a+b)(x+y+z)$를 전개하면 a, b에 x, y, z를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 구하는 항의 개수는

$2\cdot3=6$ 답 6

1072
$(a+b)(x+y)(p+q+r)$를 전개하면 $a,\ b$에 $x,\ y$를 각각 곱하여 항이 만들어지고 그것에 다시 p, q, r를 곱하여 항이 만들어지므로 구하는 항의 개수는

$2\cdot2\cdot3=12$ 답 12

1073
48을 소인수분해하면

$48=2^4\cdot3$

2^4의 양의 약수는 $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4$의 5개, 3의 양의 약수는 1, 3의 2개이다.

이때, 2^4의 양의 약수와 3의 양의 약수에서 각각 하나씩 택하여 곱한 수는 모두 48의 양의 약수가 된다.

×	1	3
1	1	3
2	2	$2\cdot3$
2^2	2^2	$2^2\cdot3$
2^3	2^3	$2^3\cdot3$
2^4	2^4	$2^4\cdot3$

따라서 구하는 약수의 개수는

$5\cdot2=10$ 답 10

1074
72를 소인수분해하면

$72=2^3\cdot3^2$

2^3의 양의 약수는 $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3$의 4개, 3^2의 양의 약수는 $1,\ 3,\ 3^2$의 3개이다.

×	1	3	3^2
1	1	3	3^2
2	2	$2\cdot3$	$2\cdot3^2$
2^2	2^2	$2^2\cdot3$	$2^2\cdot3^2$
2^3	2^3	$2^3\cdot3$	$2^3\cdot3^2$

이때, 2^3의 양의 약수와 3^2의 양의 약수에서 각각 하나씩 택하여 곱한 수는 모두 72의 양의 약수가 된다.

따라서 구하는 약수의 개수는

$4\cdot3=12$ 답 12

1075

바지를 고르는 경우의 수는 4, 셔츠를 고르는 경우의 수는 5, 점퍼를 고르는 경우의 수는 3이므로 구하는 경우의 수는

$4\cdot5\cdot3=60$ 답 60

STEP 2 유형 마스터 ①

유형 01 합의 법칙 개념 01

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A와 사건 B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면
(사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수)$=m+n$

1076

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합으로 만들 수 있는 8의 양의 약수는 2, 4, 8이다.
두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 눈의 수의 합이 2가 되는 경우
(1, 1)의 1가지
(ii) 눈의 수의 합이 4가 되는 경우
(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지
(iii) 눈의 수의 합이 8이 되는 경우
(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지
(i), (ii), (iii)은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$1+3+5=9$ 답 9

1077

두 번 꺼낸 카드에 적힌 수를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면
(i) $|a-b|=0$이 되는 경우
(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)의 6가지
(ii) $|a-b|=1$이 되는 경우
(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)의 10가지
(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$6+10=16$ 답 16

1078

10과 서로소인 수는 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 수이므로 1에서 100까지의 자연수 중에서 2의 배수 또는 5의 배수를 제외하면 된다.
2의 배수는 2, 4, 6, ⋯, 100의 50개
5의 배수는 5, 10, 15, ⋯, 100의 20개
2와 5의 최소공배수인 10의 배수는 10, 20, 30, ⋯, 100의 10개
이때, 2의 배수 또는 5의 배수는
$50+20-10=60$(개)
따라서 구하는 수의 개수는
$100-60=40$ 답 ②

유형 02 방정식, 부등식의 해의 개수 개념 01

(1) 방정식 $ax+by+cz=d$를 만족시키는 정수의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 x, y, z 중 계수의 절댓값이 큰 것부터 수를 대입하여 구한다.
이때, x, y, z가 음이 아닌 정수인지 자연수인지 확인한다.
(2) 부등식 $ax+by\le c$를 만족시키는 정수의 순서쌍 (x,y)의 개수는 주어진 x, y의 값의 조건을 이용하여 부등식이 성립하는 $ax+by$의 값을 찾은 후 $ax+by=d$ 꼴의 방정식을 만들어 이 방정식의 해의 개수를 구한다.

1079

$x,\ y,\ z$가 자연수이므로 $x+2y+3z=10$에서
(i) $z=1$일 때, $x+2y=7$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
(5, 1), (3, 2), (1, 3)의 3개
(ii) $z=2$일 때, $x+2y=4$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
(2, 1)의 1개
따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는
$3+1=4$ 답 4

1080

$x,\ y$가 자연수이므로 $2x+y\le6$을 만족시키는 경우는
$2x+y=3$, $2x+y=4$, $2x+y=5$, $2x+y=6$
(i) $2x+y=3$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는 (1, 1)의 1개
(ii) $2x+y=4$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는 (1, 2)의 1개
(iii) $2x+y=5$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는 (2, 1), (1, 3)의 2개
(iv) $2x+y=6$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는 (2, 2), (1, 4)의 2개
따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는
$1+1+2+2=6$ 답 ②

다른 풀이 (i) $x=1$일 때, $2+y\le6$, 즉 $y\le4$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)의 4개
(ii) $x=2$일 때, $4+y\le6$, 즉 $y\le2$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
(2, 1), (2, 2)의 2개
따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는
$4+2=6$

1081

1000원, 5000원, 10000원짜리 지폐를 각각 x장, y장, z장 사용한다고 하면
$1000x+5000y+10000z=34000$
$\therefore x+5y+10z=34$ ⋯⋯ ㉠
그런데 세 종류의 지폐를 각각 적어도 한 장씩 사용해야 하므로 이 식을 만족시키는 자연수 $x,\ y,\ z$의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구하면 된다.
(i) $z=1$일 때, ㉠에서 $x+5y=24$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
(19, 1), (14, 2), (9, 3), (4, 4)의 4개
(ii) $z=2$일 때, ㉠에서 $x+5y=14$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
(9, 1), (4, 2)의 2개
따라서 구하는 방법의 수는
$4+2=6$ 답 ④

1082
부등식 $x^2-ax+b<0$에 $x=3$을 대입하면
$9-3a+b<0 \qquad \therefore b<3a-9$
이때, a, b가 5 이하의 자연수이므로
(i) $a=4$일 때, $b<3$이므로 순서쌍 (a, b)는
$(4, 1)$, $(4, 2)$의 2개
(ii) $a=5$일 때, $b<6$이므로 순서쌍 (a, b)는
$(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $(5, 4)$, $(5, 5)$의 5개
따라서 구하는 경우의 수는
$2+5=7$ 답 7

유형 03 곱의 법칙 개념 02
두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면
(두 사건 A, B가 잇달아 일어나는 경우의 수)$=m\times n$

1083
백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
3, 6, 9의 3개
십의 자리와 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 각각
1, 3, 5, 7, 9의 5개
따라서 구하는 자연수의 개수는
$3\cdot5\cdot5=75$ 답 75

1084
$(a+b)^2(x+y)=(a^2+2ab+b^2)(x+y)$
즉, $(a+b)^2(x+y)$를 전개하면 a^2, $2ab$, b^2에 x, y를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 구하는 항의 개수는
$3\cdot2=6$ 답 ②

Lecture
항의 개수
두 식 A, B를 곱할 때, 곱해지는 각 항의 문자가 모두 다르면 식 AB의 전개식의 항의 개수는
⇨ (식 A의 항의 개수)×(식 B의 항의 개수)

1085
각각의 추를 이용하는 경우와 이용하지 않는 경우의 2가지가 있고 0 g을 재는 경우는 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는
$2\times2\times2\times2-1=15$ 답 ④
다른 풀이 (i) 1개의 추를 이용하여 잴 수 있는 무게는
1 g, 3 g, 9 g, 27 g의 4가지
(ii) 2개의 추를 이용하여 잴 수 있는 무게는
$(1+3)$ g, $(1+9)$ g, $(1+27)$ g, $(3+9)$ g,
$(3+27)$ g, $(9+27)$ g의 6가지
(iii) 3개의 추를 이용하여 잴 수 있는 무게는
$(1+3+9)$ g, $(1+3+27)$ g, $(1+9+27)$ g,
$(3+9+27)$ g의 4가지
(iv) 4개의 추를 이용하여 잴 수 있는 무게는
$(1+3+9+27)$ g의 1가지
(i)~(iv)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$4+6+4+1=15$

1086
세 눈의 수의 곱이 짝수인 경우의 수는
(전체 경우의 수)−(세 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수)
이때, 3개의 주사위를 던져 나올 수 있는 모든 경우의 수는
$6\cdot6\cdot6=216$
또, 세 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수는
$3\cdot3\cdot3=27$ (홀수)×(홀수)×(홀수)
따라서 구하는 경우의 수는
$216-27=189$ 답 189

유형 04 약수의 개수 개념 02
자연수 N이 $N=a^pb^qc^r$ (a, b, c는 서로 다른 소수, p, q, r는 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, N의 양의 약수의 개수
⇨ $(p+1)(q+1)(r+1)$

1087
120과 180의 최대공약수는 60이므로 120과 180의 양의 공약수 중에서 5의 배수의 개수는 60의 양의 약수 중에서 5의 배수의 개수와 같다.
이때, 60을 소인수분해하면 $60=2^2\cdot3\cdot5$
5의 배수는 5를 소인수로 가지므로 60의 양의 약수 중 5의 배수의 개수는 $2^2\cdot3$의 양의 약수의 개수와 같다.
따라서 구하는 5의 배수의 개수는
$(2+1)(1+1)=6$ 답 ③

1088
108을 소인수분해하면 $108=2^2\cdot3^3$ ⋯ ❶
따라서 108의 양의 약수의 개수는
$(2+1)(3+1)=12 \qquad \therefore a=12$ ⋯ ❷
108의 양의 약수의 총합은
$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)=280 \qquad \therefore b=280$ ⋯ ❸
$\therefore a+b=12+280=292$ ⋯ ❹
답 292

채점 기준	비율
❶ 108을 소인수분해할 수 있다.	20 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

Lecture
자연수의 양의 약수의 총합
자연수 N이 $N=a^pb^qc^r$ (a, b, c는 서로 다른 소수, p, q, r는 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, N의 양의 약수의 총합
⇨ $(1+a+a^2+\cdots+a^p)(1+b+b^2+\cdots+b^q)(1+c+c^2+\cdots+c^r)$

1089

480을 소인수분해하면 $480=2^5\cdot3\cdot5$

짝수는 2를 소인수로 가지므로 480의 양의 약수 중에서 짝수의 개수는 $2^4\cdot3\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같다. 즉,

$m=(4+1)(1+1)(1+1)=20$

3의 배수는 3을 소인수로 가지므로 480의 양의 약수 중에서 3의 배수의 개수는 $2^5\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같다. 즉,

$n=(5+1)(1+1)=12$

$\therefore m+n=20+12=32$

답 32

1090

18을 소인수분해하면 $18=2\cdot3^2$이므로 자연수 n에 대하여

$18^n=2^n\cdot3^{2n}$

18^n의 양의 약수의 개수가 28이므로

$(n+1)(2n+1)=28,\ 2n^2+3n-27=0$

$(2n+9)(n-3)=0 \qquad \therefore n=3\ (\because n$은 자연수$)$

따라서 구하는 수는 18^3이다.

답 ②

유형 05 지불 방법의 수와 지불 금액의 수 개념 02

100원짜리 동전 p개, 50원짜리 동전 q개, 10원짜리 동전 r개가 있을 때
(단, 0원을 지불하는 경우는 제외)

(1) 지불 방법의 수 : $(p+1)(q+1)(r+1)-1$

(2) 지불 금액의 수 : 금액이 중복되는 경우 큰 단위의 화폐를 작은 단위의 화폐로 바꿔서 지불하는 방법과 같이 계산한다.

1091

(i) 지불 방법의 수

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장의 3가지

500원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$a=3\cdot4\cdot5-1=59$

(ii) 지불 금액의 수

500원짜리 동전 2개로 지불하는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액은 같으므로 1000원짜리 지폐 2장을 500원짜리 동전 4개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 7개와 100원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.

500원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개, 5개, 6개, 7개의 8가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$b=8\cdot5-1=39$

$\therefore a-b=59-39=20$

답 20

1092

10원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

50원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개의 3가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개의 3가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로 구하는 방법의 수는

$4\cdot3\cdot3-1=35$

답 ③

1093

(i) 지불 방법의 수

10000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

5000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장의 3가지

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장, 4장, 5장, 6장의 7가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$a=4\cdot3\cdot7-1=83$

(ii) 지불 금액의 수

5000원짜리 지폐 2장으로 지불하는 금액과 10000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액은 같고, 1000원짜리 지폐 5장으로 지불하는 금액과 5000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액은 같으므로 10000원짜리 지폐 3장과 5000원짜리 지폐 2장을 1000원짜리 지폐 40장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 1000원짜리 지폐 46장으로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, …, 46장의 47가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$b=47-1=46$

$\therefore a-b=83-46=37$

답 37

유형 06 도로망에서의 방법의 수 개념 01, 02

(1) 동시에 갈 수 없는 길이면 ⇨ 합의 법칙을 이용

(2) 동시에 가거나 이어지는 길이면 ⇨ 곱의 법칙을 이용

1094

(i) $\mathrm{P}\to\mathrm{Q}\to\mathrm{S}$로 가는 방법의 수는 $2\cdot3=6$

(ii) $\mathrm{P}\to\mathrm{R}\to\mathrm{S}$로 가는 방법의 수는 $2\cdot2=4$

따라서 구하는 방법의 수는

$6+4=10$

답 ③

1095

(i) 집 → 학교 → 도서관 → 집으로 가는 방법의 수는

$2\cdot2\cdot3=12$

(ii) 집 → 도서관 → 학교 → 집으로 가는 방법의 수는

$3\cdot2\cdot2=12$

따라서 구하는 방법의 수는

$12+12=24$

답 24

1096

(i) A → B → C로 가는 방법의 수는 $3\cdot1=3$

(ii) A → D → C로 가는 방법의 수는 $2\cdot2=4$

(iii) A → B → D → C로 가는 방법의 수는

$3\cdot2\cdot2=12$

(iv) A → D → B → C로 가는 방법의 수는

$2\cdot2\cdot1=4$

따라서 구하는 방법의 수는

$3+4+12+4=23$ 답 ④

유형 07 색칠하는 방법의 수 개념 01, 02

(i) 먼저 한 영역을 정하여 칠하는 경우의 수를 구한다. 이때, 정하는 한 영역은 인접한 영역이 가장 많은 영역으로 하는 것이 좋다.
(ii) 다른 영역으로 옮겨 가면서 이전에 칠한 색을 제외하며 칠하는 경우의 수를 구한다. 이때, 같은 색을 칠할 수 있는 영역은 같은 색인 경우와 다른 색인 경우로 나누어 생각한다.

1097

A에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지
D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 구하는 방법의 수는
$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ 답 48

1098

(i) C에 A와 같은 색을 칠하는 경우
A에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지
D에 칠할 수 있는 색은 A(C)에 칠한 색을 제외한 3가지
이므로 방법의 수는
$4\cdot3\cdot1\cdot3=36$ ··· ❶

(ii) C에 A와 다른 색을 칠하는 경우
A에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지
D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지
이므로 방법의 수는
$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ ··· ❷

따라서 구하는 방법의 수는
$36+48=84$ ··· ❸

답 84

채점 기준	비율
❶ C에 A와 같은 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ C에 A와 다른 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 조건에 맞게 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

1099

A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.
이때, D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 경우와 B에 칠한 색과 다른 경우로 나누어진다.

(i) D에 B와 같은 색을 칠하는 경우
D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지
E에 칠할 수 있는 색은 A, B(D)에 칠한 색을 제외한 3가지
이므로 방법의 수는
$5\cdot4\cdot3\cdot1\cdot3=180$

(ii) D에 B와 다른 색을 칠하는 경우
D에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 2가지
E에 칠할 수 있는 색은 A, B, D에 칠한 색을 제외한 2가지
이므로 방법의 수는
$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot2=240$

따라서 구하는 방법의 수는
$180+240=420$ 답 ④

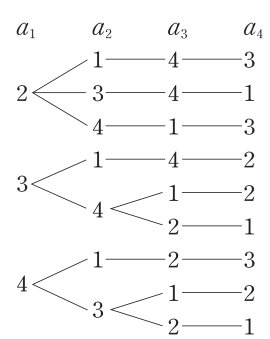
다른 풀이 (i) 모두 다른 색을 칠하는 방법의 수는
$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$
(ii) B와 D에만 같은 색을 칠하는 방법의 수는
$5\cdot4\cdot3\cdot2=120$
(iii) C와 E에만 같은 색을 칠하는 방법의 수는
$5\cdot4\cdot3\cdot2=120$
(iv) B와 D, C와 E에 각각 같은 색을 칠하는 방법의 수는
$5\cdot4\cdot3=60$
따라서 구하는 방법의 수는
$120+120+120+60=420$

발전 유형 08 수형도를 이용하는 경우의 수 개념 01

규칙성을 찾기 어려운 경우의 수를 구할 때는 수형도를 이용한다.
이때, 중복되거나 빠진 것이 없도록 주의한다.

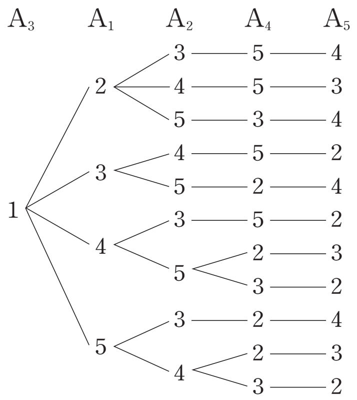
1100

$(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)(a_4-4)\neq0$을 만족시키려면
$a_1\neq1$, $a_2\neq2$, $a_3\neq3$, $a_4\neq4$
이어야 하므로 이를 만족시키는 경우는 다음과 같다.



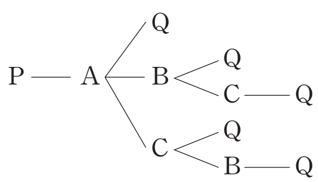
따라서 구하는 경우의 수는 9이다. 답 9

1101
1번 축구공은 A_3에 넣고 i번 축구공은 A_i에 넣지 않는 경우는 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 11이다. 답 11

1102
주어진 육면체의 꼭짓점 P에서 출발하여 꼭짓점 A로 움직인 후 꼭짓점 Q에 도착하는 경우는 다음과 같다.



같은 방법으로 꼭짓점 P에서 출발하여 꼭짓점 B 또는 C로 움직인 후 꼭짓점 Q에 도착하는 경우도 각각 5가지씩이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$5\cdot3=15$ 답 15

STEP 1 개념 마스터 ❷

1103
${}_4P_2=4\cdot3=12$ 답 12

1104
${}_6P_3=6\cdot5\cdot4=120$ 답 120

1105
${}_5P_1=5$ 답 5

1106
${}_8P_4=8\cdot7\cdot6\cdot5=1680$ 답 1680

1107
$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ 답 24

1108
${}_6P_0=1$ 답 1

1109
${}_3P_3=3\cdot2\cdot1=6$ 답 6

1110
$\frac{7!}{3!}=\frac{7!}{(7-4)!}={}_7P_4=7\cdot6\cdot5\cdot4=840$ 답 840

1111
${}_nP_2=n(n-1)$이므로
$n(n-1)=20=5\cdot4 \qquad \therefore n=5$ 답 $n=5$

1112
$210=7\cdot6\cdot5$이므로
${}_7P_3=210 \qquad \therefore r=3$ 답 $r=3$

1113
${}_8P_r=\frac{8!}{(8-r)!}=\frac{8!}{5!}$이므로
$8-r=5 \qquad \therefore r=3$ 답 $r=3$

1114
${}_nP_n=n!$이고 $120=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$이므로
$n!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 \qquad \therefore n=5$ 답 $n=5$

1115
6명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는
$6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ 답 720

1116
6명 중 2명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수는
${}_6P_2=6\cdot5=30$ 답 30

1117
A를 제외한 5명 중 3명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는
${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$ 답 60

1118
5명의 가족을 일렬로 세우는 경우의 수는
$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ 답 120

1119
아빠를 제외한 4명을 일렬로 세우고, 그 앞에 아빠를 세우는 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는
$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ 답 24

1120

부모를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

이때, 각 경우에 대하여 부모 두 사람이 자리를 바꾸는 경우의 수가 $2!=2$이므로 구하는 경우의 수는

$24\cdot2=48$ 답 48

STEP 2 유형 마스터 ②

유형 09 $_{n}\mathrm{P}_{r}$의 계산 개념 03

(1) $_{n}\mathrm{P}_{r}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ (단, $0<r\le n$)

$=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

(2) $0!=1$, $_{n}\mathrm{P}_{0}=1$, $_{n}\mathrm{P}_{n}=n!$

1121

$6_{n}\mathrm{P}_{2}={}_{n}\mathrm{P}_{4}$에서 $6n(n-1)=n(n-1)(n-2)(n-3)$

$_{n}\mathrm{P}_{4}$에서 $n\ge4$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$6=(n-2)(n-3)$, $n^2-5n=0$

$n(n-5)=0$ $\quad\therefore n=5$ ($\because n\ge4$) 답 ②

1122

$_{n}\mathrm{P}_{2}+4_{n}\mathrm{P}_{1}=28$에서 $n(n-1)+4n=28$, $n^2+3n-28=0$

$(n+7)(n-4)=0$ $\quad\therefore n=4$ ($\because n\ge2$) 답 ③

1123

$_{n}\mathrm{P}_{3}+3_{n}\mathrm{P}_{2}=5_{n+1}\mathrm{P}_{2}$에서

$n(n-1)(n-2)+3n(n-1)=5(n+1)n$

$_{n}\mathrm{P}_{3}$에서 $n\ge3$이므로 양변을 n으로 나누면

$(n-1)(n-2)+3(n-1)=5(n+1)$, $n^2-5n-6=0$

$(n+1)(n-6)=0$ $\quad\therefore n=6$ ($\because n\ge3$) 답 ②

1124

$_{8}\mathrm{P}_{r}=2_{8}\mathrm{P}_{r-2}$에서 $\dfrac{8!}{(8-r)!}=2\cdot\dfrac{8!}{\{8-(r-2)\}!}$

$\dfrac{8!}{(8-r)!}=2\cdot\dfrac{8!}{(10-r)!}$, $(10-r)!=2(8-r)!$

$(10-r)(9-r)=2$, $r^2-19r+88=0$

$(r-8)(r-11)=0$ $\quad\therefore r=8$ ($\because 2\le r\le8$) 답 8

유형 10 순열의 수 개념 03

(1) 서로 다른 n개에서 r $(0<r\le n)$개를 택하는 순열의 수 ⇨ $_{n}\mathrm{P}_{r}$

(2) 서로 다른 n개를 모두 나열하는 순열의 수 ⇨ $_{n}\mathrm{P}_{n}=n!$

1125

10명의 회원 중에서 3명을 택하여 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

$_{10}\mathrm{P}_{3}=10\cdot9\cdot8=720$ 답 ⑤

1126

5개의 문자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 구하는 문자열의 개수는

$_{5}\mathrm{P}_{3}=5\cdot4\cdot3=60$ 답 ⑤

1127

n개의 정류장 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수가 132이므로 $_{n}\mathrm{P}_{2}=132$에서

$n(n-1)=132=12\cdot11$ $\quad\therefore n=12$ 답 12

1128

n개의 관광지 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수가 210이므로 $_{n}\mathrm{P}_{3}=210$에서

$n(n-1)(n-2)=210=7\cdot6\cdot5$ $\quad\therefore n=7$ 답 ⑤

유형 11 이웃하는 순열의 수 개념 03

(i) 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 순열의 수를 구한다.

(ii) 한 묶음 안에서 자리를 바꾸는 경우의 수를 구하여 (i)과 곱한다.

1129

모음인 A와 E를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!=120$

A와 E가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot2=240$ 답 240

1130

세 쌍의 부부를 각각 한 사람으로 생각하여 세 사람을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!=6$

세 쌍의 부부가 부부끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot8=48$ 답 48

1131

국어책 4권을 한 묶음, 수학책 3권을 한 묶음으로 생각하여 4권을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$

국어책끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $4!=24$

수학책끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot24\cdot6=3456$ 답 ⑤

1132

어른 4명을 한 사람으로 생각하여 $(n+1)$명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $(n+1)!$

어른 4명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 $(n+1)!\cdot24=576$이므로 $(n+1)!=24=4!$

$n+1=4$ $\quad\therefore n=3$ 답 3

유형 12 이웃하지 않는 순열의 수 개념 03

(i) 이웃하지 않는 것을 제외한 나머지 것을 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.
(ii) 나열한 것의 양 끝과 사이사이의 자리에 이웃하지 않는 것을 나열하는 경우의 수를 구하여 (i)과 곱한다.

1133

남학생 4명을 한 줄로 세우는 경우의 수는 $4!=24$

남학생의 양 끝과 사이사이의 5개의 자리에 여학생 3명을 세우는 경우의 수는

∨남∨남∨남∨남∨

${}_5P_3=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot60=1440$

답 ⑤

1134

3개의 문자 D, E, F를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

이 3개의 문자의 양 끝과 사이사이의 4개의 자리에 A, B, C 세 문자를 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot24=144$

답 144

1135

8개의 의자에 4명이 앉게 되면 빈 의자는 4개이다.

이 4개의 빈 의자의 양 끝과 사이사이의 5개의 자리에 앉을 4명을 배열하면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_5P_4=120$

답 ③

유형 13 특정한 조건이 있는 순열의 수 개념 03

특정한 자리에 대한 조건이 있는 경우
⇨ 특정한 자리에 오는 것의 위치를 고정시키고 나머지를 나열한다.

1136

소수는 2, 3, 5의 3개이므로 양 끝에 소수가 오는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

양 끝의 2개의 숫자를 제외한 나머지 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot6=36$

답 ②

1137

b□□e를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$

b와 e 사이에 2개의 문자를 나열하는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

b와 e가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot20\cdot2=960$

답 960

Plus+ 두 집단의 구성원의 수가 각각 n일 때 ⇨ $2\cdot n!\cdot n!$

1138

(i) 홀수, 짝수의 순서로 교대로 오는 경우의 수

$5!\cdot5!=120\cdot120=14400$

(ii) 짝수, 홀수의 순서로 교대로 오는 경우의 수

$5!\cdot5!=120\cdot120=14400$

따라서 구하는 경우의 수는

$14400+14400=28800$

답 ⑤

참고 홀수와 짝수가 교대로 오는 경우는 다음의 2가지이다.
(홀 짝 홀 짝 홀 짝 홀 짝 홀 짝), (짝 홀 짝 홀 짝 홀 짝 홀 짝 홀)

Plus+ 두 집단의 구성원의 수가 각각 n, $n-1$일 때 ⇨ $n!\cdot(n-1)!$

1139

한국의 탁구 선수는 5명, 중국의 탁구 선수는 4명이므로 한국의 탁구 선수 5명을 일렬로 세우고 그 사이사이에 중국의 탁구 선수 4명을 세우면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$5!\cdot4!=120\cdot24=2880$

답 2880

유형 14 '적어도'의 조건이 있는 순열의 수 개념 03

('적어도'의 조건이 있는 사건 A가 일어나는 경우의 수)
=(모든 경우의 수)−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

1140

6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $6!=720$

양 끝에 모두 모음이 오도록 나열하는 경우의 수는 모음 o, a, e 중에서 2개를 택하여 양 끝에 나열하는 경우의 수가 ${}_3P_2=6$이고, 양 끝의 모음을 제외한 나머지 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수가 $4!=24$이므로 $6\cdot24=144$

따라서 구하는 경우의 수는

$720-144=576$

답 ⑤

1141

7명의 학생 중에서 반장, 부반장을 뽑는 경우의 수는 7명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_7P_2=42$ … ❶

반장, 부반장을 모두 남학생으로 뽑는 경우의 수는 남학생 3명 중에서 반장, 부반장을 뽑으면 되므로

${}_3P_2=6$ … ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$42-6=36$ … ❸

답 36

채점 기준	비율
❶ 7명의 학생 중에서 반장, 부반장을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 반장, 부반장을 모두 남학생으로 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 적어도 한 명은 여학생을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1142

a, b, c, d, e의 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

3개의 문자 a, b, c 중에서 어느 것도 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는 d, e를 일렬로 나열하고 그 양 끝과 사이사이의 3개의 자리에 a, b, c를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$2!\cdot{}_3P_3=2\cdot6=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-12=108$

답 108

1143

6개의 한 자리의 자연수를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

짝수의 개수를 n이라 하면 양 끝에 모두 짝수가 오도록 나열하는 경우의 수는 짝수 n개 중에서 2개를 택하여 양 끝에 나열하는 경우의 수가 ${}_nP_2=n(n-1)$이고, 양 끝의 짝수를 제외한 나머지 4개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수가 $4!=24$이므로

$n(n-1)\cdot24=24n(n-1)$

이때, 적어도 한쪽 끝에 홀수가 오도록 나열하는 경우의 수가 432이므로

$720-24n(n-1)=432$, $24n(n-1)=288$

$n(n-1)=12=4\cdot3 \qquad \therefore n=4$

따라서 짝수의 개수가 4이므로 홀수의 개수는

$6-4=2$

답 2

유형 15 자연수의 개수 (개념 03)

주어진 조건에 따라 기준이 되는 자리를 먼저 나열하고 나머지 자리에는 남은 숫자를 배열한다. 이때, 맨 앞자리에는 0이 올 수 없음에 주의한다.

⇨ 서로 다른 n개의 숫자를 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 r자리의 정수의 개수

(1) n개의 숫자에 0이 없는 경우 : ${}_nP_r$

(2) n개의 숫자에 0이 있는 경우 : $(n-1)\cdot{}_{n-1}P_{r-1}$

1144

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5의 3가지

나머지 자리에는 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자가 올 수 있으므로 $4!=24$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$3\cdot24=72$

답 ③

1145

맨 앞자리에는 0이 올 수 없다.

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 2, 3, 4의 4가지

나머지 자리에는 천의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 3개의 숫자가 올 수 있으므로 ${}_4P_3=24$

따라서 구하는 네 자리의 자연수의 개수는

$4\cdot24=96$

답 96

1146

네 자리의 자연수가 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

나머지 자리에는 0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개의 숫자가 올 수 있으므로 ${}_5P_3=60$

즉, 5의 배수의 개수는 60

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 5를 제외한 1, 2, 3, 4의 4가지

나머지 자리에는 천의 자리에 온 숫자와 일의 자리의 숫자인 5를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개의 숫자가 올 수 있으므로 ${}_4P_2=12$

즉, 5의 배수의 개수는 $4\cdot12=48$

따라서 구하는 5의 배수의 개수는

$60+48=108$

답 108

Lecture

배수판정법

(1) 2의 배수 ⇨ 일의 자리의 숫자가 짝수

(2) 3의 배수 ⇨ 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수

(3) 4의 배수 ⇨ 끝의 두 자리의 수가 00 또는 4의 배수

(4) 5의 배수 ⇨ 일의 자리의 숫자가 0 또는 5

1147

어떤 수가 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 하므로 5개의 숫자 0, 6, 7, 8, 9 중에서 서로 다른 4개를 택했을 때, 그 합이 3의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) (0, 6, 7, 8)인 경우 : $3\cdot3!=3\cdot6=18$

(ii) (0, 7, 8, 9)인 경우 : $3\cdot3!=3\cdot6=18$

(iii) (6, 7, 8, 9)인 경우 : $4!=24$

따라서 구하는 3의 배수의 개수는

$18+18+24=60$

답 ③

유형 16 사전식 배열법을 이용하는 순열의 수 (개념 03)

숫자를 크기 순으로 나열하거나 문자를 사전식으로 배열할 때

⇨ 위치를 정할 수 있는 문자 또는 수를 배열하고 나머지를 나열한다.

1148

32□□□ 꼴인 수의 개수는 $3!=6$

34□□□ 꼴인 수의 개수는 $3!=6$

35□□□ 꼴인 수의 개수는 $3!=6$

4□□□□ 꼴인 수의 개수는 $4!=24$

5□□□□ 꼴인 수의 개수는 $4!=24$

따라서 32000보다 큰 수의 개수는

$6\cdot3+24\cdot2=66$

답 ④

다른 풀이 모든 다섯 자리의 자연수의 개수는 $5!=120$

1□□□□ 꼴인 수의 개수는 $4!=24$

2□□□□ 꼴인 수의 개수는 $4!=24$

31□□□ 꼴인 수의 개수는 $3!=6$

따라서 32000보다 큰 수의 개수는

$120-(24+24+6)=66$

1149

A□□□ 꼴인 단어의 개수는 $3!=6$
BA□□ 꼴인 단어의 개수는 $2!=2$
BE□□ 꼴인 단어의 개수는 $2!=2$
BF□□ 꼴인 단어의 개수는 순서대로 BFAE, BFEA의 2
따라서 A로 시작하는 단어부터 BFEA까지의 개수는
$6+2\cdot2+2=12$
이므로 BFEA보다 앞에 오는 단어의 개수는 11이다. 답 11

1150

1□□ 꼴인 수의 개수는 $9\cdot8=72$
2□□ 꼴인 수의 개수는 $9\cdot8=72$
이때, 102부터 298까지의 각 자리의 숫자가 서로 다른 세 자리의 자연수의 개수는
$72\cdot2=144$
따라서 150번째에 오는 수는 3□□ 꼴인 수 301, 302, 304, 305, 306, 307, ⋯ 중에서 6번째로 작은 수이므로 307이다. 답 307

1151

A□□□□ 꼴인 단어의 개수는 $4!=24$
B□□□□ 꼴인 단어의 개수는 $4!=24$
C□□□□ 꼴인 단어의 개수는 $4!=24$
DA□□□ 꼴인 단어의 개수는 $3!=6$
DB□□□ 꼴인 단어의 개수는 $3!=6$
DCA□□ 꼴인 단어의 개수는 순서대로 DCABE, DCAEB의 2
따라서 A로 시작하는 단어부터 DCAEB까지의 개수는
$24\cdot3+6\cdot2+2=86$
이므로 DCAEB는 86번째에 배열된다. 답 ②

STEP 3 내신 마스터

1152

유형 01 합의 법칙

|전략| 세 수의 곱이 3인 경우와 4인 경우는 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙을 이용한다.

뽑힌 카드에 적힌 세 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 적힌 세 수의 곱이 3이 되는 경우
$(1,\ 1,\ 3),\ (1,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 1)$의 3가지
(ii) 적힌 세 수의 곱이 4가 되는 경우
$(1,\ 1,\ 4),\ (1,\ 4,\ 1),\ (4,\ 1,\ 1),$
$(1,\ 2,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2),\ (2,\ 2,\ 1)$의 6가지
(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$3+6=9$ 답 ③

1153

유형 02 방정식, 부등식의 해의 개수

|전략| 문제의 조건에 맞도록 $ax+by+cz=d$ 꼴의 방정식을 세우고 $x,\ y,\ z$ 중 계수의 절댓값이 큰 것부터 수를 대입하여 구한다.

200원, 500원, 700원짜리 쿠키를 각각 x개, y개, z개 산다고 하면
$200x+500y+700z=3000$ $\quad\therefore 2x+5y+7z=30$ ⋯⋯ ㉠
이 식을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x,\ y,\ z$의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구하면 된다.
(i) $z=0$일 때, ㉠에서 $2x+5y=30$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(15,\ 0),\ (10,\ 2),\ (5,\ 4),\ (0,\ 6)$의 4개
(ii) $z=1$일 때, ㉠에서 $2x+5y=23$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(9,\ 1),\ (4,\ 3)$의 2개
(iii) $z=2$일 때, ㉠에서 $2x+5y=16$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(8,\ 0),\ (3,\ 2)$의 2개
(iv) $z=3$일 때, ㉠에서 $2x+5y=9$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(2,\ 1)$의 1개
(v) $z=4$일 때, ㉠에서 $2x+5y=2$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(1,\ 0)$의 1개
따라서 구하는 방법의 수는
$4+2+2+1+1=10$ 답 ②

1154

유형 01 합의 법칙 + 03 곱의 법칙

|전략| 두 숫자의 합이 짝수이려면 두 숫자가 (짝수, 0), (짝수, 짝수), (홀수, 홀수)이어야 한다.

십의 자리의 숫자를 $a(a\neq0)$, 일의 자리의 숫자를 b라 하면
$a+b=$(짝수)인 경우는 다음과 같다.
(i) $(a,\ b)$가 (짝수, 0)인 경우
a가 될 수 있는 숫자는 $2,\ 4,\ 6,\ 8$의 4가지
(ii) $(a,\ b)$가 (짝수, 짝수)인 경우
a가 될 수 있는 숫자는 $2,\ 4,\ 6,\ 8$의 4가지이고, b가 될 수 있는 숫자도 $2,\ 4,\ 6,\ 8$의 4가지이므로 $4\cdot4=16$
(iii) $(a,\ b)$가 (홀수, 홀수)인 경우
a가 될 수 있는 숫자는 $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$의 5가지이고, b가 될 수 있는 숫자도 $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$의 5가지이므로 $5\cdot5=25$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$4+16+25=45$ 답 ②

1155

유형 01 합의 법칙 + 03 곱의 법칙

|전략| 곱해지는 각 항의 문자가 모두 다를 때, 전개식의 항의 개수는 곱해지는 각 다항식의 항의 개수의 곱과 같음을 이용한다.

$(a+b)(p+q)^2=(a+b)(p^2+2pq+q^2)$을 전개하면 $a,\ b$에 p^2, $2pq$, q^2을 각각 곱하여 항이 만들어지므로 항의 개수는 $2\cdot3=6$
$(x+y+z)(l+m+n)$을 전개하면 $x,\ y,\ z$에 $l,\ m,\ n$을 각각 곱하여 항이 만들어지므로 항의 개수는 $3\cdot3=9$
이때, $(a+b)(p+q)^2$과 $(x+y+z)(l+m+n)$의 전개식에 동류항이 없으므로 구하는 항의 개수는
$6+9=15$ 답 ①

1156

유형 04 약수의 개수

|전략| 먼저 270을 소인수분해한 후 약수가 홀수가 되는 경우를 생각한다.

270을 소인수분해하면 $270=2\cdot3^3\cdot5$

홀수는 2를 소인수로 갖지 않으므로 270의 양의 약수 중에서 홀수의 개수는 $3^3\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같다.

따라서 구하는 홀수의 개수는

$(3+1)(1+1)=8$ 답 ⑤

다른 풀이 $270=2\cdot3^3\cdot5$이므로 270의 양의 약수의 개수는

$(1+1)(3+1)(1+1)=16$

짝수는 2를 소인수로 가지므로 270의 양의 약수 중에서 짝수의 개수는 $3^3\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같다.

즉, 짝수의 개수는 $(3+1)(1+1)=8$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$16-8=8$

1157

유형 05 지불 방법의 수와 지불 금액의 수

|전략| 지불할 수 있는 금액의 수를 구할 때 1000원짜리 지폐 3장을 500원짜리 동전 6개로 바꾸어 생각한다.

(i) 지불 방법의 수

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

500원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$p=4\cdot5\cdot5-1=99$

(ii) 지불 금액의 수

500원짜리 동전 2개로 지불하는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액은 같으므로 1000원짜리 지폐 3장을 500원짜리 동전 6개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 10개와 100원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.

500원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, …, 9개, 10개의 11가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$q=11\cdot5-1=54$

$\therefore p+q=99+54=153$ 답 ③

1158

유형 06 도로망에서의 방법의 수

|전략| 동시에 갈 수 없는 길이면 합의 법칙을, 동시에 가거나 이어지는 길이면 곱의 법칙을 이용한다.

(i) $A\to B\to C\to D\to A$로 가는 방법의 수는

$3\cdot3\cdot2\cdot4=72$

(ii) $A\to D\to C\to B\to A$로 가는 방법의 수는

$4\cdot2\cdot3\cdot3=72$

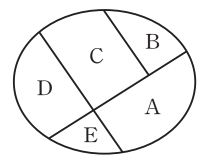
따라서 구하는 방법의 수는

$72+72=144$ 답 ②

1159

유형 07 색칠하는 방법의 수

|전략| 각 영역을 칠하는 방법의 수를 구한 후 곱의 법칙을 이용하여 색칠하는 모든 방법의 수를 구한다.



주어진 그림의 영역을 오른쪽 그림과 같이 A, B, C, D, E로 나타내면 A에 칠할 수 있는 색은 3가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 2가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 1가지이다.

이때, D에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 경우와 A에 칠한 색과 다른 경우로 나누어진다.

(i) D에 A와 같은 색을 칠하는 경우

D에 칠할 수 있는 색은 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 A(D)에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 방법의 수는

$3\cdot2\cdot1\cdot1\cdot2=12$

(ii) D에 A와 다른 색을 칠하는 경우

D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 1가지이므로 방법의 수는

$3\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1=6$

따라서 구하는 방법의 수는

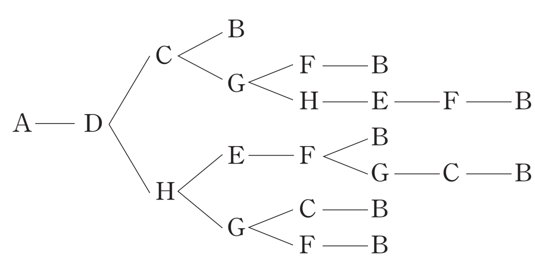
$12+6=18$ 답 ④

1160

유형 08 수형도를 이용하는 경우의 수

|전략| 규칙성을 찾기 어려울 때는 수형도를 이용한다.

주어진 정육면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 주어진 조건에 맞게 모서리를 따라 움직인 후 꼭짓점 B에 도착하는 경우는 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 7이다. 답 ⑤

1161

유형 09 ${}_n\mathrm{P}_r$의 계산

|전략| ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$임을 이용한다. (단, $0\le r\le n$)

${}_6\mathrm{P}_r\le2{}_6\mathrm{P}_{r-2}$에서 $\dfrac{6!}{(6-r)!}\le2\cdot\dfrac{6!}{\{6-(r-2)\}!}$

$\dfrac{1}{(6-r)!}\le2\cdot\dfrac{1}{(8-r)!}$, $(8-r)!\le2(6-r)!$

$(8-r)(7-r) \le 2$, $r^2-15r+54 \le 0$

$(r-6)(r-9) \le 0$ $\quad \therefore 6 \le r \le 9$

그런데 $2 \le r \le 6$이므로 $r=6$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 r는 6의 1개이다. 답 ①

참고 ${}_6P_r$에서 $0 \le r \le 6$ ······ ㉠

${}_6P_{r-2}$에서 $0 \le r-2 \le 6$ $\quad \therefore 2 \le r \le 8$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $2 \le r \le 6$

1162

유형 11 이웃하는 순열의 수 + 12 이웃하지 않는 순열의 수

| 전략 | 2학년 학생들을 제외하고 1학년 학생들을 한 묶음으로 생각하여 먼저 세운다.

1학년 학생 3명을 한 묶음으로 생각하여 3학년 학생 2명과 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!=6$

1학년 학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$

1학년 학생 한 묶음과 3학년 학생 2명의 양 끝과 사이사이의 4개의 자리에 2학년 학생 3명을 세우는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6 \cdot 6 \cdot 24=864$ 답 ⑤

1163

유형 13 특정한 조건이 있는 순열의 수

| 전략 | 먼저 한쪽 끝에는 자음, 다른 쪽 끝에는 모음이 오도록 나열한 후 나머지를 나열한다.

KOREA의 5개의 문자 중에서 자음은 K, R의 2개이고 모음은 O, E, A의 3개이다.

(i) 맨 앞에 자음, 맨 뒤에 모음이 오는 경우의 수

$2 \cdot 3=6$

(ii) 맨 앞에 모음, 맨 뒤에 자음이 오는 경우의 수

$3 \cdot 2=6$

(i), (ii)에서 한쪽 끝에는 자음, 다른 쪽 끝에는 모음이 오는 경우의 수는 $6+6=12$

양 끝의 2개의 문자를 제외한 나머지 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$12 \cdot 6=72$ 답 ③

1164

유형 14 '적어도'의 조건이 있는 순열의 수

| 전략 | 6명을 일렬로 세우는 경우의 수에서 학생 3명이 모두 이웃하지 않는 경우의 수를 제외한다.

6명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $6!=720$

학생 3명이 모두 이웃하지 않도록 세우는 경우의 수는 선생님 3명을 일렬로 세우는 경우의 수가 $3!=6$이고, 선생님의 양 끝과 사이사이의 4개의 자리에 학생 3명을 세우는 경우의 수가 ${}_4P_3=24$이므로

$6 \cdot 24=144$

따라서 구하는 경우의 수는

$720-144=576$ 답 ④

1165

유형 16 사전식 배열법을 이용하는 순열의 수

| 전략 | A로 시작하는 단어, B로 시작하는 단어, C로 시작하는 단어로 나누어 생각한다.

A□□□□ 꼴인 단어의 개수는 $4!=24$

B□□□□ 꼴인 단어의 개수는 $4!=24$

CA□□□ 꼴인 단어의 개수는 $3!=6$

따라서 A로 시작하는 단어부터 CA로 시작하는 단어까지의 개수는

$24 \cdot 2+6=54$

이고, CB□□□ 꼴인 단어는 CBADE, CBAED, ⋯이므로 56번째에 오는 단어는 CBAED이다.

따라서 구하는 문자는 D이다. 답 ④

1166

유형 11 이웃하는 순열의 수

| 전략 | A, B 두 사람이 서로 옆자리에 앉게 되는 경우를 생각한 후 각 경우에 나머지 3명이 앉는 경우를 생각한다.

A, B 두 사람의 좌석 번호를 순서쌍 (A, B)로 나타낼 때, A, B가 서로 옆자리에 앉게 되는 경우는

(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (6, 7), (7, 6)

의 6가지이다. ··· ❶

각 경우에 나머지 3명이 남아 있는 세 자리에 앉는 경우의 수는 3명을 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

$3!=6$ ··· ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$6 \cdot 6=36$ ··· ❸

답 36

채점 기준	배점
❶ A, B가 서로 옆자리에 앉게 되는 경우를 알 수 있다.	3점
❷ 나머지 3명이 남아 있는 세 자리에 앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❸ A, B가 서로 옆자리에 앉게 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점

다른 풀이 (i) A, B 두 사람이 좌석 번호가 6, 7인 자리에 앉는 경우

A, B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

나머지 3명이 남아 있는 세 자리에 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 A, B 두 사람이 좌석 번호가 6, 7인 자리에 앉게 되는 경우의 수는

$2 \cdot 6=12$

(ii) A, B 두 사람이 좌석 번호가 1, 2, 3인 자리에 앉는 경우

A, B를 한 사람으로 생각하여 자리에 앉는 경우의 수는 2

A, B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

나머지 3명이 남아 있는 세 자리에 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 A, B 두 사람이 좌석 번호가 1, 2, 3인 자리에서 서로 옆자리에 앉게 되는 경우의 수는

$2 \cdot 2 \cdot 6=24$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$12+24=36$

1167

유형 13 특정한 조건이 있는 순열의 수

|전략| 짝수와 홀수를 교대로 사용하여 비밀번호를 만드는 경우를 생각해 본다.

(i) (짝 홀 짝 홀 짝)인 경우

3개의 짝수를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

4개의 홀수 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 (짝 홀 짝 홀 짝)으로 비밀번호를 만드는 경우의 수는

$6\cdot12=72$ ··· ❶

(ii) (홀 짝 홀 짝 홀)인 경우

4개의 홀수 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_4P_3=24$

3개의 짝수 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

따라서 (홀 짝 홀 짝 홀)로 비밀번호를 만드는 경우의 수는

$24\cdot6=144$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$72+144=216$ ··· ❸

답 216

채점 기준	배점
❶ (짝 홀 짝 홀 짝)으로 비밀번호를 만드는 경우의 수를 구할 수 있다.	3점
❷ (홀 짝 홀 짝 홀)로 비밀번호를 만드는 경우의 수를 구할 수 있다.	3점
❸ 홀수와 짝수를 교대로 사용하여 비밀번호를 만드는 경우의 수를 구할 수 있다.	1점

1168

유형 15 자연수의 개수

|전략| 어떤 자연수가 4의 배수이려면 끝의 두 자리의 수가 00 또는 4의 배수이어야 한다.

네 자리의 자연수가 4의 배수이려면 끝의 두 자리의 수가 00 또는 4의 배수이어야 한다. ··· ❶

(i) 끝의 두 자리에 0이 없는 경우: □□12, □□24, □□32

세 경우 모두 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 끝의 두 자리에 온 2개의 숫자를 제외한 2가지

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리에 온 숫자와 끝의 두 자리에 온 2개의 숫자를 제외한 2가지

즉, 4의 배수의 개수는 $3\cdot2\cdot2=12$ ··· ❷

(ii) 끝의 두 자리에 0이 있는 경우: □□04, □□20, □□40

세 경우 모두 천의 자리, 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 끝의 두 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자 중에서 2개이므로 ${}_3P_2=6$

즉, 4의 배수의 개수는 $3\cdot6=18$ ··· ❸

따라서 구하는 4의 배수의 개수는

$12+18=30$ ··· ❹

답 30

채점 기준	배점
❶ 네 자리의 자연수가 4의 배수가 되는 경우를 알 수 있다.	1점
❷ 끝의 두 자리에 0이 없는 4의 배수의 개수를 구할 수 있다.	2점
❸ 끝의 두 자리에 0이 있는 4의 배수의 개수를 구할 수 있다.	2점
❹ 4의 배수의 개수를 구할 수 있다.	1점

1169

유형 12 이웃하지 않는 순열의 수

|전략| 이웃해도 상관없는 것을 먼저 일렬로 나열한 후 그 양 끝과 사이사이에 이웃하지 않는 것을 나열한다.

(1) 4개의 주스를 일렬로 놓는 경우의 수는 $4!=24$

(2) 주스의 양 끝과 사이사이의 5개의 자리에 4개의 커피를 놓는 경우의 수는 ${}_5P_4=120$

(3) 커피끼리 이웃하지 않게 놓는 경우의 수는

$24\cdot120=2880$

답 (1) 24 (2) 120 (3) 2880

채점 기준	배점
(1) 주스를 일렬로 놓는 경우의 수를 구할 수 있다.	4점
(2) 주스의 양 끝과 사이사이에 커피를 놓는 경우의 수를 구할 수 있다.	4점
(3) 커피끼리 이웃하지 않게 놓는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점

1170

유형 14 '적어도'의 조건이 있는 순열의 수

|전략| '적어도'의 조건이 있는 사건이 일어나는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 사건이 일어나지 않는 경우의 수를 뺀다.

(1) 6명의 가족이 일렬로 서는 경우의 수는

$6!=720$

(2) (i) 부모 사이에 자녀가 한 명도 서지 않는 경우

부모를 한 묶음으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!=120$

부모가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

즉, 부모 사이에 자녀가 한 명도 서지 않는 경우의 수는

$120\cdot2=240$

(ii) 부모 사이에 자녀가 한 명만 서는 경우

부모 사이에 자녀가 한 명만 설 때 부모 사이에 서는 1명의 자녀를 택하는 경우의 수는 4

부$\boxed{\text{자녀}}$모를 한 묶음으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$

부모가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

즉, 부모 사이에 자녀가 한 명만 서는 경우의 수는

$4\cdot24\cdot2=192$

(i), (ii)에서 부모 사이에 자녀가 어느 한 명도 서지 않거나 한 명만 서는 경우의 수는

$240+192=432$

(3) 자녀 4명 중에서 부모 사이에 적어도 2명이 서는 경우의 수는

$720-432=288$

답 (1) 720 (2) 432 (3) 288

채점 기준	배점
(1) 6명의 가족이 일렬로 서는 경우의 수를 구할 수 있다.	3점
(2) 자녀 4명 중에서 부모 사이에 어느 한 명도 서지 않거나 한 명만 서는 경우의 수를 구할 수 있다.	6점
(3) 자녀 4명 중에서 부모 사이에 적어도 2명이 서는 경우의 수를 구할 수 있다.	3점

참고 부모 사이에 자녀가 2명이 서는 경우, 3명이 서는 경우, 4명이 서는 경우의 수를 각각 구하여 더해도 된다.

창의·융합 **실력 마스터**

1171

|전략| 1과 6이 적힌 정사각형에 색을 칠한 후 다른 영역으로 옮겨 가면서 이전에 칠한 색을 제외한다.

1과 6이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 4가지
2가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 3가지
3이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지
5가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지
4가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1, 5가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 구하는 경우의 수는
$4\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2=96$ 답 ③

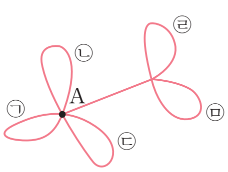
1172

|전략| ㈐에 대입하는 수가 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나눈다.

(i) ㈐에 대입하는 수가 짝수일 때
㈐에 대입할 수 있는 수는 2, 4, 6, 8의 4가지이고, ㈎에는 ㈐에 대입한 수를 제외한 8가지, ㈏에는 ㈎, ㈐에 대입한 수를 제외한 7가지를 대입할 수 있으므로 $4\cdot8\cdot7=224$
(ii) ㈐에 대입하는 수가 홀수일 때
㈐에 대입할 수 있는 수는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지이다.
이때, ㈎+㈏가 짝수이어야 하므로 ㈎, ㈏에 대입하는 수는 모두 홀수이거나 모두 짝수이어야 한다.
㈎, ㈏에 홀수를 대입하는 경우, ㈎에는 ㈐에 대입한 홀수를 제외한 4가지, ㈏에는 ㈎, ㈐에 대입한 홀수를 제외한 3가지를 대입할 수 있으므로 $5\cdot4\cdot3=60$
또한, ㈎, ㈏에 짝수를 대입하는 경우, ㈎에는 2, 4, 6, 8의 4가지, ㈏에는 ㈎에 대입한 짝수를 제외한 3가지를 대입할 수 있으므로 $5\cdot4\cdot3=60$
따라서 ㈐에 대입하는 수가 홀수인 경우의 수는 $60+60=120$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$224+120=344$ 답 344

1173

|전략| 그리는 순서와 그리는 방향을 각각 생각한다.



오른쪽 그림에서 ㉠, ㉡, ㉢을 그리는 순서를 정하는 경우의 수는 $3!=6$
㉠, ㉡, ㉢을 각각 시계 방향과 시계 반대 방향으로 그리는 경우의 수는 $2\cdot2\cdot2=8$
따라서 점 A에서 시작하여 ㉠, ㉡, ㉢을 한 번에 그리는 경우의 수는 $6\cdot8=48$
같은 방법으로 ㉣, ㉤을 한 번에 그리는 경우의 수는 $2!\cdot(2\cdot2)=8$
따라서 구하는 경우의 수는
$48\cdot8=384$ 답 384

1174

|전략| $a_3<a_2<a_1$이 되려면 가장 큰 수인 2^9은 1열에 써넣어야 한다.

a_1의 값이 가장 크려면 2^9은 1열에 써넣어야 한다.
1열에 2^9을 써넣는 경우의 수는 3이고, 8개의 숫자 중 2개를 1열의 남은 자리에 써넣는 경우의 수는 ${}_8P_2$이므로 1열에 숫자를 써넣는 경우의 수는 $3\cdot{}_8P_2$
a_2의 값이 두 번째로 크려면 남은 6개의 숫자 중 가장 큰 수를 2열에 써넣어야 한다.
그 수를 2열에 써넣는 경우의 수는 3이고, 남은 5개의 숫자 중 2열의 남은 자리에 써넣는 경우의 수는 ${}_5P_2$이므로 2열에 숫자를 써넣는 경우의 수는 $3\cdot{}_5P_2$
남은 3개의 숫자를 3열에 써넣는 경우의 수는 ${}_3P_3$
따라서 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned}(3\cdot{}_8P_2)\cdot(3\cdot{}_5P_2)\cdot{}_3P_3&=3^2\cdot\frac{8!}{6!}\cdot\frac{5!}{3!}\cdot3!=3^2\cdot\frac{8!}{6}\\&=9\cdot\frac{8\cdot7!}{6}=12\cdot7!\end{aligned}$$

$\therefore p=12$ 답 ②

1175

|전략| 먼저 A, B, C, D를 주어진 조건에 맞게 자리에 앉힌 후 남은 3개의 좌석에 E, F, G를 앉힌다.

㈎에서 A와 B가 같이 앉을 수 있는 2인용 의자의 개수는 마부가 앉아 있는 의자를 제외해야 하므로 3
A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
즉, A와 B가 같은 2인용 의자에 이웃하여 앉는 경우의 수는
$3\cdot2=6$
㈏에서 남은 5개의 좌석에 C와 D가 앉는 전체 경우의 수는 ${}_5P_2=20$
C와 D가 같이 앉을 수 있는 2인용 의자의 개수는 A와 B가 앉아 있는 의자와 마부가 앉아 있는 의자를 제외해야 하므로 2
C와 D가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
즉, C와 D가 같은 2인용 의자에 이웃하여 앉지 않는 경우의 수는
$20-2\cdot2=16$
남은 3개의 좌석에 E, F, G가 앉는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\cdot16\cdot6=576$ 답 576

다른 풀이 C와 D가 같은 2인용 의자에 이웃하여 앉지 않는 경우의 수를 다른 방법으로 구해 보자.
(i) C가 마부 옆 좌석에 앉는 경우
D가 앉을 수 있는 좌석의 개수는 마부와 A, B, C가 앉은 좌석을 제외해야 하므로 4
(ii) C가 마부 옆 좌석에 앉지 않는 경우
C가 앉을 수 있는 좌석의 개수는 A, B가 앉지 않은 2인용 의자 2개의 좌석이므로 4
이때, D가 앉을 수 있는 좌석의 개수는 A, B, C가 앉지 않은 2인용 의자 1개의 좌석과 마부 옆 좌석이므로 3
즉, C가 마부 옆 좌석에 앉지 않는 경우의 수는 $4\cdot3=12$
(i), (ii)에서 C와 D가 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는
$4+12=16$

11 조합

본책 172~183쪽

STEP 1 개념 마스터

1176

${}_8C_2=\frac{{}_8P_2}{2!}=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$ 답 28

1177

${}_7C_3=\frac{{}_7P_3}{3!}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ 답 35

1178

${}_6C_4={}_6C_2=\frac{{}_6P_2}{2!}=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$ 답 15

1179

${}_9C_6={}_9C_3=\frac{{}_9P_3}{3!}=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$ 답 84

1180

${}_5C_0=1$ 답 1

1181

${}_{10}C_{10}=1$ 답 1

1182

${}_nC_2=36$에서 $\frac{n(n-1)}{2\cdot1}=36$

$n(n-1)=72=9\cdot8$ $\therefore n=9$ 답 $n=9$

1183

${}_6C_r=20$에서 $\frac{6!}{r!(6-r)!}=20$

$6!=20\cdot r!(6-r)!$, $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5\cdot4\cdot r!(6-r)!$

$6\cdot3\cdot2\cdot1=r!(6-r)!$, $3!\cdot3!=r!(6-r)!$

$\therefore r=3$ 답 $r=3$

1184

${}_nC_4={}_nC_5$에서 $5=n-4$ $\therefore n=9$ 답 $n=9$

1185

${}_8C_r={}_8C_{r-4}$에서 $r=r-4$ 또는 $8-r=r-4$

이때, $r\neq r-4$이므로 $2r=12$

$\therefore r=6$ 답 $r=6$

1186

${}_8C_3=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$ 답 56

1187

${}_7C_2=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}=21$ 답 21

1188

동호회 회원 6명 중에서 순서를 생각하지 않고 2명을 선택하면 되므로 구하는 횟수는

${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$ 답 15

1189

5개의 팀 중에서 순서를 생각하지 않고 2개의 팀을 선택하면 되므로 구하는 경기 수는

${}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ 답 10

1190

9명 중에서 3명의 대표를 뽑는 경우의 수는

${}_9C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$ 답 84

1191

남자 6명 중에서 3명의 대표를 뽑는 경우의 수는

${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$

여자 3명 중에서 1명의 대표를 뽑는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\cdot3=60$ 답 60

STEP 2 유형 마스터

유형 01 ${}_nC_r$의 계산 개념 01

(1) ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

(2) ${}_nC_0=1$, ${}_nC_n=1$

(3) ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)

1192

${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}$이므로 $136=\frac{272}{r!}$

$r!=2=2\cdot1$ $\therefore r=2$

또, ${}_nP_2=n(n-1)=272=17\cdot16$에서 $n=17$

$\therefore n+r=17+2=19$ 답 ④

1193

${}_{n}P_2+6{}_{n}C_2=20{}_{n-1}C_3$에서

$n(n-1)+6\cdot\dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}=20\cdot\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot2\cdot1}$

$4n(n-1)=\dfrac{10}{3}(n-1)(n-2)(n-3)$

$n-1\geq3$, 즉 $n\geq4$이므로 등식의 양변을 $(n-1)$로 나누면

$4n=\dfrac{10}{3}(n-2)(n-3)$, $6n=5(n^2-5n+6)$

$5n^2-31n+30=0$, $(n-5)(5n-6)=0$

$\therefore n=5$ ($\because n\geq4$)

답 5

1194

${}_{15}C_{r+2}={}_{15}C_{2r-5}$에서

(i) $r+2=2r-5$일 때, $r=7$

(ii) $15-(r+2)=2r-5$일 때,

$13-r=2r-5$, $3r=18$ $\qquad\therefore r=6$

따라서 모든 자연수 r의 값의 합은 $7+6=13$

답 ③

1195

이차방정식 ${}_{n}C_2x^2-{}_{n}C_3x+{}_{n}C_4=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=\dfrac{{}_{n}C_3}{{}_{n}C_2}=2$ $\qquad\therefore {}_{n}C_3=2{}_{n}C_2$

즉, $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=2\cdot\dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}$에서 $n\geq4$이므로 등식의 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$\dfrac{n-2}{6}=1$ $\qquad\therefore n=8$

$\therefore$ (두 근의 곱)$=\dfrac{{}_{n}C_4}{{}_{n}C_2}=\dfrac{{}_{8}C_4}{{}_{8}C_2}=\dfrac{\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\frac{8\cdot7}{2\cdot1}}=\dfrac{70}{28}=\dfrac{5}{2}$

답 $\dfrac{5}{2}$

유형 02 ${}_{n}C_r$를 포함한 등식의 증명 (개념 01)

${}_{n}C_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}=\dfrac{{}_{n}P_r}{r!}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot r}$ $(0\leq r\leq n)$

⇨ n부터 차례로 1씩 작아지는 자연수 r개의 곱을 1부터 r까지의 곱으로 나눈 값과 같다.

1196

${}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

$=\dfrac{(n-1)!}{r!\{(n-1)-r\}!}+\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=\dfrac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}+\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\dfrac{(\boxed{(가)\ n-r})\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}+\dfrac{\boxed{(나)\ r}\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\dfrac{\{(n-r)+r\}\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\dfrac{\boxed{(다)\ n}\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}={}_{n}C_r$

$\therefore {}_{n}C_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

답 (가) $n-r$ (나) r (다) n

Lecture

조합의 수 ${}_{n}C_r$는 1부터 n까지의 자연수에서 r개의 원소를 택하는 경우의 수로 다음과 같이 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) n을 선택한 경우 : n을 이미 선택하였으므로 나머지 $(n-1)$개에서 $(r-1)$개를 선택하여야 하고, 이 경우의 수는 ${}_{n-1}C_{r-1}$이다.

(ii) n을 선택하지 않은 경우 : n을 제외한 나머지 $(n-1)$개에서 r개를 선택하여야 하고, 이 경우의 수는 ${}_{n-1}C_r$이다.

(i), (ii)는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 의하여

${}_{n}C_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

1197

$n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\boxed{(가)\ (n-r)!}}$

$=\dfrac{\boxed{(나)\ n!}}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\dfrac{r\cdot n!}{\boxed{(다)\ r!}(n-r)!}=r\cdot{}_{n}C_r$

$\therefore r\cdot{}_{n}C_r=n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}$

답 ⑤

유형 03 조합의 수 (개념 01)

서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 경우의 수

⇨ ${}_{n}C_r$

1198

야구 선수 9명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{9}C_3=84$

축구 선수 11명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{11}C_3=165$

따라서 구하는 경우의 수는

$84+165=249$

답 ④

1199

택한 두 수의 합이 짝수가 되는 경우는

(홀수)+(홀수) 또는 (짝수)+(짝수)이다. … ❶

(i) (홀수)+(홀수)인 경우의 수

5개의 홀수 중에서 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_{5}C_2=10$ … ❷

(ii) (짝수)+(짝수)인 경우의 수

4개의 짝수 중에서 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_{4}C_2=6$ … ❸

따라서 구하는 경우의 수는

$10+6=16$ … ❹

답 16

채점 기준	비율
❶ 두 수의 합이 짝수가 되는 경우를 알 수 있다.	20 %
❷ (홀수)+(홀수)인 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ (짝수)+(짝수)인 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 조건에 맞는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1200
남자 직원의 수를 n이라 하면 남자 직원 n명 중에서 2명을 선발하는 경우의 수는 ${}_{n}C_{2}$
여자 직원 5명 중에서 2명을 선발하는 경우의 수는 ${}_{5}C_{2}=10$
즉, ${}_{n}C_{2}\cdot 10=210$이므로 ${}_{n}C_{2}=21$
$\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}=21$, $n(n-1)=42=7\cdot 6$
$\therefore n=7$ 답 7

유형 04 특정한 것을 포함하거나 포함하지 않는 조합의 수 개념 01

(1) 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 뽑는 경우의 수
⇨ 특정한 k개를 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 $(n-k)$개에서 필요한 $(r-k)$개를 뽑는다.
⇨ ${}_{n-k}C_{r-k}$
(2) 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하지 않고 r개를 뽑는 경우의 수
⇨ 특정한 k개를 제외하고 나머지 $(n-k)$개에서 필요한 r개를 뽑는다.
⇨ ${}_{n-k}C_{r}$

1201
은석이와 선규를 뽑고 남은 10명 중에서 3명을 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는
${}_{10}C_{3}=120$ 답 120

1202
C를 제외한 11명의 학생 중에서 A, B를 뽑고 남은 9명의 학생 중에서 4명을 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는
${}_{9}C_{4}=126$ 답 ①

1203
2를 제외한 $(n-1)$개의 자연수 중에서 2개를 택하는 경우의 수가 55이므로
${}_{n-1}C_{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}=55$
$(n-1)(n-2)=110=11\cdot 10$
$\therefore n=12$ 답 ④

1204
5켤레의 신발 중에서 1켤레의 신발을 택하는 경우의 수는
${}_{5}C_{1}=5$
1켤레를 제외한 나머지 4켤레의 신발 8짝 중에서 2짝을 택하는 경우의 수는
${}_{8}C_{2}=28$
이때, 신발 4켤레 중에서 짝이 맞는 1켤레의 신발을 택하는 경우의 수는 ${}_{4}C_{1}=4$이므로 신발 8짝 중에서 짝이 맞지 않는 신발을 택하는 경우의 수는
$28-4=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$5\cdot 24=120$ 답 ③

유형 05 '적어도'의 조건이 있는 조합의 수 개념 01

('적어도'의 조건이 있는 사건 A가 일어나는 경우의 수)
=(모든 경우의 수)−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

1205
전체 11명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{11}C_{4}=330$
소방관만 4명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{7}C_{4}={}_{7}C_{3}=35$
경찰관만 4명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{4}C_{4}=1$
따라서 구하는 경우의 수는
$330-(35+1)=294$ 답 294

1206
전체 10개의 공 중에서 3개를 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}C_{3}=120$
4 이상의 자연수가 적힌 7개의 공 중에서 3개를 뽑는 경우의 수는
${}_{7}C_{3}=35$
따라서 구하는 경우의 수는
$120-35=85$ 답 ②

1207
전체 12편 중에서 2편을 선택하는 경우의 수는 ${}_{12}C_{2}=66$
외국 영화를 n편이라 하면 외국 영화 n편 중에서 2편을 선택하는 경우의 수는 ${}_{n}C_{2}=\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}$
즉, $66-\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}=56$이므로 $n(n-1)=20=5\cdot 4$
$\therefore n=5$ 답 ①

1208
전체 10권 중에서 4권을 택하는 경우의 수는 ${}_{10}C_{4}=210$
소설책과 수필집 중에서 4권을 택하는 경우의 수는 ${}_{7}C_{4}=35$
소설책과 수필집 중에서 3권을 택하고, 시집 중에서 1권을 택하는 경우의 수는 ${}_{7}C_{3}\cdot{}_{3}C_{1}=35\cdot 3=105$
따라서 구하는 경우의 수는
$210-(35+105)=70$ 답 70
다른 풀이 시집이 2권 포함되도록 택하는 경우의 수는 ${}_{3}C_{2}\cdot{}_{7}C_{2}=63$
시집이 3권 포함되도록 택하는 경우의 수는 ${}_{3}C_{3}\cdot{}_{7}C_{1}=7$
따라서 구하는 경우의 수는
$63+7=70$

유형 06 뽑아서 나열하는 경우의 수 개념 01

m명 중에서 r명, n명 중에서 s명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수
⇨ ${}_{m}C_{r}\cdot{}_{n}C_{s}\cdot(r+s)!$

1209
남자 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{4}C_{2}=6$
여자 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=10$
5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!=120$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\cdot 10\cdot 120=7200$ 답 7200

1210

할머니와 어머니를 뽑고 남은 4명의 가족 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot24=144$ 답 ⑤

1211

홀수 1, 3, 5, 7의 네 수 중에서 두 수를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

짝수 2, 4, 6의 세 수 중에서 두 수를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$

이때, 홀수 2개와 짝수 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 비밀번호의 개수는

$6\cdot3\cdot24=432$ 답 432

1212

회장과 부회장을 뽑고 남은 8명의 학생 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_8C_2=28$

회장과 부회장을 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!=6$

회장과 부회장이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$28\cdot6\cdot2=336$ 답 ④

유형 07 직선의 개수 개념 01

(1) 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않은 n개의 점 중에서 주어진 점을 이어서 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수 ⇨ ${}_nC_2$

(2) 한 직선 위에 있는 n개의 점으로 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수 ⇨ 1

1213

5개의 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는

${}_5C_2=10$ 답 10

1214

8개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는

${}_8C_2=28$ 답 28

1215

7개의 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는 ${}_7C_2=21$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$

그런데 한 직선 위에 있는 점들을 연결하여 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

$21-6-3+1+1=14$ 답 ②

다른 풀이 서로 다른 평행선 위의 점을 하나씩 택하여 연결하면 1개의 직선을 만들 수 있으므로 그 개수는 ${}_4C_1\cdot{}_3C_1=4\cdot3=12$

주어진 평행선 2개를 포함하면 구하는 직선의 개수는

$12+2=14$

1216

12개의 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는

${}_{12}C_2=66$ … ❶

가로 방향으로 한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 $3\cdot{}_4C_2=3\cdot6=18$ … ❷

세로 방향으로 한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 $4\cdot{}_3C_2=4\cdot3=12$ … ❸

대각선 방향으로 한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 $4\cdot{}_3C_2=4\cdot3=12$ … ❹

그런데 한 직선 위에 있는 점들을 연결하여 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

$66-18-12-12+3+4+4=35$ … ❺

답 35

채점 기준	비율
❶ 12개의 점으로 만들 수 있는 직선의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 가로 방향으로 한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❸ 세로 방향으로 한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❹ 대각선 방향으로 한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❺ 서로 다른 직선의 개수를 구할 수 있다.	20 %

유형 08 다각형의 대각선의 개수 개념 01

n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 n을 뺀 값과 같다.

⇨ ${}_nC_2-n$

1217

구하는 대각선의 개수는 8개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 8을 뺀 값과 같으므로

${}_8C_2-8=28-8=20$ 답 ③

1218

구하는 다각형을 n각형이라 하면 대각선의 개수가 54이므로

${}_nC_2-n=54,\ \dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}-n=54$

$n^2-3n-108=0,\ (n+9)(n-12)=0$

$\therefore n=12\ (\because n\geq3)$

따라서 십이각형의 꼭짓점의 개수는 12이다. 답 ①

1219

대각선의 교점은 십일각형의 내부에서 만나는 두 대각선에 의하여 결정되고 이를 만족시키는 두 대각선은 4개의 꼭짓점에 의하여 결정되므로 십일각형의 서로 다른 대각선의 교점의 최대 개수는

${}_{11}C_4=330$ — 11개의 꼭짓점에서 서로 다른 4개를 택하는 경우의 수와 같다.

따라서 $n=330=2\cdot3\cdot5\cdot11$이므로 n의 약수가 아닌 것은 ③이다.

답 ③

11 조합

유형 09 삼각형의 개수 개념 01

(1) 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않은 n개의 점 중에서 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수 ⇨ ${}_nC_3$
(2) 한 직선 위에 있는 n개의 점으로 만들 수 있는 삼각형은 없다.

1220

7개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_7C_3=35$
한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는
${}_4C_3=4$
그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는
$35-4=31$ 답 ③

1221

9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_9C_3=84$
한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는
${}_4C_3=4$이고, 4개의 점이 있는 직선은 3개이다.
그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는
$84-3\cdot4=72$ 답 72

1222

10개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_{10}C_3=120$
한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는
${}_4C_3=4$이고, 4개의 점이 있는 직선은 5개이다.
그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는
$120-5\cdot4=100$ 답 ②

유형 10 사각형의 개수 개념 01

어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않은 n개의 점 중에서 4개의 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 개수 ⇨ ${}_nC_4$

1223

직선 l 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_3C_2=3$
직선 m 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_4C_2=6$
따라서 구하는 사각형의 개수는
$3\cdot6=18$ 답 18

1224

9개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 9개의 점 중에서 4개를 택하면 하나의 사각형이 만들어진다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_9C_4=126$ 답 ④

1225

${}_nC_4=70$이므로 $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=70$
$n(n-1)(n-2)(n-3)=70\cdot4\cdot3\cdot2=8\cdot7\cdot6\cdot5$
$\therefore n=8$ 답 8

유형 11 평행사변형의 개수 개념 01

m개의 평행선과 n개의 평행선이 만날 때, 이 평행선으로 만들어지는 평행사변형의 개수 ⇨ ${}_mC_2\cdot{}_nC_2$

1226

가로로 나열된 5개의 평행선 중에서 2개, 세로로 나열된 6개의 평행선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 결정된다.
따라서 구하는 평행사변형의 개수는
${}_5C_2\cdot{}_6C_2=10\cdot15=150$ 답 150

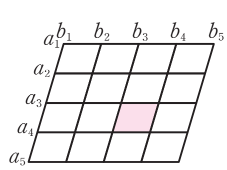
1227

가로로 놓인 선 5개 중에서 2개, 세로로 놓인 선 5개 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 결정되므로 주어진 도형의 선들로 만들 수 있는 직사각형의 개수는 ${}_5C_2\cdot{}_5C_2=10\cdot10=100$
이때, 처음 정사각형의 한 변의 길이를 4라 하면 한 변의 길이가 1, 2, 3, 4인 정사각형의 개수는 각각 16, 9, 4, 1이므로 정사각형의 개수는 $16+9+4+1=30$
따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는
$100-30=70$ 답 70

1228

n개의 평행선 중에서 2개, 이것과 만나는 n개의 평행선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 결정되므로 주어진 평행선으로 만들 수 있는 평행사변형의 개수는 ${}_nC_2\cdot{}_nC_2$
이때, 평행사변형의 개수가 441이므로
${}_nC_2\cdot{}_nC_2=441$, $\left\{\dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}\right\}^2=441$
$\dfrac{n(n-1)}{2}=21\left(\because \dfrac{n(n-1)}{2}>0\right)$
$n(n-1)=42=7\cdot6 \qquad \therefore n=7$ 답 7

1229



오른쪽 그림과 같이 각각의 평행한 직선을 $a_i\,(i=1, 2, 3, 4, 5)$, $b_j\,(j=1, 2, 3, 4, 5)$라 하자.
색칠한 부분을 포함하는 평행사변형을 만들려면 가로 방향의 직선 2개는 a_1, a_2, a_3 중에서 한 개, a_4, a_5 중에서 한 개를 택해야 하므로 가로 방향의 직선을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1\cdot{}_2C_1=3\cdot2=6$
또, 세로 방향의 직선 2개는 b_1, b_2, b_3 중에서 한 개, b_4, b_5 중에서 한 개를 택해야 하므로 세로 방향의 직선을 택하는 경우의 수는
${}_3C_1\cdot{}_2C_1=3\cdot2=6$
따라서 구하는 평행사변형의 개수는
$6\cdot6=36$ 답 ⑤

유형 12 분할하는 경우의 수 개념 01

서로 다른 n개를 p개, q개, r개$(p+q+r=n)$로 분할하는 경우의 수는
(1) p, q, r가 모두 다른 수일 때 ⇨ ${}_{n}C_{p}\cdot{}_{n-p}C_{q}\cdot{}_{r}C_{r}$
(2) p, q, r 중에서 어느 두 수가 같을 때 ⇨ ${}_{n}C_{p}\cdot{}_{n-p}C_{q}\cdot{}_{r}C_{r}\cdot\frac{1}{2!}$
(3) p, q, r가 모두 같은 수일 때 ⇨ ${}_{n}C_{p}\cdot{}_{n-p}C_{q}\cdot{}_{r}C_{r}\cdot\frac{1}{3!}$

1230
6명을 세 조로 나눌 때, 각 조의 인원수는
1, 1, 4 또는 1, 2, 3 또는 2, 2, 2
(i) 1명, 1명, 4명으로 나누는 경우의 수는
$${}_{6}C_{1}\cdot{}_{5}C_{1}\cdot{}_{4}C_{4}\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot5\cdot1\cdot\frac{1}{2}=15$$
(ii) 1명, 2명, 3명으로 나누는 경우의 수는
$${}_{6}C_{1}\cdot{}_{5}C_{2}\cdot{}_{3}C_{3}=6\cdot10\cdot1=60$$
(iii) 2명, 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는
$${}_{6}C_{2}\cdot{}_{4}C_{2}\cdot{}_{2}C_{2}\cdot\frac{1}{3!}=15\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{6}=15$$
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
$15+60+15=90$ 답 90

1231
9명의 학생을 2명, 3명, 4명의 세 조로 나누는 경우의 수는
$a={}_{9}C_{2}\cdot{}_{7}C_{3}\cdot{}_{4}C_{4}=36\cdot35\cdot1=1260$ … ❶
9명의 학생을 4명, 4명, 1명의 세 조로 나누는 경우의 수는
$b={}_{9}C_{4}\cdot{}_{5}C_{4}\cdot{}_{1}C_{1}\cdot\frac{1}{2!}=126\cdot5\cdot1\cdot\frac{1}{2}=315$ … ❷
9명의 학생을 3명, 3명, 3명의 세 조로 나누는 경우의 수는
$c={}_{9}C_{3}\cdot{}_{6}C_{3}\cdot{}_{3}C_{3}\cdot\frac{1}{3!}=84\cdot20\cdot1\cdot\frac{1}{6}=280$ … ❸
$\therefore a-b+c=1260-315+280=1225$ … ❹

답 1225

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a-b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1232
8명을 조별 인원이 2명 또는 3명이 되도록 나눌 때, 각 조의 인원수는
2, 3, 3 또는 2, 2, 2, 2
(i) 8명의 학생을 2명, 3명, 3명의 세 조로 나누는 경우의 수는
$${}_{8}C_{2}\cdot{}_{6}C_{3}\cdot{}_{3}C_{3}\cdot\frac{1}{2!}=28\cdot20\cdot1\cdot\frac{1}{2}=280$$
(ii) 8명의 학생을 2명, 2명, 2명, 2명의 네 조로 나누는 경우의 수는
$${}_{8}C_{2}\cdot{}_{6}C_{2}\cdot{}_{4}C_{2}\cdot{}_{2}C_{2}\cdot\frac{1}{4!}=28\cdot15\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{24}=105$$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$280+105=385$ 답 ③

유형 13 분할하여 분배하는 경우의 수 개념 01

n묶음으로 분할하여 n명에게 분배하는 경우의 수
⇨ (n묶음으로 분할하는 경우의 수)$\cdot n!$

1233
서로 다른 7종류의 꽃을 2종류, 2종류, 3종류로 묶어 세 개의 꽃다발을 만드는 경우의 수는
$${}_{7}C_{2}\cdot{}_{5}C_{2}\cdot{}_{3}C_{3}\cdot\frac{1}{2!}=21\cdot10\cdot1\cdot\frac{1}{2}=105$$
세 개의 꽃다발을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$105\cdot6=630$ 답 630

1234
각 문제를 선택하는 학생의 수가 모두 다르고 아무도 선택하지 않은 문제는 없으므로 각 문제를 선택한 학생의 수는 1, 2, 3
6명의 학생을 1명, 2명, 3명의 세 조로 나누는 경우의 수는
${}_{6}C_{1}\cdot{}_{5}C_{2}\cdot{}_{3}C_{3}=6\cdot10\cdot1=60$
세 조를 3개의 문제에 분배하는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$60\cdot6=360$ 답 ③

1235
정원이 5명인 세 보트 A, B, C에 탑승한 인원수가 서로 다르도록 세 조로 나눌 때, 각 조의 인원수는
1, 2, 5 또는 1, 3, 4
(i) 1명, 2명, 5명으로 나누는 경우의 수는
$${}_{8}C_{1}\cdot{}_{7}C_{2}\cdot{}_{5}C_{5}=8\cdot21\cdot1=168$$
(ii) 1명, 3명, 4명으로 나누는 경우의 수는
$${}_{8}C_{1}\cdot{}_{7}C_{3}\cdot{}_{4}C_{4}=8\cdot35\cdot1=280$$
(i), (ii)에서 세 조로 나누는 경우의 수는
$168+280=448$
세 조를 세 보트 A, B, C에 분배하는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$448\cdot6=2688$ 답 2688

1236
(i) 특정한 2명을 2명인 팀에 배정하는 경우
나머지 회원 5명을 2명, 3명으로 나누는 경우의 수는
$${}_{5}C_{2}\cdot{}_{3}C_{3}=10\cdot1=10$$
(ii) 특정한 2명을 3명인 팀에 배정하는 경우
나머지 회원 5명을 2명, 2명, 1명으로 나누는 경우의 수는
$${}_{5}C_{2}\cdot{}_{3}C_{2}\cdot{}_{1}C_{1}\cdot\frac{1}{2!}=10\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{2}=15$$
(i), (ii)에서 세 팀으로 나누는 경우의 수는
$10+15=25$
세 팀을 3개의 방에 배정하는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$25\cdot6=150$ 답 ④

발전 유형 14 대진표 작성하기 개념 01

(ⅰ) 크게 두 개의 조로 분할한다.
(ⅱ) 나누어진 각 조에 대하여 나눌 수 있는 만큼 다시 분할한다.
(ⅲ) (ⅰ), (ⅱ)의 결과를 곱한다.

1237

6명을 3명, 3명의 두 조로 나누는 경우의 수는

${}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\dfrac{1}{2!}=20\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=10$

각 조에서 나누어진 3명을 2명, 1명으로 나누는 경우의 수는

$({}_3C_2\cdot{}_1C_1)\cdot({}_3C_2\cdot{}_1C_1)=3\cdot3=9$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot9=90$ 답 90

다른 풀이 6명을 3명, 3명의 두 조로 나누는 경우의 수는

${}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\dfrac{1}{2!}=20\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=10$

각 조에서 부전승으로 올라가는 한 명을 택하는 경우의 수는

${}_3C_1\cdot{}_3C_1=3\cdot3=9$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot9=90$

1238

6개의 팀을 4개, 2개의 팀으로 나누는 경우의 수는

${}_6C_4\cdot{}_2C_2=15\cdot1=15$

나누어진 4개의 팀을 2개, 2개의 팀으로 나누는 경우의 수는

${}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\dfrac{1}{2!}=6\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\cdot3=45$ 답 ⑤

1239

7개의 팀을 4개, 3개의 팀으로 나누는 경우의 수는

${}_7C_4\cdot{}_3C_3=35\cdot1=35$ ⋯ ❶

나누어진 4개의 팀을 2개, 2개의 팀으로 나누는 경우의 수는

${}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\dfrac{1}{2!}=6\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=3$ ⋯ ❷

나누어진 3개의 팀을 2개, 1개의 팀으로 나누는 경우의 수는

${}_3C_2\cdot{}_1C_1=3$ ⋯ ❸

따라서 구하는 경우의 수는

$35\cdot3\cdot3=315$ ⋯ ❹

답 315

채점 기준	비율
❶ 7개의 팀을 4개, 3개의 팀으로 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 나누어진 4개의 팀을 2개, 2개의 팀으로 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 나누어진 3개의 팀을 2개, 1개의 팀으로 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 대진표를 작성하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

STEP 3 내신 마스터

1240

유형 01 ${}_nC_r$의 계산

|전략| $a:b=c:d$이면 $bc=ad$임을 이용한다.

${}_nC_7:{}_{n+1}C_6=5:14$에서 $5{}_{n+1}C_6=14{}_nC_7$

$5\cdot\dfrac{{}_{n+1}P_6}{6!}=14\cdot\dfrac{{}_nP_7}{7!}$ — $5\cdot\dfrac{{}_{n+1}P_6}{\cancel{6!}}=\overset{2}{\cancel{14}}\cdot\dfrac{{}_nP_7}{\cancel{7}\cdot\cancel{6!}}$

$5{}_{n+1}P_6=2{}_nP_7$에서

$5(n+1)n(n-1)\cdots(n-4)=2n(n-1)\cdots(n-4)(n-5)(n-6)$

$n\ge7$이므로 양변을 $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$로 나누면

$5(n+1)=2(n-5)(n-6)$

$2n^2-27n+55=0$, $(n-11)(2n-5)=0$

$\therefore n=11$ 또는 $n=\dfrac{5}{2}$

이때, $n\ge7$이므로 $n=11$ 답 ④

1241

유형 03 조합의 수

|전략| 세 수의 곱이 홀수가 되려면 (홀수)×(홀수)×(홀수)이어야 한다.

세 수의 곱이 홀수가 되려면 세 수가 모두 홀수이어야 하므로 세 수의 곱이 홀수가 되는 경우의 수는 1, 3, 5, 7, 9 중에서 세 수를 택하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_5C_3=10$ 답 ①

1242

유형 03 조합의 수

|전략| 전체 경우의 수는 공격수를 택하는 경우의 수와 수비수를 택하는 경우의 수의 곱으로 구한다.

공격수 n명 중에서 3명을 택하는 경우의 수는 ${}_nC_3$

수비수 5명 중에서 2명을 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

따라서 ${}_nC_3\cdot10=350$이므로 ${}_nC_3=35$

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=35$, $n(n-1)(n-2)=210=7\cdot6\cdot5$

$\therefore n=7$ 답 ④

1243

유형 04 특정한 것을 포함하거나 포함하지 않는 조합의 수

|전략| 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 뽑는 경우의 수는 ${}_{n-k}C_{r-k}$임을 이용한다.

2에서 20까지의 자연수 중에서 6과 서로소인 수는 5, 7, 11, 13, 17, 19의 6개이다.

이 중에서 7은 반드시 포함해야 하므로 나머지 5개의 수 중에서 2개를 택하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$ 답 ③

1244

유형 05 '적어도'의 조건이 있는 조합의 수

|전략| 전체 경우의 수에서 박물관만 3곳을 선택하는 경우의 수를 뺀다.

전체 8곳 중에서 3곳을 택하는 경우의 수는 ${}_8C_3=56$

박물관만 3곳을 택하는 경우의 수는 ${}_5C_3=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$56-10=46$ 답 ③

1245

유형 06 뽑아서 나열하는 경우의 수

|전략| 먼저 조합을 이용하여 뽑는 경우의 수를 구한 후 순열을 이용하여 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.

지현이와 지수를 뽑고 남은 5명의 학생 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_3=10$

지현이와 지수를 제외한 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=6$

3명의 양 끝과 사이사이의 4개의 자리에 지현이와 지수를 일렬로 세우는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot6\cdot12=720$ 답 ③

1246

유형 07 직선의 개수

|전략| 한 직선 위에 있는 n개의 점으로 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 1이다.

8개의 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는

${}_8C_2=28$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

그런데 한 직선 위에 있는 점들을 연결하여 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

$28-10+1=19$ 답 ②

1247

유형 08 다각형의 대각선의 개수

|전략| 꼭짓점 중 4개의 점을 택하면 대각선의 교점을 만들 수 있다.

볼록 10각형에서 대각선의 개수는

$a={}_{10}C_2-10=\dfrac{10\cdot9}{2\cdot1}-10=35$

볼록 b각형의 b개의 꼭짓점 중에서 4개를 택하면 한 개의 대각선의 교점을 만들 수 있으므로 볼록 b각형의 서로 다른 대각선의 교점의 최대 개수는

${}_bC_4=\dfrac{b(b-1)(b-2)(b-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=70$

$b(b-1)(b-2)(b-3)=8\cdot7\cdot6\cdot5 \qquad \therefore b=8$

$\therefore a+b=35+8=43$ 답 ①

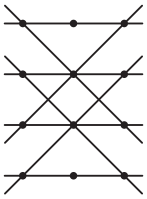
1248

유형 09 삼각형의 개수

|전략| 12개의 점 중 3개를 택하면 삼각형을 만들 수 있다.

12개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_{12}C_3=220$

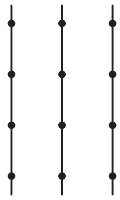
(i) 한 직선 위에 세 점이 있는 경우



한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우에는 삼각형이 만들어지지 않고 오른쪽 그림과 같이 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 8개이므로

${}_3C_3\cdot8=8$

(ii) 한 직선 위에 네 점이 있는 경우



한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우에는 삼각형이 만들어지지 않고 오른쪽 그림과 같이 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 3개이므로

${}_4C_3\cdot3=12$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$220-(8+12)=200$ 답 ②

1249

유형 10 사각형의 개수

|전략| 한 직선 위에 있는 세 점을 택하는 경우에는 사각형이 만들어지지 않는다.

9개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

${}_9C_4=126$

이때, 4개의 점 중에서 한 직선 위에 있는 세 점을 택하는 경우에는 사각형이 만들어지지 않는다.

한 직선 위에 있는 세 점과 다른 한 점을 택하는 경우의 수는

${}_6C_1=6$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$126-6=120$ 답 ③

1250

유형 12 분할하는 경우의 수

|전략| 6개의 과일을 2개의 바구니에 빈 바구니가 없도록 나누어 담는 경우를 생각한다.

과일 6개를 2개의 바구니에 빈 바구니가 없도록 나누어 담을 때, 각 바구니의 과일의 개수는

1, 5 또는 2, 4 또는 3, 3

(i) 1개, 5개로 나누는 경우의 수는

${}_6C_1\cdot{}_5C_5=6$

(ii) 2개, 4개로 나누는 경우의 수는

${}_6C_2\cdot{}_4C_4=15$

(iii) 3개, 3개로 나누는 경우의 수는

${}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\dfrac{1}{2!}=10$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$6+15+10=31$ 답 ⑤

1251

유형 13 분할하여 분배하는 경우의 수

|전략| 특정한 조건을 고려하여 분할하는 경우의 수를 먼저 구한 후 분배하는 경우의 수를 곱한다.

여학생 3명은 각자 다른 차에 타야 하므로 먼저 남학생 4명을 세 팀으로 나누고, 각 팀에 여학생 3명을 분배하여 7명의 학생을 세 팀으로 나눈다.

남학생을 세 팀으로 나눌 때, 각 팀의 남학생 수는

1, 1, 2 또는 $\underbrace{0,\ 2,\ 2}_{\text{차 한 대에 여학생 한 명이 혼자 타는 경우}}$

(i) 남학생을 1명, 1명, 2명으로 나누고, 여학생 3명을 분배하여 세 팀으로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = 36$$

(ii) 남학생을 0명, 2명, 2명으로 나누고, 여학생 3명을 분배하여 세 팀으로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_0 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot 3! = 1 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = 18$$

(i), (ii)에서 7명의 학생을 세 팀으로 나누는 경우의 수는

$36+18=54$

세 팀을 서로 다른 3대의 차에 분배하는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$54 \cdot 6 = 324$

답 ⑤

1252

유형 14 대진표 작성하기

|전략| 8명을 4명, 4명의 두 조로 나눈 후, 각 조의 4명을 2명, 2명으로 나눈다.

8명을 4명, 4명의 두 조로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_4 \cdot {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!} = 70 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 35$$

각 조에서 나누어진 4명을 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는

$$\left({}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!}\right) \cdot \left({}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!}\right) = \left(6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \left(6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = 3 \cdot 3 = 9$$

따라서 구하는 경우의 수는

$35 \cdot 9 = 315$

답 ④

1253

유형 05 '적어도'의 조건이 있는 조합의 수

|전략| '적어도'의 조건이 있는 사건이 일어나는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 사건이 일어나지 않는 경우의 수를 뺀다.

전체 14명의 학생 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{14}C_4 = 1001$ … ❶

1학년 학생 8명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는 ${}_8C_4 = 70$ … ❷

2학년 학생 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_4 = 15$ … ❸

따라서 구하는 경우의 수는

$1001 - (70+15) = 916$ … ❹

답 916

채점 기준	배점
❶ 14명의 학생 중 4명을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❷ 1학년 학생만 4명을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	1점
❸ 2학년 학생만 4명을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	1점
❹ 각 학년의 학생이 적어도 1명씩 포함되도록 하는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점

1254

유형 12 분할하는 경우의 수

|전략| 달리기와 수영을 하는 요일을 택한 후 나머지 하루에 농구, 배드민턴 중에서 하나를 택한다.

일주일 동안 달리기를 하는 4일을 택하는 경우의 수는

${}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$ … ❶

달리기를 하는 4일을 제외하고 나머지 3일 중에서 수영을 하는 2일을 택하는 경우의 수는

${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$ … ❷

나머지 하루에 농구, 배드민턴 중에서 하나를 택하는 경우의 수는

${}_2C_1 = 2$ … ❸

따라서 구하는 경우의 수는

$35 \cdot 3 \cdot 2 = 210$ … ❹

답 210

채점 기준	배점
❶ 달리기를 하는 4일을 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❷ 수영을 하는 2일을 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❸ 농구, 배드민턴 중에서 하나를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❹ 일주일 동안 하루에 한 가지씩 운동하는 계획을 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	1점

1255

유형 13 분할하여 분배하는 경우의 수

|전략| 먼저 사람들이 내리게 될 3개의 층을 택한 후 사람들을 3개의 조로 나누어 분배한다.

2층에서 6층까지 5개의 층 중에서 사람들이 내리게 될 3개의 층을 택하는 경우의 수는

${}_5C_3 = 10$ … ❶

5명을 2명, 2명, 1명의 3개의 조로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 \cdot \frac{1}{2!} = 10 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 15 \quad \cdots ❷$$

3개의 조를 서로 다른 3개의 층에 분배하는 경우의 수는

$3! = 6$ … ❸

따라서 구하는 경우의 수는

$10 \cdot 15 \cdot 6 = 900$ … ❹

답 900

채점 기준	배점
❶ 5개의 층 중에서 3개의 층을 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❷ 5명을 2명, 2명, 1명으로 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❸ 3개의 조를 서로 다른 3개의 층에 분배하는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❹ 3개의 층에서 2명, 2명, 1명이 내리는 경우의 수를 구할 수 있다.	1점

다른 풀이 5명을 2명, 2명, 1명의 3개의 조로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 \cdot \frac{1}{2!} = 10 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 15$$

이때, 3개의 조가 2층부터 6층까지 5개의 층에서 3개의 층을 택하여 내리는 경우의 수는

${}_5P_3 = 60$

따라서 구하는 경우의 수는

$15 \cdot 60 = 900$

1256

유형 06 뽑아서 나열하는 경우의 수

|전략| A, B를 이웃하게 세우려면 A, B를 한 사람으로 생각한 후 두 사람이 자리를 바꾸는 경우를 고려한다.

(1) A, B를 제외한 10명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$_{10}C_3=120$

(2) A, B를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

A, B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 A, B를 이웃하도록 세우는 경우의 수는

$24\cdot2=48$

(3) 조건을 만족시키는 경우의 수는

$120\cdot48=5760$

답 (1) 120 (2) 48 (3) 5760

채점 기준	배점
(1) A, B를 포함하여 5명을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	4점
(2) A, B가 이웃하도록 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	4점
(3) 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점

1257

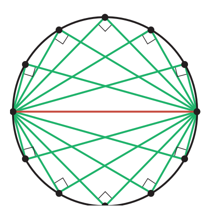
유형 09 삼각형의 개수

|전략| 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않은 n개의 점 중에서 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는 $_nC_3$이다.

(1) 원 위의 점들은 어떤 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 삼각형의 개수는

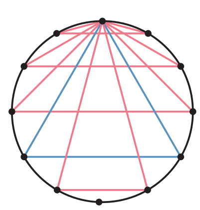
$_{12}C_3=220$

(2) 오른쪽 그림과 같이 1개의 지름을 기준으로 지름의 양 끝점을 제외한 10개의 점 중에서 1개를 택하면 직각삼각형이 생기고, 두 점을 이어 만들 수 있는 지름은 6개이므로 구하는 직각삼각형의 개수는



$_{10}C_1\cdot6=10\cdot6=60$

(3) 오른쪽 그림과 같이 1개의 점을 기준으로 5개의 이등변삼각형이 생기고, 이 중에서 파란색과 같은 정삼각형은 1개가 생기므로 정삼각형을 제외한 이등변삼각형의 개수는 4이다.



12개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는 $_{12}C_1=12$

이때, 파란색과 같은 정삼각형은 총 4개가 생기므로 구하는 이등변삼각형의 개수는

$4\cdot12+4=52$

답 (1) 220 (2) 60 (3) 52

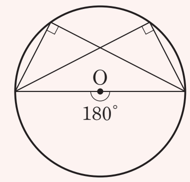
채점 기준	배점
(1) 삼각형의 개수를 구할 수 있다.	3점
(2) 직각삼각형의 개수를 구할 수 있다.	4점
(3) 이등변삼각형의 개수를 구할 수 있다.	5점

Lecture

반원에 대한 원주각의 크기

한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다. 따라서 반원에 대한 중심각의 크기는 $180°$이므로 원주각의 성질로부터 반원에 대한 원주각의 크기는 $90°$이다.

또, 원주각의 크기가 $90°$이면 그에 대한 호는 반원이다.



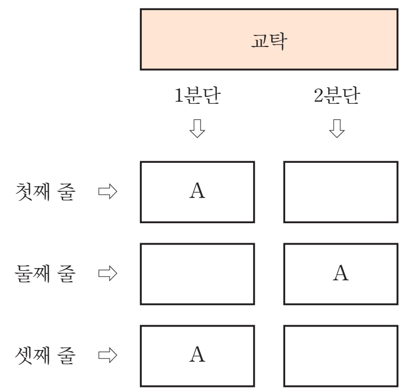
창의·융합 **실력 마스터**

1258

|전략| 참가 인원이 가장 많은 A반 학생들의 자리를 먼저 정한 후 나머지 세 자리에 B반과 C반 학생들을 앉히는 경우의 수를 생각한다.

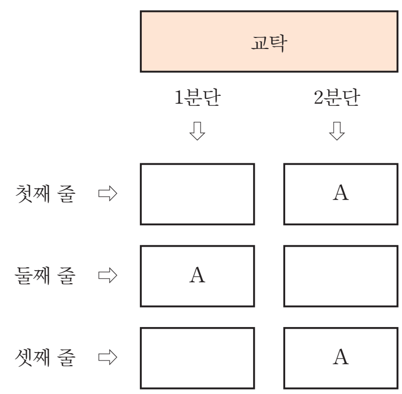
같은 반 학생은 옆으로 이웃하지 않게 앉아야 하고, 앞뒤로도 이웃하지 않게 앉아야 하므로 A반 학생 3명의 자리를 정하는 방법은 다음과 같다.

(ⅰ)



이때, 나머지 세 자리에 B반 학생 2명과 C반 학생 1명을 앉히는 경우의 수는 $_3C_2=3$

(ⅱ)



이때, 나머지 세 자리에 B반 학생 2명과 C반 학생 1명을 앉히는 경우의 수는 $_3C_2=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$3+3=6$

답 6

참고 같은 반 학생들끼리는 출석 번호가 작을수록 교탁에 가까운 자리로 배정하므로 순서를 따로 생각할 필요가 없다.

1259

|전략| 어떤 변도 오각기둥의 모서리가 아닌 삼각형이 만들어지는 경우를 생각한다.

삼각형의 어떤 변도 오각기둥 ABCDE－FGHIJ의 모서리가 아닌 경우는 다음과 같다.

(i) 면 ABCDE에서 꼭짓점 1개, 면 FGHIJ에서 꼭짓점 2개를 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$5\cdot({}_5C_2-5-2)=15$

(ii) 면 ABCDE에서 꼭짓점 2개, 면 FGHIJ에서 꼭짓점 1개를 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는 (i)과 동일하다.

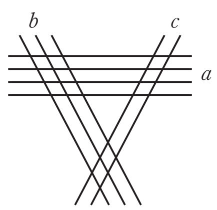
따라서 구하는 경우의 수는

$15+15=30$ 답 30

참고 꼭짓점 A와 면 FGHIJ에서 꼭짓점 2개를 택하여 만든 삼각형 중 어떤 변도 오각기둥 ABCDE－FGHIJ의 모서리가 아닌 삼각형의 개수를 구해 보자.
삼각형의 어떤 변도 오각기둥 ABCDE－FGHIJ의 모서리가 아니려면 면 FGHIJ에서 꼭짓점 2개를 택하여 만든 선분은 오각형 FGHIJ의 대각선이어야 한다.
오각형 FGHIJ의 대각선의 개수는 ${}_5C_2-5$
그런데 점 A에서 면 FGHIJ에 내린 수선의 발 F를 포함하는 삼각형 AFI, 삼각형 AFH는 모서리 AF를 포함한다.
따라서 구하는 삼각형의 개수는
${}_5C_2-5-2=3$

1260

|전략| 평행사변형이 만들어지는 조건과 평행사변형이 아닌 사다리꼴이 만들어지는 조건을 생각한다.



오른쪽 그림과 같이 4개의 평행선, 3개의 평행선, 2개의 평행선을 각각 a, b, c라 하면 평행사변형을 만드는 방법은 다음과 같다.

(i) a에서 2개, b에서 2개를 택하여 만들 수 있는 평행사변형의 개수는

${}_4C_2\cdot{}_3C_2=6\cdot3=18$

(ii) a에서 2개, c에서 2개를 택하여 만들 수 있는 평행사변형의 개수는

${}_4C_2\cdot{}_2C_2=6\cdot1=6$

(iii) b에서 2개, c에서 2개를 택하여 만들 수 있는 평행사변형의 개수는

${}_3C_2\cdot{}_2C_2=3\cdot1=3$

(i), (ii), (iii)에서 $p=18+6+3=27$

또, 평행사변형이 아닌 사다리꼴을 만드는 방법은 다음과 같다.

(iv) a에서 2개, b, c에서 각각 1개씩을 택하여 만들 수 있는 사다리꼴의 개수는

${}_4C_2\cdot{}_3C_1\cdot{}_2C_1=6\cdot3\cdot2=36$

(v) b에서 2개, a, c에서 각각 1개씩을 택하여 만들 수 있는 사다리꼴의 개수는

${}_3C_2\cdot{}_4C_1\cdot{}_2C_1=3\cdot4\cdot2=24$

(vi) c에서 2개, a, b에서 각각 1개씩을 택하여 만들 수 있는 사다리꼴의 개수는

${}_2C_2\cdot{}_4C_1\cdot{}_3C_1=1\cdot4\cdot3=12$

(iv), (v), (vi)에서 $q=36+24+12=72$

$\therefore q-p=72-27=45$ 답 45

1261

|전략| 주어진 조건에 맞게 빨간 공을 넣는 경우의 수를 먼저 생각하고, 파란 공을 넣는 경우의 수를 생각한다.

빨간 공 4개를 서로 다른 세 개의 주머니에 적어도 1개 이상씩 넣는 경우의 수는 세 주머니 중에서 빨간 공 2개를 넣는 주머니를 고르는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_1=3$

파란 공 5개를 서로 다른 세 개의 주머니에 조건을 만족시키면서 넣을 때, 각 주머니의 공의 개수는

1, 1, 3 또는 1, 2, 2 또는 0, 2, 3

(i) 1개, 1개, 3개로 나누어 넣는 경우의 수는

${}_2C_1=2$ — 파란 공 3개는 빨간 공 1개가 들어있는 주머니 중 하나에 넣어야 한다.

(ii) 1개, 2개, 2개로 나누어 넣는 경우의 수는

${}_3C_1=3$ — 파란 공 1개를 넣는 주머니를 선택한다.

(iii) 0개, 2개, 3개로 나누어 넣는 경우의 수는

${}_2C_1\cdot{}_2C_1=2\cdot2=4$ — 파란 공 3개는 빨간 공 1개가 들어있는 주머니 중 하나에 넣고, 파란 공 2개는 나머지 주머니 중 하나에 넣어야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$3\cdot(2+3+4)=27$ 답 ③

1262

|전략| 어느 한 학생이 초콜릿 2개, 꽃 2송이, 꽃 1송이와 초콜릿 1개를 받는 각각의 경우의 수를 생각한다.

5명의 학생에게 꽃 4송이와 초콜릿 2개를 포함한 6개를 남김없이 나누어 주려면 어느 한 학생이 2개를 받아야 한다.

이때, 아무것도 받지 못하는 학생이 없도록 나누어 주어야 하므로

(i) 1명의 학생이 초콜릿 2개를 받는 경우

초콜릿 2개를 받는 학생을 정하는 경우의 수는 5

나머지 4명의 학생에게 꽃을 각각 1송이씩 나누어 주는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 1명의 학생이 초콜릿 2개를 받는 경우의 수는

$5\cdot24=120$

(ii) 1명의 학생이 꽃 2송이를 받는 경우

꽃 2송이를 받는 학생을 정하는 경우의 수는 5

4송이의 꽃 중에서 2송이의 꽃을 고르는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

남은 2송이의 꽃을 받는 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

꽃을 받지 못한 2명의 학생에게 초콜릿을 각각 1개씩 나누어 주는 경우의 수는 1

따라서 1명의 학생이 꽃 2송이를 받는 경우의 수는

$5\cdot6\cdot12\cdot1=360$

(iii) 1명의 학생이 꽃 1송이와 초콜릿 1개를 받는 경우

4송이의 꽃을 4명의 학생에게 각각 1송이씩 나누어 주는 경우의 수는 ${}_5P_4=120$

꽃을 받지 못한 학생에게 초콜릿 1개를 주고 꽃을 받은 학생 중 1명을 택하여 남은 초콜릿 1개를 주는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

따라서 1명의 학생이 꽃 1송이와 초콜릿 1개를 받는 경우의 수는

$120\cdot4=480$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$120+360+480=960$ 답 960

12 행렬과 그 연산

본책 186~199쪽

STEP 1 개념 마스터

1263 답 1×2 행렬

1264 답 2×2 행렬, 이차정사각행렬

1265 답 3×2 행렬

1266 답 2×3 행렬

1267 답 $(1, 2)$ 성분: 3, $(2, 1)$ 성분: 2

1268 답 $(1, 2)$ 성분: 4, $(2, 1)$ 성분: 6

1269 답 $a=2, b=3$

1270

$a=3$, $b=2$이므로 $c=a-b=1$ 답 $a=3, b=2, c=1$

1271

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-1 & 0+2 \\ -1+6 & 5+1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

답 $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

1272

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-1 & -2-0 \\ 1+3 & 0-1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

답 $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

1273

(1) $3A=3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 4 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

(2) $-2A=-2\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\cdot 2 & -2\cdot 4 \\ -2\cdot 0 & -2\cdot(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 2 & \frac{1}{2}\cdot 4 \\ \frac{1}{2}\cdot 0 & \frac{1}{2}\cdot(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $0A=O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1274

(1) $A-2B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $4B-(2A+B)=-2A+3B$
$=-2\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$

1275

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot(-1) & 2\cdot 3 \\ 1\cdot(-1) & 1\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

참고 A가 $m\times k$ 행렬이고 B가 $k\times n$ 행렬이면 AB는 $m\times n$ 행렬이다.

1276

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 3+2\cdot 1 \\ -1\cdot 3+5\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

1277

$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot(-1)+4\cdot 2 & 3\cdot 2+4\cdot(-1) \\ 0\cdot(-1)+1\cdot 2 & 0\cdot 2+1\cdot(-1) \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

1278

(1) $AB=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 11 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$

(2) $BA=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} 8 & 11 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

1279

(1) $A^2=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -23 & 10 \\ 30 & -13 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -23 & 10 \\ 30 & -13 \end{pmatrix}$

1280

(1) $E^3=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $E^{100}+(-E)^{100}=E+E=2E$
$=2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1281

(1) $AE=A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $AE-EA=A-A=O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1282

(1) 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(1+2)A+(1\cdot2-3\cdot0)E=O$

$\therefore A^2-3A+2E=O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $A^2-3A+2E=O$이므로

$A^2-2A+E=(A^2-3A+2E)+A-E=A-E$

$=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

STEP 2 유형 마스터

유형 01 행렬의 뜻과 성분 (개념 01)

행렬 A의 (i, j) 성분 a_{ij}는 행렬 A의 제i행과 제j열이 만나는 위치에 있는 성분이다.

1283

① 3×3 행렬이다. (참)

② $a_{11}=1$, $a_{23}=2$이므로 $a_{11}\neq a_{23}$이다. (거짓)

③ $a_{21}=a_{12}=2$, $a_{31}=a_{13}=0$, $a_{32}=a_{23}=2$이다. (참)

④ 제2열의 성분이 2, 1, 2이므로 그 합은 5이다. (참)

⑤ $a_{11}=a_{22}=a_{33}=1$이다. (참)

따라서 옳지 않은 것은 ②이다. 답 ②

1284

$a_{13}=4$, $a_{22}=-1$이므로

$a_{13}+a_{22}=3$ 답 3

1285

(i) $i=j$일 때,

$a_{11}=-a_{11}$에서 $a_{11}=0$

$a_{22}=-a_{22}$에서 $a_{22}=0$

(ii) $i\neq j$일 때, $a_{12}=-a_{21}$

(i), (ii)에서 행렬 A는 $\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$ (k는 상수) 꼴이어야 하므로 행렬 A가 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

유형 02 성분이 식으로 주어진 행렬 (개념 01)

$A=(a_{ij})\,(i=1, 2, 3, \cdots, j=1, 2, 3, \cdots)$로 주어지면 i와 j에 각각 1, 2, 3, …을 차례로 대입한다.

1286

$a_{11}=1^2-1+1=1$, $a_{12}=1^2-2+1=0$, $a_{13}=1^2-3+1=-1$,

$a_{21}=2^2-1+1=4$, $a_{22}=2^2-2+1=3$, $a_{23}=2^2-3+1=2$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 답 ①

1287

$a_{11}=1\cdot1=1$, $a_{12}=-1+2=1$, $a_{21}=2+1=3$, $a_{22}=2\cdot2=4$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1288

행렬 A의 제1열의 모든 성분은

$a_{11}=1+2\cdot1+k=3+k$, $a_{21}=2+2\cdot1+k=4+k$,

$a_{31}=3+2\cdot1+k=5+k$

제1열의 모든 성분의 합이 6이므로

$(3+k)+(4+k)+(5+k)=6$, $12+3k=6$ $\therefore k=-2$

따라서 행렬 A의 제3행의 모든 성분의 합은

$a_{31}+a_{32}=(3+2\cdot1-2)+(3+2\cdot2-2)=8$ 답 ④

유형 03 성분이 문장으로 주어진 행렬 (개념 01)

주어진 그림을 보고 행렬의 성분의 정의를 이용하여 행렬의 각 성분을 구한다.

1289

$a_{11}=$(1지점에서 1지점으로 직접 가는 길의 개수)$=0$

$a_{12}=$(1지점에서 2지점으로 직접 가는 길의 개수)$=1$

$a_{13}=$(1지점에서 3지점으로 직접 가는 길의 개수)$=0$

마찬가지 방법으로

$a_{21}=2$, $a_{22}=0$, $a_{23}=2$, $a_{31}=1$, $a_{32}=0$, $a_{33}=1$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1290

$a_{11}=1$

$a_{12}=$(P_1에서 P_2로 직접 보내는 통신망의 개수)$=3$

$a_{13}=$(P_1에서 P_3으로 직접 보내는 통신망의 개수)$=0$

마찬가지 방법으로

$a_{21}=0$, $a_{22}=1$, $a_{23}=1$, $a_{31}=2$, $a_{32}=1$, $a_{33}=1$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 제3열의 모든 성분의 합은

$0+1+1=2$ 답 2

1291

전구가 켜지는 경우는 다음과 같다.

(i) 스위치 1과 스위치 2가 동시에 닫혀 있는 경우: $a_{12}=1$, $a_{21}=1$

(ii) 스위치 1과 스위치 3이 동시에 닫혀 있는 경우: $a_{13}=1$, $a_{31}=1$

이 두 경우 외에는 전구가 켜지지 않으므로

$a_{11}=0$, $a_{22}=0$, $a_{23}=0$, $a_{32}=0$, $a_{33}=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 답 ②

유형 04 서로 같은 행렬 개념 01

각 성분이 같음을 이용하여 연립방정식을 만들어 미지수의 값을 구한다.

1292

행렬이 서로 같을 조건에 의하여 $x+2y=y+3$, $2=2x+y$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=4$

$\therefore x^2+y^2=(-1)^2+4^2=17$ 답 ③

다른 풀이 $x+2y=y+3$, $3xy+5=-7$에서 $x+y=3$, $xy=-4$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\cdot(-4)=17$

1293

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x=3-y$, $x=\frac{1}{y}$에서 $x+y=3$, $xy=1$ ··· ❶

$\therefore \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$ ··· ❷

$=\frac{3^2-2\cdot1}{1}=7$ ··· ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ 행렬이 서로 같을 조건에 의하여 $x+y$, xy의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 식을 $x+y$, xy에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30 %

1294

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x^2-2xy+y^2=8-4xy$ ······ ㉠

$3x-4=3y+2$ ······ ㉡

㉠에서 $x^2+2xy+y^2=8$ $\therefore (x+y)^2=8$

㉡에서 $3x-3y=6$ $\therefore x-y=2$

이때, $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$이므로

$8=2^2+4xy$, $4xy=4$ $\therefore xy=1$ 답 ④

1295

행렬이 서로 같을 조건에 의하여 $ab=6$, $bc=10$, $ca=15$

세 식을 변끼리 곱하면

$(abc)^2=6\cdot10\cdot15=30^2$ $\therefore abc=30$ ($\because abc>0$)

위의 식에서 $ab=6$, $bc=10$, $ca=15$를 차례로 나누면

$a=3$, $b=2$, $c=5$

$\therefore a+b+c=10$ 답 10

유형 05 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배(1) 개념 02

수와 식에서의 문자의 계산과 같이 주어진 식을 간단히 한 후 계산한다.

1296

$2A-X=X-(A+B)$에서

$2A-X=X-A-B$, $2X=3A+B$

$\therefore X=\frac{1}{2}(3A+B)=\frac{1}{2}\left\{3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 14 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$4+7+(-2)+0=9$ 답 ④

1297

$3\left(A+\frac{1}{2}B\right)-(3A+B)=3A+\frac{3}{2}B-3A-B=\frac{1}{2}B$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ 답 ②

1298

$2(X-A)=3X+2B$에서

$2X-2A=3X+2B$

$\therefore X=-2A-2B=-2(A+B)$

$=-2\left\{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\right\}$

$=-2\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$4+(-4)+(-4)+(-4)=-8$ 답 -8

1299

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x+y & x+3y \\ 2x+y & 2y \end{pmatrix}$

즉, $3=-x+y$, $2=2y$이므로

$x=-2$, $y=1$ $\therefore x+y=-1$ 답 ②

유형 06 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배(2) 개념 02

행렬 X, Y에 대한 두 등식이 주어지면 X, Y에 대한 연립방정식으로 생각하여 X 또는 Y를 소거한다.

1300

$2X+Y=A$, $X-Y=B$를 연립하여 풀면

$X=\frac{1}{3}(A+B)$, $Y=\frac{1}{3}(A-2B)$

$\therefore X+Y=\frac{2}{3}A-\frac{1}{3}B=\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 2 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

1301

$\begin{cases} X-3Y=2A \\ X+Y=2B \end{cases}$를 변끼리 더하면 $2X-2Y=2A+2B$

$\therefore X-Y=A+B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $X-Y$의 $(2, 1)$ 성분은 6이다. 답 ④

다른 풀이 $\begin{cases} X-3Y=2A \\ X+Y=2B \end{cases}$를 연립하여 풀면

$X=\frac{1}{2}(A+3B), Y=-\frac{1}{2}(A-B)$

$\therefore X-Y=A+B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $X-Y$의 $(2, 1)$ 성분은 6이다.

1302

$X+2Y=A, 2X-Y=B$를 연립하여 풀면

$X=\frac{1}{5}(A+2B), Y=\frac{1}{5}(2A-B)$

$\therefore X+Y=\frac{3}{5}A+\frac{1}{5}B=\frac{3}{5}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{8}{5} & \frac{2}{5} \\ 1 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

따라서 $p=1, q=1, r=1, s=2$이므로

$ps+qr=1\cdot2+1\cdot1=3$ 답 ③

유형 07 행렬의 곱셈 개념 03

행렬의 곱셈을 한 후 식을 연립하여 풀거나 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값을 구한다.

1303

$\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2xy \\ x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$에서

$xy=3, x+y=4$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=4^3-3\cdot3\cdot4=28$ 답 ④

다른 풀이 $x+y=4, xy=3$에서 근과 계수의 관계에 의하여 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-3)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 $x=1, y=3$ 또는 $x=3, y=1$이므로

$x^3+y^3=28$

1304

$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-2 & -2a+2b \\ 2 & -6+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & c \end{pmatrix}$

즉, $a-2=1, -2a+2b=-4, -6+b=c$이므로

$a=3, b=1, c=-5 \quad \therefore a+b+c=-1$ 답 ②

1305

$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -3 \\ -2 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2-4 & -3a+2b \\ 3a-2b & -9+b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

즉, $a^2-4=0, -9+b^2=0$이므로

$a^2=4$에서 $a=-2$ 또는 $a=2$

$b^2=9$에서 $b=-3$ 또는 $b=3$

또, $-3a+2b=0$이므로

$a=2, b=3$ 또는 $a=-2, b=-3$

$\therefore ab=6$ 답 6

1306

$AB=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+x^2 & -1 \\ 6-2x & -3 \end{pmatrix}$

행렬 AB의 모든 성분의 합은

$x^2-2x+4=(x-1)^2+3$

이므로 $x=1$일 때 최솟값 3을 갖는다.

따라서 $a=1, m=3$이므로

$m-a=2$ 답 ②

유형 08 행렬의 거듭제곱(1) 개념 03

$A^2=AA, A^3=A^2A, A^4=A^3A, \cdots$와 같이 차례로 계산한다.

1307

$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 답 ①

1308

$A^2=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+2 & a-1 \\ 2a-2 & 3 \end{pmatrix}$

이때, 행렬 A^2의 모든 성분의 합이 6이므로

$(a^2+2)+(a-1)+(2a-2)+3=6$

$a^2+3a-4=0, (a+4)(a-1)=0$

$\therefore a=1 \ (\because a>0)$ 답 ①

1309

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$B^4=B^2B^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A^4-B^4=\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^4-B^4의 모든 성분의 합은

$0+12+(-8)+0=4$ 답 ④

유형 09 행렬의 거듭제곱(2) 개념 03

행렬 A에 대하여

$A^2, A^3, A^4, \cdots$

을 차례로 구하여 A^n의 규칙성을 찾는다.

1310

$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^{20}=\begin{pmatrix}1&0\\20&1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^{20}의 모든 성분의 합은

$1+0+20+1=22$ 답 ③

1311

$A^2=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2}&0\\0&1\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}2\sqrt{2}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^{12}=\begin{pmatrix}(\sqrt{2})^{12}&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}64&0\\0&1\end{pmatrix}$

따라서 $a=64$, $b=0$, $c=0$, $d=1$이므로

$ad+bc=64\cdot1+0\cdot0=64$ 답 ④

1312

$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-4&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-6&1\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&0\\-6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-8&1\end{pmatrix}$ … ❶

$\vdots$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1&0\\-2n&1\end{pmatrix}$ … ❷

따라서 $-2n=-256$에서

$n=128$ … ❸

답 128

채점 기준	비율
❶ $A^2, A^3, A^4, \cdots$을 구할 수 있다.	30 %
❷ A^n을 추정할 수 있다.	40 %
❸ 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	30 %

1313

$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\12&12\end{pmatrix}=4A$

$A^3=A^2A=(4A)A=4A^2=4(4A)=4^2A$

$A^4=A^3A=(4^2A)A=4^2A^2=4^2(4A)=4^3A$

$\vdots$

$\therefore A^{10}=4^9A=4^9\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}$

행렬 A^{10}의 모든 성분의 합은

$4^9(1+1+3+3)=4^9\cdot8=2^{18}\cdot2^3=2^{21}$

따라서 자연수 k의 값은 21이다. 답 ④

유형 10 행렬의 곱셈의 활용 개념 03

주어진 자료를 행렬로 표현하고, 행렬의 곱에서 각 성분이 의미하는 것을 파악한다.

1314

$AB=\begin{pmatrix}1500&1200\\1400&1300\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1500\cdot2+1200\cdot1&1500\cdot3+1200\cdot4\\1400\cdot2+1300\cdot1&1400\cdot3+1300\cdot4\end{pmatrix}$

이때, 행렬 AB의 $(2,1)$ 성분은 1400원짜리 빵 2개와 1300원짜리 우유 1개의 가격의 합이므로 상점 Q에서 민희가 빵과 우유를 살 경우 지불해야 하는 금액을 나타낸다. 답 ③

참고 ① 행렬 AB의 $(1,1)$ 성분, ② 행렬 AB의 $(1,2)$ 성분, ④ 행렬 AB의 $(2,2)$ 성분을 의미한다.

1315

어른 a명의 주말 관람료는 ar원이고, 청소년 b명의 주말 관람료는 bs원이므로 주말 전체 관람료는 $(ar+bs)$원이다.

① 행렬 YA의 $(1,1)$ 성분은 $ap+br$이다.

② 행렬 YA의 $(1,2)$ 성분은 $aq+bs$이다.

③ 행렬 YX의 $(1,1)$ 성분은 a^2+b^2이다.

④ 행렬 AX의 $(1,1)$ 성분은 $ap+bq$이다.

⑤ 행렬 AX의 $(2,1)$ 성분은 $ar+bs$이다. 답 ⑤

유형 11 행렬의 곱셈의 성질 개념 04

행렬의 곱셈에서는 일반적으로 교환법칙이 성립하지 않음에 주의하여 식을 변형한다.

1316

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$이므로

$A^2+B^2=(A+B)^2-(AB+BA)$

$=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\-5&4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4&0\\-5&9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\-5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&5\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}3&0\\0&5\end{pmatrix}$

1317

$AB+AC=A(B+C)$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 16 & 11 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $AB+AC$의 모든 성분의 합은

$4+(-1)+16+11=30$ 답 ④

1318

$ABC-ABA=AB(C-A)$

$=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ 답 ⑤

1319

$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$이므로

$AB+BA=A^2+B^2-(A-B)^2$

$=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $AB+BA$의 모든 성분의 합은

$-9+4+2+(-5)=-8$ 답 ②

유형 12 $AB=BA$가 성립하는 경우 개념 04

행렬의 곱셈에서 곱셈 공식, 인수분해 공식이 성립하면 $AB=BA$임을 이용할 수 있다.

1320

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$

$\therefore AB=BA$

즉, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 1+2x & 2+2y \\ 2+3x & 4+3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ x+2y & 2x+3y \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$1+2x=5$, $2+2y=8$이므로 $x=2$, $y=3$

$\therefore xy=6$ 답 6

1321

$AB=BA$에서

$\begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} -2+x & 6+xy \\ 3 & 3+4y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -x+12 \\ 2+y & x+4y \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-2+x=1$, $3=2+y$이므로 $x=3$, $y=1$

$\therefore x+y=4$ 답 ④

1322

$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$

$\therefore AB=BA$

즉, $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -1 \\ y & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & -1 \\ y & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 3x+y & -1 \\ 2x+2y & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x-2 & x-2 \\ 3y+4 & y+4 \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-1=x-2$, $2=y+4$이므로 $x=1$, $y=-2$

$\therefore xy=-2$ 답 ①

발전 유형 13 행렬의 변형 개념 04

$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ ⇨ $A\begin{pmatrix} ka+lc \\ kb+ld \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kp+lr \\ kq+ls \end{pmatrix}$

1323

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$이라 하면 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로

$A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=A\left\{2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}=2A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+3A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$=2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ 답 ③

1324

$A\begin{pmatrix} 3a \\ 2b \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} a \\ 2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix} 4a \\ 4b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $4A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1325

$A\begin{pmatrix} 6a-c \\ 3b+d \end{pmatrix}=A\left\{\begin{pmatrix} 6a \\ 3b \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} c \\ -d \end{pmatrix}\right\}=A\begin{pmatrix} 6a \\ 3b \end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} c \\ -d \end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix} c \\ -d \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 6a \\ 3b \end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} 6a-c \\ 3b+d \end{pmatrix}=3A\begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} 6a-c \\ 3b+d \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ 답 ①

유형 14 단위행렬의 곱셈에 대한 성질 개념 04

$AE=EA=A$, $E^n=E$, $(kE)^n=k^nE$ (n은 자연수)와 같은 단위행렬의 곱셈에 대한 성질을 이용한다.

1326

$AE=EA=A$이므로

$(A+E)(A^2-A+E)=A^3+E$

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A^3+E=\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 답 ④

1327

$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=2E$이므로

$A^{40}=(A^2)^{20}=(2E)^{20}=2^{20}E=\begin{pmatrix}2^{20}&0\\0&2^{20}\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^{40}의 모든 성분의 합은

$2^{20}+0+0+2^{20}=2^{21}$ 답 ②

1328

$A^2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$

$\therefore A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$

따라서 자연수 n의 최솟값은 6이다. 답 6

1329

$(A-E)(A-2E)=-4A+E$에서

$A^2-3A+2E=-4A+E \qquad \therefore A^2+A+E=O$

양변에 $A-E$를 곱하면

$(A-E)(A^2+A+E)=O,\ A^3-E=O$

따라서 $A^3=E$이므로

$A^{100}=(A^3)^{33}A=EA=A$ 답 ④

발전 유형 15 $A^n \pm B^n$ 구하기 개념 04

두 행렬 A, B에 대하여 $A+B$와 AB가 단위행렬 E 또는 영행렬 O에 대한 식으로 주어지면 하나의 행렬을 소거하여 A, B의 거듭제곱에 대한 규칙을 찾는다.

1330

$A+B=2E$에서 $B=2E-A$

$AB=O$에 대입하면 $A(2E-A)=2A-A^2=O$

따라서 $A^2=2A$이므로 $A^3=A^2A=2A^2=4A$

또, $A+B=2E$에서 $A=2E-B$

$AB=O$에 대입하면 $(2E-B)B=2B-B^2=O$

따라서 $B^2=2B$이므로 $B^3=B^2B=2B^2=4B$

$\therefore A^3+B^3=4A+4B=4(A+B)=4(2E)=8E$ 답 ④

다른 풀이 $A+B=2E$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A(A+B)=A(2E),\ A^2+AB=2A$

이때, $AB=O$에서 $A^2=2A$이므로 $A^3=A^2A=2A^2=4A$

$A+B=2E$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$(A+B)B=(2E)B,\ AB+B^2=2B$

이때, $AB=O$에서 $B^2=2B$이므로 $B^3=B^2B=2B^2=4B$

$\therefore A^3+B^3=4A+4B=4(A+B)=4(2E)=8E$

1331

$2A-B=O$에서 $B=2A$

$AB=2E$에 대입하면

$A(2A)=2A^2=2E \qquad \therefore A^2=E$ … ❶

또, $2A-B=O$에서 $A=\frac{1}{2}B$

$AB=2E$에 대입하면

$\left(\frac{1}{2}B\right)B=\frac{1}{2}B^2=2E \qquad \therefore B^2=4E$ … ❷

$\therefore A^6+B^6=(A^2)^3+(B^2)^3=E^3+(4E)^3$

$=E+64E=65E$

따라서 실수 k의 값은 65이다. … ❸

답 65

채점 기준	비율
❶ A^2을 E를 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❷ B^2을 E를 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 주어진 등식을 만족시키는 실수 k의 값을 구할 수 있다.	40 %

1332

$A+B=O$에서 $B=-A$

$AB=E$에 대입하면

$A(-A)=-A^2=E \qquad \therefore A^2=-E$

또, $A+B=O$에서 $A=-B$

$AB=E$에 대입하면

$(-B)B=-B^2=E \qquad \therefore B^2=-E$

$\therefore (A+A^2+A^3+\cdots+A^{50})+(B+B^2+B^3+\cdots+B^{50})$

$=(A-E-A+E+A-\cdots+A-E)$

$+(B-E-B+E+B-\cdots+B-E)$

$=A-E+B-E=-2E$ 답 ③

유형 16 행렬의 곱셈의 여러 가지 성질 개념 04

행렬의 연산에 대한 성질을 이용하여 참·거짓을 판단한다.

1333

① $AB\neq BA$ (거짓)

② $(AB)^2=ABAB$이고 $A^2B^2=AABB$이므로

$(AB)^2\neq A^2B^2$ (거짓)

③ $(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$이므로

$(A-B)^2\neq A^2-2AB+B^2$ (거짓)

④ $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$이므로

$(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$ (거짓)

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

1334

ㄱ. $(AB)^2=ABAB$이고 $A^2B^2=AABB$이므로

$(AB)^2=A^2B^2$이면 $AB=BA$이다. (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$이면 $AB=O$이지만

$A\neq O$, $B\neq O$이다. (거짓)

ㄷ. (반례) $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0\\3&4\end{pmatrix}$이면

$A\neq O$이고 $AB=AC$이지만 $B\neq C$이다. (거짓)

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ이다. 답 ①

1335

ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$이면 $A^2=E$이지만

$A \neq E$, $A \neq -E$이다. (거짓)

ㄴ. $A^3=A^5=E$이면

$A^5=A^3A^2=A^2=E$, $A^3=A^2A=A=E$

$\therefore A=E$ (참)

ㄷ. (반례) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이면 $AB=O$이지만

$BA=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq O$이다. (거짓)

ㄹ. $A-B=E$이면 $B=A-E$이므로

$AB=A(A-E)=A^2-A$, $BA=(A-E)A=A^2-A$

$\therefore AB=BA$ (참)

ㅁ. (반례) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이면 $A^2=A$이지만 $A \neq E$이다. (거짓)

따라서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄹ의 2개이다.

답 ②

유형 17 케일리-해밀턴의 정리(1) 개념 05

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$가 성립한다.

1336

케일리-해밀턴의 정리에 의하여 $A^2+A-14E=O$

따라서 $p=1$, $q=-14$이므로 $p+q=-13$

답 -13

1337

케일리-해밀턴의 정리에 의하여 $A^2-2A-E=O$

$\therefore A^3-2A^2+4A-3E$

$=A(A^2-2A-E)+5A-3E$

$=5A-3E$

답 ①

1338

케일리-해밀턴의 정리에 의하여 $A^2+A+E=O$

양변에 $A-E$를 곱하면 $(A-E)(A^2+A+E)=O$

$A^3-E=O \quad \therefore A^3=E$

$\therefore A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6+\cdots+A^{100}$

$=(A+A^2+E)+(A+A^2+E)+\cdots+A$

$=33(A^2+A+E)+A$

$=A$ ($\because A^2+A+E=O$)

답 ④

1339

케일리-해밀턴의 정리에 의하여 $A^2-A+E=O$ … ❶

양변에 $A+E$를 곱하면 $(A+E)(A^2-A+E)=O$

$A^3+E=O \quad \therefore A^3=-E$ … ❷

$\therefore A^4-4A^2+3A+2E=-A-4(A-E)+3A+2E$

$=-2A+6E$

$=-2\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}+6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은

$8+2+(-6)+2=6$ … ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 케일리-해밀턴의 정리를 이용할 수 있다.	30 %
❷ A^3을 E를 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 주어진 행렬의 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	40 %

유형 18 케일리-해밀턴의 정리(2) 개념 05

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2-pA+qE=O$일 때 $A=kE$인 경우와 $A \neq kE$인 경우로 나누어 구한다. (단, k는 실수)

1340

$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ -2 & b \end{pmatrix} \neq kE$($k$는 실수)이므로 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$a+b=5$, $ab+2=1 \quad \therefore a+b=5$, $ab=-1$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=5^2-2\cdot(-1)=27$

답 ⑤

1341

(i) $A \neq kE$(k는 실수)일 때

$2a=4$, $a^2-b^2=3 \quad \therefore a=2$, $b=\pm 1$

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(2, -1)$, $(2, 1)$이다.

(ii) $A=kE$(k는 실수)일 때

$k^2E-4kE+3E=O$, $(k^2-4k+3)E=O$

$k^2-4k+3=0$, $(k-1)(k-3)=0 \quad \therefore k=1$ 또는 $k=3$

즉, $A=E$ 또는 $A=3E$이므로

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(1, 0)$, $(3, 0)$이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는 4이다.

답 ③

1342

(i) $A \neq kE$(k는 실수)일 때

$a+d=5$

(ii) $A=kE$(k는 실수)일 때

$k^2E-5kE+6E=O$, $(k^2-5k+6)E=O$

$k^2-5k+6=0$, $(k-2)(k-3)=0 \quad \therefore k=2$ 또는 $k=3$

즉, $A=2E$ 또는 $A=3E$이므로

$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore a+d=4$ 또는 $a+d=6$

(i), (ii)에서 $a+d$의 최댓값은 6이다.

답 ④

STEP 3 내신 마스터

1343

유형 02 성분이 식으로 주어진 행렬

|전략| 주어진 식에 $i=1, 2, j=1, 2$를 대입하여 a_{ij}를 구한다.

(i) $i\geq j$일 때

$a_{11}=1-1=0,\ a_{21}=2-1=1,\ a_{22}=2-2=0$

(ii) $i<j$일 때

$a_{12}=-a_{21}=-1$

(i), (ii)에서 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은

$0+(-1)+1+0=0$

답 ③

1344

유형 04 서로 같은 행렬

|전략| 행렬이 서로 같을 조건에 의하여 각 성분이 같음을 이용한다.

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2=a^2-ac$ …… ㉠, $2b=4$ …… ㉡

$2a^2-b=0$ …… ㉢, $1=3c-2$ …… ㉣

㉡, ㉣에서 $b=2, c=1$

$b=2$를 ㉢에 대입하면 $2a^2-2=0$

$a^2-1=0,\ (a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

(i) $a=-1, c=1$을 ㉠에 대입하면 $2=(-1)^2-(-1)\cdot 1$

(ii) $a=1, c=1$을 ㉠에 대입하면 $2\neq 1^2-1\cdot 1$

(i), (ii)에서 $a=-1$

$\therefore a+b+c=-1+2+1=2$

답 ②

1345

유형 05 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배(1)

|전략| 행렬의 덧셈을 한 후 행렬이 서로 같을 조건을 이용한다.

$$\begin{pmatrix} 10 & a \\ b & -4 \end{pmatrix}=m\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}+n\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m+4n & -3m+n \\ 2m-n & 5m+2n \end{pmatrix}$$

즉, $m+4n=10,\ 5m+2n=-4$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$m=-2,\ n=3$

$\therefore a+b=(-3m+n)+(2m-n)=-m=2$

답 ①

1346

유형 07 행렬의 곱셈

|전략| 두 행렬 A, B의 곱 AB는 행렬 A의 열의 개수와 행렬 B의 행의 개수가 같을 때에만 정의된다.

A는 1×2 행렬, B는 2×1 행렬, C는 2×2 행렬이므로 BC는 정의되지 않는다.

답 ④

1347

유형 08 행렬의 거듭제곱(1)

|전략| $A+B=O$임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & a \\ b-8 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & b-8 \\ a & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a+b-8 \\ a+b-8 & 0 \end{pmatrix}$$

이때, $A+B=O$에서 $a+b-8=0$ $\quad\therefore b=8-a$

즉, $A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & -2 \end{pmatrix}$이므로

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-a^2 & 0 \\ 0 & 4-a^2 \end{pmatrix}$$

$A^2=kE$이므로 $k=4-a^2$

이때, $a^2\geq 0$이므로 실수 k의 최댓값은 4이다.

답 ③

1348

유형 09 행렬의 거듭제곱(2)

|전략| A^2, A^3을 차례로 구하여 규칙성을 찾아 주어진 식을 간단히 정리한다.

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$$

$$\therefore A+A^2+A^3+A^4+A^5=A+A^2-E-A-A^2$$
$$=-E=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

따라서 모든 성분의 합은

$-1+0+0+(-1)=-2$

답 ④

다른 풀이 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-A+E=O$이므로 $(A+E)(A^2-A+E)=O$

$A^3+E=O \quad \therefore A^3=-E$

$\therefore A+A^2+A^3+A^4+A^5=A+A^2-E-A-A^2=-E$

따라서 모든 성분의 합은 -2

1349

유형 11 행렬의 곱셈의 성질

|전략| 주어진 두 식을 연립하여 행렬 $AB+BA$를 구한다.

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$이므로

$$AB+BA=(A+B)^2-(A^2+B^2)$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$$
$$=(A^2+B^2)-(AB+BA)$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $(A-B)^2$의 모든 성분의 합은

$-2+3+(-9)+1=-7$

답 ②

1350

유형 13 행렬의 변형

|전략| 주어진 등식을 변형하여 $A^2=A+E$를 이용한다.

$A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$에서 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$A^2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

이때, $A^2=A+E$이므로

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=(A+E)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}+E\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

답 ①

1351

유형 15 $A^n \pm B^n$ 구하기

|전략| 주어진 식에서 하나의 행렬을 소거하여 A^n, B^n의 규칙을 찾는다.

$A+B=E$에서 $B=E-A$

$AB=O$에 대입하면

$A(E-A)=A-A^2=O \qquad \therefore A^2=A$

또, $A+B=E$에서 $A=E-B$

$AB=O$에 대입하면

$(E-B)B=B-B^2=O \qquad \therefore B^2=B$

$\therefore A^2+B^2=A+B=E$ 답 ①

1352

유형 16 행렬의 곱셈의 여러 가지 성질

|전략| 행렬의 연산에 대한 성질을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2\neq A^2+2AB+B^2$ (거짓)

ㄴ. $A+B=O$에서 $B=-A$이므로

$AB=A(-A)=-A^2$, $BA=(-A)A=-A^2$

$\therefore AB=BA$ (참)

ㄷ. (반례) $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$이면 $A^2=O$이지만 $A\neq O$이다. (거짓)

ㄹ. $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$를 항상 만족시킨다. (참)

따라서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ②

1353

유형 17 케일리-해밀턴의 정리

|전략| 케일리-해밀턴의 정리를 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-4A+E=O$

$\therefore A^3-4A^2+3A=A(A^2-4A+E)+2A$

$=2A$

따라서 $kA=2A$이므로 $k=2$ 답 ②

1354

유형 07 행렬의 곱셈

|전략| 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.

$\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta&0\\1&\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\beta+1&\alpha\\\beta&\alpha\beta\end{pmatrix}$ … ❶

이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=1$ … ❷

따라서 모든 성분의 합은

$\alpha\beta+1+\alpha+\beta+\alpha\beta=2\alpha\beta+\alpha+\beta+1$

$=2\cdot1+4+1=7$ … ❸

답 7

채점 기준	배점
❶ 주어진 행렬의 곱셈을 할 수 있다.	3점
❷ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	2점

1355

유형 14 단위행렬의 곱셈에 대한 성질

|전략| $AE=EA=A$, $E^n=E$임을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

$(A-E)(A-2E)=-2A+E$에서

$A^2-3A+2E=-2A+E$

$\therefore A^2-A+E=O$ … ❶

양변에 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=O$, $A^3+E=O$

$\therefore A^3=-E$ … ❷

따라서 $A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$이므로

$A^{75}=(A^6)^{12}A^3=A^3=-E$ … ❸

답 $-E$

채점 기준	배점
❶ 주어진 등식을 간단히 할 수 있다.	2점
❷ A의 거듭제곱의 규칙을 찾을 수 있다.	3점
❸ A^{75}을 간단히 할 수 있다.	3점

1356

유형 05 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배(1)

|전략| 주어진 두 식을 연립하여 행렬 X, Y를 구한다.

(1) $X+2Y=\begin{pmatrix}1&-2\\1&4\end{pmatrix}$ ⋯⋯ ㉠

$X-2Y=\begin{pmatrix}-3&2\\5&0\end{pmatrix}$ ⋯⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2X=\begin{pmatrix}1&-2\\1&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&2\\5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0\\6&4\end{pmatrix}$

$\therefore X=\begin{pmatrix}-1&0\\3&2\end{pmatrix}$

㉠−㉡을 하면

$4Y=\begin{pmatrix}1&-2\\1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3&2\\5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-4\\-4&4\end{pmatrix}$

$\therefore Y=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

(2) $X^2=\begin{pmatrix}-1&0\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}$

$Y^2=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$

(3) $2X^2-Y^2=2\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&0\\6&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\8&6\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은

$0+2+8+6=16$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 행렬 X, Y를 구할 수 있다.	4점
(2) 행렬 X^2, Y^2을 구할 수 있다.	3점
(3) 행렬 $2X^2-Y^2$의 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	3점

창의·융합 실력 마스터

1357

|전략| 주어진 식에 $i=1, 2$, $j=1, 2$를 대입하여 구한 행렬과 행렬 A가 서로 같은 행렬임을 이용한다.

$a_{11}=x+y=1$

$a_{22}=2(x^2+y^2)=6$ $\therefore x^2+y^2=3$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$3=1^2-2xy$ $\therefore xy=-1$

$a_{12}=z+w=4$

$a_{21}=z^2+w^2=8$

$z^2+w^2=(z+w)^2-2zw$에서

$8=4^2-2zw$ $\therefore zw=4$

$\therefore xyzw=(-1)\cdot 4=-4$

답 -4

1358

|전략| A의 거듭제곱 사이의 관계와 B의 거듭제곱 사이의 관계를 각각 구한다.

$A^2=AA=(AB)(AB)=A(BA)B=ABB=AB=A$

이므로 $A=A^2=A^3=\cdots$

같은 방법으로

$B^2=BB=(BA)(BA)=B(AB)A=BAA=BA=B$

이므로 $B=B^2=B^3=\cdots$

$$\therefore A^{10}+B^{10}=A+B$$
$$=\begin{pmatrix} a-3 & 2b-4 \\ a+5c & 1-2c+3d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3-2a+b & -3b+d \\ -3c+6 & -4d-1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -a+b & -b+d-4 \\ a+2c+6 & -2c-d \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A^{10}+B^{10}$의 모든 성분의 합은

$(-a+b)+(-b+d-4)+(a+2c+6)+(-2c-d)=2$

답 ②

1359

|전략| 행렬 A를 두 번 곱하고 방정식 $x^3-1=0$의 성질을 이용하여 먼저 A^2을 구한 후 A^6을 구한다.

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$$A^2=\begin{pmatrix} \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \omega^4+\omega & \omega^3+\omega^2+\omega \\ \omega^2+\omega+1 & \omega+\omega^2+2\omega+1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \omega+\omega & 1+\omega^2+\omega \\ \omega^2+\omega+1 & 2\omega+\omega^2+\omega+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\omega & 0 \\ 0 & 2\omega \end{pmatrix}=2\omega E$$

$$\therefore A^6=(A^2)^3=(2\omega E)^3=8\omega^3 E$$
$$=8E=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

따라서 모든 성분의 합은

$8+0+0+8=16$

답 16

참고 방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 하면 (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수)

① $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

② $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

③ $\omega^2=\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}$

1360

|전략| $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$이 성립하므로 $AB=BA$임을 이용한다.

$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2=A^2-2AB+B^2$

$\therefore AB=BA$

즉, $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & -y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & -y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix} 2x & x^2-y \\ 1+2x & x-2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & 1+2x \\ x^2-y & x-2y \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여 $x^2-y=1+2x$이므로

$y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$

따라서 점 (x, y)가 그리는 도형은 꼭짓점의 좌표가 $(1, -2)$인 이차함수의 그래프이다.

답 ④

1361

|전략| $(AB)^n$을 구할 때 n이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 생각한다.

ㄱ. $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}=aE$이므로 $A^n=(aE)^n=a^nE$ (참)

ㄴ. (반례) $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이라 하면 $B^2=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$B^2\neq\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (거짓)

ㄷ. $A=aE$, $B=b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$$AB=ab\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & ab \\ ab & 0 \end{pmatrix}$$

(i) n이 짝수인 경우

$$(AB)^n=\begin{pmatrix} 0 & ab \\ ab & 0 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a^nb^n & 0 \\ 0 & a^nb^n \end{pmatrix}=a^nb^nE$$

$A^n=a^nE$, $B^n=b^nE$이므로 $A^nB^n=a^nb^nE$

(ii) n이 홀수인 경우

$$(AB)^n=\begin{pmatrix} 0 & ab \\ ab & 0 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 0 & a^nb^n \\ a^nb^n & 0 \end{pmatrix}=a^nb^n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^n=a^nE$, $B^n=b^n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이므로 $A^nB^n=a^nb^n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(i), (ii)에서 $(AB)^n=A^nB^n$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

1362

|전략| A^2, A^3, A^4, …을 구하여 A^n의 규칙을 찾는다.

$A^{n+1}=A^{n+2}+A^n$에서 $A^{n+2}=A^{n+1}-A^n$이므로

$n=1, 2, 3, 4$를 차례로 대입하면

$A^3=A^2-A$

$A^4=A^3-A^2=(A^2-A)-A^2=-A$

$A^5=A^4-A^3=-A-(A^2-A)=-A^2$

$A^6=A^5-A^4=-A^2-(-A)=-A^2+A$

$A^7=A^6-A^5=-A^2+A-(-A^2)=A$

$$\therefore A^{217}=(A^7)^{31}=A^{31}=(A^7)^4A^3$$
$$=A^4A^3=A^7=A$$

답 ③

Memo