짧지만 개념에 강한 **짱강 공통수학1**

정답과 해설

01 다항식의 연산

기초 개념 피드백 & TEST

본문 | 009쪽

1-1 (1) $\mathbf{2x}$ (2) $\mathbf{+,\ -10x^2}$

1-2 (1) $(-2x^2-5x-1)+(-3x^2+x)$
$=-2x^2-5x-1-3x^2+x$
$=\mathbf{-5x^2-4x-1}$

(2) $(4x^2-3x-6)-(2x^2-8x)$
$=4x^2-3x-6-2x^2+8x$
$=\mathbf{2x^2+5x-6}$

2-1 (1) $\mathbf{5a^2}$ (2) $\mathbf{4a,\ 2a}$

2-2 (1) $4x(x+y)-2x(3x-2y)$
$=4x^2+4xy-6x^2+4xy=\mathbf{-2x^2+8xy}$

(2) $(9x^3y^2-3xy^3)\div\frac{1}{3}xy$
$=(9x^3y^2-3xy^3)\times\frac{3}{xy}=\mathbf{27x^2y-9y^2}$

3-1 (1) $\mathbf{4a}$ (2) $\mathbf{4}$ (3) $\mathbf{2x}$ (4) $\mathbf{5}$

3-2 (1) $(2a-1)^2=(2a)^2-2\times2a\times1+1^2$
$=\mathbf{4a^2-4a+1}$

(2) $\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right)=a^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\mathbf{a^2-\frac{1}{4}}$

(3) $(x-2)(x-5)$
$=x^2+(-2-5)x+(-2)\times(-5)$
$=\mathbf{x^2-7x+10}$

(4) $(2x+5)(x+3)$
$=(2\times1)x^2+(2\times3+5\times1)x+5\times3$
$=\mathbf{2x^2+11x+15}$

본문 | 010~015쪽

1-1 $\mathbf{3x^2,\ 2}$

1-2 (1) 내림차순으로 정리하면 $\mathbf{3x^3+2x^2+x-4}$
오름차순으로 정리하면 $\mathbf{-4+x+2x^2+3x^3}$

(2) 내림차순으로 정리하면 $\mathbf{x^2-xy^2+y+3}$
오름차순으로 정리하면 $\mathbf{3+y-xy^2+x^2}$

2-1 $\mathbf{-3,\ 4}$

2-2 (1) $A+B=(x^3-3x^2+1)+(2x^3+x^2-x+4)$
$=x^3-3x^2+1+2x^3+x^2-x+4$
$=(1+2)x^3+(-3+1)x^2-x+(1+4)$
$=\mathbf{3x^3-2x^2-x+5}$

(2) $A-B=(x^3-3x^2+1)-(2x^3+x^2-x+4)$
$=x^3-3x^2+1-2x^3-x^2+x-4$
$=(1-2)x^3+(-3-1)x^2+x+(1-4)$
$=\mathbf{-x^3-4x^2+x-3}$

(3) $A+2B=(x^3-3x^2+1)+2(2x^3+x^2-x+4)$
$=x^3-3x^2+1+4x^3+2x^2-2x+8$
$=(1+4)x^3+(-3+2)x^2-2x+(1+8)$
$=\mathbf{5x^3-x^2-2x+9}$

(4) $A-2B=(x^3-3x^2+1)-2(2x^3+x^2-x+4)$
$=x^3-3x^2+1-4x^3-2x^2+2x-8$
$=(1-4)x^3+(-3-2)x^2+2x+(1-8)$
$=\mathbf{-3x^3-5x^2+2x-7}$

3-1 $\mathbf{x}$

3-2 (1) $(x^2+4x-1)(x-2)$
$=x^2(x-2)+4x(x-2)-(x-2)$
$=x^3-2x^2+4x^2-8x-x+2$
$=\mathbf{x^3+2x^2-9x+2}$

(2) $(3x+2y)(x^2-xy+5y^2)$
$=3x(x^2-xy+5y^2)+2y(x^2-xy+5y^2)$
$=3x^3-3x^2y+15xy^2+2x^2y-2xy^2+10y^3$
$=\mathbf{3x^3-x^2y+13xy^2+10y^3}$

4-1 (1) $\mathbf{4,\ 6}$ (2) $\mathbf{6,\ 12}$ (3) $\mathbf{2x,\ 8x^3}$

4-2 (1) $(x-2y-z)^2$
$=x^2+(-2y)^2+(-z)^2+2\times x\times(-2y)$
$+2\times(-2y)\times(-z)+2\times(-z)\times x$
$=\mathbf{x^2+4y^2+z^2-4xy+4yz-2zx}$

(2) $(x-2)^3=x^3-3\times x^2\times2+3\times x\times2^2-2^3$
$=\mathbf{x^3-6x^2+12x-8}$

(3) $(2x+1)(4x^2-2x+1)=(2x)^3+1^3=\mathbf{8x^3+1}$

5-1 (1) $\mathbf{2,\ 6}$ (2) $\mathbf{4,\ 8}$ (3) $\mathbf{6,\ 14}$

5-2 (1) $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$
$=(-3)^2+2\times2=\mathbf{13}$

(2) $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$
$=(-3)^2+4\times2=\mathbf{17}$

(3) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=(-3)^3+3\times2\times(-3)=\mathbf{-45}$

6-1 (1) $\mathbf{3,\ 7}$ (2) $\mathbf{3,\ 5}$ (3) $\mathbf{9,\ 18}$

6-2 (1) $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2$
$=2^2+2=\mathbf{6}$

(2) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4$
$=2^2+4=\mathbf{8}$

(3) $a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3\left(a-\frac{1}{a}\right)$
$=2^3+3\times2=\mathbf{14}$

7-1 $-3x^2$, $2x$, $-4x$

7-2 (1)
$$\begin{array}{r} x-1 \\ 2x-1\,\overline{)\,2x^2-3x+5} \\ \underline{2x^2-x} \\ -2x+5 \\ \underline{-2x+1} \\ 4 \end{array}$$

∴ 몫 : $x-1$, 나머지 : 4

(2)
$$\begin{array}{r} 3x-4 \\ x^2+x+1\,\overline{)\,3x^3-x^2+5x+3} \\ \underline{3x^3+3x^2+3x} \\ -4x^2+2x+3 \\ \underline{-4x^2-4x-4} \\ 6x+7 \end{array}$$

∴ 몫 : $3x-4$, 나머지 : $6x+7$

(3)
$$\begin{array}{r} 2x-1 \\ x^2-2x+2\,\overline{)\,2x^3-5x^2+3} \\ \underline{2x^3-4x^2+4x} \\ -x^2-4x+3 \\ \underline{-x^2+2x-2} \\ -6x+5 \end{array}$$

∴ 몫 : $2x-1$, 나머지 : $-6x+5$

8-1 $3x$, $5x^2$

8-2 (1) $A=(x^2-x+2)(x-1)-x+3$
$=x^3-x^2-x^2+x+2x-2-x+3$
$=\boldsymbol{x^3-2x^2+2x+1}$

(2) $A=(x-1)(x^2+x+1)+3$
$=(x^3-1)+3=\boldsymbol{x^3+2}$

9-1 3, 2

9-2 (1)
$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ & & 4 & 14 & 26 \\ \hline & 2 & 7 & 13 & \boxed{27} \end{array}$$

∴ 몫 : $2x^2+7x+13$, 나머지 : 27

(2)
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & -1 & -5 & 2 \\ & & -3 & 4 & 1 \\ \hline & 3 & -4 & -1 & \boxed{3} \end{array}$$

∴ 몫 : $3x^2-4x-1$, 나머지 : 3

10-1 1, x^2, 0

10-2 (1)
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ & & -1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & \boxed{3} \end{array}$$

∴ 몫 : x^2-x, 나머지 : 3

(2)
$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -1 & 0 & -10 \\ & & 4 & 6 & 12 \\ \hline & 2 & 3 & 6 & \boxed{2} \end{array}$$

∴ 몫 : $2x^2+3x+6$, 나머지 : 2

11-1 $-\frac{1}{2}$, x, 2

11-2 (1)
$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{3}{2} & 2 & 1 & -5 & -4 \\ & & -3 & 3 & 3 \\ \hline & 2 & -2 & -2 & \boxed{-1} \end{array}$$

$2x^3+x^2-5x-4$
$=\left(x+\frac{3}{2}\right)(2x^2-2x-2)-1$
$=2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x^2-x-1)-1$
$=(2x+3)(x^2-x-1)-1$
∴ 몫 : x^2-x-1, 나머지 : -1

(2)
$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{3} & 3 & 5 & 1 & 2 \\ & & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 3 & 6 & 3 & \boxed{3} \end{array}$$

$3x^3+5x^2+x+2$
$=\left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2+6x+3)+3$
$=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x^2+2x+1)+3$
$=(3x-1)(x^2+2x+1)+3$
∴ 몫 : x^2+2x+1, 나머지 : 3

(3)
$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{3} & 3 & 4 & 4 & -6 \\ & & -1 & -1 & -1 \\ \hline & 3 & 3 & 3 & \boxed{-7} \end{array}$$

$3x^3+4x^2+4x-6$
$=\left(x+\frac{1}{3}\right)(3x^2+3x+3)-7$
$=3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x^2+x+1)-7$
$=(3x+1)(x^2+x+1)-7$
∴ 몫 : x^2+x+1, 나머지 : -7

(4)
$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{3}{4} & 4 & 1 & -7 & 0 \\ & & 3 & 3 & -3 \\ \hline & 4 & 4 & -4 & \boxed{-3} \end{array}$$

$4x^3+x^2-7x$
$=\left(x-\frac{3}{4}\right)(4x^2+4x-4)-3$
$=4\left(x-\frac{3}{4}\right)(x^2+x-1)-3$
$=(4x-3)(x^2+x-1)-3$
∴ 몫 : x^2+x-1, 나머지 : -3

집중 연습

본문 | 016, 017쪽

1 (1) $(2x+3)^2=\mathbf{4x^2+12x+9}$

(2) $\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2=\mathbf{x^2+xy+\frac{1}{4}y^2}$

(3) $(3x-5)^2=\mathbf{9x^2-30x+25}$

(4) $(4x-3y)^2=\mathbf{16x^2-24xy+9y^2}$

(5) $(x+2y)(x-2y)=\mathbf{x^2-4y^2}$

(6) $\left(3x+\frac{y}{4}\right)\left(3x-\frac{y}{4}\right)=\mathbf{9x^2-\frac{y^2}{16}}$

(7) $(x+4)(x+8)=\mathbf{x^2+12x+32}$

(8) $(x+2)(x-6)=\mathbf{x^2-4x-12}$

(9) $(2x+1)(3x-7)=\mathbf{6x^2-11x-7}$

(10) $(x+y)(x-4y)=\mathbf{x^2-3xy-4y^2}$

(11) $(x-2y)(x-5y)=\mathbf{x^2-7xy+10y^2}$

(12) $(3x-2y)(4x+y)=\mathbf{12x^2-5xy-2y^2}$

2 (1) $(a+3b+2c)^2=\mathbf{a^2+9b^2+4c^2+6ab+12bc+4ca}$

(2) $(2a+b-3c)^2=\mathbf{4a^2+b^2+9c^2+4ab-6bc-12ca}$

(3) $(3x-y+2z)^2=\mathbf{9x^2+y^2+4z^2-6xy-4yz+12zx}$

(4) $(4x-3y-z)^2=\mathbf{16x^2+9y^2+z^2-24xy+6yz-8zx}$

(5) $(2a+3)^3=\mathbf{8a^3+36a^2+54a+27}$

(6) $(3a+2b)^3=\mathbf{27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3}$

(7) $(4x-1)^3=\mathbf{64x^3-48x^2+12x-1}$

(8) $(x-2y)^3=\mathbf{x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3}$

(9) $(x+3)(x^2-3x+9)=\mathbf{x^3+27}$

(10) $(5x+y)(25x^2-5xy+y^2)=\mathbf{125x^3+y^3}$

(11) $(3x-2)(9x^2+6x+4)=\mathbf{27x^3-8}$

(12) $(a-4b)(a^2+4ab+16b^2)=\mathbf{a^3-64b^3}$

기초 개념 평가

본문 | 018, 019쪽

01 교환	02 결합
03 $\mathbf{2ca}$	04 $\mathbf{3ab^2}$, $-$
05 $\mathbf{ab}$, $-$	06 2, 2
07 3, $-$	08 낮다
09 $\mathbf{R=0}$	10 일차식
11 계수	12 $\mathbf{R}$
13 $\mathbf{\frac{1}{a}Q(x)}$, $\mathbf{R}$	

기초 문제 평가

본문 | 020, 021쪽

1 (1) $\mathbf{2x^2-(5y+2)x+3y^2+y-4}$

(2) $\mathbf{3y^2-(5x-1)y+2x^2-2x-4}$

2 (1) $3A+2(A-B)=3A+2A-2B$
$=5A-2B$
$=5(3x^2-2x-1)-2(2x^2+x-5)$
$=15x^2-10x-5-4x^2-2x+10$
$=\mathbf{11x^2-12x+5}$

(2) $2B-3(-A+2B)=2B+3A-6B$
$=3A-4B$
$=3(3x^2-2x-1)-4(2x^2+x-5)$
$=9x^2-6x-3-8x^2-4x+20$
$=\mathbf{x^2-10x+17}$

3 (1) $X=-A+B$
$=-(x^2+2xy-3y^2)+(2x^2-xy+y^2)$
$=-x^2-2xy+3y^2+2x^2-xy+y^2$
$=\mathbf{x^2-3xy+4y^2}$

(2) $X=3A+2B$
$=3(x^2+2xy-3y^2)+2(2x^2-xy+y^2)$
$=3x^2+6xy-9y^2+4x^2-2xy+2y^2$
$=\mathbf{7x^2+4xy-7y^2}$

4 (1) 주어진 식에서 x^2 항이 나오는 항들만 전개하면
$x\times 3x+(-2)\times x^2=3x^2-2x^2=x^2$
따라서 x^2의 계수는 **1**이다.

(2) 주어진 식에서 x^2 항이 나오는 항들만 전개하면
$2x^2\times 4+(-x)\times(-x)+1\times x^2=8x^2+x^2+x^2=10x^2$
따라서 x^2의 계수는 **10**이다.

(3) 주어진 식에서 x^2 항이 나오는 항들만 전개하면
$-3x^2\times(-1)+8\times 2x^2=3x^2+16x^2=19x^2$
따라서 x^2의 계수는 **19**이다.

5 (1) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^3=a^3+3\times a^2\times\frac{1}{a}+3\times a\times\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{a^3}$
$=\mathbf{a^3+3a+\frac{3}{a}+\frac{1}{a^3}}$

(2) $\left(3a-\frac{1}{3}\right)^3$
$=(3a)^3-3\times(3a)^2\times\frac{1}{3}+3\times 3a\times\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^3$
$=\mathbf{27a^3-9a^2+a-\frac{1}{27}}$

(3) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)=(x^2-y^2)(x^2+y^2)$
$=\mathbf{x^4-y^4}$

(4) $(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$
$=(x^3+1)(x^3-1)=\mathbf{x^6-1}$

6 (1) $a+b=\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}$,

$ab=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=2-1=1$이므로

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=(2\sqrt{2})^3-3\times1\times2\sqrt{2}=16\sqrt{2}-6\sqrt{2}$

$=\mathbf{10\sqrt{2}}$

(2) $a-b=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)=2$, $ab=1$이므로

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=2^3+3\times1\times2=8+6$

$=\mathbf{14}$

7 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서 $x+y=3$, $x^2+y^2=7$이므로

$7=3^2-2xy$, $2xy=2$ $\quad\therefore xy=1$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=3^3-3\times1\times3=27-9$

$=\mathbf{18}$

8 (1)

$$
\begin{array}{r}
x^2-3x+3 \\
x+1\,\overline{)\,x^3-2x^2\qquad+3} \\
\underline{x^3+\ x^2\qquad\quad\ } \\
-3x^2\qquad\quad\ \\
\underline{-3x^2-3x\quad\ } \\
3x+3 \\
\underline{3x+3} \\
0
\end{array}
$$

$\therefore$ 몫 : $\mathbf{x^2-3x+3}$, 나머지 : $\mathbf{0}$

(2)

$$
\begin{array}{r}
3x\qquad\qquad \\
x^2-2\,\overline{)\,3x^3\qquad+2x-1} \\
\underline{3x^3\qquad-6x\qquad} \\
8x-1
\end{array}
$$

$\therefore$ 몫 : $\mathbf{3x}$, 나머지 : $\mathbf{8x-1}$

(3)

$$
\begin{array}{r}
x-2\qquad\quad \\
2x^2+1\,\overline{)\,2x^3-4x^2-2x+\ 8} \\
\underline{2x^3\qquad\quad+\ x\qquad} \\
-4x^2-3x+\ 8 \\
\underline{-4x^2\qquad\ -\ 2} \\
-3x+10
\end{array}
$$

$\therefore$ 몫 : $\mathbf{x-2}$, 나머지 : $\mathbf{-3x+10}$

9 $A=(x-3)(2x+1)+2=(2x^2-5x-3)+2$

$=2x^2-5x-1$

$$
\begin{array}{r}
2x-3 \\
x-1\,\overline{)\,2x^2-5x-1} \\
\underline{2x^2-2x\quad\ \ } \\
-3x-1 \\
\underline{-3x+3} \\
-4
\end{array}
$$

따라서 구하는 나머지는 $\mathbf{-4}$이다.

10 (1) $x^3-x^2-x+5=A(x-2)+2x+3$이므로

$x^3-x^2-3x+2=A(x-2)$

$$
\begin{array}{r}
x^2+\ x-1\quad \\
x-2\,\overline{)\,x^3-\ x^2-3x+2} \\
\underline{x^3-2x^2\qquad\qquad} \\
x^2-3x\quad \\
\underline{x^2-2x\quad} \\
-\ x+2 \\
\underline{-\ x+2} \\
0
\end{array}
$$

$\therefore \mathbf{A=x^2+x-1}$

(2) $2x^3-7x^2-13x+3=A(2x+3)$

$$
\begin{array}{r}
x^2-\ 5x+\ 1\quad \\
2x+3\,\overline{)\,2x^3-\ 7x^2-13x+3} \\
\underline{2x^3+\ 3x^2\qquad\qquad\quad} \\
-10x^2-13x\quad\ \ \\
\underline{-10x^2-15x\quad\ \ } \\
2x+3 \\
\underline{2x+3} \\
0
\end{array}
$$

$\therefore \mathbf{A=x^2-5x+1}$

11 (1)

$$
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -2 & 1 & -1 \\
 & & 2 & 0 & 2 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{1}
\end{array}
$$

$\therefore$ 몫 : $\mathbf{x^2+1}$, 나머지 : $\mathbf{1}$

(2)

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & 0 & -3 & 3 \\
 & & -2 & 4 & -2 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & \boxed{1}
\end{array}
$$

$\therefore$ 몫 : $\mathbf{x^2-2x+1}$, 나머지 : $\mathbf{1}$

(3)

$$
\begin{array}{r|rrrr}
\frac{1}{2} & 2 & -5 & -2 & 1 \\
 & & 1 & -2 & -2 \\
\hline
 & 2 & -4 & -4 & \boxed{-1}
\end{array}
$$

$2x^3-5x^2-2x+1$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x-4)-1$

$=(2x-1)(x^2-2x-2)-1$

$\therefore$ 몫 : $\mathbf{x^2-2x-2}$, 나머지 : $\mathbf{-1}$

(4)

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-\frac{2}{3} & -9 & 3 & 9 & -2 \\
 & & 6 & -6 & -2 \\
\hline
 & -9 & 9 & 3 & \boxed{-4}
\end{array}
$$

$-9x^3+3x^2+9x-2$

$=\left(x+\frac{2}{3}\right)(-9x^2+9x+3)-4$

$=(3x+2)(-3x^2+3x+1)-4$

$\therefore$ 몫 : $\mathbf{-3x^2+3x+1}$, 나머지 : $\mathbf{-4}$

02 항등식과 나머지정리

본문 | 022~025쪽

1-1 **3, 항등식**

1-2 (1) 주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면
$2(x+2)-1=2x+3$
이므로 문자 x에 어떤 값을 대입해도 등식이 항상 성립한다.
따라서 $2x+3=2(x+2)-1$은 x에 대한 항등식이다.
(○)

(2) 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면
$3(x-1)-1=3x-4$
즉, $3x-4=5x$에서 $-2x=4$이므로 $x=-2$일 때만 등식이 성립한다.
따라서 $3(x-1)-1=5x$는 x에 대한 항등식이 아니다.
(×)

2-1 (1) $\mathbf{2, 1}$ (2) $\mathbf{4, 3, -2}$

2-2 (1) $a=-1$, $-3=b-5$
$\therefore \boldsymbol{a=-1, b=2}$

(2) $a+2=0$, $b=0$, $1-c=0$
$\therefore \boldsymbol{a=-2, b=0, c=1}$

(3) $a-1=2$, $b+3=0$, $c-2=1$
$\therefore \boldsymbol{a=3, b=-3, c=3}$

3-1 $\mathbf{8, 3}$

3-2 (1) 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면
$2x^2+3x+2ax+3a=bx^2+x+c$
즉, $2x^2+(3+2a)x+3a=bx^2+x+c$가 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면
$2=b$, $3+2a=1$, $3a=c$
$\therefore \boldsymbol{a=-1, b=2, c=-3}$

(2) 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면
$a(x^2+2x+1)+bx-b+c=x^2-2x+4$
즉, $ax^2+(2a+b)x+a-b+c=x^2-2x+4$가 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면
$a=1$, $2a+b=-2$, $a-b+c=4$
$\therefore \boldsymbol{a=1, b=-4, c=-1}$

4-1 $\mathbf{3, 9}\boldsymbol{a}$

4-2 (1) 주어진 등식의 양변에
$x=0$을 대입하면
$a+b-1=1$ $\quad\therefore a+b=2$ …… ㉠
$x=-2$를 대입하면
$a-b-1=3$ $\quad\therefore a-b=4$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\boldsymbol{a=3, b=-1}$

(2) 주어진 등식의 양변에
$x=0$을 대입하면 $-b=-2$ $\quad\therefore \boldsymbol{b=2}$
$x=1$을 대입하면 $2a=0$ $\quad\therefore \boldsymbol{a=0}$
$x=-1$을 대입하면 $2c=-2$ $\quad\therefore \boldsymbol{c=-1}$

5-1 $\mathbf{3, 1}$

5-2 나머지정리에 의하여 $P(2)=-4$
이때 $P(2)=16-4a-2+2=-4a+16$이므로
$-4a+16=-4$ $\quad\therefore \boldsymbol{a=5}$

6-1 $\boldsymbol{-2, 1, -2x+1}$

6-2 (1) $P(x)$를 $(x-3)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$P(x)=(x-3)(x+2)Q(x)+ax+b$
이때 나머지정리에 의하여 $P(3)=4$, $P(-2)=-1$
$P(3)=4$에서 $3a+b=4$ …… ㉠
$P(-2)=-1$에서 $-2a+b=-1$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$
따라서 $P(x)$를 $(x-3)(x+2)$로 나누었을 때의 나머지는 $\boldsymbol{x+1}$이다.

(2) $P(x)$를 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$(a, b는 상수)라 하면
$P(x)=(x^2+2x-3)Q(x)+ax+b$
$\quad=(x-1)(x+3)Q(x)+ax+b$
이때 나머지정리에 의하여 $P(1)=-3$, $P(-3)=1$
$P(1)=-3$에서 $a+b=-3$ …… ㉠
$P(-3)=1$에서 $-3a+b=1$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$
따라서 $P(x)$를 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 나머지는 $\boldsymbol{-x-2}$이다.

7-1 $\boldsymbol{0, -12, x-2}$

7-2 (1) $P(1)=1-2-5+6=0$
$P(-1)=-1-2+5+6=8$
$P(2)=8-8-10+6=-4$
$P(-2)=-8-8+10+6=0$
$P(3)=27-18-15+6=0$
$P(-3)=-27-18+15+6=-24$
따라서 다항식 $P(x)$의 인수인 것은
$\boldsymbol{x-1, x+2, x-3}$

(2) $P(1)=1+1-4-4=-6$
$P(-1)=-1+1+4-4=0$
$P(2)=8+4-8-4=0$
$P(-2)=-8+4+8-4=0$
$P(3)=27+9-12-4=20$
$P(-3)=-27+9+12-4=-10$
따라서 다항식 $P(x)$의 인수인 것은
$\boldsymbol{x+1, x-2, x+2}$

8-1 $\mathbf{0, -2}$

8-2 (1) 인수정리에 의하여 $P(1)=0$

이때 $P(1)=a-2+1-1=a-2$이므로

$a-2=0$ $\quad\therefore \boldsymbol{a=2}$

(2) 인수정리에 의하여 $P(-2)=0$

이때 $P(-2)=-24+4a+4-8=4a-28$이므로

$4a-28=0$ $\quad\therefore \boldsymbol{a=7}$

기초 개념 평가

본문 | 026, 027쪽

01 항등식	02 방정식
03 $\boldsymbol{a=0}$	04 $\boldsymbol{b=b'}$
05 $\boldsymbol{b=0}$	06 $\boldsymbol{a=a'}$
07 계수비교법	08 수치대입법
09 $\mathbf{1, 0}$	10 $\mathbf{1, -2}$
11 $\boldsymbol{P(\alpha)}$	12 $\boldsymbol{P\left(-\frac{b}{a}\right)}$
13 $\boldsymbol{x-\alpha}$	14 $\boldsymbol{\alpha}$

기초 문제 평가

본문 | 028, 029쪽

1 (1) 주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면

$(x+1)^2-(5x+1)=x^2-3x$

이므로 문자 x에 어떤 값을 대입해도 등식이 항상 성립한다.

따라서 $x^2-3x=(x+1)^2-(5x+1)$은 x에 대한 항등식이다. (○)

(2) 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$

즉, $x^3-1=x^3-x$에서 $x=1$일 때만 등식이 성립한다.

따라서 $(x-1)(x^2+x+1)=x^3-x$는 x에 대한 항등식이 아니다. (×)

2 (1) $a-2=0$, $b+1=0$, $c=0$ $\quad\therefore \boldsymbol{a=2, b=-1, c=0}$

(2) 주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면

$x^3+ax^2+bx+3=x^3+2x^2+c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면 $\boldsymbol{a=2, b=0, c=3}$

(3) 주어진 등식의 양변에

$x=0$을 대입하면 $2a=-4$ $\quad\therefore \boldsymbol{a=-2}$

$x=-1$을 대입하면 $-c=-5$ $\quad\therefore \boldsymbol{c=5}$

$x=-2$를 대입하면 $2b=-6$ $\quad\therefore \boldsymbol{b=-3}$

다른 풀이 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$a(x^2+3x+2)+bx^2+bx+cx^2+2cx=x-4$

즉, $(a+b+c)x^2+(3a+b+2c)x+2a=x-4$가 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a+b+c=0$, $3a+b+2c=1$, $2a=-4$

$\therefore a=-2, b=-3, c=5$

(4) 주어진 등식의 양변에

$x=2$를 대입하면

$12+2a-4=0$, $2a=-8$ $\quad\therefore \boldsymbol{a=-4}$

$x=3$을 대입하면

$27+3a-4=b+c$ $\quad\therefore 11=b+c$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x=1$을 대입하면

$3+a-4=b-c$ $\quad\therefore -5=b-c$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\boldsymbol{b=3, c=8}$

다른 풀이 주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면

$3x^2+ax-4=bx^2-4bx+4b+cx-2c$

즉, $3x^2+ax-4=bx^2+(-4b+c)x+4b-2c$가 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$3=b$, $a=-4b+c$, $-4=4b-2c$

$\therefore a=-4, b=3, c=8$

3 주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+2b=2$, $2a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $\boldsymbol{a=0, b=1}$

4 등식의 좌변을 k에 대하여 정리하면

$(x-1)k+xy+y-4=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x-1=0$, $xy+y-4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $\boldsymbol{x=1, y=2}$

5 (1) 다항식 $2x^3+ax+b$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $2x^2+2x+1$이고 나머지가 5이므로

$2x^3+ax+b=(x-1)(2x^2+2x+1)+5$

우변을 전개하여 정리하면

$2x^3+ax+b=2x^3-x+4$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면 $\boldsymbol{a=-1, b=4}$

(2) 두 다항식 x^3+ax^2+b, x^2-x+1의 최고차항의 계수가 모두 1이므로 x^3+ax^2+b를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)로 놓는다.

이때 나머지가 $x+1$이므로

$$x^3+ax^2+b=(x^2-x+1)(x+c)+x+1$$
$$=x^3+(c-1)x^2+(-c+2)x+c+1$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면 $a=c-1$, $0=-c+2$, $b=c+1$

$c=2$이므로 $\boldsymbol{a=1, b=3}$

(3) 두 다항식 $3x^3-3x^2+ax+b$, $3x^2-6x+2$의 최고차항의 계수가 모두 3이므로 $3x^3-3x^2+ax+b$를 $3x^2-6x+2$로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)로 놓는다.
이때 나머지가 0이므로
$$3x^3-3x^2+ax+b=(3x^2-6x+2)(x+c)$$
$$=3x^3+(3c-6)x^2+(-6c+2)x+2c$$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면 $-3=3c-6$, $a=-6c+2$, $b=2c$
$c=1$이므로 $\boldsymbol{a=-4}$, $\boldsymbol{b=2}$

6 (1) 나머지정리에 의하여 $P(1)=3$, $P(2)=4$
$P(1)=3$에서
$1+a+b=3$ $\quad\therefore a+b=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$P(2)=4$에서
$4+2a+b=4$ $\quad\therefore 2a+b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\boldsymbol{a=-2}$, $\boldsymbol{b=4}$
(2) 인수정리와 나머지정리에 의하여 $P(-1)=0$, $P(1)=4$
$P(-1)=0$에서
$-1+a-b-1=0$ $\quad\therefore a-b=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$P(1)=4$에서
$1+a+b-1=4$ $\quad\therefore a+b=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\boldsymbol{a=3}$, $\boldsymbol{b=1}$
(3) 인수정리에 의하여 $P(2)=0$, $P(-1)=0$
$P(2)=0$에서
$8+4a-4+b=0$ $\quad\therefore 4a+b=-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$P(-1)=0$에서
$-1+a+2+b=0$ $\quad\therefore a+b=-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\boldsymbol{a=-1}$, $\boldsymbol{b=0}$
(4) $P(x)$는 x^2+x-2, 즉 $(x+2)(x-1)$을 인수로 갖는다.
따라서 $P(x)$는 $x+2$와 $x-1$로 각각 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여 $P(-2)=0$, $P(1)=0$
$P(-2)=0$에서
$-8+4a-2b-4=0$ $\quad\therefore 2a-b=6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$P(1)=0$에서
$1+a+b-4=0$ $\quad\therefore a+b=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\boldsymbol{a=3}$, $\boldsymbol{b=0}$
다른 풀이 두 다항식 x^3+ax^2+bx-4, x^2+x-2의 최고차항의 계수가 모두 1이므로 x^3+ax^2+bx-4를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)로 놓는다.
이때 나머지가 0이므로
$$x^3+ax^2+bx-4=(x^2+x-2)(x+c)$$
$$=x^3+(c+1)x^2+(c-2)x-2c$$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면 $a=c+1$, $b=c-2$, $-4=-2c$
$c=2$이므로 $a=3$, $b=0$

참고 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=0$임을 나타내는 표현
- $P(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지가 0이다.
- $P(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.
- $P(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 가진다.
- $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$

7 나머지정리에 의하여 $P(1)=4$
이때 $P(1)=a+4-2=a+2$이므로
$a+2=4$ $\quad\therefore a=2$
따라서 $P(x)=2x^2+4x-2$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여
$P(-3)=18-12-2=\boldsymbol{4}$

8 나머지정리에 의하여 $P(-1)=P(2)$
$P(-1)=-3-4-a-2=-a-9$
$P(2)=24-16+2a-2=2a+6$
즉, $-a-9=2a+6$에서 $3a=-15$
$\therefore a=\boldsymbol{-5}$

9 인수정리에 의하여 $P(1)=0$
이때 $P(1)=2+a-4=a-2$이므로
$a-2=0$ $\quad\therefore a=2$
따라서 $P(x)=2x^3+2x-4$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여
$P(-2)=-16-4-4=\boldsymbol{-24}$

10 인수정리에 의하여 $P(-2)=0$
이때 $P(-2)=-8a-4-2-10=-8a-16$이므로
$-8a-16=0$ $\quad\therefore a=-2$
따라서 $P(x)=-2x^3-x^2+x-10$을 $2x-1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여
$$P\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-10=\boldsymbol{-10}$$

11 $P(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$$P(x)=(x^2-2x-3)Q(x)+ax+b$$
$$=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$$
이때 나머지정리, 인수정리에 의하여
$P(-1)=-8$, $P(3)=0$
$P(-1)=-8$에서 $-a+b=-8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$P(3)=0$에서 $3a+b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-6$
따라서 $P(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 나머지는 $\boldsymbol{2x-6}$이다.

03 인수분해

기초 개념 피드백 & TEST

본문 | 031쪽

1-1 (1) $\boldsymbol{xy}$ (2) $\mathbf{3}\boldsymbol{b}$ (3) $\boldsymbol{x+y}$

1-2 (1) $3x^2+6x=3x\times x+3x\times 2$
$=\boldsymbol{3x(x+2)}$
(2) $2x^2y-6xy+2x$
$=2x\times xy-2x\times 3y+2x\times 1$
$=\boldsymbol{2x(xy-3y+1)}$
(3) $(x+y)^2+2(x+y)$
$=(x+y)\times(x+y)+(x+y)\times 2$
$=\boldsymbol{(x+y)(x+y+2)}$

2-1 (1) $\boldsymbol{2a}$, **1** (2) $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ (3) $\boldsymbol{3y}$, $\boldsymbol{-}$

2-2 (1) $x^2+8xy+16y^2=x^2+2\times x\times 4y+(4y)^2$
$=\boldsymbol{(x+4y)^2}$
(2) $4x^2-20x+25=(2x)^2-2\times 2x\times 5+5^2$
$=\boldsymbol{(2x-5)^2}$
(3) $16x^2-y^2=(4x)^2-y^2$
$=\boldsymbol{(4x+y)(4x-y)}$

3-1 (1) $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{6x}$ (2) $\boldsymbol{2x}$, $\boldsymbol{-2x}$

3-2 (1) $x^2\underline{-10x}+21=\boldsymbol{(x-3)(x-7)}$

$x \quad -3 \;\rightarrow\; -3x$
$x \quad -7 \;\rightarrow\; \underline{-7x}\ (+$
$-10x$

(2) $x^2\underline{+xy}-56y^2=\boldsymbol{(x-7y)(x+8y)}$

$x \quad -7y \;\rightarrow\; -7xy$
$x \quad 8y \;\rightarrow\; \underline{8xy}\ (+$
xy

(3) $3x^2\underline{+5x}-2=\boldsymbol{(3x-1)(x+2)}$

$3x \quad -1 \;\rightarrow\; -x$
$x \quad 2 \;\rightarrow\; \underline{6x}\ (+$
$5x$

(4) $4x^2\underline{+13xy}+9y^2=\boldsymbol{(4x+9y)(x+y)}$

$4x \quad 9y \;\rightarrow\; 9xy$
$x \quad y \;\rightarrow\; \underline{4xy}\ (+$
$13xy$

본문 | 032~035쪽

1-1 $\boldsymbol{-1}$, $\boldsymbol{x}$

1-2 (1) $x^2+y^2+4z^2+2xy+4yz+4zx$
$=x^2+y^2+(2z)^2+2\times x\times y+2\times y\times 2z+2\times 2z\times x$
$=\boldsymbol{(x+y+2z)^2}$
(2) $a^2+4b^2+4ab-2a-4b+1$
$=a^2+(2b)^2+(-1)^2+2\times a\times 2b$
$+2\times 2b\times(-1)+2\times(-1)\times a$
$=\boldsymbol{(a+2b-1)^2}$

2-1 $\boldsymbol{a^2}$, **2**

2-2 (1) $a^3-9a^2+27a-27$
$=a^3-3\times a^2\times 3+3\times a\times 3^2-3^3$
$=\boldsymbol{(a-3)^3}$
(2) $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$
$=(2a)^3+3\times(2a)^2\times 3b+3\times 2a\times(3b)^2+(3b)^3$
$=\boldsymbol{(2a+3b)^3}$

3-1 (1) **1**, $\boldsymbol{a^2}$ (2) $\boldsymbol{2b}$, $\boldsymbol{2b}$

3-2 (1) $a^3+64b^3=a^3+(4b)^3=\boldsymbol{(a+4b)(a^2-4ab+16b^2)}$
(2) $8a^3-27=(2a)^3-3^3=\boldsymbol{(2a-3)(4a^2+6a+9)}$

4-1 **6**, **2**, **1**

4-2 (1) $x+y=X$로 치환하면
$X^2-X-2=(X+1)(X-2)$
$=\boldsymbol{(x+y+1)(x+y-2)}$ ← $X=x+y$ 대입
(2) $x^2+3x=X$로 치환하면
$X^2-3X-4=(X-4)(X+1)$
$=(x^2+3x-4)(x^2+3x+1)$ ← $X=x^2+3x$ 대입
$=\boldsymbol{(x+4)(x-1)(x^2+3x+1)}$
(3) $x^2+2x=X$로 치환하면
$(X-2)(X+3)-6=X^2+X-12$
$=(X-3)(X+4)$
$=(x^2+2x-3)(x^2+2x+4)$ ← $X=x^2+2x$ 대입
$=\boldsymbol{(x+3)(x-1)(x^2+2x+4)}$

5-1 (1) $\boldsymbol{4X}$, **5**, **1** (2) $\boldsymbol{x^2}$, $\boldsymbol{x^2}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}$

5-2 (1) $x^2=X$로 치환하면
$X^2-2X-3=(X+1)(X-3)$
$=\boldsymbol{(x^2+1)(x^2-3)}$ ← $X=x^2$ 대입
(2) $x^2=X$로 치환하면
$2X^2+5X+2=(2X+1)(X+2)$
$=\boldsymbol{(2x^2+1)(x^2+2)}$ ← $X=x^2$ 대입
(3) $x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2$
$=(x^2+1)^2-x^2$
$=(x^2+1+x)(x^2+1-x)$
$=\boldsymbol{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$
(4) $x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2$
$=(x^2+2)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$
$=\boldsymbol{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$

6-1 $\boldsymbol{a, 2a, 2a}$

6-2 (1) 차수가 가장 낮은 문자 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} a^2+ac-b^2+bc &= ac+bc+a^2-b^2 \\ &= (a+b)c+(a+b)(a-b) \\ &= (a+b)(c+a-b) \\ &= \boldsymbol{(a+b)(a-b+c)} \end{aligned}$$

(2) 차수가 낮은 문자 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} x^2y+xy+x-2y+2 &= x^2y+xy-2y+x+2 \\ &= (x^2+x-2)y+x+2 \\ &= (x+2)(x-1)y+x+2 \\ &= \boldsymbol{(x+2)(xy-y+1)} \end{aligned}$$

7-1 **2, 2, 2, 2**

7-2 (1) $2x^2+(4y-1)x+2y^2-y-1$

$=2x^2+\underline{(4y-1)}x+(2y+1)(y-1)$

$$\begin{array}{ccccc} 2x & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 2y+1 & \to & (2y+1)x \\ x & & y-1 & \to & \underline{2(y-1)x\ (+} \\ & & & & (4y-1)x \end{array}$$

$=\boldsymbol{(2x+2y+1)(x+y-1)}$

(2) $ab(b-a)+bc(c-b)+ca(a-c)$

$$\begin{aligned} &= ab^2-a^2b+bc^2-b^2c+ca^2-c^2a \\ &= (a-c)b^2-(a^2-c^2)b+ca(a-c) \\ &= (a-c)b^2-(a-c)(a+c)b+ca(a-c) \\ &= (a-c)\{b^2-(a+c)b+ca\} \\ &= (a-c)(b-c)(b-a) \\ &= \boldsymbol{(a-b)(b-c)(c-a)} \end{aligned}$$

8-1 $\boldsymbol{x-1, 2x, 2x}$

8-2 (1) $P(x)=x^3-4x^2+5x-2$로 놓으면 $P(1)=0$이므로 $x-1$은 $P(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^2-3x+2이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ & & 1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^3-4x^2+5x-2 &= (x-1)(x^2-3x+2) \\ &= (x-1)(x-1)(x-2) \\ &= \boldsymbol{(x-1)^2(x-2)} \end{aligned}$$

(2) $P(x)=2x^3+3x^2-9x-10$으로 놓으면 $P(-1)=0$이므로 $x+1$은 $P(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $2x^2+x-10$이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 3 & -9 & -10 \\ & & -2 & -1 & 10 \\ \hline & 2 & 1 & -10 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x^3+3x^2-9x-10 &= (x+1)(2x^2+x-10) \\ &= \boldsymbol{(x+1)(2x+5)(x-2)} \end{aligned}$$

9-1 $\boldsymbol{x+1, 2x, x+1, 2x}$

9-2 (1) $P(x)=x^4+x^3-x^2+x-2$로 놓으면 $P(1)=0$, $P(-2)=0$이므로 $x-1$, $x+2$는 $P(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ & & 1 & 2 & 1 & 2 \\ \hline -2 & 1 & 2 & 1 & 2 & \boxed{0} \\ & & -2 & 0 & -2 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^3+2x^2+x+2이고, 다시 이 몫을 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^2+1이므로

$$\begin{aligned} x^4+x^3-x^2+x-2 &= (x-1)(x^3+2x^2+x+2) \\ &= \boldsymbol{(x-1)(x+2)(x^2+1)} \end{aligned}$$

(2) $P(x)=x^4-2x^3+2x^2-x-6$으로 놓으면 $P(-1)=0$, $P(2)=0$이므로 $x+1$, $x-2$는 $P(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -2 & 2 & -1 & -6 \\ & & -1 & 3 & -5 & 6 \\ \hline 2 & 1 & -3 & 5 & -6 & \boxed{0} \\ & & 2 & -2 & 6 & \\ \hline & 1 & -1 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^3-3x^2+5x-6이고, 다시 이 몫을 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^2-x+3이므로

$$\begin{aligned} x^4-2x^3+2x^2-x-6 &= (x+1)(x^3-3x^2+5x-6) \\ &= \boldsymbol{(x+1)(x-2)(x^2-x+3)} \end{aligned}$$

집중 연습

본문 | 036, 037쪽

1 (1) $9x^2+30x+25=\boldsymbol{(3x+5)^2}$

(2) $x^2-xy+\frac{1}{4}y^2=\boldsymbol{\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2}$

(3) $4x^2-1=(2x)^2-1^2=\boldsymbol{(2x+1)(2x-1)}$

(4) $x^2-25y^2=x^2-(5y)^2=\boldsymbol{(x+5y)(x-5y)}$

(5) $x^2+4x-12=\boldsymbol{(x+6)(x-2)}$

(6) $x^2-3xy-10y^2=\boldsymbol{(x+2y)(x-5y)}$

(7) $6x^2+17x+7=\boldsymbol{(2x+1)(3x+7)}$

(8) $12x^2+5xy-2y^2=\boldsymbol{(3x+2y)(4x-y)}$

2 (1) $a^2+4b^2+9c^2+4ab+12bc+6ca$

$=a^2+(2b)^2+(3c)^2+2\times a\times 2b$

$+2\times 2b\times 3c+2\times 3c\times a$

$=\boldsymbol{(a+2b+3c)^2}$

(2) $4x^2+9y^2+z^2-12xy-6yz+4zx$

$=(2x)^2+(-3y)^2+z^2+2\times 2x\times(-3y)$

$+2\times(-3y)\times z+2\times z\times 2x$

$=\boldsymbol{(2x-3y+z)^2}$

(3) $x^3+9x^2+27x+27=x^3+3\times x^2\times 3+3\times x\times 3^2+3^3$

$=\boldsymbol{(x+3)^3}$

(4) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

$=x^3+3\times x^2\times 2y+3\times x\times(2y)^2+(2y)^3$

$=\boldsymbol{(x+2y)^3}$

(5) $8a^3-36a^2+54a-27$

$=(2a)^3-3\times(2a)^2\times 3+3\times 2a\times 3^2-3^3$

$=\boldsymbol{(2a-3)^3}$

(6) $27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$

$=(3a)^3-3\times(3a)^2\times 2b+3\times 3a\times(2b)^2-(2b)^3$

$=\boldsymbol{(3a-2b)^3}$

(7) $a^3+125b^3=a^3+(5b)^3=\boldsymbol{(a+5b)(a^2-5ab+25b^2)}$

(8) $64x^3-y^3=(4x)^3-y^3=\boldsymbol{(4x-y)(16x^2+4xy+y^2)}$

3 (1) $a+b=X$로 치환하면

$X^2-2X+1=(X-1)^2$

$=\boldsymbol{(a+b-1)^2}$ ← $X=a+b$ 대입

(2) $x+y=X$로 치환하면

$X^2+X-20=(X+5)(X-4)$

$=\boldsymbol{(x+y+5)(x+y-4)}$ ← $X=x+y$ 대입

(3) $x-2=X$로 치환하면

$X^2-5X+4=(X-1)(X-4)$

$=(x-2-1)(x-2-4)$ ← $X=x-2$ 대입

$=\boldsymbol{(x-3)(x-6)}$

(4) $a^2-a=X$로 치환하면

$X^2-4X+4=(X-2)^2$

$=(a^2-a-2)^2$ ← $X=a^2-a$ 대입

$=\{(a+1)(a-2)\}^2$

$=\boldsymbol{(a+1)^2(a-2)^2}$

(5) $x^2-x=X$로 치환하면

$X(X-8)+12=X^2-8X+12$

$=(X-2)(X-6)$

$=(x^2-x-2)(x^2-x-6)$ ← $X=x^2-x$ 대입

$=\boldsymbol{(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)}$

(6) $a^2+a=X$로 치환하면

$(X-1)(X-4)-10=X^2-5X-6$

$=(X-6)(X+1)$

$=(a^2+a-6)(a^2+a+1)$ ← $X=a^2+a$ 대입

$=\boldsymbol{(a+3)(a-2)(a^2+a+1)}$

(7) $x-y=X$로 치환하면

$(X+1)^2+(X-2)^2-9=2X^2-2X-4$

$=2(X^2-X-2)$

$=2(X+1)(X-2)$

$=\boldsymbol{2(x-y+1)(x-y-2)}$ ← $X=x-y$ 대입

(8) $x^2+x=X$로 치환하면

$(X+1)^2+(X+2)^2-5=2X^2+6X$

$=2X(X+3)$

$=2(x^2+x)(x^2+x+3)$ ← $X=x^2+x$ 대입

$=\boldsymbol{2x(x+1)(x^2+x+3)}$

4 (1) $x^2=X$로 치환하면

$X^2-3X+2=(X-1)(X-2)$

$=(x^2-1)(x^2-2)$ ← $X=x^2$ 대입

$=\boldsymbol{(x+1)(x-1)(x^2-2)}$

참고 특별한 조건이 없으면 계수가 유리수인 범위까지 인수분해하므로 x^2-2는 $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$로 인수분해하지 않는다.

(2) $x^2=X$로 치환하면

$X^2-3X-4=(X-4)(X+1)$

$=(x^2-4)(x^2+1)$ ← $X=x^2$ 대입

$=\boldsymbol{(x+2)(x-2)(x^2+1)}$

(3) $a^2=X$로 치환하면

$3X^2+X-4=(X-1)(3X+4)$

$=(a^2-1)(3a^2+4)$ ← $X=a^2$ 대입

$=\boldsymbol{(a+1)(a-1)(3a^2+4)}$

(4) $a^2=X$로 치환하면

$4X^2+11X-3=(4X-1)(X+3)$

$=(4a^2-1)(a^2+3)$ ← $X=a^2$ 대입

$=\boldsymbol{(2a+1)(2a-1)(a^2+3)}$

5 (1) $a^4+a^2+25=a^4+10a^2+25-9a^2$

$=(a^2+5)^2-(3a)^2$

$=(a^2+5+3a)(a^2+5-3a)$

$=\boldsymbol{(a^2+3a+5)(a^2-3a+5)}$

(2) $x^4-8x^2+4=x^4-4x^2+4-4x^2$

$=(x^2-2)^2-(2x)^2$

$=(x^2-2+2x)(x^2-2-2x)$

$=\boldsymbol{(x^2+2x-2)(x^2-2x-2)}$

(3) $x^4-9x^2+16=x^4-8x^2+16-x^2$

$=(x^2-4)^2-x^2$

$=(x^2-4+x)(x^2-4-x)$

$=\boldsymbol{(x^2+x-4)(x^2-x-4)}$

(4) $a^4-14a^2b^2+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-16a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-(4ab)^2$

$=(a^2+b^2+4ab)(a^2+b^2-4ab)$

$=\boldsymbol{(a^2+4ab+b^2)(a^2-4ab+b^2)}$

기초 개념 평가

본문 | 038, 039쪽

01 곱, 인수
02 $(a+b-c)^2$
03 $(a-1)^3$
04 $(a-1)(a^2+a+1)$
05 공통부분, 인수분해, X
06 X^2+aX+b, ax^2
07 3, 2, y
08 2, 2, 2
09 조립제법, 0, $x-\alpha$
10 상수, 최고차

기초 문제 평가

본문 | 040, 041쪽

1 (1) $(2a+b)^2+4a+2b=(2a+b)^2+2(2a+b)$
$=\mathbf{(2a+b)(2a+b+2)}$

(2) $(a-b)^2-5(b-a)=(a-b)^2+5(a-b)$
$=\mathbf{(a-b)(a-b+5)}$

(3) $xy+x+y+1=x(y+1)+(y+1)$
$=\mathbf{(x+1)(y+1)}$

(4) $xy-y^2-xz+yz=y(x-y)-z(x-y)$
$=\mathbf{(x-y)(y-z)}$

(5) $ab-ac-cd+bd=a(b-c)+d(b-c)$
$=\mathbf{(a+d)(b-c)}$

2 (1) $x^3y-xy^3=xy(x^2-y^2)$
$=\mathbf{xy(x+y)(x-y)}$

(2) $x^4-y^4=(x^2)^2-(y^2)^2$
$=(x^2+y^2)(x^2-y^2)$
$=\mathbf{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}$

(3) $x^2-(y-z)^2=\{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}$
$=\mathbf{(x+y-z)(x-y+z)}$

(4) $x^2+2xy+y^2-9=(x+y)^2-3^2$
$=\mathbf{(x+y+3)(x+y-3)}$

(5) $x^2-4y^2+2x+1=x^2+2x+1-4y^2$
$=(x+1)^2-(2y)^2$
$=(x+1+2y)(x+1-2y)$
$=\mathbf{(x+2y+1)(x-2y+1)}$

3 (1) $x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2$
$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$
$=\mathbf{(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)}$

(2) $8x^4y+27xy^4=xy(8x^3+27y^3)$
$=xy\{(2x)^3+(3y)^3\}$
$=\mathbf{xy(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)}$

(3) $x^4-8x=x(x^3-8)$
$=x(x^3-2^3)$
$=\mathbf{x(x-2)(x^2+2x+4)}$

(4) $3x+4=X$로 치환하면
$(3x+4)^3-64$
$=X^3-64$
$=X^3-4^3$
$=(X-4)(X^2+4X+16)$
$=\{(3x+4)-4\}\{(3x+4)^2+4(3x+4)+16\}$ ← $X=3x+4$ 대입
$=3x(9x^2+36x+48)$
$=\mathbf{9x(3x^2+12x+16)}$

(5) $x+y=A$, $x-y=B$로 치환하면
$(x+y)^3+(x-y)^3$
$=A^3+B^3$
$=(A+B)(A^2-AB+B^2)$
$=\{(x+y)+(x-y)\}$ ← $A=x+y$, $B=x-y$ 대입
$\times\{(x+y)^2-(x+y)(x-y)+(x-y)^2\}$
$=2x\{(x^2+2xy+y^2)-(x^2-y^2)+(x^2-2xy+y^2)\}$
$=\mathbf{2x(x^2+3y^2)}$

4 $x^2-x=X$로 치환하면
$(x^2-x-5)(x^2-x-9)-21$
$=(X-5)(X-9)-21$
$=X^2-14X+24$
$=(X-2)(X-12)$
$=(x^2-x-2)(x^2-x-12)$ ← $X=x^2-x$ 대입
$=(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)$
따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ① $\mathbf{x-1}$이다.

5 $x^2+x=X$로 치환하면
$(x^2+x)(x^2+x+4)+4=X(X+4)+4$
$=X^2+4X+4$
$=(X+2)^2$
$=(x^2+x+2)^2$ ← $X=x^2+x$ 대입
$\therefore$ $\mathbf{a=1,\ b=2}$

6 공통부분이 생기도록 두 일차식의 상수항의 합이 같게 짝을 지어 전개하면
$\{(x-1)(x+5)\}\{(x+1)(x+3)\}+16$
$=(x^2+4x-5)(x^2+4x+3)+16$
$x^2+4x=X$로 치환하면
$(X-5)(X+3)+16=X^2-2X+1$
$=(X-1)^2$
$=(x^2+4x-1)^2$ ← $X=x^2+4x$ 대입
$\therefore$ $\mathbf{a=4,\ b=1}$

7 $x^2=X$로 치환하면
$2X^2-7X-4=(X-4)(2X+1)$
$=(x^2-4)(2x^2+1)$ ← $X=x^2$ 대입
$=(x+2)(x-2)(2x^2+1)$
$\therefore$ $\mathbf{a=2,\ b=2,\ c=1}$

8 $x^4+64y^4=x^4+16x^2y^2+64y^4-16x^2y^2$

$=(x^2+8y^2)^2-(4xy)^2$

$=(x^2+8y^2+4xy)(x^2+8y^2-4xy)$

$=(x^2+4xy+8y^2)(x^2-4xy+8y^2)$

$\therefore\ \boldsymbol{a=8,\ b=-4,\ c=8}$

9 $x^2-xy-2y^2+5x-y+6$

$=x^2-xy+5x-2y^2-y+6$

$=x^2-(y-5)x-(2y^2+y-6)$

$=x^2-(y-5)x-(2y-3)(y+2)$

$=\{x+(y+2)\}\{x-(2y-3)\}$

$=(x+y+2)(x-2y+3)$

$\therefore\ \boldsymbol{a=1,\ b=-2,\ c=3}$

10 $P(x)$가 $x-1$을 인수로 가지므로

$P(1)=2+a-8+3=0\qquad \therefore\ a=3$

따라서 $P(x)=2x^3+3x^2-8x+3$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

1	2	3	−8	3
		2	5	−3
	2	5	−3	0

$\therefore\ P(x)=(x-1)(2x^2+5x-3)$

$=\boldsymbol{(x-1)(x+3)(2x-1)}$

11 $P(x)=x^4+2x^3-2x^2-2x+a$라 하면

$P(x)$가 $x-1$, $x+1$을 인수로 가지므로

$P(1)=0$, $P(-1)=0$

$P(1)=0$에서 $1+2-2-2+a=0\qquad \therefore\ a=1$

따라서 $P(x)=x^4+2x^3-2x^2-2x+1$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

1	1	2	−2	−2	1
		1	3	1	−1
−1	1	3	1	−1	0
		−1	−2	1	
	1	2	−1	0	

$\therefore\ P(x)=(x-1)(x+1)(x^2+2x-1)$

따라서 $f(x)=x^2+2x-1$이므로

$f(-1)=1-2-1=\boldsymbol{-2}$

12 $129=x$로 치환하면

$$\frac{129^3-1}{129\times130+1}=\frac{x^3-1}{x(x+1)+1}$$

$$=\frac{(x-1)\cancel{(x^2+x+1)}}{\cancel{x^2+x+1}}$$

$$=x-1$$

$$=129-1=\boldsymbol{128}$$

04 복소수

본문 | 044~049쪽

1-1 (1) $\boldsymbol{\sqrt{2}}$　(2) $\boldsymbol{0}$

1-2 (1) $5i-1=-1+5i$이므로 **실수부분은 $\boldsymbol{-1}$, 허수부분은 $\boldsymbol{5}$**

(2) $\sqrt{2}-3i$의 **실수부분은 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$, 허수부분은 $\boldsymbol{-3}$**

(3) $2i=0+2i$이므로 **실수부분은 $\boldsymbol{0}$, 허수부분은 $\boldsymbol{2}$**

(4) $-8=-8+0i$이므로 **실수부분은 $\boldsymbol{-8}$, 허수부분은 $\boldsymbol{0}$**

2-1 (1) $\boldsymbol{-5}$　(2) $\boldsymbol{-8i}$　(3) $\boldsymbol{\sqrt{3}+i}$

2-2 (1) $-8i^2=-8\times(-1)=8$, $i^2-1=-1-1=-2$이므로

허수단위 i가 없는 것을 찾으면 $\boldsymbol{0,\ -8i^2,\ i^2-1}$

(2) 허수단위 i가 있는 것을 찾으면

$\boldsymbol{i-\sqrt{5},\ \sqrt{3}i,\ -10i,\ 3+2i}$

(3) 실수부분이 0이고 허수부분이 0이 아닌 것을 찾으면

$\boldsymbol{\sqrt{3}i,\ -10i}$

(4) $a+bi\ (a\neq0,\ b\neq0)$ 꼴을 찾으면

$\boldsymbol{i-\sqrt{5},\ 3+2i}$

참고 복소수가 실수 또는 순허수가 되기 위한 조건

❶ 복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

① $a+bi$가 실수 ⇨ $b=0$

② $a+bi$가 순허수 ⇨ $a=0$, $b\neq0$

❷ 복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

① z^2이 실수 ⇨ z가 실수 또는 순허수

② z^2이 음의 실수 ⇨ z가 순허수

3-1 $\boldsymbol{1,\ -1}$

3-2 (1) $(x+y)-2i=-3+(y-1)i$에서

$x+y=-3$, $-2=y-1$

$\therefore\ \boldsymbol{x=-2,\ y=-1}$

(2) $(x-5)+(4y-1)i=0$에서

$x-5=0$, $4y-1=0$

$\therefore\ \boldsymbol{x=5,\ y=\frac{1}{4}}$

4-1 (1) $\boldsymbol{-9}$　(2) $\boldsymbol{2i}$

4-2 (1) 허수부분의 부호를 바꾸면 $\boldsymbol{1+4i}$

(2) $5i+8=8+5i$이므로

허수부분의 부호를 바꾸면 $\boldsymbol{8-5i}$

(3) $3=3+0i$이므로 허수부분의 부호를 바꾸면 $\boldsymbol{3}$

(4) $\sqrt{2}i=0+\sqrt{2}i$이므로

허수부분의 부호를 바꾸면 $\boldsymbol{-\sqrt{2}i}$

5-1 $\boldsymbol{5,\ 3,\ 1}$

5-2 (1) $x+(x-y)i=4-i$이므로

$x=4$, $x-y=-1$

$\therefore\ \boldsymbol{x=4,\ y=5}$

(2) $(x+y)+(2x+y)i=3+4i$이므로
$x+y=3$, $2x+y=4$를 연립하여 풀면
$\boldsymbol{x=1,\ y=2}$

6-1 (1) $\boldsymbol{-3,\ 6-i}$ (2) $\boldsymbol{3,\ 6i}$ (3) $\boldsymbol{3i,\ 8+i}$ (4) $\boldsymbol{10i,\ -1+2i}$

6-2 (1) $2(1-2i)+(3+2i)=2-4i+3+2i$
$=(2+3)+(-4+2)i$
$=\boldsymbol{5-2i}$

(2) $(3+4i)-2(1-i)=3+4i-2+2i$
$=(3-2)+(4+2)i$
$=\boldsymbol{1+6i}$

(3) $(2+i)(1-3i)=2-6i+i-3i^2=\boldsymbol{5-5i}$

(4) $\dfrac{1+3i}{1+i}=\dfrac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-i+3i-3i^2}{1-i^2}$
$=\dfrac{4+2i}{2}=\boldsymbol{2+i}$

7-1 (1) $\boldsymbol{0,\ -2}$ (2) $\boldsymbol{1}$

7-2 $z=(1+i)x^2+(1+2i)x-6-3i$
$=(x^2+x-6)+(x^2+2x-3)i$
$=(x+3)(x-2)+(x+3)(x-1)i$

(1) (허수부분)$=0$이므로 $(x+3)(x-1)=0$
$\therefore$ $\boldsymbol{x=-3}$ **또는** $\boldsymbol{x=1}$

(2) (실수부분)$=0$, (허수부분)$\neq0$이므로
$(x+3)(x-2)=0$, $(x+3)(x-1)\neq0$
$\therefore$ $\boldsymbol{x=2}$

8-1 (1) $\boldsymbol{5,\ 2,\ 1}$ (2) $\boldsymbol{2,\ 7,\ 3}$

8-2 (1) 주어진 등식의 좌변을 정리하면
$(x+2y)+(2x-y)i=6+7i$
$x+2y=6$, $2x-y=7$을 연립하여 풀면
$\boldsymbol{x=4,\ y=1}$

(2) 주어진 등식의 좌변을 정리하면
$(2x+2)-(x-4)i=y-3i$
$2x+2=y$, $x-4=3$을 연립하여 풀면
$\boldsymbol{x=7,\ y=16}$

(3) 주어진 등식의 좌변을 정리하면

$$\frac{x}{2-i}+\frac{y}{2+i}=\frac{x(2+i)+y(2-i)}{(2-i)(2+i)}$$
$$=\frac{(2x+2y)+(x-y)i}{5}$$
$$=\frac{2x+2y}{5}+\frac{x-y}{5}i$$

즉, $\dfrac{2x+2y}{5}+\dfrac{x-y}{5}i=-2+3i$이므로
$\dfrac{2x+2y}{5}=-2$, $\dfrac{x-y}{5}=3$
$x+y=-5$, $x-y=15$를 연립하여 풀면
$\boldsymbol{x=5,\ y=-10}$

9-1 $\boldsymbol{-1,\ -3,\ -3+2i}$

9-2 (1) $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$
이므로 주어진 등식의 좌변은
$(2-i)(a-bi)+3i(a+bi)$
$=2a-2bi-ai+bi^2+3ai+3bi^2$
$=2a-2bi-ai-b+3ai-3b$
$=(2a-4b)+(2a-2b)i$
즉, $(2a-4b)+(2a-2b)i=1-2i$이므로
$2a-4b=1$, $2a-2b=-2$를 연립하여 풀면
$a=-\dfrac{5}{2}$, $b=-\dfrac{3}{2}$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{z=-\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}i}$

(2) $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$
이므로 $z+\overline{z}=6$, $z\overline{z}=13$에서
$(a+bi)+(a-bi)=2a=6$
$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2=13$
따라서 $a=3$, $b=\pm2$이므로 $\boldsymbol{z=3\pm2i}$

10-1 (1) $\boldsymbol{i}$ (2) $\boldsymbol{1}$ (3) $\boldsymbol{i}$ (4) $\boldsymbol{-1}$

10-2 (1) $i^{11}=(i^4)^2\times i^3=i^3=\boldsymbol{-i}$
(2) $i^{88}=(i^4)^{22}=\boldsymbol{1}$
(3) $(-2i)^7=-2^7\times i^4\times i^3=-128i^3=\boldsymbol{128i}$
(4) $\left(-\dfrac{1}{i}\right)^{61}=-\dfrac{1}{i^{61}}=-\dfrac{1}{(i^4)^{15}\times i}=-\dfrac{1}{i}=\boldsymbol{i}$

11-1 $\boldsymbol{0,\ i}$

11-2 (1) $i+i^2+i^3+i^4=0$이므로
$i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{20}$
$=(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+(i^{17}+i^{18}+i^{19}+i^{20})$
$=(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+i^{16}(i+i^2+i^3+i^4)$
$=\boldsymbol{0}$

(2) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}+\cdots+\dfrac{1}{i^8}$
$=\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}\right)+\left(\dfrac{1}{i^5}+\dfrac{1}{i^6}+\dfrac{1}{i^7}+\dfrac{1}{i^8}\right)$
$=\left(\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1\right)+\left(\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1\right)$
$=\boldsymbol{0}$

12-1 $\boldsymbol{3i,\ 3i}$

12-2 (1) $\sqrt{-2}\sqrt{18}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}=\sqrt{2}i\times3\sqrt{2}+\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}$
$=6i+\dfrac{2}{i}$
$=6i-2i=\boldsymbol{4i}$

다른 풀이 $\sqrt{-2}\sqrt{18}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}=\sqrt{(-2)\times18}-\sqrt{\dfrac{12}{-3}}$
$=\sqrt{-36}-\sqrt{-4}$
$=6i-2i=4i$

(2) $\sqrt{-2}\sqrt{-8}+\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{-2}}+\dfrac{\sqrt{-45}}{\sqrt{-5}}$

$=\sqrt{2}i\times2\sqrt{2}i+\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}i}+\dfrac{3\sqrt{5}i}{\sqrt{5}i}$

$=4i^2+\dfrac{4}{i}+3=\mathbf{-1-4i}$

다른 풀이 $\sqrt{-2}\sqrt{-8}+\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{-2}}+\dfrac{\sqrt{-45}}{\sqrt{-5}}$

$=-\sqrt{(-2)\times(-8)}-\sqrt{\dfrac{32}{-2}}+\sqrt{\dfrac{-45}{-5}}$

$=-\sqrt{16}-\sqrt{-16}+\sqrt{9}$

$=-4-4i+3=-1-4i$

13-1 (1) $\boldsymbol{b,\ -2a}$ (2) $\boldsymbol{b,\ 2a}$

13-2 (1) $a<0,\ b<0$이므로 $a+b<0$

$\therefore\ |a|+|b|-\sqrt{(a+b)^2}=|a|+|b|-|a+b|$

$=-a-b+a+b=\mathbf{0}$

(2) $a>0,\ b<0$이므로 $b-a<0$

$\therefore\ -\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+|b-a|=-|a|+|b|+|b-a|$

$=-a-b-b+a=\mathbf{-2b}$

집중 연습

본문 | 050, 051쪽

1 (1) $2(3-2i)+(1-4i)=6-4i+1-4i=\mathbf{7-8i}$

(2) $2+3i-3(1+i)=2+3i-3-3i=\mathbf{-1}$

(3) $4(1+2i)-2(2+3i)=4+8i-4-6i=\mathbf{2i}$

2 (1) $(2-i)(3+2i)=6+4i-3i-2i^2=\mathbf{8+i}$

(2) $\dfrac{1+3i}{1-i}=\dfrac{(1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+i+3i+3i^2}{1-i^2}$

$=\dfrac{-2+4i}{2}=\mathbf{-1+2i}$

(3) $\dfrac{2}{1+i}+\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2(1-i)+2(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2-2i+2+2i}{1-i^2}$

$=\dfrac{4}{2}=\mathbf{2}$

3 (1) $(1+3i)x+(2-i)y=3+2i$에서

$(x+2y)+(3x-y)i=3+2i$

$x+2y=3,\ 3x-y=2$를 연립하여 풀면 $\boldsymbol{x=1,\ y=1}$

(2) $(2+3i)x-(1-i)y=\overline{5-5i}$에서

$(2x-y)+(3x+y)i=5+5i$

$2x-y=5,\ 3x+y=5$를 연립하여 풀면 $\boldsymbol{x=2,\ y=-1}$

(3) $(3+2i)(x+yi)=13$에서

$3x+3yi+2xi+2yi^2=13,\ (3x-2y)+(2x+3y)i=13$

$3x-2y=13,\ 2x+3y=0$을 연립하여 풀면 $\boldsymbol{x=3,\ y=-2}$

(4) $(x-2i)(1+i)=-1+yi$에서

$x+xi-2i-2i^2=-1+yi,\ (x+2)+(x-2)i=-1+yi$

$x+2=-1,\ x-2=y$를 연립하여 풀면 $\boldsymbol{x=-3,\ y=-5}$

(5) 주어진 등식의 좌변을 정리하면

$\dfrac{x}{1-2i}+\dfrac{y}{1+2i}=\dfrac{x(1+2i)+y(1-2i)}{(1-2i)(1+2i)}$

$=\dfrac{x+2xi+y-2yi}{1-4i^2}$

$=\dfrac{(x+y)+(2x-2y)i}{5}$

$=\dfrac{x+y}{5}+\dfrac{2x-2y}{5}i$

주어진 등식의 우변의 분모를 실수화하면

$\dfrac{2}{1-3i}=\dfrac{2(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\dfrac{2+6i}{1-9i^2}$

$=\dfrac{2+6i}{10}=\dfrac{1+3i}{5}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$

즉, $\dfrac{x+y}{5}+\dfrac{2x-2y}{5}i=\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$이므로

$x+y=1,\ 2x-2y=3$을 연립하여 풀면

$\boldsymbol{x=\dfrac{5}{4},\ y=-\dfrac{1}{4}}$

4 (1) $i^{49}=(i^4)^{12}\times i=\boldsymbol{i}$

(2) $(\sqrt{2}i)^{10}=(\sqrt{2})^{10}\times i^{10}=32\times(i^4)^2\times i^2$

$=32i^2=\mathbf{-32}$

(3) $(-i)^{25}=-i^{25}=-(i^4)^6\times i=\boldsymbol{-i}$

(4) $i^{100}+i^{102}=(i^4)^{25}+(i^4)^{25}\times i^2=1+i^2$

$=1-1=\mathbf{0}$

(5) $\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i^2}=\dfrac{i}{i^2}+1=-i+1=\mathbf{1-i}$

(6) $\left(\dfrac{1}{i}\right)^3=\dfrac{1}{i^3}=-\dfrac{1}{i}=\boldsymbol{i}$

(7) $\left(\dfrac{1}{i}\right)^5+\left(\dfrac{1}{i}\right)^{15}=\dfrac{1}{i^5}+\dfrac{1}{i^{15}}=\dfrac{1}{i^4\times i}+\dfrac{1}{(i^4)^3\times i^3}$

$=\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^3}=\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i}=\mathbf{0}$

(8) $\dfrac{1}{i}+i^2+\dfrac{1}{i^3}-i^4=\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}-1=\mathbf{-2}$

5 (1) $i+i^2+i^3+i^4=0$이므로

$i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{15}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)$

$+i^8(i+i^2+i^3+i^4)+i^{13}+i^{14}+i^{15}$

$=i^{13}+i^{14}+i^{15}=(i^4)^3\times i+(i^4)^3\times i^2+(i^4)^3\times i^3$

$=i+i^2+i^3=i-1-i$

$=\mathbf{-1}$

(2) $1+i+i^2+i^3=0$이므로

$1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{100}$

$=(1+i+i^2+i^3)+\cdots+(i^{96}+i^{97}+i^{98}+i^{99})+i^{100}$

$=(1+i+i^2+i^3)+\cdots+i^{96}(1+i+i^2+i^3)+(i^4)^{25}$

$=(i^4)^{25}=\mathbf{1}$

(3) $1-i+i^2-i^3=1-i-1+i=0$이므로

$1-i+i^2-i^3+i^4-\cdots+i^{60}$

$=(1-i+i^2-i^3)+(i^4-i^5+i^6-i^7)+\cdots+(i^{56}-i^{57}+i^{58}-i^{59})+i^{60}$

$=i^{60}=(i^4)^{15}=\mathbf{1}$

(4) $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1=0$이므로

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{1}{i^{13}}$

$=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{i^9}+\frac{1}{i^{10}}+\frac{1}{i^{11}}+\frac{1}{i^{12}}\right)+\frac{1}{i^{13}}$

$=\frac{1}{i^{13}}=\frac{1}{(i^4)^3\times i}=\frac{1}{i}=\boldsymbol{-i}$

(5) $1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}=1+\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}=0$이므로

$1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{25}}$

$=\left(1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{i^{20}}+\frac{1}{i^{21}}+\frac{1}{i^{22}}+\frac{1}{i^{23}}\right)+\frac{1}{i^{24}}+\frac{1}{i^{25}}$

$=\frac{1}{i^{24}}+\frac{1}{i^{25}}=\frac{1}{(i^4)^6}+\frac{1}{(i^4)^6\times i}$

$=1+\frac{1}{i}=\boldsymbol{1-i}$

기초 개념 평가

본문 | 052, 053쪽

01 -1, 허수단위
02 실수부분, 허수부분
03 실수, 허수
04 순허수, 순허수가 아닌 허수
05 $\boldsymbol{c, d}$
06 $\mathbf{0}$, $\mathbf{0}$
07 허수
08 $\boldsymbol{a+c, b-d}$
09 $\boldsymbol{bc}$
10 $\boldsymbol{ac+bd}$
11 -1
12 자연수
13 $\boldsymbol{a<0, b<0}$
14 $\boldsymbol{a>0, b<0}$

기초 문제 평가

본문 | 054, 055쪽

1 $\sqrt{-16}=\sqrt{16}i=4i$, $2i^2=-2$이므로
허수단위 i가 있는 것을 찾으면
$\boldsymbol{\sqrt{-16}, i-1, \sqrt{3}-2i, -\sqrt{3}i, 1+3i}$

2 (1) $2(3-2i)+(3+\sqrt{2}i)(3-\sqrt{2}i)$
$=6-4i+9-2i^2=\boldsymbol{17-4i}$

(2) $(1-\sqrt{5}i)^2=1^2-2\times1\times\sqrt{5}i+(\sqrt{5}i)^2$
$=1-2\sqrt{5}i+5i^2=\boldsymbol{-4-2\sqrt{5}i}$

(3) $(2+i)^2-(2-i)^2=4+4i+i^2-(4-4i+i^2)=\boldsymbol{8i}$

(4) $\frac{1+2i}{1-i}-\frac{2-i}{1+i}=\frac{(1+2i)(1+i)-(2-i)(1-i)}{(1-i)(1+i)}$
$=\frac{1+i+2i+2i^2-(2-2i-i+i^2)}{1-i^2}$
$=\frac{-1+3i-(1-3i)}{2}=\frac{-2+6i}{2}$
$=\boldsymbol{-1+3i}$

3 $z-3+2i=2zi$에서 $(1-2i)z=3-2i$
$\therefore z=\frac{3-2i}{1-2i}=\frac{(3-2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{3+6i-2i-4i^2}{1-4i^2}$
$=\frac{7+4i}{5}=\boldsymbol{\frac{7}{5}+\frac{4}{5}i}$

4 $(1+ai)(1+3i)=1+3i+ai+3ai^2$
$=(1-3a)+(3+a)i$
이 복소수가 실수가 되려면 (허수부분)$=0$이므로
$3+a=0$에서 $a=-3$　　$\therefore \boldsymbol{x=-3}$
이 복소수가 순허수가 되려면
(실수부분)$=0$, (허수부분)$\neq0$이므로
$1-3a=0$, $3+a\neq0$에서 $a=\frac{1}{3}$　　$\therefore \boldsymbol{y=\frac{1}{3}}$

5 $z^2<0$이 되려면 z는 순허수이어야 하므로
$z=(x^2-4x+3)+(x^2-2x-3)i$에서
(실수부분)$=0$, (허수부분)$\neq0$
(i) $x^2-4x+3=0$, 즉 $(x-1)(x-3)=0$에서
$x=1$ 또는 $x=3$
(ii) $x^2-2x-3\neq0$, 즉 $(x+1)(x-3)\neq0$에서
$x\neq-1$ 그리고 $x\neq3$
(i), (ii)에서 $\boldsymbol{x=1}$

6 $(1+i)(4-3i)-i(2-i)^2$
$=4-3i+4i-3i^2-i(4-4i+i^2)=7+i-i(3-4i)$
$=7+i-3i+4i^2=3-2i$
$\therefore \boldsymbol{a=3, b=-2}$

7 주어진 등식의 좌변을 정리하면
$\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-i}=\frac{x(1-i)+y(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{x-xi+y+yi}{1-i^2}$
$=\frac{(x+y)+(-x+y)i}{2}$
$=\frac{x+y}{2}+\frac{-x+y}{2}i$

즉, $\frac{x+y}{2}+\frac{-x+y}{2}i=1+2i$이므로

$\frac{x+y}{2}=1$, $\frac{-x+y}{2}=2$

$x+y=2$, $-x+y=4$를 연립하여 풀면

$\boldsymbol{x=-1, y=3}$

8 $z-\bar{z}=(1-i)-(1+i)=-2i$

$z\bar{z}=(1-i)(1+i)=1-i^2=1+1=2$

(1) $\frac{z\bar{z}}{z-\bar{z}}=\frac{2}{-2i}=-\frac{1}{i}=-\frac{i}{i^2}=\boldsymbol{i}$

(2) $\frac{z-1}{z}-\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}}=\frac{(z-1)\bar{z}-z(\bar{z}-1)}{z\bar{z}}$

$=\frac{z\bar{z}-\bar{z}-z\bar{z}+z}{z\bar{z}}=\frac{z-\bar{z}}{z\bar{z}}$

$=\frac{-2i}{2}=\boldsymbol{-i}$

9 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$이므로

주어진 등식의 좌변은

$2(a+bi)-i(a-bi)=2a+2bi-ai+bi^2$

$=(2a-b)-(a-2b)i$

즉, $(2a-b)-(a-2b)i=4-5i$이므로

$2a-b=4$, $a-2b=5$를 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-2$ $\quad\therefore \boldsymbol{z=1-2i}$

10 $i=i^5$, $i^2=i^6=-1$, $i^3=i^7=-i$, $i^4=i^8=1$이므로

$i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+8i^8$

$=i-2-3i+4+5i-6-7i+8$

$=4-4i$

$\therefore \boldsymbol{a=4, b=-4}$

11 $z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이고

$i+i^2+i^3+i^4=0$이므로

$z+z^2+z^3+z^4+\cdots+z^{12}$

$=i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{12}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)+(i^9+i^{10}+i^{11}+i^{12})$

$=\boldsymbol{0}$

12 (1) $\sqrt{-3}\sqrt{-12}+\frac{\sqrt{-20}}{\sqrt{5}}=\sqrt{3}i\times 2\sqrt{3}i+\frac{2\sqrt{5}i}{\sqrt{5}}$

$=6i^2+2i=\boldsymbol{-6+2i}$

(2) $(3+\sqrt{-2})(3-\sqrt{-2})+\sqrt{-3}\sqrt{-27}$

$=(3+\sqrt{2}i)(3-\sqrt{2}i)+\sqrt{3}i\times 3\sqrt{3}i=9-2i^2+9i^2$

$=9+2-9=\boldsymbol{2}$

(3) $(\sqrt{-13})^2+\sqrt{-20}\sqrt{5}+\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$

$=(\sqrt{13}i)^2+2\sqrt{5}i\times\sqrt{5}+\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}i}=13i^2+10i+\frac{3}{i}$

$=-13+10i-3i=\boldsymbol{-13+7i}$

05 이차방정식

기초 개념 피드백 & TEST

본문 | 057쪽

1-1 (1) $\boldsymbol{2, -2}$ (2) $\boldsymbol{4, -\frac{4}{3}}$

1-2 (1) 좌변을 인수분해하면 $x(x+2)=0$

$x=0$ 또는 $x+2=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=0}$ **또는** $\boldsymbol{x=-2}$

(2) 좌변을 인수분해하면 $(x-3)^2=0$

$x-3=0$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{x=3}$ **(중근)**

(3) 좌변을 인수분해하면 $(2x+5)(2x-5)=0$

$2x+5=0$ 또는 $2x-5=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=-\frac{5}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{5}{2}}$

(4) 좌변을 인수분해하면 $(2x+1)(x-2)=0$

$2x+1=0$ 또는 $x-2=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x=2}$

2-1 (1) $\boldsymbol{-7, 2}$ (2) $\boldsymbol{5, 1}$

2-2 (1) $x=\pm\sqrt{8}$ $\quad\therefore \boldsymbol{x=\pm 2\sqrt{2}}$

(2) -10을 우변으로 이항하면 $9x^2=10$

양변을 9로 나누면 $x^2=\frac{10}{9}$

$x=\pm\sqrt{\frac{10}{9}}$ $\quad\therefore \boldsymbol{x=\pm\frac{\sqrt{10}}{3}}$

(3) $x+2=\pm\sqrt{12}$ $\quad\therefore \boldsymbol{x=-2\pm 2\sqrt{3}}$

(4) -25를 우변으로 이항하면 $5(x-3)^2=25$

양변을 5로 나누면 $(x-3)^2=5$

$x-3=\pm\sqrt{5}$ $\quad\therefore \boldsymbol{x=3\pm\sqrt{5}}$

3-1 (1) $\boldsymbol{-2, \sqrt{17}}$ (2) $\boldsymbol{-2, 2, \sqrt{2}}$

3-2 (1) 근의 공식에 $a=1$, $b=-3$, $c=1$을 대입하면

$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times 1\times 1}}{2\times 1}$

$=\boldsymbol{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$

(2) 근의 공식에 $a=2$, $b=-1$, $c=-5$를 대입하면

$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 2\times(-5)}}{2\times 2}$

$=\boldsymbol{\frac{1\pm\sqrt{41}}{4}}$

(3) 근의 공식에 $a=1$, $b'=-1$, $c=-4$를 대입하면

$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\times(-4)}}{1}=\boldsymbol{1\pm\sqrt{5}}$

(4) 근의 공식에 $a=2$, $b'=1$, $c=-7$을 대입하면

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-2\times(-7)}}{2}=\boldsymbol{\frac{-1\pm\sqrt{15}}{2}}$

1-1 (1) $\mathbf{3}$, $\sqrt{\mathbf{13}}$, **실근** (2) $\mathbf{-1}$, $\mathbf{9}$, $\mathbf{2\sqrt{2}}$, **허근**

1-2 (1) 근의 공식에 $a=3$, $b=-5$, $c=1$을 대입하면

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times3\times1}}{2\times3}=\mathbf{\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}}$$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 **실근**이다.

(2) 근의 공식에 $a=1$, $b'=5$, $c=5$를 대입하면

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-1\times5}}{1}=\mathbf{-5\pm2\sqrt{5}}$$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 **실근**이다.

(3) 근의 공식에 $a=1$, $b=-3$, $c=4$를 대입하면

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times4}}{2\times1}=\mathbf{\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}}$$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 **허근**이다.

(4) 근의 공식에 $a=2$, $b'=1$, $c=3$을 대입하면

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-2\times3}}{2}=\mathbf{\frac{-1\pm\sqrt{5}i}{2}}$$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 **허근**이다.

2-1 $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{3}$

2-2 (1) 이차방정식 $x^2-(m+2)x+3m+2=0$에 $x=-2$를 대입하면

$4+2m+4+3m+2=0$, $5m=-10$

$\therefore m=-2$

$m=-2$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-4=0$, $(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 나머지 한 근은 **2**이다.

(2) 이차방정식 $x^2-ax-a^2-5=0$에 $x=-3$을 대입하면

$9+3a-a^2-5=0$, $a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0$ $\quad\therefore a=4$ ($\because a>0$)

$a=4$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-4x-21=0$, $(x+3)(x-7)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=7$

따라서 나머지 한 근은 **7**이다.

3-1 (1) $>$, **실근** (2) $<$, **허근**

3-2 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

(1) $D=(-1)^2-4\times2\times(-4)=33>0$이므로

서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $\dfrac{D}{4}=(-5)^2-1\times25=0$이므로

중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.

(3) $\dfrac{D}{4}=2^2-3\times2=-2<0$이므로

서로 다른 두 허근을 갖는다.

4-1 (1) $>$, $\mathbf{2}$ (2) $<$, $\mathbf{2}$

4-2 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(k+1)^2-1\times(k^2-3)=2k+4$$

(1) $\dfrac{D}{4}\ge0$이어야 하므로 $2k+4\ge0$ $\quad\therefore \mathbf{k\ge-2}$

(2) $\dfrac{D}{4}=0$이어야 하므로 $2k+4=0$ $\quad\therefore \mathbf{k=-2}$

(3) $\dfrac{D}{4}<0$이어야 하므로 $2k+4<0$ $\quad\therefore \mathbf{k<-2}$

5-1 (1) $\mathbf{5}$, $\mathbf{-6}$ (2) $\mathbf{5}$, $\mathbf{-16}$

5-2 $\alpha+\beta=-\dfrac{6}{1}=-6$, $\alpha\beta=\dfrac{2}{1}=2$이므로

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{-6}{2}=\mathbf{-3}$

(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-6)^2-2\times2=\mathbf{32}$

(3) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-6)^2-4\times2=\mathbf{28}$

(4) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-6)^3-3\times2\times(-6)=\mathbf{-180}$

6-1 (1) $\mathbf{3}$, $\mathbf{18}$ (2) $\mathbf{4}$, $\mathbf{20}$

6-2 (1) 두 근의 비가 1 : 3이므로 두 근을 α, $3\alpha\,(\alpha\ne0)$로 놓으면

(두 근의 합)$=\alpha+3\alpha=k$ ······ ㉠

(두 근의 곱)$=\alpha\times3\alpha=12$, $\alpha^2=4$

$\therefore \alpha=\pm2$

이것을 ㉠에 대입하면

$k=4\alpha=4\times(\pm2)=\pm8$

따라서 구하는 실수 k의 값은 $\mathbf{-8}$, $\mathbf{8}$이다.

(2) 두 근의 차가 2이므로 두 근을 α, $\alpha+2$로 놓으면

(두 근의 합)$=\alpha+(\alpha+2)=-k$

$\therefore k=-2\alpha-2$ ······ ㉠

(두 근의 곱)$=\alpha(\alpha+2)=3$, $\alpha^2+2\alpha-3=0$

$(\alpha+3)(\alpha-1)=0$ $\quad\therefore \alpha=-3$ 또는 $\alpha=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $k=4$ 또는 $k=-4$

따라서 구하는 실수 k의 값은 $\mathbf{-4}$, $\mathbf{4}$이다.

7-1 (1) $\mathbf{3}$, $\mathbf{4}$ (2) $\mathbf{2}$, $\mathbf{26}$

7-2 (1) (두 근의 합)$=2+5=7$,

(두 근의 곱)$=2\times5=10$이므로

$\mathbf{x^2-7x+10=0}$

(2) (두 근의 합)$=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=2$,

(두 근의 곱)$=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-2$이므로

$\mathbf{x^2-2x-2=0}$

(3) (두 근의 합)$=(-2+i)+(-2-i)=-4$,

(두 근의 곱)$=(-2+i)(-2-i)=5$이므로

$\mathbf{x^2+4x+5=0}$

8-1 $\mathbf{5, 6}$

8-2 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=2$

(1) (두 근의 합)$=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-5)^2-2\times2=21$

(두 근의 곱)$=\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=2^2=4$

따라서 구하는 이차방정식은 $\boldsymbol{x^2-21x+4=0}$

(2) (두 근의 합)$=(\alpha-1)+(\beta-1)=\alpha+\beta-2$

$=-5-2=-7$

(두 근의 곱)$=(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$

$=2-(-5)+1=8$

따라서 구하는 이차방정식은 $\boldsymbol{x^2+7x+8=0}$

9-1 $\mathbf{1-\sqrt{2}, -2, -1}$

9-2 (1) 계수가 유리수이고 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=-a$에서

$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=-a$

(두 근의 곱)$=b$에서

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=b$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=-4, b=1}$

(2) 계수가 유리수이고 한 근이 $2\sqrt{2}-1$, 즉 $-1+2\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $-1-2\sqrt{2}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=-a$에서

$(-1+2\sqrt{2})+(-1-2\sqrt{2})=-a$

(두 근의 곱)$=b$에서

$(-1+2\sqrt{2})(-1-2\sqrt{2})=b$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=2, b=-7}$

10-1 $\mathbf{-6, 10}$

10-2 (1) 계수가 실수이고 한 근이 $1+\sqrt{2}i$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=-a$에서

$(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)=-a$

(두 근의 곱)$=b$에서

$(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=b$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=-2, b=3}$

(2) 계수가 실수이고 한 근이 $2i-3$, 즉 $-3+2i$이므로 다른 한 근은 $-3-2i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=-a$에서

$(-3+2i)+(-3-2i)=-a$

(두 근의 곱)$=b$에서

$(-3+2i)(-3-2i)=b$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=6, b=13}$

집중 연습

본문 | 063~065쪽

1 (1) 좌변을 인수분해하면 $(x+2)(x-1)=0$

$x+2=0$ 또는 $x-1=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=1}$

(2) 좌변을 인수분해하면 $(x+3)(3x-2)=0$

$x+3=0$ 또는 $3x-2=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=-3}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{2}{3}}$

(3) 좌변을 인수분해하면 $(2x+3)(x-1)=0$

$2x+3=0$ 또는 $x-1=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=-\frac{3}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x=1}$

(4) 괄호를 풀고 정리하면

$x^2+3x=2x+20$, $x^2+x-20=0$

좌변을 인수분해하면 $(x+5)(x-4)=0$

$x+5=0$ 또는 $x-4=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=-5}$ **또는** $\boldsymbol{x=4}$

(5) 괄호를 풀고 정리하면

$6x^2-4x=-9x+4$, $6x^2+5x-4=0$

좌변을 인수분해하면 $(3x+4)(2x-1)=0$

$3x+4=0$ 또는 $2x-1=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=-\frac{4}{3}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$

(6) 괄호를 풀고 정리하면

$4x^2-8x+8=5x+5$, $4x^2-13x+3=0$

좌변을 인수분해하면 $(4x-1)(x-3)=0$

$4x-1=0$ 또는 $x-3=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=\frac{1}{4}}$ **또는** $\boldsymbol{x=3}$

2 (1) 근의 공식에 $a=1$, $b=-1$, $c=-1$을 대입하면

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\boldsymbol{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$$

(2) 근의 공식에 $a=1$, $b'=1$, $c=-9$를 대입하면

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-1\times(-9)}}{1}=\boldsymbol{-1\pm\sqrt{10}}$$

(3) 근의 공식에 $a=2$, $b=-3$, $c=2$를 대입하면

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times2}}{2\times2}=\boldsymbol{\frac{3\pm\sqrt{7}i}{4}}$$

(4) 근의 공식에 $a=3$, $b'=-1$, $c=1$을 대입하면

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-3\times1}}{3}=\boldsymbol{\frac{1\pm\sqrt{2}i}{3}}$$

(5) 근의 공식에 $a=1$, $b=-3$, $c=-3$을 대입하면

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-3)}}{2\times1}=\boldsymbol{\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}}$$

(6) 근의 공식에 $a=3$, $b'=2$, $c=6$을 대입하면

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-3\times6}}{3}=\boldsymbol{\frac{-2\pm\sqrt{14}i}{3}}$$

3 (1) $\alpha+\beta=-\frac{2}{1}=\mathbf{-2}$

(2) $\alpha\beta=\frac{-1}{1}=\mathbf{-1}$

(3) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-2}{-1}=\mathbf{2}$

(4) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-2)^2-2\times(-1)=\mathbf{6}$

(5) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-2)^2-4\times(-1)=\mathbf{8}$

(6) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-2)^3-3\times(-1)\times(-2)=\mathbf{-14}$

(7) $\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{\beta}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{-14}{-1}=\mathbf{14}$

4 (1) $\alpha+\beta=-\frac{-5}{1}=\mathbf{5}$

(2) $\alpha\beta=\frac{3}{1}=\mathbf{3}$

(3) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=3\times5=\mathbf{15}$

(4) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=5^2-2\times3=\mathbf{19}$

(5) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\mathbf{\frac{19}{3}}$

(6) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=5^2-4\times3=13$

$\therefore\ \alpha-\beta=\mathbf{\sqrt{13}}\ (\because\ \alpha>\beta)$

(7) $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=5\times\sqrt{13}=\mathbf{5\sqrt{13}}$

5 (1) (두 근의 합)$=3+6=9$, (두 근의 곱)$=3\times6=18$

$\therefore\ \mathbf{x^2-9x+18=0}$

(2) (두 근의 합)$=(1+\sqrt{7})+(1-\sqrt{7})=2$,

(두 근의 곱)$=(1+\sqrt{7})(1-\sqrt{7})=-6$

$\therefore\ \mathbf{x^2-2x-6=0}$

(3) (두 근의 합)$=(-3+i)+(-3-i)=-6$,

(두 근의 곱)$=(-3+i)(-3-i)=10$

$\therefore\ \mathbf{x^2+6x+10=0}$

6 (1) (두 근의 합)$=(-1)+(-2)=-3$,

(두 근의 곱)$=(-1)\times(-2)=2$

x^2의 계수가 2이므로 구하는 이차방정식은

$2(x^2+3x+2)=0$ $\quad\therefore\ \mathbf{2x^2+6x+4=0}$

(2) (두 근의 합)$=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$,

(두 근의 곱)$=(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=-1$

x^2의 계수가 2이므로 구하는 이차방정식은

$2(x^2-4x-1)=0$ $\quad\therefore\ \mathbf{2x^2-8x-2=0}$

(3) (두 근의 합)$=(-2+3i)+(-2-3i)=-4$,

(두 근의 곱)$=(-2+3i)(-2-3i)=4-9i^2=13$

x^2의 계수가 2이므로 구하는 이차방정식은

$2(x^2+4x+13)=0$ $\quad\therefore\ \mathbf{2x^2+8x+26=0}$

7 (1) 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8,\ \alpha\beta=-1$

(두 근의 합)$=(\alpha+\beta)+\alpha\beta=7$

(두 근의 곱)$=(\alpha+\beta)\alpha\beta=-8$

$\therefore\ \mathbf{x^2-7x-8=0}$

(2) 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=4$

(두 근의 합)$=(\alpha+\beta)+\alpha\beta=3$

(두 근의 곱)$=(\alpha+\beta)\alpha\beta=-4$

$\therefore\ \mathbf{x^2-3x-4=0}$

(3) 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-6,\ \alpha\beta=-5$

(두 근의 합)$=(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-11$

(두 근의 곱)$=(\alpha+\beta)\alpha\beta=30$

$\therefore\ \mathbf{x^2+11x+30=0}$

8 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$

(1) (두 근의 합)$=(\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=5$

(두 근의 곱)$=(\alpha+1)(\beta+1)$

$=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=5$

$\therefore\ \mathbf{x^2-5x+5=0}$

(2) (두 근의 합)$=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=3$

(두 근의 곱)$=\frac{1}{\alpha\beta}=1$

$\therefore\ \mathbf{x^2-3x+1=0}$

(3) (두 근의 합)$=(\alpha^2-1)+(\beta^2-1)=\alpha^2+\beta^2-2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2=5$

(두 근의 곱)$=(\alpha^2-1)(\beta^2-1)$

$=\alpha^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2)+1$

$=(\alpha\beta)^2-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+1=-5$

$\therefore\ \mathbf{x^2-5x-5=0}$

기초 개념 평가

본문 | 066, 067쪽

01 실수, 실수, 허수, 허수
02 복소수, 실근, 허근
03 부호, 허근
04 판별식, D
05 $D>0$
06 $D=0$
07 $D<0$
08 3, 4
11 2, $-\frac{1}{2}$
10 $-$, $+$
11 $+$, $+$
12 유리수
13 실수

기초 문제 평가

본문 | 068, 069쪽

1 (1) 좌변을 인수분해하면 $(x-1)(x-2)=0$

$x-1=0$ 또는 $x-2=0$

$\therefore$ **$x=1$ 또는 $x=2$**

(2) 좌변을 인수분해하면 $(4x+3)(x-1)=0$

$4x+3=0$ 또는 $x-1=0$

$\therefore$ **$x=-\frac{3}{4}$ 또는 $x=1$**

(3) 근의 공식에 $a=1, b=7, c=5$를 대입하면

$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times1\times5}}{2\times1}=\mathbf{\frac{-7\pm\sqrt{29}}{2}}$

(4) 근의 공식에 $a=1, b'=-1, c=-5$를 대입하면

$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\times(-5)}}{1}=\mathbf{1\pm\sqrt{6}}$

(5) 근의 공식에 $a=3, b'=-2, c=3$을 대입하면

$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\times3}}{3}=\mathbf{\frac{2\pm\sqrt{5}i}{3}}$

(6) 근의 공식에 $a=2, b=5, c=4$를 대입하면

$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times2\times4}}{2\times2}=\mathbf{\frac{-5\pm\sqrt{7}i}{4}}$

2 이차방정식 $x^2-kx+k-1=0$에 $x=4$를 대입하면

$16-4k+k-1=0$, $3k=15$ $\quad\therefore k=5$

$k=5$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

따라서 $\alpha=1$이므로

$k+\alpha=5+1=\mathbf{6}$

다른 풀이 근과 계수의 관계에 의하여 $4+\alpha=k$, $4\alpha=k-1$

$4\alpha=4+\alpha-1$에서 $3\alpha=3$ $\quad\therefore \alpha=1$

$\alpha=1$을 $k=4+\alpha$에 대입하면 $k=5$

$\therefore k+\alpha=5+1=6$

3 이차방정식 $x^2+2x+k-3=0$의 판별식을 D라 할 때, 실근을 가지려면 $D\geq0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1^2-1\times(k-3)=-k+4\geq0$

$\therefore$ **$k\leq4$**

4 이차방정식 $x^2-3x+1-k=0$의 판별식을 D라 할 때, 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$D=(-3)^2-4\times1\times(1-k)=4k+5<0$

$\therefore$ **$k<-\frac{5}{4}$**

5 이차방정식 $x^2-(k+2)x+4=0$의 판별식을 D라 할 때, 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$D=\{-(k+2)\}^2-4\times1\times4=k^2+4k-12=0$

$(k+6)(k-2)=0$ $\quad\therefore k=2\ (\because k>0)$

$k=2$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$ $\quad\therefore x=2$ (중근)

따라서 $m=2$이므로

$k+m=2+2=\mathbf{4}$

6 이차방정식 $x^2+(2k+1)x+k^2-2=0$의 판별식을 D라 할 때, 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 $D=0$이어야 하므로

$D=(2k+1)^2-4\times1\times(k^2-2)=4k+9=0$

$\therefore$ **$k=-\frac{9}{4}$**

참고 x에 대한 이차식 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 실수)에 대하여

이차식 $f(x)$가 완전제곱식이 된다.

$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f(x)=0$이 중근을 갖는다.

$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식 $D=0$이다.

7 이차방정식 $x^2+3x-5=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-5$

(1) $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=\alpha\beta+\alpha\times\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\times\beta+\frac{1}{\alpha\beta}$

$=\alpha\beta+2+\frac{1}{\alpha\beta}=-5+2-\frac{1}{5}=\mathbf{-\frac{16}{5}}$

(2) $(\alpha^2+4\alpha)(\beta^2+4\beta)$

$=\alpha^2\beta^2+4\alpha^2\beta+4\alpha\beta^2+16\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2+4\alpha\beta(\alpha+\beta)+16\alpha\beta$

$=(-5)^2+4\times(-5)\times(-3)+16\times(-5)=\mathbf{5}$

다른 풀이 $x^2+3x-5=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+3\alpha-5=0$에서 $\alpha^2+3\alpha=5$

$\therefore \alpha^2+4\alpha=\alpha+5$

같은 방법으로 $\beta^2+4\beta=\beta+5$

$\therefore (\alpha^2+4\alpha)(\beta^2+4\beta)=(\alpha+5)(\beta+5)$

$=\alpha\beta+5(\alpha+\beta)+25$

$=-5+5\times(-3)+25=5$

(3) $\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\beta}=\frac{1+\beta+1+\alpha}{(1+\alpha)(1+\beta)}=\frac{(\alpha+\beta)+2}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$

$=\frac{-3+2}{1-3-5}=\mathbf{\frac{1}{7}}$

8 이차방정식 $x^2-ax-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-2$

또, 이차방정식 $x^2+4x+b=0$의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{a}{-2}=-4$ $\quad\therefore$ **$a=8$**

$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{-2}=b$ $\quad\therefore$ **$b=-\frac{1}{2}$**

9 이차방정식 $x^2-(k-2)x+k=0$의 한 근이 다른 한 근의 2배이므로 두 근을 α, $2\alpha\,(\alpha\neq0)$로 놓으면

(두 근의 합)$=\alpha+2\alpha=k-2$ $\quad\therefore k=3\alpha+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(두 근의 곱)$=\alpha\times2\alpha=k$ $\quad\therefore k=2\alpha^2$

이때 $3\alpha+2=2\alpha^2$이므로 $2\alpha^2-3\alpha-2=0$

$(2\alpha+1)(\alpha-2)=0$ $\quad\therefore \alpha=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $\alpha=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$k=\dfrac{1}{2}$ 또는 $k=8$

따라서 구하는 실수 k의 값은 $\mathbf{\dfrac{1}{2}}$, **8**이다.

10 이차방정식 $x^2+5x+k^2-3k=0$의 두 근의 차가 3이므로 두 근을 α, $\alpha+3$으로 놓으면

(두 근의 합)$=\alpha+(\alpha+3)=-5$에서 $\alpha=-4$

(두 근의 곱)$=\alpha(\alpha+3)=k^2-3k$에서

$k^2-3k-4=0$, $(k+1)(k-4)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=4$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 **3**이다.

11 이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-4$

(두 근의 합)$=\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{2^2-2\times(-4)}{-4}=-3$

(두 근의 곱)$=\dfrac{\beta}{\alpha}\times\dfrac{\alpha}{\beta}=1$

따라서 구하는 이차방정식은 $\boldsymbol{x^2+3x+1=0}$

12 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 한 근이 $\sqrt{2}+b$, 즉 $b+\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $b-\sqrt{2}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=(b+\sqrt{2})+(b-\sqrt{2})=4$에서

$2b=4$ $\quad\therefore \boldsymbol{b=2}$

(두 근의 곱)$=(b+\sqrt{2})(b-\sqrt{2})=a$에서

$\boldsymbol{a}=b^2-2=2^2-2=\mathbf{2}$

13 계수가 실수인 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\dfrac{2}{1+i}=\dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$이므로 다른 한 근은 $1+i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=(1-i)+(1+i)=-a$에서

$\boldsymbol{a=-2}$

(두 근의 곱)$=(1-i)(1+i)=b$에서

$\boldsymbol{b=2}$

06 이차방정식과 이차함수

기초 개념 피드백 & TEST

본문 | 071쪽

1-1 (1) $>$ (2) 절댓값

1-2 (1) $y=ax^2$에서 $a<0$인 것을 찾으면 ㄱ, ㄷ, ㅁ

(2) $y=ax^2$에서 a의 절댓값이 가장 작은 것을 찾으면 ㄷ

(3) ㄱ. $y=-4x^2$과 ㄴ. $y=4x^2$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다.

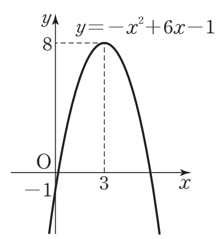
2-1 **1, 2**

2-2 (1) $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 고치면

$y=-x^2+6x-1$

$\quad=-(x-3)^2+8$

따라서 이차함수 $y=-x^2+6x-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때 **꼭짓점의 좌표는 $\mathbf{(3,\,8)}$**이고 점 $(0,\,-1)$을 지나므로 **$\boldsymbol{y}$절편은 $\mathbf{-1}$**이다.

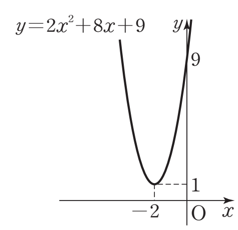


(2) $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 고치면

$y=2x^2+8x+9$

$\quad=2(x+2)^2+1$

따라서 이차함수 $y=2x^2+8x+9$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때 **꼭짓점의 좌표는 $\mathbf{(-2,\,1)}$**이고 점 $(0,\,9)$를 지나므로 **$\boldsymbol{y}$절편은 9**이다.

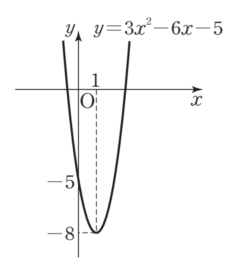


3-1 **-1, 3**

3-2 (1) $y=3x^2-6x-5$

$\quad=3(x-1)^2-8$

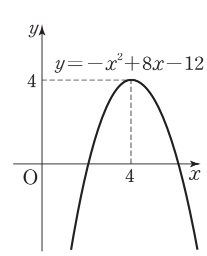
따라서 **최솟값은 $\boldsymbol{x=1}$일 때 $\mathbf{-8}$이고, 최댓값은 없다.**



(2) $y=-x^2+8x-12$

$\quad=-(x-4)^2+4$

따라서 **최댓값은 $\boldsymbol{x=4}$일 때 4이고, 최솟값은 없다.**



1-1 **2, 2**

1-2 (1) 이차방정식 $x^2-6x+8=0$에서

$(x-2)(x-4)=0 \qquad \therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 교점의 x좌표는 **2, 4**이다.

(2) 이차방정식 $-x^2+8x+9=0$에서

$x^2-8x-9=0,\ (x+1)(x-9)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=9$

따라서 교점의 x좌표는 **−1, 9**이다.

(3) 이차방정식 $2x^2+5x-3=0$에서

$(x+3)(2x-1)=0 \qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

따라서 교점의 x좌표는 $\mathbf{-3,\ \frac{1}{2}}$이다.

2-1 **2, −12**

2-2 이차방정식 $-x^2+ax+b=0$의 두 근이 -1, 2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+2=-\frac{a}{-1},\ (-1)\times 2=\frac{b}{-1} \qquad \therefore \boldsymbol{a=1,\ b=2}$

3-1 (1) $>$, **2** (2) $<$, **0**

3-2 (1) 이차방정식 $2x^2-x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times 2\times(-2)=17>0$이므로 교점의 개수는 **2**이다.

(2) 이차방정식 $4x^2+4x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-4\times 1=0$이므로 교점의 개수는 **1**이다.

(3) 이차방정식 $-x^2+2x-9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(-1)\times(-9)=-8<0$이므로 교점의 개수는 **0**이다.

4-1 $>$, **−9**

4-2 이차방정식 $x^2-4x-2a+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times(-2a+3)=2a+1$

(1) $D>0$이어야 하므로 $2a+1>0 \qquad \therefore \boldsymbol{a>-\frac{1}{2}}$

(2) $D=0$이어야 하므로 $2a+1=0 \qquad \therefore \boldsymbol{a=-\frac{1}{2}}$

(3) $D<0$이어야 하므로 $2a+1<0 \qquad \therefore \boldsymbol{a<-\frac{1}{2}}$

5-1 $>$

5-2 (1) 이차방정식 $-x^2+x+3=2x-1$, 즉

$x^2+x-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times 1\times(-4)=17>0$이므로

서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 이차방정식 $-x^2+x+3=-x+4$, 즉

$x^2-2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times 1=0$이므로

한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) 이차방정식 $-x^2+x+3=3x+5$, 즉

$x^2+2x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-1\times 2=-1<0$이므로 **만나지 않는다.**

6-1 $=$, **0**, $\mathbf{\frac{1}{8}}$

6-2 이차방정식 $x^2+3x-2=x+k$, 즉

$x^2+2x-2-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-1\times(-2-k)=k+3$

(1) $D>0$이어야 하므로 $k+3>0 \qquad \therefore \boldsymbol{k>-3}$

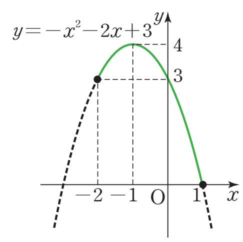
(2) $D=0$이어야 하므로 $k+3=0 \qquad \therefore \boldsymbol{k=-3}$

(3) $D<0$이어야 하므로 $k+3<0 \qquad \therefore \boldsymbol{k<-3}$

7-1 **0, −2**

7-2 (1) $y=-x^2-2x+3$

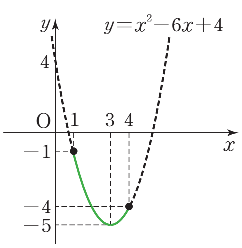
$=-(x+1)^2+4$



이때 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 4)$이고, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 포함된다. 따라서

최댓값은 $x=-1$일 때 **4**이고, **최솟값은** $x=1$일 때 **0**이다.

(2) $y=x^2-6x+4=(x-3)^2-5$



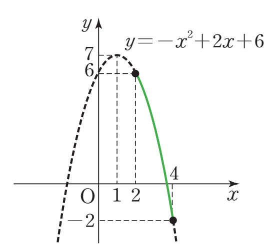
이때 꼭짓점의 좌표는 $(3, -5)$이고, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 포함된다. 따라서

최댓값은 $x=1$일 때 **−1**이고, **최솟값은** $x=3$일 때 **−5**이다.

8-1 **5, −4**

8-2 (1) $y=-x^2+2x+6$

$=-(x-1)^2+7$

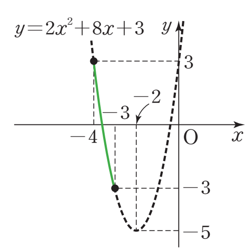


이때 꼭짓점의 좌표는 $(1, 7)$이고, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 포함되지 않는다. 따라서

최댓값은 $x=2$일 때 **6**이고, **최솟값은** $x=4$일 때 **−2**이다.

(2) $y=2x^2+8x+3$

$=2(x+2)^2-5$



이때 꼭짓점의 좌표는 $(-2, -5)$이고, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 포함되지 않는다.

따라서 **최댓값은** $x=-4$일 때 **3**이고, **최솟값은** $x=-3$일 때 **−3**이다.

집중 연습

본문 | 076, 077쪽

1 이차방정식 $-2x^2+4x+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(-2)\times(k-1)=2k+2$

(1) $D>0$이어야 하므로 $2k+2>0$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{k>-1}$

(2) $D=0$이어야 하므로 $2k+2=0$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{k=-1}$

(3) $D<0$이어야 하므로 $2k+2<0$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{k<-1}$

2 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+k^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-1\times k^2=-2k+1$

(1) $D>0$이어야 하므로 $-2k+1>0$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{k<\frac{1}{2}}$

(2) $D=0$이어야 하므로 $-2k+1=0$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{k=\frac{1}{2}}$

(3) $D<0$이어야 하므로 $-2k+1<0$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{k>\frac{1}{2}}$

3 이차방정식 $x^2+k=x+1$, 즉 $x^2-x+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times(k-1)=-4k+5$

(1) $D>0$이어야 하므로 $-4k+5>0$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{k<\frac{5}{4}}$

(2) $D=0$이어야 하므로 $-4k+5=0$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{k=\frac{5}{4}}$

(3) $D<0$이어야 하므로 $-4k+5<0$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{k>\frac{5}{4}}$

4 이차방정식 $-x^2+2kx+3=-x+k^2$, 즉

$x^2-(2k+1)x+k^2-3=0$의 판별식을 D라 하면

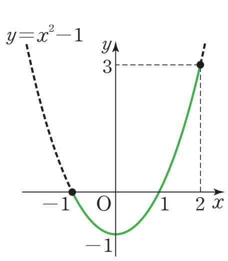
$D=\{-(2k+1)\}^2-4\times1\times(k^2-3)=4k+13$

(1) $D>0$이어야 하므로 $4k+13>0$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{k>-\frac{13}{4}}$

(2) $D=0$이어야 하므로 $4k+13=0$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{k=-\frac{13}{4}}$

(3) $D<0$이어야 하므로 $4k+13<0$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{k<-\frac{13}{4}}$

5 (1) $y=x^2-1$의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ -1)$이고, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 포함된다.

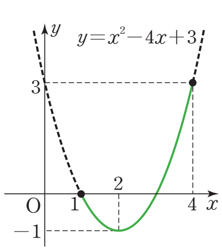


최댓값 : $x=2$일 때 **3**

최솟값 : $x=0$일 때 **-1**

(2) $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ -1)$이고, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 포함된다.



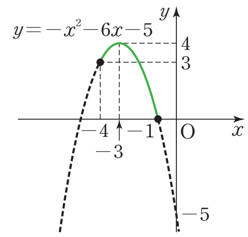
최댓값 : $x=4$일 때 **3**

최솟값 : $x=2$일 때 **-1**

(3) $y=-x^2-6x-5$

$=-(x+3)^2+4$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(-3, 4)$이고, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 포함된다.



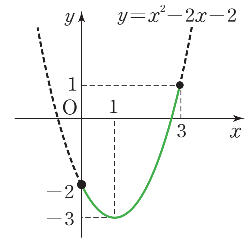
최댓값 : $x=-3$일 때 **4**

최솟값 : $x=-1$일 때 **0**

(4) $y=x^2-2x-2$

$=(x-1)^2-3$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(1, -3)$이고, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 포함된다.



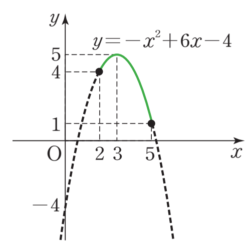
최댓값 : $x=3$일 때 **1**

최솟값 : $x=1$일 때 **-3**

(5) $y=-x^2+6x-4$

$=-(x-3)^2+5$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(3, 5)$이고, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 포함된다.



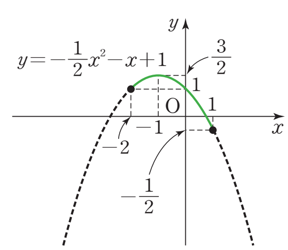
최댓값 : $x=3$일 때 **5**

최솟값 : $x=5$일 때 **1**

(6) $y=-\frac{1}{2}x^2-x+1$

$=-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{3}{2}$

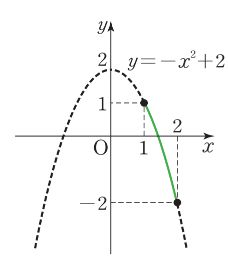
이때 꼭짓점의 좌표는 $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$이고, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 포함된다.



최댓값 : $x=-1$일 때 $\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

최솟값 : $x=1$일 때 $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$

6 (1) $y=-x^2+2$의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 2)$이고, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 포함되지 않는다.



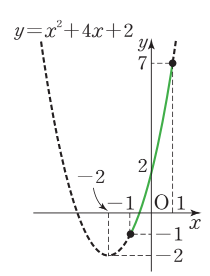
최댓값 : $x=1$일 때 **1**

최솟값 : $x=2$일 때 **-2**

(2) $y=x^2+4x+2$

$=(x+2)^2-2$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(-2, -2)$이고, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 포함되지 않는다.

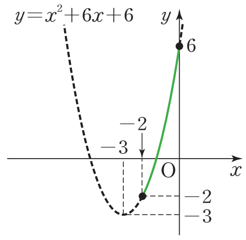


최댓값 : $x=1$일 때 **7**

최솟값 : $x=-1$일 때 **-1**

(3) $y=x^2+6x+6=(x+3)^2-3$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(-3, -3)$이고, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 포함되지 않는다.

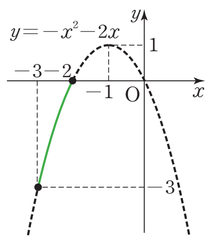


최댓값 : $x=0$일 때 **6**

최솟값 : $x=-2$일 때 **-2**

(4) $y=-x^2-2x=-(x+1)^2+1$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 1)$이고, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 포함되지 않는다.



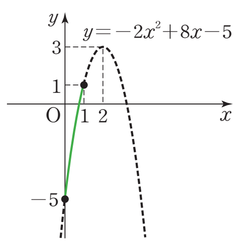
최댓값 : $x=-2$일 때 **0**

최솟값 : $x=-3$일 때 **-3**

(5) $y=-2x^2+8x-5$

$=-2(x-2)^2+3$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(2, 3)$이고, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 포함되지 않는다.



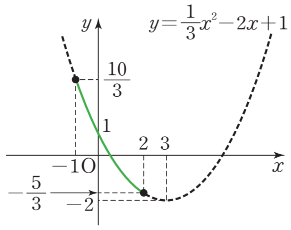
최댓값 : $x=1$일 때 **1**

최솟값 : $x=0$일 때 **-5**

(6) $y=\frac{1}{3}x^2-2x+1$

$=\frac{1}{3}(x-3)^2-2$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(3, -2)$이고, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 포함되지 않는다.



최댓값 : $x=-1$일 때 $\mathbf{\frac{10}{3}}$

최솟값 : $x=2$일 때 $\mathbf{-\frac{5}{3}}$

기초 개념 평가

본문 | 078, 079쪽

01 x축, x좌표	02 $\mathbf{y=0, 0}$
03 실근	04 부호
05 $\mathbf{D>0}$	06 $\mathbf{D=0}$
07 $\mathbf{D<0}$	08 x좌표, 실근
09 $\mathbf{D>0}$	10 $\mathbf{D=0}$
11 $\mathbf{D<0}$	12 $\mathbf{f(p)}$
13 $\mathbf{f(\beta)}$	

기초 문제 평가

본문 | 080, 081쪽

1 이차함수 $y=x^2-2x-8$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-2x-8=0$의 실근과 같다.
이때 교점의 x좌표가 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{-2}{1}=\mathbf{2}$

2 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -2, 1이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+1=-\frac{a}{1}$, $(-2)\times1=\frac{b}{1}$

$\therefore \mathbf{a=1, b=-2}$

3 이차방정식 $-x^2+2x+a=0$의 두 근이 -1, b이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+b=-\frac{2}{-1}$, $(-1)\times b=\frac{a}{-1}$

$\therefore \mathbf{a=3, b=3}$

4 이차방정식 $x^2+4x+a-1=0$의 판별식을 D라 할 때, x축과 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=2^2-1\times(a-1)=-a+5=0$ $\quad\therefore \mathbf{a=5}$

5 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+k^2-3=0$의 판별식을 D라 할 때, x축과 적어도 한 점에서 만나려면 $D\geq0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-1\times(k^2-3)=-2k+4\geq0$ $\quad\therefore \mathbf{k\leq2}$

참고 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 적어도 한 점에서 만난다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 실근을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D\geq0$이다.

6 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=x+2$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+ax+b=x+2$, 즉 $x^2+(a-1)x+b-2=0$의 실근과 같다.
이때 교점의 x좌표가 -1, 3이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+3=-\frac{a-1}{1}$, $(-1)\times3=\frac{b-2}{1}$

$\therefore \mathbf{a=-1, b=-1}$

7 이차방정식 $x^2+kx+6=x+5$, 즉 $x^2+(k-1)x+1=0$의 판별식을 D라 할 때, 이차함수 $y=x^2+kx+6$의 그래프가 직선 $y=x+5$에 접하면 $D=0$이어야 하므로

$D=(k-1)^2-4\times1\times1=0$

$k^2-2k-3=0$, $(k+1)(k-3)=0$

$\therefore \mathbf{k=3}$ $(\because k>0)$

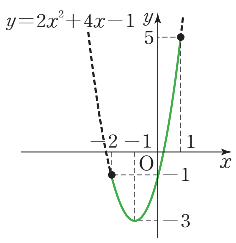
8 이차방정식 $x^2+5x+k=2x$, 즉 $x^2+3x+k=0$의 판별식을 D라 할 때, 이차함수 $y=x^2+5x+k$의 그래프와 직선 $y=2x$가 만나면 $D\geq0$이어야 하므로

$D=3^2-4\times1\times k=-4k+9\geq0 \qquad \therefore \boldsymbol{k\leq\frac{9}{4}}$

9 이차방정식 $-2x^2+5x+5=x+k$, 즉 $2x^2-4x+k-5=0$의 판별식을 D라 할 때, 이차함수 $y=-2x^2+5x+5$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 만나지 않으면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2\times(k-5)=-2k+14<0 \qquad \therefore \boldsymbol{k>7}$

10 $y=2x^2+4x-1=2(x+1)^2-3$



이때 꼭짓점의 좌표는 $(-1, -3)$이고, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 포함된다.

따라서 최댓값은 $x=1$일 때 $M=5$이고, 최솟값은 $x=-1$일 때 $m=-3$이다.

$\therefore M-m=5-(-3)=\mathbf{8}$

11 $y=3x^2-2x+k=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+k-\frac{1}{3}$

이때 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{3}, k-\frac{1}{3}\right)$이고, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 포함되므로 최솟값은 $x=\frac{1}{3}$일 때 $k-\frac{1}{3}$이다.

즉, 최솟값이 0이므로 $k-\frac{1}{3}=0 \qquad \therefore \boldsymbol{k=\frac{1}{3}}$

참고 $\alpha\leq x\leq\beta$일 때, 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$에서 꼭짓점의 x좌표가 주어진 x의 값의 범위에 포함될 경우

(1) $a>0$이면 ⇨ 꼭짓점의 y좌표가 최솟값

(2) $a<0$이면 ⇨ 꼭짓점의 y좌표가 최댓값

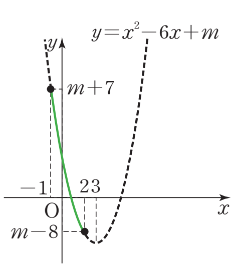
12 $y=-x^2+4x+a=-(x-2)^2+a+4$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(2, a+4)$이고 꼭짓점의 x좌표가 주어진 x의 값의 범위에 포함되므로 최댓값은 $x=2$일 때 $a+4$이다.

즉, 최댓값이 -1이므로 $a+4=-1 \qquad \therefore \boldsymbol{a=-5}$

13 $y=x^2-6x+m$

$=(x-3)^2+m-9$



이때 꼭짓점의 좌표는 $(3, m-9)$이고, 꼭짓점의 x좌표가 주어진 x의 값의 범위에 포함되지 않으므로 최솟값은 $x=2$일 때 $m-8$이다.

즉, 최솟값이 -3이므로 $m-8=-3 \qquad \therefore m=5$

따라서 최댓값은 $m+7=5+7=\mathbf{12}$

07 여러 가지 방정식

기초 개념 피드백 & TEST

본문 | 083쪽

1-1 **1, 2**

1-2 (1) ㉠+㉡에서 $3x=9 \qquad \therefore \boldsymbol{x=3}$

$x=3$을 ㉡에 대입하면 $6+y=8 \qquad \therefore \boldsymbol{y=2}$

(2) ㉠+㉡×3에서 $7x=7 \qquad \therefore \boldsymbol{x=1}$

$x=1$을 ㉡에 대입하면 $2-y=1 \qquad \therefore \boldsymbol{y=1}$

2-1 **2, 3**

2-2 (1) ㉠을 ㉡에 대입하면 $3x+2(2x+5)=3$

$7x+10=3$, $7x=-7 \qquad \therefore \boldsymbol{x=-1}$

$x=-1$을 ㉠에 대입하면 $\boldsymbol{y=3}$

(2) ㉡을 ㉠에 대입하면 $2x-3(3-x)=-4$

$5x-9=-4$, $5x=5 \qquad \therefore \boldsymbol{x=1}$

$x=1$을 ㉡에 대입하면 $\boldsymbol{y=2}$

3-1 **4, 5**

3-2 (1) ㉠의 양변에 분모의 최소공배수 6을 곱하고, ㉡의 양변에 10을 곱하여 정리하면

$\begin{cases} 3x+2y=18 & \cdots\cdots ㉢ \\ 3x-2y=18 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢+㉣에서 $6x=36 \qquad \therefore \boldsymbol{x=6}$

$x=6$을 ㉢에 대입하면 $18+2y=18 \qquad \therefore \boldsymbol{y=0}$

(2) ㉠의 양변에 분모의 최소공배수 12를 곱하고, ㉡의 양변에 10을 곱하여 정리하면

$\begin{cases} 4x+3y=6 & \cdots\cdots ㉢ \\ 2x-3y=12 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢+㉣에서 $6x=18 \qquad \therefore \boldsymbol{x=3}$

$x=3$을 ㉢에 대입하면 $12+3y=6$

$3y=-6 \qquad \therefore \boldsymbol{y=-2}$

본문 | 084~087쪽

1-1 $\boldsymbol{2, \sqrt{3}i}$

1-2 (1) $x^3+1=0$의 좌변을 인수분해하면

$x^3+1^3=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로

$x+1=0$ 또는 $x^2-x+1=0$

따라서 주어진 방정식의 근은

$\boldsymbol{x=-1}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

(2) $x^3-2x^2-3x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^2-2x-3)=0$, $x(x+1)(x-3)=0$이므로

$x=0$ 또는 $x+1=0$ 또는 $x-3=0$

따라서 주어진 방정식의 근은

$\boldsymbol{x=0}$ **또는** $\boldsymbol{x=-1}$ **또는** $\boldsymbol{x=3}$

2-1 $\pm 2i$

2-2 (1) $x^4-81=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x^2+9)(x^2-9)=0$, $(x^2+9)(x+3)(x-3)=0$이므로

$x^2+9=0$ 또는 $x+3=0$ 또는 $x-3=0$

따라서 주어진 방정식의 근은

$\boldsymbol{x=\pm 3i}$ **또는** $\boldsymbol{x=-3}$ **또는** $\boldsymbol{x=3}$

(2) $x^4+x^3-2x^2=0$의 좌변을 인수분해하면

$x^2(x^2+x-2)=0$, $x^2(x+2)(x-1)=0$

따라서 주어진 방정식의 근은

$\boldsymbol{x=0}$**(중근) 또는** $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=1}$

3-1 $\pm\sqrt{2}i$, ± 1

3-2 (1) $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=0$에서

$x^2-x=X$로 놓으면 $X^2-8X+12=0$

$(X-2)(X-6)=0$ $\quad\therefore X=2$ 또는 $X=6$

(i) $X=2$일 때, $x^2-x=2$

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $X=6$일 때, $x^2-x=6$

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서

$\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=-1}$ **또는** $\boldsymbol{x=2}$ **또는** $\boldsymbol{x=3}$

(2) 공통부분이 생기도록 주어진 방정식의 좌변을 전개하면

$\{(x+1)(x-3)\}\{(x+2)(x-4)\}-36=0$에서

$(x^2-2x-3)(x^2-2x-8)-36=0$

$x^2-2x=X$로 놓으면 $(X-3)(X-8)-36=0$

$X^2-11X-12=0$, $(X+1)(X-12)=0$

$\therefore X=-1$ 또는 $X=12$

(i) $X=-1$일 때, $x^2-2x=-1$

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$ $\quad\therefore x=1$(중근)

(ii) $X=12$일 때, $x^2-2x=12$

$x^2-2x-12=0$ $\quad\therefore x=1\pm\sqrt{13}$

(i), (ii)에서 $\boldsymbol{x=1}$**(중근) 또는** $\boldsymbol{x=1\pm\sqrt{13}}$

4-1 $\pm\sqrt{2}$, 3

4-2 (1) $x^4-4x^2-12=0$에서 $x^2=X$로 놓으면

$X^2-4X-12=0$, $(X+2)(X-6)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=6$

(i) $X=-2$일 때, $x^2=-2$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{2}i$

(ii) $X=6$일 때, $x^2=6$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 $\boldsymbol{x=\pm\sqrt{2}i}$ **또는** $\boldsymbol{x=\pm\sqrt{6}}$

(2) $x^4-8x^2+4=0$을 $A^2-B^2=0$ 꼴로 변형하면

$(x^4-4x^2+4)-4x^2=0$, $(x^2-2)^2-(2x)^2=0$

$(x^2-2+2x)(x^2-2-2x)=0$

$x^2+2x-2=0$ 또는 $x^2-2x-2=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=-1\pm\sqrt{3}}$ **또는** $\boldsymbol{x=1\pm\sqrt{3}}$

5-1 2, 2

5-2 (1) $P(x)=x^3-4x^2+2x+1$로 놓으면 $P(1)=0$

$P(x)$는 $x-1$을 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & 2 & 1 \\ & & 1 & -3 & -1 \\ \hline & 1 & -3 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2-3x-1)$

따라서 방정식 $(x-1)(x^2-3x-1)=0$의 근은

$\boldsymbol{x=1}$ **또는** $\boldsymbol{x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}}$

(2) $P(x)=x^4+2x^3-4x^2-2x+3$으로 놓으면

$P(1)=0$, $P(-1)=0$

$P(x)$는 $x-1$, $x+1$을 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & -4 & -2 & 3 \\ & & 1 & 3 & -1 & -3 \\ \hline -1 & 1 & 3 & -1 & -3 & \boxed{0} \\ & & -1 & -2 & 3 & \\ \hline & 1 & 2 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x+1)(x^2+2x-3)$

$=(x-1)(x+1)(x+3)(x-1)$

$=(x-1)^2(x+1)(x+3)$

따라서 방정식 $(x-1)^2(x+1)(x+3)=0$의 근은

$\boldsymbol{x=1}$**(중근) 또는** $\boldsymbol{x=-1}$ **또는** $\boldsymbol{x=-3}$

6-1 -1, $x-1$, -2

6-2 주어진 방정식에 $x=-1$을 대입하면

$-2-3-a-3=0$ $\quad\therefore a=-8$

$P(x)=2x^3-3x^2-8x-3$으로 놓으면 $P(x)$는 $x+1$을 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -3 & -8 & -3 \\ & & -2 & 5 & 3 \\ \hline & 2 & -5 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(2x^2-5x-3)$

$=(x+1)(2x+1)(x-3)$

따라서 방정식 $(x+1)(2x+1)(x-3)=0$의 근은

$x=-1$ 또는 $x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=3$이므로 나머지 두 근은

$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x=3}$

7-1 3, -1

7-2 (1) $\begin{cases} x+y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$에서

㉠을 y에 대하여 정리하면 $y=-x-1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2-(-x-1)^2=3$

$-2x-1=3$ $\quad\therefore x=-2$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉣을 ㉢에 대입하여 해를 구하면

$\boldsymbol{x=-2}$, $\boldsymbol{y=1}$

(2) $\begin{cases} x-2y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2xy-3y^2=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 에서

㉠을 x에 대하여 정리하면 $x=2y$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $4y^2+4y^2-3y^2=20$

$5y^2=20,\ y^2=4$

$\therefore\ y=\pm2$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉣을 ㉢에 대입하여 해를 구하면

$\begin{cases} \boldsymbol{x=4} \\ \boldsymbol{y=2} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-4} \\ \boldsymbol{y=-2} \end{cases}$

8-1 $\boldsymbol{3y,\ -3,\ \sqrt{3}}$

8-2 (1) $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 에서

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x+y)(x-2y)=0$

$\therefore\ x=-y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+y^2=5,\ 2y^2=5,\ y^2=\dfrac{5}{2}$ $\quad\therefore\ y=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$y=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$일 때 $x=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$y=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$일 때 $x=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$4y^2+y^2=5,\ 5y^2=5,\ y^2=1$ $\quad\therefore\ y=\pm1$

$y=1$일 때 $x=2$, $y=-1$일 때 $x=-2$

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} \boldsymbol{x=\dfrac{\sqrt{10}}{2}} \\ \boldsymbol{y=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}} \\ \boldsymbol{y=\dfrac{\sqrt{10}}{2}} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} \boldsymbol{x=2} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-2} \\ \boldsymbol{y=-1} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 4x^2+4xy-3y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 에서

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(2x+3y)(2x-y)=0$

$\therefore\ y=-\dfrac{2}{3}x$ 또는 $y=2x$

(i) $y=-\dfrac{2}{3}x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{4}{9}x^2=7,\ \dfrac{7}{9}x^2=7,\ x^2=9$

$\therefore\ x=\pm3$

$x=3$일 때 $y=-2$, $x=-3$일 때 $y=2$

(ii) $y=2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+2x^2+4x^2=7,\ 7x^2=7,\ x^2=1$

$\therefore\ x=\pm1$

$x=1$일 때 $y=2$, $x=-1$일 때 $y=-2$

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} \boldsymbol{x=3} \\ \boldsymbol{y=-2} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-3} \\ \boldsymbol{y=2} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=2} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{y=-2} \end{cases}$

집중 연습

본문 | 088, 089쪽

1 (1) $x^3-1=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore\ \boldsymbol{x=1}$ **또는** $\boldsymbol{x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

(2) $x^3+27=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore\ \boldsymbol{x=-3}$ **또는** $\boldsymbol{x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}}$

(3) $x^3-4x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^2-4)=0,\ x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore\ \boldsymbol{x=0}$ **또는** $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=2}$

(4) $x^3+4x^2-5x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^2+4x-5)=0,\ x(x+5)(x-1)=0$

$\therefore\ \boldsymbol{x=0}$ **또는** $\boldsymbol{x=-5}$ **또는** $\boldsymbol{x=1}$

(5) $x^4-64=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x^2+8)(x^2-8)=0$이므로

$x^2+8=0$ 또는 $x^2-8=0$

$\therefore\ \boldsymbol{x=\pm2\sqrt{2}i}$ **또는** $\boldsymbol{x=\pm2\sqrt{2}}$

(6) $x^4+x^3-6x^2=0$의 좌변을 인수분해하면

$x^2(x^2+x-6)=0,\ x^2(x+3)(x-2)=0$

$\therefore\ \boldsymbol{x=0}$**(중근) 또는** $\boldsymbol{x=-3}$ **또는** $\boldsymbol{x=2}$

2 (1) $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$으로 놓으면 $P(1)=0$

$P(x)$는 $x-1$을 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2-x-6)$

$\quad\ =(x-1)(x+2)(x-3)$

따라서 방정식 $(x-1)(x+2)(x-3)=0$의 근은

$\boldsymbol{x=1}$ **또는** $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=3}$

(2) $P(x)=x^3-4x+3$으로 놓으면 $P(1)=0$

$P(x)$는 $x-1$을 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -4 & 3 \\ & & 1 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2+x-3)$

따라서 방정식 $(x-1)(x^2+x-3)=0$의 근은

$\boldsymbol{x=1}$ **또는** $\boldsymbol{x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}}$

(3) $P(x)=2x^3+5x^2-4$로 놓으면 $P(-2)=0$

$P(x)$는 $x+2$를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 2 & 5 & 0 & -4 \\ & & -4 & -2 & 4 \\ \hline & 2 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x+2)(2x^2+x-2)$

따라서 방정식 $(x+2)(2x^2+x-2)=0$의 근은

$\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4}}$

(4) $P(x)=x^4+x^3-3x^2-x+2$로 놓으면

$P(1)=0$, $P(-1)=0$

$P(x)$는 $x-1$, $x+1$을 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ & & 1 & 2 & -1 & -2 \\ \hline -1 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ & & -1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x+1)(x^2+x-2)$

$=(x-1)(x+1)(x+2)(x-1)$

$=(x-1)^2(x+1)(x+2)$

따라서 방정식 $(x-1)^2(x+1)(x+2)=0$의 근은

$x=1$(중근) 또는 $x=-1$ 또는 $x=-2$

(5) $P(x)=x^4-15x^2-10x+24$로 놓으면

$P(1)=0$, $P(-2)=0$

$P(x)$는 $x-1$, $x+2$를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & -15 & -10 & 24 \\ & & 1 & 1 & -14 & -24 \\ \hline -2 & 1 & 1 & -14 & -24 & 0 \\ & & -2 & 2 & 24 & \\ \hline & 1 & -1 & -12 & 0 & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x+2)(x^2-x-12)$

$=(x-1)(x+2)(x+3)(x-4)$

따라서 방정식 $(x-1)(x+2)(x+3)(x-4)=0$의 근은

$x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=4$

(6) $P(x)=2x^4-7x^3-2x^2+13x+6$으로 놓으면

$P(-1)=0$, $P(2)=0$

$P(x)$는 $x+1$, $x-2$를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & -7 & -2 & 13 & 6 \\ & & -2 & 9 & -7 & -6 \\ \hline 2 & 2 & -9 & 7 & 6 & 0 \\ & & 4 & -10 & -6 & \\ \hline & 2 & -5 & -3 & 0 & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-2)(2x^2-5x-3)$

$=(x+1)(x-2)(2x+1)(x-3)$

따라서 방정식 $(x+1)(x-2)(2x+1)(x-3)=0$의 근은

$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$

3 (1) $\begin{cases} 2x+y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-2)^2+y^2=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 y에 대하여 정리하면 $y=-2x+4$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(x-2)^2+(-2x+4)^2=20$

$5x^2-20x=0$, $5x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$ ⋯⋯ ㉣

㉣을 ㉢에 대입하여 해를 구하면

$\begin{cases} \boldsymbol{x=0} \\ \boldsymbol{y=4} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=4} \\ \boldsymbol{y=-4} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy-3y^2=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 y에 대하여 정리하면 $y=-x+1$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+x(-x+1)-3(-x+1)^2=-1$

$3x^2-7x+2=0$, $(3x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$ ⋯⋯ ㉣

㉣을 ㉢에 대입하여 해를 구하면

$\begin{cases} \boldsymbol{x=\frac{1}{3}} \\ \boldsymbol{y=\frac{2}{3}} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=2} \\ \boldsymbol{y=-1} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy-y^2=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 y에 대하여 정리하면 $y=-x+2$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-x(-x+2)-(-x+2)^2=-1$

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$ ⋯⋯ ㉣

㉣을 ㉢에 대입하여 해를 구하면

$\begin{cases} \boldsymbol{x=-3} \\ \boldsymbol{y=5} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x+y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x^2-y^2=11 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 y에 대하여 정리하면 $y=-x+3$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $3x^2-(-x+3)^2=11$

$2x^2+6x-20=0$, $2(x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$ ⋯⋯ ㉣

㉣을 ㉢에 대입하여 해를 구하면

$\begin{cases} \boldsymbol{x=-5} \\ \boldsymbol{y=8} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=2} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x+y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+xy+y^2=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 y에 대하여 정리하면 $y=-2x+1$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$2x^2+x(-2x+1)+(-2x+1)^2=2$

$4x^2-3x-1=0$, $(4x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{4}$ 또는 $x=1$ ⋯⋯ ㉣

㉣을 ㉢에 대입하여 해를 구하면

$\begin{cases} \boldsymbol{x=-\frac{1}{4}} \\ \boldsymbol{y=\frac{3}{2}} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=-1} \end{cases}$

4 (1) $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x+2y)(x-y)=0$

$\therefore x=-2y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-2y$를 ㉡에 대입하면

$4y^2-2y^2+y^2=3$, $3y^2=3$, $y^2=1$

$\therefore y=\pm1$

$y=1$일 때 $x=-2$, $y=-1$일 때 $x=2$

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+y^2+y^2=3$, $3y^2=3$, $y^2=1$

$\therefore y=\pm1$

$y=1$일 때 $x=1$, $y=-1$일 때 $x=-1$

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} \boldsymbol{x=-2} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=2} \\ \boldsymbol{y=-1} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{y=-1} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-xy=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면 $x(x-y)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=y$

(i) $x=0$을 ㉡에 대입하면

$y^2=2 \qquad \therefore y=\pm\sqrt{2}$

$x=0$일 때 $y=\pm\sqrt{2}$

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+y^2=2$, $2y^2=2$, $y^2=1$

$\therefore y=\pm1$

$y=1$일 때 $x=1$, $y=-1$일 때 $x=-1$

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} \boldsymbol{x=0} \\ \boldsymbol{y=\sqrt{2}} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=0} \\ \boldsymbol{y=-\sqrt{2}} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{y=-1} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-xy+y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x+y)(x-y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$2y^2+y^2+y^2=4$, $4y^2=4$, $y^2=1$

$\therefore y=\pm1$

$y=1$일 때 $x=-1$, $y=-1$일 때 $x=1$

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$2y^2-y^2+y^2=4$, $2y^2=4$, $y^2=2$

$\therefore y=\pm\sqrt{2}$

$y=\sqrt{2}$일 때 $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$일 때 $x=-\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=-1} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} \boldsymbol{x=\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{y=\sqrt{2}} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{y=-\sqrt{2}} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x^2+3xy+y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(2x+y)(x+y)=0$

$\therefore y=-2x$ 또는 $y=-x$

(i) $y=-2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+4x^2=10$, $5x^2=10$, $x^2=2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}$

$x=\sqrt{2}$일 때 $y=-2\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$일 때 $y=2\sqrt{2}$

(ii) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2=10$, $2x^2=10$, $x^2=5$

$\therefore x=\pm\sqrt{5}$

$x=\sqrt{5}$일 때 $y=-\sqrt{5}$, $x=-\sqrt{5}$일 때 $y=\sqrt{5}$

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} \boldsymbol{x=\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{y=-2\sqrt{2}} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{y=2\sqrt{2}} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} \boldsymbol{x=\sqrt{5}} \\ \boldsymbol{y=-\sqrt{5}} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-\sqrt{5}} \\ \boldsymbol{y=\sqrt{5}} \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x^2+xy-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(2x-y)(x+y)=0$

$\therefore y=2x$ 또는 $y=-x$

(i) $y=2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+2x^2+4x^2=7$, $7x^2=7$, $x^2=1$

$\therefore x=\pm1$

$x=1$일 때 $y=2$, $x=-1$일 때 $y=-2$

(ii) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x^2+x^2=7$, $x^2=7$

$\therefore x=\pm\sqrt{7}$

$x=\sqrt{7}$일 때 $y=-\sqrt{7}$, $x=-\sqrt{7}$일 때 $y=\sqrt{7}$

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=2} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{y=-2} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} \boldsymbol{x=\sqrt{7}} \\ \boldsymbol{y=-\sqrt{7}} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-\sqrt{7}} \\ \boldsymbol{y=\sqrt{7}} \end{cases}$

기초 개념 평가

본문 | 090, 091쪽

01 삼차방정식

02 사차방정식

03 $\boldsymbol{B=0}$

04 $\boldsymbol{D=0}$

05 $\boldsymbol{x^2-1, X}$

06 $\boldsymbol{x^2+2x}$

07 $\boldsymbol{x-\alpha}$

08 상수항

09 $\boldsymbol{x}$

10 $\boldsymbol{x^2-y^2=0,\ x^2+xy+2y^2=12}$

1 $P(x)=x^3+3x^2+5x+3$으로 놓으면 $P(-1)=0$

$P(x)$는 $x+1$을 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ & & -1 & -2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x^2+2x+3)$

주어진 방정식은 $(x+1)(x^2+2x+3)=0$이고, 두 허근은 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

구하는 두 허근의 곱은 **3**

2 $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$으로 놓으면 $P(1)=0$

$P(x)$는 $x-1$을 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2-5x+6)$

$\quad\;\;=(x-1)(x-2)(x-3)$

주어진 방정식은 $(x-1)(x-2)(x-3)=0$이므로 방정식의 근은

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 가장 큰 근과 가장 작은 근의 합은 $3+1=$**4**

3 $P(x)=x^3-2x-4$로 놓으면 $P(2)=0$

$P(x)$는 $x-2$를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ & & 2 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-2)(x^2+2x+2)$

주어진 방정식 $(x-2)(x^2+2x+2)=0$에서 실근은 $\alpha=2$

두 허근 β, γ는 이차방정식 $x^2+2x+2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\beta\gamma=2$

$\therefore\ \alpha+\beta\gamma=2+2=$**4**

4 $P(x)=x^4-2x^2-3x-2$로 놓으면

$P(-1)=0$, $P(2)=0$

$P(x)$는 $x+1$, $x-2$를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & -2 & -3 & -2 \\ & & -1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & -1 & -1 & -2 & \boxed{0} \\ & & 2 & 2 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x-2)(x^2+x+1)$

주어진 방정식 $(x+1)(x-2)(x^2+x+1)=0$의 근은

$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 모든 실근의 합은 $-1+2=$**1**

5 사차방정식 $x^4+2x^3+ax-16=0$의 한 실근이 2이므로 $x=2$를 대입하면

$16+16+2a-16=0 \qquad \therefore\ a=-8$

$P(x)=x^4+2x^3-8x-16$으로 놓으면

$P(2)=0$, $P(-2)=0$

$P(x)$는 $x-2$, $x+2$를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 2 & 0 & -8 & -16 \\ & & 2 & 8 & 16 & 16 \\ \hline -2 & 1 & 4 & 8 & 8 & \boxed{0} \\ & & -2 & -4 & -8 & \\ \hline & 1 & 2 & 4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore\ P(x)=(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)$

주어진 방정식 $(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)=0$에서 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-2$

$\therefore\ a+\alpha+\beta=-8+(-2)=$**−10**

6 $(x^2+x)^2+(x^2+x)-6=0$에서

$x^2+x=X$로 놓으면 $X^2+X-6=0$

$(X+3)(X-2)=0 \qquad \therefore\ X=-3$ 또는 $X=2$

(i) $X=-3$일 때, $x^2+x=-3$

$\quad x^2+x+3=0 \qquad \therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$

(ii) $X=2$일 때, $x^2+x=2$

$\quad x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\quad \therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서 모든 허근의 합은

$\dfrac{-1+\sqrt{11}i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{11}i}{2}=$**−1**

참고 이차방정식 $x^2+x+3=0$의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 두 허근의 합은 -1

7 공통부분이 생기도록 주어진 방정식의 좌변을 전개하면

$\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+15=0$에서

$(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15=0$

$x^2+8x=X$로 놓으면 $(X+7)(X+15)+15=0$

$X^2+22X+120=0$, $(X+10)(X+12)=0$

$\therefore\ X=-10$ 또는 $X=-12$

(i) $X=-10$일 때, $x^2+8x=-10$

$\quad x^2+8x+10=0 \qquad \therefore\ x=-4\pm\sqrt{6}$

(ii) $X=-12$일 때, $x^2+8x=-12$

$\quad x^2+8x+12=0$, $(x+6)(x+2)=0$

$\quad \therefore\ x=-6$ 또는 $x=-2$

(i), (ii)에서 방정식의 해는

$x=-6$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-4\pm\sqrt{6}$

따라서 정수인 두 근 α, β는 -6, -2이므로

$\alpha^2+\beta^2=36+4=$**40**

8 $x^4-3x^2-4=0$에서 $x^2=X$로 놓으면

$X^2-3X-4=0$, $(X+1)(X-4)=0$

$\therefore X=-1$ 또는 $X=4$

(i) $X=-1$일 때, $x^2=-1$ $\quad\therefore x=\pm i$

(ii) $X=4$일 때, $x^2=4$ $\quad\therefore x=\pm 2$

(i), (ii)에서 방정식의 해는 $x=\pm i$ 또는 $x=\pm 2$

따라서 두 실근의 차는

$2-(-2)=\mathbf{4}$

9 $x^4-13x^2+36=0$을 $A^2-B^2=0$ 꼴로 변형하면

$(x^4-12x^2+36)-x^2=0$, $(x^2-6)^2-x^2=0$

$(x^2-6+x)(x^2-6-x)=0$

$(x^2+x-6)(x^2-x-6)=0$

$\therefore x^2+x-6=0$ 또는 $x^2-x-6=0$

(i) $x^2+x-6=0$일 때, $(x+3)(x-2)=0$

$\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

(ii) $x^2-x-6=0$일 때, $(x+2)(x-3)=0$

$\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서 방정식의 해는

$x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 가장 큰 근은 $\alpha=3$, 가장 작은 근은 $\beta=-3$이므로

$\alpha-\beta=3-(-3)=\mathbf{6}$

10 (1) 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+2=0$의 한 근이 i이므로 $x=i$를 대입하면

$i^3+ai^2+bi+2=0$, $-i-a+bi+2=0$

$(-a+2)+(-1+b)i=0$

따라서 $-a+2=0$, $-1+b=0$이므로

$\mathbf{a=2,\ b=1}$

(2) $P(x)=x^3+2x^2+x+2$로 놓으면 $P(-2)=0$

$P(x)$는 $x+2$를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ & & -2 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+2)(x^2+1)$

따라서 방정식 $(x+2)(x^2+1)=0$의 근은 $x=-2$ 또는 $x=\pm i$이므로 나머지 두 근은

$\mathbf{-2,\ -i}$

참고 삼차방정식의 켤레근

❶ 삼차방정식의 모든 계수가 유리수일 때, 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다.

(단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)

❷ 삼차방정식의 모든 계수가 실수일 때, 한 근이 $p+qi$이면 $p-qi$도 근이다.

(단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

11 $\begin{cases} x-y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 y에 대하여 정리하면 $y=x+1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2+(x+1)^2=5$

$2x^2+2x-4=0$, $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉣을 ㉢에 대입하여 해를 구하면

$\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=-1$ 또는 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로

$|\alpha|+|\beta|=\mathbf{3}$

12 $\begin{cases} x+y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy=-4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 y에 대하여 정리하면 $y=-x+3$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x(-x+3)=-4$

$-x^2+3x=-4$, $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉣을 ㉢에 대입하여 해를 구하면

$\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$

따라서 구하는 순서쌍은 $\mathbf{(-1,\ 4),\ (4,\ -1)}$

다른 풀이 $x+y=3$, $xy=-4$를 만족시키는 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-3t-4=0$의 두 근이다.

즉, $(t+1)(t-4)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=4$

따라서 $x=-1$, $y=4$ 또는 $x=4$, $y=-1$이므로

구하는 순서쌍은 $(-1,\ 4)$, $(4,\ -1)$

13 $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x^2-y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(2x-y)(x-y)=0$

$\therefore y=2x$ 또는 $y=x$

(i) $y=2x$를 ㉡에 대입하면

$5x^2-4x^2=4$, $x^2=4$

$\therefore x=\pm2$

$x=2$일 때 $y=4$, $x=-2$일 때 $y=-4$

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$5x^2-x^2=4$, $4x^2=4$, $x^2=1$

$\therefore x=\pm1$

$x=1$일 때 $y=1$, $x=-1$일 때 $y=-1$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

따라서 $x+y$의 최댓값은 **6**이다.

08 여러 가지 부등식

기초 개념 피드백 & TEST

본문 | 095쪽

1-1 (1) $\frac{1}{2}$, $<$ (2) $>$, $>$

1-2 (1) $a<b$의 양변에 같은 음수 -5를 곱하면
부등호의 방향이 바뀌므로 $-5a \boxed{>} -5b$

(2) $a<b$의 양변에 같은 양수 $\frac{3}{2}$을 곱하면
부등호의 방향이 바뀌지 않으므로 $\frac{3}{2}a<\frac{3}{2}b$
이 부등식의 양변에서 같은 수 2를 빼면 부등호의 방향이 바뀌지 않으므로 $\frac{3}{2}a-2 \boxed{<} \frac{3}{2}b-2$

(3) $a<b$의 양변에 같은 수 a를 더하면
부등호의 방향이 바뀌지 않으므로 $2a \boxed{<} a+b$

(4) $a<b$의 양변에 같은 음수 a를 곱하면
부등호의 방향이 바뀌므로 $a^2 \boxed{>} ab$

2-1 (1) **4** (2) $\mathbf{-10}$ (3) **10, −3** (4) **6, 1**

2-2 (1) $5x-8>2x+1$에서 $5x-2x>1+8$
$3x>9$ $\therefore$ $\boldsymbol{x>3}$

(2) $2(x-4)\le -3x-3$에서 괄호를 풀면
$2x-8\le -3x-3$, $2x+3x\le -3+8$
$5x\le 5$ $\therefore$ $\boldsymbol{x\le 1}$

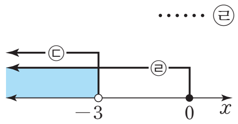
(3) $0.1x-0.3(x+1)\ge 1$의 양변에 10을 곱하면
$x-3(x+1)\ge 10$, $x-3x-3\ge 10$
$-2x\ge 13$ $\therefore$ $\boldsymbol{x\le -\frac{13}{2}}$

(4) $\frac{3}{4}x+\frac{5}{12}<\frac{x}{2}-\frac{5}{6}$의 양변에 분모의 최소공배수 12를 곱하면
$9x+5<6x-10$, $9x-6x<-10-5$
$3x<-15$ $\therefore$ $\boldsymbol{x<-5}$

본문 | 096~103쪽

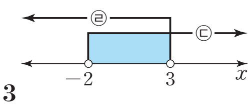
1-1 $\mathbf{-3, -2}$

1-2 (1) 부등식 ㉠을 풀면 $2x<-6$
$\therefore x<-3$ …… ㉢
부등식 ㉡을 풀면 $4x+4\le x+4$
$3x\le 0$ $\therefore x\le 0$ …… ㉣
㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{x<-3}$

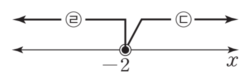
(2) 부등식 ㉠을 풀면 $-3x<6$
$\therefore x>-2$ …… ㉢
부등식 ㉡을 풀면 $2x<6$
$\therefore x<3$ …… ㉣
㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{-2<x<3}$

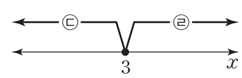
2-1 **2, −1**

2-2 (1) 부등식 ㉠을 풀면 $3x>-6$
$\therefore x>-2$ …… ㉢
부등식 ㉡을 풀면 $2x\le -4$
$\therefore x\le -2$ …… ㉣
㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주어진 연립부등식의 **해는 없다.**

(2) 부등식 ㉠을 풀면 $2x-2\le x+1$
$\therefore x\le 3$ …… ㉢
부등식 ㉡을 풀면 $-3x\le -9$
$\therefore x\ge 3$ …… ㉣
㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{x=3}$

3-1 (1) $\mathbf{-3, 1}$ (2) **5, 4**

3-2 (1) $|2x-5|<1$에서 $-1<2x-5<1$
$4<2x<6$ $\therefore$ $\boldsymbol{2<x<3}$

(2) $|6-x|\ge 2$에서 $6-x\le -2$ 또는 $6-x\ge 2$
$-x\le -8$ 또는 $-x\ge -4$
$\therefore$ $\boldsymbol{x\le 4}$ **또는** $\boldsymbol{x\ge 8}$

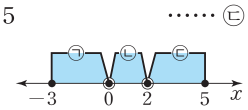
4-1 $\mathbf{-1, 3, 3}$

4-2 (1) (i) $x<0$일 때
$|x|+|x-2|=-x-x+2=-2x+2$
$-2x+2\le 8$에서 $-2x\le 6$ $\therefore x\ge -3$
그런데 $x<0$이므로 $-3\le x<0$ …… ㉠

(ii) $0\le x<2$일 때
$|x|+|x-2|=x-x+2=0\times x+2$
$0\times x+2\le 8$이므로 해는 모든 실수이다.
$\therefore 0\le x<2$ …… ㉡

(iii) $x\ge 2$일 때
$|x|+|x-2|=x+x-2=2x-2$
$2x-2\le 8$에서 $2x\le 10$ $\therefore x\le 5$
그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x\le 5$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{-3\le x\le 5}$

(2) (i) $x<-1$일 때
$|x+1|+|x-2|=-x-1-x+2=-2x+1$
$-2x+1>5$에서 $-2x>4$ $\therefore x<-2$
그런데 $x<-1$이므로 $x<-2$ …… ㉠

(ii) $-1\le x<2$일 때

$|x+1|+|x-2|=x+1-x+2=0\times x+3$

$0\times x+3>5$이므로 해는 없다.

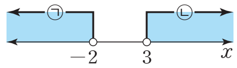
(iii) $x\ge 2$일 때

$|x+1|+|x-2|=x+1+x-2=2x-1$

$2x-1>5$에서 $2x>6$ $\therefore x>3$

그런데 $x\ge 2$이므로 $x>3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{x<-2}$ **또는** $\boldsymbol{x>3}$

5-1 (1) **4** (2) **1** (3) **1** (4) **4**

5-2 (1) 이차함수 $y=-x^2-x+6$의 그래프에서 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는

$\boldsymbol{-3<x<2}$

(2) 이차함수 $y=-x^2-x+6$의 그래프에서 x축보다 위쪽에 있거나 x축과 만나는 부분의 x의 값의 범위는

$\boldsymbol{-3\le x\le 2}$

(3) 이차함수 $y=-x^2-x+6$의 그래프에서 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는

$\boldsymbol{x<-3}$ **또는** $\boldsymbol{x>2}$

(4) 이차함수 $y=-x^2-x+6$의 그래프에서 x축보다 아래쪽에 있거나 x축과 만나는 부분의 x의 값의 범위는

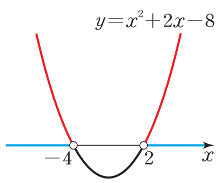
$\boldsymbol{x\le -3}$ **또는** $\boldsymbol{x\ge 2}$

6-1 (1) $\boldsymbol{-2, 2}$ (2) $\boldsymbol{-2, 3}$

6-2 (1) $y=x^2+2x-8$이라 하면

$y=x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$이므로

이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 두 점 $(-4, 0)$, $(2, 0)$에서 만난다.



이때 주어진 부등식의 해는 이차함수 $y=x^2+2x-8$의 그래프에서 $y>0$인 x의 값의 범위이므로

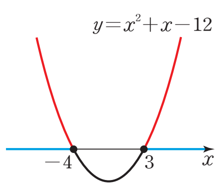
$\boldsymbol{x<-4}$ **또는** $\boldsymbol{x>2}$

(2) $-x^2-x+12\le 0$의 양변에 -1을 곱하면 $x^2+x-12\ge 0$

$y=x^2+x-12$라 하면

$y=x^2+x-12=(x+4)(x-3)$이므로

이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 두 점 $(-4, 0)$, $(3, 0)$에서 만난다.



이때 주어진 부등식의 해는 이차함수 $y=x^2+x-12$의 그래프에서 $y\ge 0$인 x의 값의 범위이므로

$\boldsymbol{x\le -4}$ **또는** $\boldsymbol{x\ge 3}$

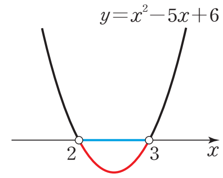
참고 $ax^2+bx+c\ge 0$, $ax^2+bx+c\le 0$의 해는 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만나는 부분을 포함하여 구한다.

(3) $-x^2+5x-6>0$의 양변에 -1을 곱하면 $x^2-5x+6<0$

$y=x^2-5x+6$이라 하면

$y=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$이므로

이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 두 점 $(2, 0)$, $(3, 0)$에서 만난다.



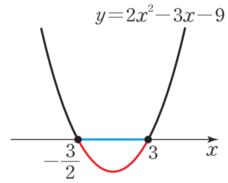
이때 주어진 부등식의 해는 이차함수 $y=x^2-5x+6$의 그래프에서 $y<0$인 x의 값의 범위이므로

$\boldsymbol{2<x<3}$

(4) $y=2x^2-3x-9$라 하면

$y=2x^2-3x-9=(2x+3)(x-3)$이므로

이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 두 점 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $(3, 0)$에서 만난다.



이때 주어진 부등식의 해는 이차함수 $y=2x^2-3x-9$의 그래프에서 $y\le 0$인 x의 값의 범위이므로

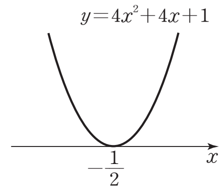
$\boldsymbol{-\frac{3}{2}\le x\le 3}$

7-1 (1) **1** (2) **모든** (3) **없다** (4) **1**

7-2 $y=4x^2+4x+1$이라 하면

$y=4x^2+4x+1=(2x+1)^2$

이므로 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 한 점 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$에서 만난다.



(1) 주어진 부등식의 해는 이차함수 $y=4x^2+4x+1$의 그래프에서 $y>0$인 x의 값의 범위이므로 해는

$\boldsymbol{x\neq -\frac{1}{2}}$**인 모든 실수**

(2) 주어진 부등식의 해는 이차함수 $y=4x^2+4x+1$의 그래프에서 $y\ge 0$인 x의 값의 범위이므로 해는 **모든 실수**

(3) 주어진 부등식의 해는 이차함수 $y=4x^2+4x+1$의 그래프에서 $y<0$인 x의 값의 범위이므로 **해는 없다.**

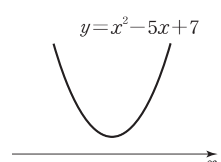
(4) 주어진 부등식의 해는 이차함수 $y=4x^2+4x+1$의 그래프에서 $y\le 0$인 x의 값의 범위이므로 해는 $\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}}$

8-1 (1) **모든** (2) **실수** (3) **없다** (4) **없다**

8-2 $y=x^2-5x+7$이라 하면 이차방정식 $x^2-5x+7=0$의 판별식 D는

$D=(-5)^2-4\times 1\times 7=-3<0$

이므로 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 만나지 않는다.



(1) 주어진 부등식의 해는 이차함수 $y=x^2-5x+7$의 그래프에서 $y>0$인 x의 값의 범위이므로 해는 **모든 실수**

(2) 주어진 부등식의 해는 이차함수 $y=x^2-5x+7$의 그래프에서 $y\geq 0$인 x의 값의 범위이므로 해는 **모든 실수**

(3) 주어진 부등식의 해는 이차함수 $y=x^2-5x+7$의 그래프에서 $y<0$인 x의 값의 범위이므로 **해는 없다.**

(4) 주어진 부등식의 해는 이차함수 $y=x^2-5x+7$의 그래프에서 $y\leq 0$인 x의 값의 범위이므로 **해는 없다.**

9-1 (1) **4** (2) $\boldsymbol{x}$

9-2 (1) $(x+3)(x-1)>0$에서 $\boldsymbol{x^2+2x-3>0}$

(2) $(x-2)(x-5)\geq 0$에서 $\boldsymbol{x^2-7x+10\geq 0}$

(3) $(x+7)(x+2)<0$에서 $\boldsymbol{x^2+9x+14<0}$

(4) $(x+1)(x-6)\leq 0$에서 $\boldsymbol{x^2-5x-6\leq 0}$

10-1 **<, <, 12**

10-2 (1) 해가 $1\leq x\leq 3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-3)\leq 0$ $\quad\therefore x^2-4x+3\leq 0$

이 부등식이 $x^2+ax+b\leq 0$과 같으므로

$\boldsymbol{a=-4,\ b=3}$

(2) 해가 $-2<x<1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-1)<0$ $\quad\therefore x^2+x-2<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

부등식 $ax^2+bx+4>0$과 부등식 ㉠의 부등호의 방향이 다르므로 $a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면 $ax^2+ax-2a>0$

이 부등식이 $ax^2+bx+4>0$과 같으므로

$a=b,\ -2a=4$ $\quad\therefore \boldsymbol{a=-2,\ b=-2}$

11-1 (1) $\boldsymbol{-4,\ 4}$ (2) $\boldsymbol{-2,\ 2}$

11-2 (1) 이차방정식 $x^2-2(k-2)x+k=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=\{-(k-2)\}^2-k\leq 0,\ k^2-5k+4\leq 0$

$(k-1)(k-4)\leq 0$ $\quad\therefore \boldsymbol{1\leq k\leq 4}$

(2) 이차방정식 $-x^2+2kx+k-2=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2+k-2<0,\ (k+2)(k-1)<0$

$\therefore \boldsymbol{-2<k<1}$

12-1 **>, ≤**

12-2 (1) (i) $k=0$일 때

$-4<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $k\neq 0$일 때

부등식 $kx^2+kx-4<0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 $k<0$이고 이차방정식 $kx^2+kx-4=0$의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이어야 하므로

$D=k^2+16k<0,\ k(k+16)<0$

$\therefore -16<k<0$

(i), (ii)에서 $\boldsymbol{-16<k\leq 0}$

(2) (i) $k=0$일 때

$3\geq 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $k\neq 0$일 때

부등식 $kx^2-kx+3\geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 $k>0$이고 이차방정식 $kx^2-kx+3=0$의 판별식을 D라 할 때 $D\leq 0$이어야 하므로

$D=k^2-12k\leq 0,\ k(k-12)\leq 0$

$\therefore 0<k\leq 12\ (\because k>0)$

(i), (ii)에서 $\boldsymbol{0\leq k\leq 12}$

13-1 **2, 1**

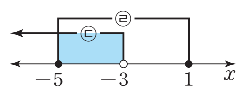
13-2 (1) 부등식 ㉠을 풀면 $3x<-9$

$\therefore x<-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $(x+5)(x-1)\leq 0$

$\therefore -5\leq x\leq 1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 해는

$\boldsymbol{-5\leq x<-3}$

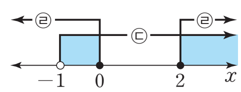
(2) 부등식 ㉠을 풀면 $-3x<3$

$\therefore x>-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $x(x-2)\geq 0$

$\therefore x\leq 0$ 또는 $x\geq 2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 해는

$\boldsymbol{-1<x\leq 0}$ **또는** $\boldsymbol{x\geq 2}$

14-1 **2, 3**

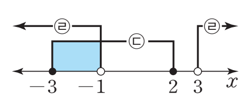
14-2 (1) 부등식 ㉠을 풀면 $(x+3)(x-2)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $(x+1)(x-3)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 해는

$\boldsymbol{-3\leq x<-1}$

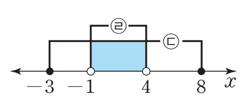
(2) 부등식 ㉠을 풀면 $(x+3)(x-8)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $(x+1)(x-4)<0$

$\therefore -1<x<4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 해는

$\boldsymbol{-1<x<4}$

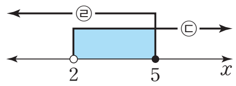
집중 연습

본문 | 104, 105쪽

1 (1) 부등식 ㉠을 풀면 $x>2$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $x\le 5$ ⋯⋯ ㉣

따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{2<x\le 5}$

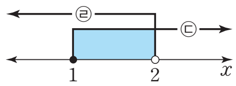


(2) 부등식 ㉠을 풀면 $3x\ge 3$

$\therefore x\ge 1$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $x<2$ ⋯⋯ ㉣

따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{1\le x<2}$



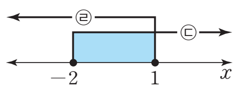
(3) 부등식 ㉠을 풀면 $-3x\le 6$

$\therefore x\ge -2$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $2x\le 2$

$\therefore x\le 1$ ⋯⋯ ㉣

따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{-2\le x\le 1}$



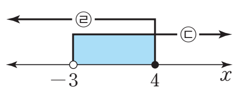
(4) 부등식 ㉠을 풀면 $2x>-6$

$\therefore x>-3$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $-2x\ge -8$

$\therefore x\le 4$ ⋯⋯ ㉣

따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{-3<x\le 4}$

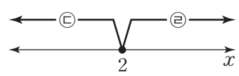


(5) 부등식 ㉠을 풀면 $x\le 2$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $2x\ge 4$

$\therefore x\ge 2$ ⋯⋯ ㉣

따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{x=2}$



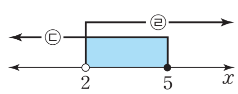
2 (1) 부등식 ㉠을 풀면 $2x-4\le 6$

$\therefore x\le 5$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $11-3x-3<x$

$\therefore x>2$ ⋯⋯ ㉣

따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{2<x\le 5}$



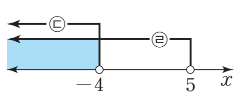
(2) 부등식 ㉠을 풀면 $x-4>4x+8$

$\therefore x<-4$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $7x-7<5x+3$

$\therefore x<5$ ⋯⋯ ㉣

따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{x<-4}$



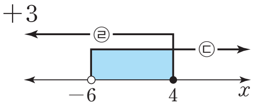
(3) 부등식 ㉠을 풀면 $3x-3>2x-9$

$\therefore x>-6$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $5+2x-6\le x+3$

$\therefore x\le 4$ ⋯⋯ ㉣

따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{-6<x\le 4}$



(4) 부등식 ㉠의 양변에 6을 곱하면

$3x+1<2x$

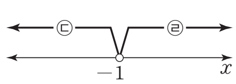
$\therefore x<-1$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡의 양변에 4를 곱하면

$2x+2-x+3>4$

$\therefore x>-1$ ⋯⋯ ㉣

따라서 구하는 **해는 없다.**



(5) 부등식 ㉠의 양변에 10을 곱하면

$4x-2\le 5x,\ -x\le 2$

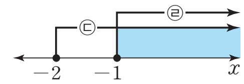
$\therefore x\ge -2$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡의 양변에 10을 곱하면

$x+10\ge -2x+7,\ 3x\ge -3$

$\therefore x\ge -1$ ⋯⋯ ㉣

따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{x\ge -1}$



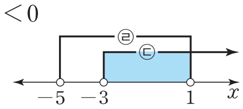
3 (1) 부등식 ㉠을 풀면

$x>-3$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $(x+5)(x-1)<0$

$\therefore -5<x<1$ ⋯⋯ ㉣

따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{-3<x<1}$



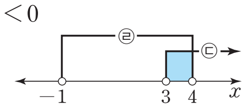
(2) 부등식 ㉠을 풀면 $-x<-3$

$\therefore x>3$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $(x+1)(x-4)<0$

$\therefore -1<x<4$ ⋯⋯ ㉣

따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{3<x<4}$



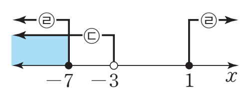
(3) 부등식 ㉠을 풀면 $2x<-6$

$\therefore x<-3$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $(x+7)(x-1)\ge 0$

$\therefore x\le -7$ 또는 $x\ge 1$ ⋯⋯ ㉣

따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{x\le -7}$



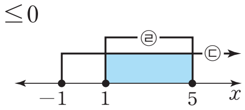
(4) 부등식 ㉠을 풀면 $2x\ge -2$

$\therefore x\ge -1$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $(x-1)(x-5)\le 0$

$\therefore 1\le x\le 5$ ⋯⋯ ㉣

따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{1\le x\le 5}$



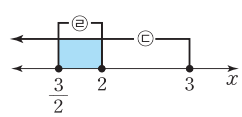
(5) 부등식 ㉠을 풀면 $-x\ge -3$

$\therefore x\le 3$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $(2x-3)(x-2)\le 0$

$\therefore \frac{3}{2}\le x\le 2$ ⋯⋯ ㉣

따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{\frac{3}{2}\le x\le 2}$



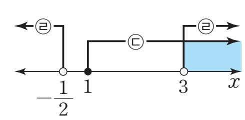
(6) 부등식 ㉠을 풀면 $-x\le -1$

$\therefore x\ge 1$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $(2x+1)(x-3)>0$

$\therefore x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>3$ ⋯⋯ ㉣

따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{x>3}$



4 (1) 부등식 ㉠을 풀면 $(x+3)(x-3)\ge 0$

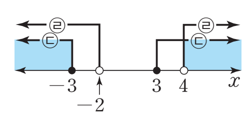
$\therefore x\le -3$ 또는 $x\ge 3$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $(x+2)(x-4)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>4$ ⋯⋯ ㉣

따라서 구하는 해는

$\boldsymbol{x\le -3}$ **또는** $\boldsymbol{x>4}$



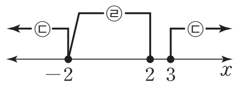
(2) 부등식 ㉠을 풀면 $(x+2)(x-3)\geq 0$

$\therefore x\leq -2$ 또는 $x\geq 3$ …… ㉢

부등식 ㉡을 풀면

$(x+2)(x-2)\leq 0$

$\therefore -2\leq x\leq 2$ …… ㉣



따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{x=-2}$

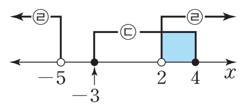
(3) 부등식 ㉠을 풀면 $(x+3)(x-4)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 4$ …… ㉢

부등식 ㉡을 풀면

$(x+5)(x-2)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>2$ …… ㉣



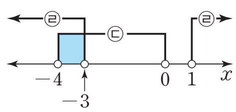
따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{2<x\leq 4}$

(4) 부등식 ㉠을 풀면 $x(x+4)<0$

$\therefore -4<x<0$ …… ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $(x+3)(x-1)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>1$ …… ㉣



따라서 구하는 해는

$\boldsymbol{-4<x<-3}$

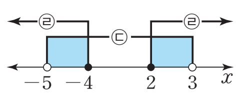
(5) 부등식 ㉠을 풀면 $(x+5)(x-3)<0$

$\therefore -5<x<3$ …… ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $x^2+2x-8\geq 0$

$(x+4)(x-2)\geq 0$

$\therefore x\leq -4$ 또는 $x\geq 2$ …… ㉣



따라서 구하는 해는

$\boldsymbol{-5<x\leq -4}$ **또는** $\boldsymbol{2\leq x<3}$

(6) 부등식 ㉠을 풀면 $x^2-x-20\leq 0$

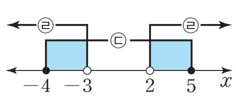
$(x+4)(x-5)\leq 0$

$\therefore -4\leq x\leq 5$ …… ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $x^2+x-6>0$

$(x+3)(x-2)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>2$ …… ㉣



따라서 구하는 해는

$\boldsymbol{-4\leq x<-3}$ **또는** $\boldsymbol{2<x\leq 5}$

기초 개념 평가

본문 | 106, 107쪽

01 연립부등식
02 푼다
03 $\boldsymbol{x>a}$
04 $\boldsymbol{-x}$
05 이차식
06 위쪽
07 아래쪽
08 $\boldsymbol{x<\alpha}$ 또는 $\boldsymbol{x>\beta}$
09 $\boldsymbol{\alpha<x<\beta}$
10 $\boldsymbol{(x-\alpha)(x-\beta)>0}$
11 $\boldsymbol{(x-\alpha)(x-\beta)<0}$
12 $\boldsymbol{D<0}$
13 $\boldsymbol{a<0}$
14 공통부분

기초 문제 평가

본문 | 108, 109쪽

1 부등식 ㉠을 풀면 $-5x<15$ $\quad\therefore x>-3$

부등식 ㉡을 풀면 $2x<-2$ $\quad\therefore x<-1$

따라서 연립부등식의 해는 $-3<x<-1$이므로 구하는 정수 x의 값은 $\boldsymbol{-2}$이다.

2 부등식 ㉠을 풀면 $2x-6<x-5$ $\quad\therefore x<1$

부등식 ㉡을 풀면 $2x\geq 0$ $\quad\therefore x\geq 0$

따라서 연립부등식의 해는 $0\leq x<1$이므로 $a=0$, $b=1$

$\therefore a+b=\boldsymbol{1}$

3 ㄱ. 부등식 ㉠을 풀면 $3x\geq 6$ $\quad\therefore x\geq 2$

부등식 ㉡을 풀면 $5x\leq 5$ $\quad\therefore x\leq 1$

따라서 구하는 해는 없다.

ㄴ. 부등식 ㉠을 풀면 $4x\geq 6-2x$, $6x\geq 6$ $\quad\therefore x\geq 1$

부등식 ㉡을 풀면 $2x\leq 2$ $\quad\therefore x\leq 1$

따라서 구하는 해는 $x=1$

ㄷ. 부등식 ㉠을 풀면 $-5x>-10$ $\quad\therefore x<2$

부등식 ㉡을 풀면 $4x\geq 8$ $\quad\therefore x\geq 2$

따라서 구하는 해는 없다.

ㄹ. 부등식 ㉠을 풀면 $-2x\leq 2$ $\quad\therefore x\geq -1$

부등식 ㉡을 풀면 $-2x\geq -4$ $\quad\therefore x\leq 2$

따라서 구하는 해는 $-1\leq x\leq 2$

따라서 해가 없는 것은 **ㄱ, ㄷ**이다.

4 $|4x-a|>3$에서 $4x-a<-3$ 또는 $4x-a>3$

부등식 $4x-a<-3$을 풀면 $4x<a-3$ $\quad\therefore x<\dfrac{a-3}{4}$

부등식 $4x-a>3$을 풀면 $4x>a+3$ $\quad\therefore x>\dfrac{a+3}{4}$

이때 해가 $x<2$ 또는 $x>b$이므로 $\dfrac{a-3}{4}=2$, $\dfrac{a+3}{4}=b$

$\therefore \boldsymbol{a=11,\ b=\dfrac{7}{2}}$

5 (i) $x<-3$일 때

$|x|+|x+3|=-x-x-3=-2x-3$

$-2x-3<5$에서 $-2x<8$ $\quad\therefore x>-4$

그런데 $x<-3$이므로 $-4<x<-3$ …… ㉠

(ii) $-3\leq x<0$일 때

$|x|+|x+3|=-x+x+3=0\times x+3$

$0\times x+3<5$이므로 해는 모든 실수이다.

$\therefore -3\leq x<0$ …… ㉡

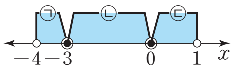
(iii) $x\geq 0$일 때

$|x|+|x+3|=x+x+3=2x+3$

$2x+3<5$에서 $2x<2$ $\quad\therefore x<1$

그런데 $x\geq 0$이므로 $0\leq x<1$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 부등식의 해는 $-4<x<1$이므로 정수 x의 개수는 $-3, -2, -1, 0$의 **4**이다.

6 (1) $x^2+8x\le-15$에서 $x^2+8x+15\le0$

$(x+5)(x+3)\le0$　　$\therefore$ $\boldsymbol{-5\le x\le-3}$

(2) $-x^2+3x-2<0$에서 $x^2-3x+2>0$

$(x-1)(x-2)>0$　　$\therefore$ $\boldsymbol{x<1}$ **또는** $\boldsymbol{x>2}$

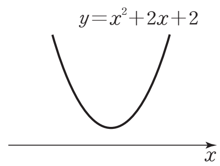
(3) $x(x-3)\le3x-9$에서 $x^2-6x+9\le0$

$(x-3)^2\le0$　　$\therefore$ $\boldsymbol{x=3}$

7 ㄱ. $y=x^2+2x+2$라 하면 이차방정식 $x^2+2x+2=0$의 판별식 D는

$\dfrac{D}{4}=1^2-1\times2=-1<0$

이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 만나지 않는다.

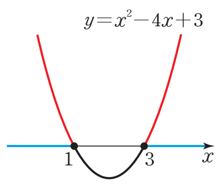


이때 주어진 부등식의 해는 $y<0$인 x의 값의 범위이므로 해는 없다.

ㄴ. $y=x^2-4x+3$이라 하면

$y=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 두 점 $(1, 0)$, $(3, 0)$에서 만난다.

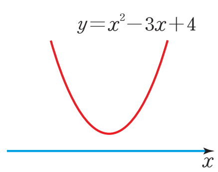


이때 주어진 부등식의 해는 이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프에서 $y\ge0$인 x의 값의 범위이므로 해는 $x\le1$ 또는 $x\ge3$

ㄷ. $y=x^2-3x+4$라 하면 이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 판별식 D는

$D=(-3)^2-4\times1\times4=-7<0$

이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 만나지 않는다.

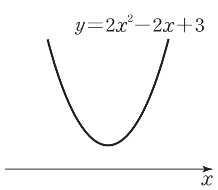


이때 주어진 부등식의 해는 $y>0$인 x의 값의 범위이므로 해는 모든 실수

ㄹ. $y=2x^2-2x+3$이라 하면 이차방정식 $2x^2-2x+3=0$의 판별식 D는

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-2\times3=-5<0$

이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 만나지 않는다.



이때 주어진 부등식의 해는 $y\le0$인 x의 값의 범위이므로 해는 없다.

따라서 해가 없는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

8 해가 $x\le1$ 또는 $x\ge5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-5)\ge0$　　$\therefore$ $x^2-6x+5\ge0$

이 부등식이 $x^2+ax+b\ge0$과 같으므로

$a=-6$, $b=5$

$\therefore$ $b-a=\mathbf{11}$

9 해가 $-1<x<2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-2)<0$　　$\therefore$ $x^2-x-2<0$

이 부등식이 $x^2-ax+b<0$과 같으므로

$a=1$, $b=-2$

즉, $ax^2+bx-8\le0$에서

$x^2-2x-8\le0$, $(x+2)(x-4)\le0$

$\therefore$ $\boldsymbol{-2\le x\le4}$

10 주어진 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $x^2+2x+k=0$의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=1^2-k<0$　　$\therefore$ $k>1$

따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 **2**이다.

11 (ⅰ) $k=0$일 때

$-3<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ⅱ) $k\ne0$일 때

부등식 $kx^2+2kx-3<0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 $k<0$이고 이차방정식 $kx^2+2kx-3=0$의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=k^2+3k<0$, $k(k+3)<0$

$\therefore$ $-3<k<0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $-3<k\le0$

따라서 구하는 정수 k의 개수는 $-2, -1, 0$의 **3**이다.

12 이차방정식 $x^2-(k+3)x-k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k+3)\}^2-4(-k+5)=k^2+10k-11$

이때 서로 다른 두 허근을 가지므로 $D<0$에서

$k^2+10k-11<0$, $(k+11)(k-1)<0$

$\therefore$ $\boldsymbol{-11<k<1}$

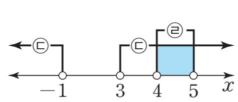
13 부등식 ㉠을 풀면 $x^2-2x-3>0$

$(x+1)(x-3)>0$　　$\therefore$ $x<-1$ 또는 $x>3$　　…… ㉢

부등식 ㉡을 풀면 $x^2-9x+20<0$

$(x-4)(x-5)<0$　　$\therefore$ $4<x<5$　　…… ㉣

㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 연립부등식의 해는

$4<x<5$이므로 $a=4$, $b=5$

$\therefore$ $a+b=\mathbf{9}$

09 경우의 수

기초 개념 피드백 & TEST

본문 | 113쪽

1-1 **5, 3**

1-2 일어날 수 있는 모든 경우는 (앞, 앞), (앞, 뒤), (뒤, 앞), (뒤, 뒤)이므로 구하는 경우의 수는 **4**이다.

2-1 **4, 7**

2-2 안경 중에서 하나를 선택하는 경우의 수는 2이고, 모자 중에서 하나를 선택하는 경우의 수는 3이므로 구하는 경우의 수는 $2+3=\mathbf{5}$

3-1 **아몬드, 포도맛, 2, 6**

3-2 집에서 마트까지 가는 3가지의 길을 각각 A, B, C라 하고, 마트에서 서점까지 가는 4가지의 길을 각각 a, b, c, d라 하면 집에서 마트를 지나 서점까지 가는 경우는
(A, a), (A, b), (A, c), (A, d),
(B, a), (B, b), (B, c), (B, d),
(C, a), (C, b), (C, c), (C, d)
따라서 구하는 경우의 수는 $3\times4=\mathbf{12}$

본문 | 114, 115쪽

1-1 **3, 6, 7**

1-2 (i) 두 눈의 수의 합이 4인 경우는
(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지
(ii) 두 눈의 수의 합이 6인 경우는
(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지
(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$3+5=\mathbf{8}$

2-1 **12, 3, 7**

2-2 4의 배수가 나오는 경우는 4, 8, 12, 16, 20의 5가지
5의 배수가 나오는 경우는 5, 10, 15, 20의 4가지
4의 배수이면서 5의 배수인 20의 배수가 나오는 경우는 20의 1가지
따라서 구하는 경우의 수는 $5+4-1=\mathbf{8}$

3-1 **홀수, 25**

3-2 가위바위보를 할 때, 한 명이 선택할 수 있는 경우는 가위, 바위, 보의 3가지이고, 그 각각에 대하여 다른 한 명이 선택할 수 있는 경우도 가위, 바위, 보의 3가지이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $3\times3=\mathbf{9}$

참고 A, B 두 사람이 가위바위보를 할 때, 나올 수 있는 모든 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.

A	B	A	B	A	B
	가위		가위		가위
가위	바위	바위	바위	보	바위
	보		보		보

4-1 **3, 6**

4-2 $(a+b+c)(x+y+z)$를 전개하면 a, b, c에 x, y, z를 각각 곱해 서로 다른 항이 만들어지므로 구하는 항의 개수는
$3\times3=\mathbf{9}$

5-1 **3, 4, 12**

5-2 (1) 36을 소인수분해하면 $2^2\times3^2$
2^2의 양의 약수는 1, 2, 2^2의 3개
3^2의 양의 약수는 1, 3, 3^2의 3개
따라서 36의 양의 약수의 개수는
$3\times3=\mathbf{9}$
(2) 48을 소인수분해하면 $2^4\times3$
2^4의 양의 약수는 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4의 5개
3의 양의 약수는 1, 3의 2개
따라서 48의 양의 약수의 개수는
$5\times2=\mathbf{10}$

참고 자연수 N을 소인수분해하여
$N=a^m\times b^n\times c^l$ (a, b, c는 서로 다른 소수)
으로 나타내었을 때,
a^m의 양의 약수는 $1, a, a^2, \cdots, a^m$의 $(m+1)$개
b^n의 양의 약수는 $1, b, b^2, \cdots, b^n$의 $(n+1)$개
c^l의 양의 약수는 $1, c, c^2, \cdots, c^l$의 $(l+1)$개
이므로 N의 양의 약수의 개수는
$(m+1)(n+1)(l+1)$

집중 연습

본문 | 116, 117쪽

1 (1) 4보다 작은 수는 1, 2, 3이므로 구하는 경우의 수는 **3**이다.
(2) 12보다 큰 수는 13, 14, 15이므로 구하는 경우의 수는 **3**이다.
(3) 4보다 작은 수가 적힌 카드가 나오는 경우의 수는 3이고 12보다 큰 수가 적힌 카드가 나오는 경우의 수는 3이다.
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$3+3=\mathbf{6}$

2 (1) 홀수는 1, 3, 5이므로 구하는 경우의 수는 **3**이다.

(2) 3의 배수는 3, 6이므로 구하는 경우의 수는 **2**이다.

(3) 홀수의 눈이 나오는 경우의 수는 3이고, 3의 배수의 눈이 나오는 경우의 수는 2이다.
이때 홀수이면서 3의 배수인 수는 3이므로 경우의 수는 1이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $3+2-1=\mathbf{4}$

3 (1) (i) 두 눈의 수의 합이 5인 경우는
$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$의 4가지
(ii) 두 눈의 수의 합이 10인 경우는
$(4, 6), (5, 5), (6, 4)$의 3가지
(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$4+3=\mathbf{7}$

(2) (i) 두 눈의 수의 차가 1인 경우는
$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)$의 10가지
(ii) 두 눈의 수의 차가 2인 경우는
$(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (6, 4), (5, 3), (4, 2), (3, 1)$의 8가지
(iii) 두 눈의 수의 차가 4인 경우는
$(1, 5), (2, 6), (6, 2), (5, 1)$의 4가지
(i), (ii), (iii)은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 $10+8+4=\mathbf{22}$

4 (1) 2의 배수가 적힌 공이 나오는 경우는
2, 4, 6, ⋯, 30의 15가지
7의 배수가 적힌 공이 나오는 경우는
7, 14, 21, 28의 4가지
2의 배수이면서 7의 배수인 14의 배수가 적힌 공이 나오는 경우는 14, 28의 2가지
따라서 구하는 경우의 수는 $15+4-2=\mathbf{17}$

(2) 3의 배수가 적힌 공이 나오는 경우는
3, 6, 9, ⋯, 30의 10가지
5의 배수가 적힌 공이 나오는 경우는
5, 10, 15, 20, 25, 30의 6가지
3의 배수이면서 5의 배수인 15의 배수가 적힌 공이 나오는 경우는 15, 30의 2가지
따라서 구하는 경우의 수는 $10+6-2=\mathbf{14}$

5 (1) 십의 자리에 올 수 있는 수는 1, 2, 3, ⋯, 9의 9가지
일의 자리에 올 수 있는 수는 0, 2, 4, 6, 8의 5가지
따라서 구하는 자연수의 개수는 $9\times5=\mathbf{45}$
참고 자연수를 만드는 문제
⇨ 맨 앞자리(최고 자리)에는 0이 올 수 없음에 주의한다.

(2) 십의 자리에 올 수 있는 수는 2, 4, 6, 8의 4가지
일의 자리에 올 수 있는 수는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지
따라서 구하는 자연수의 개수는 $4\times5=\mathbf{20}$

(3) 십의 자리에 올 수 있는 수는 3, 6, 9의 3가지
일의 자리에 올 수 있는 수는 2, 3, 5, 7의 4가지
따라서 구하는 자연수의 개수는 $3\times4=\mathbf{12}$

(4) 두 수의 합이 짝수가 되려면
(짝수)+(짝수) 또는 (홀수)+(홀수)가 되어야 한다.
(i) (짝수)+(짝수)인 경우
십의 자리에 올 수 있는 수는 2, 4, 6, 8의 4가지
일의 자리에 올 수 있는 수는 0, 2, 4, 6, 8의 5가지
따라서 구하는 자연수의 개수는 $4\times5=20$
(ii) (홀수)+(홀수)인 경우
십의 자리에 올 수 있는 수는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지
일의 자리에 올 수 있는 수는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지
따라서 구하는 자연수의 개수는 $5\times5=25$
(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 자연수의 개수는
$20+25=\mathbf{45}$

6 (1) $108=2^2\times3^3$이므로 양의 약수의 개수는
$(2+1)\times(3+1)=\mathbf{12}$

(2) $180=2^2\times3^2\times5$이므로 양의 약수의 개수는
$(2+1)\times(2+1)\times(1+1)=\mathbf{18}$

(3) $210=2\times3\times5\times7$이므로 양의 약수의 개수는
$(1+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=\mathbf{16}$

7 (1) $4\times2=\mathbf{8}$

(2) $3\times3=\mathbf{9}$

(3) $2\times3\times2=\mathbf{12}$

참고 곱해지는 다항식에서 각 항이 모두 다른 문자인 경우에만 항의 개수를 곱하여 전개한 항의 개수를 구할 수 있다.

기초 개념 평가

본문 | 118, 119쪽

01 $m+n$	02 $m+n-l$
03 3	04 2
05 1	06 4
07 $m\times n$	08 곱의 법칙
09 4	10 3
11 12	

기초 문제 평가

본문 | 120, 121쪽

1 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$5+3=\mathbf{8}$

2 (1) (i) 두 눈의 수의 차가 3인 경우는
$(1, 4), (2, 5), (3, 6), (6, 3), (5, 2), (4, 1)$의 6가지
(ii) 두 눈의 수의 차가 5인 경우는
$(1, 6), (6, 1)$의 2가지
(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$6+2=\mathbf{8}$
(2) (i) 두 눈의 수의 곱이 4 이하인 경우는
$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 1),$
$(4, 1)$의 8가지
(ii) 두 눈의 수의 곱이 25 이상인 경우는
$(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)$의 4가지
(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$8+4=\mathbf{12}$

3 6의 배수의 눈이 나오는 경우는 6, 12, 18의 3가지
소수의 눈이 나오는 경우는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19의 8가지
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$3+8=\mathbf{11}$

4 (1) 2의 배수가 적힌 카드가 나오는 경우는
2, 4, 6, ⋯, 100의 50가지
5의 배수가 적힌 카드가 나오는 경우는
5, 10, 15, ⋯, 100의 20가지
2의 배수이면서 5의 배수인 10의 배수가 적힌 카드가 나오는 경우는
10, 20, 30, ⋯, 100의 10가지
따라서 구하는 경우의 수는
$50+20-10=\mathbf{60}$
(2) $100=2^2\times5^2$이므로 100과 서로소인 수는 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 자연수이다.
2의 배수 또는 5의 배수가 적힌 카드가 나오는 경우의 수가 60이므로 구하는 경우의 수는
$100-60=\mathbf{40}$
참고 사건 A가 일어나는 경우의 수를 직접 구하기 어려운 경우에는 전체 경우의 수에서 사건 A가 일어나지 않는 경우의 수를 뺀다.

5 (i) $z=1$일 때, $x+2y=6$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(2, 2), (4, 1)$의 2개
(ii) $z=2$일 때, $x+2y=3$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$의 1개
따라서 구하는 순서쌍의 개수는
$2+1=\mathbf{3}$
참고 방정식 $ax+by+cz=d$를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 x, y, z 중 계수의 절댓값이 큰 것부터 수를 대입하여 구한다.
이때 x, y, z가 자연수이면 $x\ge1, y\ge1, z\ge1$이다.

6 민수가 들어갈 때 이용할 수 있는 문은 a, b, c, d의 4가지이고, 그 각각에 대하여 나올 때 이용할 수 있는 문은 들어갈 때 이용한 문을 제외한 3가지이므로 구하는 경우의 수는
$4\times3=\mathbf{12}$

7 빵 또는 과자 중 한 가지를 택하는 경우의 수는
$a=4+4=8$
빵과 과자를 각각 한 가지씩 택하는 경우의 수는
$b=4\times4=16$
$\therefore a+b=8+16=\mathbf{24}$

8 (1) 십의 자리와 백의 자리에 올 수 있는 수는 각각
1, 3, 5, 7, 9의 5가지
일의 자리에 올 수 있는 수는 3, 6, 9의 3가지
따라서 구하는 자연수의 개수는 $5\times5\times3=\mathbf{75}$
(2) 백의 자리에 올 수 있는 수는 4, 8의 2가지
십의 자리에 올 수 있는 수는 2, 3, 5, 7의 4가지
일의 자리에 올 수 있는 수는 1, 2, 4의 3가지
따라서 구하는 자연수의 개수는 $2\times4\times3=\mathbf{24}$

9 $(a+b+c)(x+y)^2=(a+b+c)(x^2+2xy+y^2)$
따라서 구하는 항의 개수는 $3\times3=\mathbf{9}$

10 $2^3\times3^2\times5^x$의 양의 약수의 개수는
$(3+1)\times(2+1)\times(x+1)=12(x+1)$
즉, $12(x+1)=36$에서 $x+1=3$ $\quad\therefore x=\mathbf{2}$

11 (i) 집 → 학교로 가는 경우의 수는 2
(ii) 집 → 공원 → 학교로 가는 경우의 수는 $2\times4=8$
(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$2+8=\mathbf{10}$

12 A에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에는 A와 다른 색을 칠해야 하므로 3가지
C에는 A, B와 다른 색을 칠해야 하므로 2가지
D에는 A, C와 다른 색을 칠해야 하므로 2가지
따라서 구하는 경우의 수는
$4\times3\times2\times2=\mathbf{48}$
참고 인접한 부분이 가장 많은 A부터 색을 칠한다.

10 순열

본문 | 122~125쪽

1-1 (1) **4, 4** (2) **5, 5** (3) **3, 3** (4) **4, 4**

1-2 (1) $\boldsymbol{{}_9P_3}$ (2) $\boldsymbol{{}_7P_4}$ (3) $\boldsymbol{{}_5P_5}$ (4) $\boldsymbol{{}_3P_3}$

2-1 (1) **120** (2) **1, 720**

2-2 (1) ${}_{11}P_3=11\times10\times9=\mathbf{990}$

(2) ${}_8P_4=8\times7\times6\times5=\mathbf{1680}$

(3) ${}_4P_4=4!=4\times3\times2\times1=\mathbf{24}$

(4) ${}_4P_0=\mathbf{1}$

3-1 (1) **2, 120** (2) **5, 210**

3-2 (1) $6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=\mathbf{720}$

(2) ${}_9P_2\times3!=(9\times8)\times(3\times2\times1)=\mathbf{432}$

4-1 (1) **3, 5** (2) **2**

4-2 (1) $n(n-1)=90$

이때 $90=10\times9$이므로 $\boldsymbol{n=10}$

(2) $n(n-1)(n-2)=720$

이때 $720=10\times9\times8$이므로 $\boldsymbol{n=10}$

(3) ${}_7P_r$는 7부터 시작하여 1씩 작아지는 수를 차례로 r개 곱한 수이다. 이때 $840=7\times6\times5\times4$이므로 $\boldsymbol{r=4}$

(4) ${}_{12}P_r$는 12부터 시작하여 1씩 작아지는 수를 차례로 r개 곱한 수이다. 이때 $1320=12\times11\times10$이므로 $\boldsymbol{r=3}$

5-1 **24, 48**

5-2 (1) 남학생 4명을 한 묶음으로 생각하여 4명이 일렬로 서는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

남학생 4명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

따라서 구하는 경우의 수는 $24\times24=\mathbf{576}$

(2) 여학생 3명을 한 묶음으로 생각하여 5명이 일렬로 서는 경우의 수는

$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

여학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $120\times6=\mathbf{720}$

6-1 **6, 6**

6-2 (1) 부모를 제외한 자녀 3명이 한 줄로 서는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

양 끝과 자녀 사이사이에 부모 2명이 서는 경우의 수는

${}_4P_2=4\times3=12$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times12=\mathbf{72}$

(2) 자녀를 제외한 부모 2명이 한 줄로 서는 경우의 수는

$2!=2\times1=2$

양 끝과 부모 사이에 자녀 3명이 서는 경우의 수는

${}_3P_3=3\times2\times1=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times6=\mathbf{12}$

7-1 (1) **2, 48** (2) **3, 3**

7-2 (1) 천의 자리의 숫자는 0이 될 수 없으므로 0을 제외한 나머지 5개의 숫자에서 1개를 정하고, 나머지 5개의 숫자에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\square\square\square\square$

$5\times{}_5P_3$

$5\times{}_5P_3=5\times5\times4\times3=\mathbf{300}$

(2) 짝수는 일의 자리의 숫자가 0이거나 2 또는 4이어야 한다.

(i) 일의 자리 숫자가 0인 경우

서로 다른 5개의 숫자에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\square\square\square\boxed{0}$

${}_5P_3$

${}_5P_3=5\times4\times3=60$

(ii) 일의 자리 숫자가 2 또는 4인 경우

천의 자리에 들어갈 숫자는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자에서 1개를 정하고, 나머지 4개의 숫자에서 백의 자리, 십의 자리에 들어갈 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\square\square\square\square$

$4\times{}_4P_2\times2$

$2\times4\times{}_4P_2=2\times4\times4\times3=96$

(i), (ii)에서 짝수의 개수는 $60+96=\mathbf{156}$

8-1 **31254, 31254**

8-2

$$\left.\begin{array}{l}5\square\square\square\square\text{ 꼴인 자연수의 개수는 }4!=24\\ 4\square\square\square\square\text{ 꼴인 자연수의 개수는 }4!=24\\ 35\square\square\square\text{ 꼴인 자연수의 개수는 }3!=6\\ 345\square\square\text{ 꼴인 자연수의 개수는 }2!=2\\ 342\square\square\text{ 꼴인 자연수의 개수는 }2!=2\end{array}\right\}58$$

$341\square\square$ 꼴인 자연수는 34152, 34125이므로

60번째로 큰 수는 **34125**이다.

집중 연습

본문 | 126, 127쪽

1 (1) ${}_2P_0=\mathbf{1}$

(2) ${}_{10}P_1=\mathbf{10}$

(3) ${}_4P_3=4\times3\times2=\mathbf{24}$

(4) ${}_9P_2=9\times8=\mathbf{72}$

(5) ${}_6P_4=6\times5\times4\times3=\mathbf{360}$

(6) ${}_5P_5=5\times4\times3\times2\times1=\mathbf{120}$

2 (1) ${}_nP_n=n!$

이때 $24=4!$이므로 $\boldsymbol{n=4}$

(2) ${}_7P_r$는 7부터 시작하여 1씩 작아지는 수를 차례로 r개 곱한 수이다. 이때 $210=7\times6\times5$이므로 $\boldsymbol{r=3}$

(3) ${}_nP_3=n(n-1)(n-2)$

이때 $120=6\times5\times4$이므로 $\boldsymbol{n=6}$

(4) ${}_8P_r$는 8부터 시작하여 1씩 작아지는 수를 차례로 r개 곱한 수이다. 이때 $336=8\times7\times6$이므로 $\boldsymbol{r=3}$

(5) $$\begin{aligned}{}_nP_3+{}_{n-1}P_2&=n(n-1)(n-2)+(n-1)(n-2)\\&=(n-1)(n-2)(n+1)\\&=(n+1)(n-1)(n-2)\end{aligned}$$

이때 $140=7\times5\times4$이므로 $\boldsymbol{n=6}$

다른 풀이 $(n+1)(n-1)(n-2)=140$에서

$n^3-2n^2-n+2=140,\ n^3-2n^2-n-138=0$

$(n-6)(n^2+4n+23)=0 \qquad \therefore n=6\ (\because n$은 자연수$)$

(6) $$\begin{aligned}{}_{n+1}P_3+2\cdot{}_nP_2&=(n+1)n(n-1)+2n(n-1)\\&=n(n-1)(n+1+2)\\&=(n+3)n(n-1)\end{aligned}$$

이때 $84=7\times4\times3$이므로 $\boldsymbol{n=4}$

3 (1) 자음 b, c, d, f를 한 묶음으로 생각하여 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

자음 b, c, d, f가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times24=$**144**

(2) 모음 a, e를 한 묶음으로 생각하여 5개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

모음 a, e가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2\times1=2$

따라서 구하는 경우의 수는 $120\times2=$**240**

(3) a, b, c를 한 묶음으로 생각하여 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

a, b, c가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $24\times6=$**144**

4 (1) 이웃해도 되는 축구 선수 3명이 일렬로 서는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

양 끝과 축구 선수 사이사이에 야구 선수 2명이 서는 경우의 수는

${}_4P_2=4\times3=12$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times12=$**72**

(2) 야구 선수 2명이 일렬로 서는 경우의 수는

$2!=2\times1=2$

양 끝과 야구 선수 사이에 축구 선수 3명이 서는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times6=$**12**

(3) 축구 선수 3명을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 서는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

축구 선수의 양 끝에 야구 선수 2명이 서는 경우의 수는

$2!=2\times1=2$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times2=$**12**

5 (1) 천의 자리의 숫자는 0이 될 수 없으므로 0을 제외한 4개의 숫자에서 1개를 정하고, 나머지 4개의 숫자에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\square\,\underbrace{\square\square\square}$

$4\times{}_4P_3$

$4\times{}_4P_3=4\times4\times3\times2=$**96**

(2) 홀수는 일의 자리의 숫자가 1 또는 3이어야 한다.

천의 자리의 숫자는 0이 될 수 없으므로 천의 자리에는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자에서 1개를 정하고, 나머지 3개의 숫자에서 백의 자리, 십의 자리에 들어갈 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\square\,\underbrace{\square\square}\,\square$

$3\times{}_3P_2\times2$

$2\times3\times{}_3P_2=2\times3\times3\times2=$**36**

(3) 5의 배수는 일의 자리의 숫자가 0이어야 한다.

0을 제외한 나머지 4개의 숫자에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\underbrace{\square\square\square}\,\boxed{0}$

${}_4P_3$

${}_4P_3=4\times3\times2=$**24**

6 (1) $1\square\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

$21\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

$231\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

32

$234\square\square$ 꼴인 자연수는 23415, 23451이므로

34번째로 작은 수는 **23451**이다.

(2) $5\square\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

$4\square\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

$3\square\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

$25\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

78

$245\square\square$ 꼴인 자연수는 24531, 24513이므로

80번째로 큰 수는 **24513**이다.

(3) $1\square\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

$21\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

$23\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

$24\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

따라서 25000보다 작은 수의 개수는

$24+6+6+6=$**42**

기초 개념 평가

본문 | 128, 129쪽

01 순열	02 $_{n}\mathrm{P}_{r}$
03 $\boldsymbol{n!}$	04 $\boldsymbol{(n-r)!}$
05 $\boldsymbol{n!}$	06 **1, 1**
07 이웃하는	08 이웃하지 않는
09 **3**	10 **5**
11 **4**	12 **3**

기초 문제 평가

본문 | 130, 131쪽

1 (1) $_{n}\mathrm{P}_{3}=2\cdot{}_{n}\mathrm{P}_{2}$에서

$n(n-1)(n-2)=2n(n-1)$

$n\geq3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$n-2=2$ $\quad\therefore n=\mathbf{4}$

(2) $_{n}\mathrm{P}_{2}+{}_{n+1}\mathrm{P}_{2}=18$에서

$n(n-1)+(n+1)n=18$, $2n^2=18$

$n^2=9$ $\quad\therefore n=\pm3$

이때 $n\geq2$이므로 $n=\mathbf{3}$

2 9명의 학생 중에서 3명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

$_{9}\mathrm{P}_{3}=9\times8\times7=\mathbf{504}$

3 ㄱ. (좌변)$=3!\times2!=3\times2\times1\times2\times1=12$

(우변)$=6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$

$\therefore 3!\times2!\neq6!$

ㄴ. (좌변)$=9\times8!=9\times8\times7\times\cdots\times1$

(우변)$=9!=9\times8\times7\times\cdots\times1$

$\therefore 9\times8!=9!$

ㄷ. (좌변)$=2!+3!=2\times1+3\times2\times1=2+6=8$

(우변)$=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

$\therefore 2!+3!\neq5!$

ㄹ. (좌변)$=\dfrac{5!}{0!}=\dfrac{5!}{1}=5!$, (우변)$=5!$

$\therefore \dfrac{5!}{0!}=5!$

따라서 옳지 않은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

4 (1) 소설책 4권을 한 묶음으로 생각하여 3권의 책을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

소설책 4권이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times24=\mathbf{144}$

(2) 시집 2권을 한 묶음으로 생각하여 5권의 책을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

시집 2권이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2\times1=2$

따라서 구하는 경우의 수는 $120\times2=\mathbf{240}$

(3) 시집을 제외한 4권의 소설책을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

양 끝과 소설책 사이사이에 시집 2권을 꽂는 경우의 수는

$_{5}\mathrm{P}_{2}=5\times4=20$

따라서 구하는 경우의 수는 $24\times20=\mathbf{480}$

5 (1) 남학생 3명을 한 묶음, 여학생 3명을 한 묶음으로 생각하여 2명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$2!=2\times1=2$

남학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

여학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times6\times6=\mathbf{72}$

(2) 남학생과 여학생이 번갈아 서는 경우는

'남여남여남여', '여남여남여남'의 2가지이다.

남학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

여학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times6\times6=\mathbf{72}$

6 (i) 모음끼리 이웃하게 나열하는 경우

모음 a, o, u를 한 묶음으로 생각하여 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

모음 a, o, u가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

$\therefore a=24\times6=144$

(ii) 모음끼리 이웃하지 않게 나열하는 경우

모음 a, o, u를 제외한 자음 f, m, s를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

양 끝과 자음 사이사이에 모음 a, o, u를 나열하는 경우의 수는

$_{4}\mathrm{P}_{3}=4\times3\times2=24$

$\therefore b=6\times24=144$

(i), (ii)에서 $a+b=\mathbf{288}$

7 적어도 한 명은 배구 선수를 뽑는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 대표, 부대표 모두 농구 선수가 뽑히는 경우의 수를 빼면 된다.

9명의 선수 중에서 대표 1명, 부대표 1명을 뽑는 경우의 수는
${}_9P_2=9\times8=72$
대표, 부대표 모두 농구 선수가 뽑히는 경우의 수는
${}_5P_2=5\times4=20$
따라서 구하는 경우의 수는 $72-20=$ **52**

8 선생님 3명을 한 묶음으로 생각하여 $(n+1)$명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $(n+1)!$
선생님 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는
$3!=3\times2\times1=6$
즉, $(n+1)!\times6=720$이므로
$(n+1)!=120=5\times4\times3\times2\times1$
$n+1=5 \qquad \therefore n=\mathbf{4}$

9 A와 B를 제외한 나머지 3명을 한 줄로 앉히는 경우의 수는
$3!=3\times2\times1=6$
A와 B를 양 끝에 앉히는 경우의 수는
$2!=2\times1=2$
따라서 구하는 경우의 수는 $6\times2=$ **12**

10 만의 자리의 숫자는 0이 될 수 없으므로 0을 제외한 4개의 숫자에서 1개를 정하고, 나머지 4개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\underset{4}{\square}\times\underbrace{\square\square\square\square}_{4!}$$

$4\times4!=4\times4\times3\times2\times1=$ **96**

11 짝수는 일의 자리의 숫자가 2, 4, 6 중 하나이어야 한다.

$$\underbrace{\square\square\square}_{{}_5P_3}\times\underset{3}{\square}$$

일의 자리의 숫자를 제외한 나머지 5개의 숫자에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$3\times{}_5P_3=3\times5\times4\times3=$ **180**

12 1□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_2=5\times4=20$
2□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_2=5\times4=20$
30□ 꼴인 자연수의 개수는 4
31□ 꼴인 자연수의 개수는 4
32□ 꼴인 자연수의 개수는 4
따라서 340보다 작은 수의 개수는 $20+20+4+4+4=$ **52**

13 e□□□□ 꼴인 단어의 개수는 $4!=24$
i□□□□ 꼴인 단어의 개수는 $4!=24$
l□□□□ 꼴인 단어의 개수는 $4!=24$
m□□□□ 꼴인 단어의 개수는 $4!=24$
se□□□ 꼴인 단어의 개수는 $3!=6$
si□□□ 꼴인 단어의 개수는 $3!=6$
sl□□□ 꼴인 단어의 개수는 $3!=6$
sme□□ 꼴인 단어의 개수는 $2!=2$
116
smi□□ 꼴인 단어는 smiel, smile이므로
smile은 **118번째**에 배열된다.

11 조합

본문 | 132~135쪽

1-1 (1) **3, 3** (2) **7, 7** (3) **8, 8** (4) **1, 1**
1-2 (1) ${}_{10}C_4$ (2) ${}_8C_3$ (3) ${}_{12}C_5$ (4) ${}_6C_3\times{}_5C_2$

2-1 (1) **5!** (2) **10!, 45**
2-2 (1) ${}_9C_4=\dfrac{9!}{4!\times5!}=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=\mathbf{126}$
(2) ${}_8C_2=\dfrac{8!}{2!\times6!}=\dfrac{8\times7}{2\times1}=\mathbf{28}$
(3) ${}_4C_0=\mathbf{1}$
(4) ${}_5C_5=\mathbf{1}$

3-1 (1) **30, 6** (2) **7, 6**
3-2 (1) ${}_nC_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}=20$에서
$n(n-1)(n-2)=120$
이때 $120=6\times5\times4$이므로 $\boldsymbol{n=6}$
(2) ${}_nC_4=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}=35$에서
$n(n-1)(n-2)(n-3)=840$
이때 $840=7\times6\times5\times4$이므로 $\boldsymbol{n=7}$
(3) ${}_nC_3={}_nC_{n-3}$이므로 ${}_nC_{n-3}={}_nC_6$
$n-3=6 \qquad \therefore \boldsymbol{n=9}$
(4) $r\neq r-2$이므로 ${}_8C_r={}_8C_{8-r}$에서 ${}_8C_{8-r}={}_8C_{r-2}$
$8-r=r-2 \qquad \therefore \boldsymbol{r=5}$

4-1 (1) **2, 2, 10** (2) **3, 10**
4-2 (1) A, B를 먼저 뽑고 남은 6명의 학생 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는
${}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=\mathbf{15}$
(2) B를 제외한 7명의 학생 중에서 A를 먼저 뽑고 남은 6명의 학생 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
${}_6C_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=\mathbf{20}$

5-1 **10, 6, 1440**
5-2 (1) 5개의 홀수 1, 3, 5, 7, 9 중에서 1개를 뽑는 경우의 수는
${}_5C_1=5$
4개의 짝수 2, 4, 6, 8 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는
${}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$
뽑은 3개의 수를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $5\times6\times6=$ **180**

(2) 5개의 홀수 1, 3, 5, 7, 9 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

$_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

4개의 짝수 2, 4, 6, 8 중에서 1개를 뽑는 경우의 수는

$_4C_1=4$

뽑은 3개의 수를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $10\times4\times6=\mathbf{240}$

6-1 (1) **2, 2, 10** (2) **3, 3, 10**

6-2 (1) 서로 다른 8개의 점에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_8C_2=\dfrac{8\times7}{2\times1}=\mathbf{28}$

(2) 서로 다른 8개의 점에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_8C_3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=\mathbf{56}$

7-1 **3, 3, 30**

7-2 가로로 그어진 3개의 평행선에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_3C_2={}_3C_1=3$

세로로 그어진 4개의 평행선에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

따라서 구하는 평행사변형의 개수는 $3\times6=\mathbf{18}$

집중 연습

본문 | 136, 137쪽

1 (1) $_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=\mathbf{21}$

(2) $_8C_4=\dfrac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=\mathbf{70}$

(3) $_{12}C_3=\dfrac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=\mathbf{220}$

(4) $_9C_6={}_9C_3=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=\mathbf{84}$

(5) $_{15}C_0=\mathbf{1}$

(6) $_{10}C_{10}=\mathbf{1}$

2 (1) $_nC_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}=120$에서

$n(n-1)(n-2)=720$

이때 $720=10\times9\times8$이므로 $n=\mathbf{10}$

(2) $_nC_2={}_nC_5$에서

$_nC_2={}_nC_{n-2}$이므로 $_nC_{n-2}={}_nC_5$

$n-2=5$ $\therefore n=7$

다른 풀이 $\dfrac{n(n-1)}{2!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}$

$n\geq5$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$(n-2)(n-3)(n-4)=60$

이때 $60=5\times4\times3$이므로

$n-2=5$ $\therefore n=7$

(3) $6\cdot{}_nC_2=5\cdot{}_{n+1}C_2$에서

$6\times\dfrac{n(n-1)}{2!}=5\times\dfrac{(n+1)n}{2!}$

$n\geq2$이므로 양변을 n으로 나누면

$6(n-1)=5(n+1)$, $6n-6=5n+5$ $\therefore n=\mathbf{11}$

(4) $_nC_3-{}_nC_2=4(n-1)$에서

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}-\dfrac{n(n-1)}{2!}=4(n-1)$

$n(n-1)(n-2)-3n(n-1)=24(n-1)$

$n\geq3$이므로 양변을 $n-1$로 나누면

$n(n-2)-3n=24$, $n^2-5n-24=0$

$(n+3)(n-8)=0$ $\therefore n=\mathbf{8}$ ($\because n\geq3$)

(5) $8\cdot{}_nC_1={}_nP_2-36$에서

$8n=n(n-1)-36$, $n^2-9n-36=0$

$(n+3)(n-12)=0$ $\therefore n=\mathbf{12}$ ($\because n\geq2$)

(6) $_nC_3+{}_nC_4={}_{n+1}C_2$에서

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$

$=\dfrac{(n+1)n}{2!}$

$4n(n-1)(n-2)+n(n-1)(n-2)(n-3)$

$=12n(n+1)$

$n(n-1)(n-2)(n+1)=12n(n+1)$

$n\geq4$이므로 양변을 $n(n+1)$로 나누면

$(n-1)(n-2)=12$

이때 $12=4\times3$이므로 $n-1=4$ $\therefore n=\mathbf{5}$

다른 풀이 $(n-1)(n-2)=12$에서 $n^2-3n-10=0$

$(n+2)(n-5)=0$ $\therefore n=5$ ($\because n\geq4$)

3 (1) 남학생 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

여학생 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

따라서 구하는 경우의 수는 $10\times10=\mathbf{100}$

(2) 먼저 준서와 희진이를 뽑고 남은 8명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$_8C_2=\dfrac{8\times7}{2\times1}=\mathbf{28}$

(3) 준서를 먼저 뽑고 남은 남학생 4명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는

$_4C_1=4$

희진이를 먼저 뽑고 남은 여학생 4명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

따라서 구하는 경우의 수는 $4\times4=$**16**

(4) 희진이를 제외한 9명 중에서 준서를 먼저 뽑고 남은 8명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=\mathbf{56}$$

(5) 준서와 희진이를 제외한 8명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_8C_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=\mathbf{70}$$

4 (1) 짝수 4개 중에서 4개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_4\times4!=1\times4!=1\times4\times3\times2\times1=$**24**

참고 ${}_4C_4\times4!={}_4P_4$

(2) 짝수 4개 중에서 3개를 뽑는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

홀수 5개 중에서 1개를 뽑는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

뽑은 4개의 수를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

따라서 구하는 경우의 수는 $4\times5\times24=$**480**

(3) 2를 제외한 짝수 3개 중에서 1개를 뽑는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

1을 제외한 홀수 4개 중에서 1개를 뽑는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

뽑은 4개의 수를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

따라서 구하는 경우의 수는 $3\times4\times24=$**288**

(4) 짝수 4개 중에서 1개를 뽑는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

홀수 5개 중에서 3개를 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

홀수 3개를 한 묶음으로 생각하여 2개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!=2\times1=2$

홀수 3개가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $4\times10\times2\times6=$**480**

(5) 짝수 4개 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

홀수 5개 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

뽑은 홀수 2개를 나열하는 경우의 수는

$2!=2\times1=2$

양 끝과 홀수 사이에 짝수 2개를 나열하는 경우의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times10\times2\times6=$**720**

기초 개념 평가

본문 | 138, 139쪽

01 순열, 조합	02 ${}_nC_r$
03 $(n-r)!$	04 1
05 r	06 ${}_{n-x}C_{r-x}$
07 ${}_{n-x}C_r$	08 $r!$
09 ${}_nC_2$	10 ${}_nC_3$
11 ${}_mC_2\times{}_nC_2$	

기초 문제 평가

본문 | 140, 141쪽

1 (1) $2\cdot{}_nC_3=3\cdot{}_nP_2$에서

$$2\times\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}=3n(n-1)$$

$n\ge3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$$\frac{n-2}{3}=3,\ n-2=9\qquad\therefore\ n=\mathbf{11}$$

(2) ${}_nP_2-{}_7C_2=21$에서

$$n(n-1)-\frac{7\times6}{2\times1}=21,\ n(n-1)=42$$

이때 $42=7\times6$이므로 $n=\mathbf{7}$

다른 풀이 $n(n-1)=42$에서 $n^2-n-42=0$

$(n+6)(n-7)=0\qquad\therefore\ n=7\ (\because\ n\ge2)$

2 대표 20명 중에서 악수를 하는 2명을 뽑는 것이므로

$${}_{20}C_2=\frac{20\times19}{2\times1}=190(\text{번})$$

따라서 모두 **190번**의 악수를 해야 한다.

3 마라톤 동호회의 회원 수를 n명이라 하면 대표 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_nC_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}=220$$

$n(n-1)(n-2)=1320$

이때 $1320=12\times11\times10$이므로 $n=12$

따라서 동호회의 회원 수는 **12명**이다.

4 선택한 세 관광지가 모두 같은 지역이 되려면 한 지역에서 세 관광지를 모두 골라야 한다.
A 지역에서 세 관광지를 모두 고르는 경우의 수는
${}_3C_3=1$
B 지역에서 세 관광지를 모두 고르는 경우의 수는
${}_4C_3={}_4C_1=4$
C 지역에서 세 관광지를 모두 고르는 경우의 수는
${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$
따라서 구하는 경우의 수는 $1+4+20=\mathbf{25}$

5 대표 3명 중에서 남학생과 여학생이 각각 한 명 이상 포함되어야 하므로 남학생 2명, 여학생 1명 또는 남학생 1명, 여학생 2명을 뽑아야 한다.
(ⅰ) 남학생 2명, 여학생 1명을 뽑는 경우
4명의 남학생 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는
${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$
5명의 여학생 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는
${}_5C_1=5$
즉, 구하는 경우의 수는 $6\times5=30$
(ⅱ) 남학생 1명, 여학생 2명을 뽑는 경우
4명의 남학생 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는
${}_4C_1=4$
5명의 여학생 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는
${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$
즉, 구하는 경우의 수는 $4\times10=40$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $30+40=\mathbf{70}$
다른 풀이 구하는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 대표 3명이 모두 남학생인 경우 또는 모두 여학생인 경우의 수를 뺀 것과 같다. 즉,
$${}_9C_3-({}_4C_3+{}_5C_3)=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}-(4+10)$$
$$=84-14=70$$

6 9가 적힌 구슬을 제외한 8개의 구슬 중에서 1이 적힌 구슬을 먼저 뽑고 남은 7개의 구슬 중에서 3개를 뽑는 경우의 수는
${}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=\mathbf{35}$

7 5권의 교과서 중에서 3권을 뽑는 경우의 수는
${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$
3권의 참고서 중에서 1권을 뽑는 경우의 수는
${}_3C_1=3$
뽑은 4권의 책을 책꽂이에 일렬로 꽂는 경우의 수는
$4!=4\times3\times2\times1=24$
따라서 구하는 경우의 수는 $10\times3\times24=\mathbf{720}$

8 소민이와 하리를 먼저 뽑고 남은 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는
${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$
소민이와 하리를 한 묶음으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$3!=3\times2\times1=6$
소민이와 하리가 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2\times1=2$
따라서 구하는 경우의 수는 $10\times6\times2=\mathbf{120}$

9 10개의 점 중에서 두 점을 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는
${}_{10}C_2=\frac{10\times9}{2\times1}=45$
일직선 위에 있는 5개의 점 중에서 두 점을 택하는 경우의 수는
${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$
이때 일직선 위에 있는 5개의 점으로 만들 수 있는 직선은 1개뿐이다.
따라서 구하는 직선의 개수는 $45-10+1=\mathbf{36}$

10 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 8개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는
${}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=\mathbf{56}$

11 10개의 점 중에서 일직선 위에 있지 않은 점 3개를 택하여 연결하면 삼각형이 된다.
10개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는
${}_{10}C_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$
일직선 위에 있는 3개의 점을 택하는 경우의 수는
$3\times{}_4C_3+3\times{}_3C_3=3\times{}_4C_1+3\times{}_3C_3=3\times4+3\times1=15$
따라서 구하는 경우의 수는 $120-15=\mathbf{105}$

12 가로로 그어진 4개의 평행선에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$
세로로 그어진 5개의 평행선에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$
즉, 이 도형의 선들로 이루어진 직사각형의 개수는
$6\times10=60$
이때 넓이가 1인 정사각형의 개수는 12
넓이가 4인 정사각형의 개수는 6
넓이가 9인 정사각형의 개수는 2
따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는
$60-(12+6+2)=\mathbf{40}$

12 행렬과 그 연산

본문 | 144~149쪽

1-1 **2, 3**

1-2 (1) 제1열의 성분은 **2, 1**이다.

(2) **(1, 2)** 성분은 **4**, **(2, 3)** 성분은 **0**이다.

2-1 **3, 6**

2-2 $a_{11}=1^2-3\times1+1=-1$, $a_{12}=1^2-3\times2+1=-4$

$a_{21}=2^2-3\times1+1=2$, $a_{22}=2^2-3\times2+1=-1$

$\therefore A=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

3-1 (1) **2** (2) **3, 5**

3-2 (1) 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x-1=5$, $y=3$, $6=2z$

$\therefore \boldsymbol{x=6,\ y=3,\ z=3}$

(2) 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x+3=7$, $y+z=4$, $2=y-z$

$2x+3=7$에서 $\boldsymbol{x=2}$

두 식 $y+z=4$, $y-z=2$를 연립하여 풀면

$\boldsymbol{y=3,\ z=1}$

4-1 **6, 2, −1**

4-2 (1) 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x+y=2-y$ ...... ㉠

$3xy=-9$ ...... ㉡

㉠에서 $2x+2y=2$ $\therefore x+y=1$

㉡에서 $xy=-3$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=1^2-2\times(-3)=\mathbf{7}$

(2) 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x-1=2y+5$ ...... ㉠

$xy=4xy-3$ ...... ㉡

㉠에서 $2x-2y=6$ $\therefore x-y=3$

㉡에서 $3xy=3$ $\therefore xy=1$

$\therefore x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$=3^2+2\times1=\mathbf{11}$

5-1 **2, 5**

5-2 (1) $A-B+C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

(2) $A-(B+C)=A-B-C$

$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$

6-1 **−1, 1**

6-2 (1) $X-A=B$에서 $X=A+B$이므로

$X=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

(2) $X+B=A$에서 $X=A-B$이므로

$X=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{-5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$

7-1 **2, 9**

7-2 (1) $2A+(3A-2B)$

$=2A+3A-2B=5A-2B$

$=5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{12} \\ \mathbf{-9} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

(2) $3(2A-B)-4(A-2B)$

$=6A-3B-4A+8B=2A+5B$

$=2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 15 & -5 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{17} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{8} & \mathbf{24} \end{pmatrix}$

8-1 **−3, −1**

8-2 (1) $2X-A=3(X-B)$에서

$2X-A=3X-3B$이므로 $X=-A+3B$

$\therefore X=-\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$

(2) $2(X+B)=X+A$에서

$2X+2B=X+A$이므로 $X=A-2B$

$\therefore X=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$

9-1 **2, 4**

9-2 (1) $AB=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1\times2+2\times(-3) & -1\times1+2\times1 \\ 4\times2+1\times(-3) & 4\times1+1\times1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{-8} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

(2) $BA=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2\times(-1)+1\times4 & 2\times2+1\times1 \\ -3\times(-1)+1\times4 & -3\times2+1\times1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$

참고 (1), (2)의 결과에서 $AB\neq BA$임을 알 수 있다.
즉, 일반적으로 두 행렬 A, B에 대하여 $AB\neq BA$이므로 두 행렬의 곱셈을 계산할 때는 계산 순서에 주의해야 한다.

10-1 (1) **4** (2) **18**

10-2 (1) $A^2=AA=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

(2) $A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

11-1 $\boldsymbol{C}$, **7**

11-2 (1) $ABC=(AB)C$

$=\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{21} & \mathbf{-9} \end{pmatrix}$

참고 결합법칙에 의하여 $ABC=A(BC)$로 계산하여도 그 결과는 같다.

(2) $AB+AC=A(B+C)$

$=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$

다른 풀이 $AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

$AC=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore AB+AC=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

이와 같이 AB와 AC를 각각 구해 $AB+AC$를 계산해도 되지만 분배법칙 $AB+AC=A(B+C)$를 이용하여 계산하는 것이 더 간단하다.

12-1 (1) **0** (2) **2, 2**

12-2 (1) $(2E)^3=2^3E^3=8E$

$=8\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$

참고 단위행렬 E와 자연수 n에 대하여
$(kE)^n=k^nE^n=k^nE$ (단, k는 실수)

(2) $E^{100}+(-E)^{100}=E^{100}+(-1)^{100}E^{100}=E+E=2E$

$=2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

집중 연습

본문 | 150, 151쪽

1 (1) $(1\ \ -2)+(3\ \ 5)=(\mathbf{4}\ \ \mathbf{3})$

(2) $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-1} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

2 (1) $2A=2\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{8} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

(2) $-3A=-3\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{-18} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-12} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}$

(3) $\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

3 (1) $-3A+4B=-3\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -15 & -12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 16 & 12 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{-5} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

(2) $5A-(A-2B)$

$=5A-A+2B=4A+2B$

$=4\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 20 & 16 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{14} & \mathbf{-14} \\ \mathbf{28} & \mathbf{22} \end{pmatrix}$

(3) $-(2A-3B)+4(A-B)$

$=-2A+3B+4A-4B=2A-B$

$=2\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

4 (1) $(3\ \ 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}=(\mathbf{13})$

(2) $(-1\ \ 1)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=(\mathbf{-1}\ \ \mathbf{-3})$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{16} \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{7} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-17} \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-13} \\ \mathbf{4} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{-5} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-7} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

5 (1) $E^{50}=E=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

(2) $E^2+3E=E+3E=4E=4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

(3) $AE+EA=A+A=2A=2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$

(4) $(AE)^2=A^2=AA=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$

(5) $A+E=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$이므로

$(A+E)^2=(A+E)(A+E)$

$=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{7} & \mathbf{15} \end{pmatrix}$

다른 풀이 행렬 A와 단위행렬 E에 대하여 곱셈 공식이 성립하므로

$(A+E)^2=A^2+2AE+E^2=A^2+2A+E$

$=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}$

(6) $A-E=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이므로

$(A+E)(A-E)=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

다른 풀이 행렬 A와 단위행렬 E에 대하여 곱셈 공식이 성립하므로

$(A+E)(A-E)=A^2-E^2=A^2-E$

$=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

기초 개념 평가

본문 | 152, 153쪽

01 행렬, 성분	02 행, 열
03 $\boldsymbol{a_{ij}}$	04 성분
05 =	06 $\boldsymbol{A+B}$
07 $\boldsymbol{A-B}$	08 $\boldsymbol{lA}$
09 $\boldsymbol{lA, kB}$	10 열, 행
11 $\boldsymbol{m\times n}$	12 교환법칙
13 결합법칙	14 분배법칙

기초 문제 평가

본문 | 154, 155쪽

1 $a_{12}=3$, $a_{23}=4$이므로 $a_{12}+a_{23}=\mathbf{7}$

2 $a_{11}=1\times1+1-1=1$, $a_{12}=1\times2+1-1=2$

$a_{21}=2\times1+2-1=3$, $a_{22}=2\times2+2-1=5$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 $1+2+3+5=\mathbf{11}$

3 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a^2=b$ …… ㉠

$a-b=-2$ …… ㉡

㉡에서 $b=a+2$

이것을 ㉠에 대입하면

$a^2=a+2$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$ $\therefore a=2$ ($\because a>0$)

$a=2$를 ㉡에 대입하면 $b=4$

$\therefore a+b=\mathbf{6}$

4 (1) $A-B+C=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{8} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

(2) $2A+3B-C=2\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

(3) $A+2(B-C)-(A+C)$

$=A+2B-2C-A-C=2B-3C$

$=2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-17} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$

5 $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ …… ㉠

$A-B=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ $\therefore \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

㉠−㉡을 하면

$2B=\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ $\therefore \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

6 $2(X-A)=3X-B$에서
$2X-2A=3X-B$이므로 $X=-2A+B$

$\therefore X=-2\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -4 & -6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{5} & \mathbf{-5}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-2}\end{pmatrix}$

7 두 행렬 P, Q의 행렬의 곱 PQ가 정의되려면 P의 열의 개수와 Q의 행의 개수가 같아야 하므로 보기의 곱셈 중에서 정의될 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

같다

참고 $(m\times l$ 행렬$)\times(l\times n$ 행렬$)=(m\times n$ 행렬$)$

8 $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & 1\\ 3 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+6 & -1+2y\\ -2x+12 & -2+4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$-x+6=0$, $-1+2y=0$
따라서 $x=6$, $y=\frac{1}{2}$이므로 $xy=\mathbf{3}$

9 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2\times 2 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2\times 3 & 1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2n & 1\end{pmatrix}$

따라서 $A^{12}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2\times 12 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 24 & 1\end{pmatrix}$이므로 $a=\mathbf{24}$

10 $A(B+C)-(C+A)B$
$=AB+AC-CB-AB=AC-CB$

$=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 8 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8 & 1\\ 6 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

따라서 주어진 행렬의 모든 성분의 합은
$-7+(-3)+2+(-1)=\mathbf{-9}$

11 $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$
이므로
$A^2+B^2=(A+B)^2-(AB+BA)$

$=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}8 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{7} & \mathbf{3}\\ \mathbf{2} & \mathbf{5}\end{pmatrix}$

12 (1) $A-E=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$이므로

$(A-E)^2=(A-E)(A-E)$

$=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{-4}\\ \mathbf{0} & \mathbf{4}\end{pmatrix}$

다른 풀이 행렬 A와 단위행렬 E에 대하여 곱셈 공식이 성립하므로
$(A-E)^2=A^2-2AE+E^2=A^2-2A+E$

이때 $A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$

이므로
$(A-E)^2=A^2-2A+E=E-2A+E$
$=-2A+2E=-2(A-E)$

$=-2\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

(2) $A+E=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

이때 $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$이므로

$A^2-A+E=E-A+E=-A+2E$

$=-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

$\therefore (A+E)(A^2-A+E)=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$

다른 풀이 행렬 A와 단위행렬 E에 대하여 곱셈 공식이 성립하므로
$(A+E)(A^2-A+E)=A^3+E$

이때 $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$이므로

$A^3=A^2A=EA=A$
$\therefore (A+E)(A^2-A+E)=A^3+E=A+E$

$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

참고 단위행렬과의 곱셈
일반적으로 행렬에서는 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하지 않으므로 수와 식에서 성립하던 곱셈 공식, 인수분해 공식 등이 행렬에서는 성립하지 않는다.
하지만 단위행렬과의 곱셈은 교환법칙이 성립하므로 행렬에서도 곱셈 공식과 인수분해 공식을 적용해서 사용해도 된다.