짧지만 개념에 강한 **짤강 공통수학2**

정답과 해설

01	평면좌표	02
02	직선의 방정식	05
03	원의 방정식	09
04	도형의 이동	16
05	집합	19
06	집합의 연산	22
07	명제	25
08	명제의 증명	29
09	함수	30
10	합성함수와 역함수	32
11	유리함수	36
12	무리함수	40

01 평면좌표

본문 | 008~011쪽

1-1 (1) **5** (2) **169, 13**

1-2 (1) $\overline{\mathrm{AB}}=|-8-3|=\mathbf{11}$

(2) $\overline{\mathrm{AB}}=|-1-(-5)|=\mathbf{4}$

(3) $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{1-(-2)\}^2+(5-1)^2}=\sqrt{25}=\mathbf{5}$

(4) $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-0)^2+(2-0)^2}=\boldsymbol{\sqrt{13}}$

2-1 **10, 100, 2**

2-2 (1) $|a-1|=3$에서 $a-1=-3$ 또는 $a-1=3$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=-2}$ **또는** $\boldsymbol{a=4}$

(2) $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(a-2)^2}=\sqrt{16+(a-2)^2}$

$\overline{\mathrm{AB}}=5$에서 $\sqrt{16+(a-2)^2}=5$

$a^2-4a-5=0$, $(a+1)(a-5)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=-1}$ **또는** $\boldsymbol{a=5}$

3-1 **13, 1**

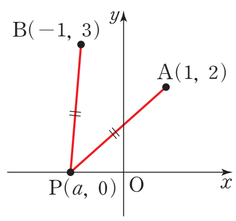
3-2 (1) 점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(a-1)^2+(-2)^2}$

$=\sqrt{a^2-2a+5}$

$\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{(a+1)^2+(-3)^2}$

$=\sqrt{a^2+2a+10}$



$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서

$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$a^2-2a+5=a^2+2a+10$

$-4a=5$ $\quad\therefore a=-\dfrac{5}{4}$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\boldsymbol{\left(-\dfrac{5}{4}, 0\right)}$

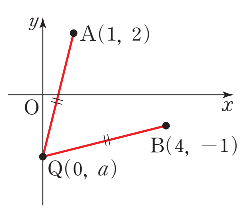
(2) 점 Q의 좌표를 $(0, a)$라 하면

$\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{(-1)^2+(a-2)^2}$

$=\sqrt{a^2-4a+5}$

$\overline{\mathrm{BQ}}=\sqrt{(-4)^2+(a+1)^2}$

$=\sqrt{a^2+2a+17}$



$\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}$에서

$\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{BQ}}^2$이므로

$a^2-4a+5=a^2+2a+17$

$-6a=12$ $\quad\therefore a=-2$

따라서 구하는 점 Q의 좌표는 $\mathbf{(0, -2)}$

4-1 **5,** $\overline{\mathbf{CA}}$**, A**

4-2 (1) 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{1-(-2)\}^2+(\sqrt{3}-0)^2}=2\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(1-1)^2+(-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(-2-1)^2+\{0-(-\sqrt{3})\}^2}=2\sqrt{3}$

따라서 삼각형 ABC는 **정삼각형**이다.

(2) 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-1-1)^2+\{2-(-2)\}^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\{6-(-1)\}^2+(3-2)^2}=5\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(1-6)^2+(-2-3)^2}=5\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{\mathbf{BC}}=\overline{\mathbf{CA}}$**인 이등변삼각형**이다.

5-1 $\mathbf{-5, -9}$

5-2 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\dfrac{2\times x+3\times(-3)}{2+3}=\dfrac{2x-9}{5}$

$\mathrm{P}(5)$이므로 $\dfrac{2x-9}{5}=5$, $2x-9=25$

$2x=34$ $\quad\therefore \boldsymbol{x=17}$

6-1 **4, 7**

6-2 (1) 내분하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\dfrac{3\times(-1)+1\times3}{3+1}=0$,

$y=\dfrac{3\times6+1\times(-2)}{3+1}=4$

$\therefore$ $\mathbf{(0, 4)}$

(2) 중점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\dfrac{3+(-1)}{2}=1$, $y=\dfrac{-2+6}{2}=2$

$\therefore$ $\mathbf{(1, 2)}$

7-1 $\mathbf{4, -7}$

7-2 (1) 무게중심 G의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\dfrac{5+(-3)+1}{3}$, $y=\dfrac{1+6+(-1)}{3}$

$\therefore$ $\mathbf{(1, 2)}$

(2) 무게중심 G의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\dfrac{-2+4+(-5)}{3}$, $y=\dfrac{-3+2+7}{3}$

$\therefore$ $\mathbf{(-1, 2)}$

8-1 $\mathbf{1, -1}$

8-2 (1) 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+a+3}{3}, \dfrac{1+3+b}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{a+1}{3}, \dfrac{b+4}{3}\right)$

무게중심 G의 좌표가 $(1, 3)$이므로

$\dfrac{a+1}{3}=1$, $\dfrac{b+4}{3}=3$ $\quad\therefore \boldsymbol{a=2, b=5}$

(2) 꼭짓점 C의 좌표를 (a, b)라 하면 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\dfrac{2+(-3)+a}{3}, \dfrac{0+2+b}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{a-1}{3}, \dfrac{b+2}{3}\right)$

무게중심이 원점이므로

$\dfrac{a-1}{3}=0$, $\dfrac{b+2}{3}=0$ $\quad\therefore a=1, b=-2$

따라서 꼭짓점 C의 좌표는 $\mathbf{(1, -2)}$

집중 연습

본문 | 012, 013쪽

1 (1) $\overline{AB}=|6-(-1)|=\mathbf{7}$

(2) $\overline{AB}=|-1-3|=\mathbf{4}$

2 (1) $\overline{AB}=\sqrt{(3-0)^2+(0-4)^2}=\sqrt{25}=\mathbf{5}$

(2) $\overline{AB}=\sqrt{\{-2-(-2)\}^2+(4-7)^2}=\sqrt{9}=\mathbf{3}$

(3) $\overline{AB}=\sqrt{(3-5)^2+\{-1-(-4)\}^2}=\mathbf{\sqrt{13}}$

(4) $\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{25}=\mathbf{5}$

3 (1) 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$\overline{AB}=\sqrt{(-1-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{5}$

$\overline{BC}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(4-3)^2}=\sqrt{10}$

$\overline{CA}=\sqrt{(1-2)^2+(2-4)^2}=\sqrt{5}$

이때 $\overline{AB}=\overline{CA}$이고 $\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$

따라서 삼각형 ABC는 **$\angle A=90°$인 직각이등변삼각형**이다.

(2) 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$\overline{AB}=\sqrt{(0-\sqrt{3})^2+(4-1)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\overline{BC}=\sqrt{(-\sqrt{3}-0)^2+(1-4)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\overline{CA}=\sqrt{\{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})\}^2+(1-1)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

이때 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

따라서 삼각형 ABC는 **정삼각형**이다.

(3) 삼각형 OAB의 세 변의 길이를 각각 구하면

$\overline{OA}=\sqrt{(4-0)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\overline{OB}=\sqrt{(5-0)^2+(5-0)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

$\overline{AB}=\sqrt{(5-4)^2+\{5-(-2)\}^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

따라서 삼각형 OAB는 **$\overline{OB}=\overline{AB}$인 이등변삼각형**이다.

(4) 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$\overline{AB}=\sqrt{(1-5)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$\overline{BC}=\sqrt{(-1-1)^2+\{1-(-1)\}^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\overline{CA}=\sqrt{\{5-(-1)\}^2+(3-1)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

이때 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$

따라서 삼각형 ABC는 **$\angle B=90°$인 직각삼각형**이다.

(5) 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$\overline{AB}=\sqrt{\{-1-(-2)\}^2+(4-0)^2}=\sqrt{17}$

$\overline{BC}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(1-4)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\overline{CA}=\sqrt{(-2-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{17}$

따라서 삼각형 ABC는 **$\overline{AB}=\overline{CA}$인 이등변삼각형**이다.

4 (1) $\dfrac{2\times8+1\times(-1)}{2+1}=\mathbf{5}$

(2) $\dfrac{1\times8+2\times(-1)}{1+2}=\mathbf{2}$

(3) $\dfrac{-1+8}{2}=\mathbf{\dfrac{7}{2}}$

5 (1) $\dfrac{1\times(-4)+2\times6}{1+2}=\mathbf{\dfrac{8}{3}}$

(2) $\dfrac{3\times(-4)+2\times6}{3+2}=\mathbf{0}$

(3) $\dfrac{6+(-4)}{2}=\mathbf{1}$

6 (1) 내분하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\dfrac{1\times3+3\times(-1)}{1+3}=0,$

$y=\dfrac{1\times6+3\times(-2)}{1+3}=0$

$\therefore$ **(0, 0)**

(2) 내분하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\dfrac{3\times3+1\times(-1)}{3+1}=2,$

$y=\dfrac{3\times6+1\times(-2)}{3+1}=4$

$\therefore$ **(2, 4)**

(3) 중점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\dfrac{-1+3}{2}=1,\ y=\dfrac{-2+6}{2}=2$

$\therefore$ **(1, 2)**

7 (1) 내분하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\dfrac{2\times8+3\times(-2)}{2+3}=2,$

$y=\dfrac{2\times1+3\times1}{2+3}=1$

$\therefore$ **(2, 1)**

(2) 내분하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\dfrac{3\times8+2\times(-2)}{3+2}=4,$

$y=\dfrac{3\times1+2\times1}{3+2}=1$

$\therefore$ **(4, 1)**

(3) 중점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\dfrac{-2+8}{2}=3,\ y=\dfrac{1+1}{2}=1$

$\therefore$ **(3, 1)**

기초 개념 평가

본문 | 014, 015쪽

01 $|x_2-x_1|$

02 y_2-y_1

03 x_1^2

04 $m:n$, 내분점

05 $1:1$

06 $\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$

07 nx_1

08 $m=n$

09 $2:1$

10 3, 3

기초 문제 평가

본문 | 016, 017쪽

1 $\overline{AB}=\sqrt{(a-2)^2+\{6-(-6)\}^2}=\sqrt{(a-2)^2+144}$

$\overline{AB}=13$에서 $\sqrt{(a-2)^2+144}=13$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-4a-21=0,\ (a+3)(a-7)=0$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=7$

그런데 $a>0$이므로 $\boldsymbol{a=7}$

2 $\overline{AB}=\sqrt{(3+2)^2+(5-a)^2}=\sqrt{a^2-10a+50}$

$\overline{AC}=\sqrt{(3+2)^2+(-1-a)^2}=\sqrt{a^2+2a+26}$

$\overline{AB}=\overline{AC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$이므로

$a^2-10a+50=a^2+2a+26$

$-12a=-24 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a=2}$

3 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면

$\overline{AP}=\sqrt{(a-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{a^2-8a+20}$

$\overline{BP}=\sqrt{(a-1)^2+1^2}=\sqrt{a^2-2a+2}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$a^2-8a+20=a^2-2a+2$

$-6a=-18 \qquad \therefore\ a=3$

점 Q의 좌표를 $Q(0,\ b)$라 하면

$\overline{AQ}=\sqrt{(-4)^2+(b-2)^2}=\sqrt{b^2-4b+20}$

$\overline{BQ}=\sqrt{(-1)^2+(b+1)^2}=\sqrt{b^2+2b+2}$

$\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$b^2-4b+20=b^2+2b+2$

$-6b=-18 \qquad \therefore\ b=3$

$P(3,\ 0),\ Q(0,\ 3)$에서

$\overline{PQ}=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\boldsymbol{3\sqrt{2}}$

4 점 P는 직선 $y=2x$ 위의 점이므로 $P(a,\ 2a)$라 하면

$\overline{AP}=\sqrt{(a-1)^2+(2a+1)^2}=\sqrt{5a^2+2a+2}$

$\overline{BP}=\sqrt{(a-3)^2+(2a-1)^2}=\sqrt{5a^2-10a+10}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$5a^2+2a+2=5a^2-10a+10$

$12a=8 \qquad \therefore\ a=\dfrac{2}{3}$

따라서 점 P의 좌표는 $\boldsymbol{\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)}$

5 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면

$\overline{AP}=\sqrt{(a-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{a^2-4a+20}$

$\overline{BP}=\sqrt{(a-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{a^2-8a+20}$

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2&=(a^2-4a+20)+(a^2-8a+20)\\&=2a^2-12a+40\\&=2(a-3)^2+22\end{aligned}$$

따라서 $a=3$일 때, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 **22**이다.

6 $\angle A=90^\circ$이므로 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$

$\overline{AB}=\sqrt{(7-a)^2+(1-5)^2}=\sqrt{a^2-14a+65}$

$\overline{BC}=\sqrt{(0-7)^2+(2-1)^2}=\sqrt{50}$

$\overline{CA}=\sqrt{(a-0)^2+(5-2)^2}=\sqrt{a^2+9}$

$50=(a^2-14a+65)+(a^2+9)$

$a^2-7a+12=0,\ (a-3)(a-4)=0$

$\therefore\ \boldsymbol{a=3}$ **또는** $\boldsymbol{a=4}$

7 $\dfrac{2+a}{2}=4,\ \dfrac{5+b}{2}=-3$에서

$a=6,\ b=-11 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a+b=-5}$

8 $\dfrac{2\times b+1\times 3}{2+1}=-3$에서

$2b+3=-9 \qquad \therefore\ \boldsymbol{b=-6}$

$\dfrac{2\times(-2)+1\times a}{2+1}=1$에서

$a-4=3 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a=7}$

9 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times 6+3\times 1}{2+3},\ \dfrac{2\times 7+3\times(-3)}{2+3}\right)$, 즉 $(3,\ 1)$

선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{3\times 6+2\times 1}{3+2},\ \dfrac{3\times 7+2\times(-3)}{3+2}\right)$, 즉 $(4,\ 3)$

$\therefore\ P(3,\ 1),\ Q(4,\ 3)$

따라서 구하는 선분 PQ의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{3+4}{2},\ \dfrac{1+3}{2}\right)$, 즉 $\boldsymbol{\left(\dfrac{7}{2},\ 2\right)}$

10 $3\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}:\overline{BC}=1:3$

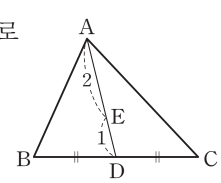
즉, 점 C는 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times 5+3\times(-3)}{1+3},\ \dfrac{1\times(-4)+3\times 4}{1+3}\right)$, 즉 $\boldsymbol{(-1,\ 2)}$

11 점 E는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\left(\dfrac{1+2+(-6)}{3},\ \dfrac{0+1+5}{3}\right)$, 즉

$\boldsymbol{(-1,\ 2)}$



다른 풀이 $D(-2,\ 3)$이므로 선분 AD를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\dfrac{2\times(-2)+1\times 1}{2+1}=-1,\ \dfrac{2\times 3+1\times 0}{2+1}=2$

따라서 점 E의 좌표는 $(-1,\ 2)$

12 $\dfrac{a+b+5}{3}=3$에서 $a+b+5=9 \qquad \therefore\ a+b=4$

$\dfrac{3+1+ab}{3}=2$에서 $ab+4=6 \qquad \therefore\ ab=2$

$\therefore\ a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4^2-2\times 2=\boldsymbol{12}$

13 점 M의 좌표는

$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$, 즉 $(1, 4)$

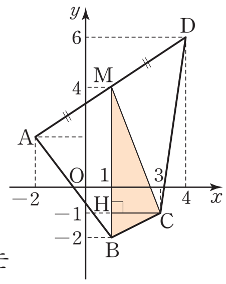
이때 $B(1, -2)$, $M(1, 4)$이므로

$\overline{BM}=6$

한편 점 C에서 선분 BM에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{CH}=2$

따라서 구하는 삼각형 BCM의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BM}\times\overline{CH}=\frac{1}{2}\times6\times2=\mathbf{6}$



14 점 B의 좌표를 (a, b)라 하면 변 AB의 중점 M의 좌표가 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$이므로

$\frac{2+a}{2}=\frac{1}{2}, \frac{4+b}{2}=1$

$\therefore a=-1, b=-2$

$\therefore B(-1, -2)$

또 점 C의 좌표를 (m, n)이라 하면 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 $(1, 1)$이므로

$\frac{2+(-1)+m}{3}=1, \frac{4+(-2)+n}{3}=1$

$\therefore m=2, n=1$

$\therefore C(2, 1)$

이때 변 AC를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{1\times2+2\times2}{1+2}=2, y=\frac{1\times1+2\times4}{1+2}=3$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\mathbf{(2, 3)}$

15 변 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2\times5+1\times(-1)}{2+1}, \frac{2\times(-2)+1\times1}{2+1}\right)$, 즉 $(3, -1)$

변 BC를 $2:1$로 내분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{2\times2+1\times5}{2+1}, \frac{2\times5+1\times(-2)}{2+1}\right)$, 즉 $\left(3, \frac{8}{3}\right)$

변 CA를 $2:1$로 내분하는 점 R의 좌표는

$\left(\frac{2\times(-1)+1\times2}{2+1}, \frac{2\times1+1\times5}{2+1}\right)$, 즉 $\left(0, \frac{7}{3}\right)$

$\therefore P(3, -1), Q\left(3, \frac{8}{3}\right), R\left(0, \frac{7}{3}\right)$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{3+3+0}{3}, \frac{-1+\frac{8}{3}+\frac{7}{3}}{3}\right)$, 즉 $\mathbf{\left(2, \frac{4}{3}\right)}$

다른 풀이 삼각형 ABC의 세 변을 각각 $m:n$으로 내분하는 점을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 ABC의 무게중심과 삼각형 PQR의 무게중심은 일치한다.

따라서 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 $2:1$로 내분하는 점을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표와 같다.

$\left(\frac{-1+5+2}{3}, \frac{1+(-2)+5}{3}\right)$, 즉 $\left(2, \frac{4}{3}\right)$

02 직선의 방정식

기초 개념 피드백 & TEST

본문 | 019쪽

1-1 (1) $\mathbf{3, -3}$ (2) $\mathbf{1, 5}$

1-2 (1) $y=-x-2$에 $y=0$을 대입하면 $x=-2$

따라서 **x절편은 -2**

$y=-x-2$에 $x=0$을 대입하면 $y=-2$

따라서 **y절편은 -2**

(2) $y=2x+6$에 $y=0$을 대입하면 $x=-3$

따라서 **x절편은 -3**

$y=2x+6$에 $x=0$을 대입하면 $y=6$

따라서 **y절편은 6**

(3) $y=\frac{1}{2}x-3$에 $y=0$을 대입하면 $x=6$

따라서 **x절편은 6**

$y=\frac{1}{2}x-3$에 $x=0$을 대입하면 $y=-3$

따라서 **y절편은 -3**

2-1 (1) $\mathbf{-3}$ (2) $\mathbf{-\frac{3}{2}}$

2-2 (1) (기울기)$=\frac{-2-4}{1-(-5)}=\frac{-6}{6}=\mathbf{-1}$

(2) (기울기)$=\frac{1-(-4)}{10-8}=\mathbf{\frac{5}{2}}$

(3) (기울기)$=\frac{6-15}{1-7}=\frac{-9}{-6}=\mathbf{\frac{3}{2}}$

3-1 (1) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (2) $\mathbf{\frac{8}{3}}$

3-2 (1) $8x-2y+14=0$에서 $2y=8x+14$

$\therefore \mathbf{y=4x+7}$

(2) $x+4y-6=0$에서 $4y=-x+6$

$\therefore \mathbf{y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}}$

(3) $3x-2y-10=0$에서 $2y=3x-10$

$\therefore \mathbf{y=\frac{3}{2}x-5}$

본문 | 020~025쪽

1-1 (1) $\mathbf{1, 5}$ (2) $\mathbf{0, 15}$

1-2 (1) 점 $(0, 2)$를 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y-2=3(x-0)$ $\quad\therefore \mathbf{y=3x+2}$

(2) 점 $(2, -1)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y-(-1)=\frac{1}{2}(x-2)$ $\quad\therefore \mathbf{y=\frac{1}{2}x-2}$

(3) x절편이 5이므로 점 $(5, 0)$을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y-0=-2(x-5)$ $\quad\therefore \mathbf{y=-2x+10}$

2-1 (1) **3, 4** (2) **3**

2-2 (1) $y-8=\frac{5-8}{2-3}(x-3)$ $\therefore$ $\boldsymbol{y=3x-1}$

(2) $y-4=\frac{4-(-2)}{2-(-1)}(x-2)$ $\therefore$ $\boldsymbol{y=2x}$

참고 $y-(-2)=\frac{4-(-2)}{2-(-1)}\{x-(-1)\}$로 구해도 된다.

(3) $y-0=\frac{4-0}{0-2}(x-2)$ $\therefore$ $\boldsymbol{y=-2x+4}$

다른 풀이 x절편이 2, y절편이 4이므로 구하는 직선의 방정식은

$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1,\ 2x+y=4$ $\therefore$ $y=-2x+4$

(4) 두 점의 x좌표가 같으므로 $\boldsymbol{x=-1}$

3-1 **1, 4**

3-2 (1) x절편이 5, y절편이 1인 직선의 방정식은

$\frac{x}{5}+\frac{y}{1}=1,\ \frac{x}{5}+y=1$

$\therefore$ $\boldsymbol{y=-\frac{1}{5}x+1}$

(2) x절편이 1, y절편이 2인 직선의 방정식은

$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1,\ 2x+y=2$

$\therefore$ $\boldsymbol{y=-2x+2}$

(3) x절편이 -3, y절편이 6인 직선의 방정식은

$\frac{x}{-3}+\frac{y}{6}=1,\ -2x+y=6$

$\therefore$ $\boldsymbol{y=2x+6}$

4-1 (1) **5** (2) $\boldsymbol{x}$**, 2**

4-2 (1) y축에 평행하므로 구하는 직선의 방정식은

$\boldsymbol{x=1}$

(2) x축에 수직인 직선은 y축에 평행하므로 구하는 직선의 방정식은 $\boldsymbol{x=-5}$

5-1 **4, 4, 4**

5-2 (1) 기울기가 2이고 점 $(1, k)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-k=2(x-1)$ $\therefore$ $y=2x-2+k$

이 직선이 점 $(-2, -2)$를 지나므로

$-2=-4-2+k$ $\therefore$ $\boldsymbol{k=4}$

(2) 두 점 $(1, 1)$, $(-1, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{3-1}{-1-1}(x-1)$ $\therefore$ $y=-x+2$

이 직선이 점 $(k, 5)$를 지나므로

$5=-k+2$ $\therefore$ $\boldsymbol{k=-3}$

(3) x절편이 1, y절편이 k인 직선의 방정식은

$\frac{x}{1}+\frac{y}{k}=1$ $\therefore$ $y=-kx+k$

이 직선이 점 $(2, -3)$을 지나므로

$-3=-2k+k$ $\therefore$ $\boldsymbol{k=3}$

6-1 **3, 3**

6-2 (1) 직선 $y=4x-2$에 평행한 직선의 기울기는 4이고, 이 직선이 점 $(-1, -1)$을 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$y-(-1)=4\{x-(-1)\},\ y+1=4(x+1)$

$\therefore$ $\boldsymbol{y=4x+3}$

(2) 직선 $2x+y-1=0$, 즉 $y=-2x+1$에 평행한 직선의 기울기는 -2이고, 이 직선이 점 $(2, -1)$을 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$y-(-1)=-2(x-2),\ y+1=-2(x-2)$

$\therefore$ $\boldsymbol{y=-2x+3}$

7-1 (1) $\boldsymbol{-2}$ (2) **1, 2**

7-2 (1) 두 직선이 서로 평행하므로 $\boldsymbol{a=-1}$

(2) 두 직선이 서로 평행하므로

$\frac{2}{1}=\frac{a}{a-1}\neq\frac{3}{-4}$

(i) $2=\frac{a}{a-1}$에서 $2(a-1)=a$ $\therefore$ $a=2$

(ii) $\frac{a}{a-1}\neq-\frac{3}{4}$에서 $4a\neq-3(a-1)$ $\therefore$ $a\neq\frac{3}{7}$

(i), (ii)에서 $\boldsymbol{a=2}$

8-1 $\boldsymbol{-1, \frac{1}{2}, 2}$

8-2 (1) 구하는 직선의 기울기를 m이라 하면

$\frac{1}{3}m=-1$에서 $m=-3$

따라서 원점을 지나고 기울기가 -3인 직선의 방정식은

$\boldsymbol{y=-3x}$

(2) 구하는 직선의 기울기를 m이라 하면

$\frac{1}{2}m=-1$에서 $m=-2$

따라서 점 $(-1, 2)$를 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y-2=-2\{x-(-1)\}$ $\therefore$ $\boldsymbol{y=-2x}$

9-1 (1) $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$ (2) $\boldsymbol{0, -2}$

9-2 (1) 두 직선이 서로 수직이므로 $\boldsymbol{a=-3}$

(2) 두 직선이 서로 수직이므로

$2\times3+a\times(-1)=0$ $\therefore$ $\boldsymbol{a=6}$

10-1 $\boldsymbol{-1, 4}$

10-2 (1) (i) 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-9-3}{6-4}=-6$

(ii) 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{4+6}{2}, \frac{3+(-9)}{2}\right)$, 즉 $(5, -3)$

(i), (ii)에서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{1}{6}$이고 점 $(5, -3)$을 지나는 직선이므로

$y-(-3)=\frac{1}{6}(x-5)$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{x-6y-23=0}$

(2) (i) 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{4-2}{5-(-3)}=\frac{1}{4}$

(ii) 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2+4}{2}\right)$, 즉 $(1, 3)$

(i), (ii)에서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 -4이고 점 $(1, 3)$을 지나는 직선이므로

$y-3=-4(x-1)$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{y=-4x+7}$

11-1 $\boldsymbol{-1, 4}$

11-2 (i) 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-1-3}{a-2}=\frac{-4}{a-2}$

이 직선이 직선 $x-y+b=0$과 서로 수직이므로

$\frac{-4}{a-2}=-1$, $a-2=4$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{a=6}$

(ii) 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+a}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right)$, 즉 $(4, 1)$

점 $(4, 1)$이 직선 $x-y+b=0$ 위에 있으므로

$4-1+b=0$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{b=-3}$

12-1 $\boldsymbol{1, 1}$

12-2 (1) $\frac{|3\times(-2)-4\times1+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{5}{\sqrt{25}}=\boldsymbol{1}$

(2) $\frac{|5\times0+12\times0-26|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{26}{\sqrt{169}}=\frac{26}{13}=\boldsymbol{2}$

13-1 $\boldsymbol{3, 10, 10}$

13-2 (1) 구하는 직선의 방정식을 $y=-2x+c$, 즉 $2x+y-c=0$으로 놓으면 원점에서의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|-c|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$, $|-c|=5$ $\quad\therefore$ $c=\pm5$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$\boldsymbol{2x+y-5=0}$ **또는** $\boldsymbol{2x+y+5=0}$

(2) 직선 $x+2y+5=0$의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 방정식은

$y=2x+c$, 즉 $2x-y+c=0$

으로 놓을 수 있다.

이때 원점과 이 직선 사이의 거리가 2이므로

$\frac{|c|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2$, $|c|=2\sqrt{5}$ $\quad\therefore$ $c=\pm2\sqrt{5}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$\boldsymbol{2x-y-2\sqrt{5}=0}$ **또는** $\boldsymbol{2x-y+2\sqrt{5}=0}$

(3) 원점을 지나는 직선의 방정식을

$y=ax$, 즉 $ax-y=0$

으로 놓으면 점 $(1, 2)$와 이 직선 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|a-2|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=1$, $|a-2|=\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하면

$a^2-4a+4=a^2+1$

$-4a=-3$ $\quad\therefore$ $a=\frac{3}{4}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$\frac{3}{4}x-y=0$, 즉 $\boldsymbol{3x-4y=0}$

기초 개념 평가

본문 | 026, 027쪽

01	$\boldsymbol{n}$	02	$\boldsymbol{m}$
03	$\boldsymbol{y_2-y_1}$	04	**1**
05	$\boldsymbol{m=m', n\neq n'}$	06	**평행하다**
07	$\boldsymbol{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}}$	08	**평행하다**
09	$\boldsymbol{mm'=-1}$	10	**수직이다**
11	**0**	12	$\boldsymbol{-1}$
13	**중점**	14	$\boldsymbol{\lvert ax_1+by_1+c\rvert}$
15	$\boldsymbol{\lvert c\rvert}$		

기초 문제 평가

본문 | 028, 029쪽

1 (1) $y-5=-1\times\{x-(-1)\}$, $y-5=-(x+1)$

$\therefore$ $\boldsymbol{y=-x+4}$

(2) x절편이 4이므로 점 $(4, 0)$을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y-0=1\times(x-4)$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{y=x-4}$

(3) x축에 수직인 직선은 y축에 평행하므로 구하는 직선의 방정식은 $\boldsymbol{x=-4}$

(4) y축에 수직인 직선은 x축에 평행하므로 구하는 직선의 방정식은 $\boldsymbol{y=5}$

(5) $y-(-1)=\frac{-3-(-1)}{1-2}(x-2)$, $y+1=2(x-2)$

$\therefore$ $\boldsymbol{y=2x-5}$

(6) 두 점의 x좌표가 같으므로 $\boldsymbol{x=3}$

(7) $y-0=\frac{-6-0}{0-2}(x-2)$, $y=3(x-2)$

$\therefore$ $\boldsymbol{y=3x-6}$

다른 풀이 x절편이 2, y절편이 -6이므로 구하는 직선의 방정식은

$\frac{x}{2}+\frac{y}{-6}=1$, $-3x+y=-6$ $\qquad \therefore y=3x-6$

2 두 점 $(1, -3)$, $(-3, 1)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+(-3)}{2}, \frac{-3+1}{2}\right)$, 즉 $(-1, -1)$

따라서 점 $(-1, -1)$을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y-(-1)=3\{x-(-1)\}$, $y+1=3(x+1)$

$\therefore$ $\boldsymbol{y=3x+2}$

3 점 $(-1, 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식을 $y-2=m(x+1)$로 놓으면 이 직선의 x절편이 -2이므로 점 $(-2, 0)$을 지난다.

$0-2=m(-2+1)$ $\qquad \therefore m=2$

이때 직선 $y=2x+4$가 점 $(1, a)$를 지나므로

$a=2+4$ $\qquad \therefore$ $\boldsymbol{a=6}$

다른 풀이 구하는 직선의 x절편이 -2이므로 점 $(-2, 0)$을 지난다.

따라서 두 점 $(-1, 2)$, $(-2, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{0-2}{-2-(-1)}\{x-(-1)\}$, $y-2=2(x+1)$

$\therefore y=2x+4$

이때 직선 $y=2x+4$가 점 $(1, a)$를 지나므로 $a=6$

4 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같으므로

$\frac{a-1}{1-(-1)}=\frac{5-1}{a-(-1)}$, $(a-1)(a+1)=8$

$a^2-1=8$, $a^2=9$ $\qquad \therefore$ $\boldsymbol{a=3}$ $(\because a>0)$

참고 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있다.

$\Longleftrightarrow$ 두 점 A, B를 지나는 직선 위에 점 C가 있다.

$\Longleftrightarrow$ 직선 AB와 직선 BC(직선 AC)의 기울기가 같다.

$\Longleftrightarrow$ 세 점이 삼각형을 이루지 않는다.

5 $x+y+5=0$ $\qquad$ ······ ㉠

$x-2y-4=0$ $\qquad$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=-3$

한편 $4x-2y-3=0$에서 $y=2x-\frac{3}{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 기울기가 2이고 점 $(-2, -3)$을 지나는 직선이므로

$y-(-3)=2\{x-(-2)\}$ $\qquad \therefore$ $\boldsymbol{y=2x+1}$

6 두 점 $(-3, 1)$, $(2, -1)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-1-1}{2-(-3)}=-\frac{2}{5}$

점 $(1, 0)$을 지나고 기울기가 $-\frac{2}{5}$인 직선의 방정식은

$y-0=-\frac{2}{5}(x-1)$ $\qquad \therefore$ $\boldsymbol{2x+5y-2=0}$

7 직선 $y=2x$에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$2m=-1$에서 $m=-\frac{1}{2}$

점 $(2, 4)$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y-4=-\frac{1}{2}(x-2)$ $\qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x+5$

$y=0$일 때, $0=-\frac{1}{2}x+5$ $\qquad \therefore x=10$

따라서 구하는 x절편은 **10**이다.

참고 x절편 ⇨ $y=f(x)$에 $y=0$을 대입한 x의 값

y절편 ⇨ $y=f(x)$에 $x=0$을 대입한 y의 값

8 두 직선이 서로 평행하므로

$a=\frac{a+2}{a}\neq 2$

(ⅰ) $a=\frac{a+2}{a}$에서 $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$ $\qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=2$

(ⅱ) $a\neq 2$, $\frac{a+2}{a}\neq 2$에서 $a\neq 2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\boldsymbol{a=-1}$

9 (ⅰ) 직선 $x+ay+1=0$과 직선 $x+y+1=0$이 수직일 때

$1\times 1+a\times 1=0$ $\qquad \therefore a=-1$

(ⅱ) 직선 $x+ay+1=0$과 직선 $x+by-1=0$이 평행할 때

$1=\frac{b}{a}\neq -1$ $\qquad \therefore a=b$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\boldsymbol{a=-1}$, $\boldsymbol{b=-1}$

10 (ⅰ) 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-2-8}{3-(-5)}=-\frac{5}{4}$

(ⅱ) 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{8+(-2)}{2}\right)$, 즉 $(-1, 3)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{4}{5}$이고, 점 $(-1, 3)$을 지나는 직선이므로

$y-3=\frac{4}{5}\{x-(-1)\}$ $\qquad \therefore y=\frac{4}{5}x+\frac{19}{5}$ $\qquad$ ······ ㉠

이때 점 $(-1, a)$가 직선 ㉠ 위의 점이므로

$a=\frac{4}{5}\times(-1)+\frac{19}{5}$ $\qquad \therefore$ $\boldsymbol{a=3}$

11 $x+y-2=0$ ⋯⋯ ㉠

$3x-y-2=0$ ⋯⋯ ㉡

$ax-y-3=0$ ⋯⋯ ㉢

(i) 세 직선이 평행한 경우

두 직선 ㉠, ㉡의 기울기가 각각 -1, 3이므로 세 직선이 평행할 수는 없다.

(ii) 두 직선이 평행한 경우

두 직선 ㉠, ㉢이 평행하려면

$\frac{1}{a}=-1\neq\frac{2}{3}$ $\quad\therefore a=-1$

두 직선 ㉡, ㉢이 평행하려면

$\frac{3}{a}=1\neq\frac{2}{3}$ $\quad\therefore a=3$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1$

두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표가 $(1, 1)$이므로 직선 ㉢이 이 점을 지나려면

$a-1-3=0$ $\quad\therefore a=4$

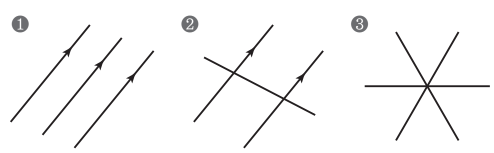
(i), (ii), (iii)에서 $\boldsymbol{a=-1}$ **또는** $\boldsymbol{a=3}$ **또는** $\boldsymbol{a=4}$

참고 서로 다른 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우

❶ 세 직선이 평행할 때

❷ 두 직선이 평행할 때

❸ 세 직선이 한 점에서 만날 때



12 점 $(2, a)$와 직선 $2x-y+2=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|2\times2+a\times(-1)+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|6-a|=5$

$6-a=5$ 또는 $6-a=-5$

$\therefore \boldsymbol{a=1}$ **또는** $\boldsymbol{a=11}$

13 평행한 두 직선

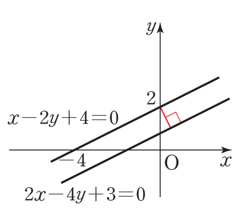
$x-2y+4=0$, $2x-4y+3=0$

사이의 거리는 직선

$x-2y+4=0$ 위의 한 점

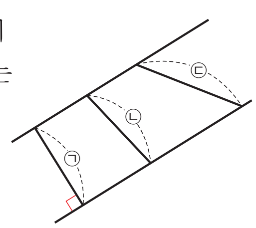
$(0, 2)$와 직선 $2x-4y+3=0$

사이의 거리와 같으므로



$\frac{|2\times0+(-4)\times2+3|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{5}{2\sqrt{5}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{2}}$

참고 오른쪽 그림에서 두 직선이 평행할 때, 두 직선 사이의 거리는 ㉠이다.



03 원의 방정식

본문 | 030~035쪽

1-1 (1) **2** (2) **3, 25**

1-2 (1) $\{x-(-2)\}^2+(y-3)^2=2^2$이므로

$\boldsymbol{(x+2)^2+(y-3)^2=4}$

(2) $\boldsymbol{x^2+y^2=1}$

(3) 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은 $x^2+y^2=r^2$

이 원이 점 $(1, \sqrt{3})$을 지나므로

$1^2+(\sqrt{3})^2=r^2$ $\quad\therefore r^2=4$

따라서 구하는 원의 방정식은 $\boldsymbol{x^2+y^2=4}$

(4) 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-2)^2=r^2$

이 원이 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$(-2+3)^2+(0-2)^2=r^2$ $\quad\therefore r^2=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$\boldsymbol{(x+3)^2+(y-2)^2=5}$

2-1 $\boldsymbol{\sqrt{5}}$**, 1**

2-2 (1) 구하는 원의 중심을 $\mathrm{C}(a, b)$라 하면

$a=\frac{1+9}{2}=5$, $b=\frac{-2+4}{2}=1$

또 원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(5-1)^2+\{1-(-2)\}^2}=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$\boldsymbol{(x-5)^2+(y-1)^2=25}$

(2) 구하는 원의 중심을 $\mathrm{C}(a, b)$라 하면

$a=\frac{5-3}{2}=1$, $b=\frac{3+7}{2}=5$

또 원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(1-5)^2+(5-3)^2}=2\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-5)^2=20}$

3-1 $\boldsymbol{-1, 1}$

3-2 (1) 주어진 방정식을 변형하면

$(x^2-2x+1)+(y^2+10y+25)=36$

$(x-1)^2+(y+5)^2=6^2$

따라서 주어진 방정식이 나타내는 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이는

중심의 좌표 : $\boldsymbol{(1, -5)}$**, 반지름의 길이 : 6**

(2) 주어진 방정식을 변형하면

$(x^2+8x+16)+(y^2-4y+4)=20$

$(x+4)^2+(y-2)^2=(2\sqrt{5})^2$

따라서 주어진 방정식이 나타내는 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이는

중심의 좌표 : $\boldsymbol{(-4, 2)}$**, 반지름의 길이 :** $\boldsymbol{2\sqrt{5}}$

4-1 $\mathbf{8, 32, 2}$

4-2 (1) 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하면 점 $(0, 0)$을 지나므로 $C=0$

따라서 원의 방정식은 $x^2+y^2+Ax+By=0$

또 두 점 $(4, 0)$, $(1, 1)$을 지나므로

$16+4A=0$, $2+A+B=0$

두 식을 연립하여 풀면 $A=-4$, $B=2$

따라서 구하는 원의 방정식은

$\boldsymbol{x^2+y^2-4x+2y=0}$

(2) 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하면 점 $(0, 0)$을 지나므로 $C=0$

따라서 원의 방정식은 $x^2+y^2+Ax+By=0$

또 두 점 $(0, 4)$, $(3, 3)$을 지나므로

$16+4B=0$, $18+3A+3B=0$

두 식을 연립하여 풀면 $A=-2$, $B=-4$

따라서 구하는 원의 방정식은

$\boldsymbol{x^2+y^2-2x-4y=0}$

5-1 (1) **9** (2) **1** (3) **9**

5-2 (1) x축에 접하는 원의 방정식은

(반지름의 길이)$=|$(중심의 y좌표)$|$

$\therefore \boldsymbol{(x-2)^2+(y+1)^2=1}$

(2) y축에 접하는 원의 방정식은

(반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|$

$\therefore \boldsymbol{(x+3)^2+(y+2)^2=9}$

(3) x축, y축에 동시에 접하는 원의 방정식은

(반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|=|$(중심의 y좌표)$|$

$\therefore \boldsymbol{(x+5)^2+(y-5)^2=25}$

5-3 $x^2+y^2+2ax+4y+3=0$에서

$(x+a)^2+(y+2)^2=a^2+1$

이므로 중심이 $(-a, -2)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{a^2+1}$인 원이다. 이 원이 x축에 접하므로

$\sqrt{a^2+1}=|-2|$, $a^2+1=4$

$a>0$이므로 $\boldsymbol{a=\sqrt{3}}$

6-1 $\mathbf{>, 4}$

6-2 (1) 풀이 1 $y=x+1$을 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+(x+1)^2=1$, $x^2+x=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times0=1>0$

따라서 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=x+1$은 **서로 다른 두 점에서 만난다.**

풀이 2 원의 중심인 원점과 직선 $y=x+1$, 즉 $x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

원의 반지름의 길이는 1이고 $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 풀이 1 $y=x-4$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+(x-4)^2=1$, $2x^2-8x+15=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-4)^2-2\times15=-14<0$$

따라서 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=x-4$는 **만나지 않는다.**

풀이 2 원의 중심인 원점과 직선 $y=x-4$, 즉 $x-y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

원의 반지름의 길이는 1이고 $2\sqrt{2}>1$이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

6-3 풀이 1 $y=2x+k$를 $x^2+y^2=4$에 대입하면

$x^2+(2x+k)^2=4$, $5x^2+4kx+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-4)=-k^2+20$$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나므로 $D>0$에서

$-k^2+20>0$, $k^2-20<0$, $(k+2\sqrt{5})(k-2\sqrt{5})<0$

$\therefore \boldsymbol{-2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}}$

(2) 한 점에서 만나므로 $D=0$에서

$-k^2+20=0$, $k^2-20=0$, $(k+2\sqrt{5})(k-2\sqrt{5})=0$

$\therefore \boldsymbol{k=-2\sqrt{5}}$ **또는** $\boldsymbol{k=2\sqrt{5}}$

(3) 만나지 않으므로 $D<0$에서

$-k^2+20<0$, $k^2-20>0$, $(k+2\sqrt{5})(k-2\sqrt{5})>0$

$\therefore \boldsymbol{k<-2\sqrt{5}}$ **또는** $\boldsymbol{k>2\sqrt{5}}$

풀이 2 (1) 원의 중심인 원점과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2보다 작아야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}<2,\ |k|<2\sqrt{5}$$

$\therefore -2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$

(2) 원의 중심인 원점과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2와 같아야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2,\ |k|=2\sqrt{5}$$

$\therefore k=-2\sqrt{5}$ 또는 $k=2\sqrt{5}$

(3) 원의 중심인 원점과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2보다 커야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}>2,\ |k|>2\sqrt{5}$$

$\therefore k<-2\sqrt{5}$ 또는 $k>2\sqrt{5}$

7-1 (1) **3** (2) **13**

7-2 (1) $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$에서 $m=3$, $r=\sqrt{10}$이므로

$y=3x\pm\sqrt{10}\sqrt{3^2+1}$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{y=3x\pm10}$

(2) $x_1x+y_1y=r^2$에서 $x_1=-4$, $y_1=2$, $r^2=20$이므로

$-4x+2y=20$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{y=2x+10}$

8-1 $\boldsymbol{-1, 1}$

8-2 $x+y+1=0$에서 $y=-x-1$

$y=-x-1$에 수직인 직선의 기울기 m은

$(-1)\times m=-1$에서 $m=1$

$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$에서 $m=1$, $r=7$이므로

$y=x\pm7\sqrt{1^2+1}$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{y=x\pm7\sqrt{2}}$

9-1 $\boldsymbol{1, \pm1, \sqrt{2}}$

9-2 (1) 풀이 1 접점을 $P(x_1, y_1)$이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=3$

이 접선이 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3y_1=3$ $\quad\therefore$ $y_1=1$

점 $P(x_1, y_1)$은 원 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=3$ …… ㉠

$y_1=1$을 ㉠에 대입하면

$x_1^2=2$ $\quad\therefore$ $x_1=\pm\sqrt{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$\boldsymbol{\sqrt{2}x+y=3}$ **또는** $\boldsymbol{\sqrt{2}x-y=-3}$

풀이 2 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-3=mx$, 즉 $mx-y+3=0$

원의 중심인 원점과 이 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{3}$과 같아야 하므로

$\frac{|3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}$, $3=\sqrt{3}\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $m^2=2$

$\therefore$ $m=-\sqrt{2}$ 또는 $m=\sqrt{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$\sqrt{2}x+y-3=0$ 또는 $\sqrt{2}x-y+3=0$

(2) 풀이 1 접점을 $P(x_1, y_1)$이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=1$

이 접선이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$2x_1+y_1=1$ $\quad\therefore$ $y_1=-2x_1+1$ …… ㉠

점 $P(x_1, y_1)$은 원 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$x_1^2+(-2x_1+1)^2=1$, $5x_1^2-4x_1=0$

$x_1(5x_1-4)=0$ $\quad\therefore$ $x_1=0$ 또는 $x_1=\frac{4}{5}$

$x_1=0$일 때 $y_1=1$, $x_1=\frac{4}{5}$일 때 $y_1=-\frac{3}{5}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=1$ 또는 $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y=1$, 즉

$\boldsymbol{y=1}$ **또는** $\boldsymbol{4x-3y=5}$

풀이 2 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-1=m(x-2)$, 즉 $mx-y-2m+1=0$

원의 중심인 원점과 이 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1과 같아야 하므로

$\frac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$, $|-2m+1|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$3m^2-4m=0$, $m(3m-4)=0$

$\therefore$ $m=0$ 또는 $m=\frac{4}{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=1$ 또는 $\frac{4}{3}x-y-\frac{5}{3}=0$, 즉

$y=1$ 또는 $4x-3y-5=0$

9-3 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y=mx$, 즉 $mx-y=0$

원의 중심인 점 $(0, 4)$와 이 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2와 같아야 하므로

$\frac{|-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$, $4=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $m^2=3$

$\therefore$ $m=-\sqrt{3}$ 또는 $m=\sqrt{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$\boldsymbol{\sqrt{3}x+y=0}$ **또는** $\boldsymbol{\sqrt{3}x-y=0}$

집중 연습

본문 | 036, 037쪽

1 (1) $\boldsymbol{(x+1)^2+(y-3)^2=16}$

(2) 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은 $x^2+y^2=r^2$

이 원이 점 $(3, 1)$을 지나므로

$3^2+1^2=r^2$ $\quad\therefore$ $r^2=10$

따라서 구하는 원의 방정식은

$\boldsymbol{x^2+y^2=10}$

(3) 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y+2)^2=r^2$

이 원이 점 $(2, 2)$를 지나므로

$(2+1)^2+(2+2)^2=r^2$ $\quad\therefore$ $r^2=25$

따라서 구하는 원의 방정식은

$\boldsymbol{(x+1)^2+(y+2)^2=25}$

(4) 구하는 원의 중심을 $\mathrm{C}(a, b)$라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$a=\frac{2-4}{2}=-1$, $b=\frac{1+5}{2}=3$

또 원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-1-2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$\boldsymbol{(x+1)^2+(y-3)^2=13}$

(5) 구하는 원의 중심을 $\mathrm{C}(a, b)$라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$a=\frac{-2+4}{2}=1$, $b=\frac{5-1}{2}=2$

또 원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\{1-(-2)\}^2+(2-5)^2}=3\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-2)^2=18}$

2 (1) 주어진 방정식을 변형하면

$(x^2-2x+1)+y^2=9$, $(x-1)^2+y^2=9$

중심의 좌표 : (1, 0), 반지름의 길이 : 3

(2) 주어진 방정식을 변형하면

$(x^2-2x+1)+(y^2-8y+16)=1$

$(x-1)^2+(y-4)^2=1$

중심의 좌표 : (1, 4), 반지름의 길이 : 1

(3) 주어진 방정식을 변형하면

$x^2+(y^2+4y+4)=1$, $x^2+(y+2)^2=1$

중심의 좌표 : (0, −2), 반지름의 길이 : 1

3 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하면

(1) 점 $(0, 0)$을 지나므로 $C=0$

따라서 원의 방정식은 $x^2+y^2+Ax+By=0$

또 두 점 $(1, 0)$, $(2, 1)$을 지나므로

$1+A=0$, $5+2A+B=0$

두 식을 연립하여 풀면 $A=-1$, $B=-3$

$\therefore$ $\boldsymbol{x^2+y^2-x-3y=0}$

(2) 점 $(0, 0)$을 지나므로 $C=0$

따라서 원의 방정식은 $x^2+y^2+Ax+By=0$

또 두 점 $(1, 1)$, $(2, 4)$를 지나므로

$2+A+B=0$, $20+2A+4B=0$

두 식을 연립하여 풀면 $A=6$, $B=-8$

$\therefore$ $\boldsymbol{x^2+y^2+6x-8y=0}$

(3) 점 $(0, 0)$을 지나므로 $C=0$

따라서 원의 방정식은 $x^2+y^2+Ax+By=0$

또 두 점 $(0, 1)$, $(-1, 4)$를 지나므로

$1+B=0$, $17-A+4B=0$

두 식을 연립하여 풀면 $A=13$, $B=-1$

$\therefore$ $\boldsymbol{x^2+y^2+13x-y=0}$

4 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$에서

(1) $m=\sqrt{3}$, $r=2$이므로

$y=\sqrt{3}x\pm2\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}$ $\qquad\therefore$ $\boldsymbol{y=\sqrt{3}x\pm4}$

(2) $m=-1$, $r=\sqrt{2}$이므로

$y=-x\pm\sqrt{2}\sqrt{(-1)^2+1}$ $\qquad\therefore$ $\boldsymbol{y=-x\pm2}$

(3) $m=2$, $r=1$이므로

$y=2x\pm1\times\sqrt{2^2+1}$ $\qquad\therefore$ $\boldsymbol{y=2x\pm\sqrt{5}}$

(4) $y=-x+5$에서 $m=-1$, $r=\sqrt{5}$이므로

$y=-x\pm\sqrt{5}\sqrt{(-1)^2+1}$

$\therefore$ $\boldsymbol{y=-x\pm\sqrt{10}}$

(5) $x+\sqrt{3}y+1=0$에서 $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}$

이 직선과 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$-\frac{1}{\sqrt{3}}m=-1$ $\qquad\therefore$ $m=\sqrt{3}$

즉, $m=\sqrt{3}$, $r=\sqrt{3}$이므로

$y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{3}\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}$

$\therefore$ $\boldsymbol{y=\sqrt{3}x\pm2\sqrt{3}}$

5 $x_1x+y_1y=r^2$에서

(1) $x_1=1$, $y_1=-1$, $r^2=2$이므로 $\boldsymbol{x-y=2}$

(2) $x_1=3$, $y_1=4$, $r^2=25$이므로 $\boldsymbol{3x+4y=25}$

(3) $x_1=2$, $y_1=-2$, $r^2=8$이므로

$2x-2y=8$ $\qquad\therefore$ $\boldsymbol{x-y=4}$

6 (1) 풀이 1 접점을 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=1$

이 접선이 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3y_1=1$ $\qquad\therefore$ $y_1=\frac{1}{3}$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$은 원 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=1$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 ${x_1}^2=\frac{8}{9}$

$\therefore$ $x_1=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 또는 $x_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$-\frac{2\sqrt{2}}{3}x+\frac{1}{3}y=1$ 또는 $\frac{2\sqrt{2}}{3}x+\frac{1}{3}y=1$, 즉

$\boldsymbol{2\sqrt{2}x-y=-3}$ **또는** $\boldsymbol{2\sqrt{2}x+y=3}$

풀이 2 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-3=mx$, 즉 $mx-y+3=0$

원의 중심인 원점과 이 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1과 같아야 하므로

$\frac{|3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$, $3=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$9=m^2+1,\ m^2=8$

$\therefore\ m=-2\sqrt{2}$ 또는 $m=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$2\sqrt{2}x+y-3=0$ 또는 $2\sqrt{2}x-y+3=0$

(2) 풀이 1 접점을 $P(x_1, y_1)$이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=4$

이 접선이 점 $(2, 4)$를 지나므로

$2x_1+4y_1=4 \qquad \therefore\ x_1=-2y_1+2$ ...... ㉠

점 $P(x_1, y_1)$은 원 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=4$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(-2y_1+2)^2+{y_1}^2=4,\ 5{y_1}^2-8y_1=0$

$y_1(5y_1-8)=0 \qquad \therefore\ y_1=0$ 또는 $y_1=\frac{8}{5}$

$y_1=0$일 때 $x_1=2$, $y_1=\frac{8}{5}$일 때 $x_1=-\frac{6}{5}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$2x=4$ 또는 $-\frac{6}{5}x+\frac{8}{5}y=4$, 즉

$x=2$ 또는 $3x-4y=-10$

풀이 2 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-4=m(x-2)$, 즉 $mx-y-2m+4=0$

원의 중심인 원점과 이 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2와 같아야 하므로

$\frac{|-2m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2,\ |-2m+4|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$m^2-4m+4=m^2+1,\ m=\frac{3}{4}$

한편 점 $(2, 4)$에서 원에 그은 접선 중의 하나는 $x=2$이므로 구하는 접선의 방정식은

$x=2$ 또는 $\frac{3}{4}x-y+\frac{5}{2}=0$, 즉

$x=2$ 또는 $3x-4y+10=0$

참고 원 밖의 점에서 원에 그은 접선의 방정식은 두 개이다.

(3) 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-0=m(x-3)$, 즉 $mx-y-3m=0$

원의 중심인 점 $(1, -1)$과 이 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1과 같아야 하므로

$\frac{|m-(-1)-3m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\ |-2m+1|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4m^2-4m+1=m^2+1,\ 3m^2-4m=0$

$m(3m-4)=0 \qquad \therefore\ m=0$ 또는 $m=\frac{4}{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=0$ 또는 $\frac{4}{3}x-y-4=0$, 즉

$y=0$ 또는 $4x-3y-12=0$

기초 개념 평가

본문 | 038, 039쪽

01	$(x-a)^2+(y-b)^2$	02	x^2+y^2
03	2	04	b^2
05	a^2	06	a^2
07	$D>0$	08	$D=0$
09	$D<0$	10	$d<r$
11	$d=r$	12	$d>r$
13	m^2+1	14	r^2
15	반지름		

기초 문제 평가

본문 | 040, 041쪽

1 중심의 좌표가 $(-1, a)$이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은

$\{x-(-1)\}^2+(y-a)^2=2^2$, 즉 $(x+1)^2+(y-a)^2=4$

이 식이 $(x+b)^2+(y-3)^2=c$와 일치해야 하므로

$a=3,\ b=1,\ c=4$

$\therefore\ a+b+c=8$

2 중심의 좌표가 $(1, 3)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-3)^2=r^2$

이 원이 점 $(4, -1)$을 지나므로

$(4-1)^2+(-1-3)^2=r^2,\ r^2=25$

원 $(x-1)^2+(y-3)^2=25$가 점 $(a, 0)$을 지나므로

$(a-1)^2+(0-3)^2=25,\ (a-1)^2=16$

$a-1=-4$ 또는 $a-1=4$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=5$

3 원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+y^2=r^2$

이 원이 두 점 $(2, -3)$, $(3, 4)$를 지나므로

$(2-a)^2+(-3)^2=r^2$

$\therefore\ a^2-4a+13=r^2$ ...... ㉠

$(3-a)^2+4^2=r^2$

$\therefore\ a^2-6a+25=r^2$ ...... ㉡

㉠−㉡을 하면 $2a-12=0 \qquad \therefore\ a=6$

$a=6$을 ㉠에 대입하면

$36-24+13=r^2,\ r^2=25$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi r^2=$**25π**

4 중심이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 구하는 원의 중심의 좌표를 (a, a), 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$

이 원이 두 점 $(1, -1)$, $(3, 1)$을 지나므로

$(1-a)^2+(-1-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2+2=r^2$ …… ㉠

$(3-a)^2+(1-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2-8a+10=r^2$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $8a-8=0$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $r^2=4$

따라서 구하는 원의 방정식은

$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-1)^2=4}$

5 구하는 원의 중심을 $\mathrm{C}(a, b)$라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$a=\dfrac{1+3}{2}=2$, $b=\dfrac{0+2}{2}=1$

또 원의 반지름의 길이 r는

$r=\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$

$\therefore a+b+r^2=2+1+2=\mathbf{5}$

6 주어진 방정식 $x^2+y^2-6x+2y=0$을 변형하면

$(x^2-6x+9)+(y^2+2y+1)=10$

즉, $(x-3)^2+(y+1)^2=10$

이 원과 중심이 같으므로 중심의 좌표가 $(3, -1)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+1)^2=r^2$

이 원이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$(2-3)^2+(1+1)^2=r^2$ $\therefore r^2=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$\boldsymbol{(x-3)^2+(y+1)^2=5}$

7 주어진 방정식 $x^2+y^2+4x-2y-k=0$을 변형하면

$(x^2+4x+4)+(y^2-2y+1)=k+5$

즉, $(x+2)^2+(y-1)^2=k+5$

주어진 방정식이 원을 나타내려면 $k+5>0$이어야 하므로

$\boldsymbol{k>-5}$

다른 풀이 $x^2+y^2+4x-2y-k=0$이 원을 나타내려면

$4^2+(-2)^2-4\times(-k)>0$, $20+4k>0$

$\therefore k>-5$

참고 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$에서 $A^2+B^2-4C>0$이면 원을 나타낸다.

8 $x^2+y^2-8x+12y+3=0$을 변형하면

$(x^2-8x+16)+(y^2+12y+36)=49$

즉, $(x-4)^2+(y+6)^2=49$

직선 $y=3x+k$가 원의 넓이를 이등분하려면 이 직선이 원의 중심 $(4, -6)$을 지나야 하므로

$-6=12+k$ $\therefore \boldsymbol{k=-18}$

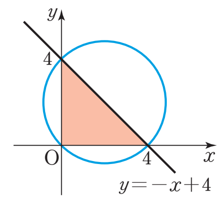
9 구하는 원의 방정식을

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하면

점 $(0, 0)$을 지나므로 $C=0$

따라서 원의 방정식은

$x^2+y^2+Ax+By=0$



또 두 점 $(4, 0)$, $(0, 4)$를 지나므로

$16+4A=0$, $16+4B=0$

$\therefore A=-4$, $B=-4$

따라서 구하는 원의 방정식은

$\boldsymbol{x^2+y^2-4x-4y=0}$

다른 풀이 직각삼각형의 외접원의 중심은 빗변의 중점과 같으므로 구하는 원의 중심의 좌표는

$\left(\dfrac{4+0}{2}, \dfrac{0+4}{2}\right)$, 즉 $(2, 2)$

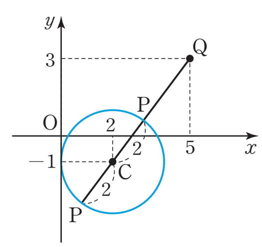
원의 반지름의 길이는 두 점 $(2, 2)$, $(4, 0)$ 사이의 거리와 같으므로

$\sqrt{(4-2)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=8$ $\therefore x^2+y^2-4x-4y=0$

10 주어진 원의 중심을 C라 하면 $\mathrm{C}(2, -1)$이고 원의 반지름의 길이는 2이다.



$\overline{\mathrm{CQ}}=\sqrt{(5-2)^2+\{3-(-1)\}^2}$

$=5$

$M=\overline{\mathrm{CQ}}+$(반지름의 길이)

$=5+2=7$

$m=\overline{\mathrm{CQ}}-$(반지름의 길이)$=5-2=3$

$\therefore M-m=7-3=\mathbf{4}$

11 풀이 1 $2x+y+k=0$, 즉 $y=-2x-k$를

$(x+3)^2+(y-1)^2=5$에 대입하면

$(x+3)^2+(-2x-k-1)^2=5$

$5x^2+2(2k+5)x+k^2+2k+5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2k+5)^2-5(k^2+2k+5)=0$

$k^2-10k=0$, $k(k-10)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=10$

따라서 자연수 k의 값은 **10**이다.

풀이 2 원 $(x+3)^2+(y-1)^2=5$의 중심 $(-3, 1)$과 직선 $2x+y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{5}$와 같아야 하므로

$\frac{|2\times(-3)+1\times1+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$, $|k-5|=5$

$k-5=-5$ 또는 $k-5=5$

$\therefore k=0$ 또는 $k=10$

따라서 자연수 k의 값은 10이다.

12 **풀이 1** 두 점 $(1, 2)$, $(-2, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{-1-2}{-2-1}(x-1)$ $\quad\therefore y=x+1$

$y=x+1$을 $x^2+y^2=r^2$에 대입하면

$x^2+(x+1)^2=r^2$, $2x^2+2x+1-r^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-2(1-r^2)\geq0$, $2r^2-1\geq0$

$(\sqrt{2}r+1)(\sqrt{2}r-1)\geq0$

$r\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $r\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \boldsymbol{r\geq\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $(\because r>0)$

풀이 2 원과 직선이 만나므로 원의 중심인 원점과 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이인 r보다 작거나 같아야 한다.

$\frac{|1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\leq|r|$, $|r|\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

$r\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $r\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore r\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\because r>0)$

13 $x+4y-2=0$에서 $4y=-x+2$

$\therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

이 직선과 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$-\frac{1}{4}m=-1$ $\quad\therefore m=4$

원 $x^2+y^2=4$에 접하고 기울기가 4인 접선의 방정식은

$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$에서 $m=4$, $r=2$이므로

$y=4x\pm2\sqrt{4^2+1}$

$\therefore y=4x\pm2\sqrt{17}$

이 접선이 $ax-y+b=0$, 즉 $y=ax+b$와 일치하므로

$a=4$, $b=\pm2\sqrt{17}$

$\therefore a^2+b^2=16+68=\mathbf{84}$

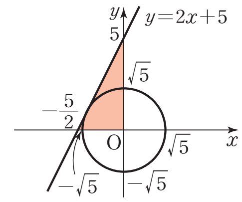
14 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(-2, 1)$에서의 접선의 방정식은

$-2x+y=5$ $\quad\therefore y=2x+5$

오른쪽 그림에서 이 접선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$, $(0, 5)$이므로

구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times5=\boldsymbol{\frac{25}{4}}$



15 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(3, -2)$에서의 접선의 방정식은

$3x-2y=13$ $\quad\therefore 3x-2y-13=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

원 $x^2+y^2-12x+8y+k=0$을 변형하면

$(x^2-12x+36)+(y^2+8y+16)=52-k$

$(x-6)^2+(y+4)^2=52-k$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

직선 ㉠이 원 ㉡에 접하므로 원의 중심 $(6, -4)$와 직선 사이의 거리는 반지름의 길이와 같다.

$\frac{|3\times6-2\times(-4)-13|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\sqrt{52-k}$, $\sqrt{13}=\sqrt{52-k}$

$13=52-k$ $\quad\therefore \boldsymbol{k=39}$

16 **풀이 1** 접점을 $P(x_1, y_1)$이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=5$

이 접선이 점 $(3, -1)$을 지나므로

$3x_1-y_1=5$ $\quad\therefore y_1=3x_1-5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 점 $P(x_1, y_1)$은 원 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

${x_1}^2+(3x_1-5)^2=5$, ${x_1}^2-3x_1+2=0$

$(x_1-1)(x_1-2)=0$

$\therefore x_1=1$ 또는 $x_1=2$

$x_1=1$일 때 $y_1=-2$, $x_1=2$일 때 $y_1=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$x-2y=5$ 또는 $2x+y=5$이므로

$m_1=\frac{1}{2}$, $m_2=-2$ 또는 $m_1=-2$, $m_2=\frac{1}{2}$

$\therefore \boldsymbol{m_1m_2=-1}$

풀이 2 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-(-1)=m(x-3)$, 즉 $mx-y-3m-1=0$

원의 중심인 원점과 이 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{5}$와 같아야 하므로

$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$2m^2+3m-2=0$, $(m+2)(2m-1)=0$

$\therefore m=-2$ 또는 $m=\frac{1}{2}$

따라서 $m_1=\frac{1}{2}$, $m_2=-2$ 또는 $m_1=-2$, $m_2=\frac{1}{2}$이므로

$m_1m_2=-1$

04 도형의 이동

본문 | 042~047쪽

1-1 (1) $\mathbf{3, 3}$ (2) $\mathbf{2, 1}$

1-2 점 (x, y)를 점 $(x+2, y-5)$로 옮기는 평행이동은 점 (x, y)를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

(1) $(0+2, 0-5)$, 즉 $\mathbf{(2, -5)}$

(2) $(1+2, 2-5)$, 즉 $\mathbf{(3, -3)}$

(3) $(-2+2, 3-5)$, 즉 $\mathbf{(0, -2)}$

(4) $(-1+2, -4-5)$, 즉 $\mathbf{(1, -9)}$

2-1 $\mathbf{1, -5}$

2-2 (1) $-7+a=3, 2+b=1$

$\therefore \boldsymbol{a=10, b=-1}$

(2) 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$x+2=5, y-1=2 \qquad \therefore x=3, y=3$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\mathbf{(3, 3)}$

3-1 (1) $\boldsymbol{x-2, 7}$ (2) $\mathbf{2, 5}$

3-2 x 대신 $x-(-3)=x+3$, y 대신 $y-4$를 대입한다.

(1) $x-y+1=0$에서 $(x+3)-(y-4)+1=0$

$\therefore \boldsymbol{x-y+8=0}$

(2) $y=2x+1$에서 $y-4=2(x+3)+1$

$\therefore \boldsymbol{y=2x+11}$

(3) $x^2+y^2=3$에서 $\boldsymbol{(x+3)^2+(y-4)^2=3}$

(4) $x^2+y^2+4x-1=0$을 변형하면

$(x^2+4x+4)+y^2=5$, 즉 $(x+2)^2+y^2=5$에서

$(x+3+2)^2+(y-4)^2=5$

$\therefore \boldsymbol{(x+5)^2+(y-4)^2=5}$

4-1 $\mathbf{7, 1}$

4-2 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$을 변형하면

$(x-2)^2+(y-1)^2=4$

x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$를 대입하면

$(x-a-2)^2+(y-b-1)^2=4 \qquad \cdots\cdots ㉠$

한편 $x^2+y^2+2x+2y-2=0$을 변형하면

$(x+1)^2+(y+1)^2=4 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡이 일치해야 하므로 $-a-2=1, -b-1=1$

$\therefore \boldsymbol{a=-3, b=-2}$

다른 풀이 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$의 중심의 좌표는 $(2, 1)$이고 이 점을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점이 $(-1, -1)$이므로

$2+a=-1, 1+b=-1 \qquad \therefore a=-3, b=-2$

5-1 (1) $\mathbf{-1, -2, -1}$ (2) $\boldsymbol{-x, 0}$

5-2

	x축	y축	원점
(1) $(4, 2)$	$\mathbf{(4, -2)}$	$\mathbf{(-4, 2)}$	$\mathbf{(-4, -2)}$
(2) $(-2, 5)$	$\mathbf{(-2, -5)}$	$\mathbf{(2, 5)}$	$\mathbf{(2, -5)}$
(3) $(3, -1)$	$\mathbf{(3, 1)}$	$\mathbf{(-3, -1)}$	$\mathbf{(-3, 1)}$
(4) $(-3, -2)$	$\mathbf{(-3, 2)}$	$\mathbf{(3, -2)}$	$\mathbf{(3, 2)}$

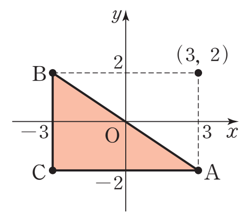
참고 $(x, y) \xrightarrow{x\text{축에 대한 대칭이동}} (x, -y)$

$(x, y) \xrightarrow{y\text{축에 대한 대칭이동}} (-x, y)$

$(x, y) \xrightarrow{\text{원점에 대한 대칭이동}} (-x, -y)$

6-1 $\boldsymbol{-y, 3}$

6-2 $A(3, -2), B(-3, 2)$, $C(-3, -2)$이므로 오른쪽 그림에서 삼각형 ABC의 넓이는



$\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times\overline{BC}$

$=\frac{1}{2}\times6\times4=\mathbf{12}$

7-1 (1) $\mathbf{1}$ (2) $\boldsymbol{-x}$ (3) $\boldsymbol{-y}$

7-2 (1) $\boldsymbol{x}$**축** : $-y=3x-1 \qquad \therefore \boldsymbol{y=-3x+1}$

$\boldsymbol{y}$**축** : $y=3(-x)-1 \qquad \therefore \boldsymbol{y=-3x-1}$

원점 : $-y=3(-x)-1 \qquad \therefore \boldsymbol{y=3x+1}$

(2) $\boldsymbol{x}$**축** : $2x+3(-y)-4=0 \qquad \therefore \boldsymbol{2x-3y-4=0}$

$\boldsymbol{y}$**축** : $2(-x)+3y-4=0 \qquad \therefore \boldsymbol{2x-3y+4=0}$

원점 : $2(-x)+3(-y)-4=0 \qquad \therefore \boldsymbol{2x+3y+4=0}$

(3) $\boldsymbol{x}$**축** : $x^2+(-y)^2-2x=0 \qquad \therefore \boldsymbol{x^2+y^2-2x=0}$

$\boldsymbol{y}$**축** : $(-x)^2+y^2-2(-x)=0 \qquad \therefore \boldsymbol{x^2+y^2+2x=0}$

원점 : $(-x)^2+(-y)^2-2(-x)=0$

$\therefore \boldsymbol{x^2+y^2+2x=0}$

(4) $\boldsymbol{x}$**축** : $(x+2)^2+(-y-5)^2=2$

$\therefore \boldsymbol{(x+2)^2+(y+5)^2=2}$

$\boldsymbol{y}$**축** : $(-x+2)^2+(y-5)^2=2$

$\therefore \boldsymbol{(x-2)^2+(y-5)^2=2}$

원점 : $(-x+2)^2+(-y-5)^2=2$

$\therefore \boldsymbol{(x-2)^2+(y+5)^2=2}$

8-1 $\boldsymbol{9, 4x}$

8-2 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=4$를 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+1)^2+(y-1)^2=4$, 즉 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$

이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-1)^2+(-y-1)^2=4$

$\therefore \boldsymbol{(x+1)^2+(y+1)^2=4}$

9-1 x (2) -5

9-2 (1) $(2, 3)$ (2) $(1, -1)$

10-1 (1) $3x$ (2) 1

10-2 (1) $x=2y+1$ $\therefore$ $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

(2) $(y+1)^2+(x+2)^2=4$ $\therefore$ $(x+2)^2+(y+1)^2=4$

10-3 직선 $3x-y-2=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 x 대신 $-x$를 대입하면

$-3x-y-2=0$ $\therefore$ $3x+y+2=0$

이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$3y+x+2=0$ $\therefore$ $x+3y+2=0$

11-1 (1) $3, 5\sqrt{5}$ (2) 4

11-2 (1) 점 B$(3, 4)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

B′$(3, -4)$

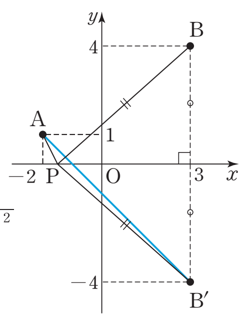
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$

$=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB'}}\geq\overline{\mathrm{AB'}}$

$=\sqrt{\{3-(-2)\}^2+(-4-1)^2}$

$=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 $5\sqrt{2}$이다.



(2) 직선 AB′의 방정식은

$y-1=\frac{-4-1}{3-(-2)}\{x-(-2)\}$, 즉 $y=-x-1$

구하는 점 P의 좌표는 직선 AB′이 x축과 만나는 점의 좌표이므로 $(-1, 0)$

11-3 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

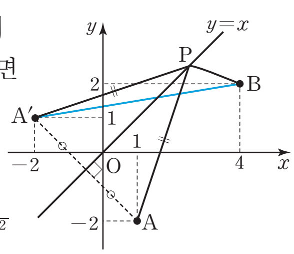
A′$(-2, 1)$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$

$=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PB}}\geq\overline{\mathrm{A'B}}$

$=\sqrt{\{4-(-2)\}^2+(2-1)^2}$

$=\sqrt{37}$



기초 개념 평가

본문 | 048, 049쪽

01 평행이동

02 a, b

03 $f(x-a, y-b)=0$

04 대칭이동

05 $(x, -y), (-x, -y)$

06 x축

07 y축

08 원점

09 (y, x)

10 $f(y, x)=0$

11 $\overline{\mathrm{AB'}}$

기초 문제 평가

본문 | 050, 051쪽

1 점 $(1, 4)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(2, 2)$라 하면

$1+a=2, 4+b=2$ $\therefore$ $a=1, b=-2$

따라서 점 $(-1, 5)$가 옮겨지는 점의 좌표는

$(-1+1, 5-2)$, 즉 $(0, 3)$

2 점 $(3, -1)$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(3-2, -1+2)$, 즉 $(1, 1)$

점 $(1, 1)$이 원 $(x+2)^2+(y-5)^2=r^2$ 위에 있으므로

$(1+2)^2+(1-5)^2=r^2$, $r^2=25$

$\therefore$ $r=5$ ($\because$ $r>0$)

3 직선 $y=2x+1$에 x 대신 $x-a$, y 대신 $y+2a$를 대입하면

$y+2a=2(x-a)+1$ $\therefore$ $y=2x-4a+1$

이 직선이 직선 $y=2x-3$과 일치해야 하므로

$-4a+1=-3$ $\therefore$ $a=1$

4 원 $x^2+y^2=4$에 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-1$을 대입하면

$(x-a)^2+(y-1)^2=4$

직선 $4x-3y-15=0$이 이 원과 접하므로 원의 중심 $(a, 1)$과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이와 같아야 한다.

$\frac{|4a-3-15|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$, $|4a-18|=10$

$4a-18=-10$ 또는 $4a-18=10$

$\therefore$ $a=2$ 또는 $a=7$

5 점 $(-1, 2)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(0, 0)$이라 하면

$-1+a=0, 2+b=0$ $\therefore$ $a=1, b=-2$

원 $x^2+y^2-4x+2y=0$, 즉 $(x-2)^2+(y+1)^2=5$가 옮겨지는 원의 방정식은 x 대신 $x-1$, y 대신 $y+2$를 대입하면

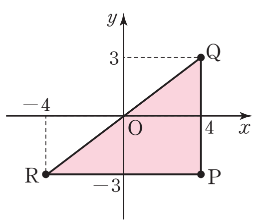
$(x-3)^2+(y+3)^2=5$

다른 풀이 원의 중심 $(2, -1)$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(3, -3)$이고 이때 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+3)^2=5$

6 평행이동에 의하여 옮겨지는 원의 반지름의 길이는 변하지 않는다. 원 $x^2+y^2+2x-6y+1=0$을 변형하면
$(x+1)^2+(y-3)^2=9$이므로 반지름의 길이가 3인 원이다.
ㄱ. 반지름의 길이가 3인 원이다.
ㄴ. 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원이다.
ㄷ. 원 $x^2+y^2-2x-8=0$을 변형하면 $(x-1)^2+y^2=9$에서 반지름의 길이가 3인 원이다.
따라서 보기의 원 중 주어진 원을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원은 ③이다.

7 P$(4, -3)$, Q$(4, 3)$, R$(-4, -3)$
이므로 삼각형 PQR의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\text{PR}}\times\overline{\text{PQ}}=\frac{1}{2}\times8\times6$
$=\mathbf{24}$



8 점 $(-1, 6)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(1, -6)$, 이 점을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(1+a, -6+b)$
이 점이 점 $(3, 0)$과 일치하므로 $1+a=3$, $-6+b=0$
$a=2$, $b=6$ $\therefore$ $\boldsymbol{a+b=8}$

9 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=3$을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x-1)^2+(-y+2)^2=3$, 즉 $(x+1)^2+(y-2)^2=3$
이 원의 중심 $(-1, 2)$가 직선 $y=4x+k$ 위에 있으므로
$2=-4+k$ $\therefore$ $\boldsymbol{k=6}$
다른 풀이 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=3$의 중심 $(1, -2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-1, 2)$
이 점이 직선 $y=4x+k$ 위에 있으므로
$2=-4+k$ $\therefore$ $k=6$

10 원 $x^2+y^2+8x+2y+1=0$을 변형하면
$(x+4)^2+(y+1)^2=16$
이므로 원의 중심은 $(-4, -1)$이다.
한편 원 $(x+4)^2+(y+1)^2=16$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(y+4)^2+(x+1)^2=16$, 즉 $(x+1)^2+(y+4)^2=16$
이므로 원의 중심은 $(-1, -4)$이다.
따라서 두 점 $(-4, -1)$, $(-1, -4)$ 사이의 거리는
$\sqrt{\{-1-(-4)\}^2+\{-4-(-1)\}^2}=\sqrt{18}=\mathbf{3\sqrt{2}}$

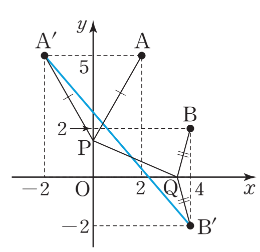
다른 풀이 원 $x^2+y^2+8x+2y+1=0$의 중심 $(-4, -1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-1, -4)$이므로 두 점 $(-4, -1)$, $(-1, -4)$ 사이의 거리는
$\sqrt{\{-1-(-4)\}^2+\{-4-(-1)\}^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

11 원 $(x+2)^2+(y+1)^2=2$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 원의 방정식은 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+3$을 대입하면
$(x-2+2)^2+(y+3+1)^2=2$
$\therefore$ $x^2+(y+4)^2=2$ ······ ㉠
원 ㉠을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$y^2+(x+4)^2=2$ $\therefore$ $\boldsymbol{(x+4)^2+y^2=2}$

12 직선 $y=mx+3$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$y=-mx+3$ ······ ㉠
직선 ㉠이 원 $(x+1)^2+(y-5)^2=1$의 넓이를 이등분하므로 직선이 원의 중심 $(-1, 5)$를 지나야 한다.
$5=m+3$ $\therefore$ $\boldsymbol{m=2}$

13 원 $(x-2)^2+(y+3)^2=4$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(y-2)^2+(x+3)^2=4$
$\therefore$ $(x+3)^2+(y-2)^2=4$ ······ ㉠
원 $(x-2)^2+(y+3)^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$를 대입하면
$(x-a-2)^2+(y-b+3)^2=4$ ······ ㉡
㉠, ㉡이 서로 일치하므로
$3=-a-2$, $-2=-b+3$
$\therefore$ $\boldsymbol{a=-5}$, $\boldsymbol{b=5}$

14 오른쪽 그림과 같이 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면
A′$(-2, 5)$, B′$(4, -2)$
$\overline{\text{AP}}=\overline{\text{A'P}}$, $\overline{\text{BQ}}=\overline{\text{B'Q}}$이므로
$\overline{\text{AP}}+\overline{\text{PQ}}+\overline{\text{QB}}$
$=\overline{\text{A'P}}+\overline{\text{PQ}}+\overline{\text{QB'}}\ge\overline{\text{A'B'}}$
$=\sqrt{\{4-(-2)\}^2+(-2-5)^2}=\sqrt{85}$
따라서 $\overline{\text{AP}}+\overline{\text{PQ}}+\overline{\text{QB}}$의 최솟값은 $\mathbf{\sqrt{85}}$이다.



05 집합

본문 | 054~059쪽

1-1 ㄱ

1-2 ㄱ. 작은 유리수의 모임은 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

ㄴ. 10보다 큰 자연수의 모임은 11, 12, 13, $\cdots$이므로 집합이다.

ㄷ. 아름다운 산의 모임은 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 집합인 것은 ㄴ이다.

2-1 $\notin$, $\in$

2-2 30보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29이므로

$2\boxed{\in}A$, $4\boxed{\notin}A$, $9\boxed{\notin}A$, $11\boxed{\in}A$

3-1 (1) **20** (2) **1**

3-2 (1) $\{x \mid x$는 5 이하의 자연수$\}=\mathbf{\{1, 2, 3, 4, 5\}}$

(2) $\{x \mid x$는 12의 약수$\}=\mathbf{\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}}$

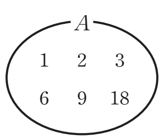
4-1 (1) 8 (2) **3**

4-2 (1) $\{5, 10, 15, 20, \cdots\}=$**$\{x \mid x$는 5의 배수$\}$**

(2) $\{2, 3, 5, 7\}=$**$\{x \mid x$는 10보다 작은 소수$\}$**

5-1 **1, 16**

5-2 18의 약수는 1, 2, 3, 6, 9, 18이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



6-1 (1) **5** (2) **4, 4** (3) **$\varnothing$**

6-2 (1) $A=\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$이므로

$\boldsymbol{n(A)=6}$

(2) $A=\{x \mid x$는 30 이하의 4의 배수$\}$

$=\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$

이므로 $\boldsymbol{n(A)=7}$

(3) $A=\{x \mid 1<x<2,\ x$는 자연수$\}=\varnothing$이므로

$\boldsymbol{n(A)=0}$

7-1 (1) 무한 (2) 유한 (3) 유한

7-2 (1) $\{1, 3, 5, \cdots, 99\}$는 원소가 50개인 **유한집합**이다.

(2) $\{x \mid x$는 20보다 큰 자연수$\}=\{21, 22, 23, \cdots\}$은 원소가 무수히 많은 **무한집합**이다.

(3) $\{x \mid x<1,\ x$는 자연수$\}=\varnothing$

공집합은 원소가 0개인 **유한집합**이다.

8-1 (1) $\subset$ (2) $\not\subset$ (3) **2, $\not\subset$**

8-2 (1) $1\notin B$이므로 $A\boxed{\not\subset}B$

(2) $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$

$1\in B$, $2\in B$, $3\in B$이므로 $A\boxed{\subset}B$

(3) $A=\{1, 3\}$, $B=\{1, 3, 5\}$

$1\in B$, $3\in B$이므로 $A\boxed{\subset}B$

9-1 **$\varnothing$, 3, 2**

9-2 (1) 원소가 0개인 부분집합은 $\varnothing$

원소가 1개인 부분집합은 $\{3\}$, $\{5\}$

원소가 2개인 부분집합은 $\{3, 5\}$

따라서 집합 A의 부분집합은

$\varnothing$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{3, 5\}$

(2) $A=\{1, 3, 9\}$이므로

원소가 0개인 부분집합은 $\varnothing$

원소가 1개인 부분집합은 $\{1\}$, $\{3\}$, $\{9\}$

원소가 2개인 부분집합은 $\{1, 3\}$, $\{1, 9\}$, $\{3, 9\}$

원소가 3개인 부분집합은 $\{1, 3, 9\}$

따라서 집합 A의 부분집합은

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{9\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 9\}$, $\{3, 9\}$, $\{1, 3, 9\}$

10-1 **6, A**

10-2 $A=\{x \mid x^2=1\}=\{-1, 1\}$, $B=\{-1, 1\}$

$C=\{1\}$, $D=\{x \mid x\le 2,\ x$는 자연수$\}=\{1, 2\}$

따라서 서로 같은 집합은 **A와 B**이다.

10-3 (1) $\{x \mid x$는 4의 약수$\}=\{1, 2, 4\}$이므로

$\{x \mid x$는 4의 약수$\}\boxed{\neq}\{2, 4\}$

(2) 2와 3의 공배수는 6의 배수이므로

$\{x \mid x$는 6의 배수$\}\boxed{=}\{x \mid x$는 2와 3의 공배수$\}$

11-1 **a, b**

11-2 (1) 집합 $A=\{2, 4, 6\}$의 진부분집합은 $\{2, 4, 6\}$의 부분집합 중 자기 자신, 즉 $\{2, 4, 6\}$을 제외한 것이므로

$\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$, $\{4, 6\}$

(2) 집합 $A=\{x \mid x$는 5 이하의 짝수$\}=\{2, 4\}$의 진부분집합은 $\{2, 4\}$의 부분집합 중 자기 자신, 즉 $\{2, 4\}$를 제외한 것이므로

$\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$

12-1 **2, 4**

12-2 (1) $A=\{1, 3, 5\}$의 원소 1, 3, 5 각각에 대하여 부분집합에 속하는 경우와 속하지 않는 경우의 2가지 경우가 있으므로 부분집합의 개수는

$\boldsymbol{2\times2\times2=2^3=8}$

(2) $A=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$의 원소 $1, 2, 3, \cdots, 10$ 각각에 대하여 부분집합에 속하는 경우와 속하지 않는 경우의 2가지 경우가 있으므로 부분집합의 개수는

$\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{10\text{개}}=2^{10}=\mathbf{1024}$

(3) $A=\{x\,|\,x$는 12 이하의 소수$\}=\{2, 3, 5, 7, 11\}$의 원소 $2, 3, 5, 7, 11$ 각각에 대하여 부분집합에 속하는 경우와 속하지 않는 경우의 2가지 경우가 있으므로 부분집합의 개수는

$2\times2\times2\times2\times2=2^5=\mathbf{32}$

13-1 **2, 1, 4**

13-2 (1) 1, 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합은 원소 1, 2를 제외한 집합 $\{3, 4, 5\}$의 부분집합에 원소 1, 2를 포함시키면 되므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^{5-2}=2^3=\mathbf{8}$

(2) 1을 원소로 갖지 않는 부분집합은 원소 1을 제외한 집합 $\{2, 3, 4, 5\}$의 부분집합과 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^{5-1}=2^4=\mathbf{16}$

(3) 짝수 2, 4를 원소로 갖지 않는 부분집합은 원소 2, 4를 제외한 집합 $\{1, 3, 5\}$의 부분집합과 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^{5-2}=2^3=\mathbf{8}$

집중 연습

본문 | 060, 061쪽

1 (1) '재미있는'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다. (×)

(2) '잘하는'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다. (×)

(3) 우리나라 광역시의 모임은 {부산, 대구, 인천, 광주, 대전, 울산}이므로 집합이다. (○)

(4) 10보다 큰 10의 약수의 모임은 $\varnothing$이므로 집합이다. (○)

(5) 2보다 큰 소수의 모임은 $\{3, 5, 7, 11, 13, \cdots\}$이므로 집합이다. (○)

2 (1) 자연수를 3으로 나눈 나머지는 0, 1, 2이므로

$\mathbf{\{0, 1, 2\}}$

(2) $x^2=4$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$이므로 $\mathbf{\{-2, 2\}}$

(3) 10보다 작은 3의 배수는 3, 6, 9이므로 $\mathbf{\{3, 6, 9\}}$

(4) $-2\le x\le 2$를 만족시키는 정수는 $-2, -1, 0, 1, 2$이므로

$\mathbf{\{-2, -1, 0, 1, 2\}}$

(5) $1\le x\le 15$를 만족시키는 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13이므로

$\mathbf{\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}}$

(6) 30의 약수 중 짝수는 2, 6, 10, 30이므로

$\mathbf{\{2, 6, 10, 30\}}$

3 (1) $\{1, 2, 3, 4, \cdots, 50\}=$ **{$x\,|\,x$는 50 이하의 자연수}**

(2) $\{1, 4, 9, 16, 25\}=$ **{$x^2\,|\,x$는 5 이하의 자연수}**

(3) $\{2, 4, 8, 16\}=\mathbf{\{x\,|\,x=2^k,\ k=1, 2, 3, 4\}}$

(4) $\{4, 8, 12, 16, \cdots\}=$ **{$x\,|\,x$는 4의 배수}**

(5) $\{10, 20, 30, \cdots, 90\}=$ **{$x\,|\,x$는 90 이하의 10의 배수}**

(6) $\{1, 3, 9, 27\}=$ **{$x\,|\,x$는 27의 약수}**

참고 (3) $\{2, 4, 8, 16\}=\{x\,|\,x=2^k,\ k=1, 2, 3, 4\}$ 또는 $\{2, 4, 8, 16\}=\{2^x\,|\,x$는 4 이하의 자연수$\}$ 와 같이 조건제시법으로 나타낼 수 있는 방법은 한 가지로 정해져 있는 것이 아니다.

4 (1) $\mathbf{\varnothing}$

(2) $\mathbf{\{1\}, \{5\}}$

(3) $\mathbf{\{1, 5\}}$

5 (1) $\mathbf{\varnothing}$

(2) $\mathbf{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}}$

(3) $\mathbf{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}}$

(4) $\mathbf{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}}$

(5) $\mathbf{\{a, b, c, d\}}$

6 (1) $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분집합의 개수는

$2^6=\mathbf{64}$

(2) 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 진부분집합은 집합 A의 부분집합 중 자기 자신, 즉 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$을 제외한 것이므로 그 개수는

$2^6-1=\mathbf{63}$

(3) 3, 4를 반드시 원소로 갖는 부분집합은 원소 3, 4를 제외한 집합 $\{1, 2, 5, 6\}$의 부분집합에 원소 3, 4를 포함시키면 되므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^{6-2}=2^4=\mathbf{16}$

(4) 1, 2, 3을 원소로 갖지 않는 부분집합은 원소 1, 2, 3을 제외한 집합 $\{4, 5, 6\}$의 부분집합과 같으므로 그 개수는

$2^{6-3}=2^3=\mathbf{8}$

(5) 1은 반드시 원소로 갖고, 2는 원소로 갖지 않는 부분집합은 원소 1, 2를 제외한 집합 $\{3, 4, 5, 6\}$의 부분집합에 원소 1을 포함시키면 되므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^{6-1-1}=2^4=\mathbf{16}$

기초 개념 평가

본문 | 062, 063쪽

01	집합	02	$a\in A$
03	$b\notin B$	04	원소나열법
05	조건제시법	06	무한
07	유한	08	유한
09	원소	10	집합
11	$A=B$	12	$A\neq B$
13	$A\subset B$	14	2^n
15	2^n-1	16	2^{n-1}

기초 문제 평가

본문 | 064, 065쪽

1 '유명한', '잘하는', '높은'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
0보다 큰 자연수의 모임은 $\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$이므로 집합이다.
따라서 집합인 것은 ㄷ이다.

2 $A=\{x\mid 10\le x\le 30, x$는 소수$\}$
$=\{11, 13, 17, 19, 23, 29\}$
(1) $12\ \boxed{\notin}\ A$ (2) $13\ \boxed{\in}\ A$ (3) $24\ \boxed{\notin}\ A$
(4) $27\ \boxed{\notin}\ A$ (5) $29\ \boxed{\in}\ A$ (6) $30\ \boxed{\notin}\ A$

3 $a\in A$이므로 $a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$
$b\in B$이므로 $b=4$ 또는 $b=5$
$a+b$를 구하면 다음과 같다.

b \ a	1	2	3
4	5	6	7
5	6	7	8

$\therefore C=\{5, 6, 7, 8\}$
따라서 집합 C의 모든 원소의 합은
$5+6+7+8=$ **26**

4 ㄴ. 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$
ㄷ. $A=\{1, 2, 3, 4\}$이므로 $A\not\subset\{1, 5\}$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

5 ⑤ $A=\{x\mid x$는 2로 나눈 나머지가 1인 자연수$\}$
$=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots\}$
따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

6 ② $\{x\mid x$는 0과 2 사이의 소수$\}=\varnothing$
③ $\{x\mid x$는 12의 배수$\}=\{12, 24, 36, 48, \cdots\}$
④ $\{x\mid x$는 30보다 작은 짝수$\}=\{2, 4, 6, \cdots, 28\}$
⑤ $\{x\mid 1\le x\le 10, x$는 5의 배수$\}=\{5, 10\}$
따라서 무한집합인 것은 ③이다.

7 (1) $A=\{0, 1, \{2, 3\}\}$의 원소는 $0, 1, \{2, 3\}$이므로
$\boldsymbol{n(A)=3}$
(2) $A=\{\varnothing, 1, 2, 3\}$의 원소는 $\varnothing, 1, 2, 3$이므로
$\boldsymbol{n(A)=4}$
(3) 소수의 약수는 2개이므로 약수가 3개인 소수는 없다.
즉, $A=\{x\mid x$는 약수가 3개인 소수$\}=\varnothing$
$\therefore \boldsymbol{n(A)=0}$
(4) $A=\{x\mid x$는 0과 1 사이의 정수$\}=\varnothing$
$\therefore \boldsymbol{n(A)=0}$

8 (1) $\varnothing$은 원소가 없는 집합이므로 $n(\varnothing)=\mathbf{0}$
(2) $\{\varnothing\}$의 원소는 $\varnothing$이므로 $n(\{\varnothing\})=\mathbf{1}$
(3) $\{0, \varnothing\}$의 원소는 $0, \varnothing$이므로 $n(\{0, \varnothing\})=\mathbf{2}$

9 $A=\{\varnothing, 1, \{1, 2\}, 3\}$의 원소는 $\varnothing, 1, \{1, 2\}, 3$이다.
ㄹ. $\{1, 2, 3\}\not\subset A$, $\{\{1, 2\}, 3\}\subset A$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10 $A=\{x\mid x$는 12의 약수$\}=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
⑤ $\{1, 4, 6\}\subset A$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

11 $A=\{2, 3, a\}$, $B=\{2, 4, b^2-1\}$에 대하여
$A=B$이면 $4\in B$에서 $4\in A$이므로 $a=4$
$3\in A$에서 $3\in B$이므로 $b^2-1=3$
$b^2=4$ $\quad\therefore b=2\ (\because b>0)$
$a=4$, $b=2$일 때, $A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{2, 4, 3\}$이 되어
$A=B$가 성립한다.
$\therefore \boldsymbol{a=4, b=2}$

12 집합 A의 원소의 개수를 n이라 하면
$2^n-1=31$에서 $2^n=32=2^5$ $\quad\therefore n=5$
$\therefore \boldsymbol{n(A)=5}$

13 집합 $A=\{1, 3, 5, 15\}$의 부분집합의 개수는 $a=2^4=16$
3을 반드시 원소로 갖고 5를 원소로 갖지 않는 집합 A의 부분집합의 개수는 $b=2^{4-1-1}=2^2=4$
$\therefore \boldsymbol{a-b=12}$

06 집합의 연산

본문 | 066~071쪽

1-1 (1) **2** (2) **5**

1-2 $A=\{x \mid x\text{는 } 8\text{의 약수}\}=\{1, 2, 4, 8\}$

$B=\{x \mid x\text{는 } 6\text{의 약수}\}=\{1, 2, 3, 6\}$

(1) 집합 A에 속하거나 집합 B에 속하는 원소는 1, 2, 3, 4, 6, 8이므로

$\boldsymbol{A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}}$

(2) 집합 A에도 속하고 집합 B에도 속하는 원소는 1, 2이므로

$\boldsymbol{A \cap B=\{1, 2\}}$

2-1 **2, $\boldsymbol{B}$**

2-2 $A=\{3, 5, 7\}$, $B=\{x \mid x\text{는 } 4\text{의 약수}\}=\{1, 2, 4\}$,

$C=\{x \mid x\text{는 소수}\}=\{2, 3, 5, 7, 11, \cdots\}$

에서 $A \cap B=\varnothing$, $A \cap C=\{3, 5, 7\}$, $B \cap C=\{2\}$이므로

서로소인 집합은 **$\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$**이다.

3-1 (1) **4** (2) **6**

3-2 (1) 전체집합 U의 원소 중 집합 A에 속하지 않는 원소는 a, e, f이므로 $\boldsymbol{A^C=\{a, e, f\}}$

(2) 전체집합 U의 원소 중 집합 B에 속하지 않는 원소는 b, f이므로 $\boldsymbol{B^C=\{b, f\}}$

(3) 집합 A에는 속하지만 집합 B에는 속하지 않는 원소는 b이므로 $\boldsymbol{A-B=\{b\}}$

(4) 집합 B에는 속하지만 집합 A에는 속하지 않는 원소는 a, e이므로 $\boldsymbol{B-A=\{a, e\}}$

4-1 (1) **10** (2) **8** (3) **8** (4) **2, 2**

4-2 (1) 전체집합 U의 원소 중 집합 A에 속하지 않는 원소는 9, 11이므로 $\boldsymbol{A^C=\{9, 11\}}$

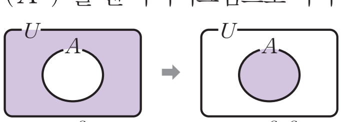
(2) 전체집합 U의 원소 중 집합 B에 속하지 않는 원소는 1, 3, 11이므로 $\boldsymbol{B^C=\{1, 3, 11\}}$

(3) 집합 A에는 속하지만 집합 B에는 속하지 않는 원소는 1, 3이므로 $\boldsymbol{A-B=\{1, 3\}}$

(4) 집합 B에는 속하지만 집합 A에는 속하지 않는 원소는 9이므로 $\boldsymbol{B-A=\{9\}}$

5-1 $\boldsymbol{U}$

5-2 $(A^C)^C$을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

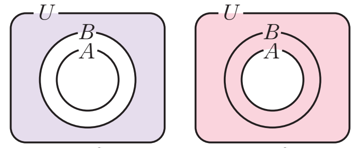


A^C ➡ $(A^C)^C$

따라서 $(A^C)^C=A$가 성립한다.

6-1 $\boldsymbol{B^C}$

6-2 $A \subset B$일 때 A^C, B^C을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

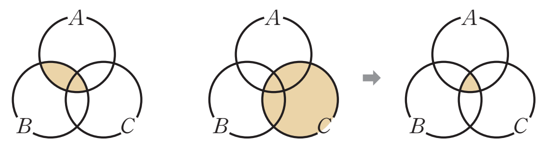


$B^C \quad \subset \quad A^C$

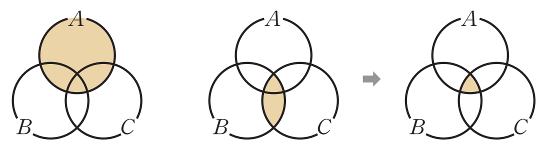
따라서 $A \subset B$이면 $B^C \subset A^C$이 성립한다.

7-1 $\cup$

7-2 $(A \cap B) \cap C$와 $A \cap (B \cap C)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$(A \cap B) \quad \cap \quad C \quad = \quad (A \cap B) \cap C$

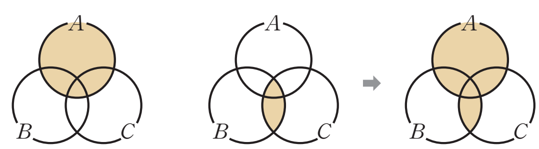


$A \quad \cap \quad (B \cap C) \quad = \quad A \cap (B \cap C)$

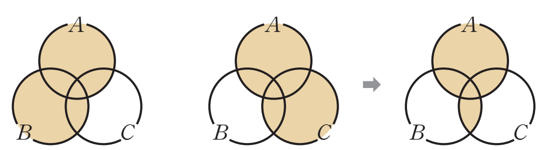
따라서 $(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$가 성립한다.

8-1 $\cup$, $\cap$

8-2 $A \cup (B \cap C)$와 $(A \cup B) \cap (A \cup C)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$A \quad \cup \quad (B \cap C) \quad = \quad A \cup (B \cap C)$



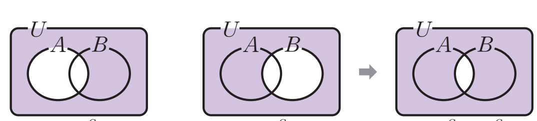
$(A \cup B) \quad \cap \quad (A \cup C) \quad = \quad (A \cup B) \cap (A \cup C)$

따라서 $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$가 성립한다.

9-1 $\cap$

9-2 $(A \cap B)^C$과 $A^C \cup B^C$을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

$A \cap B$ ➡ $(A \cap B)^C$

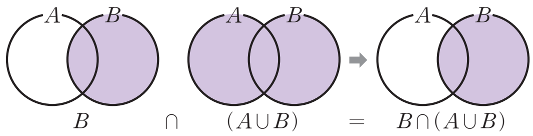


$A^C \quad \cup \quad B^C \quad = \quad A^C \cup B^C$

따라서 $(A \cap B)^C=A^C \cup B^C$이 성립한다.

10-1 A

10-2 $B\cap(A\cup B)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 $B\cap(A\cup B)=B$가 성립한다.

11-1 (1) **2, 7** (2) **7, 5** (3) **12, 7** (4) **5, 3**

11-2 (1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=12+16-9=\mathbf{19}$

(2) $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B)$

$=25-19=\mathbf{6}$

(3) $n(B^C)=n(U)-n(B)=25-16=\mathbf{9}$

(4) $n(A-B)=n(B)-n(A\cap B)=16-9=\mathbf{7}$

12-1 $\boldsymbol{A\cap B}$, **2**

12-2 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$40=33+16-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)=49-40=\mathbf{9}$

집중 연습

본문 | 072, 073쪽

1 (1) ① $\boldsymbol{A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}}$

② $\boldsymbol{A\cap B=\{3, 4, 5\}}$

(2) $A=\{x\,|\,x$는 8보다 작은 짝수$\}=\{2, 4, 6\}$

$B=\{x\,|\,x$는 8의 약수$\}=\{1, 2, 4, 8\}$

① $\boldsymbol{A\cup B=\{1, 2, 4, 6, 8\}}$

② $\boldsymbol{A\cap B=\{2, 4\}}$

(3) $A=\{x\,|\,x$는 24의 약수$\}=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$B=\{x\,|\,x$는 32의 약수$\}=\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$

① $\boldsymbol{A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32\}}$

② $\boldsymbol{A\cap B=\{1, 2, 4, 8\}}$

(4) $A=\{x\,|\,x$는 6의 배수$\}=\{6, 12, 18, 24, 30, 36, \cdots\}$

$B=\{x\,|\,x$는 9의 배수$\}=\{9, 18, 27, 36, 45, 54, \cdots\}$

① $\boldsymbol{A\cup B=\{6, 9, 12, 18, 24, 27, \cdots\}}$

② $\boldsymbol{A\cap B=\{18, 36, 54, \cdots\}}$

2 (1) 전체집합 U의 원소 중 집합 A에 속하지 않는 원소는 4, 5, 6, 7이므로 $\boldsymbol{A^C=\{4, 5, 6, 7\}}$

(2) 전체집합 U의 원소 중 집합 B에 속하지 않는 원소는 1, 5, 7이므로 $\boldsymbol{B^C=\{1, 5, 7\}}$

(3) $A^C\cap B^C=\{4, 5, 6, 7\}\cap\{1, 5, 7\}=\boldsymbol{\{5, 7\}}$

(4) $A^C-B=\{4, 5, 6, 7\}-\{2, 3, 4, 6\}=\boldsymbol{\{5, 7\}}$

다른 풀이 (3) $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$

이때 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$이므로 $A^C\cap B^C=\{5, 7\}$

(4) $A^C-B=A^C\cap B^C=\{5, 7\}$

3 (1) 집합 A에는 속하지만 집합 B에는 속하지 않는 원소는 4, 6이므로 $\boldsymbol{A-B=\{4, 6\}}$

(2) 집합 B에는 속하지만 집합 A에는 속하지 않는 원소는 7이므로 $\boldsymbol{B-A=\{7\}}$

(3) $B^C=\{2, 4, 6\}$이므로

$A\cap B^C=\{3, 4, 5, 6\}\cap\{2, 4, 6\}=\boldsymbol{\{4, 6\}}$

(4) $A^C=\{2, 7\}$이므로

$A^C\cap B=\{2, 7\}\cap\{3, 5, 7\}=\boldsymbol{\{7\}}$

다른 풀이 (3) $A\cap B^C=A-B=\{4, 6\}$

(4) $A^C\cap B=B\cap A^C=B-A=\{7\}$

4 (1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=16+9-5=\mathbf{20}$

(2) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$20=12+16-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)=28-20=\mathbf{8}$

(3) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=15-8=\mathbf{7}$

(4) $n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)=12-5=\mathbf{7}$

(5) $n(A\cap B^C)=n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$

$=41-17=\mathbf{24}$

다른 풀이 (5) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$41=32+17-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)=49-41=8$

$\therefore n(A\cap B^C)=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$=32-8=24$

5 (1) $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=16+19-28=\mathbf{7}$

(2) $n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)=28-19=\mathbf{9}$

(3) $n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)=28-16=\mathbf{12}$

(4) $n(A^C)=n(U)-n(A)=30-16=\mathbf{14}$

(5) $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B)=30-28=\mathbf{2}$

(6) $n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)$

$=n(U)-n(A\cap B)=30-7=\mathbf{23}$

다른 풀이 (2) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=16-7=9$

(3) $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=19-7=12$

기초 개념 평가

본문 | 074, 075쪽

01 합집합
02 교집합
03 여집합
04 차집합
05 $\varnothing$, A
06 $\varnothing$, U
07 $B\cap C$
08 $A\cap C$
09 $\cap$
10 $\cup$
11 $\varnothing$
12 $A\cap B$

기초 문제 평가

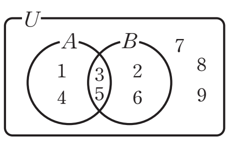
본문 | 076, 077쪽

1 $A\cup B=\{1, 2, 3, k\}$이므로
$1+2+3+k=10$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{k=4}$
주의 $k=2$ 또는 $k=3$이면 $A\cup B=\{1, 2, 3\}$이므로
$A\cup B$의 모든 원소의 합은 6이다.

2 $A\cap B=\{1, 3\}$이므로 $3\in A$
즉, $a^2+2=3$에서 $a^2=1$ $\quad\therefore$ $a=\pm 1$
(i) $a=-1$일 때, $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{-1, 2, 3\}$
이때 $A\cap B=\{2, 3\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $a=1$일 때, $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 3, 4\}$
이때 $A\cap B=\{1, 3\}$이므로 조건을 만족시킨다.
(i), (ii)에서 구하는 상수 a의 값은 **1**이다.

3 $A=\{x\,|\,x$는 6의 약수$\}=\{1, 2, 3, 6\}$
① $A\cap\{2, 3\}=\{2, 3\}$
② $A\cap\{4, 6\}=\{6\}$
③ $A\cap\{1, 3, 5\}=\{1, 3\}$
④ $\{x\,|\,x$는 4의 배수$\}=\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$이므로
$A\cap\{4, 8, 12, 16, \cdots\}=\varnothing$
⑤ $\{x\,|\,x$는 7보다 작은 소수$\}=\{2, 3, 5\}$이므로
$A\cap\{2, 3, 5\}=\{2, 3\}$
따라서 집합 A와 서로소인 집합은 ④이다.

4 $U=\{x\,|\,x$는 9 이하의 자연수$\}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$A\cap B=\{3, 5\}$, $B-A=\{2, 6\}$,
$(A\cup B)^C=\{7, 8, 9\}$
를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

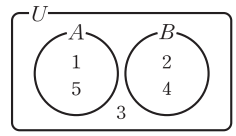


$\therefore$ $\boldsymbol{A-B=\{1,\ 4\}}$

5 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$에 대하여
$A=\{1, 2, 5, 10\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$이므로
① $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$
② $A\cap B=\{1, 5\}$
④ $A-B=\{2, 10\}$
⑤ $B-A=\{3, 7, 9\}$
따라서 옳은 것은 ③이다.

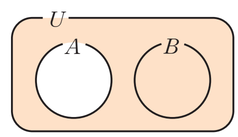
6 ㄱ. $A\cap B^C=\varnothing$이므로 $A-B=\varnothing$ (참)
ㄴ. $A-B=\varnothing$이므로 $A\subset B$ (참)
ㄷ. $A\subset B$이므로 $B^C\subset A^C$ (거짓)
ㄹ. $A\subset B$이므로 $A\cap B=A$ (거짓)
ㅁ. $A\subset B$이므로 $A\cup B=B$ (거짓)
따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

7 두 집합 A와 B는 서로소이므로 $A\cap B=\varnothing$
$A-B=\{1, 5\}$,
$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{3\}$
을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

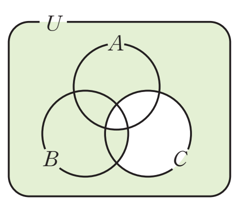


$\therefore$ $\boldsymbol{B=\{2,\ 4\}}$

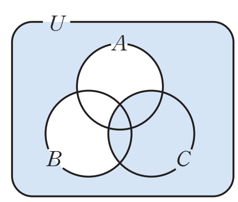
8 ⑤ $A\cap B=\varnothing$일 때, A^C은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분과 같다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.



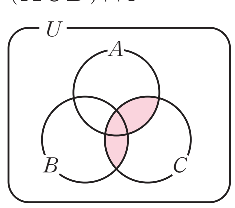
9 ① $(A^C\cap B)\cup C^C$



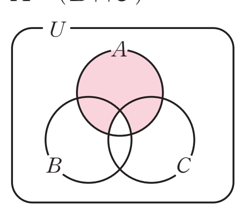
③ $(A^C\cap B^C)\cup C$



④ $(A\cup B)\cap C$



⑤ $A-(B\cap C)$



따라서 주어진 벤 다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ②이다.

10 $(A\cap B)\cup(A-B)=(A\cap B)\cup(A\cap\boxed{B^C})$
$=A\cap(B\cup\boxed{B^C})$
$=A\cap\boxed{U}=\boxed{A}$

$\therefore$ (가) $\boldsymbol{B^C}$ (나) $\boldsymbol{U}$ (다) $\boldsymbol{A}$

11 $(A-B)^C-B=(A\cap B^C)^C\cap B^C$
$=(A^C\cup B)\cap B^C$
$=(A^C\cap B^C)\cup(B\cap B^C)$
$=(A^C\cap B^C)\cup\varnothing$
$=\boldsymbol{A^C\cap B^C}$

12 $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$에서
$10=14-n(A\cap B)$, $n(A\cap B)=4$
$\therefore n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=18-4=\mathbf{14}$

다른 풀이 $n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$에서
$10=n(A\cup B)-18$, $n(A\cup B)=28$
$\therefore n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$
$=28-14=14$

13 전체 학생의 집합을 U, 국내 체험활동에 참가한 학생의 집합을 A, 해외 체험활동에 참가한 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=n(A\cup B)=34$, $n(A)=31$, $n(B)=8$
이때 국내 체험활동과 해외 체험활동에 모두 참가한 학생의 집합은 $A\cap B$이므로
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=31+8-34=\mathbf{5}$

14 회사 전체 신입사원의 집합을 U, 소방안전 교육을 받은 사원의 집합을 A, 심폐소생술 교육을 받은 사원의 집합을 B라 하면
$n(U)=200$, $n(A)=120$, $n(B)=115$
이때 소방안전 교육과 심폐소생술 교육을 모두 받은 사원 수는 $n(A\cap B)$이고
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로
$n(A\cap B)=235-n(A\cup B)$
(i) $n(A\cap B)$의 최댓값은 $A\cup B=A$일 때이므로
$n(A\cap B)=235-120=115$
(ii) $n(A\cap B)$의 최솟값은 $A\cup B=U$일 때이므로
$n(A\cap B)=235-200=35$
(i), (ii)에서 소방안전 교육과 심폐소생술 교육을 모두 받은 사원 수의 **최댓값은 115**이고 **최솟값은 35**이다.

07 명제

본문 | 078~083쪽

1-1 **참, 거짓**

1-2 (1) 2는 소수이지만 홀수가 아니므로 **거짓인 명제**이다.
(2) 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
(3) $\varnothing\subset\{3, 4\}$이므로 **참인 명제**이다.
(4) x의 값에 따라 참일 수도 거짓일 수도 있으므로 명제가 아니다.

2-1 (1) **4** (2) $\mathbf{-1,\ 2}$

2-2 (1) $U=\{1, 3, 5, 7, 9\}$의 원소 중 소수인 것은 3, 5, 7이므로 진리집합은 $\{\mathbf{3,\ 5,\ 7}\}$이다.
(2) $x-2>6$에서 $x>8$
$U=\{1, 3, 5, 7, 9\}$의 원소 중 $x>8$을 만족시키는 x의 값은 9이므로 진리집합은 $\{\mathbf{9}\}$이다.

3-1 (1) **거짓** (2) $\boldsymbol{\le}$

3-2 (1) **6은 2의 배수가 아니다.** (거짓)
(2) $\mathbf{5<3}$ (거짓)

4-1 (1) **4** (2) **4**

4-2 (1) 주어진 조건의 부정은 '**$\boldsymbol{x}$는 9의 약수가 아니다.**'이고 그 진리집합은 $\{\mathbf{5,\ 7,\ 11}\}$이다.
(2) 주어진 조건의 부정은 $x\ge3$ 그리고 $x<6$, 즉, '$\boldsymbol{3\le x<6}$'이고 그 진리집합은 $\{\mathbf{3,\ 5}\}$이다.

5-1 (1) **참** (2) **2, 참**

5-2 (1) 조건 '$p : |x|>x$'의 진리집합을 P라 하면
$P=\{-1, -2, -3, \cdots\}$이다. 이때 $P\ne U$
따라서 주어진 명제는 **거짓**이다.
(2) 조건 '$q : x^2+4=0$'의 진리집합을 Q라 하면 $Q=\varnothing$이다.
따라서 주어진 명제는 **거짓**이다.

6-1 (1) **참** (2) $\boldsymbol{>}$

6-2 (1) 명제의 부정은 '**어떤 자연수 $\boldsymbol{x}$에 대하여 $\boldsymbol{x^2\le1}$이다.**'
$x=1$이면 $x^2\le1$을 만족시키므로 주어진 명제의 부정은 **참**이다.
(2) 명제의 부정은 '**모든 자연수 $\boldsymbol{x}$에 대하여 $\boldsymbol{x^2>0}$이다.**'
이므로 **참**이다.

7-1 **2, 참**

7-2 **가정 : $\boldsymbol{x}$는 소수이다.**
결론 : $\boldsymbol{x}$는 홀수이다.
$x=2$이면 x는 소수이지만 홀수가 아니므로 주어진 명제는 **거짓**이다.

8-1 **-1, 참**

8-2 (1) 두 조건 'p : x는 3의 배수이다.', 'q : x는 9의 배수이다.'의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{3, 6, 9, \cdots\}$, $Q=\{9, 18, 27, \cdots\}$

이때 $P\not\subset Q$이므로 주어진 명제는 **거짓**이다.

(2) 두 조건 'p : $x>-1$', 'q : $x>1$'의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x>-1\}$, $Q=\{x|x>1\}$

이때 $P\not\subset Q$이므로 주어진 명제는 **거짓**이다.

9-1 **$x^2\le 4$, 참**

9-2 (1) **역: x가 6의 약수이면 x는 12의 약수이다. (참)**

두 조건 'p: x는 6의 약수이다.', 'q: x는 12의 약수이다.'의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 2, 3, 6\}$, $Q=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

에서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제의 역은 참이다.

대우: x가 6의 약수가 아니면 x는 12의 약수가 아니다. (거짓)

[반례] $x=4$이면 x는 6의 약수는 아니지만 12의 약수이다.

(2) **역: 자연수 n에 대하여 $n+1$이 홀수이면 n은 짝수이다. (참)**

$n+1=2k+1$ (k는 자연수)로 놓으면 $n=2k$

따라서 n은 짝수이므로 주어진 명제의 역은 참이다.

대우: 자연수 n에 대하여 $n+1$이 짝수이면 n은 홀수이다. (참)

$n+1=2k$ (k는 자연수)로 놓으면 $n=2k-1$

따라서 n은 홀수이므로 주어진 명제의 대우는 참이다.

10-1 **$\sim r$, q**

10-2 명제 $\sim p \longrightarrow q$와 $p \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 각각의 대우 $\sim q \longrightarrow p$, $r \longrightarrow \sim p$가 참이다.

또 명제 $r \longrightarrow \sim p$와 $\sim p \longrightarrow q$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 $r \longrightarrow q$가 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㅂ이다.

11-1 **충분**

11-2 (1) 명제 $p \longrightarrow q$: '$a=b$이면 $ac=bc$이다.'는 참

명제 $q \longrightarrow p$: '$ac=bc$이면 $a=b$이다.'는 거짓

[반례] $a=1$, $b=2$, $c=0$이면 $ac=bc=0$이지만 $a\ne b$이다.

따라서 p는 q이기 위한 **충분조건**이다.

(2) 명제 $p \longrightarrow q$: 'ab는 정수이면 a와 b는 정수이다.'는 거짓

[반례] $a=2$, $b=\frac{1}{2}$이면 $ab=1$은 정수이지만 b는 정수가 아니다.

명제 $q \longrightarrow p$: 'a와 b가 정수이면 ab는 정수이다.'는 참

따라서 p는 q이기 위한 **필요조건**이다.

(3) 명제 $p \longrightarrow q$: '$2a-1=3$이면 $a=2$이다.'는 참

명제 $q \longrightarrow p$: '$a=2$이면 $2a-1=3$이다.'는 참

따라서 p는 q이기 위한 **필요충분조건**이다.

12-1 **충분**

12-2 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

(1) $P=\{4, 8, 12, \cdots\}$, $Q=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$

이므로 $P\subset Q$이고 $Q\not\subset P$

따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 **충분조건**이다.

(2) $P=\{x|x>-1\}$, $Q=\{x|x>0\}$

이므로 $P\not\subset Q$이고 $Q\subset P$

따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 **필요조건**이다.

(3) $P=\{0, 1\}$, $Q=\{0, 1\}$이므로 $P=Q$

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 **필요충분조건**이다.

집중 연습

본문 | 084, 085쪽

1 $U=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$

$=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(1) U의 원소 중 소수인 것은 2, 3, 5, 7이므로 진리집합은 $\{\mathbf{2,\ 3,\ 5,\ 7}\}$이다.

(2) $x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=4$

그런데 $x=-1$은 전체집합의 원소가 아니므로 진리집합은 $\{\mathbf{4}\}$이다.

(3) U의 원소 중 $3<x<9$를 만족시키는 x의 값은 4, 5, 6, 7, 8이므로 진리집합은 $\{\mathbf{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8}\}$이다.

(4) U의 원소 중 7 이하의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이므로 진리집합은 $\{\mathbf{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7}\}$이다.

(5) U의 원소 중 18의 약수는 1, 2, 3, 6, 9이므로 진리집합은 $\{\mathbf{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9}\}$이다.

2 (1) 모든 실수 x에 대하여 $|x|\ge 0$이므로 주어진 명제는 **참**이다.

(2) 모든 자연수 x에 대하여 $|x|\ge 1$이므로 주어진 명제는 **참**이다.

(3) $x=0$이면 $x^2=0$이다.

따라서 $x^2\le 0$이므로 주어진 명제는 **참**이다.

(4) 자연수 3의 제곱인 9는 홀수이므로 주어진 명제는 **참**이다.

(5) $x+1<0$, 즉 $x<-1$을 만족시키는 자연수 x는 존재하지 않으므로 주어진 명제는 **거짓**이다.

3 (1) 두 조건 'p : $|x|=2$', 'q : $x=2$'의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P=\{-2, 2\}$, $Q=\{2\}$
이때 $P\not\subset Q$이므로 주어진 명제는 **거짓**이다.
(2) 두 조건 'p : $x+3>0$', 'q : $x+2>0$'의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P=\{x|x>-3\}$, $Q=\{x|x>-2\}$
이때 $P\not\subset Q$이므로 주어진 명제는 **거짓**이다.
(3) 두 조건 'p : $-2\le x\le 2$', 'q : $x\le 2$'의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P=\{x|-2\le x\le 2\}$, $Q=\{x|x\le 2\}$
이때 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 **참**이다.
(4) 두 조건 'p : x는 3의 배수이다.', 'q : x는 6의 배수이다.'의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{3, 6, 9, \cdots\}$, $Q=\{6, 12, 18, \cdots\}$
이때 $P\not\subset Q$이므로 주어진 명제는 **거짓**이다.
(5) 두 조건 'p : $x^2-5x+6=0$', 'q : $0<x<4$'의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$x^2-5x+6=0$에서 $(x-2)(x-3)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=3$
$P=\{2, 3\}$, $Q=\{x|0<x<4\}$
이때 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 **참**이다.

4 (1) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$, $Q=\{3, 5, 7, 11, \cdots\}$
이므로 $P\not\subset Q$이고 $Q\subset P$
따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 **필요조건**이다.
(2) 명제 $p \longrightarrow q$: '$a=2$, $b=3$이면 $ab=6$이다.'는 참
명제 $q \longrightarrow p$: '$ab=6$이면 $a=2$, $b=3$이다.'는 거짓
[반례] $a=1$, $b=6$이면 $ab=6$이지만 $a\ne 2$, $b\ne 3$이다.
따라서 p는 q이기 위한 **충분조건**이다.
(3) 명제 $p \longrightarrow q$: 'a는 홀수, b는 짝수이면 ab는 짝수이다.'는 참
명제 $q \longrightarrow p$: 'ab가 짝수이면 a는 홀수, b는 짝수이다.'는 거짓
[반례] $a=2$, $b=4$이면 $ab=8$이므로 짝수이지만 a는 홀수가 아니다.
따라서 p는 q이기 위한 **충분조건**이다.
(4) 모든 정사각형은 직사각형이므로
명제 $p \longrightarrow q$: '사각형 ABCD가 정사각형이면 사각형 ABCD는 직사각형이다.'는 참
명제 $q \longrightarrow p$: '사각형 ABCD가 직사각형이면 사각형 ABCD는 정사각형이다.'는 거짓
[반례] 가로와 세로의 길이가 다른 직사각형은 정사각형이 아니다.
따라서 p는 q이기 위한 **충분조건**이다.
(5) 정삼각형의 모든 내각의 크기는 같으므로
명제 $p \longrightarrow q$: '삼각형 ABC가 정삼각형이면 $\angle A=\angle B=\angle C$이다.'는 참
세 내각의 크기가 모두 같은 삼각형은 정삼각형이므로
명제 $q \longrightarrow p$: '$\angle A=\angle B=\angle C$이면 삼각형 ABC는 정삼각형이다.'는 참
따라서 p는 q이기 위한 **필요충분조건**이다.

기초 개념 평가

본문 | 086, 087쪽

01	명제	02	조건
03	$\sim p$	04	$\sim p$
05	P^C	06	어떤, $\sim p$
07	모든, $\sim p$	08	참
09	거짓	10	$q \longrightarrow p$
11	$\sim q \longrightarrow \sim p$	12	충분
13	필요	14	필요충분

기초 문제 평가

본문 | 088, 089쪽

1 ④ [반례] $x=-2$이면 $x<1$이지만 $x^2>1$이다.
따라서 거짓인 명제는 ④이다.

2 $U=\{1, 2, 3, 6\}$의 원소 중 조건 p를 만족시키는 x는
$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$
조건 p의 진리집합은 $P=\{1, 2\}$이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은 $P^C=\{\mathbf{3,\ 6}\}$이다.

3 두 실수 a, b에 대하여 $|a|\ge 0$, $|b|\ge 0$이므로
$|a|+|b|=0$에서 $|a|=0$이고 $|b|=0$
$\therefore a=0$이고 $b=0$
따라서 조건 '$|a|+|b|=0$'의 부정은 ②이다.

4 ㄱ. $x=5$이면 $x<5$를 만족시키지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다.
ㄴ. $x=5$이면 $x-2=3$이므로 주어진 명제는 참이다.
ㄷ. $x=4$이면 $x^2=16$이므로 주어진 명제는 참이다.
ㄹ $x=1$이면 $x^2>3$을 만족시키지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다.
따라서 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

5 ① $a^2>9$이면 $a>3$이다. (거짓)

[반례] $a=-4$이면 $a^2=16>9$이지만 $a<3$이다.

② $a^2=1$이면 $a=1$이다. (거짓)

[반례] $a=-1$이면 $a^2=1$이지만 $a\neq1$이다.

③ a가 9의 배수일 때, $a=9k$ (k는 자연수)로 놓으면 $a=3(3k)$이고 $3k$는 자연수이므로 a는 3의 배수이다. (참)

④ $a+b\leq2$이면 $a\leq1$이고 $b\leq1$이다. (거짓)

[반례] $a=3$, $b=-1$이면 $a+b=2\leq2$이지만 $a>1$이다.

⑤ $a+b$가 짝수이면 a, b는 모두 짝수이다. (거짓)

[반례] $a=3$, $b=1$이면 $a+b=4$는 짝수이지만 a, b는 모두 홀수이다.

따라서 참인 명제는 ③이다.

6 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $P\subset Q$이다.

① $P\cap Q=P$ ② $P\cap Q^C=P-Q=\varnothing$

③ $P\cup Q=Q$ ④ $Q-P\neq U$

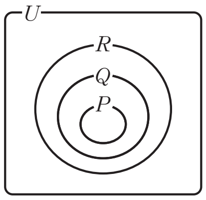
⑤ $P\cup Q^C\neq U$

따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

7 세 조건 p, q, r의 진리집합 P, Q, R에 대하여 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참이므로

$P\subset Q$, $Q\subset R$

즉, $P\subset Q\subset R$를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄴ. $P\cup Q=Q$이고 $Q\subset R$이므로 $(P\cup Q)\subset R$

$\therefore (P\cup Q)\not\subset R^C$

ㄷ. $P^C\cap R^C=(P\cup R)^C=R^C$이고 $Q\subset R$이므로 $R^C\subset Q^C$

$\therefore (P^C\cap R^C)\subset Q^C$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

8 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우인 $q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

이때 명제 $r \longrightarrow q$가 참이므로 삼단논법에 의하여 $r \longrightarrow \sim p$이다.

따라서 항상 참인 것은 ①이다.

9 ㄱ. 역 : '$x=2$이면 $x^2-2x=0$이다.'에서 $x^2-2x=0$에 $x=2$를 대입하면 $2^2-2\times2=0$이므로 주어진 명제의 역은 참이다.

ㄴ. 역 : 'n이 4의 배수이면 n은 2의 배수이다.'에서 두 조건 'p : n이 4의 배수', 'q : n이 2의 배수'의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

ㄷ. 역 : '실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2>0$이면 $xy<0$이다.' (거짓)

[반례] $x=1$, $y=2$이면 $x^2+y^2=5>0$이지만 $xy=2>0$

따라서 역이 참인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

10 주어진 명제가 참이므로 명제의 대우 '$x^2+ax+b=0$이면 $x-2=0$이다.'도 참이다.

$x^2+ax+b=(x-2)^2=x^2-4x+4$

따라서 $a=-4$, $b=4$이므로 $\boldsymbol{a+b=0}$

11 ① 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{2, 3, 5, 7\}$, $Q=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

이때 $P\subset Q$, $Q\not\subset P$이므로 $p \Longrightarrow q$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

② $|x|\leq3$에서 $-3\leq x\leq3$이므로 $p \Longleftrightarrow q$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

③ 명제 $p \longrightarrow q$: '$x^2+y^2=0$이면 $xy=0$이다.'는 참

$x^2+y^2=0$이면 $x^2\geq0$, $y^2\geq0$에서 $x^2=y^2=0$

$\therefore x=y=0$

명제 $q \longrightarrow p$: '$xy=0$이면 $x^2+y^2=0$이다.'는 거짓

[반례] $x=1$, $y=0$이면 $xy=0$이지만 $x^2+y^2=1\neq0$

따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

④ 명제 $p \longrightarrow q$: '$x\neq0$ 또는 $y\neq0$이면 $x^2+y^2>0$'는 참

명제 $q \longrightarrow p$: '$x^2+y^2>0$이면 $x\neq0$ 또는 $y\neq0$'는 참

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

⑤ 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{0, 2\}$, $Q=\{2\}$

이때 $P\not\subset Q$, $Q\subset P$이므로 $q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서 조건 p가 조건 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은 ⑤이다.

12 ㄱ. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

조건 p에서 $x+3=-2$ 또는 $x+3=2$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=-1$

$P=\{-5, -1\}$, $Q=\{-1\}$

이때 $P\not\subset Q$, $Q\subset P$이므로 $q \Longrightarrow p$

따라서 조건 p는 조건 q이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,-1<x<1\}$, $Q=\{x\,|\,x<1\}$

이때 $P\subset Q$, $Q\not\subset P$이므로 $p \Longrightarrow q$

따라서 조건 p는 조건 q이기 위한 충분조건이다.

ㄷ. 명제 $p \longrightarrow q$: '$x^2>y^2$이면 $x>y>0$이다.'는 거짓

[반례] $x=-2$, $y=-1$이면 $x^2>y^2$이지만 $x<y<0$이다.

명제 $q \longrightarrow p$: '$x>y>0$이면 $x^2>y^2$이다.'는 참

즉, $q \Longrightarrow p$이므로 조건 p는 조건 q이기 위한 필요조건이다.

따라서 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건인 것은 ㄴ이다.

08 명제의 증명

본문 | 090~091쪽

1-1 **홀수, 1, 홀수**

1-2 **홀수, $2ab-a-b+1$, 홀수**

2-1 $\geq$

2-2 $a^2+2b^2-2ab=(a-b)^2+b^2$
이때 $(a-b)^2\geq 0$, $b^2\geq 0$이므로
$a^2+2b^2-2ab\geq 0$, 즉 $a^2+2b^2\geq 2ab$
여기서 등호는 $a=b=0$일 때 성립한다.

2-3 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
이때 $(a-b)^2\geq 0$, $(b-c)^2\geq 0$, $(c-a)^2\geq 0$이므로
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq 0$
여기서 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.

3-1 $\boldsymbol{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2, b}$

3-2 $a>0$이므로
$a+\frac{1}{a}-2=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$
이때 $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\geq 0$이므로
$a+\frac{1}{a}-2\geq 0$, 즉 $a+\frac{1}{a}\geq 2$
여기서 등호는 $a=\frac{1}{a}$, 즉 $a=1$일 때 성립한다.

기초 개념 평가

본문 | 092, 093쪽

01 정의	02 정리
03 정의, 정리	04 대우, 대우
05 결론	06 $a-b>0$
07 $\geq$	08 $a^2\geq b^2$
09 $\geq$	10 $a=b=0$
11 1	12 1
13 2	14 4

기초 문제 평가

본문 | 094, 095쪽

1 (가) 3 (나) 2 (다) 대우
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

2 (가) 유리수 (나) 짝수 (다) 서로소
따라서 옳은 것은 ③이다.

3 (가) $\boldsymbol{b^2x^2}$ (나) $\boldsymbol{ay-bx}$

4 (가) $\geq$ (나) $\boldsymbol{ab\geq 0}$

5 $a>0$, $b>0$에서 $\frac{a}{b}>0$, $\frac{b}{a}>0$이므로
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}=2$
여기서 등호는 $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$, 즉 $a=b$일때 성립한다.

6 $x>0$에서 $\frac{16}{x}>0$이므로
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$x+\frac{16}{x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{16}{x}}=2\times 4=8$
여기서 등호는 $x=\frac{16}{x}$, 즉 $x=4$일 때 성립한다.
따라서 $x+\frac{16}{x}$의 최솟값은 **8**이다.

7 $a>0$, $b>0$에서 $2a>0$, $3b>0$이므로
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$2a+3b\geq 2\sqrt{2a\times 3b}$, $12\geq 2\sqrt{6ab}$, $6\geq\sqrt{6ab}$
$36\geq 6ab$ $\quad\therefore ab\leq 6$
여기서 등호는 $2a=3b$일 때 성립한다.
따라서 ab의 최댓값은 **6**이다.

8 $\left(4x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+16y\right)=4+64xy+\frac{1}{xy}+16$
$=64xy+\frac{1}{xy}+20$
$x>0$, $y>0$에서 $64xy>0$, $\frac{1}{xy}>0$이므로
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$64xy+\frac{1}{xy}+20\geq 2\sqrt{64xy\times\frac{1}{xy}}+20=2\times 8+20=36$
여기서 등호는 $64xy=\frac{1}{xy}$, 즉 $xy=\frac{1}{8}$일 때 성립한다.
따라서 구하는 최솟값은 **36**이다.

09 함수

기초 개념 피드백 & TEST

본문 | 099쪽

1-1 $\mathbf{2}$, **함수**, $\mathbf{48}$

1-2 ㄱ. 자연수 x를 2로 나눈 나머지는 0 또는 1 중의 어느 하나에 대응하므로 함수이다.

ㄴ. 예를 들어 자연수 2의 배수는 2, 4, 6, $\cdots$의 무수히 많은 수가 대응하므로 함수가 아니다.

ㄷ. $y=2\pi x$이므로 함수이다.

ㄹ. $y=\dfrac{500}{x}$이므로 함수이다.

따라서 y가 x의 함수인 것은 **ㄱ, ㄷ, ㄹ**이다.

1-3 (1) $f(-1)=-3\times(-1)=\mathbf{3}$

(2) $f(-1)=(-1)^2=\mathbf{1}$

2-1 $\mathbf{-5,\ 0,\ -1,\ -3}$

2-2 $\mathbf{A(2, 3), B(3, 2), C(-2, 3),}$
$\mathbf{D(2, -3), E(-2, -3), F(-3, 0)}$

본문 | 100~105쪽

1-1 (1) $\mathbf{3}$ (2) **대응** (3) $\boldsymbol{c}$

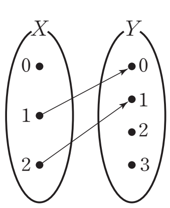
1-2 (1) X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 **함수가 아니다.**

(2) X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 **함수이다.**

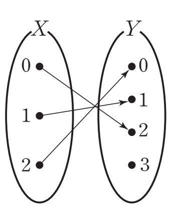
(3) X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 c, d의 2개이므로 **함수가 아니다.**

2-1 $\boldsymbol{Y}$, $\mathbf{-1}$

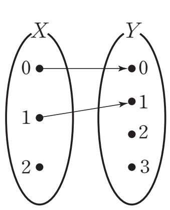
2-2 ㄱ. X의 원소 0에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.



ㄴ. X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.



ㄷ. X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.



따라서 함수인 것은 **ㄴ**이다.

3-1 (1) $\boldsymbol{c}$ (2) $\mathbf{1}$, $\boldsymbol{d}$

3-2 (1) **정의역 :** $\{\boldsymbol{a, b, c, d}\}$, **공역 :** $\{\mathbf{1, 2, 3}\}$,
치역 : $\{\mathbf{1, 3}\}$

(2) **정의역 :** $\{\boldsymbol{a, b, c, d}\}$, **공역 :** $\{\mathbf{1, 2, 3}\}$,
치역 : $\{\mathbf{1, 2, 3}\}$

4-1 $\mathbf{1, 0, 0}$

4-2 $f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=2,\ f(4)=3,\ f(5)=2$
따라서 함수 f의 치역은 $\{\mathbf{1, 2, 3}\}$이다.

5-1 $\mathbf{1, 1,}\ \boldsymbol{g}$

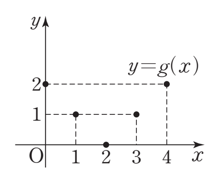
5-2 $f(-1)=-1,\ f(0)=0,\ f(1)=1$
$g(-1)=-1, g(0)=0, g(1)=1$
$h(-1)=1, h(0)=0, h(1)=-1$
$f(-1)=g(-1), f(0)=g(0), f(1)=g(1)$
이므로 서로 같은 함수는 $\boldsymbol{f}$**와** $\boldsymbol{g}$이다.

6-1 $\mathbf{1,\ 1,\ 3}$

6-2 $f(2)=g(2)$에서 $2a+b=2$ $\cdots\cdots$ ㉠
$f(4)=g(4)$에서 $4a+b=1$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\boldsymbol{a}=\mathbf{-\dfrac{1}{2}}$, $\boldsymbol{b}=\mathbf{3}$

7-1 $\mathbf{3,\ 2}$

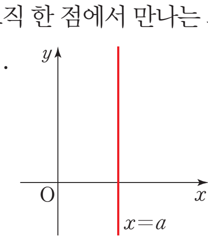
7-2 함수의 그래프는
$\{(0, 2), (1, 1), (2, 0), (3, 1), (4, 2)\}$
이므로 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



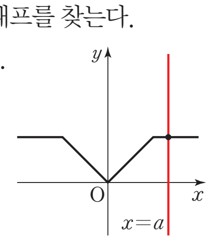
8-1 ㄱ

8-2 정의역의 각 원소 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만나는 그래프를 찾는다.

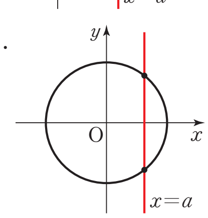
ㄱ.



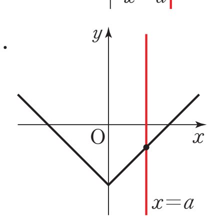
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.

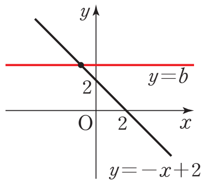


따라서 함수의 그래프인 것은 **ㄴ, ㄹ**이다.

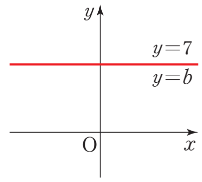
9-1 ㄱ

9-2 치역과 공역이 같고, 치역의 각 원소 b에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=b$와 한 점에서 만나는 함수의 그래프를 찾는다.

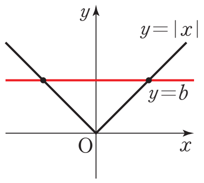
ㄱ.



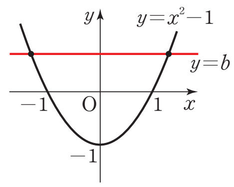
ㄴ.



ㄷ.



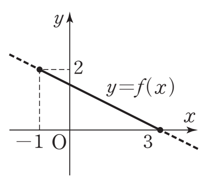
ㄹ.



따라서 일대일대응인 것은 ㄱ이다.

10-1 $-1,\ 1,\ 0$

10-2 $f(x)=ax+b$에서 $a<0$이므로 함수 f가 일대일대응이려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다. 즉,



$f(-1)=2$에서

$-a+b=2$ …… ㉠

$f(3)=0$에서

$3a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\boldsymbol{a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2}}$

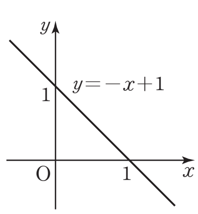
11-1 치역, ㄱ, ㄹ

11-2 일대일대응 : ㄴ, ㄹ

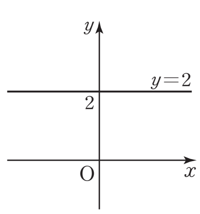
항등함수 : ㄹ

상수함수 : ㄷ

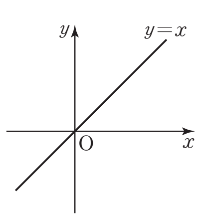
11-3 ㄱ.



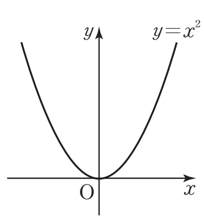
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



일대일대응 : ㄱ, ㄷ

항등함수 : ㄷ

상수함수 : ㄴ

기초 개념 평가

본문 | 106, 107쪽

01	대응	02	함수
03	정의역, 공역	04	치역
05	정의역	06	=
07	그래프	08	한
09	일대일함수	10	일대일대응
11	항등	12	상수

기초 문제 평가

본문 | 108, 109쪽

1 ㄱ. X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 **함수이다.**

정의역 : $\{a, b, c\}$, 공역 : $\{1, 2, 3\}$,

치역 : $\{1, 2\}$

ㄴ. X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 c, d의 2개이므로 **함수가 아니다.**

ㄷ. X의 원소 c에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 **함수가 아니다.**

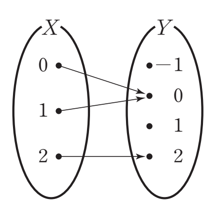
ㄹ. X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 **함수이다.**

정의역 : $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역 : $\{a, b, c, d\}$,

치역 : $\{b, c\}$

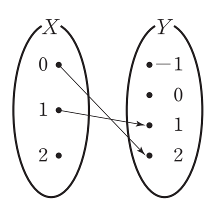
2 ㄱ. 주어진 대응을 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.

이때 X의 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.



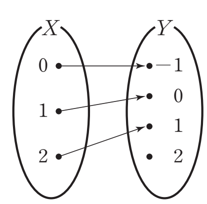
ㄴ. 주어진 대응을 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.

이때 X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.



ㄷ. 주어진 대응을 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.

이때 X의 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.



따라서 함수인 것은 **ㄱ, ㄷ**이다.

3 집합 X의 각 원소의 함숫값을 구하면

$f(-2)=-1,\ f(-1)=0,\ f(1)=1,\ f(2)=1$

따라서 함수 f의 치역은 $\{\boldsymbol{-1,\ 0,\ 1}\}$이다.

4 $f(-1)=-2,\ f(1)=0$
$g(-1)=0,\ g(1)=0$
$h(-1)=0,\ h(1)=0$
즉, $g(-1)=h(-1)$, $g(1)=h(1)$이므로 서로 같은 함수는 $\boldsymbol{g}$와 $\boldsymbol{h}$이다.

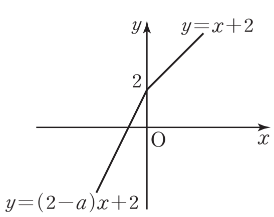
5 $f(1)=a+b,\ g(1)=1$이고, $f(2)=2a+b,\ g(2)=-2$
이때 $f=g$이므로
$f(1)=g(1)$에서 $a+b=1$ …… ㉠
$f(2)=g(2)$에서 $2a+b=-2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\boldsymbol{a=-3,\ b=4}$

6 정의역의 각 원소 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만나는 그래프를 찾는다.
ㄴ, ㄹ의 그래프는 직선 $x=a$와 두 점에서 만나는 경우가 있으므로 함수의 그래프가 아니다.
따라서 함수의 그래프인 것은 **ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ**이다.

7 (1) 일대일함수 : **ㄱ, ㄴ, ㄷ** (2) 일대일대응 : **ㄱ, ㄴ**
(3) 항등함수 : **ㄴ** (4) 상수함수 : **ㄹ**

8 치역과 공역이 같고, 치역의 각 원소 b에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=b$와 한 점에서 만나는 함수의 그래프를 찾는다.
따라서 일대일대응의 그래프인 것은 **ㄱ, ㄴ**이다.

9 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다. 즉, $x<0$에서 직선 $y=(2-a)x+2$의 기울기가 양수이어야 하므로
$2-a>0$ $\therefore\ \boldsymbol{a<2}$



10 함수 $f(x)=x^2$이 항등함수이어야 하므로
$f(x)=x$에서 $x^2=x$, $x(x-1)=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$
따라서 집합 X는 집합 $\{0, 1\}$의 공집합이 아닌 부분집합이어야 하므로 구하는 집합 X는 $\boldsymbol{\{0\},\ \{1\},\ \{0,\ 1\}}$이다.

11 함수 f는 상수함수이므로
$f(1)=f(2)=f(3)=\cdots=f(10)=2$
$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+\ \cdots\ +f(10)=2\times10=\boldsymbol{20}$

12 함수 f는 항등함수이므로 $f(1)=1,\ f(2)=2$
$\therefore\ f(1)=g(1)=1$
함수 g는 상수함수이므로 $g(2)=g(1)=1$
$\therefore\ f(2)+g(2)=2+1=\boldsymbol{3}$

10 합성함수와 역함수

본문 | 110~117쪽

1-1 (1) **2** (2) **2**
1-2 (1) $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(1)=\boldsymbol{0}$
(2) $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(2)=\boldsymbol{1}$

2-1 (1) **0** (2) **1**
2-2 (1) $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(2)=\boldsymbol{3}$
(2) $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(-1)=\boldsymbol{-3}$
(3) $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(1)=\boldsymbol{2}$
(4) $(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(3)=\boldsymbol{-6}$

3-1 (1) $\boldsymbol{2x-1}$ (2) **2** (4) **1, 3**
3-2 (1) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+2)$
$=\boldsymbol{-(x+2)^2}$
(2) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-x^2)$
$=\boldsymbol{-x^2+2}$
(3) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(-x^2)$
$=-(-x^2)^2=\boldsymbol{-x^4}$
(4) $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x+2)$
$=(x+2)+2=\boldsymbol{x+4}$

4-1 $\boldsymbol{3x-1,\ -6}$
4-2 (1) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x)=(-x)^2=x^2$
이므로
$((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))=(f\circ g)(x+2)$
$=\boldsymbol{(x+2)^2}$
(2) $(g\circ h)(x)=g(h(x))=g(x+2)$
$=-(x+2)=-x-2$
이므로
$(f\circ(g\circ h))(x)=f((g\circ h)(x))=f(-x-2)$
$=(-x-2)^2=\boldsymbol{(x+2)^2}$
(3) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=-x^2$
이므로
$((g\circ f)\circ h)(x)=(g\circ f)(h(x))=(g\circ f)(x+2)$
$=\boldsymbol{-(x+2)^2}$
(4) $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(-x)=-x+2$
이므로
$(f\circ(h\circ g))(x)=f((h\circ g)(x))=f(-x+2)$
$=(-x+2)^2=\boldsymbol{(x-2)^2}$

5-1 **1**
5-2 $(f\circ h)(x)=f(h(x))=-2h(x)+3$
이때 $(f\circ h)(x)=g(x)$이므로
$-2h(x)+3=x+2$ $\therefore\ \boldsymbol{h(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$

5-3 $(f\circ h)(x)=f(h(x))=h(x)+2$
이때 $(f\circ h)(x)=g(x)$이므로
$h(x)+2=x^2+x-1 \qquad \therefore h(x)=x^2+x-3$
$\therefore h(-1)=1-1-3=\mathbf{-3}$

6-1 **2, 2*x***
6-2 $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(3x+1)$
이때 $(h\circ g)(x)=f(x)$이므로 $h(3x+1)=x-1$
$3x+1=t$로 치환하면 $x=\dfrac{t-1}{3}$
$h(t)=\dfrac{t-1}{3}-1=\dfrac{1}{3}t-\dfrac{4}{3}$
$\therefore \boldsymbol{h(x)=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{4}{3}}$
6-3 $(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(x-1)$
이때 $(h\circ f)(x)=g(x)$이므로 $h(x-1)=x^2$
$x-1=t$로 치환하면 $x=t+1$
$h(t)=(t+1)^2$
$h(x)=(x+1)^2 \qquad \therefore h(3)=\mathbf{16}$

7-1 (1) **3** (2) **1** (3) **15**
7-2 (1) $f(3)=1$이므로 $\boldsymbol{f^{-1}(1)=3}$
(2) $f(2)=2$이므로 $\boldsymbol{f^{-1}(2)=2}$
(3) $f(4)=3$이므로 $\boldsymbol{f^{-1}(3)=4}$
(4) $f(1)=4$이므로 $\boldsymbol{f^{-1}(4)=1}$

8-1 (1) $\boldsymbol{a}$ (2) $\mathbf{-2}$
8-2 (1) $f^{-1}(a)=2$에서 $f(2)=a$이므로
$-6+5=a \qquad \therefore \boldsymbol{a=-1}$
(2) $f^{-1}(2)=a$에서 $f(a)=2$이므로
$-3a+5=2,\ -3a=-3 \qquad \therefore \boldsymbol{a=1}$
8-3 $f^{-1}(3)=a$로 놓으면 $f(a)=3$
$2a-1=3 \qquad \therefore a=2$
$\therefore (g\circ f^{-1})(3)=g(f^{-1}(3))=g(2)=\mathbf{2}$

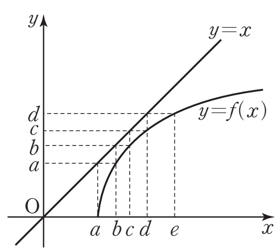
9-1 **2**
9-2 (1) 함수 $y=-4x+3$은 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. $y=-4x+3$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$x=-\dfrac{1}{4}y+\dfrac{3}{4}$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}}$
(2) 함수 $y=\dfrac{1}{2}x-5$는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=\dfrac{1}{2}x-5$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$x=2y+10$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$\boldsymbol{y=2x+10}$

10-1 **2, 2**
10-2 $y=-4x+a$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$x=-\dfrac{1}{4}y+\dfrac{a}{4}$
x와 y를 서로 바꾸면 함수 $f(x)$의 역함수는
$y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{a}{4}$, 즉 $f^{-1}(x)=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{a}{4}$
$-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{a}{4}=bx+\dfrac{1}{2}$이므로 $-\dfrac{1}{4}=b,\ \dfrac{a}{4}=\dfrac{1}{2}$
$\therefore \boldsymbol{a=2,\ b=-\dfrac{1}{4}}$
10-3 $y=ax-3$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$x=\dfrac{1}{a}y+\dfrac{3}{a}$
x와 y를 서로 바꾸면 함수 $f(x)$의 역함수는
$y=\dfrac{1}{a}x+\dfrac{3}{a}$, 즉 $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{a}x+\dfrac{3}{a}$
$\dfrac{1}{a}x+\dfrac{3}{a}=-2x+b$이므로 $\dfrac{1}{a}=-2,\ \dfrac{3}{a}=b$
$\therefore \boldsymbol{a=-\dfrac{1}{2},\ b=-6}$

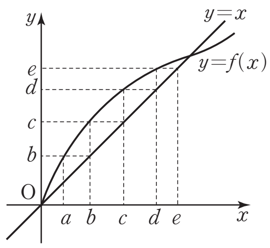
11-1 (1) **1** (2) **1** (3) **2** (4) **3**
11-2 (1) $(f^{-1})^{-1}(3)=f(3)=\mathbf{1}$
(2) $(f\circ f^{-1})(3)=\mathbf{3}$
(3) $(g\circ f)^{-1}(2)=(f^{-1}\circ g^{-1})(2)=f^{-1}(g^{-1}(2))$
$=f^{-1}(3)=\mathbf{4}$
(4) $(f\circ g)^{-1}(2)=(g^{-1}\circ f^{-1})(2)=g^{-1}(f^{-1}(2))$
$=g^{-1}(2)=\mathbf{3}$

12-1 **4, 0**
12-2 (1) $g^{-1}(1)=k$라 하면 $g(k)=1$이므로
$k-3=1,\ k=4 \qquad \therefore \boldsymbol{g^{-1}(1)=4}$
(2) $(g\circ f^{-1})(-3)=g(f^{-1}(-3))$에서
$f^{-1}(-3)=k$라 하면 $f(k)=-3$이므로
$4k+1=-3,\ k=-1 \qquad \therefore f^{-1}(-3)=-1$
$\therefore (g\circ f^{-1})(-3)=g(-1)=\mathbf{-4}$

13-1 $\boldsymbol{a, a}$
13-2 $(f\circ f)^{-1}(a)=f^{-1}(f^{-1}(a))$
에서
$f^{-1}(a)=k$라 하면 $f(k)=a$
이므로 $k=b$
$\therefore (f\circ f)^{-1}(a)$
$=f^{-1}(f^{-1}(a))=f^{-1}(b)$
$f^{-1}(b)=l$이라 하면
$f(l)=b$이므로 $l=c$
$\therefore (f\circ f)^{-1}(a)=f^{-1}(f^{-1}(a))=f^{-1}(b)=\boldsymbol{c}$



13-3 $(f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))$ 에서



$f^{-1}(c)=k$라 하면 $f(k)=c$

이므로 $k=b$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(c)$

$=f^{-1}(f^{-1}(c))=f^{-1}(b)$

$f^{-1}(b)=l$이라 하면

$f(l)=b$이므로 $l=a$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))=f^{-1}(b)=\boldsymbol{a}$

14-1 (1) **2** (2) $\mathbf{-4}$

14-2 (1) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-6, 0)$을 지나므로

$f(-6)=0$, 즉 $f^{-1}(0)=-6$

따라서 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $\mathbf{(0, -6)}$을 지난다.

(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2, -7)$을 지나므로

$f(2)=-7$, 즉 $f^{-1}(-7)=2$

따라서 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $\mathbf{(-7, 2)}$를 지난다.

15-1 (1) $\boldsymbol{x}$ (2) **3**

15-2 (1) 교점의 x좌표는 $-3x+8=x$에서 $x=2$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $\mathbf{(2, 2)}$이다.

참고 $y=-3x+8$에서 $x=-\frac{1}{3}y+\frac{8}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$

함수 $f(x)=-3x+8$의 역함수는

$f^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$이므로

$-3x+8=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$에서 $x=2$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(2, 2)$이다.

(2) 교점의 x좌표는 $\frac{1}{2}x-3=x$에서 $x=-6$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $\mathbf{(-6, -6)}$이다.

기초 개념 평가

본문 | 118, 119쪽

01 합성함수	02 $\boldsymbol{\neq}$
03 $=$	04 역함수
05 일대일대응	06 $\boldsymbol{f}$
07 $\boldsymbol{x, y}$	08 $\boldsymbol{g^{-1}, f^{-1}}$
09 $\boldsymbol{f^{-1}\circ g^{-1}, g^{-1}\circ f^{-1}}$	10 $\boldsymbol{a}$
11 $\boldsymbol{b}$	12 $\boldsymbol{y=x}$
13 $\boldsymbol{y=x}$	

기초 문제 평가

본문 | 120, 121쪽

1 (1) $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(0)=\mathbf{-2}$

(2) $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(-1)=\mathbf{0}$

2 $f(2)=4$이므로

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(4)=3$

$(f\circ f\circ f)(2)=f(f(f(2)))=f(3)=1$

$\therefore f(2)+(f\circ f)(2)+(f\circ f\circ f)(2)=4+3+1=\mathbf{8}$

3 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+b)=ax+b+2$

$ax+b+2=-2x+5$

$\therefore \boldsymbol{a=-2, b=3}$

4 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-4x+a)$

$=2(-4x+a)-3=-8x+2a-3$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-3)$

$=-4(2x-3)+a=-8x+a+12$

$-8x+2a-3=-8x+a+12$에서

$2a-3=a+12 \qquad \therefore \boldsymbol{a=15}$

5 $((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ(g\circ h))(x)=f((g\circ h)(x))$

$=f(-x+1)=(-x+1)^2-1$

$=\boldsymbol{x^2-2x}$

6 $(h\circ f)(x)=g(x)$이므로 $h(-2x+1)=2x-3$

$-2x+1=t$로 치환하면 $x=\frac{1-t}{2}$

$h(t)=2\times\frac{1-t}{2}-3=-t-2$

$\therefore h(x)=-x-2 \qquad \therefore h(2)=-2-2=\mathbf{-4}$

다른 풀이 $h(-2x+1)=2x-3$에서

$-2x+1=2$일 때 $x=-\frac{1}{2}$

$\therefore h(2)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-3=-4$

7 $f^{-1}(2)=a$라 하면 $f(a)=2$이므로

$3a+5=2$, $3a=-3 \qquad \therefore a=-1$

$g^{-1}(2)=b$라 하면 $g(b)=2$이므로

$-4b+10=2$, $-4b=-8 \qquad \therefore b=2$

$\therefore f^{-1}(2)+g^{-1}(2)=-1+2=\mathbf{1}$

다른 풀이 $y=3x+5$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$x=\frac{1}{3}y-\frac{5}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 함수 $f(x)$의 역함수는

$y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3} \qquad \therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$

$y=-4x+10$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$x=-\frac{1}{4}y+\frac{5}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 함수 $g(x)$의 역함수는

$y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}$ $\qquad \therefore g^{-1}(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}$

$\therefore f^{-1}(2)+g^{-1}(2)=-1+2=1$

8 $f^{-1}(3)=1$에서 $f(1)=3$이므로

$2+a=3 \qquad \therefore a=1$

$\therefore f(x)=2x+1$

이때 $f^{-1}(-1)=k$라 하면 $f(k)=-1$이므로

$2k+1=-1 \qquad \therefore k=-1$

$\therefore \boldsymbol{f^{-1}(-1)=-1}$

다른 풀이 $y=2x+a$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$x=\frac{1}{2}y-\frac{a}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 함수 $f(x)$의 역함수는

$y=\frac{1}{2}x-\frac{a}{2} \qquad \therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{a}{2}$

$f^{-1}(3)=1$이므로 $f^{-1}(3)=\frac{3}{2}-\frac{a}{2}=1$

$\frac{a}{2}=\frac{1}{2} \qquad \therefore a=1$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$이므로

$f^{-1}(-1)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1$

9 $f^{-1}(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로

$2+a=1 \qquad \therefore a=-1$

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(1)=3$에서

$b+1=3 \qquad \therefore b=2$

$\therefore \boldsymbol{a+b=1}$

10 $f(2x+3)=x-2$에서

$2x+3=t$로 놓으면 $x=\frac{t-3}{2}$

$\therefore f(t)=\frac{t-3}{2}-2=\frac{t-7}{2}$

$f(x)=\frac{x-7}{2}$에서 $y=\frac{x-7}{2}$로 놓으면 $x=2y+7$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2x+7$

$\therefore f^{-1}(x)=2x+7 \qquad \therefore f^{-1}(3)=\boldsymbol{13}$

다른 풀이 $f(2x+3)=x-2$에서 $f^{-1}(x-2)=2x+3$

$x-2=3$일 때, $x=5$이므로 $f^{-1}(3)=2\times5+3=13$

11 (1) $(f^{-1}\circ g)^{-1}(-1)=(g^{-1}\circ f)(-1)$

$=g^{-1}(f(-1))$

$=g^{-1}(-5)$

$g^{-1}(-5)=k$라 하면 $g(k)=-5$이므로

$-2k+1=-5,\ -2k=-6 \qquad \therefore k=3$

$\therefore \boldsymbol{(f^{-1}\circ g)^{-1}(-1)=3}$

다른 풀이 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(-1)=k$라 하면

$(f^{-1}\circ g)(k)=-1$

$f^{-1}(g(k))=-1$에서 $f(-1)=g(k)$

$-5=-2k+1,\ 2k=6 \qquad \therefore k=3$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(-1)=3$

(2) $(g^{-1}\circ f)^{-1}(0)=(f^{-1}\circ g)(0)$

$=f^{-1}(g(0))$

$=f^{-1}(1)$

$f^{-1}(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로

$3k-2=1,\ 3k=3 \qquad \therefore k=1$

$\therefore \boldsymbol{(g^{-1}\circ f)^{-1}(0)=1}$

(3) $(f\circ(g\circ f)^{-1})(1)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1})(1)$

$=(I\circ g^{-1})(1)$

$=g^{-1}(1)$

$g^{-1}(1)=k$라 하면 $g(k)=1$이므로

$-2k+1=1,\ -2k=0 \qquad \therefore k=0$

$\therefore \boldsymbol{(f\circ(g\circ f)^{-1})(1)=0}$

(4) $(f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(3)=(f\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(3)$

$=(f\circ g^{-1})(3)$

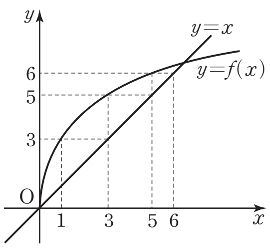
$=f(g^{-1}(3))$

$g^{-1}(3)=k$라 하면 $g(k)=3$이므로

$-2k+1=3,\ -2k=2 \qquad \therefore k=-1$

$\therefore (f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(3)=f(-1)=\boldsymbol{-5}$

12 오른쪽 그림에서



$f(1)=3$

$(f\circ f)(1)=f(f(1))$

$=f(3)=5$

$(f\circ f\circ f)(1)=f((f\circ f)(1))$

$=f(5)=6$

$\therefore f(1)+(f\circ f)(1)+(f\circ f\circ f)(1)=3+5+6=\boldsymbol{14}$

13 $\frac{1}{4}x-9=x$에서 $\frac{3}{4}x=-9 \qquad \therefore x=-12$

교점 P의 좌표는 $(-12,\ -12)$이므로 선분 OP의 길이는

$\overline{OP}=\sqrt{(-12)^2+(-12)^2}=\boldsymbol{12\sqrt{2}}$

14 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 두 점 $(5,\ 2)$, $(9,\ 4)$를 지나므로

$f^{-1}(5)=2$, $f^{-1}(9)=4$, 즉 $f(2)=5$, $f(4)=9$

$f(2)=5$에서 $2a+b=5$ …… ㉠

$f(4)=9$에서 $4a+b=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\boldsymbol{a=2,\ b=1}$

11 유리함수

본문 | 122~127쪽

1-1 (1) $x-1$ (2) 1

1-2 (1) 두 식을 통분하면

$$\frac{3(x-2)}{(x+1)(x-2)},\ \frac{x+1}{(x+1)(x-2)}$$

(2) $\dfrac{1}{x^2-2x}=\dfrac{1}{x(x-2)}$이므로 두 식을 통분하면

$$\frac{x}{x(x-2)},\ \frac{1}{x(x-2)}$$

(3) $\dfrac{1}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$

$\dfrac{2}{x^2-4}=\dfrac{2}{(x-2)(x+2)}$

이므로 두 식을 통분하면

$$\frac{x-2}{(x-2)(x-1)(x+2)},\ \frac{2(x-1)}{(x-2)(x-1)(x+2)}$$

(4) $\dfrac{x+1}{x^2-9}=\dfrac{x+1}{(x-3)(x+3)}$

$\dfrac{x-1}{x^2-3x}=\dfrac{x-1}{x(x-3)}$

이므로 두 식을 통분하면

$$\frac{x(x+1)}{x(x-3)(x+3)},\ \frac{(x-1)(x+3)}{x(x-3)(x+3)}$$

2-1 (1) $2x$ (2) x^2 (3) 1 (4) 1

2-2 (1) $\dfrac{1}{x+1}+2=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2(x+1)}{x+1}$

$=\dfrac{1+2(x+1)}{x+1}=\dfrac{2x+3}{x+1}$

(2) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{x+1}$

(3) $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x}\times\dfrac{x-3}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x-3)}\times\dfrac{x-3}{x-2}$

$=\dfrac{x+2}{x}$

(4) $\dfrac{x+3}{x^2-2x}\div\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\dfrac{x+3}{x^2-2x}\times\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

$=\dfrac{x+3}{x(x-2)}\times\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}$

$=\dfrac{1}{x}$

3-1 ㄴ

3-2 다항함수가 아닌 유리함수는 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 다항식이 아닌 유리식이므로 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

4-1 (1) 0 (2) 1 (3) -2

4-2 (1) 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 0$인 실수$\}$이다.

(2) $2x+3=0$에서 $x=-\dfrac{3}{2}$이므로

정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\neq-\dfrac{3}{2}\text{인 실수}\right\}$이다.

(3) $-x+5=0$에서 $x=5$이므로

정의역은 $\{x\,|\,x\neq 5$인 실수$\}$이다.

(4) $2x^2+3\neq 0$이므로

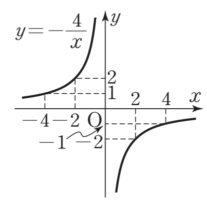
정의역은 $\{x\,|\,x$는 모든 실수$\}$이다.

5-1 (1) 0 (2) 0

5-2 (1) 정의역 : $\{x\,|\,x\neq 0$인 실수$\}$

치역 : $\{y\,|\,y\neq 0$인 실수$\}$

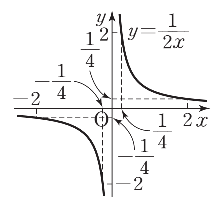
점근선의 방정식 : $x=0,\ y=0$



(2) 정의역 : $\{x\,|\,x\neq 0$인 실수$\}$

치역 : $\{y\,|\,y\neq 0$인 실수$\}$

점근선의 방정식 : $x=0,\ y=0$



6-1 3, ㄷ

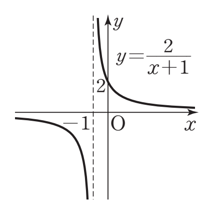
6-2 ㄱ. 정의역은 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.

ㄷ. 그래프는 제2, 4사분면을 지난다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

7-1 1, 2, 2

7-2 (1) 함수 $y=\dfrac{2}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

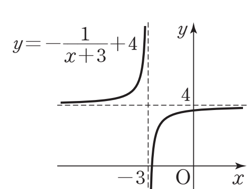


정의역 : $\{x\,|\,x\neq -1$인 실수$\}$

치역 : $\{y\,|\,y\neq 0$인 실수$\}$

점근선의 방정식 : $x=-1,\ y=0$

(2) 함수 $y=-\dfrac{1}{x+3}+4$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



정의역 : $\{x\,|\,x\neq -3$인 실수$\}$

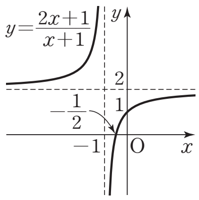
치역 : $\{y\,|\,y\neq 4$인 실수$\}$

점근선의 방정식 : $x=-3,\ y=4$

8-1 1, -1

8-2 (1) $y=\dfrac{2x+1}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-1}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}+2$

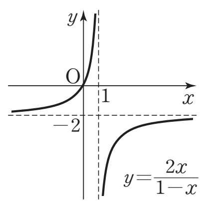
함수 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



점근선의 방정식 : $x=-1$, $y=2$

(2) $y=\dfrac{2x}{1-x}=\dfrac{-2(x-1)-2}{x-1}=-\dfrac{2}{x-1}-2$

함수 $y=\dfrac{2x}{1-x}$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



점근선의 방정식 : $x=1$, $y=-2$

9-1 $1, 2$

9-2 $y=\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}+1$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. $y=\dfrac{3x-1}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+3$

ㄴ. $y=\dfrac{-2x-4}{x+3}=\dfrac{2}{x+3}-2$

ㄷ. $y=\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+2$

ㄹ. $y=\dfrac{-x-4}{x+5}=\dfrac{1}{x+5}-1$

따라서 평행이동하여 함수 $y=\dfrac{x+3}{x+1}$의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

10-1 $-2, -1$

10-2 $y=\dfrac{x+3}{x-1}=\dfrac{4}{x-1}+1$

이므로 함수 $y=\dfrac{x+3}{x-1}$의 그래프는 두 점근선의 교점 $(1, 1)$을 지나고 기울기가 -1, 1인 직선에 대하여 대칭이다.
즉, 두 직선 $y=x+a$, $y=-x+b$가 점 $(1, 1)$을 지나므로
$1=1+a$, $1=-1+b$
$\therefore$ $\boldsymbol{a=0, b=2}$

집중 연습

본문 | 128, 129쪽

1 (1) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x^2-1}$

$=\dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x+3}{(x-1)(x+1)}}$

(2) $\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+2}$

$=\dfrac{(x+2)^2}{(x-1)(x+2)}-\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+2)}$

$=\dfrac{(x^2+4x+4)-(x^2-2x+1)}{(x-1)(x+2)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{6x+3}{(x-1)(x+2)}}$

다른 풀이

$\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{(x-1)+3}{x-1}=1+\dfrac{3}{x-1}$

$\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{(x+2)-3}{x+2}=1-\dfrac{3}{x+2}$

$\therefore$ (준식)$=\left(1+\dfrac{3}{x-1}\right)-\left(1-\dfrac{3}{x+2}\right)$

$=\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{3}{x+2}$

$=\dfrac{3(x+2)}{(x-1)(x+2)}+\dfrac{3(x-1)}{(x-1)(x+2)}$

$=\dfrac{6x+3}{(x-1)(x+2)}$

(3) $\dfrac{x+1}{1-x}-\dfrac{x+2}{2-x}$

$=\dfrac{(x+1)(2-x)}{(1-x)(2-x)}-\dfrac{(x+2)(1-x)}{(1-x)(2-x)}$

$=\dfrac{(-x^2+x+2)-(-x^2-x+2)}{(x-1)(x-2)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{2x}{(x-1)(x-2)}}$

다른 풀이

$\dfrac{x+1}{1-x}=\dfrac{-(1-x)+2}{1-x}=-1+\dfrac{2}{1-x}$

$\dfrac{x+2}{2-x}=\dfrac{-(2-x)+4}{2-x}=-1+\dfrac{4}{2-x}$

$\therefore$ (준식)$=\left(-1+\dfrac{2}{1-x}\right)-\left(-1+\dfrac{4}{2-x}\right)$

$=\dfrac{2}{1-x}-\dfrac{4}{2-x}$

$=\dfrac{2(2-x)}{(1-x)(2-x)}-\dfrac{4(1-x)}{(1-x)(2-x)}$

$=\dfrac{2x}{(x-1)(x-2)}$

(4) $\dfrac{x-3}{x^2-1}+\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$

$=\dfrac{x-3}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{2x+1}{(x-1)(x+2)}$

$=\dfrac{(x-3)(x+2)+(2x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{3x^2+2x-5}{(x-1)(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{(x-1)(3x+5)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{3x+5}{(x+1)(x+2)}}$

(5) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{1-x+x^2}-\dfrac{1+x^2}{1+x^3}$

$=\dfrac{1-x+x^2}{1+x^3}+\dfrac{x+1}{1+x^3}-\dfrac{1+x^2}{1+x^3}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{1+x^3}}$

2 (1) $\dfrac{x+2}{x^2+3x}\times\dfrac{x+3}{x}$

$=\dfrac{x+2}{x(x+3)}\times\dfrac{x+3}{x}=\boldsymbol{\dfrac{x+2}{x^2}}$

(2) $\dfrac{x+2}{x^2+3x}\div\dfrac{x+3}{x}$

$=\dfrac{x+2}{x(x+3)}\times\dfrac{x}{x+3}=\boldsymbol{\dfrac{x+2}{(x+3)^2}}$

(3) $\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}\div\dfrac{x-1}{x-3}$

$=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-3}\times\dfrac{x-3}{x-1}=\boldsymbol{x-2}$

(4) $\dfrac{x-2}{x+4}\div\dfrac{x^2-4}{x^2+5x+4}$

$=\dfrac{x-2}{x+4}\times\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-4}$

$=\dfrac{x-2}{x+4}\times\dfrac{(x+1)(x+4)}{(x-2)(x+2)}=\boldsymbol{\dfrac{x+1}{x+2}}$

(5) $\dfrac{x^3+x^2}{x^3-1}\div\dfrac{2x^2+x}{x^2-1}\times\dfrac{6x+3}{x^2+2x+1}$

$=\dfrac{x^2(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\times\dfrac{(x-1)(x+1)}{x(2x+1)}\times\dfrac{3(2x+1)}{(x+1)^2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{3x}{x^2+x+1}}$

3 $y=\dfrac{3x}{-x+1}=\dfrac{-3(x-1)-3}{x-1}=-\dfrac{3}{x-1}-3$이므로

(1) $\boldsymbol{\{x\,|\,x\neq1}$**인 실수**$\boldsymbol{\}}$

(2) $\boldsymbol{\{y\,|\,y\neq-3}$**인 실수**$\boldsymbol{\}}$

(3) $\boldsymbol{x=1,\ y=-3}$

4 $y=\dfrac{-x+1}{x-4}=\dfrac{-(x-4)-3}{x-4}=-\dfrac{3}{x-4}-1$이므로

(1) $\boldsymbol{\{x\,|\,x\neq4}$**인 실수**$\boldsymbol{\}}$

(2) $\boldsymbol{\{y\,|\,y\neq-1}$**인 실수**$\boldsymbol{\}}$

(3) $\boldsymbol{x=4,\ y=-1}$

5 (1) 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=-1$이므로 점 $(-2, -1)$에 대하여 대칭이다.

$\therefore$ $\boldsymbol{a=-2,\ b=-1}$

(2) $y=\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{(x+1)+2}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}+1$

점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=1$이므로 점 $(-1, 1)$에 대하여 대칭이다.

$\therefore$ $\boldsymbol{a=-1,\ b=1}$

6 (1) 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=2$이므로 점 $(3, 2)$에 대하여 대칭이다. 따라서 대칭인 두 직선의 방정식은

$y=(x-3)+2$, $y=-(x-3)+2$, 즉

$\boldsymbol{y=x-1,\ y=-x+5}$

(2) $y=\dfrac{4x-5}{x-2}=\dfrac{4(x-2)+3}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}+4$

점근선의 방정식은 $x=2$, $y=4$이므로 점 $(2, 4)$에 대하여 대칭이다. 따라서 대칭인 두 직선의 방정식은

$y=(x-2)+4$, $y=-(x-2)+4$, 즉

$\boldsymbol{y=x+2,\ y=-x+6}$

(3) $y=\dfrac{-3x+7}{x+1}=\dfrac{-3(x+1)+10}{x+1}=\dfrac{10}{x+1}-3$

점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=-3$이므로 점 $(-1, -3)$에 대하여 대칭이다. 따라서 대칭인 두 직선의 방정식은

$y=(x+1)-3$, $y=-(x+1)-3$, 즉

$\boldsymbol{y=x-2,\ y=-x-4}$

기초 개념 평가

본문 | 130, 131쪽

01	유리식	02	$\dfrac{A\times C}{B\times C}$, $\dfrac{A\div C}{B\div C}$
03	C, C	04	D, C
05	유리함수	06	다항함수
07	0	08	$k>0$, $k<0$
09	$x=0$, $y=0$	10	정의역, 치역
11	$x=p$, $y=q$	12	$y=\dfrac{k}{x}$
13	1		

1 (1) $\frac{2}{x-3}+\frac{2}{x+3}=\frac{2(x+3)}{(x-3)(x+3)}+\frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)}$

$=\frac{(2x+6)+(2x-6)}{(x-3)(x+3)}$

$=\boldsymbol{\frac{4x}{(x-3)(x+3)}}$

(2) $\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{x(x+1)}$

$=\frac{x}{x(x-1)(x+1)}-\frac{x-1}{x(x-1)(x+1)}$

$=\boldsymbol{\frac{1}{x(x-1)(x+1)}}$

(3) $\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-3}\times\frac{x-3}{x^2-1}$

$=\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-3)}\times\frac{x-3}{(x-1)(x+1)}$

$=\boldsymbol{\frac{x+2}{(x+1)^2}}$

(4) $\frac{x-6}{x^2+3x-4}\div\frac{x^2-5x-6}{x^2-16}$

$=\frac{x-6}{x^2+3x-4}\times\frac{x^2-16}{x^2-5x-6}$

$=\frac{x-6}{(x+4)(x-1)}\times\frac{(x+4)(x-4)}{(x+1)(x-6)}$

$=\boldsymbol{\frac{x-4}{(x-1)(x+1)}}$

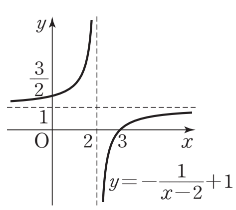
2 ㄱ. 그래프는 함수 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. 정의역은 $\{x|x\neq2$인 실수$\}$이다.

ㄷ. 치역은 $\{y|y\neq1$인 실수$\}$이다.

ㄹ. 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=1$이다.

ㅁ. 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 4사분면을 지난다.



따라서 옳은 것은 ㄴ, ㅁ이다.

3 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\frac{2}{x-p}+q$이다.

이 그래프의 점근선 중 하나가 $y=1$이므로 $q=1$

함수 $y=\frac{2}{x-p}+1$의 그래프가 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$2=\frac{2}{-1-p}+1$, $\frac{2}{1+p}=-1$ $\quad\therefore p=-3$

$\therefore$ $\boldsymbol{p=-3,\ q=1}$

4 $y=\frac{2x-3}{x+1}=\frac{2(x+1)-5}{x+1}=-\frac{5}{x+1}+2$

이므로 함수 $y=\frac{2x-3}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 따라서 $k=-5$, $p=-1$, $q=2$이므로

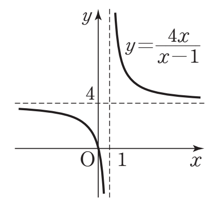
$k+p+q=(-5)+(-1)+2=\boldsymbol{-4}$

5 $y=\frac{4x}{x-1}=\frac{4(x-1)+4}{x-1}=\frac{4}{x-1}+4$

ㄱ. 그래프는 함수 $y=\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하여 겹쳐질 수 있다.

ㄹ. 그래프의 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=4$이다.

ㅁ. 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 4사분면을 지난다.



따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

6 $y=\frac{-x-2}{x+1}=\frac{-(x+1)-1}{x+1}=-\frac{1}{x+1}-1$

$y=\frac{-5x+4}{x-1}=\frac{-5(x-1)-1}{x-1}=-\frac{1}{x-1}-5$

$y=\frac{-x-2}{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{1}{x-p+1}-1+q$

이 그래프가 $y=-\frac{1}{x-1}-5$의 그래프와 일치해야 하므로

$1-p=-1$, $-1+q=-5$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{p=2,\ q=-4}$

7 주어진 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=3$이므로 $p=-1$, $q=3$

이때 함수 $y=\frac{2}{x+1}+3$의 그래프가 점 $(0, k)$를 지나므로

$k=\frac{2}{0+1}+3$ $\quad\therefore k=5$

$\therefore k+pq=5-3=\boldsymbol{2}$

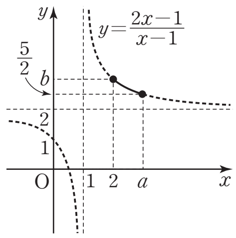
8 주어진 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=3$이므로 $y=\frac{k}{x-2}+3\,(k<0)$으로 놓으면 이 그래프가 점 $(3, 0)$을 지나므로 $0=\frac{k}{3-2}+3$ $\quad\therefore k=-3$

따라서 그래프의 식은 $y=\frac{-3}{x-2}+3=\frac{3x-9}{x-2}$

이 식이 $y=\frac{ax+b}{x+c}$와 일치해야 하므로

$\boldsymbol{a=3,\ b=-9,\ c=-2}$

9 $y=\frac{2x-1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+2$



이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$x=2$일 때 최댓값을 가지므로 $b=3$

$x=a$일 때 최솟값을 가지므로

$\frac{2a-1}{a-1}=\frac{5}{2}$, $5a-5=4a-2$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=3, b=3}$

10 ㄱ. $y=\frac{x+3}{x}=\frac{3}{x}+1$

ㄴ. $y=\frac{x-4}{x-1}=-\frac{3}{x-1}+1$

ㄷ. $y=\frac{4x+5}{2x+1}=\frac{3}{2x+1}+2$

따라서 평행이동하여 함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프와 겹쳐질 수 있는 함수는 ㄱ이다.

11 평행이동한 함수의 그래프는 점근선의 교점이 (p, q)이므로

$y=(x-p)+q$, $y=-(x-p)+q$, 즉

$y=x-p+q$, $y=-x+p+q$와 대칭이다.

이 두 직선이 $y=x-6$, $y=-x+2$이므로

$-p+q=-6$, $p+q=2$

두 식을 연립하여 풀면 $p=4$, $q=-2$

$\therefore$ $\boldsymbol{pq=-8}$

12 $f^{-1}(1)=k$라 하면 $f(k)=1$

$\frac{5k-2}{k+2}=1$이므로 $5k-2=k+2$, $4k=4$ $\quad\therefore k=1$

$\therefore$ $\boldsymbol{f^{-1}(1)=1}$

다른 풀이 $y=\frac{5x-2}{x+2}$로 놓고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$xy+2y=5x-2$, $(y-5)x=-2y-2$

$\therefore x=\frac{-2y-2}{y-5}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{-2x-2}{x-5}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{-2x-2}{x-5}$ $\qquad\therefore f^{-1}(1)=1$

13 $y=\frac{bx+3}{x+a}$으로 놓고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$xy+ay=bx+3$, $(y-b)x=-ay+3$

$\therefore x=\frac{-ay+3}{y-b}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{-ax+3}{x-b}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{-ax+3}{x-b}$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=-1,\ b=-1,\ c=3}$

12 무리함수

본문 | 134~137쪽

1-1 (1) **0** (2) **>**

1-2 (1) $-2x+8\ge0$에서 $\boldsymbol{x\le4}$

(2) $-x+4\ge0$, $x+2>0$에서 $\boldsymbol{-2<x\le4}$

2-1 (1) $\boldsymbol{x+1}$ (2) $\boldsymbol{\sqrt{x}, x}$

2-2 (1) $(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)$

$=(\sqrt{x+2})^2-2^2$

$=(x+2)-4=\boldsymbol{x-2}$

(2) $\frac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

$=\frac{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}$

$=\frac{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(x+1)-(x-1)}$

$=\boldsymbol{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

3-1 **ㄷ**

3-2 ㄹ. $y=\sqrt{x^2}=|x|$이므로 무리함수가 아니다.

따라서 무리함수는 **ㄴ, ㄹ**이다.

4-1 (1) **2** (2) **0** (3) **6** (4) $\boldsymbol{-1}$

4-2 (1) $2x+1\ge0$에서 정의역은 $\boldsymbol{\left\{x\,\middle|\,x\ge-\frac{1}{2}\right\}}$이다.

(2) $4-x\ge0$에서 정의역은 $\boldsymbol{\{x\,|\,x\le4\}}$이다.

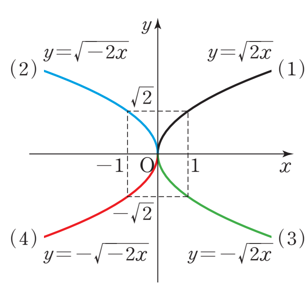
(3) $\frac{1}{3}x-2\ge0$에서 정의역은 $\boldsymbol{\{x\,|\,x\ge6\}}$이다.

(4) 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이므로

정의역은 **{x | x는 모든 실수}**이다.

5-1 (1) **≤** (2) **≤**

5-2



(1) 정의역 : $\boldsymbol{\{x\,|\,x\ge0\}}$, 치역 : $\boldsymbol{\{y\,|\,y\ge0\}}$

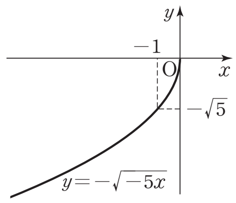
(2) 정의역 : $\boldsymbol{\{x\,|\,x\le0\}}$, 치역 : $\boldsymbol{\{y\,|\,y\ge0\}}$

(3) 정의역 : $\boldsymbol{\{x\,|\,x\ge0\}}$, 치역 : $\boldsymbol{\{y\,|\,y\le0\}}$

(4) 정의역 : $\boldsymbol{\{x\,|\,x\le0\}}$, 치역 : $\boldsymbol{\{y\,|\,y\le0\}}$

6-1 $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{\le}$

6-2 함수 $y=-\sqrt{-5x}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{5x}$의 그래프와 원점에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



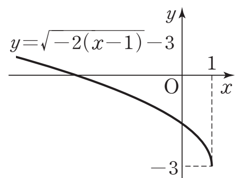
정의역 : $\{x|x\le 0\}$

치역 : $\{y|y\le 0\}$

7-1 $\boldsymbol{-3x}$, $\boldsymbol{\ge}$, **ㄷ**

7-2 (1) 함수 $y=\sqrt{-2(x-1)}-3$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

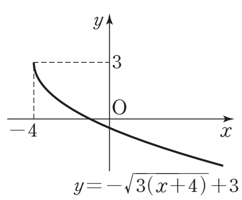


정의역 : $\{x|x\le 1\}$

치역 : $\{y|y\ge -3\}$

(2) 함수 $y=-\sqrt{3(x+4)}+3$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



정의역 : $\{x|x\ge -4\}$

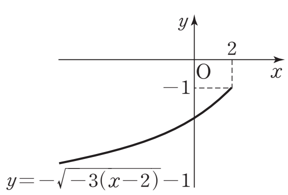
치역 : $\{y|y\le 3\}$

(3) 주어진 함수를 변형하면

$y=-\sqrt{-3x+6}-1=-\sqrt{-3(x-2)}-1$

함수 $y=-\sqrt{-3x+6}-1$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



정의역 : $\{x|x\le 2\}$

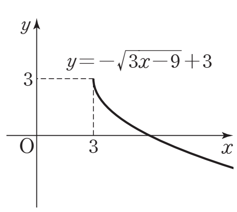
치역 : $\{y|y\le -1\}$

7-3 주어진 함수를 변형하면

$y=-\sqrt{3x-9}+3=-\sqrt{3(x-3)}+3$

ㄱ. 함수 $y=-\sqrt{3x-9}+3$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄴ. 정의역은 $\{x|x\ge 3\}$이다.

ㄷ. 치역은 $\{y|y\le 3\}$이다.

ㄹ. 그래프는 제1, 4사분면을 지난다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

집중 연습

본문 | 138, 139쪽

1 (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{15}}{5}}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}$

$=\boldsymbol{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(3) $\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}$

$=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3^2-(2\sqrt{2})^2}=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{9-8}$

$=\boldsymbol{3+2\sqrt{2}}$

2 (1) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\dfrac{(x-2)(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{(x-2)(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{x-2}$

$=\boldsymbol{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

(2) $\dfrac{4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$

$=\dfrac{4(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}$

$=\dfrac{4(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}{(x+2)-(x-2)}$

$=\boldsymbol{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$

3 (1) $\dfrac{2}{1+\sqrt{x}}+\dfrac{2}{1-\sqrt{x}}=\dfrac{2(1-\sqrt{x})+2(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}=\boldsymbol{\dfrac{4}{1-x}}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$

$=\dfrac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})+(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}$

$=\dfrac{2\sqrt{x+2}}{(x+2)-x}=\dfrac{2\sqrt{x+2}}{2}$

$=\boldsymbol{\sqrt{x+2}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

$=\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2-(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\dfrac{(x+2\sqrt{x}+1)-(x-2\sqrt{x}+1)}{x-1}$

$=\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{x}}{x-1}}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}-x}$

$=\dfrac{(\sqrt{x^2-1}-x)-(\sqrt{x^2-1}+x)}{(\sqrt{x^2-1}+x)(\sqrt{x^2-1}-x)}$

$=\dfrac{-2x}{(x^2-1)-x^2}=\boldsymbol{2x}$

4 (1) 함수 $y=\sqrt{2x+1}=\sqrt{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

정의역 : $\left\{x \middle| x\ge-\frac{1}{2}\right\}$, 치역 : $\{y|y\ge0\}$

(2) 함수 $y=-\sqrt{-2x+2}=-\sqrt{-2(x-1)}$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

정의역 : $\{x|x\le1\}$, 치역 : $\{y|y\le0\}$

(3) 함수 $y=\sqrt{6-x}=\sqrt{-(x-6)}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

정의역 : $\{x|x\le6\}$, 치역 : $\{y|y\ge0\}$

(4) 함수 $y=-\sqrt{3x+2}=-\sqrt{3\left(x+\frac{2}{3}\right)}$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{2}{3}$만큼 평행이동한 것이다.

정의역 : $\left\{x \middle| x\ge-\frac{2}{3}\right\}$, 치역 : $\{y|y\le0\}$

(5) 함수 $y=-\sqrt{4-x}=-\sqrt{-(x-4)}$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

정의역 : $\{x|x\le4\}$, 치역 : $\{y|y\le0\}$

참고 $y=\sqrt{x}$ ⇨ 정의역 : $\{x|x\ge0\}$, 치역 : $\{y|y\ge0\}$
$y=-\sqrt{x}$ ⇨ 정의역 : $\{x|x\ge0\}$, 치역 : $\{y|y\le0\}$
$y=\sqrt{-x}$ ⇨ 정의역 : $\{x|x\le0\}$, 치역 : $\{y|y\ge0\}$
$y=-\sqrt{-x}$ ⇨ 정의역 : $\{x|x\le0\}$, 치역 : $\{y|y\le0\}$

5 (1) 함수 $y=\sqrt{2x-3}-1=\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}-1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

정의역 : $\left\{x \middle| x\ge\frac{3}{2}\right\}$, 치역 : $\{y|y\ge-1\}$

(2) 함수 $y=-\sqrt{3x-3}-2=-\sqrt{3(x-1)}-2$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

정의역 : $\{x|x\ge1\}$, 치역 : $\{y|y\le-2\}$

(3) 함수 $y=\sqrt{2-x}+2=\sqrt{-(x-2)}+2$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

정의역 : $\{x|x\le2\}$, 치역 : $\{y|y\ge2\}$

(4) 함수 $y=-\sqrt{1-2x}-3=-\sqrt{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}-3$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

정의역 : $\left\{x \middle| x\le\frac{1}{2}\right\}$, 치역 : $\{y|y\le-3\}$

(5) 함수 $y=1-\sqrt{5-x}=-\sqrt{-(x-5)}+1$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

정의역 : $\{x|x\le5\}$, 치역 : $\{y|y\le1\}$

기초 개념 평가

본문 | 140, 141쪽

01	무리식	02	**0**
03	$\boldsymbol{b}$	04	$\boldsymbol{a-b}$
05	$\boldsymbol{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$	06	무리함수
07	**0**	08	$\boldsymbol{a>0,\ a<0}$
09	직선 $\boldsymbol{y=x}$	10	$\boldsymbol{a>0,\ a<0}$
11	x축	12	$\boldsymbol{p,\ q}$
13	$\boldsymbol{a>0,\ a<0}$		

기초 문제 평가

본문 | 142, 143쪽

1 (1) $5-2x\ge0$, $3x+3\ge0$에서 $\boldsymbol{-1\le x\le\frac{5}{2}}$

(2) $8-2x\ge0$, $x-1>0$에서 $\boldsymbol{1<x\le4}$

2 (1) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$

$$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})+(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}}{x-(x-1)}=\boldsymbol{2\sqrt{x}}$$

(2) $\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}-\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

$$=\frac{x(\sqrt{x+1}-1)-x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)}$$

$$=\frac{-2x}{(x+1)-1}=\boldsymbol{-2}$$

3 함수 $y=\sqrt{a(x+2)}+1$의 그래프가 점 $(1,\ 4)$를 지나므로
$4=\sqrt{3a}+1$, $\sqrt{3a}=3$, $3a=9$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{a=3}$

4 (i) 함수 $y=\sqrt{-ax}$의 그래프가 점 $(-2,\ 2)$를 지나므로
$2=\sqrt{2a}$, $2a=4$ $\quad\therefore$ $a=2$

(ii) 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\sqrt{-2x}+b$

$y=\sqrt{-2x}+b$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=\sqrt{-2x}+b$, 즉 $y=-\sqrt{-2x}-b$

이 그래프가 점 $(-8, -3)$을 지나므로

$-3=-\sqrt{16}-b \qquad \therefore b=-1$

(i), (ii)에서 $\boldsymbol{a+b=1}$

5 (근호 안의 식의 값)≥ 0에서 $x+a\geq 0 \qquad \therefore x\geq -a$

즉, 정의역은 $\{x\,|\,x\geq -a\}$이므로 $a=-3$

$\sqrt{x+a}\geq 0$에서 $\sqrt{x+a}+b\geq b$

즉, 치역은 $\{y\,|\,y\geq b\}$이므로 $b=-2$

$\therefore \boldsymbol{a=-3,\ b=-2}$

6 함수 $y=\sqrt{x+1}-1$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{x-p+1}-1+q$

이 식이 $y=\sqrt{x-3}+2$와 일치해야 하므로

$-p+1=-3,\ -1+q=2$

$\therefore \boldsymbol{p=4,\ q=3}$

7 $ax+4\geq 0$에서 $x\geq -\dfrac{4}{a}$

즉, 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\geq -\dfrac{4}{a}\right\}$이므로

$-\dfrac{4}{a}=-1 \qquad \therefore a=4$

함수 $y=\sqrt{4x+4}+b$의 그래프가 점 $(3, 3)$을 지나므로

$3=4+b \qquad \therefore b=-1$

따라서 주어진 함수는 $y=\sqrt{4x+4}-1$이므로 구하는 치역은 $\boldsymbol{\{y\,|\,y\geq -1\}}$이다.

주의 $ax+4\geq 0$에서 $ax\geq -4$ ······㉠

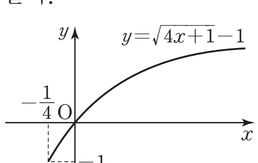
이때 정의역이 $\{x\,|\,x\geq -1\}$이므로 ㉠의 부등호의 방향이 바뀌지 않아야 한다. 따라서 $a>0$이므로 $x\geq -\dfrac{4}{a}$

8 주어진 함수를 변형하면

$y=\sqrt{4x+1}-1=\sqrt{4\left(x+\dfrac{1}{4}\right)}-1$

ㄱ. 함수 $y=\sqrt{4x+1}-1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 겹쳐질 수 있다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄴ. 제1, 3사분면을 지난다.

ㄷ. 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\geq -\dfrac{1}{4}\right\}$이다.

ㄹ. 치역은 $\{y\,|\,y\geq -1\}$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

9 $y=-\sqrt{3x+9}+1=-\sqrt{3(x+3)}+1$이므로 함수 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore a=3,\ b=-3,\ c=1 \qquad \therefore \boldsymbol{a+b+c=1}$

10 함수 $y=\sqrt{x+2}+1$의 치역은 $\{y\,|\,y\geq 1\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq 1\}$이다.

$y=\sqrt{x+2}+1$에서 $y-1=\sqrt{x+2}$

x를 y에 대한 식으로 나타내면 $x=y^2-2y-1$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=x^2-2x-1$

따라서 함수 $y=\sqrt{x+2}+1$의 역함수는

$y=x^2-2x-1\ (x\geq 1)$

$\therefore a=1,\ b=-2,\ c=-1,\ d=1$

$\therefore \boldsymbol{a+b+c+d=-1}$

11 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{-2(x-2)}-1=\sqrt{-2x+4}-1$

이 식이 $y=\sqrt{-2x+a}+b$와 일치해야 하므로

$a=4,\ b=-1$

함수 $y=\sqrt{-2x+4}-1$의 그래프가 점 $(0, c)$를 지나므로

$c=\sqrt{4}-1=1$

$\therefore \boldsymbol{a=4,\ b=-1,\ c=1}$

12 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x+2)}+2$

이 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{2a}+2$에서 $\sqrt{2a}=1,\ 2a=1 \qquad \therefore a=\dfrac{1}{2}$

$y=\sqrt{\dfrac{1}{2}(x+2)}+2$, 즉 $y=\sqrt{\dfrac{1}{2}x+1}+2$

이 식이 $y=\sqrt{ax+b}+c$와 일치해야 하므로 $b=1,\ c=2$

$\therefore \boldsymbol{a=\dfrac{1}{2},\ b=1,\ c=2}$

13 $f(3)=1$에서 $\sqrt{3a+b}=1 \qquad \therefore 3a+b=1$ ······㉠

$f^{-1}(3)=1$에서 $f(1)=3$이므로

$\sqrt{a+b}=3 \qquad \therefore a+b=9$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\boldsymbol{a=-4,\ b=13}$

14 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(5)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(5)$

$=(g^{-1}\circ f)(5)=g^{-1}(4)$

$g^{-1}(4)=k$라 하면 $g(k)=4$이므로

$\sqrt{3k-2}=4,\ 3k-2=16 \qquad \therefore k=6$

$\therefore \boldsymbol{(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(5)=6}$

memo