개념.ZIP

정답과 해설

대수

1 지수

특강 확인 문제

p. 9

1

(1) $\sqrt{3^2}+\sqrt{(-2)^2}=3+2=5$

(2) $(-\sqrt{2})^2-(-\sqrt{5})^2=2-5=-3$

(3) $\sqrt{18^2}\div\sqrt{(-6)^2}=18\div6=3$

(4) $\left(-\sqrt{\frac{1}{7}}\right)^2\times\sqrt{7^2}=\frac{1}{7}\times7=1$

답 (1) 5 (2) -3 (3) 3 (4) 1

2

(1) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로

$\sqrt{(x-1)^2}=-(x-1)=-x+1$

(2) $x<1$일 때, $1-x>0$이므로

$-\sqrt{(1-x)^2}=-(1-x)=x-1$

(3) $x>1$일 때, $x-1>0$이므로

$-\sqrt{(x-1)^2}=-(x-1)=-x+1$

(4) $x>1$일 때, $1-x<0$이므로

$\sqrt{(1-x)^2}=-(1-x)=x-1$

답 (1) $-x+1$ (2) $x-1$ (3) $-x+1$ (4) $x-1$

3

$\sqrt{72x}=\sqrt{2^3\times3^2\times x}$가 자연수가 되려면

$x=2\times n^2$ (n은 자연수) 꼴이어야 한다.

① $2=2\times1^2$ ② $6=2\times3$

③ $8=2\times2^2$ ④ $18=2\times3^2$

⑤ $32=2\times2^4=2\times4^2$

따라서 자연수 x의 값이 될 수 없는 것은 ②이다.

답 ②

4

(1) $2\sqrt{3}\times5\sqrt{6}=(2\times5)\times\sqrt{3\times6}=10\sqrt{18}=30\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{36}\div\sqrt{4}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\frac{36}{4}}=\sqrt{9}=3$

(3) $-6\sqrt{15}\div3\sqrt{3}=\frac{-6\sqrt{15}}{3\sqrt{3}}=-2\sqrt{\frac{15}{3}}=-2\sqrt{5}$

(4) $\sqrt{\frac{9}{7}}\div\sqrt{\frac{3}{14}}=\sqrt{\frac{9}{7}}\times\sqrt{\frac{14}{3}}=\sqrt{\frac{9}{7}\times\frac{14}{3}}=\sqrt{6}$

답 (1) $30\sqrt{2}$ (2) 3 (3) $-2\sqrt{5}$ (4) $\sqrt{6}$

확인 문제

p. 13~26

01

① -27의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-27$이므로

$x^3+27=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

즉 -27의 세제곱근은 -3, $\frac{3+3\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{3-3\sqrt{3}i}{2}$이다.

② $(\sqrt[4]{2})^4=2$이므로 $\sqrt[4]{2}$는 2의 네제곱근이다.

③ -9의 제곱근을 x라 하면 $x^2=-9$이므로

$x^2+9=0$ $\therefore x=\pm3i$

즉 -9의 제곱근은 $3i$, $-3i$이다.

④ $\sqrt{256}$의 네제곱근, 즉 16의 네제곱근을 x라 하면

$x^4=16$이므로 $x^4-16=0$

$(x^2-4)(x^2+4)=0$

$(x+2)(x-2)(x^2+4)=0$

$\therefore x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$

즉 $\sqrt{256}$의 네제곱근은 4개이다.

⑤ 네제곱해서 81이 되는 수를 x라 하면 $x^4=81$이므로

$x^4-81=0$, $(x^2-9)(x^2+9)=0$

$(x+3)(x-3)(x^2+9)=0$

$\therefore x=\pm3$ 또는 $x=\pm3i$

즉 네제곱해서 81이 되는 수는 -3, 3, $-3i$, $3i$이다.

따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

02

625의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=625$이므로

$x^4-625=0$, $(x^2-25)(x^2+25)=0$

$(x+5)(x-5)(x^2+25)=0$

$\therefore x=\pm5$ 또는 $x=\pm5i$

세제곱근 -27은 $\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$

따라서 $a=-5$, $b=-3$이므로

$ab=-5\times(-3)=15$

답 15

03

(1) $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{36}=\sqrt[3]{6\times36}=\sqrt[3]{6^3}=6$

(2) $\sqrt[5]{729}\div\sqrt[5]{3}=\sqrt[5]{\frac{729}{3}}=\sqrt[5]{243}=\sqrt[5]{3^5}=3$

(3) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{32}}\times\sqrt{\sqrt[3]{16}}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{32}}\times\sqrt[3]{\sqrt{16}}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{2^5}}\times\sqrt[3]{\sqrt{4^2}}$

$=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\times4}=\sqrt[3]{2^3}=2$

(4) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{5}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[6]{5}}}=\dfrac{\sqrt[12]{5}}{\sqrt[6]{5}}\times\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[12]{5}}$

$$=\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[6]{5}}=\dfrac{\sqrt[12]{125}}{\sqrt[12]{25}}$$

$$=\sqrt[12]{\dfrac{125}{25}}$$

$$=\sqrt[12]{5}$$

답 (1) 6 (2) 3 (3) 2 (4) $\sqrt[12]{5}$

04

$\sqrt[4]{3}\times\sqrt{\sqrt{27}}+\dfrac{(\sqrt[3]{16})^2}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[4]{3}\times\sqrt{\sqrt{3^3}}+\dfrac{(\sqrt[3]{2^4})^2}{\sqrt[3]{2^2}}$

$$=\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{3^3}+\dfrac{\sqrt[3]{2^8}}{\sqrt[3]{2^2}}$$

$$=\sqrt[4]{3^4}+\sqrt[3]{2^6}$$

$$=3+2^2$$

$$=7$$

답 7

05

(1) $\sqrt[3]{a^2b}\times\sqrt[5]{ab^2}\div\sqrt[15]{a^8b^6}=\sqrt[15]{a^{10}b^5}\times\sqrt[15]{a^3b^6}\div\sqrt[15]{a^8b^6}$

$$=\sqrt[15]{a^{10+3-8}b^{5+6-6}}$$

$$=\sqrt[15]{a^5b^5}$$

$$=\sqrt[3]{ab}$$

(2) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[4]{a}}}=\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{a}}\times\dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}}$

$$=\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}}=\dfrac{\sqrt[24]{a^4}}{\sqrt[24]{a^3}}$$

$$=\sqrt[24]{\dfrac{a^4}{a^3}}$$

$$=\sqrt[24]{a}$$

답 (1) $\sqrt[3]{ab}$ (2) $\sqrt[24]{a}$

06

$\sqrt{a\times\sqrt[4]{a\times\sqrt[3]{a}}}=\sqrt{a}\times\sqrt[8]{a\times\sqrt[3]{a}}$

$$=\sqrt{a}\times\sqrt[8]{a}\times\sqrt[24]{a}$$

$$=\sqrt[24]{a^{12}}\times\sqrt[24]{a^3}\times\sqrt[24]{a}$$

$$=\sqrt[24]{a^{12+3+1}}$$

$$=\sqrt[24]{a^{16}}$$

$$=\sqrt[3]{a^2}$$

따라서 $m=2$, $n=3$이므로

$m+n=2+3=5$

답 5

07

$\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}}}\div\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}}=\dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[9]{a}}\times\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{a}}\div\dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}}$

$$=\dfrac{\sqrt[6]{a}\times\sqrt[8]{a}}{\sqrt[9]{a}\times\sqrt[12]{a}}$$

$$=\dfrac{\sqrt[72]{a^{12}}\times\sqrt[72]{a^9}}{\sqrt[72]{a^8}\times\sqrt[72]{a^6}}$$

$$=\dfrac{\sqrt[72]{a^{21}}}{\sqrt[72]{a^{14}}}$$

$$=\sqrt[72]{\dfrac{a^{21}}{a^{14}}}$$

$$=\sqrt[72]{a^7}$$

따라서 정수 n의 값은 7이다.

답 7

08

(1) $A=\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$

$B=\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{25}$

$C=\sqrt[3]{\sqrt{31}}=\sqrt[6]{31}$

이때 $8<25<31$이므로 $\sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{25}<\sqrt[6]{31}$

$\therefore A<B<C$

(2) $A=\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3^2}=\sqrt[105]{3^{70}}$

$B=\sqrt[5]{27}=\sqrt[5]{3^3}=\sqrt[105]{3^{63}}$

$C=\sqrt[7]{243}=\sqrt[7]{3^5}=\sqrt[105]{3^{75}}$

이때 $3^{63}<3^{70}<3^{75}$이므로 $\sqrt[105]{3^{63}}<\sqrt[105]{3^{70}}<\sqrt[105]{3^{75}}$

$\therefore B<A<C$

답 (1) $A<B<C$ (2) $B<A<C$

09

$A=\sqrt[3]{7\sqrt{10}}=\sqrt[3]{7}\times\sqrt[6]{10}=\sqrt[6]{7^2}\times\sqrt[6]{10}=\sqrt[6]{490}$

$B=\sqrt{5\sqrt[3]{4}}=\sqrt{5}\times\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{5^3}\times\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{500}$

$C=\sqrt{3\sqrt[3]{4\sqrt{16}}}=\sqrt{3}\times\sqrt[6]{4\sqrt{16}}$

$$=\sqrt{3}\times\sqrt[6]{4^2}$$

$$=\sqrt[6]{3^3}\times\sqrt[6]{4^2}$$

$$=\sqrt[6]{432}$$

이때 $432<490<500$이므로 $\sqrt[6]{432}<\sqrt[6]{490}<\sqrt[6]{500}$

$\therefore C<A<B$

답 ⑤

10

(1) $9^{\frac{2}{3}}\times12^{\frac{1}{3}}\div36^{\frac{1}{3}}=(3^2)^{\frac{2}{3}}\times(2^2\times3)^{\frac{1}{3}}\div(2^2\times3^2)^{\frac{1}{3}}$

$$=3^{\frac{4}{3}}\times(2^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{1}{3}})\div(2^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{2}{3}})$$

$$=2^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}}\times3^{\frac{4}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}=3$$

(2) $\{(-5)^4\}^{\frac{3}{8}}\times 125^{-\frac{5}{6}}=(5^4)^{\frac{3}{8}}\times(5^3)^{-\frac{5}{6}}=5^{\frac{3}{2}}\times 5^{-\frac{5}{2}}$

$$=5^{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}=5^{-1}=\frac{1}{5}$$

(3) $\left\{\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}\times\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{4}}=\left[\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^3\right\}^{-\frac{1}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}\times\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}^{\frac{1}{4}}$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$$

$$=\frac{4}{3}$$

답 (1) 3 (2) $\frac{1}{5}$ (3) $\frac{4}{3}$

11

$(\sqrt[3]{3})^{\frac{3}{4}}\times 27^{0.25}\div(3^{\sqrt{3}+2})^{\sqrt{3}-2}$

$=(3^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}}\times(3^3)^{\frac{1}{4}}\div 3^{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}$

$=3^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{3}{4}}\div 3^{-1}$

$=3^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-(-1)}$

$=3^2$

$=9$

답 9

12

(1) $\sqrt{a^3}\times\sqrt[5]{a}\div a^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{1}{5}}\div a^{-\frac{1}{2}}$

$$=a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{2}\right)}=a^{\frac{11}{5}}$$

(2) $(\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[4]{a})^6=(a^{\frac{2}{3}}\div a^{\frac{1}{4}})^6=(a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}})^6$

$$=(a^{\frac{5}{12}})^6=a^{\frac{5}{2}}$$

(3) $\sqrt[5]{a^2\times\sqrt[3]{a}}=\sqrt[5]{a^2}\times\sqrt[15]{a}=a^{\frac{2}{5}}\times a^{\frac{1}{15}}=a^{\frac{2}{5}+\frac{1}{15}}=a^{\frac{7}{15}}$

(4) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{a}\times\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^2}}}=\dfrac{\sqrt[4]{a}\times\sqrt[8]{a}}{\sqrt[6]{a^2}}=\dfrac{a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{1}{3}}}$

$$=a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{24}}$$

답 (1) $a^{\frac{11}{5}}$ (2) $a^{\frac{5}{2}}$ (3) $a^{\frac{7}{15}}$ (4) $a^{\frac{1}{24}}$

13

$\sqrt[4]{a^2\times\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}=\sqrt[4]{a^2}\times\sqrt[12]{a\sqrt{a}}=\sqrt[4]{a^2}\times\sqrt[12]{a}\times\sqrt[24]{a}$

$$=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{12}}\times a^{\frac{1}{24}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}}=a^{\frac{5}{8}}$$

따라서 $p=8$, $q=5$이므로

$p+q=8+5=13$

답 13

다른 풀이

$\sqrt[4]{a^2\times\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}=\{a^2\times(a\times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{4}}$

$$=\{a^2\times(a^{1+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{4}}=\{a^2\times(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{4}}$$

$$=(a^2\times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}=(a^{2+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}=(a^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{5}{8}}$$

따라서 $p=8$, $q=5$이므로

$p+q=8+5=13$

14

(1) $x^{\frac{2}{3}}=A$, $x^{-\frac{1}{3}}=B$로 놓으면

(주어진 식)$=(A+B)^3+(A-B)^3$

$$=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$
$$+(A^3-3A^2B+3AB^2-B^3)$$
$$=2(A^3+3AB^2)$$
$$=2\{(x^{\frac{2}{3}})^3+3\times x^{\frac{2}{3}}\times(x^{-\frac{1}{3}})^2\}$$
$$=2(x^2+3)$$
$$=2x^2+6$$

(2) $x^{\frac{1}{3}}=A$, $x^{-\frac{1}{3}}=B$로 놓으면

$x^{\frac{2}{3}}=A^2$, $x^{-\frac{2}{3}}=B^2$이므로

(주어진 식)$=(A-B)(A^2+B^2+AB)$

$$=A^3-B^3$$
$$=(x^{\frac{1}{3}})^3-(x^{-\frac{1}{3}})^3$$
$$=x-x^{-1}$$
$$=x-\frac{1}{x}$$

답 (1) $2x^2+6$ (2) $x-\frac{1}{x}$

15

$(1-3^{\frac{1}{4}})(1+3^{\frac{1}{4}})(1+3^{\frac{1}{2}})(1+3)(1+3^2)$

$=(1-3^{\frac{1}{2}})(1+3^{\frac{1}{2}})(1+3)(1+3^2)$

$=(1-3)(1+3)(1+3^2)$

$=(1-3^2)(1+3^2)$

$=1-3^4$

$=1-81$

$=-80$

답 -80

16

(1) $a+a^{-1}=5$의 양변을 제곱하면

$(a+a^{-1})^2=5^2$, $a^2+2+a^{-2}=25$

$\therefore\ a^2+a^{-2}=23$

(2) $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=a+2+a^{-1}=5+2=7$

$\therefore\ a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{7}\ (\because a>0)$

(3) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$의 양변을 세제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^3=(\sqrt{7})^3$

$a^{\frac{3}{2}}+3a\times a^{-\frac{1}{2}}+3a^{\frac{1}{2}}\times a^{-1}+a^{-\frac{3}{2}}=7\sqrt{7}$

$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+3(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})=7\sqrt{7}$

$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+3\sqrt{7}=7\sqrt{7}$

$\therefore a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=4\sqrt{7}$

답 (1) 23 (2) $\sqrt{7}$ (3) $4\sqrt{7}$

17

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$의 양변을 제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2=(\sqrt{6})^2$, $a-2+a^{-1}=6$

$\therefore a+a^{-1}=8$

$a+a^{-1}=8$의 양변을 제곱하면

$(a+a^{-1})^2=8^2$, $a^2+2+a^{-2}=64$

$\therefore a^2+a^{-2}=62$

답 62

18

$3^x-3^{-x}=3$의 양변을 제곱하면

$(3^x-3^{-x})^2=3^2$, $3^{2x}-2+3^{-2x}=9$

$\therefore 3^{2x}+3^{-2x}=11$

$3^x-3^{-x}=3$의 양변을 세제곱하면

$(3^x-3^{-x})^3=3^3$

$3^{3x}-3\times3^{2x}\times3^{-x}+3\times3^x\times3^{-2x}-3^{-3x}=27$

$3^{3x}-3^{-3x}-3(3^x-3^{-x})=27$

$3^{3x}-3^{-3x}-3\times3=27$ $\quad\therefore 3^{3x}-3^{-3x}=36$

$\therefore \dfrac{3^{3x}-3^{-3x}+3}{3^{2x}+3^{-2x}+2}=\dfrac{36+3}{11+2}=3$

답 3

19

$x=4^{\frac{1}{3}}+4^{-\frac{1}{3}}$의 양변을 세제곱하면

$x^3=(4^{\frac{1}{3}}+4^{-\frac{1}{3}})^3$

$x^3=4+3\times4^{\frac{2}{3}}\times4^{-\frac{1}{3}}+3\times4^{\frac{1}{3}}\times4^{-\frac{2}{3}}+4^{-1}$

$x^3=\dfrac{17}{4}+3(4^{\frac{1}{3}}+4^{-\frac{1}{3}})$ $\quad\therefore x^3=\dfrac{17}{4}+3x$

$\therefore x^3-3x=\dfrac{17}{4}$

답 $\dfrac{17}{4}$

20

$x=2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}$의 양변을 세제곱하면

$x^3=(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}})^3$

$x^3=2-3\times2^{\frac{2}{3}}\times2^{-\frac{1}{3}}+3\times2^{\frac{1}{3}}\times2^{-\frac{2}{3}}-2^{-1}$

$x^3=\dfrac{3}{2}-3(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}})$ $\quad\therefore x^3=\dfrac{3}{2}-3x$

즉 $2x^3=3-6x$이므로 $2x^3+6x=3$

$\therefore 2x^3+6x+2=3+2=5$

답 5

21

주어진 식의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^x(a^{3x}+a^{-3x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}-1}$$

$$=\frac{(a^{2x})^2+(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}-1}=\frac{2^2+\frac{1}{2}}{2-1}=\frac{9}{2}$$

답 $\dfrac{9}{2}$

22

$\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{3}{2}$의 좌변의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$\dfrac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\dfrac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=\dfrac{3}{2}$

$2(a^{2x}+1)=3(a^{2x}-1)$

$2a^{2x}+2=3a^{2x}-3$

$a^{2x}=5$ $\quad\therefore a^x=\sqrt{5}\ (\because a>0)$

답 $\sqrt{5}$

23

$31^x=4$에서 $31=4^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{2}{x}}$ ······㉠

$124^y=32$에서 $124=32^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{5}{y}}$ ······㉡

㉠÷㉡을 하면 $\dfrac{31}{124}=2^{\frac{2}{x}}\div2^{\frac{5}{y}}$

$\dfrac{1}{4}=2^{\frac{2}{x}-\frac{5}{y}}$, $2^{-2}=2^{\frac{2}{x}-\frac{5}{y}}$

$\therefore \dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{y}=-2$

답 -2

24

$2^x=a$에서 $2=a^{\frac{1}{x}}$ ······㉠

$3^y=a$에서 $3=a^{\frac{1}{y}}$ ······㉡

$6^z=a$에서 $6=a^{\frac{1}{z}}$ ……㉢

㉠×㉡×㉢을 하면 $36=a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

이때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$이므로

$36=a^2$ $\quad\therefore a=6\ (\because a>0)$

답 6

25

$a^x=81$에서 $a=81^{\frac{1}{x}}$ ……㉠

$b^y=81$에서 $b=81^{\frac{1}{y}}$ ……㉡

$c^z=81$에서 $c=81^{\frac{1}{z}}$ ……㉢

㉠×㉡×㉢을 하면 $abc=81^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

이때 $abc=9$이므로 $9=81^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

$81^{\frac{1}{2}}=81^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

연습문제

p.27~31

1

① 27의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=27$이므로

$x^3-27=0$, $(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

즉 27의 세제곱근은

3, $\frac{-3+3\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-3-3\sqrt{3}i}{2}$이다.

② n이 짝수일 때, 음수의 n제곱근 중 실수인 것은 없으므로 -81의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.

③ 16의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=16$이므로

$x^4-16=0$, $(x^2-4)(x^2+4)=0$

$(x+2)(x-2)(x^2+4)=0$

$\therefore x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$

즉 16의 네제곱근은 -2, 2, $-2i$, $2i$이다.

④ -64의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-64$이므로

$x^3+64=0$, $(x+4)(x^2-4x+16)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2\pm2\sqrt{3}i$

즉 -64의 세제곱근 중 실수인 것은 -4이다.

⑤ n이 홀수일 때, 양수의 n제곱근 중 실수인 것은 오직 하나뿐이므로 5의 n제곱근 중 실수인 것은 한 개이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

2

$2^{\frac{2}{3}}\times\sqrt[3]{54}=2^{\frac{2}{3}}\times(2\times3^3)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}\times2^{\frac{1}{3}}\times3$

$=2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}\times3=2\times3=6$

답 ①

3

$\left(\frac{1}{16}\right)^{-0.75}\times\left\{\left(\sqrt[3]{\frac{16}{25}}\right)^{\frac{5}{2}}\right\}^{-\frac{3}{5}}=(2^{-4})^{-\frac{3}{4}}\times\left\{\left(\frac{2^4}{5^2}\right)^{\frac{5}{6}}\right\}^{-\frac{3}{5}}$

$=(2^{-4})^{-\frac{3}{4}}\times\left(\frac{2^4}{5^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$=2^3\times\frac{2^{-2}}{5^{-1}}$

$=2^{3-2}\times5=10$

답 ⑤

4

$\sqrt{a^4b}\div\sqrt[3]{a^8b^2}\times\sqrt[6]{a^4b}=(a^4b)^{\frac{1}{2}}\div(a^8b^2)^{\frac{1}{3}}\times(a^4b)^{\frac{1}{6}}$

$=a^2b^{\frac{1}{2}}\div a^{\frac{8}{3}}b^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}}$

$=a^{2-\frac{8}{3}+\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}$

$=a^0b^0=1$

답 ②

5

$\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{n}}=(2^{-4})^{\frac{1}{n}}=2^{-\frac{4}{n}}$이므로 $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{n}}$이 자연수가 되려면 $-\frac{4}{n}$가 자연수이어야 한다.

(i) $n=-1$일 때, $2^{-\frac{4}{n}}=2^4=16$

(ii) $n=-2$일 때, $2^{-\frac{4}{n}}=2^2=4$

(iii) $n=-4$일 때, $2^{-\frac{4}{n}}=2^1=2$

(i)~(iii)에서 $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{n}}$이 나타낼 수 있는 모든 자연수의 합은 $16+4+2=22$

답 ⑤

6

a는 2의 세제곱근이므로 $a^3=2$

$\sqrt{2}$는 b의 네제곱근이므로 $(\sqrt{2})^4=b$ $\quad\therefore b=4$

$\therefore \left(\frac{b}{a}\right)^3=\frac{b^3}{a^3}=\frac{4^3}{2}=\frac{64}{2}=32$

답 ⑤

7

① $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

② $\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2\times8}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

③ $\sqrt{\sqrt{81}}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

④ $\dfrac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{250}{2}}=\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$

⑤ $(\sqrt[4]{9})^2=(\sqrt[4]{3^2})^2=\sqrt[4]{(3^2)^2}=\sqrt[4]{3^4}=3$

따라서 가장 큰 값은 ④이다.

답 ④

8

$\sqrt[3]{\sqrt{a}}=\sqrt[4]{a^2\times\sqrt[3]{a^k}}$에서

$\sqrt[3]{\sqrt{a}}=(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{6}}$

$\sqrt[4]{a^2\times\sqrt[3]{a^k}}=(a^2\times a^{\frac{k}{3}})^{\frac{1}{4}}=(a^{2+\frac{k}{3}})^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{k}{12}}$

이므로 $a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{k}{12}}$

즉 $\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{k}{12}$이므로 $2=6+k$

$\therefore k=-4$

답 ②

9

$2^{10}=a$에서 $2=a^{\frac{1}{10}}$

$3^{20}=b$에서 $3=b^{\frac{1}{20}}$

$\therefore 6^{20}=(2\times3)^{20}=(a^{\frac{1}{10}}b^{\frac{1}{20}})^{20}=a^2b$

답 a^2b

다른 풀이

$6^{20}=(2\times3)^{20}=2^{20}\times3^{20}$

$=(2^{10})^2\times3^{20}=a^2b$

10

$7^{\frac{y}{2}}=16$에서 $7=16^{\frac{2}{y}}=(2^4)^{\frac{2}{y}}=2^{\frac{8}{y}}$

이때 $2^x=7$이므로

$2^x=2^{\frac{8}{y}}\qquad\therefore x=\dfrac{8}{y}$

$\therefore xy=8$

답 ④

다른 풀이

$7=2^x$이므로 $7^{\frac{y}{2}}=16$에서

$(2^x)^{\frac{y}{2}}=16\qquad\therefore 2^{\frac{xy}{2}}=2^4$

즉 $\dfrac{xy}{2}=4$이므로 $xy=8$

11

$(2^x)^y=\dfrac{1}{64}$에서 $2^{xy}=2^{-6}\qquad\therefore xy=-6$ …… ❶

$2^x2^y=2$에서 $2^{x+y}=2\qquad\therefore x+y=1$ …… ❷

이때 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$이므로

$(x-y)^2=1^2-4\times(-6)=25$

$\therefore x-y=5\ (\because x>y)$ …… ❸

$\therefore 2^{x^2}\div2^{y^2}=2^{x^2-y^2}=2^{(x+y)(x-y)}=2^{1\times5}=32$ …… ❹

답 32

채점 기준	비율
❶ xy의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ $x+y$의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $x-y$의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $2^{x^2}\div2^{y^2}$의 값을 구할 수 있다.	30%

12

$\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=3$의 좌변의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$\dfrac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\dfrac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=3$

$a^{2x}+1=3(a^{2x}-1),\ a^{2x}+1=3a^{2x}-3$

$-2a^{2x}=-4\qquad\therefore a^{2x}=2$

$\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{a^x(a^{3x}+a^{-3x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\dfrac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}+1}$

$=\dfrac{(a^{2x})^2+(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}+1}=\dfrac{2^2+\frac{1}{2}}{2+1}=\dfrac{3}{2}$

답 ①

13

정사각형의 넓이가 $\sqrt[n]{64}$이므로

$f(n)=\sqrt{\sqrt[n]{64}}=\sqrt[2n]{2^6}=2^{\frac{6}{2n}}=2^{\frac{3}{n}}$

$\therefore f(4)\times f(12)=2^{\frac{3}{4}}\times2^{\frac{3}{12}}=2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=2$

답 2

14

$\sqrt[16]{\dfrac{64^{10}+16^{10}}{64^4+16^{11}}}=\sqrt[16]{\dfrac{(2^6)^{10}+(2^4)^{10}}{(2^6)^4+(2^4)^{11}}}=\sqrt[16]{\dfrac{2^{60}+2^{40}}{2^{24}+2^{44}}}$

$=\sqrt[16]{\dfrac{2^{40}(2^{20}+1)}{2^{24}(1+2^{20})}}=\sqrt[16]{\dfrac{2^{40}}{2^{24}}}$

$=\sqrt[16]{2^{16}}=2$

답 2

15

$a^x=b^y=5^z=k\ (k>0)$라 하면

$a^x=k$에서 $a=k^{\frac{1}{x}}$ ······㉠

$b^y=k$에서 $b=k^{\frac{1}{y}}$ ······㉡

$5^z=k$에서 $5=k^{\frac{1}{z}}$ ······㉢

㉠×㉡을 하면 $ab=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

이때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$이므로

$ab=k^{\frac{2}{z}}=(k^{\frac{1}{z}})^2$

$=5^2=25$ (∵ ㉢)

답 ⑤

16

99의 100제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^{100}=99$의 실근이므로 2개이다. $\therefore f(99,\ 100)=2$

-99의 100제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^{100}=-99$의 실근이므로 0개이다. $\therefore f(-99,\ 100)=0$

-100의 99제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^{99}=-100$의 실근이므로 1개이다. $\therefore f(-100,\ 99)=1$

$\therefore f(99,\ 100)+f(-99,\ 100)+f(-100,\ 99)$

$=2+0+1=3$

답 ③

참고 $f(a,\ n)=(a$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수$)$이므로

(i) $a>0$, n이 짝수일 때, $f(a,\ n)=2$

(ii) $a<0$, n이 짝수일 때, $f(a,\ n)=0$

(iii) a는 실수, n이 홀수일 때, $f(a,\ n)=1$

17

$\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt[4]{a}=\sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}\right)^2}\times\sqrt[4]{a}=\sqrt[4]{\frac{9}{4}a}$ 가 자연수가 되려면

$\frac{9}{4}a$, 즉 $\frac{3^2}{2^2}a$가 어떤 자연수의 네제곱이어야 하므로

$a=2^2\times3^2\times k^4$ (k는 자연수) 꼴이어야 한다.

따라서 자연수 a의 최솟값은 $k=1$일 때 36이다.

답 36

18

(i) $m=-2$일 때

$\sqrt[4]{n^m}=n^{\frac{m}{4}}=n^{-\frac{1}{2}}$이 유리수가 되려면 n은 어떤 자연수의 제곱이어야 하므로

$n=1,\ 4,\ 9,\ 16$

(ii) $m=-1$일 때

$\sqrt[4]{n^m}=n^{\frac{m}{4}}=n^{-\frac{1}{4}}$이 유리수가 되려면 n은 어떤 자연수의 네제곱이어야 하므로

$n=1,\ 16$

(iii) $m=0$일 때

$\sqrt[4]{n^m}=n^{\frac{m}{4}}=n^0=1$이므로 $\sqrt[4]{n^m}$은 n의 값에 관계없이 항상 유리수가 된다.

$\therefore n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 16$

(iv) $m=1$일 때

$\sqrt[4]{n^m}=n^{\frac{m}{4}}=n^{\frac{1}{4}}$이 유리수가 되려면 n은 어떤 자연수의 네제곱이어야 하므로

$n=1,\ 16$

(v) $m=2$일 때

$\sqrt[4]{n^m}=n^{\frac{m}{4}}=n^{\frac{1}{2}}$이 유리수가 되려면 n은 어떤 자연수의 제곱이어야 하므로

$n=1,\ 4,\ 9,\ 16$

(i)~(v)에서 구하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$4+2+16+2+4=28$

답 28

19

$2^a=3^b$의 양변에 2^b을 곱하면

$2^a\times2^b=3^b\times2^b$ $\quad\therefore 2^{a+b}=6^b$

이때 $a+b=\frac{4}{3}ab$이므로

$2^{\frac{4}{3}ab}=6^b$ $\quad\therefore 2^{\frac{4}{3}a}=6$

$\therefore 8^a\times3^b=2^{3a}\times2^a=2^{4a}=(2^{\frac{4}{3}a})^3=6^3=216$

답 ⑤

20

$5^{2a+b}=32$, $5^{a-b}=2$를 변끼리 곱하면

$5^{2a+b}\times5^{a-b}=32\times2$

$5^{3a}=64=4^3$ $\quad\therefore 5^a=4$ ······㉠

㉠을 $5^{a-b}=2$에 대입하면

$5^a\times5^{-b}=2$에서 $4\times5^{-b}=2$

$5^{-b}=\frac{1}{2}=2^{-1}$ $\quad\therefore 5^b=2$ ······㉡

㉠에서 $4^{\frac{1}{a}}=5$, ㉡에서 $2^{\frac{1}{b}}=5$

$\therefore 4^{\frac{a+b}{ab}}=4^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=4^{\frac{1}{a}}\times4^{\frac{1}{b}}=4^{\frac{1}{a}}\times(2^2)^{\frac{1}{b}}$

$=4^{\frac{1}{a}}\times(2^{\frac{1}{b}})^2=5\times5^2=125$

답 125

21

Step by Step

$3^{2x}-3^{x+1}=-1$의 양변을 3^x으로 나눈다.

↓

$3^{3x}+3^{-3x}$, $3^{2x}+3^{-2x}$의 값을 각각 구한다.

↓

주어진 식의 값을 구한다.

$3^{2x}-3^{x+1}=-1$의 양변을 3^x으로 나누면

$3^x-3=-3^{-x}$ $\quad\therefore 3^x+3^{-x}=3$

$$3^{3x}+3^{-3x}=(3^x+3^{-x})^3-3(3^x+3^{-x})$$
$$=3^3-3\times3=18$$
$$3^{2x}+3^{-2x}=(3^x+3^{-x})^2-2$$
$$=3^2-2=7$$
$$\therefore \frac{3^{3x}+3^{-3x}-2}{3^{2x}+3^{-2x}+1}=\frac{18-2}{7+1}=\frac{16}{8}=2$$

답 ⑤

22

첫 번째 옥타브의 '라'의 진동수를 N_a라 하면

$m=1$, $p=9$이므로

$N_a=k\times2\times(\sqrt[12]{2})^9$

세 번째 옥타브의 '솔'의 진동수를 N_b라 하면

$m=3$, $p=7$이므로

$N_b=k\times2^3\times(\sqrt[12]{2})^7$

$$\therefore \frac{N_b}{N_a}=\frac{k\times2^3\times(\sqrt[12]{2})^7}{k\times2\times(\sqrt[12]{2})^9}=2^{2-\frac{2}{12}}=2^{\frac{11}{6}}$$

따라서 세 번째 옥타브의 '솔'의 진동수는 첫 번째 옥타브의 '라'의 진동수의 $2^{\frac{11}{6}}$배이다.

답 ③

Level Up 연습문제

p.32

1

m^n의 세제곱근 $m^{\frac{n}{3}}$이 자연수가 되도록 하는 n의 값은

$n=3$ 또는 $n=6$

(i) $n=3$일 때, $1<m<3$이므로 $m^{\frac{n}{3}}=m$이 자연수가 되도록 하는 m의 값은 2

(ii) $n=6$일 때, $1<m<6$이므로 $m^{\frac{n}{3}}=m^2$이 자연수가 되도록 하는 m의 값은 2, 3, 4, 5

(i), (ii)에서 순서쌍 (m, n)은

$(2, 3)$, $(2, 6)$, $(3, 6)$, $(4, 6)$, $(5, 6)$

이므로 그 개수는 5이다.

답 5

2

(나)에서 $a^{2x}=6$이므로 $a=6^{\frac{1}{2x}}$ $\quad\therefore a^3=6^{\frac{3}{2x}}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 (나)에서 $\dfrac{1}{(2b)^{3y}}=6$이므로 $(2b)^{3y}=\dfrac{1}{6}=6^{-1}$

$2b=6^{-\frac{1}{3y}}$ $\quad\therefore (2b)^2=6^{-\frac{2}{3y}}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠×㉡을 하면 $a^3\times(2b)^2=6^{\frac{3}{2x}}\times6^{-\frac{2}{3y}}$

$\therefore 6^{\frac{3}{2x}-\frac{2}{3y}}=4a^3b^2$

이때 (가)에서 $a^3b^2=9$이므로

$6^{\frac{3}{2x}-\frac{2}{3y}}=4\times9=6^2$ $\quad\therefore \dfrac{3}{2x}-\dfrac{2}{3y}=2$

답 ②

3

집합 X의 원소는 b의 a제곱근 중 실수인 것이다.

(i) $a=3$일 때, x의 값은 $\sqrt[3]{-9}$, $\sqrt[3]{-3}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{9}$

(ii) $a=4$일 때, x의 값은 $\pm\sqrt[4]{3}$, $\pm\sqrt{3}$

(i), (ii)에서

$X=\{\sqrt[3]{-9}, \sqrt[3]{-3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}, -\sqrt{3}, -\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{3}, \sqrt{3}\}$

ㄱ. $\sqrt[3]{-9}\in X$

ㄴ. 집합 X의 원소의 개수는 8이다.

ㄷ. 집합 X의 원소 중 양수인 것은 $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt{3}$이므로 양수인 모든 원소의 곱은

$\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[4]{3}\times\sqrt{3}=3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=3^{\frac{7}{4}}=\sqrt[4]{3^7}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고 $a=4$, $b=9$일 때, $x^4=9$이므로 $x^4-9=0$

$(x^2-3)(x^2+3)=0$, $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x^2+3)=0$

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}i$

따라서 x의 값 중에서 실수인 것은 $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$이다.

4

$64^{\frac{1}{m}}=k\times81^{\frac{1}{n}}$에서 $k=\dfrac{64^{\frac{1}{m}}}{81^{\frac{1}{n}}}=2^{\frac{6}{m}}\times3^{-\frac{4}{n}}$

두 밑 2와 3은 서로소이므로 자연수 k가 존재하려면

$\dfrac{6}{m}$과 $-\dfrac{4}{n}$가 모두 자연수이어야 한다.

정수 m은 6의 양의 약수이어야 하므로 $m=1, 2, 3, 6$

정수 n은 4의 음의 약수이어야 하므로 $n=-1, -2, -4$

따라서 순서쌍 (m, n)은

$(1, -1)$, $(1, -2)$, $(1, -4)$, $(2, -1)$, $(2, -2)$, $(2, -4)$, $(3, -1)$, $(3, -2)$, $(3, -4)$, $(6, -1)$, $(6, -2)$, $(6, -4)$

이므로 그 개수는 12이다.

답 12

2 로그

확인 문제

p.35~60

01

(1) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x=-3$에서 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-3}=x$

$\therefore\ x=(2^{-\frac{1}{2}})^{-3}=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$

(2) $\log_x 64=\frac{3}{2}$에서 $x^{\frac{3}{2}}=64$

$\therefore\ x=64^{\frac{2}{3}}=(4^3)^{\frac{2}{3}}=4^2=16$

(3) $\log_2(\log_{49} x)=-2$에서 $2^{-2}=\log_{49} x$

즉 $\log_{49} x=\frac{1}{4}$이므로 $49^{\frac{1}{4}}=x$

$\therefore\ x=(7^2)^{\frac{1}{4}}=7^{\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$

답 (1) $2\sqrt{2}$ (2) 16 (3) $\sqrt{7}$

02

$x=\log_3 8$에서 $3^x=8$

$\therefore\ 3^{\frac{x}{3}}=(3^x)^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}=2$ 답 2

03

진수의 조건에서 $5-2x>0$이므로 $x<\frac{5}{2}$

따라서 자연수 x의 값은 1, 2이므로 그 합은

$1+2=3$ 답 3

04

밑의 조건에서 $x>0$, $x\neq1$이므로

$0<x<1$ 또는 $x>1$ ······ ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+2x+8>0$이므로

$x^2-2x-8<0$, $(x+2)(x-4)<0$

$\therefore\ -2<x<4$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<1$ 또는 $1<x<4$

따라서 정수 x의 값은 2, 3이므로 그 합은

$2+3=5$ 답 5

05

(1) $\log_2 32-\log_3 81=\log_2 2^5-\log_3 3^4=5-4=1$

(2) $\log_2 5+\log_2\frac{16}{5}=\log_2\left(5\times\frac{16}{5}\right)=\log_2 16$

$=\log_2 2^4=4$

답 (1) 1 (2) 4

06

(1) $\frac{1}{2}\log_{10}16+2\log_{10}5=\log_{10}16^{\frac{1}{2}}+\log_{10}5^2$

$=\log_{10}4+\log_{10}25$

$=\log_{10}(4\times25)$

$=\log_{10}100$

$=\log_{10}10^2$

$=2$

(2) $4\log_2\sqrt{2}+\log_2 3+\log_2\frac{2}{3}$

$=\log_2(\sqrt{2})^4+\log_2 3+\log_2\frac{2}{3}$

$=\log_2 4+\log_2 3+\log_2\frac{2}{3}$

$=\log_2\left(4\times3\times\frac{2}{3}\right)$

$=\log_2 8=\log_2 2^3=3$

(3) $\log_3\frac{3}{5}-\log_3\frac{2}{15}+2\log_3\sqrt{6}$

$=\log_3\frac{3}{5}-\log_3\frac{2}{15}+\log_3(\sqrt{6})^2$

$=\log_3\frac{3}{5}-\log_3\frac{2}{15}+\log_3 6$

$=\log_3\left(\frac{3}{5}\div\frac{2}{15}\times6\right)$

$=\log_3\left(\frac{3}{5}\times\frac{15}{2}\times6\right)$

$=\log_3 3^3=3$

(4) $\log_3\frac{9}{5}+2\log_3\sqrt{5}-\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{9}$

$=\log_3\frac{9}{5}+\log_3(\sqrt{5})^2-\log_3\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\log_3\frac{9}{5}+\log_3 5-\log_3\frac{1}{3}$

$=\log_3\left(\frac{9}{5}\times5\div\frac{1}{3}\right)$

$=\log_3\left(\frac{9}{5}\times5\times3\right)$

$=\log_3 3^3=3$

답 (1) 2 (2) 3 (3) 3 (4) 3

07

$\log_3 25\times\log_5 9=\log_3 5^2\times\log_5 3^2$

$=2\log_3 5\times2\log_5 3$

$=4\times\frac{\log_{10}5}{\log_{10}3}\times\frac{\log_{10}3}{\log_{10}5}$

$=4$

답 4

08

(1) $\log_2 20-\dfrac{1}{\log_5 2}=\log_2 20-\log_2 5$

$=\log_2 \dfrac{20}{5}=\log_2 4$

$=\log_2 2^2=2$

(2) $(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2)$

$=(\log_2 3+\log_{2^2} 3^2)(\log_3 2^2+\log_{3^2} 2)$

$=(\log_2 3+\log_2 3)\left(2\log_3 2+\dfrac{1}{2}\log_3 2\right)$

$=2\log_2 3\times\dfrac{5}{2}\log_3 2$

$=5\times\dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}\times\dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3}$

$=5$

(3) $\log_9 8\times\log_2 25\times\log_5 3$

$=\dfrac{\log_{10} 8}{\log_{10} 9}\times\dfrac{\log_{10} 25}{\log_{10} 2}\times\dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5}$

$=\dfrac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 3^2}\times\dfrac{\log_{10} 5^2}{\log_{10} 2}\times\dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5}$

$=\dfrac{3\log_{10} 2}{2\log_{10} 3}\times\dfrac{2\log_{10} 5}{\log_{10} 2}\times\dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5}$

$=3$

(4) (지수 부분)$=\log_2 \dfrac{3}{2}+\log_2 27-\log_2 3$

$=\log_2\left(\dfrac{3}{2}\times 27\times\dfrac{1}{3}\right)=\log_2 \dfrac{27}{2}$

$\therefore\ 2^{\log_2 \frac{3}{2}+\log_2 27-\log_2 3}=2^{\log_2 \frac{27}{2}}=\left(\dfrac{27}{2}\right)^{\log_2 2}=\dfrac{27}{2}$

답 (1) 2 (2) 5 (3) 3 (4) $\dfrac{27}{2}$

다른 풀이

(3) $\log_9 8\times\log_2 25\times\log_5 3$

$=\log_{3^2} 2^3\times\log_2 5^2\times\log_5 3$

$=\dfrac{3}{2}\log_3 2\times 2\log_2 5\times\log_5 3$

$=3\log_3 2\times\log_2 5\times\log_5 3=3$

09

$\dfrac{1}{\log_3 2}+\dfrac{1}{\log_5 2}+\dfrac{1}{\log_6 2}=\log_2 3+\log_2 5+\log_2 6$

$=\log_2(3\times 5\times 6)$

$=\log_2 90$

$=\dfrac{1}{\log_{90} 2}$

$\therefore\ k=90$

답 90

10

$\log_2 x+4\log_4 \sqrt{y}=3$에서 $\log_2 x+4\log_{2^2} y^{\frac{1}{2}}=3$

$\log_2 x+\log_2 y=3$, $\log_2 xy=3$ $\quad\therefore\ xy=2^3=8$

$\therefore\ (\sqrt[4]{3^x})^y=\{(3^x)^{\frac{1}{4}}\}^y=3^{\frac{xy}{4}}=3^{\frac{8}{4}}=3^2=9$

답 9

11

$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}=\dfrac{\log_2 5}{\log_3 5}$

$=\dfrac{\log_5 3}{\log_5 2}=\log_2 3$

답 ④

12

(1) $\log_2 2.5=\log_2 \dfrac{25}{10}$

$=\log_2 \dfrac{5}{2}$

$=\log_2 5-\log_2 2$

$=b-1$

(2) $\log_2 60=\log_2(2^2\times 3\times 5)$

$=2\log_2 2+\log_2 3+\log_2 5$

$=a+b+2$

(3) $\log_2 \sqrt{45}=\dfrac{1}{2}\log_2 45$

$=\dfrac{1}{2}\log_2(3^2\times 5)$

$=\dfrac{1}{2}(2\log_2 3+\log_2 5)$

$=\dfrac{1}{2}(2a+b)$

$=a+\dfrac{b}{2}$

답 (1) $b-1$ (2) $a+b+2$ (3) $a+\dfrac{b}{2}$

13

$\log_2 5=\dfrac{1}{\log_5 2}$이므로 $\log_5 2=\dfrac{1}{a}$

$\therefore\ \log_5 12=\log_5(2^2\times 3)$

$=2\log_5 2+\log_5 3$

$=2\times\dfrac{1}{a}+b$

$=\dfrac{2}{a}+b$

답 ②

14

$5^a=2$, $5^b=3$에서 로그의 정의에 의하여

$a=\log_5 2$, $b=\log_5 3$

$$\therefore \log_6 72=\frac{\log_5 72}{\log_5 6}=\frac{\log_5(2^3\times3^2)}{\log_5(2\times3)}=\frac{3\log_5 2+2\log_5 3}{\log_5 2+\log_5 3}=\frac{3a+2b}{a+b}$$

답 $\frac{3a+2b}{a+b}$

15

$3^x=a$, $3^y=b$, $3^z=c$에서 로그의 정의에 의하여

$x=\log_3 a$, $y=\log_3 b$, $z=\log_3 c$

(1) $$\log_a \frac{ab}{c}=\frac{\log_3 \frac{ab}{c}}{\log_3 a}=\frac{\log_3 a+\log_3 b-\log_3 c}{\log_3 a}=\frac{x+y-z}{x}=1+\frac{y-z}{x}$$

(2) $$\log_{\sqrt{b}} a^2c=\frac{\log_3 a^2c}{\log_3\sqrt{b}}=\frac{2\log_3 a+\log_3 c}{\frac{1}{2}\log_3 b}=\frac{2x+z}{\frac{y}{2}}=\frac{4x+2z}{y}$$

답 (1) $1+\frac{y-z}{x}$ (2) $\frac{4x+2z}{y}$

16

(1) $321^a=10$에서 $a=\log_{321}10$

$3.21^b=10$에서 $b=\log_{3.21}10$

$$\therefore \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{\log_{321}10}-\frac{1}{\log_{3.21}10}=\log_{10}321-\log_{10}3.21=\log_{10}\frac{321}{3.21}=\log_{10}10^2=2$$

(2) $24^x=32$에서 $x=\log_{24}32=\log_{24}2^5=5\log_{24}2$

$48^y=128$에서 $y=\log_{48}128=\log_{48}2^7=7\log_{48}2$

$$\therefore \frac{5}{x}-\frac{7}{y}=\frac{5}{5\log_{24}2}-\frac{7}{7\log_{48}2}=\log_2 24-\log_2 48=\log_2\frac{24}{48}=\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$$

답 (1) 2 (2) -1

다른 풀이

(1) $321^a=10$에서 $321=10^{\frac{1}{a}}$ ······㉠

$3.21^b=10$에서 $3.21=10^{\frac{1}{b}}$ ······㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{321}{3.21}=10^{\frac{1}{a}}\div10^{\frac{1}{b}}$

$100=10^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$ $\therefore \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=2$

17

$a^x=7$에서 $x=\log_a 7$

$b^{2y}=7$에서 $2y=\log_b 7$

$c^{3z}=7$에서 $3z=\log_c 7$

$$\therefore \frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=\frac{6}{x}+\frac{6}{2y}+\frac{6}{3z}=\frac{6}{\log_a 7}+\frac{6}{\log_b 7}+\frac{6}{\log_c 7}$$
$$=6(\log_7 a+\log_7 b+\log_7 c)=6\log_7 abc=6\log_7 49\ (\because abc=49)=6\times2=12$$

답 12

18

$x=\log_3 2$에서 $3^x=2$

$$\therefore \frac{9^x-9^{-x}}{3^{x+1}-3^{-x+1}}=\frac{(3^x)^2-(3^{-x})^2}{3\times3^x-3\times3^{-x}}=\frac{2^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{3\times2-3\times\frac{1}{2}}=\frac{4-\frac{1}{4}}{6-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{15}{4}}{\frac{9}{2}}=\frac{5}{6}$$

답 $\frac{5}{6}$

19

$x=\log_a\sqrt{3}$에서 $a^x=\sqrt{3}$

이때 주어진 식의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$$\frac{a^x(a^{3x}-a^{-x})}{a^x(a^{3x}+a^{-x})}=\frac{a^{4x}-1}{a^{4x}+1}=\frac{(\sqrt{3})^4-1}{(\sqrt{3})^4+1}=\frac{9-1}{9+1}=\frac{4}{5}$$

답 $\frac{4}{5}$

20

이차방정식 $x^2-9x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=9$, $\alpha\beta=3$

$$\begin{aligned}\therefore \log_2(\alpha+\beta)-2\log_2\alpha\beta&=\log_2 9-2\log_2 3\\&=\log_2 3^2-2\log_2 3\\&=2\log_2 3-2\log_2 3\\&=0\end{aligned}$$

답 0

Lecture 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

(1) 두 근의 합: $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

(2) 두 근의 곱: $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

21

이차방정식 $x^2-4x-4=0$의 두 근이 $\log_{10}\alpha$, $\log_{10}\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_{10}\alpha+\log_{10}\beta=4$, $\log_{10}\alpha\times\log_{10}\beta=-4$

$$\begin{aligned}\therefore &\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha\\&=\frac{\log_{10}\beta}{\log_{10}\alpha}+\frac{\log_{10}\alpha}{\log_{10}\beta}\\&=\frac{(\log_{10}\alpha)^2+(\log_{10}\beta)^2}{\log_{10}\alpha\times\log_{10}\beta}\\&=\frac{(\log_{10}\alpha+\log_{10}\beta)^2-2\log_{10}\alpha\times\log_{10}\beta}{\log_{10}\alpha\times\log_{10}\beta}\\&=\frac{4^2-2\times(-4)}{-4}\\&=-6\end{aligned}$$

답 -6

22

$a=\log_4 32=\log_{2^2}2^5=\frac{5}{2}$

$$\begin{aligned}b&=\log_3 16\times\log_2 27=\log_3 2^4\times\log_2 3^3\\&=12\log_3 2\times\log_2 3=12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c&=\log_7 3+\log_7 4-\frac{1}{\log_6 7}\\&=\log_7 3+\log_7 4-\log_7 6\\&=\log_7\frac{3\times4}{6}=\log_7 2\end{aligned}$$

따라서 세 수 a, b, c의 대소 관계는

$c<a<b$

답 $c<a<b$

참고 **22**에서 $\log_7 2$의 값의 범위를 구하면

$\log_7 1=0$, $\log_7 7=1$이므로

$\log_7 1<\log_7 2<\log_7 7$ $\quad\therefore 0<\log_7 2<1$

따라서 **22**에서 세 수 a, b, c의 대소 관계는

$c<a<b$

23

$a^2=b^3=c^5$에서 $b=a^{\frac{2}{3}}$, $c=b^{\frac{3}{5}}$, $a=c^{\frac{5}{2}}$이므로

$P=\log_a b=\log_a a^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$

$Q=\log_b c=\log_b b^{\frac{3}{5}}=\frac{3}{5}$

$R=\log_c a=\log_c c^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$

따라서 세 수 P, Q, R의 대소 관계는

$Q<P<R$

답 $Q<P<R$

24

(1) $\log 100=\log 10^2=2$

(2) $\log 0.1=\log 10^{-1}=-1$

(3) $\log\sqrt{1000}=\log 10^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$

(4) $\log\frac{1}{\sqrt[4]{1000}}=\log 10^{-\frac{3}{4}}=-\frac{3}{4}$

답 (1) 2 (2) -1 (3) $\frac{3}{2}$ (4) $-\frac{3}{4}$

25

$$\begin{aligned}(1)\ \log 20&=\log(10\times2)=\log 10+\log 2\\&=1+\log 2=1+0.3010\\&=1.3010\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\ \log\frac{3}{2}&=\log 3-\log 2\\&=0.4771-0.3010\\&=0.1761\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3)\ \log\frac{5}{3}&=\log 5-\log 3=\log\frac{10}{2}-\log 3\\&=1-\log 2-\log 3=1-0.3010-0.4771\\&=0.2219\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4)\ \log 50&=\log\frac{100}{2}=\log 10^2-\log 2\\&=2-\log 2=2-0.3010\\&=1.6990\end{aligned}$$

답 (1) 1.3010 (2) 0.1761 (3) 0.2219 (4) 1.6990

26

(1) $\log A=2.1354=2+0.1354$

$\therefore$ 정수 부분: 2, 소수 부분: 0.1354

(2) $\log A=-2+0.1234$

$\therefore$ 정수 부분: -2, 소수 부분: 0.1234

(3) $\log A=-4.3215=(-4-1)+(1-0.3215)$

$=-5+0.6785$

$\therefore$ 정수 부분: -5, 소수 부분: 0.6785

답 (1) 정수 부분: 2, 소수 부분: 0.1354
(2) 정수 부분: -2, 소수 부분: 0.1234
(3) 정수 부분: -5, 소수 부분: 0.6785

27

$\log 3.52=0.5465$이므로

(1) $\log 3520=\log(3.52\times10^3)=\log 3.52+\log 10^3$

$=3+\log 3.52=3+0.5465$

$\therefore$ 정수 부분: 3, 소수 부분: 0.5465

(2) $\log 0.0352=\log(3.52\times10^{-2})=\log 3.52+\log 10^{-2}$

$=-2+\log 3.52=-2+0.5465$

$\therefore$ 정수 부분: -2, 소수 부분: 0.5465

(3) $\log\sqrt{352}=\dfrac{1}{2}\log(3.52\times10^2)$

$=\dfrac{1}{2}(\log 3.52+\log 10^2)$

$=\dfrac{1}{2}(2+\log 3.52)$

$=\dfrac{1}{2}(2+0.5465)$

$=1+0.27325$

$\therefore$ 정수 부분: 1, 소수 부분: 0.27325

답 (1) 정수 부분: 3, 소수 부분: 0.5465
(2) 정수 부분: -2, 소수 부분: 0.5465
(3) 정수 부분: 1, 소수 부분: 0.27325

28

(1) $\log x$의 정수 부분이 2이므로 x는 정수 부분이 3자리인 수이다.

또 $\log x$의 소수 부분과 $\log 47.3$의 소수 부분이 같으므로 x의 숫자 배열은 47.3의 숫자 배열과 같다.

$\therefore x=473$

(2) $\log x=-1.3251=-1-0.3251$

$=(-1-1)+(1-0.3251)$

$=-2+0.6749$

$\log x$의 정수 부분이 -2이므로 x는 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

또 $\log x$의 소수 부분과 $\log 47.3$의 소수 부분이 같으므로 x의 숫자 배열은 47.3의 숫자 배열과 같다.

$\therefore x=0.0473$

(3) $\log x=-2.3251=-2-0.3251$

$=(-2-1)+(1-0.3251)$

$=-3+0.6749$

$\log x$의 정수 부분이 -3이므로 x는 소수점 아래 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

또 $\log x$의 소수 부분과 $\log 47.3$의 소수 부분이 같으므로 x의 숫자 배열은 47.3의 숫자 배열과 같다.

$\therefore x=0.00473$

답 (1) 473 (2) 0.0473 (3) 0.00473

29

(1) $\log x$의 정수 부분이 0이므로 x는 정수 부분이 1자리인 수이다.

또 $\log x$의 소수 부분과 $\log 567$의 소수 부분이 같으므로 x의 숫자 배열은 567의 숫자 배열과 같다.

$\therefore x=5.67$

(2) $\log x$의 정수 부분이 -2이므로 x는 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

또 $\log x$의 소수 부분과 $\log 567$의 소수 부분이 같으므로 x의 숫자 배열은 567의 숫자 배열과 같다.

$\therefore x=0.0567$

(3) $\log x=-2.2464=-2-0.2464$

$=(-2-1)+(1-0.2464)$

$=-3+0.7536$

$\log x$의 정수 부분이 -3이므로 x는 소수점 아래 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

또 $\log x$의 소수 부분과 $\log 567$의 소수 부분이 같으므로 x의 숫자 배열은 567의 숫자 배열과 같다.

$\therefore x=0.00567$

답 (1) 5.67 (2) 0.0567 (3) 0.00567

30

(1) $\log 3^{10}=10\log 3=10\times0.4771=4.771$

따라서 $\log 3^{10}$의 정수 부분이 4이므로 3^{10}은 5자리의 정수이다.

(2) $\log(2^{30}\times3^{20})=\log 2^{30}+\log 3^{20}$

$=30\log 2+20\log 3$

$=30\times0.3010+20\times0.4771$

$=18.572$

따라서 $\log(2^{30}\times3^{20})$의 정수 부분이 18이므로 $2^{30}\times3^{20}$은 19자리의 정수이다.

(3) $\log 54^{10}=10\log(2\times3^3)$

$=10(\log 2+3\log 3)$

$=10(0.3010+3\times0.4771)$

$=17.323$

따라서 $\log 54^{10}$의 정수 부분이 17이므로 54^{10}은 18자리의 정수이다.

답 (1) 5자리 (2) 19자리 (3) 18자리

31

18^{30}이 38자리의 정수이므로 $\log 18^{30}$의 정수 부분은 37이다.

즉 $37\le\log 18^{30}<38$이므로 $37\le30\log 18<38$

$\therefore \frac{37}{30}\le\log 18<\frac{38}{30}$

위의 부등식의 각 변에 10을 곱하면

$10\times\frac{37}{30}\le10\log 18<10\times\frac{38}{30}$

$\therefore 12.33\cdots\le\log 18^{10}<12.66\cdots$

따라서 $\log 18^{10}$의 정수 부분이 12이므로 18^{10}은 13자리의 정수이다. 답 13자리

32

(1) $\log 0.2^{15}=15\log\frac{2}{10}=15(\log 2-\log 10)$

$=15(0.3010-1)=-10.485$

$=-10-0.485=(-10-1)+(1-0.485)$

$=-11+0.515$

따라서 $\log 0.2^{15}$의 정수 부분이 -11이므로 0.2^{15}은 소수점 아래 11째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

(2) $\log\left(\frac{1}{6}\right)^{20}=\log 6^{-20}=-20\log(2\times3)$

$=-20(\log 2+\log 3)$

$=-20(0.3010+0.4771)$

$=-15.562=-15-0.562$

$=(-15-1)+(1-0.562)$

$=-16+0.438$

따라서 $\log\left(\frac{1}{6}\right)^{20}$의 정수 부분이 -16이므로 $\left(\frac{1}{6}\right)^{20}$은 소수점 아래 16째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

답 (1) 소수점 아래 11째 자리 (2) 소수점 아래 16째 자리

33

$\log\left(\frac{1}{4}\right)^m=\log(2^{-2})^m=\log 2^{-2m}=-2m\log 2$

$=-2m\times0.3010=-0.602m$

$\left(\frac{1}{4}\right)^m$이 소수점 아래 10째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나므로 $\log\left(\frac{1}{4}\right)^m$의 정수 부분은 -10이다.

즉 $-10\le-0.602m<-9$이므로 $9<0.602m\le10$

$\therefore 14.95\cdots<m\le16.61\cdots$

따라서 자연수 m의 값은 15, 16이므로 그 합은

$15+16=31$ 답 31

34

$\log 18^{10}=10\log(2\times3^2)=10(\log 2+2\log 3)$

$=10(0.3010+2\times0.4771)=12.5520$

즉 $\log 18^{10}$의 정수 부분이 12이므로 18^{10}은 13자리의 정수이다. $\therefore n=13$

$\log 18^{10}$의 소수 부분이 0.5520이고

$\log 3=0.4771$, $\log 4=2\log 2=0.6020$이므로

$\log 3<0.5520<\log 4$

위의 부등식의 각 변에 12를 더하면

$12+\log 3<12.5520<12+\log 4$

$\log 10^{12}+\log 3<12.5520<\log 10^{12}+\log 4$

$\log(3\times10^{12})<\log 18^{10}<\log(4\times10^{12})$

$\therefore 3\times10^{12}<18^{10}<4\times10^{12}$

즉 $18^{10}=3.\blacksquare\times10^{12}$이므로 18^{10}의 최고 자리의 숫자는 3이다. $\therefore m=3$

$\therefore m+n=3+13=16$ 답 16

35

$\log\left(\frac{1}{5}\right)^{20}=\log 5^{-20}=-20\log 5$

$=-20(1-\log 2)=-20(1-0.3010)$

$=-13.98=-13-0.98$

$=(-13-1)+(1-0.98)$

$=-14+0.02$

즉 $\log\left(\frac{1}{5}\right)^{20}$의 정수 부분이 -14이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^{20}$은 소수점 아래 14째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나온다.

$\therefore n=14$

$\log\left(\frac{1}{5}\right)^{20}$의 소수 부분이 0.02이고

$\log 1=0$, $\log 2=0.3010$이므로

$\log 1 < 0.02 < \log 2$

위의 부등식의 각 변에 -14를 더하면

$-14+\log 1 < -14+0.02 < -14+\log 2$

$\log 10^{-14}+\log 1 < -14+0.02 < \log 10^{-14}+\log 2$

$\log(1\times 10^{-14}) < \log\left(\frac{1}{5}\right)^{20} < \log(2\times 10^{-14})$

$\therefore 1\times 10^{-14} < \left(\frac{1}{5}\right)^{20} < 2\times 10^{-14}$

즉 $\left(\frac{1}{5}\right)^{20}$의 소수점 아래 14째 자리의 숫자는 1이므로

$a=1$

$\therefore n+a=14+1=15$ 답 15

36

$\log A$의 정수 부분을 n, 소수 부분을 α로 놓으면

$\log A=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)

n, α가 이차방정식 $5x^2-13x+a=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=\frac{13}{5}$ ⋯⋯ ㉠

$n\alpha=\frac{a}{5}$ ⋯⋯ ㉡

이때 n은 정수이고 $0\le\alpha<1$이므로 ㉠에서

$n+\alpha=\frac{13}{5}=2+\frac{3}{5}$ $\quad\therefore n=2,\ \alpha=\frac{3}{5}$

이를 ㉡에 대입하면 $2\times\frac{3}{5}=\frac{a}{5}$ $\quad\therefore a=6$ 답 6

37

$\log N$의 정수 부분을 n, 소수 부분을 α로 놓으면

$\log N=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)

n, α가 이차방정식 $3x^2-8x+4=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=\frac{8}{3}$ $\quad\therefore \log N=\frac{8}{3}$

$\therefore \log\frac{1}{N}=\log N^{-1}=-\log N=-\frac{8}{3}=-2-\frac{2}{3}$

$=(-2-1)+\left(1-\frac{2}{3}\right)=-3+\frac{1}{3}$

따라서 $\log\frac{1}{N}$의 정수 부분은 -3, 소수 부분은 $\frac{1}{3}$이다.

답 정수 부분: -3, 소수 부분: $\frac{1}{3}$

다른 풀이

$3x^2-8x+4=0$에서 $(3x-2)(x-2)=0$

$\therefore x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

즉 $\log N$의 정수 부분과 소수 부분은 각각 2, $\frac{2}{3}$이므로

$\log N=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$

$\therefore \log\frac{1}{N}=\log N^{-1}=-\log N=-\frac{8}{3}=-2-\frac{2}{3}$

$=(-2-1)+\left(1-\frac{2}{3}\right)=-3+\frac{1}{3}$

따라서 $\log\frac{1}{N}$의 정수 부분은 -3, 소수 부분은 $\frac{1}{3}$이다.

38

$10<x<100$에서 $\log 10<\log x<\log 100$

$\therefore 1<\log x<2$ ⋯⋯ ㉠

$\log x^2$과 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분이 같으면 두 상용로그의 차는 정수이므로

$\log x^2-\log\sqrt{x}=2\log x-\frac{1}{2}\log x$

$=\frac{3}{2}\log x=$(정수)

㉠에서 $\frac{3}{2}<\frac{3}{2}\log x<3$

이때 $\frac{3}{2}\log x$는 정수이므로 $\frac{3}{2}\log x=2$

$\log x=\frac{4}{3}$ $\quad\therefore x=10^{\frac{4}{3}}=10\sqrt[3]{10}$ 답 $10\sqrt[3]{10}$

39

$\log x$와 $\log\frac{1}{x}$의 소수 부분이 같으면 두 상용로그의 차는 정수이므로

$\log x-\log\frac{1}{x}=\log x-(-\log x)$

$=2\log x=$(정수)

$\log x$의 정수 부분이 2이므로 $2\le\log x<3$

$\therefore 4\le 2\log x<6$

이때 $2\log x$는 정수이므로

$2\log x=4$ 또는 $2\log x=5$

즉 $\log x=2$ 또는 $\log x=\frac{5}{2}$이므로

$x=10^2$ 또는 $x=10^{\frac{5}{2}}$

$\therefore x=100$ 또는 $x=100\sqrt{10}$ 답 100, $100\sqrt{10}$

다른 풀이

$\log x$의 소수 부분을 α $(0\le\alpha<1)$라 하면

$\log x=2+\alpha$ $\quad\therefore \log\frac{1}{x}=-\log x=-2-\alpha$

(ⅰ) $a=0$일 때, $\log x=2$, $\log \frac{1}{x}=-2$이므로 두 상용로그의 소수 부분은 같다.

따라서 $\log x=2$이므로 $x=10^2=100$

(ⅱ) $0<a<1$일 때, $-1<-a<0$

$\therefore 0<1-a<1$

즉 $\log x$의 소수 부분은 a, $\log \frac{1}{x}$의 소수 부분은 $1-a$이므로 $a=1-a$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $\log x=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$이므로

$x=10^{\frac{5}{2}}=100\sqrt{10}$

40

$\log x$의 정수 부분이 1이므로 $1\le \log x<2$ ······㉠

$\log x$와 $\log \sqrt[3]{x}$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\log x+\log \sqrt[3]{x}=\log x+\frac{1}{3}\log x=\frac{4}{3}\log x=$(정수)

㉠에서 $\frac{4}{3}\le\frac{4}{3}\log x<\frac{8}{3}$

이때 $\frac{4}{3}\log x$는 정수이므로

$\frac{4}{3}\log x=2$, $\log x=\frac{3}{2}$

$\therefore x=10^{\frac{3}{2}}=10\sqrt{10}$

답 $10\sqrt{10}$

41

$1<x<100$에서 $\log 1<\log x<\log 100$

$\therefore 0<\log x<2$ ······㉠

$\log x$와 $\log \sqrt{x}$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\log x+\log \sqrt{x}=\log x+\frac{1}{2}\log x=\frac{3}{2}\log x=$(정수)

㉠에서 $0<\frac{3}{2}\log x<3$

이때 $\frac{3}{2}\log x$는 정수이므로

$\frac{3}{2}\log x=1$ 또는 $\frac{3}{2}\log x=2$

즉 $\log x=\frac{2}{3}$ 또는 $\log x=\frac{4}{3}$이므로

$x=10^{\frac{2}{3}}$ 또는 $x=10^{\frac{4}{3}}$

따라서 모든 x의 값의 곱은 $10^{\frac{2}{3}}\times10^{\frac{4}{3}}=10^2=100$

답 100

42

규모가 7.5인 지진의 에너지를 E_1, 규모가 5.5인 지진의 에너지를 E_2라 하면

$\log E_1=1.5\times7.5+11.4=22.65$ ······㉠

$\log E_2=1.5\times5.5+11.4=19.65$ ······㉡

㉠$-$㉡을 하면 $\log E_1-\log E_2=22.65-19.65=3$

$\log \frac{E_1}{E_2}=3 \qquad \therefore \frac{E_1}{E_2}=10^3=1000$

따라서 규모가 7.5인 지진의 에너지는 규모가 5.5인 지진의 에너지의 1000배이므로 $k=1000$

답 1000

43

음향 출력이 $\frac{1}{10^4}$ W일 때, 음향 파워 레벨이 80 dB이므로

$80=10\log\left(\frac{1}{k}\times\frac{1}{10^4}\right)$, $8=\log\left(\frac{1}{k}\times\frac{1}{10^4}\right)$

$10^8=\frac{1}{k}\times\frac{1}{10^4} \qquad \therefore \frac{1}{k}=10^8\times10^4=10^{12}$

따라서 음향 출력이 200 W일 때, 이 스피커의 음향 파워 레벨은

$$\begin{aligned}10\log(200\times10^{12})&=10\log(2\times10^{14})\\&=10(\log2+14\log10)\\&=10(0.3+14)\\&=143\ (\text{dB})\end{aligned}$$

답 143 dB

연습문제

p. 61~65

1

$\log_2 4+\log_2 8=\log_2 2^2+\log_2 2^3=2+3=5$

답 ⑤

2

$\log_3\frac{3}{4}+2\log_3\sqrt{24}-\log_3\frac{2}{3}$

$=\log_3\frac{3}{4}+\log_3 24-\log_3\frac{2}{3}$

$=\log_3\left(\frac{3}{4}\times24\div\frac{2}{3}\right)$

$=\log_3 27=\log_3 3^3=3$

답 ①

3

$\log_2 5\times\log_{25}16=\log_2 5\times\log_{5^2}2^4$

$=2\times\log_2 5\times\log_5 2$

$=2$

답 ③

4

밑의 조건에서

$x-1>0$, $x-1\neq1$이므로 $x>1$, $x\neq2$

$\therefore 1<x<2$ 또는 $x>2$ ······㉠

진수의 조건에서 $12+x-x^2>0$이므로

$x^2-x-12<0$, $(x+3)(x-4)<0$

$\therefore -3<x<4$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<2$ 또는 $2<x<4$

따라서 정수 x는 3이므로 그 개수는 1이다.

답 ①

5

$\log\dfrac{12}{5}=\log 12-\log 5$

$=\log(2^2\times3)-\log\dfrac{10}{2}$

$=2\log2+\log3-(\log10-\log2)$

$=2a+b-(1-a)$

$=3a+b-1$

답 ⑤

6

Step by Step

이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

↓

로그의 성질을 이용하여 구하는 식을 정리한다.

↓

식의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 두 근이 $\log_3 a$, $\log_3 b$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3 a+\log_3 b=6$, $\log_3 a\times\log_3 b=4$

$\therefore \log_a b+\log_b a$

$=\dfrac{\log_3 b}{\log_3 a}+\dfrac{\log_3 a}{\log_3 b}$

$=\dfrac{(\log_3 a)^2+(\log_3 b)^2}{\log_3 a\times\log_3 b}$

$=\dfrac{(\log_3 a+\log_3 b)^2-2\log_3 a\times\log_3 b}{\log_3 a\times\log_3 b}$

$=\dfrac{6^2-2\times4}{4}$

$=7$

답 7

7

$\log A$의 정수 부분이 2이므로 A는 정수 부분이 3자리인 수이다.

또 $\log A$의 소수 부분과 $\log 1.47$의 소수 부분이 같으므로 A의 숫자 배열은 1.47의 숫자 배열과 같다.

$\therefore A=147$

답 147

다른 풀이

$\log A=2.1673$

$=2+0.1673$

$=\log100+\log1.47$

$=\log(100\times1.47)$

$=\log147$

$\therefore A=147$

8

상용로그표에서

$\log3.92=0.5933$, $\log3.7=0.5682$이므로

$\log(0.392\times37^2)$

$=\log0.392+2\log37$

$=\log(3.92\times10^{-1})+2\log(3.7\times10)$

$=-1+\log3.92+2(1+\log3.7)$

$=-1+0.5933+2(1+0.5682)$

$=2.7297$

답 ④

9

밑의 조건에서

$x-3>0$, $x-3\neq1$이므로 $x>3$, $x\neq4$

$\therefore 3<x<4$ 또는 $x>4$ ······㉠ ······ ❶

진수의 조건에서 $x(2n-x)>0$이므로

$x(x-2n)<0$ $\quad\therefore 0<x<2n$ ······㉡ ······ ❷

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<x<4$ 또는 $4<x<2n$ ······ ❸

즉 정수 x의 값은 $5, 6, 7, \cdots, 2n-1$이므로 그 개수는

$(2n-1)-5+1=2n-5$

따라서 $2n-5=45$이므로

$n=25$ ······ ❹

답 25

채점 기준	비율
❶ 밑의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%
❷ 진수의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%
❸ ❶, ❷의 공통 범위를 구할 수 있다.	30%
❹ n의 값을 구할 수 있다.	30%

10

ㄱ. 실수 a에 대하여 $a^2\geq 0$이므로 $a^2+2\geq 2$

$\therefore$ (밑)>0, (밑)$\neq 1$

$1+b+b^2=\left(b+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로

(진수)>0

즉 로그를 정의할 수 있다.

ㄴ. $b=1$일 때, 진수가 $|b-1|=0$이므로 로그를 정의할 수 없다.

ㄷ. $a=0$일 때, 밑이 $|a|+1=1$이므로 로그를 정의할 수 없다.

따라서 로그를 정의할 수 있는 것은 ㄱ이다.

답 ①

11

$\log_a b=4\log_b a$에서 $\log_a b=\frac{4}{\log_a b}$

$\therefore (\log_a b)^2=4$

이때 a, b가 1보다 큰 서로 다른 양수이므로

$\log_a b=2 \qquad \therefore b=a^2$

$$\begin{aligned}\therefore \log_a\sqrt{b}+\log_{a^2}\sqrt[3]{b}&=\log_a\sqrt{a^2}+\log_{a^2}\sqrt[3]{a^2}\\&=\log_a a+\log_{a^2}a^{\frac{2}{3}}\\&=1+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\\&=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

답 ④

12

ㄱ. $2^a=5^b$에서 $2^{\frac{a}{b}}=5$이므로 로그의 정의에 의하여

$\frac{a}{b}=\log_2 5$

ㄴ. $b=\frac{1}{3}$이면 $2^a=5^b$에서 $2^a=5^{\frac{1}{3}}$이므로 로그의 정의에 의하여

$a=\log_2 5^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log_2 5=\log_{2^3}5=\log_8 5$

ㄷ. $2^a=5^b=k\ (k>1)$라 하면 로그의 정의에 의하여

$a=\log_2 k$, $b=\log_5 k$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}&=\frac{1}{\log_2 k}+\frac{1}{\log_5 k}\\&=\log_k 2+\log_k 5\\&=\log_k(2\times 5)\\&=\log_k 10\end{aligned}$$

이때 $k=10$이면 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_{10}10=1$이므로 유리수이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

13

$\log_a(\log_{\sqrt[4]{2}}5)+\log_a(\log_5 7)+\log_a(\log_7 16)=4$에서

$\log_a(\log_{2^{\frac{1}{4}}}5\times\log_5 7\times\log_7 2^4)=4$

$\log_a(4\log_2 5\times\log_5 7\times 4\log_7 2)=4$

$\log_a 16=4$, $a^4=16$

$\therefore a=2\ (\because a>0, a\neq 1)$

답 2

14

$\log_2 a+\log_2 b=-1$에서

$\frac{1}{\log_a 2}+\frac{1}{\log_b 2}=-1$

$\therefore \frac{\log_a 2+\log_b 2}{\log_a 2\times\log_b 2}=-1$

이때 $\log_a 2+\log_b 2=2$이므로

$\frac{2}{\log_a 2\times\log_b 2}=-1 \qquad \therefore \log_a 2\times\log_b 2=-2$

$$\begin{aligned}\therefore &(\log_a 2)^2+(\log_b 2)^2\\&=(\log_a 2+\log_b 2)^2-2\log_a 2\times\log_b 2\\&=2^2-2\times(-2)\\&=8\end{aligned}$$

답 ③

15

$$\begin{aligned}a&=\log 3560=\log(3.56\times 10^3)\\&=\log 3.56+\log 10^3\\&=3+0.5514\\&=3.5514\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log b&=-1.4486=-1-0.4486\\&=(-1-1)+(1-0.4486)\\&=-2+0.5514\end{aligned}$$

$\log b$의 정수 부분이 -2이므로 b는 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

또 $\log b$의 소수 부분과 $\log 3.56$의 소수 부분이 같으므로 b의 숫자 배열은 3.56의 숫자 배열과 같다.

$\therefore b=0.0356$

$\therefore a+b=3.5514+0.0356=3.5870$

답 ⑤

16

$\log 500 = \log(5\times 10^2) = 2+\log 5$이므로

$n=2,\ a=\log 5$

$\therefore\ n+10^a = 2+10^{\log 5}$

$= 2+5 = 7$

답 ②

17

$\log 4N$의 정수 부분과 $\log N^2$의 정수 부분이 같으려면 $4N$의 자릿수와 N^2의 자릿수가 같아야 한다.

(i) $1 \le 4N < 10$이고 $1 \le N^2 < 10$일 때

$N=1,\ 2$

(ii) $10 \le 4N < 100$이고 $10 \le N^2 < 100$일 때

$N=4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$

(iii) $100 \le 4N < 1000$이고 $100 \le N^2 < 1000$일 때

$N=25,\ 26,\ 27,\ 28,\ 29,\ 30,\ 31$

(i)~(iii)에서 조건을 만족시키는 N의 값은

$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 9,\ 25,\ 26,\ 27,\ \cdots,\ 31$

따라서 자연수 N의 개수는 15이다.

답 ①

참고 **17**에서 $4N$과 N^2의 값의 범위를

$100 \le 4N < 1000$

$100 \le N^2 < 1000$

까지만 계산한 이유를 알아보자.

$1000 \le 4N < 10000$일 때,

$250 \le N < 2500$이므로

$62500 \le N^2 < 6250000$ ······㉠

㉠은 N^2의 값의 범위 $1000 \le N^2 < 10000$을 만족시키지 않는다.

18

$xyz = 5^a\times 5^b\times 5^c = 5^{a+b+c} = 5^0 = 1$이므로

$yz=\frac{1}{x},\ zx=\frac{1}{y},\ xy=\frac{1}{z}$

$\therefore\ \log_x yz - \log_y zx + \log_z xy$

$= \log_x \frac{1}{x} - \log_y \frac{1}{y} + \log_z \frac{1}{z}$

$= \log_x x^{-1} - \log_y y^{-1} + \log_z z^{-1}$

$= -1-(-1)+(-1)$

$= -1$

답 ②

19

$\log 432 = ap+bq+c$

$= a\log\frac{9}{4} + b\log\frac{4}{5} + c$

$= \log\left(\frac{9}{4}\right)^a + \log\left(\frac{4}{5}\right)^b + \log 10^c$

$= \log\left(\frac{9^a}{4^a}\times\frac{4^b}{5^b}\times 10^c\right)$

$= \log\left(\frac{3^{2a}}{2^{2a}}\times\frac{2^{2b}}{5^b}\times 2^c\times 5^c\right)$

$= \log(2^{2b-2a+c}\times 3^{2a}\times 5^{c-b})$

$\therefore\ 2^{2b-2a+c}\times 3^{2a}\times 5^{c-b} = 432 = 2^4\times 3^3$

즉 $2b-2a+c=4,\ 2a=3,\ c-b=0$이므로

$a=\frac{3}{2},\ b=\frac{7}{3},\ c=\frac{7}{3}$

$\therefore\ 6abc = 6\times\frac{3}{2}\times\frac{7}{3}\times\frac{7}{3} = 49$

답 49

20

4^m이 10자리의 정수이므로 $\log 4^m$의 정수 부분이 9이다.

즉 $9 \le \log 4^m < 10$이므로 $9 \le m\log 4 < 10$

$\frac{9}{\log 4} \le m < \frac{10}{\log 4},\ \frac{9}{2\log 2} \le m < \frac{10}{2\log 2}$

$\frac{9}{2\times 0.3010} \le m < \frac{10}{2\times 0.3010},\ \frac{9}{0.602} \le m < \frac{5}{0.301}$

$\therefore\ 14.95\cdots \le m < 16.61\cdots$

따라서 자연수 m의 값은 15, 16이므로 그 합은

$15+16=31$

답 31

21

신호의 주파수 대역폭이 A Hz, 신호잡음전력비가 k이면 전송할 수 있는 신호의 최대전송속도 C bps는

$C = A\log_2(1+k)$ ······㉠

신호의 주파수 대역폭이 $2A$ Hz, 신호잡음전력비가 $12k$이면 전송할 수 있는 신호의 최대전송속도는 $4C$ bps가 되므로

$4C = 2A\log_2(1+12k)$

㉠을 위의 식에 대입하면

$4\{A\log_2(1+k)\} = 2A\log_2(1+12k)$

$2\log_2(1+k) = \log_2(1+12k)$

$\log_2(1+k)^2 = \log_2(1+12k)$

즉 $(1+k)^2 = 1+12k$이므로

$k^2+2k+1 = 1+12k,\ k^2-10k=0$

$k(k-10)=0 \qquad \therefore\ k=10\ (\because k>0)$

답 10

Level Up 연습문제

p. 66

1

$$\frac{1}{4}\log 2^{2n}+\frac{1}{2}\log 5^{n}=\frac{n}{2}\log 2+\frac{n}{2}\log 5$$
$$=\frac{n}{2}(\log 2+\log 5)$$
$$=\frac{n}{2}\log(2\times 5)$$
$$=\frac{n}{2}\log 10=\frac{n}{2}$$

이때 $\frac{n}{2}$이 정수가 되려면 n은 2의 배수이어야 한다.

따라서 50 이하의 자연수 중에서 2의 배수는 2, 4, 6, …, 50이므로 n의 개수는 25이다.

답 ②

2

(가)에서 $\sqrt[3]{a}=\sqrt{b}=\sqrt[4]{c}=k$라 하면

$a=k^3,\ b=k^2,\ c=k^4$ ……㉠

㉠을 (나)의 등식의 좌변에 대입하면

$$\log_8 a+\log_4 b+\log_2 c=\log_8 k^3+\log_4 k^2+\log_2 k^4$$
$$=\log_{2^3} k^3+\log_{2^2} k^2+\log_2 k^4$$
$$=\log_2 k+\log_2 k+4\log_2 k$$
$$=6\log_2 k$$

즉 $6\log_2 k=2$이므로 $\log_2 k=\frac{1}{3}$

$$\therefore \log_2 abc=\log_2(k^3\times k^2\times k^4)=\log_2 k^9$$
$$=9\log_2 k=9\times\frac{1}{3}=3$$

답 ④

3

빛의 투과도가 $\frac{1}{4}$, 빛 흡수 물질량의 농도가 c_0 mol/L일 때의 이 물질의 두께가 D_1 cm이므로

$\log\frac{1}{4}=-kc_0D_1$ ……㉠

빛의 투과도가 $\frac{1}{2}$, 빛 흡수 물질량의 농도가 $3c_0$ mol/L일 때의 이 물질의 두께가 D_2 cm이므로

$\log\frac{1}{2}=-3kc_0D_2$ ……㉡

㉠에서 $\log\left(\frac{1}{2}\right)^2=-kc_0D_1$이므로 $2\log\frac{1}{2}=-kc_0D_1$

㉡을 위의 식에 대입하면 $2(-3kc_0D_2)=-kc_0D_1$

$-6kc_0D_2=-kc_0D_1 \qquad \therefore \frac{D_1}{D_2}=\frac{-6kc_0}{-kc_0}=6$

답 6

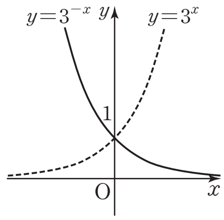
3 지수함수

확인 문제

p. 70~97

01

지수함수 $y=3^{-x}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $y=3^{-x}$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

ㄴ. 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

ㄷ. 그래프는 점 $(0, 1)$을 지난다.

ㄹ. 함수 $y=3^x$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.

ㅁ. $f(x)=3^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x$이므로

밑 $\frac{1}{3}$은 $0<\frac{1}{3}<1$이다.

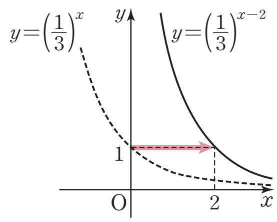
즉 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

02

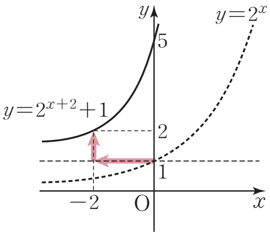
(1) 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 정의역은 실수 전체의 집합,

치역은 $\{y\,|\,y>0\}$, 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

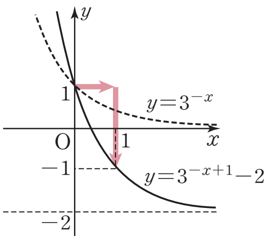
(2) 함수 $y=2^{x+2}+1$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 정의역은 실수 전체의 집합,

치역은 $\{y|y>1\}$, 점근선의 방정식은 $y=1$이다.

(3) 함수 $y=3^{-x+1}-2=3^{-(x-1)}-2$의 그래프는 함수 $y=3^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



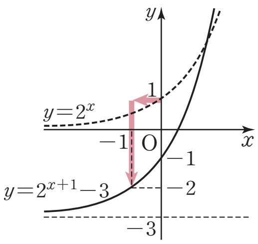
따라서 정의역은 실수 전체의 집합,

치역은 $\{y|y>-2\}$, 점근선의 방정식은 $y=-2$이다.

답 풀이 참조

03

ㄱ. 함수 $y=2^{x+1}-3$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



함수 $y=2^{x+1}-3$의 그래프에서

ㄴ. x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

ㄷ. 그래프의 점근선의 방정식은 $y=-3$이다.

ㄹ. 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y|y>-3\}$이다.

ㅁ. $x=-1$일 때, $y=2^{-1+1}-3=1-3=-2$

즉 그래프는 점 $(-1, -2)$를 지난다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

04

$y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=2^{x-m}$ $\quad\therefore y=2^{x-m}+n$

이 식이 $y=16\times2^x+2=2^{x+4}+2$와 같으므로

$m=-4, n=2$

답 $m=-4, n=2$

05

$y=5^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+1=5^{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$ $\quad\therefore y=5^{2x-1}-1$

$y=5^{2x-1}-1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=5^{2x-1}-1$ $\quad\therefore y=-5^{2x-1}+1=-\frac{1}{5}\times5^{2x}+1$

이 식이 $y=a\times5^{2x}+b$와 같으므로

$a=-\frac{1}{5}, b=1$

답 $a=-\frac{1}{5}, b=1$

06

함수 $f(x)=2^{x+3}-1$의 그래프의 점근선이 직선 $y=-1$이므로 $k=-1$

$\therefore f(k)=f(-1)=2^{-1+3}-1$

$=2^2-1=3$

답 3

07

함수 $y=a\times3^x+b$의 그래프의 점근선의 방정식이 $y=b$이므로 $b=2$

즉 함수 $y=a\times3^x+2$의 그래프가 점 $(7, 5)$를 지나므로

$5=a\times3^7+2$ $\quad\therefore a=\frac{3}{3^7}=\frac{1}{3^6}=3^{-6}$

$\therefore \log_3 a+b=\log_3 3^{-6}+2$

$=-6+2=-4$

답 -4

08

(1) $\sqrt[3]{9}=(3^2)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{27}=(3^3)^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{4}}$, $3^{0.5}=3^{\frac{1}{2}}$

이때 지수함수 $y=3^x$은 밑 3이 $3>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

즉 지수가 큰 수가 크다.

지수의 크기를 비교하면 $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$이므로

$3^{0.5}<\sqrt[3]{9}<\sqrt[4]{27}$

따라서 작은 것부터 차례로 나열하면

$3^{0.5}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{27}$

(2) $\left(\frac{1}{100}\right)^{-2}=(0.1^2)^{-2}=0.1^{-4}$,

$\sqrt{10}=(0.1^{-1})^{\frac{1}{2}}=0.1^{-\frac{1}{2}}$, $0.1^{-0.1}=0.1^{-\frac{1}{10}}$

이때 지수함수 $y=0.1^x$은 밑 0.1이 $0<0.1<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

즉 지수가 작은 수가 크다.

지수의 크기를 비교하면 $-4<-\frac{1}{2}<-\frac{1}{10}$이므로

$0.1^{-0.1}<\sqrt{10}<\left(\frac{1}{100}\right)^{-2}$

따라서 작은 것부터 차례로 나열하면

$0.1^{-0.1}$, $\sqrt{10}$, $\left(\frac{1}{100}\right)^{-2}$

답 (1) $3^{0.5}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{27}$ (2) $0.1^{-0.1}$, $\sqrt{10}$, $\left(\frac{1}{100}\right)^{-2}$

09

$g(29)=k$라 하면 $f(k)=29$이므로

$2^{k+1}-3=29$, $2^{k+1}=32=2^5$

즉 $k+1=5$이므로 $k=4$

$\therefore g(29)=4$

답 4

10

$f(x)=a^{x-1}$이라 하면

$f^{-1}(9)=3$, $f^{-1}(b)=-1$이므로

$f(3)=9$, $f(-1)=b$

$f(3)=9$에서 $a^{3-1}=9$이므로

$a^2=9 \qquad \therefore a=3\ (\because a>0)$

즉 $f(x)=3^{x-1}$이고 $f(-1)=b$이므로

$3^{-1-1}=b \qquad \therefore b=\frac{1}{9}$

$\therefore 9ab=9\times3\times\frac{1}{9}=3$

답 3

11

$x=-1$에서의 함숫값은 $p=2^{-1}=\frac{1}{2}$

$x=q$에서의 함숫값이 32이므로

$2^q=32=2^5 \qquad \therefore q=5$

$\therefore p+q=\frac{1}{2}+5=\frac{11}{2}$

답 $\frac{11}{2}$

12

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(a,1)$, $(b,4)$라 하면

$1=\frac{2^a}{3}$, $4=\frac{2^b}{3}$이므로 $2^a=3$, $2^b=12$

즉 $2^{b-a}=\frac{2^b}{2^a}=\frac{12}{3}=4=2^2$이므로 $b-a=2$

따라서 직선 AB의 기울기는

$\frac{4-1}{b-a}=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

다른 풀이

점 A의 y좌표가 1이므로 점 A의 x좌표는

$1=\frac{2^x}{3}$에서 $2^x=3 \qquad \therefore x=\log_2 3$, 즉 $A(\log_2 3, 1)$

점 B의 y좌표가 4이므로 점 B의 x좌표는

$4=\frac{2^x}{3}$에서 $2^x=12$

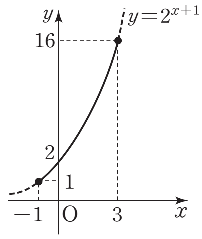
$\therefore x=\log_2 12$, 즉 $B(\log_2 12, 4)$

따라서 직선 AB의 기울기는

$$\frac{4-1}{\log_2 12-\log_2 3}=\frac{3}{\log_2\frac{12}{3}}=\frac{3}{\log_2 4}=\frac{3}{\log_2 2^2}=\frac{3}{2}$$

13

(1) $y=2^{x+1}=2\times2^x$



밑 2는 $2>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $-1\le x\le3$에서 함수 $y=2^{x+1}$은 $x=-1$일 때 최소이고, 최솟값은

$2^{-1+1}=2^0=1$

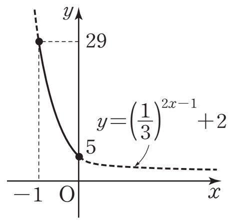
$x=3$일 때 최대이고, 최댓값은

$2^{3+1}=2^4=16$

(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}+2$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^x+2$

$=3\times\left(\frac{1}{9}\right)^x+2$



밑 $\frac{1}{9}$은 $0<\frac{1}{9}<1$이므로

x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 $-1\le x\le0$에서 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}+2$는

$x=-1$일 때 최대이고, 최댓값은

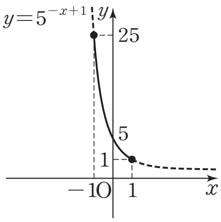
$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2-1}+2=3^3+2=29$

$x=0$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+2=3+2=5$

(3) $y=5^{-x+1}=5\times(5^{-1})^x$

$=5\times\left(\frac{1}{5}\right)^x$



밑 $\frac{1}{5}$은 $0<\frac{1}{5}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 $-1\le x\le 1$에서 함수 $y=5^{-x+1}$은

$x=-1$일 때 최대이고, 최댓값은

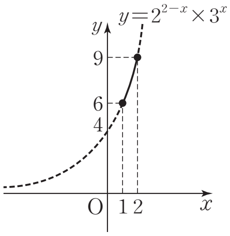
$5^{-(-1)+1}=5^2=25$

$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$5^{-1+1}=5^0=1$

(4) $y=2^{2-x}\times 3^x=2^2\times 2^{-x}\times 3^x$

$=4\times\left(\frac{3}{2}\right)^x$



밑 $\frac{3}{2}$은 $\frac{3}{2}>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $1\le x\le 2$에서 함수 $y=2^{2-x}\times 3^x$은

$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$2^{2-1}\times 3^1=6$

$x=2$일 때 최대이고, 최댓값은

$2^{2-2}\times 3^2=9$

답 (1) 최댓값: 16, 최솟값: 1 (2) 최댓값: 29, 최솟값: 5
(3) 최댓값: 25, 최솟값: 1 (4) 최댓값: 9, 최솟값: 6

14

$y=3^{x-1}+a=3^{-1}\times 3^x+a=\frac{1}{3}\times 3^x+a$

밑 3은 $3>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

즉 $1\le x\le 3$에서 함수 $y=3^{x-1}+a$는 $x=3$일 때 최대이고, 최댓값은 $3^2+a=a+9$이므로

$a+9=7$ $\therefore a=-2$

따라서 함수 $y=3^{x-1}-2$는 $x=1$일 때 최소이고, 최솟값 b는 $b=3^0-2=1-2=-1$

$\therefore a+b=-2+(-1)=-3$

답 -3

15

$f(x)=x^2-2x+4$로 놓으면 $y=2^{x^2-2x+4}=2^{f(x)}$

$f(x)=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$이므로

$0\le x\le 3$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=3$, 최댓값은 $f(3)=7$

$\therefore 3\le f(x)\le 7$

이때 $y=2^{f(x)}$에서 밑 2는 $2>1$이므로 함수 $y=2^{f(x)}$은 $f(x)$가 최대일 때 y의 값도 최대가 되고, $f(x)$가 최소일 때 y의 값도 최소가 된다.

따라서 $3\le f(x)\le 7$에서 함수 $y=2^{f(x)}$은

$f(x)=3$일 때 최소이고, 최솟값은 $2^3=8$

$f(x)=7$일 때 최대이고, 최댓값은 $2^7=128$

답 최댓값: 128, 최솟값: 8

16

$f(x)=-x^2+4x+a$로 놓으면

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x+a}=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$

$f(x)=-x^2+4x+a=-(x-2)^2+a+4$이므로

$f(x)$의 최댓값은 $a+4$이다.

이때 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$에서 밑 $\frac{1}{2}$은 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$은 $f(x)$가 최대일 때 y의 값은 최소가 된다.

따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$은 $f(x)=a+4$일 때 최소이고,

최솟값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{a+4}$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{a+4}=16$, $2^{-a-4}=2^4$

$-a-4=4$ $\therefore a=-8$

답 -8

17

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x-2}$

$h(x)=x^2-2x-2$로 놓으면

$(g\circ f)(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{h(x)}$

$h(x)=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$이므로

$-1\le x\le 2$에서 $h(x)$의 최솟값은 $h(1)=-3$, 최댓값은 $h(-1)=1$

$\therefore -3\le h(x)\le 1$

이때 $(g\circ f)(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{h(x)}$에서 밑 $\frac{1}{3}$은 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 함수 $(g\circ f)(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{h(x)}$은 $h(x)$가 최대일 때 $(g\circ f)(x)$의 값은 최소가 된다.

따라서 $-3\le h(x)\le 1$에서 함수 $(g\circ f)(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{h(x)}$은 $h(x)=1$, 즉 $x=-1$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{3}$이므로 $a=-1$, $b=\frac{1}{3}$

$\therefore ab=-1\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

답 $-\frac{1}{3}$

18

(1) $y=9^x-6\times3^x+5$

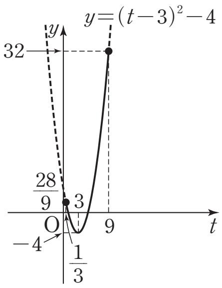
$=(3^x)^2-6\times3^x+5$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$-1\le x\le 2$에서

$3^{-1}\le 3^x\le 3^2$

$\therefore \frac{1}{3}\le t\le 9$



이때 주어진 함수는

$y=t^2-6t+5=(t-3)^2-4$

따라서 $\frac{1}{3}\le t\le 9$에서

함수 $y=(t-3)^2-4$는

$t=9$일 때 최대이고, 최댓값은

$(9-3)^2-4=32$

$t=3$일 때 최소이고, 최솟값은

$(3-3)^2-4=-4$

(2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+3$

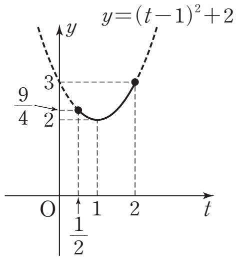
$=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+3$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$-1\le x\le 1$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^1\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$\therefore \frac{1}{2}\le t\le 2$



이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$

따라서 $\frac{1}{2}\le t\le 2$에서 함수 $y=(t-1)^2+2$는

$t=2$일 때 최대이고, 최댓값은

$(2-1)^2+2=3$

$t=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$(1-1)^2+2=2$

답 (1) 최댓값: 32, 최솟값: -4
(2) 최댓값: 3, 최솟값: 2

19

$y=2^{2x}-2^{x+1}-a+2=(2^x)^2-2\times2^x-a+2$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $-2\le x\le 1$에서

$2^{-2}\le 2^x\le 2^1 \qquad \therefore \frac{1}{4}\le t\le 2$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t-a+2=(t-1)^2-a+1$

따라서 $\frac{1}{4}\le t\le 2$에서 함수 $y=(t-1)^2-a+1$은

$t=2$일 때 최대이고, 최댓값은

$(2-1)^2-a+1=-a+2$이므로

$-a+2=5 \qquad \therefore a=-3$

이때의 x의 값은 $t=2^x=2$에서 $x=1 \qquad \therefore b=1$

$\therefore b-a=1-(-3)=4$

답 4

20

$3x+2y=4$에서 $2y=-3x+4$이므로

$4^y=2^{2y}=2^{-3x+4}$

$8^x>0$, $2^{-3x+4}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$8^x+4^y=2^{3x}+2^{-3x+4}$

$\ge 2\sqrt{2^{3x}\times2^{-3x+4}}$

$=2\sqrt{2^4}=8$

$\left(\text{단, 등호는 } 2^{3x}=2^{-3x+4}\text{, 즉 } x=\frac{2}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 8^x+4^y의 최솟값은 8이다.

답 8

21

$2^x+\frac{9}{2^x-1}=2^x-1+\frac{9}{2^x-1}+1$

이때 양의 실수 x에 대하여 $2^x>1$, 즉 $2^x-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2^x-1+\frac{9}{2^x-1}+1\ge 2\sqrt{(2^x-1)\times\frac{9}{2^x-1}}+1$

$=2\sqrt{9}+1=7$

이때 등호는 $2^x-1=\frac{9}{2^x-1}$일 때 성립하므로

$(2^x-1)^2=9$, $2^x-1=3\ (\because 2^x-1>0)$

$2^x=4=2^2 \qquad \therefore x=2$

따라서 $2^x+\frac{9}{2^x-1}$는 $x=2$에서 최솟값 7을 가지므로

$a=2$, $b=7 \qquad \therefore a+b=2+7=9$

답 9

22

$3^x+3^{-x}=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-6t+1=(t-3)^2-8$

이때 $3^x>0$, $3^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=3^x+3^{-x}\geq 2\sqrt{3^x\times 3^{-x}}=2$

(단, 등호는 $3^x=3^{-x}$, 즉 $x=0$일 때 성립)

$\therefore t\geq 2$

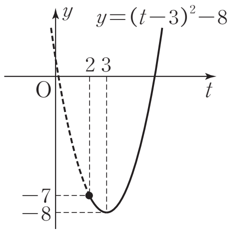
따라서 $t\geq 2$에서

함수 $y=(t-3)^2-8$은

$t=3$일 때 최소이고,

최솟값은

$(3-3)^2-8=-8$



답 -8

23

$y=9^x+4\times 3^x+\dfrac{4}{3^x}+\dfrac{1}{9^x}$

$=(3^x)^2+(3^{-x})^2+4(3^x+3^{-x})$

$=(3^x+3^{-x})^2-2+4(3^x+3^{-x})$

$3^x+3^{-x}=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2+4t-2=(t+2)^2-6$

이때 $3^x>0$, $3^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=3^x+3^{-x}\geq 2\sqrt{3^x\times 3^{-x}}=2$

(단, 등호는 $3^x=3^{-x}$, 즉 $x=0$일 때 성립)

$\therefore t\geq 2$

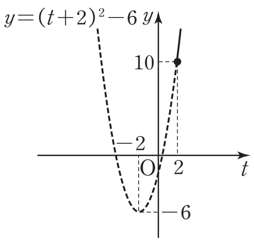
따라서 $t\geq 2$에서

함수 $y=(t+2)^2-6$은

$t=2$일 때 최소이고,

최솟값은

$(2+2)^2-6=10$



답 10

24

(1) $9^{x-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1+2x}$에서 $3^{2x-2}=3^{-2x-1}$이므로

$2x-2=-2x-1$, $4x=1$ $\qquad\therefore x=\dfrac{1}{4}$

(2) $32\times 2^{5x+3}=2^5\times 2^{5x+3}=2^{5x+8}$이므로

$2^{x^2+3x}=32\times 2^{5x+3}$에서 $2^{x^2+3x}=2^{5x+8}$

$x^2+3x=5x+8$, $x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$ $\qquad\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

(3) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x=\sqrt[3]{4}\times 2^{x+1}$에서 $2^{-2x}=2^{x+\frac{5}{3}}$이므로

$-2x=x+\dfrac{5}{3}$, $3x=-\dfrac{5}{3}$ $\qquad\therefore x=-\dfrac{5}{9}$

(4) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x^2}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3x+1}$에서 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x^2}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3x-1}$이므로

$2x^2=3x-1$, $2x^2-3x+1=0$

$(2x-1)(x-1)=0$ $\qquad\therefore x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=1$

답 (1) $x=\dfrac{1}{4}$ (2) $x=-2$ 또는 $x=4$

(3) $x=-\dfrac{5}{9}$ (4) $x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=1$

25

$10^x=\left(\dfrac{1}{1000}\right)^{1-x}$에서 $10^x=(10^{-3})^{1-x}$

$10^x=10^{3x-3}$, $x=3x-3$

$2x=3$ $\qquad\therefore x=\dfrac{3}{2}$, 즉 $\alpha=\dfrac{3}{2}$

$\therefore 4^{\alpha}+27^{\frac{1}{\alpha}}=4^{\frac{3}{2}}+27^{\frac{2}{3}}=(2^2)^{\frac{3}{2}}+(3^3)^{\frac{2}{3}}$

$=2^3+3^2=8+9=17$

답 17

26

(1) $9^x-8\times 3^x-9=0$에서 $(3^x)^2-8\times 3^x-9=0$

$3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $t^2-8t-9=0$

$(t+1)(t-9)=0$ $\qquad\therefore t=-1$ 또는 $t=9$

그런데 $t>0$이므로 $t=9$

따라서 $3^x=9=3^2$이므로 $x=2$

(2) $4^{x+1}-3\times 2^{x+1}-4=0$에서 $4\times(2^x)^2-6\times 2^x-4=0$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $4t^2-6t-4=0$

$2(2t^2-3t-2)=0$, $2(2t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $t=2$

그런데 $t>0$이므로 $t=2$

따라서 $2^x=2$이므로 $x=1$

(3) $2^x+2\times 2^{-x}=3$에서 $2^x+2\times\dfrac{1}{2^x}=3$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $t+\dfrac{2}{t}=3$

양변에 t를 곱하면 $t^2+2=3t$

$t^2-3t+2=0$, $(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

따라서 $2^x=1=2^0$ 또는 $2^x=2$이므로

$x=0$ 또는 $x=1$

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-8=0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-8=0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-2t-8=0$

$(t+2)(t-4)=0$

$\therefore\ t=-2$ 또는 $t=4$

그런데 $t>0$이므로 $t=4$

따라서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=4=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$이므로 $x=-2$

답 (1) $x=2$ (2) $x=1$ (3) $x=0$ 또는 $x=1$ (4) $x=-2$

27

$x=-1$을 $2^{2x+1}-a\times2^x+8=0$에 대입하면

$2^{-1}-a\times2^{-1}+8=0,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}a+8=0$

$-\frac{1}{2}a=-\frac{17}{2}\qquad\therefore\ a=17$

즉 방정식 $2^{2x+1}-17\times2^x+8=0$에서

$2\times(2^x)^2-17\times2^x+8=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $2t^2-17t+8=0$

$(2t-1)(t-8)=0\qquad\therefore\ t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=8$

따라서 $2^x=\frac{1}{2}=2^{-1}$ 또는 $2^x=8=2^3$이므로

$x=-1$ 또는 $x=3\qquad\therefore\ b=3$

답 $a=17,\ b=3$

28

$9^x-2\times3^{x+1}+1=0$에서 $(3^x)^2-6\times3^x+1=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-6t+1=0$ ······㉠

주어진 방정식의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 ㉠의 두 근은 $3^\alpha,\ 3^\beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3^\alpha\times3^\beta=1$이므로 $3^{\alpha+\beta}=3^0$

$\therefore\ \alpha+\beta=0$

답 0

29

$2\times4^x-9\times2^x+k=0$에서 $2\times(2^x)^2-9\times2^x+k=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $2t^2-9t+k=0$ ······㉠

주어진 방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 ㉠의 두 근은 $2^\alpha,\ 2^\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2^\alpha\times2^\beta=\frac{k}{2}\qquad\therefore\ 2^{\alpha+\beta}=\frac{k}{2}$

이때 $\alpha+\beta=2$이므로 $2^2=\frac{k}{2}\qquad\therefore\ k=8$

답 8

30

$9^x-3^{x+2}+8=0$에서 $(3^x)^2-9\times3^x+8=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-9t+8=0$ ······㉠

주어진 방정식의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 ㉠의 두 근은 $3^\alpha,\ 3^\beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3^\alpha+3^\beta=9,\ 3^\alpha\times3^\beta=8$

$\therefore\ 3^{2\alpha}+3^{2\beta}=(3^\alpha+3^\beta)^2-2\times3^\alpha\times3^\beta$

$=9^2-2\times8$

$=65$

답 65

31

(1) 지수가 같으므로 밑이 같거나 지수가 0이어야 한다.

(i) 밑이 같은 경우

$x+2=6$에서 $x=4$

(ii) 지수가 0인 경우

$x=0$이면 $2^0=6^0=1$이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 방정식의 해는 $x=0$ 또는 $x=4$

(2) 밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1이어야 한다.

(i) 지수가 같은 경우

$x=2x-3$에서 $x=3$

(ii) 밑이 1인 경우

$x-1=1$, 즉 $x=2$이면 $1^2=1^1=1$이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 방정식의 해는 $x=2$ 또는 $x=3$

(3) 밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1이어야 한다.

(i) 지수가 같은 경우

$x^2=3x+4$에서 $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=4$

그런데 $x>3$이므로 $x=4$

(ii) 밑이 1인 경우

$x-3=1$, 즉 $x=4$이면 $1^{16}=1^{16}=1$이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 방정식의 해는 $x=4$

답 (1) $x=0$ 또는 $x=4$ (2) $x=2$ 또는 $x=3$ (3) $x=4$

32

밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1이어야 한다.

(i) 지수가 같은 경우

$x+2=x^2$에서 $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

그런데 $x>0$이므로 $x=2$

(ⅱ) 밑이 1인 경우

$x=1$이면 $1^3=1^1=1$이므로 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 방정식의 해는 $x=1$ 또는 $x=2$이므로 모든 근의 합은 $1+2=3$ 답 3

33

$\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2^x-2^y=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-2$ ……㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $2^x-2^{x-2}=6$

$2^x-\frac{1}{4}\times 2^x=6$, $\frac{3}{4}\times 2^x=6$

$2^x=8$ $\quad\therefore x=3$

$x=3$을 ㉢에 대입하면 $y=3-2=1$

$\therefore 2^x+2^y=2^3+2^1=8+2=10$ 답 10

34

$\begin{cases} 5^x+5^y=30 \\ 5^{x+y-1}=25 \end{cases}$에서 $\begin{cases} 5^x+5^y=30 \\ \frac{1}{5}\times 5^x 5^y=25 \end{cases}$

$5^x=X$, $5^y=Y$ $(X>0, Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases} X+Y=30 \\ \frac{1}{5}XY=25 \end{cases}$ $\quad\therefore \begin{cases} X+Y=30 & \cdots\cdots ㉠ \\ XY=125 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $Y=30-X$ ……㉢

이때 $Y>0$이므로 $30-X>0$ $\quad\therefore X<30$

$\therefore 0<X<30$

㉢을 ㉡에 대입하면 $X(30-X)=125$

$X^2-30X+125=0$, $(X-5)(X-25)=0$

$\therefore X=5$ 또는 $X=25$

(ⅰ) $X=5$일 때

$X=5$를 ㉢에 대입하면 $Y=30-5=25$

즉 $5^x=5$, $5^y=25$이므로 $x=1$, $y=2$

(ⅱ) $X=25$일 때

$X=25$를 ㉢에 대입하면 $Y=30-25=5$

즉 $5^x=25$, $5^y=5$이므로 $x=2$, $y=1$

이때 $a<b$이므로 $a=1$, $b=2$

$\therefore 2a+3b=2\times 1+3\times 2=8$ 답 8

참고 **X의 값의 범위**

$X+Y=30$이고 $Y>0$이므로 $30-X>0$ $\quad\therefore X<30$

이때 $X>0$이므로 $0<X<30$

따라서 X, Y에 대한 연립방정식을 풀었을 때, X의 값이 30 이상이면 이 값도 해에서 제외해야 한다.

35

$P(8)=100(1+a^{-\frac{1}{5}})$, $P(4)=100(1+a^{-\frac{1}{10}})$

이때 발효를 시작한 지 8시간 후의 이스트의 양이 4시간 후의 이스트의 양의 $\frac{13}{15}$이므로

$P(8)=\frac{13}{15}P(4)$ $\quad\therefore 15P(8)=13P(4)$

즉 $15(1+a^{-\frac{1}{5}})=13(1+a^{-\frac{1}{10}})$이므로

$15+15a^{-\frac{1}{5}}=13+13a^{-\frac{1}{10}}$

$15a^{-\frac{1}{5}}-13a^{-\frac{1}{10}}+2=0$

$\therefore 15(a^{-\frac{1}{10}})^2-13a^{-\frac{1}{10}}+2=0$

$a^{-\frac{1}{10}}=X$ $(X>0)$로 놓으면

$15X^2-13X+2=0$, $(3X-2)(5X-1)=0$

$\therefore X=\frac{2}{3}$ 또는 $X=\frac{1}{5}$

즉 $a^{-\frac{1}{10}}=\frac{2}{3}$ 또는 $a^{-\frac{1}{10}}=\frac{1}{5}$이므로

$a=\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ 또는 $a=5^{10}$

그런데 $0<a<100$이므로 $a=\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

답 $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

36

(1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}\le\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-5}$에서 밑 $\frac{1}{3}$은 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$x-1\ge 3x-5$, $-2x\ge -4$

$\therefore x\le 2$

(2) $2^{3x}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4}$에서 $2^{3x}>2^{-x^2+4}$

이때 밑 2는 $2>1$이므로 $3x>-x^2+4$

$x^2+3x-4>0$, $(x+4)(x-1)>0$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>1$

(3) $2^{1-3x}<4^x$에서 $2^{1-3x}<2^{2x}$

이때 밑 2는 $2>1$이므로 $1-3x<2x$

$-5x<-1$ $\quad\therefore x>\frac{1}{5}$

(4) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2}\le\left(\frac{4}{9}\right)^{-x}$에서 $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2}\le\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$

이때 밑 $\frac{3}{2}$은 $\frac{3}{2}>1$이므로 $x^2\le 2x$

$x^2-2x\le 0$, $x(x-2)\le 0$

$\therefore 0\le x\le 2$

답 (1) $x\le 2$ (2) $x<-4$ 또는 $x>1$ (3) $x>\frac{1}{5}$ (4) $0\le x\le 2$

37

(1) $5^{2x}-2\times5^x-15\le0$에서 $(5^x)^2-2\times5^x-15\le0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-2t-15\le0$

$(t+3)(t-5)\le0$ $\quad\therefore -3\le t\le5$

그런데 $t>0$이므로 $0<t\le5$

따라서 $0<5^x\le5$이고 밑 5는 $5>1$이므로

$x\le1$

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-32\ge0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-32\ge0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-4t-32\ge0$

$(t+4)(t-8)\ge0$ $\quad\therefore t\le-4$ 또는 $t\ge8$

그런데 $t>0$이므로 $t\ge8$

따라서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$이고 밑 $\frac{1}{2}$은 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$x\le-3$

답 (1) $x\le1$ (2) $x\le-3$

38

$4^{-x}-5\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+16<0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-10\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+16<0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-10t+16<0$

$(t-2)(t-8)<0$ $\quad\therefore 2<t<8$

즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$이고 밑 $\frac{1}{2}$은 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $-3<x<-1$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=-1$이므로

$\alpha+\beta=-3+(-1)=-4$

답 -4

39

(1) (i) $0<x<1$일 때

$2x\le5x-9$이므로 $-3x\le-9$ $\quad\therefore x\ge3$

그런데 $0<x<1$이므로 해는 없다.

(ii) $x=1$일 때

$1\ge1$이므로 부등식은 성립한다.

$\therefore x=1$

(iii) $x>1$일 때

$2x\ge5x-9$이므로 $-3x\ge-9$ $\quad\therefore x\le3$

그런데 $x>1$이므로 $1<x\le3$

(i)~(iii)에서 $1\le x\le3$

(2) (i) $0<x<1$일 때

$2x^2>3x-1$이므로 $2x^2-3x+1>0$

$(2x-1)(x-1)>0$ $\quad\therefore x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>1$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<\frac{1}{2}$

(ii) $x=1$일 때

$1<1$이므로 부등식은 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때

$2x^2<3x-1$이므로 $2x^2-3x+1<0$

$(2x-1)(x-1)<0$ $\quad\therefore \frac{1}{2}<x<1$

그런데 $x>1$이므로 해는 없다.

(i)~(iii)에서 $0<x<\frac{1}{2}$

답 (1) $1\le x\le3$ (2) $0<x<\frac{1}{2}$

40

(i) $0<x<1$일 때

$2x(x-1)<3(2-x)$이므로 $2x^2-2x<6-3x$

$2x^2+x-6<0$, $(x+2)(2x-3)<0$

$\therefore -2<x<\frac{3}{2}$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$

(ii) $x=1$일 때

$1>1$이므로 부등식은 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때

$2x(x-1)>3(2-x)$이므로 $2x^2-2x>6-3x$

$2x^2+x-6>0$, $(x+2)(2x-3)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>\frac{3}{2}$

그런데 $x>1$이므로 $x>\frac{3}{2}$

(i)~(iii)에서 $0<x<1$ 또는 $x>\frac{3}{2}$

답 $0<x<1$ 또는 $x>\frac{3}{2}$

41

(1) $5^{2x+1}<125<5^{3x+15}$에서 $5^{2x+1}<5^3<5^{3x+15}$

이때 밑 5는 $5>1$이므로 $2x+1<3<3x+15$

$\therefore \begin{cases}2x+1<3 & \cdots\cdots ㉠\\ 3<3x+15 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $2x<2$ $\quad\therefore x<1$

㉡에서 $-3x<12$ $\quad\therefore x>-4$

따라서 부등식의 해는 $-4<x<1$

(2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}<81<\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-12}$에서

$3^{-2(3x-1)}<3^4<3^{-(4x-12)}$

$\therefore 3^{-6x+2}<3^4<3^{-4x+12}$

이때 밑 3은 $3>1$이므로

$-6x+2<4<-4x+12$

$\therefore \begin{cases} -6x+2<4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4<-4x+12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-6x<2$ $\quad \therefore x>-\frac{1}{3}$

㉡에서 $4x<8$ $\quad \therefore x<2$

따라서 부등식의 해는 $-\frac{1}{3}<x<2$

답 (1) $-4<x<1$ (2) $-\frac{1}{3}<x<2$

42

집합 A의 부등식에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}\ge\left(\frac{1}{3}\right)^4$

밑 $\frac{1}{3}$은 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $2x\le4$ $\quad \therefore x\le2$ $\cdots\cdots$ ㉠

집합 B의 부등식에서 $2^{3(x^2+2x-4)}\le2^{2(x^2+x)}$

밑 2는 $2>1$이므로 $3(x^2+2x-4)\le2(x^2+x)$

$3x^2+6x-12\le2x^2+2x$, $x^2+4x-12\le0$

$(x+6)(x-2)\le0$ $\quad \therefore -6\le x\le2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-6\le x\le2$

$\therefore A\cap B=\{x\mid-6\le x\le2\}$

답 $\{x\mid-6\le x\le2\}$

43

$\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+k-1>0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-1>0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $t^2+2t+k-1>0$

$f(t)=t^2+2t+k-1$이라 하면

$f(t)=(t+1)^2+k-2$

$t>0$인 모든 t에 대하여 부등식 $f(t)>0$이 항상 성립하려면 $f(0)\ge0$이어야 하므로

$f(0)=k-1\ge0$ $\quad \therefore k\ge1$

답 $k\ge1$

44

$9^x+2\times3^{x+1}+k-3>0$에서 $(3^x)^2+6\times3^x+k-3>0$

$3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $t^2+6t+k-3>0$

$f(t)=t^2+6t+k-3$이라 하면

$f(t)=(t+3)^2+k-12$

$t>0$인 모든 t에 대하여 부등식 $f(t)>0$이 항상 성립하려면 $f(0)\ge0$이어야 하므로

$f(0)=k-3\ge0$ $\quad \therefore k\ge3$

따라서 한 자리 자연수 k의 값은 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9이므로 그 개수는 7이다.

답 7

45

성인이 카페인 384 mg을 섭취했을 때, x시간 후에 체내에 남은 카페인의 양은 $\left\{384\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}}\right\}$ mg

남은 카페인의 양이 3 mg 이하가 되어야 하므로

$384\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}}\le3$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}}\le\left(\frac{1}{2}\right)^7$

이때 밑 $\frac{1}{2}$은 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$\frac{x}{5}\ge7$ $\quad \therefore x\ge35$

따라서 체내에 남은 카페인의 양이 3 mg 이하가 되려면 최소 35시간이 지나야 하므로 자연수 t의 값은 35이다.

답 35

참고 **반감기**

어떤 물질의 처음 양의 절반만 남게 되는 기간을 반감기라 한다.

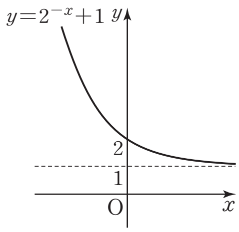
예 처음 양을 A, A가 절반만 남게 되는 시간을 t라 하면 n시간 후의 물질의 양은 $A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{t}}$이다.

연습문제

p.98~103

1

함수 $y=2^{-x}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 점 $(0, 2)$를 지난다.

② 점근선의 방정식은 $y=1$이다.

③ 정의역은 실수 전체의 집합이다.

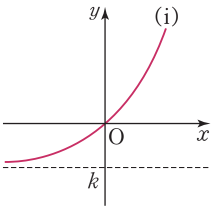
④ x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
⑤ 함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하여 얻을 수 있다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

2

ㄱ. $y=\frac{1}{2^{x+1}}=2^{-(x+1)}$이므로 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
ㄴ. $y=\frac{2^x}{16}=2^{x-4}$이므로 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
ㄷ. $y=\sqrt{2}\times 2^x=2^{\frac{1}{2}}\times 2^x=2^{x+\frac{1}{2}}$이므로 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.
따라서 함수 $y=2^x$의 그래프를 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

3

$f(x)=3\times 2^x+k$라 하면 함수 $f(x)$의 그래프가 제4사분면을 지나지 않는 경우는 함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림의 (i)보다 위쪽에 있거나 (i)과 같을 때이다.



(i)에서 함수 $f(x)$가 점 $(0, 0)$을 지날 때,
$0=3\times 2^0+k \qquad \therefore k=-3$
따라서 $k\ge -3$이므로 구하는 k의 최솟값은 -3이다. 답 -3

4

함수 $y=a-2^{x-b}$의 그래프에서 점근선이 직선 $y=2$이므로 $a=2$
즉 함수 $y=2-2^{x-b}$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로
$1=2-2^{-b}$, $2^{-b}=1 \qquad \therefore b=0$
$\therefore a+b=2+0=2$ 답 2

5

$(3^x-5)(3^x-100)<0$에서 $5<3^x<100$
따라서 자연수 x의 값은 2, 3, 4이므로 그 합은
$2+3+4=9$ 답 ③

6

두 점 A, B의 좌표는 A$(1, 2)$, B$(2, 4)$이므로 직선 AB의 기울기 m_1은
$m_1=\frac{4-2}{2-1}=2$
두 점 C, D의 좌표는 C$\left(1, \frac{1}{2}\right)$, D$\left(2, \frac{1}{4}\right)$이므로 직선 CD의 기울기 m_2는
$m_2=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{2-1}=-\frac{1}{4}$
이때 $m_2=km_1$이므로
$-\frac{1}{4}=2k \qquad \therefore k=-\frac{1}{8}$
답 ②

7

함수 $y=2^x+a$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=2^{x-b}+a$
이 함수의 그래프가 점 $(1, 4)$를 지나므로
$4=2^{1-b}+a$ ……㉠
함수 $y=2^x+a$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$y=2^{-x}+a$
이 함수의 그래프가 점 $(1, 4)$를 지나므로
$4=2^{-1}+a$ ……㉡
㉡에서 $4=\frac{1}{2}+a \qquad \therefore a=\frac{7}{2}$
$a=\frac{7}{2}$을 ㉠에 대입하면 $4=2^{1-b}+\frac{7}{2}$
$2^{1-b}=\frac{1}{2}=2^{-1}$, $1-b=-1 \qquad \therefore b=2$
$\therefore 2ab=2\times\frac{7}{2}\times 2=14$ 답 ⑤

8

$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-(2x-1)}=2^{2x-1}$에서 밑 2는 $2>1$이므로 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+1}$은
$x=3$일 때 최대이고, 최댓값 M은
$M=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=2^5=32$ …… ❶
함수 $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}$에서 밑 $\frac{1}{3}$은 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 함수 $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}$은

$x=3$일 때 최소이고, 최솟값 m은

$m=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$ ······ ❷

$\therefore M+m=32+3=35$ ······ ❸

답 35

채점 기준	비율
❶ M의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ m의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	20%

9

$y=2^x\times3^{-2x}=2^x\times(3^{-2})^x=\left(\frac{2}{9}\right)^x$에서 밑 $\frac{2}{9}$는

$0<\frac{2}{9}<1$이므로 함수 $y=2^x\times3^{-2x}$은

$x=-2$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(\frac{2}{9}\right)^{-2}=\frac{81}{4}$

따라서 $a=-2$, $M=\frac{81}{4}$이므로

$a+M=-2+\frac{81}{4}=\frac{73}{4}$

답 $\frac{73}{4}$

10

$y=4^{-x}-3\times2^{1-x}+a$

$\quad=(2^{-x})^2-3\times2\times2^{-x}+a$

$\quad=(2^{-x})^2-6\times2^{-x}+a$

$2^{-x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$-2\le x\le0$에서 $2^0\le2^{-x}\le2^2$

$\therefore 1\le t\le4$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-6t+a$

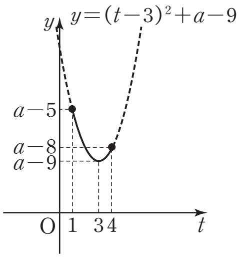
$\quad=(t-3)^2+a-9$

즉 $1\le t\le4$에서 함수

$y=(t-3)^2+a-9$는

$t=3$일 때 최소이고,

최솟값은 $a-9$



이때 주어진 함수의 최솟값이 4이므로

$a-9=4 \qquad \therefore a=13$

$t=1$일 때 최대이고, 최댓값은

$a-5=13-5=8$

따라서 a의 값과 y의 최댓값의 합은

$13+8=21$

답 ⑤

11

$16^x-6\times4^x+8=0$에서 $(4^x)^2-6\times4^x+8=0$

$4^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-6t+8=0$

주어진 방정식의 두 근이 4^α, 4^β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$4^\alpha\times4^\beta=8$, $4^{\alpha+\beta}=8$

$2^{2(\alpha+\beta)}=2^3$, $2(\alpha+\beta)=3$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{3}{2}$

답 ②

12

$f(x)-\sqrt{2}f(-x)+1-\sqrt{2}=0$에서

$2^x-\sqrt{2}\times2^{-x}+1-\sqrt{2}=0$

위 식의 양변에 2^x을 곱하면

$(2^x)^2+(1-\sqrt{2})2^x-\sqrt{2}=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2+(1-\sqrt{2})t-\sqrt{2}=0$

$(t+1)(t-\sqrt{2})=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=\sqrt{2}$

그런데 $t>0$이므로 $t=\sqrt{2}$

따라서 $2^x=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$이므로 $x=\frac{1}{2}$

답 ①

13

$4^{f(x)}-2^{1+f(x)}<8$에서 $\{2^{f(x)}\}^2-2\times2^{f(x)}-8<0$

$2^{f(x)}=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-2t-8<0$

$(t+2)(t-4)<0$

$\therefore -2<t<4$

그런데 $t>0$이므로 $0<t<4$

즉 $0<2^{f(x)}<2^2$이므로 $f(x)<2$

$f(x)=x^2-x-10$이므로 $x^2-x-10<2$

$x^2-x-12<0$, $(x+3)(x-4)<0$

$\therefore -3<x<4$

따라서 정수 x의 값은 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$이므로 그 합은

$-2+(-1)+0+1+2+3=3$

답 3

14

$4^x-a\times2^{x+1}+4\ge0$에서 $(2^x)^2-2a\times2^x+4\ge0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-2at+4\ge0$

$f(t)=t^2-2at+4$라 하면

$f(t)=(t-a)^2+4-a^2$

(i) $a>0$인 경우

$t=a$일 때 $f(t)$는 최소이고 최솟값은 $4-a^2$

이때 $f(t)\geq 0$이 항상 성립해야 하므로 $4-a^2\geq 0$

$a^2-4\leq 0$, $(a+2)(a-2)\leq 0$

$\therefore\ -2\leq a\leq 2$

그런데 $a>0$이므로 $0<a\leq 2$

(ii) $a\leq 0$인 경우

$t=0$일 때 $f(t)$는 최소이고 최솟값은 $f(0)=4\geq 0$

즉 $f(t)\geq 0$이 항상 성립하므로 $a\leq 0$

(i), (ii)에서 $a\leq 2$

따라서 실수 a의 최댓값은 2이다.

답 2

15

함수 $y=-2^{-x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=-2^{-x}\qquad \therefore\ y=2^{-x}$

$y=2^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2^{-(x-a)}-2\qquad \therefore\ f(x)=2^{-(x-a)}-2$

이때 $f(0)=0$이므로

$2^a-2=0\qquad \therefore\ a=1$

따라서 $f(x)=2^{-(x-1)}-2$이므로

$f(-4)=2^{-(-4-1)}-2=2^5-2=30$

답 ④

16

(i) $x\geq 0$일 때

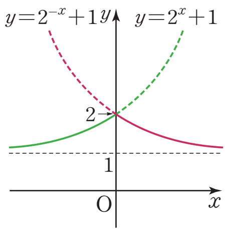
$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+1=2^{-x}+1$

(ii) $x<0$일 때

$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}+1=2^x+1$

(i), (ii)에서

함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 점근선은 직선 $y=1$이다.

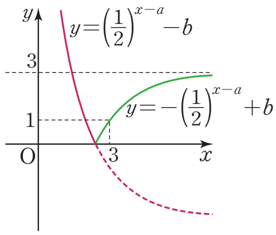
ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $1<f(x)\leq f(0)$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

17

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}-b\right|$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}-b$의 그래프에서 x축의 아랫부분을 x축 위로 올린 그래프이다.



위의 그림에서 함수 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}+b$의 그래프의 점근선이 직선 $y=3$이므로 $b=3$

또 함수 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}+b$, 즉 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}+3$의 그래프가 점 $(3, 1)$을 지나므로

$1=-\left(\frac{1}{2}\right)^{3-a}+3$, $1=-2^{a-3}+3$

$2^{a-3}=2$, $a-3=1\qquad \therefore\ a=4$

$\therefore\ a-b=4-3=1$

답 1

18

$f(x+y)=2^{a(x+y)+b}=2^{ax+ay+b}$

$2f(x)f(y)=2\times 2^{ax+b}2^{ay+b}=2^{ax+ay+2b+1}$

이때 $f(x+y)=2f(x)f(y)$이므로

$2^{ax+ay+b}=2^{ax+ay+2b+1}$

$ax+ay+b=ax+ay+2b+1$

$\therefore\ b=-1$

즉 $f(x)=2^{ax-1}$이므로

$f\left(\frac{5}{2}\right)=2^{\frac{5}{2}a-1}=2\sqrt{2}$

$2^{\frac{5}{2}a-1}=2^{\frac{3}{2}}$, $\frac{5}{2}a-1=\frac{3}{2}$

$\frac{5}{2}a=\frac{5}{2}\qquad \therefore\ a=1$

$\therefore\ a^2+b^2=1^2+(-1)^2=2$

답 ②

19

$f(x)=a\times 2^{2-x}+b=4a\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+b$

$a>0$이고 밑 $\frac{1}{2}$은 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

즉 $-1\leq x\leq 2$에서 함수 $f(x)$는

$x=-1$일 때 최대이고, 최댓값은

$4a\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+b=8a+b$이므로

$8a+b=5$ ······㉠

$x=2$일 때 최소이고, 최솟값은

$4a\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+b=a+b$이므로

$a+b=-2$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=-3$

따라서 $f(x)=2^{2-x}-3$이므로

$f(0)=2^2-3=4-3=1$

답 ①

20

Step by Step

2^x+16^y의 지수를 한 문자로 통일시킨다.

↓

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 a, b, m의 값을 구한다.

↓

abm의 값을 구한다.

$x+4y-1=0$에서 $4y=-x+1$이므로

$16^y=2^{4y}=2^{-x+1}$

$2^x>0,\ 2^{-x+1}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}2^x+16^y&=2^x+2^{-x+1}\\&\geq 2\sqrt{2^x\times 2^{-x+1}}\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

이때 등호는 $2^x=2^{-x+1}$일 때 성립하므로

$x=-x+1 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}$을 $4y=-x+1$에 대입하여 풀면 $y=\frac{1}{8}$

따라서 2^x+16^y은 $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{8}$일 때 최솟값 $2\sqrt{2}$를 가지므로

$a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{8}, m=2\sqrt{2}$

$\therefore abm=\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\times 2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{8}$

답 ①

21

점 A의 y좌표를 b라 하면 △AOB의 높이는 점 A의 y좌표와 같다.

이때 $\overline{OB}=4$이고 △AOB의 넓이가 16이므로

△AOB$=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times b=\frac{1}{2}\times 4\times b=16$

$2b=16 \qquad \therefore b=8$

즉 점 A의 y좌표가 8이므로 점 A의 좌표를 $(k, 8)$이라 하자.

점 A는 함수 $y=2^x-1$의 그래프 위의 점이므로

$8=2^k-1 \qquad \therefore 2^k=9$ ······㉠

또 점 A는 함수 $y=2^{-x}+\frac{a}{3}$의 그래프 위의 점이므로

$8=2^{-k}+\frac{a}{3},\ 8=\frac{1}{2^k}+\frac{a}{3}$ ······㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $8=\frac{1}{9}+\frac{a}{3}$

$\frac{a}{3}=\frac{71}{9} \qquad \therefore a=\frac{71}{3}$

답 ⑤

22

방정식 $|3^x-3|=k$가 서로 다른 두 실근을 가지므로

$k>0$ ······㉠

$|3^x-3|=k$에서 $3^x-3=-k$ 또는 $3^x-3=k$

$\therefore 3^x=3-k$ 또는 $3^x=3+k$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 방정식 $3^x=3-k,\ 3^x=3+k$가 각각 실근을 가져야 한다.

$3^x=3-k$에서 $3-k>0$이므로

$k<3$ ······㉡

$3^x=3+k$에서 $3+k>0$이므로

$k>-3$ ······㉢

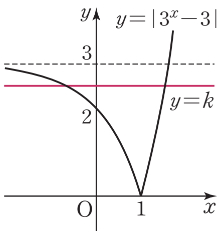
㉠, ㉡, ㉢의 공통범위를 구하면 $0<k<3$

답 $0<k<3$

다른 풀이

방정식 $|3^x-3|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|3^x-3|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

이때 함수 $y=|3^x-3|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=|3^x-3|$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



따라서 실수 k의 값의 범위는 $0<k<3$

23

점 A의 좌표가 $A(k, 0)$이므로 두 점 B, C의 좌표는

$B(k, 2^k)$, $C(k, 4^k)$

이때 점 D의 y좌표는 점 C의 y좌표와 같으므로 점 D의 x좌표를 d라 하면 $2^d=4^k=2^{2k}$　　$\therefore d=2k$

$\overline{CD}=2k-k=k$, $\overline{BC}=4^k-2^k$이므로

$\triangle BDC$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{BC}=\frac{k}{2}(4^k-2^k)$

또 $\overline{OA}=k$, $\overline{AB}=2^k$이므로 $\triangle OAB$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{AB}=\frac{k}{2}\times 2^k$

$\triangle BDC=3\triangle OAB$이므로 $\frac{k}{2}(4^k-2^k)=3\times\frac{k}{2}\times 2^k$

$\frac{k}{2}\times 2^k(2^k-1)=3\times\frac{k}{2}\times 2^k$, $2^k(2^k-1)=3\times 2^k$

$2^k(2^k-1)-3\times 2^k=0$, $2^k(2^k-4)=0$

이때 $2^k>0$이므로 $2^k-4=0$

$2^k=4=2^2$　　$\therefore k=2$

따라서 삼각형 BDC의 넓이는

$\frac{2}{2}(4^2-2^2)=16-4=12$

답 ②

24

$2^{f(x)}\le 4^x$에서 $2^{f(x)}\le 2^{2x}$

밑 2는 $2>1$이므로 $f(x)\le 2x$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표를 구하면

(i) $x<3$일 때

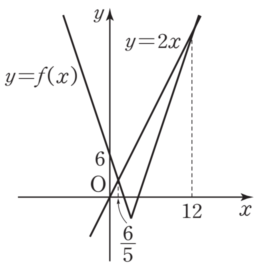
$-3x+6=2x$에서

$x=\frac{6}{5}$

(ii) $x\ge 3$일 때

$3x-12=2x$에서

$x=12$



(i), (ii)에서 부등식 $f(x)\le 2x$의 해는

$\frac{6}{5}\le x\le 12$

즉 실수 x의 최댓값은 12, 최솟값은 $\frac{6}{5}$이므로

$M=12$, $m=\frac{6}{5}$

$\therefore M+m=12+\frac{6}{5}=\frac{66}{5}$

따라서 $p=5$, $q=66$이므로

$p+q=5+66=71$

답 71

Level Up 연습문제

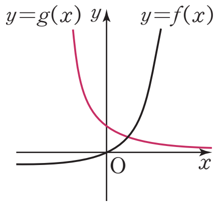
p. 104

1

(i) $0<\frac{a-1}{3}<1$,

즉 $1<a<4$일 때

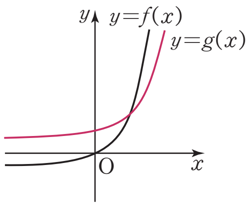
함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 한 점에서 만난다.



(ii) $1<\frac{a-1}{3}<2$,

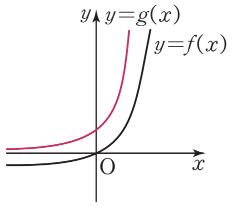
즉 $4<a<7$일 때

함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 한 점에서 만난다.



(iii) $\frac{a-1}{3}\ge 2$, 즉 $a\ge 7$일 때

함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 만나지 않는다.



(i)~(iii)에서 $1<a<4$, $4<a<7$

따라서 정수 a의 최댓값은 6, 최솟값은 2이므로 그 합은

$6+2=8$

답 ④

2

$C_g=2$, $C_d=\frac{1}{4}$, $x=a$, $n=\frac{1}{200}$이므로

$\frac{1}{200}=\frac{1}{4}\times 2\times 10^{\frac{4}{5}(a-9)}$, $10^{\frac{4}{5}(a-9)}=10^{-2}$

$\frac{4}{5}(a-9)=-2$, $4(a-9)=-10$

$4a-36=-10$, $4a=26$　　$\therefore a=\frac{13}{2}$

답 ④

3

직선 PQ의 기울기가 -1이므로

$\frac{g(q)-f(p)}{q-p}=-1$

$\therefore g(q)-f(p)=-(q-p)$　　······㉠

또 $\overline{PQ}=2\sqrt{2}$이므로 $\overline{PQ}^2=8$

$\therefore (q-p)^2+\{g(q)-f(p)\}^2=8$　　······㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(q-p)^2+\{-(q-p)\}^2=8$

$2(q-p)^2=8$, $(q-p)^2=4$

$\therefore q-p=2\ (\because p<q<1)$ ……㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $g(q)-f(p)=-2$

$4^q-2-2^p=-2,\ 4^q-2^p=0$

$4^q-2^{q-2}=0\ (\because ㉢),\ (2^q)^2-\frac{1}{4}\times 2^q=0$

$\therefore 2^q\left(2^q-\frac{1}{4}\right)=0$

이때 $2^q>0$이므로 $2^q-\frac{1}{4}=0$

$2^q=\frac{1}{4}=2^{-2}\qquad \therefore q=-2$

$q=-2$를 ㉢에 대입하면

$-2-p=2\qquad \therefore p=-4$

$\therefore \frac{p}{q}=\frac{-4}{-2}=2$

답 ②

4

$p=\sqrt{2}-1$이라 하면 $p^2=3-2\sqrt{2}$이므로 주어진 부등식에서 $p^m\geq(p^2)^{5-n}\qquad \therefore p^m\geq p^{10-2n}$

이때 $0<p<1$이므로 $m\leq 10-2n$

(i) $n=1$일 때, $1\leq m\leq 8$
즉 순서쌍 (m, n)은 $(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (7, 1), (8, 1)$이므로 그 개수는 8이다.

(ii) $n=2$일 때, $1\leq m\leq 6$
즉 순서쌍 (m, n)은 $(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)$이므로 그 개수는 6이다.

(iii) $n=3$일 때, $1\leq m\leq 4$
즉 순서쌍 (m, n)은 $(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3)$이므로 그 개수는 4이다.

(iv) $n=4$일 때, $1\leq m\leq 2$
즉 순서쌍 (m, n)은 $(1, 4), (2, 4)$이므로 그 개수는 2이다.

(v) $n\geq 5$일 때, 부등식을 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수는 $8+6+4+2=20$

답 ④

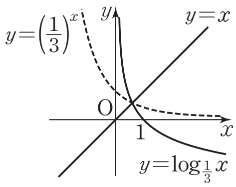
4 로그함수

확인 문제

p. 108 ~ 135

01

로그함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다.

ㄴ. 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0$이다.

ㄷ. 그래프는 점 $(1, 0)$을 지난다.

ㄹ. 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

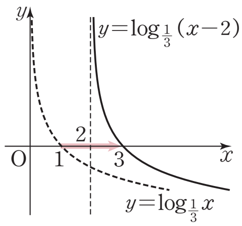
ㅁ. x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
즉 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㅁ

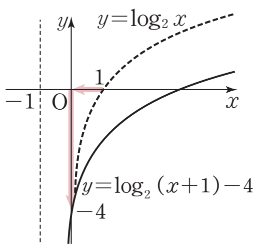
02

(1) 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.



따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x>2\}$, 치역은 실수 전체의 집합, 점근선의 방정식은 $x=2$이다.

(2) 함수 $y=\log_2(x+1)-4$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.



따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x>-1\}$, 치역은 실수 전체의 집합, 점근선의 방정식은 $x=-1$이다.

답 풀이 참조

03

$y=\log_3 9(x-2)$

$\quad=\log_3 3^2+\log_3 (x-2)$

$\quad=\log_3 (x-2)+2$

즉 함수 $y=\log_3 9(x-2)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $m=2, n=2$

$\therefore mn=2\times2=4$

답 4

04

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\log_2 (x-p)+q$

이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\log_2 (x-p)+q$

$\therefore y=-\log_2 (x-p)-q=\log_{\frac{1}{2}} (x-p)-q$

이 식이 $y=\log_{\frac{1}{2}} (x-1)+2$와 같으므로

$p=1, q=-2$

$\therefore p+q=1+(-2)=-1$

답 -1

05

함수 $y=\log_2 (x-k)+5$의 그래프가 점 $(5, 5)$를 지나므로

$5=\log_2 (5-k)+5$, $\log_2 (5-k)=0$

$5-k=1 \qquad \therefore k=4$

답 4

06

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} (ax+b)$의 그래프가 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$0=\log_{\frac{1}{2}} (-a+b)$, $-a+b=1$

$\therefore a-b=-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} (ax+b)$의 그래프가 점 $(0, -2)$를 지나므로

$-2=\log_{\frac{1}{2}} b \qquad \therefore b=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$

$b=4$를 ㉠에 대입하면

$-a+4=1 \qquad \therefore a=3$

$\therefore ab=3\times4=12$

답 12

07

(1) $2\log_5 4=\log_5 4^2=\log_5 16$

$\log_{25} 36=\log_{5^2} 6^2=\log_5 6$

$2=\log_5 5^2=\log_5 25$

이때 로그함수 $y=\log_5 x$는 밑 5가 $5>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

즉 진수가 큰 수가 크다.

진수의 크기를 비교하면 $6<16<25$이므로

$\log_{25} 36<2\log_5 4<2$

따라서 가장 작은 수는 $\log_{25} 36$이다.

(2) $-1=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{3}} 3$, $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 10=\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{10}$

이때 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$는 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

즉 진수가 작은 수가 크다.

진수의 크기를 비교하면 $3<\sqrt{10}<5$이므로

$\log_{\frac{1}{3}} 5<\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 10<-1$

따라서 가장 작은 수는 $\log_{\frac{1}{3}} 5$이다.

답 (1) $\log_{25} 36$ (2) $\log_{\frac{1}{3}} 5$

08

함수 $y=\log_b x$는 밑 b가 $b>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$1<a<b$이므로 $\log_b 1<\log_b a<\log_b b$

$\therefore 0<\log_b a<1$

이때 $\log_{\frac{1}{a}} b=\log_{a^{-1}} b=-\log_a b=-\frac{1}{\log_b a}$이므로

$\log_{\frac{1}{a}} b<0$

따라서 작은 것부터 차례로 나열하면

$\log_{\frac{1}{a}} b, 0, \log_b a, 1$

답 $\log_{\frac{1}{a}} b, 0, \log_b a, 1$

09

(1) $y=2^{1-x}+3$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y|y>3\}$이다.

$y=2^{1-x}+3$에서 $y-3=2^{1-x}$

로그의 정의에 의하여 $1-x=\log_2 (y-3)$

$\therefore x=-\log_2 (y-3)+1$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\log_2 (x-3)+1$

이때 함수 $y=2^{1-x}+3$의 치역이 역함수의 정의역이므로 구하는 역함수는

$y=-\log_2 (x-3)+1 \ (x>3)$

(2) $y=\log_5(x-1)-1$에서 진수의 조건에 의하여
$x-1>0$이므로 정의역은 $\{x|x>1\}$이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.
$y=\log_5(x-1)-1$에서 $y+1=\log_5(x-1)$
로그의 정의에 의하여 $x-1=5^{y+1}$
$\therefore x=5^{y+1}+1$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=5^{x+1}+1$

답 (1) $y=-\log_2(x-3)+1\ (x>3)$ (2) $y=5^{x+1}+1$

10

함수 $y=f(x)$의 역함수가 $y=g(x)$이므로
$g(13)=k$라 하면 $f(k)=13$
즉 $f(k)=3\log_2(k+3)-2=13$이므로
$3\log_2(k+3)=15$, $\log_2(k+3)=5$
$k+3=2^5=32 \qquad \therefore k=29$
$\therefore g(13)=29$

답 29

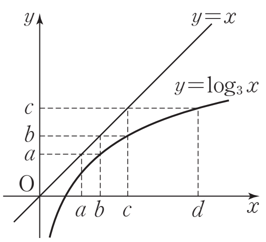
11

$y=\log_2(x+a)+b$에서 $y-b=\log_2(x+a)$
로그의 정의에 의하여 $x+a=2^{y-b}$
$\therefore x=2^{y-b}-a$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=2^{x-b}-a$
이때 함수 $y=f(x)$의 역함수가 $y=g(x)$이므로
$g(x)=2^{x-b}-a$
함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $y=-a$이므로 $a=-1 \qquad \therefore g(x)=2^{x-b}+1$
함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(3, 2)$를 지나므로
$2^{3-b}+1=2$, $2^{3-b}=1 \qquad \therefore b=3$
$\therefore a+b=-1+3=2$

답 2

12

함수 $y=\log_3 x$의 그래프가
점 (b, a)를 지나므로
$\log_3 b=a \qquad \therefore b=3^a$
함수 $y=\log_3 x$의 그래프가
점 (d, c)를 지나므로
$\log_3 d=c \qquad \therefore d=3^c$



$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{c-a}=3^{-(c-a)}=3^{a-c}=\frac{3^a}{3^c}=\frac{b}{d}$

답 ⑤

13

점 B의 x좌표를 a라 하면
$A(a, 2)$, $B(a, 0)$, $C(a+2, 0)$, $D(a+2, 2)$
이때 점 D는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위에 있으므로
$2=\log_3(a+2)$, $a+2=3^2 \qquad \therefore a=7$
따라서 점 B의 x좌표는 7이다.

답 7

14

(1) $y=\log_3(x-2)+1$에서 밑 3은 $3>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 $3\le x\le 245$에서 함수 $y=\log_3(x-2)+1$은
$x=3$일 때 최소이고, 최솟값은
$\log_3 1+1=1$
$x=245$일 때 최대이고, 최댓값은
$\log_3 243+1=6$

(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-5$에서 밑 $\frac{1}{2}$은 $0<\frac{1}{2}<1$이므로
x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 $0\le x\le 31$에서 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-5$는
$x=0$일 때 최대이고, 최댓값은
$\log_{\frac{1}{2}} 1-5=-5$
$x=31$일 때 최소이고, 최솟값은
$\log_{\frac{1}{2}} 32-5=-10$

답 (1) 최댓값: 6, 최솟값: 1 (2) 최댓값: -5, 최솟값: -10

15

$y=\log_3(x-1)+a$에서 밑 3은 $3>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
즉 $x=10$일 때 최댓값을 갖는다.
이때 최댓값이 7이므로 $\log_3(10-1)+a=7$
$2+a=7 \qquad \therefore a=5$
따라서 $\frac{4}{3}\le x\le 10$에서 함수 $y=\log_3(x-1)+5$는
$x=\frac{4}{3}$일 때 최소이고, 최솟값 b는
$b=\log_3\left(\frac{4}{3}-1\right)+5=-1+5=4$
$\therefore a+b=5+4=9$

답 9

16

(1) $f(x)=-x^2+8x+1$로 놓으면
$y=\log_2(-x^2+8x+1)=\log_2 f(x)$

$f(x)=-x^2+8x+1=-(x-4)^2+17$이므로
$1\le x\le 3$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=8$, 최댓값은 $f(3)=16$이다.
$\therefore 8\le f(x)\le 16$
이때 $y=\log_2 f(x)$에서 밑 2는 $2>1$이므로 함수 $y=\log_2 f(x)$는 $f(x)$가 최대일 때 y의 값은 최대가 되고, $f(x)$가 최소일 때 y의 값은 최소가 된다.
따라서 $1\le x\le 3$에서 함수 $y=\log_2 f(x)$는
$f(x)=16$일 때 최대이고, 최댓값은
$\log_2 16=\log_2 2^4=4$
$f(x)=8$일 때 최소이고, 최솟값은
$\log_2 8=\log_2 2^3=3$

(2) $f(x)=6x^2-12x+7$로 놓으면
$y=\log_{\frac{1}{5}} f(6x^2-12x+7)=\log_{\frac{1}{5}} f(x)$
$f(x)=6x^2-12x+7=6(x-1)^2+1$이므로
$0\le x\le 3$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=1$, 최댓값은 $f(3)=25$이다.
$\therefore 1\le f(x)\le 25$
이때 $y=\log_{\frac{1}{5}} f(x)$에서 밑 $\frac{1}{5}$은 $0<\frac{1}{5}<1$이므로 $f(x)$가 최대일 때 y의 값은 최소가 되고, $f(x)$가 최소일 때 y의 값은 최대가 된다.
따라서 $0\le x\le 3$에서 함수 $y=\log_{\frac{1}{5}} f(x)$는
$f(x)=1$일 때 최대이고, 최댓값은
$\log_{\frac{1}{5}} 1=0$
$f(x)=25$일 때 최소이고, 최솟값은
$\log_{\frac{1}{5}} 25=\log_{5^{-1}} 5^2=-2$

답 (1) 최댓값: 4, 최솟값: 3 (2) 최댓값: 0, 최솟값: -2

17

$f(x)=x^2-2x+a$로 놓으면
$y=\log_2 (x^2-2x+a)=\log_2 f(x)$
$f(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$이므로
$-3\le x\le 2$에서
$f(-3)=a+15$, $f(1)=a-1$, $f(2)=a$
$\therefore a-1\le f(x)\le a+15$
이때 $y=\log_2 f(x)$에서 밑 2는 $2>1$이므로 $f(x)$가 최소일 때 y의 값은 최소가 된다.
따라서 $-3\le x\le 2$에서 함수 $y=\log_2 f(x)$는
$f(x)=a-1$일 때 최소이고, 최솟값은 3이므로
$\log_2(a-1)=3$, $a-1=2^3=8$
$\therefore a=9$

답 9

18

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$로 놓으면 $1\le x\le 8$에서
$\log_{\frac{1}{2}} 8\le \log_{\frac{1}{2}} x\le \log_{\frac{1}{2}} 1$ $\quad\therefore -3\le t\le 0$
이때 주어진 함수는 $y=t^2+2t+3=(t+1)^2+2$
따라서 $-3\le t\le 0$에서 함수 $y=(t+1)^2+2$는
$t=-3$일 때 최대이고, 최댓값은
$(-3+1)^2+2=6$
$t=-1$일 때 최소이고, 최솟값은 2

답 최댓값: 6, 최솟값: 2

19

$y=\left(\log_3 \frac{x}{3}\right)\left(\log_3 \frac{x}{27}\right)=(\log_3 x-1)(\log_3 x-3)$
$\log_3 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{3}\le x\le 27$에서
$\log_3 \frac{1}{3}\le \log_3 x\le \log_3 27$ $\quad\therefore -1\le t\le 3$
이때 주어진 함수는
$y=(t-1)(t-3)=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$
따라서 $-1\le t\le 3$에서 함수 $y=(t-2)^2-1$은
$t=-1$일 때 최대이고, 최댓값 M은
$M=(-1-2)^2-1=8$
$t=2$일 때 최소이고, 최솟값 m은
$m=-1$
$\therefore M-m=8-(-1)=9$

답 9

20

$y=x^{\log x-2}$의 양변에 상용로그를 취하면
$\log y=\log x^{\log x-2}$
$=(\log x-2)\log x$
$=(\log x)^2-2\log x$
$\log x=t$로 놓으면 $1\le x\le 10$에서
$\log 1\le \log x\le \log 10$ $\quad\therefore 0\le t\le 1$
이때 주어진 함수는
$\log y=t^2-2t=(t-1)^2-1$
즉 $0\le t\le 1$에서 $\log y$는
$t=0$일 때 최대이고, 최댓값은
$(0-1)^2-1=0$
$t=1$일 때 최소이고, 최솟값은 -1
따라서 y의 최댓값은 $10^0=1$, 최솟값은 $10^{-1}=\frac{1}{10}$이다.

답 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{1}{10}$

21

$y=x^{-4+\log_3 x^2}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log_3 y&=\log_3 x^{-4+\log_3 x^2}\\&=(-4+\log_3 x^2)\log_3 x\\&=(-4+2\log_3 x)\log_3 x\end{aligned}$$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{3}\le x\le 9$에서

$\log_3 \frac{1}{3}\le \log_3 x\le \log_3 9 \qquad \therefore -1\le t\le 2$

이때 주어진 함수는

$$\begin{aligned}\log_3 y&=(-4+2t)t=2t^2-4t\\&=2(t-1)^2-2\end{aligned}$$

즉 $-1\le t\le 2$에서 $\log_3 y$는

$t=-1$일 때 최대이고, 최댓값은

$2(-1-1)^2-2=6$

$t=1$일 때 최소이고, 최솟값은 -2

따라서 y의

최댓값 M은 $M=3^6=729$

최솟값 m은 $m=3^{-2}=\frac{1}{9}$

$\therefore Mm=729\times\frac{1}{9}=81$

답 81

22

$$\log_3\left(x+\frac{2}{y}\right)+\log_3\left(2y+\frac{1}{x}\right)$$
$$=\log_3\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(2y+\frac{1}{x}\right)$$
$$=\log_3\left(2xy+\frac{2}{xy}+5\right)$$

$2xy>0$, $\frac{2}{xy}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2xy+\frac{2}{xy}+5\ge 2\sqrt{2xy\times\frac{2}{xy}}+5=9$$

$\left(\text{단, 등호는 } 2xy=\frac{2}{xy}\text{, 즉 } xy=1\text{일 때 성립}\right)$

이때 밑 3이 $3>1$이므로

$$\log_3\left(2xy+\frac{2}{xy}+5\right)\ge \log_3 9=2$$

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

답 2

Lecture 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

23

$x>1$일 때, $\log_3 x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\log_3 x+\log_x 27&=\log_3 x+\log_x 3^3\\&=\log_3 x+3\log_x 3\\&=\log_3 x+\frac{3}{\log_3 x}\\&\ge 2\sqrt{\log_3 x\times\frac{3}{\log_3 x}}\\&=2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } \log_3 x=\frac{3}{\log_3 x}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{3}$이다.

답 $2\sqrt{3}$

24

(1) 진수의 조건에서

$3x+1>0 \qquad \therefore x>-\frac{1}{3}$ ······㉠

$\log_2(3x+1)=4$에서 $\log_2(3x+1)=\log_2 2^4$

즉 $3x+1=16$이므로 $3x=15 \qquad \therefore x=5$

이때 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=5$

(2) 진수의 조건에서

$x>0$, $x-7>0 \qquad \therefore x>7$ ······㉠

$\log x+\log(x-7)=3\log 2$에서

$\log x(x-7)=\log 2^3$

즉 $x(x-7)=8$이므로 $x^2-7x-8=0$

$(x+1)(x-8)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=8$

이때 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=8$

(3) 진수의 조건에서

$x+1>0$, $x+4>0 \qquad \therefore x>-1$ ······㉠

$2\log_2(x+1)=2+\log_2(x+4)$에서

$2\log_2(x+1)=\log_2 2^2+\log_2(x+4)$

$\log_2(x+1)^2=\log_2 4(x+4)$

즉 $(x+1)^2=4(x+4)$이므로

$x^2+2x+1=4x+16$, $x^2-2x-15=0$

$(x+3)(x-5)=0 \qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=5$

이때 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=5$

(4) 진수의 조건에서

$2x>0$, $x+6>0 \qquad \therefore x>0$ ······㉠

$\log_2 2x=\log_4(x+6)+1$에서

$\log_{2^2}(2x)^2=\log_4(x+6)+\log_4 4$

$\log_4(2x)^2=\log_4 4(x+6)$

즉 $(2x)^2=4(x+6)$이므로 $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=3$

이때 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=3$

답 (1) $x=5$ (2) $x=8$ (3) $x=5$ (4) $x=3$

25

(1) 진수의 조건에서

$x>0,\ x^3>0 \qquad \therefore x>0$ ⋯⋯㉠

$(\log_5 x)^2+\log_5 x^3+2=0$에서

$(\log_5 x)^2+3\log_5 x+2=0$

이때 $\log_5 x=t$로 놓으면

$t^2+3t+2=0,\ (t+1)(t+2)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=-2$

따라서 $\log_5 x=-1$ 또는 $\log_5 x=-2$이므로

$x=5^{-1}=\frac{1}{5}$ 또는 $x=5^{-2}=\frac{1}{25}$ ($\because$ ㉠)

(2) 밑과 진수의 조건에서 $x>0,\ x\neq1$

$\therefore 0<x<1$ 또는 $x>1$ ⋯⋯㉠

$\log_3 x=2\log_x 3+1$에서 $\log_3 x=\frac{2}{\log_3 x}+1$

이때 $\log_3 x=t$로 놓으면

$t=\frac{2}{t}+1,\ t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=2$

따라서 $\log_3 x=-1$ 또는 $\log_3 x=2$이므로

$x=3^{-1}=\frac{1}{3}$ 또는 $x=3^2=9$ ($\because$ ㉠)

답 (1) $x=\frac{1}{25}$ 또는 $x=\frac{1}{5}$ (2) $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=9$

26

진수의 조건에서

$\frac{x}{2}>0,\ x>0,\ \frac{2}{x}>0 \qquad \therefore x>0$ ⋯⋯㉠

$\left(\log_2\frac{x}{2}\right)(\log_2 x)=\log_2\frac{2}{x}$에서

$(\log_2 x-1)\log_2 x=1-\log_2 x$

이때 $\log_2 x=t$로 놓으면

$(t-1)t=1-t,\ t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

즉 $\log_2 x=-1$ 또는 $\log_2 x=1$이므로

$x=2^{-1}=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$ ($\because$ ㉠)

따라서 두 실근은 $\frac{1}{2}$, 2이므로 그 곱은

$\frac{1}{2}\times2=1$

답 1

27

$(\log_3 x)^2=2\log_3 x+16$에서 $\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2=2t+16 \qquad \therefore t^2-2t-16=0$ ⋯⋯㉠

이때 주어진 방정식의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 방정식 ㉠의 두 근은 $\log_3\alpha,\ \log_3\beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=2$이므로 $\log_3\alpha\beta=2$

$\therefore \alpha\beta=3^2=9$

답 9

28

$(\log x)^2+k\log x-2=0$에서 $\log x=t$로 놓으면

$t^2+kt-2=0$ ⋯⋯㉠

이때 주어진 방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha\beta=10$이고 방정식 ㉠의 두 근은 $\log\alpha,\ \log\beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log\alpha+\log\beta=-k$

$\therefore k=-(\log\alpha+\log\beta)=-\log\alpha\beta$

$=-\log10=-1$

답 -1

29

(1) 진수의 조건에서 $x>0$ ⋯⋯㉠

$x^{\log_2 x}=8x^2$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 8x^2$

$\log_2 x\times\log_2 x=\log_2 8+\log_2 x^2$

$\therefore (\log_2 x)^2-2\log_2 x-3=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-2t-3=0,\ (t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

따라서 $\log_2 x=-1$ 또는 $\log_2 x=3$이므로

$x=2^{-1}=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2^3=8$ ($\because$ ㉠)

(2) 진수의 조건에서 $x>0$ ⋯⋯㉠

$x^{\log_2 x}=\frac{4}{x}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2\frac{4}{x},\ \log_2 x\times\log_2 x=2-\log_2 x$

$\therefore (\log_2 x)^2+\log_2 x-2=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2+t-2=0,\ (t+2)(t-1)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

따라서 $\log_2 x=-2$ 또는 $\log_2 x=1$이므로

$x=2^{-2}=\frac{1}{4}$ 또는 $x=2$ ($\because$ ㉠)

(3) 진수의 조건에서 $x>0$ ······㉠

$2^{\log x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t+\dfrac{2}{t}=3,\ t^2-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=2$

따라서 $2^{\log x}=1$ 또는 $2^{\log x}=2$이므로

$\log x=0$ 또는 $\log x=1$

$\therefore x=1$ 또는 $x=10$ ($\because$ ㉠)

(4) 진수의 조건에서 $x>0$ ······㉠

$x^{\log 3}=3^{\log x}$이므로 주어진 방정식은

$3^{\log x}\times 3^{\log x}-7\times 3^{\log x}-18=0$

$3^{\log x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-7t-18=0,\ (t+2)(t-9)=0$

$\therefore t=9\ (\because t>0)$

따라서 $3^{\log x}=9=3^2$이므로 $\log x=2$

$\therefore x=10^2=100$ ($\because$ ㉠)

답 (1) $x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=8$ (2) $x=\dfrac{1}{4}$ 또는 $x=2$
(3) $x=1$ 또는 $x=10$ (4) $x=100$

30

진수의 조건에서 $x>0$ ······㉠

$x^{\log_3 x-1}=27x$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x-1}=\log_3 27x$

$(\log_3 x-1)\log_3 x=3+\log_3 x$

$\therefore (\log_3 x)^2-2\log_3 x-3=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-2t-3=0,\ (t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

즉 $\log_3 x=-1$ 또는 $\log_3 x=3$이므로

$x=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=3^3=27$ ($\because$ ㉠)

따라서 $\alpha=\dfrac{1}{3},\ \beta=27\ (\because \alpha<\beta)$이므로

$\log_3\alpha+\log_3\beta=\log_3\dfrac{1}{3}+\log_3 27=-1+3=2$

답 2

31

$\begin{cases}\log_2 x+\log_3 y=2\\ \log_4 x-\log_9 y^2=-5\end{cases}$에서 로그의 성질을 이용하면

$\begin{cases}\log_2 x+\log_3 y=2\\ \dfrac{1}{2}\log_2 x-\log_3 y=-5\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}\log_2 x+\log_3 y=2\\ \log_2 x-2\log_3 y=-10\end{cases}$

이때 $\log_2 x=X,\ \log_3 y=Y$로 놓으면

$\begin{cases}X+Y=2 & \cdots\cdots ㉠\\ X-2Y=-10 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $X=-2,\ Y=4$

즉 $\log_2 x=-2,\ \log_3 y=4$이므로

$x=2^{-2}=\dfrac{1}{4},\ y=3^4=81$

따라서 $\alpha=\dfrac{1}{4},\ \beta=81$이므로

$4\alpha\beta=4\times\dfrac{1}{4}\times 81=81$

답 81

32

$\begin{cases}\log_2 x-\log_3 y^3=1\\ \log_2 x+\log_{\sqrt{3}} y=6\end{cases}$에서 로그의 성질을 이용하면

$\begin{cases}\log_2 x-3\log_3 y=1\\ \log_2 x+2\log_3 y=6\end{cases}$

$\log_2 x=X,\ \log_3 y=Y$로 놓으면

$\begin{cases}X-3Y=1 & \cdots\cdots ㉠\\ X+2Y=6 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $X=4,\ Y=1$

즉 $\log_2 x=4,\ \log_3 y=1$이므로

$x=2^4=16,\ y=3$

따라서 $\alpha=16,\ \beta=3$이므로

$\alpha+\beta=16+3=19$

답 19

33

초기 온도가 20 ℃이므로

$f(x)=20+k\log(8x+1)$

화재가 발생한 지 $\dfrac{9}{8}$분 만에 온도가 250 ℃까지 올라갔으므로 $f\left(\dfrac{9}{8}\right)=250$

즉 $20+k\log\left(8\times\dfrac{9}{8}+1\right)=250$이므로

$20+k=250 \qquad \therefore k=230$

$\therefore f(x)=20+230\log(8x+1)$

화재가 발생한 지 a분 후 건물의 온도가 480 ℃가 된다고 하면 $f(a)=480$

즉 $20+230\log(8a+1)=480$이므로

$\log(8a+1)=2,\ 8a+1=100 \qquad \therefore a=\dfrac{99}{8}$

따라서 건물의 온도가 480 ℃가 되는 데 걸리는 시간은 $\dfrac{99}{8}$분이다.

답 $\dfrac{99}{8}$분

34

(1) 진수의 조건에서

$3-x>0,\ x>0 \qquad \therefore\ 0<x<3$ ……㉠

$\log_2(3-x)\le 1+\log_2 x$에서

$\log_2(3-x)\le \log_2 2x$

밑 2는 $2>1$이므로 $3-x\le 2x$

$\therefore\ x\ge 1$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1\le x<3$

(2) 진수의 조건에서

$5x>0,\ x-8>0 \qquad \therefore\ x>8$ ……㉠

$\log 5x+\log(x-8)<2$에서

$\log 5x(x-8)<\log 100$

밑 10은 $10>1$이므로 $5x(x-8)<100$

$x^2-8x-20<0,\ (x+2)(x-10)<0$

$\therefore\ -2<x<10$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $8<x<10$

(3) 진수의 조건에서

$4-x>0,\ 2x-2>0 \qquad \therefore\ 1<x<4$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(4-x)\le \log_{\frac{1}{2}}(2x-2)$에서

밑 $\frac{1}{2}$은 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $4-x\ge 2x-2$

$\therefore\ x\le 2$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x\le 2$

(4) 진수의 조건에서

$4-x>0,\ x-2>0 \qquad \therefore\ 2<x<4$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(4-x)>\log_{\frac{1}{9}}(x-2)$에서

$\log_{\frac{1}{9}}(4-x)^2>\log_{\frac{1}{9}}(x-2)$

밑 $\frac{1}{9}$은 $0<\frac{1}{9}<1$이므로 $(4-x)^2<x-2$

$x^2-9x+18<0,\ (x-3)(x-6)<0$

$\therefore\ 3<x<6$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x<4$

답 (1) $1\le x<3$ (2) $8<x<10$
(3) $1<x\le 2$ (4) $3<x<4$

35

진수의 조건에서 $x-1>0,\ \frac{1}{2}x+k>0$

$\therefore\ x>1\ (\because\ k>0)$ ……㉠

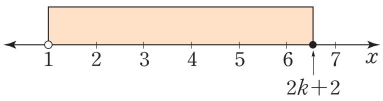
$\log_5(x-1)\le \log_5\left(\frac{1}{2}x+k\right)$에서 밑 5는 $5>1$이므로

$x-1\le \frac{1}{2}x+k$

$\frac{1}{2}x\le k+1 \qquad \therefore\ x\le 2k+2$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x\le 2k+2$

이때 조건을 만족시키는 정수 x의 개수가 5가 되려면 다음과 같아야 한다.



즉 $6\le 2k+2<7$이므로 $4\le 2k<5 \qquad \therefore\ 2\le k<\frac{5}{2}$

따라서 자연수 k의 값은 2이다. 답 2

36

(1) 진수의 조건에서

$x>0,\ x^3>0 \qquad \therefore\ x>0$ ……㉠

$(\log_2 x)^2+2<\log_2 x^3$에서 $(\log_2 x)^2+2<3\log_2 x$

$\therefore\ (\log_2 x)^2-3\log_2 x+2<0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-3t+2<0,\ (t-1)(t-2)<0$

$\therefore\ 1<t<2$

즉 $1<\log_2 x<2$이므로

$\log_2 2<\log_2 x<\log_2 2^2$

밑 2는 $2>1$이므로 $2<x<4$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$2<x<4$

(2) 진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2\le \log_{\frac{1}{3}} x+6$에서

$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2-\log_{\frac{1}{3}} x-6\le 0$

$\log_{\frac{1}{3}} x=t$로 놓으면

$t^2-t-6\le 0,\ (t+2)(t-3)\le 0$

$\therefore\ -2\le t\le 3$

즉 $-2\le \log_{\frac{1}{3}} x\le 3$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\le \log_{\frac{1}{3}} x\le \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^3$

밑 $\frac{1}{3}$은 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $\frac{1}{27}\le x\le 9$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{27}\le x\le 9$

답 (1) $2<x<4$ (2) $\frac{1}{27}\le x\le 9$

37

진수의 조건에서

$x^2>0,\ 9x>0 \qquad \therefore\ x>0$ ……㉠

$(\log_3 x^2)(\log_3 9x)\le 6$에서 $(2\log_3 x)(\log_3 9x)\le 6$

$\log_3 x(\log_3 9+\log_3 x)\le 3$, $\log_3 x(2+\log_3 x)\le 3$

$\therefore (\log_3 x)^2+2\log_3 x-3\le 0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2+2t-3\le 0$, $(t+3)(t-1)\le 0$

$\therefore -3\le t\le 1$

즉 $-3\le \log_3 x\le 1$이므로 $\log_3 3^{-3}\le \log_3 x\le \log_3 3^1$

밑 3은 $3>1$이므로 $\frac{1}{27}\le x\le 3$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{27}\le x\le 3$

따라서 정수 x는 1, 2, 3이므로 그 개수는 3이다.

답 3

38

(1) 진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$x^{\log x}<x^3$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}<\log x^3$, $\log x\times \log x<3\log x$

$\therefore (\log x)^2-3\log x<0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2-3t<0$, $t(t-3)<0$

$\therefore 0<t<3$

즉 $0<\log x<3$이므로

$\log 1<\log x<\log 10^3$

밑 10은 $10>1$이므로 $1<x<1000$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<1000$

(2) 진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$x^{\log_2 x}<\frac{2^{15}}{x^2}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}<\log_2 \frac{2^{15}}{x^2}$

$\log_2 x\times \log_2 x<15-\log_2 x^2$

$\therefore (\log_2 x)^2+2\log_2 x-15<0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2+2t-15<0$, $(t+5)(t-3)<0$

$\therefore -5<t<3$

즉 $-5<\log_2 x<3$이므로

$\log_2 2^{-5}<\log_2 x<\log_2 2^3$

밑 2는 $2>1$이므로 $\frac{1}{32}<x<8$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{32}<x<8$

답 (1) $1<x<1000$ (2) $\frac{1}{32}<x<8$

39

진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$x^{\log_2 x}\ge 8x^2$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}\ge \log_2 8x^2$, $\log_2 x\times \log_2 x\ge 3+\log_2 x^2$

$\therefore (\log_2 x)^2-2\log_2 x-3\ge 0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-2t-3\ge 0$, $(t+1)(t-3)\ge 0$

$\therefore t\le -1$ 또는 $t\ge 3$

즉 $\log_2 x\le -1$ 또는 $\log_2 x\ge 3$이므로

$\log_2 x\le \log_2 2^{-1}$ 또는 $\log_2 x\ge \log_2 2^3$

밑 2는 $2>1$이므로 $x\le \frac{1}{2}$ 또는 $x\ge 8$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x\le \frac{1}{2}$ 또는 $x\ge 8$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=8$이므로

$ab=\frac{1}{2}\times 8=4$

답 4

40

진수의 조건에서 $x+2>0$ $\therefore x>-2$ ……㉠

$7^{2x}-5\times 7^x-14\ge 0$에서 $7^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-5t-14\ge 0$, $(t+2)(t-7)\ge 0$

$\therefore t\le -2$ 또는 $t\ge 7$

이때 $t>0$이므로 $t\ge 7$

즉 $7^x\ge 7$이므로 $x\ge 1$ ……㉡

$\log_2 (x+2)<3$에서 $\log_2 (x+2)<\log_2 2^3$

밑 2는 $2>1$이므로 $x+2<8$ $\therefore x<6$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면

$1\le x<6$

따라서 자연수 x는 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 개수는 5이다

답 5

41

진수의 조건에서 $|x-3|>0$, $x>0$, $\frac{x^2}{9}>0$

$\therefore 0<x<3$ 또는 $x>3$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{4}} |x-3|>1$에서 $\log_{\frac{1}{4}} |x-3|>\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}$

밑 $\frac{1}{4}$은 $0<\frac{1}{4}<1$이므로

$|x-3|<\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}<x-3<\frac{1}{4}$

$\therefore \frac{11}{4}<x<\frac{13}{4}$ ……㉡

$\log_3 x \times \log_3 \frac{x^2}{9} \le 0$에서 $\log_3 x(2\log_3 x - 2) \le 0$

$\therefore\ 2(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x \le 0$

$\log_3 x = t$로 놓으면

$2t^2 - 2t \le 0,\ t(t-1) \le 0 \qquad \therefore\ 0 \le t \le 1$

즉 $0 \le \log_3 x \le 1$이므로 $\log_3 1 \le \log_3 x \le \log_3 3^1$

밑 3은 $3>1$이므로 $1 \le x \le 3$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면 $\frac{11}{4} < x < 3$

답 $\frac{11}{4} < x < 3$

42

x^2의 계수가 0이 아니어야 하므로

$\log a + 2 \ne 0 \qquad \therefore\ a \ne \frac{1}{100}$ ······ ㉠

진수의 조건에서 $a>0,\ a^2>0 \qquad \therefore\ a>0$ ······ ㉡

이차방정식 $(\log a + 2)x^2 - (\log a^2)x + 1 = 0$, 즉

$(\log a + 2)x^2 - 2(\log a)x + 1 = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = (-\log a)^2 - (\log a + 2) = (\log a)^2 - \log a - 2$

중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$(\log a)^2 - \log a - 2 = 0$

$\log a = t$로 놓으면

$t^2 - t - 2 = 0,\ (t+1)(t-2) = 0$

$\therefore\ t = -1$ 또는 $t = 2$

즉 $\log a = -1$ 또는 $\log a = 2$이므로

$a = 10^{-1} = \frac{1}{10}$ 또는 $a = 10^2 = 100$ ($\because$ ㉠, ㉡)

따라서 자연수 a의 값은 100이다. 답 100

43

x^2의 계수가 0이 아니어야 하므로

$\log a - 1 \ne 0 \qquad \therefore\ a \ne 10$ ······ ㉠

진수의 조건에서 $a>0$ ······ ㉡

이차방정식 $(\log a - 1)x^2 - 4(\log a - 1)x + 4 = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = \{-2(\log a - 1)\}^2 - 4(\log a - 1)$

$\quad = 4(\log a)^2 - 12\log a + 8$

실근을 갖지 않으려면 $D<0$이어야 하므로

$4(\log a)^2 - 12\log a + 8 < 0$

$\therefore\ (\log a)^2 - 3\log a + 2 < 0$

$\log a = t$로 놓으면

$t^2 - 3t + 2 < 0,\ (t-1)(t-2) < 0 \qquad \therefore\ 1 < t < 2$

즉 $1 < \log a < 2$이므로

$\log 10^1 < \log a < \log 10^2$

밑 10은 $10>1$이므로 $10 < a < 100$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면 $10 < a < 100$

따라서 $\alpha = 10,\ \beta = 100$이므로

$\log \alpha\beta = \log 1000 = \log 10^3 = 3$

답 3

44

진수의 조건에서 $a>0$ ······ ㉠

모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 + 2(\log_2 a)x + 4\log_2 a - 3 = 0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = (\log_2 a)^2 - (4\log_2 a - 3) < 0$

$\therefore\ (\log_2 a)^2 - 4\log_2 a + 3 < 0$

$\log_2 a = t$로 놓으면

$t^2 - 4t + 3 < 0,\ (t-1)(t-3) < 0$

$\therefore\ 1 < t < 3$

즉 $1 < \log_2 a < 3$이므로 $\log_2 2^1 < \log_2 a < \log_2 2^3$

밑 2는 $2>1$이므로 $2 < a < 8$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2 < a < 8$

답 $2 < a < 8$

45

진수의 조건에서 $3a>0,\ a>0 \qquad \therefore\ a>0$ ······ ㉠

모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 - 2(\log_3 3a)x + 3(1 + \log_3 a) = 0$의 판별식을 D라 하면 $D \le 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = (-\log_3 3a)^2 - 3(1 + \log_3 a) \le 0$

$(-1 - \log_3 a)^2 - (3 + 3\log_3 a) \le 0$

$\therefore\ (\log_3 a)^2 - \log_3 a - 2 \le 0$

$\log_3 a = t$로 놓으면

$t^2 - t - 2 \le 0,\ (t+1)(t-2) \le 0$

$\therefore\ -1 \le t \le 2$

즉 $-1 \le \log_3 a \le 2$이므로 $\log_3 3^{-1} \le \log_3 a \le \log_3 3^2$

밑 3은 $3>1$이므로 $\frac{1}{3} \le a \le 9$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{3} \le a \le 9$

따라서 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9이므로 그 개수는 9이다.

답 9

46

마우스를 한 번 클릭할 때마다 파일의 크기가 2배로 커지므로 n번 클릭한 후의 파일의 크기는 1000×2^n(바이트)로 증가한다.
이때 바이러스의 크기가 5기가바이트보다 커지면 시스템이 다운되므로
$1000\times2^n>5\times10^9 \qquad \therefore 2^n>5\times10^6$
양변에 상용로그를 취하면
$\log 2^n>\log(5\times10^6)$, $n\log 2>\log 5+6$
$n\log 2>7-\log 2\left(\because \log 5=\log\dfrac{10}{2}=1-\log 2\right)$
$\therefore n>\dfrac{7-\log 2}{\log 2}=\dfrac{7-0.3010}{0.3010}=\dfrac{6.6990}{0.3010}=22.25\cdots$
따라서 마우스를 최소한 23번 클릭하면 시스템이 다운된다.

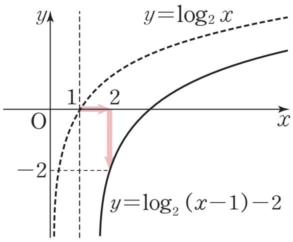
답 23번

연습문제

p. 136 ~ 141

1

함수 $y=\log_2(x-1)-2$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 정의역은 $\{x|x>1$인 모든 실수$\}$이다.
ㄴ. 치역은 실수 전체의 집합이다.
ㄷ. x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
ㄹ. 그래프의 점근선의 방정식은 $x=1$이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

2

주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$이므로
$a=-2$
즉 함수 $y=\log_2(x+2)+b$의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로 $2=\log_2(0+2)+b$
$2=1+b \qquad \therefore b=1$
$\therefore a+b=-2+1=-1$

답 ③

3

$f(-1)=0$에서 $\log_{\frac{1}{2}}(-a+b)=0$
$-a+b=1 \qquad \therefore a-b=-1$ ……㉠
$f(0)=-2$에서 $\log_{\frac{1}{2}}b=-2$
$\therefore b=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=4$
$b=4$를 ㉠에 대입하면
$a-4=-1 \qquad \therefore a=3$
$\therefore ab=3\times4=12$

답 12

4

함수 $y=3^x+2$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=2$
함수 $y=\log_3(x-4)$의 그래프의 점근선의 방정식은
$x=4$
따라서 두 점근선이 만나는 점의 좌표는 $(4, 2)$이므로
$a=4$, $b=2$
$\therefore a+b=4+2=6$

답 6

5

함수 $y=\log_2(x+3)+3$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y-q=\log_2(x-p+3)+3$
$\therefore y=\log_2(x-p+3)+3+q$
이 그래프가 $y=\log_2 4(x-2)-2$, 즉 $y=\log_2(x-2)$의 그래프와 겹쳐지므로
$-p+3=-2$, $3+q=0$
따라서 $p=5$, $q=-3$이므로
$p+q=5+(-3)=2$

답 2

6

ㄱ. $y=3^{x-1}$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
ㄴ. $y=\log_9 3(x-2)^2$
$=\log_{3^2}3+\log_{3^2}(x-2)^2$
$=\log_3(x-2)+\dfrac{1}{2}$
이 함수의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\log_{\frac{1}{3}}\frac{3}{x}=-\log_3\frac{3}{x}$

$=-(\log_3 3-\log_3 x)$

$=\log_3 x-1$

이 함수의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\log_3(3x-2)+3$

$=\log_3 3\left(x-\frac{2}{3}\right)+3$

$=\log_3 3+\log_3\left(x-\frac{2}{3}\right)+3$

$=\log_3\left(x-\frac{2}{3}\right)+4$

이 함수의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{2}{3}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이므로 그 개수는 4이다. 답 ⑤

7

$y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+3$에서 밑 $\frac{1}{2}$은 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 $2\le x\le 5$에서 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+3$은

$x=2$일 때 최대이고, 최댓값 M은

$M=\log_{\frac{1}{2}}1+3=3$

$x=5$일 때 최소이고, 최솟값 m은

$m=\log_{\frac{1}{2}}4+3=1$

$\therefore M-m=3-1=2$ 답 2

8

진수의 조건에서

$x-4>0,\ x-1>0 \qquad \therefore x>4$ ……㉠

$\log_2(x-4)=1+\log_4(x-1)$에서

$\log_2(x-4)=\log_2 2+\frac{1}{2}\log_2(x-1)$

$2\log_2(x-4)=2\log_2 2+\log_2(x-1)$

$\log_2(x-4)^2=\log_2 2^2+\log_2(x-1)$

$\log_2(x-4)^2=\log_2 4(x-1)$

즉 $(x-4)^2=4(x-1)$이므로

$x^2-12x+20=0,\ (x-2)(x-10)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=10$

이때 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=10$

따라서 $a=10$이므로

$\log_{27}(a-1)=\log_{27}(10-1)=\log_{27}9$

$=\log_{3^3}3^2=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

> 참고 로그의 진수 또는 밑에 미지수가 있는 방정식을 풀 때 구한 해가 처음 주어진 방정식에 있는 로그의 밑의 조건과 진수의 조건을 만족시키는지 반드시 확인한다.
> ① 밑의 조건: (밑)>0, (밑)$\ne 1$ ② 진수의 조건: (진수)>0

9

Step by Step

진수의 조건을 구한다.

↓

밑을 같게 만든 후 진수를 서로 비교한다.

↓

x의 값의 범위를 구한 후 정수 x의 개수를 구한다.

진수의 조건에서

$\frac{x+5}{3}>0,\ \frac{1}{x}>0 \qquad \therefore x>0$ ……㉠

$\log_2\frac{x+5}{3}-1\le\log_2\frac{1}{x}$에서

$\log_2\frac{x+5}{3}-\log_2 2\le\log_2\frac{1}{x}$

$\log_2\frac{x+5}{6}\le\log_2\frac{1}{x}$

즉 $\frac{x+5}{6}\le\frac{1}{x}$이므로 $x(x+5)\le 6$

$x^2+5x-6\le 0,\ (x+6)(x-1)\le 0$

$\therefore -6\le x\le 1$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x\le 1$

따라서 정수 x는 1이므로 그 개수는 1이다. 답 1

10

$y=\log_9(x-3)+2$에서 진수의 조건에 의하여

$x-3>0$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x>3\}$이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

$y=\log_9(x-3)+2$에서 $y-2=\log_9(x-3)$

로그의 정의에 의하여 $x-3=9^{y-2}$

$\therefore x=9^{y-2}+3$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=9^{x-2}+3=3^{2(x-2)}+3=3^{2x-4}+3$

따라서 $a=3,\ b=-4,\ c=3$이므로

$a+b+c=3+(-4)+3=2$ 답 2

11

함수 $y=\log_a x+m$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 만나는 두 점은 함수 $y=\log_a x+m$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 두 점과 같다.
이때 두 교점의 x좌표가 1, 3이므로 함수 $y=\log_a x+m$의 그래프는 두 점 $(1, 1)$, $(3, 3)$을 지난다.
$1=\log_a 1+m$에서 $m=1$
$3=\log_a 3+m$에서 $3=\log_a 3+1$
$\log_a 3=2 \quad \therefore a^2=3$
$\therefore m^2+a^2=1^2+3=4$

답 ③

12

진수의 조건에서
$\frac{x}{2}>0,\ 4x>0 \quad \therefore x>0$ ……㉠
$\left(\log_2 \frac{x}{2}\right)(\log_2 4x)=4$에서
$(\log_2 x-1)(2+\log_2 x)=4$
$\log_2 x=t$로 놓으면
$(t-1)(2+t)=4,\ t^2+t-2=4$
$t^2+t-6=0,\ (t+3)(t-2)=0$
$\therefore t=-3$ 또는 $t=2$
즉 $\log_2 x=-3$ 또는 $\log_2 x=2$이므로
$x=2^{-3}=\frac{1}{8}$ 또는 $x=2^2=4$ ($\because$ ㉠)
따라서 $\alpha=\frac{1}{8}$, $\beta=4$이므로
$64\alpha\beta=64\times\frac{1}{8}\times4=32$

답 32

13

진수의 조건에서
$5-x>0,\ x+3>0 \quad \therefore -3<x<5$
$y=\log_4(5-x)+\log_4(x+3)$
$=\log_4(5-x)(x+3)$
$=\log_4(-x^2+2x+15)$
$f(x)=-x^2+2x+15$로 놓으면
$y=\log_4(-x^2+2x+15)=\log_4 f(x)$
$f(x)=-x^2+2x+15=-(x-1)^2+16$이므로
$-3<x<5$에서 $f(x)$의 최댓값은 16이다.
이때 $y=\log_4 f(x)$에서 밑 4는 $4>1$이므로 함수 $y=\log_4 f(x)$는 $f(x)$가 최대일 때 y의 값은 최대가 된다.
따라서 $-3<x<5$에서 함수 $y=\log_4 f(x)$는 $f(x)=16$일 때 최대이고, 최댓값은
$\log_4 16=\log_4 4^2=2$

답 2

14

진수의 조건에서
$9x>0,\ x>0 \quad \therefore x>0$ ……㉠
$(\log_3 9x)(3-\log_3 x)>0$에서
$(2+\log_3 x)(3-\log_3 x)>0$
$\log_3 x=t$로 놓으면
$(2+t)(3-t)>0,\ -t^2+t+6>0$
$t^2-t-6<0,\ (t+2)(t-3)<0$
$\therefore -2<t<3$
즉 $-2<\log_3 x<3$이므로 $\log_3 3^{-2}<\log_3 x<\log_3 3^3$
밑 3은 $3>1$이므로 $\frac{1}{9}<x<27$ ……㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$\frac{1}{9}<x<27$
따라서 정수 x는 1, 2, 3, …, 26이므로 그 개수는 26이다.

답 ②

15

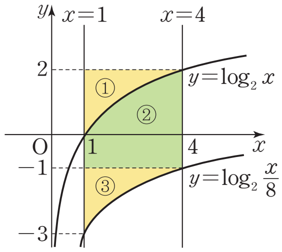
$\log_{\frac{1}{3}}\left(2x+\frac{2}{y}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(2y+\frac{1}{2x}\right)$
$=\log_{\frac{1}{3}}\left(2x+\frac{2}{y}\right)\left(2y+\frac{1}{2x}\right)$
$=\log_{\frac{1}{3}}\left(4xy+\frac{1}{xy}+5\right)$
$4xy>0$, $\frac{1}{xy}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$4xy+\frac{1}{xy}+5\ge2\sqrt{4xy\times\frac{1}{xy}}+5$
$=9$
$\left(\text{단, 등호는 } 4xy=\frac{1}{xy},\ \text{즉 } xy=\frac{1}{2}\text{일 때 성립}\right)$
이때 밑 $\frac{1}{3}$은 $0<\frac{1}{3}<1$이므로
$\log_{\frac{1}{3}}\left(4xy+\frac{1}{xy}+5\right)\le\log_{\frac{1}{3}}9$
$=-2$
따라서 구하는 최댓값은 -2이다.

답 ②

16

$y=\log_2\frac{x}{8}=\log_2 x-\log_2 8=\log_2 x-3$이므로 함수 $y=\log_2\frac{x}{8}$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

오른쪽 그림과 같이 색칠한 ③의 영역을 y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 ①의 영역이 된다.
따라서 구하는 도형의 넓이는
①+②$=3\times3=9$



답 ①

17

$2x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$2x+y\ge2\sqrt{2xy}$
이때 $2x+y=16$이므로 $16\ge2\sqrt{2xy}$
$8\ge\sqrt{2xy}$　　$\therefore 2xy\le64$
$\therefore \log_2 2x+\log_2 y=\log_2 2xy$
$\le\log_2 64$
$=6$
(단, 등호는 $2x=y$, 즉 $x=4$, $y=8$일 때 성립)
따라서 구하는 최댓값은 6이다.

답 6

다른 풀이
$2x+y=16$에서 $y=-2x+16$ $(0<x<8)$이므로
$\log_2 2x+\log_2 y=\log_2 2xy=\log_2 2x(-2x+16)$
$=\log_2(-4x^2+32x)$
$=\log_2\{-4(x-4)^2+64\}$
$=\log_2\{-(x-4)^2+16\}+2$
이때 밑 2가 $2>1$이므로 진수 $-(x-4)^2+16$의 값이 최대일 때 주어진 식은 최댓값을 갖는다.
$-(x-4)^2+16$은 $x=4$일 때 최댓값 16을 가지므로
주어진 식의 최댓값은 $\log_2 16+2=4+2=6$

18

정사각형 ABCD의 넓이가 36이므로
$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AD}=\overline{CD}=6$ ······㉠
점 A의 x좌표를 a $(a>1)$로 놓으면
$A(a, \log_2 a)$, $B\left(a, \log_4 \frac{1}{a}\right)$, $C\left(a+6, \log_4 \frac{1}{a}\right)$,
$D(a+6, \log_2 a)$ ······ ❶
이때 ㉠에서 $\overline{AB}=6$이므로 $\log_2 a-\log_4 \frac{1}{a}=6$
$\log_2 a-\log_{2^2} a^{-1}=6$, $\log_2 a+\frac{1}{2}\log_2 a=6$
$\frac{3}{2}\log_2 a=6$, $\log_2 a=4$　　$\therefore a=2^4=16$ ······ ❷

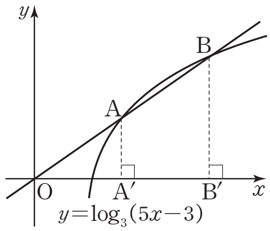
즉 $A(16, 4)$, $C(22, -2)$이므로
직선 AC의 기울기는 $\frac{-2-4}{22-16}=-1$
따라서 직선 AC는 점 $A(16, 4)$를 지나고 기울기가 -1인 직선이므로 직선 AC의 방정식은
$y-4=-(x-16)$　　$\therefore y=-x+20$
따라서 직선 AC의 y절편은 20이다. ······ ❸

답 20

채점 기준	비율
❶ 네 점 A, B, C, D의 좌표를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 직선 AC의 y절편을 구할 수 있다.	20%

19

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하자.
삼각형 AOA′과 삼각형 BOB′은 닮음이므로
$\overline{OA'}:\overline{OB'}=\overline{OA}:\overline{OB}$
$=1:2$



점 A의 좌표를 $(a, \log_3(5a-3))$ $\left(a>\frac{3}{5}\right)$으로 놓으면
$B(2a, \log_3(10a-3))$
점 A는 선분 OB의 중점이므로
$\frac{\log_3(10a-3)}{2}=\log_3(5a-3)$
$\log_3(10a-3)=2\log_3(5a-3)$
$\log_3(10a-3)=\log_3(5a-3)^2$
즉 $10a-3=(5a-3)^2$이므로 $10a-3=25a^2-30a+9$
$25a^2-40a+12=0$, $(5a-2)(5a-6)=0$
$\therefore a=\frac{2}{5}$ 또는 $a=\frac{6}{5}$
이때 $a>\frac{3}{5}$이므로 $a=\frac{6}{5}$　　$\therefore A\left(\frac{6}{5}, 1\right)$
세 점 O, A, B가 한 직선 위에 있으므로
(직선 AB의 기울기)=(직선 OA의 기울기)
$=\frac{1-0}{\frac{6}{5}-0}=\frac{5}{6}$

답 $\frac{5}{6}$

20

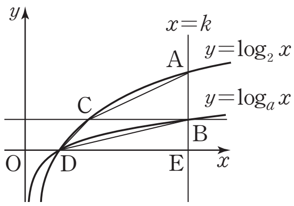
$y=\left(\log_3 \frac{1}{x}\right)(\log_3 x)+2\log_3 x+a$
$=-\log_3 x\times\log_3 x+2\log_3 x+a$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 27$에서
$\log_3 1\le \log_3 x\le \log_3 27$
$\therefore\ 0\le t\le 3$
이때 주어진 함수는
$y=-t^2+2t+a=-(t-1)^2+a+1$
즉 $0\le t\le 3$에서 함수 $y=-(t-1)^2+a+1$은
$t=1$일 때 최대이고, 최댓값은
$a+1$
$t=3$일 때 최소이고, 최솟값은
$-(3-1)^2+a+1=a-3$
이때 최댓값이 4이므로
$a+1=4 \qquad \therefore\ a=3$
따라서 최솟값은 $a-3=0$이므로 $b=0$
$\therefore\ a+b=3+0=3$

답 ③

21

오른쪽 그림과 같이 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 E라 하면 삼각형 ACB와 삼각형 BCD의 넓이의 비가 3 : 2이므로



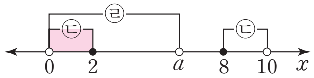
$\frac{1}{2}\times\overline{CB}\times\overline{AB} : \frac{1}{2}\times\overline{CB}\times\overline{BE}=3 : 2$
$\therefore\ \overline{AB} : \overline{BE}=3 : 2$
즉 점 B는 선분 AE를 3 : 2로 내분하는 점이므로
$\overline{AE} : \overline{BE}=5 : 2$
이때 $\overline{BE}=\log_a k$, $\overline{AE}=\log_2 k$이므로
$\log_2 k : \log_a k=5 : 2$, $5\log_a k=2\log_2 k$
$\log_a k=\frac{2}{5}\log_2 k$, $\log_a k=\log_{2^{\frac{5}{2}}} k$
$\therefore\ a=2^{\frac{5}{2}}=4\sqrt{2}$

답 $4\sqrt{2}$

22

진수의 조건에서
$x>0,\ 10-x>0 \qquad \therefore\ 0<x<10$ ······㉠
$\log_2 x+\log_2 (10-x)\le 4$에서
$\log_2 x(10-x)\le \log_2 2^4$
밑 2는 $2>1$이므로 $x(10-x)\le 16$
$10x-x^2\le 16$, $x^2-10x+16\ge 0$
$(x-2)(x-8)\ge 0$
$\therefore\ x\le 2$ 또는 $x\ge 8$ ······㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$0<x\le 2$ 또는 $8\le x<10$ ······㉢

$x^2-ax<0$에서 $x(x-a)<0$
$\therefore\ 0<x<a$ ······㉣
다음 그림과 같이 ㉢, ㉣의 공통 범위에서 x의 값 중 정수가 2개가 되도록 하는 a의 값의 범위는
$2<a\le 8$



따라서 자연수 a는 3, 4, 5, 6, 7, 8이므로 그 합은
$3+4+5+6+7+8=33$

답 33

23

점 A의 x좌표를 $a\ (a>0)$라 하면
$A(a, k)$, $B(a+2, k)$
점 A의 y좌표는 $k=-\log_3 a$
또 점 B의 y좌표는 $k=\log_3 (a+2)$
두 점 A, B의 y좌표가 같으므로
$-\log_3 a=\log_3 (a+2)$, $\log_3 a^{-1}=\log_3 (a+2)$
즉 $\frac{1}{a}=a+2$이므로 $a^2+2a-1=0$
$\therefore\ a=-1+\sqrt{2}\ (\because\ a>0)$
$\therefore\ k=-\log_3 (-1+\sqrt{2})$
$\quad=\log_3 (-1+\sqrt{2})^{-1}$
$\quad=\log_3 \frac{1}{-1+\sqrt{2}}$
$\quad=\log_3 (1+\sqrt{2})$
이때 $S=\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 2\times k=k$이므로
$9^S=9^k=9^{\log_3 (1+\sqrt{2})}=3^{2\log_3 (1+\sqrt{2})}=3^{\log_3 (1+\sqrt{2})^2}$
$\quad=(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$

답 ①

다른 풀이

점 A의 y좌표가 k이므로 $k=-\log_3 x$에서
$\log_3 x=-k$, $x=3^{-k} \qquad \therefore\ A(3^{-k}, k)$
또 점 B의 y좌표가 k이므로 $k=\log_3 x$에서
$x=3^k \qquad \therefore\ B(3^k, k)$
이때 $\overline{AB}=2$이므로 $3^k-3^{-k}=2$
$3^k>0$이므로 양변에 3^k을 곱하여 정리하면
$3^{2k}-2\times 3^k-1=0$
$3^k=t\ (t>0)$로 놓으면
$t^2-2t-1=0 \qquad \therefore\ t=1+\sqrt{2}\ (\because\ t>0)$
즉 $3^k=1+\sqrt{2}$이고 $S=\triangle ABC=k$이므로
$9^S=9^k=(3^k)^2=(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$

24

곡선 $y=\log_2 x$를 원점에 대하여 대칭이동한 곡선은

$-y=\log_2(-x)$ $\quad\therefore y=-\log_2(-x)$

이 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{5}{2}$만큼 평행이동한 곡선은

$y=-\log_2\left\{-\left(x-\frac{5}{2}\right)\right\}=-\log_2\left(-x+\frac{5}{2}\right)$

$\therefore f(x)=-\log_2\left(-x+\frac{5}{2}\right)$

두 곡선 $y=\log_2 x$와 $y=f(x)$의 두 교점 A, B의 x좌표를 각각 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 두 실수 α, β는 방정식

$\log_2 x=-\log_2\left(-x+\frac{5}{2}\right)$의 해이다.

$\log_2 x=-\log_2\left(-x+\frac{5}{2}\right)$에서

$-\log_2 x=\log_2\left(-x+\frac{5}{2}\right)$

$\log_2 x^{-1}=\log_2\left(-x+\frac{5}{2}\right)$

즉 $\frac{1}{x}=-x+\frac{5}{2}$이므로 $2=-2x^2+5x$

$2x^2-5x+2=0,\ (2x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

즉 $A\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, $B(2, 1)$이므로

직선 AB의 기울기는 $\dfrac{1-(-1)}{2-\frac{1}{2}}=\dfrac{4}{3}$

따라서 $p=3,\ q=4$이므로

$10p+q=10\times3+4=34$

답 34

25

점 D의 좌표를 $D(a, 0)\ (a>0)$이라 하면

$A(1, 0),\ B(p, 0),\ C(a, a-p)$

이때 점 C는 곡선 $y=\log_2 x$ 위에 있으므로

$a-p=\log_2 a$ ……㉠

삼각형 BDC의 넓이가 $\frac{9}{2}$이므로

$\frac{1}{2}(a-p)^2=\frac{9}{2},\ (a-p)^2=9$

$\therefore a-p=3\ (\because a>p)$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$3=\log_2 a$ $\quad\therefore a=2^3=8$

$a=8$을 ㉡에 대입하면

$8-p=3$ $\quad\therefore p=5$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times3=6$

답 6

26

질량이 200 (ton), 속력이 2 (km/초)인 로켓이 비행하는 동안 질량이 160 (ton), 속력이 2.5 (km/초)로 변하였으므로

$2.5=k\alpha\log\frac{200}{160}+2,\ \frac{1}{2}=k\alpha\log\frac{5}{4}$

$\therefore k\alpha=\dfrac{1}{2\log\frac{5}{4}}$ ……㉠

질량이 200 (ton), 속력이 2 (km/초)인 로켓이 비행하는 동안 질량이 a (ton), 속력이 3 (km/초)로 변하였으므로

$3=k\alpha\log\frac{200}{a}+2,\ 1=k\alpha\log\frac{200}{a}$

$\therefore k\alpha=\dfrac{1}{\log\frac{200}{a}}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{1}{2\log\frac{5}{4}}=\dfrac{1}{\log\frac{200}{a}}$이므로

$2\log\frac{5}{4}=\log\frac{200}{a},\ \log\left(\frac{5}{4}\right)^2=\log\frac{200}{a}$

즉 $\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{200}{a}$이므로 $25a=3200$

$\therefore a=128$

답 ③

Level Up 연습문제

p. 142

1

약물 A의 흡수율과 배설률을 각각 K_A, E_A라 하고, 약물 B의 흡수율과 배설률을 각각 K_B, E_B라 하자.

주어진 조건에 의하여

$K_A=K_B,\ E_A=\frac{1}{2}K_A,\ E_B=\frac{1}{4}K_B$

약물 A의 혈중 농도가 최고치에 도달하는 시간이 3시간이므로

$$\begin{aligned}3&=c\times\frac{\log K_A-\log E_A}{K_A-E_A}\\&=c\times\frac{\log K_A-\log\frac{1}{2}K_A}{K_A-\frac{1}{2}K_A}\\&=c\times\frac{\log 2}{\frac{1}{2}K_A}\\&=c\times\frac{2\log 2}{K_A}\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{c}{K_A}=\dfrac{3}{2\log 2}$ ……㉠

약물 B의 혈중 농도가 최고치에 도달하는 시간이 a시간이므로

$$a=c\times\frac{\log K_B-\log E_B}{K_B-E_B}$$
$$=c\times\frac{\log K_B-\log\frac{1}{4}K_B}{K_B-\frac{1}{4}K_B}$$
$$=c\times\frac{\log 4}{\frac{3}{4}K_B}$$
$$=\frac{c}{K_B}\times\frac{8\log 2}{3}$$
$$=\frac{c}{K_A}\times\frac{8\log 2}{3}\ (\because K_A=K_B)$$
$$=\frac{3}{2\log 2}\times\frac{8\log 2}{3}\ (\because ㉠)$$
$$=4$$

따라서 약물 B를 투여한 후 약물 B의 혈중 농도가 최고치에 도달하는 시간은 4시간이다.

답 ②

2

진수의 조건에서

$f(x)>0$, 즉 $x<0$ 또는 $x>8$

$|g(x)|>0$, 즉 $x\neq 4$인 모든 실수

$\therefore x<0$ 또는 $x>8$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{2}} f(x)\geq\log_{\frac{1}{2}}|g(x)|$에서

밑 $\frac{1}{2}$은 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$f(x)\leq|g(x)|$ ……㉡

한편 $f(x)=ax(x-8)\ (a>0)$,

$g(x)=b(x-4)\ (b>0)$로 놓으면

$f(2)=g(2)$이므로 $-12a=-2b$ $\quad\therefore b=6a$

$\therefore f(x)=ax(x-8),\ g(x)=6a(x-4)\ (a>0)$

위의 식을 ㉡에 각각 대입하면

$ax(x-8)\leq|6a(x-4)|$

(i) $x-4\geq 0$, 즉 $x\geq 4$일 때

$ax(x-8)\leq 6a(x-4),\ x(x-8)\leq 6(x-4)$

$x^2-8x\leq 6x-24,\ x^2-14x+24\leq 0$

$(x-2)(x-12)\leq 0$ $\quad\therefore 2\leq x\leq 12$

그런데 $x\geq 4$이므로 $4\leq x\leq 12$

(ii) $x-4<0$, 즉 $x<4$일 때

$ax(x-8)\leq -6a(x-4),\ x(x-8)\leq -6(x-4)$

$x^2-8x\leq -6x+24,\ x^2-2x-24\leq 0$

$(x+4)(x-6)\leq 0$ $\quad\therefore -4\leq x\leq 6$

그런데 $x<4$이므로 $-4\leq x<4$

(i), (ii)에서 구하는 부등식의 해는

$-4\leq x\leq 12$ ……㉢

㉠, ㉢의 공통 범위를 구하면

$-4\leq x<0$ 또는 $8<x\leq 12$

따라서 정수 x는 $-4, -3, -2, -1, 9, 10, 11, 12$이므로 그 개수는 8이다.

답 8

3

두 함수 $y=a^x$과 $y=\log_a x$는 서로 역함수 관계이므로 점 A의 좌표를 $(t, -t+6)\ (t>0)$이라 하면

$B(-t+6, t)$

이때 $t<-t+6$이므로 $2t<6$

$\therefore 0<t<3$ ……㉠

ㄱ. $\overline{AB}=\sqrt{(-2t+6)^2+(2t-6)^2}$

$=\sqrt{2(2t-6)^2}$

$=\sqrt{8(t-3)^2}$

$=2\sqrt{2}(3-t)\ (\because ㉠)$

D(0, 6)이므로

$\overline{AD}=\sqrt{(-t)^2+t^2}=\sqrt{2t^2}=\sqrt{2}t\ (\because ㉠)$

한편 점 O와 직선 $y=-x+6$, 즉 $x+y-6=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-6|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$

이때 삼각형 AOB의 넓이가 6이므로

$6=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times 3\sqrt{2},\ 6=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}(3-t)\times 3\sqrt{2}$

$1=3-t$ $\quad\therefore t=2$

즉 $\overline{AB}=2\sqrt{2},\ \overline{AD}=2\sqrt{2}$이므로

$\overline{AB}=\overline{AD}$

ㄴ. A(2, 4)이고 곡선 $y=a^x$이 점 A를 지나므로

$4=a^2$ $\quad\therefore a=2\ (\because a>1)$

ㄷ. 직선 $y=x$의 기울기는 1이므로

두 직선 $y=x,\ y=-x+6$의 교점은 점 H이다.

$\therefore \angle HOC=\angle DOH=45°$

두 직각삼각형 DOH, HOC는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{OH}=\overline{DH}=\overline{CH}$

$\therefore \overline{CD}=\overline{DH}+\overline{CH}=2\overline{OH}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

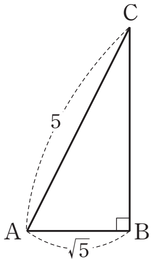
답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

1 삼각함수

특강 확인 문제 p. 145

1

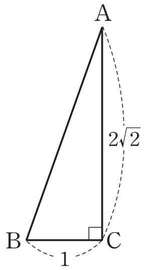
(1) $\cos A=\frac{\sqrt{5}}{5}$를 만족시키는 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $\overline{BC}=\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}$ 이므로

$\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\tan A=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=2$

(2) $\tan B=2\sqrt{2}$를 만족시키는 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $\overline{AB}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$이므로

$\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos B=\frac{1}{3}$

$\therefore \sin B\times\cos B=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{9}$

답 (1) $\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\tan A=2$ (2) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$

2

(1) $(\sin 60^\circ+\cos 30^\circ)(\tan 45^\circ+\sin 30^\circ)$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(2) $(\sqrt{3}+\sin 60^\circ)(\sqrt{3}\tan 45^\circ-\cos 30^\circ)$

$=\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3}\times1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{4}$

(3) $(\sin 30^\circ+\cos 30^\circ)(\cos 60^\circ-\sin 60^\circ)$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$

답 (1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{9}{4}$ (3) $-\frac{1}{2}$

3

(1) $\tan 30^\circ=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AC}}{6\sqrt{3}}$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\overline{AC}}{6\sqrt{3}}$

$\therefore \overline{AC}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times6\sqrt{3}=6$

(2) $\cos 30^\circ=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{6\sqrt{3}}{\overline{BC}}$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{6\sqrt{3}}{\overline{BC}}$

$\therefore \overline{BC}=6\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=12$

답 (1) 6 (2) 12

4

(1) $\tan 45^\circ=\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\frac{3}{\overline{BH}}$이므로 $1=\frac{3}{\overline{BH}}$

$\therefore \overline{BH}=3$

(2) $\tan 60^\circ=\frac{\overline{AH}}{\overline{CH}}=\frac{3}{\overline{CH}}$이므로 $\sqrt{3}=\frac{3}{\overline{CH}}$

$\therefore \overline{CH}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

(3) $\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}=3+\sqrt{3}$

답 (1) 3 (2) $\sqrt{3}$ (3) $3+\sqrt{3}$

다른 풀이

(1) $\angle AHB=90^\circ$, $\angle ABH=45^\circ$이므로 삼각형 ABH는 직각이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{BH}=\overline{AH}=3$

확인 문제 p. 148~168

01

주어진 각을 $360^\circ\times n+\alpha^\circ$ (n은 정수) 꼴로 나타내면

$-990^\circ=360^\circ\times(-3)+90^\circ=360^\circ\times(-4)+450^\circ$

$=360^\circ\times(-5)+810^\circ=\cdots$

이므로 최소의 양의 각 α°는 90°이다.

$\therefore \alpha=90$

답 90

02

주어진 각을 $360^\circ\times n+\alpha^\circ$ (n은 정수, $0^\circ\le\alpha^\circ<360^\circ$) 꼴로 나타내면

① $-320^\circ=360^\circ\times(-1)+40^\circ$

② $40^\circ=360^\circ\times0+40^\circ$ ③ $400^\circ=360^\circ\times1+40^\circ$

④ $650^\circ=360^\circ\times1+290^\circ$ ⑤ $1120^\circ=360^\circ\times3+40^\circ$

따라서 같은 위치의 동경을 나타내는 것이 아닌 것은 ④이다.

답 ④

03

주어진 각을 $360^\circ\times n+\alpha^\circ$ (n은 정수, $0^\circ\le\alpha^\circ<360^\circ$) 꼴로 나타내면

① $-400^\circ=360^\circ\times(-2)+320^\circ$

② $-210^\circ=360^\circ\times(-1)+150^\circ$

③ $75^\circ=360^\circ\times0+75^\circ$

④ $480^\circ=360^\circ\times1+120^\circ$

⑤ $800^\circ=360^\circ\times2+80^\circ$

따라서 α의 값이 가장 큰 것은 ①이다.

답 ①

04

주어진 각을 $360^\circ\times n+\alpha^\circ$ (n은 정수, $0^\circ\le\alpha^\circ<360^\circ$) 꼴로 나타내면

① $-690^\circ=360^\circ\times(-2)+30^\circ$

② $-70^\circ=360^\circ\times(-1)+290^\circ$

③ $430^\circ=360^\circ\times1+70^\circ$

④ $780^\circ=360^\circ\times2+60^\circ$

⑤ $1100^\circ=360^\circ\times3+20^\circ$

따라서 동경이 존재하는 사분면이 다른 것은 ②이다.

답 ②

05

주어진 각을 $360^\circ\times n+\alpha^\circ$ (n은 정수, $0^\circ\le\alpha^\circ<360^\circ$) 꼴로 나타내면

(1) $-240^\circ=360^\circ\times(-1)+120^\circ$

이때 $90^\circ<120^\circ<180^\circ$이므로 제2사분면의 각이다.

(2) $-100^\circ=360^\circ\times(-1)+260^\circ$

이때 $180^\circ<260^\circ<270^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.

(3) $560^\circ=360^\circ\times1+200^\circ$

이때 $180^\circ<200^\circ<270^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.

(4) $750^\circ=360^\circ\times2+30^\circ$

이때 $0^\circ<30^\circ<90^\circ$이므로 제1사분면의 각이다.

답 (1) 제2사분면 (2) 제3사분면 (3) 제3사분면 (4) 제1사분면

06

θ가 제1사분면의 각이므로 일반각으로 나타내면

$360^\circ\times n<\theta<360^\circ\times n+90^\circ$ (n은 정수) ······㉠

(1) ㉠의 각 변을 2로 나누면

$180^\circ\times n<\dfrac{\theta}{2}<180^\circ\times n+45^\circ$

(i) $n=0$일 때, $0^\circ<\dfrac{\theta}{2}<45^\circ$

$\therefore$ $\dfrac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각

(ii) $n=1$일 때, $180^\circ<\dfrac{\theta}{2}<225^\circ$

$\therefore$ $\dfrac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각

$n=2, 3, 4, \cdots$일 때, $\dfrac{\theta}{2}$를 나타내는 동경의 위치는 제1, 3사분면이 반복된다.

따라서 $\dfrac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제1사분면, 제3사분면이다.

(2) ㉠의 각 변을 3으로 나누면

$120^\circ\times n<\dfrac{\theta}{3}<120^\circ\times n+30^\circ$

(i) $n=0$일 때, $0^\circ<\dfrac{\theta}{3}<30^\circ$

$\therefore$ $\dfrac{\theta}{3}$는 제1사분면의 각

(ii) $n=1$일 때, $120^\circ<\dfrac{\theta}{3}<150^\circ$

$\therefore$ $\dfrac{\theta}{3}$는 제2사분면의 각

(iii) $n=2$일 때, $240^\circ<\dfrac{\theta}{3}<270^\circ$

$\therefore$ $\dfrac{\theta}{3}$는 제3사분면의 각

$n=3, 4, 5, \cdots$일 때, $\dfrac{\theta}{3}$를 나타내는 동경의 위치는 제1, 2, 3사분면이 반복된다.

따라서 $\dfrac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면이다.

답 (1) 제1, 3사분면 (2) 제1, 2, 3사분면

07

각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$4\theta-\theta=360^\circ\times n$ (n은 정수)

$3\theta=360^\circ\times n$ $\quad\therefore\ \theta=120^\circ\times n$ ······㉠

이때 $0^\circ<\theta<360^\circ$이므로

$0^\circ<120^\circ\times n<360^\circ$ $\quad\therefore\ 0<n<3$

n은 정수이므로 $n=1, 2$

$n=1$이면 ㉠에서 $\theta=120^\circ$, $n=2$이면 ㉠에서 $\theta=240^\circ$

답 120°, 240°

08

각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$5\theta-\theta=360^\circ\times n+180^\circ$ (n은 정수)

$4\theta=360^\circ\times n+180^\circ$

$\therefore\ \theta=90^\circ\times n+45^\circ$ ······㉠

이때 $90^\circ<\theta<180^\circ$이므로

$90^\circ<90^\circ\times n+45^\circ<180^\circ$ $\quad\therefore\ \dfrac{1}{2}<n<\dfrac{3}{2}$

n은 정수이므로 $n=1$

$n=1$이면 ㉠에서 $\theta=135^\circ$

답 135°

09

각 2θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$2\theta+7\theta=360^\circ\times n$ (n은 정수)

$9\theta=360^\circ\times n$ $\quad\therefore \theta=40^\circ\times n$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $0^\circ<\theta<180^\circ$이므로

$0^\circ<40^\circ\times n<180^\circ$ $\quad\therefore 0<n<\dfrac{9}{2}$

n은 정수이므로 $n=1, 2, 3, 4$

$n=1$이면 ㉠에서 $\theta=40^\circ$

$n=2$이면 ㉠에서 $\theta=80^\circ$

$n=3$이면 ㉠에서 $\theta=120^\circ$

$n=4$이면 ㉠에서 $\theta=160^\circ$

답 $40^\circ, 80^\circ, 120^\circ, 160^\circ$

10

① $120^\circ=120\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{2}{3}\pi$

② $-240^\circ=-240\times\dfrac{\pi}{180}=-\dfrac{4}{3}\pi$

③ $480^\circ=480\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{8}{3}\pi$

④ $\dfrac{7}{6}\pi=\dfrac{7}{6}\pi\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=210^\circ$

⑤ $\dfrac{3}{2}\pi=\dfrac{3}{2}\pi\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=270^\circ$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

11

① $-\dfrac{5}{6}\pi=-\dfrac{5}{6}\pi\times\dfrac{180^\circ}{\pi}$

$=-150^\circ$

$=360^\circ\times(-1)+210^\circ$

이때 $180^\circ<210^\circ<270^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.

② $-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}\times\dfrac{180^\circ}{\pi}$

$=-60^\circ$

$=360^\circ\times(-1)+300^\circ$

이때 $270^\circ<300^\circ<360^\circ$이므로 제4사분면의 각이다.

③ $\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}\times\dfrac{180^\circ}{\pi}$

$=30^\circ$

$=360^\circ\times 0+30^\circ$

이때 $0^\circ<30^\circ<90^\circ$이므로 제1사분면의 각이다.

④ $\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{3}{4}\pi\times\dfrac{180^\circ}{\pi}$

$=135^\circ$

$=360^\circ\times 0+135^\circ$

이때 $90^\circ<135^\circ<180^\circ$이므로 제2사분면의 각이다.

⑤ $\dfrac{13}{12}\pi=\dfrac{13}{12}\pi\times\dfrac{180^\circ}{\pi}$

$=195^\circ$

$=360^\circ\times 0+195^\circ$

이때 $180^\circ<195^\circ<270^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.

따라서 제2사분면의 각은 ④이다.

답 ④

12

(1) $450^\circ=360^\circ\times 1+90^\circ$이고 $90^\circ=90\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)

(2) $740^\circ=360^\circ\times 2+20^\circ$이고 $20^\circ=20\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{9}$

$\therefore 2n\pi+\dfrac{\pi}{9}$ (n은 정수)

(3) $-300^\circ=360^\circ\times(-1)+60^\circ$이고

$60^\circ=60\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore 2n\pi+\dfrac{\pi}{3}$ (n은 정수)

(4) $-705^\circ=360^\circ\times(-2)+15^\circ$이고

$15^\circ=15\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{12}$

$\therefore 2n\pi+\dfrac{\pi}{12}$ (n은 정수)

답 풀이 참조

13

부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면 반지름의 길이가 4 cm, 넓이가 10π cm^{2}이므로

$10\pi=\dfrac{1}{2}\times 4^2\times\theta$, $10\pi=8\theta$

$\therefore \theta=\dfrac{5}{4}\pi$

부채꼴의 호의 길이를 l이라 하면

$l=4\times\dfrac{5}{4}\pi=5\pi$ (cm)

따라서 부채꼴의 둘레의 길이는

$2\times 4+5\pi=8+5\pi$ (cm)

답 $(8+5\pi)$ cm

14

부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면 반지름의 길이가 6 cm, 호의 길이가 3π cm이므로

$3\pi=6\theta \qquad \therefore \theta=\frac{\pi}{2}$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times6\times3\pi=9\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

답 중심각의 크기: $\frac{\pi}{2}$, 넓이: $9\pi\ \mathrm{cm}^2$

15

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 10이므로

$2r+l=10$에서 $l=10-2r\ (0<r<5)$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(10-2r)$$
$$=-r^2+5r$$
$$=-\left(r-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\ (0<r<5)$$

즉 부채꼴의 넓이는 $r=\frac{5}{2}$일 때 최댓값 $\frac{25}{4}$를 갖는다.

이때 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$S=\frac{1}{2}r^2\theta$에서 $\frac{25}{4}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}\right)^2\times\theta$

$\therefore \theta=2$

답 넓이의 최댓값: $\frac{25}{4}$, 중심각의 크기: 2

16

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 30이므로

$2r+l=30$에서 $l=30-2r\ (0<r<15)$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(30-2r)$$
$$=-r^2+15r$$
$$=-\left(r-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{225}{4}\ (0<r<15)$$

즉 부채꼴의 넓이는 $r=\frac{15}{2}$일 때 최댓값 $\frac{225}{4}$를 갖는다.

따라서 구하는 호의 길이는

$l=30-2\times\frac{15}{2}=15$

답 15

17

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 부채꼴의 넓이가 12π이므로

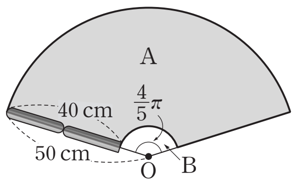
$12\pi=\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{2}{3}\pi,\ r^2=36 \qquad \therefore r=6$

이때 $\widehat{\mathrm{AB}}=6\times\frac{2}{3}\pi=4\pi$이므로 색칠한 부분의 둘레의 길이는

$\widehat{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AB}}=4\pi+6\sqrt{3}$

답 $4\pi+6\sqrt{3}$

18



오른쪽 그림과 같이 큰 부채꼴 모양을 A, 작은 부채꼴 모양을 B라 하면 색칠한 부분의 넓이는

(A의 넓이)$-$(B의 넓이)

이때

$(\text{A의 넓이})=\frac{1}{2}\times50^2\times\frac{4}{5}\pi=1000\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

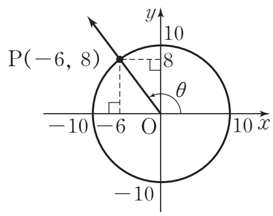
$(\text{B의 넓이})=\frac{1}{2}\times10^2\times\frac{4}{5}\pi=40\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

이므로 구하는 넓이는

$1000\pi-40\pi=960\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

답 $960\pi\ \mathrm{cm}^2$

19



오른쪽 그림에서

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$

이므로 삼각함수의 정의에 의하여

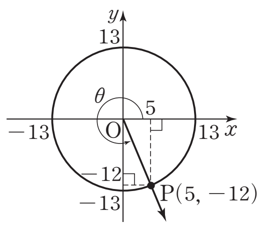
$\sin\theta=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

$\cos\theta=\frac{-6}{10}=-\frac{3}{5}$

$\tan\theta=\frac{8}{-6}=-\frac{4}{3}$

답 $\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

20



오른쪽 그림에서

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$

이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\theta=\frac{-12}{13}=-\frac{12}{13}$

$\cos\theta=\dfrac{5}{13}$

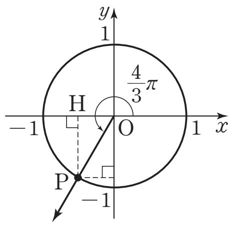
$\tan\theta=\dfrac{-12}{5}=-\dfrac{12}{5}$

(1) $\cos\theta-\sin\theta=\dfrac{5}{13}-\left(-\dfrac{12}{13}\right)=\dfrac{17}{13}$

(2) $\dfrac{1}{\sin\theta\tan\theta}=\dfrac{1}{-\dfrac{12}{13}\times\left(-\dfrac{12}{5}\right)}=\dfrac{65}{144}$

답 (1) $\dfrac{17}{13}$ (2) $\dfrac{65}{144}$

21



오른쪽 그림과 같이 $\theta=\dfrac{4}{3}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OP}=1$이고 $\angle POH=\dfrac{\pi}{3}$이므로

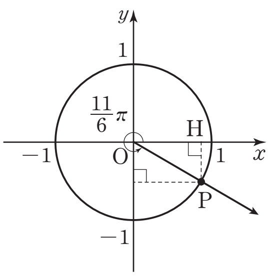
점 P의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

따라서 $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$이므로

$$2\sin\theta-\cos\theta+\tan\theta=2\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\sqrt{3}$$
$$=\dfrac{1}{2}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

22



오른쪽 그림과 같이 $\theta=\dfrac{11}{6}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OP}=1$이고 $\angle POH=\dfrac{\pi}{6}$

이므로 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

따라서 $\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$, $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$-4\sin\theta+2\cos\theta+3\tan\theta$

$=-4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+3\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$=2$

답 2

23

(i) $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}<0$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이므로 각 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta<0$에서

$\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$ 또는 $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로 각 θ는 제4사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 주어진 조건을 동시에 만족시키는 각 θ는 제4사분면의 각이다.

답 제4사분면

24

θ가 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

$\therefore\ |\cos\theta|+|\tan\theta|$

$\qquad+\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta+\tan\theta)^2}$

$=\cos\theta-\tan\theta+(\cos\theta-\sin\theta)$

$\qquad-\{-(\sin\theta+\tan\theta)\}$

$=\cos\theta-\tan\theta+\cos\theta-\sin\theta+\sin\theta+\tan\theta$

$=2\cos\theta$

답 $2\cos\theta$

25

(1) $\dfrac{\cos\theta-\cos^3\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{\cos\theta(1-\cos^2\theta)}{\sin^2\theta}$

$=\dfrac{\cos\theta\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=\cos\theta$

(2) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로

$$\dfrac{(1+\tan\theta)^2}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{\left(1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2}{1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$=\dfrac{\dfrac{(\cos\theta+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$=\dfrac{(\cos\theta+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$$=(\cos\theta+\sin\theta)^2$$

$\therefore\ \dfrac{(1+\tan\theta)^2}{1+\tan^2\theta}+(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=(\cos\theta+\sin\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta$

$\qquad+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2$

답 (1) $\cos\theta$ (2) 2

26

$(\sin\theta+2\cos\theta)^2+(2\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta$

$\qquad+4\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+(4\sin^2\theta+4\cos^2\theta)$

$=1+4=5$

답 5

27

$\sin\theta=-\frac{4}{5}$이고 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$\qquad=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2$

$\qquad=\frac{9}{25}$

이때 각 θ가 제4사분면의 각이므로 $\cos\theta>0$

$\therefore \cos\theta=\frac{3}{5}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로

$\tan\theta=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$

$\therefore 15\cos\theta+15\tan\theta=15\times\frac{3}{5}+15\times\left(-\frac{4}{3}\right)=-11$

답 -11

28

$\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=2+\sqrt{3}$에서

$1+\tan\theta=(2+\sqrt{3})(1-\tan\theta)$

$1+\tan\theta=2+\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})\tan\theta$

$(3+\sqrt{3})\tan\theta=1+\sqrt{3}$

$\therefore \tan\theta=\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

즉 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\sqrt{3}\cos\theta=3\sin\theta$

$\therefore \cos\theta=\sqrt{3}\sin\theta$ ······㉠

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin^2\theta+(\sqrt{3}\sin\theta)^2=1$ ($\because$ ㉠)

$4\sin^2\theta=1 \qquad \therefore \sin^2\theta=\frac{1}{4}$

이때 각 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

29

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$\qquad=1+2\sin\theta\cos\theta$

$\qquad=1+2\times\frac{1}{2}$

$\qquad=2$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\sqrt{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\qquad=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$\qquad=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$\qquad=2$

답 (1) $\sqrt{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) 2

30

(1) $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=2$에서

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=2$, $\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=2$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

(2) $\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$\qquad=\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$\qquad=\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)^2$

$\qquad=4$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 4

31

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2} \qquad \therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore \sin^3\theta - \cos^3\theta$

$= (\sin\theta - \cos\theta)(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$

$= (\sin\theta - \cos\theta)(1 + \sin\theta\cos\theta)$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \left(1 + \dfrac{1}{4}\right)$

$= \dfrac{5\sqrt{2}}{8}$

답 $\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$

32

이차방정식 $3x^2 - x + k = 0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{3}$, $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{k}{3}$ ······㉠

$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \dfrac{1}{9}$

$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{9}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta = -\dfrac{4}{9}$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{k}{3} = -\dfrac{4}{9}$ $\quad \therefore k = -\dfrac{4}{3}$

$\therefore (\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= 1 - 2\sin\theta\cos\theta$

$= 1 - 2 \times \left(-\dfrac{4}{9}\right)$ ($\because$ ㉡)

$= \dfrac{17}{9}$

이때 $\sin\theta > \cos\theta$이므로 $\sin\theta - \cos\theta > 0$

$\therefore \sin\theta - \cos\theta = \dfrac{\sqrt{17}}{3}$

답 $k = -\dfrac{4}{3}$, $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{\sqrt{17}}{3}$

33

이차방정식 $2x^2 - \sqrt{2}x + k = 0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{k}{2}$ ······㉠

$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \dfrac{1}{2}$

$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta = -\dfrac{1}{4}$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{k}{2} = -\dfrac{1}{4}$ $\quad \therefore k = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore \sin^3\theta + \cos^3\theta$

$= (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \left\{1 - \left(-\dfrac{1}{4}\right)\right\}$

$= \dfrac{5\sqrt{2}}{8}$

답 $k = -\dfrac{1}{2}$, $\sin^3\theta + \cos^3\theta = \dfrac{5\sqrt{2}}{8}$

연습문제

p. 169 ~ 171

1

④ $-270^\circ = 360^\circ \times (-1) + 90^\circ = 2\pi \times (-1) + \dfrac{\pi}{2}$이므로 두 각의 동경은 일치한다.

답 ④

2

$\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$이고 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$이므로

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$= 1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2$

$= \dfrac{8}{9}$

이때 $\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$이므로 $\sin\theta < 0$

$\therefore \sin\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로

$\tan\theta = \dfrac{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}{-\dfrac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$

$\therefore \tan\theta - \sin\theta = 2\sqrt{2} - \left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

답 ④

3

$\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}=\dfrac{5}{2}$에서

$\dfrac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}=\dfrac{5}{2}$

$\dfrac{2}{1-\sin^2\theta}=\dfrac{5}{2}$

이때 $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$이므로

$\dfrac{2}{\cos^2\theta}=\dfrac{5}{2}$, $5\cos^2\theta=4$

$\therefore \cos^2\theta=\dfrac{4}{5}$

답 $\dfrac{4}{5}$

4

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 부채꼴의 넓이가 36이므로

$36=\dfrac{1}{2}\times r^2\times 2$, $r^2=36$

$\therefore r=6\ (\because r>0)$

이때 부채꼴의 호의 길이를 l이라 하면

$l=r\times 2=6\times 2=12$

따라서 부채꼴의 반지름의 길이와 호의 길이의 합은

$6+12=18$

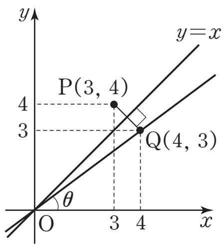
답 ⑤

5

Step by Step

점 P$(3, 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표를 구한다.
↓
선분 OQ의 길이를 구한다.
↓
$\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 각각 구한 후 $5(\cos\theta-\sin\theta)$의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 점 P$(3, 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(4, 3)$



이때 $\overline{OQ}=\sqrt{4^2+3^2}=5$이므로

$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$, $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

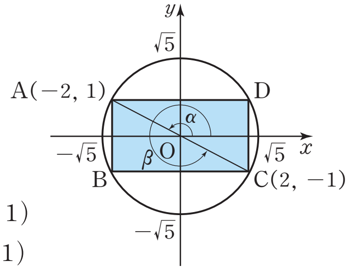
$\therefore 5(\cos\theta-\sin\theta)$

$=5\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\right)=1$

답 1

6

오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의 가로의 길이와 세로의 길이가 각각 4, 2이므로



점 A의 좌표는 $(-2, 1)$

점 C의 좌표는 $(2, -1)$

이때 $\overline{OA}=\sqrt{5}$이므로

$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

또 $\overline{OC}=\sqrt{5}$이므로

$\cos\beta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \sin\alpha\cos\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{2}{5}$

답 $\dfrac{2}{5}$

7

부채꼴의 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 40이므로

$2r+l=40$에서 $l=40-2r\ (0<r<20)$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}rl=\dfrac{1}{2}r(40-2r)$

$\quad=-r^2+20r$

$\quad=-(r-10)^2+100\ (0<r<20)$

즉 부채꼴의 넓이는 $r=10$일 때 최댓값 100을 갖는다.

이때 부채꼴의 호의 길이는 $l=40-2\times 10=20$이므로

$20=10\theta \qquad \therefore \theta=2$

따라서 $r=10$, $\theta=2$이므로

$\dfrac{r}{\theta}=\dfrac{10}{2}=5$

답 5

8

각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$7\theta-\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수), $6\theta=(2n+1)\pi$

$\therefore \theta=\dfrac{(2n+1)}{6}\pi$ ……㉠ …… ❶

이때 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{(2n+1)}{6}\pi<\pi$

$3<2n+1<6 \qquad \therefore 1<n<\dfrac{5}{2}$

n은 정수이므로 $n=2$

$n=2$이면 ㉠에서 $\theta=\frac{5}{6}\pi$ ······ ❷

$\therefore \sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\frac{3}{6}\pi$

$=\sin\frac{\pi}{2}$

$=1$ ······ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 각 θ를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ 각 θ의 크기를 구할 수 있다.	40%
❸ $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$의 값을 구할 수 있다.	20%

9

$\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로 θ는 제3사분면의 각이다.

θ를 일반각으로 나타내면

$360^\circ\times n+180^\circ<\theta<360^\circ\times n+270^\circ$ (n은 정수)

$\therefore 180^\circ\times n+90^\circ<\frac{\theta}{2}<180^\circ\times n+135^\circ$

(i) $n=0$일 때, $90^\circ<\frac{\theta}{2}<135^\circ$

$\therefore \frac{\theta}{2}$는 제2사분면의 각

(ii) $n=1$일 때, $270^\circ<\frac{\theta}{2}<315^\circ$

$\therefore \frac{\theta}{2}$는 제4사분면의 각

$n=2, 3, 4, \cdots$일 때, $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경의 위치는 제2, 4사분면이 반복된다.

따라서 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제2사분면, 제4사분면이므로 $n=2, 4$

답 2, 4

10

$\sin\theta\cos\theta>0$, $\cos\theta\tan\theta<0$에서

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

$\therefore |\sin\theta+\cos\theta|-\sqrt{\sin^2\theta}-|\cos\theta-\tan\theta|$

$=-(\sin\theta+\cos\theta)-(-\sin\theta)$

$-\{-(\cos\theta-\tan\theta)\}$

$=-\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta-\tan\theta$

$=-\tan\theta$

답 $-\tan\theta$

11

이차방정식 $x^2-\left(a+\frac{1}{2}\right)x+a=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=a+\frac{1}{2}$, $\sin\theta\cos\theta=a$ ······ ㉠

$\sin\theta+\cos\theta=a+\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=a^2+a+\frac{1}{4}$

$1+2a=a^2+a+\frac{1}{4}$ ($\because$ ㉠)

$a^2-a-\frac{3}{4}=0$, $4a^2-4a-3=0$

$(2a+1)(2a-3)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ ($\because a<0$)

답 $-\frac{1}{2}$

12

(나)에서 $8\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)이므로

$7\theta=2n\pi$ $\quad\therefore \theta=\frac{2n}{7}\pi$ ······ ㉠

이때 (가)에서 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로

$0<\frac{2n}{7}\pi<\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore 0<n<\frac{7}{4}$

n은 정수이므로 $n=1$

$n=1$이면 ㉠에서 $\theta=\frac{2}{7}\pi$

따라서 구하는 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{2}{7}\pi=\frac{4}{7}\pi$

답 ③

13

(i) 두 동경이 같은 방향일 때

$3\theta-\frac{1}{2}\theta=2n\pi$ (n은 정수) $\quad\therefore \theta=\frac{4n}{5}\pi$

이때 $0<\theta<\pi$이므로

$0<\frac{4n}{5}\pi<\pi$ $\quad\therefore 0<n<\frac{5}{4}$

n은 정수이므로 $n=1$ $\quad\therefore \theta=\frac{4}{5}\pi$

(ii) 두 동경이 서로 반대 방향일 때

$3\theta-\frac{1}{2}\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$\therefore \theta=\frac{2(2n+1)}{5}\pi$

이때 $0<\theta<\pi$이므로

$0<\frac{2(2n+1)}{5}\pi<\pi$, $0<4n+2<5$

$-2<4n<3 \qquad \therefore -\frac{1}{2}<n<\frac{3}{4}$

n은 정수이므로 $n=0 \qquad \therefore \theta=\frac{2}{5}\pi$

(i), (ii)에서 모든 θ의 크기의 합은

$\frac{4}{5}\pi+\frac{2}{5}\pi=\frac{6}{5}\pi$

답 $\frac{6}{5}\pi$

14

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9} \qquad \therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$

$\therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{4}{9}\right)=\frac{17}{9}$

이때 각 θ는 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta-\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{17}}{3}$

$\therefore \sin^2\theta-\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$

$=-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{17}}{3}=-\frac{\sqrt{17}}{9}$

답 $-\frac{\sqrt{17}}{9}$

참고 각 θ는 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$
$\therefore \sin\theta-\cos\theta>0$

15

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=3$에서

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=3$, $\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=3$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$

이때

$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2=\sin^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta$

이므로 $1=\sin^4\theta+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cos^4\theta$

$1=\sin^4\theta+\cos^4\theta+\frac{2}{9} \qquad \therefore \sin^4\theta+\cos^4\theta=\frac{7}{9}$

답 $\frac{7}{9}$

Level Up 연습문제

p. 172

1

$\log_2\sin\theta+\log_2\cos\theta=-4$에서

$\log_2\sin\theta\cos\theta=-4$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=2^{-4}=\frac{1}{16}$ ……㉠

$\log_2(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{1}{2}(\log_2 x-4)$에서

$2\log_2(\sin\theta+\cos\theta)=\log_2 x-4$

$\log_2(\sin\theta+\cos\theta)^2=\log_2\frac{x}{16}$

즉 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{x}{16}$이므로

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{x}{16}$

$1+2\times\frac{1}{16}=\frac{x}{16}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore x=18$

답 18

2

$x^2+y^2=1$에 $y=\frac{1}{2}x$를 대입하면

$x^2+\frac{1}{4}x^2=1$, $x^2=\frac{4}{5}$

$\therefore x=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ (복부호동순)

이때 점 P는 제1사분면 위에 있으므로

$P\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$\therefore \sin\alpha=\frac{(\text{점 P의 }y\text{좌표})}{\overline{OP}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

또 $x^2+y^2=1$에 $y=-2x$를 대입하면

$x^2+(-2x)^2=1$, $x^2=\frac{1}{5}$

$\therefore x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$, $y=\mp\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (복부호동순)

이때 점 Q는 제2사분면 위에 있으므로

$Q\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

$\therefore \cos\beta=\frac{(\text{점 Q의 }x\text{좌표})}{\overline{OQ}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \sin\alpha-\cos\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}-\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

답 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3

동경 OP가 나타내는 각의 크기가 θ이고 $\overline{OP}=r$이므로

$\sin\theta=\frac{a}{r}$, $\cos\theta=\frac{5}{r}$

$\sin\theta+2\cos\theta=1$에서

$\frac{a}{r}+\frac{10}{r}=1 \quad \therefore r=a+10$ ……㉠

$\overline{OP}=r=\sqrt{5^2+a^2}$이므로

$r^2=a^2+25$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(a+10)^2=a^2+25$, $a^2+20a+100=a^2+25$

$20a=-75 \quad \therefore a=-\frac{15}{4}$

$a=-\frac{15}{4}$를 ㉠에 대입하면

$r=-\frac{15}{4}+10=\frac{25}{4}$

$\therefore a+r=-\frac{15}{4}+\frac{25}{4}=\frac{5}{2}$

답 ①

다른 풀이

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

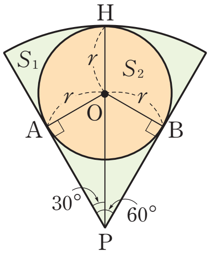
$\left(\frac{a}{r}\right)^2+\left(\frac{5}{r}\right)^2=1 \quad \therefore a^2+25=r^2$

이 식에 ㉠을 대입하여 풀면

$a=-\frac{15}{4}$, $r=\frac{25}{4}$

4

오른쪽 그림과 같이 부채꼴에 내접하는 원의 중심을 O, 부채꼴과 원이 내접하는 세 점을 각각 A, B, H, 점 H에서 부채꼴의 중심각으로 내린 선분과 부채꼴이 만나는 점을 P라 하자.



부채꼴에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{OA}=\overline{OB}=r$, $\overline{OP}$는 공통, $\angle OAP=\angle OBP=90^\circ$

이므로 $\triangle OAP\equiv\triangle OBP$ (RHS 합동)

$\therefore \angle OPA=\angle OPB=30^\circ$

즉 $\angle AOP=\angle BOP=60^\circ$이므로 $\overline{OP}=2r$

$\therefore \overline{PH}=\overline{OH}+\overline{OP}=r+2r=3r$

따라서 $S_1=\frac{1}{2}\times(3r)^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi r^2$, $S_2=\pi r^2$이므로

$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\pi r^2}{\frac{3}{2}\pi r^2}=\frac{2}{3}$

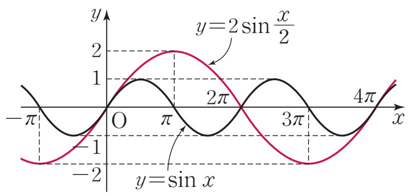
답 $\frac{2}{3}$

② 삼각함수의 그래프

확인 문제 p. 178~206

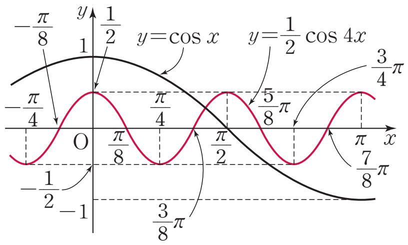
01

(1) $y=2\sin\frac{x}{2}$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 2배, y축의 방향으로 2배한 것이므로 다음 그림과 같다.



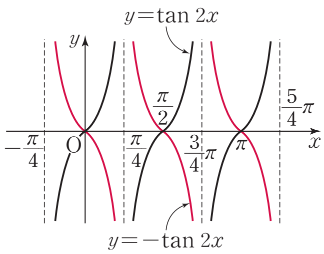
$\therefore$ 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

(2) $y=\frac{1}{2}\cos 4x$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$배, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배한 것이므로 다음 그림과 같다.



$\therefore$ 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$, 주기: $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

(3) $y=-\tan 2x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배한 그래프, 즉 $y=\tan 2x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



$\therefore$ 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: $\frac{\pi}{2}$

답 그래프는 풀이 참조
(1) 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: 4π
(2) 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$, 주기: $\frac{\pi}{2}$
(3) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: $\frac{\pi}{2}$

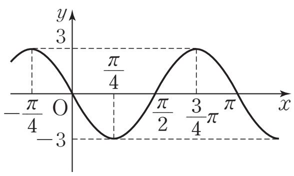
02

함수 $y=\sin\frac{\pi}{6}x$의 그래프에서 점 B의 x좌표를 t라 하면
점 C의 x좌표는 $6-t$
이때 $\overline{\text{BC}}=2$이므로
$(6-t)-t=2 \quad \therefore t=2$
따라서 직사각형 ABCD의 넓이는
$\overline{\text{BC}}\times\overline{\text{AB}}=2\times\sin\left(\frac{\pi}{6}\times2\right)=2\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

답 $\sqrt{3}$

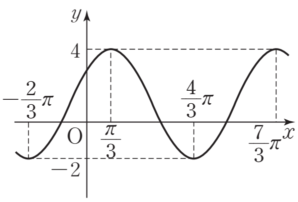
03

(1) $y=3\sin(2x-\pi)=3\sin2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배, y축의 방향으로 3배한 후, x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 최댓값: 3, 최솟값: -3, 주기: $\frac{2\pi}{2}=\pi$

(2) $y=3\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 3배한 후, x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

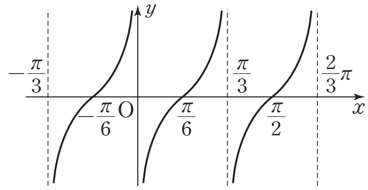


$\therefore$ 최댓값: 4, 최솟값: -2, 주기: 2π

답 그래프는 풀이 참조
(1) 최댓값: 3, 최솟값: -3, 주기: π
(2) 최댓값: 4, 최솟값: -2, 주기: 2π

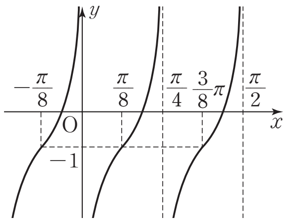
04

(1) $y=\frac{1}{3}\tan\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}\tan3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$배, y축의 방향으로 $\frac{1}{3}$배한 후, x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



$\therefore$ 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: $\frac{\pi}{3}$

(2) $y=\tan\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)-1=\tan4\left(x-\frac{\pi}{8}\right)-1$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$배 한 후, x축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



$\therefore$ 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: $\frac{\pi}{4}$

답 그래프는 풀이 참조
(1) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: $\frac{\pi}{3}$
(2) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: $\frac{\pi}{4}$

05

함수 $y=3\cos2x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{12}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y+1=3\cos2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+1$
$\therefore y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$
$\therefore a=3, b=-\frac{\pi}{6}, c=0$

답 $a=3, b=-\frac{\pi}{6}, c=0$

06

함수 $y=2\tan x-1$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=2\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1$

이 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=2\tan\left(-x-\frac{\pi}{3}\right)-1=-2\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1$$

이 그래프가 점 $\left(-\frac{\pi}{12}, k\right)$를 지나므로

$$k=-2\tan\frac{\pi}{4}-1=-2-1=-3$$

답 -3

참고 함수 $y=\tan x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 임의의 실수 x에 대하여 $\tan(-x)=-\tan x$

07

$f(x)=a\cos bx+c$의 최댓값이 5이고 $a>0$이므로

$a+c=5$ ……㉠

주기가 4π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=4\pi$, $2\pi=4b\pi$ $\quad\therefore b=\frac{1}{2}$

$f(x)=a\cos\frac{x}{2}+c$에서

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=a\cos\frac{\pi}{3}+c=\frac{7}{2}$, $\frac{a}{2}+c=\frac{7}{2}$

$\therefore a+2c=7$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $c=2$

$\therefore abc=3\times\frac{1}{2}\times2=3$

답 3

08

$y=\tan(ax+b)-7$의 주기가 4π이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=4\pi$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$

함수 $y=\tan\left(\frac{x}{4}+b\right)-7$의 그래프의 점근선의 방정식은

$\frac{x}{4}+b=n\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore x=4n\pi+2\pi-4b$ (n은 정수)

즉 $2\pi-4b=4k\pi+\frac{\pi}{3}$ (k는 정수)이므로

$4b=\frac{5}{3}\pi-4k\pi$ $\quad\therefore b=\frac{5}{12}\pi-k\pi$ (k는 정수)

이때 $0<b<\pi$이므로 $0<\frac{5}{12}\pi-k\pi<\pi$

$-\frac{7}{12}<k<\frac{5}{12}$ $\quad\therefore k=0$

$\therefore b=\frac{5}{12}\pi$

답 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{5}{12}\pi$

09

주어진 함수의 그래프에서 최댓값은 1, 최솟값은 -3이고 $a>0$이므로

$a+c=1$, $-a+c=-3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $c=-1$

주기가 $\frac{7}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\quad\therefore b=2$

답 $a=2$, $b=2$, $c=-1$

10

주어진 함수의 그래프에서 주기는 $\frac{\pi}{2}$이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore a=2$

함수 $y=\tan(2x+b)$의 그래프가 점 $\left(-\frac{\pi}{8}, 1\right)$을 지나므로

$1=\tan\left(-\frac{\pi}{4}+b\right)$

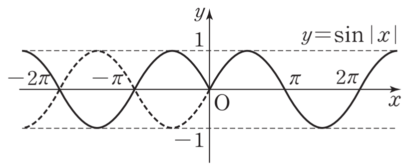
이때 $0<b<\pi$이므로 $b=\frac{\pi}{2}$

$\therefore ab=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$

답 π

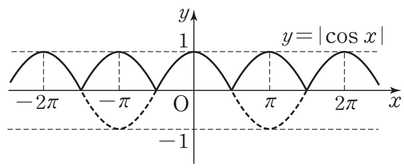
11

(1) 함수 $y=\sin|x|$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프에서 $x\ge0$인 부분만 남기고, $x\ge0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

(2) 함수 $y=|\cos x|$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 최댓값은 1, 최솟값은 0이다.

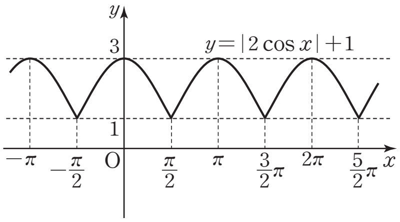
답 그래프는 풀이 참조

(1) 최댓값: 1, 최솟값: -1 (2) 최댓값: 1, 최솟값: 0

> **참고** 절댓값 기호가 있는 삼각함수의 그래프를 그리는 방법
> (1) $y=|\sin x|$, $y=|\cos x|$, $y=|\tan x|$의 그래프
> ➡ 절댓값 기호가 없는 삼각함수의 그래프를 그린 다음 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.
> (2) $y=\sin|x|$, $y=\cos|x|$, $y=\tan|x|$의 그래프
> ➡ $x\geq0$일 때의 그래프를 그린 다음 y축의 오른쪽 부분을 y축에 대하여 대칭이동한다.

12

$y=|2\cos x|+1$의 그래프는 $y=2\cos x$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 최댓값은 3, 최솟값은 1, 주기는 π이다.

답 그래프는 풀이 참조
최댓값: 3, 최솟값: 1, 주기: π

13

함수 $y=|2\sin 2x|+a$의 최댓값이 1이므로

$2+a=1 \qquad \therefore a=-1$

주기가 $b\pi$이므로 $\dfrac{\pi}{|2|}=b\pi \qquad \therefore b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore b-a=\dfrac{1}{2}-(-1)=\dfrac{3}{2}$

답 $\dfrac{3}{2}$

> **참고** 함수 $y=|2\sin 2x|+a$의 주기는 함수 $y=|2\sin 2x|$의 주기와 같다.

14

$$\sin\left(-\frac{7}{6}\pi\right)=-\sin\frac{7}{6}\pi=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{5}{3}\pi=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin\left(-\frac{7}{6}\pi\right)+\cos\frac{5}{3}\pi\times\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(-\sqrt{3})=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

답 $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

15

$$\tan\left(3\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left\{-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$
$$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{\tan\left(3\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{3}\right)}$$
$$=\frac{-1}{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\frac{2}{1+\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{3}-1$$

답 $\sqrt{3}-1$

16

(1) $\sin(\pi-\theta)\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+\theta\right)$

$$-\sin\left(\frac{5}{2}\pi-\theta\right)\cos(3\pi+\theta)$$
$$=\sin\theta\sin\theta-\cos\theta(-\cos\theta)$$
$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta$$
$$=1$$

(2) $\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+\theta\right)\cos(2\pi+\theta)$

$$-\cos\left(\frac{7}{2}\pi+\theta\right)\sin(5\pi-\theta)$$
$$=-\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta$$
$$=-\cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$=-(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$
$$=-1$$

답 (1) 1 (2) -1

17

(주어진 식)

$=(\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta-(-\cos\theta+\sin\theta)\cos\theta$

$=\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta$

$=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

답 1

18

$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$이므로

$\cos 80^\circ=\cos(90^\circ-10^\circ)=\sin 10^\circ$

$\cos 70^\circ=\cos(90^\circ-20^\circ)=\sin 20^\circ$

$\cos 60^\circ=\cos(90^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ$

$\cos 50^\circ=\cos(90^\circ-40^\circ)=\sin 40^\circ$

$\therefore \cos^2 10^\circ+\cos^2 20^\circ+\cos^2 30^\circ+\cdots+\cos^2 70^\circ$
$+\cos^2 80^\circ$

$=(\cos^2 10^\circ+\cos^2 80^\circ)+(\cos^2 20^\circ+\cos^2 70^\circ)$
$+(\cos^2 30^\circ+\cos^2 60^\circ)+(\cos^2 40^\circ+\cos^2 50^\circ)$

$=(\cos^2 10^\circ+\sin^2 10^\circ)+(\cos^2 20^\circ+\sin^2 20^\circ)$
$+(\cos^2 30^\circ+\sin^2 30^\circ)+(\cos^2 40^\circ+\sin^2 40^\circ)$

$=1+1+1+1$

$=4$

답 4

19

$\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$이므로

$\tan 89^\circ=\tan(90^\circ-1^\circ)=\dfrac{1}{\tan 1^\circ}$

$\tan 88^\circ=\tan(90^\circ-2^\circ)=\dfrac{1}{\tan 2^\circ}$

$\vdots$

$\tan 47^\circ=\tan(90^\circ-43^\circ)=\dfrac{1}{\tan 43^\circ}$

$\tan 46^\circ=\tan(90^\circ-44^\circ)=\dfrac{1}{\tan 44^\circ}$

$\therefore \tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\tan 3^\circ\times\cdots\times\tan 88^\circ\times\tan 89^\circ$

$=\tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\tan 3^\circ\times\cdots\times\tan 45^\circ$
$\times\dfrac{1}{\tan 44^\circ}\times\dfrac{1}{\tan 43^\circ}\times\cdots\times\dfrac{1}{\tan 2^\circ}\times\dfrac{1}{\tan 1^\circ}$

$=\left(\tan 1^\circ\times\dfrac{1}{\tan 1^\circ}\right)\times\left(\tan 2^\circ\times\dfrac{1}{\tan 2^\circ}\right)\times\cdots$
$\times\left(\tan 44^\circ\times\dfrac{1}{\tan 44^\circ}\right)\times\tan 45^\circ$

$=\underbrace{1\times1\times\cdots\times1}_{44\text{개}}\times\tan 45^\circ$

$=1$

답 1

20

(1) $\sin(x-\pi)=\sin\{-(\pi-x)\}$
$=-\sin(\pi-x)$
$=-\sin x$

$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x$

이므로 주어진 함수는

$y=-\sin x-\sin x-1=-2\sin x-1$

이때 $-1\le\sin x\le1$이므로 $-2\le-2\sin x\le2$

$\therefore -3\le-2\sin x-1\le1$

따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -3이다.

(2) $\cos(3\pi-x)=-\cos x$

$\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-x\right)=-\cos x$

이므로 주어진 함수는

$y=-\cos x-\cos x+2=-2\cos x+2$

이때 $-1\le\cos x\le1$이므로 $-2\le-2\cos x\le2$

$\therefore 0\le-2\cos x+2\le4$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 0이다.

답 (1) 최댓값: 1, 최솟값: -3 (2) 최댓값: 4, 최솟값: 0

21

$\sin(x+\pi)=-\sin x$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로 주어진 함수는

$y=-(-\sin x)+\sin x+4=2\sin x+4$

이때 $-1\le\sin x\le1$이므로 $-2\le2\sin x\le2$

$\therefore 2\le2\sin x+4\le6$

따라서 $M=6$, $m=2$이므로

$Mm=6\times2=12$

답 12

22

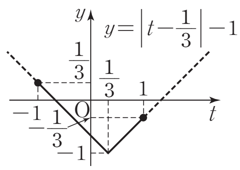
(1) $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고 주어진 함수는

$y=\left|t-\dfrac{1}{3}\right|-1$

이때 $-1\le t\le1$에서 함수

$y=\left|t-\dfrac{1}{3}\right|-1$의 그래프

는 오른쪽 그림과 같으므로



$t=-1$일 때 최대이고, 최댓값은 $\dfrac{1}{3}$

$t=\dfrac{1}{3}$일 때 최소이고, 최솟값은 -1

(2) $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고 주어진 함수는

$y=|3t-2|-4$

이때 $-1\le t\le 1$에서 함수

$y=|3t-2|-4$의 그래프는

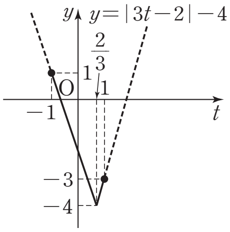
오른쪽 그림과 같으므로

$t=-1$일 때 최대이고,

최댓값은 1

$t=\dfrac{2}{3}$일 때 최소이고,

최솟값은 -4



답 (1) 최댓값: $\dfrac{1}{3}$, 최솟값: -1 (2) 최댓값: 1, 최솟값: -4

23

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$y=-|2t-1|+3$

이때 $-1\le t\le 1$에서 함수

$y=-|2t-1|+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

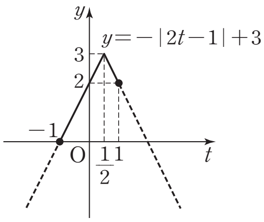
$t=\dfrac{1}{2}$일 때 최대이고,

최댓값은 3

$t=-1$일 때 최소이고, 최솟값은 0

따라서 $M=3$, $m=0$이므로

$M+m=3+0=3$



답 3

24

(1) $y=\sin^2 x+4\cos x+3$

$=(1-\cos^2 x)+4\cos x+3$

$=-\cos^2 x+4\cos x+4$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$y=-t^2+4t+4=-(t-2)^2+8$

따라서 함수

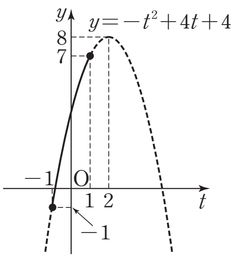
$y=-t^2+4t+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=1$일 때 최대이고,

최댓값은 7

$t=-1$일 때 최소이고,

최솟값은 -1



(2) $\sin(3\pi-x)=\sin x$이므로

$y=\cos^2 x-\sin(3\pi-x)-2$

$=(1-\sin^2 x)-\sin x-2$

$=-\sin^2 x-\sin x-1$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$y=-t^2-t-1=-\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}$

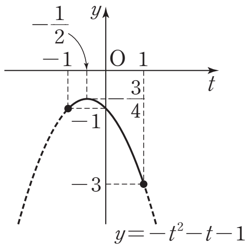
따라서 함수 $y=-t^2-t-1$

의 그래프는 오른쪽 그림과

같으므로

$t=-\dfrac{1}{2}$일 때 최대이고,

최댓값은 $-\dfrac{3}{4}$



$t=1$일 때 최소이고, 최솟값은 -3

답 (1) 최댓값: 7, 최솟값: -1

(2) 최댓값: $-\dfrac{3}{4}$, 최솟값: -3

25

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$이므로

$y=3\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin^2 x-1$

$=3\cos x+(1-\cos^2 x)-1$

$=-\cos^2 x+3\cos x$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$y=-t^2+3t=-\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

즉 함수 $y=-t^2+3t$의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

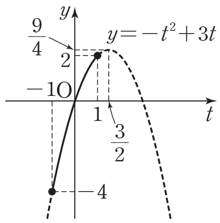
$t=1$일 때 최대이고, 최댓값은 2

$t=-1$일 때 최소이고,

최솟값은 -4

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$2+(-4)=-2$



답 -2

26

(1) $y=\dfrac{4\sin x}{2\sin x-3}$에서 $\sin x=t$로 놓으면

$-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$y=\dfrac{4t}{2t-3}=\dfrac{2(2t-3)+6}{2t-3}=\dfrac{6}{2t-3}+2$

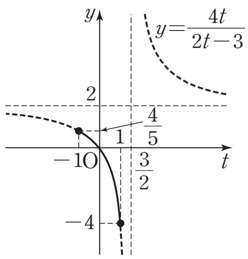
따라서 함수 $y=\dfrac{4t}{2t-3}$의

그래프는 오른쪽 그림과

같으므로

$t=-1$일 때 최대이고,

최댓값은 $\dfrac{4}{5}$



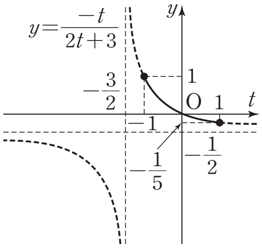
$t=1$일 때 최소이고, 최솟값은 -4

(2) $y=\dfrac{-\cos x}{2\cos x+3}$에서 $\cos x=t$로 놓으면

$-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$$y=\frac{-t}{2t+3}=\frac{-\frac{1}{2}(2t+3)+\frac{3}{2}}{2t+3}=\frac{3}{4t+6}-\frac{1}{2}$$

따라서 함수 $y=\frac{-t}{2t+3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$t=-1$일 때 최대이고,

최댓값은 1

$t=1$일 때 최소이고,

최솟값은 $-\frac{1}{5}$

답 (1) 최댓값: $\frac{4}{5}$, 최솟값: -4 (2) 최댓값: 1, 최솟값: $-\frac{1}{5}$

다른 풀이

(1) $y=\frac{4\sin x}{2\sin x-3}$를 $\sin x$에 대하여 정리하면

$(2y-4)\sin x=3y \qquad \therefore \sin x=\frac{3y}{2y-4}$

이때 $-1\le\sin x\le1$이므로

$-1\le\frac{3y}{2y-4}\le1$, $-1\le\frac{3}{y-2}+\frac{3}{2}\le1$

$-\frac{5}{2}\le\frac{3}{y-2}\le-\frac{1}{2}$, $-2\le\frac{y-2}{3}\le-\frac{2}{5}$

$-6\le y-2\le-\frac{6}{5} \qquad \therefore -4\le y\le\frac{4}{5}$

따라서 최댓값은 $\frac{4}{5}$, 최솟값은 -4이다.

27

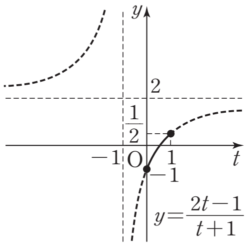
$y=\frac{2\tan x-1}{\tan x+1}$에서 $\tan x=t$로 놓으면

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $0\le t\le1$이고 주어진 함수는

$$y=\frac{2t-1}{t+1}=\frac{2(t+1)-3}{t+1}$$

$$=-\frac{3}{t+1}+2$$

즉 함수 $y=\frac{2t-1}{t+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$t=1$일 때 최대이고,

최댓값은 $\frac{1}{2}$

$t=0$일 때 최소이고,

최솟값은 -1

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

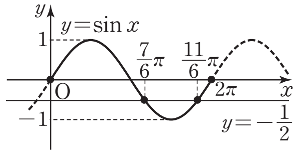
$\frac{1}{2}\times(-1)=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

28

(1) $2\sin x+1=0$에서 $\sin x=-\frac{1}{2}$

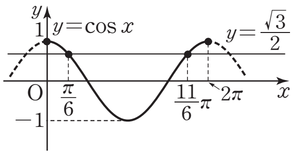
오른쪽 그림에서 주어진 방정식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$



의 교점의 x좌표와 같으므로 구하는 방정식의 해는

$x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

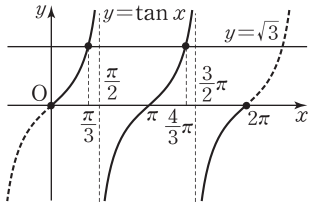
(2) 오른쪽 그림에서 주어진 방정식의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$



의 교점의 x좌표와 같으므로 구하는 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(3) 오른쪽 그림에서 주어진 방정식의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 x좌표와 같으므로 구하는 방정식의 해는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$



답 (1) $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$ (2) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(3) $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

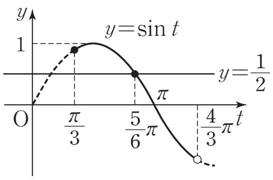
29

(1) $x+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 주어진 방정식은 $\sin t=\frac{1}{2}$

이때 $0\le x<\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le x+\frac{\pi}{3}<\pi+\frac{\pi}{3}$

$\therefore \frac{\pi}{3}\le t<\frac{4}{3}\pi$

오른쪽 그림과 같이 $\frac{\pi}{3}\le t<\frac{4}{3}\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 t좌



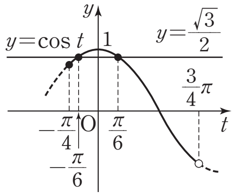
표는 $\frac{5}{6}\pi$이므로 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi \qquad \therefore x=\frac{\pi}{2}$

(2) $x-\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 주어진 방정식은 $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0\le x<\pi$에서 $-\frac{\pi}{4}\le x-\frac{\pi}{4}<\pi-\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ -\frac{\pi}{4}\le t<\frac{3}{4}\pi$

오른쪽 그림과 같이 $-\frac{\pi}{4}\le t<\frac{3}{4}\pi$에서 함수 $y=\cos t$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 t좌표는 $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$이므로



$x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}$ 또는 $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}$

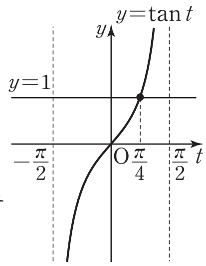
$\therefore\ x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{5}{12}\pi$

(3) $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 주어진 방정식은 $\tan t=1$

이때 $0\le x<\pi$에서 $-\frac{\pi}{2}\le x-\frac{\pi}{2}<\pi-\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ -\frac{\pi}{2}\le t<\frac{\pi}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $-\frac{\pi}{2}\le t<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 t좌표는 $\frac{\pi}{4}$이므로



$x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$ $\quad\therefore\ x=\frac{3}{4}\pi$

답 (1) $x=\frac{\pi}{2}$ (2) $x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{5}{12}\pi$ (3) $x=\frac{3}{4}\pi$

30

$2\cos^2 x+\sin x-1=0$에서

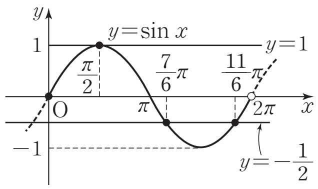
$2(1-\sin^2 x)+\sin x-1=0$

$2\sin^2 x-\sin x-1=0$, $(2\sin x+1)(\sin x-1)=0$

$\therefore\ \sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

(ⅰ) $\sin x=-\frac{1}{2}$일 때, $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(ⅱ) $\sin x=1$일 때, $x=\frac{\pi}{2}$



(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 해의 합은

$\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{7}{2}\pi$

답 $\frac{7}{2}\pi$

31

$3-2\cos^2 x-3\sin x=0$에서

$3-2(1-\sin^2 x)-3\sin x=0$

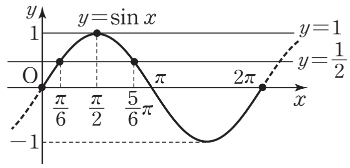
$2\sin^2 x-3\sin x+1=0$

$(2\sin x-1)(\sin x-1)=0$

$\therefore\ \sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

(ⅰ) $\sin x=\frac{1}{2}$일 때, $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

(ⅱ) $\sin x=1$일 때, $x=\frac{\pi}{2}$



(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 해의 합은

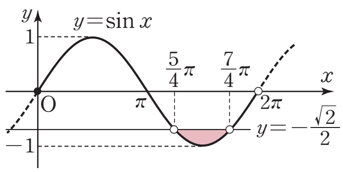
$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$

답 $\frac{3}{2}\pi$

32

(1) 다음 그림에서 부등식 $\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$\frac{5}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$



(2) $2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1<0$에서 $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)<-\frac{1}{2}$

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 주어진 부등식은

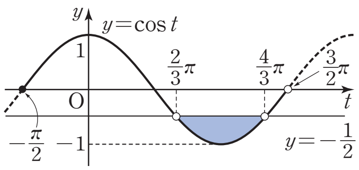
$\cos t<-\frac{1}{2}$

이때 $0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{2}\le x-\frac{\pi}{2}<2\pi-\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ -\frac{\pi}{2}\le t<\frac{3}{2}\pi$

다음 그림과 같이 $-\frac{\pi}{2} \le t < \frac{3}{2}\pi$에서 부등식 $\cos t < -\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\cos t$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 부분의 t의 값의 범위이므로

$\frac{2}{3}\pi < t < \frac{4}{3}\pi$



따라서 $\frac{2}{3}\pi < x-\frac{\pi}{2} < \frac{4}{3}\pi$이므로

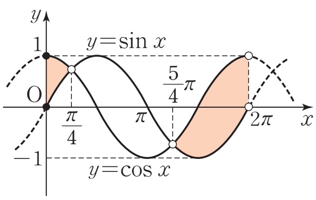
$\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$

답 (1) $\frac{5}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$ (2) $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$

33

다음 그림과 같이 $0 \le x < 2\pi$에서 부등식 $\sin x < \cos x$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 함수 $y=\cos x$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$0 \le x < \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi < x < 2\pi$



답 $0 \le x < \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi < x < 2\pi$

34

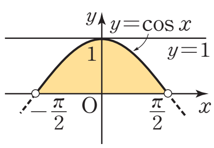
(1) $\sin^2 x \ge 1-\cos x$에서 $1-\cos^2 x \ge 1-\cos x$

$\cos^2 x - \cos x \le 0$, $\cos x(\cos x - 1) \le 0$

$\therefore 0 \le \cos x \le 1$

따라서 오른쪽 그림에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



(2) $\tan^2 x + (\sqrt{3}+1)\tan x + \sqrt{3} > 0$에서

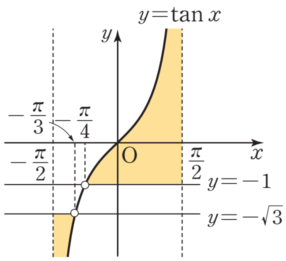
$(\tan x + \sqrt{3})(\tan x + 1) > 0$

$\therefore \tan x < -\sqrt{3}$ 또는 $\tan x > -1$

따라서 오른쪽 그림에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{3}$

또는 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$



답 (1) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(2) $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{3}$ 또는 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

35

$2\sin^2 x - 7\cos x - 5 \ge 0$에서

$2(1-\cos^2 x) - 7\cos x - 5 \ge 0$

$2\cos^2 x + 7\cos x + 3 \le 0$

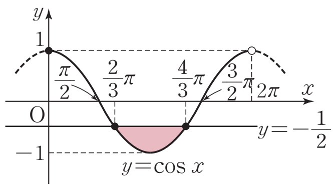
$(2\cos x + 1)(\cos x + 3) \le 0$

이때 $0 \le x < 2\pi$에서 $\cos x + 3 > 0$이므로

$2\cos x + 1 \le 0$ $\therefore \cos x \le -\frac{1}{2}$

따라서 다음 그림에서 구하는 x의 값의 범위는

$\frac{2}{3}\pi \le x \le \frac{4}{3}\pi$



답 $\frac{2}{3}\pi \le x \le \frac{4}{3}\pi$

36

이차방정식 $x^2 + (2\sqrt{2}\cos\theta)x + 1 = 0$이 실근을 갖지 않으므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = (\sqrt{2}\cos\theta)^2 - 1 < 0$

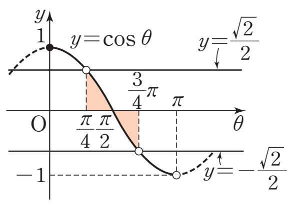
$2\cos^2\theta - 1 < 0$

$(\sqrt{2}\cos\theta + 1)(\sqrt{2}\cos\theta - 1) < 0$

$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 θ의 값의 범위는

$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi$



답 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi$

37

모든 실수 x에 대하여 $x^2-2(2\sin\theta+1)x+4>0$이 항상 성립하므로 이차방정식 $x^2-2(2\sin\theta+1)x+4=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=(2\sin\theta+1)^2-4<0$

$4\sin^2\theta+4\sin\theta-3<0$

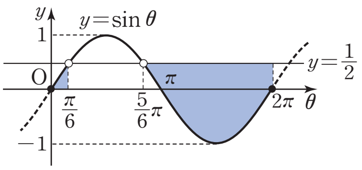
$(2\sin\theta+3)(2\sin\theta-1)<0$

이때 $0\le\theta\le2\pi$에서 $2\sin\theta+3>0$이므로

$2\sin\theta-1<0 \qquad \therefore \sin\theta<\frac{1}{2}$

따라서 다음 그림에서 구하는 θ의 값의 범위는

$0\le\theta<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<\theta\le2\pi$



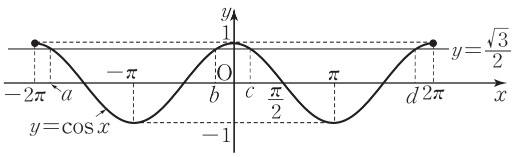
답 $0\le\theta<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<\theta\le2\pi$

38

다음 그림과 같이 함수 $y=\cos x$의 그래프에서

$\frac{a+b}{2}=-\pi,\ \frac{b+c}{2}=0,\ \frac{c+d}{2}=\pi$이므로

$a+b=-2\pi,\ b+c=0,\ c+d=2\pi$ ⋯⋯ ㉠



$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 방정식 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 $\frac{\pi}{6}$이므로

$c=\frac{\pi}{6} \qquad \therefore b=-c=-\frac{\pi}{6}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a=-2\pi-b=-2\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{11}{6}\pi$

$d=2\pi-c=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11}{6}\pi$ ($\because$ ㉠)

$\therefore d-a=\frac{11}{6}\pi-\left(-\frac{11}{6}\pi\right)=\frac{11}{3}\pi$ 답 $\frac{11}{3}\pi$

39

함수 $f(x)=\sin x$의 그래프에서

$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{2},\ \frac{x_3+x_4}{2}=\frac{5}{2}\pi$이므로

$x_1+x_2=\pi,\ x_3+x_4=5\pi \qquad \therefore x_1+x_2+x_3+x_4=6\pi$

$\therefore f(x_1+x_2+x_3+x_4)=f(6\pi)=\sin 6\pi=0$ 답 0

연습문제

p. 207~211

1

함수 $y=\cos 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

①~⑤의 주기를 구하면

① $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$ ② $\frac{2\pi}{2}=\pi$ ③ $\frac{\pi}{1}=\pi$

④ π ⑤ $\frac{\pi}{1}=\pi$

따라서 함수 $y=\cos 2x$와 주기가 다른 것은 ①이다.

답 ①

2

① 최댓값은 $3+1=4$

② 최솟값은 $-3+1=-2$

③ 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

④ $y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1=3\cos 2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+1$이므로 그래프는 함수 $y=3\cos 2x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{12}$만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $x=\frac{\pi}{4}$를 대입하면 $y=3\cos\frac{\pi}{3}+1=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$

즉 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5}{2}\right)$를 지난다.

따라서 옳은 것은 ④이다. 답 ④

3

함수 $y=3\sin(x+\pi)+k$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5}{2}\right)$를 지나므로 $\frac{5}{2}=3\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)+k$

$\frac{5}{2}=-3\sin\frac{\pi}{6}+k,\ \frac{5}{2}=-\frac{3}{2}+k$

$\therefore k=4$ 답 4

4

$f(x)=a\sin\frac{x}{p}+b$의 최댓값이 5이고 $a>0$이므로

$a+b=5$ ⋯⋯ ㉠

주기가 4π이고 $p>0$이므로

$\frac{2\pi}{\frac{1}{p}}=4\pi,\ 2p\pi=4\pi \qquad \therefore p=2$

즉 $f(x)=a\sin\frac{x}{2}+b$이므로

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\sin\frac{\pi}{6}+b=\frac{7}{2}$, $\frac{a}{2}+b=\frac{7}{2}$

$\therefore a+2b=7$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$

$\therefore a-b+p=3-2+2=3$ 답 3

5

주어진 함수의 그래프에서 최댓값은 3, 최솟값은 -1이고 $a>0$이므로 $a+c=3$, $-a+c=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=1$

그래프에서 주기가 $2\pi-0=2\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=2\pi$ $\therefore b=1$

$\therefore a+b+c=2+1+1=4$ 답 4

6

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta=-\frac{4}{3}$이므로

$\sin\theta=\frac{4}{5}$

$\therefore 5\sin(\pi+\theta)+10\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=-5\sin\theta+10\sin\theta$

$=5\sin\theta=4$ 답 4

7

$y=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin x+2=2\cos^2 x-\sin x+2$

$=2(1-\sin^2 x)-\sin x+2=-2\sin^2 x-\sin x+4$

······ ❶

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

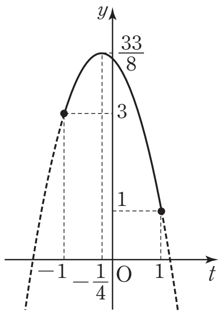
$y=-2t^2-t+4$

$=-2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{33}{8}$ ······ ❷

따라서 함수 $y=-2t^2-t+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=-\frac{1}{4}$일 때 최대이고,

최댓값은 $\frac{33}{8}$ ······ ❸



답 $\frac{33}{8}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수의 식을 $\sin x$에 대한 식으로 정리할 수 있다.	40%
❷ $\sin x=t$로 치환하여 t에 대한 식으로 정리할 수 있다.	40%
❸ 최댓값을 구할 수 있다.	20%

8

$2\cos^2 x-3\sin x<0$에서 $2(1-\sin^2 x)-3\sin x<0$

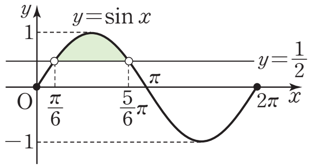
$2\sin^2 x+3\sin x-2>0$, $(2\sin x-1)(\sin x+2)>0$

이때 $0\le x\le 2\pi$에서 $\sin x+2>0$이므로

$2\sin x-1>0$ $\therefore \sin x>\frac{1}{2}$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 x의 값의 범위는

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$

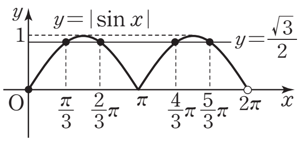


답 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$

9

$\begin{cases} |\sin x|=\frac{\sqrt{3}}{2} & \cdots\cdots ㉠ \\ 2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 주어진 방정식의 해는 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=|\sin x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$



의 교점의 x좌표와 같으므로 구하는 해는

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ······㉢

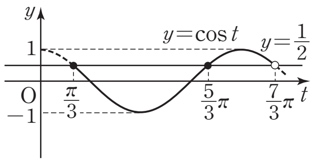
㉡에서 $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$x+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 주어진 방정식은 $\cos t=\frac{1}{2}$

이때 $0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$

$\therefore \frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$

오른쪽 그림과 같이 $\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$에서 함수 $y=\cos t$의 그래프와



직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 t좌표는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$이므로

$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{3}\pi$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ ······㉣

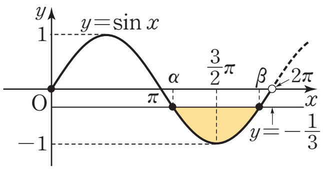
㉢, ㉣에서 구하는 연립방정식의 해는

$x=\frac{4}{3}\pi$ 답 $x=\frac{4}{3}\pi$

10

$0 \le x < 2\pi$에서 부등식 $\sin x \le -\frac{1}{3}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{3}$보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이다.

다음 그림과 같이 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{3}$의 교점의 x좌표를 α, β라 하자.



함수 $y=\sin x$의 그래프에서 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}\pi$이므로

$\alpha+\beta=3\pi$

$\therefore \cos\frac{\alpha+\beta}{3}=\cos\frac{3\pi}{3}=\cos\pi=-1$ 답 -1

11

함수 $y=\sin\frac{x}{2}$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sin\frac{x-\pi}{2}$

이 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sin\frac{-x-\pi}{2}$, $-y=-\sin\frac{x+\pi}{2}$

$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)$ $\therefore y=\cos\frac{x}{2}$ 답 ④

12

난방기를 가동한 지 20분 후의 실내 온도가 18 ℃이므로

$18=B-\frac{k}{6}\cos\left(\frac{\pi}{60}\times 20\right)$, $18=B-\frac{k}{6}\cos\frac{\pi}{3}$

$18=B-\frac{k}{6}\times\frac{1}{2}$ $\therefore B=18+\frac{k}{12}$ ……㉠

난방기를 가동한 지 40분 후의 실내 온도가 20 ℃이므로

$20=B-\frac{k}{6}\cos\left(\frac{\pi}{60}\times 40\right)$, $20=B-\frac{k}{6}\cos\frac{2}{3}\pi$

$20=B-\frac{k}{6}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\therefore B=20-\frac{k}{12}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $18+\frac{k}{12}=20-\frac{k}{12}$이므로

$\frac{k}{6}=2$ $\therefore k=12$ 답 ②

13

$f(x)=a|\sin bx|+c$의 최댓값이 4이고 $a>0$이므로

$a+c=4$ ……㉠

주기가 $\frac{\pi}{3}$이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{3}$ $\therefore b=3$

즉 $f(x)=a|\sin 3x|+c$이므로

$f\left(-\frac{\pi}{18}\right)=a\left|\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right|+c=\frac{5}{2}$

$\frac{a}{2}+c=\frac{5}{2}$ $\therefore a+2c=5$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $c=1$

$\therefore a+2b+3c=3+2\times3+3\times1=12$ 답 12

14

함수 $y=\tan x$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, c\right)$를 지나므로

$c=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

함수 $y=a\sin bx$의 주기가 π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\therefore b=2$

즉 함수 $y=a\sin 2x$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$을 지나므로

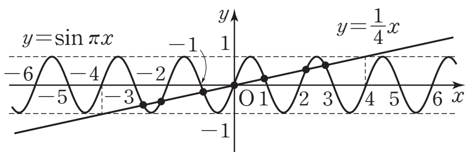
$\sqrt{3}=a\sin\frac{2}{3}\pi$, $\sqrt{3}=a\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore a=2$

$\therefore abc=2\times2\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ 답 ④

15

방정식 $\sin\pi x=\frac{1}{4}x$의 실근은 함수 $y=\sin\pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}x$의 교점의 x좌표와 같다.

다음 그림에서 함수 $y=\sin\pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}x$의 교점의 개수는 7이다.



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

답 ⑤

참고 함수 $y=\sin\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

16

함수 $y=\sin x$의 그래프에서

$\frac{a+c}{2}=\frac{\pi}{2}\qquad \therefore a+c=\pi$

함수 $y=\cos x$의 그래프에서

$\frac{b+d}{2}=\pi\qquad \therefore b+d=2\pi$

$\therefore a+b+c+d=(a+c)+(b+d)$

$=\pi+2\pi=3\pi$

답 3π

17

$y=x^2-(2\sin\theta)x+\cos^2\theta$

$=(x-\sin\theta)^2-\sin^2\theta+\cos^2\theta$

이므로 함수 $y=x^2-2x\sin\theta+\cos^2\theta$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(\sin\theta, -\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

꼭짓점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$-\sin^2\theta+\cos^2\theta=\sin\theta$

$-\sin^2\theta+(1-\sin^2\theta)=\sin\theta$

$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)=0$

이때 $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta+1>0$이므로

$2\sin\theta-1=0\qquad \therefore \sin\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}\left(\because 0\le\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

답 ③

18

Step by Step

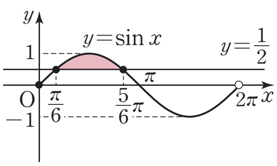
부등식 $2\sin x\ge1$의 해를 구한다.

부등식 $\sqrt{2}\cos x+1\le0$의 해를 구한다.

연립부등식의 해를 구한다.

$\begin{cases}2\sin x\ge1 & \cdots\cdots ㉠\\ \sqrt{2}\cos x+1\le0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

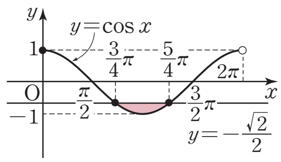
㉠에서 $\sin x\ge\frac{1}{2}$



오른쪽 그림에서 주어진 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로

$\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $\cos x\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$



오른쪽 그림에서 주어진 부등식의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로

$\frac{3}{4}\pi\le x\le\frac{5}{4}\pi$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통 범위는 $\frac{3}{4}\pi\le x\le\frac{5}{6}\pi$

즉 $\alpha=\frac{3}{4}\pi$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$\alpha+\beta=\frac{3}{4}\pi+\frac{5}{6}\pi=\frac{19}{12}\pi$

따라서 $p=12$, $q=19$이므로

$p+q=12+19=31$

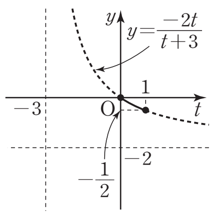
답 31

19

$y=\frac{-2|\sin x|}{|\sin x|+3}$에서 $|\sin x|=t$로 놓으면

$0\le t\le1$이고 주어진 함수는

$y=\frac{-2t}{t+3}=\frac{-2(t+3)+6}{t+3}=\frac{6}{t+3}-2$



즉 함수 $y=\frac{-2t}{t+3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=0$일 때 최대이고, 최댓값은 0

$t=1$일 때 최소이고,

최솟값은 $-\frac{1}{2}$

따라서 $M=0$, $m=-\frac{1}{2}$이므로

$M-m=0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

20

$2\cos^2x-3\sin x+7-a\ge0$에서

$2(1-\sin^2x)-3\sin x+7-a\ge0$

$2\sin^2x+3\sin x-9+a\le0$

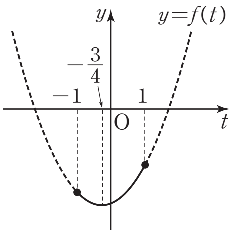
$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고 위의 부등식은

$2t^2+3t-9+a\le0$

$f(t)=2t^2+3t-9+a$라 하면

$f(t)=2t^2+3t-9+a=2\left(t+\frac{3}{4}\right)^2+a-\frac{81}{8}$

이때 $-1\le t\le 1$에서 $f(t)\le 0$ 이어야 하므로 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f(-1)\le 0$에서

$2-3-9+a\le 0$

$\therefore a\le 10$ ……㉠

(ii) $f(1)\le 0$에서 $2+3-9+a\le 0$

$\therefore a\le 4$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $a\le 4$

따라서 자연수 a의 값은 1, 2, 3, 4이므로 그 합은

$1+2+3+4=10$

답 10

Level Up 연습문제

p. 212

1

$14\theta=2\pi$이므로

$\sin 13\theta=\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$

$\sin 11\theta=\sin(2\pi-3\theta)=-\sin 3\theta$

$\sin 9\theta=\sin(2\pi-5\theta)=-\sin 5\theta$

$\sin 7\theta=\sin\pi=0$

$\cos 14\theta=\cos 2\pi=1$

$\cos 12\theta=\cos(2\pi-2\theta)=\cos 2\theta$

$\cos 10\theta=\cos(2\pi-4\theta)=\cos 4\theta$

$\cos 8\theta=\cos(2\pi-6\theta)=\cos 6\theta$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta+0-\sin 5\theta$

$-\sin 3\theta-\sin\theta$

$-(\cos 2\theta-\cos 4\theta+\cos 6\theta$

$-\cos 6\theta+\cos 4\theta-\cos 2\theta+1)$

$=0-1=-1$

답 -1

2

$\sin(2\pi\cos x)=0$에서 $2\pi\cos x=t$로 놓으면

$\sin t=0$

이때 $0\le x<\pi$에서 $-1<\cos x\le 1$이므로

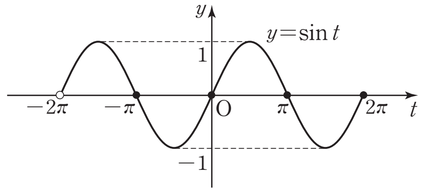
$-2\pi<2\pi\cos x\le 2\pi$

$\therefore -2\pi<t\le 2\pi$

다음 그림과 같이 $-2\pi<t\le 2\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=0$의 교점의 t좌표는 $-\pi$, 0, π, 2π이므로

$2\pi\cos x=-\pi$ 또는 $2\pi\cos x=0$

또는 $2\pi\cos x=\pi$ 또는 $2\pi\cos x=2\pi$

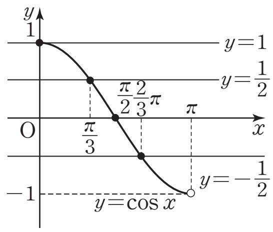


$\therefore \cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=0$

또는 $\cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=1$

(i) $\cos x=-\frac{1}{2}$일 때

$x=\frac{2}{3}\pi$



(ii) $\cos x=0$일 때 $x=\frac{\pi}{2}$

(iii) $\cos x=\frac{1}{2}$일 때 $x=\frac{\pi}{3}$

(iv) $\cos x=1$일 때 $x=0$

(i)~(iv)에서 구하는 모든 해는 $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi$이므로

그 합은 $0+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi=\frac{3}{2}\pi$

답 $\frac{3}{2}\pi$

3

함수 $y=4\sin\frac{1}{4}(x-\pi)$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표를 구하면

$4\sin\frac{1}{4}(x-\pi)=2$에서 $\sin\frac{x-\pi}{4}=\frac{1}{2}$

$\frac{x-\pi}{4}=t$로 놓으면 $\sin t=\frac{1}{2}$

이때 $0\le x\le 10\pi$에서 $-\pi\le x-\pi\le 9\pi$이므로

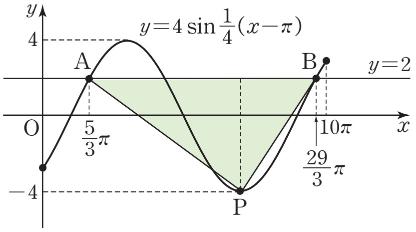
$-\frac{\pi}{4}\le\frac{x-\pi}{4}\le\frac{9}{4}\pi$ $\quad\therefore -\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{9}{4}\pi$

$-\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{9}{4}\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 t좌표는 $\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi$이므로

$\frac{x-\pi}{4}=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{x-\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{x-\pi}{4}=\frac{13}{6}\pi$

$\therefore x=\frac{5}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{29}{3}\pi$

이때 삼각형 PAB의 넓이가 최대가 되려면 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{29}{3}\pi-\frac{5}{3}\pi\right)\times 6=24\pi$ $\quad\therefore k=24$

답 24

4

(ⅰ) $k=0$일 때

$y=-6$이므로 주어진 함수의 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다.

(ⅱ) $k>0$일 때

$-1\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$에서

$-k\le k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le k$

$\therefore k^2-k-6\le k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6\le k^2+k-6$

즉 함수 $y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 최댓값은 k^2+k-6이므로 주어진 함수의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 $k^2+k-6\le 0$이어야 한다.

$(k+3)(k-2)\le 0$ $\quad\therefore -3\le k\le 2$

그런데 $k>0$이므로 $0<k\le 2$

(ⅲ) $k<0$일 때

$-1\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$에서

$k\le k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le -k$

$\therefore k^2+k-6\le k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6\le k^2-k-6$

즉 함수 $y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 최댓값은 k^2-k-6이므로 주어진 함수의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 $k^2-k-6\le 0$이어야 한다.

$(k+2)(k-3)\le 0$ $\quad\therefore -2\le k\le 3$

그런데 $k<0$이므로 $-2\le k<0$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 k의 값의 범위는 $-2\le k\le 2$

따라서 정수 k의 값은 $-2, -1, 0, 1, 2$이므로 그 개수는 5이다.

답 5

3 사인법칙과 코사인법칙

확인 문제

p.216~235

01

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$이므로

$\frac{2}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\sin C}$ $\quad\therefore \sin C=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

02

사인법칙에 의하여 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$이므로

$\frac{10}{\sin B}=\frac{10\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$ $\quad\therefore \sin B=\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로

$B=30^\circ$ 또는 $B=150^\circ$

그런데 $B=150^\circ$이면 $B+C>180^\circ$이므로 $B=30^\circ$

$A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ-(30^\circ+45^\circ)=105^\circ$

답 105°

03

$A:B:C=3:4:5$이므로

$A=180^\circ\times\frac{3}{12}=45^\circ$

$B=180^\circ\times\frac{4}{12}=60^\circ$

$C=180^\circ\times\frac{5}{12}=75^\circ$

이때 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$이므로

$\frac{2}{\sin 45^\circ}=\frac{b}{\sin 60^\circ}$ $\quad\therefore b=\sqrt{6}$

답 $\sqrt{6}$

04

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A}=2R$이므로

$\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=2R$ $\quad\therefore R=1$

따라서 외접원의 넓이는 $\pi\times 1^2=\pi$

답 π

05

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2R$이므로

$\frac{\overline{BC}}{\sin 30^\circ}=2\times 3$ ∴ $\overline{BC}=3$

답 3

06

(1) 사인법칙에 의하여 $\frac{c}{\sin C}=2R$이므로

$\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=2R$ ∴ $R=\sqrt{2}$

(2) 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$이므로

$\frac{2}{\sin A}=\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$ ∴ $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=45^\circ$ 또는 $A=135^\circ$

그런데 $A=135^\circ$이면 $A+C>180^\circ$이므로 $A=45^\circ$

$A+B+C=180^\circ$이므로

$B=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=75^\circ$

답 (1) $\sqrt{2}$ (2) 75°

07

$A:B:C=2:3:1$이므로

$A=180^\circ\times\frac{2}{6}=60^\circ$

$B=180^\circ\times\frac{3}{6}=90^\circ$

$C=180^\circ\times\frac{1}{6}=30^\circ$

$$\begin{aligned}\therefore a:b:c&=\sin A:\sin B:\sin C\\&=\sin 60^\circ:\sin 90^\circ:\sin 30^\circ\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}:1:\frac{1}{2}\\&=\sqrt{3}:2:1\end{aligned}$$

답 $\sqrt{3}:2:1$

08

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이때 $a+b+c=24$, $R=4$이므로

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B+\sin C&=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\\&=\frac{a+b+c}{2R}\\&=\frac{24}{2\times 4}=3\end{aligned}$$

답 3

09

양수 k에 대하여

$ab=4k$ ······㉠

$bc=3k$ ······㉡

$ca=6k$ ······㉢

라 하자.

㉠×㉡×㉢을 하면 $a^2b^2c^2=72k^3$

∴ $abc=6k\sqrt{2k}$ ······㉣

㉡을 ㉣에 대입하면 $3ka=6k\sqrt{2k}$ ∴ $a=2\sqrt{2k}$

㉢을 ㉣에 대입하면 $6kb=6k\sqrt{2k}$ ∴ $b=\sqrt{2k}$

㉠을 ㉣에 대입하면 $4kc=6k\sqrt{2k}$ ∴ $c=\frac{3}{2}\sqrt{2k}$

$$\begin{aligned}\therefore \sin A:\sin B:\sin C&=a:b:c\\&=2\sqrt{2k}:\sqrt{2k}:\frac{3}{2}\sqrt{2k}\\&=4:2:3\end{aligned}$$

답 4 : 2 : 3

10

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$

이때 $a\sin A=b\sin B$이므로

$a\times\frac{a}{2R}=b\times\frac{b}{2R}$

$a^2=b^2$ ∴ $a=b$ ($\because a>0, b>0$)

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 $a=b$인 이등변삼각형

Lecture 삼각형의 결정

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 a, b, c라 하면

(1) $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$

➡ △ABC는 이등변삼각형

(2) $a=b=c$

➡ △ABC는 정삼각형

(3) 가장 긴 변의 길이가 c일 때

$a^2+b^2<c^2$ ➡ △ABC는 $C>90^\circ$인 둔각삼각형

$a^2+b^2=c^2$ ➡ △ABC는 $C=90^\circ$인 직각삼각형

$a^2+b^2>c^2$ ➡ △ABC는 예각삼각형

11

$A+B+C=180^\circ$이므로

$A+B=180^\circ-C$, $A+C=180^\circ-B$

이를 주어진 식에 대입하면

$c\sin(180^\circ-C)=b\sin(180^\circ-B)$

$\therefore c\sin C=b\sin B$ ······㉠

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

위의 식을 ㉠에 대입하면

$c\times\dfrac{c}{2R}=b\times\dfrac{b}{2R}$

$b^2=c^2$ $\therefore b=c\ (\because b>0,\ c>0)$

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

답 $b=c$인 이등변삼각형

12

$A+B+C=180^\circ$이므로

$C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(70^\circ+80^\circ)=30^\circ$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{300}{\sin 30^\circ}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin 70^\circ}$, $\dfrac{300}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\overline{BC}}{0.94}$

$600=\dfrac{\overline{BC}}{0.94}$ $\therefore \overline{BC}=564\ (\mathrm{m})$

따라서 선착장 B에서 선박 C까지의 거리는 564 m이다.

답 564 m

13

코사인법칙에 의하여

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=(\sqrt{3}+1)^2+2^2-2\times(\sqrt{3}+1)\times2\times\cos 60^\circ$

$=4+2\sqrt{3}+4-2\times(\sqrt{3}+1)\times2\times\dfrac{1}{2}$

$=8+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2$

$=6$

그런데 $a>0$이므로 $a=\sqrt{6}$

또 사인법칙에 의하여 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$이므로

$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2}{\sin C}$, $\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore C=45^\circ\ (\because 0^\circ<C<180^\circ)$

이때 $A+B+C=180^\circ$이므로

$B=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ$

답 $a=\sqrt{6}$, $B=75^\circ$, $C=45^\circ$

14

코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{CA}^2+\overline{AB}^2-2\times\overline{CA}\times\overline{AB}\times\cos A$

$=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos 120^\circ$

$=9+25-2\times3\times5\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$=49$

그런데 $\overline{BC}>0$이므로 $\overline{BC}=7$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=2R$, $\dfrac{7}{\sin 120^\circ}=2R$

$\therefore R=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

답 $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

15

삼각형 ABC에서 7이 가장 긴 변의 길이이므로 가장 긴 변의 대각이 가장 큰 각이 된다. 즉 길이가 7인 변의 대각의 크기가 θ이므로 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{4^2+5^2-7^2}{2\times4\times5}=-\dfrac{1}{5}$

답 $-\dfrac{1}{5}$

Lecture 삼각형의 최대각과 최소각

삼각형의 세 변의 길이를 알 때, 삼각형의 최대각과 최소각의 크기는 코사인법칙을 이용하여 구한다.

(1) 길이가 가장 긴 변의 대각: 최대각

(2) 길이가 가장 짧은 변의 대각: 최소각

16

세 원 A, B, C의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2, r_3이라 하자.

양수 k에 대하여 $r_1=2k$, $r_2=3k$, $r_3=4k$로 놓으면

$\overline{AB}=r_1+r_2=2k+3k=5k$

$\overline{BC}=r_2+r_3=3k+4k=7k$

$\overline{CA}=r_3+r_1=4k+2k=6k$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{(7k)^2+(6k)^2-(5k)^2}{2\times7k\times6k}=\dfrac{60k^2}{84k^2}=\dfrac{5}{7}$

답 $\dfrac{5}{7}$

17

사인법칙에 의하여

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=2:3:4$

양수 k에 대하여 $a=2k$, $b=3k$, $c=4k$로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(2k)^2+(3k)^2-(4k)^2}{2\times2k\times3k}$$
$$=\frac{-3k^2}{12k^2}=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore \tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}}=-\sqrt{15}$$

답 $-\sqrt{15}$

18

$A+B+C=180^\circ$이므로 $B+C=180^\circ-A$

$\therefore \cos(B+C)=\cos(180^\circ-A)=-\cos A$

사인법칙에 의하여

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=3:5:7$

양수 k에 대하여 $a=3k$, $b=5k$, $c=7k$로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(5k)^2+(7k)^2-(3k)^2}{2\times5k\times7k}$$
$$=\frac{65k^2}{70k^2}=\frac{13}{14}$$

$$\therefore \cos(B+C)=-\cos A=-\frac{13}{14}$$

답 $-\frac{13}{14}$

19

양수 k에 대하여 $2\sin A=2\sqrt{3}\sin B=3\sin C=k$로 놓으면

$$\sin A=\frac{k}{2},\ \sin B=\frac{k}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}k,\ \sin C=\frac{k}{3}$$

$$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=\frac{k}{2}:\frac{\sqrt{3}}{6}k:\frac{k}{3}$$
$$=3:\sqrt{3}:2$$

사인법칙에 의하여

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=3:\sqrt{3}:2$

양수 l에 대하여 $a=3l$, $b=\sqrt{3}l$, $c=2l$로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(\sqrt{3}l)^2+(2l)^2-(3l)^2}{2\times\sqrt{3}l\times2l}$$
$$=\frac{-2l^2}{4\sqrt{3}l^2}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$$

답 $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

20

코사인법칙에 의하여

$b\cos A-a\cos B=c$에서

$$b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-a\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=c$$

$b^2+c^2-a^2-(c^2+a^2-b^2)=2c^2$

$2b^2-2a^2=2c^2$

$\therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

답 $B=90^\circ$인 직각삼각형

21

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\cos B+\cos C\text{에서}$$

$$\frac{\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}}{\frac{a}{2R}}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$b+c=\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$$

$2bc(b+c)=b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)$

$b^3+b^2c+bc^2+c^3-a^2b-a^2c=0$

$b^2(b+c)+c^2(b+c)-a^2(b+c)=0$

$\therefore (b+c)(b^2+c^2-a^2)=0$

그런데 $b+c>0$이므로 $b^2+c^2-a^2=0$

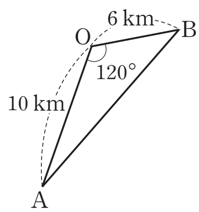
$\therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$인 직각삼각형이다.

답 $A=90^\circ$인 직각삼각형

22

2시간 후 두 보트 A, B가 이동한 거리는 각각 다음과 같다.



$\overline{OA}=5\times2=10\,(\text{km})$

$\overline{OB}=3\times2=6\,(\text{km})$

코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2$

$=10^2+6^2-2\times10\times6\times\cos120^\circ$

$=196$

$\therefore \overline{AB}=14\,(\text{km})\ (\because \overline{AB}>0)$

따라서 출발한 지 2시간 후 두 보트 A, B 사이의 거리는 14 km이다.

답 14 km

23

$\overline{AB}=x$ km라 하면 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{AB}\times\cos 60^\circ$

$7^2=8^2+x^2-2\times8\times x\times\frac{1}{2}$

$x^2-8x+15=0$

$(x-3)(x-5)=0$

$\therefore x=5\ (\because x>3)$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 5 km이다.

답 5 km

24

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$이므로

$2\sqrt{5}=\frac{1}{2}\times4\times3\times\sin A$

$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{5}}{3}$

이때 $0^\circ<A<90^\circ$이므로

$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{5}{9}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

코사인법칙에 의하여 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$이므로

$a^2=4^2+3^2-2\times4\times3\times\frac{2}{3}=16+9-16=9$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

답 3

25

코사인법칙에 의하여 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$이므로

$2^2=(2\sqrt{3})^2+a^2-2\times2\sqrt{3}\times a\times\cos 30^\circ$

$4=12+a^2-2\times2\sqrt{3}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a^2-6a+8=0$

$(a-2)(a-4)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=4$

(i) $a=2$일 때

$\triangle ABC=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\times\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}$

(ii) $a=4$일 때

$\triangle ABC=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times4\times\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times4\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$

답 $\sqrt{3}$ 또는 $2\sqrt{3}$

26

$\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times8\times5\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times8\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(a+b+c)$이므로

$10\sqrt{3}=\frac{1}{2}r(7+8+5)$

$10r=10\sqrt{3}\qquad\therefore r=\sqrt{3}$

답 $\sqrt{3}$

27

코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1^2+3^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times1\times3}=\frac{1}{3}$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C$

$=\frac{1}{2}\times1\times3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$=\sqrt{2}$

삼각형 ABC의 외접원과 내접원의 반지름의 길이를 각각 R, r라 하면

$\triangle ABC=\frac{abc}{4R}$에서 $\sqrt{2}=\frac{1\times3\times2\sqrt{2}}{4R}$

$4\sqrt{2}R=6\sqrt{2}\qquad\therefore R=\frac{3}{2}$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(a+b+c)$에서 $\sqrt{2}=\frac{1}{2}r(1+3+2\sqrt{2})$

$\therefore r=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{2}=\sqrt{2}-1$

답 외접원의 반지름의 길이: $\frac{3}{2}$
내접원의 반지름의 길이: $\sqrt{2}-1$

28

평행사변형 ABCD의 넓이가 $20\sqrt{3}$이고 $B=180^\circ-A$이므로

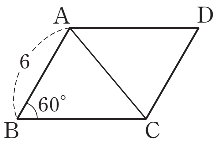
$20\sqrt{3}=5\times8\times\sin(180^\circ-A)$

$\sin(180^\circ-A)=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $90^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=120^\circ$

답 120°

29



평행사변형 ABCD의 넓이가 $21\sqrt{3}$이므로

$21\sqrt{3}=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin 60^\circ$

$21\sqrt{3}=6\times\overline{BC}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overline{BC}=7$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2&=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos B\\&=6^2+7^2-2\times6\times7\times\cos 60^\circ\\&=36+49-2\times6\times7\times\frac{1}{2}\\&=43\end{aligned}$$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{43}\ (\because \overline{AC}>0)$

답 $\sqrt{43}$

30

두 대각선 AC와 BD가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 사각형 ABCD의 넓이가 $12\sqrt{3}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times6\times8\times\sin\theta=12\sqrt{3}$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 두 대각선이 이루는 예각의 크기는 60°이다.

답 60°

31

사각형 ABCD의 두 대각선의 길이를 p, q라 하면

$p+q=12 \qquad \therefore q=12-p$

이때 $p>0$, $q>0$이므로

$12-p>0 \qquad \therefore 0<p<12$

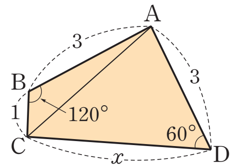
사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\times p\times q\times\sin 60^\circ\\&=\frac{1}{2}\times p\times(12-p)\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}(-p^2+12p)\\&=-\frac{\sqrt{3}}{4}(p-6)^2+9\sqrt{3}\end{aligned}$$

이때 $0<p<12$이므로 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $9\sqrt{3}$이다.

답 $9\sqrt{3}$

32



오른쪽 그림과 같이 선분 AC를 그으면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2&=3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos 120^\circ\\&=13\end{aligned}$$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{13}\ (\because \overline{AC}>0)$

$\overline{CD}=x$라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{13})^2=x^2+3^2-2\times x\times3\times\cos 60^\circ$

$13=x^2+9-3x$, $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0 \qquad \therefore x=4\ (\because x>0)$

이때 두 삼각형 ABC, ACD의 넓이를 구하면

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times3\times1\times\sin 120^\circ=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$\triangle ACD=\dfrac{1}{2}\times3\times4\times\sin 60^\circ=3\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\therefore \square ABCD&=\triangle ABC+\triangle ACD\\&=\frac{3\sqrt{3}}{4}+3\sqrt{3}=\frac{15\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

연습문제

p. 236~239

1

사인법칙에 의하여 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$이므로

$\dfrac{2}{\sin B}=\dfrac{1}{\sin 30^\circ} \qquad \therefore \sin B=1$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=90^\circ$

답 ④

2

사인법칙에 의하여 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$이므로

$\dfrac{a}{\sin 30^\circ}=2\times3 \qquad \therefore a=3$

답 ⑤

3

코사인법칙에 의하여

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=(5\sqrt{2})^2+6^2-2\times5\sqrt{2}\times6\times\cos 45^\circ$

$=26$

$\therefore a=\sqrt{26}\ (\because a>0)$

답 ②

4

코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{3^2+8^2-7^2}{2\times3\times8}=\dfrac{1}{2}$

답 $\dfrac{1}{2}$

5

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times5\times8\times\sin 30^\circ=10$

답 ①

6

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 3이므로

$15=\dfrac{abc}{4\times3}\qquad \therefore abc=180$

답 ⑤

7

삼각형 ABC에서 $A+B+C=180^\circ$이므로

$C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(105^\circ+30^\circ)=45^\circ$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}$

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{12}{\sin 45^\circ}\qquad \therefore \overline{AC}=6\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AC}^2=(6\sqrt{2})^2=72$

답 ①

8

양수 k에 대하여 $2\sin A=3\sin B=2\sin C=k$로 놓으면

$2\sin A=k$에서 $\sin A=\dfrac{k}{2}$

$3\sin B=k$에서 $\sin B=\dfrac{k}{3}$

$2\sin C=k$에서 $\sin C=\dfrac{k}{2}$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=\dfrac{k}{2}:\dfrac{k}{3}:\dfrac{k}{2}=3:2:3$

사인법칙에 의하여

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=3:2:3$

양수 l에 대하여 $a=3l$, $b=2l$, $c=3l$로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{(3l)^2+(3l)^2-(2l)^2}{2\times3l\times3l}$

$=\dfrac{14l^2}{18l^2}=\dfrac{7}{9}$

답 ④

9

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$이므로

(가), (나)에서

$a+b+c=2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C$

$=2R(\sin A+\sin B+\sin C)$

$=2R(1+\sqrt{2})$

즉 $8+8\sqrt{2}=2R(1+\sqrt{2})$이므로

$R=\dfrac{8(1+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})}=4$

답 ④

10

삼각형 APC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{CP}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{AP}}{\sin 60^\circ}$

$\therefore \dfrac{\overline{CP}}{\sin\theta}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\overline{AP}$ …… ❶

즉 $\overline{AP}$의 길이가 최소일 때 $\dfrac{\overline{CP}}{\sin\theta}$의 값도 최소이다.

$\overline{AP}$의 길이는 $\overline{AP}\perp\overline{BC}$일 때 최소이므로 그때의 최솟값은

$\overline{AP}=\overline{AC}\times\sin 60^\circ=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ …… ❷

따라서 $\dfrac{\overline{CP}}{\sin\theta}$의 최솟값은

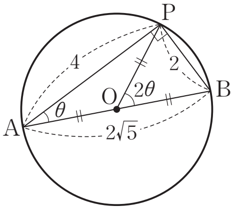
$\dfrac{\overline{CP}}{\sin\theta}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\overline{AP}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}$ …… ❸

답 $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{\overline{CP}}{\sin\theta}$를 $\overline{AP}$를 이용하여 나타낼 수 있다.	30%
❷ $\overline{AP}$의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	40%
❸ $\dfrac{\overline{CP}}{\sin\theta}$의 최솟값을 구할 수 있다.	30%

11

$\angle APB=90^\circ$이므로 직각삼각형 PAB에서



$\overline{BP}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-4^2}=\sqrt{4}=2$

오른쪽 그림과 같이 선분 OP를 그으면

$\angle POB=2\angle PAB=2\theta$

점 O는 삼각형 PAB의 외심이므로

$\overline{OB}=\overline{OP}=\overline{OA}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}=\sqrt{5}$

따라서 삼각형 POB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos 2\theta=\frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-2^2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

12

코사인법칙에 의하여

$\cos 60^\circ=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\frac{1}{2}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$c^2+a^2-b^2=ca \quad \therefore c^2+a^2=b^2+ca$ ······㉠

$$\therefore \frac{a}{b+c}+\frac{c}{b+a}=\frac{a(b+a)+c(b+c)}{(b+c)(b+a)}$$
$$=\frac{ab+bc+a^2+c^2}{(b+c)(b+a)}$$
$$=\frac{ab+bc+b^2+ca}{(b+c)(b+a)} \ (\because ㉠)$$
$$=\frac{a(b+c)+b(b+c)}{(b+c)(b+a)}$$
$$=\frac{(b+c)(a+b)}{(b+c)(b+a)}$$
$$=1$$

답 1

13

$\cos^2 A=1-\sin^2 A$, $\cos^2 B=1-\sin^2 B$이므로

$\cos^2 A-\cos^2 B=\sin^2 C$에서

$1-\sin^2 A-(1-\sin^2 B)=\sin^2 C$

$\therefore \sin^2 B=\sin^2 A+\sin^2 C$ ······㉠

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

㉠에서

$$\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$\therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

답 ④

14

Step by Step

∠BAD의 크기를 ∠BCD의 크기를 이용하여 나타낸다.

↓

코사인법칙을 이용하여 $\overline{BD}$의 길이를 구한다.

↓

$\cos C$의 값을 이용하여 $\sin C$의 값을 구한다.

↓

원의 넓이를 구한다.

$\angle BCD=\theta\ (0^\circ<\theta<90^\circ)$라 하면

$\cos\theta=\cos(\angle BCD)=\frac{3}{5}$

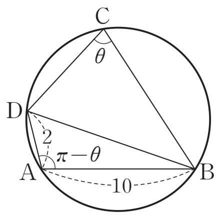
원에 내접하는 사각형에서 대각의 크기의 합은 π이므로

$\angle BCD+\angle BAD=\pi \quad \therefore \angle BAD=\pi-\theta$

다음 그림과 같이 선분 BD를 그으면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2=2^2+10^2-2\times2\times10\times\cos(\pi-\theta)$$
$$=2^2+10^2+2\times2\times10\times\cos\theta$$
$$=104+40\times\frac{3}{5}$$
$$=128$$

$\therefore \overline{BD}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}\ (\because \overline{BD}>0)$



이때 $\cos\theta=\frac{3}{5}$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$

$\therefore \sin\theta=\frac{4}{5}\ (\because 0^\circ<\theta<90^\circ)$

삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BD}}{\sin\theta}=2R$이므로

$\frac{8\sqrt{2}}{\frac{4}{5}}=2R \quad \therefore R=5\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi\times(5\sqrt{2})^2=50\pi$

$\therefore a=50$

답 50

15

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=1^2+3^2-2\times1\times3\times\cos\dfrac{\pi}{3}=7$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{7}\ (\because \overline{BC}>0)$

선분 AP가 $\angle$BAC의 이등분선이므로

$\overline{BP}:\overline{PC}=\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$

즉 $\overline{PC}=\dfrac{1}{4}\overline{BC}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$이고 $\angle PAC=\dfrac{1}{2}\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}$

이므로 삼각형 APC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{PC}}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=2R,\ \dfrac{\dfrac{\sqrt{7}}{4}}{\dfrac{1}{2}}=2R\qquad \therefore R=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

따라서 삼각형 APC의 외접원의 넓이는

$\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2=\dfrac{7}{16}\pi$

답 ④

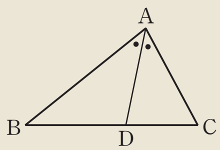
Lecture 삼각형의 내각의 이등분선의 성질

오른쪽 그림에서

$\angle BAD=\angle CAD$이면

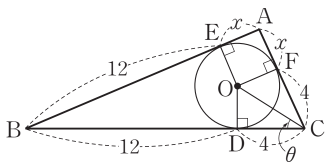
(1) $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

(2) 점 D는 선분 BC를 $\overline{AB}:\overline{AC}$로 내분하는 점이다.



16

다음 그림과 같이 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O, 내접원과 선분 AB, AC가 만나는 점을 각각 E, F라 하자.



$\overline{AE}=x$라 하면

$\overline{AF}=\overline{AE}=x$

한편 $\angle OCD=\theta\ (0^\circ<\theta<90^\circ)$라 하면

$\overline{OD}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$이므로 $\tan\theta=\dfrac{\overline{OD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \theta=30^\circ\ (\because 0^\circ<\theta<90^\circ)$

$\therefore \angle ACD=2\theta=60^\circ$

이때 $\overline{BE}=\overline{BD}=12$, $\overline{CF}=\overline{CD}=4$이므로

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(12+x)^2$

$=16^2+(x+4)^2-2\times16\times(x+4)\times\cos60^\circ$

$144+24x+x^2=256+x^2+8x+16-16(x+4)$

$32x=64\qquad \therefore x=2$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$2(12+4+2)=36$

답 ②

Level Up 연습문제

p. 240

1

$\overline{AD}=\overline{CE}=a\ (a>0)$라 하면

삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{13})^2=a^2+(a+1)^2-2\times a\times(a+1)\times\cos60^\circ$

$a^2+a-12=0,\ (a+4)(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

이때 두 삼각형 ADE, ABE의 넓이를 구하면

$\triangle ADE=\dfrac{1}{2}\times4\times3\times\sin60^\circ=3\sqrt{3}$

$\triangle ABE=\dfrac{1}{2}\times4\times1\times\sin60^\circ=\sqrt{3}$

$\therefore\ \triangle BDE=\triangle ADE-\triangle ABE=3\sqrt{3}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

답 ④

2

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C$

(가)에서 $\cos A<0$이므로 $90^\circ<A<180^\circ$

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$이므로

$a=2R\sin A=2R\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}R$ ······ ㉠

$b+c=2R\sin B+2R\sin C$

$=2R(\sin B+\sin C)$

$=2R\times\dfrac{9}{8}\ (\because$ (나)$)$

$=\dfrac{9}{4}R$ ······ ㉡

이때 삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{15}$이므로

$\sqrt{15}=\frac{1}{2}bc\sin A$, $\sqrt{15}=\frac{1}{2}bc\times\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\therefore bc=8$ ……㉢

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\&=b^2+c^2-2\times b\times c\times\left(-\frac{1}{4}\right)\\&=b^2+c^2+\frac{1}{2}bc\\&=b^2+2bc+c^2-\frac{3}{2}bc\\&=(b+c)^2-\frac{3}{2}bc\end{aligned}$$

㉠, ㉡, ㉢을 위의 식에 대입하면

$\left(\frac{\sqrt{15}}{2}R\right)^2=\left(\frac{9}{4}R\right)^2-\frac{3}{2}\times 8$

$\frac{21}{16}R^2=12 \qquad \therefore R^2=\frac{64}{7}$

즉 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi R^2=\frac{64}{7}\pi$

따라서 $p=7$, $q=64$이므로

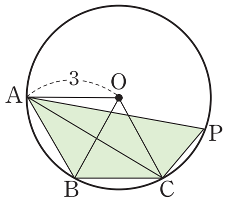
$p+q=7+64=71$

답 71

3

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O라 하면 두 삼각형 OAB와 OBC는 정삼각형이므로

$\overline{AB}=\overline{BC}=3$



삼각형 ABC에서 $\angle ABC=\frac{2}{3}\pi$

이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=3^2+3^2-2\times3\times3\times\cos\frac{2}{3}\pi=27$

$\therefore \overline{AC}=3\sqrt{3}$ ($\because \overline{AC}>0$)

사각형 ABCP가 원 O에 내접하므로

$\angle ABC+\angle APC=\pi$, $\frac{2}{3}\pi+\angle APC=\pi$

$\therefore \angle APC=\frac{\pi}{3}$

$\overline{AP}=x$, $\overline{CP}=y$라 하면 삼각형 ACP에서 코사인법칙에 의하여

$(3\sqrt{3})^2=x^2+y^2-2xy\cos\frac{\pi}{3}$

$27=x^2+y^2-xy$

$27=x^2+y^2+2xy-3xy$

$\therefore 27=(x+y)^2-3xy$

이때 $\overline{AP}+\overline{CP}=x+y=8$이므로

$27=8^2-3xy \qquad \therefore xy=\frac{37}{3}$

두 삼각형 ABC, ACP의 넓이를 구하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times3\times3\times\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{9\sqrt{3}}{4}$

$\triangle ACP=\frac{1}{2}xy\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{37}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{37\sqrt{3}}{12}$

$$\begin{aligned}\therefore \square ABCP&=\triangle ABC+\triangle ACP\\&=\frac{9\sqrt{3}}{4}+\frac{37\sqrt{3}}{12}\\&=\frac{16\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

답 ②

1 등차수열

확인 문제 p. 243 ~ 265

01
$a_n=2n+3$이므로 $n=8$을 대입하면

$a_8=2\times8+3=19$

답 19

02
$a_n=n^3-n$이므로 $n=2, 4$를 대입하면

$a_2=2^3-2=6,\ a_4=4^3-4=60$

$\therefore a_2+a_4=6+60=66$ 답 66

03
20을 제n항이라 하면

$a_n=n^2-n=20$에서 $n^2-n-20=0$

$(n+4)(n-5)=0 \qquad \therefore n=5\ (\because n$은 자연수$)$

따라서 20은 제5항이다.

답 제5항

04
주어진 수열에서 $a_1=1,\ a_2=3$이므로

$a_1=a+b=1,\ a_2=2a+b=3$

위의 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-1$

답 $a=2,\ b=-1$

05
$a_1=3,\ a_2=6,\ a_3=9,\ a_4=12,\ a_5=15$이므로

첫째항은 3, 공차는 $6-3=3$

따라서 일반항 a_n은

$a_n=3+(n-1)\times3 \qquad \therefore a_n=3n$

답 $a_n=3n$

06
주어진 등차수열의 일반항을 a_n이라 하면

첫째항이 1, 공차가 4이므로

$a_n=1+(n-1)\times4 \qquad \therefore a_n=4n-3$

따라서 구하는 등차수열의 제100항은

$a_{100}=4\times100-3=397$

답 397

07
첫째항이 -4, 공차가 3이므로

$a_n=-4+(n-1)\times3 \qquad \therefore a_n=3n-7$

이때 32를 제n항이라 하면

$a_n=3n-7=32$에서 $3n=39 \qquad \therefore n=13$

따라서 32는 제13항이다.

답 제13항

08
첫째항이 a, 공차가 d이므로

$a_3=11$에서 $a+2d=11$ ······㉠

$a_9=29$에서 $a+8d=29$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5,\ d=3$

$\therefore a+d=5+3=8$

답 8

09
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=21$에서 $a+2d=21$ ······㉠

$a_{10}=63$에서 $a+9d=63$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=9,\ d=6$

$\therefore a_n=9+(n-1)\times6=6n+3$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 제5항은

$a_5=6\times5+3=33$

답 $a_n=6n+3$, 제5항: 33

10
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{11}=30$에서 $a+10d=30$ ······㉠

$a_{21}=0$에서 $a+20d=0$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=60,\ d=-3$

$\therefore a_n=60+(n-1)\times(-3)=-3n+63$

이때 15를 제n항이라 하면

$a_n=-3n+63=15$에서 $-3n=-48 \qquad \therefore n=16$

따라서 15는 제16항이다.

답 제16항

11
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2+a_4=10$에서 $(a+d)+(a+3d)=10$

$\therefore a+2d=5$ ······㉠

$a_7+a_9=40$에서 $(a+6d)+(a+8d)=40$

$\therefore a+7d=20$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $d=3$
따라서 $a_n=-1+(n-1)\times 3=3n-4$이므로
$a_{10}=3\times 10-4=26$

답 26

12

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_6+a_{10}=16$에서 $(a+5d)+(a+9d)=16$
$\therefore a+7d=8$ ……㉠
$a_4-a_{12}=16$에서 $(a+3d)-(a+11d)=16$
$-8d=16$ $\therefore d=-2$
$d=-2$를 ㉠에 대입하면
$a-14=8$ $\therefore a=22$
따라서 $a_n=22+(n-1)\times(-2)=-2n+24$이므로
$a_7=-2\times 7+24=10$

답 10

13

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
(i) $a_2=a_8$일 때
$a+d=a+7d$ $\therefore d=0$
그런데 공차가 0이 아니므로 모순이다.
(ii) $a_2=-a_8$일 때
$a+d=-(a+7d)$이므로 $a+4d=0$ ……㉠
$a_{15}=40$에서 $a+14d=40$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-16$, $d=4$
$\therefore a_{10}-a_8=(a+9d)-(a+7d)=2d=2\times 4=8$

답 8

14

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
(1) $a_3=44$에서 $a+2d=44$ ……㉠
$a_{30}=-37$에서 $a+29d=-37$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=50$, $d=-3$
$\therefore a_n=50+(n-1)\times(-3)=-3n+53$
처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 최초의 항이므로 $-3n+53<0$에서
$-3n<-53$ $\therefore n>\frac{53}{3}=17.66\cdots$
따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제18항이다.
(2) $a_8=-20$에서 $a+7d=-20$ ……㉠
$a_{18}=40$에서 $a+17d=40$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-62$, $d=6$
$\therefore a_n=-62+(n-1)\times 6=6n-68$
처음으로 양수가 되는 항은 $a_n>0$을 만족시키는 최초의 항이므로 $6n-68>0$에서
$6n>68$ $\therefore n>\frac{68}{6}=11.33\cdots$
따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제12항이다.

답 (1) 제18항 (2) 제12항

15

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_2a_4=180$에서 $(a+d)(a+3d)=180$ ……㉠
$a_3+a_5=36$에서 $(a+2d)+(a+4d)=36$
$a+3d=18$ $\therefore a=18-3d$ ……㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$(18-3d+d)(18-3d+3d)=180$
$18(18-2d)=180$, $18-2d=10$ $\therefore d=4$
$d=4$를 ㉡에 대입하면 $a=18-3\times 4=6$
$\therefore a_n=6+(n-1)\times 4=4n+2$
$a_n<100$에서 $4n+2<100$이므로
$4n<98$ $\therefore n<24.5$
따라서 $a_n<100$을 만족시키는 n의 최댓값은 24이다.

답 24

16

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_2=38$에서 $a+d=38$ ……㉠
$a_4=32$에서 $a+3d=32$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=41$, $d=-3$
$\therefore a_n=41+(n-1)\times(-3)=-3n+44$
$a_n<0$에서 $-3n+44<0$이므로
$-3n<-44$ $\therefore n>\frac{44}{3}=14.66\cdots$
$n=14$일 때, $a_{14}=-3\times 14+44=2$
$n=15$일 때, $a_{15}=-3\times 15+44=-1$
따라서 $|a_{14}|>|a_{15}|$이므로 $|a_n|$의 값이 최소가 되는 n의 값은 15이다.

답 15

17

등차수열 11, a, b, c, 35의 공차를 d라 하면 35는 제5항이므로
$11+(5-1)d=35$ $\therefore d=6$
등차수열의 일반항을 a_n이라 하면
$a_n=11+(n-1)\times 6=6n+5$
$\therefore a=a_2=6\times 2+5=17$
$b=a_3=6\times 3+5=23$

$c=a_4=6\times4+5=29$

답 $a=17$, $b=23$, $c=29$

참고 **17**에서 일반항을 구하지 않고 a, b, c의 값을 구해 보자.
공차가 6이므로
$a=11+6=17$
$b=a+6=17+6=23$
$c=b+6=23+6=29$

18

등차수열 -4, x_1, x_2, $\cdots$, x_{10}, 18의 공차를 d라 하면
18은 제12항이므로
$-4+(12-1)d=18 \qquad \therefore d=2$
등차수열의 일반항을 a_n이라 하면
$a_n=-4+(n-1)\times2=2n-6$
이때 x_8은 제9항이므로 $x_8=a_9=2\times9-6=12$

답 12

19

등차수열 3, x_1, x_2, $\cdots$, x_n, 108의 공차를 d라 하면
108은 제$(n+2)$항이므로
$3+\{(n+2)-1\}d=108$, $3+(n+1)d=108$
$(n+1)d=105=3\times5\times7 \qquad \cdots\cdots ㉠$
이때 공차는 1보다 큰 최소의 자연수이므로 ㉠에서 공차는 3이다.
따라서 $d=3$이므로 $3(n+1)=105$
$n+1=35 \qquad \therefore n=34$

답 34

20

세 수 $x+2$, x^2-2x, $x+6$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $2(x^2-2x)=(x+2)+(x+6)$
$2(x^2-2x)=2x+8$, $x^2-3x-4=0$
$(x+1)(x-4)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=4$
따라서 모든 x의 값의 합은
$-1+4=3$

답 3

참고 **20**에서
$x=-1$이면 주어진 세 수는 1, 3, 5이므로 공차가 2인 등차수열이다.
$x=4$이면 주어진 세 수는 6, 8, 10이므로 공차가 2인 등차수열이다.

21

세 수 1, b, 5가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$b=\dfrac{1+5}{2}=3$
세 수 a, 1, b, 즉 a, 1, 3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$1=\dfrac{a+3}{2} \qquad \therefore a=-1$
세 수 b, 5, c, 즉 3, 5, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$5=\dfrac{3+c}{2} \qquad \therefore c=7$
$\therefore a+b+c=-1+3+7=9$

답 9

22

다항식 $f(x)=2x^2+kx+3$을 일차식 $x-1$, $x-2$, $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여
$a=f(1)=2+k+3=k+5$
$b=f(2)=8+2k+3=2k+11$
$c=f(-1)=2-k+3=-k+5$
세 수 a, b, c, 즉 $k+5$, $2k+11$, $-k+5$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2k+11=\dfrac{(k+5)+(-k+5)}{2}=5$
$2k=-6 \qquad \therefore k=-3$

답 -3

Lecture 나머지정리

(1) x에 대한 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면
$R=f(\alpha)$ → $f(x)$에 $x-\alpha=0$인 x의 값을 대입
(2) x에 대한 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면
$R=f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ → $f(x)$에 $ax+b=0$인 x의 값을 대입

23

등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면
세 수의 합이 -3이므로
$(a-d)+a+(a+d)=-3$
$3a=-3 \qquad \therefore a=-1$
세 수의 곱이 8이므로
$(-1-d)\times(-1)\times(-1+d)=8$
$d^2-1=8$, $d^2=9 \qquad \therefore d=-3$ 또는 $d=3$
따라서 구하는 세 수는 -4, -1, 2이다.

답 -4, -1, 2

24

등차수열을 이루는 네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$ 로 놓으면

네 수의 합이 16이므로

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=16$

$4a=16 \qquad \therefore a=4$

가장 큰 수는 가장 작은 수의 3배이므로

$4+3d=3(4-3d) \qquad \therefore d=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 네 수는 2, $\frac{10}{3}$, $\frac{14}{3}$, 6이므로 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱은 $6\times2=12$

답 12

25

등차수열의 공차를 d라 하면

$a=3+d$, $b=3+2d$, $c=3+3d$ ……㉠

㉠을 $6a+c=5b$에 대입하면

$6(3+d)+(3+3d)=5(3+2d)$

$21+9d=15+10d \qquad \therefore d=6$

$\therefore a=3+6=9$

$b=3+2\times6=15$

$c=3+3\times6=21$

답 $a=9$, $b=15$, $c=21$

26

수열 $\{a_n\}$이 $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \cdots$이므로 각 항의 역수를 구하면

$2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \cdots$

즉 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 2, 공차가 $\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$인 등차수열이므로

$\frac{1}{a_n}=2+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{n+3}{2} \qquad \therefore a_n=\frac{2}{n+3}$

답 $a_n=\frac{2}{n+3}$

27

$a_3=6$, $a_7=3$이므로

$\frac{1}{a_3}=\frac{1}{6}$, $\frac{1}{a_7}=\frac{1}{3}$

수열 $\{a_n\}$이 조화수열이므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열을 이룬다.

등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$\frac{1}{a_3}=\frac{1}{6}$에서 $a+2d=\frac{1}{6}$ ……㉠

$\frac{1}{a_7}=\frac{1}{3}$에서 $a+6d=\frac{1}{3}$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{12}$, $d=\frac{1}{24}$

$\therefore \frac{1}{a_n}=\frac{1}{12}+(n-1)\times\frac{1}{24}=\frac{n+1}{24}$

따라서 $a_n=\frac{24}{n+1}$이므로 $a_{12}=\frac{24}{13}$

답 $\frac{24}{13}$

28

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=-8$에서 $a+4d=-8$ ……㉠

$a_{12}=20$에서 $a+11d=20$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-24$, $d=4$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제15항까지의 합 S_{15}는

$S_{15}=\frac{15\{2\times(-24)+(15-1)\times4\}}{2}=60$

답 60

29

첫째항이 5, 제n항이 45, 첫째항부터 제n항까지의 합이 525이므로 $\frac{n(5+45)}{2}=525$

$25n=525 \qquad \therefore n=21$

즉 제21항이 45이므로 공차를 d라 하면

$5+20d=45 \qquad \therefore d=2$

따라서 주어진 등차수열의 제10항 a_{10}은

$a_{10}=5+(10-1)\times2=23$

답 23

30

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_6=44$에서 $a+5d=44$ ……㉠

$a_{18}=116$에서 $a+17d=116$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=14$, $d=6$

이때 첫째항부터 제n항까지의 합이 280이므로

$\frac{n\{2\times14+(n-1)\times6\}}{2}=280$

$n(3n+11)=280$, $3n^2+11n-280=0$

$(3n+35)(n-8)=0$

$\therefore n=8$ ($\because n$은 자연수)

답 8

31

첫째항이 2, 끝항이 30, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 144이므로

$\frac{(n+2)(2+30)}{2}=144$

$16(n+2)=144,\ n+2=9 \qquad \therefore n=7$

즉 30은 제9항이므로 $2+8d=30$

$8d=28 \qquad \therefore d=\frac{7}{2}$

답 $d=\frac{7}{2},\ n=7$

32

(1) 첫째항이 -16, 공차가 6인 등차수열의 제$(n+2)$항이 20이므로

$-16+(n+1)\times 6=20,\ 6(n+1)=36$

$n+1=6 \qquad \therefore n=5$

따라서 이 수열의 합은

$\frac{7(-16+20)}{2}=14$

(2) 첫째항이 -16, 끝항이 20, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 20이므로

$\frac{(n+2)(-16+20)}{2}=20,\ 2(n+2)=20$

$n+2=10 \qquad \therefore n=8$

즉 20은 제10항이므로 $-16+9d=20$

$9d=36 \qquad \therefore d=4$

답 (1) 14 (2) $d=4,\ n=8$

33

주어진 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_4=16$에서 $\frac{4\{2a+(4-1)d\}}{2}=16$

$\therefore 2a+3d=8 \qquad \cdots\cdots㉠$

$S_9=81$에서 $\frac{9\{2a+(9-1)d\}}{2}=81$

$\therefore a+4d=9 \qquad \cdots\cdots㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ d=2$

따라서 주어진 등차수열의 첫째항은 1, 공차는 2이다.

답 첫째항: 1, 공차: 2

34

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_8=40$에서 $\frac{8\{2a+(8-1)d\}}{2}=40$

$\therefore 2a+7d=10 \qquad \cdots\cdots㉠$

$S_{15}=-30$에서 $\frac{15\{2a+(15-1)d\}}{2}=-30$

$\therefore a+7d=-2 \qquad \cdots\cdots㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=12,\ d=-2$

$\therefore S_{10}=\frac{10\{2\times 12+(10-1)\times(-2)\}}{2}=30$

답 30

35

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

첫째항부터 제5항까지의 합이 20이므로 $S_5=20$

제6항부터 제10항까지의 합이 40이므로

$S_{10}-S_5=40,\ S_{10}-20=40 \qquad \therefore S_{10}=60$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_5=\frac{5\{2a+(5-1)d\}}{2}=20$

$\therefore a+2d=4 \qquad \cdots\cdots㉠$

$S_{10}=\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=60$

$\therefore 2a+9d=12 \qquad \cdots\cdots㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{12}{5},\ d=\frac{4}{5}$

$\therefore S_{15}=\frac{15\left\{2\times\frac{12}{5}+(15-1)\times\frac{4}{5}\right\}}{2}=120$

답 120

36

(1) 첫째항이 35, 공차가 -3이므로

$a_n=35+(n-1)\times(-3)=-3n+38$

처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 최초의 항이므로 $-3n+38<0$에서

$-3n<-38 \qquad \therefore n>\frac{38}{3}=12.66\cdots$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제13항이다.

(2) 수열 $\{a_n\}$은 제12항까지가 양수이고 제13항부터는 음수이므로 첫째항부터 제12항까지의 합이 최대가 된다. 따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n의 최솟값은

$$S_{12}=\frac{12\{2\times35+(12-1)\times(-3)\}}{2}=222$$

답 (1) 제13항 (2) 제12항, 최댓값: 222

37

첫째항이 -65, 공차가 3이므로

$a_n=-65+(n-1)\times3=3n-68$

처음으로 양수가 되는 항은 $a_n>0$을 만족시키는 최초의 항이므로 $3n-68>0$에서

$3n>68 \qquad \therefore n>\frac{68}{3}=22.66\cdots$

즉 처음으로 양수가 되는 항은 제23항이다.

수열 $\{a_n\}$은 제22항까지가 음수이고 제23항부터는 양수이므로 첫째항부터 제22항까지의 합이 최소가 된다.

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n의 최솟값은

$$S_{22}=\frac{22\{2\times(-65)+(22-1)\times3\}}{2}=-737$$

답 제22항, 최솟값: -737

38

첫째항이 30인 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$S_5=\frac{5\{2\times30+(5-1)d\}}{2}=5(30+2d)$$

$$S_{11}=\frac{11\{2\times30+(11-1)d\}}{2}=11(30+5d)$$

이때 $S_5=S_{11}$이므로 $5(30+2d)=11(30+5d)$

$150+10d=330+55d \qquad \therefore d=-4$

$\therefore a_n=30+(n-1)\times(-4)=-4n+34$

처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 최초의 항이므로 $-4n+34<0$에서

$-4n<-34 \qquad \therefore n>8.5$

즉 처음으로 음수가 되는 항은 제9항이다.

수열 $\{a_n\}$은 제8항까지가 양수이고 제9항부터는 음수이므로 첫째항부터 제8항까지의 합이 최대가 된다.

$$\therefore S_8=\frac{8\{2\times30+(8-1)\times(-4)\}}{2}=128$$

답 128

39

(1) 100 이하의 자연수 중에서 7의 배수는

7, 14, 21, $\cdots$, 98

이 수열은 첫째항이 7, 공차가 7, 끝항이 98인 등차수열이므로 항수는 $\frac{98}{7}=14$

따라서 7의 배수의 총합은 $\frac{14(7+98)}{2}=735$

(2) 100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수는 1, 4, 7, 10, $\cdots$, 100

이 수열은 첫째항이 1, 공차가 3, 끝항이 100인 등차수열이므로 항수는 $100=1+(n-1)\times3$에서

$3(n-1)=99,\ n-1=33 \qquad \therefore n=34$

따라서 항수는 34이므로 100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수의 총합은

$\frac{34(1+100)}{2}=1717$

답 (1) 735 (2) 1717

40

100 이하의 자연수 중에서 4로 나누어떨어지는 수, 즉 4의 배수는 4, 8, 12, $\cdots$, 100 ……㉠

㉠은 첫째항이 4, 공차가 4, 끝항이 100인 등차수열이므로 항수는 $\frac{100}{4}=25$

$\therefore$ (4로 나누어떨어지는 수의 총합)$=\frac{25(4+100)}{2}$

$=1300$

100 이하의 자연수 중에서 6으로 나누어떨어지는 수, 즉 6의 배수는 6, 12, 18, $\cdots$, 96 ……㉡

㉡은 첫째항이 6, 공차가 6, 끝항이 96인 등차수열이므로 항수는 $\frac{96}{6}=16$

$\therefore$ (6으로 나누어떨어지는 수의 총합)$=\frac{16(6+96)}{2}$

$=816$

100 이하의 자연수 중에서 12로 나누어떨어지는 수, 즉 12의 배수는 12, 24, 36, $\cdots$, 96 ……㉢

㉢은 첫째항이 12, 공차가 12, 끝항이 96인 등차수열이므로 항수는 $\frac{96}{12}=8$

$\therefore$ (12로 나누어떨어지는 수의 총합)$=\frac{8(12+96)}{2}$

$=432$

따라서 100 이하의 자연수 중에서 4 또는 6으로 나누어떨어지는 수의 총합은

$1300+816-432=1684$

답 1684

41

$a_n<0$인 n의 값의 범위는 $-2n+21<0$에서

$-2n<-21 \qquad \therefore n>10.5$

즉 $n\le10$이면 $a_n>0$, $n\ge11$이면 $a_n<0$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$
$=(a_1+a_2+\cdots+a_{10})-(a_{11}+\cdots+a_{20})$
$=\dfrac{10(19+1)}{2}-\dfrac{10\{-1+(-19)\}}{2}$
$=100-(-100)=200$

답 200

42

첫째항이 -23, 공차가 2이므로
$a_n=-23+(n-1)\times 2=2n-25$
$a_n>0$인 n의 값의 범위는 $2n-25>0$에서
$2n>25\qquad \therefore n>12.5$
즉 $n\le 12$이면 $a_n<0$, $n\ge 13$이면 $a_n>0$이므로
$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{24}|$
$=-(a_1+a_2+\cdots+a_{12})+(a_{13}+\cdots+a_{24})$
$=-\dfrac{12\{-23+(-1)\}}{2}+\dfrac{12(1+23)}{2}$
$=-(-144)+144$
$=288$

답 288

43

첫째항이 20, 공차가 -3이므로
$a_n=20+(n-1)\times(-3)=-3n+23$
$a_n<0$인 n의 값의 범위는 $-3n+23<0$에서
$-3n<-23\qquad \therefore n>7.66\cdots$
즉 $n\le 7$이면 $a_n>0$, $n\ge 8$이면 $a_n<0$이므로
$|a_1|+|a_3|+|a_5|+|a_7|+|a_9|+|a_{11}|$
$+|a_{13}|+|a_{15}|+|a_{17}|$
$=(a_1+a_3+a_5+a_7)-(a_9+a_{11}+a_{13}+a_{15}+a_{17})$
$=\dfrac{4(20+2)}{2}-\dfrac{5\{-4+(-28)\}}{2}$
$=44-(-80)=124$

답 124

Lecture 등차수열의 특정 항으로 이루어진 수열

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
(1) 짝수 번째 항으로 이루어진 수열
$a_2=a+d,\ a_4=a+3d,\ a_6=a+5d,\ \cdots$
➡ 이 수열은 첫째항이 a_2이고 공차가 $2d$인 등차수열을 이룬다.
(2) 홀수 번째 항으로 이루어진 수열
$a_1=a,\ a_3=a+2d,\ a_5=a+4d,\ \cdots$
➡ 이 수열은 첫째항이 a_1이고 공차가 $2d$인 등차수열을 이룬다.

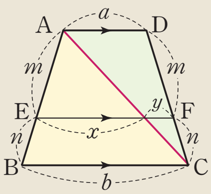
44

$\overline{P_1Q_1}=\dfrac{1\times 12+9\times 10}{1+9}=10.2$
$\overline{P_2Q_2}=\dfrac{2\times 12+8\times 10}{2+8}=10.4$
$\overline{P_3Q_3}=\dfrac{3\times 12+7\times 10}{3+7}=10.6$
$\vdots$
$\overline{P_9Q_9}=\dfrac{9\times 12+1\times 10}{9+1}=11.8$
즉 $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$, $\overline{P_3Q_3}$, $\cdots$, $\overline{P_9Q_9}$가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
이때 첫째항이 10.2, 끝항이 11.8, 항수가 9이므로
$\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\cdots+\overline{P_9Q_9}=\dfrac{9(10.2+11.8)}{2}$
$=99$

답 99

Lecture 사다리꼴에서 평행선과 선분의 길이의 비

$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$인 사다리꼴 ABCD에서 $\overline{EF}/\!/\overline{BC}$일 때, $\overline{EF}$의 길이를 구해 보자.
오른쪽 그림과 같이 대각선 AC를 그으면



△ABC에서
$x:b=m:(m+n)$
$\therefore x=\dfrac{mb}{m+n}$
△ACD에서 $y:a=n:(m+n)$
$\therefore y=\dfrac{na}{m+n}$
$\therefore \overline{EF}=x+y=\dfrac{mb+na}{m+n}$

45

$n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2+2^1=3$
$n\ge 2$일 때
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n^2+2^n-\{(n-1)^2+2^{n-1}\}$
$=2n-1+2^n-2^{n-1}$
$=2n-1+2^{n-1}(2-1)$
$=2n-1+2^{n-1}$
$\therefore a_6=2\times 6-1+2^5=43$
$\therefore a_1+a_6=3+43$
$=46$

답 46

46

$n=1$일 때, $a_1=S_1$이므로

$4=2\times1^2+a+1 \qquad \therefore a=1$

$\therefore S_n=2n^2+n+1$

$n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$\quad=2n^2+n+1-\{2(n-1)^2+(n-1)+1\}$

$\quad=4n-1$

$\therefore a_{10}=4\times10-1$

$\qquad=39$

답 39

47

$n=1$일 때, $a_1=S_1=2\times1^2+1=3$

$n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$\quad=2n^2+n-\{2(n-1)^2+(n-1)\}$

$\quad=4n-1 \qquad \cdots\cdots$㉠

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=4n-1$

따라서 $a=3$, $d=4$이므로

$ad=3\times4$

$\quad=12$

답 12

48

$n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2+2\times1+1=4$

$n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$\quad=n^2+2n+1-\{(n-1)^2+2(n-1)+1\}$

$\quad=2n+1 \qquad \cdots\cdots$㉠

$a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않으므로 일반항 a_n은

$a_1=4$, $a_n=2n+1\ (n\geq2)$

$\therefore a_1=4, a_3=7, a_5=11, a_7=15, \cdots, a_{21}=43$

이때 $a_3+a_5+\cdots+a_{21}$은 첫째항이 7, 끝항이 43, 항수가 10인 등차수열의 합과 같으므로

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{21}=4+\dfrac{10(7+43)}{2}$

$\qquad=4+250$

$\qquad=254$

답 254

연습문제

p. 266~269

1

주어진 등차수열의 일반항을 a_n이라 하면

첫째항이 48, 공차가 -4이므로

$a_n=48+(n-1)\times(-4) \qquad \therefore a_n=-4n+52$

이때 0을 제n항이라 하면

$a_n=-4n+52=0$에서 $-4n=-52 \qquad \therefore n=13$

따라서 0은 제13항이다.

답 ②

2

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=5$에서 $a+d=5 \qquad \cdots\cdots$㉠

$a_6-a_5=3$에서 $(a+5d)-(a+4d)=3$

$\therefore d=3$

$d=3$을 ㉠에 대입하면 $a+3=5 \qquad \therefore a=2$

따라서 $a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$이므로

$a_4=3\times4-1=11$

답 ④

3

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=9$에서 $a+d=9 \qquad \cdots\cdots$㉠

$a_{10}=-15$에서 $a+9d=-15 \qquad \cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=12$, $d=-3$

$\therefore a_n=12+(n-1)\times(-3)=-3n+15$

답 ④

4

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

공차가 2이므로

$a_n=a+2(n-1)$

$a_3a_5=a_2a_8$에서

$(a+4)(a+8)=(a+2)(a+14)$

$a^2+12a+32=a^2+16a+28$

$4a=4 \qquad \therefore a=1$

따라서 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$이므로

$a_7=2\times7-1=13$

답 ②

5

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=11$에서 $a+2d=11$ ······㉠

$a_6 : a_{10}=5 : 8$에서 $5a_{10}=8a_6$

$5(a+9d)=8(a+5d)$, $5a+45d=8a+40d$

$3a=5d$ $\quad \therefore a=\frac{5}{3}d$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $d=3$

따라서 $a_n=5+(n-1)\times 3=3n+2$이므로

$a_{20}=3\times 20+2=62$

답 62

6

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항을 각각 a, b, 공차를 각각 d, d'이라 하면

$a_4+b_4=15$에서

$(a+3d)+(b+3d')=15$ ······㉠

$a_{12}+b_{12}=39$에서

$(a+11d)+(b+11d')=39$ ······㉡

㉠+㉡을 하면 $2a+14d+2b+14d'=54$

양변을 2로 나누면 $a+7d+b+7d'=27$

$\therefore a_8+b_8=(a+7d)+(b+7d')=27$

답 ④

7

주어진 등차수열의 일반항을 a_n이라 하면

첫째항이 203, 공차가 -5이므로

$a_n=203+(n-1)\times(-5)=-5n+208$

$\therefore m=a_{21}=-5\times 21+208=103$

처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 최초의 항이므로 $-5n+208<0$에서

$-5n<-208$ $\quad \therefore n>41.6$

즉 처음으로 음수가 되는 항은 제42항이므로 $n=42$

$\therefore m+n=103+42=145$

답 145

8

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=20$에서 $a+2d=20$ ······㉠

제5항과 제11항은 절댓값이 같고 부호가 서로 반대이므로 $a_5=-a_{11}$

즉 $a+4d=-(a+10d)$이므로 $a=-7d$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=28$, $d=-4$

따라서 $a_n=28+(n-1)\times(-4)=-4n+32$이므로

$a_{10}=-4\times 10+32=-8$

답 ②

9

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1=1$, $a_6=100$이므로

$a_6=1+(6-1)d=100$

$1+5d=100$ $\quad \therefore d=\frac{99}{5}$

등차수열 $\{b_n\}$의 공차를 d'이라 하면

$b_1=1$, $b_7=100$이므로

$b_7=1+(7-1)d'=100$

$1+6d'=100$ $\quad \therefore d'=\frac{33}{2}$

이때 $c_2=1+2d$, $c_3=1+3d$, $d_2=1+2d'$, $d_3=1+3d'$이므로

$$\frac{c_3-c_2}{d_3-d_2}=\frac{(1+3d)-(1+2d)}{(1+3d')-(1+2d')}$$

$$=\frac{d}{d'}=\frac{\frac{99}{5}}{\frac{33}{2}}=\frac{6}{5}$$

답 $\frac{6}{5}$

10

등차수열을 이루는 다섯 개의 수를 $a-2d$, $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$로 놓으면

다섯 개의 수의 합이 25이므로

$(a-2d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+2d)=25$

$5a=25$ $\quad \therefore a=5$

가장 큰 수는 가장 작은 수의 4배이므로

$a+2d=4(a-2d)$, $a+2d=4a-8d$

$3a=10d$ $\quad \therefore a=\frac{10}{3}d$

$a=5$를 위의 식에 대입하면

$5=\frac{10}{3}d$ $\quad \therefore d=\frac{3}{2}$

따라서

가장 큰 수는 $a+2d=5+2\times\frac{3}{2}=8$

가장 작은 수는 $a-2d=5-2\times\frac{3}{2}=2$

이므로 그 곱은 $8\times 2=16$

답 16

11

다항식 $f(x)=ax^3+x^2+bx+1$을 일차식 x, $x+1$, $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(0)=1$

$f(-1)=-a+1-b+1=-a-b+2$

$f(-2)=-8a+4-2b+1=-8a-2b+5$

이때 나머지 $f(0)$, $f(-1)$, $f(-2)$, 즉 1, $-a-b+2$, $-8a-2b+5$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$-a-b+2=\frac{1+(-8a-2b+5)}{2}$

$2(-a-b+2)=-8a-2b+6$

$-2a-2b+4=-8a-2b+6$

$6a=2 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

12

등차수열 2, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{20}, 28은 첫째항이 2, 끝항이 28, 항수가 22이므로

$2+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}+28=\frac{22(2+28)}{2}=330$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=330-30=300$

답 ⑤

13

다항식 $f(x)=2x^2+x$를 일차식 $x-n$으로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(n)=2n^2+n \qquad \therefore S_n=2n^2+n$

$\therefore a_6=S_6-S_5=2\times6^2+6-(2\times5^2+5)$

$=78-55=23$

답 ①

14

$n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2+p+1=p+2$

$n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+pn+1-\{(n-1)^2+p(n-1)+1\}$

$=2n+p-1$

이때 $a_3=7$이므로 $a_3=2\times3+p-1=7$

$p+5=7 \qquad \therefore p=2$

$\therefore a_1=2+2=4$, $a_n=2n+1\ (n\geq2)$

$\therefore a_1+a_5=4+(2\times5+1)=15$

답 15

15

$n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+n-\{(n-1)^2+(n-1)\}$

$=2n$

$\therefore a_{11}=22$, $a_{13}=26$, $a_{15}=30$, $\cdots$, $a_{31}=62$

이때 $a_{11}+a_{13}+a_{15}+\cdots+a_{31}$은 첫째항이 22, 끝항이 62, 항수가 11인 등차수열의 합과 같으므로

$a_{11}+a_{13}+a_{15}+\cdots+a_{31}=\frac{11(22+62)}{2}=462$

답 462

16

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10}=-10$에서 $\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=-10$

$\therefore 2a+9d=-2$ ······㉠

$S_{20}=180$에서 $\frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=180$

$\therefore 2a+19d=18$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-10$, $d=2$

$\therefore S_{30}=\frac{30\{2\times(-10)+(30-1)\times2\}}{2}=570$

답 ⑤

17

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항을 각각 a, b라 하면

$a_n=a+(n-1)\times(-2)=a-2(n-1)$

$b_n=b+(n-1)\times3=b+3(n-1)$

즉 수열 $\{4a_n+3b_n\}$의 일반항은

$4a_n+3b_n=4\{a-2(n-1)\}+3\{b+3(n-1)\}$

$=4a+3b+(n-1)(-8+9)$

$=4a+3b+(n-1)$

따라서 수열 $\{4a_n+3b_n\}$은 첫째항이 $4a+3b$, 공차가 1인 등차수열이다.

답 1

18

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

(가)에서 $a_8=6a_3$이므로 $a_1+7d=6(a_1+2d)$

$a_1+7d=6a_1+12d$, $5a_1=-5d$

$\therefore a_1=-d$ ······㉠

(나)에서

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{12}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{11}+30$이므로

$(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+(a_6-a_5)+\cdots+(a_{12}-a_{11})=30$

이때 $a_2-a_1=a_4-a_3=\cdots=a_{12}-a_{11}=d$이므로

$6d=30 \qquad \therefore d=5$

$d=5$를 ㉠에 대입하면 $a_1=-5$

$\therefore a_{10}=a_1+9d=-5+9\times5=40$

답 ⑤

19

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 6, 공차가 d이므로

$a_8-a_6=(6+7d)-(6+5d)=2d$

$S_8-S_6=a_7+a_8$
$=(6+6d)+(6+7d)$
$=12+13d$

이때 $\dfrac{a_8-a_6}{S_8-S_6}=2$이므로 $\dfrac{2d}{12+13d}=2$

$2d=2(12+13d)$, $2d=24+26d$

$-24d=24 \qquad \therefore d=-1$

답 ①

20

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$b=\dfrac{a+c}{2} \qquad \therefore 2b=a+c$ ······㉠

세 수 $-a^2, b^2, c^2$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$b^2=\dfrac{-a^2+c^2}{2}$, $2b^2=-a^2+c^2$

$\therefore 2b^2=(-a+c)(a+c)$ ······㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2b^2=2b(-a+c)$

$\therefore b=-a+c\ (\because ab\neq0)$ ······㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $2(-a+c)=a+c$

$-2a+2c=a+c \qquad \therefore c=3a$

$c=3a$를 ㉢에 대입하면 $b=-a+3a=2a$

$\therefore \dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab}=\dfrac{a^2+(2a)^2+(3a)^2}{a\times2a}=\dfrac{14a^2}{2a^2}=7$

답 7

21

1등 반에 지급되는 공책의 수를 x권이라 하면 각 반에 지급되는 공책의 수는 다음 표와 같다.

등수	1등	2등	3등	4등	5등
공책의 수(권)	x	$x-5$	$x-10$	$x-15$	$x-20$

즉 각 반에 지급되는 공책의 수는 공차가 -5인 등차수열을 이루므로 5개 반에 지급되는 공책의 총수는

$x+(x-5)+(x-10)+(x-15)+(x-20)$

$=\dfrac{5\{x+(x-20)\}}{2}$

$=5x-50$

이때 150권의 공책을 모두 지급하므로

$5x-50=150$, $5x=200 \qquad \therefore x=40$

따라서 1등 반에 지급되는 공책의 수는 40권이다.

답 40권

22

$n=1$일 때, $a_1=S_1=2\times1^2-39=-37$

$n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=2n^2-39n-\{2(n-1)^2-39(n-1)\}$
$=4n-41$ ······㉠

이때 $a_1=-37$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 일반항 a_n은 $a_n=4n-41$

$a_n>0$인 n의 값의 범위는 $4n-41>0$에서

$4n>41 \qquad \therefore n>10.25$

즉 $n\leq10$이면 $a_n<0$, $n\geq11$이면 $a_n>0$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$

$=-(a_1+a_2+\cdots+a_{10})+(a_{11}+\cdots+a_{20})$

$=-\dfrac{10\{-37+(-1)\}}{2}+\dfrac{10(3+39)}{2}$

$=190+210$

$=400$

답 400

23

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1+a_3+a_5=-33$에서

$a_1+(a_1+2d)+(a_1+4d)=-33$

$3a_1+6d=-33 \qquad \therefore a_1+2d=-11$ ······㉠

$a_2+a_4+a_6=-24$에서

$(a_1+d)+(a_1+3d)+(a_1+5d)=-24$

$3a_1+9d=-24 \qquad \therefore a_1+3d=-8$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1=-17$, $d=3$

$\therefore a_n=-17+(n-1)\times3=3n-20$ ······ ❶

처음으로 양수가 되는 항은 $a_n>0$을 만족시키는 최초의 항이므로 $3n-20>0$에서

$3n>20 \qquad \therefore n>6.66\cdots$

즉 처음으로 양수가 되는 항은 제7항이다.

등차수열 $\{a_n\}$은 제6항까지가 음수이고 제7항부터는 양수이므로 첫째항부터 제6항까지의 합이 최소가 된다.
······ ❷

따라서 S_n의 최솟값은

$$S_6=\frac{6\{2\times(-17)+(6-1)\times 3\}}{2}=-57 \quad \cdots\cdots ❸$$

답 -57

채점 기준	비율
❶ 일반항 a_n을 구할 수 있다.	30%
❷ S_n이 최소가 되는 n의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ S_n의 최솟값을 구할 수 있다.	30%

다른 풀이

다음과 같이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 구할 수도 있다.

a_1, a_3, a_5도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a_3=a_1+a_5$

위의 식을 $a_1+a_3+a_5=-33$에 대입하면

$3a_3=-33 \qquad \therefore a_3=-11$ ⋯⋯ ㉠

a_2, a_4, a_6도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a_4=a_2+a_6$

위의 식을 $a_2+a_4+a_6=-24$에 대입하면

$3a_4=-24 \qquad \therefore a_4=-8$ ⋯⋯ ㉡

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

㉠에서 $a_1+2d=-11$ ⋯⋯ ㉢

㉡에서 $a_1+3d=-8$ ⋯⋯ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a_1=-17$, $d=3$

24

Step by Step

3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수를 나열한다. ⋯⋯ ①

↓

5로 나누었을 때의 나머지가 3인 수를 나열한다. ⋯⋯ ②

↓

①, ②를 동시에 만족시키는 수의 합을 구한다.

100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수는

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, ⋯, 100

100 이하의 자연수 중에서 5로 나누었을 때의 나머지가 3인 수는

3, 8, 13, 18, 23, 28, ⋯, 98

즉 100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 1이면서 5로 나누었을 때의 나머지가 3인 수는

13, 28, 43, 58, 73, 88

이 수열은 첫째항이 13, 공차가 15, 끝항이 88, 항수가 6인 등차수열이므로 구하는 수의 총합은

$$\frac{6(13+88)}{2}=303$$

답 ④

Level UP 연습문제

p.270

1

수열 $\{S_{2n-1}\}$은 S_1, S_3, S_5, ⋯이므로 첫째항이 S_1, 공차가 3인 등차수열이다.

이때 $S_1=a_1$이므로

$S_{2n-1}=S_1+(n-1)\times 3=3n+a_1-3$ ⋯⋯ ㉠

수열 $\{S_{2n}\}$은 S_2, S_4, S_6, ⋯이므로 첫째항이 S_2, 공차가 2인 등차수열이다.

이때 $S_2=a_1+a_2$이므로

$S_{2n}=S_2+(n-1)\times 2=2n+a_1+a_2-2$ ⋯⋯ ㉡

$n\ge 2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$이므로

$a_{11}=S_{11}-S_{10}$ ⋯⋯ ㉢

$n=6$을 ㉠에 대입하면

$S_{11}=3\times 6+a_1-3=a_1+15$

$n=5$를 ㉡에 대입하면

$S_{10}=2\times 5+a_1+a_2-2=a_1+a_2+8$

$\therefore a_{11}=S_{11}-S_{10}$ ($\because$ ㉢)

$=(a_1+15)-(a_1+a_2+8)$

$=-a_2+7$

$=-1+7=6$

답 ⑤

2

수열 $\{b_n\}$의 첫째항과 공차가 같으므로

$b_2=2b_1$, $b_3=3b_1$

$n=1$을 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$에 대입하면

$b_1=\dfrac{a_2}{a_1} \qquad \therefore a_2=a_1b_1$

$n=2$를 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$에 대입하면

$b_2=\dfrac{a_3}{a_2}=2b_1 \qquad \therefore a_3=2a_2b_1=2a_1{b_1}^2$

$n=3$을 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$에 대입하면

$b_3=\dfrac{a_4}{a_3}=3b_1 \qquad \therefore a_4=3a_3b_1=6a_1{b_1}^3$

이때 $a_4=144$이므로 $6a_1{b_1}^3=144$

$\therefore a_1{b_1}^3=24=3\times 2^3$

그런데 네 개의 수 a_1, a_2, a_3, a_4와 b_1이 자연수이고

$a_1<a_2<a_3<a_4$이므로

$a_1=3$, $b_1=2$

$\therefore a_1+b_1=3+2=5$

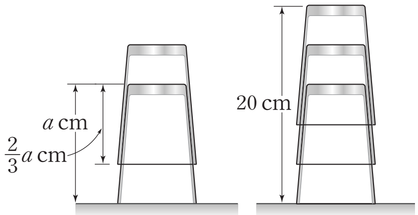
답 5

> **참고** $a_1b_1^{\,3}=24$에서 $a_1=24$, $b_1=1$이면
> $a_2=24$, $a_3=2\times24=48$, $a_4=3\times48=144$이므로
> $a_1<a_2<a_3<a_4$를 만족시키지 않는다.

3

유리컵 n개를 포개어 쌓을 때, 지면으로부터 마지막으로 쌓은 유리컵의 밑면까지의 높이를 a_n cm라 하면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a, 공차가 $\frac{1}{3}a$인 등차수열이다.

$\therefore\ a_n=a+(n-1)\times\frac{1}{3}a=\left(\frac{n+2}{3}\right)a$



이때 유리컵 3개를 포개어 쌓을 때, 지면으로부터 마지막으로 쌓은 유리컵의 밑면까지의 높이가 20 cm이므로

$a_3=20$

즉 $\left(\frac{3+2}{3}\right)a=20$이므로 $\frac{5}{3}a=20$ $\quad\therefore\ a=12$

$\therefore\ a_n=4(n+2)$

따라서 유리컵 6개를 포개어 쌓을 때, 지면으로부터 마지막으로 쌓은 유리컵의 밑면까지의 높이는

$a_6=4\times8=32$ $\quad\therefore\ k=32$

답 ②

2 등비수열

확인 문제 p. 274~292

01

(1) $a_1=3$, $a_2=-3$, $a_3=3$, $a_4=-3$, $a_5=3$, $\cdots$

첫째항은 3, 공비는 $-3\div3=-1$이므로

$a_n=3\times(-1)^{n-1}$

(2) $a_1=8$, $a_2=4$, $a_3=2$, $a_4=1$, $a_5=\frac{1}{2}$, $\cdots$

첫째항은 8, 공비는 $4\div8=\frac{1}{2}$이므로

$a_n=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$

(3) $a_1=54$, $a_2=-18$, $a_3=6$, $a_4=-2$, $a_5=\frac{2}{3}$, $\cdots$

첫째항은 54, 공비는 $-18\div54=-\frac{1}{3}$이므로

$a_n=54\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(4) $a_1=6$, $a_2=2\sqrt{3}$, $a_3=2$, $a_4=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $a_5=\frac{2}{3}$, $\cdots$

첫째항은 6, 공비는 $2\sqrt{3}\div6=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$a_n=6\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}$

답 풀이 참조

02

$a_n=5^{2-3n}$에서

$a_1=5^{2-3}=5^{-1}=\frac{1}{5}$, $a_2=5^{2-6}=5^{-4}=\frac{1}{625}$

즉 수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 $\frac{1}{5}$, 공비는 $\frac{1}{625}\div\frac{1}{5}=\frac{1}{125}$

이므로 $a=\frac{1}{5}$, $r=\frac{1}{125}$

$\therefore\ \frac{a}{r}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{125}}=25$

답 25

다른 풀이

$a_n=5^{2-3n}=25\times\left(\frac{1}{125}\right)^n=\frac{25}{125}\times\left(\frac{1}{125}\right)^{n-1}$

$=\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{125}\right)^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 $\frac{1}{5}$, 공비는 $\frac{1}{125}$이다.

03

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

(1) $a_3=12$에서 $ar^2=12$ ······㉠

$a_6=96$에서 $ar^5=96$ ······㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$ $\quad\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$a\times 2^2=12$, $4a=12$ $\quad\therefore a=3$

따라서 첫째항은 3, 공비는 2이다.

(2) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 3, 공비는 2이므로

$a_n=3\times 2^{n-1}$ $\quad\therefore a_8=3\times 2^7=384$

답 (1) 첫째항: 3, 공비: 2 (2) 384

04

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=6$에서 $ar=6$ ······㉠

$a_5=162$에서 $ar^4=162$ ······㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=27$ $\quad\therefore r=3$

$r=3$을 ㉠에 대입하면

$3a=6$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore a_1\times a_4=a\times ar^3=a^2r^3$

$=2^2\times 27=108$

답 108

05

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_2=15$에서 $a+ar=15$

$\therefore a(1+r)=15$ ······㉠

$a_3+a_4=60$에서 $ar^2+ar^3=60$

$\therefore ar^2(1+r)=60$ ······㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=4$ $\quad\therefore r=2\ (\because r>0)$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$a(1+2)=15$ $\quad\therefore a=5$

따라서 $a_n=5\times 2^{n-1}$이므로

$a_5=5\times 2^4=80$

답 80

참고 등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $r>0$

06

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1a_2=6$에서 $a\times ar=6$ $\quad\therefore a^2r=6$ ······㉠

$a_3a_4=12$에서 $ar^2\times ar^3=12$

$\therefore a^2r^5=12$ ······㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=2$

$\therefore a_9a_{10}=ar^8\times ar^9=a^2r\times(r^4)^4$

$=6\times 2^4=96$

답 96

07

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_2=\frac{4}{9}$에서 $a+ar=\frac{4}{9}$ ······㉠

$a_1a_2a_3=\frac{1}{27}$에서 $a\times ar\times ar^2=\frac{1}{27}$

$a^3r^3=\frac{1}{27}$ $\quad\therefore ar=\frac{1}{3}$ ······㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a+\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{9}$

$a=\frac{1}{9}$을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{9}r=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore r=3$

따라서 $a_n=\frac{1}{9}\times 3^{n-1}$이므로

$a_4=\frac{1}{9}\times 3^3=3$

답 3

08

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=6$에서 $ar=6$ ······㉠

$a_6=96$에서 $ar^5=96$ ······㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=16$ $\quad\therefore r=2\ (\because r>0)$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $2a=6$ $\quad\therefore a=3$

$\therefore a_n=3\times 2^{n-1}$

처음으로 3000보다 커지는 항을 제n항이라 하면

$3\times 2^{n-1}>3000$ $\quad\therefore 2^{n-1}>1000$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$n-1\geq 10$ $\quad\therefore n\geq 11$

따라서 처음으로 3000보다 커지는 항은 제11항이다.

답 제11항

09

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 첫째항이 134이므로

$a_4=\frac{67}{4}$에서 $134r^3=\frac{67}{4}$

$r^3=\frac{1}{8}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$

$\therefore a_n=134\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

처음으로 1보다 작아지는 항을 제n항이라 하면

$134\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<1$ $\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{1}{134}$

이때 $\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{128}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256}$이므로

$n-1\geq 8$ $\therefore n\geq 9$

따라서 처음으로 1보다 작아지는 항은 제9항이다.

답 제9항

10

등비수열 64, a, b, c, 4의 공비를 r라 하면 첫째항이 64, 제5항이 4이므로

$64r^4=4$, $r^4=\frac{1}{16}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because r>0$)

따라서 세 수 a, b, c는 주어진 등비수열의 제2항, 제3항, 제4항이므로

$a=64\times\frac{1}{2}=32$, $b=64\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=16$,

$c=64\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=8$

$\therefore a+b+c=32+16+8=56$

답 56

11

등비수열 3, x_1, x_2, $\cdots$, x_n, 192에서 첫째항이 3, 공비가 4이고, 192는 제$(n+2)$항이므로

$3\times 4^{n+1}=192$, $4^{n+1}=64=4^3$

$n+1=3$ $\therefore n=2$

답 2

12

세 수 6, a, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a=\frac{6+b}{2}$ ……㉠

세 수 a, b, 27이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b^2=27a$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$b^2=27\times\frac{6+b}{2}$, $2b^2-27b-162=0$

$(2b+9)(b-18)=0$ $\therefore b=18$ ($\because b>0$)

$b=18$을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{6+18}{2}=12$

$\therefore b-a=18-12=6$

답 6

13

세 수 a, $a+b$, $2a-b$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a+b=\frac{a+2a-b}{2}$, $2a+2b=3a-b$

$\therefore a=3b$ ……㉠

세 수 1, $a-1$, $3b+1$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(a-1)^2=1\times(3b+1)$, $a^2-2a+1=3b+1$

$\therefore a^2-2a=3b$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2-2a=a$, $a^2-3a=0$

$a(a-3)=0$ $\therefore a=0$ 또는 $a=3$

이때 세 수 1, $a-1$, $3b+1$이 이 순서대로 공비가 양수인 등비수열을 이루므로 $a-1$은 양수이어야 한다.

즉 $a-1>0$이므로 $a>1$ $\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$3=3b$ $\therefore b=1$

$\therefore a^2-b^2=3^2-1^2=8$

답 8

14

다항식 $f(x)=x^2-ax+2a$를 일차식 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$R_1=f(1)=a+1$, $R_2=f(2)=4$, $R_3=f(3)=9-a$

세 수 R_1, R_2, R_3, 즉 $a+1$, 4, $9-a$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$4^2=(a+1)(9-a)$, $16=-a^2+8a+9$

$a^2-8a+7=0$, $(a-1)(a-7)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=7$

따라서 모든 a의 값의 합은

$1+7=8$

답 8

15

등비수열을 이루는 세 수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

세 수의 합이 7이므로 $a+ar+ar^2=7$ ……㉠

세 수의 곱이 8이므로 $a\times ar\times ar^2=(ar)^3=8$ ……㉡

㉡에서 $ar=2$이므로 $a=\frac{2}{r}$

$a=\frac{2}{r}$를 ㉠에 대입하면 $\frac{2}{r}+2+2r=7$

양변에 r를 곱하면 $2+2r+2r^2=7r$

$2r^2-5r+2=0$, $(2r-1)(r-2)=0$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ 또는 $r=2$

$r=\frac{1}{2}$이면 $a=4$, $ar=2$, $ar^2=1$

$r=2$이면 $a=1$, $ar=2$, $ar^2=4$

따라서 구하는 세 수는 1, 2, 4이다. 답 1, 2, 4

16

직각삼각형의 세 변의 길이 $a, b, c\ (a<b<c)$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 공비를 r라 하면

$b=ar$, $c=ar^2$

피타고라스 정리에 의하여

$(ar^2)^2=a^2+(ar)^2$, $r^4=1+r^2\ (\because a^2>0)$

$r^4-r^2-1=0 \qquad \therefore r^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (\because r^2>0)$

$\therefore \frac{c}{a}=\frac{ar^2}{a}=r^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 답 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

17

네 수 1, a, b, c는 이 순서대로 공비가 r인 등비수열을 이루므로 $a=r$, $b=r^2$, $c=r^3$

$\log_8 c=\log_a b$에서 $\log_8 r^3=\log_r r^2$

$\log_8 r^3=2$, $r^3=8^2=64$

$\therefore r=4$ 답 4

18

처음에 살아 있는 세포의 개수는 10

1회 배양한 후 살아 있는 세포의 개수는

$10\times0.8\times5=10\times4$

2회 배양한 후 살아 있는 세포의 개수는

$(10\times4)\times0.8\times5=10\times4^2$

3회 배양한 후 살아 있는 세포의 개수는

$(10\times4^2)\times0.8\times5=10\times4^3$

$\vdots$

n회 배양한 후 살아 있는 세포의 개수는

10×4^n

따라서 8회 배양한 후 살아 있는 세포의 개수는

$10\times4^8=10\times2^{16}=5\times2^{17}$ 답 ④

19

현재 인구 수를 a, 일정한 증가율을 r라 하면

$ar^8=1.44a \qquad \therefore r^8=1.44$

이때 $r^4=(r^8)^{\frac{1}{2}}$이므로 $r^4=1.2$

따라서 앞으로 4년 동안의 인구 증가율은 20 %이다.

답 20 %

20

두 함수 $y=3\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x}$의 그래프와 직선 $x=k$가 만나는 점의 좌표는

$A(k, 3\sqrt{k})$, $B(k, \sqrt{k})$

직선 $x=k$와 x축이 만나는 점의 좌표는

$C(k, 0)$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{k}$, $\overline{OC}=k$, $\overline{AC}=3\sqrt{k}$

이때 세 수 $\sqrt{k}$, k, $3\sqrt{k}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$k^2=\sqrt{k}\times3\sqrt{k}$, $k^2=3k$

$k(k-3)=0 \qquad \therefore k=3\ (\because k>0)$

답 3

21

(1) 첫째항이 0.1, 공비가 0.1인 등비수열이므로 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\frac{0.1\times(1-0.1^n)}{1-0.1}=\frac{1-0.1^n}{9}$

(2) 첫째항이 1, 공비가 $-\sqrt{3}$인 등비수열이므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=(-\sqrt{3})^{n-1}$

이때 243을 제n항이라 하면

$(-\sqrt{3})^{n-1}=243$, $(-\sqrt{3})^{n-1}=(-\sqrt{3})^{10}$

$n-1=10 \qquad \therefore n=11$

따라서 주어진 수열의 합은 첫째항이 1, 공비가 $-\sqrt{3}$인 등비수열의 첫째항부터 제11항까지의 합이므로

$S_{11}=\frac{1\times\{1-(-\sqrt{3})^{11}\}}{1-(-\sqrt{3})}=\frac{1+243\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

$=364-121\sqrt{3}$

답 (1) $\frac{1-0.1^n}{9}$ (2) $364-121\sqrt{3}$

22

첫째항이 $6\sqrt{2}$, 공비가 -2인 등비수열이므로 첫째항부터 제5항까지의 합 S_5는

$S_5=\frac{6\sqrt{2}\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)}=66\sqrt{2}$

답 $66\sqrt{2}$

23

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$a_3=18$에서 $ar^2=18$ ······㉠

$a_5=162$에서 $ar^4=162$ ······㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=9$ $\quad\therefore r=3\ (\because r>0)$

$r=3$을 ㉠에 대입하면 $9a=18$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore S_5=\frac{2(3^5-1)}{3-1}=242$

답 242

24

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$a_1+a_4=2$에서 $a+ar^3=2$

$\therefore a(1+r^3)=2$ ······㉠

$a_4+a_7=16$에서 $ar^3+ar^6=16$

$\therefore ar^3(1+r^3)=16$ ······㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$ $\quad\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $9a=2$ $\quad\therefore a=\frac{2}{9}$

$\therefore S_8=\frac{\frac{2}{9}(2^8-1)}{2-1}=\frac{170}{3}$

답 $\frac{170}{3}$

25

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1a_3=16$에서 $a\times ar^2=16$

$a^2r^2=16$ $\quad\therefore ar=4\ (\because a>0, r>0)$ ······㉠

$a_2a_4=64$에서 $ar\times ar^3=64$ $\quad\therefore a^2r^4=64$

㉠을 위의 식에 대입하면

$a^2r^4=(ar)^2\times r^2=16r^2=64$

$r^2=4$ $\quad\therefore r=2\ (\because r>0)$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $2a=4$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=\frac{2(2^6-1)}{2-1}=126$

답 126

26

주어진 수열의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_4=20$에서 $\frac{a(1-r^4)}{1-r}=20$ ······㉠

$S_8=80$에서 $\frac{a(1-r^8)}{1-r}=80$ ······㉡

㉡에서 $\frac{a(1-r^4)(1+r^4)}{1-r}=80$

㉠을 위의 식에 대입하면

$20(1+r^4)=80$, $1+r^4=4$ $\quad\therefore r^4=3$

$\therefore S_{12}=\frac{a(1-r^{12})}{1-r}=\frac{a(1-r^4)(1+r^4+r^8)}{1-r}$

$=20(1+3+3^2)\ (\because ㉠)$

$=260$

답 260

27

주어진 수열의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_{10}=2$에서 $\frac{a(1-r^{10})}{1-r}=2$ ······㉠

$S_{30}=14$에서 $\frac{a(1-r^{30})}{1-r}=14$ ······㉡

㉡에서 $\frac{a(1-r^{10})(1+r^{10}+r^{20})}{1-r}=14$

㉠을 위의 식에 대입하면 $2(1+r^{10}+r^{20})=14$

$1+r^{10}+r^{20}=7$ $\quad\therefore r^{20}+r^{10}-6=0$

이때 $r^{10}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2+t-6=0$, $(t+3)(t-2)=0$ $\quad\therefore t=2\ (\because t>0)$

따라서 $r^{10}=2$이므로

$S_{60}=\frac{a(1-r^{60})}{1-r}=\frac{a(1-r^{30})(1+r^{30})}{1-r}$

$=14(1+2^3)=126\ (\because ㉡)$

답 126

28

주어진 수열은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$S_n=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$|S_n-1|<0.001$에서 $\left|1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right|<0.001$

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{1000}$

이때 $\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{1}{512}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1024}$이므로 $n\geq 10$

따라서 자연수 n의 최솟값은 10이다.

답 10

29

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=3$에서 $ar=3$ ······㉠

$a_5=24$에서 $ar^4=24$ ······㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$ $\quad\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $2a=3$ $\quad\therefore a=\frac{3}{2}$

$\therefore S_n=\dfrac{\frac{3}{2}(2^n-1)}{2-1}=\dfrac{3}{2}(2^n-1)$

$S_n>720$에서 $\dfrac{3}{2}(2^n-1)>720$

$2^n-1>480 \qquad \therefore 2^n>481$

이때 $2^8=256$, $2^9=512$이므로 $n\geq 9$

따라서 자연수 n의 값은 9이다.

답 9

30

첫 번째 시행에서 그린 원의 반지름의 길이는 1이므로 원의 둘레의 길이는 2π

이때 첫 번째 시행에서 그린 원의 지름의 길이와 원에 내접하는 정사각형의 대각선의 길이는 같으므로 내접하는 정사각형의 한 변의 길이는 $2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

두 번째 시행에서 그린 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 원의 둘레의 길이는 $\sqrt{2}\pi$

이와 같이 반복하여 그린 원의 둘레의 길이는 첫째항이 2π, 공비가 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$인 등비수열을 이루므로 6회의 시행 후 얻은 모든 원의 둘레의 길이의 합은

$$\frac{2\pi\left\{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{7(2+\sqrt{2})\pi}{4}$$

따라서 $a=\dfrac{7}{4}$, $b=2$이므로

$b-a=2-\dfrac{7}{4}=\dfrac{1}{4}$

답 $\dfrac{1}{4}$

31

(1) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3^2-3=6$

$n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3^{n+1}-3-(3^n-3)$

$=2\times 3^n \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때 $a_1=6$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 일반항 a_n은 $a_n=2\times 3^n$

(2) $n=1$일 때, $a_1=S_1=4^2-5=11$

$n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=4^{n+1}-5-(4^n-5)$

$=3\times 4^n \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때 $a_1=11$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않으므로 일반항 a_n은 $a_1=11$, $a_n=3\times 4^n\ (n\geq 2)$

답 (1) $a_n=2\times 3^n$ (2) $a_1=11$, $a_n=3\times 4^n\ (n\geq 2)$

32

$n=1$일 때, $a_1=S_1=3\times 2^2+k=k+12$

$n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3\times 2^{n+1}+k-(3\times 2^n+k)$

$=3\times 2^n \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $a_1=k+12$가 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같아야 하므로

$k+12=6 \qquad \therefore k=-6$

답 -6

다른 풀이

$S_n=3\times 2^{n+1}+k=6\times 2^n+k$이므로

$6+k=0 \qquad \therefore k=-6$

참고 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=Ar^n+B\ (r\neq 0, r\neq 1, A, B$는 상수)일 때
(1) $A+B=0$이면 첫째항부터 등비수열을 이룬다.
(2) $A+B\neq 0$이면 제2항부터 등비수열을 이룬다.

33

매년 초에 15년 동안 10만 원씩 적립한 적립금의 원리합계는 다음 그림과 같다.

따라서 15년 후 연말의 적립금의 원리합계를 S라 하면

$S=10(1+0.06)+10(1+0.06)^2+\cdots+10(1+0.06)^{15}$

$=\dfrac{10\times 1.06\times(1.06^{15}-1)}{1.06-1}$

$=\dfrac{10\times 1.06\times 1.4}{0.06}$

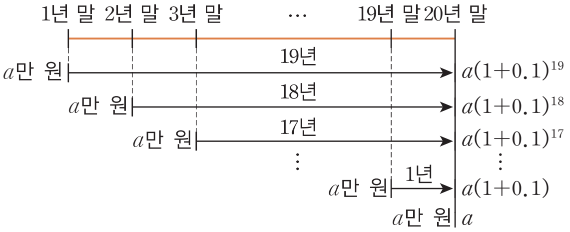
$=247.33\cdots$ (만 원)

이때 만 원 미만은 버리므로 15년 후 연말의 적립금의 원리합계는 247만 원이다.

답 247만 원

34

매년 말에 적립해야 하는 금액을 a만 원이라 하면 매년 말에 20년 동안 a만 원씩 적립한 적립금의 원리합계는 다음 그림과 같다.



즉 20년 후 연말의 적립금의 원리합계를 S라 하면

$$S=a+a(1+0.1)+a(1+0.1)^2+\cdots+a(1+0.1)^{19}$$

$$=\frac{a(1.1^{20}-1)}{1.1-1}$$

$$=\frac{a\times5.7}{0.1}$$

$=57a$ (만 원)

이때 20년 후 연말까지 적립금의 원리합계가 5700만 원이 되어야 하므로

$57a=5700 \qquad \therefore a=100$ (만 원)

따라서 매년 말에 적립해야 하는 금액은 100만 원이다.

답 100만 원

연습문제

p.293~295

1

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_3=a\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}a,\ a_5=a\times\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}a$이므로

$a_3a_5=\frac{1}{9}a\times\frac{1}{81}a=\frac{1}{729}a^2$

이때 $a_3a_5=1$이므로 $\frac{1}{729}a^2=1$

$a^2=729 \qquad \therefore a=27\ (\because a>0)$

$\therefore a_2=27\times\frac{1}{3}=9$

답 ④

다른 풀이

a_4는 a_3과 a_5의 등비중항이므로 $a_4{}^2=a_3a_5=1$

모든 항이 양수이므로 $a_4=1$

$a_4=a\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=1 \qquad \therefore a=27$

$\therefore a_2=27\times\frac{1}{3}=9$

2

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=2\sqrt{2}$에서 $ar=2\sqrt{2}$ ⋯⋯ ㉠

$a_4:a_7=1:2\sqrt{2}$에서 $a_7=2\sqrt{2}a_4$

$ar^6=2\sqrt{2}ar^3,\ r^3=2\sqrt{2}\ (\because a>0,\ r>0) \qquad \therefore r=\sqrt{2}$

$r=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면

$\sqrt{2}a=2\sqrt{2} \qquad \therefore a=2$

$\therefore a_8=ar^7=2\times(\sqrt{2})^7=16\sqrt{2}$

답 ④

3

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$a_2+a_4=10$에서 $ar+ar^3=10$

$\therefore ar(1+r^2)=10$ ⋯⋯ ㉠

$a_5+a_7=80$에서 $ar^4+ar^6=80$

$\therefore ar^4(1+r^2)=80$ ⋯⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8 \qquad \therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$10a=10 \qquad \therefore a=1$

$\therefore S_{10}=\frac{1\times(2^{10}-1)}{2-1}=1023$

답 ③

4

$f(x)=x^3-ax+b$라 하면 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 57이므로 나머지정리에 의하여

$f(1)=1-a+b=57$

$\therefore a-b=-56$ ⋯⋯ ㉠

세 수 $1,\ a,\ b$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=b \qquad \therefore b=a^2$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a-a^2=-56,\ a^2-a-56=0$

$(a+7)(a-8)=0 \qquad \therefore a=8\ (\because a>0)$

$a=8$을 ㉡에 대입하면 $b=8^2=64$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{64}{8}=8$

답 ③

5

등비수열 $4,\ a,\ b,\ c,\ \frac{1}{4}$의 공비를 r라 하면 첫째항이 4, 제5항이 $\frac{1}{4}$이므로

$4r^4=\frac{1}{4},\ r^4=\frac{1}{16} \qquad \therefore r=-\frac{1}{2}$ 또는 $r=\frac{1}{2}$

(ⅰ) $r=-\frac{1}{2}$일 때

$a=-2,\ b=1,\ c=-\frac{1}{2}$이므로

$a+b+c=-2+1+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$

(ⅱ) $r=\frac{1}{2}$일 때

$a=2,\ b=1,\ c=\frac{1}{2}$이므로

$a+b+c=2+1+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a+b+c$의 최댓값은 $\frac{7}{2}$이다.

답 ⑤

6

5년 전 이 자동차를 처음 구입했을 때의 가격을 a만 원이라 하면

구입 후 1년이 지났을 때 중고차 가격은

$a(1-0.06)=0.94a$ (만 원)

구입 후 2년이 지났을 때 중고차 가격은

$0.94a\times(1-0.06)=0.94^2a$ (만 원)

$\vdots$

구입 후 n년이 지났을 때 중고차 가격은

0.94^na (만 원)

이때 구입 후 5년이 지났을 때 중고차 가격이 700만 원이므로

$0.94^5a=700,\ 0.7a=700$

$\therefore\ a=\frac{700}{0.7}=1000$ (만 원)

따라서 5년 전 이 자동차를 처음 구입했을 때의 가격은 1000만 원이다.

답 1000만 원

7

주어진 색종이의 넓이는 $4^2=16$

1회 시행 후 남아 있는 색종이의 넓이는

$16\times\frac{1}{2}$

2회 시행 후 남아 있는 색종이의 넓이는

$\left(16\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=16\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\vdots$

n회 시행 후 남아 있는 색종이의 넓이는

$16\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

따라서 8회 시행 후 남아 있는 색종이의 넓이는

$16\times\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{16}$

답 $\frac{1}{16}$

8

Step by Step

$a_1=S_1$을 이용하여 a_1의 값을 구한다.

$n\geq2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$을 이용하여 a_n을 구한다.

조건을 만족시키는 k의 값을 구한다.

$n=1$일 때, $a_1=S_1=5\times2-k=-k+10$

$n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$\quad=5\times2^{-n+2}-k-(5\times2^{-n+3}-k)$

$\quad=-5\times2^{-n+2}$ ……㉠

이때 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면

$a_1=-k+10$이 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같아야 하므로

$-10=-k+10\qquad\therefore\ k=20$

답 ②

9

$f(a),\ f(b),\ f(12)$, 즉 $\frac{k}{a},\ \frac{k}{b},\ \frac{k}{12}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\left(\frac{k}{b}\right)^2=\frac{k}{a}\times\frac{k}{12},\ \frac{k^2}{b^2}=\frac{k^2}{12a}\qquad\therefore\ b^2=12a$

이때 $a,\ b$는 $a<b<12$인 자연수이고 $12a$는 제곱수이므로

$a=3,\ b=6$

$f(a)=f(3)=3$이므로

$\frac{k}{3}=3\qquad\therefore\ k=9$

$\therefore\ a+b+k=3+6+9=18$

답 ⑤

10

등비수열 $\frac{1}{2},\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_6,\ 6$의 공비를 r라 하면 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 제8항이 6이므로

$\frac{1}{2}r^7=6\qquad\therefore\ r^7=12$ ……㉠

따라서

$b_1=\frac{1}{2}r,\ b_2=\frac{1}{2}r^2,\ b_3=\frac{1}{2}r^3,$

$b^4=\frac{1}{2}r^4,\ b_5=\frac{1}{2}r^5,\ b_6=\frac{1}{2}r^6$

이므로

$b_1 \times b_2 \times b_3 \times b_4 \times b_5 \times b_6$

$= \frac{1}{2}r \times \frac{1}{2}r^2 \times \frac{1}{2}r^3 \times \frac{1}{2}r^4 \times \frac{1}{2}r^5 \times \frac{1}{2}r^6$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times r^{1+2+3+4+5+6}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times r^{21}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times (r^7)^3$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times 12^3$ ($\because$ ㉠)

$= 27$

답 27

11

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_{20} = 30$에서

$\frac{a(1-r^{20})}{1-r} = 30$, $\frac{a(1-r^{10})(1+r^{10})}{1-r} = 30$

$\therefore \frac{a(1-r^{10})}{1-r} = \frac{30}{1+r^{10}}$ ……㉠ …… ❶

$S_{30} = 70$에서 $\frac{a(1-r^{30})}{1-r} = 70$

$\therefore \frac{a(1-r^{10})(1+r^{10}+r^{20})}{1-r} = 70$ ……㉡ …… ❷

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{30(1+r^{10}+r^{20})}{1+r^{10}} = 70$

이때 $r^{10} = t$ $(t>0)$로 치환하여 정리하면

$30(t^2+t+1) = 70(1+t)$, $30t^2 - 40t - 40 = 0$

$3t^2 - 4t - 4 = 0$, $(3t+2)(t-2) = 0$ $\therefore t = 2$

따라서 $r^{10} = 2$이므로

$S_{10} = \frac{a(1-r^{10})}{1-r} = \frac{30}{1+2} = 10$ ($\because$ ㉠) …… ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ $S_{20}=30$을 a, r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	25%
❷ $S_{30}=70$을 a, r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	25%
❸ S_{10}의 값을 구할 수 있다.	50%

12

$\log_3(S_n+1) = n+1$에서 $S_n + 1 = 3^{n+1}$

$\therefore S_n = 3^{n+1} - 1$

$n=1$일 때, $a_1 = S_1 = 3^2 - 1 = 8$

$n \geq 2$일 때

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= 3^{n+1} - 1 - (3^n - 1)$

$= 2 \times 3^n$ ……㉠

이때 $a_1 = 8$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않으므로

일반항 a_n은 $a_1 = 8$, $a_n = 2 \times 3^n$ $(n \geq 2)$

$\therefore a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{10}$

$= 8 \times (2 \times 3^2) \times (2 \times 3^3) \times \cdots \times (2 \times 3^{10})$

$= 2^3 \times 2^9 \times 3^{2+3+\cdots+10} = 2^{12} \times 3^{54}$

따라서 $p=12$, $q=54$이므로

$q - p = 54 - 12 = 42$

답 42

13

ㄱ. $a_3 = S_3 - S_2 = 6^2 - \frac{1}{6} - \left(6 - \frac{1}{6}\right) = 30$

ㄴ. $n=1$일 때, $a_1 = S_1 = 6^0 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$n \geq 2$일 때

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= 6^{n-1} - \frac{1}{6} - \left(6^{n-2} - \frac{1}{6}\right)$

$= \frac{5}{6} \times 6^{n-1}$ ……㉠

이때 $a_1 = \frac{5}{6}$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

일반항 a_n은 $a_n = \frac{5}{6} \times 6^{n-1}$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{5}{6}$, 공비가 6인 등비수열이다.

ㄷ. $\log_6\left(\frac{5}{6} \times 6^{n-1}\right) = \log_6(5 \times 6^{n-2})$

$= \log_6 5 + n - 2$

$= \log_6 5 - 1 + (n-1)$

즉 수열 $\{\log_6 a_n\}$은 첫째항이 $\log_6 5 - 1$, 공차가 1인 등차수열이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

14

$\overline{A_2B_1} = \overline{B_2C_1} = \overline{C_2A_1} = 6 \times \frac{2}{3} = 4$

$\overline{B_1B_2} = \overline{C_1C_2} = \overline{A_1A_2} = 6 \times \frac{1}{3} = 2$

$\angle A_2B_1B_2 = \angle B_2C_1C_2 = \angle C_2A_1A_2 = \frac{\pi}{3}$

이므로 $\triangle A_2B_1B_2 \equiv \triangle B_2C_1C_2 \equiv \triangle C_2A_1A_2$ (SAS 합동)

이때

$\triangle A_2B_1B_2 = \frac{1}{2} \times \overline{A_2B_1} \times \overline{B_1B_2} \times \sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

이므로 $\triangle B_2C_1C_2 = \triangle C_2A_1A_2 = 2\sqrt{3}$

$S_1=\triangle A_1B_1C_1$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 6\times \sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 6\times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$=9\sqrt{3}$

$S_2=\triangle A_1B_1C_1-3\triangle A_2B_1B_2$

$=9\sqrt{3}-3\times 2\sqrt{3}$

$=3\sqrt{3}$

$\vdots$

$S_n=9\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{10}=\dfrac{9\sqrt{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{3}}$

$=\frac{27\sqrt{3}}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$

답 $\frac{27\sqrt{3}}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$

Level Up 연습문제

p. 296

1

세 변 AC, CE, CD의 길이가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $\overline{AC}=a$, 공비를 r라 하면

$\overline{AC}=a$, $\overline{CE}=ar$, $\overline{CD}=ar^2$

$\overline{AD}=10$에서 $a+ar^2=10$ ······㉠

$\overline{BE}=5$에서 $\overline{BC}=5-ar$

두 삼각형 ABC, DEC에서

$\angle ABC=\angle DEC=90°$, $\angle ACB=\angle DCE$ (맞꼭지각)

이므로 $\triangle ABC \backsim \triangle DEC$ (AA 닮음)

$\overline{BC}:\overline{EC}=\overline{AC}:\overline{DC}$에서 $5-ar : ar=a : ar^2$

$a^2r=ar^2(5-ar)$, $a=r(5-ar)$ ($\because a>0, r>0$)

$a=5r-ar^2$ $\quad\therefore a+ar^2=5r$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $10=5r$ $\quad\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$a+4a=10$, $5a=10$ $\quad\therefore a=2$

따라서 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=2$, $\overline{BC}=1$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ 답 ③

2

세 수 a^n, $2^4\times 3^6$, b^n이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(2^4\times 3^6)^2=a^n\times b^n$ $\quad\therefore (ab)^n=2^8\times 3^{12}$

이때 ab의 값이 최소가 되려면 자연수 n의 값은 8과 12의 최대공약수인 4이어야 한다.

따라서 $(ab)^4=(2^2\times 3^3)^4=108^4$이므로 ab의 최솟값은 108이다.

답 108

3

$a=4^{50}=2^{100}$, $b=3^{50}$에서 $ab=2^{100}\times 3^{50}$

이때 ab의 양의 약수의 총합은

$(1+2+2^2+\cdots+2^{100})(1+3+3^2+\cdots+3^{50})$

$=\frac{1\times(2^{101}-1)}{2-1}\times\frac{1\times(3^{51}-1)}{3-1}$

$=(2^{101}-1)\times\frac{3^{51}-1}{2}$

$=\frac{1}{2}(2\times 2^{100}-1)(3\times 3^{50}-1)$

$=\frac{1}{2}(2a-1)(3b-1)$

따라서 $p=\frac{1}{2}$, $q=2$, $r=3$이므로

$p+q+r=\frac{1}{2}+2+3=\frac{11}{2}$

답 $\frac{11}{2}$

Lecture 양의 약수의 총합

자연수 N이

$N=a^pb^q$ (a, b는 서로 다른 소수, p, q는 자연수)

꼴로 소인수분해 될 때, 자연수 N의 양의 약수의 총합

➡ $(1+a+a^2+\cdots+a^p)(1+b+b^2+\cdots+b^q)$

4

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2015, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n=2015\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

T_n의 값이 최대가 되려면 $a_n>1$인 항을 모두 곱하는 경우이다.

즉 $a_n>1$을 만족시키는 가장 큰 자연수 n에서 T_n은 최댓값을 갖는다.

$2015\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}>1$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}>\frac{1}{2015}$

이때 $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1024}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{11}=\frac{1}{2048}$이므로

$n-1\le 10$ $\quad\therefore n\le 11$

따라서 $n=11$일 때 T_n의 값은 최대가 된다.

답 ③

3 수열의 합

확인 문제 p.300~317

01

수열 1, 3, 3^2, ⋯, 3^{11}은 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열이므로 일반항 a_n은 $a_n=1\times3^{n-1}=3^{n-1}$

이때 $3^{n-1}=3^{11}$에서 $n=12$이므로 3^{11}은 제12항이다.

$\therefore\ 1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{11}=\sum_{k=1}^{12}3^{k-1}$ 답 ④

02

$\sum_{k=2}^{10}f(k-1)=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(9)$

$\sum_{k=1}^{9}f(k+1)=f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(10)$

$\therefore\ \sum_{k=2}^{10}f(k-1)-\sum_{k=1}^{9}f(k+1)=f(1)-f(10)$

$=5-10=-5$ 답 -5

03

$\sum_{k=3}^{10}a_{k-2}-\sum_{k=1}^{8}a_{k+1}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8)-(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_9)$

$=a_1-a_9$

이때 $a_9=a_1+(9-1)\times(-3)=a_1-24$이므로

(주어진 식)$=a_1-a_9=a_1-(a_1-24)=24$ 답 24

04

$\sum_{k=1}^{10}(3a_k-2b_k+5)=\sum_{k=1}^{10}3a_k-\sum_{k=1}^{10}2b_k+\sum_{k=1}^{10}5$

$=3\sum_{k=1}^{10}a_k-2\sum_{k=1}^{10}b_k+5\times10$

$=3\times4-2\times2+50=58$ 답 58

05

$\sum_{k=1}^{5}(a_k-2)^2=\sum_{k=1}^{5}(a_k^2-4a_k+4)$

$=\sum_{k=1}^{5}a_k^2-\sum_{k=1}^{5}4a_k+\sum_{k=1}^{5}4$

$=\sum_{k=1}^{5}a_k^2-4\sum_{k=1}^{5}a_k+4\times5$

$=16-4\times10+20=-4$ 답 -4

06

$\sum_{k=1}^{5}(a_k+1)^2-\sum_{k=1}^{5}(a_k-1)^2$

$=\sum_{k=1}^{5}(a_k^2+2a_k+1)-\sum_{k=1}^{5}(a_k^2-2a_k+1)$

$=\sum_{k=1}^{5}\{(a_k^2+2a_k+1)-(a_k^2-2a_k+1)\}$

$=\sum_{k=1}^{5}4a_k=4\sum_{k=1}^{5}a_k$

$=4\times8=32$ 답 32

07

$\sum_{k=1}^{12}(2k+1)-\sum_{k=1}^{11}(2k-1)$

$=\sum_{k=1}^{12}(2k+1)-\left\{\sum_{k=1}^{12}(2k-1)-(2\times12-1)\right\}$

$=\sum_{k=1}^{12}(2k+1)-\sum_{k=1}^{12}(2k-1)+23$

$=\sum_{k=1}^{12}2+23=2\times12+23=47$ 답 47

08

(1) $\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k-1)-\sum_{k=4}^{10}k^2$

$=\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k-1)-\left(\sum_{k=1}^{10}k^2-1^2-2^2-3^2\right)$

$=\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k-1)-\sum_{k=1}^{10}k^2+14$

$=\sum_{k=1}^{10}(2k-1)+14=2\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}1+14$

$=2\underbrace{(1+2+3+\cdots+10)}_{\text{등차수열의 합}}-1\times10+14$

$=2\times\dfrac{10(1+10)}{2}-10+14$

$=110-10+14=114$

(2) $\sum_{k=1}^{6}(3^{k-1}-4)=\sum_{k=1}^{6}3^{k-1}-\sum_{k=1}^{6}4$

$=\underbrace{(1+3+3^2+\cdots+3^5)}_{\text{등비수열의 합}}-4\times6$

$=\dfrac{1\times(3^6-1)}{3-1}-24$

$=364-24=340$

답 (1) 114 (2) 340

Lecture Σ와 등차수열, 등비수열

(1) 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열일 때

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

(2) 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq1)$인 등비수열일 때

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

09

$\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1)$

$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)-\left\{\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)-(n^2-1)\right\}$

$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)+(n^2-1)$

$=\sum_{k=1}^{n}2+(n^2-1)$

$=n^2+2n-1$

즉 $n^2+2n-1=9n+7$이므로

$n^2-7n-8=0$, $(n+1)(n-8)=0$

$\therefore n=8$ ($\because$ n은 자연수) 답 8

10

$\sum_{k=1}^{5}a_{k+1}-\sum_{k=1}^{5}a_k=a_6-a_1=-15$이므로

$a_6-27=-15$ $\therefore a_6=12$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_6=a_1+(6-1)d=27+5d=12$이므로

$5d=-15$ $\therefore d=-3$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{10\{2\times27+(10-1)\times(-3)\}}{2}=135$

답 135

11

$\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=\sum_{k=1}^{2n}a_k=3n^2$ ……㉠

㉠에 $n=10$을 대입하면

$\sum_{k=1}^{20}a_k=3\times10^2=300$ 답 300

12

$\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=\sum_{k=1}^{2n}a_k=2n^2$ ……㉠

㉠에 $n=15$를 대입하면 $\sum_{k=1}^{30}a_k=2\times15^2=450$

㉠에 $n=5$를 대입하면 $\sum_{k=1}^{10}a_k=2\times5^2=50$

$\therefore \sum_{k=11}^{30}a_k=\sum_{k=1}^{30}a_k-\sum_{k=1}^{10}a_k=450-50=400$ 답 400

13

$\sum_{k=1}^{17}(a_{2k}+a_{2k+1})$

$=(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{34}+a_{35})$

$=\sum_{k=1}^{35}a_k-a_1=48$

$\therefore \sum_{k=1}^{35}a_k=a_1+48$

$=3+48$

$=51$

답 51

14

(1) $\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k$

$=\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}$

$=385+55$

$=440$

(2) $\sum_{k=1}^{5}(k+1)(k-4)=\sum_{k=1}^{5}(k^2-3k-4)$

$=\sum_{k=1}^{5}k^2-3\sum_{k=1}^{5}k-\sum_{k=1}^{5}4$

$=\frac{5\times6\times11}{6}-3\times\frac{5\times6}{2}-4\times5$

$=55-45-20$

$=-10$

답 (1) 440 (2) -10

15

이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(k-\alpha)(k-\beta)$

$=\sum_{k=1}^{10}\{k^2-(\alpha+\beta)k+\alpha\beta\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(k^2-2k-1)$

$=\sum_{k=1}^{10}k^2-2\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}1$

$=\frac{10\times11\times21}{6}-2\times\frac{10\times11}{2}-1\times10$

$=385-110-10$

$=265$

답 265

16

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하자.

(1) $a_n=(2n)^2$이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k)^2=\sum_{k=1}^{n}4k^2=4\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=4\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

(2) $a_n=(n+1)(2n-1)$이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)(2k-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(2k^2+k-1)$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}-1\times n$$
$$=\frac{n(4n^2+9n-1)}{6}$$

답 (1) $S_n=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

(2) $S_n=\frac{n(4n^2+9n-1)}{6}$

17

수열 1×3, 2×5, 3×7, $\cdots$, 12×25의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=n(2n+1)$

$$\therefore \text{(주어진 식)}=\sum_{k=1}^{12}k(2k+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{12}(2k^2+k)$$
$$=2\sum_{k=1}^{12}k^2+\sum_{k=1}^{12}k$$
$$=2\times\frac{12\times13\times25}{6}+\frac{12\times13}{2}$$
$$=1300+78$$
$$=1378$$

답 1378

18

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하자.

(1) $a_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=2\times\frac{n(n+1)}{2}-1\times n=n^2$$
$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(2) $a_n=1+5+5^2+\cdots+5^{n-1}$

$$=\frac{1\times(5^n-1)}{5-1}=\frac{5^n-1}{4}$$
$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{5^k-1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}5^k-\sum_{k=1}^{n}1\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{5(5^n-1)}{5-1}-1\times n\right\}$$
$$=\frac{5(5^n-1)}{16}-\frac{n}{4}$$

답 (1) $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (2) $S_n=\frac{5(5^n-1)}{16}-\frac{n}{4}$

19

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_1=1$

$a_2=2+2\times2$

$a_3=3+2\times3+3\times3$

$a_4=4+2\times4+3\times4+4\times4$

$\vdots$

이므로

$$a_n=n+2n+3n+\cdots+n^2$$
$$=\sum_{k=1}^{n}kn=n\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=n\times\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n^3+n^2}{2}$$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{8}\frac{k^3+k^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{8}k^3+\sum_{k=1}^{8}k^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{8\times9}{2}\right)^2+\frac{8\times9\times17}{6}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(1296+204)=750$$

답 750

20

(1) $\sum_{k=1}^{m}2k=2\sum_{k=1}^{m}k=2\times\frac{m(m+1)}{2}=m^2+m$이므로

$$\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}2k\right)=\sum_{m=1}^{n}(m^2+m)=\sum_{m=1}^{n}m^2+\sum_{m=1}^{n}m$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

이때 $\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}2k\right)=20$이므로

$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}=20$

$n(n+1)(n+2)=60=3\times4\times5$

$\therefore n=3$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(2k-l)=2\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}l=2\times\frac{10\times11}{2}-10l$

$=110-10l$

$\therefore \sum_{l=1}^{10}\left\{\sum_{k=1}^{10}(2k-l)\right\}=\sum_{l=1}^{10}(110-10l)$

$=\sum_{l=1}^{10}110-10\sum_{l=1}^{10}l$

$=110\times10-10\times\frac{10\times11}{2}$

$=1100-550=550$

답 (1) 3 (2) 550

21

이차방정식 $x^2+10x-22=0$의 두 근이 m, n이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$m+n=-10$, $mn=-22$ ······㉠

이때 $\sum_{i=1}^{m}(k+i)=\sum_{i=1}^{m}k+\sum_{i=1}^{m}i=km+\frac{m(m+1)}{2}$이므로

$\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{m}(k+i)\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{km+\frac{m(m+1)}{2}\right\}$

$=m\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}\frac{m(m+1)}{2}$

$=m\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{m(m+1)}{2}\times n$

$=\frac{mn(m+n+2)}{2}$

$=\frac{-22(-10+2)}{2}$ ($\because$ ㉠)

$=88$

답 88

22

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-n$이므로

$n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2-1=0$

$n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2-n)-\{(n-1)^2-(n-1)\}$

$=2n-2$ ······㉠

이때 $a_1=0$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=2n-2$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_{2k+1}=\sum_{k=1}^{10}\{2(2k+1)-2\}=\sum_{k=1}^{10}4k=4\sum_{k=1}^{10}k$

$=4\times\frac{10\times11}{2}=220$

답 220

23

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=2^n-1$이므로

$n=1$일 때, $a_1=S_1=2^1-1=1$

$n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)$

$=2^{n-1}$ ······㉠

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=2^{n-1}$

$\therefore \sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{5}2^{2k-2}=\sum_{k=1}^{5}4^{k-1}=\frac{1\times(4^5-1)}{4-1}=341$

답 341

24

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하자.

(1) $a_n=\frac{1}{(2n+1)^2-1}=\frac{1}{4n^2+4n}=\frac{1}{4n(n+1)}$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4(n+1)}$

(2) $3+5+7+\cdots+(2n+1)=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

$=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$=2\times\frac{n(n+1)}{2}+1\times n$

$=n(n+2)$

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{3+5+7+\cdots+(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{n(n+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\right.$$
$$\left.\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

답 (1) $\frac{n}{4(n+1)}$ (2) $\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

25

$$\sum_{k=1}^{14}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{14}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)$$
$$+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{14}}-\frac{1}{15}\right)$$
$$=1-\frac{1}{15}$$
$$=\frac{14}{15}$$

따라서 $p=15$, $q=14$이므로

$p+q=15+14=29$

답 29

26

$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\cancel{\sqrt{2}}-1)+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})$$
$$+\cdots+(\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}})$$
$$=\sqrt{n+1}-1$$

따라서 $\sqrt{n+1}-1=9$이므로 $\sqrt{n+1}=10$

$n+1=100$ $\therefore\ n=99$

답 99

27

첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{40}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$$
$$=\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{40}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$$
$$=\frac{1}{2}\{(\cancel{\sqrt{3}}-1)+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}})+(\cancel{\sqrt{7}}-\cancel{\sqrt{5}})$$
$$+\cdots+(\sqrt{81}-\cancel{\sqrt{79}})\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{81}-1)$$
$$=\frac{1}{2}\times8$$
$$=4$$

답 4

28

(1) $\sum_{k=2}^{n}\log\frac{k+1}{k-1}$

$$=\log\frac{3}{1}+\log\frac{4}{2}+\log\frac{5}{3}$$
$$+\cdots+\log\frac{n}{n-2}+\log\frac{n+1}{n-1}$$
$$=\log\left(\cancel{\frac{3}{1}}\times\cancel{\frac{4}{2}}\times\cancel{\frac{5}{3}}\times\cdots\times\frac{n}{\cancel{n-2}}\times\frac{n+1}{\cancel{n-1}}\right)$$
$$=\log\frac{n(n+1)}{2}$$

(2) $\sum_{k=2}^{n}\log\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}$

$$=\sum_{k=2}^{n}\log\sqrt{\frac{k^2-1}{k^2}}$$
$$=\sum_{k=2}^{n}\log\sqrt{\frac{k-1}{k}\times\frac{k+1}{k}}$$
$$=\log\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}+\log\sqrt{\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}}+\log\sqrt{\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}}$$
$$+\cdots+\log\sqrt{\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}}$$
$$=\log\sqrt{\left(\frac{1}{2}\times\cancel{\frac{3}{2}}\right)\times\left(\cancel{\frac{2}{3}}\times\cancel{\frac{4}{3}}\right)\times\left(\cancel{\frac{3}{4}}\times\cancel{\frac{5}{4}}\right)\times\cdots\times\left(\cancel{\frac{n-1}{n}}\times\frac{n+1}{n}\right)}$$
$$=\log\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$$

답 (1) $\log\frac{n(n+1)}{2}$ (2) $\log\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$

다른 풀이

(2) 로그의 성질을 이용하면 일반항은

$$\begin{aligned}\log\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}&=\log\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}\\&=\log\sqrt{\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}}\\&=\log\sqrt{\frac{n-1}{n}}-\log\sqrt{\frac{n}{n+1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=2}^{n}\log\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\\&=\sum_{k=2}^{n}\left(\log\sqrt{\frac{k-1}{k}}-\log\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)\\&=\left(\log\sqrt{\frac{1}{2}}-\cancel{\log\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)+\left(\cancel{\log\sqrt{\frac{2}{3}}}-\cancel{\log\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)\\&\quad+\cdots+\left(\cancel{\log\sqrt{\frac{n-1}{n}}}-\log\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)\\&=\log\sqrt{\frac{1}{2}}-\log\sqrt{\frac{n}{n+1}}\\&=\log\sqrt{\frac{n+1}{2n}}\end{aligned}$$

29

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}\\&=\log_2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}}+\log_2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\log_2\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}+\cdots+\log_2\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\\&=\log_2\left(\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{1}}\times\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{2}}}\times\frac{\cancel{\sqrt{4}}}{\cancel{\sqrt{3}}}\times\cdots\times\frac{\sqrt{n+1}}{\cancel{\sqrt{n}}}\right)\\&=\log_2\sqrt{n+1}\end{aligned}$$

따라서 $\log_2\sqrt{n+1}=3$이므로 $\sqrt{n+1}=2^3=8$

$n+1=64 \qquad \therefore n=63$

답 63

30

$a_n=\log_3\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log_3\frac{n+1}{n}$이므로 첫째항부터 제$n$항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\log_3\frac{k+1}{k}\\&=\log_3\frac{2}{1}+\log_3\frac{3}{2}+\log_3\frac{4}{3}+\cdots+\log_3\frac{n+1}{n}\\&=\log_3\left(\frac{\cancel{2}}{1}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\cdots\times\frac{n+1}{\cancel{n}}\right)\\&=\log_3(n+1)\end{aligned}$$

따라서 $\log_3(n+1)=4$이므로

$n+1=3^4=81 \qquad \therefore n=80$

답 80

31

$$\begin{array}{rl}S=&1+2\times2+3\times2^2+\cdots+20\times2^{19}\\-\big)\,2S=&\quad\;1\times2+2\times2^2+\cdots+19\times2^{19}+20\times2^{20}\\\hline -S=&1+\;2+\;2^2+\cdots+\;2^{19}-20\times2^{20}\end{array}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1\times(2^{20}-1)}{2-1}-20\times2^{20}\\&=2^{20}-20\times2^{20}-1\\&=-19\times2^{20}-1\end{aligned}$$

$\therefore S=19\times2^{20}+1$

답 $19\times2^{20}+1$

32

$$\begin{array}{rl}S=&1+3\times2+5\times2^2+\cdots+19\times2^9\\-\big)\,2S=&\quad\;1\times2+3\times2^2+\cdots+17\times2^9+19\times2^{10}\\\hline -S=&1+2\times2+2\times2^2+\cdots+\;2\times2^9-19\times2^{10}\end{array}$$

$$\begin{aligned}&=1+2\times\frac{2\times(2^9-1)}{2-1}-19\times2^{10}\\&=2^{11}-19\times2^{10}-3\\&=-17\times2^{10}-3\end{aligned}$$

$\therefore S=17\times2^{10}+3$

답 $17\times2^{10}+3$

연습문제

p.318~321

1

$\sum_{k=1}^{10}(b_k-4)=\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}4=\sum_{k=1}^{10}b_k-4\times10=50$이므로

$\sum_{k=1}^{10}b_k=90$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(2a_k+b_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k=2\times5+90=100$

답 100

2

첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$

$\therefore \sum_{k=1}^{4}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{4}2^{2k-2}=\sum_{k=1}^{4}4^{k-1}=\frac{1\times(4^4-1)}{4-1}=85$

답 ①

3

(1) $\sum_{k=1}^{9}(1-k^2)+\sum_{k=1}^{10}(1+k^2)$

$=\sum_{k=1}^{9}(1-k^2)+\sum_{k=1}^{9}(1+k^2)+(1+10^2)$

$=\sum_{k=1}^{9}2+101$

$=2\times 9+101$

$=18+101=119$

(2) $\sum_{k=1}^{5}\frac{k^3}{k+1}+\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=1}^{5}\frac{k^3+1}{k+1}$

$=\sum_{k=1}^{5}\frac{(k+1)(k^2-k+1)}{k+1}$

$=\sum_{k=1}^{5}(k^2-k+1)$

$=\sum_{k=1}^{5}k^2-\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}1$

$=\frac{5\times 6\times 11}{6}-\frac{5\times 6}{2}+1\times 5$

$=55-15+5=45$

답 (1) 119 (2) 45

4

$\sum_{k=1}^{100}\frac{2^k-3^k}{4^k}=\sum_{k=1}^{100}\frac{2^k}{4^k}-\sum_{k=1}^{100}\frac{3^k}{4^k}$

$=\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{3}{4}\right)^k$

$=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{100}\right\}}{1-\frac{3}{4}}$

$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}-3\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{100}\right\}$

$=-2-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}+3\times\left(\frac{3}{4}\right)^{100}$

따라서 $a=-2$, $b=-1$, $c=3$이므로

$ab-c=-2\times(-1)-3=-1$

답 -1

5

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+4n$이므로

$n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2+4\times 1=5$

$n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+4n)-\{(n-1)^2+4(n-1)\}$

$=2n+3$ ……㉠

이때 $a_1=5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=2n+3$

$\therefore \sum_{k=1}^{15}a_{2k}=\sum_{k=1}^{15}(2\times 2k+3)$

$=\sum_{k=1}^{15}(4k+3)$

$=4\sum_{k=1}^{15}k+\sum_{k=1}^{15}3$

$=4\times\frac{15\times 16}{2}+3\times 15$

$=480+45=525$

답 525

6

Step by Step

괄호 안의 Σ를 계산한다.

↓

바깥의 Σ를 계산한다.

↓

자연수의 거듭제곱의 합을 이용하여 계산한다.

$\sum_{k=1}^{l}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{l}k+\sum_{k=1}^{l}1=2\times\frac{l(l+1)}{2}+l$

$=l^2+2l$

$\therefore \sum_{l=1}^{10}\left\{\sum_{k=1}^{l}(2k+1)\right\}=\sum_{l=1}^{10}(l^2+2l)$

$=\sum_{l=1}^{10}l^2+2\sum_{l=1}^{10}l$

$=\frac{10\times 11\times 21}{6}+2\times\frac{10\times 11}{2}$

$=385+110=495$

답 495

7

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$

$\therefore \sum_{k=1}^{15}a_k=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$

$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{10}}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{43}}-\frac{1}{46}\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{46}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{45}{46}=\frac{15}{46}$

답 $\frac{15}{46}$

8

$\sum_{k=1}^{20} ka_k=200$에서

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+20a_{20}=200$ ……㉠

$\sum_{k=1}^{19} ka_{k+1}=100$에서

$a_2+2a_3+3a_4+\cdots+19a_{20}=100$ ……㉡

㉠－㉡을 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=100$

$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$

$=100$

답 100

9

$\sum_{k=1}^{m}(a_k+3)^2=\sum_{k=1}^{m}(a_k{}^2+6a_k+9)$

$=\sum_{k=1}^{m}a_k{}^2+6\sum_{k=1}^{m}a_k+\sum_{k=1}^{m}9$

$=3+6\times(-1)+9m$

$=9m-3$

따라서 $9m-3=60$이므로

$9m=63 \qquad \therefore m=7$

답 ⑤

10

$x^2-(2n+5)x+n^2+5n+6=0$에서

$x^2-(2n+5)x+(n+2)(n+3)=0$

$\{x-(n+2)\}\{x-(n+3)\}=0$

$\therefore x=n+2$ 또는 $x=n+3$

이때 $\alpha_n>\beta_n$이므로

$\alpha_n=n+3,\ \beta_n=n+2$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(\alpha_k{}^2-\beta_k{}^2)=\sum_{k=1}^{10}(\alpha_k+\beta_k)(\alpha_k-\beta_k)$

$=\sum_{k=1}^{10}(2k+5)$

$=2\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}5$

$=2\times\frac{10\times11}{2}+5\times10$

$=110+50$

$=160$

답 160

11

$\sum_{k=1}^{11}(k-c)(2k-c)$

$=\sum_{k=1}^{11}(2k^2-3ck+c^2)$

$=2\sum_{k=1}^{11}k^2-3c\sum_{k=1}^{11}k+\sum_{k=1}^{11}c^2$

$=2\times\frac{11\times12\times23}{6}-3c\times\frac{11\times12}{2}+11c^2$

$=11c^2-198c+1012$

$=11(c-9)^2+121$

따라서 $c=9$일 때 최소가 된다.

답 9

12

다항식 $x^2-(n+1)x+n$을 $x-2n$으로 나누었을 때의 나머지가 a_n이므로

$a_n=(2n)^2-(n+1)\times2n+n=2n^2-n$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2k^2-k)=2\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k$

$=2\times\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}$

$=770-55=715$

답 715

Lecture 나머지정리

x에 대한 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$R=f(a)$

13

$a_n=\begin{cases}-n & (n\text{이 홀수})\\ 2n & (n\text{이 짝수})\end{cases}$이므로

$\sum_{k=1}^{100}a_k=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{99}+a_{100}$

$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99})$
$+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{100})$

$=(-1-3-5-\cdots-99)$
$+(2\times2+2\times4+2\times6+\cdots+2\times100)$

$=-\sum_{k=1}^{50}(2k-1)+2\sum_{k=1}^{50}2k$

$=-2\sum_{k=1}^{50}k+\sum_{k=1}^{50}1+4\sum_{k=1}^{50}k$

$=2\sum_{k=1}^{50}k+\sum_{k=1}^{50}1$

$=2\times\frac{50\times51}{2}+1\times50$

$=2550+50=2600$

답 2600

14

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 항에서 0인 항을 a개, 1인 항을 b개, 2인 항을 c개라 하면

$\sum_{k=1}^{n} a_k = 0\times a + 1\times b + 2\times c = 14$이므로

$b+2c=14$ ⋯⋯ ㉠

$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 0^2\times a + 1^2\times b + 2^2\times c = 20$이므로

$b+4c=20$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=8$, $c=3$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{n} a_k^3 &= 0^3\times a + 1^3\times b + 2^3\times c\\ &= 0+8+8\times 3\\ &= 32\end{aligned}$$

답 32

15

ㄱ. $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=4$, $a_5=0$,
$a_6=1$, $a_7=2$, $a_8=3$, $a_9=4$, $a_{10}=0$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = 2(1+2+3+4+0) = 20$

ㄴ. $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} ka_k &= a_1+2a_2+3a_3+4a_4+\cdots+10a_{10}\\ &= 1+2\times 2+3\times 3+4\times 4+5\times 0+6\times 1\\ &\quad +7\times 2+8\times 3+9\times 4+10\times 0\\ &= (1+4+9+16)+(6+14+24+36)\\ &= 30+80=110\end{aligned}$$

ㄷ. ㄱ에서 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 20$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}\left(k\sum_{k=1}^{10} a_k\right) &= \sum_{k=1}^{10} 20k = 20\sum_{k=1}^{10} k\\ &= 20\times\frac{10\times 11}{2}\\ &= 1100\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

16

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\ &= \left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)\\ &\quad +\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= 1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$ ⋯⋯ ❶

즉 $1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} \le \frac{1}{100}$에서

$1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\le\frac{1}{100}$, $\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{100}$

$n+1\ge 100$ $\quad\therefore n\ge 99$ ⋯⋯ ❷

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 99이다. ⋯⋯ ❸

답 99

채점 기준	비율
❶ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ n의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 자연수 n의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

17

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2-n$이므로

$n=1$일 때, $a_1=S_1=2\times 1^2-1=1$

$n\ge 2$일 때

$$\begin{aligned}a_n &= S_n-S_{n-1}\\ &= (2n^2-n)-\{2(n-1)^2-(n-1)\}\\ &= 4n-3\end{aligned}$$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4n-3$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{9}}\right)\right.\\ &\quad \left.+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\cancel{\frac{1}{13}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{37}}-\frac{1}{41}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{41}\right)\\ &= \frac{1}{4}\times\frac{40}{41}=\frac{10}{41}\end{aligned}$$

답 $\frac{10}{41}$

18

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$\frac{a_n+a_{n+2}}{2}=a_{n+1}$ $\quad\therefore a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$

즉 $x^2-(a_n+a_{n+2})x-a_{n+1}=0$에서

$x^2-2a_{n+1}x-a_{n+1}=0$이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=2a_{n+1}$, $\alpha_n\beta_n=-a_{n+1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}(\alpha_n+1)(\beta_n+1)=\sum_{n=1}^{10}(\alpha_n\beta_n+\alpha_n+\beta_n+1)$

$=\sum_{n=1}^{10}(-a_{n+1}+2a_{n+1}+1)$

$=\sum_{n=1}^{10}(a_{n+1}+1)$

즉 $\sum_{n=1}^{10}(a_{n+1}+1)=180$이므로

$a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{11}+10=180$

$\therefore a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{11}=170$ ······㉠

㉠의 양변에 a_1을 더하면

$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{11}=a_1+170$

$\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=a_1+170$

$\frac{11(6+a_{11})}{2}=176,\ 6+a_{11}=32 \qquad \therefore a_{11}=26$

답 26

19

$a_1=1=1^2,\ a_2=4=2^2,\ a_3=9=3^2,\ \cdots$이므로

$a_n=n^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{7}a_k=\sum_{k=1}^{7}k^2=\frac{7\times8\times15}{6}=140$

답 140

20

두 점 A_n, B_n은 두 함수 $y=2x^2$, $y=2x+4$의 그래프와 직선 $x=n$이 각각 만나는 점이므로 두 점 A_n, B_n의 좌표는

$\mathrm{A}_n(n,\ 2n^2)$, $\mathrm{B}_n(n,\ 2n+4)$

두 함수 $y=2x^2$, $y=2x+4$의 그래프의 교점의 x좌표를 구하면

$2x^2=2x+4$에서 $2x^2-2x-4=0$

$x^2-x-2=0,\ (x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

즉 두 함수 $y=2x^2$, $y=2x+4$의 그래프는 점 $(-1,\ 2)$, $(2,\ 8)$에서 만난다.

이때 $f(x)=2x^2$, $g(x)=2x+4$라 하면

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=|f(n)-g(n)|$

(i) $n=1$일 때

$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}=|f(1)-g(1)|=|2-6|=4$

(ii) $n\geq2$일 때

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=|f(n)-g(n)|=f(n)-g(n)$

$=2n^2-2n-4$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$

$=\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}+\sum_{n=2}^{10}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$

$=4+\sum_{n=2}^{10}(2n^2-2n-4)$

$=4+\sum_{n=1}^{10}(2n^2-2n-4)-(2\times1^2-2\times1-4)$

$=8+2\sum_{n=1}^{10}n^2-2\sum_{n=1}^{10}n-\sum_{n=1}^{10}4$

$=8+2\times\frac{10\times11\times21}{6}-2\times\frac{10\times11}{2}-4\times10$

$=8+770-110-40=628$

답 628

Level Up 연습문제

p.322

1

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=1+(n-1)d$

$\therefore b_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k$

$=\sum_{k=1}^{n}k\{1+(k-1)d\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\{dk^2+(1-d)k\}$

$=d\sum_{k=1}^{n}k^2+(1-d)\sum_{k=1}^{n}k$

$=\frac{dn(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{(1-d)n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)}{6}\times\{d(2n+1)+3(1-d)\}$

$=\frac{n(n+1)}{6}\times(2dn-2d+3)$ ······㉠

이때 $b_{10}=715$이므로 $\frac{10\times11}{6}\times(20d-2d+3)=715$

$18d+3=39,\ 18d=36 \qquad \therefore d=2$

$d=2$를 ㉠에 대입하면

$b_n=\frac{n(n+1)}{6}\times(2\times2n-2\times2+3)$

$=\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} \frac{b_n}{n(n+1)} = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{10}(4n-1) = \frac{1}{6}\left(4\sum_{n=1}^{10} n - \sum_{n=1}^{10} 1\right)$$
$$= \frac{1}{6}\left(4\times\frac{10\times 11}{2} - 1\times 10\right)$$
$$= \frac{1}{6}(220-10) = 35$$

답 ②

다른 풀이

㉠에서 $b_n = \dfrac{n(n+1)}{6}\times(2dn-2d+3)$이므로

$$\frac{b_n}{n(n+1)} = \frac{3+2dn-2d}{6} = \frac{1}{2}+(n-1)\frac{d}{3}$$

즉 수열 $\left\{\dfrac{b_n}{n(n+1)}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{2}$, 공차가 $\dfrac{d}{3}$인 등차수열이다.

이때 $b_{10}=715$이므로 수열 $\left\{\dfrac{b_n}{n(n+1)}\right\}$의 제10항은

$$\frac{b_{10}}{10\times 11} = \frac{715}{10\times 11} = \frac{13}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}\frac{b_n}{n(n+1)} = \frac{10\left(\frac{1}{2}+\frac{13}{2}\right)}{2} = \frac{10\times 7}{2} = 35$$

2

점 $(2n,\ 0)$에서 원에 그은 접선 l의 기울기를 m이라 하면 접선 l의 방정식은

$y=m(x-2n)$ $\qquad \therefore mx-y-2mn=0$

이 직선이 중심이 $(-1,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원에 접하므로

$$\frac{|-m-2mn|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 1$$

$|-m-2mn| = \sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $m^2(2n+1)^2 = m^2+1$

$m^2(4n^2+4n+1) = m^2+1$

$4n(n+1)m^2 = 1 \qquad \therefore m^2 = \dfrac{1}{4n(n+1)}$

이때 $a_n=$(접선 l의 기울기의 제곱)이므로

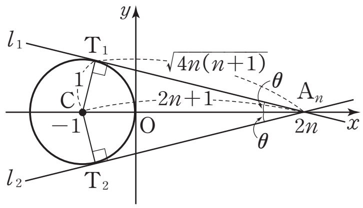
$$a_n = \frac{1}{4n(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{40} a_k = \sum_{k=1}^{40}\frac{1}{4k(k+1)}$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{40}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{40}}-\frac{1}{41}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{41}\right) = \frac{10}{41}$$

답 ⑤

다른 풀이

다음 그림과 같이 점 A_n의 좌표를 $(2n,\ 0)$, 원의 중심을 $C(-1,\ 0)$이라 하자.



점 A_n에서 원에 그은 두 접선 l_1, l_2의 접점을 각각 T_1, T_2라 하면 삼각형 CA_nT_1은 $\overline{A_nC}=2n+1$, $\overline{CT_1}=1$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{T_1A_n} = \sqrt{(2n+1)^2-1} = \sqrt{4n(n+1)}$

$\angle CA_nT_1=\theta$라 하면 접선 l_1의 기울기는

$\tan(180^\circ-\theta) = -\tan\theta$

$\angle CA_nT_2 = \angle CA_nT_1 = \theta$이므로

접선 l_2의 기울기는 $\tan\theta$

$$\therefore a_n = \tan^2\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{4n(n+1)}}\right)^2 = \frac{1}{4n(n+1)}$$

이와 같이 a_n을 구할 수도 있다.

3

(나)에서

$a_2 = 8+a_1$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$a_3 = 8+(a_1+a_2) = 2a_2$

$a_4 = 8+(a_1+a_2+a_3) = 2a_3 = 2^2a_2$

$\vdots$

$a_{10} = 2^8 a_2$

(가)에서 $a_{10}\le 5120$이므로 $2^8a_2 \le 5120$

$256a_2 \le 5120 \qquad \therefore a_2 \le 20$

이때 ㉠에서 $a_2 = 8+a_1$이므로

$8+a_1 \le 20 \qquad \therefore a_1 \le 12$

따라서 a_1의 최댓값은 12이다.

답 ④

4 수학적 귀납법

확인 문제 p.326~335

01

$a_{n+1}=a_n+4$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 4인 등차수열이다.

이때 첫째항이 3이므로

$a_n=3+(n-1)\times4=4n-1$

$a_k=59$에서 $4k-1=59$

$4k=60 \qquad \therefore k=15$

답 15

02

$a_{n+1}=a_n+6$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 6인 등차수열이다.

이때 첫째항이 -2이므로

$a_n=-2+(n-1)\times6=6n-8$

$a_k>190$에서 $6k-8>190$

$6k>198 \qquad \therefore k>33$

따라서 자연수 k의 최솟값은 34이다.

답 34

03

$a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}=0$에서 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때 $a_1=2$, $a_2=5$이므로 공차는

$a_2-a_1=3$

즉 첫째항이 2, 공차가 3이므로

$a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(3k-1)=3\times\frac{10\times11}{2}-10=155$

답 155

04

$a_{n+1}=2a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

이때 첫째항이 4이므로

$a_n=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$

$a_k=1024$에서 $2^{k+1}=1024=2^{10}$이므로

$k+1=10 \qquad \therefore k=9$

답 9

05

$a_{n+1}+3a_n=0$에서 $a_{n+1}=-3a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 -3인 등비수열이다.

이때 첫째항이 2이므로

$a_n=2\times(-3)^{n-1}$

$$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=\frac{2\{1-(-3)^6\}}{1-(-3)}=-364$$

답 -364

06

${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때 $a_2=128$, $a_3=64$이므로 공비는 $\frac{a_3}{a_2}=\frac{1}{2}$

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{128}{a_1}=\frac{1}{2} \qquad \therefore a_1=256$

$\therefore a_n=256\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-9}$

$\therefore a_1-a_6=256-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=248$

답 248

07

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$의 n에

1, 2, 3, ⋯, 99를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}-a_1&=\sqrt{2}-1\\
\cancel{a_3}-\cancel{a_2}&=\sqrt{3}-\sqrt{2}\\
\cancel{a_4}-\cancel{a_3}&=\sqrt{4}-\sqrt{3}\\
&\vdots\\
+)\ a_{100}-\cancel{a_{99}}&=\sqrt{100}-\sqrt{99}\\
\hline
a_{100}-a_1&=(\cancel{\sqrt{2}}-1)+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})+\\
&\quad\cdots+(\sqrt{100}-\cancel{\sqrt{99}})\\
&=\sqrt{100}-1\\
&=9
\end{aligned}$$

따라서 $a_{100}-a_1=9$이므로

$a_{100}=a_1+9=2+9=11$

답 11

Lecture 분모에 근호가 포함된 수열

분모에 근호가 포함된 수열의 합은 분모를 유리화하여 구할 수 있다.

➡ $\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\frac{1}{A-B}(\sqrt{A}-\sqrt{B})$ (단, $A\neq B$)

08

$a_{n+1}=a_n+2n+1$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}=a_1+2\times1+1 \\ & \cancel{a_3}=\cancel{a_2}+2\times2+1 \\ & \cancel{a_4}=\cancel{a_3}+2\times3+1 \\ & \quad\vdots \\ +) & a_n=\cancel{a_{n-1}}+2(n-1)+1 \\ \hline & a_n=a_1+2\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}+(n-1)\times1 \end{array}$$

$$=3+2\sum_{k=1}^{n-1}k+(n-1)$$

$$=3+2\times\frac{(n-1)n}{2}+(n-1)$$

$$=n^2+2$$

답 $a_n=n^2+2$

09

(1) $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}=\frac{2}{1}a_1 \\ & \cancel{a_3}=\frac{3}{2}\cancel{a_2} \\ & \cancel{a_4}=\frac{4}{3}\cancel{a_3} \\ & \quad\vdots \\ \times) & a_n=\frac{n}{n-1}\cancel{a_{n-1}} \\ \hline & a_n=\frac{\cancel{2}}{1}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\cdots\times\frac{n}{\cancel{n-1}}\times a_1 \end{array}$$

$$=n\times1=n$$

(2) $(2n-1)a_{n+1}=(2n+1)a_n$에서 $a_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2n-1}a_n$

$a_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2n-1}a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}=\frac{3}{1}a_1 \\ & \cancel{a_3}=\frac{5}{3}\cancel{a_2} \\ & \cancel{a_4}=\frac{7}{5}\cancel{a_3} \\ & \quad\vdots \\ \times) & a_n=\frac{2n-1}{2n-3}\cancel{a_{n-1}} \\ \hline & a_n=\frac{\cancel{3}}{1}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{7}}{\cancel{5}}\times\cdots\times\frac{2n-1}{\cancel{2n-3}}\times a_1 \end{array}$$

$$=(2n-1)\times2=4n-2$$

답 (1) $a_n=n$ (2) $a_n=4n-2$

10

$a_{n+1}=2^na_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}=2^1a_1 \\ & \cancel{a_3}=2^2\cancel{a_2} \\ & \cancel{a_4}=2^3\cancel{a_3} \\ & \quad\vdots \\ \times) & a_n=2^{n-1}\cancel{a_{n-1}} \\ \hline & a_n=2^1\times2^2\times2^3\times\cdots\times2^{n-1}\times a_1 \end{array}$$

$$=2^{1+2+3+\cdots+(n-1)}\times3$$

$$=3\times2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

답 $a_n=3\times2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

11

$S_n=2a_n-1\ (n=1, 2, 3, \cdots)$에서

$S_{n+1}=2a_{n+1}-1\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

한편 $n\ge1$에서 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$이므로

$S_{n+1}-S_n=2(a_{n+1}-a_n)$, $a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n$

$\therefore a_{n+1}=2a_n\ (n\ge1)$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n=2^{n-1}$

$\therefore a_6=2^5=32$

답 32

12

$6S_n=a_n^2+3a_n-4\ (n=1, 2, 3, \cdots)$에서

$6S_{n+1}=a_{n+1}^2+3a_{n+1}-4\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

한편 $n\ge1$에서 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$이므로

$6(S_{n+1}-S_n)=a_{n+1}^2-a_n^2+3(a_{n+1}-a_n)$

$6a_{n+1}=a_{n+1}^2-a_n^2+3a_{n+1}-3a_n$

$a_{n+1}^2-a_n^2-3a_{n+1}-3a_n=0$

$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)-3(a_{n+1}+a_n)=0$

$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-3)=0$

그런데 $a_{n+1}+a_n>0$이므로 $a_{n+1}-a_n-3=0$

$\therefore a_{n+1}-a_n=3$

이때 $6S_1=a_1^2+3a_1-4$이고 $S_1=a_1$이므로

$6a_1=a_1^2+3a_1-4$, $a_1^2-3a_1-4=0$

$(a_1+1)(a_1-4)=0 \qquad \therefore a_1=4\ (\because a_1+1>0)$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=4+(n-1)\times3=3n+1$

$\therefore a_4=3\times4+1=13$

답 13

13

1일 후 작업을 끝낸 수족관에 남아 있는 물의 양은

$a_1=50\times\frac{1}{2}+10=35$

$(n+1)$일 후 작업을 끝낸 수족관에 남아 있는 물의 양은 n일 후 물을 넣은 뒤 남아 있는 물의 $\frac{1}{2}$을 버리고 10 L의 물을 새로 넣은 양과 같으므로

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+10$ ……㉠

㉠의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=\frac{1}{2}a_1+10=\frac{1}{2}\times35+10=\frac{55}{2}$

$a_3=\frac{1}{2}a_2+10=\frac{1}{2}\times\frac{55}{2}+10=\frac{95}{4}$

$a_4=\frac{1}{2}a_3+10=\frac{1}{2}\times\frac{95}{4}+10=\frac{175}{8}$

$a_5=\frac{1}{2}a_4+10=\frac{1}{2}\times\frac{175}{8}+10=\frac{335}{16}$

답 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+10$, $a_5=\frac{335}{16}$

14

(1) 주어진 그림에서

$a_1=1$, $a_2=a_1+3$, $a_3=a_2+3^2$, …이므로

$a_{n+1}=a_n+3^n$

(2) $a_{n+1}=a_n+3^n$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}\cancel{a_2}&=a_1+3\\ \cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+3^2\\ \cancel{a_4}&=\cancel{a_3}+3^3\\ +)\ a_5&=\cancel{a_4}+3^4\\ \hline a_5&=a_1+(3+3^2+3^3+3^4)\\ &=1+\frac{3(3^4-1)}{3-1}=121\end{aligned}$$

따라서 [5단계]까지 잘라 낸 정삼각형의 개수는 121이다.

답 (1) $a_{n+1}=a_n+3^n$ (2) 121

15

ㄱ. $p(1)$이 참이면 $p(3)$, $p(5)$, $p(7)$, $p(9)$, …가 참이다.

ㄴ. $p(2)$가 참이면 $p(4)$, $p(6)$, $p(8)$, $p(10)$, $p(12)$, …가 참이다.

ㄷ. ㄱ에 의하여 $p(1)$이 참이면 모든 홀수 k에 대하여 $p(k)$가 참이다.

ㄴ에 의하여 $p(2)$가 참이면 모든 짝수 m에 대하여 $p(m)$이 참이다.

즉 $p(1)$, $p(2)$가 참이면 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

16

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ……㉠

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\frac{1\times2\times3}{6}=1$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

이 성립한다.

이 식의 양변에 $\boxed{(가)\ (k+1)^2}$을 더하면

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+\boxed{(가)\ (k+1)^2}\\ &=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\boxed{(가)\ (k+1)^2}\\ &=\frac{(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}}{6}\\ &=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\ &=\frac{\boxed{(나)\ (k+1)(k+2)(2k+3)}}{6}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

답 (가) $(k+1)^2$ (나) $(k+1)(k+2)(2k+3)$

17

$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ ……㉠

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$, (우변)$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$

가 성립한다.

이 식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$을 더하면

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k+1}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

답 풀이 참조

18

$2^n>n^2$ ……㉠

(i) $n=5$일 때

(좌변)$=2^5=32$, (우변)$=5^2=25$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\geq5)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$2^k>k^2$이 성립한다.

이 식의 양변에 2를 곱하면

$2^{k+1}>2k^2$

이때

$2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1$

$=\boxed{(가)\ (k-1)^2}-2>0\ (\because k\geq5)$

이므로 $2k^2>(k+1)^2$ $\therefore 2^{k+1}>\boxed{(나)\ (k+1)^2}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\geq5$인 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

답 (가) $(k-1)^2$ (나) $(k+1)^2$

19

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$ ……㉠

(i) $n=2$일 때

(좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, (우변)$=\frac{2\times2}{2+1}=\frac{4}{3}$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\geq2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$$

가 성립한다.

이 식의 양변에 $\frac{1}{k+1}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}=\frac{2k+1}{k+1}$$

이때

$$\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$$

$(\because k\geq2)$

이므로 $\frac{2k+1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$

$$\therefore 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

답 풀이 참조

연습문제

p.336~339

1

$a_{n+1}-a_n=-4$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -4인 등차수열이다.

이때 첫째항이 42이므로

$a_n=42+(n-1)\times(-4)=-4n+46$

$a_k=-6$에서 $-4k+46=-6$

$-4k=-52$ $\therefore k=13$

답 13

2

$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}$에서 ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때 $a_1=-4$, $a_2=12$이므로 공비는 $\frac{a_2}{a_1}=-3$

즉 첫째항이 -4, 공비가 -3이므로

$a_n=-4\times(-3)^{n-1}$

$\therefore a_6=-4\times(-3)^5=972$

답 972

3

$n=1$일 때, $a_2=a_1+3=15+3=18$

$n=2$일 때, $a_3=a_2-2=18-2=16$

$n=3$일 때, $a_4=a_3+3=16+3=19$

$n=4$일 때, $a_5=a_4-4=19-4=15$

$n=5$일 때, $a_6=a_5+3=15+3=18$

답 18

4

$p(1)$이 참이면

$p(3\times1-1)=p(2)$, $p(3\times1+1)=p(4)$도 참이다.

$p(2)$가 참이므로

$p(3\times2-1)=p(5)$, $p(3\times2+1)=p(7)$도 참이다.

$p(4)$가 참이므로

$p(3\times4-1)=p(11)$, $p(3\times4+1)=p(13)$도 참이다.

$\vdots$

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ③이다.

답 ③

5

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때 $a_2=-1$, $a_3=3$이므로 공차는

$a_3-a_2=4$

$2a_2=a_1+a_3$에서 $2\times(-1)=a_1+3$

$\therefore a_1=-5$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -5, 공차가 4이므로

$a_n=-5+(n-1)\times4=4n-9$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제15항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{15}a_k=\sum_{k=1}^{15}(4k-9)=4\times\frac{15\times16}{2}-9\times15=345$$

답 345

6

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n$

$\therefore a_{n+1}=2S_n$

이때 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$S_{n+1}-S_n=2S_n$

$\therefore S_{n+1}=3S_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

즉 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $S_1=a_1=1$, 공비가 3인 등비수열이므로 $S_n=3^{n-1}$

$\therefore a_2+a_3+a_4=S_4-S_1=3^3-1=26$

답 26

7

$a_{n+1}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}a_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 63을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}}a_1$$
$$\cancel{a_3}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times\big)\ a_{64}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{63}}\cancel{a_{63}}$$

$$a_{64}=\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{1}}\times\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{2}}}\times\frac{\cancel{\sqrt{4}}}{\cancel{\sqrt{3}}}\times\cdots\times\frac{\sqrt{64}}{\cancel{\sqrt{63}}}\times a_1$$
$$=\sqrt{64}\times1$$
$$=8$$

$\therefore \log_2 a_{64}=\log_2 8=\log_2 2^3=3$

답 3

Lecture 로그의 성질

$a>0$, $a\neq1$, $x>0$, $y>0$일 때

(1) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

(2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

(4) $\log_a x^n=n\log_a x$ (단, n은 실수)

8

점 P_{n+1}은 선분 P_nP_{n+2}의 중점이므로

$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$

$\therefore 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ …… ❶

즉 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때 $a_1=0$, $a_2=3$이므로 공차는

$a_2-a_1=3$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 0, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=0+(n-1)\times3=3n-3$ …… ❷

$\therefore a_{10}=3\times10-3=27$

따라서 점 P_{10}의 좌표는 27이다. …… ❸

답 27

채점 기준	비율
❶ a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30%
❷ 일반항 a_n을 구할 수 있다.	40%
❸ 점 P_{10}의 좌표를 구할 수 있다.	30%

9

$$\frac{4}{3}+\frac{8}{3^2}+\frac{12}{3^3}+\cdots+\frac{4n}{3^n}=3-\frac{2n+3}{3^n} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=\frac{4\times1}{3}=\frac{4}{3}$, (우변)$=3-\frac{2\times1+3}{3}=\frac{4}{3}$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\frac{4}{3}+\frac{8}{3^2}+\frac{12}{3^3}+\cdots+\frac{4k}{3^k}=3-\frac{2k+3}{3^k}$$

이 성립한다.

이 식의 양변에 $\frac{4(k+1)}{3^{k+1}}$을 더하면

$$\frac{4}{3}+\frac{8}{3^2}+\frac{12}{3^3}+\cdots+\frac{4k}{3^k}+\frac{4(k+1)}{3^{k+1}}$$
$$=3-\frac{2k+3}{3^k}+\frac{4(k+1)}{3^{k+1}}$$
$$=3-\frac{1}{3^k}\left\{(2k+3)-\boxed{(가)\ \frac{4(k+1)}{3}}\right\}$$
$$=3-\frac{1}{3^k}\left\{\frac{3(2k+3)}{3}-\frac{4(k+1)}{3}\right\}$$
$$=3-\frac{1}{3^k}\times\frac{2k+5}{3}$$
$$=3-\frac{\boxed{(나)\ 2(k+1)+3}}{3^{k+1}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

따라서 $f(k)=\frac{4(k+1)}{3}$, $g(k)=2(k+1)+3$이므로

$f(3)\times g(2)=\frac{16}{3}\times9=48$ 답 ⑤

10

(i) $n=1$일 때

$4-1=3$이므로 3의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때

4^k-1이 3의 배수라고 가정하면

$4^k-1=3m$ (m은 자연수) $\cdots\cdots$ ㉠

으로 놓을 수 있다.

㉠의 양변에 4를 곱하면

$4(4^k-1)=12m$, $4^{k+1}-4=12m$

양변에 3을 더하면

$4^{k+1}-1=12m+3=3(4m+1)$

따라서 $n=k+1$일 때도 4^n-1은 3의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 4^n-1은 3의 배수이다. 답 풀이 참조

11

$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=2^{1-1}=1$, (우변)$=2^1-1=1$이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$

이 성립한다.

이 식의 양변에 $\boxed{(가)\ 2^k}$을 더하면

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+\boxed{(가)\ 2^k}=2^k-1+\boxed{(가)\ 2^k}$$
$$=2\times2^k-1$$
$$=\boxed{(나)\ 2^{k+1}}-1$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

답 (가) 2^k (나) 2^{k+1}

12

$f(n+1)=f(n)+2n-8$의 n에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\cancel{f(2)}=f(1)+2\times1-8$$
$$\cancel{f(3)}=\cancel{f(2)}+2\times2-8$$
$$\cancel{f(4)}=\cancel{f(3)}+2\times3-8$$
$$\vdots$$
$$+)\ f(n)=\cancel{f(n-1)}+2(n-1)-8$$

$$f(n)=f(1)+2\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}-8(n-1)$$
$$=-44+2\sum_{k=1}^{n-1}k-8(n-1)$$
$$=-44+2\times\frac{(n-1)n}{2}-8(n-1)$$
$$=n^2-9n-36$$

이때 $f(n)<0$에서 $n^2-9n-36<0$이므로

$(n+3)(n-12)<0 \quad \therefore -3<n<12$

그런데 n은 자연수이므로 $1\le n<12$

따라서 자연수 n의 최댓값은 11이다.

답 11

13

$a_2=x$라 하면 (가)에 의하여

$a_3=a_1+4=1+4=5$

$a_4=a_2+4=x+4$

$a_5=a_3+4=5+4=9$

$a_6=a_4+4=(x+4)+4=x+8$

(나)에 의하여

$a_1=a_7=a_{13}=a_{19}=a_{25}$

$a_2=a_8=a_{14}=a_{20}=a_{26}$

$a_3=a_9=a_{15}=a_{21}=a_{27}$

$a_4=a_{10}=a_{16}=a_{22}=a_{28}$

$a_5=a_{11}=a_{17}=a_{23}=a_{29}$

$a_6=a_{12}=a_{18}=a_{24}=a_{30}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{30} a_k=5(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)$$
$$=5\{1+x+5+(x+4)+9+(x+8)\}$$
$$=5(3x+27)$$

이때 $\sum_{k=1}^{30} a_k=45$이므로 $5(3x+27)=45$

$3x+27=9 \qquad \therefore x=-6$

$\therefore a_2=-6$

답 -6

14

$a_{n+1}+a_n=2n^2$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2+a_1=2\times 1^2=2 \qquad \therefore a_2=2-a_1$

$a_3+a_2=2\times 2^2=8 \qquad \therefore a_3=8-a_2=6+a_1$

$a_4+a_3=2\times 3^2=18 \qquad \therefore a_4=18-a_3=12-a_1$

$a_5+a_4=2\times 4^2=32 \qquad \therefore a_5=32-a_4=20+a_1$

이때 $a_3+a_5=26$이므로

$(6+a_1)+(20+a_1)=26$, $2a_1+26=26$

$2a_1=0 \qquad \therefore a_1=0$

$\therefore a_2=2-a_1=2$

답 ②

15

Step by Step

주어진 조건을 이용하여 $a_1, a_2, a_3, \cdots$을 구한다.

↓

수열 $\{a_n\}$의 규칙을 찾는다.

↓

a_{10}의 값을 구한다.

$a_1=4$, $a_{n+1}=\begin{cases} a_n-3 & (a_n\ge 6) \\ (a_n-1)^2 & (a_n<6) \end{cases}$에서

$a_1<6$이므로 $a_2=(a_1-1)^2=(4-1)^2=9$

$a_2\ge 6$이므로 $a_3=a_2-3=9-3=6$

$a_3\ge 6$이므로 $a_4=a_3-3=6-3=3$

$a_4<6$이므로 $a_5=(a_4-1)^2=(3-1)^2=4=a_1$

$a_5<6$이므로 $a_6=(a_5-1)^2=(4-1)^2=9=a_2$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+4}=a_n$을 만족시키므로

$a_{10}=a_6=a_2=9$

답 ⑤

16

이차방정식 $a_nx^2-2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4}={a_{n+1}}^2-a_na_{n+2}=0$$

$\therefore {a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$ ……㉠

즉 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이차방정식 $a_nx^2-2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$에서 근의 공식에 의하여

$$\alpha_n=\frac{a_{n+1}\pm\sqrt{{a_{n+1}}^2-a_na_{n+2}}}{a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\ (\because ㉠)$$
$$=\frac{a_2}{a_1}=\frac{10}{2}=5$$

$\therefore \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{10}=10\times 5=50$

답 50

다른 풀이

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=5$인 등비수열이므로 $a_n\neq 0$, $a_{n+1}=5a_n$, $a_{n+2}=5^2a_n=25a_n$

$a_nx^2-2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$에서

$a_nx^2-10a_nx+25a_n=0$

$a_n(x-5)^2=0 \qquad \therefore x=5$

즉 이차방정식 $a_nx^2-2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$의 중근이 5이므로 $\alpha_n=5$

$\therefore \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{10}=10\times 5=50$

17

$\overline{OQ_n}=a_n$이라 하면 $\overline{OQ_{n+1}}=\overline{OQ_n}+4$에서

$a_{n+1}=a_n+4$

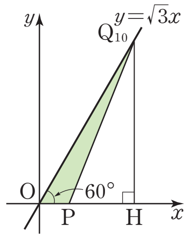
즉 수열 $\{a_n\}$은 공차가 4인 등차수열이다.

이때 $a_1=\overline{OQ_1}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$이므로

$a_n=2+(n-1)\times 4=4n-2$

$\therefore a_{10}=\overline{OQ_{10}}=4\times 10-2=38$

오른쪽 그림과 같이 점 Q_{10}에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 $y=\sqrt{3}x$의 기울기가 $\sqrt{3}$이므로



$\tan(\angle Q_{10}OH)=\sqrt{3}$

$\therefore \angle Q_{10}OH=60°$

$\therefore \overline{\mathrm{HQ}_{10}}=a_{10}\sin 60°=38\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=19\sqrt{3}$

따라서 삼각형 OPQ_{10}의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{HQ}_{10}}=\dfrac{1}{2}\times2\times19\sqrt{3}=19\sqrt{3}$

답 $19\sqrt{3}$

18

$2^n>3n-2$ ……㉠

(ⅰ) $n=3$일 때

(좌변)$=2^3=8$, (우변)$=3\times3-2=7$이므로 ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=k\ (k\ge3)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$2^k>3k-2$

가 성립한다.

이 식의 양변에 2를 곱하면

$2\times2^k>2(3k-2)$, $2^{k+1}>6k-4$

이때

$(6k-4)-\{3(k+1)-2\}=3k-5>0$ ($\because k\ge3$)

이므로 $6k-4>3(k+1)-2$

$\therefore 2^{k+1}>3(k+1)-2$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $n\ge3$인 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

답 풀이 참조

Level Up 연습문제

p.340

1

$a_{n+1}=3a_n+2b_n$ ……㉠

$b_{n+1}=2a_n+3b_n$ ……㉡

㉠+㉡을 하면 $a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$

즉 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 $a_1+b_1=5$, 공비가 5인 등비수열이므로

$a_n+b_n=5\times5^{n-1}=5^n$ ……㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=3a_n+2b_n\\&=a_n+2(a_n+b_n)\\&=a_n+2\times5^n\end{aligned}$$

$a_{n+1}=a_n+2\times5^n$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}\cancel{a_2}&=a_1+2\times5\\\cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+2\times5^2\\\cancel{a_4}&=\cancel{a_3}+2\times5^3\\&\ \vdots\\+)\ a_{10}&=\cancel{a_9}+2\times5^9\\\hline a_{10}&=a_1+2(5+5^2+5^3+\cdots+5^9)\\&=3+2\times\frac{5(5^9-1)}{5-1}\\&=3+\frac{5^{10}-5}{2}\\&=\frac{5^{10}+1}{2}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{5^{10}+1}{2}$

2

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$이라 하면 $S_n=n^2a_n$ ……㉠

㉠의 n에 $n+1$을 대입하면

$S_{n+1}=(n+1)^2a_{n+1}$ ……㉡

㉡−㉠을 하면

$S_{n+1}-S_n=(n+1)^2a_{n+1}-n^2a_n$

이때 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$a_{n+1}=(n+1)^2a_{n+1}-n^2a_n$

$a_{n+1}=(n^2+2n+1)a_{n+1}-n^2a_n$

$(n^2+2n)a_{n+1}=n^2a_n$

$n(n+2)a_{n+1}=n^2a_n$

$\therefore a_{n+1}=\dfrac{n}{n+2}a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

$a_{n+1}=\dfrac{n}{n+2}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-2$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}\cancel{a_2}&=\frac{1}{3}a_1\\\cancel{a_3}&=\frac{2}{4}\cancel{a_2}\\\cancel{a_4}&=\frac{3}{5}\cancel{a_3}\\&\ \vdots\\\cancel{a_{n-1}}&=\frac{n-2}{n}\cancel{a_{n-2}}\\\times)\ a_n&=\frac{n-1}{n+1}\cancel{a_{n-1}}\\\hline a_n&=\frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{2}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n-2}}{n}\times\frac{\cancel{n-1}}{n+1}\times a_1\\&=\frac{2}{n(n+1)}\times1=\frac{2}{n(n+1)}\end{aligned}$$

이때 $\dfrac{1}{a_k}=55$에서 $\dfrac{k(k+1)}{2}=55$

$k(k+1)=110=10\times11$

$\therefore k=10$

답 10

3

$$\sum_{i=1}^{2n-1}\{i+(n-1)^2\}=(n-1)^3+n^3 \quad \cdots\cdots (*)$$

(i) $n=1$일 때

$1+0^2=0^3+1^3$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\sum_{i=1}^{2k-1}\{i+(k-1)^2\}=(k-1)^3+k^3$이 성립한다.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2k+1}(i+k^2)\\
&=\sum_{i=1}^{2k-1}(i+k^2)+\sum_{i=2k}^{2k+1}(i+k^2)\\
&=\sum_{i=1}^{2k-1}(i+k^2)+(2k+k^2)+(2k+1+k^2)\\
&=\sum_{i=1}^{2k-1}(i+k^2)+(2k^2+4k+1)\\
&=\sum_{i=1}^{2k-1}\{i+(k-1)^2+(2k-1)\}+(2k^2+4k+1)\\
&=\sum_{i=1}^{2k-1}\{i+(k-1)^2\}+\sum_{i=1}^{2k-1}(2k-1)\\
&\qquad+\boxed{(가)\ 2k^2+4k+1}\\
&=(k-1)^3+k^3+(2k-1)^2+2k^2+4k+1\\
&=k^3-3k^2+3k-1+k^3+4k^2-4k+1\\
&\qquad+2k^2+4k+1\\
&=k^3+k^3+3k^2+3k+1\\
&=\boxed{(나)\ k^3+(k+1)^3}
\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

따라서 $f(k)=2k^2+4k+1$, $g(k)=k^3+(k+1)^3$이므로

$$\frac{g(4)}{f(4)}=\frac{4^3+5^3}{2\times4^2+4\times4+1}=\frac{189}{49}=\frac{27}{7}$$

답 ⑤