정답과 해설

Ⅰ 다항식

Ⅱ 방정식과 부등식

Ⅲ 경우의 수

Ⅳ 행렬

01 다항식의 연산

I 다항식

개념 완성하기

p. 7~8

01 답 $2x^2+(5y+1)x-3y^2-2y+1$

02 답 $-3y^2-2y+1+(5y+1)x+2x^2$

03 답 $4x^2+xy-2y^2$

$(3x^2-xy+y^2)+(x^2+2xy-3y^2)$
$=3x^2-xy+y^2+x^2+2xy-3y^2$
$=4x^2+xy-2y^2$

04 답 $x^2+3xy+4y^2$

$(3x^2+2xy-y^2)-(2x^2-xy-5y^2)$
$=3x^2+2xy-y^2-2x^2+xy+5y^2$
$=x^2+3xy+4y^2$

05 답 $4xy-2y^2$

$(x^2+2xy-y^2)-(x^2+2xy)+(4xy-y^2)$
$=x^2+2xy-y^2-x^2-2xy+4xy-y^2$
$=4xy-2y^2$

06 답 x^3-x^2+8x+1

$A-2B$
$=(5x^3-x^2+2x+3)-2(2x^3-3x+1)$
$=5x^3-x^2+2x+3-4x^3+6x-2$
$=x^3-x^2+8x+1$

07 답 $-3x^3+x^2-5x-2$

$A-(2A-B)$
$=A-2A+B$
$=-A+B$
$=-(5x^3-x^2+2x+3)+(2x^3-3x+1)$
$=-5x^3+x^2-2x-3+2x^3-3x+1$
$=-3x^3+x^2-5x-2$

08 답 $4x^3-4x^2-4x+1$

$2A-B+C$
$=2(x^3-4x+1)-(x^3+2x^2-3x+1)+(3x^3-2x^2+x)$
$=2x^3-8x+2-x^3-2x^2+3x-1+3x^3-2x^2+x$
$=4x^3-4x^2-4x+1$

09 답 $-6x^3+10x^2-13x+3$

$A+2B-3C$
$=(x^3-4x+1)+2(x^3+2x^2-3x+1)-3(3x^3-2x^2+x)$
$=x^3-4x+1+2x^3+4x^2-6x+2-9x^3+6x^2-3x$
$=-6x^3+10x^2-13x+3$

10 답 $-4x^3+10x^2-7x+2$

$A+3B-2(A+C)$
$=A+3B-2A-2C$
$=-A+3B-2C$
$=-(x^3-4x+1)+3(x^3+2x^2-3x+1)-2(3x^3-2x^2+x)$
$=-x^3+4x-1+3x^3+6x^2-9x+3-6x^3+4x^2-2x$
$=-4x^3+10x^2-7x+2$

11 답 $-2x^5+6x^4-2x^2$

12 답 $6x^2+x-15$

$(2x-3)(3x+5)=6x^2+10x-9x-15=6x^2+x-15$

13 답 $x^3-2x^2y+y^3$

$(x-y)(x^2-xy-y^2)=x^3-x^2y-xy^2-x^2y+xy^2+y^3$
$=x^3-2x^2y+y^3$

14 답 $4a^2+4ab+b^2$

$(2a+b)^2=(2a)^2+2\times2a\times b+b^2=4a^2+4ab+b^2$

15 답 $9a^2-24ab+16b^2$

$(3a-4b)^2=(3a)^2-2\times3a\times4b+(4b)^2=9a^2-24ab+16b^2$

16 답 $4x^2-25$

$(2x+5)(2x-5)=(2x)^2-5^2=4x^2-25$

17 답 $x^2+7x+12$

$(x+3)(x+4)=x^2+(3+4)x+3\times4=x^2+7x+12$

18 답 $12x^2+x-6$

$(3x-2)(4x+3)=(3\times4)x^2+(9-8)x+(-2)\times3$
$=12x^2+x-6$

19 답 $x^3+6x^2+12x+8$

$(x+2)^3=x^3+3\times x^2\times2+3\times x\times2^2+2^3$
$=x^3+6x^2+12x+8$

20 답 $x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$

$(x-3y)^3=x^3-3\times x^2\times3y+3\times x\times(3y)^2-(3y)^3$
$=x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$

21 답 x^3+27

$(x+3)(x^2-3x+9)=x^3+3^3=x^3+27$

22 답 $8x^3-y^3$

$(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)=(2x)^3-y^3=8x^3-y^3$

23 답 $a^2+b^2+4c^2-2ab+4bc-4ca$

$(a-b-2c)^2$
$=a^2+(-b)^2+(-2c)^2+2\times a\times(-b)$
$+2\times(-b)\times(-2c)+2\times(-2c)\times a$
$=a^2+b^2+4c^2-2ab+4bc-4ca$

24 답 $a^3+b^3+1-3ab$

$(a+b+1)(a^2+b^2+1-ab-a-b)$
$=(a+b+1)(a^2+b^2+1^2-ab-b\times1-1\times a)$
$=a^3+b^3+1^3-3\times a\times b\times 1$
$=a^3+b^3+1-3ab$

25 답 13

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\times(-2)=13$

26 답 45

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$\quad=3^3-3\times(-2)\times3=45$

27 답 10

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=2^2+2\times3=10$

28 답 26

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$\quad=2^3+3\times3\times2=26$

29 답 34

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=6^2-2=34$

30 답 $\pm4\sqrt{2}$

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4=6^2-4=32$이므로

$x-\dfrac{1}{x}=\pm\sqrt{32}=\pm4\sqrt{2}$

31 답 11

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=3^2+2=11$

32 답 $\pm\sqrt{13}$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+4=3^2+4=13$이므로

$x+\dfrac{1}{x}=\pm\sqrt{13}$

33 답 20

$x+y=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=2$
$xy=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-2$
$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$\quad=2^3-3\times(-2)\times2$
$\quad=20$

34 답 $12\sqrt{3}$

$x-y=(1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$
$xy=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-2$
$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$\quad=(2\sqrt{3})^3+3\times(-2)\times2\sqrt{3}$
$\quad=12\sqrt{3}$

35 답 6

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$\quad=2^2-2\times(-1)=6$

36 답 몫: x^2-x-2, 나머지: -5

$$\begin{array}{r|l} & x^2-\ x-2 \\ \hline x-3 & x^3-4x^2+\ x+1 \\ & x^3-3x^2 \\ \hline & \quad -\ x^2+\ x+1 \\ & \quad -\ x^2+3x \\ \hline & \qquad -2x+1 \\ & \qquad -2x+6 \\ \hline & \qquad\qquad -5 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2-x-2, 나머지: -5

37 답 몫: x^2+3x-5, 나머지: 8

$$\begin{array}{r|l} & x^2+3x-5 \\ \hline x+1 & x^3+4x^2-2x+3 \\ & x^3+\ x^2 \\ \hline & \quad 3x^2-2x+3 \\ & \quad 3x^2+3x \\ \hline & \qquad -5x+3 \\ & \qquad -5x-5 \\ \hline & \qquad\qquad 8 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2+3x-5, 나머지: 8

38 답 몫: $2x+3$, 나머지: $-2x-4$

$$\begin{array}{r|l} & 2x+3 \\ \hline x^2+1 & 2x^3+3x^2\qquad -1 \\ & 2x^3\qquad +2x \\ \hline & \quad 3x^2-2x-1 \\ & \quad 3x^2\qquad +3 \\ \hline & \qquad -2x-4 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $2x+3$, 나머지: $-2x-4$

39 답 $4x^3-4x^2-x+6=(2x-1)(2x^2-x-1)+5$

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2-\ x-1 \\ \hline 2x-1 & 4x^3-4x^2-\ x+6 \\ & 4x^3-2x^2 \\ \hline & \quad -2x^2-\ x+6 \\ & \quad -2x^2+\ x \\ \hline & \qquad -2x+6 \\ & \qquad -2x+1 \\ \hline & \qquad\qquad 5 \end{array}$$

$\therefore\ 4x^3-4x^2-x+6=(2x-1)(2x^2-x-1)+5$

40 답 (가) 1 (나) 5 (다) 0 (라) 0 (마) 2 (바) x^2+6x (사) 2

41 답 몫: x^2-2x-6, 나머지: -25

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ & & 3 & -6 & -18 \\ \hline & 1 & -2 & -6 & \boxed{-25} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2-2x-6, 나머지: -25

42 답 몫: $x^3-3x^2+6x-10$, 나머지: 12

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ & & -1 & 3 & -6 & 10 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & -10 & \boxed{12} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $x^3-3x^2+6x-10$, 나머지: 12

43 답 몫: x^2+3x, 나머지: 0

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 5 & -3 & 0 \\ & & 1 & 3 & 0 \\ \hline & 2 & 6 & 0 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore 2x^3+5x^2-3x=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+6x)$
$=(2x-1)(x^2+3x)$

따라서 몫은 x^2+3x, 나머지는 0이다.

유형 완성하기 p. 9~21

01 답 $-x^3-6x+27$

$2(A+B)-C$
$=2\{(x^2-x+2)+(-x^3-2x^2+12)\}-(-x^3-2x^2+4x+1)$
$=2(-x^3-x^2-x+14)+x^3+2x^2-4x-1$
$=-2x^3-2x^2-2x+28+x^3+2x^2-4x-1$
$=-x^3-6x+27$

01-1 답 $-16x^3-27x^2+3x-8$

$2A-3\{A+2(B-C)+C\}$
$=2A-3(A+2B-C)$
$=-A-6B+3C$
$=-(x^3+3x^2+5)-6(2x^3+4x^2-2x+1)+3(-x^3-3x+1)$
$=-x^3-3x^2-5-12x^3-24x^2+12x-6-3x^3-9x+3$
$=-16x^3-27x^2+3x-8$

02 답 ②

$A+2B=3x^2-2x+1+2(x^2+3x-2)$
$=3x^2-2x+1+2x^2+6x-4$
$=5x^2+4x-3$

02-1 답 $6xy+4y^2$

$\frac{1}{2}A+2B=\frac{1}{2}(2x^2+4xy+6y^2)+2\left(-\frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2\right)$
$=x^2+2xy+3y^2-x^2+4xy+y^2$
$=6xy+4y^2$

03 답 ②

$3A+B=3(x^2+xy+3y)+(-3xy+y+y^2)$
$=3x^2+3xy+9y-3xy+y+y^2$
$=3x^2+10y+y^2$

03-1 답 $-3x^3+4x^2-7x+3$

$-3A+\frac{1}{2}B=-3(x^3-x^2+3x-2)+\frac{1}{2}(2x^2+4x-6)$
$=-3x^3+3x^2-9x+6+x^2+2x-3$
$=-3x^3+4x^2-7x+3$

04 답 ②

$A-B=(x^2-3xy+2y^2)-(-2x^2+xy+y^2)$
$=x^2-3xy+2y^2+2x^2-xy-y^2$
$=3x^2-4xy+y^2$

따라서 xy의 계수는 -4이다.

04-1 답 ④

$-A-(2A-B)=-A-2A+B$
$=-3A+B$
$=-3(x^2+x-y^2)+(2x+3y^2)$
$=-3x^2-3x+3y^2+2x+3y^2$
$=-3x^2-x+6y^2$

따라서 y^2의 계수는 6이다.

05 답 $7x^3+13x^2+2x-5$

$A-4\{B-2(A-C)\}+2C$
$=A-4(B-2A+2C)+2C$
$=A-4B+8A-8C+2C$
$=9A-4B-6C$ ……❶
$=9(x^3+x^2+3)-4(2x^3-x^2-2x+5)-6(-x^3+x+2)$
$=9x^3+9x^2+27-8x^3+4x^2+8x-20+6x^3-6x-12$
$=7x^3+13x^2+2x-5$ ……❷

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 간단히 정리할 수 있다.	30%
❷ A, B, C에 다항식을 대입하여 계산할 수 있다.	70%

05-1 답 $13x^2-11xy+4y^2$

$-A+2\{3B-2(A-C)\}$
$=-A+2(3B-2A+2C)$
$=-A+6B-4A+4C$
$=-5A+6B+4C$
$=-5(-x^2+xy+2y^2)+6(3y^2-xy)+4(2x^2-y^2)$
$=5x^2-5xy-10y^2+18y^2-6xy+8x^2-4y^2$
$=13x^2-11xy+4y^2$

06 답 ⑤

$A+B=2x^2-xy+3y^2$ ……㉠
$A-B=4x^2+5xy-y^2$ ……㉡

㉠$-$㉡을 하면

$2B=-2x^2-6xy+4y^2$ $\quad\therefore B=-x^2-3xy+2y^2$

06-1 답 $8x^2+3xy-6y^2$

$A+B=5x^2+xy-2y^2$ ……㉠
$A-2B=-x^2+4xy-8y^2$ ……㉡

㉠$-$㉡을 하면

$3B=6x^2-3xy+6y^2$ $\quad\therefore B=2x^2-xy+2y^2$

이것을 ㉠에 대입하면 $A+(2x^2-xy+2y^2)=5x^2+xy-2y^2$

$\therefore A=5x^2+xy-2y^2-(2x^2-xy+2y^2)=3x^2+2xy-4y^2$

$\therefore 2A+B=2(3x^2+2xy-4y^2)+(2x^2-xy+2y^2)$

$=6x^2+4xy-8y^2+2x^2-xy+2y^2$

$=8x^2+3xy-6y^2$

07 답 ①

$(4x^2-ax+1)(x^2+x-7)$의 전개식에서 x^3항은

$4x^2\times x+(-ax)\times x^2=4x^3-ax^3=(4-a)x^3$

이때 x^3의 계수가 6이므로

$4-a=6 \quad \therefore a=-2$

$(4x^2+2x+1)(x^2+x-7)$의 전개식에서 x항은

$2x\times(-7)+1\times x=-14x+x=-13x$

따라서 x의 계수는 -13이다.

07-1 답 2

$(x^3-ax+2)(x^2+2x+b)$의 전개식에서 x^2항은

$-ax\times 2x+2\times x^2=(-2a+2)x^2$

x^3항은

$x^3\times b-ax\times x^2=(b-a)x^3$

이때 x^2의 계수와 x^3의 계수가 모두 0이므로

$-2a+2=0,\ b-a=0$

따라서 $a=1,\ b=1$이므로 $a+b=1+1=2$

08 답 ②

$(x+y+5)(3x-y+2)$의 전개식에서 xy항은

$x\times(-y)+y\times 3x=-xy+3xy=2xy$

따라서 xy의 계수는 2이다.

08-1 답 ②

$(x-2y+3)(5x+3y-1)$의 전개식에서 xy항은

$x\times 3y+(-2y)\times 5x=3xy-10xy=-7xy$

따라서 xy의 계수는 -7이다.

09 답 ①

$(x^2-3x+1)(x^3-5x+2)$의 전개식에서 x^3항은

$x^2\times(-5x)+1\times x^3=-5x^3+x^3=-4x^3$

따라서 x^3의 계수는 -4이다.

09-1 답 10

$(2x^3-3x^2+3x+4)(3x^4+2x^3-2x^2-7x+8)$의 전개식에서

x^4항은

$2x^3\times(-7x)+(-3x^2)\times(-2x^2)+3x\times 2x^3+4\times 3x^4$ ······❶

$=-14x^4+6x^4+6x^4+12x^4=10x^4$

따라서 x^4의 계수는 10이다. ······❷

채점 기준	비율
❶ x^4항이 나오는 부분만 전개할 수 있다.	50%
❷ x^4의 계수를 구할 수 있다.	50%

10 답 ②

$(ax+3)(x^2-5x+2)$의 전개식에서 x^2항은

$ax\times(-5x)+3\times x^2=-5ax^2+3x^2=(-5a+3)x^2$

이때 x^2의 계수가 -7이므로

$-5a+3=-7 \quad \therefore a=2$

10-1 답 3

$(x^3+x^2-kx+2)(x^2-3x+1)$의 전개식에서 x^3항은

$x^3\times 1+x^2\times(-3x)+(-kx)\times x^2=(-k-2)x^3$

이때 x^3의 계수가 -5이므로

$-k-2=-5 \quad \therefore k=3$

11 답 ③

$(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+10)$의 전개식에서 x^9항은

$x^9\times 10+x^9\times 9+x^9\times 8+\cdots+x^9\times 2+x^9\times 1$

$=(1+2+\cdots+8+9+10)x^9$

$=55x^9$

따라서 x^9의 계수는 55이다.

11-1 답 ③

$(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)(x-6)(x+7)$의 전개식에서

x^5항은

$x^5\times 7+x^5\times(-6)+x^5\times 5+x^5\times(-4)+x^5\times 3+x^5\times(-2)$

$=(-2+3-4+5-6+7)x^5$

$=3x^5$

따라서 x^5의 계수는 3이다.

12 답 10

$(x^2+2x)*(x^2-4)$

$=(x^2+2x)^2-(x^2+2x)(x^2-4)$

$=(x^2+2x)(x^2+2x)-(x^2+2x)(x^2-4)$ ······㉠

㉠을 계산한 식에서 x항은

$-2x\times(-4)=8x$

또 x^3항은

$x^2\times 2x+2x\times x^2-2x\times x^2=2x^3$

따라서 x의 계수는 8, x^3의 계수는 2이므로 그 합은

$8+2=10$

12-1 답 −2

$<x^2-x+2,\ x^2-x>$

$=(x^2-x+2)^2-(x^2-x+2)(x^2-x)+(x^2-x)^2$

$=(x^2-x+2)(x^2-x+2)-(x^2-x+2)(x^2-x)$

$+(x^2-x)(x^2-x)$ ······㉠

㉠을 계산한 식에서 x항은

$-x\times 2+2\times(-x)-2\times(-x)=-2x$

따라서 x의 계수는 -2이다.

13 답 ①

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

13-1 답 ③

③ $(x-y)(x^2-xy+y^2)=x^3-x^2y+xy^2-x^2y+xy^2-y^3$

$=x^3-2x^2y+2xy^2-y^3$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

14 답 ③

$(x-2y+z)^2=x^2+4y^2+z^2-4xy-4yz+2zx$

14-1 답 $4a^2+4b^2+4c^2$

$(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$
$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
$\quad+a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$
$\quad+a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$
$\quad+a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$
$=4a^2+4b^2+4c^2$

15 답 ④

$(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$
$=\{(x-y)(x^2+xy+y^2)\}\{(x+y)(x^2-xy+y^2)\}$
$=(x^3-y^3)(x^3+y^3)$
$=x^6-y^6$

15-1 답 x^6-64

$(x+2)(x-2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$
$=\{(x+2)(x^2-2x+4)\}\{(x-2)(x^2+2x+4)\}$
$=(x^3+2^3)(x^3-2^3)$
$=x^6-2^6$
$=x^6-64$

16 답 ④

$(x+1)(x+2)(x^2+3x-2)=(x^2+3x+2)(x^2+3x-2)$
$x^2+3x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X+2)(X-2)$
$=X^2-4$
$=(x^2+3x)^2-4$ → $X=x^2+3x$ 대입
$=x^4+6x^3+9x^2-4$
따라서 $a=6$, $b=9$이므로 $a+b=6+9=15$

16-1 답 ③

$(x+1)(x-3)(2x+3)(2x-5)$
$=\{(x+1)(2x-5)\}\{(x-3)(2x+3)\}$
$=(2x^2-3x-5)(2x^2-3x-9)$
$2x^2-3x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X-5)(X-9)$
$=X^2-14X+45$
$=(2x^2-3x)^2-14(2x^2-3x)+45$ → $X=2x^2-3x$ 대입
$=4x^4-12x^3+9x^2-28x^2+42x+45$
$=4x^4-12x^3-19x^2+42x+45$
따라서 $a=-12$, $b=-19$, $c=42$이므로
$a+b+c=-12+(-19)+42=11$

17 답 $x^4+8x^3-10x^2-104x+105$

$(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)$
$=\{(x-1)(x+5)\}\{(x-3)(x+7)\}$
$=(x^2+4x-5)(x^2+4x-21)$
$x^2+4x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X-5)(X-21)$
$=X^2-26X+105$
$=(x^2+4x)^2-26(x^2+4x)+105$ → $X=x^2+4x$ 대입
$=x^4+8x^3+16x^2-26x^2-104x+105$
$=x^4+8x^3-10x^2-104x+105$

17-1 답 ①

$x(x-2)(x^2-2x-8)=(x^2-2x)(x^2-2x-8)$
$x^2-2x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=X(X-8)$
$=X^2-8X$
$=(x^2-2x)^2-8(x^2-2x)$ → $X=x^2-2x$ 대입
$=x^4-4x^3+4x^2-8x^2+16x$
$=x^4-4x^3-4x^2+16x$

18 답 $a^2-b^2-c^4+2bc^2$

$(a+b-c^2)(a-b+c^2)=\{a+(b-c^2)\}\{a-(b-c^2)\}$
$b-c^2=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(a+X)(a-X)$
$=a^2-X^2$
$=a^2-(b-c^2)^2$ → $X=b-c^2$ 대입
$=a^2-(b^2-2bc^2+c^4)$
$=a^2-b^2-c^4+2bc^2$

18-1 답 $a^2-9b^2-4c^4+12bc^2$

$(a-3b+2c^2)(a+3b-2c^2)$
$=\{a-(3b-2c^2)\}\{a+(3b-2c^2)\}$
$3b-2c^2=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(a-X)(a+X)$
$=a^2-X^2$
$=a^2-(3b-2c^2)^2$ → $X=3b-2c^2$ 대입
$=a^2-(9b^2-12bc^2+4c^4)$
$=a^2-9b^2-4c^4+12bc^2$

19 답 ④

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=2^3+3\times(-1)\times2$
$=8-6=2$

19-1 답 ②

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=(2\sqrt{3})^3-3\times1\times2\sqrt{3}$
$=24\sqrt{3}-6\sqrt{3}=18\sqrt{3}$

20 답 ③

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=4^2-4\times2=8$이므로
$a-b=2\sqrt{2}$ ($\because a>b$)
$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=(2\sqrt{2})^3+3\times2\times2\sqrt{2}$
$=16\sqrt{2}+12\sqrt{2}=28\sqrt{2}$

20-1 답 $\frac{8}{3}$

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$이므로
$6=2^3+3xy\times2 \qquad \therefore xy=-\frac{1}{3}$
$\therefore (x+y)^2=(x-y)^2+4xy$
$=2^2+4\times\left(-\frac{1}{3}\right)$
$=\frac{8}{3}$

21 답 40

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$이므로

$4^2=12+2ab,\ 4=2ab \qquad \therefore ab=2$ ……❶

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=4^3-3\times2\times4=40$ ……❷

채점 기준	비율
❶ ab의 값을 구할 수 있다.	60%
❷ a^3+b^3의 값을 구할 수 있다.	40%

21-1 답 ③

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$이므로

$5^2=13-2ab,\ 2ab=-12 \qquad \therefore ab=-6$

$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=5^3+3\times(-6)\times5$

$=35$

22 답 ②

$a^3+\dfrac{1}{a^3}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\dfrac{1}{a}\right)=3^3-3\times3=18$

22-1 답 ④

$x^3-\dfrac{8}{x^3}=\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{2}{x}\right)=2^3+3\times2=14$

23 답 -4

$\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2=a^2+\dfrac{1}{a^2}-2=3-2=1$

이때 $0<a<1$에서 $a<\dfrac{1}{a}$, 즉 $a-\dfrac{1}{a}<0$이므로 $a-\dfrac{1}{a}=-1$

$\therefore a^3-\dfrac{1}{a^3}=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^3+3\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$

$=(-1)^3+3\times(-1)$

$=-4$

23-1 답 ⑤

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=3+2=5$

이때 $x>0$이므로 $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$

$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=(\sqrt{5})^3-3\times\sqrt{5}$

$=2\sqrt{5}$

$\therefore x^3+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}=x+\dfrac{1}{x}+x^3+\dfrac{1}{x^3}$

$=\sqrt{5}+2\sqrt{5}$

$=3\sqrt{5}$

24 답 36

$x\neq0$이므로 $x^2-3x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-3-\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\dfrac{1}{x}=3$

$\therefore x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=3^3+3\times3$

$=36$

> **참고** $x=0$을 $x^2-3x-1=0$에 대입하면
> (좌변)$=-1$, (우변)$=0$이므로 $x\neq0$이다.

24-1 답 ③

$x\neq0$이므로 $x^2-4x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-4+\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\dfrac{1}{x}=4$

$\therefore x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=4^3-3\times4=52$

$\therefore x^3+2x^2+3x+4+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$

$=\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)+2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+4$

$=52+2\times14+3\times4+4$

$=96$

25 답 ⑤

$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^8-1)(2^8+1)$

$=2^{16}-1$

따라서 $a=1,\ b=16$이므로

$a+b=1+16=17$

25-1 답 34

$(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$

$=\dfrac{1}{2}(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$

$=\dfrac{1}{2}(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$

$=\dfrac{1}{2}(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$

$=\dfrac{1}{2}(3^8-1)(3^8+1)(3^{16}+1)$

$=\dfrac{1}{2}(3^{16}-1)(3^{16}+1)$

$=\dfrac{1}{2}(3^{32}-1)$

따라서 $m=2,\ n=32$이므로

$m+n=2+32=34$

26 답 ③

$9\times11\times101\times10001=(10-1)(10+1)(100+1)(10000+1)$

$=(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)$

$=(10^4-1)(10^4+1)$

$=10^8-1$

26-1 답 ③

$7\times9\times65\times4097=(8-1)(8+1)(8^2+1)(8^4+1)$

$=(8^2-1)(8^2+1)(8^4+1)$

$=(8^4-1)(8^4+1)$

$=8^8-1$

27 답 5

$101^2+98\times102=(100+1)^2+(100-2)(100+2)$

$\qquad\qquad\qquad\quad=10000+200+1+10000-4$

$\qquad\qquad\qquad\quad=20197$

따라서 $101^2+98\times102$는 다섯 자리 자연수이므로 $n=5$

27-1 답 12

$1.005^3=(1+0.005)^3$

$\qquad=1^3+3\times1^2\times0.005+3\times1\times0.005^2+0.005^3$

$\qquad=1+0.015+0.000075+\cdots$

$\qquad=1.015075\cdots$

따라서 소수점 아래 첫째, 셋째, 다섯째 자리의 숫자는 각각 0, 5, 7 이므로 그 합은 $0+5+7=12$

28 답 ②

$$
\begin{array}{rl}
 & x-6 \\ \cline{2-2}
x^2+2x-1) & x^3-4x^2-5x+2 \\
 & x^3+2x^2-x \\ \cline{2-2}
 & -6x^2-4x+2 \\
 & -6x^2-12x+6 \\ \cline{2-2}
 & 8x-4
\end{array}
$$

따라서 $Q(x)=x-6$, $R(x)=8x-4$이므로

$Q(1)\times R(1)=-5\times4=-20$

28-1 답 ②

$$
\begin{array}{rl}
 & x+3 \\ \cline{2-2}
x^3-x^2+2) & x^4+2x^3-5x^2-4x+11 \\
 & x^4-x^3+2x \\ \cline{2-2}
 & 3x^3-5x^2-6x+11 \\
 & 3x^3-3x^2+6 \\ \cline{2-2}
 & -2x^2-6x+5
\end{array}
$$

따라서 $Q(x)=x+3$, $R(x)=-2x^2-6x+5$이므로

$Q(-1)+R(1)=2+(-3)=-1$

29 답 12

$ax\times x^2=2x^3$이므로 $a=2$

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2+2 \\ \cline{2-2}
2x+1) & 2x^3+x^2+4x+4 \\
 & 2x^3+x^2 \\ \cline{2-2}
 & 4x+4 \\
 & 4x+2 \\ \cline{2-2}
 & 2
\end{array}
$$

따라서 $b=2$, $c=2$, $d=4$, $e=2$이므로

$a+b+c+d+e=2+2+2+4+2=12$

29-1 답 ⑤

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x-1 \\ \cline{2-2}
x^2-3x+2) & 2x^3-7x^2-4 \\
 & 2x^3-6x^2+4x \\ \cline{2-2}
 & -x^2-4x-4 \\
 & -x^2+3x-2 \\ \cline{2-2}
 & -7x-2
\end{array}
$$

따라서 몫이 $2x-1$, 나머지가 $-7x-2$이므로

$a=2$, $b=-1$, $c=-7$, $d=-2$

$\therefore ad+bc=2\times(-2)+(-1)\times(-7)=3$

30 답 $x^2-18x+17$

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2+4x-12 \\ \cline{2-2}
x^2+x-3) & x^4+5x^3-11x^2-2x+7 \\
 & x^4+x^3-3x^2 \\ \cline{2-2}
 & 4x^3-8x^2-2x+7 \\
 & 4x^3+4x^2-12x \\ \cline{2-2}
 & -12x^2+10x+7 \\
 & -12x^2-12x+36 \\ \cline{2-2}
 & 22x-29
\end{array}
$$

따라서 $Q(x)=x^2+4x-12$, $R(x)=22x-29$이므로

$Q(x)-R(x)=(x^2+4x-12)-(22x-29)$

$\qquad\qquad\quad=x^2-18x+17$

30-1 답 4

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2+2x-2 \\ \cline{2-2}
x^2+x-1) & x^4+3x^3-x^2+x+4 \\
 & x^4+x^3-x^2 \\ \cline{2-2}
 & 2x^3+x+4 \\
 & 2x^3+2x^2-2x \\ \cline{2-2}
 & -2x^2+3x+4 \\
 & -2x^2-2x+2 \\ \cline{2-2}
 & 5x+2
\end{array}
$$

따라서 몫이 x^2+2x-2, 나머지가 $5x+2$이므로

$a=2$, $b=2$ $\qquad\therefore ab=2\times2=4$

31 답 ④

$x^4+x^3+2x^2+x+2=A(x^2-1)+2x+5$이므로

$A(x^2-1)=x^4+x^3+2x^2+x+2-(2x+5)$

$\qquad\qquad\;=x^4+x^3+2x^2-x-3$

$\therefore A=(x^4+x^3+2x^2-x-3)\div(x^2-1)$

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2+x+3 \\ \cline{2-2}
x^2-1) & x^4+x^3+2x^2-x-3 \\
 & x^4-x^2 \\ \cline{2-2}
 & x^3+3x^2-x-3 \\
 & x^3-x \\ \cline{2-2}
 & 3x^2-3 \\
 & 3x^2-3 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore A=x^2+x+3$

31-1 답 ③

$3x^4-3x^3+7x^2-6x+3=A(3x^2+4)-2x-1$이므로

$A(3x^2+4)=3x^4-3x^3+7x^2-6x+3-(-2x-1)$

$\qquad\qquad\quad=3x^4-3x^3+7x^2-4x+4$

$\therefore A=(3x^4-3x^3+7x^2-4x+4)\div(3x^2+4)$

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2}
3x^2+4) & 3x^4-3x^3+7x^2-4x+4 \\
 & 3x^4+4x^2 \\ \cline{2-2}
 & -3x^3+3x^2-4x+4 \\
 & -3x^3-4x \\ \cline{2-2}
 & 3x^2+4 \\
 & 3x^2+4 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore A=x^2-x+1$

32 답 ③

$$\begin{aligned} x^3+ax^2+bx+c &= (x^2-3)(x+7)+4x-2 \\ &= x^3+7x^2-3x-21+4x-2 \\ &= x^3+7x^2+x-23 \end{aligned}$$

따라서 $a=7$, $b=1$, $c=-23$이므로

$a+b-c=7+1-(-23)=31$

32-1 답 ④

$$\begin{aligned} ax^3+bx^2-2x+3 &= (x+1)(x-1)(x+c)-x+7 \\ &= x^3+cx^2-x-c-x+7 \\ &= x^3+cx^2-2x-c+7 \end{aligned}$$

$\therefore a=1,\ b=c,\ 3=-c+7$

$3=-c+7$에서 $c=4$ $\quad\therefore b=c=4$

$\therefore a-b+c=1-4+4=1$

33 답 8

$$\begin{array}{r|rrrr} & ax & +(b-a) & & \\ \hline x^2+x-1 & ax^3+ & bx^2 & + & 2 \\ & ax^3+ & ax^2- & ax & \\ \hline & & (b-a)x^2+ & ax+ & 2 \\ & & (b-a)x^2+ & (b-a)x- & (b-a) \\ \hline & & & (2a-b)x & -a+b+2 \end{array}$$

······❶

이때 나머지가 0이어야 하므로

$2a-b=0$, $-a+b+2=0$

위의 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-4$ ······❷

$\therefore ab=-2\times(-4)=8$ ······❸

채점 기준	비율
❶ 삼차다항식 ax^3+bx^2+2를 x^2+x-1로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

33-1 답 ④

$$\begin{array}{r|rrrr} & ax & +(-2a-1) & & \\ \hline x^2+2x-1 & ax^3- & x^2- & 12x- & b \\ & ax^3+ & 2ax^2- & ax & \\ \hline & & (-2a-1)x^2+ & (a-12)x- & b \\ & & (-2a-1)x^2+ & (-4a-2)x+ & (2a+1) \\ \hline & & & (5a-10)x & -2a-b-1 \end{array}$$

이때 나머지가 0이어야 하므로

$5a-10=0$, $-2a-b-1=0$

위의 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-5$

$\therefore a-b=2-(-5)=7$

34 답 ①

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R \\ &= \frac{1}{3}(3x-2)Q(x)+R \\ &= (3x-2)\left\{\frac{1}{3}Q(x)\right\}+R \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{3}Q(x)$, 나머지는 R이다.

34-1 답 ①

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x-\frac{3}{5}\right)Q(x)+R \\ &= \frac{1}{5}(5x-3)Q(x)+R \\ &= (5x-3)\left\{\frac{1}{5}Q(x)\right\}+R \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$를 $5x-3$으로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{5}Q(x)$, 나머지는 R이다.

35 답 몫: $2Q(x)$, 나머지: R

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-1)Q(x)+R \\ &= 2\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\{2Q(x)\}+R \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2Q(x)$, 나머지는 R이다.

35-1 답 몫: $7Q(x)$, 나머지: R

$$\begin{aligned} f(x) &= (7x-2)Q(x)+R \\ &= 7\left(x-\frac{2}{7}\right)Q(x)+R \\ &= \left(x-\frac{2}{7}\right)\{7Q(x)\}+R \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$를 $x-\frac{2}{7}$로 나누었을 때의 몫은 $7Q(x)$, 나머지는 R이다.

36 답 ②

$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+2$

이 식의 양변에 x를 곱하면

$$\begin{aligned} xf(x) &= x\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+2x \\ &= \frac{1}{2}x(2x+1)Q(x)+(2x+1)-1 \\ &= (2x+1)\left\{\frac{1}{2}xQ(x)+1\right\}-1 \end{aligned}$$

따라서 $xf(x)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{2}xQ(x)+1$, 나머지는 -1이다.

36-1 답 ⑤

$f(x)=(x+a)Q(x)+R$

이 식의 양변에 $(x-a)$를 곱하면

$$\begin{aligned} (x-a)f(x) &= (x-a)(x+a)Q(x)+(x-a)R \\ &= (x-a)(x+a)Q(x)+(x+a)R-2aR \\ &= (x+a)\{(x-a)Q(x)+R\}-2aR \end{aligned}$$

따라서 $(x-a)f(x)$를 $x+a$로 나누었을 때의

몫은 $(x-a)Q(x)+R$, 나머지는 $-2aR$이다.

37 답 ②

다항식 x^3+ax^2+2x+b를 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & a & 2 & b \\ & & -2 & -2a+4 & 4a-12 \\ \hline & 1 & a-2 & -2a+6 & \boxed{4a+b-12} \end{array}$$

이때 $k=-2$, $c=-2$, $a-2=2$, $d=-2a+4$,
$4a+b-12=-10$이므로
$k=-2$, $a=4$, $b=-14$, $c=-2$, $d=-4$
따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

37-1 답 ⑤

다항식 $2x^3-x^2-3x+5$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & -1 & -3 & 5 \\ & & -4 & 10 & -14 \\ \hline & 2 & -5 & 7 & \boxed{-9} \end{array}$$

따라서 $a=-2$, $b=-4$, $c=10$, $d=7$, $e=-9$이므로
$a+b+c+d+e=-2+(-4)+10+7+(-9)=2$

38 답 ①

다항식 $3x^2+4x-2$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & 3 & 4 & -2 \\ & & -3 & -1 \\ \hline & 3 & 1 & \boxed{-3} \end{array}$$

따라서 $3x^2+4x-2$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 $3x+1$, 나머지는 -3이므로 몫과 나머지의 합은
$3x+1+(-3)=3x-2$

38-1 답 ②

다항식 $2x^3+5x^2-8x-10$을 $2x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 2 & 5 & -8 & -10 \\ & & -1 & -2 & 5 \\ \hline & 2 & 4 & -10 & \boxed{-5} \end{array}$$

$\therefore 2x^3+5x^2-8x-10=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2+4x-10)-5$
$=(2x+1)(x^2+2x-5)-5$
따라서 $Q(x)=x^2+2x-5$, $R=-5$이므로
$Q(3)+R=(9+6-5)+(-5)=5$

39 답 몫: x^2-1, 나머지: 2

주어진 조립제법을 완성하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & -1 & -2 & 3 \\ & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 2 & 0 & -2 & \boxed{2} \end{array}$$

즉 $2x^3-x^2-2x+3$을 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2-2$, 나머지는 2이므로

$2x^3-x^2-2x+3=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-2)+2$
$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\{2(x^2-1)\}+2$
$=(2x-1)(x^2-1)+2$
따라서 $2x^3-x^2-2x+3$을 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 x^2-1, 나머지는 2이다.

39-1 답 몫: $\frac{p}{3}x+\frac{q}{3}$, 나머지: r

주어진 조립제법에서 $f(x)$를 $x+\frac{2}{3}$로 나누었을 때의 몫은 $px+q$, 나머지는 r이므로
$f(x)=\left(x+\frac{2}{3}\right)(px+q)+r$
$=\frac{1}{3}(3x+2)(px+q)+r$
$=(3x+2)\left(\frac{p}{3}x+\frac{q}{3}\right)+r$
따라서 $f(x)$를 $3x+2$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{p}{3}x+\frac{q}{3}$, 나머지는 r이다.

유형+ 완성하기 p.22

40 답 ④

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$이므로
$14=6^2-2(ab+bc+ca)$, $2(ab+bc+ca)=22$
$\therefore ab+bc+ca=11$

41 답 1

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$이므로
$20=5^2-2(ab+bc+ca)\qquad \therefore ab+bc+ca=\frac{5}{2}$
이때 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{5}{2}$이므로
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{\frac{5}{2}}{abc}=\frac{5}{2}$
$\therefore abc=1$

42 답 19

$a-b=2+\sqrt{5}$, $b-c=-2\sqrt{5}$를 변끼리 더하면
$a-c=2-\sqrt{5}\qquad \therefore c-a=-2+\sqrt{5}$
$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
$=\frac{1}{2}\{(2+\sqrt{5})^2+(-2\sqrt{5})^2+(-2+\sqrt{5})^2\}$
$=\frac{1}{2}(4+4\sqrt{5}+5+20+4-4\sqrt{5}+5)$
$=\frac{1}{2}\times 38$
$=19$

43 답 24

직육면체의 밑면의 가로의 길이, 밑면의 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 직육면체의 겉넓이가 11이므로

$2(ab+bc+ca)=11 \qquad \therefore ab+bc+ca=\frac{11}{2}$

또 △BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합이 50이므로

$(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)=50$

$2(a^2+b^2+c^2)=50 \qquad \therefore a^2+b^2+c^2=25$

$\therefore (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$=25+2\times\frac{11}{2}$

$=36$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 $a+b+c=6$

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$4(a+b+c)=4\times 6=24$

44 답 60

직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면

직사각형의 대각선의 길이가 13이므로

$a^2+b^2=13^2=169$

또 직사각형의 둘레의 길이가 34이므로

$2(a+b)=34 \qquad \therefore a+b=17$

이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로

$169=17^2-2ab \qquad \therefore ab=60$

따라서 직사각형의 넓이는 60이다.

45 답 ③

(나)에서 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$이므로

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

즉 $a=b=c$이므로 △ABC는 정삼각형이다.

(가)에서 $a+b+c=3a=12 \qquad \therefore a=4$

따라서 △ABC는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로

$\triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2=4\sqrt{3}$

학교 시험 대비 문제

p. 23~26

01 답 ⑤

$A+3B=(-x^2+4xy-3y^2)+3(x^2+2y^2)$

$=-x^2+4xy-3y^2+3x^2+6y^2$

$=2x^2+4xy+3y^2$

따라서 $a=2$, $b=4$, $c=3$이므로

$a+b+c=2+4+3=9$

02 답 ①

$2A+B=2x^2-xy$ ······㉠

$-A+B=-x^2+5xy-6y^2$ ······㉡

㉠+㉡×2를 하면

$3B=(2x^2-xy)+2(-x^2+5xy-6y^2)$

$=2x^2-xy-2x^2+10xy-12y^2$

$=9xy-12y^2$

$\therefore B=3xy-4y^2$

03 답 4

$(x^3+kx^2-x+2)(x^2+x+2)$의 전개식에서 x^3항은

$x^3\times 2+kx^2\times x+(-x)\times x^2=(k+1)x^3$

이때 x^3의 계수가 5이므로

$k+1=5 \qquad \therefore k=4$

04 답 ③

$(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)$의 전개식에서 x^2항은

$x^2\times(-4)\times 5+x^2\times 3\times 5+x^2\times 3\times(-4)$

$+x^2\times(-2)\times 5+x^2\times(-2)\times(-4)+x^2\times(-2)\times 3$

$=(-20+15-12-10+8-6)x^2$

$=-25x^2$

따라서 x^2의 계수는 -25이다.

다른 풀이 1

$(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)=(x^2+x-6)(x^2+x-20)$이므로 $(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)$의 전개식에서 x^2항은

$x^2\times(-20)+x\times x+(-6)\times x^2=(-20+1-6)x^2$

$=-25x^2$

따라서 x^2의 계수는 -25이다.

다른 풀이 2

$(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)=(x^2+x-6)(x^2+x-20)$

$x^2+x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X-6)(X-20)$

$=X^2-26X+120$

$=(x^2+x)^2-26(x^2+x)+120$ → $X=x^2+x$ 대입

$=x^4+2x^3+x^2-26x^2-26x+120$

$=x^4+2x^3-25x^2-26x+120$

따라서 x^2의 계수는 -25이다.

05 답 -20

$(-x^2+x+1)◉(x^2+x)$

$=3(-x^2+x+1)(x^2+x)-(x^2+x)^2$

$=3(-x^2+x+1)(x^2+x)-(x^2+x)(x^2+x)$ ······㉠

㉠을 계산한 식에서 x^4항은

$3\times(-x^2)\times x^2-x^2\times x^2=-4x^4$

또 x^2항은

$3\times x\times x+3\times 1\times x^2-x\times x=5x^2$

따라서 x^4의 계수는 -4, x^2의 계수는 5이므로 그 곱은

$-4\times 5=-20$

06 답 ③

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$이므로

$5=3^2+2xy \qquad \therefore xy=-2$

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=3^3+3\times(-2)\times 3$

$=9$

07 답 ⑤

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$이므로

$14=2^3-3ab\times 2 \qquad \therefore ab=-1$

$$\begin{aligned}\therefore a^2+b^2&=(a+b)^2-2ab\\&=2^2-2\times(-1)\\&=6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore a^4+b^4&=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2\\&=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2\\&=6^2-2\times(-1)^2\\&=34\end{aligned}$$

08 답 ⑤

$x\neq 0$이므로 $x^2-3x-5=0$의 양변을 x로 나누면

$x-3-\dfrac{5}{x}=0 \qquad \therefore x-\dfrac{5}{x}=3$

$\therefore x^2+\dfrac{25}{x^2}=\left(x-\dfrac{5}{x}\right)^2+10=3^2+10=19$

09 답 3

$x\neq 0$이므로 $x^2-x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-1+\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\dfrac{1}{x}=1$

$\therefore x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=1^2-2=-1$

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=1^3-3\times 1=-2$

$$\begin{aligned}\therefore\ & x^3-2x^2+3x+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\\&=x^3+\frac{1}{x^3}-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)\\&=-2-2\times(-1)+3\times 1\\&=3\end{aligned}$$

10 답 ④

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-x+1\\ \hline
x^2-x-1 & x^4-2x^3+x^2-x+1\\
 & x^4-x^3-x^2\\ \hline
 & -x^3+2x^2-x+1\\
 & -x^3+x^2+x\\ \hline
 & x^2-2x+1\\
 & x^2-x-1\\ \hline
 & -x+2
\end{array}$$

따라서 $Q(x)=x^2-x+1$, $R(x)=-x+2$이므로

$Q(-1)+R(1)=3+1=4$

11 답 ⑤

$$\begin{aligned}ax^3-bx^2-4&=(x-1)(x-2)(2x+c)-7x-2\\&=(x^2-3x+2)(2x+c)-7x-2\\&=2x^3+cx^2-6x^2-3cx+4x+2c-7x-2\\&=2x^3+(c-6)x^2-3(c+1)x+2c-2\end{aligned}$$

$\therefore a=2,\ -b=c-6,\ c+1=0,\ -4=2c-2$

$c+1=0$에서 $c=-1$

$-b=c-6$에서 $-b=-1-6=-7 \qquad \therefore b=7$

$\therefore a+b-c=2+7-(-1)=10$

12 답 14

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x+3\\ \hline
x^2-3x-1 & 2x^3-3x^2+ax-b\\
 & 2x^3-6x^2-2x\\ \hline
 & 3x^2+(a+2)x-b\\
 & 3x^2-9x-3\\ \hline
 & (a+11)x-b+3
\end{array}$$

이때 나머지가 0이어야 하므로

$a+11=0,\ -b+3=0$

$\therefore a=-11,\ b=3$

$\therefore b-a=3-(-11)=14$

13 답 ④

$$\begin{array}{r|l}
 & ax^2-ax+1\\ \hline
x^2+x+1 & ax^4+x^2+2x+b\\
 & ax^4+ax^3+ax^2\\ \hline
 & -ax^3+(1-a)x^2+2x+b\\
 & -ax^3-ax^2-ax\\ \hline
 & x^2+(a+2)x+b\\
 & x^2+x+1\\ \hline
 & (a+1)x+b-1
\end{array}$$

이때 나머지가 0이어야 하므로

$a+1=0,\ b-1=0$

$\therefore a=-1,\ b=1$

$\therefore b-a=1-(-1)=2$

14 답 ①

$f(x)=\left(x-\dfrac{3}{5}\right)Q(x)+R$

이 식의 양변에 x를 곱하면

$$\begin{aligned}xf(x)&=x\left(x-\frac{3}{5}\right)Q(x)+xR\\&=\frac{1}{5}x(5x-3)Q(x)+\frac{1}{5}R(5x-3)+\frac{3}{5}R\\&=(5x-3)\left\{\frac{1}{5}xQ(x)+\frac{1}{5}R\right\}+\frac{3}{5}R\end{aligned}$$

따라서 $xf(x)$를 $5x-3$으로 나누었을 때의

몫은 $\dfrac{1}{5}xQ(x)+\dfrac{1}{5}R$, 나머지는 $\dfrac{3}{5}R$이다.

15 답 ③

다항식 $3x^3-x^2+6x-5$를 $3x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$$\begin{array}{c|cccc}
\frac{1}{3} & 3 & -1 & 6 & -5\\
 & & 1 & 0 & 2\\ \hline
 & 3 & 0 & 6 & -3
\end{array}$$

$$\begin{aligned}\therefore 3x^3-x^2+6x-5&=\left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2+6)-3\\&=\left(x-\frac{1}{3}\right)\{3(x^2+2)\}-3\\&=(3x-1)(x^2+2)-3\end{aligned}$$

따라서 $Q(x)=x^2+2$, $R=-3$이므로

$Q(3)+R=11+(-3)=8$

16 답 몫: $\frac{p}{4}x+\frac{q}{4}$, 나머지: r

주어진 조립제법에서 $f(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $px+q$, 나머지는 r이므로

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\left(x+\frac{1}{2}\right)(px+q)+r\\
&=\frac{1}{4}(4x+2)(px+q)+r\\
&=(4x+2)\left(\frac{p}{4}x+\frac{q}{4}\right)+r
\end{aligned}
$$

따라서 $f(x)$를 $4x+2$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{p}{4}x+\frac{q}{4}$, 나머지는 r이다.

17 답 ②

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$이므로

$6=2^2-2(ab+bc+ca)\qquad \therefore ab+bc+ca=-1$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ & a^3+b^3+c^3\\
&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc\\
&=2\times\{6-(-1)\}+3\times 1\\
&=14+3\\
&=17
\end{aligned}
$$

18 답 21

$a-b=4$, $a-c=-1$을 변끼리 빼면

$-b+c=5\qquad \therefore b-c=-5$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ & a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\\
&=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\\
&=\frac{1}{2}\{4^2+(-5)^2+1^2\}\\
&=\frac{1}{2}\times 42\\
&=21
\end{aligned}
$$

19 답 20

직육면체의 밑면의 가로의 길이, 밑면의 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 직육면체의 대각선의 길이가 $\sqrt{11}$이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{11}\qquad \therefore a^2+b^2+c^2=11$

또 직육면체의 겉넓이가 14이므로

$2(ab+bc+ca)=14\qquad \therefore ab+bc+ca=7$

$$
\begin{aligned}
\therefore (a+b+c)^2&=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\
&=11+2\times 7=25
\end{aligned}
$$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 $a+b+c=5$

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$4(a+b+c)=4\times 5=20$

20 답 14

$\overline{\mathrm{OP}}=a$, $\overline{\mathrm{OR}}=b$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=r-a$, $\overline{\mathrm{RB}}=r-b$

□OPQR의 둘레의 길이가 20이므로

$2(a+b)=20\qquad \therefore a+b=10$

또 □OPQR의 넓이가 18이므로

$ab=18$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=10^2-2\times 18=64$

이때 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{64}=8$이므로 사분원의 반지름의 길이는 8이다.

즉 $r=8$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=8-a$, $\overline{\mathrm{RB}}=8-b$

$$
\begin{aligned}
\therefore \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{RB}}&=(8-a)+8+(8-b)\\
&=24-(a+b)\\
&=24-10=14
\end{aligned}
$$

21 답 ③

(나)에서

$$
\begin{aligned}
(c-a-b)(a-b+c)&=\{(-b+c)-a\}\{(-b+c)+a\}\\
&=(-b+c)^2-a^2\\
&=b^2+c^2-2bc-a^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a-b-c)(a+b+c)&=\{a-(b+c)\}\{a+(b+c)\}\\
&=a^2-(b+c)^2\\
&=a^2-b^2-c^2-2bc
\end{aligned}
$$

즉 $b^2+c^2-2bc-a^2=a^2-b^2-c^2-2bc$이므로

$2b^2+2c^2=2a^2\qquad \therefore a^2=b^2+c^2$ ······㉠

(가)에서

$a+b+c=12$ ······㉡

$a^2+b^2+c^2=50$ ······㉢

㉠을 ㉢에 대입하면 $a^2+a^2=50$

$a^2=25\qquad \therefore a=5\ (\because a>0)$

$a=5$를 ㉡, ㉢에 각각 대입하면

$5+b+c=12\qquad \therefore b+c=7$

$5^2+b^2+c^2=50\qquad \therefore b^2+c^2=25$

이때 $(b+c)^2=b^2+c^2+2bc$이므로

$7^2=25+2bc\qquad \therefore bc=12$

그런데 ㉠에서 △ABC는 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이므로 △ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}\times 12=6$

서술형 1 답 -4

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로

$2^2=8+2xy$, $-4=2xy\qquad \therefore xy=-2$ ······❶

$\therefore \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{8}{-2}=-4$ ······❷

채점 기준	비율
❶ xy의 값을 구할 수 있다.	70%
❷ $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$의 값을 구할 수 있다.	30%

서술형 2 답 19

$$
\begin{array}{r}
2x\ -5\qquad\qquad\qquad\qquad\\
x^2+2x-1\ \big)\ \overline{2x^3-\ x^2-\qquad ax+\quad a-b}\\
\underline{2x^3+4x^2-\qquad 2x\qquad\qquad\ }\\
-5x^2+(2-a)x+\quad a-b\\
\underline{-5x^2-\qquad 10x+\qquad\ 5}\\
(12-a)x+a-b-5
\end{array}
$$
······❶

이때 나머지가 0이어야 하므로

$12-a=0$, $a-b-5=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=12$, $b=7$ ······❷

$\therefore a+b=12+7=19$ ······❸

채점 기준	비율
❶ 다항식 $2x^3-x^2-ax+a-b$를 x^2+2x-1로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 44

직육면체의 밑면의 가로의 길이, 밑면의 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 직육면체의 겉넓이가 41이므로

$2(ab+bc+ca)=41 \qquad \therefore ab+bc+ca=\frac{41}{2}$

또 △BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합이 160이므로

$(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)=160$

$2(a^2+b^2+c^2)=160 \qquad \therefore a^2+b^2+c^2=80$ ······❶

$$\begin{aligned}\therefore (a+b+c)^2&=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\&=80+2\times\frac{41}{2}\\&=121\end{aligned}$$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로

$a+b+c=11$ ······❷

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$4(a+b+c)=4\times11=44$ ······❸

채점 기준	비율
❶ 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 밑면의 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 할 때, $ab+bc+ca$, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합을 구할 수 있다.	20%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p.27~28

01 답 3

$$\begin{aligned}(x+a)^3+x(x-4)&=(x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)+(x^2-4x)\\&=x^3+(3a+1)x^2+(3a^2-4)x+a^3\end{aligned}$$

이때 x^2의 계수가 10이므로 $3a+1=10$

$3a=9 \qquad \therefore a=3$

02 답 ②

$$\begin{aligned}(2x+y-1)^2&=4x^2+y^2+(-1)^2+4xy-2y-4x\\&=4x^2+y^2+4xy-4x-2y+1\end{aligned}$$

이므로 $4x^2+y^2+4xy-4x-2y+1=3$

$\therefore 4x^2+y^2+4xy-4x-2y=2$

03 답 ⑤

두 정사각형의 넓이의 합은

$a^2+(2b)^2=a^2+4b^2$

직사각형의 넓이는 ab이므로

$a^2+4b^2=5ab$

이때 $ab=4$이므로 $a^2+4b^2=20$

따라서 한 변의 길이가 $a+2b$인 정사각형의 넓이는

$(a+2b)^2=a^2+4b^2+4ab=20+4\times4=36$

04 답 ⑤

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$이므로

$3^2=7+2ab$, $2=2ab \qquad \therefore ab=1$

$\therefore a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2=7^2-2\times1^2=47$

05 답 ⑤

$a+b=X$로 놓으면

$(a+b-1)\{(a+b)^2+a+b+1\}=8$에서

$(X-1)(X^2+X+1)=8$

$X^3-1=8 \qquad \therefore X^3=9$

$\therefore (a+b)^3=9$ → $X=a+b$ 대입

06 답 ①

두 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 a, b라 하면

두 정육면체의 모든 모서리 길이의 합이 60이므로

$12a+12b=60 \qquad \therefore a+b=5$

두 정육면체의 겉넓이의 합이 126이므로

$6a^2+6b^2=126 \qquad \therefore a^2+b^2=21$

이때 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$이므로

$5^2=21+2ab$, $4=2ab \qquad \therefore ab=2$

따라서 두 정육면체의 부피의 합은

$$\begin{aligned}a^3+b^3&=(a+b)^3-3ab(a+b)\\&=5^3-3\times2\times5\\&=95\end{aligned}$$

다른 풀이

두 정육면체의 부피의 합은

$$\begin{aligned}a^3+b^3&=(a+b)(a^2-ab+b^2)\\&=5\times(21-2)\\&=95\end{aligned}$$

07 답 ②

$$\begin{aligned}2016\times2019\times2022&=(2019-3)\times2019\times(2019+3)\\&=2019(2019^2-3^2)\\&=2019^3-9\times2019\end{aligned}$$

$\therefore a=2019$

08 답 ②

두 자동차 A, B의 실린더의 개수를 M개라 하자.

이때 두 자동차 A, B의 보어를 각각 R_A mm, R_B mm라 하고, 스트로크를 각각 H_A mm, H_B mm라 하면

$R_A=\frac{2}{3}R_B$, $H_A=\frac{9}{8}H_B$이므로

$$W_A=\pi\left(\frac{R_A}{2}\right)^2\frac{H_AM}{1000}=\pi\left(\frac{\frac{2}{3}R_B}{2}\right)^2\frac{\frac{9}{8}H_BM}{1000}=\frac{1}{2}W_B$$

$\therefore \frac{W_A}{W_B}=\frac{1}{2}$

09 답 ③

망원경 A의 구경을 D_A mm, 집광력을 F_A,
망원경 B의 구경을 D_B mm, 집광력을 F_B라 하자.
$D_A=40$, $D_B=x$이므로
$F_A=kD_A{}^2=1600k$, $F_B=kD_B{}^2=kx^2$
이때 망원경 A의 집광력 F_A는 망원경 B의 집광력 F_B의 2배이므로 $F_A=2F_B$
즉 $1600k=2kx^2$이므로 $x^2=800$
$\therefore x=20\sqrt{2}\ (\because x>0)$

10 답 16

$P(x)+x$가 이차다항식이므로 $(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$는 이차다항식의 완전제곱식이어야 한다.

$$\begin{aligned}(x-a)(x+a)(x^2+5)+9&=(x^2-a^2)(x^2+5)+9\\&=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9\end{aligned}$$

위의 식이 완전제곱식이어야 하므로

$$-5a^2+9=\left(\frac{5-a^2}{2}\right)^2$$

$$-5a^2+9=\frac{a^4-10a^2+25}{4}$$

위의 식의 양변에 4를 곱하면
$-20a^2+36=a^4-10a^2+25$
$a^4+10a^2-11=0$, $(a^2+11)(a^2-1)=0$
이때 $a^2+11>0$이므로 양변을 a^2+11로 나누면
$a^2-1=0$ $\quad\therefore a=1\ (\because a>0)$
즉 $\{P(x)+x\}^2=x^4+4x^2+4=(x^2+2)^2$이므로
$P(x)+x=x^2+2$ 또는 $P(x)+x=-(x^2+2)$
$\therefore P(x)=x^2-x+2$ 또는 $P(x)=-x^2-x-2$
그런데 x^2의 계수가 음수이므로
$P(x)=-x^2-x-2$
$\therefore \{P(a)\}^2=\{P(1)\}^2=(-1-1-2)^2=16$

Lecture

상수 a, b에 대하여
(1) x^2+ax+b가 완전제곱식이 되기 위한 b의 조건
➡ $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$
(2) x^2+ax+b^2이 완전제곱식이 되기 위한 a의 조건
➡ $a=\pm 2b$

11 답 ①

정오각형의 한 내각의 크기는 $\frac{180^\circ\times 3}{5}=108^\circ$
$\triangle ABE$는 이등변삼각형이고 $\angle BAE=108^\circ$이므로
$\angle ABE=36^\circ$
$\triangle BAC$는 이등변삼각형이고 $\angle ABC=108^\circ$이므로
$\angle BAC=36^\circ$
즉 $\angle BAP=\angle ABP=36^\circ$이므로 $\triangle PAB$에서
$\angle APB=180^\circ-(36^\circ+36^\circ)=108^\circ$
$\angle APE=36^\circ+36^\circ=72^\circ$이고 $\angle EAP=108^\circ-36^\circ=72^\circ$이므로
$\triangle APE$는 이등변삼각형이다.
$\therefore \overline{PE}=\overline{AE}=1$
이때 $\overline{BE}:\overline{PE}=\overline{PE}:\overline{BP}$이므로 $x:1=1:(x-1)$
$x(x-1)=1$, $x^2-x-1=0$
$\therefore x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (\because x>0)$
또 $x^2-x-1=0$이므로
$x^2=x+1$
$x^3=x^2\times x=(x+1)x=x^2+x=(x+1)+x=2x+1$
$x^4=x^3\times x=(2x+1)x=2x^2+x=2(x+1)+x=3x+2$
$x^5=x^4\times x=(3x+2)x=3x^2+2x=3(x+1)+2x=5x+3$
$x^6=x^5\times x=(5x+3)x=5x^2+3x=5(x+1)+3x=8x+5$

$$\begin{aligned}\therefore\ &1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8\\&=1+(-x+x^2)+x^2(-x+x^2)+x^4(-x+x^2)\\&\qquad+x^6(-x+x^2)\\&=1+1+x^2+x^4+x^6\\&=2+(x+1)+(3x+2)+(8x+5)\\&=12x+10\\&=12\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}+10\\&=16+6\sqrt{5}\end{aligned}$$

따라서 $p=16$, $q=6$이므로
$p+q=16+6=22$

Lecture 다각형의 내각과 외각

(1) n각형의 내각의 크기의 합은 $180^\circ\times(n-2)$
(2) 다각형의 외각의 크기의 합은 항상 360°이다.
(3) 정n각형의 한 내각의 크기는 $\frac{180^\circ\times(n-2)}{n}$

02 항등식과 나머지정리

개념 완성하기

p. 31~32

01 답 ×
(우변)$=2x-3$이므로 (좌변)$\neq$(우변)

02 답 ○
(좌변)$=2x-1$이므로 (좌변)$=$(우변)

03 답 ×
(우변)$=x^2-8x+16$이므로 (좌변)$\neq$(우변)

04 답 ○
(우변)$=x^2-4x+3$이므로 (좌변)$=$(우변)

05 답 ×
(우변)$=3x^2-6x+3$이므로 (좌변)$\neq$(우변)

06 답 ○
(좌변)$=x^2-2x$이므로 (좌변)$=$(우변)

07 답 $a=3$, $b=-3$
주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a-3=0$, $a+b=0$ $\quad\therefore a=3$, $b=-3$

08 답 $a=-4$, $b=-6$
주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a-b=2$, $-4=a$ $\quad\therefore a=-4$, $b=-6$

09 답 $a=2$, $b=-1$, $c=4$
주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a-2=0$, $b+1=0$, $4-c=0$
$\therefore a=2$, $b=-1$, $c=4$

10 답 $a=-2$, $b=3$, $c=1$
주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a+b=1$, $b-3=0$, $c+1=2$
$\therefore a=-2$, $b=3$, $c=1$

11 답 $a=3$, $b=2$, $c=1$
주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$2=b$, $a-1=2$, $1=c$
$\therefore a=3$, $b=2$, $c=1$

12 답 $a=3$, $b=-5$, $c=1$
주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$1=c$, $a=3$, $-(b+1)=4$
$\therefore a=3$, $b=-5$, $c=1$

13 답 $a=-2$, $b=4$, $c=-2$
주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a+b=2$, $a+2=0$, $-(c-3)=5$
$\therefore a=-2$, $b=4$, $c=-2$

14 답 $a=2$, $b=1$, $c=3$
주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로
$a-3=-1$, $b+1=2$, $2c-1=5$
$\therefore a=2$, $b=1$, $c=3$

15 답 $a=2$, $b=-1$
주어진 등식의 양변에
$x=-1$을 대입하면 $-3b=3$ $\quad\therefore b=-1$
$x=2$를 대입하면 $3a=6$ $\quad\therefore a=2$

16 답 $a=1$, $b=0$, $c=1$
주어진 등식의 양변에
$x=0$을 대입하면 $1=c$ $\quad\therefore c=1$
$x=1$을 대입하면 $2=b+2c$
$2=b+2$ $\quad\therefore b=0$
$x=-1$을 대입하면 $2=2a-b$
$2=2a$ $\quad\therefore a=1$

17 답 $a=0$, $b=1$, $c=2$
주어진 등식의 양변에
$x=1$을 대입하면 $2c=4$ $\quad\therefore c=2$
$x=-1$을 대입하면 $-2b=-2$ $\quad\therefore b=1$
$x=0$을 대입하면 $-a-b+c=1$
$-a-1+2=1$ $\quad\therefore a=0$

18 답 $a=1$, $b=2$, $c=-1$
주어진 등식의 양변에
$x=0$을 대입하면 $-c=1$ $\quad\therefore c=-1$
$x=1$을 대입하면 $b=2$
$x=-1$을 대입하면 $2a-b-2c=2$
$2a-2+2=2$ $\quad\therefore a=1$

19 답 $a=2$, $b=4$
$$\begin{aligned}x^3+ax-b&=(x^2-x+2)(x+1)+x-6\\&=x^3+2x-4\end{aligned}$$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=2$, $b=4$

20 답 $a=3$, $b=5$, $c=2$
$$\begin{aligned}ax^3+2x^2-x-b&=(3x^2-x+c)(x+1)-2x-7\\&=3x^3+2x^2+(c-3)x+c-7\end{aligned}$$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=3$, $-1=c-3$, $-b=c-7$
$\therefore a=3$, $b=5$, $c=2$

21 답 $a=-1$, $b=-6$
x^3+6x^2+ax+b를 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$

라 하면 나머지가 0이므로

$x^3+6x^2+ax+b=(x+1)(x-1)Q(x)$

양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$-1+6-a+b=0 \quad \therefore a-b=5$ ……㉠

$1+6+a+b=0 \quad \therefore a+b=-7$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-6$

22 답 3

$f(1)=2+5-4=3$

23 답 -7

$f(-1)=2-5-4=-7$

24 답 14

$f(2)=8+10-4=14$

25 답 -1

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-4=-1$

26 답 -1

$f(-3)=18-15-4=-1$

27 답 -6

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}-4=-6$

28 답 1

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=1$

29 답 1

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1=1$

30 답 13

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{2}-\frac{3}{2}+1=13$

31 답 $\frac{31}{16}$

$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{16}-\frac{3}{4}+1=\frac{31}{16}$

32 답 31

$f(2)=32-2+1=31$

33 답 -29

$f(-2)=-32+2+1=-29$

34 답 2

$f(1)=2$이므로 $1-3+a+2=2 \quad \therefore a=2$

35 답 2

$f(-1)=-4$이므로 $-1-3-a+2=-4 \quad \therefore a=2$

36 답 2

$f(2)=2$이므로 $8-12+2a+2=2 \quad \therefore a=2$

37 답 -6

$f(-2)=-6$이므로 $-8-12-2a+2=-6 \quad \therefore a=-6$

38 답 -3

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$이므로 $\frac{1}{8}-\frac{3}{4}+\frac{a}{2}+2=-\frac{1}{8}$

$1-6+4a+16=-1 \quad \therefore a=-3$

39 답 1

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$이므로 $-\frac{1}{8}-\frac{3}{4}-\frac{a}{2}+2=\frac{5}{8}$

$-1-6-4a+16=5 \quad \therefore a=1$

40 답 -7

$f(3)=0$이므로 $27-9+3k+3=0 \quad \therefore k=-7$

41 답 3

$f(-1)=0$이므로 $-2-2+1+k=0 \quad \therefore k=3$

42 답 $-\frac{1}{2}$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+k=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{2}$

43 답 $\frac{1}{4}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}=0$

$1+2+4k-4=0 \quad \therefore k=\frac{1}{4}$

44 답 -1

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{k}{2}-\frac{1}{4}=0$

$1+2+2k-1=0 \quad \therefore k=-1$

45 답 $a=5$, $b=-1$

$f(x)$가 $(x+1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=0$, $f(2)=0$

$f(-1)=0$에서 $-2-a-b+6=0$

$\therefore a+b=4$ ……㉠

$f(2)=0$에서 $16-4a+2b+6=0$

$\therefore 2a-b=11$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=-1$

46 답 $a=-2$, $b=-10$

$f(x)$가 $(x+3)(x-1)$로 나누어떨어지므로

$f(-3)=0$, $f(1)=0$

$f(-3)=0$에서 $-54-9a-3b+6=0$

$\therefore 3a+b=-16$ ……㉠

$f(1)=0$에서 $2-a+b+6=0$

$\therefore a-b=8$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-10$

47 답 $a=3$, $b=-11$

$f(x)$가 x^2-x-6, 즉 $(x+2)(x-3)$으로 나누어떨어지므로

$f(-2)=0$, $f(3)=0$

$f(-2)=0$에서 $-16-4a-2b+6=0$

$\therefore 2a+b=-5$ ······㉠

$f(3)=0$에서 $54-9a+3b+6=0$

$\therefore 3a-b=20$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-11$

유형 완성하기 p.33~46

01 답 ①

$x^3+ax^2-3x-6=(x+c)(x^2+bx-3)$에서

$x^3+ax^2-3x-6=x^3+(b+c)x^2+(bc-3)x-3c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=b+c$, $-3=bc-3$, $-6=-3c$

$\therefore a=2$, $b=0$, $c=2$

$\therefore a+b-c=2+0-2=0$

01-1 답 ④

$2x^2+bx+c=(ax+2)(x-1)+5$에서

$2x^2+bx+c=ax^2-(a-2)x+3$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2=a$, $b=-(a-2)$, $c=3$

$\therefore a=2$, $b=0$, $c=3$

$\therefore a+b+c=2+0+3=5$

02 답 11

주어진 등식을 k에 대하여 정리하면

$(k+1)x+(2k-1)y-14k-5=0$에서

$kx+x+2ky-y-14k-5=0$

$\therefore (x+2y-14)k+x-y-5=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x+2y-14=0$, $x-y-5=0$

$\therefore x+2y=14$, $x-y=5$

두 식을 연립하여 풀면 $x=8$, $y=3$

$\therefore x+y=8+3=11$

02-1 답 ①

주어진 등식을 k에 대하여 정리하면

$kx^2+x+ky^2+y-14k-4=0$에서

$(x^2+y^2-14)k+x+y-4=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x^2+y^2-14=0$, $x+y-4=0$

$\therefore x^2+y^2=14$, $x+y=4$

이때 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로

$14=16-2xy$ $\quad\therefore xy=1$

Lecture 곱셈 공식의 변형

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(x-y)^2+2xy$

(2) $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

(3) $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$

03 답 -2

$a(2x-y)+b(x+3y)=3x-5y$에서

$2ax-ay+bx+3by=3x-5y$

$\therefore (2a+b)x+(-a+3b)y=3x-5y$ ······❶

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$2a+b=3$, $-a+3b=-5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$ ······❷

$\therefore ab=2\times(-1)=-2$ ······❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 x, y에 대하여 정리할 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

03-1 답 ②

$5x^2+a(x-3)+2=bx^2+4x+c$에서

$5x^2+ax-3a+2=bx^2+4x+c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$5=b$, $a=4$, $-3a+2=c$

$\therefore a=4$, $b=5$, $c=-10$

$\therefore a+b+c=4+5+(-10)=-1$

04 답 0

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-3=c$ $\quad\therefore c=-3$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-5=-a+c$, $-5=-a-3$ $\quad\therefore a=2$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$-1=2b+c$, $-1=2b-3$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore a+b+c=2+1+(-3)=0$

04-1 답 3

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$2=2c$ $\quad\therefore c=1$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$9=-b$ $\quad\therefore b=-9$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$22=2a$ $\quad\therefore a=11$

$\therefore a+b+c=11+(-9)+1=3$

05 답 ⑤

주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$-8+4a-2b+c=0$ $\quad\therefore 4a-2b+c=8$ ······㉠

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$8+4a+2b+c=0$ $\quad\therefore 4a+2b+c=-8$ ······㉡

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b+c=0$ $\quad\therefore a+b+c=-1$ ······㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-4$, $c=4$

$\therefore abc=-1\times(-4)\times4=16$

05-1 답 ④

주어진 등식의 양변에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$\frac{a}{8}+\frac{b}{4}+\frac{c}{2}+3=0$ $\quad\therefore a+2b+4c=-24$ $\quad\cdots\cdots$㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-a+b-c+3=0$ $\quad\therefore a-b+c=3$ $\quad\cdots\cdots$㉡

주어진 등식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$27a+9b+3c+3=0$ $\quad\therefore 9a+3b+c=-1$ $\quad\cdots\cdots$㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-5$, $c=-4$

$\therefore a+bc=2+(-5)\times(-4)=22$

06 답 -5

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=1+a+b$ $\quad\therefore a+b=-1$ $\quad\cdots\cdots$㉠

주어진 등식의 양변에 $x=\sqrt{2}$, 즉 $x^2=2$를 대입하면

$0=4+2a+b$ $\quad\therefore 2a+b=-4$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=2$

$\therefore a-b=-3-2=-5$

06-1 답 25

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1-a-b$ $\quad\therefore a+b=1$ $\quad\cdots\cdots$㉠

주어진 등식의 양변에 $x=\sqrt{3}$, 즉 $x^2=3$을 대입하면

$0=27-3a-b$ $\quad\therefore 3a+b=27$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=13$, $b=-12$

$\therefore a-b=13-(-12)=25$

07 답 $\frac{10}{3}$

이차방정식 $x^2-(ak-b)x+b(k+2)-2a+4=0$의 근이 $x=-1$이므로 $1+(ak-b)+b(k+2)-2a+4=0$

$\therefore (a+b)k-2a+b+5=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$a+b=0$, $-2a+b+5=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{5}{3}$, $b=-\frac{5}{3}$

$\therefore a-b=\frac{5}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{10}{3}$

07-1 답 3

이차방정식 $kx^2+px+(2k+5)q=0$의 근이 $x=2$이므로

$4k+2p+(2k+5)q=0$

$\therefore (4+2q)k+2p+5q=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$4+2q=0$, $2p+5q=0$

두 식을 연립하여 풀면 $p=5$, $q=-2$

$\therefore p+q=5+(-2)=3$

08 답 12

$x-2y=-3$에서 $x=2y-3$

이 식을 $ax+by+12=0$에 대입하면

$a(2y-3)+by+12=0$

$\therefore (2a+b)y-3a+12=0$

이 등식이 y에 대한 항등식이므로

$2a+b=0$, $-3a+12=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-8$

$\therefore a-b=4-(-8)=12$

08-1 답 -6

$x+y=5$에서 $y=5-x$

이 식을 $2x+ay+4b+2=0$에 대입하면

$2x+a(5-x)+4b+2=0$

$\therefore (2-a)x+5a+4b+2=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2-a=0$, $5a+4b+2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

$\therefore ab=2\times(-3)=-6$

09 답 2

$x-y=2$에서 $y=x-2$

이 식을 $ax^2+bxy+y^2+x+cy-6=0$에 대입하면

$ax^2+bx(x-2)+(x-2)^2+x+c(x-2)-6=0$

$\therefore (a+b+1)x^2+(-2b+c-3)x-2c-2=0$ $\quad\cdots\cdots$❶

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b+1=0$, $-2b+c-3=0$, $-2c-2=0$

$\therefore a=1$, $b=-2$, $c=-1$ $\quad\cdots\cdots$❷

$\therefore abc=1\times(-2)\times(-1)=2$ $\quad\cdots\cdots$❸

채점 기준	비율
❶ $x-y=2$를 변형하여 주어진 등식에 대입한 후 x에 대하여 정리할 수 있다.	40%
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	20%

09-1 답 ①

$x+y=2$에서 $y=2-x$

이 식을 $ax^2+bxy+cy^2=4$에 대입하면

$ax^2+bx(2-x)+c(2-x)^2=4$

$\therefore (a-b+c)x^2+(2b-4c)x+4c-4=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a-b+c=0$, $2b-4c=0$, $4c-4=0$

$\therefore a=1$, $b=2$, $c=1$

$\therefore abc=1\times2\times1=2$

10 답 781

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $3^5=a_0$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=4^5-3^5$

$=1024-243$

$=781$

10-1 답 ④

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^3=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6$

$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6=8$

11 답 ④

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^4=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7+a_8$ ······㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$6^4=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_7+a_8$ ······㉡

㉠+㉡을 하면 $2^4+6^4=2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8)$

$2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8)=1312$

$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=656$

11-1 답 -495

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$1^5=a_0 \qquad \therefore a_0=1$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$ ······㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$4^5=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10}$ ······㉡

㉠−㉡을 하면 $2^5-4^5=2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)$

$2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)=-992$

$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-496$

$\therefore a_0+a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=1+(-496)=-495$

12 답 -122

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$(-3)^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{14}+a_{15}$ ······㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^5=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{14}-a_{15}$ ······㉡

㉠+㉡을 하면 $(-3)^5+(-1)^5=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{14})$

$2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{14})=-244$

$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{14}=-122$

12-1 답 ①

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$(a+3)^3=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9$ ······㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-a-1)^3=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_9$ ······㉡

㉠+㉡을 하면

$(a+3)^3+(-a-1)^3=2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8)$

$2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8)=6a^2+24a+26$

$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=3a^2+12a+13$

이때 $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=1$이므로

$3a^2+12a+13=1,\ 3a^2+12a+12=0$

$a^2+4a+4=0,\ (a+2)^2=0$

$\therefore a=-2$

13 답 $a=-3,\ b=8$

x^3+ax^2+bx-2를 x^2-2x+3으로 나누었을 때의 몫이 $x-1$, 나머지가 $3x+1$이므로

$x^3+ax^2+bx-2=(x^2-2x+3)(x-1)+3x+1$

$\qquad =x^3-3x^2+8x-2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=-3,\ b=8$

13-1 답 ②

x^3+ax+b를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫이 $x+c$, 나머지가 $x-2$이므로

$x^3+ax+b=(x^2-2x-3)(x+c)+x-2$

$\qquad =x^3+(c-2)x^2+(-2c-2)x-3c-2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$0=c-2,\ a=-2c-2,\ b=-3c-2$

$\therefore a=-6,\ b=-8,\ c=2$

$\therefore a+b+c=-6+(-8)+2=-12$

14 답 -6

x^3+mx^2-4x+n을 x^2-x-1로 나누었을 때의 몫을 $x+p$ (p는 상수)라 하면

$x^3+mx^2-4x+n=(x^2-x-1)(x+p)$

$\qquad =x^3+(p-1)x^2-(p+1)x-p$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$m=p-1,\ -4=-(p+1),\ n=-p$

$\therefore p=3,\ m=2,\ n=-3$

$\therefore mn=2\times(-3)=-6$

> **참고** x^3+mx^2-4x+n의 최고차항의 계수가 1, x^2-x-1의 최고차항의 계수가 1이므로 몫은 $x+p$ (p는 상수) 꼴이다.

14-1 답 8

$4x^3+5x^2+2x-a$를 x^2+2x+b로 나누었을 때의 몫을 $4x+p$ (p는 상수)라 하면

$4x^3+5x^2+2x-a=(x^2+2x+b)(4x+p)$ ······❶

$\qquad =4x^3+(p+8)x^2+(4b+2p)x+bp$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$5=p+8,\ 2=4b+2p,\ -a=bp$

$\therefore p=-3,\ a=6,\ b=2$ ······❷

$\therefore a+b=6+2=8$ ······❸

채점 기준	비율
❶ 나눗셈 식을 세울 수 있다.	40%
❷ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

15 답 2

$x^4+mx^3+nx^2+2x+5$를 x^2-2x+3으로 나누었을 때의 몫을 x^2+px+q ($p,\ q$는 상수)라 하면

$x^4+mx^3+nx^2+2x+5$

$=(x^2-2x+3)(x^2+px+q)+3x-1$

$=x^4+(p-2)x^3+(q-2p+3)x^2+(-2q+3p+3)x+3q-1$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$m=p-2,\ n=q-2p+3,\ 2=-2q+3p+3,\ 5=3q-1$

$\therefore p=1,\ q=2,\ m=-1,\ n=3$

$\therefore m+n=-1+3=2$

15-1 답 -2

$2x^3+ax^2+bx+4$를 x^2-x+2로 나누었을 때의 몫을 $2x+p$ (p는 상수)라 하면

$2x^3+ax^2+bx+4=(x^2-x+2)(2x+p)-x+2$

$\qquad =2x^3+(p-2)x^2+(3-p)x+2p+2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=p-2,\ b=3-p,\ 4=2p+2$
$\therefore\ p=1,\ a=-1,\ b=2$
$\therefore\ ab=-1\times2=-2$

16 답 ③

나머지정리에 의하여 $f(2)=4$이므로
$16-4k-4+4=4 \qquad \therefore\ k=3$

16-1 답 ③

나머지정리에 의하여 $f(3)=8$이므로
$27-9a+15-7=8 \qquad \therefore\ a=3$

17 답 ②

$f(x)=x^3+ax^2+bx+4$라 하면 나머지정리에 의하여
$f(-2)=6,\ f(-3)=-5$
$f(-2)=6$에서 $-8+4a-2b+4=6$
$\therefore\ 2a-b=5$ ……㉠
$f(-3)=-5$에서 $-27+9a-3b+4=-5$
$\therefore\ 3a-b=6$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-3$
$\therefore\ ab=1\times(-3)=-3$

17-1 답 2

나머지정리에 의하여 $f(-1)=4,\ f(-3)=-2$ ……❶
$f(-1)=4$에서 $-1+a-b+1=4$
$\therefore\ a-b=4$ ……㉠
$f(-3)=-2$에서 $-27+9a-3b+1=-2$
$\therefore\ 3a-b=8$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-2$ ……❷
$\therefore\ f(x)=x^3+2x^2-2x+1$
따라서 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $f(1)=1+2-2+1=2$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 나머지정리를 이용하여 $f(-1),\ f(-3)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40%

18 답 ④

$f(x)=4x^3+ax+3$이라 하면 나머지정리에 의하여
$f(-1)=-4-a+3=-a-1$
$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{a}{2}+3=\frac{a}{2}+\frac{7}{2}$
이때 나머지가 서로 같으므로 $-a-1=\frac{a}{2}+\frac{7}{2}$
$-\frac{3}{2}a=\frac{9}{2} \qquad \therefore\ a=-3$

18-1 답 ②

$f(x)=x^3+ax^2-x-1$이라 하면 나머지정리에 의하여
$f(2)=8+4a-2-1=4a+5$
$f(-1)=-1+a+1-1=a-1$
이때 나머지가 서로 같으므로 $4a+5=a-1$
$3a=-6 \qquad \therefore\ a=-2$

19 답 1

나머지정리에 의하여 $f(-3)=-2,\ g(-3)=3$
따라서 $f(x)+g(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는
$f(-3)+g(-3)=-2+3=1$

19-1 답 2

나머지정리에 의하여 $f(2)=5,\ g(2)=3$
따라서 $f(x)-g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는
$f(2)-g(2)=5-3=2$

20 답 21

나머지정리에 의하여 $f(2)=2,\ g(2)=-3$
따라서 $3f(x)-5g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는
$3f(2)-5g(2)=3\times2-5\times(-3)=21$

20-1 답 ③

나머지정리에 의하여 $f(3)=4,\ g(3)=-2$
따라서 $3f(x)+xg(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는
$3f(3)+3g(3)=3\times4+3\times(-2)=6$

21 답 ⑤

$f(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차다항식이므로
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수)라 하자.
나머지정리에 의하여 $f(2)=3,\ f(3)=5,\ f(4)=7$
$f(2)=3$에서 $8+4a+2b+c=3$
$\therefore\ 4a+2b+c=-5$ ……㉠
$f(3)=5$에서 $27+9a+3b+c=5$
$\therefore\ 9a+3b+c=-22$ ……㉡
$f(4)=7$에서 $64+16a+4b+c=7$
$\therefore\ 16a+4b+c=-57$ ……㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$a=-9,\ b=28,\ c=-25$
$\therefore\ f(x)=x^3-9x^2+28x-25$
따라서 $f(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는
$f(5)=125-225+140-25=15$

21-1 답 -48

$f(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차다항식이므로
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수)라 하자.
나머지정리에 의하여 $f(1)=2,\ f(3)=4,\ f(5)=6$
$f(1)=2$에서 $1+a+b+c=2$
$\therefore\ a+b+c=1$ ……㉠
$f(3)=4$에서 $27+9a+3b+c=4$
$\therefore\ 9a+3b+c=-23$ ……㉡
$f(5)=6$에서 $125+25a+5b+c=6$
$\therefore\ 25a+5b+c=-119$ ……㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$a=-9,\ b=24,\ c=-14$
$\therefore\ f(x)=x^3-9x^2+24x-14$
따라서 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는
$f(-1)=-1-9-24-14=-48$

22 답 0

나머지정리에 의하여 $f(2)=3$, $f(3)=6$

$f(x)$를 x^2-5x+6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-5x+6)Q(x)+R(x)$
$\quad=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$

$f(2)=3$에서 $2a+b=3$ ……㉠

$f(3)=6$에서 $3a+b=6$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-3$

따라서 $R(x)=3x-3$이므로

$R(1)=3-3=0$

22-1 답 ①

나머지정리에 의하여 $f(1)=-2$, $f(-2)=1$

$f(x)$를 $(x+2)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x+2)(x-1)Q(x)+R(x)$
$\quad=(x+2)(x-1)Q(x)+ax+b$

$f(1)=-2$에서 $a+b=-2$ ……㉠

$f(-2)=1$에서 $-2a+b=1$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-1$

따라서 $R(x)=-x-1$이므로

$R(5)=-5-1=-6$

23 답 ①

$f(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$f(x)=(x^2+x-2)Q_1(x)+x-5$
$\quad=(x+2)(x-1)Q_1(x)+x-5$

$\therefore f(1)=1-5=-4$

$f(x)$를 x^2+3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$f(x)=(x^2+3x+2)Q_2(x)+x-1$
$\quad=(x+1)(x+2)Q_2(x)+x-1$

$\therefore f(-1)=-1-1=-2$

$f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$
$\quad=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$

$f(-1)=-2$에서 $-a+b=-2$ ……㉠

$f(1)=-4$에서 $a+b=-4$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-3$

따라서 구하는 나머지는 $-x-3$이다.

23-1 답 $2x+3$

$f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-4)Q_1(x)+2x+3$
$\quad=(x+2)(x-2)Q_1(x)+2x+3$

$\therefore f(-2)=-4+3=-1$

$f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 9이므로 나머지정리에 의하여 $f(3)=9$

$f(x)$를 x^2-x-6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-x-6)Q(x)+ax+b$
$\quad=(x-3)(x+2)Q(x)+ax+b$

$f(3)=9$에서 $3a+b=9$ ……㉠

$f(-2)=-1$에서 $-2a+b=-1$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

따라서 구하는 나머지는 $2x+3$이다.

24 답 0

$f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 몫이 $x-2$, 나머지가 2이므로

$f(x)=(x^2+1)(x-2)+2$

$\therefore f(-1)=2\times(-3)+2=-4$

$\quad f(1)=2\times(-1)+2=0$ ……❶

$f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지는 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)이므로

$f(x)=(x^2-1)Q(x)+R(x)$
$\quad=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$

$f(-1)=-4$에서 $-a+b=-4$ ……㉠

$f(1)=0$에서 $a+b=0$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-2$ ……❷

따라서 $R(x)=2x-2$이므로

$R(1)=2-2=0$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $f(-1)$, $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $R(1)$의 값을 구할 수 있다.	20%

24-1 답 4

$f(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$f(x)=(x+1)(x-3)Q_1(x)+x-2$

$\therefore f(3)=3-2=1$

$f(x)$를 $(x-2)(x+3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$f(x)=(x-2)(x+3)Q_2(x)+3$

$\therefore f(-3)=3$

$f(x)$를 $(x-3)(x+3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-3)(x+3)Q(x)+R(x)$
$\quad=(x-3)(x+3)Q(x)+ax+b$

$f(3)=1$에서 $3a+b=1$ ……㉠

$f(-3)=3$에서 $-3a+b=3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{3}$, $b=2$

따라서 $R(x)=-\frac{1}{3}x+2$이므로

$R(-6)=2+2=4$

25 답 $4x^2+3x-5$

$f(x)$를 $(x^2-1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-1)(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$

이때 $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지가 $3x-1$이므로

ax^2+bx+c를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지도 $3x-1$이다.

즉 $ax^2+bx+c=a(x^2-1)+3x-1$이므로

$f(x)=(x^2-1)(x+2)Q(x)+a(x^2-1)+3x-1$ ……㉠

또 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로 나머지정리에 의하여 $f(-2)=5$
㉠에서 $f(-2)=3a-7=5$이므로 $a=4$
따라서 구하는 나머지는
$4(x^2-1)+3x-1=4x^2+3x-5$

Lecture

ax^2+bx+c를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지가 $3x-1$이 되는지 확인해 보자.

$f(x)=(x^2-1)(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$ 이차식이므로 x^2-1로 나누어진다.
$\quad=(x^2-1)(x+2)Q(x)+a(x^2-1)+R(x)$
$\quad=(x^2-1)\{(x+2)Q(x)+a\}+3x-1$
$f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫
$\quad=(x^2-1)(x+2)Q(x)+a(x^2-1)+3x-1$
$\therefore ax^2+bx+c=a(x^2-1)+3x-1$

25-1 답 9

$f(x)$를 $(x^2+1)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면
$f(x)=(x^2+1)(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$
이때 $f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지가 $x+2$이므로
ax^2+bx+c를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지도 $x+2$이다.
즉 $R(x)=ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+2$이므로
$f(x)=(x^2+1)(x+1)Q(x)+a(x^2+1)+x+2$ ……㉠
또 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 나머지정리에 의하여 $f(-1)=3$
㉠에서 $f(-1)=2a+1=3$이므로 $a=1$
따라서 $R(x)=x^2+x+3$이므로
$R(2)=4+2+3=9$

26 답 8

$x^{49}+x^{25}+x^9+x$를 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면
$x^{49}+x^{25}+x^9+x=(x^3-x)Q(x)+R(x)$
$\quad=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …㉠
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=c$
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$-4=a-b+c \quad \therefore a-b=-4$ ……㉡
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$4=a+b+c \quad \therefore a+b=4$ ……㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=4$
$\therefore R(x)=4x$
따라서 $R(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는
$R(2)=4\times2=8$

26-1 답 4

$x^{16}+x^9+x^4+x$를 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면
$x^{16}+x^9+x^4+x=(x^3-x)Q(x)+R(x)$
$\quad=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …㉠
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=c$
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$0=a-b+c \quad \therefore a-b=0$ ……㉡
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$4=a+b+c \quad \therefore a+b=4$ ……㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=2$
$\therefore R(x)=2x^2+2x$
따라서 $R(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는
$R(-2)=8-4=4$

27 답 ①

$f(x)$를 $x(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면
$f(x)=x(x+1)Q_1(x)+3x+4$
$\therefore f(-1)=1$, $f(0)=4$
$f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면
$f(x)=(x+1)(x-2)Q_2(x)+x+2$
$\therefore f(2)=4$
$f(x)$를 $x(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면
$f(x)=x(x+1)(x-2)Q(x)+R(x)$
$\quad=x(x+1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$
$f(-1)=1$에서 $a-b+c=1$
$f(0)=4$에서 $c=4$
$f(2)=4$에서 $4a+2b+c=4$
$\therefore a=-1$, $b=2$, $c=4$
따라서 $R(x)=-x^2+2x+4$이므로
$R(1)=-1+2+4=5$

27-1 답 6

$f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면
$f(x)=(x-1)(x-2)Q_1(x)+5x-4$
$\therefore f(1)=1$, $f(2)=6$
$f(x)$를 $(x+3)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면
$f(x)=(x+3)(x-1)Q_2(x)-x+2$
$\therefore f(-3)=5$
$f(x)$를 $(x+3)(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면
$f(x)=(x+3)(x-1)(x-2)Q(x)+R(x)$
$\quad=(x+3)(x-1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$
$f(1)=1$에서 $a+b+c=1$
$f(2)=6$에서 $4a+2b+c=6$
$f(-3)=5$에서 $9a-3b+c=5$
$\therefore a=\frac{6}{5}$, $b=\frac{7}{5}$, $c=-\frac{8}{5}$
따라서 $R(x)=\frac{6}{5}x^2+\frac{7}{5}x-\frac{8}{5}$이므로
$R(2)=\frac{24}{5}+\frac{14}{5}-\frac{8}{5}=6$

28 답 6

$f(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$f(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+5x-4$
$\quad=(x-1)(x-2)Q(x)+5x-4$ ……㉠
$f(3x+5)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는
$f(3\times(-1)+5)=f(2)$
㉠에서 $f(2)=10-4=6$
따라서 구하는 나머지는 6이다.

다른 풀이

㉠의 양변에 x 대신 $3x+5$를 대입하면

$$\begin{aligned}f(3x+5)&=(3x+4)(3x+3)Q(3x+5)+5(3x+5)-4\\&=3(3x+4)(x+1)Q(3x+5)+15x+21\\&=3(3x+4)(x+1)Q(3x+5)+15(x+1)+6\\&=(x+1)\{3(3x+4)Q(3x+5)+15\}+6\end{aligned}$$

따라서 $f(3x+5)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 6이다.

28-1 답 ②

$f(x)$를 $5x^2-13x-6$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$\begin{aligned}f(x)&=(5x^2-13x-6)Q(x)+x+1\\&=(5x+2)(x-3)Q(x)+x+1 \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$f(x+1)$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2+1)=f(3)$

㉠에서 $f(3)=3+1=4$

따라서 구하는 나머지는 4이다.

29 답 -7

$f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2-4x+3)Q(x)-4x+5\\&=(x-1)(x-3)Q(x)-4x+5 \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots\cdots ❶\end{aligned}$$

$f(3x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(3\times1)=f(3)$

㉠에서 $f(3)=-12+5=-7$

따라서 구하는 나머지는 -7이다. ……❷

채점 기준	비율
❶ 나눗셈 식을 세울 수 있다.	40%
❷ $f(3x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	60%

29-1 답 8

$f(x)$를 $(5x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(5x-1)(x+1)Q(x)-3x+5 \quad \cdots\cdots ㉠$

$f(3x+8)$을 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(3\times(-3)+8)=f(-1)$

㉠에서 $f(-1)=3+5=8$

따라서 구하는 나머지는 8이다.

30 답 16

$f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2-4x+3)Q(x)+x+1\\&=(x-1)(x-3)Q(x)+x+1 \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$(6x+1)f(4x+1)$을 $2x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$$\left(6\times\frac{1}{2}+1\right)f\left(4\times\frac{1}{2}+1\right)=4f(3)$$

㉠에서 $f(3)=3+1=4$

따라서 구하는 나머지는

$4f(3)=4\times4=16$

30-1 답 -10

$f(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2-3x+2)Q(x)+3x-1\\&=(x-1)(x-2)Q(x)+3x-1 \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$(2x-1)f(6x+5)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$$\left\{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right\}f\left(6\times\left(-\frac{1}{2}\right)+5\right)=-2f(2)$$

㉠에서 $f(2)=6-1=5$

따라서 구하는 나머지는

$-2f(2)=-2\times5=-10$

31 답 6

$f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이므로

$f(x)=(x+1)Q(x)+2 \quad \cdots\cdots ㉠$

$Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 1이므로

$Q(3)=1$

$f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 $f(3)$이므로 ㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=4Q(3)+2=4\times1+2=6$

31-1 답 3

$f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 11이므로

$f(x)=(x-3)Q(x)+11 \quad \cdots\cdots ㉠$

$Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 2이므로

$Q(-1)=2$

$f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $f(-1)$이므로 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=-4Q(-1)+11=-4\times2+11=3$

32 답 -1

$f(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $3x+2$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2-2x-3)Q(x)+3x+2\\&=(x+1)(x-3)Q(x)+3x+2 \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=-3+2=-1$

$Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로

$Q(2)=3$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=-3Q(2)+8=-3\times3+8=-1$

이때 $f(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2-x-2)Q'(x)+ax+b\\&=(x+1)(x-2)Q'(x)+ax+b\end{aligned}$$

$f(-1)=-1$에서 $-a+b=-1 \quad \cdots\cdots ㉡$

$f(2)=-1$에서 $2a+b=-1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-1$

따라서 $f(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 나머지는 -1이다.

32-1 답 ③

$f(x)$를 x^2+2x+4로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $2x-1$이므로

$f(x)=(x^2+2x+4)Q(x)+2x-1 \quad \cdots\cdots ㉠$

$Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 3이므로

$Q(x)=(x-2)Q'(x)+3 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x^2+2x+4)\{(x-2)Q'(x)+3\}+2x-1$

$\quad=(x^3-8)Q'(x)+3(x^2+2x+4)+2x-1$

$\quad=(x^3-8)Q'(x)+3x^2+8x+11$

따라서 $R(x)=3x^2+8x+11$이므로

$R(0)=11$

33 답 ④

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이므로

$f(x)=(x-2)Q(x)+3$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=3$

$Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 2이므로

$Q(3)=2$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=Q(3)+3=2+3=5$

이때 $f(x)$를 $(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-2)(x-3)Q'(x)+R(x)$

$\quad=(x-2)(x-3)Q'(x)+ax+b$

$f(2)=3$에서 $2a+b=3$ ……㉡

$f(3)=5$에서 $3a+b=5$ ……㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

따라서 $R(x)=2x-1$이므로

$R(4)=8-1=7$

33-1 답 6

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이므로

$f(x)=(x-1)Q(x)+2$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=2$

$Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 -2이므로

$Q(-3)=-2$

㉠의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$f(-3)=-4Q(-3)+2=8+2=10$

$f(x)$를 $(x-1)(x+3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)(x+3)Q'(x)+R(x)$

$\quad=(x-1)(x+3)Q'(x)+ax+b$

$f(1)=2$에서 $a+b=2$ ……㉡

$f(-3)=10$에서 $-3a+b=10$ ……㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=4$

따라서 $R(x)=-2x+4$이므로

$R(-1)=2+4=6$

34 답 ⑤

$f(x)=x^4-3x^3+2x^2+ax+b$라 하면 $f(x)$가 $x+1$, $x-2$로 각각 나누어떨어지므로 $f(-1)=0$, $f(2)=0$

$f(-1)=0$에서 $1+3+2-a+b=0$

$\therefore a-b=6$ ……㉠

$f(2)=0$에서 $16-24+8+2a+b=0$

$\therefore 2a+b=0$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-4$

$\therefore a^2+b^2=4+16=20$

34-1 답 -5

$f(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로 $f(2)=0$

$8+4a+2b-2=0 \quad \therefore 2a+b=-3$ ……㉠

$f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 $f(-1)=3$

$-1+a-b-2=3 \quad \therefore a-b=6$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-5$

$\therefore ab=1\times(-5)=-5$

35 답 ①

$f(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로 $f(-1)=0$

$10+a-2-15=0 \quad \therefore a=7$

즉 $f(x)=10x^{10}-7x^3+2x-15$이므로

$f(1)=10-7+2-15=-10$

$\therefore a+f(1)=7+(-10)=-3$

35-1 답 -35

$f(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로 $f(2)=0$

$8-8+2a+4=0 \quad \therefore a=-2$ ……❶

즉 $f(x)=x^3-2x^2-2x+4$이므로 $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(-3)=-27-18+6+4=-35$ ……❷

채점 기준	비율
❶ 인수정리를 이용하여 a의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ 나머지정리를 이용하여 $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	50%

36 답 8

$f(x+1)$이 $x-2$로 나누어떨어지므로 $f(2+1)=f(3)=0$

$f(x-1)$이 $x+2$로 나누어떨어지므로 $f(-2-1)=f(-3)=0$

$f(3)=0$에서 $27+3a+b=0$

$\therefore 3a+b=-27$ ……㉠

$f(-3)=0$에서 $-27-3a+b=0$

$\therefore 3a-b=-27$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-9$, $b=0$

$\therefore f(x)=x^3-9x$

따라서 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-1)=-1-(-9)=8$

36-1 답 -8

$f(x-2)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로

$f(-1-2)=f(-3)=0$

$f(1-x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로

$f(1-2)=f(-1)=0$

$f(-3)=0$에서 $-27+9a-3b-6=0$

$\therefore 3a-b=11$ ……㉠

$f(-1)=0$에서 $-1+a-b-6=0$

$\therefore a-b=7$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-5$

$\therefore f(x)=x^3+2x^2-5x-6$

따라서 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)=1+2-5-6=-8$

37 답 4

$f(x)=x^3+x^2+ax+b$라 하면 $f(x)$가 x^2-x-6, 즉 $(x+2)(x-3)$으로 나누어떨어지므로 $f(-2)=0$, $f(3)=0$

$f(-2)=0$에서 $-8+4-2a+b=0$

$\therefore 2a-b=-4$ ……㉠

$f(3)=0$에서 $27+9+3a+b=0$

$\therefore 3a+b=-36$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-8$, $b=-12$

$\therefore a-b=-8-(-12)=4$

37-1 답 ①

$f(x)=x^3-2ax^2+bx+6$이라 하면 $f(x)$가 x^2-1, 즉 $(x+1)(x-1)$로 나누어떨어지므로 $f(-1)=0$, $f(1)=0$

$f(-1)=0$에서 $-1-2a-b+6=0$

$\therefore 2a+b=5$ ……㉠

$f(1)=0$에서 $1-2a+b+6=0$

$\therefore 2a-b=7$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

$\therefore a+b=3+(-1)=2$

38 답 33

$f(x)=3x^3+ax^2-bx-30$이라 하면 $f(x)$가 $x^2+3x-10$을 인수로 가지므로 $f(x)$는 $x^2+3x-10$으로 나누어떨어진다.

이때 $x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$이므로

$f(-5)=0$, $f(2)=0$

$f(-5)=0$에서 $-375+25a+5b-30=0$

$\therefore 5a+b=81$ ……㉠

$f(2)=0$에서 $24+4a-2b-30=0$

$\therefore 2a-b=3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=12$, $b=21$

$\therefore a+b=12+21=33$

38-1 답 -10

$f(x)=2x^3+x^2+ax+b$라 하면 $f(x)$가 x^2+x-2를 인수로 가지므로 $f(x)$는 x^2+x-2로 나누어떨어진다.

이때 $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$이므로

$f(-2)=0$, $f(1)=0$ ……❶

$f(-2)=0$에서 $-16+4-2a+b=0$

$\therefore 2a-b=-12$ ……㉠

$f(1)=0$에서 $2+1+a+b=0$

$\therefore a+b=-3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=2$ ……❷

$\therefore ab=-5\times2=-10$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 인수정리를 이용하여 $f(-2)$, $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

39 답 20

$f(x)$가 $(x+1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=0$, $f(2)=0$

$f(-1)=0$에서 $-1+1-a+b=0$

$\therefore a-b=0$ ……㉠

$f(2)=0$에서 $8+4+2a+b=0$

$\therefore 2a+b=-12$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=-4$

$\therefore f(x)=x^3+x^2-4x-4$

따라서 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(3)=27+9-12-4=20$

39-1 답 4

$f(x)$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(1)=0$

$1+a+b+2=0$ $\quad\therefore b=-a-3$ ……㉠

㉠을 $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$에 대입하면

$f(x)=x^3+ax^2+(-a-3)x+2$

조립제법을 이용하여 나눗셈을 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a & -a-3 & 2 \\ & & 1 & a+1 & -2 \\ \hline & 1 & a+1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)\{x^2+(a+1)x-2\}$

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$Q(x)=x^2+(a+1)x-2$

이때 $Q(x)$도 $x-1$로 나누어떨어지므로 $Q(1)=0$

$1+a+1-2=0$ $\quad\therefore a=0$

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $b=-3$

$\therefore f(x)=x^3-3x+2$

따라서 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2)=8-6+2=4$

> **참고** $f(x)$가 $(x-a)^2$ 으로 나누어떨어지면 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 몫이 $x-a$로 나누어떨어진다.
> 즉 $f(x)=(x-a)^2Q(x)=(x-a)\{(x-a)Q(x)\}$이므로 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 몫인 $(x-a)Q(x)$는 $x-a$로 다시 나누어떨어진다.

40 답 -3

$f(x)-1$이 $x-1$로 나누어떨어지므로

$f(1)-1=0$ $\quad\therefore f(1)=1$

즉 $a+b+3=1$이므로 $a+b=-2$ ……㉠

$f(x)+1$이 $x+1$로 나누어떨어지므로

$f(-1)+1=0$ $\quad\therefore f(-1)=-1$

즉 $a-b+3=-1$이므로 $a-b=-4$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=1$

$\therefore ab=-3\times1=-3$

40-1 답 40

$f(x)-5$가 $x+1$로 나누어떨어지므로

$f(-1)-5=0$ $\quad\therefore f(-1)=5$

즉 $-1+a-b=5$이므로 $a-b=6$ ……㉠

$f(x)+4$가 $x-2$로 나누어떨어지므로

$f(2)+4=0$ $\quad\therefore f(2)=-4$

즉 $8+4a+2b=-4$이므로 $2a+b=-6$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-6$

따라서 $f(x)=x^3-6x$이므로
$f(4)=64-24=40$

41 답 ④

삼차다항식 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x^2+x+1)(ax+b)$ ······㉠
$f(x)-3$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면
$f(x)-3=(x^2-1)Q'(x)$
$\quad=(x-1)(x+1)Q'(x)$
$\therefore f(1)=3,\ f(-1)=3$
㉠에서
$f(1)=3(a+b)=3 \quad \therefore a+b=1$ ······㉡
$f(-1)=-a+b=3 \quad \therefore a-b=-3$ ······㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$
따라서 $f(x)=(x^2+x+1)(-x+2)$이므로
$f(0)=1\times2=2$

41-1 답 ⑤

삼차다항식 $f(x)$를 x^2-x-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x^2-x-1)(ax+b)$ ······㉠
$f(x)+5$를 x^2+3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면
$f(x)+5=(x^2+3x+2)Q'(x)$
$\quad=(x+1)(x+2)Q'(x)$
$\therefore f(-1)=-5,\ f(-2)=-5$
㉠에서
$f(-1)=-a+b=-5 \quad \therefore a-b=5$ ······㉡
$f(-2)=5(-2a+b)=-5 \quad \therefore 2a-b=1$ ······㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=-9$
따라서 $f(x)=(x^2-x-1)(-4x-9)$이므로
$f(1)=-1\times(-13)=13$

42 답 10

나머지정리에 의하여 $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$
즉 $f(1)-1=0$, $f(2)-2=0$, $f(3)-3=0$이므로
$f(x)-x$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 나누어떨어진다.
이때 $f(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차다항식이므로
$f(x)-x=(x-1)(x-2)(x-3)$
$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+x$
따라서 $f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는
$f(4)=3\times2\times1+4=10$

42-1 답 8

나머지정리에 의하여 $f(2)=f(3)=f(4)=2$
즉 $f(2)-2=0$, $f(3)-2=0$, $f(4)-2=0$이므로
$f(x)-2$는 $x-2$, $x-3$, $x-4$로 나누어떨어진다.
이때 $f(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차다항식이므로
$f(x)-2=(x-2)(x-3)(x-4)$
$\therefore f(x)=(x-2)(x-3)(x-4)+2$
따라서 $f(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는
$f(5)=3\times2\times1+2=8$

유형+ 완성하기 p.47

43 답 ③

$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$
$=(x-1)\{a(x-1)^2+b(x-1)+c\}+d$
$=(x-1)[(x-1)\{a(x-1)+b\}+c]+d$
즉 상수 b, c, d는 $2x^3-4x^2+x+1$을 $x-1$로 계속해서 나누었을 때 나머지와 같다.
$x-1$로 나누는 조립제법을 몫에 대하여 연속으로 하면 오른쪽과 같으므로
$a=2$, $b=2$, $c=-1$, $d=0$
$\therefore ab+cd$
$\quad=2\times2+(-1)\times0$
$\quad=4$

$$\begin{array}{r|rrrl}
1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\
 & & 2 & -2 & -1 \\ \hline
1 & 2 & -2 & -1 & 0 \rightarrow d \\
 & & 2 & 0 & \\ \hline
1 & 2 & 0 & -1 \rightarrow c & \\
 & & 2 & & \\ \hline
 & 2 & 2 \rightarrow b & & \\
 & \downarrow & & & \\
 & a & & &
\end{array}$$

44 답 (1) $f(x)=(x-2)^4+(x-2)^2-6(x-2)$
(2) $f(2-y)=y^4+y^2+6y$ (3) 6

(1) $f(x)$를 $x-2$로 나누는 조립제법을 몫에 대하여 연속으로 하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 1 & -8 & 25 & -42 & 32 \\
 & & 2 & -12 & 26 & -32 \\ \hline
2 & 1 & -6 & 13 & -16 & 0 \\
 & & 2 & -8 & 10 & \\ \hline
2 & 1 & -4 & 5 & -6 & \\
 & & 2 & -4 & & \\ \hline
2 & 1 & -2 & 1 & & \\
 & & 2 & & & \\ \hline
 & 1 & 0 & & &
\end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-2)^4+(x-2)^2-6(x-2)$

(2) $f(2-y)=(2-y-2)^4+(2-y-2)^2-6(2-y-2)$
$\quad=y^4+y^2+6y$

(3) (2)에서 $y=0.01$을 대입하면
$f(1.99)=(0.01)^4+(0.01)^2+0.06$
따라서 $f(1.99)$의 소수점 아래 둘째 자리의 숫자는 6이다.

45 답 -9

$8x^3-8x^2-4x+6$을 $x-\frac{1}{2}$로 나누는 조립제법을 몫에 대하여 연속으로 하면 오른쪽과 같다.
$\therefore 8x^3-8x^2-4x+6$
$=8\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$
$\quad-6\left(x-\frac{1}{2}\right)+3$
$=(2x-1)^3+(2x-1)^2$
$\quad-3(2x-1)+3$

$$\begin{array}{r|rrrr}
\frac{1}{2} & 8 & -8 & -4 & 6 \\
 & & 4 & -2 & -3 \\ \hline
\frac{1}{2} & 8 & -4 & -6 & 3 \\
 & & 4 & 0 & \\ \hline
\frac{1}{2} & 8 & 0 & -6 & \\
 & & 4 & & \\ \hline
 & 8 & 4 & &
\end{array}$$

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=-3$, $d=3$이므로
$abcd=1\times1\times(-3)\times3=-9$

46 답 ⑤

$f(x)=x^{55}$이라 하면 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 $f(-1)=-1$이므로 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{55}=(x+1)Q(x)-1$

위의 식의 양변에 $x=57$을 대입하면

$57^{55}=58Q(57)-1=58\{Q(57)-1\}+58-1$

$\quad=58\{Q(57)-1\}+57$

따라서 57^{55}을 58로 나누었을 때의 나머지는 57이다.

47 답 ④

$f(x)=x^{97}+x^{99}+x^{101}$이라 하면 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 $f(-1)=-3$이므로 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{97}+x^{99}+x^{101}=(x+1)Q(x)-3$

위의 식의 양변에 $x=10$을 대입하면

$10^{97}+10^{99}+10^{101}=11Q(10)-3=11\{Q(10)-1\}+11-3$

$\quad=11\{Q(10)-1\}+8$

따라서 $10^{97}+10^{99}+10^{101}$을 11로 나누었을 때의 나머지는 8이다.

48 답 (1) $R(x)=-x$ (2) 100

(1) $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^{50}=x(x+1)Q(x)+ax+b$ ⋯⋯㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=b$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^{50}=-a+b \qquad \therefore a=-1$

$\therefore R(x)=-x$

(2) (1)에서 $x^{50}=x(x+1)Q(x)-x$

위의 식의 양변에 $x=10$을 대입하면

$10^{50}=110Q(10)-10$

$\quad=110\{Q(10)-1\}+110-10$

$\quad=110\{Q(10)-1\}+100$

따라서 10^{50}을 110으로 나누었을 때의 나머지는 100이다.

학교 시험 대비 문제

p.48~51

01 답 ②

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$a-2b+c=12$ ⋯⋯㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-3b+c=11$ ⋯⋯㉡

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$9a+c=32$ ⋯⋯㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-2$, $c=5$

$\therefore 3a+2b+c=9+(-4)+5=10$

02 답 4

$f_1(x)=x-1$, $f_2(x)=(x-1)(x-2)$,

$f_3(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$이므로

$a(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)+d$

$=-x^3+x^2+8x-2$ ⋯⋯㉠

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $d=-1+1+8-2=6$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $c+d=-8+4+16-2=10$

$c+6=10 \qquad \therefore c=4$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$2b+2c+d=-27+9+24-2=4$

$2b+8+6=4 \qquad \therefore b=-5$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $-6a+2b-c+d=-2$

$-6a-10-4+6=-2 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore a+b+c+d=-1+(-5)+4+6=4$

03 답 ①

$x-y=1$에서 $y=x-1$

이 식을 $ax^2+y^2+3x-by+c=0$에 대입하면

$ax^2+(x-1)^2+3x-b(x-1)+c=0$

$\therefore (a+1)x^2+(1-b)x+b+c+1=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+1=0$, $1-b=0$, $b+c+1=0$

$\therefore a=-1$, $b=1$, $c=-2$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(-1)^2+1^2+(-2)^2=6$

04 답 511

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$(-1)^{10}=a_0 \qquad \therefore a_0=1$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{19}+a_{20}$ ⋯⋯㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$2^{10}=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{19}+a_{20}$ ⋯⋯㉡

㉠+㉡을 하면 $2^{10}=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{18}+a_{20})$

$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{18}+a_{20}=2^9=512$

$\therefore a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{18}+a_{20}=512-1=511$

05 답 ②

$x^4+ax^3+2x^2+bx+3$을 x^2+x+6으로 나누었을 때의 몫을 x^2+px+q (p, q는 상수)라 하면

$x^4+ax^3+2x^2+bx+3$

$=(x^2+x+6)(x^2+px+q)+2x-3$

$=x^4+(p+1)x^3+(p+q+6)x^2+(6p+q+2)x+6q-3$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=p+1$, $2=p+q+6$, $b=6p+q+2$, $3=6q-3$

$\therefore p=-5$, $q=1$, $a=-4$, $b=-27$

$\therefore a-b=-4-(-27)=23$

06 답 ①

$f(x)=x^3-2x^2+3x+4$라 하면 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(1)=1-2+3+4=6$

07 답 ⑤

나머지정리에 의하여 $f(1)+g(1)=7$, $f(1)-g(1)=1$

두 식을 연립하여 풀면 $f(1)=4$, $g(1)=3$

따라서 $f(x)g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)g(1)=4\times3=12$

08 답 ②

$(x-1)p(x)=(x-3)q(x)$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$2p(3)=0 \qquad \therefore p(3)=0$

$p(x)$는 이차다항식이므로

$p(x)=(x-3)(ax+b)$ (a, b는 상수, $a\neq0$) ······ ㉡

라 하자.

㉡을 ㉠에 대입하면

$(x-1)(x-3)(ax+b)=(x-3)q(x)$

$\therefore q(x)=(x-1)(ax+b)$ ······ ㉢

이때 나머지정리에 의하여 $p(1)=2$, $q(2)=1$이므로

㉡에서 $p(1)=-2(a+b)=2$

$\therefore a+b=-1$

㉢에서 $q(2)=2a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

따라서 $p(x)=(x-3)(2x-3)$이므로

$p(0)=-3\times(-3)=9$

09 답 -3

$f(x)=x^3+ax^2-x+b$라 하고 $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+x+3$

$\therefore f(-1)=-1+3=2$, $f(2)=2+3=5$

$f(-1)=2$에서 $-1+a+1+b=2$

$\therefore a+b=2$ ······ ㉠

$f(2)=5$에서 $8+4a-2+b=5$

$\therefore 4a+b=-1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$

$\therefore ab=-1\times3=-3$

10 답 $-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

나머지정리에 의하여 $f(1)=1$, $f(-2)=3$

$f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$

$f(1)=1$에서 $a+b=1$ ······ ㉠

$f(-2)=3$에서 $-2a+b=3$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{2}{3}$, $b=\frac{5}{3}$

따라서 구하는 나머지는 $-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$이다.

11 답 $3x^2-x-1$

$f(x)$를 x^3+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x^3+1)Q(x)+ax^2+bx+c$

$\quad\;=(x+1)(x^2-x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$

이때 $f(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지가 $2x-4$이므로 ax^2+bx+c를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지도 $2x-4$이다.

즉 $ax^2+bx+c=a(x^2-x+1)+2x-4$이므로

$f(x)=(x+1)(x^2-x+1)Q(x)+a(x^2-x+1)+2x-4$ ······ ㉠

또 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 나머지정리에 의하여 $f(-1)=3$

㉠에서 $f(-1)=3a-6=3$이므로 $a=3$

따라서 구하는 나머지는

$3(x^2-x+1)+2x-4=3x^2-x-1$

12 답 10

$f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-4)Q(x)+x+5$

$\quad\;=(x+2)(x-2)Q(x)+x+5$ ······ ㉠

$f(6x)$를 $3x-1$로 나누었을 때의 나머지 R_1은

$R_1=f\left(6\times\frac{1}{3}\right)=f(2)$

$f(x+1002)$를 $x+1004$로 나누었을 때의 나머지 R_2는

$R_2=f(-1004+1002)=f(-2)$

㉠에서 $f(2)=2+5=7$, $f(-2)=-2+5=3$이므로

$R_1=7$, $R_2=3 \qquad \therefore R_1+R_2=7+3=10$

13 답 17

$f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 5이므로

$f(x)=(x+2)Q(x)+5$ ······ ㉠

$Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로

$Q(2)=3$

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $f(2)$이므로 ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=4Q(2)+5=4\times3+5=17$

14 답 5

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이므로

$f(x)=(x-2)Q(x)+3$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=3$

$Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 2이므로

$Q(1)=2$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=-Q(1)+3=-2+3=1$

이때 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)(x-2)Q'(x)+R(x)$

$\quad\;=(x-1)(x-2)Q'(x)+ax+b$

$f(2)=3$에서 $2a+b=3$ ······ ㉡

$f(1)=1$에서 $a+b=1$ ······ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

따라서 $R(x)=2x-1$이므로

$R(3)=6-1=5$

15 답 $-\frac{14}{3}$

$f(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로 $f(2)=0$

$8+4a+2b-3=0 \qquad \therefore 4a+2b=-5$ ······㉠

$f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로 $f(-1)=5$

$-1+a-b-3=5 \qquad \therefore a-b=9$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{13}{6}$, $b=-\frac{41}{6}$

$\therefore a+b=\frac{13}{6}+\left(-\frac{41}{6}\right)=-\frac{14}{3}$

16 답 -6

$f(x)$가 $x+2$로 나누어떨어지므로 $f(-2)=0$

$-8-12-2a+4=0 \qquad \therefore a=-8$

즉 $f(x)=x^3-3x^2-8x+4$이므로 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)=1-3-8+4=-6$

17 답 4

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+3$이라 하면 $f(x)$가 x^2-1을 인수로 가지므로 $f(x)$는 x^2-1로 나누어떨어진다.

이때 $x^2-1=(x+1)(x-1)$이므로

$f(-1)=0$, $f(1)=0$

$f(-1)=0$에서 $1-a+b+3=0$

$\therefore a-b=4$ ······㉠

$f(1)=0$에서 $1+a+b+3=0$

$\therefore a+b=-4$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-4$

$\therefore 2a-b=0-(-4)=4$

18 답 ④

삼차다항식 $f(x)$를 x^2-2x-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-2x-1)(ax+b)$ ······㉠

$f(x)-7$을 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면

$f(x)-7=(x^2-4)Q'(x)$

$\qquad =(x+2)(x-2)Q'(x)$

$\therefore f(-2)=7$, $f(2)=7$

㉠에서

$f(-2)=7(-2a+b)=7 \qquad \therefore -2a+b=1$ ······㉡

$f(2)=-(2a+b)=7 \qquad \therefore 2a+b=-7$ ······㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-3$

따라서 $f(x)=(x^2-2x-1)(-2x-3)$이므로

$f(4)=7\times(-11)=-77$

19 답 ④

$f(-1)=f(0)=f(2)=2$이므로

$f(-1)-2=0$, $f(0)-2=0$, $f(2)-2=0$

즉 $f(x)-2$는 $x+1$, x, $x-2$로 나누어떨어진다.

이때 $f(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차다항식이므로

$f(x)-2=x(x+1)(x-2)$

$\therefore f(x)=x(x+1)(x-2)+2$

$f(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $ax+b$이므로

$x(x+1)(x-2)+2=(x^2-2x-3)Q(x)+ax+b$

$\therefore x(x+1)(x-2)+2=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$ ···㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $2=-a+b$ ······㉡

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면 $14=3a+b$ ······㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=5$

$\therefore ab=3\times5=15$

20 답 ①

$2x^2+3x+7$을 $x+1$로 나누는 조립제법을 몫에 대하여 연속으로 하면 오른쪽과 같으므로

$$\begin{array}{r|rrr}
-1 & 2 & 3 & 7 \\
 & & -2 & -1 \\
\hline
-1 & 2 & 1 & \boxed{6} \to c \\
 & & -2 & \\
\hline
 & 2 & \boxed{-1} \to b & \\
 & \downarrow & & \\
 & a & &
\end{array}$$

$a=2$, $b=-1$, $c=6$

$\therefore a+b+c=2+(-1)+6$

$\qquad =7$

21 답 ④

$f(x)=x^{10}$이라 하면 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 $f(2)=2^{10}$이므로 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{10}=(x-2)Q(x)+2^{10}$

위의 식의 양변에 $x=49$를 대입하면

$49^{10}=47Q(49)+2^{10}$

즉 49^{10}을 47로 나누었을 때의 나머지는 2^{10}을 47로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때 $2^{10}=1024=47\times21+37$이므로 49^{10}을 47로 나누었을 때의 나머지는 37이다.

서술형 1 답 (1) 1 (2) 16 (3) 81

(1) 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$(-1)^4=a_0 \qquad \therefore a_0=1$ ······❶

(2) $(2x-1)^4$을 전개하면 x^4항은 $2^4\times x^4=16x^4$이므로

$a_4=16$ ······❷

(3) 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-3)^4=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4$

$\therefore a_0-a_1+a_2-a_3+a_4=81$ ······❸

채점 기준	비율
❶ a_0의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ a_4의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4$의 값을 구할 수 있다.	40%

서술형 2 답 $-x+3$

나머지정리에 의하여

$P(1)=2$, $P(-1)=4$ ······❶

$P(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$\qquad =(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$

$P(1)=2$에서 $a+b=2$ ······㉠

$P(-1)=4$에서 $-a+b=4$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$ ······❷

따라서 $P(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지는 $-x+3$이다. ······❸

채점 기준	비율
❶ $P(1)$, $P(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ 구하는 나머지를 $ax+b$로 놓고 a, b의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ $P(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 -7

$f(1)=-1$, $f(3)=-3$, $f(5)=-5$이므로
$f(1)+1=0$, $f(3)+3=0$, $f(5)+5=0$
즉 $f(x)+x$는 $x-1$, $x-3$, $x-5$로 나누어떨어진다. ……❶
이때 $f(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차다항식이므로
$f(x)+x=(x-1)(x-3)(x-5)$
$\therefore f(x)=(x-1)(x-3)(x-5)-x$ ……❷
따라서 $f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는
$f(4)=3\times1\times(-1)-4=-7$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $f(x)+x$의 인수를 구할 수 있다.	40%
❷ 삼차다항식 $f(x)$를 구할 수 있다.	30%
❸ $f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	30%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 52~53

01 답 ①

$(a+2)x^2+(2-x)a^2+(2-x)b=0$에서
$(a+2)x^2-(a^2+b)x+2a^2+2b=0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a+2=0$, $a^2+b=0$, $2a^2+2b=0$
$\therefore a=-2$, $b=-4$
$\therefore a+b=-2+(-4)=-6$

02 답 256

x^4을 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $q(x)$, 나머지가 r_1이므로
$x^4=(x-1)q(x)+r_1$ ……㉠
$q(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지가 r_2이므로 나머지정리에 의하여
$q(4)=r_2$
㉠의 양변에 $x=4$를 대입하면 $4^4=3q(4)+r_1$
$4^4=3r_2+r_1$ $\therefore r_1+3r_2=256$

03 답 40

$P(x)$를 $x-k$로 나누었을 때의 나머지는
$P(k)=k^3+k^2+k+1$
$P(x)$를 $x+k$로 나누었을 때의 나머지는
$P(-k)=-k^3+k^2-k+1$
이때 나머지의 합이 8이므로
$P(k)+P(-k)=8$
$k^3+k^2+k+1+(-k^3+k^2-k+1)=8$
$2k^2+2=8$ $\therefore k^2=3$
따라서 $P(x)$를 $x-k^2$으로 나누었을 때의 나머지는
$P(k^2)=(k^2)^3+(k^2)^2+k^2+1=3^3+3^2+3+1=40$

04 답 ①

$f(x)$를 $(x-2)(x+1)$로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$
(a, b는 상수)라 하면 (다)에 의하여 몫은 $ax+b$이므로
$f(x)=(x-2)(x+1)(ax+b)+ax+b$
(가), (나)에서 나머지정리에 의하여
$f(2)=7$, $f(-1)=1$
$f(2)=7$에서 $2a+b=7$ ……㉠
$f(-1)=1$에서 $-a+b=1$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=2$, $b=3$
따라서 $f(x)=(x-2)(x+1)(2x+3)+2x+3$이므로
$f(0)=-2\times1\times3+3=-3$

05 답 40

$f(x)=x^4+ax+b$라 하면 $f(x)$가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어지므로
$f(2)=0$
$16+2a+b=0$ $\therefore b=-2a-16$ ……㉠
㉠을 $f(x)=x^4+ax+b$에 대입하면
$f(x)=x^4+ax-2a-16$
조립제법을 이용하여 나눗셈을 하면

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 2 & 1 & 0 & 0 & a & -2a-16 \\ & & 2 & 4 & 8 & 2a+16 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & a+8 & 0 \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-2)(x^3+2x^2+4x+a+8)$
$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면
$Q'(x)=x^3+2x^2+4x+a+8$
이때 $Q'(x)$도 $x-2$로 나누어떨어지므로 $Q'(2)=0$
$8+8+8+a+8=0$ $\therefore a=-32$
$a=-32$를 ㉠에 대입하면
$b=64-16=48$
즉 $Q'(x)=x^3+2x^2+4x-24$이므로 조립제법을 이용하여 $Q'(x)$를 $x-2$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrr|r} 2 & 1 & 2 & 4 & -24 \\ & & 2 & 8 & 24 \\ \hline & 1 & 4 & 12 & 0 \end{array}$$

따라서 $f(x)=(x-2)^2(x^2+4x+12)$이므로
$Q(x)=x^2+4x+12$ $\therefore Q(2)=4+8+12=24$
$\therefore a+b+Q(2)=-32+48+24=40$

06 답 106

$f(x)+2$는 $x+2$로 나누어떨어지므로
$f(x)+2=(x+2)(x+k)$ (k는 상수)
$\therefore f(x)=(x+2)(x+k)-2$ ……㉠
$f(x)-2$는 $x-2$로 나누어떨어지므로
$f(2)-2=0$ $\therefore f(2)=2$
$x=2$를 ㉠에 대입하면
$f(2)=4(2+k)-2$
$2=4(2+k)-2$, $2=4k+6$
$4k=-4$ $\therefore k=-1$
따라서 $f(x)=(x+2)(x-1)-2$이므로
$f(10)=12\times9-2=106$

07 답 ①

(가)의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=-6P(1)$ $\quad\therefore P(1)=0$

(가)의 등식의 양변에 $x=7$을 대입하면

$6P(5)=0$ $\quad\therefore P(5)=0$

이때 $P(x)$는 삼차다항식이므로 (나)에 의하여

$P(x)=(x^2-4x+2)(ax+b)+2x-10$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

$P(1)=0$에서 $-a-b-8=0$ $\quad\therefore a+b=-8$ ······㉠

$P(5)=0$에서 $7(5a+b)=0$ $\quad\therefore 5a+b=0$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-10$

따라서 $P(x)=(x^2-4x+2)(2x-10)+2x-10$이므로

$P(4)=(16-16+2)(8-10)+8-10=-6$

08 답 ②

(가)에서 $f(x)-g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 a (a는 상수)라 하면

$f(x)-g(x)=(x-2)a+a=a(x-1)$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)-g(1)=0$ ······㉠

(나)에서 $f(x)g(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)g(x)=(x^2-1)Q(x)$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)g(1)=0$ ······㉡

㉠, ㉡에 의하여 $f(1)=g(1)=0$

즉 $f(x)$와 $g(x)$는 각각 $x-1$을 인수로 가지므로

$f(x)=(x-1)(x+p)$, $g(x)=(x-1)(x+q)$ (p, q는 상수)

라 하자.

이때 $g(4)=3(4+q)=3$이므로 $q=-3$

$\therefore g(x)=(x-1)(x-3)$

$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-3)(x+p)=(x^2-1)Q(x)$

이 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-2)^2\times(-4)\times(-1+p)=0$ $\quad\therefore p=1$

따라서 $f(x)=(x-1)(x+1)$이므로

$f(2)+g(2)=3+(-1)=2$

09 답 ⑤

(가)의 식을 (나)의 식에 대입하면

$x^2f(x)+(3x^2+4x)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$

$\therefore 4x(x+1)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $b=0$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-1+a-2+b$ $\quad\therefore a+b=3$

위의 식에 $b=0$을 대입하면 $a=3$

$\therefore 4x(x+1)f(x)=x^3+3x^2+2x$ ······㉡

$g(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는 $g(4)$이므로 (가)에서

$g(4)=4^2f(4)=16f(4)$

㉡의 양변에 $x=4$를 대입하면

$16\times5f(4)=64+48+8=120$

$\therefore 16f(4)=24$

따라서 $g(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는 24이다.

10 답 46

$P(x)=(x^2-x-1)(ax+b)+2$ ······㉠

$P(x+1)$을 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 -3이므로

$P(x+1)=(x^2-4)Q(x)-3$

$\qquad=(x-2)(x+2)Q(x)-3$ ······㉡

㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면 $P(3)=-3$

㉡의 양변에 $x=-2$를 대입하면 $P(-1)=-3$

㉠의 양변에 $x=-1$, $x=3$을 각각 대입하면

$P(-1)=-a+b+2=-3$ $\quad\therefore a-b=5$ ······㉢

$P(3)=5(3a+b)+2=-3$ $\quad\therefore 3a+b=-1$ ······㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-4$

$\therefore 50a+b=50+(-4)=46$

11 답 ③

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 R_1이라 하면

$f(x)=(x-1)Q_1(x)+R_1$ ······㉠

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 R_2라 하면

$f(x)=(x-2)Q_2(x)+R_2$ ······㉡

㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면 (가)에서

$R_2=f(2)=Q_2(1)$ ······㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $f(x)=(x-2)Q_2(x)+Q_2(1)$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=-Q_2(1)+Q_2(1)=0$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=R_1=0$

즉 $f(x)$는 $x-1$로 나누어떨어진다.

이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로

$Q_1(x)=x+a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)(x+a)$

즉 $Q_1(1)=1+a$, $f(2)=2+a=Q_2(1)$이므로 (나)에서

$Q_1(1)+Q_2(1)=(1+a)+(2+a)=2a+3=6$

$\therefore a=\frac{3}{2}$, $f(x)=(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$

$\therefore f(3)=(3-1)\left(3+\frac{3}{2}\right)=9$

12 답 ③

ㄱ. $\{f(0)\}^3=1$이므로 $f(0)=1$

즉 다항식 $f(x)$를 x로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

ㄴ. $f(x)$의 차수를 n이라 하면 좌변의 차수는 $3n$, 우변의 차수는 $n+2$이므로 $3n=n+2$ $\quad\therefore n=1$

즉 $f(x)$는 일차식이므로 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a>0$)라 하면 좌변의 최고차항의 계수는 a^3, 우변의 최고차항의 계수는 $4a$이므로 $a^3=4a$

이때 $a>0$이므로 $a^2=4$ $\quad\therefore a=2$

즉 $f(x)$의 최고차항의 계수는 2이다.

ㄷ. $\{f(x)\}^3$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $cx+d$ (c, d는 상수)라 하면

$\{f(x)\}^3=(x^2-1)Q(x)+cx+d$

$\qquad=(x+1)(x-1)Q(x)+cx+d$

이때 ㄱ, ㄴ에 의하여 $f(x)=2x+1$이므로

$(2x+1)^3=(x+1)(x-1)Q(x)+cx+d$

이 등식의 양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$(-1)^3=-c+d$ $\quad\therefore c-d=1$ ······㉠

$3^3=c+d$ $\quad\therefore c+d=27$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $c=14$, $d=13$

즉 $\{f(x)\}^3$을 x^2-1로 나누었을 때의 나머지는 $14x+13$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

03 인수분해

I 다항식

개념 완성하기 p. 57~58

01 답 $2a^2(a-2)$

02 답 $a(a-b+2c)$

03 답 $xy(x+y)$

04 답 $(a-b)(c+d)$

05 답 $(a+4)(a-2)$

06 답 $(x-y)(-a+b)$

$$\begin{aligned} a(y-x)+b(x-y) &= -a(x-y)+b(x-y) \\ &= (x-y)(-a+b) \end{aligned}$$

07 답 $(3x+1)^2$

$9x^2+6x+1=(3x)^2+2\times 3x\times 1+1^2=(3x+1)^2$

08 답 $(2x-3y)^2$

$4x^2-12xy+9y^2=(2x)^2-2\times 2x\times 3y+(3y)^2=(2x-3y)^2$

09 답 $(x+y-z)(x-y+z)$

$$\begin{aligned} x^2-(y-z)^2 &= \{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\} \\ &= (x+y-z)(x-y+z) \end{aligned}$$

10 답 $(3x+2)(2x-1)$

11 답 $(x+1)^3$

$$\begin{aligned} x^3+3x^2+3x+1 &= x^3+3\times x^2\times 1+3\times x\times 1^2+1^3 \\ &= (x+1)^3 \end{aligned}$$

12 답 $(a-1)^3$

$$\begin{aligned} a^3-3a^2+3a-1 &= a^3-3\times a^2\times 1+3\times a\times 1^2-1^3 \\ &= (a-1)^3 \end{aligned}$$

13 답 $(3x+1)^3$

$$\begin{aligned} 27x^3+27x^2+9x+1 &= (3x)^3+3\times(3x)^2\times 1+3\times 3x\times 1^2+1^3 \\ &= (3x+1)^3 \end{aligned}$$

14 답 $(2x-1)^3$

$$\begin{aligned} 8x^3-12x^2+6x-1 &= (2x)^3-3\times(2x)^2\times 1+3\times 2x\times 1^2-1^3 \\ &= (2x-1)^3 \end{aligned}$$

15 답 $(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$

$a^3+27b^3=a^3+(3b)^3=(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$

16 답 $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$

$a^3-8b^3=a^3-(2b)^3=(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$

17 답 $(x+y+1)^2$

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+2xy+2x+2y+1 \\ &= x^2+y^2+1^2+2\times x\times y+2\times y\times 1+2\times 1\times x \\ &= (x+y+1)^2 \end{aligned}$$

18 답 $(a-b-c)^2$

$$\begin{aligned} & a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca \\ &= a^2+(-b)^2+(-c)^2+2\times a\times(-b) \\ &\qquad +2\times(-b)\times(-c)+2\times(-c)\times a \\ &= (a-b-c)^2 \end{aligned}$$

19 답 $(x-2y-1)^2$

$$\begin{aligned} & x^2+4y^2-4xy-2x+4y+1 \\ &= x^2+(-2y)^2+(-1)^2+2\times x\times(-2y) \\ &\qquad +2\times(-2y)\times(-1)+2\times(-1)\times x \\ &= (x-2y-1)^2 \end{aligned}$$

20 답 $(x-2y-3z)^2$

$$\begin{aligned} & x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6zx \\ &= x^2+(-2y)^2+(-3z)^2+2\times x\times(-2y) \\ &\qquad +2\times(-2y)\times(-3z)+2\times(-3z)\times x \\ &= (x-2y-3z)^2 \end{aligned}$$

21 답 $(a+b-1)(a^2+b^2+1-ab+b+a)$

$$\begin{aligned} & a^3+b^3+3ab-1 \\ &= a^3+b^3+(-1)^3-3\times a\times b\times(-1) \\ &= \{a+b+(-1)\}\{a^2+b^2+(-1)^2-ab-b\times(-1)-(-1)\times a\} \\ &= (a+b-1)(a^2+b^2+1-ab+b+a) \end{aligned}$$

22 답 $(x+4)(x-1)$

$x+2=X$로 놓으면

$$\begin{aligned} (x+2)^2-(x+2)-6 &= X^2-X-6 \\ &= (X+2)(X-3) \\ &= (x+2+2)(x+2-3) \quad \to X=x+2 \text{ 대입} \\ &= (x+4)(x-1) \end{aligned}$$

23 답 $(2x-y-2)(2x-y-3)$

$2x-y=X$로 놓으면

$$\begin{aligned} (2x-y)^2-5(2x-y)+6 &= X^2-5X+6 \\ &= (X-2)(X-3) \\ &= (2x-y-2)(2x-y-3) \quad \to X=2x-y \text{ 대입} \end{aligned}$$

24 답 $(x-1)^2(x^2-2x-6)$

$x^2-2x=X$로 놓으면

$$\begin{aligned} (x^2-2x)(x^2-2x-5)-6 &= X(X-5)-6 \\ &= X^2-5X-6 \\ &= (X+1)(X-6) \\ &= (x^2-2x+1)(x^2-2x-6) \quad \to X=x^2-2x \text{ 대입} \\ &= (x-1)^2(x^2-2x-6) \end{aligned}$$

25 답 $(x^2-x+1)(x^2-x-3)$

$x^2-x=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2-x)(x^2-x-2)-3&=X(X-2)-3\\&=X^2-2X-3\\&=(X+1)(X-3)\\&=(x^2-x+1)(x^2-x-3) \quad \to X=x^2-x \text{ 대입}\end{aligned}$$

26 답 $x(x-2)(x+1)(x-3)$

$x^2-2x=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2-2x)^2-3(x^2-2x)&=X^2-3X\\&=X(X-3)\\&=(x^2-2x)(x^2-2x-3) \quad \to X=x^2-2x \text{ 대입}\\&=x(x-2)(x+1)(x-3)\end{aligned}$$

27 답 $(x+1)(x+5)(x^2+6x+3)$

$$\begin{aligned}&x(x+2)(x+4)(x+6)+15\\&=\{x(x+6)\}\{(x+2)(x+4)\}+15\\&=(x^2+6x)(x^2+6x+8)+15\end{aligned}$$

$x^2+6x=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=X(X+8)+15\\&=X^2+8X+15\\&=(X+3)(X+5)\\&=(x^2+6x+3)(x^2+6x+5) \quad \to X=x^2+6x \text{ 대입}\\&=(x+1)(x+5)(x^2+6x+3)\end{aligned}$$

28 답 $(x^2+x-5)(x^2+x-9)$

$$\begin{aligned}&(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)+21\\&=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+21\\&=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+21\end{aligned}$$

$x^2+x=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(X-2)(X-12)+21\\&=X^2-14X+45\\&=(X-5)(X-9)\\&=(x^2+x-5)(x^2+x-9) \quad \to X=x^2+x \text{ 대입}\end{aligned}$$

29 답 $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

$x^2=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}x^4-10x^2+9&=X^2-10X+9\\&=(X-1)(X-9)\\&=(x^2-1)(x^2-9) \quad \to X=x^2 \text{ 대입}\\&=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)\end{aligned}$$

30 답 $(x^2+2)(x+2)(x-2)$

$x^2=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}x^4-2x^2-8&=X^2-2X-8\\&=(X+2)(X-4)\\&=(x^2+2)(x^2-4) \quad \to X=x^2 \text{ 대입}\\&=(x^2+2)(x+2)(x-2)\end{aligned}$$

31 답 $(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$

$$\begin{aligned}x^4-3x^2+9&=(x^4+6x^2+9)-9x^2\\&=(x^2+3)^2-(3x)^2\\&=(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)\end{aligned}$$

32 답 $(x^2+3x-3)(x^2-3x-3)$

$$\begin{aligned}x^4-15x^2+9&=(x^4-6x^2+9)-9x^2\\&=(x^2-3)^2-(3x)^2\\&=(x^2+3x-3)(x^2-3x-3)\end{aligned}$$

33 답 $(a+b+2)(a-b-2)$

$$\begin{aligned}a^2-b^2-4b-4=a^2-(b^2+4b+4)&=a^2-(b+2)^2\\&=\{a+(b+2)\}\{a-(b+2)\}\\&=(a+b+2)(a-b-2)\end{aligned}$$

34 답 $(x-y)(x^2+xy+y^2-1)$

$$\begin{aligned}x^3-y^3-x+y&=(x-y)(x^2+xy+y^2)-(x-y)\\&=(x-y)(x^2+xy+y^2-1)\end{aligned}$$

35 답 $(a+b)(a-b)(b-c)$

주어진 식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}a^2b+b^2c-b^3-a^2c&=(b^2-a^2)c+a^2b-b^3\\&=-(a^2-b^2)c+b(a^2-b^2)\\&=(a^2-b^2)(-c+b)\\&=(a+b)(a-b)(b-c)\end{aligned}$$

36 답 $(x+y-1)(x-2y+2)$

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}x^2-xy-2y^2+x+4y-2&=x^2-(y-1)x-2(y^2-2y+1)\\&=x^2-(y-1)x-2(y-1)^2\\&=\{x+(y-1)\}\{x-2(y-1)\}\\&=(x+y-1)(x-2y+2)\end{aligned}$$

37 답 $(x+1)(x+2y+3)$

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}x^2+2xy+4x+2y+3&=x^2+2(y+2)x+2y+3\\&=(x+1)(x+2y+3)\end{aligned}$$

38 답 $(x+1)(x+2)(x-3)$

$f(x)=x^3-7x-6$이라 하면

$f(-1)=-1+7-6=0$이므로

조립제법을 이용하여 인수분해

하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -7 & -6 \\ & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+1)(x^2-x-6)\\&=(x+1)(x+2)(x-3)\end{aligned}$$

39 답 $(x-1)(x^2+3)$

$f(x)=x^3-x^2+3x-3$이라 하면

$f(1)=1-1+3-3=0$이므로 조립

제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & 3 & -3 \\ & & 1 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+3)$

40 답 $(x-1)(x+2)(x-2)$

$f(x)=x^3-x^2-4x+4$라 하면

$f(1)=1-1-4+4=0$이므로 조

립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & -4 & 4 \\ & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-1)(x^2-4)\\&=(x-1)(x+2)(x-2)\end{aligned}$$

41 답 $(x+1)(x-2)(x+3)$

$f(x)=x^3+2x^2-5x-6$이라 하면

$f(-1)=-1+2+5-6=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2+x-6)$

$\quad\;\;=(x+1)(x-2)(x+3)$

42 답 $(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$

$f(x)=x^4+5x^3+5x^2-5x-6$이라 하면

$f(1)=1+5+5-5-6=0$, $f(-1)=1-5+5+5-6=0$

이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 5 & 5 & -5 & -6 \\ & & 1 & 6 & 11 & 6 \\ \hline -1 & 1 & 6 & 11 & 6 & \boxed{0} \\ & & -1 & -5 & -6 & \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+5x+6)$

$\quad\;\;=(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$

43 답 $(x-1)(x+1)(x-2)(2x+3)$

$f(x)=2x^4-x^3-8x^2+x+6$이라 하면

$f(1)=2-1-8+1+6=0$, $f(-1)=2+1-8-1+6=0$

이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & -1 & -8 & 1 & 6 \\ & & 2 & 1 & -7 & -6 \\ \hline -1 & 2 & 1 & -7 & -6 & \boxed{0} \\ & & -2 & 1 & 6 & \\ \hline & 2 & -1 & -6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+1)(2x^2-x-6)$

$\quad\;\;=(x-1)(x+1)(x-2)(2x+3)$

유형 완성하기

p. 59~67

01 답 ④

① $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

$\quad=a^2+(-b)^2+c^2+2\times a\times(-b)+2\times(-b)\times c+2\times c\times a$

$\quad=(a-b+c)^2$

② $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$

$\quad=a^3+3\times a^2\times 2b+3\times a\times(2b)^2+(2b)^3$

$\quad=(a+2b)^3$

③ $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$

$\quad=(2x)^3-3\times(2x)^2\times 3y+3\times 2x\times(3y)^2-(3y)^3$

$\quad=(2x-3y)^3$

④ $27a^3+8b^3=(3a)^3+(2b)^3$

$\qquad\qquad=(3a+2b)\{(3a)^2-3a\times 2b+(2b)^2\}$

$\qquad\qquad=(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$

⑤ $x^3-8y^3=x^3-(2y)^3$

$\qquad\quad=(x-2y)\{x^2+x\times 2y+(2y)^2\}$

$\qquad\quad=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

01-1 답 ①

① $x^3+8=x^3+2^3$

$\qquad\quad=(x+2)(x^2-2x+4)$

② $a^2+(b+2)a+2b=(a+b)(a+2)$

③ $x^2-y^2+x+y=(x+y)(x-y)+(x+y)$

$\qquad\qquad\qquad=(x+y)(x-y+1)$

④ $x^2+2xy+y^2-z^2=(x+y)^2-z^2$

$\qquad\qquad\qquad\quad=(x+y+z)(x+y-z)$

⑤ $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$

$\quad=a^3-3\times a^2\times 2b+3\times a\times(2b)^2-(2b)^3$

$\quad=(a-2b)^3$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

02 답 ⑤

$x^6-y^6=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$\qquad\quad=\{(x+y)(x^2-xy+y^2)\}\{(x-y)(x^2+xy+y^2)\}$

$\qquad\quad=(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

따라서 x^6-y^6의 인수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

02-1 답 ④

$x^8-y^8=(x^4+y^4)(x^4-y^4)$

$\qquad\quad=(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x^2-y^2)$

$\qquad\quad=(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

따라서 x^8-y^8의 인수가 아닌 것은 ④이다.

03 답 1

$x^2+x^3y-xy^3-y^2=x^2-y^2+x^3y-xy^3$

$\qquad\qquad\qquad\qquad=(x^2-y^2)+xy(x^2-y^2)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad=(x^2-y^2)(xy+1)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad=(x-y)(x+y)(xy+1)$

$\therefore k=1$

03-1 답 ②

$a^3-b^3-2a^2b+2ab^2=(a-b)(a^2+ab+b^2)-2ab(a-b)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad=(a-b)(a^2+ab+b^2-2ab)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad=(a-b)(a^2-ab+b^2)$

$\therefore k=-1$

04 답 ④

$(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)-9$

$=\{(x-1)(x+5)\}\{(x+1)(x+3)\}-9$

$=(x^2+4x-5)(x^2+4x+3)-9$

$x^2+4x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X-5)(X+3)-9$

$\qquad\qquad\;=X^2-2X-24$

$\qquad\qquad\;=(X+4)(X-6)$

$\qquad\qquad\;=(x^2+4x+4)(x^2+4x-6)$ $\rightarrow X=x^2+4x$ 대입

$\qquad\qquad\;=(x+2)^2(x^2+4x-6)$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다.

04-1 답 -6

$x(x+1)(x-2)(x+3)+8=\{x(x+1)\}\{(x-2)(x+3)\}+8$
$=(x^2+x)(x^2+x-6)+8$

$x^2+x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=X(X-6)+8$
$=X^2-6X+8$
$=(X-2)(X-4)$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-4)$ → $X=x^2+x$ 대입
$=(x+2)(x-1)(x^2+x-4)$

$\therefore ab+cd=-2+(-4)=-6$

참고 $x(x+1)(x-2)(x+3)+8=(x+2)(x-1)(x^2+x-4)$ 이므로
$(x+2)(x-1)(x^2+x-4)=(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$
$\therefore a=2, b=-1, c=1, d=-4$ 또는
$a=-1, b=2, c=1, d=-4$

05 답 ③

$x^2+x=X$로 놓으면

$(x^2+x-5)(x^2+x-13)+7=(X-5)(X-13)+7$
$=X^2-18X+72$
$=(X-6)(X-12)$ $X=x^2+x$ 대입
$=(x^2+x-6)(x^2+x-12)$
$=(x+3)(x-2)(x+4)(x-3)$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ③이다.

05-1 답 ⑤

$x^2-x=X$로 놓으면

$(x^2-x-1)(x^2-x+5)-7=(X-1)(X+5)-7$
$=X^2+4X-12$
$=(X+6)(X-2)$
$=(x^2-x+6)(x^2-x-2)$ → $X=x^2-x$ 대입
$=(x+1)(x-2)(x^2-x+6)$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ⑤이다.

06 답 16

$(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+k$
$=\{(x-1)(x-7)\}\{(x-3)(x-5)\}+k$
$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+k$ ······❶

$x^2-8x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X+7)(X+15)+k$
$=X^2+22X+105+k$ ······㉠ ······❷

주어진 식이 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면 ㉠이 X에 대한 완전제곱식으로 인수분해되어야 하므로

$105+k=\left(\frac{22}{2}\right)^2$ $\therefore k=16$ ······❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 다항식을 공통부분이 생기도록 정리할 수 있다.	30%
❷ 공통부분을 하나의 문자로 치환하여 정리할 수 있다.	30%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	40%

참고 이차식 x^2+ax+b가 완전제곱식으로 인수분해되려면
$b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$

06-1 답 ①

$x^2-3=X$로 놓으면

$(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)+k$
$=(X+2x)(X-2x)+k$
$=X^2-4x^2+k$
$=(x^2-3)^2-4x^2+k$ → $X=x^2-3$ 대입
$=x^4-6x^2+9-4x^2+k$
$=x^4-10x^2+9+k$ ······㉠

㉠이 x에 대한 이차식 $f(x)$의 제곱으로 인수분해되어야 하므로

$9+k=\left(\frac{-10}{2}\right)^2$ $\therefore k=16$

$k=16$을 ㉠에 대입하면

(주어진 식)$=x^4-10x^2+25=(x^2-5)^2$이므로

$f(x)=x^2-5$

$\therefore k+f(2)=16+(4-5)=15$

07 답 $(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$

$x^2=X$로 놓으면

$x^4-13x^2+36=X^2-13X+36$
$=(X-4)(X-9)$
$=(x^2-4)(x^2-9)$ → $X=x^2$ 대입
$=(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$

07-1 답 7

$x^2=X$로 놓으면

$x^4+x^2-20=X^2+X-20$
$=(X-4)(X+5)$
$=(x^2-4)(x^2+5)$ → $X=x^2$ 대입
$=(x-2)(x+2)(x^2+5)$

따라서 $a=2$, $b=5$이므로

$a+b=2+5=7$

08 답 ②

$x^4-6x^2+25=(x^4+10x^2+25)-16x^2$
$=(x^2+5)^2-(4x)^2$
$=(x^2+4x+5)(x^2-4x+5)$

$\therefore a+b+c+d=4+5+(-4)+5=10$

08-1 답 ④

$x^4-x^2+16=(x^4+8x^2+16)-9x^2$
$=(x^2+4)^2-(3x)^2$
$=(x^2+3x+4)(x^2-3x+4)$

$\therefore a+b+c+d=3+4+(-3)+4=8$

09 답 ③

$16x^4+7x^2y^2+y^4=16x^4+8x^2y^2+y^4-x^2y^2$
$=(4x^2+y^2)^2-(xy)^2$
$=(4x^2+xy+y^2)(4x^2-xy+y^2)$

따라서 $a=4$, $b=1$ 또는 $a=4$, $b=-1$이므로

$a^2+b^2=16+1=17$

09-1 답 ①

$4x^4+81y^4=(4x^4+36x^2y^2+81y^4)-36x^2y^2$
$=(2x^2+9y^2)^2-(6xy)^2$
$=(2x^2+6xy+9y^2)(2x^2-6xy+9y^2)$

이때 $a>0$인 정수이므로 $a=6,\ b=9$

$\therefore a+b=6+9=15$

10 답 5

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2+xy-y^2+2x-7y-12$
$=2x^2+(y+2)x-(y^2+7y+12)$
$=2x^2+(y+2)x-(y+3)(y+4)$
$=\{2x-(y+4)\}\{x+(y+3)\}$
$=(2x-y-4)(x+y+3)$

따라서 $a=2,\ b=-1,\ c=1,\ d=3$이므로

$a+b+c+d=2+(-1)+1+3=5$

10-1 답 ④

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2+3xy+y^2+3x+y-2$
$=2x^2+(3y+3)x+y^2+y-2$
$=2x^2+(3y+3)x+(y+2)(y-1)$
$=\{x+(y+2)\}\{2x+(y-1)\}$
$=(x+y+2)(2x+y-1)$

따라서 $a=1,\ b=2,\ c=1,\ d=-1$이므로

$a+b+c+d=1+2+1+(-1)=3$

11 답 $(2x+y-1)(3x+y+2)$

주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$6x^2+5xy+y^2+x+y-2$
$=y^2+(5x+1)y+6x^2+x-2$
$=y^2+(5x+1)y+(2x-1)(3x+2)$
$=(y+2x-1)(y+3x+2)$
$=(2x+y-1)(3x+y+2)$

11-1 답 ①

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-4xy+3y^2+x+y-2$
$=x^2+(-4y+1)x+3y^2+y-2$
$=x^2+(-4y+1)x+(3y-2)(y+1)$
$=\{x-(3y-2)\}\{(x-(y+1)\}$
$=(x-3y+2)(x-y-1)$

따라서 $a=-3,\ b=-1$이므로

$a-b=-3-(-1)=-2$

12 답 ①

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$3x^2+4xy+y^2-10x-4y+3$
$=3x^2+(4y-10)x+y^2-4y+3$
$=3x^2+(4y-10)x+(y-1)(y-3)$
$=(x+y-3)(3x+y-1)$

따라서 두 인수의 합은

$(x+y-3)+(3x+y-1)=4x+2y-4$

12-1 답 ②

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+xy-6y^2+x+13y-6$
$=x^2+(y+1)x-(6y^2-13y+6)$
$=x^2+(y+1)x-(2y-3)(3y-2)$
$=\{x-(2y-3)\}\{x+(3y-2)\}$
$=(x-2y+3)(x+3y-2)$

따라서 두 일차식의 합은

$(x-2y+3)+(x+3y-2)=2x+y+1$

13 답 4

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-2xy+y^2+ax-4y-5$
$=x^2-(2y-a)x+y^2-4y-5$
$=x^2-(2y-a)x+(y+1)(y-5)$

주어진 식이 $x,\ y$에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$-(y+1)-(y-5)=-2y+a$

$-2y+4=-2y+a$

$\therefore a=4$

13-1 답 ③

주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-kxy+y^2-7x+7y+12$
$=y^2-(kx-7)y+x^2-7x+12$
$=y^2-(kx-7)y+(x-3)(x-4)$

주어진 식이 $x,\ y$에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$-(x-3)-(x-4)=-kx+7$

$-2x+7=-kx+7$

$\therefore k=2$

14 답 ②

주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2-2b^2-3c^2+ab-5bc+2ca$
$=a^2+(b+2c)a-2b^2-5bc-3c^2$
$=a^2+(b+2c)a+(2b+3c)(-b-c)$
$=(a+2b+3c)(a-b-c)$

14-1 답 ③

주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2+2b^2-c^2+3ab+bc=a^2+3ba+2b^2+bc-c^2$
$=a^2+3ba+(2b-c)(b+c)$
$=(a+2b-c)(a+b+c)$

15 답 ④

주어진 식을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$
$=x^2y+xyz+x^2z+xy^2+y^2z+xyz+xyz+yz^2+xz^2-xyz$
$=(y+z)x^2+(y^2+2yz+z^2)x+yz(y+z)$
$=(y+z)x^2+(y+z)^2x+yz(y+z)$
$=(y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}$
$=(y+z)\{(x+y)(x+z)\}$
$=(x+y)(y+z)(z+x)$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다.

15-1 답 ②

주어진 식을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)$

$=x^2y-xy^2+y^2z-yz^2+z^2x-zx^2$

$=(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+y^2z-yz^2$

$=(y-z)x^2-(y+z)(y-z)x+yz(y-z)$

$=(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$

$=(y-z)\{(x-y)(x-z)\}$

$=(x-y)(y-z)(x-z)$

16 답 ①

$f(x)=2x^3+5x^2-4x-3$이라 하면

$f(1)=2+5-4-3=0$

오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	2	5	-4	-3
		2	7	3
	2	7	3	0

$f(x)=(x-1)(2x^2+7x+3)$

$=(x-1)(x+3)(2x+1)$

$\therefore a+b+c=-1+3+1$

$=3$

16-1 답 ①

$f(x)=x^3+5x^2+2x-8$이라 하면

$f(1)=1+5+2-8=0$

오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	5	2	-8
		1	6	8
	1	6	8	0

$f(x)=(x-1)(x^2+6x+8)$

$=(x-1)(x+2)(x+4)$

$\therefore abc=-1\times2\times4$

$=-8$

17 답 ④

$f(x)=x^4+x^3-7x^2-x+6$이라 하면

$f(1)=1+1-7-1+6=0$, $f(-1)=1-1-7+1+6=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	1	-7	-1	6
		1	2	-5	-6
-1	1	2	-5	-6	0
		-1	-1	6	
	1	1	-6	0	

$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+x-6)$

$=(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$

따라서 $x^4+x^3-7x^2-x+6$의 인수가 아닌 것은 ④이다.

17-1 답 ③

$f(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 하면

$f(-1)=-1-4-1+6=0$

오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	-4	1	6
		-1	5	-6
	1	-5	6	0

$f(x)=(x+1)(x^2-5x+6)$

$=(x+1)(x-2)(x-3)$

따라서 x^3-4x^2+x+6의 인수가 아닌 것은 ③이다.

18 답 $(x+1)(x+2)(x+3)$

$f(x)=x^3+ax^2+11x+6$이 $x+1$을 인수로 가지므로 인수정리에 의하여 $f(-1)=0$ ……❶

즉 $-1+a-11+6=0$이므로 $a=6$ ……❷

$\therefore f(x)=x^3+6x^2+11x+6$

이때 $f(-1)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	6	11	6
		-1	-5	-6
	1	5	6	0

$f(x)=(x+1)(x^2+5x+6)$

$=(x+1)(x+2)(x+3)$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 인수정리를 이용하여 $f(-1)=0$이 됨을 알 수 있다.	30%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $f(x)$를 인수분해할 수 있다.	40%

18-1 답 $a=-2$, $(x-2)(x^2+3x+4)$

$f(x)=x^3+x^2+ax-8$이 $x-2$를 인수로 가지므로 인수정리에 의하여 $f(2)=0$

즉 $8+4+2a-8=0$이므로 $a=-2$

$\therefore f(x)=x^3+x^2-2x-8$

이때 $f(2)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

2	1	1	-2	-8
		2	6	8
	1	3	4	0

$f(x)=(x-2)(x^2+3x+4)$

19 답 ①

$f(x)=3x^3+5x^2-11x+3$이라 하면

$f(1)=3+5-11+3=0$

오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	3	5	-11	3
		3	8	-3
	3	8	-3	0

$f(x)=(x-1)(3x^2+8x-3)$

$=(x-1)(x+3)(3x-1)$

$\therefore a+b+c=-1+3-1=1$

19-1 답 ④

$f(x)=2x^3+ax^2-25x-12$라 하면 $f(x)$가 $x-4$를 인수로 가지므로 인수정리에 의하여 $f(4)=0$

즉 $128+16a-100-12=0$이므로

$16a=-16 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore f(x)=2x^3-x^2-25x-12$

이때 $f(4)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

4	2	-1	-25	-12
		8	28	12
	2	7	3	0

$f(x)=(x-4)(2x^2+7x+3)$

$=(2x+1)(x-4)(x+3)$

$\therefore k=3 \qquad \therefore a+k=-1+3=2$

20 답 ⑤

$f(x)=x^4-x^3-2x^2-2x+4$라 하면 $f(x)$가 $x-1$, $x-2$를 인수로 가지므로 인수정리에 의하여

$f(1)=0$, $f(2)=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & -1 & -2 & -2 & 4 \\
 & & 1 & 0 & -2 & -4 \\ \hline
2 & 1 & 0 & -2 & -4 & \multicolumn{1}{|c}{0} \\
 & & 2 & 4 & 4 & \\ \hline
 & 1 & 2 & 2 & \multicolumn{1}{|c}{0} &
\end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x-2)(x^2+2x+2)$
따라서 $Q(x)=x^2+2x+2$이므로
$Q(1)=1+2+2=5$

20-1 답 5

$g(x)=x^4+ax^3-10x^2+bx+14$라 하면 $g(x)$가 $x-2$, $x+1$을 인수로 가지므로 인수정리에 의하여
$g(2)=0$, $g(-1)=0$
$g(2)=0$에서 $16+8a-40+2b+14=0$
$\therefore 4a+b=5$ ……㉠
$g(-1)=0$에서 $1-a-10-b+14=0$
$\therefore a+b=5$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=5$
$\therefore g(x)=x^4-10x^2+5x+14$
이때 $g(2)=0$, $g(-1)=0$이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc}
2 & 1 & 0 & -10 & 5 & 14 \\
 & & 2 & 4 & -12 & -14 \\ \hline
-1 & 1 & 2 & -6 & -7 & \multicolumn{1}{|c}{0} \\
 & & -1 & -1 & 7 & \\ \hline
 & 1 & 1 & -7 & \multicolumn{1}{|c}{0} &
\end{array}$$

$g(x)=(x-2)(x+1)(x^2+x-7)$
따라서 $f(x)=x^2+x-7$이므로
$f(3)=9+3-7=5$

21 답 ③

$f(x)=x^4+ax^2+b$라 하면 $f(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로
$f(1)=1+a+b=0 \qquad \therefore b=-a-1$ ……㉠
즉 $f(x)=x^4+ax^2-a-1$이므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & 0 & a & 0 & -a-1 \\
 & & 1 & 1 & a+1 & a+1 \\ \hline
1 & 1 & 1 & a+1 & a+1 & \multicolumn{1}{|c}{0} \\
 & & 1 & 2 & a+3 & \\ \hline
 & 1 & 2 & a+3 & \multicolumn{1}{|c}{2a+4} &
\end{array}$$

이때 $f(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로
$2a+4=0 \qquad \therefore a=-2$
$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=2-1=1$
$\therefore b-a=1-(-2)=3$

21-1 답 ②

$f(x)=x^4+ax^3-7x^2-x+b$라 하면 $f(x)$가 $(x+1)^2$을 인수로 가지므로 $f(-1)=1-a-7+1+b=0$
$\therefore b=a+5$ ……㉠
즉 $f(x)=x^4+ax^3-7x^2-x+a+5$이므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|ccccc}
-1 & 1 & a & -7 & -1 & a+5 \\
 & & -1 & -a+1 & a+6 & -a-5 \\ \hline
-1 & 1 & a-1 & -a-6 & a+5 & \multicolumn{1}{|c}{0} \\
 & & -1 & -a+2 & 2a+4 & \\ \hline
 & 1 & a-2 & -2a-4 & \multicolumn{1}{|c}{3a+9} &
\end{array}$$

이때 $f(x)$가 $(x+1)^2$을 인수로 가지므로
$3a+9=0 \qquad \therefore a=-3$
$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $b=-3+5=2$
$\therefore a+b=-3+2=-1$

22 답 ①

$2030=x$로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{2030^3-8}{2030\times2032+4}&=\frac{x^3-2^3}{x(x+2)+4}\\&=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4}\\&=x-2\\&=2030-2 \ \rightarrow x=2030\text{ 대입}\\&=2028\end{aligned}$$

22-1 답 31

$A=\dfrac{12^3+1}{12\times11+1}$에서 $12=x$로 놓으면

$$\begin{aligned}A&=\frac{x^3+1}{x(x-1)+1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}\\&=x+1=12+1=13 \ \rightarrow x=12\text{ 대입}\end{aligned}$$

$B=\dfrac{21^3-3^3}{21^2+3\times21+3^2}$에서 $21=p$, $3=q$로 놓으면

$$\begin{aligned}B&=\frac{p^3-q^3}{p^2+pq+q^2}=\frac{(p-q)(p^2+pq+q^2)}{p^2+pq+q^2}\\&=p-q=21-3=18 \ \rightarrow p=21,\ q=3\text{ 대입}\end{aligned}$$

$\therefore A+B=13+18=31$

23 답 341

$17=x$로 놓으면

$$\begin{aligned}17\times18\times19\times20+1&=x(x+1)(x+2)(x+3)+1\\&=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1\\&=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1\\&=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1\\&=(x^2+3x+1)^2\\&=(17^2+3\times17+1)^2 \ \rightarrow x=17\text{ 대입}\\&=341^2\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{17\times18\times19\times20+1}=\sqrt{341^2}=341$

23-1 답 ③

$15=x$로 놓으면

$$\begin{aligned}15\times17\times19\times21+16&=x(x+2)(x+4)(x+6)+16\\&=\{x(x+6)\}\{(x+2)(x+4)\}+16\\&=(x^2+6x)(x^2+6x+8)+16\\&=(x^2+6x)^2+8(x^2+6x)+16\\&=(x^2+6x+4)^2\\&=(15^2+6\times15+4)^2 \ \rightarrow x=15\text{ 대입}\\&=319^2\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{15\times17\times19\times21+16}=\sqrt{319^2}=319$

24 답 ⑤

$3020=x$로 놓으면

$$\frac{3020^3+3\times3019\times3020+2\times3019-1}{3019\times3021}$$
$$=\frac{x^3+3(x-1)x+2(x-1)-1}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{x^3+3x^2-x-3}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{x^2(x+3)-(x+3)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{(x+3)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{(x+3)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=x+3$$
$$=3020+3 \rightarrow x=3020 \text{ 대입}$$
$$=3023$$

24-1 답 ③

$930=x$로 놓으면

$$\frac{930^3-2\times930\times931+932}{929\times931}=\frac{x^3-2x(x+1)+x+2}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{x^3-2x^2-x+2}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{x^2(x-2)-(x-2)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{(x-2)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{(x-2)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=x-2$$
$$=930-2 \rightarrow x=930 \text{ 대입}$$
$$=928$$

25 답 ④

$22=x$로 놓으면

$$N^2=(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)+16$$
$$=\{(x-1)(x+1)\}\{(x-3)(x+3)\}+16$$
$$=(x^2-1)(x^2-9)+16$$
$$=x^4-10x^2+25$$
$$=(x^2-5)^2$$
$$=(22^2-5)^2 \rightarrow x=22 \text{ 대입}$$
$$=479^2$$

즉 $N^2=479^2$이므로 $N=479$

25-1 답 155

$11=x$로 놓으면

$$N^2=x(x+1)(x+2)(x+3)+1$$
$$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1$$
$$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$$
$$=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1$$
$$=(x^2+3x+1)^2$$
$$=(11^2+3\times11+1)^2 \rightarrow x=11 \text{ 대입}$$
$$=155^2$$

즉 $N^2=155^2$이므로 $N=155$

26 답 4500

$f(2)=8-4-16+12=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & -8 & 12 \\ & & 2 & 2 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$$f(x)=(x-2)(x^2+x-6)$$
$$=(x-2)^2(x+3)$$
$$\therefore f(17)=15^2\times20$$
$$=4500$$

26-1 답 24000

$f(1)=1+8-10-8+9=0$, $f(-1)=1-8-10+8+9=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 8 & -10 & -8 & 9 \\ & & 1 & 9 & -1 & -9 \\ \hline -1 & 1 & 9 & -1 & -9 & \boxed{0} \\ & & -1 & -8 & 9 & \\ \hline & 1 & 8 & -9 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+8x-9)$$
$$=(x-1)^2(x+1)(x+9)$$
$$\therefore f(11)=(11-1)^2(11+1)(11+9)$$
$$=10^2\times12\times20$$
$$=24000$$

27 답 15

$$5^6-1=(5^3)^2-1$$
$$=(5^3+1)(5^3-1)$$
$$=(5+1)(5^2-5+1)(5-1)(5^2+5+1)$$
$$=6\times21\times4\times31$$
$$=2\times3\times3\times7\times2^2\times31$$
$$=2^3\times3^2\times7\times31$$

따라서 5^6-1을 나누어떨어지도록 하는 두 자리 자연수 n의 값은
$2\times3^2=18$, $2\times7=14$, $2\times31=62$, $2\times3\times7=42$, $2^2\times3=12$, $2^2\times3\times7=84$, $2^2\times3^2=36$, $2^2\times7=28$, $2^3\times3=24$, $2^3\times3^2=72$, $2^3\times7=56$, $3\times7=21$, $3\times31=93$, $3^2\times7=63$, 31
이므로 그 개수는 15이다.

27-1 답 ④

$$3^8-1=(3^4)^2-1$$
$$=(3^4+1)(3^4-1)$$
$$=(3^4+1)\{(3^2)^2-1\}$$
$$=(3^4+1)(3^2+1)(3^2-1)$$
$$=(3^4+1)(3^2+1)(3+1)(3-1)$$
$$=82\times10\times4\times2$$
$$=2\times41\times2\times5\times2^2\times2$$
$$=2^5\times5\times41$$

따라서 2 이상 20 이하의 자연수 중에서 3^8-1을 나누어떨어지도록 하는 자연수는
2, $2^2=4$, 5, $2^3=8$, $2\times5=10$, $2^4=16$, $2^2\times5=20$
이므로 그 개수는 7이다.

유형+ 완성하기 p.68

28 답 48

$x+y=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=4$

$xy=(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=2$

$$\begin{aligned}\therefore x^3+x^2y+xy^2+y^3&=x^2(x+y)+y^2(x+y)\\&=(x+y)(x^2+y^2)\\&=(x+y)\{(x+y)^2-2xy\}\\&=4\times(4^2-2\times2)\\&=48\end{aligned}$$

29 답 180

$$\begin{aligned}a^4-a^3b-ab^3+b^4&=a^3(a-b)-b^3(a-b)\\&=(a-b)(a^3-b^3)\\&=(a-b)^2(a^2+ab+b^2)\\&=(a-b)^2\{(a-b)^2+3ab\}\\&=(2\sqrt{3})^2\{(2\sqrt{3})^2+3\times1\}\\&=180\end{aligned}$$

30 답 ①

$a^3+b^3+c^3=3abc$에서 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ ……㉠

㉠의 좌변을 인수분해하면

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$\therefore \dfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

그런데 $a>0$, $b>0$, $c>0$에서 $a+b+c\neq0$이므로

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ $\quad\therefore a=b=c$

$\therefore \dfrac{ab+c^2}{a^2+bc}=\dfrac{a\times a+a^2}{a^2+a\times a}=\dfrac{2a^2}{2a^2}=1$

31 답 ⑤

주어진 등식의 좌변을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2$

$=-(a+b)c^2+a^3+a^2b+ab^2+b^3$

$=-(a+b)c^2+a^2(a+b)+b^2(a+b)$

$=(a+b)(a^2+b^2-c^2)$

즉 $(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$이고 $a+b\neq0$이므로

$a^2+b^2-c^2=0$ $\quad\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

32 답 $b=c$인 이등변삼각형

주어진 등식의 좌변을 인수분해하면

$$\begin{aligned}b^2-ab-c^2+ac&=b^2-c^2-ab+ac\\&=(b+c)(b-c)-a(b-c)\\&=(b-c)(-a+b+c)\end{aligned}$$ ……❶

즉 $(b-c)(-a+b+c)=0$이고 $b+c>a$이므로

$b-c=0$ $\quad\therefore b=c$ ……❷

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $b=c$인 이등변삼각형이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	50%
❷ 삼각형의 변의 길이 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30%
❸ 조건을 만족시키는 삼각형이 어떤 삼각형인지 구할 수 있다.	20%

33 답 $16\sqrt{3}$

$a^3+b^3+c^3=3abc$에서 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

이 식의 좌변을 인수분해하면

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

즉 $\dfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$이고

$a+b+c\neq0$이므로

$\underbrace{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0}_{a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0}$

$\therefore a=b=c$

주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 정삼각형이고, 이 삼각형의 둘레의 길이가 24이므로 정삼각형의 한 변의 길이는 8이다.

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times8^2=16\sqrt{3}$

학교 시험 대비 문제 p.69~72

01 답 ⑤

⑤ $x^2+y^2+2xy-4x-4y+4$

$=x^2+y^2+(-2)^2+2\times x\times y+2\times y\times(-2)+2\times(-2)\times x$

$=(x+y-2)^2$

02 답 ⑤

$x^3-27=x^3-3^3=(x-3)(x^2+3x+9)$

따라서 다항식 x^3-27의 인수인 것은 ⑤이다.

03 답 -5, -1, 1, 5

x^2의 계수 3의 약수와 상수항 -2의 약수를 이용하여 인수분해되는 형태를 살펴보면 다음과 같다.

$\begin{array}{ccccc}1 & \times & -1 & \to & -3\\ 3 & & 2 & \to & 2\end{array}$ $\quad\therefore a=-3+2=-1$

$\begin{array}{ccccc}1 & \times & 2 & \to & 6\\ 3 & & -1 & \to & -1\end{array}$ $\quad\therefore a=6+(-1)=5$

$\begin{array}{ccccc}1 & \times & 1 & \to & 3\\ 3 & & -2 & \to & -2\end{array}$ $\quad\therefore a=3+(-2)=1$

$\begin{array}{ccccc}1 & \times & -2 & \to & -6\\ 3 & & 1 & \to & 1\end{array}$ $\quad\therefore a=-6+1=-5$

따라서 정수 a의 값은 -5, -1, 1, 5이다.

04 답 ③

$x^2-x=X$로 놓으면

$(x^2-x)^2+(x^2-x)-6=X^2+X-6$
$=(X-2)(X+3)$
$=(x^2-x-2)(x^2-x+3)$ → $X=x^2-x$ 대입
$=(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$
$\therefore a+b+c=1+(-2)+3=2$

05 답 ②

$x^2-2x=X$로 놓으면
$(x^2-2x)(x^2-2x-3)+k=X(X-3)+k$
$=X^2-3X+k$ ⋯⋯㉠
주어진 식이 x에 대한 이차식 $f(x)$의 제곱으로 인수분해되려면 ㉠이 X에 대한 완전제곱식이 되어야 하므로

$$k=\left(\frac{-3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

$k=\frac{9}{4}$를 ㉠에 대입하면

$$(\text{주어진 식})=X^2-3X+\frac{9}{4}=\left(X-\frac{3}{2}\right)^2=\left(x^2-2x-\frac{3}{2}\right)^2$$

따라서 $f(x)=x^2-2x-\frac{3}{2}$이므로

$$k+f(1)=\frac{9}{4}+\left(1-2-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}+\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{4}$$

06 답 5

$x^2=X$로 놓으면
$x^4-x^2-12=X^2-X-12$
$=(X-4)(X+3)$
$=(x^2-4)(x^2+3)$ → $X=x^2$ 대입
$=(x-2)(x+2)(x^2+3)$
따라서 $a=2$, $b=3$이므로
$a+b=2+3=5$

07 답 ③

$x^4+2x^2+9=x^4+6x^2+9-4x^2$
$=(x^2+3)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$
$\therefore a+b+c+d=2+3+(-2)+3=6$

08 답 ③

주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면
$2x^2+5xy+ky^2+x-y-1$
$=ky^2+(5x-1)y+2x^2+x-1$
$=ky^2+(5x-1)y+(2x-1)(x+1)$
이 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 다음과 같아야 한다.

$$\begin{array}{lcl} y & 2x-1 & \longrightarrow\ k(2x-1)y \\ ky & x+1 & \longrightarrow\ \underline{(x+1)y\quad(+} \\ & & \{(2k+1)x-k+1\}y \end{array}$$

즉 $5x-1=(2k+1)x-k+1$이므로
$2k+1=5$, $-k+1=-1$ $\quad\therefore k=2$

오답 피하기

다음과 같이 주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해될 수도 있지만 k의 값이 하나로 정해지지 않으므로 이 경우는 제외해야 한다.

(1)
$$\begin{array}{lcl} y & x+1 & \longrightarrow\ k(x+1)y \\ ky & 2x-1 & \longrightarrow\ \underline{(2x-1)y\quad(+} \\ & & \{(k+2)x+k-1\}y \end{array}$$

즉 $5x-1=(k+2)x+k-1$이므로
$k+2=5$ $\quad\therefore k=3$
$k-1=-1$ $\quad\therefore k=0$
서로 같지 않아 모순이다.

(2)
$$\begin{array}{lcl} y & -(2x-1) & \longrightarrow\ -k(2x-1)y \\ ky & -(x+1) & \longrightarrow\ \underline{-(x+1)y\quad(+} \\ & & \{(-2k-1)x+k-1\}y \end{array}$$

즉 $5x-1=(-2k-1)x+k-1$이므로
$-2k-1=5$ $\quad\therefore k=-3$
$k-1=-1$ $\quad\therefore k=0$
서로 같지 않아 모순이다.

(3)
$$\begin{array}{lcl} y & -(x+1) & \longrightarrow\ -k(x+1)y \\ ky & -(2x-1) & \longrightarrow\ \underline{-(2x-1)y\quad(+} \\ & & \{(-k-2)x-k+1\}y \end{array}$$

즉 $5x-1=(-k-2)x-k+1$이므로
$-k-2=5$ $\quad\therefore k=-7$
$-k+1=-1$ $\quad\therefore k=2$
서로 같지 않아 모순이다.

09 답 ②

$f(x)=2x^3-x^2-5x-2$라 하면
$f(-1)=-2-1+5-2=0$
오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	2	-1	-5	-2
		-2	3	2
	2	-3	-2	0

$f(x)=(x+1)(2x^2-3x-2)$
$=(x+1)(x-2)(2x+1)$
$\therefore a^2+b^2+c^2=1^2+(-2)^2+1^2=6$

10 답 ④

$f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$이라 하면
$f(1)=1-1-7+1+6=0$, $f(-1)=1+1-7-1+6=0$
다음과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	-1	-7	1	6
		1	0	-7	-6
-1	1	0	-7	-6	0
		-1	1	6	
	1	-1	-6	0	

$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2-x-6)$
$=(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$
따라서 $x^4-x^3-7x^2+x+6$의 인수가 아닌 것은 ④이다.

오답 피하기

$x^4-x^3-7x^2+x+6=(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$
$(x+2)(x-3)=x^2-x-6$ ➡ ③은 주어진 식의 인수이다.
$(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$ ➡ ⑤는 주어진 식의 인수이다.

11 답 3

$g(x)=x^4+ax^3+x+b$라 하면 $g(x)$가 $x+1$, $x+2$를 인수로 가지므로 인수정리에 의하여
$g(-1)=0$, $g(-2)=0$
$g(-1)=0$에서 $1-a-1+b=0$
$\therefore a-b=0$ ⋯⋯㉠
$g(-2)=0$에서 $16-8a-2+b=0$

$\therefore 8a-b=14$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=2$

$\therefore g(x)=x^4+2x^3+x+2$

이때 $g(x)$를 인수분해하면

$g(x)=x^3(x+2)+(x+2)$
$=(x+2)(x^3+1)$
$=(x+1)(x+2)(x^2-x+1)$

따라서 $f(x)=x^2-x+1$이므로

$f(2)=4-2+1=3$

12 답 ④

$f(x)=ax^4-8x^2+b$라 하면 $f(x)$가 $(x+2)^2$을 인수로 가지므로

$f(-2)=16a-32+b=0$ $\quad\therefore b=-16a+32$ ······ ㉠

즉 $f(x)=ax^4-8x^2-16a+32$이므로 조립제법을 이용하면

-2	a	0	-8	0	$-16a+32$
		$-2a$	$4a$	$-8a+16$	$16a-32$
-2	a	$-2a$	$4a-8$	$-8a+16$	0
		$-2a$	$8a$	$-24a+16$	
	a	$-4a$	$12a-8$	$-32a+32$	

이때 $f(x)$가 $(x+2)^2$을 인수로 가지므로

$-32a+32=0$

$\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-16+32=16$

$\therefore a+b=1+16=17$

13 답 $4(x^2-3x+2)\pi$

$f(x)=x^3-5x^2+7x-3$이라 하면

$f(1)=1-5+7-3=0$

오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	-5	7	-3
		1	-4	3
	1	-4	3	0

$f(x)=(x-1)(x^2-4x+3)$
$=(x-1)^2(x-3)$

따라서 주어진 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $x-1$, 높이는 $x-3$이므로 구하는 겉넓이는

$2\pi(x-1)^2+2\pi(x-1)(x-3)=2\pi(x-1)(2x-4)$
$=4\pi(x-1)(x-2)$
$=4(x^2-3x+2)\pi$

14 답 $2x^2+x-3$

두 이차식 A, B의 공통인 인수가 $x-1$이므로 두 이차식을 $(x-1)f(x)$, $(x-1)g(x)$ (단, $f(x)$, $g(x)$는 서로소인 일차식)로 놓으면 두 이차식의 서로 다른 모든 일차식의 인수들의 곱은 $(x-1)f(x)g(x)$이다.

이때

$x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)$
$=(x+2)(x^2-1)$
$=(x-1)(x+1)(x+2)$

이므로 $f(x)g(x)=(x+1)(x+2)$

$\therefore f(x)=x+1, g(x)=x+2$ 또는 $f(x)=x+2, g(x)=x+1$

따라서 두 이차식은

$(x-1)(x+1)=x^2-1$, $(x-1)(x+2)=x^2+x-2$이므로

$A+B=(x^2-1)+(x^2+x-2)=2x^2+x-3$

15 답 ②

$f(n)=n^4+2n-12$라 하면

$f(-2)=16-4-12=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-2	1	0	0	2	-12
		-2	4	-8	12
	1	-2	4	-6	0

$f(n)=(n+2)(n^3-2n^2+4n-6)$ ······ ㉠

이때 $n^4+2n-12$가 $(n+1)(n+2)$의 배수이므로

$n^4+2n-12=k(n+1)(n+2)$(k는 자연수)라 하자.

㉠에서 $n^4+2n-12=(n+2)(n^3-2n^2+4n-6)$이므로

$(n+2)(n^3-2n^2+4n-6)=k(n+1)(n+2)$

$\therefore k=\dfrac{n^3-2n^2+4n-6}{n+1}$

이때 n^3-2n^2+4n-6을 $n+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 오른쪽과 같으므로

-1	1	-2	4	-6
		-1	3	-7
	1	-3	7	-13

$k=\dfrac{(n+1)(n^2-3n+7)-13}{n+1}$
$=n^2-3n+7-\dfrac{13}{n+1}$

k는 자연수이므로 $n+1$은 13의 약수이어야 한다.

13의 약수는 1, 13이므로 $n+1=1$, $n+1=13$

$\therefore n=0$, $n=12$

그런데 n은 2 이상의 자연수이므로

$n=12$

16 답 81

$A=\dfrac{20^3+1}{20\times19+1}$에서 $20=x$로 놓으면

$A=\dfrac{x^3+1}{x(x-1)+1}=\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$
$=x+1=20+1=21$ → $x=20$ 대입

$B=\dfrac{37^3+23^3}{23^2+37\times14}$에서 $37=p$, $23=q$로 놓으면

$B=\dfrac{p^3+q^3}{q^2+p(p-q)}=\dfrac{(p+q)(p^2-pq+q^2)}{p^2-pq+q^2}$
$=p+q=37+23=60$ → $p=37$, $q=23$ 대입

$\therefore A+B=21+60=81$

17 답 895

$30=x$로 놓으면

$N^2=27\times29\times31\times33+16$
$=(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)+16$
$=\{(x-1)(x+1)\}\{(x-3)(x+3)\}+16$
$=(x^2-1)(x^2-9)+16$
$=x^4-10x^2+25$
$=(x^2-5)^2$
$=(30^2-5)^2$ → $x=30$ 대입
$=895^2$

즉 $N^2=895^2$이므로

$N=895$

18 답 ④

$3^{12}-1=(3^6)^2-1$
$=(3^6+1)(3^6-1)$
$=\{(3^2)^3+1\}\{(3^3)^2-1\}$
$=(3^2+1)\{(3^2)^2-3^2+1\}(3^3+1)(3^3-1)$
$=(3^2+1)(3^4-3^2+1)(3+1)(3^2-3+1)$
$(3-1)(3^2+3+1)$
$=10\times73\times4\times7\times2\times13$
$=2\times5\times73\times2^2\times7\times2\times13$
$=2^4\times5\times7\times13\times73$

따라서 2 이상 20 이하의 자연수 중에서 $3^{12}-1$을 나누어떨어지도록 하는 자연수는
$2,\ 2^2=4,\ 5,\ 7,\ 2^3=8,\ 2\times5=10,\ 13,$
$2\times7=14,\ 2^4=16,\ 2^2\times5=20$
이므로 그 개수는 10이다.

19 답 -1

$a+b+c=0$에서 $b+c=-a,\ c+a=-b,\ a+b=-c$이므로
(분자)$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)=-a^3-b^3-c^3$
이때
$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
이고 $a+b+c=0$이므로 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$
$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$
$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{-a^3-b^3-c^3}{3abc}=\dfrac{-3abc}{3abc}=-1$

20 답 ⑤

주어진 등식의 좌변을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면
$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2+2b^2c^2-2c^2a^2$
$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+b^4+2b^2c^2+c^4$
$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2+c^2)^2$
$=\{a^2-(b^2+c^2)\}^2$
$=(a^2-b^2-c^2)^2$
즉 $(a^2-b^2-c^2)^2=0$이므로 $a^2-b^2-c^2=0$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$ ······㉠
주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.
이때 이 삼각형의 둘레의 길이가 20이므로
$a+b+c=20\qquad\therefore\ b+c=20-a$ ······㉡
또 이 삼각형의 넓이가 10이므로
$\dfrac{1}{2}bc=10\qquad\therefore\ bc=20$ ······㉢
㉡, ㉢에서
$b^2+c^2=(b+c)^2-2bc=(20-a)^2-2\times20$
$=a^2-40a+360$ ······㉣
㉣을 ㉠에 대입하면 $a^2=a^2-40a+360$
$40a=360\qquad\therefore\ a=9$

21 답 ⑤

$f(x)$가 $x-a$로 나누어떨어지므로 나머지정리에 의하여
$f(a)=0$
$\therefore\ a^3+a^2b+(b^2-c^2)a+b^3-bc^2=0$
위의 등식의 좌변을 인수분해하면
$a^3+a^2b+(b^2-c^2)a+b^3-bc^2$
$=a^2(a+b)+(b^2-c^2)a+b(b^2-c^2)$
$=a^2(a+b)+(b^2-c^2)(a+b)$
$=(a+b)(a^2+b^2-c^2)$
즉 $(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$이고 $a+b>0$이므로
$a^2+b^2-c^2=0\qquad\therefore\ c^2=a^2+b^2$
따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

서술형 1 답 11

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+k$
$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}+k$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+k$ ······❶
$x^2+5x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X+4)(X+6)+k$
$=X^2+10X+24+k$ ······㉠ ······❷
주어진 식이 이차식 $f(x)$에 대하여 $\{f(x)\}^2$ 꼴로 인수분해되려면 ㉠이 X에 대한 완전제곱식으로 인수분해되어야 하므로
$24+k=\left(\dfrac{10}{2}\right)^2,\ 24+k=25$
$\therefore\ k=1$
$k=1$을 ㉠에 대입하면
(주어진 식)$=X^2+10X+25$
$=(X+5)^2$
$=(x^2+5x+5)^2$ → $X=x^2+5x$ 대입
따라서 $f(x)=x^2+5x+5$이므로 ······❸
$f(k)=f(1)=1+5+5=11$ ······❹

채점 기준	비율
❶ 주어진 다항식을 공통부분이 생기도록 정리할 수 있다.	30%
❷ 공통부분을 하나의 문자로 치환하여 정리할 수 있다.	30%
❸ k의 값과 $f(x)$를 구할 수 있다.	30%
❹ $f(k)$의 값을 구할 수 있다.	10%

서술형 2 답 (1) $(2a+2b+c)(a-b+c)$
(2) $(2x-1)(x+1)(2x+1)(x-1)$

(1) 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면
$2a^2-2b^2+c^2+3ac+bc$
$=2a^2+3ca-(2b^2-bc-c^2)$ ······❶
$=2a^2+3ca-(2b+c)(b-c)$
$=\{2a+(2b+c)\}\{a-(b-c)\}$
$=(2a+2b+c)(a-b+c)$ ······❷

(2) $4x^4-5x^2+1$
$=(4x^4-4x^2+1)-x^2$
$=(2x^2-1)^2-x^2$ ······❸
$=\{(2x^2-1)+x\}\{(2x^2-1)-x\}$
$=(2x^2+x-1)(2x^2-x-1)$
$=(2x-1)(x+1)(2x+1)(x-1)$ ······❹

채점 기준	비율
❶ (1)에서 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리할 수 있다.	30%
❷ $2a^2-2b^2+c^2+3ac+bc$를 인수분해할 수 있다.	20%
❸ (2)에서 주어진 식을 A^2-B^2 꼴로 정리할 수 있다.	30%
❹ $4x^4-5x^2+1$을 인수분해할 수 있다.	20%

서술형 3 답 2

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-xy-2y^2+kx+5y-3$

$=x^2+(-y+k)x-(2y^2-5y+3)$

$=x^2+(-y+k)x-(y-1)(2y-3)$ ……❶

이 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 다음과 같아야 한다.

$x \quad y-1 \longrightarrow (y-1)x$

$x \quad -(2y-3) \longrightarrow (-2y+3)x \ (+$

$(-y+2)x$

……❷

즉 $-y+k=-y+2$이므로

$k=2$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리할 수 있다.	20%
❷ 주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해될 조건을 구할 수 있다.	50%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 73~74

01 답 ①

$x^2-x=X$로 놓으면

$(x^2-x)(x^2-x-1)-2=X(X-1)-2$

$=X^2-X-2$

$=(X-2)(X+1)$

$=(x^2-x-2)(x^2-x+1)$ → $X=x^2-x$ 대입

$=(x-2)(x+1)(x^2-x+1)$

따라서 주어진 다항식의 약수인 것은 ①이다.

02 답 ④

한 변의 길이가 $a+6$인 정사각형 모양의 색종이의 넓이는

$(a+6)^2$

따라서 한 변의 길이가 a인 정사각형 모양의 색종이를 오려 낸 후 남아 있는 □ 모양의 색종이의 넓이는

$(a+6)^2-a^2=(a+6+a)(a+6-a)$

$=6(2a+6)$

$=12(a+3)$

$\therefore k=12$

03 답 ①

$x^4+4x^2+16=(x^4+8x^2+16)-4x^2$

$=(x^2+4)^2-(2x)^2$

$=\{(x^2+4)+2x\}\{(x^2+4)-2x\}$

$=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

이때 a, b, c, d가 양수이므로

$a=2$, $b=4$, $c=2$, $d=4$

$\therefore a+b+c+d=2+4+2+4=12$

04 답 ②

$11^4-6^4=(11^2)^2-(6^2)^2$

$=(11^2-6^2)(11^2+6^2)$

$=(11-6)(11+6)\times157$

$=5\times17\times157$

이므로 $a=5$, $b=17$

$\therefore a+b=5+17=22$

05 답 ②

주어진 식을 b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2b+2ab+a^2+2a+b+1=(a^2+2a+1)b+a^2+2a+1$

$=(a+1)^2b+(a+1)^2$

$=(a+1)^2(b+1)$

이때 주어진 식의 값이 $245=7^2\times5$이므로

$(a+1)^2(b+1)=7^2\times5$

a, b는 자연수이므로 $a+1=7$, $b+1=5$

$\therefore a=6$, $b=4$

$\therefore a+b=6+4=10$

다른 풀이

주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2b+2ab+a^2+2a+b+1=(b+1)a^2+2(b+1)a+(b+1)$

$=(b+1)(a^2+2a+1)$

$=(a+1)^2(b+1)$

이때 주어진 식의 값이 $245=7^2\times5$이므로

$(a+1)^2(b+1)=7^2\times5$

a, b는 자연수이므로 $a+1=7$, $b+1=5$

$\therefore a=6$, $b=4$

$\therefore a+b=6+4=10$

06 답 ⑤

입체도형 P, Q, R, S, T의 부피가 각각 p, q, r, s, t이므로

$p=a^3$, $q=b^3$, $r=a^2$, $s=b^2$, $t=ab(a-b)$

이때 $p=q+r+s+t$이므로

$a^3=b^3+a^2+b^2+ab(a-b)$

$a^3-b^3-a^2-b^2-ab(a-b)=0$

위의 식의 좌변을 인수분해하면

$a^3-b^3-a^2-b^2-ab(a-b)$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)-(a^2+b^2)-ab(a-b)$

$=(a-b)(a^2+b^2)-(a^2+b^2)$

$=(a-b-1)(a^2+b^2)$

즉 $(a-b-1)(a^2+b^2)=0$이고 $a^2+b^2\neq0$이므로

$a-b-1=0 \qquad \therefore a-b=1$

07 답 ①

$2018=a$, $3=b$로 놓으면

$2018^3-27=2018^3-3^3$

$=a^3-b^3$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=(2018-3)(2018^2+2018\times3+3^2)$ → $a=2018$, $b=3$ 대입

$=2015\{2018(2018+3)+9\}$

$=2015(2018\times2021+9)$

따라서 2018^3-27을 $2018\times2021+9$로 나누었을 때의 몫은 2015이다.

08 답 ①

$42=x$로 놓으면

$42\times(42-1)\times(42+6)+5\times42-5$

$=x(x-1)(x+6)+5x-5$

$=x(x-1)(x+6)+5(x-1)$

$=(x-1)\{x(x+6)+5\}$

$=(x-1)(x^2+6x+5)$

$=(x-1)(x+1)(x+5)$

$=(42-1)(42+1)(42+5)$ → $x=42$ 대입

$=41\times43\times47$

$\therefore p+q+r=41+43+47=131$

09 답 ③

$x^3+1-f(x)=(x+1)(x+a)^2$ ……㉠

다항식 $x^3+1-f(x)$가 일차식 $x+1$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$(-1)^3+1-f(-1)=0$ $\quad\therefore f(-1)=0$

즉 $f(x)=k(x+1)$ (k는 상수, $k\neq0$)로 놓으면

$x^3+1-f(x)=x^3+1-k(x+1)$

$=(x+1)(x^2-x+1)-k(x+1)$

$=(x+1)(x^2-x+1-k)$

㉠에서 $x^2-x+1-k=(x+a)^2$이므로

$x^2-x+1-k=x^2+2ax+a^2$

$-1=2a,\ 1-k=a^2$

$\therefore a=-\frac{1}{2},\ k=\frac{3}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{4}(x+1)$이므로

$f(7)=\frac{3}{4}\times(7+1)=6$

10 답 ①

구하는 입체의 부피는 원래의 정육면체의 부피에서 구멍 부분의 부피를 빼면 된다. 구멍 부분의 부피는 밑면이 한 변의 길이가 y인 정사각형이고 높이가 x인 정사각기둥 3개의 부피에서 중복된 부분인 한 모서리의 길이가 y인 정육면체의 부피를 2번 빼면 된다.

즉 구멍 부분의 부피는

$3(y^2\times x)-2y^3=3xy^2-2y^3$

이므로 구하는 입체의 부피는

$x^3-(3xy^2-2y^3)=x^3-3xy^2+2y^3$

이때 $f(x)=x^3-3xy^2+2y^3=x^3-3y^2x+2y^3$이라 하면

$f(y)=y^3-3y^3+2y^3=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

y	1	0	$-3y^2$	$2y^3$
		y	y^2	$-2y^3$
	1	y	$-2y^2$	0

$f(x)=(x-y)(x^2+yx-2y^2)$

$=(x-y)(x-y)(x+2y)$

$=(x-y)^2(x+2y)$

04 복소수

Ⅱ 방정식과 부등식

개념 완성하기

p. 77~78

01 답 $a=1, b=4$

02 답 $a=2, b=-\sqrt{3}$

03 답 $a=-3, b=1$

04 답 $a=0, b=3$

05 답 $a=1+\sqrt{2}, b=0$

06 답 실수

07 답 순허수

08 답 순허수가 아닌 허수

09 답 실수
$3+i^2=3+(-1)=2$이므로 실수이다.

10 답 $x=-3, y=0$
$x+3=0$, $-y=0$이므로 $x=-3, y=0$

11 답 $x=2, y=-1$
$x-2=0, y+1=0$이므로 $x=2, y=-1$

12 답 $x=0, y=4$
$3x=0, y-4=0$이므로 $x=0, y=4$

13 답 $x=2, y=-2$
$x-2=0$이므로 $x=2$
$x+y=0$이므로 $2+y=0$ $\quad\therefore y=-2$

14 답 $a=3, b=2$

15 답 $a=5, b=3$
$a-2=3, 3=b$이므로 $a=5, b=3$

16 답 $a=7, b=1$
$a-2=5, b+1=2$이므로 $a=7, b=1$

17 답 $a=-5, b=6$
$a-5=2a$이므로 $a=-5$
$a+b=1$이므로 $-5+b=1$ $\quad\therefore b=6$

18 답 $a=2, b=-1$
$a=-2a+6$이므로 $3a=6$ $\quad\therefore a=2$
$b+4=a-b$이므로 $b+4=2-b$
$2b=-2$ $\quad\therefore b=-1$

19 답 $a=-4, b=-1$
$a+3=b, a+b=-5$이므로 $a-b=-3, a+b=-5$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-4, b=-1$

20 답 $a=-2, b=-2$
$a-2=2b, a+b=2a$이므로 $a-2b=2, a-b=0$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-2, b=-2$

21 답 $-4i-3$

22 답 -5

23 답 $-10i$

24 답 $\sqrt{5}-2i$

25 답 $2+3\sqrt{3}i$

26 답 $\sqrt{5}i-2$

27 답 $6+2i$
$3i+(6-i)=6+(3-1)i=6+2i$

28 답 $5-4i$
$(3-i)+(2-3i)=(3+2)+(-1-3)i=5-4i$

29 답 $7-3i$
$$\begin{aligned}2(2-3i)+3(1+i)&=4-6i+3+3i\\&=(4+3)+(-6+3)i\\&=7-3i\end{aligned}$$

30 답 $-1-3i$
$(2-5i)-(3-2i)=(2-3)+\{-5-(-2)\}i=-1-3i$

31 답 $10-3i$
$(4-2i)-(i-6)=\{4-(-6)\}+(-2-1)i=10-3i$

32 답 $-2+23i$
$$\begin{aligned}4(1+2i)-3(2-5i)&=4+8i-6+15i=(4-6)+(8+15)i\\&=-2+23i\end{aligned}$$

33 답 $7+5i$
$$\begin{aligned}(i+2)+3(2i-1)-2(i-4)&=i+2+6i-3-2i+8\\&=(2-3+8)+(1+6-2)i\\&=7+5i\end{aligned}$$

34 답 $1+3i$

$i(3-i)=3i-i^2=1+3i$

35 답 $12-5i$

$(3+2i)(2-3i)=6-9i+4i-6i^2=6-9i+4i+6$
$=12-5i$

36 답 $5-12i$

$(2i-3)^2=4i^2-12i+9=-4-12i+9$
$=5-12i$

37 답 $-2-2\sqrt{3}i$

$(1-\sqrt{3}i)^2=1-2\sqrt{3}i+3i^2=1-2\sqrt{3}i-3$
$=-2-2\sqrt{3}i$

38 답 2

$(1+i)(1-i)=1-i^2=1+1=2$

39 답 $2-3i$

$\frac{3+2i}{i}=\frac{(3+2i)i}{i^2}=\frac{3i+2i^2}{-1}$
$=-(3i-2)=2-3i$

40 답 $1-i$

$\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2(1-i)}{1-i^2}$
$=\frac{2(1-i)}{2}=1-i$

41 답 $\frac{2}{5}-\frac{i}{5}$

$\frac{1-i}{3-i}=\frac{(1-i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{3+i-3i-i^2}{9-i^2}$
$=\frac{3+i-3i+1}{9+1}=\frac{4-2i}{10}=\frac{2}{5}-\frac{i}{5}$

42 답 0

$\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}$
$=\frac{1+2i+i^2+1-2i+i^2}{1-i^2}$
$=\frac{1+2i-1+1-2i-1}{2}$
$=0$

43 답 $13-2i$

$(2+3i)(1-4i)-\frac{4-2i}{1+i}$
$=(2-8i+3i-12i^2)-\frac{(4-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$
$=(2-8i+3i+12)-\frac{4-4i-2i+2i^2}{1-i^2}$
$=(14-5i)-\frac{2-6i}{2}$
$=(14-5i)-(1-3i)$
$=13-2i$

44 답 -1

$i^6=(i^4)\times i^2=1\times(-1)=-1$

45 답 1

$i^8=(i^4)^2=1^2=1$

46 답 i

$i^{25}=(i^4)^6\times i=1^6\times i=i$

47 답 i

$(-i)^3=-i^3=-(-i)=i$

48 답 i

$(-i)^{15}=-i^{15}=-(i^4)^3\times i^3=-(-i)=i$

49 답 1

$(-i)^{32}=i^{32}=(i^4)^8=1$

50 답 $-i$

$\left(\frac{1}{i}\right)^{13}=\frac{1}{i^{13}}=\frac{1}{(i^4)^3\times i}=\frac{1}{i}=-i$

51 답 $-i$

$\left(-\frac{1}{i}\right)^{19}=-\frac{1}{i^{19}}=-\frac{1}{(i^4)^4\times i^3}=-\frac{1}{i^3}=-\frac{1}{-i}=-i$

52 답 $\sqrt{7}i$

53 답 $12i$

54 답 $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$

$\frac{1+\sqrt{-1}}{2-\sqrt{-1}}=\frac{1+i}{2-i}=\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2+i+2i+i^2}{4-i^2}$
$=\frac{1+3i}{5}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$

55 답 $1-\frac{3\sqrt{2}}{2}i$

$\frac{5-\sqrt{-8}}{2+\sqrt{-2}}=\frac{5-2\sqrt{2}i}{2+\sqrt{2}i}=\frac{(5-2\sqrt{2}i)(2-\sqrt{2}i)}{(2+\sqrt{2}i)(2-\sqrt{2}i)}$
$=\frac{10-5\sqrt{2}i-4\sqrt{2}i+4i^2}{4-2i^2}$
$=\frac{6-9\sqrt{2}i}{6}=1-\frac{3\sqrt{2}}{2}i$

56 답 $4i$

$\sqrt{2}\sqrt{-8}=\sqrt{2}\sqrt{8}i=\sqrt{16}i=4i$

57 답 -6

$\sqrt{-3}\sqrt{-12}=\sqrt{3}i\times\sqrt{12}i=\sqrt{36}i^2=-6$

58 답 $-i$

$\frac{5}{\sqrt{-25}}=\frac{5}{\sqrt{25}i}=\frac{5}{5i}=\frac{1}{i}=-i$

59 답 $-\frac{i}{2}$

$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-24}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}i}=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}i}=\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2}$

유형 완성하기

p. 79~89

01 답 ⑤

① 0은 실수이다.

② $4i=0+4i$이므로 실수부분은 0이다.

③ $5-\sqrt{2}i$의 허수부분은 $-\sqrt{2}$이다.

④ $a=2$, $b=0$이면 $a+bi=2$로 실수이고 모든 실수는 복소수이다. 또 a가 실수라는 조건이 없으므로 a가 허수일 수도 있다. 즉 $a=2i$, $b=0$이면 $a+bi=2i$로 순허수이고 모든 순허수는 복소수이다.

⑤ 실수와 허수를 통틀어 복소수이므로 실수는 복소수이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

01-1 답 ⑤

① 실수는 복소수이다.

② $2-i$는 허수이므로 대소를 비교할 수 없다.

③ 3의 허수부분은 0이다.

④ $\alpha=i$, $\beta=-i$이면 $\alpha+\beta=0$이지만 $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$

⑤ $3i=0+3i$이므로 실수부분은 0이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

02 답 2

허수는 $-2i$, $2+2i$, $\sqrt{2}i$, $3-\frac{3}{4}i$이고, 이 중에서 순허수는 $-2i$, $\sqrt{2}i$이다. 따라서 순허수가 아닌 허수는 $2+2i$, $3-\frac{3}{4}i$이므로 그 개수는 2이다.

02-1 답 ②

ㄱ. 주어진 수는 모두 복소수이므로 복소수는 모두 9개이다.

ㄴ. 순허수는 $-\sqrt{5}i$로 오직 1개이다.

ㄷ. 허수는 $2-3i$, $-\sqrt{5}i$, $-2i+\sqrt{5}$, $\frac{1}{3}-\sqrt{2}i$로 모두 4개이다.

ㄹ. 실수는 -2, $\frac{\pi}{3}$, 0, $-i^2=1$, $-i^4=-1$로 모두 5개이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

03 답 ⑤

⑤ $i^3+\frac{1}{i}=-i+(-i)=-2i$

03-1 답 ④

④ $\frac{1+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}+\frac{1-\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}=\frac{(1+\sqrt{2}i)^2+(1-\sqrt{2}i)^2}{(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)}$

$=\frac{-1+2\sqrt{2}i+(-1-2\sqrt{2}i)}{3}$

$=-\frac{2}{3}$

04 답 ③

$(4+i)(1+2i)-(3+i)^2=4+8i+i-2-(8+6i)$

$=2+9i-8-6i$

$=-6+3i$

따라서 $a=-6$, $b=3$이므로

$a+b=-6+3=-3$

04-1 답 6

$(2-\sqrt{2}i)(-\sqrt{2}+i)+\frac{9}{2\sqrt{2}+i}$

$=-2\sqrt{2}+2i+2i+\sqrt{2}+\frac{9(2\sqrt{2}-i)}{(2\sqrt{2}+i)(2\sqrt{2}-i)}$

$=-\sqrt{2}+4i+2\sqrt{2}-i$

$=\sqrt{2}+3i$

따라서 $a=\sqrt{2}$, $b=3$이므로

$a^2b=(\sqrt{2})^2\times3=6$

05 답 ①

$\frac{5-\sqrt{5}i}{5+\sqrt{5}i}=\frac{(5-\sqrt{5}i)^2}{(5+\sqrt{5}i)(5-\sqrt{5}i)}=\frac{20-10\sqrt{5}i}{30}=\frac{2-\sqrt{5}i}{3}$

따라서 $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{\sqrt{5}}{3}$이므로

$a^2+b^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=1$

05-1 답 ④

$z=\frac{4-3i}{3+4i}=\frac{(4-3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{-25i}{25}=-i$

따라서 $a=0$, $b=-1$이므로

$a-b=0-(-1)=1$

06 답 ③

$x=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$에서 $2x=1-\sqrt{3}i$

$\therefore 2x-1=-\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $(2x-1)^2=(-\sqrt{3}i)^2$

$4x^2-4x+1=-3$, $4x^2-4x=-4$

$\therefore x^2-x=-1$

$\therefore x^2-x+2=-1+2=1$

06-1 답 ②

$x=\frac{-2\sqrt{3}i+1}{2}$에서 $2x=-2\sqrt{3}i+1$

$\therefore 2x-1=-2\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $(2x-1)^2=(-2\sqrt{3}i)^2$

$4x^2-4x+1=-12$ $\quad\therefore 4x^2-4x=-13$

$\therefore 12x^2-12x+1=3(4x^2-4x)+1=3\times(-13)+1=-38$

07 답 ④

$x=\overline{1+i}=1-i$, $y=\overline{1-i}=1+i$이므로

$x+y=(1-i)+(1+i)=2$

$x-y=(1-i)-(1+i)=-2i$

$\therefore x^2-y^2=(x+y)(x-y)=2\times(-2i)=-4i$

07-1 답 144

$x=\overline{2-2i}=2+2i,\ y=\overline{3+3i}=3-3i$이므로

$3x+2y=3(2+2i)+2(3-3i)=12$

$xy=(2+2i)(3-3i)=12$

$\therefore\ 3x^2y+2xy^2=xy(3x+2y)=12\times12=144$

08 답 3

$x=\dfrac{1+\sqrt{5}i}{1-\sqrt{5}i}=\dfrac{(1+\sqrt{5}i)^2}{(1-\sqrt{5}i)(1+\sqrt{5}i)}$

$=\dfrac{-4+2\sqrt{5}i}{6}=\dfrac{-2+\sqrt{5}i}{3}$

에서 $3x=-2+\sqrt{5}i$

$\therefore\ 3x+2=\sqrt{5}i$ ······❶

양변을 제곱하면 $(3x+2)^2=(\sqrt{5}i)^2$

$9x^2+12x+4=-5$

$\therefore\ 9x^2+12x=-9$ ······❷

$\therefore\ 9x^2+12x+12=-9+12=3$ ······❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 $ax+b=ci$ (a, b, c는 실수) 꼴로 나타낼 수 있다.	40%
❷ 양변을 제곱하여 x에 대한 이차방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ $9x^2+12x+12$의 값을 구할 수 있다.	20%

08-1 답 ②

$x=1-i$에서 $x-1=-i$

양변을 제곱하면 $(x-1)^2=(-i)^2$

$x^2-2x+1=-1 \qquad \therefore\ x^2-2x=-2$

$\therefore\ x^3-2x^2-3x-5=x(x^2-2x)-3x-5$

$=-2x-3x-5$

$=-5x-5$

$=-5(1-i)-5\ (\because\ x=1-i)$

$=-10+5i$

09 답 ①

$z=a(3+i)-1+3i=(3a-1)+(a+3)i$

z^2이 실수가 되려면 z가 실수 또는 순허수이어야 하므로

$a+3=0$ 또는 $3a-1=0$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=\dfrac{1}{3}$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$-3\times\dfrac{1}{3}=-1$

09-1 답 ②

$z=(1+i)a-(2+3i)=(a-2)+(a-3)i$

z^2이 실수가 되려면 z가 실수 또는 순허수이어야 하므로

$a-3=0$ 또는 $a-2=0$

$\therefore\ a=3$ 또는 $a=2$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$3+2=5$

10 답 -2

$z=(1+i)x^2+(3-i)x+2(1-i)$

$=(x^2+3x+2)+(x^2-x-2)i$

$z^2<0$이 되려면 z가 순허수이어야 하므로

$x^2+3x+2=0,\ x^2-x-2\neq0$

$x^2+3x+2=0$에서 $(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=-2$ ······㉠

$x^2-x-2\neq0$에서 $(x+1)(x-2)\neq0$

$\therefore\ x\neq-1$이고 $x\neq2$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $x=-2$

10-1 답 2

$z=x^2(1+i)-x(1+2i)-2-3i$

$=(x^2-x-2)+(x^2-2x-3)i$ ······❶

$z^2<0$이 되려면 z가 순허수이어야 하므로

$x^2-x-2=0,\ x^2-2x-3\neq0$ ······❷

$x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$ ······㉠

$x^2-2x-3\neq0$에서 $(x+1)(x-3)\neq0$

$\therefore\ x\neq-1$이고 $x\neq3$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $x=2$ ······❸

채점 기준	비율
❶ z를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $z^2<0$이 되는 조건을 구할 수 있다.	40%
❸ x의 값을 구할 수 있다.	30%

11 답 ⑤

$z=(2+ai)(2-4i)=4-8i+2ai+4a$

$=(4a+4)+(2a-8)i$

z^2이 양의 실수가 되려면 z가 0이 아닌 실수이어야 하므로

$4a+4\neq0,\ 2a-8=0$

$\therefore\ a=4$

11-1 답 ④

$z=(1+i)x^2-(5i-2)x-(8-6i)$

$=(x^2+2x-8)+(x^2-5x+6)i$

z^2이 양의 실수가 되려면 z가 0이 아닌 실수이어야 하므로

$x^2+2x-8\neq0,\ x^2-5x+6=0$

$x^2+2x-8\neq0$에서 $(x+4)(x-2)\neq0$

$\therefore\ x\neq-4$이고 $x\neq2$ ······㉠

$x^2-5x+6=0$에서 $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=3$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $x=3$

12 답 ⑤

$(2a+3)+(a-3)i=\overline{b+i}$에서

$(2a+3)+(a-3)i=b-i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a+3=b,\ a-3=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=7$

$\therefore\ b-a=7-2=5$

12-1 답 $a=1,\ b=-4$

$\dfrac{2a}{1+i}+5i=\overline{1+bi}$에서

$\dfrac{2a(1-i)}{(1+i)(1-i)}+5i=1-bi$

$a(1-i)+5i=1-bi$

$\therefore a+(-a+5)i=1-bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=1, -a+5=-b$

$-a+5=-b$에서 $-1+5=-b$ $\quad\therefore b=-4$

13 답 ⑤

$\dfrac{2x}{1+i}+\dfrac{y}{1-i}=\overline{12+9i}$에서

$\dfrac{2x(1-i)+y(1+i)}{(1+i)(1-i)}=12-9i$

$\dfrac{2x(1-i)+y(1+i)}{2}=12-9i$

$\therefore (2x+y)+(-2x+y)i=24-18i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x+y=24, -2x+y=-18$

두 식을 연립하여 풀면 $x=\dfrac{21}{2}, y=3$

$\therefore 2x+3y=2\times\dfrac{21}{2}+3\times3=30$

13-1 답 1

$\dfrac{x+1}{1+i}+\dfrac{2y}{1-i}=2-i$에서

$\dfrac{(x+1)(1-i)+2y(1+i)}{(1+i)(1-i)}=2-i$

$\dfrac{x-xi+1-i+2y+2yi}{2}=2-i$

$\therefore (x+2y+1)+(-x+2y-1)i=4-2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+2y+1=4, -x+2y-1=-2$

$\therefore x+2y=3, -x+2y=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $x=2, y=\dfrac{1}{2}$

$\therefore xy=2\times\dfrac{1}{2}=1$

14 답 6

$x^2+y^2i-3x-5yi+2+4i=0$에서

$(x^2-3x+2)+(y^2-5y+4)i=0$ ······❶

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2-3x+2=0, y^2-5y+4=0$

$x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

$y^2-5y+4=0$에서 $(y-1)(y-4)=0$

$\therefore y=1$ 또는 $y=4$ ······❷

따라서 $x+y$의 값이 될 수 있는 것은

$1+1=2, 1+4=5, 2+1=3, 2+4=6$

이므로 $x+y$의 최댓값은 6이다. ······❸

채점 기준	비율
❶ 좌변을 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	40%
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $x+y$의 최댓값을 구할 수 있다.	30%

14-1 답 ④

$2x^2-y^2i+3x-5yi-2+6i=0$에서

$(2x^2+3x-2)+(-y^2-5y+6)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x^2+3x-2=0, -y^2-5y+6=0$

$2x^2+3x-2=0$에서 $(x+2)(2x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

$-y^2-5y+6=0$에서 $y^2+5y-6=0$

$(y+6)(y-1)=0$

$\therefore y=-6$ 또는 $y=1$

즉 xy의 값이 될 수 있는 것은

$-2\times(-6)=12, -2\times1=-2$

$\dfrac{1}{2}\times(-6)=-3, \dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{2}$

따라서 xy의 값이 될 수 없는 것은 ④이다.

15 답 ④

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

① $z=-\bar{z}$에서 $a+bi=-(a-bi)$

$2a=0 \quad \therefore a=0$

즉 복소수 z는 0 또는 순허수이다.

② $z-\bar{z}=0$에서 $a+bi-(a-bi)=0$

$2bi=0 \quad \therefore b=0$

즉 복소수 z는 실수이다.

③ $z\bar{z}=0$에서 $(a+bi)(a-bi)=0, a^2+b^2=0$

이때 a, b는 실수이므로 $a=0, b=0$

$\therefore z=0$

④ $a=1, b=1$, 즉 $z=1+i$이면

$z^2+\bar{z}^2=(1+i)^2+(1-i)^2=2i-2i=0$이지만 $z\neq0$이다.

⑤ $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

이때 a, b는 실수이므로 a^2+b^2은 실수이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

참고 a, b가 실수일 때, 복소수 $(a+bi)$는 다음과 같이 분류할 수 있다.

$$\begin{cases}\text{실수 } a\ (b=0) \\ \text{허수 } a+bi\ (b\neq0)\begin{cases}\text{순허수 } bi\ (a=0, b\neq0) \\ \text{순허수가 아닌 허수 } a+bi\ (a\neq0, b\neq0)\end{cases}\end{cases}$$

15-1 답 ②

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

① $z+\bar{z}=a+bi+a-bi=2a$이므로 $z+\bar{z}$는 실수이다.

② $z^2<0$이 되려면 z는 순허수이어야 하므로

$a=0, b\neq0$

즉 $z=bi, \bar{z}=-bi\ (b\neq0)$이므로 $z\neq\bar{z}$

③ $z\bar{z}=0$에서 $(a+bi)(a-bi)=0, a^2+b^2=0$

이때 a, b는 실수이므로 $a=0, b=0$

$\therefore z=0$

④ $z=\bar{z}$에서 $a+bi=a-bi, 2bi=0 \quad \therefore b=0$

즉 복소수 z는 실수이다.

⑤ $z^2+\bar{z}^2=0$에서 $(a+bi)^2+(a-bi)^2=0$

$2a^2-2b^2=0, a^2=b^2$

$\therefore a=b$ 또는 $a=-b$

$\therefore z=a\pm ai=a(1\pm i)$

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

16 답 ㄱ, ㄹ

$z=a+bi$ ($a\neq0$ 또는 $b\neq0$인 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

ㄱ. $z+\bar{z}=a+bi+(a-bi)=2a$ (실수)

ㄴ. $z^2-\bar{z}^2=(z-\bar{z})(z+\bar{z})=2bi\times2a=4abi$

ㄷ. $\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{a+bi}-\frac{1}{a-bi}=\frac{a-bi-(a+bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{-2bi}{a^2+b^2}$

ㄹ. $\frac{\bar{z}}{z}+\frac{z}{\bar{z}}=\frac{a-bi}{a+bi}+\frac{a+bi}{a-bi}$

$=\frac{(a-bi)^2+(a+bi)^2}{(a+bi)(a-bi)}$

$=\frac{2a^2-2b^2}{a^2+b^2}$ (실수)

따라서 항상 실수인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

16-1 답 ㄱ, ㄷ

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

ㄱ. $(z+1)(\bar{z}+1)=z\bar{z}+z+\bar{z}+1$

$=(a+bi)(a-bi)+a+bi+a-bi+1$

$=a^2+b^2+2a+1$ (실수)

ㄴ. $(z+1)(\bar{z}-1)=z\bar{z}-z+\bar{z}-1$

$=(a+bi)(a-bi)-(a+bi)+a-bi-1$

$=a^2+b^2-1-2bi$

이때 $b\neq0$이면 실수가 아니다.

ㄷ. $(2z+1)(\bar{z}+1)-z=2z\bar{z}+2z+\bar{z}+1-z$

$=2z\bar{z}+z+\bar{z}+1$

$=2(a+bi)(a-bi)+a+bi+a-bi+1$

$=2(a^2+b^2)+2a+1$ (실수)

따라서 항상 실수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17 답 -3 또는 2

$z=(1-i)x^2+(2-i)x-3+6i$

$=(x^2+2x-3)-(x^2+x-6)i$

$z=\bar{z}$이려면 z는 실수이어야 하므로 (허수부분)$=0$

즉 $x^2+x-6=0$이므로 $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

17-1 답 6

$z=(1+i)x^2-(5+2i)x-(6+3i)$

$=(x^2-5x-6)+(x^2-2x-3)i$

(가)에서 $z+\bar{z}=0$이려면 z는 0 또는 순허수이어야 한다.

(나)에서 $z\neq\bar{z}$이려면 z는 0이 아니어야 한다.

즉 (가), (나)를 만족시키는 z는 순허수이므로

$x^2-5x-6=0$, $x^2-2x-3\neq0$

$x^2-5x-6=0$에서 $(x+1)(x-6)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=6$ ……㉠

$x^2-2x-3\neq0$에서 $(x+1)(x-3)\neq0$

$\therefore x\neq-1$이고 $x\neq3$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $x=6$

18 답 ②

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$(2+i)z-3\bar{z}i=6i-10$에서

$(2+i)(a+bi)-3(a-bi)i=6i-10$

$2a+2bi+ai-b-3ai-3b=-10+6i$

$\therefore (2a-4b)+(-2a+2b)i=-10+6i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a-4b=-10$, $-2a+2b=6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

$\therefore z=-1+2i$

18-1 답 ④

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$(2-i)z+i\bar{z}=10+4i$에서

$(2-i)(a+bi)+i(a-bi)=10+4i$

$2a+2bi-ai+b+ai+b=10+4i$

$\therefore (2a+2b)+2bi=10+4i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a+2b=10$, $2b=4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$

$\therefore z=3+2i$

19 답 $-5\pm4i$

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=-10$ $\quad\therefore a=-5$

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=41$

$a=-5$를 $a^2+b^2=41$에 대입하면

$(-5)^2+b^2=41$, $b^2=16$ $\quad\therefore b=\pm4$

$\therefore z=-5\pm4i$

19-1 답 $2\pm3i$

$\frac{1}{2}\left(z+\frac{13}{z}\right)=2$에서 $z+\frac{13}{z}=4$

이때 $z\bar{z}=13$, 즉 $\bar{z}=\frac{13}{z}$이므로 $z+\frac{13}{z}=z+\bar{z}=4$

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=4$ $\quad\therefore a=2$

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=13$

$a=2$를 $a^2+b^2=13$에 대입하면

$2^2+b^2=13$, $b^2=9$ $\quad\therefore b=\pm3$

$\therefore z=2\pm3i$

20 답 -16

$z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{a+bi}{a-bi}=\frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}=\frac{a^2+2abi-b^2}{a^2+b^2}$

$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$

$\therefore z\bar{z}+\frac{z}{\bar{z}}=\left(a^2+b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$ ……㉠

이때 $z\bar{z}+\frac{z}{\bar{z}}=3$에서 허수부분이 0이므로

$\frac{2ab}{a^2+b^2}=0$, $2ab=0$ $\quad\therefore a=0$ ($\because b\neq0$)

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $z\bar{z}+\frac{z}{\bar{z}}=b^2-1$이므로

$b^2-1=3$ $\quad\therefore b^2=4$

$\therefore (z-\bar{z})^2=\{a+bi-(a-bi)\}^2=(2bi)^2=-4b^2$

$=-4\times4=-16$

다른 풀이

$z\bar{z}+\frac{z}{\bar{z}}=3$이므로 $\overline{z\bar{z}+\frac{z}{\bar{z}}}=3$

$\therefore\ \bar{z}z+\frac{\bar{z}}{z}=3$

즉 $z\bar{z}+\frac{z}{\bar{z}}=\bar{z}z+\frac{\bar{z}}{z}$이므로 $\frac{z}{\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{z}$

$z^2=\bar{z}^2,\ z^2-\bar{z}^2=0$

$\therefore\ (z+\bar{z})(z-\bar{z})=0$

이때 z는 실수가 아니므로 $z-\bar{z}\neq0$

$\therefore\ z=-\bar{z}$

즉 $z=-\bar{z}$이므로 z는 순허수이다.

$z=bi$ (b는 실수, $b\neq0$)라 하면 $\bar{z}=-bi$이므로

$z\bar{z}+\frac{z}{\bar{z}}=bi\times(-bi)+\frac{bi}{-bi}=b^2-1=3$

$\therefore\ b^2=4$

$\therefore\ (z-\bar{z})^2=\{bi-(-bi)\}^2=(2bi)^2=-4b^2$

$=-4\times4=-16$

20-1 답 $\pm\sqrt{3}i$

$z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

$\frac{\bar{z}}{z}=\frac{a-bi}{a+bi}=\frac{(a-bi)^2}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a^2-2abi-b^2}{a^2+b^2}$

$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\frac{2ab}{a^2+b^2}i$

$\therefore\ z\bar{z}+\frac{\bar{z}}{z}=\left(a^2+b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)-\frac{2ab}{a^2+b^2}i$ ······㉠

이때 $z\bar{z}+\frac{\bar{z}}{z}=2$에서 허수부분이 0이므로

$-\frac{2ab}{a^2+b^2}=0,\ 2ab=0 \qquad \therefore\ a=0\ (\because\ b\neq0)$

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $z\bar{z}+\frac{\bar{z}}{z}=b^2-1$이므로

$b^2-1=2,\ b^2=3 \qquad \therefore\ b=\pm\sqrt{3}$

$\therefore\ z=\pm\sqrt{3}i$

21 답 ③

$i+i^2+i^3+i^4=i^5+i^6+i^7+i^8=i^9+i^{10}+i^{11}+i^{12}$

$=\cdots=i^{97}+i^{98}+i^{99}+i^{100}=i-1-i+1=0$

$\therefore\ 1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{98}+i^{99}+i^{100}=1$

21-1 답 ④

$i^3+i^6+i^9+i^{12}=i^{15}+i^{18}+i^{21}+i^{24}=i^{27}+i^{30}+i^{33}+i^{36}$

$=i^{39}+i^{42}+i^{45}+i^{48}=-i-1+i+1=0$

$i^{215}+i^{216}+i^{217}+i^{218}=-i+1+i-1=0$

$\therefore\ (i^3+i^6+i^9+\cdots+i^{48})+(i^{215}+i^{216}+i^{217}+i^{218})=0$

22 답 $-50+50i$

$\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i,\ \frac{1}{i^2}=-1,\ \frac{1}{i^3}=\frac{i}{i^4}=i,\ \frac{1}{i^4}=1,\ \cdots$

이므로 n이 음이 아닌 정수일 때

$\frac{1}{i^{4n+1}}=-i,\ \frac{1}{i^{4n+2}}=-1,\ \frac{1}{i^{4n+3}}=i,\ \frac{1}{i^{4n}}=1$

$\therefore\ \frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\cdots+\frac{99}{i^{99}}$

$=(-i-2+3i+4)+(-5i-6+7i+8)$

$+\cdots+(-93i-94+95i+96)-97i-98+99i$

$=(2+2i)+(2+2i)+\cdots+(2+2i)+2i-98$

$=(2+2i)\times24+2i-98$

$=-50+50i$

22-1 답 -1

$i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+30i^{30}$

$=(i+2i^2+3i^3+4i^4)+(5i^5+6i^6+7i^7+8i^8)$

$+\cdots+(25i^{25}+26i^{26}+27i^{27}+28i^{28})+29i^{29}+30i^{30}$

$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)$

$+\cdots+(25i-26-27i+28)+29i-30$

$=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)+29i-30$

$=(2-2i)\times7+29i-30$

$=-16+15i$

따라서 $a=-16,\ b=15$이므로

$a+b=-16+15=-1$

23 답 ④

ㄱ. $f(3)=i^{3+1}=i^4=1$

ㄴ. $f(2n+1)=i^{2n+1+1}=i^{2n+2}=(i^2)^{n+1}=(-1)^{n+1}$

$-f(n)=-i^{n+1} \qquad \therefore\ f(2n+1)\neq-f(n)$

ㄷ. $n=1$일 때, $f(1)=i^{1+1}=i^2=-1$

$n=2$일 때, $f(2)=i^{2+1}=i^3=-i$

$n=3$일 때, $f(3)=i^{3+1}=i^4=1$

$n=4$일 때, $f(4)=i^{4+1}=i^5=i$

$n=5$일 때, $f(5)=i^{5+1}=i^6=i^2=-1$

⋮

즉 $f(n)$이 가질 수 있는 값은 $-1,\ -i,\ 1,\ i$뿐이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

23-1 답 ⑤

ㄱ. $f(5)=i^{2\times5+3}=i^{13}=i$

ㄴ. $f(2n-1)=i^{2(2n-1)+3}=i^{4n+1}=i$

$f(2n+1)=i^{2(2n+1)+3}=i^{4n+5}=i$

$\therefore\ f(2n-1)=f(2n+1)$

ㄷ. $n=1$일 때, $f(1)=i^5=i$

$n=2$일 때, $f(2)=i^7=i^3=-i$

$n=3$일 때, $f(3)=i^9=i^5=i$

$n=4$일 때, $f(4)=i^{11}=i^7=-i$

$n=5$일 때, $f(5)=i^{13}=i^9=i$

⋮

즉 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)$의 값은 $i,\ -i$뿐이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

24 답 ③

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\therefore$ (주어진 식)$=(-i)^{2047}+i^{2049}=-(i^4)^{511}\times i^3+(i^4)^{512}\times i$

$=-i^3+i=i+i=2i$

24-1 답 ⑤

$z=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$\bar{z}=i$

$\therefore z^{100}+\bar{z}^{100}=(-i)^{100}+i^{100}$

$=(i^4)^{25}+(i^4)^{25}$

$=1+1=2$

25 답 $1-i$

$z^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$

$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1$

$z^6=z^4\times z^2=-1\times(-i)=i$

$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$

$z^{10}=z^8\times z^2=1\times(-i)=-i$

$\therefore 1+z^2+z^4+z^6+z^8+z^{10}=1+(-i)+(-1)+i+1+(-i)$

$=1-i$

25-1 답 ②

$z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$

$z^4=(z^2)^2=i^2=-1$

$z^6=z^4\times z^2=-1\times i=-i$

$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$

$\vdots$

이므로

$z^2-z^4+z^6-z^8=z^{10}-z^{12}+z^{14}-z^{16}=i-(-1)+(-i)-1=0$

$\therefore z^2-z^4+z^6-\cdots-z^{20}=z^{18}-z^{20}=(z^8)^2\times z^2-(z^8)^2\times z^4$

$=z^2-z^4=i-(-1)=1+i$

따라서 $a=1$, $b=1$이므로

$a+b=1+1=2$

26 답 -2

$\alpha^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\frac{2}{2i}=\frac{1}{i}=-i$

$\beta^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2=\frac{2}{-2i}=-\frac{1}{i}=i$

$\therefore \alpha^{60}+\beta^{60}=(\alpha^2)^{30}+(\beta^2)^{30}=(-i)^{30}+i^{30}$

$=(i^4)^7\times i^2+(i^4)^7\times i^2$

$=-1+(-1)=-2$

26-1 답 0

$f(n)=\left(\frac{1-i}{i}\right)^n+\left(\frac{1+i}{i}\right)^n$

$=\left(\frac{1}{i}-1\right)^n+\left(\frac{1}{i}+1\right)^n$

$=(-1-i)^n+(1-i)^n$ ……❶

$\therefore f(18)=(-1-i)^{18}+(1-i)^{18}$

$=\{(-1-i)^2\}^9+\{(1-i)^2\}^9$

$=(2i)^9+(-2i)^9$

$=512i^9-512i^9$

$=0$ ……❷

채점 기준	비율
❶ $f(n)$을 간단히 할 수 있다.	50%
❷ $f(18)$의 값을 구할 수 있다.	50%

27 답 ⑤

① $\sqrt{-5}\sqrt{-20}=\sqrt{5}i\times\sqrt{20}i=-\sqrt{100}=-10$

② $\frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{18}i}{\sqrt{2}}=\sqrt{9}i=3i$

③ $\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{-2}}=\frac{\sqrt{6}i}{\sqrt{2}i}=\sqrt{3}$

④ $3\sqrt{-2}+\sqrt{-8}=3\sqrt{2}i+\sqrt{8}i=3\sqrt{2}i+2\sqrt{2}i=5\sqrt{2}i$

⑤ $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i=-\sqrt{6}$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

27-1 답 ④

① $\sqrt{-2}\sqrt{-5}=\sqrt{2}i\times\sqrt{5}i=-\sqrt{10}$

② $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}i}=\frac{\sqrt{6}i}{\sqrt{2}i\times i}=\frac{\sqrt{6}i}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{3}i$

③ $\sqrt{-2}-\sqrt{-8}=\sqrt{2}i-\sqrt{8}i=\sqrt{2}i-2\sqrt{2}i=-\sqrt{2}i$

④ $\sqrt{(-2)^2}+(\sqrt{-3})^2=|-2|+(\sqrt{3}i)^2$

$=2+3i^2$

$=2-3$

$=-1$

⑤ $2\sqrt{-49}-3\sqrt{-9}+5\sqrt{-36}=2\sqrt{49}i-3\sqrt{9}i+5\sqrt{36}i$

$=14i-9i+30i$

$=35i$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

28 답 ③

$\sqrt{-3}\sqrt{-1}+\frac{\sqrt{-9}}{\sqrt{-3}}-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-5}}+\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{3}i\times i+\frac{\sqrt{9}i}{\sqrt{3}i}-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}i}+\frac{\sqrt{4}i}{\sqrt{2}}$

$=-\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{2}i+\sqrt{2}i$

$=2\sqrt{2}i$

다른 풀이

$\sqrt{-3}\sqrt{-1}+\frac{\sqrt{-9}}{\sqrt{-3}}-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-5}}+\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{2}}$

$=-\sqrt{3}+\sqrt{3}-(-\sqrt{-2})+\sqrt{-2}$

$=-\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{2}i+\sqrt{2}i$

$=2\sqrt{2}i$

참고 음수의 제곱근의 성질에서

(1) $a<0$, $b<0$ 이외의 경우에는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

(2) $a>0$, $b<0$ 이외의 경우에는 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

28-1 답 $-5+4\sqrt{6}$

$(\sqrt{-5})^2-\sqrt{-18}\sqrt{-3}+\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-3}}$

$=(\sqrt{5}i)^2-3\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i+\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}i}$

$=-5+3\sqrt{6}-\sqrt{6}i$

따라서 $a=-5+3\sqrt{6}$, $b=-\sqrt{6}$이므로
$a-b=-5+3\sqrt{6}-(-\sqrt{6})=-5+4\sqrt{6}$

29 답 $5\sqrt{2}$

$$\frac{3-\sqrt{-8}}{1+\sqrt{-2}}=\frac{3-2\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}$$
$$=\frac{(3-2\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}$$
$$=\frac{3-3\sqrt{2}i-2\sqrt{2}i-4}{3}$$
$$=\frac{-1-5\sqrt{2}i}{3} \qquad \cdots\cdots❶$$

따라서 $a=-\frac{1}{3}$, $b=-\frac{5\sqrt{2}}{3}$이므로 ……❷

$$9ab=9\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{5\sqrt{2}}{3}\right)=5\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots❸$$

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $9ab$의 값을 구할 수 있다.	20%

29-1 답 8

$$\frac{10-\sqrt{-16}}{\sqrt{-4}}=\frac{10-4i}{2i}=\frac{5-2i}{i}$$
$$=\frac{5i-2i^2}{i^2}=-2-5i$$

$\therefore (x-y)+(x+y+1)i=-2-5i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x-y=-2$, $x+y+1=-5$
$\therefore x-y=-2$, $x+y=-6$
두 식을 연립하여 풀면 $x=-4$, $y=-2$
$\therefore xy=-4\times(-2)=8$

30 답 ③

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0$, $b<0$
① $\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}\sqrt{b^2}=|b|\sqrt{a}=-b\sqrt{a}$
② $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
③ $\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=|a||b|=-a\times(-b)=ab$
④ $\sqrt{-ab}=\sqrt{ab}i=-\sqrt{a}\sqrt{b}i$
⑤ $b^2>0$이므로 $\sqrt{\frac{b^2}{a}}=-\frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{a}}=-\frac{|b|}{\sqrt{a}}=-\frac{-b}{\sqrt{a}}=\frac{b}{\sqrt{a}}$
따라서 옳은 것은 ③이다.

30-1 답 ⑤

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\sqrt{\frac{a}{b}}=0$에서 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$
$\therefore a>0$, $b<0$
① $\sqrt{-b^2}=\sqrt{b^2}i=|b|i=-bi$
② $\frac{\sqrt{-4a}}{\sqrt{a}}=\frac{2\sqrt{a}i}{\sqrt{a}}=2i$
③ $\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}\sqrt{b^2}=|b|\sqrt{a}=-b\sqrt{a}$
④ $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=|a|\sqrt{b}=a\sqrt{b}$
⑤ $a>0$, $b<0$이므로 $a-b>0$, $b-a<0$

$$\therefore \sqrt{\frac{b-a}{a-b}}=\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{a-b}}=\frac{\sqrt{-(a-b)}}{\sqrt{a-b}}=\frac{\sqrt{a-b}i}{\sqrt{a-b}}=i$$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

31 답 $2x-1$

$\sqrt{\frac{x+3}{x-4}}=-\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-4}}$이므로 $x+3>0$, $x-4<0$

$$\therefore \sqrt{(x+3)^2}-|x-4|=|x+3|-|x-4|$$
$$=(x+3)+(x-4)$$
$$=2x-1$$

31-1 답 ②

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이므로 $a>0$, $b<0$
이때 $a-b>0$, $b-a<0$이므로

$$|b|-|a-b|+\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{b-a}}=-b-(a-b)+\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}i}$$
$$=-b-a+b+\frac{1}{i}$$
$$=-a-i$$

32 답 ②

$\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{ab}=0$에서 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$
$\therefore a<0$, $b<0$
이때 $a-1<0$, $a+b<0$, $1-a>0$이므로

$$\sqrt{(a-1)^2}-|a+b|-\sqrt{(1-a)^2}+\sqrt{b^2}$$
$$=|a-1|-|a+b|-|1-a|+|b|$$
$$=-(a-1)+(a+b)-(1-a)-b$$
$$=a$$

32-1 답 $-2i$

$0<a<b$이므로 $-a<0$, $-b<0$, $a-b<0$, $b-a>0$

$$\therefore \frac{\sqrt{9a}}{\sqrt{-a}}+\sqrt{-a}\sqrt{-b}+\sqrt{a}\sqrt{b}+\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{b-a}}$$
$$=-\sqrt{\frac{9a}{-a}}-\sqrt{-a\times(-b)}+\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a-b}{b-a}}$$
$$=-\sqrt{-9}-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+\sqrt{-1}$$
$$=-3i+i$$
$$=-2i$$

유형+ 완성하기 p. 90

33 답 ㄴ, ㄷ

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$
ㄱ. $a=0$, $b=1$, 즉 $z=i$이면 $z^2=-1$이므로 실수이지만
$(z-1)^2=(i-1)^2=-2i$이므로 실수가 아니다.

ㄴ. $(z-\bar{z})^{2n}=(a+bi-a+bi)^{2n}=(2bi)^{2n}=(-4b^2)^n$이므로
$(z-\bar{z})^{2n}$은 실수이다.
ㄷ. $z+\bar{z}+z\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)+(a+bi)(a-bi)$
$=2a+a^2+b^2$
즉 $z+\bar{z}+z\bar{z}$는 실수이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

34 답 ㄴ, ㄷ
$z=a+bi$, $\omega=c+di$ (a, c는 실수, b, d는 0이 아닌 실수)라 하면
$z+\omega$, $z\omega$가 모두 실수이므로
$z+\omega=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$에서
$b+d=0 \quad \therefore d=-b$ ······㉠
$z\omega=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$에서
$bc+ad=0$ ······㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$bc-ab=0$, $b(c-a)=0 \quad \therefore a=c\ (\because b\neq 0)$
즉 $z=a+bi$, $\omega=a-bi$이므로
ㄱ. $\bar{z}+\omega=a-bi+a-bi=2(a-bi)$
$z+\bar{\omega}=a+bi+a+bi=2(a+bi)$
$\therefore \bar{z}+\omega\neq z+\bar{\omega}$
ㄴ. $\bar{z}-\omega=a-bi-(a-bi)=0$
$z-\bar{\omega}=a+bi-(a+bi)=0$
$\therefore \bar{z}-\omega=z-\bar{\omega}$
ㄷ. $z\omega$가 실수이므로 $z\omega=\overline{z\omega}$
ㄹ. $z\bar{\omega}=(a+bi)(a+bi)=a^2-b^2+2abi$
$\bar{z}\omega=(a-bi)(a-bi)=a^2-b^2-2abi$
$\therefore z\bar{\omega}\neq\bar{z}\omega$
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

35 답 ②
$\dfrac{1}{1-z^2}$이 실수이므로 $\dfrac{1}{1-z^2}=\overline{\left(\dfrac{1}{1-z^2}\right)}$에서
$\dfrac{1}{1-z^2}=\dfrac{1}{\overline{1-z^2}}$, $1-z^2=\overline{1-z^2}$, $1-z^2=1-\bar{z}^2$
$z^2-\bar{z}^2=0 \quad \therefore (z+\bar{z})(z-\bar{z})=0$
이때 z는 허수이므로 $z\neq\bar{z} \quad \therefore z+\bar{z}=0$
따라서 옳은 것은 ②이다.

36 답 ④
$\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta}=\bar{\alpha}(\alpha+\beta)+\bar{\beta}(\alpha+\beta)$
$=(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$
$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$
이때 $\alpha=-3+2i$, $\beta=1-i$이므로
$\alpha+\beta=(-3+2i)+(1-i)=-2+i$, $\overline{\alpha+\beta}=-2-i$
$\therefore$ (주어진 식)$=(-2+i)(-2-i)=5$

37 답 $\dfrac{1}{29}$
$\beta=\dfrac{-\alpha+3}{2\alpha+4}=\dfrac{-(-2i+3)+3}{2(-2i+3)+4}=\dfrac{2i}{-4i+10}$
$\therefore \beta\bar{\beta}=\dfrac{2i}{-4i+10}\times\overline{\left(\dfrac{2i}{-4i+10}\right)}=\dfrac{2i}{-4i+10}\times\dfrac{\overline{2i}}{\overline{-4i+10}}$
$=\dfrac{2i}{10-4i}\times\dfrac{-2i}{10+4i}=\dfrac{4}{100+16}=\dfrac{1}{29}$

38 답 ①
$\alpha\bar{\alpha}=\beta\bar{\beta}=4$에서 $\alpha=\dfrac{4}{\bar{\alpha}}$, $\beta=\dfrac{4}{\bar{\beta}}$
$\alpha+\beta=-8i$에서 $\dfrac{4}{\bar{\alpha}}+\dfrac{4}{\bar{\beta}}=-8i$이므로 $\dfrac{4(\overline{\alpha+\beta})}{\bar{\alpha}\times\bar{\beta}}=-8i$
$4(\overline{\alpha+\beta})=-8i\overline{\alpha\beta}$, $4\times 8i=-8i\overline{\alpha\beta}$
$32i=-8i\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\alpha\beta}=-4$
$\therefore \alpha\beta=-4$

학교 시험 대비 문제

p. 91~94

01 답 ②
① 0은 실수이므로 복소수이다.
③ $2-\sqrt{5}i$의 실수부분은 2, 허수부분은 $-\sqrt{5}$이다.
④ $-3i$의 실수부분은 0이다.
⑤ a가 실수라는 조건이 없으므로 a가 허수일 수도 있다.
$a=i$, $b=0$이면 $a+bi=i$이므로 허수이다.
따라서 옳은 것은 ②이다.

02 답 ②
ㄱ. $\bar{z}=2-3i$
ㄴ. z의 실수부분은 2, 허수부분은 3이다.
ㄷ. 허수는 대소를 비교할 수 없다.
따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

03 답 ③
$\dfrac{z_2}{z_1}-z_2=\dfrac{3-i}{2+i}-(3-i)=\dfrac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}-(3-i)$
$=\dfrac{5-5i}{5}-(3-i)=1-i-3+i=-2$

04 답 ⑤
$\alpha+\beta=(1+i)+(1-i)=2$
$\alpha-\beta=(1+i)-(1-i)=2i$
$\alpha\beta=(1+i)(1-i)=1^2-i^2=2$
$\therefore \dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}=\dfrac{2\times 2i}{2}=2i$

05 답 ③
$(1+2i)\triangle(3-i)=(1+2i)-(3-i)+(1+2i)(3-i)$
$=-2+3i+5+5i=3+8i$
따라서 구하는 실수부분은 3이다.

06 답 ①
$x=1-2i$에서 $x-1=-2i$
양변을 제곱하면 $(x-1)^2=(-2i)^2$
$x^2-2x+1=-4 \quad \therefore x^2-2x+5=0$

$\therefore x^4-4x^3+10x^2-17x+11$

$=(x^2-2x+5)(x^2-2x+1)-5x+6$

$=-5x+6$

$=-5(1-2i)+6$

$=1+10i$

따라서 $a=1$, $b=10$이므로

$a+b=1+10=11$

07 답 ④

z^2이 실수가 되려면 z가 실수 또는 순허수이어야 하므로

$3x-6=0$ 또는 $x-4=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은

$2+4=6$

다른 풀이

$z^2=(3x-6)^2+2(3x-6)(x-4)i-(x-4)^2$

z^2이 실수가 되려면 $2(3x-6)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은

$2+4=6$

08 답 ⑤

$z=(1+i)x^2-4x+3-i=(x^2-4x+3)+(x^2-1)i$

z^2이 음의 실수가 되려면 z가 순허수이어야 하므로

$x^2-4x+3=0$, $x^2-1\neq0$

$x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$ ……㉠

$x^2-1\neq0$에서 $(x+1)(x-1)\neq0$

$\therefore x\neq-1$이고 $x\neq1$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $x=3$

09 답 ⑤

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+1=3$, $x-y=1$

두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=1$

$\therefore x+y=2+1=3$

10 답 ③

$(3+2i)x+(2-3i)y=5-i$에서

$(3x+2y)+(2x-3y)i=5-i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3x+2y=5$, $2x-3y=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1$

$\therefore x+y=1+1=2$

11 답 5

$(-3+i)+(2x-yi)=(2x-3)+(1-y)i$이므로

$\overline{(-3+i)+(2x-yi)}=\overline{(2x-3)+(1-y)i}$

$=(2x-3)-(1-y)i$

$=(2x-3)+(y-1)i$

즉 $(2x-3)+(y-1)i=5-2i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $2x-3=5$, $y-1=-2$

$\therefore x=4$, $y=-1$

$\therefore x-y=4-(-1)=5$

12 답 ⑤

① $z=-3-4i$이므로 $\bar{z}=-3+4i$

② $z+\bar{z}=(-3-4i)+(-3+4i)=-6$

③ $z-\bar{z}=(-3-4i)-(-3+4i)=-8i$

④ $z\bar{z}=(-3-4i)(-3+4i)=9+16=25$

⑤ $\dfrac{\bar{z}}{z}=\dfrac{-3+4i}{-3-4i}=\dfrac{(-3+4i)^2}{(-3-4i)(-3+4i)}=\dfrac{-7-24i}{25}$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

13 답 ①

$z=a+bi$ ($a\neq0$ 또는 $b\neq0$인 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$iz=-\bar{z}$에서 $i(a+bi)=-(a-bi)$

$\therefore -b+ai=-a+bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=b$

즉 $z=a+ai$, $\bar{z}=a-ai$이므로

ㄱ. $z+\bar{z}=(a+ai)+(a-ai)=2a$

ㄴ. $iz=-\bar{z}$의 양변에 $-i$를 곱하면

$-i\times iz=-i\times(-\bar{z})$ $\therefore z=i\bar{z}$

ㄷ. ㄴ에서 $z=i\bar{z}$이므로

$\dfrac{\bar{z}}{z}+\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{\bar{z}}{i\bar{z}}+\dfrac{i\bar{z}}{\bar{z}}=\dfrac{1}{i}+i=-i+i=0$

ㄹ. $iz=-\bar{z}$에서 $\bar{z}=-iz$

$\therefore z\bar{z}=z\times(-iz)=-iz^2$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14 답 ②

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$(1-i)z=2i$에서 $(1-i)(a+bi)=2i$

$\therefore (a+b)+(-a+b)i=2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=0$, $-a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

$\therefore z=-1+i$

15 답 ⑤

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$z+2i\bar{z}=1+8i$에서 $(a+bi)+2i(a-bi)=1+8i$

$\therefore (a+2b)+(2a+b)i=1+8i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+2b=1$, $2a+b=8$

두 식을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=-2$

$\therefore z=5-2i$

16 답 ④

$i+2i^2+3i^3+\cdots+10i^{10}$

$=(i+2i^2+3i^3+4i^4)+(5i^5+6i^6+7i^7+8i^8)+9i^9+10i^{10}$

$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)+9i-10$

$=(2-2i)\times2+9i-10$

$=-6+5i$

따라서 $a=-6$, $b=5$이므로

$a^2-b^2=(-6)^2-5^2=11$

17 답 ④

$a^2+3a+2+(a+2)i$가 순허수이므로
$a^2+3a+2=0,\ a+2\neq 0$
$a^2+3a+2=0$에서 $(a+1)(a+2)=0$
$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=-2$ ⋯⋯ ㉠
$a+2\neq 0$에서 $a\neq -2$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=-1$
즉 $z=i$이므로
$(1-z)^2=(1-i)^2=-2i$
$(1+z)^2=(1+i)^2=2i$

$$\begin{aligned}\therefore\ (1-z)^{10}+(1+z)^{10}&=\{(1-z)^2\}^5+\{(1+z)^2\}^5\\&=(-2i)^5+(2i)^5\\&=-32i+32i\\&=0\end{aligned}$$

18 답 ③

$$\begin{aligned}f(n)&=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n\\&=\left\{\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\right\}^n+\left\{\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right\}^n\\&=\left(\frac{-2i}{2}\right)^n+\left(\frac{2i}{2}\right)^n\\&=(-i)^n+i^n\end{aligned}$$

(i) n의 값이 홀수일 때
　$f(n)=-i^n+i^n=0$
(ii) n의 값이 짝수일 때
　$f(n)=i^n+i^n=2i^n$
(i), (ii)에서
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)$
$=f(2)+f(4)+f(6)+\cdots+f(20)$
$=2i^2+2i^4+2i^6+\cdots+2i^{20}$
$=-2+2-2+\cdots+2$
$=0$

19 답 ⑤

$\sqrt{-3}\sqrt{-3}+\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}+\dfrac{\sqrt{-20}}{\sqrt{-5}}$
$=-\sqrt{-3\times(-3)}-\sqrt{\dfrac{8}{-2}}+\sqrt{\dfrac{-20}{-5}}$
$=-\sqrt{9}-\sqrt{-4}+\sqrt{4}$
$=-3-2i+2$
$=-1-2i$
따라서 $a=-1,\ b=-2$이므로
$a-3b=-1-3\times(-2)=5$

20 답 ③

$\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-6}}=-\sqrt{\dfrac{x-2}{x-6}}$이므로 $x-2>0,\ x-6<0$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\sqrt{(x-6)^2}+|x-2|+x+3\\&=|x-6|+|x-2|+x+3\\&=-(x-6)+(x-2)+x+3\\&=x+7\end{aligned}$$

21 답 ⑤

$$\begin{aligned}\alpha(\beta+\overline{\beta})+\overline{\alpha(\overline{\beta}+\beta)}&=\alpha(\beta+\overline{\beta})+\overline{\alpha}(\beta+\overline{\beta})\\&=(\alpha+\overline{\alpha})(\beta+\overline{\beta})\end{aligned}$$

이때 $\alpha=1-2i,\ \beta=2+3i$이므로
$\alpha+\overline{\alpha}=(1-2i)+(1+2i)=2$
$\beta+\overline{\beta}=(2+3i)+(2-3i)=4$
$\therefore$ (주어진 식)$=2\times 4=8$

서술형 1 답 8

$x=1-i$에서 $x-1=-i$ ⋯⋯ ❶
양변을 제곱하면 $(x-1)^2=(-i)^2$
$x^2-2x+1=-1$　　$\therefore\ x^2-2x+2=0$ ⋯⋯ ❷
$\therefore\ x^5-2x^3+8x$
　$=(x^2-2x+2)(x^3+2x^2-4)+8$
　$=8$ ⋯⋯ ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 $x-a=bi$ (a, b는 실수) 꼴로 나타낼 수 있다.	30%
❷ 양변을 제곱하여 x에 대한 이차방정식을 구할 수 있다.	50%
❸ x^5-2x^3+8x의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 2 답 1

$z=\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$이므로
$z^2=(-i)^2=-1$
$z^3=z^2\times z=-1\times(-i)=i$
$z^4=(z^2)^2=(-1)^2=1$
$z^5=z^4\times z=1\times(-i)=-i$
　⋮ ⋯⋯ ❶
$\therefore\ z+z^2+z^3+\cdots+z^{50}$
　$=(-i-1+i+1)+\cdots+(-i-1+i+1)-i-1$
　$=-1-i$
따라서 $a=-1,\ b=-1$이므로 ⋯⋯ ❷
$ab=-1\times(-1)=1$ ⋯⋯ ❸

채점 기준	비율
❶ z^n의 규칙을 찾을 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 16

$z^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\dfrac{2}{2i}=-i,\ z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1,$
$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1,\ \cdots$ ⋯⋯ ❶
$\overline{z}=\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$이므로
$\overline{z}^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2=\dfrac{2}{-2i}=i,\ \overline{z}^4=(\overline{z}^2)^2=i^2=-1,$
$\overline{z}^8=(\overline{z}^4)^2=(-1)^2=1,\ \cdots$ ⋯⋯ ❷
즉 $z^n+\overline{z}^n=2$를 만족시키는 자연수 n의 값은 8의 배수이므로
두 자리 자연수 n의 최솟값은 16이다. ⋯⋯ ❸

채점 기준	비율
❶ z^n의 규칙을 찾을 수 있다.	30%
❷ $\bar{z}^n$의 규칙을 찾을 수 있다.	30%
❸ 두 자리 자연수 n의 최솟값을 구할 수 있다.	40%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 95~96

01 답 ④

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$|x-y|=3$, $x-1=-2$

$x-1=-2$에서 $x=-1$

$x=-1$을 $|x-y|=3$에 대입하면

$|-1-y|=3$, $-1-y=\pm 3$

$\therefore y=-4$ 또는 $y=2$

이때 $xy<0$이므로 $y=2$

$\therefore x+y=-1+2=1$

02 답 ⑤

$z=x^2-(5-i)x+4-2i=(x^2-5x+4)+(x-2)i$

$\bar{z}=-z$이려면 z의 실수부분이 0이어야 하므로

$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은

$1+4=5$

03 답 ⑤

$\alpha\bar{\beta}=1$에서 $\dfrac{1}{\bar{\beta}}=\alpha$

$\alpha\bar{\beta}=1$에서 $\overline{\alpha\bar{\beta}}=1$이므로 $\bar{\alpha}\beta=1$ $\qquad \therefore \beta=\dfrac{1}{\bar{\alpha}}$

$\therefore \beta+\dfrac{1}{\bar{\beta}}=\dfrac{1}{\bar{\alpha}}+\alpha=2i$

04 답 ③

세 복소수 $2-3i$, $1+2i$, $6+9i$ 중에서 두 복소수를 선택하여 곱하면

$(2-3i)(1+2i)=2+4i-3i+6=8+i$

$(2-3i)(6+9i)=12+18i-18i+27=39$

$(1+2i)(6+9i)=6+9i+12i-18=-12+21i$

따라서 두 복소수의 곱이 자연수인 경우는 $2-3i$, $6+9i$가 적힌 공을 선택하는 경우이므로 이 학생은 39개의 사탕으로 교환해 갈 수 있다.

$\therefore a=39$

05 답 ②

$\alpha^2=\left(\dfrac{1+i}{2i}\right)^2=\dfrac{2i}{-4}=-\dfrac{i}{2}$

$\beta^2=\left(\dfrac{1-i}{2i}\right)^2=\dfrac{-2i}{-4}=\dfrac{i}{2}$

$\therefore (2\alpha^2+3)(2\beta^2+3)=\left\{2\times\left(-\dfrac{i}{2}\right)+3\right\}\left(2\times\dfrac{i}{2}+3\right)$

$=(3-i)(3+i)=10$

06 답 25

$(1-i)^{2n}=\{(1-i)^2\}^n=(-2i)^n=2^n(-i)^n$이므로

$2^n(-i)^n=2^ni \qquad \therefore (-i)^n=i \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때 ㉠을 만족시키는 자연수 n의 값은

$n=4k+3$ (k는 음이 아닌 정수) 꼴이다.

따라서 100 이하의 자연수 n의 값은 $k=0, 1, 2, \cdots, 24$일 때이므로 그 개수는 25이다.

07 답 24

$z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}=\dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{2}$

$z_1^2=\left\{\dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{2}\right\}^2=\dfrac{2\times(-2i)}{4}=-i$

$z_1^3=z_1^2\times z_1=-i\times\dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{2}=\dfrac{\sqrt{2}(-1-i)}{2}$

$z_1^4=(z_1^2)^2=(-i)^2=-1$

$z_1^5=z_1^4\times z_1=-z_1=-\dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{2}$

$z_1^6=z_1^4\times z_1^2=-1\times(-i)=i$

$z_1^7=z_1^4\times z_1^3=-z_1^3=\dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$

$z_1^8=(z_1^4)^2=(-1)^2=1$

$\vdots$

$z_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$이므로

$z_2^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z_2^3=z_2^2\times z_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\times\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=1$

$\vdots$

n이 8의 배수일 때 $z_1^n=1$이고 n이 3의 배수일 때 $z_2^n=1$이므로

$z_1^n=z_2^n$을 만족시키는 n의 값은 8과 3의 공배수인 24의 배수이다.

따라서 자연수 n의 최솟값은 24이다.

오답 피하기

$z_2^n\neq-1$이므로 $z_1^n=z_2^n=-1$을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

08 답 ④

$z^2=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}i}\right)^2=\dfrac{2i}{-2}=-i$

$z^3=z^2\times z=-i\times\dfrac{1+i}{\sqrt{2}i}=-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1$

$z^5=z^4\times z=-1\times\dfrac{1+i}{\sqrt{2}i}=-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}i}$

$z^6=z^4\times z^2=-1\times(-i)=i$

$z^7=z^6\times z=i\times\frac{1+i}{\sqrt{2}i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$

⋮

즉 n이 8의 배수일 때 $z^n=1$이므로 $z^n=1$이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

09 답 ⑤

ㄱ. $z_1=a+bi$에서 $\overline{z_1}=a-bi$

$z_1\overline{z_1}=10$이므로 $(a+bi)(a-bi)=10$

$\therefore a^2+b^2=10$ ……㉠

ㄴ. a, b가 자연수이므로 ㉠에서

$a=1$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=1$ ……㉡

$z_2=c+di$에서 $\overline{z_2}=c-di$

$z_1+\overline{z_2}=3$이므로 $(a+bi)+(c-di)=3$

$\therefore (a+c)+(b-d)i=3$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+c=3$, $b-d=0$ ……㉢

$a+c=3$에서 $a<3$이어야 하므로 ㉡에서

$a=1$, $b=3$

$a=1$, $b=3$을 ㉢에 대입하면

$c=2$, $d=3$

$\therefore c+d=2+3=5$

ㄷ. $z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$이므로

$\overline{z_1+z_2}=(a+c)-(b+d)i$

$(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=41$이므로

$\{(a+c)+(b+d)i\}\{(a+c)-(b+d)i\}=41$

$\therefore (a+c)^2+(b+d)^2=41$

$a+c$, $b+d$가 자연수이므로

$a+c=4$, $b+d=5$ 또는 $a+c=5$, $b+d=4$

(i) $a+c=4$, $b+d=5$일 때

㉡에서 $a=1$, $b=3$이면 $c=3$, $d=2$이므로

$z_2\overline{z_2}=(c+di)(c-di)=c^2+d^2=3^2+2^2=13$

또 ㉡에서 $a=3$, $b=1$이면 $c=1$, $d=4$이므로

$z_2\overline{z_2}=c^2+d^2=4^2+1^2=17$

(ii) $a+c=5$, $b+d=4$일 때

㉡에서 $a=1$, $b=3$이면 $c=4$, $d=1$이므로

$z_2\overline{z_2}=c^2+d^2=1^2+4^2=17$

또 ㉡에서 $a=3$, $b=1$이면 $c=2$, $d=3$이므로

$z_2\overline{z_2}=c^2+d^2=2^2+3^2=13$

(i), (ii)에서 $z_2\overline{z_2}$의 최댓값은 17이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10 답 ⑤

ㄱ. z^2-z가 실수이므로 $\overline{z^2-z}$도 실수이다.

ㄴ. $z^2-z=(a+bi)^2-(a+bi)$

$=a^2+2abi-b^2-a-bi$

$=(a^2-a-b^2)+(2a-1)bi$

이때 z^2-z가 실수이므로 $(2a-1)b=0$

이때 $b\neq0$이므로 $2a-1=0$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

즉 $z=\frac{1}{2}+bi$이므로 $\overline{z}=\frac{1}{2}-bi$

$\therefore z+\overline{z}=\left(\frac{1}{2}+bi\right)+\left(\frac{1}{2}-bi\right)=1$

ㄷ. $z\overline{z}=\left(\frac{1}{2}+bi\right)\left(\frac{1}{2}-bi\right)=\frac{1}{4}+b^2$

이때 $b\neq0$이므로 $z\overline{z}>\frac{1}{4}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄴ. $\overline{z^2-z}$가 실수이고, $\overline{z^2-z}=\overline{z}^2-\overline{z}$이므로

$z^2-z=\overline{z}^2-\overline{z}$, $z^2-z-(\overline{z}^2-\overline{z})=0$

$z^2-\overline{z}^2-z+\overline{z}=0$, $(z+\overline{z})(z-\overline{z})-(z-\overline{z})=0$

$\therefore (z-\overline{z})(z+\overline{z}-1)=0$

그런데 z는 실수가 아니므로 $z\neq\overline{z}$

즉 $z+\overline{z}-1=0$이므로 $z+\overline{z}=1$

05 이차방정식

Ⅱ 방정식과 부등식

개념 완성하기 p.99~100

01 답 $x=-6$ 또는 $x=4$
$x^2+2x-24=0$에서 $(x+6)(x-4)=0$
$\therefore x=-6$ 또는 $x=4$

02 답 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$
$6x^2-11x+3=0$에서 $(3x-1)(2x-3)=0$
$\therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

03 답 $x=\frac{3}{2}$
$4x^2-12x+9=0$에서 $(2x-3)^2=0$
$\therefore x=\frac{3}{2}$

04 답 $x=-4$ 또는 $x=2$
$\frac{1}{2}x^2+x-4=0$의 양변에 2를 곱하면
$x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$
$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

05 답 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$
$x^2-3x+1=0$에서 근의 공식을 이용하면
$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

06 답 $x=\frac{-5\pm\sqrt{15}i}{2}$
$x^2+5x+10=0$에서 근의 공식을 이용하면
$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times10}}{2\times1}=\frac{-5\pm\sqrt{-15}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{15}i}{2}$$

07 답 $x=-2\pm\sqrt{6}$
$x^2+4x-2=0$에서 근의 공식을 이용하면
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-1\times(-2)}}{1}=-2\pm\sqrt{6}$$

08 답 $x=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{2}$
$2x^2-4x+3=0$에서 근의 공식을 이용하면
$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\times3}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-2}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{2}$$

09 답 $x=-\frac{2}{3}$
$9x^2+12x+4=0$에서 근의 공식을 이용하면
$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-9\times4}}{9}=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}$$

10 답 $x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{10}i}{2}$
$x^2-\sqrt{2}x+3=0$에서 근의 공식을 이용하면
$$x=\frac{-(-\sqrt{2})\pm\sqrt{(-\sqrt{2})^2-4\times1\times3}}{2\times1}$$
$$=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-10}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{10}i}{2}$$

11 답 $x=\pm2\sqrt{2}i$, 허근
$x^2+8=0$에서 $x^2=-8$
$\therefore x=\pm\sqrt{-8}=\pm2\sqrt{2}i$
따라서 주어진 이차방정식의 근은 허근이다.

12 답 $x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{3}$, 실근
$3x^2+5x-2=0$에서 $(x+2)(3x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{3}$
따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.

13 답 $x=-4$ 또는 $x=4$
(i) $x\ge0$일 때
$x^2-2|x|-8=0$에서 $x^2-2x-8=0$
$(x+2)(x-4)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$
그런데 $x\ge0$이므로 $x=4$
(ii) $x<0$일 때
$x^2-2|x|-8=0$에서 $x^2+2x-8=0$
$(x+4)(x-2)=0$
$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$
그런데 $x<0$이므로 $x=-4$
(i), (ii)에서 주어진 이차방정식의 해는
$x=-4$ 또는 $x=4$

Lecture 절댓값 기호를 포함한 방정식
$|x|=\begin{cases} x & (x\ge0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$을 이용하여 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나눈다.

14 답 $x=-2$ 또는 $x=4$
(i) $x\ge-2$일 때
$x^2-2|x+2|-4=0$에서 $x^2-2(x+2)-4=0$
$x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$
그런데 $x\ge-2$이므로 $x=-2$ 또는 $x=4$
(ii) $x<-2$일 때
$x^2-2|x+2|-4=0$에서 $x^2+2(x+2)-4=0$
$x^2+2x=0$, $x(x+2)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$
그런데 $x<-2$이므로 해는 없다.
(i), (ii)에서 주어진 이차방정식의 해는
$x=-2$ 또는 $x=4$

15 답 서로 다른 두 실근
이차방정식 $6x^2+3x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\times6\times(-1)=33>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

16 답 서로 다른 두 허근
이차방정식 $3x^2-10x+9=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-5)^2-3\times9=-2<0$
따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

17 답 중근
이차방정식 $x^2+2\sqrt{3}x+3=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(\sqrt{3})^2-1\times3=0$
따라서 중근을 갖는다.

18 답 서로 다른 두 허근
이차방정식 $2x^2-3x+5=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-3)^2-4\times2\times5=-31<0$
따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

19 답 중근
이차방정식 $x^2-2\sqrt{2}x+2=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-\sqrt{2})^2-1\times2=0$
따라서 중근을 갖는다.

20 답 서로 다른 두 실근
이차방정식 $x^2-5x+3=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-5)^2-4\times1\times3=13>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

21 답 $k<\frac{9}{4}$
이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 판별식을 D라 하면
$D>0$이어야 하므로
$D=(-3)^2-4\times1\times k>0$
$9-4k>0 \qquad \therefore k<\frac{9}{4}$

22 답 $k<\frac{1}{5}$
이차방정식 $5x^2+2x+k=0$의 판별식을 D라 하면
$D>0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=1^2-5\times k>0$
$1-5k>0 \qquad \therefore k<\frac{1}{5}$

23 답 $k<-2$
이차방정식 $x^2-4x+k+6=0$의 판별식을 D라 하면
$D>0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times(k+6)>0$
$4-(k+6)>0,\ -k-2>0 \qquad \therefore k<-2$

24 답 $k<-\frac{1}{4}$
이차방정식 $2x^2-2x+2k+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D>0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\times(2k+1)>0$
$-4k-1>0 \qquad \therefore k<-\frac{1}{4}$

25 답 -9
이차방정식 $x^2+6x-k=0$의 판별식을 D라 하면
$D=0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=3^2-1\times(-k)=0$
$k+9=0 \qquad \therefore k=-9$

26 답 0 또는 12
이차방정식 $3x^2-kx+k=0$의 판별식을 D라 하면
$D=0$이어야 하므로
$D=(-k)^2-4\times3\times k=0$
$k^2-12k=0,\ k(k-12)=0$
$\therefore k=0$ 또는 $k=12$

27 답 -3 또는 1
이차방정식 $x^2+(k-1)x-k+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=0$이어야 하므로
$D=(k-1)^2-4\times1\times(-k+1)=0$
$k^2+2k-3=0,\ (k+3)(k-1)=0$
$\therefore k=-3$ 또는 $k=1$

28 답 $-\frac{9}{4}$
이차방정식 $x^2-(2k+3)x+k^2+2k=0$의 판별식을 D라 하면
$D=0$이어야 하므로
$D=\{-(2k+3)\}^2-4\times1\times(k^2+2k)=0$
$4k+9=0 \qquad \therefore k=-\frac{9}{4}$

29 답 $k>\frac{9}{8}$
이차방정식 $2x^2-3x+k=0$의 판별식을 D라 하면
$D<0$이어야 하므로
$D=(-3)^2-4\times2\times k<0$
$9-8k<0,\ -8k<-9$
$\therefore k>\frac{9}{8}$

30 답 $k<-\frac{17}{4}$
이차방정식 $x^2-5x+2-k=0$의 판별식을 D라 하면
$D<0$이어야 하므로
$D=(-5)^2-4\times1\times(2-k)<0$
$25-4(2-k)<0,\ 17+4k<0$
$\therefore k<-\frac{17}{4}$

31 답 $k<-2$
이차방정식 $2x^2+4x-k=0$의 판별식을 D라 하면
$D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=2^2-2\times(-k)<0$

$4+2k<0,\ 2k<-4$

$\therefore k<-2$

32 답 $k<\frac{3}{2}$

이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2+4=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k^2+4)<0$

$2k-3<0,\ 2k<3$

$\therefore k<\frac{3}{2}$

33 답 (1) -6 (2) 12 (3) -3 (4) -1

이차방정식 $x^2+2x-4=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-4$

(1) $\alpha+\beta+\alpha\beta=-2+(-4)=-6$

(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\times(-4)=12$

(3) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{12}{-4}=-3$

(4) $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$
$=-4-(-2)+1$
$=-1$

34 답 (1) -1 (2) 28 (3) $\frac{4}{3}$ (4) -100

이차방정식 $x^2+4x-3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4,\ \alpha\beta=-3$

(1) $\alpha+\beta-\alpha\beta=-4-(-3)=-1$

(2) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-4)^2-4\times(-3)=28$

(3) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$

(4) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-4)^3-3\times(-3)\times(-4)$
$=-100$

35 답 $x^2-7x+12=0$

(두 근의 합)$=3+4=7$, (두 근의 곱)$=3\times4=12$

$\therefore x^2-7x+12=0$

36 답 $x^2-4x-12=0$

(두 근의 합)$=-2+6=4$, (두 근의 곱)$=-2\times6=-12$

$\therefore x^2-4x-12=0$

37 답 $x^2-4x+1=0$

(두 근의 합)$=2-\sqrt{3}+(2+\sqrt{3})=4$

(두 근의 곱)$=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$

$\therefore x^2-4x+1=0$

38 답 $x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

(두 근의 합)$=\sqrt{2}+1+(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}$

(두 근의 곱)$=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$

$\therefore x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

39 답 $x^2+4x+5=0$

(두 근의 합)$=-2+i+(-2-i)=-4$

(두 근의 곱)$=(-2+i)(-2-i)=5$

$\therefore x^2+4x+5=0$

40 답 $x^2+3=0$

(두 근의 합)$=\sqrt{3}i+(-\sqrt{3}i)=0$

(두 근의 곱)$=\sqrt{3}i\times(-\sqrt{3}i)=3$

$\therefore x^2+3=0$

41 답 $\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

이차방정식 $x^2+x-1=0$에서 근의 공식을 이용하면

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore x^2+x-1=\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$
$=\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

42 답 $2\left(x-\frac{3-\sqrt{7}i}{4}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{7}i}{4}\right)$

이차방정식 $2x^2-3x+2=0$에서 근의 공식을 이용하면

$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times2}}{2\times2}$
$=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{4}$

$\therefore 2x^2-3x+2=2\left(x-\frac{3-\sqrt{7}i}{4}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{7}i}{4}\right)$

43 답 $a=-2,\ b=-2$

a, b가 유리수이고 주어진 이차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{3}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})=-a,\ (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=b$

$\therefore a=-2,\ b=-2$

44 답 $a=-6,\ b=4$

a, b가 유리수이고 주어진 이차방정식의 한 근이 $3+\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $3-\sqrt{5}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$3+\sqrt{5}+(3-\sqrt{5})=-a,\ (3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=b$

$\therefore a=-6,\ b=4$

45 답 $a=2,\ b=2$

a, b가 실수이고 주어진 이차방정식의 한 근이 $-1+i$이므로 다른 한 근은 $-1-i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+i+(-1-i)=-a,\ (-1+i)(-1-i)=b$

$\therefore a=2,\ b=2$

46 답 $a=-2,\ b=5$

a, b가 실수이고 주어진 이차방정식의 한 근이 $1-2i$이므로 다른 한 근은 $1+2i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$1+2i+(1-2i)=-a$, $(1+2i)(1-2i)=b$

$\therefore a=-2, b=5$

유형 완성하기 p. 101~118

01 답 ⑤

$4x^2+ax+2=0$에서 근의 공식을 이용하면

$x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4\times4\times2}}{2\times4}=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-32}}{8}$

a, b는 유리수이고 주어진 해가 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{b}i}{8}=\dfrac{-5\pm\sqrt{-b}}{8}$

이므로 $a=5$

$-b=a^2-32=5^2-32=-7 \qquad \therefore b=7$

$\therefore a+b=5+7=12$

01-1 답 ②

$x^2+ax+6=0$에서 근의 공식을 이용하면

$x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4\times1\times6}}{2\times1}=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-24}}{2}$

a, b는 유리수이고 주어진 해가 $x=b\pm\sqrt{2}i=b\pm\sqrt{-2}$이므로

$b=-\dfrac{a}{2}$ ……㉠

$\dfrac{\sqrt{a^2-24}}{2}=\sqrt{-2}$ ……㉡

㉡의 양변을 제곱하면 $\dfrac{a^2-24}{4}=-2$

$a^2=16 \qquad \therefore a=-4\ (\because a<0)$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $b=-\dfrac{-4}{2}=2$

$\therefore a+b=-4+2=-2$

02 답 $x=-\dfrac{1}{6}$ 또는 $x=3$

$3(x-3)(2x+1)=2x-6$에서 $6x^2-15x-9=2x-6$

$6x^2-17x-3=0$, $(6x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-\dfrac{1}{6}$ 또는 $x=3$

02-1 답 $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{2}{5}$

$(2x+1)(3x-2)=x(x-4)$에서 $6x^2-x-2=x^2-4x$

$5x^2+3x-2=0$, $(x+1)(5x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\dfrac{2}{5}$

03 답 $x=\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}-1$

$(\sqrt{2}+1)x^2-(\sqrt{2}+3)x+\sqrt{2}=0$의 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면

$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)x^2-(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+3)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=0$

$x^2-(2\sqrt{2}-1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=0$

$(x-\sqrt{2})\{x-(\sqrt{2}-1)\}=0$

$(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2}+1)=0$

$\therefore x=\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}-1$

Lecture

x^2의 계수가 무리수이면 $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b$를 이용하여 x^2의 계수를 유리수로 고친 후 해를 구한다.

03-1 답 $1+\sqrt{3}$

$\sqrt{3}x^2-(3-\sqrt{3})x-6(\sqrt{3}-1)=0$의 양변에 $\sqrt{3}$을 곱하면

$3x^2-(3\sqrt{3}-3)x-6(3-\sqrt{3})=0$

위 식의 양변을 3으로 나누면

$x^2-(\sqrt{3}-1)x-2(3-\sqrt{3})=0$

$\{x+(3-\sqrt{3})\}(x-2)=0$

$(x+3-\sqrt{3})(x-2)=0$

$\therefore x=-3+\sqrt{3}$ 또는 $x=2$

이때 $\alpha>\beta$이므로

$\alpha=2$, $\beta=-3+\sqrt{3}$

$\therefore 2\alpha+\beta=2\times2+(-3+\sqrt{3})=1+\sqrt{3}$

04 답 $\dfrac{7}{2}$

이차방정식 $2x^2-mx+2m-5=0$의 한 근이 3이므로

$2\times3^2-3m+2m-5=0 \qquad \therefore m=13$

$m=13$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$2x^2-13x+21=0$, $(x-3)(2x-7)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\dfrac{7}{2}$

따라서 다른 한 근은 $\dfrac{7}{2}$이다.

04-1 답 $\dfrac{4}{3}$

$x=2$를 $ax^2-3x+2a+1=0$에 대입하면

$4a-6+2a+1=0 \qquad \therefore a=\dfrac{5}{6}$

$a=\dfrac{5}{6}$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$\dfrac{5}{6}x^2-3x+\dfrac{8}{3}=0$

위 식의 양변에 6을 곱하면 $5x^2-18x+16=0$

$(5x-8)(x-2)=0 \qquad \therefore x=\dfrac{8}{5}$ 또는 $x=2$

따라서 $\alpha=\dfrac{8}{5}$이므로

$a\alpha=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{8}{5}=\dfrac{4}{3}$

05 답 0

이차방정식 $x^2+ax+2a+1=0$의 한 근이 -1이므로

$(-1)^2-a+2a+1=0$

$a+2=0 \qquad \therefore a=-2$ ……❶

이차방정식 $2x^2-(k+1)x-k=0$의 한 근이 2이므로

$2\times2^2-2(k+1)-k=0$

$-3k+6=0 \qquad \therefore k=2$ ……❷

$\therefore a+k=-2+2=0$ ……❸

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+k$의 값을 구할 수 있다.	20%

05-1 답 1

이차방정식 $x^2+kx+\sqrt{2}-2=0$의 한 근이 $-1+\sqrt{2}$이므로

$(-1+\sqrt{2})^2+k(-1+\sqrt{2})+\sqrt{2}-2=0$

$3-2\sqrt{2}+k(-1+\sqrt{2})+\sqrt{2}-2=0$

$1-\sqrt{2}+k(-1+\sqrt{2})=0$

$k(-1+\sqrt{2})=-1+\sqrt{2}$ $\quad\therefore k=1$

이차방정식 $mx^2+5x-m-1=0$의 한 근이 -3이므로

$9m-15-m-1=0,\ 8m-16=0$ $\quad\therefore m=2$

$\therefore m-k=2-1=1$

06 답 ⑤

이차방정식 $kx^2+(a+1)x+(1-k)b=0$의 한 근이 2이므로

$4k+2(a+1)+(1-k)b=0$

$(4-b)k+2a+2+b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 (k에 대한 항등식)

$4-b=0,\ 2a+2+b=0$ $\quad\therefore a=-3,\ b=4$

$\therefore a+b=-3+4=1$

06-1 답 ④

이차방정식 $kx^2+ax+(k+1)b=0$의 한 근이 -1이므로

$k-a+(k+1)b=0$

$(1+b)k-a+b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$1+b=0,\ -a+b=0$ $\quad\therefore a=-1,\ b=-1$

$\therefore ab=-1\times(-1)=1$

07 답 ②

$x^2-3|x+1|-7=0$에서

(i) $x<-1$일 때, $x^2+3(x+1)-7=0$

$x^2+3x-4=0,\ (x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

그런데 $x<-1$이므로 $x=-4$

(ii) $x\ge-1$일 때, $x^2-3(x+1)-7=0$

$x^2-3x-10=0,\ (x+2)(x-5)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=5$

그런데 $x\ge-1$이므로 $x=5$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-4$ 또는 $x=5$

따라서 모든 근의 합은 $-4+5=1$

07-1 답 ③

$(x-3)^2-2|x-3|-3=0$에서

(i) $x<3$일 때, $(x-3)^2+2(x-3)-3=0$

$x^2-6x+9+2x-6-3=0,\ x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=4$

그런데 $x<3$이므로 $x=0$

(ii) $x\ge3$일 때, $(x-3)^2-2(x-3)-3=0$

$x^2-6x+9-2x+6-3=0,\ x^2-8x+12=0$

$(x-2)(x-6)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=6$

그런데 $x\ge3$이므로 $x=6$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=0$ 또는 $x=6$

따라서 모든 근의 합은 $0+6=6$

다른 풀이

$(x-3)^2=|x-3|^2$이므로 $|x-3|^2-2|x-3|-3=0$

$(|x-3|+1)(|x-3|-3)=0$

$\therefore |x-3|=-1$ 또는 $|x-3|=3$

그런데 $|x-3|\ge0$이므로 $|x-3|=3$

$x-3=-3$ 또는 $x-3=3$

$\therefore x=0$ 또는 $x=6$

따라서 모든 근의 합은 $0+6=6$

08 답 $x=-3$ 또는 $x=3$

$x^2-2|x|-3=0$에서

(i) $x<0$일 때, $x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

그런데 $x<0$이므로 $x=-3$ ······❶

(ii) $x\ge0$일 때, $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 $x\ge0$이므로 $x=3$ ······❷

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-3$ 또는 $x=3$ ······❸

채점 기준	비율
❶ $x<0$일 때 주어진 방정식의 해를 구할 수 있다.	40%
❷ $x\ge0$일 때 주어진 방정식의 해를 구할 수 있다.	40%
❸ 주어진 방정식의 해를 구할 수 있다.	20%

08-1 답 $x=-4$ 또는 $x=4$

$2x^2-7|x|-4=0$에서

(i) $x<0$일 때, $2x^2+7x-4=0$

$(x+4)(2x-1)=0$ $\quad\therefore x=-4$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

그런데 $x<0$이므로 $x=-4$

(ii) $x\ge0$일 때, $2x^2-7x-4=0$

$(2x+1)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=4$

그런데 $x\ge0$이므로 $x=4$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-4$ 또는 $x=4$

09 답 ⑤

$x^2+|x|=\sqrt{(x-3)^2}+5$에서 $x^2+|x|=|x-3|+5$

(i) $x<0$일 때, $x^2-x=-(x-3)+5$

$x^2-x=-x+8,\ x^2-8=0$

$(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})=0$

$\therefore x=-2\sqrt{2}$ 또는 $x=2\sqrt{2}$

그런데 $x<0$이므로 $x=-2\sqrt{2}$

(ii) $0\le x<3$일 때, $x^2+x=-(x-3)+5$

$x^2+x=-x+8,\ x^2+2x-8=0$

$(x+4)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

그런데 $0\le x<3$이므로 $x=2$

(iii) $x\ge3$일 때, $x^2+x=(x-3)+5$

$x^2+x=x+2,\ x^2-2=0$

$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$ $\quad\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

그런데 $x\ge3$이므로 해는 없다.

(i)~(iii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-2\sqrt{2}$ 또는 $x=2$
따라서 모든 실수 x의 값의 합은 $2-2\sqrt{2}$이다.

09-1 답 $-\sqrt{3}$

$x^2+\sqrt{x^2}-|x-2|=1$에서 $x^2+|x|-|x-2|=1$

(i) $x<0$일 때, $x^2-x+(x-2)=1$
$x^2-3=0$, $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$
$\therefore x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$
그런데 $x<0$이므로 $x=-\sqrt{3}$

(ii) $0\le x<2$일 때, $x^2+x+(x-2)=1$
$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$
그런데 $0\le x<2$이므로 $x=1$

(iii) $x\ge 2$일 때, $x^2+x-(x-2)=1$
$x^2+1=0$
그런데 이를 만족시키는 실근은 없다.

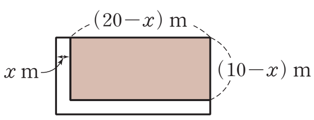
(i)~(iii)에서 주어진 방정식의 해는
$x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=1$
따라서 모든 실근의 곱은
$-\sqrt{3}\times 1=-\sqrt{3}$

10 답 4 m

길의 폭을 x m라 하면 남은 땅의 가로, 세로의 길이는 각각
$(30-x)$ m, $(20-2x)$ m이므로
$(30-x)(20-2x)=312$, $2x^2-80x+288=0$
$x^2-40x+144=0$, $(x-4)(x-36)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=36$
이때 $x>0$, $20-2x>0$이므로 $0<x<10$
$\therefore x=4$
따라서 길의 폭은 4 m이다.

10-1 답 3 m

길을 제외한 땅의 모양은
오른쪽 그림과 같으므로



$(20-x)(10-x)=119$
$x^2-30x+81=0$
$(x-3)(x-27)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=27$
이때 $x>0$, $10-x>0$이므로 $0<x<10$
$\therefore x=3$
따라서 길의 폭은 3 m이다.

11 답 81

늘인 후 직사각형의 가로의 길이는 $x+2$, 세로의 길이는 $x+6$이므로
$(x+2)(x+6)=165$, $x^2+8x-153=0$
$(x-9)(x+17)=0$ $\quad\therefore x=9\ (\because x>0)$
따라서 처음 정사각형의 한 변의 길이는 9이므로 처음 정사각형의 넓이는 $9^2=81$

11-1 답 24 cm^2

$\overline{AB}=x$ cm라 하면 $\overline{BC}=x+2$ (cm)
늘인 후 직각삼각형 A′BC′에서
$\overline{A'B}=x+2$ (cm), $\overline{BC'}=x+4$ (cm)
이때 $\triangle A'BC'=40$이므로
$\frac{1}{2}\times\overline{A'B}\times\overline{BC'}=\frac{1}{2}(x+2)(x+4)=40$ ……❶
$(x+2)(x+4)=80$, $x^2+6x-72=0$
$(x+12)(x-6)=0$ $\quad\therefore x=6\ (\because x>0)$ ……❷
따라서 $\overline{AB}=6$ cm, $\overline{BC}=6+2=8$ (cm)이므로
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 6\times 8=24\ (\text{cm}^2)$ ……❸

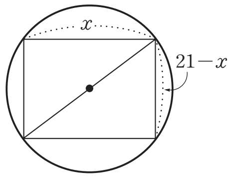
채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}=x$ cm라 하고 $\triangle A'BC'$의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ x의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $\triangle ABC$의 넓이를 구할 수 있다.	20%

12 답 8

직사각형의 가로의 길이를 x라 하면 세로의 길이는 $14-x$
이때 직사각형의 대각선의 길이는 10이므로 피타고라스 정리에 의하여 $x^2+(14-x)^2=10^2$
$x^2+196-28x+x^2=100$
$2x^2-28x+96=0$, $x^2-14x+48=0$
$(x-6)(x-8)=0$ $\quad\therefore x=6$ 또는 $x=8$
따라서 직사각형의 긴 변의 길이는 8이다.

12-1 답 15

오른쪽 그림과 같이 원에 내접하는 직사각형의 가로의 길이를 x라 하면 세로의 길이는 $21-x$이므로 직사각형의 넓이는



$x(21-x)=108$
$-x^2+21x-108=0$
$x^2-21x+108=0$, $(x-9)(x-12)=0$
$\therefore x=9$ 또는 $x=12$
따라서 직사각형의 두 변의 길이는 9, 12이므로 원의 지름의 길이는
$\sqrt{9^2+12^2}=\sqrt{225}=15$

13 답 ④

$kx^2-2(k+3)x+k=0$이 이차방정식이므로
$k\ne 0$ ……㉠
이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=\{-(k+3)\}^2-k^2>0$, $k^2+6k+9-k^2>0$
$6k+9>0$ $\quad\therefore k>-\frac{3}{2}$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $-\frac{3}{2}<k<0$ 또는 $k>0$
따라서 실수 k의 값이 될 수 있는 것은 ④이다.

13-1 답 5

$(n-1)x^2-(2n-5)x+n-3=0$이 이차방정식이므로
$n-1\ne 0$ $\quad\therefore n\ne 1$ ……㉠
이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면
$D=\{-(2n-5)\}^2-4(n-1)(n-3)>0$
$4n^2-20n+25-4n^2+16n-12>0$
$-4n+13>0$ $\quad\therefore n<\frac{13}{4}$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $n<1$ 또는 $1<n<\frac{13}{4}$

따라서 자연수 n의 값은 2, 3이므로 그 합은
$2+3=5$

14 답 ④

이차방정식 $x^2+4x+k-2=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=2^2-(k-2)=0$

$6-k=0 \qquad \therefore k=6$

14-1 답 $x=-2$ 또는 $x=3$

이차방정식 $4x^2+2mx+m-1=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=m^2-4(m-1)=0$

$m^2-4m+4=0,\ (m-2)^2=0$

$\therefore m=2$

$m=2$를 $x^2-(m-1)x+m-8=0$에 대입하면

$x^2-x-6=0,\ (x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

15 답 ①

이차방정식 $x^2-2(k+4)x+k^2=0$이 서로 다른 두 허근을 가지므로 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=\{-(k+4)\}^2-k^2<0$

$8k+16<0 \qquad \therefore k<-2$

15-1 답 6

이차방정식 $x^2-x+k-5=0$이 서로 다른 두 허근을 가지므로 판별식을 D라 하면 $D=(-1)^2-4\times1\times(k-5)<0$

$21-4k<0 \qquad \therefore k>\frac{21}{4}$

따라서 정수 k의 최솟값은 6이다.

16 답 5

이차방정식 $x^2-4kx+4k^2+3k-6=0$이 서로 다른 두 허근을 가지므로 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-2k)^2-(4k^2+3k-6)<0$

$-3k+6<0 \qquad \therefore k>2$ ······㉠

이차방정식 $x^2+(k+1)x+k+4=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(k+1)^2-4(k+4)=0$

$k^2-2k-15=0,\ (k+3)(k-5)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=5$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $k=5$

16-1 답 ③

이차방정식 $x^2+6x+8-k=0$이 실근을 가지므로 판별식을 D_1이라 하면 $\frac{D_1}{4}=3^2-(8-k)\ge0$

$1+k\ge0 \qquad \therefore k\ge-1$

k는 정수이므로 $k=-1, 0, 1, 2, \cdots$ ······㉠

이차방정식 $x^2+3x+4-k=0$이 서로 다른 두 허근을 가지므로 판별식을 D_2라 하면

$D_2=3^2-4\times1\times(4-k)<0$

$-7+4k<0 \qquad \therefore k<\frac{7}{4}$

k는 정수이므로 $k=1, 0, -1, -2, \cdots$ ······㉡

㉠, ㉡에서 정수 k는 $-1, 0, 1$이므로 그 개수는 3이다.

17 답 2

이차방정식 $x^2+kx+2k-4=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면 $D=k^2-4(2k-4)=0$

$k^2-8k+16=0,\ (k-4)^2=0$

$\therefore k=4$ ······❶

$k=4$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2+4x+4=0,\ (x+2)^2=0$

$\therefore x=-2$, 즉 $m=-2$ ······❷

$\therefore k+m=4+(-2)=2$ ······❸

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ m의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $k+m$의 값을 구할 수 있다.	20%

17-1 답 2

이차방정식 $x^2-2(k-1)x+4=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-1\times4=0$

$k^2-2k-3=0,\ (k+1)(k-3)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=3$

이때 $k>0$이므로 $k=3$

$k=3$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2-4x+4=0,\ (x-2)^2=0$

$\therefore x=2$

18 답 $\frac{5}{4}$

이차방정식 $x^2+(2k+a)x+k^2-k+b=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=(2k+a)^2-4(k^2-k+b)=0$

$4k^2+4ak+a^2-4k^2+4k-4b=0$

$(4a+4)k+a^2-4b=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$4a+4=0,\ a^2-4b=0$

$\therefore a=-1,\ b=\frac{1}{4}$

$\therefore b-a=\frac{1}{4}-(-1)=\frac{5}{4}$

18-1 답 3

이차방정식 $x^2-2(a+k)x+k^2+6k+3a=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+k)\}^2-(k^2+6k+3a)=0$

$a^2+2ak+k^2-k^2-6k-3a=0$

$(2a-6)k+a^2-3a=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$2a-6=0,\ a^2-3a=0$

$\therefore a=3$

19 답 6

주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $(a+2)x^2-(a-1)x+1=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a-1)\}^2-4(a+2)=0$

$a^2-6a-7=0$, $(a+1)(a-7)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=7$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+7=6$

19-1 답 3

주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $(a+2)x^2-(2a+4)x+5=0$, 즉 $(a+2)x^2-2(a+2)x+5=0$ 이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+2)\}^2-5(a+2)=0$

$a^2-a-6=0$, $(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

이때 주어진 식이 이차식이므로

$a+2\neq0 \qquad \therefore a\neq-2$

따라서 실수 a의 값은 3이다.

20 답 1

주어진 이차식이 $(x+\alpha)^2$으로 인수분해되려면 완전제곱식이 되어야 한다.

즉 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-1)x+k^2+9=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k^2+9)=0$

$-2k-8=0 \qquad \therefore k=-4$

이때 주어진 이차식은 $x^2+10x+25$이므로

$x^2+10x+25=(x+5)^2 \qquad \therefore \alpha=5$

$\therefore k+\alpha=-4+5=1$

20-1 답 ⑤

주어진 이차식이 $(x+\alpha)^2$으로 인수분해되려면 완전제곱식이 되어야 한다.

즉 x에 대한 이차방정식 $x^2+(k-1)x+k-1=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=(k-1)^2-4(k-1)=0$

$k^2-6k+5=0$, $(k-1)(k-5)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=5$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$1\times5=5$

21 답 3

주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $ax^2-2(k+1)x+k^2+a+bk=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-a(k^2+a+bk)=0$

$k^2+2k+1-ak^2-a^2-abk=0$

$(1-a)k^2+(2-ab)k+1-a^2=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$1-a=0$, $2-ab=0$, $1-a^2=0 \qquad \therefore a=1, b=2$

$\therefore a+b=1+2=3$

21-1 답 5

주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2+ak-b=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k^2+ak-b)=0$

$k^2+2k+1-k^2-ak+b=0$

$(2-a)k+1+b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2-a=0$, $1+b=0 \qquad \therefore a=2, b=-1$

$\therefore a^2+b^2=2^2+(-1)^2=5$

22 답 8

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=2$

$\therefore (1+\alpha)(1+\beta)=1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta=1+5+2=8$

22-1 답 3

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=\frac{-4}{2}=-2$

$\therefore \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=3$

23 답 11

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{-4}{2}=2$, $\alpha\beta=-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=2^3-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times2=11\end{aligned}$$

23-1 답 ⑤

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=2$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}&=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}\\&=\frac{(-4)^2-2\times2}{2^2}=3\end{aligned}$$

24 답 ⑤

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-2$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\beta}{\alpha-1}+\frac{\alpha}{\beta-1}&=\frac{\beta(\beta-1)+\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}\\&=\frac{\alpha^2+\beta^2-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}\\&=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}\\&=\frac{(-3)^2-2\times(-2)-(-3)}{-2-(-3)+1}\\&=8\end{aligned}$$

24-1 답 $\frac{10}{3}$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{6}{3}=-2$, $\alpha\beta=\frac{1}{3}$

$$\therefore \left(\alpha+\frac{1}{\beta^2}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha^2}\right)=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}$$
$$=\alpha\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{1}{(\alpha\beta)^2}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{-2}{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{10}{3}$$

25 답 2

이차방정식 $x^2-x+2=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-\alpha+2=0$에서 $\alpha^2-2\alpha+2=-\alpha$

$\beta^2-\beta+2=0$에서 $\beta^2-2\beta+2=-\beta$

또 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=2$

$\therefore (\alpha^2-2\alpha+2)(\beta^2-2\beta+2)=-\alpha\times(-\beta)=\alpha\beta=2$

25-1 답 ①

이차방정식 $x^2+x-1=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+\alpha-1=0$에서 $\alpha^2+\alpha=1$

$\beta^2+\beta-1=0$에서 $\beta^2+\beta=1$

또 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-1$

$$\therefore (1+2\alpha+\alpha^2)(1+2\beta+\beta^2)$$
$$=\{1+\alpha+(\alpha+\alpha^2)\}\{1+\beta+(\beta+\beta^2)\}$$
$$=(\alpha+2)(\beta+2)$$
$$=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4$$
$$=-1+2\times(-1)+4$$
$$=1$$

26 답 39

이차방정식 $x^2+6x-3=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+6\alpha-3=0$에서 $\alpha^2=-6\alpha+3$

또 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-6$

$$\therefore \alpha^2-6\beta=(-6\alpha+3)-6\beta=-6(\alpha+\beta)+3$$
$$=-6\times(-6)+3=39$$

26-1 답 $\frac{2}{7}$

이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-4\alpha+2=0$에서 $\alpha^2=4\alpha-2$

$\beta^2-4\beta+2=0$에서 $\beta^2=4\beta-2$

또 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta^2+4\alpha}+\frac{\beta}{\alpha^2+4\beta}=\frac{\alpha}{(4\beta-2)+4\alpha}+\frac{\beta}{(4\alpha-2)+4\beta}$$
$$=\frac{\alpha}{4(\alpha+\beta)-2}+\frac{\beta}{4(\alpha+\beta)-2}$$
$$=\frac{\alpha+\beta}{4(\alpha+\beta)-2}$$
$$=\frac{4}{4\times4-2}=\frac{2}{7}$$

27 답 42

이차방정식 $x^2+5x+2=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+5\alpha+2=0$에서 $\alpha^2=-5\alpha-2$

$\beta^2+5\beta+2=0$에서 $\beta^2=-5\beta-2$

또 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=2$

$$\therefore \frac{4\beta}{2\alpha^2+11\alpha+4}+\frac{4\alpha}{2\beta^2+11\beta+4}$$
$$=\frac{4\beta}{2(-5\alpha-2)+11\alpha+4}+\frac{4\alpha}{2(-5\beta-2)+11\beta+4}$$
$$=\frac{4\beta}{\alpha}+\frac{4\alpha}{\beta}=\frac{4(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{4\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{4\{(-5)^2-2\times2\}}{2}$$
$$=42$$

27-1 답 $\frac{11}{7}$

이차방정식 $x^2-5x+7=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-5\alpha+7=0$에서 $\alpha^2-4\alpha+7=\alpha$

$\beta^2-5\beta+7=0$에서 $\beta^2-4\beta+7=\beta$ ······❶

또 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=7$ ······❷

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha^2-4\alpha+7}+\frac{\alpha}{\beta^2-4\beta+7}=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{5^2-2\times7}{7}$$
$$=\frac{11}{7}$$ ······❸

채점 기준	비율
❶ $\alpha^2-5\alpha+7=0$, $\beta^2-5\beta+7=0$을 적절히 변형할 수 있다.	30%
❷ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40%

28 답 2

이차방정식 $x^2+ax-b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=-b$ ······㉠

이차방정식 $x^2+(a+1)x+b=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-a-1$, $(\alpha+\beta)\alpha\beta=b$ ······㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $-a-b=-a-1$, $-a\times(-b)=b$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore a^2+b^2=1^2+1^2=2$

28-1 답 47

이차방정식 $x^2-ax-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-2$ ······㉠

이차방정식 $2x^2+(b+1)x-a=0$의 두 근이 $\alpha^2\beta$, $\beta^2\alpha$이므로 근과

계수의 관계에 의하여

$\alpha^2\beta+\beta^2\alpha=-\frac{b+1}{2}$, $\alpha^2\beta\times\beta^2\alpha=-\frac{a}{2}$

$\therefore\ \alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{b+1}{2}$, $(\alpha\beta)^3=-\frac{a}{2}$ ⋯⋯㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $-2a=-\frac{b+1}{2}$, $-8=-\frac{a}{2}$

$\therefore\ a=16,\ b=63$

$\therefore\ b-a=63-16=47$

29 답 25

이차방정식 $x^2+3x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=-1$ ⋯⋯㉠ ⋯⋯❶

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha^2+\beta^2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)=-a,\ (\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)=b$

$\therefore\ \alpha+\beta+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-a$ ⋯⋯㉡

$(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}=b$ ⋯⋯㉢ ⋯⋯❷

㉠을 ㉡에 대입하면

$-3+(-3)^2-2\times(-1)=-a$

$8=-a \qquad \therefore\ a=-8$

㉠을 ㉢에 대입하면

$-3\times\{(-3)^2-2\times(-1)\}=b \qquad \therefore\ b=-33$ ⋯⋯❸

$\therefore\ a-b=-8-(-33)=25$ ⋯⋯❹

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ a, b를 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10%

29-1 답 10

이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$ ⋯⋯㉠

이차방정식 $x^2-mx+n=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+1)+(\beta+1)=m,\ (\alpha+1)(\beta+1)=n$

$\therefore\ \alpha+\beta+2=m,\ \alpha\beta+\alpha+\beta+1=n$ ⋯⋯㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $m=4,\ n=6$

$\therefore\ m+n=4+6=10$

30 답 ②

이차방정식 $x^2-4x-2=0$의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=4,\ \frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=-2$

즉 $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=4,\ \frac{1}{\alpha\beta}=-2$이므로

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-\frac{1}{2}$ ⋯⋯㉠

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$ ⋯⋯㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a=2,\ b=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ ab=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

30-1 답 ①

이차방정식 $3x^2-4x-1=0$의 두 근이 $\alpha-1$, $\beta-1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha-1)+(\beta-1)=\frac{4}{3},\ (\alpha-1)(\beta-1)=-\frac{1}{3}$

즉 $\alpha+\beta-2=\frac{4}{3},\ \alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-\frac{1}{3}$이므로

$\alpha+\beta=\frac{10}{3},\ \alpha\beta=2$ ⋯⋯㉠

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$ ⋯⋯㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a=-\frac{10}{3},\ b=2$

$\therefore\ 3ab=3\times\left(-\frac{10}{3}\right)\times2=-20$

31 답 −1

주어진 이차방정식의 두 근을 α, $4\alpha\ (\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+4\alpha=5(k-1)$이므로 $5\alpha=5(k-1)$

$\therefore\ \alpha=k-1$ ⋯⋯㉠

$\alpha\times4\alpha=-16k$이므로 $4\alpha^2=-16k$

$\therefore\ \alpha^2=-4k$ ⋯⋯㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(k-1)^2=-4k$

$k^2+2k+1=0,\ (k+1)^2=0 \qquad \therefore\ k=-1$

31-1 답 ④

주어진 이차방정식의 두 근을 2α, $3\alpha\ (\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+3\alpha=k \qquad \therefore\ 5\alpha=k$ ⋯⋯㉠

$2\alpha\times3\alpha=k-1 \qquad \therefore\ 6\alpha^2=k-1$ ⋯⋯㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $6\alpha^2=5\alpha-1$

$6\alpha^2-5\alpha+1=0,\ (3\alpha-1)(2\alpha-1)=0$

$\therefore\ \alpha=\frac{1}{3}$ 또는 $\alpha=\frac{1}{2}$

따라서 $k=\frac{5}{3}$ 또는 $k=\frac{5}{2}$이므로

$\frac{5}{3}+\frac{5}{2}=\frac{25}{6}$

32 답 ②

주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+5$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+5)=2k+3 \qquad \therefore\ \alpha=k-1$ ⋯⋯㉠

$\alpha(\alpha+5)=k^2+5$ ⋯⋯㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(k-1)(k+4)=k^2+5$

$k^2+3k-4=k^2+5,\ 3k=9$

$\therefore\ k=3$

다른 풀이

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β $(\alpha>\beta)$라 하면
두 근의 차가 5이므로 $\alpha-\beta=5$
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2k+3$, $\alpha\beta=k^2+5$
이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로
$5^2=(2k+3)^2-4(k^2+5)$, $25=12k-11$
$36=12k$
$\therefore k=3$

32-1 답 3

x에 대한 이차방정식 $x^2-6kx+k^2-4k=0$의 두 근을 α, $\alpha+4$라 하자. ······❶
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+(\alpha+4)=6k \quad \therefore \alpha=3k-2$ ······㉠
$\alpha(\alpha+4)=k^2-4k$ ······㉡ ······❷
㉠을 ㉡에 대입하면 $(3k-2)(3k+2)=k^2-4k$
$9k^2-4=k^2-4k$, $8k^2+4k-4=0$
$2k^2+k-1=0$, $(k+1)(2k-1)=0$
$\therefore k=-1$ 또는 $k=\frac{1}{2}$
그런데 k는 정수이므로 $k=-1$ ······❸
$k=-1$을 $2x^2-(5-k)x+3k-1=0$에 대입하면
$2x^2-6x-4=0 \quad \therefore x^2-3x-2=0$ ······㉢
따라서 이차방정식 ㉢의 두 근의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 3이다. ······❹

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $x^2-6kx+k^2-4k=0$의 두 근을 한 문자 α에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❷ 근과 계수의 관계를 이용하여 α와 k의 관계식을 구할 수 있다.	30%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ 이차방정식 $2x^2-(5-k)x+3k-1=0$의 두 근의 합을 구할 수 있다.	20%

33 답 4

주어진 이차방정식의 두 근을 α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+3\alpha=4 \quad \therefore \alpha=1$ ······㉠
$\alpha\times3\alpha=2k-5 \quad \therefore 3\alpha^2=2k-5$ ······㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $3=2k-5$
$\therefore k=4$

33-1 답 ⑤

주어진 이차방정식의 두 근을 α, 2α $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+2\alpha=k+4$이므로 $3\alpha=k+4$
$\therefore \alpha=\frac{1}{3}(k+4)$ ······㉠
$\alpha\times2\alpha=4k \quad \therefore \alpha^2=2k$ ······㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{1}{9}(k+4)^2=2k$
$(k+4)^2=18k$, $k^2-10k+16=0$
$(k-2)(k-8)=0 \quad \therefore k=2$ 또는 $k=8$
따라서 모든 실수 k의 값의 곱은
$2\times8=16$

34 답 ④

주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+1$ (α는 정수)이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+(\alpha+1)=a \quad \therefore a=2\alpha+1$ ······㉠
$\alpha(\alpha+1)=a+11$ ······㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $\alpha(\alpha+1)=2\alpha+12$
$\alpha^2+\alpha=2\alpha+12$, $\alpha^2-\alpha-12=0$
$(\alpha+3)(\alpha-4)=0 \quad \therefore \alpha=-3$ 또는 $\alpha=4$
(i) $\alpha=-3$일 때, $a=2\times(-3)+1=-5$
(ii) $\alpha=4$일 때, $a=2\times4+1=9$
(i), (ii)에서 a는 양수이므로 $a=9$

34-1 답 14

주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+1$ (α는 정수)이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+(\alpha+1)=k+5 \quad \therefore k=2\alpha-4$ ······㉠
$\alpha(\alpha+1)=6k$ ······㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $\alpha(\alpha+1)=6(2\alpha-4)$
$\alpha^2-11\alpha+24=0$, $(\alpha-3)(\alpha-8)=0$
$\therefore \alpha=3$ 또는 $\alpha=8$
(i) $\alpha=3$일 때, $k=2\times3-4=2$
(ii) $\alpha=8$일 때, $k=2\times8-4=12$
(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은
$2+12=14$

35 답 ③

주어진 이차방정식의 두 근을 α, $-\alpha$ $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+(-\alpha)=k^2+3k-18$ ······㉠
$\alpha\times(-\alpha)=-k-6$ ······㉡
㉠에서 $k^2+3k-18=0$, $(k+6)(k-3)=0$
$\therefore k=-6$ 또는 $k=3$ ······㉢
㉡에서 두 근의 부호가 서로 다르므로
$-k-6<0 \quad \therefore k>-6$ ······㉣
㉢, ㉣에서 $k=3$

35-1 답 ②

주어진 이차방정식의 두 근을 α, $-\alpha$ $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+(-\alpha)=k^2+3k-4$ ······㉠
$\alpha\times(-\alpha)=2k+3$ ······㉡
㉠에서 $k^2+3k-4=0$, $(k+4)(k-1)=0$
$\therefore k=-4$ 또는 $k=1$ ······㉢
㉡에서 두 근의 부호가 서로 다르므로
$2k+3<0 \quad \therefore k<-\frac{3}{2}$ ······㉣
㉢, ㉣에서 $k=-4$

36 답 -8

(i) α와 β의 부호가 서로 다른 경우
주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\beta=-2\alpha$ $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-2\alpha)=-(k+2)$

$\therefore \alpha=k+2$ ······㉠

$\alpha\times(-2\alpha)=-k^2-1$

$\therefore 2\alpha^2=k^2+1$ ······㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2(k+2)^2=k^2+1$

$k^2+8k+7=0$, $(k+1)(k+7)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=-7$ ······❶

(ii) α와 β의 부호가 같은 경우

주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\beta=2\alpha$ $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha=-(k+2)$

$\therefore \alpha=-\frac{1}{3}(k+2)$ ······㉢

$\alpha\times2\alpha=-k^2-1$

$\therefore 2\alpha^2=-k^2-1$ ······㉣

㉢을 ㉣에 대입하면 $2\left\{-\frac{1}{3}(k+2)\right\}^2=-k^2-1$

$\frac{2}{9}(k+2)^2=-k^2-1$, $2(k+2)^2=-9k^2-9$

$11k^2+8k+17=0$

이때 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-11\times17=-171<0$

이므로 실근을 갖지 않는다. ······❷

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은

$-1+(-7)=-8$ ······❸

채점 기준	비율
❶ 두 실근의 부호가 서로 다른 경우 k의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ 두 실근의 부호가 같은 경우 주어진 이차방정식이 실근을 갖지 않음을 알 수 있다.	40%
❸ k의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

36-1 답 2

주어진 이차방정식의 두 근을 α, α^2 $(\alpha\neq0)$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\alpha^2=2$ ······㉠

$\alpha\times\alpha^2=k^2-2k$ ······㉡

㉠에서 $\alpha^2+\alpha-2=0$, $(\alpha+2)(\alpha-1)=0$

$\therefore \alpha=-2$ 또는 $\alpha=1$

(i) $\alpha=-2$를 ㉡에 대입하면 $k^2-2k=-8$

k에 대한 이차방정식 $k^2-2k+8=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-8=-7<0$이므로 k는 허수이다.

(ii) $\alpha=1$을 ㉡에 대입하면 $k^2-2k=1$

k에 대한 이차방정식 $k^2-2k-1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-(-1)=2>0$이므로 k는 실수이고, 근과 계수의 관계에 의하여 그 합은 2이다.

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은 2이다.

37 답 ②

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=5-2m^2$

이때 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$이므로

$m^2-2(5-2m^2)=10$, $5m^2-10=10$

$m^2=4$ $\therefore m=2$ $(\because m>0)$

37-1 답 ①

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3k$, $\alpha\beta=-k^2$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$(3k)^2-4\times(-k^2)=13$, $13k^2=13$

$k^2=1$ $\therefore k=1$ $(\because k>0)$

38 답 5

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k+5$, $\alpha\beta=k-2$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2\beta+\alpha\beta^2-2\alpha-2\beta&=\alpha\beta(\alpha+\beta)-2(\alpha+\beta)\\&=(\alpha\beta-2)(\alpha+\beta)\\&=(k-4)(2k+5)\\&=2k^2-3k-20\end{aligned}$$

이때 $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-2\alpha-2\beta=15$이므로

$2k^2-3k-20=15$, $2k^2-3k-35=0$

$(2k+7)(k-5)=0$ $\therefore k=5$ $(\because k$는 정수$)$

38-1 답 ③

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k$, $\alpha\beta=3k+1$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha+\beta&=\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha+\beta\\&=(\alpha\beta+1)(\alpha+\beta)\\&=(3k+2)\times2k\\&=6k^2+4k\end{aligned}$$

이때 $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha+\beta=16$이므로

$6k^2+4k=16$, $3k^2+2k-8=0$

$(k+2)(3k-4)=0$ $\therefore k=-2$ $(\because k$는 정수$)$

39 답 ③

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=-b$

$(\alpha-\beta)^2=13$에서

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=a^2+4b=13$ ······㉠

$\alpha(1+\beta)+\beta=2$에서

$\alpha(1+\beta)+\beta=\alpha+\beta+\alpha\beta=-a-b=2$

$\therefore b=-a-2$ ······㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a^2+4(-a-2)=13$

$a^2-4a-21=0$, $(a+3)(a-7)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=7$

그런데 $a<0$이므로 $a=-3$

㉡에서 $b=-(-3)-2=1$

$\therefore b-a=1-(-3)=4$

39-1 답 -3

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{a}{2}$, $\alpha\beta=\frac{b}{2}$ ······❶

$\alpha^2+\beta^2=11$에서

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\frac{a}{2}\right)^2-2\times\frac{b}{2}=\frac{a^2}{4}-b=11$

$\therefore a^2-4b=44$ ······㉠

$\frac{7}{\alpha}+\frac{7}{\beta}=-4$에서

$\frac{7}{\alpha}+\frac{7}{\beta}=7\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)=\frac{7a}{b}=-4$

$\therefore b=-\frac{7}{4}a$ ······㉡ ······❷

㉡을 ㉠에 대입하면 $a^2+7a=44$

$a^2+7a-44=0$, $(a+11)(a-4)=0$

$\therefore a=-11$ 또는 $a=4$

그런데 $a>0$이므로 $a=4$

㉡에서 $b=-\frac{7}{4}\times4=-7$ ······❸

$\therefore a+b=4+(-7)=-3$ ······❹

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❷ $\alpha^2+\beta^2=11$, $\frac{7}{\alpha}+\frac{7}{\beta}=-4$를 각각 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

40 답 ③

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-2$

$\therefore \frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}=\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{6}{-2}=-3$

$\frac{2}{\alpha}\times\frac{2}{\beta}=\frac{4}{\alpha\beta}=\frac{4}{-2}=-2$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2+3x-2=0$

40-1 답 ①

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=5$

$$\begin{aligned}\therefore (\alpha^2+1)+(\beta^2+1)&=\alpha^2+\beta^2+2\\&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2\\&=3^2-2\times5+2\\&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha^2+1)(\beta^2+1)&=\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1\\&=(\alpha\beta)^2+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+1\\&=5^2+3^2-2\times5+1\\&=25\end{aligned}$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-x+25=0$

41 답 $4x^2-36x+25=0$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-\frac{5}{2}$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\times\left(-\frac{5}{2}\right)=9$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=\left(-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

따라서 구하는 이차방정식은 $4\left(x^2-9x+\frac{25}{4}\right)=0$

$\therefore 4x^2-36x+25=0$

41-1 답 $4x^2+3x-2=0$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=-2$

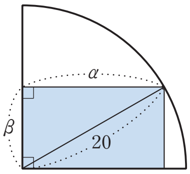
$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{3}{2}}{-2}=-\frac{3}{4}$

$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$

따라서 구하는 이차방정식은 $4\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right)=0$

$\therefore 4x^2+3x-2=0$

42 답 64



오른쪽 그림과 같이 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 α, β라 하면 직사각형의 넓이가 88이므로 $\alpha\beta=88$

또 피타고라스 정리에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=20^2$이므로

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=20^2+2\times88=576$

$\therefore \alpha+\beta=24$ ($\because \alpha>0$, $\beta>0$) ······❶

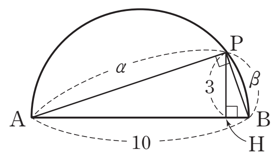
따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-24x+88=0$이므로

$a=-24$, $b=88$ ······❷

$\therefore a+b=-24+88=64$ ······❸

채점 기준	비율
❶ 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 α, β라 하고 $\alpha\beta$, $\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

42-1 답 $x^2-4\sqrt{10}x+30=0$



오른쪽 그림과 같이 $\overline{AP}=\alpha$, $\overline{BP}=\beta$라 하면 △PAB가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=10^2$

또 △PAB에서

$\frac{1}{2}\overline{AP}\times\overline{PB}=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{PH}$이므로

$\frac{1}{2}\alpha\beta=\frac{1}{2}\times10\times3$ $\therefore \alpha\beta=30$

이때 $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=10^2+2\times30=160$

$\therefore \alpha+\beta=4\sqrt{10}$ ($\because \alpha>0$, $\beta>0$)

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-4\sqrt{10}x+30=0$

43 답 1

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

즉 $f(4x+1)=0$이려면

$4x+1=\alpha$ 또는 $4x+1=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha-1}{4}$ 또는 $x=\frac{\beta-1}{4}$

따라서 이차방정식 $f(4x+1)=0$의 두 근의 합은

$\frac{\alpha-1}{4}+\frac{\beta-1}{4}=\frac{\alpha+\beta-2}{4}=\frac{6-2}{4}=1$

다른 풀이
이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 6이므로
$f(x)=a(x^2-6x+c)$ ($a\neq0$, a, c는 상수)라 하면
$$\begin{aligned}f(4x+1)&=a\{(4x+1)^2-6(4x+1)+c\}\\&=a(16x^2-16x-5+c)\\&=16ax^2-16ax-5a+ac\end{aligned}$$
따라서 이차방정식 $f(4x+1)=0$의 두 근의 합은
$-\dfrac{-16a}{16a}=1$

43-1 답 5
이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면
두 근의 합이 4이므로 $\alpha+\beta=4$
또 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(2x-3)=0$이려면
$2x-3=\alpha$ 또는 $2x-3=\beta$
$\therefore x=\dfrac{\alpha+3}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+3}{2}$
따라서 이차방정식 $f(2x-3)=0$의 두 근의 합은
$\dfrac{\alpha+3}{2}+\dfrac{\beta+3}{2}=\dfrac{\alpha+\beta+6}{2}=\dfrac{4+6}{2}=5$

44 답 -1
이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로
$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$
즉 $f(3x+1)=0$이려면
$3x+1=\alpha$ 또는 $3x+1=\beta$
$\therefore x=\dfrac{\alpha-1}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\beta-1}{3}$
따라서 이차방정식 $f(3x+1)=0$의 두 근의 곱은
$\dfrac{\alpha-1}{3}\times\dfrac{\beta-1}{3}=\dfrac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}{9}=\dfrac{-5-5+1}{9}=-1$

다른 풀이
이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 5, 두 근의 곱이 -5이므로
$f(x)=a(x^2-5x-5)$ $(a\neq0)$라 하면
$$\begin{aligned}f(3x+1)&=a\{(3x+1)^2-5(3x+1)-5\}\\&=a(9x^2-9x-9)\\&=9ax^2-9ax-9a\end{aligned}$$
따라서 이차방정식 $f(3x+1)=0$의 두 근의 곱은
$\dfrac{-9a}{9a}=-1$

44-1 답 ②
이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로
$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$
즉 $f(3x-1)=0$이려면
$3x-1=\alpha$ 또는 $3x-1=\beta$
$\therefore x=\dfrac{\alpha+1}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+1}{3}$
따라서 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근의 곱은
$\dfrac{\alpha+1}{3}\times\dfrac{\beta+1}{3}=\dfrac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{9}=\dfrac{7+10+1}{9}=2$

45 답 ③
이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면
두 근의 곱이 6이므로 $\alpha\beta=6$
또 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(2-4x)=0$이려면
$2-4x=\alpha$ 또는 $2-4x=\beta$
$\therefore x=\dfrac{2-\alpha}{4}$ 또는 $x=\dfrac{2-\beta}{4}$
이차방정식 $f(2-4x)=0$의 두 근의 곱이 2이므로
$\dfrac{2-\alpha}{4}\times\dfrac{2-\beta}{4}=2$, $4-2(\alpha+\beta)+\alpha\beta=32$
이때 $\alpha\beta=6$이므로 $4-2(\alpha+\beta)+6=32$
$\therefore \alpha+\beta=-11$

45-1 답 7
이차방정식 $f(3x-4)=0$의 두 근이 α, β이므로
$f(3\alpha-4)=0$, $f(3\beta-4)=0$
즉 $f(2x)=0$이려면
$2x=3\alpha-4$ 또는 $2x=3\beta-4$
$\therefore x=\dfrac{3\alpha-4}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3\beta-4}{2}$
따라서 이차방정식 $f(2x)=0$의 두 근의 곱은
$$\begin{aligned}\frac{3\alpha-4}{2}\times\frac{3\beta-4}{2}&=\frac{9\alpha\beta-12(\alpha+\beta)+16}{4}\\&=\frac{9\times8-12\times5+16}{4}\\&=7\end{aligned}$$

46 답 ①
이차방정식 $x^2+x-3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=-3$
$f(\alpha)=f(\beta)=\alpha\beta$에서 $f(\alpha)=f(\beta)=-3$이므로
$f(\alpha)+3=0$, $f(\beta)+3=0$
즉 이차방정식 $f(x)+3=0$의 두 근이 α, β이므로
$f(x)+3=a(x^2+x-3)$ $(a\neq0)$ ······㉠
으로 놓을 수 있다.
$x=3$을 ㉠에 대입하면 $f(3)+3=a(9+3-3)$
이때 $f(3)=6$이므로 $9=9a$ $\quad\therefore a=1$
따라서 $f(x)+3=x^2+x-3$이므로 $f(x)=x^2+x-6$
$\therefore f(1)=1+1-6=-4$

46-1 답 ③
$f(\alpha)=f(\beta)=1$이므로 $f(\alpha)-1=0$, $f(\beta)-1=0$
즉 이차방정식 $f(x)-1=0$의 두 근이 α, β이므로
$f(x)-1=a(x^2+2x-4)$ $(a\neq0)$ ······㉠
로 놓을 수 있다.
$x=-2$를 ㉠에 대입하면 $f(-2)-1=a(4-4-4)$
이때 $f(-2)=-3$이므로 $-4=-4a$ $\quad\therefore a=1$
따라서 $f(x)-1=x^2+2x-4$이므로 $f(x)=x^2+2x-3$
$\therefore f(-1)=1-2-3=-4$

47 답 ②
$f(2\alpha-1)=f(2\beta-1)=1$에서
$f(2\alpha-1)-1=0$, $f(2\beta-1)-1=0$
즉 이차방정식 $f(2x-1)-1=0$의 두 근이 α, β이므로
$f(2x-1)-1=a(x^2-x-6)$ $(a\neq0)$ ······㉠
으로 놓을 수 있다.

$x=0$을 ㉠에 대입하면 $f(-1)-1=-6a$
이때 $f(-1)=13$이므로 $12=-6a$ $\therefore a=-2$
따라서 $f(2x-1)-1=-2(x^2-x-6)$이므로
$f(2x-1)=-2x^2+2x+13$
위의 식에 $x=2$를 대입하면
$f(3)=-8+4+13=9$

47-1 답 ②

이차방정식 $x^2-x-3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=-3$
$f(3\alpha-2)=f(3\beta-2)=\alpha\beta$에서
$f(3\alpha-2)=f(3\beta-2)=-3$이므로
$f(3\alpha-2)+3=0$, $f(3\beta-2)+3=0$
즉 이차방정식 $f(3x-2)+3=0$의 두 근이 α, β이므로
$f(3x-2)+3=a(x^2-x-3)$ $(a\neq0)$ ……㉠
으로 놓을 수 있다.
$x=-1$을 ㉠에 대입하면 $f(-5)+3=a(1+1-3)$
이때 $f(-5)=-2$이므로 $1=-a$ $\therefore a=-1$
따라서 $f(3x-2)+3=-(x^2-x-3)$이므로
$f(3x-2)=-x^2+x$
위의 식에 $x=1$을 대입하면
$f(1)=-1+1=0$

48 답 12

이차방정식 $x^2+x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-1$
$\therefore \alpha=-\beta-1$, $\beta=-\alpha-1$
$f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$에서
$f(\alpha)=-\alpha-1$, $f(\beta)=-\beta-1$
$\therefore f(\alpha)+\alpha+1=0$, $f(\beta)+\beta+1=0$
즉 이차방정식 $f(x)+x+1=0$의 두 근이 α, β이므로
$f(x)+x+1=a(x^2+x-1)$ $(a\neq0)$ ……㉠
로 놓을 수 있다.
$x=1$을 ㉠에 대입하면 $f(1)+2=a(1+1-1)$
이때 $f(1)=1$이므로 $a=3$
따라서 $f(x)+x+1=3(x^2+x-1)$이므로
$f(x)=3x^2+2x-4$
$\therefore f(2)=12+4-4=12$

48-1 답 10

이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$
$\therefore \alpha=-\beta+2$, $\beta=-\alpha+2$
$f(\alpha)=2\beta$, $f(\beta)=2\alpha$에서
$f(\alpha)=-2\alpha+4$, $f(\beta)=-2\beta+4$
$\therefore f(\alpha)+2\alpha-4=0$, $f(\beta)+2\beta-4=0$
즉 $f(x)+2x-4=0$의 두 근이 α, β이므로
$f(x)+2x-4=a(x^2-2x-1)$ $(a\neq0)$ ……㉠
로 놓을 수 있다.
$x=1$을 ㉠에 대입하면 $f(1)-2=a(1-2-1)$
이때 $f(1)=-2$이므로 $-4=-2a$ $\therefore a=2$
따라서 $f(x)+2x-4=2(x^2-2x-1)$이므로
$f(x)=2x^2-6x+2$
$\therefore f(-1)=2+6+2=10$

49 답 ③

이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 실수이고 한 근이 $1+\sqrt{3}i$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{3}i$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)=-a$ $\therefore a=-2$
(두 근의 곱)$=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=b$ $\therefore b=4$
$\therefore 2a+b=2\times(-2)+4=0$

49-1 답 ⑤

이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 실수이고 한 근이 $-1-i$이므로 다른 한 근은 $-1+i$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=(-1-i)+(-1+i)=-a$ $\therefore a=2$
(두 근의 곱)$=(-1-i)(-1+i)=b$ $\therefore b=2$
$\therefore 2a-b=2\times2-2=2$

50 답 ②

이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 유리수이고 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=-a$ $\therefore a=-4$
(두 근의 곱)$=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=b$ $\therefore b=1$
$\therefore a+b=-4+1=-3$

50-1 답 ④

이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 유리수이고 한 근이 $1+\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{5}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=(1+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})=-a$ $\therefore a=-2$
(두 근의 곱)$=(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=b$ $\therefore b=-4$
$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+(-4)^2=20$

51 답 8

$\dfrac{2}{3+\sqrt{11}}=\dfrac{2(3-\sqrt{11})}{(3+\sqrt{11})(3-\sqrt{11})}=-3+\sqrt{11}$
a, b가 유리수이므로 $a-1$, $2b$도 유리수이다.
즉 이차방정식 $x^2+(a-1)x+2b=0$의 한 근이 $-3+\sqrt{11}$이면 다른 한 근은 $-3-\sqrt{11}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=(-3+\sqrt{11})+(-3-\sqrt{11})=-(a-1)$
$-6=-a+1$ $\therefore a=7$
(두 근의 곱)$=(-3+\sqrt{11})(-3-\sqrt{11})=2b$
$-2=2b$ $\therefore b=-1$
$\therefore a-b=7-(-1)=8$

51-1 답 -2

$\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$
a, b가 유리수이므로 $-2a$, $3b-7$도 유리수이다.
즉 이차방정식 $x^2-2ax+3b-7=0$의 한 근이 $\sqrt{2}-1$이면 다른

한 근은 $-\sqrt{2}-1$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=(\sqrt{2}-1)+(-\sqrt{2}-1)=2a$
$-2=2a$ $\quad\therefore a=-1$
(두 근의 곱)$=(\sqrt{2}-1)(-\sqrt{2}-1)=3b-7$
$-1=3b-7$ $\quad\therefore b=2$
$\therefore ab=-1\times2=-2$

52 답 237
a, b가 실수이므로 ab, $a-b$도 실수이다.
즉 이차방정식 $3x^2+abx+a-b=0$의 한 근이 $-1+2i$이면 다른 한 근은 $-1-2i$이다. ······❶
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=(-1+2i)+(-1-2i)=-\dfrac{ab}{3}$
$-2=-\dfrac{ab}{3}$ $\quad\therefore ab=6$ ······❷
(두 근의 곱)$=(-1+2i)(-1-2i)=\dfrac{a-b}{3}$
$5=\dfrac{a-b}{3}$ $\quad\therefore a-b=15$ ······❸
$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
$=15^2+2\times6=237$ ······❹

채점 기준	비율
❶ 다른 한 근을 구할 수 있다.	20%
❷ ab의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20%

52-1 답 2
a, b가 실수이므로 $-(a+b)$, $4ab$도 실수이다.
즉 이차방정식 $2x^2-(a+b)x+4ab=0$의 한 근이 $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$이면 다른 한 근은 $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{a+b}{2}$
$1=\dfrac{a+b}{2}$ $\quad\therefore a+b=2$
(두 근의 곱)$=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=2ab$
$1=2ab$ $\quad\therefore ab=\dfrac{1}{2}$
$\therefore (a-b)^2=(a+b)^2-4ab$
$=2^2-4\times\dfrac{1}{2}=2$

53 답 -4
$\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$
a, b가 실수이므로 한 근이 $1+i$이면 다른 한 근은 $1-i$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=(1+i)+(1-i)=-a$ $\quad\therefore a=-2$
(두 근의 곱)$=(1+i)(1-i)=b$ $\quad\therefore b=2$
$\therefore a-b=-2-2=-4$

53-1 답 ④
$1+\dfrac{2}{i}=1+\dfrac{2i}{i\times i}=1-2i$
$-a$, b가 실수이므로 한 근이 $1-2i$이면 다른 한 근은 $1+2i$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=(1-2i)+(1+2i)=a$ $\quad\therefore a=2$
(두 근의 곱)$=(1-2i)(1+2i)=b$ $\quad\therefore b=5$
$\therefore ab=2\times5=10$

54 답 ③
이차방정식 $x^2+mx+n=0$에서 m, n이 실수이고 한 근이 $-1+2i$이므로 다른 한 근은 $-1-2i$이다.
즉 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=(-1+2i)+(-1-2i)=-m$ $\quad\therefore m=2$
(두 근의 곱)$=(-1+2i)(-1-2i)=n$ $\quad\therefore n=5$
$\therefore \dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{7}{10}$
$\dfrac{1}{m}\times\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{10}$
따라서 $\dfrac{1}{m}$, $\dfrac{1}{n}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-\dfrac{7}{10}x+\dfrac{1}{10}=0$이므로 $a=-\dfrac{7}{10}$, $b=\dfrac{1}{10}$
$\therefore 5(a+b)=5\left(-\dfrac{7}{10}+\dfrac{1}{10}\right)=-3$

54-1 답 ②
이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 실수이고 한 근이 $-2+i$이므로 다른 한 근은 $-2-i$이다.
즉 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=(-2+i)+(-2-i)=-a$ $\quad\therefore a=4$
(두 근의 곱)$=(-2+i)(-2-i)=b$ $\quad\therefore b=5$
$\therefore a+b=4+5=9$, $ab=4\times5=20$
따라서 a, b를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은
$2(x^2-9x+20)=0$이므로 $2x^2-18x+40=0$
$\therefore p=-18$, $q=40$
$\therefore p+q=-18+40=22$

유형+ 완성하기 p. 119

55 답 ②
주헌이와 은찬이가 푼 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$ (a, b는 상수)이라 하자.
주헌이는 x^2의 계수와 상수항을 바르게 보고 풀었으므로
(두 근의 곱)$=b=-4\times7=-28$
또 은찬이는 x^2의 계수와 x의 계수를 바르게 보고 풀었으므로
(두 근의 합)$=-a=(-3+\sqrt{2}i)+(-3-\sqrt{2}i)=-6$
$\therefore a=6$
따라서 원래의 이차방정식은 $x^2+6x-28=0$

56 답 2

이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서

세진이는 b를 바르게 보고 풀었으므로

(두 근의 곱)$=b=1\times4=4$

민희는 a를 바르게 보고 풀었으므로

(두 근의 합)$=-a=-1+4=3$ $\quad\therefore a=-3$ ······❶

따라서 주어진 이차방정식은 $x^2-3x+4=0$ ······❷

이 이차방정식의 옳은 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=4$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$

$=4-3+1=2$ ······❸

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ 주어진 이차방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ $(\alpha-1)(\beta-1)$의 값을 구할 수 있다.	30%

57 답 $x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=3$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서

A는 x^2의 계수 a와 상수항 c를 바르게 보고 풀었으므로

(두 근의 곱)$=\frac{c}{a}=(1+\sqrt{6})(1-\sqrt{6})=-5$

B는 x^2의 계수 a와 x의 계수 b를 바르게 보고 풀었으므로

(두 근의 합)$=-\frac{b}{a}=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

따라서 주어진 이차방정식은 $a\left(x^2-\frac{4}{3}x-5\right)=0$이므로 이 이차방정식의 옳은 근을 구하면

$\frac{a}{3}(3x^2-4x-15)=0$, $\frac{a}{3}(3x+5)(x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=3$

58 답 ⑤

$8x^2-12x+5=0$에서 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-8\times5}}{8}=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{8}$$

$$=\frac{6\pm2i}{8}=\frac{3\pm i}{4}$$

$$\therefore 8x^2-12x+5=8\left(x-\frac{3+i}{4}\right)\left(x-\frac{3-i}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(4x-3-i)(4x-3+i)$$

59 답 $(x-\sqrt{6}-i)(x-\sqrt{6}+i)$

$x^2-2\sqrt{6}x+7=0$에서 근의 공식을 이용하면

$x=-(-\sqrt{6})\pm\sqrt{(-\sqrt{6})^2-1\times7}$

$=\sqrt{6}\pm\sqrt{-1}=\sqrt{6}\pm i$

$\therefore x^2-2\sqrt{6}x+7=\{x-(\sqrt{6}+i)\}\{x-(\sqrt{6}-i)\}$

$=(x-\sqrt{6}-i)(x-\sqrt{6}+i)$

60 답 $\sqrt{3}$

$4x^2-8x+7=0$에서 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times7}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{-12}}{4}$$

$$=\frac{4\pm2\sqrt{3}i}{4}=\frac{2\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore 4x^2-8x+7=4\left\{x-\left(\frac{2+\sqrt{3}i}{2}\right)\right\}\left\{x-\left(\frac{2-\sqrt{3}i}{2}\right)\right\}$$

$$=\{2x-(2+\sqrt{3}i)\}\{2x-(2-\sqrt{3}i)\}$$

$$=(2x-2-\sqrt{3}i)(2x-2+\sqrt{3}i)$$

따라서 $a=-\sqrt{3}$, $b=-2$, $c=\sqrt{3}$ ($\because a<c$)이므로

$a-bc=-\sqrt{3}-(-2)\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$

학교 시험 대비 문제

p. 120~123

01 답 ②

이차방정식 $5x^2-6x+k=0$에서 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-5k}}{5}=\frac{3\pm\sqrt{9-5k}}{5}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{5k-9}i}{5}$$

즉 $5k-9=5a$이므로 $5a-5k=-9$

$\therefore a-k=-\frac{9}{5}$

02 답 ②

이차방정식 $x^2+ax+a+2=0$의 한 근이 2이므로

$4+2a+a+2=0$, $3a+6=0$ $\quad\therefore a=-2$

03 답 ④

(i) $x<-2$일 때

$(x+2)^2-2|x+2|-3=0$에서

$(x+2)^2+2(x+2)-3=0$

$x^2+6x+5=0$, $(x+1)(x+5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-5$

그런데 $x<-2$이므로 $x=-5$

(ii) $x\geq-2$일 때

$(x+2)^2-2|x+2|-3=0$에서

$(x+2)^2-2(x+2)-3=0$

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

그런데 $x\geq-2$이므로 $x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-5$ 또는 $x=1$

따라서 모든 근의 합은

$-5+1=-4$

04 답 ④

처음 정사각형 모양의 땅의 넓이는 x^2

늘인 후 직사각형의 가로의 길이는 $x+2$, 세로의 길이는 $x+1$이므로

$(x+2)(x+1)=\frac{3}{2}x^2$, $2(x+2)(x+1)=3x^2$

$2x^2+6x+4=3x^2$, $x^2-6x-4=0$

$\therefore x=3+\sqrt{13}$ ($\because x>0$)

05 답 ②

이차방정식 $3x^2+6x-k+1=0$이 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-3(-k+1)\geq0$

$3k+6\geq0 \qquad \therefore k\geq-2$

따라서 실수 k의 최솟값은 -2이다.

06 답 ①

이차방정식 $x^2-2(k-1)x+k^2+2k-3=0$이 실근을 가지므로 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k^2+2k-3)\geq0$

$-4k+4\geq0 \qquad \therefore k\leq1$ ……㉠

이차방정식 $x^2+2kx+k+6=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D_2라 하면 $\frac{D_2}{4}=k^2-(k+6)=0$

$k^2-k-6=0$, $(k+2)(k-3)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=3$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $k=-2$

07 답 ④

이차방정식 $ax^2-2x+1=0$이 서로 다른 두 허근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-a<0 \qquad \therefore a>1$

이때 $\sqrt{(a-2)^2}+|a|=|a-2|+|a|$이므로

$|a-2|+|a|=8$

(i) $1<a<2$일 때

$|a-2|+|a|=8$에서 $-(a-2)+a=2\neq8$이므로 이를 만족시키는 a의 값은 없다.

(ii) $a\geq2$일 때

$|a-2|+|a|=8$에서 $(a-2)+a=8$

$2a=10 \qquad \therefore a=5$

(i), (ii)에서 $a=5$

08 답 ③

이차방정식 $x^2-2(m-a)x+(a^2+7a-n)=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(m-a)\}^2-(a^2+7a-n)=0$

$m^2-2am+a^2-a^2-7a+n=0$

$(-2m-7)a+m^2+n=0$

이 등식이 a에 대한 항등식이므로

$-2m-7=0$, $m^2+n=0$

$-2m-7=0$에서 $m=-\frac{7}{2}$

$m=-\frac{7}{2}$을 $m^2+n=0$에 대입하면

$\frac{49}{4}+n=0 \qquad \therefore n=-\frac{49}{4}$

$\therefore 2m-4n=2\times\left(-\frac{7}{2}\right)-4\times\left(-\frac{49}{4}\right)=42$

09 답 ④

주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식

$x^2+4kx+6ax+4k^2+4k+b=0$, 즉

$x^2+2(2k+3a)x+4k^2+4k+b=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k+3a)^2-(4k^2+4k+b)=0$

$4k^2+12ak+9a^2-4k^2-4k-b=0$

$(12a-4)k+9a^2-b=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$12a-4=0$, $9a^2-b=0$

$12a-4=0$에서 $a=\frac{1}{3}$

$a=\frac{1}{3}$을 $9a^2-b=0$에 대입하면

$1-b=0 \qquad \therefore b=1$

$\therefore a+b=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

10 답 ③

$a(1+x^2)+2bx+c(1-x^2)$을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(a-c)x^2+2bx+a+c$

위의 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식

$(a-c)x^2+2bx+a+c=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=b^2-(a-c)(a+c)=0$

$b^2-(a^2-c^2)=0 \qquad \therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

11 답 ③

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{6}{2}=-3$, $\alpha\beta=\frac{3}{2}$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-3)^2-4\times\frac{3}{2}=3$

12 답 ③

이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+2\alpha+4=0$에서 $\alpha^2+2\alpha=-4$

$\therefore 2\alpha^2+4\alpha=-8$

$\beta^2+2\beta+4=0$에서 $\beta^2+2\beta=-4$

$\therefore 2\beta^2+4\beta=-8$

$$\therefore (2\alpha^2+4\alpha+5)(2\beta^2+4\beta+5)=(-8+5)(-8+5)=-3\times(-3)=9$$

13 답 ②

주어진 이차방정식의 두 근을 2α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+3\alpha=5(m-1)$이므로 $5\alpha=5(m-1)$

$\therefore \alpha=m-1$ ……㉠

$2\alpha\times3\alpha=-24m$이므로 $6\alpha^2=-24m$

$\therefore \alpha^2=-4m$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(m-1)^2=-4m$

$m^2-2m+1=-4m$, $m^2+2m+1=0$

$(m+1)^2=0 \qquad \therefore m=-1$

14 답 162

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k,\ \alpha\beta=3$

$\therefore\ \alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha+\beta=\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha+\beta$

$=(\alpha\beta+1)(\alpha+\beta)$

$=(3+1)\times 2k$

$=8k$

이때 $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha+\beta=24$이므로

$8k=24\qquad \therefore\ k=3$

따라서 $\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=3$이므로

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=6^3-3\times3\times6$

$=162$

15 답 1

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=1$

$\therefore\ (\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=4+2=6$

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=1+4+1=6$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-6x+6=0$이므로

$f(x)=x^2-6x+6$

$\therefore\ f(1)=1-6+6=1$

16 답 ①

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

두 근의 곱이 4이므로 $\alpha\beta=4$

또 $f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$이므로 $f(2x)=0$이려면

$2x=\alpha$ 또는 $2x=\beta$

$\therefore\ x=\frac{\alpha}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x)=0$의 두 근의 곱은

$\frac{\alpha}{2}\times\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha\beta}{4}=\frac{4}{4}=1$

17 답 ④

이차방정식 $x^2+4x-7=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4,\ \alpha\beta=-7$

$f(\alpha+\beta)=f(\alpha\beta)=0$에서 $f(-4)=f(-7)=0$

즉 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 $-4,\ -7$이고 x^2의 계수가 1이므로 $f(x)=(x+4)(x+7)$

$\therefore\ f(1)=5\times8=40$

18 답 -3

$\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 $a,\ b$가 유리수이고 한 근이 $2-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-a\qquad \therefore\ a=-4$

(두 근의 곱)$=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=b\qquad \therefore\ b=1$

$\therefore\ a+b=-4+1=-3$

19 답 ⑤

ㄱ. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 $a,\ b$가 실수이고 한 근이 $1+2i$이므로 다른 한 근은 $1-2i$이다.

$\therefore\ \alpha=1-2i$

ㄴ. (두 근의 합)$=(1+2i)+(1-2i)=2$

(두 근의 곱)$=(1+2i)(1-2i)=5$

즉 주어진 이차방정식은 $x^2-2x+5=0$이므로

$a=-2,\ b=5$

$\therefore\ a+b=-2+5=3$

ㄷ. 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=5$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

20 답 $x=-1\pm\sqrt{13}$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서

갑은 상수항 b의 값을 바르게 보고 풀었으므로

(두 근의 곱)$=b=-3\times4=-12$

을은 x의 계수 a의 값을 바르게 보고 풀었으므로

(두 근의 합)$=-a=(-1+\sqrt{2}i)+(-1-\sqrt{2}i)=-2$

$\therefore\ a=2$

따라서 주어진 이차방정식은 $x^2+2x-12=0$이므로 이 이차방정식의 옳은 근은

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\times(-12)}=-1\pm\sqrt{13}$

21 답 $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=4$

두 근은 $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a},\ x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a}$

(두 근의 합)$=\frac{-2b}{a}$이므로 $\frac{-2b}{a}=-1+6=5$

$\therefore\ b=-\frac{5}{2}a$

(두 근의 곱)$=\frac{b^2-(b^2-ac)}{a^2}=\frac{ac}{a^2}=\frac{c}{a}$이므로

$\frac{c}{a}=-1\times6=-6\qquad \therefore\ c=-6a$

따라서 $ax^2+bx+c=0$에서 $ax^2-\frac{5}{2}ax-6a=0$이므로

$\frac{a}{2}(2x^2-5x-12)=0,\ \frac{a}{2}(2x+3)(x-4)=0$

$\therefore\ x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=4$

서술형 1 답 -4

이차방정식 $kx^2+(p-3)x+(2k+1)q=0$의 한 근이 -2이므로

$4k-2(p-3)+(2k+1)q=0$

$(2q+4)k-2p+q+6=0$ …… ❶

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$2q+4=0,\ -2p+q+6=0$

$\therefore\ p=2,\ q=-2$ …… ❷

$\therefore\ pq=2\times(-2)=-4$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 이차방정식에 $x=-2$를 대입하여 정리할 수 있다.	40%
❷ $p,\ q$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ pq의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 2 답 2

(i) $kx^2-2kx+3k-4=0$이 이차방정식이므로

$k\neq0$ ······ ❶

(ii) 이차방정식 $kx^2-2kx+3k-4=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-k(3k-4)=0,\ -2k^2+4k=0$

$k^2-2k=0,\ k(k-2)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=2$ ······ ❷

(i), (ii)에서 $k=2$ ······ ❸

채점 기준	비율
❶ $kx^2-2kx+3k-4=0$이 이차방정식이 되는 조건을 구할 수 있다.	40%
❷ $kx^2-2kx+3k-4=0$이 중근을 가질 조건을 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 $-\frac{1}{2}$

주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha,\ -\alpha\ (\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-\alpha)=\frac{2a^2-a-1}{3}$ ······ ㉠

$\alpha\times(-\alpha)=\frac{5a-4}{3}$ ······ ㉡ ······ ❶

㉠에서 $2a^2-a-1=0,\ (2a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$ ······ ㉢

㉡에서 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\frac{5a-4}{3}<0\quad \therefore a<\frac{4}{5}$ ······ ㉣ ······ ❷

㉢, ㉣에서 $a=-\frac{1}{2}$ ······ ❸

채점 기준	비율
❶ 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다를 조건을 구할 수 있다.	20%
❷ a의 값과 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 조건을 만족시키는 a의 값을 구할 수 있다.	40%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 124~125

01 답 10

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\frac{k}{2}$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=2^3-3\times\frac{k}{2}\times2$

$=8-3k$

즉 $8-3k=7$이므로 $k=\frac{1}{3}$

$\therefore 30k=30\times\frac{1}{3}=10$

02 답 ④

$(a^2-9)x^2=a+3$에서 $(a+3)(a-3)x^2=a+3$

a는 자연수이므로 $a+3>0$

$\therefore (a-3)x^2=1$

이차방정식 $(a-3)x^2-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=0^2-4(a-3)\times(-1)>0$

$4(a-3)>0,\ a-3>0\quad \therefore a>3$

따라서 10보다 작은 자연수 a의 값은 4, 5, 6, 7, 8, 9이므로 그 개수는 6이다.

다른 풀이

$(a^2-9)x^2=a+3$에서 $(a+3)(a-3)x^2=a+3$

a는 자연수이므로 $a+3>0$

$(a-3)x^2=1\quad \therefore x^2=\frac{1}{a-3}$

이차방정식이 두 실근을 가지므로 $\frac{1}{a-3}>0$

$a-3>0\quad \therefore a>3$

따라서 10보다 작은 자연수 a의 값은 4, 5, 6, 7, 8, 9이므로 그 개수는 6이다.

03 답 ④

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4,\ \alpha\beta=2$

이때 $\alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$이므로 $\alpha<0,\ \beta<0$

$\therefore \frac{1}{|\alpha|}+\frac{1}{|\beta|}=-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$

$=-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{-4}{2}=2$

04 답 6

이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha^2-3\alpha+k=0$에서 $\alpha^2-\alpha+k=2\alpha$

$\beta^2-3\beta+k=0$에서 $\beta^2-\beta+k=2\beta$

또 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=k$

$\therefore \frac{1}{\alpha^2-\alpha+k}+\frac{1}{\beta^2-\beta+k}=\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\beta}=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}=\frac{3}{2k}$

즉 $\frac{3}{2k}=\frac{1}{4}$이므로 $k=6$

05 답 ④

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=-3a$

이때 $a>0$이므로 $\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta<0$

즉 $\alpha,\ \beta$는 부호가 서로 다르므로 $\alpha<0<\beta$라 하면

$(|\alpha|+|\beta|)^2=(-\alpha+\beta)^2$

$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=a^2-4\times(-3a)$

$=a^2+12a$

즉 $8^2=a^2+12a$이므로 $a^2+12a-64=0$

$(a+16)(a-4)=0\quad \therefore a=4\ (\because a>0)$

따라서 $\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=-12$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2\times(-12)=40$

06 답 14

이차방정식 $x^2+(a-4)x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a+4$ ……㉠

$\alpha\beta=-1$ ……㉡

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\gamma=-a$ ……㉢

$\alpha\gamma=b$ ……㉣

㉠$-$㉢을 하면 $\beta-\gamma=4$

이때 $2\alpha=\beta-\gamma$이므로 $2\alpha=4$ $\quad\therefore \alpha=2$

$\alpha=2$를 ㉡에 대입하면 $2\beta=-1$ $\quad\therefore \beta=-\frac{1}{2}$

$\alpha=2$, $\beta=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$2+\left(-\frac{1}{2}\right)=-a+4$ $\quad\therefore a=\frac{5}{2}$

$\alpha=2$, $a=\frac{5}{2}$를 ㉢에 대입하면

$2+\gamma=-\frac{5}{2}$ $\quad\therefore \gamma=-\frac{9}{2}$

$\alpha=2$, $\gamma=-\frac{9}{2}$를 ㉣에 대입하면

$2\times\left(-\frac{9}{2}\right)=b$ $\quad\therefore b=-9$

$\therefore 2a-b=2\times\frac{5}{2}-(-9)=14$

07 답 ①

이차방정식 $x^2+(m+1)x+2m-1=0$에서 판별식을 D라 하면

$D=(m+1)^2-4(2m-1)=m^2-6m+5$

또 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-(m+1)\pm\sqrt{D}}{2}$

두 근이 정수가 되려면 D가 제곱수이거나 0이어야 한다.

그런데 D가 제곱수가 아니므로 $D=0$

즉 $D=m^2-6m+5=0$이므로 $(m-1)(m-5)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $m=5$

(i) $m=1$일 때

주어진 이차방정식은 $x^2+2x+1=0$이므로

$(x+1)^2=0$ $\quad\therefore x=-1$ (중근)

즉 두 근은 정수이다.

(ii) $m=5$일 때

주어진 이차방정식은 $x^2+6x+9=0$이므로

$(x+3)^2=0$ $\quad\therefore x=-3$ (중근)

즉 두 근은 정수이다.

(i), (ii)에서 모든 정수 m의 값의 합은

$1+5=6$

다른 풀이

주어진 이차방정식의 두 정수근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-m-1$ ……㉠

$\alpha\beta=2m-1$ ……㉡

㉠에서 $m=-\alpha-\beta-1$ ……㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $\alpha\beta=2(-\alpha-\beta-1)-1$

$\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=1$

$\therefore (\alpha+2)(\beta+2)=1$

이때 α, β는 정수이므로

$\alpha+2=1$, $\beta+2=1$ 또는 $\alpha+2=-1$, $\beta+2=-1$

$\therefore \alpha=-1$, $\beta=-1$ 또는 $\alpha=-3$, $\beta=-3$

(i) $\alpha=-1$, $\beta=-1$일 때

$m=-(-1)-(-1)-1=1$

(ii) $\alpha=-3$, $\beta=-3$일 때

$m=-(-3)-(-3)-1=5$

(i), (ii)에서 모든 정수 m의 값의 합은

$1+5=6$

08 답 120

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2a$, $\alpha\beta=-b$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-2a)^2-4\times(-b)$

$=4a^2+4b$

즉 $|\alpha-\beta|=2\sqrt{a^2+b}<12$ (a, b는 자연수)이므로

$\sqrt{a^2+b}<6$ $\quad\therefore a^2+b<36$

(i) $a=1$일 때, $b<35$

즉 순서쌍 (a, b)는 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $\cdots$, $(1, 34)$이므로 그 개수는 34이다.

(ii) $a=2$일 때, $b<32$

즉 순서쌍 (a, b)는 $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $\cdots$, $(2, 31)$이므로 그 개수는 31이다.

(iii) $a=3$일 때, $b<27$

즉 순서쌍 (a, b)는 $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$, $\cdots$, $(3, 26)$이므로 그 개수는 26이다.

(iv) $a=4$일 때, $b<20$

즉 순서쌍 (a, b)는 $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, $\cdots$, $(4, 19)$이므로 그 개수는 19이다.

(v) $a=5$일 때, $b<11$

즉 순서쌍 (a, b)는 $(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $\cdots$, $(5, 10)$이므로 그 개수는 10이다.

(i)~(v)에서 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는

$34+31+26+19+10=120$

09 답 ②

$\overline{AH}=\alpha$, $\overline{AE}=\beta$라 하면

$\overline{PG}=10-\alpha$, $\overline{PF}=10-\beta$

직사각형 PFCG의 둘레의 길이는

$2\{(10-\alpha)+(10-\beta)\}=28$이므로

$2(20-\alpha-\beta)=28$, $20-\alpha-\beta=14$

$\therefore \alpha+\beta=6$

직사각형 PFCG의 넓이는

$(10-\alpha)(10-\beta)=46$이므로

$100-10(\alpha+\beta)+\alpha\beta=46$

$100-10\times6+\alpha\beta=46$

$40+\alpha\beta=46$

$\therefore \alpha\beta=6$

따라서 $\overline{AH}$, $\overline{AE}$를 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-6x+6=0$

10 답 ⑤

(가)에서 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 곱이 7이고 $f(x)$는 이차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^2+ax+7$ (a는 상수)

(나)에서 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\times1=7$

$$\begin{aligned}\therefore f(\alpha)+f(\beta)&=\alpha^2+a\alpha+7+\beta^2+a\beta+7\\&=(\alpha^2+\beta^2)+a(\alpha+\beta)+14\\&=7+3a+14\\&=3a+21\end{aligned}$$

즉 $3a+21=3$이므로 $a=-6$

따라서 $f(x)=x^2-6x+7$이므로

$f(7)=7^2-6\times7+7=14$

11 답 ②

$(p+2qi)^2=-16i$에서 $p^2-4q^2+4pqi=-16i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$p^2-4q^2=0$ ……㉠

$4pq=-16$ $\therefore pq=-4$ ……㉡

㉠에서 $p^2=4q^2$ $\therefore p=2q$ 또는 $p=-2q$

(i) $p=2q$일 때

㉡에서 $2q\times q=-4$이므로 $q^2=-2$

이때 q^2은 음수가 될 수 없으므로 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 두 실수 p, q는 존재하지 않는다.

(ii) $p=-2q$일 때

㉡에서 $-2q\times q=-4$이므로 $q^2=2$

$\therefore q=\sqrt{2}$ 또는 $q=-\sqrt{2}$

이때 $p>0$이므로 $p=2\sqrt{2}$, $q=-\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $p=2\sqrt{2}$, $q=-\sqrt{2}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$p+q=\sqrt{2}=-a$ $\therefore a=-\sqrt{2}$

$pq=-4=b$ $\therefore b=-4$

$\therefore a^2+b^2=(-\sqrt{2})^2+(-4)^2=18$

12 답 ②

$P(x)=x^2+ax+b$, $Q(x)=x+c$ (a, b, c는 실수)로 놓으면

$$\begin{aligned}&P(x+1)-Q(x+1)\\&=\{(x+1)^2+a(x+1)+b\}-\{(x+1)+c\}\\&=(x+1)\{(x+1)+a-1\}+(b-c)\\&=(x+1)(x+a)+(b-c)\end{aligned}$$

(가)에서 $b-c=0$ $\therefore b=c$

$\therefore P(x)-Q(x)=x^2+(a-1)x$

(나)에서 $a-1=0$ $\therefore a=1$ ……㉠

$\therefore P(x)+Q(x)=x^2+2x+2b$

$P(x)+Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 12이므로

$P(2)+Q(2)=12$에서 $4+4+2b=12$

$2b=4$ $\therefore b=c=2$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $P(x)=x^2+x+2$, $Q(x)=x+2$

$\therefore P(2)=2^2+2+2=8$

06 이차방정식과 이차함수

Ⅱ 방정식과 부등식

개념 완성하기 p.129~130

01 답 $0,\ -2$

이차방정식 $x^2+2x=0$에서 $x(x+2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-2$

02 답 $-1,\ \frac{1}{3}$

이차방정식 $3x^2+2x-1=0$에서 $(x+1)(3x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

03 답 $\frac{1}{2}$

이차방정식 $-4x^2+4x-1=0$에서 $4x^2-4x+1=0$

$(2x-1)^2=0 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}$

04 답 2

이차방정식 $x^2-5x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\times1\times(-2)=33>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 2개이다.

05 답 0

이차방정식 $x^2-x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times3=-11<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 없다.

06 답 1

이차방정식 $-9x^2+6x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-(-9)\times(-1)=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 1개이다.

07 답 (1) $k<9$ (2) $k=9$ (3) $k>9$

이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times k=9-k$

(1) $9-k>0 \qquad \therefore k<9$

(2) $9-k=0 \qquad \therefore k=9$

(3) $9-k<0 \qquad \therefore k>9$

08 답 $k\le25$

이차방정식 $x^2-10x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-5)^2-1\times k=25-k$

주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나려면 $D\ge0$이어야 하므로

$25-k\ge0 \qquad \therefore k\le25$

09 답 $-2,\ -1$

$x^2+x+1=-2x-1$에서 $x^2+3x+2=0$

$(x+1)(x+2)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=-2$

10 답 4

$x^2-2x+5=6x-11$에서 $x^2-8x+16=0$

$(x-4)^2=0 \qquad \therefore x=4$

11 답 $-3,\ 2$

$-2x^2-x+10=x-2$에서 $-2x^2-2x+12=0$

$x^2+x-6=0,\ (x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

12 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

이차방정식 $2x^2-3x-1=x+2$, 즉 $2x^2-4x-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2\times(-3)=10>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

13 답 한 점에서 만난다. (접한다.)

이차방정식 $x^2-4x-2=2x-11$, 즉 $x^2-6x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times9=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.)

14 답 만나지 않는다.

이차방정식 $x^2-5x-1=-4x-3$, 즉 $x^2-x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times2=-7<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

15 답 (1) $k>-6$ (2) $k=-6$ (3) $k<-6$

이차방정식 $x^2+5x-2=x+k$, 즉 $x^2+4x-k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\times(-k-2)=k+6$

(1) $k+6>0 \qquad \therefore k>-6$

(2) $k+6=0 \qquad \therefore k=-6$

(3) $k+6<0 \qquad \therefore k<-6$

16 답 $k\ge\frac{14}{3}$

이차방정식 $3x^2-x+5=x+k$, 즉 $3x^2-2x+5-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-3\times(5-k)=3k-14$

주어진 이차함수의 그래프와 직선이 만나려면 $D\ge0$이어야 하므로

$3k-14\ge0 \qquad \therefore k\ge\frac{14}{3}$

17 답 (1) $y=2(x-3)^2+5$ (2) 최솟값: 5, x의 값: 3

(1) $y=2x^2-12x+23=2(x^2-6x+9)-18+23$

$=2(x-3)^2+5$

(2) 최솟값은 5이고, 그때의 x의 값은 3이다.

18 답 (1) $y=-(x+1)^2+7$ (2) 최댓값: 7, x의 값: -1

(1) $y=-x^2-2x+6=-(x^2+2x+1)+1+6$

$=-(x+1)^2+7$

(2) 최댓값은 7이고, 그때의 x의 값은 -1이다.

19 답 최솟값: -21, 최댓값: 없다.

$y=x^2+8x-5=(x^2+8x+16)-16-5$

$=(x+4)^2-21$

따라서 $x=-4$일 때 최솟값은 -21이고, 최댓값은 없다.

20 답 최댓값: $\frac{3}{2}$, 최솟값: 없다.

$y=-\frac{1}{2}x^2-x+1=-\frac{1}{2}(x^2+2x+1)+\frac{1}{2}+1$

$=-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{3}{2}$

따라서 $x=-1$일 때 최댓값은 $\frac{3}{2}$이고, 최솟값은 없다.

21 답 11

$y=x^2-6x+k-1=(x^2-6x+9)-9+k-1$

$=(x-3)^2+k-10$

이때 이 함수의 최솟값이 1이므로

$k-10=1$ $\therefore k=11$

22 답 2

$y=-\frac{1}{3}x^2-2x+3k=-\frac{1}{3}(x^2+6x+9)+3+3k$

$=-\frac{1}{3}(x+3)^2+3k+3$

이때 이 함수의 최댓값이 9이므로

$3k+3=9$ $\therefore k=2$

23 답 -1

이차함수 $y=-x^2+ax+b$가 $x=3$에서 최댓값 2를 가지므로

$y=-(x-3)^2+2=-x^2+6x-7$

따라서 $a=6$, $b=-7$이므로

$a+b=6+(-7)=-1$

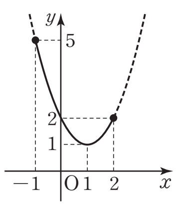
24 답 1, 2, 11, 2, 6, 11, 2

25 답 최댓값: 5, 최솟값: 1

$f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

이므로 $-1\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $f(-1)=5$, $f(1)=1$, $f(2)=2$이므로 $f(x)$의 최댓값은 5, 최솟값은 1이다.

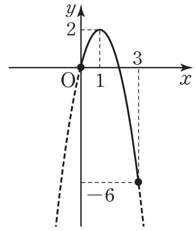


26 답 최댓값: 2, 최솟값: -6

$f(x)=-2x^2+4x=-2(x-1)^2+2$

이므로 $0\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $f(0)=0$, $f(1)=2$, $f(3)=-6$이므로 $f(x)$의 최댓값은 2, 최솟값은 -6이다.

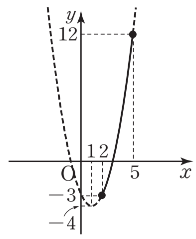


27 답 최댓값: 12, 최솟값: -3

$f(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$

이므로 $2\le x\le 5$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $f(2)=-3$, $f(5)=12$이므로 $f(x)$의 최댓값은 12, 최솟값은 -3이다.

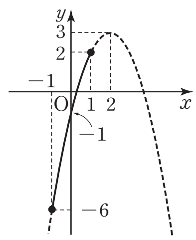


28 답 최댓값: 2, 최솟값: -6

$f(x)=-x^2+4x-1=-(x-2)^2+3$

이므로 $-1\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $f(-1)=-6$, $f(1)=2$이므로 $f(x)$의 최댓값은 2, 최솟값은 -6이다.



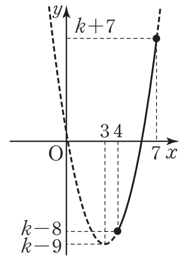
29 답 1

$f(x)=x^2-6x+k=(x-3)^2+k-9$

이므로 $4\le x\le 7$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=7$에서 최댓값 $k+7$을 가지므로

$k+7=8$ $\therefore k=1$



30 답 13

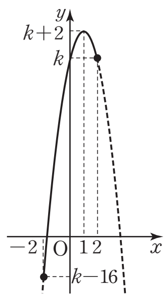
$f(x)=-2x^2+4x+k$

$=-2(x-1)^2+k+2$

이므로 $-2\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=-2$에서 최솟값 $k-16$을 가지므로

$k-16=-3$ $\therefore k=13$



유형 완성하기 p. 131~144

01 답 ①

이차함수 $y=-x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 1, 3이므로 1, 3은 이차방정식 $-x^2+ax+b=0$의 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$1+3=a$, $1\times3=-b$ $\therefore a=4, b=-3$

$\therefore ab=4\times(-3)=-12$

01-1 답 4

이차함수 $y=-x^2+6ax-2b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 2, 4이므로 2, 4는 이차방정식 $-x^2+6ax-2b=0$의 두 근이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$2+4=6a,\ 2\times4=2b \qquad \therefore a=1,\ b=4$
$\therefore ab=1\times4=4$

02 답 ②

이차방정식 $x^2-6x+3=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=3$
이때 두 점 사이의 거리는 $|\alpha-\beta|$이므로
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=6^2-4\times3=24$
$\therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$
따라서 두 점 사이의 거리는 $2\sqrt{6}$이다.

02-1 답 $\sqrt{5}$

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$
이때 두 점 사이의 거리는 $|\alpha-\beta|$이므로
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=3^2-4\times1=5$
$\therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{5}$
따라서 두 점 사이의 거리는 $\sqrt{5}$이다.

03 답 ⑤

이차방정식 $x^2-ax+a-1=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=a-1$ ……㉠
이때 두 점 A, B 사이의 거리는 $\overline{AB}=3$이므로 $|\alpha-\beta|=3$
양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=9 \qquad \therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9$ ……㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2-4(a-1)=9$
$a^2-4a-5=0,\ (a+1)(a-5)=0$
$\therefore a=5\ (\because a>0)$

03-1 답 11

이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면
두 점 A, B 사이의 거리는 $\overline{AB}=4$이므로 $\beta-\alpha=4$ ……㉠
또 $\overline{AB}$의 중점의 좌표가 $(-3,\ 0)$이므로
$\frac{\alpha+\beta}{2}=-3 \qquad \therefore \alpha+\beta=-6$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=-5,\ \beta=-1$
즉 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근이 -5, -1이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$-5+(-1)=-p,\ -5\times(-1)=q$
따라서 $p=6,\ q=5$이므로 $p+q=6+5=11$

04 답 2

이차함수 $y=x^2+2(m+1)x+m^2+3$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+2(m+1)x+m^2+3=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(m+1)^2-(m^2+3)>0,\ 2m-2>0$
$2m>2 \qquad \therefore m>1$
따라서 정수 m의 최솟값은 2이다.

04-1 답 7

이차함수 $y=x^2+2ax+a^2+a-8$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+2ax+a^2+a-8=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-(a^2+a-8)>0$
$-a+8>0 \qquad \therefore a<8$
따라서 정수 a의 최댓값은 7이다.

05 답 ②

① 이차방정식 $-2x^2+x-1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=1^2-4\times(-2)\times(-1)=-7<0$
② 이차방정식 $-x^2+2x-1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1^2-(-1)\times(-1)=0$
③ 이차방정식 $x^2-8x+17=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-4)^2-17=-1<0$
④ 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-3)^2-4\times1\times2=1>0$
⑤ 이차방정식 $2x^2-7x+5=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-7)^2-4\times2\times5=9>0$
따라서 x축과 접하는 것은 ②이다.

05-1 답 ①

① 이차방정식 $x^2-16x+64=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-8)^2-64=0$
② 이차방정식 $x^2-4x-7=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-7)=11>0$
③ 이차방정식 $2x^2+5x+4=0$의 판별식을 D라 하면
$D=5^2-4\times2\times4=-7<0$
④ 이차방정식 $4x^2-2x-1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-4\times(-1)=5>0$
⑤ 이차방정식 $-x^2-1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=0^2-4\times(-1)\times(-1)=-4<0$
따라서 x축과 한 점에서 만나는 것은 ①이다.

06 답 -1

이차함수 $y=-3x^2+2kx-\frac{1}{3}$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 이차방정식 $-3x^2+2kx-\frac{1}{3}=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$\frac{D_1}{4}=k^2-(-3)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=0,\ k^2-1=0$
$(k+1)(k-1)=0 \qquad \therefore k=-1$ 또는 $k=1$ ……㉠
이차함수 $y=x^2+2kx+k^2-3k$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2+2kx+k^2-3k=0$의 판별식을 D_2라 하면
$\frac{D_2}{4}=k^2-(k^2-3k)<0,\ 3k<0 \qquad \therefore k<0$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $k=-1$

06-1 답 3

이차함수 $y=x^2+6x+k^2$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+6x+k^2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=3^2-k^2=0$, $k^2-9=0$

$(k+3)(k-3)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=3$ ……㉠ ……❶

이차함수 $y=x^2+2(k-1)x+k^2+3$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+k^2+3=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=(k-1)^2-(k^2+3)<0$

$-2k-2<0$ $\quad\therefore k>-1$ ……㉡ ……❷

㉠, ㉡에서 $k=3$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 이차함수 $y=x^2+6x+k^2$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나도록 하는 k의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ 이차함수 $y=x^2+2(k-1)x+k^2+3$의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20%

07 답 11

이차함수 $y=x^2-2ax-b^2+20$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2-2ax-b^2+20=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-(-b^2+20)<0$ $\quad\therefore a^2+b^2<20$ ……㉠

이때 a, b는 자연수이므로 ㉠을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 1)$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 11이다.

07-1 답 4

이차함수 $y=x^2+2ax-b^2+9$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2+2ax-b^2+9=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-(-b^2+9)<0$ $\quad\therefore a^2+b^2<9$ ……㉠

이때 a, b는 자연수이므로 ㉠을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$

따라서 $a+b$의 최댓값은 4이다.

08 답 ③

이차함수 $y=x^2+2ax+b$의 그래프가 점 $(-2,\ 4)$를 지나므로

$4=4-4a+b$ $\quad\therefore b=4a$ ……㉠

또 이차함수 $y=x^2+2ax+4a$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2+2ax+4a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-4a=0$, $a(a-4)=0$

$\therefore a=4$ $(\because a\neq0)$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=16$

$\therefore ab=4\times16=64$

08-1 답 ②

이차함수 $y=-x^2+ax-b$의 그래프가 점 $(1, -9)$를 지나므로

$-9=-1+a-b$ $\quad\therefore b=a+8$ ……㉠

또 이차함수 $y=-x^2+ax-b$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $-x^2+ax-b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\times(-1)\times(-b)=0$ $\quad\therefore a^2=4b$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2=4(a+8)$, $a^2-4a-32=0$

$(a+4)(a-8)=0$ $\quad\therefore a=8$ $(\because a>0)$

$a=8$을 ㉠에 대입하면 $b=16$

$\therefore a+b=8+16=24$

09 답 1

이차함수 $y=x^2-2(a+k)x+k^2-2k-b$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2-2(a+k)x+k^2-2k-b=0$의 판별식을 D라 하면 $\dfrac{D}{4}=\{-(a+k)\}^2-(k^2-2k-b)=0$

$a^2+2ak+k^2-k^2+2k+b=0$

$\therefore 2(a+1)k+a^2+b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a+1=0$, $a^2+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-1$

$\therefore ab=-1\times(-1)=1$

Lecture 항등식의 성질

(1) $ax+b=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=0$, $b=0$

(2) $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=0$, $b=0$, $c=0$

09-1 답 2

이차함수 $y=x^2+2(a-k)x+k^2-2k+b$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2+2(a-k)x+k^2-2k+b=0$의 판별식을 D라 하면 $\dfrac{D}{4}=(a-k)^2-(k^2-2k+b)=0$

$a^2-2ak+k^2-k^2+2k-b=0$

$\therefore -2(a-1)k+a^2-b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a-1=0$, $a^2-b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

$\therefore a+b=1+1=2$

10 답 ①

이차함수 $y=x^2-2kx+k$의 그래프와 직선 $y=2x-2$가 접하므로 이차방정식 $x^2-2kx+k=2x-2$, 즉 $x^2-2(k+1)x+k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k+2)=0$

$\therefore k^2+k-1=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은 -1이다.

10-1 답 ③

이차함수 $y=x^2-2kx+k^2+2k$의 그래프와 직선 $y=2x+a$가 접하므로 이차방정식 $x^2-2kx+k^2+2k=2x+a$, 즉 $x^2-2(k+1)x+k^2+2k-a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k^2+2k-a)=0$

$a+1=0$ $\quad\therefore a=-1$

11 답 ④

이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프와 직선 $y=x-k$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2-3x+2=x-k$, 즉

$x^2-4x+k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(k+2)>0$

$-k+2>0 \qquad \therefore k<2$

11-1 답 ①

이차함수 $y=3x^2-2x+1$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $3x^2-2x+1=x+k$, 즉 $3x^2-3x-k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times3\times(-k+1)>0$

$12k-3>0 \qquad \therefore k>\frac{1}{4}$

12 답 0

이차함수 $y=x^2-2x+k^2+2$의 그래프와 직선 $y=2kx-1$이 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2-2x+k^2+2=2kx-1$, 즉 $x^2-2(k+1)x+k^2+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k^2+3)<0$ ······❶

$2k-2<0 \qquad \therefore k<1$ ······❷

따라서 정수 k의 최댓값은 0이다. ······❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 이차함수의 그래프와 직선이 만나지 않도록 하는 조건을 구할 수 있다.	40%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

12-1 답 ⑤

이차함수 $y=x^2+2ax+a$의 그래프와 직선 $y=ax-\frac{1}{4}a^2-\frac{3}{2}$이 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2+2ax+a=ax-\frac{1}{4}a^2-\frac{3}{2}$, 즉 $x^2+ax+\frac{1}{4}a^2+a+\frac{3}{2}=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\left(\frac{1}{4}a^2+a+\frac{3}{2}\right)<0$

$-4a-6<0 \qquad \therefore a>-\frac{3}{2}$

따라서 정수 a의 최솟값은 -1이다.

13 답 2

이차함수 $y=x^2+2ax+a^2$의 그래프와 직선 $y=2x+3$이 적어도 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+2ax+a^2=2x+3$, 즉 $x^2+2(a-1)x+a^2-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a^2-3)\geq0$

$-2a+4\geq0 \qquad \therefore a\leq2$

따라서 실수 a의 최댓값은 2이다.

13-1 답 ③

이차함수 $y=\frac{1}{4}x^2-kx+k^2$의 그래프와 직선 $y=-x$가 적어도 한 점에서 만나므로 이차방정식 $\frac{1}{4}x^2-kx+k^2=-x$, 즉 $\frac{1}{4}x^2+(1-k)x+k^2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(1-k)^2-4\times\frac{1}{4}\times k^2\geq0$

$1-2k\geq0 \qquad \therefore k\leq\frac{1}{2}$

따라서 실수 k의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다.

14 답 ③

이차함수 $y=x^2-2ax+a^2+2$의 그래프와 직선 $y=2x-k$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+2=2x-k$, 즉 $x^2-2(a+1)x+a^2+2+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-(a^2+2+k)>0$

$2a-1-k>0 \qquad \therefore k<2a-1$

(i) $a=2$일 때, $k<3$

자연수 k의 값은 1, 2이므로 $f(2)=2$

(ii) $a=3$일 때, $k<5$

자연수 k의 값은 1, 2, 3, 4이므로 $f(3)=4$

(i), (ii)에서 $f(2)+f(3)=2+4=6$

14-1 답 ④

이차함수 $y=x^2+2ax+a^2+1$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+2ax+a^2+1=x+k$, 즉 $x^2+(2a-1)x+a^2+1-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2a-1)^2-4(a^2+1-k)>0$

$-4a-3+4k>0,\ 4k>4a+3 \qquad \therefore k>\frac{4a+3}{4}$

(i) $a=1$일 때, $k>\frac{7}{4}$

5 이하의 자연수 k의 값은 2, 3, 4, 5이므로 $f(1)=4$

(ii) $a=2$일 때, $k>\frac{11}{4}$

5 이하의 자연수 k의 값은 3, 4, 5이므로 $f(2)=3$

(iii) $a=3$일 때, $k>\frac{15}{4}$

5 이하의 자연수 k의 값은 4, 5이므로 $f(3)=2$

(i)~(iii)에서 $f(1)+f(2)+f(3)=4+3+2=9$

15 답 1

이차함수 $y=x^2+k^2+1$의 그래프와 직선 $y=2x+1$이 접하므로 이차방정식 $x^2+k^2+1=2x+1$, 즉 $x^2-2x+k^2=0$의 판별식을 D_1이라 하면 $\frac{D_1}{4}=(-1)^2-k^2=0,\ k^2-1=0$

$(k+1)(k-1)=0 \qquad \therefore k=-1$ 또는 $k=1$ ······㉠

또 직선 $y=2x+1$이 이차함수 $y=x^2-x+2k+3$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있으면 이차함수의 그래프와 직선이 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2-x+2k+3=2x+1$, 즉 $x^2-3x+2k+2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-3)^2-4(2k+2)<0$

$1-8k<0 \qquad \therefore k>\frac{1}{8}$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $k=1$

15-1 답 ①

이차함수 $y=x^2+8x+a^2+a+9$의 그래프와 직선 $y=-2x+a$가 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+8x+a^2+a+9=-2x+a$, 즉 $x^2+10x+a^2+9=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=5^2-(a^2+9)=0,\ a^2-16=0$

$(a+4)(a-4)=0 \quad \therefore a=-4$ 또는 $a=4$ ……㉠

또 이차함수 $y=x^2-2x+3$의 그래프와 직선 $y=-2x+a$가 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2-2x+3=-2x+a$, 즉 $x^2+3-a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=0^2-4(3-a)<0 \quad \therefore a<3$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=-4$

16 답 $\frac{21}{4}$

직선 $y=ax+b$가 직선 $y=3x+2$에 평행하므로 $a=3$

즉 직선 $y=3x+b$가 이차함수 $y=x^2+4x+2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2+4x+2=3x+b$, 즉 $x^2+x+2-b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4(2-b)=0,\ 4b-7=0 \quad \therefore b=\frac{7}{4}$

$\therefore ab=3\times\frac{7}{4}=\frac{21}{4}$

> **참고** 두 직선 $y=ax+b$, $y=a'x+b'$이 평행하면
> $a=a'$, $b\neq b'$

16-1 답 ④

직선 $y=ax+b$가 직선 $y=x+4$에 평행하므로 $a=1$

즉 직선 $y=x+b$가 이차함수 $y=x^2+3x+3$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2+3x+3=x+b$, 즉 $x^2+2x+3-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(3-b)=0,\ b-2=0 \quad \therefore b=2$

$\therefore a^2+b^2=1^2+2^2=5$

17 답 ①

구하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하면 이 직선이 점 $(1,\ 4)$를 지나므로 $4=m+n \quad \therefore n=-m+4$

즉 직선 $y=mx-m+4$가 이차함수 $y=-x^2-4x+1$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-x^2-4x+1=mx-m+4$, 즉

$x^2+(m+4)x-m+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(m+4)^2-4(-m+3)=0$

$m^2+8m+16+4m-12=0$

$\therefore m^2+12m+4=0$ ……㉠

이차방정식 ㉠의 두 실근을 α, β라 하면 α, β는 두 직선의 기울기이므로 두 직선의 기울기의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=4$

17-1 답 ④

구하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하면 이 직선이 점 $(-3,\ 1)$을 지나므로 $1=-3m+n \quad \therefore n=3m+1$

즉 직선 $y=mx+3m+1$이 이차함수 $y=-x^2+2x+5$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-x^2+2x+5=mx+3m+1$, 즉

$x^2+(m-2)x+3m-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(m-2)^2-4(3m-4)=0$

$m^2-4m+4-12m+16=0$

$\therefore m^2-16m+20=0$ ……㉠

이차방정식 ㉠의 두 실근을 α, β라 하면 α, β는 두 직선의 기울기이므로 두 직선의 기울기의 합은 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=16$

18 답 13

직선 $y=ax+b$가 이차함수 $y=-x^2+3$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-x^2+3=ax+b$, 즉 $x^2+ax+b-3=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=a^2-4(b-3)=0$

$a^2-4b+12=0 \quad \therefore a^2-4b=-12$ ……㉠

또 직선 $y=ax+b$가 이차함수 $y=-x^2-2x+1$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-x^2-2x+1=ax+b$, 즉

$x^2+(a+2)x+b-1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(a+2)^2-4(b-1)=0$

$a^2+4a+4-4b+4=0 \quad \therefore a^2+4a-4b=-8$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $-12+4a=-8 \quad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $1-4b=-12 \quad \therefore b=\frac{13}{4}$

$\therefore 4ab=4\times1\times\frac{13}{4}=13$

18-1 답 10

직선 $y=2x+k$가 이차함수 $y=x^2-2x+1$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-2x+1=2x+k$, 즉 $x^2-4x-k+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-2)^2-(-k+1)=0$

$k+3=0 \quad \therefore k=-3$ ……❶

또 직선 $y=2x+k=2x-3$이 이차함수 $y=x^2-6x+m$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-6x+m=2x-3$, 즉

$x^2-8x+m+3=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-4)^2-(m+3)=0$

$13-m=0 \quad \therefore m=13$ ……❷

$\therefore k+m=-3+13=10$ ……❸

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ m의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $k+m$의 값을 구할 수 있다.	20%

19 답 ⑤

이차함수 $y=2x^2+mx+2$의 그래프와 직선 $y=x+n$의 두 교점의 x좌표가 -1, 4이므로 -1, 4는 이차방정식

$2x^2+mx+2=x+n$, 즉 $2x^2+(m-1)x+2-n=0$의 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+4=-\frac{m-1}{2},\ -1\times4=\frac{2-n}{2}$

$m-1=-6,\ 2-n=-8 \quad \therefore m=-5,\ n=10$

$\therefore m+n=-5+10=5$

19-1 답 ③

이차함수 $y=3x^2-7x+a$의 그래프와 직선 $y=bx+14$의 두 교점의 x좌표가 -2, 3이므로 -2, 3은 이차방정식

$3x^2-7x+a=bx+14$, 즉 $3x^2-(b+7)x+a-14=0$의 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+3=\frac{b+7}{3}$, $-2\times3=\frac{a-14}{3}$

$b+7=3$, $a-14=-18$ $\quad\therefore a=-4$, $b=-4$

$\therefore ab=-4\times(-4)=16$

20 답 $a=-2$, $b=3$

이차함수 $y=-x^2+b$의 그래프와 직선 $y=ax+1$의 한 교점의 x좌표가 $1+\sqrt{3}$이므로 $1+\sqrt{3}$은 이차방정식 $-x^2+b=ax+1$, 즉 $x^2+ax+1-b=0$의 한 근이다.

이때 이 이차방정식의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $1+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{3}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=-a$, $(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=1-b$

$\therefore a=-2$, $b=3$

Lecture 이차방정식의 켤레근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 a, b, c가 유리수일 때, $p+q\sqrt{m}$이 근이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다. (단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)

20-1 답 -8

이차함수 $y=x^2-3x+4$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 한 교점의 x좌표가 $1-\sqrt{5}$이므로 $1-\sqrt{5}$는 이차방정식 $x^2-3x+4=mx+n$, 즉 $x^2-(m+3)x+4-n=0$의 한 근이다.

이때 이 이차방정식의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $1-\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{5}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})=m+3$, $(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})=4-n$

따라서 $m=-1$, $n=8$이므로 $mn=-1\times8=-8$

21 답 4

이차함수 $y=x^2-5x+5$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만나므로 두 점 P, Q의 x좌표는 이차방정식

$x^2-5x+5=x+k$, 즉 $x^2-6x+5-k=0$ ······㉠

의 두 근과 같다.

이때 점 P의 x좌표가 2이므로 ㉠에서

$4-12+5-k=0$ $\quad\therefore k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하면 $x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 점 Q의 x좌표는 4이다.

21-1 답 ③

이차방정식 $x^2+2x-k=\frac{x}{2}+1$, 즉 $x^2+\frac{3}{2}x-k-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=-k-1$

이때 $|\alpha-\beta|=\frac{5}{2}$이므로 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서

$\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-4(-k-1)$

$\frac{25}{4}=\frac{9}{4}+4k+4$ $\quad\therefore k=0$

22 답 8

이차함수 $y=ax^2+bx+4$가 $x=-1$에서 최솟값 2를 가지므로

$y=a(x+1)^2+2=ax^2+2ax+a+2$

따라서 $b=2a$, $4=a+2$이므로 $a=2$, $b=4$

$\therefore ab=2\times4=8$

22-1 답 9

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 $x=2$에서 최솟값 1을 가지므로

$f(x)=a(x-2)^2+1=ax^2-4ax+4a+1$

$\therefore b=-4a$, $c=4a+1$

이때 $a+b+c=3$이므로 $a+(-4a)+(4a+1)=3$

$a+1=3$ $\quad\therefore a=2$

따라서 $f(x)=2x^2-8x+9$이므로

$f(4)=32-32+9=9$

23 답 ①

$y=2x^2-8x+1=2(x-2)^2-7$은 $x=2$에서 최솟값 -7을 가지므로 $a=-7$

$y=-\frac{1}{4}x^2-x=-\frac{1}{4}(x+2)^2+1$은 $x=-2$에서 최댓값 1을 가지므로 $b=1$

$\therefore a-b=-7-1=-8$

23-1 답 ⑤

$y=x^2+4x+7=(x+2)^2+3$은 $x=-2$에서 최솟값 3을 가지므로 $a=3$

$y=-3x^2-6x-4=-3(x+1)^2-1$은 $x=-1$에서 최댓값 -1을 가지므로 $b=-1$

$\therefore a+b=3+(-1)=2$

24 답 ③

$f(x)=-2x^2+8x+a=-2(x-2)^2+a+8$

즉 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $a+8$을 가지므로

$b=2$, $a+8=3$ $\quad\therefore a=-5$, $b=2$

$\therefore a+b=-5+2=-3$

24-1 답 ①

$f(x)=x^2-6x+k=(x-3)^2+k-9$

즉 $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값 $k-9$를 가지므로

$a=3$, $k-9=-6$ $\quad\therefore a=3$, $k=3$

$\therefore a+k=3+3=6$

25 답 6

$y=-\frac{1}{3}x^2+kx+3$의 그래프가 점 $(6, 3)$을 지나므로

$3=-12+6k+3$, $6k=12$ $\quad\therefore k=2$ ······❶

$\therefore f(x)=-\frac{1}{3}x^2+2x+3=-\frac{1}{3}(x-3)^2+6$

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 6을 갖는다. ······❷

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	60%

25-1 답 12

$f(2)=-2+2k+4=10$이므로

$2k=8$ $\quad\therefore k=4$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x+4=-\frac{1}{2}(x-4)^2+12$

따라서 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 12를 갖는다.

26 답 ④

$f(1)=f(3)$이므로 축의 방정식은 $x=2$

이때 $f(x)$의 최댓값이 -2이므로

$f(x)=a(x-2)^2-2\ (a<0)$

$f(1)=-3$에서 $a-2=-3$ $\quad\therefore a=-1$

$\therefore f(x)=-(x-2)^2-2=-x^2+4x-6$

따라서 $a=-1$, $b=4$, $c=-6$이므로

$a+2b+c=-1+2\times4+(-6)=1$

26-1 답 ④

$f(-1)=f(3)$이므로 축의 방정식은 $x=1$

이때 $f(x)$의 최솟값이 -3이므로

$f(x)=a(x-1)^2-3\ (a>0)$

$f(-1)=5$에서 $4a-3=5$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore f(x)=2(x-1)^2-3=2x^2-4x-1$

따라서 $a=2$, $b=4$, $c=-1$이므로

$a+b+2c=2+4+2\times(-1)=4$

27 답 ①

$$f(x)=x^2+ax-b^2=\left(x^2+ax+\frac{a^2}{4}\right)-\frac{a^2}{4}-b^2$$

$$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-b^2$$

(가)에서 주어진 이차함수는 $x=-1$에서 최솟값을 가지므로

$-\frac{a}{2}=-1$ $\quad\therefore a=2$ ······㉠

또 (나)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-4x-10$이 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+ax-b^2=-4x-10$, 즉 $x^2+(a+4)x-b^2+10=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a+4)^2-4(-b^2+10)=0$

$\therefore a^2+8a+4b^2-24=0$ ······㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4+16+4b^2-24=0$, $b^2-1=0$ $\quad\therefore b=-1\ (\because b<0)$

$\therefore 2a+b=2\times2+(-1)=3$

27-1 답 -2

(가)에서 축의 방정식은 $x=2$

이때 (나)에서 $f(x)$의 최댓값이 10이므로

$f(x)=-(x-2)^2+10=-x^2+4x+6$

따라서 $a=4$, $b=6$이므로

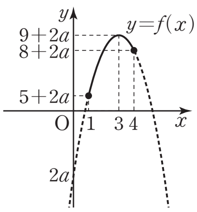
$a-b=4-6=-2$

28 답 ③

$f(x)=-x^2+6x+2a$

$\quad=-(x-3)^2+9+2a$

이므로 $1\le x\le4$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $x=1$에서 최솟값 $5+2a$를 가지므로

$5+2a=1$ $\quad\therefore a=-2$

따라서 $f(x)$의 최댓값은

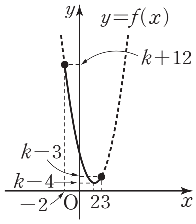
$9+2a=9+2\times(-2)=5$

28-1 답 ⑤

$f(x)=x^2-4x+k$

$\quad=(x-2)^2+k-4$

이므로 $-2\le x\le3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=-2$에서 최댓값 $k+12$를 가지므로 $k+12=17$ $\quad\therefore k=5$

29 답 ⑤

$y=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$이므로 꼭짓점의 x좌표 1이 $2\le x\le5$에 포함되지 않는다.

따라서 $x=5$에서 최댓값 $M=13$, $x=2$에서 최솟값 $m=-2$를 가지므로 $M+m=13+(-2)=11$

29-1 답 ②

$y=-x^2+4x+7=-(x-2)^2+11$이므로 꼭짓점의 x좌표 2가 $0\le x\le3$에 포함된다.

이때 $f(0)=7$, $f(2)=11$, $f(3)=10$이므로 최댓값은 11, 최솟값은 7이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 차는

$11-7=4$

30 답 ①

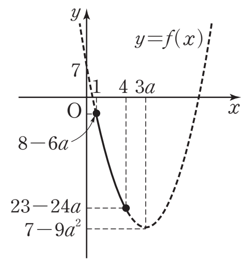
$f(x)=x^2-6ax+7$

$\quad=(x-3a)^2+7-9a^2$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(3a,\ 7-9a^2)$이다.

이때 $a>\frac{4}{3}$이므로 $3a>4$

즉 $1\le x\le4$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



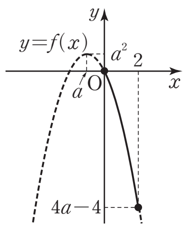
따라서 $f(x)$의 최댓값은 $8-6a$이므로

$8-6a=-4$ $\quad\therefore a=2$

30-1 답 ⑤

$f(x)=-x^2+2ax=-(x-a)^2+a^2$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(a,\ a^2)$이다.

이때 $a<0$이므로 $0\le x\le2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 최솟값은 $4a-4$이므로

$4a-4=-8$ $\quad\therefore a=-1$

31 답 ③

$y=ax^2-2ax+b=a(x-1)^2-a+b$

$a<0$이고 꼭짓점의 x좌표 1이 $-2\le x\le2$에 포함되므로 $x=1$에서 최댓값 $-a+b$, $x=-2$에서 최솟값 $8a+b$를 갖는다.

즉 $-a+b=5$, $8a+b=-4$이므로 $a=-1$, $b=4$

$\therefore a+b=-1+4=3$

Lecture

$\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a<0)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(m,\ n)$일 때, m이 $\alpha\le x\le\beta$에 포함되면 최댓값은 $f(m)$이고 최솟값은 다음과 같다.

(1) $m-\alpha\le\beta-m$이면 최솟값은 $f(\beta)$

(2) $m-\alpha>\beta-m$이면 최솟값은 $f(\alpha)$

α와 β 중 m에서 멀리 떨어져 있는 값에 대한 함숫값

31-1 답 2

$y=ax^2-4ax+b=a(x-2)^2-4a+b$

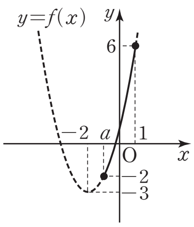
$a>0$이고 꼭짓점의 x좌표 2가 $-1\le x\le 3$에 포함되므로 $x=2$에서 최솟값 $-4a+b$, $x=-1$에서 최댓값 $5a+b$를 갖는다.

즉 $-4a+b=-7$, $5a+b=11$이므로 $a=2$, $b=1$

$\therefore ab=2\times 1=2$

32 답 -1

$f(x)=x^2+4x+1=(x+2)^2-3$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(-2)=-3$이므로 최솟값이 -2이려면 $-2<a<1$이어야 한다.

$x=a$에서 최솟값 -2를 가지므로

$a^2+4a+1=-2$, $a^2+4a+3=0$

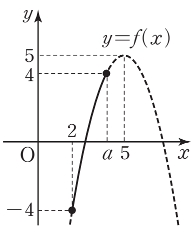
$(a+1)(a+3)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because -2<a<1$)

32-1 답 ⑤

$f(x)=-x^2+10x-20=-(x-5)^2+5$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(5)=5$이므로 최댓값이 4이려면 $2<a<5$이어야 한다.

$x=a$에서 최댓값 4를 가지므로

$-a^2+10a-20=4$, $a^2-10a+24=0$

$(a-4)(a-6)=0$

$\therefore a=4$ ($\because 2<a<5$)

33 답 ①

(가)에서 $f(x)=a(x+1)(x-7)(a\neq 0)$이라 하면

$f(x)=a(x^2-6x-7)=a(x-3)^2-16a$

(i) $a>0$일 때, $4\le x\le 6$에서 $f(x)$는 $x=4$일 때 최솟값 $-15a$를 가지므로 $-15a=14$ $\quad\therefore a=-\dfrac{14}{15}$

그런데 $a>0$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a<0$일 때, $4\le x\le 6$에서 $f(x)$는 $x=6$일 때 최솟값 $-7a$를 가지므로 $-7a=14$ $\quad\therefore a=-2$

(i), (ii)에서 $f(x)=-2(x+1)(x-7)$이므로

$f(-3)=-2\times(-2)\times(-10)=-40$

33-1 답 -9

(가)에서 $f(x)=a(x+3)(x-1)$ $(a\neq 0)$이라 하면

$f(x)=a(x^2+2x-3)=a(x+1)^2-4a$

(i) $a>0$일 때, $2\le x\le 4$에서 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 $5a$를 가지므로 $5a=15$ $\quad\therefore a=3$

(ii) $a<0$일 때, $2\le x\le 4$에서 $f(x)$는 $x=4$일 때 최솟값 $21a$를 가지므로 $21a=15$ $\quad\therefore a=\dfrac{5}{7}$

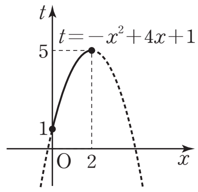
그런데 $a<0$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $f(x)=3(x+3)(x-1)$이므로

$f(0)=3\times 3\times(-1)=-9$

34 답 -8

$-x^2+4x+1=t$로 놓으면



$t=-(x-2)^2+5$

$0\le x\le 2$이므로 오른쪽 그림에서

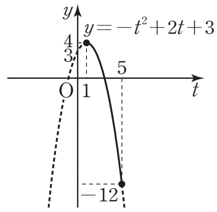
$1\le t\le 5$

이때 주어진 함수는

$y=-t^2+2t+3$

$\quad=-(t-1)^2+4$ $(1\le t\le 5)$

따라서 $y=-t^2+2t+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



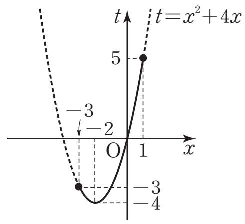
$t=1$에서 최댓값 $M=4$,

$t=5$에서 최솟값 $m=-12$

$\therefore M+m=4+(-12)=-8$

34-1 답 ⑤

$x^2+4x=t$로 놓으면



$t=(x+2)^2-4$

$-3\le x\le 1$이므로 오른쪽 그림에서

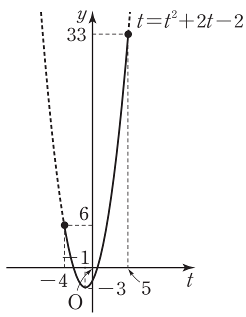
$-4\le t\le 5$

이때 주어진 함수는

$y=t^2+2t-2$

$\quad=(t+1)^2-3$ $(-4\le t\le 5)$

따라서 $y=t^2+2t-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$t=5$에서 최댓값 M은 $M=33$

$t=-1$에서 최솟값 m은 $m=-3$

$\therefore M-m=33-(-3)=36$

35 답 ②

$x^2+2x+3=t$로 놓으면 $t=(x+1)^2+2$이므로 $t\ge 2$

이때 주어진 함수는

$y=2t^2-8(t-3)+k-12=2t^2-8t+k+12$

$\quad=2(t-2)^2+k+4$ $(t\ge 2)$

따라서 $t=2$에서 최솟값 $k+4$를 가지므로

$k+4=-4$ $\quad\therefore k=-8$

35-1 답 12

$x^2-2x+3=t$로 놓으면 $t=(x-1)^2+2$이므로 $t\ge 2$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t+k-7=(t-1)^2+k-8$ $(t\ge 2)$

따라서 $t=2$에서 최솟값 $k-7$을 가지므로

$k-7=5$ $\quad\therefore k=12$

36 답 ⑤

$x^2-2x=t$로 놓으면 $t=(x-1)^2-1$이므로 $t\ge -1$

이때 주어진 함수는

$y=(t-2)(t+6)-2=t^2+4t-14$

$\quad=(t+2)^2-18$ $(t\ge -1)$

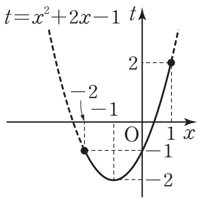
즉 $t=-1$에서 최솟값 -17을 가지므로

$x^2-2x=-1$, $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$ $\quad\therefore x=1$
따라서 $x=1$에서 최솟값 -17을 가지므로 $a=1, b=-17$
$\therefore a+b=1+(-17)=-16$

36-1 답 9

$x^2+2x-1=t$로 놓으면 $t=(x+1)^2-2$
$-2\le x\le 1$이므로 오른쪽 그림에서
$-2\le t\le 2$



이때 주어진 함수는
$y=t^2-2t+2=(t-1)^2+1\ (-2\le t\le 2)$
즉 $t=-2$에서 최댓값 10을 가지므로
$x^2+2x-1=-2$, $x^2+2x+1=0$
$(x+1)^2=0$ $\quad\therefore x=-1$
따라서 $x=-1$에서 최댓값 10을 가지므로 $a=-1, M=10$
$\therefore a+M=-1+10=9$

37 답 ①

$2x^2+y^2-8x+6y+14=2(x-2)^2+(y+3)^2-3$
이때 x, y가 실수이므로 $(x-2)^2\ge 0$, $(y+3)^2\ge 0$
$\therefore 2x^2+y^2-8x+6y+14\ge -3$
따라서 $x=2, y=-3$에서 주어진 식은 최솟값 -3을 갖는다.

37-1 답 ④

$-2x^2-y^2+16x-4y-20=-2(x-4)^2-(y+2)^2+16$
이때 x, y가 실수이므로 $(x-4)^2\ge 0$, $(y+2)^2\ge 0$
$\therefore -2x^2-y^2+16x-4y-20\le 16$
따라서 $x=4, y=-2$에서 주어진 식은 최댓값 16을 갖는다.

38 답 0

$-x^2-y^2-6x+4y-12=-(x+3)^2-(y-2)^2+1$
이때 x, y가 실수이므로 $(x+3)^2\ge 0$, $(y-2)^2\ge 0$
$\therefore -x^2-y^2-6x+4y-12\le 1$
따라서 $x=-3, y=2$에서 주어진 식은 최댓값 1을 가지므로
$\alpha=-3, \beta=2, \gamma=1$
$\therefore \alpha+\beta+\gamma=-3+2+1=0$

38-1 답 -10

$x^2+y^2+4x+6y+8=(x+2)^2+(y+3)^2-5$
이때 x, y가 실수이므로 $(x+2)^2\ge 0$, $(y+3)^2\ge 0$
$\therefore x^2+y^2+4x+6y+8\ge -5$
따라서 $x=-2, y=-3$에서 주어진 식은 최솟값 -5를 가지므로
$\alpha=-2, \beta=-3, m=-5$
$\therefore \alpha+\beta+m=-2+(-3)+(-5)=-10$

39 답 ④

$-x^2-2y^2-2z^2+6x-4y-8z-12$
$=-(x-3)^2-2(y+1)^2-2(z+2)^2+7$
이때 x, y, z가 실수이므로
$(x-3)^2\ge 0$, $(y+1)^2\ge 0$, $(z+2)^2\ge 0$
$\therefore -x^2-2y^2-2z^2+6x-4y-8z-12\le 7$
따라서 $x=3, y=-1, z=-2$에서 주어진 식은 최댓값 7을 가지므로
$a=3, b=-1, c=-2, d=7$
$\therefore a+b+c+d=3+(-1)+(-2)+7=7$

39-1 답 ⑤

$x^2+3y^2+4z^2-2x+6y-24z+35$
$=(x-1)^2+3(y+1)^2+4(z-3)^2-5$
이때 x, y, z가 실수이므로
$(x-1)^2\ge 0$, $(y+1)^2\ge 0$, $(z-3)^2\ge 0$
$\therefore x^2+3y^2+4z^2-2x+6y-24z+35\ge -5$
따라서 $x=1, y=-1, z=3$에서 주어진 식은 최솟값 -5를 가지므로 $a=1, b=-1, c=3, d=-5$
$\therefore a-b+c-d=1-(-1)+3-(-5)=10$

40 답 최댓값: $\frac{1}{6}$, 최솟값: 0

$3x+2y-2=0$에서 $y=-\frac{3}{2}x+1$
$\therefore xy=x\left(-\frac{3}{2}x+1\right)=-\frac{3}{2}x^2+x=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{6}$
이때 $x\ge 0, y\ge 0$이므로 $y=-\frac{3}{2}x+1$에서
$-\frac{3}{2}x+1\ge 0$, $x\le\frac{2}{3}$ $\quad\therefore 0\le x\le\frac{2}{3}$
따라서 $x=\frac{1}{3}$에서 최댓값 $\frac{1}{6}$, $x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}$에서 최솟값 0을 갖는다.

40-1 답 최댓값: 9, 최솟값: -18

$x+y-3=0$에서 $y=3-x$
$\therefore x^2-2y^2=x^2-2(3-x)^2=-x^2+12x-18=-(x-6)^2+18$
이때 $x\ge 0, y\ge 0$이므로 $y=3-x$에서
$3-x\ge 0$, $x\le 3$ $\quad\therefore 0\le x\le 3$
따라서 $x=3$에서 최댓값 9, $x=0$에서 최솟값 -18을 갖는다.

41 답 5

점 P가 직선 $x+2y-5=0$ 위에 있으므로
$a+2b-5=0$ $\quad\therefore a=5-2b$ ······❶
$\therefore a^2+b^2=(5-2b)^2+b^2=5b^2-20b+25$
$=5(b-2)^2+5$ ······❷
따라서 $b=2$에서 최솟값 5를 갖는다. ······❸

채점 기준	비율
❶ a를 b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❷ a^2+b^2을 b에 대한 이차식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ a^2+b^2의 최솟값을 구할 수 있다.	40%

41-1 답 8

점 P가 직선 $x+y-2=0$ 위에 있으므로
$a+b-2=0$ $\quad\therefore a=-b+2$
$\therefore a^2-2b^2=(-b+2)^2-2b^2=-b^2-4b+4=-(b+2)^2+8$
따라서 $b=-2$에서 최댓값 8을 갖는다.

42 답 $-\frac{13}{4}$

$2x^2-y+1=0$에서 $2x^2=y-1$
$\therefore 2x^2+y^2-4y=(y-1)+y^2-4y=y^2-3y-1$
$=\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$
이때 x가 실수이므로 $2x^2=y-1\ge 0$ $\quad\therefore y\ge 1$
따라서 $y=\frac{3}{2}$에서 최솟값 $-\frac{13}{4}$을 갖는다.

42-1 답 ③

$2x-y^2-4=0$에서 $y^2=2x-4$

$\therefore x^2+y^2-x+1=x^2+(2x-4)-x+1=x^2+x-3$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$

이때 y가 실수이므로 $y^2=2x-4\geq 0$ $\quad\therefore x\geq 2$

따라서 $x=2$에서 최솟값 3을 갖는다.

유형 완성하기 p. 145

43 답 -3

$y=-x^2+4kx-k^2+6k=-(x-2k)^2+3k^2+6k$이므로

$x=2k$에서 최댓값 $3k^2+6k$를 갖는다.

$\therefore M=3k^2+6k=3(k+1)^2-3$

따라서 M은 $k=-1$에서 최솟값 -3을 갖는다.

44 답 -1

$y=x^2-2kx-k^2-4k-3=(x-k)^2-2k^2-4k-3$이므로

$x=k$에서 최솟값 $-2k^2-4k-3$을 갖는다.

$\therefore m=-2k^2-4k-3=-2(k+1)^2-1$

따라서 m은 $k=-1$에서 최댓값 -1을 갖는다.

45 답 ④

$y=x^2+2ax+4a+1=(x+a)^2-a^2+4a+1$이므로

$x=-a$에서 최솟값 $-a^2+4a+1$을 갖는다.

$\therefore f(a)=-a^2+4a+1=-(a-2)^2+5$

이때 꼭짓점의 a좌표 2가 $-1\leq a\leq 1$에 포함되지 않으므로 $a=1$에서 최댓값 4, $a=-1$에서 최솟값 -4를 갖는다.

따라서 $f(a)$의 최댓값과 최솟값의 차는

$4-(-4)=8$

46 답 ⑤

이차방정식 $-x^2+9=0$에서 $x^2-9=0$

$(x+3)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

즉 이차함수 $y=-x^2+9$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 -3, 3이다.

점 $C(a,\ 0)$ $(0<a<3)$이라 하면 점 $D(a,\ -a^2+9)$이므로

$\overline{BC}=2a$, $\overline{CD}=-a^2+9$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(-a^2+2a+9)=-2a^2+4a+18=-2(a-1)^2+20$

이때 $0<a<3$이므로 $a=1$일 때 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 20이다.

47 답 3초 후

$h(t)=-5t^2+20t+25=-5(t-2)^2+45$

즉 $t=2$일 때 최댓값은 45이므로 공이 최고 높이에 도달하는 것은 공을 쏘아 올린 지 2초 후이다.

공이 지면에 떨어지는 것은 $h(t)=0$일 때이므로

$-5t^2+20t+25=0$에서 $t^2-4t-5=0$

$(t+1)(t-5)=0$ $\quad\therefore t=-1$ 또는 $t=5$

그런데 $t>0$이므로 공이 지면에 떨어지는 것은 공을 쏘아 올린 지 5초 후이다.

따라서 이 공은 최고 높이에 도달한 지 $5-2=3$(초) 후에 지면에 떨어진다.

48 답 90만 원

초콜릿 한 개의 가격이 $(500+2x)$원일 때 하루 판매량은 $(3500-10x)$개이므로 하루 순이익을 $f(x)$원이라 하면

$f(x)=\frac{50}{100}(500+2x)(3500-10x)$

$=\frac{1}{2}(-20x^2+2000x+1750000)$

$=-10x^2+1000x+875000$

$=-10(x-50)^2+900000$

따라서 하루 순이익은 $x=50$, 즉 100원 올렸을 때 최대이고, 그때의 최댓값은 90만 원이다.

학교 시험 대비 문제 p. 146~149

01 답 $\frac{5}{4}$

꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ -1)$이므로

$y=a(x+2)^2-1=ax^2+4ax+4a-1$ $(a\neq 0)$

이때 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=-2$이고 $\overline{PQ}=4$이므로 두 점 P, Q의 x좌표는 -4, 0이다.

즉 -4, 0은 이차방정식 $ax^2+4ax+4a-1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-4\times 0=\frac{4a-1}{a}$, $4a-1=0$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 주어진 이차함수는 $y=\frac{1}{4}x^2+x$이므로 $b=1$, $c=0$

$\therefore a+b+c=\frac{1}{4}+1+0=\frac{5}{4}$

02 답 ⑤

이차함수 $y=x^2+2(a+k)x+k^2+6k+b$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2+2(a+k)x+k^2+6k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+k)^2-(k^2+6k+b)=0$, $a^2+2ak-6k-b=0$

$\therefore 2(a-3)k+a^2-b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a-3=0$, $a^2-b=0$ $\quad\therefore a=3$, $b=9$

$\therefore a+b=3+9=12$

03 답 ③

이차함수 $y=-x^2+2x+k-5$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $-x^2+2x+k-5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(-1)\times(k-5)<0$, $k-4<0$ $\quad\therefore k<4$

따라서 자연수 k의 값은 1, 2, 3이므로 그 합은

$1+2+3=6$

04 답 ①

이차함수 $y=2x^2+3x$의 그래프와 직선 $y=-3x+a$가 접하므로 이차방정식 $2x^2+3x=-3x+a$, 즉 $2x^2+6x-a=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=3^2-2\times(-a)=0$, $9+2a=0$ $\quad\therefore a=-\frac{9}{2}$

05 답 ①

이차함수 $y=2x^2+3x+1$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 만나지 않으므로 이차방정식 $2x^2+3x+1=-x+k$, 즉 $2x^2+4x-k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-2\times(-k+1)<0$, $2k+2<0$ $\quad\therefore k<-1$

06 답 -3

이차함수 $y=x^2+ax+a$의 그래프와 직선 $y=x+1$이 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+ax+a=x+1$, 즉

$x^2+(a-1)x+a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-1)^2-4(a-1)=0$, $a^2-6a+5=0$

$(a-1)(a-5)=0$ $\quad\therefore a=5\ (\because a>3)$

$a=5$를 $x^2+(a-1)x+a-1=0$에 대입하면

$x^2+4x+4=0$, $(x+2)^2=0$ $\quad\therefore x=-2$

$x=-2$를 $y=x+1$에 대입하면 $y=-1$

따라서 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 좌표는

$(-2, -1)$이므로 $m=-2$, $n=-1$

$\therefore m+n=-2+(-1)=-3$

07 답 $-\frac{1}{4}$

직선 $y=ax+b$가 직선 $y=2x+1$에 평행하므로 $a=2$

직선 $y=2x+b$가 이차함수 $y=x^2+3x-2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2+3x-2=2x+b$, 즉 $x^2+x-2-b=0$의 판별식을 D라 하면 $D=1^2-4(-2-b)=0$, $4b+9=0$ $\quad\therefore b=-\frac{9}{4}$

$\therefore a+b=2+\left(-\frac{9}{4}\right)=-\frac{1}{4}$

08 답 29

구하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하면 이 직선이 점 $(2, -1)$을 지나므로 $-1=2m+n$ $\quad\therefore n=-2m-1$

즉 직선 $y=mx-2m-1$이 이차함수 $y=x^2+5x-2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2+5x-2=mx-2m-1$, 즉

$x^2+(5-m)x+2m-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(5-m)^2-4(2m-1)=0$

$\therefore m^2-18m+29=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 ㉠의 두 실근을 α, β라 하면 α, β는 두 직선의 기울기이므로 두 직선의 기울기의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=29$

09 답 -5

이차함수 $y=x^2+3x-2$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 한 교점의 x좌표가 $1+\sqrt{2}$이므로 $1+\sqrt{2}$는 이차방정식 $x^2+3x-2=ax+b$, 즉 $x^2+(3-a)x-b-2=0$의 한 근이다.

이때 이 이차방정식의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $1+\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=a-3$, $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-b-2$

$\therefore a=5$, $b=-1$ $\quad\therefore ab=5\times(-1)=-5$

10 답 ④

이차함수 $y=x^2-2ax$가 $x=2$에서 최솟값 b를 가지므로

$y=(x-2)^2+b=x^2-4x+b+4$

따라서 $2a=4$, $0=b+4$이므로 $a=2$, $b=-4$

$\therefore a-b=2-(-4)=6$

11 답 ③

$f(x)=-2x^2-2x+a=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{1}{2}$

즉 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 최댓값 $a+\frac{1}{2}$을 가지므로

$b=-\frac{1}{2}$, $a+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore a=0$, $b=-\frac{1}{2}$

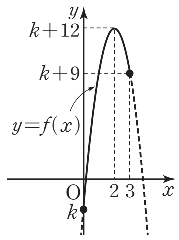
$\therefore a-b=0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

12 답 ⑤

$f(x)=-3x^2+12x+k$

$\quad=-3(x-2)^2+k+12$

이므로 $0\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $x=0$에서 최솟값 k를 가지므로 $k=-2$

따라서 $f(x)$의 최댓값은

$k+12=-2+12=10$

13 답 ②

$y=ax^2-2ax+b=a(x-1)^2-a+b$

$a>0$이고 꼭짓점의 x좌표 1이 $0\le x\le 3$에 포함되므로 $x=3$에서 최댓값 $3a+b$, $x=1$에서 최솟값 $-a+b$를 갖는다.

즉 $3a+b=4$, $-a+b=-8$이므로

$a=3$, $b=-5$ $\quad\therefore a+b=3+(-5)=-2$

14 답 -8

$x^2-4x+5=t$로 놓으면 $t=(x-2)^2+1$이므로 $t\ge 1$

이때 주어진 함수는

$y=-t^2-2(t+1)-3=-(t+1)^2-4\ (t\ge 1)$

따라서 $t=1$에서 최댓값 -8을 갖는다.

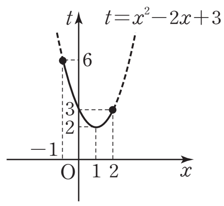
15 답 ④

$x^2-2x+3=t$로 놓으면

$t=(x-1)^2+2$

$-1\le x\le 2$이므로 오른쪽 그림에서

$2\le t\le 6$



이때 주어진 함수는

$y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3\ (2\le t\le 6)$

따라서 $t=6$에서 최댓값 $M=13$, $t=2$에서 최솟값 $m=-3$을 갖는다.

$\therefore M+m=13+(-3)=10$

16 답 -1

$3x^2+y^2-6x+4y+6=3(x-1)^2+(y+2)^2-1$

이때 x, y가 실수이므로 $(x-1)^2\ge 0$, $(y+2)^2\ge 0$

$\therefore 3x^2+y^2-6x+4y+6\ge -1$

따라서 $x=1$, $y=-2$에서 주어진 식은 최솟값 -1을 갖는다.

17 답 ③

$x^2+y^2=4$에서 $y^2=4-x^2$

$\therefore 8x+y^2=8x+(4-x^2)=-(x-4)^2+20$

이때 꼭짓점의 x좌표 4가 $-2\le x\le 2$에 포함되지 않으므로

$x=2$에서 최댓값 $M=16$, $x=-2$에서 최솟값 $m=-16$을 갖는다.

$\therefore M-m=16-(-16)=32$

18 답 3

$y=x^2+4ax+3a^2+2a+2=(x+2a)^2-a^2+2a+2$이므로

$x=-2a$에서 최솟값 $-a^2+2a+2$를 갖는다.

$\therefore f(a)=-a^2+2a+2=-(a-1)^2+3$

따라서 $f(a)$는 $a=1$에서 최댓값 3을 갖는다.

19 답 ③

직사각형의 가로의 길이를 x cm라 하면 세로의 길이는 $(40-x)$ cm이다.

직사각형의 넓이를 y cm^{2}라 하면

$y=x(40-x)=-x^2+40x=-(x-20)^2+400\ (0<x<40)$

따라서 $x=20$일 때 최댓값은 400이므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 400 cm^{2}이다.

20 답 ③

ㄱ. $h(t)=-5t^2+20t+10=-5(t-2)^2+30$

즉 $t=2$일 때 지면으로부터 공의 최대 높이는 30 m이다.

ㄴ. $t=0$일 때 $h(0)=10$, $t=3$일 때 $h(3)=25$이므로 지면으로부터 공의 높이의 최솟값은 10 m이다.

ㄷ. $h(2+\sqrt{6})=-5(2+\sqrt{6}-2)^2+30=0$이므로 $(2+\sqrt{6})$초 후에는 공이 지면과 만난다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21 답 ④

티셔츠 한 장당 이익금을 $100x$원 줄인다고 하면

(이익)$=1000-100x=100(10-x)$ (원)

(판매량)$=36+6x=6(x+6)$ (장)

(하루 판매 이익)$=$(이익)$\times$(판매량)

$=100(10-x)\times 6(x+6)$

$=-600(x^2-4x-60)$

$=-600(x-2)^2+38400$ (원)

따라서 $x=2$일 때 하루 판매 이익이 최대이므로 티셔츠 한 장당 이익금은 $100(10-2)=800$ (원)

서술형 1 답 0

이차함수 $y=x^2+2x-k^2+9$의 그래프와 직선 $y=-2x+1$이 접하므로 이차방정식 $x^2+2x-k^2+9=-2x+1$, 즉

$x^2+4x-k^2+8=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=2^2-(-k^2+8)=0$, $k^2-4=0$

$(k+2)(k-2)=0$ $\quad\therefore k=-2$ 또는 $k=2$ ……㉠ ……❶

이차함수 $y=x^2+2x-k^2+9$의 그래프와 직선 $y=4x-k^2+k$가 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2+2x-k^2+9=4x-k^2+k$, 즉

$x^2-2x-k+9=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-(-k+9)<0$, $k-8<0$

$\therefore k<8$ ……㉡ ……❷

㉠, ㉡에서 $k=-2$ 또는 $k=2$

따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$-2+2=0$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 이차함수 $y=x^2+2x-k^2+9$의 그래프와 직선 $y=-2x+1$이 접하도록 하는 k의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ 이차함수 $y=x^2+2x-k^2+9$의 그래프와 직선 $y=4x-k^2+k$가 만나지 않도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

서술형 2 답 0

$f(x)=2x^2-4x-7=2(x-1)^2-9$ ……❶

이때 꼭짓점의 x좌표 1이 $-2\le x\le 2$에 포함되므로 $x=-2$에서 최댓값 $M=9$, $x=1$에서 최솟값 $m=-9$를 갖는다. ……❷

$\therefore M+m=9+(-9)=0$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 이차함수를 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 꼴로 나타낼 수 있다.	40%
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 20

점 A의 좌표를 $(t, 0)\ (t>0)$으로 놓으면

$B(6-t, 0)$, $D(t, -t^2+6t)$

$\therefore \overline{AB}=(6-t)-t=6-2t$, $\overline{AD}=-t^2+6t$

직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(\overline{AB}+\overline{AD})=2\{(6-2t)+(-t^2+6t)\}$

$=-2t^2+8t+12$

$=-2(t-2)^2+20$ ……❶

이때 $\overline{AB}>0$에서 $6-2t>0$ $\quad\therefore t<3$

따라서 $0<t<3$이므로 $t=2$일 때 최댓값은 20이다. ……❷

채점 기준	비율
❶ 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 이차식으로 나타낼 수 있다.	50%
❷ 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값을 구할 수 있다.	50%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 150~151

01 답 ⑤

이차함수 $y=2x^2+ax-1$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $2x^2+ax-1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=-\frac{a}{2}=-1$ $\quad\therefore a=2$

02 답 ③

직선 $y=-x+a$가 이차함수 $y=x^2+bx+3$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2+bx+3=-x+a$, 즉 $x^2+(b+1)x+3-a=0$의 판별식을 D라 하면 $D=(b+1)^2-4(3-a)=0$

$(b+1)^2-12+4a=0$, $4a=-(b+1)^2+12$

$\therefore a=-\frac{1}{4}(b+1)^2+3$

따라서 a는 $b=-1$에서 최댓값 3을 갖는다.

03 답 ④

$f(x)=x^2-4x+a=(x-2)^2-4+a$

이때 꼭짓점의 x좌표 2가 $0\le x\le 3$에 포함되므로 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 a를 갖는다.

$\therefore a=12$, 즉 $f(x)=(x-2)^2+8$

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 8을 갖는다.

04 답 ②

$f(2x-k)=g(2x-k)$의 두 실근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=3$

$2x-k=t$로 놓으면 $f(t)=g(t)$ $\quad\therefore f(t)-g(t)=0$

즉 $f(t)-g(t)=t^2-2t-8=0$의 두 실근을 t_1, t_2라 하면

$2\alpha-k=t_1$, $2\beta-k=t_2$

근과 계수의 관계에 의하여 $t_1+t_2=2$이므로

$(2\alpha-k)+(2\beta-k)=2$, $2(\alpha+\beta)-2k=2$

$2\times3-2k=2$ $\quad\therefore k=2$

05 답 ②

처음 속도가 10 m/s이고 중력가속도가 10 m/s²인 지구에서의 물체의 높이 h m는

$h=10t-5t^2=-5(t-1)^2+5$

즉 $t=1$일 때 높이의 최댓값 M_1은 $M_1=5$

처음 속도가 10 m/s이고 중력가속도가 6 m/s²인 목성의 한 위성에서의 물체의 높이 h m는

$h=10t-3t^2=-3\left(t-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{25}{3}$

즉 $t=\frac{5}{3}$일 때 높이의 최댓값 M_2는 $M_2=\frac{25}{3}$

$\therefore M_2-M_1=\frac{25}{3}-5=\frac{10}{3}$

06 답 ④

$a=2$일 때, $f(x)=x^2-4x$, $g(x)=\frac{1}{2}x$

직선 $g(x)=\frac{1}{2}x$와 수직인 직선의 기울기는 -2이므로 $y=f(x)$의 그래프와 접하는 직선 l을 $y=-2x+k$라 하자.

직선 l과 이차함수 $f(x)=x^2-4x$의 그래프가 접하므로 이차방정식 $x^2-4x=-2x+k$, 즉 $x^2-2x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-k)=0$, $k+1=0$ $\quad\therefore k=-1$

따라서 직선 l은 $y=-2x-1$이므로 y절편은 -1이다.

07 답 ③

(i) $p=-1$일 때, $f(x)=x^2+4x=(x+2)^2-4$

이때 꼭짓점의 x좌표 -2가 $0\le x\le 2$에 포함되지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 0을 갖는다.

$\therefore g(-1)=0$

(ii) $p=\frac{1}{2}$일 때, $f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$

이때 꼭짓점의 x좌표 1이 $0\le x\le 2$에 포함되므로 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 -1을 갖는다.

$\therefore g\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

(i), (ii)에서 $g(-1)+g\left(\frac{1}{2}\right)=0+(-1)=-1$

08 답 110

인상되는 가격을 x만 원, 전체 판매 금액을 y만 원이라 하면

$y=(100+x)(2400-20x)=-20(x^2-20x-12000)$

$=-20(x-10)^2+242000$

따라서 가격을 10만 원 올렸을 때 전체 판매 금액이 최대이므로 그때의 A의 가격은 110만 원이다.

$\therefore a=110$

09 답 ②

$C(0, 3a+3)$이므로 $\overline{OC}=3a+3$

이차함수 $y=x^2-(a+4)x+3a+3$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 $x^2-(a+4)x+3a+3=0$에서

$x^2-(a+4)x+3(a+1)=0$, $(x-a-1)(x-3)=0$

$\therefore x=a+1$ 또는 $x=3$

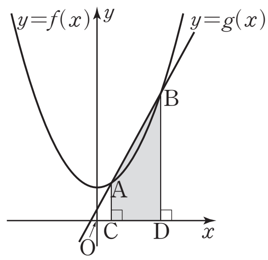
$0<a<2$이므로 $A(a+1, 0)$, $B(3, 0)$

$\therefore \overline{AB}=2-a$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle ABC&=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{OC}\\&=\frac{1}{2}(2-a)(3a+3)\\&=-\frac{3}{2}(a-2)(a+1)\\&=-\frac{3}{2}(a^2-a-2)\\&=-\frac{3}{2}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{8}\end{aligned}$$

따라서 $0<a<2$에서 삼각형 ABC의 넓이는 $a=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{27}{8}$을 갖는다.

10 답 ④



두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2+n^2=2nx+1$에서

$x^2-2nx+n^2-1=0$

$(x-n+1)(x-n-1)=0$

$\therefore x=n-1$ 또는 $x=n+1$

즉 네 점 A, B, C, D의 좌표는

$A(n-1, 2n^2-2n+1)$,

$B(n+1, 2n^2+2n+1)$, $C(n-1, 0)$, $D(n+1, 0)$

사각형 ACDB의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{BD})\times\overline{CD}&=\frac{1}{2}\{(2n^2-2n+1)+(2n^2+2n+1)\}\times2\\&=4n^2+2\end{aligned}$$

이때 사각형 ACDB의 넓이가 66이므로

$4n^2+2=66$, $n^2=16$ $\quad\therefore n=\pm4$

그런데 n은 자연수이므로 $n=4$

07 삼차방정식과 사차방정식

Ⅱ 방정식과 부등식

개념 완성하기 p. 155~156

01 답 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

$x^3-27=0$에서 $(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

02 답 $x=0$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$

$x^3-x^2-6x=0$에서 $x(x^2-x-6)=0$

$x(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$

03 답 $x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x^3+3x^2-x-3=0$에서 $x^2(x+3)-(x+3)=0$

$(x+3)(x^2-1)=0$, $(x+3)(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

04 답 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

$x^4-8x=0$에서 $x(x^3-8)=0$

$x(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

05 답 $x=1$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}$

$f(x)=x^3-3x^2+2$라 하면

$f(1)=1-3+2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-2x-2)$

즉 $(x-1)(x^2-2x-2)=0$이므로

$x=1$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}$

06 답 $x=2$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

$f(x)=x^3-2x^2-3x+6$이라 하면

$f(2)=8-8-6+6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & -3 & 6 \\ & & 2 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2-3)$

즉 $(x-2)(x^2-3)=0$이므로

$x=2$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

07 답 $x=1$(중근) 또는 $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1}{3}$

$f(x)=3x^4-4x^3-2x^2+4x-1$이라 하면

$f(1)=3-4-2+4-1=0$

$f(-1)=3+4-2-4-1=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 3 & -4 & -2 & 4 & -1 \\ & & 3 & -1 & -3 & 1 \\ \hline -1 & 3 & -1 & -3 & 1 & \boxed{0} \\ & & -3 & 4 & -1 & \\ \hline & 3 & -4 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+1)(3x^2-4x+1)$

$\quad=(x-1)(x+1)(3x-1)(x-1)$

$\quad=(x-1)^2(x+1)(3x-1)$

즉 $(x-1)^2(x+1)(3x-1)=0$이므로

$x=1$(중근) 또는 $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1}{3}$

08 답 $x=1$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

$f(x)=x^4+2x^3+2x^2-2x-3$이라 하면

$f(1)=1+2+2-2-3=0$

$f(-1)=1-2+2+2-3=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & 2 & -2 & -3 \\ & & 1 & 3 & 5 & 3 \\ \hline -1 & 1 & 3 & 5 & 3 & \boxed{0} \\ & & -1 & -2 & -3 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+2x+3)$

즉 $(x-1)(x+1)(x^2+2x+3)=0$이므로

$x=1$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

09 답 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$

$x^2-x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+X-6=0$, $(X+3)(X-2)=0$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=2$

(i) $X=-3$일 때, $x^2-x=-3$

$\quad x^2-x+3=0 \qquad \therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$

(ii) $X=2$일 때, $x^2-x=2$

$\quad x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$

10 답 $x=\pm3i$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x^2+1=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+6X-16=0$, $(X+8)(X-2)=0$

$\therefore X=-8$ 또는 $X=2$

(i) $X=-8$일 때, $x^2+1=-8$

$\quad x^2=-9 \qquad \therefore x=\pm3i$

(ii) $X=2$일 때, $x^2+1=2$

$\quad x^2-1=0$, $(x+1)(x-1)=0$

$\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서

$x=\pm3i$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

11 답 $x=-2\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{15}$
$(x+1)(x-2)(x+3)(x+6)+14=0$에서
$\{(x+1)(x+3)\}\{(x-2)(x+6)\}+14=0$
$(x^2+4x+3)(x^2+4x-12)+14=0$
$x^2+4x=X$로 놓으면 위의 방정식은
$(X+3)(X-12)+14=0$, $X^2-9X-22=0$
$(X+2)(X-11)=0$ $\quad\therefore X=-2$ 또는 $X=11$
(i) $X=-2$일 때, $x^2+4x=-2$
$x^2+4x+2=0$ $\quad\therefore x=-2\pm\sqrt{2}$
(ii) $X=11$일 때, $x^2+4x=11$
$x^2+4x-11=0$ $\quad\therefore x=-2\pm\sqrt{15}$
(i), (ii)에서 $x=-2\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{15}$

12 답 $x=-2$(중근) 또는 $x=2$(중근)
$x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은
$X^2-8X+16=0$, $(X-4)^2=0$
$\therefore X=4$(중근)
즉 $x^2=4$이므로 $x=-2$(중근) 또는 $x=2$(중근)

13 답 $x=\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=\pm1$
$x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은
$X^2+2X-3=0$, $(X+3)(X-1)=0$
$\therefore X=-3$ 또는 $X=1$
즉 $x^2=-3$ 또는 $x^2=1$이므로
$x=\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=\pm1$

14 답 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$
$x^4+3x^2+4=0$에서 $x^4+4x^2+4-x^2=0$
$(x^2+2)^2-x^2=0$, $(x^2+x+2)(x^2-x+2)=0$
$x^2+x+2=0$ 또는 $x^2-x+2=0$
$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

15 답 $x=-1\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}$
$x^4-8x^2+4=0$에서 $x^4-4x^2+4-4x^2=0$
$(x^2-2)^2-(2x)^2=0$, $(x^2+2x-2)(x^2-2x-2)=0$
$x^2+2x-2=0$ 또는 $x^2-2x-2=0$
$\therefore x=-1\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}$

16 답 $x=\pm i$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$
$x^4+x^3+2x^2+x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면
$x^2+x+2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$, $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2=0$
$\therefore \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=0$
이때 $x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면 위의 방정식은
$X^2+X=0$, $X(X+1)=0$
$\therefore X=0$ 또는 $X=-1$
(i) $X=0$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=0$
$x^2+1=0$, $x^2=-1$ $\quad\therefore x=\pm i$
(ii) $X=-1$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=-1$
$x^2+x+1=0$ $\quad\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$
(i), (ii)에서 $x=\pm i$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

17 답 $x=-1$(중근) 또는 $x=3\pm2\sqrt{2}$
$x^4-4x^3-10x^2-4x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면
$x^2-4x-10-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$, $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-10=0$
$\therefore \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-12=0$
이때 $x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면 위의 방정식은
$X^2-4X-12=0$, $(X+2)(X-6)=0$
$\therefore X=-2$ 또는 $X=6$
(i) $X=-2$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=-2$
$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$
$\therefore x=-1$(중근)
(ii) $X=6$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=6$
$x^2-6x+1=0$ $\quad\therefore x=3\pm2\sqrt{2}$
(i), (ii)에서 $x=-1$(중근) 또는 $x=3\pm2\sqrt{2}$

18 답 (1) -3 (2) 2 (3) 4

19 답 (1) -4 (2) $-\dfrac{4}{5}$ (3) 2
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=-5$
(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=2^2-2\times4$
$=-4$
(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-\dfrac{4}{5}$
(3) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$
$=\alpha\beta\gamma+(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+1$
$=-5+2+4+1$
$=2$

20 답 $x^3-3x^2-x+3=0$
x^3의 계수가 1이고 세 근이 $-1, 1, 3$인 삼차방정식은
$x^3-(-1+1+3)x^2+\{-1\times1+1\times3+3\times(-1)\}x$
$-(-1)\times1\times3=0$
$\therefore x^3-3x^2-x+3=0$

21 답 $x^3-6x-4=0$
x^3의 계수가 1이고 세 근이 $-2, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$인 삼차방정식은
$x^3-(-2+1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3})x^2$
$+\{-2\times(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\times(-2)\}x$
$-(-2)\times(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=0$
$\therefore x^3-6x-4=0$

22 답 $x^3-5x^2+16x-30=0$

x^3의 계수가 1이고 세 근이 3, $1+3i$, $1-3i$인 삼차방정식은

$$x^3-(3+1+3i+1-3i)x^2+\{3(1+3i)+(1+3i)(1-3i)+(1-3i)\times3\}x-3(1+3i)(1-3i)=0$$

$\therefore x^3-5x^2+16x-30=0$

23 답 10

삼차방정식의 계수가 유리수이고 한 근이 $1+\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.

즉 세 근이 -2, $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\times(-2)=a$

$\therefore a=-5$

$-2(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-b$ $\quad\therefore b=-2$

$\therefore ab=-5\times(-2)=10$

24 답 2

삼차방정식의 계수가 유리수이고 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

즉 세 근이 -1, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-(2+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\times(-1)=-a$

$\therefore a=3$

$-(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=b$ $\quad\therefore b=-1$

$\therefore a+b=3+(-1)=2$

25 답 -10

삼차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $1-2i$이므로 다른 한 근은 $1+2i$이다.

즉 세 근이 -2, $1-2i$, $1+2i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2(1-2i)+(1-2i)(1+2i)+(1+2i)\times(-2)=a$

$\therefore a=1$

$-2(1-2i)(1+2i)=b$ $\quad\therefore b=-10$

$\therefore ab=1\times(-10)=-10$

26 답 10

삼차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $-1+i$이므로 다른 한 근은 $-1-i$이다.

즉 세 근이 3, $-1+i$, $-1-i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3(-1+i)+(-1+i)(-1-i)+(-1-i)\times3=-a$

$\therefore a=4$

$3(-1+i)(-1-i)=b$ $\quad\therefore b=6$

$\therefore a+b=4+6=10$

27 답 (1) 0 (2) -1 (3) 1 (4) 0 (5) -1 (6) -1 (7) 1

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

(1) ω는 $x^2+x+1=0$의 한 근이므로 $\omega^2+\omega+1=0$

(2), (3) $x^2+x+1=0$의 두 근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

(4) $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이므로

$\omega^4+\omega^3+\omega^2=\omega^3\times\omega+\omega^3+\omega^2=\omega^2+\omega+1=0$

(5) $\omega^3=1$이고 $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2+\omega=-1$이므로

$\omega^{11}+\omega^7=(\omega^3)^3\times\omega^2+(\omega^3)^2\times\omega=\omega^2+\omega=-1$

(6) $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2+1=-\omega$이므로

$$\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$$

(7) $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$이므로

$$\frac{1}{1+\omega}+\frac{1}{1+\overline{\omega}}=\frac{1+\overline{\omega}+1+\omega}{(1+\omega)(1+\overline{\omega})}=\frac{2+(\omega+\overline{\omega})}{1+(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}=\frac{2+(-1)}{1+(-1)+1}=1$$

28 답 (1) 0 (2) 1 (3) 1 (4) 0 (5) 1 (6) 1 (7) 1

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

(1) ω는 $x^2-x+1=0$의 한 근이므로 $\omega^2-\omega+1=0$

(2), (3) $x^2-x+1=0$의 두 근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

(4) $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$이므로

$\omega^4-\omega^3+\omega^2=\omega^3\times\omega-\omega^3+\omega^2=\omega^2-\omega+1=0$

(5) $\omega^3=-1$이고 $\omega^2-\omega+1=0$에서 $\omega^2-\omega=-1$이므로

$\omega^{11}+\omega^7=(\omega^3)^3\times\omega^2+(\omega^3)^2\times\omega=-\omega^2+\omega=-(\omega^2-\omega)=1$

(6) $\omega^2-\omega+1=0$에서 $\omega^2+1=\omega$이므로

$$\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{\omega}{\omega}=1$$

(7) $\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$이므로

$$\frac{1}{1-\omega}+\frac{1}{1-\overline{\omega}}=\frac{1-\overline{\omega}+1-\omega}{(1-\omega)(1-\overline{\omega})}=\frac{2-(\omega+\overline{\omega})}{1-(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}=\frac{2-1}{1-1+1}=1$$

유형 완성하기 p. 157~165

01 답 1

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$이라 하면

$f(1)=1-2-5+6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-x-6)$

$\quad=(x-1)(x+2)(x-3)$

즉 $(x-1)(x+2)(x-3)=0$이므로

$x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=-2$이므로

$\alpha+\beta=3+(-2)=1$

01-1 답 $\frac{5}{2}$

$f(x)=2x^3-3x^2-2x+3$이라 하면

$f(1)=2-3-2+3=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -3 & -2 & 3 \\ & & 2 & -1 & -3 \\ \hline & 2 & -1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(2x^2-x-3)$

$\quad=(x-1)(x+1)(2x-3)$

즉 $(x-1)(x+1)(2x-3)=0$이므로

$x=1$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

따라서 가장 큰 근은 $\frac{3}{2}$, 가장 작은 근은 -1이므로 그 차는

$\frac{3}{2}-(-1)=\frac{5}{2}$

02 답 ④

$x^3-9x=0$에서 $x(x^2-9)=0$, $x(x+3)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=3$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=0$, $\gamma=-3$이므로

$\alpha+\beta\gamma=3+0\times(-3)=3$

02-1 답 -4

$x^3-16x=0$에서 $x(x^2-16)=0$, $x(x+4)(x-4)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=-4$ 또는 $x=4$

따라서 $\alpha=4$, $\beta=0$, $\gamma=-4$이므로

$\alpha\beta+\gamma=4\times0+(-4)=-4$

03 답 ②

$f(x)=x^4-5x^2+10x-6$이라 하면

$f(1)=1-5+10-6=0$

$f(-3)=81-45-30-6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & -5 & 10 & -6 \\ & & 1 & 1 & -4 & 6 \\ \hline -3 & 1 & 1 & -4 & 6 & \boxed{0} \\ & & -3 & 6 & -6 & \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+3)(x^2-2x+2)$

즉 $(x-1)(x+3)(x^2-2x+2)=0$이므로

$x=1$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=1\pm i$

따라서 주어진 방정식의 근이 아닌 것은 ②이다.

03-1 답 ②

$f(x)=x^4-3x^3+5x^2-x-10$이라 하면

$f(-1)=1+3+5+1-10=0$

$f(2)=16-24+20-2-10=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -3 & 5 & -1 & -10 \\ & & -1 & 4 & -9 & 10 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 9 & -10 & \boxed{0} \\ & & 2 & -4 & 10 & \\ \hline & 1 & -2 & 5 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2-2x+5)$

즉 $(x+1)(x-2)(x^2-2x+5)=0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm2i$

따라서 주어진 방정식의 근이 아닌 것은 ②이다.

04 답 -9

$x^2+4x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-2X-15=0$, $(X+3)(X-5)=0$

$\therefore$ $X=-3$ 또는 $X=5$

(i) $X=-3$일 때, $x^2+4x=-3$

$x^2+4x+3=0$, $(x+1)(x+3)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=-3$

(ii) $X=5$일 때, $x^2+4x=5$

$x^2+4x-5=0$, $(x+5)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-5$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서 모든 음의 근의 합은

$-1+(-3)+(-5)=-9$

04-1 답 ②

$x^2+x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-8X+12=0$, $(X-2)(X-6)=0$

$\therefore$ $X=2$ 또는 $X=6$

(i) $X=2$일 때, $x^2+x=2$

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=1$

(ii) $X=6$일 때, $x^2+x=6$

$x^2+x-6=0$, $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 가장 큰 근은 2, 가장 작은 근은 -3이므로

$a=2$, $b=-3$

$\therefore$ $a^2+b^2=2^2+(-3)^2=13$

05 답 -6

$x^2+3x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X(X-2)=8$, $X^2-2X-8=0$

$(X+2)(X-4)=0$ $\qquad\therefore$ $X=-2$ 또는 $X=4$ ······ ❶

(i) $X=-2$일 때, $x^2+3x=-2$

$x^2+3x+2=0$, $(x+1)(x+2)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=-2$

(ii) $X=4$일 때, $x^2+3x=4$

$x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-4$ 또는 $x=1$ ······ ❷

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 해의 합은

$-1+(-2)+(-4)+1=-6$ ······ ❸

채점 기준	비율
❶ 공통부분을 한 문자로 치환하여 이차방정식을 풀 수 있다.	30%
❷ 주어진 방정식의 해를 구할 수 있다.	50%
❸ 주어진 방정식의 모든 해의 합을 구할 수 있다.	20%

05-1 답 ④

$x^2+5x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+4)(X+6)=3$, $X^2+10X+21=0$

$(X+3)(X+7)=0$ $\qquad\therefore$ $X=-3$ 또는 $X=-7$

(i) $X=-3$일 때, $x^2+5x=-3$

즉 이차방정식 $x^2+5x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4\times1\times3=13>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 곱은 3이다.

(ii) $X=-7$일 때, $x^2+5x=-7$

즉 이차방정식 $x^2+5x+7=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=5^2-4\times1\times7=-3<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 곱은 3이다.

Lecture 이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식의 판별식을 D라 하면

(1) $D>0$ ➡ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $D=0$ ➡ 중근을 갖는다.

(3) $D<0$ ➡ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

06 답 ⑤

$x(x+1)(x+2)(x+3)-24=0$에서

$\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}-24=0$

$(x^2+3x)(x^2+3x+2)-24=0$

이때 $x^2+3x=X$로 놓으면 위의 방정식은

$X(X+2)-24=0$, $X^2+2X-24=0$

$(X+6)(X-4)=0$ $\quad\therefore X=-6$ 또는 $X=4$

(i) $X=-6$일 때, $x^2+3x=-6$

즉 이차방정식 $x^2+3x+6=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\times1\times6=-15<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 허근의 곱은 6이다.

(ii) $X=4$일 때, $x^2+3x=4$

$x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

즉 두 실근의 곱은 $-4\times1=-4$

(i), (ii)에서 $a=6$, $b=-4$

$\therefore a-b=6-(-4)=10$

06-1 답 $x=-4\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-6$

$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$

$\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+15=0$

$(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15=0$

이때 $x^2+8x=X$로 놓으면 위의 방정식은

$(X+7)(X+15)+15=0$, $X^2+22X+120=0$

$(X+10)(X+12)=0$ $\quad\therefore X=-10$ 또는 $X=-12$

(i) $X=-10$일 때, $x^2+8x=-10$

$x^2+8x+10=0$ $\quad\therefore x=-4\pm\sqrt{6}$

(ii) $X=-12$일 때, $x^2+8x=-12$

$x^2+8x+12=0$, $(x+2)(x+6)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-6$

(i), (ii)에서

$x=-4\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-6$

07 답 $x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

$x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-X-6=0$, $(X+2)(X-3)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=3$

따라서 $x^2=-2$ 또는 $x^2=3$이므로

$x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

07-1 답 ①

$x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-2X-8=0$, $(X+2)(X-4)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=4$

즉 $x^2=-2$ 또는 $x^2=4$이므로

$x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm2$

① 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$2+(-2)+\sqrt{2}i+(-\sqrt{2}i)=0$

② 주어진 방정식의 모든 근의 곱은

$2\times(-2)\times\sqrt{2}i\times(-\sqrt{2}i)=-8$

③ 주어진 방정식의 허근 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$는 켤레복소수이다.

④ 주어진 방정식의 실근은 ±2로 2개, 허근은 $\pm\sqrt{2}i$로 2개를 갖는다.

⑤ 주어진 방정식은 $x^2=X$로 치환하여 풀 수 있다.

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

08 답 5

$x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+5X-36=0$, $(X+9)(X-4)=0$

$\therefore X=-9$ 또는 $X=4$

즉 $x^2=-9$ 또는 $x^2=4$이므로

$x=\pm3i$ 또는 $x=\pm2$

$\therefore \alpha\beta+\gamma\delta=2\times(-2)+3i\times(-3i)=5$

08-1 답 ⑤

$x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-12X-64=0$, $(X+4)(X-16)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=16$

즉 $x^2=-4$ 또는 $x^2=16$이므로

$x=\pm2i$ 또는 $x=\pm4$

$\therefore \gamma\delta-\alpha\beta=2i\times(-2i)-4\times(-4)=20$

09 답 ④

$x^4-6x^2+1=0$에서 $(x^4-2x^2+1)-4x^2=0$

$(x^2-1)^2-(2x)^2=0$, $(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)=0$

$x^2+2x-1=0$ 또는 $x^2-2x-1=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

따라서 주어진 방정식의 양의 근은 $-1+\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$이므로

$\alpha+\beta=(-1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

09-1 답 $-\sqrt{5}$

$x^4-3x^2+1=0$에서 $(x^4-2x^2+1)-x^2=0$

$(x^2-1)^2-x^2=0$, $(x^2+x-1)(x^2-x-1)=0$

$x^2+x-1=0$ 또는 $x^2-x-1=0$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

따라서 주어진 방정식의 음의 근은 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$이므로

$\alpha+\beta=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-\sqrt{5}$

10 답 5

주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-6x+7-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}=0$, $x^2+\frac{1}{x^2}-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+7=0$

$\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$

이때 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면 위의 방정식은

$X^2-6X+5=0$, $(X-1)(X-5)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=5$

(i) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$

$x^2-x+1=0 \quad \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ii) $X=5$일 때, $x+\frac{1}{x}=5$

$x^2-5x+1=0 \quad \therefore x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근의 합은

$\frac{5+\sqrt{21}}{2}+\frac{5-\sqrt{21}}{2}=5$

10-1 답 1

주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+3x-2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$, $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$

$\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$

이때 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면 위의 방정식은

$X^2+3X-4=0$, $(X+4)(X-1)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=1$

(i) $X=-4$일 때, $x+\frac{1}{x}=-4$

$x^2+4x+1=0 \quad \therefore x=-2\pm\sqrt{3}$

(ii) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$

$x^2-x+1=0 \quad \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 허근의 합은

$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$

11 답 ①

주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$2x^2-3x-4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0$, $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x-\frac{1}{x}\right)-4=0$

$\therefore 2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{x}\right)=0$

이때 $x-\frac{1}{x}=X$로 놓으면 위의 방정식은

$2X^2-3X=0$, $X(2X-3)=0$

$\therefore X=0$ 또는 $X=\frac{3}{2}$

(i) $X=0$일 때, $x-\frac{1}{x}=0$

$x^2-1=0$, $(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

(ii) $X=\frac{3}{2}$일 때, $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$

$2x^2-3x-2=0$, $(2x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

따라서 주어진 방정식의 근이 아닌 것은 ①이다.

다른 풀이

$f(x)=2x^4-3x^3-4x^2+3x+2$라 하면

$f(1)=2-3-4+3+2=0$

$f(-1)=2+3-4-3+2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	2	−3	−4	3	2
		2	−1	−5	−2
−1	2	−1	−5	−2	0
		−2	3	2	
	2	−3	−2	0	

$f(x)=(x-1)(x+1)(2x^2-3x-2)$

$\quad\;\, =(x-1)(x+1)(2x+1)(x-2)$

즉 $(x-1)(x+1)(2x+1)(x-2)=0$이므로

$x=1$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

따라서 주어진 방정식의 근이 아닌 것은 ①이다.

11-1 답 ②

주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$, $x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$

$\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$

이때 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면 위의 방정식은

$X^2-4X+3=0$, $(X-1)(X-3)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=3$

(i) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$

즉 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times1=-3<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 허근의 합은

$\gamma+\delta=1$

(ii) $X=3$일 때, $x+\frac{1}{x}=3$

즉 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=(-3)^2-4\times1\times1=5>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은

$\alpha+\beta=3$

(i), (ii)에서 $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=3\times1=3$

12 답 -1

주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+2x+3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$, $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$

∴ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$

이때 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면 위의 방정식은

$X^2+2X+1=0$, $(X+1)^2=0$

∴ $X=-1$

따라서 $x+\frac{1}{x}=-1$의 한 근이 α이므로 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=-1$

∴ $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2=(-1)^2-2=-1$

12-1 답 0

주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+4x+6+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$, $x^2+\frac{1}{x^2}+4\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$

∴ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$

이때 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면 위의 방정식은

$X^2+4X+4=0$, $(X+2)^2=0$

∴ $X=-2$

따라서 $x+\frac{1}{x}=-2$의 한 근이 α이므로 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=-2$

∴ $\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-4=(-2)^2-4=0$

13 답 ②

$f(x)=x^3-(k+1)x^2+(k-2)x+6$이라 하면 한 근이 -1이므로

$f(-1)=-1-(k+1)-(k-2)+6=0$　　∴ $k=3$

$f(x)=x^3-4x^2+x+6$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2-5x+6)$

$\quad=(x+1)(x-2)(x-3)$

즉 $(x+1)(x-2)(x-3)=0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

∴ $k+a+b=3+2+3=8$

13-1 답 5

$f(x)=x^3-kx^2-5x+6$이라 하면 한 근이 3이므로

$f(3)=27-9k-15+6=0$　　∴ $k=2$

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 3 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-3)(x^2+x-2)$

$\quad=(x-3)(x+2)(x-1)$

즉 $(x-3)(x+2)(x-1)=0$이므로

$x=3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$

∴ $\alpha^2+\beta^2=(-2)^2+1^2=5$

14 답 16

$f(x)=x^3+x^2+ax+b$라 하면 두 근이 -1, 2이므로

$f(-1)=-1+1-a+b=0$　　∴ $a-b=0$　　……㉠

$f(2)=8+4+2a+b=0$　　∴ $2a+b=-12$　　……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=-4$

∴ $ab=-4\times(-4)=16$

14-1 답 -24

$f(x)=x^3+ax^2+x+b$라 하면 두 근이 -3, 1이므로

$f(-3)=-27+9a-3+b=0$

∴ $9a+b=30$　　……㉠

$f(1)=1+a+1+b=0$

∴ $a+b=-2$　　……㉡　　……❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-6$　　……❷

∴ $ab=4\times(-6)=-24$　　……❸

채점 기준	비율
❶ 방정식의 두 근을 이용하여 a, b에 대한 연립방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

15 답 1

$f(x)=x^4+ax^3-7x^2+bx+12$라 하면 두 근이 -2, 3이므로

$f(-2)=16-8a-28-2b+12=0$

∴ $4a+b=0$　　……㉠

$f(3)=81+27a-63+3b+12=0$

∴ $9a+b=-10$　　……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=8$　　……❶

$f(x)=x^4-2x^3-7x^2+8x+12$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & -2 & -7 & 8 & 12 \\ & & -2 & 8 & -2 & -12 \\ \hline 3 & 1 & -4 & 1 & 6 & \boxed{0} \\ & & 3 & -3 & -6 & \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+2)(x-3)(x^2-x-2)$

$\quad=(x+2)(x-3)(x+1)(x-2)$

즉 $(x+2)(x-3)(x+1)(x-2)=0$이므로

$x=-2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$　　……❷

따라서 나머지 두 근의 합은

$-1+2=1$　　……❸

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ 주어진 사차방정식의 근을 구할 수 있다.	60%
❸ 나머지 두 근의 합을 구할 수 있다.	20%

15-1 답 ④

$f(x)=x^4+ax^2+b$라 하면 $f(x)$가 $(x-1)(x-\sqrt{2})$로 나누어떨어지므로 $f(1)=0$, $f(\sqrt{2})=0$

$f(1)=0$에서 $1+a+b=0$　　∴ $a+b=-1$　　……㉠

$f(\sqrt{2})=0$에서 $4+2a+b=0$　　∴ $2a+b=-4$　　……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=2$

$f(x)=x^4-3x^2+2$이므로 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-3X+2=0$, $(X-1)(X-2)=0$

∴ $X=1$ 또는 $X=2$

즉 $x^2=1$ 또는 $x^2=2$이므로

$x=\pm1$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

따라서 주어진 방정식의 네 근의 곱은

$1\times(-1)\times\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=2$

16 답 $\frac{7}{2}$

$f(x)=x^3+(a-1)x^2-a$라 하면

$f(1)=1+(a-1)-a=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a-1 & 0 & -a \\ & & 1 & a & a \\ \hline & 1 & a & a & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+ax+a)$

이때 삼차방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2+ax+a=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우

$1+a+a=0 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

(ii) 방정식 $x^2+ax+a=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4a=0,\ a(a-4)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=4$

(i), (ii)에서 $a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=0$ 또는 $a=4$

따라서 a의 값의 합은

$-\frac{1}{2}+0+4=\frac{7}{2}$

16-1 답 13

$f(x)=x^3-(m+1)x+2m-6$이라 하면

$f(2)=8-2m-2+2m-6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & -m-1 & 2m-6 \\ & & 2 & 4 & -2m+6 \\ \hline & 1 & 2 & -m+3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2+2x-m+3)$

이때 삼차방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2+2x-m+3=0$이 $x=2$를 근으로 갖는 경우

$4+4-m+3=0 \qquad \therefore m=11$

(ii) 방정식 $x^2+2x-m+3=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(-m+3)=0 \qquad \therefore m=2$

(i), (ii)에서 m의 값의 합은

$11+2=13$

17 답 ①

$f(x)=2x^3+4x^2+(a+2)x+a$라 하면

$f(-1)=-2+4-(a+2)+a=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 2 & 4 & a+2 & a \\ & & -2 & -2 & -a \\ \hline & 2 & 2 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(2x^2+2x+a)$

이때 삼차방정식 $f(x)=0$의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $2x^2+2x+a=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-2a\ge0 \qquad \therefore a\le\frac{1}{2}$

17-1 답 5

$f(x)=x^3-6x^2+(k+5)x-k$라 하면

$f(1)=1-6+k+5-k=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -6 & k+5 & -k \\ & & 1 & -5 & k \\ \hline & 1 & -5 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-5x+k)$

이때 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2-5x+k=0$이 $x\ne1$인 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4k>0 \qquad \therefore k<\frac{25}{4}$ ……㉠

또 이차방정식 $x^2-5x+k=0$에 $x=1$을 대입했을 때 성립하지 않아야 하므로

$1-5+k\ne0 \qquad \therefore k\ne4$ ……㉡

㉠, ㉡에서 자연수 k의 값은 1, 2, 3, 5, 6이므로 그 개수는 5이다.

18 답 6

$f(x)=2x^3+7x^2+(k+3)x+k-2$라 하면

$f(-1)=-2+7-k-3+k-2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 2 & 7 & k+3 & k-2 \\ & & -2 & -5 & -k+2 \\ \hline & 2 & 5 & k-2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(2x^2+5x+k-2)$

이때 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $2x^2+5x+k-2=0$이 두 개의 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-8(k-2)<0 \qquad \therefore k>\frac{41}{8}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다.

18-1 답 $k<-\frac{17}{8}$

$f(x)=2x^3+x^2-(k+4)x+k+1$이라 하면

$f(1)=2+1-k-4+k+1=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & 1 & -k-4 & k+1 \\ & & 2 & 3 & -k-1 \\ \hline & 2 & 3 & -k-1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(2x^2+3x-k-1)$

이때 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $2x^2+3x-k-1=0$이 두 개의 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-8(-k-1)<0 \qquad \therefore k<-\frac{17}{8}$

19 답 ⑤

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \alpha\beta\gamma=1$

$\therefore\ (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$

$=1+(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma$

$=1+1+2+1=5$

19-1 답 $\frac{7}{4}$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\frac{1}{2},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ (\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2(\alpha\beta\times\beta\gamma+\beta\gamma\times\gamma\alpha+\gamma\alpha\times\alpha\beta)$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{2}=\frac{7}{4}$

20 답 1

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=m,\ \alpha\beta\gamma=-4$

$\therefore\ (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(-2-\gamma)(-2-\alpha)(-2-\beta)$

$=-8-4(\alpha+\beta+\gamma)-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=-8-4\times(-2)-2m+4$

$=-2m+4$

즉 $-2m+4=2$이므로 $m=1$

20-1 답 ⑤

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-m,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1,\ \alpha\beta\gamma=-2$

$\therefore\ (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=1+m-1+2$

$=m+2$

즉 $m+2=4$이므로 $m=2$

21 답 ⑤

주어진 삼차방정식의 세 근을 $\alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha\ (\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+2\alpha+3\alpha=3$

$6\alpha=3\qquad\therefore\ \alpha=\frac{1}{2}$

즉 세 근이 $\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{1}{2}\times1+1\times\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{a}{4},\ \frac{1}{2}\times1\times\frac{3}{2}=-\frac{b}{4}$

$\therefore\ a=11,\ b=-3$

$\therefore\ a-b=11-(-3)=14$

21-1 답 21

주어진 삼차방정식의 세 실근을 $\alpha,\ 4\alpha,\ 9\alpha\ (\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\times4\alpha\times9\alpha=36$

$36\alpha^3=36,\ \alpha^3=1\qquad\therefore\ \alpha=1$

즉 세 근이 1, 4, 9이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+4+9=a,\ 1\times4+4\times9+9\times1=7b$

$\therefore\ a=14,\ b=7$

$\therefore\ a+b=14+7=21$

22 답 $6x^3-4x^2+x+1=0$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4,\ \alpha\beta\gamma=-6$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-4}{-6}=\frac{2}{3}$

$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\times\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-1}{-6}=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{1}{6}$

따라서 구하는 삼차방정식은 $6\left(x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}\right)=0$

$\therefore\ 6x^3-4x^2+x+1=0$

22-1 답 $2x^3+3x^2+2x+1=0$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,\ \alpha\beta\gamma=-2$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{3}{2}$

$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\times\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-2}{-2}=1$

$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{1}{2}$

따라서 구하는 삼차방정식은 $2\left(x^3+\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{2}\right)=0$

$\therefore\ 2x^3+3x^2+2x+1=0$

23 답 ④

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2,\ \alpha\beta\gamma=-1$

$(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=(\alpha+\beta+\gamma)+3=1+3=4$

$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)+3$

$=-2+2\times1+3$

$=3$

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$

$=-1+(-2)+1+1$

$=-1$

따라서 구하는 삼차방정식은 $x^3-4x^2+3x+1=0$이므로

$a=-4,\ b=3,\ c=1$

$\therefore\ a-b+c=-4-3+1=-6$

23-1 답 20

삼차방정식 $x^3+10x^2-8x-16=0$의 세 근이 $2\alpha,\ 2\beta,\ 2\gamma$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+2\beta+2\gamma=-10\qquad\therefore\ \alpha+\beta+\gamma=-5$

$2\alpha\times2\beta+2\beta\times2\gamma+2\gamma\times2\alpha=-8\qquad\therefore\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$

$2\alpha\times2\beta\times2\gamma=16\qquad\therefore\ \alpha\beta\gamma=2$

따라서 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3+5x^2-2x-2=0$이므로 $a=5,\ b=-2,\ c=-2$

$\therefore\ abc=5\times(-2)\times(-2)=20$

24 답 -25

$f(1)=f(4)=f(7)=3$에서

$f(1)-3=0,\ f(4)-3=0,\ f(7)-3=0$

즉 삼차방정식 $f(x)-3=0$의 세 근이 $1,\ 4,\ 7$이다.

이때 $1,\ 4,\ 7$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(1+4+7)x^2+(1\times4+4\times7+7\times1)x-1\times4\times7=0$

$\therefore\ x^3-12x^2+39x-28=0$

즉 $f(x)-3=x^3-12x^2+39x-28$이므로

$f(x)=x^3-12x^2+39x-25$

$\therefore\ f(0)=-25$

24-1 답 11

$f(1)=f(3)=f(5)=4$에서

$f(1)-4=0,\ f(3)-4=0,\ f(5)-4=0$

즉 삼차방정식 $f(x)-4=0$의 세 근이 $1,\ 3,\ 5$이다.

이때 $1,\ 3,\ 5$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(1+3+5)x^2+(1\times3+3\times5+5\times1)x-1\times3\times5=0$

$\therefore\ x^3-9x^2+23x-15=0$

즉 $f(x)-4=x^3-9x^2+23x-15$이므로

$f(x)=x^3-9x^2+23x-11$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 11이다.

25 답 ②

주어진 삼차방정식의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $-1+\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $-1-\sqrt{2}$이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})+\alpha=-1$에서

$-2+\alpha=-1 \qquad \therefore\ \alpha=1$

$(-1+\sqrt{2})(-1-\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})\alpha+\alpha(-1+\sqrt{2})=a$에서

$-1-2\alpha=a \qquad \therefore\ a=-3$

$(-1+\sqrt{2})(-1-\sqrt{2})\alpha=-b$에서 $-\alpha=-b \qquad \therefore\ b=1$

$\therefore\ ab=-3\times1=-3$

25-1 답 -3

주어진 삼차방정식의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $-1-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $-1+\sqrt{3}$이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1-\sqrt{3})(-1+\sqrt{3})\alpha=-2$에서

$-2\alpha=-2 \qquad \therefore\ \alpha=1$

$(-1-\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})+\alpha=-a$에서

$-2+\alpha=-a \qquad \therefore\ a=1$

$(-1-\sqrt{3})(-1+\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})\alpha+\alpha(-1-\sqrt{3})=b$에서

$-2-2\alpha=b \qquad \therefore\ b=-4$

$\therefore\ a+b=1+(-4)=-3$

26 답 ①

주어진 삼차방정식의 계수가 모두 실수이고 한 근이 $3+i$이므로 다른 한 근은 $3-i$이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+i)(3-i)+(3-i)\alpha+\alpha(3+i)=-2$

$10+6\alpha=-2 \qquad \therefore\ \alpha=-2$

따라서 나머지 두 근 중 실근은 -2이다.

26-1 답 ⑤

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 실수)라 하면 삼차방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 계수가 모두 실수이고 한 근이 $1-\sqrt{3}i$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{3}i$이다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)=-a$에서 $3=-a \qquad \therefore\ a=-3$

$1\times(1-\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)\times1=b$에서

$b=6$

$1\times(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)=-c$에서 $4=-c \qquad \therefore\ c=-4$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+6x-4$이므로

$f(2)=8-12+12-4=4$

27 답 33

주어진 사차방정식의 계수가 모두 실수이고 두 근이 $2-i,\ 4i$이므로 다른 두 근은 $2+i,\ -4i$이다.

이때 $4i,\ -4i,\ 2-i,\ 2+i$를 네 근으로 하고 x^4의 계수가 1인 사차방정식은

$(x-4i)(x+4i)\{x-(2-i)\}\{x-(2+i)\}=0$

$(x^2+16)(x^2-4x+5)=0$

$\therefore\ x^4-4x^3+21x^2-64x+80=0$

따라서 $a=-4,\ b=21,\ c=-64,\ d=80$이므로

$a+b+c+d=-4+21+(-64)+80=33$

27-1 답 120

주어진 사차방정식의 계수가 모두 실수이고 두 근이 $1+2i,\ i$이므로 다른 두 근은 $1-2i,\ -i$이다. ······ ❶

이때 $i,\ -i,\ 1+2i,\ 1-2i$를 네 근으로 하고 x^4의 계수가 1인 사차방정식은

$(x-i)(x+i)\{x-(1+2i)\}\{x-(1-2i)\}=0$

$(x^2+1)(x^2-2x+5)=0$

$\therefore\ x^4-2x^3+6x^2-2x+5=0$

따라서 $a=-2,\ b=6,\ c=-2,\ d=5$이므로 ······ ❷

$abcd=-2\times6\times(-2)\times5=120$ ······ ❸

채점 기준	비율
❶ 다른 두 근을 구할 수 있다.	20%
❷ $a,\ b,\ c,\ d$의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ $abcd$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형+ 완성하기 p. 166

28 답 ⑤

① 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$

② $x^3=1$에서 $x^3-1=0,\ (x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로 $\omega^2+\omega+1=0$

또 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

③ $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2=-\omega-1$

$\omega+\overline{\omega}=-1$에서 $\overline{\omega}=-\omega-1 \qquad \therefore\ \overline{\omega}=\omega^2$

④ $\omega+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{-\omega}{\omega}=-1$

⑤ $(1+\omega)(1+\overline{\omega})=1+(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}=1+(-1)+1=1$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

29 답 11

삼차방정식 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=-1$

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

이때 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 근이므로

$\omega^2-\omega+1=0 \qquad \therefore \omega^2=\omega-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ & \omega^8+2\omega^7+3\omega^6+4\omega^5+5\omega^4+6\omega^3+7\omega^2+8\omega+9\\ &=(\omega^3)^2\times\omega^2+2(\omega^3)^2\times\omega+3(\omega^3)^2+4\omega^3\times\omega^2+5\omega^3\times\omega\\ &\qquad\qquad +6\omega^3+7\omega^2+8\omega+9\\ &=\omega^2+2\omega+3-4\omega^2-5\omega-6+7\omega^2+8\omega+9\\ &=4\omega^2+5\omega+6\\ &=4(\omega-1)+5\omega+6\ (\because \omega^2=\omega-1)\\ &=9\omega+2\end{aligned}$$

따라서 $a=9$, $b=2$이므로

$a+b=9+2=11$

30 답 ①

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{(2\omega+1)\overline{(2\omega+1)}}{(3\omega-1)\overline{(3\omega-1)}}&=\frac{(2\omega+1)(2\overline{\omega}+1)}{(3\omega-1)(3\overline{\omega}-1)}\\ &=\frac{4\omega\overline{\omega}+2(\omega+\overline{\omega})+1}{9\omega\overline{\omega}-3(\omega+\overline{\omega})+1}\\ &=\frac{4-2+1}{9+3+1}\\ &=\frac{3}{13}\end{aligned}$$

31 답 2

직육면체의 부피는 처음 정육면체의 부피의 $\dfrac{5}{2}$배이므로

$(x+2)(x+3)(x-1)=\dfrac{5}{2}x^3$

$x^3+4x^2+x-6=\dfrac{5}{2}x^3$, $\dfrac{3}{2}x^3-4x^2-x+6=0$

$\therefore 3x^3-8x^2-2x+12=0$

$f(x)=3x^3-8x^2-2x+12$라 하면

$f(2)=24-32-4+12=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	3	-8	-2	12
		6	-4	-12
	3	-2	-6	0

$f(x)=(x-2)(3x^2-2x-6)$

즉 $(x-2)(3x^2-2x-6)=0$이므로

$x=2$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{19}}{3}$

이때 x는 자연수이므로 $x=2$

32 답 $\dfrac{1}{2}$

$A=4x^3$, $B=18x^2$이므로

$3A+B=6$에서 $3\times4x^3+18x^2=6$

$12x^3+18x^2-6=0 \qquad \therefore 2x^3+3x^2-1=0$

$f(x)=2x^3+3x^2-1$이라 하면

$f(-1)=-2+3-1=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	2	3	0	-1
		-2	-1	1
	2	1	-1	0

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+1)(2x^2+x-1)\\ &=(x+1)^2(2x-1)\end{aligned}$$

즉 $(x+1)^2(2x-1)=0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

이때 $x>0$이므로 $x=\dfrac{1}{2}$

참고 한 모서리의 길이가 x인 정육면체 4개의 부피는 $A=4x^3$
4개의 정육면체의 총 면의 개수는 $4\times6=24$이고 그 중 3개의 면이 맞닿아 있으므로 구하는 겉넓이는
$B=24x^2-(3\times2)x^2=18x^2$

33 답 6 cm

A 그릇에 담겨 있던 물의 부피는 $\pi\times3^2\times12=108\pi\ (\mathrm{cm}^3)$

B 그릇의 밑면의 반지름의 길이를 x cm라 하면 B 그릇에 담긴 물의 양이 $108\pi\ \mathrm{cm}^3$이므로

$\pi x^2(x-3)=108\pi \qquad \therefore x^3-3x^2-108=0$

$f(x)=x^3-3x^2-108$로 놓으면

$f(6)=216-108-108=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

6	1	-3	0	-108
		6	18	108
	1	3	18	0

$f(x)=(x-6)(x^2+3x+18)$

즉 $(x-6)(x^2+3x+18)=0$이므로

$x=6$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{7}i}{2}$

이때 $x>3$이므로 $x=6$

따라서 B 그릇의 밑면의 반지름의 길이는 6 cm이다.

학교 시험 대비 문제

p. 167~170

01 답 4

$f(x)=x^3-4x^2+6x-4$라 하면

$f(2)=8-16+12-4=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	1	-4	6	-4
		2	-4	4
	1	-2	2	0

$f(x)=(x-2)(x^2-2x+2)$

즉 $(x-2)(x^2-2x+2)=0$이므로 $x=2$ 또는 $x=1\pm i$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=1$, $\gamma=1$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=2+1+1=4$

02 답 ③

$f(x)=x^4+2x^3+2x^2-2x-3$이라 하면

$f(1)=1+2+2-2-3=0$

$f(-1)=1-2+2+2-3=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	2	2	-2	-3
		1	3	5	3
-1	1	3	5	3	0
		-1	-2	-3	
	1	2	3	0	

$f(x)=(x+1)(x-1)(x^2+2x+3)$

즉 $(x+1)(x-1)(x^2+2x+3)=0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

따라서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$-1+1=0$

03 답 ③

$x^2-2x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-11X+24=0,\ (X-3)(X-8)=0$

$\therefore\ X=3$ 또는 $X=8$

(i) $X=3$일 때, $x^2-2x=3$

$x^2-2x-3=0,\ (x+1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

(ii) $X=8$일 때, $x^2-2x=8$

$x^2-2x-8=0,\ (x+2)(x-4)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서 양수인 근의 합은

$3+4=7$

04 답 ⑤

$x(x-1)(x-2)(x-3)=8$에서

$\{x(x-3)\}\{(x-1)(x-2)\}=8$

$(x^2-3x)(x^2-3x+2)=8$

$x^2-3x=X$로 놓으면 위의 방정식은

$X(X+2)=8,\ X^2+2X-8=0$

$(X+4)(X-2)=0\qquad\therefore\ X=-4$ 또는 $X=2$

(i) $X=-4$일 때, $x^2-3x=-4\qquad\therefore\ x^2-3x+4=0$

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 3이다.

(ii) $X=2$일 때, $x^2-3x=2\qquad\therefore\ x^2-3x-2=0$

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 3이다.

(i), (ii)에서 주어진 사차방정식의 모든 근의 합은

$3+3=6$

05 답 ③

$x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-17X+16=0,\ (X-1)(X-16)=0$

$\therefore\ X=1$ 또는 $X=16$

즉 $x^2=1$ 또는 $x^2=16$이므로

$x=\pm1$ 또는 $x=\pm4$

$\therefore\ |\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|=|1|+|-1|+|4|+|-4|=10$

06 답 0

$x^4+x^2+1=0$에서 $(x^4+2x^2+1)-x^2=0$

$(x^2+1)^2-x^2=0,\ (x^2+x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore\ x^2+x+1=0$ 또는 $x^2-x+1=0$

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근을 α, β, 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=1,\ \gamma+\delta=1,\ \gamma\delta=1$

$\therefore\ \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\delta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\dfrac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}=\dfrac{-1}{1}+\dfrac{1}{1}=0$

07 답 $-3\pm2\sqrt{2}$

주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+5x-4+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0,\ x^2+\dfrac{1}{x^2}+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-4=0$

$\therefore\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-6=0$

이때 $x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면 위의 방정식은

$X^2+5X-6=0,\ (X+6)(X-1)=0$

$\therefore\ X=-6$ 또는 $X=1$

(i) $X=-6$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=-6$

$x^2+6x+1=0\qquad\therefore\ x=-3\pm2\sqrt{2}$

(ii) $X=1$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=1$

$x^2-x+1=0\qquad\therefore\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 실근은 $-3\pm2\sqrt{2}$이다.

08 답 $\dfrac{5}{2}$

$4x^2-8x+3-\dfrac{8}{x}+\dfrac{4}{x^2}=0$에서

$4\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-8\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+3=0$

$\therefore\ 4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-8\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-5=0$

이때 $x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면 위의 방정식은

$4X^2-8X-5=0,\ (2X+1)(2X-5)=0$

$\therefore\ X=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $X=\dfrac{5}{2}$

(i) $X=-\dfrac{1}{2}$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2}\qquad\therefore\ 2x^2+x+2=0$

이차방정식 $2x^2+x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times2\times2=-15<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=\dfrac{5}{2}$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}\qquad\therefore\ 2x^2-5x+2=0$

이차방정식 $2x^2-5x+2=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=(-5)^2-4\times2\times2=9>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 α는 $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$의 한 실근이므로 $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{5}{2}$

09 답 10

$f(x)=x^3-kx^2-5x+10$이라 하면 한 근이 2이므로

$f(2)=8-4k-10+10=0\qquad\therefore\ k=2$

$f(x)=x^3-2x^2-5x+10$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	1	-2	-5	10
		2	0	-10
	1	0	-5	0

$f(x)=(x-2)(x^2-5)$

즉 $(x-2)(x^2-5)=0$이므로 $x=2$ 또는 $x=\pm\sqrt{5}$
따라서 나머지 두 근은 $-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$이므로
$\alpha^2+\beta^2=(-\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2=10$

10 답 -8
$f(x)=x^3+2x^2+(a-8)x-2a$라 하면
$f(2)=8+8+2a-16-2a=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & a-8 & -2a \\ & & 2 & 8 & 2a \\ \hline & 1 & 4 & a & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2+4x+a)$
이때 삼차방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면
(i) 방정식 $x^2+4x+a=0$이 $x=2$를 근으로 갖는 경우
$4+8+a=0 \qquad \therefore a=-12$
(ii) 방정식 $x^2+4x+a=0$이 중근을 갖는 경우
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=2^2-a=0 \qquad \therefore a=4$
(i), (ii)에서 $a=-12$ 또는 $a=4$
따라서 a의 값의 합은 $-12+4=-8$

11 답 $k>\dfrac{1}{8}$
$f(x)=x^3+(2k-1)x+2k$라 하면
$f(-1)=-1-2k+1+2k=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & 2k-1 & 2k \\ & & -1 & 1 & -2k \\ \hline & 1 & -1 & 2k & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2-x+2k)$
이때 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2-x+2k=0$이 두 개의 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-4\times 2k<0 \qquad \therefore k>\dfrac{1}{8}$

12 답 ③
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-6$, $\alpha\beta\gamma=-2$
$\alpha+\beta+\gamma=1$에서 $\beta+\gamma=1-\alpha$, $\gamma+\alpha=1-\beta$, $\alpha+\beta=1-\gamma$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\gamma}&=\frac{1-\alpha}{\alpha}+\frac{1-\beta}{\beta}+\frac{1-\gamma}{\gamma}\\&=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-3\\&=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}-3\\&=\frac{-6}{-2}-3\\&=0\end{aligned}$$

13 답 1
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=-1$

$$\begin{aligned}\therefore (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)&=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma\\&=1-2+1-(-1)\\&=1\end{aligned}$$

14 답 -3
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=7$, $\alpha\beta\gamma=2$
$(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=(\alpha+\beta+\gamma)+3=3$
$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)$
$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)+3$
$=7+2\times 0+3=10$
$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$
$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$
$=2+7+0+1=10$
따라서 구하는 삼차방정식은 $x^3-3x^2+10x-10=0$이므로
$a=-3$, $b=10$, $c=-10$
$\therefore a+b+c=-3+10+(-10)=-3$

15 답 -43
$f(1)=f(5)=f(9)=2$에서
$f(1)-2=0$, $f(5)-2=0$, $f(9)-2=0$
즉 삼차방정식 $f(x)-2=0$의 세 근이 1, 5, 9이다.
이때 1, 5, 9를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은
$x^3-(1+5+9)x^2+(1\times 5+5\times 9+9\times 1)x-1\times 5\times 9=0$
$\therefore x^3-15x^2+59x-45=0$
즉 $f(x)-2=x^3-15x^2+59x-45$이므로
$f(x)=x^3-15x^2+59x-43$
$\therefore f(0)=-43$

16 답 -35
주어진 삼차방정식의 계수가 모두 실수이고 한 근이 $1+2i$이므로 다른 한 근은 $1-2i$이다.
나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(1+2i)+(1-2i)+\alpha=3$에서 $2+\alpha=3 \qquad \therefore \alpha=1$
$(1+2i)(1-2i)+(1-2i)\alpha+\alpha(1+2i)=a$에서
$5+2\alpha=a \qquad \therefore a=7$
$(1+2i)(1-2i)\alpha=-b$에서 $5\alpha=-b \qquad \therefore b=-5$
$\therefore ab=7\times(-5)=-35$

17 답 $-\dfrac{15}{2}$
주어진 삼차방정식의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $1-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{3}$이다.
나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})\alpha=5$에서 $-2\alpha=5 \qquad \therefore \alpha=-\dfrac{5}{2}$
$(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})+\alpha=a$에서 $2+\alpha=a \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{2}$
$(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})\alpha+\alpha(1-\sqrt{3})=b$에서
$-2+2\alpha=b \qquad \therefore b=-7$
$\therefore a+b=-\dfrac{1}{2}+(-7)=-\dfrac{15}{2}$

18 답 ㄱ, ㄷ

삼차방정식 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=-1$

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

이때 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 근이므로

$\omega^2-\omega+1=0$

ㄱ. 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

ㄴ. $\omega^{1000}=(\omega^3)^{333}\times\omega=-\omega$

ㄷ. $$\begin{aligned}\frac{2}{1-\omega}+\frac{2}{1-\overline{\omega}}&=\frac{2(1-\overline{\omega}+1-\omega)}{(1-\omega)(1-\overline{\omega})}\\&=\frac{4-2(\omega+\overline{\omega})}{1-(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}\\&=\frac{4-2}{1-1+1}\ (\because \text{ㄱ})\\&=2\end{aligned}$$

ㄹ. $$\begin{aligned}&-\omega^{25}+\omega^{24}-\omega^{23}+\cdots+\omega^2-\omega+1\\&=-(\omega^3)^8\times\omega+(\omega^3)^8-(\omega^3)^7\times\omega^2+(\omega^3)^7\times\omega\\&\qquad-\cdots+\omega^2-\omega+1\\&=-\omega+1+\omega^2-\omega+\cdots+\omega^2-\omega+1\\&=(-\omega+1+\omega^2)+\cdots+(-\omega+1+\omega^2)-\omega+1\\&=-\omega+1\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

19 답 -1

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^2+\omega+1=0 \qquad \therefore \omega^2+1=-\omega,\ \omega+1=-\omega^2$

$$\begin{aligned}f(1)&=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1\\f(2)&=\frac{\omega^4+1}{\omega^2}=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1\\f(3)&=\frac{\omega^6+1}{\omega^3}=\frac{1+1}{1}=2\\f(4)&=\frac{\omega^8+1}{\omega^4}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1=f(1)\\f(5)&=\frac{\omega^{10}+1}{\omega^5}=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1=f(2)\\f(6)&=\frac{\omega^{12}+1}{\omega^6}=\frac{1+1}{1}=2=f(3)\\&\ \vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)\\&=\{f(1)+f(2)+f(3)\}\times33+f(1)\\&=33\{-1+(-1)+2\}+(-1)\\&=-1\end{aligned}$$

20 답 ②

$A=5x^3$, $B=22x^2$이므로

$2A+8=B$에서 $2\times5x^3+8=22x^2$

$10x^3-22x^2+8=0$, $5x^3-11x^2+4=0$

$f(x)=5x^3-11x^2+4$라 하면

$f(2)=40-44+4=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc}2&5&-11&0&4\\&&10&-2&-4\\\hline&5&-1&-2&\boxed{0}\end{array}$$

$f(x)=(x-2)(5x^2-x-2)$

즉 $(x-2)(5x^2-x-2)=0$이므로

$x=2$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{41}}{10}$

이때 x는 자연수이므로 $x=2$

21 답 4 m

연료 탱크에서 원기둥 부분의 밑면의 반지름의 길이를 x m라 하면 원기둥 부분의 부피가 $336\pi\ \mathrm{m}^3$이므로

$\pi x^2(x+17)=336\pi \qquad \therefore x^3+17x^2-336=0$

$f(x)=x^3+17x^2-336$이라 하면

$f(4)=64+272-336=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc}4&1&17&0&-336\\&&4&84&336\\\hline&1&21&84&\boxed{0}\end{array}$$

$f(x)=(x-4)(x^2+21x+84)$

즉 $(x-4)(x^2+21x+84)=0$이므로

$x=4$ 또는 $x=\dfrac{-21\pm\sqrt{105}}{2}$

이때 $x>0$이므로 $x=4$

따라서 연료 탱크에서 원기둥 부분의 밑면의 반지름의 길이는 4 m이다.

서술형 1 답 -3

$f(x)=x^4-4x^3+7x^2-8x+4$라 하면

$f(1)=1-4+7-8+4=0$

$f(2)=16-32+28-16+4=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc}1&1&-4&7&-8&4\\&&1&-3&4&-4\\\hline2&1&-3&4&-4&\boxed{0}\\&&2&-2&4&\\\hline&1&-1&2&\boxed{0}&\end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x-2)(x^2-x+2)$ ······❶

즉 $(x-1)(x-2)(x^2-x+2)=0$에서 α, β는 이차방정식 $x^2-x+2=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=2$ ······❷

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=1^2-2\times2=-3\end{aligned}$$ ······❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 사차방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40%
❷ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 2 답 -1

$x^3+x^2-2kx-2k=0$에서 $x^2(x+1)-2k(x+1)=0$

$\therefore (x+1)(x^2-2k)=0$ ······❶

이때 주어진 삼차방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2-2k=0$이 두 개의 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=0^2-4\times1\times(-2k)<0 \qquad \therefore k<0$ ······ ❷

따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다. ······ ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 0

삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^3-1=0 \qquad \therefore \omega^3=1$ ······ ❶

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^2+\omega+1=0$ ······ ❷

$$\begin{aligned}\therefore\ &\omega+\omega^3+\omega^5+\omega^7+\cdots+\omega^{95}\\ &=\omega+1+\omega^3\times\omega^2+(\omega^3)^2\times\omega+(\omega^3)^3+(\omega^3)^3\times\omega^2\\ &\qquad\qquad+\cdots+(\omega^3)^{31}\times\omega^2\\ &=(\omega+1+\omega^2)+(\omega+1+\omega^2)+\cdots+(\omega+1+\omega^2)\\ &=0\end{aligned}$$ ······ ❸

채점 기준	비율
❶ $\omega^3=1$임을 알 수 있다.	30%
❷ $\omega^2+\omega+1=0$임을 알 수 있다.	30%
❸ $\omega+\omega^3+\omega^5+\omega^7+\cdots+\omega^{95}$의 값을 구할 수 있다.	40%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 171~172

01 답 ③

$f(x)=x^3+2x^2-3x-10$이라 하면

$f(2)=8+8-6-10=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	1	2	-3	-10
		2	8	10
	1	4	5	0

$f(x)=(x-2)(x^2+4x+5)$

이때 서로 다른 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+4x+5=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=5$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=(-4)^3-3\times5\times(-4)\\&=-4\end{aligned}$$

02 답 ②

$f(a)=0$, $f(a+3)=0$이므로 a, $a+3$은 삼차방정식 $f(x)=0$의 근이다.

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

a	1	$-a-4$	$4a-5$	$5a$
		a	$-4a$	$-5a$
	1	-4	-5	0

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-a)(x^2-4x-5)\\&=(x-a)(x+1)(x-5)\end{aligned}$$

즉 $(x-a)(x+1)(x-5)=0$이므로

$x=a$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=5$

$f(a+3)=0$에서 $a+3=-1$ 또는 $a+3=5$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=2$

따라서 a의 값의 합은

$-4+2=-2$

03 답 ①

$(x^2-4x+3)(x^2-6x+8)=120$에서

$(x-1)(x-3)(x-2)(x-4)=120$

$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=120$

$x^2-5x=X$로 놓으면 위의 방정식은

$(X+4)(X+6)-120=0$, $X^2+10X-96=0$

$(X+16)(X-6)=0 \qquad \therefore X=-16$ 또는 $X=6$

(i) $X=-16$일 때, $x^2-5x=-16$

$\therefore x^2-5x+16=0$

이차방정식 $x^2-5x+16=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\times1\times16=-39<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=6$일 때, $x^2-5x=6$

$x^2-5x-6=0$, $(x+1)(x-6)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=6$

(i), (ii)에서 ω는 이차방정식 $x^2-5x+16=0$의 근이므로

$\omega^2-5\omega+16=0 \qquad \therefore \omega^2-5\omega=-16$

04 답 ③

$(x-a)\{x^2+(1-3a)x+4\}=0$에서

$x=a$ 또는 $x^2+(1-3a)x+4=0$

(i) $a=1$일 때

이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-4=-3<0$

이므로 주어진 삼차방정식은 서로 다른 세 실근을 갖지 않는다.

(ii) 1이 이차방정식 $x^2+(1-3a)x+4=0$의 근일 때

$1+(1-3a)+4=0$에서 $6-3a=0 \qquad \therefore a=2$

즉 $(x-2)(x^2-5x+4)=0$이므로

$(x-2)(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

$\therefore \alpha\beta=2\times4=8$

05 답 ①

방정식 $P(x)=0$의 한 실근을 α, 서로 다른 두 허근을 β, γ라 하면

방정식 $P(3x-1)=0$의 세 근은 $\dfrac{\alpha+1}{3}$, $\dfrac{\beta+1}{3}$, $\dfrac{\gamma+1}{3}$이다.

(가)에서 $\beta\gamma=5$ ······ ㉠

(나)에서 $\dfrac{\alpha+1}{3}=0$, $\dfrac{\beta+1}{3}+\dfrac{\gamma+1}{3}=2$이므로

$\alpha=-1$, $\beta+\gamma=4$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 α, β, γ를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$(x+1)(x^2-4x+5)=0$

따라서 $P(x)=(x+1)(x^2-4x+5)=x^3-3x^2+x+5$이므로

$a=-3$, $b=1$, $c=5$

$\therefore a+b+c=-3+1+5=3$

06 답 16

$f(x)=x^3-3x^2+4x-2$라 하면

$f(1)=1-3+4-2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	-3	4	-2
		1	-2	2
	1	-2	2	0

$f(x)=(x-1)(x^2-2x+2)$

이때 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의

계수가 모두 실수이고 한 근이 ω이므로 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

이차방정식 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=2$, $\omega\overline{\omega}=2$이므로 $\omega\overline{\omega}=\omega+\overline{\omega}$

$\therefore \{\omega(\overline{\omega}-1)\}^n=(\omega\overline{\omega}-\omega)^n=(\omega+\overline{\omega}-\omega)^n=\overline{\omega}^n$

근의 공식에 의하여 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 두 근은

$1+i$, $1-i$

(i) $\omega=1+i$일 때, $\overline{\omega}=1-i$이므로

$\overline{\omega}^2=(1-i)^2=-2i$, $\overline{\omega}^4=(\overline{\omega}^2)^2=(-2i)^2=-4$,

$\overline{\omega}^{16}=(\overline{\omega}^4)^4=(-4)^4=256$

$\therefore n=16$

(ii) $\omega=1-i$일 때, $\overline{\omega}=1+i$이므로

$\overline{\omega}^2=(1+i)^2=2i$, $\overline{\omega}^4=(\overline{\omega}^2)^2=(2i)^2=-4$,

$\overline{\omega}^{16}=(\overline{\omega}^4)^4=(-4)^4=256$

$\therefore n=16$

(i), (ii)에서 $n=16$

07 답 38

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근을 ω라 하면

$\omega^2+\omega+1=0$

양변에 $\omega-1$을 곱하면 $(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega^3-1=0$ $\quad\therefore \omega^3=1$

$Q_n(x)=(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n-1})(1+x^n)$이라 하면

$P_n(x)=Q_n(x)-64$

$P_n(x)$가 x^2+x+1로 나누어떨어지려면 $P_n(\omega)=0$이어야 하므로

$Q_n(\omega)=64$

즉 $P_n(\omega)=0$을 만족시키는 자연수 n의 값은 $Q_n(\omega)=64$를 만족시키는 자연수 n의 값과 같다.

이때 $n\geq5$이므로

$Q_5(\omega)=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)$

$=-\omega^2\times(-\omega)\times2\times(-\omega^2)\times(-\omega)$

$=2\omega^6=2$

$Q_6(\omega)=Q_5(\omega)(1+\omega^6)=2(1+1)=4$

$Q_7(\omega)=Q_6(\omega)(1+\omega^7)=4(1+\omega)$

$=4\times(-\omega^2)=-4\omega^2$

$Q_8(\omega)=Q_7(\omega)(1+\omega^8)=-4\omega^2(1+\omega^2)$

$=-4\omega^2\times(-\omega)=4\omega^3=4$

$Q_9(\omega)=Q_8(\omega)(1+\omega^9)=4(1+1)=8$

$\vdots$

$Q_{18}(\omega)=Q_{17}(\omega)(1+\omega^{18})=32(1+1)=64$

$Q_{19}(\omega)=Q_{18}(\omega)(1+\omega^{19})=64(1+\omega)$

$=64\times(-\omega^2)=-64\omega^2$

$Q_{20}(\omega)=Q_{19}(\omega)(1+\omega^{20})=-64\omega^2(1+\omega^2)$

$=-64\omega^2\times(-\omega)=64\omega^3=64$

$\vdots$

따라서 자연수 n의 값은 18 또는 20이므로 그 합은

$18+20=38$

08 답 4

$x^2+kx=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+2)(X+6)+3=0$, $X^2+8X+15=0$

$(X+3)(X+5)=0$

$\therefore (x^2+kx+3)(x^2+kx+5)=0$

두 이차방정식 $x^2+kx+3=0$, $x^2+kx+5=0$의 판별식을 각각 D, D'이라 하면

$D=k^2-4\times1\times3=k^2-12$

$D'=k^2-4\times1\times5=k^2-20$

이때 주어진 사차방정식이 실근과 허근을 모두 가지려면

$D<0$, $D'\geq0$ 또는 $D\geq0$, $D'<0$이어야 한다.

(i) $D<0$, $D'\geq0$일 때

$k^2<12$, $k^2\geq20$을 만족시키는 자연수 k는 존재하지 않는다.

(ii) $D\geq0$, $D'<0$일 때

$k^2\geq12$, $k^2<20$을 만족시키는 자연수 k의 값은 4이다.

(i), (ii)에서 $k=4$

09 답 7

$f(x)=x^3-5x^2+(a+4)x-a$라 하면

$f(1)=1-5+a+4-a=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	-5	$a+4$	$-a$
		1	-4	a
	1	-4	a	0

$f(x)=(x-1)(x^2-4x+a)$

즉 $(x-1)(x^2-4x+a)=0$이므로

$x=1$ 또는 $x^2-4x+a=0$

이때 주어진 삼차방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) $x^2-4x+a=0$이 1과 1이 아닌 실근을 갖는 경우

$x^2-4x+a=0$이 1을 근으로 가지므로

$1-4+a=0$ $\quad\therefore a=3$

이때 $x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

즉 주어진 삼차방정식의 실근은

$x=1$(중근) 또는 $x=3$

(ii) $x^2-4x+a=0$이 1이 아닌 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times a=0$ $\quad\therefore a=4$

이때 $x^2-4x+4=0$에서 $(x-2)^2=0$

$\therefore x=2$ (중근)

즉 주어진 삼차방정식의 실근은

$x=1$ 또는 $x=2$ (중근)

(i), (ii)에서 $a=3$ 또는 $a=4$이므로 그 합은

$3+4=7$

10 답 ⑤

ㄱ. $a=1$이면 $x^4+(3-2a)x^2+a^2-3a-10=0$에서

$x^4+x^2-12=0$, $(x^2+4)(x^2-3)=0$

$\therefore x=\pm2i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

즉 모든 실근의 곱은 $\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})=-3$

ㄴ. $x^4+(3-2a)x^2+(a+2)(a-5)=0$에서

$\{x^2-(a+2)\}\{x^2-(a-5)\}=0$

$\therefore x^2=a+2$ 또는 $x^2=a-5$ ……㉠

이때 a는 실수이므로 $a-5<a+2$

주어진 사차방정식이 실근과 허근을 모두 가져야 하므로

$a-5<0$, $a+2\ge0$

즉 주어진 사차방정식의 실근은

$x=\sqrt{a+2}$ 또는 $x=-\sqrt{a+2}$

모든 실근의 곱이 -4이므로

$\sqrt{a+2}\times(-\sqrt{a+2})=-4$

$a+2=4$ $\quad\therefore a=2$

㉠에서 방정식 $x^2=a-5$, 즉 $x^2=-3$이 허근을 가지므로

$x=\sqrt{3}i$ 또는 $x=-\sqrt{3}i$

즉 모든 허근의 곱은 $\sqrt{3}i\times(-\sqrt{3}i)=3$

ㄷ. ㄴ에서 $a-5<0$, $a+2\ge0$

주어진 사차방정식이 정수인 근을 가지려면 $a+2$의 값이 0 또는 제곱수이어야 하고 $a-5<0$을 만족시켜야 한다.

$a+2=0$일 때 $a=-2$, $a-5=-7<0$

$a+2=1$일 때 $a=-1$, $a-5=-6<0$

$a+2=4$일 때 $a=2$, $a-5=-3<0$

$a+2=9$일 때 $a=7$, $a-5=2>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

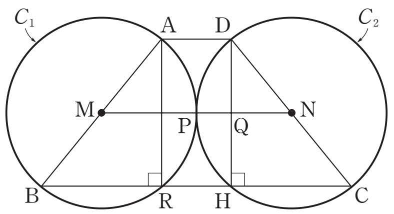
즉 실수 a의 값은 -2, -1, 2이므로 그 합은

$-2+(-1)+2=-1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 답 164

선분 AB를 지름으로 하는 원을 C_1, 선분 CD를 지름으로 하는 원을 C_2라 하자.



두 선분 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하면 두 점 M, N은 각각 두 원 C_1, C_2의 중심이다.

$\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이가 서로 같고 원 C_1과 원 C_2는 오직 한 점에서 만나므로 원 C_1과 원 C_2가 만나는 점은 선분 MN의 중점이다.

선분 MN의 중점을 P, 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 DH와 선분 MN이 만나는 점을 Q라 하자.

두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{QN}=\overline{PN}-\overline{PQ}=r-2$이므로

$\overline{HC}=2\overline{QN}=2r-4$

$\therefore \overline{DH}^2=\overline{CD}^2-\overline{HC}^2=(2r)^2-(2r-4)^2=16r-16$ ……㉠

또 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 R라 하면

$\overline{BR}=\overline{HC}=2r-4$, $\overline{RH}=4$ ……㉡

$\therefore \overline{BC}=\overline{BR}+\overline{RH}+\overline{HC}=4r-4$ ……㉢

㉠, ㉢에서

$$S^2=\left\{\frac{1}{2}\times(\overline{BC}+\overline{AD})\times\overline{DH}\right\}^2=\frac{1}{4}(\overline{BC}+\overline{AD})^2\times\overline{DH}^2$$

$$=\frac{1}{4}\times\{(4r-4)+4\}^2\times(16r-16)=64r^2(r-1)$$

$l=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}=2r+(4r-4)+2r+4=8r$

이때 $S^2+8l=6720$이므로

$64r^2(r-1)+64r=6720$

$\therefore r^3-r^2+r-105=0$

$f(r)=r^3-r^2+r-105$라 하면

$f(5)=125-25+5-105=0$

조립제법을 이용하여 $f(r)$를 인수분해하면

5	1	-1	1	-105
		5	20	105
	1	4	21	0

$f(r)=(r-5)(r^2+4r+21)$

즉 $(r-5)(r^2+4r+21)=0$이므로

$r=5$ 또는 $r^2+4r+21=0$

이차방정식 $r^2+4r+21=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\times21=-17<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

따라서 $r=5$이므로 ㉠, ㉡에서

$\overline{DH}^2=16\times5-16=64$

$\overline{BH}=\overline{BR}+\overline{RH}=2\times5-4+4=10$

$\triangle$DBH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BD}^2=\overline{BH}^2+\overline{DH}^2=10^2+64=164$

08 연립이차방정식

Ⅱ 방정식과 부등식

개념 완성하기 p. 175~176

01 답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

$x-y=1$에서 $y=x-1$ ……㉠

㉠을 $x^2+y^2=13$에 대입하면

$x^2+(x-1)^2=13$, $2x^2-2x-12=0$

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=3$

㉠에서 $x=-2$이면 $y=-3$, $x=3$이면 $y=2$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

02 답 $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\frac{11}{3} \\ y=-\frac{8}{3} \end{cases}$

$x+y=1$에서 $y=1-x$ ……㉠

㉠을 $4y^2-x^2=15$에 대입하면

$4(1-x)^2-x^2=15$, $3x^2-8x-11=0$

$(x+1)(3x-11)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=\frac{11}{3}$

㉠에서 $x=-1$이면 $y=2$, $x=\frac{11}{3}$이면 $y=-\frac{8}{3}$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\frac{11}{3} \\ y=-\frac{8}{3} \end{cases}$

03 답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$

$x-y=1$에서 $y=x-1$ ……㉠

㉠을 $x^2-2xy=-8$에 대입하면

$x^2-2x(x-1)=-8$, $-x^2+2x+8=0$

$x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=4$

㉠에서 $x=-2$이면 $y=-3$, $x=4$이면 $y=3$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$

04 답 $\begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

$x+y=2$에서 $y=-x+2$ ……㉠

㉠을 $x^2-xy-y^2=-1$에 대입하면

$x^2-x(-x+2)-(-x+2)^2=-1$

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=1$

㉠에서 $x=-3$이면 $y=5$, $x=1$이면 $y=1$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

05 답 $\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

$2x+y=1$에서 $y=1-2x$ ……㉠

㉠을 $x^2+2xy-3y=1$에 대입하면

$x^2+2x(1-2x)-3(1-2x)=1$, $-3x^2+8x-4=0$

$3x^2-8x+4=0$, $(3x-2)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

㉠에서 $x=\frac{2}{3}$이면 $y=-\frac{1}{3}$, $x=2$이면 $y=-3$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

06 답 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$

$x-2y=1$에서 $x=2y+1$ ……㉠

㉠을 $(x-1)^2+y^2=20$에 대입하면

$(2y+1-1)^2+y^2=20$, $5y^2=20$, $y^2=4$

$\therefore$ $y=-2$ 또는 $y=2$

㉠에서 $y=-2$이면 $x=-3$, $y=2$이면 $x=5$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$

07 답 $\begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$

$x+y=-3$에서 $y=-x-3$ ……㉠

㉠을 $x^2+3xy+y^2=5$에 대입하면

$x^2+3x(-x-3)+(-x-3)^2=5$, $-x^2-3x+4=0$

$x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-4$ 또는 $x=1$

㉠에서 $x=-4$이면 $y=1$, $x=1$이면 $y=-4$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$

08 답 $\begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-y)(x-2y)=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3y^2=28 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면 $y^2+3y^2=28$

$4y^2=28$, $y^2=7$ $\quad\therefore$ $y=\pm\sqrt{7}$

$x=y$이므로 $x=\pm\sqrt{7}$, $y=\pm\sqrt{7}$ (복부호동순)

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$(2y)^2+3y^2=28$, $7y^2=28$, $y^2=4$ $\quad\therefore$ $y=\pm2$

$x=2y$이므로 $x=\pm4$, $y=\pm2$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$

09 답 $\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-xy=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면 $x(x-y)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=y$

(i) $x=0$을 ㉡에 대입하면 $y^2=2$

$\therefore y=\pm\sqrt{2}$

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면 $y^2+y^2=2$

$2y^2=2,\ y^2=1 \qquad \therefore y=\pm 1$

$x=y$이므로 $x=\pm 1,\ y=\pm 1$(복부호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

10 답 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+3y^2=15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x-y)(x+y)=0$

$\therefore y=x$ 또는 $y=-x$

(i) $y=x$를 ㉡에 대입하면 $x^2+x^2+3x^2=15$

$5x^2=15,\ x^2=3 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{3}$

$y=x$이므로 $x=\pm\sqrt{3},\ y=\pm\sqrt{3}$ (복부호동순)

(ii) $y=-x$를 ㉡에 대입하면 $x^2-x^2+3x^2=15$

$3x^2=15,\ x^2=5 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{5}$

$y=-x$이므로 $x=\pm\sqrt{5},\ y=\mp\sqrt{5}$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$

11 답 $\begin{cases} x=\sqrt{10} \\ y=\sqrt{10} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{10} \\ y=-\sqrt{10} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x-y)(x+2y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=-2y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면 $y^2+y^2=20$

$2y^2=20,\ y^2=10 \qquad \therefore y=\pm\sqrt{10}$

$x=y$이므로 $x=\pm\sqrt{10},\ y=\pm\sqrt{10}$ (복부호동순)

(ii) $x=-2y$를 ㉡에 대입하면 $(-2y)^2+y^2=20$

$5y^2=20,\ y^2=4 \qquad \therefore y=\pm 2$

$x=-2y$이므로 $x=\pm 4,\ y=\mp 2$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{10} \\ y=\sqrt{10} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{10} \\ y=-\sqrt{10} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$

12 답 $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3xy+2y^2=30 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x-y)(x-4y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=4y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면 $y^2+3y^2+2y^2=30$

$6y^2=30,\ y^2=5 \qquad \therefore y=\pm\sqrt{5}$

$x=y$이므로 $x=\pm\sqrt{5},\ y=\pm\sqrt{5}$ (복부호동순)

(ii) $x=4y$를 ㉡에 대입하면 $(4y)^2+3\times 4y\times y+2y^2=30$

$30y^2=30,\ y^2=1 \qquad \therefore y=\pm 1$

$x=4y$이므로 $x=\pm 4,\ y=\pm 1$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$

13 답 $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$

$\begin{cases} 4x^2-5xy+y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+3xy+y^2=30 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(4x-y)(x-y)=0$

$\therefore y=4x$ 또는 $y=x$

(i) $y=4x$를 ㉡에 대입하면 $2x^2+3x\times 4x+(4x)^2=30$

$30x^2=30,\ x^2=1 \qquad \therefore x=\pm 1$

$y=4x$이므로 $x=\pm 1,\ y=\pm 4$ (복부호동순)

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면 $2x^2+3x^2+x^2=30$

$6x^2=30,\ x^2=5 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{5}$

$y=x$이므로 $x=\pm\sqrt{5},\ y=\pm\sqrt{5}$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$

14 답 $\begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\dfrac{6}{5} \\ y=-\dfrac{18}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x^2+2xy-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2x+y^2=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x+y)(3x-y)=0$

$\therefore y=-x$ 또는 $y=3x$

(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면 $x^2+2x+(-x)^2=12$

$2x^2+2x-12=0,\ x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0 \qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=2$

$y=-x$이므로 $\begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$

(ii) $y=3x$를 ㉡에 대입하면 $x^2+2x+(3x)^2=12$

$10x^2+2x-12=0,\ 5x^2+x-6=0$

$(5x+6)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-\dfrac{6}{5}$ 또는 $x=1$

$y=3x$이므로 $\begin{cases} x=-\dfrac{6}{5} \\ y=-\dfrac{18}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\dfrac{6}{5} \\ y=-\dfrac{18}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

15 답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$

x, y는 이차방정식 $t^2-3t-10=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-5)=0$ $\quad\therefore t=-2$ 또는 $t=5$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$

다른 풀이

$x+y=3$에서 $y=-x+3$ ······㉠

㉠을 $xy=-10$에 대입하면

$x(-x+3)=-10$, $-x^2+3x+10=0$

$x^2-3x-10=0$, $(x+2)(x-5)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=5$

㉠에서 $x=-2$이면 $y=5$, $x=5$이면 $y=-2$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$

16 답 $\begin{cases} x=-6 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-6 \end{cases}$

$x+y=-4$이므로 $x-xy+y=8$에서

$-4-xy=8$ $\quad\therefore xy=-12$

즉 x, y는 이차방정식 $t^2+4t-12=0$의 두 근이므로

$(t+6)(t-2)=0$ $\quad\therefore t=-6$ 또는 $t=2$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-6 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-6 \end{cases}$

다른 풀이

$x+y=-4$에서 $y=-x-4$ ······㉠

㉠을 $x-xy+y=8$에 대입하면

$x-x(-x-4)+(-x-4)=8$

$x^2+4x-12=0$, $(x+6)(x-2)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=2$

㉠에서 $x=-6$이면 $y=2$, $x=2$이면 $y=-6$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-6 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-6 \end{cases}$

17 답 $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$에서 $\begin{cases} x+y=5 \\ (x+y)^2-2xy=17 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-2v=17 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$5^2-2v=17$ $\quad\therefore v=4$

$\therefore x+y=5$, $xy=4$

즉 x, y는 이차방정식 $t^2-5t+4=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-4)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=4$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

다른 풀이

$x+y=5$에서 $y=-x+5$ ······㉠

㉠을 $x^2+y^2=17$에 대입하면

$x^2+(-x+5)^2=17$, $2x^2-10x+8=0$

$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

㉠에서 $x=1$이면 $y=4$, $x=4$이면 $y=1$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

18 답 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{cases}$에서 $\begin{cases} (x+y)^2-2xy=10 \\ xy=3 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u^2-2v=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ v=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면

$u^2-6=10$, $u^2=16$ $\quad\therefore u=\pm 4$

(i) $u=4$, $v=3$일 때, $x+y=4$, $xy=3$

x, y는 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(ii) $u=-4$, $v=3$일 때, $x+y=-4$, $xy=3$

x, y는 이차방정식 $t^2+4t+3=0$의 두 근이므로

$(t+1)(t+3)=0$ $\quad\therefore t=-1$ 또는 $t=-3$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$

19 답 $\begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x+y-xy=1 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases}$에서 $\begin{cases} x+y-xy=1 \\ (x+y)^2-xy=13 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u-v=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $v=u-1$ ······㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$u^2-(u-1)=13$, $u^2-u-12=0$

$(u+3)(u-4)=0$ $\quad\therefore u=-3$ 또는 $u=4$

㉢에서 $u=-3$이면 $v=-4$, $u=4$이면 $v=3$

(i) $u=-3$, $v=-4$일 때, $x+y=-3$, $xy=-4$

x, y는 이차방정식 $t^2+3t-4=0$의 두 근이므로

$(t+4)(t-1)=0$ $\quad\therefore t=-4$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$

(ii) $u=4$, $v=3$일 때, $x+y=4$, $xy=3$

x, y는 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

20 답 $a=-4,\ b=-1$

$x=2$를 이차방정식 $x^2+ax+4=0$에 대입하면

$4+2a+4=0 \quad \therefore a=-4$

$x=2$를 이차방정식 $x^2+bx-2=0$에 대입하면

$4+2b-2=0 \quad \therefore b=-1$

21 답 4

두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$\alpha^2+3\alpha-k=0$ ······㉠

$\alpha^2-k\alpha+3=0$ ······㉡

㉠−㉡을 하면 $(k+3)\alpha-(k+3)=0$

$(k+3)(\alpha-1)=0 \quad \therefore k=-3$ 또는 $\alpha=1$

(i) $k=-3$일 때

두 이차방정식이 모두 $x^2+3x+3=0$으로 일치하므로 공통근은 2개이다.

(ii) $\alpha=1$일 때

$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면

$1+3-k=0 \quad \therefore k=4$

(i), (ii)에서 $k=4$

22 답 2

$xy-4x-3y+5=0$에서 $x(y-4)-3(y-4)=7$

$\therefore (x-3)(y-4)=7$

이때 $x,\ y$는 자연수이므로 $x-3,\ y-4$의 값은 다음과 같다.

$x-3$	1	7
$y-4$	7	1

따라서 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(4,\ 11),\ (10,\ 5)$이므로 그 개수는 2이다.

23 답 4

$(x-2)(y-1)=3$에서 $x,\ y$는 정수이므로 $x-2,\ y-1$의 값은 다음과 같다.

$x-2$	-3	-1	1	3
$y-1$	-1	-3	3	1

따라서 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(-1,\ 0),\ (1,\ -2),\ (3,\ 4),\ (5,\ 2)$이므로 그 개수는 4이다.

24 답 $x=-\frac{1}{3},\ y=1$

$(3x+y)^2+(y-1)^2=0$에서 $x,\ y$는 실수이므로

$3x+y=0,\ y-1=0 \quad \therefore x=-\frac{1}{3},\ y=1$

25 답 $x=2,\ y=1$

$(x-2)^2+(x-4y+2)^2=0$에서 $x,\ y$는 실수이므로

$x-2=0,\ x-4y+2=0 \quad \therefore x=2,\ y=1$

26 답 $x=-1,\ y=-3$

$x^2+y^2+2x+6y+10=0$에서

$(x^2+2x+1)+(y^2+6y+9)=0$

$\therefore (x+1)^2+(y+3)^2=0$

이때 $x,\ y$는 실수이므로 $x+1=0,\ y+3=0$

$\therefore x=-1,\ y=-3$

27 답 $x=-2,\ y=3$

$x^2+y^2+4x-6y+13=0$에서

$(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)=0$

$\therefore (x+2)^2+(y-3)^2=0$

이때 $x,\ y$는 실수이므로 $x+2=0,\ y-3=0$

$\therefore x=-2,\ y=3$

28 답 $x=2,\ y=-5$

$x^2+y^2-4x+10y+29=0$에서

$(x^2-4x+4)+(y^2+10y+25)=0$

$\therefore (x-2)^2+(y+5)^2=0$

이때 $x,\ y$는 실수이므로 $x-2=0,\ y+5=0$

$\therefore x=2,\ y=-5$

유형 완성하기

p. 177~184

01 답 ④

$\begin{cases} 2x-y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=25 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2x-5$ ······㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(2x-5)^2=25,\ x^2-4x=0$

$x(x-4)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=4$

㉢에서 $x=0$이면 $y=-5$, $x=4$이면 $y=3$

이때 $\alpha>0,\ \beta>0$이므로 $\alpha=4,\ \beta=3$

$\therefore \alpha-2\beta=4-2\times3=-2$

01-1 답 ②

$\begin{cases} x-y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=26 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-4$ ······㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x-4)^2=26,\ x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=5$

㉢에서 $x=-1$이면 $y=-5$, $x=5$이면 $y=1$

이때 $\alpha<0$이므로 $\alpha=-1,\ \beta=-5$

$\therefore \alpha+\beta=-1+(-5)=-6$

02 답 ①

$\begin{cases} x^2+4xy+y^2=-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=x-2$ ······㉢

㉢을 ㉠에 대입하면
$x^2+4x(x-2)+(x-2)^2=-2$, $6x^2-12x+6=0$
$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$
㉢에서 $x=1$이면 $y=-1$
따라서 연립방정식의 해는 $x=1$, $y=-1$이므로
$x^2+y^2=1^2+(-1)^2=2$

02-1 답 ②

$\begin{cases} x+y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x^2-2xy-y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $y=-x$ ……㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$4x^2-2x\times(-x)-(-x)^2=5$, $x^2-1=0$
$(x+1)(x-1)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=1$
㉢에서 $x=-1$이면 $y=1$, $x=1$이면 $y=-1$
$\therefore x^2+y^2=(-1)^2+1^2=2$

03 답 -5

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2xy=-8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $y=x-1$ ……㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$x^2-2x(x-1)=-8$, $x^2-2x-8=0$
$(x+2)(x-4)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=4$
㉢에서 $x=-2$이면 $y=-3$, $x=4$이면 $y=3$
따라서 $x+y$의 값은 -5 또는 7이므로 최솟값은 -5이다.

03-1 답 21

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $x=2y+1$ ……㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$y(2y+1)-y^2=6$, $y^2+y-6=0$
$(y+3)(y-2)=0$ $\therefore y=-3$ 또는 $y=2$
㉢에서 $y=-3$이면 $x=-5$, $y=2$이면 $x=5$
따라서 x^2-y^2의 값은 16 또는 21이므로 최댓값은 21이다.

04 답 ②

$\begin{cases} x-3y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-2)^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $x-2=3y$ ……㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$(3y)^2+y^2=10$, $10y^2=10$
$y^2=1$ $\therefore y=1$ 또는 $y=-1$
㉢에서 $y=1$이면 $x=5$, $y=-1$이면 $x=-1$
이때 $\alpha>0$, $\beta>0$이므로 $\alpha=5$, $\beta=1$
$\therefore \alpha-\beta=5-1=4$

04-1 답 ③

$\begin{cases} -x+2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+(y-1)^2=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $x=2y-1$ ……㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$(2y-1)^2+(y-1)^2=10$, $5y^2-6y-8=0$
$(5y+4)(y-2)=0$ $\therefore y=-\frac{4}{5}$ 또는 $y=2$
㉢에서 $y=-\frac{4}{5}$이면 $x=-\frac{13}{5}$, $y=2$이면 $x=3$
이때 $\alpha>0$, $\beta>0$이므로 $\alpha=3$, $\beta=2$
$\therefore \alpha+\beta=3+2=5$

05 답 $-\frac{4}{5}$

두 연립방정식의 공통인 해는 다음 연립방정식의 해와 같다.
$\begin{cases} x+y=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=34 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $y=-x+8$ ……㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$x^2+(-x+8)^2=34$, $x^2-8x+15=0$
$(x-3)(x-5)=0$ $\therefore x=3$ 또는 $x=5$
㉢에서 $x=3$이면 $y=5$, $x=5$이면 $y=3$
그런데 $b=x-y>0$이므로 $x=5$, $y=3$
$\therefore b=5-3=2$
$x=5$, $y=3$을 $ax+y=1$에 대입하면
$5a+3=1$ $\therefore a=-\frac{2}{5}$
$\therefore ab=-\frac{2}{5}\times2=-\frac{4}{5}$

05-1 답 ②

두 연립방정식의 공통인 해는 다음 연립방정식의 해와 같다.
$\begin{cases} x+y=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $y=-x+6$ ……㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$x^2+(-x+6)^2=18$, $x^2-6x+9=0$
$(x-3)^2=0$ $\therefore x=3$
㉢에서 $x=3$이면 $y=3$
$x=3$, $y=3$을 $ax+y=1$에 대입하면
$3a+3=1$ $\therefore a=-\frac{2}{3}$
$x=3$, $y=3$을 $2x-y=b$에 대입하면
$6-3=b$ $\therefore b=3$
$\therefore ab=-\frac{2}{3}\times3=-2$

06 답 -6

두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식
$\begin{cases} x+y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=-21 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
의 해와 같다. ……❶
㉠에서 $y=-x+3$ ……㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$x^2-(-x+3)^2=-21$
$6x=-12$ $\therefore x=-2$
㉢에서 $x=-2$이면 $y=5$ ……❷
$x=-2$, $y=5$를 $ax^2+y^2=5$에 대입하면
$4a+25=5$ $\therefore a=-5$

$x=-2$, $y=5$를 $2x+y=-b$에 대입하면

$-4+5=-b$ $\quad\therefore b=-1$ ······❸

$\therefore a+b=-5+(-1)=-6$ ······❹

채점 기준	비율
❶ 두 연립방정식의 해가 연립방정식 $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2-y^2=-21 \end{cases}$의 해와 같음을 알 수 있다.	10%
❷ 연립방정식 $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2-y^2=-21 \end{cases}$의 해를 구할 수 있다.	40%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

06-1 답 ①

두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해와 같다.

㉠에서 $y=-x+5$ ······㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(-x+5)^2=13$, $x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=3$

㉢에서 $x=2$이면 $y=3$, $x=3$이면 $y=2$

그런데 $x<y$이므로 $x=2$, $y=3$

$x=2$, $y=3$을 $x^2+ay^2=22$에 대입하면

$4+9a=22$ $\quad\therefore a=2$

$x=2$, $y=3$을 $3x+by=9$에 대입하면

$6+3b=9$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore ab=2\times1=2$

07 답 ②

$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+4xy-3y^2=18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x-2y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+4y^2-3y^2=18$, $2y^2=18$, $y^2=9$

$\therefore y=\pm3$, $x=\pm3$ (복부호동순)

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$4y^2+8y^2-3y^2=18$, $9y^2=18$, $y^2=2$

$\therefore y=\pm\sqrt{2}$, $x=\pm2\sqrt{2}$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$

따라서 연립방정식의 해가 아닌 것은 ②이다.

07-1 답 ⑤

$\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3xy+3y^2=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+2y)(x-y)=0$

$\therefore x=-2y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-2y$를 ㉡에 대입하면

$4y^2-6y^2+3y^2=7$, $y^2=7$

$\therefore y=\pm\sqrt{7}$, $x=\mp2\sqrt{7}$ (복부호동순)

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+3y^2+3y^2=7$, $7y^2=7$, $y^2=1$

$\therefore y=\pm1$, $x=\pm1$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2\sqrt{7} \\ y=\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

따라서 연립방정식의 해가 아닌 것은 ⑤이다.

08 답 3

$\begin{cases} (x-2y)(x-3y)=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy-3y^2=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$4y^2+2y^2-3y^2=9$, $3y^2=9$, $y^2=3$

$\therefore y=\pm\sqrt{3}$, $x=\pm2\sqrt{3}$ (복부호동순)

(ii) $x=3y$를 ㉡에 대입하면

$9y^2+3y^2-3y^2=9$, $9y^2=9$, $y^2=1$

$\therefore y=\pm1$, $x=\pm3$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 정수인 해는 $x=3$, $y=1$ 또는 $x=-3$, $y=-1$

따라서 xy의 값은 3이다.

08-1 답 3

$\begin{cases} (3x-y)(x-y)=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=3x$ 또는 $y=x$

(i) $y=3x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+9x^2=10$, $10x^2=10$, $x^2=1$

$\therefore x=\pm1$, $y=\pm3$ (복부호동순)

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2=10$, $2x^2=10$, $x^2=5$

$\therefore x=\pm\sqrt{5}$, $y=\pm\sqrt{5}$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 정수인 해는 $x=1$, $y=3$ 또는 $x=-1$, $y=-3$

따라서 xy의 값은 3이다.

09 답 4

$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-3y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$(-y)^2+y^2=10$, $2y^2=10$, $y^2=5$

$\therefore y=\pm\sqrt{5}$, $x=\mp\sqrt{5}$ (복부호동순)

(ii) $x=3y$를 ㉡에 대입하면

$(3y)^2+y^2=10$, $10y^2=10$, $y^2=1$

$\therefore y=\pm1$, $x=\pm3$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta$의 값은 0 또는 4 또는 -4이므로 최댓값은 4이다.

09-1 답 ③

$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x-2y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2-y^2+y^2=4,\ y^2=4$

$\therefore y=\pm2,\ x=\pm2$ (복부호동순)

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$(2y)^2-2y^2+y^2=4,\ 3y^2=4,\ y^2=\frac{4}{3}$

$\therefore y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3},\ x=\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta$의 값은 4 또는 -4 또는 $2\sqrt{3}$ 또는 $-2\sqrt{3}$이므로 최댓값은 4이다.

10 답 ①

$\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3xy+3y^2=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x+2y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=-2y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+3y^2+3y^2=7$

$7y^2=7,\ y^2=1$

$\therefore y=\pm1,\ x=\pm1$ (복부호동순)

(ii) $x=-2y$를 ㉡에 대입하면

$(-2y)^2-6y^2+3y^2=7,\ y^2=7$

$\therefore y=\pm\sqrt{7},\ x=\mp2\sqrt{7}$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha>0,\ \beta>0$이므로 $\alpha=1,\ \beta=1$

$\therefore \alpha\beta=1\times1=1$

10-1 답 14

$\begin{cases} x^2-4y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+y^2=21 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+2y)(x-2y)=0$

$\therefore x=-2y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-2y$를 ㉡에 대입하면

$(-2y)^2-(-2y)\times y+y^2=21$

$7y^2=21,\ y^2=3$

$\therefore y=\pm\sqrt{3},\ x=\mp2\sqrt{3}$ (복부호동순)

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$(2y)^2-2y^2+y^2=21,\ 3y^2=21,\ y^2=7$

$\therefore y=\pm\sqrt{7},\ x=\pm2\sqrt{7}$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 양수인 해는 $x=2\sqrt{7},\ y=\sqrt{7}$이므로

$xy=2\sqrt{7}\times\sqrt{7}=14$

11 답 -5

$\begin{cases} x^2+y^2-3x-y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2-7x+y=-10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면

$4x-2y=10 \qquad \therefore y=2x-5$ ……㉢ ……❶

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(2x-5)^2-3x-(2x-5)=0$

$5x^2-25x+30=0,\ x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0 \qquad \therefore x=2$ 또는 $x=3$

㉢에서 $x=2$이면 $y=-1$, $x=3$이면 $y=1$

따라서 $\alpha=2,\ \beta=-1$ 또는 $\alpha=3,\ \beta=1$이므로 ……❷

$\beta-2\alpha=-5$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 이차항을 소거하여 x, y에 대한 일차방정식을 얻을 수 있다.	30%
❷ α, β의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $\beta-2\alpha$의 값을 구할 수 있다.	20%

11-1 답 -5

$\begin{cases} x^2+y^2+5x-y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+3x-2y=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면

$2x+y=-1 \qquad \therefore y=-2x-1$ ……㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(-2x-1)^2+5x-(-2x-1)=0$

$5x^2+11x+2=0,\ (5x+1)(x+2)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=-2$

㉢에서 $x=-\frac{1}{5}$이면 $y=-\frac{3}{5}$, $x=-2$이면 $y=3$

이때 $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=-2,\ \beta=3$

$\therefore \alpha-\beta=-2-3=-5$

12 답 4, 5

$\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x^2-9xy+y^2=-14 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times2+$㉡을 하면

$6x^2-11xy+3y^2=0,\ (2x-3y)(3x-y)=0$

$\therefore y=\frac{2}{3}x$ 또는 $y=3x$

(i) $y=\frac{2}{3}x$를 ㉠에 대입하면

$x^2-x\times\frac{2}{3}x+\left(\frac{2}{3}x\right)^2=7,\ \frac{7}{9}x^2=7,\ x^2=9$

$\therefore x=\pm3,\ y=\pm2$ (복부호동순)

(ii) $y=3x$를 ㉠에 대입하면

$x^2-3x^2+(3x)^2=7,\ 7x^2=7,\ x^2=1$

$\therefore x=\pm1,\ y=\pm3$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 x, y는 자연수이므로 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

따라서 $x+y$의 값은 4 또는 5이다.

12-1 답 4

$\begin{cases} x^2-2xy+2y^2=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x^2-11xy+7y^2=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡$-$㉠$\times2$를 하면

$2x^2-7xy+3y^2=0,\ (x-3y)(2x-y)=0$

$\therefore y=\frac{1}{3}x$ 또는 $y=2x$

(i) $y=\frac{1}{3}x$를 ㉠에 대입하면

$x^2-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{9}x^2=5,\ \frac{5}{9}x^2=5,\ x^2=9$

$\therefore x=\pm3,\ y=\pm1$ (복부호동순)

(ii) $y=2x$를 ㉠에 대입하면

$x^2-4x^2+8x^2=5,\ 5x^2=5,\ x^2=1$

$\therefore x=\pm1,\ y=\pm2$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta$의 값은 4 또는 -4 또는 3 또는 -3이므로 최댓값은 4이다.

13 답 4

$\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ xy=8 \end{cases}$에서 $\begin{cases} (x+y)^2-2xy=20 \\ xy=8 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u^2-2v=20 & \cdots\cdots ㉠ \\ v=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면 $u^2-16=20$

$u^2=36 \qquad \therefore u=\pm 6$

(i) $u=6$, $v=8$일 때, $x+y=6$, $xy=8$

x, y는 이차방정식 $t^2-6t+8=0$의 두 근이므로

$(t-2)(t-4)=0 \qquad \therefore t=2$ 또는 $t=4$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

(ii) $u=-6$, $v=8$일 때, $x+y=-6$, $xy=8$

x, y는 이차방정식 $t^2+6t+8=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t+4)=0 \qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=-4$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$

(i), (ii)에서 $x-y$의 값은 -2 또는 2이므로

$M=2$, $m=-2$

$\therefore M-m=2-(-2)=4$

13-1 답 -1

$\begin{cases} x^2+y^2=61 \\ xy=30 \end{cases}$에서 $\begin{cases} (x+y)^2-2xy=61 \\ xy=30 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u^2-2v=61 & \cdots\cdots ㉠ \\ v=30 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면 $u^2-60=61$

$u^2=121 \qquad \therefore u=\pm 11$

(i) $u=11$, $v=30$일 때, $x+y=11$, $xy=30$

x, y는 이차방정식 $t^2-11t+30=0$의 두 근이므로

$(t-5)(t-6)=0 \qquad \therefore t=5$ 또는 $t=6$

$\therefore \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=5 \end{cases}$

(ii) $u=-11$, $v=30$일 때, $x+y=-11$, $xy=30$

x, y는 이차방정식 $t^2+11t+30=0$의 두 근이므로

$(t+5)(t+6)=0 \qquad \therefore t=-5$ 또는 $t=-6$

$\therefore \begin{cases} x=-5 \\ y=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-5 \end{cases}$

(i), (ii)에서 $x-y$의 값은 -1 또는 1이므로 최솟값은 -1이다.

14 답 5

$\begin{cases} x+y+xy=-5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$에서 $\begin{cases} x+y+xy=-5 \\ (x+y)^2-xy=7 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u+v=-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $v=-u-5 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$u^2-(-u-5)=7$, $u^2+u-2=0$

$(u+2)(u-1)=0 \qquad \therefore u=-2$ 또는 $u=1$

㉢에서 $u=-2$이면 $v=-3$, $u=1$이면 $v=-6$

(i) $u=-2$, $v=-3$일 때, $x+y=-2$, $xy=-3$

x, y는 이차방정식 $t^2+2t-3=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-1)=0 \qquad \therefore t=-3$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

(ii) $u=1$, $v=-6$일 때, $x+y=1$, $xy=-6$

x, y는 이차방정식 $t^2-t-6=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-3)=0 \qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

(i), (ii)에서 $\alpha-\beta$의 값은 -4 또는 4 또는 -5 또는 5이므로 최댓값은 5이다.

14-1 답 4

$\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$에서 $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ xy(x+y)=30 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u+v=11 & \cdots\cdots ㉠ \\ uv=30 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $v=-u+11 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$u(-u+11)=30$, $u^2-11u+30=0$

$(u-5)(u-6)=0 \qquad \therefore u=5$ 또는 $u=6$

㉢에서 $u=5$이면 $v=6$, $u=6$이면 $v=5$

(i) $u=5$, $v=6$일 때, $x+y=5$, $xy=6$

x, y는 이차방정식 $t^2-5t+6=0$의 두 근이므로

$(t-2)(t-3)=0 \qquad \therefore t=2$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

(ii) $u=6$, $v=5$일 때, $x+y=6$, $xy=5$

x, y는 이차방정식 $t^2-6t+5=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-5)=0 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=5$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$

(i), (ii)에서 순서쌍 (x, y)는 $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(1, 5)$, $(5, 1)$이므로 그 개수는 4이다.

15 답 ⑤

두 연립방정식 $\begin{cases} x^2-y^2=a \\ x+y=3 \end{cases}$, $\begin{cases} xy=-4 \\ x+2y=b \end{cases}$의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-4 \end{cases}$의 해와 같다.

즉 x, y는 이차방정식 $t^2-3t-4=0$의 두 근이므로

$(t+1)(t-4)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=4$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$

이때 a, b는 양수이므로 $x=4$, $y=-1$

$x=4$, $y=-1$을 $x^2-y^2=a$에 대입하면

$16-1=a \qquad \therefore a=15$

$x=4$, $y=-1$을 $x+2y=b$에 대입하면

$4-2=b \qquad \therefore b=2$

$\therefore a+b=15+2=17$

15-1 답 ③

두 연립방정식 $\begin{cases} x+y=6 \\ x^2-2y^2=a \end{cases}$, $\begin{cases} xy=8 \\ -2x+y=b \end{cases}$의 공통인 해는 연립방정식 $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=8 \end{cases}$의 해와 같다.

즉 x, y는 이차방정식 $t^2-6t+8=0$의 두 근이므로

$(t-2)(t-4)=0 \qquad \therefore t=2$ 또는 $t=4$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

(i) $x=2$, $y=4$일 때

$x=2$, $y=4$를 $x^2-2y^2=a$에 대입하면

$4-32=a \qquad \therefore a=-28$

$x=2$, $y=4$를 $-2x+y=b$에 대입하면

$-4+4=b \qquad \therefore b=0$

(ii) $x=4$, $y=2$일 때

$x=4$, $y=2$를 $x^2-2y^2=a$에 대입하면

$16-8=a \qquad \therefore a=8$

$x=4$, $y=2$를 $-2x+y=b$에 대입하면

$-8+2=b \qquad \therefore b=-6$

(i), (ii)에서 $b-a$의 값은 28 또는 -14이므로 최댓값은 28이다.

16 답 ①

$\begin{cases} 2x-y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2x+1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2+(2x+1)^2=k$

$\therefore 5x^2+4x-k+1=0$

이를 만족시키는 x의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-5(-k+1)=0$

$5k-1=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{5}$

16-1 답 6

$\begin{cases} x-y=k & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-k \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2+(x-k)^2=18$

$\therefore 2x^2-2kx+k^2-18=0 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉣을 만족시키는 x의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 ㉣의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-18)=0$, $-k^2+36=0$

$k^2=36 \qquad \therefore k=6\ (\because k>0)$

$k=6$을 ㉣에 대입하면 $2x^2-12x+18=0$

$x^2-6x+9=0$, $(x-3)^2=0 \qquad \therefore x=3$

$x=3$을 ㉢에 대입하면 $y=3-6=-3$

따라서 $a=3$, $b=-3$이므로

$a+b+k=3+(-3)+6=6$

17 답 ③

주어진 연립방정식을 만족시키는 실수 x, y는 이차방정식 $t^2-2(5-a)t+a^2+5=0$의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(5-a)\}^2-(a^2+5)\geq 0$

$-10a+20\geq 0 \qquad \therefore a\leq 2$

따라서 정수 a의 최댓값은 2이다.

17-1 답 -1

주어진 연립방정식의 해는 이차방정식 $t^2-(2a-4)t+a^2+8=0$의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-2)\}^2-(a^2+8)\geq 0$

$-4a-4\geq 0 \qquad \therefore a\leq -1$

따라서 실수 a의 최댓값은 -1이다.

18 답 5

$\begin{cases} kx+y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2-kx$

이 식을 ㉡에 대입하면 $x^2-(2-kx)^2=1$

$(1-k^2)x^2+4kx-5=0$

$\therefore (1-k)(1+k)x^2+4kx-5=0 \quad \cdots\cdots ㉢$

(i) $1-k=0$, 즉 $k=1$일 때

$k=1$을 ㉢에 대입하면 $4x-5=0$

$\therefore x=\frac{5}{4}$

(ii) $1+k=0$, 즉 $k=-1$일 때

$k=-1$을 ㉢에 대입하면 $-4x-5=0$

$\therefore x=-\frac{5}{4}$

(iii) $1-k^2\neq 0$, 즉 $k^2\neq 1$일 때

㉢을 만족시키는 x의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 ㉢의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-(1-k^2)\times(-5)=0$, $-k^2+5=0$

$k^2=5 \qquad \therefore k=\pm\sqrt{5}$

(i)~(iii)에서 모든 실수 k의 값의 곱은

$1\times(-1)\times\sqrt{5}\times(-\sqrt{5})=5$

18-1 답 $\frac{2}{3}$

$\begin{cases} x+y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ kx^2-y^2=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=1-x$

이 식을 ㉡에 대입하면 $kx^2-(1-x)^2=2$

$\therefore (k-1)x^2+2x-3=0 \quad \cdots\cdots ㉢$

(i) $k-1=0$, 즉 $k=1$일 때

$k=1$을 ㉢에 대입하면 $2x-3=0 \qquad \therefore x=\frac{3}{2}$

(ii) $k-1\neq 0$, 즉 $k\neq 1$일 때

㉢을 만족시키는 x의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 ㉢의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(k-1)\times(-3)=0$

$3k-2=0 \qquad \therefore k=\frac{2}{3}$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 곱은

$1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

19 답 12 cm

처음 직육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면 밑면의 대각선의 길이가 13 cm이므로

$x^2+y^2=13^2 \quad \therefore x^2+y^2=169$ ……㉠

밑면의 가로와 세로의 길이를 각각 2 cm씩 늘였더니 부피가 처음 직육면체의 부피보다 380 cm^3만큼 증가하였으므로

$10(x+2)(y+2)=10xy+380$

$(x+2)(y+2)=xy+38$

$\therefore y=17-x$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2+(17-x)^2=169$

$2x^2-34x+120=0,\ x^2-17x+60=0$

$(x-5)(x-12)=0 \quad \therefore x=5$ 또는 $x=12$

㉡에서 $x=5$이면 $y=12$, $x=12$이면 $y=5$

이때 $x>y$이므로 $x=12,\ y=5$

따라서 처음 직육면체의 밑면의 가로의 길이는 12 cm이다.

19-1 답 2 cm

처음 직육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면 밑면의 대각선의 길이가 10 cm이므로

$x^2+y^2=10^2 \quad \therefore x^2+y^2=100$ ……㉠

밑면의 가로와 세로의 길이를 각각 1 cm씩 줄였더니 부피가 처음 직육면체의 부피보다 65 cm^3만큼 감소하였으므로

$5(x-1)(y-1)=5xy-65$

$(x-1)(y-1)=xy-13$

$\therefore y=14-x$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2+(14-x)^2=100$

$2x^2-28x+96=0,\ x^2-14x+48=0$

$(x-6)(x-8)=0 \quad \therefore x=6$ 또는 $x=8$

㉡에서 $x=6$이면 $y=8$, $x=8$이면 $y=6$

따라서 처음 직육면체의 밑면의 가로와 세로의 길이의 차는

$8-6=2$ (cm)

다른 풀이

㉡에서 $x+y=14$이고, $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로

$14^2=100+2xy \quad \therefore xy=48$

이때 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=14^2-4\times48=4$이므로

$|x-y|=2$

따라서 처음 직육면체의 밑면의 가로와 세로의 길이의 차는 2 cm이다.

20 답 14 cm

직각삼각형의 빗변이 아닌 두 변의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=10^2 \\ \frac{1}{2}xy=24 \end{cases}$

즉 $\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ xy=48 \end{cases}$이므로 $\begin{cases} (x+y)^2-2xy=100 \\ xy=48 \end{cases}$

$x+y=u,\ xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u^2-2v=100 & \cdots\cdots ㉠ \\ v=48 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면 $u^2-96=100$

$u^2=196 \quad \therefore u=\pm14$

이때 $u=x+y>0$이므로 $u=14$

따라서 빗변이 아닌 두 변의 길이의 합은 14 cm이다.

20-1 답 3 cm

직각삼각형의 빗변이 아닌 두 변의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=15^2 \\ \frac{1}{2}xy=54 \end{cases}$

즉 $\begin{cases} x^2+y^2=225 \\ xy=108 \end{cases}$이므로 $\begin{cases} (x+y)^2-2xy=225 \\ xy=108 \end{cases}$

$x+y=u,\ xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u^2-2v=225 & \cdots\cdots ㉠ \\ v=108 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면 $u^2-216=225$

$u^2=441 \quad \therefore u=\pm21$

이때 $u=x+y>0$이므로 $u=21$

즉 $u=21,\ v=108$이므로 $x+y=21,\ xy=108$

$x,\ y$는 이차방정식 $t^2-21t+108=0$의 두 근이므로

$(t-9)(t-12)=0 \quad \therefore t=9$ 또는 $t=12$

$\therefore \begin{cases} x=9 \\ y=12 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=12 \\ y=9 \end{cases}$

따라서 빗변이 아닌 두 변의 길이의 차는

$12-9=3$ (cm)

21 답 41

두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면 각 자리의 숫자의 제곱의 합이 17이므로

$x^2+y^2=17$ ……㉠

일의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자를 바꾼 수와 처음 수의 차가 27이므로

$(10x+y)-(10y+x)=27 \quad \therefore y=x-3$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^2+(x-3)^2=17,\ 2x^2-6x-8=0$

$x^2-3x-4=0,\ (x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=4\ (\because x>0)$

$x=4$를 ㉡에 대입하면 $y=4-3=1$

따라서 처음 수는 41이다.

21-1 답 28

두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면 각 자리의 숫자의 제곱의 합이 68이므로

$x^2+y^2=68$ ……㉠

일의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자를 바꾼 수와 처음 수의 합이 110이므로

$(10y+x)+(10x+y)=110 \quad \therefore y=10-x$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^2+(10-x)^2=68,\ 2x^2-20x+32=0$

$x^2-10x+16=0,\ (x-2)(x-8)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=8$

㉡에서 $x=2$이면 $y=8$, $x=8$이면 $y=2$

그런데 $x<y$이므로 $x=2,\ y=8$

따라서 처음 수는 28이다.

22 답 ①

공통근이 α이므로 $x=\alpha$를 주어진 방정식에 대입하면

$\alpha^2+4k\alpha+2k=0$ ……㉠

$\alpha^2+k\alpha-k=0$ ……㉡

㉠$-$㉡을 하면 $3k\alpha+3k=0$

$3k(\alpha+1)=0 \qquad \therefore \alpha=-1\ (\because k\neq 0)$

$\alpha=-1$을 ㉠에 대입하면 $1-4k+2k=0$

$-2k=-1 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

$\therefore 2k+\alpha=2\times\frac{1}{2}+(-1)=0$

22-1 답 $k=1$, 공통근: -1

두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$\alpha^2+4k\alpha+1+2k=0$ ……㉠

$\alpha^2+k\alpha-k+1=0$ ……㉡

㉠$-$㉡을 하면 $3k\alpha+3k=0$

$3k(\alpha+1)=0 \qquad \therefore k=0$ 또는 $\alpha=-1$

(i) $k=0$일 때

두 이차방정식이 모두 $x^2+1=0$으로 일치하므로 공통근은 2개이다.

(ii) $\alpha=-1$일 때

$\alpha=-1$을 ㉠에 대입하면 $1-4k+1+2k=0$

$-2k=-2 \qquad \therefore k=1$

이때 두 이차방정식 $x^2+4x+3=0$, $x^2+x=0$은 공통근 -1을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 두 이차방정식이 오직 하나의 공통근을 가지려면 $k=1$이어야 하고 그때의 공통근은 -1이다.

23 답 -3

$x^2-2x-3=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

(i) 공통근이 $x=-1$일 때

$x=-1$을 $x^2-(2k-1)x+k+3=0$에 대입하면

$1+(2k-1)+k+3=0$, $3k=-3$

$\therefore k=-1$

(ii) 공통근이 $x=3$일 때

$x=3$을 $x^2-(2k-1)x+k+3=0$에 대입하면

$9-3(2k-1)+k+3=0$, $-5k=-15$

$\therefore k=3$

(i), (ii)에서 $k=-1$ 또는 $k=3$

따라서 k의 값의 곱은

$-1\times 3=-3$

23-1 답 2

$x^2+x-2=0$에서 $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

(i) 공통근이 $x=-2$일 때

$x=-2$를 $x^2+(2k-1)x+k=0$에 대입하면

$4-2(2k-1)+k=0$, $-3k=-6$

$\therefore k=2$

(ii) 공통근이 $x=1$일 때

$x=1$을 $x^2+(2k-1)x+k=0$에 대입하면

$1+(2k-1)+k=0$, $3k=0$

$\therefore k=0$

(i), (ii)에서 $k=2$ 또는 $k=0$

따라서 k의 값의 합은

$2+0=2$

24 답 ①

두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$\alpha^2+k\alpha+k+3=0$ ……㉠

$\alpha^2-\alpha-k^2-3k=0$ ……㉡

㉠$-$㉡을 하면 $(k+1)\alpha+k^2+4k+3=0$

$(k+1)\alpha+(k+1)(k+3)=0$, $(k+1)(\alpha+k+3)=0$

$\therefore \alpha=-k-3\ (\because k\neq -1)$ ……㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$(-k-3)^2+k(-k-3)+k+3=0$

$k^2+6k+9-k^2-3k+k+3=0$

$4k+12=0 \qquad \therefore k=-3$

24-1 답 -2

연립방정식의 근을 α라 하면

$2\alpha^2-(3k-1)\alpha+k^2+1=0$ ……㉠

$\alpha^2-2(k-1)\alpha+k^2-k-1=0$ ……㉡

㉠$-$㉡$\times 2$를 하면 $(k-3)\alpha-k^2+2k+3=0$

$(k-3)\alpha-(k+1)(k-3)=0$, $(k-3)(\alpha-k-1)=0$

$\therefore k=3$ 또는 $\alpha=k+1$

(i) $k=3$일 때

두 이차방정식이 모두 $x^2-4x+5=0$으로 일치하므로 연립방정식의 근은 2개이다.

(ii) $\alpha=k+1$일 때

$\alpha=k+1$을 ㉡에 대입하면

$(k+1)^2-2(k-1)(k+1)+k^2-k-1=0$

$k^2+2k+1-2k^2+2+k^2-k-1=0$

$k+2=0 \qquad \therefore k=-2$

(i), (ii)에서 $k=-2$

유형+ 완성하기 p. 185

25 답 ④

$xy-2x-3y+1=0$에서 $x(y-2)-3(y-2)=5$

$\therefore (x-3)(y-2)=5$

이때 x, y는 정수이므로 $x-3$, $y-2$의 값은 다음과 같다.

$x-3$	-5	-1	1	5
$y-2$	-1	-5	5	1

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=3 \end{cases}$

따라서 xy의 값은 -2 또는 -6 또는 28 또는 24이므로 최댓값은 28이다.

26 답 ④

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$의 양변에 $4xy$를 곱하면 $4y+4x=xy$

$xy-4x-4y=0$, $x(y-4)-4(y-4)=16$

$\therefore (x-4)(y-4)=16$

이때 x, y는 양의 정수이므로 $x-4$, $y-4$의 값은 다음과 같다.

$x-4$	1	2	4	8	16
$y-4$	16	8	4	2	1

따라서 순서쌍 (x, y)는 $(5, 20)$, $(6, 12)$, $(8, 8)$, $(12, 6)$, $(20, 5)$이므로 그 개수는 5이다.

27 답 ②

이차방정식 $x^2-kx+k+4=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k$ ⋯⋯ ㉠

$\alpha\beta=k+4$ ⋯⋯ ㉡

㉠－㉡을 하면 $\alpha+\beta-\alpha\beta=-4$

$\alpha\beta-\alpha-\beta=4$, $\alpha(\beta-1)-(\beta-1)=5$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=5$

이때 α, β는 정수이므로 $\alpha-1$, $\beta-1$의 값은 다음과 같다.

$\alpha-1$	-5	-1	1	5
$\beta-1$	-1	-5	5	1

$\therefore \begin{cases}\alpha=-4\\ \beta=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=-4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=6\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=6\\ \beta=2\end{cases}$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $k=-4$ 또는 $k=8$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-4+8=4$

28 답 ③

$4x^2+4xy+2y^2-2y+1=0$에서

$(4x^2+4xy+y^2)+(y^2-2y+1)=0$

$\therefore (2x+y)^2+(y-1)^2=0$

이때 x, y는 실수이므로

$2x+y=0$, $y-1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-\frac{1}{2}$, $y=1$

$\therefore x+y=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

다른 풀이

주어진 방정식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$4x^2+4yx+2y^2-2y+1=0$ ⋯⋯ ㉠

x는 실수이므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2y)^2-4(2y^2-2y+1)\geq 0$

$-4y^2+8y-4\geq 0$, $y^2-2y+1\leq 0$

$\therefore (y-1)^2\leq 0$

이때 y는 실수이므로 $y-1=0$ $\quad\therefore y=1$

$y=1$을 ㉠에 대입하면 $4x^2+4x+1=0$

$(2x+1)^2=0$ $\quad\therefore x=-\frac{1}{2}$

$\therefore x+y=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

29 답 3

$(x^2+y^2-30)^2+(x+y-6)^2=0$에서 x, y는 실수이므로

$x^2+y^2-30=0$, $x+y-6=0$

$\therefore x^2+y^2=30$, $x+y=6$ ⋯⋯ ❶

이때 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로

$6^2=30+2xy$, $2xy=6$

$\therefore xy=3$ ⋯⋯ ❷

채점 기준	비율
❶ x^2+y^2, $x+y$의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ xy의 값을 구할 수 있다.	50%

30 답 2

주어진 방정식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-2(y+2)x+2y^2+2y+5=0$ ⋯⋯ ㉠

x는 실수이므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(y+2)\}^2-(2y^2+2y+5)\geq 0$

$-y^2+2y-1\geq 0$, $y^2-2y+1\leq 0$

$\therefore (y-1)^2\leq 0$

이때 y는 실수이므로 $y-1=0$ $\quad\therefore y=1$

$y=1$을 ㉠에 대입하면 $x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0$ $\quad\therefore x=3$

$\therefore x-y=3-1=2$

학교 시험 대비 문제

p. 186~189

01 답 ④

$\begin{cases}x-y=4 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+y^2=40 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=x-4$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x-4)^2=40$, $x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

㉢에서 $x=-2$이면 $y=-6$, $x=6$이면 $y=2$

$\therefore |\alpha+\beta|=8$

02 답 1

$\begin{cases}x-y=1 & \cdots\cdots ㉠\\ (x-1)^2+y^2=8 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $x-1=y$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$y^2+y^2=8$, $2y^2=8$

$y^2=4$ $\quad\therefore y=2$ 또는 $y=-2$

㉢에서 $y=2$이면 $x=3$, $y=-2$이면 $x=-1$

이때 $\alpha>0$, $\beta>0$이므로 $\alpha=3$, $\beta=2$

$\therefore \alpha-\beta=3-2=1$

03 답 2

두 연립방정식의 공통인 해는 다음 연립방정식의 해와 같다.

$\begin{cases}x+y=7 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+y^2=25 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=-x+7$ ……㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(-x+7)^2=25$, $2x^2-14x+24=0$

$x^2-7x+12=0$, $(x-3)(x-4)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=4$

㉢에서 $x=3$이면 $y=4$, $x=4$이면 $y=3$

(i) $x=3$, $y=4$를 $ax-y=1$, $x-y=b$에 각각 대입하면

$3a-4=1$, $3-4=b$

$\therefore a=\frac{5}{3}$, $b=-1$

(ii) $x=4$, $y=3$을 $ax-y=1$, $x-y=b$에 각각 대입하면

$4a-3=1$, $4-3=b$

$\therefore a=1$, $b=1$

(i), (ii)에서 $a>0$, $b>0$이므로 $a=1$, $b=1$

$\therefore a+b=1+1=2$

04 답 ②

$\begin{cases}(x+y)(x-2y)=0 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $x=-y$ 또는 $x=2y$

이때 x, y는 양수이므로 $x=2y$

$x=2y$를 ㉡에 대입하면 $(2y)^2+y^2=10$, $5y^2=10$

$y^2=2$ $\quad\therefore y=\sqrt{2}$, $x=2\sqrt{2}$ ($\because x$, y는 양수)

$\therefore x+y=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

오답 피하기

x, y가 모두 양수이므로 $x=-y$가 될 수 없다.
또 $y^2=2$에서 $y=\pm\sqrt{2}$이지만 y가 양수이므로 $y=\sqrt{2}$임을 주의한다.

05 답 ①

$\begin{cases}(x+3y)(x-y)=0 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+xy-y^2=5 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $x=-3y$ 또는 $x=y$

이때 $x>0$, $y<0$이므로 $x=-3y$

$x=-3y$를 ㉡에 대입하면

$(-3y)^2+(-3y)\times y-y^2=5$

$5y^2=5$, $y^2=1$ $\quad\therefore y=-1$, $x=3$ ($\because x>0$, $y<0$)

따라서 $\alpha=3$, $\beta=-1$이므로

$\alpha+\beta=3+(-1)=2$

06 답 ①

$\begin{cases}3x^2+2xy-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-2xy+y^2=4 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(3x-y)=0$

$\therefore y=-x$ 또는 $y=3x$

(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+2x^2+(-x)^2=4$, $4x^2=4$, $x^2=1$

$\therefore x=\pm1$, $y=\mp1$ (복부호동순)

(ii) $y=3x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-6x^2+(3x)^2=4$, $4x^2=4$, $x^2=1$

$\therefore x=\pm1$, $y=\pm3$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 자연수인 해는 $x=1$, $y=3$이므로

$x+y=1+3=4$

07 답 ③

$\begin{cases}xy-x-y=-1\\ x^2+xy+y^2=13\end{cases}$에서 $\begin{cases}xy-(x+y)=-1\\ (x+y)^2-xy=13\end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$\begin{cases}v-u=-1 & \cdots\cdots ㉠\\ u^2-v=13 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $v=u-1$ ……㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $u^2-(u-1)=13$

$u^2-u-12=0$, $(u+3)(u-4)=0$

$\therefore u=-3$ 또는 $u=4$

㉢에서 $u=-3$이면 $v=-4$, $u=4$이면 $v=3$

(i) $u=-3$, $v=-4$일 때, $x+y=-3$, $xy=-4$

x, y는 이차방정식 $t^2+3t-4=0$의 두 근이므로

$(t+4)(t-1)=0$ $\quad\therefore t=-4$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases}x=-4\\ y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\ y=-4\end{cases}$

(ii) $u=4$, $v=3$일 때, $x+y=4$, $xy=3$

x, y는 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases}$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=-4\\ y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\ y=-4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases}$

따라서 연립방정식의 해가 아닌 것은 ③이다.

08 답 21

두 연립방정식 $\begin{cases}x^2-y^2=a\\ x+y=3\end{cases}$, $\begin{cases}xy=-10\\ x+2y=b\end{cases}$의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases}x+y=3\\ xy=-10\end{cases}$의 해와 같다.

즉 x, y는 이차방정식 $t^2-3t-10=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-5)=0$ $\quad\therefore t=-2$ 또는 $t=5$

$\therefore \begin{cases}x=-2\\ y=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=5\\ y=-2\end{cases}$

이때 a, b는 양수이므로 $x=5$, $y=-2$

$x=5$, $y=-2$를 $x^2-y^2=a$에 대입하면

$25-4=a$ $\quad\therefore a=21$

$x=5$, $y=-2$를 $x+2y=b$에 대입하면

$5+2\times(-2)=b$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore ab=21\times1=21$

09 답 $\frac{9}{5}$

$\begin{cases}2x+y=3 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+y^2=k & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=-2x+3$ ……㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2+(-2x+3)^2=k$

$\therefore 5x^2-12x-k+9=0$

이를 만족시키는 x의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-5(-k+9)=0$

$5k-9=0$ $\quad\therefore k=\frac{9}{5}$

10 답 0

주어진 연립방정식을 만족시키는 실수 x, y는 이차방정식 $t^2-2(a-2)t+a^2+2a=0$의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-2)\}^2-(a^2+2a)\ge0$

$-6a+4\ge0 \qquad \therefore a\le\frac{2}{3}$

따라서 정수 a의 최댓값은 0이다.

11 답 $k\ge\frac{1}{4}$

$\begin{cases} x+2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=-2y+1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $(-2y+1)^2+(-2y+1)y+y^2=k$

$\therefore 3y^2-3y-k+1=0$

이를 만족시키는 실수 y의 값이 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times3\times(-k+1)\ge0$

$12k-3\ge0 \qquad \therefore k\ge\frac{1}{4}$

12 답 ②

처음 땅의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라 하면 이 땅의 대각선의 길이가 20이므로

$x^2+y^2=20^2 \qquad \therefore x^2+y^2=400$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 3만큼씩 늘이면 넓이가 처음 땅의 넓이보다 93만큼 증가하므로

$(x+3)(y+3)=xy+93$, $3x+3y=84$

$\therefore y=28-x$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2+(28-x)^2=400$

$2x^2-56x+384=0$, $x^2-28x+192=0$

$(x-12)(x-16)=0 \qquad \therefore x=12$ 또는 $x=16$

㉡에서 $x=12$이면 $y=16$, $x=16$이면 $y=12$

따라서 처음 땅의 가로의 길이와 세로의 길이의 차는

$16-12=4$

13 답 ④

두 대각선의 길이를 각각 $2x$, $2y$라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=(4\sqrt{13})^2 \\ \frac{1}{2}\times2x\times2y=192 \end{cases}$

즉 $\begin{cases} x^2+y^2=208 \\ xy=96 \end{cases}$이므로 $\begin{cases} (x+y)^2-2xy=208 \\ xy=96 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 $\begin{cases} u^2-2v=208 & \cdots\cdots ㉠ \\ v=96 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면 $u^2-192=208$

$u^2=400 \qquad \therefore u=\pm20$

이때 $u=x+y>0$이므로 $u=20$

즉 $u=20$, $v=96$이므로 $x+y=20$, $xy=96$

x, y는 이차방정식 $t^2-20t+96=0$의 두 근이므로

$(t-8)(t-12)=0 \qquad \therefore t=8$ 또는 $t=12$

$\therefore \begin{cases} x=8 \\ y=12 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=12 \\ y=8 \end{cases}$

따라서 두 대각선 중 긴 대각선의 길이는 $2\times12=24$

14 답 $\frac{12}{7}$

공통근이 α이므로 $x=\alpha$를 주어진 방정식에 대입하면

$\alpha^2+3k\alpha-2k=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha^2+k\alpha+4k=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $2k\alpha-6k=0$

$2k(\alpha-3)=0 \qquad \therefore \alpha=3\ (\because k\ne0)$

$\alpha=3$을 ㉡에 대입하면 $9+3k+4k=0$

$7k=-9 \qquad \therefore k=-\frac{9}{7}$

$\therefore k+\alpha=-\frac{9}{7}+3=\frac{12}{7}$

15 답 2

$x^2-x-6=0$에서 $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

(i) 공통근이 $x=-2$일 때

$x=-2$를 $x^3-2(k-1)x+k^2=0$에 대입하면

$-8+4(k-1)+k^2=0$, $k^2+4k-12=0$

$(k+6)(k-2)=0$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=2$

(ii) 공통근이 $x=3$일 때

$x=3$을 $x^3-2(k-1)x+k^2=0$에 대입하면

$27-6(k-1)+k^2=0$, $k^2-6k+33=0$

$\therefore k=3\pm2\sqrt{6}i$

(i), (ii)에서 정수 k의 값은 -6, 2이므로 그 개수는 2이다.

16 답 32

$xy-3x-3y+4=0$에서 $x(y-3)-3(y-3)=5$

$\therefore (x-3)(y-3)=5$

이때 x, y는 정수이므로 $x-3$, $y-3$의 값은 다음과 같다.

$x-3$	-5	-1	1	5
$y-3$	-1	-5	5	1

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases}$

따라서 xy의 값은 -4 또는 32이므로 최댓값은 32이다.

17 답 ②

$2xy-4x-y-16=0$에서 $2x(y-2)-(y-2)=18$

$\therefore (2x-1)(y-2)=18$

이때 x, y는 양의 정수이므로 $2x-1$, $y-2$의 값은 다음과 같다.

$2x-1$	1	3	9
$y-2$	18	6	2

따라서 순서쌍 (x, y)는 $(1, 20)$, $(2, 8)$, $(5, 4)$이므로 그 개수는 3이다.

18 답 ①

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$의 양변에 $2xy$를 곱하면 $2y-2x=xy$

$xy+2x-2y=0$, $x(y+2)-2(y+2)=-4$

$\therefore (x-2)(y+2)=-4$

이때 x, y는 자연수이므로 $x-2$, $y+2$는 정수이고

$x-2\ge-1$, $y+2\ge3$ $\cdots\cdots$ ㉠

즉 $x-2$, $y+2$의 값은 다음과 같다.

$x-2$	1	-1	2	-2	4	-4
$y+2$	-4	4	-2	2	-1	1

위의 값 중에서 ㉠을 만족시키는 것은 $x-2=-1$, $y+2=4$이다.
$x-2=-1$에서 $x=1$, $y+2=4$에서 $y=2$
$\therefore x^2+y^2=1^2+2^2=5$

19 답 -1
두 이차방정식의 공통근을 α라 하면
$\alpha^2-(a^2+b^2)\alpha+2a=0$ ……㉠
$\alpha^2-2a\alpha+a^2+b^2=0$ ……㉡
㉠$-$㉡을 하면 $(2a-a^2-b^2)\alpha+2a-a^2-b^2=0$
$(2a-a^2-b^2)(\alpha+1)=0$
$\therefore \alpha=-1$ ($\because a^2+b^2\neq 2a$)
$\alpha=-1$을 ㉠에 대입하면
$1+(a^2+b^2)+2a=0$, $(a+1)^2+b^2=0$
이때 $a+1$, b는 실수이므로
$a+1=0$, $b=0$ $\quad\therefore a=-1$, $b=0$
$\therefore a-b=-1-0=-1$

참고 실수 A, B에 대하여 $A^2+B^2=0$이면
$A=0$, $B=0$

20 답 ③
$10x^2-6xy+y^2-4x+4=0$에서
$(9x^2-6xy+y^2)+(x^2-4x+4)=0$
$\therefore (3x-y)^2+(x-2)^2=0$
이때 x, y는 실수이므로 $3x-y=0$, $x-2=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=6$
$\therefore xy=2\times 6=12$

다른 풀이
주어진 방정식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$10x^2-2(3y+2)x+y^2+4=0$ ……㉠
x는 실수이므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=\{-(3y+2)\}^2-10(y^2+4)\geq 0$
$-y^2+12y-36\geq 0$, $y^2-12y+36\leq 0$
$\therefore (y-6)^2\leq 0$
이때 y는 실수이므로 $y-6=0$ $\quad\therefore y=6$
$y=6$을 ㉠에 대입하면 $10x^2-40x+40=0$
$10(x-2)^2=0$ $\quad\therefore x=2$
$\therefore xy=2\times 6=12$

21 답 12
$(x^2+y^2-25)^2+(x+y-7)^2=0$에서 x, y는 실수이므로
$x^2+y^2-25=0$, $x+y-7=0$
$\therefore x^2+y^2=25$, $x+y=7$
이때 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로
$7^2=25+2xy$, $2xy=24$
$\therefore xy=12$

서술형 1 답 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3\\y=-2\end{cases}$

$\begin{cases}x^2+y^2=13\\xy=6\end{cases}$에서 $\begin{cases}(x+y)^2-2xy=13\\xy=6\end{cases}$
$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 $\begin{cases}u^2-2v=13 & \cdots\cdots ㉠\\v=6 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$
㉡을 ㉠에 대입하면 $u^2-12=13$
$u^2=25$ $\quad\therefore u=\pm 5$ ……❶
(i) $u=5$, $v=6$일 때, $x+y=5$, $xy=6$
x, y는 이차방정식 $t^2-5t+6=0$의 두 근이므로
$(t-2)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=2$ 또는 $t=3$
$\therefore \begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$ ……❷
(ii) $u=-5$, $v=6$일 때, $x+y=-5$, $xy=6$
x, y는 이차방정식 $t^2+5t+6=0$의 두 근이므로
$(t+2)(t+3)=0$ $\quad\therefore t=-2$ 또는 $t=-3$
$\therefore \begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3\\y=-2\end{cases}$ ……❸
(i), (ii)에서 연립방정식의 해는
$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3\\y=-2\end{cases}$ ……❹

채점 기준	비율
❶ $x+y=u$, $xy=v$로 놓고 u, v의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $u=5$, $v=6$일 때, x, y의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $u=-5$, $v=6$일 때, x, y의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ 연립방정식의 해를 구할 수 있다.	10%

서술형 2 답 가로의 길이: 20 cm, 세로의 길이: 15 cm
직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm $(x>y)$라 하면 대각선의 길이가 25 cm이므로
$x^2+y^2=25^2$ $\quad\therefore x^2+y^2=625$ ……㉠
또 직사각형의 둘레의 길이가 70 cm이므로
$2(x+y)=70$ $\quad\therefore x+y=35$ ……㉡ ……❶
㉡에서 $y=35-x$ ……㉢
㉢을 ㉠에 대입하면 $x^2+(35-x)^2=625$
$2x^2-70x+600=0$, $x^2-35x+300=0$
$(x-15)(x-20)=0$ $\quad\therefore x=15$ 또는 $x=20$
$x=15$를 ㉢에 대입하면 $y=20$
$x=20$을 ㉢에 대입하면 $y=15$ ……❷
이때 $x>y$이므로 $x=20$, $y=15$
따라서 직사각형의 가로의 길이는 20 cm, 세로의 길이는 15 cm이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ 연립이차방정식을 세울 수 있다.	40%
❷ 연립이차방정식의 해를 구할 수 있다.	40%
❸ 직사각형의 가로, 세로의 길이를 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 -1
주어진 방정식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2-2(y-2)x+2y^2-6y+5=0$ ……㉠
x는 실수이므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=\{-(y-2)\}^2-(2y^2-6y+5)\geq 0$
$-y^2+2y-1\geq 0$, $y^2-2y+1\leq 0$
$\therefore (y-1)^2\leq 0$

이때 y는 실수이므로 $y-1=0$ $\therefore y=1$ ······❶

$y=1$을 ㉠에 대입하면 $x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0$ $\therefore x=-1$ ······❷

$\therefore xy=-1\times1=-1$ ······❸

채점 기준	비율
❶ y의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ x의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ xy의 값을 구할 수 있다.	20%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 190~191

01 답 ④

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-4y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1$ ······㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(2y+1)^2-4y^2=5$, $4y+1=5$

$\therefore y=1$

$y=1$을 ㉢에 대입하면 $x=2+1=3$

따라서 $a=3$, $b=1$이므로

$a+b=3+1=4$

다른 풀이

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-4y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡의 좌변을 인수분해하면

$(x-2y)(x+2y)=5$ ······㉢

㉠을 ㉢에 대입하면 $x+2y=5$ ······㉣

㉠, ㉣을 연립하여 풀면

$x=3$, $y=1$

따라서 $a=3$, $b=1$이므로

$a+b=3+1=4$

02 답 ①

$\begin{cases} x^2+y^2=40 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x^2+y^2=4xy & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $4x^2-4xy+y^2=0$

$(2x-y)^2=0$ $\therefore y=2x$ ······㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $x^2+4x^2=40$

$5x^2=40$, $x^2=8$ $\therefore x=\pm2\sqrt{2}$

㉢에서

$x=2\sqrt{2}$이면 $y=4\sqrt{2}$

$x=-2\sqrt{2}$이면 $y=-4\sqrt{2}$

따라서 $\begin{cases} \alpha=2\sqrt{2} \\ \beta=4\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=-2\sqrt{2} \\ \beta=-4\sqrt{2} \end{cases}$이므로

$\alpha\beta=16$

03 답 ①

$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x-2y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2-y^2=9$, $0=9$

즉 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$(2y)^2-y^2=9$, $3y^2=9$, $y^2=3$

$\therefore y=\pm\sqrt{3}$, $x=\pm2\sqrt{3}$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

이때 $\alpha_1<\alpha_2$이므로

$\alpha_1=-2\sqrt{3}$, $\beta_1=-\sqrt{3}$, $\alpha_2=2\sqrt{3}$, $\beta_2=\sqrt{3}$

$\therefore \beta_1-\beta_2=-\sqrt{3}-\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$

04 답 ⑤

$\begin{cases} r+2h=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ r^2-2h^2=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $r=8-2h$ ······㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(8-2h)^2-2h^2=8$, $2h^2-32h+56=0$

$h^2-16h+28=0$, $(h-2)(h-14)=0$

$\therefore h=2$ ($\because \underline{0<h<4}$) $r>0$이므로 $8-2h>0$ $\therefore h<4$

$h=2$를 ㉢에 대입하면

$r=8-2\times2=4$

따라서 이 용기의 부피는

$\pi r^2h=\pi\times4^2\times2=32\pi$

05 답 8

$\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3y^2=28 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+2$ ······㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(y+2)^2+3y^2=28$, $4y^2+4y-24=0$

$y^2+y-6=0$, $(y+3)(y-2)=0$

$\therefore y=-3$ 또는 $y=2$

㉢에서 $y=-3$이면 $x=-1$, $y=2$이면 $x=4$

이때 $\alpha>0$, $\beta>0$이므로 $\alpha=4$, $\beta=2$

$\therefore \alpha\beta=4\times2=8$

06 답 ②

$\begin{cases} x+y=k & \cdots\cdots ㉠ \\ xy+2x-1=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+k$ ······㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x(-x+k)+2x-1=0$, $-x^2+kx+2x-1=0$

$\therefore x^2-(k+2)x+1=0$

이를 만족시키는 x의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k+2)\}^2-4=0$, $k^2+4k=0$

$k(k+4)=0 \qquad \therefore k=0$ 또는 $k=-4$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은
$0+(-4)=-4$

07 답 ③

$\overline{AB}=a$, $\overline{EF}=b$이고 $\overline{AF}=5$, $\overline{EB}=1$이므로
$a+b=5+1 \qquad \therefore a=6-b$ ……㉠
직사각형 EBCI의 넓이는 a, 정사각형 EFGH의 넓이는 b^2이므로
$a=\frac{1}{4}b^2$ ……㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $6-b=\frac{1}{4}b^2$
$b^2+4b-24=0 \qquad \therefore b=-2\pm2\sqrt{7}$
이때 $a<b$이므로 $6-b<b \qquad \therefore b>3$
$\therefore b=-2+2\sqrt{7}$

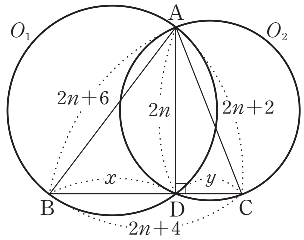
08 답 ②

$(x^2-x)(x^2-x+3)+k(x^2-x)+8=(x^2-x+a)(x^2-x+b)$
에서 $x^2-x=X$로 놓으면
$X(X+3)+kX+8=(X+a)(X+b)$
$X^2+(k+3)X+8=X^2+(a+b)X+ab$
이 등식이 X에 대한 항등식이므로
$a+b=k+3$, $ab=8$
$ab=8$이고, a, b $(a<b)$가 자연수이므로
$a=1$, $b=8$ 또는 $a=2$, $b=4$
(i) $a=1$, $b=8$인 경우
$k+3=a+b=9$
$\therefore k=6$
(ii) $a=2$, $b=4$인 경우
$k+3=a+b=6$
$\therefore k=3$
(i), (ii)에서 k의 값의 합은
$6+3=9$

09 답 394

$\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$가 이 순서대로 네 개의 연속된 짝수이므로
$\overline{AD}=2n$ (n은 자연수)이라 하면
$\overline{AC}=2n+2$, $\overline{BC}=2n+4$, $\overline{AB}=2n+6$

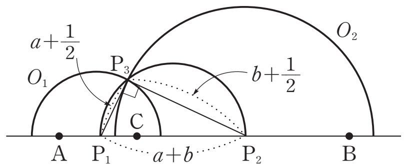
다음 그림과 같이 $\overline{BD}=x$, $\overline{CD}=y$라 하면 $x+y=2n+4$ ……㉠



두 삼각형 ABD, ACD는 직각삼각형이므로
$(2n+6)^2-x^2=(2n+2)^2-y^2$
$\therefore (x+y)(x-y)=8(2n+4)$ ……㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $(2n+4)(x-y)=8(2n+4)$
$\therefore x-y=8$ ……㉢
㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=n+6$, $y=n-2$
삼각형 ACD에서
$(2n+2)^2=(2n)^2+(n-2)^2$, $n^2-12n=0$
$n(n-12)=0 \qquad \therefore n=12$ ($\because n$은 자연수)
따라서 $\overline{AB}=2\times12+6=30$, $\overline{AC}=2\times12+2=26$이므로
$S=\pi\times15^2+\pi\times13^2=394\pi \qquad \therefore \frac{S}{\pi}=394$

10 답 ②

$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}$이므로 $6=2a+2b$
$\therefore a+b=3$ ……㉠
다음 그림과 같이 두 반원 O_1과 O_2의 교점을 P_3이라 하면 반원에 대한 원주각은 $90°$이므로 삼각형 $P_1P_2P_3$은 직각삼각형이다.



즉 $(a+b)^2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2$이므로
$a^2+2ab+b^2=a^2+a+\frac{1}{4}+b^2+b+\frac{1}{4}$
$\therefore 2ab=a+b+\frac{1}{2}$ ……㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$2ab=3+\frac{1}{2} \qquad \therefore ab=\frac{7}{4}$

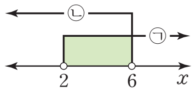
09 연립일차부등식

개념 완성하기 p. 195~196

01 답 $2<x<6$

$\begin{cases} x>2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x<6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는

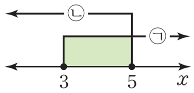


$2<x<6$

02 답 $3\le x\le 5$

$\begin{cases} x\ge 3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x\le 5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는

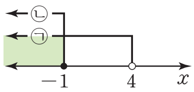


$3\le x\le 5$

03 답 $x\le -1$

$\begin{cases} x<4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x\le -1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는

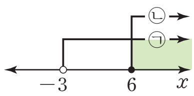


$x\le -1$

04 답 $x\ge 6$

$\begin{cases} x>-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x\ge 6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



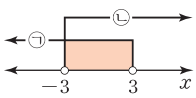
$x\ge 6$

05 답 $-3<x<3$

$-2x+6>x-3$에서 $-3x>-9$ $\quad\therefore x<3$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

$5x+4>4x+1$에서 $x>-3$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



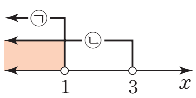
$-3<x<3$

06 답 $x<1$

$3x-5>6x-8$에서 $-3x>-3$ $\quad\therefore x<1$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

$1-x<-3x+7$에서 $2x<6$ $\quad\therefore x<3$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$x<1$

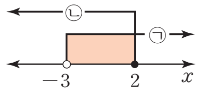
07 답 $-3<x\le 2$

$3x+8>x+2$에서 $2x>-6$ $\quad\therefore x>-3$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

$2(2-x)\ge x-2$에서 $4-2x\ge x-2$

$-3x\ge -6$ $\quad\therefore x\le 2$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$-3<x\le 2$

08 답 $1<x\le 7$

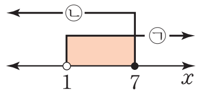
$5(x+1)>x+9$에서 $5x+5>x+9$

$4x>4$ $\quad\therefore x>1$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

$x+5\ge 2(x-1)$에서 $x+5\ge 2x-2$

$-x\ge -7$ $\quad\therefore x\le 7$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$1<x\le 7$

09 답 $x>4$

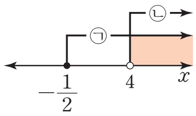
$4(x+1)\ge 2x+3$에서 $4x+4\ge 2x+3$

$2x\ge -1$ $\quad\therefore x\ge -\frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

$x+2<3(x-2)$에서 $x+2<3x-6$

$-2x<-8$ $\quad\therefore x>4$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$x>4$

10 답 $1<x\le 3$

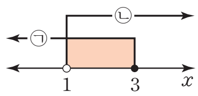
$2(x-1)\le 4$에서 $2x-2\le 4$

$2x\le 6$ $\quad\therefore x\le 3$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

$10-3(x+2)<x$에서 $-3x+4<x$

$-4x<-4$ $\quad\therefore x>1$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$1<x\le 3$

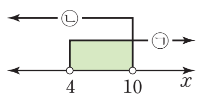
11 답 $4<x<10$

$2-x<x-6$에서 $-2x<-8$ $\quad\therefore x>4$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

$\frac{1}{4}x-2<\frac{1}{2}$의 양변에 4를 곱하면

$x-8<2$ $\quad\therefore x<10$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$4<x<10$

12 답 $-2\le x<1$

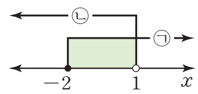
$0.2x+0.3\ge -0.1$의 양변에 10을 곱하면

$2x+3\ge -1$, $2x\ge -4$ $\quad\therefore x\ge -2$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

$0.3x-0.1<0.2$의 양변에 10을 곱하면

$3x-1<2$, $3x<3$ $\quad\therefore x<1$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$-2\le x<1$

13 답 $x\ge 1$

$0.4(x+1)\ge 0.2(x+3)$의 양변에 10을 곱하면

$4(x+1)\ge 2(x+3)$, $4x+4\ge 2x+6$

$2x \ge 2 \qquad \therefore x \ge 1$ ……㉠

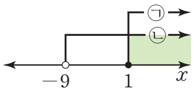
$\dfrac{x+2}{7} - \dfrac{x}{3} < 2$의 양변에 21을 곱하면

$3(x+2) - 7x < 42$, $3x+6-7x < 42$

$-4x < 36 \qquad \therefore x > -9$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는

$x \ge 1$



14 답 $-4 \le x \le 6$

$1.5x + 3.6 \ge -2.4$의 양변에 10을 곱하면

$15x + 36 \ge -24$, $15x \ge -60 \qquad \therefore x \ge -4$ ……㉠

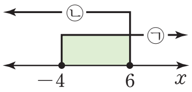
$\dfrac{3x-12}{2} \le \dfrac{2x+3}{5}$의 양변에 10을 곱하면

$5(3x-12) \le 2(2x+3)$, $15x - 60 \le 4x + 6$

$11x \le 66 \qquad \therefore x \le 6$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는

$-4 \le x \le 6$



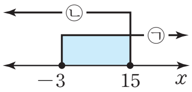
15 답 $-3 \le x \le 15$

$-2 \le x+1$에서 $x \ge -3$ ……㉠

$x+1 \le 16$에서 $x \le 15$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는

$-3 \le x \le 15$



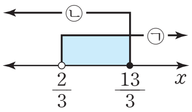
16 답 $\dfrac{2}{3} < x \le \dfrac{13}{3}$

$-4 < 3x - 6$에서 $-3x < -2 \qquad \therefore x > \dfrac{2}{3}$ ……㉠

$3x - 6 \le 7$에서 $3x \le 13 \qquad \therefore x \le \dfrac{13}{3}$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는

$\dfrac{2}{3} < x \le \dfrac{13}{3}$



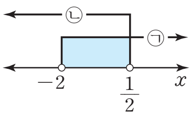
17 답 $-2 < x < \dfrac{1}{2}$

$-3 < 4x + 5$에서 $-4x < 8 \qquad \therefore x > -2$ ……㉠

$4x + 5 < 7$에서 $4x < 2 \qquad \therefore x < \dfrac{1}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는

$-2 < x < \dfrac{1}{2}$



18 답 $8 \le x \le 9$

$5 \le 3(x-4) - 7$에서 $3(x-4) \ge 12$

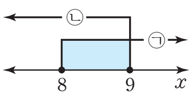
$x - 4 \ge 4 \qquad \therefore x \ge 8$ ……㉠

$3(x-4) - 7 \le 8$에서 $3(x-4) \le 15$

$x - 4 \le 5 \qquad \therefore x \le 9$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는

$8 \le x \le 9$



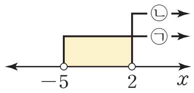
19 답 $x > 2$

$2x - 4 < 3x + 1$에서 $-x < 5 \qquad \therefore x > -5$ ……㉠

$3x + 1 < 7x - 7$에서 $-4x < -8 \qquad \therefore x > 2$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는

$x > 2$



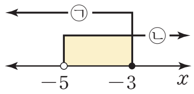
20 답 $-5 < x \le -3$

$2(x-1) \le x - 5$에서 $2x - 2 \le x - 5 \qquad \therefore x \le -3$ ……㉠

$x - 5 < 3x + 5$에서 $-2x < 10 \qquad \therefore x > -5$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는

$-5 < x \le -3$



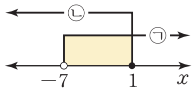
21 답 $-7 < x \le 1$

$3x - 8 < 5x + 6$에서 $-2x < 14 \qquad \therefore x > -7$ ……㉠

$5x + 6 \le 12 - x$에서 $6x \le 6 \qquad \therefore x \le 1$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는

$-7 < x \le 1$



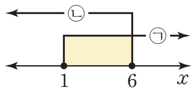
22 답 $1 \le x \le 6$

$x + 4 \le 3x + 2$에서 $-2x \le -2 \qquad \therefore x \ge 1$ ……㉠

$3x + 2 \le x + 14$에서 $2x \le 12 \qquad \therefore x \le 6$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는

$1 \le x \le 6$



23 답 $x = 4$

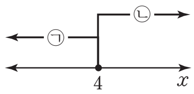
$2(x+2) + 1 \ge 4x - 3$에서 $2x + 5 \ge 4x - 3$

$-2x \ge -8 \qquad \therefore x \le 4$ ……㉠

$3x - 5 \ge x + 3$에서 $2x \ge 8 \qquad \therefore x \ge 4$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는

$x = 4$



24 답 $x = -6$

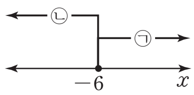
$\dfrac{x}{2} + 1 \ge -2$에서 $\dfrac{x}{2} \ge -3 \qquad \therefore x \ge -6$ ……㉠

$2x + 3 \le -(x + 15)$에서 $2x + 3 \le -x - 15$

$3x \le -18 \qquad \therefore x \le -6$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는

$x = -6$

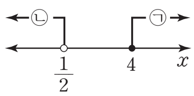


25 답 해는 없다.

$2x - (x+1) \ge 3$에서 $x - 1 \ge 3 \qquad \therefore x \ge 4$ ……㉠

$3x + 2 < -x + 4$에서 $4x < 2 \qquad \therefore x < \dfrac{1}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



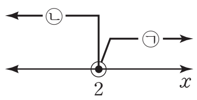
26 답 해는 없다.

$3x+2>8$에서 $3x>6$ $\quad\therefore x>2$ $\quad\cdots\cdots$㉠

$3(x-4)\le -6$에서 $3x-12\le -6$

$3x\le 6$ $\quad\therefore x\le 2$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



27 답 $-4<x<8$

$|x-2|<6$에서 $-6<x-2<6$

$\therefore -4<x<8$

28 답 $-\frac{1}{4}\le x\le \frac{3}{4}$

$|4x-1|\le 2$에서 $-2\le 4x-1\le 2$

$-1\le 4x\le 3$ $\quad\therefore -\frac{1}{4}\le x\le \frac{3}{4}$

29 답 $x<-1$ 또는 $x>2$

$|2x-1|>3$에서 $2x-1<-3$ 또는 $2x-1>3$

$2x<-2$ 또는 $2x>4$ $\quad\therefore x<-1$ 또는 $x>2$

30 답 $x<-3$ 또는 $x>9$

$\left|\frac{1}{3}x-1\right|>2$에서 $\frac{1}{3}x-1<-2$ 또는 $\frac{1}{3}x-1>2$

$\frac{1}{3}x<-1$ 또는 $\frac{1}{3}x>3$ $\quad\therefore x<-3$ 또는 $x>9$

31 답 $-2\le x<-1$ 또는 $2<x\le 3$

$3<|2x-1|\le 5$에서

$-5\le 2x-1<-3$ 또는 $3<2x-1\le 5$

$-4\le 2x<-2$ 또는 $4<2x\le 6$

$\therefore -2\le x<-1$ 또는 $2<x\le 3$

32 답 $-2\le x\le -\frac{1}{2}$ 또는 $0\le x\le \frac{3}{2}$

$1\le |4x+1|\le 7$에서

$-7\le 4x+1\le -1$ 또는 $1\le 4x+1\le 7$

$-8\le 4x\le -2$ 또는 $0\le 4x\le 6$

$\therefore -2\le x\le -\frac{1}{2}$ 또는 $0\le x\le \frac{3}{2}$

33 답 해는 없다.

$|2x-3|<x-2$에서

(i) $x<\frac{3}{2}$일 때, $-(2x-3)<x-2$

$-2x+3<x-2$, $-3x<-5$ $\quad\therefore x>\frac{5}{3}$

그런데 $x<\frac{3}{2}$이므로 해는 없다.

(ii) $x\ge \frac{3}{2}$일 때, $2x-3<x-2$ $\quad\therefore x<1$

그런데 $x\ge \frac{3}{2}$이므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 없다.

34 답 $x\ge 2$

$|x-1|\le 2x-3$에서

(i) $x<1$일 때, $-(x-1)\le 2x-3$

$-x+1\le 2x-3$, $-3x\le -4$ $\quad\therefore x\ge \frac{4}{3}$

그런데 $x<1$이므로 해는 없다.

(ii) $x\ge 1$일 때, $x-1\le 2x-3$

$-x\le -2$ $\quad\therefore x\ge 2$

그런데 $x\ge 1$이므로 $x\ge 2$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x\ge 2$

35 답 $-1<x<7$

$|3x-5|-9<x$에서

(i) $x<\frac{5}{3}$일 때, $-(3x-5)-9<x$

$-3x-4<x$, $-4x<4$ $\quad\therefore x>-1$

그런데 $x<\frac{5}{3}$이므로 $-1<x<\frac{5}{3}$

(ii) $x\ge \frac{5}{3}$일 때, $3x-5-9<x$

$3x-14<x$, $2x<14$ $\quad\therefore x<7$

그런데 $x\ge \frac{5}{3}$이므로 $\frac{5}{3}\le x<7$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-1<x<7$

36 답 모든 실수

$|2x-5|+4\ge x$에서

(i) $x<\frac{5}{2}$일 때, $-(2x-5)+4\ge x$

$-2x+9\ge x$, $-3x\ge -9$ $\quad\therefore x\le 3$

그런데 $x<\frac{5}{2}$이므로 $x<\frac{5}{2}$

(ii) $x\ge \frac{5}{2}$일 때, $2x-5+4\ge x$

$2x-1\ge x$ $\quad\therefore x\ge 1$

그런데 $x\ge \frac{5}{2}$이므로 $x\ge \frac{5}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

37 답 $x<\frac{1}{2}$

$|x+1|<|x-2|$에서

(i) $x<-1$일 때, $-(x+1)<-(x-2)$

$-x-1<-x+2$ $\quad\therefore 0<3$

즉 해는 모든 실수이다.

그런데 $x<-1$이므로 $x<-1$

(ii) $-1\le x<2$일 때, $x+1<-(x-2)$

$x+1<-x+2$, $2x<1$ $\quad\therefore x<\frac{1}{2}$

그런데 $-1\le x<2$이므로 $-1\le x<\frac{1}{2}$

(iii) $x\ge 2$일 때, $x+1<x-2$ $\quad\therefore 0<-3$

즉 해는 없다.

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$x<\frac{1}{2}$

38 답 $x\geq -1$

$|x-1|\leq|x+3|$에서

(i) $x<-3$일 때, $-(x-1)\leq-(x+3)$

$-x+1\leq-x-3$ $\quad\therefore 0\leq-4$

즉 해는 없다.

(ii) $-3\leq x<1$일 때, $-(x-1)\leq x+3$

$-x+1\leq x+3$, $-2x\leq 2$ $\quad\therefore x\geq-1$

그런데 $-3\leq x<1$이므로 $-1\leq x<1$

(iii) $x\geq 1$일 때, $x-1\leq x+3$ $\quad\therefore 0\leq 4$

즉 해는 모든 실수이다.

그런데 $x\geq 1$이므로 $x\geq 1$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$x\geq -1$

39 답 $x\leq-\frac{4}{3}$ 또는 $x\geq\frac{2}{3}$

$|x|+|2x+1|\geq 3$에서

(i) $x<-\frac{1}{2}$일 때, $-x-(2x+1)\geq 3$

$-3x-1\geq 3$, $-3x\geq 4$ $\quad\therefore x\leq-\frac{4}{3}$

그런데 $x<-\frac{1}{2}$이므로 $x\leq-\frac{4}{3}$

(ii) $-\frac{1}{2}\leq x<0$일 때, $-x+2x+1\geq 3$

$\therefore x\geq 2$

그런데 $-\frac{1}{2}\leq x<0$이므로 해는 없다.

(iii) $x\geq 0$일 때, $x+2x+1\geq 3$

$3x\geq 2$ $\quad\therefore x\geq\frac{2}{3}$

그런데 $x\geq 0$이므로 $x\geq\frac{2}{3}$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$x\leq-\frac{4}{3}$ 또는 $x\geq\frac{2}{3}$

40 답 $x<-3$ 또는 $x>8$

$|x|+|x-5|>11$에서

(i) $x<0$일 때, $-x-(x-5)>11$

$-2x+5>11$, $-2x>6$ $\quad\therefore x<-3$

그런데 $x<0$이므로 $x<-3$

(ii) $0\leq x<5$일 때, $x-(x-5)>11$

$x-x+5>11$ $\quad\therefore 0>6$

즉 해는 없다.

(iii) $x\geq 5$일 때, $x+x-5>11$

$2x>16$ $\quad\therefore x>8$

그런데 $x\geq 5$이므로 $x>8$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$x<-3$ 또는 $x>8$

41 답 $-3\leq x\leq 3$

$|x+1|+|x-1|\leq 6$에서

(i) $x<-1$일 때, $-(x+1)-(x-1)\leq 6$

$-x-1-x+1\leq 6$, $-2x\leq 6$ $\quad\therefore x\geq-3$

그런데 $x<-1$이므로 $-3\leq x<-1$

(ii) $-1\leq x<1$일 때, $x+1-(x-1)\leq 6$

$x+1-x+1\leq 6$ $\quad\therefore 0\leq 4$

즉 해는 모든 실수이다.

그런데 $-1\leq x<1$이므로 $-1\leq x<1$

(iii) $x\geq 1$일 때, $x+1+x-1\leq 6$

$2x\leq 6$ $\quad\therefore x\leq 3$

그런데 $x\geq 1$이므로 $1\leq x\leq 3$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$-3\leq x\leq 3$

42 답 $-2<x<3$

$|x+1|+|x-2|<5$에서

(i) $x<-1$일 때, $-(x+1)-(x-2)<5$

$-x-1-x+2<5$, $-2x<4$ $\quad\therefore x>-2$

그런데 $x<-1$이므로 $-2<x<-1$

(ii) $-1\leq x<2$일 때, $x+1-(x-2)<5$

$x+1-x+2<5$ $\quad\therefore 0<2$

즉 해는 모든 실수이다.

그런데 $-1\leq x<2$이므로 $-1\leq x<2$

(iii) $x\geq 2$일 때, $x+1+x-2<5$

$2x<6$ $\quad\therefore x<3$

그런데 $x\geq 2$이므로 $2\leq x<3$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$-2<x<3$

유형 완성하기 p. 197~208

01 답 4

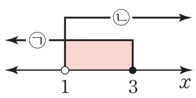
$2(x-4)\leq-x+1$에서 $2x-8\leq-x+1$

$3x\leq 9$ $\quad\therefore x\leq 3$ ······ ㉠

$7+3x>-2(x-6)$에서 $7+3x>-2x+12$

$5x>5$ $\quad\therefore x>1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$1<x\leq 3$

따라서 $a=1$, $b=3$이므로

$a+b=1+3=4$

01-1 답 1

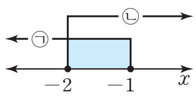
$5(x+2)-1\leq 3x+7$에서 $5x+9\leq 3x+7$

$2x\leq-2$ $\quad\therefore x\leq-1$ ······ ㉠

$3x-(2x-1)\leq 2x+3$에서 $x+1\leq 2x+3$

$-x\leq 2$ $\quad\therefore x\geq-2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$-2\leq x\leq-1$

따라서 $a=-2$, $b=-1$이므로

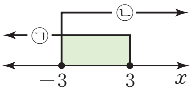
$b-a=-1-(-2)=1$

02 답 ③

$3x-4\le5$에서 $3x\le9$ $\quad\therefore x\le3$ ……㉠

$-2x+1\le7$에서 $-2x\le6$ $\quad\therefore x\ge-3$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$-3\le x\le3$

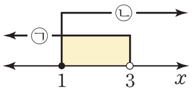
따라서 정수 x의 값은 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3이므로 그 개수는 7이다.

02-1 답 ④

$4x-3<3x$에서 $x<3$ ……㉠

$2-x\le5x-4$에서 $-6x\le-6$ $\quad\therefore x\ge1$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$1\le x<3$

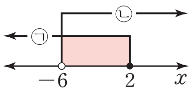
03 답 ②

$-2x\ge x-6$에서 $-3x\ge-6$ $\quad\therefore x\le2$ ……㉠

$\frac{2}{3}x-1>\frac{1}{2}(x-4)$에서 $4x-6>3(x-4)$

$4x-6>3x-12$ $\quad\therefore x>-6$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$-6<x\le2$

따라서 정수 x의 최솟값은 -5이다.

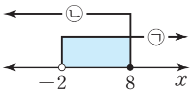
03-1 답 ①

$3x+1<4x+3$에서 $-x<2$ $\quad\therefore x>-2$ ……㉠

$\frac{1}{6}(x-2)\le-\frac{1}{2}x+5$에서 $x-2\le-3x+30$

$4x\le32$ $\quad\therefore x\le8$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$-2<x\le8$

따라서 정수 x의 값은 -1, 0, 1, $\cdots$, 8이므로 그 개수는 10이다.

04 답 0

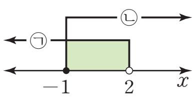
$0.4(x-1)+0.3>\frac{1}{2}x-0.3$에서 $4(x-1)+3>5x-3$

$4x-1>5x-3$, $-x>-2$ $\quad\therefore x<2$ ……㉠

$\frac{1}{2}x+1\ge\frac{x+4}{6}$에서 $3x+6\ge x+4$

$2x\ge-2$ $\quad\therefore x\ge-1$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$-1\le x<2$

따라서 $M=1$, $m=-1$이므로

$M+m=1+(-1)=0$

04-1 답 4

$0.5(-2x+3)+0.2\ge0.3(x-3)$에서

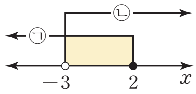
$5(-2x+3)+2\ge3(x-3)$, $-10x+17\ge3x-9$

$-13x\ge-26$ $\quad\therefore x\le2$ ……㉠

$\frac{1-x}{4}<\frac{x+3}{2}+1$에서 $1-x<2(x+3)+4$

$1-x<2x+10$, $-3x<9$ $\quad\therefore x>-3$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$-3<x\le2$

따라서 $M=2$, $m=-2$이므로

$M-m=2-(-2)=4$

05 답 4

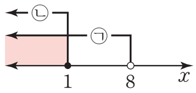
$x+7>2(x-1)+1$에서 $x+7>2x-1$

$-x>-8$ $\quad\therefore x<8$ ……㉠

$2x-1\le\frac{2x+1}{3}$에서 $6x-3\le2x+1$

$4x\le4$ $\quad\therefore x\le1$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$x\le1$

이때 $-x\ge-1$이므로 $-x+5\ge4$ $\quad\therefore A\ge4$

따라서 A의 최솟값은 4이다.

05-1 답 $6\le A<14$

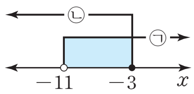
$\frac{3x+5}{4}>\frac{2x+1}{3}$에서 $3(3x+5)>4(2x+1)$

$9x+15>8x+4$ $\quad\therefore x>-11$ ……㉠

$3(x+2)\le2(x+1)+1$에서 $3x+6\le2x+3$

$\therefore x\le-3$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$-11<x\le-3$

이때 $3\le-x<11$이므로 $6\le-x+3<14$

$\therefore 6\le A<14$

06 답 ⑤

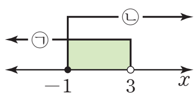
$5x<3(11-2x)$에서 $5x<33-6x$

$11x<33$ $\quad\therefore x<3$ ……㉠

$2(x-2)+1\le4x-1$에서 $2x-3\le4x-1$

$-2x\le2$ $\quad\therefore x\ge-1$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$-1\le x<3$ $\quad\therefore a=-1$, $b=3$

$a=-1$, $b=3$을 $ax+b>0$에 대입하면 $-x+3>0$

$-x>-3$ $\quad\therefore x<3$

따라서 해가 아닌 것은 ⑤이다.

06-1 답 ①

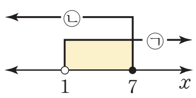
$5(x+1)>x+9$에서 $5x+5>x+9$

$4x>4$ $\quad\therefore x>1$ ……㉠

$x+5\ge2(x-1)$에서 $x+5\ge2x-2$

$-x\ge-7$ $\quad\therefore x\le7$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$1<x\le7$ $\quad\therefore a=1$, $b=7$

$a=1$, $b=7$을 $bx+a>0$에 대입하면

$7x+1>0 \qquad \therefore x>-\frac{1}{7}$

따라서 해가 아닌 것은 ①이다.

07 답 ②

주어진 부등식에서 $\begin{cases} 7(x-1)<3x+5 \\ 3x+5<15-4(2-x) \end{cases}$

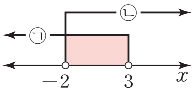
$7(x-1)<3x+5$에서 $7x-7<3x+5$

$4x<12 \qquad \therefore x<3$ ……㉠

$3x+5<15-4(2-x)$에서 $3x+5<7+4x$

$-x<2 \qquad \therefore x>-2$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$-2<x<3$

따라서 정수 x의 값은 -1, 0, 1, 2이므로 그 합은

$-1+0+1+2=2$

07-1 답 ⑤

주어진 부등식에서 $\begin{cases} 3x-7<5(x-1)+2 \\ 5(x-1)+2\le-(x-9)+12 \end{cases}$

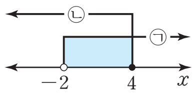
$3x-7<5(x-1)+2$에서 $3x-7<5x-3$

$-2x<4 \qquad \therefore x>-2$ ……㉠

$5(x-1)+2\le-(x-9)+12$에서 $5x-3\le-x+21$

$6x\le24 \qquad \therefore x\le4$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$-2<x\le4$

따라서 정수 x의 값은 -1, 0, 1, 2, 3, 4이므로 그 합은

$-1+0+1+2+3+4=9$

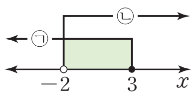
08 답 ⑤

주어진 부등식에서 $\begin{cases} 2+3x\le2x+5 \\ 2x+5<3x+7 \end{cases}$

$2+3x\le2x+5$에서 $x\le3$ ……㉠

$2x+5<3x+7$에서 $x>-2$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$-2<x\le3$

따라서 정수 x의 값은 -1, 0, 1, 2, 3이므로 그 개수는 5이다.

08-1 답 ④

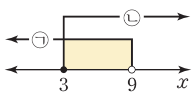
주어진 부등식에서 $\begin{cases} 2+4(x-4)<2x+4 \\ 2x+4\le3x+1 \end{cases}$

$2+4(x-4)<2x+4$에서 $4x-14<2x+4$

$2x<18 \qquad \therefore x<9$ ……㉠

$2x+4\le3x+1$에서 $x\ge3$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$3\le x<9$

따라서 정수 x의 값은 3, 4, 5, 6, 7, 8이므로 그 개수는 6이다.

09 답 ①

주어진 부등식에서 $\begin{cases} \frac{x-13}{2}\le2-\frac{4x-2}{3} \\ 2-\frac{4x-2}{3}\le\frac{2-x}{4} \end{cases}$

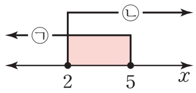
$\frac{x-13}{2}\le2-\frac{4x-2}{3}$에서 $3(x-13)\le12-2(4x-2)$

$3x-39\le16-8x$, $11x\le55 \qquad \therefore x\le5$ ……㉠

$2-\frac{4x-2}{3}\le\frac{2-x}{4}$에서 $24-4(4x-2)\le3(2-x)$

$32-16x\le6-3x$, $-13x\le-26 \qquad \therefore x\ge2$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$2\le x\le5$

따라서 주어진 부등식의 해가 아닌 것은 ①이다.

09-1 답 2

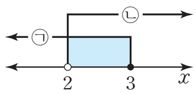
$\frac{x+1}{2}-\frac{x-3}{4}\le2$에서 $2(x+1)-(x-3)\le8$

$x+5\le8 \qquad \therefore x\le3$ ……㉠

$4x+5<10(x-1)+3$에서 $4x+5<10x-7$

$-6x<-12 \qquad \therefore x>2$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$2<x\le3$ ……❶

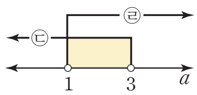
즉 $M=3$이므로 $\frac{a+3}{2}<3<a+2$

위의 부등식에서 $\begin{cases} \frac{a+3}{2}<3 \\ 3<a+2 \end{cases}$

$\frac{a+3}{2}<3$에서 $a+3<6 \qquad \therefore a<3$ ……㉢

$3<a+2$에서 $a>1$ ……㉣

㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$1<a<3$ ……❷

이때 a는 정수이므로 $a=2$ ……❸

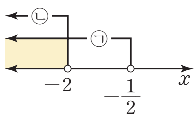
채점 기준	비율
❶ 주어진 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	40%
❷ 부등식 $\frac{a+3}{2}<M<a+2$의 해를 구할 수 있다.	40%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

10 답 ④

① $4-2x>5$에서 $-2x>1 \qquad \therefore x<-\frac{1}{2}$ ……㉠

$3x+4<-2$에서 $3x<-6 \qquad \therefore x<-2$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $x<-2$

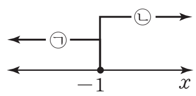


② $3x-2\le2x-3$에서 $x\le-1$ ……㉠

$2(x+3)+5\ge-9x$에서 $2x+11\ge-9x$

$11x\ge-11 \qquad \therefore x\ge-1$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $x=-1$



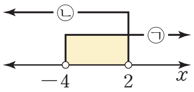
③ $0.2x-1.2<0.5x$에서 $2x-12<5x$

$-3x<12$ $\therefore x>-4$ ……㉠

$\frac{5}{2}x-1<4$에서 $5x-2<8$

$5x<10$ $\therefore x<2$ ……㉡

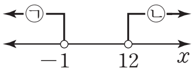
㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $-4<x<2$



④ $x+4<1-2x$에서 $3x<-3$ $\therefore x<-1$ ……㉠

$1+\frac{x}{3}<\frac{x-2}{2}$에서 $6+2x<3x-6$ $\therefore x>12$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.

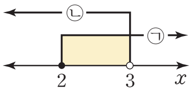


⑤ 주어진 부등식에서 $\begin{cases}8\le 5x-2\\5x-2<13\end{cases}$

$8\le 5x-2$에서 $-5x\le -10$ $\therefore x\ge 2$ ……㉠

$5x-2<13$에서 $5x<15$ $\therefore x<3$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는 $2\le x<3$



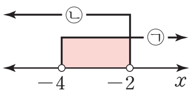
따라서 해가 없는 것은 ④이다.

10-1 답 ③

① $3-x<7$에서 $x>-4$ ……㉠

$2x+3<-1$에서 $2x<-4$ $\therefore x<-2$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $-4<x<-2$

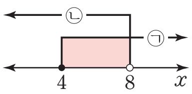


② $3x-4\ge 2x$에서 $x\ge 4$ ……㉠

$x+1>3(x-5)$에서 $x+1>3x-15$

$-2x>-16$ $\therefore x<8$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $4\le x<8$

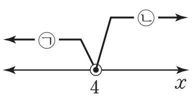


③ $3(9-x)>15$ 에서 $27-3x>15$

$-3x>-12$ $\therefore x<4$ ……㉠

$\frac{1}{2}x+1\ge 3$에서 $x+2\ge 6$ $\therefore x\ge 4$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



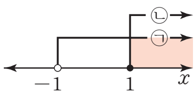
④ $3(x+2)-7x<10$에서 $-4x+6<10$

$-4x<4$ $\therefore x>-1$ ……㉠

$0.4(x+1)\ge 0.2(x+3)$에서 $4(x+1)\ge 2(x+3)$

$4x+4\ge 2x+6$, $2x\ge 2$ $\therefore x\ge 1$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $x\ge 1$

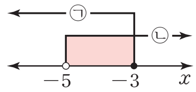


⑤ 주어진 부등식에서 $\begin{cases}2(x-1)\le x-5\\x-5<3x+5\end{cases}$

$2(x-1)\le x-5$에서 $2x-2\le x-5$ $\therefore x\le -3$ ……㉠

$x-5<3x+5$에서 $-2x<10$ $\therefore x>-5$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는 $-5<x\le -3$



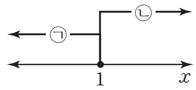
따라서 해가 없는 것은 ③이다.

11 답 ④

$x-8\le -4x-3$에서 $5x\le 5$ $\therefore x\le 1$ ……㉠

$x+2\ge 5-2x$에서 $3x\ge 3$ $\therefore x\ge 1$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $x=1$ $\therefore a=1$



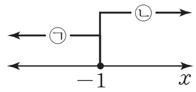
11-1 답 -1

$-3-x\ge 2x$에서 $-3x\ge 3$ $\therefore x\le -1$ ……㉠

$2(x+5)\ge 3-5x$에서 $2x+10\ge 3-5x$

$7x\ge -7$ $\therefore x\ge -1$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $x=-1$ $\therefore a=-1$



12 답 해는 없다.

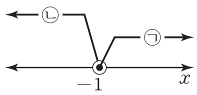
$\frac{x-1}{2}\ge\frac{x-2}{3}$에서 $3(x-1)\ge 2(x-2)$

$3x-3\ge 2x-4$ $\therefore x\ge -1$ ……㉠

$\frac{3(1-x)}{2}>-x+2$에서 $3(1-x)>-2x+4$

$3-3x>-2x+4$, $-x>1$ $\therefore x<-1$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



12-1 답 $x=2$

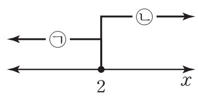
$0.5(1-2x)+0.9\ge 0.3(x-4)$에서 $5(1-2x)+9\ge 3(x-4)$

$14-10x\ge 3x-12$, $-13x\ge -26$ $\therefore x\le 2$ ……㉠

$\frac{1-x}{2}\le\frac{x-12}{4}+x$에서 $2(1-x)\le x-12+4x$

$2-2x\le 5x-12$, $-7x\le -14$ $\therefore x\ge 2$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $x=2$



13 답 1

$5(2x+3)\ge 3x+1$에서 $10x+15\ge 3x+1$

$7x\ge -14$ $\therefore x\ge -2$

$2(x-3)<x-a$에서 $2x-6<x-a$ $\therefore x<6-a$

주어진 연립부등식의 해가 $b\le x<3$이므로

$-2=b$, $6-a=3$ $\therefore a=3, b=-2$

$\therefore a+b=3+(-2)=1$

13-1 답 ①

$3x-1\ge x+a$ 에서 $2x\ge a+1$ $\therefore x\ge\frac{a+1}{2}$

$x+4>2(2x-1)$에서 $x+4>4x-2$

$-3x>-6$ $\therefore x<2$

주어진 연립부등식의 해가 $-2\le x<b$이므로

$\frac{a+1}{2}=-2,\ 2=b \qquad \therefore a=-5,\ b=2$

$\therefore a-b=-5-2=-7$

14 답 7

$2x-2a<4$에서 $2x<2a+4 \qquad \therefore x<a+2$

$x-2\le 2x-b$에서 $-x\le -b+2 \qquad \therefore x\ge b-2$

주어진 그림에서 연립부등식의 해가 $2\le x<5$이므로

$a+2=5,\ b-2=2 \qquad \therefore a=3,\ b=4$

$\therefore a+b=3+4=7$

14-1 답 -1

$x-3a\ge -6$에서 $x\ge 3a-6$

$3x+b>x+2$에서 $2x>2-b \qquad \therefore x>\frac{2-b}{2}$

주어진 그림에서 각 부등식의 해가 $x>-1,\ x\ge 3$이므로

$3a-6=3,\ \frac{2-b}{2}=-1 \qquad \therefore a=3,\ b=4$

$\therefore a-b=3-4=-1$

15 답 3

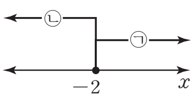
$5x-2\ge 3(x-2)$에서 $5x-2\ge 3x-6$

$2x\ge -4 \qquad \therefore x\ge -2$ ……㉠

$4x+1\ge 5x+a$에서 $-x\ge a-1$

$\therefore x\le 1-a$ ……㉡

주어진 연립부등식의 해가 $x=-2$이어야 하므로 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $1-a=-2$이므로 $a=3$

15-1 답 -4

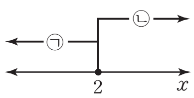
$5-x\ge 2x+a$에서 $-3x\ge a-5$

$\therefore x\le \frac{-a+5}{3}$ ……㉠ ……❶

$2(x-5)\ge -5x+b$에서 $2x-10\ge -5x+b$

$7x\ge b+10 \qquad \therefore x\ge \frac{b+10}{7}$ ……㉡ ……❷

주어진 연립부등식의 해가 $x=2$이어야 하므로 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $\frac{-a+5}{3}=2,\ \frac{b+10}{7}=2$이므로 $a=-1,\ b=4$ ……❸

$\therefore ab=-1\times 4=-4$ ……❹

채점 기준	비율
❶ 부등식 $5-x\ge 2x+a$의 해를 구할 수 있다.	30%
❷ 부등식 $2(x-5)\ge -5x+b$의 해를 구할 수 있다.	30%
❸ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

16 답 ⑤

$\frac{x+a}{2}-2\le \frac{x-3}{4}$에서 $2(x+a)-8\le x-3$

$2x+2a-8\le x-3 \qquad \therefore x\le -2a+5$

$\frac{1}{6}x+\frac{3}{2}\ge \frac{1}{3}(2x-3)$에서 $x+9\ge 2(2x-3)$

$x+9\ge 4x-6,\ -3x\ge -15 \qquad \therefore x\le 5$

주어진 연립부등식의 해가 $x\le 1$이므로

$-2a+5=1,\ -2a=-4 \qquad \therefore a=2$

16-1 답 ①

$\frac{x+2}{3}-\frac{x}{6}\ge \frac{1}{2}$에서 $2(x+2)-x\ge 3$

$x+4\ge 3 \qquad \therefore x\ge -1$

$x+\frac{3}{2}\ge \frac{1}{2}(x-a)$에서 $2x+3\ge x-a$

$\therefore x\ge -a-3$

주어진 연립부등식의 해가 $x\ge 3$이므로

$-a-3=3 \qquad \therefore a=-6$

17 답 -9

주어진 부등식에서 $\begin{cases} 3x+a<5x-1 \\ 5x-1<-2(x-b) \end{cases}$ ……❶

$3x+a<5x-1$에서 $-2x<-a-1 \qquad \therefore x>\frac{a+1}{2}$

$5x-1<-2(x-b)$에서 $5x-1<-2x+2b$

$7x<2b+1 \qquad \therefore x<\frac{2b+1}{7}$ ……❷

주어진 부등식의 해가 $-1<x<1$이므로

$\frac{a+1}{2}=-1,\ \frac{2b+1}{7}=1 \qquad \therefore a=-3,\ b=3$ ……❸

$\therefore ab=-3\times 3=-9$ ……❹

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식을 $\begin{cases} 3x+a<5x-1 \\ 5x-1<-2(x-b) \end{cases}$ 꼴로 나타낼 수 있다.	10%
❷ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	60%
❸ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

17-1 답 4

주어진 부등식에서 $\begin{cases} 3x+a<5x+6 \\ 5x+6<-(x-b) \end{cases}$

$3x+a<5x+6$에서 $-2x<-a+6 \qquad \therefore x>\frac{a-6}{2}$

$5x+6<-(x-b)$에서 $5x+6<-x+b$

$6x<b-6 \qquad \therefore x<\frac{b-6}{6}$

주어진 부등식의 해가 $-7<x<1$이므로

$\frac{a-6}{2}=-7,\ \frac{b-6}{6}=1 \qquad \therefore a=-8,\ b=12$

$\therefore a+b=-8+12=4$

18 답 19

$(x-1)^2=8(x-3)$에서 $x^2-2x+1=8x-24$

$x^2-10x+25=0,\ (x-5)^2=0 \qquad \therefore x=5$

$\frac{a-2x}{5}\ge \frac{x}{3}+\frac{1}{3}$에서 $3(a-2x)\ge 5x+5$

$3a-6x\ge 5x+5,\ -11x\ge -3a+5 \qquad \therefore x\le \frac{3a-5}{11}$

$7x \geq 2(3x+b)+3$에서 $7x \geq 6x+2b+3$

$\therefore x \geq 2b+3$

이때 주어진 연립부등식의 해가 $x=5$이므로

$\frac{3a-5}{11}=5,\ 2b+3=5 \qquad \therefore a=20,\ b=1$

$\therefore a-b=20-1=19$

18-1 답 8

$1 \leq 4-x < 5$에서 $-3 \leq -x < 1 \qquad \therefore -1 < x \leq 3$

$\frac{2x-a}{7} \geq \frac{1}{2}(x+1)$에서 $2(2x-a) \geq 7(x+1)$

$4x-2a \geq 7x+7,\ -3x \geq 2a+7 \qquad \therefore x \leq -\frac{2a+7}{3}$

$2x-4 < 3(x+b)$에서 $2x-4 < 3x+3b$

$-x < 3b+4 \qquad \therefore x > -3b-4$

주어진 연립부등식의 해가 $-1 < x \leq 3$이므로

$-\frac{2a+7}{3}=3,\ -3b-4=-1 \qquad \therefore a=-8,\ b=-1$

$\therefore ab=-8 \times (-1)=8$

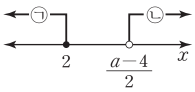
19 답 8

$1-3x \geq -5$에서 $-3x \geq -6 \qquad \therefore x \leq 2$ ……㉠

$4x-a > 2(x-2)$에서 $4x-a > 2x-4$

$2x > a-4 \qquad \therefore x > \frac{a-4}{2}$ ……㉡

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{a-4}{2} \geq 2,\ a-4 \geq 4 \qquad \therefore a \geq 8$

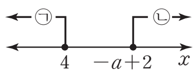
따라서 실수 a의 최솟값은 8이다.

19-1 답 $a<-2$

$4(x-1) \leq 3x$에서 $4x-4 \leq 3x \qquad \therefore x \leq 4$ ……㉠

$2+x \leq 2x+a$에서 $x \geq -a+2$ ……㉡

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-a+2 > 4 \qquad \therefore a < -2$

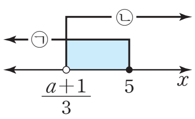
20 답 $a<14$

주어진 부등식에서 $\begin{cases} 3x-4 \leq 2x+1 \\ 2x+1 < 5x-a \end{cases}$

$3x-4 \leq 2x+1$에서 $x \leq 5$ ……㉠

$2x+1 < 5x-a$에서 $-3x < -a-1 \qquad \therefore x > \frac{a+1}{3}$ ……㉡

주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{a+1}{3} < 5,\ a+1 < 15 \qquad \therefore a < 14$

20-1 답 ①

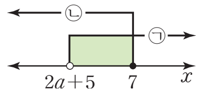
주어진 부등식에서 $\begin{cases} 8a+15 < 4x-5 \\ 4x-5 \leq 30-x \end{cases}$

$8a+15 < 4x-5$에서 $-4x < -8a-20$

$\therefore x > 2a+5$ ……㉠

$4x-5 \leq 30-x$에서 $5x \leq 35 \qquad \therefore x \leq 7$ ……㉡

주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$2a+5 < 7,\ 2a < 2 \qquad \therefore a < 1$

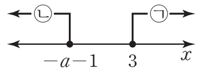
21 답 ②

$\frac{x}{3}+\frac{7-x}{2} \leq 3$에서 $2x+3(7-x) \leq 18$

$-x+21 \leq 18,\ -x \leq -3 \qquad \therefore x \geq 3$ ……㉠

$-(x+1) \geq a$에서 $x+1 \leq -a \qquad \therefore x \leq -a-1$ ……㉡

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-a-1 < 3 \qquad \therefore a > -4$

따라서 음의 정수 a의 값은 $-1,\ -2,\ -3$이므로 그 곱은

$-1 \times (-2) \times (-3) = -6$

21-1 답 16

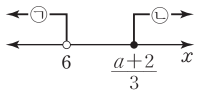
$\frac{x+1}{3} > \frac{x}{2}-\frac{2}{3}$에서 $2(x+1) > 3x-4$

$2x+2 > 3x-4,\ -x > -6 \qquad \therefore x < 6$ ……㉠

$2x+a \leq 5x-2$에서 $-3x \leq -a-2$

$\therefore x \geq \frac{a+2}{3}$ ……㉡ ……❶

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{a+2}{3} \geq 6,\ a+2 \geq 18$

$\therefore a \geq 16$ ……❷

따라서 실수 a의 최솟값은 16이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	40%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 실수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

22 답 5개 또는 6개

초콜릿을 x개 산다고 하면 막대사탕은 $(8-x)$개 살 수 있으므로

$\begin{cases} 1500(8-x)+2000x \leq 15000 & \cdots\cdots ㉠ \\ x > 8-x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $12000+500x \leq 15000,\ 500x \leq 3000 \qquad \therefore x \leq 6$

㉡에서 $2x > 8 \qquad \therefore x > 4$

$\therefore 4 < x \leq 6$

따라서 초콜릿은 5개 또는 6개 살 수 있다.

22-1 답 ④

우유를 x개 산다고 하면 빵은 $(16-x)$개 살 수 있으므로

$15000 \leq 900x+1200(16-x) \leq 18000$

$\begin{cases} 15000 \leq 900x+1200(16-x) & \cdots\cdots ㉠ \\ 900x+1200(16-x) \leq 18000 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $15000 \leq 19200-300x$

$300x \leq 4200 \qquad \therefore x \leq 14$

㉡에서 $19200-300x \leq 18000$

$-300x \leq -1200 \qquad \therefore x \geq 4$

$\therefore 4 \leq x \leq 14$

따라서 우유는 최대 14개까지 살 수 있다.

23 답 ①

학생 수를 x라 하면 $\begin{cases} 4x<60 & \cdots\cdots ㉠ \\ 6x>60 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x<15$

㉡에서 $x>10$

$\therefore 10<x<15$

따라서 최소 학생 수는 11명이다.

23-1 답 24일

책의 전체 쪽수를 x라 하면

$\begin{cases} \dfrac{x}{8}\le 30 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-14\times 10>99 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\le 240$

㉡에서 $x-140>99$ $\therefore x>239$

$\therefore 239<x\le 240$

이때 x는 자연수이므로 $x=240$

따라서 이 책을 하루에 10쪽씩 읽으면 다 읽는 데 걸리는 시간은

$\dfrac{240}{10}=24$(일)

24 답 23

연속하는 세 홀수를 $x-2$, x, $x+2$라 하면

$30<3(x-2)-(x+2)<36$

$30<2x-8<36$, $38<2x<44$

$\therefore 19<x<22$

이때 x는 홀수이므로 $x=21$

따라서 세 홀수는 19, 21, 23이므로 이 중에서 가장 큰 수는 23이다.

24-1 답 65

구하는 자연수의 일의 자리의 숫자를 x라 하면 ······❶

십의 자리의 숫자는 $x+1$이므로

$\begin{cases} (x+1)+x\ge 11 & \cdots\cdots ㉠ \\ 10x+(x+1)<\dfrac{1}{2}\{10(x+1)+x\}+29 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ ······❷

㉠에서 $2x\ge 10$ $\therefore x\ge 5$

㉡에서 $11x+1<\dfrac{11}{2}x+34$, $22x+2<11x+68$

$11x<66$ $\therefore x<6$

$\therefore 5\le x<6$ ······❸

이때 x는 자연수이므로 $x=5$

따라서 처음 자연수는 65이다. ······❹

채점 기준	비율
❶ 미지수 x를 정할 수 있다.	20%
❷ 연립부등식을 세울 수 있다.	30%
❸ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	30%
❹ 처음 자연수를 구할 수 있다.	20%

25 답 5 km 이상 $\dfrac{19}{3}$ km 이하

올라간 거리를 x km라 하면 내려온 거리는 $(x-3)$ km이므로

$3\le\dfrac{x}{2}+\dfrac{x-3}{4}\le 4$

위의 식의 각 변에 4를 곱하면 $12\le 2x+(x-3)\le 16$

$12\le 3x-3\le 16$, $15\le 3x\le 19$ $\therefore 5\le x\le\dfrac{19}{3}$

따라서 올라간 거리는 5 km 이상 $\dfrac{19}{3}$ km 이하이다.

25-1 답 $\dfrac{27}{5}$ km 이상 9 km 이하

내려온 거리를 x km라 하면 올라간 거리는 $(x-1)$ km이므로

$2\le\dfrac{x-1}{4}+\dfrac{x}{6}\le 3.5$

위의 식의 각 변에 12를 곱하면 $24\le 3(x-1)+2x\le 42$

$24\le 5x-3\le 42$, $27\le 5x\le 45$ $\therefore \dfrac{27}{5}\le x\le 9$

따라서 내려온 거리는 $\dfrac{27}{5}$ km 이상 9 km 이하이다.

26 답 50 g 이상 100 g 이하

섭취해야 하는 식품 A의 양을 x g이라 하면 ······❶

식품 B는 $(200-x)$ g 섭취해야 하므로

$\begin{cases} \dfrac{130}{100}x+\dfrac{320}{100}(200-x)\ge 450 & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{9}{100}x+\dfrac{6}{100}(200-x)\ge 13.5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ ······❷

㉠에서 $130x+320(200-x)\ge 45000$

$-190x+64000\ge 45000$, $-190x\ge -19000$

$\therefore x\le 100$

㉡에서 $9x+6(200-x)\ge 1350$

$3x+1200\ge 1350$, $3x\ge 150$ $\therefore x\ge 50$

$\therefore 50\le x\le 100$ ······❸

따라서 섭취해야 하는 식품 A의 양은 50 g 이상 100 g 이하이다. ······❹

채점 기준	비율
❶ 미지수 x를 정할 수 있다.	20%
❷ 연립부등식을 세울 수 있다.	30%
❸ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	30%
❹ 섭취해야 하는 식품 A의 양의 범위를 구할 수 있다.	20%

26-1 답 ③

쿠키 A를 x개 만든다고 하면 쿠키 B는 $(20-x)$개 만들 수 있으므로

$\begin{cases} 30x+50(20-x)\le 800 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+3(20-x)\le 75 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-20x+1000\le 800$, $-20x\le -200$

$\therefore x\ge 10$

㉡에서 $x+60\le 75$ $\therefore x\le 15$

$\therefore 10\le x\le 15$

따라서 쿠키 A는 최대 15개까지 만들 수 있다.

27 답 ①

의자의 개수를 x라 하면 학생은 $(4x+6)$명이므로

$5(x-3)+1\le 4x+6\le 5(x-3)+5$

$\begin{cases} 5(x-3)+1\le 4x+6 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+6\le 5(x-3)+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $5x-14\le 4x+6$ $\therefore x\le 20$

㉡에서 $4x+6\le 5x-10$ $\therefore x\ge 16$

$\therefore 16\le x\le 20$

따라서 의자의 개수가 될 수 없는 것은 ①이다.

Lecture 과부족에 대한 문제

한 의자에 a명씩 앉으면 n개의 의자가 남는다.

➡ 의자의 개수를 x라 하면

(1) 빈 의자의 개수 : n

(2) a명씩 앉은 의자의 개수 : $x-(n+1)$

(3) 마지막 1개의 의자에는 최소 1명에서 최대 a명까지 앉을 수 있으므로

$\begin{cases} \text{최소 인원: } a\{x-(n+1)\}+1\text{(명)} \\ \text{최대 인원: } a\{x-(n+1)\}+a\text{(명)} \end{cases}$

27-1 답 4대, 5대

보트가 x대 있다고 하면 학생은 $(5x+8)$명이므로

$6x+3\le 5x+8<6x+5$

$\begin{cases} 6x+3\le 5x+8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+8<6x+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\le 5$

㉡에서 $-x<-3$ $\quad\therefore x>3$

$\therefore 3<x\le 5$

따라서 가능한 보트의 수는 4대, 5대이다.

28 답 ②

$|x+1|>3$에서 $x+1<-3$ 또는 $x+1>3$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>2$

따라서 $a=-4$, $b=2$이므로

$a-b=-4-2=-6$

28-1 답 ③

$|2x-3|\le 5$에서 $-5\le 2x-3\le 5$

$-2\le 2x\le 8$ $\quad\therefore -1\le x\le 4$

따라서 $a=-1$, $b=4$이므로

$a+b=-1+4=3$

29 답 5

$|2x+3|\le k+1$에서 $-(k+1)\le 2x+3\le k+1$

$-k-4\le 2x\le k-2$ $\quad\therefore \dfrac{-k-4}{2}\le x\le \dfrac{k-2}{2}$

주어진 부등식의 해가 $-4\le x\le a$이므로

$\dfrac{-k-4}{2}=-4$, $\dfrac{k-2}{2}=a$

$\dfrac{-k-4}{2}=-4$에서 $-k-4=-8$ $\quad\therefore k=4$

$\dfrac{k-2}{2}=a$에서 $a=\dfrac{4-2}{2}=1$

$\therefore a+k=1+4=5$

29-1 답 ④

$|4x+2|\ge k$에서 $4x+2\le -k$ 또는 $4x+2\ge k$

$4x\le -k-2$ 또는 $4x\ge k-2$

$\therefore x\le \dfrac{-k-2}{4}$ 또는 $x\ge \dfrac{k-2}{4}$

주어진 부등식의 해가 $x\le -3$ 또는 $x\ge a$이므로

$\dfrac{-k-2}{4}=-3$, $\dfrac{k-2}{4}=a$

$\dfrac{-k-2}{4}=-3$에서 $-k-2=-12$ $\quad\therefore k=10$

$\dfrac{k-2}{4}=a$에서 $a=\dfrac{10-2}{4}=2$

$\therefore k-a=10-2=8$

30 답 ③

$3x-2<2x+1$에서 $x<3$

$|x-2|\le 3$에서 $-3\le x-2\le 3$ $\quad\therefore -1\le x\le 5$

주어진 연립부등식의 해는 $-1\le x<3$

따라서 정수 x의 값은 -1, 0, 1, 2이므로 그 개수는 4이다.

30-1 답 ③

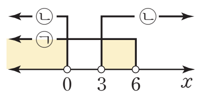
$3(x-2)<x+6$에서 $3x-6<x+6$

$2x<12$ $\quad\therefore x<6$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

$|3-2x|>3$에서 $3-2x<-3$ 또는 $3-2x>3$

$-2x<-6$ 또는 $-2x>0$ $\quad\therefore x>3$ 또는 $x<0$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$x<0$ 또는 $3<x<6$

따라서 자연수 x의 값은 4, 5이므로 그 합은

$4+5=9$

31 답 ④

$|x-1|\ge 2x-5$에서

(i) $x<1$일 때

$-(x-1)\ge 2x-5$, $-x+1\ge 2x-5$

$-3x\ge -6$ $\quad\therefore x\le 2$

그런데 $x<1$이므로 $x<1$

(ii) $x\ge 1$일 때

$x-1\ge 2x-5$ $\quad\therefore x\le 4$

그런데 $x\ge 1$이므로 $1\le x\le 4$

(i), (ii)에서 $x\le 4$ $\quad\therefore a=4$

31-1 답 ②

$|2x+1|\le x+5$에서

(i) $x<-\dfrac{1}{2}$일 때

$-(2x+1)\le x+5$, $-2x-1\le x+5$

$-3x\le 6$ $\quad\therefore x\ge -2$

그런데 $x<-\dfrac{1}{2}$이므로 $-2\le x<-\dfrac{1}{2}$

(ii) $x\ge -\dfrac{1}{2}$일 때

$2x+1\le x+5$ $\quad\therefore x\le 4$

그런데 $x\ge -\dfrac{1}{2}$이므로 $-\dfrac{1}{2}\le x\le 4$

(i), (ii)에서 $-2\le x\le 4$

따라서 $a=-2$, $b=4$이므로 $a+b=-2+4=2$

32 답 ④

$3|2x-4|-2x<5$에서

(i) $x<2$일 때

$-3(2x-4)-2x<5$, $-8x+12<5$

$-8x<-7$ $\quad\therefore x>\dfrac{7}{8}$

그런데 $x<2$이므로 $\dfrac{7}{8}<x<2$

(ii) $x\ge 2$일 때

$3(2x-4)-2x<5$, $4x-12<5$

$4x<17$　　$\therefore x<\frac{17}{4}$

그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x<\frac{17}{4}$

(i), (ii)에서 $\frac{7}{8}<x<\frac{17}{4}$

따라서 정수 x의 값은 1, 2, 3, 4이므로 그 개수는 4이다.

32-1 답 ②

$2|1-x|+x\le 4$에서

(i) $x<1$일 때

$2(1-x)+x\le 4$, $-x+2\le 4$

$-x\le 2$　　$\therefore x\ge -2$

그런데 $x<1$이므로 $-2\le x<1$

(ii) $x\ge 1$일 때

$-2(1-x)+x\le 4$, $3x-2\le 4$

$3x\le 6$　　$\therefore x\le 2$

그런데 $x\ge 1$이므로 $1\le x\le 2$

(i), (ii)에서 $-2\le x\le 2$

따라서 실수 x의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이므로 그 차는

$2-(-2)=4$

33 답 ⑤

$2|x-1|>x+3$에서

(i) $x<1$일 때

$-2(x-1)>x+3$, $-2x+2>x+3$

$-3x>1$　　$\therefore x<-\frac{1}{3}$

그런데 $x<1$이므로 $x<-\frac{1}{3}$

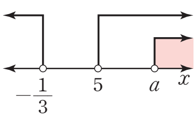
(ii) $x\ge 1$일 때

$2(x-1)>x+3$, $2x-2>x+3$　　$\therefore x>5$

그런데 $x\ge 1$이므로 $x>5$

(i), (ii)에서 $x<-\frac{1}{3}$ 또는 $x>5$

주어진 부등식의 해가 $x>a$를 포함하려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a\ge 5$

따라서 실수 a의 최솟값은 5이다.

33-1 답 -4

$|3x-2|\ge x+6$에서

(i) $x<\frac{2}{3}$일 때

$-(3x-2)\ge x+6$, $-3x+2\ge x+6$

$-4x\ge 4$　　$\therefore x\le -1$

그런데 $x<\frac{2}{3}$이므로 $x\le -1$

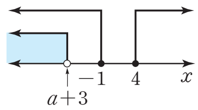
(ii) $x\ge\frac{2}{3}$일 때

$3x-2\ge x+6$, $2x\ge 8$　　$\therefore x\ge 4$

그런데 $x\ge\frac{2}{3}$이므로 $x\ge 4$

(i), (ii)에서 $x\le -1$ 또는 $x\ge 4$　　……❶

주어진 부등식의 해가 $x<a+3$을 포함하려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a+3\le -1$　　$\therefore a\le -4$　　……❷

따라서 실수 a의 최댓값은 -4이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	40%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 실수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

34 답 0

$|x+2|+2|x-1|\le 12$에서

(i) $x<-2$일 때

$-(x+2)-2(x-1)\le 12$, $-3x\le 12$　　$\therefore x\ge -4$

그런데 $x<-2$이므로 $-4\le x<-2$

(ii) $-2\le x<1$일 때

$x+2-2(x-1)\le 12$, $-x+4\le 12$

$-x\le 8$　　$\therefore x\ge -8$

그런데 $-2\le x<1$이므로 $-2\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때

$x+2+2(x-1)\le 12$, $3x\le 12$　　$\therefore x\le 4$

그런데 $x\ge 1$이므로 $1\le x\le 4$

(i)~(iii)에서 $-4\le x\le 4$

따라서 정수 x의 값은 -4, -3, -2, $\cdots$, 4이므로 그 합은

$-4+(-3)+(-2)+\cdots+4=0$

34-1 답 ④

$2|x-3|+|x+5|<11$에서

(i) $x<-5$일 때

$-2(x-3)-(x+5)<11$, $-3x+1<11$

$-3x<10$　　$\therefore x>-\frac{10}{3}$

그런데 $x<-5$이므로 해는 없다.

(ii) $-5\le x<3$일 때

$-2(x-3)+(x+5)<11$, $-x+11<11$　　$\therefore x>0$

그런데 $-5\le x<3$이므로 $0<x<3$

(iii) $x\ge 3$일 때

$2(x-3)+(x+5)<11$, $3x-1<11$

$3x<12$　　$\therefore x<4$

그런데 $x\ge 3$이므로 $3\le x<4$

(i)~(iii)에서 $0<x<4$

따라서 $M=3$, $m=1$이므로

$M+m=3+1=4$

35 답 ③

$|x+1|+|x-3|\le 8$에서

(i) $x<-1$일 때

$-(x+1)-(x-3)\le 8$, $-2x+2\le 8$

$-2x\le 6$　　$\therefore x\ge -3$

그런데 $x<-1$이므로 $-3\le x<-1$

(ii) $-1\le x<3$일 때

$(x+1)-(x-3)\le 8$, $x+1-x+3\le 8$　　$\therefore 0\le 4$

즉 해는 모든 실수이다.

그런데 $-1\le x<3$이므로 $-1\le x<3$

(iii) $x \geq 3$일 때

$(x+1)+(x-3) \leq 8,\ 2x-2 \leq 8$

$2x \leq 10 \qquad \therefore x \leq 5$

그런데 $x \geq 3$이므로 $3 \leq x \leq 5$

(i)~(iii)에서 $-3 \leq x \leq 5$ ······㉠

또 $|x-a| \leq 4$에서 $-4 \leq x-a \leq 4$

$\therefore a-4 \leq x \leq a+4$ ······㉡

이때 ㉠, ㉡이 서로 같아야 하므로

$a-4=-3,\ a+4=5 \qquad \therefore a=1$

35-1 답 ①

$|x|+|x-1| \leq 5$에서

(i) $x<0$일 때

$-x-(x-1) \leq 5,\ -2x+1 \leq 5$

$-2x \leq 4 \qquad \therefore x \geq -2$

그런데 $x<0$이므로 $-2 \leq x<0$

(ii) $0 \leq x<1$일 때

$x-(x-1) \leq 5,\ x-x+1 \leq 5 \qquad \therefore 0 \leq 4$

즉 해는 모든 실수이다.

그런데 $0 \leq x<1$이므로 $0 \leq x<1$

(iii) $x \geq 1$일 때

$x+x-1 \leq 5,\ 2x \leq 6 \qquad \therefore x \leq 3$

그런데 $x \geq 1$이므로 $1 \leq x \leq 3$

(i)~(iii)에서 $-2 \leq x \leq 3$이므로 $a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-2 \times 3=-6$

36 답 1

$\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$이므로 주어진 부등식은

$|x+1|+|x-2| \leq 4$ ······❶

(i) $x<-1$일 때

$-(x+1)-(x-2) \leq 4,\ -2x+1 \leq 4$

$-2x \leq 3 \qquad \therefore x \geq -\frac{3}{2}$

그런데 $x<-1$이므로 $-\frac{3}{2} \leq x<-1$

(ii) $-1 \leq x<2$일 때

$(x+1)-(x-2) \leq 4,\ x+1-x+2 \leq 4$

$\therefore 0 \leq 1$

즉 해는 모든 실수이다.

그런데 $-1 \leq x<2$이므로 $-1 \leq x<2$

(iii) $x \geq 2$일 때

$(x+1)+(x-2) \leq 4,\ 2x-1 \leq 4$

$2x \leq 5 \qquad \therefore x \leq \frac{5}{2}$

그런데 $x \geq 2$이므로 $2 \leq x \leq \frac{5}{2}$

(i)~(iii)에서 $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$이므로 $\alpha=-\frac{3}{2},\ \beta=\frac{5}{2}$ ······❷

$\therefore \alpha+\beta=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=1$ ······❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식을 절댓값 기호를 2개 포함한 부등식으로 나타낼 수 있다.	20%
❷ α, β의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ $\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	20%

36-1 답 ②

$\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$이므로 주어진 부등식은

$3|x+1|+2|x-1| \leq 6$

(i) $x<-1$일 때

$-3(x+1)-2(x-1) \leq 6,\ -5x-1 \leq 6$

$-5x \leq 7 \qquad \therefore x \geq -\frac{7}{5}$

그런데 $x<-1$이므로 $-\frac{7}{5} \leq x<-1$

(ii) $-1 \leq x<1$일 때

$3(x+1)-2(x-1) \leq 6,\ x+5 \leq 6$

$\therefore x \leq 1$

그런데 $-1 \leq x<1$이므로 $-1 \leq x<1$

(iii) $x \geq 1$일 때

$3(x+1)+2(x-1) \leq 6,\ 5x+1 \leq 6$

$5x \leq 5 \qquad \therefore x \leq 1$

그런데 $x \geq 1$이므로 $x=1$

(i)~(iii)에서 $-\frac{7}{5} \leq x \leq 1$

따라서 $M=1,\ m=-\frac{7}{5}$이므로

$M+m=1+\left(-\frac{7}{5}\right)=-\frac{2}{5}$

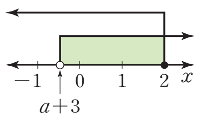
유형+ 완성하기 p. 209

37 답 $-4 \leq a<-3$

$2x+3<3x-a$에서 $-x<-a-3 \qquad \therefore x>a+3$

$2(2x+1) \leq 3x+4$에서 $4x+2 \leq 3x+4 \qquad \therefore x \leq 2$

이때 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-1 \leq a+3<0 \qquad \therefore -4 \leq a<-3$

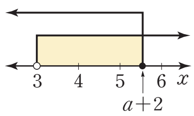
38 답 ③

주어진 부등식에서 $\begin{cases} 4x-a \leq 3x+2 \\ 3x+2<5x-4 \end{cases}$

$4x-a \leq 3x+2$에서 $x \leq a+2$

$3x+2<5x-4$에서 $-2x<-6 \qquad \therefore x>3$

이때 부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



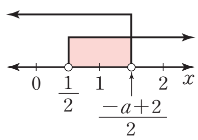
$5 \leq a+2<6 \qquad \therefore 3 \leq a<4$

39 답 $-2 \leq a<0$

$5x-2<3x-a$에서 $2x<-a+2 \qquad \therefore x<\frac{-a+2}{2}$

$2x+4>5$에서 $2x>1 \qquad \therefore x>\frac{1}{2}$

이때 연립부등식이 오직 한 개의 정수인 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$1<\frac{-a+2}{2} \leq 2,\ 2<-a+2 \leq 4$

$0<-a \leq 2 \qquad \therefore -2 \leq a<0$

40 답 $a<2$

$|3x-4|+2>a$에서 $|3x-4|>a-2$ ……㉠

이때 $|3x-4|\geq 0$이므로 ㉠의 해가 모든 실수이려면

$a-2<0$ $\therefore a<2$

41 답 ③

$|x-8|\geq 0$이므로 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$\frac{3}{4}k-6<0,\ \frac{3}{4}k<6$ $\therefore k<8$

따라서 정수 k의 최댓값은 7이다.

42 답 $a\geq 2$

$|x-2|+|x-4|$에서

(i) $x<2$일 때

$|x-2|+|x-4|=-(x-2)-(x-4)=-2x+6$

그런데 $x<2$이므로 $-2x+6>2$

$\therefore |x-2|+|x-4|>2$

(ii) $2\leq x<4$일 때

$|x-2|+|x-4|=x-2-(x-4)=2$

$\therefore |x-2|+|x-4|=2$

(iii) $x\geq 4$일 때

$|x-2|+|x-4|=x-2+(x-4)=2x-6$

그런데 $x\geq 4$이므로 $2x-6\geq 2$

$\therefore |x-2|+|x-4|\geq 2$

(i)~(iii)에서 $|x-2|+|x-4|\geq 2$이므로 주어진 부등식의 해가 존재하려면 $a\geq 2$

학교 시험 대비 문제

p. 210~213

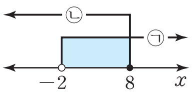
01 답 ⑤

$3x+1<4x+3$에서 $-x<2$ $\therefore x>-2$ ……㉠

$\frac{2x-1}{3}\leq 5$에서 $2x-1\leq 15$

$2x\leq 16$ $\therefore x\leq 8$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$-2<x\leq 8$

따라서 정수 x의 값은 $-1, 0, 1, \cdots, 8$이므로 그 개수는 10이다.

02 답 3

$2x-y=1$에서 $y=2x-1$

$y=2x-1$을 주어진 부등식에 대입하면

$7x-12<x+2(2x-1)-3<25-x$

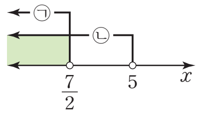
$\therefore 7x-12<5x-5<25-x$

$\begin{cases} 7x-12<5x-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x-5<25-x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2x<7$ $\therefore x<\frac{7}{2}$

㉡에서 $6x<30$ $\therefore x<5$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$x<\frac{7}{2}$

따라서 자연수 x의 값은 1, 2, 3이므로 주어진 부등식의 해의 개수는 3이다.

03 답 5

$x+1<2x-1\leq x+2$의 각 변에서 x를 빼면

$1<x-1\leq 2$ $\therefore 2<x\leq 3$

이때 $2<x\leq 3$을 만족시키는 자연수 x는 3이므로

$x=3$을 $3x-2a=a-6$에 대입하면

$9-2a=a-6,\ -3a=-15$ $\therefore a=5$

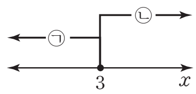
04 답 3

$1.5x-3.5\leq 1.6-0.2x$에서 $15x-35\leq 16-2x$

$17x\leq 51$ $\therefore x\leq 3$ ……㉠

$2x-10\geq x-7$에서 $x\geq 3$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



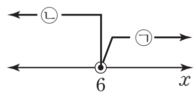
$x=3$ $\therefore a=3$

05 답 해는 없다.

$2x-5>x+1$에서 $x>6$ ……㉠

$3x-2\leq x+10$에서 $2x\leq 12$ $\therefore x\leq 6$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



06 답 -11

$3(x+1)\leq 16-5(1-x)$에서 $3x+3\leq 11+5x$

$-2x\leq 8$ $\therefore x\geq -4$

$4-3(x+2)\geq 2a$에서 $-3x-2\geq 2a$

$-3x\geq 2a+2$ $\therefore x\leq -\frac{2a+2}{3}$

주어진 연립부등식의 해가 $b\leq x\leq 4$이므로

$-\frac{2a+2}{3}=4,\ b=-4$ $\therefore a=-7,\ b=-4$

$\therefore a+b=-7+(-4)=-11$

07 답 $-6<x\leq 1$

$ax-b>0$에서 $ax>b$

이 부등식의 해가 $x<6$이므로 $a<0,\ \frac{b}{a}=6$

$cx-d\leq 0$에서 $cx\leq d$

이 부등식의 해가 $x\geq -1$이므로 $c<0,\ \frac{d}{c}=-1$

$ax+b<0$에서 $ax<-b$ $\therefore x>-\frac{b}{a}$ $(\because a<0)$

$\therefore x>-6$

$cx+d\geq 0$에서 $cx\geq -d$ $\therefore x\leq -\frac{d}{c}$ $(\because c<0)$

$\therefore x\leq 1$

따라서 연립부등식의 해는 $-6<x\leq 1$

08 답 $a<\frac{1}{5}$

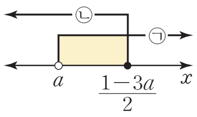
$2x+a<3x$에서 $-x<-a$

$\therefore x>a$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1-2x}{3}\geq a$에서 $1-2x\geq 3a$

$-2x\geq 3a-1$ $\quad\therefore x\leq\frac{1-3a}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉡

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a<\frac{1-3a}{2}$, $2a<1-3a$

$5a<1$ $\quad\therefore a<\frac{1}{5}$

09 답 16

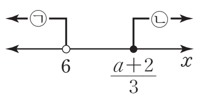
$2(x+1)>3x-4$에서 $2x+2>3x-4$

$-x>-6$ $\quad\therefore x<6$ $\cdots\cdots$ ㉠

$5x-2\geq 2x+a$에서 $3x\geq a+2$

$\therefore x\geq\frac{a+2}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉡

주어진 연립부등식의 해가 없으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{a+2}{3}\geq 6$, $a+2\geq 18$

$\therefore a\geq 16$

따라서 실수 a의 최솟값은 16이다.

10 답 50개

제품 B를 x개 만든다고 하면 제품 A를 $(200-x)$개 만들어야 하므로

$$\begin{cases}2200(200-x)+3400x\leq 500000 & \cdots\cdots ㉠\\ 1800(200-x)+1400x\leq 350000 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $4400-22x+34x\leq 5000$

$12x\leq 600$ $\quad\therefore x\leq 50$

㉡에서 $3600-18x+14x\leq 3500$

$-4x\leq -100$ $\quad\therefore x\geq 25$

$\therefore 25\leq x\leq 50$

이때 정가의 총액 $5000(200-x)+6000x$, 즉 $1000000+1000x$가 최대가 되려면 x가 최대이어야 하므로 제품 B를 50개 만들어야 한다.

11 답 ①

A 학교에 배정된 방을 x개라 하면 학생은 $(6x+11)$명이므로

$7(x-3)+1\leq 6x+11\leq 7(x-3)+7$

$$\begin{cases}7(x-3)+1\leq 6x+11 & \cdots\cdots ㉠\\ 6x+11\leq 7(x-3)+7 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $7x-20\leq 6x+11$

$\therefore x\leq 31$

㉡에서 $6x+11\leq 7x-14$

$-x\leq -25$ $\quad\therefore x\geq 25$

$\therefore 25\leq x\leq 31$

따라서 A 학교에 배정된 방은 최대 31개이다.

12 답 ①

$|x-2|\leq a$에서 $-a\leq x-2\leq a$

$\therefore -a+2\leq x\leq a+2$

주어진 부등식의 해가 $1\leq x\leq b$이므로

$-a+2=1$, $a+2=b$ $\quad\therefore a=1$, $b=3$

$\therefore a+b=1+3=4$

13 답 -2

$b<0$이면 부등식 $|ax+1|\geq b$의 해는 모든 실수이므로 $b>0$

이때 $ab<0$이므로 $a<0$

$|ax+1|\geq b$에서 $ax+1\leq -b$ 또는 $ax+1\geq b$

$ax\leq -b-1$ 또는 $ax\geq b-1$

$a<0$이므로 $x\geq\frac{-b-1}{a}$ 또는 $x\leq\frac{b-1}{a}$

주어진 부등식의 해가 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 3$이므로

$\frac{-b-1}{a}=3$, $\frac{b-1}{a}=-1$

$\therefore 3a+b=-1$, $a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

$\therefore ab=-1\times 2=-2$

14 답 ②

$|1-2x|\geq 2-x$에서

(i) $x<\frac{1}{2}$일 때

$1-2x\geq 2-x$, $-x\geq 1$ $\quad\therefore x\leq -1$

그런데 $x<\frac{1}{2}$이므로 $x\leq -1$

(ii) $x\geq\frac{1}{2}$일 때

$-(1-2x)\geq 2-x$, $-1+2x\geq 2-x$

$3x\geq 3$ $\quad\therefore x\geq 1$

그런데 $x\geq\frac{1}{2}$이므로 $x\geq 1$

(i), (ii)에서 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x의 값이 될 수 없는 것은 ②이다.

15 답 1

$2|x-1|+x\leq 4$에서

(i) $x<1$일 때

$-2(x-1)+x\leq 4$, $-x+2\leq 4$

$-x\leq 2$ $\quad\therefore x\geq -2$

그런데 $x<1$이므로 $-2\leq x<1$

(ii) $x\geq 1$일 때

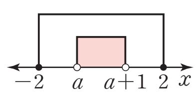
$2(x-1)+x\leq 4$, $3x-2\leq 4$

$3x\leq 6$ $\quad\therefore x\leq 2$

그런데 $x\geq 1$이므로 $1\leq x\leq 2$

(i), (ii)에서 $-2\leq x\leq 2$

주어진 부등식의 해가 $a<x<a+1$을 포함하려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a\geq -2$, $a+1\leq 2$

$\therefore -2\leq a\leq 1$

따라서 실수 a의 최댓값은 1이다.

16 답 $-\frac{16}{5}$

$2|x-1|+3|x+1|<9$에서

(i) $x<-1$일 때

$-2(x-1)-3(x+1)<9,\ -5x-1<9$

$-5x<10 \qquad \therefore x>-2$

그런데 $x<-1$이므로 $-2<x<-1$

(ii) $-1\le x<1$일 때

$-2(x-1)+3(x+1)<9,\ x+5<9$

$\therefore x<4$

그런데 $-1\le x<1$이므로 $-1\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때

$2(x-1)+3(x+1)<9,\ 5x+1<9$

$5x<8 \qquad \therefore x<\frac{8}{5}$

그런데 $x\ge 1$이므로 $1\le x<\frac{8}{5}$

(i)~(iii)에서 $-2<x<\frac{8}{5}$

따라서 $a=-2,\ b=\frac{8}{5}$이므로 $ab=-2\times\frac{8}{5}=-\frac{16}{5}$

17 답 -11

$\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$이므로 주어진 부등식은

$|x-1|+|x-3|<x+3$

(i) $x<1$일 때

$-(x-1)-(x-3)<x+3,\ -2x+4<x+3$

$-3x<-1 \qquad \therefore x>\frac{1}{3}$

그런데 $x<1$이므로 $\frac{1}{3}<x<1$

(ii) $1\le x<3$일 때

$x-1-(x-3)<x+3,\ 2<x+3 \qquad \therefore x>-1$

그런데 $1\le x<3$이므로 $1\le x<3$

(iii) $x\ge 3$일 때

$x-1+x-3<x+3,\ 2x-4<x+3 \qquad \therefore x<7$

그런데 $x\ge 3$이므로 $3\le x<7$

(i)~(iii)에서 $\frac{1}{3}<x<7$ ······㉠

또 $|3x+k|<10$에서 $-10<3x+k<10$

$-10-k<3x<10-k \qquad \therefore \frac{-10-k}{3}<x<\frac{10-k}{3}$ ······㉡

이때 ㉠, ㉡이 서로 같아야 하므로

$\frac{-10-k}{3}=\frac{1}{3},\ \frac{10-k}{3}=7 \qquad \therefore k=-11$

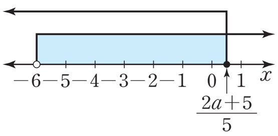
18 답 $-\frac{5}{2}\le a<0$

$3x-5\le 2(a-x)$에서 $3x-5\le 2a-2x$

$5x\le 2a+5 \qquad \therefore x\le\frac{2a+5}{5}$

$x-4<3x+8$에서 $-2x<12 \qquad \therefore x>-6$

이때 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 6개이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$0\le\frac{2a+5}{5}<1,\ 0\le 2a+5<5$

$-5\le 2a<0 \qquad \therefore -\frac{5}{2}\le a<0$

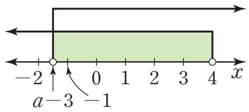
19 답 $1\le a<2$

주어진 부등식에서 $\begin{cases}\frac{8x+a}{3}<3x+1 & \cdots\cdots ㉠\\ 3x+1<2x+5 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $8x+a<9x+3 \qquad \therefore x>a-3$

㉡에서 $x<4$

이때 부등식을 만족시키는 음의 정수 x가 1개뿐이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-2\le a-3<-1 \qquad \therefore 1\le a<2$

20 답 1

$|x-a|+|x|\le a+2$에서

(i) $x<0$일 때

$-(x-a)-x\le a+2,\ -2x+a\le a+2$

$-2x\le 2 \qquad \therefore x\ge -1$

그런데 $x<0$이므로 $-1\le x<0$

(ii) $0\le x<a$일 때

$-(x-a)+x\le a+2,\ -x+a+x\le a+2$

$\therefore 0\le 2$

즉 해는 모든 실수이다.

그런데 $0\le x<a$이므로 $0\le x<a$

(iii) $x\ge a$일 때

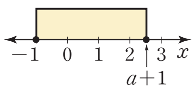
$(x-a)+x\le a+2,\ 2x-a\le a+2$

$2x\le 2a+2 \qquad \therefore x\le a+1$

그런데 $x\ge a$이므로 $a\le x\le a+1$

(i)~(iii)에서 $-1\le x\le a+1$

이때 부등식을 만족시키는 정수 x가 4개이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$2\le a+1<3 \qquad \therefore 1\le a<2$

따라서 자연수 a의 값은 1이다.

21 답 $a\ge -1$

$\sqrt{4(x-1)^2}\le a+1$에서 $|2(x-1)|\le a+1$ ······㉠

이때 $|2(x-1)|\ge 0$이므로 ㉠의 해가 존재하려면

$a+1\ge 0 \qquad \therefore a\ge -1$

서술형 1 답 2

$2x-3y=1$에서 $3y=2x-1$

$3y=2x-1$을 주어진 부등식에 대입하면

$5x+1\le(2x-1)-4\le 3x-2$

$\therefore 5x+1\le 2x-5\le 3x-2$ ······❶

$\begin{cases}5x+1\le 2x-5 & \cdots\cdots ㉠\\ 2x-5\le 3x-2 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $3x\le -6 \qquad \therefore x\le -2$

㉡에서 $-x\le 3 \qquad \therefore x\ge -3$

즉 연립부등식의 해는 $-3\le x\le -2$ ······❷

따라서 정수 x의 값은 $-3,\ -2$이므로 그 개수는 2이다. ······❸

채점 기준	비율
❶ $2x-3y=1$을 변형한 후 주어진 부등식에 대입하여 정리할 수 있다.	20%
❷ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	60%
❸ 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20%

서술형 2 답 $2<x\le 5$

$x-b<3x-2a$에서 $-2x<-2a+b$

$\therefore x>\dfrac{2a-b}{2}$

$x-b\le -x+3a$에서 $2x\le 3a+b$

$\therefore x\le \dfrac{3a+b}{2}$ ······❶

이때 잘못 푼 연립부등식의 해가 $2<x\le 8$이므로

$\dfrac{2a-b}{2}=2$, $\dfrac{3a+b}{2}=8$

$\therefore 2a-b=4$, $3a+b=16$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=4$ ······❷

즉 처음 부등식은 $x-4<3x-8\le -x+12$이므로 ······❸

$\begin{cases} x-4<3x-8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-8\le -x+12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-2x<-4$ $\therefore x>2$

㉡에서 $4x\le 20$ $\therefore x\le 5$

따라서 처음 부등식의 해는

$2<x\le 5$ ······❹

채점 기준	비율
❶ 잘못 푼 연립부등식에서 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	20%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 처음 부등식을 구할 수 있다.	20%
❹ 처음 부등식의 해를 구할 수 있다.	30%

서술형 3 답 7

(i) $-3<x<2$일 때

$|x-2|+|x+3|+|x-4|=-(x-2)+(x+3)-(x-4)$
$=-x+9$

그런데 $-3<x<2$이므로 $-2<-x<3$

$\therefore 7<-x+9<12$

즉 주어진 부등식이 항상 성립하려면 $k\le 7$ ······❶

(ii) $2\le x<4$일 때

$|x-2|+|x+3|+|x-4|=(x-2)+(x+3)-(x-4)$
$=x+5$

그런데 $2\le x<4$이므로 $7\le x+5<9$

즉 주어진 부등식이 항상 성립하려면 $k\le 7$ ······❷

(i), (ii)에서 $k\le 7$이므로 실수 k의 최댓값은 7이다. ······❸

채점 기준	비율
❶ $-3<x<2$일 때, 부등식의 해와 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❷ $2\le x<4$일 때, 부등식의 해와 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 실수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 214

01 답 ⑤

$x+2>3$에서 $x>1$

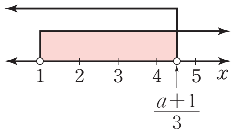
$3x<a+1$에서 $x<\dfrac{a+1}{3}$

연립부등식의 해가 존재해야 하므로 연립부등식의 해는

$1<x<\dfrac{a+1}{3}$

이때 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 9가 되어야 하므로 정수 x의 값은 2, 3, 4이다.

즉 연립부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$4<\dfrac{a+1}{3}\le 5$, $12<a+1\le 15$

$\therefore 11<a\le 14$

따라서 자연수 a의 최댓값은 14이다.

02 답 12

키가 150 cm, 체질량지수가 28이고 x kg을 감량하여 정상범위에 들어가야 하므로

$18.5\le 28-\dfrac{x}{1.5^2}<23$

$-9.5\le -\dfrac{x}{1.5^2}<-5$, $5\times 1.5^2<x\le 9.5\times 1.5^2$

$\therefore 11.25<x\le 21.375$

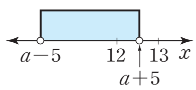
따라서 자연수 x의 최솟값은 12이다.

03 답 ③

$|x-a|<5$에서 $-5<x-a<5$

$\therefore a-5<x<a+5$

이때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 최댓값이 12가 되려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$12<a+5\le 13$ $\therefore 7<a\le 8$

따라서 정수 a의 값은 8이다.

04 답 ④

$\overline{AP}=|x-3|$, $\overline{BP}=|x-7|$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=|x-3|+|x-7|\le 8$

(i) $x<3$일 때

$-(x-3)-(x-7)\le 8$, $-2x+10\le 8$

$-2x\le -2$ $\therefore x\ge 1$

그런데 $x<3$이므로 $1\le x<3$

(ii) $3\le x<7$일 때

$(x-3)-(x-7)\le 8$, $x-3-x+7\le 8$

$\therefore 0\le 4$

즉 부등식의 해는 모든 실수이다.

그런데 $3\le x<7$이므로 $3\le x<7$

(iii) $x\ge 7$일 때

$(x-3)+(x-7)\le 8$, $2x-10\le 8$

$2x\le 18$ $\therefore x\le 9$

그런데 $x\ge 7$이므로 $7\le x\le 9$

(i)~(iii)에서 $1\le x\le 9$

따라서 선분 OP의 길이의 최댓값은 9, 최솟값은 1이므로 그 합은

$9+1=10$

10 이차부등식

Ⅱ 방정식과 부등식

개념 완성하기 p.217~218

01 답 (1) $x<-4$ 또는 $x>-1$ (2) $-4\le x\le -1$

02 답 $1<x<4$

$x^2-5x+4<0$에서 $(x-1)(x-4)<0$

$\therefore 1<x<4$

03 답 $x\le 2$ 또는 $x\ge 7$

$-x^2+9x-14\le 0$에서 $x^2-9x+14\ge 0$

$(x-2)(x-7)\ge 0$ $\quad\therefore x\le 2$ 또는 $x\ge 7$

04 답 $x<-\frac{1}{4}$ 또는 $x>2$

$4x^2-7x-2>0$에서 $(4x+1)(x-2)>0$

$\therefore x<-\frac{1}{4}$ 또는 $x>2$

05 답 $-\frac{1}{2}\le x\le 2$

$2x+2\ge 2x^2-x$에서 $2x^2-3x-2\le 0$

$(2x+1)(x-2)\le 0$ $\quad\therefore -\frac{1}{2}\le x\le 2$

06 답 모든 실수

$4x-4x^2\le 1$에서 $4x^2-4x+1\ge 0$

$\therefore (2x-1)^2\ge 0$

따라서 주어진 이차부등식의 해는 모든 실수이다.

07 답 $x\ne -5$인 모든 실수

$10x+x^2>-25$에서 $x^2+10x+25>0$

$\therefore (x+5)^2>0$

따라서 주어진 이차부등식의 해는 $x\ne -5$인 모든 실수이다.

08 답 해는 없다.

$-x^2+6x-9>0$에서 $x^2-6x+9<0$

$\therefore (x-3)^2<0$

따라서 주어진 이차부등식의 해는 없다.

09 답 $x=4$

$\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{2}x+1\le 0$에서 $\left(\frac{1}{4}x-1\right)^2\le 0$

따라서 주어진 이차부등식의 해는 $x=4$

10 답 해는 없다.

$2x^2-4x+3\le 0$에서 $2(x-1)^2+1\le 0$

따라서 주어진 이차부등식의 해는 없다.

11 답 모든 실수

$x^2-6x+10>0$에서 $(x-3)^2+1>0$

따라서 주어진 이차부등식의 해는 모든 실수이다.

12 답 모든 실수

$-x^2+3x-4<0$에서 $x^2-3x+4>0$

$\therefore \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$

따라서 주어진 이차부등식의 해는 모든 실수이다.

13 답 해는 없다.

$4x^2+10x+9\le 0$에서 $\left(2x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\le 0$

따라서 주어진 이차부등식의 해는 없다.

14 답 $a=-4,\ b=1$

해가 $2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\{x-(2-\sqrt{3})\}\{x-(2+\sqrt{3})\}<0$ $\quad\therefore x^2-4x+1<0$

이 부등식이 $x^2+ax+b<0$과 일치하므로 $a=-4,\ b=1$

15 답 $a=-11,\ b=5$

해가 $\frac{1}{2}<x<5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-5)<0$ $\quad\therefore x^2-\frac{11}{2}x+\frac{5}{2}<0$

양변에 2를 곱하면 $2x^2-11x+5<0$

이 부등식이 $2x^2+ax+b<0$과 일치하므로 $a=-11,\ b=5$

16 답 $a=-6,\ b=6$

해가 $-1\le x\le b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-b)\le 0$ $\quad\therefore x^2+(-b+1)x-b\le 0$

이 부등식이 $x^2-5x+a\le 0$과 일치하므로

$-5=-b+1,\ a=-b$ $\quad\therefore a=-6,\ b=6$

17 답 $a=-2,\ b=-2$

해가 $x\le -2$ 또는 $x\ge 3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-3)\ge 0$ $\quad\therefore x^2-x-6\ge 0$ ······㉠

㉠과 주어진 이차부등식 $ax^2-bx+12\le 0$의 부등호의 방향이 다르므로 $a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면 $ax^2-ax-6a\le 0$

이 부등식이 $ax^2-bx+12\le 0$과 일치하므로

$b=a,\ 12=-6a$ $\quad\therefore a=-2,\ b=-2$

18 답 $0<k<1$

이차방정식 $x^2-2kx+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-k<0,\ k(k-1)<0$ $\quad\therefore 0<k<1$

19 답 $1\le k\le 4$

이차방정식 $x^2-4x-k^2+5k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(-k^2+5k)\le 0,\ k^2-5k+4\le 0$

$(k-1)(k-4)\le 0$ $\quad\therefore 1\le k\le 4$

20 답 $-6<k<2$

이차방정식 $-x^2-kx+k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2+4(k-3)<0$, $k^2+4k-12<0$

$(k+6)(k-2)<0$ $\quad\therefore -6<k<2$

21 답 $k\le0$ 또는 $k\ge2$

이차방정식 $x^2+2kx+2k(k-1)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-2k(k-1)\le0$, $-k^2+2k\le0$

$k^2-2k\ge0$, $k(k-2)\ge0$ $\quad\therefore k\le0$ 또는 $k\ge2$

22 답 $-4<k<0$

이차부등식 $kx^2+kx-1<0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$k<0$ ······㉠

또 이차방정식 $kx^2+kx-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2+4k<0$, $k(k+4)<0$

$\therefore -4<k<0$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $-4<k<0$

23 답 $1\le k\le4$

이차부등식 $kx^2+4x-k+5\ge0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 $k>0$ ······㉠

또 이차방정식 $kx^2+4x-k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=2^2-k(-k+5)\le0$, $k^2-5k+4\le0$

$(k-1)(k-4)\le0$ $\quad\therefore 1\le k\le4$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $1\le k\le4$

24 답 $1<k<5$

이차부등식 $(k-1)x^2-2(k-1)x+4>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$k-1>0$ $\quad\therefore k>1$ ······㉠

또 이차방정식 $(k-1)x^2-2(k-1)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-4(k-1)<0$, $k^2-6k+5<0$

$(k-1)(k-5)<0$ $\quad\therefore 1<k<5$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $1<k<5$

25 답 $-1\le k<1$

이차부등식 $(k-1)x^2+2(k-1)x-2\le0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$k-1<0$ $\quad\therefore k<1$ ······㉠

또 이차방정식 $(k-1)x^2+2(k-1)x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2+2(k-1)\le0$, $k^2-1\le0$

$(k+1)(k-1)\le0$ $\quad\therefore -1\le k\le1$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $-1\le k<1$

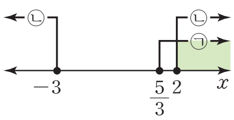
26 답 $x\ge2$

$3x-5\ge0$에서 $x\ge\dfrac{5}{3}$ ······㉠

$x^2+x-6\ge0$에서 $(x+3)(x-2)\ge0$

$\therefore x\le-3$ 또는 $x\ge2$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x\ge2$



27 답 $-1<x<4$

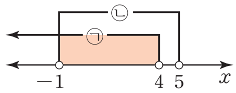
$2x<x+4$에서 $x<4$ ······㉠

$x^2-4x-5<0$에서 $(x+1)(x-5)<0$

$\therefore -1<x<5$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-1<x<4$



28 답 $-1<x\le0$ 또는 $1\le x<2$

$x^2-x\ge0$에서 $x(x-1)\ge0$

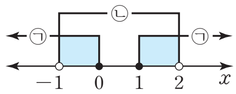
$\therefore x\le0$ 또는 $x\ge1$ ······㉠

$x^2-x-2<0$에서 $(x+1)(x-2)<0$

$\therefore -1<x<2$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-1<x\le0$ 또는 $1\le x<2$



29 답 $-2\le x<0$

$x^2-4x>0$에서 $x(x-4)>0$

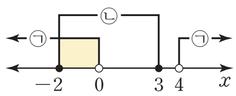
$\therefore x<0$ 또는 $x>4$ ······㉠

$x^2-x-6\le0$에서 $(x+2)(x-3)\le0$

$\therefore -2\le x\le3$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-2\le x<0$



30 답 $-1\le x<0$ 또는 $2<x\le6$

$x^2-2x>0$에서 $x(x-2)>0$

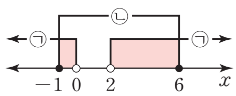
$\therefore x<0$ 또는 $x>2$ ······㉠

$x^2-5x-6\le0$에서 $(x+1)(x-6)\le0$

$\therefore -1\le x\le6$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-1\le x<0$ 또는 $2<x\le6$



31 답 $-\dfrac{5}{3}<x<\dfrac{3}{2}$

$x^2-6x+8\ge0$에서 $(x-2)(x-4)\ge0$

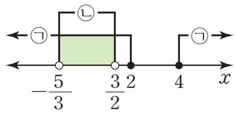
$\therefore x\le2$ 또는 $x\ge4$ ······㉠

$6x^2+x-15<0$에서 $(3x+5)(2x-3)<0$

$\therefore -\dfrac{5}{3}<x<\dfrac{3}{2}$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-\dfrac{5}{3}<x<\dfrac{3}{2}$



32 답 $-3<x<-1$ 또는 $3<x<5$

$3<x^2-2x$에서 $x^2-2x-3>0$

$(x+1)(x-3)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>3$ ······㉠

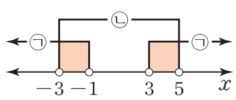
$x^2-2x<15$에서 $x^2-2x-15<0$

$(x+3)(x-5)<0$

$\therefore -3<x<5$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-3<x<-1$ 또는 $3<x<5$



33 답 $-3\le x<-1$ 또는 $0<x\le 2$

$-x<x^2$에서 $x^2+x>0$

$x(x+1)>0$

$\therefore$ $x<-1$ 또는 $x>0$ ……㉠

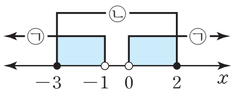
$x^2\le 6-x$에서 $x^2+x-6\le 0$

$(x+3)(x-2)\le 0$

$\therefore$ $-3\le x\le 2$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-3\le x<-1$ 또는 $0<x\le 2$



34 답 $-3\le x<-1$ 또는 $3<x\le 7$

$2x+3<x^2$에서 $x^2-2x-3>0$

$(x+1)(x-3)>0$

$\therefore$ $x<-1$ 또는 $x>3$ ……㉠

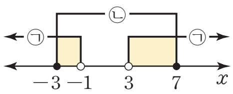
$x^2\le 4x+21$에서 $x^2-4x-21\le 0$

$(x+3)(x-7)\le 0$

$\therefore$ $-3\le x\le 7$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-3\le x<-1$ 또는 $3<x\le 7$



35 답 $3<x\le 5$

$6x+3<x^2+4x$에서 $x^2-2x-3>0$

$(x+1)(x-3)>0$

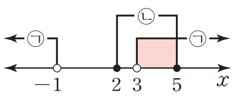
$\therefore$ $x<-1$ 또는 $x>3$ ……㉠

$x^2+4x\le 11x-10$에서 $x^2-7x+10\le 0$

$(x-2)(x-5)\le 0$

$\therefore$ $2\le x\le 5$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x\le 5$



36 답 $\frac{1}{2}<k\le 1$

주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(-1)^2-(2k-1)\ge 0$, $2-2k\ge 0$

$\therefore$ $k\le 1$

(ii) $\alpha+\beta=2>0$

(iii) $\alpha\beta=2k-1>0$ $\quad\therefore$ $k>\frac{1}{2}$

(i)~(iii)에서 $\frac{1}{2}<k\le 1$

37 답 $k\le -3$

주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(-k)^2-(-2k+3)\ge 0$

$k^2+2k-3\ge 0$, $(k+3)(k-1)\ge 0$

$\therefore$ $k\le -3$ 또는 $k\ge 1$

(ii) $\alpha+\beta=2k<0$ $\quad\therefore$ $k<0$

(iii) $\alpha\beta=-2k+3>0$ $\quad\therefore$ $k<\frac{3}{2}$

(i)~(iii)에서 $k\le -3$

38 답 $-1<k<1$

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha\beta=k^2-1<0$, $(k+1)(k-1)<0$

$\therefore$ $-1<k<1$

39 답 $-2<k\le 2$

$f(x)=x^2-2x+k-1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -1보다 크므로

(i) $\frac{D}{4}=1-(k-1)\ge 0$ $\quad\therefore$ $k\le 2$

(ii) $f(-1)=2+k>0$에서 $k>-2$

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이고 $1>-1$이다.

(i)~(iii)에서 $-2<k\le 2$

유형 완성하기

p. 219~238

01 답 $-2\le x\le 4$

$ax^2+(b-m)x+c-n\le 0$에서 $ax^2+bx+c\le mx+n$

따라서 주어진 이차부등식의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$과 만나거나 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $-2\le x\le 4$

01-1 답 ②

$ax^2+(b-m)x+c-n\ge 0$에서 $ax^2+bx+c\ge mx+n$

즉 주어진 이차부등식의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$과 만나거나 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $x\le 1$ 또는 $x\ge 4$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=4$이므로

$\alpha^2+\beta^2=1^2+4^2=17$

02 답 10

이차부등식 $f(x)\ge 0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나거나 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x\le -3$ 또는 $x\ge 1$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=1$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-3)^2+1^2=10$

02-1 답 ②

이차부등식 $f(x)\le 0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나거나 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x\le -3$ 또는 $x\ge 2$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=2$이므로

$\alpha\beta=-3\times 2=-6$

03 답 1

$f(x)g(x)<0$에서 $f(x)>0$, $g(x)<0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)>0$

(i) $f(x)>0$, $g(x)<0$을 만족시키는 x의 값은 없다.

(ii) $f(x)<0$, $g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$x<-2$ 또는 $x>3$

(i), (ii)에서 $x<-2$ 또는 $x>3$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=3$이므로

$\alpha+\beta=-2+3=1$

03-1 답 $0<x<2$

주어진 부등식의 해는 $y=g(x)$의 그래프에서 x축보다 아래쪽에 있고 $y=f(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $0<x<2$

04 답 ②

$2(2-x^2)>x^2+x$에서 $4-2x^2>x^2+x$

$3x^2+x-4<0$, $(3x+4)(x-1)<0$ $\quad\therefore -\frac{4}{3}<x<1$

따라서 $a=-\frac{4}{3}$, $b=1$이므로 $3ab=3\times\left(-\frac{4}{3}\right)\times1=-4$

04-1 답 ⑤

$(x+1)(x-2)<2x+2$에서 $x^2-x-2<2x+2$

$x^2-3x-4<0$, $(x+1)(x-4)<0$ $\quad\therefore -1<x<4$

따라서 $a=-1$, $b=4$이므로 $b-a=4-(-1)=5$

05 답 $-4\sqrt{3}$

이차방정식 $x^2-8x+4=0$의 해는 $x=4\pm2\sqrt{3}$이므로 이차부등식 $x^2-8x+4<0$의 해는 $4-2\sqrt{3}<x<4+2\sqrt{3}$

따라서 $\alpha=4-2\sqrt{3}$, $\beta=4+2\sqrt{3}$이므로

$\alpha-\beta=4-2\sqrt{3}-(4+2\sqrt{3})=-4\sqrt{3}$

05-1 답 $-2\sqrt{3}$

이차방정식 $x^2+4x+1=0$의 해는 $x=-2\pm\sqrt{3}$이므로 이차부등식 $x^2+4x+1>0$의 해는 $x<-2-\sqrt{3}$ 또는 $x>-2+\sqrt{3}$

따라서 $\alpha=-2-\sqrt{3}$, $\beta=-2+\sqrt{3}$이므로

$\alpha-\beta=-2-\sqrt{3}-(-2+\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$

06 답 ①

① $3x^2-6x+4\le0$에서 $3(x-1)^2+1\le0$

즉 주어진 이차부등식의 해는 없다.

② $x^2-4x+4\le0$에서 $(x-2)^2\le0$

즉 주어진 이차부등식의 해는 $x=2$이다.

③ $-2x^2+2x-1<0$에서 $2x^2-2x+1>0$

$\therefore 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$

즉 주어진 이차부등식의 해는 모든 실수이다.

④ $x^2-6x+9\le0$에서 $(x-3)^2\le0$

즉 주어진 이차부등식의 해는 $x=3$이다.

⑤ $x^2+x+2>0$에서 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$

즉 주어진 이차부등식의 해는 모든 실수이다.

따라서 해가 없는 것은 ①이다.

06-1 답 ④

① $-4x^2+4x-2\le1$에서 $4x^2-4x+3\ge0$

$\therefore (2x-1)^2+2\ge0$

즉 주어진 이차부등식의 해는 모든 실수이다.

② $\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}x+1\ge0$에서 $\left(\frac{1}{3}x-1\right)^2\ge0$

즉 주어진 이차부등식의 해는 모든 실수이다.

③ $x^2+x+1>0$에서 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

즉 주어진 이차부등식의 해는 모든 실수이다.

④ $3x^2-2x\le-1$에서 $3x^2-2x+1\le0$

$\therefore 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\le0$

즉 주어진 이차부등식의 해는 없다.

⑤ $2x-4<x^2$에서 $x^2-2x+4>0$

$\therefore (x-1)^2+3>0$

즉 주어진 이차부등식의 해는 모든 실수이다.

따라서 해가 다른 하나는 ④이다.

07 답 ④

$x^2-x-5>|2x-1|$에서

(i) $x<\frac{1}{2}$일 때, $x^2-x-5>-2x+1$

$x^2+x-6>0$, $(x+3)(x-2)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>2$

그런데 $x<\frac{1}{2}$이므로 $x<-3$

(ii) $x\ge\frac{1}{2}$일 때, $x^2-x-5>2x-1$

$x^2-3x-4>0$, $(x+1)(x-4)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>4$

그런데 $x\ge\frac{1}{2}$이므로 $x>4$

(i), (ii)에서 $x<-3$ 또는 $x>4$

07-1 답 ①

$x^2-3x>|x-3|$에서

(i) $x<3$일 때, $x^2-3x>-x+3$

$x^2-2x-3>0$, $(x+1)(x-3)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>3$

그런데 $x<3$이므로 $x<-1$

(ii) $x\ge3$일 때, $x^2-3x>x-3$

$x^2-4x+3>0$, $(x-1)(x-3)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>3$

그런데 $x\ge3$이므로 $x>3$

(i), (ii)에서 $x<-1$ 또는 $x>3$

08 답 ③

$x^2-3|x|-4\le0$에서

(i) $x<0$일 때, $x^2+3x-4\le0$

$(x+4)(x-1)\le0$ $\quad\therefore -4\le x\le1$

그런데 $x<0$이므로 $-4\le x<0$

(ii) $x\ge0$일 때, $x^2-3x-4\le0$

$(x+1)(x-4)\le0$ $\quad\therefore -1\le x\le4$

그런데 $x\ge0$이므로 $0\le x\le4$

(i), (ii)에서 $-4\le x\le4$

따라서 정수 x의 값은 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4이므로 그 개수는 9이다.

08-1 답 ③

$x^2-|x|-1<1$에서 $x^2-|x|-2<0$

(i) $x<0$일 때, $x^2+x-2<0$

$(x+2)(x-1)<0$ $\quad\therefore -2<x<1$

그런데 $x<0$이므로 $-2<x<0$

(ii) $x\ge0$일 때, $x^2-x-2<0$

$(x+1)(x-2)<0$ $\quad\therefore -1<x<2$

그런데 $x \geq 0$이므로 $0 \leq x < 2$

(i), (ii)에서 $-2 < x < 2$

따라서 정수 x의 값은 $-1, 0, 1$이므로 그 합은

$-1+0+1=0$

다른 풀이

$x^2=|x|^2$이므로 $|x|^2-|x|-2<0$에서

$(|x|+1)(|x|-2)<0$

그런데 $|x|+1>0$이므로 $|x|-2<0$

$|x|<2 \qquad \therefore -2<x<2$

09 답 $x<-2$ 또는 $x>0$

$x^2+2x+4=(x+1)^2+3>0$이므로 ……❶

$|x^2+2x+4|>4$에서 $x^2+2x+4>4$ ……❷

$x^2+2x>0$, $x(x+2)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>0$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 절댓값 기호 안의 식의 부호를 알 수 있다.	40%
❷ 주어진 부등식을 절댓값 기호를 없애고 나타낼 수 있다.	20%
❸ 부등식의 해를 구할 수 있다.	40%

09-1 답 $1 \leq x \leq 2$

$x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$이므로

$|x^2-2x+3| \leq x+1$에서 $x^2-2x+3 \leq x+1$

$x^2-3x+2 \leq 0$, $(x-1)(x-2) \leq 0$

$\therefore 1 \leq x \leq 2$

10 답 ②

$ax^2+x+b<0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>3$이므로

$a<0$이고 $a(x+2)(x-3)<0$

즉 $ax^2-ax-6a<0$이므로 $-a=1$, $-6a=b$

$\therefore a=-1, b=6$

$\therefore ab=-1 \times 6=-6$

다른 풀이

이차방정식 $ax^2+x+b=0$의 두 근이 $-2, 3$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+3=-\frac{1}{a} \qquad \therefore a=-1$

$-2 \times 3=\frac{b}{a}$, $-6=-b \qquad \therefore b=6$

$\therefore ab=-1 \times 6=-6$

10-1 답 6

$ax^2+7x+b>0$의 해가 $\frac{1}{2}<x<3$이므로

$a<0$이고 $a\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)>0$

즉 $ax^2-\frac{7}{2}ax+\frac{3}{2}a>0$이므로 $-\frac{7}{2}a=7$, $\frac{3}{2}a=b$

$\therefore a=-2, b=-3$

$\therefore ab=-2 \times (-3)=6$

11 답 ④

$x^2+(a+b)x-b<0$의 해가 $1<x<2$이므로

$(x-1)(x-2)<0$

즉 $x^2-3x+2<0$이므로 $a+b=-3$, $-b=2$

$\therefore a=-1, b=-2$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{-2}{-1}=2$

11-1 답 ②

$x^2+ax+b \leq 0$의 해가 $-1 \leq x \leq 2$이므로

$(x+1)(x-2) \leq 0$

즉 $x^2-x-2 \leq 0$이므로 $a=-1, b=-2$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+(-2)^2=5$

12 답 ③

해가 $x<-3$ 또는 $x>1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-1)>0 \qquad \therefore x^2+2x-3>0$

이 부등식이 $x^2-ax-b>0$과 일치하므로

$a=-2, b=3$ ……㉠

㉠을 $-x^2+bx+a>0$에 대입하면

$-x^2+3x-2>0$, $x^2-3x+2<0$

$(x-1)(x-2)<0 \qquad \therefore 1<x<2$

12-1 답 ③

해가 $x<-1$ 또는 $x>3$이고 x^2의 계수가 2인 이차부등식은

$2(x+1)(x-3)>0 \qquad \therefore 2x^2-4x-6>0$

이 부등식이 $2x^2+ax-b>0$과 일치하므로

$a=-4, b=6$ ……㉠

㉠을 $-2x^2-bx+a>0$에 대입하면

$-2x^2-6x-4>0$, $x^2+3x+2<0$

$(x+1)(x+2)<0 \qquad \therefore -2<x<-1$

13 답 5

$ax^2+bx+1 \geq 0$의 해가 $1-\sqrt{2} \leq x \leq 1+\sqrt{2}$이므로

$a<0$이고 $a(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2}) \geq 0$ ……❶

즉 $a(x^2-2x-1) \geq 0$에서 $ax^2-2ax-a \geq 0$이므로

$b=-2a$, $-a=1$

따라서 $a=-1, b=2$이므로 ……❷

$a^2+b^2=(-1)^2+2^2=5$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 이차부등식을 구할 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20%

13-1 답 ③

$x^2+ax+b<0$의 해가 $\frac{3-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{13}}{2}$이므로

$\left(x-\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)<0 \qquad \therefore x^2-3x-1<0$

따라서 $a=-3, b=-1$이므로

$4ab=4 \times (-3) \times (-1)=12$

14 답 $-1 \leq x \leq 2$

$ax^2+bx+c \geq 0$의 해가 $x=2$이므로

$a<0$이고 $a(x-2)^2 \geq 0$

즉 $ax^2-4ax+4a \geq 0$이므로 $b=-4a$, $c=4a$ ……㉠

㉠을 $bx^2+cx+8a\le 0$에 대입하면
$-4ax^2+4ax+8a\le 0$
이때 $-4a>0$이므로 $x^2-x-2\le 0$
$(x+1)(x-2)\le 0$ $\quad\therefore -1\le x\le 2$

14-1 답 $x<1$ 또는 $x>4$

$ax^2+(a-b)x+b+c\ge 0$의 해가 $x=-1$이므로
$a<0$이고 $a(x+1)^2\ge 0$
즉 $ax^2+2ax+a\ge 0$이므로 $a-b=2a$, $b+c=a$
$\therefore b=-a$, $c=2a$ ……㉠
㉠을 $bx^2+(2c-b)x+3a+5b-c>0$에 대입하면
$-ax^2+5ax-4a>0$
이때 $-a>0$이므로 $x^2-5x+4>0$
$(x-1)(x-4)>0$ $\quad\therefore x<1$ 또는 $x>4$

15 답 $x<-1$ 또는 $x>\frac{1}{3}$

$ax^2+bx+c<0$의 해가 $x<-3$ 또는 $x>1$이므로
$a<0$이고 $a(x+3)(x-1)<0$
즉 $ax^2+2ax-3a<0$이므로 $b=2a$, $c=-3a$ ……㉠
㉠을 $cx^2-bx+a>0$에 대입하면
$-3ax^2-2ax+a>0$
이때 $-a>0$이므로 $3x^2+2x-1>0$
$(x+1)(3x-1)>0$ $\quad\therefore x<-1$ 또는 $x>\frac{1}{3}$

15-1 답 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}$

$ax^2+bx+c>0$의 해가 $-2<x<3$이므로
$a<0$이고 $a(x+2)(x-3)>0$
즉 $ax^2-ax-6a>0$이므로 $b=-a$, $c=-6a$ ……㉠
㉠을 $cx^2+bx+a<0$에 대입하면
$-6ax^2-ax+a<0$
이때 $-a>0$이므로 $6x^2+x-1<0$
$(2x+1)(3x-1)<0$ $\quad\therefore -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}$

16 답 ②

$f(x)>0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>1$이므로 양수 a에 대하여
$f(x)=a(x+2)(x-1)$이라 하면
$f(x-7)=a(x-5)(x-8)$
부등식 $f(x-7)<0$, 즉 $a(x-5)(x-8)<0$에서
$(x-5)(x-8)<0$ ($\because a>0$)
$\therefore 5<x<8$
따라서 정수 x의 최댓값은 7이다.

다른 풀이

$f(x)>0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>1$이므로
$f(x)<0$의 해는 $-2<x<1$
따라서 $f(x-7)<0$의 해는 $-2<x-7<1$에서 $5<x<8$이므로
$f(x-7)<0$을 만족시키는 정수 x의 최댓값은 7이다.

16-1 답 ①

$f(x)\le 0$의 해가 $x\le -\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge 1$이므로 음수 a에 대하여
$f(x)=a(2x+1)(x-1)$이라 하면
$f(x-1)=a(2x-1)(x-2)$
부등식 $f(x-1)\ge 0$, 즉 $a(2x-1)(x-2)\ge 0$에서
$(2x-1)(x-2)\le 0$ ($\because a<0$)
$\therefore \frac{1}{2}\le x\le 2$
따라서 $\alpha=2$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로
$\alpha+4\beta=2+4\times\frac{1}{2}=4$

17 답 ②

$f(x)<0$의 해가 $2<x<4$이므로 양수 a에 대하여
$f(x)=a(x-2)(x-4)$라 하면
$f(-2x)=a(-2x-2)(-2x-4)$
$\qquad\quad=4a(x+1)(x+2)$
부등식 $f(-2x)\le 0$, 즉 $4a(x+1)(x+2)\le 0$에서
$(x+1)(x+2)\le 0$ ($\because 4a>0$)
$\therefore -2\le x\le -1$
따라서 정수 x의 값은 -2, -1이므로 그 개수는 2이다.

17-1 답 ③

$f(x)>0$의 해가 $1<x<5$이므로 음수 a에 대하여
$f(x)=a(x-1)(x-5)$라 하면
$f(5-2x)=a(5-2x-1)(5-2x-5)$
$\qquad\qquad=4ax(x-2)$
$f(0)=a(0-1)(0-5)=5a$이므로 부등식 $f(5-2x)>f(0)$,
즉 $f(5-2x)-f(0)>0$에서
$4ax(x-2)-5a>0$, $4ax^2-8ax-5a>0$
이때 $a<0$이므로 $4x^2-8x-5<0$
$(2x+1)(2x-5)<0$ $\quad\therefore -\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$
따라서 정수 x의 값은 0, 1, 2이므로 그 개수는 3이다.

18 답 3

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1, 0)$, $(2, 0)$에서 만나므로 $f(x)=a(x+1)(x-2)$ $(a>0)$라 하면
$f\left(\frac{x+1}{2}\right)=a\left(\frac{x+1}{2}+1\right)\left(\frac{x+1}{2}-2\right)$
$\qquad\qquad=\frac{a}{4}(x+3)(x-3)$ ……❶
$f\left(\frac{x+1}{2}\right)\le 0$에서 $\frac{a}{4}(x+3)(x-3)\le 0$
이때 $a>0$이므로 $(x+3)(x-3)\le 0$
$\therefore -3\le x\le 3$ ……❷
$\therefore k=3$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $f\left(\frac{x+1}{2}\right)$을 구할 수 있다.	50%
❷ 부등식 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)\le 0$의 해를 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	10%

18-1 답 7

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1, 0)$, $(3, 0)$에서 만나므로 $f(x)=a(x+1)(x-3)$ $(a<0)$이라 하면

$f\left(\frac{x-1}{2}\right)=a\left(\frac{x-1}{2}+1\right)\left(\frac{x-1}{2}-3\right)$

$=\frac{a}{4}(x+1)(x-7)$ ······❶

$f\left(\frac{x-1}{2}\right)>0$에서 $\frac{a}{4}(x+1)(x-7)>0$

이때 $a<0$이므로 $(x+1)(x-7)<0$

$\therefore -1<x<7$ ······❷

$\therefore k=7$ ······❸

채점 기준	비율
❶ $f\left(\frac{x-1}{2}\right)$을 구할 수 있다.	50%
❷ 부등식 $f\left(\frac{x-1}{2}\right)>0$의 해를 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	10%

19 답 ④

이차부등식 $(a+1)x^2-2(a+1)x+5\le0$의 해가 오직 한 개 존재해야 하므로

$a+1>0$ $\quad\therefore a>-1$

이차방정식 $(a+1)x^2-2(a+1)x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-5(a+1)=0,\ (a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a>-1)$

19-1 답 ①

이차부등식 $-ax^2+8x-4a\le0$의 해가 오직 한 개 존재해야 하므로

$-a>0$ $\quad\therefore a<0$

이차방정식 $-ax^2+8x-4a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-4a^2=0,\ 4a^2=16,\ a^2=4$

$\therefore a=-2\ (\because a<0)$

20 답 ⑤

이차부등식 $x^2-(a-8)x+a\le0$의 해가 오직 한 개 존재해야 하므로 이차방정식 $x^2-(a-8)x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a-8)\}^2-4a=0,\ a^2-20a+64=0$

$(a-4)(a-16)=0$ $\quad\therefore a=4$ 또는 $a=16$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$4+16=20$

20-1 답 12

이차부등식 $x^2+(a-4)x+a\le0$의 해가 오직 한 개 존재해야 하므로 이차방정식 $x^2+(a-4)x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-4)^2-4a=0$

$\therefore a^2-12a+16=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 12이다.

21 답 ③

이차부등식 $ax^2-2(a+4)x+2a+2\ge0$이 오직 한 개의 실근을 가지므로 $a<0$

이차방정식 $ax^2-2(a+4)x+2a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+4)\}^2-a(2a+2)=0$

$a^2-6a-16=0,\ (a+2)(a-8)=0$

$\therefore a=-2\ (\because a<0)$

즉 주어진 이차부등식은 $-2x^2-4x-2\ge0$이므로

$x^2+2x+1\le0,\ (x+1)^2\le0$

$\therefore x=-1$, 즉 $b=-1$

$\therefore a+b=-2+(-1)=-3$

21-1 답 ①

이차부등식 $-ax^2-(2-5a)x-9a\le0$이 오직 한 개의 실근을 가지므로 $-a>0$ $\quad\therefore a<0$

이차방정식 $-ax^2-(2-5a)x-9a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2-5a)\}^2-4\times(-a)\times(-9a)=0$

$11a^2+20a-4=0,\ (a+2)(11a-2)=0$

$\therefore a=-2\ (\because a<0)$

즉 주어진 이차부등식은 $2x^2-12x+18\le0$이므로

$x^2-6x+9\le0,\ (x-3)^2\le0$

$\therefore x=3$, 즉 $b=3$

$\therefore \frac{a}{b}=-\frac{2}{3}$

22 답 ④

이차부등식 $x^2+2(k+2)x+k^2+k+1<0$의 해가 존재하려면 이차방정식 $x^2+2(k+2)x+k^2+k+1=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+2)^2-(k^2+k+1)>0,\ 3k+3>0$

$\therefore k>-1$

따라서 정수 k의 최솟값은 0이다.

22-1 답 20

이차부등식 $-9x^2+2(k-1)x-1>0$의 해가 존재하려면 이차방정식 $-9x^2+2(k-1)x-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-9>0,\ k^2-2k-8>0$

$(k+2)(k-4)>0$ $\quad\therefore k<-2$ 또는 $k>4$

따라서 $a=-2,\ b=4$이므로

$a^2+b^2=(-2)^2+4^2=20$

23 답 ⑤

이차부등식 $2x^2-kx+8\le0$의 해가 존재하려면 이차방정식 $2x^2-kx+8=0$이 서로 다른 두 실근 또는 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-64\ge0,\ (k+8)(k-8)\ge0$

$\therefore k\le-8$ 또는 $k\ge8$

이때 $k>0$이므로 $k\ge8$

따라서 양수 k의 최솟값은 8이다.

23-1 답 ③

이차부등식 $x^2-kx+4\le0$의 해가 존재하려면 이차방정식 $x^2-kx+4=0$이 서로 다른 두 실근 또는 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-16\ge0,\ (k+4)(k-4)\ge0$

$\therefore k\le -4$ 또는 $k\ge 4$
이때 $k>0$이므로 $k\ge 4$
따라서 양수 k의 최솟값은 4이다.

24 답 $-1<a<0$ 또는 $a>0$

(i) $a>0$일 때
이차함수 $y=ax^2+2x+a$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다. ······❶
(ii) $a<0$일 때
주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+2x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1^2-a^2>0$, $a^2-1<0$
$(a+1)(a-1)<0$ $\therefore -1<a<1$
그런데 $a<0$이므로 $-1<a<0$ ······❷
(i), (ii)에서 실수 a의 값의 범위는
$-1<a<0$ 또는 $a>0$ ······❸

채점 기준	비율
❶ $a>0$일 때, 주어진 이차부등식이 해를 가질 조건을 구할 수 있다.	30%
❷ $a<0$일 때, 주어진 이차부등식이 해를 가질 조건을 구할 수 있다.	50%
❸ 실수 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%

24-1 답 $k\le\frac{8}{3}$

$(k+1)x^2+k+2\le x^2+kx+4$에서 $kx^2-kx+k-2\le 0$
(i) $k<0$일 때
이차함수 $y=kx^2-kx+k-2$의 그래프는 위로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.
(ii) $k=0$일 때
$-2\le 0$이므로 해는 모든 실수이다.
(iii) $k>0$일 때
주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $kx^2-kx+k-2=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=k^2-4k(k-2)\ge 0$, $-3k^2+8k\ge 0$
$3k^2-8k\le 0$, $k(3k-8)\le 0$ $\therefore 0\le k\le\frac{8}{3}$
그런데 $k>0$이므로 $0<k\le\frac{8}{3}$
(i)~(iii)에서 실수 k의 값의 범위는 $k\le\frac{8}{3}$

25 답 ①

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-3ax+a(2a-1)\ge 0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-3ax+a(2a-1)=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-3a)^2-4a(2a-1)\le 0$, $a^2+4a\le 0$
$a(a+4)\le 0$ $\therefore -4\le a\le 0$
따라서 정수 a의 값은 $-4, -3, -2, -1, 0$이므로 그 개수는 5이다.

25-1 답 ①

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+3ax+2a(a+1)>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+3ax+2a(a+1)=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(3a)^2-8a(a+1)<0$, $a^2-8a<0$
$a(a-8)<0$ $\therefore 0<a<8$
따라서 정수 a의 값은 $1, 2, 3, \cdots, 7$이므로 그 개수는 7이다.

26 답 ④

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2-2(a+2)x+2a+1<0$이 항상 성립해야 하므로 $a<0$
이차방정식 $ax^2-2(a+2)x+2a+1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=\{-(a+2)\}^2-a(2a+1)<0$, $a^2-3a-4>0$
$(a+1)(a-4)>0$ $\therefore a<-1$ 또는 $a>4$
그런데 $a<0$이므로 $a<-1$

26-1 답 ④

(i) $a+2=0$, 즉 $a=-2$일 때
$-8\le 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.
(ii) $a+2\ne 0$, 즉 $a\ne -2$일 때
주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면
$a+2<0$ $\therefore a<-2$
이차방정식 $(a+2)x^2-2(a+2)x+2(a-2)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=\{-(a+2)\}^2-(a+2)\times 2(a-2)\le 0$
$a^2-4a-12\ge 0$, $(a+2)(a-6)\ge 0$
$\therefore a\le -2$ 또는 $a\ge 6$
그런데 $a<-2$이므로 $a<-2$
(i), (ii)에서 $a\le -2$

27 답 $-1\le k\le 2$

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{x^2-2kx+k+2}$가 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2kx+k+2\ge 0$이 성립해야 한다. ······❶
이차방정식 $x^2-2kx+k+2=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k+2)\le 0$
$k^2-k-2\le 0$, $(k+1)(k-2)\le 0$
$\therefore -1\le k\le 2$ ······❷

채점 기준	비율
❶ 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2kx+k+2\ge 0$이 성립해야 함을 알 수 있다.	60%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%

27-1 답 0

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{kx^2-2kx-2}$가 허수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 $kx^2-2kx-2<0$이 성립해야 한다. ······❶
(i) $k=0$일 때
$-2<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다. ······❷
(ii) $k\ne 0$일 때
모든 실수 x에 대하여 성립하려면 $k<0$
이차방정식 $kx^2-2kx-2=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=k^2+2k<0$, $k(k+2)<0$
$\therefore -2<k<0$
그런데 $k<0$이므로 $-2<k<0$ ······❸

(i), (ii)에서 $-2<k\le0$

따라서 실수 k의 최댓값은 0이다. ······❹

채점 기준	비율
❶ 모든 실수 x에 대하여 $kx^2-2kx-2<0$이 성립해야 함을 알 수 있다.	20%
❷ $k=0$일 때, 주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립함을 알 수 있다.	30%
❸ $k\neq0$일 때, 주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립할 조건을 구할 수 있다.	30%
❹ 실수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

28 답 ①

이차부등식 $x^2-4ax+a^2-2a+1<0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-4ax+a^2-2a+1\ge0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-4ax+a^2-2a+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-(a^2-2a+1)\le0,\ 3a^2+2a-1\le0$

$(a+1)(3a-1)\le0 \qquad \therefore -1\le a\le\frac{1}{3}$

28-1 답 ⑤

이차부등식 $x^2-2ax-a^2+3a-1<0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2ax-a^2+3a-1\ge0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2ax-a^2+3a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(-a^2+3a-1)\le0,\ 2a^2-3a+1\le0$

$(2a-1)(a-1)\le0 \qquad \therefore \frac{1}{2}\le a\le1$

29 답 ③

이차부등식 $kx^2+4kx+3k+4\le0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $kx^2+4kx+3k+4>0$이 성립해야 하므로 $k>0$

이차방정식 $kx^2+4kx+3k+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-k(3k+4)<0,\ k^2-4k<0$

$k(k-4)<0 \qquad \therefore 0<k<4$

그런데 $k>0$이므로 $0<k<4$

따라서 정수 k의 값은 1, 2, 3이므로 그 개수는 3이다.

29-1 답 ⑤

$kx^2+4x+2k+1<-4x+k+7$에서 $kx^2+8x+k-6<0$

이차부등식 $kx^2+8x+k-6<0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $kx^2+8x+k-6\ge0$이 성립해야 하므로

$k>0$

이차방정식 $kx^2+8x+k-6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-k(k-6)\le0,\ -k^2+6k+16\le0$

$k^2-6k-16\ge0,\ (k+2)(k-8)\ge0$

$\therefore k\le-2$ 또는 $k\ge8$

그런데 $k>0$이므로 $k\ge8$

따라서 정수 k의 최솟값은 8이다.

30 답 ①

이차부등식 $(k+1)x^2-3(k+1)x+2k\ge0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $(k+1)x^2-3(k+1)x+2k<0$이 성립해야 한다.

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$k+1<0 \qquad \therefore k<-1$ ······㉠

이차방정식 $(k+1)x^2-3(k+1)x+2k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-3(k+1)\}^2-4\times(k+1)\times2k<0$

$k^2+10k+9<0,\ (k+1)(k+9)<0$

$\therefore -9<k<-1$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $-9<k<-1$

따라서 정수 k의 최댓값과 최솟값은 각각 -2, -8이므로 그 합은

$-2+(-8)=-10$

30-1 답 ③

이차부등식 $(1-k)x^2+(1-k)x-5\ge0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $(1-k)x^2+(1-k)x-5<0$이 성립해야 한다.

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$1-k<0 \qquad \therefore k>1$ ······㉠

이차방정식 $(1-k)x^2+(1-k)x-5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(1-k)^2-4\times(1-k)\times(-5)<0$

$k^2-22k+21<0,\ (k-1)(k-21)<0$

$\therefore 1<k<21$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $1<k<21$

따라서 정수 k의 최댓값과 최솟값은 각각 20, 2이므로 그 합은

$20+2=22$

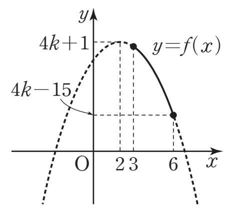
31 답 $\frac{15}{4}$

$f(x)=-x^2+4x-3+4k$라 하면

$f(x)=-(x-2)^2+4k+1$

$3\le x\le6$에서 $f(x)\ge0$이어야 하므로

$3\le x\le6$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $f(6)=4k-15\ge0$이므로 $k\ge\frac{15}{4}$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\frac{15}{4}$이다.

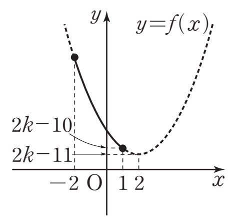
31-1 답 ④

$f(x)=x^2-4x+2k-7$이라 하면

$f(x)=(x-2)^2+2k-11$

$-2\le x\le1$에서 $f(x)\ge0$이어야 하므로

$-2\le x\le1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $f(1)=2k-10\ge0$이므로 $k\ge5$

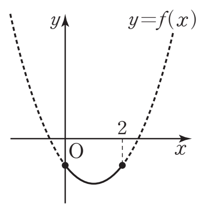
따라서 실수 k의 최솟값은 5이다.

32 답 ④

$f(x)=2x^2+ax-a^2$이라 하면

$0\le x\le2$에서 $f(x)<0$이어야 하므로

$0\le x\le2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $f(0)=-a^2<0$에서 $a^2>0$

$\therefore a\neq0$인 모든 실수

(ii) $f(2)=-a^2+2a+8<0$에서

$a^2-2a-8>0,\ (a+2)(a-4)>0$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>4$

(i), (ii)에서 $a<-2$ 또는 $a>4$

32-1 답 ③

$x^2+4x-3<-x^2+8x+a$에서 $2x^2-4x-3-a<0$

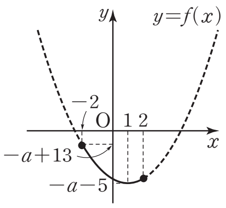
$f(x)=2x^2-4x-3-a$라 하면

$f(x)=2(x-1)^2-a-5$

$-2\leq x\leq 2$에서 $f(x)<0$이어야 하므로

$-2\leq x\leq 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.



즉 $f(-2)=-a+13<0$이므로 $a>13$

따라서 자연수 a의 최솟값은 14이다.

33 답 ⑤

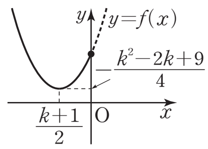
$f(x)=x^2-(k+1)x+k-2$라 하면

$f(x)=\left(x-\frac{k+1}{2}\right)^2-\frac{k^2-2k+9}{4}$

$x\leq 0$에서 $f(x)>0$이어야 하므로

(i) $\frac{k+1}{2}<0$, 즉 $k<-1$일 때

$x\leq 0$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



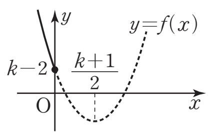
즉 $f\left(\frac{k+1}{2}\right)=-\frac{k^2-2k+9}{4}>0$

이므로 $k^2-2k+9<0$

그런데 $k^2-2k+9=(k-1)^2+8\geq 8$이므로 $k^2-2k+9<0$을 만족시키는 실수 k의 값은 없다.

(ii) $\frac{k+1}{2}\geq 0$, 즉 $k\geq -1$일 때

$x\leq 0$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $f(0)=k-2>0$이므로 $k>2$

그런데 $k\geq -1$이므로 $k>2$

(i), (ii)에서 $k>2$

33-1 답 $-7\leq a\leq 2$

$x^2+ax+3\geq a$에서 $x^2+ax-a+3\geq 0$

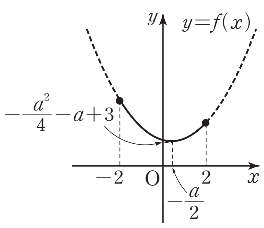
$f(x)=x^2+ax-a+3$이라 하면

$f(x)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-a+3$

$-2\leq x\leq 2$에서 $f(x)\geq 0$이어야 하므로

(i) $-2\leq -\frac{a}{2}\leq 2$, 즉 $-4\leq a\leq 4$일 때

$-2\leq x\leq 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $f\left(-\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}-a+3\geq 0$

이므로 $a^2+4a-12\leq 0$

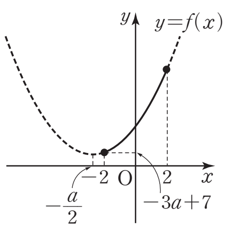
$(a+6)(a-2)\leq 0$

$\therefore\ -6\leq a\leq 2$

그런데 $-4\leq a\leq 4$이므로 $-4\leq a\leq 2$

(ii) $-\frac{a}{2}<-2$, 즉 $a>4$일 때

$-2\leq x\leq 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



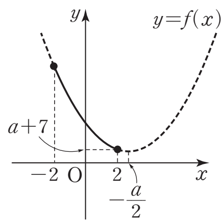
즉 $f(-2)=-3a+7\geq 0$이므로

$a\leq \frac{7}{3}$

그런데 $a>4$이므로 실수 a는 존재하지 않는다.

(iii) $-\frac{a}{2}>2$, 즉 $a<-4$일 때

$-2\leq x\leq 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $f(2)=a+7\geq 0$이므로 $a\geq -7$

그런데 $a<-4$이므로 $-7\leq a<-4$

(i)~(iii)에서 $-7\leq a\leq 2$

34 답 ③

$-x^2-ax+b>2x+3$에서 $x^2+(a+2)x+3-b<0$ ……㉠

해가 $1<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-3)<0$ $\quad\therefore\ x^2-4x+3<0$ ……㉡

㉠과 ㉡이 일치해야 하므로

$a+2=-4$, $3-b=3$ $\quad\therefore\ a=-6$, $b=0$

$\therefore\ ab=-6\times 0=0$

34-1 답 ②

$2x^2+ax+b>-2x+1$에서 $2x^2+(a+2)x+b-1>0$ ……㉠

해가 $x<1$ 또는 $x>2$이고 x^2의 계수가 2인 이차부등식은

$2(x-1)(x-2)>0$ $\quad\therefore\ 2x^2-6x+4>0$ ……㉡

㉠과 ㉡이 일치해야 하므로

$a+2=-6$, $b-1=4$ $\quad\therefore\ a=-8$, $b=5$

$\therefore\ b-a=5-(-8)=13$

35 답 $-1<x<2$

$2x^2-3x-3<x^2-2x-1$에서 $x^2-x-2<0$

$(x+1)(x-2)<0$ $\quad\therefore\ -1<x<2$

35-1 답 $x<1$ 또는 $x>\frac{3}{2}$

$-x^2+3x<x^2-2x+3$에서 $2x^2-5x+3>0$

$(2x-3)(x-1)>0$ $\quad\therefore\ x<1$ 또는 $x>\frac{3}{2}$

36 답 ②

$x^2-2ax+a-1>-2x^2+4x-3$에서

$3x^2-(2a+4)x+a+2>0$ ……㉠

해가 $x<b$ 또는 $x>2$이고 x^2의 계수가 3인 이차부등식은

$3(x-b)(x-2)>0$ $\quad\therefore\ 3x^2-(3b+6)x+6b>0$ ……㉡

㉠과 ㉡이 일치해야 하므로

$2a+4=3b+6$, $a+2=6b$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=\frac{2}{3}$

$\therefore\ a+3b=2+3\times\frac{2}{3}=4$

36-1 답 ②

$x^2+2ax+3<-3x^2+3a$에서 $4x^2+2ax-3a+3<0$ ……㉠

해가 $-\frac{3}{2}<x<b$이고 x^2의 계수가 4인 이차부등식은

$4\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-b)<0$ $\quad\therefore\ 4x^2+(6-4b)x-6b<0$ ……㉡

㉠과 ㉡이 일치해야 하므로

$2a=6-4b$, $-3a+3=-6b$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=\frac{1}{2}$

$\therefore a^2+4b=2^2+4\times\frac{1}{2}=6$

37 답 $-2<k<6$

$4x^2+2x+1>kx$에서 $4x^2+(2-k)x+1>0$

이 이차부등식이 항상 성립해야 하므로 이차방정식

$4x^2+(2-k)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2-k)^2-4\times4<0$, $k^2-4k-12<0$

$(k+2)(k-6)<0$ $\therefore -2<k<6$

37-1 답 ⑤

$-x^2+2ax-2<2x+a-1$에서 $x^2+2(1-a)x+a+1>0$

이 이차부등식이 항상 성립해야 하므로 이차방정식

$x^2+2(1-a)x+a+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(1-a)^2-(a+1)<0$, $a^2-3a<0$

$a(a-3)<0$ $\therefore 0<a<3$

따라서 정수 a의 최댓값은 2이다.

38 답 ②

이차함수 $y=x^2+(a-4)x+4$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+(a-4)x+4>0$이 성립해야 하므로

이차방정식 $x^2+(a-4)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-4)^2-4\times4<0$, $a^2-8a<0$

$a(a-8)<0$ $\therefore 0<a<8$

따라서 정수 a의 값은 1, 2, 3, $\cdots$, 7이므로 그 개수는 7이다.

38-1 답 2

이차함수 $y=mx^2-2x+1$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $mx^2-2x+1>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $mx^2-2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-m<0$, $1-m<0$

$\therefore m>1$

따라서 정수 m의 최솟값은 2이다.

39 답 ⑤

$ax^2-6x-5<2ax-1$에서 $ax^2-2(a+3)x-4<0$

이 이차부등식이 항상 성립해야 하므로 $a<0$

이차방정식 $ax^2-2(a+3)x-4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+3)\}^2+4a<0$, $a^2+10a+9<0$

$(a+1)(a+9)<0$ $\therefore -9<a<-1$

그런데 $a<0$이므로 $-9<a<-1$

따라서 정수 a의 최댓값은 -2, 최솟값은 -8이므로 그 합은

$-2+(-8)=-10$

39-1 답 ④

$kx^2+2kx+3>4x+2$에서 $kx^2+2(k-2)x+1>0$

이 이차부등식이 항상 성립해야 하므로 $k>0$

이차방정식 $kx^2+2(k-2)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-k<0$, $k^2-5k+4<0$

$(k-1)(k-4)<0$ $\therefore 1<k<4$

그런데 $k>0$이므로 $1<k<4$

따라서 정수 k의 최댓값은 3, 최솟값은 2이므로 그 합은

$3+2=5$

40 답 40

새로 만든 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각

$(80-x)$ cm, $(20+x)$ cm

이므로 넓이가 2400 cm^2 이상이 되려면

$(80-x)(20+x)\geq2400$, $x^2-60x+800\leq0$

$(x-20)(x-40)\leq0$ $\therefore 20\leq x\leq40$

그런데 $0<x<80$이므로 $20\leq x\leq40$

따라서 x의 최댓값은 40이다.

40-1 답 ①

새로 만든 직사각형 모양의 텃밭의 가로, 세로의 길이는 각각

$(4+2x)$ m, $(8+2x)$ m

이므로 넓이가 현재 텃밭의 넓이의 3배 이상이 되려면

$(4+2x)(8+2x)\geq32\times3$, $4x^2+24x+32\geq96$

$4x^2+24x-64\geq0$, $x^2+6x-16\geq0$

$(x+8)(x-2)\geq0$ $\therefore x\leq-8$ 또는 $x\geq2$

그런데 $x>0$이므로 $x\geq2$

따라서 x의 최솟값은 2이다.

41 답 4초

t초 후의 지면으로부터의 높이가 $(100t-5t^2)$ cm이므로 지면에서 480 cm 이상의 높이에 있으려면

$100t-5t^2\geq480$에서 $5t^2-100t+480\leq0$

$t^2-20t+96\leq0$, $(t-8)(t-12)\leq0$ $\therefore 8\leq t\leq12$

따라서 모형 비행 물체의 높이가 480 cm 이상인 시간은 4초 동안이다.

$12-8=4$(초)

41-1 답 ②

t초 후의 지면으로부터의 높이가 $(-5t^2+30t+10)$ m이므로 지면에서 50 m 이상의 높이에 있으려면

$-5t^2+30t+10\geq50$에서 $5t^2-30t+40\leq0$

$t^2-6t+8\leq0$, $(t-2)(t-4)\leq0$

$\therefore 2\leq t\leq4$

따라서 공의 높이가 50 m 이상인 시간은 2초 동안이다.

$4-2=2$(초)

42 답 2500원

가격을 $100x$원 할인한다고 하면 하루 판매량이 $2x$개 늘어나므로 하루 판매액은 $(3500-100x)(20+2x)$(원)

하루 판매액이 10만 원 이상이려면

$(3500-100x)(20+2x)\geq100000$

$(35-x)(10+x)\geq500$, $x^2-25x+150\leq0$

$(x-10)(x-15)\leq0$ $\therefore 10\leq x\leq15$

이때 $1000\leq100x\leq1500$이므로 할인할 수 있는 금액의 범위는 1000원 이상 1500원 이하이다.

따라서 할인할 수 있는 금액의 최댓값과 최솟값의 합은

$1500+1000=2500$(원)

42-1 답 ④

가격을 $50x$원 할인한다고 하면 하루 판매량이 $2x$개 늘어나므로 하루 판매액은 $(3000-50x)(20+2x)$(원)

하루 판매액이 10만 원 이상이려면

$(3000-50x)(20+2x)\ge100000$

$(60-x)(10+x)\ge1000$, $x^2-50x+400\le0$

$(x-10)(x-40)\le0$ $\quad\therefore 10\le x\le40$

이때 $500\le50x\le2000$이므로 할인할 수 있는 금액의 최댓값은 2000원이다.

43 답 0

$x^2-x-6<0$에서 $(x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$ ……㉠

$x^2-5x+6\ge0$에서 $(x-2)(x-3)\ge0$

$\therefore x\le2$ 또는 $x\ge3$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-2<x\le2$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=2$이므로

$\alpha+\beta=-2+2=0$

43-1 답 ①

$x^2-x-2\ge-x^2+4x+1$에서 $2x^2-5x-3\ge0$

$(2x+1)(x-3)\ge0$ $\quad\therefore x\le-\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge3$ ……㉠

$-x^2+3x>x-15$에서 $x^2-2x-15<0$

$(x+3)(x-5)<0$ $\quad\therefore -3<x<5$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-3<x\le-\frac{1}{2}$ 또는 $3\le x<5$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=5$이므로

$\alpha\beta=-3\times5=-15$

44 답 ②

$2x<x+4$에서 $x<4$ ……㉠

$x^2-4x-5<0$에서 $(x+1)(x-5)<0$

$\therefore -1<x<5$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-1<x<4$

따라서 정수 x의 값은 0, 1, 2, 3이므로 그 개수는 4이다.

44-1 답 ⑤

$2x-3<0$에서 $x<\frac{3}{2}$ ……㉠

$3x^2+x-10\le0$에서 $(x+2)(3x-5)\le0$

$\therefore -2\le x\le\frac{5}{3}$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-2\le x<\frac{3}{2}$

따라서 정수 x의 값은 -2, -1, 0, 1이므로 그 개수는 4이다.

45 답 ⑤

$3x^2-5x+1\le x^2+3x+1$에서 $2x^2-8x\le0$

$x(x-4)\le0$ $\quad\therefore 0\le x\le4$ ……㉠

$x^2+3x+1\le2x^2+x-2$에서 $x^2-2x-3\ge0$

$(x+1)(x-3)\ge0$ $\quad\therefore x\le-1$ 또는 $x\ge3$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3\le x\le4$

따라서 정수 x의 최댓값은 4이다.

45-1 답 ⑤

$3x+4<2x^2-1$에서 $2x^2-3x-5>0$

$(x+1)(2x-5)>0$ $\quad\therefore x<-1$ 또는 $x>\frac{5}{2}$ ……㉠

$2x^2-1\le6x+7$에서 $2x^2-6x-8\le0$

$(x+1)(x-4)\le0$ $\quad\therefore -1\le x\le4$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{5}{2}<x\le4$

따라서 정수 x의 최솟값은 3이다.

46 답 ⑤

$|x-1|>1$에서 $x-1<-1$ 또는 $x-1>1$

$\therefore x<0$ 또는 $x>2$ ……㉠

$2x^2-9x+7\le0$에서 $(x-1)(2x-7)\le0$

$\therefore 1\le x\le\frac{7}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2<x\le\frac{7}{2}$

46-1 답 ④

$|x-1|<3$에서 $-3<x-1<3$ $\quad\therefore -2<x<4$ ……㉠

$3(x-1)-x^2\le x-3$에서 $-x^2+3x-3\le x-3$, $x^2-2x\ge0$

$x(x-2)\ge0$ $\quad\therefore x\le0$ 또는 $x\ge2$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-2<x\le0$ 또는 $2\le x<4$

47 답 $\frac{1}{2}$

$x^2+2x-8<0$에서 $(x+4)(x-2)<0$

$\therefore -4<x<2$ ……㉠

$2x^2+2>x^2+x-8$에서 $x^2-x+10>0$

이때 $x^2-x+10=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{39}{4}\ge\frac{39}{4}$이므로 이 부등식의 해는 모든 실수이다. ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-4<x<2$

$ax^2+bx+4>0$의 해가 $-4<x<2$이므로

$a<0$이고 $a(x+4)(x-2)>0$

즉 $ax^2+2ax-8a>0$이므로 $b=2a$, $4=-8a$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=-1$이므로

$ab=-\frac{1}{2}\times(-1)=\frac{1}{2}$

47-1 답 $\frac{1}{3}$

$2x^2+5x-3\ge0$에서 $(x+3)(2x-1)\ge0$

$\therefore x\le-3$ 또는 $x\ge\frac{1}{2}$ ……㉠

$x+6\le x^2$에서 $x^2-x-6\ge0$

$(x+2)(x-3)\ge0$ $\quad\therefore x\le-2$ 또는 $x\ge3$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x\le-3$ 또는 $x\ge3$

$ax^2+bx-3\ge0$의 해가 $x\le-3$ 또는 $x\ge3$이므로

$a>0$이고 $a(x+3)(x-3)\ge0$

즉 $ax^2-9a\ge0$이므로 $b=0$, $-3=-9a$

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=0$이므로

$a+b=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$

48 답 6

$x^2+3x-10>0$에서 $(x+5)(x-2)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>2$ ……㉠

$x^2-|x|-12\le0$에서

(i) $x<0$일 때, $x^2+x-12\le0$

$(x+4)(x-3)\le0 \qquad \therefore -4\le x\le3$

그런데 $x<0$이므로 $-4\le x<0$

(ii) $x\ge0$일 때, $x^2-x-12\le0$

$(x+3)(x-4)\le0 \qquad \therefore -3\le x\le4$

그런데 $x\ge0$이므로 $0\le x\le4$

(i), (ii)에서 $-4\le x\le4$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2<x\le4$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=4$이므로

$\alpha+\beta=2+4=6$

48-1 답 ③

$x^2+|x|-12<0$에서

(i) $x<0$일 때, $x^2-x-12<0$

$(x+3)(x-4)<0 \qquad \therefore -3<x<4$

그런데 $x<0$이므로 $-3<x<0$

(ii) $x\ge0$일 때, $x^2+x-12<0$

$(x+4)(x-3)<0 \qquad \therefore -4<x<3$

그런데 $x\ge0$이므로 $0\le x<3$

(i), (ii)에서 $-3<x<3$ ……㉠

$x^2+2x-3\ge0$에서 $(x+3)(x-1)\ge0$

$\therefore x\le-3$ 또는 $x\ge1$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1\le x<3$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=3$이므로

$\alpha\beta=1\times3=3$

49 답 ④

$x^2-7x+10\le0$에서 $(x-2)(x-5)\le0$

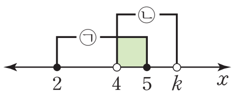
$\therefore 2\le x\le5$ ……㉠

$x^2-(k+4)x+4k<0$에서 $(x-k)(x-4)<0$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위가 $4<x\le5$이므로

오른쪽 그림에서

$k>5$



참고 $k=4$이면 ㉡의 해는 없다.
또 $k<4$이면 연립부등식의 해가 $4<x\le5$가 될 수 없다.
따라서 $k>4$이므로 부등식 ㉡의 해는 $4<x<k$

49-1 답 ④

$x^2-4x-5>0$에서 $(x+1)(x-5)>0$

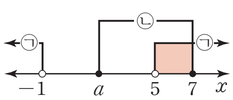
$\therefore x<-1$ 또는 $x>5$ ……㉠

$x^2-(a+7)x+7a\le0$에서 $(x-a)(x-7)\le0$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위가 $5<x\le7$이므로

오른쪽 그림에서

$-1\le a\le5$



따라서 실수 a의 최댓값과 최솟값은 각각 5, -1이므로 그 합은

$5+(-1)=4$

50 답 ⑤

$2x^2-x+1<2x$에서 $2x^2-3x+1<0$

$(2x-1)(x-1)<0 \qquad \therefore \frac{1}{2}<x<1$ ……㉠

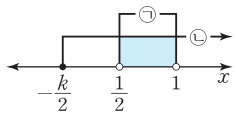
$2x\le4x+k$에서 $2x+k\ge0$

$\therefore x\ge-\frac{k}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위가 $\frac{1}{2}<x<1$이므로

오른쪽 그림에서

$-\frac{k}{2}\le\frac{1}{2} \qquad \therefore k\ge-1$



50-1 답 5

$x^2-ax+4a\le4x$에서 $x^2-(a+4)x+4a\le0$

$\therefore (x-a)(x-4)\le0$ ……㉠

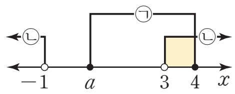
$4x<x^2+2x-3$에서 $x^2-2x-3>0$

$(x+1)(x-3)>0 \qquad \therefore x<-1$ 또는 $x>3$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위가 $3<x\le4$이므로

오른쪽 그림에서 $-1\le a\le3$

따라서 정수 a의 값은 -1, 0, 1, 2, 3이므로 그 개수는 5이다.



51 답 $-3\le a\le5$

$x^2-13x+40<0$에서 $(x-5)(x-8)<0$

$\therefore 5<x<8$

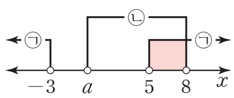
$x^2-2x-15>0$에서 $(x+3)(x-5)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>5$ ……㉠

$x^2-(a+8)x+8a<0$에서 $(x-a)(x-8)<0$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위가 $5<x<8$이므로

오른쪽 그림에서 $-3\le a\le5$



51-1 답 $a\ge1$

$x^2-5x+6<0$에서 $(x-2)(x-3)<0$

$\therefore 2<x<3$

$x^2-2x-3<0$에서 $(x+1)(x-3)<0$

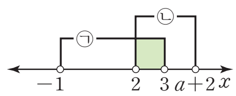
$\therefore -1<x<3$ ……㉠

$(x-2)(x-a-2)<0$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위가 $2<x<3$이므로

오른쪽 그림에서

$a+2\ge3 \qquad \therefore a\ge1$



52 답 ①

직사각형의 둘레의 길이가 48이므로 가로의 길이를 x라 하면 세로의 길이는 $24-x$이다.

직사각형의 넓이가 80 이상 108 이하가 되려면

$80\le x(24-x)\le108$

$80\le x(24-x)$에서 $x^2-24x+80\le0$

$(x-4)(x-20)\le0 \qquad \therefore 4\le x\le20$ ……㉠

$x(24-x)\le108$에서 $x^2-24x+108\ge0$

$(x-6)(x-18)\ge0 \qquad \therefore x\le6$ 또는 $x\ge18$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $4\le x\le6$ 또는 $18\le x\le20$

이때 가로의 길이가 세로의 길이보다 길어야 하므로 $18\le x\le20$

$x>24-x$에서 $x>12$

따라서 가로의 길이의 최댓값과 최솟값은 각각 20, 18이므로 그 차는

$20-18=2$

52-1 답 3

직사각형의 둘레의 길이가 30이므로 세로의 길이를 x라 하면 가로의 길이는 $15-x$이다.

직사각형의 넓이가 14 이상 36 이하가 되려면

$14\le x(15-x)\le 36$

$14\le x(15-x)$에서 $x^2-15x+14\le 0$

$(x-1)(x-14)\le 0 \quad \therefore 1\le x\le 14$ ……㉠

$x(15-x)\le 36$에서 $x^2-15x+36\ge 0$

$(x-3)(x-12)\ge 0 \quad \therefore x\le 3$ 또는 $x\ge 12$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1\le x\le 3$ 또는 $12\le x\le 14$

이때 가로의 길이가 세로의 길이보다 길어야 하므로 $1\le x\le 3$

따라서 세로의 길이의 최댓값과 최솟값은 각각 3, 1이므로 그 곱은

$3\times 1=3$

$15-x>x$에서 $x<\frac{15}{2}$

53 답 ④

(가장 긴 변의 길이)<(나머지 두 변의 길이의 합)

x가 자연수이므로 세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $3x+1$

삼각형이 만들어질 조건에 의하여

$3x+1<x+(3x-1) \quad \therefore x>2$ ……㉠

둔각삼각형이려면 $x^2+(3x-1)^2<(3x+1)^2$

$x^2-12x<0,\ x(x-12)<0 \quad \therefore 0<x<12$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2<x<12$

따라서 자연수 x의 값은 3, 4, 5, …, 11이므로 그 개수는 9이다.

Lecture

삼각형의 세 변의 길이가 $a, b, c\ (a\le b\le c)$일 때

(1) $c^2<a^2+b^2$ ➡ 예각삼각형

(2) $c^2=a^2+b^2$ ➡ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

(3) $c^2>a^2+b^2$ ➡ 둔각삼각형

53-1 답 13

x가 자연수이므로 세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $x+3$

삼각형이 만들어질 조건에 의하여

$x+3<(x-3)+x \quad \therefore x>6$ ……㉠

예각삼각형이려면 $(x-3)^2+x^2>(x+3)^2$

$x^2-12x>0,\ x(x-12)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>12$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x>12$

따라서 자연수 x의 최솟값은 13이다.

54 답 2

주어진 그림에서 길의 넓이는

$(2x+8)(2x+6)-8\times 6=4x^2+28x\ (\mathrm{m}^2)$

길의 넓이가 $32\ \mathrm{m}^2$ 이상 $120\ \mathrm{m}^2$ 이하가 되려면

$32\le 4x^2+28x\le 120 \quad \therefore 8\le x^2+7x\le 30$

$8\le x^2+7x$에서 $x^2+7x-8\ge 0$

$(x+8)(x-1)\ge 0 \quad \therefore x\le -8$ 또는 $x\ge 1$ ……㉠

$x^2+7x\le 30$에서 $x^2+7x-30\le 0$

$(x+10)(x-3)\le 0 \quad \therefore -10\le x\le 3$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-10\le x\le -8$ 또는 $1\le x\le 3$

그런데 $x>0$이므로 $1\le x\le 3$

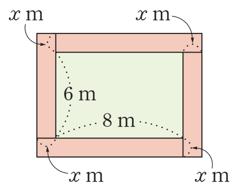
따라서 $a=1,\ b=3$이므로

$b-a=3-1=2$

참고 오른쪽 그림과 같이 길을 네 개의 직사각형으로 나누어 넓이를 구할 수도 있다.

$2(6+x)x+2(8+x)x$

$=4x^2+28x\ (\mathrm{m}^2)$



54-1 답 22

새로 만든 직육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이와 높이는 각각

$a-3,\ a,\ a+5$이므로 $a-3>0 \quad \therefore a>3$ ……㉠

이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피보다 작아지려면

$a(a-3)(a+5)<a^3,\ 2a^2-15a<0$

$a(2a-15)<0 \quad \therefore 0<a<\frac{15}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<a<\frac{15}{2}$

따라서 자연수 a의 값은 4, 5, 6, 7이므로 그 합은

$4+5+6+7=22$

55 답 $k\le -3$ 또는 $k\ge 1$

이차방정식 $x^2-2(k+2)x-k^2+10=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+2)\}^2-(-k^2+10)\ge 0,\ k^2+2k-3\ge 0$

$(k+3)(k-1)\ge 0 \quad \therefore k\le -3$ 또는 $k\ge 1$

55-1 답 $k\le -5$ 또는 $k\ge 1$

이차방정식 $x^2+2kx-4k+5=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(-4k+5)\ge 0,\ k^2+4k-5\ge 0$

$(k+5)(k-1)\ge 0 \quad \therefore k\le -5$ 또는 $k\ge 1$

56 답 ②

이차방정식 $-x^2+(k+1)x-3k+2=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(k+1)^2-4\times(-1)\times(-3k+2)<0$

$k^2-10k+9<0,\ (k-1)(k-9)<0$

$\therefore 1<k<9$

따라서 $a=1,\ b=9$이므로

$b-a=9-1=8$

56-1 답 ①

이차방정식 $x^2+2ax+a+6=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(a+6)<0,\ a^2-a-6<0$

$(a+2)(a-3)<0 \quad \therefore -2<a<3$

따라서 $\alpha=-2,\ \beta=3$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-2)^2+3^2=13$

57 답 3

이차방정식 $x^2-2ax+16=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-16<0$, $(a+4)(a-4)<0$

$\therefore\ -4<a<4$ ……㉠ ……❶

이차방정식 $x^2-(b+2)x+a+b=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=\{-(b+2)\}^2-4(a+b)=0$

$b^2+4=4a \quad \therefore a=\frac{b^2+4}{4}$ ……㉡ ……❷

㉡을 ㉠에 대입하면

$-4<\frac{b^2+4}{4}<4$, $-20<b^2<12$

그런데 $b^2>0$이므로 $0<b^2<12$

$0<b^2$에서 $b\neq0$인 모든 실수 ……㉢

$b^2<12$에서 $b^2-12<0$, $(b+2\sqrt{3})(b-2\sqrt{3})<0$

$\therefore\ -2\sqrt{3}<b<2\sqrt{3}$ ……㉣

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면

$-2\sqrt{3}<b<0$, $0<b<2\sqrt{3}$ ……❸

따라서 자연수 b의 최댓값은 3이다. ……❹

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $x^2-2ax+16=0$이 허근을 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❷ 이차방정식 $x^2-(b+2)x+a+b=0$이 중근을 갖도록 하는 a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ b의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%
❹ 자연수 b의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

57-1 답 -1

이차방정식 $x^2+2kx+2k+3=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=k^2-(2k+3)<0$, $k^2-2k-3<0$

$(k+1)(k-3)<0 \quad \therefore\ -1<k<3$ ……㉠

이차방정식 $2x^2-2(k+1)x+3k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=\{-(k+1)\}^2-2(3k-1)>0$

$k^2-4k+3>0$, $(k-1)(k-3)>0$

$\therefore\ k<1$ 또는 $k>3$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-1<k<1$

따라서 $a=-1$, $b=1$이므로

$ab=-1\times1=-1$

58 답 4

이차방정식 $x^2-2ax+3a+4=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 할 때, 두 근이 모두 양수이므로

(i) $\frac{D}{4}=a^2-(3a+4)\geq0$, $a^2-3a-4\geq0$

$(a+1)(a-4)\geq0 \quad \therefore\ a\leq-1$ 또는 $a\geq4$

(ii) $\alpha+\beta=2a>0 \quad \therefore\ a>0$

(iii) $\alpha\beta=3a+4>0 \quad \therefore\ a>-\frac{4}{3}$

(i)~(iii)에서 $a\geq4$

따라서 실수 a의 최솟값은 4이다.

58-1 답 $a\geq4$

이차방정식 $x^2-2(a-1)x+a+5=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 할 때, 두 근이 모두 양수이므로

(i) $\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-(a+5)\geq0$

$a^2-3a-4\geq0$, $(a+1)(a-4)\geq0$

$\therefore\ a\leq-1$ 또는 $a\geq4$

(ii) $\alpha+\beta=2(a-1)>0 \quad \therefore\ a>1$

(iii) $\alpha\beta=a+5>0 \quad \therefore\ a>-5$

(i)~(iii)에서 $a\geq4$

59 답 ①

이차방정식 $x^2+2ax+2-a=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 할 때, 두 근이 모두 음수이므로

(i) $\frac{D}{4}=a^2-(2-a)\geq0$, $a^2+a-2\geq0$

$(a+2)(a-1)\geq0 \quad \therefore\ a\leq-2$ 또는 $a\geq1$

(ii) $\alpha+\beta=-2a<0 \quad \therefore\ a>0$

(iii) $\alpha\beta=2-a>0 \quad \therefore\ a<2$

(i)~(iii)에서 $1\leq a<2$

따라서 정수 a의 값은 1이므로 그 개수는 1이다.

59-1 답 ③

이차방정식 $x^2+(a+2)x+2a+1=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 할 때, 두 근이 모두 음수이므로

(i) $D=(a+2)^2-4(2a+1)\geq0$

$a^2-4a\geq0$, $a(a-4)\geq0$

$\therefore\ a\leq0$ 또는 $a\geq4$

(ii) $\alpha+\beta=-(a+2)<0$, $a+2>0$

$\therefore\ a>-2$

(iii) $\alpha\beta=2a+1>0 \quad \therefore\ a>-\frac{1}{2}$

(i)~(iii)에서 $-\frac{1}{2}<a\leq0$ 또는 $a\geq4$

따라서 정수 a의 최솟값은 0이다.

60 답 ①

이차방정식 $x^2-(k^2-3k+2)x+k^2-2k=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=k^2-2k<0$, $k(k-2)<0$

$\therefore\ 0<k<2$ ……㉠

또 두 근의 절댓값이 같으므로

$\alpha+\beta=k^2-3k+2=0$, $(k-1)(k-2)=0$

$\therefore\ k=1$ 또는 $k=2$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $k=1$

Lecture 이차방정식의 두 실근의 절댓값에 대한 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근 α, β의 부호가 서로 다를 때

(1) |양수인 근| > |음수인 근|

⇒ $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta<0$

(2) |양수인 근| < |음수인 근|

⇒ $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta<0$

(3) |양수인 근| = |음수인 근|

⇒ $\alpha+\beta=0$, $\alpha\beta<0$

60-1 답 $-3<a<3$

이차방정식 $x^2-(a^2-9)x+a^2+a-12=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=a^2+a-12<0$, $(a+4)(a-3)<0$

$\therefore -4<a<3$ ······㉠

또 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크므로

$\alpha+\beta=a^2-9<0$, $(a+3)(a-3)<0$

$\therefore -3<a<3$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $-3<a<3$

유형+ 완성하기

p. 239

61 답 $-1<a\le 0$

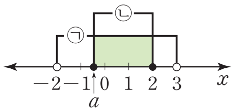
$x^2-x-6<0$에서 $(x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$ ······㉠

$x^2-(a+2)x+2a\le 0$에서 $(x-2)(x-a)\le 0$ ······㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수인 해가 3개뿐이려면 오른쪽 그림에서

$-1<a\le 0$



> **참고** $a\ge 2$이면 두 부등식을 동시에 만족시키는 정수인 해가 3개가 될 수 없으므로 $a<2$이다.
> 따라서 부등식 ㉡의 해는 $a\le x\le 2$이다.

62 답 ③

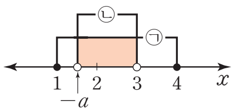
$x^2-5x+4\le 0$에서 $(x-1)(x-4)\le 0$

$\therefore 1\le x\le 4$ ······㉠

$x^2+(a-3)x-3a<0$에서 $(x-3)(x+a)<0$ ······㉡

(i) $-a<3$, 즉 $a>-3$일 때, $-a<x<3$

오른쪽 그림에서 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값이 오직 한 개, 즉 $x=2$뿐이려면

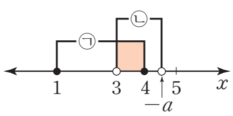


$1\le -a<2$ $\quad\therefore -2<a\le -1$

(ii) $-a=3$, 즉 $a=-3$일 때, 해는 없다.

(iii) $-a>3$, 즉 $a<-3$일 때, $3<x<-a$

오른쪽 그림에서 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값이 오직 한 개, 즉 $x=4$뿐이려면



$4<-a\le 5$ $\quad\therefore -5\le a<-4$

(i)~(iii)에서 $-5\le a<-4$ 또는 $-2<a\le -1$

따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다.

63 답 ②

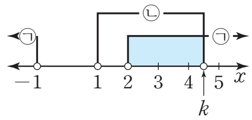
$x^2-x-2>0$에서 $(x+1)(x-2)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>2$ ······㉠

$x^2-(k+1)x+k<0$에서 $(x-1)(x-k)<0$ ······㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 값이 3과 4뿐이려면 오른쪽 그림에서

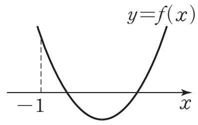
$4<k\le 5$



> **참고** $k\le 1$이면 두 부등식을 동시에 만족시키는 정수 x의 값이 3, 4가 될 수 없으므로 $k>1$이다.
> 따라서 부등식 ㉡의 해는 $1<x<k$이다.

64 답 -3

$f(x)=x^2+2kx-2k+3$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -1보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-(-2k+3)\ge 0$

$k^2+2k-3\ge 0$, $(k+3)(k-1)\ge 0$

$\therefore k\le -3$ 또는 $k\ge 1$

(ii) $f(-1)=-4k+4>0$에서 $k<1$

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-k$이므로

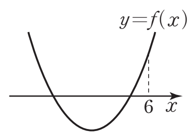
$-k>-1$ $\quad\therefore k<1$

(i)~(iii)에서 $k\le -3$

따라서 실수 k의 최댓값은 -3이다.

65 답 $k<\dfrac{7}{3}$

$f(x)=x^2-3kx+3k-1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 6보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3k)^2-4(3k-1)\ge 0$

$9k^2-12k+4\ge 0$, $(3k-2)^2\ge 0$

즉 k는 모든 실수이다.

(ii) $f(6)=-15k+35>0$에서 $k<\dfrac{7}{3}$

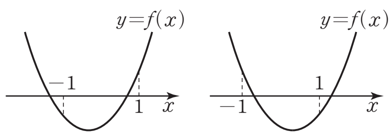
(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\dfrac{3}{2}k$이므로

$\dfrac{3}{2}k<6$ $\quad\therefore k<4$

(i)~(iii)에서 $k<\dfrac{7}{3}$

66 답 $m<\dfrac{1}{3}$ 또는 $m>3$

$f(x)=2x^2-2(m-1)x+m-1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근만 -1과 1 사이에 있어야 하므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉 $f(-1)f(1)<0$이므로

$(3m-1)(-m+3)<0$, $(3m-1)(m-3)>0$

$\therefore m<\dfrac{1}{3}$ 또는 $m>3$

학교 시험 대비 문제

p. 240~243

01 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $a>0$일 때, 주어진 부등식의 양변을 a로 나누면

$x^2-x+6>0$

이때 $x^2-x+6=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}\geq\frac{23}{4}$이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

ㄴ. $a=0$일 때, 주어진 부등식은 $0>0$

이 부등식을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 부등식의 해는 없다.

ㄷ. $a<0$일 때, 주어진 부등식의 양변을 a로 나누면

$x^2-x+6<0$

이때 $x^2-x+6=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}\geq\frac{23}{4}$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

02 답 ②

$x^2-2|x|-3<0$에서

(i) $x<0$일 때, $x^2+2x-3<0$

$(x+3)(x-1)<0$ $\quad\therefore -3<x<1$

그런데 $x<0$이므로 $-3<x<0$

(ii) $x\geq0$일 때, $x^2-2x-3<0$

$(x+1)(x-3)<0$ $\quad\therefore -1<x<3$

그런데 $x\geq0$이므로 $0\leq x<3$

(i), (ii)에서 $-3<x<3$

따라서 정수 x의 값은 $-2, -1, 0, 1, 2$이므로 그 개수는 5이다.

다른 풀이

$x^2=|x|^2$이므로 $x^2-2|x|-3<0$에서

$|x|^2-2|x|-3<0$, $(|x|+1)(|x|-3)<0$

$\therefore -1<|x|<3$

그런데 $|x|\geq0$이므로 $0\leq|x|<3$ $\quad\therefore -3<x<3$

따라서 정수 x의 값은 $-2, -1, 0, 1, 2$이므로 그 개수는 5이다.

03 답 ③

해가 $x\leq-3$ 또는 $x\geq5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-5)\geq0$ $\quad\therefore x^2-2x-15\geq0$

이 부등식이 $x^2+ax+b\geq0$과 일치하므로

$a=-2, b=-15$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $ax^2+bx+50<0$에 대입하면

$-2x^2-15x+50<0$, $2x^2+15x-50>0$

$(x+10)(2x-5)>0$ $\quad\therefore x<-10$ 또는 $x>\frac{5}{2}$

따라서 x의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

04 답 5

$x^2-4x\leq0$에서 $x(x-4)\leq0$ $\quad\therefore 0\leq x\leq4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$|x-a|\leq2b$에서 $-2b\leq x-a\leq2b$ ($\because b>0$)

$\therefore a-2b\leq x\leq a+2b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡이 일치하므로 $a-2b=0$, $a+2b=4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=1$

$\therefore a^2+b^2=2^2+1^2=5$

05 답 ③

$f(x)>0$의 해가 $1<x<5$이므로 음수 a에 대하여

$f(x)=a(x-1)(x-5)$라 하면

$f(3-2x)=a(3-2x-1)(3-2x-5)$

$=4a(x-1)(x+1)$

$f(0)=a(0-1)(0-5)=5a$이므로 부등식 $f(3-2x)>f(0)$,

즉 $f(3-2x)-f(0)>0$에서

$4a(x-1)(x+1)-5a>0$, $4ax^2-9a>0$

이때 $a<0$이므로 $4x^2-9<0$

$(2x+3)(2x-3)<0$ $\quad\therefore -\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}$

따라서 정수 x의 값은 $-1, 0, 1$이므로 그 개수는 3이다.

06 답 0

이차부등식 $-ax^2+8x-4a<0$을 만족시키지 않는 x의 값이 오직 하나뿐이면 이차부등식 $-ax^2+8x-4a\geq0$은 단 한 개의 실근을 가져야 한다.

즉 $ax^2-8x+4a\leq0$이 단 한 개의 실근을 가져야 하므로 $a>0$

이차방정식 $ax^2-8x+4a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-a\times4a=0$, $16-4a^2=0$

$a^2-4=0$, $(a+2)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

따라서 $-2x^2+8x-8=-2(x-2)^2<0$을 만족시키지 않는 x의 값은 $x=2$뿐이므로 $k=2$

$\therefore a-k=2-2=0$

07 답 ③

$(a-2)x^2+2(a-2)x+2(a+1)>0$에서

(i) $a>2$일 때

이차함수 $y=(a-2)x^2+2(a-2)x+2(a+1)$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a=2$일 때

$6>0$이므로 해는 모든 실수이다.

(iii) $a<2$일 때

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $(a-2)x^2+2(a-2)x+2(a+1)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-2(a-2)(a+1)>0$

$a^2-4a+4-2a^2+2a+4>0$, $-a^2-2a+8>0$

$a^2+2a-8<0$, $(a+4)(a-2)<0$

$\therefore -4<a<2$

(i)~(iii)에서 $a>-4$

08 답 ③

$-x^2+2(n-2)x\leq1$에서 $x^2-2(n-2)x+1\geq0$

이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 이차방정식 $x^2-2(n-2)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(n-2)^2-1\leq0$

$n^2-4n+3\leq0$, $(n-1)(n-3)\leq0$

$\therefore 1\leq n\leq3$

따라서 자연수 n의 값은 $1, 2, 3$이므로 그 개수는 3이다.

09 답 ②

이차부등식 $(k-1)x^2-2(k-1)x-2\ge0$의 해가 존재하지 않으므로 모든 실수 x에 대하여 $(k-1)x^2-2(k-1)x-2<0$이 성립해야 한다.

이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$k-1<0 \quad \therefore k<1$ ······㉠

이차방정식 $(k-1)x^2-2(k-1)x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2+2(k-1)<0$

$k^2-1<0,\ (k+1)(k-1)<0$

$\therefore -1<k<1$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

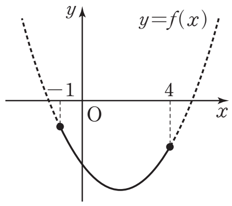
$-1<k<1$

10 답 $1\le k\le6$

$2x^2-2kx-7\le x^2+k$에서 $x^2-2kx-k-7\le0$

$f(x)=x^2-2kx-k-7$이라 하면

$-1\le x\le4$에서 $f(x)\le0$이어야 하므로 $-1\le x\le4$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $f(-1)=1+2k-k-7\le0$에서

$k\le6$

(ii) $f(4)=16-8k-k-7\le0$에서

$-9k\le-9 \quad \therefore k\ge1$

(i), (ii)에서 $1\le k\le6$

11 답 $-\frac{3}{2}$

$mx^2+nx+mn+2>0$ ······㉠

이 이차부등식의 해가 $-1<x<3$이므로 $m<0$

해가 $-1<x<3$이고 x^2의 계수가 $m\ (m<0)$인 이차부등식은

$m(x+1)(x-3)>0 \quad \therefore mx^2-2mx-3m>0$ ······㉡

㉠과 ㉡이 일치해야 하므로

$n=-2m,\ mn+2=-3m$

$n=-2m$을 $mn+2=-3m$에 대입하면

$-2m^2+2=-3m,\ 2m^2-3m-2=0$

$(2m+1)(m-2)=0 \quad \therefore m=-\frac{1}{2}\ (\because m<0)$

$\therefore n=-2m=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

$\therefore m-n=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$

12 답 $-1<k<3$

$-2x^2+2x+1<2kx+3$에서 $x^2+(k-1)x+1>0$

이 이차부등식이 항상 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+(k-1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-1)^2-4\times1\times1<0,\ k^2-2k-3<0$

$(k+1)(k-3)<0 \quad \therefore -1<k<3$

13 답 5초

물체의 높이가 250 m 이상이어야 하므로

$75t-5t^2\ge250,\ 5t^2-75t+250\le0$

$t^2-15t+50\le0,\ (t-5)(t-10)\le0$

$\therefore 5\le t\le10$

따라서 물체가 250 m 이상의 높이에 있는 시간은 5초 동안이다.

10−5=5(초)

14 답 ③

$x^2-x-10<x+5$에서 $x^2-2x-15<0$

$(x+3)(x-5)<0 \quad \therefore -3<x<5$ ······㉠

$2x^2\ge x+6$에서 $2x^2-x-6\ge0$

$(2x+3)(x-2)\ge0 \quad \therefore x\le-\frac{3}{2}$ 또는 $x\ge2$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-3<x\le-\frac{3}{2}$ 또는 $2\le x<5$

따라서 정수 x의 값은 $-2, 2, 3, 4$이므로 그 개수는 4이다.

15 답 ④

$3(x-1)-x^2\le x-3$에서 $x^2-2x\ge0$

$x(x-2)\ge0 \quad \therefore x\le0$ 또는 $x\ge2$ ······㉠

$x-3<4x-6$에서 $3x>3 \quad \therefore x>1$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x\ge2$

16 답 6

$x^2+3x\ge0$에서 $x(x+3)\ge0 \quad \therefore x\le-3$ 또는 $x\ge0$

이때 연립부등식 $\begin{cases} x^2+3x\ge0 \\ x^2+ax+b<0 \end{cases}$의 해가 $0\le x<3$이려면 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $x=3$이어야 하므로

$9+3a+b=0$ ······㉠

㉠과 $a+b=-5$를 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=-3 \quad \therefore ab=-2\times(-3)=6$

17 답 ③

$\overline{CF}=x$라 하면 $\overline{AF}=10-x$

이때 두 직각삼각형 ADF와 ABC는 닮음이므로

$\overline{AF}:\overline{AC}=\overline{DF}:\overline{BC},\ (10-x):10=\overline{DF}:15$

$\therefore \overline{DF}=\frac{3}{2}(10-x)$

□DECF의 넓이가 24 이상 36 미만이므로

$24\le\frac{3}{2}x(10-x)<36 \quad \therefore 16\le10x-x^2<24$

$16\le10x-x^2$에서 $x^2-10x+16\le0$

$(x-2)(x-8)\le0 \quad \therefore 2\le x\le8$ ······㉠

$10x-x^2<24$에서 $x^2-10x+24>0$

$(x-4)(x-6)>0 \quad \therefore x<4$ 또는 $x>6$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$2\le x<4$ 또는 $6<x\le8$

따라서 $\overline{CF}$의 길이가 될 수 없는 것은 ③이다.

18 답 ③

이차방정식 $x^2-kx+2=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=k^2-8\ge0,\ (k+2\sqrt{2})(k-2\sqrt{2})\ge0$

$\therefore k\le-2\sqrt{2}$ 또는 $k\ge2\sqrt{2}$ ······㉠

이차방정식 $x^2+2kx-4k+5=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=k^2-(-4k+5)<0,\ k^2+4k-5<0$

$(k+5)(k-1)<0 \quad \therefore -5<k<1$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-5<k\le-2\sqrt{2}$

19 답 $2<k<4$

이차방정식 $x^2+(5k-k^2-4)x+6-3k=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=6-3k<0 \quad \therefore k>2$ ……㉠

또 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크므로

$\alpha+\beta=k^2-5k+4<0$, $(k-1)(k-4)<0$

$\therefore 1<k<4$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $2<k<4$

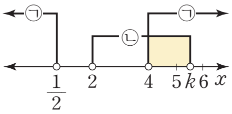
20 답 ⑤

$2x^2-9x+4>0$에서 $(2x-1)(x-4)>0$

$\therefore x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>4$ ……㉠

$x^2-(k+2)x+2k<0$에서 $(x-2)(x-k)<0$ ……㉡

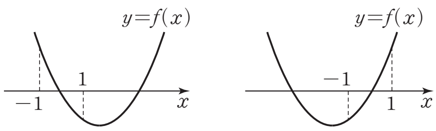
㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 자연수 x가 오직 한 개이려면 오른쪽 그림에서



$5<k\le 6$

21 답 $a<-2$ 또는 $a>0$

$f(x)=x^2+(2a+1)x-a$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근만 -1과 1 사이에 있어야 하므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



즉 $f(-1)f(1)<0$이므로

$-3a(a+2)<0$, $a(a+2)>0$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>0$

서술형 1 답 3

(i) $2-k>0$, 즉 $k<2$일 때

모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 항상 성립하려면 이차방정식 $(2-k)x^2+2(k-2)x+3=0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-3(2-k)<0$, $k^2-k-2<0$

$(k+1)(k-2)<0 \quad \therefore -1<k<2$ ……❶

(ii) $2-k=0$, 즉 $k=2$일 때

$3>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식은 항상 성립한다. ……❷

(iii) $2-k<0$, 즉 $k>2$일 때

이차함수 $y=(2-k)x^2+2(k-2)x+3$의 그래프는 위로 볼록하므로 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립하지 않는다. ……❸

(i)~(iii)에서 $-1<k\le 2$

따라서 정수 k의 값은 $0, 1, 2$이므로 그 합은

$0+1+2=3$ ……❹

채점 기준	비율
❶ $k<2$일 때, 주어진 부등식이 항상 성립할 조건을 구할 수 있다.	30%
❷ $k=2$일 때, 주어진 부등식이 항상 성립함을 알 수 있다.	30%
❸ $k>2$일 때, 주어진 부등식이 항상 성립하지 않음을 알 수 있다.	30%
❹ 정수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	10%

서술형 2 답 2

이차방정식 $3x^2+4kx+3=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(2k)^2-3\times3<0$, $4k^2-9<0$

$(2k+3)(2k-3)<0$

$\therefore -\frac{3}{2}<k<\frac{3}{2}$ ……㉠ ……❶

이차방정식 $x^2-kx+k=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=k^2-4k\ge 0$, $k(k-4)\ge 0$

$\therefore k\le 0$ 또는 $k\ge 4$ ……㉡ ……❷

㉠, ㉡에서 $-\frac{3}{2}<k\le 0$

따라서 정수 k의 값은 $-1, 0$이므로 그 개수는 2이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $3x^2+4kx+3=0$이 허근을 갖도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❷ 이차방정식 $x^2-kx+k=0$이 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 $-1\le k<0$

$x^2-x-2\le 0$에서 $(x+1)(x-2)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 2$ ……㉠ ……❶

$x^2-(k+5)x+5k<0$에서 $(x-5)(x-k)<0$

(i) $k>5$일 때

$(x-5)(x-k)<0$에서 $5<x<k$ ……㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

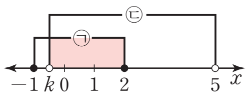
(ii) $k=5$일 때

$(x-5)(x-k)<0$에서 $(x-5)^2<0$이므로 연립부등식의 해는 없다.

(iii) $k<5$일 때

$(x-5)(x-k)<0$에서 $k<x<5$ ……㉢

㉠, ㉢을 동시에 만족시키는 정수 x가 3개이려면 오른쪽 그림에서



$-1\le k<0$

(i)~(iii)에서 $-1\le k<0$ ……❷

채점 기준	비율
❶ 부등식 $x^2-x-2\le 0$의 해를 구할 수 있다.	30%
❷ 조건을 만족시키는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	70%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 244~245

01 답 ③

$f(x)=x^2-x-12$이므로

$f(x-1)=(x-1)^2-(x-1)-12$

$\quad\quad\quad =x^2-3x-10$

즉 $f(x-1)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$x^2-3x-10<0$에서 $(x+2)(x-5)<0$

$\therefore\ -2<x<5$

따라서 정수 x의 값은 $-1, 0, 1, 2, 3, 4$이므로 그 합은

$-1+0+1+2+3+4=9$

02 답 56

$f(x)\le0$의 해가 $-3\le x\le0$이므로 양수 a에 대하여

$f(x)=ax(x+3)$이라 하면

$f(1)=8$이므로 $f(1)=a(1+3)=8$ $\qquad\therefore a=2$

따라서 $f(x)=2x(x+3)$이므로

$f(4)=2\times4\times7=56$

03 답 10

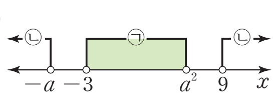
$x^2-(a^2-3)x-3a^2<0$에서 $(x+3)(x-a^2)<0$

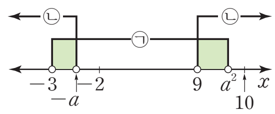
$\therefore\ -3<x<a^2\ (\because a>2)$ ……㉠

$x^2+(a-9)x-9a>0$에서 $(x+a)(x-9)>0$

$\therefore x<-a$ 또는 $x>9\ (\because a>2)$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위에 정수 x가 존재하지 않으려면 다음 그림과 같아야 한다.

(i)


(ii)


(i) 연립부등식의 해가 존재하지 않는 경우

$-a\le-3$에서 $a\ge3$ ……㉢

$a^2\le9$에서 $a^2-9\le0$, $(a+3)(a-3)\le0$

$\therefore\ -3\le a\le3$

그런데 $a>2$이므로 $2<a\le3$ ……㉣

㉢, ㉣을 모두 만족시켜야 하므로 $a=3$

(ii) 연립부등식의 해가 존재하는 경우

$-3<-a\le-2$에서 $2\le a<3$

그런데 $a>2$이므로 $2<a<3$ ……㉤

$9<a^2\le10$에서 $-\sqrt{10}\le a<-3$ 또는 $3<a\le\sqrt{10}$

그런데 $a>2$이므로 $3<a\le\sqrt{10}$ ……㉥

㉤ 또는 ㉥을 만족시켜야 하므로 $2<a<3$ 또는 $3<a\le\sqrt{10}$

(i), (ii)에서 실수 a의 값의 범위는 $2<a\le\sqrt{10}$이므로 $M=\sqrt{10}$

$\therefore M^2=(\sqrt{10})^2=10$

04 답 ⑤

ㄱ. 이차함수의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

즉 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$D=b^2-4ac>0$

ㄴ. 직선 $y=px+q$의 y절편이 양수이므로

$q>0$

또 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$x>0$일 때, $f(x)>0$이므로

$f(q)=aq^2+bq+c>0$

ㄷ. $ax^2+bx+c\le px+q$의 해는

$\alpha\le x\le\beta$

즉 부등식 $ax^2+(b-p)x+c-q\le0$의 해는

$\alpha\le x\le\beta$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

05 답 ③

$x-2\le g(x)\le f(x)$에서

$x-2\le(a-1)x+b\le2x^2+5x+2$

(i) 모든 실수 x에 대하여 $x-2\le(a-1)x+b$, 즉

$(a-2)x+b+2\ge0$이 성립해야 하므로

$a-2=0$, $b+2\ge0$

$\therefore a=2$, $b\ge-2$

(ii) (i)에서 $a=2$이므로 모든 실수 x에 대하여

$x+b\le2x^2+5x+2$, 즉 $2x^2+4x+2-b\ge0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $2x^2+4x+2-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=2^2-2(2-b)\le0$ $\qquad\therefore b\le0$

(i), (ii)에서 $-2\le b\le0$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=0$이므로

$\beta-\alpha=0-(-2)=2$

06 답 ④

$x^2-2x-3\ge0$에서 $(x+1)(x-3)\ge0$

$\therefore x\le-1$ 또는 $x\ge3$ ……㉠

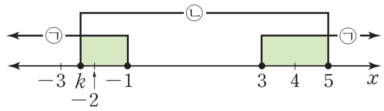
$x^2-(5+k)x+5k\le0$에서 $(x-5)(x-k)\le0$

(i) $k<5$일 때

$(x-5)(x-k)\le0$에서 $k\le x\le5$ ……㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 개수가 5가 되려면 다음 그림에서 $-3<k\le-2$

즉 정수 k의 값은 -2이다.



(ii) $k=5$일 때

$(x-5)(x-k)\le0$에서 $(x-5)^2\le0$

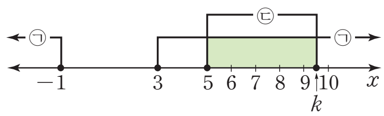
즉 연립부등식의 해는 $x=5$이므로 그 개수는 1이다.

(iii) $k>5$일 때

$(x-5)(x-k)\le0$에서 $5\le x\le k$ ……㉢

㉠, ㉢을 동시에 만족시키는 정수 x의 개수가 5가 되려면 다음 그림에서 $9\le k<10$

즉 정수 k의 값은 9이다.



(i)~(iii)에서 정수 x의 개수가 5가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 곱은

$-2\times9=-18$

07 답 29

$\begin{cases} xy+3(x+y)=0 & \cdots\cdots㉠ \\ xy-3(x+y)=k-9 & \cdots\cdots㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$2xy=k-9$ $\qquad\therefore xy=\dfrac{k-9}{2}$

㉠−㉡을 하면

$6(x+y)=9-k$ $\qquad\therefore x+y=\dfrac{9-k}{6}$

즉 x, y는 이차방정식 $t^2-\frac{9-k}{6}t+\frac{k-9}{2}=0$의 두 근이므로
$6t^2+(k-9)t+3(k-9)=0$
이 이차방정식을 만족시키는 두 실근 x, y가 존재하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(k-9)^2-72(k-9)\geq 0$, $k^2-90k+729\geq 0$
$(k-9)(k-81)\geq 0$ $\quad\therefore k\leq 9$ 또는 $k\geq 81$
따라서 100 이하의 자연수 k의 개수는
$9+20=29$

08 답 ②

$P(x)-3(x+1)Q(x)+mx^2=0$에서
$3x^3+x+11-3(x+1)(x^2-x+1)+mx^2=0$
$3x^3+x+11-3(x^3+1)+mx^2=0$
$3x^3+x+11-3x^3-3+mx^2=0$
$\therefore mx^2+x+8=0$
$f(x)=mx^2+x+8$이라 하면
(i) $m>0$일 때
$f(2)=4m+10<0$에서 $m<-\frac{5}{2}$
그런데 $m>0$이므로 주어진 조건을 만족시키는 정수 m은 존재하지 않는다.
(ii) $m<0$일 때
$f(2)=4m+10>0$에서 $m>-\frac{5}{2}$
그런데 $m<0$이므로 $-\frac{5}{2}<m<0$
(i), (ii)에서 $-\frac{5}{2}<m<0$
따라서 정수 m의 값은 -2, -1이므로 그 개수는 2이다.

09 답 ④

삼차방정식 $x^3-5x^2+(k-9)x+k-3=0$의 좌변을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -5 & k-9 & k-3 \\ & & -1 & 6 & -k+3 \\ \hline & 1 & -6 & k-3 & 0 \end{array}$$

$\therefore x^3-5x^2+(k-9)x+k-3=(x+1)(x^2-6x+k-3)$
즉 $x=-1$은 주어진 삼차방정식의 한 근이다.
이때 이차방정식 $x^2-6x+k-3=0$이 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f(x)=x^2-6x+k-3$이라 하면
$f(1)=1-6+k-3>0$ $\quad\therefore k>8$ ……㉠
이차방정식 $x^2-6x+k-3=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-3)^2-(k-3)>0$, $-k+12>0$
$\therefore k<12$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $8<k<12$
따라서 정수 k의 값은 9, 10, 11이므로 그 합은
$9+10+11=30$

10 답 ⑤

(가)에서 $\frac{1-x}{4}=t$라 하면 $x=1-4t$
부등식 $f\left(\frac{1-x}{4}\right)\leq 0$의 해가 $-7\leq x\leq 9$이므로
$-7\leq 1-4t\leq 9$에서 $-8\leq -4t\leq 8$
$\therefore -2\leq t\leq 2$
즉 부등식 $f(t)\leq 0$의 해가 $-2\leq t\leq 2$이므로
$f(t)=k(t+2)(t-2)\ (k>0)$
$\therefore f(x)=k(x+2)(x-2)\ (k>0)$
(나)에서 부등식 $f(x)\geq 2x-\frac{13}{3}$이 항상 성립하므로
$k(x+2)(x-2)\geq 2x-\frac{13}{3}$, $k(x^2-4)\geq 2x-\frac{13}{3}$
$\therefore kx^2-2x-4k+\frac{13}{3}\geq 0$
이차부등식 $kx^2-2x-4k+\frac{13}{3}\geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $kx^2-2x-4k+\frac{13}{3}=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-k\left(-4k+\frac{13}{3}\right)\leq 0$, $4k^2-\frac{13}{3}k+1\leq 0$
$12k^2-13k+3\leq 0$, $(3k-1)(4k-3)\leq 0$
$\therefore \frac{1}{3}\leq k\leq \frac{3}{4}$
$f(x)=k(x+2)(x-2)$에서 $f(3)=5k$이므로
$\frac{1}{3}\leq \frac{f(3)}{5}\leq \frac{3}{4}$ $\quad\therefore \frac{5}{3}\leq f(3)\leq \frac{15}{4}$
따라서 $M=\frac{15}{4}$, $m=\frac{5}{3}$이므로
$M-m=\frac{15}{4}-\frac{5}{3}=\frac{25}{12}$

11 경우의 수와 순열

III 경우의 수

개념 완성하기 p. 249~250

01 답 7

두 개의 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 두 눈의 수의 합이 4인 경우는

$(1, 3), (2, 2), (3, 1)$의 3가지

(ii) 두 눈의 수의 합이 9인 경우는

$(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$의 4가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$3+4=7$

02 답 6

두 개의 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 두 눈의 수의 합이 6인 경우는

$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$의 5가지

(ii) 두 눈의 수의 합이 12인 경우는

$(6, 6)$의 1가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$5+1=6$

03 답 14

두 개의 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 두 눈의 수의 차가 2인 경우는

$(1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 2), (4, 6), (5, 3), (6, 4)$의 8가지

(ii) 두 눈의 수의 차가 3인 경우는

$(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)$의 6가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$8+6=14$

04 답 6

두 개의 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 두 눈의 수의 곱이 6인 경우는

$(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$의 4가지

(ii) 두 눈의 수의 곱이 10인 경우는

$(2, 5), (5, 2)$의 2가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$4+2=6$

05 답 40

2의 배수가 적힌 공을 꺼내는 경우는

2, 4, 6, ⋯, 60의 30가지

3의 배수가 적힌 공을 꺼내는 경우는

3, 6, 9, ⋯, 60의 20가지

2와 3의 최소공배수인 6의 배수가 적힌 공을 꺼내는 경우는

6, 12, 18, ⋯, 60의 10가지

따라서 구하는 경우의 수는

$30+20-10=40$

06 답 19

5의 배수가 적힌 공을 꺼내는 경우는

5, 10, 15, ⋯, 60의 12가지

7의 배수가 적힌 공을 꺼내는 경우는

7, 14, 21, ⋯, 56의 8가지

5와 7의 최소공배수인 35의 배수가 적힌 공을 꺼내는 경우는

35의 1가지

따라서 구하는 경우의 수는

$12+8-1=19$

07 답 9

12의 양의 약수가 적힌 공을 꺼내는 경우는

1, 2, 3, 4, 6, 12의 6가지

20의 양의 약수가 적힌 공을 꺼내는 경우는

1, 2, 4, 5, 10, 20의 6가지

12와 20의 최대공약수인 4의 양의 약수가 적힌 공을 꺼내는 경우는

1, 2, 4의 3가지

따라서 구하는 경우의 수는

$6+6-3=9$

08 답 12

24의 양의 약수가 적힌 공을 꺼내는 경우는

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24의 8가지

30의 양의 약수가 적힌 공을 꺼내는 경우는

1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30의 8가지

24와 30의 최대공약수인 6의 양의 약수가 적힌 공을 꺼내는 경우는

1, 2, 3, 6의 4가지

따라서 구하는 경우의 수는

$8+8-4=12$

09 답 6

$(a+b+c)(x+y)$에서 a, b, c에 곱하는 항이 각각 x, y의 2개이므로 구하는 항의 개수는

$3\times2=6$

10 답 12

(i) $y=1$일 때, $x+z=7$이므로 순서쌍 (x, z)는

$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$의 6개

(ii) $y=2$일 때, $x+z=5$이므로 순서쌍 (x, z)는

$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$의 4개

(iii) $y=3$일 때, $x+z=3$이므로 순서쌍 (x, z)는

$(1, 2), (2, 1)$의 2개

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$6+4+2=12$

11 답 7

(i) $x=1$일 때, $2y+z=9$이므로 순서쌍 (y, z)는

$(1, 7), (2, 5), (3, 3), (4, 1)$의 4개

(ii) $x=2$일 때, $2y+z=6$이므로 순서쌍 (y, z)는

$(1, 4), (2, 2)$의 2개

(iii) $x=3$일 때, $2y+z=3$이므로 순서쌍 (y, z)는

$(1, 1)$의 1개

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$4+2+1=7$

12 답 9

(ⅰ) $y=1$일 때, $x+3z=15$이므로 순서쌍 (x, z)는
$(3, 4), (6, 3), (9, 2), (12, 1)$의 4개

(ⅱ) $y=2$일 때, $x+3z=11$이므로 순서쌍 (x, z)는
$(2, 3), (5, 2), (8, 1)$의 3개

(ⅲ) $y=3$일 때, $x+3z=7$이므로 순서쌍 (x, z)는
$(1, 2), (4, 1)$의 2개

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$4+3+2=9$

13 답 5

x, y가 자연수이므로 $x+3y\le7$을 만족시키는 경우는

$x+3y=4$, $x+3y=5$, $x+3y=6$, $x+3y=7$

(ⅰ) $x+3y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$의 1개

(ⅱ) $x+3y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(2, 1)$의 1개

(ⅲ) $x+3y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(3, 1)$의 1개

(ⅳ) $x+3y=7$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 2), (4, 1)$의 2개

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$1+1+1+2=5$

다른 풀이

(ⅰ) $y=1$일 때, $x+3\le7$에서 $x\le4$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)$의 4개

(ⅱ) $y=2$일 때, $x+6\le7$에서 $x\le1$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 2)$의 1개

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$4+1=5$

14 답 6

x, y가 자연수이므로 $2x+y\le6$을 만족시키는 경우는

$2x+y=3$, $2x+y=4$, $2x+y=5$, $2x+y=6$

(ⅰ) $2x+y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$의 1개

(ⅱ) $2x+y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 2)$의 1개

(ⅲ) $2x+y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 3), (2, 1)$의 2개

(ⅳ) $2x+y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 4), (2, 2)$의 2개

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$1+1+2+2=6$

15 답 5

x, y가 자연수이므로 $3x+4y\le14$를 만족시키는 경우는

$3x+4y=7$, $3x+4y=10$, $3x+4y=11$, $3x+4y=13$,
$3x+4y=14$

(ⅰ) $3x+4y=7$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$의 1개

(ⅱ) $3x+4y=10$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(2, 1)$의 1개

(ⅲ) $3x+4y=11$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 2)$의 1개

(ⅳ) $3x+4y=13$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(3, 1)$의 1개

(ⅴ) $3x+4y=14$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(2, 2)$의 1개

(ⅰ)~(ⅴ)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$1+1+1+1+1=5$

16 답 10

80을 소인수분해 하면 $80=2^4\times5$

2^4의 양의 약수는 $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4$의 5개

5의 양의 약수는 1, 5의 2개

따라서 80의 양의 약수의 개수는

$5\times2=10$

17 답 12

72를 소인수분해 하면 $72=2^3\times3^2$

2^3의 양의 약수는 $1, 2, 2^2, 2^3$의 4개

3^2의 양의 약수는 $1, 3, 3^2$의 3개

따라서 72의 양의 약수의 개수는

$4\times3=12$

18 답 12

96을 소인수분해 하면 $96=2^5\times3$

2^5의 양의 약수는 $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$의 6개

3의 양의 약수는 1, 3의 2개

따라서 96의 양의 약수의 개수는

$6\times2=12$

19 답 12

108을 소인수분해 하면 $108=2^2\times3^3$

2^2의 양의 약수는 $1, 2, 2^2$의 3개

3^3의 양의 약수는 $1, 3, 3^2, 3^3$의 4개

따라서 108의 양의 약수의 개수는

$3\times4=12$

20 답 방법의 수: 11, 금액의 수: 10

(ⅰ) 50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개의 2가지
10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개, 4개, 5개의 6가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는 $2\times6-1=11$

(ⅱ) 10원짜리 동전 5개로 지불하는 금액과 50원짜리 동전 1개로 지불하는 금액이 같으므로 50원짜리 동전 1개를 10원짜리 동전 5개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 10원짜리 동전 10개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
10원짜리 동전 10개로 지불할 수 있는 금액은
0원, 10원, 20원, $\cdots$, 100원의 11가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는 $11-1=10$

21 답 방법의 수: 15, 금액의 수: 9

(ⅰ) 100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는 $4\times4-1=15$

(ⅱ) 50원짜리 동전 2개로 지불하는 금액과 100원짜리 동전 1개로 지불하는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 3개를 50원짜리 동전 6개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜리 동전 9개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
50원짜리 동전 9개로 지불할 수 있는 금액은
0원, 50원, 100원, ⋯, 450원의 10가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는 $10-1=9$

22 답 방법의 수: 23, 금액의 수: 19
(ⅰ) 1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은
0장, 1장의 2가지
500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개의 3가지
100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는 $2\times3\times4-1=23$
(ⅱ) 500원짜리 동전 2개로 지불하는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액이 같으므로 1000원짜리 지폐 1장을 500원짜리 동전 2개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 4개와 100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
500원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 금액은
0원, 500원, 1000원, 1500원, 2000원의 5가지
100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액은
0원, 100원, 200원, 300원의 4가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는 $5\times4-1=19$

23 답 6
A에 칠할 수 있는 색은 3가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 2가지
C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 1가지
따라서 구하는 경우의 수는
$3\times2\times1=6$

24 답 12
${}_4P_2=4\times3=12$

25 답 720
$6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$

26 답 1
${}_5P_0=1$

27 답 6
${}_3P_3=3\times2\times1=6$

28 답 6
${}_nP_2=30$에서 $n(n-1)=30$
이때 $30=6\times5$이므로 $n=6$

29 답 5
${}_nP_3=60$에서 $n(n-1)(n-2)=60$
이때 $60=5\times4\times3$이므로 $n=5$

30 답 7
${}_nP_3=5{}_nP_2$에서
$n(n-1)(n-2)=5n(n-1)$
$n\ge3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면
$n-2=5 \qquad \therefore n=7$

31 답 7
${}_nP_4=20{}_nP_2$에서
$n(n-1)(n-2)(n-3)=20n(n-1)$
$n\ge4$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면
$(n-2)(n-3)=20$, $n^2-5n-14=0$
$(n+2)(n-7)=0 \qquad \therefore n=7\ (\because n\ge4)$

32 답 2
${}_4P_r=12$에서 $12=4\times3$이므로
${}_4P_2=12 \qquad \therefore r=2$

33 답 4
${}_6P_r=360$에서 $360=6\times5\times4\times3$이므로
${}_6P_4=360 \qquad \therefore r=4$

34 답 5
${}_rP_r=120$에서 $r!=120$
$120=5\times4\times3\times2\times1$이므로
$r!=5! \qquad \therefore r=5$

35 답 7
${}_nP_2-3{}_nP_1=21$에서 $n(n-1)-3n=21$
$n^2-4n-21=0$, $(n+3)(n-7)=0$
$\therefore n=7\ (\because n\ge2)$

36 답 5
${}_{n+1}P_2-2{}_nP_2=-10$에서
$(n+1)n-2n(n-1)=-10$
$n^2-3n-10=0$, $(n+2)(n-5)=0$
$\therefore n=5\ (\because n\ge2)$

37 답 3
${}_nP_3+3{}_nP_2=24$에서
$n(n-1)(n-2)+3n(n-1)=24$
$(n+1)n(n-1)=24$
이때 $24=4\times3\times2$이므로 $n=3$

38 답 5
${}_nP_3+{}_{n-1}P_2=72$에서
$n(n-1)(n-2)+(n-1)(n-2)=72$
$(n+1)(n-1)(n-2)=72$
이때 $72=6\times4\times3$이므로 $n=5$

39 답 120

5명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

40 답 60

5명의 학생 중에서 3명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수는

${}_5P_3=5\times4\times3=60$

41 답 42

7명의 학생 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

${}_7P_2=7\times6=42$

42 답 24

4명의 가족을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

43 답 6

엄마를 제외한 3명을 일렬로 세우고 가장 앞에 엄마를 세우면 되므로 구하는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

44 답 12

부모를 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

이때 아빠, 엄마 두 사람이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times2=12$

45 답 48

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4개

십의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수는 백의 자리에 오는 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로

${}_4P_2=4\times3=12$

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$4\times12=48$

46 답 18

홀수이려면 일의 자리의 숫자가 1 또는 3이어야 한다.

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리의 숫자를 제외한 3개의 숫자 중 하나이고 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 나머지 3개의 숫자에서 1개를 택하여 나열하면 되므로 구하는 홀수의 개수는

$2\times3\times{}_3P_1=2\times3\times3=18$

47 답 24

3□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=4\times3=12$

4□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=4\times3=12$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$12+12=24$

유형 완성하기 p.251~264

01 답 ③

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 차가 3인 경우는

(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)의 6가지

(ii) 눈의 수의 차가 4인 경우는

(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)의 4가지

(iii) 눈의 수의 차가 5인 경우는

(1, 6), (6, 1)의 2가지

(i)~(iii)은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$6+4+2=12$

01-1 답 ②

꺼낸 카드에 적힌 세 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 세 수의 곱이 3이 되는 경우는

(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1)의 3가지

(ii) 세 수의 곱이 8이 되는 경우는

(1, 2, 4), (1, 4, 2), (2, 1, 4), (2, 2, 2), (2, 4, 1), (4, 1, 2), (4, 2, 1)의 7가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$3+7=10$

02 답 20

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 3의 배수일 때

눈의 수의 합이 3인 경우는

(1, 2), (2, 1)의 2가지

눈의 수의 합이 6인 경우는

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지

눈의 수의 합이 9인 경우는

(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)의 4가지

눈의 수의 합이 12인 경우는

(6, 6)의 1가지

즉 눈의 수의 합이 3의 배수인 경우의 수는

$2+5+4+1=12$

(ii) 눈의 수의 합이 4의 배수일 때

눈의 수의 합이 4인 경우는

(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지

눈의 수의 합이 8인 경우는

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지

눈의 수의 합이 12인 경우는

(6, 6)의 1가지

즉 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우의 수는

$3+5+1=9$

(iii) 눈의 수의 합이 3의 배수이면서 4의 배수인 경우, 즉 12의 배수인 경우는

(6, 6)의 1가지

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$12+9-1=20$

02-1 답 20

(i) 공에 적힌 수가 4의 배수인 경우는

4, 8, 12, $\cdots$, 48의 12가지 …… ❶

(ii) 공에 적힌 수가 5의 배수인 경우는

5, 10, 15, $\cdots$, 50의 10가지 …… ❷

(iii) 공에 적힌 수가 4의 배수이면서 5의 배수인 경우, 즉 20의 배수인 경우는

20, 40의 2가지 …… ❸

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$12+10-2=20$ …… ❹

채점 기준	비율
❶ 공에 적힌 수가 4의 배수인 경우의 수를 구할 수 있다.	20%
❷ 공에 적힌 수가 5의 배수인 경우의 수를 구할 수 있다.	20%
❸ 공에 적힌 수가 20의 배수인 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❹ 4의 배수 또는 5의 배수가 적힌 공을 꺼내는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%

03 답 67

1부터 100까지의 자연수 중에서

(i) 4로 나누어떨어지는 수, 즉 4의 배수는

4, 8, 12, $\cdots$, 100의 25개

(ii) 6으로 나누어떨어지는 수, 즉 6의 배수는

6, 12, 18, $\cdots$, 96의 16개

(iii) 4와 6으로 나누어떨어지는 수, 즉 12의 배수는

12, 24, 36, $\cdots$, 96의 8개

(i)~(iii)에서 4 또는 6으로 나누어떨어지는 자연수의 개수는

$25+16-8=33$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$100-33=67$

03-1 답 20

1부터 50까지의 자연수 중에서

(i) 2로 나누어떨어지는 수, 즉 2의 배수는

2, 4, 6, $\cdots$, 50의 25개

(ii) 5로 나누어떨어지는 수, 즉 5의 배수는

5, 10, 15, $\cdots$, 50의 10개

(iii) 2와 5로 나누어떨어지는 수, 즉 10의 배수는

10, 20, 30, 40, 50의 5개

(i)~(iii)에서 2 또는 5로 나누어떨어지는 자연수의 개수는

$25+10-5=30$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$50-30=20$

04 답 ④

(i) $z=0$일 때, $x+2y=9$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 4)$, $(3, 3)$, $(5, 2)$, $(7, 1)$, $(9, 0)$의 5개

(ii) $z=1$일 때, $x+2y=5$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 2)$, $(3, 1)$, $(5, 0)$의 3개

(iii) $z=2$일 때, $x+2y=1$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 0)$의 1개

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$5+3+1=9$

04-1 답 8

(i) $z=1$일 때, $x+3y=15$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(3, 4)$, $(6, 3)$, $(9, 2)$, $(12, 1)$의 4개

(ii) $z=2$일 때, $x+3y=10$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 3)$, $(4, 2)$, $(7, 1)$의 3개

(iii) $z=3$일 때, $x+3y=5$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(2, 1)$의 1개

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$4+3+1=8$

05 답 ③

x, y가 자연수이므로 $2x+y\le 8$을 만족시키는 경우는

$2x+y=3$, $2x+y=4$, $2x+y=5$,

$2x+y=6$, $2x+y=7$, $2x+y=8$

(i) $2x+y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$의 1개

(ii) $2x+y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 2)$의 1개

(iii) $2x+y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 3)$, $(2, 1)$의 2개

(iv) $2x+y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 4)$, $(2, 2)$의 2개

(v) $2x+y=7$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 5)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$의 3개

(vi) $2x+y=8$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 6)$, $(2, 4)$, $(3, 2)$의 3개

(i)~(vi)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$1+1+2+2+3+3=12$

다른 풀이

(i) $x=1$일 때, $y\le 6$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$의 6개

(ii) $x=2$일 때, $y\le 4$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$의 4개

(iii) $x=3$일 때, $y\le 2$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(3, 1)$, $(3, 2)$의 2개

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$6+4+2=12$

05-1 답 8

x, y가 자연수이므로 $4x+y<11$을 만족시키는 경우는

$4x+y=5$, $4x+y=6$, $4x+y=7$,

$4x+y=8$, $4x+y=9$, $4x+y=10$

(i) $4x+y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$의 1개

(ii) $4x+y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 2)$의 1개

(iii) $4x+y=7$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 3)$의 1개

(iv) $4x+y=8$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 4)$의 1개

(v) $4x+y=9$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 5)$, $(2, 1)$의 2개

(vi) $4x+y=10$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 6)$, $(2, 2)$의 2개

(i)~(vi)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$1+1+1+1+2+2=8$

06 답 ④

5 g, 10 g, 20 g짜리 저울추의 개수를 각각 x개, y개, z개라 하면

$5x+10y+20z=40$ $\quad\therefore x+2y+4z=8$

(i) $z=0$일 때, $x+2y=8$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(0, 4)$, $(2, 3)$, $(4, 2)$, $(6, 1)$, $(8, 0)$의 5개

(ii) $z=1$일 때, $x+2y=4$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(0, 2)$, $(2, 1)$, $(4, 0)$의 3개

(iii) $z=2$일 때, $x+2y=0$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(0, 0)$의 1개

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는
$5+3+1=9$

06-1 답 ②

지우개, 펜, 연습장의 개수를 각각 x개, y개, z개라 하면
$500x+1000y+2000z=8000$
$\therefore x+2y+4z=16$
이때 지우개, 펜, 연습장을 모두 사용해야 하므로 x, y, z는 자연수이다.
(i) $z=1$일 때, $x+2y=12$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(10, 1), (8, 2), (6, 3), (4, 4), (2, 5)$의 5개
(ii) $z=2$일 때, $x+2y=8$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(6, 1), (4, 2), (2, 3)$의 3개
(iii) $z=3$일 때, $x+2y=4$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(2, 1)$의 1개
(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는
$5+3+1=9$

07 답 ④

두 수의 합이 짝수가 되는 경우는
(짝수)+(짝수) 또는 (홀수)+(홀수)이다.
(i) (짝수)+(짝수)인 경우
십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 2, 4, 6, 8의 4개
일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 0, 2, 4, 6, 8의 5개
즉 구하는 자연수의 개수는 $4\times5=20$
(ii) (홀수)+(홀수)인 경우
십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7, 9의 5개
일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7, 9의 5개
즉 구하는 자연수의 개수는 $5\times5=25$
(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는
$20+25=45$

07-1 답 80

백의 자리의 숫자는 8의 약수이므로 백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
1, 2, 4, 8의 4개
십의 자리의 숫자는 소수이므로 십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
2, 3, 5, 7의 4개
홀수이므로 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
1, 3, 5, 7, 9의 5개
따라서 구하는 자연수의 개수는
$4\times4\times5=80$

08 답 189

서로 다른 세 개의 주사위를 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6\times6=216$
눈의 수의 곱이 짝수가 되는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 눈의 수의 곱이 홀수가 되는 경우의 수를 빼면 된다.
눈의 수의 곱이 홀수가 되는 경우는 세 눈의 수가 모두 홀수일 때이므로
$3\times3\times3=27$
따라서 구하는 경우의 수는
$216-27=189$

08-1 답 ②

서로 다른 네 개의 주사위를 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6\times6\times6=1296$
눈의 수의 곱이 짝수가 되는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 눈의 수의 곱이 홀수가 되는 경우의 수를 빼면 된다.
눈의 수의 곱이 홀수가 되는 경우는 네 눈의 수가 모두 홀수일 때이므로
$3\times3\times3\times3=81$
따라서 구하는 경우의 수는
$1296-81=1215$

09 답 ⑤

$(a+b+c)(x-y)^3=(a+b+c)(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)$에서 a, b, c에 곱해지는 항이 각각 x^3, $-3x^2y$, $3xy^2$, $-y^3$의 4개이므로 구하는 항의 개수는
$3\times4=12$

Lecture 항의 개수

두 식 A, B를 곱할 때, 곱해지는 각 항의 문자가 모두 다르면 AB의 전개식에서 항의 개수는
(A의 항의 개수)$\times$(B의 항의 개수)

09-1 답 ⑤

$(a+b)(v+w)$에서 a, b에 곱해지는 항이 각각 v, w의 2개이므로 항의 개수는 $2\times2=4$
$(c+d+e)(x+y+z)$에서 c, d, e에 곱해지는 항이 각각 x, y, z의 3개이므로 항의 개수는 $3\times3=9$
따라서 구하는 항의 개수는
$4+9=13$

10 답 ③

540을 소인수분해 하면 $540=2^2\times3^3\times5$
540의 양의 약수의 개수는
$(2+1)(3+1)(1+1)=24$
이 중에서 홀수인 약수는 $3^3\times5$의 약수이므로 그 개수는
$(3+1)(1+1)=8$
따라서 540의 양의 약수 중 짝수인 것의 개수는
$24-8=16$

10-1 답 12

630을 소인수분해 하면 $630=2\times3^2\times5\times7$
630의 양의 약수의 개수는
$(1+1)(2+1)(1+1)(1+1)=24$
이 중에서 홀수인 약수는 $3^2\times5\times7$의 약수이므로 그 개수는
$(2+1)(1+1)(1+1)=12$
따라서 630의 양의 약수 중 짝수인 것의 개수는
$24-12=12$

11 답 418

144를 소인수분해 하면 $144=2^4\times3^2$ ······ ❶
144의 양의 약수의 개수는
$(4+1)(2+1)=15$ $\quad\therefore a=15$ ······ ❷

144의 양의 약수의 총합은

$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2)=403$

$\therefore b=403$ ······ ❸

$\therefore a+b=15+403=418$ ······ ❹

채점 기준	비율
❶ 144를 소인수분해 할 수 있다.	20%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

Lecture **자연수의 양의 약수의 총합**

자연수 N이 $N=a^pb^qc^r$ (a, b, c는 서로 다른 소수, p, q, r는 자연수) 꼴로 소인수분해 될 때, N의 양의 약수의 총합은

$(1+a+a^2+\cdots+a^p)(1+b+b^2+\cdots+b^q)(1+c+c^2+\cdots+c^r)$

11-1 답 1194

360을 소인수분해 하면 $360=2^3\times3^2\times5$

360의 양의 약수의 개수는

$(3+1)(2+1)(1+1)=24$ $\quad\therefore a=24$

360의 양의 약수의 총합은

$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+5)=1170$

$\therefore b=1170$

$\therefore a+b=24+1170=1194$

12 답 ②

12를 소인수분해 하면 $12=2^2\times3$

$12^n=(2^2\times3)^n=2^{2n}\times3^n$의 양의 약수의 개수는

$(2n+1)(n+1)$

즉 $(2n+1)(n+1)=66$이므로

$2n^2+3n-65=0$, $(2n+13)(n-5)=0$

$\therefore n=5$ ($\because n$은 자연수)

12-1 답 2

200을 소인수분해 하면 $200=2^3\times5^2$

$200^n=(2^3\times5^2)^n=2^{3n}\times5^{2n}$의 양의 약수의 개수는

$(3n+1)(2n+1)$

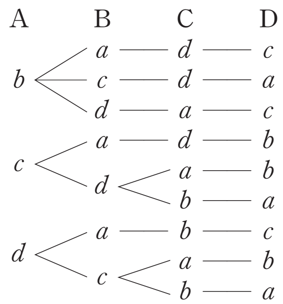
즉 $(3n+1)(2n+1)=35$이므로

$6n^2+5n-34=0$, $(6n+17)(n-2)=0$

$\therefore n=2$ ($\because n$은 자연수)

13 답 9

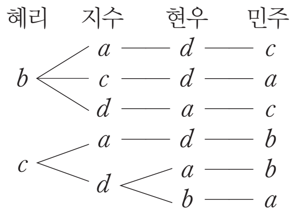
네 명의 학생 A, B, C, D의 이름표를 각각 a, b, c, d라 하고 4명 모두 다른 사람의 이름표를 받는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 9이다.

13-1 답 6

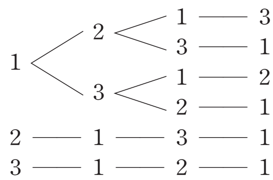
혜리, 지수, 현우, 민주의 볼펜을 각각 a, b, c, d라 하고 주어진 조건을 만족시키도록 볼펜을 받는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 6이다.

14 답 6

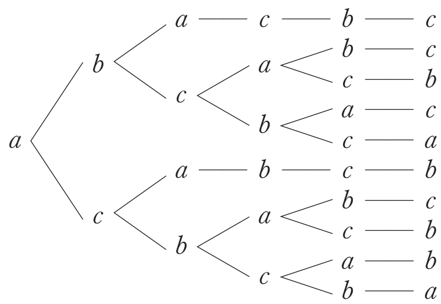
같은 숫자끼리 서로 이웃하지 않도록 배열하는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 6이다.

14-1 답 30

첫 번째 문자가 a일 때, 같은 문자끼리 서로 이웃하지 않도록 배열하는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



즉 첫 번째 문자가 a일 때, 같은 문자끼리 서로 이웃하지 않도록 배열하는 방법의 수는 10이다.

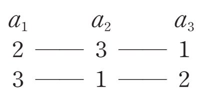
같은 방법으로 첫 번째 문자가 b, c일 때, 같은 문자끼리 서로 이웃하지 않도록 배열하는 방법의 수는 각각 10이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$10\times3=30$

15 답 2

$a_1\neq1$, $a_2\neq2$, $a_3\neq3$이 성립하도록 숫자를 나열하는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 2이다.

15-1 답 9

$(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)(a_4-4)\neq0$이므로

$a_1\neq1$, $a_2\neq2$, $a_3\neq3$, $a_4\neq4$

$a_1 \neq 1$, $a_2 \neq 2$, $a_3 \neq 3$, $a_4 \neq 4$, $a_5 = 5$가 성립하도록 숫자를 나열하는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	1	4	3	5
	3	4	1	5
	4	1	3	5
3	1	4	2	5
	4	1	2	5
		2	1	5
4	1	2	3	5
	3	1	2	5
		2	1	5

따라서 구하는 경우의 수는 9이다.

16 답 ③

(ⅰ) 1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은
0장, 1장, 2장, 3장, 4장의 5가지
500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개의 3가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수 a는
$a = 5 \times 4 \times 3 - 1 = 59$

(ⅱ) 500원짜리 동전 2개로 지불하는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액이 같으므로 1000원짜리 지폐 4장을 500원짜리 동전 8개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 11개, 100원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
500원짜리 동전 11개로 지불할 수 있는 금액은
0원, 500원, 1000원, ⋯, 5500원의 12가지
100원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액은
0원, 100원, 200원의 3가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수 b는
$b = 12 \times 3 - 1 = 35$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a + b = 59 + 35 = 94$

16-1 답 ④

(ⅰ) 500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개의 3가지
100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개, 4개, 5개, 6개, 7개의 8가지
10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개, 4개, 5개의 6가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수 a는
$a = 3 \times 8 \times 6 - 1 = 143$

(ⅱ) 100원짜리 동전 5개로 지불하는 금액과 500원짜리 동전 1개로 지불하는 금액이 같으므로 500원짜리 동전 2개를 100원짜리 동전 10개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 100원짜리 동전 17개, 10원짜리 동전 5개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
100원짜리 동전 17개로 지불할 수 있는 금액은
0원, 100원, 200원, ⋯, 1700원의 18가지
10원짜리 동전 5개로 지불할 수 있는 금액은
0원, 10원, 20원, ⋯, 50원의 6가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수 b는
$b = 18 \times 6 - 1 = 107$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a - b = 143 - 107 = 36$

17 답 119

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개, 4개, 5개의 6가지
100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지
50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는
$6 \times 5 \times 4 - 1 = 119$

17-1 답 ⑤

1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은
0장, 1장, 2장의 3가지
100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는
$3 \times 4 \times 5 - 1 = 59$

18 답 39

5000원짜리 지폐 2장으로 지불하는 금액과 10000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액이 같으므로 10000원짜리 지폐 2장을 5000원짜리 지폐 4장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 5000원짜리 지폐 7장, 1000원짜리 지폐 4장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
5000원짜리 지폐 7장으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 5000원, 10000원, ⋯, 35000원의 8가지
1000원짜리 지폐 4장으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 1000원, 2000원, 3000원, 4000원의 5가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는
$8 \times 5 - 1 = 39$

18-1 답 23

50원짜리 동전 2개로 지불하는 금액과 100원짜리 동전 1개로 지불하는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 1개를 50원짜리 동전 2개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜리 동전 5개, 10원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
50원짜리 동전 5개로 지불할 수 있는 금액은
0원, 50원, 100원, ⋯, 250원의 6가지
10원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액은
0원, 10원, 20원, 30원의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는
$6\times4-1=23$

19 답 20

(i) A → B → D로 가는 방법의 수는
$2\times3=6$
(ii) A → C → D로 가는 방법의 수는
$2\times2=4$
(iii) A → B → C → D로 가는 방법의 수는
$2\times1\times2=4$
(iv) A → C → B → D로 가는 방법의 수는
$2\times1\times3=6$
(i)~(iv)에서 구하는 방법의 수는
$6+4+4+6=20$

19-1 답 34

(i) P → S로 가는 방법의 수는 2
(ii) P → Q → S로 가는 방법의 수는
$4\times2=8$
(iii) P → Q → R → S로 가는 방법의 수는
$4\times2\times3=24$
(i)~(iii)에서 구하는 방법의 수는
$2+8+24=34$

20 답 144

(i) A → B → C → D → A로 가는 방법의 수는
$3\times3\times2\times4=72$
(ii) A → D → C → B → A로 가는 방법의 수는
$4\times2\times3\times3=72$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$72+72=144$

20-1 답 38

(i) A → C → A로 가는 방법의 수는
$2\times1=2$
(ii) A → B → C → A로 가는 방법의 수는
$2\times3\times2=12$
(iii) A → C → B → A로 가는 방법의 수는
$2\times3\times2=12$
(iv) A → B → C → B → A로 가는 방법의 수는
$2\times3\times2\times1=12$
(i)~(iv)에서 구하는 방법의 수는
$2+12+12+12=38$

> **참고** A → C → A로 가는 방법은 A → C로 갈 때 2가지,
> C → A로 갈 때 지나온 도로를 제외한 1가지이므로
> A → C → A로 가는 방법의 수는 $2\times1=2$

21 답 3

B 지점과 D 지점 사이에 추가해야 하는 도로의 개수를 x라 하면
(i) A → C로 가는 방법의 수는 3
(ii) A → B → C로 가는 방법의 수는
$2\times3=6$
(iii) A → D → C로 가는 방법의 수는
$1\times2=2$
(iv) A → B → D → C로 가는 방법의 수는
$2\times x\times2=4x$
(v) A → D → B → C로 가는 방법의 수는
$1\times x\times3=3x$
(i)~(v)에서 A 지점에서 C 지점으로 가는 방법의 수는
$3+6+2+4x+3x=7x+11$
즉 $7x+11=32$이므로 $7x=21$
$\therefore x=3$
따라서 추가해야 하는 도로의 개수는 3이다.

21-1 답 2

A 지점과 B 지점 사이에 추가해야 하는 도로의 개수를 x라 하면
(i) 집 → A → 학교로 가는 방법의 수는
$3\times2=6$
(ii) 집 → B → 학교로 가는 방법의 수는
$4\times3=12$
(iii) 집 → A → B → 학교로 가는 방법의 수는
$3\times x\times3=9x$
(iv) 집 → B → A → 학교로 가는 방법의 수는
$4\times x\times2=8x$
(i)~(iv)에서 집에서 출발하여 학교로 가는 방법의 수는
$6+12+9x+8x=17x+18$
즉 $17x+18=52$이므로 $17x=34$
$\therefore x=2$
따라서 추가해야 하는 도로의 개수는 2이다.

22 답 24

A에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지
D에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 1가지
따라서 구하는 방법의 수는
$4\times3\times2\times1=24$

22-1 답 1920

B에 칠할 수 있는 색은 6가지
D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 5가지
E에 칠할 수 있는 색은 B, D에 칠한 색을 제외한 4가지
A에 칠할 수 있는 색은 B, E에 칠한 색을 제외한 4가지
C에 칠할 수 있는 색은 B, D에 칠한 색을 제외한 4가지
따라서 구하는 방법의 수는
$6\times5\times4\times4\times4=1920$

23 답 84

(i) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우
A와 C에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지
D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지
$\therefore 4\times3\times3=36$ …… ①

(ⅱ) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지

C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지

B에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지

D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지

$\therefore 4\times3\times2\times2=48$ …… ❷

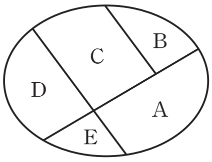
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

$36+48=84$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ A와 C에 같은 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ A와 C에 다른 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

23-1 답 18

오른쪽 그림과 같이 각 영역을 A, B, C, D, E로 나타내면



(ⅰ) A와 D에 같은 색을 칠하는 경우

A와 D에 칠할 수 있는 색은 3가지

C에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 2가지

E에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 2가지

B에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 1가지

$\therefore 3\times2\times2\times1=12$

(ⅱ) A와 D에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 3가지

C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 2가지

D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 1가지

B에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 1가지

E에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 1가지

$\therefore 3\times2\times1\times1\times1=6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

$12+6=18$

24 답 ②

$6{}_{n+1}\mathrm{P}_2={}_{n+1}\mathrm{P}_4$에서

$6(n+1)n=(n+1)n(n-1)(n-2)$

$n+1\ge4$, 즉 $n\ge3$이므로 양변을 $(n+1)n$으로 나누면

$6=(n-1)(n-2)$, $n^2-3n-4=0$

$(n+1)(n-4)=0 \qquad \therefore n=4\ (\because n\ge3)$

24-1 답 4

$5{}_{2n+1}\mathrm{P}_2=4{}_{2n+2}\mathrm{P}_2$에서

$5(2n+1)2n=4(2n+2)(2n+1)$

$2n+1\ge2$, 즉 $n\ge\frac{1}{2}$이므로 양변을 $2n+1$로 나누면

$5\times2n=4(2n+2)$, $10n=8n+8$

$2n=8 \qquad \therefore n=4$

25 답 ③

${}_{n-1}\mathrm{P}_2+4{}_{n-1}\mathrm{P}_1=28$에서

$(n-1)(n-2)+4(n-1)=28$, $n^2+n-30=0$

$(n+6)(n-5)=0 \qquad \therefore n=5\ (\because n\ge3)$

25-1 답 12

${}_n\mathrm{P}_4+35{}_{n-1}\mathrm{P}_2-9{}_n\mathrm{P}_3=0$에서

$$n(n-1)(n-2)(n-3)+35(n-1)(n-2)-9n(n-1)(n-2)=0$$

$n\ge4$이므로 양변을 $(n-1)(n-2)$로 나누면

$n(n-3)+35-9n=0$, $n^2-12n+35=0$

$(n-5)(n-7)=0 \qquad \therefore n=5$ 또는 $n=7$

따라서 n의 값의 합은

$5+7=12$

26 답 ③

${}_{n+1}\mathrm{P}_{r+1}=72{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$에서

$\dfrac{(n+1)!}{(n-r)!}=72\times\dfrac{(n-1)!}{(n-r)!}$, $(n+1)!=72\times(n-1)!$

$\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}=72$, $(n+1)n=72$

이때 $72=9\times8$이므로 $n=8$

26-1 답 ①

${}_{n+2}\mathrm{P}_{r-2}=56{}_n\mathrm{P}_{r-4}$에서

$\dfrac{(n+2)!}{(n-r+4)!}=56\times\dfrac{n!}{(n-r+4)!}$, $(n+2)!=56\times n!$

$\dfrac{(n+2)!}{n!}=56$, $(n+2)(n+1)=56$

이때 $56=8\times7$이므로 $n=6$

27 답 ④

서로 다른 5개의 문자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60$

27-1 답 ⑤

서로 다른 6자루의 연필 중에서 4자루를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{P}_4=6\times5\times4\times3=360$

28 답 ③

서로 다른 7개의 과자 중에서 r개를 뽑아 일렬로 진열하는 경우의 수가 210이므로 ${}_7\mathrm{P}_r=210$

이때 $210=7\times6\times5$이므로 $r=3$

28-1 답 4

서로 다른 10개의 장식품 중에서 r개를 뽑아 일렬로 진열하는 경우의 수가 5040이므로 ${}_{10}\mathrm{P}_r=5040$

이때 $5040=10\times9\times8\times7$이므로 $r=4$

29 답 10

서로 다른 n개의 색연필 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수가 720이므로

${}_n\mathrm{P}_3=720$, $n(n-1)(n-2)=720$

이때 $720=10\times9\times8$이므로 $n=10$

29-1 답 ⑤
서로 다른 n개의 제품 중에서 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수가 210이므로
${}_{n}P_{2}=210$, $n(n-1)=210$
이때 $210=15\times14$이므로 $n=15$

30 답 ②
동일한 작가의 작품을 한 묶음으로 생각하여 5개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!=120$
동일한 작가의 작품 3개의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$120\times6=720$

30-1 답 ④
남학생 3명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$
남학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\times6=144$

31 답 ①
여학생 4명을 한 사람으로 생각하여 $(n+1)$명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $(n+1)!$
여학생 4명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $4!=24$
즉 $(n+1)!\times24=576$이므로 $(n+1)!=24$
이때 $24=4\times3\times2\times1=4!$이므로
$n+1=4 \qquad \therefore n=3$

31-1 답 3
서로 다른 n개의 깃발을 한 묶음으로 생각하여 4개를 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$ ······ ❶
n개의 깃발의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $n!$ ······ ❷
즉 $24\times n!=144$이므로 $n!=6$
이때 $6=3\times2\times1=3!$이므로 $n=3$ ······ ❸

채점 기준	비율
❶ n개의 깃발을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ n개의 깃발의 자리를 바꾸는 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ n의 값을 구할 수 있다.	20%

32 답 ⑤
자음 p, r, b, l, m을 한 문자로, 모음 o, e를 한 문자로 생각하여 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $2!=2$
자음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $5!=120$
모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times120\times2=480$

32-1 답 3
수학책 3권을 한 묶음으로, 영어책 2권을 한 묶음으로 생각하여 $(n+2)$권을 일렬로 정리하는 경우의 수는 $(n+2)!$
수학책끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$
영어책끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
즉 $(n+2)!\times6\times2=1440$이므로 $(n+2)!=120$
이때 $120=5\times4\times3\times2\times1=5!$이므로
$n+2=5 \qquad \therefore n=3$

33 답 ⑤
3개의 짝수 2, 4, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$3!=6$
짝수의 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 3개의 홀수 1, 3, 5를 나열하는 경우의 수는
${}_{4}P_{3}=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times24=144$

33-1 답 14400
남학생 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$5!=120$
남학생의 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에 여학생 3명을 세우는 경우의 수는 ${}_{6}P_{3}=120$
따라서 구하는 경우의 수는
$120\times120=14400$

34 답 840
접시 4개에만 빵을 올려놓을 수 있으므로 빈 접시는 6개이다.
빈 접시의 사이사이와 양 끝의 7개의 자리에 빵이 올려진 접시 4개를 놓으면 되므로 구하는 경우의 수는
${}_{7}P_{4}=840$

34-1 답 ⑤
의자 3개에만 학생이 앉을 수 있으므로 빈 의자는 4개이다.
빈 의자의 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 학생이 앉을 의자 3개를 놓으면 되므로 구하는 경우의 수는
${}_{5}P_{3}=60$

35 답 72
ㄱ, ㄴ, ㄷ을 한 문자로 생각하여 (ㄱ, ㄴ, ㄷ), ㅂ 두 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$2!=2$
(ㄱ, ㄴ, ㄷ), ㅂ의 사이사이와 양 끝의 3개의 자리에 ㄹ, ㅁ을 나열하는 경우의 수는
${}_{3}P_{2}=6$
ㄱ, ㄴ, ㄷ이 자리를 바꾸는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times6\times6=72$

35-1 답 144
승민과 혜리를 한 사람으로 생각하여 (승민, 혜리), 준성, 민주 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$3!=6$
(승민, 혜리), 준성, 민주의 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 지수와 현우를 세우는 경우의 수는
${}_{4}P_{2}=12$
승민과 혜리가 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는
$6\times12\times2=144$

36 답 288

2학년 학생은 4명이므로 양 끝에 2학년 학생 2명을 세우는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$
양 끝의 2학년 학생 2명을 제외한 나머지 학생 4명을 한 줄로 세우는 경우의 수는 $4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$12\times24=288$

36-1 답 ③

어른 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$4!=24$
양 끝을 제외한 어른들 사이사이의 3개의 자리에 아이 2명을 세우는 경우의 수는
${}_3P_2=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\times6=144$

37 답 1152

(i) (남 여 남 여 남 여 남 여)로 서는 경우의 수는
$4!\times4!=24\times24=576$
(ii) (여 남 여 남 여 남 여 남)으로 서는 경우의 수는
$4!\times4!=24\times24=576$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$576+576=1152$

Lecture 두 집단의 구성원이 교대로 서는 순열의 수
(1) 두 집단의 구성원 수가 n으로 같은 경우 ➡ $2\times n!\times n!$
(2) 두 집단의 구성원 수가 각각 n, $n-1$인 경우 ➡ $n!\times(n-1)!$

37-1 답 216

(남 여 남 여 남 여)로 서는 경우의 수는
$3!\times3!=6\times6=36$
(여 남 여 남 여 남)으로 서는 경우의 수는
$3!\times3!=6\times6=36$
$\therefore a=36+36=72$ ······ ❶
여자 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$3!=6$
여자들 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 남자 3명을 세우는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$
$\therefore b=6\times24=144$ ······ ❷
$\therefore a+b=72+144=216$ ······ ❸

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

38 답 ③

z와 e 사이에 z와 e를 제외한 3개의 문자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는
${}_3P_2=6$
z, e와 그 사이의 2개의 문자를 한 문자로 생각하여 2개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$2!=2$
z와 e의 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times2\times2=24$

38-1 답 5760

h와 p 사이에 h와 p를 제외한 6개의 문자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는
${}_6P_3=120$
h, p와 그 사이의 3개의 문자를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$4!=24$
h와 p의 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$120\times24\times2=5760$

39 답 ⑤

7명의 학생 중에서 대표 1명, 부대표 1명을 뽑는 경우의 수는 7명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
${}_7P_2=42$
대표, 부대표를 모두 고등학생 중에서 뽑는 경우의 수는
${}_5P_2=20$
따라서 구하는 경우의 수는
$42-20=22$

39-1 답 480

9명의 학생 중에서 회장 1명, 부회장 1명, 회계 1명을 뽑는 경우의 수는 9명 중에서 3명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_9P_3=504$
회장, 부회장, 회계를 모두 2학년 학생 중에서 뽑는 경우의 수는
${}_4P_3=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$504-24=480$

40 답 ④

6개의 문자 a, b, c, d, e, f를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$6!=720$
e, f를 한 묶음으로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!=120$
e와 f의 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$720-120\times2=480$

40-1 답 108

5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$5!=120$

a, r를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$2!=2$
a, r의 사이사이와 양 끝의 3개의 자리에 c, l, e를 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_3=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$120-2\times6=108$

41 답 ③

6명의 학생 A, B, C, D, E, F를 일렬로 세우는 경우의 수는
$6!=720$
4명의 학생 C, D, E, F 중에서 2명을 택하여 양 끝에 세우고 나머지 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
${}_4P_2\times4!=288$
따라서 구하는 경우의 수는
$720-288=432$

41-1 답 3

6개의 자연수를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$6!=720$
짝수의 개수를 n이라 하면 양 끝에 모두 짝수가 오도록 나열하고 나머지 4개의 자연수를 일렬로 나열하는 경우의 수는
${}_nP_2\times4!=n(n-1)\times24=24n(n-1)$
이때 적어도 한 쪽 끝에 홀수가 오도록 나열하는 경우의 수는 576이므로 $720-24n(n-1)=576$
$24n(n-1)=144$, $n(n-1)=6$
이때 $6=3\times2$이므로 $n=3$
따라서 홀수의 개수는 $6-3=3$

유형+ 완성하기 p. 265

42 답 ③

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 짝수의 개수
0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
${}_5P_3=60$
(ii) 일의 자리의 숫자가 2인 짝수의 개수
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리의 숫자 2를 제외한 4개의 숫자 중 하나이고, 백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로
$4\times{}_4P_2=4\times12=48$
(iii) 일의 자리의 숫자가 4인 짝수의 개수
(ii)와 같은 방법으로 구하면
$4\times{}_4P_2=4\times12=48$
(i)~(iii)에서 짝수의 개수는
$60+48+48=156$

43 답 ⑤

홀수는 1, 3, 5의 3개이므로 양 끝에 홀수 2개를 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$
양 끝의 홀수 2개를 제외한 나머지 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하는 경우의 수는
${}_4P_2=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times12=72$

44 답 42

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 5의 배수의 개수
0을 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
${}_4P_3=24$ …… ❶
(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리의 숫자 5를 제외한 1, 3, 7의 3개
백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로
${}_3P_2=6$
즉 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수는
$3\times6=18$ …… ❷
(i), (ii)에서 5의 배수의 개수는
$24+18=42$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ 일의 자리의 숫자가 0인 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	40%
❷ 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	40%
❸ 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	20%

45 답 ⑤

a□□□ 꼴인 단어의 개수는
$3!=6$
b□□□ 꼴인 단어의 개수는
$3!=6$
ca□□ 꼴인 단어의 개수는
$2!=2$
cb□□ 꼴인 단어는 순서대로 cbad, cbda의 2개
따라서 cbda까지의 개수는
$6+6+2+2=16$
이므로 cbda는 16번째에 오게 된다.

46 답 40

510보다 큰 자연수는 5□□, 6□□ 꼴이다.
5□□ 꼴인 자연수의 개수는
${}_5P_2=20$
6□□ 꼴인 자연수의 개수는
${}_5P_2=20$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$20+20=40$

47 답 3124

1□□□ 꼴인 자연수의 개수는
${}_5P_3=60$
2□□□ 꼴인 자연수의 개수는
${}_5P_3=60$
이때 $60+60=120$이므로 121번째로 작은 자연수는 3124이다.

학교 시험 대비 문제

p.266~269

01 답 ②

두 개의 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 4인 경우
$(1, 3), (2, 2), (3, 1)$의 3가지

(ii) 눈의 수의 합이 8인 경우
$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$의 5가지

(iii) 눈의 수의 합이 12인 경우
$(6, 6)$의 1가지

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는 $3+5+1=9$

02 답 ③

(i) $z=0$일 때, $x+2y=24$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(0, 12), (2, 11), (4, 10), (6, 9), (8, 8), (10, 7), (12, 6), (14, 5), (16, 4), (18, 3), (20, 2), (22, 1), (24, 0)$의 13개

(ii) $z=1$일 때, $x+2y=14$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(0, 7), (2, 6), (4, 5), (6, 4), (8, 3), (10, 2), (12, 1), (14, 0)$의 8개

(iii) $z=2$일 때, $x+2y=4$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(0, 2), (2, 1), (4, 0)$의 3개

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
$13+8+3=24$

03 답 ①

x, y가 음이 아닌 정수이므로 $2x+y\le3$을 만족시키는 경우는
$2x+y=0$, $2x+y=1$, $2x+y=2$, $2x+y=3$

(i) $2x+y=0$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(0, 0)$의 1개

(ii) $2x+y=1$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(0, 1)$의 1개

(iii) $2x+y=2$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(0, 2), (1, 0)$의 2개

(iv) $2x+y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(0, 3), (1, 1)$의 2개

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는
$1+1+2+2=6$

04 답 16

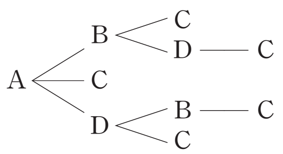
$(a+b)^3(p+q+r+s)=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(p+q+r+s)$
에서 a^3, $3a^2b$, $3ab^2$, b^3에 곱해지는 항이 각각 p, q, r, s의 4개이므로 구하는 항의 개수는
$4\times4=16$

05 답 ①

240과 560의 최대공약수는 80이므로 240과 560의 양의 공약수의 개수는 80의 양의 약수의 개수와 같다.
이때 80을 소인수분해 하면 $80=2^4\times5$
따라서 구하는 양의 공약수의 개수는
$(4+1)(1+1)=10$

06 답 5

주어진 사면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 C에 도착하는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 5이다.

07 답 30

(i) 100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수 m은
$m=4\times4\times5-1=79$

(ii) 50원짜리 동전 2개로 지불하는 금액과 100원짜리 동전 1개로 지불하는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 3개를 50원짜리 동전 6개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜리 동전 9개, 10원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
50원짜리 동전 9개로 지불할 수 있는 금액은
0원, 50원, 100원, ⋯, 450원의 10가지
10원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 금액은
0원, 10원, 20원, 30원, 40원의 5가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수 n은
$n=10\times5-1=49$

(i), (ii)에서 $m-n=79-49=30$

08 답 ④

(i) A → B → D로 가는 방법의 수는
$2\times1=2$

(ii) A → B → C → D로 가는 방법의 수는
$2\times2\times2=8$

(iii) A → C → D로 가는 방법의 수는
$2\times2=4$

(iv) A → C → B → D로 가는 방법의 수는
$2\times2\times1=4$

(i)~(iv)에서 구하는 방법의 수는
$2+8+4+4=18$

09 답 ③

(i) B와 D에 같은 색을 칠하는 경우
B와 D에 칠할 수 있는 색은 5가지
A에 칠할 수 있는 색은 B, D에 칠한 색을 제외한 4가지
C에 칠할 수 있는 색은 B, D에 칠한 색을 제외한 4가지
$\therefore 5\times4\times4=80$

(ii) B와 D에 다른 색을 칠하는 경우
B에 칠할 수 있는 색은 5가지
D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 4가지
A에 칠할 수 있는 색은 B, D에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 B, D에 칠한 색을 제외한 3가지
$\therefore 5\times4\times3\times3=180$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$80+180=260$

10 답 4

${}_{n-1}P_2-3{}_{n+1}P_1=-9$에서

$(n-1)(n-2)-3(n+1)=-9$

$n^2-6n-1=-9,\ n^2-6n+8=0$

$(n-2)(n-4)=0 \qquad \therefore n=4\ (\because n\geq 3)$

11 답 ④

7명의 학생 중에서 회장, 부회장, 미화부장을 뽑는 방법의 수는 7명 중에서 3명을 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

${}_7P_3=210$

12 답 ④

주머니에서 공을 꺼낼 때마다 공에 적힌 숫자를 순서대로 5개의 빈 칸 □□□□□에 적으면 구하는 경우의 수는 □□□□□에 2, 4, 5를 먼저 나열한 후 남은 두 칸 중 앞에 3, 뒤에 1을 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_5P_3=60$

13 답 144

E, N, D를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$

E, N, D가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times 6=144$

14 답 ⑤

A, B, C를 한 사람으로 생각하여 (A, B, C), F, G 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=6$

(A, B, C), F, G의 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 D와 E를 세우는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

A, B, C가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times 12\times 6=432$

15 답 ③

(i) 첫 번째에 남자가 입장하는 경우

첫 번째에 남자 1명이 입장하는 방법의 수는 3

나머지 4명이 입장하는 방법의 수는 $4!=24$

$\therefore 3\times 24=72$

(ii) 네 번째에 남자가 입장하는 경우

네 번째에 남자 1명이 입장하는 방법의 수는 3

나머지 4명이 입장하는 방법의 수는 $4!=24$

$\therefore 3\times 24=72$

(iii) 첫 번째와 네 번째에 남자가 입장하는 경우

첫 번째에 남자 1명, 네 번째에 남자 1명이 입장하는 방법의 수는

${}_3P_2=6$

나머지 3명이 입장하는 방법의 수는 $3!=6$

$\therefore 6\times 6=36$

(i)~(iii)에서 구하는 방법의 수는

$72+72-36=108$

16 답 ③

양 끝에 남학생 2명을 세우는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

여학생 2명을 한 사람으로 생각하여 양 끝의 남학생 2명을 제외한 나머지 학생 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=6$

여학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times 6\times 2=144$

17 답 ③

12명의 학생 중에서 대표 1명, 부대표 1명을 뽑는 경우의 수는 12명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_{12}P_2=132$

대표, 부대표를 모두 남학생으로 뽑는 경우의 수는 남학생 5명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_5P_2=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$132-20=112$

18 답 ③

6개의 문자 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_6P_4=360$

양 끝에 자음인 b, c, d, f의 4개의 문자 중에서 2개를 택하여 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

나머지 4개의 문자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$360-12\times 12=216$

19 답 300

홀수이려면 일의 자리의 숫자가 1 또는 3 또는 5이어야 하므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5의 3개

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리의 숫자를 제외한 5개

백의 자리, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 나머지 5개의 숫자에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

${}_5P_2=20$

따라서 홀수의 개수는

$3\times 5\times 20=300$

20 답 216

(i) (짝, 홀, 짝, 홀, 짝)인 경우

4개의 짝수 2, 4, 6, 8 중에서 3개의 수를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_4P_3=24$

짝수의 사이사이에 3개의 홀수 3, 5, 7 중에서 2개의 수를 택하여 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$

$\therefore 24\times6=144$

(ii) (홀, 짝, 홀, 짝, 홀)인 경우

3개의 홀수 3, 5, 7을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

홀수의 사이사이에 4개의 짝수 2, 4, 6, 8 중에서 2개의 수를 택하여 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

$\therefore 6\times12=72$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$144+72=216$

21 답 ②

A□□□□ 꼴인 단어의 개수는

$4!=24$

B□□□□ 꼴인 단어의 개수는

$4!=24$

C□□□□ 꼴인 단어의 개수는

$4!=24$

DA□□□ 꼴인 단어의 개수는

$3!=6$

DB□□□ 꼴인 단어의 개수는

$3!=6$

DCA□□ 꼴인 단어의 개수는

$2!=2$

DCB□□ 꼴인 단어의 개수는

$2!=2$

이때 $24+24+24+6+6+2+2=88$이므로 89번째 단어는 DCEAB이다.

따라서 89번째 단어의 마지막 문자는 B이다.

서술형 1 답 384

(i) 자음끼리 이웃하는 경우

ㄱ, ㄴ이 적힌 카드를 한 묶음으로 생각하여 5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

ㄱ, ㄴ이 적힌 카드의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

$\therefore a=120\times2=240$ ······ ❶

(ii) 모음끼리 이웃하는 경우

ㅏ, ㅑ, ㅓ, ㅕ가 적힌 카드를 한 묶음으로 생각하여 3장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

ㅏ, ㅑ, ㅓ, ㅕ가 적힌 카드의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$4!=24$

$\therefore b=6\times24=144$ ······ ❷

(i), (ii)에서 $a+b=240+144=384$ ······ ❸

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 2 답 52

학생 9명 중에서 반장 1명, 부반장 1명을 뽑는 경우의 수는 9명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_9P_2=72$ ······ ❶

반장과 부반장이 모두 남학생인 경우의 수는 남학생 5명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_5P_2=20$ ······ ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$72-20=52$ ······ ❸

채점 기준	비율
❶ 학생 9명 중에서 반장 1명, 부반장 1명을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ 반장과 부반장이 모두 남학생인 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❸ 반장, 부반장 중에서 적어도 1명은 여학생인 경우의 수를 구할 수 있다.	40%

서술형 3 답 16

6개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 3개를 택하여 그 합이 9의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.

0, 4, 5 또는 1, 3, 5 또는 2, 3, 4 ······ ❶

(i) 0, 4, 5로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$2\times2!=4$ ······ ❷

(ii) 1, 3, 5로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3!=6$ ······ ❸

(iii) 2, 3, 4로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3!=6$ ······ ❹

(i)~(iii)에서 9의 배수의 개수는

$4+6+6=16$ ······ ❺

채점 기준	비율
❶ 9의 배수가 되는 경우를 알 수 있다.	20%
❷ 0, 4, 5로 만들 수 있는 9의 배수의 개수를 구할 수 있다.	30%
❸ 1, 3, 5로 만들 수 있는 9의 배수의 개수를 구할 수 있다.	20%
❹ 2, 3, 4로 만들 수 있는 9의 배수의 개수를 구할 수 있다.	20%
❺ 9의 배수의 개수를 구할 수 있다.	10%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 270~271

01 답 ⑤

A, B가 앉는 줄을 선택하는 경우의 수는 2

한 줄에 놓인 3개의 좌석 중 2개의 좌석을 택하여 앉는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

나머지 세 명이 맞은편 줄의 좌석에 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times6\times6=72$

02 답 480

빈 의자 1개를 포함하여 남학생 3명을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$4!=24$

빈 의자, 남학생 3명의 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 여학생 2명이 앉는 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_2=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times20=480$

03 답 ③

(i) B와 C가 모두 당번을 하는 경우

A, B, C 세 명이 당번을 하므로 당번을 정하는 경우의 수는

$3!=\boxed{(가)\ 6}$

(ii) B는 당번을 하고 C는 당번을 하지 않는 경우

A, B가 당번을 하고, C는 당번을 하지 않으므로

A, B, D 또는 A, B, E 세 명이 당번을 하게 된다.

즉 당번을 정하는 경우의 수는

$3!+3!=6+6=\boxed{(나)\ 12}$

(iii) C는 당번을 하고 B는 당번을 하지 않는 경우

A, C가 당번을 하고, B는 당번을 하지 않으므로

A, C, D 또는 A, C, E 세 명이 당번을 하게 된다.

즉 당번을 정하는 경우의 수는

$3!+3!=6+6=12$

(i)~(iii)에 의하여 당번을 정하는 경우의 수는

$6+12+12=\boxed{(다)\ 30}$

따라서 $a=6$, $b=12$, $c=30$이므로

$a+b+c=6+12+30=48$

04 답 ③

2학년 학생 4명이 일렬로 앉는 경우의 수는 $4!=24$

양 끝을 제외한 2학년 학생 사이사이의 3개의 자리에 1학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times6=144$

05 답 336

1부터 9까지의 자연수 중 세 수를 택하는 순열의 수는

${}_9\mathrm{P}_3=504$

각 자리의 수 중 어느 두 수의 합이 9가 되는 세 자리 자연수의 개수를 구하면 다음과 같다.

1부터 9까지의 자연수 중 합이 9가 되는 두 수의 쌍은

$(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$의 4개이다.

이 4개의 쌍 중 하나를 택하고 9개의 숫자 중 이미 택한 2개의 숫자를 제외한 7개의 숫자 중 하나를 택하여 3개의 숫자를 얻는다.

이와 같이 얻은 3개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$4\times7\times3!=4\times7\times6=168$

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$504-168=336$

06 답 576

(가)에서 A와 B가 같이 앉을 수 있는 2인용 의자는 마부가 앉아 있는 의자를 제외한 3개이고, 두 사람이 자리를 서로 바꿔 앉을 수 있으므로 A와 B가 이웃하여 앉는 경우의 수는

$3\times2!=6$

남은 5개의 좌석에 C와 D가 앉는 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_2=20$

이때 C와 D가 이웃하여 앉을 수 있는 의자는 A와 B가 앉아 있는 의자와 마부가 앉아 있는 의자를 제외한 나머지 2개이고, 두 사람이 자리를 서로 바꿔 앉을 수 있으므로 C와 D가 이웃하여 앉는 경우의 수는 $2\times2!=4$

즉 (나)에서 C와 D가 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는

$20-4=16$

남은 3개의 좌석에 E, F, G가 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times16\times6=576$

07 답 ③

1, 6이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 4가지

2가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 3가지

3이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지

5가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지

4가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1, 5가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times3\times2\times2\times2=96$

08 답 ①

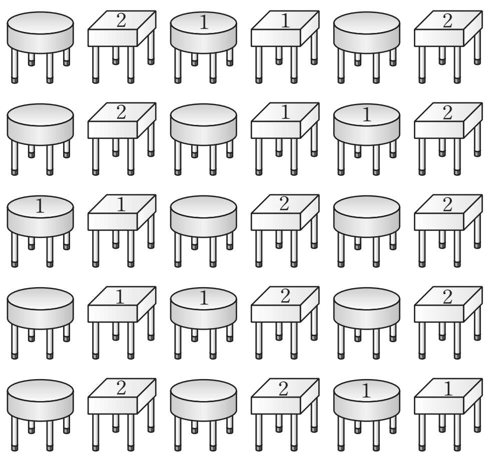
사각 의자 3개 중 2개의 의자에 2학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2=6$

나머지 의자 4개에 1학년 학생 2명과 3학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 $4!=24$

즉 2학년 학생이 사각 의자에만 앉는 경우의 수는

$6\times24=144$

이 중 1학년 학생 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우는 다음 5가지 중 하나이다.



각각의 경우 1, 2, 3학년 학생들이 앉는 경우의 수는

$2!\times2!\times2!=8$

즉 1학년 학생 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우의 수는

$5\times8=40$

같은 방법으로 3학년 학생 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우의 수는

$5\times8=40$

따라서 구하는 경우의 수는

$144-40\times2=64$

12 조합

개념 완성하기 p. 275~276

01 답 15

${}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

02 답 78

${}_{13}C_{11}={}_{13}C_2=\dfrac{13\times12}{2\times1}=78$

03 답 1

04 답 1

05 답 9

${}_nC_2=36$에서 $\dfrac{n(n-1)}{2\times1}=36$

$n(n-1)=72=9\times8 \qquad \therefore n=9$

06 답 9

${}_nC_3={}_nC_{n-3}$이므로 ${}_nC_3={}_nC_6$에서 ${}_nC_{n-3}={}_nC_6$

$n-3=6 \qquad \therefore n=9$

07 답 4

$2{}_nC_2=3{}_nC_3$에서 $2\times\dfrac{n(n-1)}{2\times1}=3\times\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}$

$n\ge3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$1=\dfrac{n-2}{2}$, $n-2=2$

$\therefore n=4$

08 답 5

${}_{n+2}C_3-{}_{n+1}C_2=20$에서

$\dfrac{(n+2)(n+1)n}{3\times2\times1}-\dfrac{(n+1)n}{2\times1}=20$

$(n+2)(n+1)n-3n(n+1)=120$

$(n+1)n(n+2-3)=120$

$(n+1)n(n-1)=6\times5\times4$

$\therefore n=5$

09 답 2 또는 5

${}_7C_r=21$에서 $\dfrac{7!}{r!(7-r)!}=21$

$7!=21\times r!(7-r)!$

$7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=7\times3\times r!(7-r)!$

$6\times5\times4\times2\times1=r!(7-r)!$

$5\times4\times3\times2\times1\times2\times1=r!(7-r)!$

$5!\times2!=r!(7-r)!$

$\therefore r=2$ 또는 $r=5$

10 답 3

${}_{r+3}C_r={}_{r+3}C_3$이므로 ${}_{r+3}C_r=20$에서 ${}_{r+3}C_3=20$

$\dfrac{(r+3)(r+2)(r+1)}{3\times2\times1}=20$

$(r+3)(r+2)(r+1)=6\times5\times4$

$\therefore r=3$

11 답 2

(ⅰ) ${}_8C_{r+2}={}_8C_{2r}$에서 $r+2=2r$

$\therefore r=2$

(ⅱ) ${}_8C_{2r}={}_8C_{8-2r}$이므로 ${}_8C_{r+2}={}_8C_{8-2r}$에서

$r+2=8-2r$, $3r=6$

$\therefore r=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $r=2$

12 답 2 또는 4

(ⅰ) ${}_{12}C_{r+1}={}_{12}C_{2r-1}$에서 $r+1=2r-1$

$\therefore r=2$

(ⅱ) ${}_{12}C_{2r-1}={}_{12}C_{12-(2r-1)}={}_{12}C_{13-2r}$이므로

${}_{12}C_{r+1}={}_{12}C_{2r-1}$에서 ${}_{12}C_{r+1}={}_{12}C_{13-2r}$

$r+1=13-2r$, $3r=12$

$\therefore r=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $r=2$ 또는 $r=4$

13 답 5

${}_nP_2=2{}_nC_3$에서 $n(n-1)=2\times\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}$

$n\ge3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$1=\dfrac{n-2}{3}$, $n-2=3$

$\therefore n=5$

14 답 5

${}_nP_2+3{}_nC_2=50$에서 $n(n-1)+3\times\dfrac{n(n-1)}{2\times1}=50$

$2n(n-1)+3n(n-1)=100$

$5n(n-1)=100$, $n(n-1)=20=5\times4$

$\therefore n=5$

15 답 3

$3{}_{n+1}C_3={}_nP_2+2{}_nC_2$에서

$3\times\dfrac{(n+1)n(n-1)}{3\times2\times1}=n(n-1)+2\times\dfrac{n(n-1)}{2\times1}$

$n+1\ge3$, 즉 $n\ge2$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$\dfrac{n+1}{2}=2$, $n+1=4$

$\therefore n=3$

16 답 4

${}_nC_{n-2}={}_nC_2$이므로 ${}_nP_3={}_nP_2+2{}_nC_{n-2}$에서

${}_nP_3={}_nP_2+2{}_nC_2$

$n(n-1)(n-2)=n(n-1)+2\times\dfrac{n(n-1)}{2\times1}$

$n\ge3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$n-2=2 \qquad \therefore n=4$

17 답 35

서로 다른 색의 색연필 7자루 중에서 4자루를 고르는 방법의 수는

$_7C_4 = {_7C_3} = \dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$

18 답 55

11명의 학생이 서로 한 번씩 악수를 하는 방법의 수는 11명의 학생 중에서 2명을 택하는 방법의 수와 같으므로

$_{11}C_2 = \dfrac{11\times10}{2\times1} = 55$

19 답 28

8명의 탁구 선수가 서로 한 번씩 경기를 하는 경우의 수는 8명의 선수 중에서 2명을 택하는 방법의 수와 같으므로

$_8C_2 = \dfrac{8\times7}{2\times1} = 28$

20 답 30

3종류의 케이크 중에서 1종류의 케이크를 선택하는 경우의 수는

$_3C_1 = 3$

5종류의 음료 중에서 3종류의 음료를 선택하는 경우의 수는

$_5C_3 = {_5C_2} = \dfrac{5\times4}{2\times1} = 10$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times10 = 30$

21 답 60

5종류의 꽃 중에서 2종류의 꽃을 선택하는 경우의 수는

$_5C_2 = \dfrac{5\times4}{2\times1} = 10$

4종류의 화분 중에서 2종류의 화분을 선택하는 경우의 수는

$_4C_2 = \dfrac{4\times3}{2\times1} = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times6 = 60$

22 답 36

4명의 야구 선수 중에서 대표 한 명을 뽑는 경우의 수는

$_4C_1 = 4$

3명의 축구 선수 중에서 대표 한 명을 뽑는 경우의 수는

$_3C_1 = 3$

3명의 농구 선수 중에서 대표 한 명을 뽑는 경우의 수는

$_3C_1 = 3$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times3\times3 = 36$

23 답 15

6개의 점 중에서 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는

$_6C_2 = \dfrac{6\times5}{2\times1} = 15$

24 답 20

6개의 점 중에서 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 구하는 삼각형의 개수는

$_6C_3 = \dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$

25 답 9

구하는 대각선의 개수는 6개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 방법의 수에서 변의 개수인 6을 뺀 것과 같으므로

$_6C_2 - 6 = \dfrac{6\times5}{2\times1} - 6 = 15 - 6 = 9$

26 답 126

9명 중에서 4명의 대표를 뽑는 방법의 수는

$_9C_4 = \dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1} = 126$

27 답 60

남자 4명 중에서 2명의 대표를 뽑는 방법의 수는

$_4C_2 = \dfrac{4\times3}{2\times1} = 6$

여자 5명 중에서 2명의 대표를 뽑는 방법의 수는

$_5C_2 = \dfrac{5\times4}{2\times1} = 10$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\times10 = 60$

28 답 121

9명 중에서 4명의 대표를 뽑는 방법의 수는

$_9C_4 = \dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1} = 126$

여자 5명 중에서 4명의 대표를 뽑는 방법의 수는

$_5C_4 = {_5C_1} = 5$

따라서 구하는 방법의 수는

$126 - 5 = 121$

29 답 35

지수를 먼저 뽑고 나머지 7명 중에서 3명을 뽑으면 되므로

$_7C_3 = \dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$

30 답 15

지수와 민주를 먼저 뽑고 나머지 6명 중에서 2명을 뽑으면 되므로

$_6C_2 = \dfrac{6\times5}{2\times1} = 15$

31 답 35

민주를 제외한 나머지 7명 중에서 4명을 뽑으면 되므로

$_7C_4 = {_7C_3} = \dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$

32 답 15

지수와 민주를 제외한 나머지 6명 중에서 4명을 뽑으면 되므로

$_6C_4 = {_6C_2} = \dfrac{6\times5}{2\times1} = 15$

33 답 40

(i) 지수는 뽑고 민주는 뽑지 않는 경우

지수를 먼저 뽑고 민주를 제외한 나머지 6명 중에서 3명을 뽑으면 되므로

$${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

(ii) 민주는 뽑고 지수는 뽑지 않는 경우

민주를 먼저 뽑고 지수를 제외한 나머지 6명 중에서 3명을 뽑으면 되므로

$${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$20+20=40$

34 답 60

서로 다른 6권의 책을 1권, 2권, 3권의 세 묶음으로 나누는 방법의 수는

${}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_3C_3=6\times10\times1=60$

35 답 15

서로 다른 6권의 책을 1권, 1권, 4권의 세 묶음으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_1\times{}_5C_1\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}=6\times5\times1\times\frac{1}{2}=15$$

36 답 15

서로 다른 6권의 책을 2권씩 세 묶음으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=15\times6\times1\times\frac{1}{6}=15$$

37 답 1680

서로 다른 종류의 과일 9개를 3개씩 세 묶음으로 나누는 방법의 수는

$${}_9C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{3!}=84\times20\times1\times\frac{1}{6}=280$$

이 세 묶음을 서로 다른 3개의 상자에 담는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$280\times6=1680$

유형 완성하기 p. 277~288

01 답 6

${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}$이므로 $84=\frac{504}{r!}$

$84r!=504$, $r!=6=3\times2\times1$

$\therefore r=3$

또 ${}_nP_r={}_nP_3=n(n-1)(n-2)=504=9\times8\times7$에서

$n=9$

$\therefore n-r=9-3=6$

01-1 답 ③

${}_nP_2+{}_nC_2=63$에서 $n(n-1)+\frac{n(n-1)}{2\times1}=63$

$\frac{3}{2}n(n-1)=63$, $n(n-1)=42=7\times6$

$\therefore n=7$

02 답 8

${}_{38}C_{r^2}={}_{38}C_{2r+3}$에서

$r^2=2r+3$ 또는 $38-r^2=2r+3$

(i) $r^2=2r+3$일 때

$r^2-2r-3=0$, $(r+1)(r-3)=0$

$\therefore r=3$ ($\because r>0$)

(ii) $38-r^2=2r+3$일 때

$r^2+2r-35=0$, $(r+7)(r-5)=0$

$\therefore r=5$ ($\because r>0$)

(i), (ii)에서 자연수 r의 값의 합은

$3+5=8$

02-1 답 2

${}_9C_r={}_9C_{2r+3}$에서

$r=2r+3$ 또는 $9-r=2r+3$

(i) $r=2r+3$일 때

$r=-3$이므로 자연수가 아니다.

(ii) $9-r=2r+3$일 때

$3r=6$ $\therefore r=2$

(i), (ii)에서 $r=2$

03 답 8

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$={}_nC_r+6=16$ $\therefore {}_nC_r=10$

(두 근의 곱)$={}_nP_r=60$

이때 ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}$에 위의 식을 대입하면 $10=\frac{60}{r!}$

$r!=6=3!$ $\therefore r=3$ ······❶

${}_nP_3=60$에서 $n(n-1)(n-2)=5\times4\times3$이므로

$n=5$ ······❷

$\therefore n+r=5+3=8$ ······❸

채점 기준	비율
❶ r의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $n+r$의 값을 구할 수 있다.	20%

03-1 답 7

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=\frac{{}_nC_3}{{}_nC_1}$

이때 $\alpha\beta=5$이므로 $\frac{{}_nC_3}{{}_nC_1}=5$, ${}_nC_3=5{}_nC_1$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=5n$, $n(n-1)(n-2)=30n$

$n\geq3$이므로 양변을 n으로 나누면

$(n-1)(n-2)=30=6\times5$

$n-1=6$ $\therefore n=7$

04 답 (가) $n-r$ (나) r (다) n

${}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

$=\frac{(n-1)!}{r!\{(n-1)-r\}!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\frac{(\boxed{(가)\ n-r})\times(n-1)!}{r!(n-r)!}+\frac{\boxed{(나)\ r}\times(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\frac{\{(n-r)+r\}\times(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\frac{\boxed{(다)\ n}\times(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

$={}_nC_r$

$\therefore {}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

Lecture

조합의 수 ${}_nC_r$는 자연수 1, 2, 3, $\cdots$, n에서 r개의 수를 택하는 방법의 수로 다음과 같이 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) n을 선택한 경우
n을 이미 선택하였으므로 나머지 $(n-1)$개의 수에서 $(r-1)$개를 선택해야 하고, 이 방법의 수는 ${}_{n-1}C_{r-1}$이다.

(ii) n을 선택하지 않은 경우
n을 제외한 나머지 $(n-1)$개의 수에서 r개를 선택해야 하고, 이 방법의 수는 ${}_{n-1}C_r$이다.

(i), (ii)는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 의하여
${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

04-1 답 (가) $n!$ (나) $n-k$ (다) 0

${}_nP_n=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=\boxed{(가)\ n!}$

${}_nP_k\times{}_{n-k}P_{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!}\times\frac{(n-k)!}{\{(n-k)-(n-k)\}!}$

$=\frac{n!}{(\boxed{(나)\ n-k})!}\times\frac{(n-k)!}{\boxed{(다)\ 0}!}$

$=n!$

$\therefore {}_nP_n={}_nP_k\times{}_{n-k}P_{n-k}$

05 답 ②

${}_nC_{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!\{n-(\boxed{(가)\ n-r})\}!}$

$=\frac{n!}{(n-r)!\boxed{(나)\ r!}}={}_nC_r$

$\therefore {}_nC_r={}_nC_{n-r}$

05-1 답 5

$k{}_nC_k=k\times\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n\times(n-1)!}{(\boxed{(가)\ k-1})!(n-k)!}$

$=n\times\frac{(n-1)!}{(\boxed{(가)\ k-1})!(n-k)!}$

$=n{}_{n-1}C_{k-1}$

$\therefore k{}_nC_k=n{}_{n-1}C_{k-1}$

따라서 $f(k)=k-1$이므로 $f(6)=6-1=5$

06 답 ④

${}_nP_r=\frac{n!}{(\boxed{(가)\ n-r})!}$이므로

$n{}_{n-1}P_{r-1}=n\times\frac{(\boxed{(나)\ n-1})!}{\{(n-1)-(\boxed{(다)\ r-1})\}!}$

$=n\times\frac{(\boxed{(나)\ n-1})!}{(\boxed{(라)\ n-r})!}$

$=\frac{\boxed{(마)\ n}!}{(\boxed{(라)\ n-r})!}$

$={}_nP_r$

따라서 옳은 것은 ④이다.

06-1 답 ③

${}_{n-1}P_k+k{}_{n-1}P_{k-1}$

$=\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}+k\times\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$

$=\frac{(\boxed{(가)\ n-k})\times(n-1)!}{(n-k)!}+\frac{k\times(n-1)!}{(n-k)!}$

$=\frac{\{(n-k)+k\}\times(n-1)!}{(n-k)!}$

$=\frac{\boxed{(나)\ n}\times(n-1)!}{(n-k)!}$

$=\frac{n!}{(n-k)!}$

$={}_nP_k$

$\therefore {}_{n-1}P_k+k{}_{n-1}P_{k-1}={}_nP_k$

07 답 (가) $(n-r)!$ (나) $n!$ (다) $r!$

$n{}_{n-1}C_{r-1}=n\times\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=n\times\frac{(n-1)!}{(r-1)!\boxed{(가)\ (n-r)!}}$

$=\frac{\boxed{(나)\ n!}}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\frac{r\times n!}{\boxed{(다)\ r!}(n-r)!}$

$=r{}_nC_r$

$\therefore r{}_nC_r=n{}_{n-1}C_{r-1}$

07-1 답 (가) $n-k+1$ (나) k (다) $n+1$

${}_nC_k+{}_nC_{k-1}$

$=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$

$=\frac{(\boxed{(가)\ n-k+1})\times n!}{k!(n-k+1)!}+\frac{\boxed{(나)\ k}\times n!}{k!(n-k+1)!}$

$=\frac{\{(n-k+1)+k\}\times n!}{k!(n-k+1)!}$

$=\frac{(\boxed{(다)\ n+1})\times n!}{k!(n-k+1)!}$

$=\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$

$={}_{n+1}C_k$

$\therefore {}_{n+1}C_k={}_nC_k+{}_nC_{k-1}$

08 답 15

1학년 학생 3명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
$_3C_3=1$
2학년 학생 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
$_4C_3={}_4C_1=4$
3학년 학생 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
$_5C_3={}_5C_2=10$
따라서 구하는 경우의 수는
$1+4+10=15$

08-1 답 59

A반 학생 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
$_4C_3={}_4C_1=4$
B반 학생 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
$_6C_3=20$
C반 학생 7명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
$_7C_3=35$
따라서 구하는 경우의 수는
$4+20+35=59$

09 답 45

6명의 후보자 중에서 2명의 대표를 뽑는 경우의 수는 조합의 수이므로
$_6C_2=15 \quad \therefore a=15$ ······❶
6명의 후보자 중에서 회장, 부회장을 나누어 뽑는 경우의 수는 순열의 수이므로
$_6P_2=30 \quad \therefore b=30$ ······❷
$\therefore a+b=15+30=45$ ······❸

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

09-1 답 392

8명의 후보자 중에서 총무 3명을 뽑는 경우의 수는 조합의 수이므로
$_8C_3=56 \quad \therefore m=56$
8명의 후보자 중에서 의장, 부의장, 회계를 나누어 뽑는 경우의 수는 순열의 수이므로
$_8P_3=336 \quad \therefore n=336$
$\therefore m+n=56+336=392$

10 답 13

모임에 참석한 사람의 수를 n이라 하면 이들이 서로 한 번씩 악수를 하는 경우의 수는 $_nC_2$이다.
이때 $_nC_2=78$이므로 $\dfrac{n(n-1)}{2\times1}=78$
$n(n-1)=156=13\times12$
$\therefore n=13$
따라서 모임에 참석한 사람의 수는 13이다.

10-1 답 ④

22명이 모두 악수를 하였다면 악수의 총 횟수는 $_{22}C_2$
그런데 11명의 여자들끼리는 악수를 하지 않았고, 부부끼리도 악수를 하지 않았으므로 구하는 악수의 총 횟수는
$_{22}C_2-({}_{11}C_2+11)=231-(55+11)=165$

11 답 ⑤

공격수 n명 중에서 3명을 택하는 방법의 수는 $_nC_3$
수비수 6명 중에서 2명을 택하는 방법의 수는 $_6C_2=15$
즉 $_nC_3\times15=1800$이므로 $_nC_3=120$
$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=120$
$n(n-1)(n-2)=720=10\times9\times8$
$\therefore n=10$

11-1 답 ②

빵 5종류 중에서 2종류를 선택하는 방법의 수는 $_5C_2=10$
아이스크림 n종류 중에서 3종류를 선택하는 방법의 수는 $_nC_3$
즉 $10\times{}_nC_3=40$이므로 $_nC_3=4$
$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=4$
$n(n-1)(n-2)=24=4\times3\times2$
$\therefore n=4$

12 답 ③

(i) 6점인 경우
빨간 공 2개, 흰 공 2개를 뽑으면 되므로
$_4C_2\times{}_6C_2=6\times15=90$
(ii) 7점인 경우
빨간 공 3개, 흰 공 1개를 뽑으면 되므로
$_4C_3\times{}_6C_1=4\times6=24$
(iii) 8점인 경우
빨간 공 4개를 뽑으면 되므로
$_4C_4\times{}_6C_0=1$
(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는
$90+24+1=115$

12-1 답 46

(i) 7점인 경우
흰 공 1개, 검은 공 2개를 뽑으면 되므로
$_3C_1\times{}_5C_2=3\times10=30$ ······❶
(ii) 8점인 경우
흰 공 2개, 검은 공 1개를 뽑으면 되므로
$_3C_2\times{}_5C_1=3\times5=15$ ······❷
(iii) 9점인 경우
흰 공 3개를 뽑으면 되므로
$_3C_3\times{}_5C_0=1$ ······❸
(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는
$30+15+1=46$ ······❹

채점 기준	비율
❶ 7점인 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ 8점인 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❸ 9점인 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❹ 7점 이상인 경우의 수를 구할 수 있다.	10%

13 답 40

세 수의 합이 홀수가 되기 위해서는 세 수 모두 홀수이거나 하나는 홀수, 두 수는 짝수이어야 한다.

(i) 세 수 모두 홀수인 경우

1, 3, 5, 7, 9의 5개의 수 중에서 3개의 수를 택하는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

(ii) 하나는 홀수, 두 수는 짝수인 경우

1, 3, 5, 7, 9의 5개의 수 중에서 1개의 수를 택하고 2, 4, 6, 8의 4개의 수 중에서 2개의 수를 택하는 경우의 수는

${}_5C_1\times{}_4C_2=5\times6=30$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$10+30=40$

13-1 답 ②

두 수의 합이 짝수가 되기 위해서는 두 수 모두 홀수이거나 두 수 모두 짝수이어야 한다.

(i) 두 수 모두 홀수인 경우

1, 3, 5, 7의 4개의 수가 적혀 있는 카드 중에서 2장을 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

(ii) 두 수 모두 짝수인 경우

2, 4, 6, 8의 4개의 수가 적혀 있는 카드 중에서 2장을 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6+6=12$

14 답 ③

특정한 공 1개를 먼저 뽑고 나머지 6개의 공 중에서 3개의 공을 택하는 경우의 수는

${}_6C_3=20$ $\quad\therefore a=20$

특정한 공 1개를 제외한 나머지 6개의 공 중에서 4개의 공을 택하는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$ $\quad\therefore b=15$

$\therefore a-b=20-15=5$

14-1 답 ①

빨간 공, 노란 공을 먼저 꺼내고 나머지 7개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_7C_3=35$ $\quad\therefore m=35$

빨간 공, 노란 공을 제외한 나머지 7개의 공 중에서 5개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_7C_5={}_7C_2=21$ $\quad\therefore n=21$

$\therefore m+n=35+21=56$

15 답 56

할아버지는 차에 타고, 천재는 차에 타지 않는 방법의 수는 할아버지와 천재를 제외한 가족 8명 중에서 3명을 택하는 방법의 수와 같으므로 ${}_8C_3=56$

15-1 답 ③

A는 초대하고 B, C는 초대하지 않는 경우의 수는 A, B, C를 제외한 친구 7명 중에서 4명을 택하는 방법의 수와 같으므로

${}_7C_4={}_7C_3=35$

16 답 ②

A, B는 반드시 포함하고 C, D, E, F는 포함하지 않는 경우의 수는 A, B, C, D, E, F를 제외한 9명의 야구 선수 중에서 7명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_9C_7={}_9C_2=36$

16-1 답 6

4, 5가 적혀 있는 카드는 뽑고 3의 배수, 즉 3, 6, 9가 적혀 있는 카드는 뽑지 않는 방법의 수는 3, 4, 5, 6, 9가 적혀 있는 카드를 제외한 4장의 카드 중에서 2장을 뽑는 방법의 수와 같으므로

${}_4C_2=6$

17 답 315

전체 11명 중에서 대표 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_{11}C_4=330$

여학생 6명 중에서 대표 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$330-15=315$

17-1 답 665

13개 중에서 4개를 고르는 방법의 수는

${}_{13}C_4=715$

사탕만 4개를 고르는 방법의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

아이스크림만 4개를 고르는 방법의 수는

${}_7C_4={}_7C_3=35$

따라서 구하는 방법의 수는

$715-(15+35)=665$

18 답 110

10장의 카드 중에서 3장을 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$

이때 카드에 적힌 세 수의 곱이 홀수인 경우는 세 수가 모두 홀수일 때 뿐이고, 1부터 10까지의 수 중 홀수는 5개이므로 세 수의 곱이 홀수인 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-10=110$

18-1 답 77

15개의 자연수 중에서 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_{15}C_2=105$ …… ❶

이때 선택된 두 수의 곱이 홀수인 경우는 두 수가 모두 홀수일 때뿐이고, 1부터 15까지의 수 중 홀수는 8개이므로 두 수의 곱이 홀수인 경우의 수는 ${}_8C_2=28$ …… ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$105-28=77$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ 15개의 자연수 중에서 2개를 선택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ 두 수의 곱이 홀수인 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❸ 두 수의 곱이 짝수가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	40%

19 답 3

11개 중에서 3개를 고르는 방법의 수는 ${}_{11}C_3=165$

빵의 개수를 $n(n\geq3)$이라 하면 빵만 고르는 방법의 수는 ${}_nC_3$

이때 과일이 적어도 한 개 포함되도록 고르는 방법의 수가 109이므로 $165-{}_nC_3=109$, ${}_nC_3=56$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=56$$

$n(n-1)(n-2)=336=8\times7\times6$

$\therefore n=8$

따라서 빵의 개수가 8이므로 과일의 개수는

$11-8=3$

> **참고** 빵의 개수가 3 미만이면 11개 중에서 3개를 고를 때 항상 과일이 적어도 한 개 포함되므로 과일이 적어도 한 개 포함되도록 3개를 고르는 방법의 수는 ${}_{11}C_3=165$
> 즉 주어진 조건에 맞지 않으므로 $n\geq3$

19-1 답 ②

10명 중에서 2명의 대표를 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}C_2=45$

남학생 수를 $n\ (n\geq2)$명이라 하면 2명의 대표가 모두 남학생인 경우의 수는 ${}_nC_2$

이때 적어도 한 명의 여학생이 뽑히는 경우의 수가 30이므로

$45-{}_nC_2=30$, ${}_nC_2=15$

$\frac{n(n-1)}{2\times1}=15$, $n(n-1)=30=6\times5$

$\therefore n=6$

따라서 남학생 수가 6명이므로 여학생 수는

$10-6=4$(명)

20 답 7200

연필 5개 중에서 3개를 뽑는 방법의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

지우개 4개 중에서 2개를 뽑는 방법의 수는

${}_4C_2=6$

5개를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 방법의 수는

$10\times6\times120=7200$

20-1 답 64800

가위 4개 중에서 2개를 뽑는 방법의 수는

${}_4C_2=6$

색종이 6개 중에서 4개를 뽑는 방법의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

6개를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$6!=720$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\times15\times720=64800$

21 답 180

A와 B는 뽑고 나머지 6명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

${}_6C_2=15$ ······①

A와 B를 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$3!=6$

이때 A와 B가 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

즉 A, B가 서로 이웃하도록 세우는 방법의 수는

$6\times2=12$ ······②

따라서 구하는 방법의 수는

$15\times12=180$ ······③

채점 기준	비율
① A, B는 뽑고 나머지 6명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
② A, B를 서로 이웃하도록 세우는 방법의 수를 구할 수 있다.	50%
③ A, B는 모두 포함되고 이들이 서로 이웃하도록 세우는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

21-1 답 756

민희, 영철, 승훈이를 뽑고 나머지 7명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

${}_7C_2=21$

민희, 영철, 승훈이를 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$3!=6$

이때 민희, 영철, 승훈이가 자리를 바꾸는 방법의 수는

$3!=6$

즉 민희, 영철, 승훈이가 서로 이웃하도록 세우는 방법의 수는

$6\times6=36$

따라서 구하는 방법의 수는

$21\times36=756$

22 답 720

E, I를 선택하고 나머지 5개 중에서 3개를 뽑는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

E, I를 제외한 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

이때 3개의 문자 사이사이 및 양 끝에 E, I를 배치하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

∨○∨○∨○∨

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times6\times12=720$

22-1 답 16800

회장, 부회장을 뽑고 나머지 7명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_7C_4={}_7C_3=35$

회장, 부회장을 제외한 4명을 일렬로 의자에 앉히는 경우의 수는

$4!=24$

이때 의자에 앉은 4명 사이사이 및 양 끝에 회장, 부회장을 앉히는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$

∨○∨○∨○∨○∨

따라서 구하는 경우의 수는

$35\times24\times20=16800$

23 답 15

6개의 점 중에서 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는

${}_6C_2=15$

23-1 답 ②

10개의 점 중에서 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는

${}_{10}C_2=45$

24 답 ④

구하는 다각형을 n각형이라 하면 대각선의 개수가 65이므로

${}_nC_2-n=65$, $\dfrac{n(n-1)}{2}-n=65$

$n^2-3n-130=0$, $(n+10)(n-13)=0$

$\therefore n=13\ (\because n\geq 3)$

따라서 구하는 다각형은 십삼각형이므로 십삼각형의 꼭짓점의 개수는 13이다.

24-1 답 23

볼록 m각형의 대각선의 개수가 54이므로

${}_mC_2-m=54$, $\dfrac{m(m-1)}{2}-m=54$

$m^2-3m-108=0$, $(m+9)(m-12)=0$

$\therefore m=12\ (\because m\geq 3)$ ……❶

볼록 n각형의 대각선의 개수가 44이므로 ${}_nC_2-n=44$

$\dfrac{n(n-1)}{2}-n=44$, $n^2-3n-88=0$

$(n+8)(n-11)=0$ $\quad\therefore n=11\ (\because n\geq 3)$ ……❷

$\therefore m+n=12+11=23$ ……❸

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	20%

25 답 22

전체 9개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_9C_2=36$

일직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

그런데 일직선 위에 있는 점들을 연결하여 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

$36-10-6+1+1=22$

25-1 답 19

8개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_8C_2=28$

일직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

그런데 일직선 위에 있는 점들을 이어서 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

$28-10+1=19$

26 답 ③

10개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$

일직선 위에 있는 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$2\times{}_4C_3+{}_5C_3=8+10=18$

그런데 일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$120-18=102$

26-1 답 ①

8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_8C_3=56$

일직선 위에 있는 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$4\times{}_3C_3=4$

그런데 일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$56-4=52$

27 답 48

8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_8C_3=56$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$2\times{}_4C_3=2\times 4=8$

그런데 일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$56-8=48$

27-1 답 80

9개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_9C_3=84$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_3=4$

그런데 일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

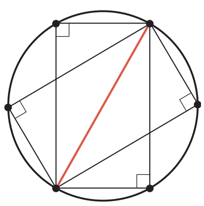
$84-4=80$

28 답 8

6개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_6C_3=20$ ……❶

주어진 점들을 연결하여 만들 수 있는 원의 지름은 3개이고 오른쪽 그림과 같이 원의 지름 1개에 대하여 4개의 직각삼각형을 만들 수 있으므로 직각삼각형의 개수는



$3\times 4=12$ ……❷

따라서 직각삼각형이 아닌 삼각형의 개수는

$20-12=8$ ……❸

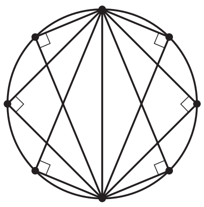
채점 기준	비율
❶ 6개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ 6개의 점 중에서 3개를 택하여 만들 수 있는 직각삼각형의 개수를 구할 수 있다.	50%
❸ 직각삼각형이 아닌 삼각형의 개수를 구할 수 있다.	20%

28-1 답 32

8개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_8C_3=56$

주어진 점들을 연결하여 만들 수 있는 원의 지름은 4개이고 오른쪽 그림과 같이 원의 지름 1개에 대하여 6개의 직각삼각형을 만들 수 있으므로 직각삼각형의 개수는



$4\times6=24$

따라서 직각삼각형이 아닌 삼각형의 개수는

$56-24=32$

29 답 18

가로 방향의 평행선 중에서 2개, 세로 방향의 평행선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는

${}_4C_2\times{}_3C_2=6\times3=18$

29-1 답 90

가로 방향의 평행선 중에서 2개, 세로 방향의 평행선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는

${}_4C_2\times{}_6C_2=6\times15=90$

30 답 60

직선 l 위의 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

직선 m 위의 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$10\times6=60$

30-1 답 225

위에 있는 직선 위의 6개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

아래에 있는 직선 위의 6개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$15\times15=225$

31 답 110

가로선 5개 중에서 2개를 택하고 세로선 6개 중에서 2개를 택하면 직사각형이 만들어지므로 그 개수는

${}_5C_2\times{}_6C_2=10\times15=150$

이때 작은 정사각형의 한 변의 길이를 1이라 하면 한 변의 길이가 1, 2, 3, 4인 정사각형의 개수는 각각 20, 12, 6, 2이므로 정사각형의 개수는 $20+12+6+2=40$

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

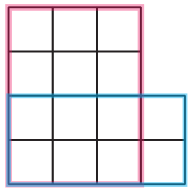
$150-40=110$

31-1 답 49

(ⅰ) 한 변의 길이가 1, 2, 3인 정사각형의 개수는 각각 14, 7, 2이므로 정사각형의 개수는

$14+7+2=23$

(ⅱ) 오른쪽 그림과 같이 붉은 선으로 묶인 부분에서 가로 방향의 직선 5개 중에서 2개, 세로 방향의 직선 4개 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 만들어지므로 이 부분에서 만들어지는 직사각형의 개수는



${}_5C_2\times{}_4C_2=10\times6=60$ ……㉠

같은 방법으로 파란 선으로 묶인 부분에서 만들어지는 직사각형의 개수는

${}_3C_2\times{}_5C_2=3\times10=30$ ……㉡

㉠, ㉡에서 공통으로 들어간 직사각형의 개수는

${}_3C_2\times{}_4C_2=3\times6=18$

(ⅰ), (ⅱ)에서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$60+30-18-23=49$

32 답 ②

서로 다른 펜 7개를 2개, 2개, 3개씩 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

${}_7C_2\times{}_5C_2\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=21\times10\times1\times\frac{1}{2}=105$

따라서 선물을 포장하는 경우의 수는 105이다.

32-1 답 70

남자 7명 중 1명이 여자 2명과 한 조를 이루면 되므로 남자 7명을 1명, 3명, 3명으로 나누면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

${}_7C_1\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=7\times20\times1\times\frac{1}{2}=70$

33 답 ②

9명의 학생들을 3명씩 3개의 조로 나누는 방법의 수는

${}_9C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{3!}=84\times20\times1\times\frac{1}{6}=280$

33-1 답 ⑤

8명의 학생들을 2명, 3명, 3명으로 나누는 방법의 수는

${}_8C_2\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=28\times20\times1\times\frac{1}{2}=280$

34 답 105

10명을 5명, 5명으로 나누는 방법의 수는

${}_{10}C_5\times{}_5C_5\times\frac{1}{2!}=252\times1\times\frac{1}{2}=126$

어린이만 포함된 조가 있도록 어린이 7명을 2명, 5명으로 나누는 방법의 수는

${}_7C_2\times{}_5C_5=21\times1=21$

따라서 구하는 방법의 수는

$126-21=105$

34-1 답 ③

서로 다른 색의 색연필 7개를 똑같은 모양의 필통 3개에 빈 필통이 없도록 나누어 넣을 때, 하나의 필통에는 색연필을 4개까지 넣을 수 있으므로 각 필통에 넣을 수 있는 색연필의 개수는

1, 2, 4 또는 1, 3, 3 또는 2, 2, 3

(ⅰ) 1개, 2개, 4개로 나누는 방법의 수는

${}_7C_1\times{}_6C_2\times{}_4C_4=7\times15\times1=105$

(ii) 1개, 3개, 3개로 나누는 방법의 수는

$_7C_1 \times {_6C_3} \times {_3C_3} \times \dfrac{1}{2!} = 7 \times 20 \times 1 \times \dfrac{1}{2} = 70$

(iii) 2개, 2개, 3개로 나누는 방법의 수는

$_7C_2 \times {_5C_2} \times {_3C_3} \times \dfrac{1}{2!} = 21 \times 10 \times 1 \times \dfrac{1}{2} = 105$

(i)~(iii)에서 구하는 방법의 수는

$105 + 70 + 105 = 280$

유형+ 완성하기

p. 289

35 답 1680

서로 다른 종류의 음료수 9개를 3개, 3개, 3개씩 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$_9C_3 \times {_6C_3} \times {_3C_3} \times \dfrac{1}{3!} = 84 \times 20 \times 1 \times \dfrac{1}{6} = 280$

이때 세 묶음으로 나누어진 음료수를 세 사람에게 나누어 주는 방법의 수는 $3!$이므로 구하는 방법의 수는

$280 \times 3! = 280 \times 6 = 1680$

36 답 ③

꽃 6송이를 2송이, 2송이, 2송이씩 세 묶음으로 나누는 방법의 수는

$_6C_2 \times {_4C_2} \times {_2C_2} \times \dfrac{1}{3!} = 15 \times 6 \times 1 \times \dfrac{1}{6} = 15$

이때 세 묶음으로 나누어진 꽃을 세 사람에게 나누어 주는 방법의 수는 $3! = 6$

$\therefore\ \alpha = 15 \times 6 = 90$

꽃 6송이를 3송이, 3송이씩 두 묶음으로 나누는 방법의 수는

$_6C_3 \times {_3C_3} \times \dfrac{1}{2!} = 20 \times 1 \times \dfrac{1}{2} = 10 \qquad \therefore\ \beta = 10$

$\therefore\ \alpha + \beta = 90 + 10 = 100$

37 답 540

6권의 책을 세 묶음으로 나눌 때, 적어도 한 권 이상 받아야 하므로 각 학생이 받을 수 있는 책의 권수는

1, 1, 4 또는 1, 2, 3 또는 2, 2, 2

(i) 1권, 1권, 4권으로 나누는 방법의 수는

$_6C_1 \times {_5C_1} \times {_4C_4} \times \dfrac{1}{2!} = 6 \times 5 \times 1 \times \dfrac{1}{2} = 15$

(ii) 1권, 2권, 3권으로 나누는 방법의 수는

$_6C_1 \times {_5C_2} \times {_3C_3} = 6 \times 10 \times 1 = 60$

(iii) 2권, 2권, 2권으로 나누는 방법의 수는

$_6C_2 \times {_4C_2} \times {_2C_2} \times \dfrac{1}{3!} = 15 \times 6 \times 1 \times \dfrac{1}{6} = 15$

(i)~(iii)에서 6권의 책을 세 묶음으로 나누는 방법의 수는

$15 + 60 + 15 = 90$ …… ❶

세 묶음을 세 학생에게 나누어 주는 방법의 수는

$3! = 6$ …… ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$90 \times 6 = 540$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ 6권의 책을 세 묶음으로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	60%
❷ 세 묶음을 세 학생에게 나누어 주는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%
❸ 6권의 책을 세 학생 모두 적어도 한 권 이상 받도록 나누어 주는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

38 답 45

6개의 팀을 4개, 2개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$_6C_4 \times {_2C_2} = 15 \times 1 = 15$

나누어진 4개의 팀을 2개, 2개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$_4C_2 \times {_2C_2} \times \dfrac{1}{2!} = 6 \times 1 \times \dfrac{1}{2} = 3$

따라서 구하는 방법의 수는

$15 \times 3 = 45$

39 답 90

6명을 3명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$_6C_3 \times {_3C_3} \times \dfrac{1}{2!} = 20 \times 1 \times \dfrac{1}{2} = 10$

나누어진 3명을 2명, 1명으로 나누는 방법의 수는

$_3C_2 \times {_1C_1} = 3 \times 1 = 3$

따라서 구하는 방법의 수는

$10 \times 3 \times 3 = 90$

40 답 315

8명을 4명, 4명으로 나누는 방법의 수는

$_8C_4 \times {_4C_4} \times \dfrac{1}{2!} = 70 \times 1 \times \dfrac{1}{2} = 35$

나누어진 4명을 2명, 2명으로 나누는 방법의 수는

$_4C_2 \times {_2C_2} \times \dfrac{1}{2!} = 6 \times 1 \times \dfrac{1}{2} = 3$

따라서 구하는 방법의 수는

$35 \times 3 \times 3 = 315$

학교 시험 대비 문제

p. 290~293

01 답 ③

$3({_nP_2} + {_nC_3}) = {_nP_3}$에서

$3\left\{n(n-1) + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}\right\} = n(n-1)(n-2)$

$n \geq 3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$3\left(1 + \dfrac{n-2}{6}\right) = n-2,\ 3 + \dfrac{n-2}{2} = n-2$

$6 + n - 2 = 2n - 4$

$\therefore\ n = 8$

02 답 3번

8개의 배구팀이 서로 한 번씩 경기를 하는 경우의 수는 8개의 팀 중에서 2개의 팀을 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_{8}C_{2}=28$

이때 각 팀이 다른 한 팀과 각각 n번씩 경기를 한다고 하면

$28n=84 \qquad \therefore n=3$

따라서 각 팀이 다른 한 팀과 3번씩 경기를 한다.

03 답 20

다섯 사람 중 2명이 자신의 명함을 갖는 경우의 수는

${}_{5}C_{2}=10$

그 각각의 경우에 대하여 나머지 3명이 다른 사람의 명함을 가지는 경우의 수는 2이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times2=20$

> **참고** 이 문제에서 나머지 3명 A, B, C의 명함을 차례로 a, b, c라 할 때, A, B, C 3명이 다른 사람의 명함을 가지는 경우는 다음과 같이 2가지이다.
>
> $A\rightarrow b$, $B\rightarrow c$, $C\rightarrow a$ 또는 $A\rightarrow c$, $B\rightarrow a$, $C\rightarrow b$

04 답 ⑤

소설책 5권 중에서 3권을 고르는 방법의 수는

${}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=10$

만화책 6권 중에서 3권을 고르는 방법의 수는

${}_{6}C_{3}=20$

시집 4권 중에서 3권을 고르는 방법의 수는

${}_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$

따라서 구하는 방법의 수는

$10+20+4=34$

05 답 ②

지수, 민주, 현우를 제외한 7명의 학생 중에서 4명을 뽑고 지수, 민주, 현우 중에서 1명을 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_{7}C_{4}\times{}_{3}C_{1}=35\times3=105$

06 답 ⑤

5켤레의 신발 중에서 1켤레의 신발을 택하는 경우의 수는

${}_{5}C_{1}=5$

1켤레를 제외한 나머지 4켤레의 신발 8짝 중에서 2짝을 택하는 경우의 수는

${}_{8}C_{2}=28$

이때 신발 4켤레 중에서 짝이 맞는 1켤레의 신발을 택하는 경우의 수는

${}_{4}C_{1}=4$

신발 8짝 중에서 짝이 맞지 않는 2짝을 택하는 경우의 수는

$28-4=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times24=120$

07 답 ③

승민이와 혜리가 두 조에 각각 들어가므로 구하는 경우의 수는 승민이와 혜리를 제외한 나머지 6명을 3명씩 두 조로 나누는 방법의 수와 같다.

승민이가 포함된 조의 선수 3명을 뽑는 방법의 수는

${}_{6}C_{3}=20$

혜리가가 포함된 조의 선수 3명을 뽑는 방법의 수는

${}_{3}C_{3}=1$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\times1=20$

08 답 ④

12장의 카드 중에서 3장의 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_{12}C_{3}=220$

1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 카드 중에서 짝수가 적혀 있는 카드는 6장이므로 3장 모두 짝수가 적혀 있는 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_{6}C_{3}=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$220-20=200$

09 답 350

(i) A팀에서 2명, B팀에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{6}C_{2}\times{}_{5}C_{3}=15\times10=150$

(ii) A팀에서 3명, B팀에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_{6}C_{3}\times{}_{5}C_{2}=20\times10=200$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$150+200=350$

> **참고** '적어도'라는 조건이 있어도 반대되는 경우를 이용하지 않는 것이 더 간단한 경우도 있다.

10 답 ③

9명의 학생 중에서 대표 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{9}C_{3}=84$

2학년 학생 수를 x라 하면 2학년 학생 x명 중에서 대표 3명을 뽑는 경우의 수가 ${}_{x}C_{3}$이므로

$84-{}_{x}C_{3}=74$, $84-\dfrac{x(x-1)(x-2)}{3\times2\times1}=74$

$\dfrac{x(x-1)(x-2)}{6}=10$, $x(x-1)(x-2)=60=5\times4\times3$

$\therefore x=5$

따라서 9명의 학생 중에서 2학년 학생이 5명이므로 1학년 학생 수는 4이다.

11 답 5040

A, B, C는 뽑고 나머지 7명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

${}_{7}C_{3}=35$

A, B, C를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$

이때 A, B, C가 자리를 바꾸는 방법의 수는

$3!=6$

즉 A, B, C가 서로 이웃하도록 세우는 방법의 수는
$24\times6=144$
따라서 구하는 방법의 수는
$35\times144=5040$

12 답 18
5는 반드시 포함하고 1은 포함하지 않도록 3개의 숫자를 택하는 방법의 수는 5와 1을 제외한 나머지 3개의 숫자 중에서 2개의 숫자를 택하는 방법의 수와 같으므로 ${}_3C_2=3$
택한 3개의 숫자로 세 자리 자연수를 만드는 방법의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는
$3\times6=18$

13 답 ②
30개의 점으로 만들 수 있는 직선의 개수는
${}_{30}C_2=435$
한 직선 위에 있는 n개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$
그런데 한 직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는
$435-\dfrac{n(n-1)}{2}+1=381,\ \dfrac{n(n-1)}{2}=55$
$n(n-1)=110=11\times10\qquad\therefore n=11$

14 답 ①
12개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는
${}_{12}C_3=220$
가로 방향의 일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는
$3\times{}_4C_3=3\times4=12$
세로 방향의 일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는
$4\times{}_3C_3=4\times1=4$
대각선 방향의 일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는
$4\times{}_3C_3=4\times1=4$
따라서 구하는 삼각형의 개수는
$220-12-4-4=200$

15 답 ④
가로 방향의 평행선 중에서 2개, 세로 방향의 평행선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는
${}_5C_2\times{}_7C_2=10\times21=210$

16 답 966
8개의 장난감을 똑같은 상자 3개에 빈 상자가 없도록 나누어 담을 때, 각 상자에 담을 수 있는 장난감의 개수는
1, 1, 6 또는 1, 2, 5 또는 1, 3, 4 또는 2, 2, 4 또는 2, 3, 3
(i) 1개, 1개, 6개로 나누는 방법의 수는
$${}_8C_1\times{}_7C_1\times{}_6C_6\times\frac{1}{2!}=8\times7\times1\times\frac{1}{2}=28$$
(ii) 1개, 2개, 5개로 나누는 방법의 수는
${}_8C_1\times{}_7C_2\times{}_5C_5=8\times21\times1=168$
(iii) 1개, 3개, 4개로 나누는 방법의 수는
${}_8C_1\times{}_7C_3\times{}_4C_4=8\times35\times1=280$
(iv) 2개, 2개, 4개로 나누는 방법의 수는
$${}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}=28\times15\times1\times\frac{1}{2}=210$$
(v) 2개, 3개, 3개로 나누는 방법의 수는
$${}_8C_2\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=28\times20\times1\times\frac{1}{2}=280$$
(i)~(v)에서 구하는 방법의 수는
$28+168+280+210+280=966$

17 답 ③
8개의 공을 빈 상자가 없도록 남김없이 넣고 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가야 하므로 8개의 공을 세 묶음으로 나누는 경우는
1개, 2개, 5개 또는 1개, 3개, 4개
(i) 1개, 2개, 5개로 나누어 넣는 경우
서로 다른 8개의 공을 1개, 2개, 5개로 나누는 방법의 수는
${}_8C_1\times{}_7C_2\times{}_5C_5=8\times21\times1=168$
이때 세 묶음으로 나누어진 공을 세 상자 A, B, C에 넣는 방법의 수는 $3!=6$이므로 구하는 방법의 수는
$168\times6=1008$
(ii) 1개, 3개, 4개로 나누어 넣는 경우
서로 다른 8개의 공을 1개, 3개, 4개로 나누는 방법의 수는
${}_8C_1\times{}_7C_3\times{}_4C_4=8\times35\times1=280$
이때 세 묶음으로 나누어진 공을 세 상자 A, B, C에 넣는 방법의 수는 $3!=6$이므로 구하는 방법의 수는
$280\times6=1680$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$1008+1680=2688$

18 답 60
(i) 4명의 1반 학생을 2명, 2명의 2개의 조로 나누는 방법의 수는
$${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=6\times1\times\frac{1}{2}=3$$
2개의 조를 두 개의 팀 A, B에 배정하는 방법의 수는 $2!=2$
즉 구하는 방법의 수는 $3\times2=6$
(ii) 5명의 2반 학생을 2명, 3명의 2개의 조로 나누는 방법의 수는
${}_5C_2\times{}_3C_3=10\times1=10$
조원이 2명인 조를 C팀에, 3명인 조를 D팀에 배정하는 방법의 수는 1
즉 구하는 방법의 수는 $10\times1=10$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$6\times10=60$

19 답 150
5개의 구슬을 세 묶음으로 나누는 경우는
1개, 1개, 3개 또는 1개, 2개, 2개
(i) 1개, 1개, 3개로 나누어 주는 경우
1개, 1개, 3개로 나누는 방법의 수는
$${}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=5\times4\times1\times\frac{1}{2}=10$$

이때 세 묶음으로 나누어진 구슬을 세 명의 학생에게 나누어 주는 방법의 수는 $3!=6$이므로 구하는 방법의 수는

$10\times6=60$

(ii) 1개, 2개, 2개로 나누어 주는 경우

1개, 2개, 2개로 나누는 방법의 수는

$_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=5\times6\times1\times\frac{1}{2}=15$

이때 세 묶음으로 나누어진 구슬을 세 명의 학생에게 나누어 주는 방법의 수는 $3!=6$이므로 구하는 방법의 수는

$15\times6=90$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$60+90=150$

20 답 ②

5명의 학생을 3명, 2명으로 나누는 방법의 수는

$_5C_3\times{}_2C_2=10\times1=10$

나누어진 3명의 학생을 1명, 2명으로 나누는 방법의 수는

$_3C_1\times{}_2C_2=3\times1=3$

따라서 구하는 방법의 수는

$10\times3=30$

21 답 ①

7개의 팀을 4개, 3개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$_7C_4\times{}_3C_3=35\times1=35$

나누어진 4개의 팀을 2개, 2개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=6\times1\times\frac{1}{2}=3$

나누어진 3개의 팀을 2개, 1개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$_3C_2\times{}_1C_1=3\times1=3$

따라서 구하는 방법의 수는

$35\times3\times3=315$

서술형 1 답 4

(i) A, B가 바이킹을 타는 경우

A, B를 제외한 6명 중에서 3명이 바이킹을 타는 경우의 수와 같으므로

$_6C_3=20\qquad\therefore p=20$ ······❶

(ii) A, B가 회전목마를 타는 경우

A, B를 제외한 6명 중에서 1명이 회전목마를 타는 경우의 수와 같으므로

$_6C_1=6\qquad\therefore q=6$ ······❷

(iii) A, B 중 한 사람만 바이킹을 타는 경우

A는 바이킹을 타고 B는 바이킹을 타지 않는 경우의 수는 A, B를 제외한 6명 중에서 4명이 바이킹을 타는 경우의 수와 같으므로

$_6C_4={}_6C_2=15$

같은 방법으로 A는 바이킹을 타지 않고 B는 바이킹을 타는 경우의 수도 15이다. $\quad\therefore r=15+15=30$ ······❸

(i)~(iii)에서

$r-p-q=30-20-6=4$ ······❹

채점 기준	비율
❶ p의 값을 구할 수 있다.	25%
❷ q의 값을 구할 수 있다.	25%
❸ r의 값을 구할 수 있다.	40%
❹ $r-p-q$의 값을 구할 수 있다.	10%

서술형 2 답 310

학생 11명 중에서 대표 4명을 뽑는 경우의 수는

$_{11}C_4=330$ ······❶

대표 4명이 모두 남학생인 경우의 수는 남학생 5명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$_5C_4={}_5C_1=5$ ······❷

대표 4명이 모두 여학생인 경우의 수는 여학생 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$_6C_4={}_6C_2=15$ ······❸

따라서 구하는 경우의 수는

$330-5-15=310$ ······❹

채점 기준	비율
❶ 학생 11명 중에서 대표 4명을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ 대표 4명이 모두 남학생인 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❸ 대표 4명이 모두 여학생인 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❹ 4명을 뽑을 때, 남학생과 여학생이 각각 적어도 1명씩 포함되는 경우의 수를 구할 수 있다.	10%

서술형 3 답 231

(i) 직선의 개수

12개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_{12}C_2=66$

일직선 위에 있는 7개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_7C_2=21$

이때 일직선 위의 점으로 만들 수 있는 직선은 1개이므로 구하는 직선의 개수 m은

$m=66-21+1=46$ ······❶

(ii) 삼각형의 개수

12개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_{12}C_3=220$

일직선 위에 있는 7개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_7C_3=35$

이때 일직선 위의 점으로 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수 n은

$n=220-35=185$ ······❷

(i), (ii)에서 $m+n=46+185=231$ ······❸

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	20%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 294~295

01 답 ③

철수를 포함하여 4명을 뽑는 경우의 수 a의 값은

$a={}_9C_3$

철수를 포함하지 않고 4명을 뽑는 경우의 수 b의 값은

$b={}_9C_4$

$\therefore a+b={}_9C_3+{}_9C_4$

$$=\frac{9!}{3!6!}+\frac{9!}{4!5!}$$
$$=\frac{9!\times4}{4!6!}+\frac{9!\times6}{4!6!}$$
$$=\frac{9!}{4!6!}(4+6)$$
$$=\frac{10!}{4!6!}$$
$$={}_{10}C_4$$

02 답 ④

3개의 가로줄 중에서 2개의 가로줄을 선택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

선택한 2개의 가로줄 중에서 한 가로줄에서 1개의 숫자를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

㈏에서 나머지 한 가로줄에서 이미 선택한 숫자와 다른 세로줄에 있는 1개의 숫자를 선택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times3\times2=18$

03 답 ⑤

자연수의 첫째 자리의 숫자는 0이 될 수 없으므로 1이다.

6개의 숫자 1을 일렬로 나열하는 방법의 수는 1이다.

1 □1 □1 □1 □1 □1 □

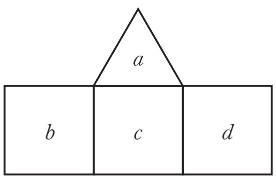
이때 첫째 자리의 숫자 1을 제외한 나머지 5개의 1의 좌우 6개의 □에 3개의 0을 넣으면 0끼리는 어느 것도 이웃하지 않는 아홉 자리의 자연수를 만들 수 있다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

${}_6C_3=20$

04 답 130

오른쪽 그림과 같이 정삼각형에 적힌 수를 a, 정사각형에 적힌 수를 왼쪽부터 차례로 b, c, d라 하자.



㈎에서 $a>b$, $a>c$, $a>d$

㈏에서 $b\neq c$, $c\neq d$

(i) $b\neq d$인 경우

a, b, c, d는 서로 다르므로 6 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_4={}_6C_2=15$

이 각각에 대하여 택한 4개의 수 중에서 가장 큰 수를 a라 하고, 나머지 3개의 수를 b, c, d로 정하면 되므로 이때의 경우의 수는 $1\times3!=6$

즉 $b\neq d$인 경우의 수는 $15\times6=90$

(ii) $b=d$인 경우

$a>b=d$, $a>c$이므로 a, b, c, d 중 서로 다른 수의 개수는 3이다.

6 이하의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 수를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_3=20$

이 각각에 대하여 택한 3개의 수 중에서 가장 큰 수를 a라 하고, 나머지 2개의 수를 $b(=d)$, c로 정하면 되므로 이때의 경우의 수는 $1\times2!=2$

즉 $b=d$인 경우의 수는 $20\times2=40$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$90+40=130$

05 답 80

5개 학교 중 3개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

이때 같은 학교의 학생이 동시에 선택되지 않아야 하므로 뽑은 3개의 학교에서 각각 1명씩 선택하면 된다.

2명 중에서 1명을 택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times2\times2\times2=80$

06 답 16

서로 다른 네 종류의 인형이 각각 2개씩 있으므로 5개의 인형을 선택하려면 세 종류 이상의 인형을 선택해야 한다.

(i) 서로 다른 세 종류의 인형을 각각 1개, 2개, 2개 선택하는 경우

서로 다른 네 종류의 인형 중에서 세 종류의 인형을 선택하는 경우의 수는

${}_4C_3=4$

위의 각 경우에 대하여 세 종류의 인형 중에서 1개를 선택하는 인형의 종류를 정하면 남은 두 종류의 인형은 각각 2개씩 선택하면 되므로 이때의 경우의 수는

${}_3C_1=3$

즉 서로 다른 세 종류의 인형을 1개, 1개, 2개 선택하는 경우의 수는

$4\times3=12$

(ii) 서로 다른 네 종류의 인형을 각각 1개, 1개, 1개, 2개 선택하는 경우

서로 다른 네 종류의 인형 중에서 2개를 선택하는 인형의 종류를 정하면 남은 세 종류의 인형은 각각 1개씩 선택하면 되므로 이때의 경우의 수는

${}_4C_1=4$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$12+4=16$

07 답 ②

다음 그림과 같이 의자의 위치와 좌석 번호를 나타내고 각 가로줄을 1열, 2열이라 하자.

1열 →	11	12	13	14	15	16	17
2열 →			23	24	25		

㈎에 의하여 A는 좌석 번호가 24 또는 25인 의자에 앉을 수 있고, B는 좌석 번호가 11 또는 12 또는 13 또는 14인 의자에 앉을 수 있다.

또 ㈏, ㈐에 의하여 어느 두 학생도 양옆 또는 앞뒤로 이웃하게 앉지 않는다.

5명의 학생이 앉을 수 있는 5개의 의자를 선택한 후 ㈎에 의해 A, B가 앉고 남은 3개의 의자에 나머지 3명의 학생이 앉는 것으로 경우의 수를 구할 수 있다.

(ⅰ) A가 좌석 번호가 24인 의자에 앉을 때

11	12	13	14	15	16	17
		23	A	25		

A가 좌석 번호가 24인 의자에 앉으면 나머지 4명의 학생은 ㈏, ㈐에 의하여 좌석 번호가 11, 13, 15, 17인 의자에 각각 한 명씩 앉아야 한다.

이때 B는 ㈎에 의하여 좌석 번호가 11, 13인 2개의 의자 중 1개의 의자에 앉아야 하므로 B가 의자를 선택하여 앉는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

위의 각 경우에 대하여 A, B를 제외한 3명의 학생이 나머지 3개의 의자에 앉는 경우의 수는

$3!=6$

즉 이때의 경우의 수는

$2\times6=12$

(ⅱ) A가 좌석 번호가 25인 의자에 앉을 때

11	12	13	14	15	16	17
		23	24	A		

A가 좌석 번호가 25인 의자에 앉으면 나머지 4명의 학생은 ㈏, ㈐에 의하여 좌석 번호가 11 또는 12인 의자 중 하나, 좌석 번호가 16 또는 17인 의자 중 하나, 좌석 번호가 14인 의자, 좌석 번호가 23인 의자에 각각 한 명씩 앉아야 한다.

좌석 번호가 11 또는 12인 의자 중 하나를 선택하고(㉠) 좌석 번호가 16 또는 17인 의자 중 하나를 선택하는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_2C_1=4$

위의 각 경우에 대하여 B는 ㈎에 의하여 ㉠에서 선택된 의자와 좌석 번호가 14인 의자 중 1개의 의자에 앉아야 하므로 B가 의자를 선택하여 앉는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

위의 각 경우에 대하여 A, B를 제외한 3명의 학생이 나머지 3개의 의자에 앉는 경우의 수는

$3!=6$

즉 이때의 경우의 수는

$4\times2\times6=48$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$12+48=60$

08 답 960

(ⅰ) 1명의 학생이 초콜릿 2개를 받는 경우

초콜릿 2개를 받는 학생을 정하는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

초콜릿을 받은 학생을 제외한 나머지 4명의 학생에게 꽃을 각각 한 송이씩 나누어 주는 경우의 수는

$4!=24$

즉 1명의 학생이 초콜릿 2개를 받는 경우의 수는

$5\times24=120$

(ⅱ) 1명의 학생이 꽃 2송이를 받는 경우

4송이의 꽃 중에서 2송이의 꽃을 고르는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

2송이의 꽃을 받는 학생을 정하는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

남은 두 송이의 꽃을 받는 학생을 정하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

이때 꽃을 받지 못한 2명의 학생에게 초콜릿을 각각 1개씩 주는 경우의 수가 1이므로 1명의 학생이 꽃 2송이를 받는 경우의 수는

$6\times5\times12\times1=360$

(ⅲ) 1명의 학생이 꽃 1송이와 초콜릿 1개를 받는 경우

4송이의 꽃을 4명의 학생에게 각각 1송이씩 주는 경우의 수는

${}_5P_4=120$

꽃을 받지 못한 학생에게 초콜릿 1개를 주고 꽃을 받은 학생 중 1명을 택해 남은 초콜릿 1개를 주는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

즉 1명의 학생이 꽃 1송이와 초콜릿 1개를 받는 경우의 수는

$120\times4=480$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$120+360+480=960$

13 행렬과 그 연산

Ⅳ 행렬

개념 완성하기 p. 299~300

01 답 1×2 행렬

02 답 2×1 행렬

03 답 1×3 행렬

04 답 3×1 행렬

05 답 2×2 행렬

06 답 2×3 행렬

07 답 3×2 행렬

08 답 3×3 행렬

09 답 3×4 행렬

10 답 4×3 행렬

11 답 $(1, 2)$ 성분: 7, $(2, 2)$ 성분: -3

12 답 -1

$a_{11}=2$, $a_{21}=0$, $a_{22}=-3$이므로

$a_{11}+a_{21}+a_{22}=2+0+(-3)=-1$

13 답 $(2, 3)$ 성분: 3, $(3, 1)$ 성분: -2

14 답 2

$a_{12}=4$, $a_{23}=3$, $a_{33}=-5$이므로

$a_{12}+a_{23}+a_{33}=4+3+(-5)=2$

15 답 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$a_{11}=1+1-1=1$, $a_{12}=1+2-1=2$, $a_{13}=1+3-1=3$

$a_{21}=2+1-1=2$, $a_{22}=2+2-1=3$, $a_{23}=2+3-1=4$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

16 답 $x=-3$, $y=9$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x+1=-2$, $y-5=4$

두 식을 풀면

$x=-3$, $y=9$

17 답 $x=0$, $y=-1$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x-2y=2$, $x+y=-1$

두 식을 연립하여 풀면

$x=0$, $y=-1$

18 답 $x=1$, $y=2$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=3$, $x-2y=-3$

두 식을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=2$

19 답 $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-1 \\ 2+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

20 답 $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6+3 & 5+2 \\ 2-5 & -1+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

21 답 $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3+2 & -4+4 & 6-3 \\ 2-1 & 2+6 & -5+2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

22 답 $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & 5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+2 & 3-2 \\ -3-5 & 1+4 \\ -5+1 & 9-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & 5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

23 답 $(-1 \quad 1 \quad 7)$

$$(4 \quad 1 \quad 6)-(5 \quad 0 \quad -1)=(4-5 \quad 1-0 \quad 6+1)$$

$$=(-1 \quad 1 \quad 7)$$

24 답 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 14 & -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+1 & 8-6 \\ 5+9 & -2-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 14 & -6 \end{pmatrix}$$

25 답 $\begin{pmatrix} -1 & -5 & 6 \\ 9 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -9 & 3 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5-6 & -2-3 & 7-1 \\ 0+9 & 3-3 & 0-6 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -5 & 6 \\ 9 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

26 답 $\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -3 & 9 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -6 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4-3 & 1+3 \\ -2-1 & 3+6 \\ 6-8 & -6-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -3 & 9 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

27 답 $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$

$$2\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times3 & 2\times0 \\ 2\times(-2) & 2\times5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$$

28 답 $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 9 & -18 \end{pmatrix}$

$$-3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3\times1 & -3\times(-2) \\ -3\times(-3) & -3\times6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 9 & -18 \end{pmatrix}$$

29 답 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\times4 & \frac{1}{2}\times(-2) \\ \frac{1}{2}\times8 & \frac{1}{2}\times(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

30 답 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\times3 & \frac{1}{3}\times9 \\ \frac{1}{3}\times3 & \frac{1}{3}\times(-6) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

31 답 $\begin{pmatrix} -12 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$

$$-A=-\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$$

32 답 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{4}A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\times12 & \frac{1}{4}\times(-4) \\ \frac{1}{4}\times4 & \frac{1}{4}\times8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

33 답 $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$2A-(A+B)=A-B=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-1 & -3-3 \\ 2-0 & 1-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

34 답 $\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$

$2(X-A)=X-3B$에서

$$X=2A-3B$$
$$=2\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2\times4-3\times1 & 2\times3-3\times6 \\ 2\times0-3\times(-4) & 2\times5-3\times0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$$

유형 완성하기

p.301~306

01 답 22

$a_{11}=1\times1=1$, $a_{12}=1-2\times2=-3$, $a_{13}=1-2\times3=-5$

$a_{21}=2\times2+1=5$, $a_{22}=2\times2=4$, $a_{23}=2-2\times3=-4$

$a_{31}=2\times3+1=7$, $a_{32}=2\times3+2=8$, $a_{33}=3\times3=9$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 5 & 4 & -4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$1+(-3)+(-5)+5+4+(-4)+7+8+9=22$

01-1 답 14

$a_{11}=1+1=2$, $a_{12}=1^2=1$, $a_{13}=1^2=1$

$a_{21}=2-3\times1=-1$, $a_{22}=2+2=4$, $a_{23}=2^2=4$

$a_{31}=3-3\times1=0$, $a_{32}=3-3\times2=-3$, $a_{33}=3+3=6$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$2+1+1+(-1)+4+4+0+(-3)+6=14$

02 답 ⑤

$a_{11}=1^2+1+1=3$, $a_{12}=1^2+2+1=4$, $a_{13}=1^2+3+1=5$

$a_{21}=2^2+1+1=6$, $a_{22}=2^2+2+1=7$, $a_{23}=2^2+3+1=8$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

02-1 답 ③

$a_{11}=2\times1-1^2+1=2$, $a_{12}=2\times1-2^2+1=-1$

$a_{13}=2\times1-3^2+1=-6$, $a_{21}=2\times2-1^2+1=4$

$a_{22}=2\times2-2^2+1=1$, $a_{23}=2\times2-3^2+1=-4$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

03 답 18

$a_{31}=2\times3+1-1=6$ $\quad\therefore x=6$

$a_{22}=2\times2+2-1=5$ $\quad\therefore y=5$

$a_{32}=2\times3+2-1=7$ $\quad\therefore z=7$

$\therefore x+y+z=6+5+7=18$

03-1 답 8

$a_{11}=1^2+1\times1-1=1 \qquad \therefore x=1$

$a_{12}=1^2+1\times2-1=2 \qquad \therefore y=2$

$a_{21}=2^2+2\times1-1=5 \qquad \therefore z=5$

$\therefore x+y+z=1+2+5=8$

04 답 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

주어진 그림에서

$a_{11}=1,\ a_{12}=1,\ a_{13}=2$

$a_{21}=0,\ a_{22}=0,\ a_{23}=2$

$a_{31}=2,\ a_{32}=1,\ a_{33}=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

04-1 답 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

주어진 그림에서

$a_{11}=0,\ a_{12}=1,\ a_{13}=2$

$a_{21}=1,\ a_{22}=1,\ a_{23}=0$

$a_{31}=0,\ a_{32}=1,\ a_{33}=1$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

05 답 ③

$a_{11}=1,\ a_{12}=0\ a_{13}=0$

$a_{21}=1,\ a_{22}=0,\ a_{23}=2$

$a_{31}=1,\ a_{32}=0,\ a_{33}=1$

따라서 세 지점 1, 2, 3의 통신망의 연결 상태를 바르게 나타낸 것은 ③이다.

05-1 답 ②

$a_{11}=0,\ a_{12}=2\ a_{13}=0$

$a_{21}=0,\ a_{22}=0,\ a_{23}=2$

$a_{31}=1,\ a_{32}=0,\ a_{33}=0$

따라서 세 지점 1, 2, 3의 통신망의 연결 상태를 바르게 나타낸 것은 ②이다.

06 답 4

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{cases} x^2=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ -3=xy & \cdots\cdots ㉡ \\ -2=x+y & \cdots\cdots ㉢ \\ y^2=9 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

㉠에서 $x=1$ 또는 $x=-1$

㉣에서 $y=3$ 또는 $y=-3$

㉡에서 $x=1,\ y=-3$ 또는 $x=-1,\ y=3$

(i) $x=1,\ y=-3$을 ㉢에 대입하면 $-2=1-3$

(ii) $x=-1,\ y=3$을 ㉢에 대입하면 $-2\neq-1+3$

(i), (ii)에서 $x=1,\ y=-3$이므로

$x-y=1-(-3)=4$

06-1 답 ①

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{cases} x^2=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ -8=xy & \cdots\cdots ㉡ \\ -2=x+y & \cdots\cdots ㉢ \\ y^2=16 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

㉠에서 $x=2$ 또는 $x=-2$

㉣에서 $y=4$ 또는 $y=-4$

㉡에서 $x=2,\ y=-4$ 또는 $x=-2,\ y=4$

(i) $x=2,\ y=-4$를 ㉢에 대입하면 $-2=2-4$

(ii) $x=-2,\ y=4$를 ㉢에 대입하면 $-2\neq-2+4$

(i), (ii)에서 $x=2,\ y=-4$이므로

$x-y=2-(-4)=6$

07 답 33

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$4=xy,\ x-y=5$

$\therefore x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=5^2+2\times4=33$

07-1 답 12

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2=xy,\ x+y=4$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4^2-2\times2=12$

08 답 $\frac{9}{2}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$\cos\theta=\sin\theta,\ 2=y,\ -\sin\theta=x$

$\cos\theta=\sin\theta$에서 $\theta=45^\circ$ ($\because 0^\circ<\theta<90^\circ$)이므로

$x=-\sin\theta=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore x^2+y^2=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2^2=\frac{9}{2}$

08-1 답 10

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-\sin\theta=-\cos\theta,\ 3=x,\ \cos\theta=y$

$-\sin\theta=-\cos\theta$, 즉 $\sin\theta=\cos\theta$에서

$\theta=45^\circ$ ($\because 0^\circ<\theta<90^\circ$)이므로

$y=\cos\theta=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore x^2+2y^2=3^2+2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=10$

09 답 ③

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$xy+yz+zx=x^2+y^2+z^2,\ xyz=8$

$xy+yz+zx=x^2+y^2+z^2$이면

$x=y=z$이므로

$xyz=x^3=8 \qquad \therefore x=2$ ($\because x$는 실수)

$\therefore x+y+z=2+2+2=6$

참고 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

에서 $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$이면

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$

이때 x, y, z가 실수이므로

$x=y=z$

09-1 답 9

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$xy+yz+zx=x^2+y^2+z^2$, $xyz=27$

$xy+yz+zx=x^2+y^2+z^2$이면

$x=y=z$이므로

$xyz=x^3=27$ $\quad\therefore x=3$ ($\because x$는 실수)

$\therefore x+y+z=3+3+3=9$

10 답 6

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{cases} xy=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ yz=3 & \cdots\cdots ㉡ \\ zx=6 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 곱하면

$(xyz)^2=2\times3\times6=36$

$\therefore xyz=6$ ($\because xyz>0$) $\cdots\cdots$ ㉣

㉣÷㉠을 하면 $z=3$

㉣÷㉡을 하면 $x=2$

㉣÷㉢을 하면 $y=1$

$\therefore x+y+z=2+1+3=6$

10-1 답 7

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{cases} xy=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ yz=4 & \cdots\cdots ㉡ \\ zx=8 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 곱하면

$(xyz)^2=2\times4\times8=64$

$\therefore xyz=8$ ($\because xyz>0$) $\cdots\cdots$ ㉣

㉣÷㉠을 하면 $z=4$

㉣÷㉡을 하면 $x=2$

㉣÷㉢을 하면 $y=1$

$\therefore x+y+z=2+1+4=7$

11 답 0

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{cases} a+b=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ b+c=2 & \cdots\cdots ㉡ \\ c+a=-1 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 더하면

$2(a+b+c)=2$ $\quad\therefore a+b+c=1$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉣−㉠을 하면 $c=0$

㉣−㉡을 하면 $a=-1$

㉣−㉢을 하면 $b=2$

$\therefore abc=-1\times2\times0=0$

11-1 답 6

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{cases} a+b=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ b+c=4 & \cdots\cdots ㉡ \\ c+a=5 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 더하면

$2(a+b+c)=12$ $\quad\therefore a+b+c=6$ $\cdots\cdots$ ㉣ $\cdots\cdots$ ❶

㉣−㉠을 하면 $c=3$

㉣−㉡을 하면 $a=2$

㉣−㉢을 하면 $b=1$ $\cdots\cdots$ ❷

$\therefore abc=2\times1\times3=6$ $\cdots\cdots$ ❸

채점 기준	비율
❶ 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	10%

12 답 $a=3, b=-1, c=-1$

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ c & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-1 & 5 \\ b+c & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b & 4 \\ 2 & a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & c \\ 4 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b+3 & 4-c \\ -2 & a+7 \end{pmatrix}$$

이므로 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{cases} a-1=b+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5=4-c & \cdots\cdots ㉡ \\ b+c=-2 & \cdots\cdots ㉢ \\ 10=a+7 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

㉡, ㉣에서 $c=-1$, $a=3$

$c=-1$을 ㉢에 대입하면

$b-1=-2$ $\quad\therefore b=-1$

$\therefore a=3, b=-1, c=-1$

12-1 답 $a=1, b=-3, c=0$

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ c & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+3 & -2 \\ b+c & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b & -2 \\ 2 & a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -7 & c \\ 5 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b+7 & -2-c \\ -3 & a+6 \end{pmatrix}$$

이므로 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{cases} a+3=b+7 & \cdots\cdots ㉠ \\ -2=-2-c & \cdots\cdots ㉡ \\ b+c=-3 & \cdots\cdots ㉢ \\ 7=a+6 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

㉡, ㉣에서 $c=0$, $a=1$

$c=0$을 ㉢에 대입하면

$b+0=-3$ $\quad\therefore b=-3$

$\therefore a=1, b=-3, c=0$

13 답 $a=4, b=-2$

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & b \\ 4 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & a+b \\ 4 & a+1 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=2$, $a+1=5$

$\therefore a=4, b=-2$

13-1 답 -4

$A-B=\begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & b \\ 4 & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & a-b \\ -4 & a+1 \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a-b=6,\ a+1=2$

$\therefore a=1,\ b=-5$

$\therefore a+b=1+(-5)=-4$

14 답 ②

$$\begin{aligned}2(A+B)-(A-B)&=A+3B\\&=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 주어진 행렬의 모든 성분의 합은

$-3+7+(-2)+(-7)=-5$

14-1 답 ④

$$\begin{aligned}4(A-2B)-3(A-3B)&=A+B\\&=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 주어진 행렬의 모든 성분의 합은

$5+2+5+(-1)=11$

15 답 $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$X-(A-B)=A+2B-2X$에서

$$\begin{aligned}3X&=2A+B\\&=2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\therefore X=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

15-1 답 $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$X-(A+2B)=A-3B-3X$에서

$$\begin{aligned}4X=2A-B&=2\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\therefore X=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

16 답 ④

$X+B=A$에서

$X=A-B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 $(2,\ 1)$ 성분은 4이다.

16-1 답 ③

$X+B=A$에서

$$\begin{aligned}X&=A-B\\&=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 행렬 X의 $(1,\ 2)$ 성분은 1이다.

17 답 ⑤

$3\{X-(A-2B)\}=X+A-4B$에서

$$\begin{aligned}X&=2A-5B\\&=2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}-5\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & -20 \\ -5 & 25 \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 11 & -23 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$-7+24+11+(-23)=5$

17-1 답 11

$2(X+2A-3B)=X+A-B$에서

$$\begin{aligned}X&=-3A+5B\\&=-3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$-8+4+3+12=11$

유형+ 완성하기 p. 307

18 답 4

$2A+B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ······㉠

$A-2B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ ······㉡

$2\times$㉠$+$㉡을 하면

$5A=2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

㉠$-2\times$㉡을 하면

$5B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}$

$\therefore B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\therefore A-B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A-B$의 모든 성분의 합은

$2+(-1)+(-1)+4=4$

19 답 5

$\begin{cases} X+2Y=A & \cdots\cdots ㉠ \\ 2X+3Y=B & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$2\times$㉡$-3\times$㉠을 하면

$X=2B-3A=2\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$2\times$㉠$-$㉡을 하면

$Y=2A-B=2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 $(1, 2)$ 성분은 6, 행렬 Y의 $(2, 2)$ 성분은 -1이므로 그 합은

$6+(-1)=5$

20 답 11

$2X+Y=\begin{pmatrix} 1 & k \\ 4 & -k \end{pmatrix}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$X-2Y=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$3X-Y=\begin{pmatrix} 1 & k \\ 4 & -k \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} k & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k+1 & k+1 \\ 6 & a-k \end{pmatrix}$

이때 행렬 $3X-Y$의 모든 성분이 서로 같아야 하므로

$k+1=6 \qquad \therefore k=5$

$k=5$를 $a-k=6$에 대입하면

$a-5=6 \qquad \therefore a=11$

21 답 5

$pA+qB=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$에서

$p\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}+q\begin{pmatrix} 4 & k \\ 4 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -p+4q & p+kq \\ 2p+4q & 6q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-p+4q=2,\ p+kq=1,\ 2p+4q=0,\ 6q=2$

$\therefore p=-\frac{2}{3},\ q=\frac{1}{3}$

$p=-\frac{2}{3},\ q=\frac{1}{3}$을 $p+kq=1$에 대입하면

$-\frac{2}{3}+k\times\frac{1}{3}=1 \qquad \therefore k=5$

22 답 4

$xA+yB=\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$에서

$x\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+y^2=4,\ 2xy=12$

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=4+12=16$

$\therefore x+y=4\ (\because x, y$는 양수$)$

23 답 13

$xA+yB=C$에서

$x\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & a \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2x+4y & 3x+3y \\ 3x+2y & 5x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & a \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x+4y=-2,\ 3x+3y=3,\ 3x+2y=5,\ 5x+y=a$

$\therefore x=3,\ y=-2$

$x=3,\ y=-2$를 $5x+y=a$에 대입하면

$5\times3-2=a \qquad \therefore a=13$

학교 시험 대비 문제

p. 308~311

01 답 3

$a_{12}=1\times2-2=0$

$a_{22}=2\times2-2=2$

$a_{31}=3\times1-2=1$

$\therefore a_{12}+a_{22}+a_{31}=0+2+1=3$

02 답 ⑤

① 3×2 행렬이다.

② $(2, 1)$ 성분은 -4이다.

③ $a_{12}=3,\ a_{31}=2$이므로 $a_{12}+a_{31}=3+2=5$

④ $i=j$인 성분은 $a_{11},\ a_{22}$이므로 모든 성분의 합은
$a_{11}+a_{22}=1+2=3$

⑤ $i+j=3$을 만족시키는 성분은 $a_{12},\ a_{21}$이므로 모든 성분의 곱은
$a_{12}\times a_{21}=3\times(-4)=-12$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

03 답 13

$a_{21}=2\times2-1=3$

$a_{22}=2^2+1=5$

$a_{23}=a_{32}=2\times3-1=5$

따라서 행렬 A의 제2행의 모든 성분의 합은

$3+5+5=13$

04 답 $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$a_{11}=2,\ a_{12}=2,\ a_{21}=1,\ a_{22}=1$이므로 구하는 행렬은

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

05 답 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$i=j$일 때, $a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$

$i \neq j$일 때

$a_{12}=a_{21}=1$

$a_{13}=a_{31}=2$

$a_{23}=a_{32}=3$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

06 답 ④

이차함수 $y=x^2-2(i+2j)x+16$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수는 이차방정식 $x^2-2(i+2j)x+16=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

이차방정식 $x^2-2(i+2j)x+16=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(i+2j)^2-16$

$i=1, j=1$일 때, $\frac{D}{4}=(1+2)^2-16=-7<0$이므로 $a_{11}=0$

$i=1, j=2$일 때, $\frac{D}{4}=(1+4)^2-16=9>0$이므로 $a_{12}=2$

$i=2, j=1$일 때, $\frac{D}{4}=(2+2)^2-16=0$이므로 $a_{21}=1$

$i=2, j=2$일 때, $\frac{D}{4}=(2+4)^2-16=20>0$이므로 $a_{22}=2$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

07 답 ③

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x+2y=y+3, 2=2x+y$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1, y=4$

$\therefore x^2+y^2=(-1)^2+4^2=17$

08 답 ⑤

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=3, x^3+y^3=9$

이때 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$이므로

$9=3^3-3xy\times 3, 9xy=18 \qquad \therefore xy=2$

09 답 -2

$a_{ij}=pi+qj$에서

$a_{11}=p+q, a_{12}=p+2q, a_{21}=2p+q, a_{22}=2p+2q$

$\therefore A=\begin{pmatrix} p+q & p+2q \\ 2p+q & 2p+2q \end{pmatrix}$

$b_{ij}=\begin{cases} (-1)^i-j & (i \neq j) \\ -i & (i=j) \end{cases}$에서

$b_{11}=-1, b_{12}=(-1)^1-2=-3, b_{21}=(-1)^2-1=0, b_{22}=-2$

$\therefore B=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$p+q=-1, 2p+q=0$

두 식을 연립하여 풀면 $p=1, q=-2$

$\therefore pq=1\times(-2)=-2$

10 답 ③

$A+2B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A+2B$의 모든 성분의 합은

$4+2+4+3=13$

11 답 ⑤

$2A+B=2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & a \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & a+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

따라서 $a+2=7$이므로 $a=5$

12 답 ②

$3(A+2B)-2(A-B)=A+8B$

$=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+8\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 17 & 35 \\ 39 & -22 \end{pmatrix}$

따라서 주어진 행렬의 모든 성분의 합은

$17+35+39+(-22)=69$

13 답 ③

$X+B=A$에서

$X=A-B$

$=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -7 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 $(1, 3)$ 성분은 0이다.

14 답 ②

$A+X=3B+2X$에서

$X=A-3B$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$

15 답 43

$2\{X-(3A-B)\}=X-A-2B$에서

$X=5A-4B$

$=5\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -10 & 15 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -16 & -20 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 16 & 30 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은
$-6+3+16+30=43$

16 답 6

$A-3B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ ……㉠

$2A-B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ ……㉡

$3\times$㉡$-$㉠을 하면

$5A=3\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 20 \end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

㉡$-2\times$㉠을 하면

$5B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

$\therefore B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore A+B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A+B$의 모든 성분의 합은
$3+(-2)+(-1)+6=6$

17 답 ②

$\begin{cases} X-2Y=A & \text{……㉠} \\ 3X+Y=B & \text{……㉡} \end{cases}$

㉠$+2\times$㉡을 하면

$7X=A+2B$

$=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 7 \end{pmatrix}$

$\therefore X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$3\times$㉠$-$㉡을 하면

$-7Y=3A-B$

$=3\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -14 & -14 \\ 21 & 14 \end{pmatrix}$

$\therefore Y=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 $(1, 2)$ 성분은 2, 행렬 Y의 $(2, 1)$ 성분은 -3이므로 그 합은
$2+(-3)=-1$

18 답 -2

$4X+Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2k \end{pmatrix}$ ……㉠

$2X-3Y=\begin{pmatrix} k+1 & -2 \\ -k & -a \end{pmatrix}$ ……㉡

㉠$-$㉡을 하면

$2X+4Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2k \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} k+1 & -2 \\ -k & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -k & 2 \\ 4+k & a-2k \end{pmatrix}$

행렬 $2X+4Y$의 모든 성분이 서로 같아야 하므로
$-k=2 \qquad \therefore k=-2$
$k=-2$를 $a-2k=2$에 대입하면
$a+4=2 \qquad \therefore a=-2$

19 답 2

$pA+qB=\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$에서

$p\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}+q\begin{pmatrix} 2 & k \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} p+2q & -p+kq \\ -2p+2q & 3q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$p+2q=-6,\ -p+kq=-2,\ -2p+2q=0,\ 3q=-6$
$\therefore p=-2,\ q=-2$
$p=-2,\ q=-2$를 $-p+kq=-2$에 대입하면
$2-2k=-2 \qquad \therefore k=2$

20 답 5

$xA+yB=\begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix}$에서

$x\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$x^2+y^2=9,\ 2xy=16$
$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=9+16=25$
$\therefore x+y=5$ ($\because x, y$는 양수)

21 답 ③

$xA+yB=C$에서

$x\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -7 & a \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x+2y & 2x+5y \\ 2x+y & -3x+4y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -7 & a \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$x+2y=-2,\ 2x+5y=-3,\ 2x+y=-7,\ -3x+4y=a$
$\therefore x=-4,\ y=1$
$x=-4,\ y=1$을 $-3x+4y=a$에 대입하면
$12+4=a \qquad \therefore a=16$

서술형 1 답 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$a_{ij}=3i-j-1$에서
$a_{11}=3\times1-1-1=1,\ a_{12}=3\times1-2-1=0$
$a_{21}=3\times2-1-1=4,\ a_{22}=3\times2-2-1=3$ ……❶
$b_{ij}=a_{ji}$이므로
$b_{11}=a_{11}=1,\ b_{12}=a_{21}=4,\ b_{21}=a_{12}=0,\ b_{22}=a_{22}=3$ ……❷
$\therefore B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$를 구할 수 있다.	40%
❷ $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$를 구할 수 있다.	40%
❸ 행렬 B를 구할 수 있다.	20%

서술형 2 답 $\begin{pmatrix} -18 & 32 \\ 32 & -3 \end{pmatrix}$

$4(A+3B)-3(A-C)-2C$

$=4A+12B-3A+3C-2C$

$=A+12B+C$ ······❶

$=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}+12\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -24 & 36 \\ 36 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -18 & 32 \\ 32 & -3 \end{pmatrix}$ ······❷

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 간단히 정리할 수 있다.	40%
❷ 행렬을 대입하여 답을 구할 수 있다.	60%

서술형 3 답 8

$xA+yB=C$에서

$x\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -1 & k \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 13 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x-y & 2x+yk \\ -x+2y & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 13 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ······❶

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x-y=-1$ ······㉠

$2x+yk=13$ ······㉡

$-x+2y=4$ ······㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=2, y=3$ ······❷

$x=2, y=3$을 ㉡에 대입하면

$4+3k=13$ $\quad\therefore k=3$ ······❸

$\therefore k+x+y=3+2+3=8$ ······❹

채점 기준	비율
❶ 주어진 행렬을 대입하여 식을 간단히 할 수 있다.	30%
❷ 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 x, y의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ $k+x+y$의 값을 구할 수 있다.	10%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p.312

01 답 ④

$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+a & 1 \end{pmatrix}$

이때 행렬 $A+B$의 모든 성분의 합이 10이므로

$2+2+(1+a)+1=10$ $\quad\therefore a=4$

02 답 ①

$B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}-2A$

$=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

03 답 ⑤

$(A+B)+(A-B)=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$2A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$1+1+2+1=5$

04 답 8

$A-B=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$ ······㉠

$2A+B=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$ ······㉡

㉠+㉡을 하면

$3A=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 21 & 9 \end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

$2\times$㉠$-$㉡을 하면

$-3B=2\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 15 & -3 \end{pmatrix}$

$\therefore B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 A의 $(2, 1)$ 성분은 7이고 B의 $(2, 2)$ 성분은 1이므로 그 합은

$7+1=8$

05 답 ④

$a_{11}=1+1=2$, $a_{12}=1-2\times2=-3$

$a_{21}=2-1=1$, $a_{22}=2+2=4$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$2+(-3)+1+4=4$

06 답 ①

$a_{11}=\left[\frac{3-1}{2}\right]=\left[\frac{2}{2}\right]=1$, $a_{12}=\left[\frac{3-2}{2}\right]=\left[\frac{1}{2}\right]=0$

$a_{21}=\left[\frac{6-1}{2}\right]=\left[\frac{5}{2}\right]=2$, $a_{22}=\left[\frac{6-2}{2}\right]=\left[\frac{4}{2}\right]=2$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$1+0+2+2=5$

14 행렬의 곱셈

Ⅳ 행렬

개념 완성하기 p.315~316

01 답 3

ㄱ. A의 열의 개수와 B의 행의 개수가 3으로 같으므로 AB는 정의된다.

ㄴ. A의 열의 개수와 C의 행의 개수가 서로 다르므로 AC는 정의되지 않는다.

ㄷ. B의 열의 개수와 A의 행의 개수가 2로 같으므로 BA는 정의된다.

ㄹ. B의 열의 개수와 C의 행의 개수가 2로 같으므로 BC는 정의된다.

ㅁ. C의 열의 개수와 A의 행의 개수가 서로 다르므로 CA는 정의되지 않는다.

ㅂ. C의 열의 개수와 B의 행의 개수가 서로 다르므로 CB는 정의되지 않는다.

따라서 곱이 정의되는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이므로 그 개수는 3이다.

02 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$의 열의 개수와 $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$의 행의 개수가 서로 다르므로 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$는 정의되지 않는다.

ㄴ. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$의 열의 개수와 $(-3 \quad 1)$의 행의 개수가 1로 같으므로 $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}(-3 \quad 1)$은 정의된다.

ㄷ. $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$의 열의 개수와 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$의 행의 개수가 서로 다르므로 $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$은 정의되지 않는다.

ㄹ. $(1 \quad 1)$의 열의 개수와 $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$의 행의 개수가 2로 같으므로 $(1 \quad 1)\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$는 정의된다.

따라서 곱셈을 정의할 수 없는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

03 답 2

$(2 \quad -1)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=(2\times3+(-1)\times4)=(2)=2$

04 답 20

$(-1 \quad 5)\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}=(-1\times(-5)+5\times3)=(20)=20$

05 답 $\begin{pmatrix} 6 & 24 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}(1 \quad 4)=\begin{pmatrix} 6\times1 & 6\times4 \\ -2\times1 & -2\times4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 24 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$

06 답 $\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}(4 \quad 3)=\begin{pmatrix} -1\times4 & -1\times3 \\ 3\times4 & 3\times3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$

07 답 $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times1+3\times2 \\ 5\times1+(-2)\times2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

08 답 $\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times(-3)+1\times1 \\ -1\times(-3)+3\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$

09 답 $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times1+4\times1 & 1\times1+4\times0 \\ -4\times1+1\times1 & -4\times1+1\times0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

10 답 $\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\times2+2\times(-4) & 0\times(-1)+2\times3 \\ 3\times2+1\times(-4) & 3\times(-1)+1\times3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

11 답 $x=1, y=3$

$\begin{pmatrix} x \\ 4 \end{pmatrix}(2 \quad y)=\begin{pmatrix} 2x & xy \\ 8 & 4y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$이므로

$2x=2, xy=3, 4y=12$

$\therefore x=1, y=3$

12 답 $x=1, y=4$

$\begin{pmatrix} x & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-2 & 8x-2y \\ 0 & -8+2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$2x-2=0, 8x-2y=0, -8+2y=0$

$\therefore x=1, y=4$

13 답 $x=2, y=0$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x+2 & -1+2y \\ 2x+3 & 2+3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$이므로

$-x+2=0, -1+2y=-1, 2x+3=7, 2+3y=2$

$\therefore x=2, y=0$

14 답 $x=1, y=3$

$\begin{pmatrix} -2 & x \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2y-x & -4+3x \\ 3y+1 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$

이므로

$-2y-x=-7,\ -4+3x=-1,\ 3y+1=10$

$\therefore x=1,\ y=3$

15 답 $A^2=\begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 3 & 21 \end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix} 9 & 90 \\ 18 & 99 \end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -1\times(-1)+5\times1 & -1\times5+5\times4 \\ 1\times(-1)+4\times1 & 1\times5+4\times4 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}$$
$$A^3=A^2A$$
$$=\begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 6\times(-1)+15\times1 & 6\times5+15\times4 \\ 3\times(-1)+21\times1 & 3\times5+21\times4 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 9 & 90 \\ 18 & 99 \end{pmatrix}$$

16 답 $A^2=\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -6 & 35 \end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix} -6 & 35 \\ -35 & 204 \end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 0\times0+1\times(-1) & 0\times1+1\times6 \\ -1\times0+6\times(-1) & -1\times1+6\times6 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -6 & 35 \end{pmatrix}$$
$$A^3=A^2A$$
$$=\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -6 & 35 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -1\times0+6\times(-1) & -1\times1+6\times6 \\ -6\times0+35\times(-1) & -6\times1+35\times6 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -6 & 35 \\ -35 & 204 \end{pmatrix}$$

17 답 $A^2=\begin{pmatrix} 7 & -16 \\ -24 & 55 \end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix} 55 & -126 \\ -189 & 433 \end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1\times1+(-2)\times(-3) & 1\times(-2)+(-2)\times7 \\ -3\times1+7\times(-3) & -3\times(-2)+7\times7 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 7 & -16 \\ -24 & 55 \end{pmatrix}$$
$$A^3=A^2A$$
$$=\begin{pmatrix} 7 & -16 \\ -24 & 55 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 7\times1+(-16)\times(-3) & 7\times(-2)+(-16)\times7 \\ -24\times1+55\times(-3) & -24\times(-2)+55\times7 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 55 & -126 \\ -189 & 433 \end{pmatrix}$$

18 답 $A^2=\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix} 33 & 10 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 3\times3+1\times1 & 3\times1+1\times0 \\ 1\times3+0\times1 & 1\times1+0\times0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^3=A^2A$$
$$=\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 10\times3+3\times1 & 10\times1+3\times0 \\ 3\times3+1\times1 & 3\times1+1\times0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 33 & 10 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$$

19 답 $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 3\times1+2\times(-1) & 3\times3+2\times(-1) \\ 1\times1+(-1)\times(-1) & 1\times3+(-1)\times(-1) \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

20 답 $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1\times3+3\times1 & 1\times2+3\times(-1) \\ -1\times3+(-1)\times1 & -1\times2+(-1)\times(-1) \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

21 답 $\neq$

22 답 $\begin{pmatrix} 28 & 36 \\ -21 & -24 \end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2\times(-1)+3\times2 & 2\times0+3\times4 \\ 1\times(-1)+(-2)\times2 & 1\times0+(-2)\times4 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$$
$$\therefore (AB)C=\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 4\times1+12\times2 & 4\times0+12\times3 \\ -5\times1+(-8)\times2 & -5\times0+(-8)\times3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 28 & 36 \\ -21 & -24 \end{pmatrix}$$

23 답 $\begin{pmatrix} 28 & 36 \\ -21 & -24 \end{pmatrix}$

$$BC=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -1\times1+0\times2 & -1\times0+0\times3 \\ 2\times1+4\times2 & 2\times0+4\times3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$
$$\therefore A(BC)=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2\times(-1)+3\times10 & 2\times0+3\times12 \\ 1\times(-1)+(-2)\times10 & 1\times0+(-2)\times12 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 28 & 36 \\ -21 & -24 \end{pmatrix}$$

24 답 $=$

25 답 $\begin{pmatrix} 18 & 21 \\ -12 & -14 \end{pmatrix}$

$$B+C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\therefore A(B+C)=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2\times0+3\times6 & 2\times0+3\times7 \\ -4\times0+(-2)\times6 & -4\times0+(-2)\times7 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 18 & 21 \\ -12 & -14 \end{pmatrix}$$

26 답 $\begin{pmatrix} 18 & 21 \\ -12 & -14 \end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2\times1+3\times2 & 2\times3+3\times4 \\ -4\times1+(-2)\times2 & -4\times3+(-2)\times4 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 8 & 18 \\ -8 & -20 \end{pmatrix}$$
$$AC=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2\times(-1)+3\times4 & 2\times(-3)+3\times3 \\ -4\times(-1)+(-2)\times4 & -4\times(-3)+(-2)\times3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\therefore AB+AC=\begin{pmatrix} 8 & 18 \\ -8 & -20 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 18 & 21 \\ -12 & -14 \end{pmatrix}$$

27 답 $=$

28 답 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$-E=-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

29 답 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$E^5=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

30 답 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$E^{100}+(-E)^{100}=E^{100}+E^{100}=E+E=2E$$
$$=2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

31 답 $\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

$$(A+E)(A-E)=A^2-AE+EA-E^2$$
$$=A^2-A+A-E$$
$$=A^2-E$$
$$=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

32 답 $x=2, y=-11$

$$A^2+xA+yE$$
$$=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+x\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 17 & -8 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3x & 4x \\ 2x & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 17-3x+y & -8+4x \\ -4+2x & 9+x+y \end{pmatrix}$$

즉 $\begin{pmatrix} 17-3x+y & -8+4x \\ -4+2x & 9+x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$17-3x+y=0,\ -8+4x=0,\ -4+2x=0,\ 9+x+y=0$

$\therefore x=2, y=-11$

유형 완성하기

p.317~326

01 답 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2+2b \\ a & -2a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & c \end{pmatrix}$$

이므로 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-2+2b=4,\ a=-2,\ -2a=c$

$\therefore a=-2, b=3, c=4$

$\therefore a+b+c=-2+3+4=5$

01-1 답 ④

$$\begin{pmatrix}2&a\\3&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&-1\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2+a\\3a-2b&-3+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

이므로 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-2+a=0,\ 3a-2b=0,\ -3+b=0$

$\therefore a=2,\ b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$

02 답 ④

ㄱ. A의 열의 개수와 B의 행의 개수가 2로 같으므로 AB는 정의되고 2×3 행렬이다. 또 AB의 열의 개수와 C의 행의 개수가 3으로 같으므로 ABC는 정의된다.

ㄴ. B의 열의 개수와 A의 행의 개수가 서로 다르므로 BA는 정의되지 않는다.

ㄷ. C의 열의 개수와 A의 행의 개수가 2로 같으므로 CA는 정의되고 3×2 행렬이다. 또 CA의 열의 개수와 B의 행의 개수가 2로 같으므로 CAB는 정의된다.

따라서 곱이 정의되는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

02-1 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅁ

ㄱ. A의 열의 개수와 B의 행의 개수가 1로 같으므로 AB는 정의된다.

ㄴ. B의 열의 개수와 A의 행의 개수가 2로 같으므로 BA는 정의된다.

ㄷ. A의 열의 개수와 C의 행의 개수가 서로 다르므로 AC는 정의되지 않는다.

ㄹ. C의 열의 개수와 A의 행의 개수가 2로 같으므로 CA는 정의된다.

ㅁ. B의 열의 개수와 C의 행의 개수가 2로 같으므로 BC는 정의된다.

ㅂ. C의 열의 개수와 B의 행의 개수가 서로 다르므로 CB는 정의되지 않는다.

따라서 곱이 정의되는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅁ이다.

03 답 2

$\begin{pmatrix}2&a\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}2a+ab\\3a+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2a+ab=3$ ……㉠

$3a+b=4 \quad \therefore b=-3a+4$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2a+a(-3a+4)=3,\ -3a^2+6a-3=0$

$a^2-2a+1=0,\ (a-1)^2=0 \quad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면

$b=-3+4=1$

$\therefore a^2+b^2=1^2+1^2=2$

03-1 답 1

$\begin{pmatrix}a&3\\-2&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\a\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}ab+3\\-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2a\\-1-2a\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$ab+3=3+2a \quad \therefore ab-2a=0$ ……㉠

$-b=-1-2a \quad \therefore b=2a+1$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a(2a+1)-2a=0,\ 2a^2-a=0$

$a(2a-1)=0 \quad \therefore a=0\ (\because a$는 정수)

$a=0$을 ㉡에 대입하면 $b=1$

$\therefore b-a=1-0=1$

04 답 ⑤

$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^2\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^3\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^4\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}$

따라서 $A^7=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^7\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은

$1+2^7=1+128=129$

04-1 답 152

$A=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&6\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\times2\\0&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&6\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&9\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\times3\\0&1\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&9\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&12\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\times4\\0&1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1&3n\\0&1\end{pmatrix}$

따라서 $A^{50}=\begin{pmatrix}1&3\times50\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&150\\0&1\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은

$1+150+1=152$

05 답 ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=b$

$\therefore A^2=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\beta&\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\beta&\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta^2&2\alpha\beta\\2\alpha\beta&\alpha^2+\beta^2\end{pmatrix}$

즉 $\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta^2&2\alpha\beta\\2\alpha\beta&\alpha^2+\beta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&6\\6&10\end{pmatrix}$이므로 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=10,\ 2\alpha\beta=6$

$\therefore (\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=10+6=16$

$\therefore a^2+b^2=(\alpha+\beta)^2+(\alpha\beta)^2=16+3^2=25$

05-1 답 37

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$

$\therefore A^2=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta^2 & -2\alpha\beta\\ -2\alpha\beta & \alpha^2+\beta^2\end{pmatrix}$

즉 $\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta^2 & -2\alpha\beta\\ -2\alpha\beta & \alpha^2+\beta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 12\\ 12 & 13\end{pmatrix}$이므로 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=13,\ -2\alpha\beta=12$

$\therefore (\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=13+(-12)=1$

$\therefore a^2+b^2=(\alpha+\beta)^2+(\alpha\beta)^2=1+(-6)^2=37$

06 답 8

$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -8\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1 & -2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

이때 $A^n=\begin{pmatrix}1 & -16\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이므로

$-2n=-16$

$\therefore n=8$

06-1 답 7

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-2)^n\end{pmatrix}$

이때 $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -128\end{pmatrix}$이므로

$(-2)^n=-128$

$\therefore n=7$

07 답 1

$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1 & 3a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1 & na\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ······❶

따라서 $A^{500}=\begin{pmatrix}1 & 500a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이고 모든 성분의 합이 502이므로 ······❷

$1+500a+1=502,\ 500a=500$

$\therefore a=1$ ······❸

채점 기준	비율
❶ A^n을 구할 수 있다.	40%
❷ A^{500}을 구할 수 있다.	30%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%

07-1 답 8

$A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & b^2\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & b^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^3 & 0\\ 0 & b^3\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}a^3 & 0\\ 0 & b^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^4 & 0\\ 0 & b^4\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix}a^n & 0\\ 0 & b^n\end{pmatrix}$

즉 $A^{100}=\begin{pmatrix}a^{100} & 0\\ 0 & b^{100}\end{pmatrix}$이고 $(1,1)$ 성분과 $(2,2)$ 성분의 곱이 2^{300}이므로 $a^{100}\times b^{100}=(ab)^{100}=2^{300}$, $(ab)^{100}=(2^3)^{100}$

$(ab)^{100}=8^{100}$ $\therefore ab=8$

08 답 ①

$A^2=\begin{pmatrix}-\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta^2 & 0\\ 0 & \alpha^2+\beta^2\end{pmatrix}=(\alpha^2+\beta^2)E$

$\therefore A^{2010}=(A^2)^{1005}=\{(\alpha^2+\beta^2)E\}^{1005}=(\alpha^2+\beta^2)^{1005}E$

이때 A^{2010}의 모든 성분의 합이 2^{1006}이므로

$2(\alpha^2+\beta^2)^{1005}=2^{1006}=2\times2^{1005},\ \alpha^2+\beta^2=2$

$\therefore \alpha=\beta=1$ ($\because \alpha, \beta$는 자연수) ······㉠

또 이차방정식 $2x^2+ax-b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{a}{2},\ \alpha\beta=-\dfrac{b}{2}$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $2=-\dfrac{a}{2},\ 1=-\dfrac{b}{2}$

$\therefore a=-4,\ b=-2$

$\therefore a+b=-4+(-2)=-6$

08-1 답 ③

$A^2=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & -\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & -\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta^2 & 0\\ 0 & \alpha^2+\beta^2\end{pmatrix}=(\alpha^2+\beta^2)E$

$\therefore A^{1000}=(A^2)^{500}=\{(\alpha^2+\beta^2)E\}^{500}=(\alpha^2+\beta^2)^{500}E$

이때 A^{1000}의 모든 성분의 합이 2^{1501}이므로

$2(\alpha^2+\beta^2)^{500}=2^{1501}=2\times2^{1500}$

즉 $(\alpha^2+\beta^2)^{500}=(2^3)^{500}$이므로 $\alpha^2+\beta^2=8$

$\therefore\ \alpha=\beta=2$ ($\because\ \alpha,\ \beta$는 자연수) ······㉠

또 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $4=-a,\ 4=b$

$\therefore\ a=-4,\ b=4$

$\therefore\ a+b=-4+4=0$

09 답 ②

$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore\ A^n=\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}$

① $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은 2이다.

② $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은 3이다.

③ $A^2-E^2=A^2-E=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}$

즉 모든 성분의 합은 2이다.

④ $A^{10}-A^8=\begin{pmatrix}1&0\\10&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\8&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}$

즉 모든 성분의 합은 2이다.

⑤ $A^{10}-A^9=\begin{pmatrix}1&0\\10&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\9&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

즉 모든 성분의 합은 1이다.

따라서 행렬의 모든 성분의 합이 가장 큰 것은 ②이다.

09-1 답 ⑤

$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore\ A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$

① $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은 2이다.

② $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은 3이다.

③ $A^3-2E^2=A^3-2E=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\0&-1\end{pmatrix}$

즉 모든 성분의 합은 1이다.

④ $A^{10}-A^7=\begin{pmatrix}1&10\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&7\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix}$

즉 모든 성분의 합은 3이다.

⑤ $A^{10}-A^6=\begin{pmatrix}1&10\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&6\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4\\0&0\end{pmatrix}$

즉 모든 성분의 합은 4이다.

따라서 행렬의 모든 성분의 합이 가장 큰 것은 ⑤이다.

10 답 1

$A^2=\begin{pmatrix}-1&2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$이므로

$A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$

$\therefore\ A^{2077}=A^{4\times519+1}=(A^4)^{519}A=E^{519}A=A=\begin{pmatrix}-1&2\\-1&1\end{pmatrix}$

따라서 A^{2077}의 모든 성분의 합은

$-1+2+(-1)+1=1$

10-1 답 ⑤

$A^2=\begin{pmatrix}-2&-1\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-1\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-3&-2\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&1\\-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-1\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$

$\therefore\ A^{100}=A^{3\times33+1}=(A^3)^{33}A=E^{33}A=A=\begin{pmatrix}-2&-1\\3&1\end{pmatrix}$

즉 $A^{100}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}-2&-1\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

$\therefore\ \begin{pmatrix}-2a-b\\3a+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-2a-b=-1,\ 3a+b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-3$

$\therefore\ a-b=2-(-3)=5$

11 답 12

$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$

이므로

$A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$

따라서 $A^n=E$가 되는 경우는 $n=6k$ (k는 자연수)일 때이므로 두 자리 자연수 n의 최솟값은 12이다.

11-1 답 4

$A^2=\begin{pmatrix}-2&5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$이므로

$A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 4이다.

12 답 0

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$A^4=A^3A=-EA=-A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^5=A^2A^3=A^2(-E)=-A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^6=A^3A^3=(-E)(-E)=E^2=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{50}$

$=(A+A^2-E-A-A^2+E)+(A+A^2-E-A-A^2+E)$
$+\cdots+(A+A^2-E-A-A^2+E)+A+A^2$

$=8(A+A^2-E-A-A^2+E)+A+A^2$

$=A+A^2$

$=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

따라서 $a=1, b=-2, c=2, d=-1$이므로

$a+b+c+d=1+(-2)+2+(-1)=0$

12-1 답 -2

$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$A^4=A^3A=-EA=-A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^5=A^2A^3=A^2(-E)=-A^2=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A^6=A^3A^3=(-E)(-E)=E^2=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ······❶

$\vdots$

$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{35}$

$=(A+A^2-E-A-A^2+E)+(A+A^2-E-A-A^2+E)$
$+\cdots+(A+A^2-E-A-A^2+E)+A+A^2-E-A-A^2$

$=5(A+A^2-E-A-A^2+E)-E$

$=-E$

$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ······❷

따라서 $a=-1, b=-1$이므로

$a+b=-1+(-1)=-2$ ······❸

채점 기준	비율
❶ A^2, A^3, A^4, A^5, A^6을 구할 수 있다.	40%
❷ $A+A^2+A^3+\cdots+A^{35}$을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

13 답 ①

$A(2B+3C)-AC=A\{(2B+3C)-C\}$

$=A\{2(B+C)\}$

$=2A(B+C)$

$=2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$=2\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$0+(-4)+(-4)+8=0$

13-1 답 7

$(2A-C)B-A(B+C)+AC$

$=2AB-CB-AB-AC+AC$

$=AB-CB$

$=(A-C)B$

$=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$1+1+(-2)+7=7$

14 답 $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$

$AB^2C=(AB)(BC)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$

14-1 답 $\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

$BA^2C=(BA)(AC)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

15 답 O

$AC+CA+BC+CB=(A+B)C+C(A+B)$

이때 $A+B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$AC+CA+BC+CB=O$

15-1 답 3

$AB-BA+BC-CB$

$=-(C-A)B+B(C-A)$

$=-\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$=-\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$3+0+3+(-3)=3$

16 답 $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$이므로

$$\begin{aligned} A^2+B^2&=(A+B)^2-(AB+BA) \\ &=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

16-1 답 $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}$

$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$이므로

$$\begin{aligned} AB+BA&=A^2+B^2-(A-B)^2 \\ &=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

17 답 0

$$\begin{aligned} (A+B)(A-B)&=A^2-AB+BA-B^2 \\ &=(A^2-B^2)-(AB-BA) \\ &=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$0+(-2)+0+2=0$

17-1 답 1

$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$이므로

$$\begin{aligned} AB-BA&=(A^2-B^2)-(A+B)(A-B) \\ &=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$2+1+(-3)+1=1$

18 답 ①

$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$이므로

$(A-B)^2=(A^2+B^2)-(AB+BA)$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a \\ -a & 2a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2b & b \\ -b & -3b \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-2b & a-b \\ -a+b & 2a+3b \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a-2b=3,\ a-b=2,\ -a+b=-2,\ 2a+3b=-1$

위의 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1$

즉 $A^2+B^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ AB+BA=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$이므로

$$\begin{aligned} (A+B)^2&=A^2+AB+BA+B^2 \\ &=(A^2+B^2)+(AB+BA) \\ &=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

18-1 답 ③

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$이므로

$(A+B)^2=(A^2+B^2)+(AB+BA)$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ -5a & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -b & -2b \\ 5b & 2b \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a-b & -2b \\ -5a+5b & a+2b \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2a-b=1,\ -2b=-2,\ -5a+5b=0,\ a+2b=3$

위의 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=1$

즉 $A^2+B^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix},\ AB+BA=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$이므로

$$\begin{aligned} (A-B)^2&=A^2-AB-BA+B^2 \\ &=(A^2+B^2)-(AB+BA) \\ &=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -10 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$3+2+(-10)+(-1)=-6$

19 답 $\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

실수 a, b에 대하여 $a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$로 놓으면

$a-b=5,\ 2a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-3$

즉 $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$이므로 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}&=2A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}-3A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

19-1 답 7

실수 a, b에 대하여 $a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$으로 놓으면

$a=2,\ b=3$

즉 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$이므로 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}&=2A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+3A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 $a=1,\ b=8$이므로

$b-a=8-1=7$

20 답 $\begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2a+3c \\ 2b+3d \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$이므로 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$$A\begin{pmatrix} 2a+3c \\ 2b+3d \end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+3A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

20-1 답 0

$A\begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} 3a \\ 4b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix} 5a \\ 5b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$, $5A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

따라서 $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은

$1+(-1)=0$

21 답 $x=2, y=1$

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$에서 $AA\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

이때 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore x=2, y=1$

21-1 답 -2

$A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} -2a+b \\ -2c+d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-2a+b=1$ ……㉠

$-2c+d=3$ ……㉡

$A^2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$에서 $AA\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

이때 $A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$이므로 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

즉 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$이므로 $\begin{pmatrix} a+3b \\ c+3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a+3b=3$ ……㉢

$c+3d=-5$ ……㉣

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=0, b=1$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $c=-2, d=-1$

$\therefore a+b+c+d=0+1+(-2)+(-1)=-2$

22 답 $\frac{1}{2}$

$(A+3B)^2=A^2+3AB+3BA+9B^2$

이때 $(A+3B)^2=A^2+6AB+9B^2$이 성립하므로

$3AB+3BA=6AB$ $\quad\therefore AB=BA$

즉 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ y & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ y & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 1+2y & 17 \\ 3+xy & 9+7x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 2+3x \\ y+21 & 2y+7x \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$1+2y=10$, $17=2+3x$, $3+xy=y+21$, $9+7x=2y+7x$

$\therefore x=5, y=\frac{9}{2}$

$\therefore x-y=5-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$

22-1 답 10

$(A-2B)^2=A^2-2AB-2BA+4B^2$

이때 $(A-2B)^2=A^2-4AB+4B^2$이 성립하므로

$-2AB-2BA=-4AB$ $\quad\therefore AB=BA$

즉 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 2y & x+12 \\ 4y & 3x+24 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x & 4x \\ y+18 & 2y+24 \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2y=3x$, $x+12=4x$, $4y=y+18$, $3x+24=2y+24$

$\therefore x=4, y=6$

$\therefore x+y=4+6=10$

23 답 -9

$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

이때 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$이 성립하므로

$-AB+BA=O$ $\quad\therefore AB=BA$

즉 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 1-2x & 2-2y \\ 3-x & 6-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ x+3y & -2x-y \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$1-2x=7$, $2-2y=-4$, $3-x=x+3y$, $6-y=-2x-y$

$\therefore x=-3, y=3$

$\therefore xy=-3\times3=-9$

23-1 답 -2

$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

이때 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$이 성립하므로

$-AB+BA=O$ $\quad\therefore AB=BA$ ……❶

즉 $\begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & y \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 6+x & -4+x \\ 3+y & -2+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3x-2y \\ 3 & x+y \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$6+x=4$, $-4+x=3x-2y$, $3+y=3$, $-2+y=x+y$

$\therefore x=-2, y=0$ ……❷

$\therefore x+y=-2+0=-2$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 행렬의 곱셈에 대한 교환법칙이 성립함을 알 수 있다.	40%
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $x+y$의 값을 구할 수 있다.	20%

24 답 4

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$

이때 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$이 성립하므로

$AB+BA=2AB \qquad \therefore AB=BA$

즉 $\begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & y^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 3x^2+1 & x^2+y^2 \\ 3+2x & 1+2xy^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x^2+1 & 3+2x \\ x^2+y^2 & 1+2xy^2 \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+y^2=3+2x \qquad \therefore (x-1)^2+y^2=4$

이때 x, y는 정수이므로

$(x-1)^2=4, y^2=0$ 또는 $(x-1)^2=0, y^2=4$

$x-1=\pm2, y=0$ 또는 $x-1=0, y=\pm2$

$\therefore x=3, y=0$ 또는 $x=-1, y=0$ 또는 $x=1, y=-2$ 또는 $x=1, y=2$

따라서 순서쌍 (x, y)는 $(-1, 0), (3, 0), (1, -2), (1, 2)$이므로 그 개수는 4이다.

24-1 답 ④

$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$

이때 $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$이 성립하므로

$-AB-BA=-2AB \qquad \therefore AB=BA$

즉 $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^2 & 1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y^2 & 1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & x^2 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 8y^2+1 & 8+2y \\ y^2+x^2 & 1+2x^2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8y^2+1 & y^2+x^2 \\ 8+2y & 1+2x^2y \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$y^2+x^2=8+2y \qquad \therefore x^2+(y-1)^2=9$

이때 x, y는 정수이므로

$x^2=0, (y-1)^2=9$ 또는 $x^2=9, (y-1)^2=0$

$x=0, y-1=\pm3$ 또는 $x=\pm3, y-1=0$

$\therefore x=0, y=-2$ 또는 $x=0, y=4$ 또는 $x=-3, y=1$ 또는 $x=3, y=1$

따라서 순서쌍 (x, y)는 $(0, -2), (0, 4), (-3, 1), (3, 1)$이므로 순서쌍 (x, y)가 아닌 것은 ④이다.

25 답 E

$A+B=E$에서 $B=E-A$

$B=E-A$를 $BA=O$에 대입하면

$(E-A)A=O, A-A^2=O \qquad \therefore A^2=A$

$A+B=E$에서 $A=E-B$

$A=E-B$를 $BA=O$에 대입하면

$B(E-B)=O, B-B^2=O \qquad \therefore B^2=B$

$\therefore A^2+B^2=A+B=E$

다른 풀이

$A+B=E$의 양변의 오른쪽에 행렬 A를 곱하면

$A^2+BA=A \qquad \therefore A^2=A \ (\because BA=O)$

$A+B=E$의 양변의 왼쪽에 행렬 B를 곱하면

$BA+B^2=B \qquad \therefore B^2=B \ (\because BA=O)$

$\therefore A^2+B^2=A+B=E$

25-1 답 ㄱ, ㄷ

$A+B=E$에서 $B=E-A$

$B=E-A$를 $AB=O$에 대입하면

$A(E-A)=O, A-A^2=O \qquad \therefore A^2=A$ ······㉠

$A+B=E$에서 $A=E-B$

$A=E-B$를 $AB=O$에 대입하면

$(E-B)B=O, B-B^2=O \qquad \therefore B^2=B$ ······㉡

ㄱ. ㉠, ㉡에서 $A^2+B^2=A+B=E$

ㄴ. ㉠에서 $A^3=A^2A=A^2=A$

㉡에서 $B^3=B^2B=B^2=B$

$\therefore A^3+B^3=A+B=E$

ㄷ. ㉠, ㉡에서 $A^2B^2=AB=O$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

26 답 ②

$A+B=-E$에서 $B=-A-E$

$B=-A-E$를 $AB=E$에 대입하면

$A(-A-E)=E, -A^2-A=E$

$\therefore A^2=-A-E=B$

$A+B=-E$에서 $A=-B-E$

$A=-B-E$를 $AB=E$에 대입하면

$(-B-E)B=E, -B^2-B=E$

$\therefore B^2=-B-E=A$

$\therefore A^2+B^2=B+A=-E$

26-1 답 ①

$A+B=2E$에서 $B=2E-A$

$B=2E-A$를 $AB=2E$에 대입하면

$A(2E-A)=2E, 2A-A^2=2E \qquad \therefore A^2=2A-2E$

$\therefore A^3=A^2A=(2A-2E)A=2A^2-2A$

$=2(2A-2E)-2A=2A-4E$

$A+B=2E$에서 $A=2E-B$

$A=2E-B$를 $AB=2E$에 대입하면

$(2E-B)B=2E, 2B-B^2=2E \qquad \therefore B^2=2B-2E$

$\therefore B^3=B^2B=(2B-2E)B=2B^2-2B$

$=2(2B-2E)-2B=2B-4E$

$\therefore A^3+B^3=(2A-4E)+(2B-4E)$

$=2(A+B)-8E$

$=2\times2E-8E$

$=-4E$

27 답 ⑤

$A+B=O$에서 $B=-A$

$B=-A$를 $AB=E$에 대입하면

$A(-A)=E \qquad \therefore A^2=-E$

$A+B=O$에서 $A=-B$

$A=-B$를 $AB=E$에 대입하면

$-BB=E \qquad \therefore B^2=-E$

$\therefore A^{100}+B^{100}=(A^2)^{50}+(B^2)^{50}$

$=(-E)^{50}+(-E)^{50}$

$=E+E=2E$

27-1 답 7

$A+B=3E$에서 $B=3E-A$

$B=3E-A$를 $AB=E$에 대입하면

$A(3E-A)=E, 3A-A^2=E \qquad \therefore A^2=3A-E$

$A+B=3E$에서 $A=3E-B$
$A=3E-B$를 $AB=E$에 대입하면
$(3E-B)B=E$, $3B-B^2=E$ $\quad\therefore B^2=3B-E$
$\therefore A^2+B^2=(3A-E)+(3B-E)$
$=3(A+B)-2E$
$=3\times3E-2E$
$=7E$
$\therefore k=7$

28 답 ③

$$AB=\begin{pmatrix}600 & 450\\500 & 400\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}600\times2+450\times3 & 600\times3+450\times4\\500\times2+400\times3 & 500\times3+400\times4\end{pmatrix}$$

이때 행렬 AB의 $(2, 1)$ 성분은 500원짜리 빵 2개와 400원짜리 우유 3개의 가격의 합이므로 Q 상점에서의 윤아의 지불 금액을 나타낸다.

28-1 답 ④

$$AB=\begin{pmatrix}500 & 300\\400 & 250\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 4\\3 & 6\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}500\times5+300\times3 & 500\times4+300\times6\\400\times5+250\times3 & 400\times4+250\times6\end{pmatrix}$$

이때 민준이가 P 문구점에서 연필과 지우개를 사는 경우 지불해야 하는 금액은 $(500\times4+300\times6)$원이므로 행렬 AB의 $(1, 2)$ 성분과 같다.

29 답 ①

꽃다발 A를 a개, 꽃다발 B를 b개 만드는 데 드는 비용의 총합은 $\{(2x+3y)a+(4x+2y)b\}$원이므로 이를 세 행렬의 곱으로 나타내면

$$\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x+3y\\4x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

29-1 답 ③

상품 A를 a개, 상품 B를 b개 만드는 데 드는 비용의 총합은 $\{(3x+4y)a+(5x+3y)b\}$원이므로 이를 세 행렬의 곱으로 나타내면

$$\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3x+4y\\5x+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

유형+ 완성하기 p.327

30 답 ⑤

ㄱ. $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$이면

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix},\ A-B=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\therefore (A+B)^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$$

$$(A-B)^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$$

즉 $(A+B)^2=(A-B)^2$이지만 $AB\neq O$

ㄴ. $A^2=E$, $B^2=B$이면
$(ABA)^2=(ABA)(ABA)=ABA^2BA$
$=ABEBA=AB^2A=ABA$

ㄷ. $A+B=E$에서 $B=E-A$이므로
$AB=A(E-A)=A-A^2$
$BA=(E-A)A=A-A^2$
$\therefore AB=BA$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

31 답 ④

ㄱ. $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A^2+B^2$

ㄴ. $AB+BA=O$에서 $BA=-AB$
$\therefore (AB)^2=ABAB=A(-AB)B=-A^2B^2$

ㄷ. $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$이면

$$AB=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$$

$\therefore AB+BA=O$
즉 $AB+BA=O$이지만 $AB\neq O$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

32 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $A+B=3E$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면
$AB+B^2=3B$
이때 $AB=4B$이므로 $4B+B^2=3B$
$\therefore B^2+B=O$ ……㉠

ㄴ. $A=3E$, $B=O$이면
$A+B=3E$, $AB=O$, $4B=O$
즉 $A+B=3E$, $AB=4B$이지만 $A\neq4E$

ㄷ. $A+B=3E$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면
$A^2+AB=3A$
$\therefore A^2=3A-AB=3A-4B$ ($\because AB=4B$)
㉠에서 $B^2=-B$
$\therefore A^2-B^2=3A-4B-(-B)$
$=3A-3B$
$=3(A-B)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

33 답 ③

케일리-해밀턴의 정리에 의하여
$A^2-\{1+(-2)\}A+\{1\times(-2)-(-1)\times3\}E=O$
$\therefore A^2+A+E=O$
위의 식의 양변에 $A-E$를 곱하면
$(A-E)(A^2+A+E)=O$

$A^3-E=O \qquad \therefore A^3=E$

$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{220}$

$=(A+A^2+E)+(A+A^2+E)+\cdots+(A+A^2+E)+A$

$=A$

$=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=3$, $d=-2$이므로

$a+b+c+d=1+(-1)+3+(-2)=1$

34 답 $\begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 16 & 27 \end{pmatrix}$

케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(2+3)A+(2\times3-1\times1)E=O$

$A^2-5A+5E=O$ ······❶

$\therefore A^2=5A-5E$

$A^3=A^2A$

$=(5A-5E)A$

$=5A^2-5A$

$=5(5A-5E)-5A$

$=20A-25E$ ······❷

$\therefore A^3-A^2+A-E$

$=(20A-25E)-(5A-5E)+A-E$

$=16A-21E$ ······❸

$=16\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-21\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 16 & 27 \end{pmatrix}$ ······❹

채점 기준	비율
❶ 케일리-해밀턴의 정리를 이용할 수 있다.	20%
❷ A^2, A^3을 A와 E에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ 주어진 식을 A와 E에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❹ 행렬 A^3-A^2+A-E를 구할 수 있다.	20%

35 답 ①

이차방정식 $x^2+x-8=0$의 두 근이 a, d이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $a+d=-1$, $ad=-8$

이차방정식 $x^2-3x-9=0$의 두 근이 b, c이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $b+c=3$, $bc=-9$

이때 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

$A^2-(-1)A+\{-8-(-9)\}E=O$

$\therefore A^2+A+E=O$

위의 식의 양변에 $A-E$를 곱하면

$(A-E)(A^2+A+E)=O$, $A^3-E=O$

$\therefore A^3=E$

$\therefore A+A^2+A^3+A^4+\cdots+A^{10}$

$=(A+A^2+E)+(A+A^2+E)+(A+A^2+E)+A$

$=A$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$a+b+c+d=(a+d)+(b+c)$

$=-1+3$

$=2$

학교 시험 대비 문제

p.328~330

01 답 ④

A는 2×3 행렬, B는 2×2 행렬, C는 3×2 행렬이다.

AB: A의 열의 개수와 B의 행의 개수가 서로 다르므로 AB는 정의되지 않는다.

AC: A의 열의 개수와 C의 행의 개수가 3으로 같으므로 AC는 정의된다.

BA: B의 열의 개수와 A의 행의 개수가 2로 같으므로 BA는 정의된다.

BC: B의 열의 개수와 C의 행의 개수가 서로 다르므로 BC는 정의되지 않는다.

CA: C의 열의 개수와 A의 행의 개수가 2로 같으므로 CA는 정의된다.

CB: C의 열의 개수와 B의 행의 개수가 2로 같으므로 CB는 정의된다.

따라서 곱이 정의되는 것은 AC, BA, CA, CB이므로 그 개수는 4이다.

02 답 ⑤

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+4 & 1+2y \\ 2x+8 & 2+4y \end{pmatrix}$

이때 $AB=O$이므로 $\begin{pmatrix} x+4 & 1+2y \\ 2x+8 & 2+4y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x+4=0$, $1+2y=0$, $2x+8=0$, $2+4y=0$

$\therefore x=-4$, $y=-\frac{1}{2}$

$\therefore xy=-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=2$

03 답 17

이차방정식 $x^2-3x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-2$

$\therefore \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\alpha\beta & 0 \\ \alpha^2+\beta^2 & -\alpha\beta \end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$-\alpha\beta+0+(\alpha^2+\beta^2)+(-\alpha\beta)=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=3^2-4\times(-2)$

$=17$

04 답 31

$A=\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & -2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^3의 모든 성분의 합은 $3a-2$이므로

$3a-2=91 \qquad \therefore a=31$

05 답 ①

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\-3 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=E$$

$$\therefore A^{1000}=(A^3)^{333}A=E^{333}A=EA$$
$$=A=\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A^{1000}의 모든 성분의 합은

$1+(-1)+3+(-2)=1$

06 답 ④

$$AB-AC+C(B-C)=A(B-C)+C(B-C)$$
$$=(A+C)(B-C)$$
$$=\begin{pmatrix}2 & 3\\-1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}$$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$2+1+(-1)+2=4$

07 답 ②

$(A-B)^2=A^2+B^2-AB-BA$이므로

$$AB+BA=A^2+B^2-(A-B)^2$$
$$=\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore (A+B)^2=A^2+B^2+AB+BA$$
$$=\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3 & 1\\-3 & 4\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $(A+B)^2$의 모든 성분의 합은

$3+1+(-3)+4=5$

08 답 ④

실수 a, b에 대하여 $a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$으로 놓으면 $a=2$, $b=3$

즉 $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$이므로 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$$A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-5\end{pmatrix}$$

09 답 5

$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

이때 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$이므로

$-AB+BA=O \qquad \therefore AB=BA$

즉 $\begin{pmatrix}a & -2\\3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\b & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\b & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & -2\\3 & -1\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix}a-2b & 2a-8\\3-b & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+6 & -4\\ab+12 & -2b-4\end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a-2b=a+6$, $2a-8=-4$, $3-b=ab+12$, $2=-2b-4$

$\therefore a=2$, $b=-3$

$\therefore a-b=2-(-3)=5$

10 답 ②

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$

이때 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$이므로

$AB+BA=2AB \qquad \therefore AB=BA$

즉 $\begin{pmatrix}x & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & -2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & -2y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix}x-1 & -x-2y\\2 & -1+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-1 & 2\\-x-2y & -1+2y\end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-x-2y=2 \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x-1$

따라서 점 (x, y)가 나타내는 그래프의 y절편은 -1이다.

11 답 ④

주문 받은 빵의 개수는 $(400 \quad 600)$

빵 1개를 만드는 데 필요한 밀가루와 설탕의 양은 $\begin{pmatrix}80 & 8\\100 & 5\end{pmatrix}$

재료의 단가는 $\begin{pmatrix}0.6\\1.2\end{pmatrix}$

따라서 빵 공장에서 주문 받은 빵을 모두 만드는 데 드는 비용의 총합은 $(400 \quad 600)\begin{pmatrix}80 & 8\\100 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.6\\1.2\end{pmatrix}$

12 답 ⑤

(가), (나)에서 $AB=BA=-B$

$$\therefore BA^3=BAA^2=-BA^2=-BAA$$
$$=-(-B)A=BA=-B$$

(다)에서 $(E-B)^2=E^2-2B+B^2=E-2B+B^2$이므로

$E-2B+B^2=E-B \qquad \therefore B^2=B$

$\therefore B^3=B^2B=BB=B^2=B$

$\therefore B^3+2BA^3=B+2(-B)=-B$

13 답 ③

$A+B=O$에서 $A=-B$, $B=-A$

이때 $AB=E$이므로

$AB=-BB=-B^2=E \qquad \therefore B^2=-E \qquad$ ……㉠

$AB=A(-A)=-A^2=E \qquad \therefore A^2=-E \qquad$ ……㉡

ㄱ. $A^2+AB=A(A+B)=AO=O$

$AB+B^2=(A+B)B=OB=O$

$\therefore A^2+AB=AB+B^2$

ㄴ. ㉠, ㉡에서 $A^2+B^2=-E+(-E)=-2E$

ㄷ, ㄹ. $A^3=A^2A=-EA=-A=B$

$B^3=B^2B=-EB=-B=A$

$\therefore A^3+B^3=A+B=O$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14 답 ⑤

$A+E=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$이므로

$(A+E)^2=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}(A+E)^3&=(A+E)^2(A+E)\\&=\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A+E)^4&=(A+E)^3(A+E)\\&=\begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\\&=-4E\end{aligned}$$

즉 $(A+E)^4=-4E$이므로

$$\begin{aligned}(A+E)^{200}&=\{(A+E)^4\}^{50}=(-4E)^{50}\\&=(-4)^{50}E^{50}=4^{50}E\\&=(2^2)^{50}E=2^{100}E\end{aligned}$$

$\therefore k=2^{100}$

서술형 1 답 96

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$이므로

$A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$ ······ ❶

따라서 $A^n=E$가 되는 경우는 $n=4k$ (k는 자연수)일 때이므로 ······ ❷

두 자리 자연수 n의 최댓값은 96이다. ······ ❸

채점 기준	비율
❶ $A^4=E$가 됨을 알 수 있다.	50%
❷ 자연수 n의 조건을 구할 수 있다.	30%
❸ 두 자리 자연수 n의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

서술형 2 답 3

$(A+B)(A+2B)=A^2+2AB+BA+2B^2$

이때 $(A+B)(A+2B)=A^2+3AB+2B^2$이므로

$2AB+BA=3AB$

$\therefore AB=BA$ ······ ❶

즉 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} \alpha^2+\beta & \alpha\beta+\beta \\ \alpha\beta+\alpha & \beta^2+\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2 & 2\alpha\beta \\ \alpha+\beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$\alpha^2+\beta=\alpha^2+\beta^2$, $\alpha\beta+\beta=2\alpha\beta$, $\alpha\beta+\alpha=\alpha+\beta$, $\beta^2+\alpha=\alpha+\beta$

$\therefore \alpha\beta=\beta$, $\beta^2=\beta$

$\therefore \alpha=1$, $\beta=1$ ($\because \alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$) ······ ❷

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$

$\therefore a=1+1=2$, $b=1\times1=1$ ······ ❸

$\therefore a+b=2+1=3$ ······ ❹

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건식에서 $AB=BA$를 유도할 수 있다.	30%
❷ α, β의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

서술형 3 답 -2

케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)A+\left\{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)\times\frac{1}{2}\right\}E=O$

$A^2-A+E=O \quad \therefore A^2=A-E$

$A^3=A^2A=(A-E)A=A^2-A$

$\quad =A-E-A=-E$ ······ ❶

$A^4=A^3A=-EA=-A$

$A^5=A^4A=-AA=-A^2$

$A^6=A^3A^3=(-E)(-E)=E^2=E$

$\vdots$

$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{20}$

$\quad =(A+A^2-E-A-A^2+E)+\cdots+A+A^2$

$\quad =A+A^2=A+(A-E)=2A-E$

$\quad =\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ······ ❷

따라서 $a=-3$, $b=1$이므로 ······ ❸

$a+b=-3+1=-2$ ······ ❹

채점 기준	비율
❶ A^2, A^3, A^4, A^5, A^6을 구할 수 있다.	40%
❷ $A+A^2+A^3+\cdots+A^{20}$을 구할 수 있다.	40%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	10%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p.331

01 답 ④

$A^2-A+E=O$의 양변의 오른쪽에 행렬 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$을 곱하면

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+E\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=O$

$AA\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=O$

이때 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$이므로 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=O$

$\therefore A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

02 답 ①

$\begin{pmatrix} 100 & a \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 59 \\ 122 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 100\times59+a\times122 \\ x\times122 \end{pmatrix}$이므로 전력량 요금은

$100\times59+a\times122+x\times122=122(a+x)+5900$(원)

이때 한 달간 사용한 전력량 요금은

$100\times59+122(a-100)=122(a-100)+5900$(원)

따라서 $122(a+x)+5900=122(a-100)+5900$이므로

$x=-100$

03 답 ⑤

직선 l_5의 방정식은 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^5$이므로 직선 l_5의 x절편 α와 y절편 β는 $\alpha=3\times\left(\frac{3}{4}\right)^5$, $\beta=4\times\left(\frac{3}{4}\right)^5$

$$\therefore P=\begin{pmatrix} 3\times\left(\frac{3}{4}\right)^5 & 0 \\ 0 & 4\times\left(\frac{3}{4}\right)^5 \end{pmatrix}$$

이때 $A=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}=\frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\frac{3}{4}E$이므로

$$A^5=\left(\frac{3}{4}\right)^5E^5=\left(\frac{3}{4}\right)^5E=\left(\frac{3}{4}\right)^5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면 $P=A^5B$에서

$$\begin{pmatrix} 3\times\left(\frac{3}{4}\right)^5 & 0 \\ 0 & 4\times\left(\frac{3}{4}\right)^5 \end{pmatrix}=\left(\frac{3}{4}\right)^5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\times\left(\frac{3}{4}\right)^5 & 0 \\ 0 & 4\times\left(\frac{3}{4}\right)^5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\times\left(\frac{3}{4}\right)^5 & b\times\left(\frac{3}{4}\right)^5 \\ c\times\left(\frac{3}{4}\right)^5 & d\times\left(\frac{3}{4}\right)^5 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3\times\left(\frac{3}{4}\right)^5=a\times\left(\frac{3}{4}\right)^5$, $0=b\times\left(\frac{3}{4}\right)^5$

$0=c\times\left(\frac{3}{4}\right)^5$, $4\times\left(\frac{3}{4}\right)^5=d\times\left(\frac{3}{4}\right)^5$

따라서 $a=3$, $b=0$, $c=0$, $d=4$이므로 행렬 B의 모든 성분의 합은

$3+0+0+4=7$

04 답 ①

(가)에서 $A^2=2A+E$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$A^2B=2AB+B$, $AAB=2AB+B$

이때 (나)에서 $AB=2E$이므로 $A(2E)=2(2E)+B$

$2A=4E+B \quad \therefore B=2A-4E$ $\cdots\cdots$ ㉠

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면 (다)에서 $a+b+c+d=7$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서

$$\begin{aligned} B&=2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 2a-4 & 2b \\ 2c & 2d-4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 행렬 B의 모든 성분의 합은

$$\begin{aligned} (2a-4)+2b+2c+(2d-4)&=2(a+b+c+d)-8 \\ &=2\times7-8\ (\because ㉡)=6 \end{aligned}$$

05 답 ③

ㄱ. $(ABA)^2=(ABA)(ABA)=ABA^2BA$
$=ABEBA=ABBA=AB^2A$
$=AEA=AA=A^2=E$

ㄴ. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$이면

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$

$B^2=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

즉 $A^2=O$, $B^2=O$이지만 $AB\neq O$이다.

ㄷ. $(A+E)^2=O$에서 $A^2+2A+E=O$

위의 식의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$A^2B+2AB+EB=O$

$AAB+2AB+B=O$

$AA+2A+B=O\ (\because AB=A)$

$\therefore A^2+2A+B=O$

이때 $A^2+2A+E=O$에서 $A^2+2A=-E$이므로

$-E+B=O \quad \therefore B=E$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.