정답과 해설

01 평면좌표

Ⅰ 도형의 방정식

개념 완성하기 p.7~8

01 답 7
$\overline{AB}=|10-3|=7$

02 답 6
$\overline{AB}=|-1-5|=6$

03 답 5
$\overline{AB}=|1-(-4)|=5$

04 답 9
$\overline{AB}=|-2-(-11)|=9$

05 답 Q(2) 또는 Q(4)
점 Q의 좌표를 x라 하면
$|x-3|=1$에서 $x-3=\pm1$
$\therefore x=2$ 또는 $x=4$
$\therefore$ Q(2) 또는 Q(4)

06 답 R(−2) 또는 R(6)
점 R의 좌표를 x라 하면
$|x-2|=4$에서 $x-2=\pm4$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=6$
$\therefore$ R(−2) 또는 R(6)

07 답 S(−4) 또는 S(2)
점 S의 좌표를 x라 하면
$|x-(-1)|=3$에서 $x+1=\pm3$
$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$
$\therefore$ S(−4) 또는 S(2)

08 답 T(−6) 또는 T(−2)
점 T의 좌표를 x라 하면
$|x-(-4)|=2$에서 $x+4=\pm2$
$\therefore x=-6$ 또는 $x=-2$
$\therefore$ T(−6) 또는 T(−2)

09 답 $\sqrt{10}$
$\overline{OA}=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

10 답 5
$\overline{AB}=\sqrt{(3-0)^2+(2+2)^2}=\sqrt{25}=5$

11 답 $3\sqrt{2}$
$\overline{AB}=\sqrt{(-1-2)^2+(0-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

12 답 5
$\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{25}=5$

13 답 $2\sqrt{10}$
$\overline{AB}=\sqrt{(1-3)^2+(5+1)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

14 답 ±2
$\overline{AB}=\sqrt{a^2+(3-1)^2}=\sqrt{a^2+4}=\sqrt{8}$
즉 $a^2+4=8$이므로 $a^2=4$ $\quad\therefore a=\pm2$

15 답 ±1
$\overline{AB}=\sqrt{(-a)^2+(2-3)^2}=\sqrt{a^2+1}=\sqrt{2}$
즉 $a^2+1=2$이므로 $a^2=1$ $\quad\therefore a=\pm1$

16 답 -5 또는 3
$\overline{AB}=\sqrt{(-1-a)^2+(-5+1)^2}=\sqrt{a^2+2a+17}=4\sqrt{2}$
즉 $a^2+2a+17=32$이므로 $a^2+2a-15=0$
$(a+5)(a-3)=0$ $\quad\therefore a=-5$ 또는 $a=3$

17 답 -7 또는 1
$\overline{AB}=\sqrt{(a+3)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{a^2+6a+18}=5$
즉 $a^2+6a+18=25$이므로 $a^2+6a-7=0$
$(a+7)(a-1)=0$ $\quad\therefore a=-7$ 또는 $a=1$

18 답 $(-4, 0)$
x축 위의 점을 $P(a, 0)$이라 하면
$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(a-1)^2+(-3)^2=(a+1)^2+(-5)^2$
$a^2-2a+10=a^2+2a+26$
$-4a=16$ $\quad\therefore a=-4$, 즉 $P(-4, 0)$

19 답 $(1, 0)$
x축 위의 점을 $P(a, 0)$이라 하면
$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(a+3)^2+(-1)^2=(a-2)^2+(-4)^2$
$a^2+6a+10=a^2-4a+20$
$10a=10$ $\quad\therefore a=1$, 즉 $P(1, 0)$

20 답 $(0, 1)$
y축 위의 점을 $Q(0, b)$라 하면
$\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로
$1^2+(b+2)^2=(-3)^2+b^2$
$b^2+4b+5=b^2+9$
$4b=4$ $\quad\therefore b=1$, 즉 $Q(0, 1)$

21 답 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$
y축 위의 점을 $Q(0, b)$라 하면
$\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로
$(-1)^2+(b+3)^2=(-3)^2+(b-5)^2$
$b^2+6b+10=b^2-10b+34$
$16b=24$ $\quad\therefore b=\frac{3}{2}$, 즉 $Q\left(0, \frac{3}{2}\right)$

22 답 $\angle B=90^\circ$인 직각이등변삼각형

$\overline{AB}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$

$\overline{BC}=\sqrt{(5-1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{17}$

$\overline{CA}=\sqrt{(-5)^2+(-3)^2}=\sqrt{34}$

$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}, \overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

따라서 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{BC}$이고 $\overline{CA}$를 빗변으로 하는 $\angle B=90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.

23 답 정삼각형

$\overline{AB}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-3)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\overline{BC}=\sqrt{(-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\overline{CA}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

따라서 $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

24 답 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형

$\overline{AB}=\sqrt{(-1+3)^2+(4-6)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\overline{BC}=\sqrt{(3+1)^2+(8-4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$\overline{CA}=\sqrt{(-3-3)^2+(6-8)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$\therefore \overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

따라서 $\triangle ABC$는 $\overline{CA}$를 빗변으로 하는 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

25 답 $\overline{BC}=\overline{CA}$인 이등변삼각형

$\overline{AB}=\sqrt{4^2+(-1-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\overline{BC}=\sqrt{(-1-4)^2+(-6+1)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

$\overline{CA}=\sqrt{1^2+(1+6)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

$\therefore \overline{BC}=\overline{CA}$

따라서 $\triangle ABC$는 $\overline{BC}=\overline{CA}$인 이등변삼각형이다.

26 답 (1) $P\left(\frac{2}{3}\right)$ (2) $Q(4)$ (3) $M(2)$

(1) $P\left(\frac{1\times6+2\times(-2)}{1+2}\right)$ $\therefore P\left(\frac{2}{3}\right)$

(2) $Q\left(\frac{3\times6+1\times(-2)}{3+1}\right)$ $\therefore Q(4)$

(3) $M\left(\frac{-2+6}{2}\right)$ $\therefore M(2)$

27 답 3

$p=\frac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}=2$

$q=\frac{-2+4}{2}=1$

$\therefore p+q=2+1=3$

28 답 (1) $P\left(\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$ (2) $Q(2, 6)$ (3) $M(1, 5)$

(1) $P\left(\frac{1\times3+2\times(-1)}{1+2}, \frac{1\times7+2\times3}{1+2}\right)$ $\therefore P\left(\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$

(2) $Q\left(\frac{3\times3+1\times(-1)}{3+1}, \frac{3\times7+1\times3}{3+1}\right)$ $\therefore Q(2, 6)$

(3) $M\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+7}{2}\right)$ $\therefore M(1, 5)$

29 답 -7

$\frac{4+b}{2}=-3$, $\frac{a+7}{2}=5$이므로 $a=3, b=-10$

$\therefore a+b=3+(-10)=-7$

30 답 $(8, 4)$

점 D의 좌표를 (x, y)라 하면 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{AC}$의 중점의 좌표와 $\overline{BD}$의 중점의 좌표가 같다.

즉 두 점 $\left(\frac{4+6}{2}, \frac{6-2}{2}\right), \left(\frac{2+x}{2}, \frac{0+y}{2}\right)$의 좌표가 같으므로

$x+2=10, y=4$

$\therefore x=8, y=4$

따라서 점 D의 좌표는 $(8, 4)$이다.

31 답 $(-6, 4)$

점 D의 좌표를 (x, y)라 하면 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{AC}$의 중점의 좌표와 $\overline{BD}$의 중점의 좌표가 같다.

즉 두 점 $\left(\frac{-4+1}{2}, \frac{2+5}{2}\right), \left(\frac{3+x}{2}, \frac{3+y}{2}\right)$의 좌표가 같으므로

$x+3=-3, y+3=7$

$\therefore x=-6, y=4$

따라서 점 D의 좌표는 $(-6, 4)$이다.

32 답 $(-3, 4)$

점 D의 좌표를 (x, y)라 하면 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{AC}$의 중점의 좌표와 $\overline{BD}$의 중점의 좌표가 같다.

즉 두 점 $\left(\frac{-6+4}{2}, \frac{3+3}{2}\right), \left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}\right)$의 좌표가 같으므로

$x+1=-2, y+2=6$

$\therefore x=-3, y=4$

따라서 점 D의 좌표는 $(-3, 4)$이다.

33 답 $(2, 4)$

점 D의 좌표를 (x, y)라 하면 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{AC}$의 중점의 좌표와 $\overline{BD}$의 중점의 좌표가 같다.

즉 두 점 $\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2+0}{2}\right), \left(\frac{-4+x}{2}, \frac{-2+y}{2}\right)$의 좌표가 같으므로 $x-4=-2, y-2=2$

$\therefore x=2, y=4$

따라서 점 D의 좌표는 $(2, 4)$이다.

34 답 $(3, 2)$

$\left(\frac{1+7+1}{3}, \frac{4+2+0}{3}\right)$ $\therefore (3, 2)$

35 답 $(1, 2)$

$\left(\frac{1-2+4}{3}, \frac{2+5-1}{3}\right)$ $\therefore (1, 2)$

36 답 $(2, 1)$

$\left(\dfrac{3-1+4}{3}, \dfrac{3+0+0}{3}\right) \qquad \therefore (2, 1)$

37 답 $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$

$\left(\dfrac{-2+2+4}{3}, \dfrac{3-7+2}{3}\right) \qquad \therefore \left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$

38 답 -3

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(-1, 2)$이므로

$\dfrac{4+1+b}{3}=-1, \dfrac{a+2-1}{3}=2$

$\therefore a=5, b=-8$

$\therefore a+b=5+(-8)=-3$

유형 완성하기 p. 9~20

01 답 2

$\overline{AB}=5\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{\{(a+2)-3\}^2+(1-2)^2}=5\sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $(a-1)^2+1=50$

$a^2-2a-48=0, (a+6)(a-8)=0$

$\therefore a=-6$ 또는 $a=8$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-6+8=2$

01-1 답 ①

$\overline{AB}=10$이므로

$\sqrt{\{4-(a+1)\}^2+(a-5)^2}=10$

양변을 제곱하면 $(3-a)^2+(a-5)^2=100$

$a^2-8a-33=0, (a+3)(a-11)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=11$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$-3\times11=-33$

02 답 ⑤

$\overline{AB}\le5$에서 $\overline{AB}^2\le5^2$이므로

$\{(k+1)-2\}^2+(6-k)^2\le25$

$k^2-7k+6\le0, (k-1)(k-6)\le0$

$\therefore 1\le k\le6$

따라서 정수 k의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 그 개수는 6이다.

02-1 답 ④

$\overline{AB}\le10$에서 $\overline{AB}^2\le10^2$이므로

$(a-2)^2+(-8-a)^2\le100$

$a^2+6a-16\le0, (a+8)(a-2)\le0$

$\therefore -8\le a\le2$

따라서 정수 a의 값은 $-8, -7, -6, \cdots, 2$이므로 그 개수는 11이다.

03 답 ④

$\overline{AB}=\sqrt{(3-a)^2+(a+2)^2}=\sqrt{2a^2-2a+13}$

$=\sqrt{2\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{25}{2}}$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$일 때 선분 AB의 길이가 최소가 된다.

03-1 답 ②

$\overline{AB}=\sqrt{(-1-2t)^2+(2t+3)^2}=\sqrt{8t^2+16t+10}$

$=\sqrt{8(t+1)^2+2}$

따라서 $t=-1$일 때 선분 AB의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

04 답 10

점 $P(a, b)$가 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로

$b=a+2$ ······㉠

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-2)^2+(b+1)^2=(a+3)^2+(b-2)^2$

$a^2-4a+b^2+2b+5=a^2+6a+b^2-4b+13$

$\therefore -5a+3b=4$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=3$

$\therefore a^2+b^2=1^2+3^2=10$

04-1 답 $P(1, 2)$

점 P가 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로 $P(a, a+1)$이라 하자.

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+(a+1+2)^2=(a-5)^2+(a+1-2)^2$

$2a^2+4a+10=2a^2-12a+26$

$16a=16 \qquad \therefore a=1$

$\therefore P(1, 2)$

05 답 ⑤

$P(a, 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-3)^2+(-4)^2=(a-1)^2+(-2)^2$

$a^2-6a+25=a^2-2a+5$

$4a=20 \qquad \therefore a=5$

또 $Q(0, b)$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(-3)^2+(b-4)^2=(-1)^2+(b-2)^2$

$b^2-8b+25=b^2-4b+5$

$4b=20 \qquad \therefore b=5$

따라서 $P(5, 0), Q(0, 5)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(-5)^2+5^2}=5\sqrt{2}$

05-1 답 ⑤

$P(a, 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-4)^2+(-4)^2=(a-3)^2+3^2$

$a^2-8a+32=a^2-6a+18$

$2a=14 \qquad \therefore a=7$

또 $Q(0, b)$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(-4)^2+(b-4)^2=(-3)^2+(b+3)^2$

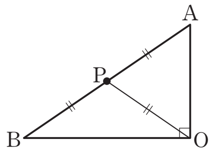
$b^2-8b+32=b^2+6b+18$

$14b=14 \qquad \therefore b=1$

따라서 $P(7, 0)$, $Q(0, 1)$이므로
$\overline{PQ}^2=(-7)^2+1^2=50$

06 답 100

삼각형 OAB의 외심이 변 AB 위에 있으므로 삼각형 OAB는 $\angle O=90°$인 직각삼각형이다.
삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 OAB의 외심을 P라 하면

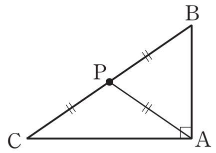


$\overline{OP}=\overline{AP}=\overline{BP}$ ……❶
이때 $\overline{OP}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$이므로
$\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{BP}=10$ ……❷
따라서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=\overline{AB}^2=10^2=100$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $\overline{OP}=\overline{AP}=\overline{BP}$임을 알 수 있다.	40%
❷ $\overline{OP}$의 길이를 이용하여 $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❸ $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2$의 값을 구할 수 있다.	30%

06-1 답 20

삼각형 ABC의 외심이 변 BC 위에 있으므로 삼각형 ABC는 $\angle A=90°$인 직각삼각형이다.
삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 외심을 P라 하면



$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$
이때 $\overline{AP}=\sqrt{(-1-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{5}$이므로
$\overline{BC}=\overline{BP}+\overline{CP}=2\sqrt{5}$
따라서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2=(2\sqrt{5})^2=20$

07 답 ②

$\overline{AB}=\sqrt{(-1-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$
$\overline{BC}=\sqrt{(-2+1)^2+(0-4)^2}=\sqrt{17}$
$\overline{CA}=\sqrt{(2+2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{17}$
$\therefore \overline{BC}=\overline{CA}$
따라서 삼각형 ABC는 $\overline{BC}=\overline{CA}$인 이등변삼각형이다.

07-1 답 ④

$\overline{AB}=\sqrt{(-1-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{13}$
$\overline{BC}=\sqrt{(4+1)^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$
$\overline{CA}=\sqrt{(2-4)^2+3^2}=\sqrt{13}$
$\therefore \overline{AB}=\overline{CA}$, $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$
따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{CA}$이고 $\overline{BC}$를 빗변으로 하는 $\angle A=90°$인 직각이등변삼각형이다.

08 답 15

삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$
$\overline{AB}=\sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$
$\overline{BC}=\sqrt{(a-1)^2+(b+2)^2}=\sqrt{a^2+b^2-2a+4b+5}$
$\overline{CA}=\sqrt{(-1-a)^2+(2-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2+2a-4b+5}$
$\overline{BC}=\overline{CA}$에서 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로
$a^2+b^2-2a+4b+5=a^2+b^2+2a-4b+5$
$\therefore a=2b$ ……㉠
$\overline{BC}=\overline{AB}$에서 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$이므로
$a^2+b^2-2a+4b+5=20$
$\therefore a^2+b^2-2a+4b-15=0$
㉠을 위의 식에 대입하면 $4b^2+b^2-4b+4b-15=0$
$5b^2=15$ $\quad\therefore b^2=3$
㉠에서 $a^2=4b^2=4\times3=12$이므로
$a^2+b^2=12+3=15$

08-1 답 5

삼각형 OAB가 정삼각형이므로 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{AB}$
$\overline{OA}=\sqrt{a^2}=a$
$\overline{OB}=\sqrt{1^2+b^2}$
$\overline{AB}=\sqrt{(1-a)^2+b^2}=\sqrt{a^2-2a+b^2+1}$
$\overline{OA}=\overline{OB}$에서 $\overline{OA}^2=\overline{OB}^2$이므로
$a^2=1+b^2$ ……㉠
$\overline{OB}=\overline{AB}$에서 $\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$이므로
$1+b^2=a^2-2a+b^2+1$, $a^2-2a=0$
$a(a-2)=0$ $\quad\therefore a=2\ (\because a>0)$
$a=2$를 ㉠에 대입하면 $4=1+b^2$ $\quad\therefore b^2=3$
$\therefore a+b^2=2+3=5$

09 답 ⑤

$\overline{AB}=\sqrt{(2+3)^2+(-5)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$
$\overline{BC}=\sqrt{(-1-2)^2+k^2}=\sqrt{k^2+9}$
$\overline{CA}=\sqrt{(-3+1)^2+(5-k)^2}=\sqrt{k^2-10k+29}$
이때 삼각형 ABC는 $\angle C=90°$인 직각삼각형이므로
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$
즉 $50=k^2+9+k^2-10k+29$이므로
$k^2-5k-6=0$, $(k+1)(k-6)=0$
$\therefore k=-1$ 또는 $k=6$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은
$-1+6=5$

09-1 답 −2

$\overline{AB}=\sqrt{(-2a+1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{4a^2-4a+2}$
$\overline{BC}=\sqrt{(1+2a)^2+a^2}=\sqrt{5a^2+4a+1}$
$\overline{CA}=\sqrt{(-1-1)^2+(1-a)^2}=\sqrt{a^2-2a+5}$
이때 삼각형 ABC는 $\angle C=90°$인 직각이등변삼각형이므로
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$, $\overline{BC}=\overline{CA}$
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$에서
$4a^2-4a+2=5a^2+4a+1+a^2-2a+5$
$a^2+3a+2=0$, $(a+1)(a+2)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=-2$
그런데 $a=-1$이면 $\overline{BC}\neq\overline{CA}$이므로 $a=-2$

10 답 ②

$O(0, 0)$, $P(x, y)$, $A(2, -4)$라 하면
$\sqrt{x^2+y^2}=\overline{OP}$, $\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}=\overline{AP}$

$\therefore \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}=\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{AP}}$
$\geq \overline{\mathrm{OA}}$
$=\sqrt{2^2+(-4)^2}$
$=2\sqrt{5}$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다.

10-1 답 ①

$\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{A}(3, -2)$라 하면

$\sqrt{x^2+y^2}=\overline{\mathrm{OP}}$, $\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}=\overline{\mathrm{AP}}$

$\therefore \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}=\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{AP}}$
$\geq \overline{\mathrm{OA}}$
$=\sqrt{3^2+(-2)^2}$
$=\sqrt{13}$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{13}$이다.

11 답 $2\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값이 최소인 경우는 점 P가 $\overline{\mathrm{AB}}$ 위에 있을 때이다.

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}} \geq \overline{\mathrm{AB}}$
$=\sqrt{(4-2)^2+(7-3)^2}$
$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다.

11-1 답 $2\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값이 최소인 경우는 점 P가 $\overline{\mathrm{AB}}$ 위에 있을 때이다.

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}} \geq \overline{\mathrm{AB}}$ ······❶
$=\sqrt{(1-3)^2+(4+2)^2}$
$=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{10}$이다. ······❷

채점 기준	비율
❶ $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값이 최소인 경우를 구할 수 있다.	70%
❷ $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구할 수 있다.	30%

12 답 $2\sqrt{10}$

$\mathrm{A}(3, -2)$, $\mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{B}(1, 4)$라 하면

$\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}=\overline{\mathrm{AP}}$, $\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}=\overline{\mathrm{BP}}$

$\therefore \sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}$
$=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$
$\geq \overline{\mathrm{AB}}$
$=\sqrt{(1-3)^2+(4+2)^2}$
$=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{10}$이다.

12-1 답 $3\sqrt{5}$

$\mathrm{A}(2, 4)$, $\mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{B}(-1, -2)$라 하면

$\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\overline{\mathrm{AP}}$, $\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\overline{\mathrm{BP}}$

$\therefore \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}$
$=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$
$\geq \overline{\mathrm{AB}}$
$=\sqrt{(-1-2)^2+(-2-4)^2}$
$=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

따라서 구하는 최솟값은 $3\sqrt{5}$이다.

13 답 58

점 P는 x축 위의 점이므로 $\mathrm{P}(a, 0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=a^2+(-2)^2+(a-6)^2+(-6)^2$
$=2a^2-12a+76$
$=2(a-3)^2+58$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$은 $a=3$일 때 최솟값 58을 갖는다.

13-1 답 ④

$\mathrm{P}(a, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=(a+1)^2+(-3)^2+(a-9)^2+(-7)^2$
$=2a^2-16a+140$
$=2(a-4)^2+108$

즉 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$은 $a=4$일 때 최솟값 108을 갖는다.

따라서 $a=4$, $b=108$이므로

$a+b=4+108=112$

14 답 $(1, 3)$

점 P는 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로 $\mathrm{P}(a, a+2)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=(a-1)^2+(a+4)^2+(a-5)^2+(a-2)^2$
$=4a^2-8a+46$
$=4(a-1)^2+42$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$은 $a=1$일 때 최솟값 42를 가지므로 점 P의 좌표는 $(1, 3)$이다.

14-1 답 $-\frac{5}{2}$

점 P는 직선 $y=-x-3$ 위의 점이므로 $\mathrm{P}(a, -a-3)$이라 하면 ······❶

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=(a-3)^2+(-a-2)^2+(a-2)^2+(-a-13)^2$
$=4a^2+20a+186$
$=4\left(a+\frac{5}{2}\right)^2+161$ ······❷

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$은 $a=-\frac{5}{2}$일 때 최솟값 161을 가지므로 점 P의 x좌표는 $-\frac{5}{2}$이다. ······❸

채점 기준	비율
❶ 점 P의 좌표를 a로 나타낼 수 있다.	20%
❷ $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❸ $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소일 때의 점 P의 x좌표를 구할 수 있다.	30%

15 답 ②

$\mathrm{P}(a, b)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$
$=(a+1)^2+(b-2)^2+(a-4)^2+(b-6)^2+a^2+(b-1)^2$
$=3a^2-6a+3b^2-18b+58$
$=3(a-1)^2+3(b-3)^2+28$

이때 a, b는 실수이므로 $(a-1)^2\geq 0$, $(b-3)^2\geq 0$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$은 $a=1$, $b=3$일 때 최솟값 28을 가지므로

$a+b=1+3=4$

15-1 답 57

P(a, b)이므로

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$=(a-5)^2+b^2+a^2+(b-3)^2+(a-1)^2+(b+6)^2$

$=3a^2-12a+3b^2+6b+71$

$=3(a-2)^2+3(b+1)^2+56$

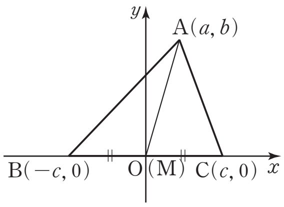
이때 a, b는 실수이므로 $(a-2)^2\ge 0$, $(b+1)^2\ge 0$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$은 $a=2$, $b=-1$일 때 최솟값 $m=56$을 갖는다.

$\therefore a+b+m=2+(-1)+56=57$

16 답 ⑤

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 직선 BC를 x축으로 놓고, 변 BC의 중점 M을 원점 O가 되도록 놓으면 두 점 B, C의 좌표는 B$(-c, 0)$, C$(c, 0)$ $(c>0)$으로 나타낼 수 있다.



점 A의 좌표를 (a, b)라 하면

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(a+c)^2+b^2+\boxed{\text{(가)}\ (a-c)^2+b^2}$

$=2(a^2+b^2+c^2)$ ……㉠

이때 $\overline{AM}^2=\boxed{\text{(나)}\ a^2+b^2}$, $\overline{BM}^2=\boxed{\text{(다)}\ c^2}$이므로

$2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)=\boxed{\text{(라)}\ 2(a^2+b^2+c^2)}$ ……㉡

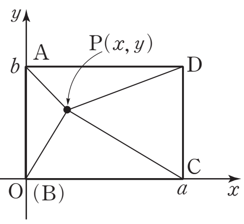
㉠, ㉡에 의하여 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

> **참고** 위와 같은 삼각형의 성질을 파푸스(Pappus)의 정리 또는 중선 정리라 한다.

16-1 답 ③

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 $\boxed{\text{(가)}\ \mathrm{B}}$는 원점이다.

이때 나머지 세 꼭짓점의 좌표를 각각 A$(0, b)$, C$(a, 0)$, D(a, b)라 하고 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면



$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\boxed{\text{(나)}\ x^2+(y-b)^2}+(x-a)^2+y^2$

$\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=\boxed{\text{(다)}\ x^2+y^2}+(x-a)^2+(y-b)^2$

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$

17 답 $2\sqrt{3}$

점 M은 선분 BC의 중점이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

$8^2+4^2=2\{\overline{AM}^2+(2\sqrt{7})^2\}$, $80=2\overline{AM}^2+56$

$\overline{AM}^2=12$ $\therefore \overline{AM}=2\sqrt{3}$

17-1 답 5

$\angle A=90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=6$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{8^2+6^2}=10$ $\therefore \overline{BM}=\overline{MC}=5$

이때 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이므로

$8^2+6^2=2(\overline{AM}^2+5^2)$, $100=2\overline{AM}^2+50$

$\overline{AM}^2=25$ $\therefore \overline{AM}=5$

18 답 ④

$\mathrm{P}\left(\frac{1\times6+2\times3}{1+2}, \frac{1\times(-2)+2\times4}{1+2}\right)$ $\therefore$ P$(4, 2)$

$\mathrm{Q}\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{-1-5}{2}\right)$ $\therefore$ Q$(0, -3)$

따라서 선분 PQ의 길이는

$\sqrt{(-4)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{41}$

18-1 답 ②

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times5+1\times8}{2+1}, \frac{2\times(-2)+1\times1}{2+1}\right)$ $\therefore (6, -1)$

따라서 점 $(6, -1)$과 원점 사이의 거리는

$\sqrt{6^2+(-1)^2}=\sqrt{37}$

19 답 ⑤

선분 AB를 $3:4$로 내분하는 점의 좌표가 $(-5, 5)$이므로

$\frac{3\times(-1)+4\times a}{3+4}=-5$, $\frac{3\times b+4\times2}{3+4}=5$

$-3+4a=-35$, $3b+8=35$

$\therefore a=-8$, $b=9$

$\therefore a+b=-8+9=1$

19-1 답 ①

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(9, 5)$이므로

$\frac{2\times b+1\times(-1)}{2+1}=9$, $\frac{2\times3+1\times a}{2+1}=5$

$2b-1=27$, $6+a=15$

$\therefore a=9$, $b=14$

$\therefore b-a=14-9=5$

20 답 6

선분 AB를 $3:m$으로 내분하는 점의 좌표가 $(4, 1)$이므로

$\frac{3\times a+m\times4}{3+m}=4$ ……㉠

$\frac{3\times3+m\times(-2)}{3+m}=1$ ……㉡ ……❶

㉡에서 $\frac{9-2m}{3+m}=1$이므로

$9-2m=3+m$ $\therefore m=2$

㉠에서 $\frac{3a+8}{5}=4$이므로

$3a+8=20$ $\therefore a=4$ ……❷

$\therefore a+m=4+2=6$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 선분 AB를 $3:m$으로 내분하는 점의 좌표가 $(4, 1)$임을 이용하여 식을 세울 수 있다.	40%
❷ a, m의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+m$의 값을 구할 수 있다.	20%

20-1 답 ①

선분 AB를 $m:(m+1)$로 내분하는 점의 좌표가 $(3, -1)$이므로

$\frac{m\times6+(m+1)\times1}{m+m+1}=3$ ……㉠

$\dfrac{m\times a+(m+1)\times(-5)}{m+m+1}=-1$ ⋯⋯㉡

㉠에서 $\dfrac{7m+1}{2m+1}=3$이므로

$7m+1=6m+3 \qquad \therefore m=2$

㉡에서 $\dfrac{2a-15}{5}=-1$이므로

$2a-15=-5 \qquad \therefore a=5$

$\therefore a+m=5+2=7$

21 답 $\frac{1}{8}<t<\frac{1}{2}$

$t:(1-t)$에서 $t>0,\ 1-t>0 \qquad \therefore 0<t<1$ ⋯⋯㉠

$\mathrm{P}(a, b)$라 하면

$a=\dfrac{t\times7+(1-t)\times(-1)}{t+(1-t)}=8t-1$

$b=\dfrac{t\times(-2)+(1-t)\times2}{t+(1-t)}=-4t+2$

이때 점 P가 제1사분면 위에 있으므로 $a>0,\ b>0$

즉 $8t-1>0,\ -4t+2>0$이므로 $\frac{1}{8}<t<\frac{1}{2}$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{8}<t<\frac{1}{2}$

21-1 답 $\frac{1}{6}$

$t:(1-t)$에서 $t>0,\ 1-t>0 \qquad \therefore 0<t<1$ ⋯⋯㉠

$\mathrm{P}(p, q)$라 하면

$p=\dfrac{t\times2+(1-t)\times(-4)}{t+(1-t)}=6t-4$

$q=\dfrac{t\times3+(1-t)\times(-1)}{t+(1-t)}=4t-1$

이때 점 P가 제2사분면 위에 있으므로 $p<0,\ q>0$

즉 $6t-4<0,\ 4t-1>0$이므로 $\frac{1}{4}<t<\frac{2}{3}$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{4}<t<\frac{2}{3}$

따라서 $a=\frac{1}{4},\ b=\frac{2}{3}$이므로 $ab=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

22 답 $-\frac{3}{2}$

선분 AB를 $4:3$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}\left(\dfrac{4\times4+3\times(-1)}{4+3}, \dfrac{4\times a+3\times2}{4+3}\right) \qquad \therefore \mathrm{P}\left(\dfrac{13}{7}, \dfrac{4a+6}{7}\right)$

이때 점 P는 x축 위의 점이므로 점 P의 y좌표는 0이다.

즉 $\dfrac{4a+6}{7}=0$이므로 $a=-\frac{3}{2}$

22-1 답 ④

선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}\left(\dfrac{m\times(-4)+n\times1}{m+n}, \dfrac{m\times(-1)+n\times3}{m+n}\right)$

$\therefore \mathrm{P}\left(\dfrac{-4m+n}{m+n}, \dfrac{-m+3n}{m+n}\right)$

이때 점 P는 y축 위의 점이므로 점 P의 x좌표는 0이다.

즉 $\dfrac{-4m+n}{m+n}=0$이므로 $-4m+n=0 \qquad \therefore 4m=n$

m, n은 서로소인 자연수이므로 $m=1,\ n=4$

$\therefore m+n=1+4=5$

23 답 3

선분 AB를 $k:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{k\times7+2\times1}{k+2}, \dfrac{k\times1+2\times(-3)}{k+2}\right) \qquad \therefore \left(\dfrac{7k+2}{k+2}, \dfrac{k-6}{k+2}\right)$

이 점이 직선 $x+y=4$ 위에 있으므로

$\dfrac{7k+2}{k+2}+\dfrac{k-6}{k+2}=4,\ 7k+2+k-6=4k+8$

$4k=12 \qquad \therefore k=3$

23-1 답 3

선분 PQ를 $k:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{k\times2+1\times(-2)}{k+1}, \dfrac{k\times3+1\times(-1)}{k+1}\right)$

$\therefore \left(\dfrac{2k-2}{k+1}, \dfrac{3k-1}{k+1}\right)$ ⋯⋯❶

이 점이 직선 $2x+y=4$ 위에 있으므로

$2\times\dfrac{2k-2}{k+1}+\dfrac{3k-1}{k+1}=4,\ 4k-4+3k-1=4k+4$

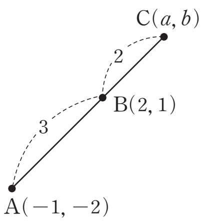
$3k=9 \qquad \therefore k=3$ ⋯⋯❷

채점 기준	비율
❶ 선분 PQ를 $k:1$로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	60%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40%

24 답 ②

$2\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:2$

오른쪽 그림과 같이 점 B는 선분 AC를 $3:2$로 내분하는 점이므로



$\dfrac{3\times a+2\times(-1)}{3+2}=2,$

$\dfrac{3\times b+2\times(-2)}{3+2}=1$

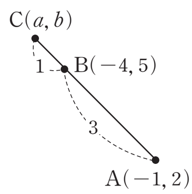
$3a-2=10,\ 3b-4=5 \qquad \therefore a=4,\ b=3$

$\therefore a+b=4+3=7$

24-1 답 ②

$\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:1$

오른쪽 그림과 같이 점 B는 선분 AC를 $3:1$로 내분하는 점이므로



$\dfrac{3\times a+1\times(-1)}{3+1}=-4,$

$\dfrac{3\times b+1\times2}{3+1}=5$

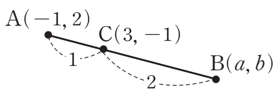
$3a-1=-16,\ 3b+2=20 \qquad \therefore a=-5,\ b=6$

$\therefore a+b=-5+6=1$

25 답 ③

$2\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:2$

오른쪽 그림과 같이 점 C는 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이므로



$\dfrac{1\times a+2\times(-1)}{1+2}=3,$

$\dfrac{1\times b+2\times2}{1+2}=-1$

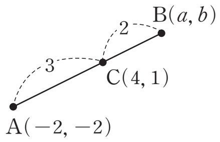
$a-2=9,\ b+4=-3 \qquad \therefore a=11,\ b=-7$

$\therefore a+2b=11+2\times(-7)=-3$

25-1 답 24

$2\overline{AC}=3\overline{BC}$에서 $\overline{AC}:\overline{BC}=3:2$

오른쪽 그림과 같이 점 C는 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점이므로



$\dfrac{3\times a+2\times(-2)}{3+2}=4$,

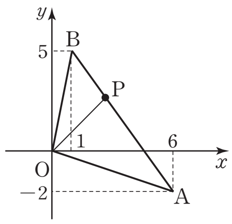
$\dfrac{3\times b+2\times(-2)}{3+2}=1$

$3a-4=20$, $3b-4=5$ $\quad\therefore a=8, b=3$

$\therefore ab=8\times3=24$

26 답 $\mathrm{P}\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$

오른쪽 그림의 삼각형 ABO에서 두 삼각형 AOP, BOP의 밑변을 각각 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$라 하면 두 삼각형의 높이가 같으므로



$\triangle AOP:\triangle BOP=\overline{AP}:\overline{BP}$ ……❶

이때 $\triangle AOP=2\triangle BOP$이므로

$\triangle AOP:\triangle BOP=2:1$

$\therefore \overline{AP}:\overline{BP}=2:1$ ……❷

따라서 점 P는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로

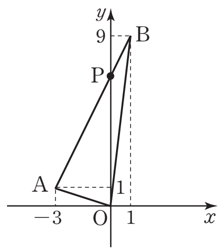
$\mathrm{P}\left(\dfrac{2\times1+1\times6}{2+1}, \dfrac{2\times5+1\times(-2)}{2+1}\right)$

$\therefore \mathrm{P}\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 두 삼각형 AOP, BOP의 높이가 같음을 이용하여 $\triangle AOP:\triangle BOP$를 선분의 길이의 비로 표현할 수 있다.	60%
❷ $\overline{AP}:\overline{BP}$를 구할 수 있다.	20%
❸ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	20%

26-1 답 P(0, 7)

오른쪽 그림의 삼각형 ABO에서 두 삼각형 AOP, BOP의 밑변을 각각 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$라 하면 두 삼각형의 높이가 같으므로



$\triangle AOP:\triangle BOP=\overline{AP}:\overline{BP}$

이때 $\triangle AOP=3\triangle BOP$이므로

$\triangle AOP:\triangle BOP=3:1$

$\therefore \overline{AP}:\overline{BP}=3:1$

따라서 점 P는 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$\mathrm{P}\left(\dfrac{3\times1+1\times(-3)}{3+1}, \dfrac{3\times9+1\times1}{3+1}\right)$

$\therefore \mathrm{P}(0, 7)$

27 답 ①

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1, 2)$이므로

$\dfrac{(3a+8)+(2b-1)+0}{3}=1$

$\dfrac{1+(-a)+(-b+4)}{3}=2$

$\therefore 3a+2b=-4$, $a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=1$

$\therefore ab=-2\times1=-2$

27-1 답 19

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(2, -2)$이므로

$\dfrac{a+b+3}{3}=2$, $\dfrac{-2+1+ab}{3}=-2$

$\therefore a+b=3$, $ab=-5$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\times(-5)=19$

28 답 ②

삼각형 PQR의 무게중심의 좌표가 (a, b)이므로

$a=\dfrac{1+5+4}{3}=\dfrac{10}{3}$, $b=\dfrac{3+(-1)+4}{3}=2$

$\therefore 3a+b=3\times\dfrac{10}{3}+2=12$

28-1 답 ②

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (a, b)이므로

$a=\dfrac{8+(-3)+6}{3}=\dfrac{11}{3}$, $b=\dfrac{-2+4+(-6)}{3}=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore 9ab=9\times\dfrac{11}{3}\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)=-44$

29 답 ①

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(3, b)$이므로

$\dfrac{4+a+6}{3}=3$, $\dfrac{2+0+1}{3}=b$

$\therefore a=-1$, $b=1$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+1^2=2$

29-1 답 ①

삼각형 PQR의 무게중심의 좌표가 $(3, b)$이므로

$\dfrac{5+(-2)+a}{3}=3$, $\dfrac{-3+(-4)+1}{3}=b$

$\therefore a=6$, $b=-2$

$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{6}{-2}=-3$

30 답 ⑤

삼각형 OAB의 무게중심의 좌표가 $(4, 2)$이므로

$\dfrac{0+x_1+x_2}{3}=4$, $\dfrac{0+y_1+y_2}{3}=2$

$x_1+x_2=12$, $y_1+y_2=6$

$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{2}=6$, $\dfrac{y_1+y_2}{2}=3$

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는 $(6, 3)$이다.

30-1 답 ②

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(-3, -1)$이므로

$\dfrac{1+x_1+x_2}{3}=-3$, $\dfrac{2+y_1+y_2}{3}=-1$

$x_1+x_2=-10$, $y_1+y_2=-5$

$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{2}=-5$, $\dfrac{y_1+y_2}{2}=-\dfrac{5}{2}$

따라서 선분 BC의 중점의 좌표는 $\left(-5, -\dfrac{5}{2}\right)$이다.

31 답 (1, −1)

삼각형 ABC의 무게중심은 삼각형 PQR의 무게중심과 일치하므로

$\left(\frac{4+1-2}{3}, \frac{-1+3-5}{3}\right)$ $\quad\therefore (1, -1)$

31-1 답 ④

삼각형 DEF의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로

$G\left(\frac{3-1-5}{3}, \frac{2-1+8}{3}\right)$

$\therefore G(-1, 3)$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로

$b-a=3-(-1)=4$

다른 풀이

세 점 D, E, F의 좌표는

$D\left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $E\left(-\frac{13}{5}, \frac{13}{5}\right)$, $F\left(-\frac{9}{5}, \frac{28}{5}\right)$이므로

$G\left(\frac{\frac{7}{5}-\frac{13}{5}-\frac{9}{5}}{3}, \frac{\frac{4}{5}+\frac{13}{5}+\frac{28}{5}}{3}\right)$

$\therefore G(-1, 3)$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로

$b-a=3-(-1)=4$

32 답 ⑤

삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 $M(1, -2)$라 하면 무게중심 G는 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\frac{2\times1+1\times a}{2+1}=0$, $\frac{2\times(-2)+1\times b}{2+1}=0$

$\therefore a=-2, b=4$

$\therefore b-a=4-(-2)=6$

32-1 답 ⑤

삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 $M(1, 3)$이라 하면 무게중심 G는 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$a=\frac{2\times1+1\times(-2)}{2+1}=0$

$b=\frac{2\times3+1\times4}{2+1}=\frac{10}{3}$

$\therefore a+3b=0+3\times\frac{10}{3}=10$

33 답 (2, −3)

$S(a, b)$라 하면 두 대각선 PR, QS의 중점이 일치하므로

$\frac{6-3}{2}=\frac{1+a}{2}$, $\frac{0-2}{2}=\frac{1+b}{2}$

$\therefore a=2, b=-3$

$\therefore S(2, -3)$

33-1 답 (8, 4)

$S(a, b)$라 하면 두 대각선 PR, QS의 중점이 일치하므로

$\frac{4+6}{2}=\frac{2+a}{2}$, $\frac{6-2}{2}=\frac{0+b}{2}$

$\therefore a=8, b=4$

$\therefore S(8, 4)$

34 답 ②

$B(p, q)$라 하면 변 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-2+p}{2}, \frac{4+q}{2}\right)$이므로

$\frac{-2+p}{2}=0$, $\frac{4+q}{2}=0$ $\quad\therefore p=2, q=-4$

$\therefore B(2, -4)$

$C(r, s)$라 하면 변 BC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+r}{2}, \frac{-4+s}{2}\right)$이므로

$\frac{2+r}{2}=5$, $\frac{-4+s}{2}=-7$ $\quad\therefore r=8, s=-10$

$\therefore C(8, -10)$

이때 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\frac{-2+8}{2}=\frac{2+a}{2}$, $\frac{4-10}{2}=\frac{-4+b}{2}$ $\quad\therefore a=4, b=-2$

$\therefore a^2+b^2=4^2+(-2)^2=20$

34-1 답 (14, −16)

$B(a, b)$라 하면 변 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-4+a}{2}, \frac{6+b}{2}\right)$이므로

$\frac{-4+a}{2}=0$, $\frac{6+b}{2}=0$ $\quad\therefore a=4, b=-6$

$\therefore B(4, -6)$

$D(c, d)$라 하면 변 AD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-4+c}{2}, \frac{6+d}{2}\right)$이므로

$\frac{-4+c}{2}=1$, $\frac{6+d}{2}=1$ $\quad\therefore c=6, d=-4$

$\therefore D(6, -4)$

$C(x, y)$라 하면 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\frac{-4+x}{2}=\frac{4+6}{2}$, $\frac{6+y}{2}=\frac{-6-4}{2}$ $\quad\therefore x=14, y=-16$

$\therefore C(14, -16)$

35 답 ④

두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 중점의 y좌표는

$\frac{7+b}{2}=\frac{a-2}{2}$ $\quad\therefore a=b+9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $\overline{CD}=\overline{DA}$에서 $\overline{CD}^2=\overline{DA}^2$이므로

$(4+5)^2+(-2-b)^2=(1-4)^2+(7+2)^2$

$b^2+4b-5=0$, $(b+5)(b-1)=0$

$\therefore b=1$ ($\because$ b는 자연수)

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $a=10$

$\therefore a+b=10+1=11$

35-1 답 ⑤

두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\frac{3+b}{2}=\frac{7-2}{2}$, $\frac{-1+8}{2}=\frac{a+c}{2}$

$\therefore b=2, a+c=7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(7-3)^2+(a+1)^2=(b-7)^2+(8-a)^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$b=2$를 ㉡에 대입하면

$a^2+2a+17=a^2-16a+89$

$18a=72$ $\quad\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$4+c=7$ $\quad\therefore c=3$

$\therefore a^2+b^2+c^2=4^2+2^2+3^2=29$

유형+ 완성하기 p. 21

36 답 $(4, 1)$

$\overline{AB}=\sqrt{(-2-4)^2+(-1-5)^2}=6\sqrt{2}$

$\overline{AC}=\sqrt{(7-4)^2+(2-5)^2}=3\sqrt{2}$

$\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

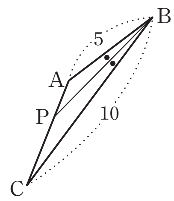
$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=6\sqrt{2}:3\sqrt{2}=2:1$

따라서 점 D는 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$D\left(\frac{2\times7+1\times(-2)}{2+1}, \frac{2\times2+1\times(-1)}{2+1}\right)$

$\therefore D(4, 1)$

37 답 -5



$\overline{AB}=\sqrt{(3+1)^2+(5-2)^2}=5$

$\overline{BC}=\sqrt{(-3-3)^2+(-3-5)^2}=10$

$\overline{BP}$는 $\angle B$의 이등분선이므로

$\overline{AP}:\overline{CP}=\overline{AB}:\overline{BC}=5:10=1:2$

즉 점 P는 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이므로

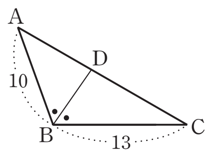
$P\left(\frac{1\times(-3)+2\times(-1)}{1+2}, \frac{1\times(-3)+2\times2}{1+2}\right)$

$\therefore P\left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$

따라서 $a=-\frac{5}{3}$, $b=\frac{1}{3}$이므로

$9ab=9\times\left(-\frac{5}{3}\right)\times\frac{1}{3}=-5$

38 답 ③



$\overline{AB}=\sqrt{(4+4)^2+(0-6)^2}=10$

$\overline{BC}=\sqrt{(9-4)^2+12^2}=13$

$\overline{BD}$는 $\angle B$의 이등분선이므로

$\overline{AD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{BC}=10:13$

이때 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같으므로

$\triangle DAB:\triangle DBC=\overline{AD}:\overline{CD}=10:13$

따라서 $p=10$, $q=13$이므로

$p+q=10+13=23$

39 답 $2x-5y-2=0$

점 B의 좌표를 (a, b), 선분 AB를 $4:1$로 내분하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{4\times a+1\times10}{4+1}=\frac{4a+10}{5}$

$y=\frac{4\times b+1\times(-2)}{4+1}=\frac{4b-2}{5}$

$\therefore a=\frac{5x-10}{4}$, $b=\frac{5y+2}{4}$ ······㉠

이때 점 B는 직선 $2x-5y+5=0$ 위의 점이므로

$2a-5b+5=0$ ······㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2\times\frac{5x-10}{4}-5\times\frac{5y+2}{4}+5=0$

$\therefore 2x-5y-2=0$

40 답 $3x-5y-1=0$

두 점 A, B에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(x+2)^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y+3)^2$

$x^2+4x+y^2-4y+8=x^2-2x+y^2+6y+10$

$6x-10y-2=0 \qquad \therefore 3x-5y-1=0$

41 답 ③

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overline{PA}^2=(x+3)^2+y^2$, $\overline{PB}^2=(x-3)^2+(y+4)^2$

이때 $\overline{PB}^2-\overline{PA}^2=12$이므로

$(x-3)^2+(y+4)^2-\{(x+3)^2+y^2\}=12$

$x^2-6x+y^2+8y+25-(x^2+6x+y^2+9)=12$

$-12x+8y+4=0 \qquad \therefore 3x-2y-1=0$

학교 시험 대비 문제 p. 22~25

01 답 $-11, 3$

$\overline{AC}=\overline{BC}$이므로 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$

$(-4-1)^2+5^2=(-4-a)^2+(5-4)^2$

$50=a^2+8a+17$, $a^2+8a-33=0$

$(a+11)(a-3)=0$

$\therefore a=-11$ 또는 $a=3$

02 답 ②

$\overline{AB}=4$이므로

$\sqrt{(a+a)^2+(2-a)^2}=4$, $\sqrt{5a^2-4a+4}=4$

양변을 제곱하면 $5a^2-4a+4=16$

$5a^2-4a-12=0$, $(5a+6)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

03 답 $(3, 5)$

$P(a, a+2)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+2)^2+(a+2)^2=(a-4)^2+(a+2+2)^2$

$2a^2+8a+8=2a^2+32$, $8a=24$

$\therefore a=3$

따라서 점 P의 좌표는 $(3, 5)$이다.

04 답 ②

점 $P(a, b)$가 삼각형 ABC의 외심이므로 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+1)^2+(b-2)^2=(a-6)^2+(b-1)^2$

$a^2+2a+b^2-4b+5=a^2-12a+b^2-2b+37$

$14a-2b=32 \qquad \therefore 7a-b=16$ ······㉠

$\overline{AP}=\overline{CP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$(a+1)^2+(b-2)^2=(a-2)^2+(b-3)^2$

$a^2+2a+b^2-4b+5=a^2-4a+b^2-6b+13$

$6a+2b=8 \qquad \therefore 3a+b=4$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-2$

$\therefore ab=2\times(-2)=-4$

05 답 ③

$\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{25}=5$

$\overline{BC}=\sqrt{(5+2)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

$\overline{CA}=\sqrt{(1-5)^2+(2+1)^2}=\sqrt{25}=5$

$\therefore \overline{AB}=\overline{CA},\ \overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{CA}$이고 $\overline{BC}$를 빗변으로 하는 $\angle A=90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.

06 답 $2\sqrt{5}$

$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\overline{AB},\ \sqrt{x^2+(y-4)^2}=\overline{AC}$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}&=\overline{AB}+\overline{AC}\\&\geq\overline{BC}\\&=\sqrt{(-2)^2+4^2}\\&=2\sqrt{5}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다.

07 답 13

$\sqrt{x^2+y^2-2x+14y+50}=\sqrt{(x-1)^2+(y+7)^2}$

$\sqrt{x^2+y^2-12x-10y+61}=\sqrt{(x-6)^2+(y-5)^2}$

이때 $A(1,\ -7),\ P(x,\ y),\ B(6,\ 5)$라 하면

$\sqrt{(x-1)^2+(y+7)^2}=\overline{AP},\ \sqrt{(x-6)^2+(y-5)^2}=\overline{BP}$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\sqrt{(x-1)^2+(y+7)^2}+\sqrt{(x-6)^2+(y-5)^2}\\&=\overline{AP}+\overline{BP}\\&\geq\overline{AB}\\&=\sqrt{(6-1)^2+(5+7)^2}\\&=13\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 13이다.

08 답 ②

점 P는 y축 위의 점이므로 $P(0,\ a)$라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2&=2^2+(a-5)^2+(-k)^2+(a-1)^2\\&=2a^2-12a+k^2+30\\&=2(a-3)^2+k^2+12\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a=3$일 때 최솟값 k^2+12를 가지므로

$k^2+12=16,\ k^2=4\qquad \therefore k=2\ (\because k>0)$

09 답 ③

$P(a,\ b)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$=(a-4)^2+b^2+(a+1)^2+(b-5)^2+(a-6)^2+(b+8)^2$

$=3a^2-18a+3b^2+6b+142$

$=3(a-3)^2+3(b+1)^2+112$

이때 $a,\ b$는 실수이므로 $(a-3)^2\geq0,\ (b+1)^2\geq0$

즉 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$은 $a=3,\ b=-1$일 때 최솟값 112를 가지므로 점 P의 좌표는 $(3,\ -1)$이다.

따라서 점 $P(3,\ -1)$과 원점 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

10 답 3

점 M은 선분 BC의 중점이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

$6^2+(\sqrt{14})^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$

$50=2\overline{AM}^2+32,\ \overline{AM}^2=9$

$\therefore \overline{AM}=3$

11 답 7

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(b,\ 3)$이므로

$\dfrac{2\times5+1\times(-1)}{2+1}=b,\ \dfrac{2\times a+1\times1}{2+1}=3$

즉 $b=3,\ 2a+1=9$이므로

$a=4,\ b=3$

$\therefore a+b=4+3=7$

12 답 $\dfrac{5}{3}$

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(0,\ 0)$이므로

$\dfrac{2\times(b+1)+1\times2}{2+1}=0,\ \dfrac{2\times(-1)+1\times(a+1)}{2+1}=0$

$2b+4=0,\ a-1=0$

$\therefore a=1,\ b=-2$

따라서 두 점 $B(-1,\ -1),\ C(3,\ -2)$에 대하여 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표가 $(p,\ q)$이므로

$p=\dfrac{1\times3+2\times(-1)}{1+2}=\dfrac{1}{3}$

$q=\dfrac{1\times(-2)+2\times(-1)}{1+2}=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore p-q=\dfrac{1}{3}-\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{5}{3}$

13 답 $\dfrac{7}{8}$

$t:(1-t)$에서 $t>0,\ 1-t>0\qquad \therefore 0<t<1\qquad$ ······㉠

$P(p,\ q)$라 하면

$p=\dfrac{t\times6+(1-t)\times(-2)}{t+(1-t)}=8t-2$

$q=\dfrac{t\times(-3)+(1-t)\times5}{t+(1-t)}=-8t+5$

이때 점 P가 제1사분면 위에 있으므로 $p>0,\ q>0$

즉 $8t-2>0,\ -8t+5>0$이므로

$\dfrac{1}{4}<t<\dfrac{5}{8}\qquad$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{1}{4}<t<\dfrac{5}{8}$

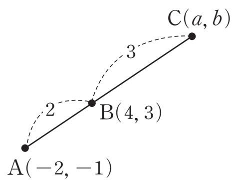
따라서 $a=\dfrac{1}{4},\ b=\dfrac{5}{8}$이므로

$a+b=\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{8}=\dfrac{7}{8}$

14 답 4

$3\overline{AB}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$

오른쪽 그림과 같이 점 B는 선분 AC를 $2:3$으로 내분하는 점이므로



$\dfrac{2\times a+3\times(-2)}{2+3}=4,$

$\dfrac{2\times b+3\times(-1)}{2+3}=3$

$2a-6=20,\ 2b-3=15\qquad \therefore a=13,\ b=9$

$\therefore a-b=13-9=4$

15 답 ④

점 B(a, b)라 하면 선분 AB의 중점의 좌표가 $(2, 0)$이므로

$\frac{7+a}{2}=2$, $\frac{5+b}{2}=0$ $\quad\therefore a=-3, b=-5$

$\therefore$ B$(-3, -5)$

점 C(c, d)라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(2, 1)$이므로

$\frac{7+(-3)+c}{3}=2$, $\frac{5+(-5)+d}{3}=1$ $\quad\therefore c=2, d=3$

$\therefore$ C$(2, 3)$

선분 BC를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times2+3\times(-3)}{2+3}, \frac{2\times3+3\times(-5)}{2+3}\right)$

$\therefore \left(-1, -\frac{9}{5}\right)$

따라서 $p=-1$, $q=-\frac{9}{5}$이므로

$pq=-1\times\left(-\frac{9}{5}\right)=\frac{9}{5}$

16 답 ⑤

삼각형 LMN의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로

$\frac{1+2+a}{3}=2$, $\frac{6+7+b}{3}=5$ $\quad\therefore a=3, b=2$

$\therefore a+b=3+2=5$

17 답 $(18, 8)$

B(a, b)라 하면 변 AB의 중점의 좌표가 $(0, 0)$이므로

$\frac{2+a}{2}=0$, $\frac{4+b}{2}=0$ $\quad\therefore a=-2, b=-4$

$\therefore$ B$(-2, -4)$

C(c, d)라 하면 변 BC의 중점의 좌표가 $(6, -2)$이므로

$\frac{-2+c}{2}=6$, $\frac{-4+d}{2}=-2$ $\quad\therefore c=14, d=0$

$\therefore$ C$(14, 0)$

D(x, y)라 하면 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\frac{2+14}{2}=\frac{-2+x}{2}$, $\frac{4+0}{2}=\frac{-4+y}{2}$ $\quad\therefore x=18, y=8$

$\therefore$ D$(18, 8)$

18 답 ④

두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\frac{1+b}{2}=\frac{-2+4}{2}$, $\frac{4-2}{2}=\frac{a+c}{2}$

$\therefore b=1, a+c=2$ ······ ㉠

또 $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(-2-1)^2+(a-4)^2=(b+2)^2+(-2-a)^2$ ······ ㉡

$b=1$을 ㉡에 대입하면

$a^2-8a+25=a^2+4a+13$

$-12a=-12$ $\quad\therefore a=1, c=1$ ($\because$ ㉠)

$\therefore abc=1\times1\times1=1$

19 답 ④

$\overline{AB}=\sqrt{(-5-1)^2+(-4-4)^2}=10$

$\overline{AC}=\sqrt{(5-1)^2+(1-4)^2}=5$

$\overline{AD}$는 $\angle$A의 이등분선이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=10:5=2:1$

이때 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같으므로

$\triangle ABD:\triangle ACD=\overline{BD}:\overline{CD}=2:1$

20 답 $3x+y-9=0$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overline{PA}^2=(x+1)^2+(y-3)^2$

$\overline{PB}^2=(x-2)^2+(y-4)^2$

이때 $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=8$이므로

$(x+1)^2+(y-3)^2-\{(x-2)^2+(y-4)^2\}=8$

$x^2+2x+y^2-6y+10-(x^2-4x+y^2-8y+20)=8$

$6x+2y-18=0$

$\therefore 3x+y-9=0$

21 답 ⑤

점 P(a, b)가 직선 $y=-x$ 위의 점이므로

$b=-a$

P(a, b), Q$(a-b, 4a+b)$에서 P$(a, -a)$, Q$(2a, 3a)$

선분 PQ의 중점 M의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{a+2a}{2}=\frac{3}{2}a$, $y=\frac{-a+3a}{2}=a$

즉 $a=\frac{2}{3}x$, $a=y$이므로 $y=\frac{2}{3}x$

$\therefore 2x-3y=0$

서술형 1 답 $(2, 0)$

P$(a, 0)$이라 하면 ······ ❶

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+(-4)^2=(a+2)^2+(-1)^2$

$a^2-2a+17=a^2+4a+5$

$-6a=-12$ $\quad\therefore a=2$ ······ ❷

따라서 점 P의 좌표는 $(2, 0)$이다. ······ ❸

채점 기준	비율
❶ 점 P의 좌표를 미지수를 이용하여 나타낼 수 있다.	30%
❷ ❶의 미지수의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	20%

서술형 2 답 18

선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{m\times(-2)+n\times9}{m+n}, \frac{m\times5+n\times(-1)}{m+n}\right)$

$\therefore \left(\frac{-2m+9n}{m+n}, \frac{5m-n}{m+n}\right)$ ······ ❶

이 점이 y축 위에 있으므로

$\frac{-2m+9n}{m+n}=0$, $-2m+9n=0$

$2m=9n$ $\quad\therefore m:n=9:2$

이때 m, n은 서로소인 자연수이므로

$m=9, n=2$ ······ ❷

$\therefore mn=9\times2=18$ ······ ❸

채점 기준	비율
❶ 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ m, n의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ mn의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 2

$\overline{AB}=\sqrt{(1+2)^2+(5-1)^2}=5$

$\overline{BC}=\sqrt{(7-1)^2+(-3-5)^2}=10$ ······❶

이때 $\overline{BP}$는 ∠B의 이등분선이므로

$\overline{AP}:\overline{CP}=\overline{AB}:\overline{BC}=5:10=1:2$ ······❷

즉 점 P는 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$P\left(\dfrac{1\times7+2\times(-2)}{1+2}, \dfrac{1\times(-3)+2\times1}{1+2}\right)$

$\therefore P\left(1, -\dfrac{1}{3}\right)$ ······❸

따라서 $a=1$, $b=-\dfrac{1}{3}$이므로

$a-3b=1-3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=2$ ······❹

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❷ $\overline{AP}:\overline{CP}$를 구할 수 있다.	30%
❸ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❹ $a-3b$의 값을 구할 수 있다.	10%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 26~27

01 답 29

$\overline{AB}=\sqrt{(4+1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{29}$

따라서 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는

$\overline{AB}^2=(\sqrt{29})^2=29$

02 답 ①

$n=4$일 때, 직선의 방정식은

$y=4x-2$

이때 이 직선이 곡선 $y=x^2+x$와 서로 다른 두 점에서 만나므로

$x^2+x=4x-2$에서 $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

즉 두 교점의 좌표는 A$(1, 2)$, B$(2, 6)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{17}$

03 답 ③

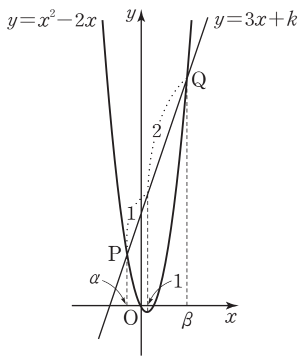
선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times6+2\times0}{1+2}, \dfrac{1\times0+2\times a}{1+2}\right)$ $\quad\therefore \left(2, \dfrac{2}{3}a\right)$

이 점이 직선 $y=-x$ 위의 점이므로

$\dfrac{2}{3}a=-2 \qquad \therefore a=-3$

04 답 14



두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=3x+k$가 만나는 점이 P, Q이므로 α, β는 이차방정식 $x^2-2x=3x+k$, 즉 $x^2-5x-k=0$의 두 실근과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$ ······㉠

$\alpha\beta=-k$ ······㉡

이때 선분 PQ를 1 : 2로 내분하는 점의 x좌표가 1이므로

$\dfrac{1\times\beta+2\times\alpha}{1+2}=1$

$\therefore 2\alpha+\beta=3$ ······㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$\alpha=-2$, $\beta=7$

㉡에서 $-k=\alpha\beta=-2\times7=-14$

$\therefore k=14$

05 답 ①

높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같으므로

$\triangle BOC:\triangle OAC=\overline{BO}:\overline{OA}=2:1$

즉 점 O는 선분 BA를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\dfrac{2\times3+1\times a}{2+1}=0$, $\dfrac{2\times1+1\times b}{2+1}=0$

$\therefore a=-6$, $b=-2$

$\therefore a+b=-6+(-2)=-8$

06 답 ⑤

삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면 점 G는 선분 AM을 2 : 1로 내분하는 점이므로

$G\left(\dfrac{2\times7+1\times1}{2+1}, \dfrac{2\times4+1\times1}{2+1}\right)$

$\therefore G(5, 3)$

따라서 $a=5$, $b=3$이므로

$a+b=5+3=8$

다른 풀이

두 점 B, C의 좌표를 B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)라 하면 변 BC의 중점의 좌표가 $(7, 4)$이므로

$\dfrac{x_1+x_2}{2}=7 \qquad \therefore x_1+x_2=14$

$\dfrac{y_1+y_2}{2}=4 \qquad \therefore y_1+y_2=8$

삼각형 ABC의 무게중심을 G(a, b)라 하면

$a=\dfrac{1+x_1+x_2}{3}=\dfrac{1+14}{3}=5$

$b=\dfrac{1+y_1+y_2}{3}=\dfrac{1+8}{3}=3$

$\therefore a+b=5+3=8$

07 답 ⑤

$\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(a+2)^2+b^2=a^2+(b-4)^2$

$a^2+4a+b^2+4=a^2+b^2-8b+16$

$4a+8b=12$

$\therefore a+2b=3$ ······㉠

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+0+a}{3}, \dfrac{0+4+b}{3}\right)$ $\quad\therefore \left(\dfrac{-2+a}{3}, \dfrac{4+b}{3}\right)$

이때 무게중심이 y축 위에 있으므로

$\dfrac{-2+a}{3}=0 \qquad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$2+2b=3 \qquad \therefore b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a+b=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

08 답 ①

직선 BC와 직선 DE가 평행하고 두 직선 AB, AC가 점 A에서 만나므로 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$ (AA 닮음)

이때 삼각형 ABC와 삼각형 ADE의 넓이의 비가 $4:1$이므로 닮음비는 $2:1$이다.

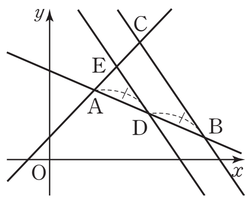
$\therefore \overline{AB}:\overline{AD}=2:1$

(i) 점 D가 $\overline{AB}$ 위의 점일 때

점 D는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$의 중점이므로

$D\left(\dfrac{2+7}{2}, \dfrac{3+1}{2}\right)$

$\therefore D\left(\dfrac{9}{2}, 2\right)$



(ii) 점 D가 $\overline{AB}$의 연장선 위의 점일 때

점 A는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{DB}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$D(a, b)$라 하면

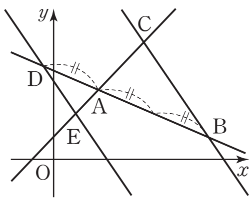
$\dfrac{1\times7+2\times a}{1+2}=2$,

$\dfrac{1\times1+2\times b}{1+2}=3$

$2a+7=6$, $2b+1=9$

$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$, $b=4$

$\therefore D\left(-\dfrac{1}{2}, 4\right)$



(i), (ii)에서 모든 점 D의 y좌표의 곱은

$2\times4=8$

09 답 116

정사각형 $A_3A_4B_4C_4$는 한 변의 길이가 18이므로 점 A_3의 좌표는 $(12, 0)$이다.

정사각형 $OA_1B_1C_1$, $A_1A_2B_2C_2$, $A_2A_3B_3C_3$은 서로 닮음이고 넓이의 비가 $1:4:9$이므로 정사각형의 한 변의 길이의 비는

$\overline{OA_1}:\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}=1:2:3$

이때 $\overline{OA_3}=12$이므로

$\overline{OA_1}=2$, $\overline{A_1A_2}=4$, $\overline{A_2A_3}=6$

$\therefore B_1(2, 2)$, $B_3(12, 6)$

$\therefore \overline{B_1B_3}^2=(12-2)^2+(6-2)^2=116$

10 답 ①

점 D가 선분 BC의 중점이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)$

$(2\sqrt{3})^2+\overline{AC}^2=2\{(\sqrt{7})^2+1^2\}$

$\overline{AC}^2=4 \qquad \therefore \overline{AC}=2$

즉 삼각형 ABC는 $\overline{CA}=\overline{CB}$인 이등변삼각형이다.

이등변삼각형 CAB에서 선분 CE가 $\angle ACB$의 이등분선이므로 선분 CE는 선분 AB의 수직이등분선이다.

직각삼각형 CEB에서 $\overline{BE}=\sqrt{3}$이므로

$\overline{CE}=\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{BE}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

점 P는 삼각형의 두 중선 AD, CE의 교점이다.

$\overline{AP}:\overline{PD}=2:1$에서 $\overline{AP}=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$, $\overline{PD}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

$\overline{CP}:\overline{PE}=2:1$에서 $\overline{CP}=\dfrac{2}{3}$, $\overline{PE}=\dfrac{1}{3}$

삼각형 EPA에서 선분 PR가 $\angle APE$의 이등분선이므로

$\overline{AR}:\overline{ER}=\overline{PA}:\overline{PE}=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}:\dfrac{1}{3}=2\sqrt{7}:1$

이때 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면 삼각형 EPA의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\dfrac{1}{6}$이므로

$S_1=S\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2\sqrt{7}+1}$

같은 방법으로 삼각형 CPD에서

$\overline{DQ}:\overline{CQ}=\overline{PD}:\overline{PC}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}:\dfrac{2}{3}=\sqrt{7}:2$

삼각형 PDC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\dfrac{1}{6}$이므로

$S_2=S\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{\sqrt{7}+2}$

$$\therefore \frac{S_2}{S_1}=\frac{S\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{\sqrt{7}+2}}{S\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2\sqrt{7}+1}}=\frac{2(2\sqrt{7}+1)}{\sqrt{7}+2}=\frac{2(2\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-2)}{(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)}=\frac{2(12-3\sqrt{7})}{3}=8-2\sqrt{7}$$

따라서 $a=8$, $b=-2$이므로

$ab=8\times(-2)=-16$

02 직선의 방정식

개념 완성하기 p.31~32

01 답 $y=-3x+11$

$y-(-1)=-3(x-4)\qquad \therefore y=-3x+11$

02 답 $y=\frac{1}{2}x+2$

$y-1=\frac{1}{2}\{x-(-2)\}\qquad \therefore y=\frac{1}{2}x+2$

03 답 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$

구하는 직선의 기울기는 $\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이고 점 $(\sqrt{3}, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3})\qquad \therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$

04 답 $y=x+3$

구하는 직선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$

따라서 기울기가 1이고 x절편이 -3, 즉 점 $(-3, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=1\times\{x-(-3)\}\qquad \therefore y=x+3$

05 답 $y=-2x+8$

$y-0=\frac{0-4}{4-2}(x-4)\qquad \therefore y=-2x+8$

06 답 $y=2x-1$

$y-1=\frac{5-1}{3-1}(x-1)\qquad \therefore y=2x-1$

07 답 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

$y-4=\frac{4-2}{3-(-1)}(x-3)\qquad \therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

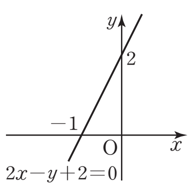
08 답 $x=1$

두 점의 x좌표가 서로 같으므로 구하는 직선의 방정식은 $x=1$

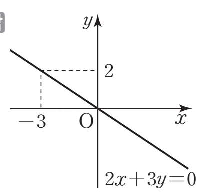
09 답 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$

10 답 $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$

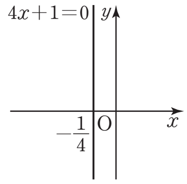
11 답



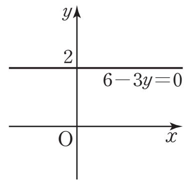
12 답



13 답



14 답



15 답 제1, 2, 3사분면

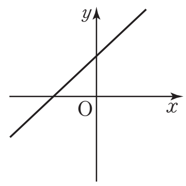
$ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $a>0$, $b<0$, $c>0$이므로

(기울기)$=-\frac{a}{b}>0$, (y절편)$=-\frac{c}{b}>0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 3사분면을 지난다.



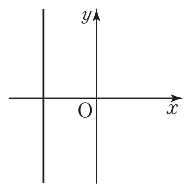
16 답 제2, 3사분면

$ax+by+c=0$에서 $b=0$이므로

$ax+c=0\qquad \therefore x=-\frac{c}{a}$

이때 $a<0$, $c<0$이므로 $-\frac{c}{a}<0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2, 3사분면을 지난다.



17 답 $(-2, -6)$

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(3x-y)k+(x+y+8)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$3x-y=0$, $x+y+8=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=-6$

$\therefore$ P$(-2, -6)$

18 답 $(2, 4)$

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x-y)k+(3x-y-2)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x-y=0$, $3x-y-2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=4$

$\therefore$ P$(2, 4)$

19 답 $(-5, 2)$

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+2y+1)k-(x+y+3)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+2y+1=0$, $x+y+3=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-5$, $y=2$

$\therefore$ P$(-5, 2)$

20 답 $(-1, 1)$
주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$(x-y+2)k+(2x+y+1)=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x-y+2=0$, $2x+y+1=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=1$
$\therefore$ P$(-1, 1)$

21 답 $x+y-3=0$
주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$3x-2y-4+k(x+2y-4)=0$ (k는 실수) ······㉠
이 직선이 점 $(-1, 4)$를 지나므로
$-15+3k=0$ $\qquad\therefore k=5$
$k=5$를 ㉠에 대입하면
$3x-2y-4+5(x+2y-4)=0$
$\therefore x+y-3=0$

22 답 $3x-4y+6=0$
주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$4x-3y+5+k(x+y-1)=0$ (k는 실수) ······㉠
이 직선이 점 $(2, 3)$을 지나므로
$4+4k=0$ $\qquad\therefore k=-1$
$k=-1$을 ㉠에 대입하면
$4x-3y+5-(x+y-1)=0$
$\therefore 3x-4y+6=0$

23 답 -3
두 직선이 평행하려면
$\frac{a}{1}=\frac{3}{a+2}\neq\frac{1}{1}$ ······㉠
$a(a+2)=3$, $a^2+2a-3=0$
$(a+3)(a-1)=0$ $\qquad\therefore a=-3$ 또는 $a=1$
㉠에서 $a\neq1$이므로 $a=-3$

24 답 1
두 직선이 일치하려면
$\frac{a}{1}=\frac{3}{a+2}=\frac{1}{1}$ $\qquad\therefore a=1$

25 답 $-\frac{3}{2}$
두 직선이 수직이려면
$a\times1+3(a+2)=0$, $4a+6=0$
$\therefore a=-\frac{3}{2}$

26 답 -1
두 직선이 평행하려면
$\frac{1}{m}=\frac{m}{m+2}\neq\frac{1}{2}$ ······㉠
$m+2=m^2$, $m^2-m-2=0$
$(m+1)(m-2)=0$ $\qquad\therefore m=-1$ 또는 $m=2$
㉠에서 $\frac{1}{m}\neq\frac{1}{2}$, 즉 $m\neq2$이므로 $m=-1$

27 답 2
두 직선이 일치하려면
$\frac{1}{m}=\frac{m}{m+2}=\frac{1}{2}$ $\qquad\therefore m=2$

28 답 -3 또는 0
두 직선이 수직이려면
$1\times m+m(m+2)=0$, $m^2+3m=0$
$m(m+3)=0$
$\therefore m=-3$ 또는 $m=0$

29 답 $-\frac{5}{2}$
두 직선이 평행하려면
$\frac{a+2}{6}=\frac{a+3}{2a-1}\neq\frac{1}{1}$ ······㉠
$(a+2)(2a-1)=6(a+3)$, $2a^2-3a-20=0$
$(2a+5)(a-4)=0$ $\qquad\therefore a=-\frac{5}{2}$ 또는 $a=4$
㉠에서 $\frac{a+2}{6}\neq\frac{1}{1}$, 즉 $a\neq4$이므로 $a=-\frac{5}{2}$

30 답 4
두 직선이 일치하려면
$\frac{a+2}{6}=\frac{a+3}{2a-1}=\frac{1}{1}$, $a+2=6$ $\qquad\therefore a=4$

31 답 $-\frac{9}{2}$ 또는 -1
두 직선이 수직이려면
$(a+2)\times6+(a+3)(2a-1)=0$, $2a^2+11a+9=0$
$(2a+9)(a+1)=0$
$\therefore a=-\frac{9}{2}$ 또는 $a=-1$

32 답 $y=3x+7$
직선 $y=3x+1$에 평행한 직선의 기울기는 3이므로 구하는 직선의 방정식은
$y-4=3\{x-(-1)\}$ $\qquad\therefore y=3x+7$

33 답 $y=2x-10$
직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$에 수직인 직선의 기울기는 2이므로 구하는 직선의 방정식은
$y-(-2)=2(x-4)$ $\qquad\therefore y=2x-10$

34 답 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$
$3x+4y-8=0$에서 $y=-\frac{3}{4}x+2$
이 직선과 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이므로 구하는 직선의 방정식은
$y-1=-\frac{3}{4}(x-2)$ $\qquad\therefore y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$

35 답 $y=2x-9$

$3x+6y+2=0$에서 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 2이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-(-1)=2(x-4)$ $\quad\therefore y=2x-9$

36 답 1

$\frac{|3\times1+4\times(-2)+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{5}{5}=1$

37 답 3

$\frac{|5\times(-2)-12\times3+7|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{39}{13}=3$

38 답 $\sqrt{5}$

$y=2x+4$에서 $2x-y+4=0$이므로

$\frac{|2\times1-1+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

39 답 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

$y=-2x+5$에서 $2x+y-5=0$이므로

$\frac{|2\times2+5-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

40 답 ±3

$\frac{|5|}{\sqrt{a^2+(-4)^2}}=1$이므로 $\sqrt{a^2+16}=5$

$a^2+16=25$, $a^2=9$

$\therefore a=\pm3$

41 답 -4 또는 1

$\frac{|a\times1-2\times4+2|}{\sqrt{a^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$이므로 $\sqrt{5a^2+20}=|a-6|$

양변을 제곱하면 $5a^2+20=a^2-12a+36$

$a^2+3a-4=0$, $(a+4)(a-1)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=1$

42 답 -3 또는 $\frac{1}{3}$

$\frac{|a\times(-2)-1+5|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$이므로 $\sqrt{10a^2+10}=|-2a+4|$

양변을 제곱하면 $10a^2+10=4a^2-16a+16$

$3a^2+8a-3=0$, $(a+3)(3a-1)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

43 답 $\sqrt{5}$

직선 $2x-y+4=0$ 위의 한 점 $(0, 4)$와 직선 $2x-y-1=0$ 사이의 거리를 구하면

$\frac{|2\times0-4-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

44 답 $\sqrt{17}$

직선 $x+4y+2=0$ 위의 한 점 $(-2, 0)$과 직선 $x+4y-15=0$ 사이의 거리를 구하면

$\frac{|-2+4\times0-15|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{17}{\sqrt{17}}=\sqrt{17}$

유형 완성하기

p.33~48

01 답 ③

두 점 $(1, 6)$, $(-3, 8)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1-3}{2}, \frac{6+8}{2}\right)$ $\quad\therefore (-1, 7)$

즉 기울기가 -2이고 점 $(-1, 7)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-7=-2(x+1)$ $\quad\therefore y=-2x+5$

이 직선이 점 $(a, 1)$을 지나므로

$1=-2a+5$ $\quad\therefore a=2$

Lecture

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 $\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면

$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

01-1 답 ②

두 점 $(-3, 1)$, $(5, 7)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{1+7}{2}\right)$ $\quad\therefore (1, 4)$

따라서 기울기가 2이고 점 $(1, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=2(x-1)$ $\quad\therefore y=2x+2$

02 답 $\frac{4}{3}$

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times3+1\times0}{2+1}, \frac{2\times(-1)+1\times(-2)}{2+1}\right)$ $\quad\therefore \left(2, -\frac{4}{3}\right)$

즉 기울기가 -2이고 점 $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+\frac{4}{3}=-2(x-2)$ $\quad\therefore y=-2x+\frac{8}{3}$

이 직선의 방정식에 $y=0$을 대입하면 $x=\frac{4}{3}$

따라서 구하는 직선의 x절편은 $\frac{4}{3}$이다.

02-1 답 $y=2x-2$

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times4+2\times(-1)}{1+2}, \frac{1\times(-6)+2\times2}{1+2}\right)$ $\quad\therefore \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

따라서 기울기가 2이고 점 $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+\frac{2}{3}=2\left(x-\frac{2}{3}\right)$ $\quad\therefore y=2x-2$

03 답 ④

구하는 직선의 기울기는 $\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

즉 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이고 점 $(\sqrt{3}, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3})$ $\qquad\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$

따라서 $\sqrt{3}x-3y+6=0$이므로

$a=-3, b=6$

$\therefore a+b=-3+6=3$

03-1 답 9

구하는 직선의 기울기는 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

즉 기울기가 $\sqrt{3}$이고 점 $(-2, \sqrt{3})$을 지나는 직선의 방정식은

$y-\sqrt{3}=\sqrt{3}(x+2)$ $\qquad\therefore y=\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$

따라서 $m=\sqrt{3}, n=3\sqrt{3}$이므로

$mn=\sqrt{3}\times 3\sqrt{3}=9$

04 답 ④

두 점 $(-2, -3), (2, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-5=\frac{5-(-3)}{2-(-2)}(x-2)$ $\qquad\therefore y=2x+1$

이 직선이 점 $(3, a)$를 지나므로

$a=2\times 3+1=7$

04-1 답 ①

두 점 $(2, -1), (3, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+1=\frac{5-(-1)}{3-2}(x-2)$ $\qquad\therefore y=6x-13$

따라서 $a=6, b=-13$이므로

$a+b=6+(-13)=-7$

05 답 3

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times 1+1\times(-2)}{2+1}, \frac{2\times 5+1\times(-1)}{2+1}\right)$ $\qquad\therefore (0, 3)$ ······❶

즉 두 점 $(0, 3), (-2, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{5-3}{-2-0}(x-0)$ $\qquad\therefore y=-x+3$ ······❷

이 직선의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$0=-x+3$ $\qquad\therefore x=3$

따라서 구하는 직선의 x절편은 3이다. ······❸

채점 기준	비율
❶ 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❸ x절편을 구할 수 있다.	20%

05-1 답 $y=-2x+1$

선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\times 1+2\times(-4)}{3+2}, \frac{3\times 1+2\times 6}{3+2}\right)$ $\qquad\therefore (-1, 3)$

즉 두 점 $(-1, 3), (4, -7)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-7-3}{4-(-1)}(x+1)$

$\therefore y=-2x+1$

06 답 ②

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$D\left(\frac{5+6-2}{3}, \frac{0+3+3}{3}\right)$ $\qquad\therefore D(3, 2)$

따라서 두 점 $B(6, 3), D(3, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{2-3}{3-6}(x-6)$

$\therefore y=\frac{1}{3}x+1$, 즉 $x-3y+3=0$

06-1 답 $y=\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}$

점 C의 좌표를 (a, b)라 하면 삼각형 ABC의 무게중심이 $G(2, 2)$이므로

$\frac{3+5+a}{3}=2, \frac{5+4+b}{3}=2$ $\qquad\therefore a=-2, b=-3$

$\therefore C(-2, -3)$

따라서 두 점 $C(-2, -3), G(2, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{2-(-3)}{2-(-2)}(x-2)$

$\therefore y=\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}$

07 답 ③

x절편이 4, y절편이 2인 직선의 방정식은

$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$

이 직선이 점 $(2k, k)$를 지나므로

$\frac{2k}{4}+\frac{k}{2}=1$ $\qquad\therefore k=1$

07-1 답 ⑤

x절편이 -4, y절편이 -2인 직선의 방정식은

$\frac{x}{-4}+\frac{y}{-2}=1$ $\qquad\therefore -x-2y-4=0$

따라서 $a=-1, b=-4$이므로

$ab=-1\times(-4)=4$

08 답 $3x+y=-3$

x절편을 $a\ (a\neq 0)$라 하면 y절편은 $3a$이므로 직선 l의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{3a}=1$

이 직선이 점 $(1, -6)$을 지나므로

$\frac{1}{a}+\frac{-6}{3a}=1, -\frac{1}{a}=1$ $\qquad\therefore a=-1$

따라서 직선 l의 방정식은

$\frac{x}{-1}+\frac{y}{-3}=1$ $\qquad\therefore 3x+y=-3$

08-1 답 $x+2y=8$

y절편을 $a\ (a\neq 0)$라 하면 x절편은 $2a$이므로 직선 l의 방정식은

$\frac{x}{2a}+\frac{y}{a}=1$

이 직선이 점 $(2, 3)$을 지나므로

$\frac{2}{2a}+\frac{3}{a}=1, \frac{4}{a}=1$ $\qquad\therefore a=4$

따라서 직선 l의 방정식은

$\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1$ $\therefore x+2y=8$

09 답 -16

$\frac{x}{a}-\frac{y}{3}=1$에서 $\frac{x}{a}+\frac{y}{-3}=1$

즉 이 직선의 x절편은 a, y절편은 -3이므로 이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

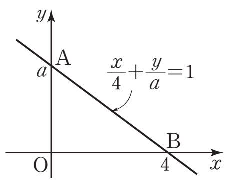
$\frac{1}{2}\times|a|\times|-3|=6$, $|a|=4$ $\therefore a=\pm4$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$-4\times4=-16$

09-1 답 3

직선 $\frac{x}{4}+\frac{y}{a}=1$의 x절편은 4, y절편은 a $(a>0)$이므로 오른쪽 그림과 같이 $\mathrm{A}(0, a)$, $\mathrm{B}(4, 0)$이라 하자.



이때 $\overline{\mathrm{AB}}=5$이므로 $\sqrt{4^2+a^2}=5$

$16+a^2=25$, $a^2=9$

$\therefore a=3$ $(\because a>0)$

10 답 ⑤

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 BC와 직선 CA의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{6-(k-5)}{5-1}=\frac{2-6}{k-5}$, $\frac{-k+11}{4}=\frac{-4}{k-5}$

$k^2-16k+39=0$, $(k-3)(k-13)=0$

$\therefore k=3$ 또는 $k=13$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$3+13=16$

10-1 답 ④

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{1-(-2)}{1-0}=\frac{7-1}{(4-a)-1}$, $3=\frac{6}{3-a}$

$9-3a=6$ $\therefore a=1$

11 답 0

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 BC와 직선 CA의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{-1-(-2)}{-2-(-a)}=\frac{a-(-1)}{2-(-2)}$, $\frac{1}{a-2}=\frac{a+1}{4}$

$a^2-a-6=0$, $(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ $(a>0)$

즉 $\mathrm{A}(2, 3)$, $\mathrm{B}(-3, -2)$이므로 두 점 A, B를 지나는 직선 l의 방정식은

$y-3=\frac{-2-3}{-3-2}(x-2)$ $\therefore y=x+1$

따라서 직선 l의 x절편은 -1, y절편은 1이므로 x절편과 y절편의 합은

$-1+1=0$

11-1 답 $y=2x+1$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 CA의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{a-(-1)}{1-(-1)}=\frac{-1-(-5)}{-1-(-a)}$, $\frac{a+1}{2}=\frac{4}{a-1}$

$a^2=9$ $\therefore a=3$ $(\because a>0)$

따라서 $\mathrm{A}(-1, -1)$, $\mathrm{B}(1, 3)$이므로 두 점 A, B를 지나는 직선 l의 방정식은

$y-3=\frac{3-(-1)}{1-(-1)}(x-1)$ $\therefore y=2x+1$

12 답 2

세 점 A, B, C가 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 한다.

즉 직선 AB와 직선 CA의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{k-3}{3-1}=\frac{3-4}{1-(3-2k)}$, $\frac{k-3}{2}=\frac{-1}{2(k-1)}$

$k^2-4k+4=0$, $(k-2)^2=0$ $\therefore k=2$

12-1 답 ④

세 점 A, B, C가 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 한다.

즉 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{1-3a}{3-a}=\frac{-1-1}{5-3}$, $\frac{1-3a}{3-a}=-1$

$1-3a=a-3$ $\therefore a=1$

13 답 $a=1$, $b=1$

직선 l이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 지나야 한다.

$\overline{\mathrm{BC}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{6+2}{2}, \frac{6+4}{2}\right)$ $\therefore (4, 5)$

즉 두 점 $(0, 1)$, $(4, 5)$를 지나는 직선 l의 방정식은

$y-1=\frac{5-1}{4-0}(x-0)$ $\therefore y=x+1$

$\therefore a=1$, $b=1$

13-1 답 ①

직선 l이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점을 지나야 한다.

$\overline{\mathrm{AC}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+5}{2}, \frac{4-2}{2}\right)$ $\therefore (4, 1)$

즉 두 점 $(1, 0)$, $(4, 1)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$y-0=\frac{1-0}{4-1}(x-1)$ $\therefore y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

이때 직선 l이 점 $(a, -1)$을 지나므로

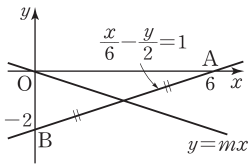
$-1=\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}$ $\therefore a=-2$

14 답 $-\frac{1}{3}$

직선 $\frac{x}{6}-\frac{y}{2}=1$과 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{A}(6, 0)$, $\mathrm{B}(0, -2)$ ······❶

직선 $\frac{x}{6}-\frac{y}{2}=1$과 x축, y축으로 둘러 싸인 도형의 넓이를 직선 $y=mx$가 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=mx$가 $\overline{AB}$의 중점을 지나야 한다. ······❷



이때 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{0-2}{2}\right)$ $\quad\therefore (3, -1)$ ······❸

따라서 직선 $y=mx$가 점 $(3, -1)$을 지나므로

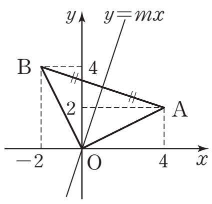
$-1=3m \quad \therefore m=-\frac{1}{3}$ ······❹

채점 기준	비율
❶ 직선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❷ 삼각형의 한 꼭짓점을 지나는 직선이 삼각형의 넓이를 이등분하는 조건을 알고 있다.	40%
❸ 선분의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❹ m의 값을 구할 수 있다.	20%

14-1 답 3

직선 $y=mx$는 m의 값에 관계없이 항상 원점을 지난다.

즉 직선 $y=mx$가 △OAB의 넓이를 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$의 중점을 지나야 한다.



이때 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{4-2}{2}, \frac{2+4}{2}\right)$ $\quad\therefore (1, 3)$

따라서 직선 $y=mx$가 점 $(1, 3)$을 지나므로

$3=m\times1 \quad \therefore m=3$

15 답 -4

두 정사각형의 넓이를 동시에 이등분하려면 직선이 각 정사각형의 대각선의 교점을 모두 지나야 한다.

두 정사각형의 대각선의 교점의 좌표를 각각 구하면

$\left(\frac{-4+0}{2}, \frac{6+2}{2}\right), \left(\frac{0+2}{2}, \frac{0-2}{2}\right)$

$\therefore (-2, 4), (1, -1)$

즉 두 점 $(-2, 4), (1, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{-1-4}{1-(-2)}(x+2), y=-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}$

$\therefore -\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}y+1=0$

따라서 $a=-\frac{5}{2}, b=-\frac{3}{2}$이므로

$a+b=-\frac{5}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)=-4$

다른 풀이

직선 $ax+by+1=0$이 두 점 $(-2, 4), (1, -1)$을 지나므로

$-2a+4b+1=0, a-b+1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{5}{2}, b=-\frac{3}{2}$

$\therefore a+b=-\frac{5}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)=-4$

15-1 답 7

두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하려면 직선이 각 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지나야 한다.

직사각형 A의 두 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$ $\quad\therefore (2, 2)$

직사각형 B의 두 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{0-4}{2}, \frac{0-2}{2}\right)$ $\quad\therefore (-2, -1)$

즉 두 점 $(2, 2), (-2, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{-1-2}{-2-2}(x-2), y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$

$\therefore 3x-4y+2=0$

따라서 $a=3, b=-4$이므로

$a-b=3-(-4)=7$

16 답 ①

$ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

$ac<0, bc<0$이므로 $ab>0$

따라서 (기울기)$=-\frac{a}{b}<0$, (y절편)$=-\frac{c}{b}>0$이므로 직선의 개형은 ①과 같다.

16-1 답 ①

$ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

$ac>0, bc<0$이므로 $ab<0$

따라서 (기울기)$=-\frac{a}{b}>0$, (y절편)$=-\frac{c}{b}>0$이므로 직선의 개형은 ①과 같다.

17 답 ③

$ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

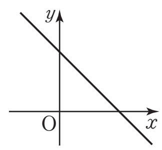
이 직선의 기울기와 y절편이 모두 음수이므로

$-\frac{a}{b}<0, -\frac{c}{b}<0 \quad \therefore ac>0$

$cx+ay-b=0$에서 $a\neq0$이므로 $y=-\frac{c}{a}x+\frac{b}{a}$

$\therefore$ (기울기)$=-\frac{c}{a}<0$, (y절편)$=\frac{b}{a}>0$

따라서 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



17-1 답 ③

$ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

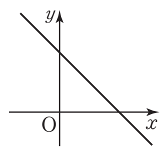
이 직선의 기울기와 y절편이 모두 양수이므로

$-\frac{a}{b}>0, -\frac{c}{b}>0 \quad \therefore ac>0$

$cx+ay+b=0$에서 $a\neq0$이므로 $y=-\frac{c}{a}x-\frac{b}{a}$

$\therefore$ (기울기)$=-\frac{c}{a}<0$, (y절편)$=-\frac{b}{a}>0$

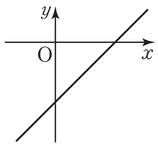
따라서 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



18 답 제1, 2, 4사분면

$x+ay+b=0$에서 $y=-\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$

이 직선이 제1, 3, 4사분면을 지나므로 오른쪽 그림에서 기울기는 양수이고 y절편은 음수이어야 한다.



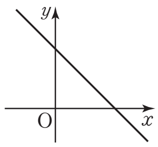
즉 (기울기)$=-\frac{1}{a}>0$, (y절편)$=-\frac{b}{a}<0$

이므로 $a<0$, $b<0$

이때 $ax+by+5=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{5}{b}$

$\therefore$ (기울기)$=-\frac{a}{b}<0$, (y절편)$=-\frac{5}{b}>0$

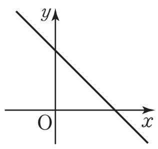
따라서 직선 $ax+by+5=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 4사분면을 지난다.



18-1 답 제2, 3, 4사분면

$2x+ay-b=0$에서 $y=-\frac{2}{a}x+\frac{b}{a}$

이 직선이 제1, 2, 4사분면을 지나므로 오른쪽 그림에서 기울기는 음수이고 y절편은 양수이어야 한다.



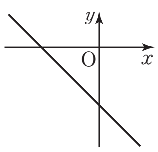
즉 (기울기)$=-\frac{2}{a}<0$, (y절편)$=\frac{b}{a}>0$이므로

$a>0$, $b>0$

이때 $ax+by+2=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{2}{b}$

$\therefore$ (기울기)$=-\frac{a}{b}<0$, (y절편)$=-\frac{2}{b}<0$

따라서 직선 $ax+by+2=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제2, 3, 4사분면을 지난다.



19 답 ①

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+3y+1)k+(2x+5y+3)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+3y+1=0$, $2x+5y+3=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-1$

$\therefore$ P$(1, -1)$

따라서 점 P와 원점 사이의 거리는

$\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

19-1 답 2

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y+3)k+(-x+2y-4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+y+3=0$, $-x+2y-4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=1$

$\therefore$ P$(-2, 1)$

이때 점 P가 직선 $3x+ay+4=0$ 위의 점이므로

$-6+a+4=0$ $\quad\therefore a=2$

20 답 -12

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+y+2)k+(-x+y+a)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+y+2=0$, $-x+y+a=0$

점 $(-4, b)$는 위의 두 직선의 교점이므로

$-4+b+2=0$, $4+b+a=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=2$

$\therefore ab=-6\times2=-12$

20-1 답 1

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+y-8)k+(2x-3y+4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+y-8=0$, $2x-3y+4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=4$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(4, 4)$이므로

$a=4$, $b=4$ $\quad\therefore \frac{a}{b}=\frac{4}{4}=1$

21 답 11

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(3x-y)k+(-x-2y+7)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$3x-y=0$, $-x-2y+7=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=3$ $\quad\therefore$ P$(1, 3)$ ……❶

즉 두 점 $(1, 3)$, $(2, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-1-3}{2-1}(x-1)$ $\quad\therefore y=-4x+7$ ……❷

따라서 $a=-4$, $b=7$이므로

$b-a=7-(-4)=11$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	50%
❷ 점 P와 점 $(2, -1)$을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20%

21-1 답 7

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(3x+y-4)k+(x+y+2)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$3x+y-4=0$, $x+y+2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=-5$ $\quad\therefore$ P$(3, -5)$

기울기가 -6이고 점 P$(3, -5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-(-5)=-6(x-3)$ $\quad\therefore 6x+y-13=0$

따라서 $a=6$, $b=1$이므로

$a+b=6+1=7$

22 답 4

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(3x+2y-4)+k(2x+3y-1)=0$ (k는 실수) ……㉠

이 직선이 점 $(-4, 2)$를 지나므로

$-12-3k=0$ $\quad\therefore k=-4$

$k=-4$를 ㉠에 대입하면

$(3x+2y-4)-4(2x+3y-1)=0$

$-5x-10y=0 \qquad \therefore x+2y=0$

이 직선이 점 $(a, -2)$를 지나므로

$a-4=0 \qquad \therefore a=4$

22-1 답 ⑤

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x-2y+3)+k(2x+y-4)=0$ (k는 실수) ……㉠

이 직선이 점 $(-1, -4)$를 지나므로

$10-10k=0 \qquad \therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$(x-2y+3)+(2x+y-4)=0$

$\therefore 3x-y-1=0$

따라서 $a=3$, $b=-1$이므로

$a+b=3+(-1)=2$

23 답 ②

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x+2y-5)+k(x-y-2)=0$ (k는 실수) ……㉠

이 직선의 기울기를 구하면

㉠에서 $(k+1)x-(k-2)y-2k-5=0$

$(k-2)y=(k+1)x-2k-5 \qquad \therefore y=\frac{k+1}{k-2}x-\frac{2k+5}{k-2}$

즉 기울기는 $\frac{k+1}{k-2}$이므로 $\frac{k+1}{k-2}=4$

$4(k-2)=k+1$, $4k-8=k+1 \qquad \therefore k=3$

$k=3$을 ㉠에 대입하면

$(x+2y-5)+3(x-y-2)=0$

$4x-y-11=0 \qquad \therefore y=4x-11$

따라서 이 직선의 y절편은 -11이다.

23-1 답 2

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$\{(a-5)x+(a-4)y-7\}+k\{ax+(2a-3)y+7\}=0$

(k는 실수) ……㉠

이 직선이 원점을 지나므로

$-7+7k=0 \qquad \therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$\{(a-5)x+(a-4)y-7\}+\{ax+(2a-3)y+7\}=0$

$(2a-5)x+(3a-7)y=0$

$\therefore y=-\frac{2a-5}{3a-7}x$ ……❶

이때 이 직선의 기울기가 -1이므로

$-\frac{2a-5}{3a-7}=-1$, $3a-7=2a-5$

$\therefore a=2$ ……❷

채점 기준	비율
❶ 두 직선의 교점과 원점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	60%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%

24 답 18

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(2x-3y-1)+k(2x-4y+1)=0$ (k는 실수) ……㉠

이 직선이 점 $(3, 0)$을 지나므로

$5+7k=0 \qquad \therefore k=-\frac{5}{7}$

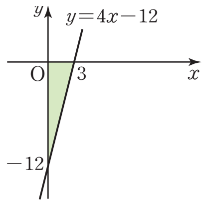
$k=-\frac{5}{7}$를 ㉠에 대입하면

$(2x-3y-1)-\frac{5}{7}(2x-4y+1)=0$

$4x-y-12=0 \qquad \therefore y=4x-12$

따라서 이 직선의 x절편은 3, y절편은 -12이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times12=18$



24-1 답 $\sqrt{29}$

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(2x-y+2)+k(x+3y-6)=0$ (k는 실수) ……㉠

이 직선이 점 $(5, 0)$을 지나므로

$12-k=0 \qquad \therefore k=12$

$k=12$를 ㉠에 대입하면

$(2x-y+2)+12(x+3y-6)=0$

$2x+5y-10=0 \qquad \therefore \frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$

따라서 이 직선의 x절편은 5, y절편은 2이므로

$A(5, 0)$, $B(0, 2)$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$

25 답 3

두 직선 $(a-1)x+y-1=0$, $2x-(a+2)y+2=0$에 대하여

(i) 두 직선이 평행할 때

$\frac{a-1}{2}=\frac{1}{-(a+2)}\neq\frac{-1}{2}$ ……㉠

$-(a-1)(a+2)=2$, $a^2+a=0$

$a(a+1)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=0$

㉠에서 $\frac{a-1}{2}\neq\frac{-1}{2}$, 즉 $a\neq0$이므로 $a=-1$

(ii) 두 직선이 수직일 때

$(a-1)\times2+1\times\{-(a+2)\}=0$이므로

$a-4=0 \qquad \therefore a=4$

(i), (ii)에서 $\alpha=-1$, $\beta=4$이므로

$\alpha+\beta=-1+4=3$

25-1 답 5

직선 $2x+ay-1=0$과 직선 $x-by-1=0$이 서로 수직이므로

$2\times1+a\times(-b)=0 \qquad \therefore ab=2$

직선 $2x+ay-1=0$과 직선 $2x+(b+1)y+1=0$이 평행하므로

$\frac{2}{2}=\frac{a}{b+1}\neq\frac{-1}{1}$에서 $a=b+1$

$\therefore a-b=1$

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=1^2+2\times2=5$

26 답 ③

주어진 두 직선이 수직이므로

$2a+6b=0 \qquad \therefore a=-3b$

$\therefore -\frac{a}{b}=-\frac{-3b}{b}=3$

26-1 답 ③

주어진 두 직선이 수직이므로

$-\frac{1}{4}\times m=-1 \qquad \therefore m=4$

27 답 ④

주어진 두 직선이 평행하므로

$\frac{k}{2}=\frac{3}{k+1}\neq\frac{4}{4}$ ……㉠

$k(k+1)=6,\ k^2+k-6=0$

$(k+3)(k-2)=0 \qquad \therefore k=-3$ 또는 $k=2$

㉠에서 $\frac{k}{2}\neq\frac{4}{4}$, 즉 $k\neq2$이므로 $k=-3$

27-1 답 4

주어진 두 직선이 평행하므로

$\frac{2}{a}=\frac{-3}{-(a+2)}\neq\frac{-4}{3}$

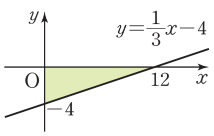
$-2(a+2)=-3a,\ -2a-4=-3a \qquad \therefore a=4$

28 답 ④

직선 $3x+y=2$, 즉 $y=-3x+2$에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로 기울기가 $\frac{1}{3}$이고 점 $(6,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+2=\frac{1}{3}(x-6) \qquad \therefore y=\frac{1}{3}x-4$

이 직선의 x절편은 12, y절편은 -4이므로 오른쪽 그림에서 이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\times12\times4=24$

28-1 답 ①

두 점 $(-2,\ -1)$, $(4,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{2-(-1)}{4-(-2)}=\frac{1}{2}$

즉 두 점 $(-2,\ -1)$, $(4,\ 2)$를 지나는 직선에 수직인 직선의 기울기는 -2이므로 기울기가 -2이고 점 $(-2,\ 7)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-7=-2(x+2) \qquad \therefore y=-2x+3$

따라서 $a=-2$, $b=3$이므로

$a+b=-2+3=1$

29 답 -3

두 점 $(2,\ 4)$, $(-1,\ 1)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1-4}{-1-2}=1$

즉 두 점 $(2,\ 4)$, $(-1,\ 1)$을 지나는 직선에 평행한 직선의 기울기는 1이므로 기울기가 1이고 점 $(2,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+1=x-2 \qquad \therefore y=x-3$

따라서 이 직선의 y절편은 -3이다.

29-1 답 ①

직선 $4x+2y-5=0$, 즉 $y=-2x+\frac{5}{2}$에 평행한 직선의 기울기는 -2이므로 기울기가 -2이고 점 $(2,\ a)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-a=-2(x-2) \qquad \therefore y=-2x+a+4$

이 직선의 방정식이 $y=mx+1$과 일치하므로

$-2=m,\ a+4=1 \qquad \therefore a=-3,\ m=-2$

$\therefore a+m=-3+(-2)=-5$

다른 풀이

직선 $y=mx+1$이 직선 $4x+2y-5=0$, 즉 $y=-2x+\frac{5}{2}$에 평행하므로 $m=-2$

따라서 직선 $y=-2x+1$이 점 $(2,\ a)$를 지나므로

$a=-2\times2+1=-3$

$\therefore a+m=-3+(-2)=-5$

30 답 1

직선 $x-y+5=0$, 즉 $y=x+5$에 수직인 직선 PH의 기울기는 -1이므로 기울기가 -1이고 점 $\mathrm{P}(2,\ -1)$을 지나는 직선 PH의 방정식은

$y+1=-(x-2) \qquad \therefore y=-x+1$ ……❶

이때 점 H는 두 직선 $y=x+5$, $y=-x+1$의 교점이므로 두 식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=3$

따라서 점 H의 좌표는 $\mathrm{H}(-2,\ 3)$이므로

$a=-2,\ b=3$ ……❷

$\therefore a+b=-2+3=1$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 직선 PH의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

30-1 답 ①

직선 $y=x+3$에 수직인 직선 AH의 기울기는 -1이므로 기울기가 -1이고 점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$를 지나는 직선 AH의 방정식은

$y-2=-(x-3) \qquad \therefore y=-x+5$

이때 점 H는 두 직선 $y=x+3$, $y=-x+5$의 교점이므로 두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=4$

따라서 점 H의 좌표는 $\mathrm{H}(1,\ 4)$이다.

31 답 -3

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+6}{2},\ \frac{m+n}{2}\right) \qquad \therefore \left(2,\ \frac{m+n}{2}\right)$

직선 $2x-y-3=0$이 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 지나므로

$4-\frac{m+n}{2}-3=0 \qquad \therefore m+n=2$ ……㉠

두 점 $\mathrm{A}(-2,\ m)$, $\mathrm{B}(6,\ n)$을 지나는 직선 AB의 기울기는

$\frac{n-m}{6-(-2)}=\frac{n-m}{8}$

직선 $2x-y-3=0$이 직선 AB와 수직이므로

$2\times\frac{n-m}{8}=-1 \qquad \therefore m-n=4$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=3$, $n=-1$

$\therefore mn=3\times(-1)=-3$

31-1 답 8

두 점 $\mathrm{A}(-4,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ m)$을 지나는 직선 AB의 기울기는

$\dfrac{m-0}{2-(-4)}=\dfrac{m}{6}$
직선 $y=-x+n$이 직선 AB와 수직이므로
$-1\times\dfrac{m}{6}=-1 \qquad \therefore m=6$
$\overline{AB}$의 중점의 좌표는
$\left(\dfrac{-4+2}{2}, \dfrac{0+6}{2}\right) \qquad \therefore (-1, 3)$
직선 $y=-x+n$이 $\overline{AB}$의 중점을 지나므로
$3=1+n \qquad \therefore n=2$
$\therefore m+n=6+2=8$

32 답 6
$\overline{AB}$의 중점의 좌표는
$\left(\dfrac{1-5}{2}, \dfrac{4+8}{2}\right) \qquad \therefore (-2, 6)$
직선 AB의 기울기는 $\dfrac{8-4}{-5-1}=-\dfrac{2}{3}$이므로 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 기울기는 $\dfrac{3}{2}$이다.
즉 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 $\dfrac{3}{2}$이고 점 $(-2, 6)$을 지나므로
$y-6=\dfrac{3}{2}(x+2) \qquad \therefore y=\dfrac{3}{2}x+9$
이 직선이 점 $(-2, a)$를 지나므로
$a=\dfrac{3}{2}\times(-2)+9=6$

32-1 답 ②
$\overline{AB}$의 중점의 좌표는
$\left(\dfrac{-1+5}{2}, \dfrac{4+2}{2}\right) \qquad \therefore (2, 3)$
직선 AB의 기울기는 $\dfrac{2-4}{5-(-1)}=-\dfrac{1}{3}$이므로 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 기울기는 3이다.
따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 3이고 점 $(2, 3)$을 지나므로
$y-3=3(x-2) \qquad \therefore y=3x-3$

33 답 $y=-2x-3$
직선 $x-2y+4=0$의 x절편은 -4, y절편은 2이므로
$A(-4, 0)$, $B(0, 2)$
$\overline{AB}$의 중점의 좌표는
$\left(\dfrac{-4+0}{2}, \dfrac{0+2}{2}\right) \qquad \therefore (-2, 1)$
직선 AB의 기울기는 $\dfrac{2-0}{0-(-4)}=\dfrac{1}{2}$이므로 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 기울기는 -2이다.
따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 -2이고 점 $(-2, 1)$을 지나므로
$y-1=-2(x+2) \qquad \therefore y=-2x-3$

33-1 답 -4
직선 $x-4y+8=0$의 x절편은 -8, y절편은 2이므로
$A(-8, 0)$, $B(0, 2)$
$\overline{AB}$의 중점의 좌표는
$\left(\dfrac{-8+0}{2}, \dfrac{0+2}{2}\right) \qquad \therefore (-4, 1)$
직선 AB의 기울기는 $\dfrac{2-0}{0-(-8)}=\dfrac{1}{4}$이므로 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 기울기는 -4이다.
즉 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 -4이고 점 $(-4, 1)$을 지나므로
$y-1=-4(x+4) \qquad \therefore y=-4x-15$
이 직선이 점 $(a, 1)$을 지나므로
$1=-4a-15 \qquad \therefore a=-4$

34 답 $\dfrac{1}{3}$
$y=x+1$ ······ ㉠
$y=-x-3$ ······ ㉡
$y=a(x-1)$에서 $y=ax-a$ ······ ㉢
(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 평행할 때, $a=1$
(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 평행할 때, $a=-1$
(iii) 세 직선 ㉠, ㉡, ㉢이 한 점에서 만날 때
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=-1$
즉 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(-2, -1)$이다.
이때 직선 ㉢이 점 $(-2, -1)$을 지나야 하므로
$-1=-2a-a \qquad \therefore a=\dfrac{1}{3}$
(i)~(iii)에서 $a=1$ 또는 $a=-1$ 또는 $a=\dfrac{1}{3}$이므로 그 합은
$1+(-1)+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

34-1 답 1
$mx-y=-1$ ······ ㉠
$2x-y=5$ ······ ㉡
$x+y=4$ ······ ㉢
(i) 두 직선 ㉠, ㉡이 평행할 때
$\dfrac{m}{2}=\dfrac{-1}{-1}\neq\dfrac{-1}{5} \qquad \therefore m=2$
(ii) 두 직선 ㉠, ㉢이 평행할 때
$\dfrac{m}{1}=\dfrac{-1}{1}\neq\dfrac{-1}{4} \qquad \therefore m=-1$
(iii) 세 직선 ㉠, ㉡, ㉢이 한 점에서 만날 때
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=1$
즉 두 직선 ㉡, ㉢의 교점의 좌표는 $(3, 1)$이다.
이때 직선 ㉠이 점 $(3, 1)$을 지나야 하므로
$3m-1=-1 \qquad \therefore m=0$
(i)~(iii)에서 $m=2$ 또는 $m=-1$ 또는 $m=0$이므로 그 합은
$2+(-1)+0=1$

35 답 ②
주어진 세 직선이 한 점에서 만나므로 직선 $ax-y=-1$은 두 직선 $x+y=2$, $x-2y=2$의 교점을 지난다.
$x+y=2$, $x-2y=2$를 연립하여 풀면
$x=2$, $y=0$
따라서 직선 $ax-y=-1$은 점 $(2, 0)$을 지나므로
$2a=-1 \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{2}$

35-1 답 ④

주어진 세 직선의 교점이 1개이므로 직선 $x+ay=4$는 두 직선 $x-y=1$, $x+y=3$의 교점을 지난다.

$x-y=1$, $x+y=3$을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=1$

따라서 직선 $x+ay=4$는 점 $(2, 1)$을 지나므로

$2+a=4 \qquad \therefore a=2$

36 답 1

서로 다른 세 직선 $ax+y-4=0$, $x+by+4=0$, $3x-y-3=0$에 의하여 좌표평면이 4개의 영역으로 나누어지려면 세 직선이 모두 평행해야 한다.

두 직선 $ax+y-4=0$, $3x-y-3=0$이 평행하려면

$\frac{a}{3}=\frac{1}{-1}\neq\frac{-4}{-3} \qquad \therefore a=-3$

두 직선 $x+by+4=0$, $3x-y-3=0$이 평행하려면

$\frac{1}{3}=\frac{b}{-1}\neq\frac{4}{-3} \qquad \therefore b=-\frac{1}{3}$

$\therefore ab=-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=1$

36-1 답 1

서로 다른 세 직선 $ax+y+1=0$, $x+by+3=0$, $2x+y+5=0$에 의하여 좌표평면이 4개의 영역으로 나누어지려면 세 직선이 모두 평행해야 한다.

두 직선 $ax+y+1=0$, $2x+y+5=0$이 평행하려면

$\frac{a}{2}=\frac{1}{1}\neq\frac{1}{5} \qquad \therefore a=2$

두 직선 $x+by+3=0$, $2x+y+5=0$이 평행하려면

$\frac{1}{2}=\frac{b}{1}\neq\frac{3}{5} \qquad \therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore ab=2\times\frac{1}{2}=1$

37 답 1

$\frac{|3a-5\times2-1|}{\sqrt{3^2+(-5)^2}}=\frac{|5a+3\times2-3|}{\sqrt{5^2+3^2}}$이므로

$|3a-11|=|5a+3|$

양변을 제곱하면 $(3a-11)^2=(5a+3)^2$

$9a^2-66a+121=25a^2+30a+9$

$a^2+6a-7=0$, $(a+7)(a-1)=0$

$\therefore a=-7$ 또는 $a=1$

그런데 $a>0$이므로 $a=1$

37-1 답 8

$\frac{|2k+0-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|k-0+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$이므로

$|2k-5|=|k+2|$

양변을 제곱하면 $(2k-5)^2=(k+2)^2$

$4k^2-20k+25=k^2+4k+4$

$k^2-8k+7=0$, $(k-1)(k-7)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=7$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$1+7=8$

38 답 ③

$\frac{|3\times1-4\times a-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$이므로

$|4a+2|=5$, $4a+2=\pm5$

$\therefore a=-\frac{7}{4}$ 또는 $a=\frac{3}{4}$

그런데 $a>0$이므로 $a=\frac{3}{4}$

38-1 답 $-\frac{3}{4}$

점 $(2, 1)$을 지나는 직선의 기울기를 m이라 하면

$y-1=m(x-2) \qquad \therefore mx-y-2m+1=0$

이 직선과 원점 사이의 거리가 2이므로

$\frac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$, $|-2m+1|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $(-2m+1)^2=4(m^2+1)$

$4m^2-4m+1=4m^2+4$, $-4m=3$

$\therefore m=-\frac{3}{4}$

39 답 -1

직선 $4x+3y-5=0$, 즉 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{3}{4}$이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=\frac{3}{4}x+b$라 하자.

이때 점 $(1, 1)$에서 직선 $y=\frac{3}{4}x+b$, 즉 $3x-4y+4b=0$에 이르는 거리가 1이므로

$\frac{|3\times1-4\times1+4b|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$, $|4b-1|=5$

$4b-1=\pm5 \qquad \therefore b=-1$ 또는 $b=\frac{3}{2}$

그런데 y절편이 음수이므로 $b=-1$

39-1 답 ①

직선 $3x-4y-5=0$, 즉 $y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$에 평행한 직선의 기울기는 $\frac{3}{4}$이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=\frac{3}{4}x+b$라 하자.

이때 점 $(3, 2)$에서 직선 $y=\frac{3}{4}x+b$, 즉 $3x-4y+4b=0$에 이르는 거리가 1이므로

$\frac{|3\times3-4\times2+4b|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$, $|4b+1|=5$

$4b+1=\pm5 \qquad \therefore b=-\frac{3}{2}$ 또는 $b=1$

즉 구하는 직선의 방정식은

$y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$ 또는 $y=\frac{3}{4}x+1$

위의 두 직선 중 제4사분면을 지나지 않는 직선은 $y=\frac{3}{4}x+1$

따라서 이 직선의 y절편은 1이다.

40 답 ④

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y)k+(3x-2y+7)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+y=0$, $3x-2y+7=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1,\ y=2$

따라서 점 $(-1,\ 2)$와 직선 $2x+y-5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\times(-1)+2-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

40-1 답 ③

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+1)k+(y-1)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+1=0,\ y-1=0 \qquad \therefore x=-1,\ y=1$

즉 점 $(-1,\ 1)$과 직선 $ax+4y+4=0$ 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|-a+4\times1+4|}{\sqrt{a^2+4^2}}=1,\ |-a+8|=\sqrt{a^2+16}$

양변을 제곱하면 $(-a+8)^2=a^2+16$

$a^2-16a+64=a^2+16,\ -16a=-48$

$\therefore a=3$

41 답 $\sqrt{5}$

$\triangle$ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\mathrm{G}\left(\frac{4-3+2}{3},\ \frac{0-1+4}{3}\right) \qquad \therefore \mathrm{G}(1,\ 1)$ ······❶

직선 AC의 방정식은

$y-0=\frac{4-0}{2-4}(x-4) \qquad \therefore y=-2x+8$ ······❷

따라서 점 $\mathrm{G}(1,\ 1)$과 직선 $y=-2x+8$, 즉 $2x+y-8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\times1+1-8|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ ······❸

채점 기준	비율
❶ $\triangle$ABC의 무게중심의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 직선 AC의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ 점 G와 직선 AC 사이의 거리를 구할 수 있다.	40%

41-1 답 ③

$\triangle$ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\mathrm{G}\left(\frac{-2-4+3}{3},\ \frac{-3+1+5}{3}\right) \qquad \therefore \mathrm{G}(-1,\ 1)$

직선 AB의 기울기는 $\frac{1-(-3)}{-4-(-2)}=-2$이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 -2이다.

즉 직선 l은 기울기가 -2이고 점 $\mathrm{G}(-1,\ 1)$을 지나므로

$y-1=-2(x+1) \qquad \therefore y=-2x-1$

따라서 점 $(5,\ -1)$과 직선 $y=-2x-1$, 즉 $2x+y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\times5-1+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

42 답 ⑤

직선 l의 방정식은

$y+3=\frac{6-(-3)}{-1-2}(x-2) \qquad \therefore y=-3x+3$

이때 직선 $y=-3x+3$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이의 최솟값은 점 $\mathrm{A}(-4,\ 5)$와 직선 $y=-3x+3$, 즉 $3x+y-3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3\times(-4)+5-3|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

42-1 답 $\frac{17}{5}$

직선 l의 방정식은

$y-3=\frac{7-3}{-1-2}(x-2) \qquad \therefore y=-\frac{4}{3}x+\frac{17}{3}$

이때 직선 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{17}{3}$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이의 최솟값은 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 직선 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{17}{3}$, 즉 $4x+3y-17=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-17|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{17}{5}$$

43 답 -4

두 직선이 서로 평행하므로 직선 $2x-y-2=0$ 위의 점 $(1,\ 0)$과 직선 $2x-y+a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이다.

즉 $\frac{|2\times1-0+a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$이므로 $\frac{|a+2|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

$|a+2|=5,\ a+2=\pm5$

$\therefore a=-7$ 또는 $a=3$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-7+3=-4$

43-1 답 6

두 직선이 서로 평행하므로 직선 $x-y+1=0$ 위의 점 $(0,\ 1)$과 직선 $x-y+m-2=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이다.

즉 $\frac{|0-1+m-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$이므로 $\frac{|m-3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$|m-3|=2,\ m-3=\pm2$

$\therefore m=1$ 또는 $m=5$

따라서 모든 실수 m의 값의 합은

$1+5=6$

44 답 ⑤

두 직선 $3x-4y-1=0,\ mx-(m+2)y+3=0$이 서로 평행하므로

$\frac{3}{m}=\frac{-4}{-(m+2)}\neq\frac{-1}{3}$

$\frac{3}{m}=\frac{-4}{-(m+2)}$에서 $3m+6=4m \qquad \therefore m=6$

즉 두 직선 $3x-4y-1=0,\ 6x-8y+3=0$ 사이의 거리는 직선 $3x-4y-1=0$ 위의 점 $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$과 직선 $6x-8y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{\left|6\times\frac{1}{3}-8\times0+3\right|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

44-1 답 ⑤

두 직선 $mx-2y+m+3=0,\ x+(1-m)y+2-m=0$이 서로 평행하므로

$\frac{m}{1}=\frac{-2}{1-m}\neq\frac{m+3}{2-m}$

$\dfrac{m}{1}=\dfrac{-2}{1-m}$에서 $m(1-m)=-2$

$m^2-m-2=0$, $(m+1)(m-2)=0$

$\therefore$ $m=-1$ 또는 $m=2$

그런데 $m<0$이므로 $m=-1$

$m=-1$을 두 직선의 방정식에 대입하면

$x+2y-2=0$, $x+2y+3=0$

두 직선 $x+2y-2=0$, $x+2y+3=0$ 사이의 거리는 직선 $x+2y-2=0$ 위의 점 $(0,\ 1)$과 직선 $x+2y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|0+2\times1+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

45 답 $\sqrt{2}$

두 직선이 서로 평행하므로 선분 AB의 길이의 최솟값은 두 직선 사이의 거리와 같다.

이때 두 직선 사이의 거리는 직선 $x+y+1=0$ 위의 점 $(0,\ -1)$과 직선 $x+y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|0-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

따라서 $\overline{AB}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

45-1 답 $\sqrt{5}$

두 직선이 서로 평행하므로 선분 AB의 길이의 최솟값은 두 직선 사이의 거리와 같다.

이때 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x-y+2=0$ 위의 점 $(0,\ 2)$와 직선 $2x-y-3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|2\times0-2-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AB}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{5}$이다.

46 답 ①

$\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(-2-1)^2}=3\sqrt{2}$

직선 AB의 방정식은

$y-1=\dfrac{-2-1}{-2-1}(x-1)$

$\therefore$ $x-y=0$

점 $C(4,\ 2)$와 직선 AB 사이의 거리는

$\dfrac{|4-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\therefore$ $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\sqrt{2}=3$

46-1 답 12

직선 AB의 기울기가 $\dfrac{5-0}{2-4}=-\dfrac{5}{2}$이므로 직선 AB는 직선 $5x+2y+4=0$에 평행하다.

$\overline{AB}=\sqrt{(2-4)^2+(5-0)^2}=\sqrt{29}$

이때 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}$를 밑변으로 하면 높이는 점 A와 직선 $5x+2y+4=0$ 사이의 거리와 같다.

점 $A(4,\ 0)$과 직선 $5x+2y+4=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|5\times4+2\times0+4|}{\sqrt{5^2+2^2}}=\dfrac{24}{\sqrt{29}}$

$\therefore$ $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{29}\times\dfrac{24}{\sqrt{29}}=12$

47 답 5

$\overline{OA}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$

직선 OA의 방정식은

$y=\dfrac{4}{8}x$ $\quad\therefore$ $x-2y=0$

점 $B(2,\ a)$와 직선 OA 사이의 거리는

$\dfrac{|2-2a|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|2a-2|}{\sqrt{5}}$

이때 $\triangle OAB$의 넓이가 16이므로

$\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times\dfrac{|2a-2|}{\sqrt{5}}=16$, $|2a-2|=8$

$|a-1|=4$, $a-1=\pm4$

$\therefore$ $a=-3$ 또는 $a=5$

그런데 $a>0$이므로 $a=5$

47-1 답 -2

$\overline{AB}=\sqrt{(1+4)^2+(10+2)^2}=13$ ······❶

직선 AB의 방정식은

$y+2=\dfrac{10-(-2)}{1-(-4)}(x+4)$

$\therefore$ $12x-5y+38=0$ ······❷

점 $C(0,\ k)$와 직선 AB 사이의 거리는

$\dfrac{|12\times0-5k+38|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\dfrac{|-5k+38|}{13}$ ······❸

이때 $\triangle ABC$의 넓이가 24이므로

$\dfrac{1}{2}\times13\times\dfrac{|-5k+38|}{13}=24$

$|-5k+38|=48$, $-5k+38=\pm48$

$\therefore$ $k=-2$ 또는 $k=\dfrac{86}{5}$

그런데 $k<0$이므로 $k=-2$ ······❹

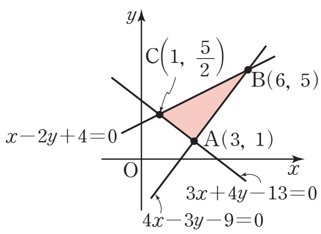
채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	20%
❷ 직선 AB의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ 점 C와 직선 AB 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%
❹ k의 값을 구할 수 있다.	20%

48 답 $\dfrac{25}{4}$

$3x+4y-13=0$ ······㉠

$4x-3y-9=0$ ······㉡

$x-2y+4=0$ ······㉢



두 직선 ㉠, ㉡의 교점을 A,

두 직선 ㉡, ㉢의 교점을 B,

두 직선 ㉠, ㉢의 교점을 C

라 하면

$A(3,\ 1)$, $B(6,\ 5)$, $C\left(1,\ \dfrac{5}{2}\right)$

$\therefore$ $\overline{AB}=\sqrt{(6-3)^2+(5-1)^2}=5$

점 $C\left(1,\ \dfrac{5}{2}\right)$와 직선 $4x-3y-9=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{\left|4\times1-3\times\dfrac{5}{2}-9\right|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{5}{2}$

$\therefore$ $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{5}{2}=\dfrac{25}{4}$

48-1 답 10

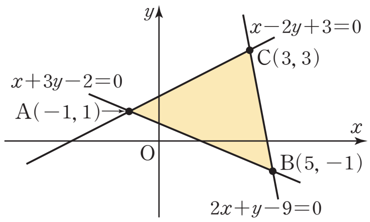
$x-2y+3=0$ ……㉠

$2x+y-9=0$ ……㉡

$x+3y-2=0$ ……㉢

두 직선 ㉠, ㉢의 교점을 A, 두 직선 ㉡, ㉢의 교점을 B, 두 직선 ㉠, ㉡의 교점을 C라 하면

$A(-1, 1), B(5, -1), C(3, 3)$



$\overline{AB}=\sqrt{(5+1)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{10}$

점 $C(3, 3)$과 직선 $x+3y-2=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3+3\times3-2|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

$\therefore\ \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{10}\times\sqrt{10}=10$

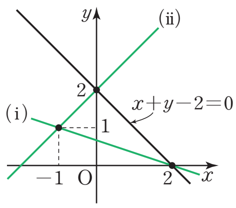
유형 완성하기 p. 49

49 답 ②

$mx+y+m-1=0$에서 $m(x+1)+y-1=0$ ……㉠

직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 1)$을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 두 직선이 제1사분면에서 만나도록 직선 ㉠을 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 $(2, 0)$을 지날 때

$3m-1=0\qquad\therefore\ m=\dfrac{1}{3}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0, 2)$를 지날 때

$m+1=0\qquad\therefore\ m=-1$

(i), (ii)에서 실수 m의 값의 범위는 $-1<m<\dfrac{1}{3}$

따라서 $a=-1, b=\dfrac{1}{3}$이므로

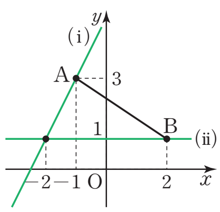
$ab=-1\times\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}$

50 답 $0\le k\le2$

$y=k(x+2)+1$에서 $k(x+2)-y+1=0$ ……㉠

직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 1)$을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 $\overline{AB}$와 한 점에서 만나도록 직선 ㉠을 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 $A(-1, 3)$을 지날 때

$k-2=0\qquad\therefore\ k=2$

(ii) 직선 ㉠이 점 $B(2, 1)$을 지날 때

$4k=0\qquad\therefore\ k=0$

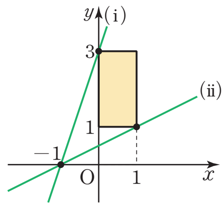
(i), (ii)에서 실수 k의 값의 범위는 $0\le k\le2$

51 답 최댓값: 3, 최솟값: $\dfrac{1}{2}$

$kx-y+k=0$에서 $k(x+1)-y=0$ ……㉠

직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 0)$을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 직사각형과 만나도록 직선 ㉠을 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 $(0, 3)$을 지날 때

$k-3=0\qquad\therefore\ k=3$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(1, 1)$을 지날 때

$2k-1=0\qquad\therefore\ k=\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 실수 k의 값의 범위는 $\dfrac{1}{2}\le k\le3$

따라서 실수 k의 최댓값은 3, 최솟값은 $\dfrac{1}{2}$이다.

52 답 ⑤

두 직선 $3x+2y=0$, $2x-3y=0$으로부터 같은 거리에 있는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$\dfrac{|3x+2y|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{|2x-3y|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}$, $|3x+2y|=|2x-3y|$

$\therefore\ 3x+2y=\pm(2x-3y)$

(i) $3x+2y=-(2x-3y)$일 때

$3x+2y=-2x+3y$이므로 $5x-y=0$

즉 $a=5$, $b=-1$이므로

$a^2+b^2=5^2+(-1)^2=26$

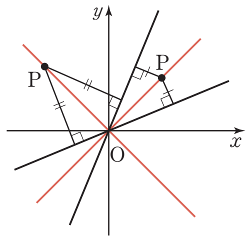
(ii) $3x+2y=2x-3y$일 때

$x+5y=0$이므로 $a=1$, $b=5$

$\therefore\ a^2+b^2=1^2+5^2=26$

(i), (ii)에서 $a^2+b^2=26$

참고 오른쪽 그림과 같이 두 직선으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는 두 직선이 이루는 각의 이등분선이다. 이때 두 직선이 한 점에서 만나면 맞꼭지각이 2쌍 생기므로 두 직선으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는 두 개의 직선으로 나타난다.



53 답 ④

두 직선 $x-4y+4=0$, $4x+y-2=0$이 이루는 각의 이등분선 위의 점의 좌표를 (x, y)라 하면 점 (x, y)에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\dfrac{|x-4y+4|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\dfrac{|4x+y-2|}{\sqrt{4^2+1^2}}$, $|x-4y+4|=|4x+y-2|$

$\therefore\ x-4y+4=\pm(4x+y-2)$

(i) $x-4y+4=-(4x+y-2)$일 때

$x-4y+4=-4x-y+2$이므로 $5x-3y+2=0$

즉 이 직선의 y절편은 $\dfrac{2}{3}$이다.

(ii) $x-4y+4=4x+y-2$일 때

$3x+5y-6=0$이므로 이 직선의 y절편은 $\dfrac{6}{5}$이다.

(i), (ii)에서 두 직선의 y절편의 곱은

$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{6}{5}=\dfrac{4}{5}$

54 답 $4x+3y+5=0$ 또는 $y=-\frac{3}{5}$

점 P의 좌표를 $P(x, y)$라 하면 $\overline{PA}=2\overline{PB}$이므로

$\frac{|2x-y+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\times\frac{|x+2y+2|}{\sqrt{1^2+2^2}}$, $|2x-y+1|=2|x+2y+2|$

$\therefore 2x-y+1=\pm2(x+2y+2)$

(i) $2x-y+1=-2(x+2y+2)$일 때

$2x-y+1=-2x-4y-4$이므로 $4x+3y+5=0$

(ii) $2x-y+1=2(x+2y+2)$일 때

$2x-y+1=2x+4y+4$이므로 $y=-\frac{3}{5}$

(i), (ii)에서 구하는 도형의 방정식은

$4x+3y+5=0$ 또는 $y=-\frac{3}{5}$

학교 시험 대비 문제

p. 50~53

01 답 ①

구하는 직선의 기울기는 $\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$

즉 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이고 점 $(-2, -\sqrt{3})$을 지나는 직선의 방정식은

$y+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$ $\qquad\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}$

이 직선의 x절편이 1, y절편이 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

02 답 2

선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times(-1)+3\times4}{2+3}, \frac{2\times(-1)+3\times(-6)}{2+3}\right)$ $\qquad\therefore (2, -4)$

즉 두 점 $(2, -4)$, $(-2, 8)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+4=\frac{8-(-4)}{-2-2}(x-2)$ $\qquad\therefore y=-3x+2$

따라서 이 직선의 y절편은 2이다.

03 답 $\frac{x}{3}-\frac{y}{10}=1$

직선 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$의 x절편이 3이므로 $P(3, 0)$

직선 $\frac{x}{2}-\frac{y}{5}=2$, 즉 $\frac{x}{4}+\frac{y}{-10}=1$의 y절편이 -10이므로

$Q(0, -10)$

따라서 직선 PQ의 방정식은

$\frac{x}{3}+\frac{y}{-10}=1$ $\qquad\therefore \frac{x}{3}-\frac{y}{10}=1$

04 답 ③

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{5-(-1)}{1-(-2)}=\frac{(k+2)-5}{k-1}$, $2=\frac{k-3}{k-1}$

$2k-2=k-3$ $\qquad\therefore k=-1$

05 답 ②

직선 l이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{BC}$의 중점을 지나야 한다.

$\overline{BC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{8+0}{2}, \frac{-6+2}{2}\right)$ $\qquad\therefore (4, -2)$

따라서 두 점 $(1, 4)$, $(4, -2)$를 지나는 직선 l의 방정식은

$y-4=\frac{-2-4}{4-1}(x-1)$ $\qquad\therefore y=-2x+6$

06 답 ②

$ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

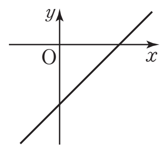
이 직선의 기울기가 음수이고 y절편이 양수이므로

$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$

$cx+by+a=0$에서 $b\neq0$이므로 $y=-\frac{c}{b}x-\frac{a}{b}$

$\therefore$ (기울기)$=-\frac{c}{b}>0$, (y절편)$=-\frac{a}{b}<0$

따라서 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.



07 답 -1

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x-2y+3)k+(x+3y+a)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x-2y+3=0$, $x+3y+a=0$

즉 점 $(-1, b)$는 위의 두 직선의 교점이므로

$-1-2b+3=0$, $-1+3b+a=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$

$\therefore a+b=-2+1=-1$

08 답 ⑤

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x+2y-2)+k(2x-y-3)=0$ (k는 실수) ……㉠

이 직선이 점 $(1, -2)$를 지나므로

$-5+k=0$ $\qquad\therefore k=5$

$k=5$를 ㉠에 대입하면

$(x+2y-2)+5(2x-y-3)=0$

$11x-3y-17=0$

따라서 $a=11$, $b=-17$이므로

$a-b=11-(-17)=28$

09 답 -2

두 직선 $ax-y+b=0$, $bx-2y+a=0$이 만나지 않으면 평행하므로

$\frac{a}{b}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{b}{a}$ $\qquad\therefore b=2a$

$b=2a$를 $bx+ay=0$에 대입하면

$2ax+ay=0$, $ay=-2ax$

$\therefore y=-2x$ ($\because a\neq0$)

따라서 기울기는 -2이다.

10 답 5

직선 $x+ay-1=0$과 직선 $2x-by=0$이 서로 수직이므로

$1\times2+a\times(-b)=0 \qquad \therefore ab=2$

직선 $x+ay-1=0$과 직선 $x-(b-3)y+1=0$이 평행하므로

$\frac{1}{1}=\frac{a}{-(b-3)}\neq\frac{-1}{1} \qquad \therefore a+b=3$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\times2=5$

11 답 $y=3x+1$

두 점 $(1,\ -4)$, $(3,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{2-(-4)}{3-1}=3$

따라서 두 점 $(1,\ -4)$, $(3,\ 2)$를 지나는 직선에 평행한 직선의 기울기는 3이므로 기울기가 3이고 점 $(2,\ 7)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-7=3(x-2) \qquad \therefore y=3x+1$

12 답 $\frac{27}{2}$

직선 $3x+4y-2=0$, 즉 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로 기울기가 $\frac{4}{3}$이고 점 $(3,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+2=\frac{4}{3}(x-3) \qquad \therefore y=\frac{4}{3}x-6$

따라서 이 직선의 x절편이 $\frac{9}{2}$, y절편이 -6이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}\times6=\frac{27}{2}$

13 답 29

$\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3+5}{2},\ \frac{4-12}{2}\right) \qquad \therefore (1,\ -4)$

직선 AB의 기울기는 $\frac{-12-4}{5-(-3)}=-2$이므로 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

즉 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 점 $(1,\ -4)$를 지나므로

$y+4=\frac{1}{2}(x-1) \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{9}{2}$

이 직선이 점 $(a,\ 10)$을 지나므로

$10=\frac{1}{2}a-\frac{9}{2},\ \frac{1}{2}a=\frac{29}{2} \qquad \therefore a=29$

14 답 128

$x-3y=0$ ……㉠

$3x+2y-11=0$ ……㉡

$4x-ky-16=0$ ……㉢

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 평행할 때

$\frac{1}{4}=\frac{-3}{-k}\neq\frac{0}{-16} \qquad \therefore k=12$

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 평행할 때

$\frac{3}{4}=\frac{2}{-k}\neq\frac{-11}{-16} \qquad \therefore k=-\frac{8}{3}$

(iii) 세 직선 ㉠, ㉡, ㉢이 한 점에서 만날 때

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=1$

즉 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(3,\ 1)$이다.

이때 직선 ㉢이 점 $(3,\ 1)$을 지나야 하므로

$12-k-16=0 \qquad \therefore k=-4$

(i)~(iii)에서 $k=12$ 또는 $k=-\frac{8}{3}$ 또는 $k=-4$이므로 그 곱은

$12\times\left(-\frac{8}{3}\right)\times(-4)=128$

15 답 25

주어진 두 직선이 수직이므로

$a\times3+1\times(-5)=0 \qquad \therefore a=\frac{5}{3}$

이때 점 $(1,\ 2)$에서 직선 $\frac{5}{3}x+y-1=0$, 즉 $5x+3y-3=0$과 직선 $3x-5y+b=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|5\times1+3\times2-3|}{\sqrt{5^2+3^2}}=\frac{|3\times1-5\times2+b|}{\sqrt{3^2+(-5)^2}}$

$8=|b-7|,\ b-7=\pm8$

$\therefore b=-1$ 또는 $b=15$

그런데 $b>0$이므로 $b=15$

$\therefore ab=\frac{5}{3}\times15=25$

16 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x-y-1+k(x+y)=0$에서 $(k+1)x+(k-1)y-1=0$

$\therefore f(k)=\frac{|-1|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2k^2+2}}$

$f(k)$의 값이 최대인 경우는 $\sqrt{2k^2+2}$의 값이 최소일 때, 즉 $k=0$일 때이다.

따라서 $f(k)$의 최댓값은

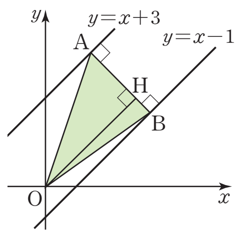
$f(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

17 답 $y=-x+6$

두 직선이 평행하므로 선분 AB의 길이는 두 직선 $y=x+3$, $y=x-1$ 사이의 거리와 같다.

직선 $y=x+3$ 위의 점 $(0,\ 3)$과 직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2} \qquad \therefore \overline{AB}=2\sqrt{2}$



오른쪽 그림과 같이 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle OBA=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\overline{OH}=6$

$\therefore \overline{OH}=3\sqrt{2}$

이때 직선 AB는 직선 $y=x+3$과 수직이므로 직선 AB의 기울기는 -1이다.

직선 AB의 방정식을 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$ (k는 실수)이라 하면 이 직선과 원점 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$이므로

$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2} \qquad \therefore k=\pm6$

그런데 두 점 A, B가 제1사분면 위의 점이므로 $k=6$

따라서 직선 AB의 방정식은

$y=-x+6$

18 답 7

$\overline{BC}=\sqrt{(2-0)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$

직선 BC의 방정식은

$y-2=\dfrac{4-2}{2-0}(x-0)\qquad \therefore\ x-y+2=0$

점 A$(1, a)$와 직선 BC 사이의 거리는

$\dfrac{|1-a+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-a+3|}{\sqrt{2}}$

이때 △ABC의 넓이가 4이므로

$\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{|-a+3|}{\sqrt{2}}=4,\ |-a+3|=4$

$-a+3=\pm 4\qquad \therefore\ a=-1$ 또는 $a=7$

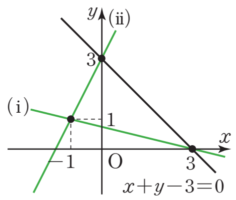
그런데 $a>0$이므로 $a=7$

19 답 $-\dfrac{1}{4}<m<2$

$mx-y+m+1=0$에서 $m(x+1)-y+1=0$ ……㉠

직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 1)$을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 두 직선이 제1사분면에서 만나도록 직선 ㉠을 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 $(3, 0)$을 지날 때

$4m+1=0\qquad \therefore\ m=-\dfrac{1}{4}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0, 3)$을 지날 때

$m-2=0\qquad \therefore\ m=2$

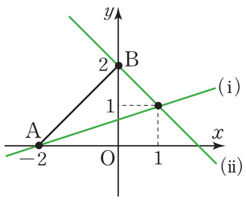
(i), (ii)에서 실수 m의 값의 범위는 $-\dfrac{1}{4}<m<2$

20 답 ②

$y=mx-m+1$에서 $m(x-1)-y+1=0$ ……㉠

직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 1)$을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 $\overline{\text{AB}}$와 한 점에서 만나도록 직선 ㉠을 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 A$(-2, 0)$을 지날 때

$-3m+1=0\qquad \therefore\ m=\dfrac{1}{3}$

(ii) 직선 ㉠이 점 B$(0, 2)$를 지날 때

$-m-1=0\qquad \therefore\ m=-1$

(i), (ii)에서 실수 m의 값의 범위는 $-1\le m\le\dfrac{1}{3}$

21 답 ④

두 직선 $x-2y+1=0$, $2x+y-1=0$이 이루는 각의 이등분선 위의 점의 좌표를 (x, y)라 하면 점 (x, y)에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\dfrac{|x-2y+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|2x+y-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$

$|x-2y+1|=|2x+y-1|$

$\therefore\ x-2y+1=\pm(2x+y-1)$

(i) $x-2y+1=-(2x+y-1)$일 때

$x-2y+1=-2x-y+1$이므로

$3x-y=0$

(ii) $x-2y+1=2x+y-1$일 때

$x+3y-2=0$

(i), (ii)에서 기울기가 음수인 것은 $x+3y-2=0$

따라서 $a=1$, $b=3$이므로

$a+b=1+3=4$

서술형 1 답 $y=-1$

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\text{G}\left(\dfrac{2-4+5}{3}, \dfrac{1-3-1}{3}\right)\qquad \therefore\ \text{G}(1, -1)$ ……❶

따라서 두 점 C$(5, -1)$, G$(1, -1)$을 지나는 직선의 방정식은 두 점의 y좌표가 -1로 같으므로 $y=-1$ ……❷

채점 기준	비율
❶ 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구할 수 있다.	50%
❷ 직선 CG의 방정식을 구할 수 있다.	50%

서술형 2 답 $3x-y-6=0$

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x+y+2)+k(x-y-4)=0$ (k는 실수)

$\therefore\ (k+1)x+(-k+1)y-4k+2=0$ ……㉠ ……❶

직선 ㉠이 직선 $6x-2y+3=0$에 평행하므로

$\dfrac{k+1}{6}=\dfrac{-k+1}{-2}\ne\dfrac{-4k+2}{3}$

$-2k-2=-6k+6\qquad \therefore\ k=2$ ……❷

$k=2$를 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$3x-y-6=0$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을 이용하여 ㉠을 구할 수 있다.	30%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 직선의 방정식을 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 -35

두 점 A$(1, a)$, B$(5, b)$를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{b-a}{5-1}=\dfrac{b-a}{4}$

직선 $x-3y=0$이 $\overline{\text{AB}}$와 수직이므로

$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{b-a}{4}=-1\qquad \therefore\ a-b=12$ ……㉠

$\overline{\text{AB}}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{1+5}{2}, \dfrac{a+b}{2}\right)\qquad \therefore\ \left(3, \dfrac{a+b}{2}\right)$

직선 $x-3y=0$이 $\overline{\text{AB}}$의 중점을 지나므로

$3-3\times\dfrac{a+b}{2}=0\qquad \therefore\ a+b=2$ ……㉡ ……❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=7$, $b=-5$ ……❷

$\therefore\ ab=7\times(-5)=-35$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 선분의 수직이등분선의 성질을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	60%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 54~55

01 답 ②

$f(x)=x^2+px+p=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+p-\dfrac{p^2}{4}$이므로 점 A의 좌표는

$A\left(-\frac{p}{2}, p-\frac{p^2}{4}\right)$

$f(0)=p$이므로 점 B의 좌표는 $B(0, p)$

두 점 A, B를 지나는 직선 l의 방정식은

$$y-p=\frac{p-\left(p-\frac{p^2}{4}\right)}{0-\left(-\frac{p}{2}\right)}(x-0) \qquad \therefore y=\frac{p}{2}x+p$$

이 직선의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$0=\frac{p}{2}x+p$, $\frac{p}{2}x=-p$

$\therefore x=-2\ (\because p\neq 0)$

따라서 직선 l의 x절편은 -2이다.

02 답 ④

(가)에 의하여 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$ (AA 닮음)

(나)에 의하여 $\triangle ADE$와 $\triangle ABC$의 넓이의 비가 $1:9$이므로 두 삼각형의 닮음비는 $1:3$이다.

즉 점 E는 $\overline{AC}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$E\left(\frac{1\times6+2\times3}{1+2}, \frac{1\times(-1)+2\times5}{1+2}\right) \qquad \therefore E(4, 3)$

따라서 두 점 $B(0, 1)$, $E(4, 3)$을 지나는 직선 BE의 방정식은

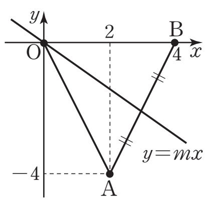
$y-1=\frac{3-1}{4-0}(x-0) \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x+1$

$\therefore k=\frac{1}{2}$

03 답 ④

점 B의 좌표를 $B(k, 0)$이라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점 $O(0, 0)$, $B(k, 0)$에서 만나고 꼭짓점의 x좌표가 2이므로 $\frac{0+k}{2}=2 \qquad \therefore k=4$, 즉 $B(4, 0)$

직선 $y=mx$는 m의 값에 관계없이 항상 원점을 지난다.



따라서 직선 $y=mx$가 $\triangle OAB$의 넓이를 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$의 중점을 지나야 한다.

두 점 $A(2, -4)$, $B(4, 0)$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-4+0}{2}\right) \qquad \therefore (3, -2)$

따라서 직선 $y=mx$는 점 $(3, -2)$를 지나므로

$-2=3m \qquad \therefore m=-\frac{2}{3}$

04 답 ③

점 $P(a, b)$는 직선 $x+y=2$ 위의 점이므로

$a+b=2 \qquad \therefore b=2-a$, 즉 $P(a, 2-a)$

점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발은 각각 $Q(a, 0)$, $R(0, b)$

직선 l은 직선 QR와 수직이고, 직선 QR의 기울기는 $-\frac{b}{a}$이므로

직선 l의 기울기는 $\frac{a}{b}=\boxed{(가)\ \frac{a}{2-a}}$

즉 직선 l의 방정식은

$y-(2-a)=\boxed{(가)\ \frac{a}{2-a}}(x-a)$

$(2-a)y-(2-a)^2=a(x-a)$

$2y-ay-4+4a-a^2=ax-a^2$

위의 식을 a에 대하여 정리하면

$(x+y-4)a+(4-2y)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

㉠이 a의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+y-4=0$, $4-2y=0$

$\therefore x=\boxed{(나)\ 2}$, $y=\boxed{(다)\ 2}$

따라서 $f(a)=\frac{a}{2-a}$, $\alpha=2$, $\beta=2$이므로

$f\left(\frac{4}{3}\right)+\alpha+\beta=2+2+2=6$

05 답 ②

$(3k+2)x-y+2=0$에서 $y=(3k+2)x+2$이므로 이 직선의 기울기는 $3k+2$, y절편은 2이다.

이때 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3k+2}$이고 이 직선과 y축에서 만나므로 y절편은 2이다.

즉 구하는 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{3k+2}x+2$

이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$0=-\frac{1}{3k+2}+2$, $\frac{1}{3k+2}=2$

$6k+4=1 \qquad \therefore k=-\frac{1}{2}$

06 답 ②

직선 AP의 기울기는 $\frac{4-2}{4-0}=\frac{1}{2}$

직선 BP의 기울기는 $\frac{4-2}{4-n}=\frac{2}{4-n}$

이때 직선 AP와 직선 BP가 서로 수직이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{4-n}=-1$, $\frac{1}{4-n}=-1$

$4-n=-1 \qquad \therefore n=5$

즉 세 점 A, B, P의 좌표는 $A(0, 2)$, $B(5, 2)$, $P(4, 4)$이므로

$\triangle ABP$의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{0+5+4}{3}, \frac{2+2+4}{3}\right) \qquad \therefore \left(3, \frac{8}{3}\right)$

따라서 $a=3$, $b=\frac{8}{3}$이므로

$a+b=3+\frac{8}{3}=\frac{17}{3}$

07 답 ①

$\triangle OAB$의 무게중심 G의 좌표는

$G\left(\frac{0+8+7}{3}, \frac{0+4+a}{3}\right) \qquad \therefore G\left(5, \frac{a+4}{3}\right)$

이때 $G(5, b)$이므로

$b=\frac{a+4}{3} \qquad \cdots\cdots ㉠$

직선 OA의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x \qquad \therefore x-2y=0$

점 $G(5, b)$와 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|5-2b|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$, $|5-2b|=5$

$5-2b=\pm5 \qquad \therefore b=0$ 또는 $b=5$

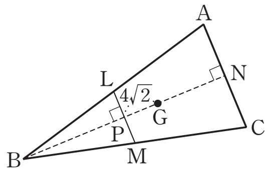
그런데 $a>0$이므로 ㉠에서 $b>0 \qquad \therefore b=5$

$b=5$를 ㉠에 대입하면

$5=\dfrac{a+4}{3}$, $a+4=15$ $\quad\therefore a=11$

$\therefore a+b=11+5=16$

08 답 ⑤



오른쪽 그림과 같이 직선 BN과 직선 LM의 교점을 P라 하면 직선 BN이 선분 AC의 수직이등분선이므로 점 P는 선분 LM의 중점이다.

즉 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\dfrac{2+4}{2}, \dfrac{1-1}{2}\right)$

$\therefore \mathrm{P}(3, 0)$

$\triangle$ABC에서 $\overline{\mathrm{BL}}=\overline{\mathrm{LA}}$, $\overline{\mathrm{LP}} /\!/ \overline{\mathrm{AN}}$이므로

$\overline{\mathrm{NP}}=\overline{\mathrm{BP}}$

점 G는 $\triangle$ABC의 무게중심이므로

$\overline{\mathrm{BG}}=2\overline{\mathrm{GN}}$ $\cdots\cdots$㉠

$\overline{\mathrm{BG}}=\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{PG}}=\overline{\mathrm{NP}}+4\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{GN}}=\overline{\mathrm{NP}}-\overline{\mathrm{PG}}=\overline{\mathrm{NP}}-4\sqrt{2}$이므로

㉠에서 $\overline{\mathrm{NP}}+4\sqrt{2}=2(\overline{\mathrm{NP}}-4\sqrt{2})$

$\overline{\mathrm{NP}}+4\sqrt{2}=2\overline{\mathrm{NP}}-8\sqrt{2}$ $\quad\therefore \overline{\mathrm{NP}}=12\sqrt{2}$

두 점 N, P의 좌표는 $\mathrm{N}(a, b)$, $\mathrm{P}(3, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{NP}}=\sqrt{(a-3)^2+b^2}=12\sqrt{2}$

$\therefore (a-3)^2+b^2=(12\sqrt{2})^2=288$ $\cdots\cdots$㉡

한편 직선 PN의 기울기는 $\dfrac{b}{a-3}$, 직선 LM의 기울기는

$\dfrac{-1-1}{4-2}=-1$이고 직선 PN과 직선 LM은 서로 수직이므로

$\dfrac{b}{a-3}\times(-1)=-1$ $\quad\therefore b=a-3$ $\cdots\cdots$㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $(a-3)^2+(a-3)^2=288$

$2(a-3)^2=288$, $(a-3)^2=144$

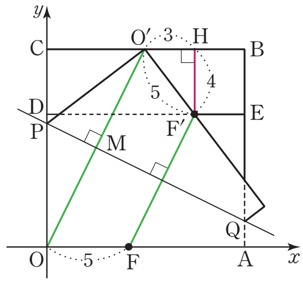
$a-3=\pm12$ $\quad\therefore a=-9$ 또는 $a=15$

그런데 무게중심 G가 제1사분면에 있으므로 $a=15$

$a=15$를 ㉢에 대입하면 $b=15-3=12$

$\therefore ab=15\times12=180$

09 답 ⑤



점 D는 $\overline{\mathrm{OC}}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=4$

점 F′에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{F'H}}=\overline{\mathrm{CD}}=4$

$\overline{\mathrm{O'F'}}=\overline{\mathrm{OF}}=5$이므로 직각삼각형 F′HO′에서 $\overline{\mathrm{O'H}}=3$

이때 $\overline{\mathrm{CO'}}=a$라 하면

$\mathrm{O'}(a, 12)$, $\mathrm{F'}(a+3, 8)$

$\overline{\mathrm{OO'}}$과 $\overline{\mathrm{FF'}}$은 모두 $\overline{\mathrm{PQ}}$와 수직이므로 $\overline{\mathrm{OO'}} /\!/ \overline{\mathrm{FF'}}$

즉 두 직선 OO′과 FF′의 기울기가 서로 같으므로

$\dfrac{12-0}{a-0}=\dfrac{8-0}{(a+3)-5}$, $\dfrac{12}{a}=\dfrac{8}{a-2}$

$12a-24=8a$ $\quad\therefore a=6$, 즉 $\mathrm{O'}(6, 12)$

직선 OO′의 기울기가 $\dfrac{12}{6}=2$이므로 직선 PQ의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이다.

$\overline{\mathrm{OO'}}$의 중점 M의 좌표는

$\mathrm{M}\left(\dfrac{0+6}{2}, \dfrac{0+12}{2}\right)$ $\quad\therefore \mathrm{M}(3, 6)$

기울기가 $-\dfrac{1}{2}$이고 점 $\mathrm{M}(3, 6)$을 지나는 직선 PQ의 방정식은

$y-6=-\dfrac{1}{2}(x-3)$ $\quad\therefore y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{15}{2}$

따라서 $m=-\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{15}{2}$이므로

$m+n=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{15}{2}=7$

03 원의 방정식

Ⅰ 도형의 방정식

개념 완성하기 p. 59~60

01 답 $(-1, 2)$, 3
$(x+1)^2+(y-2)^2=3^2$에서 원의 중심의 좌표는 $(-1, 2)$, 반지름의 길이는 3이다.

02 답 $(0, -3)$, 2
$x^2+(y+3)^2=2^2$에서 원의 중심의 좌표는 $(0, -3)$, 반지름의 길이는 2이다.

03 답 $(2, 0)$, 4
$(x-2)^2+y^2=4^2$에서 원의 중심의 좌표는 $(2, 0)$, 반지름의 길이는 4이다.

04 답 $(1, -3)$, 5
$x^2+y^2-2x+6y-15=0$에서 $(x-1)^2+(y+3)^2=25$
따라서 주어진 원의 중심의 좌표는 $(1, -3)$, 반지름의 길이는 5이다.

05 답 $(-2, 1)$, $\sqrt{10}$
$x^2+y^2+4x-2y-5=0$에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=10$
따라서 주어진 원의 중심의 좌표는 $(-2, 1)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

06 답 $(3, -4)$, $3\sqrt{3}$
$x^2+y^2-6x+8y-2=0$에서 $(x-3)^2+(y+4)^2=27$
따라서 주어진 원의 중심의 좌표는 $(3, -4)$, 반지름의 길이는 $3\sqrt{3}$이다.

07 답 $(x+4)^2+(y-1)^2=5$

08 답 $(x+3)^2+(y+2)^2=4$

09 답 $(x-2)^2+(y+5)^2=7$

10 답 $x^2+y^2=10$
원의 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 중심이 원점이므로 원의 방정식은 $x^2+y^2=r^2$
이 원이 점 $(1, 3)$을 지나므로
$1^2+3^2=r^2 \qquad \therefore r^2=10$
따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2=10$

11 답 $(x+2)^2+(y-2)^2=8$
원의 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 중심의 좌표가 $(-2, 2)$이므로 원의 방정식은 $(x+2)^2+(y-2)^2=r^2$
이 원이 원점을 지나므로
$2^2+(-2)^2=r^2 \qquad \therefore r^2=8$
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x+2)^2+(y-2)^2=8$

12 답 $(x+5)^2+(y-3)^2=53$
원의 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 중심의 좌표가 $(-5, 3)$이므로 원의 방정식은 $(x+5)^2+(y-3)^2=r^2$
이 원이 점 $(2, 1)$을 지나므로
$(2+5)^2+(1-3)^2=r^2 \qquad \therefore r^2=53$
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x+5)^2+(y-3)^2=53$

13 답 $x^2+y^2+3x-y=0$
세 점을 지나는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고 세 점의 좌표를 각각 대입하여 정리하면
$C=0$ ……㉠
$B+C=-1$ ……㉡
$A+B-C=2$ ……㉢
㉠을 ㉡에 대입하면 $B=-1$
$B=-1$, $C=0$을 ㉢에 대입하면 $A-1=2 \qquad \therefore A=3$
따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2+3x-y=0$

14 답 $x^2+y^2+x-y-2=0$
세 점을 지나는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고 세 점의 좌표를 각각 대입하여 정리하면
$B-C=1$ ……㉠
$A+C=-1$ ……㉡
$2B+C=-4$ ……㉢
㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $B=-1$, $C=-2$
$C=-2$를 ㉡에 대입하면 $A-2=-1 \qquad \therefore A=1$
따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2+x-y-2=0$

15 답 $x^2+y^2-6x+5=0$
세 점을 지나는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고 세 점의 좌표를 각각 대입하여 정리하면
$A+C=-1$ ……㉠
$5A+C=-25$ ……㉡
$3A-2B+C=-13$ ……㉢
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $A=-6$, $C=5$
$A=-6$, $C=5$를 ㉢에 대입하면
$-18-2B+5=-13 \qquad \therefore B=0$
따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2-6x+5=0$

16 답 $x^2+y^2-4x+2y=0$
세 점을 지나는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고 세 점의 좌표를 각각 대입하여 정리하면
$C=0$ ……㉠
$3A+B+C=-10$ ……㉡
$4A-2B+C=-20$ ……㉢
㉠을 ㉡, ㉢에 각각 대입하면
$3A+B=-10$, $2A-B=-10$
두 식을 연립하여 풀면 $A=-4$, $B=2$
따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2-4x+2y=0$

17 답 $4x-2y-1=0$
두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-9-(x^2+y^2-4x+2y-8)=0$
$\therefore 4x-2y-1=0$

18 답 $2x+4y-11=0$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-16-(x^2+y^2-2x-4y-5)=0$

$\therefore 2x+4y-11=0$

19 답 $2x+2y-9=0$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-2x+y-9-(x^2+y^2-4x-y)=0$

$\therefore 2x+2y-9=0$

20 답 $x^2+y^2-6x=0$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+4x-2y-4+k(x^2+y^2-x-y-2)=0\ (k\neq-1)$ ······㉠

으로 놓으면 이 원이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$-4-2k=0 \qquad \therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2+4x-2y-4-2(x^2+y^2-x-y-2)=0$

$\therefore x^2+y^2-6x=0$

21 답 $x^2+y^2-x+y=0$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2-2x+k(x^2+y^2+2y)=0\ (k\neq-1)$ ······㉠

으로 놓으면 이 원이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$-1+k=0 \qquad \therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-2x+(x^2+y^2+2y)=0$

$\therefore x^2+y^2-x+y=0$

22 답 $x^2+y^2-14x+8y-20=0$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2-6x+2y-9+k(x^2+y^2+2x-4y+2)=0\ (k\neq-1)$ ······㉠

으로 놓으면 이 원이 점 $(1, 3)$을 지나므로

$1+2k=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{2}$

$k=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-6x+2y-9-\frac{1}{2}(x^2+y^2+2x-4y+2)=0$

$\therefore x^2+y^2-14x+8y-20=0$

23 답 2

$x+y-2=0$에서 $x=-y+2$

$x=-y+2$를 $x^2+y^2-2x+4y=0$에 대입하면

$(-y+2)^2+y^2-2(-y+2)+4y=0$

$\therefore y^2+y=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times0=1>0$

따라서 원 O와 직선 l의 교점의 개수는 2이다.

24 답 1

$x-y+5=0$에서 $y=x+5$

$y=x+5$를 $(x+1)^2+(y-2)^2=2$에 대입하면

$(x+1)^2+(x+3)^2=2$

$\therefore x^2+4x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\times4=0$

따라서 원 O와 직선 l의 교점의 개수는 1이다.

25 답 0

$2x-y-2=0$에서 $y=2x-2$

$y=2x-2$를 $x^2+y^2+2x-2y-2=0$에 대입하면

$x^2+(2x-2)^2+2x-2(2x-2)-2=0$

$\therefore 5x^2-10x+6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-5)^2-5\times6=-5<0$

따라서 원 O와 직선 l의 교점의 개수는 0이다.

26 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

원의 중심 $(2, -1)$과 직선 $3x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|6+1-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 5이고 $\frac{3\sqrt{10}}{5}<5$이므로 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.

27 답 한 점에서 만난다. (접한다.)

$x^2+y^2+2x-4y+4=0$에서 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$

원의 중심 $(-1, 2)$와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-3+8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{5}{5}=1$

이때 원의 반지름의 길이가 1이므로 원 O와 직선 l은 한 점에서 만난다. (접한다.)

28 답 만나지 않는다.

$x^2+y^2-6x-4y+8=0$에서 $(x-3)^2+(y-2)^2=5$

원의 중심 $(3, 2)$와 직선 $2x-y+2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|6-2+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이고 $\frac{6\sqrt{5}}{5}>\sqrt{5}$이므로 원 O와 직선 l은 만나지 않는다.

29 답 (1) $-2<k<2$ (2) $k=-2$ 또는 $k=2$
(3) $k<-2$ 또는 $k>2$

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $x+y-k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<\sqrt{2},\ |k|<2 \qquad \therefore -2<k<2$

(2) 한 점에서 만나려면

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},\ |k|=2 \qquad \therefore k=-2$ 또는 $k=2$

(3) 만나지 않으려면

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}>\sqrt{2},\ |k|>2 \qquad \therefore k<-2$ 또는 $k>2$

30 답 $y=2x\pm5\sqrt{5}$

원 $x^2+y^2=25$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y=2x\pm5\sqrt{2^2+1}$　　$\therefore y=2x\pm5\sqrt{5}$

31 답 $y=3x\pm\sqrt{10}$

원 $x^2+y^2=1$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y=3x\pm1\times\sqrt{3^2+1}$　　$\therefore y=3x\pm\sqrt{10}$

32 답 $y=-x\pm3\sqrt{2}$

원 $x^2+y^2=9$에 접하고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y=-x\pm3\sqrt{(-1)^2+1}$　　$\therefore y=-x\pm3\sqrt{2}$

33 답 $x-\sqrt{2}y=3$

원 $x^2+y^2=3$ 위의 점 $(1, -\sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

$x-\sqrt{2}y=3$

34 답 $x+\sqrt{3}y=4$

원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $(1, \sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

$x+\sqrt{3}y=4$

35 답 $x-y=4$

원 $x^2+y^2=8$ 위의 점 $(2, -2)$에서의 접선의 방정식은

$2x-2y=8$　　$\therefore x-y=4$

36 답 $y=-x+2$ 또는 $y=x+2$

접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(0, 2)$를 지나므로 접선의 방정식은

$y-2=mx$　　$\therefore y=mx+2$　　……㉠

㉠을 $x^2+y^2=2$에 대입하면 $x^2+(mx+2)^2=2$

$(m^2+1)x^2+4mx+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2m)^2-(m^2+1)\times2=0$

$m^2-1=0$, $(m+1)(m-1)=0$

$\therefore m=-1$ 또는 $m=1$　　……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-x+2$ 또는 $y=x+2$

37 답 $y=-x-2$ 또는 $y=7x-10$

접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(1, -3)$을 지나므로 접선의 방정식은

$y+3=m(x-1)$　　$\therefore y=mx-m-3$　　……㉠

㉠을 $x^2+y^2=2$에 대입하면 $x^2+(mx-m-3)^2=2$

$(m^2+1)x^2-2(m^2+3m)x+m^2+6m+7=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(m^2+3m)\}^2-(m^2+1)(m^2+6m+7)=0$

$m^2-6m-7=0$, $(m+1)(m-7)=0$

$\therefore m=-1$ 또는 $m=7$　　……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-x-2$ 또는 $y=7x-10$

38 답 $y=1$ 또는 $4x-3y-5=0$

접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(2, 1)$을 지나므로 접선의 방정식은

$y-1=m(x-2)$　　$\therefore mx-y-2m+1=0$　　……㉠

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 반지름의 길이 1과 같으므로

$\frac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$, $|-2m+1|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $4m^2-4m+1=m^2+1$

$3m^2-4m=0$, $m(3m-4)=0$

$\therefore m=0$ 또는 $m=\frac{4}{3}$　　……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=1$ 또는 $\frac{4}{3}x-y-\frac{5}{3}=0$

$\therefore y=1$ 또는 $4x-3y-5=0$

39 답 $2x+y-5=0$ 또는 $x-2y-5=0$

접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(3, -1)$을 지나므로 접선의 방정식은

$y+1=m(x-3)$　　$\therefore mx-y-3m-1=0$　　……㉠

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같으므로

$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|-3m-1|=\sqrt{5m^2+5}$

양변을 제곱하면 $9m^2+6m+1=5m^2+5$

$4m^2+6m-4=0$, $2m^2+3m-2=0$

$(m+2)(2m-1)=0$

$\therefore m=-2$ 또는 $m=\frac{1}{2}$　　……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$-2x-y+5=0$ 또는 $\frac{1}{2}x-y-\frac{5}{2}=0$

$\therefore 2x+y-5=0$ 또는 $x-2y-5=0$

유형 완성하기 p.61~80

01 답 10

원 $(x+2)^2+(y-5)^2=16$의 중심의 좌표는 $(-2, 5)$이므로 구하는 원의 반지름의 길이를 r $(r>0)$라 하면 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-5)^2=r^2$

이 원이 점 $(-1, 3)$을 지나므로

$(-1+2)^2+(3-5)^2=r^2$　　$\therefore r^2=5$

$\therefore (x+2)^2+(y-5)^2=5$

이 원이 점 $(0, a)$를 지나므로 $2^2+(a-5)^2=5$

$(a-5)^2=1$, $a-5=\pm1$

$\therefore a=4$ 또는 $a=6$

따라서 모든 a의 값의 합은

$4+6=10$

01-1 답 ⑤

$x^2+y^2-4x+6y+12=0$에서 $(x-2)^2+(y+3)^2=1$

원 $(x-2)^2+(y+3)^2=1$의 중심의 좌표는 $(2, -3)$이므로 구하는 원의 반지름의 길이를 r $(r>0)$라 하면 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$

이 원이 점 $(3, -1)$을 지나므로
$(3-2)^2+(-1+3)^2=r^2$, $r^2=5$
$\therefore r=\sqrt{5}\ (\because r>0)$
따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

02 답 ②

원 $(x-a)^2+(y+1)^2=r^2$의 중심의 좌표는 $(a, -1)$이므로
$a=3, b=-1$
즉 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=r^2$이 점 $(-1, 2)$를 지나므로
$(-1-3)^2+(2+1)^2=r^2$, $r^2=25$
$\therefore r=5\ (\because r>0)$
$\therefore a+b+r=3+(-1)+5=7$

02-1 답 ④

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$의 중심의 좌표는 (a, b)이므로
$a=4, b=3$
즉 원 $(x-4)^2+(y-3)^2=c$가 원점을 지나므로
$(-4)^2+(-3)^2=c \qquad \therefore c=25$
$\therefore a+b+c=4+3+25=32$

03 답 $(x-4)^2+y^2=5$

$\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\dfrac{2\times5+1\times2}{2+1}, \dfrac{2\times(-2)+1\times4}{2+1}\right) \qquad \therefore (4, 0)$ ······ ❶
즉 원의 중심의 좌표가 $(4, 0)$이므로 원의 반지름의 길이를
$r\ (r>0)$라 하면 원의 방정식은
$(x-4)^2+y^2=r^2$
이 원이 점 $B(5, -2)$를 지나므로
$(5-4)^2+(-2)^2=r^2 \qquad \therefore r^2=5$ ······ ❷
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-4)^2+y^2=5$ ······ ❸

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ 원의 반지름의 길이를 r라 할 때, r^2의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 원의 방정식을 구할 수 있다.	20%

03-1 답 5

$\overline{AB}$를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\dfrac{3\times1+2\times6}{3+2}, \dfrac{3\times(-2)+2\times3}{3+2}\right) \qquad \therefore (3, 0)$
즉 원의 중심의 좌표가 $(3, 0)$이므로 원의 방정식은
$(x-3)^2+y^2=r^2 \qquad \therefore a=-3, b=0$
이 원이 점 $B(1, -2)$를 지나므로
$(1-3)^2+(-2)^2=r^2 \qquad \therefore r^2=8$
$\therefore a+b+r^2=-3+0+8=5$

04 답 $\sqrt{13}$

원의 중심이 y축 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(0, b)$, 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 원의 방정식은 $x^2+(y-b)^2=r^2$
이 원이 두 점 $(3, 0)$, $(2, -1)$을 지나므로
$3^2+(-b)^2=r^2$, $2^2+(-1-b)^2=r^2$
두 식을 연립하여 풀면
$b=2, r^2=13$
따라서 원의 방정식이 $x^2+(y-2)^2=13$이므로 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$이다.

다른 풀이

원의 중심을 $C(0, b)$라 하고 $A(3, 0)$, $B(2, -1)$이라 하면
$\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로
$(-3)^2+b^2=(-2)^2+(b+1)^2$
$b^2+9=b^2+2b+5$, $2b=4 \qquad \therefore b=2$
따라서 원의 반지름의 길이는
$\overline{AC}=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$

04-1 답 ②

원의 중심이 x축 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 원의 방정식은 $(x-a)^2+y^2=r^2$
이 원이 두 점 $(0, 2)$, $(3, 1)$을 지나므로
$(-a)^2+2^2=r^2$, $(3-a)^2+1^2=r^2$
두 식을 연립하여 풀면 $a=1, r^2=5$
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-1)^2+y^2=5$

05 답 ㄴ, ㄷ

원의 중심이 x축 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 원의 방정식은 $(x-a)^2+y^2=r^2$
이 원이 두 점 $(1, 5)$, $(2, -4)$를 지나므로
$(1-a)^2+5^2=r^2$, $(2-a)^2+(-4)^2=r^2$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-3, r^2=41$
즉 원의 방정식은 $(x+3)^2+y^2=41$
ㄱ. 원의 중심의 좌표는 $(-3, 0)$이다.
ㄴ. $(-8+3)^2+(-4)^2=41$이므로 주어진 원은 점 $(-8, -4)$를 지난다.
ㄷ. 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{41}$이므로 원의 넓이는
$\pi\times(\sqrt{41})^2=41\pi$
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

05-1 답 ③

원의 중심이 y축 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(0, b)$, 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 원의 방정식은 $x^2+(y-b)^2=r^2$
이 원이 두 점 $(-4, 1)$, $(3, 0)$을 지나므로
$(-4)^2+(1-b)^2=r^2$, $3^2+(-b)^2=r^2$
두 식을 연립하여 풀면
$b=4, r^2=25$
즉 원의 방정식은 $x^2+(y-4)^2=25$
ㄱ. 원의 중심의 좌표는 $(0, 4)$이다.
ㄴ. $4^2+(7-4)^2=25$이므로 주어진 원은 점 $(4, 7)$을 지난다.
ㄷ. 원의 반지름의 길이는 5이므로 원의 둘레의 길이는
$2\pi\times5=10\pi$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

06 답 7

원의 중심이 직선 $y=2x-1$ 위에 있으므로 중심의 좌표를
$(a, 2a-1)$, 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-2a+1)^2=r^2$
이 원이 두 점 $(1, 2)$, $(3, 2)$를 지나므로
$(1-a)^2+(3-2a)^2=r^2$, $(3-a)^2+(3-2a)^2=r^2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $r^2=2$
이때 $b=2a-1$이므로 $b=3$
$\therefore a+b+r^2=2+3+2=7$

06-1 답 $\sqrt{13}$

원의 중심이 직선 $y=-x$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, -a)$, 반지름의 길이를 $r\,(r>0)$라 하면 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y+a)^2=r^2$
이 원이 두 점 $(1, -6)$, $(5, 0)$을 지나므로
$(1-a)^2+(-6+a)^2=r^2$, $(5-a)^2+a^2=r^2$
두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $r^2=13$
$\therefore r=\sqrt{13}\,(\because r>0)$
따라서 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$이다.

07 답 $6+3\sqrt{2}$

원의 중심의 좌표는 $\overline{AB}$의 중점의 좌표와 같으므로
$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{8+2}{2}\right) \quad \therefore (1, 5)$
원의 반지름의 길이는
$r=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(4+2)^2+(2-8)^2}=3\sqrt{2}$
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y-5)^2=(3\sqrt{2})^2$이므로
$a=1$, $b=5$, $r=3\sqrt{2}$
$\therefore a+b+r=1+5+3\sqrt{2}=6+3\sqrt{2}$

07-1 답 ①

원의 중심의 좌표는 $\overline{AB}$의 중점의 좌표와 같으므로
$\left(\frac{2+(-1)}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{1}{2}, 1\right)$
$\therefore a=\frac{1}{2}$, $b=1$
원의 반지름의 길이는
$r=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(-1-2)^2+(-1-3)^2}=\frac{5}{2}$
$\therefore a+b+r=\frac{1}{2}+1+\frac{5}{2}=4$

08 답 ①

원의 중심의 좌표는 $\overline{AB}$의 중점의 좌표와 같으므로
$\left(\frac{6+2}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \quad \therefore (4, 2)$
원의 반지름의 길이는
$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(2-6)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-4)^2+(y-2)^2=5$이므로 원 위에 있는 점은 ①이다.

08-1 답 6

원의 중심의 좌표는 $\overline{AB}$의 중점의 좌표와 같으므로
$\left(\frac{-3+(-1)}{2}, \frac{1+5}{2}\right) \quad \therefore (-2, 3)$
원의 반지름의 길이는
$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(-1+3)^2+(5-1)^2}=\sqrt{5}$
즉 구하는 원의 방정식은
$(x+2)^2+(y-3)^2=5$ ······ ❶
이 원이 점 $(0, k)$를 지나므로
$2^2+(k-3)^2=5$, $(k-3)^2=1$
$k-3=\pm1 \quad \therefore k=2$ 또는 $k=4$ ······ ❷
따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $2+4=6$ ······ ❸

채점 기준	비율
❶ 두 점 $A(-3, 1)$, $B(-1, 5)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값의 합을 구할 수 있다.	10%

09 답 $(x-2)^2+(y-3)^2=13$

두 점 P, Q의 좌표는 $P(4, 0)$, $Q(0, 6)$
원의 중심의 좌표는 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표와 같으므로
$\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right) \quad \therefore (2, 3)$
원의 반지름의 길이는
$\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+6^2}=\sqrt{13}$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-2)^2+(y-3)^2=13$

09-1 답 4

두 점 P, Q의 좌표는 $P(2, 0)$, $Q(0, -4)$
원의 중심의 좌표는 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표와 같으므로
$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+(-4)}{2}\right) \quad \therefore (1, -2)$
원의 반지름의 길이는
$\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{5}$
즉 구하는 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$이므로
$a=1$, $b=-2$, $r^2=5$
$\therefore a+b+r^2=1+(-2)+5=4$

10 답 ③

$x^2+y^2-4y+a-3=0$에서 $x^2+(y-2)^2=7-a$
이 방정식이 원을 나타내려면
$7-a>0 \quad \therefore a<7$
즉 정수 a의 최댓값은 6이므로 $M=6$
이때의 원의 반지름의 길이 r는
$r=\sqrt{7-6}=1$
$\therefore M+r=6+1=7$

10-1 답 ②

$x^2+y^2-4kx-2y+8k+1=0$에서
$(x-2k)^2+(y-1)^2=4k^2-8k$
이 방정식이 원을 나타내려면 $4k^2-8k>0$
$k(k-2)>0 \quad \therefore k<0$ 또는 $k>2$
따라서 실수 k의 값이 될 수 없는 것은 ②이다.

11 답 6

원의 방정식에는 xy항이 없어야 하므로 $a=0$
$x^2+y^2-2x-6y+b=0$에서
$(x-1)^2+(y-3)^2=10-b$
이 방정식이 반지름의 길이가 2인 원을 나타내려면
$\sqrt{10-b}=2$, $10-b=4 \quad \therefore b=6$
$\therefore a+b=0+6=6$

11-1 답 13

$x^2+y^2-4x+10y+2k+1=0$에서

$(x-2)^2+(y+5)^2=28-2k$ ······❶

이 방정식이 원을 나타내려면

$28-2k>0 \quad \therefore k<14$ ······㉠

이때 원의 반지름의 길이가 6 이하이므로 $\sqrt{28-2k}\le 6$

$28-2k\le 36 \quad \therefore k\ge -4$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $-4\le k<14$ ······❷

따라서 정수 k의 최댓값은 13이다. ······❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	30%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ 정수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

12 답 $\sqrt{2}$

$x^2+y^2+2kx-2ky+4k-4=0$에서

$(x+k)^2+(y-k)^2=2k^2-4k+4$

이 방정식이 원을 나타내려면

$2k^2-4k+4>0$, 즉 $k^2-2k+2>0$

k에 대한 이차방정식 $k^2-2k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times 2=-1<0$이므로 부등식 $k^2-2k+2>0$은 모든 실수 k에 대하여 성립한다.

이때 원의 넓이가 최소이려면 반지름의 길이가 최소이어야 하므로

$2k^2-4k+4=2(k-1)^2+2$

따라서 $k=1$일 때 반지름의 길이는 최소이고, 그때의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

12-1 답 ③

$x^2+y^2+4ax-2ay+10a-15=0$에서

$(x+2a)^2+(y-a)^2=5a^2-10a+15$

이 방정식이 원을 나타내려면

$5a^2-10a+15>0$, 즉 $a^2-2a+3>0$

a에 대한 이차방정식 $a^2-2a+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times 3=-2<0$이므로 부등식 $a^2-2a+3>0$은 모든 실수 a에 대하여 성립한다.

이때 원의 넓이가 최소이려면 반지름의 길이가 최소이어야 하므로

$5a^2-10a+15=5(a-1)^2+10$

따라서 $a=1$일 때 반지름의 길이는 최소이고, 그때의 원의 중심의 좌표는 $(-2, 1)$이므로 $p=-2$, $q=1$

$\therefore pq=-2\times 1=-2$

13 답 ⑤

원의 중심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$a^2+(b+1)^2=(a-3)^2+b^2$

$\therefore 3a+b=4$ ······㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-3)^2+b^2=(a+1)^2+(b-2)^2$

$\therefore 2a-b=1$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

즉 원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{1^2+(1+1)^2}=\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{5})^2=5\pi$

13-1 답 ③

원의 중심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-3)^2=(a-4)^2+(b-2)^2$

$\therefore 3a-b=5$ ······㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-4)^2+(b-2)^2=(a-5)^2+(b+5)^2$

$\therefore a-7b=15$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$

즉 원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(1-1)^2+(-2-3)^2}=5$

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times 5=10\pi$

14 답 ②

원의 중심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a-2)^2+(b-1)^2=(a+4)^2+(b-3)^2$

$\therefore 3a-b=-5$ ······㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+4)^2+(b-3)^2=(a+1)^2+(b+3)^2$

$\therefore 2a-4b=-5$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

즉 원의 중심은 $P\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$이고 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}-2\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

이므로 원의 방정식은

$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{50}{4}$

이때 이 원이 점 $(k, 1)$을 지나므로

$\left(k+\frac{3}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{50}{4}$, $\left(k+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$

$k+\frac{3}{2}=\pm\frac{7}{2} \quad \therefore k=2$ 또는 $k=-5$

그런데 $k>0$이므로 $k=2$

14-1 답 ①

원의 중심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a+3)^2+(b+2)^2=(a+2)^2+(b-1)^2$

$\therefore a+3b=-4$ ······㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+2)^2+(b-1)^2=(a-1)^2+b^2$

$\therefore 3a-b=-2$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-1$

즉 원의 중심은 $P(-1, -1)$이고 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(-1+3)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{5}$
이므로 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y+1)^2=5$
이때 이 원이 점 $(-2, k)$를 지나므로
$(-2+1)^2+(k+1)^2=5$, $(k+1)^2=4$
$k+1=\pm2$ $\therefore k=-3$ 또는 $k=1$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은
$-3+1=-2$

15 답 10π

원의 중심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$
$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로
$(a-1)^2+(b+6)^2=(a-5)^2+(b+4)^2$
$\therefore 2a+b=1$ ……㉠
$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로
$(a-5)^2+(b+4)^2=(a+1)^2+(b+2)^2$
$\therefore 3a-b=9$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$ $\therefore P(2, -3)$ ……❶
즉 원의 반지름의 길이는
$\overline{PA}=\sqrt{(2-1)^2+(-3+6)^2}=\sqrt{10}$ ……❷
따라서 $\triangle ABC$의 외접원의 넓이는
$\pi\times(\sqrt{10})^2=10\pi$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	60%
❷ 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	20%
❸ $\triangle ABC$의 외접원의 넓이를 구할 수 있다.	20%

15-1 답 5

원의 중심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{PO}=\overline{PA}=\overline{PB}$
$\overline{PO}=\overline{PA}$에서 $\overline{PO}^2=\overline{PA}^2$이므로
$a^2+b^2=(a-8)^2+b^2$, $-16a+64=0$
$\therefore a=4$
$\overline{PO}=\overline{PB}$에서 $\overline{PO}^2=\overline{PB}^2$이므로
$a^2+b^2=a^2+(b-6)^2$, $-12b+36=0$
$\therefore b=3$
따라서 $P(4, 3)$이므로 $\triangle OAB$의 외접원의 반지름의 길이는
$\overline{PO}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

16 답 ②

원의 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, a+1)$이라 하자.
이때 이 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이는 $|a+1|$이다.
즉 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-a-1)^2=(a+1)^2$
이 원이 점 $(3, 2)$를 지나므로
$(3-a)^2+(1-a)^2=(a+1)^2$, $a^2-10a+9=0$
$(a-1)(a-9)=0$ $\therefore a=1$ 또는 $a=9$
따라서 두 원의 반지름의 길이는 각각 2, 10이므로 두 원의 반지름의 길이의 합은 $2+10=12$

16-1 답 $8\sqrt{2}$

원의 중심이 직선 $y=x-2$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, a-2)$라 하자.
이때 이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $|a|$이다.
즉 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-a+2)^2=a^2$
이 원이 점 $(2, 2)$를 지나므로
$(2-a)^2+(4-a)^2=a^2$, $a^2-12a+20=0$
$(a-2)(a-10)=0$ $\therefore a=2$ 또는 $a=10$
따라서 두 원의 중심의 좌표는 각각 $(2, 0)$, $(10, 8)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(10-2)^2+(8-0)^2}=8\sqrt{2}$

17 답 ①

원의 중심의 좌표가 $(-2, 4)$이고 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $|-2|=2$이다.
즉 원의 방정식은 $(x+2)^2+(y-4)^2=4$이므로
$x^2+y^2+4x-8y+16=0$
따라서 $a=4$, $b=-8$, $c=16$이므로
$a+b+c=4+(-8)+16=12$

17-1 답 ⑤

원의 중심의 좌표가 점 $(5, -2)$이고 x축에 접하므로 반지름의 길이는 $|-2|=2$이다.
즉 원의 방정식은 $(x-5)^2+(y+2)^2=4$이므로
$x^2+y^2-10x+4y+25=0$
따라서 $a=-10$, $b=4$, $c=25$이므로
$a+b+c=-10+4+25=19$

18 답 ②

$x^2+y^2+ax+4y+1=0$에서
$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{a^2}{4}+3$
즉 원의 중심의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2}, -2\right)$이다.
이때 원의 중심이 제4사분면 위에 있으므로
$-\frac{a}{2}>0$ $\therefore a<0$
또 원이 x축에 접하므로 $\sqrt{\frac{a^2}{4}+3}=|-2|$
$\frac{a^2}{4}+3=4$, $a^2=4$ $\therefore a=-2$ ($\because a<0$)

18-1 답 -6

$x^2+y^2+4x+ky+9=0$에서
$(x+2)^2+\left(y+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}-5$
즉 원의 중심의 좌표는 $\left(-2, -\frac{k}{2}\right)$이다. ……❶
이때 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로
$-\frac{k}{2}>0$ $\therefore k<0$ ……❷
또 원이 y축에 접하므로 $\sqrt{\frac{k^2}{4}-5}=|-2|$
$\frac{k^2}{4}-5=4$, $k^2=36$ $\therefore k=-6$ ($\because k<0$) ……❸

채점 기준	비율
❶ 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	40%

19 답 $(x-3)^2+(y+4)^2=16$

원의 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 원의 넓이가 16π이므로
$\pi r^2=16\pi \qquad \therefore r=4\ (\because r>0)$
이 원이 점 $(3, 0)$에서 x축에 접하고 중심이 제4사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표는 $(3, -4)$이다.
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y+4)^2=16$

19-1 답 $(x+5)^2+(y+3)^2=25$

원의 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 원의 넓이가 25π이므로
$\pi r^2=25\pi \qquad \therefore r=5\ (\because r>0)$
이 원이 점 $(0, -3)$에서 y축에 접하고 중심이 제3사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표는 $(-5, -3)$이다.
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+5)^2+(y+3)^2=25$

20 답 ⑤

주어진 원이 y축에 접하므로 원의 방정식을
$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$이라 하자.
이 원이 점 $(6, 3)$을 지나므로
$(6-a)^2+(3-b)^2=a^2$
$\therefore b^2-12a-6b+45=0$ ······㉠
또 점 $(3, 0)$을 지나므로
$(3-a)^2+(-b)^2=a^2$
$b^2-6a+9=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{6}b^2+\frac{3}{2}$ ······㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$b^2-12\left(\frac{1}{6}b^2+\frac{3}{2}\right)-6b+45=0$
$b^2+6b-27=0,\ (b+9)(b-3)=0$
$\therefore b=-9$ 또는 $b=3$ ······㉢
㉢을 ㉡에 대입하면 $a=15$ 또는 $a=3$
따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은
$15+3=18$

20-1 답 ④

주어진 원이 x축에 접하므로 원의 방정식을
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$이라 하자.
이 원이 점 $(2, 4)$를 지나므로
$(2-a)^2+(4-b)^2=b^2$
$\therefore a^2-4a-8b+20=0$ ······㉠
또 점 $(0, 2)$를 지나므로 $(-a)^2+(2-b)^2=b^2$
$a^2-4b+4=0 \qquad \therefore b=\frac{1}{4}a^2+1$ ······㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $a^2-4a-8\left(\frac{1}{4}a^2+1\right)+20=0$
$a^2+4a-12=0,\ (a+6)(a-2)=0$
$\therefore a=-6$ 또는 $a=2$ ······㉢
㉢을 ㉡에 대입하면 $b=10$ 또는 $b=2$
따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은
$10+2=12$

21 답 ④

원의 중심이 제1사분면 위에 있어야 하므로 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 원의 중심의 좌표는 (r, r)이다.
즉 원의 방정식은 $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$
이 원이 점 $(4, 2)$를 지나므로
$(4-r)^2+(2-r)^2=r^2,\ r^2-12r+20=0$
$(r-2)(r-10)=0$
$\therefore r=2$ 또는 $r=10$
따라서 두 원의 중심의 좌표는 각각 $(2, 2)$, $(10, 10)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(10-2)^2+(10-2)^2}=8\sqrt{2}$

21-1 답 $4\sqrt{2}$

원의 중심이 제2사분면 위에 있어야 하므로 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 원의 중심의 좌표는 $(-r, r)$이다.
즉 원의 방정식은 $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$
이 원이 점 $(-2, 1)$을 지나므로
$(-2+r)^2+(1-r)^2=r^2,\ r^2-6r+5=0$
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore r=1$ 또는 $r=5$
따라서 두 원의 중심의 좌표는 각각 $(-1, 1)$, $(-5, 5)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(-5+1)^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$

22 답 ⑤

$x^2+y^2-6x+2ay+3+b=0$에서
$(x-3)^2+(y+a)^2=a^2-b+6$
이 원이 x축, y축에 동시에 접하므로
$|3|=|-a|=\sqrt{a^2-b+6}$
$|3|=|-a|$에서 $a=3\ (\because a>0)$
즉 $\sqrt{3^2-b+6}=3$에서 $9-b+6=9 \qquad \therefore b=6$
$\therefore ab=3\times 6=18$

22-1 답 7

$x^2+y^2-4ax+4y+b-2=0$에서
$(x-2a)^2+(y+2)^2=4a^2-b+6$ ······❶
이 원이 x축, y축에 동시에 접하므로
$|2a|=|-2|=\sqrt{4a^2-b+6}$
$|2a|=|-2|$에서 $a=1\ (\because a>0)$ ······❷
즉 $\sqrt{4-b+6}=2$에서 $4-b+6=4 \qquad \therefore b=6$ ······❸
$\therefore a+b=1+6=7$ ······❹

채점 기준	비율
❶ 주어진 원의 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	30%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

23 답 π

원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 원의 중심의 좌표는 $(-r, r)$이다.
이때 원의 중심이 직선 $2x-y+3=0$ 위에 있으므로
$-2r-r+3=0 \qquad \therefore r=1$
따라서 원의 넓이는
$\pi\times 1^2=\pi$

23-1 답 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$

원의 중심이 제4사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 원의 중심의 좌표는 $(r, -r)$이다.

즉 원의 방정식은 $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

이때 원의 중심이 직선 $x-y-2=0$ 위에 있으므로

$r-(-r)-2=0 \qquad \therefore r=1$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$

24 답 32

원의 중심 $(3, 4)$와 점 $A(1, -2)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(3-1)^2+(4+2)^2}=2\sqrt{10}$

이때 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 $\overline{AP}$의 길이의 최댓값은 $2\sqrt{10}+2\sqrt{2}$, 최솟값은 $2\sqrt{10}-2\sqrt{2}$

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$(2\sqrt{10}+2\sqrt{2})(2\sqrt{10}-2\sqrt{2})=40-8=32$

24-1 답 8

$x^2+y^2-8x-6y+16=0$에서 $(x-4)^2+(y-3)^2=9$

원의 중심 $(4, 3)$과 점 $O(0, 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{4^2+3^2}=5$

이때 원의 반지름의 길이는 3이므로 $\overline{OP}$의 길이의 최댓값은

$5+3=8$

25 답 ⑤

$\sqrt{(a-5)^2+(b-12)^2}$은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $P(a, b)$와 점 $(5, 12)$ 사이의 거리이다.

원의 중심 $(0, 0)$과 점 $(5, 12)$ 사이의 거리는

$\sqrt{5^2+12^2}=13$

이때 원의 반지름의 길이는 2이므로 $\sqrt{(a-5)^2+(b-12)^2}$의 최댓값은 $13+2=15$

25-1 답 ①

$\sqrt{(a-4)^2+(b+3)^2}$은 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=2$ 위의 점 $P(a, b)$와 점 $(4, -3)$ 사이의 거리이다.

원의 중심 $(2, -1)$과 점 $(4, -3)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(4-2)^2+(-3+1)^2}=2\sqrt{2}$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{(a-4)^2+(b+3)^2}$의 최솟값은 $2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$

26 답 $4-\sqrt{6}$

원의 중심 $(0, 0)$과 점 $A(12, 5)$ 사이의 거리는

$\sqrt{12^2+5^2}=13$

이때 원의 반지름의 길이는 r이고 $\overline{AP}$의 길이의 최솟값이 $9+\sqrt{6}$이므로 $13-r=9+\sqrt{6}$

$\therefore r=4-\sqrt{6}$

26-1 답 $\sqrt{13}$

원의 중심 $(0, 0)$과 점 $(4, 6)$ 사이의 거리는

$\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$ ······ ❶

이때 원의 반지름의 길이는 r이므로 점 $(4, 6)$에서 원 $x^2+y^2=r^2$에 이르는 거리의 최댓값은 $2\sqrt{13}+r$ ······ ❷

즉 $2\sqrt{13}+r=3\sqrt{13}$이므로 $r=\sqrt{13}$ ······ ❸

채점 기준	비율
❶ 원의 중심과 점 $(4, 6)$ 사이의 거리를 구할 수 있다.	40%
❷ 점 $(4, 6)$에서 원에 이르는 거리의 최댓값을 구할 수 있다.	40%
❸ r의 값을 구할 수 있다.	20%

27 답 ②

$(x-2)^2+y^2=10$에서 $x^2+y^2-4x-6=0$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4x-6-(x^2+y^2+y-5)=0$

$4x+y+1=0 \qquad \therefore y=-4x-1$

이 직선이 직선 $y=ax+1$과 평행하므로 $a=-4$

27-1 답 ④

$x^2+(y+a)^2=4$에서 $x^2+y^2+2ay+a^2-4=0$

$(x+1)^2+y^2=9$에서 $x^2+y^2+2x-8=0$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+2ay+a^2-4-(x^2+y^2+2x-8)=0$

$\therefore 2x-2ay=a^2+4$

이 직선이 직선 $2x+y=1$과 수직이므로

$2\times2+(-2a)\times1=0,\ 4-2a=0$

$\therefore a=2$

Lecture 두 직선의 수직

(1) 두 직선 $y=mx+n,\ y=m'x+n'$이 수직이다.
⇒ $mm'=-1$

(2) 두 직선 $ax+by=c,\ a'x+b'y=c'\ (abc\neq0,\ a'b'c'\neq0)$이 수직이다.
⇒ $aa'+bb'=0$

28 답 0

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-8-(x^2+y^2-4x+ay-4)=0$

$\therefore 4x-ay-4=0$

이 직선이 점 $(1, -4)$를 지나므로

$4+4a-4=0 \qquad \therefore a=0$

28-1 답 -10

$x^2+(y-1)^2=4$에서 $x^2+y^2-2y-3=0$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-6x+ay-5-(x^2+y^2-2y-3)=0$

$\therefore 6x-(a+2)y+2=0$

이 직선이 점 $(-3, 2)$를 지나므로

$-18-2(a+2)+2=0,\ -2a-20=0$

$\therefore a=-10$

29 답 -1

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+4x+2y-(x^2+y^2+2x+4y+2)=0$

$x-y-1=0 \qquad \therefore y=x-1$ ······ ❶

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 $a=-1$ ······ ❷

또 직선 $y=-x+b$가 점 $(3, -2)$를 지나므로

$-2=-3+b \qquad \therefore b=1$ ······ ❸

$\therefore ab=-1\times1=-1$ ······ ❹

채점 기준	비율
❶ 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

29-1 답 ②

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+x-(x^2+y^2-2x+y)=0$

$3x-y=0 \qquad \therefore y=3x$

이 직선과 평행한 직선의 기울기는 3이고 점 $(2, 3)$을 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$y-3=3(x-2) \qquad \therefore 3x-y-3=0$

따라서 $a=-1, b=-3$이므로

$a+b=-1+(-3)=-4$

30 답 29π

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+2y+k(x^2+y^2+6x-6y-5)=0\ (k\neq-1)$ ……㉠

이라 하면 이 원이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$1+2k=0 \qquad \therefore k=-\dfrac{1}{2}$

$k=-\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2+2y-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+6x-6y-5)=0$

$x^2+y^2-6x+10y+5=0$

$\therefore (x-3)^2+(y+5)^2=29$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{29}$이므로 원의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{29})^2=29\pi$

30-1 답 1

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+8x-2y+1+k(x^2+y^2+2x-8y+4)=0\ (k\neq-1)$ ……㉠

이라 하면 이 원이 점 $(-1, 6)$을 지나므로

$1+36-8-12+1+k(1+36-2-48+4)=0$

$18-9k=0 \qquad \therefore k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2+8x-2y+1+2(x^2+y^2+2x-8y+4)=0$

$x^2+y^2+4x-6y+3=0$

$\therefore (x+2)^2+(y-3)^2=10$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(-2, 3)$이므로

$a=-2, b=3$

$\therefore a+b=-2+3=1$

31 답 9π

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2-4x+6y-12+k(x^2+y^2+4x-8y-28)=0\ (k\neq-1)$ ……㉠

이라 하면

$(k+1)x^2+(k+1)y^2+(-4+4k)x+(6-8k)y-12-28k=0$

이때 이 원의 중심이 y축 위에 있으므로 원의 중심의 x좌표는 0이다.

즉 x의 계수가 0이므로 $-4+4k=0 \qquad \therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-4x+6y-12+(x^2+y^2+4x-8y-28)=0$

$x^2+y^2-y-20=0 \qquad \therefore x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{81}{4}$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{9}{2}$이므로 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times\dfrac{9}{2}=9\pi$

31-1 답 ④

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2-2x+4y-8+k(x^2+y^2+2y-6)=0\ (k\neq-1)$ ……㉠

이라 하면

$(k+1)x^2+(k+1)y^2-2x+(2k+4)y-6k-8=0$

이때 이 원의 중심이 x축 위에 있으므로 원의 중심의 y좌표는 0이다.

즉 y의 계수가 0이므로 $2k+4=0 \qquad \therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-2x+4y-8-2(x^2+y^2+2y-6)=0$

$x^2+y^2+2x-4=0 \qquad \therefore (x+1)^2+y^2=5$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 원의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{5})^2=5\pi$

32 답 $x^2+y^2+x+y-2=0$

직선 $3x+2y+4=0$의 y절편은 -2이므로 이 직선이 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, -2)$

이때 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+2y-4+k(x^2+y^2+4x-2y+4)=0\ (k\neq-1)$ ……㉠

이라 하면 이 원이 점 $(0, -2)$를 지나므로

$4-4-4+k(4+4+4)=0$

$12k-4=0 \qquad \therefore k=\dfrac{1}{3}$

$k=\dfrac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2+2y-4+\dfrac{1}{3}(x^2+y^2+4x-2y+4)=0$

$\therefore x^2+y^2+x+y-2=0$

32-1 답 ①

직선 $2x+5y-2=0$의 x절편은 1이므로 이 직선이 x축과 만나는 점의 좌표는 $(1, 0)$

이때 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2-2y+k(x^2+y^2-6x-4y+8)=0\ (k\neq-1)$ ……㉠

이라 하면 이 원이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$1+k(1-6+8)=0,\ 3k+1=0 \qquad \therefore k=-\dfrac{1}{3}$

$k=-\dfrac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-2y-\dfrac{1}{3}(x^2+y^2-6x-4y+8)=0$

$x^2+y^2+3x-y-4=0$

$\therefore \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{13}{2}$

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$이므로

$a=-\dfrac{3}{2}, b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a-b=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=-2$

33 답 ⑤

$x^2+y^2+6x-8y+20=0$에서 $(x+3)^2+(y-4)^2=5$

원의 중심 $(-3,\ 4)$와 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-6-4+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k-10|}{\sqrt{5}}$$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k-10|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5},\ |k-10|<5$$

$-5<k-10<5 \qquad \therefore 5<k<15$

따라서 자연수 k의 값은 $6,\ 7,\ 8,\ \cdots,\ 14$이므로 그 개수는 9이다.

다른 풀이

$y=2x+k$를 $x^2+y^2+6x-8y+20=0$에 대입하면

$x^2+(2x+k)^2+6x-8(2x+k)+20=0$

$5x^2+2(2k-5)x+k^2-8k+20=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$\frac{D}{4}=(2k-5)^2-5(k^2-8k+20)>0$$

$k^2-20k+75<0,\ (k-5)(k-15)<0$

$\therefore 5<k<15$

따라서 자연수 k의 값은 $6,\ 7,\ 8,\ \cdots,\ 14$이므로 그 개수는 9이다.

33-1 답 $k<24$

$x^2+y^2-8x-6y+k=0$에서 $(x-4)^2+(y-3)^2=25-k$

원의 중심 $(4,\ 3)$과 직선 $3x-4y+5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|12-12+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{25-k}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$1<\sqrt{25-k},\ 1<25-k \qquad \therefore k<24$

34 답 ④

원의 중심 $(1,\ 2)$와 직선 $3x+4y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+8+2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{13}{5}$$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{k}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{13}{5}<\sqrt{k} \qquad \therefore k>\frac{169}{25}$, 즉 $k>6.76$

따라서 자연수 k의 최솟값은 7이다.

34-1 답 ③

원의 중심 $(3,\ 2)$와 직선 $4x+3y+5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|12+6+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{23}{5}$$

이때 원의 반지름의 길이는 r이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $r>\frac{23}{5}$, 즉 $r>4.6$

따라서 자연수 r의 최솟값은 5이다.

35 답 $m>-\frac{4}{3}$

원의 중심 $(1,\ 1)$과 직선 $mx-y-4m+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|m-1-4m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

이때 원의 반지름의 길이는 3이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}<3,\ |-3m+1|<3\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면 $9m^2-6m+1<9m^2+9$

$-6m<8 \qquad \therefore m>-\frac{4}{3}$

35-1 답 7

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=\sqrt{2}x+k$, 즉 $\sqrt{2}x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots ❶$$

이때 원의 반지름의 길이는 2이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{|k|}{\sqrt{3}}<2$

$|k|<2\sqrt{3} \qquad \therefore -2\sqrt{3}<k<2\sqrt{3}$ ······❷

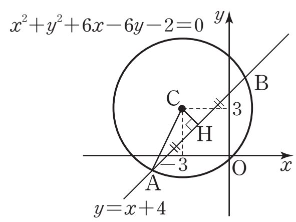
따라서 정수 k의 값은 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$이므로 그 개수는 7이다. ······❸

채점 기준	비율
❶ 원 $x^2+y^2=4$의 중심과 직선 $y=\sqrt{2}x+k$ 사이의 거리를 구할 수 있다.	40%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20%

36 답 $6\sqrt{2}$

$x^2+y^2+6x-6y-2=0$에서 $(x+3)^2+(y-3)^2=20$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 $C(-3,\ 3)$에서 직선 $y=x+4$, 즉 $x-y+4=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{CH}$의 길이는



$$\overline{CH}=\frac{|-3-3+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$이므로

$\overline{AC}=2\sqrt{5}$

직각삼각형 CAH에서

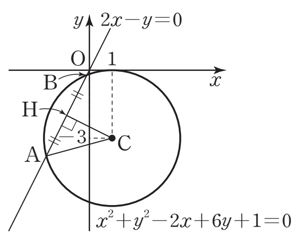
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2\times 3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

36-1 답 4

$x^2+y^2-2x+6y+1=0$에서 $(x-1)^2+(y+3)^2=9$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 $C(1,\ -3)$에서 직선 $2x-y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{CH}$의 길이는



$$\overline{CH}=\frac{|2-(-3)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

원의 반지름의 길이가 3이므로

$\overline{AC}=3$

직각삼각형 CAH에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2\times 2=4$

37 답 -16

원이 y축과 만날 때는 $x=0$일 때이므로 $x=0$을

$x^2+y^2+4x-6y+k=0$에 대입하면

$y^2-6y+k=0$ ······㉠

원이 y축과 만나는 두 점의 좌표를 $\mathrm{A}(0,\ y_1)$, $\mathrm{B}(0,\ y_2)$라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=|y_1-y_2|=10$ ······㉡

이때 y_1, y_2는 이차방정식 ㉠의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $y_1+y_2=6$, $y_1y_2=k$

$(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2$이므로 ㉡에서

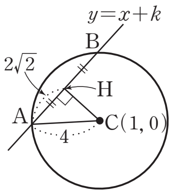
$10^2=6^2-4k$, $-4k=64$ $\quad\therefore k=-16$

37-1 답 -5 또는 3

$x^2+y^2-2x-15=0$에서

$(x-1)^2+y^2=16$

오른쪽 그림과 같이 원과 직선이 만나는 두 점을 A, B라 하고 원의 중심 $\mathrm{C}(1,\ 0)$에서 직선 $y=x+k$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=2\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이는 4이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=4$

직각삼각형 CAH에서

$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$ ······㉠

또 원의 중심 $\mathrm{C}(1,\ 0)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

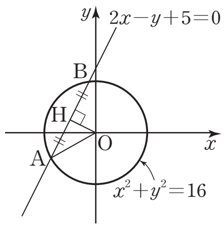
$\overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{|1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k+1|}{\sqrt{2}}$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{|k+1|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$이므로 $|k+1|=4$

$k+1=\pm4$ $\quad\therefore k=-5$ 또는 $k=3$

38 답 11π

오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하면 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 $\overline{\mathrm{AB}}$를 지름으로 하는 원이다. ······❶



원의 중심 $\mathrm{O}(0,\ 0)$에서 직선 $2x-y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{|5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ ······❷

원의 반지름의 길이는 4이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=4$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}=\sqrt{4^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{11}$ ······❸

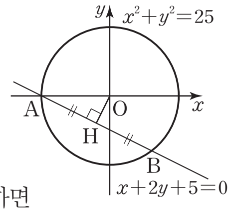
따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{11})^2=11\pi$ ······❹

채점 기준	비율
❶ $\overline{\mathrm{AB}}$를 지름으로 하는 원이 넓이가 최소인 원임을 알 수 있다.	30%
❷ $\overline{\mathrm{OH}}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❸ $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❹ 넓이가 최소인 원의 넓이를 구할 수 있다.	10%

38-1 답 20π

오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하면 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 $\overline{\mathrm{AB}}$를 지름으로 하는 원이다.



원의 중심 $\mathrm{O}(0,\ 0)$에서 직선 $x+2y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{|5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

원의 반지름의 길이는 5이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=5$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}=\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times(2\sqrt{5})^2=20\pi$

39 답 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$x^2+y^2-2x-3=0$에서 $(x-1)^2+y^2=4$

원의 중심 $(1,\ 0)$과 직선 $y=k(x+3)$, 즉 $kx-y+3k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|k+3k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\dfrac{4|k|}{\sqrt{k^2+1}}$

이때 원의 반지름의 길이는 2이므로 원과 직선이 한 점에서 만나려면

$\dfrac{4|k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$, $2|k|=\sqrt{k^2+1}$

양변을 제곱하면 $4k^2=k^2+1$

$3k^2=1$ $\quad\therefore k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $(\because k>0)$

39-1 답 16

세 점을 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(2,\ 0)$, $\mathrm{C}(4,\ 4)$라 하고 원의 중심을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-3)^2=(a-2)^2+b^2$

$\therefore a-3b=-3$ ······㉠

$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$에서 $\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$이므로

$(a-2)^2+b^2=(a-4)^2+(b-4)^2$

$\therefore a+2b=7$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$

이때 원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{(3-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{5}$

이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2=5$

원의 중심 $(3,\ 2)$와 직선 $2x+y=k$, 즉 $2x+y-k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|6+2-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|k-8|}{\sqrt{5}}$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|k-8|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, $|k-8|=5$

$k-8=\pm5$ $\quad\therefore k=3$ 또는 $k=13$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$3+13=16$

40 답 6π

$x^2+y^2-10x+25-a^2=0$에서 $(x-5)^2+y^2=a^2$
원의 중심 $(5, 0)$과 직선 $4x+3y-5=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|20-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$
이때 원의 반지름의 길이는 $a\ (a>0)$이므로 원과 직선이 접하려면
$a=3$
따라서 구하는 원의 둘레의 길이는 $2\pi\times3=6\pi$

40-1 답 1

$x^2+y^2-2x-4y+r=0$에서 $(x-1)^2+(y-2)^2=5-r$
원의 중심 $(1, 2)$와 직선 $3x+4y-1=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|3+8-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$
이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5-r}$이므로 원과 직선이 접하려면
$2=\sqrt{5-r}$, $4=5-r$　　$\therefore r=1$

41 답 ②

원의 넓이가 8π이므로 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이다.
원의 중심 $(1, -4)$와 직선 $2x+y-k=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|2-4-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|k+2|}{\sqrt{5}}$
원과 직선이 접하려면
$\dfrac{|k+2|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{2}$, $|k+2|=2\sqrt{10}$
$k+2=\pm2\sqrt{10}$　　$\therefore k=-2\pm2\sqrt{10}$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은
$-2+2\sqrt{10}+(-2-2\sqrt{10})=-4$

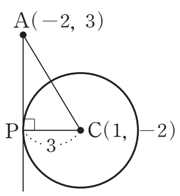
41-1 답 -14

원의 넓이가 10π이므로 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다. ······ ❶
원의 중심 $(-1, 4)$와 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|-2-4+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k-6|}{\sqrt{5}}$ ······ ❷
원과 직선이 접하려면
$\dfrac{|k-6|}{\sqrt{5}}=\sqrt{10}$, $|k-6|=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$
$k-6=\pm5\sqrt{2}$　　$\therefore k=6\pm5\sqrt{2}$ ······ ❸
따라서 모든 실수 k의 값의 곱은
$(6+5\sqrt{2})(6-5\sqrt{2})=36-50=-14$ ······ ❹

채점 기준	비율
❶ 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	10%
❷ 원의 중심과 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리를 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	40%
❹ k의 값의 곱을 구할 수 있다.	10%

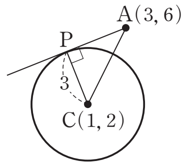
42 답 5

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$에서 $(x-1)^2+(y+2)^2=9$
오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하면
$\overline{CA}=\sqrt{(-2-1)^2+(3+2)^2}=\sqrt{34}$
직각삼각형 CAP에서
$\overline{AP}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{(\sqrt{34})^2-3^2}=5$



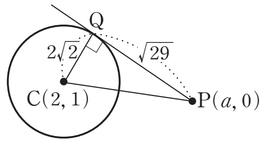
42-1 답 ②

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하면
$\overline{CA}=\sqrt{(3-1)^2+(6-2)^2}=2\sqrt{5}$
직각삼각형 CAP에서
$\overline{AP}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-3^2}=\sqrt{11}$



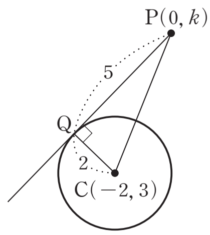
43 답 $(-4, 0)$, $(8, 0)$

x축 위의 점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라 하자.
오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하면
$\overline{CP}=\sqrt{(a-2)^2+1^2}=\sqrt{a^2-4a+5}$
접점을 Q라 하면 직각삼각형 CPQ에서 $\overline{CP}^2=\overline{CQ}^2+\overline{PQ}^2$이므로
$a^2-4a+5=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{29})^2$
$a^2-4a-32=0$, $(a+4)(a-8)=0$
$\therefore a=-4$ 또는 $a=8$
따라서 점 P의 좌표는 $(-4, 0)$, $(8, 0)$이다.



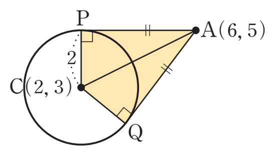
43-1 답 ④

$x^2+y^2+4x-6y+9=0$에서 $(x+2)^2+(y-3)^2=4$
오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하면
$\overline{CP}=\sqrt{(-2)^2+(k-3)^2}=\sqrt{k^2-6k+13}$
접점을 Q라 하면 직각삼각형 CPQ에서
$\overline{CP}^2=\overline{CQ}^2+\overline{PQ}^2$이므로
$k^2-6k+13=2^2+5^2$
$k^2-6k-16=0$, $(k+2)(k-8)=0$
$\therefore k=-2$ 또는 $k=8$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은
$-2+8=6$



44 답 8

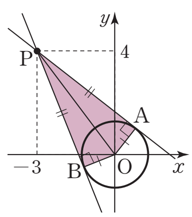
$x^2+y^2-4x-6y+9=0$에서 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$
오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하면
$\overline{CA}=\sqrt{(6-2)^2+(5-3)^2}$
$=2\sqrt{5}$ ······ ❶
직각삼각형 CAP에서
$\overline{AP}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$ ······ ❷
이때 $\triangle CAP\equiv\triangle CAQ$ (RHS합동)이므로
(색칠한 부분의 넓이)$=2\triangle CAP=2\times\left(\dfrac{1}{2}\times4\times2\right)=8$ ··· ❸



채점 기준	비율
❶ $\overline{CA}$의 길이를 구할 수 있다.	40%
❷ $\overline{AP}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❸ 색칠한 부분의 넓이를 구할 수 있다.	30%

44-1 답 $2\sqrt{6}$

오른쪽 그림에서
$\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$
원의 반지름의 길이는 1이므로 $\overline{OA}=1$
직각삼각형 OAP에서
$\overline{PA}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}$



이때 $\triangle OAP \equiv \triangle OBP$ (RHS 합동)이므로

$\square AOBP = 2\triangle OAP = 2\times\left(\frac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times 1\right) = 2\sqrt{6}$

45 답 $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y-8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-8|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{m^2+1}}$

이때 원의 반지름의 길이는 4이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{8}{\sqrt{m^2+1}} > 4$, $\sqrt{m^2+1} < 2$

양변을 제곱하면 $m^2+1<4$

$m^2-3<0$, $(m+\sqrt{3})(m-\sqrt{3})<0$

$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$

다른 풀이

$mx-y-8=0$에서 $y=mx-8$

$y=mx-8$을 $x^2+y^2=16$에 대입하면

$x^2+(mx-8)^2=16$

$\therefore (1+m^2)x^2-16mx+48=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$\frac{D}{4} = (-8m)^2-48(1+m^2)<0$

$16m^2-48<0$, $m^2-3<0$, $(m+\sqrt{3})(m-\sqrt{3})<0$

$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$

45-1 답 2

원의 중심 $(2, 4)$와 직선 $y=mx+3$, 즉 $mx-y+3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2m-4+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$

이때 원의 반지름의 길이는 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}} > 1$, $|2m-1| > \sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $(2m-1)^2 > m^2+1$

$4m^2-4m+1>m^2+1$, $3m^2-4m>0$

$m(3m-4)>0 \qquad \therefore m<0$ 또는 $m>\frac{4}{3}$

따라서 자연수 m의 최솟값은 2이다.

46 답 4

원의 중심 $(0, a)$와 직선 $x+y+1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|a+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|a+1|}{\sqrt{2}}$

이때 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|a+1|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$, $|a+1|>4$

$a+1<-4$ 또는 $a+1>4$

$\therefore a<-5$ 또는 $a>3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

46-1 답 ③

원의 중심 $(-a, 0)$과 직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-a-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|a+1|}{\sqrt{2}}$

이때 원의 반지름의 길이는 $3\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|a+1|}{\sqrt{2}} > 3\sqrt{2}$, $|a+1|>6$

$a+1<-6$ 또는 $a+1>6$

$\therefore a<-7$ 또는 $a>5$

따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다.

47 답 $2<a\le 4$

원 $(x+2)^2+(y-3)^2=1$의 중심 $(-2, 3)$과 직선

$4x+3y+a=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-8+9+a|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|a+1|}{5}$

이때 원의 반지름의 길이는 1이므로 원과 직선이 만나려면

$\frac{|a+1|}{5} \le 1$, $|a+1|\le 5$

$-5\le a+1\le 5 \qquad \therefore -6\le a\le 4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

원 $(x-3)^2+(y+3)^2=1$의 중심 $(3, -3)$과 직선

$4x+3y+a=0$ 사이의 거리는

$\frac{|12-9+a|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|a+3|}{5}$

이때 원의 반지름의 길이는 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|a+3|}{5} > 1$, $|a+3|>5$

$a+3<-5$ 또는 $a+3>5$

$\therefore a<-8$ 또는 $a>2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$2<a\le 4$

47-1 답 $4<k\le 22$

원 $x^2+(y-3)^2=4$의 중심 $(0, 3)$과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-12+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|k-12|}{5}$

이때 원의 반지름의 길이는 2이므로 원과 직선이 만나려면

$\frac{|k-12|}{5} \le 2$, $|k-12|\le 10$

$-10\le k-12\le 10 \qquad \therefore 2\le k\le 22 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

원 $(x-1)^2+(y+2)^2=9$의 중심 $(1, -2)$와 직선

$3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3+8+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|k+11|}{5}$

이때 원의 반지름의 길이는 3이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|k+11|}{5} > 3$, $|k+11|>15$

$k+11<-15$ 또는 $k+11>15$

$\therefore k<-26$ 또는 $k>4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$4<k\le 22$

48 답 16

$x^2+y^2-4x+2y-4=0$에서 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$

원의 중심 $(2, -1)$과 직선 $3x-4y+15=0$ 사이의 거리는

$\frac{|6+4+15|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 5$

이때 원의 반지름의 길이는 3이므로
$M=5+3=8$, $m=5-3=2$
$\therefore Mm=8\times2=16$

48-1 답 ④

$x^2+y^2-6x-6y+13=0$에서
$(x-3)^2+(y-3)^2=5$
원의 중심 $(3, 3)$과 직선 $2x+y+1=0$ 사이의 거리는
$\frac{|6+3+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5}$
이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로
$M=2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$, $m=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$
$\therefore Mm=3\sqrt{5}\times\sqrt{5}=15$

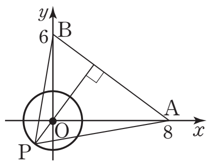
49 답 5

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $2x+y-k=0$ 사이의 거리는
$\frac{|-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{k}{\sqrt{5}}$ $(\because k>0)$
이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 점 P와 직선 사이의 거리의 최댓값은 $2\sqrt{5}$이려면
$\frac{k}{\sqrt{5}}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$, $\frac{k}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$
$\therefore k=5$

49-1 답 4

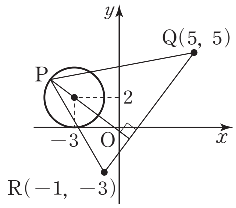
원의 중심 $(0, 1)$과 직선 $\sqrt{3}x+y-7=0$ 사이의 거리는
$\frac{|1-7|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=3$
이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{k}$이므로
$M=3+\sqrt{k}$, $m=3-\sqrt{k}$
$M-m=4$이므로 $3+\sqrt{k}-(3-\sqrt{k})=4$
$2\sqrt{k}=4$, $\sqrt{k}=2$ $\quad\therefore k=4$

50 답 ①



오른쪽 그림과 같이 원 위의 임의의 점 P에 대하여 △PAB의 넓이가 최대인 경우는 $\overline{AB}$를 밑변으로 하면 밑변의 길이가 일정하므로 높이가 최대일 때이다. 즉 원 위의 점 P에서 두 점 A, B를 지나는 직선까지의 거리가 최대일 때이다.
두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은
$y=\frac{6-0}{0-8}(x-8)$ $\quad\therefore 3x+4y-24=0$
원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $3x+4y-24=0$ 사이의 거리는
$\frac{|-24|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{24}{5}$
원의 반지름의 길이가 2이므로 높이의 최댓값은
$\frac{24}{5}+2=\frac{34}{5}$
두 점 A, B 사이의 거리는
$\sqrt{(0-8)^2+(6-0)^2}=10$
따라서 △PAB의 넓이의 최댓값은
$\frac{1}{2}\times10\times\frac{34}{5}=34$

50-1 답 33



오른쪽 그림과 같이 원 위의 임의의 점 P에 대하여 △PQR의 넓이가 최대인 경우는 $\overline{QR}$를 밑변으로 하면 밑변의 길이가 일정하므로 높이가 최대일 때이다.
즉 원 위의 점 P에서 두 점 Q, R를 지나는 직선까지의 거리가 최대일 때이다.
두 점 Q, R를 지나는 직선의 방정식은
$y-5=\frac{-3-5}{-1-5}(x-5)$ $\quad\therefore 4x-3y-5=0$
원의 중심 $(-3, 2)$와 직선 $4x-3y-5=0$ 사이의 거리는
$\frac{|-12-6-5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{23}{5}$
원의 반지름의 길이가 2이므로 높이의 최댓값은
$\frac{23}{5}+2=\frac{33}{5}$
두 점 Q, R 사이의 거리는
$\sqrt{(-1-5)^2+(-3-5)^2}=10$
따라서 △PQR의 넓이의 최댓값은
$\frac{1}{2}\times10\times\frac{33}{5}=33$

51 답 20

기울기가 3이고 원 $x^2+y^2=10$에 접하는 직선의 방정식은
$y=3x\pm\sqrt{10}\sqrt{3^2+1}$ $\quad\therefore y=3x\pm10$
두 직선의 y절편은 각각 10, -10이므로
$P(0, 10)$, $Q(0, -10)$ 또는 $P(0, -10)$, $Q(0, 10)$
$\therefore \overline{PQ}=20$

51-1 답 ④

직선 $x+y-1=0$, 즉 $y=-x+1$과 평행한 직선의 기울기는 -1이다.
기울기가 -1이고 원 $x^2+y^2=2$에 접하는 직선의 방정식은
$y=-x\pm\sqrt{2}\sqrt{(-1)^2+1}$ $\quad\therefore y=-x\pm2$
두 직선의 x절편은 각각 2, -2이므로
$P(2, 0)$, $Q(-2, 0)$ 또는 $P(-2, 0)$, $Q(2, 0)$
$\therefore \overline{PQ}=4$

52 답 −4

직선 $x+2y-1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$과 수직인 직선의 기울기는 2이다.
기울기가 2이고 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=1$에 접하는 직선의 방정식을 $y=2x+n$이라 하면 원의 중심 $(1, 3)$과 직선 $y=2x+n$, 즉 $2x-y+n=0$ 사이의 거리는
$\frac{|2-3+n|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|n-1|}{\sqrt{5}}$
이때 원의 반지름의 길이는 1이므로 원과 직선이 접하려면
$\frac{|n-1|}{\sqrt{5}}=1$, $|n-1|=\sqrt{5}$
$n-1=\pm\sqrt{5}$ $\quad\therefore n=1\pm\sqrt{5}$
따라서 두 직선의 y의 절편의 곱은
$(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=1-5=-4$

52-1 답 -4

직선 $x+2y+1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$과 수직인 직선의 기울기는 2이다. ……❶

기울기가 2이고 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=5$에 접하는 직선의 방정식을 $y=2x+n$이라 하면 원의 중심 $(-1, 1)$과 직선 $y=2x+n$, 즉 $2x-y+n=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-2-1+n|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|n-3|}{\sqrt{5}}$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|n-3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, $|n-3|=5$

$n-3=\pm5$ $\quad\therefore n=-2$ 또는 $n=8$

즉 접선의 방정식은

$y=2x-2$ 또는 $y=2x+8$ ……❷

따라서 두 직선의 x절편은 각각 1, -4이므로 그 곱은

$1\times(-4)=-4$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 접선의 기울기를 구할 수 있다.	20%
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	60%
❸ 두 직선의 x절편의 곱을 구할 수 있다.	20%

53 답 ③

x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 $45°$인 직선의 기울기는 $\tan 45°=1$이므로 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$에 접하는 직선의 방정식을 $y=x+n$이라 하자.

원의 중심 $(1, -2)$와 직선 $y=x+n$, 즉 $x-y+n=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1+2+n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|n+3|}{\sqrt{2}}$

이때 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|n+3|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$, $|n+3|=4$

$n+3=\pm4$ $\quad\therefore n=-7$ 또는 $n=1$

따라서 두 직선의 y절편의 합은

$-7+1=-6$

53-1 답 5

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $30°$인 직선의 기울기는 $\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 원 $x^2+(y-3)^2=3$에 접하는 직선의 방정식을 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+n$이라 하자.

원의 중심 $(0, 3)$과 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+n$, 즉 $\sqrt{3}x-3y+3n=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-9+3n|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-3)^2}}=\frac{3|n-3|}{2\sqrt{3}}$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{3|n-3|}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}$, $|n-3|=2$

$n-3=\pm2$ $\quad\therefore n=1$ 또는 $n=5$

따라서 두 직선의 y절편의 곱은

$1\times5=5$

54 답 -8

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$ax+by=20$ $\quad\therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{20}{b}$

$b=0$이면 접선이 y축과 평행하여 기울기가 $\frac{1}{2}$이 될 수 없다. $\therefore b\neq0$

이때 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$-\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore b=-2a$ ……㉠

점 (a, b)는 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=20$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-4$ 또는 $a=-2$, $b=4$

$\therefore ab=-8$

54-1 답 ①

원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$ax+by=25$

이때 이 접선이 점 $(1, -7)$을 지나므로

$a-7b=25$ $\quad\therefore a=7b+25$ ……㉠

점 (a, b)는 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=25$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(7b+25)^2+b^2=25$

$50b^2+350b+600=0$, $b^2+7b+12=0$

$(b+3)(b+4)=0$ $\quad\therefore b=-3$ 또는 $b=-4$

$b=-3$을 ㉠에 대입하면 $a=4$

$b=-4$를 ㉠에 대입하면 $a=-3$

그런데 $a>0$이므로 $a=4$, $b=-3$

$\therefore ab=4\times(-3)=-12$

55 답 8

$x^2+y^2-2x+4y-5=0$에서 $(x-1)^2+(y+2)^2=10$

원의 중심 $(1, -2)$와 접점 $(2, 1)$을 이은 직선의 기울기는

$\frac{-2-1}{1-2}=3$이므로 이와 수직인 접선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

이때 기울기가 $-\frac{1}{3}$이고 점 $(2, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{3}(x-2)$ $\quad\therefore x+3y-5=0$

따라서 $a=3$, $b=-5$이므로

$a-b=3-(-5)=8$

55-1 답 $\frac{25}{6}$

$x^2+y^2-2x+6y-15=0$에서 $(x-1)^2+(y+3)^2=25$

원의 중심 $(1, -3)$과 접점 $(-2, 1)$을 이은 직선의 기울기는

$\frac{-3-1}{1+2}=-\frac{4}{3}$이므로 이와 수직인 접선의 기울기는 $\frac{3}{4}$이다.

이때 기울기가 $\frac{3}{4}$이고 점 $(-2, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{3}{4}(x+2)$ $\quad\therefore y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$

따라서 이 직선의 x절편은 $-\frac{10}{3}$, y절편은 $\frac{5}{2}$이므로 이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left|-\frac{10}{3}\right|\times\frac{5}{2}=\frac{25}{6}$

56 답 4

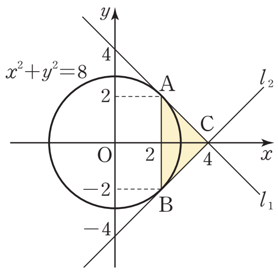
원 $x^2+y^2=8$ 위의 두 점 A$(2, 2)$, B$(2, -2)$에서의 접선의 방정식은 각각 $2x+2y=8$, $2x-2y=8$이므로

l_1: $x+y=4$, l_2: $x-y=4$

두 직선 l_1, l_2의 식을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=0$이므로 교점 C의 좌표는 $(4, 0)$이다.

따라서 오른쪽 그림에서 △ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times2=4$



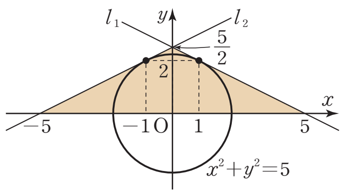
56-1 답 ⑤

원 $x^2+y^2=5$ 위의 두 점 $(1, 2)$, $(-1, 2)$에서의 접선의 방정식은 각각 l_1: $x+2y=5$, l_2: $-x+2y=5$

두 직선 l_1, l_2의 식을 연립하여 풀면 $x=0$, $y=\frac{5}{2}$이므로 두 직선 l_1, l_2의 교점의 좌표는 $\left(0, \frac{5}{2}\right)$이다.

따라서 오른쪽 그림에서 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times10\times\frac{5}{2}=\frac{25}{2}$



57 답 2

접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 P$(-1, -2)$를 지나는 접선의 방정식은

$y+2=m(x+1)$　　$\therefore mx-y+m-2=0$

원의 중심 $(-2, 1)$과 직선 $mx-y+m-2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-2m-1+m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|m+3|}{\sqrt{m^2+1}}$

이때 원의 반지름의 길이는 2이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=2$, $|m+3|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $m^2+6m+9=4m^2+4$

$\therefore 3m^2-6m-5=0$

이 이차방정식의 두 근이 m_1, m_2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$m_1+m_2=-\frac{-6}{3}=2$

57-1 답 0

$x^2+y^2-6x-8y+22=0$에서 $(x-3)^2+(y-4)^2=3$

접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(1, 4)$를 지나는 접선의 방정식은

$y-4=m(x-1)$　　$\therefore mx-y-m+4=0$

원의 중심 $(3, 4)$와 직선 $mx-y-m+4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3m-4-m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{3}$, $|2m|=\sqrt{3m^2+3}$

양변을 제곱하면 $4m^2=3m^2+3$

$m^2=3$　　$\therefore m=\pm\sqrt{3}$

따라서 두 접선의 기울기의 합은

$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

58 답 4

접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0, a)$를 지나는 접선의 방정식은

$y=mx+a$　　$\therefore mx-y+a=0$

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y+a=0$ 사이의 거리는

$\frac{|a|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|a|}{\sqrt{m^2+1}}$

이때 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|a|}{\sqrt{m^2+1}}=2\sqrt{2}$, $|a|=2\sqrt{2m^2+2}$

양변을 제곱하면 $a^2=8m^2+8$

$\therefore 8m^2-a^2+8=0$ ······ ㉠

이때 두 접선의 기울기는 m에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근이고 두 접선이 서로 수직이므로 두 근의 곱은 -1이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 곱)$=\frac{-a^2+8}{8}=-1$

$a^2=16$　　$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

58-1 답 ①

접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(-4, a+3)$을 지나는 접선의 방정식은

$y-(a+3)=m(x+4)$　　$\therefore mx-y+4m+a+3=0$

원의 중심 $(-4, 3)$과 직선 $mx-y+4m+a+3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-4m-3+4m+a+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|a|}{\sqrt{m^2+1}}$

이때 원의 반지름의 길이는 $4\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|a|}{\sqrt{m^2+1}}=4\sqrt{2}$, $|a|=4\sqrt{2m^2+2}$

양변을 제곱하면 $a^2=32m^2+32$

$\therefore 32m^2-a^2+32=0$ ······ ㉠

이때 두 접선의 기울기는 m에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근이고 두 접선이 서로 수직이므로 두 근의 곱은 -1이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 곱)$=\frac{-a^2+32}{32}=-1$

$a^2=64$　　$\therefore a=8$ ($\because a>0$)

59 답 $\frac{5}{3}$

직선 l이 원 O'의 넓이를 이등분하므로 직선 l은 원 O'의 중심 $(-2, 0)$을 지난다.

즉 $0=-2m+n$이므로 $n=2m$ ······ ㉠

㉠을 $y=mx+n$에 대입하면 직선 l의 방정식은

$mx-y+2m=0$

원 O의 중심 $(0, 0)$과 직선 l 사이의 거리는

$\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}$

이때 원의 반지름의 길이는 1이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$, $|2m|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $4m^2=m^2+1$

$3m^2=1 \qquad \therefore m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$을 ㉠에 대입하면 $n=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (복부호동순)

$\therefore m^2+n^2=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$

59-1 답 -1

접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=5$의 중심 $(1, 3)$을 지나는 접선의 방정식은

$y-3=m(x-1) \qquad \therefore mx-y-m+3=0$

원 $x^2+y^2=5$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y-m+3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}}$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$, $|m-3|=\sqrt{5m^2+5}$

양변을 제곱하면 $m^2-6m+9=5m^2+5$

$\therefore 2m^2+3m-2=0$ ……㉠

이때 구하는 두 직선의 기울기는 m에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근이므로 두 직선의 기울기의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{-2}{2}=-1$

유형+ 완성하기

p.81

60 답 ④

원 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 위의 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

$(a-1)^2+(b+2)^2=5$ ……㉠

이때 $\overline{AP}$의 중점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{-1+a}{2}$, $y=\frac{3+b}{2}$

$\therefore a=2x+1, b=2y-3$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $(2x+1-1)^2+(2y-3+2)^2=5$

$\therefore x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

따라서 $\overline{AP}$의 중점이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{5}}{2}$인 원이므로 구하는 길이는

$2\pi\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}\pi$

61 답 $(x-3)^2+(y+1)^2=1$

원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

$a^2+b^2=9$ ……㉠

이때 $\triangle$ABP의 무게중심 G의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{3+6+a}{3}$, $y=\frac{2-5+b}{3}$

$\therefore a=3x-9, b=3y+3$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $(3x-9)^2+(3y+3)^2=9$

$\therefore (x-3)^2+(y+1)^2=1$

62 답 ③

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$이므로

$2\overline{AP}=3\overline{BP} \qquad \therefore 4\overline{AP}^2=9\overline{BP}^2$

$4\{(x+1)^2+y^2\}=9\{(x-4)^2+y^2\}$

$4x^2+8x+4+4y^2=9x^2-72x+144+9y^2$

$5x^2+5y^2-80x+140=0$

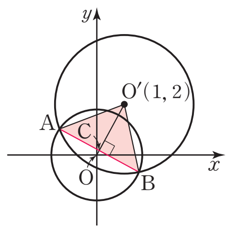
$x^2+y^2-16x+28=0$

$\therefore (x-8)^2+y^2=36$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(8, 0)$이고 반지름의 길이가 6인 원이므로 구하는 넓이는

$\pi\times 6^2=36\pi$

63 답 $2\sqrt{5}$



오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=4$, $(x-1)^2+(y-2)^2=9$의 중심을 각각 O, O′이라 하고 $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.

$(x-1)^2+(y-2)^2=9$에서

$x^2+y^2-2x-4y-4=0$

이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-2x-4y-4-(x^2+y^2-4)=0$

$\therefore x+2y=0$

점 O′(1, 2)와 공통인 현 사이의 거리는

$\overline{O'C}=\frac{|1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

원 $(x-1)^2+(y-2)^2=9$의 반지름의 길이는 3이므로 $\overline{O'A}=3$

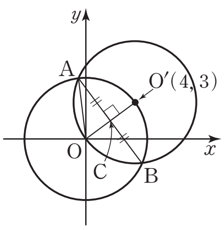
직각삼각형 O′AC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{O'A}^2-\overline{O'C}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AC}=4$

$\therefore \triangle O'AB=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

64 답 ④



오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=20$, $(x-4)^2+(y-3)^2=25$의 중심을 각각 O, O′이라 하고 두 원의 교점을 A, B, $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.

$(x-4)^2+(y-3)^2=25$에서

$x^2+y^2-8x-6y=0$

이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-8x-6y-(x^2+y^2-20)=0$

$\therefore 4x+3y-10=0$

점 O와 공통인 현 사이의 거리는

$\overline{OC}=\frac{|-10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2$

원 $x^2+y^2=20$의 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$이므로 $\overline{OA}=2\sqrt{5}$

직각삼각형 OAC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OC}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$

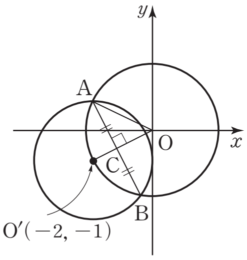
따라서 공통인 현의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AC}=8$

65 답 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

두 원의 교점을 지나는 원의 넓이가 최소가 되려면 공통인 현이 그 원의 지름이어야 한다.

오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=5$, $(x+2)^2+(y+1)^2=4$의 중심을 각각 O, O′이라 하고 두 원의 교점을 A, B, $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.



$(x+2)^2+(y+1)^2=4$에서

$x^2+y^2+4x+2y+1=0$

이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2+4x+2y+1-(x^2+y^2-5)=0$

$\therefore 2x+y+3=0$

점 O와 공통인 현 사이의 거리는

$\overline{OC}=\dfrac{|3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

원 $x^2+y^2=5$의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 $\overline{OA}=\sqrt{5}$

직각삼각형 OAC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OC}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

따라서 넓이가 최소인 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$이다.

학교 시험 대비 문제

p.82~85

01 답 $(x-4)^2+(y+3)^2=40$

$\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times5+1\times2}{2+1}, \dfrac{2\times(-6)+1\times3}{2+1}\right)$ $\quad\therefore (4, -3)$

즉 원의 중심의 좌표가 $(4, -3)$이므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y+3)^2=r^2$

이 원이 점 A$(2, 3)$을 지나므로

$(2-4)^2+(3+3)^2=r^2 \quad \therefore r^2=40$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y+3)^2=40$

02 답 $\sqrt{10}$

원의 중심이 직선 $y=x-2$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, a-2)$, 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a+2)^2=r^2$

이 원이 두 점 $(0, -4)$, $(4, 0)$을 지나므로

$a^2+(-2-a)^2=r^2$, $(4-a)^2+(-a+2)^2=r^2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $r^2=10$

$\therefore r=\sqrt{10}\ (\because r>0)$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

03 답 ③

원의 중심의 좌표는 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표와 같으므로

$\left(\dfrac{-2+6}{2}, \dfrac{4-2}{2}\right)$ $\quad\therefore (2, 1)$

원의 반지름의 길이는

$r=\dfrac{1}{2}\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(6+2)^2+(-2-4)^2}=5$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y-1)^2=5^2$이므로

$a=2$, $b=1$, $r=5$

$\therefore a+b+r=2+1+5=8$

04 답 3π

$x^2+y^2-2ax+6ay-20a-13=0$에서

$(x-a)^2+(y+3a)^2=10a^2+20a+13$

이 방정식이 원을 나타내려면 $10a^2+20a+13>0$

a에 대한 이차방정식 $10a^2+20a+13=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=10^2-10\times13=-30<0$이므로 부등식 $10a^2+20a+13>0$은 모든 실수 a에 대하여 성립한다.

이때 원의 넓이가 최소이려면 반지름의 길이가 최소이어야 하므로

$10a^2+20a+13=10(a+1)^2+3$

따라서 $a=-1$일 때 반지름의 길이는 최소이고, 그때의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$이므로 구하는 원의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{3})^2=3\pi$

05 답 ④

원의 중심을 P(a, b)라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a+3)^2+(b+2)^2=(a+2)^2+(b-1)^2$

$\therefore a+3b=-4$ ······㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+2)^2+(b-1)^2=(a-1)^2+b^2$

$\therefore 3a-b=-2$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-1$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(-1+3)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{5}$

이므로 구하는 원의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{5})^2=5\pi$

06 답 3

원 $x^2+y^2-2x-4ay+b=0$이 점 $(-3, 4)$를 지나므로

$9+16+6-16a+b=0 \quad \therefore 16a-b=31$ ······㉠

$x^2+y^2-2x-4ay+b=0$에서

$(x-1)^2+(y-2a)^2=4a^2-b+1$

이때 원이 x축에 접하므로 $|2a|=\sqrt{4a^2-b+1}$

양변을 제곱하면 $4a^2=4a^2-b+1 \quad \therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $16a-1=31 \quad \therefore a=2$

$\therefore a+b=2+1=3$

07 답 4

원의 중심이 제4사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 원의 중심의 좌표는 $(r, -r)$이다.

즉 원의 방정식은 $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

이때 원의 중심이 직선 $y=2x-6$ 위에 있으므로

$-r=2r-6$ $\qquad\therefore r=2$

즉 구하는 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y+2)^2=4$

따라서 $a=-2$, $b=2$, $c=4$이므로

$a+b+c=-2+2+4=4$

08 답 10

$x^2+y^2+4x-2y+1=0$에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=4$

원의 중심 $(-2, 1)$과 점 $A(2, 4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-2-2)^2+(1-4)^2}=5$

이때 원의 반지름의 길이는 2이므로 $\overline{AP}$의 길이의

최댓값은 $5+2=7$, 최솟값은 $5-2=3$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$7+3=10$

09 답 -6

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+x-2y-(x^2+y^2-x-y-2)=0$

$2x-y+2=0$ $\qquad\therefore y=2x+2$

이 직선과 평행한 직선의 기울기는 2이고 점 $(1, -1)$을 지나므로

구하는 직선의 방정식은 $y-(-1)=2(x-1)$ $\qquad\therefore y=2x-3$

따라서 $a=2$, $b=-3$이므로

$ab=2\times(-3)=-6$

10 답 ②

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+8x-2y+1+k(x^2+y^2+2x-8y+4)=0\ (k\neq-1)$ ……㉠

이라 하면 이 원이 점 $(-1, 6)$을 지나므로

$18-9k=0$ $\qquad\therefore k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2+8x-2y+1+2(x^2+y^2+2x-8y+4)=0$

$x^2+y^2+4x-6y+3=0$ $\qquad\therefore (x+2)^2+(y-3)^2=10$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(-2, 3)$이다.

11 답 ③

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $3x+4y+k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|k|}{5}$

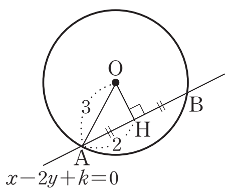
이때 원의 반지름의 길이는 2이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\dfrac{|k|}{5}<2$, $|k|<10$ $\qquad\therefore -10<k<10$

따라서 $a=-10$, $b=10$이므로

$b-a=10-(-10)=20$

12 답 ±5



오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선이 만나는 두 점을 A, B라 하고 원의 중심 O에서 직선 $x-2y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AB}=4$이므로 $\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=2$

원의 반지름의 길이는 3이므로 $\overline{OA}=3$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ ……㉠

또 원의 중심 $O(0, 0)$과 직선 $x-2y+k=0$ 사이의 거리는

$\overline{OH}=\dfrac{|k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$이므로 $|k|=5$ $\qquad\therefore k=\pm5$

13 답 ③

$x^2+y^2-8x-4y+18=0$에서 $(x-4)^2+(y-2)^2=2$

원의 중심 $(4, 2)$와 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|4-2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k+2|}{\sqrt{2}}$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 접하려면

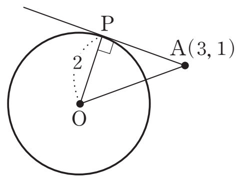
$\dfrac{|k+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, $|k+2|=2$

$k+2=\pm2$ $\qquad\therefore k=-4$ 또는 $k=0$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$-4\times0=0$

14 답 ③



오른쪽 그림에서

$\overline{OA}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

원의 반지름의 길이는 2이므로

$\overline{OP}=2$

직각삼각형 OAP에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-2^2}=\sqrt{6}$

15 답 $m>\dfrac{4}{3}$

원의 중심 $(3, 0)$과 직선 $mx-y+1=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{|3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$

이때 원의 반지름의 길이는 3이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\dfrac{|3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}>3$, $|3m+1|>3\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $(3m+1)^2>9m^2+9$

$9m^2+6m+1>9m^2+9$

$6m>8$ $\qquad\therefore m>\dfrac{4}{3}$

16 답 14

$x^2+y^2-6x+4y=0$에서 $(x-3)^2+(y+2)^2=13$

원의 중심 $(3, -2)$와 직선 $2x-3y+14=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|6+6+14|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=2\sqrt{13}$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$이므로 원 위의 점 P와 직선 $2x-3y+14=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$2\sqrt{13}-\sqrt{13}\le d\le 2\sqrt{13}+\sqrt{13}$

$\therefore \sqrt{13}\le d\le 3\sqrt{13}$, 즉 $3.6\cdots\le d\le 10.8\cdots$

따라서 정수 d의 값은 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10이고 각각의 거리에 해당하는 점이 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는 14이다.

17 답 ⑤

기울기가 2이고 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=1$에 접하는 직선의 방정식을 $y=2x+n$이라 하면 원의 중심 $(1,\ -3)$과 직선 $y=2x+n$, 즉 $2x-y+n=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+3+n|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|n+5|}{\sqrt{5}}$$

이때 원의 반지름의 길이는 1이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|n+5|}{\sqrt{5}}=1,\ |n+5|=\sqrt{5}$$

$n+5=\pm\sqrt{5}\qquad \therefore n=-5\pm\sqrt{5}$

따라서 두 직선의 y절편의 곱은

$(-5+\sqrt{5})(-5-\sqrt{5})=25-5=20$

18 답 ④

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1,2)$에서의 접선의 방정식은

$x+2y=5$

이 직선의 x절편은 5, y절편은 $\frac{5}{2}$이므로 이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times5\times\frac{5}{2}=\frac{25}{4}$$

19 답 ④

접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(5,2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=m(x-5)\qquad \therefore mx-y-5m+2=0$

원의 중심 $(2,1)$과 직선 $mx-y-5m+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2m-1-5m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$$

$|3m-1|=\sqrt{2m^2+2}$

양변을 제곱하면 $(3m-1)^2=2m^2+2$

$9m^2-6m+1=2m^2+2,\ 7m^2-6m-1=0$

$(7m+1)(m-1)=0\qquad \therefore m=1\ (\because m>0)$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$x-y-3=0$

20 답 ②

원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P의 좌표를 (a,b)라 하면

$a^2+b^2=4$ ······㉠

△PAB의 무게중심의 좌표를 (x,y)라 하면

$$x=\frac{-2+2+a}{3},\ y=\frac{0+0+b}{3}$$

$\therefore a=3x,\ b=3y$ ······㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

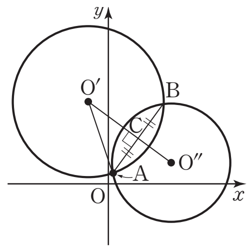
$9x^2+9y^2=4\qquad \therefore x^2+y^2=\frac{4}{9}$

따라서 삼각형 PAB의 무게중심이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(0,0)$이고 반지름의 길이가 $\frac{2}{3}$인 원이므로 구하는 길이는

$$2\pi\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\pi$$

21 답 4π

두 원의 교점을 지나는 원의 넓이가 최소가 되려면 공통인 현이 그 원의 지름이어야 한다.



오른쪽 그림과 같이 두 원

$(x+1)^2+(y-4)^2=13$,

$(x-3)^2+(y-1)^2=8$

의 중심을 각각 O′, O″이라 하고 두 원의 교점을 A, B, $\overline{\mathrm{O'O''}}$과 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 C라 하자.

$(x+1)^2+(y-4)^2=13$에서

$x^2+y^2+2x-8y+4=0$

$(x-3)^2+(y-1)^2=8$에서 $x^2+y^2-6x-2y+2=0$

즉 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2+2x-8y+4-(x^2+y^2-6x-2y+2)=0$

$\therefore 4x-3y+1=0$

점 $\mathrm{O'}(-1,4)$와 공통인 현 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{O'C}}=\frac{|-4-12+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{15}{5}=3$$

원 $(x+1)^2+(y-4)^2=13$의 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$이므로

$\overline{\mathrm{O'A}}=\sqrt{13}$

직각삼각형 O′AC에서

$$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{O'A}}^2-\overline{\mathrm{O'C}}^2}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-3^2}=2$$

따라서 넓이가 최소인 원의 반지름의 길이는 2이므로 구하는 원의 넓이는 $\pi\times2^2=4\pi$

서술형 1 답 -1

원 $x^2+y^2-2ax-2y+b=0$이 점 $(-1,2)$를 지나므로

$1+4+2a-4+b=0\qquad \therefore 2a+b=-1$ ······㉠ ······❶

$x^2+y^2-2ax-2y+b=0$에서

$(x-a)^2+(y-1)^2=a^2-b+1$

이 원의 중심의 좌표는 $(a,1)$이고 원이 y축에 접하므로

$|a|=\sqrt{a^2-b+1}$

양변을 제곱하면 $a^2=a^2-b+1\qquad \therefore b=1$ ······❷

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $a=-1$ ······❸

$\therefore ab=-1\times1=-1$ ······❹

채점 기준	비율
❶ 원 위의 점 $(-1,2)$를 대입하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	20%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

서술형 2 답 4

두 점 $(2,1)$, $(-2,\ -3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{2-2}{2},\ \frac{1-3}{2}\right)\qquad \therefore (0,\ -1)$$

원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\sqrt{(-2-2)^2+(-3-1)^2}=2\sqrt{2}$$ ······❶

원의 중심 $(0,\ -1)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는 $\frac{|1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k+1|}{\sqrt{2}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|k+1|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2}$, $|k+1|>4$

$k+1<-4$ 또는 $k+1>4$

$\therefore k<-5$ 또는 $k>3$ ······②

따라서 자연수 k의 최솟값은 4이다. ······③

채점 기준	비율
① 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40%
② k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
③ 자연수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 8

$x^2+y^2-2x-4y+4=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2=1$ ······①

원의 중심 $(1, 2)$와 직선 $3x-4y-10=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3-8-10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{15}{5}=3$ ······②

이때 원의 반지름의 길이가 1이므로

$M=3+1=4$, $m=3-1=2$ ······③

$\therefore Mm=4\times2=8$ ······④

채점 기준	비율
① 주어진 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	10%
② 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	40%
③ M, m의 값을 구할 수 있다.	40%
④ Mm의 값을 구할 수 있다.	10%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p.86~87

01 답 ②

이차함수 $y=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$의 그래프의 꼭짓점 A의 좌표는 $(2, a-4)$

$x^2+y^2+bx+4y-17=0$에서

$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{b^2}{4}+21$

이때 원의 중심 $\left(-\frac{b}{2}, -2\right)$와 점 $\mathrm{A}(2, a-4)$가 일치하므로

$-\frac{b}{2}=2$, $-2=a-4$ $\quad\therefore a=2$, $b=-4$

$\therefore a+b=2+(-4)=-2$

02 답 256

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(a-5)^2+(b-12)^2}=3$이므로

$(a-5)^2+(b-12)^2=9$

점 $\mathrm{B}(a, b)$는 중심의 좌표가 $(5, 12)$이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점이다.

즉 a^2+b^2은 원 $(x-5)^2+(y-12)^2=9$ 위의 점 $\mathrm{B}(a, b)$와 원점 사이의 거리의 제곱이다.

원의 중심 $(5, 12)$와 원점 사이의 거리는

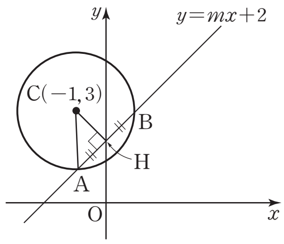
$\sqrt{5^2+12^2}=13$

이때 원의 반지름의 길이는 3이므로 $\sqrt{a^2+b^2}$의 최댓값은

$13+3=16$

따라서 a^2+b^2의 최댓값은 $16^2=256$

03 답 ③



오른쪽 그림과 같이 원의 중심 $\mathrm{C}(-1, 3)$에서 직선 $y=mx+2$, 즉 $mx-y+2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{CA}}=2$

$\therefore \overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CA}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}$

$=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{2}$

이때 $\overline{\mathrm{CH}}$의 길이는 원의 중심 $\mathrm{C}(-1, 3)$과 직선 $mx-y+2=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|-m-3+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$, $\frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$

$|m+1|=\sqrt{2m^2+2}$

양변을 제곱하면 $(m+1)^2=2m^2+2$

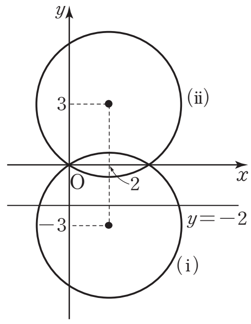
$m^2+2m+1=2m^2+2$, $m^2-2m+1=0$

$(m-1)^2=0$ $\quad\therefore m=1$

04 답 ⑤

(가)에서 원 C: $x^2+y^2-4x-2ay+a^2-9=0$이 원점을 지나므로

$a^2-9=0$, $a^2=9$ $\quad\therefore a=-3$ 또는 $a=3$



(i) $a=-3$일 때

원 C의 방정식은

$x^2+y^2-4x+6y=0$

$\therefore (x-2)^2+(y+3)^2=13$

(ii) $a=3$일 때

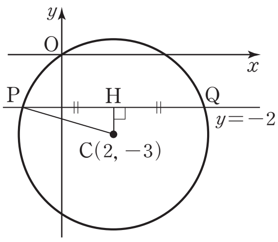
원 C의 방정식은

$x^2+y^2-4x-6y=0$

$\therefore (x-2)^2+(y-3)^2=13$

이때 $a=3$이면 원 C는 직선 $y=-2$와 만나지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-3$



오른쪽 그림과 같이 원 C의 중심을 $\mathrm{C}(2, -3)$이라 하고 점 C에서 직선 $y=-2$에 내린 수선의 발을 H, 원 C와 직선 $y=-2$가 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하면

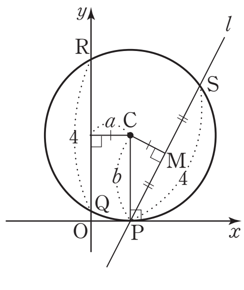
$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{13}$, $\overline{\mathrm{CH}}=-2-(-3)=1$

직각삼각형 CPH에서

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{CH}}^2}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-1^2}=2\sqrt{3}$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PH}}=4\sqrt{3}$

05 답 ①



오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $\mathrm{C}(a, b)$ $(a>0, b>0)$라 하면 점 P의 좌표는 $(a, 0)$이다.

점 P를 지나고 기울기가 2인 직선을 l이라 하면 직선 l의 방정식은

$y-0=2(x-a)$

$\therefore 2x-y-2a=0$

$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{PS}}=4$이므로 점 C에서 y축과 직선 l에 이르는 거리가 같다.

즉 $a=\frac{|2a-b-2a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|b|}{\sqrt{5}}$이므로

$b=\sqrt{5}a\ (\because b>0)$ ……㉠

선분 PS의 중점을 M이라 하면 $\overline{PM}=2$, $\overline{CM}=a$, $\overline{CP}=b$이므로

직각삼각형 CPM에서 $b^2=a^2+4$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $5a^2=a^2+4$

$4a^2=4 \qquad \therefore a=1\ (\because a>0)$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=\sqrt{5}$

따라서 원점 O와 원의 중심 $C(1, \sqrt{5})$ 사이의 거리는

$\sqrt{1^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{6}$

06 답 50

원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 반지름의 길이를 a라 하면 원의 중심의 좌표는 (a, a)이다.

원의 중심 (a, a)와 직선 $3x-4y+12=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3a-4a+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|a-12|}{5}$

이때 원의 반지름의 길이는 $|a|$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|a-12|}{5}=|a|$, $|a-12|=5|a|$

양변을 제곱하면 $(a-12)^2=25a^2$

$a^2-24a+144=25a^2$, $a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0 \qquad \therefore a=-3$ 또는 $a=2$

따라서 두 원의 중심 A, B의 좌표는

$A(-3, -3)$, $B(2, 2)$ 또는 $A(2, 2)$, $B(-3, -3)$

$\therefore \overline{AB}^2=(2+3)^2+(2+3)^2=50$

07 답 200

원의 중심이 직선 $y=x^2$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 (n, n^2)으로 놓으면 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $|n|$이다.

원의 중심 (n, n^2)과 직선 $y=\sqrt{3}x-2$, 즉 $\sqrt{3}x-y-2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|\sqrt{3}n-n^2-2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{|n^2-\sqrt{3}n+2|}{2}$

이때 원과 직선이 접하려면

$\frac{|n^2-\sqrt{3}n+2|}{2}=|n|$, $|n^2-\sqrt{3}n+2|=2|n|$

$\therefore n^2-\sqrt{3}n+2=\pm 2n$

(i) $n^2-\sqrt{3}n+2=-2n$일 때

이차방정식 $n^2+(2-\sqrt{3})n+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2-\sqrt{3})^2-4\times1\times2=-1-4\sqrt{3}<0$

이므로 실근을 갖지 않는다.

(ii) $n^2-\sqrt{3}n+2=2n$일 때

이차방정식 $n^2-(2+\sqrt{3})n+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2+\sqrt{3})\}^2-4\times1\times2=-1+4\sqrt{3}>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 두 원의 반지름의 길이 a, b는 이차방정식 $n^2-(2+\sqrt{3})n+2=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $ab=2$

$\therefore 100ab=100\times2=200$

08 답 22

직선 l이 원점과 점 $(3, 4)$를 지나는 직선과 수직으로 만날 때, 원점과 직선 l 사이의 거리가 최대이다.

원점과 점 $(3, 4)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{4}{3}x$

즉 직선 l의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이고 점 $(3, 4)$를 지나므로 직선 l의 방정식은 $y-4=-\frac{3}{4}(x-3) \qquad \therefore 3x+4y-25=0$

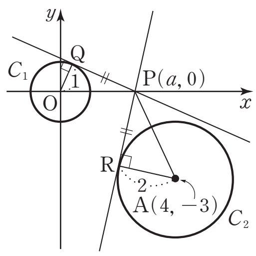
원의 중심 $(7, 5)$와 직선 $3x+4y-25=0$ 사이의 거리는

$\frac{|21+20-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{16}{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 1이므로 원 위의 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값 m은

$m=\frac{16}{5}-1=\frac{11}{5} \qquad \therefore 10m=10\times\frac{11}{5}=22$

09 답 ④



오른쪽 그림과 같이 점 P의 좌표를 $P(a, 0)$이라 하면

$\overline{OQ}\perp\overline{PQ}$이므로 직각삼각형 OPQ에서

$\overline{PQ}^2=\overline{OP}^2-\overline{OQ}^2=a^2-1$

$x^2+y^2-8x+6y+21=0$에서

$(x-4)^2+(y+3)^2=4$

즉 원 C_2의 중심을 $A(4, -3)$이라 하면

$\overline{AR}\perp\overline{PR}$이므로 직각삼각형 APR에서

$\overline{PR}^2=\overline{AP}^2-\overline{AR}^2$

$=\{(a-4)^2+(0+3)^2\}-2^2$

$=a^2-8a+21$

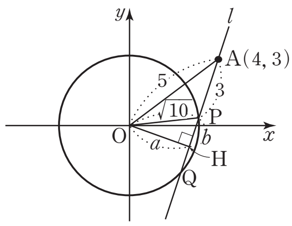
이때 $\overline{PQ}=\overline{PR}$에서 $\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2$이므로

$a^2-1=a^2-8a+21$

$8a=22 \qquad \therefore a=\frac{11}{4}$

따라서 점 P의 x좌표는 $\frac{11}{4}$이다.

10 답 ②



오른쪽 그림과 같이 원점에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{OH}=a$, $\overline{HP}=b$라 하면 두 삼각형 OHP, OHA는 직각삼각형이므로

$a^2+b^2=10$ ……㉠

$a^2+(b+3)^2=25$ ……㉡

㉡−㉠을 하면 $(b+3)^2-b^2=15$

$6b+9=15$, $6b=6 \qquad \therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $a^2+1=10$

$a^2=9 \qquad \therefore a=3\ (\because a>0)$

직선 l의 기울기를 $m\ (m>0)$이라 하면 직선 l의 방정식은

$y-3=m(x-4) \qquad \therefore mx-y-4m+3=0$

원의 중심 O와 직선 $mx-y-4m+3=0$ 사이의 거리가 3이므로

$\frac{|-4m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$, $|-4m+3|=3\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $(-4m+3)^2=9m^2+9$

$16m^2-24m+9=9m^2+9$, $7m^2-24m=0$

$m(7m-24)=0 \qquad \therefore m=\frac{24}{7}\ (\because m>0)$

따라서 직선 l의 기울기는 $\frac{24}{7}$이다.

04 도형의 이동

개념 완성하기 p. 91~92

01 답 $(6, -2)$

02 답 $(1, -1)$

03 답 $(0, 1)$

04 답 $(-2, 5)$

05 답 $(-2, 0)$
$(1-3, -3+3)$ $\quad\therefore (-2, 0)$

06 답 $(-9, 5)$
$(-6-3, 2+3)$ $\quad\therefore (-9, 5)$

07 답 $(0, 7)$
$(3-3, 4+3)$ $\quad\therefore (0, 7)$

08 답 $(-4, -3)$
$(-1-3, -6+3)$ $\quad\therefore (-4, -3)$

09 답 $a=4, b=1$
$-1+a=3, 5+b=6$이므로
$a=4, b=1$

10 답 $x-3y-10=0$
$(x-2)-3(y+3)+1=0$ $\quad\therefore x-3y-10=0$

11 답 $(x-1)^2+(y+1)^2=4$
$(x-2+1)^2+(y+3-2)^2=4$ $\quad\therefore (x-1)^2+(y+1)^2=4$

12 답 $(x-3)^2+(y+4)^2=5$
$x^2+y^2-2x+2y-3=0$에서 $(x-1)^2+(y+1)^2=5$이므로
$(x-2-1)^2+(y+3+1)^2=5$ $\quad\therefore (x-3)^2+(y+4)^2=5$

13 답 $y=(x-4)^2-2$
$x^2-4x-y+5=0$에서 $y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$이므로
$y+3=(x-2-2)^2+1$ $\quad\therefore y=(x-4)^2-2$

14 답 $2x+3y-5=0$
$2(x+1)+3(y-2)-1=0$ $\quad\therefore 2x+3y-5=0$

15 답 $(x-1)^2+(y-5)^2=4$
$(x+1-2)^2+(y-2-3)^2=4$ $\quad\therefore (x-1)^2+(y-5)^2=4$

16 답 $(x+3)^2+y^2=8$
$x^2+y^2+4x+4y=0$에서 $(x+2)^2+(y+2)^2=8$이므로
$(x+1+2)^2+(y-2+2)^2=8$ $\quad\therefore (x+3)^2+y^2=8$

17 답 $y=(x+2)^2-2$
$y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$이므로
$y-2=(x+1+1)^2-4$ $\quad\therefore y=(x+2)^2-2$

18 답 $2x+6y-25=0$
$2(x+3)+6(y-5)-1=0$ $\quad\therefore 2x+6y-25=0$

19 답 -1
$2(x-a)-(y+a)+1=0$ $\quad\therefore 2x-y-3a+1=0$
이 직선이 $2x-y+4=0$과 일치하므로
$-3a+1=4$ $\quad\therefore a=-1$

20 답 (1) $(-3, -2)$ (2) $(3, 2)$ (3) $(3, -2)$
(4) $(2, -3)$ (5) $(-2, 3)$
(1) x축: $(-3, -2)$
(2) y축: $(3, 2)$
(3) 원점: $(3, -2)$
(4) 직선 $y=x$: $(2, -3)$
(5) 직선 $y=-x$: $(-2, 3)$

21 답 (1) $x-2y+3=0$ (2) $x-2y-3=0$ (3) $x+2y-3=0$
(4) $2x+y+3=0$ (5) $2x+y-3=0$
(1) x축: $x+2(-y)+3=0$ $\quad\therefore x-2y+3=0$
(2) y축: $(-x)+2y+3=0$ $\quad\therefore x-2y-3=0$
(3) 원점: $(-x)+2(-y)+3=0$ $\quad\therefore x+2y-3=0$
(4) 직선 $y=x$: $y+2x+3=0$ $\quad\therefore 2x+y+3=0$
(5) 직선 $y=-x$: $(-y)+2(-x)+3=0$ $\quad\therefore 2x+y-3=0$

22 답 (1) $y=x^2-11$ (2) $y=-x^2+11$ (3) $y=x^2-11$
(4) $x=-y^2+11$ (5) $x=y^2-11$
(1) x축: $-y=-x^2+11$ $\quad\therefore y=x^2-11$
(2) y축: $y=-(-x)^2+11$ $\quad\therefore y=-x^2+11$
(3) 원점: $-y=-(-x)^2+11$ $\quad\therefore y=x^2-11$
(4) 직선 $y=x$: $x=-y^2+11$
(5) 직선 $y=-x$: $-x=-(-y)^2+11$ $\quad\therefore x=y^2-11$

23 답 (1) $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ (2) $(x+1)^2+(y+2)^2=1$
(3) $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ (4) $(x+2)^2+(y-1)^2=1$
(5) $(x-2)^2+(y+1)^2=1$
(1) x축: $(x-1)^2+(-y+2)^2=1$
$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=1$
(2) y축: $(-x-1)^2+(y+2)^2=1$
$\therefore (x+1)^2+(y+2)^2=1$
(3) 원점: $(-x-1)^2+(-y+2)^2=1$
$\therefore (x+1)^2+(y-2)^2=1$
(4) 직선 $y=x$: $(y-1)^2+(x+2)^2=1$
$\therefore (x+2)^2+(y-1)^2=1$

(5) 직선 $y=-x$: $(-y-1)^2+(-x+2)^2=1$

$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=1$

24 답 (1) $x^2+y^2+4x-7=0$ (2) $x^2+y^2-4x-7=0$
(3) $x^2+y^2-4x-7=0$ (4) $x^2+y^2+4y-7=0$
(5) $x^2+y^2-4y-7=0$

(1) x축: $x^2+(-y)^2+4x-7=0$

$\therefore x^2+y^2+4x-7=0$

(2) y축: $(-x)^2+y^2+4(-x)-7=0$

$\therefore x^2+y^2-4x-7=0$

(3) 원점: $(-x)^2+(-y)^2+4(-x)-7=0$

$\therefore x^2+y^2-4x-7=0$

(4) 직선 $y=x$: $y^2+x^2+4y-7=0$

$\therefore x^2+y^2+4y-7=0$

(5) 직선 $y=-x$: $(-y)^2+(-x)^2+4(-y)-7=0$

$\therefore x^2+y^2-4y-7=0$

25 답 $(2, -3)$

$\mathrm{P}(a, b)$라 하면

$\frac{-1+5}{2}=a$, $\frac{-4-2}{2}=b$ $\quad\therefore a=2, b=-3$

$\therefore \mathrm{P}(2, -3)$

26 답 $(3, -7)$

구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{-1+a}{2}=1$, $\frac{3+b}{2}=-2$ $\quad\therefore a=3, b=-7$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(3, -7)$이다.

27 답 (1) $a=-4-p$, $b=6-q$ (2) $2x+y+3=0$

(1) 두 점 (a, b), (p, q)를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(-2, 3)$이므로 $\frac{a+p}{2}=-2$, $\frac{b+q}{2}=3$

$\therefore a=-4-p$, $b=6-q$ ……㉠

(2) 점 (a, b)가 직선 $2x+y-1=0$ 위의 점이므로

$2a+b-1=0$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2(-4-p)+6-q-1=0$ $\quad\therefore 2p+q+3=0$

따라서 점 (p, q)는 직선 $2x+y+3=0$ 위의 점이므로 구하는 도형의 방정식은 $2x+y+3=0$

28 답 $(4, -1)$

$\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=x-2$ 위의 점이므로

$\frac{2+b}{2}=\frac{1+a}{2}-2$ $\quad\therefore a-b=5$ ……㉠

직선 PQ와 직선 $y=x-2$는 서로 수직이므로

$\frac{b-2}{a-1}\times 1=-1$ $\quad\therefore a+b=3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-1$

$\therefore \mathrm{Q}(4, -1)$

29 답 $(4, 1)$

$\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=-x+3$ 위의 점이므로

$\frac{-1+b}{2}=-\frac{2+a}{2}+3$ $\quad\therefore a+b=5$ ……㉠

직선 PQ와 직선 $y=-x+3$은 서로 수직이므로

$\frac{b+1}{a-2}\times(-1)=-1$ $\quad\therefore a-b=3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=1$

$\therefore \mathrm{Q}(4, 1)$

30 답 $(5, 3)$

$\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a-3}{2}, \frac{b+7}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=2x+3$ 위의 점이므로

$\frac{b+7}{2}=2\times\frac{a-3}{2}+3$ $\quad\therefore 2a-b=7$ ……㉠

직선 PQ와 직선 $y=2x+3$은 서로 수직이므로

$\frac{b-7}{a+3}\times 2=-1$ $\quad\therefore a+2b=11$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=3$

$\therefore \mathrm{Q}(5, 3)$

31 답 $(-2, -4)$

$\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+a}{2}, \frac{1+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $x+y+1=0$ 위의 점이므로

$\frac{3+a}{2}+\frac{1+b}{2}+1=0$ $\quad\therefore a+b=-6$ ……㉠

직선 PQ와 직선 $x+y+1=0$, 즉 $y=-x-1$은 서로 수직이므로

$\frac{b-1}{a-3}\times(-1)=-1$ $\quad\therefore a-b=2$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-4$

$\therefore \mathrm{Q}(-2, -4)$

32 답 $(-4, 6)$

$\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{4+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $2x-y+4=0$ 위의 점이므로

$2\times\frac{4+a}{2}-\frac{2+b}{2}+4=0$ $\quad\therefore 2a-b=-14$ ……㉠

직선 PQ와 직선 $2x-y+4=0$, 즉 $y=2x+4$는 서로 수직이므로

$\frac{b-2}{a-4}\times 2=-1$ $\quad\therefore a+2b=8$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=6$

$\therefore \mathrm{Q}(-4, 6)$

33 답 $\left(\frac{16}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

$\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+a}{2}, \frac{-3+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $x+2y+1=0$ 위의 점이므로

$\frac{2+a}{2}+2\times\frac{-3+b}{2}+1=0$　　$\therefore a+2b=2$　　······㉠

직선 PQ와 직선 $x+2y+1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$은 서로 수직이므로

$\frac{b+3}{a-2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$　　$\therefore 2a-b=7$　　······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{16}{5}$, $b=-\frac{3}{5}$

$\therefore$ Q$\left(\frac{16}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

유형 완성하기

p.93~106

01 답 ⑤

점 $(2, 6)$을 점 $(3, 3)$으로 옮기는 평행이동을

$(x, y) \longrightarrow (x+a, y+b)$라 하면

$2+a=3$, $6+b=3$　　$\therefore a=1$, $b=-3$

이때 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+1, y-3)$에 의하여 점 $(5, 4)$로 옮겨지는 점의 좌표를 (m, n)이라 하면

$m+1=5$, $n-3=4$　　$\therefore m=4$, $n=7$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(4, 7)$이다.

01-1 답 -7

점 $(2, -1)$을 점 $(4, 2)$로 옮기는 평행이동을

$(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$이라 하면

$2+m=4$, $-1+n=2$　　$\therefore m=2$, $n=3$

이때 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+2, y+3)$에 의하여 점 (a, b)가 점 $(3, -5)$로 옮겨지므로

$a+2=3$, $b+3=-5$　　$\therefore a=1$, $b=-8$

$\therefore a+b=1+(-8)=-7$

02 답 ②

주어진 평행이동에 의하여 점 $(-2, 5)$를 평행이동하면

$(-2-1, 5+2)$　　$\therefore (-3, 7)$

이 점이 직선 $y=ax+4$ 위의 점이므로

$7=-3a+4$　　$\therefore a=-1$

02-1 답 -3

주어진 평행이동에 의하여 점 $(-1, 3)$을 평행이동하면

$(-1+2, 3-3)$　　$\therefore (1, 0)$

이 점이 직선 $y=3x+a$ 위의 점이므로

$0=3+a$　　$\therefore a=-3$

03 답 0

점 $(m, 1)$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(m+3, -1)$

$x^2+y^2-4x+2ny+n-3=0$에서

$(x-2)^2+(y+n)^2=n^2-n+7$

즉 원의 중심의 좌표는 $(2, -n)$이므로

$m+3=2$, $-1=-n$　　$\therefore m=-1$, $n=1$

$\therefore m+n=-1+1=0$

03-1 답 -1

점 $(2, m)$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(0, m+1)$　　······❶

$x^2+y^2-2nx-4ny+5n^2+n+1=0$에서

$(x-n)^2+(y-2n)^2=-n-1$

즉 원의 중심의 좌표는 $(n, 2n)$이므로　　······❷

$0=n$, $m+1=2n$　　$\therefore m=-1$, $n=0$

$\therefore m+n=-1+0=-1$　　······❸

채점 기준	비율
❶ 점 $(2, m)$을 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ 주어진 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	20%

04 답 ④

점 $(-3, 1)$을 점 $(2, 5)$로 옮기는 평행이동을

$(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$이라 하면

$-3+m=2$, $1+n=5$　　$\therefore m=5$, $n=4$

직선 $ax-y+b=0$을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$a(x-5)-(y-4)+b=0$

$\therefore ax-y-5a+b+4=0$

이 직선이 직선 $2x-y+5=0$과 일치하므로

$a=2$, $-5a+b+4=5$　　$\therefore a=2$, $b=11$

$\therefore a+b=2+11=13$

04-1 답 ⑤

점 $(1, 0)$을 점 $(-2, 1)$로 옮기는 평행이동을

$(x, y) \longrightarrow (x+a, y+b)$라 하면

$1+a=-2$, $0+b=1$　　$\therefore a=-3$, $b=1$

직선 $2x+my+n=0$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$2(x+3)+m(y-1)+n=0$

$\therefore 2x+my-m+n+6=0$

이 직선이 직선 $x+2y+5=0$, 즉 $2x+4y+10=0$과 일치하므로

$m=4$, $-m+n+6=10$　　$\therefore m=4$, $n=8$

$\therefore m+n=4+8=12$

05 답 2

직선 $x-y-3=0$을 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$(x+a)-(y-2a)-3=0$　　$\therefore x-y+3a-3=0$

이 직선이 직선 $x-y+3=0$과 일치하므로

$3a-3=3 \qquad \therefore a=2$

05-1 답 8

$2+a=1,\ 1+b=4$이므로 $a=-1,\ b=3$

직선 $2x-y+5=0$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$2(x+1)-(y-3)+5=0 \qquad \therefore 2x-y+10=0$

이 직선이 점 $(-2, c)$를 지나므로

$-4-c+10=0 \qquad \therefore c=6$

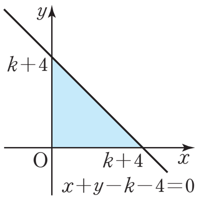
$\therefore a+b+c=-1+3+6=8$

06 답 2

직선 $x+y-3=0$을 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$(x-k)+(y-1)-3=0 \qquad \therefore x+y-k-4=0$

이 직선의 x절편과 y절편이 모두 $k+4$이고 $k>0$이므로 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



이 부분의 넓이가 18이므로

$\frac{1}{2}(k+4)^2=18,\ (k+4)^2=36$

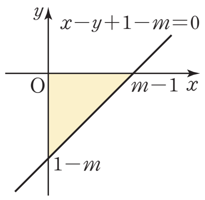
$k+4=\pm6 \qquad \therefore k=2\ (\because k>0)$

06-1 답 5

직선 $x-y+2=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$(x-m)-(y+1)+2=0 \qquad \therefore x-y+1-m=0$

이 직선의 x절편은 $m-1$, y절편은 $1-m$이고 $m>1$이므로 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



이 부분의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}(m-1)^2=8,\ (m-1)^2=16$

$m-1=\pm4 \qquad \therefore m=5\ (\because m>1)$

07 답 -1

원 $(x-2)^2+(y-3)^2=16$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-2)^2+(y-b-3)^2=16$

이 원의 중심 $(a+2, b+3)$이 원점이므로

$a+2=0,\ b+3=0 \qquad \therefore a=-2,\ b=-3$

$\therefore b-a=-3-(-2)=-1$

다른 풀이

원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동으로 생각할 수 있다.

원 $(x-2)^2+(y-3)^2=16$의 중심의 좌표는 $(2, 3)$이고, 이 점을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(2+a, 3+b)$

이때 이 점이 원점이므로

$2+a=0,\ 3+b=0 \qquad \therefore a=-2,\ b=-3$

$\therefore b-a=-3-(-2)=-1$

07-1 답 ④

원 $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-a)^2=4$

$\therefore x^2+y^2-4x-2ay+a^2=0$

이 원이 원 $x^2+y^2-bx+2y+c=0$과 일치하므로

$-4=-b,\ -2a=2,\ a^2=c$

$\therefore a=-1,\ b=4,\ c=1$

$\therefore a+b+c=-1+4+1=4$

08 답 ④

$x^2+y^2-4x+2y+c=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=5-c$

이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-2)^2+(y-b+1)^2=5-c$

이 원이 원 $(x-4)^2+(y+2)^2=4$와 겹쳐지므로

$-a-2=-4,\ -b+1=2,\ 5-c=4$

$\therefore a=2,\ b=-1,\ c=1$

$\therefore a+b+c=2+(-1)+1=2$

08-1 답 16

$x^2+y^2-ax-8y+15=0$에서

$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+(y-4)^2=\frac{a^2}{4}+1$

이 원을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$\left(x-2-\frac{a}{2}\right)^2+(y+3-4)^2=\frac{a^2}{4}+1$

$\therefore \left(x-2-\frac{a}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{a^2}{4}+1$

이 원의 중심의 좌표가 $(b, 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로

$2+\frac{a}{2}=b,\ \sqrt{\frac{a^2}{4}+1}=\sqrt{5} \qquad \therefore a=4,\ b=4\ (\because b>0)$

$\therefore ab=4\times4=16$

09 답 ③

$y=x^2-2x+3$에서 $y=(x-1)^2+2$

이 포물선을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-1=(x-a-1)^2+2$

$\therefore y=(x-a-1)^2+3$

이 포물선이 포물선 $y=(x-3)^2+b$와 일치하므로

$-a-1=-3,\ 3=b \qquad \therefore a=2,\ b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$

다른 풀이

포물선의 평행이동은 꼭짓점의 평행이동으로 생각할 수 있다.

포물선 $y=x^2-2x+3$, 즉 $y=(x-1)^2+2$의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 2)$이고, 이 점을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(1+a, 3)$

이때 이 점이 포물선 $y=(x-3)^2+b$의 꼭짓점의 좌표이므로

$1+a=3,\ 3=b \qquad \therefore a=2,\ b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$

09-1 답 2

$y=x^2+6x+8$에서 $y=(x+3)^2-1$

이 포물선을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-a=(x-2+3)^2-1$

$\therefore y=(x+1)^2-1+a$

이 포물선이 포물선 $y=(x-b)^2+2$와 일치하므로

$1=-b,\ -1+a=2 \qquad \therefore a=3,\ b=-1$

$\therefore a+b=3+(-1)=2$

10 답 -7

$y=3x^2+6x+8$에서 $y=3(x+1)^2+5$

이 포물선을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $p+2$만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-(p+2)=3(x-p+1)^2+5$

$\therefore y=3(x-p+1)^2+p+7$ ······❶

이 포물선의 꼭짓점 $(p-1,\ p+7)$이 x축 위에 있으므로

$p+7=0 \qquad \therefore p=-7$ ······❷

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❷ p의 값을 구할 수 있다.	50%

10-1 답 -1

$y=2x^2-4x+5$에서 $y=2(x-1)^2+3$

이 포물선을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $p+3$만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-(p+3)=2(x-p-1)^2+3$

$\therefore y=2(x-p-1)^2+p+6$

이 포물선의 꼭짓점 $(p+1,\ p+6)$이 y축 위에 있으므로

$p+1=0 \qquad \therefore p=-1$

11 답 -3

원의 중심은 원의 중심으로 옮겨지므로 점 $(0,\ 1)$은 점 $(1,\ 0)$으로 옮겨진다.

이 평행이동을 $(x,\ y) \longrightarrow (x+m,\ y+n)$이라 하면

$0+m=1,\ 1+n=0 \qquad \therefore m=1,\ n=-1$

직선 $3x-y-2=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$3(x-1)-(y+1)-2=0 \qquad \therefore 3x-y-6=0$

이 직선이 $ax-y+b=0$과 일치하므로

$a=3,\ b=-6$

$\therefore a+b=3+(-6)=-3$

11-1 답 ④

원의 중심은 원의 중심으로 옮겨지므로 점 $(1,\ 4)$는 점 $(3,\ 1)$로 옮겨진다.

이 평행이동을 $(x,\ y) \longrightarrow (x+m,\ y+n)$이라 하면

$1+m=3,\ 4+n=1 \qquad \therefore m=2,\ n=-3$

직선 $4x+2y-1=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$4(x-2)+2(y+3)-1=0 \qquad \therefore 4x+2y-3=0$

이 직선이 $ax+2y+b=0$과 일치하므로

$a=4,\ b=-3$

$\therefore ab=4\times(-3)=-12$

12 답 $3\sqrt{5}$

$y=x^2+2x$에서 $y=(x+1)^2-1$

이 포물선을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-n=(x-m+1)^2-1$

$\therefore y=(x-m+1)^2+n-1$

이 포물선이 포물선 $y=x^2-6x+1$, 즉 $y=(x-3)^2-8$과 일치하려면

$-m+1=-3,\ n-1=-8 \qquad \therefore m=4,\ n=-7$

직선 l: $2x-y=0$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 직선 l'의 방정식은

$2(x-4)-(y+7)=0 \qquad \therefore 2x-y-15=0$

두 직선 $l,\ l'$ 사이의 거리는 직선 l 위의 점 $(0,\ 0)$과 직선 l' 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|-15|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=3\sqrt{5}$

12-1 답 $3x-y-40=0$

$y=x^2-2x+3$에서 $y=(x-1)^2+2$

이 포물선을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-n=(x-m-1)^2+2$

$\therefore y=(x-m-1)^2+n+2$

이 포물선이 포물선 $y=x^2-10x$, 즉 $y=(x-5)^2-25$와 일치하려면

$-m-1=-5,\ n+2=-25 \qquad \therefore m=4,\ n=-27$

직선 $3x-y-1=0$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -27만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$3(x-4)-(y+27)-1=0 \qquad \therefore 3x-y-40=0$

13 답 5

직선 $x-3y+2=0$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$(x+2)-3(y-3)+2=0$

$\therefore x-3y+13=0$

이 직선이 원 $(x-2)^2+(y-a)^2=16$의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(2,\ a)$를 지나야 하므로

$2-3a+13=0 \qquad \therefore a=5$

13-1 답 ①

직선 $3x+2y=7$을 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$3(x-k)+2(y+k)=7$

$\therefore 3x+2y-k-7=0$

이 직선이 원 $x^2+y^2-4x+6y+2=0$, 즉 $(x-2)^2+(y+3)^2=11$의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(2,\ -3)$을 지나야 하므로

$6-6-k-7=0 \qquad \therefore k=-7$

14 답 $\pm\frac{5}{3}$

직선 $3x-4y-5=0$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$3(x-a)-4y-5=0$ $\therefore 3x-4y-3a-5=0$

이 직선이 원 $(x+1)^2+(y+2)^2=1$에 접하므로 원의 중심 $(-1, -2)$와 직선 $3x-4y-3a-5=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 1과 같다.

즉 $\frac{|-3+8-3a-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$이므로 $|3a|=5$

$\therefore a=\pm\frac{5}{3}$

14-1 답 2

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+2-a)^2+(y-3-b)^2=r^2$

이 원이 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=r^2$과 일치하므로

$2-a=-1, -3-b=-1$ $\therefore a=3, b=-2$

또 이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로 $r=1$

$\therefore a+b+r=3+(-2)+1=2$

15 답 4

$x^2+y^2-2x+4y+1=0$에서 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$

이 원을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+1-1)^2+(y-a+2)^2=4$

$\therefore x^2+(y-a+2)^2=4$

$x^2+y^2-6x-4y+12=0$에서 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$

외접하는 두 원의 중심 $(0, a-2)$, $(3, 2)$ 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합 3과 같으므로

$\sqrt{3^2+\{2-(a-2)\}^2}=3$, $3^2+(4-a)^2=9$

$(4-a)^2=0$ $\therefore a=4$

15-1 답 ①

$x^2+y^2-4x+2y-4=0$에서 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$

이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-2)^2+(y-1+1)^2=9$

$\therefore (x-a-2)^2+y^2=9$

$x^2+y^2-10y+21=0$에서 $x^2+(y-5)^2=4$

외접하는 두 원의 중심 $(a+2, 0)$, $(0, 5)$ 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합 5와 같으므로

$\sqrt{\{-(a+2)\}^2+5^2}=5$, $(a+2)^2+5^2=25$

$(a+2)^2=0$ $\therefore a=-2$

16 답 -1

점 $(4, -7)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는

$P(-4, 7)$

점 $(4, -7)$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는

$Q(7, -4)$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-4-7}{7-(-4)}=-1$

16-1 답 $\frac{1}{4}$

점 $P(4, 1)$을 x축, y축에 대하여 각각 대칭이동한 점의 좌표는

$A(4, -1)$, $B(-4, 1)$

점 $Q(a, b)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는

$C(-a, b)$

이때 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{1-(-1)}{-4-4}=\frac{b-1}{-a-(-4)}$, $a-4=4b-4$

$\therefore a=4b$

따라서 직선 PQ의 기울기는

$\frac{b-1}{a-4}=\frac{b-1}{4b-4}=\frac{b-1}{4(b-1)}=\frac{1}{4}$

17 답 ③

점 $(2, 4)$를 x축, y축에 대하여 각각 대칭이동한 점의 좌표는

$P(2, -4)$, $Q(-2, 4)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-2-2)^2+(4+4)^2}=4\sqrt{5}$

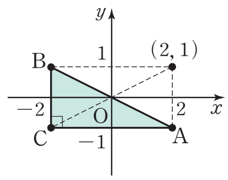
17-1 답 4

점 $(2, 1)$을 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 점의 좌표는

$A(2, -1)$, $B(-2, 1)$, $C(-2, -1)$

오른쪽 그림에서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times2=4$



18 답 제1사분면

점 (a, b)를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a, -b)$

이 점이 제3사분면 위의 점이므로

$a<0, -b<0$ $\therefore a<0, b>0$ ······㉠

점 $(a-b, ab)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a+b, -ab)$

이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-ab, -a+b)$

이때 ㉠에서 $-ab>0$, $-a+b>0$이므로 점 $(-ab, -a+b)$는 제1사분면 위에 있다.

18-1 답 제4사분면

점 (a, b)를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a, b)$

이 점이 제2사분면 위의 점이므로

$-a<0, b>0$ $\therefore a>0, b>0$ ······㉠

점 $(a+b, ab)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(ab, a+b)$

이 점을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(ab, -a-b)$

이때 ㉠에서 $ab>0$, $-a-b<0$이므로 점 $(ab, -a-b)$는 제4사분면 위에 있다.

19 답 ④

직선 $2x-6y+1=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$2x-6(-y)+1=0 \qquad \therefore 2x+6y+1=0$
이 직선을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$2(-y)+6(-x)+1=0 \qquad \therefore 6x+2y-1=0$

19-1 답 $x-3y-2=0$

직선 $3x+y-2=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$3(-x)+y-2=0 \qquad \therefore 3x-y+2=0$
이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$3y-x+2=0 \qquad \therefore x-3y-2=0$

20 답 -3

직선 $y=\frac{1}{2}x+3$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선 l_1의 방정식은
$y=\frac{1}{2}(-x)+3 \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x+3$
직선 l_1을 원점에 대하여 대칭이동한 직선 l_2의 방정식은
$-y=-\frac{1}{2}(-x)+3 \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x-3$
따라서 직선 l_2의 y절편은 -3이다.

20-1 답 3

직선 $2x+y+3=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$2x-y+3=0$ ······❶
이 직선의 기울기가 2이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는
$-\frac{1}{2}$이다. ······❷
즉 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 $(1, 1)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-1=-\frac{1}{2}(x-1) \qquad \therefore x+2y-3=0$ ······❸
따라서 $a=1$, $b=2$이므로
$a+b=1+2=3$ ······❹

채점 기준	비율
❶ 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ ❶의 직선에 수직인 직선의 기울기를 구할 수 있다.	20%
❸ ❶의 직선에 수직이고 점 $(1, 1)$을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

21 답 ④

직선 $(2k+1)x+(k+1)y-4=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$(2k+1)y+(k+1)x-4=0$
$\therefore (k+1)x+(2k+1)y-4=0$ ······㉠
㉠의 좌변을 k에 대하여 정리하면
$(x+2y)k+(x+y-4)=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x+2y=0$, $x+y-4=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=8$, $y=-4$
따라서 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(8, -4)$를 지나므로
$a=8$, $b=-4$
$\therefore a-b=8-(-4)=12$

21-1 답 -1

직선 $(3k+1)x+(k-1)y+2=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$(3k+1)x+(k-1)y-2=0$ ······㉠
㉠의 좌변을 k에 대하여 정리하면
$(3x+y)k+(x-y-2)=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$3x+y=0$, $x-y-2=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{3}{2}$
따라서 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$을 지나므로
$a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$
$\therefore a+b=\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$

22 답 ⑤

원 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$를 x축, y축에 대하여 각각 대칭이동한 원의 방정식은
C_1: $(x-1)^2+(-y-2)^2=4$이므로 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$
C_2: $(-x-1)^2+(y-2)^2=4$이므로 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$
두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표가 각각 $(1, -2)$, $(-1, 2)$이므로 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(-1-1)^2+(2+2)^2}=2\sqrt{5}$

22-1 답 $2\sqrt{10}$

$x^2+y^2+6x-2y+1=0$에서 $(x+3)^2+(y-1)^2=9$
원 $(x+3)^2+(y-1)^2=9$를 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
C_1: $(x+3)^2+(-y-1)^2=9$이므로 $(x+3)^2+(y+1)^2=9$
원 C_1을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
C_2: $(-x+3)^2+(-y+1)^2=9$이므로 $(x-3)^2+(y-1)^2=9$
두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표가 각각 $(-3, -1)$, $(3, 1)$이므로 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(3+3)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{10}$

23 답 -7

원 $(x-2)^2+(y+3)^2=7$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(y-2)^2+(x+3)^2=7 \qquad \therefore (x+3)^2+(y-2)^2=7$
이 원의 중심 $(-3, 2)$가 직선 $y=-3x+k$ 위에 있으므로
$2=9+k \qquad \therefore k=-7$

다른 풀이

원의 중심 $(2, -3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-3, 2)$
이때 점 $(-3, 2)$가 직선 $y=-3x+k$ 위에 있으므로
$2=9+k \qquad \therefore k=-7$

23-1 답 ①

$x^2+y^2+4x+2y-4=0$에서 $(x+2)^2+(y+1)^2=9$
이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x+2)^2+(y+1)^2=9 \qquad \therefore (x-2)^2+(y+1)^2=9$

이 원의 넓이가 직선 $y=-x+k$에 의하여 이등분되므로 직선 $y=-x+k$는 원의 중심 $(2, -1)$을 지난다.
즉 $-1=-2+k$이므로 $k=1$

24 답 2

원 $x^2+y^2+ax-by=0$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-y)^2+(-x)^2+a(-y)-b(-x)=0$
$\therefore x^2+y^2+bx-ay=0$ ⋯⋯ ❶
이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x)^2+(-y)^2+b(-x)-a(-y)=0$
$x^2+y^2-bx+ay=0$
$\therefore \left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}$ ⋯⋯ ❷
이 원의 중심의 좌표가 $(2, 1)$이므로
$\frac{b}{2}=2, -\frac{a}{2}=1 \quad \therefore a=-2, b=4$ ⋯⋯ ❸
$\therefore a+b=-2+4=2$ ⋯⋯ ❹

채점 기준	비율
❶ 주어진 원을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ ❶의 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

24-1 답 ④

원 $x^2+y^2+ax+by=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x)^2+(-y)^2+a(-x)+b(-y)=0$
$\therefore x^2+y^2-ax-by=0$
이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x)^2+y^2-a(-x)-by=0$
$x^2+y^2+ax-by=0$
$\therefore \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}$
이 원의 중심의 좌표가 $(2, 4)$이므로
$-\frac{a}{2}=2, \frac{b}{2}=4 \quad \therefore a=-4, b=8$
$\therefore a+b=-4+8=4$

25 답 2

$y=x^2+2ax+b$에서 $y=(x+a)^2+b-a^2$
이 포물선을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
$y=(-x+a)^2+b-a^2 \quad \therefore y=(x-a)^2+b-a^2$
이 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 2)$이므로
$a=-1, b-a^2=2 \quad \therefore a=-1, b=3$
$\therefore a+b=-1+3=2$

25-1 답 2

$y=x^2-2ax+3b$에서 $y=(x-a)^2+3b-a^2$
이 포물선을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
$-y=(-x-a)^2+3b-a^2 \quad \therefore y=-(x+a)^2-3b+a^2$
이 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(2, 7)$이므로
$-a=2, -3b+a^2=7 \quad \therefore a=-2, b=-1$
$\therefore ab=-2\times(-1)=2$

26 답 ②

포물선 $y=ax^2$을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
$-y=ax^2 \quad \therefore y=-ax^2$
이 포물선을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
$y=-a(-x)^2 \quad \therefore y=-ax^2$
이 포물선이 점 $(2, 4)$를 지나므로
$4=-a\times 2^2 \quad \therefore a=-1$

26-1 답 2

포물선 $y=ax^2$을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
$y=a(-x)^2 \quad \therefore y=ax^2$
이 포물선을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
$-y=a(-x)^2 \quad \therefore y=-ax^2$
이 포물선이 점 $(3, -18)$을 지나므로
$-18=-a\times 3^2 \quad \therefore a=2$

27 답 1

$y=x^2+2mx+1$에서 $y=(x+m)^2+1-m^2$
이 포물선을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
$-y=(-x+m)^2+1-m^2$
$\therefore y=-(x-m)^2+m^2-1$
이 포물선의 꼭짓점 (m, m^2-1)이 직선 $y=2x-2$ 위에 있으므로
$m^2-1=2m-2, m^2-2m+1=0$
$(m-1)^2=0 \quad \therefore m=1$

27-1 답 −2

$y=-x^2-2mx+4$에서 $y=-(x+m)^2+m^2+4$
이 포물선을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
$-y=-(x+m)^2+m^2+4$
$\therefore y=(x+m)^2-m^2-4$
이 포물선의 꼭짓점 $(-m, -m^2-4)$가 포물선 $y=x^2-4x+7$,
즉 $y=(x-2)^2+3$의 축 $x=2$ 위에 있으므로
$-m=2 \quad \therefore m=-2$

28 답 ①

직선 $3x-4y+1=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$3(-x)-4(-y)+1=0 \quad \therefore 3x-4y-1=0$
이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$3y-4x-1=0 \quad \therefore 4x-3y+1=0$
이 직선이 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하므로 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $4x-3y+1=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 r와 같다.
즉 $\frac{|1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=r$이므로 $r=\frac{1}{5}$

28-1 답 $\frac{3\sqrt{29}}{29}$

직선 $2x-5y+3=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $2y-5x+3=0 \quad \therefore 5x-2y-3=0$
이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$5(-x)-2(-y)-3=0 \quad \therefore 5x-2y+3=0$
이 직선이 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하므로 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $5x-2y+3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 r와 같다.

즉 $\dfrac{|3|}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}=r$이므로 $r=\dfrac{3\sqrt{29}}{29}$

29 답 1

직선 $y=mx+1$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$y=m(-x)+1$ $\therefore y=-mx+1$
이 직선이 원 $x^2+y^2-6x+4y+9=0$, 즉 $(x-3)^2+(y+2)^2=4$의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(3, -2)$를 지나야 하므로
$-2=-3m+1$ $\therefore m=1$

29-1 답 ④

직선 $y=mx+1$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$-y=mx+1$ $\therefore y=-mx-1$
이 직선이 원 $x^2+y^2+2x-14y+49=0$, 즉
$(x+1)^2+(y-7)^2=1$의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(-1, 7)$을 지나야 하므로
$7=m-1$ $\therefore m=8$

30 답 $-3<k<1$

$x^2+y^2+4x-2y+3=0$에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=2$
이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x+2)^2+(y-1)^2=2$
$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=2$
이 원이 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(2, 1)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{2}$보다 작아야 하므로
$\dfrac{|2-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<\sqrt{2}$, $|k+1|<2$
$-2<k+1<2$ $\therefore -3<k<1$

30-1 답 ①

$x^2+y^2+6x+4y+12=0$에서 $(x+3)^2+(y+2)^2=1$
이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x+3)^2+(y+2)^2=1$
$\therefore (x-3)^2+(y+2)^2=1$
이 원이 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$에 접하므로 원의 중심 $(3, -2)$와 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같다.
즉 $\dfrac{|3m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$이므로 $|3m+2|=\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하면 $(3m+2)^2=m^2+1$
$9m^2+12m+4=m^2+1$ $\therefore 8m^2+12m+3=0$
따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 m의 값의 합은
$-\dfrac{12}{8}=-\dfrac{3}{2}$

31 답 ②

직선 $3x+y+1=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$3(x-1)+(y+2)+1=0$ $\therefore 3x+y=0$
이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$3y+x=0$ $\therefore x+3y=0$
이 직선이 점 $(3, k)$를 지나므로
$3+3k=0$ $\therefore k=-1$

31-1 답 3

포물선 $y=x^2-2ax+3$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
$y+2=(x-2)^2-2a(x-2)+3$
$\therefore y=x^2-2(a+2)x+4a+5$
이 포물선을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
$y=(-x)^2-2(a+2)(-x)+4a+5$
$\therefore y=x^2+2(a+2)x+4a+5$
$\quad=(x+a+2)^2-a^2+1$
이 포물선의 꼭짓점 $(-a-2, -a^2+1)$이 직선 $y=x-3$ 위에 있으므로 $-a^2+1=-a-2-3$, $a^2-a-6=0$
$(a+2)(a-3)=0$ $\therefore a=3$ ($\because a>0$)

32 답 ④

점 $(-1, 2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(1, -2)$
이 점을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(1+a, -2+b)$
이 점이 점 $(2, 1)$과 일치하므로
$1+a=2$, $-2+b=1$ $\therefore a=1, b=3$
$\therefore a+b=1+3=4$

32-1 답 56

점 $(3, 7)$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(-7, -3)$
이 점을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(-7+a, -3+b)$
이 점이 점 $(1, 4)$와 일치하므로
$-7+a=1$, $-3+b=4$ $\therefore a=8, b=7$
$\therefore ab=8\times7=56$

33 답 5

원 $(x+1)^2+(y-3)^2=16$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은 $(x-a+1)^2+(y-3)^2=16$ …… ❶
이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(y-a+1)^2+(x-3)^2=16$
$\therefore (x-3)^2+(y-a+1)^2=16$ …… ❷
이 원이 x축에 접하므로
$|a-1|=4$, $a-1=\pm4$
$\therefore a=5$ ($\because a>0$) …… ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 원을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ ❶의 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	40%

33-1 답 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

직선 $x-y-6=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $y-x-6=0$ $\therefore x-y+6=0$

이 직선을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$(x-5)-(y-2)+6=0 \qquad \therefore x-y+3=0$

이 직선이 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하므로 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 r와 같다.

즉 $\dfrac{|3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=r$이므로 $r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

34 답 7

원 $x^2+y^2+4x+6y+9=0$, 즉 $(x+2)^2+(y+3)^2=4$의 중심의 좌표는 $(-2, -3)$이고 반지름의 길이는 2이다.

원의 중심 $(-2, -3)$을 점 $(1, -1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 (a, b)이므로

$\dfrac{-2+a}{2}=1, \dfrac{-3+b}{2}=-1 \qquad \therefore a=4, b=1$

또 원은 대칭이동하여도 반지름의 길이가 변하지 않으므로

$r=2$

$\therefore a+b+r=4+1+2=7$

34-1 답 5

원 $x^2+y^2+2x-6y+1=0$, 즉 $(x+1)^2+(y-3)^2=9$의 중심의 좌표는 $(-1, 3)$이고 반지름의 길이는 3이다.

원의 중심 $(-1, 3)$을 점 $(1, -2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 (a, b)이므로

$\dfrac{-1+a}{2}=1, \dfrac{3+b}{2}=-2 \qquad \therefore a=3, b=-7$

또 원은 대칭이동하여도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 $r=3$

$\therefore a+b+r^2=3+(-7)+9=5$

35 답 −7

두 점 $(a, 3)$, $(3, b)$를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(1, 5)$이므로

$\dfrac{a+3}{2}=1, \dfrac{3+b}{2}=5 \qquad \therefore a=-1, b=7$

$\therefore ab=-1\times7=-7$

35-1 답 ②

점 $(a, 2)$를 점 $(4, 3)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (x', y')이라 하면 $\dfrac{a+x'}{2}=4, \dfrac{2+y'}{2}=3 \qquad \therefore x'=8-a, y'=4$

즉 점 $(8-a, 4)$가 직선 $y=-3x+1$ 위에 있으므로

$4=-3(8-a)+1, 4=3a-23$

$3a=27 \qquad \therefore a=9$

36 답 3

포물선 $y=x^2+8x+21=(x+4)^2+5$의 꼭짓점의 좌표는 $(-4, 5)$

포물선 $y=-x^2+4x-1=-(x-2)^2+3$의 꼭짓점의 좌표는 $(2, 3)$

두 포물선이 점 (a, b)에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 (a, b)에 대하여 대칭이다.

따라서 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점이 점 (a, b)이므로

$\dfrac{-4+2}{2}=a, \dfrac{5+3}{2}=b \qquad \therefore a=-1, b=4$

$\therefore a+b=-1+4=3$

36-1 답 (2, 0)

포물선 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 2)$

포물선 $y=-x^2+6x-11=-(x-3)^2-2$의 꼭짓점의 좌표는 $(3, -2)$ ······❶

점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 두 포물선이 점 (a, b)에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 (a, b)에 대하여 대칭이다.

즉 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점이 점 (a, b)이므로

$\dfrac{1+3}{2}=a, \dfrac{2-2}{2}=b \qquad \therefore a=2, b=0$ ······❷

따라서 점 P의 좌표는 $(2, 0)$이다. ······❸

채점 기준	비율
❶ 두 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ $\mathrm{P}(a, b)$라 할 때, a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	20%

37 답 23

$(x-4)^2+(y-8)^2=4$ ······㉠

$x^2+y^2-4x-8y+c=0$에서

$(x-2)^2+(y-4)^2=20-c$ ······㉡

두 원 ㉠, ㉡의 중심 $(4, 8)$, $(2, 4)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{4+2}{2}, \dfrac{8+4}{2}\right) \qquad \therefore (3, 6)$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$3a+b=6$ ······㉢

두 점 $(4, 8)$, $(2, 4)$를 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 서로 수직이므로

$\dfrac{4-8}{2-4}\times a=-1 \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{2}$

$a=-\dfrac{1}{2}$을 ㉢에 대입하면

$-\dfrac{3}{2}+b=6 \qquad \therefore b=\dfrac{15}{2}$

두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이는 같으므로

$2=\sqrt{20-c} \qquad \therefore c=16$

$\therefore a+b+c=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{15}{2}+16=23$

37-1 답 $(x-4)^2+(y+5)^2=1$

원 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$의 중심 $(-2, 1)$을 직선 $y=x-3$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하자.

두 점 $(-2, 1)$, (a, b)를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+a}{2}, \dfrac{1+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=x-3$ 위의 점이므로

$\dfrac{1+b}{2}=\dfrac{-2+a}{2}-3 \qquad \therefore a-b=9$ ······㉠

두 점 $(-2, 1)$, (a, b)를 지나는 직선이 직선 $y=x-3$과 서로 수직이므로

$\dfrac{b-1}{a-(-2)}\times1=-1 \qquad \therefore a+b=-1$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4, b=-5$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표가 $(4, -5)$이고 반지름의 길이가 1이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y+5)^2=1$

38 답 1

두 점 $(3, a)$, $(b, 2)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+b}{2}, \frac{a+2}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=2x-1$ 위의 점이므로

$\frac{a+2}{2}=2\times\frac{3+b}{2}-1 \qquad \therefore a-2b=2$ ······㉠

두 점 $(3, a)$, $(b, 2)$를 지나는 직선이 직선 $y=2x-1$과 서로 수직이므로

$\frac{2-a}{b-3}\times 2=-1 \qquad \therefore 2a-b=1$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-1$

$\therefore a-b=0-(-1)=1$

38-1 답 -2

두 점 $(1, 4)$, $(2, 1)$을 이은 선분의 중점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

이 점이 직선 $ax+by+6=0$ 위의 점이므로

$\frac{3}{2}a+\frac{5}{2}b+6=0 \qquad \therefore 3a+5b=-12$ ······㉠

두 점 $(1, 4)$, $(2, 1)$을 지나는 직선이 직선 $ax+by+6=0$, 즉

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{6}{b}$과 서로 수직이므로

$\frac{1-4}{2-1}\times\left(-\frac{a}{b}\right)=-1 \qquad \therefore 3a+b=0$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$

$\therefore a+b=1+(-3)=-2$

39 답 3

원 $(x+3)^2+(y-2)^2=2$의 중심 $(-3, 2)$를 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하자.

두 점 $(-3, 2)$, (a, b)를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=x-1$ 위의 점이므로

$\frac{2+b}{2}=\frac{-3+a}{2}-1 \qquad \therefore a-b=7$ ······㉠

두 점 $(-3, 2)$, (a, b)를 지나는 직선이 직선 $y=x-1$과 서로 수직이므로

$\frac{b-2}{a-(-3)}\times 1=-1 \qquad \therefore a+b=-1$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-4$

원은 대칭이동하여도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 대칭이동한 원의 중심의 좌표가 $(3, -4)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이다.

이 원이 직선 $x+y+k=0$과 접하므로

$\frac{|3-4+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$, $|k-1|=2$

$k-1=\pm 2 \qquad \therefore k=3\ (\because k>0)$

39-1 답 $-4\le k\le 0$

원 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$의 중심 $(1, -1)$을 직선 $y=-x+1$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하자.

두 점 $(1, -1)$, (a, b)를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=-x+1$ 위의 점이므로

$\frac{-1+b}{2}=-\frac{1+a}{2}+1$

$\therefore a+b=2$ ······㉠

두 점 $(1, -1)$, (a, b)를 지나는 직선이 직선 $y=-x+1$과 서로 수직이므로

$\frac{b-(-1)}{a-1}\times(-1)=-1$

$\therefore a-b=2$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=0$

원은 대칭이동하여도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 대칭이동한 원의 중심의 좌표가 $(2, 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이다.

이 원이 직선 $x-y+k=0$과 만나므로

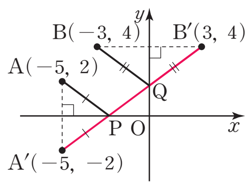
$\frac{|2-0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\le\sqrt{2}$, $|k+2|\le 2$

$-2\le k+2\le 2 \qquad \therefore -4\le k\le 0$

40 답 10

점 $A(-5, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A', 점 $B(-3, 4)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$A'(-5, -2)$, $B'(3, 4)$



오른쪽 그림에서

$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{QB}=\overline{QB'}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}&=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\\&\ge\overline{A'B'}\\&=\sqrt{(3+5)^2+(4+2)^2}\\&=10\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값은 10이다.

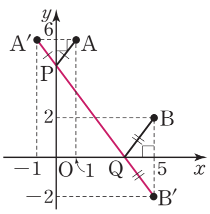
Lecture

점 P가 x축 위의 점이므로 점 A를 x축에 대하여 대칭이동하고, 점 Q가 y축 위의 점이므로 점 B를 y축에 대하여 대칭이동한다.

40-1 답 10

점 $A(1, 6)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A', 점 $B(5, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$A'(-1, 6)$, $B'(5, -2)$



오른쪽 그림에서

$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{QB}=\overline{QB'}$이므로

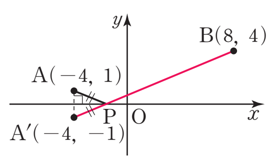
$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}&=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\\&\ge\overline{A'B'}\\&=\sqrt{(5+1)^2+(-2-6)^2}\\&=10\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값은 10이다.

41 답 $\left(-\frac{8}{5}, 0\right)$

점 $A(-4, 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

$A'(-4, -1)$



오른쪽 그림에서 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq \overline{A'B}$

직선 A′B의 방정식은

$y+1=\dfrac{4-(-1)}{8-(-4)}(x+4)$

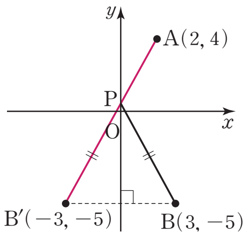
$\therefore y=\dfrac{5}{12}x+\dfrac{2}{3}$

따라서 x축 위의 점 P의 좌표는 $\left(-\dfrac{8}{5}, 0\right)$이다.

41-1 답 $\left(0, \dfrac{2}{5}\right)$

점 B$(3, -5)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

B′$(-3, -5)$



오른쪽 그림에서 $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$

$\geq \overline{AB'}$ ……❶

직선 AB′의 방정식은

$y-4=\dfrac{-5-4}{-3-2}(x-2)$

$\therefore y=\dfrac{9}{5}x+\dfrac{2}{5}$ ……❷

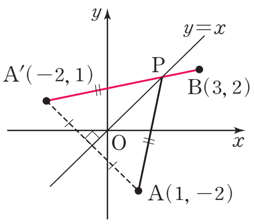
따라서 y축 위의 점 P의 좌표는 $\left(0, \dfrac{2}{5}\right)$이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값이 선분 AB′의 길이임을 알 수 있다.	40%
❷ 직선 AB′의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	20%

42 답 $\sqrt{26}$

점 A$(1, -2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

A′$(-2, 1)$



오른쪽 그림에서 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq \overline{A'B}$

$=\sqrt{(3+2)^2+(2-1)^2}$

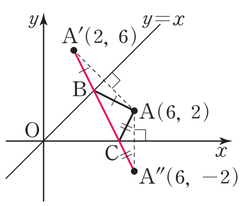
$=\sqrt{26}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\sqrt{26}$이다.

42-1 답 $4\sqrt{5}$

점 A$(6, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′, x축에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라 하면

A′$(2, 6)$, A″$(6, -2)$



오른쪽 그림에서

$\overline{AB}=\overline{A'B}$, $\overline{CA}=\overline{CA''}$이므로

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{A'B}+\overline{BC}+\overline{CA''}$

$\geq \overline{A'A''}$

$=\sqrt{(6-2)^2+(-2-6)^2}$

$=4\sqrt{5}$

따라서 △ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 $4\sqrt{5}$이다.

유형+ 완성하기 p. 107

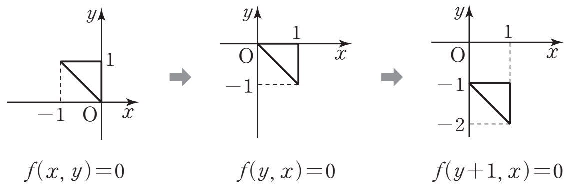
43 답 ②

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(y, x)=0$

이 도형을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(y+1, x)=0$



따라서 방정식 $f(y+1, x)=0$이 나타내는 도형은 ②이다.

44 답 ①

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(x-2, y)=0$

이 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(y-2, x)=0$

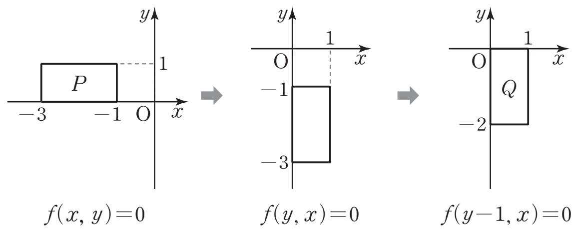
45 답 ④

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(y, x)=0$

이 도형을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(y-1, x)=0$



따라서 도형 Q를 나타내는 방정식은 ④이다.

46 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(x, -y)=0$

이 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(x-1, -y)=0$

즉 방정식 $f(x-1, -y)=0$이 나타내는 도형은 [그림 2]와 같다.

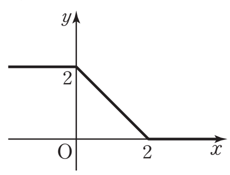
ㄴ. 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(-x, -y)=0$

이 도형을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(1-x, 1-y)=0$

즉 방정식 $f(1-x, 1-y)=0$이 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같다.



ㄷ. 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(-x, y)=0$

이 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(1-x, y)=0$

즉 방정식 $f(1-x, y)=0$이 나타내는 도형은 [그림 2]와 같다.

따라서 [그림 2]와 같은 도형을 나타내는 방정식은 ㄱ, ㄷ이다.

학교 시험 대비 문제

p. 108~111

01 답 $(8, -11)$

주어진 평행이동을 $(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$이라 하면

$a+m=-2,\ 2+n=3,\ 1+m=3,\ b+n=4$

즉 $m=2, n=1$이므로 $a=-4, b=3$

따라서 점 $(2b, 3a)$, 즉 $(6, -12)$가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는 $(6+2, -12+1)$　　$\therefore (8, -11)$

02 답 ②

직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+1=a(x-2)+b$　　$\therefore y=ax-2a+b-1$

이 직선이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$과 y축 위의 점에서 수직으로 만나므로 기울기의 곱이 -1이고 y절편이 같다.

즉 $-\frac{1}{2}a=-1,\ -2a+b-1=3$이므로 $a=2, b=8$

$\therefore a+b=2+8=10$

03 답 -7

$y=3x^2+6x+7$에서 $y=3(x+1)^2+4$

이 포물선을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $p+3$만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-(p+3)=3(x-p+1)^2+4$

$\therefore y=3(x-p+1)^2+p+7$

이 포물선의 꼭짓점 $(p-1, p+7)$이 x축 위에 있으므로

$p+7=0$　　$\therefore p=-7$

04 답 9

$x^2+y^2+4x+6y-3=0$에서 $(x+2)^2+(y+3)^2=16$

이 원을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-m+2)^2+(y-n+3)^2=16$

이 원의 중심 $(m-2, n-3)$이 원점이고 반지름의 길이가 4이므로

$m-2=0,\ n-3=0,\ r=4$　　$\therefore m=2, n=3, r=4$

$\therefore m+n+r=2+3+4=9$

05 답 -4

원 $x^2+y^2=5$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $a+2$만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a-2)^2=5$

외접하는 두 원의 중심 $(0, 0)$, $(a, a+2)$ 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합 $2\sqrt{5}$와 같으므로

$\sqrt{a^2+(a+2)^2}=2\sqrt{5},\ a^2+2a-8=0$

$(a+4)(a-2)=0$　　$\therefore a=-4\ (\because a<0)$

06 답 6

원 $x^2+y^2=r^2$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$　　……㉠

원 ㉠이 x축, y축에 동시에 접하므로

$|a|=r,\ |b|=r$　　$\therefore a=b=r\ (\because a>0, b>0, r>0)$

원 ㉠이 직선 $y=x+2\sqrt{2}$와 접하므로 원의 중심 (r, r)와 직선 $y=x+2\sqrt{2}$, 즉 $x-y+2\sqrt{2}=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 r와 같다.

즉 $\frac{|r-r+2\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=r$이므로 $r=2$

$\therefore a+b+r=3r=6$

07 답 ④

점 $P_1(6, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 P_2의 좌표는

$(6, -2)$

점 $P_2(6, -2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_3의 좌표는

$(-6, 2)$

점 $P_3(-6, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 P_4의 좌표는

$(-6, -2)$

점 $P_4(-6, -2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_5의 좌표는

$(6, 2)$

⋮

즉 점 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \cdots$는 4개의 점 $(6, 2), (6, -2), (-6, 2), (-6, -2)$가 이 순서대로 반복된다.

이때 $2027=4\times506+3$이므로 점 P_{2027}의 좌표는 P_3의 좌표인 $(-6, 2)$와 같다.

08 답 8

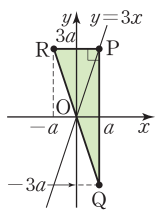
점 $P(a, b)$가 직선 $y=3x$ 위의 점이므로

$b=3a$　　……㉠

즉 점 $P(a, 3a)$를 x축, y축에 대하여 각각 대칭이동한 점의 좌표는

$Q(a, -3a),\ R(-a, 3a)$

오른쪽 그림에서 △PQR의 넓이가 24이므로



$\frac{1}{2}\times6a\times2a=24,\ 6a^2=24$

$a^2=4$　　$\therefore a=2\ (\because a>0)$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=3\times2=6$

$\therefore a+b=2+6=8$

09 답 ①

직선 $ax+y+3=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$a(-x)+y+3=0$　　$\therefore ax-y-3=0$

이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$ay-x-3=0$　　$\therefore x-ay+3=0$

이 직선이 점 $(2, 5)$를 지나므로

$2-5a+3=0$　　$\therefore a=1$

10 답 ②

직선 $y=-x+1$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=-x+1 \qquad \therefore y=x-1$

이 직선과 평행한 직선의 기울기는 1이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=x+a$, 즉 $x-y+a=0$이라 하자.

이 직선과 원점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$\frac{|a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$, $|a|=2 \qquad \therefore a=\pm 2$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$x-y+2=0$ 또는 $x-y-2=0$

11 답 ④

원 $(x-3)^2+(y+2)^2=7$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-3)^2+(x+2)^2=7 \qquad \therefore (x+2)^2+(y-3)^2=7$

이 원의 중심 $(-2, 3)$이 직선 $y=ax+9$ 위에 있으므로

$3=-2a+9 \qquad \therefore a=3$

12 답 ③

$y=x^2+ax+b$에서 $y=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$

이 포물선을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=\left(-x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$

$\therefore y=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-b$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(-2, 5)$이므로

$\frac{a}{2}=-2$, $\frac{a^2}{4}-b=5 \qquad \therefore a=-4, b=-1$

$\therefore b-a=-1-(-4)=3$

13 답 ④

직선 $y=-kx+1$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=-k(-x)+1 \qquad \therefore y=kx+1$

이 직선이 원 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$, 즉 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(2, -1)$을 지나야 하므로

$-1=2k+1 \qquad \therefore k=-1$

14 답 4

$x^2+y^2-6x-4y+12=0$에서 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-3)^2+(x-2)^2=1 \qquad \therefore (x-2)^2+(y-3)^2=1$

이 원이 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$에 접하므로 원의 중심 $(2, 3)$과 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같다.

즉 $\frac{|2m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$이므로 $|2m-3|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $(2m-3)^2=m^2+1$

$4m^2-12m+9=m^2+1 \qquad \therefore 3m^2-12m+8=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 m의 값의 합은

$-\frac{-12}{3}=4$

15 답 −2

원 $(x-1)^2+(y+a)^2=4$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-1)^2+(x+a)^2=4$

$\therefore (x+a)^2+(y-1)^2=4$

이 원을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+2+a)^2+(y-3-1)^2=4$

$\therefore (x+a+2)^2+(y-4)^2=4$

직선 $2x+y-4=0$이 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(-a-2, 4)$를 지나야 하므로

$2(-a-2)+4-4=0$

$\therefore a=-2$

16 답 ②

포물선 $y=x^2+2x+5=(x+1)^2+4$의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 4)$

포물선 $y=-(x-3)^2+2$의 꼭짓점의 좌표는 $(3, 2)$

두 포물선이 점 (a, b)에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 (a, b)에 대하여 대칭이다.

따라서 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점이 점 (a, b)이므로

$\frac{-1+3}{2}=a$, $\frac{4+2}{2}=b \qquad \therefore a=1, b=3$

$\therefore ab=1\times 3=3$

17 답 ③

원 $x^2+y^2-6x+8=0$, 즉 $(x-3)^2+y^2=1$의 중심의 좌표는 $(3, 0)$이고 반지름의 길이는 1이다.

원의 중심 $(3, 0)$을 점 $(2, 1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면 두 점 $(3, 0)$, (a, b)를 이은 선분의 중점이 점 $(2, 1)$이므로

$\frac{3+a}{2}=2$, $\frac{0+b}{2}=1 \qquad \therefore a=1, b=2$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(1, 2)$이고 반지름의 길이는 1이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2=1$

18 답 $\frac{95}{6}$

$x^2+y^2-4x+6y=0$에서 $(x-2)^2+(y+3)^2=13 \qquad$ ……㉠

$x^2+y^2=k \qquad$ ……㉡

두 원 ㉠, ㉡의 중심 $(2, -3)$, $(0, 0)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{-3+0}{2}\right) \qquad \therefore \left(1, -\frac{3}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$-\frac{3}{2}=a+b \qquad$ ……㉢

두 점 $(2, -3)$, $(0, 0)$을 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 서로 수직이므로

$\frac{0-(-3)}{0-2}\times a=-1 \qquad \therefore a=\frac{2}{3}$

$a=\frac{2}{3}$를 ㉢에 대입하면

$-\frac{3}{2}=\frac{2}{3}+b \qquad \therefore b=-\frac{13}{6}$

두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이는 같으므로

$k=13$

$\therefore a-b+k=\frac{2}{3}-\left(-\frac{13}{6}\right)+13=\frac{95}{6}$

19 답 $(-6, -1)$

원 O: $x^2+(y-1)^2=1$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원 O'의 방정식은

$(x+3)^2+(y+1-1)^2=1$

$\therefore (x+3)^2+y^2=1$

이때 두 원 O, O'의 교점을 지나는 직선 AB의 방정식은

$x^2+(y-1)^2-1-\{(x+3)^2+y^2-1\}=0$

$x^2+y^2-2y+1-1-(x^2+6x+9+y^2-1)=0$

$\therefore y=-3x-4$

점 $(3, 2)$를 직선 $y=-3x-4$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하자.

두 점 $(3, 2)$, (a, b)를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=-3x-4$ 위의 점이므로

$\frac{2+b}{2}=-3\times\frac{3+a}{2}-4$

$\therefore 3a+b=-19$ ……㉠

두 점 $(3, 2)$, (a, b)를 지나는 직선이 직선 $y=-3x-4$와 서로 수직이므로

$\frac{b-2}{a-3}\times(-3)=-1$

$\therefore a-3b=-3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

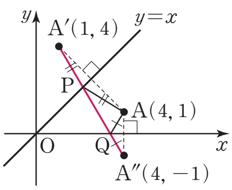
$a=-6$, $b=-1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-6, -1)$이다.

20 답 $\sqrt{34}$

점 $\mathrm{A}(4, 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A'}$, x축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A''}$이라 하면

$\mathrm{A'}(1, 4)$, $\mathrm{A''}(4, -1)$



오른쪽 그림에서

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{QA''}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA''}}$

$\geq\overline{\mathrm{A'A''}}$

$=\sqrt{(4-1)^2+(-1-4)^2}$

$=\sqrt{34}$

따라서 △APQ의 둘레의 길이의 최솟값은 $\sqrt{34}$이다.

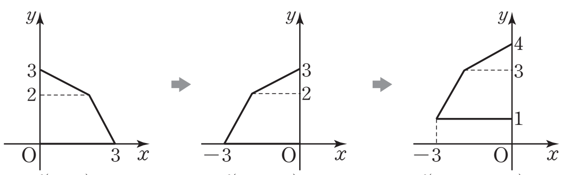
21 답 ③

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(-x, y)=0$

이 도형을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(-x, y-1)=0$



$f(x, y)=0$　$f(-x, y)=0$　$f(-x, y-1)=0$

따라서 [그림2]와 같은 도형을 나타내는 방정식은 ③이다.

서술형 1 답 -1

직선 $y=x-2$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-m=(x-2)-2$

$\therefore y=x+m-4$ ……㉠ ……❶

직선 $y=-x-3$을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-n=-x-3$

$\therefore y=-x+n-3$ ……㉡ ……❷

이때 두 직선 ㉠, ㉡이 모두 점 $(3, -4)$를 지나므로

$-4=3+m-4$, $-4=-3+n-3$

$\therefore m=-3$, $n=2$

$\therefore m+n=-3+2=-1$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 직선 $y=x-2$를 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ 직선 $y=-x-3$을 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	40%

서술형 2 답 -2

직선 l을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$3y+x+1=0$　$\therefore x+3y+1=0$ ……❶

이 직선을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선 l'의 방정식은

$(x-2)+3(y+1)+1=0$

$\therefore x+3y+2=0$ ……❷

직선 l'이 원 $(x-a)^2+y^2=4$의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(a, 0)$을 지나야 하므로

$a+2=0$　$\therefore a=-2$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 직선 l을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ 직선 l'의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	40%

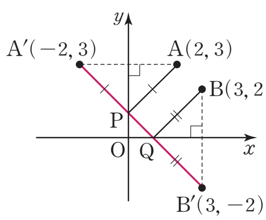
서술형 3 답 $5\sqrt{2}$

점 $\mathrm{A}(2, 3)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A'}$이라 하면

$\mathrm{A'}(-2, 3)$ ……❶

점 $\mathrm{B}(3, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{B'}$이라 하면

$\mathrm{B'}(3, -2)$ ……❷



오른쪽 그림에서

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{QB'}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}$

$\geq\overline{\mathrm{A'B'}}$

$=\sqrt{(3+2)^2+(-2-3)^2}$

$=5\sqrt{2}$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❸ $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값을 구할 수 있다.	40%

01 답 ③

점 A$(-2, 1)$을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 점 B의 좌표는 B$(-2+m, 1)$

점 B$(-2+m, 1)$을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점 C의 좌표는 C$(-2+m, 1+n)$

세 점 A, B, C를 지나는 원은 중심의 좌표가 $(3, 2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{(3+2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{26}$이므로

$(x-3)^2+(y-2)^2=26$

점 B$(-2+m, 1)$은 원 위의 점이므로

$(-2+m-3)^2+(1-2)^2=26$, $m^2-10m=0$

$m(m-10)=0 \qquad \therefore m=10\ (\because m>0)$

또 점 C$(8, 1+n)$은 원 위의 점이므로

$(8-3)^2+(1+n-2)^2=26$, $n^2-2n=0$

$n(n-2)=0 \qquad \therefore n=2\ (\because n>0)$

$\therefore mn=10\times 2=20$

02 답 ④

직선 $3x+4y+17=0$을 x축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$3(x-n)+4y+17=0 \qquad \therefore 3x+4y-3n+17=0$

이 직선이 원 $x^2+y^2=1$에 접하므로 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $3x+4y-3n+17=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 1과 같다.

즉 $\dfrac{|-3n+17|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$이므로 $|-3n+17|=5$

$-3n+17=\pm 5 \qquad \therefore n=4$ 또는 $n=\dfrac{22}{3}$

그런데 n은 자연수이므로 $n=4$

03 답 9

원 $(x+1)^2+(y+2)^2=9$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원 C의 방정식은

$(x-m+1)^2+(y-n+2)^2=9$

(가)에서 원 C의 중심이 제1사분면 위에 있으므로

$m-1>0$, $n-2>0$ ······㉠

또 (나)에서 원 C가 x축과 y축에 동시에 접하므로

$|m-1|=|n-2|=3$

이때 ㉠에 의하여 $m-1=3$, $n-2=3$이므로

$m=4$, $n=5 \qquad \therefore m+n=4+5=9$

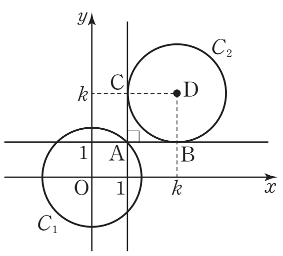
04 답 ①

원 C_1: $x^2+y^2=2$를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 원 C_2의 방정식은

$(x-k)^2+(y-k)^2=2$

오른쪽 그림과 같이 점 A$(1, 1)$에서 원 C_2에 그은 두 접선이 원 C_2와 만나는 점을 각각 B, C라 하고, 원 C_2의 중심을 D(k, k)라 하자.

사각형 ABDC는 한 변의 길이가 원 C_2의 반지름의 길이 $\sqrt{2}$인 정사각형이다.



이때 $k>2$이므로 $k=1+\sqrt{2}$

05 답 ③

ㄱ. 원 $x^2+(y-1)^2=9$를 평행이동하여도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 원 C의 반지름의 길이는 3이다.

ㄴ. 원 $x^2+(y-1)^2=9$의 중심의 좌표가 $(0, 1)$이므로 원 C의 중심의 좌표는 $(m, n+1)$

원 C가 x축과 접하므로 $|n+1|=3$

$n+1=\pm 3 \qquad \therefore n=-4$ 또는 $n=2$

즉 실수 n의 값은 2개이다.

ㄷ. $m\neq 0$일 때, 직선 $y=\dfrac{n+1}{m}x$가 원 C의 중심 $(m, n+1)$을 지나므로 원 C의 넓이를 이등분한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

06 답 ⑤

직선 $3x+4y-12=0$이 x축, y축과 만나는 점은 각각

A$(4, 0)$, B$(0, 3)$

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점은

$\mathrm{P}\left(\dfrac{2\times 0+1\times 4}{2+1}, \dfrac{2\times 3+1\times 0}{2+1}\right) \qquad \therefore \mathrm{P}\left(\dfrac{4}{3}, 2\right)$

점 P를 x축, y축에 대하여 대칭이동한 점은 각각

$\mathrm{Q}\left(\dfrac{4}{3}, -2\right)$, $\mathrm{R}\left(-\dfrac{4}{3}, 2\right)$

삼각형 RQP의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}}{3}, \dfrac{2-2+2}{3}\right) \qquad \therefore \left(\dfrac{4}{9}, \dfrac{2}{3}\right)$

따라서 $a=\dfrac{4}{9}$, $b=\dfrac{2}{3}$이므로

$a+b=\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{9}$

07 답 ②

점 A$(-3, 1)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는

P$(3, 1)$

점 B$(1, k)$를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 점 Q의 좌표는

Q$(1, k-5)$

직선 BP의 기울기는 $\dfrac{1-k}{3-1}=-\dfrac{k-1}{2}$

직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{(k-5)-1}{1-3}=-\dfrac{k-6}{2}$

직선 BP와 직선 PQ가 서로 수직이므로

$-\dfrac{k-1}{2}\times\left(-\dfrac{k-6}{2}\right)=-1$

$(k-1)(k-6)=-4$, $k^2-7k+10=0$

$(k-2)(k-5)=0 \qquad \therefore k=2$ 또는 $k=5$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$2\times 5=10$

08 답 ②

원 O_1은 중심의 좌표가 $(4, 2)$이고 반지름의 길이가 2이므로 원 O_1의 방정식은 $(x-4)^2+(y-2)^2=4$

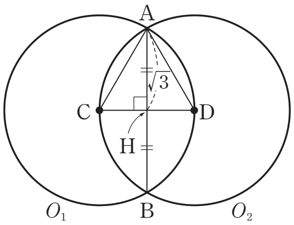
원 O_1을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-4)^2+(x-2)^2=4 \qquad \therefore (x-2)^2+(y-4)^2=4$

이 원을 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원 O_2의 방정식은

$(x-2)^2+(y-a-4)^2=4$

오른쪽 그림과 같이 두 원 O_1, O_2의 중심을 각각 $C(4,\ 2)$, $D(2,\ a+4)$라 하면 선분 AB는 선분 CD에 의하여 수직이등분된다.



즉 선분 AB와 선분 CD가 만나는 점을 H라 하면 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$이므로 $\overline{AH}=\overline{BH}=\sqrt{3}$

또 $\overline{AC}=2$이므로 직각삼각형 ACH에서

$\overline{CH}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

$\therefore \overline{CD}=2\overline{CH}=2$

이때 $\overline{CD}=\sqrt{(2-4)^2+(a+4-2)^2}$이므로

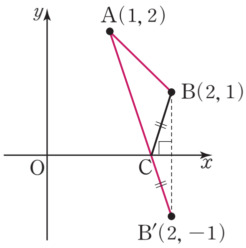
$\sqrt{4+(a+2)^2}=2$

양변을 제곱하면 $4+(a+2)^2=4$

$(a+2)^2=0 \qquad \therefore a=-2$

09 답 12

점 $B(2,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면



$B'(2,\ -1)$

오른쪽 그림에서 $\overline{CB}=\overline{CB'}$이므로

$\overline{AC}+\overline{CB}+\overline{BA}$

$=\overline{AC}+\overline{CB'}+\overline{BA}$

$\geq \overline{AB'}+\overline{BA}$

$=\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2}$

$\quad +\sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2}$

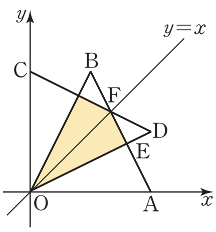
$=\sqrt{10}+\sqrt{2}$

따라서 $a=10$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=10$이므로

$a+b=12$

10 답 64

오른쪽 그림과 같이 두 직선 AB, OD의 교점을 E, 직선 AB와 직선 $y=x$의 교점을 F라 하자.



직선 AB의 방정식은

$y-0=\dfrac{2-0}{1-2}(x-2)$

$\therefore y=-2x+4$

점 $B(1,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 D의 좌표는 $(2,\ 1)$이므로 직선 OD의 방정식은

$y=\dfrac{1}{2}x$

점 E의 x좌표는 $-2x+4=\dfrac{1}{2}x$에서 $x=\dfrac{8}{5}$

$\therefore E\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

즉 점 $E\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{\left|\dfrac{8}{5}-\dfrac{4}{5}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

점 F의 x좌표는 $-2x+4=x$에서 $x=\dfrac{4}{3}$

즉 $F\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$이므로

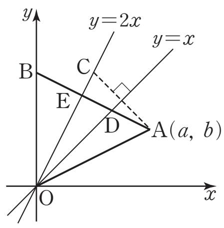
$\overline{OF}=\sqrt{\left(\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

$S=2\triangle OEF=2\times\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\right)=\dfrac{16}{15}$이므로

$60S=60\times\dfrac{16}{15}=64$

11 답 128

오른쪽 그림과 같이 점 A의 좌표를 $(a,\ b)\ (a>0,\ b>0)$라 하자.



점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는 $(b,\ a)$

점 C는 직선 $y=2x$ 위의 점이므로

$a=2b$

즉 $A(2b,\ b)$이고 $\overline{AO}=2\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(2b)^2+b^2}=2\sqrt{5}$, $\sqrt{5b^2}=2\sqrt{5}$

$5b^2=20 \qquad \therefore b=2\ (\because b>0)$

$\therefore A(4,\ 2)$, $C(2,\ 4)$

점 B의 좌표를 $(0,\ c)\ (c>0)$라 하면 $\overline{AB}=2\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(-4)^2+(c-2)^2}=2\sqrt{5}$

양변을 제곱하면 $c^2-4c+20=20$

$c^2-4c=0$, $c(c-4)=0 \qquad \therefore c=4\ (\because c>0)$

$\therefore B(0,\ 4)$

직선 AB의 방정식은

$y-4=\dfrac{4-2}{0-4}(x-0) \qquad \therefore y=-\dfrac{1}{2}x+4$

점 D는 직선 AB와 직선 $y=x$의 교점이므로

$-\dfrac{1}{2}x+4=x$에서 $\dfrac{3}{2}x=4 \qquad \therefore x=\dfrac{8}{3}$

$\therefore D\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{8}{3}\right)$

한편 직선 AB의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이고 직선 $y=2x$의 기울기는 2이므로 두 직선은 서로 수직이다.

즉 삼각형 ODE는 $\angle OED=90°$인 직각삼각형이고, 삼각형 ODE의 외접원의 지름의 길이는 선분 OD의 길이와 같다.

이때 $\overline{OD}=\sqrt{\left(\dfrac{8}{3}\right)^2+\left(\dfrac{8}{3}\right)^2}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$이므로 삼각형 ODE의 외접원의 둘레의 길는 $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

따라서 $k=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$이므로

$9k^2=9\times\left(\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2=128$

05 집합의 뜻과 포함 관계

개념 완성하기

p. 117~118

01 답 ×

02 답 ○

03 답 ×

04 답 ○

05 답 $\notin$

06 답 $\in$

07 답 $\notin$

08 답 $\in$

09 답 $\in$

10 답 $\notin$

11 답 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

12 답 $\{\mathrm{c}, \mathrm{h}, \mathrm{l}, \mathrm{o}, \mathrm{s}\}$

13 답 $\{-1, 2, 5, 8, \cdots\}$

14 답 $\{18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99\}$

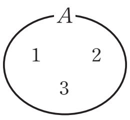
15 답 $\{x \mid x$는 4의 양의 배수$\}$

16 답 $\{x \mid x$는 16의 양의 약수$\}$

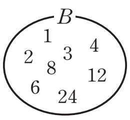
17 답 $\{x \mid x$는 30 이하의 5의 양의 배수$\}$

18 답 $\{x \mid x$는 100보다 작은 자연수$\}$

19 답



20 답



21 답 무한집합

22 답 유한집합

23 답 무한집합

주어진 집합은 $\{3, 6, 9, 12, \cdots\}$이므로 무한집합이다.

24 답 유한집합

$x^2=4$에서 $(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 주어진 집합은 $\{-2, 2\}$이므로 유한집합이다.

25 답 유한집합, 공집합

2보다 작은 소수는 존재하지 않으므로 주어진 집합은 공집합이고 유한집합이다.

26 답 유한집합, 공집합

$x^2<0$을 만족시키는 실수 x의 값은 없으므로 주어진 집합은 공집합이고 유한집합이다.

27 답 2

28 답 3

$n(\{0\})+n(\{0, 1\})=1+2=3$

29 답 1

$n(\varnothing)+n(\{\varnothing\})=0+1=1$

30 답 3

$n(\{x \mid x$는 20 이하의 6의 양의 배수$\})=n(\{6, 12, 18\})=3$

31 답 2

$x^2-13x+40=0$에서 $(x-5)(x-8)=0$

$\therefore x=5$ 또는 $x=8$

$\therefore n(\{x \mid x^2-13x+40=0\})=n(\{5, 8\})=2$

32 답 0

$x^2+4=0$에서 $x^2=-4$

따라서 $x^2+4=0$을 만족시키는 실수 x의 값은 없으므로

$n(\{x \mid x^2+4=0, x$는 실수$\})=n(\varnothing)=0$

33 답 $A \subset B$

$A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$이므로

$A \subset B$

34 답 $A \subset B$

$A=\{3, 5, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$이므로

$A \subset B$

35 답 $B\subset A$

$A=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B=\{-2, 2\}$이므로

$B\subset A$

36 답 $\varnothing$

37 답 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$

38 답 $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$

39 답 $\{1, 2, 3\}$

40 답 $\varnothing$, $\{\varnothing\}$

41 답 $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$

42 답 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{7\}$, $\{1, 7\}$

43 답 $\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{8\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$, $\{2, 8\}$, $\{4, 6\}$, $\{4, 8\}$, $\{6, 8\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{2, 4, 8\}$, $\{2, 6, 8\}$, $\{4, 6, 8\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$

44 답 $=$

45 답 $\neq$

46 답 $=$

47 답 $\neq$

48 답 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$

49 답 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{5\}$, $\{25\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 25\}$, $\{5, 25\}$

25의 양의 약수는 1, 5, 25이므로 집합 $\{1, 5, 25\}$의 진부분집합은

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{5\}$, $\{25\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 25\}$, $\{5, 25\}$

50 답 16

$n(A)=4$이므로 부분집합의 개수는

$2^4=16$

51 답 15

$n(A)=4$이므로 진부분집합의 개수는

$2^4-1=15$

52 답 8

b를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

집합 $\{a, c, d\}$의 부분집합의 개수와 같다.

53 답 4

b, c를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{4-2}=2^2=4$

집합 $\{a, d\}$의 부분집합의 개수와 같다.

유형 완성하기 p. 119~133

01 답 ④

'가까운', '큰', '많이', '맛있는'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 집합인 것은 ④이다.

01-1 답 ④

'큰', '작은', '맛있는', '훌륭한'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 집합인 것은 ④이다.

02 답 ②

② '재미있는'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

⑤ $x^2+3x-4=0$에서 $(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

즉 이차방정식 $x^2+3x-4=0$의 해의 모임은 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다.

따라서 집합이 아닌 것은 ②이다.

오답 피하기

④에서 '높은'은 기준이 명확하지 않지만 '가장 높은'은 기준이 명확하다.

따라서 ④는 집합이다.

02-1 답 ②

② '많은'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

⑤ $x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

즉 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 해의 모임은 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다.

따라서 집합이 아닌 것은 ②이다.

03 답 ④

ㄱ, ㄷ. '빠른', '가까운'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

ㄴ. 무리수의 모임은 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다.

ㄹ. $\{9, 11\}$ ㅁ. 공집합

따라서 집합인 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다.

03-1 답 ③

ㄷ, ㅁ. '모범적인', '작은'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 집합인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이므로 3개이다.

04 답 ①

$x^2+x-6\le 0$에서 $(x+3)(x-2)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 2$

$\therefore A=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

① $-3\in A$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

04-1 답 ④

$x^2-2x-8<0$에서 $(x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$

$\therefore A=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

④ $4\notin A$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

05 답 ⑤

$A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$이므로

① $12\notin A$ ② $13\in A$ ③ $14\notin A$ ④ $15\notin A$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

05-1 답 ③

$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$이므로

① $6\in A$ ② $8\in A$ ④ $16\notin A$ ⑤ $18\notin A$

따라서 옳은 것은 ③이다.

06 답 ②

$x^4-13x^2+36=0$에서 $x^2=X$로 놓으면

$X^2-13X+36=0$, $(X-4)(X-9)=0$

$(x^2-4)(x^2-9)=0$

$(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=3$

즉 $A=\{-3, -2, 2, 3\}$이므로

① $-3\in A$ ③ $1\notin A$ ④ $2\in A$ ⑤ $3\in A$

따라서 옳은 것은 ②이다.

06-1 답 ④

$x^4-29x^2+100=0$에서 $x^2=X$로 놓으면

$X^2-29X+100=0$, $(X-4)(X-25)=0$

$(x^2-4)(x^2-25)=0$

$(x+2)(x-2)(x+5)(x-5)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-5$ 또는 $x=5$

즉 $A=\{-5, -2, 2, 5\}$이므로

① $-4\notin A$ ② $-2\in A$ ③ $1\notin A$ ⑤ $5\in A$

따라서 옳은 것은 ④이다.

07 답 ⑤

① $A=\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$

② $A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$

③ $A=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

④ $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

⑤ $A=\{4, 8, 12, 16, 20\}$

따라서 집합 A를 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은 ⑤이다.

07-1 답 ④

① $A=\{3, 6, 9, 12, \cdots\}$

② $A=\{6, 12, 18, 24, \cdots\}$

③ $A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

④ $A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

⑤ $A=\{3, 6, 9, 18\}$

따라서 집합 A를 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은 ④이다.

08 답 ②

① $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ② $\{2, 3, 4\}$ ③ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

④ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ⑤ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다.

08-1 답 ⑤

⑤ $\{x\,|\,x$는 5의 양의 배수$\}=\{5, 10, 15, 20, 25, 30, \cdots\}$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

09 답 ⑤

① $6=2^1\times 3^1$ ② $12=2^2\times 3^1$ ③ $36=2^2\times 3^2$

④ $54=2^1\times 3^3$ ⑤ $60=2^2\times 3\times 5$

따라서 집합 A의 원소가 아닌 것은 ⑤이다.

09-1 답 ④

① $0=0\times 2=0\times(0+2)$ ② $8=2\times 4=2(2+2)$

③ $35=5\times 7=5(5+2)$ ④ $42=6\times 7=6(6+1)$

⑤ $80=8\times 10=8(8+2)$

따라서 집합 A의 원소가 아닌 것은 ④이다.

10 답 ②

ㄱ. 유한집합

ㄴ. 무한집합

ㄷ. $0<x^2<1$에서 $-1<x<0$ 또는 $0<x<1$

즉 주어진 집합은 무한집합이다.

ㄹ. $1<x<3$을 만족시키는 홀수는 없다.

즉 주어진 집합은 공집합이므로 유한집합이다.

ㅁ. $\{7, 9, 11, 13, \cdots\}$이므로 무한집합이다.

따라서 $a=2$, $b=3$이므로

$a-b=2-3=-1$

10-1 답 ④

ㄱ. 무한집합

ㄴ. $\{4, 7, 10, 13, \cdots\}$이므로 무한집합이다.

ㄷ. $x^2+4x+4\geq 0$에서 $(x+2)^2\geq 0$

이 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 무한집합이다.

ㄹ. $\{2\}$이므로 유한집합이다.

ㅁ. 0과 1 사이의 유리수는 무수히 많으므로 무한집합이다.

따라서 무한집합인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ이다.

11 답 ③

①, ② 원소가 1개 있으므로 공집합이 아니다.

④ $|x|<1$에서 $-1<x<1$

즉 -1과 1 사이의 유리수는 무수히 많으므로 공집합이 아니다.

⑤ $\{-2\}$이므로 공집합이 아니다.

따라서 공집합인 것은 ③이다.

11-1 답 ④

① $\{0, -1, -2, -3, \cdots\}$이므로 공집합이 아니다.

② 1과 2 사이의 무리수는 무수히 많으므로 공집합이 아니다.

③ $\{12\}$이므로 공집합이 아니다.

④ $x^2=5$에서 $x=\pm\sqrt{5}$
즉 $x^2=5$를 만족시키는 유리수는 없으므로 주어진 집합은 공집합이다.
⑤ $\{(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (0, 1)\}$이므로 공집합이 아니다.
따라서 공집합인 것은 ④이다.

12 답 15

공집합은 원소가 하나도 없는 집합이므로 '$x<k$인 5의 양의 배수'를 만족시키는 x가 하나도 없으려면 k의 값은 5 이하의 자연수이어야 한다. 즉 k의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 합은
$1+2+3+4+5=15$

> **참고** $k=5$일 때, $A=\{x|x$는 $x<5$인 5의 양의 배수$\}=\varnothing$
> $k=6$일 때, $A=\{x|x$는 $x<6$인 5의 양의 배수$\}=\{5\}\neq\varnothing$

12-1 답 30

10의 양의 약수는 1, 2, 5, 10이므로 $A=\varnothing$가 되려면
$1\notin A$, $2\notin A$, $5\notin A$, $10\notin A$이어야 한다. …… ❶
따라서 k의 값이 될 수 있는 수는 6, 7, 8, 9이므로 …… ❷
그 합은 $6+7+8+9=30$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ $A=\varnothing$가 되도록 하는 조건을 구할 수 있다.	50%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ k의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

13 답 ④

$A=\{2, 4, 6, 8\}$에서 $n(A)=4$
$B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$이므로 $n(B)=6$
$\therefore n(A)+n(B)=4+6=10$

13-1 답 11

$A=\{3, 5, 7, 9, 11\}$이므로 $n(A)=5$
$2x^2-5x+2\le0$에서 $(2x-1)(x-2)\le0$ $\therefore \frac{1}{2}\le x\le2$
이때 x는 정수이므로 $B=\{1, 2\}$
$\therefore n(B)=2$
$C=\{(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (0, 1)\}$이므로 $n(C)=4$
$\therefore n(A)+n(B)+n(C)=5+2+4=11$

14 답 ③

① $n(A)=n(\varnothing)$이면 $n(A)=0$이므로 $A=\varnothing$
② 집합 A의 원소는 0, $\{0, 1\}$이므로 $n(A)=2$
③ 집합 A의 원소는 $\varnothing$, 2이므로 $n(A)=2$
④ $n(\{1, 2, 3\})-n(\{1, 3\})=3-2=1$
⑤ $n(\{0\})=n(\{3\})=1$
따라서 옳은 것은 ③이다.

14-1 답 ④

① $n(\{0\})=n(\{1\})=1$
② $n(\{1, 2, 3, 4\})-n(\{1, 2, 3\})=4-3=1$
③ $n(A)=0$이면 $A=\varnothing$
④ $n(\{\varnothing\})-n(\varnothing)=1-0=1$
⑤ $n(\{0\})+n(\{\varnothing\})+n(\{0, \varnothing\})=1+1+2=4$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

15 답 6

집합 A는 12의 양의 약수의 집합과 같으므로
$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ $\therefore n(A)=6$
이때 $n(B)=k$이고 $n(A)=n(B)$이므로
$k=6$

15-1 답 5

집합 A는 18의 양의 약수의 집합과 같으므로
$A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ $\therefore n(A)=6$ …… ❶
이때 $B=\{k, k+1, k+2, \cdots, 10\}$이므로
$n(B)=10-k+1=11-k$ …… ❷
$n(A)=n(B)$이므로
$6=11-k$ $\therefore k=5$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ $n(A)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $n(B)$의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20%

16 답 $C=\{0, 1, 2, 4\}$

집합 A의 원소 a와 집합 B의 원소 b에 대하여 ab의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로
$C=\{0, 1, 2, 4\}$

a \ b	1	2
0	0	0
1	1	2
2	2	4

16-1 답 ③

집합 A의 원소 a와 집합 B의 원소 b에 대하여 $\frac{b}{a}$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로
$C=\left\{\frac{1}{2}, 1, 2, 4\right\}$
$\therefore n(C)=4$

a \ b	1	2	4
1	1	2	4
2	$\frac{1}{2}$	1	2

17 답 ②

집합 A의 원소 a와 집합 B의 원소 b에 대하여 $a-b$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로
$C=\{-2, -1, 0\}$
따라서 집합 C의 모든 원소의 합은
$-2+(-1)+0=-3$

a \ b	1	2
0	-1	-2
1	0	-1

17-1 답 ④

집합 A의 원소 a와 집합 B의 원소 b에 대하여 $b-2a$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로
$C=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
따라서 집합 C의 모든 원소의 합은
$-1+0+1+2+3=5$

a \ b	1	2	3
0	1	2	3
1	-1	0	1

18 답 11

집합 A의 서로 다른 두 원소 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	a	b	c
a		$a+b$	$a+c$
b	$a+b$		$b+c$
c	$a+c$	$b+c$	

$B=\{a+b, a+c, b+c\}$
$\quad=\{12, 15, 19\}$

이때 $a<b<c$라 하면 $a+b<a+c<b+c$이므로

$a+b=12$, $a+c=15$, $b+c=19$ ⋯⋯㉠ ⋯⋯❶

위의 세 식을 변끼리 더하면

$2(a+b+c)=46 \qquad \therefore a+b+c=23$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡에서 $a=4$, $b=8$, $c=11$ ⋯⋯❷

따라서 집합 A의 원소 중 가장 큰 수는 11이다. ⋯⋯❸

채점 기준	비율
❶ $a<b<c$로 놓고 집합 B의 원소에 대한 식을 세울 수 있다.	60%
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 집합 A의 원소 중 가장 큰 수를 구할 수 있다.	10%

18-1 답 3

집합 A의 서로 다른 두 원소 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	a	9	15
a		$a+9$	$a+15$
9	$a+9$		24
15	$a+15$	24	

$X=\{a+9, a+15, 24\}$

이때 집합 X의 모든 원소의 합이 54이므로

$(a+9)+(a+15)+24=54$, $2a+48=54$

$2a=6 \qquad \therefore a=3$

19 답 ⑤

① $a\in A$ ② $b\in A$ ③ $\{c\}\subset A$ ④ $\{b, c\}\subset A$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

19-1 답 ④

① $1\in A$ ② $\varnothing\subset A$ ③ $\{1, 2\}\subset A$

⑤ $\{1, 2, 4, 5\}\subset A$ 또는 $A\not\subset\{1, 2, 4, 5\}$

따라서 옳은 것은 ④이다.

20 답 ③

$A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로

③ $\{1, 2\}\subset A$, $\{1, 2\}\subset B$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

20-1 답 ③

$A=\{a, c, d\}$, $B=\{a, b, c, d, e\}$이므로

③ $\{a, e\}\not\subset A$, $\{a, e\}\subset B$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

21 답 ③

ㄱ. $\varnothing$는 집합 A의 원소이므로 $\varnothing\in A$

ㄴ. $\varnothing$는 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$

ㄷ. 2는 집합 A의 원소이므로 $2\in A$

ㄹ. 4는 집합 A의 원소이므로 $4\in A$

ㅁ. $\{2, 4\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{2, 4\}\in A$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

Lecture 집합을 원소로 갖는 집합

집합 $A=\{a, b, \{c\}\}$일 때, 집합 A의 원소는 a, b, $\{c\}$이므로
$a\in A$, $b\in A$, $\{c\}\in A$
즉 집합 속의 집합은 하나의 원소로 생각한다.

21-1 답 ④

ㄱ. 집합 A의 원소는 $\varnothing$, a, b, $\{b, c\}$이므로 $n(A)=4$

ㄴ. c는 집합 A의 원소가 아니므로 $c\notin A$

ㄷ. $\varnothing\in A$이므로 $\{\varnothing\}\subset A$

ㄹ. $\varnothing$는 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$

ㅁ. $\{b, c\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{b, c\}\in A$

ㅂ. $\{b, c\}\in A$이므로 $\{\{b, c\}\}\subset A$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ이다.

22 답 ②

$A=\{-3, 3\}$, $B=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $C=\{-3, 0, 3\}$이므로 $A\subset C\subset B$

22-1 답 ⑤

$x^3+3x^2-x=3$에서 $x^3+3x^2-x-3=0$

$x^2(x+3)-(x+3)=0$, $(x+3)(x^2-1)=0$

$(x+3)(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

$\therefore A=\{-3, -1, 1\}$,
$\quad B=\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
$\quad C=\{-1, 1\}$

$\therefore C\subset A\subset B$

23 답 ④

주어진 벤 다이어그램에서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계는 $B\subset A$

① $A\subset B$

② $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 4, 8\}$이므로 $A\subset B$

③ $A=\{3, 5, 7, 9, \cdots\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$이므로 $A\subset B$

④ 정수 전체의 집합을 Z, 실수 전체의 집합을 R라 하면 $Z\subset R$이므로 $B\subset A$

⑤ $A=\{-1, 1\}$, $B=\{-1, 0, 1\}$이므로 $A\subset B$

따라서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계가 주어진 벤 다이어그램과 같은 것은 ④이다.

23-1 답 ⑤

주어진 벤 다이어그램에서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계는 $A\subset B$

① $B\subset A$

② $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로 $B\subset A$

③ $A=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$, $B=\{4, 8, 12, \cdots\}$이므로 $B\subset A$

④ $A=\{3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, \cdots\}$,
$\quad B=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$이므로 $B\subset A$

⑤ 자연수 전체의 집합을 N, 유리수 전체의 집합을 Q라 하면 $N\subset Q$이므로 $A\subset B$

따라서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계가 주어진 벤 다이어그램과 같은 것은 ⑤이다.

24 답 ③

집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 $|xy|$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$B=\{0, 1\}$

x \ y	-1	0	1
-1	1	0	1
0	0	0	0
1	1	0	1

집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$C=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$\therefore B\subset A\subset C$

x \ y	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

24-1 답 ②

집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 $2x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

x \ y	0	1	2
0	0	1	2
1	2	3	4
2	4	5	6

집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 xy의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

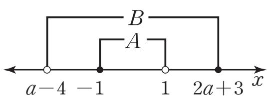
$C=\{0, 1, 2, 4\}$

$\therefore A\subset C\subset B$

x \ y	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

25 답 4

$A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a-4<-1$, $2a+3\geq 1$

$a-4<-1$에서 $a<3$

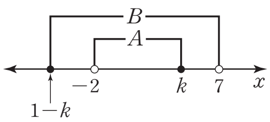
$2a+3\geq 1$에서 $2a\geq -2$　　$\therefore a\geq -1$

$\therefore -1\leq a<3$

따라서 정수 a의 값은 -1, 0, 1, 2이므로 그 개수는 4이다.

25-1 답 18

$A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$1-k\leq -2$, $k<7$

$1-k\leq -2$에서 $k\geq 3$

$\therefore 3\leq k<7$

따라서 정수 k의 최댓값은 6, 최솟값은 3이므로 그 곱은

$6\times 3=18$

26 답 -2

$x^3+x^2-2x=0$에서 $x(x^2+x-2)=0$

$x(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$

$\therefore A=\{-2, 0, 1\}$

이때 $A\subset B$이므로 $k\leq -2$

따라서 정수 k의 최댓값은 -2이다.

26-1 답 4

$x^3-2x^2-3x=0$에서 $x(x^2-2x-3)=0$

$x(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$

$\therefore A=\{-1, 0, 3\}$　　…… ❶

이때 주어진 벤 다이어그램에서 $A\subset B$이므로

$k>3$　　…… ❷

따라서 정수 k의 최솟값은 4이다.　　…… ❸

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

27 답 0

$A\subset B$가 성립하려면 $1\in B$이어야 하므로

$a+3=1$ 또는 $2a+1=1$

(i) $a+3=1$, 즉 $a=-2$일 때

$A=\{0, 1\}$, $B=\{-3, 1, 2\}$이므로 $A\not\subset B$

(ii) $2a+1=1$, 즉 $a=0$일 때

$A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$이므로 $A\subset B$

(i), (ii)에서 $a=0$

27-1 답 ①

$A\subset B$가 성립하려면 $3\in B$이어야 하므로

$a=3$ 또는 $a^2-3a-1=3$

(i) $a=3$일 때

$A=\{0, 3\}$, $B=\{-1, 0, 3\}$이므로 $A\subset B$

(ii) $a^2-3a-1=3$일 때

$a^2-3a-4=0$, $(a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$

$a=-1$이면 $A=\{0, 3\}$, $B=\{-1, 0, 3\}$이므로 $A\subset B$

$a=4$이면 $A=\{3, 5\}$, $B=\{0, 3, 4\}$이므로 $A\not\subset B$

(i), (ii)에서 $a=3$ 또는 $a=-1$이므로 그 합은

$3+(-1)=2$

28 답 4

$A=\{2, 3, 5, 7\}$

이때 $X\subset A$이고 $n(X)=3$을 만족시키는 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 원소가 3개인 집합이다.

따라서 집합 X는 $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 3, 7\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{3, 5, 7\}$이므로 그 개수는 4이다.

28-1 답 ②

원소의 개수가 2인 집합 A의 부분집합은 $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{0, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$이므로 그 개수는 6이다.

29 답 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{5\}$, $\{25\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 25\}$, $\{5, 25\}$

$A=\{1, 5, 25\}$

이때 $X\subset A$이고 $X\neq A$인 집합 X는 집합 A의 진부분집합이다.

따라서 집합 X는

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{5\}$, $\{25\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 25\}$, $\{5, 25\}$

29-1 답 ⑤

$A=\{1, 5, 9\}$

이때 집합 $P(A)$는 집합 A의 진부분집합을 원소로 갖는 집합이므로 $P(A)=\{\varnothing, \{1\}, \{5\}, \{9\}, \{1, 5\}, \{1, 9\}, \{5, 9\}\}$

따라서 집합 $P(A)$의 원소가 아닌 것은 ⑤이다.

30 답 ①

$x^2<4$에서 $x^2-4<0$

$(x+2)(x-2)<0 \qquad \therefore -2<x<2$

$\therefore A=\{-1, 0, 1\}$

① 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing$는 집합 A의 부분집합이다.

② $\{-1, 0, 1, 2\}\not\subset A$

③ 원소가 하나뿐인 집합 A의 부분집합은 $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$의 3개이다.

④ 원소가 2개인 집합 A의 부분집합은 $\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$, $\{0, 1\}$의 3개이다.

⑤ 원소가 3개인 집합 A의 부분집합은 $\{-1, 0, 1\}$의 1개이다.

따라서 옳은 것은 ①이다.

30-1 답 ②

$x^2+x-6<0$에서 $(x+3)(x-2)<0 \qquad \therefore -3<x<2$

$\therefore A=\{-2, -1, 0, 1\}$

① 집합 A의 원소의 개수가 4이므로 $n(A)=4$

② $\{-2, 0, 1\}\subset A$, $\{-2, 0, 1\}\neq A$이므로 집합 $\{-2, 0, 1\}$은 집합 A의 진부분집합이다.

③ 원소가 2개인 집합 A의 부분집합은 $\{-2, -1\}$, $\{-2, 0\}$, $\{-2, 1\}$, $\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$, $\{0, 1\}$의 6개이다.

④ 원소가 음의 정수로만 이루어진 집합 A의 부분집합은 $\{-2\}$, $\{-1\}$, $\{-2, -1\}$의 3개이다.

⑤ 0을 원소로 갖는 집합 A의 진부분집합은 $\{0\}$, $\{-2, 0\}$, $\{-1, 0\}$, $\{0, 1\}$, $\{-2, -1, 0\}$, $\{-2, 0, 1\}$, $\{-1, 0, 1\}$의 7개이다.

따라서 옳은 것은 ②이다.

31 답 1

$A=B$이고 $4\in A$이므로 $4\in B$이어야 한다.

즉 $a^2+3a=4$이므로 $a^2+3a-4=0$

$(a+4)(a-1)=0 \qquad \therefore a=-4$ 또는 $a=1$

(i) $a=-4$일 때

$A=\{-9, -3, 4\}$, $B=\{1, 2, 4\}$이므로 $A\neq B$

(ii) $a=1$일 때

$A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 4\}$이므로 $A=B$

(i), (ii)에서 $a=1$

31-1 답 ④

$A=B$이고 $a+2\in A$이므로 $a+2\in B$이어야 한다.

이때 $a+2=2$이면 $a=0$이므로

$A=\{2\}$, $B=\{0, 2\} \qquad \therefore A\neq B$

즉 $a+2=a^2$이므로 $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=2$

(i) $a=-1$일 때

$A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2\}$이므로 $A=B$

(ii) $a=2$일 때

$A=\{2, 4\}$, $B=\{2, 4\}$이므로 $A=B$

(i), (ii)에서 $a=-1$ 또는 $a=2$이므로 그 합은

$-1+2=1$

32 답 3

$A\subset B$, $B\subset A$이므로 $A=B$

이때 $6\in A$이므로 $6\in B$이어야 한다.

즉 $a^2-a=6$이므로 $a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-2$ 또는 $a=3$

(i) $a=-2$일 때

$A=\{-5, 3, 6\}$, $B=\{5, 6, 8\}$이므로 $A\neq B$

(ii) $a=3$일 때

$A=\{5, 6, 8\}$, $B=\{5, 6, 8\}$이므로 $A=B$

(i), (ii)에서 $a=3$

32-1 답 ①

$A\subset B$, $B\subset A$이므로 $A=B$

이때 $7\in A$이므로 $7\in B$이어야 한다.

즉 $a^2-2=7$이므로 $a^2-9=0$

$(a+3)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-3$ 또는 $a=3$

(i) $a=-3$일 때

$A=\{-11, 4, 7\}$, $B=\{1, 4, 7\}$이므로 $A\neq B$

(ii) $a=3$일 때

$A=\{1, 4, 7\}$, $B=\{1, 4, 7\}$이므로 $A=B$

(i), (ii)에서 $a=3$

33 답 10

$A\subset B$, $B\subset A$이므로 $A=B$ ······❶

이때 $B=\{2, b\}$이므로 $2\in A$

$x=2$를 $x^2+ax+8=0$에 대입하면

$4+2a+8=0$, $2a=-12 \qquad \therefore a=-6$

즉 $x^2-6x+8=0$이므로 $(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 $A=\{2, 4\}$이므로 $b=4$ ······❷

$\therefore b-a=4-(-6)=10$ ······❸

채점 기준	비율
❶ 두 집합 A, B에 대하여 $A=B$임을 알 수 있다.	30%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	10%

33-1 답 -6

$A=B$이고 $4\in B$이므로 $4\in A$

$x=4$를 $3x^2-11x+a=0$에 대입하면

$48-44+a=0 \qquad \therefore a=-4$

즉 $3x^2-11x-4=0$이므로 $(3x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=4$

따라서 $A=\left\{-\frac{1}{3}, 4\right\}$이므로

$\frac{2}{3}b+1=-\frac{1}{3} \qquad \therefore b=-2$

$\therefore a+b=-4+(-2)=-6$

34 답 ③

$n(A)=a$, $n(B)=b$라 하면

$2^a-1=255$, $2^b=64$

$2^a-1=255$에서 $2^a=256=2^8$ $\quad\therefore a=8$

$2^b=64=2^6$에서 $b=6$

$\therefore n(A)+n(B)=8+6=14$

34-1 답 128

$n(A)=a$, $n(B)=b$라 하면

$n(A)+n(B)=16$이므로 $a+b=16$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 집합 A의 진부분집합의 개수가 511이므로

$2^a-1=511$, $2^a=512=2^9$ $\quad\therefore a=9$

$a=9$를 ㉠에 대입하면

$9+b=16$ $\quad\therefore b=7$

따라서 집합 B의 부분집합의 개수는

$2^7=128$

35 답 ②

$x^2-2x-8<0$에서 $(x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$

이때 x는 정수이므로

$A=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

따라서 $n(A)=5$이므로 집합 A의 부분집합의 개수는

$2^5=32$

35-1 답 ③

집합 A의 두 원소 a, b에 대하여 ab의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	-2	-1	0	1
-2	4	2	0	-2
-1	2	1	0	-1
0	0	0	0	0
1	-2	-1	0	1

$B=\{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$

따라서 $n(B)=6$이므로

집합 B의 진부분집합의 개수는 $2^6-1=63$

36 답 ⑤

집합 A의 원소 중에서 5의 배수는 5, 10, 15, 20

따라서 구하는 집합은 집합 $\{5, 10, 15, 20\}$의 부분집합 중에서 공집합을 제외한 것이므로 그 개수는

$2^4-1=15$

36-1 답 ③

$x^2-18x+45\le 0$에서 $(x-3)(x-15)\le 0$

$\therefore 3\le x\le 15$

$\therefore A=\{3, 4, 5, \cdots, 15\}$

집합 A의 원소 중에서 3의 배수는 3, 6, 9, 12, 15

따라서 구하는 집합은 집합 $\{3, 6, 9, 12, 15\}$의 부분집합 중에서 공집합을 제외한 것이므로 그 개수는

$2^5-1=31$

37 답 17

$A=\{2, 3, 5, 7\}$

$n(A)=4$이므로 집합 A의 진부분집합의 개수는

$2^4-1=15$ $\quad\therefore a=15$

집합 A의 부분집합 중 2를 반드시 원소로 갖고, 3, 7을 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{4-1-2}=2$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore a+b=15+2=17$

Lecture 특정한 원소를 갖거나 갖지 않는 부분집합의 개수

집합 $A=\{a, b, c\}$에 대하여 b를 원소로 갖지 않는 부분집합과 b를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구해 보자.

b를 원소로 갖지 않는 부분집합	b를 반드시 원소로 갖는 부분집합
$\varnothing$, $\{a\}$, $\{c\}$, $\{a, c\}$	$\{\underline{b}\}$, $\{a, \underline{b}\}$, $\{\underline{b}, c\}$, $\{a, \underline{b}, c\}$
➡ 집합 A에서 원소 b를 제외한 집합 $\{a, c\}$의 부분집합과 같다. ➡ 부분집합의 개수는 집합 A의 원소의 개수 $2^{3-1}=2^2=4$ 부분집합에 속하지 않는 원소의 개수	➡ 집합 A에서 원소 b를 제외한 집합 $\{a, c\}$의 부분집합에 원소 b를 넣은 것과 같다. ➡ 부분집합의 개수는 집합 A의 원소의 개수 $2^{3-1}=2^2=4$ 부분집합에 반드시 속하는 원소의 개수

➡ (b를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수)
$=$(b를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수)

37-1 답 ④

집합 A의 부분집합 중 2, 6, 10을 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{5-3}=2^2=4$ $\quad\therefore a=4$

집합 A의 부분집합 중 4를 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{5-1}=2^4=16$ $\quad\therefore b=16$

$\therefore b-a=16-4=12$

38 답 ③

$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

집합 A의 원소 중에서 짝수는 2, 4, 6이므로 이를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{6-3}=2^3=8$

38-1 답 ⑤

$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

집합 A의 원소 중에서 소수는 2, 3이므로 이를 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{9-2}=2^7=128$

39 답 ②

$A=\{1, 2, 3, \cdots, k\}$에서 $n(A)=k$

집합 A의 부분집합 중 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{k-2}=64=2^6$, $k-2=6$ $\quad\therefore k=8$

39-1 답 ⑤

$A=\{1, 2, 3, \cdots, k\}$이므로 $n(A)=k$

집합 A의 부분집합 중 1, 2, 3을 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{k-3}=512=2^9$, $k-3=9$ $\quad\therefore k=12$

40 답 ③

집합 X는 집합 A의 부분집합 중 1을 반드시 원소로 갖고, 2, 4를

원소로 갖지 않는 집합과 같으므로 집합 X의 개수는
$2^{6-1-2}=2^3=8$

40-1 답 ③
집합 X는 집합 A의 부분집합 중 b, f를 반드시 원소로 갖고, e를 원소로 갖지 않는 집합과 같으므로 집합 X의 개수는
$2^{7-2-1}=2^4=16$

41 답 63
$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$이므로 $n(A)=8$
$X \subset A$, $X \neq A$이므로 집합 X는 집합 A의 진부분집합이다.
따라서 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 3, 4를 반드시 원소로 갖는 집합에서 집합 A를 제외한 것과 같으므로 집합 X의 개수는
$2^{8-2}-1=2^6-1=63$

41-1 답 ②
$A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$이므로 $n(A)=10$
$X \subset A$, $X \neq A$이므로 집합 X는 집합 A의 진부분집합이다.
따라서 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 1, 3, 5를 반드시 원소로 갖는 집합에서 집합 A를 제외한 것과 같으므로 집합 X의 개수는
$2^{10-3}-1=2^7-1=127$

42 답 ⑤
$A=\{1, 2, 3, \cdots, k\}$에서 $n(A)=k$
집합 A의 부분집합 중 1, 3, 5를 반드시 원소로 갖고, 2, 6을 원소로 갖지 않는 집합의 개수는
$2^{k-3-2}=32=2^5$
$k-5=5 \qquad \therefore k=10$

42-1 답 ④
$A=\{1, 2, 3, \cdots, k-1\}$이므로 $n(A)=k-1$
집합 A의 부분집합 중 2, 4를 반드시 원소로 갖고, 1, 3, 5, 7을 원소로 갖지 않는 집합의 개수는
$2^{(k-1)-2-4}=256=2^8$
$k-7=8 \qquad \therefore k=15$

43 답 ③
$A=\{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$이므로 $n(A)=6$
집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 집합의 개수는
${}_6C_2=15 \qquad \therefore a=15$
집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 3인 집합의 개수는
${}_6C_3=20 \qquad \therefore b=20$
$\therefore b-a=20-15=5$

43-1 답 ⑤
$n(A)=8$이고 구하는 집합의 원소의 개수가 3의 배수이므로 3 또는 6이다.
집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 3인 집합의 개수는
${}_8C_3=56$
집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 6인 집합의 개수는
${}_8C_6={}_8C_2=28$
따라서 구하는 집합의 개수는
$56+28=84$

44 답 ⑤
집합 A의 원소의 개수를 n이라 하면 집합 A의 n개의 원소 중 2개의 원소로 이루어진 부분집합의 개수는
${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}=45$
$n(n-1)=90=10\times 9 \qquad \therefore n=10$
따라서 집합 A의 부분집합의 개수는
$2^{10}=1024$

44-1 답 127
집합 A의 원소의 개수를 n이라 하면 집합 A의 n개의 원소 중 3개의 원소로 이루어진 부분집합의 개수는
${}_nC_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=35$
$n(n-1)(n-2)=210=7\times 6\times 5 \qquad \therefore n=7$
따라서 집합 A의 진부분집합의 개수는
$2^7-1=127$

45 답 21
$A=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이므로 $n(A)=9$
$X \subset A$이므로 집합 X는 집합 A의 부분집합이다.
(가)에서 $n(X)=4$이고 (나)에서 집합 X는 3, 7을 반드시 원소로 가지므로 3, 7을 제외한 7개의 원소 중에서 2개의 원소를 택하면 된다.
따라서 집합 X의 개수는
${}_7C_2=21$

45-1 답 6
$A=\{1, 2, 3, \cdots, 15\}$
(가)에서 $n(X)=6$이고 (나)에서 집합 X의 원소 중 최댓값은 7이므로 집합 X는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 원소 중에서 5개의 원소를 택하면 된다.
따라서 집합 X의 개수는
${}_6C_5={}_6C_1=6$

유형+ 완성하기 p. 134

46 답 ③
$x^3-6x^2+11x-6=0$에서 $(x-1)(x-2)(x-3)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$
$\therefore A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
이때 $A \subset X \subset B$이므로 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 집합 A의 원소인 1, 2, 3을 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.
따라서 집합 X의 개수는
$2^{6-3}=2^3=8$

47 답 14

$A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ……❶

이때 $A \subset X \subset B$, $X \neq A$, $X \neq B$이므로 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 집합 A의 원소인 1, 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합에서 두 집합 A, B를 제외한 것과 같다. ……❷

따라서 집합 X의 개수는

$2^{7-3}-2=2^4-2=14$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ 집합 X가 되기 위한 조건을 알 수 있다.	40%
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30%

48 답 9

$A=\{1, 2, 3, \cdots, k\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$

이때 $B \subset X \subset A$이므로 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 집합 B의 원소인 1, 2, 3, 6을 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.

즉 집합 X의 개수는 $2^{k-4}=32=2^5$

$k-4=5$ $\quad\therefore k=9$

49 답 ④

$A=\{4, 8, 12, 16, 20\}$

집합 A의 부분집합 중 8 또는 12를 원소로 갖는 집합은 집합 A의 부분집합에서 집합 $\{4, 16, 20\}$의 부분집합을 제외한 것과 같다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^5-2^3=32-8=24$

다른 풀이

$A=\{4, 8, 12, 16, 20\}$

8 또는 12를 원소로 갖는 집합 A의 부분집합은 집합 A의 원소에서 8, 12를 제외한 집합 $\{4, 16, 20\}$의 부분집합에 8만 넣거나 12만 넣거나 8과 12를 모두 넣으면 된다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^3 \times 3=8 \times 3=24$

50 답 960

$A=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$

집합 A의 부분집합 중 적어도 하나의 8의 약수를 원소로 갖는 집합은 집합 A의 부분집합에서 8의 약수가 아닌 수만으로 이루어진 집합, 즉 $\{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$의 부분집합을 제외한 것과 같다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^{10}-2^6=1024-64=960$

51 답 ②

$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

집합 A의 부분집합 중 가장 큰 원소가 5인 집합은 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$의 부분집합에 5를 넣은 것과 같다.

$\therefore a=2^4=16$

집합 A의 부분집합 중 적어도 한 개의 소수를 원소로 갖는 집합은 집합 A의 부분집합에서 소수 2, 3, 5를 원소로 갖지 않는 집합, 즉 $\{1, 4, 6\}$의 부분집합을 제외한 것과 같다.

$\therefore b=2^6-2^3=64-8=56$

$\therefore a+b=16+56=72$

학교 시험 대비 문제

p. 135~138

01 답 ⑤

'아름다운', '일찍', '많은', '작은'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 집합인 것은 ⑤이다.

02 답 ③

$x^3+2x^2-3x=0$에서 $x(x^2+2x-3)=0$

$x(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=1$

즉 $A=\{-3, 0, 1\}$이므로

③ $-1 \notin A$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

03 답 ⑤

① $A=\{3, 6, 9, 12, \cdots\}$

② $A=\{5, 10, 15, 20, \cdots\}$

③ $A=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

④ $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$

⑤ $A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$

따라서 집합 A를 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은 ⑤이다.

04 답 ③

ㄱ. 무한집합

ㄴ. $\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$이므로 무한집합이다.

ㄷ. 5보다 작은 6의 양의 배수는 없다.
즉 주어진 집합은 공집합이므로 유한집합이다.

ㄹ. $x^2-2x+1 \leq 0$에서 $(x-1)^2 \leq 0$ $\quad\therefore x=1$
즉 주어진 집합은 $\{1\}$이므로 유한집합이다.

ㅁ. $0<x<1$인 실수 x는 무수히 많으므로 무한집합이다.

따라서 $a=2$, $b=3$이므로

$b-a=3-2=1$

05 답 8

$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 $n(A)=5$

$B=\{1, 5, 25\}$이므로 $n(B)=3$

이차방정식 $x^2+2x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-5=-4<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이때 x는 실수이므로 $C=\varnothing$ $\quad\therefore n(C)=0$

$\therefore n(A)+n(B)+n(C)=5+3+0=8$

06 답 3

집합 A는 15의 양의 약수의 집합과 같으므로

$A=\{1, 3, 5, 15\}$ $\quad\therefore n(A)=4$

이때 $B=\{k, k+1, k+2, \cdots, 6\}$이므로

$n(B)=6-k+1=7-k$

$n(A)=n(B)$이므로

$4=7-k$ $\quad\therefore k=3$

07 답 7

집합 A의 원소 a와 집합 B의 원소 b에 대하여 $2a+b$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	0	1	2
-1	-2	-1	0
0	0	1	2
1	2	3	4

$C=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

따라서 집합 C의 모든 원소의 합은

$-2+(-1)+0+1+2+3+4=7$

08 답 ③

③ $\varnothing\in A$이므로 $\{\varnothing\}\subset A$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

09 답 ①

집합 A의 원소 x, y에 대하여 $2x-y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	0	1	2
0	0	-1	-2
1	2	1	0
2	4	3	2

$B=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

집합 A의 원소 x와 집합 B의 원소 y에 대하여 xy의 값을 구하면 다음 표와 같으므로

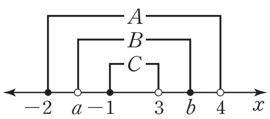
$C=\{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

x \ y	-2	-1	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0	0	0
1	-2	-1	0	1	2	3	4
2	-4	-2	0	2	4	6	8

$\therefore A\subset B\subset C$

10 답 1

$C\subset B\subset A$가 성립하도록 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$-2\le a<-1$, $3\le b<4$

이때 a, b는 정수이므로 $a=-2$, $b=3$

$\therefore a+b=-2+3=1$

11 답 3

$A\subset B$가 성립하려면 $2\in B$이어야 하므로

$a+2=2$ 또는 $a^2-7=2$

(i) $a+2=2$, 즉 $a=0$일 때

$A=\{-10, 2\}$, $B=\{-7, -1, 2\}$이므로 $A\not\subset B$

(ii) $a^2-7=2$일 때

$a^2=9$ $\quad\therefore a=\pm 3$

$a=-3$이면 $A=\{-19, 2\}$, $B=\{-1, 2\}$이므로 $A\not\subset B$

$a=3$이면 $A=\{-1, 2\}$, $B=\{-1, 2, 5\}$이므로 $A\subset B$

(i), (ii)에서 $a=3$

다른 풀이

$A\subset B$가 성립하려면 $3a-10\in B$이어야 하므로

$3a-10=-1$ 또는 $a+2=3a-10$ 또는 $a^2-7=3a-10$

(i) $3a-10=-1$, 즉 $a=3$일 때

$A=\{-1, 2\}$, $B=\{-1, 2, 5\}$이므로 $A\subset B$

(ii) $a+2=3a-10$, 즉 $a=6$일 때

$A=\{2, 8\}$, $B=\{-1, 8, 29\}$이므로 $A\not\subset B$

(iii) $a^2-7=3a-10$일 때

$a^2-3a+3=0$이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times1\times3=-3<0$

즉 실수 a는 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에서 $a=3$

12 답 15

$B\subset A$, $2\in B$이고 $n(B)=3$을 만족시키는 집합 B는 집합 A의 부분집합 중에서 2를 반드시 원소로 갖고 원소가 3개인 집합이다.

따라서 집합 B는

$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 2, 7\}$,

$\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{2, 3, 7\}$,

$\{2, 4, 5\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{2, 4, 7\}$,

$\{2, 5, 6\}$, $\{2, 5, 7\}$,

$\{2, 6, 7\}$

이므로 그 개수는 15이다.

13 답 $3-\sqrt{3}i$

$A=B$이므로 $1+\sqrt{3}i\in A$, $c\in A$이어야 한다.

즉 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $1+\sqrt{3}i$, c이다.

이때 계수가 실수인 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{3}i$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{3}i$이므로

$c=1-\sqrt{3}i$

근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)=-a$ $\quad\therefore a=-2$

$(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=b$ $\quad\therefore b=4$

$\therefore a+b+c=-2+4+(1-\sqrt{3}i)=3-\sqrt{3}i$

Lecture 이차방정식의 켤레근

(1) 계수가 유리수인 이차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$

➡ 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$ (p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)

(2) 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 $p+qi$

➡ 다른 한 근은 $p-qi$ (p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

14 답 10

$A=B$이고 $4\in A$이므로 $4\in B$

즉 $2b+1=4$ 또는 $3b=4$ 또는 $b^2=4$이므로

$b=\frac{3}{2}$ 또는 $b=\frac{4}{3}$ 또는 $b=\pm2$

그런데 b는 자연수이므로 $b=2$ $\quad\therefore B=\{4, 5, 6\}$

이때 $A=B$이므로 $a=5$ $\quad\therefore ab=5\times2=10$

15 답 256

$P(A)$는 집합 A의 부분집합을 원소로 갖는 집합이므로

$n(P(A))=2^3=8$

따라서 집합 $P(A)$의 부분집합의 개수는

$2^8=256$

16 답 512

$A=\{1, 2, 3, 4, \cdots, 16\}$이므로 집합 A의 원소 중 5의 배수는 5, 10, 15이고 4의 배수는 4, 8, 12, 16이다.

따라서 집합 A의 부분집합 중 5, 10, 15를 반드시 원소로 갖고, 4, 8, 12, 16을 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{16-3-4}=2^9=512$

17 답 ③

집합 A의 원소 a와 집합 B의 원소 b에 대하여 $a+b$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$a \backslash b$	1	2	3
0	1	2	3
1	2	3	4

$C=\{1, 2, 3, 4\}$

집합 C의 원소 중에서 홀수는 1, 3이므로 이를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{4-2}=2^2=4$

18 답 22

$x^2-16x+39\le 0$에서 $(x-3)(x-13)\le 0$ $\quad\therefore 3\le x\le 13$

$\therefore A=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

이때 구하는 집합의 개수는 집합 A의 원소에서 소수인 3, 5, 7, 11, 13을 제외한 6개의 자연수 중에서 4개 이상을 택하는 경우의 수와 같다.

4개 또는 5개 또는 6개

따라서 구하는 집합의 개수는

${}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6=15+6+1=22$

19 답 ③

$x^2-8x+15=0$에서 $(x-3)(x-5)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=5$

$\therefore A=\{3, 5\}, B=\{2, 3, 5, 7\}$

이때 $A\subset X\subset B$이므로 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 집합 A의 원소인 3, 5를 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{4-2}=2^2=4$

20 답 ④

$A=\{1, 2, 3, \cdots, k\}, B=\{1, 2, 3\}$

이때 $B\subset X\subset A$이므로 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 집합 B의 원소인 1, 2, 3을 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.

즉 집합 X의 개수는 $2^{k-3}=64=2^6$

$k-3=6$ $\quad\therefore k=9$

21 답 ③

$A=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$

집합 A의 부분집합 중 가장 큰 원소가 8인 집합의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$a=2^7=128$

집합 A의 부분집합 중 적어도 한 개의 짝수를 원소로 갖는 집합은 집합 A의 부분집합에서 짝수 2, 4, 6, 8, 10을 원소로 갖지 않는 집합, 즉 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$의 부분집합을 제외한 것과 같다.

$\therefore b=2^{10}-2^5=1024-32=992$

$\therefore b-a=992-128=864$

서술형 1 답 -1

$B\subset A$가 성립하려면 $2\in A$이어야 하므로

$a^2+3a+4=2$ ……❶

$a^2+3a+2=0, (a+1)(a+2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=-2$

(i) $a=-1$일 때

$A=\{-1, 0, 2\}, B=\{-1, 2\}$이므로 $B\subset A$

(ii) $a=-2$일 때

$A=\{-1, 0, 2\}, B=\{-2, 2\}$이므로 $B\not\subset A$ ……❷

(i), (ii)에서 $a=-1$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $B\subset A$가 성립할 조건을 구할 수 있다.	20%
❷ ❶에서 구한 조건을 만족시키는 집합 A, B의 포함 관계를 알 수 있다.	60%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 2 답 9

$A=B$이고 $5\in A$이므로 $5\in B$이어야 한다.

$\therefore a+1=5$ 또는 $a^2-a-1=5$ ……❶

(i) $a+1=5$, 즉 $a=4$일 때

$A=\{5, 7\}, B=\{5, 11\}$이므로 $A\neq B$

(ii) $a^2-a-1=5$일 때

$a^2-a-6=0, (a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

$a=-2$이면 $A=\{-11, 5\}, B=\{-1, 5\}$이므로 $A\neq B$

$a=3$이면 $A=\{4, 5\}, B=\{4, 5\}$이므로 $A=B$

(i), (ii)에서 $A=\{4, 5\}$이므로 ……❷

집합 A의 모든 원소의 합은

$4+5=9$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $A=B$가 성립할 조건을 구할 수 있다.	20%
❷ 집합 A를 구할 수 있다.	60%
❸ 집합 A의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 7

$A=\{1, 2, 3, 4\}$

$x^2-4x-5\le 0$에서 $(x+1)(x-5)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 5$

$\therefore B=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ……❶

이때 $A\subset X\subset B$, $X\neq A$이므로 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 집합 A의 원소인 1, 2, 3, 4를 반드시 원소로 갖는 집합에서 집합 A를 제외한 것과 같다. ……❷

따라서 집합 X의 개수는

$2^{7-4}-1=2^3-1=7$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ 조건을 만족시키는 집합 X와 같은 경우를 알 수 있다.	40%
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 139

01 답 ②

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$A^2=AA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$A^3=A^2A=-EA=-A$

$A^4=A^2A^2=(-E)(-E)=E^2=E$

$A^5=A^4A=EA=A$

$\vdots$

$\therefore S=\{A, -E, -A, E\}$

따라서 집합 S의 원소의 개수는 4이다.

다른 풀이

케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(0+0)A+\{0\times0-1\times(-1)\}E=O$

$A^2+E=O \qquad \therefore A^2=-E$

$A^3=A^2A=-EA=-A$

$A^4=A^2A^2=(-E)(-E)=E^2=E$

$A^5=A^4A=EA=A$

$\vdots$

$\therefore S=\{A, -E, -A, E\}$

따라서 집합 S의 원소의 개수는 4이다.

02 답 3

$n=1$일 때, $z=i^1=i$

$n=2$일 때, $z=i^2=-1$

$n=3$일 때, $z=i^3=-i$

$n=4$일 때, $z=i^4=1$

$n=5$일 때, $z=i^5=i$

$\vdots$

$\therefore A=\{i, -1, -i, 1\}$

이때 집합 A의 원소 z에 대하여 z^2의 값은

$i^2=-1, (-1)^2=1, (-i)^2=-1, 1^2=1$

중 하나이다.

즉 집합 A의 두 원소 z_1, z_2에 대하여 $z_1^{\,2}, z_2^{\,2}$의 값은 각각 -1 또는 1이므로 $z_1^{\,2}+z_2^{\,2}$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같다.

$z_1^{\,2}$ \ $z_2^{\,2}$	-1	1
-1	-2	0
1	0	2

$\therefore B=\{-2, 0, 2\}$

따라서 집합 B의 원소의 개수는 3이다.

03 답 48

$A_{25}=\{x\,|\,x$는 $\sqrt{25}$ 이하의 홀수$\}$에서 $\sqrt{25}=5$이므로

$A_{25}=\{1, 3, 5\}$

$A_n=\{x\,|\,x$는 $\sqrt{n}$ 이하의 홀수$\}$에서 $A_n\subset A_{25}$를 만족시키려면

$\sqrt{n}<7$이어야 하므로 $n<49$

이때 n은 자연수이므로

$1\le n<49$

따라서 자연수 n의 최댓값은 48이다.

04 답 ②

(i) $6\in X$일 때

$6\in X$이면 집합 X의 모든 원소의 곱은 항상 6의 배수가 된다.

이때 $n(X)\ge2$이므로 집합 X는 집합 A에서 원소 6을 제외한 집합 $\{3, 4, 5, 7\}$의 공집합이 아닌 부분집합에 6을 넣으면 된다.

즉 집합 X의 개수는 $2^4-1=15$

(ii) $6\notin X$일 때

집합 X는 집합 A의 부분집합 중 3, 4를 반드시 원소로 갖고, 6을 원소로 갖지 않아야 하므로 집합 X의 개수는

$2^{5-2-1}=2^2=4$

(i), (ii)에서 집합 X의 개수는

$15+4=19$

05 답 ①

집합 S의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2 이상인 집합의 개수는 다음과 같다.

(i) 1이 가장 작은 원소인 경우

1을 반드시 원소로 갖는 집합에서 집합 $\{1\}$을 제외하면 되므로

$2^{5-1}-1=2^4-1=15$

(ii) 2가 가장 작은 원소인 경우

2를 반드시 원소로 갖고, 1을 원소로 갖지 않는 집합에서 집합 $\{2\}$를 제외하면 되므로

$2^{5-1-1}-1=2^3-1=7$

(iii) 3이 가장 작은 원소인 경우

3을 반드시 원소로 갖고, 1, 2를 원소로 갖지 않는 집합에서 집합 $\{3\}$을 제외하면 되므로

$2^{5-1-2}-1=2^2-1=3$

(iv) 4가 가장 작은 원소인 경우

4를 반드시 원소로 갖고, 1, 2, 3을 원소로 갖지 않는 집합은 $\{4, 5\}$이므로 그 개수는 1이다.

(i)~(iv)에서 구하는 값은

$1\times15+2\times7+3\times3+4\times1=42$

06 답 ③

$X=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$

집합 X의 원소 n에 대하여 $f(n)$은 집합 X의 부분집합 중 n을 반드시 원소로 갖고, n보다 작은 자연수를 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로

$f(n)=2^{10-1-(n-1)}=2^{10-n}$

ㄱ. $f(8)=2^{10-8}=2^2=4$

ㄴ. $a=8, b=9$일 때, $8\in X, 9\in X$이고 $8<9$이지만

$f(8)=4, f(9)=2^{10-9}=2$이므로 $f(8)>f(9)$

ㄷ. $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)$

$=2^{10-1}+2^{10-3}+2^{10-5}+2^{10-7}+2^{10-9}$

$=2^9+2^7+2^5+2^3+2$

$=512+128+32+8+2$

$=682$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

06 집합의 연산

Ⅱ 집합과 명제

개념 완성하기 p. 143~144

01 답 $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$, $A\cap B=\{1, 5\}$
서로소가 아니다.

$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$이므로
$A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$
$A\cap B=\{1, 5\}$
따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

02 답 $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$, $A\cap B=\{2, 3\}$
서로소가 아니다.

$A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$이므로
$A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$
$A\cap B=\{2, 3\}$
따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

03 답 $A\cup B=\{3, 4, 6, 8, 9\}$, $A\cap B=\varnothing$
서로소이다.

$A=\{4, 8\}$, $B=\{3, 6, 9\}$이므로
$A\cup B=\{3, 4, 6, 8, 9\}$
$A\cap B=\varnothing$
따라서 두 집합 A, B는 서로소이다.

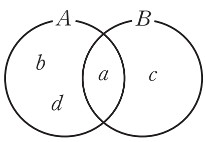
04 답 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 15\}$, $A\cap B=\{1, 3\}$
서로소가 아니다.

$A=\{1, 3, 5, 15\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$이므로
$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 15\}$
$A\cap B=\{1, 3\}$
따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

05 답 (1) $\{2, 6\}$ (2) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

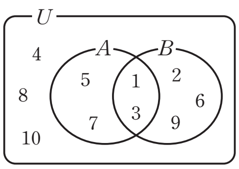
06 답 $\{a, b, d\}$

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$A=\{a, b, d\}$



07 답 (1) $\{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$ (2) $\{4, 5, 7, 8, 10\}$
(3) $\{5, 7\}$ (4) $\{2, 6, 9\}$

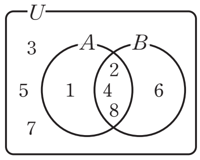
$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A=\{1, 3, 5, 7\}$,
$B=\{1, 2, 3, 6, 9\}$
이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(1) $A^C=\{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$
(2) $B^C=\{4, 5, 7, 8, 10\}$
(3) $A-B=\{5, 7\}$
(4) $B-A=\{2, 6, 9\}$

08 답 (1) $\{3, 5, 6, 7\}$ (2) $\{1, 3, 5, 7\}$ (3) $\{1\}$
(4) $\{6\}$ (5) $\{2, 4, 8\}$ (6) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$, $A=\{1, 2, 4, 8\}$,
$B=\{2, 4, 6, 8\}$
이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(1) $A^C=\{3, 5, 6, 7\}$
(2) $B^C=\{1, 3, 5, 7\}$
(3) $A-B=\{1\}$
(4) $B-A=\{6\}$
(5) $A-B^C=\{1, 2, 4, 8\}-\{1, 3, 5, 7\}=\{2, 4, 8\}$
(6) $(A-B)^C=U-(A-B)=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

09 답 (1) $\{a, d, f\}$ (2) $\{a, b, d, e, g\}$ (3) $\{b, e, g\}$
(4) $\{f\}$ (5) $\{a, d\}$ (6) $\{a, b, d, e, f, g\}$

10 답 ㄱ, ㄴ, ㅂ

ㄱ. $A\cap A^C=\varnothing$
ㄴ. $U-A^C=U\cap(A^C)^C=U\cap A=A$
ㄷ. $A-B=A\cap B^C$
ㄹ. $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$
ㅁ. $U^C=\varnothing$
ㅂ. $(A^C)^C=A$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㅂ이다.

11 답 ㄴ, ㄹ, ㅂ

$B\subset A$일 때
ㄱ. $A\cup B=A$
ㄴ. $A\cap B=B$
ㄷ. $B-A=\varnothing$
ㄹ. $B-A=\varnothing$이므로 $B\cap A^C=\varnothing$
ㅁ. $A^C\subset B^C$
ㅂ. $B\cap A^C=\varnothing$에서 $A^C\cap(B^C)^C=A^C-B^C=\varnothing$
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ, ㅂ이다.

12 답 $\{1, 3, 4\}$

$A\cap(B\cup C)=\{1, 2, 3, 4\}\cap\{1, 3, 4, 5, 7\}$
$=\{1, 3, 4\}$

13 답 $\{1, 3, 4\}$

$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{1, 4\}\cup\{1, 3\}$
$=\{1, 3, 4\}$

14 답 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

15 답 $\{1, 5, 6, 7, 9\}$

$A\cup(B\cap C)=\{1, 5, 6, 9\}\cup\{7, 9\}$
$=\{1, 5, 6, 7, 9\}$

16 답 $\{1, 5, 6, 7, 9\}$

$(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1, 3, 5, 6, 7, 9\}\cap\{1, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$=\{1, 5, 6, 7, 9\}$

17 답 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

18 답 (가) ㄹ (나) ㄴ

19 답 (가) ㄹ (나) ㄷ

20 답 13
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=10+6-3=13$

21 답 3
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=12+9-18=3$

22 답 8
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로
$17=14+n(B)-5 \qquad \therefore n(B)=8$

23 답 5
$n(A^C)=n(U)-n(A)$
$=20-15=5$

24 답 10
$n(B^C)=n(U)-n(B)$
$=20-10=10$

25 답 17
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=15+10-8=17$

26 답 7
$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=15-8=7$

27 답 2
$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$
$=10-8=2$

28 답 3
$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A\cup B)$
$=20-17=3$

29 답 12
$n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)$
$=n(U)-n(A\cap B)$
$=20-8=12$

30 답 6
$n(A^C)=n(U)-n(A)$
$=15-9=6$

31 답 8
$n(B^C)=n(U)-n(B)$
$=15-7=8$

32 답 4
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=9+7-12=4$

33 답 5
$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=9-4=5$

34 답 3
$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$
$=7-4=3$

35 답 3
$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A\cup B)$
$=15-12=3$

36 답 11
$n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)$
$=n(U)-n(A\cap B)$
$=15-4=11$

유형 완성하기

p. 145~160

01 답 6
$A=\{1, 2, 5, 10\}$, $B=\{1, 2, 4\}$, $C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$이므로
$(A\cup B)\cap C=\{1, 2, 4, 5, 10\}\cap\{1, 3, 5, 7, 9\}$
$=\{1, 5\}$
따라서 집합 $(A\cup B)\cap C$의 모든 원소의 합은
$1+5=6$

01-1 답 30
$U=\{1, 2, 3, \cdots, 20\}$, $A=\{4, 5, 8, 10, 12, 15, 16, 20\}$,
$B=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, $C=\{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$이므로
$(A\cap B)\cap C=\{4, 5, 10, 20\}\cap\{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
$=\{10, 20\}$
따라서 집합 $(A\cap B)\cap C$의 모든 원소의 합은
$10+20=30$

02 답 ④

$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$, $C=\{4, 5, 6, 7\}$에 대하여

① $A\cap B=\{1, 3\}$

② $A\cap C=\{5, 7\}$

③ $B\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

④ $(A\cap B)\cup C=\{1, 3\}\cup\{4, 5, 6, 7\}$
$=\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$

⑤ $A\cup B\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

02-1 답 ④

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{1, 2, 4, 8\}$, $C=\{5, 6, 7, 8, 9\}$에 대하여

① $A\cap B=\{2, 4, 8\}$

② $A\cap C=\{6, 8\}$

③ $B\cup C=\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

④ $A\cap(B\cup C)=\{2, 4, 6, 8, 10\}\cap\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$=\{2, 4, 6, 8\}$

⑤ $A\cap B\cap C=\{8\}$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

03 답 ④

집합 B는 a, c를 반드시 원소로 갖고, b, d, e를 원소로 갖지 않아야 하므로 집합 B가 될 수 있는 것은 ④이다.

03-1 답 ③

$A=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

① $\{1, 2\}$

② $\{1, 2, 3, 6\}$

③ $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

④ $\{1, 2, 7, 14\}$

⑤ $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

집합 B는 1, 2를 반드시 원소로 갖고 4, 5, 10, 20을 원소로 갖지 않아야 하므로 집합 B가 될 수 없는 것은 ③이다.

04 답 ②

① $A=\{1, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 2, 4, 6, 8\}$이므로 $A\cap B=\{1\}$

② $A=\{-2, 2\}$, $B=\{\cdots, -5, -4, -3, 3, 4, 5, \cdots\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$

③ $A=\{1, 3\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$이므로 $A\cap B=\{1\}$

④ $A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}$이므로
$A\cap B=\{2\}$

⑤ $A=\{-1, 0, 1\}$, $B=\{-1, 0, 1\}$이므로
$A\cap B=\{-1, 0, 1\}$

따라서 두 집합 A, B가 서로소인 것은 ②이다.

04-1 답 ⑤

① $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{6, 7, 8\}$이므로 $A\cap B=\{7\}$

② $A=\{-3, 3\}$, $B=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$이므로
$A\cap B=\{-3, 3\}$

③ $A=\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$, $B=\{1, 2, 4, 8, 16\}$이므로
$A\cap B=\{4, 8, 16\}$

④ $A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$이므로 $A\cap B=\{2\}$

⑤ $A=\{-1, 0, 1\}$, $B=\{\cdots, -4, -3, -2, 2, 3, 4, \cdots\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$

따라서 두 집합 A, B가 서로소인 것은 ⑤이다.

05 답 ②

구하는 집합은 집합 B의 부분집합 중 2, 3을 원소로 갖지 않는 집합이므로 $\{1, 4, 5\}$의 부분집합과 같다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^3=8$

05-1 답 16

$A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

구하는 집합은 집합 A의 부분집합 중 3, 7을 원소로 갖지 않는 집합이므로 $\{2, 5, 11, 13\}$의 부분집합과 같다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^4=16$

06 답 ③

집합 B와 서로소인 집합은 집합 A의 부분집합 중 집합 B의 원소를 포함하지 않는 집합이다.

집합 B의 원소의 개수를 n이라 하면

$2^{5-n}=4=2^2$에서 $5-n=2$ $\quad\therefore n=3$

따라서 집합 B의 원소의 개수는 3이다.

06-1 답 ④

집합 B와 서로소인 집합은 집합 $A=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$의 부분집합 중 집합 B의 원소를 포함하지 않는 집합이다.

집합 B의 원소의 개수를 n이라 하면

$2^{8-n}=16=2^4$에서 $8-n=4$ $\quad\therefore n=4$

따라서 집합 B의 원소의 개수는 4이다.

07 답 $\{2, 10\}$

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A=\{1, 2, 5, 10\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$
이므로 $B^C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

$\therefore A-B^C=\{2, 10\}$

07-1 답 ②

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$, $A=\{1, 3, 5, 7\}$, $B=\{2, 3, 6\}$, $C=\{6, 7, 8\}$
이므로 $A-B=\{1, 3, 5, 7\}-\{2, 3, 6\}=\{1, 5, 7\}$

$C^C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\therefore (A-B)\cap C^C=\{1, 5, 7\}\cap\{1, 2, 3, 4, 5\}=\{1, 5\}$

따라서 집합 $(A-B)\cap C^C$의 모든 원소의 합은

$1+5=6$

08 답 ⑤

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 4, 6\}$이므로

① $A\cap B=\{2, 4\}$

② $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$

③ $A^C=\{5, 6\}$

④ $B^C=\{1, 3, 5\}$이므로 $A^C\cap B^C=\{5\}$

⑤ $A-B=\{1, 3\}$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

08-1 답 ⑤

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C=\{3, 6, 9\}$이므로

① $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

② $B\cap C=\{3, 9\}$

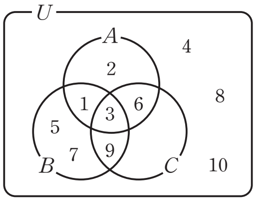
③ $(A\cup C)\cap B=\{1, 2, 3, 6, 9\}\cap\{1, 3, 5, 7, 9\}=\{1, 3, 9\}$

④ $A-C=\{1, 2\}$

⑤ $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B=\{1, 3\}$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

참고 주어진 조건을 만족시키도록 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

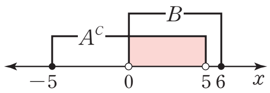


09 답 ③

$A^C=\{x\,|\,-5\le x<5\}$이므로

오른쪽 그림에서

$A^C\cap B=\{x\,|\,0<x<5\}$

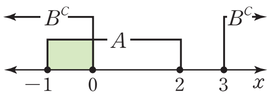


09-1 답 ④

$B^C=\{x\,|\,x\le 0$ 또는 $x\ge 3\}$이므로

오른쪽 그림에서

$A-B=A\cap B^C=\{x\,|\,-1\le x\le 0\}$

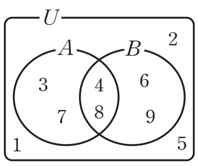


10 답 $\{3, 4, 7, 8\}$

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$A=\{3, 4, 7, 8\}$



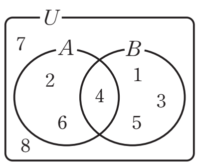
10-1 답 ④

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$B=\{1, 3, 4, 5\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

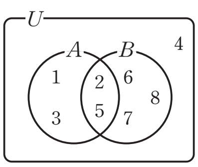
$1+3+4+5=13$



11 답 $\{2, 5, 6, 7, 8\}$

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$B=\{2, 5, 6, 7, 8\}$



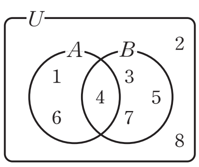
11-1 답 ③

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$

$A^C\cap B=B-A=\{3, 5, 7\}$

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$A=\{1, 4, 6\}$



따라서 집합 A의 모든 원소의 합은

$1+4+6=11$

12 답 $\{1, 3\}$

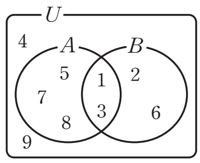
$U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$(A-B)^C\cap A$

$=\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}\cap\{1, 3, 5, 7, 8\}$

$=\{1, 3\}$



12-1 답 ③

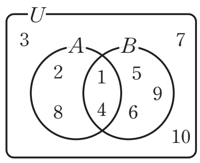
$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A=\{1, 2, 4, 8\}$

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

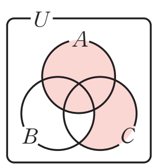
$B=\{1, 4, 5, 6, 9\}$

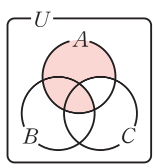
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

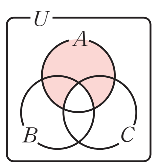
$1+4+5+6+9=25$

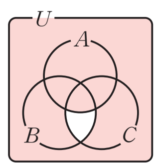


13 답 ③

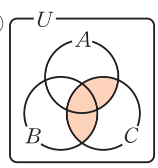
①


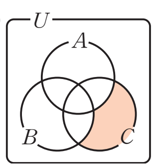
②


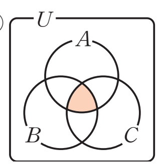
④


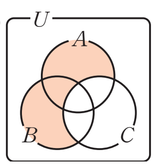
⑤


13-1 답 ②

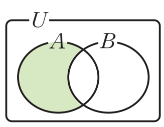
①


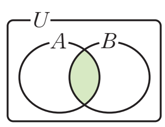
③


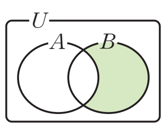
④


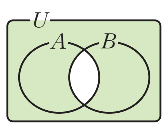
⑤


14 답 ③

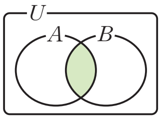
①


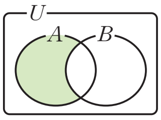
②


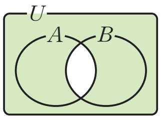
④


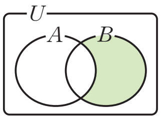
⑤


14-1 답 ⑤

①


②


③


④


15 답 2

$A\cap B=\{1\}$이므로 $1\in B$

(i) $a=1$일 때

$A=\{1, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 4\}$이므로 $A\cap B=\{1, 4\}$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+1=1$, 즉 $a=0$일 때

$A=\{0, 1, 4\}$, $B=\{0, 1, 3\}$이므로 $A\cap B=\{0, 1\}$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a+3=1$, 즉 $a=-2$일 때

$A=\{0, 1, 4\}$, $B=\{-2, -1, 1\}$이므로 $A\cap B=\{1\}$이 되어 조건을 만족시킨다.

(i)~(iii)에서 $a=-2$

따라서 $A\cup B=\{-2, -1, 0, 1, 4\}$이므로 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은

$-2+(-1)+0+1+4=2$

15-1 답 ①

$A\cap B=\{0, 2\}$이므로 $2\in B$

$a+1=2$ 또는 $a^2-2=2$ $\quad\therefore a=1$ 또는 $a^2=4$

(i) $a=1$일 때

$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{-1, 0, 2\}$이므로 $A\cap B=\{2\}$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a^2=4$, 즉 $a=-2$ 또는 $a=2$일 때

$a=-2$이면 $A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{-1, 0, 2\}$이므로

$A\cap B=\{0, 2\}$가 되어 조건을 만족시킨다.

$a=2$이면 $A=\{1, 4, 6\}$, $B=\{0, 2, 3\}$이므로

$A\cap B=\varnothing$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-2$이고 $B=\{-1, 0, 2\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$-1+0+2=1$

16 답 5

$A-B=\{3, 6\}$이므로 $6\in A$

$a^2+2=6$, $a^2=4$ $\quad\therefore a=-2$ 또는 $a=2$ …… ❶

(i) $a=-2$일 때

$A=\{2, 3, 6\}$, $B=\{-1, 1, b-1\}$

이때 $A\cap B=\{2\}$이므로

$b-1=2$ $\quad\therefore b=3$

(ii) $a=2$일 때

$A=\{2, 3, 6\}$, $B=\{1, 3, b-1\}$

이때 $A\cap B\neq\{2\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-2$, $b=3$ …… ❷

$\therefore b-a=3-(-2)=5$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ $a^2+2=6$임을 알고 a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ 조건을 만족시키는 a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	10%

16-1 답 2

$A-B=\{3\}$이므로 $3\in A$

$\therefore a=3$ 또는 $2a-1=3$

(i) $a=3$일 때

$A=\{0, 3, 5\}$, $B=\{1, 5, 7\}$이므로 $A-B=\{0, 3\}$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $2a-1=3$, 즉 $a=2$일 때

$A=\{0, 2, 3\}$, $B=\{0, 2, 5\}$이므로 $A-B=\{3\}$이 되어 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=2$

17 답 ③

$A\cup B=\{2, 5, 7, 9\}$이고 $B=\{2, 5, 2a-1\}$이므로

$2a-1=7$ 또는 $2a-1=9$

(i) $2a-1=7$, 즉 $a=4$일 때

$A=\{7, 9\}$, $B=\{2, 5, 7\}$이므로 $A\cup B=\{2, 5, 7, 9\}$가 되어 조건을 만족시킨다.

(ii) $2a-1=9$, 즉 $a=5$일 때

$A=\{8, 9\}$, $B=\{2, 5, 9\}$이므로 $A\cup B=\{2, 5, 8, 9\}$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=4$

17-1 답 ⑤

$A\cup B=\{3, 4, 5, 8\}$이고 $A=\{3, 5, a^2+4\}$이므로

$a^2+4=4$ 또는 $a^2+4=8$

(i) $a^2+4=4$일 때, $a^2=0$ $\quad\therefore a=0$

$A=\{3, 4, 5\}$, $B=\{0, 3, 8\}$이므로 $A\cup B=\{0, 3, 4, 5, 8\}$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a^2+4=8$일 때, $a^2=4$ $\quad\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

$a=-2$이면 $A=\{3, 5, 8\}$, $B=\{-4, 1, 8\}$이므로

$A\cup B=\{-4, 1, 3, 5, 8\}$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

$a=2$이면 $A=\{3, 5, 8\}$, $B=\{4, 5, 8\}$이므로

$A\cup B=\{3, 4, 5, 8\}$이 되어 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=2$

18 답 ⑤

① $U^C=\varnothing$이므로 $U^C\subset A$

② $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$이므로 $(A\cap\varnothing)\subset(A\cup\varnothing)$

③ $(A^C)^C=A$

④ $(A\cap B)\subset B$

⑤ $A\cap B^C=A-B$이고 $(A-B)\subset A$이므로 $(A\cap B^C)\subset A$

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

18-1 답 ⑤

① $U^C=\varnothing$이므로 $U^C\subset A$

② $U-B^C=U\cap(B^C)^C=U\cap B=B$

③ $(A\cap B)\subset A$, $(A\cap B)\subset B$이므로 $(A\cap B)\subset(A\cup B)$

④ $B\cup U=U$이므로 $A\cap(B\cup U)=A\cap U=A$
⑤ $A\cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 서로소이다.
 $\therefore B\subset A^C$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

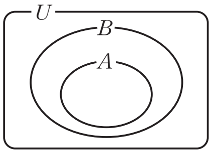
19 답 ③
① A와 A^C는 서로소이므로 $A\cap A^C=\varnothing$
② $A\subset(A\cup B)$
③ $U-B^C=U\cap(B^C)^C=U\cap B=B$
④ $A^C\cap B=B-A$
⑤ $A\cap(B\cup B^C)=A\cap U=A$
따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

19-1 답 ④
① B와 B^C는 서로소이므로 $B\cap B^C=\varnothing$
② $B\subset(A\cup B)$
③ $U-A^C=U\cap(A^C)^C=U\cap A=A$
④ $A-\varnothing^C=A\cap(\varnothing^C)^C=A\cap\varnothing=\varnothing$이므로
 $A-\varnothing^C\neq A\cap B$
⑤ $(A^C)^C=A$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

20 답 ④
① $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$
② $B-A^C=B\cap(A^C)^C=B\cap A=A\cap B$
③ $(U-A^C)\cap B=U\cap(A^C)^C\cap B=U\cap A\cap B=A\cap B$
④ $(U\cup A)\cap B^C=U\cap B^C=B^C$
⑤ $(A\cap B)\cup(B\cap B^C)=(A\cap B)\cup\varnothing=A\cap B$
따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

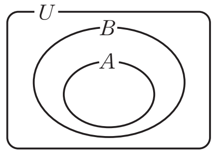
20-1 답 ③
① $B^C-A^C=B^C\cap(A^C)^C=B^C\cap A=A-B$
② $A\cap(U\cap B^C)=A\cap B^C=A-B$
③ $A\cap(U-B^C)=A\cap\{U\cap(B^C)^C\}$
 $=A\cap(U\cap B)$
 $=A\cap B$
④ $A\cap B^C=A-B$
⑤ $(A\cup B)-B=A-B$
따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

21 답 ②
$A\cup B=B$이므로 $A\subset B$
$A\subset B$를 만족시키는 두 집합 A, B의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



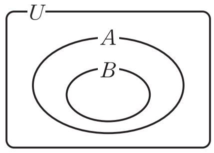
① $B\not\subset A^C$
② $A^C\cup B=U$
③ $B\cap A^C=B-A$에서 $A\subset B$이고 $A\neq B$이므로
 $B-A\neq\varnothing$
④ $B^C\subset A^C$
⑤ $A-B=\varnothing$
따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

21-1 답 ②, ④
$A\cup B=B$이므로 $A\subset B$
$A\subset B$를 만족시키는 두 집합 A, B의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



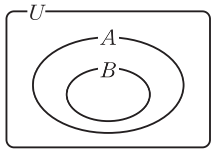
① $A\cap B=A$
② $A\cap B=A$이므로 $A\subset(A\cap B)$
③ $B-A\neq U$
④ $A\cup B=B$이므로 $(A\cup B)\subset B$
⑤ $A\cap B=A$이므로 $(A\cap B)\cup B=A\cup B=B$
따라서 항상 옳은 것은 ②, ④이다.

22 답 ④
$A^C\subset B^C$이므로 $B\subset A$
$B\subset A$를 만족시키는 두 집합 A, B의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



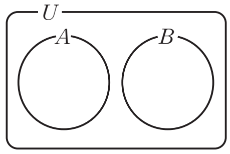
④ $A\not\subset B^C$

22-1 답 ⑤
$A\cap B=B$이므로 $B\subset A$
$B\subset A$를 만족시키는 두 집합 A, B의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



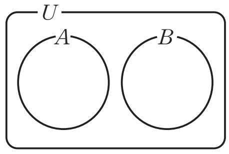
⑤ $A^C\subset(A-B)^C$

23 답 ①
$A\cap B=\varnothing$이므로 이를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $A\subset B^C$
ㄴ. $A\not\subset B$
ㄷ. $A-B=A$
ㄹ. $A\cup B\neq U$
따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

23-1 답 3
A, B가 서로소이므로 $A\cap B=\varnothing$
이를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $A-B=A$
ㄴ. $B-A=B$
ㄷ. $A\subset B^C$, $B\subset A^C$
ㄹ. $A\cap B^C=A-B=A$
ㅁ. $n(A\cap B)=n(\varnothing)=0$
ㅂ. $(A-B)\cup(B-A)=A\cup B\neq A$
따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이므로 그 개수는 3이다.

24 답 4
$(A-B)\cup X=X$이므로 $(A-B)\subset X$
$A\cup X=A$이므로 $X\subset A$
$\therefore (A-B)\subset X\subset A$

즉 $\{1, 3, 4\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$를 만족시키는 집합 X는 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중 1, 3, 4를 반드시 원소로 갖는 집합이다.
따라서 집합 X의 개수는
$2^{5-3}=2^2=4$

24-1 답 ④

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$
$A \cap X = A$이므로 $A \subset X$
$(B \cap A^C)-X=\varnothing$에서 $(B \cap A^C) \subset X$이므로
$(B-A) \subset X$
즉 $\{1, 2, 3\} \subset X$, $\{5, 7\} \subset X$를 만족시키는 집합 X는 전체집합 U의 부분집합 중 1, 2, 3, 5, 7을 반드시 원소로 갖는 집합이다.
따라서 집합 X의 개수는
$2^{10-5}=2^5=32$

25 답 ③

$U=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$
$\{1, 3, 5, 7\} \cup A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$을 만족시키려면 집합 A는 9, 11, 13을 반드시 원소로 가져야 한다.
따라서 집합 A의 개수는
$2^{7-3}=2^4=16$

25-1 답 7

$A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, $B=\{3, 5, 7\}$
$A \cap X = X$이므로 $X \subset A$
$B \cup X = X$이므로 $B \subset X$
$\therefore B \subset X \subset A$ ······❶
즉 $\{3, 5, 7\} \subset X \subset \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$을 만족시키는 집합 X는 $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$의 부분집합 중 3, 5, 7을 반드시 원소로 갖는 집합이다. ······❷
따라서 집합 X의 개수는
$2^{6-3}-1=2^3-1=7$ ($\because X \neq A$) ······❸

채점 기준	비율
❶ 세 집합 X, A, B 사이의 포함 관계를 구할 수 있다.	30%
❷ ❶을 만족시키는 집합 X의 조건을 구할 수 있다.	40%
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30%

26 답 64

U의 부분집합 C가 $\{1, 3, 5, 7, 9\} \cup C=\{3, 6, 9\} \cup C$를 만족시키려면 집합 C는 두 집합 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\{3, 6, 9\}$에서 공통인 원소 3, 9를 제외한 나머지 원소 1, 5, 6, 7을 반드시 원소로 가져야 한다.
따라서 집합 C의 개수는
$2^{10-4}=2^6=64$

26-1 답 8

U의 부분집합 C가 $\{1, 3, 5, 7\} \cup C=\{3, 6\} \cup C$를 만족시키려면 집합 C는 두 집합 $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{3, 6\}$에서 공통인 원소 3을 제외한 나머지 원소 1, 5, 6, 7을 반드시 원소로 가져야 한다.
따라서 집합 C의 개수는
$2^{7-4}=2^3=8$

27 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $(A \cap B^C) \cup B=(A \cup B) \cap (B^C \cup B)$
$=(A \cup B) \cap U$
$=A \cup B$
ㄴ. $(A \cup B)^C \cup (A^C \cap B)=(A^C \cap B^C) \cup (A^C \cap B)$
$=A^C \cap (B^C \cup B)$
$=A^C \cap U$
$=A^C$
ㄷ. $(A-B) \cup (A-C)=(A \cap B^C) \cup (A \cap C^C)$
$=A \cap (B^C \cup C^C)$
$=A \cap (B \cap C)^C$
$=A-(B \cap C)$
따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

27-1 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $A \cap (A \cap B)^C=A \cap (A^C \cup B^C)$
$=(A \cap A^C) \cup (A \cap B^C)$
$=\varnothing \cup (A \cap B^C)$
$=A \cap B^C$
$=A-B$
ㄴ. $(A-B)-C=(A \cap B^C) \cap C^C$
$=A \cap (B^C \cap C^C)$
$=A \cap (B \cup C)^C$
$=A-(B \cup C)$
ㄷ. $(A-B) \cup (A-B^C)=(A \cap B^C) \cup (A \cap B)$
$=A \cap (B^C \cup B)$
$=A \cap U$
$=A$
따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

28 답 ③

주어진 벤 다이어그램에서 두 집합 A, B의 포함 관계는
$B \subset A$이므로 $B-A=\varnothing$
$\therefore (A-B) \cup (B-A)=(A-B) \cup \varnothing$
$=A-B$

28-1 답 ⑤

$(A \cup B^C) \cap (A^C \cup B)$
$=\{(A \cup B^C) \cap A^C\} \cup \{(A \cup B^C) \cap B\}$
$=\{(A \cap A^C) \cup (B^C \cap A^C)\} \cup \{(A \cap B) \cup (B^C \cap B)\}$
$=\{\varnothing \cup (B^C \cap A^C)\} \cup \{(A \cap B) \cup \varnothing\}$
$=(B^C \cap A^C) \cup (A \cap B)$
이때 주어진 벤 다이어그램에서 두 집합 A, B의 포함 관계는
$A \subset B$이므로
$B^C \cap A^C=B^C$, $A \cap B=A$
$\therefore (A \cup B^C) \cap (A^C \cup B)=B^C \cup A=A \cup B^C$

다른 풀이

주어진 벤 다이어그램에서 두 집합 A, B의 포함 관계는
$A \subset B$이므로
$(A \cup B^C) \cap (A^C \cup B)=(A \cup B^C) \cap U$
$=A \cup B^C$

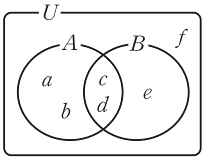
29 답 ④

$(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$

$=\{a, b, e\}$

이때 $A=\{a, b, c, d\}$이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore B=\{c, d, e\}$

29-1 답 ①

$(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)$

$=A\cap(B^C\cup C^C)$

$=A\cap(B\cap C)^C$

$=A-(B\cap C)$

이므로 $A-(B\cap C)=\{2, 3, 5, 7\}$

이때 $A=\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$이므로

$1\in(B\cap C)$, $9\in(B\cap C)$

따라서 반드시 집합 $B\cap C$의 원소인 것은 ①이다.

30 답 ②

$\{(A\cap B)\cup(A-B)\}\cap B$

$=\{(A\cap B)\cup(A\cap B^C)\}\cap B$

$=\{A\cap(B\cup B^C)\}\cap B$

$=(A\cap U)\cap B$

$=A\cap B$

즉 $A\cap B=B$이므로 $B\subset A$

① $A-B\neq A$

③ $A\cup B^C=U$

④ $A\cup B=A$

⑤ $U-B=B^C$

따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

30-1 답 ③

$\{(A-B)\cup(A\cap B)\}-B$

$=\{(A\cap B^C)\cup(A\cap B)\}-B$

$=\{A\cap(B^C\cup B)\}-B$

$=(A\cap U)-B$

$=A-B$

즉 $A-B=\varnothing$이므로 $A\subset B$

② $B-A\neq\varnothing$

④ $A\cup B=B$

⑤ $(A\cup B)^C=B^C$

따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

31 답 ②

$A\cup(A^C\cap B)=(A\cup A^C)\cap(A\cup B)$

$=U\cap(A\cup B)$

$=A\cup B$

즉 $A\cup B=B$이므로 $A\subset B$

따라서 두 집합 A, B의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 바르게 나타낸 것은 ②이다.

31-1 답 ①

$\{A\cap(A^C\cap B^C)^C\}\cup\{A\cap(A^C\cup B)\}$

$=\{A\cap(A\cup B)\}\cup\{(A\cap A^C)\cup(A\cap B)\}$

$=\{A\cap(A\cup B)\}\cup\{\varnothing\cup(A\cap B)\}$

$=\{A\cap(A\cup B)\}\cup(A\cap B)$

$=A\cup(A\cap B)$

$=A$

즉 $A\cup B=A$이므로 $B\subset A$

따라서 두 집합 A, B의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 바르게 나타낸 것은 ①이다.

32 답 16

$A_6\cap(A_3\cup A_5)=(A_6\cap A_3)\cup(A_6\cap A_5)$

$=A_6\cup A_{30}$

$=A_6$

전체집합 U의 원소 중 6의 배수는 16개이므로 구하는 원소의 개수는 16이다.

Lecture 배수와 약수의 집합

자연수 k에 대하여

(1) k의 배수의 집합을 A_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 배수이면

⇨ $A_m\subset A_n$ ⇨ $A_m\cap A_n=A_m$, $A_m\cup A_n=A_n$

(2) k의 약수의 집합을 B_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 약수이면

⇨ $B_m\subset B_n$ ⇨ $B_m\cap B_n=B_m$, $B_m\cup B_n=B_n$

32-1 답 33

$A_3\cup(A_6\cap A_9)=(A_3\cup A_6)\cap(A_3\cup A_9)$

$=A_3\cap A_3=A_3$

전체집합 U의 원소 중 3의 배수는 33개이므로 구하는 원소의 개수는 33이다.

33 답 ②

$(A_{12}\cup A_{24})\cap(A_{36}\cup A_{18})=\underbrace{A_{24}\cap A_{36}}_{\text{24와 36의 공약수의 집합}}$

$=A_{12}$

33-1 답 ④

$(A_{12}\cup A_{48})\cap(A_{48}\cup A_{32})=(A_{12}\cap A_{32})\cup A_{48}$

$A_{12}\cap A_{32}$는 12와 32의 공약수, 즉 4의 약수의 집합이므로

$A_{12}\cap A_{32}=A_4$

$\therefore (A_{12}\cup A_{48})\cap(A_{48}\cup A_{32})=A_4\cup A_{48}=A_{48}$ ($\because A_4\subset A_{48}$)

34 답 4

A_8을 포함하는 집합은 A_1, A_2, A_4, A_8이고 A_{12}를 포함하는 집합은 A_1, A_2, A_3, A_4, A_6, A_{12}이므로 $A_8\cup A_{12}$를 포함하는 집합은 A_2, A_4이다.

따라서 2보다 큰 자연수 n의 최댓값은 4이다.

34-1 답 112

$A_8\cap A_{28}$은 8과 28의 공배수, 즉 56의 배수의 집합이므로

$A_n\subset A_{56}$

즉 자연수 n은 56의 배수이다.

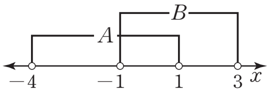
따라서 세 자리 자연수 n의 최솟값은 112이다.

35 답 ②

$x^2+3x-4<0$에서 $(x+4)(x-1)<0$ $\quad\therefore -4<x<1$

$\therefore A=\{x\mid -4<x<1\}$

$A\cap B=\{x\mid -1<x<1\}$, $A\cup B=\{x\mid -4<x<3\}$이려면 오른쪽 그림에서



$B=\{x\mid -1<x<3\}$

$\quad=\{x\mid (x+1)(x-3)<0\}$

$\quad=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$

따라서 $a=-2$, $b=-3$이므로

$a+b=-2+(-3)=-5$

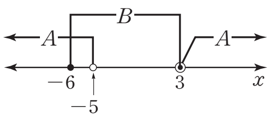
35-1 답 21

$x^2+2x-15>0$에서 $(x+5)(x-3)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>3$

$\therefore A=\{x\mid x<-5$ 또는 $x>3\}$

(가), (나)에서 $A\cup B=R$, $A\cap B=\{x\mid -6\le x<-5\}$이려면 오른쪽 그림에서



$B=\{x\mid -6\le x\le 3\}$

$\quad=\{x\mid (x+6)(x-3)\le 0\}$

$\quad=\{x\mid x^2+3x-18\le 0\}$

따라서 $a=3$, $b=-18$이므로

$a-b=3-(-18)=21$

36 답 $\{-3, -1, 2\}$

$x^2+x-6=0$에서 $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

$\therefore A=\{-3, 2\}$ ······❶

이때 $A-B=\{-3\}$이므로 $2\in B$

즉 방정식 $x^2+ax+2a=0$의 한 근이 2이므로

$4+2a+2a=0$, $4a=-4$ $\quad\therefore a=-1$

$\therefore B=\{x\mid x^2-x-2=0\}$

$x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$\therefore B=\{-1, 2\}$ ······❷

$\therefore A\cup B=\{-3, -1, 2\}$ ······❸

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 구할 수 있다.	30%
❷ 집합 B를 구할 수 있다.	50%
❸ 집합 $A\cup B$를 구할 수 있다.	20%

36-1 답 -2

$A\cap B=\{2\}$이므로 $2\in A$, $2\in B$

$2\in A$에서 $4+2a-6=0$ $\quad\therefore a=1$

$x^2+x-6=0$에서 $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$ $\quad\therefore A=\{-3, 2\}$

$2\in B$에서 $4+2b+2b=0$ $\quad\therefore b=-1$

$x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$ $\quad\therefore B=\{-1, 2\}$

$\therefore A\cup B=\{-3, -1, 2\}$

따라서 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은

$-3+(-1)+2=-2$

37 답 $1\le a\le 2$

$x^2-5x+6<0$에서 $(x-2)(x-3)<0$

$\therefore 2<x<3$

$\therefore A=\{x\mid 2<x<3\}$

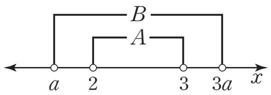
$x^2-4ax+3a^2<0$에서 $(x-a)(x-3a)<0$

$\therefore a<x<3a\ (\because a>0)$

$\therefore B=\{x\mid a<x<3a\}$

이때 $A\cap B=A$이므로 $A\subset B$

두 집합 A, B를 $A\subset B$가 성립하도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a\le 2$, $3a\ge 3$

$\therefore 1\le a\le 2$

37-1 답 5

$(x-1)(x-25)>0$에서 $x<1$ 또는 $x>25$

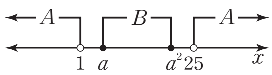
$\therefore A=\{x\mid x<1$ 또는 $x>25\}$

a는 정수이므로

$(x-a)(x-a^2)\le 0$에서 $a\le a^2$이므로 $a\le x\le a^2$

$\therefore B=\{x\mid a\le x\le a^2\}$

$A\cap B=\varnothing$이 되려면 오른쪽 그림에서 $a\ge 1$, $a^2\le 25$



이때 $a^2\le 25$에서 $-5\le a\le 5$이므로

a의 값의 범위는

$1\le a\le 5$

따라서 정수 a의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 개수는 5이다.

38 답 ⑤

$n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$이므로

$25=40-n(A\cap B)$ $\quad\therefore n(A\cap B)=15$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\quad=20+30-15=35$

38-1 답 16

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=12+8-6=14$

$\therefore n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$\quad=n(U)-n(A\cup B)$

$\quad=30-14=16$

39 답 9

주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수는 $n((A\cup B)^C)+n(A\cap B)$

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$\quad=40-36=4$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$36=18+23-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)=5$

따라서 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수는

$n((A\cup B)^C)+n(A\cap B)=4+5=9$

39-1 답 ⑤

주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수는 $n(X-Y)+n(Y-X)$

$n(X^C\cap Y^C)=n((X\cup Y)^C)=n(U)-n(X\cup Y)$이므로
$30=50-n(X\cup Y)$ $\quad\therefore n(X\cup Y)=20$
이때 $n(X\cup Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cap Y)$이므로
$20=12+13-n(X\cap Y)$
$\therefore n(X\cap Y)=5$
따라서 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수는
$n(X-Y)+n(Y-X)$
$=n(X)-n(X\cap Y)+n(Y)-n(X\cap Y)$
$=12-5+13-5$
$=15$

40 답 16

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=7+10-12=5$
$n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)$
$=10+6-16=0$
$n(C\cap A)=n(C)+n(A)-n(C\cup A)$
$=6+7-11=2$
이때 $n(B\cap C)=0$이므로 $B\cap C=\varnothing$
따라서 $A\cap B\cap C=\varnothing$이므로 $n(A\cap B\cap C)=0$
$\therefore n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=7+10+6-5-0-2+0$
$=16$

참고 $A\cap B=\varnothing$이면 $n(A\cap B)=0$이므로
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

40-1 답 2

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=21+18-30=9$
$n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)$
$=18+15-26=7$
$n(C\cap A)=n(C)+n(A)-n(C\cup A)$
$=15+21-36=0$
이때 $n(C\cap A)=0$이므로 $C\cap A=\varnothing$
즉 $A\cap B\cap C=\varnothing$이므로 $n(A\cap B\cap C)=0$
$\therefore n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=21+18+15-9-7-0+0$
$=38$
$\therefore n(A^C\cap B^C\cap C^C)=n((A\cup B\cup C)^C)$
$=n(U)-n(A\cup B\cup C)$
$=40-38$
$=2$

41 답 ③

학급 학생 전체의 집합을 U, 버스를 타고 등교하는 학생의 집합을 A, 지하철을 타고 등교하는 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=35,\ n(A)=22,\ n(B)=18,\ n(A^C\cap B^C)=10$
$\therefore n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A^C\cap B^C)$
$=35-10=25$
따라서 버스와 지하철을 모두 이용하여 등교하는 학생 수는
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=22+18-25=15$

41-1 답 12

고등학교 1학년 학생 40명의 집합을 U, 강아지를 키우는 학생의 집합을 A, 고양이를 키우는 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=40,\ n(A)=28,\ n(B)=19,\ n(A^C\cap B^C)=5$
$\therefore n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A^C\cap B^C)$
$=40-5=35$
따라서 강아지와 고양이를 모두 키우는 학생 수는
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=28+19-35=12$

42 답 6

학급 학생 전체의 집합을 U, 미술관을 희망하는 학생의 집합을 A, 박물관을 희망하는 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=30,\ n(A)=15,\ n(B)=19,\ n(A\cap B)=10$
$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=15+19-10=24$
따라서 어느 곳도 희망하지 않는 학생 수는
$n(A^C\cap B^C)=n(U)-n(A\cup B)$
$=30-24=6$

42-1 답 11

학교 학생 36명의 집합을 U, 현충원에서 봉사 활동을 경험한 학생의 집합을 A, 복지관에서 봉사 활동을 경험한 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=36,\ n(A)=21,\ n(B)=17,\ n(A\cap B)=13$ ······ ❶
$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=21+17-13=25$ ······ ❷
따라서 현충원과 복지관 중 어느 한 곳에서도 봉사 활동을 한 경험이 없는 학생 수는
$n(A^C\cap B^C)=n(U)-n(A\cup B)$
$=36-25=11$ ······ ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 집합으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ 현충원 또는 복지관에서 봉사 활동을 경험한 학생 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 현충원과 복지관 중 어느 한 곳에서도 봉사 활동을 한 경험이 없는 학생 수를 구할 수 있다.	30%

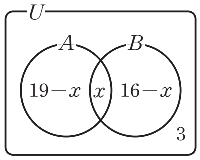
43 답 10

윤희네 반 학생 전체의 집합을 U, 수학경시대회에 출전하는 학생의 집합을 A, 과학경시대회에 출전하는 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=30,\ n(A)=11,\ n(A-B)=6,\ n(A^C\cap B^C)=14$
이때 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$이므로
$6=11-n(A\cap B)$ $\quad\therefore n(A\cap B)=5$

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^{C})$
$=n(U)-n(A^{C}\cap B^{C})$
$=30-14=16$
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로
$16=11+n(B)-5$　　$\therefore n(B)=10$
따라서 과학경시대회에 출전하는 학생 수는 10이다.

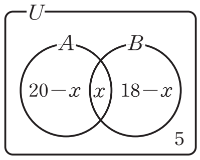
43-1 답 20
철수네 반 학생 40명의 집합을 U, 로맨틱 코미디 영화를 선호하는 학생의 집합을 A, 액션 영화를 선호하는 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=40, n(A)=24, n(A-B)=6, n(A^{C}\cap B^{C})=14$
이때 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$이므로
$6=24-n(A\cap B)$　　$\therefore n(A\cap B)=18$
$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^{C})$
$=n(U)-n(A^{C}\cap B^{C})$
$=40-14=26$
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로
$26=24+n(B)-18$　　$\therefore n(B)=20$
따라서 철수네 반에서 액션 영화를 선호하는 학생 수는 20이다.

44 답 28
지열이네 반 학생 전체의 집합을 U, 일손 돕기 활동에 참가한 학생의 집합을 A, 캠페인 활동에 참가한 학생의 집합을 B라 하면
$n(A)=19, n(B)=16, n(A^{C}\cap B^{C})=3$
오른쪽 그림과 같이 $n(A\cap B)=x$라 하면



$n(A-B)=19-x$,
$n(B-A)=16-x$
이때 $n((A-B)\cup(B-A))=15$이므로
$19-x+16-x=15, 35-2x=15$
$\therefore x=10$
따라서 이 학급의 전체 학생 수는
$9+10+6+3=28$

44-1 답 38
어느 반 학생 전체의 집합을 U, 영어를 신청한 학생의 집합을 A, 수학을 신청한 학생의 집합을 B라 하면
$n(A)=20, n(B)=18, n(A^{C}\cap B^{C})=5$
오른쪽 그림과 같이 $n(A\cap B)=x$라 하면

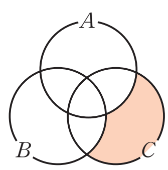


$n(A-B)=20-x$,
$n(B-A)=18-x$
이때 $n((A-B)\cup(B-A))=28$이므로
$20-x+18-x=28, 38-2x=28$
$\therefore x=5$
따라서 이 학급의 전체 학생 수는
$15+5+13+5=38$

45 답 12
동아리 회원 전체의 집합을 U, 기타, 드럼, 키보드를 연주할 수 있는 회원의 집합을 각각 A, B, C라 하면
$n(U)=40, n(A)=21, n(B)=18, n(C)=25$,
$n(A\cap B\cap C)=6$
모든 회원은 세 악기 중 적어도 한 악기는 연주할 수 있으므로
$n(A\cup B\cup C)=n(U)=40$
세 악기 중 두 악기만 연주할 수 있는 회원 수는
$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3\times n(A\cap B\cap C)$
……㉠
이때
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
이므로
$40=21+18+25-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+6$
$\therefore n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=30$
따라서 ㉠에서 구하는 회원 수는
$30-3\times 6=12$

45-1 답 15
어느 반 학생 전체의 집합을 U, 체육, 봉사, 예술 동아리에 가입한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면
$n(U)=30, n(A)=19, n(B)=16, n(C)=20$,
$n(A\cap B\cap C)=5$
학생 모두 세 동아리 중 적어도 한 동아리에 가입하였으므로
$n(A\cup B\cup C)=n(U)=30$
두 동아리에만 가입한 학생 수는
$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3\times n(A\cap B\cap C)$
……㉠
이때
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
이므로
$30=19+16+20-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+5$
$\therefore n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=30$
따라서 ㉠에서 구하는 학생 수는
$30-3\times 5=15$

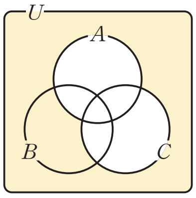
46 답 13
학급 학생 34명의 집합을 U, 축구, 배구, 농구 경기에 참가한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면 ㈎, ㈏에서
$n(U)=34, n(A)=16, n(B)=14, n(A\cap B)=9$
$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=16+14-9$
$=21$
㈐에서 $n(A\cup B\cup C)=n(U)$이므로
$n(A\cup B\cup C)=34$
따라서 농구 경기에만 참가한 학생은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같으므로 그 학생 수는



$n(A\cup B\cup C)-n(A\cup B)=34-21$
$=13$

46-1 답 68
어느 고등학교 학생 전체의 집합을 U, 가우스, 오일러, 페르마를 좋아하는 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면 ㈎에서
$n(U)=120, n(A)=50, n(C)=70$

(나)를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$n(A\cup C)=n(U)-40=120-40=80$

$\therefore n(A\cap C)$

$=n(A)+n(C)-n(A\cup C)$

$=50+70-80=40$

$\therefore m=40$

(다)에서 오일러만 좋아하는 학생은 12명이므로

$n(A^C\cap B^C\cap C^C)=40-12=28 \qquad \therefore n=28$

$\therefore m+n=40+28=68$

유형+ 완성하기 p. 161

47 답 ②

① $A※\varnothing=(A\cup\varnothing)^C\cup(A\cap\varnothing)$

$=A^C\cup\varnothing$

$=A^C$

② $A※U=(A\cup U)^C\cup(A\cap U)$

$=U^C\cup A$

$=\varnothing\cup A=A$

③ $A※A^C=(A\cup A^C)^C\cup(A\cap A^C)$

$=U^C\cup\varnothing$

$=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$

④ $A※B=(A\cup B)^C\cup(A\cap B)$

$=(B\cup A)^C\cup(B\cap A)$

$=B※A$

⑤ $A※B^C=(A\cup B^C)^C\cup(A\cap B^C)$

$=(A^C\cap B)\cup(A^C\cup B)^C$

$=(A^C\cup B)^C\cup(A^C\cap B)$

$=A^C※B$

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

48 답 8

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 20\}$, $A=\{2, 4, 6, \cdots, 20\}$,

$B=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $C=\{5, 10, 15, 20\}$이므로

$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$

$=\{2, 4, 8, 10, 14, 16, 20\}\cup\{3, 9, 15\}$

$=\{2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 20\}$

$\therefore (A\triangle B)\triangle C=\{(A\triangle B)-C)\}\cup\{(C-(A\triangle B)\}$

$=\{2, 3, 4, 8, 9, 14, 16\}\cup\{5\}$

$=\{2, 3, 4, 5, 8, 9, 14, 16\}$

따라서 집합 $(A\triangle B)\triangle C$의 원소의 개수는 8이다.

49 답 ②

$A\Diamond B=(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)$

$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

$=(A-B)\cup(B-A)$

이때 $A\Diamond B=\varnothing$이므로 $A=B$

$\therefore B=\{1, 2, 3, 4\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$1+2+3+4=10$

50 답 43

(i) $n(A\cap B)$가 최대인 경우

$n(A\cup B)$가 최소일 때, 즉 $A\subset B$일 때이므로

$n(A\cap B)=n(A)=25$

$\therefore M=25$

(ii) $n(A\cap B)$가 최소인 경우

$n(A\cup B)$가 최대일 때, 즉 $A\cup B=U$일 때이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=n(A)+n(B)-n(U)$

$=25+33-40$

$=18$

$\therefore m=18$

(i), (ii)에서 $M+m=25+18=43$

51 답 17

(i) $n(A\cup B)$가 최대인 경우

$n(A\cap B)$가 최소일 때이므로

$n(A\cap B)\geq 2$에서 $n(A\cap B)=2$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=7+5-2$

$=10$ ······❶

(ii) $n(A\cup B)$가 최소인 경우

$n(A\cap B)$가 최대일 때, 즉 $B\subset A$일 때이므로

$n(A\cup B)=n(A)=7$ ······❷

(i), (ii)에서 $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$10+7=17$ ······❸

채점 기준	비율
❶ $n(A\cup B)$의 최댓값을 구할 수 있다.	40%
❷ $n(A\cup B)$의 최솟값을 구할 수 있다.	40%
❸ $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	20%

52 답 33

어느 학급의 학생 전체의 집합을 U, 여가 시간에 컴퓨터를 하는 학생의 집합을 A, TV를 보는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=50$, $n(A)=17$, $n(B)=25$, $n(A^C\cap B^C)=a$

$\therefore a=n(A^C\cap B^C)$

$=n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B)$

$=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$

$=50-17-25+n(A\cap B)$

$=8+n(A\cap B)$

이때 a의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면

(i) $n(A\cap B)$가 최대인 경우

$n(A\cup B)$가 최소일 때, 즉 $A\subset B$일 때이므로

$n(A\cap B)=n(A)=17$

$\therefore M=8+17=25$

(ii) $n(A\cap B)$가 최소인 경우

$A\cap B=\varnothing$일 때이므로 $n(A\cap B)=0$

$\therefore\ m=8+0=8$

(i), (ii)에서 $M+m=25+8=33$

참고 (ii)에서 $n(A)+n(B)=17+25=42$이므로
$n(A)+n(B)<n(U)$
따라서 $n(A\cap B)$가 최소인 경우는 $A\cap B=\varnothing$일 때이다.

학교 시험 대비 문제

p. 162~165

01 답 5

$A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 3, 9, 27\}$, $C=\{1, 2, 4, 8\}$이므로

$A\cap(B\cup C)=\{2, 3, 5, 7\}\cap\{1, 2, 3, 4, 8, 9, 27\}$

$=\{2, 3\}$

따라서 집합 $A\cap(B\cup C)$의 모든 원소의 합은

$2+3=5$

02 답 ⑤

$A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

집합 B와 서로소인 집합은 집합 A의 부분집합 중 집합 B의 원소를 포함하지 않는 집합이다.

집합 B의 원소의 개수를 n이라 하면

$2^{10-n}=32=2^5$에서 $10-n=5$

$\therefore\ n=5$

따라서 집합 B의 원소의 개수는 5이다.

03 답 ③

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$, $A=\{3, 5, 7, 9\}$, $B=\{3, 6, 9\}$, $C=\{4, 8\}$이므로

$A-B=\{3, 5, 7, 9\}-\{3, 6, 9\}=\{5, 7\}$

$B^C\cap C=\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}\cap\{4, 8\}=\{4, 8\}$

$\therefore\ (A-B)\cup(B^C\cap C)=\{5, 7\}\cup\{4, 8\}=\{4, 5, 7, 8\}$

따라서 집합 $(A-B)\cup(B^C\cap C)$의 모든 원소의 합은

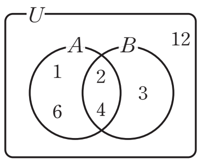
$4+5+7+8=24$

04 답 9

$U=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $A\cap B^C=A-B=\{1, 6\}$,

$B-A=\{3\}$, $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{12\}$

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

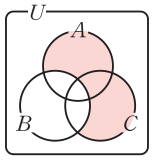


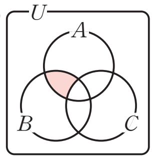
$B=\{2, 3, 4\}$

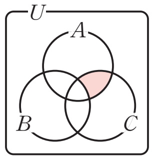
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

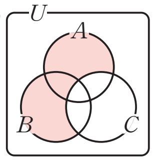
$2+3+4=9$

05 답 ①

②


③


④


⑤


06 답 14

$A\cap B=\{3, 5\}$이므로 $5\in A$

$a^2-5a-1=5$, $a^2-5a-6=0$

$(a+1)(a-6)=0 \qquad \therefore\ a=-1$ 또는 $a=6$

(i) $a=-1$일 때

$A=\{3, 4, 5\}$, $B=\{2, 3, 5\}$이므로 $A\cap B=\{3, 5\}$가 되어 조건을 만족시킨다.

(ii) $a=6$일 때

$A=\{3, 4, 5\}$, $B=\{9, 10, 12\}$이므로 $A\cap B=\varnothing$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-1$

따라서 $A\cup B=\{2, 3, 4, 5\}$이므로 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은

$2+3+4+5=14$

07 답 ④

①, ② $A\cap B^C=A-B$

③ $B^C-A^C=B^C\cap(A^C)^C=B^C\cap A=A-B$

④ $B-A^C=B\cap(A^C)^C=B\cap A$

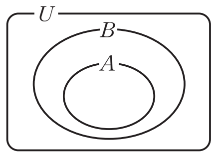
⑤ $A\cap(U-B)=A\cap B^C=A-B$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

08 답 ②, ④

$A\cup B=B$이므로 $A\subset B$

$A\subset B$를 만족시키는 두 집합 A, B의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $A\cap B=A$

② $A\cap B=A$이므로 $A\subset(A\cap B)$

③ $B-A\neq U$

④ $A\cup B=B$이므로 $(A\cup B)\subset B$

⑤ $A\cap B=A$이므로 $(A\cap B)\cup B=A\cup B=B$

따라서 옳은 것은 ②, ④이다.

09 답 -1

$A\cap B^C=\varnothing$이면 $A\subset B$이므로 $6\in B$

$a^2+a=6$, $a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0 \qquad \therefore\ a=-3$ 또는 $a=2$

(i) $a=-3$일 때

$A=\{3, 6\}$, $B=\{3, 6, 8\}$이므로 $A\subset B$

(ii) $a=2$일 때

$A=\{6, 8\}$, $B=\{3, 6, 8\}$이므로 $A\subset B$

(i), (ii)에서 $a=-3$ 또는 $a=2$
따라서 모든 상수 a의 값의 합은
$-3+2=-1$

10 답 16

$A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A\cap X=A$이므로 $A\subset X$
$B\cup X=B$이므로 $X\subset B$
$\therefore A\subset X\subset B$
즉 $\{0, 1, 2\}\subset X\subset\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$을 만족시키는 집합 X는 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분집합 중 0, 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합이다.
따라서 집합 X의 개수는
$2^{7-3}=2^4=16$

11 답 16

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$
(가)에서 $A\cap X=A$이므로 $A\subset X$
$\therefore \{1, 2, 3, 4\}\subset X$ ······㉠
(나)에서 $(B-A)\cap X=\{7\}$이므로
$\{5, 7\}\cap X=\{7\}$
$\therefore 5\notin X$, $7\in X$ ······㉡
㉠, ㉡에서 집합 X는 전체집합 U의 부분집합 중 1, 2, 3, 4, 7을 반드시 원소로 갖고 5를 원소로 갖지 않는 집합이다.
따라서 집합 X의 개수는
$2^{10-5-1}=2^4=16$

12 답 ④

$$\begin{aligned}A\cup(A^C\cap B)&=(A\cup A^C)\cap(A\cup B)\\&=U\cap(A\cup B)\\&=A\cup B\end{aligned}$$
① $(A\cap B)\subset A$이므로 $A\cup(A\cap B)=A$
② $B\subset(A\cup B)$이므로 $(A\cup B)\cap B=B$
③ $$\begin{aligned}A-(A\cap B)&=A\cap(A\cap B)^C\\&=A\cap(A^C\cup B^C)\\&=(A\cap A^C)\cup(A\cap B^C)\\&=\varnothing\cup(A\cap B^C)\\&=A-B\end{aligned}$$
④ $$\begin{aligned}(A-B)\cup B&=(A\cap B^C)\cup B\\&=(A\cup B)\cap(B^C\cup B)\\&=(A\cup B)\cap U\\&=A\cup B\end{aligned}$$
⑤ $$\begin{aligned}(A\cup B^C)\cap B&=(A\cap B)\cup(B^C\cap B)\\&=(A\cap B)\cup\varnothing\\&=A\cap B\end{aligned}$$
따라서 구하는 집합은 ④이다.

13 답 ③

ㄱ. $$\begin{aligned}A\cup(A\cap B)^C&=A\cup(A^C\cup B^C)\\&=(A\cup A^C)\cup B^C\\&=U\cup B^C\\&=U\end{aligned}$$
ㄴ. $$\begin{aligned}A^C\cup(B\cap C)^C&=A^C\cup(B^C\cup C^C)\\&=A^C\cup B^C\cup C^C\\&=(A\cap B\cap C)^C\\&=U-(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$
ㄷ. $$\begin{aligned}(A\cup B)\cap(A\cup B^C)&=A\cup(B\cap B^C)\\&=A\cup\varnothing=A\end{aligned}$$
ㄹ. $$\begin{aligned}A-(B-C)&=A\cap(B\cap C^C)^C\\&=A\cap(B^C\cup C)\\&=(A\cap B^C)\cup(A\cap C)\\&=(A-B)\cup(A\cap C)\end{aligned}$$
따라서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

14 답 ①

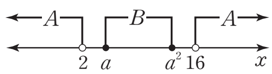
$\{A\cup(A^C\cup B^C)^C\}\cap\{C\cup(A-C)\}$
$=\{A\cup(A\cap B)\}\cap\{C\cup(A\cap C^C)\}$
$=A\cap\{(C\cup A)\cap(C\cup C^C)\}$
$=A\cap\{(C\cup A)\cap U\}$
$=A\cap(C\cup A)$
$=A$
즉 $A\cup B=A$이므로 $B\subset A$
② $A-B\neq\varnothing$
③, ④ $A\cup B=A$
⑤ $A^C\cup B\neq U$
따라서 항상 옳은 것은 ①이다.

15 답 ③

$A_2\cap A_5$는 2와 5의 공배수, 즉 10의 양의 배수의 집합이므로
$A_m\subset A_{10}$
즉 자연수 m은 10의 배수이므로 최솟값은 10이다.
$A_6\cup A_{12}$는 6의 양의 배수의 집합이므로
$A_6\subset A_n$
즉 자연수 n은 6의 약수이므로 최댓값은 6이다.
따라서 m의 최솟값과 n의 최댓값의 합은
$10+6=16$

16 답 ②

$(x-2)(x-16)>0$에서 $x<2$ 또는 $x>16$
$\therefore A=\{x\,|\,x<2$ 또는 $x>16\}$
$(x-a)(x-a^2)\le 0$에서 a는 자연수이므로 $a\le x\le a^2$
$\therefore B=\{x\,|\,a\le x\le a^2\}$
$A\subset B^C$이므로 $A\cap B=\varnothing$
$A\cap B=\varnothing$이 되려면 오른쪽 그림에서 $a\ge 2$, $a^2\le 16$



$a^2\le 16$에서 $-4\le a\le 4$이므로
a의 값의 범위는 $2\le a\le 4$
따라서 자연수 a의 값은 2, 3, 4이므로 그 개수는 3이다.

17 답 23

$A\cap B^C=A-B=A$이므로
$A\cap B=\varnothing$ $\quad\therefore n(A\cap B)=0$
$$\begin{aligned}\therefore n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=9+14-0=23\end{aligned}$$

18 답 12

주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수는 $n((A\cup B)^C)$

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$이므로

$4=18-n(A\cap B)$ $\quad\therefore n(A\cap B)=14$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=18+20-14=24$

따라서 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수는

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=36-24=12$

19 답 4

어느 반 학생 전체의 집합을 U, 판타지 영화를 선호하는 학생의 집합을 A, 공포 영화를 선호하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=40,\ n(A)=24,\ n(B)=22,\ n(A^C\cap B^C)=12$

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A^C\cap B^C)$

$=40-12=28$

따라서 공포 영화만 선호하는 학생 수는

$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$

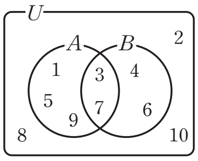
$=28-24=4$

20 답 ①

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\},\ A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

$A\triangle B=(A\cap B)\cup(A\cup B)^C=\{2, 3, 7, 8, 10\}$

이때 $A\cap B=\{3, 7\}$이므로 두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $B=\{3, 4, 6, 7\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$3+4+6+7=20$

21 답 ⑤

(i) $n(A\cup B)$가 최대인 경우

$n(A\cap B)$가 최소일 때이므로

$n(A\cap B)\geq 16$에서 $n(A\cap B)=16$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=31+27-16=42$

(ii) $n(A\cup B)$가 최소인 경우

$n(A\cap B)$가 최대일 때, 즉 $B\subset A$일 때이므로

$n(A\cup B)=n(A)=31$

(i), (ii)에서 $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 합은

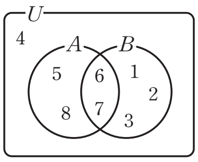
$42+31=73$

서술형 1 답 26

$A^C\cap B=B-A=\{1, 2, 3\}$

$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$ ······❶

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$A=\{5, 6, 7, 8\}$ ······❷

따라서 집합 A의 모든 원소의 합은

$5+6+7+8=26$ ······❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 변형할 수 있다.	40%
❷ 집합 A를 구할 수 있다.	40%
❸ 집합 A의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20%

서술형 2 답 $\{1, 2, 4, 6\}$

$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=\{1, 3, 5, 7\}$이므로

$A\cap B=\{2, 4, 6\}$ ······㉠ ······❶

$\{(A\cup B)\cap(A\cup B^C)\}\cap\{(A^C\cap B^C)\cup(A-B)\}$

$=\{A\cup(B\cap B^C)\}\cap\{(A^C\cap B^C)\cup(A\cap B^C)\}$

$=(A\cup\varnothing)\cap\{(A^C\cup A)\cap B^C\}$

$=A\cap(U\cap B^C)$

$=A\cap B^C$

$=A-B$ ······❷

$\therefore A-B=\{1\}$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $A=\{1, 2, 4, 6\}$ ······❸

채점 기준	비율
❶ 집합 $A\cap B$를 구할 수 있다.	30%
❷ $\{(A\cup B)\cap(A\cup B^C)\}\cap\{(A^C\cap B^C)\cup(A-B)\}$를 간단히 할 수 있다.	40%
❸ 집합 A를 구할 수 있다.	30%

서술형 3 답 37

어느 학급의 학생 전체의 집합을 U, 야구를 좋아하는 학생의 집합을 A, 축구를 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=35,\ n(A)=28,\ n(B)=22$

이때 야구와 축구를 모두 좋아하는 학생 수는 $n(A\cap B)$

(i) $n(A\cap B)$가 최대인 경우

$n(A\cup B)$가 최소일 때, 즉 $B\subset A$일 때이므로

$n(A\cap B)=n(B)=22$ $\quad\therefore M=22$ ······❶

(ii) $n(A\cap B)$가 최소인 경우

$n(A\cup B)$가 최대일 때, 즉 $A\cup B=U$일 때이므로

$n(A\cup B)=n(U)=35$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$35=28+22-n(A\cap B)$ $\quad\therefore n(A\cap B)=15$

$\therefore m=15$ ······❷

(i), (ii)에서 $M+m=22+15=37$ ······❸

채점 기준	비율
❶ M의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ m의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	20%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 166~167

01 답 ③

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$

(가)에서 $A-X=\varnothing$이므로 $A\subset X$

(나)에서 $B\cap X=\varnothing$이므로 $X\subset B^C$

$\therefore A \subset X \subset B^C$

즉 $\{1, 2, 3\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10\}$을 만족시키는 집합 X는 $\{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10\}$의 부분집합 중 1, 2, 3을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{7-3}=2^4=16$

02 답 16

$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$이므로

$A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B=\{2, 3\}$

$\therefore P=(A \cup B) \cap (A \cap B)^C$

$=(A \cup B)-(A \cap B)$

$=\{1, 4, 5\}$

즉 $\{1, 4, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$을 만족시키는 집합 X는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중 1, 4, 5를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{7-3}=2^4=16$

03 답 ③

$(X-A) \subset (A-X)$이므로

$(X-A) \cap (A-X)=X-A$

$(X-A) \cap (A-X)=(X \cap A^C) \cap (A \cap X^C)$

$=(A \cap A^C) \cap (X \cap X^C)$

$=\varnothing$

즉 $X-A=\varnothing$이므로 $X \subset A$

이때 $A=\{1, 2, 5, 10\}$이므로 $n(A)=4$

따라서 집합 X의 개수는 집합 A의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^4=16$

04 답 ②

수강생 전체의 집합을 U, 세 자격증 A, B, C를 취득한 수강생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(U)=35$, $n(A)=21$, $n(B)=18$, $n(C)=15$,

$n((A \cup B \cup C)^C)=3$, $n(A \cap B \cap C)=0$

$\therefore n(A \cup B \cup C)=n(U)-n((A \cup B \cup C)^C)$

$=35-3$

$=32$

자격증 A, B, C 중에서 두 종류의 자격증만 취득한 수강생의 수는

$n(A \cap B)+n(B \cap C)+n(C \cap A)$ ($\because n(A \cap B \cap C)=0$)

이때

$n(A \cup B \cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)$
$-n(B \cap C)-n(C \cap A)+n(A \cap B \cap C)$

이므로 $32=21+18+15-n(A \cap B)-n(B \cap C)-n(C \cap A)$

$\therefore n(A \cap B)+n(B \cap C)+n(C \cap A)=22$

따라서 자격증 A, B, C 중에서 두 종류의 자격증만 취득한 수강생의 수는 22이다.

05 답 127

(나)에서 $X \cap B=\varnothing$이므로 집합 X의 모든 원소는 50과 서로소가 아니고, $50=2 \times 5^2$이므로 집합 X의 모든 원소는 2 또는 5의 배수이다.

(다)에서 $12=2^2 \times 3$이므로 집합 X의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.

즉 집합 X의 모든 원소는 100 이하의 5의 배수 중에서 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 자연수이므로 집합 X의 원소가 될 수 있는 수는

5, 25, 35, 55, 65, 85, 95

이때 (가)에서 $X \neq \varnothing$이므로 집합 X는 $\{5, 25, 35, 55, 65, 85, 95\}$의 부분집합 중 공집합이 아닌 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^7-1=127$

06 답 432

(가)에서 $A \cap B=\{4, 6\}$이므로 $A=\{4, 6, a, b\}$ (a, b는 자연수)라 하면 집합 A의 모든 원소의 합이 21이므로

$4+6+a+b=21 \qquad \therefore a+b=11$ ······㉠

$B=\{x+k \mid x \in A\}$이므로 $B=\{4+k, 6+k, a+k, b+k\}$

(나)에서 $A \cup B$의 모든 원소의 합이 40이므로

($A \cup B$의 모든 원소의 합)

$=$(A의 모든 원소의 합)$+$(B의 모든 원소의 합)
$-$($A \cap B$의 모든 원소의 합)

$40=21+(21+4k)-10$

$40=4k+32 \qquad \therefore k=2$

즉 $B=\{6, 8, a+2, b+2\}$이고 $A \cap B=\{4, 6\}$이므로 $4 \in B$이어야 한다.

(i) $a+2=4$, 즉 $a=2$일 때

㉠에서 $b=9$

(ii) $b+2=4$, 즉 $b=2$일 때

㉠에서 $a=9$

(i), (ii)에서 $A=\{2, 4, 6, 9\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 곱은

$2 \times 4 \times 6 \times 9=432$

07 답 22

(가)에서 집합 $B-A$의 모든 원소의 합을 k라 하면 집합 $A \cup B^C$의 모든 원소의 합은 $6k$이다.

$A \cup B^C=(A^C \cap B)^C=(B-A)^C$이므로 전체집합 U의 모든 원소의 합은 $k+6k=7k$

$7k=1+2+4+8+16+32 \qquad \therefore k=9$

즉 집합 $B-A$의 모든 원소의 합이 9이므로

$B-A=\{1, 8\}$

이때 $A \cap (B-A)=\varnothing$이므로 $A \subset (B-A)^C$

$\therefore A \subset \{2, 4, 16, 32\}$ ······㉠

또 $A \cup B=A \cup (B-A)$이므로

$n(A \cup B)=n(A)+n(B-A)$

(나)에서 $n(A \cup B)=5$이므로

$5=n(A)+2 \qquad \therefore n(A)=3$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $A=\{2, 4, 16\}$일 때, 집합 A의 모든 원소의 합이 최소이므로 집합 A의 모든 원소의 합의 최솟값은

$2+4+16=22$

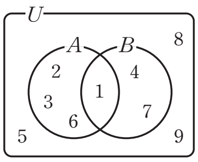
08 답 ⑤

(가)에서 $A \cup B^C=(A^C \cap B)^C=(B-A)^C$이므로

$n(A \cup B^C)=n((B-A)^C)=7$

또 $B-A=\{4, 7\}$이므로 $n(B-A)=2$

이때 $(B-A)\cup(B-A)^{C}=U$, $(B-A)\cap(B-A)^{C}=\varnothing$
이므로
$n(U)=n(B-A)+n((B-A)^{C})=2+7=9$
$\therefore k=9$
$\therefore U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
집합 $B-A$의 모든 원소의 합이 11이고 (나)에서 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합이 서로 같으므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합도 11이다.
즉 자연수 m은 4와 7 중 어느 수도 약수로 갖지 않고 모든 약수의 합이 11 이상이어야 하므로 m이 될 수 있는 수는 6 또는 9이다.
(i) $m=6$일 때
$A=\{1, 2, 3, 6\}$
이때 $A-B=\{2, 3, 6\}$이면 집합 $A-B$의 모든 원소의 합이 11이므로 주어진 조건을 만족시킨다.
(ii) $m=9$일 때
$A=\{1, 3, 9\}$
그런데 모든 원소의 합이 11인 집합 $A-B$는 존재하지 않는다.
(i), (ii)에서 $m=6$
즉 $B=\{1, 4, 7\}$이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



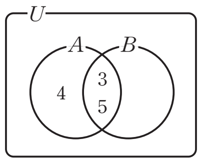
$\therefore A^{C}\cap B^{C}=(A\cup B)^{C}=\{5, 8, 9\}$
따라서 집합 $A^{C}\cap B^{C}$의 모든 원소의 합은
$5+8+9=22$

09 답 ③

ㄱ. $A\cap B=\{2, 5\}$이면 $2\in A$, $5\in A$
2와 5가 k의 양의 약수이려면 k는 10의 배수이면서 18 이하의 자연수이어야 하므로
$k=10$
ㄴ. $A\cap B=\{5, 6\}$이면 $5\in A$, $6\in A$
5와 6이 k의 양의 약수이려면 k는 30의 배수이면서 18 이하의 자연수이어야 하므로 조건을 만족시키는 자연수 k는 존재하지 않는다.
ㄷ. (i) $A\cap B=\{2, 5\}$일 때
$k=10$이므로 $A=\{1, 2, 5, 10\}$
즉 집합 $A-B=\{1, 10\}$이므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은
$1+10=11$
(ii) $A\cap B=\{2, 6\}$일 때, $2\in A$, $6\in A$
2와 6이 k의 양의 약수이려면 k는 6의 배수이면서 18 이하의 자연수이어야 하므로
$k=6$ 또는 $k=12$ 또는 $k=18$
$k=6$일 때, $A=\{1, 2, 3, 6\}$이므로 $A-B=\{1, 3\}$
즉 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은
$1+3=4$
$k=12$일 때, $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로
$A-B=\{1, 3, 4, 12\}$
즉 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은
$1+3+4+12=20$
$k=18$일 때, $A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$이므로
$A-B=\{1, 3, 9, 18\}$
즉 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은
$1+3+9+18=31$
(i), (ii)에서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합이 홀수가 되는 모든 k의 값은 10, 18이므로 그 합은
$10+18=28$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

10 답 11

(가)에서 $A\cap(A^{C}\cup B^{C})=\{4\}$이므로
$A\cap(A^{C}\cup B^{C})=(A\cap A^{C})\cup(A\cap B^{C})$
$=\varnothing\cup(A\cap B^{C})$
$=A\cap B^{C}$
$=A-B$
즉 $A-B=\{4\}$이므로 $A\cap B=A-(A-B)=\{3, 5\}$
이때 $A^{C}\cup B^{C}=(A\cap B)^{C}$이므로 $(A\cap B)^{C}=\{1, 2, 4\}$
$\therefore U=(A\cap B)\cup(A\cap B)^{C}$
$=\{3, 5\}\cup\{1, 2, 4\}$
$=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$4\notin B$, $3\in B$, $5\in B$
(나)에서
$(A\cup X)-B=(A\cup X)\cap B^{C}$
$=(A\cap B^{C})\cup(X\cap B^{C})$
$=\{4\}\cup(X-B)$
이때 집합 $(A\cup X)-B$의 원소의 개수가 1이므로
$X-B=\varnothing$ 또는 $X-B=\{4\}$
한편 $X\subset U$이고 $n(X)=1$이므로 집합 X가 될 수 있는 것은 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$
(i) $X\neq\{4\}$일 때
$X-B=\varnothing$이어야 하므로 $B=\{1, 2, 3, 5\}$
(ii) $X=\{4\}$일 때
$4\in(A-B)$, 즉 $4\notin B$이므로 집합 B에 관계없이 $X-B=\{4\}$가 항상 성립한다.
(i), (ii)에서 $B=\{1, 2, 3, 5\}$
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은
$1+2+3+5=11$

07 명제

Ⅱ 집합과 명제

개념 완성하기 p. 171~172

01 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ, ㅅ
ㄱ. '빠르다.'라는 표현은 주관적인 견해이므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 즉 명제가 아니다.
ㄴ. $\varnothing$는 모든 집합의 부분집합이므로 참인 명제이다.
ㄷ. $1+1=2\neq3$이므로 거짓인 명제이다.
ㄹ. 1은 소수가 아니므로 거짓인 명제이다.
ㅁ. $x+1=x-2$에서 $1\neq-2$이므로 거짓인 명제이다.
ㅂ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
ㅅ. 4는 12의 약수이지만 6의 약수가 아니므로 거짓인 명제이다.
따라서 명제인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ, ㅅ이다.

02 답 (1) $P=\{2, 3, 5, 7\}$ (2) $Q=\{3, 4, 5\}$
(1) p: x는 소수에서 $P=\{2, 3, 5, 7\}$
(2) q: $2<x<6$에서 $Q=\{3, 4, 5\}$

03 답 (1) $P=\{1, 2, 3, 4, 6\}$ (2) $Q=\{1, 2, 3, 8, 9, 10\}$
$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
(1) p: x는 12의 약수에서 $P=\{1, 2, 3, 4, 6\}$
(2) q: $x\le3$ 또는 $x>7$에서 $Q=\{1, 2, 3, 8, 9, 10\}$

04 답 (1) $P=\{1, 2, 4\}$ (2) $Q=\{1, 2, 3\}$
$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
(1) p: x는 4의 약수에서 $P=\{1, 2, 4\}$
(2) q: $x^2-2x-3\le0$에서
$(x+1)(x-3)\le0$ $\therefore -1\le x\le3$
$\therefore Q=\{1, 2, 3\}$

05 답 (1) $P=\{3, 9\}$ (2) $Q=\{1, 3, 5, 7, 9\}$
$U=\{1, 3, 5, 7, 9\}$
(1) p: x는 3의 배수에서 $P=\{3, 9\}$
(2) q: $x^2-9x-10<0$에서
$(x+1)(x-10)<0$ $\therefore -1<x<10$
$\therefore Q=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

06 답 9는 3의 배수가 아니다. (거짓)

07 답 $2\ge4$ (거짓)

08 답 16의 양의 제곱근은 4가 아니다. (거짓)

09 답 정사각형은 직사각형이다. (참)

10 답 x는 무리수이다.

11 답 $x\le3$

12 답 $x\neq0$ 또는 $y\neq0$

13 답 $-1\le x<2$

14 답 $x<1$ 또는 $x\ge3$

15 답 가정: a, b가 짝수이다., 결론: $a+b$는 짝수이다.

16 답 가정: $a=b$이다., 결론: $a+c=b+c$이다.

17 답 가정: 4의 배수이다., 결론: 2의 배수이다.

18 답 가정: 두 쌍의 대변이 서로 평행한 사각형이다.
결론: 평행사변형이다.

19 답 참

20 답 거짓, [반례] $x=-1$
[반례] $x=-1$이면 $x^2>0$이지만 $x<0$이다. $\therefore$ 거짓

21 답 참
$(x-1)^2=0$에서 $x=1$이고 $1^2=1$이므로 참이다.

22 답 참
$|x|=2$에서 $x=\pm2$이고 $(\pm2)^2=4$이므로 참이다.

23 답 거짓, [반례] $x=-2$
[반례] $x=-2$이면 $x<1$이지만 $x^2>1$이다. $\therefore$ 거짓

24 답 거짓, [반례] $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$
[반례] $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$이면 xy는 유리수이지만 x, y는 유리수가 아니다. $\therefore$ 거짓

25 답 참

26 답 참
$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$
이때 모든 실수 x에 대하여 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\ge0$이므로
$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ $\therefore$ 참

27 답 참
$x=1$이면 $\frac{1}{x}=1$이므로 정수이다. $\therefore$ 참

28 답 어떤 자연수 x에 대하여 $x-1<0$이다. (거짓)
부정: 어떤 자연수 x에 대하여 $x-1<0$이다.
$x-1<0$을 만족시키는 자연수 x는 존재하지 않으므로 거짓이다.

29 답 모든 자연수 x에 대하여 $x(x-1)\neq0$이다. (거짓)
부정: 모든 자연수 x에 대하여 $x(x-1)\neq0$이다.
$x=1$이면 $x(x-1)=0$이므로 거짓이다.

30 답 어떤 실수 x에 대하여 $x^2=0$이다. (참)
부정: 어떤 실수 x에 대하여 $x^2=0$이다.
$x=0$이면 $x^2=0$이므로 참이다.

31 답 모든 직각삼각형은 이등변삼각형이 아니다. (거짓)
부정: 모든 직각삼각형은 이등변삼각형이 아니다.
직각이등변삼각형은 이등변삼각형이므로 거짓이다.

32 답 $ab=0$이면 $a=0$이다. (거짓)
역: $ab=0$이면 $a=0$이다.
$a=1$, $b=0$이면 $ab=0$이지만 $a\neq0$이므로 주어진 명제의 역은 거짓이다.

33 답 a가 4의 양의 배수이면 a는 2의 양의 배수이다. (참)
역: a가 4의 양의 배수이면 a는 2의 양의 배수이다.
'4의 양의 배수의 집합'을 P라 하면
$P=\{4, 8, 12, \cdots\}$
'2의 양의 배수의 집합'을 Q라 하면
$Q=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$
$P\subset Q$이므로 주어진 명제의 역은 참이다.

34 답 두 삼각형의 넓이가 같으면 두 삼각형은 합동이다. (거짓)
역: 두 삼각형의 넓이가 같으면 두 삼각형은 합동이다.
밑변의 길이가 4, 높이가 6인 삼각형의 넓이와 밑변의 길이가 8, 높이가 3인 삼각형의 넓이는 같지만 두 삼각형은 합동이 아니므로 주어진 명제의 역은 거짓이다.

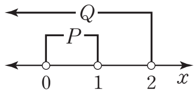
35 답 $a^2+b^2\neq0$이면 $a\neq0$ 또는 $b\neq0$이다. (참)
명제: $a=0$이고 $b=0$이면 $a^2+b^2=0$이다. (참)
대우: $a^2+b^2\neq0$이면 $a\neq0$ 또는 $b\neq0$이다.
주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

36 답 $a^2-3a+2\neq0$이면 $a\neq1$이다. (참)
명제: $a=1$이면 $a^2-3a+2=0$이다. (참)
대우: $a^2-3a+2\neq0$이면 $a\neq1$이다.
주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

37 답 $a\leq0$ 또는 $b\leq0$이면 $a+b\leq0$이다. (거짓)
대우: $a\leq0$ 또는 $b\leq0$이면 $a+b\leq0$이다.
$a=0$, $b=1$이면 $a\leq0$이지만 $a+b>0$이므로 주어진 명제의 대우는 거짓이다.

38 답 필요조건
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
p: $x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$
$\therefore P=\{1, 3\}$
q: $2x-1=5$에서 $x=3$ $\quad\therefore Q=\{3\}$
따라서 $Q\subset P$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

39 답 충분조건
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|0<x<1\}$, $Q=\{x|x<2\}$
오른쪽 그림에서
$P\subset Q$
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.



40 답 충분조건
p: $x>0$이고 $y>0 \Longrightarrow q$: $x+y>0$
$\therefore$ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례: $x=3$, $y=-1$]

41 답 충분조건
p: x, y는 유리수 $\Longrightarrow q$: xy는 유리수
$\therefore$ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례: $x=\sqrt{2}$, $y=2\sqrt{2}$]

42 답 필요충분조건
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
p: $x^2=9$에서 $x=\pm3$
$\therefore P=\{-3, 3\}$
q: $|x|=3$에서 $x=\pm3$
$\therefore Q=\{-3, 3\}$
따라서 $P=Q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

43 답 필요조건
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$, $Q=\{6, 12, 18, \cdots\}$
따라서 $Q\subset P$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

44 답 충분조건
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1, 2, 5, 10\}$, $Q=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$
따라서 $P\subset Q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

45 답 필요충분조건
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
p: $|x-1|=2$에서 $x-1=\pm2$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
$\therefore P=\{-1, 3\}$
q: $x^2-2x-3=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
$\therefore Q=\{-1, 3\}$
따라서 $P=Q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

46 답 필요충분조건
p: $A\cap B=\varnothing \Longleftrightarrow q$: $A-B=A$
$\therefore$ 필요충분조건

47 답 $P=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $Q=\{1, 2\}$,
$R=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

48 답 필요조건

$Q \subset P$이므로 $q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

49 답 필요충분조건

$P=R$이므로 $p \Longleftrightarrow r$

따라서 p는 r이기 위한 필요충분조건이다.

유형 완성하기

p. 173～186

01 답 ㄷ

ㄱ, ㄴ, ㄹ. 거짓인 명제

ㄷ. '깊다.'라는 표현은 주관적인 견해이므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 즉 명제가 아니다.

ㅁ. 6의 양의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 그 개수는 4이다. 즉 참인 명제이다.

따라서 명제가 아닌 것은 ㄷ이다.

01-1 답 ⑤

①, ② 참인 명제

③, ④ 거짓인 명제

⑤ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

따라서 명제가 아닌 것은 ⑤이다.

02 답 ①

① 참인 명제

② 거짓인 명제

③ '작다.'라는 표현은 주관적인 견해이므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 즉 명제가 아니다.

④, ⑤ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

따라서 참인 명제는 ①이다.

02-1 답 ②

① '크다.'라는 표현은 주관적인 견해이므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 즉 명제가 아니다.

② 참인 명제

③, ④ 거짓인 명제

⑤ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

따라서 참인 명제는 ②이다.

03 답 ②

ㄱ, ㄷ. 거짓인 명제

ㄴ. 참인 명제

ㄹ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

따라서 거짓인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

03-1 답 ㄷ

ㄱ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

ㄴ. $5x=x+4x$에서 $5x=5x$이므로 참인 명제이다.

ㄷ. $2x-3=2(x-1)+1$에서 $2x-3=2x-1$이므로 거짓인 명제이다.

ㄹ. $x^2-1=(x+1)(x-1)$에서 $x^2-1=x^2-1$이므로 참인 명제이다.

따라서 거짓인 명제인 것은 ㄷ이다.

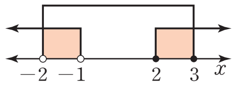
04 답 $-2<x<-1$ 또는 $2 \le x \le 3$

조건 'p 또는 $\sim q$'의 부정은 '$\sim p$이고 q'이다.

$\sim p$: $x<-1$ 또는 $x \ge 2$, q: $-2<x \le 3$이므로

오른쪽 그림에서 조건 '$\sim p$이고 q'는

$-2<x<-1$ 또는 $2 \le x \le 3$



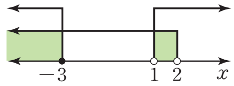
04-1 답 ②

조건 'p 또는 q'의 부정은 '$\sim p$ 그리고 $\sim q$'이다.

$\sim p$: $x<2$, $\sim q$: $x \le -3$ 또는 $x>1$이므로

오른쪽 그림에서 조건 '$\sim p$ 그리고 $\sim q$'는

$x \le -3$ 또는 $1<x<2$



05 답 ⑤

① 주어진 명제의 부정은 '$2+\sqrt{3}$은 무리수가 아니다.'이고, 이것은 거짓인 명제이다.

② 주어진 명제의 부정은 '0은 자연수이다.'이고, 이것은 거짓인 명제이다.

③ 주어진 명제의 부정은 '6은 3의 배수가 아니다.'이고, 이것은 거짓인 명제이다.

④ 주어진 명제의 부정은 '12의 양의 약수의 합은 28이 아니다.'이고, 12의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이므로 그 합은

$1+2+3+4+6+12=28$

즉 주어진 명제의 부정은 거짓인 명제이다.

⑤ 주어진 명제의 부정은 '$\sqrt{2}+\sqrt{5} \ne \sqrt{7}$'이고, 이것은 참인 명제이다.

따라서 부정이 참인 명제는 ⑤이다.

05-1 답 ⑤

① 주어진 명제의 부정은 '$-3 \ge 4$'이고, 이것은 거짓인 명제이다.

② 주어진 명제의 부정은 '$\{2, 4\} \not\subset \{1, 2, 3, 4\}$'이고, 이것은 거짓인 명제이다.

③ 주어진 명제의 부정은 '2는 소수가 아니다.'이고, 이것은 거짓인 명제이다.

④ 주어진 명제의 부정은 '12는 6의 배수가 아니다.'이고, 이것은 거짓인 명제이다.

⑤ 주어진 명제의 부정은 '정사각형은 평행사변형이다.'이고, 이것은 참인 명제이다.

따라서 부정이 참인 명제는 ⑤이다.

06 답 ⑤

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$의 부정은

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ne 0$

$(a-b)^2 \ne 0$ 또는 $(b-c)^2 \ne 0$ 또는 $(c-a)^2 \ne 0$

$\therefore a \ne b$ 또는 $b \ne c$ 또는 $c \ne a$

즉 a, b, c 중 서로 다른 것이 적어도 하나 있다.

06-1 답 ②

ㄱ. $(x-1)(x-3)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$이므로

$\sim p$: $x\neq 1$이고 $x\neq 3$

ㄴ. $\sim p$: $x\geq -1$이고 $x<2$ $\quad\therefore -1\leq x<2$

ㄷ. $x^2+y^2=0$에서 $x=0$이고 $y=0$이므로

$\sim p$: $x\neq 0$ 또는 $y\neq 0$

따라서 조건 p와 그 부정 $\sim p$가 바르게 연결된 것은 ㄴ이다.

07 답 0

$U=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $x^2-x>0$에서 $x(x-1)>0$ $\quad\therefore x<0$ 또는 $x>1$

$\therefore P=\{-3, -2, -1, 2, 3\}$

q: $x^2+x\leq 0$에서 $x(x+1)\leq 0$ $\quad\therefore -1\leq x\leq 0$

$\therefore Q=\{-1, 0\}$

이때 조건 'p 그리고 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cap Q^C$이므로

$P\cap Q^C=P-Q=\{-3, -2, 2, 3\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$-3+(-2)+2+3=0$

07-1 답 0

$U=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $|x|\leq 2$에서 $-2\leq x\leq 2$

$\therefore P=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

q: $x^3-9x=0$에서 $x(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=3$

$\therefore Q=\{-3, 0, 3\}$

이때 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합은 $P^C\cup Q$이고

$P^C=\{-3, 3\}$이므로

$P^C\cup Q=\{-3, 0, 3\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$-3+0+3=0$

08 답 $\{2\}$

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $Q=\{2, 3, 5, 7\}$

이때 조건 'p 또는 $\sim q$'의 부정의 진리집합은 $(P\cup Q^C)^C=P^C\cap Q$

이고 $P^C=\{2, 4, 6, 8, 10\}$이므로 $P^C\cap Q=\{2\}$

08-1 답 0

$U=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $x^2-2x>0$에서 $x(x-2)>0$ $\quad\therefore x<0$ 또는 $x>2$

$\therefore P=\{-3, -2, -1, 3\}$

q: $x^2+2x\leq 0$에서 $x(x+2)\leq 0$ $\quad\therefore -2\leq x\leq 0$

$\therefore Q=\{-2, -1, 0\}$ ······❶

조건 'p 그리고 $\sim q$'의 부정의 진리집합은 $(P\cap Q^C)^C=P^C\cup Q$이고

$P^C=\{0, 1, 2\}$이므로 $P^C\cup Q=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ······❷

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$-2+(-1)+0+1+2=0$ ······❸

채점 기준	비율
❶ 두 조건 p, q의 진리집합을 구할 수 있다.	40%
❷ 조건 'p 그리고 $\sim q$'의 부정의 진리집합을 구할 수 있다.	40%
❸ 조건 'p 그리고 $\sim q$'의 부정의 진리집합의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20%

09 답 ⑤

$P=\{x\mid x<4\}$, $Q=\{x\mid x\geq 7\}$에서

$P^C=\{x\mid x\geq 4\}$, $Q^C=\{x\mid x<7\}$

이때 조건 '$4\leq x<7$'의 진리집합은 $\{x\mid 4\leq x<7\}$이므로 구하는 집합은 $P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$

09-1 답 ③

$P=\{x\mid x>1\}$에서 $P^C=\{x\mid x\leq 1\}$

이때 조건 '$-6\leq x\leq 1$'의 진리집합은 $\{x\mid -6\leq x\leq 1\}$이므로 구하는 집합은 $P^C\cap Q$

10 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. [반례] $x=-1$이면 $x^2=1$이지만 $x\neq 1$이다. (거짓)

ㄴ. $|x|<1$에서 $-1<x<1$

즉 $-1<x<1$이면 $x<1$이다. (참)

ㄷ. 참인 명제

ㄹ. [반례] $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$이면 x, y가 모두 무리수이지만

$x+y=0$, $xy=-2$이므로 모두 유리수이다. (거짓)

따라서 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

10-1 답 ③

① [반례] $x=2$이면 $x^2=4$이지만 $x\neq -2$이다. (거짓)

② [반례] $x=2$, $y=-3$이면 $x+y<0$이지만 $x>0$, $y<0$이다. (거짓)

④ [반례] $x=0$, $y=0$이면 x, y는 실수이지만 $x^2+y^2=0$이다. (거짓)

⑤ [반례] $x=2$, $y=\sqrt{2}$이면 xy는 무리수이지만 x는 무리수가 아니다. (거짓)

따라서 참인 명제는 ③이다.

11 답 ①, ③

① [반례] $x=1$, $y=2$이면 xy는 짝수이지만 x는 홀수이다. (거짓)

③ [반례] 2는 소수이지만 짝수이다. (거짓)

따라서 거짓인 명제는 ①, ③이다.

11-1 답 ②, ③

② [반례] $x=1$이면 $x^2-x=0$이지만 $x\neq 0$이다. (거짓)

③ [반례] $x=4$, $y=-1$이면 $x+y>2$이지만 $x>1$이고 $y<1$이다. (거짓)

따라서 거짓인 명제는 ②, ③이다.

12 답 ㄷ, ㄹ

ㄱ. [반례] $x=\frac{1}{2}$, $y=2$이면 $xy=1$이지만 $x\neq 1$, $y\neq 1$이다. (거짓)

ㄴ. [반례] $x=1$, $y=0$, $z=-1$이면 $x>y>z$이지만

$xy=0$, $yz=0$이므로 $xy=yz$이다. (거짓)

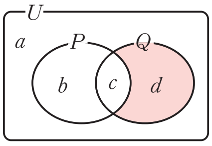
ㄷ. $x^2+y^2=0$에서 $x=0$, $y=0$이므로 $xy=0$이다. (참)

ㄹ. $x+y$가 홀수이면 x, y가 각각 짝수, 홀수 또는 홀수, 짝수이므로 xy는 짝수이다. (참)
따라서 참인 명제는 ㄷ, ㄹ이다.

12-1 답 ②

ㄱ. [반례] $a=-1$, $b=-3$이면 $a>b$이지만 $b^2>a^2$이다. (거짓)
ㄴ. [반례] $a=1$, $b=0$이면 $ab=0$이지만 $a\neq0$이고 $b=0$이다. (거짓)
ㄷ. [반례] $a=-1$, $b=-3$이면 $|a|+|b|\geq|a+b|$이지만 $ab\geq0$이다. (거짓)
ㄹ. $a^2+b^2=0$에서 $a=0$, $b=0$이다. (참)
ㅁ. $ab>0$에서 $a>0$, $b>0$ 또는 $a<0$, $b<0$
이때 $a+b>0$이므로 $a>0$, $b>0$이다. (참)
따라서 참인 명제는 ㄹ, ㅁ이다.

13 답 d



명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 거짓임을 보이려면 P^C의 원소 중에서 집합 Q^C의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
따라서 반례는 집합 $P^C-Q^C=P^C\cap(Q^C)^C=P^C\cap Q$의 원소인 d이다.

13-1 답 6

명제 'p이면 $\sim q$이다.'가 거짓임을 보이려면 집합 P의 원소 중에서 집합 Q^C의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
즉 반례는 집합 $P-Q^C=P\cap(Q^C)^C=P\cap Q$이다.
따라서 $P\cap Q=\{1, 5\}$이므로 구하는 모든 원소의 합은
$1+5=6$

14 답 ⑤

명제 '$\sim p$이면 q이다.'가 거짓임을 보이려면 집합 P^C의 원소 중에서 집합 Q의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
따라서 구하는 집합은 $P^C-Q=P^C\cap Q^C$

14-1 답 ④

명제 'q이면 p이다.'가 거짓임을 보이려면 집합 Q의 원소 중에서 집합 P의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
따라서 구하는 집합은 $Q-P=P^C\cap Q$

15 답 60

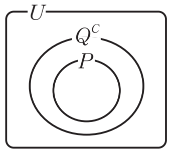
$U=\{1, 2, 3, \cdots, 29\}$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27\}$,
$Q=\{6, 12, 18, 24\}$ ……❶
명제 $p \longrightarrow \sim q$가 거짓임을 보이려면 집합 P의 원소 중에서 집합 Q^C의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
즉 반례는 집합 $P-Q^C=P\cap(Q^C)^C=P\cap Q$의 원소이다.
따라서 $P\cap Q=\{6, 12, 18, 24\}$이므로 ……❷
구하는 모든 원소의 합은
$6+12+18+24=60$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 두 조건 p, q의 진리집합을 구할 수 있다.	40%
❷ 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 거짓임을 보이는 반례를 구할 수 있다.	40%
❸ 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 거짓임을 보이는 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20%

15-1 답 2, 6, 10

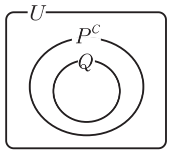
$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $Q=\{4, 8\}$
명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이려면 집합 P의 원소 중에서 집합 Q의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
따라서 반례는 집합 $P-Q=P\cap Q^C$의 원소인 2, 6, 10이다.

16 답 ③



명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 $P\subset Q^C$
두 집합 P, Q 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
① $P\cap Q=\varnothing$ ② $P^C\cap Q=Q$
③ $P-Q^C=\varnothing$ ④ $P\cup Q\neq U$
⑤ $P^C\cup Q^C=(P\cap Q)^C=\varnothing^C=U$
따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

16-1 답 ②



명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 $Q\subset P^C$
두 집합 P, Q 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
①, ② $P\cap Q=\varnothing$ ③ $P\not\subset Q$
④ $Q\not\subset P$ ⑤ $P-Q=P$
따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

17 답 ②

① $P\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.
② $P\not\subset Q^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$는 거짓이다.
③ $P\subset R^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$는 참이다.
④ $R\subset Q^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim q$는 참이다.
⑤ $Q^C\subset P^C$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$는 참이다.
따라서 거짓인 명제는 ②이다.

17-1 답 ③

① $P\not\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
② $Q\not\subset R$이므로 명제 $q \longrightarrow r$는 거짓이다.
③ $P\subset R$이므로 명제 $p \longrightarrow r$는 참이다.
④ $R\not\subset P^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$는 거짓이다.
⑤ $R^C\not\subset Q^C$이므로 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$는 거짓이다.
따라서 참인 명제는 ③이다.

18 답 ④

$P\cap Q=Q$이므로 $Q\subset P$ ……㉠
$P\cup R^C=R^C$이므로 $P\subset R^C$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $Q\subset P\subset R^C$이므로 $Q\subset R^C$ $\therefore R\subset Q^C$
따라서 항상 참인 명제는 ④ $r \longrightarrow \sim q$이다.

18-1 답 ③

$Q^C \cap R^C = Q^C$이므로 $Q^C \subset R^C \quad \therefore R \subset Q$ ⋯⋯ ㉠

$P \cap Q = Q$이므로 $Q \subset P$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $R \subset Q \subset P$이므로 $R \subset P$

따라서 항상 참인 명제는 ③ $r \longrightarrow p$이다.

19 답 1

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $|x-a| \le 3$에서 $-3 \le x-a \le 3$

$\therefore a-3 \le x \le a+3$

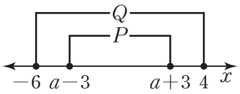
$\therefore P=\{x \mid a-3 \le x \le a+3\}$

q: $x^2+2x-24 \le 0$에서 $(x+6)(x-4) \le 0$

$\therefore -6 \le x \le 4$

$\therefore Q=\{x \mid -6 \le x \le 4\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-3 \ge -6$, $a+3 \le 4$

$\therefore -3 \le a \le 1$

따라서 실수 a의 최댓값은 1이다.

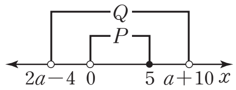
19-1 답 ③

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid 0<x \le 5\}$,

$Q=\{x \mid 2a-4<x<a+10\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$2a-4 \le 0$, $a+10>5$

$\therefore -5<a \le 2$

따라서 정수 a의 값은 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$이므로 그 개수는 7이다.

20 답 ①

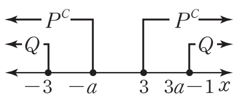
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $-a<x<3$에서 $\sim p$: $x \le -a$ 또는 $x \ge 3$

$\therefore P^C=\{x \mid x \le -a \text{ 또는 } x \ge 3\}$

$Q=\{x \mid x \le -3 \text{ 또는 } x \ge 3a-1\}$

명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이 되려면 $Q \subset P^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-a \ge -3$, $3a-1 \ge 3$

$\therefore \frac{4}{3} \le a \le 3$

따라서 자연수 a의 값은 2, 3이므로 그 개수는 2이다.

20-1 답 2

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

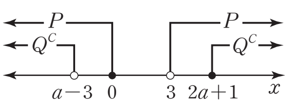
$P=\{x \mid x \le 0 \text{ 또는 } x>3\}$

q: $a-3 \le x<2a+1$에서

$\sim q$: $x<a-3$ 또는 $x \ge 2a+1$

$\therefore Q^C=\{x \mid x<a-3 \text{ 또는 } x \ge 2a+1\}$

명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q^C \subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서 $a-3 \le 0$, $2a+1>3$



$\therefore 1<a \le 3$

따라서 정수 a의 값은 2, 3이므로 그 개수는 2이다.

21 답 −1

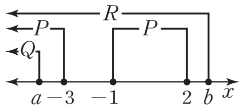
세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x \mid x \le -3 \text{ 또는 } -1 \le x \le 2\}$

$Q=\{x \mid x \le a\}$

$R=\{x \mid x \le b\}$ ⋯⋯ ❶

명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q \subset P$이고 명제 $p \longrightarrow r$가 참이 되려면 $P \subset R$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a \le -3$, $b \ge 2$ ⋯⋯ ❷

따라서 a의 최댓값은 -3, b의 최솟값은 2이므로 그 합은

$-3+2=-1$ ⋯⋯ ❸

채점 기준	비율
❶ 세 조건 p, q, r의 진리집합을 구할 수 있다.	30%
❷ a, b의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구할 수 있다.	20%

21-1 답 $0<a \le \frac{3}{2}$

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

p: $x^2+3x-4=0$에서 $(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

$\therefore P=\{-4, 1\}$

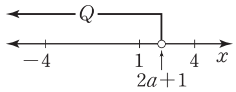
q: $\frac{x-1}{2}<a$에서 $x-1<2a \quad \therefore x<2a+1$

$\therefore Q=\{x \mid x<2a+1\}$

r: $3x-7=5$에서 $3x=12 \quad \therefore x=4$

$\therefore R=\{4\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P \subset Q$이고 명제 $r \longrightarrow q$가 거짓이 되려면 $R \not\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$1<2a+1 \le 4 \quad \therefore 0<a \le \frac{3}{2}$

22 답 ②

① [반례] $x=0$이면 $x^2=0$이므로 거짓이다.

② $x^2-x<0$에서 $x(x-1)<0$

$\therefore 0<x<1$

즉 $x=\frac{1}{2}$이면 $x^2-x<0$이므로 참이다.

③ $x+1 \le 0$을 만족시키는 자연수 x는 존재하지 않으므로 거짓이다.

④ [반례] 2는 소수이지만 짝수이므로 거짓이다.

⑤ [반례] $x=\sqrt{2}$이면 $\sqrt{2}x$는 유리수이므로 거짓이다.

따라서 참인 명제는 ②이다.

22-1 답 ④

① [반례] $x=1$이면 $x+4>0$이므로 거짓이다.

② [반례] $x=3$이면 $x^2-x-2>0$이므로 거짓이다.

③ [반례] $x=1$이면 $1 \ne 2$이므로 거짓이다.

④ $x^2=-x+6$에서 $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0 \quad \therefore x=-3$ 또는 $x=2$

즉 $x=2$이면 $x^2=-x+6$이므로 참이다.

⑤ $|x|<0$을 만족시키는 자연수 x는 존재하지 않으므로 거짓이다.

따라서 참인 명제는 ④이다.

23 답 ③

① 전체집합 U의 모든 x에 대하여 $x-2<4$, 즉 $x<6$이 성립하므로 참이다.
② $x=2$이면 $x^2=4$이므로 참이다.
③ [반례] $x=2$이면 $|x^2-2x|<2$이므로 거짓이다.
④ $x=2$, $y=3$이면 $x+y\le5$이므로 참이다.
⑤ $x=3$, $y=4$이면 $x^2+y^2=25$이므로 참이다.
따라서 거짓인 명제는 ③이다.

23-1 답 ①

① [반례] $x=3$이면 $x+2=5$이므로 거짓이다.
② 전체집합 U의 모든 x, y에 대하여 $|x-y|\le3$이므로 참이다.
③ $x=0$이면 $x^2=0$이므로 참이다.
④ $x=3$이면 $x^2>5$이므로 참이다.
⑤ $x=2$, $y=3$이면 $x^2+y^2>10$이므로 참이다.
따라서 거짓인 명제는 ①이다.

24 답 81

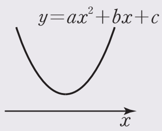
주어진 명제의 부정은
'모든 실수 x에 대하여 $x^2-18x+k\ge0$이다.'
모든 실수 x에 대하여 $x^2-18x+k\ge0$이 성립하려면 이차방정식 $x^2-18x+k=0$의 판별식을 D라 할 때

$$\frac{D}{4}=(-9)^2-1\times k=81-k\le0 \qquad \therefore k\ge81$$

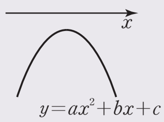
따라서 실수 k의 최솟값은 81이다.

Lecture 이차부등식이 항상 성립할 조건

(1) 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립할 조건
⇒ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때 $a>0$, $D<0$



(2) 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$이 성립할 조건
⇒ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때 $a<0$, $D<0$



24-1 답 8

주어진 명제의 부정은
'어떤 실수 x에 대하여 $x^2-(a-3)x+4<0$이다.' ······❶
어떤 실수 x에 대하여 $x^2-(a-3)x+4<0$이 성립하려면 이차방정식 $x^2-(a-3)x+4=0$의 판별식을 D라 할 때
$D=(a-3)^2-4\times4=a^2-6a-7>0$
$(a+1)(a-7)>0 \qquad \therefore a>7$ ($\because$ a는 자연수) ······❷
따라서 자연수 a의 최솟값은 8이다. ······❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 부정을 구할 수 있다.	40%
❷ ❶의 명제가 참이 되는 조건을 구할 수 있다.	40%
❸ 자연수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

25 답 ③

① 역: 짝수는 4의 배수이다. (거짓)
[반례] 2는 짝수이지만 4의 배수는 아니다.
② 역: $x^2=4$이면 $x=2$이다. (거짓)
[반례] $x=-2$이면 $x^2=4$이지만 $x\ne2$이다.
③ 역: $x>1$이면 $|x|>1$이다. (참)
④ 역: $x+2<7$이면 $2x-1<5$이다. (거짓)
[반례] $x=4$이면 $x+2<7$이지만 $2x-1>5$이다.
⑤ 역: x^2이 유리수이면 x는 유리수이다. (거짓)
[반례] $x=\sqrt{2}$이면 x^2이 유리수이지만 x는 유리수가 아니다.
따라서 그 역이 참인 명제는 ③이다.

25-1 답 ㄱ

ㄱ. 역: $x=1$이면 $x^3=1$이다. (참)
ㄴ. 역: $x+y\ge2$이면 $x\ge1$이고 $y\ge1$이다. (거짓)
[반례] $x=3$, $y=-1$이면 $x+y\ge2$이지만 $y<1$이다.
ㄷ. 역: 자연수 x, y에 대하여 xy가 홀수이면 x^2+y^2은 홀수이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=3$이면 $xy=3$은 홀수이지만 $x^2+y^2=10$은 짝수이다.
따라서 그 역이 참인 명제는 ㄱ이다.

26 답 ③

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim p$도 항상 참이다.

26-1 답 ①

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow p$도 항상 참이다.

27 답 ⑤

ㄱ. 명제: $x^2-y^2=0$이면 $x=y$이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x^2-y^2=0$이지만 $x\ne y$이다.
역: $x=y$이면 $x^2-y^2=0$이다. (참)
주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.
ㄴ. 명제: $x^2+y^2=0$이면 $x+y\sqrt{3}=0$이다. (참)
역: $x+y\sqrt{3}=0$이면 $x^2+y^2=0$이다. (거짓)
[반례] $x=-3$, $y=\sqrt{3}$이면 $x+y\sqrt{3}=0$이지만 $x^2+y^2\ne0$이다.
주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
ㄷ. 명제: $|a|+|b|=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다. (참)
역: $a=0$이고 $b=0$이면 $|a|+|b|=0$이다. (참)
주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
ㄹ. 명제: 두 집합 A, B에 대하여 $A-B=\varnothing$이면 $A\cap B=A$이다. (참)
역: 두 집합 A, B에 대하여 $A\cap B=A$이면 $A-B=\varnothing$이다. (참)
주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
따라서 그 역과 대우가 모두 참인 명제는 ㄷ, ㄹ이다.

27-1 답 ④

ㄱ. 명제: $x^2+y^2=0$이면 $x=0$이고 $y=0$이다. (참)
역: $x=0$이고 $y=0$이면 $x^2+y^2=0$이다. (참)
주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
ㄴ. 명제: xy가 유리수이면 x, y는 모두 유리수이다. (거짓)
[반례] $x=0$, $y=\sqrt{2}$이면 xy는 유리수이지만 y는 유리수가 아니다.
역: x, y가 모두 유리수이면 xy는 유리수이다. (참)
주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

ㄷ. 명제: $x>2$이면 $2x+4>0$이다. (참)
역: $2x+4>0$이면 $x>2$이다. (거짓)
[반례] $x=-1$이면 $2x+4>0$이지만 $x<2$이다.
주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
ㄹ. 명제: $x-y=|x-y|$이면 $x>y$이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=1$이면 $x-y=|x-y|$이지만 $x=y$이다.
역: $x>y$이면 $x-y=|x-y|$이다. (참)
주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.
따라서 그 역은 참이고 대우가 거짓인 명제는 ㄴ, ㄹ이다.

28 답 2

주어진 명제의 대우는
'$x\geq 1$이고 $y\geq k$이면 $x+y\geq 3$이다.'
명제가 참이면 그 대우도 참이므로
$x\geq 1$이고 $y\geq k$에서 $x+y\geq k+1$
즉 $k+1\geq 3$이므로 $k\geq 2$
따라서 실수 k의 최솟값은 2이다.

28-1 답 ④

주어진 명제의 대우는
'$a\leq -1$이고 $b\leq k$이면 $a+b\leq 8$이다.'
명제가 참이면 그 대우도 참이므로
$a\leq -1$이고 $b\leq k$에서 $a+b\leq k-1$
즉 $k-1\leq 8$이므로 $k\leq 9$
따라서 실수 k의 최댓값은 9이다.

29 답 ③

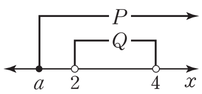
주어진 명제의 대우는
'$2x-1=0$이면 $2x^2+ax-1=0$이다.'
명제가 참이면 그 대우도 참이므로
$x=\frac{1}{2}$을 $2x^2+ax-1=0$에 대입하면
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a-1=0 \qquad \therefore a=1$

29-1 답 ①

주어진 명제의 대우는
'$x=3$이면 $x^3-2x^2-(a+2)x+6=0$이다.'
명제가 참이면 그 대우도 참이므로
$x=3$을 $x^3-2x^2-(a+2)x+6=0$에 대입하면
$27-18-3(a+2)+6=0 \qquad \therefore a=3$

30 답 $a\leq 2$

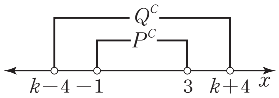
명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 그 대우 $q \longrightarrow p$도 참이 되어야 한다.
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|x\geq a\}$
q: $|x-3|<1$에서 $-1<x-3<1 \qquad \therefore 2<x<4$
$\therefore Q=\{x|2<x<4\}$
명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q\subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a\leq 2$

30-1 답 ⑤

명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 참이 되어야 한다.
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
p: $|x-1|\geq 2$에서 $\sim p$: $|x-1|<2$이므로
$-2<x-1<2 \qquad \therefore -1<x<3$
$\therefore P^C=\{x|-1<x<3\}$
q: $|x-k|\geq 4$에서 $\sim q$: $|x-k|<4$이므로
$-4<x-k<4 \qquad \therefore k-4<x<k+4$
$\therefore Q^C=\{x|k-4<x<k+4\}$
명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 $P^C\subset Q^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$k-4\leq -1$, $k+4\geq 3$
$\therefore -1\leq k\leq 3$
따라서 정수 k의 값은 -1, 0, 1, 2, 3이므로 그 합은
$-1+0+1+2+3=5$

31 답 ⑤

명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim r$도 참이다.
두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$도 참이다.
명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

31-1 답 ④

명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.
두 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow r$가 참이므로 명제 $\sim q \longrightarrow r$도 참이다.

32 답 ③

$P\cap Q=R$에서 $R\subset P$, $R\subset Q$이므로
두 명제 $r \longrightarrow p$, $r \longrightarrow q$가 모두 참이다.
두 명제 $r \longrightarrow p$, $r \longrightarrow q$의 각각의 대우
$\sim p \longrightarrow \sim r$, $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.
따라서 항상 참인 명제는 ③이다.

32-1 답 ⑤

$P\cup Q=P$에서 $Q\subset P$이므로 명제 $q \longrightarrow p$가 참이다.
$Q\cap R=R$에서 $R\subset Q$이므로 명제 $r \longrightarrow q$가 참이다.
두 명제 $r \longrightarrow q$, $q \longrightarrow p$가 참이므로 명제 $r \longrightarrow p$도 참이고
세 명제 $q \longrightarrow p$, $r \longrightarrow q$, $r \longrightarrow p$의 각각의 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim r$, $\sim p \longrightarrow \sim r$도 참이다.
따라서 항상 참이라고 할 수 없는 명제는 ⑤이다.

33 답 ③

① 명제 $q \longrightarrow r$가 참이므로 그 대우 $\sim r \longrightarrow \sim q$도 참이다.
② 명제 $\sim p \longrightarrow \sim s$가 참이므로 그 대우 $s \longrightarrow p$도 참이다.
④ 두 명제 $s \longrightarrow p$, $p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 명제 $s \longrightarrow \sim r$도 참이다.
⑤ 두 명제 $p \longrightarrow \sim r$, $\sim r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$도 참이다.
따라서 항상 참이라고 할 수 없는 명제는 ③이다.

33-1 답 ④

ㄱ. 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow r$도 참이다.
두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$도 참이다.

ㄴ. ㄱ에서 명제 $p \longrightarrow r$가 참이므로 그 대우 $\sim r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

ㄷ. 두 명제 $q \longrightarrow r$, $r \longrightarrow s$가 참이므로 명제 $q \longrightarrow s$가 참이지만 명제 $\sim q \longrightarrow \sim s$의 참, 거짓은 판별할 수 없다.

따라서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다.

34 답 ①

p: 달리기를 잘 한다.
q: 축구를 잘 한다.
r: 농구를 잘 한다.
로 놓으면 (가), (나)에서 두 명제 $p \longrightarrow q$, $\sim p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 각각의 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$, $r \longrightarrow p$도 참이다.
두 명제 $r \longrightarrow p$, $p \longrightarrow q$가 참이므로 명제 $r \longrightarrow q$도 참이다.
각 보기를 세 조건 p, q, r로 나타내면
① $r \longrightarrow q$　② $r \longrightarrow \sim p$　③ $q \longrightarrow p$
④ $q \longrightarrow \sim p$　⑤ $\sim q \longrightarrow r$
따라서 항상 참인 명제는 ①이다.

34-1 답 ③

p: 인상이 좋다.
q: 호감을 준다.
r: 명랑하다.
로 놓으면 (가), (나)에서 두 명제 $r \longrightarrow p$, $p \longrightarrow q$가 참이므로 명제 $r \longrightarrow q$도 참이다.
세 명제 $p \longrightarrow q$, $r \longrightarrow p$, $r \longrightarrow q$의 각각의 대우
$\sim q \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow \sim r$, $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.
각 보기를 세 조건 p, q, r로 나타내면
① $q \longrightarrow r$　② $p \longrightarrow \sim q$　③ $\sim q \longrightarrow \sim r$
④ $\sim r \longrightarrow \sim p$　⑤ $\sim r \longrightarrow \sim q$
따라서 항상 참인 명제는 ③이다.

35 답 A, B

(i) C가 1학년인 경우
(라)에 의하여 A가 1학년이고 (나)에 의하여 B도 1학년이다.
즉 세 학생이 모두 1학년이므로 (다)에 모순이다.
(ii) C가 2학년인 경우
(가), (나)에 의하여 A, B가 모두 1학년이거나 2학년이다.
이때 세 학생이 모두 2학년이면 (다)에 모순이므로 A, B는 모두 1학년이다.
(i), (ii)에서 세 학생 중 1학년 학생은 A, B이다.

35-1 답 A, B, C, D

(i) D가 남학생인 경우
(라)에 의하여 A가 남학생이고 (가)에 의하여 B도 남학생이다.
(나)에 의하여 C가 남학생이거나 A가 여학생이어야 하는데 A가 남학생이므로 C는 남학생이다.
즉 A, B, C, D는 모두 남학생이다.
(ii) D가 여학생인 경우
(다)에 의하여 A가 남학생이고 C는 여학생이다.
(가)에 의하여 B는 남학생이다.
(나)에 의하여 B가 남학생이면 C가 남학생이거나 A가 여학생이어야 하므로 모순이다.
(i), (ii)에서 네 학생 중 남학생은 A, B, C, D이다.

36 답 ④

① p: $x=y \Longrightarrow q$: $xz=yz$
∴ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례: $x=1$, $y=2$, $z=0$]
② p: $x\ge0$, $y\ge0 \Longrightarrow q$: $xy=|xy|$
∴ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례: $x=-1$, $y=-2$]
③ p: $|x|+|y|=0 \Longleftrightarrow q$: $x=0$, $y=0$
∴ 필요충분조건
④ p: $xyz=0 \Longleftarrow q$: $xy=0$
∴ 필요조건 [$\longrightarrow$의 반례: $x=1$, $y=2$, $z=0$]
⑤ p: $x^2>y^2 \not\Longleftrightarrow q$: $x>y$
즉 아무 조건도 아니다.
[$\longrightarrow$의 반례: $x=-2$, $y=1$, $\longleftarrow$의 반례: $x=1$, $y=-1$]
따라서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ④이다.

36-1 답 ②

① p: $x=y \Longrightarrow q$: $x^2=y^2$
∴ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례: $x=1$, $y=-1$]
② p: $x+y>4 \Longleftarrow q$: $x>2$이고 $y>2$
∴ 필요조건 [$\longrightarrow$의 반례: $x=4$, $y=1$]
③ p: $x^3>y^3 \Longleftrightarrow q$: $x>y$　∴ 필요충분조건
④ p: $|x|+|y|=0 \Longleftrightarrow q$: $x^2+y^2=0$　∴ 필요충분조건
⑤ p: $x=0$이고 $y=0 \Longrightarrow q$: $|x+y|=|x|+|y|$
∴ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례: $x=2$, $y=0$]
따라서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ②이다.

37 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. p: $a>1$, $b>1 \Longrightarrow q$: $ab+1>2$
∴ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례: $a=-2$, $b=-1$]
ㄴ. p: $A\subset B \Longrightarrow q$: $n(A)\le n(B)$
∴ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례: $A=\{1\}$, $B=\{2, 3\}$]
ㄷ. p: $A-B=\varnothing$에서 $A\subset B$, q: $A^C\subset B^C$에서 $B\subset A$이므로
p: $A-B=\varnothing \not\Longleftrightarrow q$: $A^C\subset B^C$
즉 아무 조건도 아니다.
따라서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄴ이다.

Lecture
전체집합 U의 부분집합 A, B에 대하여
$A\subset B \Longleftrightarrow A\cup B=B \Longleftrightarrow A\cap B=A \Longleftrightarrow A-B=\varnothing$
$\Longleftrightarrow A\cap B^C=\varnothing \Longleftrightarrow B^C\subset A^C \Longleftrightarrow B^C-A^C=\varnothing$

37-1 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. p: $a^2+b^2=0$에서 $a=0$이고 $b=0$이므로
p: $a^2+b^2=0 \Longrightarrow q$: $a=b$
∴ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례: $a=1$, $b=1$]

ㄴ. p: $ab<0$에서 $a>0$, $b<0$ 또는 $a<0$, $b>0$

q: $a<0$ 또는 $b<0$에서

$a>0$, $b<0$ 또는 $a<0$, $b>0$ 또는 $a<0$, $b<0$이므로

p: $ab<0 \Longrightarrow q$: $a<0$ 또는 $b<0$

∴ 충분조건[$\longleftarrow$의 반례: $a=-1$ 또는 $b=-1$]

ㄷ. p: $a^3-b^3=0$에서 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=0$

∴ $a=b$ (∵ a, b는 실수)

q: $a^2-b^2=0$에서 $(a+b)(a-b)=0$

∴ $a=-b$ 또는 $a=b$

p: $a^3-b^3=0 \Longrightarrow q$: $a^2-b^2=0$

∴ 충분조건[$\longleftarrow$의 반례: $a=1$, $b=-1$]

따라서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

38 답 ④

① p: $x=2$, $y=3 \Longrightarrow q$: $xy=6$

∴ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례: $x=1$, $y=6$]

② p: $x+y=0 \Longleftarrow q$: $x=0$, $y=0$

∴ 필요조건 [$\longrightarrow$의 반례: $x=1$, $y=-1$]

③ p: $x\in A \Longrightarrow q$: $x\in(A\cup B)$

∴ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례: $x=2$, $A=\{1\}$, $B=\{2, 3\}$]

④ p: $x+yi=0 \Longleftrightarrow q$: $x=0$, $y=0$

∴ 필요충분조건

⑤ p: $x\le 2 \Longleftarrow q$: $x<1$

∴ 필요조건 [$\longrightarrow$의 반례: $x=2$]

따라서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ④이다.

38-1 답 ⑤

① p: x는 12의 양의 약수 $\Longleftarrow q$: x는 6의 양의 약수

∴ 필요조건 [$\longrightarrow$의 반례: $x=12$]

② p: $x-y=0 \Longleftarrow q$: $x=0$, $y=0$

∴ 필요조건 [$\longrightarrow$ 의 반례: $x=1$, $y=1$]

③ p: $x\in A \Longleftarrow q$: $x\in(A\cap B)$

∴ 필요조건 [$\longrightarrow$의 반례: $x=1$, $A=\{1, 2\}$, $B=\{2\}$]

④ p: $A=B \Longrightarrow q$: $A\cup B=B$

∴ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례: $A=\{1\}$, $B=\{1, 2\}$]

⑤ p: $x^2-8x+16=0$에서 $(x-4)^2=0$ ∴ $x=4$

q: $3x-10=2$에서 $3x=12$ ∴ $x=4$

p: $x^2-8x+16=0 \Longleftrightarrow q$: $3x-10=2$

∴ 필요충분조건

따라서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ⑤이다.

39 답 ③

p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow \sim r$

r는 q이기 위한 필요조건이므로 $q \Longrightarrow r$

$q \Longrightarrow r$이므로 $\sim r \Longrightarrow \sim q$

즉 $p \Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow \sim q$이므로 $p \Longrightarrow \sim q$

따라서 항상 참인 명제는 ③이다.

39-1 답 ⑤

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow q$

r는 q이기 위한 필요조건이므로 $q \Longrightarrow r$

즉 $p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow r$이므로 $p \Longrightarrow r$

$p \Longrightarrow r$이므로 $\sim r \Longrightarrow \sim p$

따라서 항상 참인 명제는 ⑤이다.

40 답 ④

ㄱ. 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

즉 q는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. 명제 $r \longrightarrow p$가 참이므로 p는 r이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. 두 명제 $r \longrightarrow p$, $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 명제 $r \longrightarrow \sim q$도 참이다.

즉 r는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

40-1 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow s$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow s$도 참이다.

즉 p는 s이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. 두 명제 $p \longrightarrow s$, $s \longrightarrow r$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$도 참이다.

즉 r는 p이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. 두 명제 $s \longrightarrow r$, $r \longrightarrow q$가 참이므로 명제 $s \longrightarrow q$도 참이다.

즉 두 명제 $s \longrightarrow q$, $q \longrightarrow s$가 참이므로 q는 s이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

41 답 충분조건

(가)에서 $q \Longrightarrow p$, (나)에서 $r \Longrightarrow \sim p$, (다)에서 $s \Longrightarrow r$

$s \Longrightarrow r$, $r \Longrightarrow \sim p$이므로 $s \Longrightarrow \sim p$

$q \Longrightarrow p$이므로 $\sim p \Longrightarrow \sim q$

$s \Longrightarrow \sim p$, $\sim p \Longrightarrow \sim q$이므로 $s \Longrightarrow \sim q$

$s \Longrightarrow \sim q$이므로 $q \Longrightarrow \sim s$

따라서 q는 $\sim s$이기 위한 충분조건이다.

41-1 답 필요조건

(가)에서 $p \Longrightarrow q$, (나)에서 $\sim r \Longrightarrow \sim q$, (다)에서 $\sim s \Longrightarrow \sim r$

$\sim r \Longrightarrow \sim q$이므로 $q \Longrightarrow r$

$p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow r$이므로 $p \Longrightarrow r$

$\sim s \Longrightarrow \sim r$이므로 $r \Longrightarrow s$

$p \Longrightarrow r$, $r \Longrightarrow s$이므로 $p \Longrightarrow s$

따라서 s는 p이기 위한 필요조건이다.

유형+ 완성하기 p. 187

42 답 ④

ㄱ. $P\subset Q$이므로 $p \Longrightarrow q$

즉 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $R\subset P^C$이므로 $r \Longrightarrow \sim p$

즉 $\sim p$는 r이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $Q\not\subset R$, $R\not\subset Q$이므로 q는 r이기 위한 아무 조건도 아니다.

ㄹ. $P\subset R^C$이므로 $p \Longrightarrow \sim r$

즉 p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

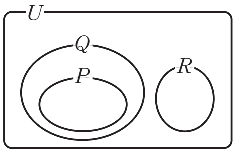
따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

43 답 ②

$P\cap Q=P$이므로 $P\subset Q$

$Q-R^C=\varnothing$이므로 $Q\cap R=\varnothing$

세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $P\not\subset R$, $R\not\subset P$이므로 p는 r이기 위한 아무 조건도 아니다.

② $P\subset R^C$이므로 $p \Longrightarrow \sim r$

즉 p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

③ $P\subset Q$이므로 $p \Longrightarrow q$

즉 q는 p이기 위한 필요조건이다.

④ $P^C\not\subset Q$, $Q\not\subset P^C$이므로 $\sim p$는 q이기 위한 아무 조건도 아니다.

⑤ $Q^C\subset P^C$이므로 $\sim q \Longrightarrow \sim p$

즉 $\sim q$는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.

따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

44 답 5

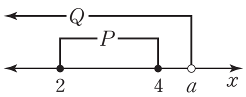
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $x^2-6x+8\le 0$에서 $(x-2)(x-4)\le 0$ $\quad\therefore 2\le x\le 4$

$\therefore P=\{x\,|\,2\le x\le 4\}$

$Q=\{x\,|\,x<a\}$

p는 q이기 위한 충분조건이 되려면 $p \Longrightarrow q$, 즉 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a>4$

따라서 정수 a의 최솟값은 5이다.

45 답 ③

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

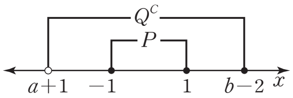
p: $|x|\le 1$에서 $-1\le x\le 1$ $\quad\therefore P=\{x\,|\,-1\le x\le 1\}$

$Q=\{x\,|\,x\le a+1$ 또는 $x>b-2\}$

p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이 되려면 $p \Longrightarrow \sim q$, 즉 $P\subset Q^C$이어야 한다.

이때 $Q^C=\{x\,|\,a+1<x\le b-2\}$

이므로 오른쪽 그림에서



$a+1<-1$, $b-2\ge 1$

$\therefore a<-2$, $b\ge 3$

따라서 정수 a의 최댓값은 -3, 정수 b의 최솟값은 3이므로 그 합은

$-3+3=0$

46 답 -3

p는 q이기 위한 필요조건이므로 $q \Longrightarrow p$

즉 명제 '$x^2+ax+9\ne 0$이면 $x\ne 3$이다.'가 참이므로

그 대우 '$x=3$이면 $x^2+ax+9=0$이다.'도 참이다.

$x=3$을 $x^2+ax+9=0$에 대입하면

$9+3a+9=0$ $\quad\therefore a=-6$ ……❶

또 r는 p이기 위한 충분조건이므로 $r \Longrightarrow p$

즉 명제 '$x^2-4x+b\ne 0$이면 $x\ne 3$이다.'가 참이므로

그 대우 '$x=3$이면 $x^2-4x+b=0$이다.'가 참이다.

$x=3$을 $x^2-4x+b=0$에 대입하면

$9-12+b=0$ $\quad\therefore b=3$ ……❷

$\therefore a+b=-6+3=-3$ ……❸

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

학교 시험 대비 문제

p. 188 ~ 191

01 답 ③

①, ②, ④ 거짓인 명제

③ '넓다.'라는 표현은 주관적인 견해이므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 즉 명제가 아니다.

⑤ 참인 명제

따라서 명제가 아닌 것은 ③이다.

02 답 ①

ㄱ. $\sim p$: $a\ge 0$이고 $b\ge 0$

ㄴ. $ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$이므로

$\sim p$: $a\ne 0$이고 $b\ne 0$

ㄷ. $a^2+b^2+c^2=0$에서 $a=0$이고 $b=0$이고 $c=0$이므로

$\sim p$: $a\ne 0$ 또는 $b\ne 0$ 또는 $c\ne 0$

따라서 조건 p와 그 부정 $\sim p$가 바르게 연결된 것은 ㄱ이다.

참고 ㄷ. $abc\ne 0$에서 $a\ne 0$이고 $b\ne 0$이고 $c\ne 0$

03 답 ①

$U=\{2, 4, 6, 8, \cdots, 48, 50\}$

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$

$Q=\{2, 4, 6, \cdots, 28\}$

r: $x^3-10x^2+24x=0$에서 $x(x-4)(x-6)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$ 또는 $x=6$

$\therefore R=\{4, 6\}$

이때 조건 'p이고 q이고 $\sim r$'의 진리집합은 $P\cap Q\cap R^C$이고

$R^C=\{2, 8, 10, 12, \cdots, 50\}$이므로

$P\cap Q\cap R^C=\{2, 8, 12, 16, 24\}$

따라서 구하는 집합의 원소가 아닌 것은 ①이다.

04 답 ②

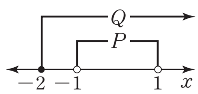
① [반례] $x=-2$이면 $|x|>1$이지만 $x<1$이다. (거짓)

② p: $|x|<1$, q: $x\ge -2$라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $|x|<1$에서 $-1<x<1$ $\quad\therefore P=\{x\,|\,-1<x<1\}$

$Q=\{x\,|\,x\ge -2\}$

두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 $P\subset Q$



즉 주어진 명제는 참이다.

③ [반례] $x=2$, $y=-1$이면 $x+y>0$이지만 $x>0$, $y<0$이다. (거짓)

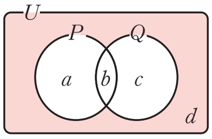
④ [반례] $x=1$, $y=3$이면 xy는 홀수이지만 $x+y$는 짝수이다. (거짓)

⑤ [반례] $x=1$, $y=2$, $z=0$이면 $xz=yz$이지만 $x\neq y$이다. (거짓)

따라서 참인 명제는 ②이다.

05 답 ④

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이려면 P^C의 원소 중에서 Q의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.



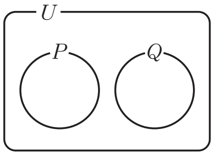
따라서 반례는 집합

$P^C-Q=P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$의 원소인 d이다.

06 답 ②

두 집합 P, Q가 서로소이므로 $P\cap Q=\varnothing$

두 집합 P, Q 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $Q\not\subset P$이므로 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이다.

ㄴ. $P\subset Q^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$는 참이다.

ㄷ. $P^C\not\subset Q$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow q$는 거짓이다.

따라서 항상 참인 명제는 ㄴ이다.

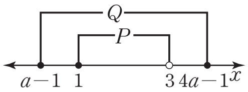
07 답 $1\le a\le 2$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,1\le x<3\}$

$Q=\{x\,|\,a-1\le x\le 4a-1\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-1\le 1$, $4a-1\ge 3$

$\therefore 1\le a\le 2$

08 답 ③

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

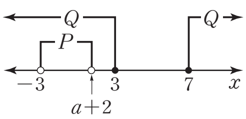
$P=\{x\,|\,-3<x<a+2\}$

q: $|x-5|\ge 2$에서 $x-5\le -2$ 또는 $x-5\ge 2$

$\therefore x\le 3$ 또는 $x\ge 7$

$\therefore Q=\{x\,|\,x\le 3$ 또는 $x\ge 7\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a+2\le 3$ $\quad\therefore a\le 1$

따라서 실수 a의 최댓값은 1이다.

09 답 ④

① 전체집합 U의 모든 x에 대하여 $x+3<10$, 즉 $x<7$이 성립하므로 참이다.

② $x=1$이면 $x^2+1<3$이므로 참이다.

③ $x^2\ge 1$, $y^2\ge 1$에서 $x^2+y^2\ge 2$이므로 참이다.

④ ③에서 x^2+y^2의 최솟값은 2이므로 $x^2+y^2<1$을 만족시키는 x, y의 값은 존재하지 않는다. 즉 거짓이다.

⑤ $x=2$, $y=1$이면 $y^2<x$이므로 참이다.

따라서 거짓인 명제는 ④이다.

10 답 -1

주어진 명제의 부정은

'모든 실수 x에 대하여 $x^2-2ax+2a+3\ge 0$이다.'

모든 실수 x에 대하여 $x^2-2ax+2a+3\ge 0$이 성립하려면 이차방정식 $x^2-2ax+2a+3=0$의 판별식을 D라 할 때

$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-(2a+3)=a^2-2a-3\le 0$

$(a+1)(a-3)\le 0$

$\therefore -1\le a\le 3$

따라서 실수 a의 최솟값은 -1이다.

11 답 ⑤

① 명제: 두 집합 A, B에 대하여 $A\subset B$이면 $A\cap B=A$이다. (참)

역: 두 집합 A, B에 대하여 $A\cap B=A$이면 $A\subset B$이다. (참)

주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

② 명제: 두 삼각형이 합동이면 넓이가 같다. (참)

역: 두 삼각형의 넓이가 같으면 합동이다. (거짓)

[반례] 밑변의 길이가 2, 높이가 2인 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 2\times 2=2$

밑변의 길이가 4, 높이가 1인 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 4\times 1=2$

즉 두 삼각형의 넓이는 같지만 합동이 아니다.

주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

③ 명제: 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형에서 $a^2+b^2=c^2$이면 이 삼각형은 직각삼각형이다. (참)

역: 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형이 직각삼각형이면 $a^2+b^2=c^2$이다. (거짓)

[반례] $a^2+c^2=b^2$ 또는 $b^2+c^2=a^2$

주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

④ 명제: 실수 x, y에 대하여 $x>y$이면 $x^2>y^2$이다. (거짓)

[반례] $x=1$, $y=-2$이면 $x>y$이지만 $x^2<y^2$이다.

역: 실수 x, y에 대하여 $x^2>y^2$이면 $x>y$이다. (거짓)

[반례] $x=-2$, $y=1$이면 $x^2>y^2$이지만 $x<y$이다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

⑤ 명제: 실수 x, y에 대하여 $x+y>2$이면 $x>1$이고 $y>1$이다. (거짓)

[반례] $x=3$, $y=0$이면 $x+y>2$이지만 $x>1$이고 $y<1$이다.

역: 실수 x, y에 대하여 $x>1$이고 $y>1$이면 $x+y>2$이다. (참)

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

따라서 그 역은 참이고 대우가 거짓인 명제는 ⑤이다.

12 답 ④

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 2, 3, 4, 6\}$, $Q=\{3, 6\}$

즉 $Q\subset P$이므로 명제 $q \longrightarrow p$는 참이고 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 참이다.

13 답 2

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면 그 대우 $\sim q \longrightarrow p$도 참이 되어야 한다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $x^2-ax-bx+ab\le 0$에서 $x^2-(a+b)x+ab\le 0$

$(x-a)(x-b)\le 0 \qquad \therefore a\le x\le b\ (\because a<b)$

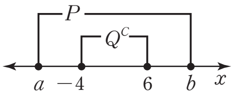
$\therefore P=\{x \mid a\le x\le b\}$

q: $3x-2<-14$ 또는 $4x-5>19$에서

$x<-4$ 또는 $x>6$이므로 $\sim q$: $-4\le x\le 6$

$\therefore Q^C=\{x \mid -4\le x\le 6\}$

명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q^C\subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a\le -4$, $b\ge 6$

따라서 $M=-4$, $m=6$이므로

$M+m=-4+6=2$

14 답 ③

두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $r \longrightarrow \sim s$가 참이므로 그 각각의 대우 $q \longrightarrow \sim p$, $s \longrightarrow \sim r$도 참이다.

즉 두 명제 $q \longrightarrow \sim p$, $s \longrightarrow \sim r$가 참이므로 명제 $q \longrightarrow \sim r$가 참이 되려면 $\sim p \longrightarrow s$가 참이어야 한다.

또 명제 $\sim p \longrightarrow s$가 참이면 그 대우 $\sim s \longrightarrow p$도 참이다.

따라서 명제 $q \longrightarrow \sim r$가 참임을 보이기 위해 필요한 참인 명제는 ③이다.

15 답 A, C

p: A가 1학년이다.

q: B가 1학년이다.

r: C가 1학년이다.

s: D가 1학년이다.

로 놓으면 (가), (나), (다)에서 세 명제 $s \longrightarrow r$, $\sim p \longrightarrow \sim r$, $\sim s \longrightarrow \sim q$가 참이므로 각각의 대우 $\sim r \longrightarrow \sim s$, $r \longrightarrow p$, $q \longrightarrow s$도 참이다.

세 명제 $q \longrightarrow s$, $s \longrightarrow r$, $r \longrightarrow p$가 참이므로

세 명제 $q \longrightarrow r$, $q \longrightarrow p$, $s \longrightarrow p$도 참이다.

이때 B가 1학년이면 A, C, D도 1학년이 되어 네 명의 학생이 모두 1학년이고 D가 1학년이면 A, C도 1학년이 되어 A, C, D가 1학년이다.

이것은 (라)에 모순이므로 B, D는 1학년이 아니다.

따라서 1학년 학생은 A, C이다.

16 답 ③

p: $a^2-b^2=0$에서 $(a+b)(a-b)=0$

$\therefore a=-b$ 또는 $a=b$

q: $a^2-2ab+b^2=0$에서 $(a-b)^2=0 \qquad \therefore a=b$

r: $a^2-ab+b^2=0$에서 $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2=0$

$\therefore a=b=0$

ㄱ. $r \Longrightarrow p$이므로 p는 r이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. $r \Longrightarrow q$이므로 r는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄷ. $q \Longrightarrow p$이므로 q는 p이기 위한 충분조건이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

17 답 ②

p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow \sim q$

r는 $\sim p$이기 위한 필요조건이므로 $\sim p \Longrightarrow r$

$\sim p \Longrightarrow r$이므로 $\sim r \Longrightarrow p$

$\sim r \Longrightarrow p$, $p \Longrightarrow \sim q$이므로 $\sim r \Longrightarrow \sim q$, 즉 $q \Longrightarrow r$

따라서 항상 참인 명제는 ②이다.

18 답 충분조건

(가)에서 $\sim q \Longrightarrow p$, (나)에서 $r \Longrightarrow \sim q$, (다)에서 $p \Longrightarrow s$

$r \Longrightarrow \sim q$, $\sim q \Longrightarrow p$이므로 $r \Longrightarrow p$

$r \Longrightarrow p$, $p \Longrightarrow s$이므로 $r \Longrightarrow s$

따라서 r는 s이기 위한 충분조건이다.

19 답 ④

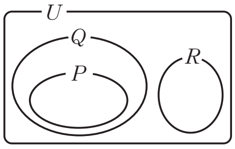
$(Q-R^C)\cup(P-Q)=\varnothing$이므로

$Q-R^C=\varnothing$이고 $P-Q=\varnothing$

$\therefore Q\cap R=\varnothing$이고 $\underline{P-Q=\varnothing}$ $\rightarrow P\subset Q$

즉 Q와 R는 서로소이고 $P\subset Q$이다.

세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $P\not\subset R$, $R\not\subset P$이므로 p는 r이기 위한 아무 조건도 아니다.

② $P\subset Q$이므로 $p \Longrightarrow q$

즉 p는 q이기 위한 충분조건이다.

③ $R\not\subset Q$, $Q\not\subset R$이므로 r는 q이기 위한 아무 조건도 아니다.

④ $P\subset R^C$이므로 $p \Longrightarrow \sim r$

즉 p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

⑤ $R\subset Q^C$이므로 $r \Longrightarrow \sim q$

즉 $\sim q$는 r이기 위한 필요조건이다.

따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

20 답 2

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow q$, 즉 $P\subset Q$

q는 r이기 위한 필요충분조건이므로 $q \Longleftrightarrow r$, 즉 $Q=R$

$P\subset Q$이므로 $2a-1=2$ 또는 $2a-1=a+1$

$\therefore a=\frac{3}{2}$ 또는 $a=2$

(i) $a=\frac{3}{2}$일 때

$P=\{2\}$, $Q=\left\{2, \frac{5}{2}\right\}$, $R=\left\{0, \frac{5}{4}\right\}$

$\therefore Q\neq R$

(ii) $a=2$일 때

$P=\{3\}$, $Q=\{2, 3\}$, $R=\{2, 3\}$

$\therefore Q=R$

(i), (ii)에서 $a=2$

21 답 ⑤

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

p: $|x-2|\le a$에서 $-a\le x-2\le a$

$\therefore -a+2\le x\le a+2$

$\therefore P=\{x \mid -a+2\le x\le a+2\}$

q: $x^2-4x-32\le 0$에서 $(x+4)(x-8)\le 0$

$\therefore\ -4\le x\le 8$

$\therefore\ Q=\{x\mid -4\le x\le 8\}$

r: $|2x-4|<b$에서 $-b<2x-4<b$

$-b+4<2x<b+4$

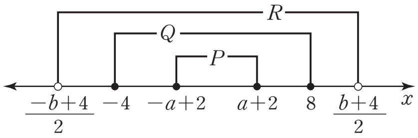
$\therefore\ \dfrac{-b+4}{2}<x<\dfrac{b+4}{2}$

$\therefore\ R=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{-b+4}{2}<x<\dfrac{b+4}{2}\right\}$

q는 p이기 위한 필요조건이므로 $p\Longrightarrow q$, 즉 $P\subset Q$ ……㉠

q는 r이기 위한 충분조건이므로 $q\Longrightarrow r$, 즉 $Q\subset R$ ……㉡

㉠, ㉡을 만족시키도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$-a+2\ge -4,\ a+2\le 8\qquad \therefore\ 0<a\le 6\ (\because a>0)$

$\dfrac{-b+4}{2}<-4,\ \dfrac{b+4}{2}>8\qquad \therefore\ b>12$

따라서 정수 a의 최댓값은 6, 정수 b의 최솟값은 13이므로 그 합은

$6+13=19$

서술형 1 답 -3

$U=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

p: $x^3-9x=0$에서 $x(x+3)(x-3)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=3$

$\therefore\ P=\{-3,\ 0,\ 3\}$

q: $x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=3$

$\therefore\ Q=\{1,\ 3\}$ ……❶

조건 '$\sim p$ 또는 $\sim q$'의 진리집합은 $P^C\cup Q^C=(P\cap Q)^C$

이때 $P\cap Q=\{3\}$이므로

$P^C\cup Q^C=(P\cap Q)^C=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ ……❷

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$-3+(-2)+(-1)+0+1+2=-3$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 구할 수 있다.	40%
❷ 조건 '$\sim p$ 또는 $\sim q$'의 진리집합을 구할 수 있다.	40%
❸ 조건 '$\sim p$ 또는 $\sim q$'의 진리집합의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20%

서술형 2 답 2

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

p: $|x-1|>2$에서 $\sim p$: $|x-1|\le 2$이므로

$-2\le x-1\le 2\qquad \therefore\ -1\le x\le 3$

$\therefore\ P^C=\{x\mid -1\le x\le 3\}$

q: $|x-k|\le 3$에서 $-3\le x-k\le 3$

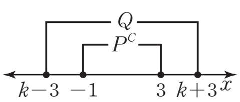
$\therefore\ k-3\le x\le k+3$

$\therefore\ Q=\{x\mid k-3\le x\le k+3\}$ ……❶

명제 $\sim p\longrightarrow q$가 참이 되려면

$P^C\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림

에서 $k-3\le -1,\ k+3\ge 3$



$\therefore\ 0\le k\le 2$ ……❷

따라서 실수 k의 최댓값은 2이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ 두 조건 $\sim p,\ q$의 진리집합을 구할 수 있다.	40%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 실수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 -3

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

p: $x^2-3x-10\le 0$에서 $(x+2)(x-5)\le 0$

$\therefore\ -2\le x\le 5$

$\therefore\ P=\{x\mid -2\le x\le 5\}$

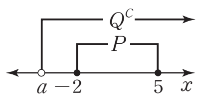
q: $x\le a$에서 $\sim q$: $x>a$

$\therefore\ Q^C=\{x\mid x>a\}$ ……❶

p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이 되려면

$p\Longrightarrow \sim q$, 즉 $P\subset Q^C$이어야 하므로

오른쪽 그림에서



$a<-2$ ……❷

따라서 정수 a의 최댓값은 -3이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ 두 조건 $p,\ \sim q$의 진리집합을 구할 수 있다.	40%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 192~193

01 답 9

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

p: '모든 실수 x에 대하여 $x^2+2kx+4k+5>0$이다.'에서

주어진 조건이 성립하려면 이차방정식 $x^2+2kx+4k+5=0$의 판별식을 D라 할 때

$\dfrac{D}{4}=k^2-(4k+5)=k^2-4k-5<0$

$(k+1)(k-5)<0\qquad \therefore\ -1<k<5$

$\therefore\ P=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

q: '어떤 실수 x에 대하여 $x^2=k-2$이다.'에서

$k-2\ge 0$이어야 하므로 $k\ge 2$

$\therefore\ Q=\{2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$

즉 $P\cap Q=\{2,\ 3,\ 4\}$이므로 두 조건 $p,\ q$가 모두 참인 명제가 되도록 하는 정수 k의 값은 2, 3, 4이다.

따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$2+3+4=9$

02 답 256

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

p: $x^2 \le 2x+8$에서 $x^2-2x-8 \le 0$

$(x+2)(x-4) \le 0$ $\quad \therefore -2 \le x \le 4$

$\therefore P=\{1, 2, 3, 4\}$

$p \Longrightarrow q$이므로 $P \subset Q$

$P \subset Q \subset U$이므로 집합 Q는 전체집합 U의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 4를 원소로 갖는 집합이다.

즉 집합 Q의 개수는 $2^{8-4}=2^4=16$

또 $\sim p \Longrightarrow r$이므로 $P^C \subset R$

이때 $P^C=\{5, 6, 7, 8\}$이고 $P^C \subset R \subset U$이므로 집합 R는 전체집합 U의 부분집합 중에서 5, 6, 7, 8을 원소로 갖는 집합이다.

즉 집합 R의 개수는 $2^{8-4}=2^4=16$

따라서 순서쌍 (Q, R)의 개수는

$16 \times 16=256$

03 답 ②

ㄱ. $a=0$일 때

p: $a(x-1)(x-2)<0$에서 $0<0$

즉 부등식을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로

$P=\varnothing$

ㄴ. $a>0$, $b=0$일 때

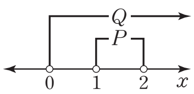
p: $a(x-1)(x-2)<0$에서 $(x-1)(x-2)<0$

$\therefore 1<x<2$

$\therefore P=\{x \mid 1<x<2\}$

q: $x>b$에서 $x>0$ $\quad \therefore Q=\{x \mid x>0\}$

오른쪽 그림에서 $P \subset Q$



ㄷ. $a<0$, $b=3$일 때

p: $a(x-1)(x-2)<0$에서 $\sim p$: $a(x-1)(x-2) \ge 0$

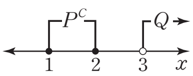
$(x-1)(x-2) \le 0$ $\quad \therefore 1 \le x \le 2$

$\therefore P^C=\{x \mid 1 \le x \le 2\}$

q: $x>b$에서 $x>3$ $\quad \therefore Q=\{x \mid x>3\}$

오른쪽 그림에서 $P^C \not\subset Q$

즉 명제 '$\sim p$이면 q이다.'는 거짓이다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

04 답 ③

ㄱ. $P \cap Q=P$이므로 $P \subset Q$ $\quad \therefore p \longrightarrow q$ (참)

ㄴ. $R^C \cup Q=U$이므로 $(R^C \cup Q)^C=\varnothing$

이때 $(R^C \cup Q)^C=R \cap Q^C=R-Q=\varnothing$이므로 $R \subset Q$

$\therefore r \longrightarrow q$ (참)

ㄷ. [반례] $P \cap R \ne \varnothing$이면 $P \not\subset R^C$이므로 $p \longrightarrow \sim r$는 거짓이다.

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다.

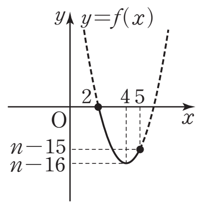
05 답 ①

$f(x)=x^2-8x+n$이라 하면

$f(x)=(x-4)^2+n-16$

즉 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 4가 $2 \le x \le 5$에 포함되므로 $x=2$에서 최댓값 $n-12$를 갖는다.

주어진 조건이 참인 명제가 되는 n의 값이 최소이려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(x)$의 최댓값은 $n-12$이므로

$n-12 \ge 0$ $\quad \therefore n \ge 12$

따라서 자연수 n의 최솟값은 12이다.

06 답 ③

ㄱ. 명제 $\sim p \longrightarrow r$가 참이므로 $P^C \subset R$

ㄴ. [반례] $U=\{1, 2, 3\}$, $P=\{1, 2\}$, $Q=\{2\}$, $R=\{1, 3\}$이면

$P^C \subset R$, $R \subset Q^C$, $R^C \subset Q$이지만 $P \not\subset Q$이다.

ㄷ. 두 명제 $\sim p \longrightarrow r$, $r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 참이고 그 대우 $q \longrightarrow p$도 참이다.

즉 $Q \subset P$이므로 $P \cap Q=Q$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

두 명제 $q \longrightarrow \sim r$, $\sim r \longrightarrow q$가 참이므로 q는 $\sim r$이기 위한 필요충분조건이다.

$\therefore Q=R^C$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $P \cap Q=R^C$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

07 답 12

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

두 명제 $q \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 q는 $\sim p$이기 위한 필요충분조건이다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$Q=P^C$

p: $2x-a=0$에서 $\sim p$: $2x-a \ne 0$ $\quad \therefore x \ne \dfrac{a}{2}$

이때 $Q=P^C$이므로

$Q=\left\{x \,\middle|\, x \ne \dfrac{a}{2}\text{인 실수}\right\}$

즉 부등식 $x^2-bx+9>0$의 해가 $x \ne \dfrac{a}{2}$인 모든 실수이므로 이차함수 $y=x^2-bx+9$의 그래프는 x축에 접해야 한다.

이차방정식 $x^2-bx+9=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-b)^2-4 \times 1 \times 9=b^2-36=0$

$\therefore b=6$ ($\because b>0$)

즉 q: $x^2-6x+9>0$에서 $(x-3)^2>0$이므로 $x \ne 3$

$\therefore Q=\{x \mid x \ne 3\text{인 실수}\}$

따라서 $\dfrac{a}{2}=3$이므로 $a=6$

$\therefore a+b=6+6=12$

08 답 ①

실수 전체의 집합을 U라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

명제 '모든 실수 x에 대하여 p이다.'가 참이 되려면 $P=U$이어야 한다.

즉 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+1 \ge 0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+2ax+1=0$의 판별식을 D라 할 때

$\dfrac{D}{4}=a^2-1 \le 0$, $(a+1)(a-1) \le 0$

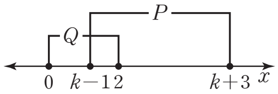
$\therefore -1 \le a \le 1$

즉 정수 a의 값은 $-1, 0, 1$이므로 그 개수는 3이다.

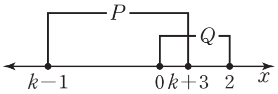
p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로
$p \Longrightarrow \sim q$ $\qquad \therefore P \subset Q^C$
이때 $P=U$이므로 $Q^C=U$
q: $x^2+2bx+9\le 0$에서 $\sim q$: $x^2+2bx+9>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2bx+9>0$이 성립하려면 이차방정식 $x^2+2bx+9=0$의 판별식을 D라 할 때
$\frac{D}{4}=b^2-9<0$, $(b+3)(b-3)<0$
$\therefore -3<b<3$
즉 정수 b의 값은 $-2, -1, 0, 1, 2$이므로 그 개수는 5이다.
따라서 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는
$3\times 5=15$

09 답 ④

조건 $k-1\le x\le k+3$의 진리집합을 P, 조건 $0\le x\le 2$의 진리집합을 Q라 하면
$P=\{x|k-1\le x\le k+3\}$, $Q=\{x|0\le x\le 2\}$
이때 주어진 명제가 참이려면 집합 P에 속하는 원소 중에서 집합 Q에 속하는 원소가 존재해야 한다.
$\therefore P\cap Q\ne\varnothing$
(i) $k-1\ge 0$일 때
$k\ge 1$이므로 $P\cap Q\ne\varnothing$이려면
오른쪽 그림에서
$k-1\le 2$ $\qquad \therefore k\le 3$
$\therefore 1\le k\le 3$



(ii) $k-1<0$일 때
$k<1$이므로 $P\cap Q\ne\varnothing$이려면
오른쪽 그림에서
$k+3\ge 0$ $\qquad \therefore k\ge -3$
$\therefore -3\le k<1$



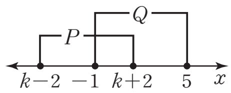
(i), (ii)에서 $-3\le k\le 3$
따라서 정수 k의 값은 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$이므로 그 개수는 7이다.

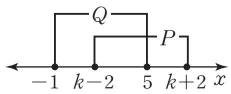
10 답 ①

(가)에서 $0\in A$
(나)에서 명제 '$a^2-2\notin A$이면 $a\notin A$이다.'가 참이므로 그 대우 '$a\in A$이면 $a^2-2\in A$이다.'도 참이다.
이때 $0\in A$이므로 $0^2-2=-2\in A$
$-2\in A$이므로 $(-2)^2-2=2\in A$
$2\in A$이므로 $2^2-2=2\in A$
$\therefore \{-2, 0, 2\}\subset A$
(다)에서 $n(A)=4$이므로
$A=\{-2, 0, 2, k\}$ $(k\ne -2, k\ne 0, k\ne 2)$라 하자.
$k\in A$이면 $k^2-2\in A$이므로 k^2-2의 값은 $-2, 0, 2, k$ 중 하나이다.
(i) $k^2-2=-2$인 경우
$k^2=0$ $\qquad \therefore k=0$
즉 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $k^2-2=0$인 경우
$k^2=2$ $\qquad \therefore k=-\sqrt{2}$ 또는 $k=\sqrt{2}$
(iii) $k^2-2=2$인 경우
$k^2=4$ $\qquad \therefore k=-2$ 또는 $k=2$
즉 조건을 만족시키지 않는다.
(iv) $k^2-2=k$인 경우
$k^2-k-2=0$, $(k+1)(k-2)=0$
$\therefore k=-1$ $(\because k\ne 2)$
(i)~(iv)에서 $k=-\sqrt{2}$ 또는 $k=\sqrt{2}$ 또는 $k=-1$
따라서 집합 A가 될 수 있는 것은
$\{-2, 0, 2, -\sqrt{2}\}$, $\{-2, 0, 2, \sqrt{2}\}$, $\{-2, 0, 2, -1\}$
이므로 그 개수는 3이다.

11 답 ②

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
p: $|x-k|\le 2$에서 $-2\le x-k\le 2$
$\therefore k-2\le x\le k+2$
$\therefore P=\{x|k-2\le x\le k+2\}$
q: $x^2-4x-5\le 0$에서 $(x+1)(x-5)\le 0$
$\therefore -1\le x\le 5$
$\therefore Q=\{x|-1\le x\le 5\}$
명제 $p \longrightarrow q$와 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 모두 거짓이 되려면
$P\not\subset Q$이고 $P\not\subset Q^C$, 즉 $P\cap Q\ne\varnothing$, $P\cap Q^C\ne\varnothing$
이때 $k-2\ge -1$이고 $k+2\le 5$, 즉 $1\le k\le 3$이면 $P\subset Q$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.
즉 $k-2<-1$ 또는 $k+2>5$이어야 하므로 다음 그림과 같아야 한다.

(i)


(ii)


(i) $k-2<-1$, 즉 $k<1$일 때
$-1\le k+2\le 5$이므로 $-3\le k\le 3$
$\therefore -3\le k<1$
(ii) $k+2>5$, 즉 $k>3$일 때
$-1\le k-2\le 5$이므로 $1\le k\le 7$
$\therefore 3<k\le 7$
(i), (ii)에서 정수 k의 값은 $-3, -2, -1, 0, 4, 5, 6, 7$이므로 그 합은
$-3+(-2)+(-1)+0+4+5+6+7=16$

08 절대부등식

Ⅱ 집합과 명제

개념 완성하기

p. 197～198

01 답 (가) $a^2+b^2\neq0$ (나) $b^2>0$ (다) 참

02 답 (가) $b\neq0$ (나) $|a|+|b|=0$

03 답 ○

$x<x+2$, 즉 $0<2$는 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 절대부등식이다.

04 답 ○

$x^2+2x\geq-1$에서 $x^2+2x+1\geq0$

즉 $(x+1)^2\geq0$이므로 절대부등식이다.

05 답 ×

$x^2-4x+4>0$에서 $(x-2)^2>0$

즉 $x\neq2$일 때만 성립하므로 절대부등식이 아니다.

06 답 ○

$|x|+2>0$은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 절대부등식이다.

07 답 (가) $\frac{3}{4}b^2$ (나) $b=0$ (다) 0

08 답 (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (다) $a=b$

09 답 (가) $\geq$ (나) a (다) b

10 답 4

$x>0$, $\frac{4}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\frac{4}{x}\geq2\sqrt{x\times\frac{4}{x}}=4$ $\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{4}{x}\text{, 즉 } x=2\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $x+\frac{4}{x}$의 최솟값은 4이다.

11 답 16

$4x>0$, $\frac{16}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4x+\frac{16}{x}\geq2\sqrt{4x\times\frac{16}{x}}=16$

$\left(\text{단, 등호는 } 4x=\frac{16}{x}\text{, 즉 } x=2\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $4x+\frac{16}{x}$의 최솟값은 16이다.

12 답 2

$\frac{y}{x}>0$, $\frac{x}{y}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geq2\sqrt{\frac{y}{x}\times\frac{x}{y}}=2$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{y}{x}=\frac{x}{y}\text{, 즉 } x=y\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$의 최솟값은 2이다.

13 답 4

$\frac{x}{y}>0$, $\frac{4y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}\geq2\sqrt{\frac{x}{y}\times\frac{4y}{x}}=4$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{y}=\frac{4y}{x}\text{, 즉 } x=2y\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}$의 최솟값은 4이다.

14 답 4

$\frac{2x}{3y}>0$, $\frac{6y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{2x}{3y}+\frac{6y}{x}\geq2\sqrt{\frac{2x}{3y}\times\frac{6y}{x}}=4$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{2x}{3y}=\frac{6y}{x}\text{, 즉 } x=3y\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\frac{2x}{3y}+\frac{6y}{x}$의 최솟값은 4이다.

15 답 13

$\frac{8x}{y}>0$, $\frac{9y}{2x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{8x}{y}+\frac{9y}{2x}+1\geq2\sqrt{\frac{8x}{y}\times\frac{9y}{2x}}+1=13$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{8x}{y}=\frac{9y}{2x}\text{, 즉 } 4x=3y\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\frac{8x}{y}+\frac{9y}{2x}+1$의 최솟값은 13이다.

16 답 6

$2x+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+1+\frac{9}{2x+1}\geq2\sqrt{(2x+1)\times\frac{9}{2x+1}}=6$

$\left(\text{단, 등호는 } 2x+1=\frac{9}{2x+1}\text{, 즉 } x=1\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $2x+1+\frac{9}{2x+1}$의 최솟값은 6이다.

17 답 8

$(x+2)\left(\frac{2}{x}+1\right)=2+x+\frac{4}{x}+2=x+\frac{4}{x}+4$

이때 $x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\frac{4}{x}+4\geq2\sqrt{x\times\frac{4}{x}}+4=8$

$\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{4}{x}\text{, 즉 } x=2\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $(x+2)\left(\frac{2}{x}+1\right)$의 최솟값은 8이다.

18 답 4

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\geq2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

이때 $a+b=4$이므로 $4\ge 2\sqrt{ab}$, $\sqrt{ab}\le 2$
양변을 제곱하면 $ab\le 4$
따라서 ab의 최댓값은 4이다.

19 답 $\frac{9}{10}$
$2a>0$, $5b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$2a+5b\ge 2\sqrt{10ab}$ (단, 등호는 $2a=5b$일 때 성립)
이때 $2a+5b=6$이므로
$6\ge 2\sqrt{10ab}$, $\sqrt{10ab}\le 3$
양변을 제곱하면 $10ab\le 9$ $\quad\therefore ab\le \frac{9}{10}$
따라서 ab의 최댓값은 $\frac{9}{10}$이다.

20 답 $2\sqrt{3}$
$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)
이때 $ab=3$이므로 $a+b\ge 2\sqrt{3}$
따라서 $a+b$의 최솟값은 $2\sqrt{3}$이다.

21 답 $8\sqrt{3}$
$2a>0$, $3b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$2a+3b\ge 2\sqrt{6ab}$ (단, 등호는 $2a=3b$일 때 성립)
이때 $ab=8$이므로 $2a+3b\ge 2\sqrt{48}=8\sqrt{3}$
따라서 $2a+3b$의 최솟값은 $8\sqrt{3}$이다.

22 답 4
$a>0$, $b>0$에서 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2b^2}$
$\therefore a^2+b^2\ge 2ab$ (단, 등호는 $a^2=b^2$, 즉 $a=b$일 때 성립)
이때 $a^2+b^2=8$이므로 $8\ge 2ab$ $\quad\therefore ab\le 4$
따라서 ab의 최댓값은 4이다.

23 답 3
$a>0$, $b>0$에서 $4a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$4a^2+b^2\ge 2\sqrt{4a^2b^2}$
$\therefore 4a^2+b^2\ge 4ab$ (단, 등호는 $4a^2=b^2$, 즉 $2a=b$일 때 성립)
이때 $4a^2+b^2=12$이므로 $12\ge 4ab$ $\quad\therefore ab\le 3$
따라서 ab의 최댓값은 3이다.

24 답 $-2\sqrt{10}\le x+2y\le 2\sqrt{10}$
x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(1^2+2^2)(x^2+y^2)\ge (x+2y)^2$ $\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{y}{2}\text{일 때 성립}\right)$
이때 $x^2+y^2=8$이므로
$5\times 8\ge (x+2y)^2$, $(x+2y)^2\le 40$
$\therefore -2\sqrt{10}\le x+2y\le 2\sqrt{10}$

25 답 $-\sqrt{13}\le 2x+3y\le \sqrt{13}$
x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(2^2+3^2)(x^2+y^2)\ge (2x+3y)^2$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{2}=\frac{y}{3}\text{일 때 성립}\right)$
이때 $x^2+y^2=1$이므로
$13\times 1\ge (2x+3y)^2$, $(2x+3y)^2\le 13$
$\therefore -\sqrt{13}\le 2x+3y\le \sqrt{13}$

26 답 $-5\sqrt{2}\le ax+by\le 5\sqrt{2}$
a, b, x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge (ax+by)^2$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{a}=\frac{y}{b}\text{일 때 성립}\right)$
이때 $a^2+b^2=5$, $x^2+y^2=10$이므로
$5\times 10\ge (ax+by)^2$, $(ax+by)^2\le 50$
$\therefore -5\sqrt{2}\le ax+by\le 5\sqrt{2}$

27 답 $-2\sqrt{2}\le ax+by\le 2\sqrt{2}$
a, b, x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge (ax+by)^2$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{a}=\frac{y}{b}\text{일 때 성립}\right)$
이때 $a^2+b^2=2$, $x^2+y^2=4$이므로
$2\times 4\ge (ax+by)^2$, $(ax+by)^2\le 8$
$\therefore -2\sqrt{2}\le ax+by\le 2\sqrt{2}$

28 답 -6
a, b, x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge (ax+by)^2$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{a}=\frac{y}{b}\text{일 때 성립}\right)$
이때 $a^2+b^2=2$, $x^2+y^2=3$이므로
$2\times 3\ge (ax+by)^2$, $(ax+by)^2\le 6$
$\therefore -\sqrt{6}\le ax+by\le \sqrt{6}$
따라서 $ax+by$의 최댓값은 $\sqrt{6}$, 최솟값은 $-\sqrt{6}$이므로 그 곱은
$\sqrt{6}\times(-\sqrt{6})=-6$

29 답 $\frac{16}{5}$
x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(2^2+1^2)(x^2+y^2)\ge (2x+y)^2$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{2}=y\text{일 때 성립}\right)$
이때 $2x+y=4$이므로 $5(x^2+y^2)\ge 16$
$\therefore x^2+y^2\ge \frac{16}{5}$
따라서 x^2+y^2의 최솟값은 $\frac{16}{5}$이다.

유형 완성하기
p. 199~208

01 답 10
자연수 n에 대하여 주어진 명제의 대우는
'n이 3의 배수가 아니면 n^2도 3의 배수가 아니다.'
n이 3의 배수가 아니면 자연수 k에 대하여
$n=\boxed{(가)\ 3k-1}$ 또는 $n=3k-2$이다.

(i) $n=\boxed{\text{(가) } 3k-1}$인 경우

$n^2=(3k-1)^2=9k^2-6k+1=3(3k^2-2k)+1$

이고 $3k^2-2k$는 자연수이므로 n^2은 3의 배수가 아니다.

(ii) $n=3k-2$인 경우

$n^2=(3k-2)^2=9k^2-12k+4=3(\boxed{\text{(나) } 3k^2-4k+1})+1$

이고 $\boxed{\text{(나) } 3k^2-4k+1}$은 음이 아닌 정수이므로 n^2은 3의 배수가 아니다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 명제도 참이다.

즉 $f(k)=3k-1$, $g(k)=3k^2-4k+1$이므로

$f(2)+g(2)=5+5=10$

01-1 답 ②

자연수 n에 대하여 주어진 명제의 대우는

'n이 홀수이면 n^2+2n이 홀수이다.'

n이 홀수이면 자연수 k에 대하여 $n=2k-1$이므로

$n^2+2n=(2k-1)^2+2(2k-1)$

$=4k^2-1$

$=2\times\boxed{2k^2}-1$

즉 n^2+2n은 홀수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 명제도 참이다.

02 답 ②

자연수 n에 대하여 주어진 명제의 대우는

'n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.'

n이 $\boxed{\text{(가) 홀수}}$이면 자연수 k에 대하여 $n=\boxed{\text{(나) } 2k-1}$이므로

$n^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1=2(\boxed{\text{(다) } 2k^2-2k})+1$

즉 n^2은 $\boxed{\text{(라) 홀수}}$이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 $\boxed{\text{(마) 참}}$이므로 명제도 참이다.

02-1 답 ②

자연수 n에 대하여 주어진 명제의 대우는

'n이 짝수이면 n^2도 짝수이다.'

n이 $\boxed{\text{(가) 짝수}}$이면 자연수 k에 대하여 $n=2k$이므로

$n^2=(2k)^2=4k^2=2\times\boxed{\text{(나) } 2k^2}$

즉 n^2은 $\boxed{\text{(다) 2}}$의 배수이므로 $\boxed{\text{(라) 짝수}}$이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 명제도 $\boxed{\text{(마) 참}}$이다.

03 답 15

$\sqrt{3}$을 유리수라 가정하면

$\sqrt{3}=\dfrac{n}{m}$ ……㉠

인 서로소인 두 자연수 m, n이 존재한다.

㉠의 양변을 제곱하면 $3=\dfrac{n^2}{m^2}$이므로

$n^2=\boxed{\text{(가) } 3m^2}$ ……㉡

여기서 n^2은 3의 배수이므로 n도 3의 배수이다.

$n=3k$ (k는 자연수)로 놓고 이를 ㉡에 대입하면

$(3k)^2=\boxed{\text{(가) } 3m^2}$ $\quad\therefore m^2=\boxed{\text{(나) } 3k^2}$

이때 m^2이 3의 배수이므로 m도 3의 배수이다.

이것은 m, n이 서로소라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{3}$은 무리수이다.

즉 $f(m)=3m^2$, $g(k)=3k^2$이므로

$f(1)+g(2)=3+12=15$

03-1 답 (가) 1 (나) -1

$\sqrt{n^2-1}$이 유리수라 가정하면

$\sqrt{n^2-1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)로 놓을 수 있다.

이 식의 양변을 제곱하면

$n^2-1=\dfrac{q^2}{p^2}$ ……㉠

㉠의 좌변은 자연수이므로 우변도 자연수이어야 한다.

이때 p와 q는 서로소인 자연수이므로

$p^2=\boxed{\text{(가) } 1}$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $n^2-1=q^2$

$n^2-q^2=\boxed{\text{(가) } 1}$, $(n+q)(n-q)=\boxed{\text{(가) } 1}$

즉 $n+q$, $n-q$의 값은 모두 $\boxed{\text{(가) } 1}$ 또는 $\boxed{\text{(나) } -1}$이다.

이것은 n은 $n\ge2$인 자연수, q는 자연수라는 가정에 모순이므로

$\sqrt{n^2-1}$은 무리수이다.

$n+q=\pm1$, $n-q=\pm1$(복부호동순)을 만족시키는 자연수 $n(n\ge2)$, q가 존재하지 않는다.

04 답 (가) 짝수 (나) 약수 (다) 소수 (라) 짝수

$a+1$이 홀수라 가정하면 a는 $\boxed{\text{(가) 짝수}}$이므로 2는 a의 $\boxed{\text{(나) 약수}}$이다.

이것은 a가 $\boxed{\text{(다) 소수}}$라는 가정에 모순이므로 $a+1$은 $\boxed{\text{(라) 짝수}}$이다.

04-1 답 풀이 참조

$b\ne0$이라 가정하면 ……❶

$a+b\sqrt{2}=0$에서 $\sqrt{2}=-\dfrac{a}{b}$

이때 a, b가 유리수이므로 $-\dfrac{a}{b}$도 유리수이다.

즉 $\sqrt{2}$는 유리수이다.

이것은 $\sqrt{2}$가 무리수라는 사실에 모순이므로 ……❷

$b=0$

$b=0$을 $a+b\sqrt{2}=0$에 대입하면 $a=0$

따라서 유리수 a, b에 대하여 $a+b\sqrt{2}=0$이면 $a=b=0$이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ 결론을 부정할 수 있다.	20%
❷ 모순이 됨을 보일 수 있다.	60%
❸ 명제가 참임을 증명할 수 있다.	20%

05 답 (가) $\dfrac{1}{2}$ (나) 실수 (다) $a=b=c$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\dfrac{1}{2}\{2a^2+2b^2+2c^2-2(ab+bc+ca)\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\boxed{\text{(가) } \dfrac{1}{2}}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

이때 a, b, c가 $\boxed{\text{(나) 실수}}$이므로

$(a-b)^2\ge0$, $(b-c)^2\ge0$, $(c-a)^2\ge0$

즉 $\boxed{(\text{가})\ \frac{1}{2}}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\ge 0$이므로
$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$
등호는 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$, 즉 $\boxed{(\text{다})\ a=b=c}$일 때 성립한다.

05-1 답 ③

$a^2-4ab+5b^2-2b+1=a^2-4ab+4b^2+b^2-2b+1$
$=(\boxed{(\text{가})\ a-2b})^2+(b-1)^2$
이때 a, b는 실수이므로
$(\boxed{(\text{가})\ a-2b})^2\ge 0$, $(b-1)^2\ge 0$
즉 $a^2-4ab+5b^2-2b+1\ge 0$이므로
$a^2-4ab+5b^2\ge 2b-1$
등호는 $a-2b=0$, $b-1=0$, 즉 $a=\boxed{(\text{나})\ 2}$, $b=\boxed{(\text{다})\ 1}$일 때 성립한다.

06 답 ④

$A-B=\left(\frac{a+b}{2}\right)^3-\frac{a^3+b^3}{2}$
$=\frac{(a+b)^3}{8}-\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{2}$
$=-\frac{(a+b)(3a^2-6ab+3b^2)}{8}$
$=-\frac{3}{8}(a+b)(a-b)^2\le 0$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)
$\therefore A\le B$

06-1 답 ④

(i) $A-B=\frac{x+2y}{3xy}-\frac{2x+y}{3xy}=\frac{-x+y}{3xy}$
$1<x<y$에서 $-x+y>0$, $xy>0$이므로
$A-B>0$ $\quad\therefore A>B$
(ii) $B-C=\frac{2x+y}{3xy}-\frac{x+y}{2xy}=\frac{2(2x+y)-3(x+y)}{6xy}=\frac{x-y}{6xy}$
$1<x<y$에서 $x-y<0$, $xy>0$이므로
$B-C<0$ $\quad\therefore B<C$
(iii) $C-A=\frac{x+y}{2xy}-\frac{x+2y}{3xy}=\frac{3(x+y)-2(x+2y)}{6xy}=\frac{x-y}{6xy}$
$1<x<y$에서 $x-y<0$, $xy>0$이므로
$C-A<0$ $\quad\therefore C<A$
(i)~(iii)에서 $B<C<A$

07 답 $-\frac{5}{4}$

$A-B=(a^2+b^2)-(a-2b+k)$
$=(a^2-a)+(b^2+2b)-k$
$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+(b+1)^2-k-\frac{1}{4}-1$
$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+(b+1)^2-k-\frac{5}{4}$ …… ❶
이때 $A\ge B$, 즉 $A-B\ge 0$이 항상 성립하므로
$-k-\frac{5}{4}\ge 0$ $\quad\therefore k\le -\frac{5}{4}$ …… ❷
따라서 실수 k의 최댓값은 $-\frac{5}{4}$이다. …… ❸

채점 기준	비율
❶ $A-B$를 완전제곱식의 꼴로 고칠 수 있다.	40%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 실수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

07-1 답 10

$A-B=(4a^2+b^2)-(4a-6b-k)$
$=(4a^2-4a)+(b^2+6b)+k$
$=(2a-1)^2+(b+3)^2+k-1-9$
$=(2a-1)^2+(b+3)^2+k-10$
이때 $A\ge B$, 즉 $A-B\ge 0$이 항상 성립하므로
$k-10\ge 0$ $\quad\therefore k\ge 10$
따라서 실수 k의 최솟값은 10이다.

08 답 ③

$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$
$=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a+b)^2$
$=(a^2+2|ab|+b^2)-(a^2+2ab+b^2)$
$=2(\boxed{(\text{가})\ |ab|}-ab)\boxed{(\text{나})\ \ge}0$ ($\because |ab|\ge ab$)
$\therefore (|a|+|b|)^2\boxed{(\text{나})\ \ge}|a+b|^2$
그런데 $|a|+|b|\ge 0$, $|a+b|\ge 0$이므로
$|a|+|b|\ge |a+b|$
(단, 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $\boxed{(\text{다})\ ab\ge 0}$일 때 성립)

08-1 답 ③

(i) $|a|\ge|b|$일 때
$(|a|-|b|)^2-|a-b|^2$
$=(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)-(a-b)^2$
$=(a^2-2|ab|+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$
$=\boxed{(\text{가})\ 2(ab-|ab|)}$
$|ab|\boxed{(\text{나})\ \ge}ab$이므로 $(|a|-|b|)^2-|a-b|^2\le 0$
$\therefore (|a|-|b|)^2\le |a-b|^2$
이때 $|a|-|b|\ge 0$, $|a-b|\ge 0$이므로
$|a|-|b|\le |a-b|$
(ii) $|a|<|b|$일 때
$|a|-|b|<0$, $|a-b|>0$이므로
$|a|-|b|\boxed{(\text{다})\ <}|a-b|$
(i), (ii)에서 $|a|-|b|\le|a-b|$
(단, 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $ab\ge 0$이고 $|a|\ge|b|$일 때 성립)

09 답 $A\ge B$

$A^2-B^2=(\sqrt{2(a^2+b^2)})^2-(|a|+|b|)^2$
$=2(a^2+b^2)-(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)$
$=2a^2+2b^2-a^2-2|ab|-b^2$
$=a^2-2|ab|+b^2$
$=|a|^2-2|ab|+|b|^2$
$=(|a|-|b|)^2\ge 0$ (단, 등호는 $a=\pm b$일 때 성립)
즉 $A^2-B^2\ge 0$이므로 $A^2\ge B^2$
이때 $A\ge 0$, $B\ge 0$이므로 $A\ge B$

09-1 답 $A \ge B$

$A^2-B^2=(\sqrt{pa+qb})^2-(p\sqrt{a}+q\sqrt{b})^2$
$=pa+qb-(p^2a+2pq\sqrt{ab}+q^2b)$
$=pa(1-p)+qb(1-q)-2pq\sqrt{ab}$
$=apq+bpq-2pq\sqrt{ab}$ ($\because$ $p+q=1$)
$1-p=q,\ 1-q=p$
$=pq(a-2\sqrt{ab}+b)$
$=pq(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)
즉 $A^2-B^2\ge 0$이므로 $A^2 \ge B^2$
이때 $A>0$, $B>0$이므로 $A \ge B$

10 답 ⑤

ㄱ. [반례] $a=0$, $b=0$이면 $a^2+b^2=0$, $ab=0$이므로
$a^2+b^2=ab$
ㄴ. $\dfrac{a^2+b^2}{2}-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{a^2+2ab+b^2}{4}$
$=\dfrac{a^2-2ab+b^2}{4}$
$=\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 \ge 0$
$\therefore \dfrac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)
ㄷ. $(|a|+|b|)^2-|a-b|^2$
$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a-b)^2$
$=a^2+2|ab|+b^2-a^2+2ab-b^2$
$=2(|ab|+ab)\ge 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2 \ge |a-b|^2$
이때 $|a-b|\ge 0$, $|a|+|b|\ge 0$이므로
$|a|+|b| \ge |a-b|$ (단, 등호는 $ab\le 0$일 때 성립)
따라서 절대부등식인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

10-1 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. $a^2+b^2+1-ab-a-b$
$=\dfrac{1}{2}\{2a^2+2b^2+2-2(ab+a+b)\}$
$=\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\}$
$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\}$
이때 a, b는 실수이므로
$(a-b)^2\ge 0$, $(a-1)^2 \ge 0$, $(b-1)^2 \ge 0$
즉 $\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\}\ge 0$이므로
$a^2+b^2+1 \ge ab+a+b$ (단, 등호는 $a=b=1$일 때 성립)
ㄴ. [반례] $a=1$, $b=-1$이면 $|a+b|=0$, $|a-b|=2$이므로
$|a+b|<|a-b|$
ㄷ. $||a|-|b||^2-|a-b|^2=(|a|-|b|)^2-(a-b)^2$
$=a^2-2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$
$=2(ab-|ab|)$
$ab \le |ab|$이므로 $2(ab-|ab|)\le 0$
$\therefore ||a|-|b||^2 \le |a-b|^2$
이때 $||a|-|b||\ge 0$, $|a-b|\ge 0$이므로
$||a|-|b|| \le |a-b|$ (단, 등호는 $ab \ge 0$일 때 성립)
ㄹ. $(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-b-(a-2\sqrt{ab}+b)$
$=2\sqrt{ab}-2b$
$=2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$
$\sqrt{b}>0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$이므로 $2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0$
$\therefore (\sqrt{a-b})^2>(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$
이때 $\sqrt{a-b}>0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$이므로
$\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

11 답 31

$\left(x+\dfrac{4}{y}\right)\left(y+\dfrac{9}{x}\right)=xy+9+4+\dfrac{36}{xy}$
$=xy+\dfrac{36}{xy}+13$
$xy>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$xy+\dfrac{36}{xy}+13 \ge 2\sqrt{xy\times\dfrac{36}{xy}}+13$
$=12+13$
$=25$
이때 등호는 $xy=\dfrac{36}{xy}$일 때 성립하므로
$(xy)^2=36 \qquad \therefore xy=6$ ($\because xy>0$)
따라서 $\left(x+\dfrac{4}{y}\right)\left(y+\dfrac{9}{x}\right)$는 $xy=6$일 때 최솟값 25를 가지므로
$a=6$, $b=25$
$\therefore a+b=6+25=31$

11-1 답 ⑤

$\left(x+\dfrac{3}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x}+3y\right)=1+3xy+\dfrac{3}{xy}+9$
$=3xy+\dfrac{3}{xy}+10$
$xy>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$3xy+\dfrac{3}{xy}+10 \ge 2\sqrt{3xy\times\dfrac{3}{xy}}+10$
$=6+10$
$=16$
이때 등호는 $3xy=\dfrac{3}{xy}$일 때 성립하므로
$(xy)^2=1 \qquad \therefore xy=1$ ($\because xy>0$)
따라서 $\left(x+\dfrac{3}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x}+3y\right)$의 최솟값은 16, 그때의 xy의 값은 1이므로
$m=1$, $n=16$
$\therefore m+n=1+16=17$

12 답 $\sqrt{2}$

$\left(2a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a+\dfrac{8}{a}\right)=2a^2+16+1+\dfrac{8}{a^2}$
$=2a^2+\dfrac{8}{a^2}+17$
$a>0$에서 $a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$2a^2+\dfrac{8}{a^2}+17 \ge 2\sqrt{2a^2\times\dfrac{8}{a^2}}+17$
$=8+17$
$=25$
이때 등호는 $2a^2=\dfrac{8}{a^2}$일 때 성립하므로
$a^4=4 \qquad \therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

12-1 답 2

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{16}{x}\right)=x^2-16-1+\frac{16}{x^2}$$
$$=x^2+\frac{16}{x^2}-17$$

$x>0$에서 $x^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+\frac{16}{x^2}-17\ge2\sqrt{x^2\times\frac{16}{x^2}}-17$$
$$=8-17=-9$$

이때 주어진 식의 최솟값은 -9, 즉 등호가 성립할 때이다. ······❶

등호는 $x^2=\frac{16}{x^2}$일 때 성립하므로 ······❷

$x^4=16 \quad \therefore x=2\ (\because x>0)$ ······❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 값이 최소가 되는 조건을 알 수 있다.	40%
❷ ❶에서 등호가 성립할 조건을 알 수 있다.	40%
❸ x의 값을 구할 수 있다.	20%

13 답 25

$$(9x^2+x)\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=36x+9+4+\frac{1}{x}$$
$$=36x+\frac{1}{x}+13$$

$x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$36x+\frac{1}{x}+13\ge2\sqrt{36x\times\frac{1}{x}}+13$$
$$=12+13=25$$

이때 등호는 $36x=\frac{1}{x}$일 때 성립하므로

$36x^2=1,\ x^2=\frac{1}{36} \qquad \therefore x=\frac{1}{6}\ (\because x>0)$

따라서 $(9x^2+x)\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$의 최솟값은 25이다.

13-1 답 ④

$$(6a^2-2a)\left(\frac{3}{a^2}-\frac{1}{a}\right)=18-6a-\frac{6}{a}+2$$
$$=20-6\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+\frac{1}{a}\ge2\sqrt{a\times\frac{1}{a}}$$
$$=2\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{1}{a}\text{, 즉 } a=1\text{일 때 성립}\right)$$

즉 $a+\frac{1}{a}\ge2$이므로 $-\left(a+\frac{1}{a}\right)\le-2$

$$\therefore 20-6\left(a+\frac{1}{a}\right)\le20-6\times2$$
$$=20-12=8$$

따라서 $(6a^2-2a)\left(\frac{3}{a^2}-\frac{1}{a}\right)$의 최댓값은 8이다.

14 답 ①

$$x+\frac{4}{x+3}=x+3+\frac{4}{x+3}-3$$

$x>-3$에서 $x+3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+3+\frac{4}{x+3}-3\ge2\sqrt{(x+3)\times\frac{4}{x+3}}-3$$
$$=4-3=1$$

즉 $x+\frac{4}{x+3}$의 최솟값은 1이므로 $b=1$

이때 등호는 $x+3=\frac{4}{x+3}$일 때 성립하므로

$(x+3)^2=4,\ x+3=2\ (\because x+3>0)$

$\therefore x=-1$, 즉 $a=-1$

$\therefore a+b=-1+1=0$

14-1 답 8

$$2x-2+\frac{2}{x-3}=2(x-3)+\frac{2}{x-3}+4$$

$x>3$에서 $x-3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2(x-3)+\frac{2}{x-3}+4\ge2\sqrt{2(x-3)\times\frac{2}{x-3}}+4$$
$$=4+4=8$$
$$\left(\text{단, 등호는 } 2(x-3)=\frac{2}{x-3}\text{, 즉 } x=4\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $2x-2+\frac{2}{x-3}\ge a$가 항상 성립하려면 $a\le8$이어야 하므로 a의 최댓값은 8이다.

15 답 ②

$a\ne0$이므로 $\frac{4a}{a^2+2}$의 분모, 분자를 각각 a로 나누면

$$\frac{4a}{a^2+2}=\frac{4}{a+\frac{2}{a}}$$

이때 $a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+\frac{2}{a}\ge2\sqrt{a\times\frac{2}{a}}$$
$$=2\sqrt{2}\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{2}{a}\text{, 즉 } a=\sqrt{2}\text{일 때 성립}\right)$$

즉 분모 $a+\frac{2}{a}$의 최솟값이 $2\sqrt{2}$이므로 $\frac{4a}{a^2+2}$의 최댓값은

$$\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

다른 풀이

$\frac{4a}{a^2+2}$의 역수는 $\frac{a^2+2}{4a}$이므로

$$\frac{a^2+2}{4a}=\frac{a^2}{4a}+\frac{2}{4a}=\frac{a}{4}+\frac{1}{2a}$$

이때 $a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a}{4}+\frac{1}{2a}\ge2\sqrt{\frac{a}{4}\times\frac{1}{2a}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{4}=\frac{1}{2a}\text{, 즉 } a=\sqrt{2}\text{일 때 성립}\right)$$

즉 $\frac{a^2+2}{4a}\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로 $\frac{4a}{a^2+2}\le\sqrt{2}$

따라서 $\frac{4a}{a^2+2}$의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다.

15-1 답 ④

$$\frac{x^2+3x+4}{x^2+2x+4}=1+\frac{x}{x^2+2x+4}$$

$x\ne0$이므로 $\frac{x}{x^2+2x+4}$의 분모, 분자를 각각 x로 나누면

$$\frac{x}{x^2+2x+4}=\frac{1}{x+2+\frac{4}{x}}$$

이때 $x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+2+\frac{4}{x}\ge 2\sqrt{x\times\frac{4}{x}}+2$$
$$=4+2=6\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{4}{x}\text{, 즉 } x=2\text{일 때 성립}\right)$$

$x+2+\frac{4}{x}$의 최솟값이 6이므로 $\frac{1}{x+2+\frac{4}{x}}$, 즉

$\frac{x}{x^2+2x+4}$의 최댓값은 $\frac{1}{6}$이다.

$$\therefore \frac{x^2+3x+4}{x^2+2x+4}=1+\frac{x}{x^2+2x+4}$$
$$\le 1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$$

따라서 $\frac{x^2+3x+4}{x^2+2x+4}$의 최댓값은 $\frac{7}{6}$이다.

참고 등호는 $x=\frac{4}{x}$일 때 성립하므로

$x^2=4\qquad \therefore x=2\ (\because x>0)$

16 답 ③

$$\frac{x^2-3x+4}{x-3}=\frac{x(x-3)+4}{x-3}=x+\frac{4}{x-3}$$
$$=x-3+\frac{4}{x-3}+3$$

$x>3$에서 $x-3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x-3+\frac{4}{x-3}+3\ge 2\sqrt{(x-3)\times\frac{4}{x-3}}+3$$
$$=4+3=7$$
$$\left(\text{단, 등호는 } x-3=\frac{4}{x-3}\text{, 즉 } x=5\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $\frac{x^2-3x+4}{x-3}$의 최솟값은 7이다.

16-1 답 $2+2\sqrt{3}$

$$\frac{x^2+4x+6}{x+1}=\frac{(x+1)(x+3)+3}{x+1}=x+3+\frac{3}{x+1}$$
$$=x+1+\frac{3}{x+1}+2$$

$x>-1$에서 $x+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+1+\frac{3}{x+1}+2\ge 2\sqrt{(x+1)\times\frac{3}{x+1}}+2$$
$$=2+2\sqrt{3}$$
$$\left(\text{단, 등호는 } x+1=\frac{3}{x+1}\text{, 즉 } x=-1+\sqrt{3}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $\frac{x^2+4x+6}{x+1}$의 최솟값은 $2+2\sqrt{3}$이다.

참고 등호는 $x+1=\frac{3}{x+1}$일 때 성립하므로

$(x+1)^2=3,\ x+1=\sqrt{3}\ (\because x+1>0)\qquad \therefore x=-1+\sqrt{3}$

즉 등호는 $x=-1+\sqrt{3}$일 때 성립한다.

17 답 $\frac{31}{2}$

$a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4a+3b\ge 2\sqrt{4a\times 3b}=2\sqrt{12ab}$

이때 $ab=3$이므로

$4a+3b\ge 2\sqrt{12\times 3}=12$

등호는 $4a=3b$일 때 성립하므로 $b=\frac{4}{3}a$

$b=\frac{4}{3}a$를 $ab=3$에 대입하면

$\frac{4}{3}a^2=3,\ a^2=\frac{9}{4}\qquad \therefore a=\frac{3}{2}\ (\because a>0)$

$a=\frac{3}{2}$을 $b=\frac{4}{3}a$에 대입하면

$b=\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}=2$

따라서 $\alpha=12,\ \beta=\frac{3}{2},\ \gamma=2$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=12+\frac{3}{2}+2=\frac{31}{2}$

17-1 답 60

$x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4x^2+9y^2\ge 2\sqrt{4x^2\times 9y^2}=2\sqrt{36x^2y^2}=12xy$

이때 $xy=5$이므로

$$4x^2+9y^2\ge 12\times 5$$
$$=60\ (\text{단, 등호는 } 4x^2=9y^2\text{, 즉 } 2x=3y\text{일 때 성립})$$

따라서 $4x^2+9y^2$의 최솟값은 60이다.

18 답 $\frac{1}{3}$

$a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3a+b\ge 2\sqrt{3a\times b}=2\sqrt{3ab}$

이때 $3a+b=2$이므로 $2\ge 2\sqrt{3ab},\ 1\ge\sqrt{3ab}$

양변을 제곱하면 $1\ge 3ab$

$\therefore ab\le\frac{1}{3}$ (단, 등호는 $3a=b$일 때 성립)

따라서 ab의 최댓값은 $\frac{1}{3}$이다.

18-1 답 ⑤

$$\frac{3}{a}+\frac{5}{b}=\frac{5a+3b}{ab}=\frac{1}{ab}\ (\because 5a+3b=1)\qquad\cdots\cdots ㉠$$

$a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$5a+3b\ge 2\sqrt{5a\times 3b}=2\sqrt{15ab}$

이때 $5a+3b=1$이므로 $1\ge 2\sqrt{15ab}$

양변을 제곱하면 $60ab\le 1,\ ab\le\frac{1}{60}$

$\therefore \frac{1}{ab}\ge 60$ (단, 등호는 $5a=3b$일 때 성립)

따라서 ㉠에서 $\frac{3}{a}+\frac{5}{b}$의 최솟값은 60이다.

19 답 ②

$x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y\ge 2\sqrt{xy}$

이때 $x+y=1$이므로 $1\ge 2\sqrt{xy}$

$$\therefore \sqrt{xy}\le\frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

$\sqrt{x}+\sqrt{y}$를 제곱하면

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+y+2\sqrt{xy}$$
$$\le 1+2\times\frac{1}{2}\ (\because ㉠)$$
$$=2\ (\text{단, 등호는 } x=y\text{일 때 성립})$$
즉 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\le 2$이고 $x>0$, $y>0$에서 $\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$이므로
$0<\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{2}$
따라서 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다.

19-1 답 $2\sqrt{3}$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$x+2y\ge 2\sqrt{2xy}$
이때 $x+2y=6$이므로 $6\ge 2\sqrt{2xy}$
$\therefore \sqrt{2xy}\le 3$ ······㉠ ······❶
$\sqrt{x}+\sqrt{2y}$를 제곱하면
$$(\sqrt{x}+\sqrt{2y})^2=x+2y+2\sqrt{2xy}$$
$$\le 6+2\times 3\ (\because ㉠)$$
$$=12\ (\text{단, 등호는 } x=2y\text{일 때 성립})$$ ······❷
즉 $(\sqrt{x}+\sqrt{2y})^2\le 12$이고 $x>0$, $y>0$에서 $\sqrt{x}+\sqrt{2y}>0$이므로
$0<\sqrt{x}+\sqrt{2y}\le 2\sqrt{3}$ ······❸
따라서 $\sqrt{x}+\sqrt{2y}$의 최댓값은 $2\sqrt{3}$이다. ······❹

채점 기준	비율
❶ $\sqrt{2xy}$의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%
❷ $(\sqrt{x}+\sqrt{2y})^2$의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❸ $\sqrt{x}+\sqrt{2y}$의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❹ $\sqrt{x}+\sqrt{2y}$의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

20 답 8

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}}=2\sqrt{\frac{a}{c}}$$
$$\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 2\sqrt{\frac{b}{c}\times\frac{c}{a}}=2\sqrt{\frac{b}{a}}$$
$$\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\ge 2\sqrt{\frac{c}{a}\times\frac{a}{b}}=2\sqrt{\frac{c}{b}}$$
$$\therefore \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)\ge 8\sqrt{\frac{a}{c}\times\frac{b}{a}\times\frac{c}{b}}$$
$$=8$$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
따라서 $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)$의 최솟값은 8이다.

20-1 답 240

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$\frac{2a}{b}+\frac{3b}{c}\ge 2\sqrt{\frac{2a}{b}\times\frac{3b}{c}}=2\sqrt{\frac{6a}{c}}$$
$$\frac{3b}{c}+\frac{5c}{a}\ge 2\sqrt{\frac{3b}{c}\times\frac{5c}{a}}=2\sqrt{\frac{15b}{a}}$$
$$\frac{5c}{a}+\frac{2a}{b}\ge 2\sqrt{\frac{5c}{a}\times\frac{2a}{b}}=2\sqrt{\frac{10c}{b}}$$
$$\therefore \left(\frac{2a}{b}+\frac{3b}{c}\right)\left(\frac{3b}{c}+\frac{5c}{a}\right)\left(\frac{5c}{a}+\frac{2a}{b}\right)$$
$$\ge 8\sqrt{\frac{6a}{c}\times\frac{15b}{a}\times\frac{10c}{b}}$$
$$=240\left(\text{단, 등호는 } \frac{2a}{b}=\frac{3b}{c}=\frac{5c}{a}\text{일 때 성립}\right)$$
따라서 $\left(\frac{2a}{b}+\frac{3b}{c}\right)\left(\frac{3b}{c}+\frac{5c}{a}\right)\left(\frac{5c}{a}+\frac{2a}{b}\right)$의 최솟값은 240이다.

21 답 6

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$
$$=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$
$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$$
$$\ge 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\times\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\times\frac{a}{c}}$$
$$=6\ (\text{단, 등호는 } a=b=c\text{일 때 성립})$$
따라서 $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$의 최솟값은 6이다.

> **참고** 등호는 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}=\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}=\frac{a}{c}$일 때 성립하므로
> $a^2=b^2=c^2$ $\quad\therefore a=b=c\ (\because a>0, b>0, c>0)$

21-1 답 9

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$$
$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+3$$
$$\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}+2\sqrt{\frac{a}{c}\times\frac{c}{a}}+2\sqrt{\frac{b}{c}\times\frac{c}{b}}+3$$
$$=9\ (\text{단, 등호는 } a=b=c\text{일 때 성립})$$
따라서 $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$의 최솟값은 9이다.

22 답 16

$b+c=k\ (k>0)$라 하면
$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)(9a+b+c)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{k}\right)(9a+k)$$
$$=9+\frac{k}{a}+\frac{9a}{k}+1$$
$$=\frac{k}{a}+\frac{9a}{k}+10 \quad\cdots\cdots ㉠$$
이때 $a>0$, $k>0$이므로 ㉠에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$\frac{k}{a}+\frac{9a}{k}+10\ge 2\sqrt{\frac{k}{a}\times\frac{9a}{k}}+10$$
$$=6+10=16$$
$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{k}{a}=\frac{9a}{k}\text{, 즉 } b+c=3a\text{일 때 성립}\right)$$
따라서 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)(9a+b+c)\ge 16$이므로 최솟값은 16이다.

22-1 답 9

$$(a+4b+5c)\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)$$
$$=\{(a+c)+4(b+c)\}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)$$
이므로 $a+c=A$, $b+c=B\ (A>0, B>0)$라 하면

(주어진 식)$=(A+4B)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)=1+\frac{A}{B}+\frac{4B}{A}+4$

$=\frac{A}{B}+\frac{4B}{A}+5$ ······㉠

이때 $A>0$, $B>0$이므로 ㉠에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{A}{B}+\frac{4B}{A}+5\ge 2\sqrt{\frac{A}{B}\times\frac{4B}{A}}+5$

$=4+5=9$

$\left(\text{단, 등호는 }\frac{A}{B}=\frac{4B}{A}\text{, 즉 }a-c=2b\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $(a+4b+5c)\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)\ge 9$이므로 최솟값은 9이다.

23 답 ④

x, y가 실수이므로 코시 - 슈바르츠의 부등식에 의하여

$\{3^2+(-4)^2\}(x^2+y^2)\ge(3x-4y)^2$

$x^2+y^2=1$이므로 $(3x-4y)^2\le 25$

$\therefore -5\le 3x-4y\le 5$ $\left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{3}=-\frac{y}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $3x-4y$의 최댓값은 5이다.

23-1 답 ②

x, y가 실수이므로 코시 - 슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+3^2)(x^2+y^2)\ge(2x+3y)^2$

$x^2+y^2=13$이므로 $(2x+3y)^2\le 13^2$

$\therefore -13\le 2x+3y\le 13$ $\left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{2}=\frac{y}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $2x+3y$의 최댓값은 13이다.

24 답 ②

a, b가 실수이므로 코시 - 슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2)(a^2+b^2)\ge(a+2b)^2$

$a+2b=5$이므로 $5(a^2+b^2)\ge 25$

$\therefore a^2+b^2\ge 5$ $\left(\text{단, 등호는 }a=\frac{b}{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 a^2+b^2의 최솟값은 5이다.

24-1 답 25

x, y가 실수이므로 코시 - 슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+4^2)(x^2+y^2)\ge(3x+4y)^2$

$3x+4y=25$이므로 $25(x^2+y^2)\ge 25^2$

$\therefore x^2+y^2\ge 25$ $\left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{3}=\frac{y}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 25이다.

25 답 −84

$x^2+y^2=4$이므로 $x^2+3x+y^2+4y=3x+4y+4$ ······㉠

x, y가 실수이므로 코시 - 슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+4^2)(x^2+y^2)\ge(3x+4y)^2$

$x^2+y^2=4$이므로 $(3x+4y)^2\le 100$

$\therefore -10\le 3x+4y\le 10$ $\left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{3}=\frac{y}{4}\text{일 때 성립}\right)$

이때 ㉠에서 $-6\le 3x+4y+4\le 14$

따라서 x^2+3x+y^2+4y의 최댓값은 14, 최솟값은 -6이므로 그 곱은 $14\times(-6)=-84$

25-1 답 ②

a, b는 실수이므로 코시 - 슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2)(a^2+b^2)\ge(a+2b)^2$

$a^2+b^2=100$이므로 $(a+2b)^2\le 500$

즉 $(a+2b)^2$의 최댓값은 500이다.

이때 등호는 $a=\frac{b}{2}$, 즉 $b=2a$일 때 성립하므로

$a^2+b^2=100$에서 $a^2+4a^2=100$

$5a^2=100$ $\quad\therefore a^2=20$

따라서 구하는 값은

$500+20=520$

26 답 20

x, y가 실수이므로 코시 - 슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+4^2)(x^2+y^2)\ge(2x+4y)^2$

$x^2+y^2=a$이므로 $(2x+4y)^2\le 20a$

$\therefore -\sqrt{20a}\le 2x+4y\le\sqrt{20a}$ $\left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{2}=\frac{y}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $2x+4y$의 최댓값은 $\sqrt{20a}$, 최솟값은 $-\sqrt{20a}$이고 그 차가 40이므로 $\sqrt{20a}-(-\sqrt{20a})=40$

$2\sqrt{20a}=40$, $20a=400$

$\therefore a=20$

26-1 답 3

x, y가 실수이므로 코시 - 슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+4^2)(x^2+y^2)\ge(3x+4y)^2$

$x^2+y^2=a$이므로 $(3x+4y)^2\le 25a$

$\therefore -5\sqrt{a}\le 3x+4y\le 5\sqrt{a}$ $\left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{3}=\frac{y}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $3x+4y$의 최댓값은 $5\sqrt{a}$, 최솟값은 $-5\sqrt{a}$이고 그 곱이 -75이므로 $5\sqrt{a}\times(-5\sqrt{a})=-75$

$-25a=-75$ $\quad\therefore a=3$

27 답 14

x, y, z가 실수이므로 코시 - 슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+2^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\ge(3x+2y+z)^2$

$3x+2y+z=14$이므로

$14(x^2+y^2+z^2)\ge 14^2$

$\therefore x^2+y^2+z^2\ge 14$ $\left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=z\text{일 때 성립}\right)$ ······❶

따라서 $x^2+y^2+z^2$의 최솟값은 14이다. ······❷

채점 기준	비율
❶ 코시 - 슈바르츠의 부등식을 이용하여 $x^2+y^2+z^2$의 값의 범위를 구할 수 있다.	80%
❷ $x^2+y^2+z^2$의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

27-1 답 30

a, b, c는 실수이므로 코시 - 슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2+5^2)(a+b+c)\ge(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+5\sqrt{c})^2$

$a+b+c=30$이므로 $(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+5\sqrt{c})^2\le 30^2$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$에서 $\sqrt{a}>0$, $\sqrt{b}>0$, $\sqrt{c}>0$이므로

$0<\sqrt{a}+2\sqrt{b}+5\sqrt{c}\le 30$ $\left(\text{단, 등호는 }\sqrt{a}=\frac{\sqrt{b}}{2}=\frac{\sqrt{c}}{5}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+5\sqrt{c}$의 최댓값은 30이다.

28 답 ③

x, y, z가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\{2^2+(-1)^2+4^2\}(x^2+y^2+z^2)\geq(2x-y+4z)^2$

$x^2+y^2+z^2=3$이므로 $(2x-y+4z)^2\leq63$

$\therefore\ -3\sqrt{7}\leq2x-y+4z\leq3\sqrt{7}$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{2}=-y=\frac{z}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $2x-y+4z$의 최댓값은 $3\sqrt{7}$이다.

28-1 답 4

$a+b+c=6$에서 $a+b=6-c$ ······㉠

$a^2+b^2+c^2=18$에서 $a^2+b^2=18-c^2$ ······㉡

이때 a, b는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$

㉠, ㉡에서 $(1^2+1^2)(18-c^2)\geq(6-c)^2$

$36-2c^2\geq c^2-12c+36,\ 3c^2-12c\leq0$

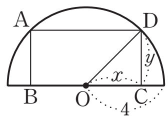
$3c(c-4)\leq0 \qquad \therefore\ 0\leq c\leq4$

따라서 c의 최댓값은 4, 최솟값은 0이므로 그 합은

$4+0=4$

유형+ 완성하기 p. 209

29 답 $12\sqrt{2}$



오른쪽 그림과 같이 $\overline{OC}=x$, $\overline{CD}=y$라 하면 직각삼각형 OCD에서

$x^2+y^2=4^2=16$ ······㉠

$x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\geq2\sqrt{x^2y^2}=2xy$

㉠에서 $2xy\leq16$

이때 등호는 $x^2=y^2$일 때 성립하고 이때 직사각형 ABCD의 넓이 $2xy$가 최대가 된다.

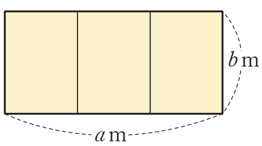
$x^2=y^2$을 ㉠에 대입하면

$x^2=8,\ y^2=8 \qquad \therefore\ x=2\sqrt{2},\ y=2\sqrt{2}\ (\because\ x>0,\ y>0)$

따라서 직사각형의 둘레의 길이는

$4x+2y=4\times2\sqrt{2}+2\times2\sqrt{2}=12\sqrt{2}$

30 답 72 m^2



오른쪽 그림과 같이 전체 우리의 가로의 길이를 a m, 세로의 길이를 b m라 하면 철망의 길이가 48 m이므로

$2a+4b=48 \qquad \therefore\ a+2b=24$

$a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+2b\geq2\sqrt{a\times2b}=2\sqrt{2ab}$

이때 $a+2b=24$이므로

$24\geq2\sqrt{2ab} \qquad \therefore\ \sqrt{2ab}\leq12$

양변을 제곱하면 $2ab\leq144 \qquad \therefore\ ab\leq72$

따라서 전체 우리의 넓이 $ab\text{ m}^2$의 최댓값은 72 m^2이다.

31 답 40

$B(a, 0),\ C(0, b)$이므로 삼각형 OBC의 넓이는

$\triangle OBC=\frac{1}{2}ab$ ······㉠

또 점 $A(4, 5)$가 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 위의 점이므로

$\frac{4}{a}+\frac{5}{b}=1$

$a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{4}{a}+\frac{5}{b}\geq2\sqrt{\frac{4}{a}\times\frac{5}{b}}$

$=4\sqrt{\frac{5}{ab}}\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{4}{a}=\frac{5}{b}\text{, 즉 } 5a=4b\text{일 때 성립}\right)$

이때 $\frac{4}{a}+\frac{5}{b}=1$이므로 $1\geq4\sqrt{\frac{5}{ab}}$

양변을 제곱하면 $16\times\frac{5}{ab}\leq1$

$\therefore\ ab\geq80$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $\triangle OBC=\frac{1}{2}ab\geq\frac{1}{2}\times80=40$

따라서 $\triangle OBC$의 넓이의 최솟값은 40이다.

32 답 $6+6\sqrt{2}$

$\overline{BC}=x$, $\overline{AC}=y$라 하면 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 $\angle ACB=90°$

$\therefore\ x^2+y^2=6^2=36$

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\geq(x+y)^2$

$2\times36\geq(x+y)^2 \qquad \therefore\ (x+y)^2\leq72$

이때 $x>0,\ y>0$이므로 $x+y>0$

$\therefore\ 0<x+y\leq6\sqrt{2}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$\triangle ABC$의 둘레의 길이는 $x+y+6$이므로

$6<x+y+6\leq6+6\sqrt{2}$

따라서 $\triangle ABC$의 둘레의 길이의 최댓값은 $6+6\sqrt{2}$이다.

33 답 $12\sqrt{10}$

원에 내접하는 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 a, b라 하면 원의 지름의 길이가 $6\sqrt{2}$이므로

$a^2+b^2=72$

정사각기둥의 밑면의 한 변의 길이는 $\frac{a}{4}$, 높이는 b이므로 정사각기둥의 모든 모서리의 길이의 합 l은

$l=8\times\frac{a}{4}+4b=2a+4b$

a, b는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+4^2)(a^2+b^2)\geq(2a+4b)^2,\ 20\times72\geq(2a+4b)^2$

$\therefore\ (2a+4b)^2\leq1440$

이때 $a>0,\ b>0$이므로 $2a+4b>0$

$\therefore\ 0<2a+4b\leq12\sqrt{10}\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{2}=\frac{b}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 l의 최댓값은 $12\sqrt{10}$이다.

34 답 $12\sqrt{2}$

직육면체의 밑면의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b, 높이를 c라 하면 직육면체의 대각선의 길이가 $\sqrt{6}$이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{6} \qquad \therefore\ a^2+b^2+c^2=6$

a, b, c는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$

$3\times 6 \geq (a+b+c)^2 \qquad \therefore (a+b+c)^2 \leq 18$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 $a+b+c>0$

$\therefore 0<a+b+c\leq 3\sqrt{2}$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)$이므로

$0<4(a+b+c)\leq 12\sqrt{2}$

따라서 구하는 최댓값은 $12\sqrt{2}$이다.

학교 시험 대비 문제

p.210~213

01 답 ②

주어진 명제의 대우는

'a와 b가 모두 $\boxed{\text{(가) 짝수}}$이면 a, b가 서로소가 아니다.'

a와 b가 모두 $\boxed{\text{(가) 짝수}}$이므로 $a=2k$, $b=2l$ (k, l은 자연수)로 나타낼 수 있다.

이때 $\boxed{\text{(나) } 2}$는 a와 b의 공약수이므로 a와 b가 모두 $\boxed{\text{(가) 짝수}}$이면 a와 b는 $\boxed{\text{(다) 서로소}}$가 아니다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 명제도 참이다.

02 답 ③

주어진 명제의 대우는

'a와 b가 모두 $\boxed{\text{(가) 홀수}}$이면 ab는 $\boxed{\text{(가) 홀수}}$이다.'

$a=2m-1$, $b=\boxed{\text{(나) } 2n-1}$ (m, n은 자연수)이라 하면

$ab=(2m-1)(\boxed{\text{(나) } 2n-1})=2(\boxed{\text{(다) } 2mn-m-n})+1$

이때 $\boxed{\text{(다) } 2mn-m-n}$은 0 또는 자연수이므로 ab는 $\boxed{\text{(가) 홀수}}$이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 명제도 참이다.

03 답 ④

a, b가 모두 양이 아닌 실수라 가정하면

$a\boxed{\text{(가) } \leq}0$, $b\boxed{\text{(가) } \leq}0$이므로 $\boxed{\text{(나) } a+b}\leq 0$

그런데 이것은 $a+b>0$이라는 가정에 모순이므로 실수 a, b에 대하여 $a+b>0$이면 a, b 중 적어도 하나는 $\boxed{\text{(다) 양수}}$이다.

04 답 ④

$$\begin{aligned}A-B&=xy+12-3(x+y+1)\\&=xy-3x-3y+9\\&=x(y-3)-3(y-3)\\&=(x-3)(y-3)\end{aligned}$$

이때 $x\geq 3$, $y\geq 3$에서 $x-3\geq 0$, $y-3\geq 0$이므로

$A-B\geq 0 \qquad \therefore A\geq B$

05 답 ①

$$\begin{aligned}A^2-B^2&=(1-a)^2-(\sqrt{1-a})^2\\&=1-2a+a^2-(1-a)\\&=a^2-a\\&=a(a-1)<0\ (\because 0<a<1)\end{aligned}$$

즉 $A^2-B^2<0$이므로 $A^2<B^2$

이때 $A>0$, $B>0$이므로 $A<B$ ……㉠

$$\begin{aligned}B^2-C^2&=(\sqrt{1-a})^2-\left(1-\frac{a}{2}\right)^2\\&=(1-a)-\left(1-a+\frac{a^2}{4}\right)\\&=-\frac{a^2}{4}<0\ (\because 0<a<1)\end{aligned}$$

즉 $B^2-C^2<0$이므로 $B^2<C^2$

이때 $B>0$, $C>0$이므로 $B<C$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $A<B<C$

다른 풀이

$0<a<1$을 만족시키는 실수 a에 대하여 항상 성립하므로 $a=\frac{3}{4}$을 직접 대입하면

$A=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$, $B=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$, $C=1-\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{8}$

$\therefore A<B<C$

06 답 2

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{16}{a}\right)&=a^2+16+1+\frac{16}{a^2}\\&=a^2+\frac{16}{a^2}+17\end{aligned}$$

$a>0$에서 $a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}a^2+\frac{16}{a^2}+17&\geq 2\sqrt{a^2\times\frac{16}{a^2}}+17\\&=8+17=25\end{aligned}$$

이때 등호는 $a^2=\frac{16}{a^2}$일 때 성립하므로

$a^4=16 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$

07 답 ③

$$\begin{aligned}(8x^2+x)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)&=16x+8+2+\frac{1}{x}\\&=16x+\frac{1}{x}+10\end{aligned}$$

$x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}16x+\frac{1}{x}+10&\geq 2\sqrt{16x\times\frac{1}{x}}+10\\&=8+10=18\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } 16x=\frac{1}{x}\text{, 즉 } x=\frac{1}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $(8x^2+x)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$의 최솟값은 18이다.

08 답 24

$2x+\frac{2}{x-2}=2(x-2)+\frac{2}{x-2}+4$

$x>2$에서 $x-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}2(x-2)+\frac{2}{x-2}+4&\geq 2\sqrt{2(x-2)\times\frac{2}{x-2}}+4\\&=4+4=8\end{aligned}$$

즉 $2x+\frac{2}{x-2}$의 최솟값은 8이므로 $k=8$

이때 등호는 $2(x-2)=\frac{2}{x-2}$일 때 성립하므로

$(x-2)^2=1$, $x-2=1$ ($\because x-2>0$)

$\therefore x=3$, 즉 $p=3$

$\therefore kp=8\times3=24$

09 답 ②

$$\frac{x^4+4x^2+7}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)(x^2+3)+4}{x^2+1}=x^2+3+\frac{4}{x^2+1}$$
$$=x^2+1+\frac{4}{x^2+1}+2$$

이때 $x^2\ge0$이므로 $x^2+1>0$

즉 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+1+\frac{4}{x^2+1}+2\ge2\sqrt{(x^2+1)\times\frac{4}{x^2+1}}+2$$
$$=4+2=6$$
$$\left(\text{단, 등호는 } x^2+1=\frac{4}{x^2+1}\text{, 즉 } x=\pm1\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $\frac{x^4+4x^2+7}{x^2+1}$의 최솟값은 6이다.

10 답 ⑤

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3a+4b\ge2\sqrt{3a\times4b}=2\sqrt{12ab}$

이때 $ab=12$이므로

$3a+4b\ge2\sqrt{12\times12}$

$=24$ (단, 등호는 $3a=4b$일 때 성립)

따라서 $3a+4b$의 최솟값은 24이다.

다른 풀이

$ab=12$에서 $b=\frac{12}{a}$

$\therefore 3a+4b=3a+4\times\frac{12}{a}=3a+\frac{48}{a}$

이때 $a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3a+\frac{48}{a}\ge2\sqrt{3a\times\frac{48}{a}}$$
$$=2\times12=24\left(\text{단, 등호는 } 3a=\frac{48}{a}\text{, 즉 } a=4\text{일 때 성립}\right)$$

11 답 ③

$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=\frac{2a+3b}{ab}=\frac{6}{ab}$ ($\because 2a+3b=6$) ······㉠

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+3b\ge2\sqrt{2a\times3b}=2\sqrt{6ab}$

이때 $2a+3b=6$이므로

$6\ge2\sqrt{6ab}$　　$\therefore 3\ge\sqrt{6ab}$

양변을 제곱하면 $6ab\le9$, $ab\le\frac{3}{2}$

$\therefore \frac{1}{ab}\ge\frac{2}{3}$

즉 ㉠에서 $\frac{6}{ab}\ge4$이므로 $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}$의 최솟값은 4이다.

$\therefore k=4$

이때 등호는 $2a=3b$일 때 성립하므로 $2a=3b$를 $2a+3b=6$에 대입하면 $2a+2a=6$

$4a=6$　　$\therefore a=\frac{3}{2}$, $b=1$, 즉 $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=1$

$\therefore \alpha+\beta+k=\frac{3}{2}+1+4=\frac{13}{2}$

다른 풀이

$$(2a+3b)\left(\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\right)=6+\frac{4a}{b}+\frac{9b}{a}+6$$
$$=\frac{4a}{b}+\frac{9b}{a}+12$$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{4a}{b}+\frac{9b}{a}+12\ge2\sqrt{\frac{4a}{b}\times\frac{9b}{a}}+12$$
$$=12+12=24$$

이때 $2a+3b=6$이므로 $6\left(\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\right)\ge24$

$\therefore \frac{3}{a}+\frac{2}{b}\ge4$

즉 $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}$의 최솟값은 4이므로 $k=4$

이때 등호는 $\frac{4a}{b}=\frac{9b}{a}$일 때 성립하므로 $4a^2=9b^2$

$\therefore 2a=3b$ ($\because a>0, b>0$)

$2a=3b$를 $2a+3b=6$에 대입하면

$2a+2a=6$　　$\therefore a=\frac{3}{2}$, $b=1$, 즉 $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=1$

$\therefore \alpha+\beta+k=\frac{3}{2}+1+4=\frac{13}{2}$

12 답 ③

두 직선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 기울기가 각각 $\frac{a}{3}$, $-b$이고 두 직선이 서로 수직이므로 $\frac{a}{3}\times(-b)=-1$　　$\therefore ab=3$

$(a+3)(b+4)=ab+4a+3b+12=4a+3b+15$ ······㉠

이때 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4a+3b+15\ge2\sqrt{4a\times3b}+15$

$=2\sqrt{12ab}+15$

$=12+15=27$ (단, 등호는 $4a=3b$일 때 성립)

따라서 ㉠에서 $(a+3)(b+4)\ge27$이므로 $(a+3)(b+4)$의 최솟값은 27이다.

13 답 8

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$1+\frac{b}{a}\ge2\sqrt{1\times\frac{b}{a}}=2\sqrt{\frac{b}{a}}$

$1+\frac{c}{b}\ge2\sqrt{1\times\frac{c}{b}}=2\sqrt{\frac{c}{b}}$

$1+\frac{a}{c}\ge2\sqrt{1\times\frac{a}{c}}=2\sqrt{\frac{a}{c}}$

$$\therefore \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\ge8\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{c}{b}\times\frac{a}{c}}=8$$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 $\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)$의 최솟값은 8이다.

14 답 ⑤

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(4^2+3^2)(x^2+y^2)\ge(4x+3y)^2$

이때 $x^2+y^2=25$이므로 $(4x+3y)^2\le 25^2$

$\therefore\ -25\le 4x+3y\le 25$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{4}=\frac{y}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $4x+3y$의 최댓값은 25, 최솟값은 -25이므로

$M=25,\ m=-25$

$\therefore\ M-m=25-(-25)=50$

15 답 $\frac{13}{4}$

$x,\ y$가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+2^2)(x^2+y^2)\ge(3x+2y)^2$

이때 $x^2+y^2=a$이므로 $(3x+2y)^2\le 13a$

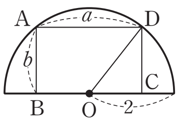
$\therefore\ -\sqrt{13a}\le 3x+2y\le\sqrt{13a}$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{3}=\frac{y}{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $3x+2y$의 최댓값은 $\sqrt{13a}$, 최솟값은 $-\sqrt{13a}$이고 그 차가 13이므로

$\sqrt{13a}-(-\sqrt{13a})=13,\ 2\sqrt{13a}=13$

$52a=169\qquad\therefore\ a=\frac{13}{4}$

16 답 넓이의 최댓값: 4, $a=2\sqrt{2},\ b=\sqrt{2}$



오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OD}}$를 그으면

$\overline{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}=\frac{a}{2}$

직각삼각형 OCD에서 $\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2=2^2$

$\therefore\ \frac{a^2}{4}+b^2=4$ ……㉠

$a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{a^2}{4}+b^2\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{4}\times b^2}=ab$ ……㉡

이때 ㉠에서 $ab\le 4$

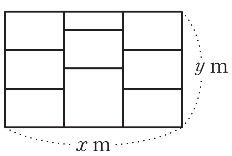
즉 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 4이다.

㉡에서 등호는 $\frac{a^2}{4}=b^2$일 때 성립하므로 $\frac{a^2}{4}=b^2$을 ㉠에 대입하면

$a^2=8,\ b^2=2$

$\therefore\ a=2\sqrt{2},\ b=\sqrt{2}\ (\because\ a>0,\ b>0)$

17 답 ③



오른쪽 그림과 같이 바깥쪽 직사각형의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면 줄의 전체의 길이가 160 m이므로

$4x+4y=160$

$\therefore\ x+y=40$ ……㉠

$x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y\ge 2\sqrt{xy}$ ……㉡

이때 ㉠에서

$40\ge 2\sqrt{xy}\qquad\therefore\ \sqrt{xy}\le 20$

양변을 제곱하면 $xy\le 400$

즉 구역의 전체 넓이 xy m^{2}의 최댓값은 400 m^{2}이므로

$S=400$

㉡에서 등호는 $x=y$일 때 성립하므로 $x=y$를 ㉠에 대입하면

$x=20,\ y=20\qquad\therefore\ a=20,\ b=20$

$\therefore\ a+b+S=20+20+400=440$

18 답 24

$\mathrm{B}(a,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ b)$이므로 삼각형 OBC의 넓이는

$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}ab$ ……㉠

또 점 $\mathrm{A}(4,\ 3)$이 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 위의 점이므로

$\frac{4}{a}+\frac{3}{b}=1$

$a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{4}{a}+\frac{3}{b}\ge 2\sqrt{\frac{4}{a}\times\frac{3}{b}}$

$=4\sqrt{\frac{3}{ab}}$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{4}{a}=\frac{3}{b},\ \text{즉 } 3a=4b\text{일 때 성립}\right)$

이때 $\frac{4}{a}+\frac{3}{b}=1$이므로 $1\ge 4\sqrt{\frac{3}{ab}}$

양변을 제곱하면 $16\times\frac{3}{ab}\le 1\qquad\therefore\ ab\ge 48$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}ab\ge\frac{1}{2}\times 48=24$

따라서 $\triangle\mathrm{OBC}$의 넓이의 최솟값은 24이다.

19 답 ④

$\overline{\mathrm{BC}}=x,\ \overline{\mathrm{CD}}=y$라 하면 직각삼각형 BCD에서

$x^2+y^2=8^2=64$

$x,\ y$가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\ge(x+y)^2$

$2\times 64\ge(x+y)^2\qquad\therefore\ (x+y)^2\le 128$

이때 $x>0,\ y>0$이므로 $x+y>0$

$\therefore\ 0<x+y\le 8\sqrt{2}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

직사각형 ABCD의 둘레의 길이는 $2(x+y)$이므로

$0<2(x+y)\le 16\sqrt{2}$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 $16\sqrt{2}$이다.

20 답 ②

원에 내접하는 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $a,\ b$라 하면 원의 지름의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로

$a^2+b^2=20$

정사각기둥의 밑면의 한 변의 길이는 $\frac{a}{4}$, 높이는 b이므로 정사각기둥의 모든 모서리의 길이의 합 l은

$l=8\times\frac{a}{4}+4b=2a+4b$

$a,\ b$는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+4^2)(a^2+b^2)\ge(2a+4b)^2,\ 20\times 20\ge(2a+4b)^2$

$\therefore\ (2a+4b)^2\le 400$

이때 $a>0,\ b>0$이므로 $2a+4b>0$

$\therefore\ 0<2a+4b\le 20$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{2}=\frac{b}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 l의 최댓값은 20이다.

서술형 1 답 풀이 참조

(1) 실수 $x,\ y$에 대하여 주어진 명제의 대우는

'$x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다.'

$x=0$이면 y의 값에 관계없이 $xy=0$

$y=0$이면 x의 값에 관계없이 $xy=0$

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 명제도 참이다. ……❶

(2) 주어진 명제의 결론을 부정하여 $x=0$ 또는 $y=0$이라 하자.
$x=0$이면 y의 값에 관계없이 $xy=0$
$y=0$이면 x의 값에 관계없이 $xy=0$
이것은 $xy\neq 0$이라는 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다. ...... ②

채점 기준	비율
① 대우를 이용하여 증명할 수 있다.	50%
② 귀류법을 이용하여 증명할 수 있다.	50%

서술형 2 답 9

이차방정식 $x^2-4ax+3a=0$의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-3a>0$, $a(4a-3)>0$

이때 $a>0$이므로 $4a-3>0$ ...... ①

즉 $4a-3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4a+\frac{9}{4a-3}=4a-3+\frac{9}{4a-3}+3$$
$$\geq 2\sqrt{(4a-3)\times\frac{9}{4a-3}}+3$$
$$=6+3=9$$
$$\left(\text{단, 등호는 } 4a-3=\frac{9}{4a-3}\text{, 즉 } a=\frac{3}{2}\text{일 때 성립}\right)$$
...... ②

따라서 $4a+\frac{9}{4a-3}$의 최솟값은 9이다. ...... ③

채점 기준	비율
① 이차방정식의 근의 조건을 이용하여 $4a-3$의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
② 주어진 식을 변형하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있다.	50%
③ 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 $\sqrt{30}$

직육면체의 대각선의 길이가 $\sqrt{10}$이므로

$x^2+y^2+z^2=10$ ...... ①

x, y, z는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(x+y+z)^2$

$30\geq(x+y+z)^2$

이때 $x>0, y>0, z>0$이므로 $x+y+z>0$

$\therefore 0<x+y+z\leq\sqrt{30}$ (단, 등호는 $x=y=z$일 때 성립) ...... ②

따라서 $x+y+z$의 최댓값은 $\sqrt{30}$이다. ...... ③

채점 기준	비율
① $x^2+y^2+z^2$의 값을 구할 수 있다.	30%
② 코시-슈바르츠의 부등식을 이용하여 $x+y+z$의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
③ $x+y+z$의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p.214

01 답 10

$$x+1+\frac{16}{x-1}=x-1+\frac{16}{x-1}+2$$

$x>1$에서 $x-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x-1+\frac{16}{x-1}+2\geq 2\sqrt{(x-1)\times\frac{16}{x-1}}+2$$
$$=8+2=10$$
$$\left(\text{단, 등호는 } x-1=\frac{16}{x-1}\text{, 즉 } x=5\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $x+1+\frac{16}{x-1}$의 최솟값은 10이다.

02 답 32

$ab=8$에서 $a\neq 0, b\neq 0$이므로 $a^2>0, b^2>0$

즉 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+4b^2\geq 2\sqrt{a^2\times 4b^2}=4|ab|$

이때 $ab=8$이므로

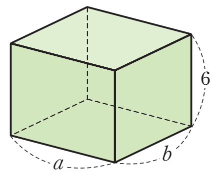
$a^2+4b^2\geq 4\times 8$

$=32$ (단, 등호는 $a^2=4b^2$, 즉 $|a|=2|b|$일 때 성립)

따라서 a^2+4b^2의 최솟값은 32이다.

03 답 ①

오른쪽 그림과 같이 직육면체의 나머지 두 모서리의 길이를 각각 a, b라 하면 직육면체의 부피가 108이므로



$6ab=108$ $\therefore ab=18$

직육면체의 대각선의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2+6^2}=\sqrt{a^2+b^2+36}$

이때 $a>0, b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$

$=2\times 18=36$

$\therefore \sqrt{a^2+b^2+36}\geq\sqrt{36+36}$

$=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

따라서 직육면체의 대각선의 길이의 최솟값은 $6\sqrt{2}$이다.

04 답 ⑤

두 점 A, B의 좌표를 구하면

$y=0$일 때, $0=mx+2m+3$에서

$x=\frac{-2m-3}{m}=-\frac{3}{m}-2$

$\therefore A\left(-\frac{3}{m}-2, 0\right)$

$x=0$일 때, $y=2m+3$

$\therefore B(0, 2m+3)$

이때 $-\frac{3}{m}-2<0$, $2m+3>0$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{m}+2\right)(2m+3)=\frac{1}{2}\left(6+\frac{9}{m}+4m+6\right)$$
$$=2m+\frac{9}{2m}+6$$

이때 $m>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2m+\frac{9}{2m}+6\geq 2\sqrt{2m\times\frac{9}{2m}}+6$$
$$=6+6=12$$
$$\left(\text{단, 등호는 } 2m=\frac{9}{2m}\text{, 즉 } m=\frac{3}{2}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 12이다.

05 답 ②

점 P의 좌표가 (a, b)이므로 직선 OP의 기울기는

$\frac{b-0}{a-0}=\frac{b}{a}$

점 P를 지나고 직선 OP에 수직인 직선을 l이라 하면 직선 l의 기울기는 $-\frac{a}{b}$이므로 직선 l의 방정식은

$y=-\frac{a}{b}(x-a)+b$ ……㉠

㉠에 $x=0$을 대입하면 $y=\frac{a^2}{b}+b$이므로 점 Q의 좌표는

$\left(0, \frac{a^2}{b}+b\right)$

$\overline{OQ}=\frac{a^2}{b}+b$, $\overline{OR}=\frac{1}{a}$이므로

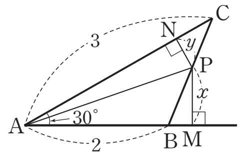
$$\begin{aligned}\triangle OQR&=\frac{1}{2}\times\overline{OQ}\times\overline{OR}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+b\right)\times\frac{1}{a}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

이때 $a>0$, $b>0$에서 $\frac{a}{b}>0$, $\frac{b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)&\geq\frac{1}{2}\times2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}\\&=1\ \left(\text{단, 등호는 }\frac{a}{b}=\frac{b}{a}\text{, 즉 }a=b\text{일 때 성립}\right)\end{aligned}$$

따라서 삼각형 OQR의 넓이의 최솟값은 1이다.

06 답 28



오른쪽 그림과 같이 $\overline{PM}=x$, $\overline{PN}=y$라 하자.

$\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle APC$이므로

$\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin 30°$

$=\frac{1}{2}\times2\times x+\frac{1}{2}\times3\times y$

$\frac{3}{2}=x+\frac{3}{2}y \qquad \therefore 2x+3y=3$ ……㉠

$\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}=\frac{2}{x}+\frac{3}{y}$이므로

$$\begin{aligned}3\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)&=(2x+3y)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)\ (\because ㉠)\\&=4+\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}+9\\&=\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}+13\end{aligned}$$

이때 $x>0$, $y>0$에서 $\frac{6x}{y}>0$, $\frac{6y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}+13&\geq2\sqrt{\frac{6x}{y}\times\frac{6y}{x}}+13\\&=12+13=25\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 }\frac{6x}{y}=\frac{6y}{x}\text{, 즉 }x=y\text{일 때 성립}\right)$

즉 $3\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)\geq25$이므로 $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\geq\frac{25}{3}$

따라서 $\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$의 최솟값은 $\frac{25}{3}$이므로

$p=3$, $q=25$

$\therefore p+q=3+25=28$

09 함수

III 함수

개념 완성하기 p.217~218

01 답 함수가 아니다.
집합 X의 원소 2에 대응하는 집합 Y의 원소가 2개이므로 함수가 아니다.

02 답 함수이다.
정의역: $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역: $\{a, b, c, d\}$, 치역: $\{a, b, d\}$
정의역은 $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역은 $\{a, b, c, d\}$, 치역은 $\{a, b, d\}$인 함수이다.

03 답 함수가 아니다.
집합 X의 원소 3에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

04 답 함수이다.
정의역: $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역: $\{a, b, c, d\}$, 치역: $\{a, b, c\}$
정의역은 $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역은 $\{a, b, c, d\}$, 치역은 $\{a, b, c\}$인 함수이다.

05 답 $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$
$f(-2)=-3,\ f(-1)=-2,\ f(0)=-1,\ f(1)=0,\ f(2)=1$이므로 함수 f의 치역은 $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$이다.

06 답 $\{1, 2, 4, 7, 11\}$
$f(-2)=11,\ f(-1)=4,\ f(0)=1,\ f(1)=2,\ f(2)=7$이므로 함수 f의 치역은 $\{1, 2, 4, 7, 11\}$이다.

07 답 $\{-1, 1, 3\}$
$f(-2)=-1,\ f(-1)=1,\ f(0)=3,\ f(1)=1,\ f(2)=-1$이므로 함수 f의 치역은 $\{-1, 1, 3\}$이다.

08 답 $\{0, 1, 2, 3\}$
$f(-2)=3,\ f(-1)=2,\ f(0)=1,\ f(1)=0,\ f(2)=1$이므로 함수 f의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$이다.

09 답 정의역: 실수 전체의 집합, 치역: 실수 전체의 집합
함수 $y=-4x+3$의 정의역과 치역은 모두 실수 전체의 집합이다.

10 답 정의역: 실수 전체의 집합, 치역: $\{y\,|\,y\le 6\}$
함수 $y=-x^2+6$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,y\le 6\}$이다.

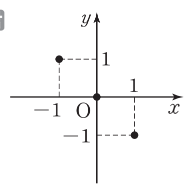
11 답 정의역: 실수 전체의 집합, 치역: $\{y\,|\,y\ge -2\}$
함수 $y=|x|-2$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,y\ge -2\}$이다.

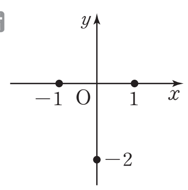
12 답 ㄱ, ㄴ
ㄱ. $f(x)=x,\ g(x)=x^3$에서
$f(0)=g(0)=0,\ f(1)=g(1)=1$이므로
$f=g$
ㄴ. $f(x)=x^2+1,\ g(x)=|x+1|$에서
$f(0)=g(0)=1,\ f(1)=g(1)=2$이므로
$f=g$
ㄷ. $f(x)=x+1,\ g(x)=-x+1$에서
$f(1)=2,\ g(1)=0$이므로 $f(1)\ne g(1)$
$\therefore f\ne g$
따라서 $f=g$인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

13 답 $a=3, b=0$
$f=g$이려면 정의역의 각 원소에 대한 함숫값이 서로 같아야 한다.
$f(-2)=g(-2)$에서 $-2+a=-4-2b+5$
$\therefore a+2b=3$ ······㉠
$f(1)=g(1)$에서 $1+a=-1+b+5$
$\therefore a-b=3$ ······㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=3, b=0$

14 답 $a=1, b=-2$
$f=g$이려면 정의역의 각 원소에 대한 함숫값이 서로 같아야 한다.
$f(1)=g(1)$에서 $a+b=-1$ ······㉠
$f(2)=g(2)$에서 $2a+b=0$ ······㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=1, b=-2$

15 답 $a=5, b=6$
$f=g$이려면 정의역의 각 원소에 대한 함숫값이 서로 같아야 한다.
$f(2)=g(2)$에서 $-4+2a=b$
$\therefore 2a-b=4$ ······㉠
$f(3)=g(3)$에서 $-9+3a=b$
$\therefore 3a-b=9$ ······㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=5, b=6$

16 답


17 답


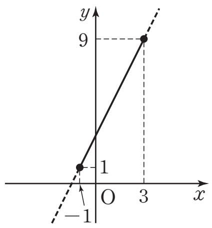
18 답 (1) ㄱ, ㄴ, ㄹ (2) ㄱ, ㄹ (3) ㄱ (4) ㄷ

19 답 (1) ㄷ, ㄹ, ㅂ (2) ㄷ, ㄹ (3) ㄷ (4) ㅁ

20 답 (1) ㄷ, ㄹ, ㅂ (2) ㄷ, ㄹ, ㅂ (3) ㄹ (4) ㅁ

21 답 5

$f(x)=ax+b$에서 $a>0$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-1,\ 1)$, $(3,\ 9)$를 지나야 한다.



$f(-1)=1$에서 $-a+b=1$ ······㉠

$f(3)=9$에서 $3a+b=9$ ······㉡

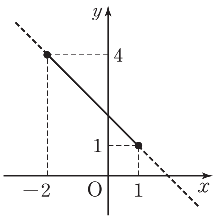
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=3$

$\therefore\ a+b=2+3=5$

22 답 -2

$f(x)=ax+b$에서 $a<0$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-2,\ 4)$, $(1,\ 1)$을 지나야 한다.



$f(-2)=4$에서 $-2a+b=4$ ······㉠

$f(1)=1$에서 $a+b=1$ ······㉡

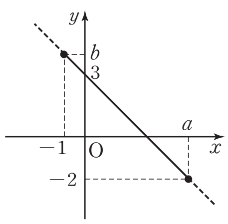
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=2$

$\therefore\ ab=-1\times2=-2$

23 답 9

$f(x)=-x+3$에서 x의 계수가 음수이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-1,\ b)$, $(a,\ -2)$를 지나야 한다.



$f(-1)=b$에서 $1+3=b$ $\quad\therefore\ b=4$

$f(a)=-2$에서 $-a+3=-2$ $\quad\therefore\ a=5$

$\therefore\ a+b=5+4=9$

24 답 (1) 27 (2) 6 (3) 1 (4) 3

(1) $f(a)$의 값이 될 수 있는 것은 $a,\ b,\ c$ 중 하나이므로 3개
$f(b)$의 값이 될 수 있는 것은 $a,\ b,\ c$ 중 하나이므로 3개
$f(c)$의 값이 될 수 있는 것은 $a,\ b,\ c$ 중 하나이므로 3개
즉 함수의 개수는
$3\times3\times3=27$

(2) $f(a)$의 값이 될 수 있는 것은 $a,\ b,\ c$ 중 하나이므로 3개
$f(b)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(a)$의 값을 제외한 2개
$f(c)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(a)$, $f(b)$의 값을 제외한 1개
즉 일대일대응의 개수는
$3\times2\times1=6$

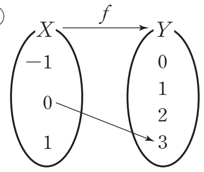
(3) $f(a)=a,\ f(b)=b,\ f(c)=c$이므로 항등함수의 개수는 1이다.

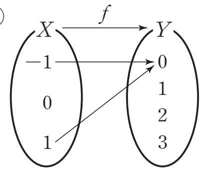
(4) $f(a)=f(b)=f(c)=k$ (k는 상수)라 하면 k의 값이 될 수 있는 것은 $a,\ b,\ c$ 중 하나이므로 상수함수의 개수는 3이다.

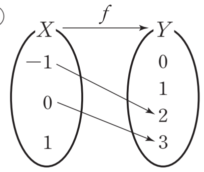
유형 완성하기 p. 219~230

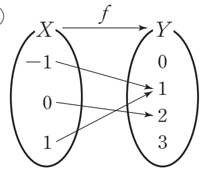
01 답 ④

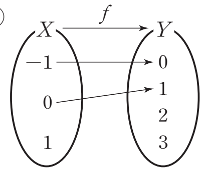
각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


① 집합 X의 원소 $-1,\ 1$에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

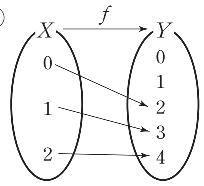
② 집합 X의 원소 0에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

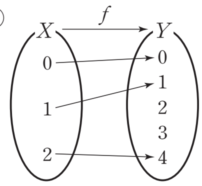
③, ⑤ 집합 X의 원소 1에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

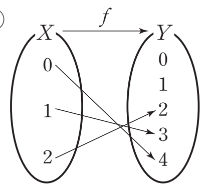
따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ④이다.

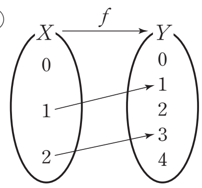
01-1 답 ④

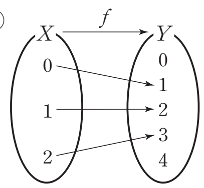
각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


④ 집합 X의 원소 0에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 X에서 Y로의 함수가 아닌 것은 ④이다.

02 답 ㄱ, ㄹ

ㄱ, ㄹ. 임의의 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 오직 한 점

에서 만나므로 함수의 그래프이다.

ㄴ, ㄷ. 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 만나지 않거나 두 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

따라서 R에서 R로의 함수의 그래프인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

02-1 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ, ㄷ. 임의의 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.

ㄴ. 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 무수히 많은 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

ㄹ. 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 만나지 않거나 두 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

따라서 R에서 R로의 함수의 그래프인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

03 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $-1\le x\le 1$에서 $-1\le x^3\le 1$

$0\le x^3+1\le 2 \qquad \therefore 0\le f(x)\le 2$

ㄴ. $-1\le x\le 1$에서 $-2\le x-1\le 0$

$0\le |x-1|\le 2,\ 0\le \frac{1}{2}|x-1|\le 1$

$\therefore 0\le g(x)\le 1$

ㄷ. $-1\le x\le 1$에서 $-2\le 2x\le 2$

$-1\le 2x+1\le 3 \qquad \therefore -1\le h(x)\le 3$

따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

03-1 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $-1\le x\le 0$에서 $0\le -2x\le 2$

$3\le -2x+3\le 5 \qquad \therefore 3\le f(x)\le 5$

ㄴ. $-1\le x\le 0$에서 $0\le x^2\le 1$

$1\le x^2+1\le 2 \qquad \therefore 1\le g(x)\le 2$

ㄷ. $-1\le x\le 0$에서 $0\le |x|\le 1$

$2\le |x|+2\le 3 \qquad \therefore 2\le h(x)\le 3$

따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

04 답 ⑤

$f(-1)=2+1=3$

$f(0)=2$

$f(2)=2^2+1=5$

$\therefore f(-1)+f(0)+f(2)=3+2+5=10$

04-1 답 ②

$f(-2)=-(-2)^2+1=-3$

$f(0)=1$

$f(1)=3+1=4$

$\therefore f(-2)+f(0)+f(1)=-3+1+4=2$

05 답 ③

$2x-3=7$에서 $2x=10 \qquad \therefore x=5$

$x=5$를 $f(2x-3)=x^2-3x+1$에 대입하면

$f(7)=5^2-15+1=11$

05-1 답 ③

$x^2-3x=-2$에서 $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

$f(x^2-3x)=4x^2-12x+9$에

$x=1$을 대입하면 $f(-2)=4-12+9=1$

$x=2$를 대입하면 $f(-2)=16-24+9=1$

$\therefore f(-2)=1$

06 답 1

$f(1)=1-1=0$ ……❶

$f(26)=f(26-3)=f(23)=f(23-3)=f(20)$

$=\cdots=f(2)=2-1=1$ ……❷

$\therefore f(1)+f(26)=0+1=1$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $f(26)$의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $f(1)+f(26)$의 값을 구할 수 있다.	20%

06-1 답 ①

$f(1)=2+1=3$

$f(23)=f(23-5)=f(18)=f(18-5)=f(13)$

$=\cdots=f(3)=6+1=7$

$\therefore f(1)+f(23)=3+7=10$

07 답 ①

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

㉠의 양변에 $x=-1,\ y=-1$을 대입하면

$f(-2)=f(-1)+f(-1),\ 2f(-1)=3 \qquad \therefore f(-1)=\frac{3}{2}$

㉠의 양변에 $x=1,\ y=-1$을 대입하면

$f(0)=f(1)+f(-1)$

$\therefore f(1)=-f(-1)=-\frac{3}{2}$

㉠의 양변에 $x=1,\ y=1$을 대입하면

$f(2)=2f(1)=2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-3$

07-1 답 −3

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=1,\ y=1$을 대입하면

$f(2)=f(1)+f(1),\ 2f(1)=4 \qquad \therefore f(1)=2$

㉠의 양변에 $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$을 대입하면

$f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right),\ 2f\left(\frac{1}{2}\right)=2 \qquad \therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=1$

㉠의 양변에 $x=1,\ y=2$를 대입하면

$f(3)=f(1)+f(2)=2+4=6$

$\therefore f(1)+f\left(\frac{1}{2}\right)-f(3)=2+1-6=-3$

08 답 64

$f(x+y)=f(x)f(y)$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=1,\ y=1$을 대입하면

$f(2)=\{f(1)\}^2=4$

$\therefore f(1)=2\ (\because f(x)>0)$ ······❶

㉠의 양변에 $x=1, y=2$를 대입하면

$f(3)=f(1)f(2)=2\times4=8$ ······❷

㉠의 양변에 $x=3, y=3$을 대입하면

$f(6)=\{f(3)\}^2=8^2=64$ ······❸

채점 기준	비율
❶ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $f(6)$의 값을 구할 수 있다.	30%

08-1 답 63

$f(x+y)=f(x)f(y)$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=0, y=0$을 대입하면

$f(0)=\{f(0)\}^2,\ f(0)\{f(0)-1\}=0$

$\therefore f(0)=1\ (\because f(x)>0)$

㉠의 양변에 $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$을 대입하면

$f(1)=\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2=4$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=2\ (\because f(x)>0)$

㉠의 양변에 $x=1, y=1$을 대입하면

$f(2)=\{f(1)\}^2=4^2=16$

㉠의 양변에 $x=1, y=2$를 대입하면

$f(3)=f(1)f(2)=4\times16=64$

$\therefore f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)+f(3)=1-2+64=63$

09 답 ③

24를 소인수분해 하면 $24=2^3\times3$

(나)에서

$f(24)=f(2^3\times3)=f(2^3)+f(3)$

$=3f(2)+f(3)$

이때 (가)에서 $f(2)=2+1=3,\ f(3)=3+1=4$이므로

$f(24)=3\times3+4=13$

> 참고 (나)에서
> $f(2^3)=f(2^2\times2)=f(2^2)+f(2)=f(2\times2)+f(2)$
> $=f(2)+f(2)+f(2)=3f(2)$

09-1 답 17

360을 소인수분해 하면 $360=2^3\times3^2\times5$

(나)에서

$f(360)=f(2^3\times3^2\times5)=f(2^3)+f(3^2)+f(5)$

$=3f(2)+2f(3)+f(5)$

이때 (가)에서 $f(2)=2,\ f(3)=3,\ f(5)=5$이므로

$f(360)=3\times2+2\times3+5=17$

10 답 0

(i) $a>0$일 때, $f(-1)=-1,\ f(2)=2$이어야 하므로

$-a+b=-1,\ 2a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=0$

그런데 $ab=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때, $f(-1)=2,\ f(2)=-1$이어야 하므로

$-a+b=2,\ 2a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=1$

(i), (ii)에서 $a=-1, b=1$이므로

$a+b=-1+1=0$

> 참고 $a=0$이면 $f(x)=b$이므로 함수 $f(x)$의 치역은 $\{b\}$이다.
> 따라서 치역과 공역이 서로 같을 수 없으므로 $a\neq0$

10-1 답 ②

(i) $a>0$일 때, $f(1)=1,\ f(3)=3$이어야 하므로

$a+b=1,\ 3a+b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=0$

그런데 $ab=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때, $f(1)=3,\ f(3)=1$이어야 하므로

$a+b=3,\ 3a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=4$

(i), (ii)에서 $a=-1, b=4$이므로

$ab=-1\times4=-4$

11 답 ⑤

$\frac{1}{2}x+3=-2$에서 $x=-10$

$\frac{1}{2}x+3=-1$에서 $x=-8$

$\frac{1}{2}x+3=0$에서 $x=-6$

$\frac{1}{2}x+3=1$에서 $x=-4$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{-10, -8, -6, -4\}$이므로 정의역의 원소가 아닌 것은 ⑤이다.

11-1 답 ①

$\frac{1}{3}x-1=-1$에서 $x=0$

$\frac{1}{3}x-1=0$에서 $x=3$

$\frac{1}{3}x-1=1$에서 $x=6$

$\frac{1}{3}x-1=2$에서 $x=9$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{0, 3, 6, 9\}$이므로 정의역의 원소가 아닌 것은 ①이다.

12 답 2

$f(-1)=a-1,\ f(0)=-1,\ f(1)=a-1,\ f(2)=4a-1,$

$f(3)=9a-1$이므로 함수 f의 치역은

$\{-1, a-1, 4a-1, 9a-1\}$

이때 치역의 모든 원소의 합이 24이므로

$-1+(a-1)+(4a-1)+(9a-1)=24$

$14a-4=24,\ 14a=28 \qquad \therefore a=2$

12-1 답 3

$f(-2)=4a-3,\ f(-1)=a-3,\ f(0)=-3,\ f(1)=a-3,$

$f(2)=4a-3,\ f(3)=9a-3$이므로 함수 f의 치역은

$\{-3, a-3, 4a-3, 9a-3\}$ ……❶

이때 치역의 모든 원소의 합이 30이므로

$-3+(a-3)+(4a-3)+(9a-3)=30$

$14a-12=30,\ 14a=42 \qquad \therefore a=3$ ……❷

채점 기준	비율
❶ 함수 f의 치역을 구할 수 있다.	50%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50%

13 답 ③

함수 f, g의 치역을 각각 Y, Y'이라 하면

함수 f의 치역은 $Y=\{y \mid y \geq 3\}$

함수 g의 치역은 $Y'=\{y \mid y \geq k+4\}$

이때 $Y=Y'$이므로 $3=k+4 \qquad \therefore k=-1$

13-1 답 ③

함수 f, g의 치역을 각각 Y, Y'이라 하면

함수 f의 치역은 $Y=\{y \mid y \leq 2\}$

함수 g의 치역은 $Y'=\{y \mid y \leq k+9\}$

이때 $Y=Y'$이므로 $2=k+9 \qquad \therefore k=-7$

14 답 2

치역이 $\{y \mid -a+1 \leq y \leq 3a+1\}$이므로

$-a+1 \geq -1,\ 3a+1 \leq 10$

$-a+1 \geq -1$에서 $a \leq 2$

$3a+1 \leq 10$에서 $3a \leq 9 \qquad \therefore a \leq 3$

$\therefore a \leq 2$

그런데 $a>0$이므로 $0<a \leq 2$

따라서 실수 a의 최댓값은 2이다.

14-1 답 2

(i) $a>0$일 때

치역이 $\{y \mid 2a-1 \leq y \leq 6a-1\}$이므로

$2a-1 \geq -7,\ 6a-1 \leq 17$

$2a-1 \geq -7$에서 $2a \geq -6 \qquad \therefore a \geq -3$

$6a-1 \leq 17$에서 $6a \leq 18 \qquad \therefore a \leq 3$

$\therefore -3 \leq a \leq 3$

그런데 $a>0$이므로 $0<a \leq 3$ ……❶

(ii) $a<0$일 때

치역이 $\{y \mid 6a-1 \leq y \leq 2a-1\}$이므로

$6a-1 \geq -7,\ 2a-1 \leq 17$

$6a-1 \geq -7$에서 $6a \geq -6 \qquad \therefore a \geq -1$

$2a-1 \leq 17$에서 $2a \leq 18 \qquad \therefore a \leq 9$

$\therefore -1 \leq a \leq 9$

그런데 $a<0$이므로 $-1 \leq a<0$ ……❷

(i), (ii)에서 $-1 \leq a<0$ 또는 $0<a \leq 3$이므로

$M=3,\ m=-1$ ……❸

$\therefore M+m=3+(-1)=2$ ……❹

채점 기준	비율
❶ $a>0$일 때, a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❷ $a<0$일 때, a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❸ M, m의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	10%

15 답 $\{0, 1\}$

음이 아닌 정수 k에 대하여

(i) $x=3k$일 때

$x^2=(3k)^2=9k^2=3\times 3k^2 \qquad \therefore f(x)=0$

(ii) $x=3k+1$일 때

$x^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$

$\therefore f(x)=1$

(iii) $x=3k+2$일 때

$x^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$

$\therefore f(x)=1$

(i)~(iii)에서 함수 f의 치역은 $\{0, 1\}$이다.

15-1 답 20

$f(1)=(7^1$의 일의 자리의 숫자)이므로 $f(1)=7$

$f(2)=(7^2$의 일의 자리의 숫자)이므로 $f(2)=9$

$f(3)=(7^3$의 일의 자리의 숫자)이므로 $f(3)=3$

$f(4)=(7^4$의 일의 자리의 숫자)이므로 $f(4)=1$

$f(5)=(7^5$의 일의 자리의 숫자)이므로 $f(5)=7$

⋮

즉 7^n의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.

따라서 함수 f의 치역은 $\{1, 3, 7, 9\}$이므로 모든 원소의 합은

$1+3+7+9=20$

16 답 ②

$f=g$이려면 정의역의 각 원소에 대한 함숫값이 서로 같아야 한다.

$f(a)=g(a)$에서 $a^2+ab-1=a+2$

$\therefore a^2+(b-1)a-3=0$ ……㉠

$f(-1)=g(-1)$에서 $-b=1$

$\therefore b=-1$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=3\ (\because a\neq -1)$

$\therefore a+b=3+(-1)=2$

16-1 답 ①

$f=g$이려면 정의역의 각 원소에 대한 함숫값이 서로 같아야 한다.

$f(1)=g(1)$에서 $4=a+b$ ……㉠

$f(3)=g(3)$에서 $12=9a+b$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=3$

$\therefore 4a-b=4-3=1$

17 답 ②

ㄱ. $f(x)=x^3+1,\ g(x)=x+1$에서

$f(-1)=g(-1)=0,\ f(0)=g(0)=1,\ f(1)=g(1)=2$이므로 $f=g$

ㄴ. $f(x)=\begin{cases} -2 & (x=-1) \\ \dfrac{x^2-1}{x+1} & (x\neq -1) \end{cases}$, $g(x)=x-1$에서

$f(-1)=g(-1)=-2,\ f(0)=g(0)=-1,$

$f(1)=g(1)=0$이므로 $f=g$

ㄷ. $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2},\ g(x)=-2x+3$에서

$f(-1)=0,\ g(-1)=5$이므로 $f(-1)\neq g(-1)$

$\therefore f\neq g$

따라서 $f=g$인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

17-1 답 ⑤

① $f(x)=x$, $g(x)=x^2$에서

$f(-1)=-1$, $g(-1)=1$이므로 $f(-1)\neq g(-1)$

$\therefore f\neq g$

② $f(x)=|x|+x$, $g(x)=x^2-1$에서

$f(0)=0$, $g(0)=-1$이므로 $f(0)\neq g(0)$

$\therefore f\neq g$

③ $f(x)=x$, $g(x)=-x$에서

$f(-1)=-1$, $g(-1)=1$이므로 $f(-1)\neq g(-1)$

$\therefore f\neq g$

④ $f(x)=-x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$에서

$f(1)=-1$, $g(1)=1$이므로 $f(1)\neq g(1)$

$\therefore f\neq g$

⑤ $f(x)=x$, $g(x)=x^3$에서

$f(-1)=g(-1)=-1$, $f(0)=g(0)=0$, $f(1)=g(1)=1$

이므로 $f=g$

따라서 $f=g$인 것은 ⑤이다.

18 답 7

$f(x)=g(x)$에서 $x^3-6x+4=x-2$

$x^3-7x+6=0$, $(x+3)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 집합 X는 집합 $\{-3, 1, 2\}$의 부분집합 중에서 공집합을 제외한 것이므로 집합 X의 개수는

$2^3-1=7$

18-1 답 $\{-2\}$, $\{1\}$, $\{-2, 1\}$

$f(x)=g(x)$에서 $x^3-x^2=x^3+x-2$

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 집합 X는 집합 $\{-2, 1\}$의 부분집합 중에서 공집합을 제외한 것이므로 집합 X는

$\{-2\}$, $\{1\}$, $\{-2, 1\}$

19 답 ㄱ, ㄹ

ㄱ. 치역과 공역이 실수 전체의 집합이고

$f(x)=4x$라 하면 $x_1\neq x_2$일 때

$f(x_1)-f(x_2)=4x_1-4x_2=4(x_1-x_2)\neq 0$

즉 $f(x_1)\neq f(x_2)$이므로 일대일대응이다.

ㄴ. $f(x)=|x|+1$이라 하면

$x_1=-1$, $x_2=1$일 때, $x_1\neq x_2$이지만

$f(-1)=|-1|+1=2$, $f(1)=|1|+1=2$

즉 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 일대일대응이 아니다.

ㄷ. $f(x)=3(x+1)^2$이라 하면

$x_1=-2$, $x_2=0$일 때, $x_1\neq x_2$이지만

$f(-2)=3(-2+1)^2=3$, $f(0)=3(0+1)^2=3$

즉 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 일대일대응이 아니다.

ㄹ. 치역과 공역이 실수 전체의 집합이고

$f(x)=-3x+2$라 하면 $x_1\neq x_2$일 때

$f(x_1)-f(x_2)=-3x_1+2-(-3x_2+2)=-3(x_1-x_2)\neq 0$

즉 $f(x_1)\neq f(x_2)$이므로 일대일대응이다.

따라서 일대일대응인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

19-1 답 ④

① $f(x)=-x^2+5$라 하면

$x_1=-1$, $x_2=1$일 때, $x_1\neq x_2$이지만

$f(-1)=-(-1)^2+5=4$, $f(1)=-1^2+5=4$

즉 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 일대일대응이 아니다.

② $f(x)=|x-1|$이라 하면

$x_1=0$, $x_2=2$일 때, $x_1\neq x_2$이지만

$f(0)=|0-1|=1$, $f(2)=|2-1|=1$

즉 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 일대일대응이 아니다.

③ $f(x)=2$라 하면

$x_1=1$, $x_2=2$일 때, $x_1\neq x_2$이지만

$f(1)=2$, $f(2)=2$

즉 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 일대일대응이 아니다.

④ 치역과 공역이 실수 전체의 집합이고

$f(x)=3x+1$이라 하면 $x_1\neq x_2$일 때

$f(x_1)-f(x_2)=3x_1+1-(3x_2+1)=3(x_1-x_2)\neq 0$

즉 $f(x_1)\neq f(x_2)$이므로 일대일대응이다.

⑤ $f(x)=x+|x|$라 하면

$x_1=-1$, $x_2=0$일 때, $x_1\neq x_2$이지만

$f(-1)=-1+|-1|=0$, $f(0)=0+|0|=0$

즉 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 일대일대응이 아니다.

따라서 일대일대응인 것은 ④이다.

20 답 ③

치역의 임의의 원소 k에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=k$를 그었을 때

ㄱ. 그래프와 무수히 많은 점에서 만나므로 일대일함수가 아니다.

ㄴ. 그래프와 두 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

ㄷ, ㄹ. 그래프와 한 점에서 만나므로 일대일함수이다.

따라서 일대일함수인 것은 ㄷ, ㄹ이다.

참고 ㄷ. 일대일함수이지만 일대일대응은 아니다.

ㄹ. 일대일대응이다.

20-1 답 ②

함수 f에서 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$인 함수는 일대일함수이다.

치역의 임의의 원소 k에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=k$를 그었을 때

ㄱ, ㄷ. 그래프와 한 점에서 만나므로 일대일함수이다.

ㄴ, ㄹ. 그래프와 두 점 이상에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

따라서 일대일함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21 답 ④

치역의 임의의 원소 k에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=k$를 그었을 때

①, ③, ⑤ 그래프와 한 점에서 만나고 (치역)=(공역)이므로 일대일대응이다.

② 그래프와 무수히 많은 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

④ 그래프와 한 점에서 만나므로 일대일함수이지만 (치역)$\neq$(공역)이므로 일대일대응이 아니다.

따라서 일대일함수이지만 일대일대응이 아닌 것은 ④이다.

21-1 답 ②

치역의 임의의 원소 k에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=k$를 그었을 때

①, ④ 그래프와 한 점에서 만나고 (치역)=(공역)이므로 일대일대응이다.

② 그래프와 한 점에서 만나므로 일대일함수이지만 (치역)$\neq$(공역)이므로 일대일대응이 아니다.

③, ⑤ 그래프와 두 점 이상에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

따라서 일대일함수이지만 일대일대응이 아닌 것은 ②이다.

22 답 ⑤

함수 f가 일대일대응이고 $f(1)=4$이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값은 서로 다르고 1, 2, 3 중 하나이어야 한다.

이때 $f(2)>f(3)>f(4)$이므로

$f(2)=3$, $f(3)=2$, $f(4)=1$

$\therefore f(2)+f(3)-f(4)=3+2-1=4$

22-1 답 ③

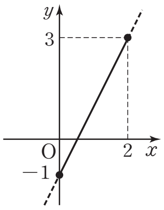
함수 f가 일대일대응이고 $f(7)\times f(9)=15$이므로

$f(7)=3$, $f(9)=5$ 또는 $f(7)=5$, $f(9)=3$

즉 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값은 서로 다르고 1, 7, 9 중 하나이어야 한다.

$\therefore f(1)+f(3)+f(5)=1+7+9=17$

23 답 5



$f(x)=ax+b$에서 $a>0$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(0,\ -1)$, $(2,\ 3)$을 지나야 한다.

$f(0)=-1$에서 $b=-1$

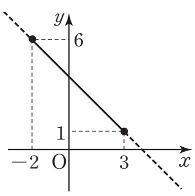
$f(2)=3$에서 $2a+b=3$ ······㉠

$b=-1$을 ㉠에 대입하면

$2a-1=3$　　$\therefore a=2$

$\therefore 2a-b=2\times2-(-1)=5$

23-1 답 ②



$f(x)=ax+b$에서 $a<0$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-2,\ 6)$, $(3,\ 1)$을 지나야 한다.

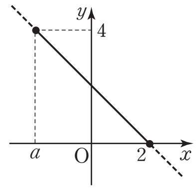
$f(-2)=6$에서 $-2a+b=6$ ······㉠

$f(3)=1$에서 $3a+b=1$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=4$

$\therefore ab=-1\times4=-4$

24 답 ③



$f(x)=-x+b$에서 x의 계수가 음수이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(a,\ 4)$, $(2,\ 0)$을 지나야 한다.

$f(a)=4$에서 $-a+b=4$ ······㉠

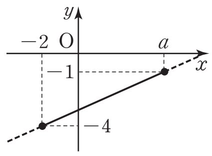
$f(2)=0$에서 $-2+b=0$　　$\therefore b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$-a+2=4$　　$\therefore a=-2$

$\therefore a+b=-2+2=0$

24-1 답 ⑤



$f(x)=\frac{1}{2}x+b$에서 x의 계수가 양수이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-2,\ -4)$, $(a,\ -1)$을 지나야 한다.

$f(-2)=-4$에서 $-1+b=-4$

$\therefore b=-3$

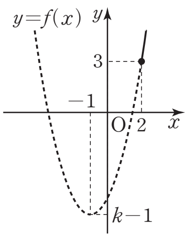
$f(a)=-1$에서 $\frac{1}{2}a+b=-1$ ······㉠

$b=-3$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}a-3=-1$　　$\therefore a=4$

$\therefore a+b=4+(-3)=1$

25 답 −5



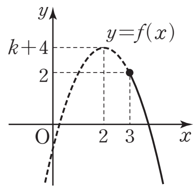
$f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x\geq2$일 때 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

따라서 함수 f가 일대일대응이려면

$f(2)=3$이어야 하므로

$4+4+k=3$　　$\therefore k=-5$

25-1 답 ③



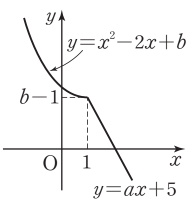
$f(x)=-x^2+4x+k=-(x-2)^2+k+4$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x\geq3$일 때 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

따라서 함수 f가 일대일대응이려면

$f(3)=2$이어야 하므로

$-9+12+k=2$　　$\therefore k=-1$

26 답 5



$x\leq1$에서

$f(x)=x^2-2x+b=(x-1)^2+b-1$이므로 함수 f가 일대일대응이려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

······❶

$x>1$에서 직선 $y=ax+5$의 기울기 a는 음수이어야 하므로 $a<0$ ······㉠

또 (치역)=(공역)이려면 직선 $y=ax+5$가 점 $(1,\ b-1)$을 지나야 하므로

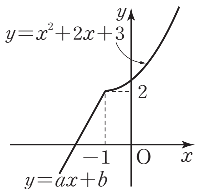
$b-1=a+5 \qquad \therefore a=b-6$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $b-6<0 \qquad \therefore b<6$ ……❷

따라서 정수 b의 최댓값은 5이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	40%
❷ b의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ 정수 b의 최댓값을 구할 수 있다.	10%

26-1 답 ④



$x>-1$에서

$f(x)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$이므로

함수 f가 일대일대응이려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$x\le-1$에서 직선 $y=ax+b$의 기울기 a는 양수이어야 하므로

$a>0$ ……㉠

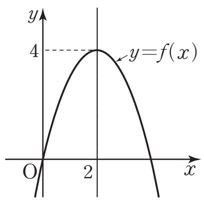
또 (치역)=(공역)이려면 직선 $y=ax+b$가 점 $(-1, 2)$를 지나야 하므로

$-a+b=2 \qquad \therefore a=b-2$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $b-2>0 \qquad \therefore b>2$

따라서 정수 b의 최솟값은 3이다.

27 답 0



$f(x)=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

함수 f가 일대일대응이려면 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값도 증가하거나 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소해야 한다.

즉 직선 $x=2$를 기준으로 어느 한쪽의 전체 또는 일부분이어야 하므로 $k\le2$ ……㉠

또 치역과 공역이 같아야 하므로 정의역 $\{x|x\le k\}$에 대하여 치역은 $\{y|y\le k\}$이어야 한다.

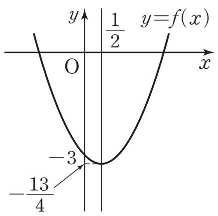
즉 $f(k)=k$에서 $-k^2+4k=k$

$k^2-3k=0,\ k(k-3)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=3$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $k=0$

27-1 답 ⑤



$f(x)=x^2-x-3=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

함수 f가 일대일대응이려면 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값도 증가하거나 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소해야 한다.

즉 직선 $x=\frac{1}{2}$을 기준으로 어느 한쪽의 전체 또는 일부분이어야 하므로 $a\ge\frac{1}{2}$ ……㉠

또 치역과 공역이 같아야 하므로 정의역 $\{x|x\ge a\}$에 대하여 치역은 $\{y|y\ge a\}$이어야 한다.

즉 $f(a)=a$에서 $a^2-a-3=a$

$a^2-2a-3=0,\ (a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=3$

28 답 $a<-1$ 또는 $a>1$

$f(x)=ax+|x-1|+2$에서

(i) $x<1$일 때

$f(x)=ax-(x-1)+2=(a-1)x+3$

(ii) $x\ge1$일 때

$f(x)=ax+(x-1)+2=(a+1)x+1$

(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases}(a-1)x+3 & (x<1)\\(a+1)x+1 & (x\ge1)\end{cases}$

함수 f가 일대일대응이려면 $x<1$, $x\ge1$에서 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로 $(a-1)(a+1)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>1$

28-1 답 $-1<a<1$

$f(x)=a|x-2|+x+3$에서

(i) $x<2$일 때

$f(x)=-a(x-2)+x+3=(-a+1)x+2a+3$

(ii) $x\ge2$일 때

$f(x)=a(x-2)+x+3=(a+1)x-2a+3$

(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases}(-a+1)x+2a+3 & (x<2)\\(a+1)x-2a+3 & (x\ge2)\end{cases}$

함수 f가 일대일대응이려면 $x<2$, $x\ge2$에서 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로 $(-a+1)(a+1)>0$

$(a-1)(a+1)<0 \qquad \therefore -1<a<1$

29 답 ②

함수 f는 항등함수이므로 $f(4)=4$, $f(6)=6$

$f(4)=g(2)$에서 $g(2)=4$

함수 g는 상수함수이므로 $g(8)=g(2)=4$

$\therefore f(6)+g(8)=6+4=10$

29-1 답 -1

함수 f는 항등함수이므로 $f(-1)=-1$, $f(1)=1$

(나)에서 $1+g(0)=1$이므로 $g(0)=0$

함수 g는 상수함수이므로 $g(1)=g(0)=0$

$\therefore f(-1)+g(1)=-1+0=-1$

30 답 ⑤

ㄱ. $f(-1)=|-1|=1$이므로 항등함수가 아니다.

ㄴ. $g(-1)=-1$, $g(0)=0$, $g(1)=1$이므로 항등함수이다.

ㄷ. $h(-1)=-1$, $h(0)=0$, $h(1)=1$이므로 항등함수이다.

ㄹ. $k(-1)=\frac{|0|-|-2|}{2}=-1$

$k(0)=\frac{|1|-|-1|}{2}=0$

$k(1)=\frac{|2|-|0|}{2}=1$

이므로 항등함수이다.

따라서 항등함수인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

30-1 답 ①

ㄱ. $f(-1)=(-1)^2=1$이므로 항등함수가 아니다.

ㄴ. $g(-1)=\frac{|-1|-1}{2}=0$이므로 항등함수가 아니다.

ㄷ. $h(-1)=-1$, $h(0)=0$, $h(1)=1$이므로 항등함수이다.

ㄹ. $k(-1)=|-1|-1=0$이므로 항등함수가 아니다.

따라서 항등함수인 것은 ㄷ이다.

31 답 2

함수 g는 항등함수이므로 $g(2)=2$, $g(3)=3$ ······❶

$f(1)=g(2)=h(3)$에서 $f(1)=h(3)=2$

$f(2)=f(1)+f(3)$에서 $f(2)=2+f(3)$

이때 함수 f는 일대일대응이므로 $f(2)=3$, $f(3)=1$ ······❷

함수 h는 상수함수이므로 $h(1)=h(3)=2$ ······❸

$\therefore f(2)-g(3)+h(1)=3-3+2=2$ ······❹

채점 기준	비율
❶ $g(3)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $h(1)$의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ $f(2)-g(3)+h(1)$의 값을 구할 수 있다.	10%

31-1 답 −2

함수 g는 항등함수이므로 $g(-2)=-2$

(나)에서 $f(2)+h(2)=-4$이고 공역이 $\{-2, 0, 2\}$이므로

$f(2)=-2$, $h(2)=-2$

이때 함수 f는 일대일대응이고 $f(0)=2$이므로

$f(-2)=0$

함수 h는 상수함수이므로 $h(0)=h(2)=-2$

$\therefore f(-2)+h(0)=0+(-2)=-2$

32 답 285

집합 $X=\{0, 1, 2, 3\}$에 대하여 X에서 X로의

함수의 개수는 $4^4=256$

일대일대응의 개수는 $4!=24$

상수함수의 개수는 4

항등함수의 개수는 1

따라서 $a=256$, $b=24$, $c=4$, $d=1$이므로

$a+b+c+d=256+24+4+1=285$

Lecture

(1) X에서 X로의 함수 f의 개수

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1, 2, 3 중 하나이므로 4개

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1, 2, 3 중 하나이므로 4개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1, 2, 3 중 하나이므로 4개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1, 2, 3 중 하나이므로 4개

따라서 함수의 개수는 $4\times4\times4\times4=4^4=256$

(2) X에서 X로의 일대일대응인 f의 개수

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1, 2, 3 중 하나이므로 4개

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(0)$의 값을 제외한 3개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(0)$, $f(1)$의 값을 제외한 2개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 1개

따라서 일대일대응의 개수는 $4\times3\times2\times1=4!=24$

32-1 답 3251

집합 $X=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$에 대하여 X에서 X로의

함수의 개수는 $5^5=3125$

일대일대응의 개수는 $5!=120$

상수함수의 개수는 5

항등함수의 개수는 1

따라서 $a=3125$, $b=120$, $c=5$, $d=1$이므로

$a+b+c+d=3125+120+5+1=3251$

33 답 9

함수 f는 일대일함수이고 $f(2)=4$, $f(1)>f(2)$에서

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 5, 6, 7 중 하나이므로 3개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 3개

따라서 함수 f의 개수는

$3\times3=9$

33-1 답 20

함수 f는 일대일함수이고 $f(1)<f(3)<f(5)$에서

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이므로 5개

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(2)$의 값을 제외한 4개

$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값은 $f(2)$, $f(4)$의 값을 제외한 3개의 수를 크기순으로 대응시키면 되므로 함수 f의 개수는

$5\times4=20$

34 답 ①

함수 f는 일대일대응이고 $f(1)=a$, $f(2)=c$에서

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 b, d 중 하나이므로 2개

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 b, d 중 $f(3)$의 값을 제외한 1개

따라서 함수 f의 개수는

$2\times1=2$

34-1 답 ③

함수 f는 일대일대응이고 $f(1)=b$, $f(2)=d$에서

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 a, c, e 중 하나이므로 3개

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 a, c, e 중 $f(3)$의 값을 제외한 2개

$f(5)$의 값이 될 수 있는 것은 a, c, e 중 $f(3)$, $f(4)$의 값을 제외한 1개

따라서 함수 f의 개수는

$3\times2\times1=6$

유형+ 완성하기 p. 231

35 답 30

(다)에서 함수 f는 일대일함수이고

(가), (나)에서 $f(2)=4$, $f(3)<f(4)$이므로

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 5, 6 중 하나이므로 5개

$f(3)$, $f(4)$의 값은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 4개의 수 중에서 2개를 뽑아 크기순으로 대응시키면 되므로 ${}_4C_2=6$

따라서 함수 f의 개수는

$5\times6=30$

36 답 ②

$f(ab)=f(a)+f(b)$ ……㉠

㉠의 양변에 $a=1, b=1$을 대입하면

$f(1)=f(1)+f(1)$ $\quad\therefore f(1)=0$

㉠의 양변에 $a=2, b=2$를 대입하면

$f(4)=f(2)+f(2)$ $\quad\therefore f(4)=2f(2)$

(i) $f(1)=0, f(2)=0$인 경우

$f(4)=0$이므로 $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은

0, 1, 2, 3, 4의 5개

(ii) $f(1)=0, f(2)=1$인 경우

$f(4)=2$이므로 $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은

0, 1, 2, 3, 4의 5개

(iii) $f(1)=0, f(2)=2$인 경우

$f(4)=4$이므로 $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은

0, 1, 2, 3, 4의 5개

(i)~(iii)에서 함수 f의 개수는

$5+5+5=15$

37 답 12

$f(0)\{f(1)+1\}\neq 0$에서 $f(0)\neq 0, f(1)\neq -1$

$f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-1, 0, 1$ 중 하나이므로 3개

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $-1, 1$ 중 하나이므로 2개

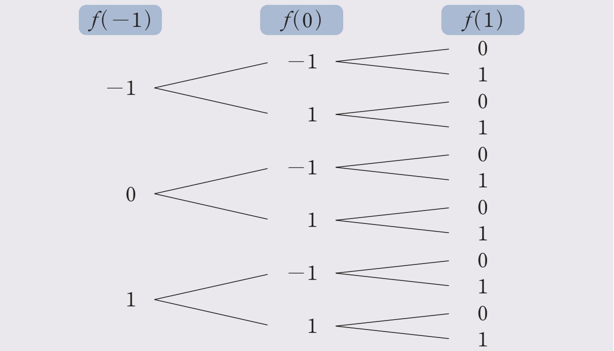
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1 중 하나이므로 2개

따라서 함수 f의 개수는

$3\times 2\times 2=12$

Lecture

조건을 만족시키는 함숫값은 다음과 같이 나타낼 수 있다.



38 답 14

(가)에서 함수 f의 최솟값은 $f(-1)$, 최댓값은 $f(1)$이다.

이때 (나)에서 최댓값과 최솟값의 차가 3이므로 $f(-1), f(1)$의 값을 순서쌍으로 나타내면

$(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8), (6, 9), (7, 10)$의 7개

각각의 순서쌍에 대하여 $f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 2개씩 있으므로 함수 f의 개수는

$7\times 2=14$

39 답 8

(나)에서 $f(x)+f(-x)=0$ ……㉠

㉠의 좌변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+f(0)=0$ $\quad\therefore f(0)=0$

함수 f는 일대일대응이므로

$f(-2)$의 값이 될 수 있는 것은 $-2, -1, 1, 2$ 중 하나이므로 4개

㉠의 좌변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)+f(-2)=0$ $\quad\therefore f(2)=-f(-2)$

즉 $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $-f(-2)$의 값과 같은 1개

$f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-2, -1, 1, 2$ 중 $f(-2), f(2)$의 값을 제외한 2개

㉠의 좌변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)+f(-1)=0$ $\quad\therefore f(1)=-f(-1)$

즉 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-f(-1)$의 값과 같은 1개

따라서 함수 f의 개수는

$4\times 1\times 2\times 1=8$

학교 시험 대비 문제

p. 232~234

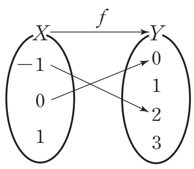
01 답 ②

② 집합 N의 원소 1에 대응하는 집합 N의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

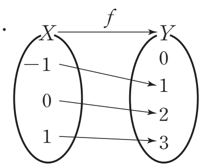
02 답 ⑤

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

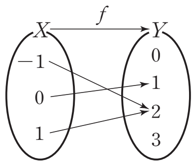
ㄱ.



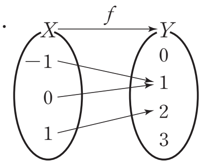
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



ㄱ. 집합 X의 원소 1에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 함수인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

03 답 2

(i) 7은 홀수이므로 $f(7)=f\left(\frac{7+1}{2}\right)=f(4)$

4는 짝수이므로 $f(4)=f\left(\frac{4}{2}\right)=f(2)$

2는 짝수이므로 $f(2)=f\left(\frac{2}{2}\right)=f(1)=1$

(ii) 10은 짝수이므로 $f(10)=f\left(\frac{10}{2}\right)=f(5)$

5는 홀수이므로 $f(5)=f\left(\frac{5+1}{2}\right)=f(3)$

3은 홀수이므로 $f(3)=f\left(\frac{3+1}{2}\right)=f(2)=1$

(i), (ii)에서 $f(7)+f(10)=1+1=2$

04 답 ④

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ ……㉠

ㄱ. ㉠에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\quad\therefore f(0)=0$

ㄴ. ㉠에 $y=-x$를 대입하면

$f(0)=f(x)+f(-x)$ $\quad\therefore f(-x)=-f(x)$

ㄷ. $f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=a+a=2a$

$f(3)=f(1+2)=f(1)+f(2)=a+2a=3a$

$f(4)=f(1+3)=f(1)+f(3)=a+3a=4a$

$\vdots$

$\therefore f(x)=ax$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

05 답 ⑤

$f(x+y)=f(x)f(y)$ ……㉠

ㄱ. ㉠의 양변에 $x=1$, $y=0$을 대입하면

$f(1)=f(1)f(0)$, $-1=-f(0)$

$\therefore f(0)=1$

ㄴ. ㉠의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(2)=f(1)f(1)=-1\times(-1)=1$

㉠의 양변에 $x=2$, $y=-2$를 대입하면

$f(0)=f(2)f(-2)$, $1=1\times f(-2)$

$\therefore f(-2)=1$

ㄷ. $f(2x)=f(x+x)=f(x)f(x)=\{f(x)\}^2$

$f(3x)=f(x+2x)=f(x)f(2x)=f(x)\{f(x)\}^2=\{f(x)\}^3$

$f(4x)=f(x+3x)=f(x)f(3x)=f(x)\{f(x)\}^3=\{f(x)\}^4$

$\vdots$

$\therefore f(nx)=\{f(x)\}^n$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

06 답 ③

(i) $a>0$일 때, $f(-4)=-4$, $f(1)=1$이어야 하므로

$-4a+b=-4$, $a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=0$

그런데 $ab=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때, $f(-4)=1$, $f(1)=-4$이어야 하므로

$-4a+b=1$, $a+b=-4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-3$

(i), (ii)에서 $a=-1$, $b=-3$이므로

$ab=-1\times(-3)=3$

07 답 0

(i) $a>0$일 때

치역이 $\{y\,|\,2a+5\le y\le 6a+5\}$이므로

$2a+5\ge -1$, $6a+5\le 11$

$2a+5\ge -1$에서 $2a\ge -6$ $\quad\therefore a\ge -3$

$6a+5\le 11$에서 $6a\le 6$ $\quad\therefore a\le 1$

$\therefore -3\le a\le 1$

그런데 $a>0$이므로 $0<a\le 1$

(ii) $a<0$일 때

치역이 $\{y\,|\,6a+5\le y\le 2a+5\}$이므로

$6a+5\ge -1$, $2a+5\le 11$

$6a+5\ge -1$에서 $6a\ge -6$ $\quad\therefore a\ge -1$

$2a+5\le 11$에서 $2a\le 6$ $\quad\therefore a\le 3$

$\therefore -1\le a\le 3$

그런데 $a<0$이므로 $-1\le a<0$

(i), (ii)에서 $-1\le a<0$ 또는 $0<a\le 1$이므로

$M=1$, $m=-1$

$\therefore M+m=1+(-1)=0$

08 답 8

$f(1)=(1^2$을 6으로 나누었을 때의 나머지$)$이므로

$f(1)=1$

$f(2)=(2^2$을 6으로 나누었을 때의 나머지$)$이므로

$f(2)=4$

$f(3)=(3^2$을 6으로 나누었을 때의 나머지$)$이므로

$f(3)=3$

$f(4)=(4^2$을 6으로 나누었을 때의 나머지$)$이므로

$f(4)=4$

$f(5)=(5^2$을 6으로 나누었을 때의 나머지$)$이므로

$f(5)=1$

따라서 함수 f의 치역은 $\{1, 3, 4\}$이므로 모든 원소의 합은

$1+3+4=8$

09 답 ①

$f(-1)=g(-1)$에서 $1=a-b$ ……㉠

$f(1)=g(1)$에서 $1=a+b$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=0$

$\therefore a^2+b^2=1^2+0^2=1$

10 답 ③

$f(-1)=g(-1)$에서 $b=-1-c$ ……㉠

$f(2)=g(2)$에서 $4b=8+2c$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=1$, $c=-2$

$\therefore f(x)=x^2$, $g(x)=x^3-2x$

$f(a)=g(a)$에서 $a^2=a^3-2a$

$a^3-a^2-2a=0$, $a(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-1$ 또는 $a=2$

그런데 $-1<a<2$이므로 $a=0$

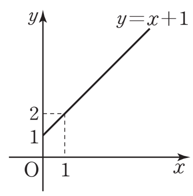
$\therefore a+b+c=0+1+(-2)=-1$

11 답 ㄱ

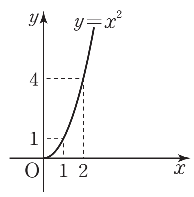
치역의 임의의 원소 k에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=k$를 그었을 때, 그래프와 한 점에서 만나고 (치역)$\neq$(공역)이면 그 함수는 일대일함수이지만 일대일대응이 아니다.

ㄱ. $f(x)=x+1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 일대일함수이지만 일대일대응이 아니다.

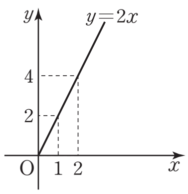
치역 $\{y\,|\,y\ge 1\}$이 공역과 같지 않으므로 일대일대응이 아니다.



ㄴ. $f(x)=x^2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 일대일대응이다.



ㄷ. $f(x)=2x$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 일대일대응이다.



따라서 일대일함수이지만 일대일대응이 아닌 것은 ㄱ이다.

12 답 ②

함수 f가 일대일대응이려면 $x<2$, $x\geq 2$에서 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로 $(a-1)(2-a)>0$

$(a-1)(a-2)<0 \qquad \therefore 1<a<2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로

$\alpha^2+\beta^2=1^2+2^2=5$

13 답 ⑤

함수 f가 항등함수이므로

$f(3)=3$에서 $a=3$

$f(-2)=-2$에서 $4b-2c-2=-2$

$\therefore 2b-c=0$ ……㉠

$f(-1)=-1$에서 $b-c-2=-1$

$\therefore b-c=1$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=-1$, $c=-2$

$\therefore abc=3\times(-1)\times(-2)=6$

14 답 15

함수 g는 항등함수이므로 $g(3)=3$, $g(6)=6$

$f(6)=g(3)=h(2)$에서 $f(6)=h(2)=3$

$f(2)=f(3)f(6)$에서 $f(2)=3f(3)$

이때 함수 f는 일대일대응이므로 $f(2)=6$, $f(3)=2$

함수 h는 상수함수이므로 $h(3)=h(2)=3$

$\therefore f(2)+g(6)+h(3)=6+6+3=15$

15 답 ③

함수 f는 일대일대응이고 $f(1)=a_1$, $f(2)=a_2$에서

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 a_3, a_4, a_5 중 하나이므로 3개

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 a_3, a_4, a_5 중 $f(3)$의 값을 제외한 2개

$f(5)$의 값이 될 수 있는 것은 a_3, a_4, a_5 중 $f(3)$, $f(4)$의 값을 제외한 1개

따라서 함수 f의 개수는 $3\times2\times1=6$

서술형 1 답 38

$f(1)=8$

$f(2)=\sqrt{2}f(1)=8\sqrt{2}$

$f(3)=\sqrt{2}f(2)-(\sqrt{2})^2=\sqrt{2}\times8\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2=14$ ……❶

$f(4)=\sqrt{2}f(3)=14\sqrt{2}$

$f(5)=\sqrt{2}f(4)-(\sqrt{2})^4=\sqrt{2}\times14\sqrt{2}-(\sqrt{2})^4=24$ ……❷

$\therefore f(3)+f(5)=14+24=38$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $f(5)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $f(3)+f(5)$의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 2 답 $0\leq m\leq 2$

(i) $m>0$일 때

치역이 $\{y\,|\,2m-1\leq y\leq 5m-1\}$이므로

$2m-1\geq -1$, $5m-1\leq 9$

$2m-1\geq -1$에서 $m\geq 0$

$5m-1\leq 9$에서 $5m\leq 10 \qquad \therefore m\leq 2$

$\therefore 0\leq m\leq 2$

그런데 $m>0$이므로 $0<m\leq 2$ ……❶

(ii) $m<0$일 때

치역이 $\{y\,|\,5m-1\leq y\leq 2m-1\}$이므로

$5m-1\geq -1$, $2m-1\leq 9$

$5m-1\geq -1$에서 $m\geq 0$

$2m-1\leq 9$에서 $2m\leq 10 \qquad \therefore m\leq 5$

$\therefore 0\leq m\leq 5$

그런데 $m<0$이어야 하므로 성립하지 않는다. ……❷

(iii) $m=0$일 때

$f(x)=-1$이고 $-1\in$(공역)이므로 성립한다. ……❸

(i)~(iii)에서 m의 값의 범위는

$0\leq m\leq 2$ ……❹

채점 기준	비율
❶ $m>0$일 때, m의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❷ $m<0$일 때, m의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❸ $m=0$일 때, 주어진 조건이 성립하는지 알 수 있다.	30%
❹ 실수 m의 값의 범위를 구할 수 있다.	10%

서술형 3 답 24

두 집합 $X=\{1, 2\}$, $Y=\{a, b, c\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수를 f, Y에서 X로의 함수를 g라 하면

(i) X에서 Y로의 함수의 개수

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c 중 하나이므로 3개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c 중 하나이므로 3개

즉 함수의 개수 p는

$p=3\times3=9$ ……❶

(ii) X에서 Y로의 일대일함수의 개수

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c 중 하나이므로 3개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 2개

즉 일대일함수의 개수 q는

$q=3\times2=6$ ……❷

(iii) X에서 Y로의 상수함수의 개수

$f(1)=f(2)=k$ (k는 상수)라 하면 k의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c 중 하나이므로 $r=3$ ……❸

(iv) Y에서 X로의 함수 중 치역과 공역이 같은 함수의 개수

$g(a)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 중 하나이므로 2개

$g(b)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 중 하나이므로 2개

$g(c)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 중 하나이므로 2개

즉 함수의 개수는

$2\times2\times2=8$

이때 치역이 $\{1\}$ 또는 $\{2\}$인 함수의 개수는 2이므로 치역과 공역이 같은 함수의 개수 s는

$s=8-2=6$ ……❹

(i)~(iv)에서

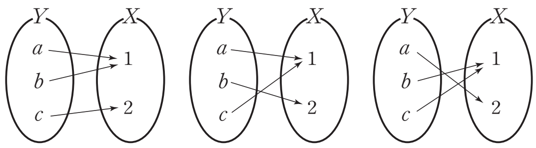
$p+q+r+s=9+6+3+6=24$ ……❺

채점 기준	비율
❶ p의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ q의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ r의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ s의 값을 구할 수 있다.	30%
❺ $p+q+r+s$의 값을 구할 수 있다.	10%

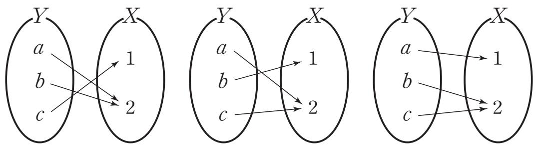
다른 풀이

위의 풀이 과정에서 (iv)를 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수도 있다.

① Y의 원소 2개에 X의 원소 1이 대응할 때



② Y의 원소 2개에 X의 원소 2가 대응할 때



1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 235

01 답 ③

$f(1)=(2\times1^2$의 일의 자리의 숫자$)$이므로 $f(1)=2$
$f(2)=(2\times2^2$의 일의 자리의 숫자$)$이므로 $f(2)=8$
$f(3)=(2\times3^2$의 일의 자리의 숫자$)$이므로 $f(3)=8$
$f(4)=(2\times4^2$의 일의 자리의 숫자$)$이므로 $f(4)=2$
$f(5)=(2\times5^2$의 일의 자리의 숫자$)$이므로 $f(5)=0$
$f(a)=2$에서 $a=1$ 또는 $a=4$
$f(b)=8$에서 $b=2$ 또는 $b=3$
따라서 $a+b$의 최댓값은 $a=4$, $b=3$일 때이므로
$4+3=7$

02 답 7

$f(x)=a|x+2|-4x$에서
(i) $x<-2$일 때
$f(x)=-a(x+2)-4x=-(a+4)x-2a$
(ii) $x\geq-2$일 때
$f(x)=a(x+2)-4x=(a-4)x+2a$
(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}-(a+4)x-2a & (x<-2)\\ (a-4)x+2a & (x\geq-2)\end{cases}$$

함수 f가 일대일대응이려면 $x<-2$, $x\geq-2$에서 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로 $-(a+4)(a-4)>0$
$(a+4)(a-4)<0$ $\quad\therefore -4<a<4$
따라서 정수 a의 값은 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$이므로 그 개수는 7이다.

03 답 7

(가)에서 함수 f의 치역의 원소의 개수가 7이므로 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)=n$을 만족시키는 집합 X의 원소 n은 1개이다.
이때 집합 X의 원소 중 함숫값으로 사용되지 않은 원소를 m이라 하면 $1+2+3+4+5+6+7+8=36$이므로 (나)에서
$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)$
$=36+n-m=42$
$\therefore n-m=6$
집합 X의 원소 n, m에 대하여 $n-m=6$인 경우는 다음 두 가지이다.
(i) $n=8$, $m=2$일 때
함수 f의 치역은 $\underbrace{\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}}_{\text{최댓값과 최솟값의 차: } 8-1=7}$이므로 (다)를 만족시키지 않는다.
(ii) $n=7$, $m=1$일 때
함수 f의 치역은 $\underbrace{\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}}_{\text{최댓값과 최솟값의 차: } 8-2=6}$이므로 (다)를 만족시킨다.
(i), (ii)에서 $n=7$

04 답 26

$g(x)=-x^2+5$, $h(x)=-4x$라 하면
$\{f(x)+x^2-5\}\{f(x)+4x\}=0$에서
$\{f(x)-g(x)\}\{f(x)-h(x)\}=0$이므로 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$ 또는 $f(x)=h(x)$이다.
$x=-1$일 때, $g(-1)=-1+5=4$, $h(-1)=4$이므로
$f(-1)=4$
$x=0$일 때, $g(0)=5$, $h(0)=0$
$h(0)=0$이면 (나)에 모순이므로 $f(0)=g(0)=5$
$x=1$일 때, $g(1)=-1+5=4$, $h(1)=-4$
함수 f는 일대일함수이므로 $f(1)=h(1)=-4$
$x=2$일 때, $g(2)=-4+5=1$, $h(2)=-8$
$f(0)>0$, $f(1)<0$이므로 (나)에서 $f(2)>0$ $\quad\therefore f(2)=1$
$x=-3$일 때, $g(-3)=-9+5=-4$, $h(-3)=12$
함수 f는 일대일함수이므로 $f(-3)=h(-3)=12$
$x=-2$일 때, $g(-2)=-4+5=1$, $h(-2)=8$
함수 f는 일대일함수이므로 $f(-2)=h(-2)=8$
$\therefore f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$
$=12+8+4+5+(-4)+1=26$

05 답 5

함수 $y=g(x)$의 그래프에서 $g(4)=3$
이때 $f(4)=2$이므로 $h(4)=g(4)=3$
$f(3)<g(3)$이라 하면 $h(3)=g(3)=3$이므로 함수 h가 일대일대응이라는 조건에 모순이다.
즉 $f(3)\geq g(3)$에서 $f(3)\geq3$이므로 $f(3)=4$이어야 한다.
$\therefore h(3)=f(3)=4$
함수 h는 일대일대응이므로
$h(1)=1$, $h(2)=2$ 또는 $h(1)=2$, $h(2)=1$
$h(1)=1$, $h(2)=2$이면 $g(1)=2$, $g(2)=1$이므로
$f(1)=1$, $f(2)=2$이어야 한다.
그런데 $g(1)>f(1)$에서 $h(1)=g(1)=2$이므로 모순이다.
$\therefore h(1)=2$, $h(2)=1$
따라서 $h(2)=1$, $g(2)=1$이므로 $f(2)=1$
$\therefore f(2)+h(3)=1+4=5$

10 합성함수와 역함수

Ⅲ 함수

개념 완성하기 p. 239~240

01 답 3
$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=3$

02 답 2
$(f\circ f\circ f)(2)=f(f(f(2)))=f(f(3))=f(1)=2$

03 답 p
$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(c)=p$

04 답 1
$(g\circ f)(k)=g(f(k))=q$이고 $g(a)=q$, $g(b)=q$이므로
$f(k)=a$ 또는 $f(k)=b$
이때 $f(k)=a$인 k의 값이 존재하지 않으므로 $f(k)=b$
$\therefore k=1$

05 답 c
$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(3)=c$

06 답 a
$(g\circ f)(c)=g(f(c))=g(2)=a$

07 답 2
$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(c)=2$

08 답 2
$(f\circ g)(7)=f(g(7))=f(c)=2$

09 답 $(g\circ f)(x)=x^2+6x+9$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+3)$
$=(x+3)^2=x^2+6x+9$

10 답 $(f\circ g)(x)=x^2+3$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=x^2+3$

11 답 $(f\circ f)(x)=x+6$
$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x+3)$
$=(x+3)+3=x+6$

12 답 $(g\circ g)(x)=x^4$
$(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x^2)=(x^2)^2=x^4$

13 답 13
$(g\circ f)(x)=g(-x+1)=2(-x+1)+5=-2x+7$
$\therefore (g\circ f)(-3)=-2\times(-3)+7=13$

14 답 -8
$(f\circ g)(x)=f(2x+5)=-(2x+5)+1=-2x-4$
$\therefore (f\circ g)(2)=-2\times2-4=-8$

15 답 ㄱ, ㄷ
역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.
ㄴ. X의 원소 1, 3이 모두 Y의 원소 a에 대응하므로 일대일대응이 아니다.
ㄹ. X의 원소 1, 2가 모두 Y의 원소 c에 대응하고, Y의 원소 b에 대응하는 X의 원소가 없으므로 일대일대응이 아니다.
따라서 역함수가 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

16 답 5
$f^{-1}(a)=5$

17 답 3
$f^{-1}(d)=3$

18 답 5
$f^{-1}(b)=1$, $f^{-1}(e)=4$이므로
$f^{-1}(b)+f^{-1}(e)=1+4=5$

19 답 6
$f^{-1}(-1)=a$에서 $f(a)=-1$이므로
$-a+5=-1$ $\therefore a=6$

20 답 1
$f^{-1}(b)=4$에서 $f(4)=b$이므로
$b=-4+5=1$

21 답 5
$f^{-1}(7)=k$라 하면 $f(k)=7$
즉 $2k-3=7$이므로 $k=5$
$\therefore f^{-1}(7)=5$

22 답 2
$g^{-1}(5)=k$라 하면 $g(k)=5$
즉 $3k-1=5$이므로 $k=2$
$\therefore g^{-1}(5)=2$

23 답 -1
$(f\circ g^{-1})(2)=f(g^{-1}(2))$
$g^{-1}(2)=k$라 하면 $g(k)=2$
즉 $3k-1=2$이므로 $k=1$
$\therefore (f\circ g^{-1})(2)=f(g^{-1}(2))=f(1)=-1$

24 답 -2
$(g^{-1}\circ f)(-2)=g^{-1}(f(-2))=g^{-1}(-7)$
$g^{-1}(-7)=k$라 하면 $g(k)=-7$
즉 $3k-1=-7$이므로 $k=-2$
$\therefore (g^{-1}\circ f)(-2)=g^{-1}(-7)=-2$

25 답 $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

함수 $y=3x-1$은 실수 전체의 집합 R에서 R로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=3x-1$에서 x를 y로 나타내면

$3x=y+1 \qquad \therefore x=\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

26 답 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$

함수 $y=-\frac{3}{2}x+4$는 실수 전체의 집합 R에서 R로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=-\frac{3}{2}x+4$에서 x를 y로 나타내면

$\frac{3}{2}x=-y+4 \qquad \therefore x=-\frac{2}{3}y+\frac{8}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$

27 답 4

$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2 \qquad \therefore k=4$

$\therefore f^{-1}(2)=4$

28 답 3

$(f^{-1})^{-1}(1)=f(1)=3$

29 답 4

$(f\circ f^{-1})(4)=4$

30 답 3

$(f^{-1}\circ f)(3)=3$

31 답 3

$$\begin{aligned}(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1)&=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(1)\\&=(g^{-1}\circ f)(1)\\&=g^{-1}(f(1))\\&=g^{-1}(4)\end{aligned}$$

$g^{-1}(4)=k$라 하면 $g(k)=4$

즉 $3k-5=4$이므로 $k=3$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1)=g^{-1}(4)=3$

32 답 0

$$\begin{aligned}(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(-2)&=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(-2)\\&=(g^{-1}\circ f)(-2)\\&=g^{-1}(f(-2))\\&=g^{-1}(3)\end{aligned}$$

$g^{-1}(3)=k$라 하면 $g(k)=3$

즉 $k+3=3$이므로 $k=0$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(-2)=g^{-1}(3)=0$

33 답 -7

$$\begin{aligned}(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(0)&=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(0)\\&=(f^{-1}\circ g)(0)\\&=f^{-1}(g(0))\\&=f^{-1}(-3)\end{aligned}$$

$f^{-1}(-3)=k$라 하면 $f(k)=-3$

즉 $k+4=-3$이므로 $k=-7$

$\therefore (g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(0)=f^{-1}(-3)=-7$

34 답 2

$$\begin{aligned}(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(3)&=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(3)\\&=(f^{-1}\circ g)(3)\\&=f^{-1}(g(3))\\&=f^{-1}(9)\end{aligned}$$

$f^{-1}(9)=k$라 하면 $f(k)=9$

즉 $4k+1=9$이므로 $k=2$

$\therefore (g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(3)=f^{-1}(9)=2$

유형 완성하기

p. 241~253

01 답 ②

$f(x)=\begin{cases}-2x+9 & (x\ge 1)\\ 4 & (x<1)\end{cases}$, $g(x)=x^2-2$에서

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(-1)=4$

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(5)=23$

$\therefore (f\circ g)(1)+(g\circ f)(2)=4+23=27$

01-1 답 3

$f(x)=\begin{cases}-3x+11 & (x\ge 4)\\ 4 & (x<4)\end{cases}$, $g(x)=\frac{1}{4}x^2-3$에서

$(f\circ g)(4)=f(g(4))=f(1)=4$

$(g\circ f)(5)=g(f(5))=g(-4)=1$

$\therefore (f\circ g)(4)-(g\circ f)(5)=4-1=3$

02 답 -1

$(g\circ f)(k)=g(f(k))=g(3k+2)$

$\quad =-2(3k+2)+3=-6k-1$ ······❶

$(g\circ f)(k)=5$이므로 $-6k-1=5$

$\therefore k=-1$ ······❷

채점 기준	비율
❶ $(g\circ f)(k)$를 구할 수 있다.	50%
❷ $(g\circ f)(k)=5$를 만족시키는 k의 값을 구할 수 있다.	50%

02-1 답 ①

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+b)=ax+b+4$

이때 $(g\circ f)(x)=4x-7$이므로

$a=4,\ b+4=-7\qquad \therefore a=4,\ b=-11$

$\therefore a+b=4+(-11)=-7$

03 답 ④

$(h\circ(g\circ f))(k)=((h\circ g)\circ f)(k)=(h\circ g)(f(k))$

$=6(k-5)+7=6k-23$

즉 $6k-23=1$이므로 $6k=24$

$\therefore k=4$

03-1 답 2

$((h\circ g)\circ f)(k)=(h\circ g)(f(k))$

$=2(k-3)+11$

$=2k+5$

즉 $2k+5=9$이므로 $2k=4$

$\therefore k=2$

04 답 3

$f(x)=2x-3,\ g(x)=5x+a$에서

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-3)$

$=5(2x-3)+a=10x+a-15$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(5x+a)$

$=2(5x+a)-3=10x+2a-3$

$g\circ f=f\circ g$이므로

$10x+a-15=10x+2a-3$

$a-15=2a-3\qquad \therefore a=-12$

따라서 $g(x)=5x-12$이므로

$g(3)=15-12=3$

04-1 답 5

$f(x)=2x+1,\ g(x)=3x+a$에서

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)$

$=3(2x+1)+a=6x+a+3$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x+a)$

$=2(3x+a)+1=6x+2a+1$

$g\circ f=f\circ g$이므로

$6x+a+3=6x+2a+1$

$a+3=2a+1\qquad \therefore a=2$

따라서 $g(x)=3x+2$이므로

$g(1)=3+2=5$

05 답 ⑤

주어진 그림에서

$f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=4,\ f(4)=5,\ f(5)=1$

$f\circ g=g\circ f$에서 $f(g(x))=g(f(x))$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(g(1))=g(f(1))$

$f(3)=g(2)\qquad \therefore g(2)=4$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f(g(2))=g(f(2))$

$f(4)=g(3)\qquad \therefore g(3)=5$

05-1 답 5

주어진 그림에서

$f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=1,\ f(4)=4$

$f\circ g=g\circ f$에서 $f(g(x))=g(f(x))$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f(g(2))=g(f(2))$

$f(1)=g(3)\qquad \therefore g(3)=2$ ……❶

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면 $f(g(3))=g(f(3))$

$f(2)=g(1)\qquad \therefore g(1)=3$ ……❷

$\therefore g(1)+g(3)=3+2=5$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $g(3)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $g(1)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $g(1)+g(3)$의 값을 구할 수 있다.	20%

06 답 $(1,1)$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+b)$

$=4(ax+b)-3=4ax+4b-3$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(4x-3)$

$=a(4x-3)+b=4ax-3a+b$

$f\circ g=g\circ f$이므로

$4ax+4b-3=4ax-3a+b$

$4b-3=-3a+b\qquad \therefore b=-a+1$

$b=-a+1$을 $g(x)=ax+b$에 대입하면

$g(x)=ax-a+1=a(x-1)+1$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 점 $(1,1)$을 지난다.

06-1 답 ②

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+b)$

$=3(ax+b)-8=3ax+3b-8$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x-8)$

$=a(3x-8)+b=3ax-8a+b$

$f\circ g=g\circ f$이므로

$3ax+3b-8=3ax-8a+b$

$3b-8=-8a+b\qquad \therefore 4a+b=4$

이때 $a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4a+b\ge 2\sqrt{4ab}$ (단, 등호는 $4a=b$일 때 성립)

$4\ge 4\sqrt{ab}\qquad \therefore ab\le 1$

따라서 ab의 최댓값은 1이다.

07 답 ①

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)$

$=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$

즉 $a^2x+ab+b=9x+4$이므로

$a^2=9,\ ab+b=4$

$\therefore a=3,\ b=1\ (\because a>0)$

따라서 $f(x)=3x+1$이므로

$f(-2)=-6+1=-5$

07-1 답 -3

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)$

$=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$

$f(3x)=3ax+b$
즉 $a^2x+ab+b=3ax+b$이므로
$a^2=3a,\ ab+b=b$
이때 $a\neq0$이므로 $a=3,\ b=0$
따라서 $f(x)=3x$이므로
$f(-1)=3\times(-1)=-3$

08 답 $-\dfrac{10}{3}$

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x^2+ax)$
$=(x^2+ax)^2+a(x^2+ax)$
$=(x^2+ax)\{(x^2+ax)+a\}$
$=x(x+a)(x^2+ax+a)$
이때 $(f\circ f)(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로
$(f\circ f)(2)=2(2+a)(4+3a)=0$
$\therefore a=-2$ 또는 $a=-\dfrac{4}{3}$
따라서 모든 실수 a의 값의 합은
$-2+\left(-\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{10}{3}$

08-1 답 81

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x^2+a)$
$=(x^2+a)^2+a$
$=x^4+2ax^2+a^2+a$
이때 $(f\circ f)(x)$가 $x-3$으로 나누어떨어지므로
$(f\circ f)(3)=81+18a+a^2+a=0$
$\therefore a^2+19a+81=0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은 81이다.

09 답 -16

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=-\{f(x)\}^2+8f(x)+a$
$=-\{f(x)-4\}^2+16+a$
즉 $f(x)=4$일 때 함수 $(g\circ f)(x)$는 최댓값 $16+a$를 가지므로
$(g\circ f)(x)\leq0$이 되려면
$16+a\leq0 \qquad \therefore a\leq-16$
따라서 a의 최댓값은 -16이다.

다른 풀이

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-6x+1)$
$=-(-6x+1)^2+8(-6x+1)+a$
$=-36x^2-36x+7+a$
$(g\circ f)(x)\leq0$이 되려면 이차방정식 $-36x^2-36x+7+a=0$의 판별식을 D라 할 때
$\dfrac{D}{4}=(-18)^2+36(7+a)\leq0$
$36a+576\leq0 \qquad \therefore a\leq-16$
따라서 a의 최댓값은 -16이다.

09-1 답 ⑤

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\{g(x)\}^2-g(x)-2$
$=\{g(x)+1\}\{g(x)-2\}$
즉 $\{g(x)+1\}\{g(x)-2\}\geq0$이므로
$g(x)\leq-1$ 또는 $g(x)\geq2$

(i) $g(x)\leq-1$일 때
$4x^2-ax+3\leq-1,\ 4x^2-ax+4\leq0$
$h(x)=4x^2-ax+4$라 하면 함수 $y=h(x)$의 그래프는 아래로 볼록하므로 모든 실수 x에 대하여 $4x^2-ax+4\leq0$이 될 수 없다.

(ii) $g(x)\geq2$일 때
$4x^2-ax+3\geq2,\ 4x^2-ax+1\geq0$
이차방정식 $4x^2-ax+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-a)^2-4\times4\times1=a^2-16\leq0$
$(a+4)(a-4)\leq0 \qquad \therefore -4\leq a\leq4$

(i), (ii)에서 $-4\leq a\leq4$
따라서 정수 a의 값은 $-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$이므로 그 개수는 9이다.

10 답 ③

$(f\circ h)(x)=f(h(x))=2h(x)-1$
$(f\circ h)(x)=g(x)$이므로
$2h(x)-1=-2x+3 \qquad \therefore h(x)=-x+2$
$\therefore h(-1)=-(-1)+2=3$

10-1 답 $h(x)=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{2}$

$(f\circ h)(x)=f(h(x))=2h(x)+1$
$(f\circ h)(x)=g(x)$이므로
$2h(x)+1=\dfrac{2}{3}x+2 \qquad \therefore h(x)=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{2}$

11 답 1

$(f\circ h)(x)=f(h(x))=-h(x)+2$
$(f\circ h)(x)=g(x)$이므로
$-h(x)+2=x^2-x-2 \qquad \therefore h(x)=-x^2+x+4$
$h(k)=4$에서 $-k^2+k+4=4$
$k^2-k=0,\ k(k-1)=0$
$\therefore k=0$ 또는 $k=1$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은
$0+1=1$

다른 풀이

$(f\circ h)(k)=g(k)$이고 $h(k)=4$이므로
$f(h(k))=g(k),\ f(4)=g(k)$
$-2=k^2-k-2,\ k^2-k=0$
$k(k-1)=0 \qquad \therefore k=0$ 또는 $k=1$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은
$0+1=1$

11-1 답 -1

$(f\circ h)(x)=f(h(x))=-h(x)+3$
$(f\circ h)(x)=g(x)$이므로
$-h(x)+3=-x^2+3 \qquad \therefore h(x)=x^2$
$h(k)=1$에서 $k^2=1$
$k^2-1=0,\ (k+1)(k-1)=0$
$\therefore k=-1$ 또는 $k=1$
따라서 모든 실수 k의 값의 곱은
$-1\times1=-1$

다른 풀이

$(f\circ h)(k)=g(k)$이고 $h(k)=1$이므로
$f(h(k))=g(k)$, $f(1)=g(k)$
$2=-k^2+3$, $k^2-1=0$
$(k+1)(k-1)=0$ $\therefore k=-1$ 또는 $k=1$
따라서 모든 실수 k의 값의 곱은
$-1\times1=-1$

12 답 ②

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=2(-3x+7)-1$
$=-6x+13$
$\therefore (h\circ(g\circ f))(x)=h((g\circ f)(x))=h(-6x+13)$
이때 $(h\circ(g\circ f))(x)=f(x)$이므로
$h(-6x+13)=-3x+7$ ······㉠
$-6x+13=3$에서 $-6x=-10$ $\therefore x=\frac{5}{3}$
$x=\frac{5}{3}$를 ㉠에 대입하면
$h(3)=-3\times\frac{5}{3}+7=2$

12-1 답 ⑤

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2(-x+2)-3$
$=-2x+1$
$\therefore (h\circ f\circ g)(x)=h((f\circ g)(x))=h(-2x+1)$
이때 $(h\circ f\circ g)(x)=g(x)$이므로
$h(-2x+1)=-x+2$ ······㉠
$-2x+1=5$에서 $-2x=4$ $\therefore x=-2$
$x=-2$를 ㉠에 대입하면
$h(5)=-(-2)+2=4$

13 답 ④

$f^1(5)=f(5)=2\times5-7=3$
$f^2(5)=(f\circ f)(5)=f(f(5))=f(3)$
$=2\times3-7=-1$
$f^3(5)=(f\circ f^2)(5)=f(f^2(5))=f(-1)$
$=2\times(-1)+7=5$
$f^4(5)=(f\circ f^3)(5)=f(f^3(5))=f(5)$
$=2\times5-7=3$
⋮
즉 $f^n(5)$의 값은 3, -1, 5가 이 순서대로 반복된다.
이때 $100=3\times33+1$이므로
$f^{100}(5)=f^1(5)=3$

13-1 답 $f^n(x)=\begin{cases}1-x & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

$f^1(x)=f(x)=1-x$
$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=1-(1-x)=x$
$f^3(x)=(f^2\circ f)(x)=f^2(f(x))=1-x$
$f^4(x)=(f^3\circ f)(x)=f^3(f(x))=1-(1-x)=x$
⋮
$\therefore f^n(x)=\begin{cases}1-x & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

14 답 2

$f^1(3)=f(3)=1$
$f^2(3)=f(f^1(3))=f(1)=2$
$f^3(3)=f(f^2(3))=f(2)=3$
$f^4(3)=f(f^3(3))=f(3)=1$
⋮
즉 $f^n(3)$의 값은 1, 2, 3이 이 순서대로 반복된다.
이때 $200=3\times66+2$이므로
$f^{200}(3)=f^2(3)=2$

14-1 답 5

$f^1(1)=f(1)=2$
$f^2(1)=f(f^1(1))=f(2)=4$
$f^3(1)=f(f^2(1))=f(4)=3$
$f^4(1)=f(f^3(1))=f(3)=1$
$f^5(1)=f(f^4(1))=f(1)=2$
⋮
즉 $f^n(1)$의 값은 2, 4, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.
이때 $30=4\times7+2$이므로
$f^{30}(1)=f^2(1)=4$
$f^1(3)=f(3)=1$
$f^2(3)=f(f^1(3))=f(1)=2$
$f^3(3)=f(f^2(3))=f(2)=4$
$f^4(3)=f(f^3(3))=f(4)=3$
$f^5(3)=f(f^4(3))=f(3)=1$
⋮
즉 $f^n(3)$의 값은 1, 2, 4, 3이 이 순서대로 반복된다.
이때 $57=4\times14+1$이므로
$f^{57}(3)=f^1(3)=1$
$\therefore f^{30}(1)+f^{57}(3)=4+1=5$

15 답 2

$f^1(x)=f(x)=3-x$
$f^2(x)=f^1(f(x))=3-(3-x)=x$
$f^3(x)=f^2(f(x))=3-x$
$f^4(x)=f^3(f(x))=3-(3-x)=x$
⋮
$\therefore f^n(x)=\begin{cases}3-x & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$ ······❶
$f^{10}(8)=8$, $f^{11}(9)=3-9=-6$이므로 ······❷
$f^{10}(8)+f^{11}(9)=8+(-6)=2$ ······❸

채점 기준	비율
❶ $f^n(x)$를 구할 수 있다.	50%
❷ $f^{10}(8)$, $f^{11}(9)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $f^{10}(8)+f^{11}(9)$의 값을 구할 수 있다.	20%

15-1 답 7

$f^{n+1}=f^n\circ f=f\circ f^n$이므로
$f^1(13)=f(13)=\frac{3\times13+1}{2}=20$
$f^2(13)=f(f^1(13))=f(20)=\frac{20}{2}=10$

$f^3(13)=f(f^2(13))=f(10)=\frac{10}{2}=5$

$f^4(13)=f(f^3(13))=f(5)=\frac{3\times5+1}{2}=8$

$f^5(13)=f(f^4(13))=f(8)=\frac{8}{2}=4$

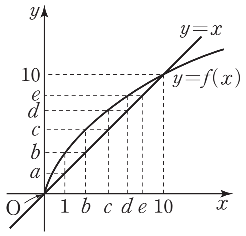
$f^6(13)=f(f^5(13))=f(4)=\frac{4}{2}=2$

$f^7(13)=f(f^6(13))=f(2)=\frac{2}{2}=1$

$\vdots$

따라서 $f^m(13)=1$을 만족시키는 m의 최솟값은 7이다.

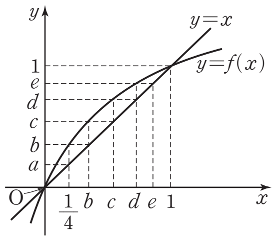
16 답 ⑤



오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned}(f\circ f\circ f\circ f)(1)&=f(f(f(f(1))))\\&=f(f(f(b)))\\&=f(f(c))\\&=f(d)\\&=e\end{aligned}$$

16-1 답 $\frac{1}{4}$



$f(f(x))=t$라 하면

$$\begin{aligned}(f\circ f\circ f)(x)&=f(f(f(x)))\\&=f(t)\\&=d\end{aligned}$$

$f(t)=d$를 만족시키는 t의 값은

$t=c$ $\quad\therefore f(f(x))=c$

$f(x)=u$라 하면

$f(f(x))=f(u)=c$

$f(u)=c$를 만족시키는 u의 값은

$u=b$ $\quad\therefore f(x)=b$

따라서 $f(x)=b$를 만족시키는 x의 값은

$x=\frac{1}{4}$

17 답 3

$f(x)=-x+3\ (0\le x\le 3)$, $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & (0\le x<2)\\ 2x-3 & (2\le x\le 3)\end{cases}$이므로

$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(3)=0$

$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(3)=3$

$\therefore (f\circ g)(3)+(g\circ f)(0)=0+3=3$

17-1 답 2

$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+1 & (0\le x<2)\\ 4x-8 & (2\le x<3)\\ -4x+16 & (3\le x\le 4)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}2x & (0\le x<2)\\ -2x+8 & (2\le x\le 4)\end{cases}$

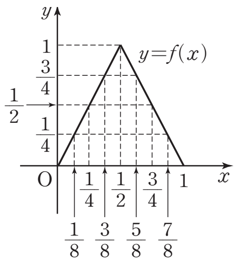
이므로

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(4)=0$

$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(1)=2$

$\therefore (f\circ g)(2)+(g\circ f)(0)=0+2=2$

18 답 2



$f(x)=t$라 하면

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(t)=\frac{1}{2}$

$f(t)=\frac{1}{2}$을 만족시키는 t의 값은

$t=\frac{1}{4}$ 또는 $t=\frac{3}{4}$

(i) $f(x)=\frac{1}{4}$을 만족시키는 x의 값은

$x=\frac{1}{8}$ 또는 $x=\frac{7}{8}$

(ii) $f(x)=\frac{3}{4}$을 만족시키는 x의 값은

$x=\frac{3}{8}$ 또는 $x=\frac{5}{8}$

(i), (ii)에서 모든 실근의 합은

$\frac{1}{8}+\frac{7}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=2$

18-1 답 b_2

$f(x)=t$라 하면

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(t)=\frac{1}{3}$

주어진 그래프에서 $a_2=\frac{1}{3}$이므로 $f(t)=\frac{1}{3}$을 만족시키는 t의 값은

$t=b_1$ $\quad\therefore f(x)=b_1$

이때 $a_3=b_1$이므로 $f(x)=b_1$, 즉 $f(x)=a_3$을 만족시키는 x의 값은

$x=b_2$

19 답 6

$f(1)=4$에서 $a+b=4$ ······㉠

$f^{-1}(2)=3$에서 $f(3)=2$이므로 $3a+b=2$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=5$

$\therefore f(x)=-x+5$

이때 $f^{-1}(-1)=k$라 하면 $f(k)=-1$

$-k+5=-1$ $\quad\therefore k=6$

$\therefore f^{-1}(-1)=6$

19-1 답 ④

$f^{-1}(2)=1$에서 $f(1)=2$이므로 $a+b=2$ ······㉠

$f^{-1}(3)=4$에서 $f(4)=3$이므로 $4a+b=3$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{5}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

이때 $f^{-1}(4)=k$라 하면 $f(k)=4$

$\frac{1}{3}k+\frac{5}{3}=4$, $\frac{1}{3}k=\frac{7}{3}$ $\quad\therefore k=7$

$\therefore f^{-1}(4)=7$

20 답 19

$f^{-1}(1)=-1$에서 $f(-1)=1$이므로

$-3+a=1$ $\quad\therefore a=4$

따라서 $f(x)=3x+4$이므로

$f(5)=15+4=19$

20-1 답 26

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)라 하면

$f(0)=0$이므로 $c=0$

$\therefore f(x)=ax^2+bx$

$f^{-1}(-10)=-5$에서 $f(-5)=-10$이므로

$25a-5b=-10 \qquad \therefore 5a-b=-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f^{-1}(6)=2$에서 $f(2)=6$이므로

$4a+2b=6 \qquad \therefore 2a+b=3 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{7}$, $b=\frac{19}{7}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{7}x^2+\frac{19}{7}x$이므로

$f(7)=7+19=26$

21 답 $\frac{2}{3}$

$\frac{1-x}{2}=t$라 하면 $x=-2t+1$

$x=-2t+1$을 $f\left(\frac{1-x}{2}\right)=3x+2$에 대입하면

$f(t)=3(-2t+1)+2=-6t+5$

$\therefore f(x)=-6x+5$

$f^{-1}(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로

$-6k+5=1$, $-6k=-4 \qquad \therefore k=\frac{2}{3}$

$\therefore f^{-1}(1)=\frac{2}{3}$

다른 풀이

$f^{-1}(1)=k$라 하면 $f(k)=1$

$3x+2=1$에서 $x=-\frac{1}{3}$

$x=-\frac{1}{3}$을 $f\left(\frac{1-x}{2}\right)=3x+2$에 대입하면

$f\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{2}\right)=3\times\left(-\frac{1}{3}\right)+2$, $f\left(\frac{2}{3}\right)=1$

$\therefore f^{-1}(1)=\frac{2}{3}$

21-1 답 10

$3x-1=t$라 하면 $x=\frac{t+1}{3}$

$x=\frac{t+1}{3}$을 $f(3x-1)=9x+5$에 대입하면

$f(t)=9\left(\frac{t+1}{3}\right)+5=3t+8$

$\therefore f(x)=3x+8 \qquad \cdots\cdots ❶$

$f^{-1}(-4)=k$라 하면 $f(k)=-4$이므로

$3k+8=-4$, $3k=-12 \qquad \therefore k=-4$

$\therefore f^{-1}(-4)=-4 \qquad \cdots\cdots ❷$

$\therefore f(2)+f^{-1}(-4)=14+(-4)=10 \qquad \cdots\cdots ❸$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40%
❷ $f^{-1}(-4)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $f(2)+f^{-1}(-4)$의 값을 구할 수 있다.	20%

22 답 4

함수 $f(x)=-3x+4$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 치역과 공역이 같아야 한다.

이때 $y=f(x)$의 그래프의 기울기가 음수이므로

x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소한다.

$f(1)=b$, $f(a)=-5$

$f(1)=b$에서 $-3+4=b \qquad \therefore b=1$

$f(a)=-5$에서 $-3a+4=-5 \qquad \therefore a=3$

$\therefore a+b=3+1=4$

22-1 답 -3

함수 $f(x)=-2x+11$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 치역과 공역이 같아야 한다.

이때 $y=f(x)$의 그래프의 기울기가 음수이므로

x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소한다.

$f(a)=9$, $f(7)=b$

$f(a)=9$에서 $-2a+11=9 \qquad \therefore a=1$

$f(7)=b$에서 $-14+11=b \qquad \therefore b=-3$

$\therefore ab=1\times(-3)=-3$

23 답 5

$f(x)=2x^2-6x-15=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{39}{2}$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로

$k\geq\frac{3}{2}$, $f(k)=k$

$f(k)=k$에서 $2k^2-6k-15=k$

$2k^2-7k-15=0$, $(2k+3)(k-5)=0$

$\therefore k=5 \left(\because k\geq\frac{3}{2}\right)$

23-1 답 -1

$f(x)=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로

$k\leq1$, $f(k)=k$

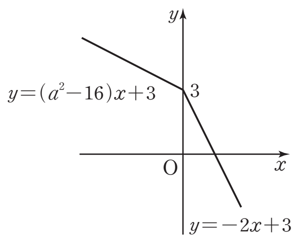
$f(k)=k$에서 $-k^2+2k+2=k$

$k^2-k-2=0$, $(k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-1 \ (\because k\leq1)$

24 답 ④

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $x<0$에서 직선

$y=(a^2-16)x+3$의 기울기가

음수이어야 하므로 $a^2-16<0$

$(a+4)(a-4)<0 \qquad \therefore -4<a<4$

또 직선 $y=(a^2-16)x+3$이 점 $(0, 3)$을 지나므로

(치역)=(공역)

따라서 정수 a의 값은 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$이므로 그 개수는 7이다.

24-1 답 ②

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.

(i) $x=0$일 때, x^2의 값과 $(a-1)x+a^2-2$의 값이 같아야 하므로

$0=a^2-2,\ a^2=2 \qquad \therefore a=\pm\sqrt{2}$

(ii) $x\ge0$일 때의 직선의 기울기가 음수이어야 하므로

$a-1<0 \qquad \therefore a<1$

(i), (ii)에서 $a=-\sqrt{2}$

25 답 ⑤

$y=ax-6$이라 하면 $ax=y+6$

$\therefore x=\frac{1}{a}y+\frac{6}{a}\ (\because a\neq0)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x+\frac{6}{a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x+\frac{6}{a}$

즉 $\frac{1}{a}x+\frac{6}{a}=\frac{1}{3}x+b$이므로

$a=3,\ b=2 \qquad \therefore a+b=3+2=5$

25-1 답 1

$y=ax-4$라 하면 $ax=y+4$

$\therefore x=\frac{1}{a}y+\frac{4}{a}\ (\because a\neq0)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x+\frac{4}{a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x+\frac{4}{a}$

즉 $\frac{1}{a}x+\frac{4}{a}=bx+\frac{1}{2}$이므로

$a=8,\ b=\frac{1}{8} \qquad \therefore ab=8\times\frac{1}{8}=1$

26 답 $\frac{7}{2}$

$y=4x-1$이라 하면 $x\ge1$일 때, $y\ge3$이므로 함수 $f(x)$는 집합 $\{x|x\ge1\}$에서 집합 $\{y|y\ge3\}$으로의 일대일대응이다.

$y=4x-1$에서 $4x=y+1$

$\therefore x=\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$

이때 역함수의 정의역은 원래 함수의 치역과 같으므로 $\{x|x\ge3\}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\ (x\ge3)$ ······ ❶

따라서 $a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{4},\ c=3$이므로 ······ ❷

$a+b+c=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+3=\frac{7}{2}$ ······ ❸

채점 기준	비율
❶ $f^{-1}(x)$를 구할 수 있다.	60%
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10%

26-1 답 ③

$y=ax+b$라 하면 $a<0$이므로 $x\le2$일 때, $y\ge2a+b$

즉 함수 $f(x)$는 집합 $\{x|x\le2\}$에서 집합 $\{y|y\ge2a+b\}$로의 일대일대응이다.

$y=ax+b$에서 $ax=y-b$

$\therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$

이때 역함수의 정의역은 원래 함수의 치역과 같으므로 $\{x|x\ge2a+b\}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}\ (x\ge2a+b)$

따라서 $a=-2,\ -\frac{b}{a}=3,\ 2a+b=c$이므로

$a=-2,\ b=6,\ c=2$

$\therefore a+b+c=-2+6+2=6$

27 답 $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

$2x+1=t$라 하면 $2x=t-1 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$을 $f(2x+1)=-4x+1$에 대입하면

$f(t)=-4\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\right)+1=-2t+3$

$\therefore f(x)=-2x+3$

$y=-2x+3$이라 하면 $2x=-y+3$

$\therefore x=-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

$\therefore f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

27-1 답 ①

$-3x+2=t$라 하면 $3x=-t+2 \qquad \therefore x=-\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}$

$x=-\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}$를 $f(-3x+2)=-9x+6$에 대입하면

$f(t)=-9\left(-\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}\right)+6=3t$

$\therefore f(x)=3x$

$y=3x$라 하면 $x=\frac{1}{3}y$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{3}x$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x$

따라서 $a=\frac{1}{3},\ b=0$이므로

$a+b=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$

28 답 ③

① $f(x)=x+1$이므로 $f(f(x))=f(x+1)=x+2$

② $f(x)=2x$이므로 $f(f(x))=f(2x)=4x$

③ $f(x)=-x+2$이므로 $f(f(x))=f(-x+2)=x$

④ $f(x)=-2x$이므로 $f(f(x))=f(-2x)=4x$

⑤ $f(x)=x^3$이므로 $f(f(x))=f(x^3)=x^9$

따라서 $f=f^{-1}$를 만족시키는 함수는 ③이다.

28-1 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $f(x)=-x+1$이므로 $f(f(x))=f(-x+1)=x$

ㄴ. $f(x)=x+2$이므로 $f(f(x))=f(x+2)=x+4$

ㄷ. $f(x)=\frac{1}{x}$이므로 $f(f(x))=f\left(\frac{1}{x}\right)=x$

따라서 $f=f^{-1}$을 만족시키는 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

29 답 21

(나)에서 $f(3)=3a+b=5$ ……㉠

(가)에서 $(f\circ f)(x)=x$이므로 $f(x)=f^{-1}(x)$

(가), (나)에서 $f(3)=f^{-1}(3)=5$이므로 $f(5)=3$

$\therefore f(5)=5a+b=3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1, b=8$

따라서 $f(x)=-x+8$이므로

$f(1)\times f(5)=7\times 3=21$

다른 풀이

(나)에서 $f(3)=3a+b=5$

$\therefore b=5-3a$ ……㉠

㉠을 $f(x)=ax+b$에 대입하면

$f(x)=ax+5-3a$

(가)에서 $f(f(x))=x$이므로

$f(f(x))=a(ax+5-3a)+5-3a$

$=a^2x-3a^2+2a+5$

즉 $a^2x-3a^2+2a+5=x$이므로

$a^2=1,\ -3a^2+2a+5=0$

(i) $a^2=1$일 때, $a=\pm1$

(ii) $-3a^2+2a+5=0$일 때

$3a^2-2a-5=0,\ (a+1)(3a-5)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{5}{3}$

(i), (ii)에서 $a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=8$

따라서 $f(x)=-x+8$이므로

$f(1)\times f(5)=7\times 3=21$

29-1 답 1

$f(x)=f^{-1}(x)$이고 함수 $y=f(x)$가 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$f(-1)=f^{-1}(-1)=2$

이때 $f^{-1}(-1)=2$에서 $f(2)=-1$

함수 $f(x)$가 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(-1)=2$에서 $-a+b=2$ ……㉠

$f(2)=-1$에서 $2a+b=-1$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1, b=1$

따라서 $f(x)=-x+1$이므로 $f(0)=1$

30 답 3

$f=f^{-1}$이므로 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=x$ ……㉠

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+2)$

$=a(ax+2)+2$

$=a^2x+2a+2$

㉠에서 $a^2x+2a+2=x$이므로

$a^2=1,\ 2a+2=0 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $f(x)=-x+2$이므로

$f(a)=f(-1)=-(-1)+2=3$

다른 풀이

$y=ax+2$라 하면 $ax=y-2$

$\therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{2}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}$

$f=f^{-1}$이므로 $a=\frac{1}{a},\ 2=-\frac{2}{a} \qquad \therefore a=-1$

따라서 $f(x)=-x+2$이므로

$f(a)=f(-1)=-(-1)+2=3$

30-1 답 −1

$f=f^{-1}$이므로 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=x$ ……㉠

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax-5)$

$=a(ax-5)-5=a^2x-5a-5$

㉠에서 $a^2x-5a-5=x$이므로

$a^2=1,\ -5a-5=0 \qquad \therefore a=-1$

31 답 2

$(f^{-1}\circ g)(a)=f^{-1}(g(a))=3$에서 $f(3)=g(a)$

$2\times3-3=-a+5 \qquad \therefore a=2$

31-1 답 −5

$(f\circ g^{-1})(a)=f(g^{-1}(a))=5$

$g^{-1}(a)=k$라 하면 $f(k)=5$

즉 $3k-1=5$이므로 $k=2 \qquad \therefore g^{-1}(a)=2$

$g^{-1}(a)=2$에서 $g(2)=a$이므로

$-2-3=a \qquad \therefore a=-5$

32 답 3

$(f^{-1}\circ g)(2)=f^{-1}(g(2))=f^{-1}(1)$

$f^{-1}(1)=k$라 하면 $f(k)=1$

이때 주어진 대응에서 $f(3)=1$이므로 $k=3$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(2)=3$

32-1 답 1

$(f^{-1}\circ g)(3)=f^{-1}(g(3))=f^{-1}(2)$

$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$

이때 주어진 대응에서 $f(1)=2$이므로 $k=1$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(3)=1$

33 답 −1

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=a(x-a)+b=ax-a^2+b$

즉 $ax-a^2+b=2x-1$이므로

$a=2,\ -a^2+b=-1 \qquad \therefore a=2, b=3$

$\therefore f(x)=x-2,\ g(x)=2x+3$

$g^{-1}(5)=k$라 하면 $g(k)=5$이므로

$2k+3=5$에서 $k=1 \qquad \therefore g^{-1}(5)=1$

$\therefore (f\circ g^{-1})(5)=f(g^{-1}(5))=f(1)=1-2=-1$

33-1 답 6

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=a(x+a)-b=ax+a^2-b$

즉 $ax+a^2-b=3x-2$이므로

$a=3$, $a^2-b=-2$ $\therefore a=3, b=11$ ······❶

$\therefore f(x)=x+3$, $g(x)=3x-11$ ······❷

$f(4)=4+3=7$이므로

$(g^{-1}\circ f)(4)=g^{-1}(f(4))=g^{-1}(7)$

$g^{-1}(7)=k$라 하면 $g(k)=7$이므로

$3k-11=7$에서 $k=6$

$\therefore (g^{-1}\circ f)(4)=g^{-1}(7)=6$ ······❸

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $f(x)$, $g(x)$를 구할 수 있다.	20%
❸ $(g^{-1}\circ f)(4)$의 값을 구할 수 있다.	50%

34 답 ①

$$\begin{aligned}(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)&=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(2)\\&=(g^{-1}\circ f)(2)\\&=g^{-1}(f(2))\\&=g^{-1}(-9)\end{aligned}$$

$g^{-1}(-9)=k$라 하면 $g(k)=-9$이므로

$3k+3=-9$ $\therefore k=-4$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)=g^{-1}(-9)=-4$

34-1 답 10

$$\begin{aligned}(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ g^{-1})(1)&=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ g^{-1})(1)\\&=(g^{-1}\circ g^{-1})(1)\\&=g^{-1}(g^{-1}(1))\end{aligned}$$

$g^{-1}(g^{-1}(1))=k$라 하면 $g(k)=g^{-1}(1)$

즉 $g(g(k))=1$이므로

$$g\left(\frac{1}{2}k-1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}k-1\right)-1=\frac{1}{4}k-\frac{3}{2}=1$$

$\frac{1}{4}k=\frac{5}{2}$ $\therefore k=10$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ g^{-1})(1)=g^{-1}(g^{-1}(1))=10$

35 답 ⑤

$$\begin{aligned}((f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f)(-2)&=(g^{-1}\circ f\circ f)(-2)\\&=g^{-1}(f(f(-2)))\\&=g^{-1}(f(0))\\&=g^{-1}(2)\end{aligned}$$

$g^{-1}(2)=k$라 하면 $g(k)=2$

$k-3=2$ $\therefore k=5$

$\therefore ((f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f)(-2)=g^{-1}(2)=5$

35-1 답 ⑤

$$\begin{aligned}(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(-4)&=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(-4)\\&=(g^{-1}\circ f)(-4)\\&=g^{-1}(f(-4))\\&=g^{-1}(-1)\end{aligned}$$

$g^{-1}(-1)=k$라 하면 $g(k)=-1$

$k-1=-1$ $\therefore k=0$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(-4)=g^{-1}(-1)=0$

36 답 0

$f(2)=-2$, $g(0)=2$이고 두 함수 f, g의 역함수가 모두 존재하므로

$f^{-1}(-2)=2$, $g^{-1}(2)=0$

$(g\circ f^{-1})(-2)=-2$이므로 $g(f^{-1}(-2))=-2$

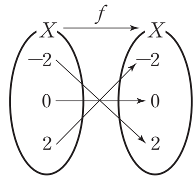
$\therefore g(2)=-2$

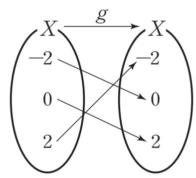
$(g\circ f^{-1})^{-1}(2)=0$에서 $(f\circ g^{-1})(2)=0$이므로

$f(g^{-1}(2))=0$ $\therefore f(0)=0$

두 함수 f, g의 역함수가 모두 존재하므로 두 함수 f, g는 일대일대응이다.

즉 두 함수 f, g의 대응 관계는 다음 그림과 같다.





$\therefore f(-2)+g^{-1}(0)=2+(-2)=0$

36-1 답 3

$f(1)=2$, $g(3)=2$이고 두 함수 f, g의 역함수가 모두 존재하므로

$f^{-1}(2)=1$, $g^{-1}(2)=3$

$(g\circ f^{-1})(2)=1$이므로 $g(f^{-1}(2))=1$

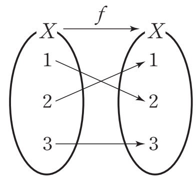
$\therefore g(1)=1$

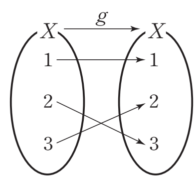
$(g\circ f^{-1})^{-1}(2)=3$에서 $(f\circ g^{-1})(2)=3$이므로

$f(g^{-1}(2))=3$ $\therefore f(3)=3$

두 함수 f, g의 역함수가 모두 존재하므로 두 함수 f, g는 일대일대응이다.

즉 두 함수 f, g의 대응 관계는 다음 그림과 같다.

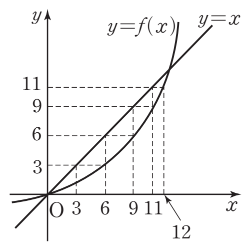




$\therefore f(2)+g^{-1}(3)=1+2=3$

37 답 17

직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선의 연장선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 다음 그림과 같다.



$f^{-1}(6)=k$라 하면

$f(k)=6$ $\therefore k=9$

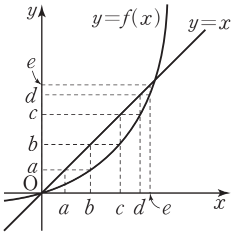
$f^{-1}(9)=p$라 하면

$f(p)=9$ $\therefore p=11$

$$\begin{aligned}\therefore\ &(f\circ f\circ f)(12)+(f\circ f)^{-1}(6)\\&=f(f(f(12)))+(f^{-1}\circ f^{-1})(6)\\&=f(f(11))+f^{-1}(f^{-1}(6))\\&=f(9)+f^{-1}(9)\\&=6+11\\&=17\end{aligned}$$

37-1 답 e

직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(c)=k$라 하면

$f(k)=c \qquad \therefore k=d$

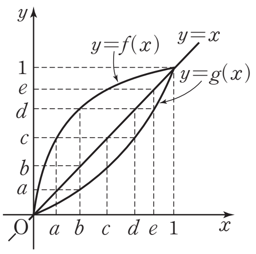
$f^{-1}(d)=p$라 하면

$f(p)=d \qquad \therefore p=e$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(c)=(f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))$

$=f^{-1}(d)=e$

38 답 b



$(f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(a)$

$=f^{-1}(g^{-1}(f(a)))$

$=f^{-1}(g^{-1}(c))$

이때 $g^{-1}(c)=k$라 하면

$g(k)=c \qquad \therefore k=d$

즉 $f^{-1}(g^{-1}(c))=f^{-1}(d)$에서

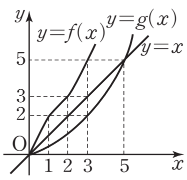
$f^{-1}(d)=p$라 하면

$f(p)=d \qquad \therefore p=b$

$\therefore (f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(a)=f^{-1}(g^{-1}(c))$

$=f^{-1}(d)=b$

38-1 답 6



$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(3)=5$

$(g^{-1}\circ f)^{-1}(3)=(f^{-1}\circ g)(3)$

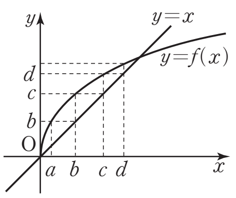
$=f^{-1}(g(3))$

$=f^{-1}(2)$

$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2 \qquad \therefore k=1$

$\therefore (f\circ f)(2)+(g^{-1}\circ f)^{-1}(3)=5+1=6$

39 답 ④



① $g(b)=k$라 하면

$f(k)=b \qquad \therefore k=a$

$\therefore g(b)=a$

② $(f\circ f)(b)=f(f(b))=f(c)=d$

③ $(f\circ g)(a)=a$

④ $(g\circ g)(d)=g(g(d))$

$g(d)=m$이라 하면 $f(m)=d \qquad \therefore m=c$

$\therefore g(g(d))=g(c)$

$g(c)=n$이라 하면 $f(n)=c \qquad \therefore n=b$

$\therefore g(c)=b$

$\therefore (g\circ g)(d)=b$

⑤ $(f\circ g\circ f)(c)=f(c)=d$

따라서 옳은 것은 ④이다.

39-1 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $g(c)=k$라 하면 $f(k)=c \qquad \therefore k=b$

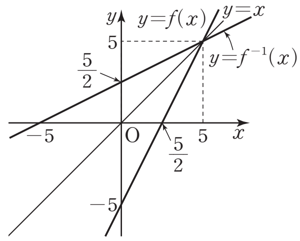
$\therefore g(c)=b$

ㄴ. $(f\circ f)(a)=f(f(a))=f(b)=c$

ㄷ. $(f\circ g)(a)=a$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

40 답 ⑤



함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.

즉 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$2x-5=x$에서 $x=5$

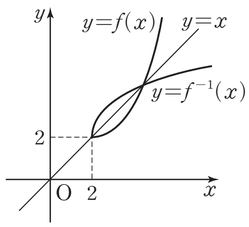
따라서 교점의 좌표는 $(5, 5)$이므로

교점은 직선 $y=x$ 위의 점이다.

$a=5$, $b=5$

$\therefore a+b=5+5=10$

41 답 $2\sqrt{2}$



함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+4\ (x\geq 2)$에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

즉 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

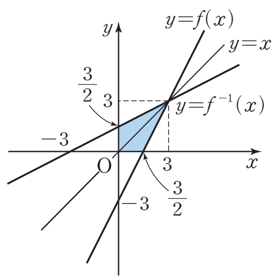
$\frac{1}{2}x^2-2x+4=x$, $x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0 \qquad \therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 두 교점의 좌표는 $(2, 2)$, $(4, 4)$이므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(4-2)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$

42 답 $\frac{9}{2}$



함수 $f(x)=2x-3$에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프 및 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.

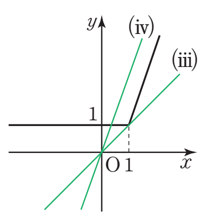
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$2x-3=x$에서 $x=3$

따라서 교점의 좌표가 $(3, 3)$이므로 구하는 넓이는

$2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 3\right)=\frac{9}{2}$

43 답 3



(i) $x<1$일 때, $y=x+(1-x)=1$

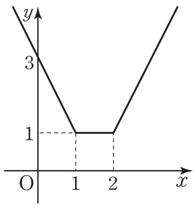
(ii) $x\geq 1$일 때, $y=x-(1-x)=2x-1$

(i), (ii)에서 함수 $y=x+|1-x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 직선 $y=mx$가 $y=x+|1-x|$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선

$y=mx$는 (iii)과 (iv) 사이를 지나야 한다.
(iii) 직선 $y=mx$가 점 $(1, 1)$을 지날 때, $m=1$
(iv) 직선 $y=mx$가 직선 $y=2x-1$과 평행할 때, $m=2$
(iii), (iv)에서 $1<m<2$이므로 $\alpha=1$, $\beta=2$
$\therefore \alpha+\beta=1+2=3$

44 답 4
$y=|x-1|+|x-2|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값이 1, 2이므로
(i) $x<1$일 때
$y=-(x-1)-(x-2)=-2x+3$
(ii) $1\le x<2$일 때
$y=x-1-(x-2)=1$
(iii) $x\ge 2$일 때
$y=x-1+x-2=2x-3$
(i)~(iii)에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값의 범위가 $1\le x\le 2$일 때 최솟값 1을 갖는다.
따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$, $m=1$이므로
$\alpha+\beta+m=1+2+1=4$



45 답 ㄴ, ㄷ
$y=f(|x|)$의 그래프는 $x\ge 0$인 부분은 그대로 두고, $x\ge 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 ㄴ이다.
$|y|=f(x)$의 그래프는 $y\ge 0$인 부분은 그대로 두고, $y\ge 0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 ㄷ이다.

학교 시험 대비 문제

p. 255~258

01 답 ⑤
$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(3+2a)=(3+2a)+5=2a+8$
즉 $2a+8=18$이므로 $a=5$

02 답 ②
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax-1)$
$=2(ax-1)+6=2ax+4$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+6)$
$=a(2x+6)-1=2ax+6a-1$
$f\circ g=g\circ f$이므로
$2ax+4=2ax+6a-1$
$4=6a-1$ $\quad\therefore a=\frac{5}{6}$

03 답 $(-3, -3)$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+b)$
$=2(ax+b)+3$
$=2ax+2b+3$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+3)$
$=a(2x+3)+b$
$=2ax+3a+b$
$f\circ g=g\circ f$이므로
$2ax+2b+3=2ax+3a+b$
$2b+3=3a+b$ $\quad\therefore b=3a-3$
$b=3a-3$을 $g(x)=ax+b$에 대입하면
$g(x)=ax+3a-3=a(x+3)-3$
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 점 $(-3, -3)$을 지난다.

04 답 ③
$f(x)=1$을 만족시키는 x의 값을 구하면
$f(x)=x^2-4x+5=1$에서 $x^2-4x+4=0$
$(x-2)^2=0$ $\quad\therefore x=2$
$\therefore f(2)=1$
이때 $(g\circ f)(x)=2x^2-8x+11$의 양변에 $x=2$를 대입하면
$(g\circ f)(2)=8-16+11=3$
따라서 $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(1)$이므로
$g(1)=3$

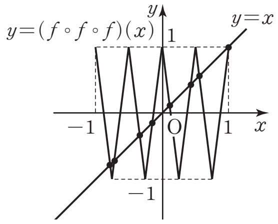
05 답 2
$(f\circ h)(x)=f(h(x))=3h(x)-1$
$(f\circ h)(x)=g(x)$이므로 $3h(x)-1=-2x+3$
$3h(x)=-2x+4$ $\quad\therefore h(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$
$\therefore h(-1)=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$

06 답 0
$(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$
$=(h\circ g)(f(x))$
$=(h\circ g)(-x+a)$
$=2(-x+a)+3$
$=-2x+2a+3$
즉 $2bx+3=-2x+2a+3$이므로
$2b=-2$, $3=2a+3$ $\quad\therefore a=0$, $b=-1$
$\therefore ab=0\times(-1)=0$

07 답 ②
$f^1(1)=f(1)=2$
$f^2(1)=f(f^1(1))=f(2)=3$
$f^3(1)=f(f^2(1))=f(3)=1$
$f^4(1)=f(f^3(1))=f(1)=2$
$\vdots$
즉 $f^n(1)$의 값은 2, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.
$2001=3\times 667$이므로
$f^{2001}(1)=f^3(1)=1$
$2002=3\times 667+1$이므로
$f^{2002}(1)=f^1(1)=2$
$\therefore f^{2001}(1)-f^{2002}(1)=1-2=-1$

08 답 8

주어진 두 그래프를 이용하여 함수 $y=(f\circ f\circ f)(x)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



이때 $-1\leq x\leq 1$에서 방정식 $(f\circ f\circ f)(x)=x$의 해의 개수는 두 함수 $y=(f\circ f\circ f)(x)$, $y=x$의 교점의 개수와 같으므로 8이다.

09 답 ⑤

$f^{n+1}=f^n\circ f=f\circ f^n$이므로

$f^1\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=b$

$f^2\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(f^1\left(\frac{1}{4}\right)\right)=f(b)=c$

$f^3\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(f^2\left(\frac{1}{4}\right)\right)=f(c)=d$

$\therefore f^4\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(f^3\left(\frac{1}{4}\right)\right)=f(d)=e$

10 답 ③

$f^{-1}(3)=b$라 하면 $f(b)=3$

즉 $2b+1=3$이므로 $b=1$

이때 $f^{-1}(3)+f^{-1}(a)=0$이므로

$1+f^{-1}(a)=0\qquad \therefore f^{-1}(a)=-1$

즉 $f(-1)=a$이므로 $a=1-(-1)^2=0$

11 답 2

$g(x)=(3x-1)f(x)$에서 $g(1)=2f(1)$

이때 $f(1)=3$이므로 $g(1)=2\times 3=6$

$f^{-1}(g(1))=f^{-1}(6)=k$라 하면 $f(k)=6$

$k^2+2=6$, $k^2-4=0$

$(k+2)(k-2)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=2$

그런데 정의역은 양의 실수 전체의 집합이므로

$k=2$

12 답 2

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로

$a\geq 0$, $f(a)=a$

$f(a)=a$에서 $a^2-2=a$

$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a\geq 0)$

13 답 $a<-2$ 또는 $a>1$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 $x\geq 0$일 때와 $x<0$일 때의 직선 $y=f(x)$의 기울기의 부호가 같아야 한다.

즉 $(a+2)(a-1)>0$이므로

$a<-2$ 또는 $a>1$

14 답 ①

$3x+1=t$라 하면 $3x=t-1\qquad \therefore x=\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}$

$x=\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}$을 $f(3x+1)=6x-4$에 대입하면

$f(t)=6\left(\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}\right)-4=2t-6$

$\therefore f(x)=2x-6$

$y=2x-6$이라 하면 $2x=y+6$

$\therefore x=\frac{1}{2}y+3$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x+3$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+3$

15 답 ③

$f(x)=f^{-1}(x)$이고 함수 $y=f(x)$가 점 $(-2, 3)$을 지나므로

$f(-2)=f^{-1}(-2)=3$

이때 $f^{-1}(-2)=3$에서 $f(3)=-2$

함수 $f(x)$가 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(-2)=3$에서 $-2a+b=3$ ······㉠

$f(3)=-2$에서 $3a+b=-2$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

따라서 $f(x)=-x+1$이므로

$f(1)=-1+1=0$

16 답 ②

$$\begin{aligned}(f\circ g)^{-1}(3)&=(g^{-1}\circ f^{-1})(3)\\&=g^{-1}(f^{-1}(3))\\&=g^{-1}(2)\\&=1\end{aligned}$$

$(f^{-1}\circ g)(4)=f^{-1}(g(4))=f^{-1}(3)=2$

$\therefore (f\circ g)^{-1}(3)-(f^{-1}\circ g)(4)=1-2=-1$

17 답 ②

$$\begin{aligned}(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)&=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(3)\\&=(g^{-1}\circ f)(3)\\&=g^{-1}(f(3))\\&=g^{-1}(2)\end{aligned}$$

이때 $g^{-1}(2)=k$라 하면 $g(k)=2$이므로

$2k+4=2\qquad \therefore k=-1$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(2)=-1$

18 답 ②

$$\begin{aligned}(f\circ(g^{-1}\circ f)^{-1}\circ f)(x)&=(f\circ f^{-1}\circ g\circ f)(x)\\&=(g\circ f)(x)\\&=g(f(x))\\&=g(3x-1)\\&=-(3x-1)+2\\&=-3x+3\end{aligned}$$

따라서 $a=-3$, $b=3$이므로

$ab=-3\times 3=-9$

19 답 ①

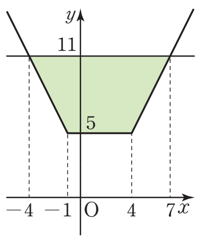
$((f\circ f)\circ(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1}))(b)$
$=(f\circ f\circ f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(b)$
$=(f\circ f^{-1}\circ f^{-1})(b)$
$=f^{-1}(b)$
이때 $f^{-1}(b)=k$라 하면 $f(k)=b$ $\quad\therefore k=a$
$\therefore ((f\circ f)\circ(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1}))(b)=f^{-1}(b)=a$

20 답 ①

$h(c)=(f^{-1}\circ g\circ f)(c)$
$=f^{-1}(g(f(c)))$
$=f^{-1}(g(d))$
$=f^{-1}(0)$
이때 $f^{-1}(0)=k$라 하면 $f(k)=0$ $\quad\therefore k=a$
$\therefore h(c)=f^{-1}(0)=a$

21 답 ①

$f(x)=|x+1|+|x-4|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값이 -1, 4이므로
(i) $x<-1$일 때
$f(x)=-(x+1)-(x-4)=-2x+3$
(ii) $-1\le x<4$일 때
$f(x)=x+1-(x-4)=5$
(iii) $x\ge 4$일 때
$f(x)=x+1+x-4=2x-3$
(i)~(iii)에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=11$의 교점의 x좌표를 구하면
$-2x+3=11$에서 $x=-4$
$2x-3=11$에서 $x=7$
따라서 구하는 넓이는
$\frac{1}{2}\overbrace{(5+11)}^{\{4-(-1)\}+\{7-(-4)\}}\times 6=48$

서술형 1 답 5

$f^1(1)=f(1)=2$
$f^2(1)=f(f^1(1))=f(2)=3$
$f^3(1)=f(f^2(1))=f(3)=4$
$f^4(1)=f(f^3(1))=f(4)=1$
$\vdots$
즉 $f^n(1)$의 값은 $2, 3, 4, 1$이 이 순서대로 반복된다.
$216=4\times 54$이므로
$f^{216}(1)=f^4(1)=1$ ……❶
$f^1(3)=f(3)=4$
$f^2(3)=f(f^1(3))=f(4)=1$
$f^3(3)=f(f^2(3))=f(1)=2$
$f^4(3)=f(f^3(3))=f(2)=3$
$\vdots$
즉 $f^n(3)$의 값은 $4, 1, 2, 3$이 이 순서대로 반복된다.
$217=4\times 54+1$이므로
$f^{217}(3)=f^1(3)=4$ ……❷
$\therefore f^{216}(1)+f^{217}(3)=1+4=5$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $f^{216}(1)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $f^{217}(3)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $f^{216}(1)+f^{217}(3)$의 값을 구할 수 있다.	20%

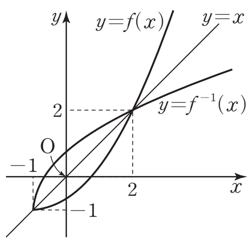
서술형 2 답 $a=2, b=7, c=-5$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+c)$
$=a(x+c)+b$
$=ax+ac+b$
이때 $(f\circ g)(x)=2x-3$이므로
$ax+ac+b=2x-3$
$\therefore a=2,\ ac+b=-3$ ……❶
$a=2$를 $ac+b=-3$에 대입하면
$2c+b=-3$ ……㉠
$f^{-1}(3)=-2$이므로 $f(-2)=3$
$\therefore -2a+b=3$ ……㉡
$a=2$를 ㉡에 대입하면
$-4+b=3$ $\quad\therefore b=7$ ……❷
$b=7$을 ㉠에 대입하면
$2c+7=-3$ $\quad\therefore c=-5$ ……❸

채점 기준	비율
❶ a의 값과 a, b, c 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ c의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 $3\sqrt{2}$

함수 $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x-2)\ (x\ge -1)$에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



즉 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로 ……❶
$\frac{1}{3}(x^2+2x-2)=x,\ x^2-x-2=0$
$(x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
따라서 두 교점의 좌표는
$A(-1, -1), B(2, 2)$ 또는 $A(2, 2), B(-1, -1)$ ……❷
$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(2+1)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{2}$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B의 좌표가 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같음을 알 수 있다.	40%
❷ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	20%

Lecture 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

(1) 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리
➡ $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
(2) 원점 O와 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리
➡ $\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 259~260

01 답 500

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{1}{2}x+b\right)$

$=a\left(\frac{1}{2}x+b\right)-6=\frac{1}{2}ax+ab-6$

이때 $(f\circ g)(x)=x$이므로 $\frac{1}{2}ax+ab-6=x$

$\frac{1}{2}a=1,\ ab-6=0\qquad\therefore a=2,\ b=3$

$\therefore 100(a+b)=100\times(2+3)=500$

02 답 10

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-10)$

$=(2x-10)^2+3$

이때 $(f\circ g)(a)=103$이므로 $(2a-10)^2+3=103$

$(2a-10)^2=100,\ 2a-10=\pm10$

$\therefore a=10\ (\because a>0)$

다른 풀이

$(f\circ g)(a)=f(g(a))=103$이므로 $g(a)=t$라 하면

$f(t)=t^2+3=103,\ t^2=100$

$\therefore t=-10$ 또는 $t=10$

$t=g(a)=2a-10$이므로

$2a-10=-10$ 또는 $2a-10=10$

$\therefore a=0$ 또는 $a=10$

그런데 $a>0$이므로 $a=10$

03 답 ①

(가)에서 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

함수 $f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c\ (x>-1)$라 하면 (나)에서

$f(0)=0$이므로 $c=0$

$f(1)=3$이므로 $a+b=3$ ……㉠

$g(8)=2$에서 $f(2)=8$이므로

$4a+2b=8\qquad\therefore 2a+b=4$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=2$

$\therefore f(x)=x^2+2x$

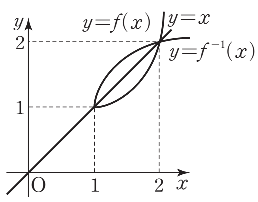
$g(15)=m$이라 하면 $f(m)=15$이므로

$f(m)=m^2+2m=15,\ m^2+2m-15=0$

$(m+5)(m-3)=0\qquad\therefore m=3\ (\because m>-1)$

04 답 ③

함수 $f(x)=x^2-2x+2$에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



즉 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 방정식 $f(x)=x$의 근과 같으므로

$x^2-2x+2=x,\ x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 $x=1$ 또는 $x=2$이므로 그 합은 $1+2=3$

05 답 ③

$f(1)=1,\ f(2)=4,\ f(3)=3+a,\ f(4)=4+a$

이때 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.

즉 $f(1)=1,\ f(2)=4,\ \underline{f(3)=2,\ f(4)=3}$이므로

$f(3)=3,\ f(4)=2$를 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

$a=-1$

함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여

$g(1)=1,\ g(2)=3,\ g(3)=4,\ g(4)=2$이므로

$g^1(2)=g(2)=3$

$g^2(2)=g(g^1(2))=g(3)=4$

$g^3(2)=g(g^2(2))=g(4)=2$

$g^4(2)=g(g^3(2))=g(2)=3$

⋮

즉 $g^n(2)$의 값은 3, 4, 2가 이 순서대로 반복된다.

$10=3\times3+1$이므로

$g^{10}(2)=g^1(2)=3$

$11=3\times3+2$이므로

$g^{11}(2)=g^2(2)=4$

$\therefore a+g^{10}(2)+g^{11}(2)=-1+3+4=6$

06 답 ③

$f(4)=5$이므로

$(g\circ f)(4)+(f\circ g)(4)=g(f(4))+f(g(4))$

$=g(5)+f(g(4))$ ……㉠

이때 함수 g의 역함수가 존재하므로 $g(4)$의 값은 1, 2, 4 중 하나이다.

$g(4)$의 값에 따른 $f(g(4))$, $g(5)$의 값은 다음과 같다.

$g(4)$	1		2		4	
$f(g(4))$	$f(1)=2$		$f(2)=1$		$f(4)=5$	
$g(5)$	2	4	1	4	1	2
$g(5)+f(g(4))$	4	6	2	5	6	7

따라서 $g(4)=4,\ g(5)=2$일 때, ㉠의 최댓값은 7이다.

07 답 6

$(f\circ f)(a)=f(a)$에서 $(f\circ f)(a)=f(f(a))=f(a)$

$f(a)=t$라 하면 $f(t)=t$

$t<2$일 때, $f(t)=2t+2$이므로

$f(t)=t$에서 $2t+2=t\qquad\therefore t=-2$

$t\ge2$일 때, $f(t)=t^2-7t+16$이므로

$f(t)=t$에서 $t^2-7t+16=t$

$t^2-8t+16=0,\ (t-4)^2=0$

$\therefore t=4$

(i) $t=-2$, 즉 $f(a)=-2$인 경우

$a<2$일 때, $2a+2=-2\qquad\therefore a=-2$

$a\ge2$일 때, $a^2-7a+16=-2,\ a^2-7a+18=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-7)^2-4\times1\times18=-23<0$

즉 $a\ge2$일 때, $f(a)=-2$를 만족시키는 실수 a의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $t=4$, 즉 $f(a)=4$인 경우

$a<2$일 때, $2a+2=4\qquad\therefore a=1$

$a \geq 2$일 때, $a^2-7a+16=4$, $a^2-7a+12=0$

$(a-3)(a-4)=0$

$\therefore a=3$ 또는 $a=4$

(i), (ii)에서 $a=-2$ 또는 $a=1$ 또는 $a=3$ 또는 $a=4$이므로 그 합은 $-2+1+3+4=6$

08 답 ③

ㄱ. 함수 f가 일대일대응이므로 $f(1)\times f(2)=6$에서 $f(1)$과 $f(2)$의 값은 각각 2와 3 또는 3과 2이다.

$\therefore f(3)+f(4)+f(5)=10$

ㄴ. $(f\circ f)(x)=x$일 때, $f(a)=b$이면

$(f\circ f)(a)=f(f(a))=f(b)=a$

즉 $(f\circ f)(x)=x$를 만족시키는 함수 f의 대응 관계는 $f(a)=a$이거나 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)=b$이면서 $f(b)=a$이어야 한다.

집합 X의 원소의 개수가 5이므로 원소를 두 개씩 짝을 지어도 짝 지어지지 않는 원소가 존재한다.

즉 $(f\circ f)(x)=x$이면 $f(a)=a$인 집합 X의 원소 a가 존재한다.

ㄷ. $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=1$, $f(4)=5$, $f(5)=4$이면

$(f\circ f\circ f)(1)=f(f(f(1)))=f(f(2))=f(3)=1$

즉 $(f\circ f\circ f)(1)=1$이므로 집합 X의 어떤 원소 x에 대하여 $(f\circ f\circ f)(x)=x$이지만 $f(b)=b$인 집합 X의 원소 b는 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

09 답 ⑤

ㄱ. $(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(2)=2$

ㄴ. 함수 $(g\circ f)(x)$는

(i) $x>2$일 때

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2)=2$

(ii) $|x|\leq 2$일 때

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x)=x^2-2$

(iii) $x<-2$일 때

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-2)=2$

함수 $(g\circ f)(-x)$는

(i) $x>2$일 때

$(g\circ f)(-x)=g(f(-x))=g(-2)=2$

(ii) $|x|\leq 2$일 때

$(g\circ f)(-x)=g(f(-x))=g(-x)=x^2-2$

(iii) $x<-2$일 때

$(g\circ f)(-x)=g(f(-x))=g(2)=2$

$\therefore (g\circ f)(-x)=(g\circ f)(x)$

ㄷ. 함수 $(f\circ g)(x)$는

(i) $x>2$일 때, $x^2-2>2$이므로

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-2)=2$

(ii) $|x|\leq 2$일 때, $-2\leq x^2-2\leq 2$이므로

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-2)=x^2-2$

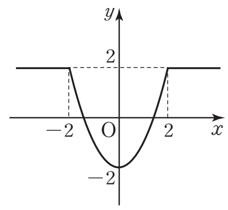
(iii) $x<-2$일 때, $x^2-2>2$이므로

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-2)=2$

(i)~(iii)에서 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ ($\because$ ㄴ)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

참고 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



10 답 ①

$f(x)=x^2-2x+a$이므로

$f(2)=2^2-4+a=a$, $f(4)=4^2-8+a=a+8$

$(f\circ f)(2)=(f\circ f)(4)$이므로

$f(f(2))=f(f(4))$, $f(a)=f(a+8)$

이때 함수 $f(x)=x^2-2x+a$에서

$f(x)=(x-1)^2+a-1$

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 축이 직선 $x=1$이므로 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

이때 $a\neq a+8$이므로 $f(a)=f(a+8)$이려면

$\dfrac{a+(a+8)}{2}=1$, $2a+8=2$

$2a=-6$ $\quad\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=x^2-2x-3$이므로

$f(6)=6^2-12-3=21$

다른 풀이

$f(x)=x^2-2x+a$이므로

$f(2)=2^2-4+a=a$, $f(4)=4^2-8+a=a+8$

$(f\circ f)(2)=(f\circ f)(4)$이므로

$f(f(2))=f(f(4))$, $f(a)=f(a+8)$

즉 $a^2-2a+a=(a+8)^2-2(a+8)+a$이므로

$a^2-a=a^2+15a+48$, $16a=-48$

$\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=x^2-2x-3$이므로

$f(6)=6^2-12-3=21$

11 유리식과 유리함수

Ⅲ 함수

개념 완성하기 p. 263~264

01 답 ㄹ, ㅁ, ㅂ

02 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 답 $\frac{2}{4ab^2}, \frac{b}{4ab^2}$

$\frac{1}{2ab^2}, \frac{1}{4ab}$의 분모를 $4ab^2$으로 통분하면

$\frac{2}{4ab^2}, \frac{b}{4ab^2}$

04 답 $\frac{2b}{6a^3b^2}, \frac{a^2}{6a^3b^2}$

$\frac{1}{3a^3b}, \frac{1}{6ab^2}$의 분모를 $6a^3b^2$으로 통분하면

$\frac{2b}{6a^3b^2}, \frac{a^2}{6a^3b^2}$

05 답 $\frac{2(x+2)}{(x-1)(x+2)}, \frac{x-1}{(x-1)(x+2)}$

$\frac{2}{x-1}, \frac{1}{x+2}$의 분모를 $(x-1)(x+2)$로 통분하면

$\frac{2(x+2)}{(x-1)(x+2)}, \frac{x-1}{(x-1)(x+2)}$

06 답 $\frac{x+1}{x(x+1)(x-1)}, \frac{x}{x(x+1)(x-1)}$

$\frac{1}{x(x-1)}, \frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}$의 분모를 $x(x+1)(x-1)$로 통분하면

$\frac{x+1}{x(x+1)(x-1)}, \frac{x}{x(x+1)(x-1)}$

07 답 $\frac{1}{4xy}$

08 답 $\frac{5x^2}{y}$

09 답 $\frac{1}{x+1}$

$\frac{x}{x^2+x}=\frac{x}{x(x+1)}=\frac{1}{x+1}$

10 답 $x+1$

$\frac{x^3+1}{x^2-x+1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}=x+1$

11 답 $\frac{x+6}{(x-2)(x+2)}$

$\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{2(x+2)-(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x+6}{(x-2)(x+2)}$

12 답 $\frac{3(x+2)}{(x+3)(x-3)}$

$$\frac{x}{x^2-9}+\frac{2}{x-3}=\frac{x}{(x+3)(x-3)}+\frac{2}{x-3}$$
$$=\frac{x+2(x+3)}{(x+3)(x-3)}$$
$$=\frac{3(x+2)}{(x+3)(x-3)}$$

13 답 $\frac{6}{(x-1)(x+1)}$

$$\frac{x+8}{x^2+x-2}-\frac{x+4}{x^2+3x+2}$$
$$=\frac{x+8}{(x+2)(x-1)}-\frac{x+4}{(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{(x+1)(x+8)-(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{x^2+9x+8-(x^2+3x-4)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{6x+12}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{6(x+2)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{6}{(x-1)(x+1)}$$

14 답 $\frac{1}{3(x-1)}$

$$\frac{x-1}{3x}\times\frac{x}{x^2-2x+1}=\frac{x-1}{3x}\times\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{1}{3(x-1)}$$

15 답 $\frac{x-2}{x+1}$

$$\frac{x^2-4}{x^2-1}\times\frac{x^2+3x-4}{x^2+6x+8}=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-1)}\times\frac{(x+4)(x-1)}{(x+2)(x+4)}$$
$$=\frac{x-2}{x+1}$$

16 답 $x-2$

$$\frac{x^2-3x+2}{x-3}\div\frac{x-1}{x-3}=\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}\times\frac{x-3}{x-1}=x-2$$

17 답 $\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-4}\div\frac{x^2-4x+3}{x^2+4x+4}$$
$$=\frac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-2)}\times\frac{(x+2)^2}{(x-1)(x-3)}$$
$$=\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$$

18 답 $a=6, b=4$

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{3}{(x+3)(x+6)}$$
$$=\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}\right)$$
$$=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+6}$$
$$=\frac{x+6-(x+2)}{(x+2)(x+6)}$$
$$=\frac{4}{(x+2)(x+6)}$$

즉 $\dfrac{4}{(x+2)(x+6)}=\dfrac{b}{(x+2)(x+a)}$이므로
$a=6,\ b=4$

19 답 $a=3,\ b=3$

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$
$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{x+3-x}{x(x+3)}=\frac{3}{x(x+3)}$$

즉 $\dfrac{3}{x(x+3)}=\dfrac{b}{x(x+a)}$이므로
$a=3,\ b=3$

20 답 $a=-3,\ b=4$

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)}+\frac{2}{(x-2)x}+\frac{1}{x(x+1)}$$
$$=\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)+\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$$
$$=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-(x-3)}{(x-3)(x+1)}$$
$$=\frac{4}{(x-3)(x+1)}$$

즉 $\dfrac{4}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{b}{(x+a)(x+1)}$이므로
$a=-3,\ b=4$

21 답 $\dfrac{a}{b}$

$$\frac{1+\frac{a}{b}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a+b}{a}}=\frac{a(a+b)}{b(a+b)}=\frac{a}{b}$$

22 답 $\dfrac{a+1}{a-1}$

$$\frac{a+2}{a-\frac{2}{a+1}}=\frac{a+2}{\frac{a(a+1)-2}{a+1}}=\frac{(a+1)(a+2)}{a(a+1)-2}$$
$$=\frac{(a+1)(a+2)}{a^2+a-2}=\frac{(a+1)(a+2)}{(a+2)(a-1)}$$
$$=\frac{a+1}{a-1}$$

23 답 $\dfrac{x-1}{x+1}$

$$\frac{1-\frac{1}{x+1}}{1+\frac{1}{x-1}}=\frac{\frac{x+1-1}{x+1}}{\frac{x-1+1}{x-1}}=\frac{x(x-1)}{x(x+1)}=\frac{x-1}{x+1}$$

24 답 x

$$1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{x-1}{x}}}=1-\frac{1}{1-\frac{x}{x-1}}$$
$$=1-\frac{1}{\frac{x-1-x}{x-1}}=1-\frac{x-1}{-1}$$
$$=1+x-1=x$$

25 답 ×

26 답 ×

27 답 ○

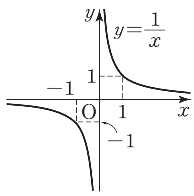
28 답 ×

29 답 $\{x\,|\,x\neq3$인 실수$\}$
$x-3\neq0$에서 $x\neq3$
따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq3$인 실수$\}$

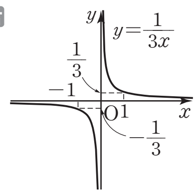
30 답 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{3}{2}\text{인 실수}\right\}$
$3-2x\neq0$에서 $x\neq\dfrac{3}{2}$
따라서 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{3}{2}\text{인 실수}\right\}$

31 답 $\{x\,|\,x\neq-1$인 실수$\}$
$x+1\neq0$에서 $x\neq-1$
따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq-1$인 실수$\}$

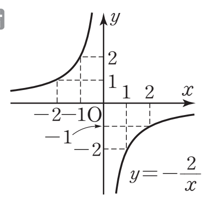
32 답



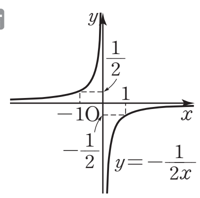
33 답



34 답



35 답



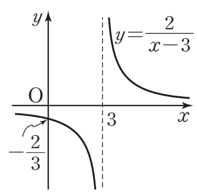
36 답 $y=\dfrac{3}{x-3}+1$

37 답 $y=-\dfrac{2}{x-2}-3$

38 답 $y=\dfrac{4}{x+2}-1$

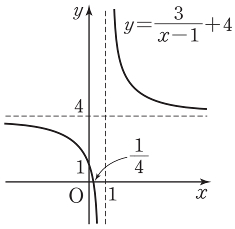
39 답 그래프: 풀이 참조
점근선의 방정식: $x=3,\ y=0$

$y=\dfrac{2}{x-3}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=3,\ y=0$이다.



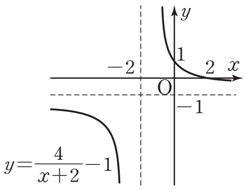
40 답 그래프: 풀이 참조
점근선의 방정식: $x=1, y=4$

$y=\dfrac{3}{x-1}+4$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=1, y=4$이다.



41 답 그래프: 풀이 참조
점근선의 방정식: $x=-2, y=-1$

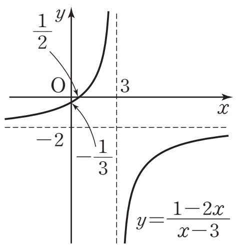
$y=\dfrac{4}{x+2}-1$의 그래프는 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=-2, y=-1$이다.



42 답 그래프: 풀이 참조
점근선의 방정식: $x=3, y=-2$

$y=\dfrac{1-2x}{x-3}=\dfrac{-2(x-3)-5}{x-3}=-\dfrac{5}{x-3}-2$

따라서 $y=\dfrac{1-2x}{x-3}$의 그래프는 $y=-\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=3, y=-2$이다.



유형 완성하기 p.265~283

01 답 ④

$$\frac{x}{x-1}-\frac{8}{x^2+6x-7}=\frac{x}{x-1}-\frac{8}{(x+7)(x-1)}$$
$$=\frac{x(x+7)-8}{(x+7)(x-1)}=\frac{x^2+7x-8}{(x+7)(x-1)}$$
$$=\frac{(x+8)(x-1)}{(x+7)(x-1)}=\frac{x+8}{x+7}$$

01-1 답 ②

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{x^2+x}{x^3-1}$$
$$=\frac{x^2+x+1+x-1-(x^2+x)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{x}{x^3-1}$$

02 답 $\dfrac{1}{x-1}$

$$\frac{x+1}{x^2+x-2}\times\frac{2x^2+3x-2}{2x^2+x-1}$$
$$=\frac{x+1}{(x+2)(x-1)}\times\frac{(x+2)(2x-1)}{(x+1)(2x-1)}$$
$$=\frac{1}{x-1}$$

02-1 답 $\dfrac{1}{2x-1}$

$$\frac{2x^2-x-1}{3x^2+x-2}\div\frac{4x^2-1}{3x^2+7x-6}\times\frac{x+1}{x^2+2x-3}$$
$$=\frac{2x^2-x-1}{3x^2+x-2}\times\frac{3x^2+7x-6}{4x^2-1}\times\frac{x+1}{x^2+2x-3}$$
$$=\frac{(2x+1)(x-1)}{(x+1)(3x-2)}\times\frac{(x+3)(3x-2)}{(2x+1)(2x-1)}\times\frac{x+1}{(x+3)(x-1)}$$
$$=\frac{1}{2x-1}$$

03 답 ②

$$\frac{x-3}{x+2}\div\frac{x^2-9}{x^2+x-2}+\frac{1}{x+3}$$
$$=\frac{x-3}{x+2}\times\frac{x^2+x-2}{x^2-9}+\frac{1}{x+3}$$
$$=\frac{x-3}{x+2}\times\frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-3)}+\frac{1}{x+3}$$
$$=\frac{x-1}{x+3}+\frac{1}{x+3}$$
$$=\frac{x}{x+3}$$

03-1 답 ②

$$\frac{x^2-4}{(x-2)^2}\div\frac{x+1}{x^2-3x+2}-1$$
$$=\frac{x^2-4}{(x-2)^2}\times\frac{x^2-3x+2}{x+1}-1$$
$$=\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2}\times\frac{(x-1)(x-2)}{x+1}-1$$
$$=\frac{(x+2)(x-1)}{x+1}-1$$
$$=\frac{x^2+x-2-(x+1)}{x+1}$$
$$=\frac{x^2-3}{x+1}$$

따라서 $a=-3, b=1$이므로
$a+b=-3+1=-2$

04 답 $\dfrac{4}{(x-1)(x+1)}$

$$\frac{x^2-x+2}{x-1}-\frac{x^2+x+2}{x+1}$$
$$=\frac{x(x-1)+2}{x-1}-\frac{x(x+1)+2}{x+1}$$
$$=\left(x+\frac{2}{x-1}\right)-\left(x+\frac{2}{x+1}\right)$$
$$=\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}$$
$$=\frac{2(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{4}{(x-1)(x+1)}$$

04-1 답 $\dfrac{2(x^2+1)}{x^4+x^2+1}$

$\dfrac{x^3}{x^2+x+1}-\dfrac{x^3}{x^2-x+1}+2$

$=\dfrac{(x^3-1)+1}{x^2+x+1}-\dfrac{(x^3+1)-1}{x^2-x+1}+2$

$=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)+1}{x^2+x+1}-\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{x^2-x+1}+2$

$=\left(x-1+\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)-\left(x+1-\dfrac{1}{x^2-x+1}\right)+2$

$=\dfrac{1}{x^2+x+1}+\dfrac{1}{x^2-x+1}$

$=\dfrac{(x^2-x+1)+(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

$=\dfrac{2(x^2+1)}{x^4+x^2+1}$

05 답 ⑤

$\dfrac{x+3}{x+1}-\dfrac{x-1}{x+2}+\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x+3}{x-1}$

$=(x+3)\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right)+(x-1)\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$=\dfrac{-2(x+3)}{(x+1)(x-1)}+\dfrac{4(x-1)}{(x-2)(x+2)}$

$=\dfrac{-2(x+3)(x-2)(x+2)+4(x-1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)(x+2)}$

$=\dfrac{-2x^3-6x^2+8x+24+4x^3-4x^2-4x+4}{(x+1)(x-1)(x-2)(x+2)}$

$=\dfrac{2x^3-10x^2+4x+28}{(x+1)(x+2)(x-2)(x-1)}$

따라서 $a=0$, $b=2$, $c=-10$, $d=4$, $e=28$이므로

$a+b+c+d+e=0+2+(-10)+4+28=24$

05-1 답 ⑤

$\dfrac{x+1}{x+3}-\dfrac{x-4}{x-2}-\dfrac{x+1}{x-3}+\dfrac{x-4}{x+2}$

$=(x+1)\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x-3}\right)+(x-4)\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}\right)$

$=\dfrac{-6(x+1)}{(x+3)(x-3)}+\dfrac{-4(x-4)}{(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{-6(x+1)(x+2)(x-2)-4(x-4)(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{-6x^3-6x^2+24x+24-(4x^3-16x^2-36x+144)}{(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{-10x^3+10x^2+60x-120}{(x+3)(x-2)(x-3)(x+2)}$

따라서 $a=0$, $b=-10$, $c=10$, $d=60$, $e=-120$이므로

$-a+b-c+d-e=0+(-10)-10+60-(-120)=160$

06 답 $-\dfrac{5}{4}$

$\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{(a-b)^2+(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}=\dfrac{2(a^2+b^2)}{(a+b)(a-b)}$

$\dfrac{a-b}{a+b}-\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}=\dfrac{-4ab}{(a+b)(a-b)}$

$\therefore \left(\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a+b}{a-b}\right)\div\left(\dfrac{a-b}{a+b}-\dfrac{a+b}{a-b}\right)$

$=\dfrac{2(a^2+b^2)}{(a+b)(a-b)}\times\dfrac{(a+b)(a-b)}{-4ab}$

$=-\dfrac{a^2+b^2}{2ab}=-\dfrac{5}{4}$

06-1 답 ⑤

$\dfrac{a-2b}{a+2b}+\dfrac{a+2b}{a-2b}=\dfrac{(a-2b)^2+(a+2b)^2}{(a+2b)(a-2b)}$

$=\dfrac{2(a^2+4b^2)}{(a+2b)(a-2b)}$

$\dfrac{a-2b}{a+2b}-\dfrac{a+2b}{a-2b}=\dfrac{(a-2b)^2-(a+2b)^2}{(a+2b)(a-2b)}$

$=\dfrac{-8ab}{(a+2b)(a-2b)}$

$\therefore \left(\dfrac{a-2b}{a+2b}+\dfrac{a+2b}{a-2b}\right)\div\left(\dfrac{a-2b}{a+2b}-\dfrac{a+2b}{a-2b}\right)$

$=\dfrac{2(a^2+4b^2)}{(a+2b)(a-2b)}\times\dfrac{(a+2b)(a-2b)}{-8ab}$

$=-\dfrac{a^2+4b^2}{4ab}=-\dfrac{5}{3}$

07 답 ②

주어진 식의 좌변의 분모를 통분하면

$\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+2}=\dfrac{a(x+2)+b(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\dfrac{(a+b)x+2a-2b}{x^2-4}$

즉 $\dfrac{(a+b)x+2a-2b}{x^2-4}=\dfrac{3x-2}{x^2-4}$가 x에 대한 항등식이므로

$a+b=3$, $2a-2b=-2$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=2$

$\therefore ab=1\times2=2$

07-1 답 ④

주어진 식의 좌변의 분모를 통분하면

$\dfrac{a}{x+1}-\dfrac{b}{x+2}=\dfrac{a(x+2)-b(x+1)}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{(a-b)x+2a-b}{x^2+3x+2}$

즉 $\dfrac{(a-b)x+2a-b}{x^2+3x+2}=\dfrac{4}{x^2+3x+2}$가 x에 대한 항등식이므로

$a-b=0$, $2a-b=4$

두 식을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=4$

$\therefore a+b=4+4=8$

08 답 -3

주어진 식의 좌변의 분모를 통분하면

$\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{a(x+1)(x-1)+b(x+1)^2+c(x-1)}{(x+1)^2(x-1)}$

$=\dfrac{(a+b)x^2+(2b+c)x-a+b-c}{(x+1)^2(x-1)}$

즉 $\dfrac{(a+b)x^2+(2b+c)x-a+b-c}{(x+1)^2(x-1)}=\dfrac{5-x^2}{(x+1)^2(x-1)}$이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=-1$, $2b+c=0$, $-a+b-c=5$

세 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=1$, $c=-2$

$\therefore a+b+c=-2+1+(-2)=-3$

08-1 답 5

주어진 식의 좌변의 분모를 통분하면

$$\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{a(x-1)^2+b(2x+1)(x-1)+c(2x+1)}{(2x+1)(x-1)^2}$$
$$=\frac{(a+2b)x^2+(-2a-b+2c)x+a-b+c}{(2x+1)(x-1)^2}$$

즉

$$\frac{(a+2b)x^2+(-2a-b+2c)x+a-b+c}{(2x+1)(x-1)^2}$$
$$=\frac{9}{(2x+1)(x-1)^2}$$

가 x에 대한 항등식이므로

$a+2b=0,\ -2a-b+2c=0,\ a-b+c=9$

세 식을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=-2,\ c=3$

$\therefore\ a+b+c=4+(-2)+3=5$

09 답 8

주어진 식의 좌변의 분모를 통분하면

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{1+x+1-x}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}$$
$$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}$$
$$=\frac{2(1+x^2+1-x^2)}{1-x^4}$$
$$=\frac{4}{1-x^4} \quad \cdots\cdots ❶$$

즉 $\frac{4}{1-x^4}=\frac{a}{1-x^b}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=4,\ b=4$ ······❷

$\therefore\ a+b=4+4=8$ ······❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 통분하여 정리할 수 있다.	70%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

09-1 답 ⑤

주어진 식의 좌변의 분모를 통분하면

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}+\frac{a}{x^4+1}$$
$$=\frac{x+1-(x-1)}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+1}+\frac{a}{x^4+1}$$
$$=\frac{2}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+1}+\frac{a}{x^4+1}$$
$$=\frac{2(x^2+1-x^2+1)}{x^4-1}+\frac{a}{x^4+1}$$
$$=\frac{4}{x^4-1}+\frac{a}{x^4+1}$$
$$=\frac{4(x^4+1)+a(x^4-1)}{x^8-1}$$
$$=\frac{(a+4)x^4-a+4}{x^8-1}$$

즉 $\frac{(a+4)x^4-a+4}{x^8-1}=\frac{b}{x^c-1}$가 x에 대한 항등식이므로

$a+4=0,\ -a+4=b,\ c=8$

$\therefore\ a=-4,\ b=8,\ c=8$

$\therefore\ a+b+c=-4+8+8=12$

10 답 28

$$\frac{2}{(x-5)(x-3)}+\frac{4}{(x-3)(x+1)}+\frac{8}{(x+1)(x+9)}$$
$$=\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-3}\right)+\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+9}\right)$$
$$=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x+9}$$
$$=\frac{x+9-(x-5)}{(x-5)(x+9)}$$
$$=\frac{14}{(x-5)(x+9)}$$

즉 $\frac{14}{(x-5)(x+9)}=\frac{a}{(x+b)(x+c)}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=14,\ b=-5,\ c=9\ (\because\ c>0)$

$\therefore\ a-b+c=14-(-5)+9=28$

10-1 답 9

$$\frac{1}{x^2-x}+\frac{2}{x^2+2x}+\frac{3}{x^2+7x+10}+\frac{4}{x^2+14x+45}$$
$$=\frac{1}{(x-1)x}+\frac{2}{x(x+2)}+\frac{3}{(x+2)(x+5)}+\frac{4}{(x+5)(x+9)}$$
$$=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+5}\right)+\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+9}\right)$$
$$=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+9}$$
$$=\frac{x+9-(x-1)}{(x-1)(x+9)}$$
$$=\frac{10}{x^2+8x-9}$$

즉 $\frac{10}{x^2+8x-9}=\frac{c}{x^2+ax+b}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=8,\ b=-9,\ c=10$

$\therefore\ a+b+c=8+(-9)+10=9$

11 답 ②

$$\frac{4}{1\times3}+\frac{4}{3\times5}+\frac{4}{5\times7}+\cdots+\frac{4}{99\times101}$$
$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{101}\right)$$
$$=\frac{200}{101}$$

11-1 답 ④

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{156}$$
$$=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{12\times13}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\right)$$
$$=1-\frac{1}{13}$$
$$=\frac{12}{13}$$

따라서 $p=13,\ q=12$이므로

$pq=13\times12=156$

12 답 ⑤

$f(x)=x^2+x=x(x+1)$이므로

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

$$\therefore \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(40)}$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{40}-\frac{1}{41}\right)$$
$$=1-\frac{1}{41}=\frac{40}{41}$$

12-1 답 ②

$f(x)=-x^2+x=-x(x-1)$이므로

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{-1}{(x-1)x}=-\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\frac{1}{f(4)}+\cdots+\frac{1}{f(1000)}$$
$$=-\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}\right)\right\}$$
$$=-\left(1-\frac{1}{1000}\right)=-\frac{999}{1000}$$

13 답 ⑤

$$1+\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=1+\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{x+1}{x}}}=1+\frac{1}{1-\frac{x}{x+1}}$$
$$=1+\frac{1}{\frac{x+1-x}{x+1}}=1+\frac{1}{\frac{1}{x+1}}$$
$$=1+(x+1)=x+2$$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로

$a+b=1+2=3$

13-1 답 ④

$$\frac{2}{1+\frac{1}{\frac{1}{x-1}-1}}=\frac{2}{1+\frac{1}{\frac{1-(x-1)}{x-1}}}=\frac{2}{1-\frac{x-1}{x-2}}$$
$$=\frac{2}{\frac{x-2-(x-1)}{x-2}}=\frac{2}{-\frac{1}{x-2}}$$
$$=-2(x-2)=-2x+4$$

따라서 $a=-2$, $b=4$이므로

$a+b=-2+4=2$

14 답 6

$$\frac{\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+9}}{\frac{1}{n+9}-\frac{1}{n+15}}=\frac{\frac{6}{(n+3)(n+9)}}{\frac{6}{(n+9)(n+15)}}=\frac{n+15}{n+3}$$
$$=1+\frac{12}{n+3}$$

이때 $1+\frac{12}{n+3}$가 자연수가 되려면 $n+3$이 12의 양의 약수이어야 하므로 $n+3$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이다.

따라서 정수 n의 값은 -2, -1, 0, 1, 3, 9이므로 그 개수는 6이다.

14-1 답 ③

$$\frac{\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+5}}{\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-3}}=\frac{\frac{4}{(2n+1)(2n+5)}}{-\frac{4}{(2n+1)(2n-3)}}=\frac{-2n+3}{2n+5}$$
$$=\frac{-(2n+5)+8}{2n+5}$$
$$=-1+\frac{8}{2n+5}$$

이때 $-1+\frac{8}{2n+5}$이 자연수가 되려면 $-1+\frac{8}{2n+5}\geq 1$이고 $2n+5$가 8의 양의 약수이어야 하므로 $2n+5$의 값이 될 수 있는 수는 1뿐이다. ($\because$ n은 정수)

즉 $2n+5=1$이므로 $2n=-4$

$\therefore n=-2$

15 답 15

$$\frac{58}{23}=2+\frac{12}{23}=2+\frac{1}{\frac{23}{12}}=2+\frac{1}{1+\frac{11}{12}}$$
$$=2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{12}{11}}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{11}}}$$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=1$, $d=11$이므로

$a+b+c+d=2+1+1+11=15$

15-1 답 10

$$\frac{43}{30}=1+\frac{13}{30}=1+\frac{1}{\frac{30}{13}}=1+\frac{1}{2+\frac{4}{13}}$$
$$=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{13}{4}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}$$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$이므로

$a+b+c+d=1+2+3+4=10$

16 답 149

$x^2-5x-1=0$에서 $x\neq 0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-5-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\frac{1}{x}=5$

$$\therefore 5x^2+3x-1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}=5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{1}{x}\right)-1$$
$$=5\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right\}+3\left(x-\frac{1}{x}\right)-1$$
$$=5(5^2+2)+3\times 5-1$$
$$=149$$

16-1 답 $-4\sqrt{5}$

$x^2-3x+1=0$에서 $x\neq 0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-3+\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\frac{1}{x}=3$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=3^2-4=5$$

그런데 $0<x<1$이므로 $x-\frac{1}{x}<0$

$\therefore x-\frac{1}{x}=-\sqrt{5}$

$\therefore x^2+x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=x^2-\frac{1}{x^2}+x-\frac{1}{x}$
$=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)+x-\frac{1}{x}$
$=3\times(-\sqrt{5})-\sqrt{5}=-4\sqrt{5}$

17 답 ③

$x^2-4x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-4+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=4$

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=4^3-3\times4=52$

17-1 답 8

$x^2+x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x+1+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=-1$

$\therefore x+\frac{1}{x}+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^3$
$=x+\frac{1}{x}+\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}^2+\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}^3$
$=-1+\{(-1)^2-2\}^2+\{(-1)^3-3\times(-1)\}^3$
$=8$

18 답 112

$x^2+4x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x+4+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=-4$ ······❶

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=(-4)^2-4=12$

그런데 $0<x<1$이므로 $x-\frac{1}{x}<0$

$\therefore x-\frac{1}{x}=-2\sqrt{3}$ ······❷

$\therefore x^4-\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$
$=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$
$=\{(-4)^2-2\}\times(-4)\times(-2\sqrt{3})$
$=112\sqrt{3}$ ······❸

$\therefore a=112$ ······❹

채점 기준	비율
❶ $x+\frac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ $x-\frac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $x^4-\frac{1}{x^4}$의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ a의 값을 구할 수 있다.	10%

18-1 답 ④

$x^2+3x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x+3+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=-3$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=(-3)^2-2=7$

$\therefore x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=7^2-2=47$

19 답 ①

$a+b+c=0$에서 $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$이므로

$a\left(\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\right)+b\left(\frac{2}{c}+\frac{2}{a}\right)+c\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right)$
$=2\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)$
$=2\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)$
$=2\left(\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}\right)$
$=2(-1-1-1)$
$=-6$

다른 풀이

$a+b+c=0$에서 $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$이므로

$a\left(\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\right)+b\left(\frac{2}{c}+\frac{2}{a}\right)+c\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right)$
$=2a\times\frac{b+c}{bc}+2b\times\frac{c+a}{ac}+2c\times\frac{a+b}{ab}$
$=2a\times\frac{-a}{bc}+2b\times\frac{-b}{ac}+2c\times\frac{-c}{ab}$
$=-2\times\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$

이때

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

이고 $a+b+c=0$이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc=0 \quad \therefore a^3+b^3+c^3=3abc$

$\therefore$ (주어진 식)$=-2\times\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=-2\times\frac{3abc}{abc}=-6$

19-1 답 -1

$a+b-c=0$에서 $a+b=c$, $b-c=-a$, $c-a=b$이므로

$a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)-b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$
$=\frac{a}{b}-\frac{a}{c}-\frac{b}{a}-\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{c}{b}$
$=-\frac{b-c}{a}-\frac{c-a}{b}-\frac{a+b}{c}$
$=-\frac{-a}{a}-\frac{b}{b}-\frac{c}{c}$
$=1-1-1$
$=-1$

20 답 -1

$a-b+c=0$에서 $a-b=-c$, $b-c=a$, $c+a=b$이므로

$\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)=\frac{a-b}{a}\times\frac{b-c}{b}\times\frac{c+a}{c}$
$=\frac{-c}{a}\times\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}$
$=-1$

20-1 답 ③

$a+b-c=0$에서 $a+b=c$, $b-c=-a$, $c-a=b$이므로

$\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)\left(1-\frac{a}{c}\right)=\frac{a+b}{a}\times\frac{b-c}{b}\times\frac{c-a}{c}$
$=\frac{c}{a}\times\frac{-a}{b}\times\frac{b}{c}$
$=-1$

21 답 ②

$$\frac{2a^2-3}{bc}+\frac{2b^2-3}{ca}+\frac{2c^2-3}{ab}$$
$$=\frac{2a^3-3a+2b^3-3b+2c^3-3c}{abc}$$
$$=\frac{2(a^3+b^3+c^3)-3(a+b+c)}{abc}$$
$$=\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}\ (\because a+b+c=0)$$

이때

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

이고 $a+b+c=0$이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$ $\quad\therefore a^3+b^3+c^3=3abc$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}=\dfrac{2\times 3abc}{abc}=6$

21-1 답 ③

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$의 양변에 $a+b+c$를 곱하면

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

이때

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$ $\quad\therefore a^3+b^3+c^3=3abc$

$$\therefore \frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=\frac{a^3}{abc}+\frac{b^3}{abc}+\frac{c^3}{abc}$$
$$=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$
$$=\frac{3abc}{abc}=3$$

다른 풀이

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$에서

$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

$a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore a=b=c$

$\therefore \dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}=\dfrac{a^2}{a^2}+\dfrac{b^2}{b^2}+\dfrac{c^2}{c^2}=1+1+1=3$

22 답 3

$x+3y=10z$ ……㉠

$x-3y=4z$ ……㉡

㉠+㉡을 하면 $2x=14z$ $\quad\therefore x=7z$

㉠−㉡을 하면 $6y=6z$ $\quad\therefore y=z$

$\therefore \dfrac{2x+5y+8z}{x+y+z}=\dfrac{2\times 7z+5z+8z}{7z+z+z}=\dfrac{27z}{9z}=3$

22-1 답 $\frac{31}{25}$

$4x-2y-z=0$ ……㉠

$x+3y+2z=0$ ……㉡

㉠×2+㉡을 하면 $9x-y=0$ $\quad\therefore y=9x$

$y=9x$를 ㉠에 대입하면

$4x-18x-z=0$ $\quad\therefore z=-14x$

$$\therefore \frac{2x^2-y^2+zx}{xy+yz-3zx}=\frac{2x^2-(9x)^2+(-14x)\times x}{x\times 9x+9x\times(-14x)-3\times(-14x)\times x}$$
$$=\frac{-93x^2}{-75x^2}=\frac{31}{25}$$

23 답 ①

$a+\dfrac{4}{b}=4$에서 $a=4-\dfrac{4}{b}=\dfrac{4(b-1)}{b}$

$2b+\dfrac{1}{c}=2$에서 $\dfrac{1}{c}=2(1-b)$이므로 $c=\dfrac{1}{2(1-b)}$

$\therefore abc=\dfrac{4(b-1)}{b}\times b\times\dfrac{1}{2(1-b)}=-2$

23-1 답 ③

$a-\dfrac{1}{c}=1$에서 $\dfrac{1}{c}=a-1$이므로 $c=\dfrac{1}{a-1}$

$\dfrac{2}{a}-b=2$에서 $b=\dfrac{2}{a}-2=2\left(\dfrac{1-a}{a}\right)$

이때 $abc=a\times 2\left(\dfrac{1-a}{a}\right)\times\dfrac{1}{a-1}=-2$이므로

$\dfrac{2}{abc}+1=\dfrac{2}{-2}+1=0$

24 답 ④

$\dfrac{x+y}{4}=\dfrac{y+z}{3}=\dfrac{z+x}{5}=k\ (k\neq 0)$로 놓으면

$x+y=4k$ ……㉠

$y+z=3k$ ……㉡

$z+x=5k$ ……㉢

㉠+㉡+㉢을 하면 $2(x+y+z)=12k$

$\therefore x+y+z=6k$ ……㉣

㉠, ㉡, ㉢을 각각 ㉣에 대입하여 정리하면

$x=3k,\ y=k,\ z=2k$

$$\therefore \frac{xy-yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{3k\times k-k\times 2k+2k\times 3k}{(3k)^2+k^2+(2k)^2}$$
$$=\frac{7k^2}{14k^2}=\frac{1}{2}$$

24-1 답 −25

$\dfrac{x+y}{4}=\dfrac{y+z}{5}=\dfrac{z+x}{3}=k\ (k\neq 0)$로 놓으면

$x+y=4k$ ……㉠

$y+z=5k$ ……㉡

$z+x=3k$ ……㉢

㉠+㉡+㉢을 하면 $2(x+y+z)=12k$

$\therefore x+y+z=6k$ ……㉣

㉠, ㉡, ㉢을 각각 ㉣에 대입하여 정리하면

$x=k,\ y=3k,\ z=2k$

$$\therefore \frac{(x+2y-z)^2}{xy-yz+zx}=\frac{(k+6k-2k)^2}{k\times 3k-3k\times 2k+2k\times k}$$
$$=\frac{25k^2}{-k^2}=-25$$

25 답 ①

$y=\dfrac{-2x-1}{x+1}=\dfrac{-2(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}-2$

즉 $y=\dfrac{-2x-1}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로

$k=1,\ p=-1,\ q=-2$

$\therefore k+p+q=1+(-1)+(-2)=-2$

25-1 답 ④

$y=\frac{-x+5}{x-2}=\frac{-(x-2)+3}{x-2}=\frac{3}{x-2}-1$

즉 $y=\frac{-x+5}{x-2}$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$a=3,\ b=2,\ c=-1$

$\therefore a+b+c=3+2+(-1)=4$

26 답 -6

$y=\frac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{5}{x-2}-1$

이 함수의 그래프가 점 $(1,\ k)$를 지나므로

$k=\frac{5}{1-2}-1=-6$

26-1 답 -1

$y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{3}{x+2}+4$

이 함수의 그래프가 점 $(k,\ 1)$을 지나므로

$1=-\frac{3}{k+2}+4,\ \frac{3}{k+2}=3$

$k+2=1 \qquad \therefore k=-1$

27 답 ③

① $y=\frac{1}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

② $y=-\frac{1}{x-2}+4$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

③ $y=\frac{3x-4}{x-2}=\frac{3(x-2)+2}{x-2}=\frac{2}{x-2}+3$

즉 $y=\frac{3x-4}{x-2}$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=\frac{x+4}{2-x}=\frac{-(2-x)+6}{2-x}=-\frac{6}{x-2}-1$

즉 $y=\frac{x+4}{2-x}$의 그래프는 $y=-\frac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\frac{2x-3}{3x-6}=\frac{\frac{2}{3}(3x-6)+1}{3x-6}=\frac{1}{3(x-2)}+\frac{2}{3}$

즉 $y=\frac{2x-3}{3x-6}$의 그래프는 $y=\frac{1}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $\frac{2}{3}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동하여 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것은 ③이다.

27-1 답 ④

① $y=\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x-2)+1}{x-2}=\frac{1}{x-2}+1$

즉 $y=\frac{x-1}{x-2}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

② $y=\frac{3x-2}{x-1}=\frac{3(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+3$

즉 $y=\frac{3x-2}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

③ $y=\frac{-x+5}{x-4}=\frac{-(x-4)+1}{x-4}=\frac{1}{x-4}-1$

즉 $y=\frac{-x+5}{x-4}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=\frac{x-2}{x-1}=\frac{(x-1)-1}{x-1}=-\frac{1}{x-1}+1$

즉 $y=\frac{x-2}{x-1}$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\frac{-2x-5}{x+3}=\frac{-2(x+3)+1}{x+3}=\frac{1}{x+3}-2$

즉 $y=\frac{-2x-5}{x+3}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동하여 서로 겹쳐질 수 없는 것은 ④이다.

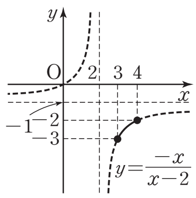
28 답 ②

$y=\frac{-x}{x-2}=\frac{-(x-2)-2}{x-2}=-\frac{2}{x-2}-1$

이므로 $y=\frac{-x}{x-2}$의 그래프는 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $3\le x\le 4$에서 $y=\frac{-x}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은

$\{y\,|\,-3\le y\le -2\}$



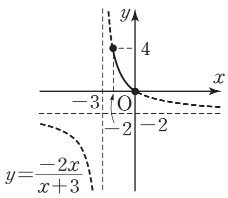
28-1 답 ⑤

$y=\frac{-2x}{x+3}=\frac{-2(x+3)+6}{x+3}=\frac{6}{x+3}-2$

이므로 $y=\frac{-2x}{x+3}$의 그래프는 $y=\frac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-2\le x\le 0$에서 $y=\frac{-2x}{x+3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은

$\{y\,|\,0\le y\le 4\}$

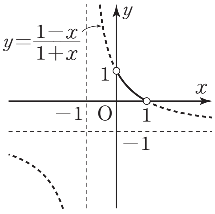


29 답 1

$y=\frac{1-x}{1+x}=\frac{-(1+x)+2}{1+x}=\frac{2}{x+1}-1$

이므로 $y=\frac{1-x}{1+x}$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

즉 $0<y<1$에서 $y=\frac{1-x}{1+x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은
$\{x|0<x<1\}$
따라서 $a=0$, $b=1$이므로
$a+b=0+1=1$

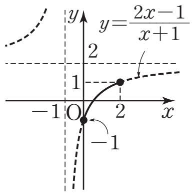


29-1 답 ②

$y=\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2(x+1)-3}{x+1}=-\frac{3}{x+1}+2$

이므로 $y=\frac{2x-1}{x+1}$의 그래프는 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

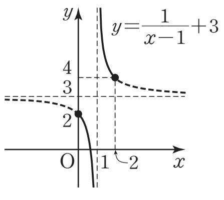
즉 $-1\le y\le 1$에서 $y=\frac{2x-1}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은
$\{x|0\le x\le 2\}$
따라서 $a=0$, $b=2$이므로
$b-a=2-0=2$



30 답 ②

$y=\frac{1}{x-1}+3$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

즉 $y\le 2$ 또는 $y\ge 4$에서 $y=\frac{1}{x-1}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은
$\{x|0\le x<1$ 또는 $1<x\le 2\}$
따라서 정의역에 속하는 정수는 0, 2이므로 그 개수는 2이다.

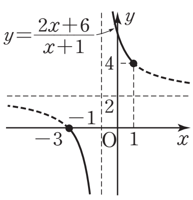


30-1 답 -4

$y=\frac{2x+6}{x+1}=\frac{2(x+1)+4}{x+1}=\frac{4}{x+1}+2$

이므로 $y=\frac{2x+6}{x+1}$의 그래프는 $y=\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

즉 $y\le 0$ 또는 $y\ge 4$에서 $y=\frac{2x+6}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은
$\{x|-3\le x<-1$ 또는 $-1<x\le 1\}$
따라서 정의역에 속하는 정수는 -3, -2, 0, 1이므로 그 합은
$-3+(-2)+0+1=-4$



31 답 ③

점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=-2$이므로 주어진 함수를
$y=\frac{k}{x+1}-2\ (k\ne 0)$로 놓을 수 있다.
이 함수의 그래프가 원점을 지나므로
$0=\frac{k}{0+1}-2 \qquad \therefore k=2$
따라서 $y=\frac{2}{x+1}-2=\frac{2-2(x+1)}{x+1}=\frac{-2x}{x+1}$이므로
$a=-2$, $b=0$, $c=1$
$\therefore a+b+c=-2+0+1=-1$

31-1 답 ②

점근선의 방정식이 $x=2$, $y=1$이므로 주어진 함수를
$y=\frac{k}{x-2}+1\ (k\ne 0)$로 놓을 수 있다.
이 함수의 그래프가 점 $(1, 0)$을 지나므로
$0=\frac{k}{1-2}+1 \qquad \therefore k=1$
따라서 $y=\frac{1}{x-2}+1=\frac{1+(x-2)}{x-2}=\frac{x-1}{x-2}$이므로
$a=1$, $b=-1$, $c=-2$
$\therefore a+2b+c=1+2\times(-1)+(-2)=-3$

32 답 -12

$y=\frac{4x-2}{x-3}=\frac{4(x-3)+10}{x-3}=\frac{10}{x-3}+4$
이므로 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=4$ ······ ❶
$y=\frac{bx+1}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab+1}{x+a}=\frac{-ab+1}{x+a}+b$
이므로 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=b$ ······ ❷
따라서 $-a=3$, $b=4$이므로
$a=-3$, $b=4$
$\therefore ab=-3\times 4=-12$ ······ ❸

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=\frac{4x-2}{x-3}$의 그래프의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ 함수 $y=\frac{bx+1}{x+a}$의 그래프의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

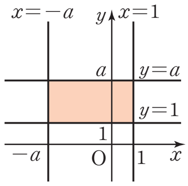
32-1 답 ①

$y=\frac{-2x+1}{x+4}=\frac{-2(x+4)+9}{x+4}=\frac{9}{x+4}-2$
이므로 점근선의 방정식은 $x=-4$, $y=-2$
$y=\frac{ax+3}{x-b}=\frac{a(x-b)+ab+3}{x-b}=\frac{ab+3}{x-b}+a$
이므로 점근선의 방정식은 $x=b$, $y=a$
따라서 $a=-2$, $b=-4$이므로
$a^2+b^2=(-2)^2+(-4)^2=20$

33 답 3

$y=\frac{x}{x+a}=\frac{(x+a)-a}{x+a}=-\frac{a}{x+a}+1$
이므로 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=1$
$y=\frac{ax+2}{x-1}=\frac{a(x-1)+a+2}{x-1}=\frac{a+2}{x-1}+a$
이므로 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=a$

오른쪽 그림에서 네 직선 $x=-a$, $x=1$, $y=1$, $y=a$로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이므로



$(a+1)(a-1)=8$, $a^2-1=8$

$a^2=9$ $\quad\therefore a=3\ (\because a>1)$

33-1 답 14

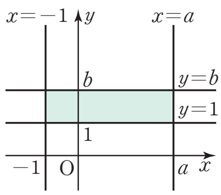
$y=\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{(x+1)-2}{x+1}=-\dfrac{2}{x+1}+1$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=1$

$y=\dfrac{bx+1}{x-a}=\dfrac{b(x-a)+ab+1}{x-a}=\dfrac{ab+1}{x-a}+b$

이므로 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=b$

오른쪽 그림에서 네 직선 $x=-1$, $x=a$, $y=1$, $y=b$로 둘러싸인 부분의 넓이가 13이므로



$(a+1)(b-1)=13$

이때 a, b는 자연수이므로

$a+1=13$, $b-1=1$

$\therefore a=12$, $b=2$

$\therefore a+b=12+2=14$

34 답 -7

점근선의 방정식은 $x=2$, $y=1$

주어진 함수의 그래프가 점 $(2, 1)$에 대하여 대칭이므로 주어진 함수를 $y=\dfrac{k}{x-2}+1\ (k\neq 0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 6이므로

$0=\dfrac{k}{6-2}+1$, $\dfrac{k}{4}=-1$ $\quad\therefore k=-4$

따라서 $y=\dfrac{-4}{x-2}+1=\dfrac{-4+(x-2)}{x-2}=\dfrac{x-6}{x-2}$이므로

$a=1$, $b=-6$, $c=-2$

$\therefore a+b+c=1+(-6)+(-2)=-7$

34-1 답 -6

주어진 함수의 그래프가 점 $(-3, 2)$에 대하여 대칭이므로 주어진 함수를 $y=\dfrac{k}{x+3}+2\ (k\neq 0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 $\dfrac{1}{3}$이므로

$\dfrac{1}{3}=\dfrac{k}{3}+2$, $\dfrac{k}{3}=-\dfrac{5}{3}$ $\quad\therefore k=-5$

따라서 $y=\dfrac{-5}{x+3}+2=\dfrac{-5+2(x+3)}{x+3}=\dfrac{2x+1}{x+3}$이므로

$a=2$, $b=-1$, $c=3$

$\therefore abc=2\times(-1)\times 3=-6$

35 답 -1

$y=\dfrac{ax-1}{x-4}=\dfrac{a(x-4)+4a-1}{x-4}=\dfrac{4a-1}{x-4}+a$

이므로 점근선의 방정식은 $x=4$, $y=a$

이 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(4, a)$에 대하여 대칭이므로

$a=3$, $b=4$

$\therefore a-b=3-4=-1$

35-1 답 1

$y=\dfrac{3x-5}{x+a}=\dfrac{3(x+a)-3a-5}{x+a}=-\dfrac{3a+5}{x+a}+3$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=3$

이 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-a, 3)$에 대하여 대칭이므로 $-a=2$, $b=3$ $\quad\therefore a=-2$, $b=3$

$\therefore a+b=-2+3=1$

36 답 ④

$y=\dfrac{2x-5}{x-1}=\dfrac{2(x-1)-3}{x-1}=-\dfrac{3}{x-1}+2$

이므로 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=2$

이 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(1, 2)$를 지나고 기울기가 ± 1인 직선, 즉 두 직선 $y=\pm(x-1)+2$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 직선 $y=x+1$, $y=-x+3$에서 $a<0$이므로

$y=-x+3$ $\quad\therefore a=-1$, $b=3$

$\therefore b^2-a^2=3^2-(-1)^2=8$

36-1 답 20

$y=\dfrac{3x+1}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+4}{x-1}=\dfrac{4}{x-1}+3$

이므로 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=3$

이 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(1, 3)$을 지나고 기울기가 ± 1인 직선에 대하여 대칭이므로 두 직선 $y=x+m$, $y=-x+n$은 점 $(1,\ 3)$을 지난다.

$3=1+m$에서 $m=2$

$3=-1+n$에서 $n=4$

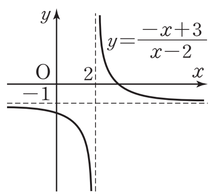
$\therefore m^2+n^2=2^2+4^2=20$

37 답 제2사분면

$y=\dfrac{-x+3}{x-2}=\dfrac{-(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}-1$

이므로 $y=\dfrac{-x+3}{x-2}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\dfrac{-x+3}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프가 지나지 않는 사분면은 제2사분면이다.

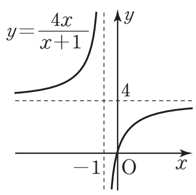


37-1 답 제4사분면

$y=\dfrac{4x}{x+1}=\dfrac{4(x+1)-4}{x+1}=-\dfrac{4}{x+1}+4$

이므로 $y=\dfrac{4x}{x+1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

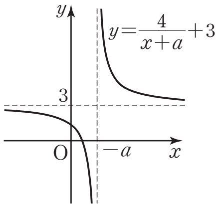
따라서 $y=\dfrac{4x}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프가 지나지 않는 사분면은 제4사분면이다.



38 답 $-\frac{4}{3}$

(i) $a\geq 0$일 때, 함수 $y=\frac{4}{x+a}+3$의 그래프는 제3사분면을 지난다.

(ii) $a<0$일 때, 함수 $y=\frac{4}{x+a}+3$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 크거나 같아야 하므로



$\frac{4}{a}+3\geq 0$, $\frac{4}{a}\geq -3$

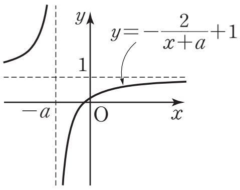
$-3a\geq 4$ $\therefore a\leq -\frac{4}{3}$

(i), (ii)에서 $a\leq -\frac{4}{3}$이므로 실수 a의 최댓값은 $-\frac{4}{3}$이다.

38-1 답 2

(i) $a\leq 0$일 때, 함수 $y=-\frac{2}{x+a}+1$의 그래프는 제4사분면을 지난다.

(ii) $a>0$일 때, 함수 $y=-\frac{2}{x+a}+1$의 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 크거나 같아야 하므로



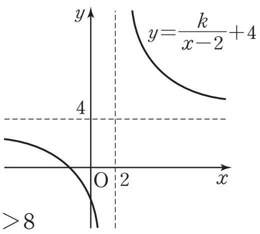
$-\frac{2}{a}+1\geq 0$, $-\frac{2}{a}\geq -1$ $\therefore a\geq 2$

(i), (ii)에서 $a\geq 2$이므로 실수 a의 최솟값은 2이다.

39 답 ⑤

(i) $k<0$일 때, 함수 $y=\frac{k}{x-2}+4$의 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다.

(ii) $k>0$일 때, 함수 $y=\frac{k}{x-2}+4$의 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작아야 하므로



$-\frac{k}{2}+4<0$, $-\frac{k}{2}<-4$ $\therefore k>8$

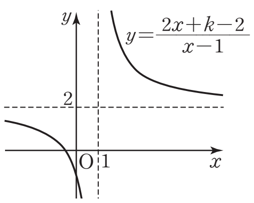
(i), (ii)에서 $k>8$이므로 정수 k의 최솟값은 9이다.

39-1 답 ⑤

$y=\frac{2x+k-2}{x-1}=\frac{2(x-1)+k}{x-1}=\frac{k}{x-1}+2$

(i) $k<0$일 때, 함수 $y=\frac{2x+k-2}{x-1}$의 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다.

(ii) $k>0$일 때, 함수 $y=\frac{2x+k-2}{x-1}$의 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작아야 하므로



$-k+2<0$ $\therefore k>2$

(i), (ii)에서 $k>2$이므로 $a=2$

40 답 12

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=-3$이므로

주어진 함수를 $y=\frac{k}{x-2}-3\ (k<0)$으로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1=-\frac{k}{2}-3$, $\frac{k}{2}=-2$ $\therefore k=-4$

따라서 $y=\frac{-4}{x-2}-3=\frac{-4-3(x-2)}{x-2}=\frac{-3x+2}{x-2}$이므로

$a=-3$, $b=2$, $c=-2$

$\therefore abc=-3\times 2\times(-2)=12$

40-1 답 -4

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=5$이므로 주어진 함수를 $y=\frac{k}{x-3}+5\ (k>0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(0, 4)$를 지나므로

$4=-\frac{k}{3}+5$, $\frac{k}{3}=1$ $\therefore k=3$

따라서 $y=\frac{3}{x-3}+5=\frac{3+5(x-3)}{x-3}=\frac{5x-12}{x-3}$이므로

$a=3$, $b=5$, $c=-12$

$\therefore a+b+c=3+5+(-12)=-4$

41 답 ㄱ, ㄴ

함수 $y=\frac{b}{x-a}+c$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=c$이므로 주어진 그래프에서 $a>0$, $c>0$

ㄱ. $y=\frac{b}{x}$의 그래프는 제2, 4사분면을 지나므로 $b<0$

ㄴ. $b<0$, $c>0$이므로 $b-c<0$

ㄷ. $\frac{b}{a}<0$, $bc<0$이므로 $\frac{b}{a}+bc<0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

41-1 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

함수 $y=\frac{b}{x+a}-c$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=-c$이므로 주어진 그래프에서

$-a<0$, $-c>0$ $\therefore a>0$, $c<0$

ㄱ. $y=\frac{b}{x}$의 그래프는 제1, 3사분면을 지나므로 $b>0$

ㄴ. $a>0$, $c<0$이므로 $a-c>0$

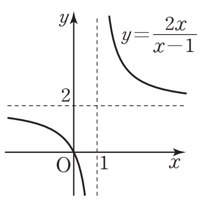
ㄷ. 함수 $y=\frac{b}{x+a}-c$의 그래프에서 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 크므로 $\frac{b}{a}-c>0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

42 답 ⑤

$y=\frac{2x}{x-1}=\frac{2(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+2$

이므로 함수 $y=\frac{2x}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 그래프는 점 $(1, 2)$에 대하여 대칭이다.

② 그래프는 제1, 2, 4사분면을 지난다.

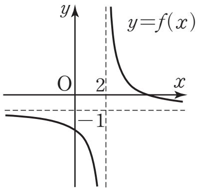
③ 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, 0)$이다.

④ 정의역은 $x\neq 1$인 실수 전체의 집합이다.
⑤ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=2$이다.
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

42-1 답 ⑤

$f(x)=\dfrac{-x+3}{x-2}=\dfrac{-(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}-1$

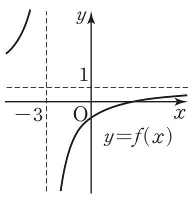
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 겹쳐질 수 있다.
② 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=-1$이다.
③ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(2,\ -1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선에 대하여 대칭이므로
$y+1=-(x-2)\qquad \therefore\ y=-x+1$
즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=-x+1$에 대하여 대칭이다.
④ 치역은 $y\neq -1$인 실수 전체의 집합이다.
⑤ 그래프는 제1, 3, 4사분면을 지난다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

43 답 ⑤

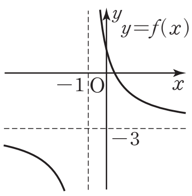
ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-3$, $y=1$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x\neq -3$인 실수$\}$이다.
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(-3,\ 1)$을 지나고 기울기가 1인 직선에 대하여 대칭이므로
$y-1=x+3\qquad \therefore\ y=x+4$
즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x+4$에 대하여 대칭이다.
ㄷ. $k<-3$이면 $f(0)=\dfrac{k}{3}+1<0$
즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프는 모든 사분면을 지난다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

43-1 답 ④

ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=-3$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\neq -3$인 실수$\}$이다.
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(-1,\ -3)$을 지나고 기울기가 -1인 직선에 대하여 대칭이므로
$y+3=-(x+1)\qquad \therefore\ y=-x-4$
즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=-x-4$에 대하여 대칭이다.
ㄷ. $k>3$이면 $f(0)=k-3>0$
즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프는 모든 사분면을 지난다.



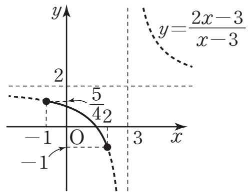
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

44 답 4

$y=\dfrac{2x-3}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+3}{x-3}=\dfrac{3}{x-3}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x-3}{x-3}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

즉 $-1\le x\le 2$에서 $y=\dfrac{2x-3}{x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-1$일 때 최댓값 $\dfrac{5}{4}$,
$x=2$일 때 최솟값 -1
을 갖는다.

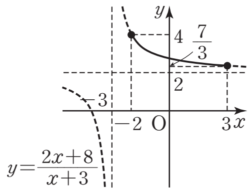
따라서 $a=\dfrac{5}{4}$, $b=-1$이므로 $4a+b=4\times\dfrac{5}{4}+(-1)=4$

44-1 답 ①

$y=\dfrac{2x+8}{x+3}=\dfrac{2(x+3)+2}{x+3}=\dfrac{2}{x+3}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x+8}{x+3}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

즉 $-2\le x\le 3$에서 $y=\dfrac{2x+8}{x+3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



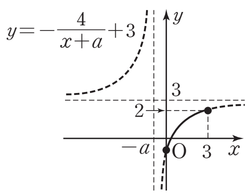
$x=-2$일 때 최댓값 4,
$x=3$일 때 최솟값 $\dfrac{7}{3}$
을 갖는다.

따라서 $M=4$, $m=\dfrac{7}{3}$이므로 $M-3m=4-3\times\dfrac{7}{3}=-3$

45 답 1

$y=-\dfrac{4}{x+a}+3$의 그래프는 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

즉 $0\le x\le 3$에서 $y=-\dfrac{4}{x+a}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=3$일 때 최댓값 2를 가지므로

$-\dfrac{4}{3+a}+3=2$, $-\dfrac{4}{3+a}=-1$

$3+a=4\qquad \therefore\ a=1$

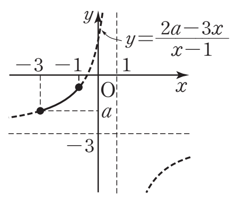
45-1 답 $-\dfrac{3}{2}$

$y=\dfrac{2a-3x}{x-1}=\dfrac{-3(x-1)+2a-3}{x-1}=\dfrac{2a-3}{x-1}-3$

이므로 $y=\dfrac{2a-3x}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2a-3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

$a<\dfrac{3}{2}$일 때, $2a-3<0$이므로

$-3\le x\le -1$에서 $y=\dfrac{2a-3x}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



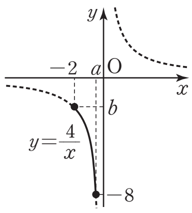
따라서 $x=-3$일 때 최솟값 a를 가지므로

$\dfrac{2a+9}{-4}=a$, $2a+9=-4a$

$6a=-9$ $\qquad\therefore a=-\dfrac{3}{2}$

46 답 1

$-2\le x\le a$에서 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $x=a$일 때 최솟값 -8을 가지므로

$\dfrac{4}{a}=-8$ $\qquad\therefore a=-\dfrac{1}{2}$

$x=-2$일 때 최댓값 b를 가지므로

$b=\dfrac{4}{-2}=-2$

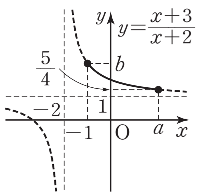
$\therefore ab=-\dfrac{1}{2}\times(-2)=1$

46-1 답 4

$y=\dfrac{x+3}{x+2}=\dfrac{(x+2)+1}{x+2}=\dfrac{1}{x+2}+1$

이므로 $y=\dfrac{x+3}{x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$-1\le x\le a$에서 $y=\dfrac{x+3}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $x=-1$일 때 최댓값 b를 가지므로

$b=\dfrac{-1+3}{-1+2}=2$

$x=a$일 때 최솟값 $\dfrac{5}{4}$를 가지므로

$\dfrac{a+3}{a+2}=\dfrac{5}{4}$, $5a+10=4a+12$

$\therefore a=2$

$\therefore a+b=2+2=4$

47 답 -1

$f^1(x)=\dfrac{1}{1-x}$

$f^2(x)=f(f(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{1}{\dfrac{(1-x)-1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}$

$f^3(x)=f(f^2(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=\dfrac{1}{\dfrac{x-(x-1)}{x}}=x$

$f^4(x)=f(f^3(x))=f(x)$

$\vdots$

따라서 함수

$f^3(x)=f^6(x)=f^9(x)=\cdots=f^{3n}(x)$ (n은 자연수)

는 항등함수이므로

$f^{100}(x)=f^{3\times 33+1}(x)=f(x)$

$\therefore f^{100}(2)=f(2)=\dfrac{1}{1-2}=-1$

47-1 답 4

$f^1(x)=\dfrac{x+3}{2x-1}$

$f^2(x)=f(f(x))=\dfrac{\dfrac{x+3}{2x-1}+3}{\dfrac{2(x+3)}{2x-1}-1}=\dfrac{\dfrac{7x}{2x-1}}{\dfrac{7}{2x-1}}=x$

$f^3(x)=f(f^2(x))=f(x)$

$\vdots$

따라서 함수

$f^2(x)=f^4(x)=f^6(x)=\cdots=f^{2n}(x)$ (n은 자연수)

는 항등함수이므로

$f^{999}(x)=f^{2\times 499+1}(x)=f(x)$

$\therefore f^{999}(1)=f(1)=\dfrac{1+3}{2-1}=4$

48 답 1

$f(f(x))=\dfrac{\dfrac{a(ax+1)}{2x-a}+1}{\dfrac{2(ax+1)}{2x-a}-a}=\dfrac{\dfrac{(a^2+2)x}{2x-a}}{\dfrac{a^2+2}{2x-a}}=x$이므로

$f(f(2))=2$

즉 $f(f(f(2)))=f(2)=1$이므로

$\dfrac{2a+1}{4-a}=1$, $2a+1=4-a$ $\qquad\therefore a=1$

다른 풀이

$f(2)=\dfrac{2a+1}{4-a}$이므로

$f(f(2))=f\left(\dfrac{2a+1}{4-a}\right)=\dfrac{\dfrac{a(2a+1)}{4-a}+1}{\dfrac{2(2a+1)}{4-a}-a}=\dfrac{\dfrac{2(a^2+2)}{4-a}}{\dfrac{a^2+2}{4-a}}=2$

즉 $f(f(f(2)))=f(2)=1$이므로

$\dfrac{2a+1}{4-a}=1$, $2a+1=4-a$ $\qquad\therefore a=1$

48-1 답 1

$f(f(x))=\dfrac{\dfrac{a(ax+3)}{x-a}+3}{\dfrac{ax+3}{x-a}-a}=\dfrac{\dfrac{(a^2+3)x}{x-a}}{\dfrac{a^2+3}{x-a}}=x$이므로

$f(f(-2))=-2$

즉 $f(f(f(-2)))=f(-2)=-\dfrac{1}{3}$이므로

$\dfrac{-2a+3}{-2-a}=-\dfrac{1}{3}$, $-6a+9=2+a$

$-7a=-7$ $\qquad\therefore a=1$

49 답 $-\dfrac{1}{4}$

$f^1(x)=\dfrac{1}{1-x}$

$f^2(x)=f(f(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}$

$f^3(x)=f(f^2(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=x$

$f^4(x)=f(f^3(x))=f(x)$

$\vdots$

따라서 함수

$f^3(x)=f^6(x)=f^9(x)=\cdots=f^{3n}(x)$ (n은 자연수)

는 항등함수이므로

$f^{500}(x)=f^{3\times 166+2}(x)=f^2(x)$ ……❶

이때 $f^{500}(k)=f^2(k)=\dfrac{k-1}{k}=5$이므로

$k-1=5k \quad \therefore k=-\dfrac{1}{4}$ ……❷

채점 기준	비율
❶ $f^{500}(x)$를 구할 수 있다.	60%
❷ 실수 k의 값을 구할 수 있다.	40%

49-1 답 $\frac{1}{21}$

$f^1(x)=\dfrac{x}{x+1}$

$$f^2(x)=f(f(x))=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1}=\dfrac{x}{2x+1}$$

$$f^3(x)=f(f^2(x))=\dfrac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1}+1}=\dfrac{x}{3x+1}$$

$\vdots$

$\therefore f^n(x)=\dfrac{x}{nx+1}$ (n은 자연수)

이때 $f^{20}(k)=\dfrac{k}{20k+1}=\dfrac{1}{41}$이므로 $20k+1=41k$

$21k=1 \quad \therefore k=\dfrac{1}{21}$

50 답 0

두 함수 $y=\dfrac{2x+5}{x+3}$, $y=\dfrac{bx+c}{x+a}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

$y=\dfrac{2x+5}{x+3}$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x+3)=2x+5$, $x(y-2)=-3y+5$

$\therefore x=\dfrac{-3y+5}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{-3x+5}{x-2}$

따라서 $\dfrac{bx+c}{x+a}=\dfrac{-3x+5}{x-2}$이므로 $a=-2$, $b=-3$, $c=5$

$\therefore a+b+c=-2+(-3)+5=0$

50-1 답 0

$y=\dfrac{ax+1}{x+5}$이라 하고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x+5)=ax+1$, $x(y-a)=-5y+1$

$\therefore x=\dfrac{-5y+1}{y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{-5x+1}{x-a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-5x+1}{x-a}$

따라서 $\dfrac{bx+c}{x-4}=\dfrac{-5x+1}{x-a}$이므로 $a=4$, $b=-5$, $c=1$

$\therefore a+b+c=4+(-5)+1=0$

51 답 ③

$y=\dfrac{2x+1}{x-a}$이라 하고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x-a)=2x+1$, $x(y-2)=ay+1$

$\therefore x=\dfrac{ay+1}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{ax+1}{x-2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{ax+1}{x-2}$

이때 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로 $\dfrac{2x+1}{x-a}=\dfrac{ax+1}{x-2}$

$\therefore a=2$

51-1 답 4

$y=\dfrac{ax+1}{2x-4}$이라 하고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(2x-4)=ax+1$, $x(2y-a)=4y+1$

$\therefore x=\dfrac{4y+1}{2y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{4x+1}{2x-a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{4x+1}{2x-a}$

이때 $(f\circ f)(x)=x$에서 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로

$\dfrac{ax+1}{2x-4}=\dfrac{4x+1}{2x-a} \quad \therefore a=4$

52 답 $\frac{5}{2}$

함수 $f(x)=\dfrac{bx-2}{ax+1}$의 그래프가 점 $(2,\ -1)$을 지나므로

$-1=\dfrac{2b-2}{2a+1}$, $-2a-1=2b-2$

$\therefore 2a+2b=1$ ……㉠

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(2, -1)$을 지나므로

$f^{-1}(2)=-1 \quad \therefore f(-1)=2$

즉 $2=\dfrac{-b-2}{-a+1}$이므로 $-2a+2=-b-2$

$\therefore 2a-b=4$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{3}{2}$, $b=-1$

$\therefore a-b=\dfrac{3}{2}-(-1)=\dfrac{5}{2}$

Lecture 함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지난다.

➡ $f^{-1}(a)=b$이므로 $f(b)=a$

52-1 답 ②

$f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$이므로 $\dfrac{-\dfrac{5b}{2}+4}{-5+a}=-\dfrac{1}{2}$

$-a+5=-5b+8 \qquad \therefore a-5b=-3$ ······ ㉠

또 $f^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{2}$이므로 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{2}$

즉 $\frac{-\frac{b}{2}+4}{-1+a}=-\frac{5}{2}$이므로 $-5a+5=-b+8$

$\therefore 5a-b=-3$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

$\therefore 4ab=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=-1$

53 답 $\frac{7}{2}$

$f^{-1}(1)=3$에서 $f(3)=1$이므로 $\frac{3a+1}{3b-2}=1$

$3a+1=3b-2 \qquad \therefore a-b=-1$ ······ ㉠

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(1)=\frac{3}{2}$이므로 $\frac{a+1}{b-2}=\frac{3}{2}$

$2a+2=3b-6 \qquad \therefore 2a-3b=-8$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=6$

따라서 $f(x)=\frac{5x+1}{6x-2}$이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5\times\frac{1}{2}+1}{6\times\frac{1}{2}-2}=\frac{7}{2}$$

53-1 답 $-\frac{2}{5}$

$f^{-1}(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로 $\frac{2b+7}{2a-7}=1$

$2b+7=2a-7 \qquad \therefore a-b=7$ ······ ㉠

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(1)=8$이므로 $\frac{b+7}{a-7}=8$

$b+7=8a-56 \qquad \therefore 8a-b=63$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $b=1$

따라서 $f(x)=\frac{x+7}{8x-7}$이므로

$f(-1)=\frac{6}{-15}=-\frac{2}{5}$

54 답 $\frac{2}{3}$

$f(g(x))=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$g(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로 $\frac{6-2}{2+k}=1$

$k+2=4 \qquad \therefore k=2$

$\therefore f(x)=\frac{3x-2}{x+2}$

$g(-1)=a$라 하면 $f(a)=-1$이므로

$\frac{3a-2}{a+2}=-1$, $3a-2=-a-2 \qquad \therefore a=0$

즉 $g(-1)=0$이므로 $(g\circ g)(-1)=g(g(-1))=g(0)$

$g(0)=b$라 하면 $f(b)=0$이므로

$\frac{3b-2}{b+2}=0$, $3b-2=0 \qquad \therefore b=\frac{2}{3}$

$\therefore (g\circ g)(-1)=\frac{2}{3}$

다른 풀이

$f(g(x))=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$g(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로 $\frac{6-2}{2+k}=1$

$k+2=4 \qquad \therefore k=2$

$\therefore f(x)=\frac{3x-2}{x+2}$

$y=\frac{3x-2}{x+2}$라 하고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x+2)=3x-2$, $x(y-3)=-2y-2$

$\therefore x=\frac{-2y-2}{y-3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{-2x-2}{x-3}$

$\therefore g(x)=\frac{-2x-2}{x-3}$

따라서 $g(-1)=0$, $g(0)=\frac{2}{3}$이므로

$(g\circ g)(-1)=g(g(-1))=g(0)=\frac{2}{3}$

54-1 답 0

$f(g(x))=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$g(-2)=2$에서 $f(2)=-2$이므로

$\frac{-10+k}{4-1}=-2$, $k-10=-6 \qquad \therefore k=4$

$\therefore f(x)=\frac{-5x+4}{2x-1}$

$g\left(-\frac{8}{3}\right)=a$라 하면 $f(a)=-\frac{8}{3}$이므로

$\frac{-5a+4}{2a-1}=-\frac{8}{3}$, $-15a+12=-16a+8 \qquad \therefore a=-4$

즉 $g\left(-\frac{8}{3}\right)=-4$이므로

$(g\circ g)\left(-\frac{8}{3}\right)=g\left(g\left(-\frac{8}{3}\right)\right)=g(-4)$

$g(-4)=b$라 하면 $f(b)=-4$이므로

$\frac{-5b+4}{2b-1}=-4$, $-5b+4=-8b+4 \qquad \therefore b=0$

$\therefore (g\circ g)\left(-\frac{8}{3}\right)=0$

55 답 ①

$$\begin{aligned}(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(a)&=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(a)\\&=(f^{-1}\circ g)(a)\\&=f^{-1}(g(a))\end{aligned}$$

이므로 $f^{-1}(g(a))=1$에서 $g(a)=f(1)$

이때 $f(1)=\frac{1-1}{1+1}=0$이므로

$g(a)=\frac{4a}{a+2}=0 \qquad \therefore a=0$

55-1 답 ③

$$\begin{aligned}(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(a)&=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(a)\\&=(g^{-1}\circ f)(a)\\&=g^{-1}(f(a))\end{aligned}$$

이므로 $g^{-1}(f(a))=0$에서 $f(a)=g(0)$

이때 $g(0)=\dfrac{-1}{-1}=1$이므로

$f(a)=\dfrac{-5a+1}{a+7}=1,\ -5a+1=a+7$

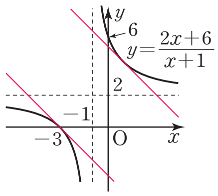
$\therefore a=-1$

유형+ 완성하기 p. 284

56 답 5

$y=\dfrac{2x+6}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+4}{x+1}=\dfrac{4}{x+1}+2$

이므로 함수 $y=\dfrac{2x+6}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $n(P\cap Q)=1$이므로 함수 $y=\dfrac{2x+6}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$는 한 점에서 만난다.

두 그래프가 한 점에서 만나려면 $\dfrac{2x+6}{x+1}=-x+k$, 즉 $x^2+(3-k)x+6-k=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(3-k)^2-4(6-k)=0$

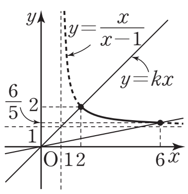
$k^2-2k-15=0,\ (k+3)(k-5)=0$

$\therefore k=5\ (\because k>0)$

57 답 $\dfrac{4}{5}$

$y=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+1$

이므로 $2\le x\le 6$에서 함수 $y=\dfrac{x}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 직선 $y=kx$는 k의 값에 관계없이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로 두 그래프의 교점이 존재하려면 기울기 k의 값은 점 $\left(6,\ \dfrac{6}{5}\right)$을 지날 때보다 크거나 같고, 점 $(2,\ 2)$를 지날 때보다 작거나 같아야 한다.

(i) 직선 $y=kx$가 점 $\left(6,\ \dfrac{6}{5}\right)$을 지날 때

$\dfrac{6}{5}=6k \qquad \therefore k=\dfrac{1}{5}$

(ii) 직선 $y=kx$가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때

$2=2k \qquad \therefore k=1$

(i), (ii)에서 $\dfrac{1}{5}\le k\le 1$

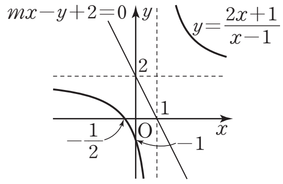
따라서 $M=1,\ m=\dfrac{1}{5}$이므로

$M-m=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$

58 답 $-12<m\le 0$

$y=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+2$

이므로 함수 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 직선 $mx-y+2=0$, 즉 $y=mx+2$는 m의 값에 관계없이 점 $(0,\ 2)$를 지난다.

(i) $m=0$일 때, 두 그래프는 만나지 않는다.

(ii) $m\neq 0$일 때, 두 그래프가 만나지 않으려면

$\dfrac{2x+1}{x-1}=mx+2$, 즉 $mx^2-mx-3=0$이 실근을 갖지 않아야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-m)^2-4\times m\times(-3)<0,\ m^2+12m<0$

$m(m+12)<0 \qquad \therefore -12<m<0$

(i), (ii)에서 $-12<m\le 0$

59 답 $4\sqrt{2}$

$y=\dfrac{8}{x-1}$의 그래프 위의 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{8}{t-1}\right)\ (t>1)$이라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{8}{t-1},\ \overline{\mathrm{PR}}=t-1$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}=\dfrac{8}{t-1}+t-1$

이때 $t-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}&=\dfrac{8}{t-1}+t-1\\&\ge 2\sqrt{\dfrac{8}{t-1}\times(t-1)}\\&=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{8}{t-1}=t-1, \text{ 즉 } t=1+2\sqrt{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $t=1+2\sqrt{2}$일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 최솟값은 $4\sqrt{2}$이다.

60 답 11

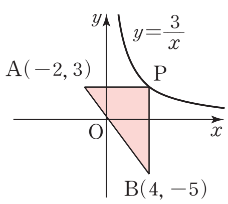
두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\dfrac{-5-3}{4+2}(x+2)$

$\therefore 4x+3y-1=0$

점 P의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{3}{t}\right)\ (t>0)$이라 하면 점 P와 직선 $4x+3y-1=0$ 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{\left|4t+\dfrac{9}{t}-1\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{\left|4t+\dfrac{9}{t}-1\right|}{5}$



$\triangle$PAB의 밑변을 $\overline{\mathrm{AB}}$라 하면 $\triangle$PAB의 넓이는 높이 d가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

이때 $t>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}4t+\dfrac{9}{t}&\ge 2\sqrt{4t\times\dfrac{9}{t}}\\&=12\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } 4t=\dfrac{9}{t}, \text{ 즉 } t=\dfrac{3}{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 d의 최솟값은 $\frac{|12-1|}{5}=\frac{11}{5}$이므로 △PAB의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\frac{11}{5}=\frac{1}{2}\times\sqrt{(4+2)^2+(-5-3)^2}\times\frac{11}{5}$$
$$=\frac{1}{2}\times10\times\frac{11}{5}=11$$

61 답 11

$A\left(a, \frac{1}{a}\right)(a>0)$이라 하면 $B\left(ak, \frac{1}{a}\right)$, $C\left(a, \frac{k}{a}\right)$

$\therefore \overline{AB}=|ak-a|=|a(k-1)|$, $\overline{AC}=\left|\frac{k}{a}-\frac{1}{a}\right|=\left|\frac{k-1}{a}\right|$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 50이므로

$\frac{1}{2}\times|a(k-1)|\times\left|\frac{k-1}{a}\right|=50$

$(k-1)^2=100$, $k-1=\pm10$

$\therefore k=11\ (\because k>0)$

학교 시험 대비 문제

p. 285~288

01 답 ②

$\frac{x^2-3x+2}{x+7}\times\frac{x+2}{x^2+ax+b}\div\frac{x^2+x-2}{x^2+10x+21}$

$=\frac{(x-1)(x-2)}{x+7}\times\frac{x+2}{x^2+ax+b}\div\frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x+7)}$

$=\frac{(x-1)(x-2)}{x+7}\times\frac{x+2}{x^2+ax+b}\times\frac{(x+3)(x+7)}{(x+2)(x-1)}$

$=\frac{(x+3)(x-2)}{x^2+ax+b}=\frac{x^2+x-6}{x^2+ax+b}$

분자, 분모의 최고차항의 계수가 같고, 계산한 결과가 상수이므로

$x^2+ax+b=x^2+x-6$ $\quad\therefore a=1, b=-6$

$\therefore a+b=1+(-6)=-5$

02 답 -4

주어진 식의 좌변을 통분하면

$\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}=\frac{a(x+1)^2+bx(x+1)+cx}{x(x+1)^2}$

$=\frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(x+1)^2}$

즉 $\frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(x+1)^2}=\frac{3x+2}{x(x+1)^2}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=2$, $a+b=0$, $2a+b+c=3$

$a=2$를 $a+b=0$에 대입하면

$2+b=0$ $\quad\therefore b=-2$

$a=2$, $b=-2$를 $2a+b+c=3$에 대입하면

$4-2+c=3$ $\quad\therefore c=1$

$\therefore abc=2\times(-2)\times1=-4$

03 답 ①

$\frac{1}{(x-2)(x-1)}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}$

$=\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)+\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)$

$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$

$=\frac{x+2-(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\frac{4}{(x-2)(x+2)}$

즉 $\frac{4}{(x-2)(x+2)}=\frac{c}{(x+a)(x+b)}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=-2$, $b=2$, $c=4$ 또는 $a=2$, $b=-2$, $c=4$

$\therefore a+b+c=4$

04 답 ③

$a+b+c=0$에서 $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$이므로

$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}=-3$

05 답 ①

$\frac{x+y}{2z}=\frac{y+2z}{x}=\frac{2z+x}{y}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$x+y=2zk$ ……㉠

$y+2z=xk$ ……㉡

$2z+x=yk$ ……㉢

㉠+㉡+㉢을 하면 $2(x+y+2z)=k(x+y+2z)$

이때 $x+y+2z\neq0$이므로 양변을 $x+y+2z$로 나누면

$k=2$

㉠−㉡을 하면 $x-2z=2(2z-x)$이므로 $2z=x$ ……㉣

㉡−㉢을 하면 $y-x=2(x-y)$이므로 $x=y$ ……㉤

㉣, ㉤에서 $x=y=2z$

$\therefore \frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=\frac{(2z)^3+(2z)^3+z^3}{2z\times2z\times z}=\frac{17z^3}{4z^3}=\frac{17}{4}$

06 답 ②

$y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{k}{x+2}+3$

이 함수의 그래프가 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$2=\frac{k}{-1+2}+3$ $\quad\therefore k=-1$

07 답 ①

$f(x)=\frac{bx}{ax+1}=\frac{\frac{b}{a}x}{x+\frac{1}{a}}=\frac{\frac{b}{a}\left(x+\frac{1}{a}\right)-\frac{b}{a^2}}{x+\frac{1}{a}}=\frac{-\frac{b}{a^2}}{x+\frac{1}{a}}+\frac{b}{a}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 정의역과 치역은

정의역: $\left\{x\,\middle|\,x\neq-\frac{1}{a}\text{인 실수}\right\}$, 치역: $\left\{y\,\middle|\,y\neq\frac{b}{a}\text{인 실수}\right\}$

이때 정의역과 치역이 같으므로 $-\frac{1}{a}=\frac{b}{a}$

$\therefore b=-1$

즉 직선 $y=2x+3$이 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점 $\left(-\frac{1}{a}, -\frac{1}{a}\right)$을 지나므로

$-\frac{1}{a}=-\frac{2}{a}+3$, $\frac{1}{a}=3$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$

$\therefore a+b=\frac{1}{3}+(-1)=-\frac{2}{3}$

08 답 ④

함수 $y=\frac{k}{x-1}+5$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=5$

즉 두 점근선의 교점은 $(1, 5)$이므로

$2a+1=5$ $\quad\therefore a=2$

함수 $y=\frac{k}{x-1}+5$의 그래프가 점 $(5, 6)$을 지나므로

$6=\frac{k}{5-1}+5$, $\frac{k}{4}=1$ $\quad\therefore k=4$

09 답 -3

두 점근선의 교점의 좌표가 $(1, 3)$이므로 주어진 함수를 $y=\frac{k}{x-1}+3$ $(k\neq0)$으로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(3, 5)$를 지나므로

$5=\frac{k}{3-1}+3$, $\frac{k}{2}=2$ $\quad\therefore k=4$

따라서 $y=\frac{4}{x-1}+3=\frac{4+3(x-1)}{x-1}=\frac{3x+1}{x-1}$이므로

$a=3$, $b=1$, $c=-1$

$\therefore abc=3\times1\times(-1)=-3$

10 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$y=\frac{2x-1}{x-1}=\frac{2(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+2$

ㄱ. 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=2$이므로 이 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(1, 2)$에 대하여 대칭이다.

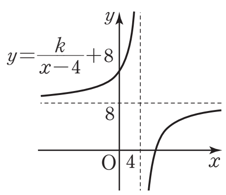
ㄴ, ㄷ. 이 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(1, 2)$를 지나고 기울기가 ±1인 직선, 즉 두 직선 $y=\pm(x-1)+2$에 대하여 대칭이다. 즉 이 함수의 그래프는 두 직선 $y=x+1$, $y=-x+3$에 대하여 대칭이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 답 32

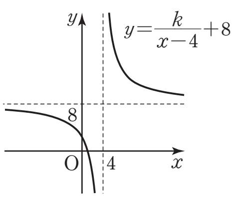
(i) $k<0$일 때

k의 값에 관계없이 $y=\frac{k}{x-4}+8$의 그래프는 제1, 2, 4사분면을 지난다.



(ii) $k>0$일 때

그래프가 제1, 2, 4사분면만을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 크거나 같아야 하므로



$-\frac{k}{4}+8\geq0$, $-\frac{k}{4}\geq-8$

$\therefore k\leq32$

그런데 $k>0$이므로 $0<k\leq32$

(i), (ii)에서 $k<0$ 또는 $0<k\leq32$

따라서 정수 k의 최댓값은 32이다.

12 답 ㄴ, ㄷ

함수 $y=\frac{a}{x+b}+c$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-b$, $y=c$이므로 주어진 그래프에서

$-b<0$, $c<0$ $\quad\therefore b>0$, $c<0$

함수 $y=\frac{a}{x}$의 그래프는 제2, 4사분면을 지나므로 $a<0$

ㄱ. $a<0$, $c<0$이므로 $ac>0$

ㄴ. 주어진 함수의 그래프가 점 $(0, -3)$을 지나므로

$-3=\frac{a}{b}+c$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 $c=-3-\frac{a}{b}$이므로 $c>-4$이면

$-3-\frac{a}{b}>-4$ $\quad\therefore \frac{a}{b}<1$

이때 $b>0$이므로 $a<b$

ㄷ. ㉠에서 $\frac{a}{b}=-3-c$ $\quad\therefore a=b(-3-c)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

주어진 함수의 그래프가 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$0=\frac{a}{-1+b}+c$, $\frac{a}{b-1}=-c$

$\therefore a=-c(b-1)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $b(-3-c)=-c(b-1)$

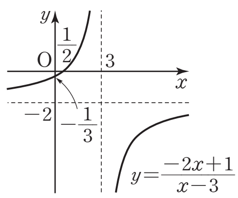
$\frac{b}{b-1}=\frac{-c}{-c-3}$ $\quad\therefore \frac{b}{b-1}=\frac{c}{c+3}$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

13 답 ④

$y=\frac{-2x+1}{x-3}=\frac{-2(x-3)-5}{x-3}=-\frac{5}{x-3}-2$

이므로 함수 $y=\frac{-2x+1}{x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 그래프는 제1, 3, 4사분면을 지난다.

② 그래프의 점근선은 두 직선 $x=3$, $y=-2$이다.

③ 그래프는 두 점근선의 교점인 점 $(3, -2)$에 대하여 대칭이다.

④ 정의역: $\{x|x\neq3$인 실수$\}$, 치역: $\{y|y\neq-2$인 실수$\}$

⑤ 그래프는 함수 $y=-\frac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

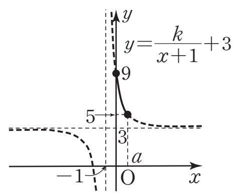
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

14 답 8

$y=\frac{k}{x+1}+3$의 그래프는 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

이때 $k>0$이므로 $0\leq x\leq a$에서

$y=\frac{k}{x+1}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=0$일 때 최댓값 9를 가지므로

$k+3=9$ $\quad\therefore k=6$

$x=a$일 때 최솟값 5를 가지므로 $\dfrac{k}{a+1}+3=5$

$\dfrac{6}{a+1}+3=5,\ \dfrac{6}{a+1}=2$

$a+1=3\qquad \therefore a=2$

$\therefore k+a=6+2=8$

15 답 ⑤

$f(10)=\dfrac{10+1}{10-1}=\dfrac{11}{9}$이므로

$(f\circ f)(10)=f(f(10))=f\left(\dfrac{11}{9}\right)=\dfrac{\dfrac{11}{9}+1}{\dfrac{11}{9}-1}=\dfrac{\dfrac{20}{9}}{\dfrac{2}{9}}=10$

16 답 ⑤

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1,\ y=1$이므로 주어진 함수를 $y=\dfrac{k}{x-1}+1\ (k<0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=-k+1\qquad \therefore k=-1$

$\therefore f(x)=\dfrac{-1}{x-1}+1=\dfrac{-1+(x-1)}{x-1}=\dfrac{x-2}{x-1}$

$f^1(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$

$f^2(x)=f(f(x))=\dfrac{\dfrac{x-2}{x-1}-2}{\dfrac{x-2}{x-1}-1}=\dfrac{\dfrac{x-2-2(x-1)}{x-1}}{\dfrac{x-2-(x-1)}{x-1}}=x$

$f^3(x)=f(f^2(x))=f(x)$

$\vdots$

따라서 함수

$f^2(x)=f^4(x)=f^6(x)=\cdots=f^{2n}(x)$ (n은 자연수)

는 항등함수이므로

$f^{625}(x)=f^{2\times 312+1}(x)=f(x)$

$\therefore f^{625}(0)=f(0)=\dfrac{0-2}{0-1}=2$

17 답 ①

두 함수 $y=\dfrac{ax+1}{2x-6},\ y=\dfrac{bx+1}{2x+6}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

$y=\dfrac{ax+1}{2x-6}$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(2x-6)=ax+1,\ x(2y-a)=6y+1$

$\therefore x=\dfrac{6y+1}{2y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{6x+1}{2x-a}$

따라서 $\dfrac{6x+1}{2x-a}=\dfrac{bx+1}{2x+6}$이므로 $a=-6,\ b=6$

$\therefore ab=-6\times 6=-36$

18 답 ①

함수 $y=\dfrac{ax+b}{x-1}$의 그래프가 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{-a+b}{-1-1}\qquad \therefore a-b=4$ ······㉠

$y=\dfrac{ax+b}{x-1}$의 역함수의 그래프가 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$y=\dfrac{ax+b}{x-1}$의 그래프는 점 $(2, -1)$을 지난다.

즉 $-1=\dfrac{2a+b}{2-1}$이므로 $2a+b=-1$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-3$

$\therefore a+b=1+(-3)=-2$

19 답 5

$f^{-1}(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로 $\dfrac{2a-1}{2b+1}=1$

$2a-1=2b+1\qquad \therefore a-b=1$ ······㉠

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(1)=\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{a-1}{b+1}=\dfrac{1}{2},\ 2a-2=b+1\qquad \therefore 2a-b=3$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=1$

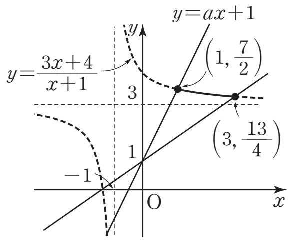
따라서 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$이므로

$f(-2)=\dfrac{-4-1}{-2+1}=5$

20 답 ③

$y=\dfrac{3x+4}{x+1}=\dfrac{3(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+3$

이므로 $1\le x\le 3$에서 함수 $y=\dfrac{3x+4}{x+1}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 직선 $y=ax+1$은 a의 값에 관계없이 점 $(0, 1)$을 지나므로 두 그래프의 교점이 존재하려면 기울기 a의 값은 점 $\left(3, \dfrac{13}{4}\right)$을 지날 때보다 크거나 같고, 점 $\left(1, \dfrac{7}{2}\right)$을 지날 때보다 작거나 같아야 한다.

(i) 직선 $y=ax+1$이 점 $\left(3, \dfrac{13}{4}\right)$을 지날 때

$\dfrac{13}{4}=3a+1\qquad \therefore a=\dfrac{3}{4}$

(ii) 직선 $y=ax+1$이 점 $\left(1, \dfrac{7}{2}\right)$을 지날 때

$\dfrac{7}{2}=a+1\qquad \therefore a=\dfrac{5}{2}$

(i), (ii)에서 $\dfrac{3}{4}\le a\le\dfrac{5}{2}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $\dfrac{5}{2}$, 최솟값은 $\dfrac{3}{4}$이므로 그 합은

$\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{13}{4}$

21 답 $\dfrac{14}{3}$

$f(x)=\dfrac{12}{3x-2}$의 그래프 위의 점 A의 좌표를

$\mathrm{A}\left(t, \dfrac{12}{3t-2}\right)\ \left(t>\dfrac{2}{3}\right)$라 하면 $\mathrm{B}(t, -t)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{12}{3t-2}-(-t)=\dfrac{12}{3t-2}+t$

이때 $t>\frac{2}{3}$에서 $3t-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{12}{3t-2}+t&=\frac{12}{3t-2}+\frac{3t-2}{3}+\frac{2}{3}\\&\geq 2\sqrt{\frac{12}{3t-2}\times\frac{3t-2}{3}}+\frac{2}{3}\\&=4+\frac{2}{3}=\frac{14}{3}\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 }\frac{12}{3t-2}=\frac{3t-2}{3}\text{, 즉 }t=\frac{8}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이의 최솟값은 $\frac{14}{3}$이다.

서술형 1 답 $-\frac{4}{9}$

$y=\frac{x-1}{3x+1}=\frac{\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{9}}{x+\frac{1}{3}}=-\frac{\frac{4}{9}}{x+\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}$ ······❶

즉 $y=\frac{x-1}{3x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$만큼, y축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$만큼 평행이동하면 $y=-\frac{\frac{4}{9}}{x}$의 그래프와 겹쳐지므로

$m=\frac{1}{3},\ n=-\frac{1}{3},\ k=-\frac{4}{9}$ ······❷

$\therefore m+n+k=\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{4}{9}\right)=-\frac{4}{9}$ ······❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수의 식을 변형할 수 있다.	40%
❷ m,n,k의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $m+n+k$의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 2 답 4

$$\begin{aligned}(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(a)&=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(a)\\&=(f^{-1}\circ g)(a)\\&=f^{-1}(g(a))\end{aligned}$$ ······❶

이므로 $f^{-1}(g(a))=3$에서 $g(a)=f(3)$ ······❷

이때 $f(3)=\frac{12}{3+1}=3$이므로

$g(a)=\frac{2a+1}{a-1}=3,\ 2a+1=3a-3$

$\therefore a=4$ ······❸

채점 기준	비율
❶ $(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(a)$를 간단히 할 수 있다.	40%
❷ $g(a)=f(3)$임을 알 수 있다.	30%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%

서술형 3 답 4

함수 f의 역함수를 f^{-1}라 하면

$(f\circ f)(a)=a$에서 $(f^{-1}\circ f\circ f)(a)=f^{-1}(a)$

$\therefore f(a)=f^{-1}(a)$ ······❶

이를 만족시키는 실수 a가 오직 하나뿐이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 한 점에서 만난다.

$\frac{2x-4}{x+c}=x$에서 $x^2+(c-2)x+4=0$ ······㉠

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=(c-2)^2-4\times4=0,\ c^2-4c-12=0$

$(c+2)(c-6)=0\quad\therefore c=6\ (\because c\neq-2)$ ······❷

$c=6$을 ㉠에 대입하면 $x^2+4x+4=0$

$(x+2)^2=0\quad\therefore x=-2$, 즉 $a=-2$ ······❸

$\therefore c+a=6+(-2)=4$ ······❹

채점 기준	비율
❶ $f(a)=f^{-1}(a)$임을 알 수 있다.	20%
❷ c의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $c+a$의 값을 구할 수 있다.	10%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 289~290

01 답 ④

$n=3$일 때

$f(x)=\frac{x+21}{x-3}=\frac{x-3+24}{x-3}=\frac{24}{x-3}+1$

즉 점근선의 방정식은 $x=3,\ y=1$이므로

$p=3,\ q=1$

$\therefore p+q=3+1=4$

02 답 14

$f(x)=\frac{4x+9}{x-1}=\frac{4(x-1)+13}{x-1}=\frac{13}{x-1}+4$이므로 점근선의 방정식은 $x=1,\ y=4\quad\therefore a=1,\ b=4$

$\therefore a+b=1+4=5$

$f^{-1}(a+b)=f^{-1}(5)=k$라 하면 $f(k)=5$이므로

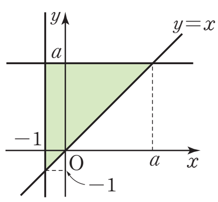
$\frac{4k+9}{k-1}=5,\ 4k+9=5k-5\quad\therefore k=14$

$\therefore f^{-1}(a+b)=14$

03 답 ①

$f(x)=\frac{ax}{x+1}=\frac{a(x+1)-a}{x+1}=-\frac{a}{x+1}+a$이므로 점근선의 방정식은 $x=-1,\ y=a$

오른쪽 그림에서 두 직선 $x=-1,\ y=a$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이는 18이므로



$\frac{1}{2}(a+1)^2=18,\ (a+1)^2=36$

$a+1=\pm6\quad\therefore a=-7$ 또는 $a=5$

그런데 $a>0$이므로 $a=5$

04 답 ⑤

$y=\frac{2x+5}{x+3}$라 하고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x+3)=2x+5,\ x(y-2)=-3y+5$

$\therefore x=\frac{-3y+5}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{-3x+5}{x-2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-3x+5}{x-2}$

이때 $f^{-1}(x)=\dfrac{-3x+5}{x-2}=\dfrac{-3(x-2)-1}{x-2}=-\dfrac{1}{x-2}-3$이므로 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=-3$

함수 $f^{-1}(x)$의 그래프는 두 점근선의 교점인 점 $(2,\ -3)$에 대하여 대칭이므로 $p=2,\ q=-3$

$\therefore p-q=2-(-3)=5$

다른 풀이

$f(x)=\dfrac{2x+5}{x+3}=\dfrac{2(x+3)-1}{x+3}=-\dfrac{1}{x+3}+2$이므로 점근선의 방정식은 $x=-3,\ y=2$

$f(x)$의 그래프는 두 점근선의 교점인 점 $(-3,\ 2)$에 대하여 대칭이다.

또 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

점 $(-3,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 점 $(2,\ -3)$이므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(2,\ -3)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $p=2,\ q=-3$이므로

$p-q=2-(-3)=5$

05 답 ①

$\triangle$AFD $\backsim$ $\triangle$EFC이므로 $\overline{AD}:\overline{EC}=\overline{DF}:\overline{CF}$

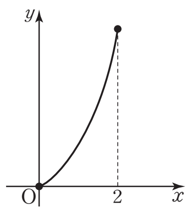
$3:x=\{f(x)+2\}:f(x),\ x\{f(x)+2\}=3f(x)$

$xf(x)+2x=3f(x),\ (x-3)f(x)=-2x$

$\therefore f(x)=\dfrac{-2x}{x-3}$

$f(x)=\dfrac{-2x}{x-3}=\dfrac{-2(x-3)-6}{x-3}=-\dfrac{6}{x-3}-2$

따라서 $0\le x\le 2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

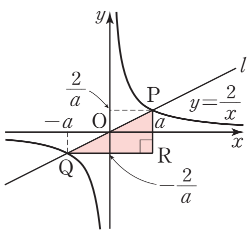


참고 $\triangle$AFD와 $\triangle$EFC에서
$\angle$FAD$=\angle$FEC(동위각), $\angle$FDA$=\angle$FCE(동위각)
$\therefore$ $\triangle$AFD $\backsim$ $\triangle$EFC (AA 닮음)

06 답 ①

$P\left(a,\ \dfrac{2}{a}\right)(a>0)$라 하면 두 점 P, Q는 원점에 대하여 대칭이므로

$Q\left(-a,\ -\dfrac{2}{a}\right)\qquad \therefore R\left(a,\ -\dfrac{2}{a}\right)$



위의 그림에서

$\overline{QR}=|a-(-a)|=|2a|=2a$,

$\overline{PR}=\left|\dfrac{2}{a}-\left(-\dfrac{2}{a}\right)\right|=\left|\dfrac{4}{a}\right|=\dfrac{4}{a}$

$\therefore \triangle PQR=\dfrac{1}{2}\times 2a\times\dfrac{4}{a}=4$

07 답 ④

점 A에서 x축, y축에 이르는 거리는 각각 $\dfrac{4}{a},\ a\ (a>0)$이므로

직사각형 ACDB의 둘레의 길이는

$4\left(a+\dfrac{4}{a}\right)$

이때 $a>0,\ \dfrac{4}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+\dfrac{4}{a}\ge 2\sqrt{a\times\dfrac{4}{a}}$

$\qquad =4\left(\text{단, 등호는 } a=\dfrac{4}{a},\ \text{즉 } a=2\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore 4\left(a+\dfrac{4}{a}\right)\ge 16$

따라서 직사각형 ACDB의 둘레의 길이의 최솟값은 16이다.

08 답 ④

곡선 $y=\dfrac{k}{x-2}+1$이 x축과 만나는 점의 좌표를 구하면

$0=\dfrac{k}{x-2}+1$에서 $\dfrac{k}{x-2}=-1$

$k=-x+2\qquad \therefore x=-k+2$

$\therefore A(-k+2,\ 0)$

곡선 $y=\dfrac{k}{x-2}+1$이 y축과 만나는 점의 좌표를 구하면

$y=-\dfrac{k}{2}+1\qquad \therefore B\left(0,\ -\dfrac{k}{2}+1\right)$

곡선 $y=\dfrac{k}{x-2}+1$의 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=1$이므로

$C(2,\ 1)$

이때 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로 두 직선 AC, BC의 기울기가 같다.

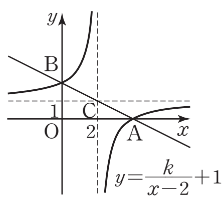
즉 $\dfrac{1-0}{2-(-k+2)}=\dfrac{1-\left(-\dfrac{k}{2}+1\right)}{2-0}$이므로 $\dfrac{1}{k}=\dfrac{k}{4}$

$k^2=4\qquad \therefore k=\pm 2$

그런데 $k<0$이므로 $k=-2$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\dfrac{k}{x-2}+1\ (k<0)$의 두 점근선의 교점 $C(2,\ 1)$과 곡선 위의 두 점 A, B가 한 직선 위에 있으려면 두 점 A, B는 점 C에 대하여 대칭이어야 한다.



이때 두 점 A, B가 각각 x축, y축 위의 점이므로 두 점의 좌표를 각각 $A(a,\ 0),\ B(0,\ b)$라 하면 점 C가 선분 AB의 중점이므로

$\dfrac{a+0}{2}=2,\ \dfrac{0+b}{2}=1$

$\therefore a=4,\ b=2$

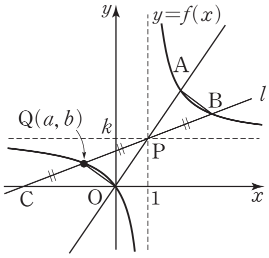
따라서 곡선 $y=\dfrac{k}{x-2}+1$이 점 $A(4,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{4-2}+1,\ \dfrac{k}{2}=-1$

$\therefore k=-2$

09 답 20

다음 그림과 같이 직선 l과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 Q(a, b)라 하자.



이때 $\triangle$APB$\equiv\triangle$OPQ이고 $2S_1=S_2$이므로

$\overline{\text{PB}}=\overline{\text{PQ}}=\overline{\text{CQ}}$

$\overline{\text{PQ}}=\overline{\text{CQ}}$에서 점 Q는 $\overline{\text{CP}}$의 중점이므로 점 C의 좌표를 C$(c, 0)$이라 하면

$a=\frac{c+1}{2}$, $b=\frac{0+k}{2}=\frac{k}{2}$ $\quad\therefore$ Q$\left(a, \frac{k}{2}\right)$

이때 점 Q는 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$\frac{k}{2}=\frac{k}{a-1}+k$, $-\frac{k}{2}=\frac{k}{a-1}$

$a-1=-2 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore$ Q$\left(-1, \frac{k}{2}\right)$

$a=\frac{c+1}{2}$에서 $-1=\frac{c+1}{2}$

$c+1=-2 \qquad \therefore c=-3$

$\therefore$ C$(-3, 0)$

직선 l은 두 점 P$(1, k)$, C$(-3, 0)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$y-0=\frac{k-0}{1-(-3)}(x+3)$, $y=\frac{k}{4}(x+3)$

$\therefore kx-4y+3k=0$

이때 원점과 직선 l 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+(-4)^2}}=1$, $|3k|=\sqrt{k^2+16}$

양변을 제곱하면 $9k^2=k^2+16$

$8k^2=16 \qquad \therefore k^2=2$

$\therefore 10k^2=10\times2=20$

참고 $\triangle$APB와 $\triangle$OPQ에서
$\overline{\text{PB}}=\overline{\text{PQ}}$, $\angle$APB$=\angle$OPQ(맞꼭지각), $\overline{\text{AP}}=\overline{\text{OP}}$
$\therefore$ $\triangle$APB$\equiv\triangle$OPQ (SAS 합동)

12 무리식과 무리함수

Ⅲ 함수

개념 완성하기

p. 293~294

01 답 ㄱ, ㄷ

02 답 $x\ge -1$

$2x+2\ge 0$이어야 하므로 $x\ge -1$

03 답 $x<3$

$3-x>0$이어야 하므로 $x<3$

04 답 $-4\le x\le 1$

$1-x\ge 0$, $x+4\ge 0$이어야 하므로

$x\le 1$, $x\ge -4$ $\quad\therefore -4\le x\le 1$

05 답 $\frac{1}{3}<x\le\frac{1}{2}$

$3x-1>0$, $1-2x\ge 0$이어야 하므로

$x>\frac{1}{3}$, $x\le\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \frac{1}{3}<x\le\frac{1}{2}$

06 답 $a-4$

$a>4$에서 $a-4>0$이므로

$\sqrt{a^2-8a+16}=\sqrt{(a-4)^2}=|a-4|=a-4$

07 답 $-a+3$

$a<3$에서 $a-3<0$이므로

$\sqrt{a^2-6a+9}=\sqrt{(a-3)^2}=|a-3|=-a+3$

08 답 7

$-1<a<6$에서 $a+1>0$, $a-6<0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2-12a+36}&=\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-6)^2}\\&=|a+1|+|a-6|\\&=a+1-(a-6)=7\end{aligned}$$

09 답 4

$-4<a<0$에서 $a<0$, $a+4>0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2}+\sqrt{a^2+8a+16}&=\sqrt{a^2}+\sqrt{(a+4)^2}\\&=|a|+|a+4|\\&=-a+(a+4)\\&=4\end{aligned}$$

10 답 $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}&=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}\\&=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-(x-1)}\\&=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\end{aligned}$$

11 답 $\sqrt{x+1}+1$

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}&=\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}\\&=\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(x+1)-1}\\&=\sqrt{x+1}+1\end{aligned}$$

12 답 $\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{2}{x-\sqrt{x^2-4}}&=\frac{2(x+\sqrt{x^2-4})}{(x-\sqrt{x^2-4})(x+\sqrt{x^2-4})}\\&=\frac{2(x+\sqrt{x^2-4})}{x^2-(x^2-4)}=\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\end{aligned}$$

13 답 $2x+\sqrt{4x^2-1}$

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}\\&=\frac{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1})^2}{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1})}\\&=\frac{2x+1+2\sqrt{2x+1}\sqrt{2x-1}+2x-1}{(2x+1)-(2x-1)}\\&=\frac{4x+2\sqrt{4x^2-1}}{2}\\&=2x+\sqrt{4x^2-1}\end{aligned}$$

14 답 $-\frac{2}{x}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\sqrt{x+1}}+\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}&=\frac{(1+\sqrt{x+1})+(1-\sqrt{x+1})}{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}\\&=\frac{2}{1-(x+1)}=-\frac{2}{x}\end{aligned}$$

15 답 $\frac{2(1+x)}{1-x}$

$$\begin{aligned}\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}&=\frac{(1+\sqrt{x})^2+(1-\sqrt{x})^2}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\\&=\frac{1+2\sqrt{x}+x+1-2\sqrt{x}+x}{1-x}\\&=\frac{2(1+x)}{1-x}\end{aligned}$$

16 답 $-2\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}&\frac{x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}-\frac{x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}\\&=\frac{x\{(\sqrt{x+3}-\sqrt{3})-(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})\}}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})(\sqrt{x+3}-\sqrt{3})}\\&=\frac{-2\sqrt{3}x}{(x+3)-3}=-2\sqrt{3}\end{aligned}$$

17 답 4

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}&=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)+(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}\\&=\frac{2\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)-x^2}\\&=2\sqrt{x^2+1}\end{aligned}$$

이 식에 $x=\sqrt{3}$을 대입하면

$2\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=2\sqrt{4}=4$

18 답 6

$$\frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}+\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}=\frac{(2-\sqrt{x})^2+(2+\sqrt{x})^2}{(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})}$$
$$=\frac{4-4\sqrt{x}+x+4+4\sqrt{x}+x}{4-x}$$
$$=\frac{2(4+x)}{4-x}$$

이 식에 $x=2$를 대입하면 $\frac{2(4+2)}{4-2}=6$

19 답 $6\sqrt{2}$

$x=2\sqrt{2}-1$에서 $x+1=2\sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $(x+1)^2=(2\sqrt{2})^2$

$x^2+2x+1=8$ $\quad\therefore x^2+2x-7=0$

$\therefore x^3+2x^2-4x+3=x(x^2+2x-7)+3x+3$
$=3x+3$
$=3(2\sqrt{2}-1)+3$
$=6\sqrt{2}$

20 답 $2\sqrt{3}$

$x=\sqrt{3}-2$에서 $x+2=\sqrt{3}$

양변을 제곱하면 $(x+2)^2=(\sqrt{3})^2$

$x^2+4x+4=3$ $\quad\therefore x^2+4x+1=0$

$\therefore 2x^3+8x^2+4x+4=2x(x^2+4x+1)+2x+4$
$=2x+4$
$=2(\sqrt{3}-2)+4$
$=2\sqrt{3}$

21 답 15

$$x=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$$
$$y=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$$

$\therefore x+y=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=4$

$xy=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$

$\therefore x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy$
$=4^2-1=15$

22 답 -1

$$x=\frac{5}{\sqrt{6}-1}=\frac{5(\sqrt{6}+1)}{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)}=\sqrt{6}+1$$
$$y=\frac{5}{\sqrt{6}+1}=\frac{5(\sqrt{6}-1)}{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)}=\sqrt{6}-1$$

$\therefore x-y=(\sqrt{6}+1)-(\sqrt{6}-1)=2$

$xy=(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)=5$

$\therefore x^2-3xy+y^2=(x-y)^2-xy$
$=2^2-5=-1$

23 답 ○

24 답 ×

25 답 ○

26 답 ×

27 답 $\{x\,|\,x\le -2\}$

$-x-2\ge 0$에서 $x\le -2$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\le -2\}$

28 답 $\{x\,|\,x\le 1$ 또는 $x\ge 2\}$

$x^2-3x+2\ge 0$에서 $(x-1)(x-2)\ge 0$

$\therefore x\le 1$ 또는 $x\ge 2$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\le 1$ 또는 $x\ge 2\}$

29 답 $\{x\,|\,x$는 모든 실수$\}$

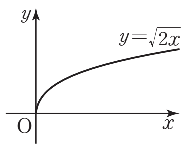
모든 실수 x에 대하여 $x^2+4\ge 0$이므로 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x$는 모든 실수$\}$

30 답 그래프: 풀이 참조

정의역: $\{x\,|\,x\ge 0\}$, 치역: $\{y\,|\,y\ge 0\}$

함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

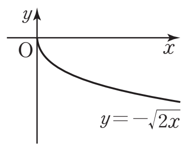


$\therefore$ 정의역: $\{x\,|\,x\ge 0\}$, 치역: $\{y\,|\,y\ge 0\}$

31 답 그래프: 풀이 참조

정의역: $\{x\,|\,x\ge 0\}$, 치역: $\{y\,|\,y\le 0\}$

함수 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

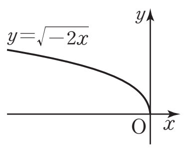


$\therefore$ 정의역: $\{x\,|\,x\ge 0\}$, 치역: $\{y\,|\,y\le 0\}$

32 답 그래프: 풀이 참조

정의역: $\{x\,|\,x\le 0\}$, 치역: $\{y\,|\,y\ge 0\}$

함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

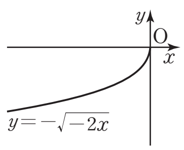


$\therefore$ 정의역: $\{x\,|\,x\le 0\}$, 치역: $\{y\,|\,y\ge 0\}$

33 답 그래프: 풀이 참조

정의역: $\{x\,|\,x\le 0\}$, 치역: $\{y\,|\,y\le 0\}$

함수 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x\,|\,x\le 0\}$, 치역: $\{y\,|\,y\le 0\}$

34 답 $y=\sqrt{3(x-2)}-1$

35 답 $y=\sqrt{-2(x+1)}+3$

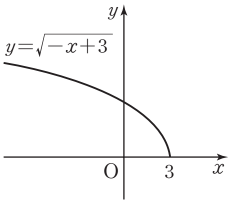
36 답 $y=-\sqrt{-(x-1)}+4$

37 답 그래프: 풀이 참조

정의역: $\{x\,|\,x\le 3\}$, 치역: $\{y\,|\,y\ge 0\}$

$y=\sqrt{-x+3}=\sqrt{-(x-3)}$

따라서 $y=\sqrt{-x+3}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



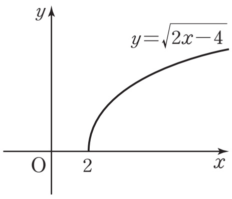
$\therefore$ 정의역: $\{x\,|\,x\leq3\}$, 치역: $\{y\,|\,y\geq0\}$

38 답 그래프: 풀이 참조

정의역: $\{x\,|\,x\geq2\}$, 치역: $\{y\,|\,y\geq0\}$

$y=\sqrt{2x-4}=\sqrt{2(x-2)}$

따라서 $y=\sqrt{2x-4}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

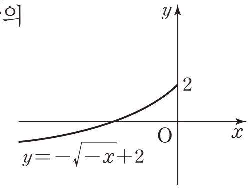


$\therefore$ 정의역: $\{x\,|\,x\geq2\}$, 치역: $\{y\,|\,y\geq0\}$

39 답 그래프: 풀이 참조

정의역: $\{x\,|\,x\leq0\}$, 치역: $\{y\,|\,y\leq2\}$

$y=-\sqrt{-x}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

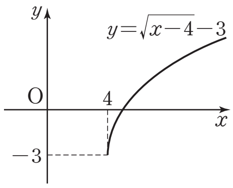


$\therefore$ 정의역: $\{x\,|\,x\leq0\}$, 치역: $\{y\,|\,y\leq2\}$

40 답 그래프: 풀이 참조

정의역: $\{x\,|\,x\geq4\}$, 치역: $\{y\,|\,y\geq-3\}$

$y=\sqrt{x-4}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



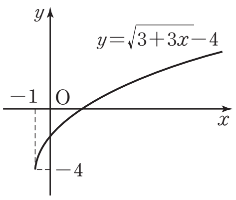
$\therefore$ 정의역: $\{x\,|\,x\geq4\}$,
치역: $\{y\,|\,y\geq-3\}$

41 답 그래프: 풀이 참조

정의역: $\{x\,|\,x\geq-1\}$, 치역: $\{y\,|\,y\geq-4\}$

$y=\sqrt{3+3x}-4=\sqrt{3(x+1)}-4$

따라서 $y=\sqrt{3+3x}-4$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



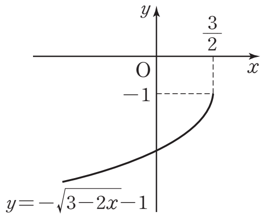
$\therefore$ 정의역: $\{x\,|\,x\geq-1\}$,
치역: $\{y\,|\,y\geq-4\}$

42 답 그래프: 풀이 참조

정의역: $\left\{x\,\middle|\,x\leq\frac{3}{2}\right\}$, 치역: $\{y\,|\,y\leq-1\}$

$y=-\sqrt{3-2x}-1=-\sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}-1$

따라서 $y=-\sqrt{3-2x}-1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\left\{x\,\middle|\,x\leq\frac{3}{2}\right\}$,
치역: $\{y\,|\,y\leq-1\}$

유형 완성하기

p. 295~306

01 답 $x\leq-\frac{2}{5}$ 또는 $x\geq1$

$5x^2-3x-2\geq0$이어야 하므로 $(5x+2)(x-1)\geq0$

$\therefore x\leq-\frac{2}{5}$ 또는 $x\geq1$

01-1 답 $\frac{5}{2}$

$-2x^2+5x+3\geq0$이어야 하므로 $2x^2-5x-3\leq0$

$(2x+1)(x-3)\leq0$ $\qquad\therefore -\frac{1}{2}\leq x\leq3$

따라서 $M=3$, $m=-\frac{1}{2}$이므로

$M+m=3+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$

02 답 ③

$x-1\geq0$에서 $x\geq1$ ······ ㉠

$5-x>0$에서 $x<5$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $1\leq x<5$

따라서 정수 x의 최댓값은 4이다.

02-1 답 ④

$x+2\geq0$에서 $x\geq-2$ ······ ㉠

$6-2x>0$에서 $x<3$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $-2\leq x<3$

따라서 정수 x의 값은 -2, -1, 0, 1, 2이므로 그 개수는 5이다.

03 답 10

$x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2-x+2>0$이 성립한다.

$4-x\geq0$에서 $x\leq4$ ······ ㉠

$2x-1>0$에서 $x>\frac{1}{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{2}<x\leq4$

따라서 정수 x의 값은 1, 2, 3, 4이므로 그 합은

$1+2+3+4=10$

03-1 답 2

$x^2-4x+7=(x-2)^2+3>0$이므로 모든 실수 x에 대하여
$x^2-4x+7>0$이 성립한다.

$3-x\ge 0$에서 $x\le 3$ ······㉠

$x-1>0$에서 $x>1$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $1<x\le 3$

따라서 정수 x의 최솟값은 2이다.

04 답 ⑤

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{x+2\sqrt{3x}+3+x-2\sqrt{3x}+3}{x-3}$$
$$=\frac{2x+6}{x-3}$$

04-1 답 -2

$$\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}-\frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$$
$$=\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})-x(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}$$
$$=\frac{x\sqrt{x}-x\sqrt{x-1}-x\sqrt{x}-x\sqrt{x-1}}{x-(x-1)}$$
$$=-2x\sqrt{x-1}$$

$\therefore k=-2$

05 답 ④

$x+4\ge 0$에서 $x\ge -4$ ······㉠

$1-x\ge 0$에서 $x\le 1$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $-4\le x\le 1$

즉 $-4\le x\le 1$일 때, $-x+5>0$, $2x-3<0$이므로

$$|-x+5|-\sqrt{4x^2-12x+9}=|-x+5|-\sqrt{(2x-3)^2}$$
$$=|-x+5|-|2x-3|$$
$$=(-x+5)+(2x-3)$$
$$=x+2$$

05-1 답 ③

$x+3\ge 0$에서 $x\ge -3$ ······㉠

$2-x>0$에서 $x<2$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $-3\le x<2$

즉 $-3\le x<2$일 때, $x-3<0$, $x+4>0$이므로

$$|x-3|+\sqrt{x^2+8x+16}=|x-3|+\sqrt{(x+4)^2}$$
$$=|x-3|+|x+4|$$
$$=-(x-3)+(x+4)$$
$$=7$$

06 답 4

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$$
$$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$ ······❶

$$\therefore \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(24)}$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{24})$$
$$=-1+\sqrt{25}$$
$$=-1+5=4$$ ······❷

채점 기준	비율
❶ $\frac{1}{f(x)}$을 간단히 할 수 있다.	50%
❷ $\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(24)}$의 값을 구할 수 있다.	50%

06-1 답 59

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}$$
$$=\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})}$$
$$=\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{2}$$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})$$
$$+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$$

즉 $\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)<5$이므로

$\sqrt{2n+1}-1<10$, $\sqrt{2n+1}<11$

양변을 제곱하면 $2n+1<121$ $\therefore n<60$

따라서 자연수 n의 최댓값은 59이다.

07 답 ⑤

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$
$$=\frac{2(x+1)}{x-1}$$ ······㉠

$x=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면

$$\frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}-1}=\frac{2(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=2(3+2\sqrt{2})=6+4\sqrt{2}$$

07-1 답 ②

$$\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}+\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}=\frac{(\sqrt{2-x})^2+(\sqrt{2+x})^2}{\sqrt{2+x}\sqrt{2-x}}$$
$$=\frac{(2-x)+(2+x)}{\sqrt{4-x^2}}$$
$$=\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}$$ ······㉠

$x=\frac{\sqrt{11}}{3}$을 ㉠에 대입하면

$$(\text{주어진 식})=\frac{4}{\sqrt{4-\frac{11}{9}}}=\frac{4}{\frac{5}{3}}=\frac{12}{5}$$

08 답 ⑤

$x+y=(3+\sqrt{3})+(3-\sqrt{3})=6$

$xy=(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})=9-3=6$

$\therefore x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=6^2-6=30$

08-1 답 ②

$y-x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}=-\sqrt{5}$

$xy=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\times\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{9-5}{4}=1$

$\therefore \sqrt{\frac{y}{x}}-\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{y})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$

$=\frac{y-x}{\sqrt{xy}}=\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{1}}=-\sqrt{5}$

09 답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3+2\sqrt{2}$

$y=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=3-2\sqrt{2}$

$\therefore x+y=(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=6$

$x-y=(3+2\sqrt{2})-(3-2\sqrt{2})=4\sqrt{2}$

$\therefore \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\frac{x-2\sqrt{x}\sqrt{y}+y+x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y}{x-y}$

$=\frac{2(x+y)}{x-y}$

$=\frac{2\times6}{4\sqrt{2}}$

$=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

09-1 답 ④

$x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=5-2\sqrt{6}$

$y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=5+2\sqrt{6}$

$\therefore x+y=(5-2\sqrt{6})+(5+2\sqrt{6})=10$

$xy=(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})=1$

$\therefore \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2}{\sqrt{y}\sqrt{x}}=\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\frac{10}{\sqrt{1}}=10$

10 답 ②

$x=2-\sqrt{3}$에서 $x-2=-\sqrt{3}$

양변을 제곱하면

$x^2-4x+4=3 \qquad \therefore x^2-4x+1=0$

$\therefore x^3-4x^2+2x+1=x(x^2-4x+1)+x+1$

$=2-\sqrt{3}+1$

$=3-\sqrt{3}$

10-1 답 ④

$x=\frac{2}{\sqrt{6}+2}=\frac{2(\sqrt{6}-2)}{(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)}=\frac{2(\sqrt{6}-2)}{2}=\sqrt{6}-2$

즉 $x=\sqrt{6}-2$이므로 $x+2=\sqrt{6}$

양변을 제곱하면

$x^2+4x+4=6 \qquad \therefore x^2+4x-2=0$

$\therefore x^3+4x^2+2x+8=x(x^2+4x-2)+4x+8$

$=4(\sqrt{6}-2)+8$

$=4\sqrt{6}$

11 답 ④

$2<\sqrt{5}<3$에서 $\sqrt{5}$의 정수 부분은 2이므로 $x=\sqrt{5}-2$

$\therefore \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\frac{(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{2(x+1)}{x-1}$

$=\frac{2\{(\sqrt{5}-2)+1\}}{(\sqrt{5}-2)-1}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}-3}$

$=\frac{2(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+3)}{(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3)}$

$=-1-\sqrt{5}$

11-1 답 ⑤

$1<\sqrt{2}<2$에서 $\sqrt{2}$의 정수 부분은 1이므로 $x=\sqrt{2}-1$

$\therefore \frac{1}{1-\sqrt{x}}+\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1+\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=\frac{2}{1-x}$

$=\frac{2}{1-(\sqrt{2}-1)}=\frac{2}{2-\sqrt{2}}$

$=\frac{2(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$

$=2+\sqrt{2}$

12 답 $22-11\sqrt{3}$

$1<\sqrt{3}<2$에서 $\sqrt{3}$의 정수 부분은 1이므로 $x=\sqrt{3}-1$ ······ ❶

$x=\sqrt{3}-1$에서 $x+1=\sqrt{3}$

양변을 제곱하면

$x^2+2x+1=3 \qquad \therefore x^2+2x-2=0$

$\therefore x^4+x^3+x^2+x+1$

$=x^2(x^2+2x-2)-x(x^2+2x-2)+5(x^2+2x-2)$

$-11x+11$

······ ❷

$=-11(\sqrt{3}-1)+11$

$=22-11\sqrt{3}$ ······ ❸

채점 기준	비율
❶ x의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ 주어진 식을 x^2+2x-2에 대하여 정리할 수 있다.	40%
❸ $x^4+x^3+x^2+x+1$의 값을 구할 수 있다.	30%

12-1 답 ③

$2<\sqrt{6}<3$에서 $\sqrt{6}$의 정수 부분은 2이므로 $x=\sqrt{6}-2$

$x=\sqrt{6}-2$에서 $x+2=\sqrt{6}$

양변을 제곱하면

$x^2+4x+4=6 \qquad \therefore x^2+4x-2=0$

$\therefore 2x^4+8x^3-4x^2+2x+4=2x^2(x^2+4x-2)+2x+4$

$=2(\sqrt{6}-2)+4$

$=2\sqrt{6}$

13 답 -24

$y=2\sqrt{2-3x}+3=\sqrt{4(2-3x)}+3$

$=\sqrt{8-12x}+3=\sqrt{-12\left(x-\frac{2}{3}\right)}+3$

즉 함수 $y=2\sqrt{2-3x}+3$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-12x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{2}{3}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$a=-12,\ b=\dfrac{2}{3},\ c=3$

$\therefore\ abc=-12\times\dfrac{2}{3}\times3=-24$

13-1 답 -5

함수 $y=\sqrt{3x-6}+2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{3(x-p)-6}+2+q=\sqrt{3x-3p-6}+2+q$

즉 $-3p-6=3,\ 2+q=0$이므로

$p=-3,\ q=-2$

$\therefore\ p+q=-3+(-2)=-5$

14 답 ④

① $y=\sqrt{x+3}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

② $y=\sqrt{2-x}+1=\sqrt{-(x-2)}+1$이므로 $y=\sqrt{2-x}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

③ $y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{4x-1}=-\sqrt{\dfrac{1}{4}(4x-1)}=-\sqrt{x-\dfrac{1}{4}}$이므로

$y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{4x-1}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{4}$만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{2x-4}=\sqrt{\dfrac{1}{4}(2x-4)}=\sqrt{\dfrac{1}{2}(x-2)}$이므로

$y=\dfrac{1}{2}\sqrt{2x-4}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동해도 겹쳐지지 않는다.

⑤ $y=3\sqrt{\dfrac{1}{9}x+1}-2=\sqrt{9\left(\dfrac{1}{9}x+1\right)}-2=\sqrt{x+9}-2$이므로

$y=3\sqrt{\dfrac{1}{9}x+1}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -9만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 겹쳐질 수 없는 것은 ④이다.

14-1 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $y=\sqrt{-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄴ. $y=\sqrt{2x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄷ. $y=-\sqrt{6+2x}=-\sqrt{2(x+3)}$이므로 $y=-\sqrt{6+2x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{2x-2}+3$

$=-\sqrt{\dfrac{1}{4}(2x-2)}+3$

$=-\sqrt{\dfrac{1}{2}(x-1)}+3$

이므로 $y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{2x-2}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{\dfrac{1}{2}x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

15 답 $\dfrac{1}{2}$

함수 $y=\sqrt{ax+1}+3$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-1)+1}+2$

이 함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(-x-1)+1}+2$

이 그래프가 점 $(1,2)$를 지나므로

$2=\sqrt{-2a+1}+2$

$\sqrt{-2a+1}=0 \qquad \therefore\ a=\dfrac{1}{2}$

15-1 답 2

함수 $y=\sqrt{ax+2}-1$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x+2)+2}-2$

이 함수의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=-\sqrt{a(x+2)+2}+2$

이 그래프가 점 $(-1,0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{a+2}+2,\ \sqrt{a+2}=2$

양변을 제곱하면

$a+2=4 \qquad \therefore\ a=2$

16 답 6

$-3x+a\ge0$이므로 $x\le\dfrac{a}{3}$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\left\{x\,\middle|\,x\le\dfrac{a}{3}\right\}$이므로

$\dfrac{a}{3}=1 \qquad \therefore\ a=3$

또 $\sqrt{-3x+3}\ge0$이므로 $\sqrt{-3x+3}+b\ge b$

따라서 주어진 함수의 치역이 $\{y\,|\,y\ge b\}$이므로

$b=2$

$\therefore\ ab=3\times2=6$

16-1 답 2

$1-2x\ge0$이므로 $x\le\dfrac{1}{2}$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\left\{x\,\middle|\,x\le\dfrac{1}{2}\right\}$이므로

$a=\dfrac{1}{2}$

또 $-\sqrt{1-2x}\le0$이므로 $-\sqrt{1-2x}+b\le b$

따라서 주어진 함수의 치역이 $\{y\,|\,y\le b\}$이므로

$b=4$

$\therefore\ ab=\dfrac{1}{2}\times4=2$

17 답 0

$\sqrt{ax-8}\ge0$이므로 $\sqrt{ax-8}+b\ge b$

즉 주어진 함수의 치역이 $\{y\,|\,y\ge b\}$이므로

$b=2 \qquad \therefore\ y=\sqrt{ax-8}+2$

이때 주어진 함수의 그래프가 점 $(-6,\ 4)$를 지나므로

$4=\sqrt{-6a-8}+2,\ \sqrt{-6a-8}=2$

$-6a-8=4,\ -6a=12 \qquad \therefore\ a=-2$

$\therefore\ a+b=-2+2=0$

17-1 답 13

정의역이 $\{x|x\ge-2\}$, 치역이 $\{y|y\le1\}$이므로 구하는 그래프의 식은 $y=-\sqrt{a(x+2)}+1$

이 함수의 그래프가 점 $(-1, -1)$을 지나므로

$-1=-\sqrt{a}+1$, $\sqrt{a}=2$ $\quad\therefore a=4$ ······❶

즉 구하는 함수의 식은

$y=-\sqrt{4(x+2)}+1=-\sqrt{4x+8}+1$

따라서 $b=8$, $c=1$이므로 ······❷

$a+b+c=4+8+1=13$ ······❸

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b, c의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10%

18 답 $\{y|y\ge-3\}$

$y=\dfrac{ax+4}{x-b}=\dfrac{a(x-b)+ab+4}{x-b}=\dfrac{ab+4}{x-b}+a$이므로 점근선의 방정식은 $x=b$, $y=a$

$\therefore a=-3$, $b=3$

$f(x)=\sqrt{-3x+3}+c$에서 $f(1)=-3$이므로 $c=-3$

$\therefore f(x)=\sqrt{-3x+3}-3$

이때 $\sqrt{-3x+3}\ge0$이므로 $\sqrt{-3x+3}-3\ge-3$

따라서 함수 $y=f(x)$의 치역은 $\{y|y\ge-3\}$

18-1 답 정의역: $\{x|x\le2\}$, 치역: $\{y|y\ge4\}$

$y=\dfrac{2x+5}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+3}{x+1}=\dfrac{3}{x+1}+2$이므로 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=2$

$\therefore a=-1$, $b=2$

$f(x)=\sqrt{-x+2}+c$에서 $f(-2)=6$이므로

$\sqrt{4}+c=6$ $\quad\therefore c=4$

$\therefore f(x)=\sqrt{-x+2}+4$

$-x+2\ge0$이므로 $x\le2$

즉 함수 $y=f(x)$의 정의역은 $\{x|x\le2\}$

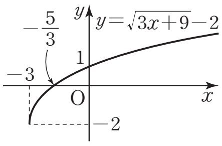
$\sqrt{-x+2}\ge0$이므로 $\sqrt{-x+2}+4\ge4$

따라서 함수 $y=f(x)$의 치역은 $\{y|y\ge4\}$

19 답 ③

$y=\sqrt{3x+9}-2=\sqrt{3(x+3)}-2$이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

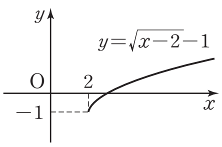
따라서 함수 $y=\sqrt{3x+9}-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 3사분면을 지난다.



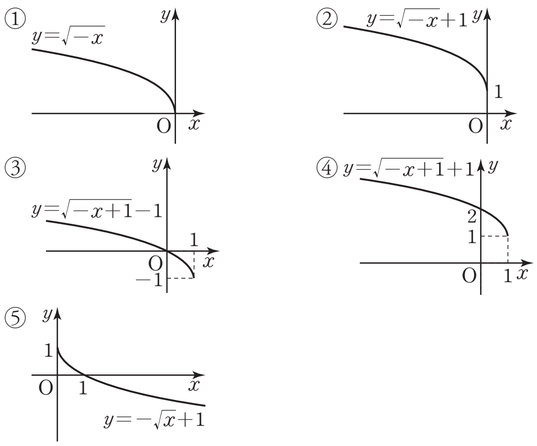
19-1 답 ③

$y=\sqrt{x-2}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\sqrt{x-2}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 4사분면을 지난다.

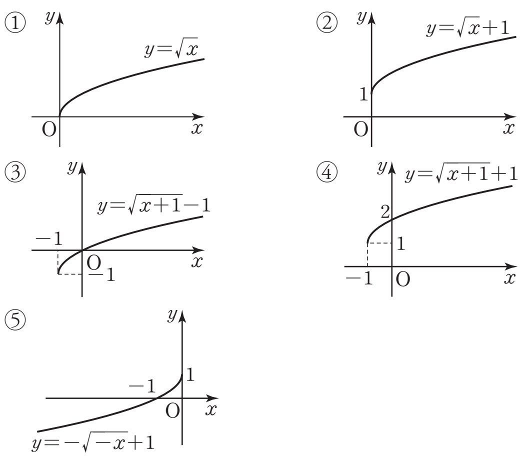


20 답 ⑤



따라서 그래프가 제2사분면을 지나지 않는 것은 ⑤이다.

20-1 답 ⑤

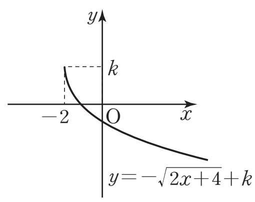


따라서 그래프가 제1사분면을 지나지 않는 것은 ⑤이다.

21 답 1

$y=-\sqrt{2x+4}+k=-\sqrt{2(x+2)}+k$이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다. ······❶

함수 $y=-\sqrt{2x+4}+k$의 그래프가 제2, 3, 4사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $k>0$이고, $x=0$일 때 $y<0$이어야 하므로



$-\sqrt{4}+k<0$, $-2+k<0$

$\therefore 0<k<2$ ······❷

따라서 정수 k의 값은 1이므로 그 개수는 1이다. ······❸

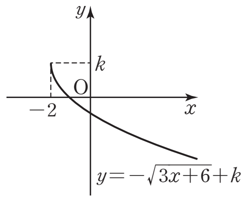
채점 기준	비율
❶ 주어진 함수의 그래프의 평행이동을 파악할 수 있다.	20%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	60%
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20%

21-1 답 $k<\sqrt{6}$

$y=-\sqrt{3x+6}+k=-\sqrt{3(x+2)}+k$이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=-\sqrt{3x+6}+k$의 그래프가 제3사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 $y<0$이어야 하므로

$-\sqrt{6}+k<0 \qquad \therefore k<\sqrt{6}$



22 답 5

주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x+1)}+3$ ……㉠

㉠의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=-\sqrt{a}+3,\ \sqrt{a}=1 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $y=-\sqrt{x+1}+3$

따라서 $a=1,\ b=1,\ c=3$이므로

$a+b+c=1+1+3=5$

22-1 답 3

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x+2)}-1$ ……㉠

㉠의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{2a}-1,\ \sqrt{2a}=2$

$2a=4 \qquad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{2(x+2)}-1=\sqrt{2x+4}-1$

즉 $f(x)=\sqrt{2x+4}-1$이므로

$f(6)=\sqrt{16}-1=3$

23 답 $a>0,\ b>0,\ c<0$

주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x-p)}+q=-\sqrt{ax-ap}+q$ ……㉠

㉠은 $y=-\sqrt{ax+b}+c$와 같으므로 $b=-ap,\ c=q$

이때 $p<0,\ q<0$이므로 $b>0,\ c<0$

$\therefore a>0,\ b>0,\ c<0$

23-1 답 $a<0,\ b<0,\ c>0$

주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x-p)}+q=-\sqrt{ax-ap}+q$ ……㉠

㉠은 $y=-\sqrt{ax-b}+c$와 같으므로 $b=ap,\ c=q$

이때 $p>0,\ q>0$이므로 $b<0,\ c>0$

$\therefore a<0,\ b<0,\ c>0$

24 답 6

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x-2)}+1$ ……㉠

㉠의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로 $3=\sqrt{-2a}+1$

$\sqrt{-2a}=2,\ -2a=4 \qquad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $y=\sqrt{-2(x-2)}+1=\sqrt{-2x+4}+1$

$\therefore b=4,\ c=1$ ……❶

$a=-2,\ b=4,\ c=1$을 $y=\dfrac{bx+3}{cx+a}$에 대입하면

$y=\dfrac{bx+3}{cx+a}=\dfrac{4x+3}{x-2}=\dfrac{4(x-2)+11}{x-2}=\dfrac{11}{x-2}+4$

즉 함수 $y=\dfrac{bx+3}{cx+a}$의 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=4$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(2, 4)$이다.

따라서 $p=2,\ q=4$이므로 ……❷

$p+q=2+4=6$ ……❸

채점 기준	비율
❶ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	60%
❷ p, q의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10%

24-1 답 12

주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x-3)}-3$ ……㉠

㉠의 그래프가 점 $(0,\ -6)$을 지나므로

$-6=-\sqrt{-3a}-3,\ \sqrt{-3a}=3$

$-3a=9 \qquad \therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{-3(x-3)}-3=-\sqrt{-3x+9}-3$

$\therefore b=9,\ c=-3$

$a=-3,\ b=9,\ c=-3$을 $y=\dfrac{bx-3c}{x+a}$에 대입하면

$y=\dfrac{bx-3c}{x+a}=\dfrac{9x+9}{x-3}=\dfrac{9(x-3)+36}{x-3}=\dfrac{36}{x-3}+9$

따라서 함수 $y=\dfrac{bx-3c}{x+a}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=9$이므로 $p=3,\ q=9 \qquad \therefore p+q=3+9=12$

25 답 ⑤

① $2x+1\ge 0$이므로 $x\ge -\dfrac{1}{2}$

즉 정의역은 $\left\{x \,\middle|\, x\ge -\dfrac{1}{2}\right\}$이다.

② $\sqrt{2x+1}\ge 0$이므로 $\sqrt{2x+1}-1\ge -1$

즉 치역은 $\{y\,|\,y\ge -1\}$이다.

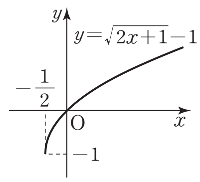
③ $y=\sqrt{2x+1}-1=\sqrt{2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}-1$

즉 $y=\sqrt{2x+1}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $-\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 평행이동만 해서는 겹쳐지게 할 수 없다.

④ $y=\sqrt{2x+1}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 y축과 만난다.

⑤ 그래프는 제2, 4사분면을 지나지 않는다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.



25-1 답 ㄷ, ㄹ

ㄱ. $3x-3\ge 0$이므로 $x\ge 1$

즉 정의역은 $\{x\,|\,x\ge 1\}$이다.

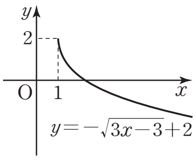
또 $-\sqrt{3x-3}\le 0$이므로 $-\sqrt{3x-3}+2\le 2$

즉 치역은 $\{y\,|\,y\le 2\}$이다.

ㄴ. $y=-\sqrt{3x-3}+2=-\sqrt{3(x-1)}+2$

즉 $y=-\sqrt{3x-3}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 평행이동만 해서는 겹쳐지게 할 수 없다.

ㄷ. $y=-\sqrt{3x-3}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 4사분면을 지난다.



ㄹ. $y=-\sqrt{3x-3}+2$에 $x=4$를 대입하면

$y=-\sqrt{9}+2=-1$

즉 그래프는 점 $(4,\ -1)$을 지난다.

따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

26 답 ④

① $-\sqrt{2x-1}\le 0$이므로 $-\sqrt{2x-1}+1\le 1$

즉 치역은 $\{y\,|\,y\le 1\}$이다.

② $y=-\sqrt{2x-1}+1=-\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+1$

즉 $y=-\sqrt{2x-1}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

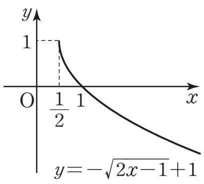
③ $y=-\sqrt{2x-1}+1$에 $y=0$을 대입하면

$0=-\sqrt{2x-1}+1$, $\sqrt{2x-1}=1$

$2x-1=1 \qquad \therefore x=1$

즉 그래프와 x축의 교점의 좌표는 $(1, 0)$이다.

④ 함수 $y=-\sqrt{2x-1}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 4사분면을 지난다.



⑤ 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x-1}-1$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

26-1 답 ③

① $2x-4\ge 0$이므로 $x\ge 2$

즉 정의역은 $\{x\,|\,x\ge 2\}$이다.

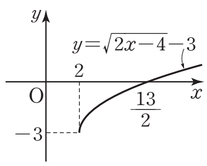
② $\sqrt{2x-4}\ge 0$이므로 $\sqrt{2x-4}-3\ge -3$

즉 치역은 $\{y\,|\,y\ge -3\}$이다.

③ $y=\sqrt{2x-4}-3=\sqrt{2(x-2)}-3$

즉 $y=\sqrt{2x-4}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

④ 함수 $y=\sqrt{2x-4}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 y축과 만나지 않는다.



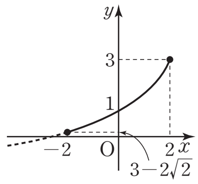
⑤ 그래프는 제2, 3사분면을 지나지 않는다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

27 답 $2\sqrt{2}$

$y=-\sqrt{4-2x}+3=-\sqrt{-2(x-2)}+3$이므로 $y=-\sqrt{4-2x}+3$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

즉 $-2\le x\le 2$에서 $y=-\sqrt{4-2x}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=2$일 때 최댓값 3,

$x=-2$일 때 최솟값 $3-2\sqrt{2}$

를 갖는다.

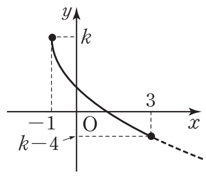
따라서 $M=3$, $m=3-2\sqrt{2}$이므로

$M-m=3-(3-2\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

27-1 답 ④

$y=-2\sqrt{x+1}+k=-\sqrt{4(x+1)}+k$이므로 $y=-2\sqrt{x+1}+k$의 그래프는 $y=-\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

즉 $-1\le x\le 3$에서 함수 $y=-2\sqrt{x+1}+k$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-1$일 때 최댓값 k,

$x=3$일 때 최솟값 $k-4$

를 갖는다.

따라서 $M=k$, $m=k-4$이므로

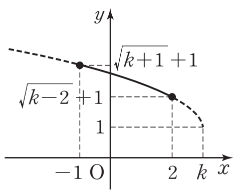
$M+m=k+(k-4)=2k-4=2$

$2k=6 \qquad \therefore k=3$

28 답 ①

$y=\sqrt{k-x}+1=\sqrt{-(x-k)}+1$이므로 $y=\sqrt{k-x}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$-1\le x\le 2$에서 $y=\sqrt{k-x}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 최솟값이 2이므로

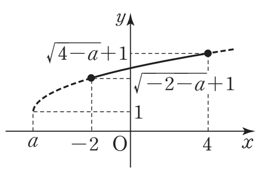
$\sqrt{k-2}+1=2$, $\sqrt{k-2}=1$

$\therefore k=3$

28-1 답 ③

주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

즉 $-2\le x\le 4$에서 $y=\sqrt{x-a}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 최댓값이 4이므로

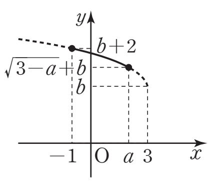
$\sqrt{4-a}+1=4$, $\sqrt{4-a}=3$

$4-a=9 \qquad \therefore a=-5$

29 답 ①

$y=\sqrt{3-x}+b=\sqrt{-(x-3)}+b$이므로 $y=\sqrt{3-x}+b$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

$-1\le x\le a$에서 $y=\sqrt{3-x}+b$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-1$일 때 최댓값 $b+2$,

$x=a$일 때 최솟값 $\sqrt{3-a}+b$를 갖는다.

이때 최댓값이 5이므로

$b+2=5 \qquad \therefore b=3$

또 최솟값이 4이므로 $\sqrt{3-a}+b=4$

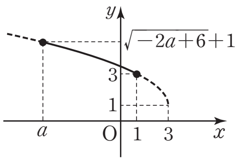
$\sqrt{3-a}+3=4$, $\sqrt{3-a}=1 \qquad \therefore a=2$

$\therefore b-a=3-2=1$

29-1 답 -2

$y=\sqrt{-2x+6}+1=\sqrt{-2(x-3)}+1$이므로 $y=\sqrt{-2x+6}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$a\le x\le 1$에서 함수 $y=\sqrt{-2x+6}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=a$일 때 최댓값 $\sqrt{-2a+6}+1$,
$x=1$일 때 최솟값 3
을 갖는다.
이때 최댓값이 5이므로
$\sqrt{-2a+6}+1=5$, $\sqrt{-2a+6}=4$
$-2a+6=16 \qquad \therefore a=-5$
또 최솟값이 b이므로 $b=3$
$\therefore a+b=-5+3=-2$

30 답 $\frac{1}{2}$

$y=\sqrt{4x-2}+1$로 놓고 x에 대하여 정리하면
$y-1=\sqrt{4x-2}$, $(y-1)^2=4x-2$
$\therefore x=\frac{1}{4}(y-1)^2+\frac{1}{2}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{2}$
이때 $f(x)=\sqrt{4x-2}+1$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge 1\}$이므로 그 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge 1\}$이다.
$\therefore g(x)=\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{2}\ (x\ge 1)$
따라서 $a=-1$, $b=\frac{1}{2}$, $c=1$이므로
$a+b+c=-1+\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

30-1 답 8

$y=\sqrt{3-x}+2$에서 $y-2=\sqrt{3-x}$
양변을 제곱하면 $(y-2)^2=3-x$
$x=-(y-2)^2+3 \qquad \therefore x=-y^2+4y-1$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=-x^2+4x-1$
이때 $y=\sqrt{3-x}+2$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge 2\}$이므로 그 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge 2\}$이다.
따라서 $a=-1$, $b=4$, $c=-1$, $d=2$이므로
$abcd=-1\times 4\times(-1)\times 2=8$

31 답 -17

함수 $y=\sqrt{ax-b}$의 그래프가 점 $(1, 3)$을 지나므로
$3=\sqrt{a-b} \qquad \therefore a-b=9$ ······㉠
또 역함수의 그래프가 점 $(1, 3)$을 지나므로 함수 $y=\sqrt{ax-b}$의 그래프는 점 $(3, 1)$을 지난다.
즉 $1=\sqrt{3a-b}$이므로 $3a-b=1$ ······㉡ ······❶
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=-13$ ······❷
$\therefore a+b=-4+(-13)=-17$ ······❸

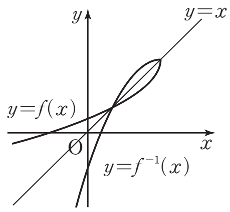
채점 기준	비율
❶ a, b에 대한 연립방정식을 구할 수 있다.	60%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

31-1 답 ④

함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로
$2=\sqrt{a+b} \qquad \therefore a+b=4$ ······㉠
또 역함수의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프는 점 $(2, 1)$을 지난다.
즉 $1=\sqrt{2a+b}$이므로 $2a+b=1$ ······㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=7$
따라서 $f(x)=\sqrt{-3x+7}$이므로
$f(-3)=\sqrt{9+7}=\sqrt{16}=4$

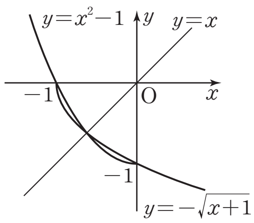
32 답 $2\sqrt{2}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=-\sqrt{-2x+6}+3$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$-\sqrt{-2x+6}+3=x$에서 $\sqrt{-2x+6}=3-x$
양변을 제곱하면 $-2x+6=x^2-6x+9$
$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$
따라서 두 함수의 그래프는 두 점 $(1, 1)$, $(3, 3)$에서 만나므로 두 점 사이의 거리는
$\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

참고 무리함수와 그 역함수의 그래프의 교점이 있다면 그 교점은 반드시 무리함수의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다고 생각할 수 있는데 아닌 경우도 있다.
예를 들어 $y=-\sqrt{x+1}$의 역함수는 $y=x^2-1\ (x\le 0)$이고, 두 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있지만 오른쪽 그림에서 볼 수 있듯이 두 점 $(-1, 0)$, $(0, -1)$에서도 나타난다.



32-1 답 ⑤

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{2x+a}-2$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로
$\sqrt{2x+a}-2=x$에서 $\sqrt{2x+a}=x+2$
양변을 제곱하면 $2x+a=x^2+4x+4$
$x^2+2x+4-a=0$ ······㉠
그런데 두 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 두 교점의 좌표는
(α, α), (β, β)
이때 α, β는 이차방정식 ㉠의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=4-a$ ······㉡
두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로
$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=2\sqrt{2}$
$\therefore (\alpha-\beta)^2=4$ ······㉢
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에 ㉡, ㉢을 대입하면
$4=(-2)^2-4(4-a)$, $4=-12+4a$
$16=4a \qquad \therefore a=4$

33 답 ②

$(f\circ(g\circ f)^{-1})(2)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1})(2)=g^{-1}(2)$

$g^{-1}(2)=k$라 하면 $g(k)=2$

즉 $\dfrac{k+1}{k-1}=2$이므로 $k+1=2k-2$ $\quad\therefore k=3$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1})(2)=3$

33-1 답 ③

$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(3)$

$=(g^{-1}\circ f)(3)$

$=g^{-1}(f(3))$

$g^{-1}(f(3))=k$라 하면 $g(k)=f(3)$

즉 $\sqrt{3k+1}=\dfrac{2\times 3}{3-1}=3$이므로 $3k+1=9$ $\quad\therefore k=\dfrac{8}{3}$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=\dfrac{8}{3}$

34 답 2

$(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(2)=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(2)$

$=(f^{-1}\circ g)(2)$

$=f^{-1}(g(2))$

이때 $g(2)=\sqrt{2\times 2-3}=1$이므로

$f^{-1}(g(2))=f^{-1}(1)$

$f^{-1}(1)=k$라 하면 $f(k)=1$

즉 $\sqrt{7-3k}=1$이므로 $7-3k=1$ $\quad\therefore k=2$

$\therefore (g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(2)=2$

34-1 답 $\dfrac{3}{2}$

$(g\circ(f\circ g)^{-1})(2)=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1})(2)$

$=f^{-1}(2)$

즉 $f^{-1}(2)=g(a)$이므로 $f(g(a))=2$

$\sqrt{5-g(a)}=2$, $5-g(a)=4$

$\therefore g(a)=1$

즉 $\sqrt{2a-3}+1=1$이므로 $\sqrt{2a-3}=0$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}$

35 답 ④

$f(x)=\sqrt{a(x+1)}-1$로 놓으면 $f(0)=1$이므로

$1=\sqrt{a}-1$, $\sqrt{a}=2$ $\quad\therefore a=4$

$\therefore f(x)=\sqrt{4(x+1)}-1$

이때 $(f\circ g)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

즉 $g=f^{-1}$이므로 $f\circ g=f\circ f^{-1}=I$ (I는 항등함수)

$(f\circ g\circ g)(3)=g(3)$이므로 $g(3)=k$라 하면 $f(k)=3$

즉 $\sqrt{4(k+1)}-1=3$이므로 $\sqrt{4(k+1)}=4$

양변을 제곱하면 $4(k+1)=16$

$k+1=4$ $\quad\therefore k=3$

$\therefore (f\circ g\circ g)(3)=3$

35-1 답 ②

$f(x)=-\sqrt{a(x-1)}+2$로 놓으면 $f(0)=0$이므로

$0=-\sqrt{-a}+2$, $\sqrt{-a}=2$ $\quad\therefore a=-4$

$\therefore f(x)=-\sqrt{-4(x-1)}+2$

이때 $(f\circ g)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

즉 $g=f^{-1}$이므로 $g\circ f=f^{-1}\circ f=I$ (I는 항등함수)

$(g\circ f\circ g)(-2)=g(-2)$이므로

$g(-2)=k$라 하면 $f(k)=-2$

즉 $-\sqrt{-4(k-1)}+2=-2$이므로 $\sqrt{-4(k-1)}=4$

$-4(k-1)=16$, $k-1=-4$ $\quad\therefore k=-3$

$\therefore (g\circ f\circ g)(-2)=-3$

유형+ 완성하기 p. 307

36 답 제4사분면

주어진 함수의 그래프는 $y=a\sqrt{-x}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로

$y=a\sqrt{-(x-3)}-2=a\sqrt{-x+3}-2$

$\therefore b=3,\ c=-2$

이때 $y=a\sqrt{-x+3}-2$의 그래프가 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

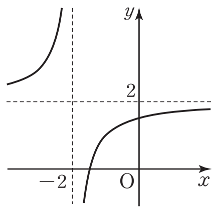
$2=a\sqrt{4}-2$, $2a=4$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore y=\dfrac{ax+b}{x-c}=\dfrac{2x+3}{x+2}$

$=\dfrac{2(x+2)-1}{x+2}$

$=-\dfrac{1}{x+2}+2$

따라서 $y=\dfrac{ax+b}{x-c}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



37 답 ④

$y=\dfrac{bx+c}{x-a}=\dfrac{b(x-a)+ab+c}{x-a}=\dfrac{ab+c}{x-a}+b$

주어진 함수의 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=a$, $y=b$이므로

$a>0$, $b>0$

주어진 그래프의 모양에서 $ab+c<0$ $\quad\therefore c<-ab$

이때 $ab>0$이므로 $-ab<0$ $\quad\therefore c<0$

$y=\sqrt{-ax+b}+c=\sqrt{-a\left(x-\dfrac{b}{a}\right)}+c$이므로 $y=\sqrt{-ax+b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{-ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

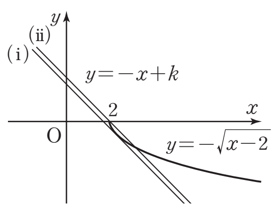
이때 $a>0$, $\dfrac{b}{a}>0$, $c<0$이므로 함수 $y=\sqrt{-ax+b}+c$의 그래프의 개형은 ④와 같다.

38 답 ⑤

함수 $y=-\sqrt{x-2}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$는 오른쪽 그림과 같다.

(i) 함수 $y=-\sqrt{x-2}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때

$-x+k=-\sqrt{x-2}$의 양변을 제



곱하면 $x^2-2kx+k^2=x-2$

$x^2-(2k+1)x+k^2+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k+1)^2-4(k^2+2)=0,\ 4k-7=0$

$\therefore k=\frac{7}{4}$

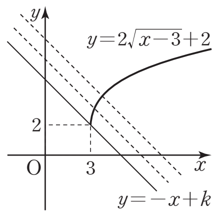
(ii) 직선 $y=-x+k$가 점 $(2, 0)$을 지날 때

$0=-2+k \qquad \therefore k=2$

따라서 서로 다른 두 점에서 만날 때는 직선이 (ii)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있을 때이므로 $\frac{7}{4}<k\le 2$

39 답 5

함수 $y=2\sqrt{x-3}+2$의 그래프와 직선 $y=-x+k$는 오른쪽 그림과 같다.



직선 $y=-x+k$가 점 $(3,\ 2)$를 지날 때,

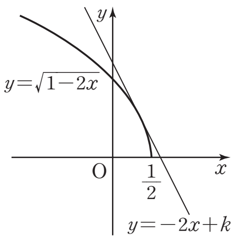
$2=-3+k \qquad \therefore k=5$

즉 함수 $y=2\sqrt{x-3}+2$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 만날 때는 $k\ge 5$

따라서 실수 k의 최솟값은 5이다.

40 답 $\frac{5}{4}$

함수 $y=\sqrt{1-2x}$의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 접하려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$-2x+k=\sqrt{1-2x}$의 양변을 제곱하면

$4x^2-4kx+k^2=1-2x$

$4x^2-2(2k-1)x+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k-1)^2-4(k^2-1)=0$

$-4k+5=0 \qquad \therefore k=\frac{5}{4}$

학교 시험 대비 문제

p. 308~311

01 답 ④

$-x+3\ge 0$에서 $x\le 3$ ······㉠

$x-2>0$에서 $x>2$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $2<x\le 3$

따라서 정수 x의 값은 3이다.

02 답 ④

$a>1$에서 $a>\frac{1}{a}$이므로 $a-\frac{1}{a}>0$

또 $\frac{1}{a}>0$이므로 $a+\frac{1}{a}>0$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}+2}+\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}-2} &= \sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}\\ &= \left|a+\frac{1}{a}\right|+\left|a-\frac{1}{a}\right|\\ &= a+\frac{1}{a}+\left(a-\frac{1}{a}\right)\\ &= 2a\end{aligned}$$

03 답 ⑤

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\ &=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}\\ &=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\end{aligned}$$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(99)$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$

$=\sqrt{100}-1=9$

04 답 ②

$\sqrt{x+7}=3$의 양변을 제곱하면

$x+7=9 \qquad \therefore x=2$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}}&=\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}-(\sqrt{2}+1)}\\ &=\frac{1}{-1}=-1\end{aligned}$$

05 답 ③

$x=\frac{1}{4-\sqrt{15}}=\frac{4+\sqrt{15}}{(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})}=4+\sqrt{15}$

$y=\frac{1}{4+\sqrt{15}}=\frac{4-\sqrt{15}}{(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})}=4-\sqrt{15}$

$\therefore x+y=(4+\sqrt{15})+(4-\sqrt{15})=8$

$xy=(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})=1$

$$\begin{aligned}\therefore (\sqrt{3x}-\sqrt{3y})^2&=3x-2\sqrt{3x}\sqrt{3y}+3y\\ &=3(x+y)-6\sqrt{xy}\\ &=3\times 8-6\times 1\\ &=18\end{aligned}$$

$x>0,\ y>0$이면 $2\sqrt{3x}\sqrt{3y}=2\times 3\sqrt{xy}=6\sqrt{xy}$

이때 $x>y$에서 $\sqrt{3x}>\sqrt{3y}$이므로 $\sqrt{3x}-\sqrt{3y}>0$

$\therefore \sqrt{3x}-\sqrt{3y}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

06 답 -3

$x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$에서 $2x=1+\sqrt{3} \qquad \therefore 2x-1=\sqrt{3}$

양변을 제곱하면

$4x^2-4x+1=3 \qquad \therefore 2x^2-2x-1=0$ ······㉠

$$\begin{aligned}\therefore 2x^4-2x^3-x+1&=x^2(2x^2-2x-1)+x^2-x+1\\ &=x^2-x+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x^3-x^2-2x-1&=x(2x^2-2x-1)+x^2-x-1\\ &=x^2-x-1\end{aligned}$$

이때 ㉠에서 $2x^2-2x=1 \qquad \therefore x^2-x=\frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{2x^4-2x^3-x+1}{2x^3-x^2-2x-1}=\frac{x^2-x+1}{x^2-x-1}=\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=-3$$

07 답 3

함수 $y=-\sqrt{2x+6}+2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\sqrt{2(x-p)+6}+2+q=-\sqrt{2x-2p+6}+2+q$

즉 $-2p+6=-4$, $2+q=0$이므로 $p=5$, $q=-2$

$\therefore p+q=5+(-2)=3$

08 답 ①

함수 $y=\sqrt{ax+2}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\sqrt{a(x-3)+2}-2$

이 함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(-x-3)+2}-2$

이 그래프가 점 $(-1, -2)$를 지나므로

$-2=\sqrt{-2a+2}-2$, $\sqrt{-2a+2}=0$

$\therefore a=1$

09 답 1

$x+b\geq 0$이므로 $x\geq -b$

즉 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\geq -b\}$

주어진 함수의 치역은

$a>0$일 때 $\{y|y\geq a\}$, $a<0$일 때 $\{y|y\leq a\}$

이때 정의역과 치역이 서로 같으므로

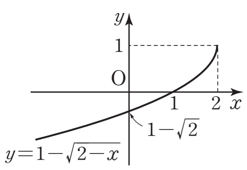
$a>0$, $a=-b \qquad \therefore a>0, b<0$

$$\therefore \frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{a^2}{b^2}=\frac{a}{a}+\frac{b}{-b}+\frac{(-b)^2}{b^2}$$
$$=1-1+1=1$$

10 답 ②

$y=1-\sqrt{2-x}=-\sqrt{-(x-2)}+1$이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=1-\sqrt{2-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.



11 답 0

주어진 함수의 그래프는 $y=a\sqrt{-x}\,(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$y=a\sqrt{-(x-3)}+1=a\sqrt{-x+3}+1$

이 함수가 $y=a\sqrt{-x+a^2-2a}+b$와 같으므로

$a^2-2a=3$, $b=1$

$a^2-2a=3$에서 $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-1\ (\because a<0)$

$\therefore a+b=-1+1=0$

12 답 9

주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{ax}\,(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $m=3$, $n=2$

이때 그 그래프의 식은

$f(x)=\sqrt{a(x-3)}-2$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{-3a}-2$, $3=\sqrt{-3a}$

$9=-3a \qquad \therefore a=-3$

즉 $f(x)=\sqrt{-3(x-3)}-2=\sqrt{-3x+9}-2$이므로

$b=9$, $c=-2$

$\therefore m+n+a+b+c=3+2+(-3)+9+(-2)=9$

13 답 $\sqrt{5}$

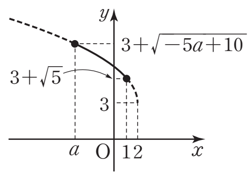
$y=\sqrt{-5x+10}+3=\sqrt{-5(x-2)}+3$이므로 $y=\sqrt{-5x+10}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{-5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$a\leq x\leq 1$에서 함수 $y=\sqrt{-5x+10}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=a$일 때 최댓값 $3+\sqrt{-5a+10}$,

$x=1$일 때 최솟값 $3+\sqrt{5}$

를 갖는다.



이때 최댓값이 8이므로 $3+\sqrt{-5a+10}=8$

$\sqrt{-5a+10}=5$, $-5a+10=25$

$-5a=15 \qquad \therefore a=-3$

또 최솟값이 b이므로 $b=3+\sqrt{5}$

$\therefore a+b=-3+(3+\sqrt{5})=\sqrt{5}$

14 답 ⑤

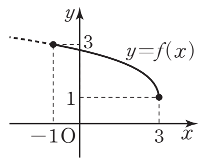
(i) $a>0$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=-1$일 때 최댓값 3,

$x=3$일 때 최솟값 1

을 갖는다.



즉 $f(-1)=2a+b=3$, $f(3)=b=1$이므로

$a=1$, $b=1$

$\therefore a^2+b^2=1^2+1^2=2$

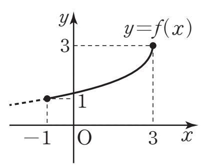
(ii) $a<0$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=-1$일 때 최솟값 1,

$x=3$일 때 최댓값 3

을 갖는다.



즉 $f(-1)=2a+b=1$, $f(3)=b=3$이므로

$a=-1$, $b=3$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+3^2=10$

(i), (ii)에서 a^2+b^2의 최댓값은 10이다.

15 답 ③

① $2x-4\geq 0$이므로 $x\geq 2$

즉 정의역은 $\{x|x\geq 2\}$이다.

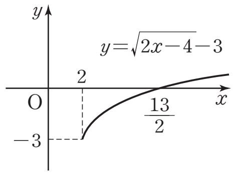
② $\sqrt{2x-4}\geq0$이므로 $\sqrt{2x-4}-3\geq-3$

즉 치역은 $\{y\,|\,y\geq-3\}$이다.

③ $y=\sqrt{2x-4}-3=\sqrt{2(x-2)}-3$

즉 $y=\sqrt{2x-4}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=\sqrt{2x-4}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2, 3사분면을 지나지 않는다.



⑤ $y=\sqrt{2x-4}-3$에서 $y+3=\sqrt{2x-4}$

양변을 제곱하면

$(y+3)^2=2x-4,\ 2x=(y+3)^2+4$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}(y+3)^2+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2+2$

이때 $y=\sqrt{2x-4}-3$의 치역이 $\{y\,|\,y\geq-3\}$이므로 그 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq-3\}$이다.

즉 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{2}(x+3)^2+2\ (x\geq-3)$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

16 답 -4

함수 $y=a\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=a\sqrt{x-3}+b\qquad\therefore\ f(x)=a\sqrt{x-3}+b$

함수 $f(x)=a\sqrt{x-3}+b$의 그래프가 점 $(3,4)$를 지나므로

$4=b$

또 역함수의 그래프가 점 $(3,4)$를 지나므로 함수

$f(x)=a\sqrt{x-3}+b$의 그래프는 점 $(4,3)$을 지난다.

즉 $3=a\sqrt{4-3}+b$이므로 $a+b=3$

$b=4$를 $a+b=3$에 대입하면

$a+4=3\qquad\therefore\ a=-1$

$\therefore\ ab=-1\times4=-4$

17 답 2

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{3x+6}-2$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$\sqrt{3x+6}-2=x$에서 $\sqrt{3x+6}=x+2$

양변을 제곱하면 $3x+6=x^2+4x+4$

$\therefore\ x^2+x-2=0$

즉 이차방정식 $x^2+x-2=0$의 한 근이 $x=\alpha$이므로

$\alpha^2+\alpha-2=0\qquad\therefore\ \alpha^2+\alpha=2$

18 답 ②

$(g\circ f^{-1})^{-1}(2\sqrt{2})=(f\circ g^{-1})(2\sqrt{2})$

$=f(g^{-1}(2\sqrt{2}))$

$g^{-1}(2\sqrt{2})=k$라 하면 $g(k)=2\sqrt{2}$

즉 $\sqrt{3k-1}=2\sqrt{2}$이므로

$3k-1=8\qquad\therefore\ k=3$

$\therefore\ (g\circ f^{-1})^{-1}(2\sqrt{2})=f(g^{-1}(2\sqrt{2}))=f(3)$

$=\frac{6-3}{3-2}=3$

19 답 ②

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1,\ y=1$이므로

함수의 식을 $y=\frac{k}{x+1}+1\ (k<0)$로 놓을 수 있다.

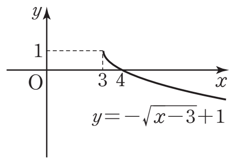
이 함수의 그래프가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$-2=k+1\qquad\therefore\ k=-3$

즉 $y=\frac{-3}{x+1}+1$이므로 $a=1,\ b=-3,\ c=1$

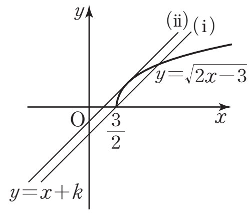
$\therefore\ y=-\sqrt{x-3}+1$ ……㉠

즉 함수 ㉠의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 따라서 함수 ㉠의 그래프는 제1, 4사분면을 지난다.



20 답 $-\frac{3}{2}\leq k<-1$

$y=\sqrt{2x-3}=\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이고, $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$을 지날 때

$0=\frac{3}{2}+k\qquad\therefore\ k=-\frac{3}{2}$

(ii) 함수 $y=\sqrt{2x-3}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때

$x+k=\sqrt{2x-3}$의 양변을 제곱하면

$x^2+2kx+k^2=2x-3$

$\therefore\ x^2+2(k-1)x+k^2+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2+3)=0$

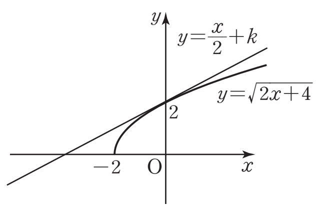
$-2k-2=0\qquad\therefore\ k=-1$

따라서 서로 다른 두 점에서 만날 때는 직선이 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있을 때이므로

$-\frac{3}{2}\leq k<-1$

21 답 ③

함수 $y=\sqrt{2x+4}$의 그래프와 직선 $x-2y+2k=0$, 즉 $y=\frac{x}{2}+k$가 접하려면 다음 그림과 같아야 한다.



$\frac{x}{2}+k=\sqrt{2x+4}$의 양변에 2를 곱하면 $x+2k=2\sqrt{2x+4}$

양변을 제곱하면

$x^2+4kx+4k^2=4(2x+4)$

$\therefore\ x^2+4(k-2)x+4k^2-16=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{2(k-2)\}^2-(4k^2-16)=0$$

$-16k+32=0 \qquad \therefore k=2$

서술형 1 　답 $\frac{1}{2}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{4x-4}+k=x$에서 $\sqrt{4x-4}=x-k$

양변을 제곱하면

$4x-4=x^2-2kx+k^2$

$\therefore x^2-2(k+2)x+k^2+4=0$ ······㉠

이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β라 하면 두 교점의 좌표는 (α, α), (β, β)이므로 $\overline{AB}$의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2(\alpha-\beta)^2}=4$ ······❶

위 식의 양변을 제곱하면 $2(\alpha-\beta)^2=16$

$(\alpha-\beta)^2=8 \qquad \therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=8$

이때 이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2(k+2)$, $\alpha\beta=k^2+4$이므로

$\{2(k+2)\}^2-4(k^2+4)=8$

$16k=8 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$ ······❷

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 이용하여 $\overline{AB}$의 길이를 나타낼 수 있다.	50%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50%

서술형 2 　답 $\frac{7}{3}$

$$\begin{aligned}(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(2)&=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(2)\\&=(f^{-1}\circ g)(2)\\&=f^{-1}(g(2))\end{aligned}$$ ······❶

$f^{-1}(g(2))=k$라 하면 $f(k)=g(2)$ ······❷

즉 $\frac{-2k+6}{k-1}=\sqrt{3\times2-5}=1$이므로

$-2k+6=k-1 \qquad \therefore k=\frac{7}{3}$

$\therefore (g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(2)=\frac{7}{3}$ ······❸

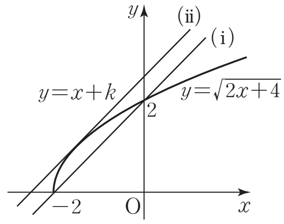
채점 기준	비율
❶ $(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(2)$를 간단히 할 수 있다.	30%
❷ $f^{-1}(g(2))=k$라 하고 $f(k)=g(2)$임을 알 수 있다.	40%
❸ $(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(2)$의 값을 구할 수 있다.	30%

서술형 3 　답 $k=\frac{5}{2}$ 또는 $k<2$

$y=\sqrt{2x+4}=\sqrt{2(x+2)}$이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이고, $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선이다.

이때 $n(A\cap B)=1$이므로 함수 $y=\sqrt{2x+4}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 한 점에서 만난다.

즉 함수 $y=\sqrt{2x+4}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 한 점에서 만나는 경우는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x+k$가 (i)보다 아래쪽에 있거나 (ii)일 때이다. ······❶



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-2, 0)$을 지날 때

$0=-2+k \qquad \therefore k=2$ ······❷

(ii) 함수 $y=\sqrt{2x+4}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때

$x+k=\sqrt{2x+4}$의 양변을 제곱하면

$x^2+2kx+k^2=2x+4$

$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-4)=0$

$-2k+5=0 \qquad \therefore k=\frac{5}{2}$ ······❸

따라서 구하는 k의 값 또는 그 범위는

$k=\frac{5}{2}$ 또는 $k<2$ ······❹

채점 기준	비율
❶ $n(A\cap B)=1$인 경우를 알 수 있다.	20%
❷ 직선 $y=x+k$가 점 $(-2, 0)$을 지날 때, k의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 함수 $y=\sqrt{2x+4}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때, k의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $n(A\cap B)=1$일 때, k의 값 또는 그 범위를 구할 수 있다.	20%

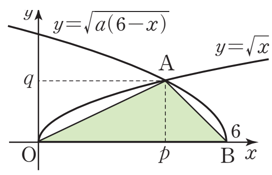
1등급 10% 핵심 기출 문제

p.312

01 　답 ②

$y=\sqrt{a(6-x)}=\sqrt{-a(x-6)}$이므로 함수 $y=\sqrt{a(6-x)}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

오른쪽 그림과 같이 점 A의 좌표를 (p, q) $(p>0, q>0)$라 하면 $\overline{OB}=6$이고 삼각형 AOB의 넓이가 6이므로



$\frac{1}{2}\times6\times q=6 \qquad \therefore q=2$

이때 점 A는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프 위의 점이므로

$q=\sqrt{p}$, $2=\sqrt{p} \qquad \therefore p=4$

$\therefore A(4, 2)$

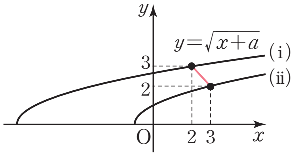
또 점 A는 함수 $y=\sqrt{a(6-x)}$의 그래프 위의 점이므로

$2=\sqrt{2a}$, $2a=4$

$\therefore a=2$

02 답 ⑤

함수 $y=\sqrt{x+a}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



(i) 함수 $y=\sqrt{x+a}$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지날 때

$3=\sqrt{2+a}$, $9=2+a$ $\quad\therefore a=7$

(ii) 함수 $y=\sqrt{x+a}$의 그래프가 점 $(3, 2)$를 지날 때

$2=\sqrt{3+a}$, $4=3+a$ $\quad\therefore a=1$

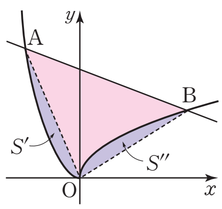
(i), (ii)에서 $1\le a\le 7$이므로 $M=7$, $m=1$

$\therefore M+m=7+1=8$

03 답 10

함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 함수 $y=x^2\ (x<0)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프와 일치하고 점 A는 같은 방법으로 점 B로 이동한다.

즉 오른쪽 그림과 같이 S'의 영역과 S''의 영역의 넓이는 서로 같으므로 구하는 넓이는 삼각형 AOB의 넓이와 같다.



삼각형 AOB에서 밑변을 $\overline{AB}$라 하면 높이는 원점과 직선 $x+3y-10=0$ 사이의 거리이다.

$\overline{AB}=\sqrt{(4+2)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{10}$

$(\text{높이})=\dfrac{|-10|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

따라서 구하는 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times\sqrt{10}=10$

04 답 ④

$y=\sqrt{2x+3}$의 양변을 제곱하면 $y^2=2x+3$

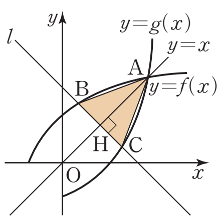
$\therefore x=\dfrac{1}{2}(y^2-3)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{1}{2}(x^2-3)$

이때 함수 $f(x)=\sqrt{2x+3}$의 치역은 $\{y\,|\,y\ge 0\}$이므로 그 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge 0\}$이다.

즉 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

또 오른쪽 그림에서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 두 함수의 그래프의 교점과 같다.



$x=\sqrt{2x+3}$의 양변을 제곱하면

$x^2=2x+3$, $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=3\ (\because x\ge 0)$

$\therefore \mathrm{A}(3,\ 3)$

직선 l의 방정식은 $y-2=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$, 즉 $x+y-\dfrac{5}{2}=0$이고, 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AH}$의 길이는 점 A와 직선 l 사이의 거리와 같으므로

$\overline{AH}=\dfrac{\left|3+3-\dfrac{5}{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{\dfrac{7}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$

$\overline{BH}$의 길이는 점 $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ 2\right)$와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{BH}=\dfrac{\left|\dfrac{1}{2}-2\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{\dfrac{3}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

이때 $\overline{BC}=2\overline{BH}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{7\sqrt{2}}{4}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{21}{8}$

05 답 ④

$f(x)=-\sqrt{kx+2k}+4$, $g(x)=\sqrt{-kx+2k}-4$라 하자.

ㄱ. $f(-x)=-\sqrt{-kx+2k}+4=-(\sqrt{-kx+2k}-4)$

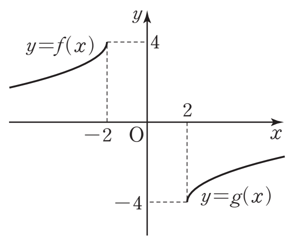
$=-g(x)$

이므로 $g(x)=-f(-x)$

즉 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 서로 원점에 대하여 대칭이다.

ㄴ. $f(x)=-\sqrt{k(x+2)}+4$, $g(x)=\sqrt{-k(x-2)}-4$이므로

$k<0$이면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 다음 그림과 같다.



즉 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 만나지 않는다.

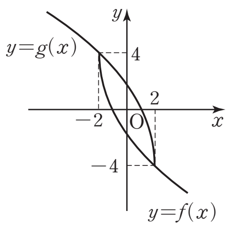
ㄷ. (i) $k<0$일 때

ㄴ에 의하여 두 곡선은 만나지 않는다.

(ii) $k>0$일 때

ㄱ에서 두 곡선은 원점에 대하여 대칭이고 k의 값이 커질수록 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=4$와 멀어지고 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=-4$와 멀어진다.

즉 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 값이 최대인 경우는 다음 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ -4)$를 지날 때이다.



즉 $-4=-\sqrt{2k+2k}+4$에서

$\sqrt{4k}=8$, $4k=64$ $\quad\therefore k=16$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

참고 k가 0이 아닌 실수일 때

$f(x)=-\sqrt{kx+2k}+4=-\sqrt{k(x+2)}+4$

$g(x)=\sqrt{-kx+2k}-4=\sqrt{-k(x-2)}-4$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 4)$를 지나고 곡선 $y=g(x)$는 k의 값에 관계없이 항상 점 $(2,\ -4)$를 지난다.

memo