

ALL100

1등급

MASTER

고등 **공통수학1**

정답과 해설

I 다항식

01 다항식의 연산

1등급 필수 내신 빈출 문제

p.007-014

001 ⑤

$$\begin{aligned} A-2(X-B) &= 3A \text{에서 } -2X=2A-2B \\ \therefore X &= -A+B \\ &= -(x^2-3xy-2y^2) + (2x^2+xy-y^2) \\ &= x^2+4xy+y^2 \end{aligned}$$

002 ⑤ $-5x^2+26x-9$

$$\begin{aligned} (M*N) \circ (N*M) &= (M+2N) \circ (N+2M) \\ &= 3(M+2N) - (N+2M) \\ &= M+5N \\ &= (5x^2+x+11) + 5(-2x^2+5x-4) \\ &= -5x^2+26x-9 \end{aligned}$$

003 ④ $x^2+11xy-4y^2$

$$\begin{aligned} 3A+B &= 9x^2+4xy-y^2 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2B-A &= 4x^2-13xy+5y^2 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} \text{을 하면} \\ 2(3A+B) - (2B-A) &= 2(9x^2+4xy-y^2) - (4x^2-13xy+5y^2) \\ 7A &= 14x^2+21xy-7y^2 & \therefore A=2x^2+3xy-y^2 \\ \text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면} \\ 3(2x^2+3xy-y^2) + B &= 9x^2+4xy-y^2 \\ \therefore B &= 3x^2-5xy+2y^2 \\ \text{따라서 } 2A-X &= B \text{에서} \\ X &= 2A-B \\ &= 2(2x^2+3xy-y^2) - (3x^2-5xy+2y^2) \\ &= x^2+11xy-4y^2 \end{aligned}$$

004 ③

$$\begin{aligned} (x+2x^2+3x^3+\cdots+100x^{100})^2 \text{의 전개식에서 } x^5 \text{항은} \\ x \times 4x^4 + 2x^2 \times 3x^3 + 3x^3 \times 2x^2 + 4x^4 \times x = 20x^5 \\ \text{따라서 } x^5 \text{의 계수는 } 20 \end{aligned}$$

TIP 전개식에서 특정 차수의 항의 계수를 구하는 문제에서는 모두 전개하지 말고 특정 차수의 항의 계수만 계산하자!

005 ① -1

$$\begin{aligned} (1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+x^{30})^2 \text{의 전개식에서} \\ x^4 \text{항은} \\ 1 \times x^4 + (-x) \times (-x^3) + x^2 \times x^2 + (-x^3) \times (-x) + x^4 \times 1 = 5x^4 \\ x^5 \text{항은} \\ 1 \times (-x^5) + (-x) \times x^4 + x^2 \times (-x^3) + (-x^3) \times x^2 \\ \quad + x^4 \times (-x) + (-x^5) \times 1 = -6x^5 \\ \text{따라서 } a=5, b=-6 \text{이므로 } a+b=-1 \end{aligned}$$

006 ③

$$\begin{aligned} (1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^2 \text{의 전개식에서 } x^5 \text{항은} \\ 2x \times 5x^4 + 3x^2 \times 4x^3 + 4x^3 \times 3x^2 + 5x^4 \times 2x = 44x^5 \\ (1+2x+3x^2+4x^3)^2 \text{의 전개식에서 } x^5 \text{항은} \\ 3x^2 \times 4x^3 + 4x^3 \times 3x^2 = 24x^5 \\ \text{따라서 } a=44, b=24 \text{이므로 } a-b=20 \end{aligned}$$

다른 풀이 두 식의 x^5 의 계수의 차는 두 식의 차의 x^5 의 계수와 같다.

$$\begin{aligned} (1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^2 - (1+2x+3x^2+4x^3)^2 \\ = 5x^4(2+4x+6x^2+8x^3+5x^4) \\ \text{따라서 } x^5 \text{항은 } 5x^4 \times 4x = 20x^5 \text{이므로 구하는 계수의 차는 } 20 \end{aligned}$$

007 ⑤

$$\begin{aligned} x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+10) \text{의 전개식에서 } x^{10} \text{의 계수는} \\ (x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+10) \text{에서 9개의 일차식에서 } x \text{항을,} \\ 1 \text{개의 일차식에서 상수항을 선택하여 곱하면 된다.} \\ \text{즉, } x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+10) \text{의 전개식에서 } x^{10} \text{항은} \\ x \times x^9(1+2+3+\cdots+10) = 55x^{10} \\ \text{따라서 } x^{10} \text{의 계수는 } 55 \end{aligned}$$

008 ④

$$\begin{aligned} (a+3)(a-3)(a^2+3a+9)(a^2-3a+9) \\ = \{(a+3)(a^2-3a+9)\} \{(a-3)(a^2+3a+9)\} \\ = (a^3+27)(a^3-27) \\ = a^6-729 \end{aligned}$$

009 ②

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 + (x-y+z)^2 + (x+y-z)^2 + (-x+y+z)^2 \\ = 4x^2+4y^2+4z^2 \\ = 4 \times 1^2 + 4 \times (\sqrt{2})^2 + 4 \times (\sqrt{3})^2 \quad \leftarrow x=1, y=\sqrt{2}, z=\sqrt{3} \\ = 24 \end{aligned}$$

010 ⑤ $x^6-3x^4+3x^2-1$

$$\begin{aligned} (a-1)^3(a+1)^3(a^2+1)^3 &= (a^2-1)^3(a^2+1)^3 \\ &= (a^4-1)^3 \\ &= \{(\sqrt{x})^4-1\}^3 \quad \leftarrow a=\sqrt{x} \\ &= (x^2-1)^3 \\ &= x^6-3x^4+3x^2-1 \end{aligned}$$

011 ④

$$\begin{aligned}
 (5+3a)^3 &= X, (5-3a)^3 = Y \text{로 놓으면} \\
 \{(5+3a)^3 + (5-3a)^3\}^2 - \{(5+3a)^3 - (5-3a)^3\}^2 \\
 &= (X+Y)^2 - (X-Y)^2 \\
 &= 4XY \\
 &= 4(5+3a)^3(5-3a)^3 \\
 &= 4(25-9a^2)^3 \\
 &= 4\{25-9 \times (\sqrt{3})^2\}^3 \leftarrow a=\sqrt{3} \\
 &= -32
 \end{aligned}$$

012 ③

$$\begin{aligned}
 A &= x^3 + x + 4 = x^3 + B \text{이므로} \\
 A^3 - B^3 &= (x^3 + B)^3 - B^3 \\
 &= x^9 + 3x^6B + 3x^3B^2 \\
 &= x^9 + 3x^6(x+4) + 3x^3(x+4)^2 \leftarrow B=x+4
 \end{aligned}$$

이때 x^3 항은 $3x^3 \times 16 = 48x^3$

따라서 x^3 의 계수는 48

013 ⑥

$$\begin{aligned}
 (x+y-z+w)(x-y+z+w) \text{의 전개식에서 } xy \text{항은} \\
 x \times (-y) + y \times x = 0 \\
 (x-y+z)^3 + (x+y-z)^3 \text{에서 } y-z=t \text{로 놓으면} \\
 (x-y+z)^3 + (x+y-z)^3 = (x-t)^3 + (x+t)^3 \\
 = 2x^3 + 6xt^2 \\
 = 2x^3 + 6x(y-z)^2 \leftarrow t=y-z
 \end{aligned}$$

이때 xy^2 항은 $6x \times y^2 = 6xy^2$

따라서 $a=0, b=6$ 이므로 $a+b=6$

014 ⑤

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \text{이므로} \\
 7 &= 3^2 - 2xy \quad \therefore xy = 1 \\
 \therefore x^4 + y^4 &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 7^2 - 2 \times 1^2 = 47
 \end{aligned}$$

015 ③

$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= (a-b)^2 + 4ab = (\sqrt{5})^2 + 4 \times 1 = 9 \\
 \text{이때 } a > 0, b > 0 \text{이므로 } a+b &= 3 \\
 \therefore (a+b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 + b^3 \\
 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\
 &= 3^3 - 3 \times 1 \times 3 = 18
 \end{aligned}$$

016 ④

$$\begin{aligned}
 a \neq 0 \text{이므로 } a^2 + 3a + 1 &= 0 \text{의 양변을 } a \text{로 나누면} \\
 a + 3 + \frac{1}{a} &= 0 \quad \therefore a + \frac{1}{a} = -3 \\
 a^2 + \frac{1}{a^2} &= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = (-3)^2 - 2 = 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a^3 + \frac{1}{a^3} &= \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right) = (-3)^3 - 3 \times (-3) = -18 \\
 \therefore 2a^3 + a^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^3} &= \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + 2\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) \\
 &= 7 + 2 \times (-18) = -29
 \end{aligned}$$

017 ⑤

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= (a+b)^2 - 2ab = (-3)^2 - 2 \times (-3) = 15 \\
 x^2 + y^2 &= (x+y)^2 - 2xy = 6^2 - 2 \times 6 = 24 \\
 \therefore (ax+by)(bx+ay) &= abx^2 + a^2xy + b^2xy + aby^2 \\
 &= ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2) \\
 &= (-3) \times 24 + 6 \times 15 = 18
 \end{aligned}$$

TIP 곱셈 공식의 변형을 바로 이용하여 식의 값을 구할 수 없을 때는 식을 전개한 후 주어진 값을 이용할 수 있도록 변형하자!

018 ② $24\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
 a^2 + \frac{1}{a^2} &= \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2 = 2^2 + 2 = 6 \\
 \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 &= a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = 6 + 2 = 8 \text{이므로 } \left|a + \frac{1}{a}\right| = 2\sqrt{2} \\
 \therefore \left|a^4 - \frac{1}{a^4}\right| &= \left|a^2 + \frac{1}{a^2}\right| \times \left|a^2 - \frac{1}{a^2}\right| \\
 &= \left|a^2 + \frac{1}{a^2}\right| \times \left|a + \frac{1}{a}\right| \times \left|a - \frac{1}{a}\right| \\
 &= 6 \times 2\sqrt{2} \times 2 = 24\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

TIP 실수 a, b 에 대하여 $|ab| = |a| \cdot |b|$ 가 성립함을 꼭 기억해 두자!

019 ②

$$\begin{aligned}
 x^2 - y^2 &= (2 - \sqrt{2}) - (2 + \sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \\
 x^2y^2 &= (2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = 2 \\
 \therefore x^6 - y^6 &= (x^2)^3 - (y^2)^3 \\
 &= (x^2 - y^2)^3 + 3x^2y^2(x^2 - y^2) \\
 &= (-2\sqrt{2})^3 + 3 \times 2 \times (-2\sqrt{2}) = -28\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

020 ② 29

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= (a+b)^2 - 2ab \text{이므로} \\
 3 &= 1^2 - 2ab \quad \therefore ab = -1 \\
 a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 1^3 - 3 \times (-1) \times 1 = 4 \\
 a^4 + b^4 &= (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 3^2 - 2 \times (-1)^2 = 7 \\
 (a^3 + b^3)(a^4 + b^4) &= a^7 + b^7 + a^3b^3(a+b) \text{이므로} \\
 a^7 + b^7 &= (a^3 + b^3)(a^4 + b^4) - a^3b^3(a+b) \\
 &= 4 \times 7 - (-1)^3 \times 1 = 29
 \end{aligned}$$

021 ② 18

$$\begin{aligned}
 a - \frac{1}{b} &= 3 + \sqrt{5}, \frac{1}{a} - b = 3 - \sqrt{5} \text{를} \\
 \text{변끼리 더하면 } a - b - \frac{a-b}{ab} &= 6 \quad \dots\dots ⑦ \\
 \text{변끼리 곱하면 } ab + \frac{1}{ab} + 2 &= 0
 \end{aligned}$$

앞의 식의 양변에 ab 를 곱하면

$$(ab)^2 + 1 + 2ab = 0, (ab+1)^2 = 0 \quad \therefore ab = -1$$

이를 ①에 대입하면

$$a-b+a-b=6 \quad \therefore a-b=3$$

$$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)=3^3+3 \times (-1) \times 3=18$$

022 답 ③

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \text{이므로}$$

$$5=1^2-2(ab+bc+ca) \quad \therefore ab+bc+ca=-2$$

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc \text{이므로}$$

$$-2=1 \times \{5-(-2)\}+3abc \quad \therefore abc=-3$$

023 답 ④

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx) \text{이므로}$$

$$7=1^2-2(xy+yz+zx) \quad \therefore xy+yz+zx=-3$$

$$\therefore \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2}{x^2y^2z^2}$$

$$= \frac{(xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z)}{(xyz)^2}$$

$$= \frac{(-3)^2 - 2 \times 1 \times 1}{1^2} = 7$$

024 답 19

$$x-y=5, y-z=-2 \text{를 변끼리 더하면 } x-z=3$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$$

$$= \frac{1}{2} \{ (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \}$$

$$= \frac{1}{2} \times \{ 5^2 + (-2)^2 + (-3)^2 \} = 19$$

025 답 243

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \text{의 양변에 } xyz \text{를 곱하면 } xy+yz-zx=0$$

$$(x-y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(-xy-yz+zx)$$

$$= 3+2 \times 0 = 3$$

$$\therefore (x-y+z)^{10} = \{ (x-y+z)^2 \}^5 = 3^5 = 243$$

주의 • 곱셈 공식의 변형에서는 주어진 식에 따라 연결 부호가 달라질 수 있으니 부호에 주의해야 해!

026 답 ③

조건 (가)에서 a, b, c 중에서 적어도 하나는 2이므로

$$(a-2)(b-2)(c-2)=0$$

$$abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)-8=0$$

이때 조건 (나)에서 $2(a+b+c)=ab+bc+ca$ 이므로

$$abc-4(a+b+c)+4(a+b+c)-8=0$$

$$abc-8=0 \quad \therefore abc=8$$

027 답 34

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx) \text{이므로}$$

$$21=5^2-2(xy+yz+zx) \quad \therefore xy+yz+zx=2$$

$$\therefore xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$$

$$=xy(x+y+z)+yz(x+y+z)+zx(x+y+z)-3xyz$$

$$=(x+y+z)(xy+yz+zx)-3xyz$$

$$=5 \times 2 - 3 \times (-8) = 34$$

028 답 ⑤

$$a^3+b^3+c^3+3abc=a^3+(b+c)^3-3bc(b+c)+3abc$$

$$=a^3+a^3-3abc+3abc$$

$$=2a^3=2 \times 2^3=16$$

029 답 ④

$$x^2+y^2+z^2=xy-yz-zx \text{에서 } x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx=0$$

$$\frac{1}{2} \{ (x-y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \} = 0 \quad \therefore x=y=-z$$

$$\therefore \frac{y}{3x} - \frac{z}{3y} - \frac{x}{3z} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

030 답 8

$100=a$ 로 놓으면

$$99^3+101^3=(a-1)^3+(a+1)^3$$

$$=2a^3+6a$$

$$=2 \times 100^3 + 6 \times 100 = 2000600$$

따라서 각 자리의 숫자의 합은 $2+6=8$

031 답 ③

$5013=a$ 로 놓으면

$$\frac{5012 \times (5013^2 + 5014)}{5014 \times 5013 + 1} = \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a+1)a+1}$$

$$= \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}$$

$$=a-1$$

$$=5013-1=5012$$

032 답 ②

$$(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)$$

$$= \frac{3^2-2^2}{3^2-2^2} \times (3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)$$

$$= \frac{1}{5} \times (3^2-2^2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)$$

$$= \frac{1}{5} \times (3^4-2^4)(3^4+2^4)(3^8+2^8)$$

$$= \frac{1}{5} \times (3^8-2^8)(3^8+2^8) = \frac{3^{16}-2^{16}}{5}$$

따라서 $m=5, n=16$ 이므로 $m-n=-11$

033 답 ②

$1000=a$ 로 놓으면

$$1001 \times (1000^2 - 999) = (a+1) \{ a^2 - (a-1) \}$$

$$= (a+1)(a^2-a+1)$$

$$=a^3+1=1000^3+1=10^9+1$$

따라서 $m=9, n=1$ 이므로 $m+n=10$

034

답 2

$351=a, \sqrt{315}=b$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{(351+\sqrt{315})^3+(351-\sqrt{315})^3}{351} &= \frac{(a+b)^3+(a-b)^3}{a} \\ &= \frac{2a^3+6ab^2}{a} \\ &= 2a^2+6b^2 \\ &= 2 \times 351^2 + 6 \times 315\end{aligned}$$

2×351^2 의 일의 자리의 숫자는 2, 6×315 의 일의 자리의 숫자는 0
이므로 구하는 일의 자리의 숫자는 $2+0=2$

035

답 3

직육면체의 대각선의 길이가 $\sqrt{21}$ 이므로

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{21} \quad \therefore a^2+b^2+c^2=21$$

직육면체의 겹넓이가 28이므로

$$2(ab+bc+ca)=28 \quad \therefore ab+bc+ca=14$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=21+2 \times 14=49$$

$$\therefore a+b+c=7 \quad \leftarrow a+b+c>0$$

036

답 40

직육면체의 가로, 세로의 길이와 높이를 각각 a, b, c 라 하면

직육면체의 겹넓이가 62이므로

$$2(ab+bc+ca)=62 \quad \therefore ab+bc+ca=31$$

삼각형 BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합이 76이므로

$$(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)=76 \quad \therefore a^2+b^2+c^2=38$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=38+2 \times 31=100$$

$$\therefore a+b+c=10 \quad \leftarrow a+b+c>0$$

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)=40$

037

답 -4

$$\overline{AF}=\overline{BF}=x$$

$\overline{FE} \parallel \overline{CD}, \overline{FC} \parallel \overline{ED}$ 이므로 사각형 FCDE는 평행사변형이다.

$$\therefore \overline{FE}=\overline{CD}=1$$

$$\triangle ABE \sim \triangle FAB \text{이므로 } \overline{AB} : \overline{FA} = \overline{BE} : \overline{AB}$$

$$1 : x = (x+1) : 1 \text{에서}$$

$$x^2+x-1=0 \quad \therefore x-\frac{1}{x}=-1$$

$$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)=(-1)^3+3 \times (-1)=-4$$

038

답 2

x^3+ax^2-x-1 을 x^2-1 로 나누면

$$\begin{array}{r} x+a \\ x^2-1 \overline{) x^3+ax^2-x-1} \\ \underline{x^3 -x} \\ ax^2 -1 \\ \underline{ax^2 -a} \\ -1+a \end{array}$$

즉, $Q(x)=x+a, R=-1+a$ 이므로

$$Q(a)=a+a=-1+a \quad \therefore a=-1$$

039

답 2

$$x=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{에서 } 2x-1=\sqrt{3}$$

위 식의 양변을 제곱하면

$$4x^2-4x+1=3 \quad \therefore 2x^2-2x-1=0$$

이때 $2x^4-8x^3+11x^2-5x+3$ 을 $2x^2-2x-1$ 로 나누면

$$\begin{array}{r} x^2-3x+3 \\ 2x^2-2x-1 \overline{) 2x^4-8x^3+11x^2-5x+3} \\ \underline{2x^4-2x^3 } \\ -6x^3+12x^2-5x+3 \\ \underline{-6x^3+6x^2+3x} \\ 6x^2-8x+3 \\ \underline{6x^2-6x-3} \\ -2x+6 \end{array}$$

$$\begin{aligned}\therefore 2x^4-8x^3+11x^2-5x+3 &= (2x^2-2x-1)(x^2-3x+3)-2x+6 \\ &= -2x+6\end{aligned}$$

$$= -2 \times \frac{1+\sqrt{3}}{2} + 6 = 5 - \sqrt{3}$$

040

답 13

삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{4}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times 1 = \frac{4}{3} \quad \therefore \overline{AB} = \frac{8}{3}$$

$$\triangle AHC \sim \triangle CHB \text{이므로 } \overline{AH} : \overline{CH} = \overline{CH} : \overline{BH}$$

$$\left(\frac{8}{3}-x\right) : 1 = 1 : x \text{에서}$$

$$3x^2-8x+3=0 \quad \therefore x=\frac{4-\sqrt{7}}{3} \quad \leftarrow 0 < x < 1$$

이때 $3x^3-5x^2+4x+7$ 을 $3x^2-8x+3$ 으로 나누면

$$\begin{array}{r} x+1 \\ 3x^2-8x+3 \overline{) 3x^3-5x^2+4x+7} \\ \underline{3x^3-8x^2+3x} \\ 3x^2+x+7 \\ \underline{3x^2-8x+3} \\ 9x+4 \end{array}$$

$$\therefore 3x^3-5x^2+4x+7 = (3x^2-8x+3)(x+1)+9x+4$$

$$= 9x+4$$

$$= 9 \times \frac{4-\sqrt{7}}{3} + 4 = 16 - 3\sqrt{7}$$

따라서 $a=16, b=-3$ 이므로 $a+b=13$

041

답 28

$Q(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫을 $g(x)$ 라 하면

$$Q(x)=(x+1)g(x)+2$$

$$f(x)=(x^2-x+1)Q(x)+4x+2$$

$$= (x^2-x+1)\{(x+1)g(x)+2\}+4x+2$$

$$= (x^2-x+1)(x+1)g(x)+2(x^2-x+1)+4x+2$$

$$= (x^3+1)g(x)+2x^2+2x+4$$

따라서 $R(x)=2x^2+2x+4$ 이므로 $R(3)=28$

042 7

$x^2+2x+3=(x^2+2)+(2x+1)$ 이므로

$x^2+2=a, 2x+1=b$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2+2x+3)^3 &= (a+b)^3 \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ &= a(a^2+3ab+3b^2)+b^3\end{aligned}$$

즉, $(x^2+2x+3)^3$ 을 x^2+2 로 나누었을 때의 나머지는 $(2x+1)^3$ 을 x^2+2 로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$(2x+1)^3=8x^3+12x^2+6x+1$ 을 x^2+2 로 나누면

$$\begin{array}{r} 8x+12 \\ x^2+2 \overline{) 8x^3+12x^2+6x+1} \\ \underline{8x^3+16x} \\ 12x^2-10x+1 \\ \underline{12x^2+24} \\ -10x-23 \end{array}$$

따라서 $R(x)=-10x-23$ 이므로 $R(-3)=7$

043 3

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^3-x^2+5)(x^2+2)+3x^2-4x+1 \\ &= (x^3-x^2+5)(x^2+2)+3(x^2+2)-4x-5 \\ &= (x^2+2)(x^3-x^2+8)-4x-5\end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 를 x^2+2 로 나누었을 때의 나머지는 $-4x-5$

044 2

$$f(x)=\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}xf(x) &= x\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+xR \\ &= \frac{x}{3}(3x-2)Q(x)+\frac{R}{3}(3x-2)+\frac{2}{3}R \\ &= (3x-2)\left\{\frac{x}{3}Q(x)+\frac{R}{3}\right\}+\frac{2}{3}R\end{aligned}$$

따라서 $xf(x)$ 를 $3x-2$ 로 나누었을 때의 몫은 $\frac{x}{3}Q(x)+\frac{R}{3}$,

나머지는 $\frac{2}{3}R$

045 5

$$f(x)=(x+1)Q(x)+R \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}(x^2+1)f(x) &= (x^2+1)(x+1)Q(x)+(x^2+1)R \\ &= (x^2+1)(x+1)Q(x)+(x+1)(x-1)R+2R \\ &= (x+1)\{(x^2+1)Q(x)+(x-1)R\}+2R\end{aligned}$$

따라서 $(x^2+1)f(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫은

$(x^2+1)Q(x)+(x-1)R$, 나머지는 $2R$

046 3

$f(x)+g(x)$ 와 $f(x)-g(x)$ 를 $h(x)$ 로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x), Q_2(x)$ 라 하면

$$f(x)+g(x)=h(x)Q_1(x)+9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x)-g(x)=h(x)Q_2(x)-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2} \text{을 하면 } 2f(x)=h(x)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}+6$$

$$\therefore f(x)=h(x)\times\frac{Q_1(x)+Q_2(x)}{2}+3$$

따라서 $f(x)$ 를 $h(x)$ 로 나누었을 때의 나머지는 3

047 1

$$f(x)=x^3+ax^2-x+b \text{가 } (x-1)^2 \text{으로 나누어떨어지므로}$$

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a & -1 & b \\ & & 1 & a+1 & a \\ 1 & 1 & a+1 & a & a+b \\ & & 1 & a+2 & \\ 1 & & a+2 & 2a+2 & \end{array}$$

$$a+b=0, 2a+2=0 \text{에서 } a=-1, b=1$$

$$\therefore a-b=-2$$

048 68

조립제법의 셋째 줄의 $\square$ 안에 알맞은 수를 각각 p, q, r 이라 하면

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^3+bx^2+cx+d \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)(px^2+qx+r)+5 \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{3}\right)(6x+12)+2\right\}+5 \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)(6x+12)+2\left(x-\frac{1}{2}\right)+5 \\ &= (2x-1)(3x-1)(x+2)+(2x-1)+5 \\ &= (2x-1)(3x-1)(x+2)+2x+4\end{aligned}$$

$$\therefore f(2)=68$$

049 $3x+4$

x^5+x^2+1 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b(a, b$ 는 상수)라 하면

$$x^5+x^2+1=(x+1)^2Q(x)+ax+b$$

$$x^5+x^2-ax+(1-b)=(x+1)^2Q(x) \text{에서}$$

$x^5+x^2-ax+(1-b)$ 는 $(x+1)^2$ 으로 나누어떨어지므로

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -a & 1-b \\ & & -1 & 1 & -1 & 0 & a \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -a & 1-b+a \\ & & -1 & 2 & -3 & 3 & \\ 1 & & -2 & 3 & -3 & -a+3 & \end{array}$$

$$1-b+a=0, -a+3=0 \text{에서 } a=3, b=4$$

따라서 구하는 나머지는 $3x+4$

050 x^5-1

2 이상인 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned}(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+x^2y^{n-3}+xy^{n-2}+y^{n-1}) \\ =x^n-y^n\end{aligned}$$

$$\text{이므로 } (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=x^5-1$$

051 ④ $x^{101}+1$

2보다 큰 홀수 n 에 대하여

$$(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots+x^2y^{n-3}-xy^{n-2}+y^{n-1})$$

$$=x^n+y^n$$

$$\text{이므로 } (x+1)(x^{100}-x^{99}+x^{98}-x^{97}+\cdots+x^2-x+1)=x^{101}+1$$

052 ④ 661

① 단계 $m+n, mn$ 의 값 구하기 40%

$$m+n=(ax+by)+(bx+ay)$$

$$=a(x+y)+b(x+y)$$

$$=(a+b)(x+y)$$

$$=1 \times 1 = 1$$

$$mn=(ax+by)(bx+ay)$$

$$=abx^2+a^2xy+b^2xy+aby^2$$

$$=ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$$

$$=ab\{(x+y)^2-2xy\}+xy\{(a+b)^2-2ab\}$$

$$=-1 \times \{1^2-2 \times (-2)\}-2 \times \{1^2-2 \times (-1)\}=-11$$

② 단계 m^2+n^2, m^3+n^3 의 값 구하기 40%

$$m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=1^2-2 \times (-11)=23$$

$$m^3+n^3=(m+n)^3-3mn(m+n)=1^3-3 \times (-11) \times 1=34$$

③ 단계 m^5+n^5 의 값 구하기 20%

$$\therefore m^5+n^5=(m^2+n^2)(m^3+n^3)-m^2n^2(m+n)$$

$$=23 \times 34 - (-11)^2 \times 1 = 661$$

053 ④ 61

① 단계 $m-n, mn$ 의 값 구하기 40%

$$m-n=(ax+by)-(bx+ay)$$

$$=a(x-y)-b(x-y)$$

$$=(a-b)(x-y)$$

$$=1 \times 1 = 1$$

$$mn=(ax+by)(bx+ay)$$

$$=abx^2+a^2xy+b^2xy+aby^2$$

$$=ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$$

$$=ab\{(x-y)^2+2xy\}+xy\{(a-b)^2+2ab\}$$

$$=(-1) \times (1^2+2 \times 1) + 1 \times \{1^2+2 \times (-1)\} = -4$$

② 단계 m^2+n^2, m^3-n^3 의 값 구하기 40%

$$m^2+n^2=(m-n)^2+2mn=1^2+2 \times (-4)=-7$$

$$m^3-n^3=(m-n)^3+3mn(m-n)=1^3+3 \times (-4) \times 1=-11$$

③ 단계 m^5-n^5 의 값 구하기 20%

$$\therefore m^5-n^5=(m^2+n^2)(m^3-n^3)-m^2n^2(m-n)$$

$$=(-7) \times (-11) - (-4)^2 \times 1 = 61$$

054 ④ 풀이 참조

① 단계 $x-y=a, y-z=b, z-x=c$ 로 치환하기 20%

$$x-y=a, y-z=b, z-x=c \text{로 놓으면}$$

$$a+b+c=0$$

② 단계 곱셈 공식의 변형을 이용하여 좌변과 우변을 각각 정리하기 40%

$$(\text{좌변})=a^2+b^2+c^2$$

$$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$

$$=-2(ab+bc+ca)$$

$$(\text{우변})=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$$

$$=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$$

③ 단계 좌변과 우변을 비교하여 $x=y=z$ 가 성립함을 보이기 40%

$$(\text{좌변})=(\text{우변}) \text{이므로}$$

$$-2(ab+bc+ca)=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2=0$$

$$a, b, c \text{는 실수이므로 } a=b=c=0$$

$$\text{즉, } x-y=y-z=z-x=0 \text{이므로 } x=y=z$$

055 ④ 31

① 단계 규칙성을 파악하여 $P_5(x)$ 구하기 40%

$$P_1(x)=x^3+x^2+1$$

$$P_2(x)=P_1(x+1)=(x+1)^3+(x+1)^2+1$$

$$P_3(x)=P_2(x+2)=(x+3)^3+(x+3)^2+1$$

$$P_4(x)=P_3(x+3)=(x+6)^3+(x+6)^2+1$$

$$P_5(x)=P_4(x+4)=(x+10)^3+(x+10)^2+1$$

② 단계 $P_5(x)$ 의 항들로부터 x^2 의 계수 각각 구하기 40%

$$(x+10)^3 \text{에서 } x^2 \text{의 계수는 } 3 \times 10 = 30$$

$$(x+10)^2 \text{에서 } x^2 \text{의 계수는 } 1$$

③ 단계 $P_5(x)$ 의 x^2 의 계수 구하기 20%

$$\text{따라서 } P_5(x) \text{의 } x^2 \text{의 계수는 } 30+1=31$$

056 ④ 1,211,904

① 단계 조립제법 이용하기 40%

다항식 $f(x)$ 를 $x-2$ 에 대한 내림차순으로 정리한다.

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 4 & -5 & -7 & 3 \\ & & 8 & 6 & -2 \\ \hline 2 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ & & 8 & 22 & \\ \hline 2 & 4 & 11 & 21 & \\ & & 8 & & \\ \hline 4 & & 19 & & \end{array}$$

② 단계 $f(x)$ 를 $x-2$ 에 대한 내림차순으로 정리하기 40%

앞의 조립제법에서

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)(4x^2+3x-1)+1 \\ &= (x-2)\{(x-2)(4x+11)+21\}+1 \\ &= (x-2)[(x-2)\{4(x-2)+19\}+21]+1 \\ &= 4(x-2)^3+19(x-2)^2+21(x-2)+1 \end{aligned}$$

③ 단계 $f(2.01)$ 의 값 구하기 20%

$$\begin{aligned} \therefore f(2.01) &= 4(2.01-2)^3+19(2.01-2)^2+21(2.01-2)+1 \\ &= 4 \times 0.01^3+19 \times 0.01^2+21 \times 0.01+1 \\ &= 1.211904 \end{aligned}$$

1등급 완성 고난도 마스터 문제

p.015-017

057 ②

$(1+2x)^3=1+6x+12x^2+8x^3$ 이므로 x 의 계수는 6이다.

$$\begin{aligned} (1+2x+3x^2)^3 &= \{(1+2x)+3x^2\}^3 \\ &= (1+2x)^3+3 \times (1+2x)^2 \times 3x^2+3 \times (1+2x) \times (3x^2)^2+(3x^2)^3 \\ \text{이므로 } (1+2x+3x^2)^3 \text{의 전개식에서 } x \text{의 계수는 } (1+2x)^3 \text{의 전개} \\ &\text{식에서 } x \text{의 계수와 같다.} \end{aligned}$$

같은 방법으로 주어진 다항식들의 전개식에서 x 의 계수는 모두 6으로 같다.

따라서 주어진 10개의 다항식의 각 전개식에서 x 의 계수들의 총합은 $6 \times 10 = 60$

058 ① -232

$$\begin{aligned} (ac+bd)+(ad+bc) &= a(c+d)+b(c+d) \\ &= (a+b)(c+d) \\ &= (-1) \times 4 = -4 \\ (ac+bd)(ad+bc) &= a^2cd+abc^2+abd^2+b^2cd \\ &= ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2) \\ &= ab\{(c+d)^2-2cd\}+cd\{(a+b)^2-2ab\} \\ &= (-2) \times (4^2-2 \times 2)+2 \times \{(-1)^2-2 \times (-2)\} \\ &= -14 \end{aligned}$$

$ac+bd=x$, $ad+bc=y$ 라 하면

$$x+y=-4, xy=-14$$

$$\begin{aligned} \therefore (ac+bd)^3+(ad+bc)^3 &= x^3+y^3 \\ &= (x+y)^3-3xy(x+y) \\ &= (-4)^3-3 \times (-14) \times (-4) \\ &= -232 \end{aligned}$$

059 ② 23

$$a^2+b^2+c^2-4a+6b=7 \text{에서 } (a-2)^2+(b+3)^2+c^2=20$$

$$a+b+c=2\sqrt{15}-1 \text{에서 } (a-2)+(b+3)+c=2\sqrt{15}$$

$$a-2=x, b+3=y \text{라 하면}$$

$$x+y+c=2\sqrt{15}, x^2+y^2+c^2=20$$

$$(x+y+c)^2=x^2+y^2+c^2+2(xy+yc+cx) \text{이므로}$$

$$(2\sqrt{15})^2=20+2(xy+yc+cx) \quad \therefore xy+yc+cx=20$$

$$x^2+y^2+c^2=xy+yc+cx=20 \text{이므로}$$

$$x^2+y^2+c^2-xy-yc-cx=0$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-c)^2+(c-x)^2\}=0$$

x, y, c 는 실수이므로 $x=y=c$

$$x^2+y^2+c^2=20 \text{에서 } c^2=\frac{20}{3}$$

따라서 $p=3, q=20$ 이므로 $p+q=23$

060 ⑤

ㄱ. $x^2+y^2=1$ 의 양변에 w^2 을 곱하면

$$x^2w^2+y^2w^2=w^2 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$xz+yw=0 \text{에서 } y^2w^2=x^2z^2$$

$$\text{이를 ㉠에 대입하면 } x^2w^2+x^2z^2=w^2$$

$$x^2(w^2+z^2)=w^2 \quad \therefore x^2=w^2 \leftarrow z^2+w^2=1$$

따라서 $x^2+y^2=z^2+w^2$ 에서 $y^2=z^2$ (참)

ㄴ. $x^2+y^2=1$ 이고 $y^2=z^2$ 이므로 $x^2+z^2=1$

$$z^2+w^2=1 \text{이고 } y^2=z^2 \text{이므로 } y^2+w^2=1 \text{ (참)}$$

ㄷ. $xz+yw=0$ 에서 $(xz+yw)^2=0$ 이므로

$$x^2z^2+2xyzw+y^2w^2=0$$

$$y^2=z^2 \text{이므로 } x^2y^2+2xyzw+z^2w^2=0$$

$$\text{따라서 } (xy+zw)^2=0 \text{이므로 } xy+zw=0 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

061 ① $-\frac{3}{4}$

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$$

$$=6^2-2 \times 12=12$$

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz \text{에서}$$

$$24=6 \times (12-12)+3xyz \quad \therefore xyz=8$$

$$\therefore \frac{1}{x-6} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{y-6} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{z-6} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

$$= \frac{1}{x-6} \times \frac{y+z}{yz} + \frac{1}{y-6} \times \frac{z+x}{zx} + \frac{1}{z-6} \times \frac{x+y}{xy}$$

$$= \frac{1}{x-6} \times \frac{6-x}{yz} + \frac{1}{y-6} \times \frac{6-y}{zx} + \frac{1}{z-6} \times \frac{6-z}{xy}$$

$$= -\frac{1}{yz} - \frac{1}{zx} - \frac{1}{xy}$$

$$= -\frac{x+y+z}{xyz}$$

$$= -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

062

답 4

$a+b+c=x$, $ab+bc+ca=y$, $abc=z$ 라 하자.

$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}=6$ 에서 $a^2+b^2+c^2=6(ab+bc+ca)$ 이므로

$$(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=6(ab+bc+ca)$$

$$(a+b+c)^2=8(ab+bc+ca) \quad \therefore x^2=8y \quad \textcircled{㉠}$$

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=17 \text{에서}$$

$$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}=17+3=20$$

$$(a+b+c) \times \frac{ab+bc+ca}{abc}=20 \quad \therefore \frac{xy}{z}=20 \quad \textcircled{㉡}$$

한편, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$ 이므로
 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=y^2-2zx$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{(a+b+c)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{abc(ab+bc+ca)} &= \frac{x(y^2-2zx)}{yz} \\ &= \frac{xy}{z} - \frac{2x^2}{y} \\ &= 20 - \frac{2 \times 8y}{y} \quad \leftarrow \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \\ &= 20 - 16 = 4 \end{aligned}$$

063

답 8

$$7 \times 13 \times 109 \times 10081 + 2 \times 4 \times 10 \times 82$$

$$= (10-3)(10+3)(10^2+3^2)(10^4+3^4)$$

$$+ (3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)$$

$$= (10^8-3^8) + (3^8-1)$$

$$= 10^8 - 1$$

$$\therefore n=8$$

064

답 4√2

$\overline{OA}=x$, $\overline{OB}=y$ 라 하면 $x+y=8$

$\overline{AB}=8$ 이므로 가장 큰 원의 반지름의 길이는 4이다.

$$\therefore S_1=16\pi - \left(\frac{x^2}{4}\pi + \frac{y^2}{4}\pi\right)$$

$$\angle APB = \angle AOP = \angle POB = 90^\circ \text{이므로}$$

$$\triangle APB \sim \triangle AOP \text{ (AA 닮음)}, \triangle APB \sim \triangle POB \text{ (AA 닮음)}$$

$$\text{즉, } \overline{AO} : \overline{OP} = \overline{PO} : \overline{OB} \text{이므로 } x : \overline{OP} = \overline{PO} : y \text{에서}$$

$$\overline{PO}^2 = xy \quad \therefore S_2 = \pi xy$$

$$S_2 - S_1 = \pi xy - 16\pi + \left(\frac{x^2}{4}\pi + \frac{y^2}{4}\pi\right) = 4\pi \text{이므로}$$

$$x^2 + y^2 + 4xy = 80, (x+y)^2 + 2xy = 80$$

$$64 + 2xy = 80 \quad \leftarrow x+y=8 \quad \therefore xy=8$$

$$\text{이때 } (x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = 64 - 32 = 32 \text{이므로}$$

$$\overline{OA} - \overline{OB} = x - y = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

TIP $\angle APB = 90^\circ$ 인 직각삼각형 APB에 대하여 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 O라 하면

$$\angle APB = \angle AOP = \angle POB = 90^\circ, \angle BAP = \angle PAO = \angle BPO \text{이므로}$$

세 직각삼각형 APB, AOP, POB는 모두 닮음이야!

직각삼각형 속의 직각삼각형에 대한 비례식을 다시 한번 기억해 두자!

065

답 200

직육면체 P의 부피는

$$(a+b)^2(a+2b) = a^3 + 4a^2b + 5ab^2 + 2b^3 \text{이므로}$$

12개의 작은 직육면체의 개수는 각각 다음과 같다.

부피가 a^3 인 직육면체: 1개

부피가 a^2b 인 직육면체: 4개

부피가 ab^2 인 직육면체: 5개

부피가 b^3 인 직육면체: 2개

이때 부피가 12인 직육면체가 4개이므로 이 직육면체의 부피는 a^2b

$$\text{즉, } a^2b = 12 = 2^2 \times 3$$

a, b 는 서로소인 자연수이므로 $a=2, b=3$

$$\text{따라서 직육면체 P의 부피는 } (a+b)^2(a+2b) = 200$$

066

답 3

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3} \overline{) 54 \quad -45 \quad 15 \quad -3} \\ \underline{18 \quad -9 \quad 2} \\ \frac{1}{3} \overline{) 54 \quad -27 \quad 6 \quad -1} \\ \underline{18 \quad -3} \\ \frac{1}{3} \overline{) 54 \quad -9 \quad 3} \\ \underline{18} \\ 54 \quad 9 \end{array}$$

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)(54x^2 - 27x + 6) - 1$$

$$= \left(x - \frac{1}{3}\right) \left[\left(x - \frac{1}{3}\right)(54x - 9) + 3 \right] - 1$$

$$= \left(x - \frac{1}{3}\right) \left[\left(x - \frac{1}{3}\right) \left[54 \left(x - \frac{1}{3}\right) + 9 \right] + 3 \right] - 1$$

$$= 54 \left(x - \frac{1}{3}\right)^3 + 9 \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 3 \left(x - \frac{1}{3}\right) - 1$$

$$= 2(3x-1)^3 + (3x-1)^2 + (3x-1) - 1$$

$$\text{따라서 } a=2, b=1, c=1, d=-1 \text{이므로 } a+b+c+d=3$$

주의 조립제법을 연속으로 사용하는 것까지는 잘 할 수 있으나 나누는 식의 일차항의 계수가 1이 아니므로 마지막 단계에서 식을 꼭 고쳐줘야 함을 잊지 마!

067

답 2

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$= (x+2)(ax^2 + px - 2) + 10$$

$$= (x+2)\{(x-3)(ax+q) + s\} + 10$$

$$= (x+2)(x-3)(ax+q) + s(x+2) + 10$$

$$= (x+2)(x-3)(2x+\square) + 13x + \square$$

$$\therefore a=2, s=13$$

$$\text{이때 } 3q=r, -2+r=s=13 \text{이므로 } r=15, q=5$$

$$\therefore ax^3 + bx^2 + cx + d = (x+2)(x-3)(2x+5) + 13x + 36$$

$$= 2x^3 + 3x^2 - 4x + 6$$

$$\text{따라서 } a=2, b=3, c=-4, d=6 \text{이므로 } a+b+c+d=7$$

068

답 3

$f(x) = x^2 + x + 1$ 이므로

$$f(x^{12}) = x^{24} + x^{12} + 1 = (x^{24} - 1) + (x^{12} - 1) + 3$$

$X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1)$ 이 성립하므로

$$x^{12} - 1 = (x^3)^4 - 1$$

$$= (x^3 - 1)(x^9 + x^6 + x^3 + 1)$$

$$= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^9 + x^6 + x^3 + 1)$$

$$x^{24} - 1 = (x^3)^8 - 1$$

$$= (x^3 - 1)(x^{21} + x^{18} + \dots + x^3 + 1)$$

$$= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^{21} + x^{18} + \dots + x^3 + 1)$$

즉, $x^{24} - 1$ 과 $x^{12} - 1$ 은 $x^2 + x + 1$ 로 나누어떨어진다.

따라서 $f(x^{12}) = (x^{24} - 1) + (x^{12} - 1) + 3$ 을 $f(x) = x^2 + x + 1$ 로 나누었을 때의 나머지는 3

069

답 234

그림과 같이 선분 AB의 중점을 O, 선분 AD와 선분 OC의 교점을 M이라 하자.

$\triangle AOC \cong \triangle DOC$ (SSS 합동)이므로 $\angle ACO = \angle DCO$

삼각형 ACD가 $\overline{AC} = \overline{CD}$ 인 이등변삼

각형이므로 선분 CM은 선분 AD의 수직이등분선이다.

이때 $\triangle AMO \sim \triangle ADB$ (AA 닮음)이고 $\overline{AM} : \overline{AD} = 1 : 2$ 이므로

$$\overline{OM} = \frac{1}{2} \overline{BD} = 4$$

두 직각삼각형 AMC와 AMO에서

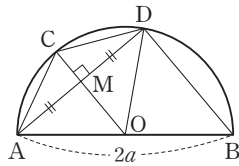
$$\overline{AM}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CM}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OM}^2$$

$$(a-1)^2 - (a-4)^2 = a^2 - 4^2 \quad \therefore a^2 - 6a - 1 = 0$$

$a > 4$ 이므로 위 식의 양변을 a 로 나누면

$$a - 6 - \frac{1}{a} = 0 \quad \therefore a - \frac{1}{a} = 6$$

$$\therefore a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3\left(a - \frac{1}{a}\right) = 6^3 + 3 \times 6 = 234$$



070

답 ①

$f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$$

$\neg$. $f(x) - R(x) = g(x)Q(x)$ 이므로 $f(x) - R(x)$ 는 $g(x)$ 로 나누어떨어진다. (참)

$$\begin{aligned} \neg. f(x) + 3g(x) &= g(x)Q(x) + R(x) + 3g(x) \\ &= g(x)\{Q(x) + 3\} + R(x) \end{aligned}$$

이므로 $f(x) + 3g(x)$ 를 $g(x)$ 로 나누었을 때의 나머지는 $R(x)$ 이다. (거짓)

$$\begin{aligned} \neg. \{f(x)\}^2 &= \{g(x)Q(x) + R(x)\}^2 \\ &= \{g(x)\}^2\{Q(x)\}^2 + 2g(x)Q(x)R(x) + \{R(x)\}^2 \\ &= g(x)[g(x)\{Q(x)\}^2 + 2Q(x)R(x)] + \{R(x)\}^2 \end{aligned}$$

이때 $g(x)$ 의 차수가 $\{R(x)\}^2$ 의 차수보다 크면 $\{f(x)\}^2$ 을 $g(x)$ 로 나누었을 때의 나머지는 $\{R(x)\}^2$ 이지만 $g(x)$ 의 차수가 $\{R(x)\}^2$ 의 차수보다 작거나 같으면 나머지는 $\{R(x)\}^2$ 이 아니다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

071

답 234

$\angle B = \angle D = 90^\circ$ 이므로 사각형 ABCD는 지름이 $\overline{AC}$ 인 원에 내접한다.

$$\overline{AC} = 2\overline{BM} = 2x \text{이므로}$$

$$\overline{AP} = 2x - (x - 2) = x + 2$$

이때 $\triangle APD \sim \triangle BPC$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{AP} : \overline{BP} = \overline{DP} : \overline{CP} \text{에서 } \overline{AP} \times \overline{CP} = \overline{BP} \times \overline{DP}$$

$$(x+2)(x-2) = 6x-3 \quad \therefore x^2 - 6x - 1 = 0$$

$x > 2$ 이므로 위 식의 양변을 x 로 나누면

$$x - 6 - \frac{1}{x} = 0 \quad \therefore x - \frac{1}{x} = 6$$

$$\therefore x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = 6^3 + 3 \times 6 = 234$$

TIP 이 문제에서는

① 직각삼각형의 빗변의 중점은 외심이다.

② 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180° 이면 사각형 ABCD는 원에 내접한다.

③ 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

이 세 가지를 꼭 알고 있어야 해!

네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있고, 직각삼각형 ABC에서 빗변의 중점이 M이니까 $\overline{BP} = \overline{BM}$ 에서 $\overline{BP}$ 의 길이가 외접원의 반지름의 길이와 같음을 알 수 있지. 이때 $\widehat{AB}$ 에 대한 원주각 $\angle ADB$ 와 $\angle ACB$ 가 같고, 맞꼭지각 $\angle APD$ 와 $\angle BPC$ 가 같으니까 $\triangle APD$ 와 $\triangle BPC$ 는 AA 닮음이야. 이것으로 길이에 대한 비례식을 세워 보자!

072

답 22

$f(x) + g(x)$ 를 x 로 나누었을 때의 나머지가 $x^2 + 2x - \frac{1}{2}f(x)$ 이므로 $x^2 + 2x - \frac{1}{2}f(x)$ 는 상수이다.

$$x^2 + 2x - \frac{1}{2}f(x) = R \quad (R \text{은 상수}) \text{라 하면}$$

$$-\frac{1}{2}f(x) = -x^2 - 2x + R \quad \therefore f(x) = 2x^2 + 4x - 2R$$

$f(x) + g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이고,

$f(x) + g(x)$ 를 $x^2 + 2x - 2$ 로 나누었을 때의 나머지도 R 이므로

$$f(x) + g(x) = x(x^2 + 2x - 2) + R$$

$$\therefore g(x) = x(x^2 + 2x - 2) + R - f(x)$$

$$= x^3 - 6x + 3R \quad \leftarrow f(x) = 2x^2 + 4x - 2R$$

$$\text{이때 } g(1) = 7 \text{이므로 } g(1) = 1 - 6 + 3R = 7 \quad \therefore R = 4$$

$$\text{따라서 } f(x) = 2x^2 + 4x - 8 \text{이므로 } f(3) = 22$$

02 항등식과 나머지정리

1등급 필수 내신 빈출 문제

p.019-026

073 답 ④

삼차항의 계수는 1이므로 $a=1$

주어진 등식의 양변에

$x=1$ 을 대입하면 $3=d$

$x=0$ 을 대입하면

$$1 = -1 + b - c + 3, \text{ 즉 } b - c = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$x=-1$ 을 대입하면

$$5 = -8 + 4b - 2c + 3, \text{ 즉 } 2b - c = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $b=6, c=7$

따라서 $a=1, b=6, c=7, d=3$ 이므로

$$a - b + c - d = 1 - 6 + 7 - 3 = -1$$

다른 풀이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ & & 1 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 4 & 2 & 3=d \\ & & 1 & 5 & \\ \hline 1 & 1 & 5 & 7=c \\ & & 1 & \\ \hline & 1=a & 6=b & \end{array}$$

074 답 12

$$\begin{aligned} \{f(x)-3\}^2 &= (x+2a)(x-3a)+25 \\ &= x^2 - ax - 6a^2 + 25 \end{aligned}$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이고, 좌변이 완전제곱식이므로 우변도 완전제곱식이 되어야 한다.

$$\text{즉, } x^2 - ax - 6a^2 + 25 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \text{ 이어야 하므로}$$

$$-6a^2 + 25 = \frac{a^2}{4}, a^2 = 4 \quad \therefore a = \pm 2$$

(i) $a=-2$ 일 때

$$\{f(x)-3\}^2 = (x+1)^2 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = -x+2 \text{ 또는 } f(x) = x+4$$

$$\therefore f(2) = 0 \text{ 또는 } f(2) = 6$$

(ii) $a=2$ 일 때

$$\{f(x)-3\}^2 = (x-1)^2 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = -x+4 \text{ 또는 } f(x) = x+2$$

$$\therefore f(2) = 2 \text{ 또는 } f(2) = 4$$

(i), (ii)에서 모든 $f(2)$ 의 값의 합은

$$0+6+2+4=12$$

TIP $x^2 - ax - 6a^2 + 25$ 에서 판별식 $D = (-a)^2 - 4(-6a^2 + 25) = 0$ 임을 이용해도 돼!

075 답 ②

주어진 등식에서 $x^2 - x = A$ 로 놓으면

$$A(A+3) + Ak + 8 = (A+a)(A+b)$$

$$A^2 + (3+k)A + 8 = A^2 + (a+b)A + ab$$

이 등식은 A 에 대한 항등식이므로

$$3+k=a+b, 8=ab$$

a, b 는 자연수이고, $a < b$ 이므로

$$a=1, b=8 \text{ 또는 } a=2, b=4$$

$$\therefore k=6 \text{ 또는 } k=3$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은 $6+3=9$

076 답 -5

$$f_1(x) = x-1, f_2(x) = (x-1)(x-2),$$

$$f_3(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \text{ 이므로}$$

$$x^3 - 4x^2$$

$$= a+b(x-1) + c(x-1)(x-2) + d(x-1)(x-2)(x-3)$$

위 등식의 양변에

$$x=1 \text{ 을 대입하면 } -3=a$$

$$x=2 \text{ 를 대입하면 } -8=a+b \quad \therefore b=-5$$

$$x=3 \text{ 을 대입하면 } -9=a+2b+2c \quad \therefore c=2$$

$$x=0 \text{ 을 대입하면 } 0=a-b+2c-6d \quad \therefore d=1$$

따라서 $a=-3, b=-5, c=2, d=1$ 이므로 $a+b+c+d=-5$

077 답 $\frac{3}{4}$

$$\frac{x^2+ax+b}{2x^2+bx+1} = k \text{ (} k \text{는 상수)라 하면}$$

$$x^2+ax+b = k(2x^2+bx+1)$$

$$= 2kx^2 + b k x + k$$

이 등식은 x 에 대한 항등식이므로

$$1=2k, a=bk, b=k$$

$$\text{따라서 } k=\frac{1}{2}, a=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{2} \text{ 이므로 } a+b=\frac{3}{4}$$

078 답 3

$f(x)$ 의 차수를 n 이라 하면

등식의 좌변의 차수는 $2n$, 우변의 차수는 $n+1$ 이므로

$$2n=n+1 \quad \therefore n=1$$

$f(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\text{좌변은 } f(x^2)=ax^2+b$$

$$\text{우변은 } (x+2)f(x)+2=(x+2)(ax+b)+2$$

$$= ax^2 + (2a+b)x + 2b+2$$

$$\therefore ax^2+b=ax^2+(2a+b)x+2b+2$$

이 등식은 x 에 대한 항등식이므로

$$2a+b=0, 2b+2=b \quad \therefore a=1, b=-2$$

따라서 $f(x)=x-2$ 이므로 $f(5)=3$

079

답 ②

$x+y=1$ 에서 $y=1-x$ 를 $ax^2+by^2=cx+1$ 에 대입하면

$$ax^2+b(1-x)^2=cx+1$$

$$\therefore (a+b)x^2-(2b+c)x+(b-1)=0$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$a+b=0, 2b+c=0, b-1=0$$

따라서 $a=-1, b=1, c=-2$ 이므로

$$a^2+b^2+c^2=(-1)^2+1^2+(-2)^2=6$$

080

답 ⑤

두 식 $x+y=1, y-z=-1$ 에서 $x+z=2$

$y=1-x, z=2-x$ 를 $x^2+y^2-z^2+xy-zx$ 에 대입하여 정리하면

$$x^2+x-3=ax^2+bx+c$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=1, b=1, c=-3$$

$$\therefore a+b-c=5$$

081

답 41

주어진 등식의 양변에

$$x=0\text{을 대입하면 } 81=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x=-2\text{를 대입하면 } 1=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2}\text{을 하면 } 82=2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8)$$

$$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=41$$

082

답 ③

$$x^{50}=(x-2)Q(x)+R$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면 $2^{50}=R$

$$\therefore x^{50}=(x-2)Q(x)+2^{50} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$Q(x)$ 의 상수항을 포함한 모든 계수의 총합은 $Q(1)$ 이므로

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1=-Q(1)+2^{50} \quad \therefore Q(1)=2^{50}-1$$

따라서 구하는 모든 계수의 총합은 $2^{50}-1$ 이다.

083

답 56

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $a_0=5$ 이므로

$$x^4(x-2)^4=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$$

좌변에서 삼차 이하인 항의 계수는 모두 0이므로

$$x^4(x-2)^4=a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+a_7x^7+a_8x^8$$

$$(x-2)^4=a_4+a_5x+a_6x^2+a_7x^3+a_8x^4$$

위 등식의 양변에

$$x=0\text{을 대입하면 } 16=a_4$$

$$x=1\text{을 대입하면 } 1=a_4+a_5+a_6+a_7+a_8 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x=-1\text{을 대입하면 } 81=a_4-a_5+a_6-a_7+a_8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2}\text{을 하면 } -80=2(a_5+a_7) \quad \therefore a_5+a_7=-40$$

$$\therefore a_4-a_5-a_7=16-(-40)=56$$

084

답 151

주어진 등식의 양변에

$$x=\frac{1}{2}\text{을 대입하면}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{50}=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_{99}}{2^{99}}+\frac{a_{100}}{2^{100}} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x=-\frac{1}{2}\text{을 대입하면}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{50}=a_0-\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}-\frac{a_3}{2^3}+\cdots-\frac{a_{99}}{2^{99}}+\frac{a_{100}}{2^{100}} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{50}-\left(\frac{1}{4}\right)^{50}=2\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_5}{2^5}+\cdots+\frac{a_{99}}{2^{99}}\right)$$

$$\therefore \frac{a_1}{2}+\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_5}{2^5}+\cdots+\frac{a_{97}}{2^{97}}+\frac{a_{99}}{2^{99}}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^{50}-\left(\frac{1}{4}\right)^{50}\right\}$$

$$=\frac{5^{50}-1}{2^{101}}$$

따라서 $m=101, n=50$ 이므로 $m+n=151$

085

답 ⑤

ax^3+bx^2+1 이 x^2-x-1 로 나누어떨어지므로 그 몫을 $mx+n$

(m, n 은 상수)이라 하면

$$ax^3+bx^2+1=(x^2-x-1)(mx+n)$$

삼차항의 계수와 상수항을 각각 비교하면 $m=a, n=-1$

$$\therefore ax^3+bx^2+1=(x^2-x-1)(ax-1)$$

$$=ax^3-(a+1)x^2-(a-1)x+1$$

이 등식은 x 에 대한 항등식이므로 $b=-a-1, 0=-a+1$

이를 연립하여 풀면 $a=1, b=-2$ 이므로 $a-b=3$

다른 풀이 ax^3+bx^2+1 이 x^2-x-1 로 나누어떨어지므로 그 몫을

$$Q(x)\text{라 하면 } ax^3+bx^2+1=(x^2-x-1)Q(x)$$

$$x^2\text{ 대신 } x+1\text{을 대입하면 } \underline{ax(x+1)+b(x+1)+1=0}$$

$$\text{위 식을 } x\text{에 대하여 정리하면 } (2a+b)x+(a+b+1)=0$$

이 등식은 x 에 대한 항등식이므로 $2a+b=0, a+b+1=0$

$$\text{이를 연립하여 풀면 } a=1, b=-2 \quad \therefore a-b=3$$

086

답 ⑤

$f(x)$ 를 $x(x+2)(x-3), (x+2)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 나머

지가 각각 $x^2+ax+4, 5x+b$ 이므로 몫을 각각 $Q_1(x), Q_2(x)$ 라

하면

$$f(x)=x(x+2)(x-3)Q_1(x)+x^2+ax+4$$

$$f(x)=(x+2)(x-3)Q_2(x)+5x+b$$

위 등식의 양변에 $x=-2$ 와 $x=3$ 을 각각 대입하면

$$f(-2)=-2a+8=b-10, f(3)=3a+13=b+15$$

$$\text{이를 연립하여 풀면 } a=4, b=10 \quad \therefore a+b=14$$

087

답 24

삼차다항식 $f(x)$ 가 x^2+x+1 로 나누어떨어지므로 몫을 $ax+b$

(a, b 는 상수)라 하면 $f(x)=(x^2+x+1)(ax+b)$

이때 $f(0)=4$ 이므로 위 식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0)=b=4$$

$$\therefore f(x)=(x^2+x+1)(ax+4) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$f(x)+12$ 가 x^2+2 로 나누어떨어지므로 몫을 $ax+c$ (c 는 상수)라 하면

$$f(x)+12=(x^2+2)(ax+c)$$

$f(0)=4$ 이므로 위 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0)+12=2c, 2c=16 \quad \therefore c=8$$

$$\therefore f(x)=(x^2+2)(ax+8)-12 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } (x^2+x+1)(ax+4)=(x^2+2)(ax+8)-12$$

$$ax^3+(a+4)x^2+(a+4)x+4=ax^3+8x^2+2ax+4$$

이 등식은 x 에 대한 항등식이므로

$$a+4=8, a+4=2a \quad \therefore a=4$$

따라서 $f(x)=(x^2+x+1)(4x+4)$ 이므로 $f(1)=3 \times 8=24$

088

답 42x-83

다항식 $f(x)$ 의 차수를 n 이라 하면 주어진 등식의 좌변의 차수는

$$3n, \text{ 우변의 차수는 } n+2 \text{이므로 } 3n=n+2 \quad \therefore n=1$$

따라서 $f(x)=2x+a$ (a 는 상수)라 하면

$$(2x+a)^3=(2x+a)(4x^2-12x)+18x-27$$

$$8x^3+12ax^2+6a^2x+a^3=8x^3+4(a-6)x^2-6(2a-3)x-27$$

이 등식은 x 에 대한 항등식이므로 $12a=4(a-6) \quad \therefore a=-3$

$$\therefore f(x)=2x-3$$

$\{f(x)\}^3$ 을 x^2-x-2 , 즉 $(x+1)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을

$Q(x)$, 나머지를 $bx+c$ (b, c 는 상수)라 하면

$$(2x-3)^3=(x+1)(x-2)Q(x)+bx+c$$

위 등식의 양변에

$$x=-1 \text{을 대입하면 } -125=-b+c \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x=2 \text{를 대입하면 } 1=2b+c \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } b=42, c=-83$$

따라서 $\{f(x)\}^3$ 을 x^2-x-2 로 나누었을 때의 나머지는 $42x-83$

089

답 4

$x^n(x^2+ax+b)$ 를 $(x+3)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^n(x^2+ax+b)=(x+3)^2Q(x)+3^{n+1}(x+3) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{의 양변에 } x=-3 \text{을 대입하면 } (-3)^n(9-3a+b)=0$$

$$\text{이때 } (-3)^n \neq 0 \text{이므로 } 9-3a+b=0 \quad \therefore b=3a-9 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 양변을 $x+3$ 으로 나누면

$$x^n(x+a-3)=(x+3)Q(x)+3^{n+1}$$

위 등식의 양변에 $x=-3$ 을 대입하면 $(-3)^n(a-6)=3^{n+1}$

$$\text{그런데 } n \text{이 짝수이므로 } a-6=3 \quad \therefore a=9$$

$$a=9 \text{를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } b=18$$

$$\therefore a+b=27$$

090

답 5

조건 (가)에서 $f(x)+g(x)$ 를 $h(x)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라

$$\text{하면 } f(x)+g(x)=h(x)Q_1(x)+5$$

조건 (나)에서 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$ 을 $h(x)$ 로 나누었을 때의 몫을

$$Q_2(x) \text{라 하면 } \{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=h(x)Q_2(x)+15$$

$$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=\{f(x)+g(x)\}^2-2f(x)g(x) \text{이므로}$$

$$f(x)g(x)=\frac{1}{2}[\{f(x)+g(x)\}^2-\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2]$$

$$=\frac{1}{2}[\{h(x)Q_1(x)+5\}^2-\{h(x)Q_2(x)+15\}]$$

$$=\frac{1}{2}h(x)[h(x)\{Q_1(x)\}^2+10Q_1(x)-Q_2(x)]+5$$

따라서 $f(x)g(x)$ 를 $h(x)$ 로 나누었을 때의 나머지는 5이다.

091

답 3

ㄱ. 다항식 $f(x)$ 를 $(x-a)(x-b)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라

$$\text{하면 } f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+R(x)$$

위 등식의 양변에 $x=a$ 를 대입하면 $f(a)=R(a)$ 이므로

$$f(a)-R(a)=0 \text{ (참)}$$

ㄴ. $f(x)=(x-a)(x-b)+x$ 라 하면

$$R(x)=x \text{이고 } f(a)-R(b)=a-b, f(b)-R(a)=b-a$$

a, b 는 서로 다른 두 실수이므로

$$f(a)-R(b) \neq f(b)-R(a) \text{ (거짓)}$$

ㄷ. $R(x)$ 는 일차 이하의 다항식이므로 $R(x)=px+q$ (p, q 는 상

수)라 하면 $f(a)=pa+q, f(b)=pb+q$ 에서

$$af(b)-bf(a)=abp+aq-abp-bq=aq-bq=(a-b)q$$

이때 $R(0)=q$ 이므로

$$af(b)-bf(a)=(a-b)R(0) \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

092

답 2

$f(x)=x^3+ax^2-2x+b$ 라 하면 나머지정리에 의하여

$$f(-1)=4, f(2)=10$$

$$f(-1)=4 \text{에서 } -1+a+2+b=4 \quad \therefore a+b=3$$

$$f(2)=10 \text{에서 } 8+4a-4+b=10 \quad \therefore 4a+b=6$$

이를 연립하여 풀면 $a=1, b=2$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-2x+2$ 이므로 $x+3$ 으로 나누었을 때의 나

$$\text{머지는 } f(-3)=-27+9+6+2=-10$$

093

답 3

$$R_1=f(k)=k^3+k^2-k+1$$

$$R_2=f(-k)=-k^3+k^2+k+1$$

$$R_1+R_2=4 \text{이므로 } (k^3+k^2-k+1)+(-k^3+k^2+k+1)=4$$

$$2k^2+2=4, k^2=1 \quad \therefore k=1 \leftarrow k>0$$

따라서 $f(x)$ 를 $x-2k$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(2k)=f(2)=8+4-2+1=11$$

094

답 ②

$P(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

조건 (가)에서 나머지정리에 의하여

$$P(1) = 1, \text{ 즉 } 1 + a + b = 1 \quad \therefore a + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서 나머지정리에 의하여 $2P(2) = 2$ 에서 $P(2) = 1$

$$\text{즉, } 4 + 2a + b = 1 \quad \therefore 2a + b = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -3, b = 3$

따라서 $P(x) = x^2 - 3x + 3$ 이므로 $P(3) = 3$

095

답 $3x - 4$

$f(x)$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

나머지정리에 의하여 $f(1) = -1, f(2) = 2$ 이므로

$$a + b = -1, 2a + b = 2$$

이를 연립하여 풀면 $a = 3, b = -4$

따라서 $f(x)$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나누었을 때의 나머지는 $3x - 4$

096

답 4

$f(x)$ 를 $(x-1)(x-5)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$R(x) = ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x-1)(x-5)Q(x) + ax + b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$f(x)$ 를 $x-5$ 로 나누었을 때의 나머지가 4이므로 $f(5) = 4$

또한, $f(3+x) = f(3-x)$ 는 x 에 대한 항등식이므로

$$x=2 \text{를 대입하면 } f(5) = f(1) = 4$$

$$x=1 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } f(1) = a + b = 4$$

$$x=5 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } f(5) = 5a + b = 4$$

이를 연립하여 풀면 $a = 0, b = 4$

따라서 $R(x) = 4$ 이므로 $R(7) = 4$

TIP $R(x) = 4$ 이므로 x 가 어떤 값을 갖더라도 함수값은 4임을 주의하자!

097

답 ④

조건 (가)에서 $f(3) = 36$

$f(x)$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$R(x) = ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

조건 (나)의 식 $f(x+1) = f(x) + 6x^2$ 의 양변에

$$x=2 \text{를 대입하면 } f(3) = f(2) + 24 = 36 \quad \therefore f(2) = 12$$

$$x=1 \text{을 대입하면 } f(2) = f(1) + 6 = 12 \quad \xrightarrow{\text{조건 (가)}} \therefore f(1) = 6$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } f(1) = a + b = 6, f(2) = 2a + b = 12$$

이를 연립하여 풀면 $a = 6, b = 0$

따라서 $R(x) = 6x$ 이므로 $R(2) = 6 \times 2 = 12$

098

답 26

조건 (가)에서 $f(1) = 2$

$f(x)$ 는 삼차다항식이므로 조건 (나)에 의하여 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x-1)^2(ax+b) + ax+b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 조건 (가)에 의하여 $f(1) = a + b = 2$

$$\therefore b = 2 - a \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2\{ax + (2-a)\} + ax + (2-a) \\ &= (x-1)^2\{a(x-1) + 2\} + a(x-1) + 2 \\ &= a(x-1)^3 + 2(x-1)^2 + a(x-1) + 2 \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 를 $(x-1)^3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$R(x) = 2(x-1)^2 + a(x-1) + 2$$

$$\text{이때 } R(0) = R(3) \text{이므로 } 2 - a + 2 = 8 + 2a + 2 \quad \therefore a = -2$$

$$\text{즉, } R(x) = 2(x-1)^2 - 2(x-1) + 2 \text{이므로 } R(5) = 26$$

099

답 $2x^2 + 5x + 1$

$f(x)$ 를 $(x+1)^2(x+2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x+1)^2(x+2)Q(x) + ax^2 + bx + c \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $x-1$ 이므로

$\textcircled{1}$ 에서 $ax^2 + bx + c$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $x-1$

$$\therefore ax^2 + bx + c = a(x+1)^2 + x - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$f(x) = (x+1)^2(x+2)Q(x) + a(x+1)^2 + x - 1$$

$f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지가 -1 이므로

$$f(-2) = -1 \text{에서 } a - 3 = -1 \quad \therefore a = 2$$

따라서 구하는 나머지는 $2(x+1)^2 + x - 1 = 2x^2 + 5x + 1$

100

답 ③

$f(x)$ 를 $(x-1)(x-2), (x-1)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x), Q_2(x)$ 라 하면

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q_1(x) + 2x + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$= (x-1)(x-3)Q_2(x) + 6x + k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=1, x=2$ 를 각각 대입하면 $f(1) = 3, f(2) = 5$

$$\textcircled{2} \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면 } f(1) = 6 + k = 3 \quad \therefore k = -3$$

$$\therefore f(3) = 18 + k = 15$$

이때 $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 나머지

$R(x)$ 는 이차 이하의 식이므로

$R(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = 15 \text{이므로}$$

$$a + b + c = 3, 4a + 2b + c = 5, 9a + 3b + c = 15$$

이를 연립하여 풀면 $a = 4, b = -10, c = 9$ 이므로

$$R(x) = 4x^2 - 10x + 9 \quad \therefore R(3) = 15$$

101 ③

조건 (가)에서 $f(x)$ 를 $x+1$, x^2-3 으로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, 나머지를 R 이라 하면
 $f(x) = (x+1)Q_1(x) + R$, $f(x) = (x^2-3)Q_2(x) + R$
 $\therefore f(x) - R = (x+1)Q_1(x) = (x^2-3)Q_2(x)$
 $f(x) - R$ 은 $x+1$, x^2-3 으로 각각 나누어떨어지고 $f(x)$ 는 최고차 항의 계수가 1인 사차다항식이므로
 $f(x) - R = (x+1)(x^2-3)(x+a)$ (a 는 상수) ㉠
 로 놓을 수 있다.
 $f(x+1) - 5$ 를 x^2+x 로 나누었을 때의 몫을 $Q_3(x)$ 라 하면
 $f(x+1) - 5 = (x^2+x)Q_3(x) = x(x+1)Q_3(x)$
 위 등식의 양변에
 $x=0$ 을 대입하면 $f(1) - 5 = 0 \quad \therefore f(1) = 5$
 $x=-1$ 을 대입하면 $f(0) - 5 = 0 \quad \therefore f(0) = 5$
 ㉠의 양변에
 $x=0$ 을 대입하면 $5 - R = -3a$
 $x=1$ 을 대입하면 $5 - R = -4 - 4a$
 이를 연립하여 풀면 $a = -4$, $R = -7$
 따라서 $f(x) = (x+1)(x^2-3)(x-4) - 7$ 이므로 $f(4) = -7$

102 ②

$x^{100} + x^{10} + x + 10$ 을 x^2-1 로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $x^{100} + x^{10} + x + 10 = (x^2-1)Q(x) + ax+b$
 $= (x-1)(x+1)Q(x) + ax+b$
 위 등식의 양변에
 $x=1$ 을 대입하면 $13 = a+b$
 $x=-1$ 을 대입하면 $11 = -a+b$
 이를 연립하여 풀면 $a=1$, $b=12$
 $\therefore x^{100} + x^{10} + x + 10 = (x-1)(x+1)Q(x) + x+12$ ㉠
 한편, $Q(x)$ 를 x 로 나누었을 때의 나머지는 $Q(0)$ 이므로
 ㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $10 = -Q(0) + 12 \quad \therefore Q(0) = 2$
 따라서 $Q(x)$ 를 x 로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

103 ① - 1

$f(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이므로
 $f(x) = (x+1)Q(x) + 3$ ㉠
 $Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 1이므로 $Q(1) = 1$
 ㉠의 양변에
 $x=-1$ 을 대입하면 $f(-1) = 3$ ㉡
 $x=1$ 을 대입하면 $f(1) = 2Q(1) + 3 = 5$ ㉢
 $f(x)$ 를 $(x+1)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 $R(x) = ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $f(x) = (x+1)(x-1)Q'(x) + ax+b$

㉡, ㉢에 의하여 $-a+b=3$, $a+b=5$
 이를 연립하여 풀면 $a=1$, $b=4$
 따라서 $R(x) = x+4$ 이므로 $R(-5) = -1$

104 ②

$f(x)$ 를 x^2-2x-3 으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $3x+2$ 이므로
 $f(x) = (x^2-2x-3)Q(x) + 3x+2$
 $= (x+1)(x-3)Q(x) + 3x+2$ ㉠
 ㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $f(-1) = -1$ ㉡
 $Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 $Q(2) = 3$
 ㉠의 양변에 $x=2$ 을 대입하면 $f(2) = -3Q(2) + 8 = -1$ ㉢
 $f(x)$ 를 x^2-x-2 로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $f(x) = (x^2-x-2)Q'(x) + ax+b$
 $= (x+1)(x-2)Q'(x) + ax+b$
 ㉡, ㉢에 의하여 $-a+b=-1$, $2a+b=-1$
 이를 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-1$
 따라서 $f(x)$ 를 x^2-x-2 로 나누었을 때의 나머지는 -1 이다.

105 ①

$f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 $a+1$ 이므로
 $f(1) = a+1$ ㉠
 $f(x) = (x-1)(x^2+x+1)Q_2(x) + x^2+x+b$
 $= (x-1)(x^2+x+1)Q_2(x) + (x-1)(x+2) + b+2$
 $= (x-1)\{(x^2+x+1)Q_2(x) + x+2\} + b+2$ ㉡
 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫은 $(x^2+x+1)Q_2(x) + x+2$ 이
 므로 $Q_1(x) = (x^2+x+1)Q_2(x) + x+2$
 $\therefore R(x) = x+2$
 ㉡의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1) = b+2$ 이므로 ㉠에서
 $a+1 = b+2 \quad \therefore b-a = -1$
 $\therefore R(b-a) = R(-1) = 1$

106 ④

$2^{223} = (2^5)^{44} \times 2^3 = 8 \times 32^{44}$ 이므로 $32 = x$ 로 놓고 $8x^{44}$ 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 하면
 $8x^{44} = (x-1)Q(x) + R$
 위 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $R=8$
 $\therefore 8x^{44} = (x-1)Q(x) + 8$
 위 등식의 양변에 $x=32$ 를 대입하면
 $8 \times 32^{44} = 31Q(32) + 8$, 즉 $2^{223} = 31Q(32) + 8$
 따라서 구하는 나머지는 8이다.

107 ⑤

$3^{100} + 3^{101} + 3^{102} = (3^2)^{50} + (3^2)^{50} \times 3 + (3^2)^{50} \times 3^2$
 $= (3^2)^{50}(1+3+3^2)$
 $= 13 \times 9^{50}$

$9=x$ 로 놓고 $13x^{50}$ 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 하면 $13x^{50}=(x-1)Q(x)+R$
 위 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $R=13$
 $\therefore 13x^{50}=(x-1)Q(x)+13$
 위 등식의 양변에 $x=9$ 를 대입하면
 $13 \times 9^{50}=8Q(9)+13=8\{Q(9)+1\}+5$
 즉, $3^{100}+3^{101}+3^{102}=8\{Q(9)+1\}+5$
 따라서 구하는 나머지는 5이다.

TIP • $3^{100}+3^{101}+3^{102}=8Q(9)+13$ 에서 $8Q(9)$ 는 8의 배수이므로 13을 8로 나눈 나머지를 구해도 돼!

108 **답** 74
 $74=x$ 로 놓고 x^9 을 $(x+1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 하면 $x^9=(x+1)Q(x)+R$
 위 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $R=-1$
 $\therefore x^9=(x+1)Q(x)-1$
 위 등식의 양변에 $x=74$ 를 대입하면
 $74^9=75Q(74)-1=75\{Q(74)-1\}+74$
 따라서 구하는 나머지는 74이다.

주의 • 다항식의 나눗셈에서는 나머지가 음수일 수 있지만 자연수의 나눗셈에서는 나머지가 반드시 0 또는 자연수이어야 해!
 따라서 나머지가 음수가 나오지 않도록 식을 변형해 주는 걸 잊지 말자!

109 **답** ③
 $2^{1111}=(2^4)^{277} \times 2^3=8 \times 16^{277}$
 $16=x$ 로 놓고 $8x^{277}$ 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 하면 $8x^{277}=(x+1)Q(x)+R$
 위 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $R=-8$
 $\therefore 8x^{277}=(x+1)Q(x)-8$
 위 등식의 양변에 $x=16$ 을 대입하면
 $8 \times 16^{277}=17Q(16)-8=17\{Q(16)-1\}+9$
 즉, $2^{1111}=17\{Q(16)-1\}+9$
 따라서 구하는 나머지는 9이다.

110 **답** ⑤
 $f(-1)=-1, f(1)=1, f(2)=2$ 에서
 $f(-1)+1=0, f(1)-1=0, f(2)-2=0$
 즉, $f(x)-x$ 는 $x+1, x-1, x-2$ 로 나누어떨어진다.
 이때 $f(x)$ 는 x^3 의 계수가 1인 삼차다항식이므로
 $f(x)-x=(x+1)(x-1)(x-2)$
 $\therefore f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)+x$
 따라서 $f(x)$ 를 $x-4$ 로 나누었을 때의 나머지는 $f(4)=34$

111 **답** 48
 조건 (가)에서 $g(x)=-2f(x)$ 이므로 $f(x)g(x)=-2\{f(x)\}^2$
 조건 (나)에서 $-2\{f(x)\}^2$ 이 x^2-3x+2 , 즉 $(x-1)(x-2)$ 로 나누어떨어지므로
 $-2\{f(1)\}^2=0, -2\{f(2)\}^2=0 \quad \therefore f(1)=0, f(2)=0$
 $f(x)=k(x-1)(x-2)$ (k 는 상수)라 하면 $f(0)=-4$ 이므로
 $k=-2 \quad \therefore f(x)=-2(x-1)(x-2)$
 따라서 $g(x)=-2f(x)=4(x-1)(x-2)$ 이므로 $g(5)=48$

112 **답** ③
 $f(x)-3$ 이 x^2-1 , 즉 $(x+1)(x-1)$ 로 나누어떨어지므로
 $f(-1)-3=0, f(1)-3=0 \quad \therefore f(-1)=3, f(1)=3$
 $f(x+2)$ 를 x^2+4x+3 , 즉 $(x+1)(x+3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $f(x+2)=(x+1)(x+3)Q(x)+ax+b$
 위 등식의 양변에
 $x=-1$ 을 대입하면 $f(1)=-a+b=3$
 $x=-3$ 을 대입하면 $f(-1)=-3a+b=3$
 이를 연립하여 풀면 $a=0, b=3$
 따라서 구하는 나머지는 3이다.

113 **답** 8
 $P(x)=x^2+ax+b$ (a, b 는 상수), $Q(x)=x+c$ (c 는 상수)라 하자.
 조건 (가)에서 $P(-1+1)-Q(-1+1)=P(0)-Q(0)=0$ 이므로
 $b=c$
 $P(x)-Q(x)=(x^2+ax+b)-(x+b)=x^2+(a-1)x$ 이므로 이
 차방정식 $x^2+(a-1)x=0$ 의 판별식을 D 라 하면 조건 (나)에 의하여
 $D=(a-1)^2=0 \quad \therefore a=1$
 $\therefore P(x)=x^2+x+b$
 $P(x)+Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 12이므로
 $P(2)+Q(2)=(4+2+b)+(2+b)=12 \quad \therefore b=2$
 따라서 $P(x)=x^2+x+2$ 이므로 $P(2)=8$

114 **답** ①
 조건 (가)에서 $f(2-x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 -4 이므로
 $f(2-2)=f(0)=-4$
 조건 (나)에서 $xf(x)$ 는 $(x+1)(x-4)$ 로 나누어떨어지므로
 $-f(-1)=0, 4f(4)=0 \quad \therefore f(-1)=0, f(4)=0$
 $f(x)=a(x+1)(x-4)$ ($a \neq 0$ 인 상수)라 하면
 $f(0)=-4$ 에서 $-4a=-4 \quad \therefore a=1$
 $\therefore f(x)=(x+1)(x-4)$
 따라서 $f(x-1)$ 을 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는
 $f(3-1)=f(2)=-6$

115 288

$$\{Q(x)\}^2 + \{Q(x-2)\}^2 = (x^2 + 2x)P(x) \\ = x(x+2)P(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변에

$$x=0 \text{을 대입하면 } \{Q(0)\}^2 + \{Q(-2)\}^2 = 0$$

$$x=-2 \text{를 대입하면 } \{Q(-2)\}^2 + \{Q(-4)\}^2 = 0$$

즉, $Q(0)=0$, $Q(-2)=0$, $Q(-4)=0$ 이므로

$$Q(x) = x(x+2)(x+4) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$\{x(x+2)(x+4)\}^2 + \{(x-2)x(x+2)\}^2 = x(x+2)P(x)$$

$$\therefore P(x) = x(x+2)(x+4)^2 + \frac{x(x+2)(x-2)^2}{x(x+2)(x+4)} \\ = x(x+2)(x+4)(2x-4) + 36x(x+2) \\ = Q(x)(2x-4) + 36x(x+2) \quad \leftarrow \textcircled{2} \text{에서}$$

따라서 $R(x) = 36x(x+2)$ 이므로 $R(2) = 288$

116 2

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + px \text{ 라 하면}$$

$f(x)$ 의 상수항 p 가 소수이므로 계수가 정수인 일차식의 인수가 될 수 있는 것은 $x+1$, $x-1$, $x+p$, $x-p$ 이다.

$$(i) f(-1)=0 \text{ 일 때, } -3+p=0 \text{ 에서 } p=3$$

$$(ii) f(1)=0 \text{ 일 때, } -1+p=0 \text{ 에서 } p=1$$

p 가 소수이어야 하므로 모순이다.

$$(iii) f(-p)=0 \text{ 일 때, } -p^3 - 2p^2 + p = 0, p = p^3 + 2p^2 = p^2(p+2)$$

양변을 p 로 나누면 $1 = p(p+2) \geq 8$ 이므로 성립하지 않는다.

$$(iv) f(p)=0 \text{ 일 때, } p^3 - 2p^2 + p = 0$$

양변을 p 로 나누면 $p^2 - 2p + 1 = 0$, 즉 $(p-1)^2 = 0$ 에서 $p=1$ 이 되어 모순이다.

(i)~(iv)에서 소수 p 의 값은 3이다.

TIP 상수항이 소수 p 인 경우 계수가 정수인 일차식의 인수는 상수항이 p 의 약수인 형태를 가져! 즉, 소수 p 의 약수는 1과 p 뿐이므로 가능한 일차식의 인수는 $x+1$, $x-1$, $x+p$, $x-p$ 가 되는 거야!

117 3

$2P(x) - Q(x)$ 는 $x-1$ 로 나누어떨어지므로

$$2P(1) - Q(1) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$P(x) + 2Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 5이므로

$$P(1) + 2Q(1) = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } P(1)=1, Q(1)=2$$

$$\therefore P(x) - 2x^2 + 2x - 1 \text{에 } x=1 \text{을 대입하면 } P(1) - 2 + 2 - 1 = 0$$

따라서 $P(x) - 2x^2 + 2x - 1$ 은 $x-1$ 로 나누어떨어진다.

$$\therefore Q(x) - 4x^2 \text{에 } x=1 \text{을 대입하면 } Q(1) - 4 = -2$$

따라서 $Q(x) - 4x^2$ 은 $x-1$ 로 나누어떨어지지 않는다.

$$\therefore 4x^2 - 2P(x)Q(x) \text{에 } x=1 \text{을 대입하면 } 4 - 2P(1)Q(1) = 0$$

따라서 $4x^2 - 2P(x)Q(x)$ 는 $x-1$ 로 나누어떨어진다.

이상에서 $x-1$ 로 나누어떨어지는 것은 $\neg$, $\vdash$ 이다.

118 4

조건 (나)에서 $f(1)=f(2)=f(3)=k$ (k 는 상수)라 하자.

$g(x)=f(x)-k$ 라 하면 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이고 $g(1)=g(2)=g(3)=0$ 이므로

$$g(x) = f(x) - k = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\therefore f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + k$$

$$\text{한편, 조건 (가)에서 } f(0)=1 \text{이므로 } -6+k=1 \quad \therefore k=7$$

$$\text{따라서 } f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + 7 \text{이므로 } f(5)=31$$

TIP 실수 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 과 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여

$f(a_i)=g(a_i)$ ($i=1, 2, 3, \dots, n$)이면 $f(x)-g(x)$ 는 $x-a_1, x-a_2, x-a_3, \dots, x-a_n$ 으로 나누어떨어져! 즉, $x-a_1, x-a_2, x-a_3, \dots, x-a_n$ 을 인수로 갖는 거지!

이때 $f(x)-g(x)$ 의 최고차항의 계수가 k ($k \neq 0$ 인 상수)라 하면

$$f(x)-g(x) = k(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n) \text{이 되는 거야!}$$

119 15

$$f(1)=3, 2f(2)=4, 3f(3)=5, 4f(4)=6 \text{에서}$$

$$f(1)-3=2f(2)-4=3f(3)-5=4f(4)-6=0 \text{이므로 다항식}$$

$xf(x)-(x+2)$ 는 $x-1, x-2, x-3, x-4$ 를 인수로 갖는다.

이때 $f(x)$ 가 삼차다항식이면 $xf(x)-(x+2)$ 는 사차다항식이므로

$$xf(x)-(x+2) = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \quad (a \neq 0 \text{인 상수})$$

라 하고, 위 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$-2 = 24a \quad \therefore a = -\frac{1}{12}$$

$$\therefore xf(x)-(x+2) = -\frac{1}{12}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 $f(-2)$ 이므로 위 식의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$-2f(-2) = -30 \quad \therefore f(-2) = 15$$

따라서 구하는 나머지는 15이다.

120 3

$$f(1)=3=2 \times 1 + 1, f(2)=5=2 \times 2 + 1, f(3)=7=2 \times 3 + 1 \text{이}$$

므로 $f(x)-(2x+1)$ 은 $x-1, x-2, x-3$ 을 인수로 갖는다.

$$g(x) = f(x) - (2x+1) \text{이라 하면 } g(x) \text{는 삼차다항식이고}$$

$$g(1)=g(2)=g(3)=0 \text{이므로}$$

$$g(x) = k(x-1)(x-2)(x-3) \quad (k \neq 0 \text{인 상수}) \text{으로 놓을 수 있다.}$$

$$\text{따라서 } f(x) = k(x-1)(x-2)(x-3) + 2x + 1 \text{이므로}$$

$$f(0) + f(4) = (-6k+1) + (6k+9) = 10$$

121 2

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면 $h(x)$ 는 삼차 이하의 다항식이고,

$f(x), g(x)$ 를 x^2-2 로 나누었을 때의 나머지가 같으므로 $h(x)$ 는 x^2-2 로 나누어떨어진다. 즉, $h(x)$ 는 x^2-2 를 인수로 갖는다.

또한, $f(1)=g(1)$ 에서 $h(1)=f(1)-g(1)=0$ 이므로 $h(x)$ 는 $x-1$ 도 인수로 갖는다.

$\therefore h(x) = f(x) - g(x) = k(x^2 - 2)(x - 1)$ ($k \neq 0$ 인 상수) ... ㉠
 그런데 $h(0) = f(0) - g(0) = 1 - (-1) = 2$ 이므로
 ㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $2 = 2k$ $\therefore k = 1$
 따라서 $h(x) = (x^2 - 2)(x - 1)$ 이므로 $f(2) - g(2) = h(2) = 2$

122 ㉠ $\frac{\sqrt{15}}{2}$

라그랑주 항등식에 의하여
 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ 이 성립하므로
 $2 \times 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (ad - bc)^2$, $(ad - bc)^2 = \frac{15}{4}$
 $ad > bc$ 이므로 $ad - bc = \frac{\sqrt{15}}{2}$

다른 풀이

$a^2 + b^2 = 2$, $c^2 + d^2 = 2$ 이므로
 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = 4$
 $\therefore a^2c^2 + b^2d^2 = 4 - a^2d^2 - b^2c^2$ ㉠
 $ac + bd = \frac{1}{2}$ 이므로 $(ac + bd)^2 = a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 = \frac{1}{4}$
 $\therefore a^2c^2 + b^2d^2 = \frac{1}{4} - 2abcd$
 이를 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{4} - 2abcd = 4 - a^2d^2 - b^2c^2$
 $\therefore a^2d^2 + b^2c^2 = \frac{15}{4} + 2abcd$
 $(ad - bc)^2 = a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 = \left(\frac{15}{4} + 2abcd\right) - 2abcd = \frac{15}{4}$
 $ad > bc$ 이므로 $ad - bc = \frac{\sqrt{15}}{2}$

123 ㉠ 11

라그랑주 항등식에 의하여
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$ 이 성립하므로
 $12 \times 12 = (ax + by)^2 + 23$, $(ax + by)^2 = 121$
 $ax + by > 0$ 이므로 $ax + by = 11$

124 ㉠ -15

① 단계 삼차식 $f(x)$ 의 식 세우기 30%

삼차식 $f(x)$ 를 $x^2 - x - 1$ 로 나누었을 때의 몫은 일차식이므로 몫을 $ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면
 $f(x) = (x^2 - x - 1)(ax + b) - 2x + 1$ ㉠

② 단계 조건을 이용하여 $f(x)$ 구하기 40%

$(x - 4)f(x) = (x + 2)f(x - 2)$ 의 양변에
 $x = 4$ 를 대입하면 $0 = 6f(2)$ $\therefore f(2) = 0$
 $x = -2$ 를 대입하면 $-6f(-2) = 0$ $\therefore f(-2) = 0$
 ㉠의 양변에
 $x = 2$ 를 대입하면 $0 = 2a + b - 3$ $\therefore 2a + b = 3$
 $x = -2$ 를 대입하면 $0 = 5(-2a + b) + 5$ $\therefore 2a - b = 1$
 이를 연립하여 풀면 $a = 1, b = 1$
 $\therefore f(x) = (x^2 - x - 1)(x + 1) - 2x + 1$

③ 단계 $f(x)$ 를 $x + 3$ 으로 나누었을 때의 나머지 구하기 30%

따라서 $f(x)$ 를 $x + 3$ 으로 나누었을 때의 나머지는
 $f(-3) = 11 \times (-2) + 7 = -15$

125 ㉠ 200

① 단계 삼차식 $f(x)$ 의 식 세우기 30%

삼차식 $f(x)$ 를 $(x - 1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫은 일차식이고 나머지는 일차 이하의 식이므로 몫과 나머지를 $ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면
 $f(x) = (x - 1)^2(ax + b) + ax + b$

② 단계 조건을 이용하여 $f(x)$ 구하기 40%

$f(1) = 2$ 이므로 $a + b = 2$ $\therefore b = 2 - a$
 $f(x) = (x - 1)^2(ax + 2 - a) + ax + 2 - a$
 $= (x - 1)^2\{a(x - 1) + 2\} + ax + 2 - a$
 $= a(x - 1)^3 + 2(x - 1)^2 + ax + 2 - a$
 에서 $R(x) = 2(x - 1)^2 + ax + 2 - a$ 이므로
 $R(2) = a + 4, R(3) = 2a + 10$
 이때 $R(2) = R(3)$ 이므로 $a + 4 = 2a + 10$ $\therefore a = -6$
 $\therefore f(x) = -6(x - 1)^3 + 2(x - 1)^2 - 6x + 8$

③ 단계 $f(x)$ 를 $x + 2$ 로 나누었을 때의 나머지 구하기 30%

따라서 $f(x)$ 를 $x + 2$ 로 나누었을 때의 나머지는
 $f(-2) = 162 + 18 + 12 + 8 = 200$

126 ㉠ 198

① 단계 주어진 식을 적당히 변형하기 40%

$x^5 = \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{3^2}(2x - 1) + \frac{a_2}{3^3}(2x - 1)^2 + \dots + \frac{a_5}{3^6}(2x - 1)^5$
 $= \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{3} \left(\frac{2x - 1}{3}\right) + \frac{a_2}{3} \left(\frac{2x - 1}{3}\right)^2 + \dots + \frac{a_5}{3} \left(\frac{2x - 1}{3}\right)^5$
 ㉠

② 단계 수치대입법을 이용하여 관계식 유도하기 30%

㉠의 양변에
 $x = 2$ 를 대입하면 $2^5 = \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_5}{3}$ ㉡
 $x = -1$ 을 대입하면 $(-1)^5 = \frac{a_0}{3} - \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3} - \dots - \frac{a_5}{3}$ ㉢

③ 단계 $4(a_1 + a_3 + a_5)$ 의 값 구하기 30%

㉡ - ㉢을 하면 $2^5 - (-1)^5 = 2 \left(\frac{a_1}{3} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_5}{3}\right)$
 $33 = \frac{2}{3}(a_1 + a_3 + a_5)$ $\therefore a_1 + a_3 + a_5 = \frac{99}{2}$
 $\therefore 4(a_1 + a_3 + a_5) = 4 \times \frac{99}{2} = 198$

① 단계 조건을 이용하여 $g(x)$ 구하기 40%

조건 (가)에서 $x^2g(x) = (x^2+3x)f(x)$

위 등식의 양변에 $x = -3$ 을 대입하면

$$9g(-3) = 0 \quad \therefore g(-3) = 0$$

$g(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$g(-3) = 9 - 3a + b = 0 \quad \therefore 3a - b = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

조건 (나)에서 $g(2) = 5$ 이므로

$$g(2) = 4 + 2a + b = 5 \quad \therefore 2a + b = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a = 2, b = -3$

$$\therefore g(x) = x^2 + 2x - 3$$

② 단계 $f(x)$ 구하기 40%

$g(x) = x^2 + 2x - 3$ 을 $x^2g(x) = (x^2+3x)f(x)$ 에 대입하면

$$x^2(x^2+2x-3) = (x^2+3x)f(x)$$

$$x^2(x+3)(x-1) = x(x+3)f(x)$$

$$\therefore f(x) = x(x-1)$$

③ 단계 $f(-3)$ 의 값 구하기 20%

$$\therefore f(-3) = (-3) \times (-4) = 12$$

① 단계 $f(x)$ 를 식으로 나타내기 40%

다항식 $f(x)$ 를 $(x^2+1)(x^2+2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x) = (x^2+1)(x^2+2)Q(x) + R(x)$$

이때 $R(x)$ 는 삼차 이하의 식이고 $f(x)$ 를 x^2+1 로 나누었을 때의 나머지가 $4x+4$ 이므로

$$R(x) = (x^2+1)(ax+b) + 4x+4 \quad (a, b \text{는 상수})$$

$$= (x^2+2)(ax+b) - (ax+b) + 4x+4$$

$$= (x^2+2)(ax+b) + (4-a)x + 4-b$$

$$\therefore f(x)$$

$$= (x^2+1)(x^2+2)Q(x) + (x^2+2)(ax+b) + (4-a)x + 4-b$$

② 단계 $R(x)$ 구하기 40%

이때 $f(x)$ 를 x^2+2 로 나누었을 때의 나머지가 $4x+8$ 이므로

$$(4-a)x + 4-b = 4x+8$$

$$4-a=4, 4-b=8 \quad \therefore a=0, b=-4$$

$$\therefore R(x) = (x^2+1)(ax+b) + 4x+4$$

$$= -4(x^2+1) + 4x+4$$

$$= -4x^2 + 4x$$

③ 단계 $R(3)$ 의 값 구하기 20%

$$\therefore R(3) = -36 + 12 = -24$$

$$f(x^2) = x^3f(x+1) - 2x^4 + 2x^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

ㄱ. $\textcircled{㉠}$ 의 양변에

$$x=0 \text{을 대입하면 } f(0)=0$$

$$x=-1 \text{을 대입하면 } f(1) = -f(0) - 2 + 2 = 0$$

$$x=1 \text{을 대입하면 } f(1) = f(2) - 2 + 2 = f(2)$$

$$\therefore f(2) = 0 \text{ (참)}$$

ㄴ. $f(x)$ 의 차수를 n 이라 하면 $\textcircled{㉠}$ 의 좌변의 차수는 $2n$ 이고, 우변의 차수는 $n+3$ 또는 4이다.

(i) $2n = n+3$, 즉 $n=3$ 일 때

$\textcircled{㉠}$ 의 좌변 $f(x^2)$ 은 육차다항식이고 우변의 $x^3f(x+1)$ 도 육차다항식이므로 성립한다.

(ii) $2n=4$, 즉 $n=2$ 일 때

$\textcircled{㉠}$ 의 좌변 $f(x^2)$ 은 사차다항식이고 우변의 $x^3f(x+1)$ 은 오차다항식이므로 성립하지 않는다.

따라서 $f(x)$ 는 삼차다항식이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 $f(0)=f(1)=f(2)=0$ 이고 ㄴ에서 $f(x)$ 는 삼차다항식

$$\text{이므로 } f(x) = ax(x-1)(x-2) \quad (a \neq 0 \text{인 상수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{의 양변에 } x=2 \text{를 대입하면 } f(4) = 8f(3) - 24 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉡}$ 의 양변에 $x=4, x=3$ 을 각각 대입하여 정리하면

$$f(4) = 24a, f(3) = 6a \text{이므로 } \textcircled{㉢} \text{에 대입하면}$$

$$24a = 48a - 24 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore f(x) = x(x-1)(x-2)$$

따라서 $(x-3)f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ 이고

$$xf(x-1) = x(x-1)(x-2)(x-3) \text{이므로}$$

$$(x-3)f(x) = xf(x-1) \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

$$\text{ㄱ. } f(1-x) = (1-x)^2 - (1-x) + k = x^2 - x + k = f(x) \text{ (참)}$$

ㄴ. x^n 을 $f(x)$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q_n(x)$, 나머지가 $a_nx + b_n$ 이므로 $x^n = f(x)Q_n(x) + a_nx + b_n$

이 등식은 x 에 대한 항등식이므로 x 대신 $1-x$ 를 대입해도 성립한다.

$$\therefore (1-x)^n = \overbrace{f(1-x)Q_n(1-x) + a_n(1-x) + b_n}^{f(1-x)=f(x)} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

따라서 $(1-x)^n$ 을 $f(x)$ 로 나누었을 때의 몫은 $Q_n(1-x)$ 이다. (참)

ㄷ. $\textcircled{㉠}$ 에서 $(1-x)^n$ 을 $f(x)$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$a_n(1-x) + b_n \text{이므로}$$

$$x^n + (1-x)^n \text{을 } f(x) \text{로 나누었을 때의 나머지는}$$

$$a_nx + b_n + a_n(1-x) + b_n = a_n + 2b_n \text{이다. (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

조건 (가)의 식의 양변에

$$x=1 \text{을 대입하면 } 0 = -6P(1) \quad \therefore P(1)=0$$

$$x=7 \text{을 대입하면 } 6P(5)=0 \quad \therefore P(5)=0$$

$P(x)$ 는 삼차다항식이므로 조건 (나)에 의하여

$$P(x) = (x^2 - 4x + 2)(ax + b) + 2x - 10 \quad (a, b \text{는 상수})$$

위 등식의 양변에

$$x=1 \text{을 대입하면 } P(1) = -a - b - 8 = 0 \quad \therefore a + b = -8$$

$$x=5 \text{을 대입하면 } P(5) = 35a + 7b = 0 \quad \therefore 5a + b = 0$$

이를 연립하여 풀면 $a=2, b=-10$

따라서 $P(x) = (x^2 - 4x + 2)(2x - 10) + 2x - 10$ 이므로

$$P(4) = -6$$

다른 풀이 $P(x)$ 는 삼차다항식이므로

$$P(x) = a(x-1)(x-5)(x-k) \quad (a, k \text{는 상수}, a \neq 0)$$

이를 조건 (가)의 식에 대입하면

$$a(x-1)(x-3)(x-7)(x-k-2) = a(x-1)(x-5)(x-7)(x-k)$$

$$\text{이므로 } (x-3)(x-k-2) = (x-5)(x-k)$$

$$\text{즉, } k=3 \text{이므로 } P(x) = a(x-1)(x-3)(x-5)$$

조건 (나)에 의하여 $P(x)$ 를 $x^2 - 4x + 2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$a(x-1)(x-3)(x-5) = (x^2 - 4x + 2)Q(x) + 2x - 10$$

$$a(x^2 - 4x + 3)(x-5) = (x^2 - 4x + 2)Q(x) + 2x - 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x^2 - 4x + 2 = 0$ 의 해를 t 라 하면 $t^2 - 4t + 2 = 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=t$ 를 대입하면 $a(t-5) = 2t - 10 \quad \therefore a=2$

$$\text{따라서 } P(x) = 2(x-1)(x-3)(x-5) \text{이므로 } P(4) = -6$$

$f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지를 R_1 이라 하면

$$f(x) = (x-1)Q_1(x) + R_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지를 R_2 라 하면

$$f(x) = (x-2)Q_2(x) + R_2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면 조건 (가)에서

$$R_2 = f(2) = Q_2(1) \quad \therefore f(x) = (x-2)Q_2(x) + Q_2(1)$$

위 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = -Q_2(1) + Q_2(1) = 0$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1) = R_1 = 0$

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차다항식이므로

$$Q_1(x) = x + a \quad (a \text{는 상수}) \text{라 하면 } f(x) = (x-1)(x+a)$$

$$Q_1(1) = 1+a, f(2) = 2+a = Q_2(1) \text{이므로 조건 (나)에서}$$

$$Q_1(1) + Q_2(1) = (1+a) + (2+a) = 2a+3=6$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = (x-1)\left(x + \frac{3}{2}\right) \text{이므로 } f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$x^n(x^2 + ax + b)$ 를 $(x-2)^n$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^n(x^2 + ax + b) = (x-2)^n Q(x) + 2^n(x-2) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $2^n(4+2a+b)=0$

$$2^n > 0 \text{이므로 } 4+2a+b=0 \quad \therefore b = -2a-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$x^n(x^2 + ax - 2a - 4) = (x-2)^n Q(x) + 2^n(x-2)$$

$$x^n(x-2)(x+a+2) = (x-2)^{n+1} Q(x) + 2^{n+1}$$

$$\therefore x^n(x+a+2) = (x-2)^{n+1} Q(x) + 2^{n+1}$$

위 등식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $2^n(2+a+2) = 2^{n+1}$

$$a+4=1 \quad \therefore a=-3$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } b=2 \text{이므로 } a-b=-5$$

$f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$, 나머지를 $R_1(x)$ 라 하면 $f(x) = (x-1)Q_1(x) + R_1(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$, 나머지를 $R_2(x)$ 라 하면 $f(x) = (x-1)^2 Q_2(x) + R_2(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$2f(x) = (x-1)Q_1(x) + (x-1)^2 Q_2(x) + R_1(x) + R_2(x)$$

이때 $R_1(x) + R_2(x) = 0$ 이므로

$$2f(x) = (x-1)Q_1(x) + (x-1)^2 Q_2(x)$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}(x-1)Q_1(x) + \frac{1}{2}(x-1)^2 Q_2(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$f(x)$ 를 $(x-1)^3$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x) = (x-1)^3 Q(x) + ax^2 + bx + c \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}, \textcircled{4}$ 의 양변에 각각 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = 0, f(1) = a+b+c \text{이므로 } a+b+c=0$$

다른 풀이 $f(x)$ 를 $(x-1)^3$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x) = (x-1)^3 Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x-1)^3 Q(x) + a(x-1)^2 + p(x-1) + q \quad (p, q \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있고 $R_1(x) = q, R_2(x) = p(x-1) + q$

$$\therefore R_1(x) + R_2(x) = px - p + 2q = 0$$

위 등식은 x 에 대한 항등식이므로 $p=q=0$

따라서 $ax^2 + bx + c = a(x-1)^2$ 이므로 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$a+b+c=0$$

$$f(x^2+1) - f(x^2-1) = pxf(x) + 12x + 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$f(x)$ 의 차수를 n 이라 하면

$\textcircled{1}$ 의 좌변의 차수는 $2n-2$ 이고, 우변의 차수는 $n+1$ 이므로

$$2n-2 = n+1 \quad \therefore n=3$$

즉, $f(x)$ 는 삼차다항식이다.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a, b, c, d \text{는 상수}, a \neq 0)$$

로 놓을 수 있으므로 $\textcircled{1}$ 에서

$\{a(x^2+1)^3+b(x^2+1)^2+c(x^2+1)+d\}$
 $-\{a(x^2-1)^3+b(x^2-1)^2+c(x^2-1)+d\}$
 $=px(ax^3+bx^2+cx+d)+12x+4$
 즉, $6ax^4+4bx^2+2a+2c=apx^4+bp x^3+cp x^2+(dp+12)x+4$
 위 등식은 x 에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하여 정리하면
 $p=6, a=2, b=0, c=0, d=-2$
 따라서 $f(x)=2x^3-2$ 이므로 $f(x)$ 를 $x-p$, 즉 $x-6$ 으로 나누었을
 때의 나머지는 $f(6)=430$

136 9
 $258=x$ 로 놓고 x^9 을 $x+2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$, 나머지를
 R_1 이라 하면 $x^9=(x+2)Q_1(x)+R_1$ ㉠
 ㉠의 양변에
 $x=-2$ 를 대입하면 $(-2)^9=R_1$
 $x=258$ 을 대입하면
 $258^9=260Q_1(258)-512=260\{Q_1(258)-2\}+8$
 $\therefore a=8$
 $260=y$ 로 놓고 y^{10} 을 $y-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$, 나머지를
 R_2 라 하면 $y^{10}=(y-1)Q_2(x)+R_2$ ㉡
 ㉡의 양변에
 $y=1$ 을 대입하면 $1^{10}=R_2$
 $y=260$ 을 대입하면 $260^{10}=259Q_2(260)+1$
 $\therefore b=1$
 $\therefore a+b=9$

137 2
 $f(1)=3f(3)=5f(5)=7$ 이므로
 $f(1)-7=3f(3)-7=5f(5)-7=0$
 따라서 $xf(x)-7=k(x-1)(x-3)(x-5)$ ($k \neq 0$ 인 상수)
 ㄱ. $f(1)-7=0$ 이므로 $f(1)=7$ (참)
 ㄴ. $xf(x)-7=k(x-1)(x-3)(x-5)$ 에서
 $xf(x)=k(x-1)(x-3)(x-5)+7$
 위 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $0=-15k+7 \quad \therefore k=\frac{7}{15}$ (참)
 ㄷ. $xf(x)=\frac{7}{15}(x-1)(x-3)(x-5)+7$ 이므로
 $2f(2)=\frac{42}{5} \quad \therefore f(2)=\frac{21}{5}$ (거짓)
 이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

138 4
 조건 (가)의 식의 양변에
 $x=-4$ 를 대입하면 $-11P(-4)=0 \quad \therefore P(-4)=0$
 $x=7$ 을 대입하면 $0=11P(5) \quad \therefore P(5)=0$

삼차다항식 $P(x)$ 를 x^2+2x-7 로 나누었을 때의 몫은 일차다항식
 이므로 몫을 $ax+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면
 $P(x)=(x^2+2x-7)(ax+b)+4x+36$
 위 등식의 양변에
 $x=-4$ 를 대입하면 $P(-4)=-4a+b+20=0 \quad \therefore 4a-b=20$
 $x=5$ 를 대입하면 $P(5)=28(5a+b)+56=0 \quad \therefore 5a+b=-2$
 이를 연립하여 풀면 $a=2, b=-12$ 이므로
 $P(x)=(x^2+2x-7)(2x-12)+4x+36 \quad \therefore P(2)=36$

139 6
 조건 (가)에서 x^3+3x^2+4x+2 를 $f(x)$ 로 나누었을 때의 나머지가
 $g(x)$ 이고 $f(x)$ 가 이차다항식이므로 나머지 $g(x)$ 는 일차다항식 또
 는 상수이다.
 조건 (나)에서 x^3+3x^2+4x+2 를 $g(x)$ 로 나누었을 때의 나머지가
 $f(x)-x^2-2x$ 이고 $g(x)$ 가 일차다항식 또는 상수이므로
 $f(x)-x^2-2x$ 는 상수이다.
 즉, $f(x)-x^2-2x=a$ (a 는 상수)라 하면
 $f(x)=x^2+2x+a$
 x^3+3x^2+4x+2 를 $f(x)=x^2+2x+a$ 로 직접 나누면 나머지가
 $(2-a)x+2-a$ 이므로 $g(x)=(2-a)x+2-a$ ㉠
 x^3+3x^2+4x+2 를 $g(x)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면
 $x^3+3x^2+4x+2=g(x)Q(x)+a$
 위 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 ㉠에서 $g(-1)=0$ 이므로
 $a=0$
 따라서 $g(x)=2x+2$ 이므로 $g(2)=6$

140 192
 $\{f(x+1)\}^2+\{f(x)\}^2=(x^2-2x)g(x)$
 $=x(x-2)g(x)$ ㉠
 ㉠의 양변에
 $x=0$ 을 대입하면 $\{f(1)\}^2+\{f(0)\}^2=0$
 $f(1), f(0)$ 은 실수이므로 $f(1)=0, f(0)=0$
 $x=2$ 를 대입하면 $\{f(3)\}^2+\{f(2)\}^2=0$
 $f(3), f(2)$ 는 실수이므로 $f(3)=0, f(2)=0$
 $\therefore f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$
 이때 $f(x+1)=(x+1)x(x-1)(x-2)$ 이므로 ㉠에서
 $\{(x+1)x(x-1)(x-2)\}^2+\{x(x-1)(x-2)(x-3)\}^2$
 $=x(x-2)g(x)$
 $\therefore g(x)=x(x-2)\{(x+1)^2(x-1)^2+(x-1)^2(x-3)^2\}$
 $=x(x-1)(x-2)\{(x+1)^2(x-1)+(x-1)(x-3)^2\}$
 $=x(x-1)(x-2)(2x^3-6x^2+14x-10)$
 $2x^3-6x^2+14x-10$ 을 $x-3$ 으로 나누면 몫이 $2x^2+14$, 나머지가
 32 이므로
 $g(x)=x(x-1)(x-2)\{(x-3)(2x^2+14)+32\}$
 $=x(x-1)(x-2)(x-3)(2x^2+14)+32x(x-1)(x-2)$

따라서 $g(x)$ 를 $f(x)$ 로 나누었을 때의 나머지는
 $R(x)=32x(x-1)(x-2)$ 이므로 $R(3)=192$

TIP $f(x)$ 의 계수는 실수라는 조건이 있으므로 a, b 가 실수일 때,
 $a^2+b^2=0$ 이면 $a=b=0$ 이라는 기본 성질을 기억하고 이용할 수 있도록 하자!

141 **답** 10

조건 (가)에서 $Q(x)=4-P(x)$ 이므로 조건 (나)의 식의 좌변에 이를
 대입하면

$$\begin{aligned} & \{P(x)\}^3 + \{4-P(x)\}^3 \\ &= \{P(x)\}^3 + 64 - 48P(x) + 12\{P(x)\}^2 - \{P(x)\}^3 \\ &= 12\{P(x)\}^2 - 48P(x) + 64 \end{aligned}$$

$P(x)$ 는 이차다항식이므로 $P(x)=ax^2+bx+c$ ($a < 0$, a, b, c 는
 상수)라 하면

$$\begin{aligned} & 12(ax^2+bx+c)^2 - 48(ax^2+bx+c) + 64 \\ &= 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 + 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

①에서

$$\text{사차항의 계수를 비교하면 } 12a^2=12 \quad \therefore a=-1 \leftarrow a < 0$$

$$\text{삼차항의 계수를 비교하면 } 24ab=24 \quad \therefore b=-1 \leftarrow a=-1$$

$$\text{상수항을 비교하면 } 12c^2 - 48c + 64 = 16, \quad c^2 - 4c + 4 = 0$$

$$(c-2)^2=0 \quad \therefore c=2$$

$$P(x)=-x^2-x+2 \text{이므로 } P(2)=-4, \quad Q(3)=4-P(3)=14$$

$$\therefore P(2)+Q(3)=10$$

142 **답** 13

조건 (가)에서 $P(x)Q(x)$ 가 $(x^2-3x+3)(x-1)$ 로 나누어떨어지
 므로 $P(1)Q(1)=0$

(i) $Q(1)=0$ 일 때

$Q(x)=a(x-1)$ ($a \neq 0$ 인 상수)이라 하면 조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 10x + 13 - \{Q(x)\}^2 \\ &= x^3 - 10x + 13 - \{a(x-1)\}^2 \\ &= x^3 - 10x + 13 - a^2x^2 + 2a^2x - a^2 \\ &= x^3 - a^2x^2 + (2a^2-10)x + 13-a^2 \end{aligned}$$

이때 조건 (가)에 의하여 $P(x)$ 는 x^2-3x+3 으로 나누어떨어지
 야 한다.

$P(x)$ 를 x^2-3x+3 으로 직접 나누었을 때의 나머지는

$$(-a^2-4)x+2a^2+4$$

$$(-a^2-4)x+2a^2+4=0 \text{을 만족시키는 } a \text{는 존재하지 않는다.}$$

(ii) $Q(1) \neq 0$ 일 때

조건 (가)에 의하여 $P(x)$ 는 x^2-3x+3 과 $x-1$ 을 인수로 갖는다.

또한, 조건 (나)에 의하여 $P(x)$ 의 최고차항의 계수는 1이므로

$$P(x)=(x^2-3x+3)(x-1)=x^3-4x^2+6x-3$$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} \{Q(x)\}^2 &= x^3 - 10x + 13 - P(x) \\ &= x^3 - 10x + 13 - (x^3 - 4x^2 + 6x - 3) \\ &= 4x^2 - 16x + 16 = (2x-4)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore Q(x)=2x-4 \text{ 또는 } Q(x)=-2x+4$$

$$\text{이때 } Q(0) < 0 \text{이므로 } Q(x)=2x-4$$

(i), (ii)에서 $P(x)=x^3-4x^2+6x-3, Q(x)=2x-4$ 이므로

$$P(2)=1, Q(8)=12 \quad \therefore P(2)+Q(8)=13$$

다른 풀이 (i) $Q(1)=0$ 일 때

$Q(x)=a(x-1)$ ($a \neq 0$ 인 상수)이라 하면 조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 10x + 13 - \{Q(x)\}^2 \\ &= x^3 - 10x + 13 - \{a(x-1)\}^2 \\ &= x^3 - 10x + 13 - a^2x^2 + 2a^2x - a^2 \\ &= x^3 - a^2x^2 + (2a^2-10)x + 13-a^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때 조건 (나)에 의하여 $x^3-10x+13-P(x)$ 는 이차다항식이 되
 어야 한다.

한편, $P(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이므로 일차항인
 인수를 $x-k$ 라 하면

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2-3x+3)(x-k) \\ &= x^3 + (-k-3)x^2 + (3k+3)x - 3k \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①과 ②의 계수를 각각 비교하면

$$-a^2 = -k-3, \quad 2a^2-10 = 3k+3, \quad 13-a^2 = -3k$$

이를 만족시키는 a 와 k 는 존재하지 않는다.

143 **답** 16

$$\begin{aligned} \{P(x)+x\}^2 &= (x-a)(x+a)(x^2+5)+9 \\ &= (x^2-a^2)(x^2+5)+9 \\ &= x^4 + (5-a^2)x^2 - 5a^2 + 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때 $P(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이므로

$P(x)+x=-x^2+bx+c$ (b, c 는 상수)라 하자.

$$\textcircled{1} \text{에서 } (-x^2+bx+c)^2 = x^4 + (5-a^2)x^2 - 5a^2 + 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②에서

$$\text{삼차항의 계수를 비교하면 } -2b=0 \quad \therefore b=0$$

이차항의 계수를 비교하면

$$b^2-2c=5-a^2 \quad \therefore a^2=2c+5 \leftarrow b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{상수항을 비교하면 } c^2=-5a^2+9 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} \text{을 } \textcircled{4} \text{에 대입하면 } c^2=-5(2c+5)+9, \quad c^2+10c+16=0$$

$$(c+2)(c+8)=0 \quad \therefore c=-2 \leftarrow a^2=2c+5 > 0$$

$$c=-2 \text{를 } \textcircled{3} \text{에 대입하면 } a^2=1 \quad \therefore a=1 \leftarrow a > 0$$

따라서 $P(x)+x=-x^2-2$ 이므로 $P(x)=-x^2-x-2$

$$\therefore \{P(a)\}^2 = \{P(1)\}^2 = (-4)^2 = 16$$

TIP $P(x)$ 가 이차다항식이라고 해서 $P(x)=-x^2+bx+c$ 로 놓으면 계
 산하기 너무 복잡해지므로 이 문제에서는 $P(x)$ 가 이차다항식이면 $P(x)+x$
 도 이차다항식이라는 것을 이용해서 $P(x)+x=-x^2+bx+c$ 로 놓으면 계
 산하기 편해!

다른 풀이

다른 풀이 $\{P(x)+x\}^2=(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$ 에서
 $P(x)+x$ 가 이차다항식이므로 $(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$ 는 이차
 다항식의 완전제곱식이어야 한다.

$$(x-a)(x+a)(x^2+5)+9=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9 \text{이므로}$$

$$-5a^2+9=\left\{\frac{1}{2}(5-a^2)\right\}^2$$

$$\text{정리하면 } a^4+10a^2-11=0, (a^2-1)(a^2+11)=0$$

$$\therefore a=1 \leftarrow a>0$$

$$\{P(x)+x\}^2=(x-1)(x+1)(x^2+5)+9$$

$$=x^4+4x^2+4$$

$$=(x^2+2)^2$$

$$P(x)+x=x^2+2 \text{ 또는 } P(x)+x=-x^2-2$$

$$\therefore P(x)=x^2-x+2 \text{ 또는 } P(x)=-x^2-x-2$$

이때 $P(x)$ 의 최고차항의 계수는 음수이므로

$$P(x)=-x^2-x-2$$

$$\therefore \{P(a)\}^2=\{P(1)\}^2=(-4)^2=16$$

144 33

조건 (가)에서 $f(x)=\{x^2+g(x)\}(x+2)+\{g(x)\}^2-x^2$ ㉠

이때 나머지 $\{g(x)\}^2-x^2$ 의 차수는 $x^2+g(x)$ 의 차수보다 낮다.

(i) $g(x)$ 의 차수가 $n(n \geq 2)$ 인 경우

$\{g(x)\}^2-x^2$ 의 차수 $2n$ 이 $x^2+g(x)$ 의 차수 n 보다 높으므로 조
 건을 만족시키지 않는다.

(ii) $g(x)$ 가 상수인 경우

$\{g(x)\}^2-x^2$ 의 차수 2와 $x^2+g(x)$ 의 차수 2가 같으므로 조
 건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $g(x)$ 의 차수는 1이다.

즉, $x^2+g(x)$ 가 이차다항식이므로 $\{g(x)\}^2-x^2$ 은 일차다항식 또
 는 상수이어야 하고, $g(x)$ 는 일차다항식이고 일차항의 계수가 1이
 어야 하므로

$$g(x)=x+a \text{ (a는 상수)}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$f(x)=(x^2+x+a)(x+2)+(x+a)^2-x^2$$

$$=(x^2+x+a)(x+2)+2ax+a^2$$

조건 (나)에서

$$f(-a)=(a^2-a+a)(-a+2)-2a^2+a^2$$

$$=-a^3+a^2$$

$$=-a^2(a-1)=0$$

에서 $a=0$ 또는 $a=1$

이때 $a=0$ 이면 $f(x)=(x^2+x)(x+2)$ 에서 $f(0)=0$ 이 되어 조
 건을 만족시키지 않는다.

$a=1$ 이면 $f(x)=(x^2+x+1)(x+2)+2x+1$ 에서

$$f(0)=3 \neq 0 \text{이므로 조건을 만족시킨다.}$$

따라서 $f(x)=(x^2+x+1)(x+2)+2x+1$ 이므로

$$f(2)=33$$

03 인수분해

I등급 필수 내신 빈출 문제

p.031~038

145 ㉠ ③

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

$$=0$$

에서 $a=b=c$ 이고, $a+b+c=15$ 이므로 $a=b=c=5$

$$\therefore abc=125$$

146 ㉠ (x-1)(x+3)(3x+1)

$$3x^3+7x^2-7x-3=3(x^3-1)+7x(x-1)$$

$$=3(x-1)(x^2+x+1)+7x(x-1)$$

$$=(x-1)(3x^2+10x+3)$$

$$=(x-1)(x+3)(3x+1)$$

147 ㉠ ④

$$64a^6-b^6=(8a^3)^2-(b^3)^2$$

$$=(8a^3+b^3)(8a^3-b^3)$$

$$=\{(2a)^3+b^3\}\{(2a)^3-b^3\}$$

$$=(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$$

$$\square. (2a-b)(2a+b)=4a^2-b^2$$

$$\boxplus. (2a-b)(4a^2-2ab+b^2)=8a^3-8a^2b+4ab^2-b^3$$

따라서 $64a^6-b^6$ 의 인수인 것의 개수는

$\neg, \sqcup, \sqsubset, \square, \boxplus, \circ$ 의 6이다.

148 ㉠ ②

x^2-x 가 공통부분이므로 $x^2-x=X$ 라 하면

$$(x^2-x-3)(x^2-x-15)+27=(X-3)(X-15)+27$$

$$=X^2-18X+72$$

$$=(X-6)(X-12)$$

$$=(x^2-x-6)(x^2-x-12)$$

$$=(x+2)(x-3)(x+3)(x-4)$$

따라서 인수가 아닌 것은 ② $x^2+7x+12$ 이다.

149 ㉠ ①

$$(x-1)(x+1)(x+4)(x+6)+k$$

$$=(x^2+5x+4)(x^2+5x-6)+k$$

이때 x^2+5x 가 공통부분이므로 $x^2+5x=X$ 라 하면

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x-6)+k=(X+4)(X-6)+k$$

$$=X^2-2X-24+k$$

$$=(X-1)^2+k-25$$

$$=(x^2+5x-1)^2+k-25$$

이므로 $f(x)=x^2+5x-1, k-25=0$, 즉 $k=25$

$$\therefore f(k)=f(25)=749$$

150

답 ③

x^2-3x 가 공통부분이므로 $x^2-3x=X$ 라 하면

$$(x^2-3x)(x^2-3x+5)+k(x^2-3x)+10$$

$$=X(X+5)+kX+10$$

$$=X^2+(k+5)X+10$$

$$(X+2)(X+5)\text{일 때, }k+5=7 \quad \therefore k=2$$

$$(X+1)(X+10)\text{일 때, }k+5=11 \quad \therefore k=6$$

따라서 모든 자연수 k 의 값의 합은 $2+6=8$ 이다.

151

답 (9x²+12x+7)(9x²+12x+8)

$$(3x+2)^4+7(3x+2)^2+12=\{(3x+2)^2\}^2+7(3x+2)^2+12$$

이때 $(3x+2)^2$ 이 공통부분이므로 $(3x+2)^2=X$ 라 하면

$$\{(3x+2)^2\}^2+7(3x+2)^2+12=X^2+7X+12$$

$$=(X+3)(X+4)$$

$$=\{(3x+2)^2+3\}\{(3x+2)^2+4\}$$

$$=(9x^2+12x+7)(9x^2+12x+8)$$

152

답 ①

$$x^4+4x^2+16=(x^4+8x^2+16)-4x^2$$

$$=(x^2+4)^2-(2x)^2$$

$$=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$$

$$\text{이므로 } a=2, b=4, c=2, d=4$$

$$\therefore a+b+c+d=12$$

153

답 9

$$x^4-15x^2y^2+9y^4=(x^4-6x^2y^2+9y^4)-9x^2y^2$$

$$=(x^2-3y^2)^2-(3xy)^2$$

$$=(x^2+3xy-3y^2)(x^2-3xy-3y^2)$$

$$\text{이므로 } a=3, b=3 \quad \therefore ab=9$$

154

답 ①

$x-1$ 이 공통부분이므로 $x-1=X$ 라 하면

$$4(x-1)^4-8(x-1)^2+1$$

$$=4X^4-8X^2+1$$

$$=(4X^4-4X^2+1)-4X^2$$

$$=(2X^2-1)^2-(2X)^2$$

$$=(2X^2+2X-1)(2X^2-2X-1)$$

$$=\{2(x-1)^2+2(x-1)-1\}\{2(x-1)^2-2(x-1)-1\}$$

$$=(2x^2-2x-1)(2x^2-6x+3)$$

$$\text{이때 } d>0\text{이므로 } a=-2, b=-1, c=-6, d=3$$

$$\therefore abcd=-36$$

155

답 (y-z)(x-y)(x-z)

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$$

$$=(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+yz(y-z)$$

$$=(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$$

$$=(y-z)(x-y)(x-z)$$

156

답 ④

$$\neg. x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2zx=(x+y-z)^2$$

$$\neg. x^2+y^2-z^2+2xy=(x^2+2xy+y^2)-z^2$$

$$=(x+y)^2-z^2$$

$$=(x+y+z)(x+y-z)$$

$$\neg. (x+y)(y-z)(x-z)-xyz$$

$$=x^2y-x^2z+xy^2+xz^2-y^2z+yz^2-3xyz$$

$$=(y-z)x^2+(y^2-3yz+z^2)x-yz(y-z)$$

$$=\{(y-z)x-yz\}\{x+(y-z)\}$$

$$=(xy-zx-yz)(x+y-z)$$

$$\neg. x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)$$

$$=x^2y+x^2z+y^2z+y^2x+z^2x+z^2y$$

이므로 인수분해 되지 않는다.

이상에서 $x+y-z$ 를 인수로 갖는 것의 개수는 $\neg, \neg, \neg$ 의 3이다.

다른 풀이 $(x+y)(y-z)(x-z)-xyz$ 를 $x+y-z$ 로 나누었을 때의 몫을 Q , 나머지를 R 이라 하자. 이때 $x+y-z$ 를 인수로 가지려면 $z=x+y$ 일 때 $R=0$ 임을 보이면 된다.

$$(x+y)(y-z)(x-z)-xyz=(x+y-z)Q+R$$

이 식은 항등식이므로 $z=x+y$ 일 때,

$$\text{좌변은 } (x+y) \times (-x) \times (-y) - xy(x+y) = 0 \text{이므로 } R=0$$

즉, $x+y-z$ 는 $(x+y)(y-z)(x-z)-xyz$ 의 인수이다.

157

답 (b+2c-a)(a²+b²+c²+ab+bc-ca)

$$b^3-a^3+2c^3+3c(a^2+b^2-ac+bc)$$

$$=(b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)+(c^3-3c^2a+3ca^2-a^3)$$

$$=(b+c)^3+(c-a)^3$$

$$=\{(b+c)+(c-a)\}\{(b+c)^2-(b+c)(c-a)+(c-a)^2\}$$

$$=(b+2c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)$$

158

답 ⑤

$$ab^2+3b^2+4ab+12b+4a+12$$

$$=b^2(a+3)+4b(a+3)+4(a+3)$$

$$=(a+3)(b^2+4b+4)$$

$$=(a+3)(b+2)^2$$

$$=539=11 \times 7^2$$

$$\text{이므로 } a+3=11, b+2=7 \quad \therefore a=8, b=5$$

$$\therefore ab=40$$

159

답 ①

$x^4+4x^3-22x^2-4x+21$ 은 x^2-1 을 인수로 가지므로 조립제법을 이용하면

1	1	4	-22	-4	21
		1	5	-17	-21
-1	1	5	-17	-21	0
		-1	-4	21	
	1	4	-21		0

에서 $P(x)=x^2+4x-21$ 이므로 $a=1, b=4, c=-21$

$$\therefore abc = -84$$

160 **답** 1919

x^4+ax^2+b 는 $(x-5)(x+9)$ 를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 5 & 1 & 0 & a & 0 & b \\ & & 5 & 25 & 5a+125 & 25a+625 \\ -9 & 1 & 5 & a+25 & 5a+125 & b+25a+625 \\ & & -9 & 36 & -9a-549 & \\ \hline & 1 & -4 & a+61 & -4a-424 & \end{array}$$

에서 $b+25a+625=0, -4a-424=0$

$$\therefore a = -106, b = 2025$$

$$\therefore a+b=1919$$

161 **답** 66

$x^4+10x^3+17x^2-40x-84$ 를 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 10 & 17 & -40 & -84 \\ & & 2 & 24 & 82 & 84 \\ -2 & 1 & 12 & 41 & 42 & 0 \\ & & -2 & -20 & -42 & \\ \hline & 1 & 10 & 21 & 0 & \end{array}$$

$$x^4+10x^3+17x^2-40x-84=(x-2)(x+2)(x+3)(x+7)$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2=(-2)^2+2^2+3^2+7^2=66$$

162 **답** 5

다항식 $x(x+1)(x+2)(x+3)-24$ 는 $x+b$ 로 나누어떨어지므로 $x+b$ 를 인수로 갖는다.

$$x(x+1)(x+2)(x+3)-24=(x^2+3x)(x^2+3x+2)-24$$

이때 x^2+3x 가 공통부분이므로 $x^2+3x=X$ 라 하면

$$\begin{aligned} (x^2+3x)(x^2+3x+2)-24 &= X(X+2)-24 \\ &= X^2+2X-24 \\ &= (X+6)(X-4) \\ &= (x^2+3x+6)(x^2+3x-4) \\ &= (x^2+3x+6)(x-1)(x+4) \end{aligned}$$

이므로 $b=4$

또, x^2+x-a 도 $x+b$, 즉 $x+4$ 를 인수로 가지므로 인수정리에 의하여 $(-4)^2+(-4)-a=0$ 에서 $a=12$

$$\therefore a+b=12+4=16$$

163 **답** 216

$$-3x^4-6x^3+75x^2+77x-360=(x-2)P(x)-kx \text{에서}$$

$$-3x^4-6x^3+75x^2+(k+77)x-360=(x-2)P(x)$$

$-3x^4-6x^3+75x^2+(k+77)x-360$ 은 $x-2$ 를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & -3 & -6 & 75 & k+77 & -360 \\ & & -6 & -24 & 102 & 2k+358 \\ -2 & -3 & -12 & 51 & k+179 & 2k-2 \end{array}$$

$$\text{에서 } 2k-2=0 \quad \therefore k=1$$

$$P(x)=-3x^3-12x^2+51x+180$$

$$\therefore P(k)=P(1)=216$$

다른 풀이 주어진 등식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$-3 \times 2^4 - 6 \times 2^3 + 75 \times 2^2 + 77 \times 2 - 360 = -k \times 2$$

에서 $-2=-2k$ 이므로 $k=1$

$$-3x^4-6x^3+75x^2+77x-360=(x-2)P(x)-x$$

위 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$-3 \times 1^4 - 6 \times 1^3 + 75 \times 1^2 + 77 \times 1 - 360 = (1-2)P(1)-1$$

$$\text{에서 } -217=-P(1)-1 \quad \therefore P(1)=216$$

164 **답** 3

$$x^3+1-f(x)=(x+1)(x+a)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

다항식 $x^3+1-f(x)$ 가 일차식 $x+1$ 로 나누어떨어지므로

인수정리에 의하여 $(-1)^3+1-f(-1)=0$, 즉 $f(-1)=0$

$f(x)=k(x+1)$ ($k \neq 0$ 인 상수)이라 하면

$$\begin{aligned} x^3+1-f(x) &= x^3+1-k(x+1) \\ &= (x+1)(x^2-x+1-k) \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } x^2-x+1-k=(x+a)^2 \text{이므로 } a=-\frac{1}{2}, k=\frac{3}{4}$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{3}{4}(x+1) \text{이므로 } f(7)=6$$

다른 풀이 $x^3+1-f(x)=(x+1)(x+a)^2$ 이 항등식이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3+1)-(x+1)(x+a)^2 \\ &= (x+1)(x^2-x+1)-(x+1)(x+a)^2 \\ &= (x+1)\{(-1-2a)x+(1-a^2)\} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f(x) \text{는 일차식이므로 } -1-2a=0 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{3}{4}(x+1) \text{이므로 } f(7)=6$$

165 **답** 4

$$x^2y+x^2z+xy^2-xz^2-y^2z-yz^2$$

$$=-(x+y)z^2+(x+y)(x-y)z+xy(x+y)$$

$$=-(x+y)\{z^2-(x-y)z-xy\}$$

$$=-(x+y)(z+y)(z-x)$$

$$=(x+y)(y+z)(x-z)$$

이때 $x+y=4, y+z=3$ 이고 두 식을 변끼리 빼면 $x-z=1$

$$\therefore x^2y+x^2z+xy^2-xz^2-y^2z-yz^2=12$$

166 **답** 5

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

에서 $a+b+c=0$ 이므로

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0, \text{ 즉 } a^3+b^3+c^3=3abc$$

$$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} = \frac{3abc}{abc} = 3$$

따라서 가능한 자연수 k 의 개수는

1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 14, 16, 20의 11이다.

175 ⑤

$3=x$ 라 하면

$$3^8 + 3^4 + 1 = x^8 + x^4 + 1$$

$$= (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4$$

$$= (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2$$

$$= (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$$

$$= \underbrace{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}_{x=3 \text{ 대입}} (x^4 - x^2 + 1)$$

$$= 7 \times 13 \times 73$$

따라서 나누어떨어지도록 하는 두 자리 자연수는 13, 73, 91이므로
그 합은 $13 + 73 + 91 = 177$

176 ③

직육면체의 부피가 $n^3 + 2n^2 - 13n + c$ 이고 높이가 $n-2$ 이므로

다항식 $n^3 + 2n^2 - 13n + c$ 는 $n-2$ 를 인수로 가진다.

이를 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & -13 & c \\ & & 2 & 8 & -10 \\ \hline & 1 & 4 & -5 & c-10 \end{array}$$

에서 $c-10=0$ 이므로 $c=10$

$$n^3 + 2n^2 - 13n + 10 = (n-2)(n^2 + 4n - 5)$$

$$= (n-2)(n+a)(n+b)$$

$$= (n-2)\{n^2 + (a+b)n + ab\}$$

에서 $a+b=4$

$$\therefore a+b+c=14$$

177 ④

책상 왼쪽의 모든 사각형의 넓이의 합을 S_1 이라 하면

$$S_1 = x^2 + 12xy + 5y^2$$

책상 오른쪽의 모든 정육면체의 겉넓이의 합을 S_2 라 하면

$$S_2 = 6x^2 + 12y^2$$

이때 $S_1 = S_2$ 이므로

$$x^2 + 12xy + 5y^2 = 6x^2 + 12y^2$$

$$5x^2 - 12xy + 7y^2 = 0$$

$$(5x-7y)(x-y) = 0$$

$$x \neq y \text{ 이므로 } 5x = 7y \quad \dots\dots ㉠$$

한편, 책상 오른쪽의 모든 정육면체의 모서리의 길이의 합은 204이므로

$$1 \times 12x + 2 \times 12y = 204 \quad \therefore x + 2y = 17 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$x=7, y=5$$

따라서 정사각형 A의 넓이는 $7^2=49$, B의 넓이는 $5^2=25$ 이므로

두 정사각형의 넓이의 차는 $49 - 25 = 24$

178 ④

점 M, N이 각각 선분 AB, AC의 중점이므로 $\overline{MN} = 2$ 이고, 직선 MN이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 점 M에 가까운 점을 Q라 하면 그림과 같다.

한편, $\triangle AQM \sim \triangle PBM$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{QM} : \overline{BM} = \overline{AM} : \overline{PM}$$

$$\overline{QM} \times \overline{PM} = \overline{AM} \times \overline{BM}$$

$$x(x+2) = 2 \times 2 = 4 \quad \therefore x^2 + 2x = 4$$

이때 $x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 5$ 를

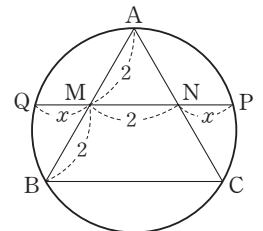
조립제법을 이용하면

$$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 5$$

$$= (x+1)(x^2 + 2x + 5)$$

$$= (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 5)$$

$$= 5 \times 9 = 45$$



참고 $\overline{QM} = x$ 인 이유는 삼각형 QMB와 삼각형 PNC의 합동에서 알 수 있는데, 그림과 같이 보조선 $\overline{QB}$, $\overline{PC}$ 를 그으면

① 평행한 두 선분 $\overline{BC}$, $\overline{QP}$ 에 의해 만들어진 사각형 QBCP는 등변사다리꼴이므로 (호 QB의 길이) = (호 PC의 길이)

호 AB와 호 AC는 원주각의 크기가 60°

로 같기 때문에 (호 AB의 길이) = (호 AC의 길이)

즉, (호 AQ의 길이) = (호 AP의 길이)이므로

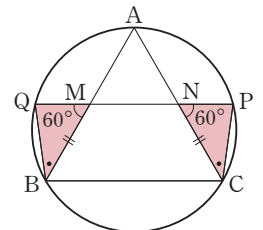
($\angle ABQ$ 의 크기) = ($\angle ACP$ 의 크기)

② $\angle QMB$ 와 $\angle PNC$ 의 크기는 정삼각형의 한 내각의 맞꼭지각으로 60°

$$\textcircled{3} \overline{MB} = \overline{NC} = 2$$

①, ②, ③에 의하여 삼각형 QMB와 삼각형 PNC는 ASA 합동이다.

따라서 $\overline{QM} = \overline{NP} = x$



179 ⑤

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0$$

이때 a, b, c 는 길이이므로 $a+b+c > 0$

즉, $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$ 에서 $a=b=c$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

180 ③

$$a^3 - a^2b + b^3 - ab^2 - ac^2 + bc^2$$

$$= -(a-b)c^2 + (a-b)a^2 - (a-b)b^2$$

$$= (a-b)(a^2 - b^2 - c^2) = 0$$

이므로 $a=b$ 또는 $a^2 = b^2 + c^2$

ㄱ. $a \neq b$ 이면 $a^2 = b^2 + c^2$ 이므로 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다. (참)

ㄴ. $a=b$ 인 경우 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다. (거짓)
 ㄷ. $a=b=3, c=1$ 인 경우 $a>c$ 이지만 $a=b$ (거짓)
 ㄹ. $c>a$ 이면 가장 긴 변의 길이가 a 가 아니므로 $a^2 \neq b^2 + c^2$, 즉 $a=b$ 이다. (참)
 이상에서 옳은 것의 개수는 ㄱ, ㄹ의 2이다.

181 답 ①

조건 (가)에서

$$\begin{aligned} a^2b - a^2c - ab^2 + ac^2 + b^2c - bc^2 \\ &= (b-c)a^2 - (b+c)(b-c)a + bc(b-c) \\ &= (b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\} \\ &= (b-c)(a-b)(a-c) = 0 \end{aligned}$$

이므로 $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $a=c$

또, 조건 (나)에서

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 - c^4 + 2a^2b^2 &= (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - c^4 \\ &= (a^2 + b^2)^2 - (c^2)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0 \end{aligned}$$

이때 $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ 이므로 $a^2 + b^2 = c^2$

즉, 조건 (가), (나)를 동시에 만족시키는 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 c 이고, $a=b$ 인 직각이등변삼각형이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}a^2$

182 답 ②

$x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 1$ 에서 x^2 으로 묶으면 $\leftarrow x \neq 0$

$$\begin{aligned} x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 1 &= x^2\left(x^2 - 7x + 8 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= x^2\left\{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8\right\} \\ &= x^2\left\{\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6\right\} \\ &= x^2\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6\right\} \\ &= x^2\left(x + \frac{1}{x} - 6\right)\left(x + \frac{1}{x} - 1\right) \\ &= (x^2 - 6x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

따라서 인수인 것은 ②이다.

183 답 ①

$x^4 + 4x^3 + (n+5)x^2 + 4x + 1$ 에서 x^2 으로 묶으면 $\leftarrow x \neq 0$

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3 + (n+5)x^2 + 4x + 1 \\ &= x^2\left(x^2 + 4x + n + 5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= x^2\left\{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + n + 5\right\} \\ &= x^2\left\{\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + n + 3\right\} \\ &= x^2\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + n + 3\right\} \end{aligned}$$

이때 두 정수 a, b 에 대하여

$$\begin{aligned} x^2\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + n + 3\right\} &= x^2\left(x + \frac{1}{x} + a\right)\left(x + \frac{1}{x} + b\right) \\ &= (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1) \end{aligned}$$

이라 하면 $a+b=4, ab=n+3$

이때 $n=1$ 이면 $a=b=2$

$n \geq 2$ 일 때, 조건을 만족시키는 정수 a, b 가 없으므로 구하는 자연수 n 의 값은 1이다.

184 답 $(x^2 - 6x - 1)(x^2 - x - 1)$

$x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 7x + 1$ 에서 x^2 으로 묶으면 $\leftarrow x \neq 0$

$$\begin{aligned} x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 7x + 1 &= x^2\left(x^2 - 7x + 4 + \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= x^2\left\{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x - \frac{1}{x}\right) + 4\right\} \\ &= x^2\left\{\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) - 7\left(x - \frac{1}{x}\right) + 6\right\} \\ &= x^2\left\{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 7\left(x - \frac{1}{x}\right) + 6\right\} \\ &= x^2\left(x - \frac{1}{x} - 6\right)\left(x - \frac{1}{x} - 1\right) \\ &= (x^2 - 6x - 1)(x^2 - x - 1) \end{aligned}$$

185 답 35

① 단계 $f(x)g(x)$ 를 조립제법을 이용하여 인수분해 하기 40%

조건 (나)에서 $f(x)g(x)$ 를 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -5 & -1 & -11 & -28 & 15 & 25 \\ & & 5 & 30 & -10 & -25 \\ \hline 1 & -1 & -6 & 2 & 5 & 0 \\ & & -1 & -7 & -5 & \\ \hline & -1 & -7 & -5 & 0 & \end{array}$$

$$f(x)g(x) = -(x+5)(x-1)(x^2+7x+5)$$

② 단계 $f(x), g(x)$ 구하기 40%

$f(x), g(x)$ 는 모두 이차식이고, 조건 (가)에서 $f(x) + g(x) = 3x + 10$

이므로

$$f(x)g(x) = \{-(x+5)(x-1)\}(x^2+7x+5)$$

$$f(x)g(x) = (-x^2 - 4x + 5)(x^2 + 7x + 5)$$

이때 조건 (다)에서 $f(3) > 0$ 이므로

$$f(x) = x^2 + 7x + 5, g(x) = -x^2 - 4x + 5$$

③ 단계 $f(-2)g(2)$ 의 값 구하기 20%

$$f(-2) = (-2)^2 + 7 \times (-2) + 5 = -5$$

$$g(2) = -2^2 - 4 \times 2 + 5 = -7$$

$$\therefore f(-2)g(2) = 35$$

186 답 13

① 단계 $f(x)g(x)$ 를 조립제법을 이용하여 인수분해 하기 40%

조건 (나)에서 $f(x)g(x) = x(-x^3 + 2x^2 + 13x - 6)$ 이므로

$-x^3 + 2x^2 + 13x - 6$ 을 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & -1 & 2 & 13 & -6 \\ & & 3 & -15 & 6 \\ \hline & -1 & 5 & -2 & 0 \end{array}$$

$$f(x)g(x) = -x(x+3)(x^2-5x+2)$$

② 단계 $f(x), g(x)$ 구하기 40%

조건 (가)에서 $f(0)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 x 를 인수로 가지고

조건 (다)에서 $f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나누었을 때의 나머지가 양의 정수인 경우는 $f(x)$ 는 삼차식, $g(x)$ 는 일차식인 경우이다.

(i) $f(x)=x^3-5x^2+2x, g(x)=-x-3$ 인 경우

나머지정리에 의하여 나머지는 $f(-3)=-78$

(ii) $f(x)=-x^3+5x^2-2x, g(x)=x+3$ 인 경우

나머지정리에 의하여 나머지는 $f(-3)=78$

(i), (ii)에서 $f(x)=-x^3+5x^2-2x, g(x)=x+3$

③ 단계 $f(-1)+g(2)$ 의 값 구하기 20%

$$f(-1) = -(-1)^3 + 5 \times (-1)^2 - 2 \times (-1) = 8$$

$$g(2) = 2 + 3 = 5$$

$$\therefore f(-1) + g(2) = 13$$

187 답 729

① 단계 주어진 식을 문자 x 를 사용하여 나타내기 60%

$82=x$ 라 하면

$$\begin{aligned} \sqrt{82^3 - 3 \times 82^2 + 245} &= \sqrt{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} \\ &= \sqrt{(x-1)^3} \end{aligned}$$

② 단계 식의 값 구하기 40%

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^3} &= \sqrt{81^3} = (\sqrt{81})^3 = 9^3 \\ &= 729 \end{aligned}$$

188 답 35

① 단계 $P(x)$ 인수분해 하기 60%

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + (n-1)x^3 + nx^2 + (n-1)x + 1 \\ &= x^2 \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + (n-1) \left(x + \frac{1}{x} \right) + n \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \right) + (n-1) \left(x + \frac{1}{x} \right) + n - 2 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + (n-1) \left(x + \frac{1}{x} \right) + (n-2) \right\} \\ &= x^2 \left(x + \frac{1}{x} + n - 2 \right) \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) \\ &= \{ x^2 + (n-2)x + 1 \} (x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

② 단계 $f(k)$ 구하기 20%

이때 $P(x)$ 는 x^2+kx+1 을 인수로 가지고, $k>1$ 이므로 $k=n-2$, 즉 $f(k)=k+2$

③ 단계 식의 값 구하기 20%

$$\begin{aligned} f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) &= 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \\ &= 35 \end{aligned}$$

189 답 18

① 단계 $(x^2+1)^2 - (Ax)^2$ 꼴일 때 m 의 값 구하기 30%

$x^4 - mx^2 + 1$ 이 계수와 상수항이 모두 정수인 두 개 이상의 다항식의 곱으로 인수분해 되는 경우는

(i) $(x^2+1)^2 - (Ax)^2$ 꼴인 경우

$$\begin{aligned} x^4 - mx^2 + 1 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - (m+2)x^2 \\ &= (x^2+1)^2 - (m+2)x^2 \end{aligned}$$

이때 위 식이 인수분해 되려면 $m+2$ 는 제곱수이어야 하므로

$$m+2 = 4, 9, 16, \dots, 100$$

$$\therefore m = 2, 7, 14, \dots, 98$$

② 단계 $(x^2-1)^2 - (Bx)^2$ 꼴일 때 m 의 값 구하기 30%

(ii) $(x^2-1)^2 - (Bx)^2$ 꼴인 경우

$$\begin{aligned} x^4 - mx^2 + 1 &= (x^4 - 2x^2 + 1) - (m-2)x^2 \\ &= (x^2-1)^2 - (m-2)x^2 \end{aligned}$$

이때 위 식이 인수분해 되려면 $m-2$ 는 제곱수이어야 하므로

$$m-2 = 1, 4, 9, \dots, 81$$

$$\therefore m = 3, 6, 11, \dots, 83$$

③ 단계 완전제곱식의 꼴일 때 m 의 값 구하기 20%

(iii) 완전제곱식의 꼴인 경우

$$(x^2+1)^2 \text{ 또는 } (x^2-1)^2 \text{ 이므로 } m=2$$

④ 단계 조건을 만족시키는 m 의 개수 구하기 20%

(i)~(iii)에서 조건을 만족시키는 자연수 m 의 개수는 18이다.

190 답 18

① 단계 조건을 만족시키는 n 의 조건 구하기 60%

$$2n^2 - n + 7 = (n-2)(2n+3) + 13 \text{ 이므로}$$

$$2n^2 - n + 7 \text{ 이 } n-2 \text{로 나누어떨어지려면}$$

$$\frac{2n^2 - n + 7}{n-2} = (2n+3) + \frac{13}{n-2} \text{ 에서 } \frac{13}{n-2} \text{ 이 자연수이어야 한다.}$$

② 단계 모든 n 의 값의 합 구하기 40%

이때 13의 약수는 1, 13이므로 $n-2=1$ 또는 $n-2=13$

$$\therefore n=3 \text{ 또는 } n=15$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 n 의 값의 합은 $3+15=18$ 이다.

191 답 50

① 단계 삼각형 ABC의 모양 판단하기 50%

조건 (가)의 식의 좌변을 인수분해 하면

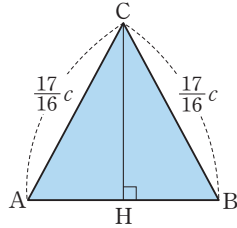
$$\begin{aligned} a^3 + a^2b + a^2c - ab^2 - b^3 - b^2c &= a^3 + (b+c)a^2 - b^2a - b^2(b+c) \\ &= a(a^2 - b^2) + (b+c)(a^2 - b^2) \\ &= (a+b+c)(a+b)(a-b) = 0 \end{aligned}$$

이때 a, b, c 는 길이이므로 $a+b+c>0, a+b>0$, 즉 $a=b$ 따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

② 단계 a, b, c 의 값 구하기 40%

조건 (나)에서 $9a+7b=17c$ 이므로 $a=b=\frac{17}{16}c$

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 CAH는 빗변의 길이가 $\frac{17}{16}c$ 인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여



$$\begin{aligned} \overline{CH} &= \sqrt{\left(\frac{17}{16}c\right)^2 - \left(\frac{1}{2}c\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{289}{256}c^2 - \frac{1}{4}c^2} = \sqrt{\frac{225}{256}c^2} \\ &= \frac{15}{16}c \end{aligned}$$

조건 (다)에서 삼각형 ABC의 넓이가 120이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times c \times \frac{15}{16}c &= \frac{15}{32}c^2 = 120 \\ c^2 &= 256 \quad \therefore c=16, a=b=17 \end{aligned}$$

③ 단계 삼각형 ABC의 둘레의 길이 구하기 10%

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $17+17+16=50$

192 ① 풀이 참조

① 단계 $f(n)$ 인수분해 하기 30%

$$\begin{aligned} f(n) &= n(n+1)(n+2)(n+3)+1 \\ &= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 \\ &= (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 \\ &= (n^2+3n+1)^2 \end{aligned}$$

② 단계 $f(k)-f(l)$ 정리하기 30%

$$\begin{aligned} f(k)-f(l) &= (k^2+3k+1)^2 - (l^2+3l+1)^2 \\ &= (k^2+3k+l^2+3l+2)(k^2+3k-l^2-3l) \\ &= (k^2+3k+l^2+3l+2)\{(k^2-l^2)+3(k-l)\} \\ &= (k^2+3k+l^2+3l+2)(k-l)(k+l+3) \end{aligned}$$

③ 단계 $f(k)-f(l)$ 이 소수가 될 수 없음을 보이기 40%

(i) $k-l=1$ 일 때

$k+l+3=2l+4$ 이므로 $f(k)-f(l)$ 은 $2l+4$ 를 인수로 갖는다. 이때 자연수 l 에 대하여 $2l+4$ 는 소수가 아니므로 $f(k)-f(l)$ 도 소수가 아니다.

(ii) $k-l \neq 1$ 일 때

$f(k)-f(l)$ 이 소수가 되려면 $k-l$ 이 소수일 때, $(k^2+3k+l^2+3l+2)(k+l+3)=1$ 이어야 한다. 이때 두 자연수 k, l 에 대하여 $(k^2+3k+l^2+3l+2)(k+l+3) \neq 1$ 이므로 $f(k)-f(l)$ 은 소수가 아니다.

(i), (ii)에서 $f(k)-f(l)$ 은 소수가 될 수 없다.

1등급 완성 고난도 마스터 문제

p.039-041

193 ②

$$\begin{aligned} \frac{a^3-b^3}{a^3-c^3} &= \frac{a-b}{a-c} \text{에서 } \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-c)(a^2+ac+c^2)} = \frac{a-b}{a-c} \text{이므로} \\ \frac{a-b}{a-c} \times \left(\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+ac+c^2} - 1 \right) &= \frac{a-b}{a-c} \times \frac{ab-ac+b^2-c^2}{a^2+ac+c^2} \quad \text{--- 주의} \\ &= \frac{(a-b)(b-c)(a+b+c)}{(a-c)(a^2+ac+c^2)} = 0 \end{aligned}$$

이때 a, b, c 는 자연수이므로 $a+b+c \neq 0$

즉, $\frac{a^3-b^3}{a^3-c^3} = \frac{a-b}{a-c}$ 를 만족시키는 $a \neq c$ 인 세 자연수 a, b, c 는 $a=b$ 또는 $b=c$ 이다.

또, 길이가 a, b, c 인 막대 세 개로 삼각형이 만들어지려면 (가장 긴 변의 길이) < (다른 두 변의 길이의 합)

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 는 $\neg, \sqsupset$ 이다.

주의 $\frac{a^3-b^3}{a^3-c^3} = \frac{a-b}{a-c}$ 에서 $\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-c)(a^2+ac+c^2)} = \frac{a-b}{a-c}$ 로 좌변을 인수분해 한 후에 바로 약분하면 안돼! 약분은 0이 아닐 때만 할 수 있는데 이게 문자로 보면 잘 눈에 띄지 않기 때문에 놓치는 경우가 많아.

만약 약분을 하게 되면 $a-b \neq 0$ 인 경우, 즉 $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+ac+c^2} = 1$ 을 만족하는 경우만 구하게 되는 거지!

$a^2+ab+b^2 = a^2+ac+c^2$ 에서 $(b-c)(a+b+c) = 0$ 이니까 $b=c$ 인 경우만 구하고 $a=b$ 인 경우를 놓치게 되는 거야!

TIP $\frac{a^3-b^3}{a^3-c^3} = \frac{a-b}{a-c}$ 에서 분모는 0이 아니므로 $a-c \neq 0$, 즉 보기 중 ㄹ을 제외하고 생각하면 편하게 구할 수 있어!

194 ③ 53

$$h(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{(x-1)f(x)}{(x+1)g(x)}$$

$$\text{이때 } f(x)=g(x+1) \text{이므로 } h(x) = \frac{(x-1)g(x+1)}{(x+1)g(x)}$$

$$\begin{aligned} h(5) \times h(6) \times h(7) \times h(8) \times h(9) \\ &= \frac{4g(6)}{6g(5)} \times \frac{5g(7)}{7g(6)} \times \frac{6g(8)}{8g(7)} \times \frac{7g(9)}{9g(8)} \times \frac{8g(10)}{10g(9)} \\ &= \frac{4 \times 5 \times g(10)}{9 \times 10 \times g(5)} = \frac{4 \times 5 \times 91}{9 \times 10 \times 21} = \frac{26}{27} \end{aligned}$$

따라서 $p=27, q=26$ 이므로 $p+q=53$

195 ③

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} f(b, a, c) - f(c, a, b) &= \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \right) - \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \right) \\ &= \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} \\ &= \frac{bc(b-c) + ac(c-a) + ab(a-b)}{abc} \\ &= \frac{(b-c)a^2 - (b^2-c^2)a + bc(b-c)}{abc} \end{aligned}$$

$$= \frac{(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}}{abc}$$

$$= \frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{abc} = k$$

k 의 값은 0이 아니므로 $a \neq b \neq c$

이때 조건 (가)를 동시에 만족시키려면

(i) $c=4$ 인 경우

조건 (다)에서 $a+b=4$ 이므로 $a=3, b=1$

$$\therefore k = \frac{(1-4) \times (3-1) \times (3-4)}{3 \times 1 \times 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

(ii) $c=3$ 인 경우

조건 (다)에서 $a+b=3$ 이므로 $a=2, b=1$

$$\therefore k = \frac{(1-3) \times (2-1) \times (2-3)}{2 \times 1 \times 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

196 ④

$B=x^3-3x^2-6x+8$ 을 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & -6 & 8 \\ & & 1 & -2 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & 0 \end{array}$$

$$x^3-3x^2-6x+8=(x-1)(x^2-2x-8)$$

$$=(x-4)(x-1)(x+2)$$

$C=x^3-21x+20$ 을 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -21 & 20 \\ & & 1 & 1 & -20 \\ \hline & 1 & 1 & -20 & 0 \end{array}$$

$$x^3-21x+20=(x-1)(x^2+x-20)$$

$$=(x-4)(x-1)(x+5)$$

$$A=a(x-4)(x-1)(x+2)(x+5)$$

$$=a(x^2+x-20)(x^2+x-2)$$

이때 $x^2+x=t$ 라 하면

$$a(x^2+x-20)(x^2+x-2)=a(t-20)(t-2)$$

$$=a(t^2-22t+40)$$

$$=a\{(x^2+x)^2-22(x^2+x)+40\}$$

$$=a(x^4+2x^3-21x^2-22x+40)$$

$$=ax^4+2ax^3-21ax^2-22ax+40a$$

이므로 $a=1, b=2, c=-21, d=-22$

$$\therefore ad-bc=20$$

197 ④ 44π

조건 (가)에서

$$8a^3+27b^3+c^3-18abc$$

$$=(2a+3b+c)\{(2a)^2+(3b)^2+c^2-6ab-3bc-2ac\}$$

$$=\frac{1}{2}(2a+3b+c)\{(2a-3b)^2+(3b-c)^2+(c-2a)^2\}=0$$

a, b, c 는 자연수이므로 $2a+3b+c \neq 0$

$$\text{즉, } 2a=3b=c \text{에서 } a=\frac{1}{2}c, b=\frac{1}{3}c$$

조건 (나)에서

$$S_3-S_1+S_2=c^2\pi-a^2\pi+b^2\pi$$

$$=c^2\pi-\frac{1}{4}c^2\pi+\frac{1}{9}c^2\pi$$

$$=\frac{31}{36}c^2\pi=124\pi$$

$$\text{이므로 } c^2=144 \quad \therefore c=12, a=6, b=4$$

따라서 세 원의 둘레의 길이의 합은

$$2\pi \times 6 + 2\pi \times 4 + 2\pi \times 12 = 44\pi$$

198 ③

$$n^4-6n^2-27=(n-3)(n^3+3n^2+3n+9)$$

$$=(n-3)\{(n+1)^3+8\}$$

$$=(n-3)(n+1)^3+8(n-3)$$

n^4-6n^2-27 이 $(n-3)(n+1)$ 의 배수가 되려면 $8(n-3)$ 이 $(n-3)(n+1)$ 의 배수이어야 한다.

자연수 k 에 대하여 $8(n-3)=k(n-3)(n+1)$ 이라 하면

$8=k(n+1)$ 을 만족시키는 두 자연수 k, n 의 순서쌍 (k, n) 은 $(1, 7), (2, 3), (4, 1)$

이때 $(n-3)(n+1)$ 이 자연수이므로 $n>3 \quad \therefore n=7$

199 ⑤ 560

조건 (가)에서 $f(x)$ 는 삼차식이므로 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 라 하자.

조건 (나)에서

$$f(-x)=-ax^3+bx^2-cx+d, -f(x)=-ax^3-bx^2-cx-d$$

$$\text{이므로 } b=d=0, \text{ 즉 } f(x)=ax^3+cx$$

조건 (다)에서 $f(x)$ 는 x^2-3x 를 인수로 가지므로 $f(x)$ 를 x^2-3x 로 나누면 $f(x)=x(x-3)(ax+3a)+(c+9a)x$

$$\text{즉, } c+9a=0 \text{이므로 } c=-9a \quad \therefore f(x)=ax^3-9ax$$

$$2f(x^2)=\{f(x)\}^2+36xf(x)+288x^2 \text{에서}$$

$$2(ax^6-9ax^2)=(ax^3-9ax)^2+36x(ax^3-9ax)+288x^2$$

최고차항의 계수가 $2a=a^2$, 즉 $a=2$

$$\text{따라서 } f(x)=2x^3-18x \text{이므로 } f(7)=560$$

200 ⑤ 5

$$x+1=X, 3(y+1)=Y, 5(z+1)=Z \text{라 하면}$$

$$x+3y+5z=-9 \text{에서}$$

$$(x+1)+3(y+1)+5(z+1)=X+Y+Z=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{225(x+1)(y+1)(z+1)}{(x+1)^3+27(y+1)^3+125(z+1)^3}$$

$$=\frac{15 \times (x+1) \times 3(y+1) \times 5(z+1)}{(x+1)^3+\{3(y+1)\}^3+\{5(z+1)\}^3}$$

$$=\frac{15XYZ}{X^3+Y^3+Z^3}$$

$$\text{이때 } \textcircled{1} \text{에서 } \underline{X^3+Y^3+Z^3-3XYZ=0}$$

$$\uparrow = (X+Y+Z)(X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-ZX) = 0$$

$$\therefore \frac{15XYZ}{X^3+Y^3+Z^3} = \frac{15XYZ}{3XYZ} = 5$$

201 24

조건 (나)에서 다항식 $x^3+bx^2-(b^2-c^2)x-b^3+bc^2$ 이 $x-a$ 를 인수로 가지므로 $x^3+bx^2-(b^2-c^2)x-b^3+bc^2$ 에 $x=a$ 를 대입하면 $a^2(a+b)-(b^2-c^2)a-b(b^2-c^2)=a^2(a+b)-(a+b)(b^2-c^2)$

$$=(a+b)(a^2-b^2+c^2)=0$$

이때 a, b, c 는 자연수이므로 $a+b>0$

즉, $a^2-b^2+c^2=0$ 에서 $a^2+c^2=b^2$ 이므로 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형이다.

조건 (가)에서 $b=2c-a$ 이므로

$$a^2+c^2=(2c-a)^2$$

$$3c^2-4ac=0, c(3c-4a)=0$$

$$c \neq 0 \text{ 이므로 } 3c=4a$$

$$a=3t, c=4t \text{ 라 하면 } b=5t$$

조건 (다)에서 한 변의 길이가 10이고 a, b, c 가 모두 자연수이므로 $t=2$, 즉 $a=6, b=10, c=8$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$

202 50

$x^3-(5k+10)x^2+(6k^2+50k)x-60k^2$ 을 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 10 & 1 & -5k-10 & 6k^2+50k & -60k^2 \\ & & 10 & -50k & 60k^2 \\ \hline 2k & 1 & -5k & 6k^2 & 0 \\ & & 2k & -6k^2 & \\ \hline 1 & & -3k & 0 & \end{array}$$

$$x^3-(5k+10)x^2+(6k^2+50k)x-60k^2$$

$$=(x-10)(x-2k)(x-3k)$$

즉, 세 변의 길이가 10, $2k, 3k$ 인 이등변삼각형이 존재하려면

$$10=2k \text{ 또는 } 10=3k \text{ 또는 } 2k=3k$$

(i) $10=2k$, 즉 $k=5$ 일 때

세 변의 길이가 10, 10, 15이므로 이등변삼각형이다.

(ii) $10=3k$, 즉 $k=\frac{10}{3}$ 일 때

세 변의 길이가 10, $\frac{20}{3}, 10$ 이므로 이등변삼각형이다.

(iii) $2k=3k$, 즉 $k=0$ 일 때

10, $2k, 3k$ 는 길이이므로 $k \neq 0$

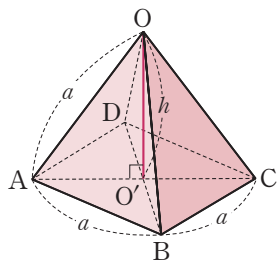
따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은 $m=5 \times \frac{10}{3} = \frac{50}{3}$ 이므로 $3m=50$

주의 삼각형이 이루어지는 경우에 대한 문제에서는 항상 삼각형이 만들어지는 조건 '세 변의 길이가 a, b, c 인 삼각형에서 가장 긴 변의 길이를 c 라고 할 때, $a+b>c$ '를 생각해야 해!

203 23

그림과 같이 모든 모서리의 길이가 a 인 정사각뿔 $O-ABCD$ 에 대하여 점 O 에서 밑면에 내린 수선의 발을 O' 이라 하면 점 O' 은 선분 AC 의 중점이다.

이때 $\overline{OA}=\overline{OC}=a$ 이고, 정사각형 $ABCD$ 에서 $\overline{AC}=\sqrt{2}a$ 이므로 삼



각형 OAC 는 $\angle AOC=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이다. 즉, $h=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

두 정사각뿔의 높이의 차는

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b) = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore a-b=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

정사각뿔 $O-ABCD$ 의 부피는 $\frac{1}{3} \times a^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$

이와 마찬가지로 정사각뿔 $O-EFGH$ 의 부피는 $\frac{\sqrt{2}}{6}b^3$ 이므로

두 정사각뿔의 부피의 차는

$$\frac{\sqrt{2}}{6}a^3 - \frac{\sqrt{2}}{6}b^3 = \frac{\sqrt{2}}{6}(a^3-b^3) = \frac{158\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore a^3-b^3=316 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 에서 } a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=4(a^2+ab+b^2)=316$$

$$\therefore a^2+ab+b^2=79$$

$$\text{이때 } (a^2+ab+b^2)-(a-b)^2=3ab=79-4^2=63 \quad \therefore ab=21$$

따라서 $\angle AOG=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 삼각형 OAG 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times a \times b = \frac{1}{2} \times 21 = \frac{21}{2}$ 에서 $p=21, q=2$ 이므로 $p+q=23$ 이다.

204 (x+1)(x-1)^2(x^2-4x+1)

$$x^5-5x^4+4x^3+4x^2-5x+1$$

$$=(x^5+1)-5(x^4+x)+4(x^3+x^2)$$

$$=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)-5x(x+1)(x^2-x+1)$$

$$+4x^2(x+1)$$

$$=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1-5x^3+5x^2-5x+4x^2)$$

$$=(x+1)(x^4-6x^3+10x^2-6x+1)$$

$$=(x+1) \times x^2 \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 6 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 10 \right\}$$

$$=x^2(x+1) \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \right) - 6 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 8 \right\}$$

$$=x^2(x+1) \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 6 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 8 \right\}$$

$$=x^2(x+1) \left(x + \frac{1}{x} - 2 \right) \left(x + \frac{1}{x} - 4 \right)$$

$$=(x+1)(x^2-2x+1)(x^2-4x+1)$$

$$=(x+1)(x-1)^2(x^2-4x+1)$$

TIP 계수가 대칭인 5차 이상의 식 중 차수가 홀수인 식은 반드시 $x+1$ 을 인수로 가져! 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \cdots + a_nx^{n+1} + a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$
 $= a_0(x^{2n+1} + 1) + a_1(x^{2n} + x) + \cdots + a_n(x^{n+1} + x^n)$
 이때 $x = -1$ 을 대입하면 0이므로 인수정리에 의하여
 $a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \cdots + a_nx^{n+1} + a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ 은 $x+1$ 을 인수로 갖는 거야!

205 ⑤

$$\begin{aligned}
 \{P(x)\}^3 + \{Q(x)\}^3 &= 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 + 16 \text{에서} \\
 \{P(x) + Q(x)\}^3 - 3P(x)Q(x)\{P(x) + Q(x)\} \\
 &= 64 - 12P(x)Q(x) = 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 + 16 \\
 -12P(x)Q(x) &= 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 - 48 \\
 \therefore -P(x)Q(x) &= x^4 + 2x^3 + x^2 - 4 \\
 &= (x-1)(x+2)(x^2+x+2) \\
 &= (x^2+x-2)(x^2+x+2)
 \end{aligned}$$

$P(x) + Q(x) = 4$ 이고 $P(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이므로 조건 (가), (나)를 만족시키는 두 이차다항식 $P(x), Q(x)$ 는

$$\begin{aligned}
 P(x) &= -x^2 - x + 2, Q(x) = x^2 + x + 2 \\
 \therefore P(2) + Q(3) &= -4 + 14 = 10
 \end{aligned}$$

206 ④ 146

$P(x)$ 가 일차식 $x-a$ 를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 a & 1 & 0 & -290 & 0 & b \\
 & & a & a^2 & a^3 - 290a & a^4 - 290a^2 \\
 \hline
 & 1 & a & a^2 - 290 & a^3 - 290a & b + a^4 - 290a^2
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{에서 } b + a^4 - 290a^2 &= 0, \text{ 즉 } b = a^2(290 - a^2) \\
 b \text{가 자연수이므로 } 290 - a^2 > 0 \text{에서 } a \text{의 값은 } 1, 2, 3, \dots, 17 \\
 x^4 - 290x^2 + b &= (x-a)\{x^3 + ax^2 + (a^2 - 290)x + a^3 - 290a\} \\
 &= (x-a)(x+a)(x^2 + a^2 - 290)
 \end{aligned}$$

조건에 의하여 $x^2 + a^2 - 290$ 이 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해 되는 경우는 제외한다.

$x^2 + a^2 - 290 = x^2 - (290 - a^2)$ 에서 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해 되는 경우는 $290 - a^2$ 이 제곱수인 경우이다.

$290 = 1^2 + 17^2 = 11^2 + 13^2$ 이므로 $290 - a^2$ 이 제곱수가 되는 자연수 a 의 값은 1, 11, 13, 17

즉, 조건을 만족시키는 자연수 a 의 값의 개수는 $17 - 4 = 13$ 이므로 $p = 13$

$b = a^2(290 - a^2) = -(a^2 - 145)^2 + 145^2$ 에서 b 의 최댓값은 $a = 12$ 일 때 $12^2 \times (290 - 12^2)$ 이므로 $q = 12^2 \times (290 - 12^2)$

$$\therefore \frac{q}{(p-1)^2} = \frac{12^2 \times (290 - 12^2)}{(13-1)^2} = 146$$

207 ④ 84

$$\begin{aligned}
 P(x)Q(x) + P(x) + Q(x) + 1 &= -2x^4 + 15x^3 + 24x^2 + 27x \text{에서} \\
 \{P(x) + 1\}\{Q(x) + 1\} &= -2x^4 + 15x^3 + 24x^2 + 27x \\
 &= x(-2x^3 + 15x^2 + 24x + 27) \\
 &= -x(x-9)(2x^2 + 3x + 3)
 \end{aligned}$$

이때 $Q(x) + 1$ 은 최고차항의 계수가 음수이고, 두 일차식의 곱으로 나타낼 수 있으므로

$$Q(x) + 1 = -x(x-9) = -x^2 + 9x, P(x) + 1 = 2x^2 + 3x + 3$$

$$\text{즉, } Q(x) = -x^2 + 9x - 1, P(x) = 2x^2 + 3x + 2$$

$$\text{따라서 } P(x) + 2Q(x) = 21x \text{이므로 } P(4) + 2Q(4) = 84$$

208 ⑤

다항식 $P(x)$ 가 일차식 $x-a$ 를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 a & 1 & 0 & -145 & 0 & b \\
 & & a & a^2 & a^3 - 145a & a^4 - 145a^2 \\
 \hline
 & 1 & a & a^2 - 145 & a^3 - 145a & b + a^4 - 145a^2
 \end{array}$$

$$\text{에서 } b + a^4 - 145a^2 = 0, \text{ 즉 } b = a^2(145 - a^2)$$

b 가 자연수이므로 $145 - a^2 > 0$ 에서 a 의 값은 1, 2, 3, ..., 12

$$\begin{aligned}
 x^4 - 145x^2 + b &= (x-a)\{x^3 + ax^2 + (a^2 - 145)x + a^3 - 145a\} \\
 &= (x-a)(x+a)(x^2 + a^2 - 145)
 \end{aligned}$$

조건에 의하여 $x^2 + a^2 - 145$ 가 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해 되어야 한다.

$x^2 + a^2 - 145 = x^2 - (145 - a^2)$ 에서 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해 되는 경우는 $145 - a^2$ 이 제곱수인 경우이다.

$145 = 1^2 + 12^2 = 8^2 + 9^2$ 이므로 $145 - a^2$ 이 제곱수가 되는 자연수 a 의 값은 1, 8, 9, 12

$$a = 1 \text{일 때 } b = 1^2 \times 144$$

$$a = 8 \text{일 때 } b = 8^2 \times 81$$

$$a = 9 \text{일 때 } b = 9^2 \times 64$$

$$a = 12 \text{일 때 } b = 12^2 \times 1$$

이때 $a = 9$ 일 때와 $a = 8$ 일 때, $a = 12$ 일 때와 $a = 1$ 일 때는 같은 경우이므로 $p = 2, q = 64 \times 81$

$$\therefore \frac{q}{4p} = \frac{64 \times 81}{4 \times 2} = 648$$

II

방정식과 부등식

04 복소수

1등급 필수 내신 빈출 문제

p.043-050

209 답 ⑤

$$\frac{3-i}{1+i} - \frac{2i}{1-i} = \frac{(3-i)(1-i) - 2i(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{2-4i-2i+2}{2} = 2-3i$$

따라서 $a=2, b=-3$ 이므로 $a-b=5$

210 답 ①

$$i(x-3i)^2 = i(x^2-9-6xi) = 6x + (x^2-9)i$$

이 복소수가 실수가 되려면 $x^2-9=0$

$$x^2=9 \quad \therefore x=\pm 3$$

따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은 -9

211 답 ④

$$(1-2i)^2 = -3-4i$$

$$(1-2i)^3 = (1-2i)^2(1-2i)$$

$$= (-3-4i)(1-2i)$$

$$= -11+2i$$

$$\therefore 4(1-2i) - 2(1-2i)^2 + (1-2i)^3$$

$$= 4(1-2i) - 2(-3-4i) + (-11+2i) = -1+2i$$

다른 풀이 $1-2i=z$ 라 하면 $z-1=-2i$

위 식의 양변을 제곱하면

$$z^2-2z+1=-4 \quad \therefore z^2-2z+5=0$$

$$\therefore 4z-2z^2+z^3=z(z^2-2z+5)-z$$

$$=-z=-1+2i$$

212 답 0

$$(3+2i) \cdot (2-3i) = (3+2i)(2-3i) + (3+2i) - (2-3i)$$

$$= (12-5i) + (3+2i) - (2-3i) = 13$$

따라서 구하는 허수부분은 0

213 답 ④

$$\alpha = \frac{1-2i}{\sqrt{3}i} \text{에서 } \alpha^2 = \frac{-3-4i}{-3} = \frac{3+4i}{3}$$

$$\beta = \frac{1+2i}{\sqrt{3}i} \text{에서 } \beta^2 = \frac{-3+4i}{-3} = \frac{3-4i}{3}$$

$$\therefore (3\alpha^2+1)(3\beta^2+1) = \left(3 \times \frac{3+4i}{3} + 1\right) \left(3 \times \frac{3-4i}{3} + 1\right)$$

$$= (4+4i)(4-4i) = 32$$

214 답 ④

$$\alpha + \beta = \frac{5}{1+2i} + \frac{5}{1-2i} = \frac{5(1-2i) + 5(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\alpha\beta = \frac{5}{1+2i} \times \frac{5}{1-2i} = \frac{5 \times 5}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\therefore \alpha^3 + \beta^3 + 5\alpha^2\beta + 5\alpha\beta^2 = (\alpha + \beta)^3 + 2\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= 2^3 + 2 \times 5 \times 2 = 28$$

TIP 다항식 단원에서 배웠던 곱셈 공식을 적절히 활용해야 해.

$\alpha + \beta, \alpha^2 + \beta^2, \alpha^3 + \beta^3$ 과 같은 꼴이 보이면 α, β 를 각각 생각하는 것보다 곱셈 공식을 활용하여 $\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha\beta$ 가 포함된 식으로 변형하려고 시도해 봐!

215 답 ⑤

$$z = \frac{5+3i}{1-i} = \frac{(5+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+8i}{2} = 1+4i \text{에서}$$

$$z-1=4i$$

위 식의 양변을 제곱하면

$$z^2-2z+1=-16 \quad \therefore z^2-2z+17=0$$

$$\therefore z^3-3z^2+20z-17 = z(z^2-2z+17) - (z^2-2z+17) + z$$

$$= z = 1+4i$$

따라서 $a=1, b=4$ 이므로 $a+b=5$

TIP 복소수 z 의 실수부분을 이항하여 허수부분만 남기고 양변을 제곱하면 계수가 실수인 z 에 대한 이차방정식을 얻을 수 있어. z 를 주어진 식에 바로 대입하는 것보다 주어진 식을 이 이차식이 포함된 식으로 변형하려고 시도해 봐!

216 답 -3

$$z = \frac{2-\sqrt{5}i}{3} \text{에서 } 3z-2 = -\sqrt{5}i$$

위 식의 양변을 제곱하면

$$9z^2-12z+4=-5 \quad \therefore 3z^2-4z+3=0$$

$$\therefore 3z^3+2z^2+3z+6 = z(3z^2-4z+3) + 2(3z^2-4z+3) + 8z = 8z$$

$$\frac{6}{3z^3+2z^2+3z+6} = pz+q \text{에서}$$

$$\frac{6}{8z} = pz+q \quad \therefore 4pz^2+4qz-3=0$$

$$\text{이때 } 3z^2-4z+3=0 \text{이므로 } 4p=-3, 4q=4$$

$$\text{따라서 } p=-\frac{3}{4}, q=1 \text{이므로 } 4pq=-3$$

217 답 12

$$2+3i=z_1 \text{이라 하면 } z_1-2=3i$$

위 식의 양변을 제곱하면

$$z_1^2-4z_1+4=-9 \quad \therefore z_1^2=4z_1-13$$

$$z_1^3=4z_1^2-13z_1=4(4z_1-13)-13z_1=3z_1-52$$

$$\therefore f(z_1) = z_1^3 - 2z_1^2 + 6z_1 + 30$$

$$= (3z_1-52) - 2(4z_1-13) + 6z_1 + 30$$

$$= z_1 + 4 = 6 + 3i$$

$$2-3i=z_2 \text{라 하면 } z_2-2=-3i$$

위 식의 양변을 제곱하면

$$z_2^2-4z_2+4=-9 \quad \therefore z_2^2=4z_2-13$$

같은 방법으로 $f(z_2) = z_2 + 4 = 6 - 3i$

$$\begin{aligned}\therefore f(2+3i) + f(2-3i) &= f(z_1) + f(z_2) \\ &= (6+3i) + (6-3i) = 12\end{aligned}$$

TIP $z = 2 \pm 3i$ 에서 $z - 2 = \pm 3i$ 로 변형한 후 양변을 제곱하여 얻은 이차식을 이용하여 z^3, z^2 을 z 에 대한 일차식으로 나타낸 후 정리해 보자!

218 **답** ③

$$\begin{aligned}(3+4i)^2 + (x-i)^2 &= (-7+24i) + (x^2-1-2xi) \\ &= (x^2-8) + (24-2x)i = y+16i\end{aligned}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x^2-8=y, 24-2x=16$$

따라서 $x=4, y=8$ 이므로 $x+y=12$

219 **답** 16

$x+7+|x-y|i=5+6i$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x+7=5, |x-y|=6$$

$$x+7=5 \text{에서 } x=-2$$

$$|x-y|=6 \text{에서 } |-2-y|=6 \quad \therefore y=-8 \text{ 또는 } y=4$$

이때 $xy > 0$ 이므로 $x=-2, y=-8$

$$\therefore xy=16$$

220 **답** ③

$$x^2+y^2i-x-3yi-6-10i=0 \text{에서}$$

$$(x^2-x-6) + (y^2-3y-10)i=0$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x^2-x-6=0, y^2-3y-10=0$$

$$(i) x^2-x-6=0 \text{에서 } (x+2)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=3$$

$$(ii) y^2-3y-10=0 \text{에서 } (y+2)(y-5)=0$$

$$\therefore y=-2 \text{ 또는 } y=5$$

$$(i), (ii) \text{에서 } xy \text{의 값은 } (-2) \times (-2)=4 \text{ 또는 } (-2) \times 5=-10$$

$$\text{또는 } 3 \times (-2)=-6 \text{ 또는 } 3 \times 5=15$$

221 **답** ③

$\{a(6+i)-b(6-i)\}^2=-4$ 에서 $a(6+i)-b(6-i)$ 는 -4 의 제곱근이므로 $2i$ 또는 $-2i$ 이다.

$$a(6+i)-b(6-i)=6(a-b)+(a+b)i \text{에서}$$

$$(i) 6(a-b)+(a+b)i=2i \text{일 때}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a-b=0, a+b=2 \quad \therefore a=1, b=1$$

$$(ii) 6(a-b)+(a+b)i=-2i \text{일 때}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a-b=0, a+b=-2 \quad \therefore a=-1, b=-1$$

$$(i), (ii) \text{에서 } ab=1$$

다른 풀이 $\{a(6+i)-b(6-i)\}^2$ 이 음의 실수가 되려면

$a(6+i)-b(6-i)$ 는 순허수이어야 한다.

$$a(6+i)-b(6-i)=6(a-b)+(a+b)i \text{에서}$$

$$a-b=0, a+b \neq 0$$

$$\text{이때 } \{(a+b)i\}^2=-4 \text{이므로 } a+b=2 \text{ 또는 } a+b=-2$$

$$(i) a-b=0, a+b=2 \text{에서 } a=1, b=1$$

$$(ii) a-b=0, a+b=-2 \text{에서 } a=-1, b=-1$$

$$(i), (ii) \text{에서 } ab=1$$

222 **답** ③

$$f(5-i)=a(5-i)^2+b(5-i)+c$$

$$=(24a+5b+c)-(10a+b)i=3+2i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$24a+5b+c=3, 10a+b=-2$$

$$\therefore f(5+i)=a(5+i)^2+b(5+i)+c$$

$$=a(24+10i)+b(5+i)+c$$

$$=(24a+5b+c)+(10a+b)i=3-2i$$

다른 풀이 $5-i=z$ 라 하면 $5+i=\bar{z}$

$$f(5-i)=f(z)=az^2+bz+c=3+2i \text{이므로}$$

$$f(5+i)=f(\bar{z})=a(\bar{z})^2+b\bar{z}+c=\overline{az^2+bz+c}=3-2i$$

223 **답** $p=10, q=0$

$f(x)$ 를 x^2+9 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^4+px^2-qx+9=(x^2+9)Q(x)$$

위 식에 $x=3i$ 를 대입하면

$$81-9p-3qi+9=0 \quad \therefore (90-9p)-3qi=0$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$90-9p=0, -3q=0 \quad \therefore p=10, q=0$$

224 **답** ②

$$\neg. [a, b]=a-bi, \langle b, -a \rangle=-a+bi \text{이므로}$$

$$[a, b] \neq \langle b, -a \rangle \text{ (거짓)}$$

$$\neg. [-b, a]=-b-ai, \langle a, -b \rangle=-b+ai \text{이므로}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a=0$$

$$\text{즉, } z=bi \text{이므로 } z^2 \leq 0 \text{ (참)}$$

$$\neg. [a, -b] \times \langle b, a \rangle=(a+bi) \times (a+bi)=a^2-b^2+2abi,$$

$$[a, b] + \langle -b, -a \rangle=(a-bi)+(-a-bi)=-2bi \text{이므로}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2-b^2=0, ab=-b$$

$$ab=-b \text{에서 } b(a+1)=0 \quad \therefore b=0 \text{ 또는 } a=-1$$

$$(i) b=0 \text{일 때, } a=0 \text{이므로 } ab=0$$

$$(ii) a=-1 \text{일 때, } b=\pm 1 \text{이므로 } ab=\pm 1$$

$$(i), (ii) \text{에서 } ab=0 \text{ 또는 } ab=\pm 1 \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

225

답 ③

$$\begin{aligned} z^2 - z &= (a+bi)^2 - (a+bi) \\ &= (a^2 + 2abi - b^2) - (a+bi) \\ &= (a^2 - a - b^2) + (2a-1)bi \end{aligned}$$

이때 $z^2 - z$ 는 실수이고 $b \neq 0$ 이므로

$$2a-1=0 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

따라서 $z=\frac{1}{2}+bi$, $\bar{z}=\frac{1}{2}-bi$ 이므로 $z+\bar{z}=1$

다른 풀이 $z^2 - z$ 는 실수이므로 $z^2 - z = \overline{z^2 - z}$

$$z^2 - (\bar{z})^2 - (z - \bar{z}) = 0$$

$$(z - \bar{z})(z + \bar{z} - 1) = 0$$

이때 z 는 실수가 아니므로 $z \neq \bar{z}$

$$\therefore z + \bar{z} = 1$$

226

답 ①

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$$z^2 = (a+bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi = 6 + 8i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2 - b^2 = 6, ab = 4$$

$$\therefore z\bar{z} = (a+bi)(a-bi)$$

$$= a^2 + b^2$$

$$= \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2} \leftarrow (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2$$

$$= \sqrt{6^2 + 4 \times 4^2} = 10$$

다른 풀이 $(z\bar{z})^2 = z^2(\bar{z})^2 = z^2\bar{z}^2 = (6+8i)(6-8i) = 100$

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 \geq 0$$

$$\therefore z\bar{z} = 10$$

227

답 36

$z=a+3i$ 에서 $\bar{z}=a-3i$

$$\bar{z} = \frac{z^2}{6i} \text{에서 } 6i\bar{z} = z^2 \text{이므로}$$

$$6i(a-3i) = (a+3i)^2$$

$$18 + 6ai = (a^2 - 9) + 6ai$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2 - 9 = 18 \quad \therefore a^2 = 27$$

$$\therefore z\bar{z} = (a+3i)(a-3i) = a^2 + 9 = 27 + 9 = 36$$

228

답 50

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

조건 (나)에서 $z^2 + 5z - 5\bar{z} = 0$ 이므로

$$(a+bi)^2 + 5(a+bi) - 5(a-bi) = 0$$

$$(a^2 - b^2) + 2b(a+5)i = 0$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2 - b^2 = 0, b(a+5) = 0$$

조건 (가)에서 $z\bar{z} > 0$ 이므로 $z \neq 0$

즉, $b \neq 0$ 이므로 $a = -5, b = \pm 5$

$$\therefore z = -5 + 5i \text{ 또는 } z = -5 - 5i$$

따라서 모든 복소수 z 의 값의 곱은 $(-5+5i)(-5-5i) = 50$

다른 풀이 조건 (나)에서 $z^2 + 5z - 5\bar{z} = 0$

$$z^2 + 5z - 5\bar{z} \text{는 실수이므로 } z^2 + 5z - 5\bar{z} = \overline{(z^2 + 5z - 5\bar{z})}$$

$$z^2 - (\bar{z})^2 + 10(z - \bar{z}) = 0$$

$$(z - \bar{z})(z + \bar{z} + 10) = 0$$

(i) $z = \bar{z}$ 일 때

조건 (나)에서 $z = 0$

이때 조건 (가)에서 $z \neq 0$ 이므로 $z \neq \bar{z}$

(ii) $\bar{z} = -10 - z$ 일 때

$$\text{조건 (나)에서 } z^2 + 10z + 50 = 0$$

따라서 모든 복소수 z 의 값의 곱은 50

229

답 ③

$$\overline{zzz} = z\bar{z}\bar{z} \text{에서 } z\bar{z}\bar{z} = \bar{z}z$$

$$\bar{z}z(\bar{z} - 1) = 0$$

$$\therefore \bar{z} = 0 \text{ 또는 } z = 0 \text{ 또는 } \bar{z} = 1$$

따라서 조건을 만족시키는 복소수 z 는 0, 1의 2개이다.

230

답 ②

$$\alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\beta} = \alpha(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) + \beta(\bar{\alpha} + \bar{\beta})$$

$$= (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta})$$

$$= (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)$$

$$= p^2 + q^2$$

$$= (p+q)^2 - 2pq$$

$$= 6^2 - 2 \times 2 = 32$$

231

답 ①

$$\alpha\bar{\beta} = 3 \text{에서 } \bar{\alpha}\beta = \bar{\alpha}\beta = 3 \text{이므로 } \frac{3}{\beta} = \alpha, \beta = \frac{3}{\alpha}$$

$$\therefore 2\beta + \frac{6}{\beta} = 2\left(\beta + \frac{3}{\beta}\right)$$

$$= 2\left(\frac{3}{\alpha} + \alpha\right)$$

$$= 2 \times (-3i) = -6i$$

232

답 ①

$$\alpha\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta} = 9 \text{에서 } \frac{1}{\alpha} = \frac{\bar{\alpha}}{9}, \frac{1}{\beta} = \frac{\bar{\beta}}{9}$$

$$\therefore (\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = (\alpha + \beta)\left(\frac{\bar{\alpha}}{9} + \frac{\bar{\beta}}{9}\right)$$

$$= \frac{1}{9}(\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta})$$

$$= \frac{1}{9}(\alpha + \beta)(\alpha + \beta)$$

$$= \frac{1}{9} \times 9 = 1$$

233 ④

$$z = (1-i)x^2 + 3x + 25i - 10 = (x^2 + 3x - 10) - (x^2 - 25)i$$

이때 $z \neq 0$ 이고 $z = -\bar{z}$ 이므로 z 는 순허수이다.

$$\text{즉, } x^2 + 3x - 10 = 0, x^2 - 25 \neq 0$$

$$(i) x^2 + 3x - 10 = 0 \text{에서 } (x-2)(x+5) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -5$$

$$(ii) x^2 - 25 \neq 0 \text{에서 } x^2 \neq 25 \quad \therefore x \neq \pm 5$$

$$(i), (ii) \text{에서 } x = 2$$

234 ⑤

$z_1 = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하자.

$$\neg. \bar{z}_2 = z_1 = a + bi \text{이므로 } z_2 = a - bi$$

$$z_1 + z_2 = 2a, z_1 z_2 = a^2 + b^2$$

즉, $z_1 + z_2, z_1 z_2$ 는 실수이다. (참)

$$\neg. \bar{z}_2 = -z_1 = -a - bi \text{이므로 } z_2 = -a + bi$$

$$z_1 z_2 = (a + bi)(-a + bi) = -a^2 - b^2 = 0$$

$$\text{즉, } a = 0, b = 0 \text{이므로 } z_2 = 0 \text{ (참)}$$

$$\neg. \bar{z}_2 = -iz_1 = b - ai \text{이므로 } z_2 = b + ai$$

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (b + ai) = (a + b) + (a + b)i$$

즉, $z_1 + z_2$ 의 실수부분과 허수부분이 같다. (참)

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

TIP z_1 을 먼저 정해 놓고 조건을 만족시키는 z_2 를 구해 보자!

235 ①

$$i - 2i^2 + 3i^3 - 4i^4 + \dots + 29i^{29} - 30i^{30}$$

$$= (i - 2i^2 + 3i^3 - 4i^4) + (5i^5 - 6i^6 + 7i^7 - 8i^8) + \dots + 29i^{29} - 30i^{30}$$

$$= (i + 2 - 3i - 4) + (5i + 6 - 7i - 8) + \dots + 29i + 30$$

$$= 7(-2 - 2i) + 29i + 30 = 16 + 15i$$

$$\text{따라서 } a = 16, b = 15 \text{이므로 } a - b = 1$$

TIP 허수단위 i 의 거듭제곱의 합을 구하는 문제는 일정한 개수로 항을 묶어서 푸는데, 이때 앞에서부터 묶는게 아니라 뒤에서부터 묶어서 풀 수도 있어! 이 문제의 경우

$$i - 2i^2 + 3i^3 - 4i^4 + \dots + 27i^{27} - 28i^{28} + 29i^{29} - 30i^{30}$$

$$= i - 2i^2 + (3i^3 - 4i^4 + 5i^5 - 6i^6) + (7i^7 - 8i^8 + 9i^9 - 10i^{10})$$

$$+ \dots + (27i^{27} - 28i^{28} + 29i^{29} - 30i^{30})$$

$$= i + 2 + 7(2 + 2i)$$

$$= 16 + 15i$$

$$\text{따라서 } a = 16, b = 15 \text{이므로 } a - b = 1$$

236 ⑨

$f(k)$ 가 실수도 순허수도 아닌 복소수가 되려면

$$f(k) = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^k$$

$$= (1 + i - 1 - i) + (1 + i - 1 - i) + \dots + (1 + i - 1 - i) + 1 + i$$

이어야 하므로 $i^k = i$, 즉 $k - 1$ 이 4의 배수이어야 한다.

따라서 두 자리 자연수 k 의 최댓값은 97

237 ②

$$f(n) = i^n + i^{n+1} + i^{n+2} \text{에서}$$

$$f(1) = i + i^2 + i^3 = i - 1 - i = -1$$

$$f(2) = i^2 + i^3 + i^4 = -1 - i + 1 = -i$$

$$f(3) = i^3 + i^4 + i^5 = -i + 1 + i = 1$$

$$f(4) = i^4 + i^5 + i^6 = 1 + i - 1 = i$$

$$\text{이때 } f(n+4) = i^{n+4} + i^{n+5} + i^{n+6} = i^n + i^{n+1} + i^{n+2} = f(n)$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(90)$$

$$= \{f(1) + f(2) + f(3) + f(4)\} + \{f(5) + f(6) + f(7) + f(8)\} \\ + \dots + f(89) + f(90)$$

$$= f(89) + f(90)$$

$$= f(1) + f(2) = -1 - i$$

다른 풀이 $f(n) = i^n + i^{n+1} + i^{n+2} \text{에서}$

$$f(n+1) = i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = i(i^n + i^{n+1} + i^{n+2}) = i \times f(n)$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(89) + f(90)$$

$$= f(1) \times (1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{88} + i^{89})$$

$$= -\{1 + i + (i^2 + i^3 + \dots + i^{88} + i^{89})\} = -1 - i$$

TIP 자연수 n 에 대하여 $i^n + i^{n+2} = 0$ 이므로 $f(n) = i^{n+1}$ 임을 이용하여 풀 수도 있어!

238 ①

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i, \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = i \text{이므로}$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{13} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{18} = (-i)^{13} + i^{18} = -1 - i$$

$$\text{따라서 } a = -1, b = -1 \text{이므로 } a + b = -2$$

239 ②

$$z^2 = (1+i)^2 = 2i \text{이므로 } z^4 = (z^2)^2 = (2i)^2 = -4$$

$$z\bar{z} = (1+i)(1-i) = 2 \text{이므로 } (z\bar{z})^6 = 2^6 = 64$$

$$(\bar{z})^2 = (1-i)^2 = -2i \text{이므로 } (\bar{z})^{10} = \{(\bar{z})^2\}^5 = (-2i)^5 = -32i$$

$$\therefore z^4 + (z\bar{z})^6 + (\bar{z})^{10} = -4 + 64 - 32i = 60 - 32i$$

$$\text{따라서 } a = 60, b = -32 \text{이므로 } a + b = 28$$

240 ③

$$z = \frac{\sqrt{3}+i}{-2i} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{이므로}$$

$$z^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$z^3 = z^2 z = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \times \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = 1$$

$$\therefore z^{999} + \frac{1}{z^{999}} + z^{2205} = (z^3)^{333} + \frac{1}{(z^3)^{333}} + (z^3)^{735} = 1 + 1 + 1 = 3$$

다른 풀이 $z = \frac{\sqrt{3}+i}{-2i} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{에서 } 2z + 1 = \sqrt{3}i$

위 식의 양변을 제곱하면

$$4z^2 + 4z + 1 = -3 \quad \therefore z^2 + z + 1 = 0$$

앞의 식의 양변에 $z-1$ 을 곱하면

$$(z-1)(z^2+z+1)=0, z^3-1=0 \quad \therefore z^3=1$$

$$\therefore z^{999} + \frac{1}{z^{999}} + z^{2205} = (z^3)^{333} + \frac{1}{(z^3)^{333}} + (z^3)^{735} = 1+1+1=3$$

241 196

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}} = z_1 \text{이라 하면 } z_1^2 = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = -i$$

$$z_1^4 = (z_1^2)^2 = (-i)^2 = -1$$

$$z_1^8 = (z_1^4)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$\frac{1-\sqrt{3}i}{2} = z_2 \text{라 하면 } z_2^3 = \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = -1$$

$$z_2^6 = (z_2^3)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^m + \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n = 0, \text{ 즉 } z_1^m + z_2^n = 0 \text{을 만족시키려면}$$

$$z_1^m = -1, z_2^n = 1 \text{ 또는 } z_1^m = 1, z_2^n = -1 \text{이어야 한다.}$$

$$(i) z_1^m = -1, z_2^n = 1 \text{일 때}$$

$$m=4, 12, 20, \dots, 100, n=6, 12, 18, \dots, 96 \text{이므로}$$

$$m+n \text{의 최댓값은 } 100+96=196$$

$$(ii) z_1^m = 1, z_2^n = -1 \text{일 때}$$

$$m=8, 16, 24, \dots, 96, n=3, 9, 15, \dots, 99 \text{이므로}$$

$$m+n \text{의 최댓값은 } 96+99=195$$

$$(i), (ii) \text{에서 } m+n \text{의 최댓값은 } 196$$

242 4

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2} = z_1 \text{이라 하면 } z_1^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}\right)^2 = -i$$

$$z_1^4 = (z_1^2)^2 = (-i)^2 = -1$$

$$z_1^8 = (z_1^4)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2i} = z_2 \text{라 하면 } z_2^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$z_2^6 = (z_2^2)^3 = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = -1$$

$$z_2^{12} = (z_2^6)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}\right)^n + \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^n = 2, \text{ 즉 } z_1^n + z_2^n = 2 \text{를 만족시키려면}$$

$$z_1^n = 1, z_2^n = 1 \text{이어야 한다.}$$

$$\text{따라서 자연수 } n \text{의 최솟값은 } 8, 12 \text{의 최소공배수인 } 24$$

243 50

$$\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = -i \text{이므로 } \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^4 = (-i)^2 = -1$$

$$\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i \text{이므로 } \left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)^8 = i^4 = 1$$

$$f(n) = \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n} + \left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)^{8n} = (-1)^n + 1^n$$

$$n \text{이 홀수일 때, } f(n) = -1 + 1 = 0$$

$$n \text{이 짝수일 때, } f(n) = 1 + 1 = 2$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(50)$$

$$= 0 + 2 + 0 + 2 + \dots + 0 + 2 = 2 \times 25 = 50$$

244 144

$$\left(\frac{1-i}{2}\right)^2 = -\frac{i}{2}, \left(\frac{1-i}{2}\right)^4 = -\frac{1}{4}, \left(\frac{1-i}{2}\right)^8 = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\text{이므로 } \left(\frac{1-i}{2}\right)^m = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{을 만족시키려면 } m \text{의 값은 } 8 \text{의 배수이고}$$

$$\text{그때의 } n \text{의 값은 } \frac{m}{2} \text{이어야 한다.}$$

$$\text{따라서 } m=8, 16, 24, \dots, 96, n=4, 8, 12, \dots, 48 \text{이므로}$$

$$m+n \text{의 최댓값은 } 96+48=144$$

245 2

$$\sqrt{x}\sqrt{y} = -\sqrt{xy} \text{이므로 } x < 0, y < 0$$

$$\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}} = -\sqrt{\frac{z}{y}} \text{이므로 } y < 0, z > 0$$

$$\text{이때 } x-z < 0, z-y > 0, x+y < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore |x-z| - |z-y| - \sqrt{(x+y)^2} \\ = -(x-z) - (z-y) + (x+y) = 2y \end{aligned}$$

246 4

$$\frac{\sqrt{a-c}}{\sqrt{b-c}} = -\sqrt{\frac{a-c}{b-c}} \text{이므로 } b < c, a > c, \text{ 즉 } b < c < a$$

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{이므로 } a < 0, b < 0$$

$$\text{즉, } b < c < a < 0$$

$$\text{이때 } b-a+2c < 0, a+b < 0, a-b > 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{(b-a+2c)^2} - 2|a+b| - |a-b| \\ = -(b-a+2c) + 2(a+b) - (a-b) = 2a+2b-2c \end{aligned}$$

247 -1-i

$$0 < x < 1 \text{이므로 } x-1 < 0, 1-x > 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{x}{x-1}} - \sqrt{-x^2} - \sqrt{1-x} \sqrt{x-1} \\ = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} \times \left(-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}\right) - \sqrt{x^2}i - \sqrt{(x-1)^2}i \\ = -1 - xi + (x-1)i = -1-i \end{aligned}$$

248 1

$$\text{등식 } (a+b+13)x + ab - 9 = 0 \text{이 } x \text{에 대한 항등식이므로}$$

$$a+b+13=0, ab-9=0 \quad \therefore a+b=-13, ab=9$$

$$\text{이때 } a+b < 0, ab > 0 \text{이므로 } a < 0, b < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} \\ &= a+b+2\sqrt{ab} \\ &= -13-2\sqrt{9} = -19 \end{aligned}$$

249 2i

$$x-4y > 0, xy < 0 \text{이므로 } x > 0, y < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{\frac{x}{4y}} + \sqrt{\frac{4y}{x}} &= -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4y}} + \frac{\sqrt{4y}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{-(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{4y})^2}{\sqrt{4y}\sqrt{x}} \\ &= \frac{-x+4y}{\sqrt{4xy}} = \frac{-12}{\sqrt{-36}} = 2i \end{aligned}$$

250 답 -4

$z = x(3-i) + 4(3+2i) = (3x+12) + (8-x)i$
 z^2 이 음의 실수가 되려면 z 는 순허수이어야 한다.
 $3x+12=0, 8-x \neq 0 \quad \therefore x = -4$

251 답 8

$z = (2+i)(3-xi) = (x+6) + (3-2x)i$
 z^2 이 순허수가 되려면 $(x+6)(3-2x) \neq 0, |x+6| = |3-2x|$ 이어야 한다.
 $|x+6| = |3-2x|$ 에서 $x+6=3-2x$ 또는 $x+6=-(3-2x)$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 9$
따라서 모든 실수 x 의 값의 합은 $-1+9=8$

252 답 $-\frac{5}{2}$

$z = x^2 + x(4i-3) + 5i + 2 = (x^2-3x+2) + (4x+5)i$
 z^2 이 실수가 되려면 $x^2-3x+2=0$ 또는 $4x+5=0$ 이어야 한다.
 $x^2-3x+2=0$ 에서 $(x-1)(x-2)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=2$
 $4x+5=0$ 에서 $x = -\frac{5}{4}$
따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은 $1 \times 2 \times \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{5}{2}$

253 답 $-14+8i$

① 단계 켈레복소수의 성질을 이용하여 $\alpha^2 - \beta^2$ 의 값 구하기 30 %
켈레복소수의 성질에 의하여
 $\alpha^2 - \beta^2 = \overline{\alpha^2 - \beta^2} = \overline{17-28i} = 17+28i$
② 단계 $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ 를 이용하여 α, β 의 값 구하기 50 %
 $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = (\alpha+\beta)(5-2i) = 17+28i$
 $\alpha+\beta = \frac{17+28i}{5-2i} = \frac{(17+28i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \frac{29+174i}{29} = 1+6i$
 $\alpha+\beta=1+6i, \alpha-\beta=5-2i$ 를 연립하여 풀면
 $\alpha=3+2i, \beta=-2+4i$
③ 단계 $\alpha\beta$ 의 값 구하기 20 %
 $\therefore \alpha\beta = (3+2i)(-2+4i) = -14+8i$

254 답 $-8-6i$

① 단계 켈레복소수의 성질을 이용하여 $\alpha+\beta$ 의 값 구하기 30 %
켈레복소수의 성질에 의하여
 $\alpha+\beta = \overline{\alpha+\beta} = \overline{3+i} = 3-i$
② 단계 곱셈 공식의 변형을 이용하여 $\alpha\beta$ 의 값 구하기 50 %
 $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
 $= (3-i)^3 - 3\alpha\beta(3-i)$
 $= 18-26i-3\alpha\beta(3-i) = -18-14i$

$$\alpha\beta = \frac{36-12i}{3(3-i)} = \frac{12(3-i)}{3(3-i)} = 4$$

③ 단계 $(\alpha-\beta)^2$ 의 값 구하기 20 %

$$\therefore (\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = (3-i)^2 - 4 \times 4 = -8-6i$$

255 답 $a = \frac{5}{2}, b = -\frac{1}{2}$

① 단계 $z = \frac{1-i}{2}$ 를 변형하여 z 에 대한 이차방정식 만들기 40 %
 $z = \frac{1-i}{2}$ 에서 $2z-1 = -i$
위 식의 양변을 제곱하면
 $4z^2 - 4z + 1 = -1 \quad \therefore 2z^2 - 2z + 1 = 0$

② 단계 $4z^3 - 4z^2 + 3z + 2$ 를 z 에 대한 일차식으로 변형하기 40 %

$$4z^3 - 4z^2 + 3z + 2 = 2z(2z^2 - 2z + 1) + z + 2 = z + 2$$

③ 단계 a, b 의 값 구하기 20 %

$$z + 2 = \frac{1-i}{2} + 2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\therefore a = \frac{5}{2}, b = -\frac{1}{2}$$

256 답 7

① 단계 z^2 이 실수가 되기 위한 조건 구하기 40 %
 $z = (m-n) + (m+n-4)i$ 에서
 $z^2 = (m-n)^2 - (m+n-4)^2 + 2(m-n)(m+n-4)i$
 z^2 이 실수가 되려면 $2(m-n)(m+n-4) = 0$ 이어야 한다.
 $\therefore m=n$ 또는 $m+n=4$
② 단계 조건을 만족시키는 m, n 의 순서쌍 (m, n) 구하기 40 %
(i) $m=n$ 일 때
 m, n 이 5 이하의 자연수이므로 순서쌍 (m, n) 은
 $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)$
(ii) $m+n=4$ 일 때
 m, n 이 5 이하의 자연수이므로 순서쌍 (m, n) 은
 $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$

③ 단계 순서쌍 (m, n) 의 개수 구하기 20 %

(i), (ii)에서 중복을 제외한 순서쌍 (m, n) 의 개수는 7

257 답 3

① 단계 조건을 만족시키는 z 구하기 30 %
 $z^2 = -16$ 에서 z 는 -16 의 제곱근이므로
 $z = 4i$ 또는 $z = -4i$

② 단계 각각의 z 에 대하여 $x+y$ 의 값 구하기 50%

$$z = (1+i)x + (-2+2i)y = (x-2y) + (x+2y)i$$

(i) $z = 4i$ 일 때

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x-2y=0, x+2y=4$$

이를 연립하여 풀면

$$x=2, y=1 \quad \therefore x+y=3$$

(ii) $z = -4i$ 일 때

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x-2y=0, x+2y=-4$$

이를 연립하여 풀면

$$x=-2, y=-1 \quad \therefore x+y=-3$$

③ 단계 $x+y$ 의 최댓값 구하기 20%

(i), (ii)에서 $x+y$ 의 최댓값은 3

다른 풀이 ① 단계 $z^2 = -16$ 을 만족시키는 식 구하기 40%

$$z = (1+i)x + (-2+2i)y = (x-2y) + (x+2y)i$$

$$z^2 = (x-2y)^2 - (x+2y)^2 + 2(x-2y)(x+2y)i = -16$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$(x-2y)^2 - (x+2y)^2 = -16 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$2(x-2y)(x+2y) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

② 단계 x, y 의 값 구하기 40%

$\textcircled{2}$ 에서 $x=2y$ 또는 $x=-2y$

(i) $x=2y$ 일 때

$$\textcircled{1} \text{에서 } -(4y)^2 = -16$$

$$\therefore y=1 \text{ 또는 } y=-1$$

$$y=1 \text{ 일 때 } x=2, y=-1 \text{ 일 때 } x=-2$$

(ii) $x=-2y$ 일 때

$$\textcircled{1} \text{에서 } (-4y)^2 = -16$$

이를 만족시키는 실수 x, y 는 존재하지 않는다.

③ 단계 $x+y$ 의 최댓값 구하기 20%

(i), (ii)에서 $x+y$ 의 최댓값은 $2+1=3$

258 **답** -2

① 단계 z 의 실수부분과 허수부분의 조건 구하기 40%

$z \neq 0$ 이고 $z = \bar{z}$ 이므로 z 는 0이 아닌 실수이어야 한다.

$$z = 3x^2 - x - 10 + (x^2 - 4)i$$

$$3x^2 - x - 10 \neq 0, x^2 - 4 = 0$$

② 단계 실수부분과 허수부분의 조건을 이용하여 x 의 조건 구하기 40%

(i) $3x^2 - x - 10 \neq 0$ 에서 $(x-2)(3x+5) \neq 0$

$$\therefore x \neq 2 \text{ 이고 } x \neq -\frac{5}{3}$$

(ii) $x^2 - 4 = 0$ 에서 $(x+2)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 2$

③ 단계 x 의 값 구하기 20%

(i), (ii)에서 $x = -2$

259 **답** 25

① 단계 주어진 식 간단히 정리하기 40%

$$(1-i)^{2n} = \{(1-i)^2\}^n = (-2i)^n = 2^n(-i)^n$$

$$\text{즉, } 2^n(-i)^n = 2^n i \text{ 이므로 } (-i)^n = i$$

② 단계 조건을 만족시키는 n 의 조건 구하기 40%

음이 아닌 정수 k 에 대하여

(i) $n = 4k$ 일 때

$$(-i)^n = (-i)^{4k} = 1$$

(ii) $n = 4k+1$ 일 때

$$(-i)^n = (-i)^{4k+1} = (-i)^{4k}(-i) = -i$$

(iii) $n = 4k+2$ 일 때

$$(-i)^n = (-i)^{4k+2} = (-i)^{4k}(-i)^2 = -1$$

(iv) $n = 4k+3$ 일 때

$$(-i)^n = (-i)^{4k+3} = (-i)^{4k}(-i)^3 = i$$

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 자연수 n 은 $n = 4k+3$ 이어야 한다.

③ 단계 100 이하의 자연수 n 의 개수 구하기 20%

$$1 \leq n \leq 100 \text{ 이므로 } n = 3, 7, 11, \dots, 99$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 의 개수는 25

260 **답** 364

① 단계 a 의 값 구하기 40%

$$z = a + \sqrt{3}i \text{ 에서 } \bar{z} = a - \sqrt{3}i$$

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a + \sqrt{3}i}{a - \sqrt{3}i} = \frac{(a + \sqrt{3}i)^2}{(a - \sqrt{3}i)(a + \sqrt{3}i)} = \frac{a^2 - 3 + 2\sqrt{3}ai}{a^2 + 3}$$

이때 $\frac{z}{\bar{z}}$ 가 실수이므로

$$2\sqrt{3}a = 0 \quad \therefore a = 0$$

② 단계 $z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots + z^{12}$ 의 값 구하기 40%

$$z = \sqrt{3}i \text{ 이므로 } z^2 = (\sqrt{3}i)^2 = -3$$

$$z^3 = z^2 z = (-3) \times \sqrt{3}i = -3\sqrt{3}i$$

$$z^4 = (z^2)^2 = (-3)^2 = 9$$

$$\text{이때 } z + z^2 + z^3 + z^4 = \sqrt{3}i - 3 - 3\sqrt{3}i + 9 = 6 - 2\sqrt{3}i$$

$$\therefore z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots + z^{12}$$

$$= (z + z^2 + z^3 + z^4) + z^4(z + z^2 + z^3 + z^4) + z^8(z + z^2 + z^3 + z^4)$$

$$= (6 - 2\sqrt{3}i) + 9(6 - 2\sqrt{3}i) + 9^2(6 - 2\sqrt{3}i) = 546 - 182\sqrt{3}i$$

③ 단계 $p+q$ 의 값 구하기 20%

따라서 $p = 546, q = -182$ 이므로 $p+q = 364$

261 답 5

ㄱ. $(\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2 = 9i \times (-9i) = 81$ 이므로

$\alpha\beta = 9$ 또는 $\alpha\beta = -9$ (거짓)

ㄴ. $\alpha^2 + \beta^2 = 9i - 9i = 0$ 이므로

$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 2\alpha\beta$

$\therefore (\alpha + \beta)^4 = (2\alpha\beta)^2 = 4\alpha^2\beta^2 = 4 \times 81 = 324$ (참)

ㄷ. $\alpha^2 + \beta^2 = 9i - 9i = 0$ 이므로

$(\alpha + \beta)^2 = 2\alpha\beta$, $(\alpha - \beta)^2 = -2\alpha\beta$

$\therefore \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}\right)^2 = \frac{(\alpha + \beta)^2}{(\alpha - \beta)^2} = \frac{2\alpha\beta}{-2\alpha\beta} = -1$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

262 답 1

$z\bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이므로

$z + \bar{z} = z + \frac{1}{z} = -1 \quad \therefore z^2 + z + 1 = 0$

위 식의 양변에 $z-1$ 을 곱하면

$(z-1)(z^2 + z + 1) = 0$, $z^3 - 1 = 0 \quad \therefore z^3 = 1$

켈레복소수의 성질에 의하여 $(\bar{z})^3 = 1$

$\therefore \frac{\bar{z}}{z^5} - \frac{(\bar{z})^2}{z^4} + \frac{(\bar{z})^3}{z^3} - \frac{(\bar{z})^4}{z^2} + \frac{(\bar{z})^5}{z}$
 $= \frac{\bar{z}}{z^2} - \frac{(\bar{z})^2}{z} + 1 - \frac{\bar{z}}{z^2} + \frac{(\bar{z})^2}{z} = 1$ 다른 풀이

다른 풀이 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 에서 $(\bar{z})^2 = \frac{1}{z^2}$, $(\bar{z})^3 = \frac{1}{z^3}$, $(\bar{z})^4 = \frac{1}{z^4}$, $(\bar{z})^5 = \frac{1}{z^5}$

$\therefore \frac{\bar{z}}{z^5} - \frac{(\bar{z})^2}{z^4} + \frac{(\bar{z})^3}{z^3} - \frac{(\bar{z})^4}{z^2} + \frac{(\bar{z})^5}{z}$
 $= \frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^6} + \frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^6} + \frac{1}{z^6} = \frac{1}{z^6} = \frac{1}{(z^3)^2} = 1$

주의 $z + \frac{1}{z} = -1$ 에서 양변에 z 를 곱하여 정리(㉠)하면 $z^2 + z + 1 = 0$ 이고

이 식에서 양변에 $z-1$ 을 곱하여 정리(㉡)하면 $z^3 = 1$ 을 얻을 수 있어.

이때 ㉠에서 z 를 곱하고 ㉡에서 $z-1$ 을 곱할 때 $z \neq 0$, $z \neq 1$ 이 보장되어야 해!
 문제에 주어진 조건 $z + \bar{z} = -1$ 에 $z=0$, $z=1$ 을 각각 넣어 보면 식이 성립하
 지 않으므로 $z \neq 0$, $z \neq 1$ 임을 알 수 있어.

즉, 어떤 수를 곱하거나 나눌 때, 그 수는 0이 아닌지 꼭 확인해야 해!

263 답 -32

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z} = a - bi$

조건 (가)에서 $a - bi = -a - bi$ 이므로 $a = 0$

$\therefore z = bi$

조건 (나)의 식에 $z = bi$ 를 대입하면

$(bi)^2 + (k^2 - 3k - 4)bi + (k^2 + 2k - 8) = 0$

$k^2 + 2k - 8 - b^2 + b(k+1)(k-4)i = 0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$k^2 + 2k - 8 - b^2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$b(k+1)(k-4) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉡에서 $b=0$ 또는 $k=-1$ 또는 $k=4$

(i) $b=0$ 일 때

㉠에서 $k^2 + 2k - 8 = 0 \quad \therefore k = -4$ 또는 $k = 2$

(ii) $k=-1$ 일 때

㉠에서 $b^2 = -9$ 이므로 이를 만족시키는 실수 b 는 존재하지 않는다.

$\therefore k \neq -1$

(iii) $k=4$ 일 때

㉠에서 $b^2 = 16$ 이므로 이를 만족시키는 실수 b 는 -4 또는 4 이다.

(i)~(iii)에서 모든 실수 k 의 값의 곱은 $(-4) \times 2 \times 4 = -32$

264 답 16

$z = a + bi$ (a, b 는 실수, $b \neq 0$)라 하면 $\bar{z} = a - bi$

$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 10$ 이므로 $a = 5$

$\therefore z = 5 + bi$

$z^2 + mz + n = 0$ 에 $z = 5 + bi$ 를 대입하면

$(5 + bi)^2 + m(5 + bi) + n = 0$

$(25 - b^2 + 5m + n) + b(10 + m)i = 0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$25 - b^2 + 5m + n = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$b(10 + m) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$b \neq 0$ 이므로 ㉡에서 $m = -10$

㉠에서 $n = b^2 + 25$ 이고 $b \neq 0$ 이므로 $n > 25$

따라서 $m + n$ 의 최솟값은 $-10 + 26 = 16$

265 답 8

$z = a + bi$ 에서 $\bar{z} = a - bi$

$$\frac{\bar{z}}{z} + \frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2 + (\bar{z})^2}{z\bar{z}}$$

$$= \frac{(a + bi)^2 + (a - bi)^2}{(a + bi)(a - bi)}$$

$$= \frac{2(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} = 0$$

즉, $a^2 = b^2$ 이므로 $a = b$ 또는 $a = -b$

(i) $a = b$ 일 때

$$z = a + ai = a(1 + i)$$

$$z^2 = a^2(1 + i)^2 = 2a^2i$$

$$z^4 = (z^2)^2 = (2a^2i)^2 = -4a^4$$

$$z^8 = (z^4)^2 = (-4a^4)^2 = 16a^8 > 0$$

(ii) $a = -b$ 일 때

$$z = a - ai = a(1 - i)$$

$$z^2 = a^2(1 - i)^2 = -2a^2i$$

$$z^4 = (z^2)^2 = (-2a^2i)^2 = -4a^4$$

$$z^8 = (z^4)^2 = (-4a^4)^2 = 16a^8 > 0$$

(i), (ii)에서 $z^n > 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 8

$z = a + bi$ (a, b 는 자연수)라 하면 $\bar{z} = a - bi$

조건 (가)에서 $z^2 + (\bar{z})^2 = (a + bi)^2 + (a - bi)^2 = 2(a^2 - b^2) < 0$

a, b 는 모두 자연수이므로 $a < b$

조건 (나)에서 $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 61$

이때 $61 = 6^2 + 5^2$ 이고 $a < b$ 이므로 $a = 5, b = 6$

$\therefore z + \bar{z} = (5 + 6i) + (5 - 6i) = 10$

음이 아닌 정수 k 에 대하여 $i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i, i^{4k+4} = 1$ 이므로

(i) $n = 4k + 1$ 일 때

$$f(n) = (i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{4k+1})^{4k+1} = i^{4k+1} = i$$

$$f(n)\overline{f(n)} = i \times (-i) = 1$$

(ii) $n = 4k + 2$ 일 때

$$f(n) = (i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{4k+2})^{4k+2} = (i - 1)^{4k+2}$$

$$f(n)\overline{f(n)} = (i - 1)^{4k+2} \times (-i - 1)^{4k+2} = 2^{4k+2}$$

(iii) $n = 4k + 3$ 일 때

$$f(n) = (i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{4k+3})^{4k+3} = (-1)^{4k+3} = -1$$

$$f(n)\overline{f(n)} = (-1) \times (-1) = 1$$

(iv) $n = 4k + 4$ 일 때

$$f(n) = (i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{4k+4})^{4k+4} = 0$$

$$f(n)\overline{f(n)} = 0$$

(i)~(iv)에서 $f(n)\overline{f(n)} = 2^{102}$ 을 만족시키려면 $n = 4k + 2$ 일 때

$2^{4k+2} = 2^{102}$ 이어야 하므로 $4k + 2 = 102$

$\therefore n = 102$

음이 아닌 정수 k 에 대하여 $\frac{1}{i} = -i, \frac{1}{i^2} = -1, \frac{1}{i^3} = i, \frac{1}{i^4} = 1$ 이므로

(i) $n = 4k + 1$ 일 때

$$\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{(-1)^{4k+2}}{i^{4k+1}} = \frac{1}{i^{4k+1}} = -i$$

(ii) $n = 4k + 2$ 일 때

$$\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{(-1)^{4k+3}}{i^{4k+2}} = \frac{1}{i^{4k+1}} - \frac{1}{i^{4k+2}} = -i + 1$$

(iii) $n = 4k + 3$ 일 때

$$\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{(-1)^{4k+4}}{i^{4k+3}} = \frac{1}{i^{4k+1}} - \frac{1}{i^{4k+2}} + \frac{1}{i^{4k+3}} = 1$$

(iv) $n = 4k + 4$ 일 때

$$\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{(-1)^{4k+5}}{i^{4k+4}} = 0$$

(i)~(iv)에서 $\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{i^n} = 1 - i$ 를 만족시

키려면 $n = 4k + 2$ 이어야 한다.

이때 $1 \leq n \leq 30$ 이므로 $n = 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 의 개수는 8

$z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 에서 $2z + 1 = \sqrt{3}i$

위 식의 양변을 제곱하면

$$4z^2 + 4z + 1 = -3 \quad \therefore z^2 + z + 1 = 0$$

위 식의 양변에 $z - 1$ 을 곱하면

$$(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0, z^3 - 1 = 0 \quad \therefore z^3 = 1$$

$$\therefore z^n + z^{2n} + z^{3n} + z^{4n} + z^{5n} + z^{6n}$$

$$= z^n + z^{2n} + 1 + z^{3n}(z^n + z^{2n} + 1) = 2(z^n + z^{2n} + 1)$$

음이 아닌 정수 k 에 대하여

(i) $n = 3k + 1$ 일 때

$$2(z^n + z^{2n} + 1) = 2(z^{3k+1} + z^{6k+2} + 1) = 2(z + z^2 + 1) = 0$$

(ii) $n = 3k + 2$ 일 때

$$2(z^n + z^{2n} + 1) = 2(z^{3k+2} + z^{6k+4} + 1) = 2(z^2 + z + 1) = 0$$

(iii) $n = 3k + 3$ 일 때

$$2(z^n + z^{2n} + 1) = 2(z^{3k+3} + z^{6k+6} + 1) = 2(1 + 1 + 1) = 6$$

(i)~(iii)에서 $2(z^n + z^{2n} + 1) > 0$ 을 만족시키려면

$n = 3k + 3$ 이어야 한다.

이때 $1 \leq n \leq 100$ 이므로 $n = 3, 6, 9, \dots, 99$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 의 개수는 33

$$\alpha^2 = \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^2 = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$\alpha^3 = \alpha^2 \alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \times \frac{\sqrt{3} + i}{2} = \frac{4i}{4} = i$$

$$\alpha^6 = (\alpha^3)^2 = i^2 = -1$$

$$\alpha^{12} = (\alpha^6)^2 = (-1)^2 = 1$$

이때 $\alpha^2 = \beta$ 이므로 $\alpha^m \beta^n = \alpha^m (\alpha^2)^n = \alpha^{m+2n}$

$\alpha^{m+2n} = i$ 를 만족시키는 $m + 2n$ 의 값은 $12k + 3$ (k 는 음이 아닌 정수)

이어야 한다.

m, n 은 20 이하의 자연수이므로 $m + 2n \leq 60$

따라서 $m + 2n$ 의 최댓값은 51

TIP $z_1^n + z_2^m, z_1^n z_2^m$ 과 같이 복잡한 두 복소수의 거듭제곱일 경우, 한 복소수를 거듭제곱하여 다른 복소수를 만들 수 있는지 확인해 봐!

$z = a + bi$ (a, b 는 10 이하의 자연수)라 하면 $\bar{z} = a - bi$

$\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$ 이 음의 실수가 되려면 $\frac{z}{\bar{z}}$ 는 순허수이어야 한다.

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a + bi}{a - bi} = \frac{(a + bi)^2}{(a - bi)(a + bi)} = \frac{a^2 - b^2 + 2abi}{a^2 + b^2}$$

$$a^2 - b^2 = 0, ab \neq 0$$

이때 a, b 는 자연수이므로 $a = b$

따라서 조건을 만족시키는 복소수 z 는 $1 + i, 2 + 2i, 3 + 3i, 4 + 4i, 5 + 5i, 6 + 6i, 7 + 7i, 8 + 8i, 9 + 9i, 10 + 10i$ 의 10개이다.

272 답 33

z^2 이 음의 실수이므로 z 는 순허수이다.

$$z = a^2 - 5a + 6 + 2(a-3)i \text{에서}$$

$$a^2 - 5a + 6 = 0, 2(a-3) \neq 0$$

$$\text{즉, } a=2 \text{이므로 } z=-2i$$

$$\frac{(z-\bar{z})i}{4} = \frac{(-2i-2i)i}{4} = \frac{-4i^2}{4} = 1 \text{이고}$$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = 1 \text{이므로 } \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n = 1 \text{을 만족시키는 자연수 } n$$

은 3의 배수이어야 한다.

따라서 100 이하의 자연수 n 의 개수는 33

273 답 5

$$\neg. z_1 \bar{z}_1 = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = 10 \text{ (참)}$$

$$\neg. z_1 + \bar{z}_2 = (a+bi) + (c-di) = (a+c) + (b-d)i = 3$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a+c=3, b-d=0$$

$\neg$ 에서 $a^2 + b^2 = 10$ 이고 a, b 가 자연수이므로

$$a=3, b=1 \text{ 또는 } a=1, b=3$$

이때 $a=3, b=1$ 이면 $c=0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a=1, b=3$ 일 때, $c=2, d=3$ 이므로 $c+d=5$ (참)

$$\neg. (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = \{(a+c) + (b+d)i\} \{(a+c) - (b+d)i\} \\ = (a+c)^2 + (b+d)^2 = 41$$

a, b, c, d 가 자연수이므로

$$a+c=5, b+d=4 \text{ 또는 } a+c=4, b+d=5$$

이때 $\neg$ 에서 $a^2 + b^2 = 10$ 이므로

$$a=3, b=1 \text{ 또는 } a=1, b=3$$

$$(i) a=3, b=1 \text{일 때, } c=2, d=3 \text{ 또는 } c=1, d=4$$

$$\therefore c^2 + d^2 = 13 \text{ 또는 } c^2 + d^2 = 17$$

$$(ii) a=1, b=3 \text{일 때, } c=4, d=1 \text{ 또는 } c=3, d=2$$

$$\therefore c^2 + d^2 = 17 \text{ 또는 } c^2 + d^2 = 13$$

$$(i), (ii) \text{에서 } z_2 \bar{z}_2 = c^2 + d^2 \text{이므로 } z_2 \bar{z}_2 \text{의 최댓값은 17 (참)}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

274 답 94

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i, \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4 = -1,$$

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^5 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^6 = -i, \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^7 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = 1$$

음이 아닌 정수 k 에 대하여

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{8k+4} = -1, \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{8k+8} = 1$$

$$\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m - i^n\right\}^2 = 4 \text{에서}$$

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m - i^n = 2 \text{ 또는 } \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m - i^n = -2$$

$$(i) \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m - i^n = 2 \text{인 경우}$$

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m = 1, i^n = -1 \text{이어야 하므로}$$

$$m=48, n=46 \text{일 때 } m+n \text{은 최댓값 94를 갖는다.}$$

$$(ii) \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m - i^n = -2 \text{인 경우}$$

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m = -1, i^n = 1 \text{이어야 하므로}$$

$$m=44, n=48 \text{일 때 } m+n \text{은 최댓값 92를 갖는다.}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } m+n \text{의 최댓값은 94}$$

275 답 16

일곱 개의 수 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_7$ 중에서 $1, -1, i, -i$ 의 개수를 각각 a, b, c, d (a, b, c, d 는 음이 아닌 정수)라 하면

$$a+b+c+d=7$$

$$z = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7 = (a-b) + (c-d)i$$

$$z\bar{z} = (a-b)^2 + (c-d)^2 = 25$$

이때 a, b, c, d 는 음이 아닌 정수이므로

$$|a-b|=5, |c-d|=0 \text{ 또는 } |a-b|=0, |c-d|=5 \text{ 또는}$$

$$|a-b|=3, |c-d|=4 \text{ 또는 } |a-b|=4, |c-d|=3$$

$$(i) |a-b|=5, |c-d|=0 \text{일 때}$$

$$a-b=5, c-d=0, a+b+c+d=7 \text{을 만족시키는 순서쌍 } (a, b, c, d) \text{는 } (5, 0, 1, 1), (6, 1, 0, 0)$$

$$a-b=-5, c-d=0, a+b+c+d=7 \text{을 만족시키는 순서쌍 } (a, b, c, d) \text{는 } (0, 5, 1, 1), (1, 6, 0, 0)$$

즉, z 의 개수는 4

$$(ii) |a-b|=0, |c-d|=5 \text{일 때}$$

$$(i) \text{과 같은 방법으로 순서쌍 } (a, b, c, d) \text{는 } (1, 1, 5, 0),$$

$$(0, 0, 6, 1), (1, 1, 0, 5), (0, 0, 1, 6) \text{이므로 } z \text{의 개수는 4}$$

$$(iii) |a-b|=3, |c-d|=4 \text{일 때}$$

$$a-b=3, c-d=4, a+b+c+d=7 \text{을 만족시키는 순서쌍 } (a, b, c, d) \text{는 } (3, 0, 4, 0)$$

$$a-b=-3, c-d=4, a+b+c+d=7 \text{을 만족시키는 순서쌍 } (a, b, c, d) \text{는 } (0, 3, 4, 0)$$

$$a-b=3, c-d=-4, a+b+c+d=7 \text{을 만족시키는 순서쌍 } (a, b, c, d) \text{는 } (3, 0, 0, 4)$$

$$a-b=-3, c-d=-4, a+b+c+d=7 \text{을 만족시키는 순서쌍 } (a, b, c, d) \text{는 } (0, 3, 0, 4)$$

즉, z 의 개수는 4

$$(iv) |a-b|=4, |c-d|=3 \text{일 때}$$

$$(iii) \text{과 같은 방법으로 순서쌍 } (a, b, c, d) \text{는 } (4, 0, 3, 0),$$

$$(4, 0, 0, 3), (0, 4, 3, 0), (0, 4, 0, 3) \text{이므로 } z \text{의 개수는 4}$$

$$(i) \sim (iv) \text{에서 조건을 만족시키는 복소수 } z \text{의 개수는}$$

$$4+4+4+4=16$$

$$\left\{ \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n + \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^{2n} \right\}^m = \{i^n + (-1)^n\}^m$$

음이 아닌 정수 k 에 대하여

(i) $n=4k+1$ 일 때

$$\{i^n + (-1)^n\}^m = \{i^{4k+1} + (-1)^{4k+1}\}^m = (i-1)^m \text{이므로}$$

$$m=2 \text{이면 } (i-1)^m = (i-1)^2 = -2i$$

$$m=4 \text{ 이면 } (i-1)^m = (-2i)^2 = -4$$

$$m=8 \text{ 이면 } (i-1)^m = (-4)^2 = 4^2$$

$$m=12 \text{ 이면 } (i-1)^m = 4^2 \times (-4) = -4^3$$

$$m=16 \text{ 이면 } (i-1)^m = (4^2)^2 = 4^4$$

⋮

즉, $\{i^n + (-1)^n\}^m$ 의 값이 음의 실수가 되도록 하는 50 이하의 자연수 m 은 4, 12, 20, 28, 36, 44의 6개이고, $n=4k+1$ 인 50 이하의 자연수 n 은 1, 5, 9, ..., 49의 13개이다.

따라서 순서쌍 (m, n) 의 개수는 $6 \times 13 = 78$

(ii) $n=4k+2$ 일 때

$$\{i^n + (-1)^n\}^m = \{i^{4k+2} + (-1)^{4k+2}\}^m = (-1+1)^m = 0 \text{이므로}$$

$\{i^n + (-1)^n\}^m$ 의 값은 음의 실수가 될 수 없다.

(iii) $n=4k+3$ 일 때

$$\{i^n + (-1)^n\}^m = \{i^{4k+3} + (-1)^{4k+3}\}^m = (-i-1)^m \text{이므로}$$

$$m=2 \text{ 이면 } (-i-1)^m = (-i-1)^2 = 2i$$

$$m=4 \text{ 이면 } (-i-1)^m = (2i)^2 = -4$$

$$m=8 \text{ 이면 } (-i-1)^m = (-4)^2 = 4^2$$

$$m=12 \text{ 이면 } (-i-1)^m = 4^2 \times (-4) = -4^3$$

$$m=16 \text{ 이면 } (-i-1)^m = (4^2)^2 = 4^4$$

⋮

즉, $\{i^n + (-1)^n\}^m$ 의 값이 음의 실수가 되도록 하는 50 이하의 자연수 m 은 4, 12, 20, 28, 36, 44의 6개이고, $n=4k+3$ 인 50 이하의 자연수 n 은 3, 7, 11, ..., 47의 12개이다.

따라서 순서쌍 (m, n) 의 개수는 $6 \times 12 = 72$

(iv) $n=4k+4$ 일 때

$$\{i^n + (-1)^n\}^m = \{i^{4k+4} + (-1)^{4k+4}\}^m = (1+1)^m = 2^m \text{이므로}$$

$\{i^n + (-1)^n\}^m$ 의 값은 음의 실수가 될 수 없다.

(i)~(iv)에서 순서쌍 (m, n) 의 개수는 $78 + 72 = 150$

05 이차방정식

1등급 필수 내신 빈출 문제

p.055-062

277 답 ②

$$\frac{2}{3}x(x-3) + x + 3 = \frac{(x+2)^2}{4} \text{의 양변에 12를 곱하면}$$

$$8x(x-3) + 12x + 36 = 3(x+2)^2$$

$$5x^2 - 24x + 24 = 0$$

$$\therefore x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 5 \times 24}}{5} = \frac{12 \pm 2\sqrt{6}}{5}$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{12 + 2\sqrt{6}}{5} \text{이므로 } 5\alpha - 2\sqrt{6} = 12$$

278 답 ①

$$(\sqrt{2}+1)x^2 + (3+2\sqrt{2})x + 2 = 0 \text{의 양변에 } \sqrt{2}-1 \text{을 곱하면}$$

$$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2 + (3+2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)x + 2(\sqrt{2}-1) = 0$$

$$x^2 + (1+\sqrt{2})x - 2 + 2\sqrt{2} = 0$$

$$(x+2)(x-1+\sqrt{2}) = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1-\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } \alpha = -2, \beta = 1-\sqrt{2} \text{이므로 } \alpha + 2\beta = -2\sqrt{2}$$

279 답 ②

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \text{에 } x = \alpha \text{를 대입하면}$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0$$

이때 $\alpha \neq 0$ 이므로 위 식의 양변을 α 로 나누면

$$\alpha - 4 + \frac{1}{\alpha} = 0 \quad \therefore \alpha + \frac{1}{\alpha} = 4$$

$$\therefore \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 - 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = 4^3 - 3 \times 4 = 52$$

280 답 ②

$$x^2 + (a+5)x + 9a = 0 \text{에 } x=3 \text{을 대입하면}$$

$$9 + 3(a+5) + 9a = 0$$

$$12a + 24 = 0 \quad \therefore a = -2$$

$$kx^2 + 3x - 2(k+1) = 0 \text{에 } x=-2 \text{를 대입하면}$$

$$4k - 6 - 2(k+1) = 0$$

$$2k - 8 = 0 \quad \therefore k = 4$$

$$\therefore a + k = 2$$

281 답 ②

$$x^2 + (ka^2 + 4k - 2b)x - 4ak + b^2 = 0 \text{에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$1 + (ka^2 + 4k - 2b) - 4ak + b^2 = 0$$

$$(a^2 - 4a + 4)k + b^2 - 2b + 1 = 0$$

위 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$a^2 - 4a + 4 = 0, b^2 - 2b + 1 = 0$$

$$(a-2)^2 = 0, (b-1)^2 = 0$$

$$\text{따라서 } a=2, b=1 \text{이므로 } ab=2$$

TIP • 다음과 같은 표현이 보이면 바로 k 에 대한 항등식을 떠올리자!

- ① k 의 값에 관계없이 항상 성립하는
- ② 모든 k 에 대하여 성립하는
- ③ 임의의 k 에 대하여 성립하는
- ④ k 가 어떤 값을 갖더라도 항상 성립하는

282 ④

이차방정식 $kx^2 + 2(k-5)x + k-4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k-5)^2 - k(k-4) \geq 0$$

$$-6k + 25 \geq 0 \quad \therefore k \leq \frac{25}{6}$$

따라서 자연수 k 의 값은 1, 2, 3, 4이므로 구하는 개수는 4

283 ③

이차방정식 $x^2 - 2(k+2a)x + k^2 - 8k + 8b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k+2a)^2 - (k^2 - 8k + 8b) = 0$$

$$(4a+8)k + 4a^2 - 8b = 0$$

위 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$4a+8=0, 4a^2-8b=0$$

따라서 $a=-2, b=2$ 이므로 $a^2+b^2=8$

284 ⑤

이차방정식 $c^2x^2 + 2(a^2+b^2)x + c^2=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a^2+b^2)^2 - (c^2)^2 = 0$$

$$(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)=0$$

이때 a, b, c 는 양의 실수이므로 $a^2+b^2+c^2 \neq 0$

즉, $a^2+b^2-c^2=0$ 이므로 $a^2+b^2=c^2$

따라서 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

285 ②

이차방정식 $ax^2 + bx + c=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = b^2 - 4ac < 0$$

이때 $b^2 > 0$ 이므로 $0 < b^2 < 4ac$

이차방정식 $cx^2 + 2(b^2-4c)x - a=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (b^2-4c)^2 + ac$$

이때 $(b^2-4c)^2 \geq 0, ac > 0$ 이므로 $\frac{D_2}{4} > 0$

따라서 이차방정식 $cx^2 + 2(b^2-4c)x - a=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

286 ②

이차방정식 $ax^2 + bx + c=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\neg, b=a+c$ 이므로

$$D = b^2 - 4ac = (a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2 \geq 0 \text{ (참)}$$

$\neg, ac < 0$ 이므로 $D = b^2 - 4ac > 0$ (참)

$\neg, a < 0, c > 0$ 이므로 $D = b^2 - 4ac > 0$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

287 ⑥

이차방정식 $(a-b)^2x^2 + 2(a-b+4)x + 1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-b+4)^2 - (a-b)^2 = 8(a-b) + 16$$

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면

$$8(a-b) + 16 = 0 \quad \therefore a-b = -2$$

이를 만족시키는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 (1, 3), (2, 4), (3, 5)이므로 $p=3$

주어진 이차방정식이 허근을 가지려면

$$8(a-b) + 16 < 0 \quad \therefore a-b < -2$$

이를 만족시키는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 (1, 4), (1, 5), (2, 5)이므로 $q=3$

$$\therefore p+q=6$$

288 ②

$3x^2 - 6x + 4=0$ 에서 근의 공식에 의하여

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 3 \times 4}}{3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore 3x^2 - 6x + 4 &= 3\left(x - \frac{3+\sqrt{3}i}{3}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{3}i}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}(3x-3-\sqrt{3}i)(3x-3+\sqrt{3}i) \end{aligned}$$

따라서 인수인 것은 ②이다.

289 ②

$16k^2 + 8(1-x)k + x^2 + 4ax + 4a^2$ 에서

$$x^2 + 4(a-2k)x + 16k^2 + 8k + 4a^2$$

위 식이 x 에 대한 일차식의 완전제곱식이 되므로 이차방정식

$$x^2 + 4(a-2k)x + 16k^2 + 8k + 4a^2 = 0 \text{이 중근을 갖는다.}$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4(a-2k)^2 - (16k^2 + 8k + 4a^2) = (-16a-8)k = 0$$

위 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$-16a-8=0 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

290 ①

$x^2 - 8x = X$ 로 놓으면

$$(x^2 - 8x)^2 - 2kx(x-8) + 36 = X^2 - 2kX + 36$$

위 식이 X 에 대한 일차식의 완전제곱식이 되므로 이차방정식

$$X^2 - 2kX + 36 = 0 \text{이 중근을 갖는다.}$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 36 = 0 \quad \therefore k = \pm 6$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은 0

291

③

$\{P(x)+3\}^2=(x+2)(x-a)+a+2$ 에서 좌변이 완전제곱식이므로 이차방정식 $(x+2)(x-a)+a+2=0$, 즉 $x^2+(2-a)x-a+2=0$ 이 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(2-a)^2-4(-a+2)=0$$

$$a^2-4=0 \quad \therefore a=2 \text{ 또는 } a=-2$$

(i) $a=2$ 일 때

$$\{P(x)+3\}^2=x^2$$

$$P(x)+3=x \text{ 또는 } P(x)+3=-x$$

$$\therefore P(x)=x-3 \text{ 또는 } P(x)=-x-3$$

(ii) $a=-2$ 일 때

$$\{P(x)+3\}^2=(x+2)^2$$

$$P(x)+3=x+2 \text{ 또는 } P(x)+3=-x-2$$

$$\therefore P(x)=x-1 \text{ 또는 } P(x)=-x-5$$

(i), (ii)에서 가능한 모든 $P(2)$ 의 값은 $-1, -5, 1, -7$ 이므로

그 합은 -12

다른 풀이 $\{P(x)+3\}^2=(x+2)(x-a)+a+2$ 에서 우변이 x 에 대한 일차식이므로 $P(x)$ 는 x 에 대한 일차식이다.

$P(x)=px+q-3$ ($p \neq 0$, p, q 는 실수)이라 하면

$$(px+q)^2=p^2x^2+2pqx+q^2=x^2+(2-a)x-a+2$$

위 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$p^2=1, 2pq=2-a, q^2=-a+2$$

(i) $p=1$ 일 때

$$2q=2-a, q^2=-a+2 \text{에서}$$

$$q^2-2q=0, q(q-2)=0 \quad \therefore q=0 \text{ 또는 } q=2$$

$$\therefore P(x)=x-3 \text{ 또는 } P(x)=x-1$$

(ii) $p=-1$ 일 때

$$-2q=2-a, q^2=-a+2 \text{에서}$$

$$q^2+2q=0, q(q+2)=0 \quad \therefore q=0 \text{ 또는 } q=-2$$

$$\therefore P(x)=-x-3 \text{ 또는 } P(x)=-x-5$$

(i), (ii)에서 가능한 모든 $P(2)$ 의 값은 $-1, 1, -5, -7$ 이므로

그 합은 -12

TIP 다른 풀이에서 $\{P(x)+3\}^2$ 을 계산할 때, x 에 대한 일차식인 $P(x)$ 를 $P(x)=px+q$ 라 하면

$$\{P(x)+3\}^2=(px+q+3)^2=p^2x^2+(2pq+6p)x+q^2+6q+9$$

로 계산이 복잡하지만

$P(x)=px+q-3$ 이라 하면

$$\{P(x)+3\}^2=(px+q)^2=p^2x^2+2pqx+q^2$$

으로 계산량을 줄일 수 있어!

292

①

이차방정식 $x^2-5x+7=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=5, \alpha\beta=7$$

$x^2-5x+7=0$ 에 $x=\alpha$ 를 대입하면

$$\alpha^2-5\alpha+7=0, \alpha^2-5\alpha=-7 \quad \therefore \alpha^3-5\alpha^2=-7\alpha$$

같은 방법으로 $\beta^3-5\beta^2=-7\beta$

$$\therefore (\alpha^3-5\alpha^2+8\alpha-3)(\beta^3-5\beta^2+8\beta-3)$$

$$=(\alpha-3)(\beta-3)$$

$$=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9$$

$$=7-3 \times 5+9=1$$

293

②

이차방정식 $x^2+3x+4=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-3, \alpha\beta=4$$

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=4 \times (-3)=-12$$

$x^2+3x+4=0$ 에 $x=\alpha$ 를 대입하면

$$\alpha^2+3\alpha+4=0$$

$$\therefore \alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$$

$$=\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha-12 \xrightarrow{\alpha^2+3\alpha+4=0} \alpha^2+3\alpha+4 \text{로 직접 나눈다.}$$

$$=(\alpha^2+3\alpha+4)(\alpha^2-2\alpha+3)-24=-24$$

294

-100

이차방정식 $x^2+21x+4=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-21, \alpha\beta=4$$

이때 $\alpha+\beta<0, \alpha\beta>0$ 이므로 $\alpha<0, \beta<0$

$$\therefore (\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha})^2=\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+2\alpha\beta\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$$

$$=\alpha\beta(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}$$

$$=4 \times (-21)+2 \times 4 \times \sqrt{4}=-100$$

주의 $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$ 를 포함한 식의 값을 구할 때에는 $\alpha<0, \beta<0$ 일 때, $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=-\sqrt{\alpha\beta}$

임을 주의해야 되는데, 그 전에 이차방정식의 두 근 α, β 가 실수임을 확인해야 돼!

이 문제에서는 이차방정식 $x^2+21x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=21^2-4 \times 4=425>0$$
이므로 두 근 α, β 는 실수임을 알 수 있어. 만약 두

근 α, β 가 허수이면 허수는 대소 비교를 하지 않음을 주의하자!

295

-12

이차방정식 $x^2-(3m+2)x+2m^2+5m+3=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3m+2, \alpha\beta=2m^2+5m+3$$

이때 두 근의 차가 2이므로 $(\alpha-\beta)^2=4$

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=(3m+2)^2-4(2m^2+5m+3)$$

$$=m^2-8m-8=4$$

$$\therefore m^2-8m-12=0$$

따라서 모든 실수 m 의 값의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 -12

296

답 ④

이차방정식 $x^2 - 4(k-3)x + k^2 - k - 9 = 0$ 의 두 근을 $\alpha, 3\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + 3\alpha = 4(k-3) \text{에서 } \alpha = k-3$$

$$3\alpha^2 = k^2 - k - 9 \text{에서 } 3(k-3)^2 = k^2 - k - 9$$

$$2k^2 - 17k + 36 = 0, (k-4)(2k-9) = 0 \quad \therefore k=4 \text{ 또는 } k=\frac{9}{2}$$

따라서 정수 k 의 값은 4

297

답 ②

이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + k^2 + 21 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha < 0, \beta < 0 \text{이므로 } \alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0$$

근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2(k-3) \text{에서 } k-3 < 0 \quad \therefore k < 3$$

$$\alpha\beta = k^2 + 21 \text{에서 } k^2 + 21 > 0 \text{이므로 항상 성립한다.}$$

또, α, β 는 모두 실수이므로 이차방정식

$$x^2 - 2(k-3)x + k^2 + 21 = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - (k^2 + 21) \geq 0$$

$$-6k - 12 \geq 0 \quad \therefore k \leq -2$$

따라서 실수 k 의 값의 범위는 $k \leq -2$

298

답 ②

이차방정식 $x^2 - x - k = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -k$$

$$x^2 - x - k = 0 \text{에 } x = \alpha \text{를 대입하면}$$

$$\alpha^2 - \alpha - k = 0 \quad \therefore \alpha^2 = \alpha + k, \alpha^3 = \alpha^2 + k\alpha$$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9)(\beta + 3) &= (\alpha^2 + k\alpha + 2\alpha^2 + 9)(\beta + 3) \leftarrow \alpha^3 = \alpha^2 + k\alpha \\ &= (3\alpha^2 + k\alpha + 9)(\beta + 3) \\ &= (3\alpha + 3k + k\alpha + 9)(\beta + 3) \leftarrow \alpha^2 = \alpha + k \\ &= (k+3)(\alpha+3)(\beta+3) \\ &= (k+3)\{\alpha\beta + 3(\alpha+\beta) + 9\} \\ &= (k+3)(-k+12) = 50 \leftarrow \alpha+\beta=1, \alpha\beta=-k \end{aligned}$$

$$\text{즉, } k^2 - 9k + 14 = 0, (k-2)(k-7) = 0 \quad \therefore k=2 \text{ 또는 } k=7$$

따라서 5 이하의 자연수 k 의 값은 2

299

답 ①

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b$$

이차방정식 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 의 두 근이 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha + \beta) + \alpha\beta = 4 \text{에서 } a - b = -4$$

$$\alpha\beta(\alpha + \beta) = 3 \text{에서 } ab = -3$$

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab = (-4)^2 + 4 \times (-3) = 4$$

$$\therefore |a+b| = 2$$

300

답 6

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b$$

이차방정식 $4x^2 + 2x + 1 = 0$ 의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{2} \text{에서 } \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-a}{b} = -\frac{1}{2} \quad \therefore 2a = b$$

$$\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \text{에서 } \frac{1}{b} = \frac{1}{4} \quad \therefore b = 4$$

따라서 $a = 2, b = 4$ 이므로 $a + b = 6$

다른 풀이 $f(x) = x^2 + ax + b$ 라 하면 $f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0$

이차방정식 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + a \times \frac{1}{x} + b = 0$ 의 두 근은

$$\frac{1}{x} = \alpha \text{ 또는 } \frac{1}{x} = \beta \text{에서 } x = \frac{1}{\alpha} \text{ 또는 } x = \frac{1}{\beta}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 + a \times \frac{1}{x} + b = 0 \text{의 양변에 } x^2 \text{을 곱하면}$$

$$bx^2 + ax + 1 = 0 \text{이므로 } a = 2, b = 4$$

$$\therefore a + b = 6$$

TIP 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ ($ac \neq 0$)의 두 근을 α, β 라 할 때,

이차방정식 $cx^2 + bx + a = 0$ 은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 갖는다.

301

답 48

이차방정식 $x^2 + 8x + 12 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -8, \alpha\beta = 12$$

$$(2\alpha + \beta) + (\alpha + 2\beta) = 3(\alpha + \beta) = 3 \times (-8) = -24$$

$$\begin{aligned} (2\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta) &= 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\alpha\beta \\ &= 2(\alpha + \beta)^2 + \alpha\beta \\ &= 2 \times (-8)^2 + 12 = 140 \end{aligned}$$

즉, $2\alpha + \beta, \alpha + 2\beta$ 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 $\frac{1}{4}$ 인 이차방정식은

$$\frac{1}{4}(x^2 + 24x + 140) = 0 \quad \therefore \frac{1}{4}x^2 + 6x + 35 = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 6x + 35 \text{이므로 } f(2) = 48$$

302

답 ⑤

이차방정식 $x^2 - 6x + 3 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 3$$

$$x^2 - 6x + 3 = 0 \text{에 } x = \alpha \text{를 대입하면}$$

$$\alpha^2 - 6\alpha + 3 = 0 \quad \therefore \alpha^2 = 6\alpha - 3$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha\beta - 2\alpha - \beta + 1 &= (6\alpha - 3) + \alpha\beta - (\alpha + \beta) - \alpha + 1 \\ &= 6\alpha - 3 + 3 - 6 - \alpha + 1 \\ &= 5\alpha - 5 \end{aligned}$$

같은 방법으로 $\beta^2 + \alpha\beta - 2\beta - \alpha + 1 = 5\beta - 5$
 $(5\alpha - 5) + (5\beta - 5) = 5(\alpha + \beta) - 10 = 5 \times 6 - 10 = 20$
 $(5\alpha - 5)(5\beta - 5) = 25\{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1\}$
 $= 25 \times (3 - 6 + 1) = -50$
 따라서 구하는 이차방정식은 $x^2 - 20x - 50 = 0$

303 ⑤

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 우변이 a, c 를 바르게 보고 풀었으므로

$$(\text{두 근의 곱}) = \frac{c}{a} = 6 \times 2 = 12 \quad \therefore c = 12a$$

지민이는 a, b 를 바르게 보고 풀었으므로

$$(\text{두 근의 합}) = -\frac{b}{a} = 5 + 2 = 7 \quad \therefore b = -7a$$

즉, 이차방정식 $ax^2 - 7ax + 12a = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 7, \alpha\beta = 12$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 7^2 - 2 \times 12 = 25$$

304 ③

$$f(\alpha) = f(\beta) = -4 \text{이므로 } f(\alpha) + 4 = 0, f(\beta) + 4 = 0$$

즉, 이차방정식 $f(x) + 4 = 0$ 의 두 근이 α, β 이고 $f(x)$ 의 x^2 의 계수가 1이므로

$$f(x) + 4 = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

$$= x^2 + 2x - 7 \quad \leftarrow \alpha + \beta = -2, \alpha\beta = -7$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^2 + 2x - 11 \text{이므로 } f(4) = 13$$

305 ④

이차방정식 $2x^2 - 10x + 7 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 5 \text{에서 } \beta = 5 - \alpha$$

$$f(\alpha) = \beta = 5 - \alpha \text{이므로 } f(\alpha) + \alpha - 5 = 0$$

$$\text{같은 방법으로 } f(\beta) + \beta - 5 = 0$$

즉, 이차방정식 $f(x) + x - 5 = 0$ 의 두 근이 α, β 이고 $f(x)$ 의 x^2 의 계수가 1이므로

$$f(x) + x - 5 = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

$$= x^2 - 5x + \frac{7}{2} \quad \leftarrow \alpha + \beta = 5, \alpha\beta = \frac{7}{2}$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 6x + \frac{17}{2}$$

306 ①

$x^2 - x + 2 = 0$ 에 $x = \alpha$ 를 대입하면

$$\alpha^2 - \alpha + 2 = 0 \quad \therefore \alpha^2 = \alpha - 2$$

$$f(\alpha^2) = f(\alpha - 2) = 8\alpha \text{이므로 } f(\alpha - 2) - 8(\alpha - 2) - 16 = 0$$

$$\text{같은 방법으로 } f(\beta - 2) - 8(\beta - 2) - 16 = 0$$

즉, 이차방정식 $f(x) - 8x - 16 = 0$ 의 두 근이 $\alpha - 2, \beta - 2$ 이고

$f(x)$ 의 x^2 의 계수가 1이므로

$$f(x) - 8x - 16 = x^2 - (\alpha + \beta - 4)x + \alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4$$

$$= x^2 + 3x + 4 \quad \leftarrow \alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 2$$

$$\therefore f(x) = x^2 + 11x + 20$$

따라서 $p = 11, q = 20$ 이므로 $p + q = 31$

307 ②

$x^2 + 2x - 4 = 0$ 에 $x = \alpha$ 를 대입하면

$$\alpha^2 + 2\alpha - 4 = 0 \quad \therefore \alpha^2 - 4 = -2\alpha$$

$$\text{조건 (가)에서 } f(\alpha^2 - 4) = f(-2\alpha) = \alpha \text{이므로 } f(-2\alpha) - \alpha = 0$$

$$\text{같은 방법으로 조건 (나)에서 } f(-2\beta) - \beta = 0$$

즉, 이차방정식 $f(-2x) - x = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$f(-2x) - x = a\{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\}$$

$$= a(x^2 + 2x - 4) \quad (a \neq 0) \quad \leftarrow \alpha + \beta = -2, \alpha\beta = -4$$

조건 (다)에서 $f(2) = 4$ 이므로 위 식에 $x = -1$ 을 대입하면

$$f(2) + 1 = -5a \quad \therefore a = -1$$

$$\text{따라서 } f(-2x) = -x^2 - x + 4 \text{이므로 } f(4) = 2$$

308 ③

이차방정식 $x^2 + 2ax + 3a^2 + a - 6 = 0$ ($a > 0$)의 한 허근을

$p + 3i$ (p 는 실수)라 하면 다른 한 근은 $p - 3i$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(p + 3i) + (p - 3i) = 2p = -2a \quad \therefore p = -a$$

$$(p + 3i)(p - 3i) = p^2 + 9 = 3a^2 + a - 6$$

$$a^2 + 9 = 3a^2 + a - 6 \text{에서 } 2a^2 + a - 15 = 0, (a + 3)(2a - 5) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = \frac{5}{2}$$

따라서 양수 a 의 값은 $\frac{5}{2}$

309 ⑨

$$\text{조건 (가)에서 } f(2) = 4 + 2p + q = 5 \quad \therefore 2p + q = 1$$

조건 (나)에서 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 한 근이 $a + i$ 이면 다른 한 근은 $a - i$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a + i) + (a - i) = 2a = -p$$

$$(a + i)(a - i) = a^2 + 1 = q$$

$$\text{이를 } 2p + q = 1 \text{에 대입하여 정리하면 } a^2 - 4a = 0, a(a - 4) = 0$$

이때 a 는 양수이므로 $a = 4$

$$\text{즉, } p = -2a = -8, q = a^2 + 1 = 17$$

$$\therefore p + q = 9$$

310 ④

이차방정식 $2x^2 - 6x + 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 2 \times 5 = -1 < 0 \text{이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.}$$

이차방정식의 두 근이 α, β 이므로 $\bar{\alpha} = \beta, \bar{\beta} = \alpha$

$$\therefore \alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} + \bar{\beta}\beta = \alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + \alpha\beta$$

$$= (\alpha + \beta)^2 = 9 \quad \leftarrow \alpha + \beta = 3$$

주의 이차방정식의 켈레근을 이용하려면 먼저 판별식을 이용하여 이차방정식의 근이 허수인지 확인해야 해! 만약 이차방정식의 한 근 α 가 실수이면 $\bar{\alpha}=\alpha$ 이므로 이차방정식의 두 근을 $\alpha, \bar{\alpha}$ 라 할 수 없음을 주의하자!

311 **답** 4

이차방정식 $x^2-2x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-4=-3<0 \text{이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.}$$

이차방정식의 두 근이 α, β 이므로 $\bar{\alpha}=\beta, \bar{\beta}=\alpha$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \overline{\left(\frac{2\alpha-\beta}{\alpha+1}\right)} = \frac{2\bar{\alpha}-\bar{\beta}}{\bar{\alpha}+1} = \frac{2\beta-\alpha}{\beta+1} \\ \therefore \bar{z}z &= \frac{2\alpha-\beta}{\alpha+1} \times \frac{2\beta-\alpha}{\beta+1} \\ &= \frac{5\alpha\beta-2(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} \\ &= \frac{9\alpha\beta-2(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} \\ &= \frac{9 \times 4 - 2 \times 2^2}{4+2+1} = 4 \quad \leftarrow \alpha+\beta=2, \alpha\beta=4 \end{aligned}$$

312 **답** ③

처음 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 가로 길이를 6 cm만큼 늘이고 세로 길이를 3 cm만큼 줄여서 만든 직사각형의 넓이는 $(x+6)(x-3)$ cm²

이 직사각형의 넓이가 처음 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{8}$ 만큼 더 늘어났으므로

$$(x+6)(x-3)=x^2+\frac{1}{8}x^2$$

$$x^2-24x+144=0, (x-12)^2=0 \quad \therefore x=12$$

따라서 처음 정사각형의 한 변의 길이는 12 cm

313 **답** 6

1개당 a 원인 도시락의 가격을 1.5% 내리면 도시락 1개당 가격은

$$a\left(1-\frac{1.5x}{100}\right) \text{원}$$

이때 b 개에서 2% 증가한 하루 판매량은

$$b\left(1+\frac{2x}{100}\right) \text{개}$$

하루 판매액이 ab 원에서 1.92% 증가하였으므로

$$a\left(1-\frac{1.5x}{100}\right) \times b\left(1+\frac{2x}{100}\right) = ab\left(1+\frac{1.92}{100}\right)$$

$$(100-1.5x)(100+2x)=10192$$

$$3x^2-50x+192=0, (x-6)(3x-32)=0$$

이때 $0 < x < 10$ 이므로 $x=6$

314 **답** $1+\sqrt{3}$

$\overline{AP}=x$ 라 하면 두 삼각형 APD, CQD는 합동이므로

$$\overline{AP}=\overline{CQ}=x$$

삼각형 PBQ는 직각이등변삼각형이고 $\overline{PQ}=2\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{PB}=\overline{QB}=2$$

즉, 정사각형 ABCD는 한 변의 길이가 $x+2$ 이다.

직각삼각형 APD에서 피타고라스 정리에 의하여

$$(x+2)^2+x^2=8, x^2+2x-2=0$$

$$\therefore x=-1+\sqrt{3} \quad \leftarrow x>0$$

따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $(-1+\sqrt{3})+2=1+\sqrt{3}$

315 **답** 2

이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 $f(\alpha)=0, f(\beta)=0$

$f(2x-1)=0$ 이라면 $2x-1=\alpha$ 또는 $2x-1=\beta$

$$\therefore x=\frac{\alpha+1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\beta+1}{2}$$

따라서 이차방정식 $f(2x-1)=0$ 의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha+1}{2} \times \frac{\beta+1}{2} = \frac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{4} = \frac{6+1+1}{4} = 2$$

다른 풀이 $f(x)=a(x^2-x+6)$ ($a \neq 0$)이라 하면

$$f(2x-1)=a\{(2x-1)^2-(2x-1)+6\}=a(4x^2-6x+8)$$

따라서 이차방정식 $f(2x-1)=0$ 의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 2

316 **답** -59

이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 $2\alpha-2, 2\beta-2$ 이므로

$$f(2\alpha-2)=0, f(2\beta-2)=0$$

$$f\left(\frac{x-1}{3}\right)=0 \text{이라면 } \frac{x-1}{3}=2\alpha-2 \text{ 또는 } \frac{x-1}{3}=2\beta-2$$

$$\therefore x=6\alpha-5 \text{ 또는 } x=6\beta-5$$

따라서 이차방정식 $f\left(\frac{x-1}{3}\right)=0$ 의 두 근의 곱은

$$\begin{aligned} (6\alpha-5)(6\beta-5) &= 36\alpha\beta-30(\alpha+\beta)+25 \\ &= 36 \times 1 - 30 \times 4 + 25 = -59 \end{aligned}$$

다른 풀이 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 $2\alpha-2, 2\beta-2$ 이므로

$$(\text{두 근의 합})=(2\alpha-2)+(2\beta-2)=2(\alpha+\beta)-4=4$$

$$(\text{두 근의 곱})=(2\alpha-2)(2\beta-2)=4\alpha\beta-4(\alpha+\beta)+4=-8$$

$f(x)=a(x^2-4x-8)$ ($a \neq 0$)이라 하면

$$f\left(\frac{x-1}{3}\right)=a\left[\left(\frac{x-1}{3}\right)^2-4 \times \frac{x-1}{3}-8\right]=\frac{a}{9}(x^2-14x-59)$$

따라서 이차방정식 $f\left(\frac{x-1}{3}\right)=0$ 의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 -59

317 **답** $x=1$ 또는 $x=-2$

$$x^2-|x-1|-1=0 \text{에서}$$

(i) $x \geq 1$ 일 때

$$x^2-(x-1)-1=0, x^2-x=0, x(x-1)=0$$

이때 $x \geq 1$ 이므로 $x=1$

(ii) $x < 1$ 일 때

$$x^2+(x-1)-1=0, x^2+x-2=0, (x-1)(x+2)=0$$

이때 $x < 1$ 이므로 $x=-2$

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=-2$

318 ② $x = \frac{-3-\sqrt{21}}{2}$ 또는 $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ 이므로 $x^2 - |2x| = |x-1| + 2$ 에서

(i) $x < 0$ 일 때

$$x^2 + 2x = -(x-1) + 2, x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$\text{이때 } x < 0 \text{이므로 } x = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}$$

(ii) $0 \leq x < 1$ 일 때

$$x^2 - 2x = -(x-1) + 2, x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

이때 $0 \leq x < 1$ 이므로 근이 없다.

(iii) $x \geq 1$ 일 때

$$x^2 - 2x = (x-1) + 2, x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{이때 } x \geq 1 \text{이므로 } x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

$$(i) \sim (iii) \text{에서 } x = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

주의 $\sqrt{(x-1)^2}$ 은 $(x-1)$ 이 아니고 $|x-1|$ 임을 항상 주의해야 해!

319 ② 0

① 단계 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β 사이의 관계식 찾기 20%

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x^2 - 2x + 2 = 0$ 에 $x = \alpha, x = \beta$ 를 각각 대입하면

$$\alpha^2 - 2\alpha + 2 = 0, \beta^2 - 2\beta + 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

② 단계 $\frac{\beta^2 - \beta + 2}{\beta - 2} + \frac{\alpha^2 - \alpha + 2}{\alpha - 2}$ 간단히 하기 60%

$$\textcircled{1} \text{에서 } \alpha - 2 = -\beta, \beta - 2 = -\alpha$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } \alpha^2 - \alpha + 2 = \alpha, \beta^2 - \beta + 2 = \beta$$

$$\frac{\beta^2 - \beta + 2}{\beta - 2} + \frac{\alpha^2 - \alpha + 2}{\alpha - 2} = -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}$$

③ 단계 $\frac{\beta^2 - \beta + 2}{\beta - 2} + \frac{\alpha^2 - \alpha + 2}{\alpha - 2}$ 의 값 구하기 20%

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\beta^2 - \beta + 2}{\beta - 2} + \frac{\alpha^2 - \alpha + 2}{\alpha - 2} &= -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} \\ &= -\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\ &= -\frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= -\frac{2^2 - 2 \times 2}{2} = 0 \end{aligned}$$

320 ② 1

① 단계 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β 사이의 관계식 찾기 20%

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 8$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4^2 - 2 \times 8 = 0$$

② 단계 $(2\alpha - k)(\alpha + 6) + (2\beta - k)(\beta + 6)$ 간단히 하기 60%

$$(2\alpha - k)(\alpha + 6) + (2\beta - k)(\beta + 6)$$

$$= 2\alpha^2 + (12 - k)\alpha - 6k + 2\beta^2 + (12 - k)\beta - 6k$$

$$= 2(\alpha^2 + \beta^2) + (12 - k)(\alpha + \beta) - 12k$$

$$= 2 \times 0 + (12 - k) \times 4 - 12k$$

$$= 48 - 16k$$

③ 단계 k 의 값 구하기 20%

$$\text{즉, } 48 - 16k = 32 \text{이므로 } k = 1$$

321 ② $a = -1, b = -1$

① 단계 이차식이 완전제곱식으로 인수분해 되는 조건 구하기 30%

주어진 이차식이 완전제곱식으로 인수분해 되려면 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (3a+1)x + 2a^2 + a = 0$ 이 중근을 가져야 한다.

② 단계 a 의 값 구하기 40%

이차방정식 $x^2 + (3a+1)x + 2a^2 + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (3a+1)^2 - 4(2a^2 + a) = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 = 0$$

$$\therefore a = -1$$

③ 단계 b 의 값 구하기 30%

$$x^2 + (3a+1)x + 2a^2 + a = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$\therefore b = -1$$

322 ② 서로 다른 두 실근

① 단계 피타고라스 정리를 이용하여 a, b, c 사이의 관계식 찾기 40%

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$$b^2 = a^2 + c^2$$

② 단계 이차방정식의 판별식의 부호 파악하기 40%

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 는 양의 실수이므로

이차방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = b^2 - ac = a^2 + c^2 - ac = \left(a - \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}c^2 > 0$$

③ 단계 이차방정식의 두 근 판별하기 20%

따라서 이차방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

323

답 -27

① 단계 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha^2\beta^2$ 의 값 구하기 40%

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 3$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3^2 - 2 \times 3 = 3$$

$$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 3^2 = 9$$

② 단계 α^2, β^2 을 두 근으로 하는 이차방정식 구하기 40% x^2 의 계수가 1이고 α^2, β^2 을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0 \text{ 이므로}$$

$$x^2 - 3x + 9 = 0$$

③ 단계 ab 의 값 구하기 20%따라서 $a = -3, b = 9$ 이므로 $ab = -27$

324

답 464

① 단계 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b, c, d 의 값 구하기 40%이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 2, 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$2 + 4 = -a, 2 \times 4 = b \quad \therefore a = -6, b = 8$$

이차방정식 $x^2 + cx + d = 0$ 의 두 근이 $-2 + \sqrt{3}i, -2 - \sqrt{3}i$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(-2 + \sqrt{3}i) + (-2 - \sqrt{3}i) = -c, (-2 + \sqrt{3}i)(-2 - \sqrt{3}i) = d$$

$$\therefore c = 4, d = 7$$

② 단계 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 의 값 구하기 40%이차방정식 $x^2 + acx + bd = 0$, 즉 $x^2 - 24x + 56 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 24, \alpha\beta = 56$$

③ 단계 $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값 구하기 20%

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 24^2 - 2 \times 56 = 464$$

325

답 -3

① 단계 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 부호 파악하기 40%

이차방정식 $x^2 + (3k-3)x - 27 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (3k-3)^2 - 4 \times (-27) = (3k-3)^2 + 108 > 0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 -27 이므로 두 근의 부호는 서로 다르다.② 단계 조건을 만족시키는 실수 k 의 값 구하기 40%이차방정식 $x^2 + (3k-3)x - 27 = 0$ 의 두 근을 α, β ($\beta < 0 < \alpha$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3 - 3k, \alpha\beta = -27$$

(i) $|\alpha| : |\beta| = 1 : 3$ 일 때

$$-\beta = 3\alpha \text{ 이므로 } \alpha\beta = -3\alpha^2 = -27 \quad \therefore \alpha^2 = 9$$

$$\text{이때 } \alpha > 0 \text{ 이므로 } \alpha = 3, \beta = -9$$

$$\alpha + \beta = 3 - 3k = -6 \quad \therefore k = 3$$

(ii) $|\alpha| : |\beta| = 3 : 1$ 일 때

$$-3\beta = \alpha \text{ 이므로 } \alpha\beta = -3\beta^2 = -27 \quad \therefore \beta^2 = 9$$

$$\text{이때 } \beta < 0 \text{ 이므로 } \beta = -3, \alpha = 9$$

$$\alpha + \beta = 3 - 3k = 6 \quad \therefore k = -1$$

③ 단계 모든 실수 k 의 값의 곱 구하기 20%(i), (ii)에서 모든 실수 k 의 값의 곱은 $3 \times (-1) = -3$

326

답 $\frac{7-2\sqrt{10}}{2}$ ① 단계 x 의 값의 범위에 따른 방정식의 근 구하기 40%방정식 $2x^2 + 4|x| - 3 = 0$ 에서(i) $x \geq 0$ 일 때

$$2x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 2 \times (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$\text{이때 } x \geq 0 \text{ 이므로 } x = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}$$

(ii) $x < 0$ 일 때

$$2x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 2 \times (-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$\text{이때 } x < 0 \text{ 이므로 } x = \frac{2 - \sqrt{10}}{2}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } x = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{2 - \sqrt{10}}{2}$$

다른 풀이

② 단계 모든 근의 합과 모든 근의 곱 구하기 40%

$$(\text{모든 근의 합}) = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2} + \frac{2 - \sqrt{10}}{2} = 0$$

$$(\text{모든 근의 곱}) = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2} \times \frac{2 - \sqrt{10}}{2} = \frac{-7 + 2\sqrt{10}}{2}$$

③ 단계 $a - b$ 의 값 구하기 20%

$$\text{따라서 } a = 0, b = \frac{-7 + 2\sqrt{10}}{2} \text{ 이므로 } a - b = \frac{7 - 2\sqrt{10}}{2}$$

다른 풀이 $x^2 = |x|^2$ 이므로 $2|x|^2 + 4|x| - 3 = 0$

$$|x| = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 2 \times (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$\text{이때 } |x| > 0 \text{ 이므로 } |x| = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{2 - \sqrt{10}}{2}$$

TIP $|x|$ 를 포함한 문제가 나오면 당황하지 말고, $x \geq 0$ 인 구간과 $x < 0$ 인 구간으로 나눠서 생각해 봐!

327 ⑤

이차방정식 $ax^2 + \sqrt{2}bx + c = 0$ 의 한 근이 $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ 이므로

$$a(1 + \sqrt{2})^2 + \sqrt{2}b(1 + \sqrt{2}) + c = 0$$

$$(3 + 2\sqrt{2})a + (2 + \sqrt{2})b + c = 0$$

$$(3a + 2b + c) + (2a + b)\sqrt{2} = 0$$

a, b, c 는 유리수이므로

$$3a + 2b + c = 0, 2a + b = 0 \text{에서 } b = -2a, c = a$$

즉, $ax^2 + \sqrt{2}bx + c = 0$ 에서 $ax^2 - 2\sqrt{2}ax + a = 0$

$$a(x^2 - 2\sqrt{2}x + 1) = 0$$

이차방정식 $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ 에서

$$x = \sqrt{2} \pm \sqrt{(-\sqrt{2})^2 - 1 \times 1} = \sqrt{2} \pm 1$$

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} \text{이므로 } \beta = -1 + \sqrt{2}$$

$$\therefore \alpha + \frac{1}{\beta} = 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{-1 + \sqrt{2}} = 2 + 2\sqrt{2}$$

다른 풀이 $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ 에서 $\alpha - \sqrt{2} = 1$ 이고 양변을 제곱하면

$$(\alpha - \sqrt{2})^2 = 1^2, \alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha + 1 = 0$$

즉, α, β 는 이차방정식 $a(x^2 - 2\sqrt{2}x + 1) = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2\sqrt{2} \text{에서 } \beta = 2\sqrt{2} - \alpha = -1 + \sqrt{2}$$

$$\therefore \alpha + \frac{1}{\beta} = 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{-1 + \sqrt{2}} = 2 + 2\sqrt{2}$$

주의 a, b, c 는 유리수이지만 이차방정식 $ax^2 + \sqrt{2}bx + c = 0$ 의 각 항의 계수 중 $\sqrt{2}b$ 는 유리수가 아니므로 β 는 $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ 의 켤레근 $1 - \sqrt{2}$ 가 아님을 주의해야 해!

328 ③ $\frac{3}{2} \leq x < 2$

$$[2x]^2 - 3[x] - 6 = 0 \text{에서}$$

(i) $n \leq x < n + \frac{1}{2}$ (n은 정수)일 때

$$2n \leq 2x < 2n + 1 \text{이므로 } [2x] = 2n, [x] = n$$

$$\text{즉, } (2n)^2 - 3n - 6 = 0 \text{에서 } 4n^2 - 3n - 6 = 0$$

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 4 \times (-6)}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{105}}{8}$$

이때 n 은 정수이므로 근이 없다.

(ii) $n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1$ 일 때

$$2n + 1 \leq 2x < 2n + 2 \text{이므로 } [2x] = 2n + 1, [x] = n$$

$$\text{즉, } (2n + 1)^2 - 3n - 6 = 0 \text{에서}$$

$$4n^2 + n - 5 = 0, (n - 1)(4n + 5) = 0$$

이때 n 은 정수이므로 $n = 1$

(i), (ii)에서 x 의 값의 범위는 $\frac{3}{2} \leq x < 2$

329 ② 16

방정식 $|x^2 - 6x + 2k - 1| = k + 3$ 에서

(i) $x^2 - 6x + 2k - 1 = k + 3$ 일 때

이차방정식 $x^2 - 6x + k - 4 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (-3)^2 - (k - 4) = -k + 13 \geq 0 \quad \therefore k \leq 13$$

(ii) $x^2 - 6x + 2k - 1 = -(k + 3)$ 일 때

이차방정식 $x^2 - 6x + 3k + 2 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (-3)^2 - (3k + 2) = -3k + 7 \geq 0 \quad \therefore k \leq \frac{7}{3}$$

(i), (ii)에서 $k \leq 13$

$$\text{이때 } |x^2 - 6x + 2k - 1| \geq 0 \text{이므로 } k + 3 \geq 0 \quad \therefore k \geq -3$$

$$\text{따라서 } -3 \leq k \leq 13 \text{이므로 } M = 13, m = -3$$

$$\therefore M - m = 16$$

330 ②

이차방정식 $x^2 + 2x - 2 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = -2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2)^2 - 2 \times (-2) = 8$$

$x^2 + 2x - 2 = 0$ 에 $x = \alpha, x = \beta$ 를 각각 대입하면

$$\alpha^2 = -2\alpha + 2, \beta^2 = -2\beta + 2$$

$$\therefore \beta^2 P(\alpha^2 + 3\alpha) + \alpha^2 P(\beta^2 + 3\beta)$$

$$= \beta^2 P(\alpha + 2) + \alpha^2 P(\beta + 2)$$

$$= \beta^2 \{2(\alpha + 2)^2 + 3(\alpha + 2)\} + \alpha^2 \{2(\beta + 2)^2 + 3(\beta + 2)\}$$

$$= \beta^2 (2\alpha^2 + 11\alpha + 14) + \alpha^2 (2\beta^2 + 11\beta + 14)$$

$$= \beta^2 (7\alpha + 18) + \alpha^2 (7\beta + 18) \quad \leftarrow \alpha^2 = -2\alpha + 2, \beta^2 = -2\beta + 2$$

$$= 7\alpha\beta(\alpha + \beta) + 18(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$= 7 \times (-2) \times (-2) + 18 \times 8 = 172$$

331 ③ -14

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0 \text{에서}$$

$$3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca = 0$$

이 이차방정식의 두 근의 합과 곱이 각각 2, -3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{2(a + b + c)}{3} = 2 \text{에서 } a + b + c = 3$$

$$\frac{ab + bc + ca}{3} = -3 \text{에서 } ab + bc + ca = -9$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 3^2 - 2 \times (-9) = 27$$

$$(x - a)^2 + (x - b)^2 + (x - c)^2 = 0 \text{에서}$$

$$3x^2 - 2(a + b + c)x + a^2 + b^2 + c^2 = 0, \text{ 즉 } 3x^2 - 6x + 27 = 0$$

이 이차방정식의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 9$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2^2 - 2 \times 9 = -14$$

332 **답** - $\frac{320}{9}$

이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = k$$

(i) $\alpha > 0, \beta > 0$ 일 때

$$2|\alpha| + |\beta| = 2\alpha + \beta = 8$$

$$2\alpha + \beta = 8, \alpha + \beta = 6 \text{을 연립하여 풀면}$$

$$\alpha = 2, \beta = 4 \text{이므로 } k = 8$$

(ii) $\alpha > 0, \beta < 0$ 일 때

$$2|\alpha| + |\beta| = 2\alpha - \beta = 8$$

$$2\alpha - \beta = 8, \alpha + \beta = 6 \text{을 연립하여 풀면}$$

$$\alpha = \frac{14}{3}, \beta = \frac{4}{3} \text{이지만 } \beta < 0 \text{을 만족시키지 않는다.}$$

(iii) $\alpha < 0, \beta > 0$ 일 때

$$2|\alpha| + |\beta| = -2\alpha + \beta = 8$$

$$-2\alpha + \beta = 8, \alpha + \beta = 6 \text{을 연립하여 풀면}$$

$$\alpha = -\frac{2}{3}, \beta = \frac{20}{3} \text{이므로 } k = -\frac{40}{9}$$

(iv) $\alpha < 0, \beta < 0$ 일 때

$$2|\alpha| + |\beta| = -2\alpha - \beta = 8$$

$$-2\alpha - \beta = 8, \alpha + \beta = 6 \text{을 연립하여 풀면}$$

$$\alpha = -14, \beta = 20 \text{이지만 } \beta < 0 \text{을 만족시키지 않는다.}$$

(i)~(iv)에서 모든 실수 k 의 값의 곱은 $8 \times \left(-\frac{40}{9}\right) = -\frac{320}{9}$

333 **답** 24

이차방정식 $x^2 + 2ax - b = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2a, \alpha\beta = -b$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-2a)^2 - 4 \times (-b) = 4a^2 + 4b$$

$$|\alpha - \beta| = 2\sqrt{a^2 + b} < 12 \text{이어야 하므로 } a^2 + b < 36$$

a, b 는 소수이므로

(i) $a = 2$ 일 때, $b < 32$

32보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31이므로
순서쌍 (a, b) 의 개수는 11

(ii) $a = 3$ 일 때, $b < 27$

27보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23이므로
순서쌍 (a, b) 의 개수는 9

(iii) $a = 5$ 일 때, $b < 11$

11보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7이므로
순서쌍 (a, b) 의 개수는 4

(iv) $a \geq 7$ 일 때

조건을 만족시키는 소수 b 는 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $11 + 9 + 4 = 24$

334 **답** 55

이차방정식 $mx^2 - 35x + n = 0$ 의 두 근을 α, β ($\alpha > \beta$)라 하자.

조건 (가)에서 $\alpha + \beta = \frac{35}{m}$ 는 자연수이므로 m 은 35의 약수이다.

이때 $m = 1, 5, 7, 35$ 중에서 $\frac{35}{m}$ 가 소수이려면

$m = 5$ 또는 $m = 7$ 이어야 한다.

(i) $m = 5$ 일 때

$$\alpha + \beta = \frac{35}{m} = 7$$

조건 (나)에서 α, β 는 소수이므로 $\alpha = 5, \beta = 2$

$$\alpha\beta = \frac{n}{m} = \frac{n}{5} = 10 \quad \therefore n = 50$$

$$\therefore m + n = 5 + 50 = 55$$

(ii) $m = 7$ 일 때

$$\alpha + \beta = \frac{35}{m} = 5$$

조건 (나)에서 α, β 는 소수이므로 $\alpha = 3, \beta = 2$

$$\alpha\beta = \frac{n}{m} = \frac{n}{7} = 6 \quad \therefore n = 42$$

$$\therefore m + n = 7 + 42 = 49$$

(i), (ii)에서 $m + n$ 의 최댓값은 55

TIP • 2가 아닌 모든 소수는 홀수이고 2를 제외한 임의의 두 소수(홀수)의 합은 짝수이므로 소수가 아니야.

조건 (가), (나)에 의하여 두 근이 모두 소수이면서 두 근의 합이 소수이려면 반드시 한 근은 2가 되어야 해!

335 **답** 129

이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이 c, d 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$c + d = a, cd = b$$

조건 (가)에서 a, b 는 100 이하의 자연수이므로

$$c + d \leq 100, cd \leq 100$$

조건 (나)에서 c, d 는 각각 3개의 양의 약수를 가지므로

c, d 는 소수의 제곱수이다.

또, c, d 는 100 이하의 서로 다른 자연수이므로 4, 9, 25, 49 중에서 서로 다른 값을 가지고 $cd \leq 100$ 을 만족시켜야 하므로

(i) $c = 4, d = 9$ 또는 $c = 9, d = 4$ 일 때

$$a = c + d = 13, b = cd = 36 \quad \therefore a + b = 49$$

(ii) $c = 4, d = 25$ 또는 $c = 25, d = 4$ 일 때

$$a = c + d = 29, b = cd = 100 \quad \therefore a + b = 129$$

(i), (ii)에서 $a + b$ 의 최댓값은 129

TIP • 어떤 자연수 p 가 2개의 양의 약수를 가지면 p 는 소수이다.

• 어떤 자연수 p 가 3개의 양의 약수를 가지면 p 는 소수의 제곱수이다.

• 어떤 자연수 p 를 $p = m \times n$ (m, n 은 서로 다른 자연수)으로 나타낼 수 있으면 p 의 양의 약수는 4개 이상이다.

336 답 105

이차방정식 $x^2+3x+3=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-3 \text{에서 } \alpha=-3-\beta, \beta=-3-\alpha$$

$$x^2+3x+3=0 \text{에 } x=\alpha \text{를 대입하면}$$

$$\alpha^2+3\alpha+3=0 \text{에서 } \alpha^2+2\alpha=-3-\alpha=\beta$$

$$f(\alpha^2+2\alpha)=f(\beta)=-4(-3-\beta)=12+4\beta \text{이므로}$$

$$f(\beta)-12-4\beta=0$$

$$\text{같은 방법으로 } f(\alpha)-12-4\alpha=0$$

즉, 이차방정식 $f(x)-12-4x=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\begin{aligned} f(x)-12-4x &= x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta \\ &= x^2+3x+3 \quad \leftarrow \alpha+\beta=-3, \alpha\beta=3 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x)=x^2+7x+15$$

따라서 $p=7, q=15$ 이므로 $pq=105$

337 답 -1

이차방정식 $x^2-6x+2=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=6, \alpha\beta=2$$

정사각형의 한 변의 길이를 k 라 하면

$$\alpha:\beta=(\alpha-k):k \quad \leftarrow \text{삼각형의 닮음 이용}$$

$$\beta(\alpha-k)=\alpha k, (\alpha+\beta)k=\alpha\beta$$

$$\therefore k=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{1}{3}$$

정사각형의 한 변의 길이가 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$(\text{정사각형의 넓이})=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

$$(\text{정사각형의 둘레의 길이})=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

즉, x^2 의 계수가 9이고 $\frac{1}{9}, \frac{4}{3}$ 를 두 근으로 하는 이차방정식은

$$9\left(x-\frac{1}{9}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)=0 \quad \therefore 9x^2-13x+\frac{4}{3}=0$$

따라서 $m=-13, n=\frac{4}{3}$ 이므로 $m+9n=-1$

338 답 60

그림과 같이 변 AD와 EO의 교점을 P, $\overline{JP}=x$ ($x>0$)라 하자.

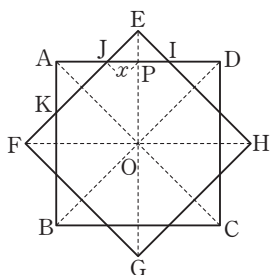
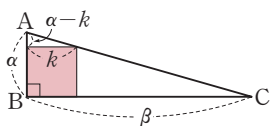
삼각형 EJI는 직각이등변삼각형이므로 삼각형 EJP도 직각이등변삼각형이다.

$$\therefore \overline{EP}=x$$

$$\overline{AP}=4\times\frac{1}{2}=2 \text{이므로 } \overline{AJ}=2-x$$

삼각형 AKJ는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AK}=2-x$

$$(\triangle AKJ \text{의 넓이})=\frac{1}{2}\times(2-x)^2$$



$$(\triangle EJI \text{의 넓이})=\frac{1}{2}\times 2x\times x=x^2$$

삼각형 AKJ의 넓이가 삼각형 EJI의 넓이의 $\frac{5}{4}$ 배이므로

$$\frac{(2-x)^2}{2}=\frac{5}{4}x^2, 3x^2+8x-8=0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-3\times(-8)}}{3}=\frac{-4\pm 2\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{이때 } x>0 \text{이므로 } x=\frac{-4+2\sqrt{10}}{3}$$

정사각형 EFGH의 한 변의 길이가 $2k$ 이므로 $\overline{EG}=2\sqrt{2}k$

$$\overline{OE}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}k=\sqrt{2}k$$

$$\overline{OE}=\overline{OP}+\overline{EP}=2+x=2+\frac{-4+2\sqrt{10}}{3}=\frac{2+2\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{즉, } \sqrt{2}k=\frac{2+2\sqrt{10}}{3} \text{에서 } k=\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{3}$$

따라서 $p=\frac{1}{3}, q=\frac{2}{3}$ 이므로 $60(p+q)=60$

339 답 $x=3+\frac{1}{\alpha}$ 또는 $x=3+\frac{1}{\beta}$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $cx^2+bx-6cx+a-3b+9c=0$ 에서

$$c(x-3)^2+b(x-3)+a=0$$

$$(x-3)^2+\frac{b}{c}(x-3)+\frac{a}{c}=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \frac{b}{c}=-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}, \frac{a}{c}=\frac{1}{\alpha\beta}$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$(x-3)^2-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}(x-3)+\frac{1}{\alpha\beta}=0$$

$$(x-3)^2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)(x-3)+\frac{1}{\alpha\beta}=0$$

$$\left(x-3-\frac{1}{\alpha}\right)\left(x-3-\frac{1}{\beta}\right)=0$$

$$\therefore x=3+\frac{1}{\alpha} \text{ 또는 } x=3+\frac{1}{\beta}$$

다른 풀이 $f(x)=ax^2+bx+c$ 라 하면 $f(\alpha)=0, f(\beta)=0$

x 대신 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=a\left(\frac{1}{x}\right)^2+b\times\frac{1}{x}+c$$

$$a\left(\frac{1}{x}\right)^2+b\times\frac{1}{x}+c=0 \text{의 양변에 } x^2 \text{을 곱하면}$$

$$cx^2+bx+a=0 \text{이므로 이 이차방정식의 근은 } \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} \text{이다.}$$

$$g(x)=cx^2+bx+a \text{라 하면 } g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0, g\left(\frac{1}{\beta}\right)=0$$

x 대신 $x-3$ 을 대입하면

$$g(x-3)=c(x-3)^2+b(x-3)+a$$

따라서 이차방정식 $c(x-3)^2+b(x-3)+a=0$ 의 두 근은 $x-3=\frac{1}{\alpha}$ 또는 $x-3=\frac{1}{\beta}$ 에서 $x=3+\frac{1}{\alpha}$ 또는 $x=3+\frac{1}{\beta}$

340 ④

$\sqrt{P(1)}$ 과 $\sqrt{-P(1)}$ 은 근호 안에 절댓값이 같고 부호가 다르므로 $P(1)$ 의 값의 부호를 기준으로 생각하면

(i) $P(1)>0$ 일 때

$$\begin{aligned} \sqrt{P(1)} \text{은 실수, } \sqrt{-P(1)} \text{은 순허수이므로} \\ \sqrt{P(1)}+\sqrt{-P(1)}-\sqrt{P(0)-4} \text{가 실수가 되려면} \\ \sqrt{-P(1)}-\sqrt{P(0)-4} \text{가 실수이어야 한다.} \\ \sqrt{-P(1)} \text{이 순허수이므로 } \sqrt{-P(1)}-\sqrt{P(0)-4}=0 \\ -P(1)=P(0)-4 \end{aligned}$$

$$-(8-2a)=3-a \text{에서 } a=\frac{11}{3}$$

$$\therefore P(x)=x^2-\frac{11}{3}x+\frac{10}{3}$$

$$\text{이때 } P(1)=\frac{2}{3}>0 \text{이므로 성립한다.} \quad \therefore P(-4)=34$$

(ii) $P(1)<0$ 일 때

$$\begin{aligned} \sqrt{P(1)} \text{은 순허수, } \sqrt{-P(1)} \text{은 실수이므로} \\ \sqrt{P(1)}+\sqrt{-P(1)}-\sqrt{P(0)-4} \text{가 실수가 되려면} \\ \sqrt{P(1)}-\sqrt{P(0)-4} \text{가 실수이어야 한다.} \\ \sqrt{P(1)} \text{이 순허수이므로 } \sqrt{P(1)}-\sqrt{P(0)-4}=0 \\ P(1)=P(0)-4 \end{aligned}$$

$$8-2a=3-a \text{에서 } a=5$$

$$\therefore P(x)=x^2-5x+2$$

$$\text{이때 } P(1)=-2<0 \text{이므로 성립한다.} \quad \therefore P(-4)=38$$

(iii) $P(1)=0$ 일 때

$$\begin{aligned} \sqrt{P(1)}+\sqrt{-P(1)}-\sqrt{P(0)-4} \text{가 실수가 되려면} \\ -\sqrt{P(0)-4} \text{가 실수이어야 한다.} \\ P(1)=8-2a=0 \text{에서 } a=4 \end{aligned}$$

$$\therefore P(x)=x^2-4x+3$$

$$\text{이때 } -\sqrt{P(0)-4}=-\sqrt{-1} \text{은 실수가 아니므로 성립하지 않는다.}$$

(i)~(iii)에서 모든 $P(-4)$ 의 값의 합은 $34+38=72$

341 ⑤

이차방정식 $x^2-3x+4=0$ 의 한 근이 α 이므로 $\alpha^2-3\alpha+4=0$
 $\alpha \neq 0$ 이므로 위 식의 양변을 α 로 나누면

$$\alpha-3+\frac{4}{\alpha}=0 \text{에서 } \alpha=3-\frac{4}{\alpha}, \frac{4}{\alpha}=3-\alpha$$

$$f(\alpha)=\frac{4m}{\alpha}+1=m(3-\alpha)+1=3m-m\alpha+1 \text{이므로}$$

$$f(\alpha)+m\alpha-3m-1=0$$

$$f\left(\frac{4}{\alpha}\right)=\alpha m+1=m\left(3-\frac{4}{\alpha}\right)+1=3m-m \times \frac{4}{\alpha}+1 \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{4}{\alpha}\right)+m \times \frac{4}{\alpha}-3m-1=0$$

즉, 이차방정식 $f(x)+mx-3m-1=0$ 의 두 근이 $\alpha, \frac{4}{\alpha}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x)+mx-3m-1 &= x^2-\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)x+\alpha \times \frac{4}{\alpha} \\ &= x^2-3x+4 \leftarrow \alpha+\frac{4}{\alpha}=3 \end{aligned}$$

위 식에 $x=3$ 을 대입하면 $f(3)-1=4$

$$\therefore f(3)=5$$

TIP 이 문제에서 $\alpha, \frac{4}{\alpha}$ 가 계속 언급되는데 이차방정식 $x^2-3x+4=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=4$ 에서 $\beta=\frac{4}{\alpha}$ 아.

즉, 나머지 한 근 β 가 $\frac{4}{\alpha}$ 임을 눈치채야 해!

342 ②

$\sqrt{P(2)}$ 과 $\sqrt{-P(2)}$ 은 근호 안에 절댓값이 같고 부호가 다르므로 $P(2)$ 의 값의 부호를 기준으로 생각하면

(i) $P(2)>0$ 일 때

$$\begin{aligned} \sqrt{P(2)} \text{은 실수, } \sqrt{-P(2)} \text{은 순허수이므로} \\ \sqrt{P(2)}+\sqrt{-P(2)}-\sqrt{P(0)-2} \text{가 순허수가 되려면} \\ \sqrt{P(2)}-\sqrt{P(0)-2} \text{의 실수부분이 0이어야 한다.} \\ \sqrt{P(2)} \text{가 실수이므로 } \sqrt{P(2)}-\sqrt{P(0)-2}=0 \\ P(2)=P(0)-2 \end{aligned}$$

$$10-3a=4-a \text{에서 } a=3$$

$$\therefore P(x)=x^2-3x+3$$

$$\text{이때 } P(2)=1>0 \text{이므로 성립한다.} \quad \therefore P(4)=7$$

(ii) $P(2)<0$ 일 때

$$\begin{aligned} \sqrt{P(2)} \text{은 순허수, } \sqrt{-P(2)} \text{은 실수이므로} \\ \sqrt{P(2)}+\sqrt{-P(2)}-\sqrt{P(0)-2} \text{가 순허수가 되려면} \\ \sqrt{-P(2)}-\sqrt{P(0)-2} \text{의 실수부분이 0이어야 한다.} \\ \sqrt{-P(2)} \text{가 실수이므로 } \sqrt{-P(2)}-\sqrt{P(0)-2}=0 \\ -P(2)=P(0)-2 \end{aligned}$$

$$-(10-3a)=4-a \text{에서 } a=\frac{7}{2}$$

$$\therefore P(x)=x^2-\frac{7}{2}x+\frac{5}{2}$$

$$\text{이때 } P(2)=-\frac{1}{2}<0 \text{이므로 성립한다.} \quad \therefore P(4)=\frac{9}{2}$$

(iii) $P(2)=0$ 일 때

$$\begin{aligned} \sqrt{P(2)}+\sqrt{-P(2)}-\sqrt{P(0)-2} \text{가 순허수가 되려면} \\ -\sqrt{P(0)-2} \text{가 순허수이어야 한다.} \end{aligned}$$

$$P(2)=10-3a=0 \text{에서 } a=\frac{10}{3}$$

$$\therefore P(x)=x^2-\frac{10}{3}x+\frac{8}{3}$$

이때 $-\sqrt{P(0)-2}=-\sqrt{\frac{2}{3}}$ 는 순허수가 아니므로 성립하지 않는다.

(i)~(iii)에서 모든 $P(4)$ 의 값의 합은 $7+\frac{9}{2}=\frac{23}{2}$

06 이차방정식과 이차함수

1등급 필수 내신 빈출 문제

p.067~074

343 ①

이차함수 $y=x^2+ax-(b+3)$ 의 그래프와 x 축이 두 점

$A(-2, 0)$, $B(5, 0)$ 에서 만나므로

이차방정식 $x^2+ax-(b+3)=0$ 의 두 근이 $-2, 5$ 이다.

$$x^2+ax-(b+3)=(x+2)(x-5)=x^2-3x-10$$

따라서 $a=-3$, $b=7$ 이므로 $a+b=4$

344 ④

이차방정식 $2x^2+ax-3=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{a}{2}, \alpha\beta=-\frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2-4\times\left(-\frac{3}{2}\right)}=3 \leftarrow (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

양변을 제곱하여 정리하면 $a^2=12$

345 ④

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times 3=9 \text{이므로 } \overline{AB}=6$$

대칭축이 $x=1$ 이므로 $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$

$f(x)=a(x+2)(x-4)$ (a 는 상수)의 그래프가 점 $C(0, 3)$ 을 지나므로

$$3=-8a, a=-\frac{3}{8}$$

따라서 $f(x)=-\frac{3}{8}(x+2)(x-4)$ 이므로 $f(14)=-60$

346 ①

대칭축이 $x=a$ 이고 $\overline{AB}=8$ 이므로 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표는 $a+4, a-4$

이차방정식 $x^2-2ax-3a^2=0$ 의 두 근의 곱은

$$(a+4)(a-4)=-3a^2$$

$$a^2=4 \quad \therefore a=2 \leftarrow a>0$$

347 ③

$x^2+6x+n=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=9-n>0 \quad \therefore n<9$$

따라서 자연수 n 의 개수는 8

348 ②

$ax^2-2(a+2)x+a+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+2)^2-a(a+1)<0 \quad \therefore a<-\frac{4}{3}$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 -2

349 ③

$x^2-2(k-a)x+k^2+b-3=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2+b-3)=0, -2ak+(a^2-b+3)=0$$

$$-2a=0, a^2-b+3=0$$

따라서 $a=0$, $b=3$ 이므로 $a+b=3$

350 ⑧

$y=x^2+ax+2$ 의 그래프와 직선 $y=x+b$ 의 교점의 x 좌표가 -2

와 3 이므로 이차방정식 $x^2+ax+2=x+b$ 의 두 근이 $-2, 3$ 이다.

$$(x^2+ax+2)-(x+b)=x^2+(a-1)x+2-b$$

$$=(x+2)(x-3)$$

$$=x^2-x-6$$

$a-1=-1, 2-b=-6$, 즉 $a=0$, $b=8$ 이므로 $a+b=8$

351 ③

$-x^2+3x-1=-x-1$ 에서 $x^2-4x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

x	0	1	2	3	4
$-x^2+3x-1$	-1	1	1	-1	-5
$-x-1$	-1	-2	-3	-4	-5

따라서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수는

$$1+4+5+4+1=15$$

352 ⑧

이차방정식 $h(x)=0$ 의 두 근이 2와 6이므로

$$h(x)=k(x-2)(x-6) \quad (k \text{는 상수})$$

$g(x)$ 는 일차함수이고, $f(x)$ 는 이차함의 계수가 -1 인 이차함수이므로 함수 $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 -1 인 이차함수이다.

$$h(x)=-(x-2)(x-6)$$

$$=-x^2+8x-12$$

$$=-(x-4)^2+4$$

이므로 함수 $h(x)$ 는 $x=4$ 일 때 최댓값 4를 갖는다.

따라서 $p=4$, $q=4$ 이므로 $p+q=8$

353 ② $\frac{9}{16} \leq a < \frac{3}{4}$

$x^2-2x=x-3a$, 즉 $x^2-3x+3a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=9-12a>0 \quad \therefore a<\frac{3}{4} \quad \dots\dots ①$$

$$\alpha<\beta \text{이므로 } \alpha=\frac{3-\sqrt{9-12a}}{2}, \beta=\frac{3+\sqrt{9-12a}}{2}$$

$$1 < \frac{\beta}{\alpha} \leq 3 \text{이므로 } 1 < \frac{3+\sqrt{9-12a}}{3-\sqrt{9-12a}} \leq 3$$

$$1 < \frac{3+\sqrt{9-12a}}{3-\sqrt{9-12a}} \text{는 항상 성립}$$

$$\frac{3+\sqrt{9-12a}}{3-\sqrt{9-12a}} \leq 3 \text{에서 } 0 < \sqrt{9-12a} \leq \frac{3}{2}$$

$$\therefore a \geq \frac{9}{16} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } \frac{9}{16} \leq a < \frac{3}{4}$$

354 ▶ 11

$A(a, a^2), B(b, b^2)$ ($a > 0, b < 0$)이라 하면

$x^2 = x + k$ 에서 $x^2 - x - k = 0$ 의 두 근이 a, b 이므로

$$a + b = 1, ab = -k$$

$$S = \frac{1}{2} \times a \times a^2 = \frac{1}{2}a^3, T = \frac{1}{2} \times (-b) \times b^2 = -\frac{1}{2}b^3$$

$$S - T = \frac{1}{2}(a^3 + b^3) = 17, \text{ 즉 } a^3 + b^3 = 34$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) \text{이므로}$$

$$34 = 1 + 3k \quad \therefore k = 11$$

355 ▶ 4

$x^2 - ax - 2a^2 = x + 2a^2$, 즉 $x^2 - (a + 1)x - 4a^2 = 0$ 에서

$$x_1 + x_2 = a + 1$$

$$y_1 = x_1 + 2a^2, y_2 = x_2 + 2a^2 \text{이므로}$$

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + 4a^2$$

$$= 4a^2 + a + 1$$

$$= 4\left(a + \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{15}{16}$$

$$a = -\frac{1}{8} \text{일 때 최솟값 } \frac{15}{16} \text{를 가지므로 } k = -\frac{1}{8}, m = \frac{15}{16}$$

$$\therefore k + m = \frac{13}{16}$$

356 ▶ 2

$$f(x) - g(x) = 3x^2 - (2 + a)x + 22 - a$$

$$= 3\left(x - \frac{2+a}{6}\right)^2 - \frac{(2+a)^2 - 264 + 12a}{12}$$

최솟값이 0이므로

$$(2 + a)^2 - 264 + 12a = 0, a^2 + 16a - 260 = 0$$

$$(a + 26)(a - 10) = 0 \quad \therefore a = -26 \text{ 또는 } a = 10$$

$f(x) = x^2 - 2x + 6$ 과 $y = 2x + 2n - 4$ 에서

$x^2 - 4x + 10 - 2n = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = 4 - 10 + 2n = 2n - 6$$

$g(x) = -2x^2 + ax + a - 16$ 과 $y = 2x - 2n + 4$ 에서

$$2x^2 + (2 - a)x - 2n - a + 20 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

(i) $a = -26$ 일 때

$\textcircled{A}$ 에서 $2x^2 + 28x - 2n + 46 = 0$, 즉 $x^2 + 14x - n + 23 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = 49 + n - 23 = n + 26$$

$$\therefore p(1) + p(2) + \dots + p(5) = 2 + 2 + 3 + 4 + 4 = 15$$

(ii) $a = 10$ 일 때

$\textcircled{A}$ 에서 $2x^2 - 8x - 2n + 10 = 0$, 즉 $x^2 - 4x - n + 5 = 0$ 의 판별식을 D_3 이라 하면

$$\frac{D_3}{4} = 4 + n - 5 = n - 1$$

$$\therefore p(1) + p(2) + \dots + p(5) = 1 + 2 + 3 + 4 + 4 = 14$$

조건 (가)에서 $p(1) + p(2) + \dots + p(5) = 14$ 이므로 $a = 10$

따라서 $g(x) = -2x^2 + 10x - 6$ 이므로 $g(1) = 2$

357 ▶ 2

$-x^2 + ax + 5 = x + 5$, 즉 $x^2 + (1 - a)x = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (1 - a)^2 = 0 \quad \therefore a = 1$$

358 ▶ 3

ㄱ. $-x^2 + 3x + 1 = -x + 3$, 즉 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라

하면 $\frac{D}{4} = 4 - 2 > 0$ 이므로 이차함수 $y = -x^2 + 3x + 1$ 의 그래

프는 직선 $y = -x + 3$ 과 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

ㄴ. $-x^2 + 3x + 1 = x + 5$, 즉 $x^2 - 2x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = 1 - 4 < 0$ 이므로 이차함수 $y = -x^2 + 3x + 1$ 의 그래프는

직선 $y = x + 5$ 와 만나지 않는다. (거짓)

ㄷ. $-x^2 + 3x + 1 = 2x + 4$, 즉 $x^2 - x + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = 1 - 12 < 0$ 이므로 이차함수 $y = -x^2 + 3x + 1$ 의 그래프는

직선 $y = 2x + 4$ 와 만나지 않는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

359 ▶ 1

$2x + 2 = x^2 + x + k$, 즉 $x^2 - x + k - 2 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = 1 - 4(k - 2) < 0 \quad \therefore k > \frac{9}{4}$$

$-x + k = -2x^2 + 5x + 5$, 즉 $2x^2 - 6x + k - 5 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = 9 - 2(k - 5) > 0 \quad \therefore k < \frac{19}{2}$$

따라서 $\frac{9}{4} < k < \frac{19}{2}$ 이므로 정수 k 의 개수는 7

360 ①

$$x^2 + mx - 2m = (2m - 3)x - 2, \text{ 즉 } x^2 + (3 - m)x + 2 - 2m = 0$$

$$f(m) = (3 - m)^2 - 4(2 - 2m)$$

$$= m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2$$

$$m = -1 \text{ 일 때 } D = 0 \text{ 이므로 } \alpha = -1$$

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2} \text{ 이고 } \alpha = -1 \text{ 이므로}$$

$$f(\sqrt{2}) + \alpha = f(\sqrt{2}) - 1 = 2 + 2\sqrt{2}$$

따라서 $p = 2, q = 2$ 이므로 $p + q = 4$

361 ②

$$x^2 + x - 3a = -2x + a^2, \text{ 즉 } x^2 + 3x - a^2 - 3a = 0 \text{ 의 판별식을 } D \text{ 라 하면}$$

$$D = 9 - 4(-a^2 - 3a) = 0, 4a^2 + 12a + 9 = 0$$

$$(2a + 3)^2 = 0 \quad \therefore a = -\frac{3}{2}$$

362 ④

$$x^2 + 2mx - 17 = 4x + n^2 - 10n + 8, \text{ 즉}$$

$$x^2 + 2(m - 2)x - n^2 + 10n - 25 = 0 \text{ 의 판별식을 } D \text{ 라 하면}$$

$$\frac{D}{4} = (m - 2)^2 + (n^2 - 10n + 25) = 0$$

$$(m - 2)^2 + (n - 5)^2 = 0 \quad \therefore m = 2, n = 5$$

즉, $x^2 + 2(m - 2)x - n^2 + 10n - 25 = 0$ 에서

$$x^2 = 0 \text{ 이므로 } a = 0$$

따라서 $a = 0, b = -17$ 이므로 $a + b = -17$

363 ②

$$x^2 + (9 - 2k)x + 2k + 2 = x + 2, \text{ 즉 } x^2 + 2(4 - k)x + 2k = 0 \text{ 의 판별식을 } D_1 \text{ 이라 하면}$$

$$\frac{D_1}{4} = (4 - k)^2 - 2k = 0, k^2 - 10k + 16 = 0$$

$$(k - 2)(k - 8) = 0 \quad \therefore k = 2 \text{ 또는 } k = 8$$

$$x^2 + (9 - 2k)x + 2k + 2 = -x - 3, \text{ 즉 } x^2 + 2(5 - k)x + 2k + 5 = 0$$

의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (5 - k)^2 - 2k - 5 = 0, k^2 - 12k + 20 = 0$$

$$(k - 2)(k - 10) = 0 \quad \therefore k = 2 \text{ 또는 } k = 10$$

따라서 공통인 k 의 값은 2

364 ④

$$x^2 - 4x + k = 2x - 7, \text{ 즉 } x^2 - 6x + (k + 7) = 0 \text{ 의 판별식을 } D \text{ 라 하면}$$

$$\frac{D}{4} = 9 - (k + 7) = 0 \quad \therefore k = 2$$

따라서 점점의 좌표는 $(3, -1)$ 이고, $y = x^2 - 4x + 2$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 좌표는 $(2 - \sqrt{2}, 0), (2 + \sqrt{2}, 0)$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$$

365 ⑤

대칭축이 $x = -1$ 이므로 $x = 1$ 일 때 최솟값 14, $x = 3$ 일 때 최댓값 50을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 64

366 ②

$$f(x) = -(x - 3k)^2 - 1 \text{ 이고 대칭축이 } x = 3k \text{ 이므로}$$

(i) $3k < 3$, 즉 $k < 1$ 일 때

$$x = 3 \text{ 에서 최댓값 } -9k^2 + 18k - 10 \text{ 을 가지므로}$$

$$-9k^2 + 18k - 10 = -10, k^2 - 2k = 0$$

$$k(k - 2) = 0 \quad \therefore k = 0 \text{ 또는 } k = 2$$

$$\therefore k = 0 \leftarrow k < 1$$

(ii) $3 \leq 3k \leq 6$, 즉 $1 \leq k \leq 2$ 일 때

$$x = 3k \text{ 에서 최댓값 } -1 \text{ 을 가지므로 } -10 \text{ 이 될 수 없다.}$$

(iii) $3k > 6$, 즉 $k > 2$ 일 때

$$x = 6 \text{ 에서 최댓값 } -9k^2 + 36k - 37 \text{ 을 가지므로}$$

$$-9k^2 + 36k - 37 = -10, k^2 - 4k + 3 = 0$$

$$(k - 1)(k - 3) = 0 \quad \therefore k = 1 \text{ 또는 } k = 3$$

$$\therefore k = 3 \leftarrow k > 2$$

(i)~(iii)에서 모든 실수 k 의 값의 합은 3

367 ④

$$f(x) = (x - 4)^2 + k - 16 \text{ 이므로 } x = 4 \text{ 일 때 최솟값은}$$

$$k - 16 = -10 \quad \therefore k = 6$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^2 - 8x + 6 \text{ 이므로 최댓값은 } f(1) = -1$$

368 ③

$$f(x) = (x - 1)^2 + k - 1 \text{ 이고 대칭축이 } x = 1 \text{ 이므로}$$

(i) $k < 1$ 일 때

$$M = f(-1) = k + 3, m = f(k) = k^2 - k$$

$$M - m = -k^2 + 2k + 3 = 16, k^2 - 2k + 13 = 0$$

실수 k 가 존재하지 않는다.

(ii) $1 \leq k < 3$ 일 때

$$M = f(-1) = k + 3, m = f(1) = k - 1$$

$$M - m = 4 \neq 16 \text{ 이므로 성립하지 않는다.}$$

(iii) $k > 3$ 일 때

$$M = f(k) = k^2 - k, m = f(1) = k - 1$$

$$M - m = k^2 - 2k + 1 = 16, k^2 - 2k - 15 = 0$$

$$(k + 3)(k - 5) = 0 \quad \therefore k = 5 \leftarrow k > 3$$

(i)~(iii)에서 $k = 5$

369

①

조건 (가)에 의하여 $f(x) = a(x-1)(x-3)$ (a 는 실수)이라 하면

(i) $a < 0$ 일 때

조건 (나)에 의하여 $x=6$ 일 때 최솟값 $15a=15 \quad \therefore a=1$

조건에 맞지 않으므로 a 의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $a > 0$ 일 때

조건 (나)에 의하여 $x=4$ 일 때 최솟값 $3a=15 \quad \therefore a=5$

(i), (ii)에서 $a=5$

$$f(x) = 5(x-1)(x-3) = 5x^2 - 20x + 15$$

$f(x) - k = 0$, 즉 $5x^2 - 20x + 15 - k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 100 - 5(15 - k) < 0 \quad \therefore k < -5$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -6

370

②

$$\neg. f(2) = 4a + 2b + c \leq 6$$

$$f(-2) = 4a - 2b + c \leq 6$$

$$\therefore 4a + c \leq 6 \text{ (거짓)}$$

$$\neg. b = -4a \text{이므로 대칭축이 } x=2$$

$$a < 0 \text{일 때, 최댓값은 } f(2) = b + c = 6$$

$$a > 0 \text{일 때, 최댓값은 } f(-2) = -3b + c = 6 \text{ (참)}$$

ㄷ. $-2 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수가 2이려면 범위 내에 대칭축이 존재해야 한다.

$$-2 < -\frac{b}{2a} < 2$$

$$a > 0 \text{일 때, } -4a < b < 4a \text{이므로 정수 } b \text{의 개수는 } 8a-1$$

$$a < 0 \text{일 때, } 4a < b < -4a \text{이므로 정수 } b \text{의 개수는 } -8a-1$$

$$\text{가능한 정수 } b \text{의 개수는 } 8|a|-1 \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

371

②

(i) $k = -2$ 일 때

$$\text{모든 } x \text{에 대하여 } x-k \geq 0 \text{이므로 } |x-k| = x-k$$

$$\text{즉, } f(x) = x^2 - 4(x-k) = x^2 - 4x + 4k$$

$$-2 \leq x \leq 2 \text{에서 최댓값은 } f(-2) = 4$$

$$\therefore g(-2) = 4$$

(ii) $k = 1$ 일 때

$$f(x) = x^2 - 4|x-1|$$

$$f(1) = 1, f(-2) = -8, f(2) = 0$$

$$\therefore g(1) = 1$$

(iii) $k = 3$ 일 때

$$\text{모든 } x \text{에 대하여 } x-k < 0 \text{이므로 } |x-k| = -x+k$$

$$\text{즉, } f(x) = x^2 + 4(x-k) = x^2 + 4x - 4k$$

$$-2 \leq x \leq 2 \text{에서 최댓값은 } f(2) = 0$$

$$\therefore g(3) = 0$$

(i)~(iii)에서 $g(-2) + g(1) + g(3) = 5$

372

④

$$f(x) = (x-1)|x| - ax + 1 \quad (1 \leq a \leq 3) \text{에서}$$

(i) $x \geq 0$, 즉 $0 \leq x \leq 1$ 일 때

$$f(x) = (x-1)x - ax + 1$$

$$= \left(x - \frac{a+1}{2}\right)^2 - \frac{(a+1)^2}{4} + 1$$

(ii) $x < 0$, 즉 $-1 \leq x < 0$ 일 때

$$f(x) = (x-1)(-x) - ax + 1$$

$$= -\left(x - \frac{1-a}{2}\right)^2 + \frac{(1-a)^2}{4} + 1$$

$$\text{이때 } 1 \leq a \leq 3 \text{에서 } 1 \leq \frac{a+1}{2} \leq 2, -1 \leq \frac{1-a}{2} \leq 0$$

$$M(a) = f\left(\frac{1-a}{2}\right) = \frac{(1-a)^2}{4} + 1$$

$$= \frac{1}{4}(a-1)^2 + 1$$

$$m(a) = f(1) = 1 - a$$

$$g(a) = M(a) + m(a) \text{라 하면}$$

$$g(a) = \frac{1}{4}(a-1)^2 + 1 + 1 - a = \frac{1}{4}(a-3)^2$$

$1 \leq a \leq 3$ 일 때

$$\text{최댓값은 } g(1) = 1, \text{ 최솟값은 } g(3) = 0$$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 1

373

③

직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b 라 하면

$$a + b = 6 \quad \therefore b = 6 - a$$

이때 빗변의 길이는 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 이므로

$$a^2 + b^2 = a^2 + (6-a)^2$$

$$= 2a^2 - 12a + 36$$

$$= 2(a-3)^2 + 18$$

$a^2 + b^2$ 은 $a=3$ 일 때 최솟값 18을 갖는다.

따라서 빗변의 길이의 최솟값은 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

374

③

1인당 관람료를 $(12000 + 300x)$ 원이라 하면

하루 관람객은 $(1000 - 10x)$ 명이다.

하루 관람료의 총합은

$$(12000 + 300x)(1000 - 10x) = -3000(x-30)^2 + 14700000$$

따라서 $x=30$ 일 때 하루 관람료의 총합이 최대이므로 하루 관람객 수는 $1000 - 10 \times 30 = 700$

375

④

사각형 AMND의 넓이는 삼각형 AMN과 삼각형 ADN의 넓이의 합이다.

점 N에서 선분 MC의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle ABM \equiv \triangle MHN$ (SAS 합동)이므로 삼각형 AMN은 직각이등변삼각형이다.

삼각형 ABM에서 $\overline{AM} = \sqrt{5}(3-x)$ 이므로

삼각형 AMN의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 5 \times (3-x)^2$

삼각형 ADN의 넓이는 $\frac{1}{2} \times (6-2x) \times (3-x)$

즉, 사각형 AMND의 넓이는

$$\frac{5}{2}(3-x)^2 + (3-x)^2 = \frac{7}{2}(x-3)^2$$

$1 \leq x \leq 2$ 이므로 $x=1$ 일 때 최댓값 14

376 ②

$\overline{PS}=a, \overline{PQ}=h$ 라 하면 $8:a=6:(6-h) \quad \therefore a=8-\frac{4}{3}h$

직사각형 PQRS의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= ah = \left(8 - \frac{4}{3}h\right)h \\ &= -\frac{4}{3}(h-3)^2 + 12 \end{aligned}$$

$4 \leq h \leq 5$ 이므로 $h=5$ 일 때 최솟값은 $\frac{20}{3} \text{ cm}^2$

377 ⑤

$\overline{AP}=x$ 라 하면 $\overline{BP}=6-x$

$\overline{AB}=\overline{AC}$ 이고, $\angle A=100^\circ$ 이므로 $\angle B=40^\circ$

부채꼴 APQ의 넓이는 $S=\pi x^2 \times \frac{5}{18}$

부채꼴 BPR의 넓이는 $T=\pi(6-x)^2 \times \frac{2}{18}$

$$T-S = \frac{\pi}{18}(2x^2 - 24x + 72 - 5x^2)$$

$$= \frac{\pi}{18}(-3x^2 - 24x + 72)$$

$$= \frac{\pi}{18}\{-3(x+4)^2 + 120\}$$

$1 < x < 3$ 이므로 $x=1$ 일 때 $T-S$ 의 최댓값은 $\frac{5}{2}\pi$

378 ③

두 이차함수의 그래프의 교점의 x 좌표가 $-2, 3$ 이므로

$$(x^2+ax+2) - (-x^2+bx+a) = 2(x+2)(x-3)$$

$$2x^2+(a-b)x+2-a=2x^2-2x-12$$

따라서 $2-a=-12, a-b=-2$ 이므로 $a=14, b=16$

$$\therefore a+b=30$$

379 ③

$x^2-7x+a=-3x^2+13x+b$, 즉 $4x^2-20x+a-b=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 100 - 4(a-b) = 0 \quad \therefore a-b=25$$

따라서 이차방정식은 $4x^2-20x+25=0$ 이므로

$$(2x-5)^2=0 \quad \therefore \alpha=\frac{5}{2}$$

$$\therefore a-b+2\alpha=30$$

380 ②

$y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 $x=3$ 에서 접하고 최고차항의 계수가 2이므로

$$f(x)=2(x-3)^2$$

$y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프는 $x=2$ 에서 접하므로

$y=g(x)$ 의 최고차항의 계수를 a 라 하면

$$f(x)-g(x)=(2-a)(x-2)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore g(x) &= f(x) - (2-a)(x-2)^2 \\ &= 2(x-3)^2 - (2-a)(x-2)^2 \end{aligned}$$

$$g(4)=2(4-3)^2 - (2-a)(4-2)^2 = -6+4a=10$$

에서 $a=4$ 이므로 $g(x)=2(x-3)^2+2(x-2)^2$

$$\therefore g(5)=26$$

381 ②

$$x^2-2x-3=-x^2+4x+5, 2x^2-6x-8=0,$$

$2(x+1)(x-4)=0$ 이므로 두 교점의 좌표는 $(-1, 0), (4, 5)$

직선 AB의 방정식은 $y=x+1$

$y=x^2+\frac{57}{4}$ 의 그래프 위의 한 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이가

최소가 되기 위해서는 점 P는 직선 AB와 평행하면서 $y=x^2+\frac{57}{4}$ 의 그래프에 접하는 접점일 때이다.

$y=x^2+\frac{57}{4}$ 의 그래프에 접하는 접선을 $y=x+k$ 라 하면

$$x^2+\frac{57}{4}=x+k, x^2-x+\frac{57}{4}-k=0$$

위 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=1-57+4k=0$

$$\therefore k=14$$

$$x^2-x+\frac{1}{4}=0, \text{ 즉 } \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0 \text{이므로 } a=\frac{1}{2}, b=\frac{29}{2}$$

$$\therefore a+b=15$$

382 ①

$$2x^2-6x=-x^2+9, 3x^2-6x-9=0, 3(x-3)(x+1)=0$$

이므로 A, B의 x 좌표는 각각 $-1, 3$ 이다.

밑변을 $\overline{CD}$ 라 했을 때 삼각형 ADC, 삼각형 BCD의 높이를 더한 값은 $3+1=4$ 로 일정하므로 $\overline{CD}=-3x^2+6x+9$ 가 최댓값을 가질 때 사각형 ADBC의 넓이가 최대이다.

$h(x)=-3x^2+6x+9$ 라 하면 그래프의 축은 $x=1$ 이므로

$$-1 \leq x \leq 3 \text{에서 최댓값은 } h(1)=-3+6+9=12$$

$$\therefore \text{따라서 사각형 ADBC의 넓이의 최댓값은 } \frac{1}{2} \times 12 \times 4 = 24$$

383 ③

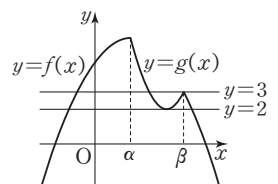
함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

$$g(x)=(x-b)^2+2=3 \text{에서}$$

$$x=b+1 \text{ 또는 } x=b-1$$

$T=b+3$ 이므로 나머지 한 교점의

x 좌표는 $-b+3$ 이다.



$$f(x) = -\frac{1}{3}(x-a)^2 + 6 = 3 \text{에서}$$

$$x = a+3 \text{ 또는 } x = a-3$$

$$a+3 = b+1, a-3 = -b+3 \text{이므로 연립하여 풀면}$$

$$a=2, b=4$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x-2)^2 + 6, g(x) = (x-4)^2 + 2 \text{이므로}$$

$$-\frac{1}{3}(x-2)^2 + 6 = (x-4)^2 + 2, x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0 \quad \therefore \alpha=2, \beta=5$$

$$\therefore h(\beta-\alpha) = h(3) = 3$$

384 답 13

조건 (가)에 의하여 $f(x), g(x)$ 의 최고차항의 계수는 각각 1, -1이

$$\text{고, } f(-1) = g(-1), f(4) = g(4)$$

$$\text{직선 AB의 기울기는 } \frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)} = 1 \text{에서}$$

$$f(4) - f(-1) = 5$$

조건 (나)의 $f(-1) + g(4) = 5$, 즉 $f(-1) + f(4) = 5$ 와 연립하여 풀면

$$f(-1) = g(-1) = 0, f(4) = g(4) = 5$$

$$f(x) = (x+1)(x-\alpha) \text{라 하면}$$

$$f(4) = 5(4-\alpha) = 5 \quad \therefore \alpha=3$$

$$f(x) = (x+1)(x-3) \text{이므로}$$

$$g(x) = f(x) - 2(x+1)(x-4) = -x^2 + 4x + 5$$

$$f(x) \text{의 그래프의 대칭축이 } x=1 \text{이므로 } m=f(1) = -4$$

$$g(x) \text{의 그래프의 대칭축이 } x=2 \text{이므로 } M=g(2) = 9$$

$$\therefore M-m = 13$$

385 답 -6

이차방정식 $x^2 + 2x + m + 1 = 0$ 의 두 근이 모두 1보다 작으므로 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0$ 이다.

$$\frac{D}{4} = 1 - (m+1) = -m \geq 0 \quad \therefore m \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 근이 모두 1보다 작으므로

$$f(1) = 1 + 2 + m + 1 = 4 + m > 0 \quad \therefore m > -4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 의하여 } -4 < m \leq 0$$

$$\text{모든 정수 } m \text{의 값의 합은 } (-3) + (-2) + (-1) + 0 = -6$$

386 답 $-6 < a < -1$

이차방정식 $x^2 - x + 2a = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이다.

$$D = 1 - 8a > 0 \quad \therefore a < \frac{1}{8} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한 근은 -1보다 크고 다른 한 근은 -3과 -1 사이에 존재하므로

$$f(-1) < 0, f(-3) > 0$$

$$f(-1) = 1 + 1 + 2a = 2 + 2a < 0 \quad \therefore a < -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$f(-3) = 9 + 3 + 2a = 12 + 2a > 0 \quad \therefore a > -6 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{에 의하여 } a \text{의 값의 범위는}$$

$$-6 < a < -1$$

387 답 14

이차방정식 $x^2 - 2x - m = 0$ 의 근은

$y = x^2 - 2x$ 의 그래프와 $y = m$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.

$$f(x) = x^2 - 2x \text{라 하면 } f(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \text{이므로}$$

$$f(x) = x^2 - 2x \geq -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(3) = 3, f(-3) = 15 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이차방정식 $x^2 - 2x - m = 0$ 의 근 중에서 적어도 한 근이 -3과 3 사이에 존재해야 하므로

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 의하여 } m \text{의 값의 범위는 } -1 \leq m < 15$$

$$\text{따라서 } \alpha = -1, \beta = 15 \text{이므로 } \alpha + \beta = -1 + 15 = 14$$

388 답 -16

① 단계 이차함수 $y = x^2 - 2kx + 2k$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표 구하기

20%

$$y = x^2 - 2kx + 2k = (x-k)^2 - k^2 + 2k \text{이므로}$$

$$\text{꼭짓점의 좌표는 } (k, -k^2 + 2k)$$

② 단계 꼭짓점의 경우를 나눠 k 의 값 구하기 60%

(i) $k < 0$ 일 때

꼭짓점의 x 좌표가 $0 \leq x \leq 5$ 에 포함되지 않으므로 이차함수

$$y = x^2 - 2kx + 2k \text{는 } x=0 \text{일 때 최솟값 } -8 \text{을 갖는다.}$$

$$\text{즉, } x=0 \text{일 때 } y=-8 \text{이므로 } 2k=-8 \quad \therefore k=-4$$

(ii) $0 \leq k \leq 5$ 일 때

꼭짓점의 x 좌표가 $0 \leq x \leq 5$ 에 포함되므로 이차함수

$$y = x^2 - 2kx + 2k \text{는 } x=k \text{일 때 최솟값 } -8 \text{을 갖는다.}$$

$$\text{즉, } x=k \text{일 때 } y=-8 \text{이므로}$$

$$-k^2 + 2k = -8, k^2 - 2k - 8 = 0$$

$$(k-4)(k+2) = 0 \quad \therefore k=4 \text{ 또는 } k=-2$$

$$\text{그런데 } 0 \leq k \leq 5 \text{이므로 } k=4$$

(iii) $k > 5$ 일 때

꼭짓점의 x 좌표가 $0 \leq x \leq 5$ 에 포함되지 않으므로 이차함수

$$y = x^2 - 2kx + 2k \text{는 } x=5 \text{일 때 최솟값 } -8 \text{을 갖는다.}$$

$$\text{즉, } x=5 \text{일 때 } y=-8 \text{이므로}$$

$$25 - 8k = -8 \quad \therefore k = \frac{33}{8}$$

그런데 $k > 5$ 이므로 조건을 만족시키는 k 의 값은 존재하지 않는다.

③ 단계 모든 실수 k 의 값의 곱 구하기 20%

(i)~(iii)에서 $k = -4$ 또는 $k = 4$

$$\text{따라서 모든 실수 } k \text{의 값의 곱은 } (-4) \times 4 = -16$$

389 답 $\frac{33}{4}$

① 단계 이차함수 $f(x) = x^2 - 2ax + a^2 + b$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표 구하기 20%

$$f(x) = x^2 - 2ax + a^2 + b = (x-a)^2 + b \text{이므로}$$

$$\text{꼭짓점의 좌표는 } (a, b)$$

② 단계 꼭짓점의 경우를 나눠 a, b 의 값 구하기 60%

(i) $a < 2$ 일 때

꼭짓점의 x 좌표가 $2 \leq x \leq 3$ 에 포함되지 않으므로 이차함수

$f(x) = x^2 - 2ax + a^2 + b$ 는 $x=2$ 일 때 최솟값 5를 갖는다.

즉, $f(2) = 4 - 4a + a^2 + b = 5$ 이므로 $b = -a^2 + 4a + 1$

$$a + b = -a^2 + 5a + 1$$

$$= -\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{29}{4}$$

이므로 $a + b$ 는 $a = \frac{5}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{29}{4}$ 를 갖는다.

(ii) $2 \leq a \leq 3$ 일 때

꼭짓점의 x 좌표가 $2 \leq x \leq 3$ 에 포함되므로 이차함수

$f(x) = x^2 - 2ax + a^2 + b$ 는 $x=a$ 일 때 최솟값 5를 갖는다.

즉, $f(a) = b = 5$ 이므로 $7 \leq a + b \leq 8$

따라서 $a + b$ 는 $a = 3$ 일 때 최댓값 8을 갖는다.

(iii) $a > 3$ 일 때

꼭짓점의 x 좌표가 $2 \leq x \leq 3$ 에 포함되지 않으므로 이차함수

$f(x) = x^2 - 2ax + a^2 + b$ 는 $x=3$ 일 때 최솟값 5를 갖는다.

즉, $f(3) = 9 - 6a + a^2 + b = 5$ 이므로 $b = -a^2 + 6a - 4$

$$a + b = -a^2 + 7a - 4$$

$$= -\left(a - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{33}{4}$$

이므로 $a + b$ 는 $a = \frac{7}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{33}{4}$ 을 갖는다.

③ 단계 $a + b$ 의 최댓값 구하기 20%

(i)~(iii)에서 $a + b$ 의 최댓값은 $\frac{33}{4}$

390 **답** 3

① 단계 두 교점의 좌표 구하기 40%

이차함수 $y = ax^2 + bx + 4$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + 2$ 의 교점은 이차함수 $y = x^2 - x - 2$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + 2$ 의 교점과 같다.

$$x^2 - x - 2 = 2x + 2, x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x+1)(x-4) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 4$$

즉, 두 교점의 x 좌표가 $-1, 4$ 이므로 교점의 좌표는

$(-1, 0), (4, 10)$

② 단계 상수 a, b 의 값 구하기 40%

이때 이차함수 $y = ax^2 + bx + 4$ 의 그래프가 이 두 교점을 지나므로 두 점의 좌표를 각각 대입하면

$$a - b + 4 = 0 \text{에서 } a - b = -4$$

$$16a + 4b + 4 = 10 \text{에서 } 16a + 4b = 6$$

$$\text{이를 연립하여 풀면 } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{7}{2}$$

③ 단계 $a + b$ 의 값 구하기 20%

따라서 구하는 $a + b$ 의 값은 $a + b = 3$

다른 풀이 **② 단계** $y = ax^2 + bx + 4$ 와 $y = 2x + 2$ 의 교점의 x 좌표

가 $-1, 4$ 이므로 $(ax^2 + bx + 4) - (2x + 2) = a(x+1)(x-4)$

$$ax^2 + (b-2)x + 2 = ax^2 - 3ax - 4a$$

$$\text{따라서 } b-2 = -3a, 2 = -4a \text{이므로 } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{7}{2}$$

391 **답** -124

① 단계 $0 \leq x \leq 5$ 에서 y 의 값의 범위 구하기 40%

$0 \leq x \leq 5$ 에서 이차함수 $y = -x^2 + 6x = -(x-3)^2 + 9$ 는

$x=3$ 일 때 최댓값 9, $x=0$ 일 때 최솟값 0을 갖는다.

따라서 $0 \leq x \leq 5$ 일 때, $0 \leq y \leq 9$ 이다.

② 단계 $2x^2 - 2y^2 - 12x + 6y$ 의 최댓값과 최솟값 구하기 40%

$$2x^2 - 2y^2 - 12x + 6y = -2(-x^2 + 6x) - 2y^2 + 6y$$

$$= -2y - 2y^2 + 6y \quad \leftarrow y = -x^2 + 6x$$

$$= -2y^2 + 4y$$

$$= -2(y-1)^2 + 2$$

$0 \leq y \leq 9$ 에서 $y=1$ 일 때 최댓값 2, $y=9$ 일 때 최솟값 -126 을 갖는다.

③ 단계 최댓값과 최솟값의 합 구하기 20%

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $2 + (-126) = -124$

392 **답** 0

① 단계 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 를 k 에 관한 식으로 나타내기 40%

$$x^2 - 2x + k^2 + k = -4x - k \text{에서}$$

$$x^2 + 2x + k^2 + 2k = 0 \text{이므로}$$

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = k^2 + 2k$$

② 단계 M, m 의 값 구하기 40%

$$(\alpha+1)(\beta+1) = \alpha\beta + (\alpha+\beta) + 1 = k^2 + 2k - 1 = (k+1)^2 - 2$$

$$k = -1 \text{일 때 최솟값 } m = -2$$

$$k = 1 \text{일 때 최댓값 } M = 2$$

③ 단계 $M + m$ 의 값 구하기 20%

$$\therefore M + m = 0$$

1등급 완성 고난도 마스터 문제

p.075-077

393 **답** ②

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 (a, ka) 라 하면

$$f(x) = (x-a)^2 + ka$$

$y = f(x)$ 와 $y = kx + 4$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표 α, β 는 이차방정식 $(x-a)^2 + ka = kx + 4$ 의 근이므로

$$x^2 - (2a+k)x + a^2 + ka - 4 = 0 \text{에서 근과 계수의 관계에 의하여}$$

$$\alpha + \beta = 2a + k, \alpha\beta = a^2 + ka - 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축이 직선 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{4}$ 이므로

$$a=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{4} \quad \therefore \alpha+\beta=2a+\frac{1}{2}$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } k=\frac{1}{2} \text{이므로 } \alpha\beta=a^2+\frac{1}{2}a-4$$

$$\begin{aligned} \therefore |\alpha-\beta| &= \sqrt{(\alpha-\beta)^2} = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{\left(2a+\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(a^2+\frac{1}{2}a-4\right)} \\ &= \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2} \end{aligned}$$

394 ㉠ ②

$f(0)=f(4)$ 이므로 이차함수 $f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x=2$ 이다.

$$f(4)<0 \text{이면 } f(-1)-f(4)=0, \text{ 즉 } f(-1)=f(4)$$

축의 방정식이 $x=2$ 이므로 모순이다.

$$\text{따라서 } f(4)>0 \text{이고, } f(-1)+f(4)=0$$

$f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a 라 하면 a 의 값의 부호에 따라 두 경우로 나눌 수 있다.

(i) $a<0$ 일 때

$$\begin{aligned} f(-1)+f(4)=0 \text{을 만족시키며 } f(x) \text{의 최솟값이 } -19 \text{이므로} \\ f(-2)=-19 \end{aligned}$$

(ii) $a>0$ 일 때

$$f(4)>0 \text{이면 } f(-1)>0 \text{이므로 } f(-1)+f(4) \neq 0 \text{이다.}$$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a<0$ 이고 $f(-2)=-19$ 이다.

$$\text{함수 } f(x)=a(x-2)^2+p \text{라 하면}$$

$$f(-1)+f(4)=0 \text{이므로}$$

$$f(-1)+f(4)=13a+2p=0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$f(-2)=-19 \text{이므로}$$

$$f(-2)=16a+p=-19 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{을 연립하여 풀면 } a=-2, p=13$$

$$\text{따라서 } f(x)=-2(x-2)^2+13 \text{이므로 } f(3)=11$$

395 ㉠ -5

이차함수 $f(x)=-(x-3)^2+k+15$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3, k+15)$ 이고 직선 $y=4x+3$ 은 점 $(3, 15)$ 를 지나므로

$$f(x)=-(x-3)^2+k+15 \text{의 그래프와 직}$$

선 $y=4x+3$ 은 그림과 같다.

$$\alpha<3<\beta \text{이므로 } \alpha \leq x \leq \beta \text{에서}$$

함수 $f(x)$ 의 최댓값은

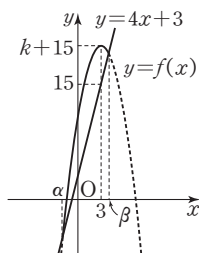
$$f(3)=k+15=20 \quad \therefore k=5$$

$$-x^2+6x+11=4x+3 \text{에서}$$

$$x^2-2x-8=(x-4)(x+2)=0$$

즉, $\alpha=-2, \beta=4$ 이므로 $x=-2$ 에서 최솟값을 갖는다.

따라서 $-2 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(-2)=-5$



396 ㉠ ①

조건 (가)에서 $f(p)=f(q)$ (p, q 는 서로 다른 정수)이므로

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=\frac{p+q}{2}$ 에 대하여 대칭이다.

최고차항의 계수가 양수이므로

$$n+4 \leq \frac{p+q}{2} \text{이면 } n \leq x \leq n+4 \text{에서}$$

$f(x)$ 의 최댓값은 $f(n)$, 최솟값은 $f(n+4)$ 이다.

$$\frac{p+q}{2} \leq n \text{이면 } n \leq x \leq n+4 \text{에서}$$

$f(x)$ 의 최댓값은 $f(n+4)$, 최솟값은 $f(n)$ 이다.

따라서 $n \leq x \leq n+4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합이

$f(n)+f(n+4)$ 의 값과 같지 않으려면 $n < \frac{p+q}{2} < n+4$ 이어야 한다.

조건 (나)에서 모든 자연수 n 의 값이 4, 5, 6, 7이므로

$$7 < \frac{p+q}{2} < 8$$

$$14 < p+q < 16 \text{에서 } p+q=15 \text{이므로}$$

$$\text{이차함수 } f(x) \text{의 그래프의 축의 방정식은 } x=\frac{15}{2} \text{이다.}$$

$$\text{이차함수 } f(x) \text{의 최솟값이 } 3 \text{이므로 } f(x)=\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+3$$

$$\therefore f(7)=\left(7-\frac{15}{2}\right)^2+3=\frac{13}{4}$$

397 ㉠ ③

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 $y=h(x)$ 의 그래프와 $x=\alpha$ 에서 접하므로 $f(x)-h(x)=0$ 은 $x=\alpha$ 에서 중근을 갖는다.

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x)-h(x)=(x-\alpha)^2, \text{ 즉 } f(x)=(x-\alpha)^2+h(x)$$

이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 $y=h(x)$ 의 그래프와 $x=\beta$ 에서 접

하므로 $g(x)-h(x)=0$ 은 $x=\beta$ 에서 중근을 갖는다.

$\beta=2\alpha$ 이고, $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 4이므로

$$g(x)-h(x)=4(x-2\alpha)^2, \text{ 즉 } g(x)=4(x-2\alpha)^2+h(x)$$

두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표가 t 이므로

$$f(t)=g(t)$$

$$f(t)-g(t)=(t-\alpha)^2+h(t)-4(t-2\alpha)^2-h(t)=0$$

$$3t^2-14\alpha t+15\alpha^2=0, (3t-5\alpha)(t-3\alpha)=0$$

$$0 < \alpha < t < 2\alpha \text{이므로 } t=\frac{5}{3}\alpha \quad \therefore \frac{t}{\alpha}=\frac{5}{3}$$

398 ㉠ 11

직선 $y=n+2$ 가 이차함수 $y=x^2-6x+11$ 의 그래프와 만나는 점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2-6x+11=n+2$ 의 실근과 같다.

$$x^2-6x+9=n \text{에서 } (x-3)^2=n$$

$$\therefore x=3+\sqrt{n} \text{ 또는 } x=3-\sqrt{n}$$

$$x_1=3-\sqrt{n}, x_2=3+\sqrt{n} \text{이라 하자.}$$

(i) $1 \leq n \leq 9$ 일 때

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ 이므로

$$\frac{|x_1| + |x_2|}{3} = \frac{x_1 + x_2}{3} = \frac{(3 - \sqrt{n}) + (3 + \sqrt{n})}{3} = 2$$

따라서 $\frac{|x_1| + |x_2|}{3}$ 의 값이 자연수가 되는 n 은 1, 2, 3, 4, 5, 6,

7, 8, 9의 9개이다.

(ii) $n > 9$ 일 때

$x_1 < 0 < x_2$ 이므로

$$\frac{|x_1| + |x_2|}{3} = \frac{-x_1 + x_2}{3} = \frac{(-3 + \sqrt{n}) + (3 + \sqrt{n})}{3} = \frac{2\sqrt{n}}{3}$$

따라서 $\frac{2\sqrt{n}}{3}$ 이 자연수가 되기 위해서 $\sqrt{n}$ 은 3의 배수이어야 하므로

이를 만족시키는 자연수 n 은 $6^2, 9^2$ 의 2개이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 자연수 n 의 개수는 $9 + 2 = 11$

399 ④

ㄱ. 최고차항의 계수가 1이고 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 1, a 이므로

$$f(x) = (x-1)(x-a)$$

$$\therefore f(3) = 6 - 2a \text{ (참)}$$

ㄴ. $y = f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x = \frac{a+1}{2}$ 이므로 점 P의

$$x\text{좌표는 } \frac{a+1}{2} \text{ ㉠}$$

이차함수 $y = f(x)$ 와 직선 PB의 방정식에서

$$(x-1)(x-a) = m(x-a), \text{ 즉 } (x-a)(x-1-m) = 0$$

$x = a$ 또는 $x = m+1$ 이므로 점 P의 x 좌표는 $m+1$

$$\text{㉠에서 } \frac{a+1}{2} = m+1 \quad \therefore a = 2m+1 \text{ ㉡}$$

이차함수 $y = f(x)$ 와 직선 AQ의 방정식에서

$$(x-1)(x-a) = m(x-1), \text{ 즉 } (x-1)(x-m-a) = 0$$

$x = 1$ 또는 $x = m+a$ 이므로 점 R의 x 좌표는 $m+a$

$$\text{㉡에 의하여 } \overline{AR} = (a+m) - 1 = 2m+1+m-1 = 3m \text{ (거짓)}$$

ㄷ. $\overline{BR} = m, \overline{QR} = m(a+m-1) = 3m^2$ 이므로

$$\text{삼각형 BRQ의 넓이는 } \frac{1}{2} \times m \times 3m^2 = \frac{3}{2}m^3 = \frac{81}{2}$$

따라서 $m = 3, a = 7$ 이므로 $a+m = 10$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

400 ②

방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 의 실근의 개수는 두 함수 $y = f(x),$

$y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

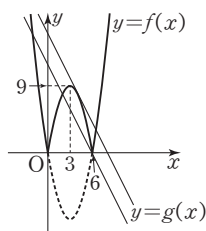
이때 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 이 서로 다른

4개의 실근을 가지려면 k 의 값은 직선

$y = g(x)$ 가 점 $(6, 0)$ 을 지날 때의 k 의 값

보다 크고, 이차함수 $y = -x^2 + 6x$ 의 그래

프와 직선 $y = g(x)$ 가 접할 때의 k 의 값보다는 작으면 된다.



(i) 직선 $y = g(x)$ 가 점 $(6, 0)$ 을 지날 때

$$0 = -12 + k \quad \therefore k = 12$$

(ii) 이차함수 $y = -x^2 + 6x$ 의 그래프와 직선 $y = -2x + k$ 가 접할 때

$-x^2 + 6x = -2x + k$, 즉 $x^2 - 8x + k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 16 - k = 0 \quad \therefore k = 16$$

(i), (ii)에서 k 의 값의 범위는 $12 < k < 16$ 이므로 $a = 12, b = 16$

$$\therefore a + b = 28$$

401 ⑨

직선 $y = t$ 가 두 이차함수

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 1, y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3$$

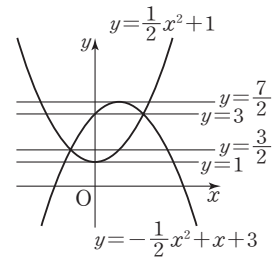
그래프와 만나는 서로 다른 교점의

개수가 3인 경우, 즉 $g(t) = 3$ 인 경우

는 그림과 같이 직선 $y = t$ 가 두 이차

함수의 교점을 지나거나, 꼭짓점을

지날 때이다.



(i) 교점을 지날 때

두 함수의 그래프의 교점의 x 좌표는 이차방정식

$$\frac{1}{2}x^2 + 1 = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3 \text{의 근과 같다.}$$

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 교점의 좌표는 $(-1, \frac{3}{2}), (2, 3)$ 이므로

$$t = \frac{3}{2} \text{ 또는 } t = 3$$

(ii) 꼭짓점을 지날 때

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 1, y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3 = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{7}{2} \text{에서}$$

두 이차함수의 꼭짓점의 좌표는 각각 $(0, 1), (1, \frac{7}{2})$ 이므로

$$t = 1 \text{ 또는 } t = \frac{7}{2}$$

(i), (ii)에서 모든 실수 t 의 값의 합은 $\frac{3}{2} + 3 + 1 + \frac{7}{2} = 9$

402 22

직선 $y = -x + 8$ 위의 한 점 $A(t, -t+8)$ 을 지나고 y 축과 평행한

직선이 이차함수 $f(x)$ 의 그래프와 점 B에서 만나므로 점 B의 x 좌

표는 점 A의 x 좌표와 같다. 즉, $B(t, -t^2 + 9t - 8)$ 이므로

$$\overline{AB} = -t^2 + 9t - 8 - (-t + 8)$$

$$= -t^2 + 10t - 16$$

이차함수 $f(x) = -x^2 + 9x - 8 = -(x - \frac{9}{2})^2 + \frac{49}{4}$ 의 그래프의 축

의 방정식은 $x = \frac{9}{2}$ 이다.

축을 기준으로 t 의 값의 범위를 나누면 다음과 같다.

(i) $2 < t < \frac{9}{2}$ 일 때

$$\overline{BC} = 2 \times \left(\frac{9}{2} - t \right) = 9 - 2t$$

따라서 사각형 ADCB의 둘레의

길이는

$$\begin{aligned} 2(\overline{AB} + \overline{BC}) \\ = 2(-t^2 + 10t - 16 + 9 - 2t) \\ = -2(t-4)^2 + 18 \end{aligned}$$

즉, $2 < t < \frac{9}{2}$ 에서 사각형 ADCB의 둘레의 길이의 최댓값은 $t=4$ 일 때 18이다.

(ii) $\frac{9}{2} < t < 8$ 일 때

$$\overline{BC} = 2 \times \left(t - \frac{9}{2} \right) = 2t - 9$$

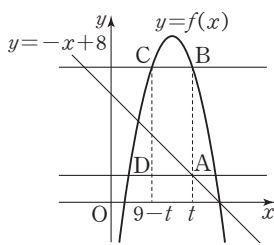
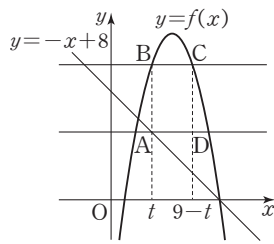
따라서 사각형 ABCD의 둘레의

길이는

$$\begin{aligned} 2(\overline{AB} + \overline{BC}) \\ = 2(-t^2 + 10t - 16 + 2t - 9) \\ = -2(t-6)^2 + 22 \end{aligned}$$

즉, $\frac{9}{2} < t < 8$ 에서 사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 $t=6$ 일 때 22이다.

(i), (ii)에서 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은 22이다.



403 ㉮ ④

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 최고차항의 계수의 절댓값이 같고 두 그래프의 교점의 개수가 2이므로 조건 (가)에 의하여

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 -2 ,

이차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수는 2이다.

조건 (가)에 의하여

$$f(-2) - g(-2) = 0, f(-2) = g(-2) \quad \dots\dots ㉠$$

$$f(1) - g(1) = 0, f(1) = g(1) \quad \dots\dots ㉡$$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 만나는 두 점 A, B의 x 좌표는 $-2, 1$ 이다.

조건 (나)에 의하여 직선 AB의 기울기는

$$\begin{aligned} \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} &= \frac{f(1) - g(-2)}{3} \\ &= \frac{f(1) - (3 - f(1))}{3} = \frac{2f(1) - 3}{3} = -1 \end{aligned}$$

$$\therefore f(1) = 0$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{과 조건 (나)에서 } f(1) = g(1) = 0, f(-2) = g(-2) = 3$$

$f(x) = -2(x-1)(x+a)$ (a 는 상수)라 하면

$$f(-2) = -12 + 6a = 3 \quad \therefore a = \frac{5}{2}$$

$$\therefore f(x) = -2(x-1)\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

$g(x) = 2(x-1)(x+b)$ (b 는 상수)라 하면

$$g(-2) = 12 - 6b = 3 \quad \therefore b = \frac{3}{2}$$

$$\therefore g(x) = 2(x-1)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore f(2) + g(-1) = (-9) + (-2) = -11$$

404 ㉮ ①

$1 \leq x \leq 5$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 6ax + 9a^2 + b = (x-3a)^2 + b$ 는 그래프의 축 $x=3a$ 의 위치에 따라 최솟값을 갖는 x 의 좌표가 달라진다.

(i) $3a < 1$, 즉 $a < \frac{1}{3}$ 일 때

함수의 최솟값은 $x=1$ 일 때

$$(1-3a)^2 + b = 9 \text{ 이므로 } b = -(1-3a)^2 + 9$$

(ii) $1 \leq 3a \leq 5$, 즉 $\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{5}{3}$ 일 때

함수의 최솟값은 꼭짓점의 y 좌표이므로 $b=9$

(iii) $3a > 5$, 즉 $a > \frac{5}{3}$ 일 때

함수의 최솟값은 $x=5$ 일 때

$$(5-3a)^2 + b = 9 \text{ 이므로 } b = -(5-3a)^2 + 9$$

(i)~(iii)에서 $2a+b=k$ 라 하면

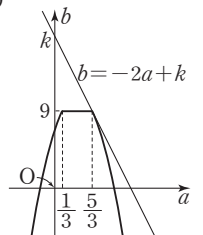
$b = -(5-3a)^2 + 9$ 의 그래프와 직선

$b = -2a + k$ 가 접할 때 k 는 최댓값을 갖는다. 따라서 이차방정식

$$-(5-3a)^2 + 9 = -2a + k, \text{ 즉}$$

$$9a^2 - 32a + 16 + k = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$\frac{D}{4} = (-16)^2 - 9(16+k) = 0 \quad \therefore 9k = 112$$



405 ㉮ 121

두 점 A, B는 직선 $y=4a$ 와 함수 $f(x)=ax^2$ 의 그래프가 만나는 점이므로 $4a=ax^2$, $x^2=4$ $\therefore x=2$ 또는 $x=-2$

즉, A($-2, 4a$), B($2, 4a$)

두 점 C, D는 직선 $y=ax$ 와 함수 $g(x)=-a(x-a)^2+a^2$ 의 그래프가 만나는 점이므로

$$ax = -a(x-a)^2 + a^2, x^2 - (2a-1)x + a(a-1) = 0$$

$$(x-a+1)(x-a) = 0 \quad \therefore x=a-1 \text{ 또는 } x=a$$

즉, C($a-1, a^2-a$), D(a, a^2)

직선 $y=4a$ 와 직선 $y=ax$ 가 만나는 점을 E라 하면

E($4, 4a$)

삼각형 ACE의 밑변을 $\overline{AE}$ 라 하면 삼각형의 높이는

$$4a - (a^2 - a) = -a^2 + 5a \text{ 이므로 삼각형 ACE의 넓이는}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{AE} \times (-a^2 + 5a) &= \frac{1}{2} \times \{4 - (-2)\} \times (-a^2 + 5a) \\ &= -3a^2 + 15a \end{aligned}$$

삼각형 BDE의 밑변을 $\overline{BE}$ 라 하면 삼각형의 높이는 $4a - a^2$ 이므로 삼각형 BDE의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BE} \times (4a - a^2) = \frac{1}{2} \times (4 - 2) \times (4a - a^2) \\ = 4a - a^2$$

사각형 ACDB의 넓이는 삼각형 ACE의 넓이에서 삼각형 BDE의 넓이를 빼면 되므로

$$(-3a^2 + 15a) - (4a - a^2) = -2a^2 + 11a \\ = -2\left(a - \frac{11}{4}\right)^2 + \frac{121}{8}$$

$$2 < a < 4 \text{에서 } a = \frac{11}{4} \text{일 때 } M = \frac{121}{8} \quad \therefore 8M = 121$$

TIP • 사각형 ACDB의 넓이를 어떻게 구할지 고민할 때, 마주 보는 두 변의 평행을 보장할 수 없고 사각형 내부를 쪼개서 계산하기도 어렵잖아? 이 경우에는 사각형의 내부에 집중하지 말고 외부에 눈을 돌려서 더 큰 도형에서 작은 도형을 빼는 방식으로 도형의 넓이를 구할 수 있는지 찾아봐!

406 154

조건 (가)에서

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \leq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 음수이고 최댓값은 0보다 작거나 같다.

모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq 0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 양수이고 최솟값은 0보다 크거나 같다.

조건 (나)에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 함수 $g(x)$ 의 최솟값이 같아지기 위해서는 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 함수 $g(x)$ 의 최솟값이 모두 0이어야 한다.

따라서 $f(x) = a(x-b)^2$ ($a < 0$), $g(x) = c(x-d)^2$ ($c > 0$)으로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

k 의 최댓값이 1일 때, x 의 값의 범위는 $-1 \leq x \leq 3$ ㉠

k 의 최솟값이 0일 때, x 의 값의 범위는 $-2 \leq x \leq 2$ ㉡

각 범위에서 $f(x)$ 의 최댓값과 $g(x)$ 의 최솟값이 같아지는 점이 존재하므로 $f(x)$ 의 최댓값과 $g(x)$ 의 최솟값은 각 범위에서 0이다.

㉠, ㉡의 공통 범위인 $-1 \leq x \leq 2$ 의 양 끝에 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표가 존재해야 하므로 상수 b, d 중 하나의 값은 -1 , 다른 하나의 값은 2이다. ㉢

조건 (다)에서 $f(0) = ab^2$ 이므로

$f(x) = f(0)$, 즉 $ax^2 - 2abx = 0$ 의 모든 실근의 합은

$$-\frac{2ab}{a} = 2b < 0 \quad \therefore b < 0$$

㉢에 의하여 $d = 2, b = -1$

즉, $f(x) = a(x+1)^2, g(x) = c(x-2)^2$

$f(1) = -2, g(1) = 2$ 이므로

$$f(1) = 4a = -2, g(1) = c = 2 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}, c = 2$$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2, g(x) = 2(x-2)^2$ 이므로

$$f(3) + g(11) = -8 + 162 = 154$$

407 ③

$$ax^2 = 4a, x^2 - 4 = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

$$A(-2, 4a), B(2, 4a)$$

$$-a(x-a)^2 - a^2 = -ax$$

$$x^2 + (-2a-1)x + a(a+1) = 0$$

$$(x-a)(x-a-1) = 0$$

$$x = a \text{ 또는 } x = a+1$$

$$C(a, -a^2), D(a+1, -a^2-a)$$

직선 $y = -ax$ 와 직선 $y = 4a$ 의 교점을 E라 하면 $E(-4, 4a)$

사각형 ACDB의 넓이는 삼각형 BDE의 넓이에서 삼각형 ACE의 넓이를 빼면 되므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times (a^2 + 5a) - \frac{1}{2} \times 2 \times (a^2 + 4a) = 2a^2 + 11a \\ = 2\left(a + \frac{11}{4}\right)^2 - \frac{121}{8}$$

$1 \leq a \leq 3$ 이므로 $a = 3$ 일 때 최댓값 51

408 18

조건 (가)에서

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 양수이고 최솟값은 0보다 크거나 같다.

모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \leq 0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 음수이고 최댓값은 0보다 작거나 같다.

조건 (나)에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값과 함수 $g(x)$ 의 최댓값이 같아지기 위해서는 함수 $f(x)$ 의 최솟값과 함수 $g(x)$ 의 최댓값이 모두 0이어야 한다.

따라서 $f(x) = a(x-b)^2$ ($a > 0$), $g(x) = c(x-d)^2$ ($c < 0$)으로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

k 의 최댓값 2일 때, x 의 값의 범위는 $2 \leq x \leq 6$ ㉠

k 의 최솟값 -1 일 때, x 의 값의 범위는 $-1 \leq x \leq 3$ ㉡

각 범위에서 $f(x)$ 의 최솟값과 $g(x)$ 의 최댓값이 같아지는 점이 존재하므로 $f(x)$ 의 최솟값과 $g(x)$ 의 최댓값은 각 범위에서 0이다.

㉠, ㉡의 공통 범위인 $2 \leq x \leq 3$ 의 양 끝에 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표가 존재해야 하므로 상수 b, d 중 하나의 값은 2, 다른 하나의 값은 3이다. ㉢

조건 (다)에서 방정식

$$g(x) = \alpha, \text{ 즉 } c(x-d)^2 - \alpha = cx^2 - 2cdx + cd^2 - \alpha = 0$$

$$\text{의 모든 실근의 합은 } -\frac{2cd}{c} = 2d \geq 5 \quad \therefore d \geq \frac{5}{2}$$

㉢에 의하여 $b = 2, d = 3$

$$\text{즉, } f(x) = a(x-2)^2, g(x) = c(x-3)^2$$

$$f(0) = 4, g(4) = -1 \text{이므로}$$

$$f(0) = 4a = 4, g(4) = c = -1 \quad \therefore a = 1, c = -1$$

$$\text{따라서 } f(x) = (x-2)^2, g(x) = -(x-3)^2 \text{이므로}$$

$$f(5) - g(6) = 9 - (-9) = 18$$

07 여러 가지 방정식

1등급 필수 내신 빈출 문제

p.079-086

409 ⑤

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ 을 인수분해 하면
 $(x+1)(x-2)(x-3) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 3$
 따라서 $\alpha = 3, \beta = -1$ 이므로 $\alpha + \beta = 2$

410 ①

$x^2 + 3x = t$ 라 하면
 $(x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) - 24 = 0$
 $t^2 + 2t - 24 = 0, (t-4)(t+6) = 0$
 $\therefore t = 4$ 또는 $t = -6$
 (i) $t = 4$ 일 때 $x^2 + 3x - 4 = 0$ 이므로
 근과 계수의 관계에 의하여 $a = -3$
 (ii) $t = -6$ 일 때 $x^2 + 3x + 6 = 0$ 이므로
 근과 계수의 관계에 의하여 $b = 6$
 $\therefore a + b = -3 + 6 = 3$

411 ⑤

$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 4ax + 2b = 0$ 의 두 근이 $-1, 2$ 이므로
 $x = -1, x = 2$ 를 각각 대입하여 정리하면

$$\begin{cases} 2a - b = -4 \\ 4a + b = 22 \end{cases} \therefore a = 3, b = 10$$

 따라서 주어진 사차방정식은
 $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 20 = 0$
 $(x+1)(x-2)(x^2 - x - 10) = 0$ 에서 $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -10$ 이므로
 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
 $= 1^2 - 2 \times (-10) = 21$
 $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2$
 $= 21^2 - 2 \times (-10)^2 = 241$
 $\therefore \alpha^4 + \beta^4 + a + b = 241 + 3 + 10 = 254$

412 ②

$x^4 + ax^3 + 8x^2 - 2x + b = 0$ 의 두 근이 $1, -1$ 이므로
 $x = 1, x = -1$ 을 각각 대입하여 정리하면

$$\begin{cases} a + b = -7 \\ -a + b = -11 \end{cases} \therefore a = 2, b = -9$$

 따라서 주어진 사차방정식은
 $x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 2x - 9 = 0$
 $(x-1)(x+1)(x^2 + 2x + 9) = 0$ 에서 $\alpha^2 + 2\alpha = -9$
 $\therefore \alpha^2 + 2\alpha + 10 = 1$

413 ④

$x^2 = t$ ($t \geq 0$)라 하면
 $x^4 + 2x^2 - 24 = (x^2)^2 + 2x^2 - 24$
 $= t^2 + 2t - 24$
 $= (t-4)(t+6) = 0 \quad \therefore t = 4 \leftarrow t \geq 0$
 즉, $x^2 = 4 \quad \therefore x = 2$ 또는 $x = -2$
 따라서 모든 실근의 곱은 -4 이다.

414 ② 196

$x^4 - x^2 + 16 = (x^4 + 8x^2 + 16) - 9x^2$
 $= (x^2 + 4)^2 - (3x)^2$
 $= (x^2 + 3x + 4)(x^2 - 3x + 4)$
 $f(x) = 0$ 에서 $\alpha + \beta > 0$ 이므로
 α, β 는 $x^2 - 3x + 4 = 0$ 의 해이다.
 $\therefore \alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 4, \alpha^2 - 3\alpha + 4 = 0, \beta^2 - 3\beta + 4 = 0$
 $\therefore (\alpha + 2)^2(\beta + 2)^2 = (\alpha^2 + 4\alpha + 4)(\beta^2 + 4\beta + 4)$
 $= 7\alpha \times 7\beta \leftarrow \alpha^2 - 3\alpha + 4 = 0, \beta^2 - 3\beta + 4 = 0$
 $= 49\alpha\beta = 196$

415 ② 36/49

$x^4 - 18x^2 + 49 = 0$ 에서 $(x^4 - 14x^2 + 49) - 4x^2 = 0$
 $(x^2 - 7)^2 - (2x)^2 = 0$
 $\therefore (x^2 - 2x - 7)(x^2 + 2x - 7) = 0$
 이차방정식 $x^2 - 2x - 7 = 0$ 의 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에
 의하여 $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -7$
 이차방정식 $x^2 + 2x - 7 = 0$ 의 근을 γ, δ 라 하면 근과 계수의 관계에
 의하여 $\gamma + \delta = -2, \gamma\delta = -7$
 $\therefore \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\delta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} + \frac{\gamma^2 + \delta^2}{\gamma^2\delta^2}$
 $= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} + \frac{(\gamma + \delta)^2 - 2\gamma\delta}{(\gamma\delta)^2}$
 $= \frac{2^2 - 2 \times (-7)}{(-7)^2} + \frac{(-2)^2 - 2 \times (-7)}{(-7)^2}$
 $= \frac{18}{49} + \frac{18}{49} = \frac{36}{49}$

416 ①

$x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면
 $x^2 - 3x - 2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$
 $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$
 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$
 $x + \frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $t^2 - 3t - 4 = 0$
 따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 t 의 값의 합은 3

417 21

$x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 - 4x - 3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = X$ 로 놓으면

$$X^2 - 4X - 5 = 0, (X+1)(X-5) = 0$$

$$\therefore X = -1 \text{ 또는 } X = 5$$

(i) $X = -1$ 일 때

$$x + \frac{1}{x} = -1 \text{에서 } x^2 + x + 1 = 0$$

이차방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$D_1 = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 < 0$ 이므로 이차방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X = 5$ 일 때

$$x + \frac{1}{x} = 5 \text{에서 } x^2 - 5x + 1 = 0$$

이차방정식 $x^2 - 5x + 1 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$D_2 = 5^2 - 4 \times 1 \times 1 > 0$ 이므로 이차방정식 $x^2 - 5x + 1 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 α, β 는 $x^2 - 5x + 1 = 0$ 의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 1$

$$\therefore (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 5^2 - 4 \times 1 = 21$$

418 4

$x^4 + (a+5)x^3 + (6a+4)x^2 + (a^2+5a)x + a^2$ 을 인수분해 하면

$(x+1)(x+a)(x^2+4x+a)$ 이므로

사차방정식 $(x+1)(x+a)(x^2+4x+a) = 0$ 에서 a 는 실수이므로 두 실근 $x = -1, x = -a$ 를 가진다.

즉, 방정식 $x^2 + 4x + a = 0$ 이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = 4 - a < 0 \quad \therefore a > 4$$

419 42

$x^3 + 9x^2 + (a+18)x + 3a = 0$ 을 인수분해 하면

$x^3 + 9x^2 + (a+18)x + 3a = (x+3)(x^2+6x+a)$ 이므로

삼차방정식 $(x+3)(x^2+6x+a) = 0$ 에서

(i) $x = -3$ 이 삼중근일 때

$$x^2 + 6x + a = (x+3)^2 \text{이어야 하므로 } a = 9$$

(ii) $x = -3$ 과 두 허근을 가질 때

방정식 $x^2 + 6x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 9 - a < 0 \quad \therefore a > 9$$

(i), (ii)에서 $a \geq 9$ 이므로 조건을 만족시키는 정수 a 의 값의 범위는 $9 \leq a \leq 12$

따라서 정수 a 의 값의 합은 $9 + 10 + 11 + 12 = 42$

420 4

$x^4 + (a+1)x^3 + (2a+1)x^2 + (3-a)x - 2(a+3) = 0$ 을 인수분해 하면 $(x-1)(x+2)\{x^2+ax+(a+3)\} = 0$ 이므로 사차방정식의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되기 위해서는 주어진 사차방정식이 한 개의 중근을 가져야 한다.

(i) $x = 1$ 이 사차방정식의 중근일 때

$x = 1$ 은 이차방정식 $x^2 + ax + a + 3 = 0$ 의 근이므로

$$1 + 2a + 3 = 0 \quad \therefore a = -2$$

사차방정식은 $(x-1)(x+2)(x^2-2x+1) = 0$

$$\text{즉, } (x-1)^3(x+2) = 0$$

이므로 서로 다른 실근은 $x = 1$ 또는 $x = -2$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x = -2$ 가 사차방정식의 중근일 때

$x = -2$ 가 이차방정식 $x^2 + ax + a + 3 = 0$ 의 근이므로

$$4 - a + 3 = 0 \quad \therefore a = 7$$

사차방정식은 $(x-1)(x+2)(x^2+7x+10) = 0$

$$\text{즉, } (x-1)(x+2)^2(x+5) = 0$$

이므로 서로 다른 실근은 $x = 1$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = -5$

따라서 주어진 조건을 만족시킨다.

(iii) 사차방정식이 $x \neq -2, x \neq 1$ 인 중근을 가질 때

방정식 $x^2 + ax + a + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

중근을 가질 때 $D = 0$ 을 만족시킨다.

$$D = a^2 - 4a - 12 = (a+2)(a-6) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 6$$

① $a = -2$ 인 경우 $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

사차방정식의 서로 다른 실근은 $x = 1$ 또는 $x = -2$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

② $a = 6$ 인 경우 $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$

사차방정식의 서로 다른 실근은

$$x = 1 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = -3$$

따라서 주어진 조건을 만족시킨다.

(i)~(iii)에서 모든 실수 a 의 값의 합은 $6 + 7 = 13$

421 3

$x^3 - kx^2 + (k-2)x + 4k + 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ 이므로

$x = 1$ 을 대입하면

$$1 - k + k - 2 + 4k + 1 = 4 \quad \therefore k = 1$$

주어진 삼차방정식은 $x^3 - x^2 - x + 5 = 0$ 이므로

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 3$$

422 ①

삼차방정식 $x^3+5x^2+6x-3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\beta+\gamma=-5, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=6, \alpha\beta\gamma=3$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} = 2$$

423 ②

삼차방정식 $x^3-x^2+4x-5=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\beta+\gamma=1, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4, \alpha\beta\gamma=5$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \\ &= (1-\gamma)(1-\alpha)(1-\beta) \\ &= 1 - (\alpha+\beta+\gamma) + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma \quad \text{다른 풀이} \\ &= 1 - 1 + 4 - 5 = -1 \end{aligned}$$

다른 풀이 $x^3-x^2+4x-5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ 이므로
 $x=1$ 을 대입하면 $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=-1$
 $\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=-1$

424 ④

$x^3-3x^2+6x-5=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\beta+\gamma=3, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=6, \alpha\beta\gamma=5$
 $x^3-3x^2+6x-5=0$ 에서 $(x^2-2x+3)(x-1)+x-2=0$

$$\begin{aligned} x \neq 1 \text{이므로 } x^2-2x+3 &= -\frac{x-2}{x-1} \\ \text{즉, } \alpha^2-2\alpha+3 &= -\frac{\alpha-2}{\alpha-1}, \beta^2-2\beta+3 = -\frac{\beta-2}{\beta-1}, \\ \gamma^2-2\gamma+3 &= -\frac{\gamma-2}{\gamma-1} \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha^2-2\alpha+3)(\beta^2-2\beta+3)(\gamma^2-2\gamma+3) \\ &= -\frac{(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2)}{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)} \\ &= -\frac{\alpha\beta\gamma-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+4(\alpha+\beta+\gamma)-8}{\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1} \quad \text{다른 풀이} \\ &= 3 \end{aligned}$$

다른 풀이 $x^3-3x^2+6x-5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ 이므로
 $x=1, x=2$ 를 각각 대입하면
 $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=-1, (2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=3$
 $\therefore (\alpha^2-2\alpha+3)(\beta^2-2\beta+3)(\gamma^2-2\gamma+3)$
 $= -\frac{(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2)}{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)} = -\frac{-3}{1} = 3$

425 ③

주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $-2+\sqrt{3}$ 이면
 $-2-\sqrt{3}$ 도 근이다.

$$\begin{aligned} (x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3}) &= 0, \text{ 즉 } x^2+4x+1=0 \text{에서} \\ x^3+ax^2+bx-3 &= (x-3)(x^2+4x+1) \\ &= x^3+x^2-11x-3 \end{aligned}$$

양변의 계수를 비교하면 $a=1, b=-11$ 이므로 $a-b=12$

426 ②

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 $1-i$ 이면 $1+i$ 도
 근이다.

다른 한 근을 α 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 곱은
 $2\alpha=-6 \quad \therefore \alpha=-3$

따라서 나머지 두 근의 합은 $(1+i)+(-3)=-2+i$

427 ①

주어진 사차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 $2i$ 이면 $-2i$ 도 근
 이다.

$$\begin{aligned} (x-2i)(x+2i) &= 0, \text{ 즉 } x^2+4=0 \text{에서} \\ x^4+ax^3+bx^2-12x+8 &= (x^2+4)(x^2+cx+d) \\ &= x^4+cx^3+(d+4)x^2+4cx+4d \end{aligned}$$

양변의 계수를 비교하면 $a=c, b=d+4, 4c=-12, 4d=8$
 따라서 $a=-3, b=6, c=-3, d=2$ 이므로
 $2a+b=0$

428 ④

$x^3=-1$ 에서 $x^3+1=0, (x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^2-x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로

$$\omega^3=-1, \omega^2-\omega+1=0$$

또한, $x^2-x+1=0$ 의 계수가 실수이므로 $\bar{\omega}$ 도 근이다.

$$\therefore \bar{\omega}^3=-1, \bar{\omega}^2-\bar{\omega}+1=0$$

이때 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\bar{\omega}=1$ 이므로 $\omega^2=\omega-1=-\bar{\omega}$
 $\omega^2+\omega^4+\omega^6+\omega^8=\omega^2-\omega+1+\omega^2=\omega^2$
 $\bar{\omega}+\bar{\omega}^3+\bar{\omega}^5+\bar{\omega}^7=\bar{\omega}-1-(\bar{\omega}-1)+\bar{\omega}=\bar{\omega}$
 $\therefore (\omega^2+\omega^4+\omega^6+\omega^8)+(\bar{\omega}+\bar{\omega}^3+\bar{\omega}^5+\bar{\omega}^7)=\omega^2+\bar{\omega}=\omega^2-\omega^2=0$

429 ③

$x^3=-1$ 에서 $x^3+1=0, (x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^2-x+1=0$ 의 한 근이 ω 이므로

$$\omega^3=-1, \omega^2-\omega+1=0$$

또한, $\omega^2-\omega+1=0$ 의 계수가 실수이므로 $\bar{\omega}$ 도 근이다.

$$\therefore \bar{\omega}^3=-1, \bar{\omega}^2-\bar{\omega}+1=0$$

즉, $\omega^6=1, \bar{\omega}^6=1$ 이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\bar{\omega}=1, \omega\bar{\omega}=1$ 이므로

$$\omega+\bar{\omega}=\omega\bar{\omega} \text{에서 } \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\bar{\omega}} = 1$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^3} + \dots + \frac{1}{\omega^{10}}\right) + \left(\frac{1}{\bar{\omega}} + \frac{1}{\bar{\omega}^2} + \frac{1}{\bar{\omega}^3} + \dots + \frac{1}{\bar{\omega}^{10}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^3} + \frac{1}{\omega^4}\right) + \left(\frac{1}{\bar{\omega}} + \frac{1}{\bar{\omega}^2} + \frac{1}{\bar{\omega}^3} + \frac{1}{\bar{\omega}^4}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^3}\right) + \left(\frac{1}{\bar{\omega}} + \frac{1}{\bar{\omega}^2} + \frac{1}{\bar{\omega}^3}\right) - \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\bar{\omega}} \\ &= \frac{\omega^2+\omega+1}{\omega^3} + \frac{\bar{\omega}^2+\bar{\omega}+1}{\bar{\omega}^3} - \left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\bar{\omega}}\right) \\ &= -2(\omega+\bar{\omega}) - 1 \leftarrow \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\bar{\omega}} = 1 \\ &= -3 \leftarrow \omega+\bar{\omega}=1 \end{aligned}$$

430 **답 ③**

$$x^3 = -1 \text{에서 } x^3 + 1 = 0, (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 한 허근이 ω 이므로

$$\omega^3 = -1, \omega^2 - \omega + 1 = 0, \omega^2 = -\frac{1}{\omega} = \omega - 1$$

$$f(n) = \frac{(1-\omega)^n}{\omega^n} = \frac{(-\omega^2)^n}{\omega^n} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + \dots + f(6) &= -\omega + \omega^2 - \omega^3 + \omega^4 - \omega^5 + \omega^6 \\ &= -\omega(1 - \omega + \omega^2) + \omega^4(1 - \omega + \omega^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

이므로 $a = b = 0$ 이 되어 $a + b = 0$

431 **답 ④**

$$x^3 = 1 \text{에서 } x^3 - 1 = 0, x^2 + x + 1 = 0$$

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 허근이 ω 이므로

$$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

또한, $x^2 + x + 1 = 0$ 의 계수가 실수이므로 $\bar{\omega}$ 도 근이다.

$$\therefore \bar{\omega}^3 = 1, \bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1 = 0$$

$$\neg. (1+\omega)^{10} = (-\omega^2)^{10} = \omega^{20} = (\omega^3)^6 \times \omega^2 = \omega^2 \text{ (거짓)}$$

$$\neg. \frac{\omega^2}{1+\omega} = \frac{-\omega-1}{1+\omega} = -1, \frac{\bar{\omega}}{1+\bar{\omega}^2} = \frac{\bar{\omega}}{-\omega} = -1 \text{이므로}$$

$$\frac{\omega^2}{1+\omega} + \frac{\bar{\omega}}{1+\bar{\omega}^2} = -2 \text{ (참)}$$

$$\neg. (1+\omega)^{3n} = (-\omega^2)^{3n} \text{이 되어 } n \text{이 홀수이면 } -1 \text{이다. (거짓)}$$

$$\neg. \omega^{4n} = (\omega^4)^n = \omega^n, (\omega+1)^{4n} = (-\omega^2)^{4n} = (\omega^8)^n = \omega^{2n} \text{이므로}$$

$$\omega^{4n} + (\omega+1)^{4n} + 1 = \omega^{2n} + \omega^n + 1$$

$$n=1 \text{일 때 } \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$n=2 \text{일 때 } \omega^4 + \omega^2 + 1 = \omega + \omega^2 + 1 = 0$$

$$n=3 \text{일 때 } \omega^6 + \omega^3 + 1 = 3$$

$$n=4 \text{일 때 } \omega^8 + \omega^4 + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

⋮

n 이 3의 배수일 때를 제외하고 항상 성립한다.

이때 50 이하의 자연수에서 3의 배수의 개수는 16이므로

$$50 - 16 = 34 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \kappa$ 이다.

432 **답 ③**

직육면체의 바닥의

가로의 길이는 $(30-2x)$ cm, 세로의 길이는 $(20-2x)$ cm

직육면체의 높이는 x cm이므로

$$x(30-2x)(20-2x) = 1008, \text{ 즉 } x^3 - 25x^2 + 150x - 252 = 0$$

$$(x-3)(x^2 - 22x + 84) = 0 \quad \therefore x = 3$$

433 **답 ④**

산책로 넓이는 $x+2+x-1=2x+1$ 이므로

$$\text{잔디의 넓이는 } x(x+2) - (2x+1) = x^2 - 1$$

$$\text{잔디를 심는 시간은 } (x^2 - 1)(x+2) = 90$$

$$x^3 + 2x^2 - x - 92 = 0$$

$$(x-4)(x^2 + 6x + 23) = 0 \quad \therefore x = 4$$

434 **답 ①**

$$\text{조건 (가)에서 } x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x-6) = 0 \text{이므로 } b < c < a \text{에 의하여}$$

$$a = 6, b = 1, c = 2$$

$$\overline{AP} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD} \text{이므로 } 6 \times 1 = 2 \times d \quad \therefore d = 3$$

조건 (나)에서 원의 반지름이 $c+d=5$ 이므로 원의 넓이는 25π

435 **답 ④**

$$x = y + 3 \text{을 } 2x^2 - 3xy + y^2 = 27 \text{에 대입하면}$$

$$2(y+3)^2 - 3y(y+3) + y^2 = 27 \quad \therefore y = 3$$

이를 $x = y + 3$ 에 대입하면 $x = 6$

$$\text{따라서 } \alpha = 6, \beta = 3 \text{이므로 } \alpha + \beta = 9$$

다른 풀이 $x - y = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$2x^2 - 3xy + y^2 = (x-y)(2x-y) = 3(2x-y) = 27$$

$$2x - y = 9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $x = 6, y = 3$

$$\text{따라서 } \alpha = 6, \beta = 3 \text{이므로 } \alpha + \beta = 9$$

436 **답 ②**

$$x - 2y = 5 \text{에서 } x = 2y + 5 \text{를 } x^2 + y^2 = n \text{에 대입하면}$$

$$(2y+5)^2 + y^2 = n, 5y^2 + 20y + 25 - n = 0$$

방정식 $5y^2 + 20y + 25 - n = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = 100 - 5(25 - n) > 0 \quad \therefore n > 5$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 6

437 **답 ⑭**

$$x - y = 4 \text{에서 } x = y + 4 \text{를 } x^2 - xy + 2y^2 = k \text{에 대입하면}$$

$$(y+4)^2 - (y+4)y + 2y^2 = k, 2y^2 + 4y + (16-k) = 0$$

방정식 $2y^2 + 4y + (16-k) = 0$ 이 오직 한 쌍의 해를 가지므로 판별

식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = 4 - 2(16 - k) = 2k - 28 = 0$$

$$\therefore k = 14$$

438 **답 ③**

$$\begin{cases} 6x + 3y = a \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{13}{4} \\ 2x - y = b \end{cases} \text{의 연립방정식의 해가 일치하므로 그}$$

$$\text{해는 연립방정식 } \begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ x^2 - y^2 = \frac{13}{4} \end{cases} \text{의 해와 같다.}$$

$x+y=\frac{3}{2}$ 에서 $y=\frac{3}{2}-x$ 를 $x^2-y^2=\frac{13}{4}$ 에 대입하면

$$x^2-\left(\frac{3}{2}-x\right)^2=\frac{13}{4} \quad \therefore x=\frac{11}{6}$$

이를 $y=\frac{3}{2}-x$ 에 대입하면 $y=-\frac{1}{3}$

$x=\frac{11}{6}, y=-\frac{1}{3}$ 을 $6x+3y=a, 2x-y=b$ 에 대입하면

$$a=11-1=10, b=2\times\frac{11}{6}-\left(-\frac{1}{3}\right)=4$$

$$\therefore ab=10\times 4=40$$

다른 풀이 $x+y=\frac{3}{2}$ ㉠

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=\frac{3}{2}(x-y)=\frac{13}{4}$$

$$x-y=\frac{13}{6} \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{11}{6}, y=-\frac{1}{3}$

다른 풀이

439 ㉡ ②

$x^2-xy-2y^2=0$ 에서 $(x+y)(x-2y)=0$ 이므로

$x=-y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-y$ 일 때

$x=-y$ 를 $x^2+2xy+4y^2=12$ 에 대입하면

$$(-y)^2+2y(-y)+4y^2=12, \text{ 즉 } y^2=4$$

$$\therefore y=-2 \text{ 또는 } y=2$$

이를 각각 $x=-y$ 에 대입하면

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$$

(ii) $x=2y$ 일 때

$x=2y$ 를 $x^2+2xy+4y^2=12$ 에 대입하면

$$(2y)^2+2y\times 2y+4y^2=12, \text{ 즉 } y^2=1$$

$$\therefore y=1 \text{ 또는 } y=-1$$

이를 각각 $x=2y$ 에 대입하면

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$$

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta$ 의 최댓값은 $\alpha=2, \beta=1$ 일 때 3

440 ㉡ ⑤

$x^2+9y^2=6xy$ 에서 $(x-3y)^2=0$ 이므로

$$x=3y$$

$x=3y$ 를 $x^2+y^2=100$ 에 대입하면

$$(3y)^2+y^2=100, \text{ 즉 } y^2=10$$

$$\therefore y=\sqrt{10} \text{ 또는 } y=-\sqrt{10}$$

이를 각각 $x=3y$ 에 대입하면

$$\begin{cases} x=3\sqrt{10} \\ y=\sqrt{10} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-3\sqrt{10} \\ y=-\sqrt{10} \end{cases}$$

따라서 $\alpha\beta$ 의 값은 30

441 ㉡ ⑤

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2-3x=4 & \text{..... ㉠} \\ x^2+y^2+y=1 & \text{..... ㉡} \end{cases}$ 에서 ㉠, ㉡은 모두 인수

분해가 되지 않는다.

$$\text{㉠}-\text{㉡에서 } -3x-y=3 \text{ 이므로 } y=-3x-3$$

이를 ㉠에 대입하면

$$x^2+(-3x-3)^2-3x=4, \text{ 즉 } 2x^2+3x+1=0$$

$$(x+1)(2x+1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=-\frac{1}{2}$$

이를 각각 $y=-3x-3$ 에 대입하면

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

이므로 $\alpha\beta$ 의 값은 0 또는 $\frac{3}{4}$

따라서 모든 $\alpha\beta$ 의 값의 합은 $\frac{3}{4}$

442 ㉡ $k \leq 4$

연립방정식 $\begin{cases} (x+4)(y+1)=k & \text{..... ㉠} \\ x(y-3)=k & \text{..... ㉡} \end{cases}$ 에서 ㉠, ㉡은 모두 인

수분해가 되지 않는다.

$$\text{㉠}-\text{㉡에서 } xy+x+4y+4-xy+3x=0 \text{ 이므로}$$

$$x=-y-1$$

이를 ㉡에 대입하면

$$(-y-1)(y-3)=k, \text{ 즉 } y^2-2y+k-3=0$$

이때 $y^2-2y+k-3=0$ 의 판별식을 D 라 하면 실근을 가져야 하므로 $D \geq 0$ 을 만족시켜야 한다.

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times(k-3)=-k+4 \geq 0$$

$$\therefore k \leq 4$$

443 ㉡ ③

연립방정식 $\begin{cases} -x^2-5xy=-4 & \text{..... ㉠} \\ x^2+xy+4y^2=4 & \text{..... ㉡} \end{cases}$ 에서 ㉠, ㉡은 모두 인

수분해가 되지 않는다.

$$\text{㉠}+\text{㉡에서 } -4xy+4y^2=0 \text{ 이므로}$$

$$y(x-y)=0$$

$$\therefore y=0 \text{ 또는 } x=y$$

(i) $y=0$ 일 때

$y=0$ 을 ㉠에 대입하면

$$-x^2-0=-4, \text{ 즉 } x^2=4$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=-2$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

(ii) $x=y$ 일 때

$x=y$ 를 ㉠에 대입하면

$$-y^2 - 5y^2 = -4, \text{ 즉 } y^2 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ 또는 } x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ y = \frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ y = -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

(i), (ii)에서 서로 다른 $\alpha\beta$ 의 값의 개수는 0, $\frac{2}{3}$ 의 2

444 14 cm

삼각형 ABC에 대하여 $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$ 라 하면

원의 넓이가 $289\pi \text{ cm}^2$ 이므로 반지름의 길이는 17 cm, 즉 삼각형 ABC의 빗변의 길이는 34 cm이다.

이때 피타고라스 정리에 의하여

$$a^2 + b^2 = 34^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

둘레의 길이가 80 cm이므로

$$a + b + 34 = 80, \text{ 즉 } a = -b + 46 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$(-b + 46)^2 + b^2 = 34^2, \text{ 즉 } b^2 - 46b + 480 = 0$$

$$\therefore b = 16 \text{ 또는 } b = 30$$

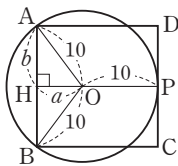
이를 각각 ㉡에 대입하면

$$\begin{cases} a = 30 \\ b = 16 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} a = 16 \\ b = 30 \end{cases}$$

따라서 두 변의 길이의 차는 14 cm

445 5

그림과 같이 원의 중심을 O, 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H, 선분 CD와 원이 접하는 점을 P라 하고, $\overline{OH}=a$, $\overline{AH}=b$ 라 하자.



이때 사각형 ABCD는 정사각형이므로

$$\overline{AB}=2b=\overline{BC}=a+10, \text{ 즉 } a=2b-10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 OAH는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$a^2 + b^2 = 100 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$(2b-10)^2 + b^2 = 100, \text{ 즉 } b^2 - 8b = 0$$

$$\therefore b = 0 \text{ 또는 } b = 8$$

이때 $b > 0$ 이므로 $b = 8$

따라서 정사각형 ABCD의 둘레의 길이는 $16 \times 4 = 64$

446 171

두 삼각형 ABC, DBA에서 $\angle BAD = \angle BCA$, $\angle B$ 는 공통이므로 $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ (AA 닮음)

$\overline{CD}=x$, $\overline{AC}=x-11$, $\overline{AB}=y$ 라 하면

$$\overline{AB} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{DA} \text{이므로 } y : 16 = (x-11) : 24$$

$$16(x-11) = 24y \quad \therefore y = \frac{2}{3}(x-11) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DB} : \overline{BA} \text{이므로 } y : (16+x) = 16 : y$$

$$\therefore y^2 = 16x + 256 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } \frac{4}{9}(x-11)^2 = 16x + 256$$

$$\text{이를 정리하면 } x^2 - 58x - 455 = 0, (x+7)(x-65) = 0$$

이때 $x > 0$ 이므로 $x = 65$

이를 ㉠에 대입하면 $y = 36$

따라서 $\overline{AB}=36$, $\overline{BC}=81$, $\overline{CA}=54$ 이므로

삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $36 + 81 + 54 = 171$

447 1

방정식 $xy + 2x + 3y + 1 = 0$ 에서

$$x(y+2) + 3(y+2) - 5 = 0, \text{ 즉 } (x+3)(y+2) = 5$$

이때 x, y 는 모두 정수이므로

(i) $x+3=1, y+2=5$ 일 때

$$x = -2, y = 3 \text{이므로 } xy = -6$$

(ii) $x+3=5, y+2=1$ 일 때

$$x = 2, y = -1 \text{이므로 } xy = -2$$

(iii) $x+3=-1, y+2=-5$ 일 때

$$x = -4, y = -7 \text{이므로 } xy = 28$$

(iv) $x+3=-5, y+2=-1$ 일 때

$$x = -8, y = -3 \text{이므로 } xy = 24$$

(i)~(iv)에서 xy 의 최솟값은 -6

448 -4

$$x^2 - 2xy + 2y^2 + 4y + 4 = 0 \text{에서}$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 + 4y + 4) = 0$$

$$\therefore (x-y)^2 + (y+2)^2 = 0$$

x, y 는 실수이므로 $x = -2, y = -2$

$$\therefore x + y = -4$$

449 52

사각형 ABCD에서 선분 AB의 길이를 a , 선분 BC의 길이를 b 라 하면 삼각형 ABD와 삼각형 BCD는 $\angle A = \angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$a^2 + 25 = b^2 + 64$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 39$$

자연수 a, b 에 대하여 $a+b, a-b$ 는 모두 자연수이므로

$$(a+b)(a-b)=39 \times 1=13 \times 3$$

(i) $a+b=39, a-b=1$ 일 때

두 식을 연립하여 풀면 $a=20, b=19$ 이므로

사각형 ABCD의 둘레의 길이는 $20+19+8+5=52$

(ii) $a+b=13, a-b=3$ 일 때

두 식을 연립하여 풀면 $a=8, b=5$ 이므로

사각형 ABCD의 둘레의 길이는 $8+5+8+5=26$

(i), (ii)에서 사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 52

450 답 -1

$3x^2+y^2+2xy-10x+2y+19=0$ 을 y 에 대하여 정리하면

$$y^2+2(x+1)y+(3x^2-10x+19)=0$$

이때 $y^2+2(x+1)y+(3x^2-10x+19)=0$ 의 판별식을 D 라 하면 x, y 는 실수이므로 $D \geq 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4}=(x+1)^2-(3x^2-10x+19)$$

$$=-2x^2+12x-18$$

$$=-2(x-3)^2 \geq 0$$

$$\therefore (x-3)^2 \leq 0$$

$$(x-3)^2=0, \text{ 즉 } x=3$$

이를 대입하면 $y=-4$

$$\therefore x+y=-1$$

451 답 5

사차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 네 근의 합은 10

$$\text{즉, } \alpha+\beta+\gamma+\delta=10$$

다른 풀이 $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$ 에서

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0$$

따라서 네 근은 1, 2, 3, 4이므로 모든 근의 합은

$$1+2+3+4=10$$

452 답 1

사차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

네 근의 곱은 -12

$$\text{즉, } a \times (-a) \times bi \times (-bi) = -12$$

$$\therefore a^2b^2=12 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 근의 곱의 합은 1

$$\text{즉, } a \times (-a) + bi \times (-bi) + (a-a)(bi-bi) = 1$$

$$\therefore -a^2+b^2=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a^2=3, b^2=4$

즉, $a^2=3, b=2$ 이므로 $a^2+b=5$

453 답 2

사차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

네 근의 합은 4, 즉 $a+b+c+d=4$

두 근의 곱의 합은 m , 즉 $ab+ac+ad+bc+bd+cd=m$

세 근의 곱의 합은 $-n$, 즉 $abc+abd+acd+bcd=-n$

네 근의 곱은 9, 즉 $abcd=9$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{bcd+acd+abd+abc}{abcd} = \frac{-n}{9} = 2$$

$$\therefore n=-18$$

$$P(1)=1-4+m-18+9=m-12=0 \quad \therefore m=12$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2$$

$$=(a+b+c+d)^2-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

$$=4^2-2 \times 12 = -8$$

$$\therefore m+n+a^2+b^2+c^2+d^2=12-18-8=-14$$

주의 근과 계수의 관계를 사용할 때 부호를 실수하지 않도록 조심해야 해.

454 답 -1, 5

두 수를 x, y 라 하면 연립방정식 $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=-5 \end{cases}$ 가 성립한다.

주어진 연립방정식에서 $x+y=u, xy=v$ 라 하면

x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2-ut+v=0$

즉, $t^2-4t-5=0$ 의 해이므로

$$t^2-4t-5=(t+1)(t-5)=0 \quad \therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$$

따라서 조건을 만족시키는 두 수는 -1, 5이다.

다른 풀이 두 수를 x, y 라 하면 x, y 는 연립방정식 $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=-5 \end{cases}$ 의 해

이다.

$x=4-y$ 를 $xy=-5$ 에 대입하면 $y^2-4y-5=0$,

$$(y+1)(y-5)=0$$

따라서 $y=5, x=-1$ 또는 $y=-1, x=5$ 이므로

조건을 만족시키는 두 수는 -1, 5

455 답 40

주어진 연립방정식에서 $x+y=u, xy=v$ 라 하면

$$\begin{cases} 2u+v=28 \\ u-2v=-16 \end{cases}$$

이를 연립하여 풀면 $u=8, v=12$

$$\therefore \begin{cases} x+y=8 \\ xy=12 \end{cases}$$

이때 x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2-ut+v=0$

즉, $t^2-8t+12=0$ 의 해이므로

$$t^2-8t+12=(t-2)(t-6)=0 \quad \therefore \begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2=40$$

456 답 10

주어진 연립방정식에서 $x+y=u$, $xy=v$ 라 하면

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v \text{ 이므로}$$

$$\begin{cases} u^2-2v+2u=18 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ u-2v=-2 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$u^2+(-2-u)+2u=u^2+u-2=18$$

$$u^2+u-20=(u+5)(u-4)=0 \quad \therefore u=-5 \text{ 또는 } u=4$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 각각 대입하면

$$\begin{cases} u=-5 \\ v=-\frac{3}{2} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} u=4 \\ v=3 \end{cases}$$

이때 두 근이 모두 양수이므로 $u=4$, $v=3$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2\times 3=10$$

457 답 ④

주어진 연립방정식에서 $x-y=u$, $xy=v$ 라 하면

$$\begin{cases} u+v=17 \\ u^2-2v=-26 \end{cases}$$

$v=17-u$ 를 $u^2-2v=-26$ 에 대입하면

$$u^2-2(17-u)=-26, u^2+2u-8=0$$

$$u=2 \text{ 또는 } u=-4$$

(i) $u=2$ 일 때

$$v=17-u \text{에 대입하면 } v=15$$

$$\therefore \alpha-\beta=2, \alpha\beta=15$$

$$\alpha+\beta=\pm\sqrt{2^2+4\times 15}=\pm 8$$

(ii) $u=-4$ 일 때

$$v=17-u \text{에 대입하면 } v=21$$

$$\therefore \alpha-\beta=-4, \alpha\beta=21$$

$$\alpha+\beta=\pm\sqrt{(-4)^2+4\times 21}=\pm 10$$

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta$ 의 최댓값은 10

458 답 4

① 단계 $x^2-y^2-x+y=0$ 인수분해 하기 20%

$$x^2-y^2-x+y=(x-y)(x+y-1)$$

이므로 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} (x-y)(x+y-1)=0 \\ x^2+y^2-3x-y=0 \end{cases}$$

② 단계 연립방정식의 해 α, β 구하기 60%

(i) $x=y$ 일 때

$$x=y \text{를 } x^2+y^2-3x-y=0 \text{에 대입하면}$$

$$y^2+y^2-3y-y=2y^2-4y$$

$$=2y(y-2)=0$$

$$\therefore y=0 \text{ 또는 } y=2$$

따라서 $x=0, y=0$ 또는 $x=2, y=2$ 이다.

(ii) $x=-y+1$ 일 때

$$x=-y+1 \text{을 } x^2+y^2-3x-y=0 \text{에 대입하면}$$

$$(-y+1)^2+y^2-3(-y+1)-y=2y^2-2$$

$$=2(y+1)(y-1)=0$$

$$\therefore y=-1 \text{ 또는 } y=1$$

따라서 $x=2, y=-1$ 또는 $x=0, y=1$ 이다.

③ 단계 $\alpha+\beta$ 의 최댓값 구하기 20%

(i), (ii)에서 모든 (α, β) 의 순서쌍은 $(0, 0), (2, 2), (2, -1), (0, 1)$

따라서 $\alpha+\beta$ 의 최댓값은 $2+2=4$

459 답 -6

① 단계 조건을 만족시키는 연립방정식을 구하고

$$x^2-y^2+2x-2y=0 \text{ 인수분해 하기 } 40\%$$

$$(x^2-y^2+2x-2y)^2+(x^2+y^2-4x+6y-12)^2=0 \text{에서}$$

$$(x^2-y^2+2x-2y)^2\geq 0, (x^2+y^2-4x+6y-12)^2\geq 0 \text{이므로}$$

$$\begin{cases} x^2-y^2+2x-2y=0 \\ x^2+y^2-4x+6y-12=0 \end{cases} \text{을 만족시켜야 한다.}$$

이때 $x^2-y^2+2x-2y=(x-y)(x+y+2)=0$ 이므로

$$\begin{cases} (x-y)(x+y+2)=0 \\ x^2+y^2-4x+6y-12=0 \end{cases} \text{을 만족시켜야 한다.}$$

② 단계 연립방정식의 해 x, y 구하기 50%

(i) $x=y$ 일 때

$$x=y \text{를 } x^2+y^2-4x+6y-12=0 \text{에 대입하면}$$

$$y^2+y^2-4y+6y-12=2y^2+2y-12$$

$$=2(y+3)(y-2)$$

$$\therefore y=-3 \text{ 또는 } y=2$$

따라서 $x=-3, y=-3$ 또는 $x=2, y=2$ 이다.

(ii) $x=-y-2$ 일 때

$$x=-y-2 \text{를 } x^2+y^2-4x+6y-12=0 \text{에 대입하면}$$

$$(-y-2)^2+y^2-4(-y-2)+6y-12=2y(y+7)$$

$$\therefore y=0 \text{ 또는 } y=-7$$

따라서 $x=-2, y=0$ 또는 $x=5, y=-7$ 이다.

③ 단계 $x+y$ 의 최솟값 구하기 10%

(i), (ii)에서 모든 (x, y) 의 순서쌍은

$$(-3, -3), (2, 2), (-2, 0), (5, -7)$$

따라서 $x+y$ 의 최솟값은 $-3-3=-6$

460 답 -70

① 단계 $\alpha+\beta+\gamma, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha, \alpha\beta\gamma$ 의 값 구하기 30%

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

세 근의 합은 4, 즉 $\alpha+\beta+\gamma=4$

두 근의 곱의 합은 5, 즉 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5$

세 근의 곱은 $-k$, 즉 $\alpha\beta\gamma=-k$

② 단계 $(\alpha+\beta+2)(\beta+\gamma+2)(\gamma+\alpha+2)=32$ 간단히 하기 60%

$\alpha+\beta+\gamma=4$ 이므로

$$\begin{aligned} & (\alpha+\beta+2)(\beta+\gamma+2)(\gamma+\alpha+2) \\ &= (6-\gamma)(6-\alpha)(6-\beta) \\ &= 216-36(\alpha+\beta+\gamma)+6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma \\ &= 216-36\times 4+6\times 5-(-k) \\ &= 102+k=32 \end{aligned}$$

③ 단계 k 의 값 구하기 10%

$$102+k=32 \text{이므로 } k=32-102=-70$$

461 9

① 단계 켈레근의 성질을 이용하여 $f(x)$ 인수분해 하기 30%

조건 (가)에서 $f(x)$ 의 계수가 유리수이므로 한 근이 $2+\sqrt{3}$ 이면 $2-\sqrt{3}$ 도 근이다.

따라서 유리수 p, q 에 대하여

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-(2+\sqrt{3}))(x-(2-\sqrt{3}))(x^2+px+q) \\ &= (x^2-4x+1)(x^2+px+q) \end{aligned}$$

로 놓을 수 있다.

② 단계 나머지정리를 이용하여 p, q 의 값 구하기 40%

조건 (나)에서 $f(x)$ 를 x^2-4x+3 , 즉 $(x-1)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $2x-1$ 이므로 나머지정리에 의하여

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, f(3) = 5 \\ \therefore f(1) &= -2(1+p+q) = 1, f(3) = -2(9+3p+q) = 5 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } p+q = -\frac{3}{2}, 3p+q = -\frac{23}{2}$$

$$\text{이를 연립하여 풀면 } p = -5, q = \frac{7}{2}$$

③ 단계 네 근의 합 구하기 30%

$$f(x) = (x^2-4x+1)\left(x^2-5x+\frac{7}{2}\right)$$

근과 계수의 관계에 의하여

$$x^2-4x+1=0 \text{의 두 근의 합은 } 4$$

$$x^2-5x+\frac{7}{2}=0 \text{의 두 근의 합은 } 5$$

따라서 $f(x)=0$ 의 네 근의 합은 $4+5=9$

462 2

① 단계 중근을 가질 조건 구하기 40%

이차방정식 $x^2-2(a+2b)x+a^2+4b^2+2ab+a+b=0$ 의

판별식을 D 라 하면 이차방정식이 중근을 가지므로 $\frac{D}{4}=0$ 을 만족시켜야 한다.

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (a+2b)^2 - (a^2+4b^2+2ab+a+b) \\ &= 2ab-a-b \\ &= 0 \end{aligned}$$

② 단계 자연수 조건으로 a, b 의 값 결정하기 50%

$$2ab-a-b=0 \text{에서 } \left(a-\frac{1}{2}\right)(2b-1)-\frac{1}{2}=0$$

양변에 2를 곱하여 정리하면 $(2a-1)(2b-1)=1$

a, b 는 자연수이므로 $2a-1=1, 2b-1=1 \quad \therefore a=1, b=1$

③ 단계 a^2+b^2 의 값 구하기 10%

$$\therefore a^2+b^2=1^2+1^2=2$$

1등급 완성 고난도 마스터 문제

p.087~089

463 ①

$$f(x) = x^4 - 7x^2 + (2a+1) \text{이라 하면 } f(x) = f(-x)$$

$f(x)$ 의 근 α 에 대하여 $f(\alpha)=0$ 이면 $f(-\alpha)=0$ 이다. 따라서 α 가 근이면 $-\alpha$ 도 근이다.

이때 $\beta = -\alpha$ 이면 $\alpha\beta = \alpha \times (-\alpha) = -\alpha^2 = \sqrt{5}$ 이므로 α 는 실수가 아니므로 불가능하다.

따라서 $\beta \neq -\alpha$ 이며 서로 다른 네 실근은 $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta$ 이다.

$x^2=X$ 라 하면 주어진 방정식은

$$X^2-7X+(2a+1)=0 \text{이고 이 방정식의 해는 } \alpha^2, \beta^2 \text{이다.}$$

근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = (\sqrt{5})^2 = 5 = 2a+1 \quad \therefore a=2$$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha^2+\beta^2=7$

$$\therefore \alpha^4+\beta^4 = (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = 49 - 10 = 39$$

464 ②

$$x^3-2x^2-kx+2k=0 \text{에서 } (x-2)(x^2-k)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x^2=k$$

$k>0$ 이면 주어진 방정식의 모든 근이 실수이므로 α, β 중 실수는 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $k<0$ 이므로 삼차방정식의 모든 근은

$$x=2 \text{ 또는 } x=\sqrt{k} \text{ 또는 } x=-\sqrt{k}$$

이때 실근은 $x=2$ 뿐이므로 $\alpha=2$ 또는 $\beta=2$

(i) $\alpha=2$ 일 때

$$\alpha^2 = -3\beta \text{에서 } 4 = -3\beta \quad \therefore \beta = -\frac{4}{3}$$

α, β 중 실근은 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\beta=2$ 일 때

$$\alpha^2 = -3\beta \text{에서 } \alpha^2 = -6$$

이때 α, γ 는 방정식 $x^2=k$ 의 근이므로 $k=\alpha^2=-6$ 이고,

$$k=\gamma^2=-6$$

(i), (ii)에서 $\beta^2+\gamma^2=4+(-6)=-2$

다른 풀이 $\alpha^2 = -3\beta$ 이고 α, β 중 하나만 실수이므로 α 는 순허수, β 는 실수이다.

삼차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 α 이면 $\bar{\alpha}$ 도 근이다.

$$\text{이때 } \alpha \text{가 순허수이므로 } \bar{\alpha} = -\alpha \quad \therefore \gamma = -\alpha$$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = \beta = 2$$

$$\alpha\beta\gamma = -\alpha^2\beta = -2\alpha^2 = -2k, \alpha^2 = k$$

$$\alpha^2 = -3\beta = -6 \text{이므로 } k = -6$$

$$\therefore \beta^2 + \gamma^2 = 2^2 + (-\alpha)^2 = 4 + k = -2$$

465 ①

x 에 대한 방정식 $x^3+ax^2+bx-5a=0$ 이 a 를 근으로 가지므로 대입하면 $a^3+a^3+ab-5a=a(2a^2+b-5)=0$ 에서

$$a=0 \text{ 또는 } 2a^2+b-5=0$$

(i) $a=0$ 일 때

$$x^3+bx^2-3ax-3ab=x^3+bx^2=x^2(x+b) \text{는}$$

$$x=0, x=-b \text{의 서로 다른 두 정수인 근을 가지므로 조건을}$$

만족시키지 않는다.

(ii) $2a^2+b-5=0$ 일 때

$$b=5-2a^2 \text{을 } x^3+ax^2+bx-5a=0 \text{에 대입하면}$$

$$x^3+ax^2+(5-2a^2)x-5a=0 \text{에서}$$

$$(x-a)(x^2+2ax+5)=0 \text{이 } a \text{를 포함한 서로 다른 세 정수인}$$

$$\text{근을 가지므로 방정식 } x^2+2ax+5=0 \text{이}$$

a 가 아닌 서로 다른 두 정수인 근을 가져야 한다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여 두 정수의 곱은 5이므로

$$x^2+2ax+5=(x-1)(x-5) \text{ 또는}$$

$$x^2+2ax+5=(x+1)(x+5)$$

① $x^2+2ax+5=(x-1)(x-5)$ 인 경우

$$a=-3 \text{이고 } b=5-2a^2 \text{이므로 } b=-13$$

$$x^3+bx^2-3ax-3ab=x^3-13x^2+9x-117$$

$$=(x-13)(x^2+9)$$

따라서 정수인 근은 13 하나뿐이므로 조건을 만족시킨다.

② $x^2+2ax+5=(x+1)(x+5)$ 인 경우

$$a=3 \text{이고 } b=5-2a^2 \text{이므로 } b=-13$$

$$x^3+bx^2-3ax-3ab=x^3-13x^2-9x+117$$

$$=(x-13)(x+3)(x-3)$$

따라서 정수인 근은 13, -3, 3으로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-3, b=-13$ 이므로

$$a+b=-3+(-13)=-16$$

466 ⑤

주어진 식을 인수분해 하면

$$x^3+(-a^2+2a-2)x^2+2a^2x-8a$$

$$=(x-2)\{x^2-a(a-2)x+4a\}=0$$

이므로 $x=2$ 는 주어진 삼차방정식의 한 실근이다.

(i) $\alpha=2$ 일 때

$$2 \times \gamma = -4 \text{에서 } \gamma = -2 \text{이므로 } 2 < \beta < -2 \text{가 되어 모순이다.}$$

(ii) $\beta=2$ 일 때

$$\alpha, \gamma \text{는 이차방정식 } x^2-a(a-2)x+4a=0 \text{의 두 근이므로}$$

$$\alpha \times \gamma = 4a$$

$$\text{조건에 의하여 } \alpha \times \gamma = -4 \quad \therefore a = -1$$

이를 이차방정식에 대입하면

$$x^2-3x-4=(x+1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 $\alpha=-1, \beta=2, \gamma=4$ 로 주어진 조건을 만족시킨다.

(iii) $\gamma=2$ 일 때

$$\alpha \times 2 = -4 \text{이므로 } \alpha = -2$$

$$x^2-a(a-2)x+4a=0 \text{에 } x=-2 \text{를 대입하면 } 2a^2+4=0$$

이를 만족시키는 실수 a 는 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에서 $a=-1$

다른 풀이 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = a^2 - 2a + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2a^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\alpha\beta\gamma = 8a$$

$$\alpha \times \gamma = -4 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

이므로 위 식에 대입하면

$$\alpha\beta\gamma = (\alpha\gamma)\beta = -4\beta = 8a$$

$$\therefore \beta = -2a \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③, ④를 ①에 대입하면

$$\alpha + \gamma = a^2 - 2a + 2 - \beta = a^2 - 2a + 2 + 2a = a^2 + 2$$

$$\text{즉 } \alpha + \gamma = a^2 + 2$$

③, ④를 ②에 대입하면

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \beta(\alpha + \gamma) - 4 = -2a(a^2 + 2) - 4 = 2a^2$$

$$-2a^3 - 4a - 4 = 2a^2, a^3 + a^2 + 2a + 2 = 0$$

$$a^3 + a^2 + 2a + 2 = (a+1)(a^2+2) = 0$$

a 는 실수이므로 $a=-1$

467 ④

방정식 $P(x)=0$ 의 한 실근을 α , 서로 다른 두 허근을 β, γ 라 하면

$$\text{방정식 } P(4x-2)=0 \text{의 근은 } 4x-2=\alpha, 4x-2=\beta, 4x-2=\gamma \text{를}$$

만족시키므로

$$x = \frac{\alpha+2}{4} \text{ 또는 } x = \frac{\beta+2}{4} \text{ 또는 } x = \frac{\gamma+2}{4}$$

조건 (가)에 의하여 서로 다른 두 허근의 곱이 10이므로

$$\beta\gamma = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

조건 (나)에 의하여 $\frac{\alpha+2}{4}=0$ 이고 서로 다른 두 허근의 합이 2이므로

$$\frac{\beta+2}{4} + \frac{\gamma+2}{4} = 2, \text{ 즉 } \alpha = -2, \beta + \gamma = 4 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡에 의하여 β, γ 를 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차 방정식은 $x^2 - 4x + 10 = 0$

α, β, γ 를 세 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 삼차방정식은 $(x+2)(x^2 - 4x + 10) = 0$

따라서 $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 20$ 이므로

$$a = -2, b = 2, c = 20$$

$$\therefore a - b + c = -2 - 2 + 20 = 16$$

468 ㉡ ②

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = -a, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b, \alpha\beta\gamma = -c$$

$x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ 의 세 근이 $\frac{1}{\alpha\beta}, \frac{1}{\beta\gamma}, \frac{1}{\gamma\alpha}$ 이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{a}{c} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{\alpha\beta} \times \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma} \times \frac{1}{\gamma\alpha} + \frac{1}{\gamma\alpha} \times \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta^2\gamma} + \frac{1}{\alpha\beta\gamma^2} + \frac{1}{\alpha^2\beta\gamma}$$

$$= \frac{\alpha\gamma + \alpha\beta + \beta\gamma}{(\alpha\beta\gamma)^2} = \frac{b}{c^2} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{\alpha\beta} \times \frac{1}{\beta\gamma} \times \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{1}{(\alpha\beta\gamma)^2} = \frac{1}{c^2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

㉢에서 $c^2 = 1$, ㉡에서 $b = 3$, ㉠에서 $a^2 = 4$

$$\therefore a^2 - b + c^2 = 4 - 3 + 1 = 2$$

469 ㉢ ③

삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 의 계수가 실수이므로 한 근이 $1 + \sqrt{5}i$ 이면 $1 - \sqrt{5}i$ 도 근이다.

이차방정식 $x^2 + ax + 3 = 0$ 의 계수가 실수이므로 $1 + \sqrt{5}i, 1 - \sqrt{5}i$ 중 하나가 근이면 나머지 하나도 근이다.

이때 $1 + \sqrt{5}i, 1 - \sqrt{5}i$ 가 이차방정식의 근이면 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 3이어야 하므로 불가능하다.

$$\therefore m \neq 1 + \sqrt{5}i, m \neq 1 - \sqrt{5}i$$

삼차방정식의 세 근은 $m, 1 + \sqrt{5}i, 1 - \sqrt{5}i$ 이므로

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - m)\{x - (1 + \sqrt{5}i)\}\{x - (1 - \sqrt{5}i)\}$$

$$= (x - m)(x^2 - 2x + 6)$$

$$= x^3 + (-2 - m)x^2 + (6 + 2m)x - 6m$$

$$\therefore a = -2 - m \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

m 은 이차방정식의 근이므로 $x = m$ 을 대입하면

$$m^2 + ma + 3 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $m^2 + m(-2 - m) + 3 = -2m + 3 = 0$

$$\therefore m = \frac{3}{2}$$

470 ㉣ ④

$(x - a)(x^2 + (1 - 3a)x + 6) = 0$ 의 서로 다른 세 실근이 $3, \alpha, \beta$ 이므로

(i) 3이 $x - a = 0$ 의 근일 때

$a = 3$ 이므로 주어진 방정식은 $(x - 3)(x^2 - 8x + 6) = 0$ 이고 방정식 $x^2 - 8x + 6 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-4)^2 - 6 > 0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

두 실근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 8, \alpha\beta = 6$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 64 - 12 = 52$$

(ii) 3이 $x^2 + (1 - 3a)x + 6 = 0$ 의 근일 때

$$x = 3$$
을 대입하면 $9 + 3 - 9a + 6 = 0 \quad \therefore a = 2$

주어진 방정식은

$$(x - 2)(x^2 - 5x + 6) = (x - 2)^2(x - 3)$$

조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\alpha^2 + \beta^2 = 52$

471 ㉣ ③

$f(x) = x^2 + ax + b$ 라 하면

(i) $\gamma = 2$ 일 때

$f(x) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 α, β 이다.

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -a$, 즉 실수이다.

이때 $(2\alpha + 2\beta - \gamma)^2 = (-2a - 2)^2 = -144$ 에서

$-2a - 2 = \pm 12i$ 이므로 불가능하다. $\leftarrow a$ 는 실수

(ii) $\alpha = 2$ 일 때

$f(x) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 β, γ 이다.

$$(4 + 2\beta - \gamma)^2 = -144$$
에서 $4 + 2\beta - \gamma = \pm 12i$

한 근이 $\beta = p + qi$ 이면 $\gamma = p - qi$ 도 근이다.

$$(4 + 2\beta - \gamma)^2 = (4 + (2p + 2qi) - (p - qi))^2 \\ = (4 + p + 3qi)^2 = -144$$

따라서 $4 + p + 3qi = \pm 12i$ 이므로 $4 + p = 0, 3q = \pm 12$ 이다.

$$\therefore p = -4, q = \pm 4$$

β 와 γ 는 $-4 - 4i$ 또는 $-4 + 4i$ 이다.

(iii) $\beta = 2$ 일 때

(ii)와 같은 방법으로 α 와 γ 는 $-4 - 4i$ 또는 $-4 + 4i$ 이다.

(i)~(iii)에서 $(4 + \alpha)(4 + \beta)(4 + \gamma) = 6 \times (-4i) \times (4i) = 96$

472 ㉣ ②

$x^4 - kx^3 + (6k - 1)x^2 + kx - 6k = 0$ 에서

$$(x + 1)(x - 1)(x^2 - kx + 6k) = 0$$

이므로 $x = 1, x = -1$ 은 항상 근이다.

자연수 m, n 에 대하여

$2m, 3n$ 이 이차방정식 $x^2 - kx + 6k = 0$ 의 두 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$$2m+3n=k, 6mn=6k$$

이를 연립하여 풀면

$$mn=2m+3n, mn-2m-3n=0$$

$$mn-2m-3n=(m-3)(n-2)-6=0$$

$$\therefore (m-3)(n-2)=6$$

m, n 은 자연수이므로 가능한 (m, n) 은

$$(4, 8), (5, 5), (6, 4), (9, 3)$$

따라서 $m+n$ 의 최솟값은 10

473 ②

삼차방정식 $x^3-6x^2+(k+8)x-2k=0$ 을 인수분해 하면

$$(x-2)(x^2-4x+k)=0$$

서로 다른 세 근을 $2, \alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면 α, β 는 이차방정식

$x^2-4x+k=0$ 의 서로 다른 두 실근이므로 근과 계수의 관계에

의하여 $\alpha+\beta=4, \alpha\beta=k$

(i) 직각삼각형의 빗변의 길이가 2일 때

$$\alpha^2+\beta^2=2^2$$

$$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16-2k=4 \text{에서 } k=6$$

따라서 이차방정식은 $x^2-4x+6=0$ 이고 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-6=-2<0 \text{이므로 실근을 갖지 않는다.}$$

(ii) 직각삼각형의 빗변의 길이가 β 일 때

$$2^2+\alpha^2=\beta^2$$

$$\beta^2-\alpha^2=(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)=4 \text{에서}$$

$$\beta+\alpha=4 \text{이므로 } \beta-\alpha=1 \quad \therefore \alpha=\frac{3}{2}, \beta=\frac{5}{2}$$

$$\therefore k=\alpha\beta=\frac{3}{2} \times \frac{5}{2}=\frac{15}{4}$$

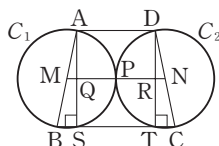
(i), (ii)에서 $k=\frac{15}{4}$ 이므로 $m=4, n=15$

$$\therefore m+n=4+15=19$$

474 ② 14

그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원을 C_1 이라 하고 선분 CD를 지름으로 하는 원을 C_2 라 하자. 두 선분 AB, CD의 중점을 M, N이라 하면 각각 두 원 C_1, C_2 의 중심이다.

$\overline{AB}=\overline{CD}$ 에 의하여 두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이가 서로 같고 원 C_1 과 원 C_2 는 오직 한 점에서 만나므로 원 C_1 과 원 C_2 가 만나는 점은 선분 MN의 중점이다. 선분 MN의 중점을 P, 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 T, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 S라 하자.



$\overline{QP}=\frac{1}{2}\overline{QR}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2} \times 8=4$ 이고, 두 삼각형 AMQ와 ABS는

서로 닮음이고 닮음비가 1:2이므로 $\overline{MP}=r$ 이라 하면

$$\overline{BS}=2\overline{MQ}=2(r-4)=2r-8$$

같은 방법으로 $\overline{CT}=2r-8, \overline{ST}=\overline{AD}=8$ 이므로

$$\overline{BC}=\overline{BS}+\overline{ST}+\overline{CT}=(2r-8)+8+(2r-8)=4r-8$$

직각삼각형 ABS에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AS}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BS}^2}=\sqrt{(2r)^2-(2r-8)^2}=4\sqrt{2r-4}$$

사각형 ABCD의 넓이 S 는

$$S=\frac{1}{2} \times (\overline{AD}+\overline{BC}) \times \overline{AS}$$

$$=\frac{1}{2} \times \{8+(4r-8)\} \times 4\sqrt{2r-4}$$

$$=8r\sqrt{2r-4}$$

둘레의 길이 l 은

$$l=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}=2r+(4r-8)+2r+8=8r$$

이고 $S^2+8l=9920$ 이므로

$$(8r\sqrt{2r-4})^2+8 \times 8r=9920$$

$$128r^3-256r^2+64r-9920=0$$

$$2r^3-4r^2+r-155=0$$

인수분해 하면

$$(r-5)(2r^2+6r+31)=0 \quad \therefore r=5$$

$$\overline{BT}=\overline{BS}+\overline{ST}=(2r-8)+8=2r=10$$

$$\overline{DT}=4\sqrt{2r-4}=4\sqrt{6}$$

피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BD}=\sqrt{\overline{BT}^2+\overline{DT}^2}=\sqrt{100+96}=\sqrt{196}=14$$

475 ②

삼차방정식 $x^3-ax^2+6x+b=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=a, \alpha\beta\gamma=-b$$

$$\beta+\gamma=a-\alpha, \gamma+\alpha=a-\beta, \alpha+\beta=a-\gamma \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\beta\gamma=-\frac{b}{\alpha}, \gamma\alpha=-\frac{b}{\beta}, \alpha\beta=-\frac{b}{\gamma} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에 의하여

$$f(\alpha)=5(\beta+\gamma)+\frac{1}{\beta\gamma}=5(a-\alpha)-\frac{\alpha}{b}$$

$$f(\beta)=5(\gamma+\alpha)+\frac{1}{\gamma\alpha}=5(a-\beta)-\frac{\beta}{b}$$

$$f(\gamma)=5(\alpha+\beta)+\frac{1}{\alpha\beta}=5(a-\gamma)-\frac{\gamma}{b}$$

따라서 α, β, γ 는 방정식 $f(x)-5(a-x)+\frac{x}{b}=0$ 의 세 근이다.

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x)-5(a-x)+\frac{x}{b}=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

이때 $x^3-ax^2+6x+b=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ 이므로

$$f(x)-5(a-x)+\frac{x}{b}=x^3-ax^2+6x+b$$

따라서 $f(x) = x^3 - ax^2 + \left(1 - \frac{1}{b}\right)x + b + 5a$ 이므로

$$f(3) - f(-3) = 60 - \frac{6}{b}$$

b 는 자연수이므로 $f(3) - f(-3) = 60 - \frac{6}{b}$ 의 최솟값은 54

476 46

삼차방정식 $ax^3 + 2bx^2 + 4bx + 8a = 0$ 을 인수분해 하면

$$(x+2)\{ax^2 - 2(a-b)x + 4a\} = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } ax^2 - 2(a-b)x + 4a = 0$$

즉, 삼차방정식이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지려면 이차방정식 $ax^2 - 2(a-b)x + 4a = 0$ 이 -2 가 아닌 서로 다른 두 정수를 근으로 가져야 한다.

이때 이차방정식 $ax^2 - 2(a-b)x + 4a = 0$ 의 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{2(a-b)}{a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta = \frac{4a}{a} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 에서 α, β 는 정수이므로

$$\alpha = 1, \beta = 4 \text{ 또는 } \alpha = -4, \beta = -1$$

$$\text{따라서 } \textcircled{1} \text{에서 } \frac{2(a-b)}{a} = 5 \text{ 또는 } \frac{2(a-b)}{a} = -5$$

$$\therefore b = -\frac{3}{2}a \text{ 또는 } b = \frac{7}{2}a$$

$$(i) b = -\frac{3}{2}a \text{ 일 때}$$

a, b 가 정수이므로 $|a|$ 는 2의 배수, $|b|$ 는 3의 배수이다.

즉, $|a| \leq 50, |b| \leq 50$ 인 정수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$$(2, -3), (4, -6), \dots, (32, -48),$$

$$(-2, 3), (-4, 6), \dots, (-32, 48)$$

이므로 개수는 32이다.

$$(ii) b = \frac{7}{2}a \text{ 일 때}$$

a, b 가 정수이므로 $|a|$ 는 2의 배수, $|b|$ 는 7의 배수이다.

즉, $|a| \leq 50, |b| \leq 50$ 인 정수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$$(2, 7), (4, 14), \dots, (14, 49),$$

$$(-2, -7), (-4, -14), \dots, (-14, -49)$$

이므로 개수는 14이다.

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $32 + 14 = 46$

477 35

$$x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0 \text{에서 } (x-1)(x^2 - 2x + 5) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x^2 - 2x + 5 = 0$$

삼차방정식 $x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$ 의 계수가 실수이므로 한 근이 α 이면 $\bar{\alpha}$ 도 근이다.

$\alpha, \bar{\alpha}$ 가 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^2 - 2\alpha + 5 = 0, \bar{\alpha}^2 - 2\bar{\alpha} + 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \bar{\alpha} = 2, \alpha\bar{\alpha} = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여

$$\bar{\alpha}^2 + 5 = 2\bar{\alpha} = 2 \times \left(\frac{5}{\alpha}\right) = \frac{10}{\alpha}$$

$$\alpha^3 + 10 = \alpha^2 \times \alpha + 10$$

$$= (2\alpha - 5)\alpha + 10$$

$$= 2\alpha^2 - 5\alpha + 10$$

$$= 2(\alpha^2 - 2\alpha + 5) - \alpha$$

$$= -\alpha = -\frac{5}{\alpha}$$

$$\therefore f(\alpha) = \frac{20}{\alpha^2 + 5} + \bar{\alpha} - 2$$

$$= \frac{20\alpha}{10} - \alpha = \alpha$$

$$f(\bar{\alpha}) = \frac{10}{\alpha^3 + 10} + \alpha^2 - 5\alpha + 11$$

$$= -\frac{10\bar{\alpha}}{5} + (-3\alpha + 6)$$

$$= -2\bar{\alpha} + 3\bar{\alpha} = \bar{\alpha}$$

즉, 삼차방정식 $f(x) - x = 0$ 의 두 근이 $\alpha, \bar{\alpha}$ 이고 다른 한 근을 β 라 하면 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x) - x = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})(x - \beta)$$

$$= (x^2 - 2x + 5)(x - \beta)$$

$$f(x) = (x^2 - 2x + 5)(x - \beta) + x \text{이고 } f(0) = 5 \text{이므로}$$

$$f(0) = -5\beta = 5 \quad \therefore \beta = -1$$

$$\text{따라서 } f(x) = (x^2 - 2x + 5)(x + 1) + x \text{이므로}$$

$$f(3) = 8 \times 4 + 3 = 35$$

478 50

삼차방정식 $ax^3 - (3a - 2b)x^2 + (3a - 6b)x - 9a = 0$ 을 인수분해 하면

$$(x-3)(ax^2 + 2bx + 3a) = 0$$

위 삼차방정식이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지려면

이차방정식 $ax^2 + 2bx + 3a = 0$ 이 3이 아닌 서로 다른 두 정수를 근으로 가져야 한다.

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $\frac{3a}{a} = 3$

이므로 가능한 서로 다른 두 근은

$$x = -1 \text{ 또는 } x = -3$$

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-\frac{2b}{a} = -4$

$$\therefore b = 2a$$

따라서 $|a| \leq 50, |b| \leq 50, b = 2a$ 이므로 $|2a| \leq 50$, 즉 $|a| \leq 25$ 를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b) 는

$$(1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots, (25, 50),$$

$$(-1, -2), (-2, -4), (-3, -6), \dots, (-25, -50)$$

이므로 개수는 50이다.

08 연립일차부등식

1등급 필수 내신 빈출 문제

p.091~098

479 답 ③

ㄱ. $0 < a < b$ 에서 $a^2 < b^2$ 이고, $ab > 0$ 이므로 $a^2 < b^2$ 의 양변을 ab 로

나누면 $\frac{a^2}{ab} < \frac{b^2}{ab}$, 즉 $\frac{a}{b} < \frac{b}{a}$ (참)

ㄴ. $0 < a < b$ 에서 $a^3 < b^3$ 이고, $ab > 0$ 이므로 $a^3 < b^3$ 의 양변을 ab 로

나누면 $\frac{a^3}{ab} < \frac{b^3}{ab}$, 즉 $\frac{a^2}{b} < \frac{b^2}{a}$ (거짓)

ㄷ. $0 < a < 1$ 에서 $1 < \frac{1}{a}$ 이므로 $0 < a < 1 < \frac{1}{a}$

$1 < b$ 에서 $0 < \frac{1}{b} < 1$ 이므로 $0 < \frac{1}{b} < 1 < b$

즉, $\frac{1}{a} - a = \frac{1-a^2}{a} > 0$ 이고, $\frac{1}{b} - b = \frac{1-b^2}{b} < 0$ 이므로

$\frac{1-a^2}{a} > \frac{1-b^2}{b}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄱ. $a < 1 < b$ 에서 $\frac{a}{b} < \frac{1}{b} < \frac{b}{b} = 1$ 이고, $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ 이므로

$\frac{a}{b} < \frac{1}{b} < \frac{b}{b} < \frac{b}{a} \quad \therefore \frac{a}{b} < \frac{b}{a}$

480 답 ①

ㄱ. $b < 0 < a$ 이면 $0 < -b$ 이다.

이때 $a+b < 0$ 이면 $0 < a < -b$ 이므로 $|a| < |b|$ (참)

ㄴ. $a+b > 0$ 이면 $0 < -b < a$ 이므로 $b^2 < a^2$ 이다.

이때 $ab < 0$ 이므로 $\frac{b^2}{ab} > \frac{a^2}{ab}$ 에서 $\frac{b}{a} > \frac{a}{b}$ (거짓)

ㄷ. $ab - a - b + 1 = a(b-1) - (b-1) = (a-1)(b-1)$ 이다.

이때 $b < 0 < a$ 에서 $b-1 < 0$ 이고, $1 \leq a$ 이면 $0 \leq a-1$ 이므로 $(a-1)(b-1) \leq 0$ 이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

481 답 ④

$mx+5 > nx+2$ 이면 $(m-n)x > -3$

① $m > n$ 이면 $m-n > 0$ 이므로 $x > -\frac{3}{m-n}$

② $m < n$ 이면 $m-n < 0$ 이므로 $x < -\frac{3}{n-m}$

③ $m=0, n>0$ 이면 $-nx > -3$ 에서 $x < \frac{3}{n}$

④ $m<0, n=0$ 이면 $mx > -3$ 에서 $x < -\frac{3}{m}$

⑤ $m=n$ 이면 $0 > -3$ 이므로 해는 모든 실수이다.

482 답 ②

$(3a+5b)x \geq 4b-3a$ 를 만족시키는 실수 x 가 존재하지 않으므로

$3a+5b=0, 4b-3a>0$ 이다.

이때 $3a=-5b$ 이므로 a, b 의 부호는 다르고, $4b>3a$ 이므로

$a<0<b$

$6ax+3a \geq -15bx+10b$ 에서

$(6a+15b)x \geq -3a+10b$

$-3ax \geq -9a \leftarrow 3a=-5b$

$x \geq 3 \leftarrow -3a>0$

483 답 ⑤

$(2a-3b)x \geq 5b-4a$ 는 항상 성립하므로

$2a-3b=0, 5b-4a \leq 0$ 이다.

이때 $2a=3b$ 이므로 a, b 의 부호는 같고, $5b-4a=-b \leq 0$ 이므로

$a \geq 0, b \geq 0$

$2ax+6a \leq -15bx-9b$ 에서

$(2a+15b)x \leq -6a-9b$

$18bx \leq -18b \leftarrow 2a=3b$

$x \leq -1 \leftarrow b \geq 0$

484 답 ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $a+b=4, ab=-3$

$a<0<b$ 이므로 $a-b<0$

$a^3bx-a \geq ab^3x-b$ 에서

$a^3bx-ab^3x \geq a-b$

$ab(a+b)(a-b)x \geq a-b$

$(-3) \times 4 \times (a-b)x \geq a-b \leftarrow a+b=4, ab=-3$

$x \geq -\frac{1}{12} \leftarrow a-b<0$

485 답 ③

$\left[\frac{3x}{5}-1\right]=2$ 이면 $2 \leq \frac{3x}{5}-1 < 3$ 이므로

$\left[\frac{3x}{5}-1\right] \leq 2$ 이면 $\frac{3x}{5}-1 < 3, \frac{3x}{5} < 4 \quad \therefore x < \frac{20}{3}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수의 개수는

1, 2, 3, 4, 5, 6의 6이다.

TIP 정수 n 에 대하여 $[x+n]=[x]+n$ 으로 분리할 수 있어!

486 답 ③

$x+25 < 4(x-3)$ 에서 $-3x < -37 \quad \therefore x > \frac{37}{3} \quad \dots\dots ㉠$

$3x-41 < -x+40$ 에서 $4x < 81 \quad \therefore x < \frac{81}{4} \quad \dots\dots ㉡$

㉠, ㉡의 공통부분은 $\frac{37}{3} < x < \frac{81}{4}$

따라서 정수 x 의 개수는 13, 14, 15, ..., 20의 8이다.

487 답 ②

$x+7 < 3x-2$ 에서 $-2x < -9 \quad \therefore x > \frac{9}{2} \quad \dots\dots ㉠$

$3(x-3) \leq x+5$ 에서 $2x \leq 14 \quad \therefore x \leq 7 \quad \dots\dots ㉡$

㉠, ㉡의 공통부분은 $\frac{9}{2} < x \leq 7$

따라서 정수 x 의 값은 5, 6, 7이므로 그 합은 18이다.

488 답 ④

$2y = x - 3$ 이므로 주어진 부등식에 대입하면

$$\begin{cases} 2x + 4 \geq x + 9 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ -3x + 2 \geq 2x - 23 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

㉠에서 $x \geq 5$

㉡에서 $-5x \geq -25 \quad \therefore x \leq 5$

㉠, ㉡의 공통부분은 $x = 5$

이것을 $2y = x - 3$ 에 대입하면 $y = 1$

$\therefore x - y = 4$

489 답 ①

$3(x+3)^2 - 7 = 2(3x+4)$ 에서 $3x^2 + 12x + 12 = 0$

$(x+2)^2 = 0 \quad \therefore x = -2$

주어진 연립부등식의 해가 $x = -2$ 이다.

$-3x + m \leq 2(x+1)$ 에서 $-5x \leq -m+2 \quad \therefore x \geq \frac{m-2}{5}$

$\frac{m-2}{5} = -2$ 이므로 $m = -8$

$n(x+1) \leq 2x - 3$ 에서 부등식의 해는 $x \leq -2$ 이어야 한다.

(i) $n > 2$ 일 때, $x \leq \frac{-n-3}{n-2} = -2$, 즉 $n = 7$

(ii) $n = 2$ 일 때, $0 \leq -5$ 이므로 해가 없다.

(iii) $n < 2$ 일 때, $x \geq \frac{-n-3}{n-2}$ 이므로 $x \leq -2$ 일 수 없다.

$\therefore m + n = -8 + 7 = -1$

주의 부등식을 풀 때 상수항이 아닌 항의 계수가 문자를 포함하는 경우 계수가 양수, 0, 음수인 경우로 꼭 나누어 생각해야 해!

490 답 ④

$2x + 6 \leq 3x + 3$ 에서 $x \geq 3$ ㉠

$3x + 3 < x + 13$ 에서 $2x < 10 \quad \therefore x < 5$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $3 \leq x < 5$

491 답 ③

$-2(x+2) \leq x+2$ 에서 $-3x \leq 6 \quad \therefore x \geq -2$ ㉠

$x+2 < \frac{3}{7}x+6$ 에서 $7x+14 < 3x+42 \quad \therefore x < 7$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $-2 \leq x < 7$

따라서 $M = 6, m = -2$ 이므로

$M - m = 6 - (-2) = 8$

492 답 30

$\frac{2x}{3} + 3 < x + 2$ 에서 $2x + 9 < 3x + 6 \quad \therefore x > 3$ ㉠

$x + 2 \leq \frac{3x}{4} + 4$ 에서 $4x + 8 \leq 3x + 16 \quad \therefore x \leq 8$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $3 < x \leq 8$

따라서 정수 x 의 값은 4, 5, 6, 7, 8이므로 그 합은 30이다.

493 답 ⑤

$3x - 10 \leq 5x - 2$ 에서 $-2x \leq 8 \quad \therefore x \geq -4$ ㉠

$5x - 2 < 2x + a$ 에서 $3x < a + 2 \quad \therefore x < \frac{a+2}{3}$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $-4 \leq x < \frac{a+2}{3}$ 이고, 연립부등식을 만족시키는 정수의 합이 -7 이므로

(i) 정수 x 가 $-4, -3$ 일 때

$-3 < \frac{a+2}{3} \leq -2$ 에서 $-11 < a \leq -8$

(ii) 정수 x 가 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$ 일 때

$2 < \frac{a+2}{3} \leq 3$ 에서 $4 < a \leq 7$

(i), (ii)에서 실수 a 의 최댓값은 7이다.

494 답 ①

$x - 3 < 2x - a$ 에서 $x > a - 3$ ㉠

$2x - a \leq -x + 16$ 에서 $x \leq \frac{a+16}{3}$ ㉡

주어진 연립부등식의 해가 $2 < x \leq b$ 이므로 ㉠, ㉡의 공통부분은

$a - 3 < x \leq \frac{a+16}{3}$ 이어야 한다.

$a - 3 = 2, \frac{a+16}{3} = b$ 이므로 $a = 5, b = 7 \quad \therefore ab = 35$

495 답 ②

$2ax - 5 \leq 2x + 3$ 에서 $(a-1)x \leq 4$ ㉠

$x + 1 < bx + 5$ 에서 $(1-b)x < 4$ ㉡

주어진 연립부등식의 해가 $-2 < x \leq 4$ 이므로 ㉠, ㉡의 공통부분은

$-\frac{4}{b-1} < x \leq \frac{4}{a-1}$ 이어야 한다.

$-\frac{4}{b-1} = -2, \frac{4}{a-1} = 4$ 이므로 $a = 2, b = 3 \quad \therefore a + b = 5$

496 답 ①

$x - a < 3x + 1$ 에서 $x > \frac{-a-1}{2}$ ㉠

$2x - 7 \leq -x + b$ 에서 $x \leq \frac{b+7}{3}$ ㉡

수직선 위의 해가 $-3 < x \leq 4$ 이므로 ㉠, ㉡의 공통부분은

$-\frac{a-1}{2} < x \leq \frac{b+7}{3}$ 이어야 한다.

$-\frac{a-1}{2} = -3, \frac{b+7}{3} = 4$ 이므로 $a = 5, b = 5 \quad \therefore b - a = 0$

497 답 ③

$ax + 2 \leq -3(x-1)$ 에서 $(a+3)x \leq 1$ ㉠

$ax + ac < bx + bc$ 에서 $(a-b)x < -c(a-b)$ ㉡

주어진 연립부등식의 해가 $x < -3$ 이므로 ㉠, ㉡의 공통부분은

$x < -3$ 이어야 한다.

(i) $a > b$ 일 때

㉠의 해는 $x < -c$ 이고, ㉡의 해는

① $a > -3$ 이면 $x \leq \frac{1}{a+3}$ 이고, 공통부분이 $x < -3$ 이므로

$-3 \leq \frac{1}{a+3}$, 즉 $a \geq -\frac{10}{3}$ 이므로 $a > -3, c=3$

② $a = -3$ 이면 ㉠은 항상 성립하고, 공통부분이 $x < -3$ 이므로 $c=3$

③ $a < -3$ 이면 $x \geq \frac{1}{a+3}$ 이므로 공통부분이 $x < -3$ 이 될 수 없다.

(ii) $a = b$ 일 때

㉠의 해가 없으므로 불가능하다.

(iii) $a < b$ 일 때

㉠의 해는 $x > -c$ 이므로 ㉠, ㉡의 공통부분이 $x < -3$ 이 될 수 없다.

(i)~(iii)에서 $a \geq -3, a > b, c=3$

498 ㉠ ⑤

$4x + a \leq 3x + 1$ 에서 $x \leq 1 - a$

$3x + 1 < 5x - 7$ 에서 $x > 4$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 $4 < 1 - a$ 이어야 한다.

$\therefore a < -3$

499 ㉠ ④

$3(2x - 1) < x + 2a$ 에서 $x < \frac{2a+3}{5}$

$x + 2 \leq \frac{5}{2}(x - 1)$ 에서 $x \geq 3$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 $\frac{2a+3}{5} \leq 3$ 이어야 한다.

$\therefore a \leq 6$

따라서 정수 a 의 최댓값은 6이다.

500 ㉠ ④

$4x - 3 > x + 3$ 에서 $x > 2$

$ax - 2 \leq 3x + 8$ 에서 $(a - 3)x \leq 10$ ㉡

(i) $a > 3$ 일 때

㉠의 해는 $x \leq \frac{10}{a-3}$

이때 주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 $\frac{10}{a-3} \leq 2$ 이어야

하므로 $a \geq 8$

(ii) $a = 3$ 일 때

㉠의 해는 모든 실수이므로 주어진 연립부등식의 해는 $x > 2$

(iii) $a < 3$ 일 때

㉠의 해는 $x \geq \frac{10}{a-3}$ 이므로 주어진 연립부등식은

$x > 2$ 또는 $x \geq \frac{10}{a-3}$ 을 해로 갖는다.

(i)~(iii)에서 정수 a 의 값의 범위는 $a \geq 8$ 이므로 최솟값은 8이다.

501 ㉠ ③

$x - 2 \leq \frac{x-23}{4}$ 에서 $x \leq -5$

$3(kx + 1) < kx + 1$ 에서 $kx < -1$ ㉡

(i) $k > 0$ 일 때

㉠의 해는 $x < -\frac{1}{k}$ 이므로 주어진 연립부등식은

$x < -\frac{1}{k}$ 또는 $x \leq -5$ 를 해로 갖는다.

(ii) $k = 0$ 일 때

㉠이 해를 갖지 않으므로 주어진 연립부등식은 해를 갖지 않는다.

(iii) $k < 0$ 일 때

㉠의 해는 $x > -\frac{1}{k} > 0$ 이므로 주어진 연립부등식은 해를 갖지 않는다.

(i)~(iii)에서 정수 k 의 값의 범위는 $k \leq 0$ 이므로 최댓값은 0이다.

502 ㉠ ③

$2x + 5k < 15x - 17$ 에서 $x > \frac{5k+17}{13}$

$\frac{5x-4}{2} \leq 2x + 2$ 에서 $x \leq 8$

이때 주어진 연립부등식의 해는 $\frac{5k+17}{13} < x \leq 8$ 이고 정수 x 의 개수가 7이므로

$1 \leq \frac{5k+17}{13} < 2$ 에서 $-\frac{4}{5} \leq k < \frac{9}{5}$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k 의 개수는 0, 1의 2이다.

503 ㉠ ②

$x + 4 < 5x + 2$ 에서 $x > \frac{1}{2}$

$5x + 2 \leq -4x + 3a + 2$ 에서 $x \leq \frac{a}{3}$

이때 주어진 연립부등식의 해는 $\frac{1}{2} < x \leq \frac{a}{3}$ 이고 정수 x 의 개수가 4

이므로 $4 \leq \frac{a}{3} < 5$ 에서 $12 \leq a < 15$

따라서 정수 a 는 12, 13, 14이므로 $m=3, n=12+13+14=39$

$\therefore \frac{n}{m} = \frac{39}{3} = 13$

504 ㉠ ④

$3x + 2 < x - 6$ 에서 $x < -4$

$\frac{2kx+28}{7} < \frac{kx+16}{4} + 2$ 에서 $kx < 56$ ㉡

(i) $k > 0$ 일 때

㉠의 해는 $x < -\frac{56}{k}$ 이므로 주어진 연립부등식의 해는 $x < -4$ 로 무수히 많다.

(ii) $k = 0$ 일 때

㉠의 해는 모든 실수이므로 주어진 연립부등식의 해는 $x < -4$ 로 무수히 많다.

(iii) $k < 0$ 일 때

㉠의 해는 $x > \frac{56}{k}$ 이므로 주어진 연립부등식의 해는

$$\frac{56}{k} < x < -4$$

이때 정수 x 의 개수가 3이므로 $-8 \leq \frac{56}{k} < -7$ 에서

$$-8 < k \leq -7$$

(i)~(iii)에서 조건을 만족시키는 정수 k 의 값은 -7 이다.

505 ②

전체 방의 개수를 x 라 하면 1학년 전체 학생 수는 $3x+7$

전체 학생 수는 최소 $5(x-3)+1$ 이고, 최대 $5(x-2)$ 이므로

전체 학생 수의 범위는 $5(x-3)+1 \leq 3x+7 \leq 5(x-2)$

$$5(x-3)+1 \leq 3x+7 \text{에서 } x \leq \frac{21}{2}$$

$$3x+7 \leq 5(x-2) \text{에서 } x \geq \frac{17}{2}$$

$$\therefore \frac{17}{2} \leq x \leq \frac{21}{2}$$

따라서 필요한 최소한의 방의 개수는 9이다.

506 ①

전체 상자의 개수를 x 라 하면 전체 초콜릿 수는 $9x+7$ 이다. 또, 11개씩 넣으면 초콜릿 11개가 채워지지 않은 상자가 1개 있고, 빈 상자가 1개 남으므로 학생 수의 범위는

$$11(x-2)+1 \leq 9x+7 \leq 11(x-2)+10 \text{이다.}$$

$$11(x-2)+1 \leq 9x+7 \text{에서}$$

$$11x-21 \leq 9x+7, \text{ 즉 } x \leq 14$$

$$9x+7 \leq 11(x-2)+10 \text{에서}$$

$$9x+7 \leq 11x-12, \text{ 즉 } \frac{19}{2} \leq x \text{이므로 } \frac{19}{2} \leq x \leq 14$$

따라서 가능한 상자의 개수 x 의 값은 10, 11, 12, 13, 14이므로 그 합은 60이다.

507 ② 19장 이상

티셔츠를 x 장 구입한다고 하면 200,000원 이상 구입해야 할인 쿠폰을 사용할 수 있으므로

$$12000x \geq 200000, \text{ 즉 } x \geq \frac{50}{3} \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

11,000원 할인 쿠폰을 사용할 때 총액은 $12000x-11000$

5% 할인 쿠폰을 사용할 때 총액은 $12000x \times (1-0.05) = 11400x$

5% 할인 쿠폰을 사용하는 것이 더 유리하려면

$$12000x-11000 > 11400x, \text{ 즉 } 600x > 11000$$

$$\therefore x > \frac{55}{3} \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 공통부분은 $x > \frac{55}{3}$

따라서 티셔츠를 19장 이상 구입해야 한다.

508 ⑤

$$\left| \frac{2x-3}{3} \right| < 2 \text{이면 } -2 < \frac{2x-3}{3} < 2$$

$$-6 < 2x-3 < 6, -3 < 2x < 9$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < x < \frac{9}{2}$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x 의 개수는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ 의 6이다.

509 ④

$$4 \leq \left| \frac{7x-3}{2} \right| \leq 8 \text{이면 } 4 \leq \frac{7x-3}{2} \leq 8 \text{ 또는 } -8 \leq \frac{7x-3}{2} \leq -4$$

$$8 \leq 7x-3 \leq 16 \text{ 또는 } -16 \leq 7x-3 \leq -8$$

$$11 \leq 7x \leq 19 \text{ 또는 } -13 \leq 7x \leq -5$$

$$\therefore \frac{11}{7} \leq x \leq \frac{19}{7} \text{ 또는 } -\frac{13}{7} \leq x \leq -\frac{5}{7}$$

따라서 $M=2, m=-1$ 이므로 $M+m=1$

510 ③

$$|2x+a| \leq 9 \text{이면 } -9 \leq 2x+a \leq 9$$

$$-a-9 \leq 2x \leq -a+9$$

$$\therefore -\frac{a+9}{2} \leq x \leq -\frac{a-9}{2}$$

이때 주어진 부등식의 해가 $-3 \leq x \leq b$ 이므로

$$-\frac{a+9}{2} = -3, -\frac{a-9}{2} = b \text{에서 } a = -3, b = 6$$

$$\therefore ab = -18$$

511 ④

(i) $x < -\frac{a}{4}$ 일 때

$$-4x-a < 2x+3 \text{에서 } x > \frac{-a-3}{6}$$

$$\text{해가 존재하려면 } \frac{-a-3}{6} < -\frac{a}{4} \text{이므로 } a < 6$$

(ii) $x = -\frac{a}{4}$ 일 때

$$0 < -\frac{a}{2} + 3 \text{에서 해가 존재하려면 } a < 6$$

(iii) $x > -\frac{a}{4}$ 일 때

$$4x+a < 2x+3 \text{에서 } x < \frac{-a+3}{2}$$

$$\text{해가 존재하려면 } -\frac{a}{4} < \frac{-a+3}{2} \text{이므로 } a < 6$$

(i)~(iii)에서 실수 a 의 값의 범위는 $a < 6$

512 ④

$$|x-2| \leq 5 \text{에서 } -5 \leq x-2 \leq 5 \quad \therefore -3 \leq x \leq 7$$

$$|x-3|+a > \frac{1}{3}x-1 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

(i) $x < 3$ 일 때

$$\text{㉠의 해는 } -x+3+a > \frac{1}{3}x-1 \text{에서 } x < 3+\frac{3}{4}a$$

이때 a 가 음수이므로 연립부등식의 해는 $-3 \leq x < 3 + \frac{3}{4}a$

(ii) $x \geq 3$ 일 때

$$\textcircled{1} \text{의 해는 } x-3+a > \frac{1}{3}x-1 \text{에서 } x > 3-\frac{3}{2}a$$

이때 a 가 음수이므로 연립부등식의 해는 $3-\frac{3}{2}a < x \leq 7$

이때 연립부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가 7이므로

$$1 < 3 + \frac{3}{4}a \leq 2, 5 \leq 3 - \frac{3}{2}a < 6$$

즉, $-\frac{8}{3} < a \leq -\frac{4}{3}, -2 < a \leq -\frac{4}{3}$ 를 동시에 만족시키는 a 의 값의

$$\text{범위는 } -2 < a \leq -\frac{4}{3} \quad \therefore m = -\frac{4}{3}$$

따라서 $-3m=4$

TIP • ① $-3 \leq x < 3 + \frac{3}{4}a$ 와 ② $3 - \frac{3}{2}a < x \leq 7$ 에 대하여

①에서 3을 기준으로 $\frac{3}{4}a$ 만큼 움직일 때, ②는 3을 기준으로 $\frac{3}{2}a$ 만큼 움직이므로 항상 ②의 범위가 ①의 범위보다 2배씩 증가하는 것을 생각하면 쉽게 구할 수 있어!

513 **답** 3

$$-2x+3 < |ax+3| < 19 \text{에서 } \begin{cases} -2x+3 < |ax+3| \\ |ax+3| < 19 \end{cases}$$

(i) $x < -\frac{3}{a}$ 일 때 $\textcircled{1}$

$$\begin{cases} -2x+3 < -ax-3 \\ -ax-3 < 19 \end{cases} \text{이므로 } \begin{cases} (a-2)x < -6 \\ -ax < 22 \end{cases}$$

① $a=1$ 일 때

부등식의 해는 $6 < x$ 이고, $\textcircled{1}$ 은 $x < -3$ 이므로 해가 없다.

② $a=2$ 일 때

부등식의 해는 없다.

③ $a \geq 3$ 일 때

$$x < -\frac{6}{a-2} \text{이고 } x > -\frac{22}{a} \text{이다.}$$

이때 해의 개수는 5가 될 수 없다.

(ii) $x \geq -\frac{3}{a}$ 일 때

$$\begin{cases} -2x+3 < ax+3 \\ ax+3 < 19 \end{cases} \text{이므로 } \begin{cases} (a+2)x > 0 \\ x < \frac{16}{a} \end{cases}$$

$$\text{즉, } 0 < x < \frac{16}{a}$$

이때 이를 만족시키는 정수 x 의 개수가 5이므로

$$5 < \frac{16}{a} \leq 6 \text{에서 } \frac{8}{3} \leq a < \frac{16}{5}, \text{ 즉 } a=3$$

(i), (ii)에서 자연수 a 의 값은 3이다.

514 **답** ③

(i) $x < 1$ 일 때

$$-x+1-x+5 \leq 8 \text{에서 } x \geq -1 \text{이므로 } -1 \leq x < 1$$

(ii) $1 \leq x < 5$ 일 때

$$x-1-x+5 \leq 8 \text{에서 } 4 \leq 8 \text{로 항상 성립하므로 } 1 \leq x < 5$$

(iii) $x \geq 5$ 일 때

$$x-1+x-5 \leq 8 \text{에서 } x \leq 7 \text{이므로 } 5 \leq x \leq 7$$

(i)~(iii)에서 부등식의 해는 $-1 \leq x \leq 7$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x 의 개수는 9이다.

515 **답** ①

$$2 < |x+1| - |x-3| \text{에서}$$

(i) $x < -1$ 일 때

$$2 < -x-1 - (-x+3) \text{이므로 } 2 < -4, \text{ 즉 해가 없다.}$$

(ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때

$$2 < x+1 - (-x+3) \text{이므로 } x > 2, \text{ 즉 } 2 < x < 3$$

(iii) $x \geq 3$ 일 때

$$2 < x+1 - (x-3) \text{이므로 } 2 < 4, \text{ 즉 } x \geq 3$$

(i)~(iii)에서 부등식의 해는 $x > 2$

따라서 실수 k 의 값은 2이다.

516 **답** ①

(i) $x < \frac{1}{2}$ 일 때

$$-2x+1-2x+3 \leq 12 \text{에서 } x \geq -2 \text{이므로 } -2 \leq x < \frac{1}{2}$$

(ii) $\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}$ 일 때

$$2x-1-2x+3 \leq 12 \text{에서 } 2 \leq 12 \text{로 항상 성립하므로 } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}$$

(iii) $x \geq \frac{3}{2}$ 일 때

$$2x-1+2x-3 \leq 12 \text{에서 } x \leq 4 \text{이므로 } \frac{3}{2} \leq x \leq 4$$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2 \leq x \leq 4$

$$a=-2, b=4 \text{이므로 } a+b=2$$

517 **답** ①

(i) $x < -\frac{6}{5}$ 일 때

$$-5x-6+3x-2 \leq 0 \text{에서 } x \geq -4 \text{이므로 } -4 \leq x < -\frac{6}{5}$$

(ii) $-\frac{6}{5} \leq x < \frac{2}{3}$ 일 때

$$5x+6+3x-2 \leq 0 \text{에서 } x \leq -\frac{1}{2} \text{이므로 } -\frac{6}{5} \leq x \leq -\frac{1}{2}$$

(iii) $x \geq \frac{2}{3}$ 일 때

$$5x+6-3x+2 \leq 0 \text{에서 } x \leq -4 \text{이므로 해가 없다.}$$

(i)~(iii)에 의해 주어진 부등식의 해는 $-4 \leq x \leq -\frac{1}{2}$

$$a=-4, b=-\frac{1}{2} \text{이므로 } ab=2$$

518 **답** ⑤

$$\text{부등식 } |3x+1| - 2|x-4| \leq a \text{에서}$$

(i) $x < -\frac{1}{3}$ 인 경우

$$-3x-1-2(-x+4) \leq a \quad \therefore x \geq -a-9$$

따라서 $a > -\frac{26}{3}$ 일 때 해가 존재하고 그 해는

$$-a-9 \leq x < -\frac{1}{3}$$

(ii) $-\frac{1}{3} \leq x < 4$ 인 경우

$$3x+1-2(-x+4) \leq a \quad \therefore x \leq \frac{a+7}{5}$$

따라서 $a \geq -\frac{26}{3}$ 일 때 해가 존재하고 그 해는

$$-\frac{26}{3} \leq a < 13 \text{ 일 때 } -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{a+7}{5}$$

$$a \geq 13 \text{ 일 때 } -\frac{1}{3} \leq x < 4$$

(iii) $x \geq 4$ 인 경우

$$3x+1-2(x-4) \leq a \quad \therefore x \leq a-9$$

따라서 $a \geq 13$ 일 때 해가 존재하고 그 해는

$$4 \leq x \leq a-9$$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$a = -\frac{26}{3} \text{ 일 때 } x = -\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$-\frac{26}{3} < a < 13 \text{ 일 때 } -a-9 \leq x \leq \frac{a+7}{5} \quad \dots\dots \textcircled{B} \leftarrow (i), (ii)$$

$$a \geq 13 \text{ 일 때 } -a-9 \leq x \leq a-9 \quad \dots\dots \textcircled{C} \leftarrow (i), (ii), (iii)$$

이때 $b-7 \leq x \leq b+7$ 과 같으므로 $\textcircled{A}$ 은 불가능하다.

$$\textcircled{B} \text{에서 } -a-9=b-7, \frac{a+7}{5}=b+7 \text{ 이므로 } a=3, b=-5$$

$$\textcircled{C} \text{에서 } -a-9=b-7, a-9=b+7 \text{ 이므로 } a=7, b=-9$$

$$\text{따라서 } a=3, b=-5 \text{ 이므로 } a+b=-2$$

다른 풀이 $f(x)=|3x+1|-2|x-4|$ 라 하자.

(i) $x < -\frac{1}{3}$ 일 때

$$-3x-1-2(-x+4) \leq a \text{ 이므로}$$

$$f(x)=-x-9 \text{ 이고, 해는 } x \geq -a-9$$

(ii) $-\frac{1}{3} \leq x < 4$ 일 때

$$3x+1-2(-x+4) \leq a \text{ 이므로}$$

$$f(x)=5x-7 \text{ 이고, 해는 } x \leq \frac{a+7}{5}$$

(iii) $x \geq 4$ 일 때

$$3x+1-2x+8 \leq a \text{ 이므로}$$

$$f(x)=x+9 \text{ 이고, 해는 } x \leq a-9$$

(i)~(iii)에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

$f(x) \leq a$ 에서 구하는 해는

$b-7 \leq x \leq b+7$ 와 같으므로 정

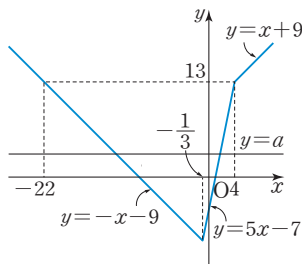
수인 해의 개수는 15이고, a 의 값

이 커질수록 정수인 해의 개수는

커진다. 이때 $a=13$ 이면 부등식

의 해는 $-22 \leq x \leq 4$, 즉 해의 개수가 27이므로 $a < 13$ 이다.

주어진 부등식의 해는 $-a-9 \leq x \leq \frac{a+7}{5}$



$$-a-9=b-7, \frac{a+7}{5}=b+7 \text{에서}$$

$$a=3, b=-5 \quad \therefore a+b=-2$$

519 **답 0**

$a \leq 0$ 에서 $3a < 3$ 이므로 부등식 $|2x-6a|+|x-3| \leq 6$ 에서

(i) $x < 3a$ 일 때

$$-2x+6a-x+3 \leq 6 \text{ 이므로 } x \geq 2a-1$$

$$\textcircled{1} 3a < 2a-1, \text{ 즉 } a < -1 \text{ 이면 해가 없다.}$$

$$\textcircled{2} 2a-1 \leq 3a, \text{ 즉 } -1 \leq a \leq 0 \text{ 이면 } 2a-1 \leq x < 3a$$

(ii) $3a \leq x < 3$ 일 때

$$2x-6a-x+3 \leq 6 \text{ 이므로 } x \leq 3+6a$$

$$\textcircled{1} 3+6a < 3a, \text{ 즉 } a < -1 \text{ 이면 해가 없다.}$$

$$\textcircled{2} 3a \leq 3+6a, \text{ 즉 } -1 \leq a \leq 0 \text{ 이면 } 3a \leq x \leq 3+6a$$

(iii) $x \geq 3$ 일 때

$$2x-6a+x-3 \leq 6 \text{ 이므로 } x \leq 3+2a$$

$$\textcircled{1} 3+2a < 3, \text{ 즉 } a < 0 \text{ 이면 해가 없다.}$$

$$\textcircled{2} 2+3a \geq 2, \text{ 즉 } a=0 \text{ 이면 } x=3$$

(i)~(iii)에서 $a < -1$ 이면 해가 없으므로 $f(a)=0$ 이고,

$$-1 \leq a \leq 0 \text{ 이면 } 2a-1 \leq x \leq 3+6a$$

$$\text{이때 } a=0 \text{에서 } f(a)=5=M \text{ 이므로 } a=0$$

520 **답 3**

$$|3x+7|-a \leq 3a+4 \text{에서 } |3x+7| \leq 4a+4$$

이때 해가 존재하지 않으려면 $4a+4 < 0$ 을 만족시켜야 하므로

$$a < -1$$

521 **답 4**

$$|-4x+7|+2a \geq 8 \text{에서 } |-4x+7| \geq -2a+8$$

이때 해가 모든 실수가 되려면 $-2a+8 \leq 0$ 을 만족시켜야 하므로

$$a \geq 4$$

522 **답 5**

(i) $x < -\frac{3}{4}$ 일 때

$$-4x-3-4x+7 \geq k \text{에서 } x \leq \frac{-k+4}{8} \text{ 이므로 모든 실수에 대하}$$

$$\text{여 성립하려면 } -\frac{3}{4} \leq \frac{-k+4}{8}, \text{ 즉 } k \leq 10$$

(ii) $-\frac{3}{4} \leq x < \frac{7}{4}$ 일 때

$$4x+3-4x+7 \geq k \text{에서 } k \leq 10 \text{ 이므로 모든 실수에 대해 성립하}$$

$$\text{려면 } k \leq 10$$

(iii) $x \geq \frac{7}{4}$ 일 때

$$4x+3+4x-7 \geq k \text{에서 } x \geq \frac{k+4}{8} \text{ 이므로 모든 실수에 대하여 성}$$

$$\text{립하려면 } \frac{k+4}{8} \leq \frac{7}{4}, \text{ 즉 } k \leq 10$$

(i)~(iii)에서 k 의 범위는 $k \leq 10$ 이므로 k 의 최댓값은 10이다.

$f(x) = |x-3| + |3x+3|$ 이라 하자.

(i) $x < -1$ 일 때

$$-x+3-3x-3 \leq t \text{ 이므로 } f(x) = -4x \text{이고, 해는 } x \geq -\frac{t}{4}$$

(ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때

$$-x+3+3x+3 \leq t \text{ 이므로 } f(x) = 2x+6 \text{이고, 해는 } x \leq \frac{t-6}{2}$$

(iii) $x \geq 3$ 일 때

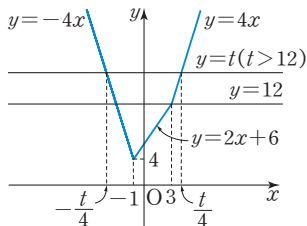
$$x-3+3x+3 \leq t \text{ 이므로 } f(x) = 4x \text{이고, 해는 } x \leq \frac{t}{4}$$

(i)~(iii)에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같고, $t=12$ 일 때 부등식의 해는 $-3 \leq x \leq 3$ 으로 정수인 해의 개수는 7이다. 즉, $t \geq 12$ 이므로 주어진 부등식의 해는

$$-\frac{t}{4} \leq x \leq \frac{t}{4}$$

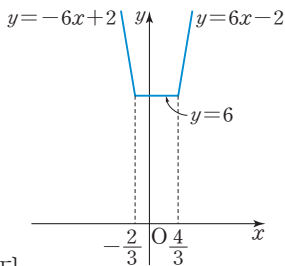
이때 부등식의 정수인 해의 개수가 7이면 $3 \leq \frac{t}{4} < 4$

$$\text{즉, } 12 \leq t < 16 \text{ 이므로 } a=12, b=16 \quad \therefore a+b=28$$



$f(x) = |3x+2| + |3x-4|$ 라 하면 $f(x)$ 에서 절댓값이 2개이고, 절댓값 안의 식이 일차항의 계수가 같으므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

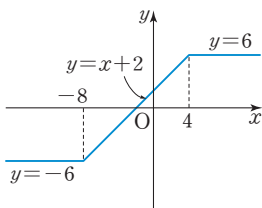
이때 $k \leq 6$ 이면 주어진 부등식이 항상 성립하므로 정수 k 의 최댓값은 6이다.



$f(x) = \left|\frac{1}{2}x+4\right| - \left|\frac{1}{2}x-2\right|$ 라 하면

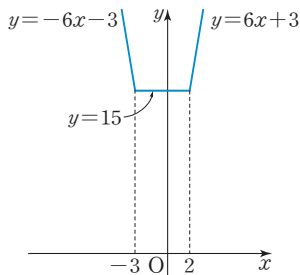
$f(x)$ 에서 절댓값이 2개이고, 절댓값 안의 식이 일차항의 계수가 같으므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

이때 $k > 6$ 이면 주어진 부등식이 항상 성립하므로 정수 k 의 최솟값은 7이다.



$f(x) = |3x-6| + |3x+9|$ 라 하면 $f(x)$ 에서 절댓값이 2개이고, 절댓값 안의 식이 일차항의 계수가 같으므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

이때 $k < 15$ 이면 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으므로 정수 k 의 최댓값은 14이다.



$|\sqrt{(x+5)^2} - |x-1|| \leq 5$ 에서 $||x+5| - |x-1|| \leq 5$

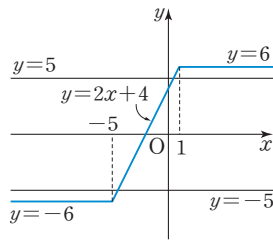
$$\text{즉, } -5 \leq |x+5| - |x-1| \leq 5$$

이때 $f(x) = |x+5| - |x-1|$ 이라

하면 $f(x)$ 에서 절댓값이 2개이고, 절댓값 안의 식이 일차항의 계수가 같으므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다. 구하는 부등식의 해는

$$-5 \leq 2x+4 \leq 5, \text{ 즉 } -\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

따라서 정수 x 의 개수는 $-4, -3, -2, -1, 0$ 의 5이다.



$2n-m=8$ 에서 $2n=m+8$ 이므로

$$|4x-3m-2n| + |4x-5m+2n| \leq k \text{ 는}$$

$$|4x-4m-8| + |4x-4m+8| \leq k \text{ 이고,}$$

$f(x) = |4x-4m-8| + |4x-4m+8|$ 이라 하면

$f(x)$ 에서 절댓값이 2개이고, 절댓값 안의 식이 일차항의 계수가 같으므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

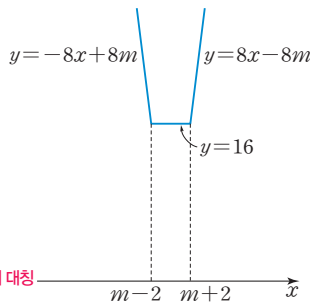
이때 $f(x) \leq k$ 를 만족시키는 x 값의 범위는

$$m - \frac{k}{8} \leq x \leq m + \frac{k}{8} \quad \leftarrow x=m \text{에 대하여 대칭}$$

만족시키는 정수의 개수가 7이려면

$$3 \leq \frac{k}{8} < 4 \quad \therefore 24 \leq k < 32$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k 의 개수는 8이다.



TIP 해의 범위가 $x=m$ 에 대하여 대칭인 상황이니 m 의 값과 상관없이 $\frac{k}{8}$ 의 값의 범위만 정하면 정수인 해의 개수를 쉽게 구할 수 있어!

$-|x-a| - |x| \geq b$ 는 $|x-a| + |x| \leq -b$ 이고,

$a=3n, b=-7n$ 이므로 $|x-3n| + |x| \leq 7n$ 에서

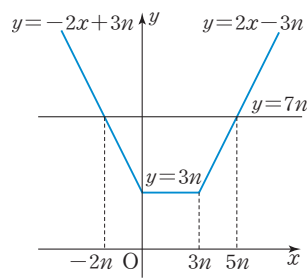
$f(x) = |x-3n| + |x|$ 라 하면

$f(x)$ 에서 절댓값이 2개이고, 절댓값 안의 식이 일차항의 계수가 같으므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

$f(x) \leq 7n$ 을 만족시키는 정수 x

의 개수 $A(3n, -7n) = 7n+1$

따라서 $7n+1 > 200$ 인 자연수 n 의 최솟값은 29이다.



TIP $-|x-a| - |x| \geq b$ 처럼 좌변의 그래프를 그리기 익숙하지 않은 경우 $|x-a| + |x| \leq -b$ 처럼 부등식의 방향을 조절해서 분석하면 편해!

530 **답** $-1 < x < 9$

① 단계 부등식 $f(x) < 0, f(x) \geq 0$ 의 해 각각 구하기 30%

$f(x) = |x-4| - 3 < 0$ 에서 $|x-4| < 3 \quad \therefore 1 < x < 7$
 $f(x) = |x-4| - 3 \geq 0$ 에서 $|x-4| \geq 3 \quad \therefore x \leq 1$ 또는 $x \geq 7$
 따라서 $1 < x < 7$ 에서 $f(x) < 0$ 이고,
 $x \leq 1$ 또는 $x \geq 7$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이다.

② 단계 부등식 $f(x) + 3 < 0, f(x) + 3 \geq 0$ 의 해 각각 구하기 30%

$f(x) + 3 = |x-4| < 0$ 에서 $|x-4| < 0 \quad \therefore$ 해가 없다.
 $f(x) + 3 = |x-4| \geq 0$ 에서 $|x-4| \geq 0 \quad \therefore$ 해는 모든 실수
 따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) + 3 \geq 0$ 이다.

③ 단계 $|f(x)| + |f(x) + 3| < 7$ 의 해 구하기 40%

(i) $1 < x < 7$ 일 때
 $f(x) < 0$ 이고, $f(x) + 3 \geq 0$ 이므로
 $-f(x) + f(x) + 3 < 7$ 에서 $3 < 7$ 로 항상 성립하므로 $1 < x < 7$
 (ii) $x \leq 1$ 또는 $x \geq 7$ 일 때
 $f(x) \geq 0$ 이고, $f(x) + 3 \geq 0$ 이므로
 $f(x) + f(x) + 3 < 7$ 에서 $|x-4| - 3 < 2$, 즉
 $|x-4| < 5, -1 < x < 9$ 이므로 주어진 부등식의 해는
 $-1 < x \leq 1$ 또는 $7 \leq x < 9$
 (i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-1 < x < 9$

531 **답** -2

① 단계 부등식 $f(x) < 0, f(x) \geq 0$ 의 해 각각 구하기 30%

$f(x) = |x-1| - 1 < 0$ 에서 $|x-1| < 1 \quad \therefore 0 < x < 2$
 $f(x) = |x-1| - 1 \geq 0$ 에서 $|x-1| \geq 1 \quad \therefore x \leq 0$ 또는 $x \geq 2$
 따라서 $0 < x < 2$ 에서 $f(x) < 0$ 이고,
 $x \leq 0$ 또는 $x \geq 2$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이다.

② 단계 부등식 $f(x) + 1 < 0, f(x) + 1 \geq 0$ 의 해 각각 구하기 30%

$f(x) + 1 = |x-1| < 0$ 에서 $|x-1| < 0 \quad \therefore$ 해가 없다.
 $f(x) + 1 = |x-1| \geq 0$ 에서 $|x-1| \geq 0 \quad \therefore$ 해는 모든 실수
 따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) + 1 \geq 0$ 이다.

③ 단계 정수 k 의 최댓값 구하기 40%

$|f(x)| \leq |f(x) + 1| + k$ 이면 $|f(x)| - |f(x) + 1| \leq k$
 이때 $|f(x)| - |f(x) + 1| = g(x)$ 라 하면
 (i) $0 < x < 2$ 일 때
 $f(x) < 0$ 이고, $f(x) + 1 \geq 0$ 이므로
 $g(x) = -f(x) - \{f(x) + 1\} = -2f(x) - 1$
 $= -2|x-1| + 1$
 이때 $g(x) \leq k$ 를 만족시키는 해가 없으므로 $g(x)$ 의 최솟값이 k
 보다 크다.
 $\therefore k \leq -1$

(ii) $x \leq 0$ 또는 $x \geq 2$ 일 때
 $f(x) \geq 0$ 이고, $f(x) + 1 \geq 0$ 이므로
 $g(x) = f(x) - \{f(x) + 1\} = -1$ 에서 $g(x) \leq k$ 를 만족시키는 해가
 없으므로 $k < -1$
 (i), (ii)에서 정수 k 의 범위는 $k < -1$ 이므로 최댓값은 -2 이다.

532 **답** 5

① 단계 a, b 의 값 구하기 40%

$3x - a \leq 5x + a$ 에서 $-2x \leq 2a \quad \therefore x \geq -a \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $7x - b < 5x + a$ 에서 $2x < a + b \quad \therefore x < \frac{a+b}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 주어진 부등식의 해가 $-5 \leq x < 4$ 이므로 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 의 공통부분은
 $-a \leq x < \frac{a+b}{2}$ 이어야 한다.
 $-a = -5, \frac{a+b}{2} = 4$ 이므로 $a = 5, b = 3$

② 단계 처음 부등식의 해 구하기 40%

처음 부등식은 $7x - 3 < 3x - 5 \leq 5x + 5$ 이므로
 $7x - 3 < 3x - 5$ 에서 $4x < -2 \quad \therefore x < -\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$
 $3x - 5 \leq 5x + 5$ 에서 $-2x \leq 10 \quad \therefore x \geq -5 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$
 $\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣}$ 의 공통부분은 $-5 \leq x < -\frac{1}{2}$

③ 단계 정수 해의 개수 구하기 20%

따라서 정수 x 의 개수는 $-5, -4, -3, -2, -1$ 의 5이다.

533 **답** 42

① 단계 x 의 값의 범위 구하기 20%

$|x-3a| < 2a$ 에서 $-2a < x-3a < 2a \quad \therefore a < x < 5a$
 이때 $|x-3a| \geq 0$ 이므로 $2a > 0$, 즉 $a > 0 \quad \therefore 0 < a < x < 5a$
 $\textcircled{㉠} \quad \textcircled{㉡}$

② 단계 정수 x 의 개수가 5인 a 의 값의 범위 구하기 60%

(i) 1, 2, 3, 4, 5일 때
 $0 < a < 1$ 이고, $1 < a \leq \frac{6}{5}$ 이므로
 $\textcircled{㉠} \quad \textcircled{㉡}$
 조건을 만족시키는 실수 a 는 존재하지 않는다.
 (ii) 2, 3, 4, 5, 6일 때
 $1 < a < 2$ 이고, $\frac{6}{5} < a \leq \frac{7}{5}$ 이므로
 $\textcircled{㉠} \quad \textcircled{㉡}$
 조건을 만족시키는 실수 a 의 값의 범위는 $\frac{6}{5} < a \leq \frac{7}{5}$
 (iii) $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ ($n \geq 3$)일 때
 $n-1 < a < n$ 이고, $\frac{n+4}{5} < a \leq \frac{n+5}{5}$
 $\textcircled{㉠} \quad \textcircled{㉡}$
 이때 $n \geq 3$ 에서 항상 $\frac{n+5}{5} < n-1$ 이므로
 조건을 만족시키는 실수 a 는 존재하지 않는다.
 (i)~(iii)에서 a 의 값의 범위는 $\frac{6}{5} < a \leq \frac{7}{5}$ 이므로 $p = \frac{6}{5}, q = \frac{7}{5}$

③ 단계 25pq의 값 구하기 20%

따라서 $25pq = 25 \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{5} = 42$

534 ⑤ 37

① 단계 a, b의 값 구하기 50%

(i) $x < -1$ 일 때

$$f(x) = -2x + 1 \text{ 이므로 } f(x) \leq 5 \text{ 에서}$$

$$-2x + 1 \leq 5, x \geq -2 \quad \therefore -2 \leq x < -1$$

(ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때

$$f(x) = 3 \text{ 이므로 } f(x) \leq 5 \text{ 에서 } 3 \leq 5 \quad \therefore -1 \leq x < 2$$

(iii) $x \geq 2$ 일 때

$$f(x) = 2x - 1 \text{ 이므로 } f(x) \leq 5 \text{ 에서}$$

$$2x - 1 \leq 5, x \leq 3 \quad \therefore 2 \leq x \leq 3$$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2 \leq x \leq 3$ 이므로 $a = -2, b = 3$

② 단계 도형의 넓이 구하기 50%

$x = 2a = -4$ 일 때 $y = 9$ 이고

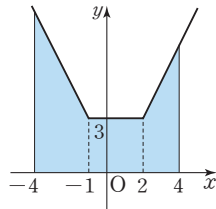
$x = a + 2b = 4$ 일 때 $y = 7$ 이므로 구하는

도형은 그림과 같다.

따라서 도형의 넓이는

$$\left\{ (9+3) \times 3 \times \frac{1}{2} \right\} + (3 \times 3)$$

$$+ \left\{ (7+3) \times 2 \times \frac{1}{2} \right\} = 37$$



I 등급 완성 고난도 마스터문제

p.099~101

535 ⑤ ⑤

상자의 개수를 x 라 하면 음료수의 개수는 $10x + 5$

음료수의 개수는 최소 $11(x-3) + 1$ 이고, 최대 $11(x-3) + 10$ 이므로 음료수의 개수의 범위는

$$11(x-3) + 1 \leq 10x + 5 \leq 11(x-3) + 10$$

위 부등식을 풀면 $28 \leq x \leq 37$ 이므로 $M = 375, m = 285$

$$\therefore M - m = 90$$

536 ⑤ ①

(i) $x \geq \frac{8}{3}$ 일 때

$$3x - 8 \leq k - 2x \text{ 에서 } x \leq \frac{k+8}{5} \text{ 이므로 } \frac{8}{3} \leq x \leq \frac{k+8}{5}$$

(ii) $x < \frac{8}{3}$ 일 때

$$-3x + 8 \leq k - 2x \text{ 에서 } x \geq -k + 8 \text{ 이므로 } -k + 8 \leq x < \frac{8}{3}$$

$$(i), (ii) \text{ 에서 } -k + 8 \leq x \leq \frac{k+8}{5}$$

이때 k 는 8보다 큰 정수이므로

$k > 8$ 이므로 $\frac{8}{3} < \frac{k+8}{5}$ 이다.

$k > 8$ 이므로 $-k + 8 < \frac{8}{3}$ 이다.

$$k = 9 \text{ 일 때 } -1 \leq x \leq \frac{17}{5}, k = 10 \text{ 일 때 } -2 \leq x \leq \frac{18}{5}$$

$$k = 11 \text{ 일 때 } -3 \leq x \leq \frac{19}{5}, k = 12 \text{ 일 때 } -4 \leq x \leq 4$$

$$k = 13 \text{ 일 때 } -5 \leq x \leq \frac{21}{5}, k = 14 \text{ 일 때 } -6 \leq x \leq \frac{22}{5}$$

모든 정수 x 의 값의 합이 0인 정수 k 는 $k = 11, 12$

따라서 조건을 만족시키는 모든 k 의 값의 합은 23이다.

537 ⑤ ②

$$(a+b)x \leq -2a+b \text{ 의 해가 } x \geq -\frac{3}{2} \text{ 이므로}$$

$$a+b < 0, \frac{-2a+b}{a+b} = -\frac{3}{2}, \text{ 즉 } a=5b \text{ 이고 } a < 0, b < 0$$

$$|ax-3b| < -3a-b \text{ 에서 } |5bx-3b| < -16b$$

$$16b < 5bx-3b < -16b$$

$$19b < 5bx < -13b$$

$$-\frac{13}{5} < x < \frac{19}{5}$$

따라서 정수 x 의 최댓값은 3, 최솟값은 -2이므로 두 값의 곱은 -6이다.

538 ⑤ ③

(i) $f(|5x-2|) \geq 6$ 에서

$$\textcircled{1} 5x-2 \geq 0, \text{ 즉 } x \geq \frac{2}{5} \text{ 일 때}$$

$$5x-2 \geq 5.5 \text{ 에서 } x \geq \frac{3}{2} \text{ 이므로 } x \geq \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{2} 5x-2 < 0, \text{ 즉 } x < \frac{2}{5} \text{ 일 때}$$

$$5x-2 \leq -5.5 \text{ 에서 } x \leq -\frac{7}{10} \text{ 이므로 } x \leq -\frac{7}{10}$$

$$\text{따라서 } x \leq -\frac{7}{10} \text{ 또는 } x \geq \frac{3}{2}$$

(ii) $f(|3x-3|) < 3$ 에서

$$\textcircled{1} 3x-3 \geq 0, \text{ 즉 } x \geq 1 \text{ 일 때}$$

$$3x-3 < 2.5 \text{ 에서 } x < \frac{11}{6} \text{ 이므로 } 1 \leq x < \frac{11}{6}$$

$$\textcircled{2} 3x-3 < 0, \text{ 즉 } x < 1 \text{ 일 때}$$

$$3x-3 > -2.5 \text{ 에서 } x > \frac{1}{6} \text{ 이므로 } \frac{1}{6} < x < 1$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{6} < x < \frac{11}{6}$$

$$(i), (ii) \text{ 에서 주어진 연립부등식의 해는 } \frac{3}{2} \leq x < \frac{11}{6}$$

$$\alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{11}{6} \text{ 이므로 } \alpha + \beta = \frac{10}{3}$$

539 ⑤ ①

$$f(x) = |x| + |2x+1| \text{ 이라 하자.}$$

(i) $x < -\frac{1}{2}$ 일 때

$$f(x) = (-x) + (-2x-1) = -3x-1$$

(ii) $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ 일 때

$$f(x) = (-x) + (2x+1) = x+1$$

(iii) $x \geq 0$ 일 때

$$f(x) = x + (2x+1) = 3x+1$$

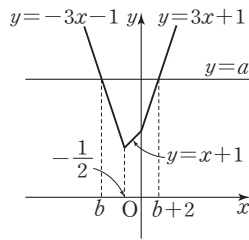
(i)~(iii)에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림

과 같다. $\leftarrow a > 1$

$$-3b-1=3(b+2)+1 \text{에서}$$

$$b = -\frac{4}{3}, a = 3b+7 = 3$$

$$\therefore ab = -4$$



540 ⑤

기울기가 1이고 점 $(m, 4)$ 를 지나는 일차함수는

$$f(x) = 1 \times (x-m) + 4, \text{ 즉 } f(x) = x-m+4$$

부등식 $|x-m+2| + |x-m-2| \leq x-m+4$ 에서

(i) $x < m-2$ 일 때

$$-x+m-2+(-x+m+2) \leq x-m+4 \text{이므로 } x \geq m-\frac{4}{3}$$

즉, 해가 없다.

(ii) $m-2 \leq x < m+2$ 일 때

$$x-m+2+(-x+m+2) \leq x-m+4 \text{이므로 } x \geq m$$

즉, $m \leq x < m+2$

(iii) $x \geq m+2$ 일 때

$$x-m+2+x-m-2 \leq x-m+4 \text{이므로 } x \leq m+4$$

즉, $m+2 \leq x \leq m+4$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $m \leq x \leq m+4$ 이므로 정수 x 의 개수는 5이다.

다른 풀이 부등식 $|x-m+2| + |x-m-2| \leq f(x)$ 에서

$$|f(x)-2| + |f(x)-6| \leq f(x) \quad \leftarrow f(x) \text{에 } x-m+4 \text{를 대입} \times \text{좌변의 식을 } f(x) \text{로 표현하기}$$

(i) $f(x) < 2$ 일 때

$$-f(x)+2+(-f(x)+6) \leq f(x) \text{이므로 } f(x) \geq \frac{8}{3}$$

즉, 해가 없다.

(ii) $2 \leq f(x) < 6$ 일 때

$$f(x)-2+(-f(x)+6) \leq f(x) \text{이므로 } f(x) \geq 4$$

즉, $4 \leq f(x) < 6$

(iii) $6 \leq f(x)$ 일 때

$$f(x)-2+f(x)-6 \leq f(x) \text{이므로 } f(x) \leq 8$$

즉, $6 \leq f(x) \leq 8$

(i)~(iii)에서 $4 \leq f(x) \leq 8$, 즉 $4 \leq x-m+4 \leq 8$ 에서

$m \leq x \leq m+4$ 이므로 정수 x 의 개수는 5이다.

541 ⑤

(i) $x < 0$ 일 때

$$f(x) = (-3x+2) - (-x) = -2x+2$$

(ii) $0 \leq x < \frac{2}{3}$ 일 때

$$f(x) = (-3x+2) - x = -4x+2$$

(iii) $x \geq \frac{2}{3}$ 일 때

$$f(x) = (3x-2) - x = 2x-2$$

(i)~(iii)에서 $y=f(x)$ 의 그래프는

그림과 같다.

이때 $f(x) \leq 2$ 를 만족시키는 x 의

값의 범위는 $0 \leq x \leq 2$

함수 $y=f(x)$ ($0 \leq x \leq 2$)와 직선

$y=mx+n$ 의 교점의 개수가 2가

되기 위해서는

(i) $m < 0$ 일 때

기울기 m 의 값의 범위는 $-4 < m < 0$

y 절편 n 은 $(0, 2)$ 를 지나는 직선을 포함하고 $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ 를 지나는

직선을 포함하지 않는 그 사이에 있으므로 $-\frac{2}{3}m - \frac{2}{3} < n \leq 2$

정수 m, n 의 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$(-3, 2), (-2, 1), (-2, 2), (-1, 1), (-1, 2)$ 의 5

(ii) $m > 0$ 일 때

기울기 m 의 범위는 $0 < m < 2$, 즉 $m=1$

y 절편 n 은 $(2, 2)$ 를 지나는 직선을 포함하고 $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ 를 지나는

직선을 포함하지 않는 그 사이에 있으므로 $-\frac{4}{3} < n \leq 0$

정수 m, n 의 순서쌍 (m, n) 의 개수는 $(1, -1), (1, 0)$ 의 2

(iii) $m=0$ 일 때

$$y=n, \text{ 즉 } -\frac{2}{3} < n \leq 2 \text{이므로}$$

순서쌍 (m, n) 의 개수는 $(0, 0), (0, 1), (0, 2)$ 의 3

(i)~(iii)에서 조건을 만족시키는 정수 m, n 의 순서쌍 (m, n) 의 개수는 10이므로 k 의 값은 10이다.

542 ③

$$a-b=-20 \text{에서 } b=a+20 \text{이므로}$$

$$|5x-4a-b| + |5x-6a+b| \leq 3k \text{이면}$$

$$5|x-(a+4)| + 5|x-(a-4)| \leq 3k$$

$$|x-(a+4)| + |x-(a-4)| \leq \frac{3}{5}k$$

$$f(x) = |x-(a+4)| + |x-(a-4)| \text{라 하면}$$

(i) $x < a-4$ 일 때 $f(x) = -2x+2a$

(ii) $a-4 \leq x < a+4$ 일 때 $f(x) = 8$

(iii) $x \geq a+4$ 일 때 $f(x) = 2x-2a$

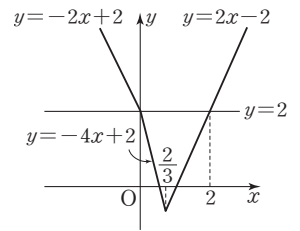
(i)~(iii)에서 $8 < \frac{3}{5}k$ 인 k 에 대하여 부등식 $f(x) \leq \frac{3}{5}k$ 의 해는

$$a - \frac{3}{10}k \leq x \leq a + \frac{3}{10}k \quad \leftarrow x=a \text{에 대하여 대칭}$$

정수 x 의 개수가 13이므로 $6 \leq \frac{3}{10}k < 7$

가능한 정수 k 의 개수는 20, 21, 22, 23의 4

따라서 $n=4, s=86$ 이므로 $n+s=90$ 이다.



$f(x) = |x-a| - |x-b|$ 라 하면 $-40 < f(x) < 40$

x 에 대한 방정식 $x^3 + bx + 7a = 0$ 의 근이 a 를 포함한 서로 다른 세 근이므로

(i) 세 근이 $a, -1, 7$ 일 때

근과 계수의 관계에서 세 근의 합이 0이므로 $a = -6$

두 근끼리의 곱의 합은 b 이므로 $6a - 7 = -43 = b$

$f(x)$ 에서 절댓값이 2개이고, 절댓값 안의 식이 일차항의 계수가 같으므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

이때 부등식을 만족시키는 해의 개수가 무수히 많으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 세 근이 $a, 1, -7$ 일 때

근과 계수의 관계에서 세 근의 합이 0이므로 $a = 6$

두 근끼리의 곱의 합은 b 이므로 $-6a - 7 = -43 = b$

$f(x)$ 에서 절댓값이 2개이고, 절댓값 안의 식이 일차항의 계수가 같으므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

이때 부등식을 만족시키는 해는 $-40 < -2x - 37 < 40$

$$\therefore -\frac{77}{2} < x < \frac{3}{2}$$

(i), (ii)에서 정수 x 의 개수는 40이므로 k 의 값은 40이다.

주의 $y = |x+6| - |x+43|$ 의 그래프에서 절댓값 안의 값이 0이 되는 x 값은 $x = -6, x = -43, -43 < -60$ 이니까 $y = -(|x+43| - |x+6|)$ 의 그래프를 그린다고 생각해야 하고, $y = |x-6| - |x+43|$ 의 그래프도 마찬가지로 $y = -(|x+43| - |x-6|)$ 의 그래프를 그린다고 생각해야 해!

$f(x) = |x-k| - |x+2|$ 라 하자.

(i) $k < -2$ 인 경우

① $x < k$ 일 때, $f(x) = k+2$

② $k \leq x < -2$ 일 때, $f(x) = 2x - k + 2$

③ $x \geq -2$ 일 때, $f(x) = -k - 2$

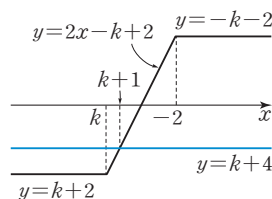
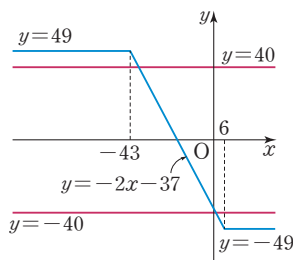
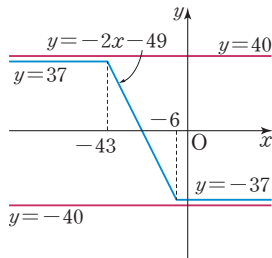
①~③에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

$f(x) \geq k+4$ 의 해는 $y = f(x)$ 의 그래프가 $y = k+4$ 의 그래프보다 위에 있는 x 의 범위이므로

$$x \geq k+1$$

이때 음의 정수 x 의 개수가 2가 되려면

$$-3 < k+1 \leq -2 \quad \therefore -4 < k \leq -3$$



(ii) $k \geq -2$ 인 경우

① $x < -2$ 일 때, $f(x) = k+2$

② $-2 \leq x < k$ 일 때, $f(x) = -2x + k - 2$

③ $k \leq x$ 일 때, $f(x) = -k - 2$

①~③에서 $y = f(x)$ 의 그래프는

그림과 같다.

$f(x) \geq k+4$ 의 해는 $y = f(x)$ 의 그래프가 $y = k+4$ 의 그래프보다 위에 있는 x 의 범위이므로 해가 없다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 음의 정수 k 의 값은 -3 이다.

(i) $x < 0$ 일 때

$$(-2x) + (-2x + a) < b \text{에서 } x > -\frac{b-a}{4} \text{이므로}$$

$$-\frac{b-a}{4} < x < 0$$

(ii) $0 \leq x < \frac{a}{2}$ 일 때

$$2x + (-2x + a) < b \text{에서 } a < b \text{이므로 } 0 \leq x < \frac{a}{2}$$

(iii) $x \geq \frac{a}{2}$ 일 때

$$2x + (2x - a) < b \text{에서 } x < \frac{b+a}{4} \text{이므로 } \frac{a}{2} \leq x < \frac{b+a}{4}$$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-\frac{b-a}{4} < x < \frac{b+a}{4}$

$$N(8k, 16k-8) \text{에서 } -\frac{(16k-8)-8k}{4} < x < \frac{(16k-8)+8k}{4}$$

$$\therefore -2k+2 < x < 6k-2$$

이므로 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는 $8k-5$

따라서 $8k-5 \leq 35$ 에서 $k \leq 5$ 이므로 정수 k 의 값의 범위는

$$1 < k \leq 5 \text{이고, 최댓값은 } 5 \text{이다.}$$

두 정수 a, b 가 절댓값이 같고 부호가 다르므로 $b = -a$ 라 하자.

부등식 $|x-a| \leq 2|x-b| - |x| + 2$ 에서

$$|x-a| - 2|x+a| + |x| \leq 2 \text{이므로}$$

(i) $a < 0, b > 0$ 인 경우

$$x < a \text{일 때, } (-x+a) - 2(-x-a) + (-x) \leq 2 \text{에서}$$

$$a \leq \frac{2}{3} \text{이므로 항상 성립한다. 따라서 해가 } x \geq -1 \text{일 수 없다.}$$

(ii) $a > 0, b < 0$ 인 경우

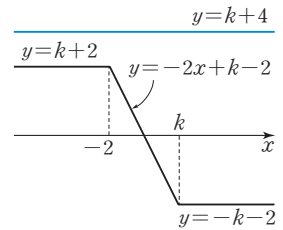
$$① x < -a \text{일 때, } (-x+a) - 2(-x-a) + (-x) \leq 2 \text{에서}$$

$$a \leq \frac{2}{3} \text{이므로 } \frac{2}{3} < x \text{이면 해가 없다.}$$

$$② -a \leq x < 0 \text{일 때, } (-x+a) - 2(x+a) + (-x) \leq 2 \text{에서}$$

$$x \geq -\frac{a+2}{4}$$

$$③ 0 \leq x < a \text{일 때, } (-x+a) - 2(x+a) + x \leq 2 \text{에서}$$



$$x \geq -\frac{a+2}{2} \text{이므로 항상 성립한다.}$$

④ $x \geq a$ 일 때, $(x-a) - 2(x+a) + x \leq 2$ 에서

$$a \geq -\frac{2}{3} \text{이므로 항상 성립한다.}$$

이때 부등식의 해가 $x \geq -1$ 이라면 ①, ②에서 ①은 해가 없고,

②는 공통부분이 $-1 \leq x < 0$ 이면 되므로 $a=1$ 또는 $a=2$

$$a=1 \text{이면 ②의 공통부분이 } -\frac{3}{4} \leq x < 0$$

②에서 $-a = -1$ 이 되는 a

$$a=2 \text{이면 ②의 공통부분이 } -1 \leq x < 0$$

②에서 $-\frac{a+2}{4} = -1$ 이 되는 a

(i), (ii)에서 $a=2, b=-2$ 이므로 $a-b=4$

547 71

부등식 $|x-a[a]| < b[b]$ 에서

$$a[a] - b[b] < x < a[a] + b[b] \text{이므로}$$

$$a[a] - b[b] = 8 \text{이고 } a[a] + b[b] = 30$$

이를 연립하여 풀면 $a[a] = 19, b[b] = 11$

$[a] = n$ (n 은 양의 정수)이라 하면 $n \leq a < n+1$ 이므로

$$n^2 \leq a[a] < n^2 + n, n^2 \leq 19 < n^2 + n$$

$$\text{을 만족시키는 } n \text{은 } 4 \text{이므로 } a = \frac{19}{4} \leftarrow a[a] = an = 19$$

$$\text{같은 방법으로 } b = \frac{11}{3}$$

$$\therefore 8a + 9b = 38 + 33 = 71$$

548 3

$g(x) = |x+2| + |x-3|$ 에서

(i) $x < -2$ 일 때

$$g(x) = (-x-2) + (-x+3) = -2x+1 \text{이므로}$$

$$5 < g(x) \leq 11 \text{의 해는 } -5 \leq x < -2$$

(ii) $-2 \leq x < 3$ 일 때

$$g(x) = (x+2) + (-x+3) = 5 \text{이므로}$$

$$5 < g(x) \leq 11 \text{의 해는 없다.}$$

(iii) $x \geq 3$ 일 때

$$g(x) = (x+2) + (x-3) = 2x-1 \text{이므로}$$

$$5 < g(x) \leq 11 \text{의 해는 } 3 < x \leq 6$$

(i)~(iii)에서 x 에 대한 연립부등식 $5 < g(x) \leq 11$ 의 해는

$$-5 \leq x < -2 \text{ 또는 } 3 < x \leq 6$$

$$-5 \leq x < -2 \text{ 일 때 } |x-1| \text{의 값의 범위는 } 3 < |x-1| \leq 6 \text{이고,}$$

$$3 < x \leq 6 \text{ 일 때 } |x-1| \text{의 값의 범위는 } 2 < |x-1| \leq 5 \text{이다.}$$

$$\beta > 6 \text{ 일 때 } x \text{에 대한 연립부등식 } \begin{cases} \alpha < |x-1| < \beta \\ 5 < g(x) \leq 11 \end{cases} \text{의 해가 존재하지}$$

않기 위해서는 $\alpha < |x-1| < \beta$ 에서 α 의 최솟값은 6이다.

또한 $0 < \alpha < 1$ 일 때, β 의 최댓값은 2이다.

$$\text{따라서 } m=6, M=2 \text{이므로 } m-M=4$$

549 4

$b < 0 < a$ 이고, $|a| < |b|$ 이므로 b 는 a 보다 절댓값이 큰 음수이다.

$$f(x) = |x-a[a]| + |x-b[b]| \text{에서}$$

(i) $x < a[a]$ 일 때

$$f(x) = (-x+a[a]) + (-x+b[b]) = -2x+a[a]+b[b]$$

(ii) $a[a] \leq x < b[b]$ 일 때

$$f(x) = (x-a[a]) + (-x+b[b]) = b[b]-a[a]$$

(iii) $x \geq b[b]$ 일 때

$$f(x) = (x-a[a]) + (x-b[b]) = 2x-a[a]-b[b]$$

조건 (가)에서 $f(x) \leq 16$ 의 해가 $5 \leq x \leq 21$ 이므로

$$f(5) = 16, f(21) = 16 \text{이고, 조건 (나)에서 } f(12) = 16 \text{이므로}$$

$$(ii) \text{에서 } b[b]-a[a] = 16, \text{ 즉 } a[a] = 5, b[b] = 21$$

$[a] = n$ (n 은 양의 정수)이라 하면 $n \leq a < n+1$ 이므로

$$n^2 \leq a[a] < n^2 + n, n^2 \leq 5 < n^2 + n$$

$$\text{을 만족시키는 } n \text{은 } 2 \text{이므로 } a = \frac{5}{2} \leftarrow a[a] = an = 5$$

$$\text{같은 방법으로 } b = \frac{21}{5}$$

$$\therefore 10a + 5b = 25 - 21 = 4$$

550 3

$$|x-a| \leq |x-b| \leq |x-c| \text{에서}$$

$$\begin{cases} |x-a| \leq |x-b| & \dots\dots \textcircled{A} \\ |x-b| \leq |x-c| & \dots\dots \textcircled{B} \end{cases} \text{라 하자.}$$

①, ②의 양변을 제곱하여 풀면

$$2(b-a)x \leq (b+a)(b-a) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$2(c-b)x \leq (c+b)(c-b) \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

(i) $b-a > 0$ 인 경우

$$\textcircled{A} \text{에서 } x \leq \frac{a+b}{2}$$

① $c-b > 0$ 일 때, ②에서 $x \leq \frac{b+c}{2}$ 이므로 해가 $-2 \leq x \leq 1$ 일 수 없다.

② $c-b < 0$ 일 때, ②에서 $x \geq \frac{b+c}{2}$ 이므로 $\frac{b+c}{2} \leq x \leq \frac{a+b}{2}$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \frac{b+c}{2} = -2, \frac{a+b}{2} = 1 \text{이므로 } b+c = -4, a+b = 2$$

$$\therefore a-c = 6$$

(ii) $b-a < 0$ 인 경우

$$\textcircled{A} \text{에서 } x \geq \frac{a+b}{2}$$

① $c-b < 0$ 일 때, ②에서 $x \geq \frac{b+c}{2}$ 이므로 해가 $-2 \leq x \leq 1$ 일 수 없다.

② $c-b > 0$ 일 때, ②에서 $x \leq \frac{b+c}{2}$ 이므로 $\frac{a+b}{2} \leq x \leq \frac{b+c}{2}$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \frac{a+b}{2} = -2, \frac{b+c}{2} = 1 \text{이므로 } a+b = -4, b+c = 2$$

$$\therefore a-c = -6$$

(i), (ii)에서 가능한 $a-c$ 의 값의 곱은 $6 \times (-6) = -36$

09 이차부등식과 연립이차부등식

1등급 필수 내신 빈출 문제

p.103~110

551 ④

$f(x)g(x) \geq 0$ 이면 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 부호가 같거나,
 $f(x)=0$ 또는 $g(x)=0$ 이다.

(i) $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 부호가 같은 x 의 값의 범위는 $-1 < x < 1$

(ii) $f(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=1$ 또는 $x=4$

$g(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서 $f(x)g(x) \geq 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $-1 \leq x \leq 1$ 또는 $x=4$

따라서 $f(x)g(x) \geq 0$ 을 만족시키는 않는 것은 ④ 2이다.

552 ③

$-x^2+3x+10 \geq 0$ 에서 $x^2-3x-10 \leq 0$

$(x+2)(x-5) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq x \leq 5$

따라서 $m=-2, n=5$ 이므로 $m+n=3$

553 ⑤

$x^2-3x-(k^2+11k+28) \leq 0$ 에서

$x^2-3x-(k+4)(k+7) = \{x+(k+4)\}\{x-(k+7)\} \leq 0$

$\therefore -k-4 \leq x \leq k+7$ ← k 는 자연수이므로 $-k-4 < k+7$

이때 k 는 자연수이므로 모든 정수 x 의 값의 합은

$\{(-k-4)+(-k-3)+\dots+(k+3)+(k+4)\}+(k+5)$
 $+ (k+6)+(k+7)$

$= 3k+18=33$

$\therefore k=5$

554 ②

(i) $x < -\frac{6}{5}$ 일 때

$-x^2-2x+3 \geq -5x-6+2x-3$ 에서

$x^2-x-12=(x+3)(x-4) \leq 0$

$\therefore -3 \leq x \leq 4$

그런데 $x < -\frac{6}{5}$ 이므로 $-3 \leq x < -\frac{6}{5}$

(ii) $x \geq -\frac{6}{5}$ 일 때

$-x^2-2x+3 \geq 5x+6+2x-3$ 에서

$x^2+9x=x(x+9) \leq 0$

$\therefore -9 \leq x \leq 0$

그런데 $x \geq -\frac{6}{5}$ 이므로 $-\frac{6}{5} \leq x \leq 0$

(i), (ii)에서 부등식의 해는 $-3 \leq x \leq 0$ 이므로 정수 x 의 개수는
 $-3, -2, -1, 0$ 의 4이다.

555 ⑤

(i) $x < 0$ 일 때

$(-x+1)(-x-2) \leq 3(x-1)$ 에서

$x^2-2x+1=(x-1)^2 \leq 0 \quad \therefore x=1$

그런데 $x < 0$ 이므로 만족시키는 해가 없다.

(ii) $0 \leq x < 1$ 일 때

$(-x+1)(x-2) \leq 3(x-1)$ 에서

$-x^2+1=-(x-1)(x+1) \leq 0 \quad \therefore x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$

그런데 $0 \leq x < 1$ 이므로 만족시키는 해가 없다.

(iii) $x \geq 1$ 일 때

$(x-1)(x-2) \leq 3(x-1)$ 에서

$x^2-6x+5 \leq 0, (x-1)(x-5) \leq 0$

$\therefore 1 \leq x \leq 5$

(i)~(iii)에서 부등식의 해는 $1 \leq x \leq 5$ 이므로 모든 정수 x 의 값의 합
 은 $1+2+3+4+5=15$

556 ①

$|x|=t$ ($t \geq 0$)라 하면 $x^2=|x|^2=t^2$ 이므로

$x^2-9|x|+20=t^2-9t+20=(t-4)(t-5) \leq 0$

에서 $4 \leq t \leq 5$ 이므로 $4 \leq |x| \leq 5$

$\therefore -5 \leq x \leq -4$ 또는 $4 \leq x \leq 5$ ㉠

이때 $x \leq \alpha$ 는 ㉠을 포함하므로 $\alpha \geq 5$ 이고,

$\beta \leq x \leq -4$ 는 ㉠에 포함되므로 $-5 \leq \beta < -4$

따라서 $\alpha+\beta$ 의 최솟값은 $5+(-5)=0$

557 ③

해가 $-3 \leq x \leq b$ 이고 x^2 의 계수가 2인 이차부등식은

$2(x+3)(x-b) \leq 0$

$\therefore 2x^2+2(3-b)x-6b \leq 0$

이 부등식이 $2x^2+4x-a \leq 0$ 과 같으므로 $2(3-b)=4, -a=-6b$

따라서 $a=6, b=1$ 이므로 $ab=6$

558 ①

이차부등식 $ax^2+bx+c \leq 0$ 의 해가 $-4 \leq x \leq 2$ 이므로 $a > 0$

$a(x+4)(x-2) \leq 0 \quad \therefore ax^2+2ax-8a \leq 0$

즉, $b=2a, c=-8a$

이때 $cx^2+bx+a=-8ax^2+2ax+a$ 이므로

$-8ax^2+2ax+a \leq 0$ 에서 $(4x+1)(2x-1) \geq 0$ ← $a > 0$

$\therefore x \leq -\frac{1}{4}$ 또는 $x \geq \frac{1}{2}$

따라서 자연수 x 의 최솟값은 1이다.

주의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ ($ac \neq 0$)의 두 실근이 α, β 이면 이차방
 정식 $cx^2+bx+a=0$ 의 두 실근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 이야! 그런데 부등식일 때는 부등호
 의 방향을 최고차항의 계수 c 를 보고 정해야 하니 주의해야 해!

559

답 10

$P(x)=a_1x^2+b_1x+c_1$, $Q(x)=a_2x^2+b_2x+c_2$ 라 하자.

조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여

$$P(x)=a_1x^2+b_1x+c_1=a_1x^2-b_1x+c_1=P(-x)$$

$$\text{이므로 } b_1x=0 \text{에서 } b_1=0 \quad \therefore P(x)=a_1x^2+c_1$$

$$Q(-x)=a_2x^2-b_2x+c_2=-(a_2x^2+b_2x+c_2)=-Q(x)$$

$$\text{이므로 } a_2x^2+c_2=0 \text{에서 } a_2=0, c_2=0 \quad \therefore Q(x)=b_2x$$

조건 (나)에서 $P(x)=a_1x^2+c_1$ 에 대하여

$$P(x)-2x-15 \leq 0 \text{의 해가 } -2 \leq x \leq 3 \text{이므로}$$

$$a_1x^2-2x+(c_1-15)=a_1(x+2)(x-3)=a_1x^2-a_1x-6a_1$$

$$\text{에서 } a_1=2, c_1=3 \quad \therefore P(x)=2x^2+3$$

조건 (다)에서 이차방정식 $P(x)+Q(x)+3x-1=0$, 즉

$2x^2+(b_2+3)x+2=0$ 의 판별식을 D 라 하면 주어진 방정식이 중근을 가지므로

$$D=(b_2+3)^2-4 \times 2 \times 2=0 \text{에서 } b_2=1 \quad \therefore Q(x)=x$$

$$\therefore P(1)+Q(5)=5+5=10$$

TIP 조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여 $P(x)=P(-x)$ 인 함수 $y=P(x)$ 를 우함수, $Q(-x)=-Q(x)$ 인 함수 $y=Q(x)$ 를 기함수라 하고, 다항식으로 이루어진 함수의 경우 우함수는 홀수차항, 기함수는 짝수차항의 계수가 0이야

560

답 4

조건 (나)에서 $f(x)>0$ 의 해가 $x<-4$ 또는 $x>-1$ 이므로

$$f(x)=a(x+1)(x+4) \quad (a>0)$$

$$\text{이때 조건 (가)에서 } f(-2)=a \times (-1) \times 2 = -2a = -2$$

$$\text{따라서 } a=1 \text{이므로 } f(x)=x^2+5x+4$$

조건 (다)에서 $f(x)+g(x) \geq 0$ 의 해가 $x \geq 2$ 이므로

$$f(x)+g(x)=b(x-2) \quad (b>0)$$

$$\text{이때 조건 (가)에서 } f(-2)+g(-2)=-2+(-6)=-8=-4b$$

$$\text{따라서 } b=2 \text{이므로 } f(x)+g(x)=2x-4, \text{ 즉}$$

$$g(x)=-x^2-3x-8$$

$$f(x)-g(x)=2x^2+8x+12 < 6 \text{이므로}$$

$$2x^2+8x+6 < 0 \text{에서 } 2(x+1)(x+3) < 0$$

$$\therefore -3 < x < -1$$

따라서 정수 x 의 값은 -2 이다.

561

답 5

$$2x^2-(3k+3)x+k^2+3k \leq 0 \text{에서 } (x-k)(2x-k-3) \leq 0$$

$$\therefore \frac{k+3}{2} \leq x \leq k \quad \leftarrow k \geq 3 \text{이므로 } \frac{k+3}{2} \leq k$$

$$k=6 \text{일 때, } \frac{9}{2} \leq x \leq 6 \text{이므로 정수 } x \text{의 개수는 } 2$$

$$k=7 \text{일 때, } 5 \leq x \leq 7 \text{이므로 정수 } x \text{의 개수는 } 3$$

$$k=8 \text{일 때, } \frac{11}{2} \leq x \leq 8 \text{이므로 정수 } x \text{의 개수는 } 3$$

$$k=9 \text{일 때, } 6 \leq x \leq 9 \text{이므로 정수 } x \text{의 개수는 } 4$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 합은 $7+8=15$

562

답 9

$$x^2-3nx+2n^2 \leq 0 \text{에서 } (x-n)(x-2n) \leq 0$$

$$\therefore n \leq x \leq 2n \quad \leftarrow n \text{이 자연수이므로 } n < 2n$$

$$f(n)=2n-n+1=n+1 \text{이므로}$$

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(m)=2+3+\cdots+(m+1)=54$$

$$\therefore m=9$$

563

답 1

$$(x-k^2-2k+1)(x-2k^2-3k) \leq 0$$

$$k^2+2k-1 \leq x \leq 2k^2+3k$$

$$\leftarrow \text{모든 실수 } k \text{에 대하여 } (2k^2+3k)-(k^2+2k-1)=k^2+k+1 > 0$$

k 는 자연수이므로 k^2+2k-1 , $2k^2+3k$ 는 모두 정수이고, 정수 x 의 개수는 4이므로

$$(2k^2+3k)-(k^2+2k-1)+1=k^2+k+2=4$$

$$k^2+k-2=0, (k+2)(k-1)=0$$

$$\therefore k=1 \quad \leftarrow k \text{는 양의 정수}$$

564

답 5

이차방정식 $kx^2+4kx+3k+5=0$ 의 판별식을 D 라 하면 이차부등식 $kx^2+4kx+3k+5 \leq 0$ 의 해가 없으므로 $k>0$, $D<0$ 이 성립해야 한다.

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-k \times (3k+5) < 0, 4k^2-3k^2-5k < 0$$

$$k(k-5) < 0 \quad \therefore 0 < k < 5$$

565

답 3

$$3x^2+(2k+4)x+2k+1 < 2x-1 \text{에서}$$

$$3x^2+(2k+2)x+2k+2 < 0$$

이차방정식 $3x^2+(2k+2)x+2k+2=0$ 의 판별식을 D 라 하면 이차부등식 $3x^2+(2k+2)x+2k+2 < 0$ 의 해가 없으므로

$$\frac{D}{4}=(k+1)^2-3 \times (2k+2) \leq 0, k^2-4k-5 \leq 0$$

$$(k+1)(k-5) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq k \leq 5$$

566

답 4

조건 (가)에서 $f(x)-g(x) \geq 0$ 의 해가 $x=1$ 이므로

$$f(x)-g(x)=a(x-1)^2 \quad (a < 0)$$

$$\text{이때 } f(x)=x^2+2x+2 \text{이고 } g(x)=f(x)-a(x-1)^2$$

$$\text{조건 (나)에서 } g(-1)=f(-1)-a(-2)^2=1-4a=13$$

$$\therefore a=-3$$

$$g(x)=f(x)+3(x-1)^2=4x^2-4x+5 \text{이므로 } g(2)=13$$

567

답 1

이차방정식 $-x^2+3kx-(2k^2-k+3)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

이차부등식 $-x^2+3kx-(2k^2-k+3) \leq 0$ 이 항상 성립하므로

$D \leq 0$ 이 성립해야 한다.

$$D = (3k)^2 - 4 \times (-1) \times (-2k^2 + k - 3) \leq 0$$

$$k^2 + 4k - 12 \leq 0, (k-2)(k+6) \leq 0$$

$$\therefore -6 \leq k \leq 2$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 -6 이다.

568 6

$f(x) = x^2 - 6x + 4k - 24$ 라 하면

$f(x) = (x-3)^2 + 4k - 33$ 이므로 $2 \leq x \leq 6$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값은 $x=6$ 일 때, $f(6) = 4k - 24$

이때 이차부등식 $x^2 - 6x + 4k - 24 \leq 0$ 이 $2 \leq x \leq 6$ 에서 항상 성립하려면 $f(x)$ 의 최댓값이 0보다 작거나 같아야 한다.

$$\text{즉, } 4k - 24 \leq 0 \text{에서 } k \leq 6$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 6이다.

569 2

$f(x) = x^2 - 2x + a|x-1| + b$ 라 하자.

(i) $x < 1$ 일 때

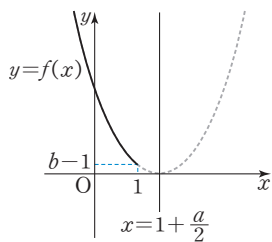
$$x^2 - (a+2)x + (a+b) \geq 0$$

$$f(x) = x^2 - (a+2)x + (a+b)$$

그래프의 축의 방정식은

$$x = 1 + \frac{a}{2} \text{이므로 그래프의 모양}$$

은 그림과 같다.



(ii) $x \geq 1$ 일 때

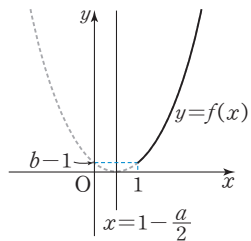
$$x^2 + (a-2)x + (-a+b) \geq 0$$

$$f(x) = x^2 + (a-2)x + (-a+b)$$

의 그래프의 축의 방정식은

$$x = 1 - \frac{a}{2} \text{이므로 그래프의 모양은}$$

그림과 같다.



(i), (ii)에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(1) = b-1$ 이므로

$$b-1 \geq 0, \text{ 즉 } b \geq 1$$

이때 $f(x) \geq 0$ 은 자연수 a 의 값에 관계없이 $b \geq 1$ 이면 성립하므로 $a+b$ 의 최솟값은 $1+1=2$

570 4

$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$ ($a \neq 0, \alpha > \beta$)라 하면

$$\text{부등식 } f\left(\frac{1-x}{3}\right) \geq 0 \text{에서}$$

$$a\left(\frac{1-x}{3} - \alpha\right)\left(\frac{1-x}{3} - \beta\right) \geq 0$$

$$\frac{a}{9}(x+3\alpha-1)(x+3\beta-1) \geq 0$$

이때 $f\left(\frac{1-x}{3}\right) \geq 0$ 의 해가 $-5 \leq x \leq 4$ 이므로 $a < 0$

$$(x+5)(x-4) \leq 0 \text{이므로 } 3\alpha-1=5, 3\beta-1=-4$$

$$\therefore \alpha=2, \beta=-1$$

$$\therefore f(x) = a(x-2)(x+1) = ax^2 - ax - 2a$$

조건 (나)에서 이차방정식 $f(x) = x+1$, 즉

$ax^2 - (a+1)x - (2a+1) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 주어진 이차부등식 $ax^2 - (a+1)x - (2a+1) \leq 0$ 이 항상 성립하므로

$$D = (a+1)^2 - 4 \times a \times (-2a-1) = (3a+1)^2 \leq 0$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{1}{3} \text{이므로 } f(x) = -\frac{1}{3}(x+1)(x-2)$$

$$\therefore |f(5)| = 6$$

571 5

이차함수 $y = x^2 - 4x + 32$ 의 그래프가 이차함수

$y = -x^2 + 16x - 10$ 의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위는 $x^2 - 4x + 32 < -x^2 + 16x - 10$ 의 해와 같다.

$$2x^2 - 20x + 42 < 0, 2(x-3)(x-7) < 0$$

$$\therefore 3 < x < 7$$

따라서 $p=3, q=7$ 이므로 $pq=21$

572 3

(i) $m=2$ 일 때

$g(x) = 2x^2 - 2x + 1$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 $y=g(x)$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있다.

(ii) $m \neq 2$ 일 때

이차함수 $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$ 의 그래프가 함수

$y = mx^2 - mx + 1$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면

$$2x^2 - 2x + 3 > mx^2 - mx + 1, \text{ 즉}$$

$$(2-m)x^2 - (2-m)x + 2 > 0 \text{이 항상 성립해야 한다.}$$

이차방정식 $(2-m)x^2 - (2-m)x + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $2-m > 0, D < 0$ 이 성립해야 한다.

$$D = (2-m)^2 - 4 \times (2-m) \times 2 < 0$$

$$(2-m)^2 - 8(2-m) < 0, (m-2)(m+6) < 0$$

$$\therefore -6 < m < 2$$

(i), (ii)에서 $-6 < m \leq 2$ 이므로 정수 m 의 개수는 8이다.

573 5

$h(x) = ax + b$ 라 하자.

조건 (가)에서 두 함수의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표가 2, 4이므로

$$f(x) - h(x) = 3(x-2)(x-4) = 3x^2 - 18x + 24 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서 두 함수의 그래프가 한 점 $(0, 3)$ 에서만 만나므로

$$h(0) = b = 3 \text{이고,}$$

$$g(x) - h(x) = -x^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면 $f(x) + g(x) - 2ax - 6 = 2x^2 - 18x + 24$ 에서

$$f(x) + g(x) = 2x^2 + (2a-18)x + 30$$

이때 이차방정식 $f(x) + g(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 주어진 부등식 $f(x) + g(x) \geq 0$ 이 항상 성립하므로 $D \leq 0$ 이 성립해야 한다.

$$\frac{D}{4} = (a-9)^2 - 2 \times 30 \leq 0$$

$$(a-9)^2 - 60 \leq 0, (a-9)^2 \leq 60$$

$$\therefore 9 - 2\sqrt{15} \leq a \leq 9 + 2\sqrt{15}$$

따라서 a 의 최댓값은 $9 + 2\sqrt{15}$ 이다.

574 40

그림이 차지하는 직사각형의 가로의 길이는 $(120-2x)$ cm, 세로의 길이는 $(90-2x)$ cm이므로 $120-2x > 0$, $90-2x > 0$, 즉 $x < 45$ 이고, 넓이는 $(120-2x)(90-2x)$ cm²이다.

이때 그림이 차지하는 넓이가 $\frac{1}{4}x^2$ cm²보다 크지 않으므로

$$(120-2x)(90-2x) \leq \frac{1}{4}x^2$$

$$4x^2 - 420x + 10800 \leq \frac{1}{4}x^2, x^2 - 112x + 2880 \leq 0$$

$$(x-40)(x-72) \leq 0 \quad \therefore 40 \leq x \leq 72$$

그런데 $x < 45$ 이므로 $40 \leq x < 45$

따라서 x 의 최솟값은 40이다.

575 2

상품 A의 판매 가격을 a , 판매량을 b 라 하자.

판매 가격을 $x\%$ 내린 가격은 $a\left(1 - \frac{x}{100}\right)$,

판매 가격을 $x\%$ 내렸을 때 판매량은 $b\left(1 + \frac{3x}{200}\right)$

이므로 총판매액은 $ab\left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{3x}{200}\right)$ 이다.

이때 총판매액이 4% 이상 늘어나려면

$$ab\left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{3x}{200}\right) \geq ab\left(1 + \frac{4}{100}\right)$$

$$\left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{3x}{200}\right) \geq \frac{104}{100}$$

$$(100-x)(200+3x) \geq 20800$$

$$3x^2 - 100x + 800 \leq 0, (x-20)(3x-40) \leq 0$$

$$\therefore \frac{40}{3} \leq x \leq 20$$

따라서 $p = \frac{40}{3}$, $q = 20$ 이므로 $\frac{2q}{p} = 3$

576 6

부등식 $x^2 + x - 12 \leq 0$ 에서 $(x-3)(x+4) \leq 0$

$$\therefore -4 \leq x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

부등식 $x^2 + 6x + 5 \geq 0$ 에서 $(x+1)(x+5) \geq 0$

$$\therefore x \leq -5 \text{ 또는 } x \geq -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 연립부등식의 해는 $-1 \leq x \leq 3$

이때 $ax^2 + bx + 6 \geq 0$ 의 해가 $-1 \leq x \leq 3$ 이므로 $a < 0$ 이고,

$$ax^2 + bx + 6 = a(x+1)(x-3)$$

$$= ax^2 - 2ax - 3a$$

에서 $b = -2a$, $6 = -3a$ 이므로 $a = -2$, $b = 4$

$$\therefore b - a = 6$$

577 3

부등식 $x^2 - 4x - 21 < 0$ 에서 $(x+3)(x-7) < 0$

$$\therefore -3 < x < 7$$

부등식 $x^2 - (a+4)x + 4a < 0$ 에서

$$(x-a)(x-4) < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $a < 4$ 일 때

$\textcircled{1}$ 의 해는 $a < x < 4$

$\textcircled{1}$ $a \leq -3$ 이면 연립부등식의 해는 $-3 < x < 4$ 이므로

$$q - p = 7$$

$\textcircled{2}$ $-3 < a < 4$ 이면 연립부등식의 해는 $a < x < 4$ 이므로

$$q - p = 4 - a \text{에서 } 0 < q - p < 7$$

(ii) $a = 4$ 일 때

$\textcircled{1}$ 의 해는 없다.

(iii) $a > 4$ 일 때

$\textcircled{1}$ 의 해는 $4 < x < a$

$\textcircled{1}$ $4 < a < 7$ 이면 연립부등식의 해는 $4 < x < a$ 이므로

$$q - p = a - 4 \text{에서 } 0 < q - p < 3$$

$\textcircled{2}$ $a \geq 7$ 이면 연립부등식의 해는 $4 < x < 7$ 이므로

$$q - p = 3$$

(i)~(iii)에서 $q - p$ 의 값은 $a \leq -3$ 일 때 최대이므로 정수 a 의 최댓값은 -3 이다.

578 4

부등식 $x^2 - 10x + 16 < 0$ 에서 $(x-2)(x-8) < 0$

$$\therefore 2 < x < 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

부등식 $x^2 - (2k-5)x + k^2 - 5k + 6 > 0$ 에서

$$x^2 - (2k-5)x + (k-2)(k-3) > 0$$

$$(x-k+2)(x-k+3) > 0$$

$$\therefore x < k-3 \text{ 또는 } x > k-2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에서 $8-2=6$ 이므로

$$k-2 \leq 2 \text{ 또는 } k-3 \geq 8 \quad \therefore k \leq 4 \text{ 또는 } k \geq 11$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k 의 값은 1, 2, 3, 4이므로 그 곱은 24이다.

579 1

$$\text{연립부등식} \begin{cases} x^2 - 5x + a < 0 & \dots\dots \textcircled{1} \\ x^2 + bx - 8 \geq 0 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

의 해가 $-3 < x \leq -1$ 이므로

$\textcircled{1}$ 에서 방정식 $x^2 - 5x + a = 0$ 은 $x = -3$ 을 해로 갖는다.

$$(-3)^2 - 5 \times (-3) + a = 24 + a = 0, \text{ 즉 } a = -24$$

$\textcircled{2}$ 에서 방정식 $x^2 + bx - 8 = 0$ 은 $x = -1$ 을 해로 갖는다.

$$(-1)^2 + b \times (-1) - 8 = -b - 7 = 0, \text{ 즉 } b = -7$$

$$\therefore b - a = 17$$

580 ④

부등식 $x^2 - 2x - 15 < 0$ 에서 $(x+3)(x-5) < 0$

$\therefore -3 < x < 5$

연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 2x - 15 < 0 \\ f(x) < 0 \end{cases}$ 의 해가 $-3 < x < -1$ 또는 $2 < x < 5$

이므로 부등식 $f(x) < 0$ 에서 방정식 $f(x) = 0$ 은 $x = -1, x = 2$ 를 해로 갖는다.

$a < 0$ 인 실수 a 에 대하여 $f(x) = a(x+1)(x-2)$ 라 하면

$f(3) = 4a = -8$ 이므로 $a = -2$

따라서 $f(x) = -2(x+1)(x-2) = -2x^2 + 2x + 4$ 이므로 모든 항의 계수의 합은 $-2 + 2 + 4 = 4$

581 ④

연립부등식 $\begin{cases} f(x) \leq 0 & \dots\dots ㉠ \\ g(x) < 0 & \dots\dots ㉡ \end{cases}$ 의 해가 $3 < x \leq 7$ 이므로

㉠에서 방정식 $3x^2 - 4(a+1)x - (5b+3) = 0$ 은 $x = 7$ 을 해로 갖는다.

$3 \times 7^2 - 4 \times (a+1) \times 7 - 5b - 3 = -28a - 5b + 116 = 0$

㉡에서 방정식 $-2x^2 - ax + 2b = 0$ 은 $x = 3$ 을 해로 갖는다.

$-2 \times 3^2 - a \times 3 + 2b = -3a + 2b - 18 = 0$

위 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 12$

$f(x) = 3x^2 - 12x - 63, g(x) = -2x^2 - 2x + 24$ 이므로

$f(x) + g(x) = x^2 - 14x - 39 \leq -7$ 에서 $(x+2)(x-16) \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 16$

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 x 의 개수는 19이다.

582 ②

부등식 $|x-k| \leq 2$ 에서 $k-2 \leq x \leq k+2$ 이고,

부등식 $x^2 - x - 6 > 0$ 에서 $(x+2)(x-3) > 0$

$\therefore x < -2$ 또는 $x > 3$

이때 정수 k 에 대하여 $k-2 \leq x \leq k+2$ 를 만족시키는 정수 x 의 개수는 5이고, 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합이 15이면 두 부등식의 해의 공통부분이 양수이어야 한다.

(i) $k-2 \leq 3$ 일 때

연립부등식의 해는 $3 < x \leq k+2$

이때 $4 + 5 + 6 = 15$ 이므로 $6 \leq k+2 < 7$, 즉 $k = 4$

(ii) $k-2 > 3$ 일 때

연립부등식의 해는 $k-2 \leq x \leq k+2$

이때 $(k-2) + (k-1) + k + (k+1) + (k+2) = 5k = 15$ 이므로 $k = 3$

그런데 $k > 5$ 이므로 만족시키는 k 는 없다.

(i), (ii)에서 정수 k 의 값은 4이다.

583 ④

부등식 $|x+1| + |x-3| \leq 6$ 에서

(i) $x < -1$ 일 때

$-2x + 2 \leq 6, x \geq -2$ 이므로 $-2 \leq x < -1$

(ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때

$4 \leq 6$ 이므로 $-1 \leq x < 3$

(iii) $x \geq 3$ 일 때

$2x - 2 \leq 6, x \leq 4$ 이므로 $3 \leq x \leq 4$

(i)~(iii)에서 $-2 \leq x \leq 4$

부등식 $x^2 + 3x > 0$ 에서 $x(x+3) > 0$

$\therefore x < -3$ 또는 $x > 0$

따라서 연립부등식의 해는 $0 < x \leq 4$ 이므로 정수 x 의 개수는 1, 2, 3, 4의 4이다.

584 ⑤

부등식 $|x-t| \geq t^2$ 에서 $x \leq t-t^2$ 또는 $x \geq t+t^2$

부등식 $(x-|t|)(x-2|t|) < 0$ 에서 $|t| < x < 2|t|$ ㉠

(i) $t < 0$ 일 때

㉠에서 $-t < x < -2t$

이때 연립부등식의 해가 없으려면

$-2t \leq t+t^2$ 에서 $t \leq -3$ 이고, $t-t^2 \leq -t$ 에서 $t < 0$

$\therefore t \leq -3$

(ii) $t > 0$ 일 때

㉠에서 $t < x < 2t$

이때 연립부등식의 해가 없으려면

$2t \leq t+t^2$ 에서 $t \geq 1$ 이고, $t-t^2 \leq t$ 에서 $t > 0$

$\therefore t \geq 1$

따라서 $\alpha = -3, \beta = 1$ 일 때, $\alpha\beta$ 가 최댓값을 가지므로 $\alpha\beta$ 의 최댓값은 -3 이다.

585 ②

부등식 $|x-1| \leq 2$ 에서 $-1 \leq x \leq 3$

부등식 $x^2 - (a+2)x + 2a > 0$ 에서 $(x-a)(x-2) > 0$ ㉠

(i) $a < 2$ 일 때

㉠에서 $x < a$ 또는 $x > 2$

① $a \leq -1$ 이면 연립부등식의 해는 $2 < x \leq 3$

② $-1 < a < 2$ 이면 연립부등식의 해는

$-1 \leq x < a$ 또는 $2 < x \leq 3$ $\leftarrow -1 < a < 2$ 일 때 정수인 해의 개수가 4

(ii) $a = 2$ 일 때

해가 $x \neq 2$ 인 모든 실수이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x 의 개수는 $-1, 0, 1, 3$ 의 4

(iii) $a > 2$ 일 때

㉠에서 $x < 2$ 또는 $x > a$

① $2 < a < 3$ 이면 연립부등식의 해는

$-1 \leq x < 2$ 또는 $a < x \leq 3$ $\leftarrow 2 < a < 3$ 인 정수 a 는 없다.

② $a \geq 3$ 이면 연립부등식의 해는 $-1 \leq x < 2$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a 의 값은 2이다.

586

② ①

부등식 $|x-k| < 2$ 에서 $k-2 < x < k+2$ 부등식 $x^2-9 \leq 0$ 에서 $-3 \leq x \leq 3$ $\leftarrow k$ 의 값에 관계없이 정수해의 개수는 3이다.(i) 정수 x 의 개수가 1일 때

$$k+2=-2 \text{ 또는 } k-2=2 \quad \therefore k=-4 \text{ 또는 } k=4$$

(ii) 정수 x 의 개수가 3일 때

$$k+2 \geq 0 \text{ 또는 } k-2 \leq 0 \quad \therefore -2 \leq k \leq 2$$

(i), (ii)에서 정수 k 의 개수 $m=7$ 이고 모든 정수 k 의 값의 합 $n=0$

$$\therefore m+n=7$$

587

② ②

부등식 $|x-5| \leq n$ 에서 $5-n \leq x \leq 5+n$ ①부등식 $x^2+4x-32 > 0$ 에서 $(x-4)(x+8) > 0$ $\leftarrow n$ 의 값이 커질수록 5를 기준으로 범위가 넓어짐

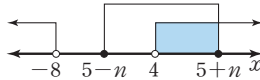
$$\therefore x < -8 \text{ 또는 } x > 4$$

(i) $n=1$ 일 때

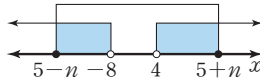
①에서 $4 \leq x \leq 6$ 이므로 주어진 연립부등식의 해는 $4 < x \leq 6$ 이고, 정수 x 의 개수는 2

(ii) $1 < n \leq 13$ 일 때

주어진 연립부등식의 해는 $4 < x \leq 5+n$ 이고, 정수 x 의 개수는 $n+1$

(iii) $n > 13$ 일 때

주어진 연립부등식의 해는 $5-n \leq x < -8$ 또는 $4 < x \leq 5+n$ 이고, 정수 x 의 개수는 $(n-13) + (n+1) = 2n-12$

(i)~(iii)에서 정수 x 의 개수가 20이므로

$$1 < n \leq 13 \text{ 일 때, } n+1=20 \text{ 또는 } n > 13 \text{ 일 때, } 2n-12=20$$

$$\therefore n=16$$

588

② 28

부등식 $|x-n| \geq 3$ 에서 $x \leq n-3$ 또는 $x \geq n+3$ 부등식 $x^2-14x+24 < 0$ 에서 $(x-12)(x-2) < 0$

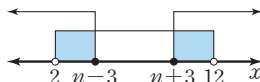
$$\therefore 2 < x < 12$$

(i) $n-3 \geq 2$ 이고, $n+3 \leq 12$, 즉 $5 \leq n \leq 9$ 일 때

연립부등식의 해는 그림과 같다.

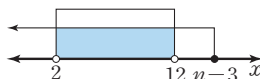
$$2 < x \leq n-3 \text{ 또는 } n+3 \leq x < 12$$

이므로 자연수 x 의 개수는 4

(ii) $n-3 \geq 12$, 즉 $n \geq 15$ 일 때 $\leftarrow n$ 은 자연수이므로 $n+3 \leq 2$ 일 수 없다.

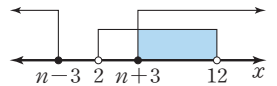
연립부등식의 해는 그림과 같다.

$$2 < x < 12 \text{ 이므로 자연수 } x \text{의 개수는 9}$$

(i), (ii)에서 연립부등식을 만족시키는 자연수 x 의 개수가 소수인 경우는 해의 개수가 5 또는 7이다.(iii) ① $n-3 < 2$ 이고 $n+3 > 2$, 즉 $-1 < n < 5$ 일 때

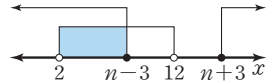
연립부등식의 해는 그림과 같다.

$$n+3 \leq x < 12 \text{ 이므로 해의 개수는 } 9-n \text{ 에서 } n=2 \text{ 또는 } n=4$$

② $n-3 < 12$ 이고 $n+3 > 12$, 즉 $9 < n < 15$ 일 때

연립부등식의 해는 그림과 같다.

$$2 < x \leq n-3 \text{ 이므로 해의 개수는 } n-5 \text{ 에서 } n=10 \text{ 또는 } n=12$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$2+4+10+12=28$$

589

② ①

부등식 $x^2-2px \geq 0$ 에서 $x(x-2p) \geq 0$, 즉 $x \leq 0$ 또는 $x \geq 2p$ 부등식 $x^2-(p^2+p+1)x+p^3+p < 0$ 에서

$$(x-p)(x-p^2-1) < 0, \text{ 즉 } p < x < p^2+1 \leftarrow p < p^2+1$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$2p \leq x < p^2+1 \leftarrow p > 1 \text{ 이므로 } 2p < p^2+1$$

이때 x 의 값 중 소수는 7뿐이려면 $5 < 2p \leq 7, 7 < p^2+1 \leq 11$

$$\text{즉, } \frac{5}{2} < p \leq \frac{7}{2}, \sqrt{6} < p \leq \sqrt{10} \text{ 을 동시에 만족시켜야 하므로}$$

$$\frac{5}{2} < p \leq \sqrt{10} \leftarrow \sqrt{6} < \frac{5}{2} < \sqrt{10} < \frac{7}{2}$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{5}{2}, \beta = \sqrt{10} \text{ 이므로 } \frac{\alpha\beta^2}{5} = 5$$

590

② ⑤

부등식 $|2x-13| < 3$ 에서 $5 < x < 8$ 부등식 $x^2-9kx+8k^2 > 0$ 에서 $(x-k)(x-8k) > 0$

$$\text{즉, } x < k \text{ 또는 } x > 8k \leftarrow n \text{ 은 자연수이므로 } k < 8k$$

이때 연립부등식의 해가 존재하지 않으려면

$$k \leq 5 \text{ 이고 } 8k \geq 8 \text{ 이어야 하므로 } 1 \leq k \leq 5$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 합은

$$1+2+3+4+5=15$$

591

② ④

부등식 $|x-7| < 3$ 에서 $4 < x < 10$ 부등식 $x^2-4ax+3a^2 > 0$ 에서 $(x-a)(x-3a) > 0$

$$\text{즉, } x < a \text{ 또는 } x > 3a \leftarrow a > 0 \text{ 이므로 } a < 3a$$

이때 연립부등식을 만족시키는 자연수 x 가 존재하지 않으려면 $a \leq 5$

$$\text{이고, } 3a \geq 9 \text{ 이어야 하므로 } 3 \leq a \leq 5$$

따라서 실수 a 의 최댓값 $M=5$, 최솟값 $m=3$ 이므로 $M+m=8$

주의 실수인 해가 없을 때는 공통부분이 없어야 하지만 정수인 해 또는 자연수인 해가 없을 때는 부등호에 따라 공통부분이 있을 수 있어. 예를 들어 이 문제에서 실수인 해가 없는 문제였다면 $a \leq 4$ 또는 $3a \geq 10$ 을 이용하여 풀겠지만 자연수인 x 가 없는 것이기 때문에 $a=5$ 일 때 $4 < x < 5, a=9$ 일 때 $9 < x < 10$ 처럼 공통부분이 있어도 자연수인 해가 없을 수 있어!

592

답 ①

$$-x^2+7x-10 \leq x^2-9x+22 \text{에서 } 0 \leq 2x^2-16x+32$$

$$\text{이므로 } x=4 \text{일 때 } 2 \leq 4m+n \leq 2 \quad \therefore 4m+n=2$$

$$mx+n \leq x^2-9x+22 \text{에서}$$

$$x^2-(m+9)x+22-n \geq 0$$

$$x^2-(m+9)x+(4m+20) \geq 0 \quad \leftarrow n=2-4m$$

$x^2-(m+9)x+(4m+20)=0$ 의 판별식을 D 라 하면 주어진 이차 부등식 $x^2-(m+9)x+(4m+20) \geq 0$ 이 항상 성립하므로 $D \leq 0$ 이 성립해야 한다.

$$D=(m+9)^2-4 \times 1 \times (4m+20) \leq 0$$

$$m^2+2m+1 \leq 0, (m+1)^2 \leq 0$$

$$\text{따라서 } m=-1, n=6 \text{이므로 } m+n=5$$

$$\text{다른 풀이 } -x^2+7x-10 \leq mx+n \text{에서}$$

$$x^2+(m-7)x+(n+10) \geq 0$$

방정식 $x^2+(m-7)x+(n+10)=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면 주어진 이차부등식 $x^2+(m-7)x+(n+10) \geq 0$ 이 항상 성립하므로 $D_1 \leq 0$ 이 성립해야 한다.

$$D_1=(m-7)^2-4(n+10) \leq 0$$

$$m^2-14m-4n+9 \leq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$mx+n \leq x^2-9x+22 \text{에서}$$

$$x^2-(m+9)x+(22-n) \geq 0$$

방정식 $x^2-(m+9)x+(22-n)=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면 주어진 이차부등식 $x^2-(m+9)x+(22-n) \geq 0$ 이 항상 성립하므로 $D_2 \leq 0$ 이 성립해야 한다.

$$D_2=(m+9)^2-4(22-n) \leq 0$$

$$m^2+18m+4n-7 \leq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2} \text{을 하면 } 2m^2+4m+2 \leq 0, \text{ 즉 } 2(m+1)^2 \leq 0 \text{이므로}$$

$$m=-1$$

$$\text{즉, } \textcircled{1} \text{에서 } n \geq 6 \text{이고, } \textcircled{2} \text{에서 } n \leq 6 \text{이므로 } n=6$$

$$\therefore m+n=5$$

593

답 -5

$$\text{부등식 } x+k \leq x^2-15x+70 \text{에서 } x^2-16x+70 \geq k \text{이고,}$$

$$x^2-16x+70=(x-8)^2+6 \text{이므로 } k \leq 6$$

$$\text{부등식 } ax^2+(a-4)x-2 \leq x+k \text{에서 } ax^2+(a-5)x-2 \leq k$$

이때 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 k 의 개수가 4, 즉 조건을 만족시키는 k 의 값은 3, 4, 5, 6이다.

$$\text{이때 } ax^2+(a-5)x-2=a\left(x+\frac{a-5}{2a}\right)^2-\frac{(a-5)^2+8a}{4a} \text{의 최댓}$$

값이 2보다 크고 3보다 작거나 같아야 항상 성립하므로 $a < 0$

$$2 < -\frac{(a-5)^2+8a}{4a} \leq 3, 12a \leq -a^2+2a-25 < 8a$$

$$\begin{cases} a^2+10a+25 \leq 0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a^2+6a+25 > 0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\text{이때 } \textcircled{1} \text{에서 } (a+5)^2 \leq 0 \text{이므로 } a=-5 \text{이고, } \textcircled{2} \text{에서}$$

모든 실수 a 에 대하여 항상 성립한다.

$$\therefore a=-5 \quad \leftarrow (a+3)^2+16 > 0$$

594

답 ⑤

가장 긴 변의 길이는 $4x+2$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 둔각 삼각형의 세 변의 길이 $4x-2, x, 4x+2$ 에 대하여

$$4x-2 > 0, x > 0, 4x+2 > 0 \text{이고, } \leftarrow \text{삼각형의 변의 길이}$$

$$\begin{cases} (4x-2)+x > 4x+2 & \leftarrow \text{삼각형의 기본조건} \\ (4x-2)^2+x^2 < (4x+2)^2 & \leftarrow \text{둔각삼각형이 되는 조건} \end{cases}$$

$$\text{부등식 } (4x-2)+x > 4x+2 \text{에서 } x > 4$$

$$\text{부등식 } (4x-2)^2+x^2 < (4x+2)^2 \text{에서 } x(x-32) < 0$$

$$\therefore 0 < x < 32$$

따라서 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위는 $4 < x < 32$ 이므로 자연수 x 의 개수는 27이다.

595

답 ①

연못의 가로 길이를 x 라 하면 세로 길이는 $18-x$

$$\text{조건 (가)에서 } x > 18-x \text{이므로 } x > 9$$

$$\text{조건 (나)에서 } x(18-x) \geq 80 \text{이므로 } (x-8)(x-10) \leq 0$$

$$\therefore 8 \leq x \leq 10$$

따라서 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위는 $9 < x \leq 10$ 이므로 가로의 길이의 최댓값은 10이다.

596

답 ③

빗변이 아닌 한 변의 길이를 x 라 하면 다른 한 변의 길이는

$$16-(x+c) \text{이다.}$$

가장 긴 변의 길이는 c 이므로 주어진 조건을 만족시키는 직각삼각형의 세 변의 길이 $c, x, 16-(c+x)$ 에 대하여

$$c > 0, x > 0, 16-(c+x) > 0 \text{이고, } \leftarrow \text{삼각형의 세 변의 길이}$$

$$x+\{16-(c+x)\} > c, x^2+\{16-(c+x)\}^2=c^2$$

$$\text{부등식 } x+16-(c+x) > c \text{에서 } c < 8 \quad \leftarrow \text{직각삼각형이 되는 조건}$$

$$\text{방정식 } x^2+\{16-(c+x)\}^2=c^2 \text{에서} \quad \leftarrow \text{삼각형의 기본조건}$$

$$x^2+(c-16)x+(128-16c)=0$$

$x^2+(c-16)x+(128-16c)=0$ 의 판별식을 D 라 하면 이 방정식은 실근을 가져야 하므로 $D \geq 0$ 이 성립해야 한다.

$$D=(c-16)^2-4 \times 1 \times (128-16c) \geq 0$$

$$c^2+32c-256 \geq 0$$

$$\therefore c \leq -16(\sqrt{2}+1) \text{ 또는 } c \geq 16(\sqrt{2}-1)$$

따라서 조건을 만족시키는 c 의 값의 범위는

$$16(\sqrt{2}-1) \leq c < 8$$

597

답 2

주어진 이차방정식의 두 근의 절댓값이 같고 부호가 다르므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두 근의 합})=k^2+k-6=(k-2)(k+3)=0$$

$$\therefore k=2 \text{ 또는 } k=-3$$

(두 근의 곱) = $k^2 - 6k + 5 < 0$ 에서 $(k-1)(k-5) < 0$ 이므로
 $1 < k < 5$

따라서 조건을 만족시키는 실수 k 의 값은 2이다.

598 ⑤

방정식 $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = -2$
 이때 $f(x) = x^2 + 4x + 7 - a$ 라 하면
 $f(x) = 0$ 의 두 근 중 한 근만 -2 와 -1 사이에 있으므로
 $f(-2) \times f(-1) < 0$ 에서 $(3-a)(4-a) < 0$
 $\therefore 3 < a < 4$

599 ③

$x^2 + 5x = x(x+5) = 0$ 에서 $x = -5$ 또는 $x = 0$
 $f(x) = x^2 + 4x + k$ 라 하면

(i) 두 근 중 한 근만 -5 와 0 사이에 있을 때

① $f(x) = 0$ 이 -5 와 0 을 근으로 갖지 않을 때
 $f(-5) \times f(0) < 0$ 이므로 $(5+k)k < 0$
 $\therefore -5 < k < 0$

② -5 를 근으로 가질 때, 즉 $k = -5$
 $f(x) = x^2 + 4x - 5$ 이므로 두 근은 $x = -5, x = 1$
 따라서 두 근 모두 -5 와 0 사이에 있지 않다.

③ 0 을 근으로 가질 때, 즉 $k = 0$
 $f(x) = x^2 + 4x$ 이므로 두 근은 $x = -4, x = 0$
 따라서 두 근 중 한 근만 -5 와 0 사이에 있다.

①~③에서 조건을 만족시키는 정수 k 의 범위는 $-5 < k \leq 0$

(ii) 두 근이 모두 -5 와 0 사이에 있을 때

$f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0, f(-5) > 0, f(0) > 0$ 을
 만족시킨다.

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 1 \times k \geq 0, 4 - k \geq 0 \text{이므로 } k \leq 4$$

$$f(-5) = 5 + k > 0 \text{에서 } k > -5$$

$$f(0) = k > 0 \quad \therefore 0 < k \leq 4$$

(i), (ii)에서 정수 k 의 값의 범위는 $-5 < k \leq 4$ 이므로 정수 k 의 개수는 9이다.

다른 풀이 $x^2 + 5x = x(x+5) = 0$ 에서 $x = -5$ 또는 $x = 0$

$f(x) = x^2 + 4x + k$ 라 하면

(i) 방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $f(x) = 0$ 은 실근을 가져야
 하므로 $D \geq 0$ 이 성립해야 한다.

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 1 \times k \geq 0, 4 - k \geq 0 \quad \therefore k \leq 4$$

(ii) 한 근이 -5 이하 다른 한 근이 0 이상일 때 ← 반대인 경우 구하기

$$f(-5) \leq 0, f(0) \leq 0 \text{에서}$$

$$f(-5) = 5 + k \leq 0, \text{ 즉 } k \leq -5 \text{이고, } f(0) = k \leq 0$$

이므로 $k \leq -5$ 일 때 한 근이 -5 이하 다른 한 근이 0 이상이다.

따라서 실근을 갖는 방정식 $f(x) = 0$ 에 대하여 $k > -5$ 일 때 적어도 한 근은 -5 와 0 사이에 있다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 정수 k 의 값의 범위는 $-5 < k \leq 4$ 이므로 정수 k 의 개수는 9이다.

600 ④

$x^3 - 4x^2 + (k-8)x + k - 3$ 을 조립제법을 이용하면

$$x^3 - 4x^2 + (k-8)x + k - 3 = (x+1)(x^2 - 5x + k - 3)$$

따라서 -1 을 근으로 가지므로 방정식 $x^2 - 5x + k - 3 = 0$ 은 1보다 큰 두 실근을 가져야 한다.

$f(x) = x^2 - 5x + k - 3$ 이라 하고, $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D \geq 0, f(1) > 0, \frac{5}{2} > 1 \text{이 성립해야 한다.}$$

$$D = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (k-3) \geq 0, 37 - 4k \geq 0 \quad \text{← 축의 방정식 } x = \frac{5}{2}$$

$$\therefore k \leq \frac{37}{4} \quad \dots\dots ㉠$$

$$f(1) = k - 7 > 0 \text{이므로 } k > 7 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 정수 k 의 값의 범위는 $7 < k \leq \frac{37}{4}$ 이므로 정수 k 의 값은

8, 9

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 k 의 값의 곱은 72이다.

601 ④

방정식 $x^4 - 2(k+1)x^2 + (k+1)(k-3) = 0$ 에서

$$x^2 = X \ (X \geq 0) \text{라 하면 } X^2 - 2(k+1)X + (k+1)(k-3) = 0$$

주어진 방정식의 모든 근이 0이 아닌 실근이면 X 에 대한 이차방정식 $X^2 - 2(k+1)X + (k+1)(k-3) = 0$ 이 두 양의 실근을 갖는다.

$f(X) = X^2 - 2(k+1)X + (k+1)(k-3)$ 이라 하고, $f(X) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0, f(0) > 0, k+1 > 0$ 이 성립해야 한다.

$$\frac{D}{4} = (-k-1)^2 - 1 \times (k^2 - 2k - 3) \geq 0$$

$$4k + 4 \geq 0 \quad \therefore k \geq -1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f(0) = (k+1)(k-3) > 0 \text{에서}$$

$$k < -1 \text{ 또는 } k > 3 \quad \dots\dots ㉡$$

$$k+1 > 0 \text{에서 } k > -1 \quad \dots\dots ㉢$$

㉠~㉢에서 k 의 값의 범위는 $k > 3$

602 ②

$f(x) = x^2 - 4x + k^2 - 4k + 4, g(x) = x^2 + 2kx + k^2 - k + 3$ 이라
 하고, $f(x) = 0, g(x) = 0$ 의 판별식을 각각 D_1, D_2 라 하자.

방정식 $(x^2 - 4x + k^2 - 4k + 4)(x^2 + 2kx + k^2 - k + 3) = 0$ 이 서로 다른 양의 실근과 허근을 모두 가지므로

(i) $f(x) = 0$ 이 허근, $g(x) = 0$ 이 실근을 가질 때

$g(x) = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가지므로

$$D_2 > 0, g(0) > 0, -k > 0$$

$$\frac{D_2}{4} = k^2 - 1 \times (k^2 - k + 3) > 0$$

$$k - 3 > 0 \quad \therefore k > 3$$

이때 $-k > 0$, 즉 $k < 0$ 이므로 조건을 만족시키는 k 는 없다.

(ii) $f(x)=0$ 이 실근, $g(x)=0$ 이 허근을 가질 때

① $f(x)=0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가지므로

$$D_1 > 0, f(0) > 0, 2 > 0$$

$$\frac{D_1}{4} = (-2)^2 - 1 \times (k^2 - 4k + 4) > 0$$

$$-k^2 + 4k > 0 \quad \therefore 0 < k < 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$f(0) = k^2 - 4k + 4 > 0 \text{이므로 } k \neq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\therefore 0 < k < 2 \text{ 또는 } 2 < k < 4$$

② $g(x)=0$ 이 허근을 가지므로 $D_2 < 0$

$$\frac{D_2}{4} = k^2 - 1 \times (k^2 - k + 3) < 0$$

$$k - 3 < 0 \quad \therefore k < 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

①~⑨에서 조건을 만족시키는 정수 k 의 값의 범위는

$$0 < k < 2 \text{ 또는 } 2 < k < 3$$

(i), (ii)에서 정수 k 는 1뿐이므로 그 개수는 1이다.

603 답 27

① 단계 $x^2 + nx - 2n^2 \geq 0$ 일 때, 부등식의 해 구하기 30%

$$x^2 + nx - 2n^2 = (x + 2n)(x - n) \text{이므로}$$

$$\text{부등식 } |x^2 + nx - 2n^2| \geq -4x + 4n \text{에서}$$

(i) $x^2 + nx - 2n^2 \geq 0$, 즉 $x \leq -2n$ 또는 $x \geq n$ 일 때

$$x^2 + nx - 2n^2 \geq -4x + 4n$$

$$x^2 + (n + 4)x - 2n(n + 2) \geq 0$$

$$(x - n)\{x + 2(n + 2)\} \geq 0$$

$$\therefore x \leq -2(n + 2) \text{ 또는 } x \geq n$$

② 단계 $x^2 + nx - 2n^2 < 0$ 일 때, 부등식의 해 구하기 30%

(ii) $x^2 + nx - 2n^2 < 0$, 즉 $-2n < x < n$ 일 때

$$-x^2 - nx + 2n^2 \geq -4x + 4n$$

$$x^2 + (n - 4)x - 2n(n - 2) \leq 0$$

$$(x - n)\{x + 2(n - 2)\} \leq 0$$

$$n = 1 \text{이면 } 1 \leq x \leq 2$$

그런데 $-2 < x < 1$ 이므로 해가 없다.

$$n \geq 2 \text{이면 } -2(n - 2) \leq x \leq n$$

$$\text{그런데 } -2n < x < n \text{이므로 } -2(n - 2) \leq x < n$$

(i), (ii)에서 위 부등식의 해는 $n = 1$ 일 때, $x \leq -6$ 또는 $x \geq 1$

$n \geq 2$ 일 때, $x \leq -2(n + 2)$ 또는 $x \geq -2(n - 2)$

③ 단계 $p + q$ 의 값 구하기 40%

$$\text{부등식 } x^2 - n^2x - 5x \leq 0 \text{에서}$$

$$x\{x - (n^2 + 5)\} \leq 0 \text{이므로 } 0 \leq x \leq n^2 + 5$$

주어진 연립부등식의 해는

$$n = 1 \text{ 일 때, } 1 \leq x \leq 6$$

$$n \geq 2 \text{ 일 때, } -2(n - 2) \leq 0 \text{이므로 } 0 \leq x \leq n^2 + 5$$

$$\text{즉, } f(1) = 6 \text{ 이고, } n \geq 2 \text{ 일 때 } f(n) = n^2 + 6$$

$$f(1) + f(m) = 6 + m^2 + 6 = m^2 + 12 < 49 \text{에서 } m^2 < 37 \text{이므로 이}$$

를 만족시키는 자연수 m 은 1, 2, 3, 4, 5, 6

따라서 $p = 6, q = 21$ 이므로 $p + q = 27$

604 답 6

① 단계 연립부등식의 해 구하기 30%

$$\text{부등식 } x^2 - (a^2 + a)x + a^3 \geq 0 \text{에서}$$

$$(x - a^2)(x - a) \geq 0 \text{이고, } 0 < a < 1 \text{에서 } a^2 < a \text{이므로}$$

$$x \leq a^2 \text{ 또는 } x \geq a$$

$$\text{또, 부등식 } x^2 - 4ax + 4a^2 - 1 \leq 0 \text{에서}$$

$$\{x - (2a - 1)\}\{x - (2a + 1)\} \leq 0$$

$$\therefore 2a - 1 \leq x \leq 2a + 1$$

이때 $0 < a < 1$ 에서 $a < 2a + 1$ 이고 $2a - 1 < a^2$ 이므로

연립부등식의 해는 $2a - 1 \leq x \leq a^2$ 또는 $a \leq x \leq 2a + 1$

② 단계 $0 < a < \frac{1}{2}$ 일 때, 정수 x 의 개수 구하기 20%

(i) $0 < a < \frac{1}{2}$ 일 때

$$2a - 1 \leq x \leq a^2 \text{에서}$$

$$-1 < 2a - 1 < 0, 0 < a^2 < \frac{1}{4} \text{이므로 정수 } x \text{의 값은 } 0$$

$$a \leq x \leq 2a + 1 \text{에서}$$

$$0 < a < \frac{1}{2}, 1 < 2a + 1 < 2 \text{이므로 정수 } x \text{의 값은 } 1$$

따라서 정수 x 의 개수는 2이다.

③ 단계 $a = \frac{1}{2}$ 일 때, 정수 x 의 개수 구하기 20%

(ii) $a = \frac{1}{2}$ 일 때

$$2a - 1 \leq x \leq a^2 \text{에서}$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{4} \text{이므로 정수 } x \text{의 값은 } 0$$

$$a \leq x \leq 2a + 1 \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 2 \text{이므로 정수 } x \text{는 } 1, 2$$

따라서 정수 x 의 개수는 3이다.

④ 단계 $\frac{1}{2} < a < 1$ 일 때, 정수 x 의 개수 구하기 20%

(iii) $\frac{1}{2} < a < 1$ 일 때

$$2a - 1 \leq x \leq a^2 \text{에서}$$

$$0 < 2a - 1 < 1, \frac{1}{4} < a^2 < 1 \text{이므로 정수 } x \text{는 없다.}$$

$$a \leq x \leq 2a + 1 \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} < a < 1, 2 < 2a + 1 < 3 \text{이므로 정수 } x \text{는 } 1, 2$$

따라서 정수 x 의 개수는 2이다.

⑤ 단계 $\frac{M}{p}$ 의 값 구하기 10%

(i)~(iii)에서 $M = 3, p = \frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{M}{p} = 6$

① 단계 $k < 0$ 일 때, 연립부등식의 해 구하기 40%부등식 $x^2 - 2kx - 8k^2 < 0$ 에서

$$(x - 4k)(x + 2k) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

부등식 $x^2 - 2x + k(2 - k) \geq 0$ 에서

$$(x - k)(x - 2 + k) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $k = 0$ 일 때 $\textcircled{1}$ 의 해는 존재하지 않고, $k = 1$ 일 때 연립부등식을 만족시키는 해는 $-2 < x < 4$ (i) $k < 0$ 일 때

$$\textcircled{1} \text{에서 } 4k < x < -2k$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } x \leq k \text{ 또는 } x \geq 2 - k$$

 $\textcircled{1}$ $k < -2$ 이면 $4k < x \leq k$ 또는 $2 - k \leq x < -2k$ 이므로 정수 x 의 개수는

$$-3k + (-k - 2) = 22 \text{에서 } k = -6$$

 $\textcircled{2}$ $-2 \leq k < 0$ 이면 $4k < x \leq k$ 이므로 정수 x 의 개수는

$$-3k = 22, \text{ 즉 } -3k = 22 \text{를 만족시키는 정수 } k \text{는 없다.}$$

② 단계 $0 < k < 1$ 일 때, 조건을 만족시키지 않음을 보이기 20%(ii) $0 < k < 1$ 일 때

$$\textcircled{1} \text{의 해는 } -2k < x < 4k$$

이때 $0 < k < 1$ 에서 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 정수 x 의 개수의 최댓값은 5이므로 연립부등식의 정수인 해의 개수가 22가 될 수 없다.**③ 단계** $k > 1$ 일 때, 연립부등식의 해 구하기 40%(iii) $k > 1$ 일 때

$$\textcircled{1} \text{의 해는 } -2k < x < 4k$$

$$\textcircled{2} \text{의 해는 } x \leq 2 - k \text{ 또는 } x \geq k \text{이므로 연립부등식의 해는}$$

$$-2k < x \leq 2 - k \text{ 또는 } k \leq x < 4k \text{이므로 정수 } x \text{의 개수는}$$

$$(k + 2) + 3k = 22 \text{에서 } k = 5$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 k 의 값의 곱은 $-6 \times 5 = -30$ **① 단계** 삼차식 인수분해 하기 20% $x^3 + (-2k + 2)x^2 - (k^2 + 10k + 5)x - (2k^2 + 12k + 10) = 0$ 을 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -2 & 1 & -2k+2 & -k^2-10k-5 & -2k^2-12k-10 \\
 & & -2 & 4k & 2k^2+12k+10 \\
 \hline
 1 & -2k & -k^2-6k-5 & 0 &
 \end{array}$$

$$x^3 + (-2k + 2)x^2 - (k^2 + 10k + 5)x - (2k^2 + 12k + 10)$$

$$= (x + 2)(x^2 - 2kx - k^2 - 6k - 5)$$

따라서 -2 를 근으로 갖는다.**② 단계** 음의 세 실근을 갖도록 하는 실수 k 의 값 구하기 50%방정식 $x^2 - 2kx - k^2 - 6k - 5 = 0$ 은 0보다 작은 두 실근을 갖는다. $f(x) = x^2 - 2kx - k^2 - 6k - 5$ 라 하고, $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라하면 $D \geq 0$, $f(0) > 0$, $k < 0$ 을 만족시킨다.

$$\frac{D}{4} = k^2 - 1 \times (-k^2 - 6k - 5) \geq 0$$

$$2k^2 + 6k + 5 \geq 0, 2\left(k + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq 0$$

즉, 실수 k 의 값에 관계없이 항상 성립한다.

$$f(0) = -k^2 - 6k - 5 > 0$$

$$-(k + 1)(k + 5) > 0 \quad \therefore -5 < k < -1$$

③ 단계 pq 의 값 구하기 30%따라서 실수 k 의 값의 범위는 $-5 < k < -1$ 이므로

$$p = -5, q = -1 \text{에서 } pq = 5$$

① 단계 $-x^2 - x - 3 \leq ax + b$ 에서 a, b 의 조건 구하기 30% $x^2 + (a + 1)x + b + 3 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면 부등식 $-x^2 - x - 3 \leq ax + b$ 의 해가 모든 실수이므로 $D_1 \leq 0$ 이 성립해야 한다.

$$D_1 = (a + 1)^2 - 4(b + 3) \leq 0$$

$$a^2 + 2a - 11 \leq 4b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

② 단계 $ax + b \leq x^2 - 5x + 7$ 에서 a, b 의 조건 구하기 30% $x^2 - (a + 5)x - b + 7 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면 부등식 $ax + b \leq x^2 - 5x + 7$ 의 해가 모든 실수이므로 $D_2 \leq 0$ 이 성립해야 한다.

$$D_2 = (a + 5)^2 - 4(-b + 7) \leq 0$$

$$-a^2 - 10a + 3 \geq 4b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

③ 단계 $g(4) + h(-4)$ 의 값 구하기 40%

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a^2 + 2a - 11 \leq -a^2 - 10a + 3$$

$$2a^2 + 12a - 14 \leq 0, (a - 1)(a + 7) \leq 0$$

$$\therefore -7 \leq a \leq 1$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $-7 \leq a < 0$ 또는 $0 < a \leq 1$ $a = -7$ 일 때 $b = 6$ 이고, $a = 1$ 일 때 $b = -2$ 이므로

$$g(x) = x - 2, h(x) = -7x + 6$$

따라서 $g(4) = 2, h(-4) = 34$ 이므로 $g(4) + h(-4) = 36$ 이차함수 $y = x^2 + 2kx + 1$ 의 그래프와 직선 $2x - y - 3 = 0$ 의 교점의 개수는 $x^2 + 2kx + 1 = 2x - 3$ 의 실근의 개수와 같다.

방정식 $2x-3=x^2+2kx+1$ 에서

$x^2+2(k-1)x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2-1 \times 4=(k+1)(k-3) \text{이므로}$$

$$f(k)=\begin{cases} 0 & (-1 < k < 3) \\ 1 & (k=-1 \text{ 또는 } k=3) \\ 2 & (k < -1 \text{ 또는 } k > 3) \end{cases}$$

이때 $k^2+6k < f(k)+4$ 에서

(i) $-1 < k < 3$ 일 때

$$k^2+6k-4 < 0 \text{을 만족시키는 정수 } k \text{는 } 0$$

(ii) $k=-1$ 또는 $k=3$ 일 때

$$k^2+6k-5 < 0 \text{을 만족시키는 정수 } k \text{는 } -1$$

(iii) $k < -1$ 또는 $k > 3$ 일 때

$$k^2+6k-6 < 0 \text{을 만족시키는 정수 } k \text{는 } -2, -3, -4, -5, -6$$

(i)~(iii)에서 정수 k 의 값의 합은

$$-1+(-2)+(-3)+(-4)+(-5)+(-6)=-21$$

609 ④

부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$ 의 해가 $x=3$ 뿐이므로 $a < 0$ 이고,

$$a(x-3)^2 \geq 0, \text{ 즉 } ax^2-6ax+9a \geq 0 \text{에서}$$

$$b=-6a > 0, c=9a < 0$$

이때 $bx^2+cx+60a < 0$ 에서

$$-6ax^2+9ax+60a < 0, -3a(2x^2-3x-20) < 0$$

$$(x-4)(2x+5) < 0 \quad \therefore -\frac{5}{2} < x < 4$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x 의 개수는

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3 \text{의 } 6 \text{이다.}$$

610 ③

조건 (가)에서 이차함수 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ($\alpha < \beta$)라 하면

부등식 $f(2x-3) < 0$ 에서

$$a(2x-3-\alpha)(2x-3-\beta) < 0$$

$$4a\left(x-\frac{\alpha+3}{2}\right)\left(x-\frac{\beta+3}{2}\right) < 0$$

이때 $f(2x-3) < 0$ 의 해가 $x < \frac{1}{2}$ 또는 $x > \frac{7}{2}$ 이므로 $a < 0$ 이고,

$$\left(x-\frac{\alpha+3}{2}\right)\left(x-\frac{\beta+3}{2}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{7}{2}\right) > 0 \text{에서}$$

$$\alpha=-2, \beta=4$$

따라서 $f(x)=a(x-4)(x+2)$, 즉 $f(x)=ax^2-2ax-8a$

조건 (나)에서 $f(x)+2x-12=0$, 즉

$$ax^2-(2a-2)x-8a-12=0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$ax^2-(2a-2)x-8a-12 \geq 0$ 의 해가 한 개뿐이므로 $D=0$ 이 성립해야 한다.

$$\frac{D}{4}=(a-1)^2-a \times (-8a-12)=0$$

$$9a^2+10a+1=0, (a+1)(9a+1)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=-\frac{1}{9}$$

(i) $a=-1$ 일 때

$$f(x)=-x^2+2x+8 \text{이므로 } f(1)=9$$

(ii) $a=-\frac{1}{9}$ 일 때

$$f(x)=-\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{9}x+\frac{8}{9} \text{이므로 } f(1)=1$$

따라서 $M=9, m=1$ 이므로 $M-m=8$

611 ④

$f(x)=x(x+2)$ 에서

(i) $-2 < x < 0$ 일 때

$$f(x) < 0 \text{이므로 } g(x)=|f(x)|-f(x)=-2f(x)$$

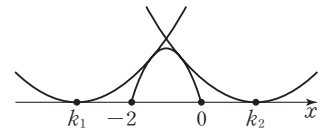
$y=g(x)$ 의 그래프와

$$y=\frac{1}{2}(x-k)^2 \text{의 그래프가 접}$$

할 때 k 의 값을 k_1, k_2

($k_1 < k_2$)라 하면 두 경우의

그래프는 그림과 같다.



이때 $-2x(x+2) > \frac{1}{2}(x-k)^2$ 을 만족시키는 해가 존재하는 실

수 k 의 값의 범위는 $k_1 < k < k_2$ 이고,

$$\text{방정식 } -4x(x+2)-(x-k)^2=0$$

즉, $5x^2-(2k-8)x+k^2=0$ 의 판별식을 D 라 하면 두 그래프의 교점의 개수가 2이므로 $D > 0$ 이 성립해야 한다.

$$\frac{D}{4}=(k-4)^2-1 \times 5 \times k^2 > 0$$

$$-4k^2-8k+16 > 0, k^2+2k-4 < 0$$

$$\therefore -1-\sqrt{5} < k < -1+\sqrt{5}$$

(ii) $x < -2$ 또는 $x > 0$ 일 때

$$f(x) > 0 \text{이므로 } g(x)=|f(x)|-f(x)=0$$

이때 $0 > \frac{1}{2}(x-k)^2$ 을 만족시키는 실수 k 는 없다.

(i), (ii)에서 실수 k 의 값의 범위는 $-1-\sqrt{5} < k < -1+\sqrt{5}$ 이므로

$$p=-1-\sqrt{5}, q=-1+\sqrt{5} \quad \therefore pq=-4$$

612 ⑤

조건 (가)에서 $f(-2)=f(8)=c$ 이므로

$$f(x)=(x-8)(x+2)+c$$

$$=x^2-6x+c-16$$

조건 (나)에서 $f(x) \leq g(x)$, 즉 $f(x)-g(x) \leq 0$ 의 해가 $x=a$ 의 한 개이므로 이차방정식 $f(x)-g(x)=0$ 에 대하여 최고차항의 계수는 양수이고, 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이 성립해야 한다.

$$\text{즉, } f(x)-g(x)=4(x-a)^2$$

$$f(a)=c-16 \text{에서 } a^2-6a=0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=6$$

이때 $a < 3$ 이므로 $a=0$

$$f(a)-g(a)=0 \text{에서 } g(a)=c-16$$

$$f(0)+g(0)=2(c-16)=18 \text{에서 } c=25$$

따라서 $f(x)=x^2-6x+9$, $g(x)=-3x^2-6x+9$ 이므로
 $f(2)+g(-2)=1+9=10$

613 ①

$x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$ 이므로

$$\frac{kx^2+(k+2)x+k+1}{x^2+2x+3} < 2 \text{에서}$$

$$kx^2+(k+2)x+k+1 < 2x^2+4x+6$$

$$\text{즉, } (k-2)x^2+(k-2)x+(k-5) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(i) $k=2$ 일 때

①에서 $-3 < 0$ 이므로 주어진 부등식이 항상 성립한다.

(ii) $k \neq 2$ 일 때

①이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하므로 방정식

$$(k-2)x^2+(k-2)x+(k-5)=0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$k-2 < 0, D < 0 \text{이 성립해야 한다.}$$

$$D=(k-2)^2-4 \times (k-2) \times (k-5) < 0$$

$$(k-2)(-3k+18) < 0$$

$$\therefore k < 2 \text{ 또는 } k > 6$$

이때 조건을 만족시키는 자연수 k 는 $1 \leftarrow k-2 < 0$

따라서 조건을 만족시키는 모든 k 의 값의 합은 $2+1=3$

614 ③

$$f(x)=(3-m)\{x^2+(m-4)x+2m-12\}$$

$$=(3-m)(x+2)(x+m-6) \leq 0$$

$$g(x)=x^2-(m-11)x+3m-42$$

$$=(x-3)(x-m+14) < 0$$

(i) $-4 \leq m < 3$ 일 때

$$f(x) \leq 0 \text{의 해는 } -2 \leq x \leq -m+6$$

$$g(x) < 0 \text{의 해는 } m-14 < x < 3$$

이때 $3 < -m+6$ 이고 $m-14 < -11$ 이므로 주어진 연립부등식의 해는 $-2 \leq x < 3$

(ii) $3 < m \leq 8$ 일 때

$$f(x) \leq 0 \text{의 해는 } x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq -m+6$$

이때 연립부등식의 해는 $-2 \leq x < 3$ 이 될 수 없다.

(iii) $8 < m < 17$ 일 때

$$f(x) \leq 0 \text{의 해는 } x \leq -m+6 \text{ 또는 } x \geq -2$$

$$g(x) < 0 \text{의 해는 } m-14 < x < 3$$

이때 $m-14 < -2$ 이고 $-m+6 \leq m-14$, 즉

$m < 12$ 이고 $m \geq 10$ 이면 연립부등식의 해가 $-2 \leq x < 3$ 이므로

$$10 \leq m < 12$$

(iv) $m \geq 17$ 일 때

$$f(x) \leq 0 \text{의 해는 } x \leq -m+6 \text{ 또는 } x \geq -2$$

$$g(x) < 0 \text{의 해는 } 3 < x < m-14$$

이때 연립부등식의 해는 $3 < x < m-14$

(i)~(iv)에서 정수 m 의 개수는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 10, 11$ 의 9이다.

615 ③

연립부등식의 해에 $x=1$ 이 포함되므로

부등식 $6x^2-11nx+3n^2 \leq 0$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$3n^2-11n+6 \leq 0, (3n-2)(n-3) \leq 0$$

$$\therefore \frac{2}{3} \leq n \leq 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

부등식 $|x-n| \geq \frac{3}{2}$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$|1-n| \geq \frac{3}{2} \text{이므로 } 1-n \leq -\frac{3}{2} \text{ 또는 } 1-n \geq \frac{3}{2}$$

$$\therefore n \leq -\frac{1}{2} \text{ 또는 } n \geq \frac{5}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 자연수 } n \text{의 값의 범위는 } \frac{5}{2} \leq n \leq 3 \quad \therefore n=3$$

616 ① 19

부등식 $x^2-6x+5 \leq 0$ 에서 $1 \leq x \leq 5$ 이고,

부등식 $x^2-(3k-1)x+2k^2-k < 0$ 에서

$$x^2-(3k-1)x+2k^2-k=(x-k)\{x-(2k-1)\} < 0$$

이때 $k > 1$ 이므로 $k < 2k-1$, 즉 $k < x < 2k-1$

연립부등식의 정수인 해의 개수가 2인 경우는

(i) 범위 안에 있는 정수 x 가 2, 3일 때

$1 < k < 2$ 이고 $3 < 2k-1 \leq 4$ 이므로 이를 만족시키는 실수 k 는 존재하지 않는다.

(ii) 범위 안에 있는 정수 x 가 3, 4일 때

$2 \leq k < 3$ 이고 $4 < 2k-1 \leq 5$ 이므로 이를 만족시키는 실수 k 의 값의 범위는 $\frac{5}{2} < k < 3$

(iii) 범위 안에 있는 정수 x 가 4, 5일 때

$3 \leq k < 4$ 이고 $2k-1 > 5$ 이므로 이를 만족시키는 실수 k 의 값의 범위는 $3 < k < 4$

$$(i) \sim (iii) \text{에서 } a=\frac{5}{2}, b=3, c=4 \quad \therefore 2(a+b+c)=19$$

617 ②

$$f(x)=x^2+3x-18=(x-3)(x+6)$$

이고, $y=m(x-3)$ 은 m 의 값에

관계없이 점 $(3, 0)$ 을 지나는 직선

이다.

이때 부등식 $g(x) \geq m(x-3)$ 의

해의 개수가 13이므로 함수

$y=g(x)$ 와 직선 $y=m(x-3)$ 을

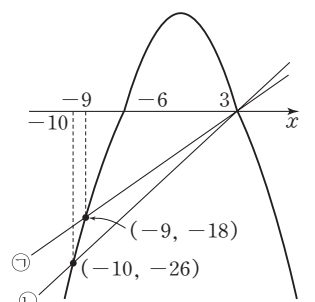
그래프로 나타냈을 때, 그림과 같

이 직선 $y=m(x-3)$ 이 ①과 일

치하거나 ①과 ② 사이를 지나야 한다.

따라서 양수 m 의 최솟값은 직선 $y=m(x-3)$ 이 점 $(-9, -18)$ 을 지날 때의 기울기이므로

$$m=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}, \text{ 즉 } p=2, q=3 \quad \therefore p+q=5$$



618

답 ③

$$x^2 - 2k^2 + 7k = 0 \text{에서 } x^2 = 2k^2 - 7k$$

이때 $2k^2 - 7k \geq 0$ 이면 $x = \pm \sqrt{2k^2 - 7k}$ 이므로 주어진 방정식은 음의 실근을 갖거나 0이므로

$$2k^2 - 7k < 0, \text{ 즉 } 0 < k < \frac{7}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 15 = 0$ 은 두 양의 실근을 갖는다.
 $f(x) = x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 15$ 라 하고, $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0, f(0) > 0, k > 0$ 을 만족시킨다.

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - 1 \times (k^2 + 2k - 15) \geq 0$$

$$-2k + 15 \geq 0$$

$$\text{이므로 } k \leq \frac{15}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$f(0) = k^2 + 2k - 15 \text{에서 } (k-3)(k+5) > 0 \text{이므로}$$

$$k < -5 \text{ 또는 } k > 3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

①~③에서 조건을 모두 만족시키는 실수 k 의 값의 범위는

$$3 < k < \frac{7}{2}$$

$$\text{따라서 } \alpha = 3, \beta = \frac{7}{2} \text{이므로 } 2(\beta - \alpha) = 1$$

TIP $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)에 대하여 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근이 모두 양수일 조건은 판별식 $D \geq 0, f(0) > 0$, 대칭축 $-\frac{b}{2a} > 0$

619

답 ②

$$(i) f(n) = \begin{cases} x^2 - (3n+2)x + 2n^2 + n - 3 < 0 \\ x^2 + 3nx > 4nx + x \end{cases}$$

$$\text{부등식 } x^2 - (3n+2)x + 2n^2 + n - 3 < 0 \text{에서}$$

$$\{x - (2n+3)\} \{x - (n-1)\} < 0$$

이때 자연수 n 에 대하여 $n-1 < 2n+3$ 이므로

$$n-1 < x < 2n+3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{부등식 } x^2 + 3nx > 4nx + x \text{에서}$$

$$x^2 - (n+1)x > 0$$

$$x < 0 \text{ 또는 } x > n+1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 연립부등식의 해는 } n+1 < x < 2n+3$$

$$\therefore f(n) = (2n+3) - (n+1) - 1 = n+1$$

$$(ii) \text{ 방정식 } (n-2)x^2 - 2nx + 2n = 0 \text{에서}$$

$$\textcircled{1} n=2 \text{일 때}$$

$$-4x+4=0 \text{에서 } x=1, \text{ 즉 } g(2)=1$$

$$\textcircled{2} n \neq 2 \text{일 때}$$

이차방정식 $(n-2)x^2 - 2nx + 2n = 0$ 이 두 실근을 가질 때,

$$h(x) = (n-2)x^2 - 2nx + 2n \text{이라 하고, } h(x) = 0 \text{의 판별식을}$$

을 D 라 하면 $D > 0, h(0) > 0, \frac{n}{n-2} > 0$ 이 성립해야 한다.

$$\frac{D}{4} = (-n)^2 - (n-2) \times 2n > 0, -n^2 + 4n > 0$$

$$\therefore 0 < n < 4$$

$$h(0) = 2n > 0$$

$$\frac{n}{n-2} > 0 \text{이면 } n(n-2) > 0 \text{이므로 } n > 2$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 은 3

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \underline{g(1)=0}, \underline{g(2)=1}, \underline{g(3)=2}, \underline{g(4)=1} \text{이고,}$$

$$n \geq 5 \text{일 때, } g(x) = 0$$

$$n=1 \text{일 때, } f(1) - g(1) = 2 - 0 = 2$$

$$n=2 \text{일 때, } f(2) - g(2) = 3 - 1 = 2$$

$$n=3 \text{일 때, } f(3) - g(3) = 4 - 2 = 2$$

$$n=4 \text{일 때, } f(4) - g(4) = 5 - 1 = 4$$

$$n \geq 5 \text{일 때, } f(n) - g(n) = n + 1$$

(i), (ii)에서 $2 \leq f(n) - g(n) \leq 5$ 를 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합은 $1+2+3+4=10$

620

답 $2 \leq a < 3$

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3) \text{에서}$$

$$(i) -2 \leq x \leq 3 \text{일 때}$$

$$\frac{f(x) + |f(x)|}{2} \leq a(x+3) \text{에서 } f(x) \leq 0 \text{이므로}$$

$$|f(x)| = -f(x), \text{ 즉 } 0 \leq a(x+3)$$

이때 $a > 0$ 이므로 주어진 부등식은 항상 성립한다.

따라서 $-2 \leq x \leq 3$ 일 때 조건을 만족시키는 정수 x 의 개수는 6

$$(ii) x < -2 \text{ 또는 } x > 3 \text{일 때}$$

$$\frac{f(x) + |f(x)|}{2} \leq a(x+3) \text{에서 } f(x) > 0 \text{이므로}$$

$$|f(x)| = f(x), \text{ 즉 } f(x) \leq a(x+3)$$

$$x^2 - (a-1)x - 3a - 6 \leq 0 \text{에서}$$

$$x^2 - (a-1)x - 3a - 6 \leq 0, (x+3)\{x - (a+2)\} \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq x \leq a+2$$

$-3 \leq x < -2$ 또는 $3 < x \leq a+2$ 를 만족시키는 정수 x 의 개수는 2이어야 하므로 $4 \leq a+2 < 5$

$$\therefore 2 \leq a < 3$$

$$(i), (ii) \text{에서 실수 } a \text{의 값의 범위는 } 2 \leq a < 3$$

621

답 6

$\beta - \alpha$ 가 자연수가 되기 위해서는 α, β 가 모두 정수이거나 α, β 가 각각 정수가 아닌 실수이어야 한다.

$\alpha \leq x \leq \beta$ 인 정수 x 의 개수가 3이 되기 위해서 α, β 가 모두 정수인 경우 $\beta - \alpha = 2$,

α, β 가 각각 정수가 아닌 실수인 경우 $\beta - \alpha = 3$

$$(i) a < 0 \text{ 또는 } a > 5 \text{일 때}$$

$$\text{이차부등식 } (2x - a^2 + 2a)(2x - 3a) \leq 0 \text{의 해는}$$

$$\frac{3}{2}a \leq x \leq \frac{1}{2}a^2 - a$$

$$\textcircled{1} \alpha, \beta \text{가 모두 정수인 경우}$$

$$\beta - \alpha = \left(\frac{1}{2}a^2 - a\right) - \frac{3}{2}a = \frac{1}{2}a^2 - \frac{5}{2}a = 2 \text{이므로}$$

$$a^2 - 5a - 4 = 0 \text{에서 } a = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$a = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$ 이면 β 와 α 가 각각 정수가 아니므로 조건을 만족시키는 a 는 없다.

② α, β 가 각각 정수가 아닌 실수인 경우

$$\beta - \alpha = \left(\frac{1}{2}a^2 - a\right) - \frac{3}{2}a = \frac{1}{2}a^2 - \frac{5}{2}a = 3 \text{이므로}$$

$$a^2 - 5a - 6 = 0 \text{에서 } a = -1 \text{ 또는 } a = 6$$

$a = -1$ 이면 β 와 α 가 각각 정수가 아닌 실수이다.

$a = 6$ 이면 β 와 α 가 모두 정수이므로 조건을 만족하지 않는다.

$$\therefore a = -1$$

(ii) $0 < a < 5$ 일 때

이차부등식 $(2x - a^2 + 2a)(2x - 3a) \leq 0$ 의 해는

$$\frac{1}{2}a^2 - a \leq x \leq \frac{3}{2}a$$

① α, β 가 모두 정수인 경우

$$\beta - \alpha = \frac{3}{2}a - \left(\frac{1}{2}a^2 - a\right) = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{5}{2}a = 2 \text{이므로}$$

$$a^2 - 5a + 4 = 0 \text{에서 } a = 1 \text{ 또는 } a = 4$$

$a = 1$ 이면 β 와 α 가 각각 정수가 아니므로 조건을 만족하지 않는다.

$a = 4$ 이면 β 와 α 가 모두 정수이다.

$$\therefore a = 4$$

② α, β 가 각각 정수가 아닌 실수인 경우

$$\beta - \alpha = \frac{3}{2}a - \left(\frac{1}{2}a^2 - a\right) = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{5}{2}a = 3 \text{이므로}$$

$$a^2 - 5a + 6 = 0 \text{에서 } a = 2 \text{ 또는 } a = 3$$

$a = 2$ 이면 β 와 α 가 모두 정수

$a = 3$ 이면 β 와 α 가 각각 정수가 아닌 실수이다.

$$\therefore a = 3$$

(i), (ii)에서 모든 실수 a 의 값의 합은 $-1 + 4 + 3 = 6$

622 ㉠ ㉡

$f(x) = (x+4)(x-2)$ 에서

(i) $-4 < x < 2$ 일 때

$$f(x) - \frac{|f(x)|}{3} \geq 6x - a \text{에서 } f(x) < 0 \text{이므로}$$

$$|f(x)| = -f(x), \text{ 즉 } \frac{4}{3}f(x) \geq 6x - a$$

$4x^2 + 8x - 32 \geq 18x - 3a$ 에서 $4x^2 - 10x + 3a - 32 \geq 0$ 이 모든 실수 x 에 대해 성립하므로 $4x^2 - 10x + 3a - 32 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1 \leq 0$ 이 성립해야 한다.

$$\frac{D_1}{4} = 5^2 - 4 \times (3a - 32) \leq 0$$

$$153 - 12a \leq 0 \quad \therefore a \geq \frac{51}{4}$$

(ii) $x \leq -4$ 또는 $x \geq 2$ 일 때

$$f(x) - \frac{|f(x)|}{3} \geq 6x - a \text{에서 } f(x) > 0 \text{이므로}$$

$$|f(x)| = f(x), \text{ 즉 } \frac{2}{3}f(x) \geq 6x - a$$

$2x^2 + 4x - 16 \geq 18x - 3a$ 에서 $2x^2 - 14x + 3a - 16 \geq 0$ 이 모든 실수 x 에 대해 성립하므로 $2x^2 - 14x + 3a - 16 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2 \leq 0$ 이 성립해야 한다.

$$\frac{D_2}{4} = 7^2 - 2 \times (3a - 16) \leq 0$$

$$81 - 6a \leq 0 \quad \therefore a \geq \frac{27}{2}$$

(i), (ii)에서 실수 a 의 최솟값은 $\frac{27}{2}$ 이다.

623 ㉠ -8

$$\text{부등식 } 2x + a + 5 \geq 0 \text{에서 } x \geq \frac{-a-5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 $(x - a^2 + 3a)(x - 2a^2 + 4) = 0$ 의 두 근 $a^2 - 3a, 2a^2 - 4$ 에 대하여 $a^2 - 3a = 2a^2 - 4a$ 에서

$$a^2 + 3a - 4 = (a-1)(a+4) \text{이고, } a < 0 \text{이므로}$$

$$a < -4 \text{일 때, } a^2 - 3a < 2a^2 - 4 \text{이고}$$

$$-4 < a < 0 \text{일 때, } 2a^2 - 4 < a^2 - 3a$$

(i) $a < -4$ 일 때

$$\text{부등식 } (x - a^2 + 3a)(x - 2a^2 + 4) < 0 \text{에서}$$

$$a^2 - 3a < x < 2a^2 - 4$$

$$\text{이때 } a^2 - 3a - \frac{-a-5}{2} = a^2 - \frac{5}{2}a + \frac{5}{2} = \left(a - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}$$

$$\text{이므로 모든 음의 정수 } a \text{에 대하여 } a^2 - 3a > \frac{-a-5}{2}$$

$$\text{즉, 연립부등식의 해는 } a^2 - 3a < x < 2a^2 - 4$$

정수 a 에 대하여 위 연립부등식의 정수인 해의 개수는

$$2a^2 - 4 - (a^2 - 3a) - 1 = a^2 + 3a - 5 = 5 \text{에서}$$

$$a^2 + 3a - 10 = (a+5)(a-2) = 0 \text{이므로 } a = -5$$

(ii) $-4 < a < 0$ 일 때

이를 만족시키는 정수 a 는 $-3, -2, -1$ 이고,

$$\text{부등식 } (x - a^2 + 3a)(x - 2a^2 + 4) < 0 \text{에서}$$

$$2a^2 - 4 < x < a^2 - 3a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡에서

$$a = -3 \text{일 때, 연립부등식을 풀면 } \begin{cases} x \geq -1 \\ 14 < x < 18 \end{cases} \text{에서 만족시키는}$$

정수인 해의 개수는 3

$$a = -2 \text{일 때, 연립부등식을 풀면 } \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ 4 < x < 10 \end{cases} \text{에서 만족시키는}$$

정수인 해의 개수는 5

$$a = -1 \text{일 때, 연립부등식을 풀면 } \begin{cases} x \geq -2 \\ -2 < x < 4 \end{cases} \text{에서 만족시키는}$$

정수인 해의 개수는 5

(i), (ii)에서 정수 x 의 개수가 5가 되도록 하는 음의 정수 a 의 값의 합은 $-5 + (-2) + (-1) = -8$

III 경우의 수

10 경우의 수와 순열

1등급 필수 내신 빈출 문제

p.115~123

624 답 ⑤

두 주사위의 눈의 수를 각각 a, b 라 하면 두 눈의 수의 합이 홀수인 순서쌍 (a, b) 는 다음과 같다.

(i) 합이 3인 경우

$(1, 2), (2, 1)$ 의 2가지

(ii) 합이 5인 경우

$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$ 의 4가지

(iii) 합이 7인 경우

$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$ 의 6가지

(iv) 합이 9인 경우

$(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$ 의 4가지

(v) 합이 11인 경우

$(5, 6), (6, 5)$ 의 2가지

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

$2+4+6+4+2=18$

625 답 ③

1부터 100까지의 자연수 중

(i) 3으로 나누어떨어지는 수, 즉 3의 배수는

3, 6, 9, ..., 99의 33개

(ii) 7로 나누어떨어지는 수, 즉 7의 배수는

7, 14, 21, ..., 98의 14개

(iii) 3과 7로 모두 나누어떨어지는 수, 즉 21의 배수는

21, 42, 63, 84의 4개

(i)~(iii)에서 3 또는 7로 나누어떨어지는 자연수의 개수는

$33+14-4=43$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $100-43=57$

626 답 67

$48=2^4 \times 3$ 이므로 48과 서로소인 수는 2의 배수가 아니면서 3의 배수가 아니어야 한다.

200 이하의 자연수 중 2의 배수의 개수는 100이고 3의 배수의 개수는 66이다. 또, 2와 3의 최소공배수인 6의 배수의 개수는 33이므로 구하는 자연수의 개수는

$200-(100+66-33)=67$

627 답 ⑤

x, y 가 음이 아닌 정수이므로 $5x+2y \leq 17$ 을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) $x=0$ 인 경우

$2y \leq 17$, 즉 $y \leq \frac{17}{2}$ 이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y) 는

$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6), (0, 7), (0, 8)$ 의 9가지

(ii) $x=1$ 인 경우

$2y \leq 12$, 즉 $y \leq 6$ 이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y) 는

$(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)$ 의 7가지

(iii) $x=2$ 인 경우

$2y \leq 7$, 즉 $y \leq \frac{7}{2}$ 이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y) 는

$(2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3)$ 의 4가지

(iv) $x=3$ 인 경우

$2y \leq 2$, 즉 $y \leq 1$ 이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y) 는

$(3, 0), (3, 1)$ 의 2가지

(v) $x \geq 4$ 인 경우

$2y \leq -3$, 즉 $y \leq -\frac{3}{2}$ 이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y) 는

존재하지 않는다.

(i)~(v)에서 구하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$9+7+4+2+2=22$

TIP 계수의 절댓값이 큰 항을 기준으로 경우를 나누고 수를 대입해야 쉽게 풀 수 있어!

628 답 6

이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=b^2-ac>0 \quad \therefore b^2>ac$$

또, 두 근의 합 $-\frac{2b}{a}>0$ 에서 $ab<0$ 이고

두 근의 곱 $\frac{c}{a}>0$ 에서 $ac>0$

(i) $a>0, b<0, c>0$ 인 경우

$b=-2$ 일 때, $4>ac$ 이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (a, c) 는

$(1, 1), (1, 2), (2, 1)$ 의 3가지

$b=-1$ 일 때, $1>ac$ 이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (a, c) 는 존재하지 않는다.

(ii) $a<0, b>0, c<0$ 인 경우

$b=1$ 일 때, $1>ac$ 이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (a, c) 는 존재하지 않는다.

$b=2$ 일 때, $4>ac$ 이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (a, c) 는

$(-1, -1), (-1, -2), (-2, -1)$ 의 3가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $3+3=6$

TIP 서로 다른 두 실근을 가지므로 앞 단원에서 배운 이차방정식의 판별식을 이용할 수 있어! 특히, 양의 실근이라고 했으므로 근과 계수의 관계도 이용할 수 있겠지?

629 **답** ②

500원, 1000원, 2000원짜리 스티커의 개수를 각각 x, y, z 라 하면

$$500x + 1000y + 2000z = 7000, \text{ 즉 } x + 2y + 4z = 14$$

(i) $z=1$ 인 경우

$x + 2y = 10$ 이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y) 는

$(2, 4), (4, 3), (6, 2), (8, 1)$ 의 4가지

(ii) $z=2$ 인 경우

$x + 2y = 6$ 이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y) 는

$(2, 2), (4, 1)$ 의 2가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $4 + 2 = 6$

630 **답** 18

$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ 에서 서로 다른 6개의 항이 생기므로

$(a-b+c)(x+y+z)^2$ 을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수는 $3 \times 6 = 18$

TIP 두 다항식 A, B 의 각 항의 문자가 모두 다르다면 AB 를 전개할 때 생기는 항의 개수는 (A 의 항의 개수) $\times$ (B 의 항의 개수)이다.

631 **답** ②

모자, 선글라스, 벨트를 하나씩 택하는 경우의 수는 각각 $x, 4, y$ 이므로 $4xy = 72$, 즉 $xy = 18$

모자가 벨트보다 3개 더 많으므로 $x = y + 3$

이를 연립하여 풀면 $x = 6, y = 3$ $\leftarrow x, y$ 는 자연수

$\therefore x + y = 9$

632 **답** 135

(i) $abc, a+b+c$ 가 모두 짝수인 경우

a, b, c 중 1개 또는 3개가 짝수이어야 한다.

a, b, c 중 a 만 짝수인 경우의 수는 $3 \times 3 \times 3 = 27$

b 만 짝수인 경우의 수와 c 만 짝수인 경우의 수도 각각 27

a, b, c 가 모두 짝수인 경우의 수는 $3 \times 3 \times 3 = 27$

$\therefore 27 \times 4 = 108$

(ii) $abc, a+b+c$ 가 모두 홀수인 경우

a, b, c 가 모두 홀수이어야 하므로 $3 \times 3 \times 3 = 27$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $108 + 27 = 135$

633 **답** ③

$72 = 2^3 \times 3^2$ 이므로

$72^n = (2^3 \times 3^2)^n = 2^{3n} \times 3^{2n}$ 에서

$$(3n+1)(2n+1) = 70$$

$$6n^2 + 5n - 69 = 0$$

$$(6n+23)(n-3) = 0$$

$$\therefore n = 3 \leftarrow n \text{은 자연수}$$

TIP 자연수 N 이 $N = x^\alpha y^\beta z^\gamma$ (x, y, z 는 서로 다른 소수, α, β, γ 는 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, N 의 양의 약수의 개수는 $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$ 이다!

634 **답** ①

$$270 = 2 \times 3^3 \times 5 \text{이므로}$$

270의 양의 약수의 총합은

$$a = (1+2) \times (1+3+3^2+3^3) \times (1+5) = 720$$

270의 양의 약수 중 짝수의 개수는

$3^3 \times 5$ 의 양의 약수의 개수와 같으므로

$$b = (3+1) \times (1+1) = 8 \quad \text{3}^3 \times 5 \text{의 양의 약수에 각각 2를 곱한 것은 270의 양의 약수 중 짝수와 같다.}$$

$$\therefore a - b = 712$$

635 **답** ③

$N = 675p = 3^3 \times 5^2 \times p$ (p 는 소수)에서

(i) $p=3$ 인 경우

$N = 3^4 \times 5^2$ 이므로 양의 약수의 개수는

$$(4+1) \times (2+1) = 15$$

$$\therefore k = 15$$

(ii) $p=5$ 인 경우

$N = 3^3 \times 5^3$ 이므로 양의 약수의 개수는

$$(3+1) \times (3+1) = 16$$

$$\therefore k = 16$$

(iii) $p \neq 3, p \neq 5$ 인 경우

$N = 3^3 \times 5^2 \times p^1$ 이므로 양의 약수의 개수는

$$(3+1) \times (2+1) \times (1+1) = 24$$

$$\therefore k = 24$$

(i)~(iii)에서 구하는 모든 k 의 값의 합은

$$15 + 16 + 24 = 55$$

636 **답** 34

5000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액과 10000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 10000원짜리 지폐 2장을 5000원짜리 지폐 4장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 5000원짜리 지폐 6장, 1000원짜리 지폐 4장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

이때 0원을 지불하는 것은 제외하므로 지불할 수 있는 금액의 수는

$$(6+1) \times (4+1) - 1 = 34$$

TIP 작은 단위의 화폐를 합치면 큰 단위의 화폐가 될 때, 큰 단위의 화폐를 작은 단위의 화폐로 바꾸어 생각해 보자!

637 **답** ③

500원짜리 동전 4개를 지불할 수 있는 방법은 5가지

1000원짜리 지폐 n 장을 지불할 수 있는 방법은 $(n+1)$ 가지

5000원짜리 지폐 2장을 지불할 수 있는 방법은 3가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외하므로 지불할 수 있는 방법의 수는
 $5 \times (n+1) \times 3 - 1 = 59, 15n = 45$
 $\therefore n = 3$

638 **답** 60

(i) 지불할 수 있는 방법의 수

100원짜리 동전 6개를 지불할 수 있는 방법은 7가지
 500원짜리 동전 3개를 지불할 수 있는 방법은 4가지
 1000원짜리 지폐 3장을 지불할 수 있는 방법은 4가지
 이때 0원을 지불하는 것은 제외하므로 지불할 수 있는 방법의 수는
 $a = 7 \times 4 \times 4 - 1 = 111$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 1000원짜리 지폐
 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같고, 100원짜리 동전 5개로 지
 불할 수 있는 금액과 500원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액
 이 같으므로 1000원짜리 지폐 3장과 500원짜리 동전 3개를 모
 두 100원짜리 동전 45개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는
 100원짜리 동전 51개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
 이때 0원을 지불하는 것은 제외하므로 지불할 수 있는 금액의 수는
 $b = 52 - 1 = 51$

$\therefore a - b = 111 - 51 = 60$

639 **답** ②

(i) $A \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 3 = 6$

(ii) $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 2 \times 2 = 8$

(iii) $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 2 = 4$

(iv) $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 2 \times 3 = 12$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는 $6 + 8 + 4 + 12 = 30$

640 **답** ③

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ 에서

$A \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는 4

$B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 n

$C \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는 n

$B \rightarrow A$ 로 가는 경우의 수는 4

이므로 $4 \times n \times n \times 4 = 144$

$\therefore n = 3$

641 **답** ②

추가해야 하는 산책로의 개수를 n 이라 하면

(i) 입구 $\rightarrow$ 정자 $\rightarrow$ 출구로 가는 경우의 수는

$$3 \times 2 = 6$$

(ii) 입구 $\rightarrow$ 분수 $\rightarrow$ 출구로 가는 경우의 수는

$$2 \times 3 = 6$$

(iii) 입구 $\rightarrow$ 정자 $\rightarrow$ 분수 $\rightarrow$ 출구로 가는 경우의 수는

$$3 \times (n+1) \times 3 = 9n + 9$$

(iv) 입구 $\rightarrow$ 분수 $\rightarrow$ 정자 $\rightarrow$ 출구로 가는 경우의 수는

$$2 \times (n+1) \times 2 = 4n + 4$$

(i)~(iv)에서 입구에서 출발하여 출구로 가는 경우의 수는

$$6 + 6 + 9n + 9 + 4n + 4 \geq 48, 13n \geq 23$$

$$\therefore n \geq \frac{23}{13}$$

따라서 추가해야 하는 산책로의 개수의 최솟값은 2

642 **답** ④

인접한 영역이 가장 많은 B에 칠할 수 있는 색은 4가지

D에 칠할 수 있는 색은 3가지

E에 칠할 수 있는 색은 2가지

C에 칠할 수 있는 색은 2가지

A에 칠할 수 있는 색은 2가지

따라서 구하는 경우의 수는 $4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 96$

TIP 인접한 영역이 가장 많은 영역에 색칠하는 경우의 수부터 생각해 보자

643 **답** 420

(i) B와 E에 같은 색을 칠하는 경우

C에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 4가지, E
 에 칠할 수 있는 색은 B와 같은 색이므로 1가지, A에 칠할 수 있
 는 색은 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 3가지이므로 경우의 수는
 $5 \times 4 \times 1 \times 3 \times 3 = 180$

(ii) B와 E에 다른 색을 칠하는 경우

C에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 4가지, E
 에 칠할 수 있는 색은 3가지, A에 칠할 수 있는 색은 2가지, D에
 칠할 수 있는 색은 2가지이므로 경우의 수는
 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 240$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $180 + 240 = 420$

644 **답** 260

서로 다른 5개의 색을 각각 a, b, c, d, e 라 하고, 2가 적혀 있는 정사
 각형에 a 를 칠한다고 하면 다음과 같은 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) 2가 적혀 있는 정사각형과 4가 적혀 있는 정사각형에 같은 색을
 칠하는 경우

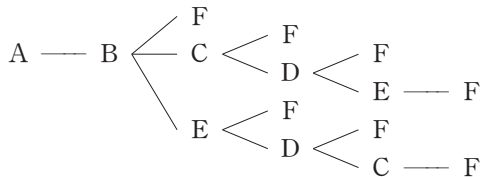
1이 적혀 있는 정사각형에 칠할 수 있는 색은 b, c, d, e 의 4가지,
 3이 적혀 있는 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1가지, 5가 적혀 있
 는 정사각형에 칠할 수 있는 색은 b, c, d, e 의 4가지이므로 경우
 의 수는 $4 \times 1 \times 4 = 16$

(ii) 2가 적혀 있는 정사각형과 4가 적혀 있는 정사각형에 다른 색을
 칠하는 경우

4가 적혀 있는 정사각형에 b 를 칠한다고 하면 1과 5가 적혀 있는
 정사각형에 칠할 수 있는 색은 각각 c, d, e 의 3가지, 3이 적혀 있
 는 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1가지이므로
 $3 \times 3 \times 1 = 9$

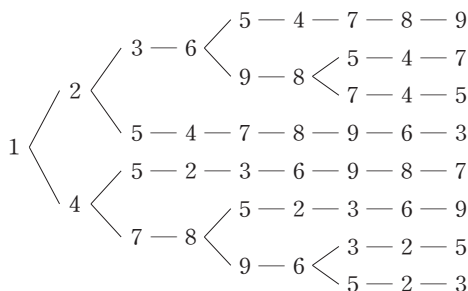
$$(16+36) \times 5 = 260$$

꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 B로 움직인 후 꼭짓점 F에 도착하는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



같은 방법으로 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 C 또는 D 또는 E로 움직인 후 꼭짓점 F에 도착하는 경우도 각각 7가지이므로 구하는 경우의 수는 $7 \times 4 = 28$

첫 번째 카드로 숫자 1이 적혀 있는 카드를 가져온 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.


$$8 \times 4 = 32$$
$$\therefore n=5$$
$$504 = 9 \times 8 \times 7 \circledast \text{므로 } n = 9$$
$$\therefore n=9$$

따라서 구하는 경우의 수는 $360 \times 6 \times 4 = 8640$

따라서 구하는 경우의 수는 24이다.

$$\therefore n=3$$
$$1440 + 1440 - 240 = 2640$$

주의 • 조건에 ‘또는’이 있으면 각 경우의 수를 구하여 더해 보고 중복되는 경우가 있는지 생각해야 해!

(i) 1학년이 A열에 앉는 경우

1학년이 이웃하게 앉는 좌석을 정하는 경우의 수는 2

B열에 2학년이 이웃하게 앉는 좌석을 정하는 경우의 수는 1

C열에 3학년이 이웃하게 앉는 좌석을 정하는 경우의 수는 3

2학년, 3학년이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2

1, 2, 3학년을 일렬로 나열하는 경우의 수는 각각 $2!$, $3!$, $3!$ 이므로
 $2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 2! \times 3! \times 3! = 864$

(ii) 1학년이 B열에 앉는 경우

(i)과 같은 방법으로 구하면 경우의 수는 864

(iii) 1학년이 C열에 앉는 경우

① C열의 남은 3자리에 2학년 또는 3학년이 앉을 때, 나열되는
 학년의 순서를 정하는 경우는 다음과 같이 2가지이다.

□□□①①, ①①□□□

이때 남은 3명이 A열 또는 B열에 앉는 경우의 수는 2

2학년, 3학년이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2

② C열에 다른 학년은 앉지 않을 때, 1학년이 이웃하게 앉는 좌석
 을 정하는 경우의 수는 4

A열에 2학년이 이웃하게 앉는 좌석을 정하는 경우의 수는 1

B열에 3학년이 이웃하게 앉는 좌석을 정하는 경우의 수는 1

2학년, 3학년이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2

1, 2, 3학년을 일렬로 나열하는 경우의 수는 각각 $2!$, $3!$, $3!$
 이므로

$(2 \times 2 \times 2 + 4 \times 1 \times 1 \times 2) \times 2! \times 3! \times 3! = 1152$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$864 + 864 + 1152 = 2880$

2학년 학생 4명을 일렬로 배치하는 경우의 수는 $4! = 24$

2학년 학생의 사이사이와 양 끝에 1학년 학생 2명을 이웃하지 않도
 록 배치하는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 20$

따라서 구하는 경우의 수는 $24 \times 20 = 480$

다른 풀이 1학년 학생 2명과 2학년 학생 4명을 일렬로 배치하는 경
 우의 수는 $6! = 720$

1학년 학생 2명을 한 사람으로 생각하여 학생 5명을 일렬로 배치하
 는 경우의 수는 $5! = 120$

1학년 학생끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

즉, 1학년 학생끼리 이웃하도록 배치하는 경우의 수는

$120 \times 2 = 240$

따라서 구하는 경우의 수는 $720 - 240 = 480$

어른을 일렬로 세우는 경우의 수는 12!

이때 어른끼리는 서로 이웃한 사람의 수가 항상 짝수가 되어야 하므
 로 다음과 같이 어른 12명을 일렬로 배열한 상태에서 2명씩 묶어 사

이사이와 양 끝의 7개의 자리에 어린이 3명을 각각 세워야 한다.

V○○V○○V○○V○○V○○V○○V

이때 어린이를 세우는 경우의 수는 ${}_7P_3 = 210$

따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는 $210 \times 12!$

$\therefore N = 210$

(i) a를 끝에 나열하는 경우

양 끝에서 a의 위치를 정하는 경우의 수는 2

b, d, f 중 a와 이웃하게 1개의 문자를 나열하는 경우의 수는

${}_3P_1 = 3$

남은 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$

따라서 a를 끝에 나열하는 경우의 수는 $2 \times 3 \times 24 = 144$

(ii) a를 끝에 나열하지 않는 경우

b, d, f 중 a의 양 옆에 2개의 문자를 나열하는 경우의 수는

${}_3P_2 = 6$

a와 a의 양 옆에 나열한 2개의 문자를 한 묶음으로 생각하여 4개
 의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$

따라서 a를 끝에 나열하지 않는 경우의 수는 $6 \times 24 = 144$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $144 + 144 = 288$

i와 t 사이에 남은 5개의 문자 중 3개의 문자를 택하여 나열하는 경
 우의 수는 ${}_5P_3 = 60$

i□□□t를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경
 우의 수는 $3! = 6$

i와 t가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는 $60 \times 6 \times 2 = 720$

5개의 문자를 모두 나열하는 경우의 수는 $5! = 120$

서로 이웃한 자음이 존재하지 않는 경우는 모음과 자음을 교대로 나
 열하는 경우이므로

그 경우의 수는 $2! \times 3! = 12$

따라서 구하는 경우의 수는 $120 - 12 = 108$

조건 (나)에서 2학년 학생 4명 중에서 2명이 양 끝에 있는 의자에 앉
 는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$

위의 각각의 경우에 대하여 1학년 학생이 앉을 수 있는 의자를 ①, 2
 학년 학생이 앉을 수 있는 의자를 ②라 할 때, 조건 (가)를 만족시키도
 록 나머지 4명의 학생이 4개의 의자에 앉는 경우는 다음 3가지 중 하
 나이다.

①②①②, ①②②①, ②①②①

1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명이 의자에 앉는 경우의 수는 위의
 3가지 경우 모두 $2! \times 2! = 4$ 로 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 $12 \times 3 \times 4 = 144$

660 288

방향 조정석에는 아버지 또는 어머니만 앉을 수 있으므로 방향 조정석에 앉는 경우의 수는 $2! = 2$

여동생과 남동생은 가운데 줄에만 앉을 수 있으므로 그 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$

나머지 4명의 가족이 빈 자리에 앉는 경우의 수는 $4! = 24$

따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times 6 \times 24 = 288$

TIP • 특정한 자리에 오는 것을 먼저 나열한 후 나머지를 나열해 보자!

661 576

(i) A가 왼쪽에서 2번째 또는 6번째에 서는 경우

A가 왼쪽에서 2번째에 서는 경우는 B를 세우는 경우의 수가 2, A가 아닌 남학생을 세우는 경우의 수가 3, 나머지 여학생 4명을 세우는 경우의 수가 $4!$ 이므로 $2 \times 3 \times 4! = 144$

같은 방법으로 A가 왼쪽에서 6번째에 서는 경우의 수는 144

$\therefore 144 \times 2 = 288$

(ii) A가 왼쪽에서 3번째 또는 4번째 또는 5번째에 서는 경우

① A가 왼쪽에서 3번째에 서는 경우의 수는 $2 \times 2 \times 4! = 96$

같은 방법으로 A가 왼쪽에서 5번째에 서는 경우의 수는 96

② A가 왼쪽에서 4번째에 서는 경우의 수는 $2 \times 2 \times 4! = 96$

$\therefore 96 \times 3 = 288$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $288 + 288 = 576$

662 60

10명의 학생 중에서 회장 1명, 부회장 1명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{10}P_2 = 90$$

회장, 부회장이 모두 남학생으로 뽑히는 경우의 수는 남학생 6명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

$${}_6P_2 = 30$$

따라서 구하는 경우의 수는 $90 - 30 = 60$

TIP • (적어도 한 명은 여학생이 뽑히는 경우의 수)
= (전체 경우의 수) - (모두 남학생이 뽑히는 경우의 수)

663 3

7개의 의자에 3명을 앉히는 경우의 수는 ${}_7P_3 = 210$

어느 2명도 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는 4개의 빈 의자를 일렬로 배열한 상태에서 의자 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 3명을 배열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_5P_3 = 60$

따라서 구하는 경우의 수는 $210 - 60 = 150$

664 2명

7명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는 $7! = 5040$

여학생 수가 n 명이라 하면 양 끝에 모두 여학생이 오도록 세우는 경우의 수는

$${}_n P_2 \times 5! = n(n-1) \times 120 = 120n(n-1)$$

이때 적어도 한쪽 끝에 남학생이 오도록 세우는 경우의 수는

$$5040 - 120n(n-1) = 2640$$

$$120n(n-1) = 2400, n(n-1) = 20$$

$$\therefore n = 5$$

따라서 남학생 수는 $7 - 5 = 2$ (명)

665 4

5의 배수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

나머지 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 6개의 숫자 중 3개이므로 일의 자리의 숫자가 0인 5의 배수의 개수는 ${}_6P_3 = 120$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 5를 제외한 1, 2, 3, 4, 6의 5개이고, 백의 자리와 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리에 오는 숫자와 일의 자리의 숫자인 5를 제외한 5개의 숫자 중 2개이므로 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수는

$$5 \times {}_5P_2 = 100$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $120 + 100 = 220$

TIP • 2의 배수: 일의 자리의 숫자가 0, 2, 4, 6, 8

3의 배수: 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수

4의 배수: 마지막 두 자리의 수가 00 또는 4의 배수

5의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 5

666 5

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이고 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6, 8 중 하나이다.

천의 자리의 숫자에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) 천의 자리의 숫자가 2 또는 4인 경우

일의 자리에 올 숫자를 고르는 경우의 수는 천의 자리의 숫자를 제외한 나머지 4개의 숫자 중 하나를 택하는 것과 같으므로 4

$$\therefore 2 \times 4 = 8$$

(ii) 천의 자리의 숫자가 1 또는 3 또는 5인 경우

일의 자리에 올 숫자를 고르는 경우의 수는 5

$$\therefore 3 \times 5 = 15$$

백의 자리와 십의 자리에 올 숫자를 고르는 경우의 수는 ${}_8P_2 = 56$ 이므로 구하는 경우의 수는

$$(8 + 15) \times 56 = 1288$$

667 20

15의 배수가 되려면 3의 배수이면서 동시에 5의 배수이어야 한다. 즉, 만든 세 자리 자연수의 각 자리의 합이 3의 배수이면서 일의 자리의 숫자가 5이어야 한다. 주어진 수를 $3k, 3k+1, 3k+2$ (k 는 음이 아닌 정수) 꼴로 나누면 다음과 같다.

$3k$ 꼴: 3, 6, 9, $3k+1$ 꼴: 1, 4, 7, $3k+2$ 꼴: 2, 5, 8

(i) $3k, 3k+1$ 꼴의 수에서 각각 한 개씩 뽑고 일의 자리의 수는 5를 뽑는 경우

$3k, 3k+1$ 꼴의 수에서 한 개씩 뽑는 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$ 이고, 백의 자리와 십의 자리의 수를 서로 바꿀 수 있으므로

$$2! \times 9 = 18$$

(ii) $3k+2$ 꼴의 수에서 3개를 뽑는 경우

일의 자리의 수는 5로 고정이므로 경우의 수는 $2! = 2$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $18 + 2 = 20$

668 답 ①

3200보다 큰 수는 $32\square\square, 34\square\square, 35\square\square, 4\square\square\square, 5\square\square\square$ 꼴이다.

$32\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_3P_2 = 6$

$34\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_3P_2 = 6$

$35\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_3P_2 = 6$

$4\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_3 = 24$

$5\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_3 = 24$

따라서 3200보다 큰 수의 개수는

$$6 + 6 + 6 + 24 + 24 = 66$$

669 답 ④

A로 시작하는 문자열의 개수는 $4! = 24$

B로 시작하는 문자열의 개수는 $4! = 24$

C로 시작하는 문자열의 개수는 $4! = 24$

DA로 시작하는 문자열의 개수는 $3! = 6$

DB로 시작하는 문자열의 개수는 $3! = 6$

따라서 85번째 문자열은 DCABE

670 답 288

213564보다 크고 431625보다 작은 자연수의 개수는 123456부터 213564까지의 숫자의 개수와 123456부터 431625까지의 숫자의 개수의 차에서 1을 빼 값과 같다.

$1\square\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $5! = 120$

$21\square\square\square\square$ 꼴인 자연수는 순서대로

213456, 213465, 213546, 213564, ...이므로

213564는 124번째 자연수이다.

$1\square\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $5! = 120$

$2\square\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $5! = 120$

$3\square\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $5! = 120$

$41\square\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $4! = 24$

$42\square\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $4! = 24$

$43\square\square\square\square$ 꼴인 자연수는 순서대로

431256, 431265, 431526, 431562, 431625, ...이므로

431625는 413번째 자연수이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 $413 - 124 - 1 = 288$

671 답 44

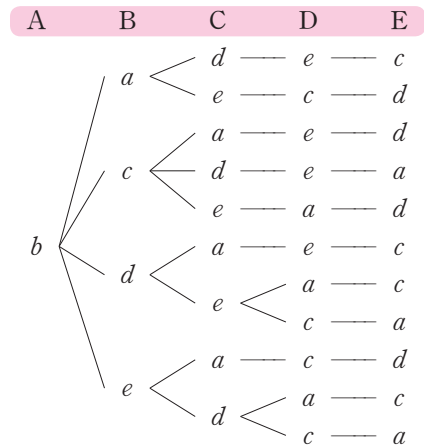
A, B, C, D, E끼리 바꾸어 채점을 하는 것은 $n=5$ 인 완전순열로 볼 수 있으므로

$$D_5 = (5-1) \times (9+2) = 44$$

F, G가 시험지를 서로 바꾸어 채점하는 경우는 1가지이므로

구하는 경우의 수는 44

다른 풀이 A, B, C, D, E의 시험지를 각각 a, b, c, d, e 라 할 때, A가 B의 시험지를 채점하는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



즉, 이 경우의 수는 11이고,

A가 시험지를 채점하는 경우의 수는 4이므로 $11 \times 4 = 44$

이때 F, G가 시험지를 서로 바꾸어 채점하는 경우의 수는 1

따라서 구하는 경우의 수는 44

672 답 ③

1행에 대문자 알파벳을 배열하는 경우의 수는 $4! = 24$

같은 알파벳이 적혀 있는 카드가 같은 열에 배열되지 않도록 하는 것은 $n=4$ 인 완전순열로 볼 수 있으므로

$$D_4 = (4-1) \times (2+1) = 9$$

따라서 구하는 경우의 수는 $24 \times 9 = 216$

다른 풀이 1행에 대문자 알파벳을 배열하는 경우의 수는 $4! = 24$

1행에 ABCD의 순서대로 배열할 때, A열에 b가 오는 경우는 다음과 같이 3가지이다.

A	B	C	D
b	c	d	a
	a	d	c
	d	a	c

A열에 b, c, d가 올 수 있으므로 $3 \times 3 = 9$

따라서 구하는 경우의 수는 $24 \times 9 = 216$

673 답 ⑤

맨 위 가로줄에 모자를 거는 방법의 수는 $4! = 24$

맨 위에 ABCD의 순서로 배열할 때, A의 아래에 B가 오는 경우는 다음과 같이 3가지이다.

맨 위	A	B	C	D
가운데	B	A	D	C
	B	C	D	A
	B	D	A	C

위의 경우 중에서 첫 번째 경우, 맨 아래 가로줄에 모자를 거는 방법은 다음과 같다.

맨 위	A	B	C	D
가운데	B	A	D	C
맨 아래	C	D	A	B
	C	D	B	A
	D	C	A	B
	D	C	B	A

따라서 맨 아래에 배열하는 방법이 4가지이고, 나머지 경우는 각각 2가지씩 있으므로 구하는 방법의 수는 $24 \times 3 \times (4 + 2 + 2) = 576$

674 **답** 48

① 단계 C, D가 테이블 아래쪽 자리에서 이웃하는 경우의 수 구하기 40%

(i) C, D가 테이블 아래쪽 자리에서 이웃하는 경우

C는 세 자리 중 가운데 위치해야 하고, D가 C의 양옆에 앉을 수 있으므로 경우의 수는 2이다.

남은 5자리에 2명을 배열하는 경우의 수에서 A, B 중 한 명 이상이 처음 자리에 앉게 되는 경우의 수와 A, B가 서로 이웃하는 경우의 수를 빼면 된다.

$$\therefore 2 \times \{ {}_5P_2 - (4 + 4 - 1) - 1 \} = 24$$

② 단계 C, D가 테이블 왼쪽 자리에서 이웃하는 경우의 수 구하기 40%

(ii) C, D가 테이블 왼쪽 자리에서 이웃하는 경우

C, D가 서로 자리를 바꾸어 앉을 수 있으므로 경우의 수는 2이고, 남은 5자리에 2명을 배열하는 경우의 수에서 A, B가 이웃하는 경우의 수와 처음 자리에 앉게 되는 경우의 수를 빼면 된다.

$$\therefore 2 \times ({}_5P_2 - 4 - 4) = 24$$

③ 단계 구하는 경우의 수 계산하기 20%

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $24 + 24 = 48$

675 **답** 86

① 단계 A, B가 테이블 아래쪽 자리에서 이웃하는 경우의 수 구하기 40%

A, B가 테이블 아래쪽 자리에서 이웃하는 경우는 다음과 같다.

(i) AB□ 또는 BA□로 앉는 경우

A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이고, 남은 5자리에 2명을 배열하는 경우의 수에서 D가 처음 자리에 앉게 되는 경우의 수와 C, D가 서로 이웃하는 경우의 수를 빼면 된다.

$$\therefore 2 \times ({}_5P_2 - 4 - 2) = 28$$

(ii) □AB 또는 □BA로 앉는 경우

A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이고, 남은 5자리에 2명을 배열하는 경우의 수에 C, D가 서로 이웃하는 경우의 수를 빼면 된다.

$$\therefore 2 \times ({}_5P_2 - 2) = 36$$

(i), (ii)에서 경우의 수는 $28 + 36 = 64$

② 단계 A, B가 테이블 왼쪽 자리에서 이웃하는 경우의 수 구하기 40%

A, B가 테이블 왼쪽 자리에서 이웃할 때,

A, B가 서로 자리를 바꾸어 앉을 수 있으므로 경우의 수는 2이고, 남은 5자리에 2명을 배열하는 경우의 수에서 C, D 중 한 명 이상이 처음 자리에 앉게 되는 경우의 수와 C, D가 서로 이웃하는 경우의 수를 빼면 된다.

$$\therefore 2 \times \{ {}_5P_2 - (4 + 4 - 1) - 2 \} = 22$$

③ 단계 구하는 경우의 수 계산하기 20%

따라서 구하는 경우의 수는 $64 + 22 = 86$

676 **답** 1200

① 단계 전체 약수의 개수와 홀수의 개수 구하기 40%

$p = 2^m \times 3^n \times 5^2$ 에서 2^m 이 짝수이므로 $3^n \times 5^2$ 에서

홀수의 개수: $(n+1) \times (2+1) = 3(n+1)$

전체 약수의 개수: $(m+1) \times (n+1) \times (2+1) = 3(m+1)(n+1)$

② 단계 m, n의 값 구하기 40%

짝수의 개수는 전체 약수의 개수에서 홀수의 개수를 빼면 되므로

$$3(m+1)(n+1) - 3(n+1) = 3(n+1)\{(m+1) - 1\} \\ = 3m(n+1) = 24$$

$$\therefore m(n+1) = 8 \quad \cdots \textcircled{1}$$

3의 배수의 개수: $n(m+1) \times (2+1) = 15$

$$\therefore n(m+1) = 5 \quad \cdots \textcircled{2}$$

① - ②을 하면

$m - n = 3$ 이므로 $m = n + 3$ 을 ②에 대입하면

$$n(n+4) = 5, n^2 + 4n - 5 = 0$$

$$(n-1)(n+5) = 0$$

$$\therefore n = 1, m = 4 \quad \leftarrow n \text{은 자연수}$$

③ 단계 p의 값 구하기 20%

$$\therefore p = 2^4 \times 3^1 \times 5^2 = 1200$$

677 **답** 84

① 단계 ①부터 ④까지 배치하는 경우의 수 구하기 40%

의자를 고정시키지 않고 ①의 좌, 우로 ②를 배치, ①과 ②의 좌, 우로 ③을 배치하는 방법으로 ①부터 ④까지 배치하는 경우의 수는

$2^3 = 8$ 이고, 이때 ①과 ④가 이웃하는 경우는

④①②③ 또는 ③②①④이므로 2가지

$$\therefore 8-2=6$$

② 단계 ⑤를 배치하는 경우의 수 구하기 20%

⑤를 배치하는 경우의 수는 2

③ 단계 ⑥부터 ⑧을 배치하는 경우의 수 구하기 20%

⑥에서 ⑧을 배치하는 경우의 수는 $2^3=8$

⑥에서 ⑧이 모두 ⑤가 배치된 방향의 반대쪽으로 배치될 경우는 1가지

$$\therefore 8-1=7$$

④ 단계 구하는 경우의 수 계산하기 20%

따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 2 \times 7 = 84$

678 **답** 287

① 단계 a 를 식으로 나타내기 40%

지불할 수 있는 방법의 수 a 는

$$a = 3 \times 4 \times 3 \times 2 \times (n+1) - 1$$

0원을 지불하는 경우

$$= 72n + 71$$

② 단계 b 를 식으로 나타내기 40%

5000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액과 10000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 10000원짜리 지폐 2장을 5000원짜리 지폐 4장으로 바꾸면 지불하는 금액의 수는

(i) $n < 5$ 일 때

$$b = 8 \times 3 \times 2 \times (n+1) - 1 = 48n + 47$$

$$a - b = 24n + 24 = 216$$

$$\therefore n = 8$$

즉, 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n \geq 5$ 일 때

$$b = 8 \times 3 \times (n+6) - 1 = 24n + 143$$

$$a - b = 48n - 72 = 216$$

$$\therefore n = 6$$

③ 단계 b 의 값 구하기 20%

따라서 $b = 24n + 143$ 에서

$$b = 24 \times 6 + 143 = 287$$

679 **답** 48

① 단계 이용하는 색의 개수 파악하기 40%

주어진 3가지의 색 중에서 2개의 색을 이용하여 영역을 칠하는 경우는 영역 A, B, D, E, G, I에 한 가지 색을 칠하고, 나머지 영역에 다른 한 가지를 칠해야 한다.

이것은 조건 (가)에서 영역 B, H가 같은 색이어야 한다는 것에 모순이므로 주어진 3가지의 색을 반드시 모두 이용해야 한다.

② 단계 각 영역에 칠할 수 있는 색의 가짓수 구하기 40%

영역 B, H에 빨간색을 칠한다고 가정하자.

영역 C에 칠할 수 있는 색은 빨간색을 제외한 2가지

영역 D, G에 칠할 수 있는 색은 영역 C, H에 칠한 색을 제외한 1가지

영역 F에 칠할 수 있는 색은 영역 B, G에 칠한 색을 제외한 1가지

나머지 영역 A, E, I에 칠할 수 있는 색은 각각 인접한 영역에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 경우의 수는

$$2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

③ 단계 구하는 경우의 수 계산하기 20%

영역 B, H에 파란색, 노란색을 칠하는 경우의 수도 각각 16이므로

구하는 경우의 수는 $16 \times 3 = 48$

680 **답** 2304

① 단계 1반과 3반 중 한 반이 A 구역 3열에 배치되는 경우의 수 구하기 40%

1반이 A 구역 3열에 배치되면 3반은 A 구역 1열 또는 B 구역 1열에 배치될 수 있다.

1반 학생 3명이 A 구역 3열에 앉는 경우의 수는 $2 \times 3! = 12$

(i) 3반이 A 구역 1열에 배치되는 경우

2반은 B 구역 1열 또는 3열에 배치될 수 있다.

3반 학생 3명이 A 구역 1열에 앉는 경우의 수는 $1 \times 3! = 6$

2반 학생 2명이 B 구역 1열 또는 3열에 앉는 경우의 수는

$$3 \times 2! = 6$$

$$\therefore 6 \times 6 = 36$$

(ii) 3반이 B 구역 1열에 배치되는 경우

같은 방법으로 2반은 A 구역 1열 또는 B 구역 3열에 배치될 수 있으므로 경우의 수는 36

이때 1반과 3반이 서로 자리를 바꿀 수 있으므로 이 경우의 수는

$$2 \times 12 \times (36 + 36) = 1728$$

② 단계 1반과 3반이 A 구역 1열, B 구역 1열에 배치되는 경우의 수 구하기 40%

1반과 3반이 A 구역 1열, B 구역 1열에 배치되면 2반은 A 구역 3열 또는 B 구역 3열에 배치될 수 있다.

이때 1반 학생 3명과 3반 학생 3명이 A 구역 1열, B 구역 1열에 앉는 경우의 수는 $2 \times 3! \times 3! = 72$

2반 학생 2명이 A 구역 3열 또는 B 구역 3열에 앉는 경우의 수는

$$4 \times 2! = 8 \text{이므로}$$

$$\text{이 경우의 수는 } 72 \times 8 = 576$$

③ 단계 구하는 경우의 수 계산하기 20%

따라서 구하는 경우의 수는 $1728 + 576 = 2304$

681 450

① 단계 여섯 자리 자연수의 총 개수 구하기 40%

여섯 자리 자연수의 총 개수는

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 900000$$

② 단계 n 의 값 구하기 40%

숫자의 합이 짝수인 수와 홀수인 수의 개수가 같으므로 짝수인 수의 개수는 전체 개수의 $\frac{1}{2}$ 이다.

$$\text{즉, } n = 900000 \times \frac{1}{2} = 450000$$

③ 단계 $\frac{n}{1000}$ 의 값 구하기 20%

$$\therefore \frac{n}{1000} = \frac{450000}{1000} = 450$$

1등급 완성 고난도 마스터 문제

p.124~127

682 8

$\sqrt{x^2 + (a+b)x + \frac{1}{2}ab + 4}$ 가 실수가 되려면

$$x^2 + (a+b)x + \frac{1}{2}ab + 4 \geq 0$$

$x^2 + (a+b)x + \frac{1}{2}ab + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (a+b)^2 - 4 \times \left(\frac{1}{2}ab + 4\right) \leq 0, a^2 + b^2 \leq 16$$

위 식을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$ 의 8

683 ③

(i) AB가 연결된 경우

$(AB, CD, EF, GH), (AB, CF, DE, GH),$

$(AB, CH, DE, FG), (AB, CH, DG, EF)$ 의 4가지

(ii) AD가 연결된 경우

$(AD, BC, EF, GH), (AD, BC, EH, FG)$ 의 2가지

(iii) AH, AF가 연결된 경우

(i), (ii)에 대칭인 그림이 그려지므로 각각 4가지, 2가지

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는 $4 + 2 + 4 + 2 = 12$

684 ④

(i) 꽃병 A에 장미를 꽂는 경우

꽃병 B에 꽂는 해바라기의 개수를 a , 튤립의 개수를 b 라 하면

백합을 꽂을 때, (a, b) 는 $(0, 2), (1, 1), (2, 0)$ 의 3가지

백합을 꽂지 않을 때, (a, b) 는 $(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$ 의 4가지

$$\therefore 3 + 4 = 7$$

(ii) 꽃병 A에 해바라기를 꽂는 경우

꽃병 B에 꽂는 장미의 개수를 a , 튤립의 개수를 b 라 하면

백합을 꽂을 때, (a, b) 는 $(0, 2), (1, 1), (2, 0)$ 의 3가지

백합을 꽂지 않을 때, (a, b) 는 $(0, 3), (1, 2), (2, 1)$ 의 3가지

$$\therefore 3 + 3 = 6$$

(iii) 꽃병 A에 튤립을 꽂는 경우

(ii)와 같은 방법으로 구하면 경우의 수는 6

(iv) 꽃병 A에 백합을 꽂는 경우

꽃병 B에 꽂는 장미의 개수를 a , 해바라기의 개수를 b , 튤립의 개수를 c 라 하면

(a, b, c) 는 $(0, 0, 3), (0, 1, 2), (0, 2, 1), (0, 3, 0), (1, 0, 2),$

$(1, 1, 1), (1, 2, 0), (2, 0, 1), (2, 1, 0)$ 의 9가지

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는 $7 + 6 + 6 + 9 = 28$

685 10

윗변의 길이를 x , 아랫변의 길이를 y 라 하면

높이가 1이고 넓이가 3인 사다리꼴이므로 $x + y = 6$

이때 이 사다리꼴은 평행사변형이 아니므로 $x \neq y$, 즉 가능한 순서쌍 (x, y) 는 $(4, 2), (2, 4), (1, 5)$ 이다.

$x = 4, y = 2$ 일 때 사각형의 개수는 $1 \times 4 = 4$

$x = 2, y = 4$ 일 때 사각형의 개수는 $3 \times 2 = 6$

$x = 1, y = 5$ 일 때 사각형의 개수는 $4 \times 1 = 4$

$$\therefore a = 4 + 6 + 4 = 14$$

이 중 윗변이 아랫변보다 긴 사다리꼴의 개수는 4이므로 $b = 4$

$$\therefore a - b = 10$$

686 ⑤

A가 아침, 점심, 저녁에 각각 다르게 음식을 주문하는 경우의 수는

$${}_6P_3 = 120$$

6가지 음식을 각각 a, b, c, d, e, f 라 하자.

A가 아침, 점심, 저녁 메뉴로 각각 a, b, c 를 택하면 B는 아침, 점심, 저녁 중 하나는 같은 메뉴를 택할 수 있으므로 그 경우의 수는 3

B의 아침 메뉴가 a 라 하면

B가 점심 메뉴로 c 또는 저녁 메뉴로 b 를 택할 수 있으므로 2가지

B가 저녁 메뉴로 b 를 택하면 점심 메뉴로 d, e, f 중 하나를 택할 수 있으므로 3가지

따라서 구하는 경우의 수는 $120 \times 3 \times 2 \times 3 = 2160$

687 252

A를 4개의 반 중 어느 한 반에 배치하는 경우의 수는 4

B를 남은 3개의 반 중 어느 하나에 배치하는 경우의 수는 3

A를 1반, B를 2반에 배치하면 C가 A가 있는 1반에 배치될 때, D는 2반, 3반, 4반 중 한 반에 배치할 수 있고, E는 D가 있는 반을 제외한 한 반에 배치할 수 있으므로 그 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$

C가 아무도 없는 3반, 4반 중 한 반에 배치될 때, D는 A, C가 있는 반을 제외한 반에 배치할 수 있고, E는 D가 있는 반을 제외한 반에

배치할 수 있으므로 그 경우의 수는 $2 \times 2 \times 3 = 12$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 3 \times (9 + 12) = 252$$

688 **답** 1380

(i) 영역 A, B, C의 색이 모두 같은 경우

영역 D에 칠하는 경우는 4가지이므로 이 경우의 수는

$$4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 324$$

(ii) 영역 A, B, C 중 2개의 영역만 색이 같은 경우

A와 B만 색이 같은 경우의 수는

$$4 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 = 288$$

B와 C만 색이 같고, A와 C만 색이 같은 경우의 수도 같은 방법으로 구하면 각각 288

$$\therefore 288 \times 3 = 864$$

(iii) 영역 A, B, C의 색이 서로 다른 경우

$$4 \times 3! \times 2 \times 2 \times 2 = 192$$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$324 + 864 + 192 = 1380$$

689 **답** 360

4명이 내리게 될 4개의 층과 1층을 제외하면 사람이 내리지 않는 층은 5개이므로 이 5개의 층 사이사이와 양 끝의 6곳 중에서 서로 다른 4곳을 택하여 각각 1명씩 내리면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로 ${}_6P_4 = 360$

690 **답** ③

문자 a, b, c 중 어느 두 개도 서로 이웃하지 않는 전체 경우의 수에서 문자 a, b, c 중 어느 두 개도 서로 이웃하지 않고 문자 e, f는 서로 이웃하는 경우의 수를 빼면 된다.

문자 a, b, c 중 어느 두 개도 서로 이웃하지 않는 전체 경우의 수는 나머지 문자 d, e, f를 먼저 나열한 후 사이사이와 양 끝의 4자리에 문자 a, b, c를 나열하는 경우의 수와 같으므로 $3! \times {}_4P_3 = 144$

문자 a, b, c 중 어느 두 개도 서로 이웃하지 않고 문자 e, f는 서로 이웃하는 경우의 수는 e, f를 한 문자로 생각하여 두 문자를 먼저 나열한 후 사이사이와 양 끝의 3자리에 문자 a, b, c를 나열하는 경우의 수와 같으므로 $2! \times 2 \times 3! = 24$

따라서 구하는 암호의 개수는 $144 - 24 = 120$

691 **답** ①

(i) A, B가 이웃하는 경우

A, B를 제외한 C, D, E를 먼저 세우자.

① C, D가 이웃하는 경우

C-D-E일 때, A, B를 세우는 경우는 D, E 사이에 BA 순

으로 세우는 1가지,

E의 오른쪽에 세우는 2가지로 총 3가지이다.

C, D, E를 세울 때, C, D가 이웃하는 경우의 수는 4이므로

$$3 \times 4 = 12$$

② C, D가 이웃하지 않는 경우

C-E-D일 때, A, B를 세우는 경우는 E, D 사이에 AB 순으로 세우는 1가지,

D의 오른쪽에 BA 순으로 세우는 1가지로 총 2가지이다.

C, D, E를 세울 때, C, D가 이웃하지 않는 경우의 수는 2이므로 $2 \times 2 = 4$

따라서 이 경우의 수는 $12 + 4 = 16$

(ii) A, C가 이웃하는 경우

(i)과 같은 방법으로 구하면 경우의 수는 16

(iii) B, C가 이웃하는 경우

B, C, D, E를 먼저 세우자.

① B, C와 D가 이웃하는 경우

B-C-D-E일 때, A를 세우는 경우는 E의 오른쪽에 세우는 1가지이다.

B, C, D, E를 세울 때, B, C와 D가 이웃하는 경우의 수는 8이므로 $1 \times 8 = 8$

② B, C와 D가 이웃하지 않는 경우

B-C-E-D일 때, A를 세울 수 있는 경우는 없다.

따라서 이 경우의 수는 8

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는 $16 + 16 + 8 = 40$

692 **답** ③

가로줄마다 진열할 화분의 개수를 고르는 경우의 수는 $3! = 6$

화분을 1개 진열하는 가로줄에서 화분을 나열하는 경우의 수는 3

화분을 2개 진열하는 가로줄에서 화분을 나열하는 경우의 수는

$$\bigcirc\bigcirc\times, \bigcirc\times\bigcirc, \times\bigcirc\bigcirc \text{의 } 3$$

화분 6개를 진열하는 순서를 정하는 경우의 수는 6!

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 3 \times 3 \times 6! = 54 \times 6!$$

693 **답** 1056

(i) 할아버지, 할머니, 아버지, 어머니가 같은 열에 앉는 경우

할아버지, 할머니, 아버지, 어머니가 1열과 2열 중 고르는 경우는 2가지

이때 할아버지, 할머니, 아버지, 어머니가 앉는 경우의 수는

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

두 딸이 남은 4자리 중 2자리에 앉는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$

$$\therefore 2 \times 8 \times 12 = 192$$

(ii) 할아버지, 할머니와 아버지, 어머니가 다른 열에 앉는 경우

할아버지, 할머니가 1열과 2열 중 고르는 경우는 2가지

이때 할아버지, 할머니가 이웃하여 앉는 경우의 수는 $3 \times 2 = 6$

아버지 어머니가 이웃하여 앉는 경우의 수는 $3 \times 2 = 6$
 두 딸이 남은 4자리 중 2자리 앉는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$
 $\therefore 2 \times 6 \times 6 \times 12 = 864$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $192 + 864 = 1056$

694 ④

A가 사용할 객실을 정한 후 각각의 경우에 B와 C가 사용할 수 있는 객실의 개수를 생각하면 된다.

(i) 관광객 A가 객실 번호가 101 또는 205인 객실에 숙박하는 경우
 관광객 A가 객실 번호가 101인 객실에 숙박하면
 관광객 B는 객실 번호가 201인 객실, 관광객 C는 객실 번호가 202, 203, 205인 객실 중 한 곳에 숙박해야 하므로 경우의 수는 $1 \times 3 = 3$

관광객 A가 객실 번호가 205인 객실에 숙박하는 경우의 수도 같은 방법으로 구하면 3

따라서 이 경우의 수는 $3 \times 2 = 6$

(ii) 관광객 A가 객실 번호가 103 또는 203인 객실에 숙박하는 경우
 관광객 A가 객실 번호가 103인 객실에 숙박하면
 관광객 B는 객실 번호가 104, 203인 객실, 관광객 C는 객실 번호가 201, 202, 205인 객실 중 한 곳에 숙박해야 하므로 경우의 수는 $2 \times 3 = 6$

관광객 A가 객실 번호가 203인 객실에 숙박하는 경우의 수도 같은 방법으로 구하면 6

따라서 이 경우의 수는 $6 \times 2 = 12$

(iii) 관광객 A가 객실 번호가 104 또는 202인 객실에 숙박하는 경우
 관광객 A가 객실 번호가 104인 객실에 숙박하면
 관광객 B는 객실 번호가 103, 105인 객실, 관광객 C는 객실 번호가 201, 202, 203, 205인 객실 중 한 곳에 숙박해야 하므로 경우의 수는 $2 \times 4 = 8$

관광객 A가 객실 번호가 202인 객실에 숙박하는 경우의 수도 같은 방법으로 구하면 8

따라서 이 경우의 수는 $8 \times 2 = 16$

(iv) 관광객 A가 객실 번호가 105 또는 201인 객실에 숙박하는 경우
 관광객 A가 객실 번호가 105인 객실에 숙박하면
 관광객 B는 객실 번호가 104, 205인 객실, 관광객 C는 객실 번호가 201, 202, 203인 객실 중 한 곳에 숙박해야 하므로 경우의 수는 $2 \times 3 = 6$

관광객 A가 객실 번호가 201인 객실에 숙박하는 경우의 수도 같은 방법으로 구하면 6

따라서 이 경우의 수는 $6 \times 2 = 12$

위의 경우에 나머지 2명의 관광객이 남은 5개의 객실에 숙박하는 경우의 수는 각각 ${}_5P_2 = 20$

따라서 구하는 경우의 수는 $(6 + 12 + 16 + 12) \times 20 = 920$

695 ② 168

조건 (가)에서 숫자 3개를 택하는 경우의 수는 4

이때 택한 숫자를 각각 a, b, c 라 하자.

a, b, c 중에서 중복을 허락하여 5개의 숫자를 택하는 경우는 다음과 같다.

(i) a, a, a, b, c 를 택하는 경우

세 숫자 중에서 a 로 사용할 숫자를 택하는 경우의 수는 3

또, a 끼리 이웃하지 않게 a, a, a, b, c 를 나열하는 경우의 수는

$$2! = 2$$

$$\therefore 3 \times 2 = 6$$

(ii) a, a, b, b, c 를 택하는 경우

세 숫자 중에서 c 로 사용할 숫자를 택하는 경우의 수는 3

또, a, b 끼리 각각 이웃하지 않게 a, a, b, b, c 를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!2!} - \left(\frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} - 3! \right) = 12$$

$$\therefore 3 \times 12 = 36$$

(i), (ii)에서 구하는 모든 다섯 자리 자연수의 개수는

$$4 \times (6 + 36) = 168$$

TIP n 개 중 같은 것이 각각 p, q, r 개씩 있을 때, n 개를 모두 택하여 일렬로 배열하는 순열의 수는 $\frac{n!}{p!q!r!}$ (단, $p+q+r=n$)

696 ②

주어진 수를 $3k, 3k+1, 3k+2$ (k 는 음이 아닌 정수) 꼴로 구분하여 세 자리 수를 만든다.

$3k$ 꼴: 0, 3, $3k+1$ 꼴: 1, 4, $3k+2$ 꼴: 2, 5

$3k, 3k+1, 3k+2$ 꼴의 수가 각각 2개이므로 각 자리의 수는 $3k, 3k+1, 3k+2$ 꼴이 한 개씩 나열될 때 3의 배수인 수가 된다.

(i) 일의 자리의 수가 1인 경우

맨 앞에 3이 오면 가운데 수는 2 또는 5가 오면 되고, 맨 앞에 2 또는 5가 오면 가운데 수는 0 또는 3이 오면 되므로 경우의 수는 $2 + 2 \times 2 = 6$

(ii) 일의 자리의 수가 3인 경우

맨 앞에 2 또는 5가 오면 가운데 수는 1 또는 4가 오면 되고, 맨 앞에 1 또는 4가 오면 가운데 수는 2 또는 5가 오면 되므로 경우의 수는 $(2 \times 2) \times 2 = 8$

(iii) 일의 자리의 수가 5인 경우

맨 앞에 3이 오면 가운데 수는 1 또는 4가 오면 되고, 맨 앞에 1 또는 4가 오면 가운데 수는 0 또는 3이 오면 되므로 경우의 수는 $2 + 2 \times 2 = 6$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는 $6 + 8 + 6 = 20$

697 ③

나열된 수 중 처음 수와 마지막 수를 더하면 $2345 + 5432 = 7777$,

두 번째 수와 끝에서 두 번째 수를 더하면 $2354 + 5423 = 7777$ 이고,

나머지 수들도 같은 방식으로 더할 수 있다.

나열된 수의 개수는 $4! = 24$ 이므로

$$a = 7777 \times \frac{24}{2} = 7777 \times 12 \text{이고,}$$

$$\frac{a}{6} = 7777 \times 2 = 15554$$

698 144

택한 네 장의 카드에 적혀 있는 수의 합은 6의 배수이므로 네 장의 카드 중에서 홀수가 적혀 있는 것은 짝수 개이고, 네 장의 카드에 적혀 있는 수의 합은 3의 배수이다.

8 이하의 자연수 중에서 네 홀수의 합 또는 네 짝수의 합이 모두 3의 배수가 아니므로 택한 네 장의 카드 중 홀수, 짝수가 적혀 있는 것의 개수는 각각 2이다.

두 홀수의 합을 $3k, 3k+1, 3k+2$ (k 는 자연수) 꼴로 나누어 나타내면

$$3k \text{ 꼴: } 1+5, 5+7$$

$$3k+1 \text{ 꼴: } 1+3, 3+7$$

$$3k+2 \text{ 꼴: } 3+5, 1+7$$

두 짝수의 합을 $3k, 3k+1, 3k+2$ 꼴로 나누어 나타내면

$$3k \text{ 꼴: } 2+4, 4+8$$

$$3k+1 \text{ 꼴: } 4+6, 2+8$$

$$3k+2 \text{ 꼴: } 2+6, 6+8$$

택한 네 장에 적혀 있는 자연수의 합이 3의 배수이므로 두 홀수의 합과 두 짝수의 합을 모두 $3k$ 꼴에서 택하거나 $3k+1$ 꼴, $3k+2$ 꼴에서 하나씩 택해야 한다.

따라서 네 자연수를 택하는 경우의 수는

$$2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 2 = 12$$

짝수가 적혀 있는 두 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $2! = 2$

홀수가 적혀 있는 두 카드를 짝수가 적혀 있는 카드 사이사이와 양 끝에 놓는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$

따라서 구하는 경우의 수는 $12 \times 2 \times 6 = 144$

699 432

6개의 문자를 배열하는 경우의 수는 $6! = 720$

(i) A 바로 뒤에 C, C 바로 뒤에 D, D 바로 뒤에 A가 오는 경우

A, C를 하나로 묶어 일렬로 배열하는 경우의 수는 $5! = 120$

C 바로 뒤에 D가 오는 경우와 D 바로 뒤에 A가 오는 경우의 수도 같은 방법으로 각각 구하면 $5! = 120$

$$\therefore 120 \times 3 = 360$$

(ii) ACD, CDA, DAC 순으로 배열하는 경우

A, C, D를 하나로 묶어 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4! = 24$

CDA 순으로 배열하는 경우와 DAC 순으로 배열하는 경우의 수도 같은 방법으로 각각 구하면 $4! = 24$

$$\therefore 24 \times 3 = 72$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$720 - 360 + 72 = 432$$

700 16

(i) 1층에 여학생 2명을 배정하는 경우

1층에 여학생 2명을 배정하는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$

1층에는 남학생이 올 수 없으므로 남은 6자리에 남학생을 배정하는 경우의 수는 ${}_6P_3 = 120$

$$\therefore 6 \times 120 = 720$$

(ii) 2, 3, 4층 중 1곳에 여학생 2명을 배정하는 경우

배정할 층을 선택하는 경우의 수는 3

두 여학생의 자리를 바꾸는 경우의 수는 2

남은 7자리에 남학생을 배정하는 경우의 수는 ${}_7P_3 = 210$

$$\therefore 3 \times 2 \times 210 = 1260$$

(iii) 2, 3, 4층 중 2곳에 각각 여학생을 배정하는 경우

배정할 층을 선택하는 경우의 수는 3

사물함을 선택하는 경우의 수는 $2 \times 2 = 4$

두 여학생의 자리를 바꾸는 경우의 수는 2

여학생 옆에 남학생이 올 수 없으므로 남은 5자리에 남학생을 배정하는 경우의 수는 ${}_5P_3 = 60$

$$\therefore 3 \times 4 \times 2 \times 60 = 1440$$

(iv) 2, 3, 4층 중 1곳과 1층에 각각 여학생을 배정하는 경우

여학생을 배정하는 경우의 수는 $2 \times 3 \times 2 = 12$

여학생을 1층 왼쪽 또는 오른쪽 자리에 배정하면 남학생이 올 수 있는 자리는 5자리, 여학생을 1층 가운데 자리에 배정하면 남학생이 올 수 있는 자리는 4자리이므로 남학생을 배정하는 경우의 수는 ${}_5P_3 \times 2 + {}_4P_3 = 144$

$$\therefore 12 \times 144 = 1728$$

(i)~(iv)에서 모든 경우의 수는

$$720 + 1260 + 1440 + 1728 = 5148$$

$$5148 = {}_{13}P_3 \times 3 \text{에서 } n=13, m=3 \text{이므로}$$

$$n+m=16$$

701 2

(i) A가 좌석 번호가 25인 의자에 앉는 경우

조건 (나), (다)에서 번호 차이가 1, 10이 되도록 앉을 수 없으므로 좌석 번호가 26, 24, 15인 의자에는 아무도 앉을 수 없다.

또, 좌석 번호가 23, 27인 의자에도 학생이 앉아야 하므로 좌석 번호가 13, 17인 의자에도 학생이 앉을 수 없다.

B를 포함한 학생 2명이 (11, 14), (12, 14) 중 하나를 택하여 앉는 경우는 2가지

남은 4명 중 2명의 학생이 (16, 18), (16, 19) 중 하나를 택하여 앉는 경우는 2가지

남은 2명의 학생이 좌석 번호가 23, 27인 의자에 각각 하나씩 앉으면 된다.

A, B를 제외한 5명의 학생을 나열하는 경우의 수는 $5! = 120$
B와 한 쌍으로 앉는 학생끼리 서로 자리를 바꿀 수 있으므로 그
경우의 수는 2

$$\therefore 2 \times 2 \times 120 \times 2 = 960$$

(ii) A가 좌석 번호가 26인 의자에 앉는 경우

조건 (나), (다)에서 번호 차이가 1, 10이 되도록 앉을 수 없으므로
좌석 번호가 27, 25, 16인 의자에는 아무도 앉을 수 없다.

남은 의자에 6명이 앉으려면 좌석 번호가 11, 13, 15, 17, 19, 24
인 의자에 학생이 앉아야 한다.

A, B를 제외한 5명의 학생을 나열하는 경우의 수는 $5! = 120$

이때 B는 11 또는 13 또는 15에 앉아야 하므로 그 경우의 수는 3

$$\therefore 120 \times 3 = 360$$

(iii) A가 좌석 번호가 27인 의자에 앉는 경우

조건 (나), (다)에서 번호 차이가 1, 10이 되도록 앉을 수 없으므로
좌석 번호가 26, 17인 의자에는 아무도 앉을 수 없다.

남은 의자에 6명이 앉으려면 B를 포함한 3명이 첫 번째 줄에서
(11, 14, 16) 또는 (12, 14, 16) 중 하나를 택하여 앉아야 한다.

이때 B는 좌석 번호가 11 또는 12 또는 14인 의자에만 앉을 수
있고, 좌석 번호가 15 이하인 의자에 앉은 학생과 서로 자리를 바
꿀 수 있으므로 그 경우의 수는 2

남은 3명 중 한 명이 좌석 번호가 18 또는 19인 의자에 앉고 남은
2명이 좌석 번호가 23, 25인 의자에 각각 하나씩 앉으면 된다.

A, B를 제외한 5명의 학생을 나열하는 경우의 수는 $5! = 120$

$$\therefore 2 \times 2 \times 2 \times 120 = 960$$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$960 + 360 + 960 = 2280$$

다른 풀이 (i) 1행에 5명, 2행에 2명이 앉는 경우

좌석 번호가 11, 13, 15, 17, 19와 24, 26인 의자에 앉아야 하므
로 A가 앉는 경우는 1가지, B가 앉는 경우는 3가지

나머지 5명을 나열하는 경우의 수는 $5! = 120$

$$\therefore 1 \times 3 \times 120 = 360$$

(ii) 1행에 4명, 2행에 3명이 앉는 경우

좌석 번호가 (11, 12), 14, 16, (18, 19)와 23, 25, 27인 의자에
앉아야 하므로 좌석 번호가 11, 12인 의자 중에 한 자리, 18, 19
인 의자 중에 한 자리를 택하고, A가 앉는 경우는 2가지, B가 앉
는 경우는 2가지

나머지 5명을 나열하는 경우의 수는 $5! = 120$

$$\therefore 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 120 = 1920$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $360 + 1920 = 2280$

702 **답 25**

(i) 교탁 옆에 C 학과 학생이 앉는 경우

A 학과 학생이 1분단의 1열과 3열, 2분단의 2열에 앉으면 남은
자리에 B 학과 학생이 앉아야 하므로 $3! \times 3! = 36$

A 학과 학생이 1분단에 1명, 2분단에 2명 앉는 경우도 마찬가지로
이므로 이 경우의 수는

$$36 \times 2 = 72$$

(ii) 교탁 옆에 A 학과 학생이 앉는 경우

B 학과 학생이 1분단의 1열과 3열, 2분단의 2열에 앉으면 남은
세 자리에 A 학과 학생 2명과 C 학과 학생 1명이 앉아야 한다.
교탁 옆 자리에 앉을 A 학과 학생을 결정하는 경우의 수가 3이므
로 $3 \times 3! \times 3! = 108$

B 학과 학생이 1분단에 1명, 2분단에 2명 앉는 경우도 마찬가지
이므로 이 경우의 수는

$$108 \times 2 = 216$$

(iii) 교탁 옆에 B 학과 학생이 앉는 경우

(ii)와 같은 방법으로 구하면 경우의 수는 216

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는 $72 + 216 + 216 = 504$

$$504 = 21 \times 4! \text{에서 } k=21, n=4 \text{이므로}$$

$$k+n=25$$

703 **답 3**

(i) A가 좌석 번호가 24인 의자에 앉는 경우

조건 (다), (라)에서 번호 차이가 1, 10이 되도록 앉을 수 없으므로
좌석 번호가 25, 23, 14인 의자에는 아무도 앉을 수 없다.

C가 좌석 번호가 13인 의자에 앉을 때,

좌석 번호가 11인 의자에 B, 좌석 번호가 15, 17인 의자에 다른
학생 2명이 앉는 경우의 수는 $2! = 2$

C가 좌석 번호가 15인 의자에 앉을 때,

B가 좌석 번호가 11 또는 13인 의자에 앉고 남은 두 자리에 다른
학생이 앉는 경우의 수는 $2 \times 2! = 4$

따라서 이 경우의 수는 $2 + 4 = 6$

(ii) A가 좌석 번호가 25인 의자에 앉는 경우

조건 (다), (라)에서 번호 차이가 1, 10이 되도록 앉을 수 없으므로
좌석 번호가 24, 15인 의자에는 아무도 앉을 수 없다.

C가 좌석 번호가 14인 의자에 앉을 때,

좌석 번호가 11 또는 12인 의자에 B가 앉고 남은 2명이 좌석 번
호가 16, 17인 의자 중 한 자리와 23인 의자에 앉는 경우의 수는
 $2 \times 2 \times 2! = 8$

C가 좌석 번호가 16인 의자에 앉을 때,

좌석 번호가 (11, 14) 또는 (12, 14)인 의자에 남은 3명 중 B를
포함한 2명이 앉고 나머지 한 명이 23인 의자에 앉는 경우의 수
는 $2 \times 2 \times 2! = 8$

따라서 이 경우의 수는 $8 + 8 = 16$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $6 + 16 = 22$

11 조합

1등급 필수 내신 빈출 문제

p.129~136

704 답 ④

④ $840 = 7 \times 6 \times 5 \times 4$ 이므로 $\square = 3$

705 답 $n-r$

$$\begin{aligned} {}_nC_{n-r} &= \frac{n!}{(\boxed{n-r})! \{n-(n-r)\}!} \\ &= \frac{n!}{(\boxed{n-r})! r!} = {}_nC_r \end{aligned}$$

706 답 6

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} \text{에서 } r! \times {}_nC_r = {}_nP_r$$

이때 자연수 N 의 값은 $n=5, r=3$ 이므로
 $N=3!=6$

707 답 ⑤

$$\begin{aligned} {}_{n+1}P_2 &= 2 \times {}_nC_2 + 10 \text{에서} \\ n(n+1) &= 2 \times \frac{n(n-1)}{2!} + 10 \\ n(n+1) &= n(n-1) + 10 \\ 2n &= 10 \quad \therefore n=5 \end{aligned}$$

708 답 5

$$\begin{aligned} (n-1)(n-2)(n-3) - 6 \times \frac{(2n-4)(2n-5)(2n-6)}{6} \\ = 3(n-2)(n-3) - 8 \times \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 22(n-2) \\ (n-1)(n-3) - 2(2n-5)(2n-6) = 3(n-3) - 4(n-1) - 22 \\ 7n^2 - 41n + 30 = 0 \\ (7n-6)(n-5) = 0 \\ \therefore n=5 \quad \leftarrow n \geq 4 \text{인 자연수} \end{aligned}$$

709 답 ④

$$\begin{aligned} {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r &= {}_nC_r \text{에서} \\ {}_4C_0 + {}_4C_1 &= {}_5C_1 \\ {}_5C_1 + {}_5C_2 &= {}_6C_2 \\ {}_6C_2 + {}_6C_3 &= {}_7C_3 \\ &\vdots \\ \text{이므로 } {}_4C_0 + {}_4C_1 + {}_5C_2 + {}_6C_3 + {}_7C_4 + {}_8C_5 + {}_9C_6 &= {}_{10}C_6 \end{aligned}$$

따라서 $m=10, n=6$ 이므로 $m-n=4$

TIP 조합의 수의 성질을 이용하여 식을 간단히 만들 수 있어!

710 답 ②

$$\begin{aligned} {}_{n-1}P_r + r \times {}_{n-1}P_{r-1} \\ = \frac{(n-1)!}{(\boxed{n-1-r})!} + r \times \frac{(n-1)!}{(\boxed{n-r})!} \\ = (n-1)! \times \left(\frac{1}{(\boxed{n-1-r})!} + r \times \frac{1}{(\boxed{n-r})!} \right) \\ = (n-1)! \times \frac{\boxed{n}}{(n-r)!} \\ = \frac{\boxed{n}!}{(n-r)!} = {}_nP_r \end{aligned}$$

따라서 (가): $(n-1-r)$, (나): $(n-r)$, (다): n 이다.

711 답 ④

서로 다른 7개의 토핑 중에서 토핑 4가지를 택하는 경우의 수는
 ${}_7C_4 = 35$

712 답 ①

10명 중에서 회장, 부회장을 한 명씩 선출하는 경우의 수는
 ${}_{10}P_2 = 90$
 남은 8명 중에서 총무 2명을 선출하는 경우의 수는
 ${}_8C_2 = 28$
 따라서 구하는 경우의 수는 $90 \times 28 = 2520$

713 답 396

(i) $d=4$ 인 경우
 $a < b < c \leq 8$ 이므로 순서쌍의 개수는 1부터 8까지의 숫자 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_8C_3 = 56$
 (ii) $d=5$ 인 경우
 $a < b < c \leq 10$ 이므로 순서쌍의 개수는 1부터 10까지의 숫자 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_{10}C_3 = 120$
 (iii) $d=6$ 인 경우
 $a < b < c \leq 12$ 이므로 순서쌍의 개수는 1부터 12까지의 숫자 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_{12}C_3 = 220$
 (i)~(iii)에서 구하는 모든 순서쌍의 개수는
 $56 + 120 + 220 = 396$

TIP 대소 관계가 정해진 상황에서 경우의 수를 구하는 문제는 순서에 상관 없이 뽑는 경우의 수를 이용할 수 있어!
 이 문제에서 $d=4$ 일 때, 8 이하의 숫자 중 임의로 세 개를 뽑고, 뽑힌 수 중 가장 큰 수를 c , 두 번째 큰 수를 b , 가장 작은 수를 a 로 정한다고 생각하면 편해!

714 답 210

신입사원이 배치되지 않은 팀을 정하는 경우의 수는
 ${}_6C_4 = 15$
 신입사원을 배치하는 두 팀을 각각 A, B라 하고 배치되는 신입사원의 수를 각각 a, b 라고 하자.
 (i) $(a, b) = (1, 3)$ 인 경우
 신입사원 4명 중에서 A팀에 배치할 1명을 고르는 경우의 수는 4

(ii) $(a, b) = (2, 2)$ 인 경우

신입사원 4명 중에서 A팀에 배치할 2명을 고르는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

(iii) $(a, b) = (3, 1)$ 인 경우

신입사원 4명 중에서 A팀에 배치할 3명을 고르는 경우의 수는 4

(i)~(iii)에서 2개의 팀에 신입사원을 배치하는 경우의 수는

$$4 + 6 + 4 = 14$$

따라서 구하는 경우의 수는 $15 \times 14 = 210$

715 (답) ⑤



칸과 칸 사이의 선은 8개이고, 8개의 선 중에서 2개를 택하면 세 부분으로 나눌 수 있다.

이때 세 부분으로 나누는 경우의 수는 ${}_8C_2 = 28$

색을 배열하는 순서를 정하는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는 $28 \times 6 = 168$

716 (답) ②

(i) $b > c, c > d$ 일 때, $d < c < b$ 이고, $b < a$ 이므로

$1 \leq d < c < b < a$ ← e 의 값은 b 에 의하여 자동으로 결정된다.

이때 조건을 만족시키는 경우의 수는 전체 경우의 수에서

$b=7, b=8$ 인 경우의 수를 제외하면 된다.

a, b, c, d 를 택하는 경우의 수는 ${}_9C_4 = 126$ b 는 8 이하이므로 $b=9$ 일 때는 생각하지 않는다.

$b=7$ 일 때,

a 를 택하는 경우의 수는 ${}_2C_1 = 2$,

c, d 를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_2 = 15$ 이므로 $2 \times 15 = 30$

$b=8$ 일 때,

a 를 택하는 경우의 수는 1,

c, d 를 택하는 경우의 수는 ${}_7C_2 = 21$ 이므로 $1 \times 21 = 21$

따라서 구하는 경우의 수는 $126 - (30 + 21) = 75$

(ii) $b < c, c < d$ 일 때, $b < c < d$ 이고 $a < b$ 이므로

$$1 \leq a < b < c < d$$

이때 조건을 만족시키는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 $b=7$ 인 경우의 수를 제외하면 된다. b 는 7 이하이므로 $b=8, b=9$ 일 때는 생각하지 않는다.

a, b, c, d 를 택하는 경우의 수는 ${}_9C_4 = 126$

$b=7$ 일 때,

a 를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_1 = 6$,

c, d 를 택하는 경우의 수는 1가지이므로 $6 \times 1 = 6$

따라서 구하는 경우의 수는 $126 - 6 = 120$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $75 + 120 = 195$

717 (답) ①

승호와 유민이 중에서 한 명을 뽑는 경우의 수는 ${}_2C_1 = 2$

5명 중에서 둘 중 한 명만 뽑히는 경우의 수는 승호와 유민이를 제외한 10명의 학생 중에서 4명의 학생을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_{10}C_4 = 210$$

$$\therefore a = 2 \times 210 = 420$$

5명 중에서 둘 다 뽑는 경우의 수는 승호와 유민이를 제외한 10명의

학생 중에서 3명의 학생을 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_{10}C_3 = 120$

$$\therefore b = 120$$

$$\therefore a - b = 300$$

718 (답) ③

A, C는 반드시 포함하고, B, D, E는 포함하지 않는 경우의 수는 A, B, C, D, E를 제외한 10명의 학생 중에서 4명을 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_{10}C_4 = 210$

719 (답) 840

7컬레의 양말 중에서 짝이 맞는 두 컬레의 양말을 택하는 경우의 수는 ${}_7C_2 = 21$

나머지 5컬레의 양말 10개 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_2 = 45$$

이때 5컬레의 양말 중에서 짝이 맞는 1컬레의 양말을 택하는 경우의 수는 ${}_5C_1 = 5$

즉, 짝이 맞지 않는 2개를 택하는 경우의 수는 $45 - 5 = 40$

따라서 구하는 경우의 수는 $21 \times 40 = 840$

720 (답) ③

서로 다른 9개의 토핑 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$${}_9C_4 = 126$$

토핑에서 치즈를 제외하고 채소와 햄 중에서 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_7C_4 = 35$

따라서 구하는 경우의 수는 $126 - 35 = 91$

TIP '적어도 1개 이상'은 해당 토핑을 하나도 택하지 않는 경우만 제외하면 된다는 것을 의미해!

721 (답) 770

12마리 중에서 5마리를 택하는 경우의 수는 ${}_{12}C_5 = 792$

고양이 7마리 중에서 5마리를 택하는 경우의 수는 ${}_7C_5 = 21$

강아지 5마리 중에서 5마리를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_5 = 1$

따라서 구하는 경우의 수는

$$792 - (21 + 1) = 770$$

다른 풀이

(i) 고양이 1마리, 강아지 4마리를 택하는 경우의 수는

$${}_7C_1 \times {}_5C_4 = 35$$

(ii) 고양이 2마리, 강아지 3마리를 택하는 경우의 수는

$${}_7C_2 \times {}_5C_3 = 210$$

(iii) 고양이 3마리, 강아지 2마리를 택하는 경우의 수는

$${}_7C_3 \times {}_5C_2 = 350$$

(iv) 고양이 4마리, 강아지 1마리를 택하는 경우의 수는

$${}_7C_4 \times {}_5C_1 = 175$$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는 $35 + 210 + 350 + 175 = 770$

722 ⑤ ①

빨간색 카드 2장을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$

파란색 카드 2장을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$

$$\therefore a = 6 \times 10 = 60$$

9장의 카드 중에서 4장을 뽑는 경우의 수는 ${}_9C_4 = 126$

빨간색 카드만 4장을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_4 = 1$

빨간색 카드 3장과 파란색 카드 1장을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_3 \times {}_5C_1 = 20$$

$$\therefore b = 126 - 1 - 20 = 105$$

$$\therefore b - a = 105 - 60 = 45$$

723 ⑤ 432

1학년 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$

2학년 3명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$

뽑은 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$

따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 3 \times 24 = 432$

TIP 조합을 이용하여 각 학년별로 학생을 뽑고, 순열을 이용하여 뽑힌 학생들의 전체 순서를 정하자!

724 ⑤ 120

호준이와 지혜를 제외한 학생 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_2 = 10$$

호준이와 지혜를 한 사람으로 생각하여 학생 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3! = 6$

호준이와 지혜가 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는 $10 \times 6 \times 2 = 120$

725 ⑤ ⑤

2와 4 중에서 한 개를 택하는 경우의 수는 ${}_2C_1 = 2$

2, 4, 6을 제외한 6개의 수 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_3 = 20$$

4개의 수를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $2 \times 20 \times 24 = 960$

726 ⑤ ③

조건 (가)에서 각 자리의 수 중 짝수가 없거나 2개 또는 4개이어야 한다. 이때 조건 (나)에서 각 자리의 수 중 짝수가 1개 이상이어야 하므로 조건을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) 각 자리의 수가 모두 짝수인 경우

모두 짝수를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_4 = 1$

4개의 수를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$

$$\therefore 1 \times 24 = 24$$

(ii) 각 자리의 수가 2개는 짝수, 2개는 홀수인 경우

짝수 중 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$

홀수 중 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$

4개의 수를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$

$$\therefore 6 \times 10 \times 24 = 1440$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $24 + 1440 = 1464$

727 ⑤ ②

5개의 점 중 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로

만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 ${}_5C_2 = 10$

728 ⑤ ①

10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_{10}C_2 = 45$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

주어진 두 직선을 포함하면 구하는 직선의 개수는

$$45 - 2 \times 6 + 2 = 35$$

729 ⑤ ②

다각형의 꼭짓점의 개수를 n ($n \geq 3$)이라 하면

대각선의 개수는 ${}_nC_2 - n = 119$ 이므로

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = 119, n^2 - 3n - 238 = 0$$

$$(n-17)(n+14) = 0 \quad \therefore n = 17$$

따라서 다각형의 꼭짓점의 개수는 17

730 ⑤ ③

모든 교점의 개수의 최댓값은 50개의 직선 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_{50}C_2 = 1225$

조건 (가)에서 서로 평행인 16개의 직선 중에서 2개를 택하는 경우는 교점이 생기지 않으므로 그 경우의 수는 ${}_{16}C_2 = 120$

조건 (나)에서 한 점 P를 지나는 17개의 직선 중에서 2개를 택하는 경우는 교점을 한 개만 가지므로 그 경우의 수는 ${}_{17}C_2 = 136$

따라서 구하는 교점의 개수의 최댓값은

$$1225 - (120 + 136) + 1 = 970$$

교점 P

731 ⑤ 32

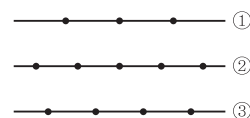
7개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_7C_3 = 35$

한 직선 위에 있는 3개의 점을 택하는 경우의 수는 $3 \times {}_3C_3 = 3$

따라서 구하는 삼각형의 개수는 $35 - 3 = 32$

732 ⑤ ③

그림과 같이 세 직선을 위에서부터 차례대로 ①, ②, ③이라 하자.



(i) 두 직선 ①, ②를 선택하는 경우

8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_8C_3 = 56$

직선 ①에 있는 3개의 점을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_3 = 1$

직선 ②에 있는 3개의 점을 택하는 경우의 수는 ${}_5C_3=10$

$$\therefore 56-1-10=45$$

(ii) 두 직선 ②, ③을 선택하는 경우

9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_9C_3=84$

직선 ②에 있는 3개의 점을 택하는 경우의 수는 ${}_5C_3=10$

직선 ③에 있는 3개의 점을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_3=4$

$$\therefore 84-10-4=70$$

(i), (ii)에서 구하는 삼각형의 개수는 $45+70=115$

733 516

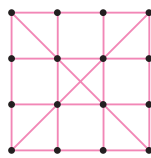
16개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_{16}C_3=560$

(i) 한 직선 위에 4개의 점이 있는 경우

4개의 점 중 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_3=4$

한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 그림과 같이 10개이므로

$$10 \times 4 = 40$$

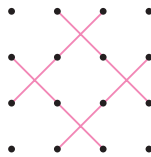


(ii) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우

3개의 점 중 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_3=1$

한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 그림과 같이 4개이므로

$$4 \times 1 = 4$$



(i), (ii)에서 한 직선 위에 있는 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$$40+4=44$$

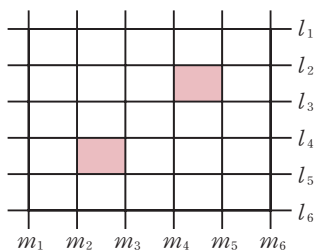
따라서 구하는 경우의 수는 $560-44=516$

734 ①

7개의 점 중 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로

구하는 사각형의 개수는 ${}_7C_4=35$

735 ④



그림과 같이 가로 방향의 평행선을 위에서부터 차례로 $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ 이라 하고, 세로 방향의 평행선을 왼쪽에서부터 차례로 $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ 이라고 하자.

(i) 왼쪽 아래에 색칠된 평행사변형을 포함하는 경우

m_1, m_2 와 m_3, m_4, m_5, m_6 중에서 각각 하나씩 택하고, l_1, l_2, l_3, l_4 와 l_5, l_6 중에서 각각 하나씩 택하여 평행사변형을 만드는 경우의 수는

$$({}_2C_1 \times {}_4C_1) \times ({}_4C_1 \times {}_2C_1) = 64$$

(ii) 오른쪽 위에 색칠된 평행사변형을 포함하는 경우

m_1, m_2, m_3, m_4 와 m_5, m_6 중에서 각각 하나씩 택하고, l_1, l_2 와 l_3, l_4, l_5, l_6 중에서 각각 하나씩 택하여 평행사변형을 만드는 경우의 수는

$$({}_4C_1 \times {}_2C_1) \times ({}_2C_1 \times {}_4C_1) = 64$$

(iii) 색칠된 두 개의 평행사변형을 모두 포함하는 경우

m_1, m_2 와 m_5, m_6 중에서 각각 하나씩 택하고, l_1, l_2 와 l_5, l_6 중에서 각각 하나씩 택하여 평행사변형을 만드는 경우의 수는

$$({}_2C_1 \times {}_2C_1) \times ({}_2C_1 \times {}_2C_1) = 16$$

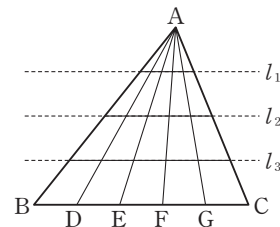
(i)~(iii)에서 구하는 평행사변형의 개수는

$$64+64-16=112$$

TIP 색칠한 부분을 포함하는 평행선을 기준으로 택할 수 있는 평행선의 개수를 먼저 확인해야 해!

736 ⑤

그림과 같이 직선 l_1, l_2, l_3 을 긋고, 선분 BC 위의 네 점을 각각 D, E, F, G라 하자.



(i) 삼각형의 개수

6개의 직선 AB, AD, AE, AF, AG, AC 중에서 서로 다른 2개의 직선을 택하고, 4개의 직선 l_1, l_2, l_3, BC 중에서 1개의 직선을 택하면 삼각형을 만들 수 있으므로

$$a = {}_6C_2 \times {}_4C_1 = 15 \times 4 = 60$$

(ii) 사각형의 개수

6개의 직선 AB, AD, AE, AF, AG, AC 중에서 서로 다른 2개의 직선을 택하고, 4개의 직선 l_1, l_2, l_3, BC 중에서 2개의 직선을 택하면 사각형을 만들 수 있으므로

$$b = {}_6C_2 \times {}_4C_2 = 15 \times 6 = 90$$

(i), (ii)에서 $b-a=30$

737 ②

다음과 같이 A, B가 있는 조와 C가 있는 조로 나눈다.



3명을 제외한 나머지 학생 7명을 3명, 4명의 2개의 조로 나누어 각각 A, B가 포함된 조, C가 포함된 조에 각각 편성하면 구하는 경우의 수는 ${}_7C_3 \times {}_4C_4 = 35$

TIP 조건 ㉠에서 5명씩 2개의 조가 있는 걸 알 수 있어. 조건 ㉡, ㉢에서 A, B와 C를 각각 포함하는 경우의 수를 분할을 이용하여 구해 보자!

738 답 ①

조건 (가)에서 한 명만 있는 조가 적어도 하나 존재해야 하므로 6명을 3개의 조로 나누는 경우는 다음과 같다.

(i) 1명, 1명, 4명으로 나누는 경우

$${}_6C_1 \times {}_5C_1 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} = 15$$

(ii) 1명, 2명, 3명으로 나누는 경우

$${}_6C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 = 60$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $15 + 60 = 75$

739 답 82

8명을 2개의 조로 나누는 경우는 3명, 5명 또는 4명, 4명이다.

(i) 3명, 5명으로 나누는 경우

① 3명인 조에 여학생 2명이 포함된 경우의 수

$${}_6C_1 \times {}_5C_5 = 6$$

② 5명인 조에 여학생 2명이 포함된 경우의 수

남학생을 3명, 3명으로 나눈 후 여학생 2명을 2개의 조에 각각 배정하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \times 2! = 20$$

(ii) 4명, 4명으로 나누는 경우의 수

$${}_6C_2 \times {}_4C_4 = 15$$

(i), (ii)에서 8명을 두 조로 나누는 경우의 수는

$$6 + 20 + 15 = 41 \text{ 이므로 구하는 경우의 수는}$$

$$41 \times 2! = 82$$

☞ 봉사 활동을 배정하는 경우의 수

740 답 ①

(i) 5명이 두 개의 층에서 내리는 경우

① 1명, 4명으로 나누어 내리는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_4C_4 \times {}_3P_2 = 30$$

☞ 각 층에 내리는 사람을 나누는 경우의 수

② 2명, 3명으로 나누어 내리는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_3C_3 \times {}_3P_2 = 60$$

(ii) 5명이 세 개의 층에서 내리는 경우

① 1명, 1명, 3명으로 나누어 내리는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 60$$

② 1명, 2명, 2명으로 나누어 내리는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 90$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$30 + 60 + 60 + 90 = 240$$

741 답 ③

부전승으로 올라가는 1개의 팀은 이미 배치되어 있으므로 남은 6개의 팀에 대한 대진표를 작성하면 된다.

6개의 팀을 4팀, 2팀의 2개의 조로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_4 \times {}_2C_2 = 15$$

4개의 팀을 다시 2팀, 2팀의 2개의 조로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

따라서 구하는 경우의 수는 $15 \times 3 = 45$

☞ 다른 풀이 부전승으로 배치된 팀과 두 번째 경기에서 만날 수 있는 두 팀을 고르는 경우의 수는 ${}_6C_2 = 15$

남은 4개의 팀을 2팀, 2팀의 2개의 조로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 3$$

742 답 ③

결승을 기준으로 4명씩 나눌 때, 한 쪽에는 4위인 선수를 배치하고 다른 한 쪽에는 1, 2, 3위인 선수를 배치한다.

이때 첫 경기로 4위인 선수와 시합하게 될 선수를 5위부터 8위 중에서 한 명 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$

나머지 3명 중 한 명을 1위부터 3위인 선수가 있는 쪽에 배치하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

1위부터 3위인 선수들과 위에서 택한 선수를 두 명씩 나누는 경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 3$

따라서 구하는 경우의 수는 $4 \times 3 \times 3 = 36$

743 답 41

① 단계 조건을 만족시키는 방법 구하기 30 %

조건 (가)에서 A, B, C 중 홀수의 개수는 1 또는 3이어야 한다. 또, 조건 (나)에서 A, B, C 중 적어도 한 개는 3의 배수가 되어야 한다.

② 단계 홀수 1개, 짝수 2개를 꺼내는 경우의 수 구하기 30 %

홀수가 3, 9 중 한 개이면 짝수는 2, 4, 6, 8, 10 중 두 개를 고르면 되므로 ${}_2C_1 \times {}_5C_2 = 20$

홀수가 1, 5, 7 중 한 개이면 짝수는 6을 포함하여 두 개를 고르면 되므로 ${}_3C_1 \times {}_4C_1 = 12$

즉, 홀수 1개, 짝수 2개를 꺼내는 경우의 수는 $20 + 12 = 32$

③ 단계 홀수 3개를 꺼내는 경우의 수 구하기 20 %

홀수는 1, 3, 5, 7, 9이므로 이 중 세 개를 고르는 경우의 수에서 3의 배수가 아닌 세 수를 고르는 경우의 수를 빼주면 된다.

즉, 홀수 3개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_5C_3 - {}_3C_3 = 10 - 1 = 9$

④ 단계 조건을 모두 만족시키는 경우의 수 구하기 20 %

따라서 구하는 경우의 수는 $32 + 9 = 41$

744 답 314

① 단계 세 수의 합과 곱이 모두 3의 배수인 경우 구하기 40 %

1부터 20까지의 자연수 중 $3k$ 꼴인 수를 A, $3k+1$ 꼴인 수를 B, $3k+2$ 꼴인 수를 C라 하자. (단, k는 음이 아닌 정수)

이때 A 는 3, 6, 9, 12, 15, 18의 6개, B 는 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19의 7개, C 는 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20의 7개이다.

세 수의 곱이 3의 배수가 되려면 A 를 한 개 이상 택해야 하고, 세 수의 합이 3의 배수가 되려면 A 를 3개 또는 B 를 3개 또는 C 를 3개 택하거나 A, B, C 를 하나씩 택해야 한다.

② 단계 3의 배수인 수를 1개 택하는 경우의 수 20%

A, B, C 를 각각 하나씩 택하는 경우의 수는

$${}_6C_1 \times {}_7C_1 \times {}_7C_1 = 294$$

③ 단계 3의 배수인 수를 3개 택하는 경우의 수 20%

A 를 3개 택하는 경우의 수는 ${}_6C_3 = 20$

④ 단계 세 수의 합과 곱이 모두 3의 배수인 경우의 수 구하기 20%

따라서 구하는 경우의 수는 $294 + 20 = 314$

745 **답** 256

① 단계 a, c 가 모두 홀수이면서 3의 배수일 때, 순서쌍의 개수 구하기 40%

점 $B(b)$ 가 점 $A(a)$ 와 점 $C(c)$ 의 중점이므로 $b = \frac{a+c}{2}$, 즉

$2b = a+c$ 에서 a, c 는 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다.

a, c 가 모두 홀수이면서 3의 배수인 경우는 100 이하의 3의 배수에서 3의 배수이면서 짝수인 6의 배수를 제외한 것이므로

$$33 - 16 = 17$$

즉, 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 ${}_{17}C_2 = 136$

② 단계 a, c 가 모두 짝수이면서 3의 배수일 때, 순서쌍의 개수 구하기 40%

a, c 가 모두 짝수이면서 3의 배수인 경우는 100 이하의 6의 배수이므로 16가지이다.

즉, 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 ${}_{16}C_2 = 120$

③ 단계 조건을 모두 만족시키는 순서쌍의 개수 구하기 20%

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $136 + 120 = 256$

746 **답** 2448

① 단계 수학 2과목이 일치하는 경우의 수 구하기 30%

일치하는 수학 2과목을 고르고 나머지 과목 중에서 A 가 2과목, B 가 2과목을 선택하므로

$${}_4C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 = 6 \times 15 \times 6 = 540$$

② 단계 수학 1과목, 과학 1과목이 일치하는 경우의 수 구하기 30%

일치하는 수학, 과학 과목을 한 개씩 고르고 나머지 과목 중에서 A 가 2과목, B 가 2과목을 선택하므로

$${}_4C_1 \times {}_4C_1 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 = 4 \times 4 \times 15 \times 6 = 1440$$

③ 단계 과학 2과목이 일치하는 경우의 수 구하기 30%

과학 2과목을 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$

(i) A, B 가 각각 수학 1과목, 과학 1과목을 선택할 때

$${}_4C_1 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_1C_1 = 4 \times 2 \times 3 \times 1 = 24$$

(ii) A, B 중 한 명은 수학 2과목, 다른 한 명은 수학 1과목, 과학 1과목을 선택할 때

$$2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 = 2 \times 6 \times 2 \times 2 = 48$$

□ A, B 를 서로 바꾸는 경우의 수

(iii) A, B 모두 수학 2과목을 선택할 때

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 = 6$$

따라서 이 경우의 수는 $6 \times (24 + 48 + 6) = 468$

④ 단계 조건을 모두 만족시키는 경우의 수 구하기 10%

따라서 구하는 경우의 수는

$$540 + 1440 + 468 = 2448$$

747 **답** 196

① 단계 $a_1 = 5$ 인 경우의 수 구하기 40%

조건 (가)에서 $a_3 > 5$ 이므로 a_3 의 값이 될 수 있는 수는 6, 7, 8, 9의 4개이다. 또, $a_2 < a_4$ 이므로 0부터 9까지의 10개의 숫자 중에서 5와 a_3 의 값을 제외한 8개의 숫자 중 2개를 택하여 작은 수부터 a_2, a_4 에 차례로 나열하면 된다.

즉, a_2, a_4 의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_8C_2 = 28$ 이므로

$a_1 = 5$ 인 N 의 개수는 $4 \times 28 = 112$

② 단계 $a_1 = 6$ 인 경우의 수 구하기 40%

조건 (가)에서 $a_3 > 6$ 이므로 a_3 의 값이 될 수 있는 수는 7, 8, 9의 3개이다. 또, $a_2 < a_4$ 이므로 0부터 9까지의 10개의 숫자 중에서 6과 a_3 의 값을 제외한 8개의 숫자 중 2개를 택하여 작은 수부터 a_2, a_4 에 차례로 나열하면 된다.

즉, a_2, a_4 의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_8C_2 = 28$ 이므로

$a_1 = 6$ 인 N 의 개수는 $3 \times 28 = 84$

③ 단계 N 의 개수 구하기 20%

따라서 구하는 경우의 수는 $112 + 84 = 196$

748 **답** 192

① 단계 1의 오른쪽 칸이 1일 때 경우의 수 구하기 30%

(i) 주어진 1의 오른쪽 칸이 1인 경우

			1	1

색칠한 칸에 들어갈 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$

① 세로로 이웃한 숫자가 세 쌍일 때

5개의 숫자 중 이미 사용한 2개의 숫자를 제외한 3개의 숫자를 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$

② 세로로 이웃한 숫자가 한 쌍일 때

가로로 이웃한 숫자 두 쌍을 위아래로 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$ 이고, 세로로 이웃한 숫자 쌍과 가로로 이웃한 숫자 쌍의 위치로 가능한 경우는 $\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$ 의 2가지이므로 조건을 만족시키는 경우의 수는 $6 \times 2 = 12$

①, ②에서 가능한 경우의 수는 $4 \times (6 + 12) = 72$

② 단계 1의 아래쪽 칸이 1일 때 경우의 수 구하기 30%

(ii) 주어진 1의 아래쪽 칸이 1인 경우

			1	
			1	

(i)과 마찬가지로 색칠한 칸에 들어갈 숫자가 정해지면 남은 6칸에 들어갈 숫자를 정하는 경우의 수는 72

③ 단계 1의 왼쪽 칸이 1일 때 경우의 수 구하기 40%

(iii) 주어진 1의 왼쪽 칸이 1인 경우

		1	1	

색칠한 칸에 들어갈 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

① 세로로 이웃한 숫자가 세 쌍일 때

5개의 숫자 중 이미 사용한 2개의 숫자를 제외한 3개의 숫자를 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$

② 세로로 이웃한 숫자가 한 쌍일 때

세로로 이웃한 숫자의 위치는 정해져 있고, 가로로 이웃한 숫자 두 쌍을 위아래로 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$

①, ②에서 가능한 경우의 수는 $4 \times (6 + 6) = 48$

(i)~(iii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는 $72 + 72 + 48 = 192$

749 **답** 15

① 단계 n 개의 점으로 만들 수 있는 직선의 개수 구하기 30%

n 개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$

② 단계 한 직선에 있는 점으로 만들 수 있는 직선의 개수 구하기 30%

한 직선 위에 있는 10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_{10}C_2=45$

③ 단계 n 의 값 구하기 40%

주어진 한 직선을 포함하면 구하는 직선의 개수는

$$\frac{n(n-1)}{2} - 45 + 1 = 61 \text{ 이므로 } n = 15$$

750 **답** 360

① 단계 A, B가 4명인 조에 속하는 경우의 수 구하기 40%

2명을 제외한 나머지 6명을 2명, 2명, 2명의 3개의 조로 나눈 후 A, B를 배정하는 경우의 수는

$$\left({}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} \right) \times 3 = \left(15 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{6} \right) \times 3 = 45$$

A, B의 조를 택하는 경우의 수

② 단계 A, B가 2명인 조에 속하는 경우의 수 구하기 30%

2명을 제외한 나머지 6명을 2명, 4명의 2개의 조로 나누는 경우의 수는 ${}_6C_2 \times {}_4C_4 = 15$

③ 단계 A, B가 같은 곳을 방문하는 경우의 수 구하기 30%

위에서 A, B가 같은 조에 속하도록 나누는 경우의 수는

$$45 + 15 = 60$$

3개의 조를 세 곳에 배정하는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는 $60 \times 6 = 360$

1등급 완성 고난도 마스터 문제

p.137~139

751 **답** 1025

(i) 꽃 3송이를 한 명이 받는 경우

5명의 학생 중 한 명이 꽃 3송이를 받는 경우의 수는 5이고, 이때 나머지 학생 4명은 초콜릿을 1개씩 받으므로 꽃 3송이를 한 명이 받는 경우의 수는 5

(ii) 꽃을 2송이, 1송이씩 나누어 받는 경우

꽃을 2송이, 1송이로 나누는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

2송이, 1송이씩 나누어진 꽃을 받는 학생을 정하는 경우의 수는

$${}_5P_2=20$$

즉, 꽃을 나누어 주는 경우의 수는 $3 \times 20 = 60$

이때 초콜릿을 꽃을 받지 못한 3명에게 각각 1개씩 주고 남은 초콜릿 1개를 나누어 줄 때,

초콜릿을 3명이 받는 경우의 수는 초콜릿을 받은 3명 중 한 명에게 나누어 주면 되므로 ${}_3C_1=3$

초콜릿을 4명이 받는 경우의 수는 꽃을 받은 2명 중 한 명에게 나누어 주면 되므로 ${}_2C_1=2$

따라서 이 경우의 수는 $60 \times (3 + 2) = 300$

(iii) 꽃을 1송이, 1송이, 1송이씩 나누어 받는 경우

꽃을 나누는 경우의 수는 ${}_3P_3=6$

이때 초콜릿은 꽃을 받지 못한 2명에게 각각 1개씩 주고 남은 초콜릿 2개를 나누어 줄 때,

초콜릿을 3명이 받는 경우의 수는 꽃을 받은 3명 중 한 명에게 초콜릿 1개를 주고, 남은 1개는 꽃과 초콜릿을 받은 한 명과 초콜릿을 1개씩 받은 2명 중 한 명에게 나누어 주면 되므로

$${}_3C_1 \times {}_3C_1=9$$

초콜릿을 4명이 받는 경우의 수는 꽃을 받은 3명 중 2명에게 각각 1개씩 주면 되므로 ${}_3C_2=3$

따라서 이 경우의 수는 $60 \times (9 + 3) = 720$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는 $5 + 300 + 720 = 1025$

752 ⑤ ①

계단의 전체 단의 개수는 $\frac{180}{30}=6$

(i) 폭이 30, 30, 30, 30, 30, 150인 경우의 수

여섯 자리 중 150이 들어갈 자리를 택하면 되므로 6

(ii) 폭이 30, 30, 30, 30, 60, 120인 경우의 수

여섯 자리 중 30이 들어갈 네 곳을 택하는 경우의 수는 ${}_6C_4=15$

남은 두 자리에 60, 120을 정하는 경우의 수는 2이므로

$$15 \times 2 = 30$$

(iii) 폭이 30, 30, 30, 30, 90, 90인 경우의 수

여섯 자리 중 30이 들어갈 네 곳을 택하면 되므로 ${}_6C_4=15$

(iv) 폭이 30, 30, 30, 60, 60, 90인 경우의 수

여섯 자리 중 30이 들어갈 세 곳을 택하고 남은 세 자리 중 60이

들어갈 두 곳을 택하면 되므로 ${}_6C_3 \times {}_3C_2 = 60$

(v) 폭이 30, 30, 60, 60, 60, 60인 경우의 수

여섯 자리 중 60이 들어갈 네 곳을 택하면 되므로 ${}_6C_4=15$

(i)~(v)에서 $a=6+30+15+60+15=126$

총 6단의 계단을 1단 또는 2단씩 올라가는 경우의 수는

1단씩 6번 올라갈 때, 1

1단씩 4번, 2단씩 1번 올라갈 때, ${}_5C_1=5$

1단씩 2번, 2단씩 2번 올라갈 때, ${}_4C_2=6$

2단씩 3번 올라갈 때, 1

이므로 $b=1+5+6+1=13$

$$\therefore a+b=139$$

753 ⑤ ②

1학년 지원자 수를 x 명이라 하면 2학년 지원자 수는 $(11-x)$ 명이고,

2학년만 4명 뽑는 경우의 수는 ${}_{(11-x)}C_4$ 이므로

$${}_{11}C_4 - {}_{(11-x)}C_4 = 295$$

$$\frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2 \times 1} - \frac{(11-x) \times (10-x) \times (9-x) \times (8-x)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 295$$

$$(11-x) \times (10-x) \times (9-x) \times (8-x) = 840 = 7 \times 6 \times 5 \times 4$$

$$\therefore x=4$$

따라서 1학년 지원자 수는 4명이다.

TIP 구하고자 하는 것을 미지수로 두고 조합의 수를 이용하여 식을 세워 보자

754 ⑤ 778

(i) 숫자 3개를 사용하는 경우

정삼각형에 가장 작은 수를 중복하여 넣고 정사각형에 나머지 숫

자 2개를 배열하면 ${}_6C_3 \times 2! = 40$

(ii) 숫자 4개를 사용하는 경우 정삼각형에 적혀 있는 숫자를 서로 바꾸는 경우의 수

① 정삼각형에 적혀 있는 수가 같을 때, 정삼각형에 가장 작은 수를 중복하여 넣고 정사각형에 나머지 숫자 3개를 배열하면

$${}_6C_4 \times {}_3C_1 \times ({}_3C_2 \times 2!) = 270$$

중복되는 숫자를 중복되지 않는 숫자를 2개 배열한 후 그 사이사이와 양 끝에 중복되는 숫자 2개를 배열하는 경우의 수

② 정삼각형에 적혀 있는 수가 다를 때, 두 정삼각형에 가장 작은 수부터 숫자 2개를 각각 넣고 정사각형에 나머지 숫자 2개를 배열하면 ${}_6C_4 \times 2! \times 2! = 60$

$$\therefore 270 + 60 = 330 \quad \text{정삼각형에 적혀 있는 숫자를 서로 바꾸는 경우의 수}$$

(iii) 숫자 5개를 사용하는 경우

① 정삼각형에 적혀 있는 수가 같을 때, 정삼각형에 가장 작은 수를 중복하여 넣고 정사각형에 나머지 숫자 4개를 배열하면

$${}_6C_5 \times 4! = 144$$

② 정삼각형에 적혀 있는 수가 다를 때, 두 정삼각형에 가장 작은 수부터 숫자 2개를 각각 넣고 정사각형에 나머지 숫자 3개를 배열하면

$${}_6C_5 \times 2! \times {}_3C_1 \times ({}_3C_2 \times 2!) = 216$$

$$\therefore 144 + 216 = 360 \quad \text{중복되지 않는 숫자를 서로 바꾸는 경우의 수}$$

(iv) 숫자 6개를 사용하는 경우

두 정삼각형에 가장 작은 수부터 2개를 각각 넣고 정사각형에 나머지 숫자 4개를 배열하면 $2! \times 4! = 48$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는 $40 + 330 + 360 + 48 = 778$

755 ⑤ 816

(i) 남자 2명이 1번, 2번 좌석에 앉는 경우

남자끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

이웃한 여자 2명과 여자 1명을 빈 의자 3개와 남자 묶음 사이사이 및 오른쪽 끝에 배치하는 경우의 수는 ${}_4C_2 \times 2! = 12$

여자 3명의 순서를 정하는 경우의 수는 $3! = 6$

$$\therefore 2 \times 12 \times 6 = 144$$

이때 이 경우의 수는 남자가 7번, 8번 좌석에 앉는 경우와 같다.

(ii) 남자 2명이 2번, 3번 좌석에 앉는 경우

남자끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

1번이 빈 의자일 때, 이웃한 여자 2명과 여자 1명을 빈 의자 2개와 남자 묶음 사이사이 및 오른쪽 끝에 배치하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times 2! = 6$$

1번에 여자가 앉을 때, 이웃한 여자 2명을 배치하는 경우의 수는 4

여자 3명의 순서를 정하는 경우의 수는 $3! = 6$

$$\therefore 2 \times (6 + 4) \times 6 = 120$$

이때 이 경우의 수는 남자가 6번, 7번 좌석에 앉는 경우와 같다.

(iii) 남자 2명이 3번, 4번 좌석에 앉는 경우

남자끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

1, 2번이 빈 의자일 때, 여자 3명이 앉을 수 있는 좌석의 경우의 수는 2

1번 또는 2번에 여자가 앉을 때, 이웃한 여자 2명을 배치하는 경우의 수는 $3 + 3 = 6$

1, 2번에 여자가 앉을 때, 여자 한 명을 배치하는 경우의 수는 4

여자 3명의 순서를 정하는 경우의 수는 $3! = 6$

$$\therefore 2 \times (2 + 6 + 4) \times 6 = 144$$

이때 이 경우의 수는 남자가 5번, 6번 좌석에 앉는 경우와 같다.

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$2 \times (144 + 120 + 144) = 816$$

756 ③

13개의 점 중에서 4개의 점을 택하는 경우의 수는 ${}_{13}C_4 = 715$

이 중 사각형이 만들어지지 않는 다음의 경우는 제외해야 한다.

높이의 4개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_4 = 1$

밑변의 5개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_4 = 5$

빗변의 7개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_7C_4 = 35$

높이에서 3개의 점을 택하고 나머지 변에서 한 점을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_3 \times {}_9C_1 = 36$

밑변에서 3개의 점을 고르고 나머지 변에서 한 점을 택하는 경우의 수는 ${}_5C_3 \times {}_8C_1 = 80$

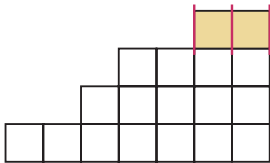
빗변에서 3개의 점을 고르고 나머지 변에서 한 점을 택하는 경우의 수는 ${}_7C_3 \times {}_6C_1 = 210$

따라서 구하는 경우의 수는

$$715 - (1 + 5 + 35 + 36 + 80 + 210) = 348$$

757 ⑤

주어진 18개의 직사각형의 한 변의 길이를 1이라 하면 가장 윗줄에서 세로의 길이가 1인 직사각형의 개수는 다음과 같이 3개의 세로줄 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같다.



같은 방법으로 세로의 길이가 1인 직사각형의 개수는

$${}_3C_2 + {}_5C_2 + {}_6C_2 + {}_8C_2 = 56$$

세로의 길이가 2인 직사각형의 개수는

$${}_3C_2 + {}_5C_2 + {}_6C_2 = 28$$

세로의 길이가 3인 직사각형의 개수는

$${}_3C_2 + {}_5C_2 = 13$$

세로의 길이가 4인 직사각형의 개수는

$${}_3C_2 = 3$$

따라서 구하는 직사각형의 개수는 $56 + 28 + 13 + 3 = 100$

758 ⑤ 534

(i) 두 상자에 2개, 4개로 나누는 경우

공이 들어갈 상자를 정하는 경우의 수는 ${}_3C_2$

공 2개를 넣은 상자의 수의 합이 7 이상이어야 공 4개를 넣은 상자의 수의 합이 14 이하이므로 공을 나누는 경우의 수는

$(6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (6, 1), (5, 4), (5, 3), (5, 2), (4, 3)$ 에서 9

두 상자에 들어 있는 공을 서로 바꾸는 경우의 수는 2

$$\therefore {}_3C_2 \times 9 \times 2 = 54$$

(ii) 두 상자에 3개, 3개로 나누는 경우

공이 들어갈 상자를 정하는 경우의 수는 ${}_3C_2$

$(1, 2, 3), (4, 5, 6)$ 으로 나누는 경우를 제외하면 공을 나누는 경우의 수는 ${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} - 1$

두 상자에 들어 있는 공을 서로 바꾸는 경우의 수는 2

$$\therefore {}_3C_2 \times \left({}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} - 1 \right) \times 2 = 3 \times 9 \times 2 = 54$$

(iii) 세 상자에 1개, 1개, 4개로 나누는 경우

공 1개를 넣은 상자에 1이 적혀 있는 공을 넣을 수 없고, 공을 1개씩 넣은 상자의 수의 합이 7 이상이어야 하므로 2, 3 또는 2, 4로 나누는 경우를 제외하면 공을 나누는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} - 2 = 8$$

상자를 정하는 경우의 수는 3!

$$\therefore 8 \times 3! = 48$$

(iv) 세 상자에 1개, 2개, 3개로 나누는 경우

공 1개를 넣은 상자에 1이 적혀 있는 공을 넣을 수 없고, 공을 1개, 2개씩 넣은 상자의 수의 합이 7 이상이어야 하므로 2, (1, 3) 또는 3, (1, 2)로 나누는 경우를 제외하면 공을 나누는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 - 2$$

상자를 정하는 경우의 수는 3!

$$\therefore ({}_5C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 - 2) \times 3! = 288$$

(v) 세 상자에 2개, 2개, 2개로 나누는 경우

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} \times 3! = 90$$

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

$$54 + 54 + 48 + 288 + 90 = 534$$

주의 • 공이 들어갈 상자를 정한 후에 상자에 공을 각각 배정하는 경우의 수도 생각해야 하는 것을 잊지 말아야 해!

759 ④

대관람차 4대 중 2대를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$

택한 두 대의 대관람차를 각각 A, B라 하자.

(i) 어른을 1명, 3명으로 나누어 탑승하는 경우

어른이 탑승하는 경우의 수는 ${}_4C_1 \times 2 = 8$

이때 1명의 어른이 탑승한 대관람차를 A, 3명의 어른이 탑승한 대관람차를 B라 하고, 어린이가 탑승하는 경우를 순서쌍

(A에 탑승하는 인원의 수, B에 탑승하는 인원의 수)로 나타내면

$(5, 1), (4, 2), (3, 3)$ 이므로

어린이가 탑승하는 경우의 수는

$${}_6C_5 + {}_6C_4 \times {}_2C_2 + {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \times 2! = 41$$

따라서 이 경우의 수는 $8 \times 41 = 328$

(ii) 어른을 각각 2명으로 나누어 탑승하는 경우

어른이 탑승하는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \times 2! = 6$$

어린이를 4명, 2명 또는 각각 3명씩 나누어 탑승하는 경우의 수는

$${}_6C_4 \times {}_2C_2 \times 2! + {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \times 2! = 50$$

따라서 이 경우의 수는 $6 \times 50 = 300$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$(328 + 300) \times 6 = 3768$$

760 ⑤

(i) 흰색 공을 3개의 상자에 1개, 1개, 2개로 나누는 경우

흰색 공을 나누는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 36$$

이때 검은색 공을 넣는 상자를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$

$$\therefore 36 \times 3 = 108$$

(ii) 흰색 공을 3개의 상자에 0개, 2개, 2개로 나누는 경우

흰색 공을 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \times {}_3P_2 = 18$$

이때 검은색 공은 비어있는 상자에 1개, 다른 두 상자 중 하나에 1개를 넣어야 하므로 그 경우의 수는 ${}_2C_1 = 2$

$$\therefore 18 \times 2 = 36$$

(iii) 흰색 공을 3개의 상자에 0개, 1개, 3개로 나누는 경우

흰색 공을 나누는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_3C_3 \times {}_3P_2 = 24$$

이때 검은색 공은 비어있는 상자에 1개, 다른 두 상자 중 공이 1개인 상자에 1개를 넣어야 하므로 그 경우의 수는 1

$$\therefore 24 \times 1 = 24$$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는 $108 + 36 + 24 = 168$

761 450

7개의 반을 3개, 4개의 두 조로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_3 \times {}_4C_4 = 35$$

3개의 반 중에서 부전승으로 올라가는 반을 뽑는 경우의 수는 3

4개의 반을 2개, 2개의 두 조로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 3$$

따라서 대진표를 작성하는 모든 경우의 수는

$$35 \times 3 \times 3 = 315$$

(i) 1반과 7반이 3개로 이루어진 조에서 첫 번째 경기를 하는 경우

1반과 7반을 제외한 5개의 반을 1개, 4개의 반으로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_4C_4 = 5$$

4개의 반을 2개, 2개의 반으로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 3$$

$$\therefore 5 \times 3 = 15$$

(ii) 1반과 7반이 4개로 이루어진 조에서 첫 번째 경기를 하는 경우

1반과 7반을 제외한 5개의 반을 3개, 2개의 반으로 나누는 경우의 수는 ${}_5C_3 \times {}_2C_2 = 10$

3개의 반 중 부전승으로 올라가는 반을 택하는 경우의 수는 3

$$\therefore 10 \times 3 = 30$$

(i), (ii)에서 $a = 315 - (15 + 30) = 270$

1반이 3개로 이루어진 조, 7반이 4개로 이루어진 조 또는 1반이 4개로 이루어진 조, 7반이 3개로 이루어진 조에 들어가는 경우의 수는 2

1반과 7반을 제외한 5개의 반을 2개, 3개로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_3C_3 = 10$$

3개의 반 중 부전승으로 올라가는 반을 뽑는 경우의 수는 3

4개의 반을 2개, 2개의 반으로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 3$$

$$\therefore b = 2 \times 10 \times 3 \times 3 = 180$$

$$\therefore a + b = 270 + 180 = 450$$

762 84

10개의 숫자 중 $3k$ 꼴인 수를 A , $3k+1$ 꼴인 수를 B , $3k+2$ 꼴인 수를 C 라 하자. (단, k 는 음이 아닌 정수)

이때 A 는 0, 3, 6, 9의 4개, B 는 1, 4, 7의 3개, C 는 2, 5, 8의 3개이다.

(i) A 를 4개 택하여 나열하는 경우

특수문자를 택하는 경우의 수는 2

$A \square A$	A	A
---------------	-----	-----

A 와 특수문자를 배열하는 경우의 수는 ${}_3C_1 \times 4!$

$$\therefore 2 \times {}_3C_1 \times 4! = 6 \times 4!$$

(ii) A 를 1개, B 를 3개 택하여 나열하는 경우

A 에 들어갈 수와 특수문자를 택하는 경우의 수는 $4 \times 2 = 8$

$B \square B$	A	B
---------------	-----	-----

특수문자 앞, 뒤에 배치할 B 를 정하고 B 와 B 사이에 특수문자를 포함한 것을 한 묶음으로 생각하여 남은 A , B 와 배열하는 경우의 수는 ${}_3C_2 \times 3!$

한 묶음 내의 B 가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2

$$\therefore 8 \times {}_3C_2 \times 3! \times 2 = 12 \times 4!$$

(iii) A 를 1개, C 를 3개 택하여 나열하는 경우

(ii)와 같은 방법으로 구하면 경우의 수는 $12 \times 4!$

(iv) A 를 2개, B 를 1개, C 를 1개 택하여 나열하는 경우

A , B , C 에 들어갈 수와 특수문자를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times 3 \times 3 \times 2 = 108$$

$A \square A$	B	C
---------------	-----	-----

A 와 A 사이에 특수문자를 포함한 것을 한 묶음으로 생각하여 남은 B , C 와 배열하는 경우의 수는 3!

한 묶음 내의 A 가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2

$$\therefore 108 \times 3! \times 2 = 54 \times 4!$$

(i)~(iv)에서 비밀번호의 개수는
 $(6+12+12+54) \times 4! = 84 \times 4!$
 $\therefore N=84$

763 13

$p=2, q=1, f(n)=_{n-2}C_2, g(n)=_{n-2}C_1, r=3!=6$
 $f(r)+g(r)=f(6)+g(6)=6+4=10$
 $\therefore p+q+f(r)+g(r)=2+1+10=13$

764 228

(i) 0을 택하는 경우
 남은 3개의 숫자의 합이 짝수이어야 하므로 짝수+짝수+짝수
 또는 홀수+홀수+짝수이어야 한다.
 ① 짝수 3개를 택하는 경우의 수
 $_3C_3=1$
 ② 홀수 2개, 짝수 1개를 택하는 경우의 수
 $_3C_1 \times _4C_2=18$
 짝수 홀수
 또, 특수문자를 택하는 경우의 수는 2이고, 0을 포함하지 않은 3개의 숫자와 문자를 나열하는 경우의 수는 4!이므로
 $(1+18) \times 2 \times 4! = 38 \times 4!$
 (ii) 0을 택하지 않는 경우
 4개의 숫자의 합이 짝수이어야 하므로
 홀수+홀수+짝수+짝수 또는 홀수+홀수+홀수+홀수이어야 한다.
 ① 홀수 2개, 짝수 2개를 택하는 경우의 수
 $_4C_2 \times _3C_2=18$
 ② 홀수 4개를 택하는 경우의 수
 $_4C_4=1$
 또, 특수문자를 택하는 경우의 수는 2이고, 4개의 숫자와 문자를 나열하는 경우의 수는 5!이므로
 $(18+1) \times 2 \times 5! = 190 \times 4!$
 (i), (ii)에서 비밀번호의 개수는
 $(38+190) \times 4! = 228 \times 4!$
 $\therefore N=228$

765 216

(가): $f(n)=n^2$, (나): $g(n)=_nC_2$, (다): $h(n)=_nC_2 \times n$
 (라): $a_n=n^2+2 \times _nC_2 \times n$ 이므로
 $a_6=36+2 \times 15 \times 6=216$, 즉 $p=216$
 $\therefore \frac{f(p)}{h(p)} \times g(p) = \frac{f(216)}{h(216)} \times g(216)$
 $= \frac{216 \times 216}{_{216}C_2 \times 216} \times _{216}C_2$
 $= 216$

IV 행렬

12 행렬과 그 연산

1등급 필수 내신 빈출 문제

p.142~148

766 ④

$a_{ij}=i+3j$ 이므로 $a_{12}=1+3 \times 2=7$

767 ②

$a_{11}=1-2+3=2, a_{12}=-1-4+3=-2, a_{13}=1-6+3=-2,$
 $a_{21}=-1-2+3=0, a_{22}=1-4+3=0, a_{23}=-1-6+3=-4$
 이므로
 $b_{11}=a_{11}=2, b_{12}=a_{21}=0, b_{21}=a_{12}=-2, b_{22}=a_{22}=0,$
 $b_{31}=a_{13}=-2, b_{32}=a_{23}=-4$
 $\therefore B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

768 ②

$|f(1)|=|1^2-4+5|=2, |f(2)|=|2^2-4 \times 2+5|=1,$
 $|f(3)|=|3^2-4 \times 3+5|=2$ 이므로
 $a_{11}=0, a_{12}=1, a_{13}=0$
 $a_{21}=1, a_{22}=0, a_{23}=0$
 $a_{31}=0, a_{32}=1, a_{33}=0$
 따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 3

769 ⑤

두 행렬의 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로
 $3a-2=7, 6=2b+2$
 따라서 $a=3, b=2$ 이므로 $a+b=5$

770 ③

두 행렬의 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로
 $1-x=y-2, x+y=xy+1, xy=4-xy$ 에서
 $x+y=3, xy=2$
 $\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
 $=27-3 \times 2 \times 3=9$

771 ⑤

두 행렬의 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로
 $3ab=18, ab=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$

$$-14=c^2-3bc \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$5c=c^2+3a \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$b-2=1, b=3$$

①에 $b=3$ 을 대입하면 $a=2$

(i) $b=3$ 을 ②에 대입하면 $-14=c^2-9c$

$$c^2-9c+14=0, (c-2)(c-7)=0$$

$$\therefore c=2 \text{ 또는 } c=7$$

(ii) $a=2$ 를 ②에 대입하면 $5c=c^2+6$

$$c^2-5c+6=0, (c-2)(c-3)=0$$

$$\therefore c=2 \text{ 또는 } c=3$$

(i), (ii)에서 $c=2$

따라서 $a=2, b=3, c=2$ 이므로

$$a^2+b^2-c^2=2^2+3^2-2^2=9$$

772 **답 8**

$$\frac{1}{3}(A+2B)+\frac{1}{6}(A-B)=\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}B+\frac{1}{6}A-\frac{1}{6}B$$

$$=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 9 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 5 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

따라서 모든 성분의 합은

$$\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)+5+(-2)+2+3=8$$

773 **답 ④**

$xA+yB=C$ 에서

$$\begin{pmatrix} x-2y & -2x-y \\ 4x+y & -5x-3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}$$

두 행렬의 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로

$$-2x-y=-3, 4x+y=7$$

이를 연립하여 풀면 $x=2, y=-1$

$$\therefore x+y=1$$

774 **답 4**

$X+B=3(X-2A)-B$ 에서 $X=3A+B$ 이므로

$$X=3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X 의 (2, 1) 성분은 4

TIP 주어진 식을 먼저 간단하게 정리한 후 주어진 행렬을 대입하면 행렬 X 를 쉽게 구할 수 있어!

775 **답 ②**

$$X-2Y=A \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2X+Y=-2B \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①+②×2를 하면

$$5X=A-4B \quad \therefore X=\frac{1}{5}A-\frac{4}{5}B \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

③을 ②에 대입하면

$$2\left(\frac{1}{5}A-\frac{4}{5}B\right)+Y=-2B \quad \therefore Y=-\frac{2}{5}A-\frac{2}{5}B$$

$$\therefore X+Y=-\frac{1}{5}A-\frac{6}{5}B$$

$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}-\frac{6}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{13}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{27}{5} & -\frac{16}{5} \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $X+Y$ 의 (1, 2) 성분과 (2, 2) 성분의 합은

$$\frac{6}{5}+\left(-\frac{16}{5}\right)=-2$$

776 **답 18**

$$A+2B=\begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2A+B=\begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①+②을 하면

$$3A+3B=\begin{pmatrix} 3 & 24 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} \quad \therefore A+B=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \left[\text{다른 풀이} \right]$$

따라서 행렬 $A+B$ 의 모든 성분의 합은

$$1+8+3+6=18$$

다른 풀이 ①×2-②을 하면

$$3A=\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 를 ①에 대입하여 정리하면

$$2B=\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \therefore B=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A+B=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

777 **답 ②**

$$x_{11}=3, x_{12}=4, x_{21}=5, x_{22}=6 \text{이므로 } X=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$y_{11}=3, y_{12}=5, y_{21}=4, y_{22}=6 \text{이므로 } Y=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

한편, $X=2A+B, Y=A+2B$ 를 A, B 에 대하여 연립하여 풀면

$$A=\frac{1}{3}(2X-Y), B=\frac{1}{3}(-X+2Y)$$

$$\therefore 5A+B=\frac{5}{3}(2X-Y)+\frac{1}{3}(-X+2Y)=3X-Y$$

$$=3\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $5A+B$ 의 가장 작은 성분은 6

786 답 ③

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$B^2 = BB = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

다른 풀이

$n=6$ 일 때, $A^6=E$, $B^6=E$ 이므로 $A^6-B^6=O$ 를 만족시킨다.
따라서 $A^n-B^n=O$ 를 만족시키는 가장 작은 자연수 n 은 6

다른 풀이 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$A^2 - E = O \quad \therefore A^2 = E$$

$$B^2 - B + E = O \quad \therefore B^3 = -E$$

787 답 -1

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & -b^2 + a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

행렬 A^2 의 $(2, 1)$ 성분은 $2ab = -b$ 이므로 $a = -\frac{1}{2}$

행렬 A^2 의 $(1, 1)$ 성분은 $\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2} \quad \therefore b^2 = \frac{3}{4}$

이때 $b < 0$ 이므로 $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$A = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, A^2 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = E \text{이므로}$$

$$A^{200} = (A^3)^{66} A^2 = A^2$$

따라서 행렬 A^{200} 의 모든 성분의 합은 -1

788 답 ①

A 고등학교 남학생의 80%, 여학생의 30%가 드림을 배우므로 A 고등학교에서 드림을 배우는 모든 학생 수는 $120 \times 0.8 + 160 \times 0.3$

$$PQ = \begin{pmatrix} 120 & 160 \\ 130 & 140 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 120 \times 0.2 + 160 \times 0.7 & 120 \times 0.8 + 160 \times 0.3 \\ 130 \times 0.2 + 140 \times 0.7 & 130 \times 0.8 + 140 \times 0.3 \end{pmatrix}$$

이므로 A 고등학교에서 드림을 배우는 모든 학생 수는 행렬 PQ의 $(1, 2)$ 성분이다.

789 답 ④

빵 한 개를 만드는 데 필요한 밀가루와 설탕의 양을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 50 & 5 \end{pmatrix}$$

주문받은 두 종류의 빵의 개수를 행렬로 나타내면 $\begin{pmatrix} 200 & 300 \end{pmatrix}$

이므로 전체 밀가루와 설탕의 양을 두 행렬의 곱으로 나타내면

$$\begin{pmatrix} 200 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 50 & 5 \end{pmatrix}$$

이때 밀가루의 단가가 3원, 설탕의 단가가 8원이므로 구하는 총 금액을 세 행렬의 곱으로 나타내면

$$\begin{pmatrix} 200 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 50 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

790 답 116

1회 시행 후 두 비커 A, B에 들어 있는 용액의 양을 a_1, b_1 이라 하면

$$a_1 = 0.6x + 0.2y, b_1 = 0.4x + 0.8y$$

2회 시행 후 두 비커 A, B에 들어 있는 용액의 양은

$$a = 0.6a_1 + 0.2b_1, b = 0.4a_1 + 0.8b_1$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6a_1 + 0.2b_1 \\ 0.4a_1 + 0.8b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6x + 0.2y \\ 0.4x + 0.8y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.44 & 0.28 \\ 0.56 & 0.72 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

따라서 $p=0.44, q=0.72$ 이므로

$$100(p+q) = 100 \times 1.16 = 116$$

791 답 $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

$$BA - A^2 = (B - A)A$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

792 답 15

$$AB + AC - C(B + C)$$

$$= A(B + C) - C(B + C)$$

$$= (A - C)(B + C)$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 15

793 답 ④

$$AB = A \text{에서 } ABA = AA$$

$$\text{즉, } A^2 = ABA = A(BA) = AB = A$$

$$A^3 = A^4 = \dots = A^{50} = A$$

$$\text{같은 방법으로 } B^3 = B^4 = \dots = B^{50} = B$$

$$\therefore A^{50} + B^{50} = A + B$$

794 답 77

$$(A + B)^2 = (A^2 + B^2) + (AB + BA)$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^{150} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{75} = \begin{pmatrix} 1 & 75 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $(A + B)^{150}$ 의 모든 성분의 합은 77

795

답 5

$$(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 \\ = A^2 - 2AB + B^2$$

이므로 $AB=BA$

$$AB = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-1 & ab+1 \\ 7 & 2b-3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2b & -2+3b \\ a-2 & -4 \end{pmatrix}$$

에서 $7=a-2, 2b-3=-4$

$$\text{따라서 } a=9, b=-\frac{1}{2} \text{ 이므로 } a+b=9+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{2}$$

796

답 1

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \\ = A^2 - B^2$$

이므로 $AB=BA$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & y \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -y-2 \\ 3x-2 & xy+1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & y \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+xy & -6+y \\ 2+x & 5 \end{pmatrix}$$

에서 $3x-2=2+x, -y-2=-6+y$ 따라서 $x=2, y=2$ 이므로 $x^2+y^2=8$

797

답 0

 $(AB)^2 = ABAB = A^2B^2$ 이므로 $AB=BA$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+xy & 4+x \\ -1+2y & 6 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -x+8 \\ y+1 & xy+2 \end{pmatrix}$$

에서 $4+x=-x+8, -1+2y=y+1$ 따라서 $x=2, y=2$ 이므로 $x-y=0$

798

답 4

$$A \begin{pmatrix} 4b+3c \\ 2a-3d \end{pmatrix} = 2A \begin{pmatrix} 2b \\ a \end{pmatrix} + 3A \begin{pmatrix} c \\ -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$3A \begin{pmatrix} c \\ -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix} - 2A \begin{pmatrix} 2b \\ a \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A \begin{pmatrix} -c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A \begin{pmatrix} -c \\ d \end{pmatrix}$ 의 모든 성분의 합은 4

799

답 16

$$(A+2E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{의 양변에 } A \text{를 곱하면}$$

$$(A^2+2A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \leftarrow \text{조건 ④에서 } A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

조건 (가)의 양변에 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 를 곱하면

$$(A^2+2A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x+5y \\ 3x-y \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$-4x+5y=6, 3x-y=-4$$

$$\text{이를 연립하여 풀면 } x=-\frac{14}{11}, y=-\frac{2}{11}$$

$$\therefore 11(y-x) = 11 \times \left(\frac{2}{11} + \frac{14}{11} \right) = 16$$

800

답 30

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

 $\textcircled{B} - \textcircled{A} \times 2$ 를 하면

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{즉, } A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

 $\textcircled{C} - \textcircled{A} \times 3$ 을 하면

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \end{pmatrix}, \text{ 즉 } A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$$\textcircled{C}, \textcircled{D} \text{에서 } A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -7 \end{pmatrix} \quad \therefore A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ -70 & 59 \end{pmatrix} \text{이므로 } A + A^2 = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -60 & 52 \end{pmatrix}$$

$$(A+A^2) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -60 & 52 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$a=10, b=20 \text{이므로 } a+b=30$$

801

답 3

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4E$$

$$A^3 = A^2A = 4EA = 4A = 4 \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 20 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (A-E)(A^2+A+E) = A^3-E \\ = \begin{pmatrix} 8 & 20 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 7 & 20 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

802

답 8

 $A+B=E$ 에서 $B=E-A$ 이므로

$$AB = A(E-A) = A-A^2$$

$$BA = (E-A)A = A-A^2$$

$$\text{즉, } AB=BA$$

$$\begin{aligned}\therefore A^3 + B^3 &= (A+B)^3 - 3AB(A+B) \\ &= E^3 - 3E^2 = -2E \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 $a=d=-2, b=c=0$ 이므로
 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8$

TIP • B 를 A 에 대한 식으로 변형한 후 AB, BA 에 각각 대입하여 두 식 사이의 관계를 알아보자!

803 ④

$A=E-B$ 에서

$$A+kB=E+(k-1)B=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} (k \neq 1)$$

$$(k-1)B=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}(k-1)^2 B^2 &= 9 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{③}}{=} 9 \times 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 9(k-1)B\end{aligned}$$

이므로 $3(k-1)^2 = 9(k-1)$

$$k^2 - 5k + 4 = 0, (k-4)(k-1) = 0$$

이때 $k \neq 1$ 이므로 $k=4$

804 ④

①. $(A+2B)^2 = (A-2B)^2$ 에서

$$A^2 + 2AB + 2BA + 4B^2 = A^2 - 2AB - 2BA + 4B^2$$

$$AB + BA = O \text{이므로 } AB = -BA \text{ (거짓)}$$

②. $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ 에서

$$AB + BA = O \text{이므로}$$

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 \text{ (참)}$$

③. $AB = -BA$ 에서

$$ABA = -BA^2, A^2B = -ABA \text{이므로 } A^2B = BA^2$$

$$\therefore (ABA)^2 = (-A^2B)^2 = A^2BA^2B$$

$$= A^2A^2BB = A^4B^2 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ②, ③이다.

805 ①, ②

①. $(A+B)E = A+B=O$

$$\therefore A = -B \text{ (참)}$$

②. $B=E-A$ 에서

$$A-B = A-E+A = 2A-E,$$

$$A^2-B^2 = A^2-(E-A)^2 = A^2-E+2A-A^2 = 2A-E$$

$$\text{이므로 } A-B = A^2-B^2 \text{ (참)}$$

③. [반례] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이면

$$AB = O \text{이지만 } A \neq O, B \neq O \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ①, ②이다.

806 ⑤

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \text{라 하자.}$$

$$\neg. k^2A = \begin{pmatrix} k^2a & k^2b \\ k^2c & k^2d \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$f(k^2A) = k^2(a+d) = k^2f(A) \text{ (참)}$$

$$\neg. AB = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+cw & bz+dw \end{pmatrix}$$

이므로

$$f(AB) = (ax+bz) + (cy+dw)$$

$$= (ax+cy) + (bz+dw) = f(BA) \text{ (참)}$$

$$\neg. A-B = \begin{pmatrix} a-x & b-y \\ c-z & d-w \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$f(A-B) = (a-x) + (d-w) = (a+d) - (x+w)$$

$$= f(A) - f(B) \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ①, ②, ③이다.

807 ⑤

(i) $A=kE$ 일 때, $A^3=k^3E^3=k^3E$ 이므로

$$A^3=E \text{이면 } k^3E=E \text{에서 } k=1$$

따라서 $A=E$ 가 성립한다.

(ii) $A \neq kE$ 일 때, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 라 하면

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O \quad \dots\dots \text{㉠}$$

가 성립한다.

위 식의 양변에 A 를 곱하면

$$A^3 - (a+d)A^2 + (ad-bc)A = O \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이때 $A^3=E$ 이므로 ㉠의 양변에 $(a+d)$ 를 곱하면

$$(a+d)A^2 - (a+d)^2A + (a+d)(ad-bc)E = O \quad \dots\dots \text{㉠}'$$

㉠' + ㉡을 하면

$$\{ad-bc - [(a+d)^2]\}A + \{(a+d)(ad-bc) + [1]\}E = O$$

그런데 $A \neq kE$ 이므로

$$ad-bc - (a+d)^2 = 0, (a+d)(ad-bc) = -1$$

$$ad-bc = (a+d)^2 \text{을 } (a+d)(ad-bc) = -1 \text{에 대입하여 정리}$$

$$\text{하면 } (a+d)^3 = -1$$

$$\therefore a+d = -1, ad-bc = [1] \quad \dots\dots \text{㉢}$$

따라서 ㉠, ㉢에서 $[A^2 + A + E = O]$ 가 성립한다.

808 ③ 36

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{이므로 케일리-해밀턴 정리에 의하여}$$

$$A^2 - A + E = O \quad \dots\dots \text{㉠}$$

위 식의 양변에 $A+E$ 를 곱하면 $A^3+E=O$

$$\therefore A^3 = -E$$

즉, $A^6=E$ 이므로 행렬 A 의 거듭제곱 꼴은 6개씩 반복된다.

n	A^n	
$6k+1$	A	$A=A^7=A^{13}=A^{19}=\dots$
$6k+2$	A^2	$A^2=A^8=A^{14}=A^{20}=\dots$
$6k+3$	$-E$	$A^3=A^9=A^{15}=A^{21}=\dots$
$6k+4$	$-A$	$A^4=A^{10}=A^{16}=A^{22}=\dots$
$6k+5$	$-A^2$	$A^5=A^{11}=A^{17}=A^{23}=\dots$
$6k$	E	$A^6=A^{12}=A^{18}=A^{24}=\dots$

㉠에서 $-A^2 + A = E$ 이므로 조건 (가)를 만족시키는 자연수 m, n 은 $m=6k+5, n=6k+1$ 또는 $m=6k+1, n=6k+5$

(단, k 는 음이 아닌 정수)

$6k+5$ 꼴의 20 이하의 자연수 중 최댓값은 17이고,

$6k+1$ 꼴의 20 이하의 자연수 중 최댓값은 19

따라서 $m+n$ 의 최댓값은 36

809 답 97

① 단계 행렬 ABA, BAB 구하기 40%

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$ABA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = -B$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$BAB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

② 단계 $\{(ABA)^m + (BAB)^m\}^n$ 의 모든 성분의 합이 0이 되는 순서쌍 (m, n) 구하기 40%

$$(-B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E,$$

$$(-B)^4 = E$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \text{이므로}$$

행렬 $(-B)^n$ 꼴은 4개씩 반복되고, 행렬 A^n 꼴은 2개씩 반복된다.

이때 $m=4k$ (k 는 음이 아닌 정수)일 때, 성분의 합이 0이 될 수 없다.

$m=4k+1$ 일 때, $(-B+A)^2=O$ 를 이용하면

$m=1, 5, 9, n \geq 2$ 일 때 성립하므로 순서쌍의 개수는

$$3 \times 9 = 27$$

$m=4k+2$ 일 때, $(-E+E)^n$ 이므로

$m=2, 6, 10, n \geq 1$ 일 때 성립하므로 순서쌍의 개수는

$$3 \times 10 = 30$$

$m=4k+3$ 일 때, $B+A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 이고 $(B+A)^2=O$ 이므로

$m=3, 7, n \geq 1$ 일 때 성립하므로 순서쌍의 개수는

$$2 \times 10 = 20$$

③ 단계 $p+q$ 의 값 구하기 20%

순서쌍의 개수는 $27+30+20=77$ 이므로 $p=77$

$m+n$ 의 최댓값은 $m=10, n=10$ 일 때 20이므로 $q=20$

$\therefore p+q=97$

810 답 9

① 단계 행렬 A, B 구하기 40%

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$a_{11} + a_{11} = 0 \text{이므로 } a_{11} = 0$$

$$a_{12} + a_{21} = 0 \text{이므로 } a_{12} = x \text{라 하면 } a_{21} = -x$$

$$a_{22} + a_{22} = 0 \text{이므로 } a_{22} = 0$$

$$\text{즉, } A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$3b_{12} - b_{21} = 0 \text{이므로 } b_{12} = y \text{라 하면 } b_{21} = 3y$$

$$\text{즉, } B = \begin{pmatrix} b_{11} & y \\ 3y & b_{22} \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } 3A+B = \begin{pmatrix} 0 & 3x \\ -3x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & y \\ 3y & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_{11}=1, b_{22}=1 \text{이고}$$

$$3x+y=-1, -3x+3y=3$$

$$\text{이를 연립하여 풀면 } x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$$

$$\text{즉, } a_{12} = -\frac{1}{2}, a_{21} = \frac{1}{2}, b_{12} = \frac{1}{2}, b_{21} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

② 단계 S 의 값 구하기 40%

$$B-A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로 } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

$$n=1 \text{일 때, } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n=2 \text{일 때, } C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$n=3 \text{일 때, } C = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{따라서 } C = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로 } S = 2^{n-1} \times 4 = 2^{n+1}$$

③ 단계 n 의 최솟값 구하기 20%

따라서 $S > 1000$ 인 자연수 n 의 최솟값은 9

811 답 22

① 단계 $f(k)$ 의 식 구하기 50%

$$A^2 = \begin{pmatrix} k^2-2a & -2k-8 \\ ak+4a & -2a+16 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$f(k) = k^2 + (a-2)k + 8$$

② 단계 a 의 값의 범위 구하기 30%

$f(k) = k^2 + (a-2)k + 8 \geq 0$ 을 만족시키려면 방정식 $k^2 + (a-2)k + 8 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, $D \leq 0$ 이어야 하므로 $D = (a-2)^2 - 32 \leq 0$, $a^2 - 4a - 28 \leq 0$
 $\therefore 2 - 4\sqrt{2} \leq a \leq 2 + 4\sqrt{2}$

③ 단계 조건을 만족시키는 a 의 값의 합 구하기 20%

따라서 정수 a 의 값은 $-3, -2, \dots, 6, 7$ 이므로 그 합은 22

812 **답 0**

① 단계 행렬 A^3 구하기 40%

ω 가 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 허근이므로 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$
 위 식의 양변에 $\omega - 1$ 을 곱하면 $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \quad \therefore \omega^3 = 1$
 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega + \omega^3 & \omega^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 + \omega & \omega \end{pmatrix}$
 $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 + \omega & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 + \omega + \omega^2 & \omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\therefore A^3 = E$ $A^2 A$

② 단계 행렬 $A^{3n-1} + A^{3n-2}$ 을 ω 를 이용하여 나타내기 40%

n 이 자연수일 때, $A^{3n} = E$ 이므로 $A^{3n+1} = A^{3n-2} = A$, $A^{3n+2} = A^{3n-1} = A^2$
 $\therefore A^{3n-1} + A^{3n-2} = A^2 + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 + 2\omega & \omega^2 + \omega \end{pmatrix}$

③ 단계 $a - b$ 의 값 구하기 20%

행렬 $A^{3n-1} + A^{3n-2}$ 의 모든 성분의 합은 $2 + 0 + 1 + 2\omega + \omega^2 + \omega = \omega^2 + 3\omega + 3$
 $= (-\omega - 1) + 3\omega + 3 = 2\omega + 2$
 따라서 $a = 2, b = 2$ 이므로 $a - b = 0$

813 **답 -16**

① 단계 행렬 M 의 성분 사이의 관계 찾기 40%

$AM + MA = O$ 에서 $AM = -MA$
 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 라 하면
 $AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -c & -d \end{pmatrix}$
 $-MA = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a+b \\ 0 & -c+d \end{pmatrix}$
 $AM = -MA$ 에서 $c = 0, -a + b = d, -c + d = -d$
 $\therefore d = 0, a = b$

② 단계 행렬 M^n 구하기 40%

$M = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 에서

$$M^2 = MM = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 M = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & a^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

자연수 n 에 대하여 $M^n = \begin{pmatrix} a^n & a^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

즉, $M^8 = \begin{pmatrix} a^8 & a^8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 에서 행렬 M^8 의 모든 성분의 합은 $2a^8$ 이다.
 따라서 $2a^8 = 512, a^8 = 256 = 2^8$ 이므로 $a = \pm 2$

③ 단계 최댓값과 최솟값의 곱 구하기 20%

$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 또는 $M = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이므로 행렬 M 의 모든 성분의 합의 최댓값은 4이고 최솟값은 -4 이다.
 따라서 최댓값과 최솟값의 곱은 -16

1등급 완성 고난도 마스터 문제

p.149~151

814 **답 ②**

$2a_{ij} + b_{ij} = 5i, a_{ij} - 2b_{ij} = 5j + p$ 를 연립하여 풀면
 $a_{ij} = 2i + j + \frac{p}{5}, b_{ij} = i - 2j - \frac{2p}{5}$
 행렬 $A + B$ 의 (i, j) 성분이 $3i - j - \frac{p}{5}$ 이므로 행렬 $A + B$ 의 모든 성분의 합은
 $\left(3 \times 1 - 1 - \frac{p}{5}\right) + \left(3 \times 1 - 2 - \frac{p}{5}\right) + \left(3 \times 2 - 1 - \frac{p}{5}\right) + \left(3 \times 2 - 2 - \frac{p}{5}\right)$
 $= 12 - \frac{4p}{5} = 20$
 $\therefore p = -10$

$p = -10$ 일 때, $a_{ij} = 2i + j - 2, b_{ij} = i - 2j + 4$ 에서
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
 $\therefore AB - 10E = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 25 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 25 & 1 \end{pmatrix}$
 따라서 행렬 $AB + pE$ 의 모든 성분의 곱은 125

815 **답** $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

$x^2 - 2xy + y^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $x^2 - 3xy + y^2 = -4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 에서 $(x - y)^2 = 4$
 $x - y = \pm 2$, 즉 $y = x \pm 2$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면 $xy = 8$
 (i) $xy = 8$ 에 $y = x + 2$ 를 대입하면

IV

$$x(x+2)=8 \text{에서 } x^2+2x-8=0, (x-2)(x+4)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=-4$$

(ii) $xy=8$ 에 $y=x-2$ 를 대입하면

$$x(x-2)=8 \text{에서 } x^2-2x-8=0, (x+2)(x-4)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=4$$

(i), (ii)에서 $(\alpha_1, \beta_1)=(-4, -2), (\alpha_2, \beta_2)=(-2, -4),$

$(\alpha_3, \beta_3)=(2, 4), (\alpha_4, \beta_4)=(4, 2)$

$$\text{따라서 } A=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$B-A=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

816 답 11

$$AB=\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{pmatrix}$$

두 행렬의 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로

$$a+2c=a+3b \text{에서 } 2c=3b$$

$$b+2d=2a+4b \text{에서 } 2d=2a+3b$$

$$3a+4c=c+3d \text{에서 } d=a+c$$

$$3b+4d=2c+4d \text{에서 } 3b=2c$$

$$\therefore 3b=2c, d=a+c$$

$$b=2k, c=3k \text{라 하면}$$

(i) $k=1$ 일 때, $b=2, c=3$ 이고, $a+3 \leq 10$ 에서 $a \leq 7$

이때 $a=1$ 이면 $A=B$ 이므로 제외해야 한다.

따라서 행렬 B 의 개수는 $7-1=6$

(ii) $k=2$ 일 때, $b=4, c=6$ 이고, $a+6 \leq 10$ 에서 $a \leq 4$ 이므로

행렬 B 의 개수는 4

(iii) $k=3$ 일 때, $b=6, c=9$ 이고, $a+9 \leq 10$ 에서 $a \leq 1$ 이므로

행렬 B 의 개수는 1

(i)~(iii)에서 구하는 행렬 B 의 개수는 $6+4+1=11$

TIP 서로 같은 두 행렬에서 대응하는 성분이 각각 같음을 이용하여 $a, b, c,$
 d 사이의 관계를 알아보자!

817 답 3

$$B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \text{라 하면 조건 (가)에서}$$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-q \\ r-s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{이므로 } p=q, r=s$$

$$\therefore B=\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}$$

이때 조건 (나)에서

$$AB=\begin{pmatrix} p+r & p+r \\ a(p+r) & a(p+r) \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix} \text{이므로 } p+r=2$$

$$\text{또, } BA=\begin{pmatrix} p(1+a) & p(1+a) \\ r(1+a) & r(1+a) \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$1+a=4, \text{ 즉 } a=3$$

$$\text{따라서 } A+B=\begin{pmatrix} 1+p & 1+p \\ 3+r & 3+r \end{pmatrix} \text{이므로}$$

행렬 $A+B$ 의 $(1, 2)$ 성분과 $(2, 1)$ 성분의 합은

$$1+p+3+r=4+(p+r)=4+2=6$$

TIP 성분이 주어지지 않은 행렬은 각 성분을 미지수로 두고 식에 대입해
보자!

818 답 97

$$A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\text{자연수 } n \text{이 홀수일 때, } A^n=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -n & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{자연수 } n \text{이 짝수일 때, } A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -B$$

$$\text{즉, } B^3=B$$

$$n=48, m=49 \text{일 때,}$$

$$A^{48}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 48 & 1 \end{pmatrix}, B^{49}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{에서}$$

행렬 $A^{48}+B^{49}$ 의 모든 성분의 합이 48이므로 $n+m$ 의 최댓값은

$$48+49=97$$

주의 행렬 A^n 의 규칙을 찾을 때, n 이 홀수일 때와 짝수일 때가 나누어지는
경우가 있어! 각 경우를 잘 살펴봐야 해!

819 답 3

$$AB=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{21} & -b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \text{에서}$$

행렬 AB 의 모든 성분의 합은 $-5+3=-2$

$$A^2=-E, A^4=E \text{이므로}$$

$$A^2B=-EB=\begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & -b_{22} \end{pmatrix} \text{에서}$$

행렬 A^2B 의 모든 성분의 합은 $-5-3=-8$

$$AB+A^5B+A^9B+\cdots+A^{33}B=9AB \text{이므로}$$

$$c=9 \times (-2)=-18$$

$$A^2B+A^6B+A^{10}B+\cdots+A^{34}B=9A^2B \text{이므로}$$

$$d=9 \times (-8)=-72$$

$$\therefore c+d=-90$$

820 답 4

$\therefore a=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}, b=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}$ 이므로 a, b 는 각각 두 제
품 X, Y의 5월, 6월에 판매된 제품의 제조원가이다.

따라서 $a+b$ 는 5월, 6월 두 달 동안 판매된 제품의 제조원가 총액이다. (거짓)

ㄴ. $c=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}$, $d=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}$ 이므로 c , d 는 각각 두 제품 X, Y의 5월, 6월 두 달 동안에 판매된 제품의 판매 가격이다. 따라서 $c+d$ 는 5월, 6월 두 달 동안에 판매된 제품의 판매 총액이다. (참)

ㄷ. $d-b$ 는 6월에 판매된 제품의 판매 이익금의 총액이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

821 ㉡ ①

$A+B=O$ 에서 $B=-A$, $A=-B$

$B=-A$ 를 $AB=E$ 에 대입하면 $-A^2=E \quad \therefore A^2=-E$

$A^3=A^2A=-EA=-A$

$A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$

$A^5=A$, $A^6=-E$, $A^7=-A$, $A^8=E$

즉, 행렬 A^n 꼴은 4개씩 반복된다.

$\therefore A+A^2+A^3+A^4=A^5+A^6+A^7+A^8=\dots$

$=A-E-A+E=O$

$\therefore (A+A^2+A^3+A^4)+(A^5+A^6+A^7+A^8)+\dots$

$+(A^{2141}+A^{2142}+A^{2143}+A^{2144})+A^{2145}+A^{2146}$

$=A^{2145}+A^{2146}=A-E$

$A=-B$ 를 $AB=E$ 에 대입하면 $-B^2=E \quad \therefore B^2=-E$

같은 방법으로

$B+B^2+\dots+B^{2145}+B^{2146}=B-E$

$(A+B)+(A^2+B^2)+(A^3+B^3)+\dots+(A^{2146}+B^{2146})$

$=(A+A^2+\dots+A^{2146})+(B+B^2+\dots+B^{2146})$

$=A+B-2E=-2E$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 -4

822 ㉡ 32

조건 (나)에서 $A=kE-B$

$A=kE-B$ 를 조건 (가)에 대입하면

$kE-B+kB=\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$, $(k-1)B=\begin{pmatrix} 10-k & -6 \\ -6 & 10-k \end{pmatrix}$

위 식의 양변을 제곱하면

$(k-1)^2B^2=\begin{pmatrix} (10-k)^2+36 & -12(10-k) \\ -12(10-k) & (10-k)^2+36 \end{pmatrix}$

조건 (다)에서 $(k-1)^2B^2=k(k-1)^2B$ 이므로

$\begin{pmatrix} (10-k)^2+36 & -12(10-k) \\ -12(10-k) & (10-k)^2+36 \end{pmatrix}=k(k-1)\begin{pmatrix} 10-k & -6 \\ -6 & 10-k \end{pmatrix}$

$(10-k)^2+36=k(k-1)(10-k)$ 에서

$(k-4)(k^2-6k-34)=0$

$\therefore k=4$ 또는 $k=3\pm\sqrt{43}$ ㉠

$-12(10-k)=-6k(k-1)$ 에서

$k^2+k-20=0$, $(k-4)(k+5)=0$

$\therefore k=4$ 또는 $k=-5$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k=4$

$\therefore B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

따라서 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 이므로 $a=8$ 이고, $ak=8\times 4=32$

823 ㉡ ⑤

ㄱ. $A\circ B=AB-BA+A=A$ 에서 $AB=BA$ (참)

ㄴ. $A=-E$ 일 때, $A\circ B=-EB+BE-E=-E$

따라서 모든 행렬 B 에 대하여 성립한다. (참)

ㄷ. $A\circ B=AB-BA+A$, $B\circ A=BA-AB+B$

$A\circ B=B\circ A$ 이면

$AB-BA+A=BA-AB+B$

$AB-BA=\frac{B-A}{2}$

$B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ 라 하면

$AB-BA=\begin{pmatrix} r & s-p \\ 0 & -r \end{pmatrix}$, $\frac{B-A}{2}=\begin{pmatrix} \frac{p-1}{2} & \frac{q-1}{2} \\ \frac{r}{2} & \frac{s-1}{2} \end{pmatrix}$ 이므로

$\begin{pmatrix} r & s-p \\ 0 & -r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{p-1}{2} & \frac{q-1}{2} \\ \frac{r}{2} & \frac{s-1}{2} \end{pmatrix}$

이를 연립하여 풀면 $r=0$, $s=1$, $p=1$, $q=1$

즉, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=A$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

824 ㉡ ③

a_{11} : $|x+1|+|x+1|<1$ 을 만족시키는 정수 x 는 -1 의 한 개이므로 $a_{11}=1$

a_{12} : $|x+1|+|x+2|<1$ 을 만족시키는 정수 x 는 없으므로 $a_{12}=0$

a_{21} : $|x+2|+|x+1|<2$ 를 만족시키는 정수 x 는 -2 , -1 이므로 $a_{21}=2$

a_{22} : $|x+2|+|x+2|<2$ 를 만족시키는 정수 x 는 -2 의 한 개이므로 $a_{22}=1$

즉, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-2A+E=O$, 즉 $A^2=2A-E$ 이므로

$A^4=(2A-E)^2=4A^2-4A+E=4(2A-E)-4A+E$

$=4A-3E$

$A^8=(4A-3E)^2=16A^2-24A+9E$

$=16(2A-E)-24A+9E=8A-7E$

$A^{10}=A^8A^2=(8A-7E)(2A-E)=16A^2-22A+7E$

$=16(2A-E)-22A+7E$

$=10A-9E$

$$\begin{aligned}
A^{20} &= (10A - 9E)^2 = 100A^2 - 180A + 81E \\
&= 100(2A - E) - 180A + 81E \\
&= 20A - 19E \\
A^{30} &= A^{20}A^{10} = (20A - 19E)(10A - 9E) \\
&= 200A^2 - 370A + 171E \\
&= 200(2A - E) - 370A + 171E \\
&= 30A - 29E \\
A^{10} + A^{20} + A^{30} &= 10A - 9E + 20A - 19E + 30A - 29E \\
&= 60A - 57E \\
\text{따라서 } p &= 60, q = 57 \text{ 이므로 } p + q = 117
\end{aligned}$$

825 2

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{조건 (4)}} \\
A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{조건 (7)}} \\
A_3 &= -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{조건 (4)}} \\
A_4 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{조건 (7)}} \\
A_5 &= -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A_1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

모든 자연수 n 에 대하여 $A_{n+4} = A_n$ 이므로

$$A_{1925} = A_{4 \times 481 + 1} = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A_{1925} 의 모든 성분의 합은 2

826 168

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E \text{ 이므로}$$

$$A^3 = -A, A^4 = E$$

$$\text{즉, } A = A^5 = A^9 = \dots, A^2 = A^6 = A^{10} = \dots,$$

$$A^3 = A^7 = A^{11} = \dots, A^4 = A^8 = A^{12} = \dots$$

조건 (나)에서 $m = nk$ (k 는 자연수)이고

$m - n$ 은 4의 배수이므로 $m - n = 4l$ (l 은 자연수)에서

$$n(k-1) = 4l$$

즉, $m - n$ 은 4와 n 의 공배수이다.

$n = 10$ 일 때 $m - n$ 은 20의 배수이므로

$$m = 30, 50, 70, 90, 110$$

$n = 11$ 일 때 $m - n$ 은 44의 배수이므로 $m = 55, 99$

$n = 12$ 일 때 $m - n$ 은 12의 배수이므로 $m = 24, 36, \dots, 108, 120$

$\vdots$

$m = 120, n = 12$ 일 때 $m - n = 108$ 로 최대이므로

$$p = 120 + 12 = 132$$

$m = 24, n = 12$ 일 때 $m - n = 12$ 로 최소이므로

$$q = 24 + 12 = 36$$

$$\therefore p + q = 132 + 36 = 168$$

827 40

조건 (가)에서 행렬 A 의 성분은 숫자 1, 2, 3, ..., 9 중 하나이다.

조건 (나)에서 행이 다르거나 열이 다르면 성분이 다르므로 모든 성분은 서로 다르다.

조건 (다)에서 연속한 두 자연수 $k, k+1$ 에 대하여 $i = m$ 이면 두 성분은 그 행에서 좌우로 이웃하거나, $j = n$ 이면 그 열에서 위아래로 이웃한다.

즉, 조건을 모두 만족시키는 행렬 A 의 성분들은 한자리 자연수로 되어 있고 연속한 두 자연수에 대하여 행 또는 열에서 이웃해야 하고 모두 다른 수이다. 행렬 A 를 다음과 같이 나타내면

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

(i) $a_{22} = 1$ 일 때

	↑	
←	1	→
	↓	

		↑
	1	2
		↓

따라서 가능한 행렬 A 의 개수는 $4 \times 2 = 8$

(ii) $a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}$ 중 하나가 1일 때

1	→	
↓		

1	2	9
4	3	8
5	6	7

1가지

1	2	3
		4

↓

1	2	3
6	5	4
7	8	9

1	2	3
8	9	4
7	6	5

1	2	3
8	7	4
9	6	5

3가지

따라서 가능한 행렬 A 의 개수는 $4 \times 2 \times (1+3) = 32$
 (i), (ii)에서 구하는 행렬 A 의 개수는 $8+32=40$

828 답 10

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{조건 (가)}} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{조건 (나)}} \\ A_3 &= -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{조건 (가)}} \\ A_4 &= \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{조건 (나)}} \\ A_5 &= -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

모든 자연수 n 에 대하여 $A_{n+4} = A_n$ 이므로

$$A_{2005} = A_{4 \times 501 + 1} = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A_{2005} 의 모든 성분의 합은 10

829 답 195

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E \\ A^6 &= (A^3)^2 = E \\ A^m + A^n &= O \text{에서 } A^6 = E, A^3 = -E \text{이므로} \\ A^{99} &= -E, A^{96} = E \end{aligned}$$

따라서 $m=99, n=96$ 일 때 $m+n$ 의 최댓값은 195

830 답 24

1행의 세 성분 a_{11}, a_{12}, a_{13} 에 3부터 9까지의 수 중 세 수를 뽑아, 가장 작은 수가 나머지 두 수의 약수가 되는 경우는 1행에 3, 6, 9를 택하는 경우이다.

3행의 세 성분 $a_{31}, 2, a_{33}$ 중 가장 작은 수는 2이므로 a_{31} 과 a_{33} 은 2보다 큰 2의 배수이다.

1행에 들어갈 수가 3, 6, 9로 정해지면 남은 4, 5, 7, 8 중에서

a_{31}, a_{33} 을 택하면 되므로 2보다 큰 2의 배수는 4, 8이다.

남은 5, 7은 2행의 성분 a_{21}, a_{23} 이고, 2행의 가장 작은 수는 1이므로 조건 (나)를 항상 만족시킨다.

각 행마다 경우의 수를 구하면

1행: 3, 6, 9를 배열하는 경우의 수는 $3! = 6$

3행: 4, 8을 a_{31}, a_{33} 에 배열하는 경우의 수는 $2! = 2$

2행: 5, 7을 a_{21}, a_{23} 에 배열하는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 행렬 A 의 개수는 $6 \times 2 \times 2 = 24$

1등급 적중 학교 시험 예상 문제 | 중간고사 1회

p.152~155

831 ③	832 ①	833 ③	834 ④	835 ②	836 ③
837 ②	838 ④	839 ④	840 ⑤	841 ①	842 ⑤
843 ④	844 ②	845 48	846 $10x-16$	847 1	
848 61	849 6	850 8			

831

$$4x^2 + ax + b = 3x(x-5) + (x+2)(x+3) \text{에}$$

$x=0$ 을 대입하면 $b=6$

$x=-2$ 를 대입하면 $-2a+b=26$

위 식에 $b=6$ 을 대입하면 $-2a=20 \quad \therefore a=-10$

$$\therefore ab = (-10) \times 6 = -60$$

832

$$\begin{aligned} x^4 + 6x^2 + 25 &= (x^2 + 5)^2 - 4x^2 \\ &= (x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x + 5) \\ &= (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \end{aligned}$$

$$\therefore ac + bd = 2 \times (-2) + 5 \times 5 = 21$$

833

ㄱ. $8-6i$ 의 허수부분은 -6 (거짓)

ㄴ. $-a$ 의 제곱근은 $\pm\sqrt{ai}$ (거짓)

ㄷ. $i+i^2+i^3+i^4=0$ 이므로 $i+i^2+i^3+\dots+i^{100}=0$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄷ이다.

834

$(1+x+x^2+x^3+\dots+x^{10})^2$ 의 전개식에서 x^{10} 항은

$$1 \times x^{10} + x \times x^9 + x^2 \times x^8 + \dots + x^{10} \times 1 = 11x^{10}$$

따라서 x^{10} 의 계수는 11

835

$$\frac{1}{3-i} = \frac{3+i}{10}, \frac{1}{(3-i)^2} = \frac{8+6i}{100}, \frac{1}{(3-i)^3} = \frac{18+26i}{1000},$$

$$\frac{1}{(3-i)^4} = \frac{28+96i}{10000}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{10000}{(3-i)^4} - \frac{4000}{(3-i)^3} + \frac{1200}{(3-i)^2} - \frac{240}{3-i} + 20 \\ = (28+96i) - 4(18+26i) + 12(8+6i) - 24(3+i) + 20 \\ = 40i \end{aligned}$$

836

$$x^2 = |x|^2 \text{이므로 } 2x^2 - |5x| - 12 = 0 \text{에서}$$

$$2|x|^2 - 5|x| - 12 = 0, (|x|-4)(2|x|+3) = 0$$

$$|x| \geq 0 \text{이므로 } |x| = 4$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -4$$

따라서 모든 근의 합은 0

837

$$f(x) = ax^2 - 2a^2x + 4a^2 + 4a = a(x-a)^2 - a^3 + 4a^2 + 4a$$

(i) $a < 0$ 일 때

$$\text{최댓값은 } f(0) = 4a^2 + 4a = 24$$

$$a^2 + a - 6 = 0, (a-2)(a+3) = 0 \quad \therefore a = -3$$

(ii) $0 < a \leq 2$ 일 때

$$\text{최댓값은 } f(4) = -4a^2 + 20a = 24$$

$$a^2 - 5a + 6 = 0, (a-2)(a-3) = 0 \quad \therefore a = 2$$

(iii) $a > 2$ 일 때

$$\text{최댓값은 } f(0) = 4a^2 + 4a = 24$$

$$a^2 + a - 6 = 0, (a-2)(a+3) = 0$$

이때 $a > 2$ 이므로 a 의 값은 없다.

(i)~(iii)에서 모든 a 의 값의 합은 $-3 + 2 = -1$

838

$$x(3+2i) + y(3-2i) = (2+4i)^2 \text{에서}$$

$$3(x+y) + 2(x-y)i = -12 + 16i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x+y = -4, x-y = 8$$

이를 연립하여 풀면 $x = 2, y = -6$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{-8x}\sqrt{6y} + \frac{\sqrt{-108y}}{\sqrt{-x}} &= \sqrt{-16}\sqrt{-36} + \frac{\sqrt{648}}{\sqrt{-2}} \\ &= 4i \times 6i + \frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{2}i} = -24 - 18i \end{aligned}$$

따라서 $a = -24, b = -18$ 이므로 $a+b = -42$

839

이차방정식 $ax^2 - 12x + b = 0$ 의 한 근이 $2-i$ 이면 다른 한 근은

$2+i$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{12}{a} = (2-i) + (2+i) = 4 \quad \therefore a = 3$$

$$\frac{b}{a} = (2-i)(2+i) = 5 \quad \therefore b = 15$$

이차방정식 $mx^2 + nx + 1 = 0$ 의 두 근이 $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}$ 이므로 근과 계수의

관계에 의하여

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{15} = \frac{1}{45} \quad \therefore m = 45$$

$$-\frac{n}{m} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5} \quad \therefore n = -18$$

$$\therefore m+n = 27$$

840

$x = 28$ 이라 하면

$$N = 3x^3 - 14x^2 + 13x + 6$$

$$= (x-2)(x-3)(3x+1)$$

$$= 26 \times 25 \times 85$$

$$= (2 \times 13) \times 5^2 \times (5 \times 17)$$

$$= 2 \times 5^3 \times 13 \times 17$$

즉, 자연수 N 의 소인수는 2, 5, 13, 17

따라서 $M = 17, m = 2$ 이므로 $M - m = 15$

841

이차방정식 $x^2 + 6x + 27 = 0$ 의 두 근이 $3\alpha, 3\beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$3\alpha + 3\beta = -6, 9\alpha\beta = 27 \text{에서 } \alpha + \beta = -2, \alpha\beta = 3$$

$x^2 + 6x + 27 = 0$ 에 $x = 3\alpha$ 를 대입하면

$$9\alpha^2 + 18\alpha + 27 = 0, \alpha^2 + 2\alpha + 3 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 + 3\alpha = \alpha - 3$$

$$P(\alpha^2 + 3\alpha) = -3\alpha \text{에서 } P(\alpha - 3) + 3(\alpha - 3) + 9 = 0$$

같은 방법으로 $P(\beta - 3) + 3(\beta - 3) + 9 = 0$

즉, 이차방정식 $P(x) + 3x + 9 = 0$ 의 두 근이 $\alpha - 3, \beta - 3$ 이므로

$$P(x) + 3x + 9 = x^2 - (\alpha + \beta - 6)x + \alpha\beta - 3(\alpha + \beta) + 9$$

$$= x^2 + 8x + 18$$

$$\therefore P(x) = x^2 + 5x + 9$$

따라서 $a = 5, b = 9$ 이므로 $a + b = 14$

842

조건 (나)에서 $P(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지를 R 이라 하면

$$P(x) = (x^2 - 5)(x-1)(x+a) + R \quad (a \text{는 상수})$$

조건 (가)에서 $P(2) - 3 = 0, P(-2) - 3 = 0$ 이므로

$$P(2) = 3, P(-2) = 3$$

$$P(2) = -(2+a) + R = 3 \text{에서 } -a + R = 5$$

$$P(-2) = 3(-2+a) + R = 3 \text{에서 } 3a + R = 9$$

이를 연립하여 풀면 $a = 1, R = 6$

따라서 $P(x) = (x^2 - 5)(x-1)(x+1) + 6$ 이므로 $P(3) = 38$

843

두 선분 PX, PY 의 길이를 각각 x, y 라 하면 직사각형 $PXBY$ 의 둘레의 길이가 13이므로

$$2(x+y) = 13 \quad \therefore x+y = \frac{13}{2}$$

그림과 같이 원 C 의 중심을 O , 점 O

에서 두 선분 PX, PY 에 내린 수선의

발을 각각 X', Y' 이라 하면 직사각형

$PX'OY'$ 에서

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$$

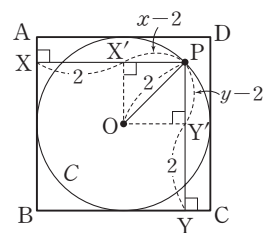
$$x^2 + y^2 - 4(x+y) + 4 = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 4 \times \frac{13}{2} - 4 = 22$$

이때 $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ 이므로

$$22 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 2xy \quad \therefore xy = \frac{81}{8}$$

따라서 직사각형 $PXBY$ 의 넓이는 $\frac{81}{8}$



844

이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 대칭축이 $x=2$ 이므로

$$\overline{AD}=4-2t$$

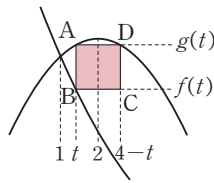
$$\overline{AB}=g(t)-f(t)=-\frac{3}{4}t^2+4t-\frac{13}{4}$$

$$\begin{aligned} 2(\overline{AB}+\overline{AD}) &= 2\left(-\frac{3}{4}t^2+2t+\frac{3}{4}\right) \\ &= -\frac{3}{2}\left(t-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{25}{6} \end{aligned}$$

즉, 사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$$t=\frac{4}{3}\text{일 때 최댓값 } \frac{25}{6} \text{를 가지므로 } t_1=\frac{4}{3}, M=\frac{25}{6}$$

$$\text{따라서 } t_1+M=\frac{33}{6}=\frac{11}{2} \text{이므로 } a+b=2+11=13$$



845

$$\begin{aligned} &x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2) \\ &=xy^2+xz^2+yz^2+yx^2+zx^2+zy^2 \\ &=xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x) \\ &=xy(x+y+z)+yz(x+y+z)+zx(x+y+z)-3xyz \\ &=(x+y+z)(xy+yz+zx)-3xyz \\ &=6 \times 11 - 3 \times 6 = 48 \end{aligned}$$

846

$$P(1)=2, P(2)=4, P(3)=6 \text{이므로}$$

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+2x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$P(x)$ 를 x^2-x-2 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$P(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$$

위 식의 양변에 각각 $x=-1, x=2$ 를 대입하면

$$P(-1)=-a+b, P(2)=2a+b$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } P(-1)=-26, P(2)=4 \text{이므로}$$

$$-a+b=-26, 2a+b=4$$

$$\text{이를 연립하여 풀면 } a=10, b=-16$$

$$\text{따라서 구하는 나머지는 } 10x-16$$

847

$$\text{조건 (가)에서 } 1+p+q=9+3p+q \quad \therefore p=-4$$

$$\text{조건 (나)에서 이차방정식 } f\left(x-\frac{p}{2}\right)=f(x+2)=0 \text{의 한 근이 } i \text{이면}$$

다른 한 근은 $-i$ 이므로

$$f(i+2)=0, f(-i+2)=0$$

즉, 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 $2+i, 2-i$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$q=(2+i)(2-i)=5$$

$$\therefore p+q=-4+5=1$$

848

$$a^3-(b-5)a^2-(b^2+10b)a+b^3+5b^2=0 \text{에서}$$

$$(a-b)^2(a+b+5)=0 \quad \therefore a-b=0 \text{ 또는 } a+b+5=0$$

이때 a, b, c 는 한 자리 자연수이므로 $a+b+5 \neq 0$

즉, $a=b$ 이므로 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

$$a=b=1 \text{일 때, } c=1$$

$$a=b=2 \text{일 때, } c=1, 2, 3$$

$$a=b=3 \text{일 때, } c=1, 2, 3, 4, 5$$

$$a=b=4 \text{일 때, } c=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

$$a=b \geq 5 \text{일 때, } c=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

$$\text{따라서 순서쌍 } (a, b, c) \text{의 개수는 } 1+3+5+7+9 \times 5=61$$

849

$$z=(2n^2-7n+6)+(n^2+2n-15)i$$

z^2 이 음의 실수가 되려면 z 는 순허수이어야 한다.

$$2n^2-7n+6=0 \text{에서 } (n-2)(2n-3)=0$$

$$\text{이때 } n \text{은 자연수이므로 } n_1=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$z-\bar{z}$ 가 실수가 되려면 z 의 허수부분이 0이어야 한다.

$$n^2+2n-15=0 \text{에서 } (n-3)(n+5)=0$$

$$\text{이때 } n \text{은 자연수이므로 } n_2=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\therefore n_1n_2=2 \times 3=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

채점 기준	배점(%)
① z^2 이 음의 실수가 되는 조건을 이용하여 n_1 의 값 구하기	40
② $z-\bar{z}$ 가 실수가 되는 조건을 이용하여 n_2 의 값 구하기	40
③ n_1n_2 의 값 구하기	20

850

두 삼각형 ABC, ABD의 밑변의 길이가 $\overline{AB}$ 로 같으므로 높이의 비가 2:1이어야 한다. 즉, 두 점 C, D의 y 좌표의 비가 2:1이다.

$$x^2-x=x+k \text{에서 } x^2-2x-k=0$$

이차방정식 $x^2-2x-k=0$ 의 두 근을 α, β ($\alpha > \beta$)라 하면

$$(\alpha+k):(\beta+k)=2:1$$

$$2\beta+2k=\alpha+k \quad \therefore \alpha-2\beta=k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$ 이므로

$$2-\beta-2\beta=k, 3\beta=-k+2 \quad \therefore \beta=\frac{-k+2}{3}$$

$$\frac{(-k+2)^2}{9}-\frac{2(-k+2)}{3}-k=0$$

$$k^2-7k-8=0, (k+1)(k-8)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 이차방정식 $x^2-2x-k=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=1+k>0 \text{에서 } k>-1 \text{이므로 } k=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

채점 기준	배점(%)
① S_1, S_2 의 비를 이용하여 α, β 사이의 관계식 세우기	40
② 근과 계수의 관계를 이용하여 k 에 대한 이차방정식 세우기	40
③ k 의 값 구하기	20

851 ④	852 ④	853 ③	854 ①	855 ③	856 ⑤
857 ①	858 ②	859 ②	860 ③	861 ⑤	862 ④
863 ③	864 ①	865 -15	866 15	867 40	868 28
869 2	870 11				

851

$$X = \frac{1}{2}(A-B) = \frac{1}{2}(4x^3+4) = 2x^3+2$$

852

$$(a+1)i + \overline{a+3i} = a + (a-2)i \text{가 실수이므로}$$

$$a-2=0 \quad \therefore a=2$$

853

$$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$$

$$= 5^3 + 3 \times (-1) \times 5$$

$$= 125 - 15 = 110$$

854

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 9 \text{라 하면}$$

$$f(-3) = 0 \quad \therefore 3a - b = 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(3) = 18 \quad \therefore 3a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=2, b=-6$$

$$\therefore a+b=-4$$

855

$$a^3 + ab^2 - b^2c - a^2c = a(a^2+b^2) - c(a^2+b^2)$$

$$= (a^2+b^2)(a-c) = 0$$

$$a^2+b^2 > 0 \text{이므로 } a=c$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

856

$$f(x^2) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x^2-1) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-1)$$

$\{f(x)\}^{100}$ 을 $f(x^2)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$\{f(x)\}^{100} = f(x^2)Q(x) + ax + b \quad (a, b \text{는 상수})$$

$$\text{즉, } \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)^{100} = -\frac{1}{2}(x+1)(x-1)Q(x) + ax + b$$

위 등식의 양변에

$$x=-1 \text{을 대입하면 } 1 = -a+b$$

$$x=1 \text{을 대입하면 } 0 = a+b$$

$$\text{이를 연립하여 풀면 } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 나머지는 } R(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

857

(i) $x^2 - 3x + (k-2) = 0$ 은 실근을 가지므로 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (-3)^2 - 4(k-2) \geq 0, 4k \leq 17 \quad \therefore k \leq \frac{17}{4}$$

(ii) $x^2 + x + (k-1) = 0$ 은 허근을 가지므로 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = 1^2 - 4(k-1) < 0, 4k > 5 \quad \therefore k > \frac{5}{4}$$

(i), (ii)에서 $\frac{5}{4} < k \leq \frac{17}{4}$ 이므로 자연수 k 는 2, 3, 4의 3개이다.

858

$$z = a + bi \quad (a, b \text{는 실수}) \text{라 하면 } \bar{z} = a - bi$$

$$4z - 2\bar{z} = 4(a+bi) - 2(a-bi) = 2a + 6bi$$

이때 $2a + 6bi = 8 + 12i$ 이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a=4, b=2$$

$$\text{따라서 } z = 4 + 2i \text{이므로 } z\bar{z} = (4+2i)(4-2i) = 16 + 4 = 20$$

859

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 2$ 이므로

$$\alpha^2 + \alpha\beta - 2\alpha - \beta + 5 = \alpha^2 + 2 - 6 - \alpha + 5$$

$$= 6\alpha - 6 - \alpha + 5 \quad \leftarrow \alpha^2 + 2 = 6\alpha$$

$$= 5\alpha - 1$$

$$\text{같은 방법으로 } \beta^2 + \alpha\beta - 2\beta - \alpha + 5 = 5\beta - 1$$

$$\text{두 근의 합은 } (5\alpha - 1) + (5\beta - 1) = 5(\alpha + \beta) - 2 = 28$$

$$\text{두 근의 곱은 } (5\alpha - 1)(5\beta - 1) = 25\alpha\beta - 5(\alpha + \beta) + 1 = 21$$

$$\text{따라서 구하는 이차방정식은 } x^2 - 28x + 21 = 0$$

860

$$(2x-1)P(x) - x^2 = \left\{P(x) - \frac{1}{2}x\right\}Q(x) + P(x) - x$$

나머지의 차수가 낮아야 하므로 $P(x) = x + a$ (a 는 상수)로 놓으면

$$x^2 + (2a-1)x - a = \left(\frac{1}{2}x + a\right)Q(x) + a$$

$$\text{직접 나누면 } x^2 + (2a-1)x - a = \left(\frac{1}{2}x + a\right)(2x-2) + a$$

$$Q(x) = 2x - 2 \text{이므로 } P(1) = 5 \quad \therefore a = 4$$

$$\text{따라서 } P(x) = x + 4 \text{이므로 } P(6) = 10$$

861

$$z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i \text{이므로}$$

$$\neg, z^3 = i \text{ (참)}$$

$$\neg, z^5 + z^6 = -i - 1 \text{ (참)}$$

$$\neg, z^n + z^{3n} + z^{5n} = -3 \text{을 만족시키려면 } n = 4k - 2 \text{ (} k \text{는 자연수) 풀}$$

이어야 한다.

$$k=1, 2, \dots, 5 \text{이므로 } 20 \text{ 이하의 모든 자연수 } n \text{의 개수는 } 5 \text{이다.}$$

(참)

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

862

$$3^{1000} + 3^{1001} + 3^{1002} + 3^{1003} + 3^{1004}$$

$$= 3^{1000}(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) = 3^{1000} \times 121$$

121 = 1 × 80 + 41이므로 121을 80으로 나누었을 때의 나머지는 41이다. 1000 = 4 × 250이므로 $3^{1000} = (3^4)^{250}$ 이고, 3^4 을 80으로 나누었을 때의 나머지는 1이므로 3^{1000} 을 80으로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

$1 \times 41 = 41$ 이므로 $3^{1000} + 3^{1001} + 3^{1002} + 3^{1003} + 3^{1004}$ 을 80으로 나누었을 때의 나머지는 41이다.

863

한 변의 길이가 a 인 정삼각형 ABC의 높이는

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a \text{ 이므로 } \overline{AN} = \frac{\sqrt{3}}{2}a - x$$

$$\text{삼각형 BCN에서 } \overline{BN} = \overline{CN} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + x^2}$$

$$\begin{aligned} 2\overline{AN}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{CN}^2 &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4}a^2 + x^2\right) \\ &= 4x^2 - 2\sqrt{3}ax + 2a^2 \\ &= 4\left(x - \frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2 + \frac{5}{4}a^2 \end{aligned}$$

$x = \frac{\sqrt{3}}{4}a$ 에서 최솟값 105를 가지므로

$$\frac{5}{4}a^2 = 105, a^2 = 84 \quad \therefore a = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

$$\therefore p = \frac{\sqrt{3}}{4}a = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2\sqrt{21} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

864

$f(x) = t$ 라 하면

$$\{f(x)\}^4 - 13\{f(x)\}^2 + 36$$

$$= t^4 - 13t^2 + 36$$

$$= (t^2 - 4)(t^2 - 9)$$

$$= (t - 2)(t + 2)(t - 3)(t + 3)$$

$$= (f(x) - 2)(f(x) + 2)(f(x) - 3)(f(x) + 3) = 0$$

즉, $f(x) = 2$ 또는 $f(x) = -2$ 또는

$f(x) = 3$ 또는 $f(x) = -3$ 을 만족시키

는 서로 다른 실근의 개수가 5이므로

$f(x) = -2$ 가 중근을 갖는다.

$f(x) = t$ 라 하면

$$\{f(x)\}^4 + 13\{f(x)\}^2 - 68$$

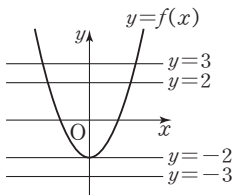
$$= t^4 + 13t^2 - 68$$

$$= (t^2 - 4)(t^2 + 17)$$

$$= (t - 2)(t + 2)(t^2 + 17)$$

$$= (f(x) - 2)(f(x) + 2)((f(x))^2 + 17) = 0$$

에서 $f(x) = 2$ 는 서로 다른 두 실근을, $f(x) = -2$ 는 중근을 가지므로 $\{f(x)\}^4 + 13\{f(x)\}^2 - 68 = 0$ 을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



865

$x^{20} - 1$ 을 $(x - 1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$R(x) = ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$x^{20} - 1 = (x - 1)^2 Q(x) + ax + b$$

위 등식의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면 $0 = a + b \quad \therefore b = -a$

즉, $x^{20} - 1 = (x - 1)^2 Q(x) + ax - a$ 에서

$$(x - 1)(x^{19} + x^{18} + \cdots + x + 1) = (x - 1)^2 Q(x) + a(x - 1)$$

$$\therefore x^{19} + x^{18} + \cdots + x + 1 = (x - 1)Q(x) + a$$

위 등식의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면 $a = 20$

$$\text{따라서 } R(x) = 20x - 20 \text{ 이므로 } R\left(\frac{1}{4}\right) = -15$$

866

$$\{P(x)\}^3 - \{Q(x)\}^3$$

$$= \{P(x) - Q(x)\} \{ [P(x) - Q(x)]^2 + 3P(x)Q(x) \}$$

$$= (6x - 9) \{ 36x^2 - 108x + 81 + 3P(x)Q(x) \}$$

$$= (6x - 9)(12x^4 - 24x^3 + 3x^2 - 9x + 27)$$

$$3P(x)Q(x) = 12x^4 - 24x^3 - 33x^2 + 99x - 54$$

$$\therefore P(x)Q(x) = 4x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 33x - 18$$

$$= (x - 1)(x + 2)(2x - 3)^2$$

$P(x) - Q(x) = 6x - 9$, $Q(0) > 0$ 을 만족시키는 $P(x)$, $Q(x)$ 는

$$P(x) = (2x - 3)(x + 2), Q(x) = (2x - 3)(x - 1) \text{ 또는}$$

$$P(x) = -(2x - 3)(x - 1), Q(x) = -(2x - 3)(x + 2)$$

$P(3) = 15$ 또는 $P(3) = -6$ 이므로 $P(3)$ 의 최댓값은 15이다.

867

조건 (나)에 의하여 $4x^3 + 15x^2 + 8x + a$ 는 $x + 3$ 을 인수로 갖는다.

$$x = -3 \text{을 대입하면 } -108 + 135 - 24 + a = 0 \quad \therefore a = -3$$

$$f(x)g(x) = (4x^3 + 15x^2 + 8x - 3)(x + 7)$$

$$= (4x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 7) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$= \left(x - \frac{1}{4}\right)(4x + 4)(x + 3)(x + 7) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①에서 $f(x) = x + 7$ 이라 하면 $f(1) = 8$ 이지만 $f(2) = 9 < 10$ 이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

또, $f(x) = (x + 1)(x + 3)$ 이라 하면 $f(1) = 8$ 이지만 $x + 3$ 은 $g(x)$ 의 인수이므로 적합하지 않다.

②에서 $f(x) = 4x + 4$ 라 하면 $f(1) = 8$ 이고, $f(2) = 12 > 0$ 이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

$$\text{따라서 } f(x) = 4x + 4 \text{ 이므로 } f(9) = 40$$

868

조건 (나)에서 두 함수 $y = h_1(x)$, $y = h_2(x)$ 의 그래프가 오직 한 점 $(2, 16)$ 에서 만나므로 방정식 $h_1(x) = h_2(x)$ 의 실근은 $x = 2$ 뿐이다.

$f(x) + g(x) = f(x) - g(x)$, 즉 $g(x) = 0$ 이 중근 $x = 2$ 를 가지고, $g(x)$ 는 이차항의 계수가 1이므로

$$g(x) = (x - 2)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

함수 $h_1(x)$ 의 이차항의 계수는 1이고 조건 (가)에 의하여 꼭짓점이 x 축 위에 있으므로 $h_1(x)=(x-\alpha)^2$ (α 는 상수)

조건 (나)에서 $h_1(2)=16$ 이므로 $16=(2-\alpha)^2 \therefore \alpha=-2$ 또는 $\alpha=6$

(i) $\alpha=-2$ 인 경우

$$h_1(x)=(x+2)^2 \text{이므로 } \textcircled{7} \text{에 의하여}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= h_1(x) - g(x) \\ &= (x+2)^2 - (x-2)^2 \\ &= 8x \end{aligned}$$

$$\therefore f(3)+g(4)=24+4=28$$

(ii) $\alpha=6$ 인 경우

$$h_1(x)=(x-6)^2 \text{이므로 } \textcircled{7} \text{에 의하여}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= h_1(x) - g(x) \\ &= (x-6)^2 - (x-2)^2 \\ &= -8x+32 \end{aligned}$$

$$\therefore f(3)+g(4)=8+4=12$$

(i), (ii)에서 $f(3)+g(4)$ 의 최댓값은 28

869

$$f(x)=kx^2-4kx+2k+1 \text{에서 } f(x)=k(x-2)^2-2k+1$$

$$\therefore A(2, -2k+1), B(0, 2k+1) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{직선 AB의 기울기는 } \frac{(-2k+1)-(2k+1)}{2-0} = -2k$$

$$\text{따라서 직선 AB의 방정식은 } y=-2kx+2k+1$$

$$\text{위 등식을 } k \text{에 대하여 정리하면 } 2k(-x+1)+(-y+1)=0$$

$$\text{위 등식이 0이 아닌 실수 } k \text{의 값에 관계없이 항상 성립하므로}$$

$$x=1, y=1 \quad \therefore \alpha=1, \beta=1 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore \alpha+\beta=2 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

채점 기준	배점(%)
① 두 점 A, B의 좌표 구하기	40
② 항등식의 성질을 이용하여 α, β 의 값 구하기	40
③ $\alpha+\beta$ 의 값 구하기	20

870

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+k$$

$$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+k$$

$$x^2+5x=t \text{라 하면 } (t+4)(t+6)+k=t^2+10t+24+k \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$t^2+10t+24+k \text{가 } (x^2+ax+b)^2 \text{으로 인수분해 되므로 이차방정식 } t^2+10t+24+k=0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$\frac{D}{4}=5^2-(24+k)=0 \quad \therefore k=1$$

$$t^2+10t+25=(t+5)^2=(x^2+5x+5)^2 \quad \therefore a=5, b=5 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore a+b+k=5+5+1=11 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

채점 기준	배점(%)
① 식을 변형하여 치환하기	40
② a, b, k 의 값 구하기	40
③ $a+b+k$ 의 값 구하기	20

1등급 적중 학교 시험 예상 문제 | 기말고사 1회

p.160~163

871 ⑤	872 ④	873 ⑤	874 ⑤	875 ②	876 ①
877 ②	878 ④	879 ④	880 ③	881 ②	882 ③
883 ①	884 ⑤	885 336	886 40%	887 8	888 330
889 25	890 8				

871

행렬 A 의 $(2, 1)$ 성분은 4이므로 $m=4$

$(3, 2)$ 성분은 8이므로 $n=8$

$$\therefore m+n=12$$

872

$${}_4P_3+3!+{}_6C_3=4 \times 3 \times 2+3 \times 2 \times 1+\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}=50$$

873

$x=-3$ 을 주어진 방정식에 대입하면

$$-27+9a-3a+21+b=0$$

$$\therefore 6a+b=6 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$x=4$ 를 주어진 방정식에 대입하면

$$64+16a+4a-28+b=0$$

$$\therefore 20a+b=-36 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=-3, b=24$

따라서 주어진 방정식은 $x^3-3x^2-10x+24=0$

$$(x-2)(x+3)(x-4)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=-3 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 나머지 한 근은 2

874

맨 처음과 맨 마지막에 댄스팀이 나오는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$

나머지 6팀의 순서를 정하는 경우의 수는 $6!=720$

따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 720=4320$

875

이차부등식 $x^2+(3k-4)x+k^2<0$ 의 해가 존재하려면 이차방정식

$$x^2+(3k-4)x+k^2=0 \text{의 판별식을 } D \text{라 할 때}$$

$$D=(3k-4)^2-4k^2=5k^2-24k+16>0, (5k-4)(k-4)>0$$

$$\therefore k<\frac{4}{5} \text{ 또는 } k>4$$

876

B는 구매하고 A, C는 구매하지 않는 경우의 수는 A, B, C를 제외

한 6개 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_6C_3=20$

877

(i) $x<-2$ 일 때

$$-x+3-2x-4 \leq 8, -3x \leq 9 \quad \therefore x \geq -3$$

그런데 $x<-2$ 이므로 $-3 \leq x<-2$

(ii) $-2 \leq x < 3$ 일 때

$$-x+3+2x+4 \leq 8 \quad \therefore x \leq 1$$

그런데 $-2 \leq x < 3$ 이므로 $-2 \leq x \leq 1$

(iii) $x \geq 3$ 일 때

$$x-3+2x+4 \leq 8, 3x \leq 7 \quad \therefore x \leq \frac{7}{3}$$

그런데 $x \geq 3$ 이므로 해가 없다.

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-3 \leq x \leq 1$ 이므로

$$a=-3, b=1 \quad \therefore a+b=-2$$

878

$$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2+3xy+4y^2=22 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①에서 $(x+y)(x-3y)=0$

$$\therefore x=-y \text{ 또는 } x=3y$$

(i) $x=-y$ 를 ②에 대입하면

$$(-y)^2+3 \times (-y) \times y+4y^2=22, 2y^2=22$$

$$\therefore y=\pm\sqrt{11}$$

$$\therefore x=-\sqrt{11}, y=\sqrt{11} \text{ 또는 } x=\sqrt{11}, y=-\sqrt{11}$$

(ii) $x=3y$ 를 ②에 대입하면

$$(3y)^2+3 \times 3y \times y+4y^2=22, 22y^2=22$$

$$\therefore y=\pm 1$$

$$\therefore x=-3, y=-1 \text{ 또는 } x=3, y=1$$

(i), (ii)에서 $\alpha\beta$ 의 최댓값은 3

879

$$x^2-9x+14 < 0 \text{에서}$$

$$(x-2)(x-7) < 0 \quad \therefore 2 < x < 7$$

$$x^2-(2k-1)x+k^2-k-6 > 0 \text{에서}$$

$$x^2-(2k-1)x+(k-3)(k+2) > 0$$

$$(x-k+3)(x-k-2) > 0$$

$$\therefore x < k-3 \text{ 또는 } x > k+2$$

(i) $k-3 < 2$, 즉 $k < 5$ 일 때

$$k+2 < 7 \text{이므로}$$

$$\text{연립부등식의 해는 } k+2 < x < 7, \text{ 즉 } \alpha=k+2, \beta=7$$

$$\beta-\alpha=5-k=3 \quad \therefore k=2$$

(ii) $k-3 > 2$, 즉 $k > 5$ 일 때

$$k+2 > 7 \text{이므로}$$

$$\text{연립부등식의 해는 } 2 < x < k-3, \text{ 즉 } \alpha=2, \beta=k-3$$

$$\beta-\alpha=k-5=3 \quad \therefore k=8$$

(i), (ii)에서 모든 실수 k 의 값의 곱은 $2 \times 8 = 16$

880

$$\text{모든 직사각형의 개수는 } {}_6C_2 \times {}_6C_2 = 225$$

넓이가 5 이하인 직사각형의 경우는 다음과 같다.

(i) 넓이가 1인 직사각형의 개수

$$5 \times 5 = 25$$

(ii) 넓이가 2인 직사각형의 개수

(가로의 길이, 세로의 길이)가 (1, 2) 또는 (2, 1)인 경우의 수

$$\text{므로 } 5 \times 4 + 4 \times 5 = 40$$

(iii) 넓이가 3인 직사각형의 개수

(가로의 길이, 세로의 길이)가 (1, 3) 또는 (3, 1)인 경우의 수

$$\text{므로 } 5 \times 3 + 3 \times 5 = 30$$

(iv) 넓이가 4인 직사각형의 개수

(가로의 길이, 세로의 길이)가 (1, 4) 또는 (2, 2) 또는 (4, 1)인

경우의 수이므로 $5 \times 2 + 4 \times 4 + 2 \times 5 = 36$

(v) 넓이가 5인 직사각형의 개수

(가로의 길이, 세로의 길이)가 (1, 5) 또는 (5, 1)인 경우의 수

$$\text{므로 } 5 \times 1 + 1 \times 5 = 10$$

(i)~(v)에서 구하는 직사각형의 개수는

$$225 - (25 + 40 + 30 + 36 + 10) = 84$$

881

$$\neg. [\text{반례}] A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{이면 } A^2 = O, B^2 = O \text{ 이}$$

$$\text{지만 } AB = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \neq O \text{ (거짓)}$$

$$\neg. AB + BA = O \text{에서 } BA = -AB$$

$$\therefore (AB)^3 = ABABAB$$

$$= A(-AB)(-AB)B$$

$$= AABABB$$

$$= AA(-AB)BB$$

$$= -A^3B^3 \text{ (참)}$$

$$\neg. [\text{반례}] A = -E \text{ 일 때, } A^2 = A^4 = A^8 = E \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

882

$$x^3-2x^2-2x-3=0 \text{에서 } (x-3)(x^2+x+1)=0 \text{이므로}$$

허근 ω 는 $x^2+x+1=0$ 의 근이다.

$$\text{즉, } \omega^2+1=-\omega \text{이고, } (\omega^2+1)^n = (-\omega)^n$$

이때 $x^2+x+1=0$ 의 양변에 $x-1$ 을 곱하면 $x^3-1=0$ 이므로

$$\omega^3=1$$

따라서 $(\omega^2+1)^n = (-\omega)^n = 1$ 을 만족시키는 자연수 n 은 6의 배수
이어야 한다.

$1426 = 6 \times 237 + 4$ 이므로 1426 이하의 자연수 중 6의 배수의 개수
는 237

883

봉고차에 탔던 4명 중 운전자를 제외하고 나머지 3명을 각각 A, B,
C라 하고, A, B, C가 앉은 세 자리를 ○, 앉지 않은 세 자리를 □라
고 하자.

(i) A, B, C 중 한 명만 ○에 앉은 경우

$$\text{○에 앉은 사람을 택하는 경우의 수는 } {}_3C_1 = 3$$

선택된 사람이 ○ 중 처음에 앉았던 자리를 제외한 한 자리를 고르는 경우의 수는 2

나머지 두 명이 □에 앉는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$

승용차에 탔던 세 명이 남은 세 자리에 앉는 경우의 수는 $3!=6$

$$\therefore 3 \times 2 \times 6 \times 6 = 216$$

(ii) A, B, C 중 두 명이 ○에 앉는 경우

○에 앉는 사람을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$

선택된 두 사람이 ○ 중 처음에 앉았던 자리를 제외한 두 자리를 고르는 경우의 수는 2

나머지 한 명이 □에 앉는 경우의 수는 ${}_3P_1=3$

승용차에 탔던 세 명이 남은 세 자리에 앉는 경우의 수는 $3!=6$

$$\therefore 3 \times 3 \times 3 \times 6 = 162$$

(iii) A, B, C가 모두 ○에 앉는 경우

A, B, C끼리 자리를 바꿔 앉는 경우의 수는 2

승용차에 탔던 세 명이 남은 세 자리에 앉는 경우의 수는 $3!=6$

$$\therefore 2 \times 6 = 12$$

(iv) A, B, C가 모두 ○에 앉지 않는 경우

A, B, C가 □에 앉는 경우의 수는 ${}_3P_3=6$

승용차에 탔던 세 명이 남은 세 자리에 앉는 경우의 수는 $3!=6$

$$\therefore 6 \times 6 = 36$$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는 $216 + 162 + 12 + 36 = 426$

884

이차식 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a ($a > 0$)라 하자.

조건 (가)에서 이차부등식 $f(x) \geq 5$, 즉 $f(x) - 5 \geq 0$ 의 해가

$x \leq -1$ 또는 $x \geq 4$ 이므로

$$f(x) - 5 = a(x+1)(x-4), \text{ 즉 } f(x) = a(x+1)(x-4) + 5$$

조건 (나)에서 이차부등식 $f(x) \leq -5$ 의 해의 개수가 1이므로 이차

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-5$ 는 접해야 한다.

즉, 이차방정식 $f(x) = -5$ 는 중근을 가져야 하므로

$$f(x) + 5 = 0 \text{에서}$$

$$a(x+1)(x-4) + 10 = 0, ax^2 - 3ax - 4a + 10 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-3a)^2 - 4a(-4a + 10) = 25a^2 - 40a = 0$$

$$5a(5a - 8) = 0 \text{에서 } a = \frac{8}{5} \leftarrow a > 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{8}{5}(x+1)(x-4) + 5 \text{이므로}$$

$$f(9) = \frac{8}{5} \times 10 \times 5 + 5 = 85$$

885

(i) 3명이 모두 같은 개찰구를 이용하는 경우

개찰구를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_1=6$

학생 3명의 입장 순서를 정하는 경우의 수는 $3!=6$

$$\therefore 6 \times 6 = 36$$

(ii) 2명이 같은 개찰구를 이용하는 경우

2명, 1명의 두 조로 나누는 경우의 수는 ${}_3C_2 \times {}_1C_1 = 3$

두 조가 개찰구를 택하는 경우의 수는 ${}_6P_2=30$

학생 2명의 입장 순서를 정하는 경우의 수는 $2!=2$

$$\therefore 3 \times 30 \times 2 = 180$$

(iii) 3명이 모두 다른 개찰구를 이용하는 경우

3명이 서로 다른 개찰구를 택하는 경우의 수는 ${}_6P_3=120$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는 $36 + 180 + 120 = 336$

886

연간 회원권 가격을 a , 회원 수를 b 라 하자.

회원권 가격을 $x\%$ 인상하면 회원권 가격은 $a\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ 이고,

회원 수는 $b\left(1 - \frac{5x}{1000}\right)$ 이다.

이때 연간 회원권 매출이 12% 이상 증가해야 하므로

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right)b\left(1 - \frac{5x}{1000}\right) \geq ab\left(1 + \frac{12}{100}\right)$$

$ab > 0$ 이므로 위 식의 양변을 ab 로 나눈 후 정리하면

$$x^2 - 100x + 2400 \leq 0, (x-40)(x-60) \leq 0$$

$$\therefore 40 \leq x \leq 60$$

따라서 연간 회원권 가격은 최소 40% 인상해야 한다.

887

$$A^2 = \begin{pmatrix} m & 0 \\ m-4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ m-4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ m^2-4^2 & 4^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ m^2-4^2 & 4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ m-4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^3 & 0 \\ m^3-4^3 & 4^3 \end{pmatrix}$$

⋮

$$A^n = \begin{pmatrix} m^n & 0 \\ m^n-4^n & 4^n \end{pmatrix}$$

즉, 행렬 A^n 의 모든 성분의 합은 $2m^n = 2^{43} \therefore m^n = 2^{42}$

이때 m, n 은 자연수이므로 n 은 42의 약수이다.

$42 = 2 \times 3 \times 7$ 이므로 구하는 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$(1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 8$$

888

$$4x^4 - 4(3n+2)x^2 + 9n^2 - 12n + 4$$

$$= 4x^4 - 4(3n-2)x^2 + (3n-2)^2 - 16x^2$$

$$= \{2x^2 - (3n-2)\}^2 - (4x)^2$$

$$= \{2x^2 + 4x - (3n-2)\} \{2x^2 - 4x - (3n-2)\} = 0$$

$$\therefore x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 2(3n-2)}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 2(3n-2)}}{2}$$

$$\text{즉, } x = -1 \pm \frac{\sqrt{6n}}{2} \text{ 또는 } x = 1 \pm \frac{\sqrt{6n}}{2}$$

이때 주어진 사차방정식이 서로 다른 네 개의 정수해를 가지려면

$$n = 6k^2 \text{ (단, } k \text{는 자연수)}$$

$$6k^2 \leq 150 \text{에서 } k^2 \leq 25 \text{이므로 } n = 6, 24, 54, 96, 150$$

따라서 모든 자연수 n 의 값의 합은 330

$A \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ 의 양변에 A 를 곱하면

$$A^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = -A \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

위 식의 양변에 A 를 곱하면

$$A^3 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

위 식의 양변에 A 를 곱하면

$$A^4 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \text{ 즉 } A^4 = E \dots\dots\dots ①$$

$$E + A + A^2 + A^3 \\ = A^4 + A^5 + A^6 + A^7 = A^8 + A^9 + A^{10} + A^{11} = \dots$$

이므로 주어진 식은 4개씩 반복된다.

따라서

$$E + A + A^2 + \dots + A^{24} \\ = 6(E + A + A^2 + A^3) + E \\ = 7E + 6A + 6A^2 + 6A^3 \dots\dots\dots ②$$

이때 $a=7, b=6, c=6, d=6$ 이므로

$$a+b+c+d=25 \dots\dots\dots ③$$

채점 기준	배점(%)
① 행렬 A^4 구하기	40
② $E + A + A^2 + \dots + A^{24}$ 간단히 하기	40
③ $a+b+c+d$ 의 값 구하기	20

890

$$|2-x| \leq k \text{에서 } 2-k \leq x \leq 2+k \dots\dots\dots ①$$

$$x^2 - 3|x| - 4 = |x|^2 - 3|x| - 4 = (|x| - 4)(|x| + 1) \leq 0 \text{에서}$$

$$|x| \leq 4 \text{이어야 하므로} \quad \text{--- } |x| \geq 0$$

$$-4 \leq x \leq 4 \dots\dots\dots ②$$

(i) $k \leq 2$ 일 때

연립부등식의 해는 $2-k \leq x \leq 2+k$ 이므로 정수인 해의 개수는 $2k+1$ 로 항상 홀수이다.

(ii) $2 < k \leq 6$ 일 때

연립부등식의 해는 $2-k \leq x \leq 4$ 이므로 정수인 해의 개수는 $k+3$ 이며 $5 < k+3 \leq 9$ 이므로 조건을 만족시키는 자연수 k 의 값은 $k=3$ 또는 $k=5$

(iii) $k > 6$ 일 때

연립부등식의 해는 $-4 \leq x \leq 4$ 이므로 정수인 해의 개수는 9로 홀수이다.

(i)~(iii)에서 자연수 k 의 값은 3, 5이므로 $3+5=8 \dots\dots\dots ③$

채점 기준	배점(%)
① 부등식 $ 2-x \leq k$ 의 해 구하기	20
② 부등식 $x^2 - 3 x - 4 \leq 0$ 의 해 구하기	40
③ k 의 값의 합 구하기	40

891 ⑤	892 ③	893 ①	894 ②	895 ③	896 ②
897 ⑤	898 ④	899 ①	900 ④	901 ③	902 ⑤
903 ②	904 ④	905 3	906 7	907 11	
908 $\frac{7}{3} \leq x < 4$	909 88	910 3			

891

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ x & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5y & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+5y & 4 \\ x-3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$$

에서 $3+5y=-2, x-3=-8$, 즉 $y=-1, x=-5$

$$\therefore xy=5$$

892

해가 $-2 \leq x \leq 7$ 이고, x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+2)(x-7) \leq 0, x^2 - 5x - 14 \leq 0$$

이 부등식이 $x^2 + ax + b \leq 0$ 과 같으므로 $a=-5, b=-14$

$$\therefore a-b=9$$

893

$${}_5P_2 + {}_5C_2 = 5 \times 4 + \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 30$$

894

부등식 $5x \leq 2x+9$ 에서 $3x \leq 9$, 즉 $x \leq 3$

부등식 $x-5 < 3x-1$ 에서 $2x > -4$, 즉 $x > -2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $-2 < x \leq 3$ 이므로 모든 정수 x 의 값의 합은 $-1+0+1+2+3=5$ 이다.

895

$x^3 - 2kx^2 + kx - 20$ 은 $x-2$ 를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2k & k & -20 \\ & & 2 & -4k+4 & -6k+8 \\ \hline & 1 & -2k+2 & -3k+4 & -6k-12 \end{array}$$

이때 $-6k-12=0$ 에서 $k=-2$

즉, $x^3 + 4x^2 - 2x - 20 = (x-2)(x^2 + 6x + 10)$ 이고,

z 는 이차방정식 $x^2 + 6x + 10 = 0$ 의 한 허근이므로

$$z^2 + 6z + 10 = 0 \quad \therefore z^2 + 6z = -10$$

따라서 $k(z^2 + 6z) = -2 \times (-10) = 20$ 이다.

896

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 이차부등식 $x^2 + ax + b \geq 0$ 이 항상 성립하므로 $D \leq 0$ 이 성립해야 한다.

$$D = a^2 - 4b \leq 0 \text{에서 } a^2 \leq 4b$$

$b=1$ 일 때, $a^2 \leq 4$ 이므로 $a=1, 2$
 $b=2$ 일 때, $a^2 \leq 8$ 이므로 $a=1, 2$
 $b=3$ 일 때, $a^2 \leq 12$ 이므로 $a=1, 2, 3$
 $b=4$ 일 때, $a^2 \leq 16$ 이므로 $a=1, 2, 3, 4$
 $b=5$ 일 때, $a^2 \leq 20$ 이므로 $a=1, 2, 3, 4$
 $b=6$ 일 때, $a^2 \leq 24$ 이므로 $a=1, 2, 3, 4$
 따라서 주어진 부등식을 만족시키는 순서쌍의 개수는
 $2+2+3+4+4+4=19$ 이다.

897

$$\begin{aligned}
 A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \\
 A^3 &= A^2 A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -6 & -23 \end{pmatrix} \\
 \therefore \frac{1}{3}(A^2 - A^3) &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 7 & 31 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

다른 풀이

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$\frac{1}{3} \times \{-4 + (-7) + 7 + 31\} = \frac{1}{3} \times 27 = 9$$

다른 풀이 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ 이므로 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$A^2 + A - 5E = O \quad \therefore A^2 = 5E - A$$

$$A^2 + A + E = 6E \text{이므로 양변에 } A - E \text{를 곱하면}$$

$$A^3 - E = 6(A - E) \quad \therefore A^3 = 6A - 5E$$

$$\frac{1}{3}(A^2 - A^3) = \frac{1}{3}(10E - 7A) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 7 & 31 \end{pmatrix}$$

898

부등식 $|x - k| \leq 5$ 에서 $-5 \leq x - k \leq 5$

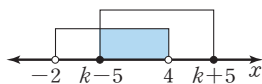
$$\therefore k - 5 \leq x \leq k + 5$$

부등식 $x^2 - 2x - 8 < 0$ 에서 $(x + 2)(x - 4) < 0$

$$\therefore -2 < x < 4$$

이때 주어진 연립부등식의 정수인 해의 개수가 4이므로

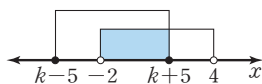
(i) $3 < k < 9$ 일 때 $\leftarrow k-5$ 가 -2 와 4 사이에 있을 때



$$-1 < k - 5 \leq 0 \text{에서 } 4 < k \leq 5$$

따라서 정수 k 의 값은 5이다.

(ii) $-7 < k < -1$ 일 때 $\leftarrow k+5$ 가 -2 와 4 사이에 있을 때



$$2 \leq k + 5 < 3 \text{에서 } -3 \leq k < -2$$

따라서 정수 k 의 값은 -3 이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 정수 k 의 값의 합은

$$5 + (-3) = 2$$

899

방정식 $2x + 3y = -6$ 에서 $x = -\frac{3}{2}y - 3$

이를 $3x^2 + 2xy + y = -1$ 에 대입하면

$$3\left(-\frac{3}{2}y - 3\right)^2 + 2y\left(-\frac{3}{2}y - 3\right) + y = -1$$

$$\frac{15}{4}y^2 + 22y + 28 = 0, \frac{1}{4}(y + 4)(15y + 28) = 0$$

$$\therefore \begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = -\frac{28}{15} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$$

이때 α, β 는 정수이므로 $\alpha = 3, \beta = -4$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 25$$

900

$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$ 에서 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 한 근이 ω 이므로

$$\omega^3 + 1 = 0, \omega^2 - \omega + 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
 (\omega^2 + 1)(\omega^4 + 1)(\omega^6 + 1) &= \omega(-\omega + 1) \times 2 \\
 &= 2(\underbrace{-\omega^2 + \omega}_1) = 2
 \end{aligned}$$

$$(\omega^8 + 1)(\omega^{10} + 1)(\omega^{12} + 1) = (\omega^2 + 1)(\omega^4 + 1)(\omega^6 + 1) = 2$$

$$\therefore (\omega^2 + 1)(\omega^4 + 1)(\omega^6 + 1) \cdots (\omega^{118} + 1)(\omega^{120} + 1) = 2^{20}$$

901

부등식 $|x - 2| + |x + 3| \leq 9$ 에서

(i) $x < -3$ 일 때

$$(-x + 2) + (-x - 3) \leq 9 \text{이므로 } x \geq -5$$

$$\text{그런데 } x < -3 \text{이므로 } -5 \leq x < -3$$

(ii) $-3 \leq x < 2$ 일 때

$$(-x + 2) + (x + 3) \leq 9 \text{이므로 } 5 \leq 9, \text{ 즉 } -3 \leq x < 2$$

(iii) $x \geq 2$ 일 때

$$(x - 2) + (x + 3) \leq 9 \text{이므로 } x \leq 4$$

$$\text{그런데 } x \geq 2 \text{이므로 } 2 \leq x \leq 4$$

(i)~(iii)에서 $-5 \leq x \leq 4$

부등식 $x^2 - 16 < 0$ 에서 $-4 < x < 4$

따라서 연립부등식의 해는 $-4 < x < 4$ 이므로 정수 x 의 개수는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 의 7이다.

902

$$\neg. A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \text{에 대하여}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

이때 행렬 $(AB)C$ 의 $(1, 1)$ 성분은

$$\begin{aligned}
 &(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{11} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{21} \\
 &= a_{11}b_{11}c_{11} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{22}c_{21} \\
 &= a_{11}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{12}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21})
 \end{aligned}$$

같은 방법으로 행렬 $(AB)C$ 에서

$$(1, 2) \text{ 성분은 } a_{11}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{12}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22})$$

$$(2, 1) \text{ 성분은 } a_{21}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{22}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21})$$

$$(2, 2) \text{ 성분은 } a_{21}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{22}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22})$$

또한, 행렬 $A(BC)$ 는

$$A(BC) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{pmatrix}$$

이므로 행렬 $(AB)C$ 의 각 성분은 행렬 $A(BC)$ 와 같다.

따라서 $(AB)C = A(BC)$ 이다. (참)

$$\therefore ABC = (AB)C = EC = C$$

$$= A(BC) = AE = A$$

따라서 $A = C$ (참)

$$\square, (A-E)^2 = A^2 - 2A + E = O, \text{ 즉 } A = A^2 - A + E \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에서 양변에 $A+E$ 를 곱하면

$$(A+E)A = (A+E)(A^2 - 2A + E)$$

$$(A+E)A = A^3 + E = 2E$$

$$\therefore \frac{1}{2}(A+E)A = E$$

$$\text{또, ①에서 } -A^2 + 2A = E \quad \therefore A(-A + 2E) = E$$

$$\text{이때 } \square \text{에 의하여 } \frac{1}{2}(A+E)A = A(-A + 2E) = E \text{이면}$$

$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}E = -A + 2E, \text{ 즉 } A = E \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 $\square, \square, \square$ 이다.

903

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점이 P, Q이고, 조건 (나)에서 직선 $y=x$ 위에 있는 세 점 O, P, Q에 대하여 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 작고, $\overline{PQ} = 2\overline{OP}$ 이므로 점 P의 좌표를 (t, t) ($t > 0$)라 하면 점 Q의 좌표는 $(3t, 3t)$ 이다.

$$\text{즉, } f(x) - x = (x-t)(x-3t) \quad \text{제1사분면의 점} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 한 점 Q에서 만 만나므로

$$g(x) - x = -2(x-3t)^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{에서 } f(x) + g(x) - 2x = -x^2 + 8tx - 15t^2$$

$$\text{즉, } f(x) + g(x) = -x^2 + (8t+2)x - 15t^2$$

$f(x) + g(x) - 10 = -x^2 + (8t+2)x - 15t^2 - 10 = 0$ 의 판별식을 D라 하면 $f(x) + g(x) \geq 10$ 의 해가 한 개이므로

$$\frac{D}{4} = (4t+1)^2 - (-1) \times (-15t^2 - 10) = 0$$

$$t^2 + 8t - 9 = 0, (t+9)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = 1 \quad \leftarrow t > 0$$

따라서 점 Q의 x좌표는 3이다.

904

$A+B+C$, $A+B-C$ 가 모두 5의 배수이려면 정수 m, n 에 대하여 $a_3 + a_5 + a_6 = 5m$, $a_3 + a_5 - a_6 = 5n$ 이어야 한다.

이때 위 두 식의 양변을 빼면

$$2a_6 = 5(m-n) \text{에서 } a_6 \text{은 5의 배수이므로 } a_6 = 5 \text{이고,}$$

$a_3 + a_5$ 는 5의 배수이다. ($a_3 > a_5$)

(i) $a_3 + a_5 = 5$ 인 경우

$a_3 = 4, a_5 = 1$ 일 때 남은 수 2, 3, 6, 7, 8, 9 중에서 $a_2 > a_4$ 를 만족시키는 세 수 a_1, a_2, a_4 를 정하는 경우의 수는 a_1 을 고르는 경우의 수와 남은 수 중에서 순서에 관계없이 2개를 뽑는 경우의 수의 곱과 같다.

$$\therefore 6 \times {}_5C_2 = 6 \times 10 = 60$$

$a_3 = 3, a_5 = 2$ 일 때도 같은 방법으로 구하면 경우의 수는 60

$$2 \times 60 = 120$$

(ii) $a_3 + a_5 = 10$ 인 경우

a_3, a_5 를 정하는 경우의 수는 4이고, (i)과 같이 한 가지 경우에 대하여 a_1, a_2, a_4 를 정하는 경우의 수는 각각 60이므로

$$4 \times 60 = 240$$

(iii) $a_3 + a_5 = 15$ 인 경우

a_3, a_5 를 정하는 경우의 수는 2이고, (i)과 같이 한 가지 경우에 대하여 a_1, a_2, a_4 를 정하는 경우의 수는 각각 60이므로

$$2 \times 60 = 120$$

따라서 모든 순서쌍의 개수는 $120 + 240 + 120 = 480$ 이다.

905

조건 (가)에서 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D라 하면

$ax^2 + bx + c = 0$ 이 중근을 가지므로 $D = 0$ 이 성립해야 한다.

$$D = b^2 - 4ac = 0 \quad \therefore b^2 = 4ac$$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} b & 2a \\ 2c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 2a \\ 2c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 + 4ac & 4ab \\ 4bc & b^2 + 4ac \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2b^2 & 4ab \\ 4bc & 2b^2 \end{pmatrix} = 2b \begin{pmatrix} b & 2a \\ 2c & b \end{pmatrix} = 2bA \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } A^7 = 2^6 b^6 A = 2^{12} \times 3^6 \times A = 2^6 \times 6^6 \times A$$

$$\therefore b = \pm 6$$

$$b = 6 \text{일 때 } f(x) = 0 \text{의 해는 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{a}$$

조건 (가)에서 $-\frac{3}{a}$ 가 자연수이므로

$$a = -1 \text{일 때 } b = 6, c = -9 \text{이고, } x = 3$$

$$a = -3 \text{일 때 } b = 6, c = -3 \text{이고, } x = 1$$

이때 a, b, c 는 서로 다른 정수이므로 $x = 3$

$$b = -6 \text{일 때, 같은 방법으로 구하면 } x = 3$$

따라서 $f(x) = 0$ 의 해는 $x = 3$ 이다.

906

$3k, 3k+1, 4k-1$ 은 삼각형의 세 변의 길이이므로

$$3k > 0, 3k+1 > 0, 4k-1 > 0, \text{ 즉 } k > \frac{1}{4} \text{이고, } 3k < 3k+1 \text{이므로}$$

가장 긴 변의 길이는 $3k+1$ 또는 $4k-1$

(i) $3k+1$ 이 가장 긴 변일 때, 즉 $k < 2$ 일 때 $3k+1 > 4k-1$

$$\begin{cases} 3k+(4k-1) > 3k+1 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ (3k)^2+(4k-1)^2 < (3k+1)^2 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{cases} \text{이므로}$$

$\textcircled{㉠}$ 에서 $k > \frac{1}{2}$

$\textcircled{㉡}$ 에서 $16k^2-14k < 0$, 즉 $0 < k < \frac{7}{8}$

$\therefore \frac{1}{2} < k < \frac{7}{8}$

(ii) $4k-1$ 이 가장 긴 변일 때, 즉 $k > 2$ 일 때 $3k+1 < 4k-1$

$$\begin{cases} 3k+(3k+1) > 4k-1 & \cdots \cdots \textcircled{㉢} \\ (3k)^2+(3k+1)^2 < (4k-1)^2 & \cdots \cdots \textcircled{㉣} \end{cases} \text{이므로}$$

$\textcircled{㉢}$ 에서 $k > -1$

$\textcircled{㉣}$ 에서 $2k^2+14k < 0$, 즉 $-7 < k < 0$

이때 $\textcircled{㉢}$, $\textcircled{㉣}$ 을 모두 만족시키는 k 는 없다. $\leftarrow k > 2$

(iii) 이등변삼각형일 때, 즉 $k=2$ 일 때 $\leftarrow k=1$ 일 때는 (i)

세 변의 길이가 6, 7, 7이므로 둔각삼각형이 아니다.

(i)~(iii)에서 $\frac{1}{2} < k < \frac{7}{8}$, 즉 $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{7}{8}$

$\therefore 16pq=16 \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{8}=7$

907

$x^3-9x^2+(k+18)x-3k$ 를 조립제법을 이용하면

$$x^3-9x^2+(k+18)x-3k=(x-3)(x^2-6x+k) \text{이므로}$$

방정식 $x^3-9x^2+(k+18)x-3k=0$ 은 3을 근으로 갖는다.

한편, 이차방정식 $x^2-6x+k=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 6

이때 $\alpha=3$ 이면 $3 < \beta < \gamma$ 이므로 $6 < \beta + \gamma$ 이고,

$\gamma=3$ 이면 $\alpha < \beta < 3$ 이므로 $\alpha + \beta < 6 \quad \therefore \beta=3$

$\alpha + \gamma = 6$, $6\alpha - 2\gamma = -8$ 에서 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{11}{2}$

근과 계수의 관계에 의하여 $k = \alpha\gamma = \frac{11}{4}$ 이므로 $4k=11$ 이다.

908

부등식 $3 \leq f(|3x-4|)$ 에서 $|3x-4| \geq 3$ 이므로

$3x-4 \geq 3$ 또는 $3x-4 \leq -3$, 즉 $x \geq \frac{7}{3}$ 또는 $x \leq \frac{1}{3}$

부등식 $f(|3x-7|) \leq 4$ 에서 $|3x-7| < 5$ 이므로

$-5 < 3x-7 < 5$, 즉 $\frac{2}{3} < x < 4$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $\frac{7}{3} \leq x < 4$ 이다.

909

(i) 백의 자리의 수가 5인 경우

조건 (나)에서 일의 자리의 수는 5를 제외한 홀수이므로 가능한 경

우의 수는 4

조건 (가)에서 십의 자리의 수는 5를 제외한 수이므로 가능한 경우의 수는 9

$\therefore 4 \times 9 = 36$ ①

(ii) 십의 자리의 수가 5인 경우

조건 (나)에서 백의 자리의 수와 일의 자리의 수의 곱이 홀수이므로 둘다 5를 제외한 홀수이어야 한다. 이때 가능한 경우의 수는 각각 4

$\therefore 4 \times 4 = 16$ ②

(iii) 일의 자리의 수가 5인 경우

조건 (나)에서 백의 자리의 수는 5를 제외한 홀수이므로 가능한 경우의 수는 4

조건 (가)에서 십의 자리의 수는 5를 제외한 수이므로 가능한 경우의 수는 9

$\therefore 4 \times 9 = 36$ ③

(i)~(iii)에서 구하는 자연수의 개수는 $36 + 16 + 36 = 88$ 이다. ④

채점 기준	배점(%)
① 백의 자리의 수가 5인 자연수의 개수 구하기	30
② 십의 자리의 수가 5인 자연수의 개수 구하기	30
③ 일의 자리의 수가 5인 자연수의 개수 구하기	30
④ 조건을 모두 만족시키는 자연수의 개수 구하기	10

910

부등식 $5x-3 < 6x-2$ 에서 $x > -1$ ① ①

부등식 $|x-1| + |x| + |x+1| \leq x+4$ 에서 ①에 의하여 범위를 나누면 두 부등식을 동시에 만족해야 하므로 $x \leq -1$ 을 제외한다.

(i) $-1 < x < 0$ 일 때

$-x+2 \leq x+4$, 즉 $x \geq -1$

그런데 $-1 < x < 0$ 이므로 $-1 < x < 0$

(ii) $0 \leq x < 1$ 일 때

$x+2 \leq x+4$, 즉 $0 \leq 2$ 이므로 $0 \leq x < 1$

(iii) $x \geq 1$ 일 때

$3x \leq x+4$, 즉 $x \leq 2$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $1 \leq x \leq 2$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-1 < x \leq 2$ ②

따라서 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합은

$0+1+2=3$ 이다. ③

채점 기준	배점(%)
① 부등식 $5x-3 < 6x-2$ 의 해 구하기	20
② 부등식 $ x-1 + x + x+1 \leq x+4$ 의 해 구하기	60
③ 정수 x 의 값의 합 구하기	20