

정답과 해설

I 함수의 극한과 연속

- | | | |
|----|--------|-----|
| 01 | 함수의 극한 | 2쪽 |
| 02 | 함수의 연속 | 22쪽 |

II 미분

- | | | |
|----|-----------------|------|
| 03 | 미분계수와 도함수 | 44쪽 |
| 04 | 접선의 방정식과 평균값 정리 | 67쪽 |
| 05 | 함수의 극대, 극소와 그래프 | 88쪽 |
| 06 | 도함수의 활용 | 109쪽 |

III 적분

- | | | |
|----|---------|------|
| 07 | 부정적분 | 138쪽 |
| 08 | 정적분 | 155쪽 |
| 09 | 정적분의 활용 | 178쪽 |

01 함수의 극한

I 함수의 극한
과 연속

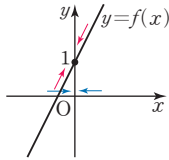
개념 완성하기

p. 7-8

01 ㉡ 1

$f(x)=2x+1$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로

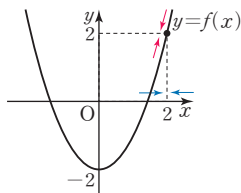
$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x+1) = 1$$



02 ㉡ 2

$f(x)=x^2-2$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로

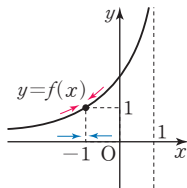
$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-2) = 2$$



03 ㉡ 1

$f(x)=-\frac{2}{x-1}$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로

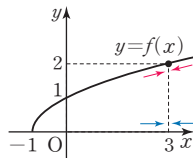
$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(-\frac{2}{x-1}\right) = 1$$



04 ㉡ 2

$f(x)=\sqrt{x+1}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로

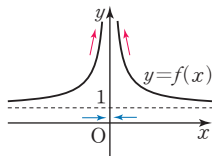
$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = 2$$



05 ㉡ ∞

$f(x)=1+\frac{1}{x^2}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로

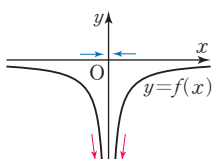
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \infty$$



06 ㉡ -∞

$f(x)=-\frac{1}{|x|}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

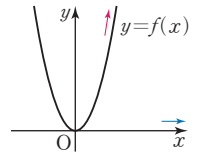
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{|x|}\right) = -\infty$$



07 ㉡ ∞

$f(x)=2x^2$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로

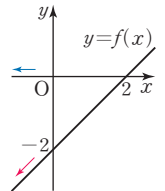
$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 = \infty$$



08 ㉡ -∞

$f(x)=x-2$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

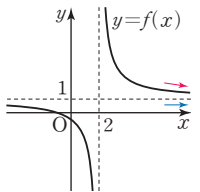
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2) = -\infty$$



09 ㉡ 1

$f(x)=1+\frac{3}{x-2}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로

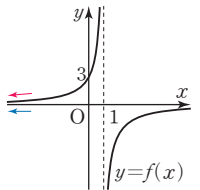
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1+\frac{3}{x-2}\right) = 1$$



10 ㉡ 0

$f(x)=\frac{3}{1-x}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{1-x} = 0$$

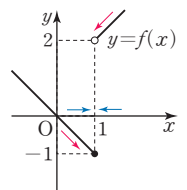


11 ㉡ (1) 2 (2) -1

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -1$$



12 ㉡ 풀이 참조

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 0$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

(6) $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

13 ㉡ -1

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = 1-2 = -1$$

14 ㉠ -6

$$\lim_{x \rightarrow -2} x(-x^2+1) = 2(-2^2+1) = -6$$

15 ㉠ 3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x^2-1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

16 ㉠ 2

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{-3x+1} = \sqrt{-3 \times (-1)+1} = 2$$

17 ㉠ 5

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x-6}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (x+3) = 5 \end{aligned}$$

18 ㉠ 3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x+1) = 3 \end{aligned}$$

19 ㉠ $\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x^2-x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

20 ㉠ $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt{x+3}-1)(\sqrt{x+3}+1)}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{\sqrt{x+3}+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

21 ㉠ 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1}+1) = 2 \end{aligned}$$

22 ㉠ 0

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{2x^2-3x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0$$

23 ㉠ ∞

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+5}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{5}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \infty$$

24 ㉠ 5

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+x+1}{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = 5$$

25 ㉠ $\frac{8}{5}$

$x = -t$ 라 하면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x+9}{5x+7} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-8t+9}{-5t+7} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-8 + \frac{9}{t}}{-5 + \frac{7}{t}} = \frac{8}{5}$$

26 ㉠ -3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-3x^2}{(x+1)^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-3x^2}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}-3}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} \\ &= -3 \end{aligned}$$

27 ㉠ 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = 0 \end{aligned}$$

28 ㉠ 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+4x}-x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1} \\ &= \frac{4}{1+1} = 2 \end{aligned}$$

29 ㉠ -1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \times \frac{x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} = -1$$

30 ㉠ -8

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} 2x \left(1 - \frac{x+1}{x-3} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x \times \frac{-4}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8x}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8}{1 - \frac{3}{x}} = -8 \end{aligned}$$

31 ㉠ $a=3, b=3$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow -1} (ax+b) = 0$ 이므로

$$-a+b=0 \quad \therefore b=a$$

$b=a$ 를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax+a}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{a(x+1)}{x+1} = a=3$$

$$\therefore a=3, b=3$$

32 ㉡ $a=0, b=-1$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0$ 이므로

$$1 + a + b = 0 \quad \therefore b = -a - 1$$

$b = -a - 1$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2 + ax - a - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x+a+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+a+1} \\ &= \frac{1}{a+2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{a+2} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$a=0, b=-1$$

33 ㉡ -1

$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2 - 1) = -1, \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - 1) = -1$ 이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

34 ㉡ $\frac{2}{5}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{5x+2} = \frac{2}{5}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+7}{5x+1} = \frac{2}{5}$ 이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{5}$

유형 완성하기

p.9-23

01 ㉡ $\perp, \text{ㄹ}$

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄹ. $1 \leq a < 3$ 인 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값은 항상 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

참고 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ 에서 ∞ 는 일정한 값이 아닌 한없이 커지는 상태를 나타내므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

01-1 ㉡ $\perp, \text{ㄹ}$

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 2$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$

ㄹ. $\lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

02 ㉡ ㉢

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (-x + a) = -1 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2 + x) = 1 + 1 = 2$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 이어야 하

$$\text{므로 } -1 + a = 2 \quad \therefore a = 3$$

02-1 ㉡ 11

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} (x - 1) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} (2x^2 - ax + b) = 8 + 2a + b$$

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ 의 값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f(x)$ 이어

$$\text{야 하므로 } -3 = 8 + 2a + b \quad \therefore -2a - b = 11$$

03 ㉡ ㉢

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -1 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$= 1 + 2 + (-1) = 2$$

03-1 ㉡ 0

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$$

$$= 0 + 1 + (-1) = 0$$

04 ㉡ 3

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1 \text{이므로 } a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore a + b = 1 + 2 = 3$$

04-1 ㉡ 4

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 3 \text{이므로 } a = 3$$

..... ①

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 0 \quad \therefore b = 0$$

..... ②

$$f(b) = f(0) = 1 \quad \therefore c = 1$$

..... ③

$$\therefore a + b + c = 3 + 0 + 1 = 4$$

..... ④

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	30%
② b 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ c 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ $a + b + c$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

05 ㉡ 5

$x - 1 = t$ 라 하면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x - 1) = \lim_{t \rightarrow -1-} f(t) = 2$$

$-x = s$ 라 하면 $x \rightarrow -1$ 일 때 $s \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(-x) = \lim_{s \rightarrow 1+} f(s) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} f(x - 1) + \lim_{x \rightarrow -1-} f(-x) = 2 + 3 = 5$$

Lecture 치환을 이용한 함수의 극한값의 계산

- (1) $\lim_{x \rightarrow a+} f(x-a)$ 에서 $x-a=t$ 라 하면
 $x \rightarrow a+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x-a) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$
- (2) $\lim_{x \rightarrow a-} f(x-a)$ 에서 $x-a=t$ 라 하면
 $x \rightarrow a-$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x-a) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t)$

05-1 ㉔ ④

$1-x=t$ 라 하면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(1-x) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = 2$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(1-x) = -1 + 2 = 1$

06 ㉔ ①

$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x^2 + 3) = -1 + 3 = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} x^2 = 1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2 - 1 = 1$

06-1 ㉔ ②

$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 1 = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x-1) = 0$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0 - 1 + 0 = -1$

07 ㉔ ②

$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (x+1) = 1$
 $x-1=t$ 라 하면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x-1) = \lim_{t \rightarrow -1+} f(t) = \lim_{t \rightarrow -1+} (t+1) = 0$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0+} f(x-1) = 1 - 0 = 1$

07-1 ㉔ 2

$x-1=t$ 라 하면 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x-1) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0-} t = 0$ ①
 $x+1=s$ 라 하면 $x \rightarrow -1+$ 일 때 $s \rightarrow 0+$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x+1) = \lim_{s \rightarrow 0+} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0+} s = 2$ ②
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1-} f(x-1) + \lim_{x \rightarrow -1+} f(x+1) = 0 + 2 = 2$ ③

채점 기준	비율
① $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x-1)$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
② $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x+1)$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x-1) + \lim_{x \rightarrow -1+} f(x+1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

08 ㉔ ③

$x \rightarrow -1+$ 이면 $x > -1$ 이므로 $|x^2 - 1| = -(x^2 - 1)$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{-(x^2 - 1)}{x + 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{-(x+1)(x-1)}{x+1}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1+} (-x+1) = 2$

$x \rightarrow -1-$ 이면 $x < -1$ 이므로 $|x^2 - 1| = x^2 - 1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1-} (x-1) = -2$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 2 + (-2) = 0$

08-1 ㉔ -1

$x \rightarrow 1+$ 이면 $x > 1$ 이므로 $|x-1| = x-1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1+} (x-2) = -1$
 $x \rightarrow 1-$ 이면 $x < 1$ 이므로 $|x-1| = -(x-1)$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2 - 3x + 2}{-(x-1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x-1)(x-2)}{-(x-1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x+2) = 1$

따라서 $p = -1, q = 1$ 이므로
 $pq = -1 \times 1 = -1$

09 ㉔ ⑤

- ① $1 < x < 2$ 일 때 $[x] = 1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1+} [x] = 1$
 ② $x-1=t$ 라 하면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1+} [x-1] = \lim_{t \rightarrow 0+} [t] = 0$
 ③ $x+2=s$ 라 하면 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $s \rightarrow 3-$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1-} [x+2] = \lim_{s \rightarrow 3-} [s] = 2$
 ④ $-2 < x < -1$ 일 때 $[x] = -2$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow -2+} [x] = -2$
 ⑤ $x-2=v$ 라 하면 $x \rightarrow 3+$ 일 때 $v \rightarrow 1+$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 3+} [x-2]^2 = \lim_{v \rightarrow 1+} [v]^2 = 1^2 = 1$
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

09-1 ㉔ ⑤

- ① $0 < x < 1$ 일 때 $[x] = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{[x]}{x} = 0$
 ② $x-2=t$ 라 하면 $x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow -2-$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0-} [x-2] = \lim_{t \rightarrow -2-} [t] = -3$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x-2}{[x-2]} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$
 ③ $x^2 + 4x + 4 = s$ 라 하면 $x \rightarrow -2$ 일 때 $s \rightarrow 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow -2} [x^2 + 4x + 4] = 0$
 ④ $y = \frac{4x+1}{2x-1}$ 이라 하면
 $y = \frac{2(2x-1)+3}{2x-1} = 2 + \frac{3}{2x-1}$
 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $y \rightarrow 2$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{4x+1}{2x-1} \right] = \lim_{y \rightarrow 2+} [y] = 2$
 ⑤ $1 < x < 2$ 일 때 $[x] = 1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{[x]^2 - x}{[x]} = \frac{1^2 - 2}{1} = -1$
 따라서 극한값 중 가장 작은 것은 ⑤이다.

10 ㉔①

$-1 < x < 0$ 일 때 $[x] = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} (x + [x]) = -1 + (-1) = -2$$

$-2 < x < -1$ 일 때 $[x] = -2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} (x + [x]) = -1 + (-2) = -3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} (x + [x]) + \lim_{x \rightarrow -1-} (x + [x]) = -2 + (-3) = -5$$

10-1 ㉔⑤

$2 < x < 3$ 일 때 $[x] = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{[x]^2 + x}{[x]} = \frac{2^2 + 2}{2} = 3$$

$1 < x < 2$ 일 때 $[x] = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{[x]^2 + x}{[x]} = \frac{1^2 + 2}{1} = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{[x]^2 + x}{[x]} + \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{[x]^2 + x}{[x]} = 3 + 3 = 6$$

11 ㉔ $-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} ([x] + a)^2 = (1 + a)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} ([x] + a)^2 = a^2$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 이어야 하

므로 $(1 + a)^2 = a^2$

$$2a + 1 = 0 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

11-1 ㉔③

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} ([x]^2 + a[x]) = 2^2 + a \times 2 = 2a + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} ([x]^2 + a[x]) = 1^2 + a \times 1 = a + 1$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 이므로 $2a + 4 = a + 1$

$$\therefore a = -3$$

12 ㉔⑤

$f(x) + 2g(x) = h(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 7 \text{이고 } g(x) = \frac{h(x) - f(x)}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow a} g(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - f(x)}{2} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} h(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(x)}{2} \\ &= \frac{7 - 3}{2} = 2 \end{aligned}$$

12-1 ㉔⑤

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\} = 5 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 5 \quad \therefore L + M = 5 \quad \dots\dots ㉔$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = 6 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 6 \quad \therefore LM = 6 \quad \dots\dots ㉔$$

㉔, ㉔에서 $L = 2, M = 3$ ($\because L < M$)

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x) + 1}{2g(x) - 5} &= \frac{3 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 1}{2 \lim_{x \rightarrow 1} g(x) - 5} = \frac{3L + 1}{2M - 5} \\ &= \frac{3 \times 2 + 1}{2 \times 3 - 5} = 7 \end{aligned}$$

13 ㉔8

$3f(x) - 2g(x) = h(x)$ 라 하면 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 3} \frac{h(x)}{f(x)} = 0 \text{이고 } g(x) = \frac{3f(x) - h(x)}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x) - 4g(x)}{f(x) - g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4f(x) + 2h(x)}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-8f(x) + 4h(x)}{-f(x) + h(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-8 + 4 \times \frac{h(x)}{f(x)}}{-1 + \frac{h(x)}{f(x)}} \\ &= \frac{-8 + 4 \times 0}{-1 + 0} = 8 \end{aligned}$$

13-1 ㉔2

$f(x) - 2g(x) = h(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 2, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{f(x)} = 0 \text{이고 } g(x) = \frac{f(x) - h(x)}{2}$$

..... ㉔

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + 2g(x)}{-2f(x) + 6g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + f(x) - h(x)}{-2f(x) + 3\{f(x) - h(x)\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x) - h(x)}{f(x) - 3h(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{h(x)}{f(x)}}{1 - 3 \times \frac{h(x)}{f(x)}} \\ &= \frac{2 - 0}{1 - 3 \times 0} = 2 \end{aligned}$$

..... ㉔

채점 기준	비율
㉔ $f(x) - 2g(x) = h(x)$ 라 하고 $g(x)$ 를 $f(x), h(x)$ 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
㉔ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + 2g(x)}{-2f(x) + 6g(x)}$ 의 값을 구할 수 있다.	60%

14 ㉔ $-\frac{4}{5}$

구하는 식의 분모, 분자를 $\{f(x)\}^2$ 으로 각각 나누면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\{f(x)\}^2 - g(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \frac{g(x)}{\{f(x)\}^2}}{\frac{g(x)}{\{f(x)\}^2}} \\ &= \frac{1 - 5}{5} = -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

14-1 ㉔ $-\frac{5}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(x)}{x} + 2 \right\} = 0 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = -2$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5f(x)+1}{2f(x)-3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5 \times \frac{f(x)}{x} + \frac{1}{x}}{2 \times \frac{f(x)}{x} - \frac{3}{x}} \\ &= \frac{-5 \times (-2) + 0}{2 \times (-2) - 0} = -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

15 ㉠ 0

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = 1 \times 0 = 0 \quad \cdots \cdots ① \\ \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = -1 \times 0 = 0 \quad \cdots \cdots ② \\ \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) &= 0 \quad \cdots \cdots ③\end{aligned}$$

채점 기준	비율
① 함수 $f(x)g(x)$ 의 $x=1$ 에서의 우극한을 구할 수 있다.	40%
② 함수 $f(x)g(x)$ 의 $x=1$ 에서의 좌극한을 구할 수 있다.	40%
③ 함수 $f(x)g(x)$ 의 $x=1$ 에서의 극한값을 구할 수 있다.	20%

15-1 ㉠ -1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)+g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) \\ &= 1 + (-1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)+g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \\ &= -1 + 1 = 0 \\ \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+g(x)\} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = 1 \times (-1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = -1 \times 1 = -1 \\ \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) &= -1 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+g(x)\} + \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) &= 0 + (-1) = -1\end{aligned}$$

16 ㉠ $\frac{1}{6}$

$x-2=t$ 라 하면 $x=t+2$ 이고, $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x^3-8} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{(t+2)^3-8} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t^3+6t^2+12t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(t)}{t} \times \frac{1}{t^2+6t+12} \right\} \\ &= 2 \times \frac{1}{12} \left(\because \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 2 \right) \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

다른 풀이

$x=t-2$ 라 하면 $x+2=t$ 이고, $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 2$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t-2)}{t-2} = 2 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x-2} = 2 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x^3-8} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x-2)}{x-2} \times \frac{1}{x^2+2x+4} \right\} \\ &= 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

16-1 ㉠ ②

$x-1=t$ 라 하면 $x=t+1$ 이고, $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+4)f(x-1)}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+4)f(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\{(t+1)^2+4\}f(t)}{(t+2)t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{t^2+2t+5}{t+2} \times \frac{f(t)}{t} \right\} \\ &= \frac{5}{2} \times 4 = 10\end{aligned}$$

17 ㉠ $\neg, \perp$

$\neg$. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)-g(x)\}=0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) &= 0 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} g(x)\end{aligned}$$

$\perp$. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)}=\beta$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} g(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ f(x) \times \frac{g(x)}{f(x)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} \\ &= \alpha\beta\end{aligned}$$

즉 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 의 값은 존재한다.

$\sqsubset$. [반례] $f(x)=x+1$ 이라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)} = 0 \text{이지만 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \perp$ 이다.

17-1 ㉠ $\neg, \sqsubset$

$\neg$. $f(x)+g(x)=h(x)$, $f(x)-g(x)=k(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x)=\alpha, \lim_{x \rightarrow a} k(x)=\beta \quad (\alpha, \beta \text{는 상수})$$

$$\text{이때 } f(x) = \frac{h(x)+k(x)}{2} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)+k(x)}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

즉 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값은 존재한다.

$\perp$. [반례] $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty \text{이지만}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$\sqsubset$. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=\alpha$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{kf(x)}=\beta$ (α, β 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ kf(x) \times \frac{g(x)}{kf(x)} \right\} \\ &= k \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{kf(x)} \\ &= k\alpha\beta\end{aligned}$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 의 값은 존재한다.

따라서 옳은 것은 $\neg, \sqsubset$ 이다.

18 ㉠ ②

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x-8}{x^2-x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+4)(x-2)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x+1} \\ &= \frac{6}{3} = 2\end{aligned}$$

18-1 ㉔ ①

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x-2)}{x^2 - x + 1} \\ &= \frac{-1 \times (-3)}{1 + 1 + 1} = 1\end{aligned}$$

19 ㉔ 1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x^6 - 1)}{(x^3 - 1)f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x^3 + 1)(x^3 - 1)}{(x^3 - 1)f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x^3 + 1)}{f(x)} = \frac{10}{f(1)} \\ \therefore \frac{10}{f(1)} &= 10 \text{ 이므로 } f(1) = 1\end{aligned}$$

19-1 ㉔ 1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{(x^2 - 2x)f(x-2)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+4)(x-2)}{x(x-2)f(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{xf(x-2)} \\ &= \frac{3}{f(0)} \\ \therefore \frac{3}{f(0)} &= 3 \text{ 이므로 } f(0) = 1\end{aligned}$$

20 ㉔ -2

$$\begin{aligned}x \rightarrow 0 + \text{이면 } x > 0 \text{ 이므로 } |x| &= x \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{3x + |x|}{|x|} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{3x + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{4x}{x} = 4 \\ x \rightarrow -2 + \text{이면 } x > -2 \text{ 이므로 } |x^2 - 4| &= -(x^2 - 4) \\ \therefore \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{2x + x^2}{|x^2 - 4|} &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x(x+2)}{-(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x}{-x+2} \\ &= \frac{-2}{2+2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 $p=4, q=-\frac{1}{2}$ 이므로

$$pq = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

20-1 ㉔ 1

$$\begin{aligned}x \rightarrow 0 - \text{ 이면 } x < 0 \text{ 이므로 } |x| &= -x \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^3 - 1}{|x| + 1} &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^3 - 1}{-x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{-(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} (-x^2 - x - 1) = -1 \\ x \rightarrow 1 - \text{ 이면 } x < 1 \text{ 이므로 } |x^2 - 1| &= -(x^2 - 1) \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|x^2 - 1|}{x^2 + x} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x+1)(x-1)}{x(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-x+1}{x} = 0\end{aligned}$$

따라서 $p=-1, q=0$ 이므로

$$q-p = 0 - (-1) = 1$$

21 ㉔ 16

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)(\sqrt{x+2} + 2) \\ &= 4 \times 4 \\ &= 16\end{aligned}$$

21-1 ㉔ ⑤

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2}) \\ &= 2 \times 2\sqrt{2} \\ &= 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

22 ㉔ ④

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

22-1 ㉔ 1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x^2} - \sqrt{4-x}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x^2+4}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{4-x})(\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4-x})(\sqrt{x+4} + \sqrt{x^2+4})}{(\sqrt{x+4} - \sqrt{x^2+4})(\sqrt{x+4} + \sqrt{x^2+4})(\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-x^2)(\sqrt{x+4} + \sqrt{x^2+4})}{(x-x^2)(\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4-x}} \\ &= \frac{2+2}{2+2} \\ &= 1\end{aligned}$$

23 ㉔ 24

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)f(x)}{\sqrt{x}-3} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)f(x)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)f(x)(\sqrt{x}+3)}{x-9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} f(x)(\sqrt{x}+3) \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x}+3) \\ &= 4 \times 6 \\ &= 24\end{aligned}$$

23-1 ㉮ ⑤

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)f(x)}{\sqrt{x+3}-2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)f(x)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)f(x)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)f(x)(\sqrt{x+3}+2) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \times \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+3}+2) \\
 &= 2 \times \frac{3}{2} \times 4 \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

24 ㉮ ②

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x+x^2}+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+1} = \frac{2}{1+1} = 1$$

24-1 ㉮ $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}+1}{x+\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

25 ㉮ -4

$x = -t$ 라 하면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-\sqrt{x^2+2x}+3}{\sqrt{4x^2+2}+x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-3t-\sqrt{t^2-2t}+3}{\sqrt{4t^2+2}-t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-3-\sqrt{1-\frac{2}{t}+\frac{3}{t^2}}}{\sqrt{4+\frac{2}{t^2}}-1} \\
 &= \frac{-3-1}{2-1} \\
 &= -4
 \end{aligned}$$

25-1 ㉮ 5

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-1}{3x+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-\frac{1}{x}}{3+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{4}{3+1} = 1 \quad \dots\dots ①$$

$x = -t$ 라 하면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}-x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-8t}{\sqrt{t^2+1}+t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-8}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}+1} \\
 &= \frac{-8}{1+1} = -4 \quad \dots\dots ②
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-1}{3x+\sqrt{x^2+1}} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}-x} \\
 = 1 - (-4) = 5 \quad \dots\dots ③
 \end{aligned}$$

채점 기준	비율
① $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-1}{3x+\sqrt{x^2+1}}$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
② $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}-x}$ 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-1}{3x+\sqrt{x^2+1}} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}-x}$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

26 ㉮ ①

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3-f(x)}{x^3-5x+2f(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-\frac{f(x)}{x^3}}{1-\frac{5}{x^2}+\frac{2f(x)}{x^3}} \\
 &= \frac{3-2}{1-0+2 \times 2} = \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

26-1 ㉮ 3

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2\{f(x)\}^2}{3x^2-f(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2 \times \left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2}{3-\frac{f(x)}{x} \times \frac{1}{x}} \\
 &= \frac{1+2 \times (-2)^2}{3-(-2) \times 0} = 3
 \end{aligned}$$

27 ㉮ ③

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2+2x}-2x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2+2x}-2x)(\sqrt{4x^2+2x}+2x)}{\sqrt{4x^2+2x}+2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{4x^2+2x}+2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{4+\frac{2}{x}}+2} \\
 &= \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

27-1 ㉮ ③

$x = -t$ 라 하면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2-x}+2x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{4t^2+t}-2t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4t^2+t}-2t)(\sqrt{4t^2+t}+2t)}{\sqrt{4t^2+t}+2t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\sqrt{4t^2+t}+2t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{t}}+2} \\
 &= \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

28 ㉮ ④

$x = -t$ 라 하면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-ax}-\sqrt{x^2+ax}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2+at}-\sqrt{t^2-at}) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2+at}-\sqrt{t^2-at})(\sqrt{t^2+at}+\sqrt{t^2-at})}{\sqrt{t^2+at}+\sqrt{t^2-at}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2at}{\sqrt{t^2+at}+\sqrt{t^2-at}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2a}{\sqrt{1+\frac{a}{t}}+\sqrt{1-\frac{a}{t}}} \\
 &= \frac{2a}{1+1} = a \\
 \therefore a &= 4
 \end{aligned}$$

28-1 ㉔ 4

$x = -t$ 라 하면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(-x)}\} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \{\sqrt{f(-t)} - \sqrt{f(t)}\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 + 4t} - \sqrt{t^2 - 4t}) \quad \dots\dots ① \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2 + 4t} - \sqrt{t^2 - 4t})(\sqrt{t^2 + 4t} + \sqrt{t^2 - 4t})}{\sqrt{t^2 + 4t} + \sqrt{t^2 - 4t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{8t}{\sqrt{t^2 + 4t} + \sqrt{t^2 - 4t}} \quad \dots\dots ② \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{8}{\sqrt{1 + \frac{4}{t}} + \sqrt{1 - \frac{4}{t}}} \\ &= \frac{8}{1+1} = 4 \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

채점 기준	비율
① $x = -t$ 로 치환하여 주어진 식을 t 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
② 분모를 1로 생각하고 식을 유리화할 수 있다.	40%
③ 극한값을 구할 수 있다.	20%

29 ㉔ $-\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} \\ &= \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-x+1}-x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2-x+1}-x)(\sqrt{x^2-x+1}+x)}{\sqrt{x^2-x+1}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} \\ &= \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$a+b = \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

29-1 ㉔ ②

$x = -t$ 라 하면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-2x+x}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2+2t}-t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2+2t}-t)(\sqrt{t^2+2t}+t)}{\sqrt{t^2+2t}+t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t}{\sqrt{t^2+2t}+t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{t}}+1} \\ &= \frac{2}{1+1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} \\ &= \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

따라서 $a=1, b=\frac{1}{4}$ 이므로

$$a+4b = 1 + 4 \times \frac{1}{4} = 2$$

30 ㉔ ④

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{x+2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{1}{x-2} \times \frac{x-2}{4(x+2)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{4(x+2)} \\ &= \frac{1}{4 \times 4} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

30-1 ㉔ $\frac{5}{9}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left(\frac{x^2}{x+2} - \frac{1}{3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{x-1} \times \frac{3x^2-x-2}{3(x+2)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{x-1} \times \frac{(3x+2)(x-1)}{3(x+2)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+2}{3(x+2)} \\ &= \frac{5}{3 \times 3} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

31 ㉔ ②

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-1}+x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}} \\ &= \frac{-2}{1+1} = -1 \end{aligned}$$

31-1 ㉔ ②

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x+\sqrt{x^2+2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}} \\ &= \frac{-2}{1+1} = -1 \end{aligned}$$

32 ㉔ $-\frac{\sqrt{3}}{18}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{3x+9}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{x+3})(\sqrt{3}+\sqrt{x+3})}{x\sqrt{3x+9}(\sqrt{3}+\sqrt{x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{3x+9}(\sqrt{3}+\sqrt{x+3})} \\ &= \frac{-1}{3(\sqrt{3}+\sqrt{3})} \\ &= -\frac{1}{6\sqrt{3}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{18}\end{aligned}$$

32-1 ㉔ ⑤

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} \times \frac{2-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2-\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})}{2\sqrt{x+1}(x-3)(2+\sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{2\sqrt{x+1}(x-3)(2+\sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{2\sqrt{x+1}(2+\sqrt{x+1})} \\ &= \frac{-1}{2 \times 2 \times 4} = -\frac{1}{16}\end{aligned}$$

33 ㉔ ④

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0 \text{이므로}$$

$$1 + a + b = 0 \quad \therefore b = -a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

㉔을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + ax - a - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+a+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+a+1} \\ &= \frac{2}{a+2}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{2}{a+2} = \frac{1}{3} \text{이므로 } a+2=6 \quad \therefore a=4$$

$$a=4 \text{를 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } b=-5$$

$$\therefore 2a+b=2 \times 4 + (-5)=3$$

33-1 ㉔ $\frac{5}{4}$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - ax + 3) = 0 \text{이므로}$$

$$1 - a + 3 = 0 \quad \therefore a=4$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - a} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4}\end{aligned}$$

34 ㉔ ②

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + ax^2 + bx - 2b) = 0 \text{이므로}$$

$$1 + a + b - 2b = 0 \quad \therefore b = a + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉔을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax^2 + (a+1)x - 2(a+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\{x^2 + (a+1)x + 2(a+1)\}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \{x^2 + (a+1)x + 2(a+1)\} \\ &= 3a + 4\end{aligned}$$

$$\therefore 3a + 4 = 0 \text{이므로 } a = -\frac{4}{3}$$

$$a = -\frac{4}{3} \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore a + b = -\frac{4}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{3}$$

34-1 ㉔ ④

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + ax^2 + bx) = 0 \text{이므로}$$

$$1 + a + b = 0 \quad \therefore b = -a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉔을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3 + ax^2 - (a+1)x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x(x-1)(x+a+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x(x+a+1)} \\ &= \frac{1}{a+2}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{a+2} = \frac{1}{3} \text{이므로 } a=1$$

$$a=1 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b=-2$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 + x^2 - 2x \text{이므로}$$

$$f(2) = 8 + 4 - 4 = 8$$

35 ㉔ 3

$x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+a} - b) = 0 \text{이므로}$$

$$\sqrt{3+a} - b = 0 \quad \therefore b = \sqrt{3+a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉔을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{3+a}}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{3+a})(\sqrt{x+a} + \sqrt{3+a})}{(x-3)(\sqrt{x+a} + \sqrt{3+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+a} + \sqrt{3+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{3+a}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3+a}}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{2\sqrt{3+a}} = \frac{1}{6} \text{이므로 } a=6$$

$a=6$ 을 ㉠에 대입하면 $b=3$

$$\therefore a-b=6-3=3$$

35-1 ㉡ 26

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x^2+a}-b)=0 \text{이므로}$$

$$\sqrt{4+a}-b=0 \quad \therefore b=\sqrt{4+a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{4+a}}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{4+a})(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}{(x-2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4+a}}$$

$$\therefore \frac{2}{\sqrt{4+a}} = \frac{2}{5} \text{이므로 } \sqrt{4+a}=5 \quad \therefore a=21 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$a=21 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b=5 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\therefore a+b=21+5=26 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

채점 기준	비율
① b 를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
② a 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ b 의 값을 구할 수 있다.	20%
④ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

36 ㉡ ①

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{2x+a}-\sqrt{x+3})=0 \text{이므로}$$

$$\sqrt{2+a}-2=0 \quad \therefore a=2$$

$a=2$ 를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+3})(\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3})}{(x^2-1)(\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)(\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3})}$$

$$= \frac{1}{2(2+2)} = \frac{1}{8}$$

따라서 $a=2, b=\frac{1}{8}$ 이므로

$$4ab=4 \times 2 \times \frac{1}{8}=1$$

36-1 ㉡ $\frac{5}{6}$

$x \rightarrow -3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -3} (\sqrt{x^2-x-3}+ax)=0 \text{이므로}$$

$$3-3a=0 \quad \therefore a=1$$

$a=1$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2-x-3}+x}{x+3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(\sqrt{x^2-x-3}+x)(\sqrt{x^2-x-3}-x)}{(x+3)(\sqrt{x^2-x-3}-x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-(x+3)}{(x+3)(\sqrt{x^2-x-3}-x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-1}{\sqrt{x^2-x-3}-x}$$

$$= \frac{-1}{3-(-3)} = -\frac{1}{6}$$

따라서 $a=1, b=-\frac{1}{6}$ 이므로

$$a+b=1+\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{6}$$

37 ㉡ 8

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x+b} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+b-a}{ax(x+b)} = \frac{1}{4} \text{에서}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+b-a)=0 \text{이므로}$$

$$b-a=0 \quad \therefore b=a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x+a} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{a(x+a)} = \frac{1}{a^2}$$

$$\therefore \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4} \text{이므로 } a^2=4$$

$$\therefore a=2 \quad (\because a>0)$$

$a=2$ 를 ㉠에 대입하면 $b=2$

$$\therefore a^2+b^2=2^2+2^2=8$$

37-1 ㉡ ①

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{b} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x-a+b}{b(x-3)(x+a)} = -\frac{1}{4} \text{에서}$$

$x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (-x-a+b)=0 \text{이므로}$$

$$-3-a+b=0 \quad \therefore b=a+3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{a+3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{(a+3)(x-3)(x+a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(a+3)(x+a)}$$

$$= -\frac{1}{(a+3)^2}$$

$$\therefore -\frac{1}{(a+3)^2} = -\frac{1}{4} \text{이므로 } (a+3)^2=4$$

$$a^2+6a+5=0, (a+1)(a+5)=0$$

$$\therefore a=-5 \text{ 또는 } a=-1$$

이 값을 ㉠에 각각 대입하면 $b=-2$ 또는 $b=2$

그런데 $b>0$ 이므로 $a=-1, b=2$

$$\therefore a+b=-1+2=1$$

38 ㉮ 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + x - 6} = 2 \text{ 이므로}$$

$$a = 2 \quad \dots\dots ①$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + bx + c}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{5} \quad \dots\dots ⑦$$

에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + bx + c) = 0 \text{ 이므로}$$

$$8 + 2b + c = 0 \quad \therefore c = -2b - 8 \quad \dots\dots ②$$

①을 ⑦에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + bx - 2(b+4)}{x^2 + x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x+b+4)(x-2)}{(x+3)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+b+4}{x+3} \\ &= \frac{b+8}{5} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{b+8}{5} = \frac{1}{5} \text{ 이므로 } b = -7$$

$$b = -7 \text{ 을 ②에 대입하면 } c = 6 \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore a + b + c = 2 + (-7) + 6 = 1 \quad \dots\dots ④$$

채점 기준	비율
① a의 값을 구할 수 있다.	20%
② c를 b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
③ b, c의 값을 구할 수 있다.	40%
④ a+b+c의 값을 구할 수 있다.	10%

38-1 ㉮ $\frac{3}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + x} = 1 \text{ 이므로}$$

$$a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + bx + c}{x^2 + x} = 2 \quad \dots\dots ⑦$$

에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + bx + c) = 0 \text{ 이므로 } c = 0$$

$c = 0$ 을 ⑦에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + bx}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+b)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+b}{x+1} = b = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x} \text{ 이므로}$$

$$f(1) = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$$

39 ㉮ 1

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 3x^2}{x} = a$ 에서 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 3이고 일차항의 계수가 a 인 이차함수이므로 $f(x) = 3x^2 + ax + b$ (b 는 상수)라 하자.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + ax + b}{x} = 1 \quad \dots\dots ⑦$$

에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + ax + b) = 0 \text{ 이므로 } b = 0$$

$b = 0$ 을 ⑦에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + ax}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x + a)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (3x + a) \\ &= a = 1 \end{aligned}$$

39-1 ㉮ ①

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 3x^3}{x^2} = 2$ 에서 $f(x)$ 는 삼차항의 계수가 3, 이차항의 계수가 2인 삼차함수이므로 $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하자.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + 2x^2 + ax + b}{x} = 2 \quad \dots\dots ⑦$$

에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (3x^3 + 2x^2 + ax + b) = 0 \text{ 이므로 } b = 0$$

$b = 0$ 을 ⑦에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + 2x^2 + ax}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x^2 + 2x + a)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + 2x + a) \\ &= a = 2 \end{aligned}$$

따라서 $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x$ 이므로

$$f(1) = 3 + 2 + 2 = 7$$

40 ㉮ ⑤

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 - 2} = 2$ 에서 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 2인 이차함수이므로 $f(x) = 2x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하자.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + ax + b}{x-1} = 7 \quad \dots\dots ⑦$$

에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + ax + b) = 0 \text{ 이므로}$$

$$2 + a + b = 0 \quad \therefore b = -a - 2 \quad \dots\dots ②$$

①을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + ax - a - 2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x+a+2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (2x+a+2) \\ &= a + 4 \end{aligned}$$

$$\therefore a + 4 = 7 \text{ 이므로 } a = 3$$

$$a = 3 \text{ 을 ②에 대입하면 } b = -5$$

따라서 $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ 이므로 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(2) = 8 + 6 - 5 = 9$$

Lecture 나머지정리

다항식 $f(x)$ 를 일차식 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지를 R 라 하면
 $\Rightarrow R = f(a)$

40-1 ㉮ 12

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x^2+x+1} = 2$ 에서 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 4인 이차함수

이므로 $f(x) = 4x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하자.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + ax + b}{x-1} = 8 \quad \dots\dots ㉠$$

에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (4x^2 + ax + b) = 0 \text{이므로}$$

$$4 + a + b = 0 \quad \therefore b = -a - 4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + ax - a - 4}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x+a+4)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (4x+a+4) \\ &= a+8 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } a+8=8 \text{이므로 } a=0$$

$$a=0 \text{을 } ㉡ \text{에 대입하면 } b=-4$$

$$\text{따라서 } f(x) = 4x^2 - 4 \text{이므로}$$

$$f(2) = 16 - 4 = 12$$

41 ㉮ 3

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -8$, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 16$ 에서 각각 (분모) $\rightarrow 0$ 이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$f(1) = 0, f(-1) = 0 \text{이므로}$$

$f(x) = (x+1)(x-1)(ax+b)$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하자.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)(ax+b)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(ax+b) \\ &= 2(a+b) \end{aligned}$$

$$\text{즉 } 2(a+b) = -8 \text{이므로 } a+b = -4 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)(ax+b)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x-1)(ax+b) \\ &= -2(-a+b) \end{aligned}$$

$$\text{즉 } -2(-a+b) = 16 \text{이므로 } a-b = 8 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{을 연립하여 풀면 } a=2, b=-6$$

$$\therefore f(x) = (x+1)(x-1)(2x-6)$$

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 의 모든 실근은 $-1, 1, 3$ 이므로 그 합은 $-1+1+3=3$

41-1 ㉮ 6

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ 에서 각각 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값

이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$f(0) = 0, f(1) = 0 \text{이므로}$$

$f(x) = x(x-1)Q(x)$ ($Q(x)$ 는 다항식)라 하자.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)Q(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1)Q(x) \\ &= -Q(0) \end{aligned}$$

$$\text{즉 } -Q(0) = 1 \text{이므로 } Q(0) = -1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)Q(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} xQ(x) \\ &= Q(1) = 1 \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

㉠, ㉡을 만족시키는 다항식 $Q(x)$ 중 차수가 가장 낮은 것은 일차식이므로 $Q(x) = ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$㉠ \text{에서 } b = -1, ㉡ \text{에서 } a + b = 1$$

$$\therefore a = 2, b = -1$$

$$\text{따라서 } g(x) = x(x-1)(2x-1) \text{이므로}$$

$$g(2) = 2 \times 1 \times 3 = 6$$

참고 $Q(x)$ 의 차수가 낮을수록 $f(x)$ 의 차수도 낮다.

42 ㉮ 4

$x > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변에 x 를 곱하면

$$\frac{3x^2}{x^2+x+3} \leq xf(x) \leq \frac{3x^2}{x^2+x+1}$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2+x+3} = 3, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2+x+1} = 3 \text{이므로}$$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = 3$$

42-1 ㉮ 4

$x \neq 0$ 에서 $x^2 > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 x^2 으로 나누면

$$\frac{4x^2-1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{4x^2+2}{x^2}$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-1}{x^2} = 4, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2+2}{x^2} = 4 \text{이므로}$$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$$

43 ㉮ $\frac{1}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-x}{4x^2+1} = \frac{1}{4}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3x}{4x^2} = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{4}$$

43-1 ㉮ 3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-3}{x^2+2x+5} = 2, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x}{x^2+4} = 2 \text{이므로}$$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

44 ㉮ 5

$x \rightarrow 0+$ 이면 $x > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 x 로 나누면

$$\frac{-2x^2+5x}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{2x^2+5x}{x} \quad \dots\dots ㉠$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-2x^2+5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-2x+5) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2x^2+5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} (2x+5) = 5$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = 5 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 5$$

..... ②

채점 기준	비율
① $\frac{f(x)}{x}$ 의 대소 관계를 나타낼 수 있다.	20%
② $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ 의 값을 구할 수 있다.	80%

44-1 ④

(i) $x > 1$ 일 때, $x-1 > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x-1$ 로 나누면

$$\frac{2x^3 - 6x^2 + 4x}{x-1} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{x-1}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x(x-2) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^3 - x^2 - x - 1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - x^2 - x - 1) = -2$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = -2$$

(ii) $x < 1$ 일 때, $x-1 < 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x-1$ 로 나누면

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 1}{x-1} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x}{x-1}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^3 - x^2 - x - 1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 - x^2 - x - 1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x(x-2) = -2$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = -2$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -2$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \text{이므로 } g\left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)\right) = g(2) = 1$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

46 ②

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$f(x)=t$ 라 하면 $x \rightarrow 1+$ 일 때

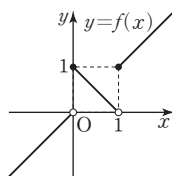
$t \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = 1$$

또 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x)) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) = 1 + 1 = 2$$



47 ④

$$\frac{t}{t-1} = m \text{이라 하면 } m = 1 + \frac{1}{t-1}$$

$t \rightarrow \infty$ 일 때 $m \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{t}{t-1}\right) = \lim_{m \rightarrow 1^+} f(m) = 3$$

$$\frac{-2t+2}{2t+1} = n \text{이라 하면 } n = -1 + \frac{3}{2t+1}$$

$t \rightarrow \infty$ 일 때 $n \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{-2t+2}{2t+1}\right) = \lim_{n \rightarrow -1^+} f(n) = 1$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{t}{t-1}\right) + \lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{-2t+2}{2t+1}\right) = 3 + 1 = 4$$

48 ①

$$\overline{OP} = \sqrt{t^2 + (\sqrt{2t})^2} = \sqrt{t^2 + 2t}, \overline{OH} = t \text{이므로}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\overline{OP} - \overline{OH}) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 + 2t} - t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2 + 2t} - t)(\sqrt{t^2 + 2t} + t)}{\sqrt{t^2 + 2t} + t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t}{\sqrt{t^2 + 2t} + t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{t}} + 1}$$

$$= \frac{2}{1+1} = 1$$

49 ④

두 점 A, B의 좌표는 각각

$$A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{t}\right), B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

$$\text{이므로 } \overline{AB} = 2 - \frac{1}{t}, \overline{AP} = t - \frac{1}{2}$$

..... ①

따라서 점 P가 점 B에 한없이 가까워질 때, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}$ 의 극한값은

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2 - \frac{1}{t}}{t - \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2t - 1}{t - \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2}{t} = 4$$

..... ②

유형+ 완성하기

p. 24

45 ① ㄴ, ㄷ

ㄱ. $g(x)=t$ 라 하면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1$$

ㄴ. $f(x)=t$ 라 하면 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 2-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2^-} g(t) = 1$$

이때 $g(0)=1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(f(x)) = g(0)$

ㄷ. $g(x)=t$ 라 하면 $x \rightarrow 2+$ 일 때 $t \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = 1$$

채점 기준	비율
① AB, AP의 길이를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
② 점 P가 점 B에 한없이 가까워질 때, $\frac{AB}{AP}$ 의 극한값을 구할 수 있다.	50%

50 ㉒ 2

$OA=a, OB=6$ 이므로

$$AB=\sqrt{a^2+36}$$

이때 $\triangle OAB$ 에서 내접원의 반지름의 길이가 r 이므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times a = \frac{1}{2} r (a+6+\sqrt{a^2+36})$$

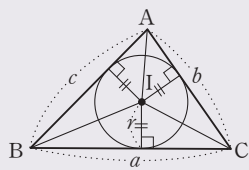
$$\therefore r = \frac{6a}{a+6+\sqrt{a^2+36}}$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{4r}{a} = \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{24}{a+6+\sqrt{a^2+36}} = \frac{24}{6+6} = 2$$

Lecture 삼각형의 넓이와 내접원의 반지름의 길이

삼각형 ABC의 내심을 I, 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB \\ &= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr \\ &= \frac{1}{2}r(a+b+c) \end{aligned}$$



학교 시험 대비 문제

p. 25~28

01 ㉒ $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x+a) = 1+a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (2x^2-a) = 2-a$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 이어야 하므로 $1+a=2-a$

$$2a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

02 ㉒ ④

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄹ. $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

03 ㉒ ②

$a > 2$ 에서 $x \rightarrow 1$ 이면 $x < a$ 이므로 $|x-a| = -(x-a)$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-a|-(a-1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-a)-(a-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x+1}{x-1} = -1 \end{aligned}$$

04 ㉒ 1

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x^2+x+2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (-x-7) = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x+5) = 5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 2 + (-6) + 5 = 1$$

05 ㉒ ③

(가) $x \rightarrow 1$ 이면 $x < 1$ 이므로 $|x^2-1| = -(x^2-1), |x| = x$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|x^2-1|}{|x|-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x^2-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (-(x+1)) = -2 \end{aligned}$$

(나) $-3 < x < -2$ 일 때 $[x] = -3$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow -2-} [x] = -3$

(다) $x \rightarrow 1$ 이면 $x < 1$ 이므로 $|x-1| = -(x-1)$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|x-1|}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (-1) = -1 \end{aligned}$$

$\therefore$ (나) < (가) < (다)

06 ㉒ ③

$0 < x < 1$ 일 때 $1 < x+1 < 2$ 이므로 $[x+1] = 1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{[x+1]}{x+1} = \frac{1}{1} = 1$$

$-1 < x < 0$ 일 때 $0 < x+1 < 1$ 이므로 $[x+1] = 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{[x+1]}{x+1} = \frac{0}{1} = 0$$

따라서 $\alpha = 1, \beta = 0$ 이므로

$$\alpha + \beta = 1 + 0 = 1$$

07 ㉒ ③

$2f(x) - 3g(x) = h(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 7 \text{이고 } g(x) = \frac{2f(x)-h(x)}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow a} g(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x)-h(x)}{3} \\ &= \frac{2 \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} h(x)}{3} \\ &= \frac{2 \times 2 - 7}{3} = -1 \end{aligned}$$

08 ㉒ ⑤

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x) - g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) \\ &= 0 - 2 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x) - g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \\ &= 0 - (-2) = 2 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x) - g(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x) - g(x)\}$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - g(x)\}$ 의 값은 존재하지 않는다.

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \lim_{x \rightarrow 1+} [\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2] &= \left\{ \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \right\}^2 - \left\{ \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) \right\}^2 \\ &= 0 - 2^2 = -4 \\ \lim_{x \rightarrow 1-} [\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2] &= \left\{ \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \right\}^2 - \left\{ \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \right\}^2 \\ &= 0 - (-2)^2 = -4 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} [\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2]$ 의 값은 존재한다.

$$\text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1+} g(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1-} g(x)} = 0$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ 의 값은 존재한다.

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

09 ㉡ 3

$x-1=t$ 라 하면 $x=t+1$ 이고, $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 4 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f(x) - 2x^2 + 6x}{f(x) + 4x^2 + 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \times \frac{f(x)}{x} - 2x + 6}{\frac{f(x)}{x} + 4x + 2} \\ &= \frac{3 \times 4 + 6}{4 + 2} = 3 \end{aligned}$$

10 ㉡ 3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\{f(x)\}^2 - f(x)}{x^2 f(x) - a^2 f(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \{f(x) - 1\}}{(x^2 - a^2) f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 1}{x^2 - a^2} = 3 \end{aligned}$$

11 ㉡ ①

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^3 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x^3 - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x^2 + x + 1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

12 ㉡ $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\log \sqrt{10x+5} - \log \sqrt{x+1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{\sqrt{10x+5}}{\sqrt{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{\sqrt{10 + \frac{5}{x}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \\ &= \log \sqrt{10} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

13 ㉡ ⑤

$f(x) = ax^2 + 2ax$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(-x)}\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{ax^2 + 2ax} - \sqrt{ax^2 - 2ax}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{ax^2 + 2ax} - \sqrt{ax^2 - 2ax})(\sqrt{ax^2 + 2ax} + \sqrt{ax^2 - 2ax})}{\sqrt{ax^2 + 2ax} + \sqrt{ax^2 - 2ax}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4ax}{\sqrt{ax^2 + 2ax} + \sqrt{ax^2 - 2ax}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4a}{\sqrt{a + \frac{2a}{x}} + \sqrt{a - \frac{2a}{x}}} \\ &= \frac{4a}{2\sqrt{a}} = 2\sqrt{a} \end{aligned}$$

즉 $2\sqrt{a} = 8$ 이므로 $\sqrt{a} = 4 \quad \therefore a = 16$

14 ㉡ ⑤

$x = -t$ 라 하면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \right) &= \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \left(1 + \frac{-t}{\sqrt{t^2 + 4}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(t^2 \times \frac{\sqrt{t^2 + 4} - t}{\sqrt{t^2 + 4}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 (\sqrt{t^2 + 4} - t)(\sqrt{t^2 + 4} + t)}{\sqrt{t^2 + 4} (\sqrt{t^2 + 4} + t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t^2}{t^2 + 4 + t\sqrt{t^2 + 4}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4}{1 + \frac{4}{t^2} + \sqrt{1 + \frac{4}{t^2}}} \\ &= \frac{4}{1 + 1} = 2 \end{aligned}$$

15 ㉡ -1

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b) = 0$ 이므로

$$4 + 2a + b = 0 \quad \therefore b = -2a - 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax - 2a - 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + a + 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + a + 2) = a + 4 \end{aligned}$$

즉 $a + 4 = 1$ 이므로 $a = -3$

$a = -3$ 을 ①에 대입하면 $b = 2$

$$\therefore a + b = -3 + 2 = -1$$

16 ㉡ -1

$x = -t$ 라 하면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{ax^2 - bx + 1} + x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{at^2 + bt + 1} - t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{at^2 + bt + 1} - t)(\sqrt{at^2 + bt + 1} + t)}{\sqrt{at^2 + bt + 1} + t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(a - 1)t^2 + bt + 1}{\sqrt{at^2 + bt + 1} + t} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때 ①의 값이 존재하려면 $a - 1 = 0$ 이어야 하므로 $a = 1$

$a=1$ 을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{bt+1}{\sqrt{t^2+bt+1}+t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b+\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{b}{t}+\frac{1}{t^2}}+1} = \frac{b}{2}$$

$$\approx \frac{b}{2}=1 \text{ 이므로 } b=2$$

$$\therefore a-b=1-2=-1$$

17 ㉡ ②

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-6x^2}{2x-3} = a$ 에서 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 6, 일차항의 계수가 $2a$ 인 이차함수이므로 $f(x)=6x^2+2ax+b$ (b 는 상수)라 하자.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2+2ax+b}{x-1} = -2 \quad \dots\dots ㉠$$

에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (6x^2+2ax+b) = 0 \text{ 이므로}$$

$$6+2a+b=0 \quad \therefore b=-2a-6$$

$b=-2a-6$ 을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2+2ax-2a-6}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(3x+a+3)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} 2(3x+a+3) \\ &= 2(a+6) \end{aligned}$$

$$\approx 2(a+6)=-2 \text{ 이므로 } a+6=-1$$

$$\therefore a=-7$$

18 ㉢ 15

최고차항의 계수가 1이고 (가)에서 $f(0)=0$ 이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b 는 상수)라 하자.

(나)에서 $f(1)=-4$ 이므로

$$1+a+b=-4 \quad \therefore a+b=-5 \quad \dots\dots ㉠$$

$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)}{x+3} = a$ 에서 $x \rightarrow -3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\approx \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} (x^3+ax^2+bx) = 0 \text{ 이므로}$$

$$-27+9a-3b=0 \quad \therefore 3a-b=9 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=1, b=-6$$

$$\begin{aligned} \therefore a &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)}{x+3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+x^2-6x}{x+3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(x+3)(x-2)}{x+3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} x(x-2) = 15 \end{aligned}$$

19 ㉣ ④

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{3x} = \frac{2}{3}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+5x}{3x^2} = \frac{2}{3} \text{ 이므로}$$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3}$$

20 ㉤ 1

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$f(x)=t$ 라 하면

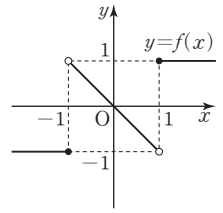
$x \rightarrow 1^-$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1^+} f(t) = 1$$

또 $x \rightarrow 0^+$ 일 때 $t \rightarrow 0^-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) - \lim_{x \rightarrow 0^+} f(f(x)) = 1 - 0 = 1$$



21 ㉥ $1+\sqrt{2}$

점 P가 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점이므로 점 P의 좌표는 $P(x, \sqrt{x})$

$$\therefore \overline{PH} = \sqrt{x}$$

$$\overline{OQ} = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x})^2} = \sqrt{x^2 + x} \text{ 이므로}$$

$$\overline{QH} = \overline{OQ} - \overline{OH} = \sqrt{x^2 + x} - x$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\overline{PH}^2}{\overline{QH}} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(\sqrt{x^2 + x} + x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x^2 + x} + x) = 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

서술형 1 ㉦ 1

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow -1} (bx^2 - 2x - 3) = 0 \text{ 이므로}$$

$$b+2-3=0 \quad \therefore b=1 \quad \dots\dots ㉠ \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + (1-a)x - a}{x^2 - 2x - 3} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-a)}{(x+1)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-a}{x-3} \\ &= \frac{a+1}{4} \end{aligned}$$

$$\approx \frac{a+1}{4} = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } a=1 \quad \dots\dots ㉢$$

$$\therefore ab = 1 \times 1 = 1 \quad \dots\dots ㉣$$

채점 기준	비율
㉡ b의 값을 구할 수 있다.	40%
㉢ a의 값을 구할 수 있다.	40%
㉣ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 2 ㉧ 33

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{f(x)} = \frac{1}{3}$ 에서 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 3인 이차함수이므로

로 $f(x)=3x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)라 하자. ㉠

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2+ax+b}{x+1} = 2 \quad \dots\dots ㉡$$

에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2+ax+b) = 0 \text{ 이므로}$$

$$3-a+b=0 \quad \therefore b=a-3$$

㉔을 ㉔에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2+ax+a-3}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3x+a-3)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (3x+a-3) \\ &= a-6\end{aligned}$$

즉 $a-6=2$ 이므로 $a=8$

$a=8$ 을 ㉔에 대입하면 $b=5$

따라서 $f(x)=3x^2+8x+5$ 이므로

$$f(2)=12+16+5=33$$

채점 기준	비율
① 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$ 의 식을 세울 수 있다.	30%
② a, b 의 관계식을 구할 수 있다.	20%
③ a, b 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ $f(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 3 ㉔ 5

$$\frac{t-1}{t+2}=m \text{이라 하면 } m=1-\frac{3}{t+2}$$

$t \rightarrow \infty$ 일 때 $m \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{t-1}{t+2}\right) = \lim_{m \rightarrow 1} f(m) = 2 \quad \dots\dots ①$$

$$\frac{4t-7}{t+1}=n \text{이라 하면 } n=4-\frac{11}{t+1}$$

$t \rightarrow -\infty$ 일 때 $n \rightarrow 4$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f\left(\frac{4t-7}{t+1}\right) = \lim_{n \rightarrow 4} f(n) = 3 \quad \dots\dots ②$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{t-1}{t+2}\right) + \lim_{t \rightarrow -\infty} f\left(\frac{4t-7}{t+1}\right) = 2+3=5 \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① $\lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{t-1}{t+2}\right)$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
② $\lim_{t \rightarrow -\infty} f\left(\frac{4t-7}{t+1}\right)$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $\lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{t-1}{t+2}\right) + \lim_{t \rightarrow -\infty} f\left(\frac{4t-7}{t+1}\right)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

10% 핵심 기출 문제

p. 29~30

01 ㉔ 5

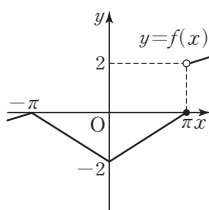
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \left(\frac{x}{\pi} + 1\right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(\left|\frac{2}{\pi}x\right| - 2\right) = 0$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

$$\therefore a=\pi$$



02 ㉔ 5

(i) $x \rightarrow 5^-$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 1에서 4까지의 자연수 중에서 홀수의 개수이므로 $f(x)=2$

이때 $x > 2f(x)=4$ 이므로

$$g(x)=1+f(x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 5^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \{1+f(x)\} = 1+2=3$$

(ii) $x \rightarrow 5^+$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 1에서 5까지의 자연수 중에서 홀수의 개수이므로 $f(x)=3$

이때 $x < 2f(x)=6$ 이므로

$$g(x)=1-f(x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 5^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \{1-f(x)\} = 1-3=-2$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 5^-} g(x) - \lim_{x \rightarrow 5^+} g(x) = 3 - (-2) = 5$$

03 ㉔ 4

$f(x)=t$ 라 하면 $x \rightarrow -\frac{3}{2}^+$ 일 때 $t \rightarrow -1^+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow -1^+} (t^2 - t - k) = 2 - k$$

또 $x \rightarrow -\frac{3}{2}^-$ 일 때 $t \rightarrow -1^-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow -1^-} (2t+2) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} f(f(x))$ 의 값이 존재하려면

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^+} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^-} f(f(x)) \text{이어야 하므로}$$

$$2-k=0 \quad \therefore k=2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -2} f(t) = \lim_{t \rightarrow -2} (2t+2) = -2$$

참고 $f(x)=t$ 라 하면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow -20$ 이다.

04 ㉔ 3

$1 < x < 2$ 일 때 $[x]=1, \langle x \rangle = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} ([x]-2)^{\langle x \rangle} = (1-2)^2 = 1$$

$0 < x < 1$ 일 때 $[x]=0, \langle x \rangle = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} ([x]+2)^{\langle x \rangle} = (0+2)^1 = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} ([x]-2)^{\langle x \rangle} + \lim_{x \rightarrow 1^-} ([x]+2)^{\langle x \rangle} = 1+2=3$$

05 ㉔ 3

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ (a 는 상수), $x=-t$ 라 하면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(-t)}{-t} = a$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(-t)}{t} = -a$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-f(x)}+f(x)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2t-1}{\sqrt{t^2-f(-t)}+f(-t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2-\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{f(-t)}{t}} \times \frac{1}{t} + \frac{f(-t)}{t}} \\ &= \frac{-2}{1-a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{즉 } \frac{-2}{1-a}=1 \text{ 이므로 } 1-a=-2 \\ &\therefore a=3 \end{aligned}$$

06 ㉡ ①

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-2x}{x-1}$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} \{g(x)-2x\}=0 \text{ 이므로}$$

$$g(1)=2$$

.....㉠

$$f(x)+x-1=(x-1)g(x) \text{에서}$$

$$f(x)=(x-1)g(x)-(x-1)=(x-1)\{g(x)-1\}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\{g(x)-1\}g(x)}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\{g(x)-1\}g(x)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{g(x)-1\}g(x)}{x+1} \\ &= \frac{\{g(1)-1\}g(1)}{2} \\ &= \frac{(2-1) \times 2}{2} \quad (\because \text{㉠}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

07 ㉡ ①

$f(x)=x^3+2x^2-x-2=(x+2)(x+1)(x-1)$ 이므로
방정식 $f(x)=0$ 의 세 근은 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a}=p$ 에서 $x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)=0 \text{ 이므로 } f(a)=0$$

.....㉡

$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{x-b}=q$ 에서 $x \rightarrow b$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x)=0 \text{ 이므로 } f(b)=0$$

.....㉢

$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{x-c}=r$ 에서 $x \rightarrow c$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)=0 \text{ 이므로 } f(c)=0$$

.....㉣

㉠, ㉡, ㉢에서 a, b, c 는 방정식 $f(x)=0$ 의 세 근이고 $a < b < c$ 이므로

$$a=-2, b=-1, c=1$$

따라서

$$\begin{aligned} p &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (x+1)(x-1) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x+2)(x-1) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+2)(x+1) = 6 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } pqr = 3 \times (-2) \times 6 = -36$$

08 ㉡ 60

(가)에서 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-5x}{x^2-4}$ 의 값이 존재하므로
 $a=-2, a=2$ 에서 극한값이 존재해야 한다.

(i) $a=-2$ 에서 극한값이 존재하려면

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \{f(x)-5x\}=0 \text{ 이므로}$$

$$f(-2)+10=0 \quad \therefore f(-2)=-10$$

(ii) $a=2$ 에서 극한값이 존재하려면

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-5x\}=0 \text{ 이므로}$$

$$f(2)-10=0 \quad \therefore f(2)=10$$

방정식 $f(x)-5x=0$ 의 두 근이 $x=-2$ 또는 $x=2$ 이고 $f(x)$ 가 다항함수이므로

$$f(x)-5x=(x+2)(x-2)g(x) \quad (g(x) \text{는 다항식}) \text{라 하자.}$$

(나)에서

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{f(x)}-3x+1) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{\sqrt{f(x)}-(3x-1)\}\{\sqrt{f(x)}+(3x-1)\}}{\sqrt{f(x)}+(3x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-(3x-1)^2}{\sqrt{f(x)}+3x-1} \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

㉠의 값이 존재하므로 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 9인 이차함수이다.

따라서 $f(x)-5x=9(x+2)(x-2)$ 이므로

$$f(x)=9(x+2)(x-2)+5x$$

$$\therefore f(3)=9 \times 5 \times 1 + 15 = 60$$

09 ㉡ 21

(가)에서 주어진 식의 각 변을 x^2 으로 나누면

$$\frac{2x^2-5x}{x^2} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{2x^2+2}{x^2}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-5x}{x^2}=2, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+2}{x^2}=2$ 이므로 함수의 극한의

대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}=2$$

즉 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 2인 이차함수이다.

(나)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=0 \text{ 이므로 } f(1)=0$$

$$f(x)=2(x-1)(x+a) \quad (a \text{는 상수}) \text{라 하고}$$

$f(x)$ 의 식을 (나)에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x+a)}{x^2+2x-3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x+a)}{(x+3)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x+a)}{x+3} \\ &= \frac{2(1+a)}{4} \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{2(1+a)}{4} = \frac{1}{4} \text{ 이므로 } 1+a = \frac{1}{2}$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

따라서 $f(x)=2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x-1)(2x-1)$ 이므로

$$f(4)=3 \times 7 = 21$$

다른 풀이

$f(x)$ 가 이차함의 계수가 2인 이차함수이므로

$f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)라 하자.

(나)에서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2+ax+b) = 0$ 이므로

$$2+a+b=0 \quad \therefore b=-a-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 (나)에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+ax-a-2}{x^2+2x-3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+a+2)(x-1)}{(x+3)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+a+2}{x+3} \\ &= \frac{a+4}{4} \end{aligned}$$

$$\asymp \frac{a+4}{4} = \frac{1}{4} \text{이므로 } a = -3$$

$a = -3$ 을 ①에 대입하면 $b = 1$

따라서 $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ 이므로

$$f(4) = 32 - 12 + 1 = 21$$

10 ㉡ ④

ㄱ. $f(x)=t$ 라 하면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = -2$$

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0-} g(t) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x))$$

$\asymp \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $f(x)=t$ 라 하면 $x \rightarrow 2+$ 일 때 $t = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} g(f(x)) = g(-1) = 1$$

$x \rightarrow 2-$ 일 때 $t = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} g(f(x)) = g(1) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} g(f(x)) = 1$$

ㄷ. $2k + \frac{1}{x} = t$ 라 하면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 2k +$

이때 $f(x+4) = f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} g\left(f\left(6 + \frac{1}{x}\right)\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} g\left(f\left(2 + \frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 2+} g(f(t)) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} g\left(f\left(8 + \frac{1}{x}\right)\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} g\left(f\left(4 + \frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} g\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} g(f(t)) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^4 g\left(f\left(2k + \frac{1}{x}\right)\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ g\left(f\left(2 + \frac{1}{x}\right)\right) + g\left(f\left(4 + \frac{1}{x}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. + g\left(f\left(6 + \frac{1}{x}\right)\right) + g\left(f\left(8 + \frac{1}{x}\right)\right) \right\} \\ &= 1 + (-2) + 1 + (-2) = -2 \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

11 ㉡ 1

원 O의 방정식은 $x^2 + y^2 = 4$

점 P의 좌표를 t ($0 < t < 2$)라 하면 원 위의 한 점 P의 좌표는

$(t, \sqrt{4-t^2})$

$$\triangle OQP = \frac{1}{2} \times OQ \times PQ = \frac{1}{2} t \sqrt{4-t^2}$$

$$\overline{PA} = \sqrt{\overline{QA}^2 + \overline{PQ}^2} = \sqrt{(2-t)^2 + (\sqrt{4-t^2})^2} = 2\sqrt{2-t}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{P \rightarrow A} \frac{\overline{PA}}{\triangle OQP} &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{2\sqrt{2-t}}{\frac{1}{2} t \sqrt{4-t^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{4\sqrt{2-t}}{t\sqrt{2+t}\sqrt{2-t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{4}{t\sqrt{2+t}} \\ &= \frac{4}{2 \times 2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

02 함수의 연속

I 함수의 극한
과 연속

개념 완성하기

p.33~34

01 답 ㄱ

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 정의되지 않으므로 $x=1$ 에서 불연속이다.

02 답 ㄴ

$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 가 존재하지 않는다.

03 답 ㄷ

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

04 답 연속

(i) $x=2$ 에서의 함수값은 $f(2) = -1$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (-x+1) = -1$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

05 답 불연속

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 정의되지 않으므로 $x=2$ 에서 불연속이다.

06 답 불연속

(i) $x=2$ 에서의 함수값은 $f(2) = 1$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

07 답 연속

(i) $x=2$ 에서의 함수값은 $f(2) = 4 - 2 = 2$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2 - 2) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (4 - x) = 2$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

08 답 $[-2, 1]$

09 답 $[0, 5]$

10 답 $(1, 3]$

11 답 $(-5, 2)$

12 답 $(-\infty, 4]$

13 답 $(6, \infty)$

14 답 $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

$x-1 \neq 0$ 에서 $x \neq 1$

즉 함수 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ 의 정의역은 구간 $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ 이다.

15 답 $(-\infty, \infty)$

함수 $f(x) = 3x^2 + x$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 열린구간 $(-\infty, \infty)$ 이다.

16 답 $(-\infty, \frac{5}{2}]$

$5 - 2x \geq 0$ 에서 $x \leq \frac{5}{2}$

즉 함수 $f(x) = \sqrt{5-2x}$ 의 정의역은 구간 $(-\infty, \frac{5}{2}]$ 이다.

17 답 $[-3, 3]$

$9 - x^2 \geq 0$ 에서 $-3 \leq x \leq 3$

즉 함수 $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ 의 정의역은 닫힌구간 $[-3, 3]$ 이다.

18 답 $(-\infty, \infty)$

함수 $f(x) = -1$ 은 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수 $f(x)$ 가 연속인 구간은 열린구간 $(-\infty, \infty)$ 이다.

19 답 $(-\infty, \infty)$

함수 $f(x) = 2x$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수 $f(x)$ 가 연속인 구간은 열린구간 $(-\infty, \infty)$ 이다.

20 답 $[2, \infty)$

$x-2 \geq 0$ 에서 $x \geq 2$

즉 함수 $f(x) = \sqrt{x-2}$ 는 $x \geq 2$ 에서 연속이므로 함수 $f(x)$ 가 연속인 구간은 $[2, \infty)$ 이다.

21 답 $(-\infty, -4), (-4, \infty)$

$x+4 \neq 0$ 에서 $x \neq -4$

즉 함수 $f(x) = \frac{x}{x+4}$ 는 $x \neq -4$ 인 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수 $f(x)$ 가 연속인 구간은 열린구간 $(-\infty, -4), (-4, \infty)$ 이다.

22 답 $(-\infty, \infty)$

두 함수 $f(x), g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수 $f(x) + g(x)$ 도 모든 실수, 즉 열린구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다.

23 답 $(-\infty, \infty)$

두 함수 $f(x), g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 도 모든 실수, 즉 열린구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다.

24 답 $(-\infty, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \infty)$

$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2-4}{4x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{2(2x-1)}$

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 $2x-1 \neq 0$, 즉 $x \neq \frac{1}{2}$ 인 모든 실수 x 에서 연속이므로

로 열린구간 $(-\infty, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \infty)$ 에서 연속이다.

25 $(-\infty, -2), (-2, 2), (2, \infty)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x-2}{x^2-4} = \frac{2(2x-1)}{(x+2)(x-2)}$$

함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $(x+2)(x-2) \neq 0$, 즉 $x \neq -2, x \neq 2$ 인 모든 실수 x 에서 연속이므로 열린구간 $(-\infty, -2), (-2, 2), (2, \infty)$ 에서 연속이다.

26 $(-\infty, \infty)$

두 함수 $3f(x), 2g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수 $3f(x)-2g(x)$ 도 모든 실수, 즉 열린구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다.

27 $(-\infty, -1), (-1, 2), (2, \infty)$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)} &= \frac{(3x^2-1)+(3x+5)}{(3x^2-1)-(3x+5)} = \frac{3x^2+3x+4}{3x^2-3x-6} \\ &= \frac{3x^2+3x+4}{3(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

함수 $\frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}$ 는 $(x+1)(x-2) \neq 0$, 즉 $x \neq -1, x \neq 2$ 인 모든 실수에서 연속이므로 열린구간 $(-\infty, -1), (-1, 2), (2, \infty)$ 에서 연속이다.

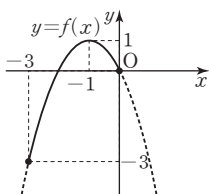
28 최댓값: 1, 최솟값: -3

$f(x) = -x^2 - 2x = -(x+1)^2 + 1$
함수 $f(x) = -x^2 - 2x$ 는 닫힌구간 $[-3, 0]$ 에서 연속이고 이 구간에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x = -1$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(-1) = 1$

$x = -3$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(-3) = -3$



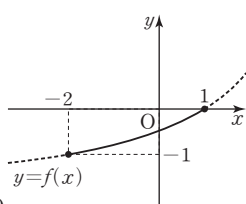
29 최댓값: 0, 최솟값: -1

함수 $f(x) = 1 - \sqrt{-x+2}$ 는 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 연속이고 이 구간에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x = 1$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(1) = 0$

$x = -2$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(-2) = -1$



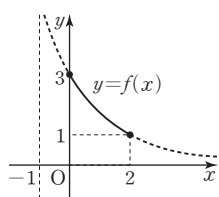
30 최댓값: 3, 최솟값: 1

함수 $f(x) = \frac{3}{x+1}$ 은 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 이 구간에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x = 0$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(0) = 3$

$x = 2$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(2) = 1$



31 (가) $\neq$ (나) 사잇값

32 (가) 연속 (나) $>$ (다) $<$

33 풀이 참조

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 2$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 $f(-1) = -1 < 0, f(1) = 1 > 0$

따라서 $f(-1)f(1) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식

$f(x) = 0$, 즉 $x^3 + 2x^2 - 2 = 0$ 은 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

34 풀이 참조

$f(x) = x^4 + 3x^3 + x - 3$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 $f(-1) = -6 < 0, f(1) = 2 > 0$

따라서 $f(-1)f(1) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식

$f(x) = 0$, 즉 $x^4 + 3x^3 + x - 3 = 0$ 은 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

유형 완성하기

p.35~46

01 ①

① $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

② 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 정의되지 않으므로 $x=0$ 에서 불연속이다.

③ $f(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x) = 0 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

④ 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 정의되지 않으므로 $x=0$ 에서 불연속이다.

⑤ 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 정의되지 않으므로 $x=0$ 에서 불연속이다. 따라서 $x=0$ 에서 연속인 함수는 ①이다.

01-1 ③

① $0 < x < 1$ 일 때, $f(x) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} [x] = 0$

$-1 < x < 0$ 일 때, $f(x) = -1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0-} [x] = -1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

② $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

③ $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x^2 = 0, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x) = 0$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

④ 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 정의되지 않으므로 $x=0$ 에서 불연속이다.

⑤ $f(0)=0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x-2) = -2\end{aligned}$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

따라서 $x=0$ 에서 연속인 함수는 ③이다.

02 ㉔ ⑤

① $f(1) = |1-1| = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x+1) = 0$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

② $f(1) = 4-1=3$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (4x-1) = 3$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

③ $f(1) = 1-1=0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2-1) = 0$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

④ $f(1) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = 1$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

⑤ 함수 $f(x)$ 가 $x^2-1=0$, 즉 $x=-1$, $x=1$ 에서 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

따라서 $x=1$ 에서 불연속인 함수는 ⑤이다.

02-1 ㉔ ㄱ, ㄷ

ㄱ. $f(2)=0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4\end{aligned}$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

ㄴ. $f(2) = |2-2| = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x-2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (-x+2) = 0$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} \sqrt{x-2} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} x = 2$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

따라서 $x=2$ 에서 불연속인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

03 ㉔ -2

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \text{이므로}$$

$$a-4 = a^2-3a, a^2-4a+4=0$$

$$(a-2)^2=0 \quad \therefore a=2$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -2$ 이므로 $f(2) = -2$

03-1 ㉔ 4

함수 $f(x) = \frac{g(x)}{3x^2+1}$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{3x^2+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2+1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)}{4} = f(1) \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4f(1) = 4 \times 1 = 4$$

04 ㉔ ㄷ

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 2$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x=1$, $x=2$ 에서 불연속이므로 불연속인 점의 개수는 2이다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

참고 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다. 즉 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

04-1 ㉔ ①

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

즉 함수 $f(x)$ 의 $x=1$ 에서의 극한값은 존재한다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2, f(1) = 1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

ㄹ. 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이므로 불연속인 점의 개수는 1이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

05 ㉔ 3

$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극한값이 존재하지 않는다.

$\therefore m=1$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1), \lim_{x \rightarrow 5} f(x) \neq f(5)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$,

..... ①

$x=5$ 에서 극한값과 함수값이 다르다.

$$\therefore n=2 \quad \dots\dots ②$$

$$\therefore m+n=1+2=3 \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① m 의 값을 구할 수 있다.	40%
② n 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $m+n$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

05-1 답 -1

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)=0, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)=2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

$$\therefore m=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)=-1 \text{이므로 } n=-1$$

$$\therefore mn=1 \times (-1)=-1$$

06 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=f(0), \lim_{x \rightarrow 0} g(x)=g(0)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \\ = f(0) + g(0)$$

$$\text{ㄴ. } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \times 2 = 0$$

$$\text{ㄷ. } f(3)g(3) = 1 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 3+} g(x) = 1 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 3-} g(x) = \frac{3}{2} \times 0 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x)g(x) = 0$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)g(x) = f(3)g(3)$ 이므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

06-1 답 ㄱ, ㄷ

$$\text{ㄱ. } f(0)+g(0)=0+(-1)=-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)+g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) \\ = 0 + (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)+g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) \\ = 0 + (-1) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+g(x)\} = -1$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+g(x)\} = f(0)+g(0)$ 이므로 함수 $f(x)+g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\text{ㄴ. } f(1)-g(1)=0-1=-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)-g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = 1-1=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)-g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = 1-1=0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-g(x)\} = 0$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-g(x)\} \neq f(1)-g(1)$ 이므로 함수 $f(x)-g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

$$\text{ㄷ. } f(2)g(2)=0 \times (-1)=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2+} g(x) = 0 \times 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2-} g(x) = 0 \times (-1) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) = 0$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) = f(2)g(2)$ 이므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

07 답 ㄱ, ㄷ

$$\text{ㄱ. } \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)+g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) \\ = 1 + (-1) = 0$$

$$\text{ㄴ. } x-1=t \text{라 하면 } x \rightarrow 1+ \text{일 때 } t \rightarrow 0+ \text{이고,}$$

$$x \rightarrow 1- \text{일 때 } t \rightarrow 0- \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x-1) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x-1) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x-1) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x-1)$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x-1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x-1)$ 은 $x=1$ 에서 불연속이다.

$$\text{ㄷ. } f(0)g(0+1) = f(0)g(1) = 0 \times 0 = 0$$

$$x+1=t \text{라 하면 } x \rightarrow 0+ \text{일 때 } t \rightarrow 1+ \text{이고,}$$

$$x \rightarrow 0- \text{일 때 } t \rightarrow 1- \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0+} g(x+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \times \lim_{t \rightarrow 1+} g(t)$$

$$= 0 \times (-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0-} g(x+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \times \lim_{t \rightarrow 1-} g(t)$$

$$= -1 \times 0 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x+1) = 0$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x+1) = f(0)g(1)$ 이므로 함수 $f(x)g(x+1)$ 은 $x=0$ 에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

07-1 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$$\text{ㄱ. } \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)=1, f(-1)=1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = f(-1)$$

$$\text{ㄴ. } x-3=t \text{라 하면 } x \rightarrow 2+ \text{일 때 } t \rightarrow -1+ \text{이고,}$$

$$x \rightarrow 2- \text{일 때 } t \rightarrow -1- \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)f(x-3) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2+} f(x-3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \times \lim_{t \rightarrow -1+} f(t)$$

$$= -2 \times 1 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)f(x-3) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2-} f(x-3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \times \lim_{t \rightarrow -1-} f(t)$$

$$= 2 \times (-1) = -2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x)f(x-3) = -2$$

$$\text{ㄷ. } f(2)f(2-2) = f(2)f(0) = 1 \times 0 = 0$$

$$x-2=t \text{라 하면 } x \rightarrow 2+ \text{일 때 } t \rightarrow 0+ \text{이고,}$$

$$x \rightarrow 2- \text{일 때 } t \rightarrow 0- \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)f(x-2) &= \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2+} f(x-2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \times \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) \\ &= -2 \times 0 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)f(x-2) &= \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2-} f(x-2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \times \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) \\ &= 2 \times 0 = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x)f(x-2) = 0$$

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)f(x-2) = f(2)f(0) \text{ 이므로 함수 } f(x)f(x-2)$$

는 $x=2$ 에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

08 ㉡ ㄴ, ㄷ

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 2$$

ㄴ. $f(x)=t$ 라 하면 $x \rightarrow 2+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} g(t) = 1$$

$$\text{ㄷ. } f(g(2)) = f(2) = 1$$

$g(x)=t$ 라 하면 $x \rightarrow 2+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이고,

$x \rightarrow 2-$ 일 때 $t \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(g(x)) = 1$$

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} f(g(x)) = f(g(2)) \text{ 이므로 함수 } y=f(g(x)) \text{ 는 } x=2$$

에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

08-1 ㉡ ⑤

$$\textcircled{1} f(f(1)) = f(0) = 0$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

$$\textcircled{3} f(x)=t \text{라 하면 } x \rightarrow 1 \text{일 때 } t \rightarrow -1+ \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} f(t) = 1$$

$$\textcircled{4} f(f(0)) = f(0) = 0$$

$f(x)=t$ 라 하면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(f(x)) = f(0) = 0$$

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 0} f(f(x)) = f(f(0)) \text{ 이므로 함수 } y=f(f(x)) \text{ 는 } x=0$$

에서 연속이다.

$$\textcircled{5} f(f(1)) = f(0) = 0$$

$f(x)=t$ 라 하면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} f(t) = 1$$

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} f(f(x)) \neq f(f(1)) \text{ 이므로 함수 } y=f(f(x)) \text{ 는 } x=1$$

에서 불연속이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

09 ㉡ ㄱ, ㄷ

$$\neg. f(1)g(1) = -1 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = -1 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = 0 \times 0 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = 0$$

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = f(1)g(1) \text{ 이므로 함수 } f(x)g(x) \text{ 는 } x=1$$

에서 연속이다.

$$\neg. f(g(0)) = f(1) = -1$$

$g(x)=t$ 라 하면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = 0$$

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) \neq f(g(0)) \text{ 이므로 함수 } f(g(x)) \text{ 는 } x=0 \text{에}$$

서 불연속이다.

$$\neg. g(f(-1)) = g(0) = 1$$

$f(x)=t$ 라 하면 $x \rightarrow -1+$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이고,

$x \rightarrow -1-$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0-} g(t) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} g(f(x)) = 1$$

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -1} g(f(x)) = g(f(-1)) \text{ 이므로 함수 } g(f(x)) \text{ 는}$$

$x=-1$ 에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

09-1 ㉡ ②

$$\neg. g(f(1)) = g(1) = 1$$

$f(x)=t$ 라 하면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t=1$ 이고,

$x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = g(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} g(t) = -2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x))$$

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} g(f(x)) \text{의 값이 존재하지 않으므로 함수 } g(f(x)) \text{ 는}$$

$x=1$ 에서 불연속이다.

$$\neg. g(f(-1)) = g(-1) = 1$$

$f(x)=t$ 라 하면 $x \rightarrow -1+$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이고,

$x \rightarrow -1-$ 일 때 $t=-1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} g(t) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} g(f(x)) = g(-1) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} g(f(x)) = 1$$

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -1} g(f(x)) = g(f(-1)) \text{ 이므로 함수 } g(f(x)) \text{ 는}$$

$x=-1$ 에서 연속이다.

$$\neg. f(g(0)) = f(-2) = -1$$

$g(x)=t$ 라 하면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t=-2$ 이고,

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(g(x)) = f(-2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} f(g(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(g(x))$$

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) \text{의 값이 존재하지 않으므로 함수 } f(g(x)) \text{ 는}$$

$x=0$ 에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

10 ㉡ ④

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+a) = a+1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x-1) = 2$$

$$f(1) = a+1$$

$$\text{이므로 } a+1=2 \quad \therefore a=1$$

10-1 ㉡ ③

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=k$ 에서도 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = f(k)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} (x^2-4) = k^2-4$$

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} (x+2) = k+2$$

$$f(k) = k+2$$

$$\text{이므로 } k^2-4=k+2, k^2-k-6=0$$

$$(k+2)(k-3)=0 \quad \therefore k=-2 \text{ 또는 } k=3$$

따라서 실수 k 의 값의 합은

$$-2+3=1$$

11 ㉡ -16

$$f(0) = -2 \text{ 이므로 } b = -2 \quad \dots\dots ㉠$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-3, x=3$ 에서도 연속이다.

(i) $x=-3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = f(-3)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \left(\frac{1}{3}x^2 + b \right) = b+3 = 1 \quad (\because ㉠)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} (cx+7) = -3c+7$$

$$f(-3) = -3c+7$$

$$\text{이므로 } 1 = -3c+7 \quad \therefore c=2$$

(ii) $x=3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x+a) = a-3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{1}{3}x^2 + b \right) = b+3 = 1 \quad (\because ㉠)$$

$$f(3) = a-3$$

$$\text{이므로 } a-3=1 \quad \therefore a=4$$

$$\therefore abc = 4 \times (-2) \times 2 = -16$$

11-1 ㉡ ①

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-k) = 1-k$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x+k) = k-1$$

$$f(1) = a+5$$

$$\text{이므로 } 1-k=k-1=a+5$$

$$1-k=k-1 \text{ 에서 } k=1$$

따라서 $a+5=0$ 이므로 $a=-5$

12 ㉡ 3

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & (|x| \geq 1) \\ x^2+x+2 & (|x| < 1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ax+b & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ x^2+x+2 & (-1 < x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=-1, x=1$ 에서도 연속이다. ㉠

(i) $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2+x+2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax+b) = -a+b$$

$$f(-1) = -a+b$$

$$\text{이므로 } 2 = -a+b \quad \therefore a-b = -2 \quad \dots\dots ㉡$$

(ii) $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax+b) = a+b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+x+2) = 4$$

$$f(1) = a+b$$

$$\text{이므로 } a+b=4 \quad \dots\dots ㉢ \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=3$

$$\therefore ab = 1 \times 3 = 3 \quad \dots\dots ㉢ \quad \dots\dots ㉡$$

채점 기준	비율
① 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속일 조건을 구할 수 있다.	20%
② 함수 $f(x)$ 가 $x=-1, x=1$ 에서 연속일 조건을 구할 수 있다.	50%
③ a, b 의 값을 구할 수 있다.	20%
④ ab 의 값을 구할 수 있다.	10%

12-1 ㉡ -3

함수 $f(x)$ 가 열린구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이므로 $x=-1, x=3$ 에서도 연속이다.

(i) $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x}{2} + b \right) = b - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2+ax-1) = -a$$

$$f(-1) = b - \frac{1}{2}$$

$$\text{이므로 } b - \frac{1}{2} = -a \quad \therefore a+b = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

(ii) $x=3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2+ax-1) = 3a+8$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x}{2} + b \right) = b + \frac{3}{2}$$

$$f(3) = b + \frac{3}{2}$$

$$\text{이므로 } 3a+8=b+\frac{3}{2} \quad \therefore 3a-b=-\frac{13}{2} \quad \dots\dots\textcircled{A}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{을 연립하여 풀면 } a=-\frac{3}{2}, b=2$$

$$\therefore ab=-\frac{3}{2} \times 2 = -3$$

13 ㉡ -2

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=-1$ 에서도 연속이다.
즉 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - ax + 4}{x+1} = b \quad \dots\dots\textcircled{A}$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - ax + 4) = 0 \text{이므로}$$

$$1+a+4=0 \quad \therefore a=-5$$

$a=-5$ 를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$b = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+4)}{x+1} \\ = \lim_{x \rightarrow -1} (x+4) = 3$$

$$\therefore a+b = -5+3 = -2$$

13-1 ㉡ -5

함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x + a}{x-3} = b \quad \dots\dots\textcircled{A}$$

$x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + x + a) = 0 \text{이므로}$$

$$9+3+a=0 \quad \therefore a=-12$$

$a=-12$ 를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$b = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+4)(x-3)}{x-3} \\ = \lim_{x \rightarrow 3} (x+4) = 7$$

$$\therefore a+b = -12+7 = -5$$

14 ㉡ 12

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x^2+8}-bx}{x-1} = 16 \quad \dots\dots\textcircled{A}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x^2+8}-bx) = 0 \text{이므로}$$

$$3a-b=0 \quad \therefore b=3a \quad \dots\dots\textcircled{B}$$

$\textcircled{B}$ 을 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x^2+8}-3ax}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(\sqrt{x^2+8}-3x)}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-8a(x+1)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-8a(x+1)}{\sqrt{x^2+8}+3x} \\ = -\frac{8}{3}a = 16$$

$$\text{이므로 } a=-6$$

$a=-6$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

$$b=3 \times (-6) = -18$$

$$\therefore a-b = -6 - (-18) = 12$$

14-1 ㉡ 3

함수 $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x-a}+b}{x+2} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots\textcircled{A}$$

$x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x-a}+b) = 0 \text{이므로}$$

$$\sqrt{-2-a}+b=0 \quad \therefore b=-\sqrt{-2-a} \quad \dots\dots\textcircled{B}$$

$\textcircled{B}$ 을 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x-a}-\sqrt{-2-a}}{x+2} \\ = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt{x-a}-\sqrt{-2-a})(\sqrt{x-a}+\sqrt{-2-a})}{(x+2)(\sqrt{x-a}+\sqrt{-2-a})} \\ = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x+2)(\sqrt{x-a}+\sqrt{-2-a})} \\ = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{\sqrt{x-a}+\sqrt{-2-a}} \\ = \frac{1}{2\sqrt{-2-a}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{이므로 } \sqrt{-2-a}=1 \quad \therefore a=-3$$

$a=-3$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면 $b=-1$

$$\therefore ab = -3 \times (-1) = 3$$

15 ㉡ 10

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-x^2}{x-1} = 3$ 이므로 $f(x)-x^2$ 은 최고차항의 계수가 3인 일차함수이다.

$f(x)-x^2=3x+a$ (a 는 상수)라 하면

$$f(x)=x^2+3x+a \quad \dots\dots\textcircled{A}$$

또 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-x^2}{x-1} = k \quad \dots\dots\textcircled{B}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-x^2\} = 0 \text{이므로}$$

$$f(1)-1=0 \quad \therefore f(1)=1 \quad \dots\dots\textcircled{C}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } f(1)=1+3+a=1 \text{이므로 } a=-3$$

$$\therefore f(x)=x^2+3x-3$$

$\textcircled{B}$ 에서

$$k = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+3x-3)-x^2}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 3 = 3$$

$$\therefore k+f(2) = 3+(4+6-3) = 10$$

15-1 ㉡ 0

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-3x}{x^2-4} & (|x| \neq 2) \\ \frac{f(x)-3x}{a} & (|x| = 2) \end{cases} = \begin{cases} \frac{f(x)-3x}{x^2-4} & (x \neq -2, x \neq 2) \\ \frac{f(x)-3x}{a} & (x = -2, x = 2) \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-3x}{x^2-4} = 1$ 이므로 $f(x)-3x$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$f(x)-3x = x^2+px+q$ (p, q 는 상수)라 하면

$$f(x) = x^2 + (p+3)x + q$$

이때 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = -2$, $x = 2$ 에서도 연속이다. ①

(i) $x = -2$ 에서 연속

$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = g(-2) \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+px+q}{x^2-4} = a$$

$x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2+px+q) = 0 \text{이므로}$$

$$4-2p+q=0 \quad \therefore 2p-q=4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $x = 2$ 에서 연속

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2) \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+px+q}{x^2-4} = a$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+px+q) = 0 \text{이므로}$$

$$4+2p+q=0 \quad \therefore 2p+q=-4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $p=0, q=-4$

$$\therefore f(x) = x^2 + 3x - 4$$

$$\therefore a = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+px+q}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^2-4} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore f(a) = f(1) = 1 + 3 - 4 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

채점 기준	비율
① 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 구할 수 있다.	20%
② $f(x)$ 와 a 의 값을 구할 수 있다.	60%
③ $f(a)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

16 ㉠ -1

함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = f(1)g(1)$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x+2) \times \lim_{x \rightarrow 1+} (x+k) \\ &= 3(k+1) = 3k+3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} (x+k) \\ &= -1 \times (k+1) = -k-1 \end{aligned}$$

$$f(1)g(1) = 3(k+1) = 3k+3$$

$$\text{이므로 } 3k+3 = -k-1 \quad \therefore k = -1$$

16-1 ㉠ 1

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x = -1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x) = f(-1)g(-1)$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1+} g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} (x+k) \times \lim_{x \rightarrow -1+} (x+7) \\ &= 6(k-1) = 6k-6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1-} g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} (x+k) \times \lim_{x \rightarrow -1-} (-x+1) \\ &= 2(k-1) = 2k-2 \end{aligned}$$

$$f(-1)g(-1) = 6(k-1) = 6k-6$$

$$\text{이므로 } 6k-6 = 2k-2$$

$$\therefore k = 1$$

17 ㉠ -2

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = g(0)$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \{f(x)+k\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)+k\} \\ &= 0 \times (0+k) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \{f(x)+k\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)+k\} \\ &= 2(2+k) = 2k+4 \end{aligned}$$

$$g(0) = f(0) \{f(0)+k\} = 2(2+k) = 2k+4$$

$$\text{이므로 } 0 = 2k+4 \quad \therefore k = -2$$

참고 함수 $y=f(x)$ 가 $x \neq 0$ 인 모든 실수에서 연속이므로 y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하여 얻어진 함수 $y=f(x)+k$ 도 $x \neq 0$ 인 모든 실수에서 연속이다.

17-1 ㉠ -8

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x = -1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x) = f(-1)g(-1)$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1+} g(x) \\ &= 1 \times \lim_{x \rightarrow -1+} (x^2+ax-9) \\ &= -a-8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1-} g(x) \\ &= 4 \times \lim_{x \rightarrow -1-} (x^2+ax-9) \\ &= 4(-a-8) = -4a-32 \end{aligned}$$

$$f(-1)g(-1) = 4(1-a-9) = -4a-32$$

$$\text{이므로 } -a-8 = -4a-32 \quad \therefore a = -8$$

18 ㉠ ②

함수 $g(x) = (x^2+ax+b)f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=0, x=1$ 에서도 연속이다.

(i) $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = g(0)$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} (x^2+ax+b)f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} (x^2+ax+b) \times \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \\ &= b \times \lim_{x \rightarrow 0+} (1-x) \\ &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + ax + b)f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + ax + b) \times \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \\ &= b \times 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$g(0) = bf(0) = b$$

$$\text{이므로 } b = 0$$

.....㉑

(ii) $x=1$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = g(1) \\ \text{이때} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + ax + b)f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + ax + b) \times \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \\ &= (1 + a + b) \times 1 \\ &= a + b + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + ax + b)f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + ax + b) \times \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \\ &= (1 + a + b) \times \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) \\ &= (1 + a + b) \times 0 = 0\end{aligned}$$

$$g(1) = (1 + a + b)f(1) = 0$$

$$\text{이므로 } a + b + 1 = 0$$

.....㉒

㉑을 ㉒에 대입하면

$$a + 1 = 0 \quad \therefore a = -1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-1)^2 + 0^2 = 1$$

18-1 ㉓ 15

함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$, $x=2$ 에서도 연속이다.

.....㉑

이때 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로 $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하자.

(i) $x=0$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)g(x) = f(0)g(0) \\ \text{이때} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + ax + b) \times (-1) \\ &= -b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + ax + b) \times 1 \\ &= b\end{aligned}$$

$$f(0)g(0) = b \times 1 = b$$

$$\text{이므로 } -b = b \quad \therefore b = 0$$

.....㉒

(ii) $x=2$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)g(x) = f(2)g(2) \\ \text{이때} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax + b) \times (-1) \\ &= -2a - b - 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + ax + b) \times 1 \\ &= 2a + b + 4\end{aligned}$$

$$f(2)g(2) = (4 + 2a + b) \times (-1) = -2a - b - 4$$

$$\text{이므로 } -2a - b - 4 = 2a + b + 4$$

$$\therefore 2a + b = -4$$

.....㉓

$$\text{㉑을 ㉓에 대입하면 } 2a = -4 \quad \therefore a = -2$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^2 - 2x \text{이므로}$$

.....㉔

$$f(5) = 25 - 10 = 15$$

.....㉕

채점 기준	비율
① 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 구할 수 있다.	20%
② 함수 $f(x)$ 를 구할 수 있다.	60%
③ $f(5)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

19 ㉖ 6

$$x \neq 2 \text{일 때, } f(x) = \frac{x^2 + ax - 8}{x - 2}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=2$ 에서도 연속이다.

$$\therefore f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax - 8}{x - 2}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax - 8) = 0 \text{이므로}$$

$$4 + 2a - 8 = 0 \quad \therefore a = 2$$

$$\begin{aligned}\therefore f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 4)(x - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 4) = 6\end{aligned}$$

19-1 ㉗ -9

$$x \neq 3 \text{일 때, } f(x) = \frac{x^2 + ax}{x - 3}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=3$ 에서도 연속이다.

$$\therefore f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax}{x - 3}$$

$x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + ax) = 0 \text{이므로}$$

$$9 + 3a = 0 \quad \therefore a = -3$$

$$\therefore f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} x = 3$$

$$\therefore af(3) = -3 \times 3 = -9$$

20 ㉘ 7

$$x \neq -1, x \neq 1 \text{일 때, } f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx - 3}{x^2 - 1}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=-1$, $x=1$ 에서도 연속이다.

(i) $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned}f(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + ax^2 + bx - 3}{x^2 - 1}\end{aligned}$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + ax^2 + bx - 3) = 0 \text{이므로}$$

$$-1 + a - b - 3 = 0 \quad \therefore a - b = 4$$

.....㉑

(ii) $x=1$ 에서 연속이므로

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax^2 + bx - 3}{x^2 - 1}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + ax^2 + bx - 3) = 0 \text{이므로}$$

$$1 + a + b - 3 = 0 \quad \therefore a + b = 2$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=3, b=-1$

$$\therefore f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)(x+3)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 4$$

$$\therefore a + f(1) = 3 + 4 = 7$$

20-1 ㉠ -6

$$x \neq -2, x \neq 2 \text{일 때, } f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 - 4}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=-2, x=2$ 에서도 연속이다.

(i) $x=-2$ 에서 연속이므로

$$f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2)(x-3)}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} (x-3)$$

$$= -5$$

(ii) $x=2$ 에서 연속이므로

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)(x-3)}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x-3)$$

$$= -1$$

(i), (ii)에서

$$f(-2) + f(2) = -5 + (-1) = -6$$

21 ㉠ 7

$$x \neq 1 \text{일 때, } f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x-1}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\therefore f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + bx + 1}{x-1}$$

$$(\text{나}) \text{에서 } f(1) = 2 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + bx + 1}{x-1} = 2 \quad \dots\dots ㉠$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} (ax^2 + bx + 1) = 0 \text{이므로}$$

$$a + b + 1 = 0 \quad \therefore b = -a - 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - (a+1)x + 1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(ax-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (ax-1) \\ &= a-1=2 \end{aligned}$$

이므로 $a=3$

$a=3$ 을 ㉡에 대입하면

$$b = -3 - 1 = -4$$

$$\therefore a - b = 3 - (-4) = 7$$

21-1 ㉠ -4

$$x \neq 2 \text{일 때, } f(x) = \frac{a\sqrt{x-1} + b}{x-2}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=2$ 에서도 연속이다.

$$\therefore f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x-1} + b}{x-2} \quad \dots\dots ㉠$$

$$f(2) = 1 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x-1} + b}{x-2} = 1 \quad \dots\dots ㉡$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} (a\sqrt{x-1} + b) = 0 \text{이므로}$$

$$a + b = 0 \quad \therefore b = -a \quad \dots\dots ㉢$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x-1} - a}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{\sqrt{x-1}+1} \\ &= \frac{a}{2} = 1 \end{aligned}$$

이므로 $a=2$

$$a=2 \text{를 } ㉢ \text{에 대입하면 } b = -2 \quad \dots\dots ㉣$$

$$\therefore ab = 2 \times (-2) = -4 \quad \dots\dots ㉤$$

채점 기준	비율
㉠ 함수 $f(x)$ 가 $x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에서 연속일 조건을 구할 수 있다.	20%
㉡ a, b 의 값을 구할 수 있다.	60%
㉢ ab 의 값을 구할 수 있다.	20%

22 ㉠ ③

ㄱ. 두 함수 $2f(x), g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로

함수 $2f(x) + g(x)$ 도 $x=a$ 에서 연속이다.

ㄴ. 두 함수 $f(x), 3g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로

함수 $f(x) - 3g(x)$ 도 $x=a$ 에서 연속이다.

$$\text{ㄷ. [반례]} g(x) = x - a \text{라 하면 } \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x-a}$$

즉 함수 $\frac{1}{g(x)}$ 은 $x=a$ 에서 정의되지 않으므로 $x=a$ 에서 불연속이다.

$$\text{ㄹ. [반례]} f(x) = x - a - 1 \text{이라 하면 } \frac{f(x)-3}{f(x)+1} = \frac{x-a-4}{x-a}$$

즉 함수 $\frac{f(x)-3}{f(x)+1}$ 은 $x=a$ 에서 정의되지 않으므로 $x=a$ 에서 불연속이다.

ㄹ. $\{g(x)\}^2 + 1 \geq 1$ 이므로 함수 $\frac{2f(x)}{\{g(x)\}^2 + 1}$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.

즉 함수 $\frac{2f(x)}{\{g(x)\}^2 + 1}$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

ㅁ. [반례] $f(x)=x^2, g(x)=x-a$ 라 하면

$$\frac{f(x)+g(x)}{\{g(x)\}^2} = \frac{x^2+x-a}{(x-a)^2}$$

즉 함수 $\frac{f(x)+g(x)}{\{g(x)\}^2}$ 는 $x=a$ 에서 정의되지 않으므로 $x=a$ 에서 불연속이다.

따라서 $x=a$ 에서 항상 연속이라고 할 수 없는 함수는 ㄷ, ㄹ, ㅁ이다.

22-1 ㉠ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ, ㅂ

두 함수 $f(x), g(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다. 즉 연속함수의 성질에 의하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ은 모든 실수 x 에서 연속이다.

$$\text{ㄹ. } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2+3x+4}{x^2-9} = \frac{x^2+3x+4}{(x+3)(x-3)}$$

즉 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $x=-3, x=3$ 에서 정의되지 않으므로 $x=-3, x=3$ 에서 불연속이다.

$$\text{ㅁ. } \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2-9}{x^2+3x+4} = \frac{x^2-9}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}$$

즉 $x^2+3x+4 \geq \frac{7}{4}$ 이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.

$$\text{ㅂ. } g(f(x)) = (x^2+3x+4)^2 - 9$$

즉 함수 $g(f(x))$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다. 따라서 모든 실수 x 에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ, ㅂ이다.

23 ㉠ ㉡

ㄱ. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 연속함수이면 연속함수의 성질에 의하여 함수 $f(x)g(x)$ 도 연속함수이다.

$$\text{ㄴ. } h(x)=f(x)-g(x) \text{라 하면 } g(x)=f(x)-h(x)$$

이때 두 함수 $f(x), h(x)$ 가 연속함수이므로 함수 $g(x)$ 도 연속함수이다.

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}, g(x)=0$ 이라 하면 두 함수 $g(x), f(x)g(x)$ 는 연속함수이지만 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

23-1 ㉠ ㄱ, ㄴ

$$\text{ㄱ. } h(x)=\frac{g(x)}{f(x)} \text{라 하면 } g(x)=f(x)h(x)$$

이때 두 함수 $f(x), h(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로 함수 $g(x)=f(x)h(x)$ 도 $x=1$ 에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이고 $\{f(x)\}^2=f(x)f(x)$ 이므로 함수 $\{f(x)\}^2$ 도 $x=2$ 에서 연속이다.

$$\text{ㄷ. [반례] } f(x)=\begin{cases} 1 & (x \neq a) \\ 0 & (x=a) \end{cases}, g(x)=\begin{cases} 0 & (x \neq a) \\ 1 & (x=a) \end{cases} \text{이라 하면}$$

두 함수 $f(x), g(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이지만

$$f(x)g(x)=\begin{cases} 1 \times 0 & (x \neq a) \\ 0 \times 1 & (x=a) \end{cases}=\begin{cases} 0 & (x \neq a) \\ 0 & (x=a) \end{cases}$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다. 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

24 ㉠ ㉢

$$\text{① } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

② 불연속이 되는 x 의 값은 $-1, 1$ 의 2개이다.

③ 닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 최댓값을 갖지 않는다.

④ 구간 $[0, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최소이고, 최솟값 0을 갖는다.

⑤ $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

24-1 ㉠ ㉢

$$\text{ㄱ. } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $0 < x < 2$ 에서 연속이므로 $0 < a < 2$ 인 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 이다.

ㄷ. 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 최댓값을 갖지 않는다. 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

25 ㉠ 10

$$f(x) = -\frac{2x}{x-1} = -\frac{2}{x-1} - 2$$

함수 $f(x) = -\frac{2x}{x-1}$ 는 닫힌구간

$[2, 5]$ 에서 연속이고 이 구간에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

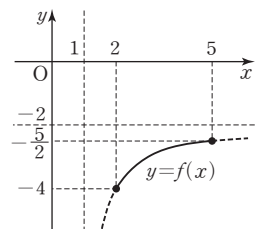
따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=5$ 일 때 최대이고, 최댓값 M 은

$$M = f(5) = -\frac{5}{2}$$

$x=2$ 일 때 최소이고, 최솟값 m 은 $m=f(2)=-4$

$$\therefore Mm = -\frac{5}{2} \times (-4) = 10$$



25-1 ㉠ 6

$$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$$

함수 $f(x)=x^2-2x$ 는 닫힌구간

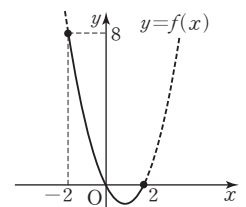
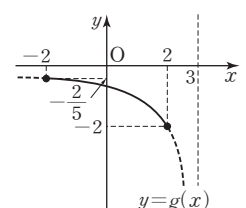
$[-2, 2]$ 에서 연속이고 이 구간에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 일 때 최대이고, 최댓값 M 은 $M=f(-2)=8$

함수 $g(x)=\frac{2}{x-3}$ 는 닫힌구간

$[-2, 2]$ 에서 연속이고 이 구간에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최소이고, 최솟값 m 은



$$m=g(2)=-2$$

$$\therefore M+m=8+(-2)=6$$

26 ㉓ 3

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2 - ax + 1) = -a + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x-3) = -2$$

$$f(1) = 1 - 3 = -2$$

$$\text{이므로 } -a + 2 = -2 \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x-3 & (-2 \leq x \leq 1) \\ x^2 - 4x + 1 & (1 < x \leq 3) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-3 & (-2 \leq x \leq 1) \\ (x-2)^2 - 3 & (1 < x \leq 3) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, 3]$ 에서 연속이고 이 구간에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $f(x)$ 는

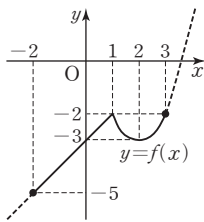
$x=1$ 또는 $x=3$ 일 때 최대이고, 최댓값

$$M = M = f(1) = f(3) = -2$$

$x=-2$ 일 때 최소이고, 최솟값 m 은

$$m = f(-2) = -5$$

$$\therefore M - m = -2 - (-5) = 3$$



채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	40%
② M, m 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $M - m$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

26-1 ㉓ -6

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 연속이므로 $x=-1$ 에서도 연속이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x^2 - 2x - 4) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (x^2 + 4x + a) = a - 3$$

$$f(-1) = 1 - 4 + a = a - 3$$

$$\text{이므로 } -1 = a - 3 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2 & (-3 \leq x \leq -1) \\ x^2 - 2x - 4 & (-1 < x \leq 3) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x+2)^2 - 2 & (-3 \leq x \leq -1) \\ (x-1)^2 - 5 & (-1 < x \leq 3) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 연속이고 이 구간에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉 함수 $f(x)$ 는

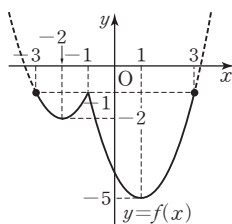
$x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$ 일 때

최대이고, 최댓값은

$$f(-3) = f(-1) = f(3) = -1$$

$x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$f(1) = -5$$



따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$$-1 + (-5) = -6$$

27 ㉓ ②

$f(x) = x^3 + x^2 + x - 2$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고

$$f(-1) = -3 < 0, f(0) = -2 < 0, f(1) = 1 > 0$$

$$f(2) = 12 > 0, f(3) = 37 > 0, f(4) = 82 > 0$$

따라서 $f(0)f(1) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식

$$f(x) = 0 \text{의 실근이 존재하는 구간은 } (0, 1) \text{이다.}$$

27-1 ㉓ ㄱ, ㄴ

함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고

$$f(-2) = 63 > 0, f(-1) = -1 < 0, f(0) = -3 < 0$$

$$f(1) = -3 < 0, f(2) = 59 > 0, f(3) = 723 > 0$$

따라서 $f(-2)f(-1) < 0, f(1)f(2) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근이 존재하는 구간은 ㄱ, ㄴ이다.

28 ㉓ ㄴ, ㄷ

ㄱ. $g(x) = f(x) + 4x$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 $g(0) = f(0) = 2 > 0, g(1) = f(1) + 4 = 4 > 0$

즉 $g(0)g(1) > 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식

$f(x) + 4x = 0$ 의 실근이 열린구간 $(0, 1)$ 에서 존재하는지 알 수 없다.

ㄴ. $g(x) = f(x) - 2x^2$ 이라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고

$$g(0) = f(0) = 2 > 0, g(1) = f(1) - 2 = -2 < 0$$

즉 $g(0)g(1) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식

$f(x) - 2x^2 = 0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $g(x) = f(x) - \frac{1}{x+1}$ 이라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간

$[0, 1]$ 에서 연속이고

$$g(0) = f(0) - 1 = 1 > 0, g(1) = f(1) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

즉 $g(0)g(1) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식

$f(x) - \frac{1}{x+1} = 0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 열린구간 $(0, 1)$ 에서 실근이 반드시 존재하는 방정식은 ㄴ, ㄷ이다.

28-1 ㉓ 4

ㄱ. $f(x) = 3^x - 5x$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 $f(0) = 1 > 0, f(1) = -2 < 0$

즉 $f(0)f(1) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f(x) = \log_2(x+1) - 5x + 3$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 $f(0) = 3 > 0, f(1) = -1 < 0$

즉 $f(0)f(1) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간

$[0, 1]$ 에서 연속이고 $f(0) = 1 > 0, f(1) = -1 < 0$

즉 $f(0)f(1) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $f(x)=x^4-3x^3+7x-1$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간

$[0, 1]$ 에서 연속이고 $f(0)=-1 < 0$, $f(1)=4 > 0$

즉 $f(0)f(1) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는 방정식은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이므로 그 개수는 4이다.

29 ㉡1

$f(x)=x^3-x^2+6ax-2$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고 $f(1)=6a-2$, $f(2)=12a+2$

즉 $f(1)f(2) < 0$ 이어야 하므로 $(6a-2)(12a+2) < 0$

$$(3a-1)(6a+1) < 0 \quad \therefore -\frac{1}{6} < a < \frac{1}{3}$$

따라서 $a=-\frac{1}{6}$, $\beta=\frac{1}{3}$ 이므로

$$6(a+\beta)=6 \times \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) = 1$$

29-1 ㉡0 < a < 3

$f(x)=2x^2-5x+a$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 $f(0)=a$, $f(1)=a-3$

즉 $f(0)f(1) < 0$ 이어야 하므로 $a(a-3) < 0$

$$\therefore 0 < a < 3$$

다른 풀이

$f(x)=2x^2-5x+a$ 라 하면

$$f(x)=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}+a$$

이때 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(0, 1)$ 에서 감소하므로

$f(0)=a > 0$, $f(1)=a-3 < 0$ 이어야 한다.

$$\therefore 0 < a < 3$$

30 ㉡4

함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 닫힌구간 $[-3, 2]$ 에서 연속이다. 이때

$$f(-3)f(-2)=10 > 0, f(-2)f(-1)=-2\sqrt{5} < 0$$

$$f(-1)f(0)=-\sqrt{10} < 0, f(0)f(1)=-7\sqrt{2} < 0$$

$$f(1)f(2)=-21 < 0$$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간

$(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(-3, 2)$ 에서 적어도 4개의 실근을 갖는다.

$$\therefore k=4$$

30-1 ㉡3

함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 연속이다. 이때

$$f(-1)f(0)=-3 < 0, f(0)f(1)=0$$

$$f(1)f(2)=0, f(2)f(3)=-2 < 0$$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간

$(-1, 0)$, $(2, 3)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

또 $f(1)=0$ 이므로 $x=1$ 도 방정식 $f(x)=0$ 의 실근이다.

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(-1, 3)$ 에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

31 ㉡4

$g(x)=f(x)-x$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고

$$g(0)=f(0)=-\frac{1}{2} < 0$$

$$g\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}=\frac{1}{6} > 0$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6} < 0$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}=\frac{1}{12} > 0$$

$$g\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}=\frac{1}{20} > 0$$

$$g(1)=f(1)-1=-\frac{1}{6} < 0$$

$$\text{즉 } g(0)g\left(\frac{1}{3}\right) < 0, g\left(\frac{1}{3}\right)g\left(\frac{1}{2}\right) < 0, g\left(\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{2}{3}\right) < 0,$$

$$g\left(\frac{3}{4}\right)g(1) < 0 \text{이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 } f(x)-x=0$$

은 열린구간 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)-x=0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 4개의 실근을 갖는다.

31-1 ㉡4

$f(x)=2x$ 에서 $f(x)-2x=0$

$g(x)=f(x)-2x$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 6]$ 에서 연속이고

$$g(1)=f(1)-2=-3 < 0, g(2)=f(2)-4=1 > 0$$

$$g(3)=f(3)-6=-3 < 0, g(4)=f(4)-8=-2 < 0$$

$$g(5)=f(5)-10=1 > 0, g(6)=f(6)-12=-3 < 0$$

$$\text{즉 } g(1)g(2) < 0, g(2)g(3) < 0, g(4)g(5) < 0, g(5)g(6) < 0$$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=2x$ 는 열린구간

$(1, 2)$, $(2, 3)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=2x$ 는 열린구간 $(1, 6)$ 에서 적어도 4개의 실근을 갖는다.

$$\therefore n=4$$

32 ㉡4

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 연속이고 $f(0)f(1) < 0$,

$f(1)f(2) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$ 가 y 축에 대하여 대칭이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(-x)$

$$f(1) < 0, f(2) > 0 \text{에서 } f(-1) < 0, f(-2) > 0$$

$$\text{즉 } f(0)f(-1)=f(0)f(1) < 0, f(-1)f(-2)=f(1)f(2) < 0$$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간

$(-2, -1)$, $(-1, 0)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(-2, 2)$ 에서 적어도 4개의 실근을 갖는다.

32-1 ㉡ 4

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[-4, 4]$ 에서 연속이고 $f(1)f(2) < 0$, $f(3)f(4) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(1, 2)$, $(3, 4)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이때 $f(x)=f(-x)$ 이므로

$f(-1)f(-2)=f(1)f(2) < 0$, $f(-3)f(-4)=f(3)f(4) < 0$ 즉 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(-2, -1)$, $(-4, -3)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(-4, 4)$ 에서 적어도 4개의 실근을 갖는다.

유형 완성하기

p.47

33 ㉡ $\frac{3}{2}$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=2$ 에서도 연속이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (ax^2 + b) = 4a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x-1) = 1$$

$$f(2) = 2 - 1 = 1$$

$$\text{이므로 } 4a + b = 1 \quad \dots\dots ㉠$$

또 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이다. 그런데 $f(0)=f(4)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} f(x)$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} (ax^2 + b) = 16a + b$$

$$\text{이므로 } 16a + b = -1 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } a = -\frac{1}{6}, b = \frac{5}{3}$$

$$\therefore a + b = -\frac{1}{6} + \frac{5}{3} = \frac{3}{2}$$

34 ㉡ $\frac{3}{2}$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \{a(x-1)^2 + b\} = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} 2x = 2$$

$$f(1) = b$$

$$\text{이므로 } b = 2 \quad \dots\dots ㉠$$

또 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이다. 그런데 $f(0)=f(3)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 2x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} \{a(x-1)^2 + b\} = 4a + b$$

$$\text{이므로 } 0 = 4a + b \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$0 = 4a + 2 \quad \therefore a = -\frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉢$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x < 1) \\ -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2 & (1 \leq x < 3) \end{cases} \text{이므로 } \dots\dots ㉣$$

$$f(8) = f(5) = f(2) = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \quad \dots\dots ㉤$$

채점 기준	비율
㉠ a, b의 값을 구할 수 있다.	60%
㉡ f(x)를 구할 수 있다.	10%
㉢ f(8)의 값을 구할 수 있다.	30%

35 ㉡ 1

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} 4x = 4$$

$$f(1) = 1 + a + b$$

$$\text{이므로 } 1 + a + b = 4 \quad \therefore a + b = 3 \quad \dots\dots ㉠$$

또 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이다.

$$\text{그런데 } f(0)=f(3) \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 4x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} (x^2 + ax + b) = 9 + 3a + b$$

$$\text{이므로 } 0 = 9 + 3a + b \quad \therefore 3a + b = -9 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } a = -6, b = 9$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} 4x & (0 \leq x < 1) \\ x^2 - 6x + 9 & (1 \leq x \leq 3) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(a + b + 2) = f(-6 + 9 + 2) = f(5) = f(2) = 4 - 12 + 9 = 1$$

36 ㉡ ②

$-1 < x < 0$ 일 때, $0 < x^2 < 1$ 이므로 $f(x)=0$

$0 \leq x < 1$ 일 때, $0 \leq x^2 < 1$ 이므로 $f(x)=0$

$1 \leq x < \sqrt{2}$ 일 때, $1 \leq x^2 < 2$ 이므로 $f(x)=1$

$\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}$ 일 때, $2 \leq x^2 < 3$ 이므로 $f(x)=2$

$\sqrt{3} \leq x < 2$ 일 때, $3 \leq x^2 < 4$ 이므로 $f(x)=3$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$, $x=\sqrt{2}$, $x=\sqrt{3}$ 에서 불연속이므로 불연속인 점의 개수는 3이다.

37 ㉡ ③

함수 $f(x)$ 가 $x=n$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow n+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n-} f(x) = f(n)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow n+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n+} ([x]^2 - 5[x] + 3)$$

$$= n^2 - 5n + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow n-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n-} ([x]^2 - 5[x] + 3)$$

$$= (n-1)^2 - 5(n-1) + 3$$

$$= n^2 - 7n + 9$$

$$f(n) = n^2 - 5n + 3$$

$$\text{이므로 } n^2 - 5n + 3 = n^2 - 7n + 9, 2n = 6 \quad \therefore n = 3$$

38 ㉔ -1

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1)$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+} (a[x]^2 - 3[x] + 1) \\ &= a \times (-1)^2 - 3 \times (-1) + 1 \\ &= a + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} (a[x]^2 - 3[x] + 1) \\ &= a \times (-2)^2 - 3 \times (-2) + 1 \\ &= 4a + 7 \end{aligned}$$

$$f(-1) = a \times (-1)^2 - 3 \times (-1) + 1 = a + 4$$

$$\text{이므로 } a + 4 = 4a + 7$$

$$3a = -3 \quad \therefore a = -1$$

참고 (i) $-2 < x < -1$ 일 때

$$[x] = -2 \text{이므로}$$

$$f(x) = a \times (-2)^2 - 3 \times (-2) + 1 = 4a + 7$$

(ii) $-1 < x < 0$ 일 때

$$[x] = -1 \text{이므로}$$

$$f(x) = a \times (-1)^2 - 3 \times (-1) + 1 = a + 4$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 4a+7 & (-2 < x < -1) \\ a+4 & (-1 < x < 0) \end{cases}$$

학교 시험 대비 문제

p. 48-51

01 ㉔ ④

$$\neg, f(0) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\neg, f(0) = \sqrt{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2x+3} = \sqrt{3}$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\cap, \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} ([x] + 1) = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} ([x] + 1) = -1 + 1 = 0$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

$$\cap, f(0) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x-1} = -1$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

따라서 $x=0$ 에서 연속인 것은 $\neg, \neg, \cap$ 이다.

02 ㉔ ⑤

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \text{이므로}$$

$$3a - 4 = a + 6 \quad \therefore a = 5$$

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 11 \text{이므로 } f(2) = 11$$

$$\therefore a + f(2) = 5 + 11 = 16$$

03 ㉔ ③

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - x + 3)f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - x + 3) \times \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \\ &= 3 \times 2 = 6 \end{aligned}$$

다른 풀이

함수 $f(x) = \frac{g(x)}{2x^2 - x + 3}$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{2x^2 - x + 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - x + 3)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{3} = f(0) \text{이}$$

$$\text{므로 } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3f(0) = 3 \times 2 = 6$$

04 ㉔ ④

①, ③ $x=5$ 일 때, 그래프가 끊어져 있으므로 $x=5$ 에서 불연속이다. 즉 불연속인 점은 1개이다.

$$\text{② } \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 2$$

$$\text{④ } \lim_{x \rightarrow 5+} f(x) = 2$$

$$\text{⑤ } \lim_{x \rightarrow 5-} f(x) = 6, f(5) = 6 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 5-} f(x) = f(5)$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

05 ㉔ ㄱ

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x=-1, x=2$ 에서 불연속이므로 불연속인 점의 개수는 2이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

06 ㉔ ㄱ, ㄷ

$$\neg, \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = -1 + (-1) = -2$$

$$\neg, x-2=t \text{라 하면 } x \rightarrow 1+ \text{일 때 } t \rightarrow -1+ \text{이고, } x \rightarrow 1- \text{일 때 } t \rightarrow -1- \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)f(x-2) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} f(x-2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{t \rightarrow -1+} f(t) \\ &= -1 \times (-1) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)f(x-2) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} f(x-2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{t \rightarrow -1-} f(t) \\ &= 1 \times (-1) = -1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)f(x-2) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)f(x-2)$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)f(x-2)$ 의 값이 존재하지 않으므로

함수 $f(x)f(x-2)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

$$\text{ㄷ. } f(1)g(0) = -1 \times 1 = -1$$

$x+1=t$ 라 하면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 1+$ 이고,

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x+1)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x+1) \times \lim_{x \rightarrow 0+} g(x)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) \times \lim_{x \rightarrow 0+} g(x)$$

$$= -1 \times 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x+1)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x+1) \times \lim_{x \rightarrow 0-} g(x)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) \times \lim_{x \rightarrow 0-} g(x)$$

$$= 1 \times (-1) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} f(x+1)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x+1)g(x)$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x+1)g(x) = f(1)g(0)$ 이므로

함수 $f(x+1)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

07 ㉡ ①

$$\neg. f(f(1)) = f(2) = 1$$

$f(x)=t$ 라 하면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 2-$ 이고,

$x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2-} f(t) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(f(x))$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x)) = f(f(1))$ 이므로 함수 $f(f(x))$ 는 $x=1$ 에

서 연속이다.

$$\neg. g(x)=t \text{라 하면 } x \rightarrow 1+ \text{일 때 } t=1 \text{이고,}$$

$x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} g(g(x)) = g(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(g(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} g(t) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} g(g(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} g(g(x))$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} g(g(x))$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $g(g(x))$ 는

$x=1$ 에서 불연속이다.

$$\text{ㄷ. } f(x)=t \text{라 하면 } x \rightarrow 1+ \text{일 때 } t \rightarrow 2- \text{이고,}$$

$x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2-} g(t) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} g(t) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x))$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} g(f(x))$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $g(f(x))$ 는

$x=1$ 에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

08 ㉡ $a=1, b=-1$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=-1, x=2$ 에서도 연속이다.

(i) $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x^2 + ax + b) = 1 - a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (2x + 1) = -1$$

$$f(-1) = -1$$

$$\text{이므로 } 1 - a + b = -1 \quad \therefore a - b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (3x - 1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b$$

$$f(2) = 4 + 2a + b$$

$$\text{이므로 } 5 = 4 + 2a + b \quad \therefore 2a + b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, b=-1$

09 ㉡ ④

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & (|x| \geq 1) \\ ax+b & (|x| < 1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x+1)^2 & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ ax+b & (-1 < x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1, x=1$ 에서도 연속이다.

(i) $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (ax+b) = -a+b$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (x+1)^2 = 0$$

$$f(-1) = 0$$

$$\text{이므로 } -a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x+1)^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (ax+b) = a+b$$

$$f(1) = 4$$

$$\text{이므로 } 4 = a+b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=2, b=2$

$$\therefore ab = 2 \times 2 = 4$$

10 ㉡ ①

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}+a}{x-1} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+3}+a) = 0$ 이므로

$$2+a=0 \quad \therefore a=-2$$

$a=-2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} \\
&= \frac{1}{4} \\
\therefore a-8b &= -2-8 \times \frac{1}{4} = -4
\end{aligned}$$

11 ㉓ ③

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^4-1)f(x)}{x-1} = 8 \quad \dots\dots ㉠$$

㉠에서

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^4-1)f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)f(x)}{x-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+1)(x+1)f(x) \\
&= 2 \times 2 \times f(1) \\
&= 4f(1) = 8
\end{aligned}$$

이므로 $f(1) = 2$

12 ㉓ ②

함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x+a)f(x) = (1+a)f(1) = 2(1+a) \quad \dots\dots ㉠$$

㉠에서

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} (x+a)f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+a) \times \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} (x+a) \times \lim_{x \rightarrow 1} x^2 \\
&= 1+a = 2(1+a)
\end{aligned}$$

이므로 $1+a = 2+2a$

$\therefore a = -1$

13 ㉓ ①

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = f(1)g(1)$$

이때

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) \\
&= \lim_{x \rightarrow 1+} (2x+2) \times \lim_{x \rightarrow 1+} (3x+a) \\
&= 4(a+3) = 4a+12 \\
\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \\
&= \lim_{x \rightarrow 1-} (-3x+5) \times \lim_{x \rightarrow 1-} (3x+a) \\
&= 2(a+3) = 2a+6
\end{aligned}$$

$$f(1)g(1) = 4(a+3) = 4a+12$$

이므로 $4a+12 = 2a+6$

$\therefore a = -3$

14 ㉓ ②

$$x \neq 4 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{\sqrt{x-3}-1}{x-4}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x \geq 3$ 인 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=4$ 에서도 연속이다.

$$\begin{aligned}
\therefore f(4) &= \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3}-1}{x-4} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x-3}-1)(\sqrt{x-3}+1)}{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x-3}+1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

15 ㉓ ③

ㄱ. $h(x) = f(x) + g(x)$ 라 하면 $g(x) = h(x) - f(x)$

이때 두 함수 $h(x), f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

함수 $g(x) = h(x) - f(x)$ 도 $x=1$ 에서 연속이다.

ㄴ. [반례] $f(x) = x^2 + 2x, g(x) = x^2 - 3$ 이라 하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty \text{ 이지만}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \{(x^2 + 2x) - (x^2 - 3)\} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3) = \infty
\end{aligned}$$

ㄷ. $h(x) = \{f(x)\}^2$ 이라 하면 함수 $h(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(1)$$

이때 $|f(x)| = \sqrt{h(x)}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{h(x)} = \sqrt{h(1)} = |f(1)|$$

즉 함수 $|f(x)|$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

16 ㉓ ①

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

ㄴ. 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 최댓값을 갖지 않는다.

ㄷ. ㄱ에서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ 이지만 $f(1) = 1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이므로 열린구간 $(-1, 3)$ 에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

17 ㉓ ㄴ, ㄹ

ㄱ. [반례] $f(x) = 1, g(x) = x$ 라 하면 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}$

즉 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이지만

함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $x=0$ 에서 정의되지 않으므로 닫힌구간 $[-1, 1]$

에서 최댓값과 최솟값을 갖지 않는다.

ㄴ. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이므로 함수 $f(x) - g(x)$ 도 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이다.

즉 함수 $f(x) - g(x)$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

ㄷ. [반례] $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x-1$ 이라 하면 $f(g(x)) = \frac{1}{x-1}$
 즉 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이지만 함수 $f(g(x))$ 는 $x=1$ 에서 정의되지 않으므로 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 최댓값을 갖지 않는다.
 ㄹ. 함수 $f(x)g(x)$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이므로 함수 $|f(x)g(x)|$ 도 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이다.
 즉 함수 $|f(x)g(x)|$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.
 따라서 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는 함수는 ㄴ, ㄹ이다.

18 ㉡ ④

ㄱ. $f(x) = 2^x - 3x$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 $f(0) = 1 > 0$, $f(2) = -2 < 0$
 즉 $f(0)f(2) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(0, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
 ㄴ. $f(x) = x^3 + x + 2$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 $f(0) = 2 > 0$, $f(2) = 12 > 0$
 즉 $f(0)f(2) > 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근이 열린구간 $(0, 2)$ 에서 존재하는지 알 수 없다.
 ㄷ. $f(x) = \log_2(x+2) - 2x$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고
 $f(0) = 1 > 0$, $f(2) = -2 < 0$
 즉 $f(0)f(2) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(0, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
 따라서 열린구간 $(0, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는 방정식은 ㄱ, ㄷ이다.

19 ㉡ ②

$f(x) = 2x$ 에서 $f(x) - 2x = 0$
 $g(x) = f(x) - 2x$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[2, 5]$ 에서 연속이고
 $g(2) = f(2) - 4 = a - 7$, $g(5) = f(5) - 10 = a - 9$
 즉 $g(2)g(5) < 0$ 이어야 하므로
 $(a-7)(a-9) < 0 \quad \therefore 7 < a < 9$
 따라서 정수 a 의 값은 8이다.

20 ㉡ 5

$g(x) = f(x) - x^2 - 4x$ 라 하면
 $g(0) = f(0) = 2$
 $g(1) = f(1) - 5 = a^2 - 2a - 8$
 $g(2) = f(2) - 12 = 3$
 방정식 $g(x) = 0$ 이 열린구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 가지므로 $g(1) < 0$ 이어야 한다.
 즉 $g(1) = a^2 - 2a - 8 < 0$ 이므로
 $(a+2)(a-4) < 0 \quad \therefore -2 < a < 4$
 따라서 정수 a 의 값은 $-1, 0, 1, 2, 3$ 이므로 그 합은 $-1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 5$

21 ㉡ -3

함수 $f(x)$ 가 $x = -2$ 에서 연속이므로
 $\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = f(-2)$

이때

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} \{[x+1]^2 + (kx-3)[x]\} \\ = (-1)^2 - 2(-2k-3) \\ = 4k+7$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} \{[x+1]^2 + (kx-3)[x]\} \\ = (-2)^2 - 3(-2k-3) \\ = 6k+13$$

$$f(-2) = (-1)^2 - 2(-2k-3) = 4k+7$$

$$\text{이므로 } 4k+7 = 6k+13$$

$$2k = -6 \quad \therefore k = -3$$

서술형 1 ㉡ 3

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + ax^3 - bx + 1}{(x-1)^2} = c \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^4 + ax^3 - bx + 1) = 0 \text{이므로}$$

$$1 + a - b + 1 = 0 \quad \therefore b = a + 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + ax^3 - (a+2)x + 1}{(x-1)^2} = c \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\{x^3 + (a+1)x^2 + (a+1)x - 1\}}{(x-1)^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + (a+1)x^2 + (a+1)x - 1}{x-1}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} \{x^3 + (a+1)x^2 + (a+1)x - 1\} = 0 \text{이므로}$$

$$2a + 2 = 0 \quad \therefore a = -1$$

$$a = -1 \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore c = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{(x-1)^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x^2 + x + 1)}{(x-1)^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\therefore a + b + c = -1 + 1 + 3 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

채점 기준	비율
① 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속일 조건을 구할 수 있다.	20%
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ c 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ $a+b+c$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

서술형 2 ㉡ -3

$$x \neq 1 \text{일 때, } f(x) = \frac{x^3 - 4x + a}{x-1}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\therefore f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x + a}{x-1} \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 4x + a) = 0 \text{이므로}$$

$$1 - 4 + a = 0 \quad \therefore a = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$a=3$ 을 ㉠에 대입하면

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 3)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 3) = -1 \quad \dots\dots ㉢$$

$$\therefore af(1) = 3 \times (-1) = -3 \quad \dots\dots ㉣$$

채점 기준	비율
① 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속일 조건을 구할 수 있다.	20%
② a 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ $f(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
④ $af(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

서술형3 ㉠ $\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$ 에서도 연속이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (ax + b) = 2a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{1}{2}x = 1$$

$$f(2) = 2a + b$$

$$\text{이므로 } 2a + b = 1 \quad \dots\dots ㉠$$

또 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이다.

$$\text{그런데 } f(0) = f(4) \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} f(x)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{2}x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} (ax + b) = 4a + b$$

$$\text{이므로 } 4a + b = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } a = -\frac{1}{2}, b = 2 \quad \dots\dots ㉢$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & (0 \leq x < 2) \\ -\frac{1}{2}x + 2 & (2 \leq x < 4) \end{cases} \text{이므로} \quad \dots\dots ㉣$$

$$f(7) = f(3) = -\frac{1}{2} \times 3 + 2 = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉤$$

채점 기준	비율
① a, b 의 값을 구할 수 있다.	60%
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	10%
③ $f(7)$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

1등급

10% 핵심 기출 문제

p. 52-53

01 ㉠ ㉡

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

즉 $x=1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 극한값은 존재하지 않는다.

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x=1, x=2, x=3$ 에서 불연속이므로 3개의 점에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

02 ㉠ ㉢

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)f(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)f(x)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$= 4 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 12$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

이때 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$ 에서도 연속이다.

$$\therefore f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

03 ㉠ 32

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x+2} + b}{x - 2} = 2 \quad \dots\dots ㉠$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} (a\sqrt{x+2} + b) = 0 \text{이므로}$$

$$2a + b = 0 \quad \therefore b = -2a \quad \dots\dots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x+2} - 2a}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x - 2)}{(x - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{\sqrt{x+2} + 2}$$

$$= \frac{a}{4}$$

$$\text{즉 } \frac{a}{4} = 2 \text{이므로 } a = 8$$

$a=8$ 을 ㉡에 대입하면

$$b = -2 \times 8 = -16$$

$$\therefore 2a - b = 2 \times 8 - (-16) = 32$$

04 ㉠ 20

함수 $g(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

합성함수 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$ 에서도 연속이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 2-} g(f(x)) = g(f(2))$$

$$f(x) = t \text{라 하면 } x \rightarrow 2+ \text{일 때 } t \rightarrow 2- \text{이고,}$$

$$x \rightarrow 2- \text{일 때 } t \rightarrow 0- \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2-} g(t) = g(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0-} g(t) = g(0)$$

$$g(f(2)) = g(1)$$

$$\therefore g(2) = g(0) = g(1)$$

이때 $g(0) = 10$ 이므로

$$g(2) = g(1) = 10$$

$$\therefore g(1) + g(2) = 10 + 10 = 20$$

05 ㉔ 36

$f(x)=g(x)$ 에서 $f(x)-g(x)=0$

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면

$$h(x)=(x^5+x^3-3x^2+k)-(x^3-5x^2+3) \\ =x^5+2x^2+k-3$$

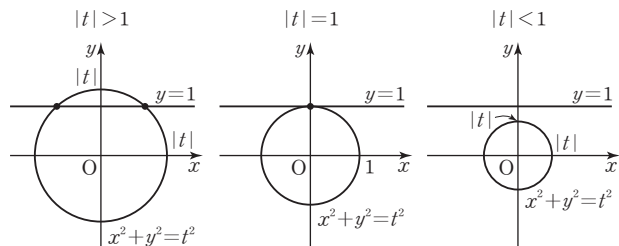
함수 $h(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고 $h(1)=k$, $h(2)=k+37$

즉 $h(1)h(2)<0$ 이어야 하므로

$$k(k+37)<0 \quad \therefore -37<k<0$$

따라서 정수 k 의 값은 $-36, -35, -34, \dots, -1$ 이므로 그 개수는 36이다.

06 ㉔ ③



원 $x^2+y^2=t^2$ 과 직선 $y=1$ 이 만나는 점의 개수는 위의 그림과 같으므로

$$f(t)=\begin{cases} 2 & (t < -1 \text{ 또는 } t > 1) \\ 1 & (t = -1 \text{ 또는 } t = 1) \\ 0 & (-1 < t < 1) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

함수 $(x+k)f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (x+k)f(x) \\ = \lim_{x \rightarrow 1-} (x+k)f(x) \\ = (1+k)f(1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (x+k)f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x+k) \times \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \\ = (1+k) \times 2 \\ = 2k+2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} (x+k)f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x+k) \times \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \\ = (1+k) \times 0 \\ = 0$$

$$(1+k)f(1)=1+k$$

$$\therefore 2k+2=1+k=0 \quad \therefore k=-1$$

$$\therefore f(1)+k=1+(-1)=0$$

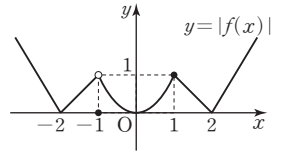
07 ㉔ ②

ㄱ. $-x=t$ 라 하면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow -1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)+f(-x)\} = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{t \rightarrow -1-} f(t) \\ = \lim_{x \rightarrow 1+} (x-2) + \lim_{t \rightarrow -1-} (t+2) \\ = -1+1=0$$

ㄴ. 함수 $y=f(x)$ 는 $x=-1, x=1$ 에서 불연속이다.

이때 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=|f(x)|$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이다.



즉 함수 $f(x)-|f(x)|$ 가 불연속일 수 있는 점은 $x=-1, x=1$ 일 때이다.

(i) $x=-1$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow -1} \{f(x)-|f(x)|\} = 1-1=0$$

$$f(-1)-|f(-1)|=0-0=0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \{f(x)-|f(x)|\} = f(-1)-|f(-1)|$$

즉 함수 $f(x)-|f(x)|$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

(ii) $x=1$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)-|f(x)|\} = -1-1=-2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)-|f(x)|\} = 1-1=0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)-|f(x)|\} \neq \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)-|f(x)|\}$$

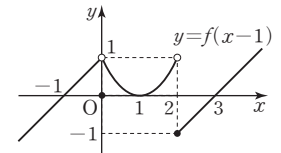
즉 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-|f(x)|\}$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수

$f(x)-|f(x)|$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)-|f(x)|$ 가 불연속인 점은 1개이다.

ㄷ. [반례] $a=1$ 일 때, 함수

$y=f(x-1)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $x=-1$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)f(x-1) = 1 \times 0 = 0$$

$$f(-1)f(-2) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} f(x)f(x-1) = f(-1)f(-2)$$

(ii) $x=0$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)f(x-1) = 0 \times 1 = 0, f(0)f(-1) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x)f(x-1) = f(0)f(-1)$$

(iii) $x=1$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)f(x-1) = -1 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)f(x-1) = 1 \times 0 = 0$$

$$f(1)f(0) = -1 \times 0 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)f(x-1) = f(1)f(0)$$

(iv) $x=2$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)f(x-1) = 0 \times (-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)f(x-1) = 0 \times 1 = 0$$

$$f(2)f(1) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x)f(x-1) = f(2)f(1)$$

(i)~(iv)에서 함수 $f(x)f(x-1)$ 은 $x=-1, x=0, x=1, x=2$ 에서 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

08 ㉔ 56

(가)에서 방정식 $f(x)=0$ 이 열린구간 $(0, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 $f(0)f(2)<0$

$$a(a-12)<0 \quad \therefore 0<a<12$$

(나)에서 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x) = f(a)g(a)$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} (x^2 - 8x + a) \times \lim_{x \rightarrow a^+} (2x + 5a) \\ &= (a^2 - 7a) \times 7a \\ &= 7a^2(a - 7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow a^-} (x^2 - 8x + a) \times \lim_{x \rightarrow a^-} f(x + 4) \\ &= (a^2 - 7a)f(a + 4) \\ &= (a^2 - 7a)\{(a + 4)^2 - 8(a + 4) + a\} \\ &= a(a - 7)(a^2 + a - 16)\end{aligned}$$

$$f(a)g(a) = (a^2 - 7a) \times 7a = 7a^2(a - 7)$$

이므로 $7a^2(a - 7) = a(a - 7)(a^2 + a - 16)$

$$a(a + 2)(a - 7)(a - 8) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 0 \text{ 또는 } a = 7 \text{ 또는 } a = 8$$

그런데 $0 < a < 12$ 이므로

$$a = 7 \text{ 또는 } a = 8$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$7 \times 8 = 56$$

09 ㉠

(가)에서 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x)g(x) = x(x + 3)$$

(나)에서 $g(0) = 1$ 이므로 위의 식에 $x = 0$ 을 대입하면

$$f(0)g(0) = 0 \quad \therefore f(0) = 0$$

이때 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하자.}$$

$$(가)에서 g(x) = \frac{x(x+3)}{f(x)} = \frac{x(x+3)}{x^3 + ax^2 + bx}$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = 0$ 에서도 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 1 \quad (\because (가))$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+3)}{x^3 + ax^2 + bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+3)}{x(x^2 + ax + b)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x^2 + ax + b} = \frac{3}{b} = 1\end{aligned}$$

이므로 $b = 3$

$$\therefore f(x) = x^3 + ax^2 + 3x, g(x) = \frac{x+3}{x^2 + ax + 3}$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이어야 하므로 이차방정식 $x^2 + ax + 3 = 0$ 은 허근을 가져야 한다.

즉 이차방정식 $x^2 + ax + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 12 < 0, (a + 2\sqrt{3})(a - 2\sqrt{3}) < 0$$

$$\therefore -2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$$

.....㉠

$$f(1) = 1 + a + 3 = a + 4 \text{가 자연수이므로}$$

$$a + 4 > 0 \quad \therefore a > -4$$

이때 a 는 정수이므로 ㉠에서 a 의 값은

$$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

$$\text{따라서 } g(2) = \frac{2+3}{4+2a+3} = \frac{5}{2a+7} \text{이므로}$$

$g(2)$ 의 값은 $a = 3$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$\frac{5}{2 \times 3 + 7} = \frac{5}{13}$$

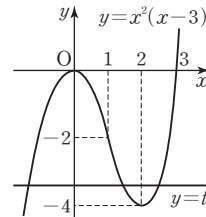
10 ㉡

$$(x-1)\{x^2(x-3)-t\}=0 \text{에서}$$

$$x=1 \text{ 또는 } x^2(x-3)=t$$

방정식 $x^2(x-3)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수는

함수 $y=x^2(x-3)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수와 같다.



위의 그림에서 방정식 $x^2(x-3)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수는 다음과 같다.

$t < -4$ 또는 $t > 0$ 일 때, 1

$t = -4$ 또는 $t = 0$ 일 때, 2

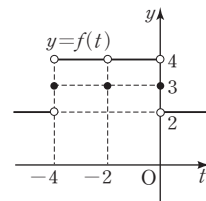
$-4 < t < 0$ 일 때, 3

방정식 $x^2(x-3)=t$ 의 해가 $x=1$ 일 때

$$1 \times (1-3) = t \text{에서 } t = -2$$

$$\text{즉 } f(t) = \begin{cases} 2 & (t < -4 \text{ 또는 } t > 0) \\ 3 & (t = -4 \text{ 또는 } t = -2 \text{ 또는 } t = 0) \\ 4 & (-4 < t < -2 \text{ 또는 } -2 < t < 0) \end{cases} \text{이므로}$$

함수 $y=f(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(t)$ 가 $t = -4, t = -2, t = 0$ 에서 불연속이므로 함수

$f(t)g(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $t = -4, t = -2, t = 0$ 에서 연속이어야 한다.

(i) $t = -4$ 에서 연속이려면

$$\lim_{t \rightarrow -4^+} f(t)g(t) = \lim_{t \rightarrow -4^-} f(t)g(t) = f(-4)g(-4)$$

이어야 한다.

이때

$$\lim_{t \rightarrow -4^+} f(t)g(t) = 4g(-4)$$

$$\lim_{t \rightarrow -4^-} f(t)g(t) = 2g(-4)$$

$$f(-4)g(-4) = 3g(-4)$$

$$\text{이므로 } 4g(-4) = 2g(-4) = 3g(-4)$$

$$\therefore g(-4) = 0$$

(ii) $t = -2$ 에서 연속이려면

$$\lim_{t \rightarrow -2^+} f(t)g(t) = \lim_{t \rightarrow -2^-} f(t)g(t) = f(-2)g(-2)$$

이어야 한다.

이때

$$\lim_{t \rightarrow -2^+} f(t)g(t) = 4g(-2)$$

$$\lim_{t \rightarrow -2^-} f(t)g(t) = 3g(-2)$$

$$f(-2)g(-2) = 3g(-2)$$

$$\text{이므로 } 4g(-2) = 3g(-2)$$

$$\therefore g(-2) = 0$$

(iii) $t = 0$ 에서 연속이려면

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t)g(t) = f(0)g(0)$$

이어야 한다.

이때

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)g(t) = 2g(0)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t)g(t) = 4g(0)$$

$$f(0)g(0) = 3g(0)$$

$$\text{이므로 } 2g(0) = 4g(0) = 3g(0)$$

$$\therefore g(0) = 0$$

$$(i) \sim (iii) \text{에서 } g(-4) = 0, g(-2) = 0, g(0) = 0$$

(가)에서 $g(x)$ 는 삼차 이하의 다항함수이므로

$$g(x) = ax(x+2)(x+4) \quad (a \neq 0) \text{라 하자.}$$

$$(나) \text{에서 } g(-3) = 6 \text{이므로}$$

$$3a = 6 \quad \therefore a = 2$$

따라서 $g(x) = 2x(x+2)(x+4)$ 이므로

$$g(1) = 2 \times 1 \times 3 \times 5 = 30$$

참고 방정식 $x^2(x-3)=t$ 가 $x=1$ 을 실근으로 가질 때

$$1 \times (1-3) = t \quad \therefore t = -2$$

$t = -2$ 일 때, 주어진 사차방정식 $(x-1)\{x^2(x-3)+2\} = 0$ 에서

$$(x-1)(x^3-3x^2+2) = 0, (x-1)(x^2-2x-2) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 1 \pm \sqrt{3}$$

즉 $t = -2$ 일 때 $x = 1$ 이 중근이다.

개념 완성하기

p. 57~58

01 답 -1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{1 - 4}{3} = -1$$

02 답 -1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{2 - 5}{3} = -1$$

03 답 9

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{1 - (-26)}{3} = 9$$

04 답 (1) -3 (2) -3

$$(1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{-13 - (-4)}{3} = -3$$

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{(1+\Delta x) - 1} = \frac{\{-3(1+\Delta x) + 2\} - (-1)}{\Delta x} \\ = \frac{-3\Delta x}{\Delta x} = -3$$

05 답 2

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{(a+\Delta x) - a} = \frac{\{2(a+\Delta x) - 1\} - (2a - 1)}{\Delta x} \\ = \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

06 답 $2a+1+\Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{(a+\Delta x) - a} \\ = \frac{\{(a+\Delta x)^2 + a + \Delta x\} - (a^2 + a)}{\Delta x} \\ = \frac{(2a+1)\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ = 2a+1+\Delta x$$

07 답 -1

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(1+\Delta x) - (-1)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

08 답 $\frac{1}{10}$

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left\{\frac{1}{10}(1+\Delta x) + 1\right\} - \frac{11}{10}}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{10}\Delta x}{\Delta x} = \frac{1}{10}$$

09 답 2

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(1+\Delta x)^2 - 1\} - 0}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2$$

10 답 -1

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{-2(1+\Delta x)^3 + 5(1+\Delta x) + 1\} - 4}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2(\Delta x)^3 - 6(\Delta x)^2 - \Delta x}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{-2(\Delta x)^2 - 6\Delta x - 1\} = -1$$

11 답 $\frac{1}{2}$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(2x^2 - 6) - (2a^2 - 6)}{x - a} \\ = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(x+a)(x-a)}{x-a} \\ = \lim_{x \rightarrow a} 2(x+a) = 4a$$

$$\text{즉 } 4a = 2 \text{ 이므로 } a = \frac{1}{2}$$

12 답 1

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^3 - x) - (a^3 - a)}{x - a} \\ = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2 - 1)}{x - a} \\ = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2 - 1) = 3a^2 - 1$$

$$\text{즉 } 3a^2 - 1 = 2 \text{ 이므로 } a = 1 (\because a > 0)$$

13 답 -1

$$f'(-1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{2(-1+\Delta x)^2 + 3(-1+\Delta x)\} - (-1)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(\Delta x)^2 - \Delta x}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2\Delta x - 1) = -1$$

14 답 2

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{-(\Delta x)^3 + 2\Delta x\} - 0}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{-(\Delta x)^2 + 2\} = 2$$

15 ㉡ (가) 연속 (나) -1 (다) 미분가능하지 않다.

16 ㉡ (1) 연속이다. (2) 미분가능하지 않다.

(1) $x=1$ 에서의 함수값은 $f(1)=2$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} 2x^2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x^2 + 3) = 2$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x^2 - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} 2(x+1)$$

$$= 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(-x^2 + 3) - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x-1)$$

$$= -2$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

따라서 $f'(1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

17 ㉡ $f'(x)=0$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{\Delta x} = 0$$

18 ㉡ $f'(x)=1$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(x + \Delta x) + 2\} - (x + 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

19 ㉡ $f'(x)=2x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(x + \Delta x)^2 + 2\} - (x^2 + 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

20 ㉡ $y'=6x^5$

$$y' = (x^6)' = 6x^5$$

21 ㉡ $y'=0$

$$y' = (10)' = 0$$

22 ㉡ $y'=-16x^7$

$$y' = (-2x^8)' = -16x^7$$

23 ㉡ $y'=\frac{1}{2}$

$$y' = \left(\frac{1}{2}x - 5\right)' = \left(\frac{1}{2}x\right)' - (5)' = \frac{1}{2}$$

24 ㉡ $y'=2x-3$

$$y' = (x^2 - 3x + 4)' = (x^2)' - (3x)' + (4)' = 2x - 3$$

25 ㉡ $y'=-3x^8+5x^4$

$$y' = \left(-\frac{1}{3}x^9 + x^5 + 1\right)' = \left(-\frac{1}{3}x^9\right)' + (x^5)' + (1)'$$

$$= -3x^8 + 5x^4$$

26 ㉡ (1) -4 (2) 13

(1) 함수 $f(x) + 2g(x)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수는

$$f'(1) + 2g'(1) = 2 + 2 \times (-3) = -4$$

(2) 함수 $2f(x) - 3g(x)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수는

$$2f'(1) - 3g'(1) = 2 \times 2 - 3 \times (-3) = 13$$

27 ㉡ (가) $f(x)g(x+h)$ (나) $f'(x)g(x)$

28 ㉡ $y'=-10x-1$

$$y' = (-x)'(5x+1) - x(5x+1)'$$

$$= -(5x+1) - x \times 5 = -10x - 1$$

29 ㉡ $y'=-8x+4$

$$y' = (2x+1)'(-2x+3) + (2x+1)(-2x+3)'$$

$$= 2(-2x+3) - 2(2x+1) = -8x + 4$$

30 ㉡ $y'=6x^2-16x$

$$y' = (2x^2)'(x-4) + 2x^2(x-4)'$$

$$= 4x(x-4) + 2x^2 = 6x^2 - 16x$$

31 ㉡ $y'=-18x^2+4x+9$

$$y' = (-2x^2+3)'(3x-1) + (-2x^2+3)(3x-1)'$$

$$= -4x(3x-1) + 3(-2x^2+3) = -18x^2 + 4x + 9$$

32 ㉡ $y'=3x^2+2x-2$

$$y' = (x)'(x-1)(x+2) + x(x-1)'(x+2) + x(x-1)(x+2)'$$

$$= (x-1)(x+2) + x(x+2) + x(x-1)$$

$$= 3x^2 + 2x - 2$$

33 ㉡ $y'=8x^3-12x^2+12x-12$

$$y' = (2x)'(x-2)(x^2+3) + 2x(x-2)'(x^2+3)$$

$$+ 2x(x-2)(x^2+3)'$$

$$= 2(x-2)(x^2+3) + 2x(x^2+3) + 4x^2(x-2)$$

$$= 8x^3 - 12x^2 + 12x - 12$$

34 ㉡ $y'=6(3x-4)$

$$y' = \{(3x-4)^2\}' = 2(3x-4)(3x-4)'$$

$$= 6(3x-4)$$

35 $y' = 3(x^2 - 3x)^2(2x - 3)$
 $y' = \{(x^2 - 3x)^3\}' = 3(x^2 - 3x)^2(x^2 - 3x)'$
 $= 3(x^2 - 3x)^2(2x - 3)$

유형 완성하기

p. 59~76

01 $\text{㉔} \text{㉕}$

x 의 값이 1에서 a 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(a) - f(1)}{a - 1} = \frac{(a^2 + 2a) - (1 + 2)}{a - 1} \\ &= \frac{a^2 + 2a - 3}{a - 1} = \frac{(a + 3)(a - 1)}{a - 1} \\ &= a + 3\end{aligned}$$

즉 $a + 3 = 6$ 이므로 $a = 3$

01-1 $\text{㉔} 6$

x 의 값이 0에서 a 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{(3a^2 - 2a + 1) - 1}{a} \\ &= \frac{3a^2 - 2a}{a} = \frac{a(3a - 2)}{a} \\ &= 3a - 2\end{aligned}$$

즉 $3a - 2 = 16$ 이므로 $a = 6$

02 $\text{㉔} \text{㉕}$

x 의 값이 -2 에서 2 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{10 - (-2)}{4} = 3$$

또 x 의 값이 -1 에서 a 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(a) - f(-1)}{a - (-1)} = \frac{(a^2 + 3a) - (-2)}{a + 1} \\ &= \frac{a^2 + 3a + 2}{a + 1} = \frac{(a + 1)(a + 2)}{a + 1} \\ &= a + 2\end{aligned}$$

즉 $a + 2 = 3$ 이므로 $a = 1$

02-1 $\text{㉔} \text{㉕}$

x 의 값이 0에서 2 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{13 - 1}{2} = 6$$

또 x 의 값이 -1 에서 a 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(a) - f(-1)}{a - (-1)} = \frac{(a^2 + 4a + 1) - (-2)}{a + 1} \\ &= \frac{a^2 + 4a + 3}{a + 1} = \frac{(a + 1)(a + 3)}{a + 1} \\ &= a + 3\end{aligned}$$

즉 $a + 3 = 6$ 이므로 $a = 3$

03 $\text{㉔} \text{㉕}$

x 의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{(9k + 3) - (k + 1)}{2} \\ &= \frac{8k + 2}{2} = 4k + 1\end{aligned}$$

즉 $4k + 1 = 13$ 이므로 $k = 3$

03-1 $\text{㉔} \text{㉕}$

x 의 값이 -2 에서 1까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{(1 - a) - (-8 + 2a)}{3} \\ &= \frac{-3a + 9}{3} = -a + 3\end{aligned}$$

즉 $-a + 3 = -2$ 이므로 $a = 5$

04 $\text{㉔} \frac{3}{2}$

x 의 값이 1에서 2까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{7 - 4}{1} = 3$$

또 함수 $f(x)$ 의 $x = c$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(c) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(c + \Delta x)^2 + 3\} - (c^2 + 3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2c\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2c + \Delta x) \\ &= 2c\end{aligned}$$

즉 $2c = 3$ 이므로 $c = \frac{3}{2}$

04-1 $\text{㉔} -2$

x 의 값이 0에서 a 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{a^2 + 3a}{a} = a + 3$$

또 함수 $f(x)$ 의 $x = -1$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(-1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(-1 + \Delta x)^2 + 3(-1 + \Delta x)\} - (-2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + \Delta x) \\ &= 1\end{aligned}$$

즉 $a + 3 = 1$ 이므로 $a = -2$

05 $\text{㉔} -3$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 기울기가 -3 이므로 $f'(2) = -3$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = f'(2) = -3$$

05-1 ㉮ 6

$$\begin{aligned}
 f(x+4) - f(4) &= x^3 - 2x^2 + 6x \text{ 이므로} \\
 f'(4) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(4+\Delta x) - f(4)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^3 - 2(\Delta x)^2 + 6\Delta x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{(\Delta x)^2 - 2\Delta x + 6\} = 6
 \end{aligned}$$

06 ㉮ ①

x 의 값이 a 에서 $a+3$ 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(a+3) - f(a)}{(a+3) - a} \\
 &= \frac{\{a(a+3)^2 + 2(a+3)\} - (a^3 + 2a)}{3} \\
 &= \frac{6a^2 + 9a + 6}{3} \\
 &= 2a^2 + 3a + 2
 \end{aligned}$$

또 함수 $f(x)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}
 f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{a(1+\Delta x)^2 + 2(1+\Delta x)\} - (a+2)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2a\Delta x + a(\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2a + a\Delta x + 2) \\
 &= 2a + 2
 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } 2a^2 + 3a + 2 = 2a + 2 \text{ 이므로 } 2a^2 + a = 0$$

$$a(2a+1) = 0 \quad \therefore a = -\frac{1}{2} \quad (\because a \neq 0)$$

06-1 ㉮ $\frac{1}{3}$

x 의 값이 a 에서 $5a$ 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(5a) - f(a)}{5a - a} \\
 &= \frac{(25a^3 + 25a) - (a^3 + 5a)}{4a} \\
 &= \frac{24a^3 + 20a}{4a} \\
 &= 6a^2 + 5
 \end{aligned}$$

또 함수 $f(x)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}
 f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{a(1+\Delta x)^2 + 5(1+\Delta x)\} - (a+5)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2a\Delta x + a(\Delta x)^2 + 5\Delta x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2a + a\Delta x + 5) \\
 &= 2a + 5
 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } 6a^2 + 5 = 2a + 5 \text{ 이므로 } 6a^2 - 2a = 0$$

$$2a(3a-1) = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{3} \quad (\because a > 0)$$

채점 기준	비율
① x 의 값이 a 에서 $5a$ 까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	40%
② $x=1$ 에서의 미분계수를 구할 수 있다.	40%
③ 양수 a 의 값을 구할 수 있다.	20%

07 ㉮ 4

$$\begin{aligned}
 &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-3h) - f(2+h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(2-3h) - f(2)\} - \{f(2+h) - f(2)\}}{h} \quad \left[f(2) \text{를 빼고 더한다.} \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-3h) - f(2)}{-3h} \times (-3) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
 &= f'(2) \times (-3) - f'(2) = -4f'(2) \\
 &= -4 \times (-1) = 4
 \end{aligned}$$

07-1 ㉮ 18

$$\begin{aligned}
 &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(1+h) - f(1)\} - \{f(1-2h) - f(1)\}}{h} \quad \left[f(1) \text{를 빼고 더한다.} \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} \times (-2) \\
 &= f'(1) - f'(1) \times (-2) = 3f'(1) \\
 &= 3 \times 6 = 18
 \end{aligned}$$

08 ㉮ ①

$$\begin{aligned}
 &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3-4h)}{2h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(3+2h) - f(3)\} - \{f(3-4h) - f(3)\}}{2h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3)}{2h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-4h) - f(3)}{-4h} \times (-2) \\
 &= f'(3) - f'(3) \times (-2) \\
 &= 3f'(3) \\
 &\text{즉 } 3f'(3) = 12 \text{ 이므로 } f'(3) = 4
 \end{aligned}$$

08-1 ㉮ 7

$$\begin{aligned}
 &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 5}{3h} = 4 \text{에서 } h \rightarrow 0 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값} \\
 &\text{이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{이다.} \\
 &\text{즉 } \lim_{h \rightarrow 0} \{f(2+h) - 5\} = 0 \text{ 이므로} \\
 &f(2) - 5 = 0 \quad \therefore f(2) = 5 \quad \dots\dots ㉠ \\
 &\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 5}{3h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{3h} \quad (\because ㉠) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \times \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1}{3} f'(2)
 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{1}{3} f'(2) = 4 \text{ 이므로 } f'(2) = 12$$

$$\therefore f'(2) - f(2) = 12 - 5 = 7$$

09 ㉮ ④

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{n} = h \text{라 하면 } n = \frac{1}{h} \text{이고, } n \rightarrow \infty \text{일 때 } h \rightarrow 0+ \text{이므로} \\
 &\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f\left(3 + \frac{1}{n}\right) - f(3) \right\} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \{f(3+h) - f(3)\} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\
 &= f'(3) = 6
 \end{aligned}$$

09-1 ㉔ ④

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} &= h \text{라 하면 } n = \frac{1}{h} \text{이고, } n \rightarrow \infty \text{일 때 } h \rightarrow 0+ \text{이므로} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f\left(2 + \frac{3}{n}\right) - f(2) \right\} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \{ f(2+3h) - f(2) \} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(2+3h) - f(2)}{3h} \times 3 \\ &= 3f'(2) = 3 \times 2 = 6\end{aligned}$$

10 ㉔ ①

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2 \\ &= f'(1) \times 2 \\ &= 2f'(1)\end{aligned}$$

$$\text{즉 } 2f'(1) = 8 \text{이므로 } f'(1) = 4$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \\ &= f'(1) \times \frac{1}{2} \\ &= 4 \times \frac{1}{2} = 2\end{aligned}$$

10-1 ㉔ 12

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^3) - f(8)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x^3) - f(8)}{x^3 - 8} \times (x^2 + 2x + 4) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^3) - f(8)}{x^3 - 8} \times \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) \\ &= f'(8) \times 12 \\ &= 1 \times 12 = 12\end{aligned}$$

11 ㉔ ③

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x)\}^2 - \{f(1)\}^2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x) - f(1)\} \{f(x) + f(1)\}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + f(1)\} \\ &= f'(1) \times 2f(1) \\ &= 5 \times (2 \times 2) \\ &= 20\end{aligned}$$

11-1 ㉔ 12

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x)\}^2 - 4}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x) - 2\} \{f(x) + 2\}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + 2\} \quad (\because f(1) = 2) \\ &= f'(1) \times \{f(1) + 2\} \\ &= 3 \times (2 + 2) \\ &= 12\end{aligned}$$

12 ㉔ ③

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x-1} \times \frac{\sqrt{f(x)} + 1}{\sqrt{f(x)} + 1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - 1}{x-1} \times \frac{1}{\sqrt{f(x)} + 1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{f(x)} + 1} \quad (\because f(1) = 1) \\ &= f'(1) \times \frac{1}{\sqrt{f(1)} + 1} \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \\ &= 1\end{aligned}$$

12-1 ㉔ ④

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{4}}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(1)}}{\sqrt{x} - 1} \quad (\because f(1) = 4) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(1)}}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(1)})}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(1)})} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(1)}} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(1)}} \\ &= f'(1) \times \frac{2}{2\sqrt{f(1)}} \\ &= 2 \times \frac{2}{2\sqrt{4}} \\ &= 1\end{aligned}$$

13 ㉔ 5

$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면
 $f(0) = f(0) + f(0) \quad \therefore f(0) = 0$

$$\begin{aligned}\therefore f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) + f(h) + 2h - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 2 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + 2 \quad (\because f(0) = 0) \\ &= f'(0) + 2 \\ &= 3 + 2 \\ &= 5\end{aligned}$$

13-1 ㉔ 5

$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면
 $f(0) = f(0) + f(0) \quad \therefore f(0) = 0$

$$\begin{aligned}\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)+f(h)+h-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 1 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 1 \quad (\because f(0)=0) \\ &= f'(0) + 1\end{aligned}$$

즉 $f'(0)+1=4$ 이므로 $f'(0)=3$

$$\begin{aligned}\therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)+f(h)+2h-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 2 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 2 \quad (\because f(0)=0) \\ &= f'(0) + 2 = 3 + 2 = 5\end{aligned}$$

14 ㉔ 8

$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy+2$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면 $f(0)=f(0)+f(0)+2 \quad \therefore f(0)=-2 \quad \dots\dots ①$

$$\begin{aligned}\therefore f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2)+f(h)+6h+2-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+6h+2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+2}{h} + 6 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 6 \quad (\because f(0)=-2) \\ &= f'(0) + 6 = 2 + 6 = 8\end{aligned}$$

$\dots\dots ②$

채점 기준	비율
① $f(0)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%
② $f'(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	80%

14-1 ㉔ 3

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면 $f(0)=f(0)+f(0)-1 \quad \therefore f(0)=1$

$$\begin{aligned}\therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)+f(h)+2h-1-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+2h-1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-1}{h} + 2 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 2 \quad (\because f(0)=1) \\ &= f'(0) + 2\end{aligned}$$

즉 $f'(0)+2=5$ 이므로 $f'(0)=3$

15 ㉔ 3

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x+y)$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면 $f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$

$$\begin{aligned}\therefore f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2)+f(h)+4h(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+8h+4h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} (8+4h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 8 \quad (\because f(0)=0) \\ &= f'(0) + 8 \\ &= -5 + 8 = 3\end{aligned}$$

15-1 ㉔ 1

$f(x+y)=f(x)+f(y)-xy^2-x^2y$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면 $f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$

$$\begin{aligned}\therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)+f(h)-h^2-h-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-h^2-h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} (h+1) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} - 1 \quad (\because f(0)=0) \\ &= f'(0) - 1 \\ &= 2 - 1 = 1\end{aligned}$$

16 ㉔ 5

① $\frac{f(a)}{a}$ 는 원점과 점 $(a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기이고,

$\frac{f(b)}{b}$ 는 원점과 점 $(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기이므로

$$\frac{f(a)}{a} > \frac{f(b)}{b} \quad \therefore bf(a) > af(b) \quad (\because a > 0, b > 0)$$

② 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기가 1보다 작으므로 $f'(b) < 1$

③ $f'(a)$ 는 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$ 는 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기이다. 이때 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기가 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기보다 크므로 $f'(a) > f'(b)$

④ 원점과 점 $(a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기가 1보다 크므로 $\frac{f(a)}{a} > 1$

⑤ 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기가 1보다 작으므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 1 \quad \therefore f(b)-f(a) < b-a \quad (\because b-a > 0)$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

16-1 ㉠ ㄱ, ㄴ

- ㄱ. $\frac{f(a)}{a}$ 는 원점과 점 $(a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기이고,
 $\frac{f(b)}{b}$ 는 원점과 점 $(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기이므로
 $\frac{f(a)}{a} < \frac{f(b)}{b}$
 ㄴ. 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기가 1보다
 크므로 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 1$
 $\therefore f(b)-f(a) > b-a (\because b-a > 0)$
 ㄷ. $f'(a)$ 는 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$ 는 점
 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기이다. 이때 점 $(a, f(a))$ 에서
 의 접선의 기울기가 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기보다 작
 으므로 $f'(a) < f'(b)$
 ㄹ. 점 $(k, f(k))$ 에서의 접선의 기울기가 1보다 크므로 $f'(k) > 1$
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

17 ㉠ ㄴ, ㄷ

- ㄱ. $\frac{f(a)}{a}$ 는 원점과 점 $(a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기이고,
 $\frac{f(b)}{b}$ 는 원점과 점 $(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기이므로
 $\frac{f(a)}{a} < \frac{f(b)}{b}$
 ㄴ. $f'(a)$ 는 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$ 는 점
 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기이다. 이때 점 $(a, f(a))$ 에서
 의 접선의 기울기가 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기보다 작
 으므로 $f'(a) < f'(b)$
 ㄷ. 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기는
 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
 이때 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기가
 $\frac{1}{2}$ 보다 크므로 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > \frac{1}{2}$
 $b-a > 0$ 이므로 위의 식의 양변에 $2(b-a)$ 를 곱하면
 $2\{f(b)-f(a)\} > b-a$
 따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

17-1 ㉠ ⑤

- ① 두 점 $(1, 1), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기가 1보다 크
 므로 $\frac{f(b)-f(1)}{b-1} > 1$
 $\therefore f(b)-f(1) > b-1 (\because b-1 > 0)$
 ② $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$ 이고, $x=1$ 에서의 접선의 기울기가
 1보다 크므로 $f'(1) > 1 \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} > 1$
 ③ $f'(a)$ 는 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$ 는 점
 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기이다. 이때 점 $(a, f(a))$ 에서의
 접선의 기울기가 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기보다 작으
 므로 $f'(a) < f'(b)$
 ④ 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기는
 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
 이때 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기가

$$1 \text{보다 크므로 } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 1$$

- ⑤ $\frac{f(a)}{a}$ 는 원점과 점 $(a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기이고,
 $\frac{f(b)}{b}$ 는 원점과 점 $(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기이다.
 이때 원점과 점 $(a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기가 원점과 점
 $(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기보다 작으므로
 $\frac{f(a)}{a} < \frac{f(b)}{b}$
 따라서 옳은 것은 ⑤이다.

18 ㉠ ③

- ① 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 정의되지 않으므로 $x=0$ 에서 불연속이
 다. 즉 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.
 ② $f(0) = -2, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-2) = -2$
 즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2-(-2)}{x} = 0$ 이므로 $f'(0) = 0$
 즉 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.
 ③ $f(0) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0-} x = 0$
 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
 즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.
 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-x}{x} = -1$
 $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{x} = 1$
 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x}$
 즉 $f'(0)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미
 분가능하지 않다.
 ④ 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 정의되지 않으므로 $x=0$ 에서 불연속이
 다. 즉 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.
 ⑤ $f(0) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x-1)^2 = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-2x+1) = 1$
 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$
 즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.
 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(x-1)^2-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2-2x}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x(x-2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} (x-2) = -2$
 $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{(-2x+1)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-2x}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0-} (-2) = -2$
 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x}$
 즉 $f'(0)$ 의 값이 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능
 하다.
 따라서 $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ③이다.

18-1 ㉠ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f(-1)=0$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} |x+1| = \lim_{x \rightarrow -1+} (x+1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} |x+1| = \lim_{x \rightarrow -1-} \{-(x+1)\} = 0$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

즉 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{|x+1|}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x+1}{x+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{|x+1|}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{-(x+1)}{x+1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \neq \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

즉 $f'(-1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $f(-1)=2$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2+1) = 2$

즉 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2+1)-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } f'(-1) = -2$$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 미분가능하다.

ㄷ. $f(-1)=0$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} |x^2-1| = \lim_{x \rightarrow -1+} \{-(x^2-1)\} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} |x^2-1| = \lim_{x \rightarrow -1-} (x^2-1) = 0$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

즉 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{|x^2-1|}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{-(x^2-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{-(x+1)(x-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} (-(x-1)) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{|x^2-1|}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x^2-1}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} (x-1) \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \neq \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

즉 $f'(-1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄹ. $f(-1)=-1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+} (x+|x+1|) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} (x+x+1) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} (x+|x+1|) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} (x-x-1) = -1 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$$

즉 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(x+|x+1|)-(-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x+x+1+1}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{2(x+1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{(x+|x+1|)-(-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x-x-1+1}{x+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \neq \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

즉 $f'(-1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 $x=-1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

19 ㉠ 연속이고 미분가능하다.

(i) $f(1)=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (2x-1) = 1$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

..... ①

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x+1) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(2x-1)-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

즉 $f'(1)$ 의 값이 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

..... ②

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이고 미분가능하다.

..... ③

채점 기준	비율
① $x=1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 연속성을 알 수 있다.	40%
② $x=1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 미분가능성을 알 수 있다.	50%
③ $x=1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 연속성과 미분가능성을 정리할 수 있다.	10%

19-1 ㉠ 연속이지만 미분가능하지 않다.

$$f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -x^2 + 1 & (-1 < x < 1) \end{cases}$$

(i) $f(1) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2 - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x^2 + 1) = 0$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \text{(ii) } \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x+1) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-x^2 + 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x-1) = -2 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

즉 $f'(1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

20 ㉠ ②

함수 $f(x)$ 는 $x=-2$, $x=1$, $x=2$ 에서 불연속이므로

$$m=3$$

불연속인 점에서는 미분가능하지 않으므로 $x=-2$, $x=1$, $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

또 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이지만 뾰족점이므로 $f'(-1)$ 의 값이 존재하지 않는다. 즉 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 미분가능하지 않다.

$$\therefore n=4$$

$$\therefore mn = 3 \times 4 = 12$$

20-1 ㉠ 6

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$, $x=1$ 에서 불연속이므로

$$a=2$$

불연속인 점에서는 미분가능하지 않으므로 $x=-1$, $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

또 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이지만 뾰족점이므로 $f'(0)$ 의 값이 존재하지 않는다. 즉 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

$$\therefore b=3$$

$$\therefore ab = 2 \times 3 = 6$$

21 ㉠ ㄴ

ㄱ. $f(1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = f(10)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=10$ 에서 연속이다.

ㄷ. [반례] $x=8$ 에서 함수 $f(x)$ 는 연속이지만 뾰족점이므로 $f'(8)$ 의 값이 존재하지 않는다.

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=8$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

21-1 ㉠ ①

① $x=1.5$ 에서의 접선의 기울기는 0이므로 $f'(1.5) = 0$

② $x=0$ 에서의 접선의 기울기는 0이므로 $f'(0) = 0$

$x=2.2$ 에서의 접선의 기울기는 양수이므로 $f'(2.2) > 0$

$$\therefore f'(0) < f'(2.2)$$

③ $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 2$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재한다.

④ 함수 $f(x)$ 가 불연속인 점은 $x=2$, $x=3$ 의 2개이다.

⑤ 함수 $f(x)$ 가 미분가능하지 않은 점은 $x=1$, $x=2$, $x=3$ 의 3개이다.

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

22 ㉠ ②

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{이므로}$$

$$1 = a + b$$

..... ㉠

또 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{ 이어야 한다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(ax+b) - (a+b)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{a(x-1)}{x-1} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(-x^2+2) - (a+b)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x+1)(x-1)}{x-1} (\because \text{㉠})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x-1) = -2$$

$$\text{이므로 } a = -2$$

$a = -2$ 를 ㉠에 대입하면

$$1 = -2 + b \quad \therefore b = 3$$

$$\therefore ab = -2 \times 3 = -6$$

22-1 ㉠ ②

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{이므로}$$

$$2 + b = a + 2 \quad \therefore a = b$$

..... ㉠

또 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{ 이어야 한다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(2x+b) - (a+2)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2(x-1)}{x-1} (\because \text{㉠})$$

$$= 2$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(ax^2+2)-(a+2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax+a) \\ &= 2a\end{aligned}$$

이므로 $2=2a \quad \therefore a=1$

$a=1$ 을 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore a+b=1+1=2$

23 ㉠ -1

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하므로 $x=2$ 에서 미분가능하다. 즉 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \quad \therefore 4a+b=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 미분계수 $f'(2)$ 가 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \text{ 이어야 한다.}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(ax^2+b)-8}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{ax^2+b-(4a+b)}{x-2} (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{a(x+2)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} a(x+2) = 4a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^3-8}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} (x^2+2x+4) = 12\end{aligned}$$

이므로 $4a=12 \quad \therefore a=3$

$a=3$ 을 ㉠에 대입하면

$$12+b=8 \quad \therefore b=-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\therefore a+b=3+(-4)=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

채점 기준	비율
① $x=2$ 에서 연속임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30%
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

23-1 ㉠ 17

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하므로 $x=-1$ 에서 미분가능하다. 즉 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

$$1+b=4-a \quad \therefore a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 미분계수 $f'(-1)$ 이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \text{ 이어야 한다.}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(x^2+ax+3)-(4-a)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x^2+ax+a-1}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} (x+a-1) \\ &= a-2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{(-x^3+b)-(4-a)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{-x^3-1}{x+1} (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{-(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} (-x^2+x-1) \\ &= -3\end{aligned}$$

이므로 $a-2=-3 \quad \therefore a=-1$

$a=-1$ 을 ㉠에 대입하면

$$-1+b=3 \quad \therefore b=4$$

따라서 $f(x) = \begin{cases} x^2-x+3 & (x \geq -1) \\ -x^3+4 & (x < -1) \end{cases}$ 이므로

$$f(-2) = 8+4=12$$

$$f(2) = 4-2+3=5$$

$$\therefore f(-2)+f(2) = 12+5=17$$

24 ㉠ -2

미분계수 $f'(2)$ 가 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \text{ 이어야 한다.}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{|x-2|(x+k)-0}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-2)(x+k)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} (x+k) \\ &= 2+k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{|x-2|(x+k)-0}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{-(x-2)(x+k)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} (-x-k) \\ &= -2-k\end{aligned}$$

이므로 $2+k=-2-k$

$$\therefore k=-2$$

24-1 ㉠ 1

미분계수 $f'(-1)$ 이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \text{ 이어야 한다.}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{|x+1|(x^2+ax)-0}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(x+1)(x^2+ax)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} (x^2+ax) \\ &= 1-a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{|x+1|(x^2+ax)-0}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{-(x+1)(x^2+ax)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} (-x^2-ax) \\ &= -1+a\end{aligned}$$

이므로 $1-a=-1+a$

$$\therefore a=1$$

25 ㉠ (㉡) h (㉢) x (㉣) $f(x)$

$xf(x)=g(x)$ 라 하면 $y=g(x)$ 에서

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)f(x+h) - xf(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x\{f(x+h) - f(x)\} + \boxed{(\text{㉡})h}f(x+h)}{h} \\ &= x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \\ &= \boxed{(\text{㉢})x} f'(x) + \boxed{(\text{㉣})f(x)} \end{aligned}$$

25-1 ㉠ (㉡) $2xh$ (㉢) $f'(x)$ (㉣) $2xf(x)$

$x^2f(x)=g(x)$ 라 하면 $y=g(x)$ 에서

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2f(x+h) - x^2f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2)f(x+h) - x^2f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2\{f(x+h) - f(x)\} + \boxed{(\text{㉡})2xh}f(x+h) + h^2f(x+h)}{h} \\ &= x^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + 2x \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} hf(x+h) \\ &= x^2 \boxed{(\text{㉢})f'(x)} + \boxed{(\text{㉣})2xf(x)} \end{aligned}$$

26 ㉠ (㉡) $x+h$ (㉢) h^2 (㉣) $2x-4$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^2 - 4(\boxed{(\text{㉡})x+h})\} - (x^2 - 4x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - 4h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2x-4)h + \boxed{(\text{㉢})h^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x-4+h) \\ &= \boxed{(\text{㉣})2x-4} \end{aligned}$$

26-1 ㉠ $f'(x) = -2x+2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{-(x+h)^2 + 2(x+h) - 3\} - (-x^2 + 2x - 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2xh - h^2 + 2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2x+2)h - h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-2x+2-h) \\ &= -2x+2 \end{aligned}$$

27 ㉠ $f'(x) = 2x-3$

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면 $f(0)=f(0)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + 2xh - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 2xh}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 2x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + 2x \\ &= f'(0) + 2x \\ &= 2x - 3 \end{aligned}$$

참고 $f(x+h)$ 는 주어진 관계식

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$$

에 $y=h$ 를 대입한 것과 같으므로

$$f(x+h) = f(x) + f(h) + 2xh$$

27-1 ㉠ 3

$f(x+y)=f(x)+f(y)+kxy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$$

$f'(x)=3x+3$ 에서 $f'(0)=3$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + kxh - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + kxh}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + kx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + kx \\ &= f'(0) + kx \\ &= 3 + kx \end{aligned}$$

따라서 $3+kx=3x+3$ 이므로

$$k=3$$

28 ㉠ $f'(x) = x-2$

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+1$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+1 \quad \therefore f(0)=-1$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + xh + 1 - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + xh + 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 1}{h} + x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + x \\ &= f'(0) + x \end{aligned}$$

즉 $f'(x)=f'(0)+x$ 이고 $f'(1)=-1$ 이므로

$$f'(1)=f'(0)+1=-1 \quad \therefore f'(0)=-2$$

$$\therefore f'(x)=x-2$$

28-1 ㉔ x=5

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy-1$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면
 $f(0)=f(0)+f(0)-1 \quad \therefore f(0)=1 \quad \dots\dots ①$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+xh-1-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+xh-1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-1}{h} + x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + x \\ &= f'(0) + x \end{aligned}$$

즉 $f'(x)=f'(0)+x$ 이고 $f'(2)=4$ 이므로

$$f'(2)=f'(0)+2=4 \quad \therefore f'(0)=2$$

$$\therefore f'(x)=x+2 \quad \dots\dots ②$$

따라서 방정식 $f'(x)=7$, 즉 $x+2=7$ 의 해는

$$x=5 \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① $f(0)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%
② $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	50%
③ 방정식 $f'(x)=7$ 의 해를 구할 수 있다.	30%

29 ㉔ 95

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x+y)$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면 $f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$

$$\begin{aligned} \therefore f'(k) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k+h)-f(k)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k)+f(h)+2kh(k+h)-f(k)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} 2k(k+h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 2k^2 \\ &= f'(0) + 2k^2 \\ &= 2k^2 - 3 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^5 f'(k) = \sum_{k=1}^5 (2k^2 - 3) = 2 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} - 15 = 95$$

29-1 ㉔ 261

$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면 $f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$

$$\begin{aligned} \therefore f'(k) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k+h)-f(k)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k)+f(h)+3kh(k+h)-f(k)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} 3k(k+h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 3k^2 \\ &= f'(0) + 3k^2 \\ &= 3k^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^6 f'(k) = \sum_{k=1}^6 (3k^2 - 2) = 3 \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} - 12 = 261$$

30 ㉔ ②

$$f'(x)=5x^4-4x-4 \text{이므로}$$

$$f'(1)=5-4-4=-3$$

$$f'(-1)=5+4-4=5$$

$$\therefore f'(1)+f'(-1)=-3+5=2$$

30-1 ㉔ 29

$$f'(x)=4x^3-a \text{이므로 } f'(1)=4-a$$

$$\text{즉 } 4-a=1 \text{이므로 } a=3$$

$$\text{따라서 } f(x)=x^4-3x+7 \text{이므로}$$

$$f(-2)=16+6+7=29$$

31 ㉔ 100

$$f'(x)=1+x+x^2+\dots+x^{99} \text{이므로}$$

$$f'(1)=1+1+1+\dots+1=100$$

31-1 ㉔ 55

$$f'(x)=10x^9+9x^8+8x^7+\dots+1 \text{이므로}$$

$$f'(1)=10+9+8+\dots+1$$

$$= \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

Lecture 등차수열의 합

첫째항이 a , 제 n 항이 l 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2}$$

32 ㉔ a=1, b=-4

$$f(2)=-2 \text{에서 } 4a+2b+2=-2$$

$$4a+2b=-4 \quad \therefore 2a+b=-2 \quad \dots\dots ①$$

$$f'(x)=2ax+b \text{이므로}$$

$$f'(0)=-4 \text{에서 } b=-4$$

$$b=-4 \text{를 } ① \text{에 대입하면}$$

$$2a-4=-2 \quad \therefore a=1$$

32-1 ㉔ 15

$$f(0)=2 \text{에서 } c=2 \quad \dots\dots ①$$

$$f(1)=3 \text{에서 } 1+a+b+c=3$$

$$\therefore a+b=0 \quad \dots\dots ②$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \text{이므로}$$

$$f'(0)=-1 \text{에서 } b=-1$$

$$b=-1 \text{을 } ② \text{에 대입하면 } a=1 \quad \dots\dots ③$$

$$\text{따라서 } f'(x)=3x^2+2x-1 \text{이므로}$$

$$f'(2)=12+4-1=15 \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① c 의 값을 구할 수 있다.	20%
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	60%
③ $f'(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

33 ㉔ ①

$$f'(x)=(3x^2-4x)'(x^2+x-2)+(3x^2-4x)(x^2+x-2)'$$

$$=(6x-4)(x^2+x-2)+(3x^2-4x)(2x+1)$$

$$\therefore f'(2)=8 \times 4 + 4 \times 5 = 52$$

33-1 ㉮ ⑤

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+2)(x^3+5x) + (x^2-x+3)(x^2-x+3) \text{이므로} \\ f'(x) &= (x^2+2)'(x^3+5x) + (x^2+2)(x^3+5x)' \\ &\quad + (x^2-x+3)'(x^2-x+3) + (x^2-x+3)(x^2-x+3)' \\ &= 2x(x^3+5x) + (x^2+2)(3x^2+5) \\ &\quad + (2x-1)(x^2-x+3) + (x^2-x+3)(2x-1) \\ \therefore f'(1) &= 2 \times 6 + 3 \times 8 + 1 \times 3 + 3 \times 1 = 42 \end{aligned}$$

34 ㉮ -17

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{이므로} \\ h'(-1) &= f'(-1)g(-1) + f(-1)g'(-1) \\ f'(x) &= 3x^2-4, g'(x) = 6x+2 \text{이므로} \\ f'(-1) &= 3-4 = -1, g'(-1) = -6+2 = -4 \\ \text{또 } f(-1) &= -1+4+1 = 4, g(-1) = 3-2 = 1 \text{이므로} \\ h'(-1) &= f'(-1)g(-1) + f(-1)g'(-1) \\ &= -1 \times 1 + 4 \times (-4) \\ &= -17 \end{aligned}$$

34-1 ㉮ 10

$$\begin{aligned} \text{함수 } h(x) &= f(x)g(x) \text{의 그래프 위의 점 } (1, -4) \text{에서의 접선의} \\ &\text{기울기는 } x=1 \text{에서의 미분계수와 같으므로 구하는 접선의 기울기} \\ &\text{는 } h'(1) \\ \text{이때 } h'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{이므로} \\ h'(1) &= f'(1)g(1) + f(1)g'(1) \\ f'(x) &= -9x^2+4x-1, g'(x) = 2x-3 \text{이므로} \\ f'(1) &= -9+4-1 = -6, g'(1) = 2-3 = -1 \\ \text{또 } f(1) &= -3+2-1+4 = 2, g(1) = 1-3 = -2 \text{이므로} \\ h'(1) &= f'(1)g(1) + f(1)g'(1) \\ &= -6 \times (-2) + 2 \times (-1) \\ &= 10 \end{aligned}$$

35 ㉮ ②

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)'(x+4)(x^2+2x-2) \\ &\quad + x(x+4)'(x^2+2x-2) + x(x+4)(x^2+2x-2)' \\ &= (x+4)(x^2+2x-2) + x(x^2+2x-2) \\ &\quad + x(x+4)(2x+2) \\ \therefore f'(0) &= 4 \times (-2) = -8 \end{aligned}$$

35-1 ㉮ ④

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2+3)'(x+1)(x-1) + (x^2+3)(x+1)'(x-1) \\ &\quad + (x^2+3)(x+1)(x-1)' \\ &= 2x(x+1)(x-1) + (x^2+3)(x-1) + (x^2+3)(x+1) \\ \therefore f'(1) &= 4 \times 2 = 8 \end{aligned}$$

36 ㉮ 2

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3+2)'(ax^2-3x) + (x^3+2)(ax^2-3x)' \\ &= 3x^2(ax^2-3x) + (x^3+2)(2ax-3) \quad \dots\dots ① \\ \therefore f'(1) &= 3(a-3) + 3(2a-3) = 9a-18 \\ \text{이때 } f'(1) &= 0 \text{이므로 } 9a-18=0 \\ \therefore a &= 2 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	50%
② a 의 값을 구할 수 있다.	50%

36-1 ㉮ 1

$$\begin{aligned} \text{함수 } f(x) &= (ax^2-5)(x-2) \text{의 그래프 위의 } x=1 \text{인 점에서의} \\ &\text{접선의 기울기가 } -6 \text{이므로 } f'(1) = -6 \\ f'(x) &= (ax^2-5)'(x-2) + (ax^2-5)(x-2)' \\ &= 2ax(x-2) + (ax^2-5) \\ \therefore f'(1) &= -2a+a-5 = -a-5 \\ \text{이때 } f'(1) &= -6 \text{이므로 } -a-5 = -6 \\ \therefore a &= 1 \end{aligned}$$

37 ㉮ ①

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5x-4)'(-x+a)(2x^2-1) \\ &\quad + (5x-4)(-x+a)'(2x^2-1) \\ &\quad + (5x-4)(-x+a)(2x^2-1)' \\ &= 5(-x+a)(2x^2-1) - (5x-4)(2x^2-1) \\ &\quad + (5x-4)(-x+a) \times 4x \\ \therefore f'(2) &= 35(-2+a) - 42 + 48(-2+a) \\ &= 83(-2+a) - 42 \\ \text{이때 } f'(2) &= -42 \text{이므로 } 83(-2+a) - 42 = -42 \\ 83(-2+a) &= 0 \quad \therefore a = 2 \end{aligned}$$

37-1 ㉮ -3

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)'(x+2)(x-a) + (x+1)(x+2)'(x-a) \\ &\quad + (x+1)(x+2)(x-a)' \\ &= (x+2)(x-a) + (x+1)(x-a) + (x+1)(x+2) \\ \therefore f'(a) &= (a+1)(a+2) \\ \text{이때 } f'(a) &= 1 \text{이므로 } (a+1)(a+2) = 1 \\ a^2+3a+2 &= 1, a^2+3a+1 = 0 \\ \text{따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 } a \text{의 값} \\ &\text{의 합은 } -3 \text{이다.} \end{aligned}$$

38 ㉮ 13

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2x+3)f(x) + (x^2+3x)f'(x) \text{이므로} \\ g'(1) &= 5f(1) + 4f'(1) = 5 \times 1 + 4 \times 2 = 13 \end{aligned}$$

38-1 ㉮ -5

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2x+2)f(x) + (x^2+2x-3)f'(x) \text{이므로} \\ g'(-3) &= -4f(-3), g'(1) = 4f(1) \\ \text{이때 } g'(-3) + g'(1) &= 20 \text{이므로} \\ -4f(-3) + 4f(1) &= 20 \\ \therefore f(-3) - f(1) &= -5 \end{aligned}$$

39 ㉮ ③

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{-h} \times (-1) \\ &= f'(2) + f'(2) = 2f'(2) \\ \text{이때 } f'(x) &= 12x^2-6x-4 \text{이므로} \\ f'(2) &= 48-12-4 = 32 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2-h)}{h} = 2f'(2) = 2 \times 32 = 64$$

39-1 ㉡ ①

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h)-f(a+2h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h)-f(a)+f(a)-f(a+2h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h} \times (-1) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{2h} \times 2 \\ &= -f'(a) - 2f'(a) \\ &= -3f'(a) \\ \text{즉 } -3f'(a) &= -9 \text{ 이므로 } f'(a) = 3 \\ \text{이때 } f'(x) &= 3x^2 + 2x - 2 \text{ 이므로} \\ f'(a) &= 3a^2 + 2a - 2 = 3 \\ 3a^2 + 2a - 5 &= 0, (3a+5)(a-1) = 0 \\ \therefore a &= 1 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

40 ㉡ 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\} \\ &= f'(1) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}f'(1) \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = 6x - 2$ 이므로 $f'(1) = 6 - 2 = 4$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1} = \frac{1}{2}f'(1) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

40-1 ㉡ 2

$f(2) = 8 - 4 + 2 = 6$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-6}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \times \frac{1}{x+2} \right\} \\ &= f'(2) \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}f'(2) \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = 3x^2 - 2x$ 이므로

$$f'(2) = 12 - 4 = 8$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-6}{x^2-4} = \frac{1}{4}f'(2) = \frac{1}{4} \times 8 = 2$$

41 ㉡ ③

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h)-f(x)}{2h} \times 2 \\ &= 2f'(x) \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 6$ 이므로

$$g(2) = 2f'(2) = 2 \times (12 - 8 + 6) = 20$$

41-1 ㉡ -3

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h)-f(x)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h)-f(x)}{3h} \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2}f'(x) \end{aligned}$$

$f'(x) = 4x^3 - 2x$ 이므로 $g(x) = 6x^3 - 3x$

$g(0) = 0$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)-g(0)}{h} = g'(0)$$

이때 $g'(x) = 18x^2 - 3$ 이므로 $g'(0) = -3$

42 ㉡ ②

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = -1$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 \text{ 이므로 } f(-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = f'(-1) \text{ 이므로}$$

$$f'(-1) = -1$$

이때 $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + 1$, $f'(x) = 4x^3 + 2ax + b$ 이므로

$$f(-1) = 0 \text{ 에서 } 1 + a - b + 1 = 0$$

$$\therefore a - b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$f'(-1) = -1 \text{ 에서 } -4 - 2a + b = -1$$

$$\therefore 2a - b = -3 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -1$, $b = 1$

$$\therefore ab = -1 \times 1 = -1$$

42-1 ㉡ ③

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 1$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-2\} = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(1)-2=0 \quad \therefore f(1)=2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) \text{ 이므로}$$

$$f'(1) = 1$$

이때 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2bx - 3b$, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 2b$ 이므로

$$f(1) = 2 \text{ 에서 } 1 + a + 2b - 3b = 2$$

$$\therefore a - b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$f'(1) = 1 \text{ 에서 } 3 + 2a + 2b = 1$$

$$\therefore a + b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 0$, $b = -1$

$$\therefore ab = 0 \times (-1) = 0$$

43 ㉡ ③

$$f(1) = 10 \text{ 에서 } 1 + a + b = 10 \quad \therefore a + b = 9 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) \text{ 이므로 } f'(0) = 4$$

이때 $f'(x) = 2x + a$ 이므로

$$f'(0) = 4 \text{ 에서 } a = 4$$

$a = 4$ 를 ①에 대입하면

$$4 + b = 9 \quad \therefore b = 5$$

따라서 $f(x)=x^2+4x+5$ 이므로
 $f(-1)=1-4+5=2$

43-1 ㉡ -4

$f(1)=4$ 에서 $1+a+b=4$

$\therefore a+b=3$ ㉠

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-f(-2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \left\{ \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} \times \frac{1}{x-2} \right\} \\ &= -\frac{1}{4}f'(-2)\end{aligned}$$

즉 $-\frac{1}{4}f'(-2)=7$ 이므로 $f'(-2)=-28$ ㉡

이때 $f'(x)=4x^3+a$ 이므로 $f'(-2)=-28$ 에서
 $-32+a=-28 \quad \therefore a=4$

$a=4$ 를 ㉠에 대입하면

$4+b=3 \quad \therefore b=-1$ ㉢

따라서 $f(x)=x^4+4x-1$ 이므로

$f(-1)=1-4-1=-4$ ㉣

채점 기준	비율
㉡ $f'(-2)$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
㉢ a, b 의 값을 구할 수 있다.	40%
㉣ $f(-1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

44 ㉡ -1

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} \times (-1) \\ &= -f'(1)\end{aligned}$$

즉 $-f'(1)=-3$ 이므로 $f'(1)=3$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{f(x)-f(-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{f(x)-f(-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-(-2)}{f(x)-f(-2)} \times \lim_{x \rightarrow -2} (x^2-2x+4) \\ &= \frac{1}{f'(-2)} \times 12 \\ &= \frac{12}{f'(-2)}\end{aligned}$$

즉 $\frac{12}{f'(-2)}=2$ 이므로 $f'(-2)=6$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax+b$ 이므로

$f'(1)=3$ 에서 $3+2a+b=3 \quad \therefore 2a+b=0$ ㉠

$f'(-2)=6$ 에서 $12-4a+b=6 \quad \therefore 4a-b=6$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=-2$

$\therefore a+b=1+(-2)=-1$

44-1 ㉡ 2

(㉠)에서 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$ 이므로 $f'(2)=7$

(㉡)에서

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{2h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}f'(1)\end{aligned}$$

즉 $\frac{1}{2}f'(1)=\frac{5}{2}$ 이므로 $f'(1)=5$

이때 $f'(x)=2ax+b$ 이므로

$f'(2)=7$ 에서 $4a+b=7$ ㉠

$f'(1)=5$ 에서 $2a+b=5$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=3$

따라서 $f(x)=x^2+3x-2$ 이므로

$f(1)=1+3-2=2$

45 ㉡ ②

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(2, 4)$ 를 지나므로 $f(2)=4$ 에서

$8+4a+b=4 \quad \therefore 4a+b=-4$ ㉠

또 점 $(2, 4)$ 에서의 접선의 기울기가 9이므로 $f'(2)=9$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax$ 이므로 $f'(2)=12+4a=9$

$4a=-3 \quad \therefore a=-\frac{3}{4}$

$a=-\frac{3}{4}$ 을 ㉠에 대입하면

$-3+b=-4 \quad \therefore b=-1$

$\therefore a+b=-\frac{3}{4}+(-1)=-\frac{7}{4}$

45-1 ㉡ 2

점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 -2 이므로

$f'(a)=-2$

이때 $f'(x)=2x+4$ 이므로 $f'(a)=2a+4=-2$

$2a=-6 \quad \therefore a=-3$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 (a, b) , 즉 $(-3, b)$ 를 지나므로

$f(-3)=b$ 에서 $b=9-12-2=-5$

$\therefore a-b=-3-(-5)=2$

46 ㉡ -8

곡선 $f(x)=x^4-2x^2+ax+1$ 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의
 기울기가 16이므로 $f'(2)=16$

이때 $f'(x)=4x^3-4x+a$ 이므로

$f'(2)=32-8+a=16$

$24+a=16 \quad \therefore a=-8$

46-1 ㉡ ①

곡선 $f(x)=x^3+ax^2+1$ 위의 $x=1$ 인 점에서의 접선의 기울기가
 5이므로 $f'(1)=5$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax$ 이므로

$f'(1)=3+2a=5 \quad \therefore a=1$

47 ㉡ 9

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(1, 1)$ 을 지나므로 $f(1)=1$ 에서

$1-a+7b+c=1 \quad \therefore a-7b-c=0$ ㉠

또 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(1)=2$

이때 $f'(x)=3x^2-2ax+7b$ 이므로

$f'(1)=2$ 에서 $3-2a+7b=2 \quad \therefore 2a-7b=1$ ㉡

$f'(2)=3$ 에서 $12-4a+7b=3 \quad \therefore 4a-7b=9$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=4, b=1$

$a=4, b=1$ 을 ㉠에 대입하면

$4-7-c=0 \quad \therefore c=-3$

따라서 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 3$ 이므로

$$f(3) = 27 - 36 + 21 - 3 = 9$$

47-1 ㉡ -65

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(2, 3)$ 을 지나므로 $f(2)=3$ 에서

$$8+4a+2b+c=3 \quad \therefore 4a+2b+c=-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(2)=1$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax+b$ 이므로

$$f'(2)=1 \text{에서 } 12+4a+b=1 \quad \therefore 4a+b=-11 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$f'(1)=4 \text{에서 } 3+2a+b=4 \quad \therefore 2a+b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면 $a=-6, b=13$

$a=-6, b=13$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-24+26+c=-5 \quad \therefore c=-7$$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+13x-7$ 이므로

$$f(-2)=-8-24-26-7=-65$$

48 ㉡ ③

다항식 $x^{20}+ax^2+b$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $2x-5$ 이므로

$$x^{20}+ax^2+b=(x-1)^2Q(x)+2x-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1+a+b=-3 \quad \therefore a+b=-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$20x^{19}+2ax=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+2$$

이 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$20+2a=2 \quad \therefore a=-9$$

$a=-9$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$-9+b=-4 \quad \therefore b=5$$

$$\therefore a+2b=-9+10=1$$

48-1 ㉡ 7

다항식 x^4-ax^2+b 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $-x+4$ 이므로

$$x^4-ax^2+b=(x+1)^2Q(x)-x+4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$1-a+b=5 \quad \therefore a-b=-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$4x^3-2ax=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)-1$$

이 식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$-4+2a=-1 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$$

$a=\frac{3}{2}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\frac{3}{2}-b=-4 \quad \therefore b=-\frac{11}{2}$$

$$\therefore a+b=\frac{3}{2}-\frac{11}{2}=-4$$

49 ㉡ ④

다항식 x^5+ax^2+b 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 0이므로

$$x^5+ax^2+b=(x+1)^2Q(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$-1+a+b=0 \quad \therefore a+b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$5x^4+2ax=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$$

이 식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$5-2a=0 \quad \therefore a=\frac{5}{2}$$

$a=\frac{5}{2}$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\frac{5}{2}+b=1 \quad \therefore b=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore a-b=\frac{5}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)=4$$

49-1 ㉡ 4

다항식 $x^{10}+2ax+b$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 0이므로

$$x^{10}+2ax+b=(x-1)^2Q(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1+2a+b=0 \quad \therefore 2a+b=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$10x^9+2a=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$$

이 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$10+2a=0 \quad \therefore a=-5$$

$a=-5$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$-10+b=-1 \quad \therefore b=9$$

$$\therefore a+b=-5+9=4$$

50 ㉡ 9

다항식 x^7-x+3 을 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$x^7-x+3=(x-1)^2Q(x)+ax+b \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$7x^6-1=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$$

이 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $a=6$

$a=6$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$6+b=3 \quad \therefore b=-3$$

따라서 $R(x)=6x-3$ 이므로

$$R(2)=12-3=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

채점 기준	비율
① 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax+b$ 로 놓고 나눗셈식을 나타낼 수 있다.	30%
② $R(x)$ 를 구할 수 있다.	60%
③ $R(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

50-1 ㉡ -16

다항식 x^5 을 $x(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$x^5=x(x-2)^2Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $c=0$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$32=4a+2b+c \quad \therefore 4a+2b=32 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$5x^4=\{(x-2)^2+2x(x-2)\}Q(x)+x(x-2)^2Q'(x)+2ax+b$$

이 식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$80=4a+b \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=32, b=-48$

따라서 $R(x)=32x^2-48x$ 이므로

$$R(1)=32-48=-16$$

유형 완성하기

p.77

51 ㉢ 33

$f(x)=x^n-3x$ 라 하면 $f(1)=-2$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-3x+2}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} f'(1)\end{aligned}$$

이때 $f'(x)=nx^{n-1}-3$ 이므로 $f'(1)=n-3$

따라서 $\frac{n-3}{2}=15$ 이므로 $n=33$

52 ㉢ ①

$f(x)=x^{99}-x^{98}+x^{97}$ 이라 하면 $f(-1)=-3$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{99}-x^{98}+x^{97}+3}{x^3+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x^3+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \left\{ \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \times \frac{1}{x^2-x+1} \right\} \\ &= \frac{1}{3} f'(-1)\end{aligned}$$

이때 $f'(x)=99x^{98}-98x^{97}+97x^{96}$ 이므로

$$f'(-1)=99+98+97=294$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \frac{1}{3} f'(-1) = \frac{1}{3} \times 294 = 98$$

53 ㉢ 28

$f(x)=x^7+x^6+x^5+\dots+x$ 라 하면 $f(1)=7$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7+x^6+x^5+\dots+x-7}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= f'(1)\end{aligned}$$

이때 $f'(x)=7x^6+6x^5+5x^4+\dots+1$ 이므로

$$f'(1)=7+6+5+\dots+1=\frac{7 \times 8}{2}=28$$

54 ㉢ ③

$f(x)$ 가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x)=2ax+b$$

$f(x)$ 와 $f'(x)$ 를 주어진 식에 대입하면

$$(x+1)(2ax+b)-2(ax^2+bx+c)=0$$

$$\therefore (2a-b)x+b-2c=0$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$2a-b=0, b-2c=0$$

.....㉠

또 $f(0)=2$ 이므로 $c=2$

$c=2$ 를 ㉠에 대입하여 풀면 $a=2, b=4$

따라서 $f(x)=2x^2+4x+2$ 이므로

$$f(-1)=2-4+2=0$$

55 ㉢ 3

$f(x)$ 가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x)=2ax+b$$

$f(x)$ 와 $f'(x)$ 를 주어진 식에 대입하면

$$2(ax^2+bx+c)-(x-1)(2ax+b)=x+5$$

$$\therefore (2a+b)x+(b+2c)=x+5$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$2a+b=1, b+2c=5$$

.....㉡

또 $f(0)=-2$ 이므로 $c=-2$

$c=-2$ 를 ㉡에 대입하여 풀면 $a=-4, b=9$

따라서 $f(x)=-4x^2+9x-2$ 이므로

$$f(1)=-4+9-2=3$$

56 ㉢ -1

$\{f(x)+g(x)\}'=x^3-4x+1$ 에서

$$f'(x)+g'(x)=x^3-4x+1$$

$$\therefore f'(x)+f(x)=x^3-4x+1$$

.....㉢

즉 $f(x)$ 는 x^3 의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$f(x)$ 와 $f'(x)$ 를 ㉢에 대입하면

$$(3x^2+2ax+b)+(x^3+ax^2+bx+c)=x^3-4x+1$$

$$x^3+(a+3)x^2+(2a+b)x+(b+c)=x^3-4x+1$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$a+3=0, 2a+b=-4, b+c=1$$

$$\therefore a=-3, b=2, c=-1$$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2x-1$ 이므로

$$f(2)=8-12+4-1=-1$$

학교 시험 대비 문제

p.78-81

01 ㉢ ④

x 의 값이 0에서 a 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(a)-f(0)}{a-0} = \frac{(3a^2-2a)-0}{a} \\ &= \frac{a(3a-2)}{a} = 3a-2\end{aligned}$$

즉 $3a-2=4$ 이므로 $a=2$

02 ㉢ 7

닫힌구간 $[0, a]$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a)-f(0)}{a-0} = a^2+2a$$

이때 $f(0)=0$ 이므로 $\frac{f(a)}{a}=a^2+2a$

$\therefore f(a)=a^3+2a^2$

즉 $f(x)=x^3+2x^2$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+2x^2-3}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+3x+3)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+3x+3) \\ &= 1+3+3=7 \end{aligned}$$

03 ㉡ 6

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a-2h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(a+h)-f(a)\}-\{f(a-2h)-f(a)\}}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times \frac{1}{2} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h} \\ &= \frac{1}{2} f'(a) + f'(a) = \frac{3}{2} f'(a) \\ &= \frac{3}{2} \times 4 = 6 \end{aligned}$$

04 ㉡ 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-xf(1)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\{f(x)-f(1)\}-\{xf(1)-f(1)\}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \times (\sqrt{x}+1) \right] \\ &= \left\{ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(1)}{x-1} \right\} \times \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) \\ &= 2\{f'(1)-f(1)\} \\ &= 2 \times (5-4) = 2 \end{aligned}$$

05 ㉡ ①

$f(x-y)=f(x)-f(y)+xy(x-y)$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면 $f(0)=f(0)-f(0) \therefore f(0)=0$

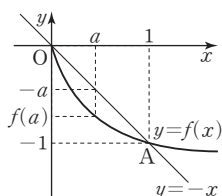
$$\begin{aligned} \therefore f'(5) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5)-f(-h)-5h(5+h)-f(5)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(-h)-5h(5+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h)}{-h} - \lim_{h \rightarrow 0} 5(5+h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h)-f(0)}{-h} - 25 \quad (\because f(0)=0) \\ &= f'(0) - 25 \\ &= 5 - 25 = -20 \end{aligned}$$

06 ㉡ ㄱ, ㄷ

ㄱ. $0 < a < 1$ 이므로 오른쪽 그림에서

$f(a) < -a \therefore a+f(a) < 0$

ㄴ. 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기는 -1 보다 클 수도 있고 작을 수도 있다.



ㄷ. $f'(a)$ 는 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기이므로 $f'(a) < 0$

이때 $a > 0$ 이므로 $\frac{f'(a)}{a} < 0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

07 ㉡ ㄱ, ㄴ, ㄹ

ㄱ. 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 정의되지 않으므로 $x=2$ 에서 불연속이다. 즉 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{|x^2-4|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2-4}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} (x+2) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{|x^2-4|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{-(x^2-4)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{-(x+2)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} (-x-2) = -4 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \neq \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

즉 $f'(2)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x^2-x)-2}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} (x+1) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(3x-4)-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{3x-6}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{3(x-2)}{x-2} = 3 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

즉 $f'(2)$ 의 값이 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.

$$\begin{aligned} \text{ㄹ. } \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{|x(x-2)|}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} x = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{|x(x-2)|}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{-x(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} (-x) = -2 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \neq \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

즉 $f'(2)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 $x=2$ 에서 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

08 ㉡ ⑤

① $f'\left(\frac{5}{2}\right)$ 는 점 $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ 에서의 접선의 기울기와 같으므로 $f'\left(\frac{5}{2}\right) > 0$

- ② $f'(x)=0$ 인 점은 미분가능하면서 접선의 기울기가 0인 점이므로 $1 < x < 2$ 인 모든 x 에 대하여 $f'(x)=0$ 이다.
 즉 $f'(x)=0$ 인 점은 무수히 많다.
- ③ 함수 $f(x)$ 가 불연속인 점은 $x=3, x=4$ 의 2개이다.
- ④ $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x)=1, \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)=1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)=1$
- ⑤ 함수 $f(x)$ 가 $x=3, x=4$ 에서 불연속이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3, x=4$ 에서 미분가능하지 않다.
 또 함수 $f(x)$ 가 $x=1, x=2$ 에서 연속이지만 그래프가 뾰족점이므로 미분가능하지 않다.
 즉 함수 $f(x)$ 가 미분가능하지 않은 점은 $x=1, x=2, x=3, x=4$ 의 4개이다.
- 따라서 옳은 것은 ⑤이다.

09 ㉡ ④

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1)$ 이므로

$$a+b=1$$

.....㉠

또 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \text{ 이어야 한다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(ax+b)-(a+b)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{a(x-1)}{x-1} \\ = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2-(a+b)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2-1}{x-1} (\because \text{㉠})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} (x+1)$$

$$= 2$$

이므로 $a=2$

$a=2$ 를 ㉠에 대입하면

$$2+b=1 \quad \therefore b=-1$$

$$\therefore 2a+b=4+(-1)=3$$

10 ㉡ ①

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - (\lim_{h \rightarrow 0} f(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(\lim_{h \rightarrow 0} 3(x+h)^2 + 2)\} - (3x^2 + 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\lim_{h \rightarrow 0} 6xh + 3h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (\lim_{h \rightarrow 0} 6x + 3h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 6x \end{aligned}$$

11 ㉡ 2

$f(x+y)=f(x)+f(y)-4xy(x+y)$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면 $f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) - 4xh(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 4xh(x+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} 4x(x+h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} - 4x^2 (\because f(0)=0) \\ &= f'(0) - 4x^2 \\ &= -4x^2 - 5 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } f'(n) = -4n^2 - 5 < -13 \text{ 이므로}$$

$$-4n^2 < -8 \quad \therefore n^2 > 2$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 2이다.

12 ㉡ 16

$$f'(x) = 3x^2 + 2xf'(1) - 6 \text{ 이므로}$$

$$f'(1) = 3 + 2f'(1) - 6 \quad \therefore f'(1) = 3$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x, f'(x) = 3x^2 + 6x - 6 \text{ 이므로}$$

$$f(1) = 1 + 3 - 6 = -2$$

$$f'(2) = 12 + 12 - 6 = 18$$

$$\therefore f(1) + f'(2) = -2 + 18 = 16$$

13 ㉡ -12

$$g'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) \text{ 이므로}$$

$$\therefore g'(1) = 3f(1) + f'(1)$$

$$\text{이때 } g(1) = f(1) = 4 \text{ 이므로}$$

$$0 = 3 \times 4 + f'(1) \quad \therefore f'(1) = -12$$

14 ㉡ 3

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)+3}{x+1} = 4 \text{ 에서 } x \rightarrow -1 \text{ 일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{ 이고 극한값}$$

이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -1} \{f(x)+3\} = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(-1)+3=0 \quad \therefore f(-1)=-3$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)+3}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \\ &= f'(-1) = 4 \end{aligned}$$

$$g(x) = (2x^3 - 3x + 2)f(x) \text{ 에서}$$

$$g'(x) = (6x^2 - 3)f(x) + (2x^3 - 3x + 2)f'(x)$$

$$\therefore g'(-1) = 3f(-1) + 3f'(-1) = 3 \times (-3) + 3 \times 4 = 3$$

15 ㉡ ③

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2f(x) + xf(-2)}{x+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2f(x) - 2f(-2) + 2f(-2) + xf(-2)}{x - (-2)}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} + \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)f(-2)}{x+2}$$

$$= 2f'(-2) + f(-2)$$

$$\text{이때 } f(x) = (4x^2 + 20x + 25)(4x^2 + 20x + 25) \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = (8x + 20)(4x^2 + 20x + 25)$$

$$+ (4x^2 + 20x + 25)(8x + 20)$$

$$= 2(8x + 20)(4x^2 + 20x + 25)$$

$$f'(-2)=2 \times 4 \times 1=8, f(-2)=(16-40+25)^2=1$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=2f'(-2)+f(-2)=2 \times 8+1=17$$

16 ㉡ -2

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x)\}^2 - \{f(1)\}^2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x)+f(1)\}\{f(x)-f(1)\}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+f(1)\}$$

$$= f'(1) \times 2f(1)$$

$$f(1)=2-1-3+1=-1$$

$$\text{이때 } f'(x)=6x^2-2x-3 \text{ 이므로}$$

$$f'(1)=6-2-3=1$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=f'(1) \times 2f(1)=1 \times 2 \times (-1)=-2$$

17 ㉡ 170

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}=3 \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{ 일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값이 존재}$$

$$\text{하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{이다.}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)=0 \text{이므로 } f(1)=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) \text{이므로}$$

$$f'(1)=3$$

$$\text{이때 } f'(x)=4x(ax^2+bx-2)+(2x^2-1)(2ax+b) \text{이므로}$$

$$f'(1)=3 \text{에서 } 4(a+b-2)+(2a+b)=3$$

$$\therefore 6a+5b=11 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(1)=0 \text{에서 } a+b-2=0$$

$$\therefore a+b=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=1, b=1$$

$$\text{따라서 } f(x)=(2x^2-1)(x^2+x-2) \text{이므로}$$

$$f(3)=17 \times 10=170$$

18 ㉡ 3

$$f(x)=ax^2+bx+c \text{ 라 하면}$$

$$\text{곡선 } y=f(x) \text{가 두 점 } (1, 1), (-1, 2) \text{를 지나므로}$$

$$a+b+c=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a-b+c=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{또 곡선 } y=f(x) \text{ 위의 점 } (-1, 2) \text{에서의 접선의 기울기가 } -\frac{3}{2}$$

$$\text{이므로 } f'(-1)=-\frac{3}{2}$$

$$\text{이때 } f'(x)=2ax+b \text{이므로 } -2a+b=-\frac{3}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{을 연립하여 풀면 } a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}, c=1$$

$$\therefore 2a-2b+c=2 \times \frac{1}{2}-2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)+1=3$$

19 ㉡ $a=-80, b=-128$

$$\text{다항식 } x^5+ax-b \text{를 } (x-2)^2 \text{으로 나누었을 때의 몫을 } Q(x) \text{라 하면 나머지가 0이므로}$$

$$x^5+ax-b=(x-2)^2 Q(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{의 양변에 } x=2 \text{를 대입하면}$$

$$32+2a-b=0 \quad \therefore 2a-b=-32 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } x^5+ax-b=(x^2-4x+4)Q(x)$$

$$\text{이 식의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$5x^4+a=(2x-4)Q(x)+(x^2-4x+4)Q'(x)$$

$$\therefore 5x^4+a=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2 Q'(x)$$

$$\text{이 식의 양변에 } x=2 \text{를 대입하면}$$

$$80+a=0 \quad \therefore a=-80$$

$$a=-80 \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면}$$

$$-160-b=-32 \quad \therefore b=-128$$

20 ㉡ ①

$$f(x)=x^{3n}+x^{2n}+x^n \text{이라 하면 } f(1)=3 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{3n}+x^{2n}+x^n-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

$$\text{이때 } f'(x)=3nx^{3n-1}+2nx^{2n-1}+nx^{n-1} \text{이므로}$$

$$f'(1)=6n$$

$$\therefore a_n=6n \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} 6n = 6 \times \frac{10 \times 11}{2} = 330$$

21 ㉡ ①

$$f(x) \text{가 이차함수이므로}$$

$$f(x)=ax^2+bx+c \text{ (} a, b, c \text{는 상수, } a \neq 0 \text{)라 하면}$$

$$f'(x)=2ax+b$$

$$f(x) \text{와 } f'(x) \text{를 주어진 식에 대입하면}$$

$$x^2(2ax+b)-x(ax^2+bx+c)-2x^3+2x=0$$

$$\therefore (a-2)x^3+(2-c)x=0$$

$$\text{이 등식이 모든 실수 } x \text{에 대하여 성립하므로}$$

$$a-2=0, 2-c=0 \quad \therefore a=2, c=2$$

$$\text{또 } f'(2)=5 \text{이므로 } 4a+b=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a=2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$8+b=5 \quad \therefore b=-3$$

$$\text{따라서 } f(x)=2x^2-3x+2 \text{이므로}$$

$$f(1)=2-3+2=1$$

서술형 1 ㉡ -2

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy \text{의 양변에 } x=0, y=0 \text{을 대입하면}$$

$$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+xh-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+xh}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + x$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + x \text{ (} \because f(0)=0 \text{)}$$

$$= f'(0) + x$$

$$= x+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\therefore f'(1)+f'(-5)=(1+1)+(-5+1)=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

채점 기준	비율
① $f(0)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%
② $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	50%
③ $f'(1)+f'(-5)$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

서술형 2 ㉑ -1

함수 $y=g(x)$ 의 그래프 위의 점 $(1, 6)$ 에서의 접선의 기울기가 3
이므로 $g(1)=6, g'(1)=3$ ①

$g(x)=(x^2+x+1)f(x)$ 이므로

$g(1)=6$ 에서 $3f(1)=6 \quad \therefore f(1)=2$ ②

이때 $g'(x)=(2x+1)f(x)+(x^2+x+1)f'(x)$ 이므로

$g'(1)=3$ 에서 $3f(1)+3f'(1)=3$

$\therefore f(1)+f'(1)=1$ ③

$f(1)=2$ 를 ③에 대입하면

$2+f'(1)=1 \quad \therefore f'(1)=-1$ ④

채점 기준	비율
① $g(1), g'(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
② $f(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ $f'(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	40%

서술형 3 ㉑ 9

다항식 x^8-ax^6+b 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라
하면 나머지가 $4x+10$ 이므로

$x^8-ax^6+b=(x+1)^2Q(x)+4x+10$ ① ①

①의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$1-a+b=6 \quad \therefore a-b=-5$ ②

①에서 $x^8-ax^6+b=(x^2+2x+1)Q(x)+4x+10$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$8x^7-6ax^5=(2x+2)Q(x)+(x^2+2x+1)Q'(x)+4$

이 식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$-8+6a=4 \quad \therefore a=2$

$a=2$ 를 ②에 대입하면

$2-b=-5 \quad \therefore b=7$ ③

$\therefore a+b=2+7=9$ ④

채점 기준	비율
① 몫을 $Q(x)$ 로 놓고 나눗셈식을 세울 수 있다.	30%
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	60%
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

1등급

10% 핵심 기술 문제

p. 82-83

01 ㉑ ④

$f(x)=\sum_{n=1}^{10} \frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{10}}{10}$ 이므로

$f'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^9$

$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^9}$

$\frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{1-\frac{1}{2}}$ 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열의
첫째항부터 제10항까지의 합

$=\frac{2^{10}-1}{2^9}$

$=\frac{1023}{512}$

따라서 $p=512, q=1023$ 이므로

$q-p=1023-512=511$

02 ㉑ ②

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-10)$ 에서

$f'(x)=(x-2)(x-3)\cdots(x-10)$

$+ (x-1)(x-3)\cdots(x-10)$

$+ \cdots + (x-1)(x-2)\cdots(x-9)$

$f'(1)=(1-2)(1-3)\cdots(1-10)$

$=-1\times(-2)\times\cdots\times(-9)$

$=-9!$

$f'(4)=(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)\cdots(4-10)$

$=3\times2\times1\times(-1)\times(-2)\times\cdots\times(-6)$

$=6\times6!$

$\therefore \frac{f'(1)}{f'(4)}=\frac{-9!}{6\times6!}=-\frac{9\times8\times7}{6}=-84$

03 ㉑ 13

$f(x)=x^3+ax$ 에 대하여 $f(3)=27+3a, f(1)=1+a$ 이므로 x

의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(27+3a)-(1+a)}{2}=13+a$

이때 $f'(x)=3x^2+a$ 이므로 $f'(a)=3a^2+a$

즉 $13+a=3a^2+a$ 이므로 $3a^2=13$

04 ㉑ 51

구간 $[n, n+1]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 평균변화율이 $n+1$ 이므로

$\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}=n+1$

$\therefore f(n+1)-f(n)=n+1$ ①

함수 $y=f(x)$ 의 구간 $[1, 100]$ 에서의 평균변화율은

$\frac{f(100)-f(1)}{100-1}$

$=\frac{1}{99}\{f(100)-f(99)+f(99)-f(98)+\cdots+f(2)-f(1)\}$

$=\frac{1}{99}[\underbrace{\{f(100)-f(99)\}}_{n=99\text{를 ①에 대입}}+\underbrace{\{f(99)-f(98)\}}_{n=98\text{를 ①에 대입}}+\cdots$

$+\underbrace{\{f(2)-f(1)\}}_{n=1\text{을 ①에 대입}}]$

$=\frac{1}{99}\times(100+99+\cdots+2)$

$=\frac{1}{99}\times\frac{99\times(2+100)}{2}$

$=51$

05 ㉑ ⑤

두 점 $(1, f(1)), (a, f(a))$ ($a>1$) 사이의 거리가 a^2-1 이므로

$\sqrt{(a-1)^2+\{f(a)-f(1)\}^2}=a^2-1$

양변을 제곱하면

$(a-1)^2+\{f(a)-f(1)\}^2=(a^2-1)^2$

양변을 $(a-1)^2$ 으로 나누면

$1+\left\{\frac{f(a)-f(1)}{a-1}\right\}^2=\frac{(a^2-1)^2}{(a-1)^2}$

$1+\left\{\frac{f(a)-f(1)}{a-1}\right\}^2=\frac{(a+1)^2(a-1)^2}{(a-1)^2}$

$$\left\{ \frac{f(a)-f(1)}{a-1} \right\}^2 = (a+1)^2 - 1$$

$$\left\{ \frac{f(a)-f(1)}{a-1} \right\}^2 = a^2 + 2a$$

$$\therefore \frac{f(a)-f(1)}{a-1} = \sqrt{a^2+2a} \quad (\because a > 1)$$

이때 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$f'(1) = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{f(a)-f(1)}{a-1} = \lim_{a \rightarrow 1} \sqrt{a^2+2a} = \sqrt{3}$$

06 ㉓ ③

ㄱ. $h(x) = xf(x)$ 라 하면

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-h(0)}{x}$$

즉 $h'(0)$ 의 값이 존재하므로 함수 $h(x) = xf(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

ㄴ. $h(x) = f(x)g(x)$ 라 하면

$$h(x) = \begin{cases} 2x^2+x & (x \geq 0) \\ x^2+x & (x < 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2x^2+x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} (2x+1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} (x+1) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-h(0)}{x}$$

즉 $h'(0)$ 의 값이 존재하므로 함수 $h(x) = f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

ㄷ. $h(x) = |f(x) - g(x)|$ 라 하면

$$h(x) = \begin{cases} x+1 & (x \geq 0) \\ 1 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(x+1)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1-1}{x} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-h(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-h(0)}{x}$$

즉 $h'(0)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $h(x) = |f(x) - g(x)|$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 $x=0$ 에서 미분가능한 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

참고 ㄷ에서 두 함수

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geq 0) \\ -x-1 & (x < 0) \end{cases}$$

에 대하여

(i) $x \geq 0$ 일 때, $g(x) > f(x)$ 이므로

$$|f(x) - g(x)| = g(x) - f(x) = (2x+1) - x = x+1$$

(ii) $x < 0$ 일 때, $f(x) > g(x)$ 이므로

$$|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x) = -x - (-x-1) = 1$$

$$(i), (ii) \text{에서 } h(x) = \begin{cases} x+1 & (x \geq 0) \\ 1 & (x < 0) \end{cases}$$

07 ㉓ 28

$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면 $f(0) = f(0) + f(0) - 1 \quad \therefore f(0) = 1$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + 2xh - 1 - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + 2x \quad (\because f(0) = 1) \\ &= 2x + f'(0) \end{aligned}$$

.....㉑

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f'(x)}{x^2 - 1} = 14$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - f'(x)\} = 0$ 이므로

$$f(1) - f'(1) = 0 \quad \therefore f(1) = f'(1)$$

$x=1$ 을 ㉑에 대입하면

$$f'(1) = 2 + f'(0) \text{이므로}$$

$$f'(0) = f'(1) - 2 = f(1) - 2$$

.....㉒

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f'(x)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \{2x + f'(0)\}}{x^2 - 1} \quad (\because \text{㉑}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x - f'(0)}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x - \{f(1) - 2\}}{x^2 - 1} \quad (\because \text{㉒}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x - f(1) + 2}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x+1)(x-1)} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x+1} \\ &= \frac{1}{2} f'(1) - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{2} f'(1) - 1 = 14 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} f'(1) = 15 \quad \therefore f'(1) = 30$$

㉒에서

$$f'(0) = f'(1) - 2 = 30 - 2 = 28$$

08 ㉓ ①

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이므로

$$f(x) = f(-x)$$

.....㉑

$$\begin{aligned} \therefore f'(-x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-(x-h)) - f(-x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \quad (\because \text{㉑}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \times (-1) \right\} \\ &= -f'(x) \end{aligned}$$

즉 $f'(-x) = -f'(x)$ 이므로

$$f'(-2) = -f'(2) = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x^2) - f(4)}{f(x) - f(2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \left\{ \frac{f(x^2) - f(4)}{x^2 - 4} \times \frac{x - (-2)}{f(x) - f(-2)} \times (x - 2) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x^2) - f(4)}{x^2 - 4} \times \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - (-2)}{f(x) - f(-2)} \times \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) \\ &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{f(t) - f(4)}{t - 4} \times \frac{1}{f'(-2)} \times (-4) \\ &= f'(4) \times \frac{1}{f'(-2)} \times (-4) \quad \text{--- } x^2=t \text{ 라 하면 } x \rightarrow -2 \text{ 일 때 } t \rightarrow 4 \\ &= 6 \times \frac{1}{3} \times (-4) \\ &= -8 \end{aligned}$$

09 ㉡ 24

(나)에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - 4}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - f(0)g(0)}{x} \quad (\because f(0)=1, g(0)=4) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - f(0)g(x) + f(0)g(x) - f(0)g(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{f(x) - f(0)\}g(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0)\{g(x) - g(0)\}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} g(x) + f(0) \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} \\ &= f'(0)g(0) + f(0)g'(0) \\ &= -6 \times 4 + 1 \times g'(0) \\ &= g'(0) - 24 \\ \text{즉 } g'(0) - 24 &= 0 \text{ 이므로} \\ g'(0) &= 24 \end{aligned}$$

10 ㉡ ①

$x=1$ 을 (나)의 부등식의 각 변에 대입하면

$$0 \leq f(1) \leq 0 \quad \therefore f(1) = 0$$

$x > 1$ 일 때, (나)의 부등식의 각 변을 $x-1$ 로 나누면

$$\frac{6x-6}{x-1} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{2x^3-2}{x-1}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{6x-6}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{6(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} 6 = 6$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x^3-2}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} 2(x^2+x+1) = 6 \end{aligned}$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{x-1} = 6$$

$x < 1$ 일 때, 같은 방법으로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)}{x-1} = 6$$

.....㉠

$$\text{㉠, ㉡에서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 6$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \quad (\because \text{㉠}) \\ &= f'(1) = 6 \end{aligned}$$

.....㉢

(가)에서 상수항이 -3 이고, 다항함수 $f(x)$ 가 (나)를 만족시키려면 $f(x)$ 는 삼차 이하의 다항함수이다.

(i) $f(x)$ 가 일차함수일 때

$$f(x) = x - 3 \text{ 이므로 } f'(x) = 1 \quad \therefore f'(1) = 1$$

즉 ㉡을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)$ 가 이차함수일 때

$$f(x) = x^2 + ax - 3 \quad (a \text{는 상수}) \text{이라 하면}$$

$$\text{㉠에서 } f(1) = 1 + a - 3 = 0 \text{ 이므로 } a = 2$$

$$\therefore f(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$f'(x) = 2x + 2 \text{ 이므로 } f'(1) = 2 + 2 = 4$$

즉 ㉡을 만족시키지 않는다.

(iii) $f(x)$ 가 삼차함수일 때

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3 \quad (a, b \text{는 상수}) \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\text{㉠에서 } f(1) = 1 + a + b - 3 = 0 \quad \therefore a + b = 2$$

$$\text{㉡에서 } f'(1) = 3 + 2a + b = 6 \quad \therefore 2a + b = 3$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 1$

$$\therefore f(x) = x^3 + x^2 + x - 3$$

(i)~(iii)에서 $f(x) = x^3 + x^2 + x - 3$

$$\therefore f(3) = 27 + 9 + 3 - 3 = 36$$

11 ㉡ ⑤

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^m} = 1 \text{에서 } f(x) \text{는 최고차항이 } m \text{차이고 그 계수가 } 1 \text{인}$$

다항함수이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = b \text{에서 } f(x) \text{는 최저차항이 } n \text{차이고 그 계수가 } b \text{인 다}$$

항함수이다.

$$\text{즉 } f(x) = x^m + \cdots + bx^n \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = mx^{m-1} + \cdots + bnx^{n-1}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x^{m-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{mx^{m-1} + \cdots + bnx^{n-1}}{x^{m-1}} = m$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^{m-1} + \cdots + bnx^{n-1}}{x^{n-1}} = bn$$

$$\therefore a = m, bn = 9$$

.....㉠

ㄱ. m 은 최고차항의 차수, n 은 최저차항의 차수이므로 $m \geq n$

ㄴ. ㄱ에서 $m \geq n$ 이므로 $a \geq n$ ($\because$ ㉠)

이때 b 는 자연수이므로

$$ab \geq nb \quad \therefore ab \geq 9$$

ㄷ. $f(x)$ 가 삼차함수이면 $a = m = 3$ 이므로 $am = 9$

$$\therefore am = bn = 9 \quad (\because \text{㉠})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

04 접선의 방정식과 평균값 정리

II 마분

개념 완성하기

p.87~88

01 ㉠ -1

$$f(x) = 3x^2 - x + 6 \text{ 이라 하면 } f'(x) = 6x - 1$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 6)$ 에서의 접선의 기울기는
 $f'(0) = -1$

02 ㉠ 1

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 1 \text{ 이라 하면 } f'(x) = -3x^2 + 4x$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는
 $f'(1) = -3 + 4 = 1$

03 ㉠ $y = -5x - 6$

$$f(x) = x^2 - x - 2 \text{ 라 하면 } f'(x) = 2x - 1$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, 4)$ 에서의 접선의 기울기는
 $f'(-2) = -4 - 1 = -5$

따라서 기울기가 -5이고 점 $(-2, 4)$ 를 지나는 접선의 방정식은
 $y - 4 = -5(x + 2) \quad \therefore y = -5x - 6$

04 ㉠ $y = -2x + 21$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 20 \text{ 이라 하면 } f'(x) = -\frac{1}{2}x - 1$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 17)$ 에서의 접선의 기울기는
 $f'(2) = -1 - 1 = -2$

따라서 기울기가 -2이고 점 $(2, 17)$ 을 지나는 접선의 방정식은
 $y - 17 = -2(x - 2) \quad \therefore y = -2x + 21$

05 ㉠ $y = -1$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 1 \text{ 이라 하면 } f'(x) = 3x^2 + 4x$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, -1)$ 에서의 접선의 기울기는
 $f'(0) = 0$

따라서 기울기가 0이고 점 $(0, -1)$ 을 지나는 접선의 방정식은
 $y + 1 = 0 \quad \therefore y = -1$

06 ㉠ $y = 3x - 7$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \text{ 라 하면 } f'(x) = 2x - 3$$

접점의 좌표를 $(t, t^2 - 3t + 2)$ 라 하면 접선의 기울기가 3이므로
 $f'(t) = 2t - 3 = 3 \quad \therefore t = 3$

따라서 접점의 좌표는 $(3, 2)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은
 $y - 2 = 3(x - 3) \quad \therefore y = 3x - 7$

07 ㉠ $y = 3x + 5$

$$f(x) = 3x^2 + 3x + 5 \text{ 라 하면 } f'(x) = 6x + 3$$

접점의 좌표를 $(t, 3t^2 + 3t + 5)$ 라 하면 접선의 기울기가 3이므로
 $f'(t) = 6t + 3 = 3 \quad \therefore t = 0$

따라서 접점의 좌표는 $(0, 5)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은
 $y - 5 = 3(x - 0) \quad \therefore y = 3x + 5$

08 ㉠ $y = 3x + 10\sqrt{5}, y = 3x - 10\sqrt{5}$

$$f(x) = x^3 - 12x \text{ 라 하면 } f'(x) = 3x^2 - 12$$

접점의 좌표를 $(t, t^3 - 12t)$ 라 하면 접선의 기울기가 3이므로
 $f'(t) = 3t^2 - 12 = 3, t^2 - 5 = 0$

$$(t + \sqrt{5})(t - \sqrt{5}) = 0 \quad \therefore t = -\sqrt{5} \text{ 또는 } t = \sqrt{5}$$

따라서 접점의 좌표는 $(-\sqrt{5}, 7\sqrt{5}), (\sqrt{5}, -7\sqrt{5})$ 이므로 구하는
접선의 방정식은

$$y - 7\sqrt{5} = 3(x + \sqrt{5}), y + 7\sqrt{5} = 3(x - \sqrt{5})$$

$$\therefore y = 3x + 10\sqrt{5}, y = 3x - 10\sqrt{5}$$

09 ㉠ $y = 2x + 9$

$$f(x) = -x^2 - 2x + 5 \text{ 라 하면 } f'(x) = -2x - 2$$

접점의 좌표를 $(t, -t^2 - 2t + 5)$ 라 하면 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 에 수
직인 직선의 기울기가 2이므로

$$f'(t) = -2t - 2 = 2 \quad \therefore t = -2$$

따라서 접점의 좌표는 $(-2, 5)$ 이므로 구하는 직선의 방정식은
 $y - 5 = 2(x + 2) \quad \therefore y = 2x + 9$

10 ㉠ $y = 5x + 1, y = 5x - 3$

$$f(x) = x^3 + 2x - 1 \text{ 이라 하면 } f'(x) = 3x^2 + 2$$

접점의 좌표를 $(t, t^3 + 2t - 1)$ 이라 하면 직선 $y = 5x - 1$ 에 평행한
직선의 기울기가 5이므로

$$f'(t) = 3t^2 + 2 = 5, t^2 - 1 = 0$$

$$(t + 1)(t - 1) = 0 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 1$$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, -4), (1, 2)$ 이므로 구하는 직선의 방
정식은

$$y + 4 = 5(x + 1), y - 2 = 5(x - 1)$$

$$\therefore y = 5x + 1, y = 5x - 3$$

11 ㉠ $y = (-2t - 4)x + t^2 - 2$

$f'(x) = -2x - 4$ 이고 접점의 좌표는 $(t, -t^2 - 4t - 2)$ 이므로 이
점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = -2t - 4$

따라서 접선의 방정식은

$$y - (-t^2 - 4t - 2) = (-2t - 4)(x - t)$$

$$\therefore y = (-2t - 4)x + t^2 - 2$$

12 ㉠ -1, -5

11에서 구한 접선이 점 $(-3, 5)$ 를 지나므로

$$5 = 6t + 12 + t^2 - 2$$

$$t^2 + 6t + 5 = 0, (t + 1)(t + 5) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = -5$$

13 ㉠ $y = -2x - 1, y = 6x + 23$

$t = -1, t = -5$ 를 11에서 구한 접선의 방정식에 각각 대입하면

$$y = -2x - 1, y = 6x + 23$$

14 ㉠ $y = -7x + 3, y = 5x + 3$

$$f(x) = 3x^2 - x + 6 \text{ 이라 하면 } f'(x) = 6x - 1$$

접점의 좌표를 $(t, 3t^2 - t + 6)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울
기는 $f'(t) = 6t - 1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (3t^2 - t + 6) = (6t - 1)(x - t)$$

$$\therefore y = (6t - 1)x - 3t^2 + 6$$

.....㉠

이 직선이 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3 = -3t^2 + 6, t^2 - 1 = 0$$

$$(t+1)(t-1) = 0 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 1$$

이 값을 ㉠에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y = -7x + 3, y = 5x + 3$$

15 ㉡ $y = -x + 3$

$$f(x) = -x^3 + 2x + 1 \text{이라 하면 } f'(x) = -3x^2 + 2$$

접점의 좌표를 $(t, -t^3 + 2t + 1)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = -3t^2 + 2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (-t^3 + 2t + 1) = (-3t^2 + 2)(x - t)$$

$$\therefore y = (-3t^2 + 2)x + 2t^3 + 1$$

.....㉢

이 직선이 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3 = 2t^3 + 1, (t-1)(t^2+t+1) = 0$$

$$\therefore t = 1 (\because t^2+t+1 > 0)$$

이 값을 ㉢에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y = -x + 3$$

16 ㉡ $a=1, b=0$

$$f(x) = x^3 + ax, g(x) = 2x^2 + b \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + a, g'(x) = 4x$$

두 곡선이 $x=1$ 인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$$f(1) = g(1), f'(1) = g'(1)$$

$$f(1) = g(1) \text{에서 } a+1 = b+2$$

$$\therefore a - b = 1$$

.....㉣

$$f'(1) = g'(1) \text{에서 } a+3 = 4 \quad \therefore a = 1$$

$a=1$ 을 ㉣에 대입하면

$$2 = b+2 \quad \therefore b = 0$$

17 ㉡ $y = 4x - 2$

두 곡선 $f(x) = x^3 + x, g(x) = 2x^2$ 의 접점의 좌표가 $(1, 2)$ 이고 접선의 기울기가 $f'(1) = g'(1) = 4$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - 2 = 4(x - 1) \quad \therefore y = 4x - 2$$

18 ㉡ -1

$$f(x) = x^3 + 1, g(x) = -3x^2 - 3x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2, g'(x) = -6x - 3$$

접점의 x 좌표를 t 라 하면 $f(t) = g(t), f'(t) = g'(t)$ 이어야 한다.

$$f(t) = g(t) \text{에서 } t^3 + 1 = -3t^2 - 3t$$

$$t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0, (t+1)^3 = 0$$

$$\therefore t = -1$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } 3t^2 = -6t - 3$$

$$t^2 + 2t + 1 = 0, (t+1)^2 = 0$$

$$\therefore t = -1$$

따라서 접점의 x 좌표는 -1 이다.

19 ㉡ $y = 3x + 3$

두 곡선의 접점의 좌표가 $(-1, 0)$ 이고 접선의 기울기가

$$f'(-1) = g'(-1) = 3 \text{이므로 구하는 접선의 방정식은}$$

$$y - 0 = 3(x + 1) \quad \therefore y = 3x + 3$$

20 ㉡ $\frac{3}{2}$

함수 $f(x) = x^2 - 3x$ 는 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$ 에서 미분가능하다.

또 $f(0) = f(3) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 2x - 3$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서

$$2c - 3 = 0 \quad \therefore c = \frac{3}{2}$$

21 ㉡ 2

함수 $f(x) = -x^2 + 4x$ 는 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$ 에서 미분가능하다.

또 $f(1) = f(3) = 3$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(1, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = -2x + 4$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서

$$-2c + 4 = 0 \quad \therefore c = 2$$

22 ㉡ $\frac{5}{2}$

함수 $f(x) = (x-1)(x-4) = x^2 - 5x + 4$ 는 닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 4)$ 에서 미분가능하다.

또 $f(1) = f(4) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(1, 4)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 2x - 5$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서

$$2c - 5 = 0 \quad \therefore c = \frac{5}{2}$$

23 ㉡ 1

함수 $f(x) = x^3 - 3x$ 는 닫힌구간 $[0, \sqrt{3}]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, \sqrt{3})$ 에서 미분가능하다.

또 $f(0) = f(\sqrt{3}) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(0, \sqrt{3})$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 3x^2 - 3$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서

$$3c^2 - 3 = 0, (c+1)(c-1) = 0$$

$$\therefore c = 1 (\because 0 < c < \sqrt{3})$$

24 ㉡ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

함수 $f(x) = x^3 - 4x + 1$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$ 에서 미분가능하다.

또 $f(0) = f(2) = 1$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 3x^2 - 4$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서

$$3c^2 - 4 = 0, (\sqrt{3}c + 2)(\sqrt{3}c - 2) = 0$$

$$\therefore c = \frac{2\sqrt{3}}{3} (\because 0 < c < 2)$$

25 ㉡ 0

함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 는 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f(-1) = -1, f(1) = 3, f'(x) = 2x + 2$ 이므로

$$\frac{3-(-1)}{1-(-1)}=2c+2, 2=2c+2 \quad \therefore c=0$$

26 ㉡2

함수 $f(x)=-x^2+4$ 는 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(1, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f(1)=3, f(3)=-5, f'(x)=-2x$ 이므로

$$\frac{-5-3}{3-1}=-2c, -4=-2c \quad \therefore c=2$$

27 ㉡1

함수 $f(x)=(x+1)(2x-5)=2x^2-3x-5$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f(0)=-5, f(2)=-3, f'(x)=4x-3$ 이므로

$$\frac{-3-(-5)}{2-0}=4c-3, 1=4c-3 \quad \therefore c=1$$

28 ㉡3

함수 $f(x)=x^3-4x+3$ 은 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(0, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f(0)=3, f(3)=18, f'(x)=3x^2-4$ 이므로

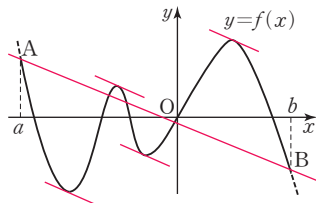
$$\frac{18-3}{3-0}=3c^2-4, c^2-3=0$$

$$(c+\sqrt{3})(c-\sqrt{3})=0 \quad \therefore c=\sqrt{3} (\because 0 < c < 3)$$

29 ㉡4

x 좌표가 a, b 인 점을 각각 A, B라 하자. 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 c 는 곡선 $y=f(x)$ 의 접선 중에서 직선 AB와 기울기가 같은 접선의 접점의 x 좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 직선 AB와 평행한 접선을 4개 그을 수 있으므로 실수 c 의 개수는 4이다.



$$f'(a)=3a^2-6a=-3, a^2-2a+1=0$$

$$(a-1)^2=0 \quad \therefore a=1$$

이때 점 (a, b) , 즉 점 $(1, b)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$b=1-3=-2$$

$$\therefore a+b=1+(-2)=-1$$

01-1 ㉡2

$$f(x)=x^3+x \text{라 하면 } f'(x)=3x^2+1$$

두 점 $(-1, -2), (a, b)$ 에서의 접선의 접점이 평행하므로

$$f'(-1)=f'(a) \text{에서 } 3+1=3a^2+1$$

$$a^2=1 \quad \therefore a=1 (\because a \neq -1)$$

이때 점 (a, b) , 즉 점 $(1, b)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$b=1+1=2$$

$$\therefore ab=1 \times 2=2$$

02 ㉡2

$$f(x)=ax^3-x^2+1 \text{이라 하면 } f'(x)=3ax^2-2x$$

$x=1$ 인 점에서의 접선의 기울기가 4이므로

$$f'(1)=3a-2=4$$

$$3a=6 \quad \therefore a=2$$

02-1 ㉡0

$$f(x)=x^3+ax+1 \text{이라 하면 } f'(x)=3x^2+a$$

점 $(1, k)$ 에서의 접선의 기울기가 2이므로

$$f'(1)=3+a=2 \quad \therefore a=-1 \quad \dots\dots ①$$

이때 점 $(1, k)$ 가 곡선 $y=x^3+ax+1$, 즉 $y=x^3-x+1$ 위의 점이므로

$$k=1-1+1=1 \quad \dots\dots ②$$

$$\therefore a+k=-1+1=0 \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	40%
② k 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $a+k$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

03 ㉡4

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \text{에서 } f'(x)=3x^2+2ax+b$$

점 $(1, 8)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(1)=8 \text{에서 } 1+a+b+c=8$$

$$\therefore a+b+c=7 \quad \dots\dots ㉠$$

점 $(1, 8)$ 에서의 접선의 기울기가 10이므로

$$f'(1)=3+2a+b=10 \quad \therefore 2a+b=7 \quad \dots\dots ㉡$$

$x=-1$ 인 점에서의 접선의 기울기가 6이므로

$$f'(-1)=3-2a+b=6$$

$$\therefore 2a-b=-3 \quad \dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1, b=5$

$a=1, b=5$ 를 ㉠에 대입하면

$$1+5+c=7 \quad \therefore c=1$$

따라서 $f(x)=x^3+x^2+5x+1$ 이므로

$$f(2)=8+4+10+1=23$$

03-1 ㉡-9

$$f(x)=-x^3+ax^2+bx+1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=-3x^2+2ax+b$$

유형 완성하기

p.89~104

01 ㉡5

$$f(x)=x^3-3x^2 \text{이라 하면 } f'(x)=3x^2-6x$$

점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 -3 이므로

점 (1, 3)이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(1)=3 \text{에서 } -1+a+b+1=3$$

$$\therefore a+b=3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

점 (1, 3)에서의 접선과 $x=-3$ 인 점에서의 접선이 서로 평행하므로 $f'(1)=f'(-3)$ 에서

$$-3+2a+b=-27-6a+b$$

$$8a=-24 \quad \therefore a=-3$$

$a=-3$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$-3+b=3 \quad \therefore b=6$$

$$\therefore a-b=-3-6=-9$$

04 ㉔ ㉕

$$f(x)=2x^3-5x^2+ax \text{라 하면 } f'(x)=6x^2-10x+a$$

점 (1, 8)이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(1)=8 \text{에서 } 2-5+a=8 \quad \therefore a=11$$

즉 $f'(x)=6x^2-10x+11$ 이므로 점 (1, 8)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=6-10+11=7$

기울기가 7이고 점 (1, 8)을 지나는 접선의 방정식은

$$y-8=7(x-1) \quad \therefore y=7x+1$$

$$\therefore b=7, c=1$$

$$\therefore a+b+c=11+7+1=19$$

04-1 ㉔ ㉕

$$f(x)=x^3+ax^2-11x+b \text{라 하면 } f'(x)=3x^2+2ax-11$$

점 (1, 3)이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(1)=3 \text{에서 } 1+a-11+b=3$$

$$\therefore a+b=13 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

점 (1, 3)에서의 접선의 기울기가 4이므로

$$f'(1)=3+2a-11=4$$

$$2a=12 \quad \therefore a=6$$

$a=6$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$6+b=13 \quad \therefore b=7$$

$$\therefore ab=6 \times 7=42$$

05 ㉔ 1

$$f(x)=x^2+3x-5 \text{라 하면 } f'(x)=2x+3$$

점 (-3, -5)에서의 접선의 기울기는

$$f'(-3)=-6+3=-3$$

즉 기울기가 -3이고 점 (-3, -5)를 지나는 접선의 방정식은

$$y+5=-3(x+3) \quad \therefore y=-3x-14$$

이 직선이 점 (-5, a)를 지나므로

$$a=-3 \times (-5)-14=1$$

05-1 ㉔ 20

$$f(x)=-x^3+ax+b \text{라 하면 } f'(x)=-3x^2+a$$

점 (1, 8)이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(1)=8 \text{에서 } -1+a+b=8$$

$$\therefore a+b=9 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

점 (1, 8)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-3+a$

즉 기울기가 $-3+a$ 이고 점 (1, 8)을 지나는 접선의 방정식은

$$y-8=(-3+a)(x-1) \quad \therefore y=(-3+a)x+11-a$$

이 직선이 점 (-2, 2)를 지나므로

$$2=6-2a+11-a$$

$$3a=15 \quad \therefore a=5$$

$a=5$ 를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$5+b=9 \quad \therefore b=4$$

$$\therefore ab=5 \times 4=20$$

06 ㉔ -12

$$g(x)=x^2f(x)+x+1 \text{이라 하면}$$

$$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)+1$$

$x=1$ 에서의 접선의 기울기는

$$g'(1)=2f(1)+f'(1)+1=2 \times 2+1+1=6$$

이때 $g(1)=f(1)+1+1=2+1+1=4$ 이므로 기울기가 6이고

점 (1, 4)를 지나는 접선의 방정식은

$$y-4=6(x-1) \quad \therefore y=6x-2$$

따라서 $m=6, n=-2$ 이므로

$$mn=6 \times (-2)=-12$$

Lecture 함수의 곱의 미분법

두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능할 때

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

06-1 ㉔ -4

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (1, -1)에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$f(1)=-1, f'(1)=1$$

$$g(x)=(x+1)f(x) \text{라 하면}$$

$$g'(x)=f(x)+(x+1)f'(x)$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=1$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$g'(1)=f(1)+2f'(1)=-1+2 \times 1=1$$

이때 $g(1)=2f(1)=-2$ 이므로 기울기가 1이고 점 (1, -2)를 지나는 접선의 방정식은

$$y+2=x-1 \quad \therefore y=x-3$$

이 직선이 점 (-1, a)를 지나므로

$$a=-1-3=-4$$

07 ㉔ (1, -4)

$$f(x)=x^2-4x+3 \text{이라 하면 } f'(x)=2x-4$$

점 (-1, 8)에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-2-4=-6$ 이므로 직선 l 의 방정식은

$$y-8=-6(x+1) \quad \therefore y=-6x+2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

점 (3, 0)에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=6-4=2$ 이므로 직선 m 의 방정식은

$$y=2(x-3) \quad \therefore y=2x-6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $x=1, y=-4$

따라서 두 직선 l, m 의 교점의 좌표는 (1, -4)이다.

07-1 ㉔ (-2, 2)

$$f(x)=-2x^3+x^2+5x+1 \text{이라 하면 } f'(x)=-6x^2+2x+5$$

점 (1, 5)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-6+2+5=1$ 이므로 직선 l 의 방정식은

$$y-5=x-1 \quad \therefore y=x+4 \quad \dots\dots \textcircled{7} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 (-1, -1)에서의 접선의 기울기는

$$f'(-1)=-6-2+5=-3 \text{이므로 직선 } m \text{의 방정식은}$$

$$y+1=-3(x+1) \quad \therefore y=-3x-4 \quad \dots\dots \textcircled{8} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $x=-2, y=2$

따라서 두 직선 l, m 의 교점의 좌표는 (-2, 2)이다. $\dots\dots \textcircled{3}$

채점 기준	비율
① 직선 l 의 방정식을 구할 수 있다.	40%
② 직선 m 의 방정식을 구할 수 있다.	40%
③ 두 직선 l, m 의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	20%

08 ㉡ -4

$$f(x) = -2x^2 - 3x + a \text{에서 } f'(x) = -4x - 3$$

점 $(-1, f(-1))$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(-1) = -2 + 3 + a = a + 1$$

점 $(-1, f(-1))$, 즉 점 $(-1, a+1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(-1) = 4 - 3 = 1 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - (a+1) = x + 1 \quad \therefore y = x + a + 2$$

이때 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(-a-2, 0)$, $(0, a+2)$ 이므로

$$PQ^2 = 8 \text{에서 } \{\sqrt{(a+2)^2 + (a+2)^2}\}^2 = 8$$

$$(a+2)^2 = 4, a^2 + 4a = 0$$

$$a(a+4) = 0 \quad \therefore a = -4 (\because a < 0)$$

Lecture 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

08-1 ㉡ 1

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 9x + a \text{에서 } f'(x) = 3x^2 - 10x + 9$$

점 $(1, f(1))$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(1) = 1 - 5 + 9 + a = a + 5$$

점 $(1, f(1))$, 즉 점 $(1, a+5)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = 3 - 10 + 9 = 2 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - (a+5) = 2(x-1) \quad \therefore y = 2x + a + 3$$

이때 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(-\frac{a+3}{2}, 0)$, $(0, a+3)$ 이고 삼

각형 OPQ의 넓이가 4이므로

$$\frac{1}{2} \times \left| -\frac{a+3}{2} \right| \times |a+3| = 4, \frac{(a+3)^2}{4} = 4$$

$$(a+3)^2 = 16, a^2 + 6a - 7 = 0$$

$$(a+7)(a-1) = 0 \quad \therefore a = 1 (\because a > 0)$$

09 ㉡ 8

함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $f(-2) = -1, f'(-2) = 0$

$$g(x) = x^2 f(x) \text{라 하면 } g'(x) = 2x f(x) + x^2 f'(x)$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=-2$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$g'(-2) = -4f(-2) + 4f'(-2) = -4 \times (-1) + 4 \times 0 = 4$$

이때 $g(-2) = 4f(-2) = 4 \times (-1) = -4$ 이므로 기울기가 4이고

점 $(-2, -4)$ 를 지나는 접선의 방정식은

$$y + 4 = 4(x + 2) \quad \therefore y = 4x + 4$$

따라서 $a = 4, b = 4$ 이므로

$$a + b = 4 + 4 = 8$$

09-1 ㉡ $y = 9x - 12$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $f(2) = 6$

원점과 점 $(2, 6)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{6-0}{2-0}x \quad \therefore y = 3x$$

이 직선이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 6)$ 에서 접하므로

$$f'(2) = 3$$

$$g(x) = (x-1)f(x) \text{라 하면}$$

$$g'(x) = f(x) + (x-1)f'(x)$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=2$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$g'(2) = f(2) + f'(2) = 6 + 3 = 9$$

이때 $g(2) = f(2) = 6$ 이므로 기울기가 9이고 점 $(2, 6)$ 을 지나는 접선의 방정식은

$$y - 6 = 9(x - 2) \quad \therefore y = 9x - 12$$

10 ㉡ 2

$$f(x) = x^3 - 2x + 3 \text{이라 하면 } f'(x) = 3x^2 - 2$$

점 $(-1, 4)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1) = 3 - 2 = 1$ 이므로

점 $(-1, 4)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1 이다.

즉 기울기가 -1 이고 점 $(-1, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 4 = -(x + 1) \quad \therefore y = -x + 3$$

따라서 $a = -1, b = 3$ 이므로

$$a + b = -1 + 3 = 2$$

10-1 ㉡ ②

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$$

점 $(1, -3)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 3 - 4 + 3 = 2$ 이므로

점 $(1, -3)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

즉 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 점 $(1, -3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y + 3 = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

이 직선이 점 $(9, a)$ 를 지나므로

$$a = -\frac{9}{2} - \frac{5}{2} = -7$$

11 ㉡ 1

$$f(x) = -x^2 + ax \text{에서 } f'(x) = -2x + a$$

두 점 $(0, f(0)), (1, f(1))$ 에서의 접선이 서로 수직이므로

$$f'(0)f'(1) = -1 \text{에서 } a(-2+a) = -1$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0, (a-1)^2 = 0$$

$$\therefore a = 1$$

11-1 ㉡ 12

$f(x) = x^3 + x^2 + ax + b$ 라 하면 점 $A(-1, -5)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(-1) = -5 \text{에서 } -1 + 1 - a + b = -5$$

$$\therefore a - b = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 $A(-1, -5)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{4}$ 이므로

점 A에서의 접선의 기울기는 4이다.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + a \text{이므로 } f'(-1) = 4 \text{에서}$$

$$3 - 2 + a = 4 \quad \therefore a = 3$$

$a = 3$ 을 ①에 대입하면

$$3 - b = 5 \quad \therefore b = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\therefore ab^2 = 3 \times (-2)^2 = 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

채점 기준	비율
① a, b 의 관계식을 구할 수 있다.	30%
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ ab^2 의 값을 구할 수 있다.	20%

12 17

$$y = x^3 + 2ax^2 + (1-4a)x + 2a + 1 \text{에서}$$

$$(2x^2 - 4x + 2)a + x^3 + x + 1 - y = 0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$2x^2 - 4x + 2 = 0, x^3 + x + 1 - y = 0$$

$$2(x-1)^2 = 0, y = x^3 + x + 1$$

$$\therefore x=1, y=3$$

즉 주어진 곡선은 a 의 값에 관계없이 항상 점 $P(1, 3)$ 을 지난다.

$$f(x) = x^3 + 2ax^2 + (1-4a)x + 2a + 1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4ax + 1 - 4a$$

점 $P(1, 3)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 3 + 4a + 1 - 4a = 4$ 이다.

므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$ 이다.

기울기가 $-\frac{1}{4}$ 이고 점 $P(1, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 3 = -\frac{1}{4}(x - 1) \quad \therefore x + 4y - 13 = 0$$

따라서 $m=4, n=-13$ 이므로

$$m - n = 4 - (-13) = 17$$

Lecture 항등식의 성질

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ 이 x 에 대한 항등식이면

$$a=0, b=0, c=0$$

(2) $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ 이 x 에 대한 항등식이면

$$a=a', b=b', c=c'$$

12-1 6

$$y = -2x^3 - kx^2 - kx + 1 \text{에서}$$

$$(-x^2 - x)k - 2x^3 - y + 1 = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$-x^2 - x = 0, -2x^3 - y + 1 = 0$$

$$-x^2 - x = 0 \text{에서 } x(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 0$$

$$-2x^3 - y + 1 = 0 \text{에서 } y = -2x^3 + 1 \text{이므로}$$

$$(i) x = -1 \text{일 때, } y = 2 + 1 = 3$$

$$(ii) x = 0 \text{일 때, } y = 1$$

(i), (ii)에서 곡선 $y = -2x^3 - kx^2 - kx + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 두 점 $(-1, 3), (0, 1)$ 을 지난다.

$$f(x) = -2x^3 - kx^2 - kx + 1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = -6x^2 - 2kx - k$$

두 점 $(-1, 3), (0, 1)$ 에서의 접선이 서로 수직이므로

$$f'(-1)f'(0) = -1 \text{에서 } -k(k-6) = -1$$

$$\therefore k^2 - 6k - 1 = 0$$

이차방정식 $k^2 - 6k - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 1 \times (-1) = 10 > 0$$

따라서 이차방정식 $k^2 - 6k - 1 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가지므로 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k 의 값의 합은 6이다.

13 1

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = -1 \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값이}$$

존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - 3\} = 0 \text{이므로 } f(2) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = -1$$

따라서 곡선 $y = f(x)$ 위의 $x = 2$ 인 점에서의 접선의 기울기는 -1 이다.

13-1 3

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = 3 \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값이 존재}$$

하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{이므로 } f(2) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 3$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$, 즉 $(2, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = 3(x - 2) \quad \therefore 3x - y = 6$$

따라서 $a = 3, b = -1$ 이므로

$$ab = 3 \times (-1) = -3$$

14 4

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 8}{x^2 - 1} = \frac{3}{2} \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값이}$$

존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 8\} = 0 \text{이므로 } f(1) = 8$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 8}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} \\ &= \frac{1}{2} f'(1) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{2} f'(1) = \frac{3}{2} \text{이므로 } f'(1) = 3$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$, 즉 $(1, 8)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 8 = 3(x - 1) \quad \therefore y = 3x + 5$$

따라서 $a = 3, b = 5$ 이므로

$$ab = 3 \times 5 = 15$$

14-1 6

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 1}{x^3 + 1} = 1 \text{에서 } x \rightarrow -1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값}$$

이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \{f(x) - 1\} = 0 \text{이므로 } f(-1) = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 1}{x^3 + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \times \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 - x + 1} \\ &= \frac{1}{3} f'(-1) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{3} f'(-1) = 1 \text{이므로 } f'(-1) = 3$$

이때 $g(x) = (x+2)f(x)$ 라 하면

$$g'(x) = f(x) + (x+2)f'(x)$$

점 $(-1, a)$ 는 곡선 $y = g(x)$ 위의 점이므로

$$g(-1) = f(-1) = 1 \quad \therefore a = 1$$

곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(-1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$g'(-1) = f(-1) + f'(-1) = 1 + 3 = 4$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-1, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-1=4(x+1) \quad \therefore y=4x+5$$

따라서 접선의 y 절편은 5이므로 $b=5$

$$\therefore a+b=1+5=6$$

15 ㉓ ③

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^2)}{x-2} = 8$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x^2) = 0 \text{이므로 } f(4) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^2)-f(4)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{f(x^2)-f(4)\}(x+2)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4} \times \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) \\ &= 4f'(4) \end{aligned}$$

$$\therefore 4f'(4) = 8 \text{이므로 } f'(4) = 2$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(4, f(4))$, 즉 $(4, 0)$ 에서의 접선의 방정식은 $y=2(x-4)$ $\therefore y=2x-8$

따라서 $a=2, b=-8$ 이므로

$$a+b=2+(-8)=-6$$

15-1 ㉓ ⑤

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x^3)}{x+2} = 12$ 에서 $x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2} f(x^3) = 0 \text{이므로 } f(-8) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x^3)}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x^3)-f(-8)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\{f(x^3)-f(-8)\}(x^2-2x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x^3)-f(-8)}{x^3-(-8)} \times \lim_{x \rightarrow -2} (x^2-2x+4) \\ &= 12f'(-8) \end{aligned}$$

$$\therefore 12f'(-8) = 12 \text{이므로 } f'(-8) = 1$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-8, f(-8))$, 즉 $(-8, 0)$ 에서의 접선의 방정식은 $y=x+8$

따라서 $a=1, b=8$ 이므로

$$ab=1 \times 8=8$$

16 ㉓ $y=-3x-10$

$$f(x)=x^3-5x^2-1 \text{이라 하면 } f'(x)=3x^2-10x$$

점 A(1, -5)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-7$ 이므로 접선의 방정식은

$$y+5=-7(x-1) \quad \therefore y=-7x+2$$

직선 $y=-7x+2$ 가 주어진 곡선과 만나는 점 B의 x 좌표는

$$x^3-5x^2-1=-7x+2 \text{에서 } x^3-5x^2+7x-3=0$$

$$(x-1)^2(x-3)=0 \quad \therefore x=3 (\because x \neq 1)$$

따라서 점 B의 좌표는 (3, -19)이고 $f'(3)=-3$ 이므로 점 B에서의 접선의 방정식은

$$y+19=-3(x-3) \quad \therefore y=-3x-10$$

16-1 ㉓ 36

$$f(x)=x^3-3x^2 \text{이라 하면 } f'(x)=3x^2-6x$$

점 (3, 0)에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=9$ 이므로 접선의 방정식은 $y=9(x-3)$ $\therefore y=9x-27$

직선 $y=9x-27$ 이 주어진 곡선과 만나는 점 P의 x 좌표는

$$x^3-3x^2=9x-27 \text{에서 } x^3-3x^2-9x+27=0$$

$$(x-3)^2(x+3)=0 \quad \therefore x=-3 (\because x \neq 3)$$

즉 점 P의 좌표는 (-3, -54)이고 $f'(-3)=45$ 이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$$y+54=45(x+3) \quad \therefore y=45x+81$$

따라서 $a=45, b=81$ 이므로

$$b-a=81-45=36$$

17 ㉓ 45

$$f(x)=x^3+3x^2-8x+1 \text{이라 하면 } f'(x)=3x^2+6x-8$$

점 (1, -3)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$ 이므로 접선의 방정식은 $y+3=x-1$ $\therefore y=x-4$

직선 $y=x-4$ 가 주어진 곡선과 만나는 점의 x 좌표는

$$x^3+3x^2-8x+1=x-4 \text{에서 } x^3+3x^2-9x+5=0$$

$$(x-1)^2(x+5)=0 \quad \therefore x=-5 (\because x \neq 1)$$

따라서 구하는 점의 좌표는 (-5, -9)이므로

$$a=-5, b=-9$$

$$\therefore ab=-5 \times (-9)=45$$

17-1 ㉓ -75

$$f(x)=x^3+nx^2-x \text{라 하면 } f'(x)=3x^2+2nx-1$$

점 (1, n)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2n+2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-n=(2n+2)(x-1) \quad \therefore y=(2n+2)x-n-2$$

직선 $y=(2n+2)x-n-2$ 가 주어진 곡선과 만나는 점의 x 좌표는 $x^3+nx^2-x=(2n+2)x-n-2$ 에서

$$x^3+nx^2-(2n+3)x+n+2=0$$

$$(x-1)^2(x+n+2)=0 \quad \therefore x=-n-2 (\because x \neq 1)$$

따라서 $x_n=-n-2$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{10} x_n = \sum_{n=1}^{10} (-n-2) = -\frac{10 \times 11}{2} - 20 = -75$$

18 ㉓ $3\sqrt{2}$

$$f(x)=x^3-4x \text{라 하면 } f'(x)=3x^2-4$$

점 A(-1, 3)에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-3=-(x+1) \quad \therefore y=-x+2$$

직선 $y=-x+2$ 가 주어진 곡선과 만나는 점의 x 좌표는

$$x^3-4x=-x+2 \text{에서 } x^3-3x-2=0$$

$$(x+1)^2(x-2)=0 \quad \therefore x=2 (\because x \neq -1)$$

따라서 점 B의 좌표는 (2, 0)이므로

$$AB=\sqrt{(2+1)^2+(0-3)^2}=3\sqrt{2}$$

18-1 ㉓ 1:2

$$f(x)=-x^3+2x+1 \text{이라 하면 } f'(x)=-3x^2+2$$

점 P(1, 2)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$ 이므로 접선의 방정식은 $y-2=-(x-1)$ $\therefore y=-x+3$

즉 점 Q의 좌표는 (0, 3)이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{(0-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$$

또 직선 $y = -x + 3$ 이 주어진 곡선과 만나는 점 R의 x좌표는

$$-x^3 + 2x + 1 = -x + 3 \text{에서 } x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)^2(x+2) = 0 \quad \therefore x = -2 (\because x \neq 1)$$

따라서 점 R의 좌표는 (-2, 5)이므로

$$\overline{QR} = \sqrt{(-2-0)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{PQ} : \overline{QR} = \sqrt{2} : 2\sqrt{2} = 1 : 2$$

19 ㉔ 2

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 \text{이라 하면 } f'(x) = 2x + 2$$

접점의 좌표를 $(t, t^2 + 2t + 3)$ 이라 하면 직선 $y = 4x - 1$ 에 평행한

접선의 기울기는 4이므로

$$f'(t) = 2t + 2 = 4$$

$$2t = 2 \quad \therefore t = 1$$

즉 점점의 좌표는 (1, 6)이므로 접선의 방정식은

$$y - 6 = 4(x - 1) \quad \therefore y = 4x + 2$$

따라서 구하는 y절편은 2이다.

19-1 ㉔ 8

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 4 \text{라 하면 } f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x$$

곡선 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 4이므로

$$f'(a) = 4 \text{에서 } 4a^3 - 12a^2 + 12a = 4$$

$$a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 0, (a-1)^3 = 0$$

$$\therefore a = 1$$

따라서 점점의 좌표는 (1, 7)이므로 $a = 1, b = 7$

$$\therefore a + b = 1 + 7 = 8$$

20 ㉔ ②

$$f(x) = x^2 + 4x + 5 \text{라 하면 } f'(x) = 2x + 4$$

점점의 좌표를 $(t, t^2 + 4t + 5)$ 라 하면 직선 $x - 2y + 3 = 0$, 즉

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \text{에 수직인 접선의 기울기는 } -2 \text{이므로}$$

$$f'(t) = 2t + 4 = -2$$

$$2t = -6 \quad \therefore t = -3$$

즉 점점의 좌표는 (-3, 2)이므로 접선의 방정식은

$$y - 2 = -2(x + 3) \quad \therefore y = -2x - 4$$

따라서 구하는 y절편은 -4이다.

20-1 ㉔ ②

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5 \text{라 하면 } f'(x) = 3x^2 - 6x$$

점점의 좌표를 $(t, t^3 - 3t^2 + 5)$ 라 하면 직선 $x - 3y + 2 = 0$, 즉

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \text{에 수직인 직선의 기울기는 } -3 \text{이므로}$$

$$f'(t) = 3t^2 - 6t = -3$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0, (t-1)^2 = 0$$

$$\therefore t = 1$$

따라서 점점의 좌표는 (1, 3)이므로 접선의 방정식은

$$y - 3 = -3(x - 1) \quad \therefore y = -3x + 6$$

21 ㉔ ④

$$f(x) = -2x^3 + 6x^2 + x - 1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = -6x^2 + 12x + 1 = -6(x-1)^2 + 7$$

따라서 $f'(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최대이고, 최댓값은 7이므로 기울기 m 의 최댓값은 7이다.

21-1 ㉔ -1

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 + x + \frac{4}{3} \text{라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$$

즉 $f'(x)$ 는 $x = -2$ 일 때 최소이고, 최솟값은 -1이다. ①

따라서 기울기가 최소인 접선의 점점의 좌표는 (-2, 2)이고 접선의 기울기가 -1이므로 접선의 방정식은

$$y - 2 = -(x + 2) \quad \therefore y = -x \quad \dots\dots ②$$

$$\therefore a = -1 \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① 주어진 곡선에 접하는 직선의 기울기의 최솟값을 구할 수 있다.	40%
② 기울기가 최소인 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50%
③ a의 값을 구할 수 있다.	10%

22 ㉔ 17

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 \text{이라 하면 } f'(x) = 3x^2 - 6x$$

점 (3, 3)에서의 접선 l 의 기울기는 $f'(3) = 9$ 이므로 직선 l 에 평행한 직선의 기울기는 9이다.

점점의 좌표를 $(t, t^3 - 3t^2 + 3)$ 이라 하면

$$f'(t) = 3t^2 - 6t = 9$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0, (t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = -1 (\because t \neq 3)$$

즉 점점의 좌표는 (-1, -1)이므로 접선의 방정식은

$$y + 1 = 9(x + 1) \quad \therefore y = 9x + 8$$

따라서 $a = 9, b = 8$ 이므로

$$a + b = 9 + 8 = 17$$

22-1 ㉔ -6

$$f(x) = -x^2 + 3x + 2 \text{라 하면 } f'(x) = -2x + 3$$

점 (1, 4)에서의 접선 l 의 기울기는 $f'(1) = 1$ 이므로 직선 l 에 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

점점의 좌표를 $(t, -t^2 + 3t + 2)$ 라 하면

$$f'(t) = -2t + 3 = -1$$

$$2t = 4 \quad \therefore t = 2$$

즉 점점의 좌표는 (2, 4)이므로 접선의 방정식은

$$y - 4 = -(x - 2) \quad \therefore y = -x + 6$$

따라서 $a = -1, b = 6$ 이므로

$$ab = -1 \times 6 = -6$$

23 ㉔ 5

$$f(x) = -x^2 + 3x + 4 \text{라 하면 } f'(x) = -2x + 3$$

점점의 좌표를 $(t, -t^2 + 3t + 4)$ 라 하면 접선의 기울기는

$$\tan 45^\circ = 1 \text{이므로}$$

$$f'(t) = -2t + 3 = 1$$

$$2t = 2 \quad \therefore t = 1$$

즉 점점의 좌표는 (1, 6)이므로 접선의 방정식은

$$y - 6 = x - 1 \quad \therefore y = x + 5$$

따라서 구하는 y절편은 5이다.

23-1 ㉔ 2

$f(x) = x^2 - 3x - 1$ 이라 하면 $f'(x) = 2x - 3$
 접점의 좌표를 $(t, t^2 - 3t - 1)$ 이라 하면 접선의 기울기는
 $\tan 135^\circ = -1$ 이므로
 $f'(t) = 2t - 3 = -1$
 $2t = 2 \quad \therefore t = 1$
 즉 접점의 좌표는 $(1, -3)$ 이므로 접선의 방정식은
 $y + 3 = -(x - 1) \quad \therefore y = -x - 2$
 점 $P(a, b)$ 가 직선 $y = -x - 2$ 위의 점이므로
 $b = -a - 2$
 $\therefore a^2 + b^2 = a^2 + (-a - 2)^2 = 2(a + 1)^2 + 2$
 따라서 $a^2 + b^2$ 의 최솟값은 2이다.

24 ㉔ $y = -3x + 32$

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 6x + 5$ 라 하면 $f'(x) = -3x^2 + 6x + 6$
 $x = -1$ 인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(-1) = -3$ 이므로 제1사
 분면 위의 접점의 좌표를 $(t, -t^3 + 3t^2 + 6t + 5) (t > 0)$ 라 하자.
 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = -3$ 이므로 ①
 $-3t^2 + 6t + 6 = -3, t^2 - 2t - 3 = 0$
 $(t + 1)(t - 3) = 0 \quad \therefore t = 3 (\because t > 0) \quad \dots\dots ②$
 즉 접점의 좌표는 $(3, 23)$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - 23 = -3(x - 3) \quad \therefore y = -3x + 32 \quad \dots\dots ③$

채점 기준	비율
① 제1사분면 위의 접점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있다.	40%
② 접점의 x 좌표를 구할 수 있다.	40%
③ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	20%

24-1 ㉔ ②

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 20x + 1$ 이라 하면 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 20$
 제4사분면 위의 접점의 좌표를 $(t, t^3 + 3t^2 - 20t + 1) (t > 0)$ 이라
 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(t) = 4$ 에서
 $3t^2 + 6t - 20 = 4, t^2 + 2t - 8 = 0$
 $(t + 4)(t - 2) = 0 \quad \therefore t = 2 (\because t > 0)$
 즉 접점의 좌표는 $(2, -19)$ 이므로 접선의 방정식은
 $y + 19 = 4(x - 2) \quad \therefore y = 4x - 27$
 따라서 구하는 y 절편은 -27 이다.

25 ㉔ -9

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + k$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$
 접점의 좌표를 $(t, t^3 + 3t^2 - 9t + k)$ 라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t) = 3t^2 + 6t - 9$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - (t^3 + 3t^2 - 9t + k) = (3t^2 + 6t - 9)(x - t)$
 $\therefore y = (3t^2 + 6t - 9)x - 2t^3 - 3t^2 + k$
 이 직선이 직선 $y = -12x - 10$ 과 일치하므로
 $3t^2 + 6t - 9 = -12, -2t^3 - 3t^2 + k = -10$
 $3t^2 + 6t - 9 = -12$ 에서 $t^2 + 2t + 1 = 0$
 $(t + 1)^2 = 0 \quad \therefore t = -1, k = -9$

25-1 ㉔ -25

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 6x$
 접점의 좌표를 $(t, t^3 - 3t^2 + 2)$ 라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t) = 3t^2 - 6t$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - (t^3 - 3t^2 + 2) = (3t^2 - 6t)(x - t)$

$\therefore y = (3t^2 - 6t)x - 2t^3 + 3t^2 + 2$
 이 직선이 직선 $y = 9x + k$ 와 일치하므로
 $3t^2 - 6t = 9, -2t^3 + 3t^2 + 2 = k$
 $3t^2 - 6t = 9$ 에서 $t^2 - 2t - 3 = 0$
 $(t + 1)(t - 3) = 0 \quad \therefore t = -1$ 또는 $t = 3$
 (i) $t = -1$ 일 때, $k = 2 + 3 + 2 = 7$
 (ii) $t = 3$ 일 때, $k = -54 + 27 + 2 = -25$
 (i), (ii)에서 $t = -1, k = 7$ 또는 $t = 3, k = -25$
 따라서 음수 k 의 값은 -25 이다.

26 ㉔ ①

직선 $y = x + 3$ 을 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $y = x - k + 3$
 $f(x) = x^3 + x^2 - 2$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 + 2x$
 접점의 좌표를 $(t, t^3 + t^2 - 2)$ 라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t) = 3t^2 + 2t$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - (t^3 + t^2 - 2) = (3t^2 + 2t)(x - t)$
 $\therefore y = (3t^2 + 2t)x - 2t^3 - t^2 - 2$
 이 직선이 직선 $y = x - k + 3$ 과 일치하므로
 $3t^2 + 2t = 1, -2t^3 - t^2 - 2 = -k + 3$
 $3t^2 + 2t = 1$ 에서 $3t^2 + 2t - 1 = 0$
 $(t + 1)(3t - 1) = 0 \quad \therefore t = -1$ 또는 $t = \frac{1}{3}$
 $-2t^3 - t^2 - 2 = -k + 3$ 에서 $k = 2t^3 + t^2 + 5$
 (i) $t = -1$ 일 때, $k = -2 + 1 + 5 = 4$
 (ii) $t = \frac{1}{3}$ 일 때, $k = -\frac{2}{27} + \frac{1}{9} + 5 = \frac{140}{27}$
 (i), (ii)에서 $t = -1, k = 4$ 또는 $t = \frac{1}{3}, k = \frac{140}{27}$
 따라서 정수 k 의 값은 4이다.

26-1 ㉔ 2

곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로
 n 만큼 평행이동한 곡선은
 $y - n = (x - m)^3 - 3(x - m)^2 + 2(x - m)$
 $\therefore y = (x - m)^3 - 3(x - m)^2 + 2(x - m) + n$
 $f(x) = (x - m)^3 - 3(x - m)^2 + 2(x - m) + n$ 이라 하면
 $f'(x) = 3(x - m)^2 - 6(x - m) + 2$
 접점의 x 좌표를 t 라 하면 직선 $x + y - 3 = 0$ 의 기울기가 -1 이므로
 $f'(t) = 3(t - m)^2 - 6(t - m) + 2 = -1$
 $t^2 - 2(m + 1)t + (m + 1)^2 = 0$
 $(t - m - 1)^2 = 0 \quad \therefore t = m + 1$
 즉 접점의 좌표는 $(m + 1, n)$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - n = -(x - m - 1)$
 $\therefore x + y - m - n - 1 = 0$
 이 직선이 $x + y - 3 = 0$ 과 일치하므로
 $-m - n - 1 = -3$
 $\therefore m + n = 2$

27 ㉔ ③

$f(x) = x^3 - 3x^2$ 이라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 6x$
 점 $(-1, -4)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1) = 9$ 이므로 접선의
 방정식은
 $y + 4 = 9(x + 1) \quad \therefore y = 9x + 5$

또 $g(x)=x^2+ax+9$ 라 하면 $g'(x)=2x+a$
 접점의 좌표를 (t, t^2+at+9) 라 하면 접선의 기울기는
 $g'(t)=2t+a$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(t^2+at+9)=(2t+a)(x-t)$
 $\therefore y=(2t+a)x-t^2+9$
 이 직선이 직선 $y=9x+5$ 와 일치하므로
 $2t+a=9, -t^2+9=5$
 $-t^2+9=5$ 에서 $t^2=4 \quad \therefore t=-2$ 또는 $t=2$
 $2t+a=9$ 에서 $a=9-2t$
 (i) $t=-2$ 일 때, $a=9+4=13$
 (ii) $t=2$ 일 때, $a=9-4=5$
 (i), (ii)에서 모든 실수 a 의 값의 합은
 $13+5=18$

27-1 ㉡ 8

$f(x)=x^3-kx^2+2kx-2$ 라 하면
 $f'(x)=3x^2-2kx+2k$
 접점의 좌표를 $(t, t^3-k t^2+2k t-2)$ 라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t)=3t^2-2k t+2k$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(t^3-k t^2+2k t-2)=(3t^2-2k t+2k)(x-t)$
 $\therefore y=(3t^2-2k t+2k)x-2t^3+k t^2-2$
 이 직선이 직선 $y=4x-2$ 와 일치하므로
 $3t^2-2k t+2k=4$ ㉠
 $-2t^3+k t^2-2=-2$ ㉡

㉠에서 $t^2(2t-k)=0 \quad \therefore t=0$ 또는 $t=\frac{k}{2}$
 (i) $t=0$ 을 ㉡에 대입하면 $2k=4 \quad \therefore k=2$
 (ii) $t=\frac{k}{2}$ 를 ㉡에 대입하면 $\frac{3}{4}k^2-k^2+2k=4$
 $k^2-8k+16=0, (k-4)^2=0 \quad \therefore k=4$
 (i), (ii)에서 모든 실수 k 의 값의 곱은
 $2 \times 4=8$

28 ㉡ ①, ⑤

$f(x)=-(x+1)^2+2=-x^2-2x+1$ 이라 하면
 $f'(x)=-2x-2$
 접점의 좌표를 $(t, -t^2-2t+1)$ 이라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t)=-2t-2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(-t^2-2t+1)=(-2t-2)(x-t)$
 $\therefore y=(-2t-2)x+t^2+1$ ㉠
 이 직선이 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로
 $3=2t+2+t^2+1$
 $t^2+2t=0, t(t+2)=0$
 $\therefore t=-2$ 또는 $t=0$
 이 값을 ㉠에 각각 대입하면
 $y=2x+5, y=-2x+1$

28-1 ㉡ $y=3x-5$

$f(x)=x^2-x-1$ 이라 하면 $f'(x)=2x-1$
 접점의 좌표를 (t, t^2-t-1) 이라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t)=2t-1$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(t^2-t-1)=(2t-1)(x-t)$
 $\therefore y=(2t-1)x-t^2+1$ ㉠

이 직선이 점 $(1, -2)$ 를 지나므로
 $-2=2t-1-t^2-1$
 $t^2-2t=0, t(t-2)=0$
 $\therefore t=0$ 또는 $t=2$
 이 값을 ㉠에 각각 대입하면
 $y=-x-1, y=3x-5$
 따라서 제 2 사분면을 지나지 않는 직선의 방정식은
 $y=3x-5$

29 ㉡ -4

$f(x)=-x^2+4x$ 라 하면 $f'(x)=-2x+4$
 접점의 좌표를 $(t, -t^2+4t)$ 라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t)=-2t+4$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(-t^2+4t)=(-2t+4)(x-t)$
 $\therefore y=(-2t+4)x+t^2$ ①
 이 직선이 점 $(3, 7)$ 을 지나므로
 $7=-6t+12+t^2, t^2-6t+5=0$
 $(t-1)(t-5)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=5$ ②
 따라서 두 접선의 기울기의 합은
 $f'(1)+f'(5)=2+(-6)=-4$ ③

채점 기준	비율
① 접점의 x 좌표를 t 로 놓고 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
② t 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ 두 접선의 기울기의 합을 구할 수 있다.	30%

29-1 ㉡ $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$

$f(x)=x^3+x^2-x$ 라 하면 $f'(x)=3x^2+2x-1$
 접점의 좌표를 (t, t^3+t^2-t) 라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t)=3t^2+2t-1$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(t^3+t^2-t)=(3t^2+2t-1)(x-t)$
 $\therefore y=(3t^2+2t-1)x-2t^3-t^2$ ㉠
 이 직선이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로
 $1=6t^2+4t-2-2t^3-t^2, 2t^3-5t^2-4t+3=0$
 $(t+1)(t-3)(2t-1)=0$
 $\therefore t=-1$ 또는 $t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=3$
 즉 접선의 기울기는 각각
 $f'(-1)=3-2-1=0, f'(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}+1-1=\frac{3}{4},$
 $f'(3)=27+6-1=32$
 이므로 $t=\frac{1}{2}$ 일 때 기울기 m 이 $0 < m < 1$ 이다.
 따라서 $t=\frac{1}{2}$ 을 ㉠에 대입하면
 $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$

30 ㉡ ②

$f(x)=x^2+k$ 라 하면 $f'(x)=2x$
 접점의 좌표를 (t, t^2+k) 라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t)=2t$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(t^2+k)=2t(x-t) \quad \therefore y=2tx-t^2+k$
 이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로
 $0=2t-t^2+k \quad \therefore t^2-2t-k=0$ ㉠

이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β 라 하면 $t=\alpha, t=\beta$ 에서의 접선의 기울기는 각각 $f'(\alpha)=2\alpha, f'(\beta)=2\beta$
 이때 두 접선이 서로 수직으로 만나므로
 $2\alpha \times 2\beta = -1 \quad \therefore \alpha\beta = -\frac{1}{4}$
 이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha\beta = -k = -\frac{1}{4} \quad \therefore k = \frac{1}{4}$

30-1 ㉢

점 $P(a, b)$ 가 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로
 $b=a+2$ ㉠
 $f(x)=\frac{1}{4}x^2$ 이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{2}x$
 접점의 좌표를 $(t, \frac{1}{4}t^2)$ 이라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t)=\frac{1}{2}t$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-\frac{1}{4}t^2=\frac{1}{2}t(x-t) \quad \therefore y=\frac{1}{2}tx-\frac{1}{4}t^2$
 이 직선이 점 $P(a, b)$ 를 지나므로
 $b=\frac{1}{2}ta-\frac{1}{4}t^2$ ㉡
 ㉠을 ㉡에 대입하면 $a+2=\frac{1}{2}ta-\frac{1}{4}t^2$
 $t^2-2at+4a+8=0$ ㉢
 이차방정식 ㉢의 두 근을 α, β 라 하면 $t=\alpha, t=\beta$ 에서의 접선의 기울기는 각각 $f'(\alpha)=\frac{1}{2}\alpha, f'(\beta)=\frac{1}{2}\beta$
 이때 두 접선이 서로 수직으로 만나므로
 $\frac{1}{2}\alpha \times \frac{1}{2}\beta = -1 \quad \therefore \alpha\beta = -4$
 이차방정식 ㉢에서 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha\beta = 4a+8 = -4$
 $4a = -12 \quad \therefore a = -3$
 $a = -3$ 을 ㉠에 대입하면 $b = -1$
 $\therefore ab = -3 \times (-1) = 3$

31 ㉢

$f(x)=x^3+3x^2-x+2$ 라 하면 $f'(x)=3x^2+6x-1$
 접점의 좌표를 (t, t^3+3t^2-t+2) 라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t)=3t^2+6t-1$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(t^3+3t^2-t+2)=(3t^2+6t-1)(x-t)$
 $\therefore y=(3t^2+6t-1)x-2t^3-3t^2+2$
 이 직선이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로
 $3=3t^2+6t-1-2t^3-3t^2+2$
 $\therefore t^3-3t+1=0$
 이 삼차방정식의 세 근이 세 접점의 x 좌표이므로 근과 계수의 관계에 의하여 세 접점의 x 좌표의 합은 0이다.

31-1 ㉢-1

$f(x)=x^3-3x+1$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2-3$
 접점의 좌표를 (t, t^3-3t+1) 이라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t)=3t^2-3$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(t^3-3t+1)=(3t^2-3)(x-t)$
 $\therefore y=(3t^2-3)x-2t^3+1$

이 직선이 점 $(2, k)$ 를 지나므로
 $k=6t^2-6-2t^3+1$
 $\therefore 2t^3-6t^2+k+5=0$ ㉠
 삼차방정식 ㉠의 세 근이 세 접점의 x 좌표이고 등차수열을 이루므로 세 근을 $a-d, a, a+d$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
 $(a-d)+a+(a+d)=3, 3a=3 \quad \therefore a=1$
 즉 삼차방정식 ㉠의 한 근이 1이므로 $t=1$ 을 ㉠에 대입하면
 $2-6+k+5=0 \quad \therefore k=-1$

참고 등차수열을 이루는 세 수는 다음과 같이 a, d 를 이용하여 식을 세운다.
 $\Rightarrow a-d, a, a+d$ → 공차: d

32 ㉢ 18

$f(x)=x^3-2x$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-2$
 접점의 좌표를 (t, t^3-2t) 라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t)=3t^2-2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(t^3-2t)=(3t^2-2)(x-t)$
 $\therefore y=(3t^2-2)x-2t^3$
 이 직선이 점 $(0, -2)$ 를 지나므로
 $-2=-2t^3, t^3-1=0$
 $(t-1)(t^2+t+1)=0 \quad \therefore t=1 (\because t^2+t+1>0)$
 즉 접점의 좌표는 $P(1, -1)$ 이고 이 점에서의 접선의 방정식은
 $y=x-2$ 이므로 직선 $y=x-2$ 가 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 점의 x 좌표는
 $x^3-2x=x-2$ 에서 $x^3-3x+2=0$
 $(x-1)^2(x+2)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$
 따라서 점 Q 의 좌표는 $(-2, -4)$ 이므로
 $PQ^2 = \{\sqrt{(-2-1)^2+(-4+1)^2}\}^2 = 18$

32-1 ㉢ 2

$f(x)=x^4+2x^2+5$ 라 하면 $f'(x)=4x^3+4x$
 접점의 좌표를 (t, t^4+2t^2+5) 라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t)=4t^3+4t$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(t^4+2t^2+5)=(4t^3+4t)(x-t)$
 $\therefore y=(4t^3+4t)x-3t^4-2t^2+5$
 이 직선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로
 $0=-3t^4-2t^2+5, (t+1)(t-1)(3t^2+5)=0$
 $\therefore t=-1$ 또는 $t=1 (\because 3t^2+5>0)$
 따라서 두 접점의 좌표는 $(-1, 8), (1, 8)$ 이므로
 $AB=2$

33 ㉢ -4

$f(x)=-x^2+4x-3$ 이라 하면 $f'(x)=-2x+4$
 접점의 좌표를 $(t, -t^2+4t-3)$ 이라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t)=-2t+4$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(-t^2+4t-3)=(-2t+4)(x-t)$
 $\therefore y=(-2t+4)x+t^2-3$
 이 직선이 점 $A(3, 4)$ 를 지나므로
 $4=-6t+12+t^2-3$
 $t^2-6t+5=0, (t-1)(t-5)=0$
 $\therefore t=1$ 또는 $t=5$

즉 두 점 B, C의 좌표는 (1, 0), (5, -8)이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3+1+5}{3}, \frac{4+0-8}{3}\right) \quad \therefore \left(3, -\frac{4}{3}\right)$$

따라서 $p=3, q=-\frac{4}{3}$ 이므로

$$pq=3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = -4$$

33-1 ㉮ 3

$$f(x)=x^2-2x+8 \text{이라 하면 } f'(x)=2x-2$$

접점의 좌표를 (t, t^2-2t+8) 이라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t)=2t-2 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(t^2-2t+8)=(2t-2)(x-t)$$

$$\therefore y=(2t-2)x-t^2+8$$

이 직선이 점 A(a, -1)을 지나므로

$$-1=2at-2a-t^2+8$$

$$\therefore t^2-2at+2a-9=0$$

이 이차방정식의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2a$

이때 α, β 는 두 점 B, C의 x 좌표이고 삼각형 ABC의 무게중심의

$$x\text{좌표가 } 3 \text{이므로 } \frac{a+\alpha+\beta}{3}=3$$

$$\frac{a+2a}{3}=3 \quad \therefore a=3$$

34 ㉮ 2

$$f(x)=x^3+ax, g(x)=ax^2+bx \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2+a, g'(x)=2ax$$

두 곡선이 $x=1$ 인 점을 지나므로

$$f(1)=g(1) \text{에서 } 1+a=a+b \quad \therefore b=1$$

$x=1$ 인 점에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(1)=g'(1) \text{에서 } 3+a=2a \quad \therefore a=3$$

$$\therefore a-b=3-1=2$$

34-1 ㉮ -2

$$f(x)=x^4+ax, g(x)=bx^2+c \text{라 하면}$$

$$f'(x)=4x^3+a, g'(x)=2bx$$

두 곡선이 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로

$$f(-1)=0 \text{에서 } 1-a=0 \quad \therefore a=1$$

$$g(-1)=0 \text{에서 } b+c=0$$

점 $(-1, 0)$ 에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(-1)=g'(-1) \text{에서 } a-4=-2b$$

$$\therefore a+2b=4$$

㉮, ㉮, ㉮을 연립하여 풀면

$$a=1, b=\frac{3}{2}, c=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore a-b+c=1-\frac{3}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)=-2$$

35 ㉮ -1

$$f(x)=x^3+ax, g(x)=x^2-1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2+a, g'(x)=2x$$

두 곡선의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t)=g(t) \text{에서 } t^3+at=t^2-1 \quad \dots\dots ㉮$$

$x=t$ 인 점에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(t)=g'(t) \text{에서 } 3t^2+a=2t$$

$$\therefore a=-3t^2+2t \quad \dots\dots ㉮ \quad \dots\dots ㉮$$

㉮을 ㉮에 대입하면

$$t^3+(-3t^2+2t)t=t^2-1, 2t^3-t^2-1=0$$

$$(t-1)(2t^2+t+1)=0$$

$$\therefore t=1 (\because 2t^2+t+1>0) \quad \dots\dots ㉮$$

$t=1$ 을 ㉮에 대입하면

$$a=-3+2=-1 \quad \dots\dots ㉮$$

채점 기준	비율
㉮ 두 곡선의 접점의 x 좌표를 t 라 하고 a 와 t 의 관계식을 구할 수 있다.	40%
㉮ t 의 값을 구할 수 있다.	40%
㉮ a 의 값을 구할 수 있다.	20%

35-1 ㉮ 3

$$f(x)=\frac{2}{3}x^3-6x+3, g(x)=ax^2-6x-6 \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=2x^2-6, g'(x)=2ax-6$$

두 곡선의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t)=g(t) \text{에서 } \frac{2}{3}t^3-6t+3=at^2-6t-6$$

$$\therefore \frac{2}{3}t^3-at^2+9=0 \quad \dots\dots ㉮$$

$x=t$ 인 점에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(t)=g'(t) \text{에서 } 2t^2-6=2at-6$$

$$t^2=at \quad \therefore a=t (\because t>0)$$

$a=t$ 를 ㉮에 대입하면

$$\frac{2}{3}t^3-t^3+9=0, t^3-27=0$$

$$(t-3)(t^2+3t+9)=0 \quad \therefore t=3 (\because t^2+3t+9>0)$$

$$\therefore a=t=3$$

36 ㉮ 5

$$f(x)=x^3-5x^2+5x+2, g(x)=-x^2+5x+a \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-10x+5, g'(x)=-2x+5$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=5$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-2=5x \quad \therefore y=5x+2$$

이 직선과 곡선 $y=g(x)$ 의 접점의 좌표를 $(t, 5t+2)$ 라 하면

$$g(t)=5t+2 \text{에서 } -t^2+5t+a=5t+2$$

$$\therefore a=t^2+2 \quad \dots\dots ㉮$$

$$g'(t)=5 \text{에서 } -2t+5=5$$

$$\therefore t=0$$

$t=0$ 을 ㉮에 대입하면 $a=2$

36-1 ㉮ 2

$$f(x)=x^2+2, g(x)=x^3+ax \text{라 하면}$$

$$f'(x)=2x, g'(x)=3x^2+a$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, 6)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(-2)=-4 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-6=-4(x+2) \quad \therefore y=-4x-2$$

이 직선과 곡선 $y=g(x)$ 의 접점의 좌표를 $(t, -4t-2)$ 라 하면

$$g(t)=-4t-2 \text{에서 } t^3+at=-4t-2$$

$$\therefore t^3+(a+4)t+2=0 \quad \dots\dots ㉮$$

$$g'(t)=-4 \text{에서 } 3t^2+a=-4$$

$$\begin{aligned} \therefore a &= -3t^2 - 4 & \dots\dots \textcircled{L} \\ \textcircled{L} \text{을 } \textcircled{7} \text{에 대입하면} \\ t^3 - 3t^2 + 2 &= 0, t^3 - 1 = 0 \\ (t-1)(t^2+t+1) &= 0 \quad \therefore t=1 (\because t^2+t+1 > 0) \\ t=1 \text{을 } \textcircled{L} \text{에 대입하면} \\ a &= -3-4 = -7 \end{aligned}$$

37 ㉓ ③

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 2x^2 - 1 \text{이라 하면} \\ f'(x) &= 3x^2 + 4x \\ \text{점 } (1, 2) \text{에서의 접선의 기울기는 } f'(1) &= 7 \text{이므로 접선의 방정식은} \\ y-2 &= 7(x-1) \quad \therefore y=7x-5 \\ \text{이 접선의 } x \text{절편이 } \frac{5}{7}, y \text{절편이 } -5 \text{이므로 구하는 삼각형의 넓이는} \\ \frac{1}{2} \times \frac{5}{7} \times 5 &= \frac{25}{14} \end{aligned}$$

37-1 ㉓ $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax, g(x) = bx^2 + c \text{라 하면} \\ f'(x) &= 3x^2 + a, g'(x) = 2bx \\ \text{두 곡선이 점 } (1, 2) \text{를 지나므로} \\ f(1) &= 2 \text{에서 } 1+a=2 \quad \therefore a=1 & \dots\dots \textcircled{7} \\ g(1) &= 2 \text{에서 } b+c=2 & \dots\dots \textcircled{L} \\ \text{점 } (1, 2) \text{에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로} \\ f'(1) &= g'(1) \text{에서 } 3+a=2b \\ \therefore a-2b &= -3 & \dots\dots \textcircled{E} \\ \textcircled{7}, \textcircled{L}, \textcircled{E} \text{을 연립하여 풀면} \\ a=1, b=2, c &= 0 \\ \text{즉 점 } (1, 2) \text{에서의 접선의 기울기는 } f'(1) &= g'(1) = 4 \text{이므로 접} \\ \text{선의 방정식은} \\ y-2 &= 4(x-1) \quad \therefore y=4x-2 \\ \text{이 접선의 } x \text{절편이 } \frac{1}{2}, y \text{절편이 } -2 \text{이므로 구하는 삼각형의 넓이는} \\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

38 ㉓ 2

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - x^2 + 2 \text{라 하면 } f'(x) = 4x^3 - 2x \\ \text{점점의 좌표를 } (t, t^4 - t^2 + 2) \text{라 하면 접선의 기울기는} \\ f'(t) &= 4t^3 - 2t \text{이므로 접선의 방정식은} \\ y - (t^4 - t^2 + 2) &= (4t^3 - 2t)(x - t) \\ \therefore y &= (4t^3 - 2t)x - 3t^4 + t^2 + 2 \\ \text{이 직선이 점 } (0, 0) \text{을 지나므로} \\ 0 &= -3t^4 + t^2 + 2, 3t^4 - t^2 - 2 = 0 \\ (t+1)(t-1)(3t^2+2) &= 0 \\ \therefore t &= -1 \text{ 또는 } t=1 (\because 3t^2+2 > 0) \\ \text{따라서 점점의 좌표는 } A(-1, 2), B(1, 2) \text{이므로} \\ \triangle AOB &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

38-1 ㉓ 16

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 1 \text{이라 하면 } f'(x) = 2x \\ \text{점점의 좌표를 } (t, t^2 + 1) \text{이라 하면 접선의 기울기는} \\ f'(t) &= 2t \text{이므로 접선의 방정식은} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - (t^2 + 1) &= 2t(x - t) \\ \therefore y &= 2tx - t^2 + 1 \\ \text{이 직선이 점 } P(1, -2) \text{를 지나므로} \\ -2 &= 2t - t^2 + 1, t^2 - 2t - 3 = 0 \\ (t+1)(t-3) &= 0 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t=3 \\ \text{즉 두 점점의 좌표는 } Q(-1, 2), R(3, 10) \text{이고 접선의 방정식은} \\ y &= -2x, y = 6x - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(-1-1)^2 + (2+2)^2} = 2\sqrt{5} \text{이고} \\ \text{점 } R(3, 10) \text{과 직선 } PQ, \text{ 즉 } 2x+y=0 \text{ 사이의 거리는} \\ \frac{|6+10|}{\sqrt{2^2+1^2}} &= \frac{16\sqrt{5}}{5} \\ \text{따라서 삼각형 } PRQ \text{의 넓이는} \\ \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{16\sqrt{5}}{5} &= 16 \end{aligned}$$

39 ㉓ 1

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 - 2ax + a + 2 \text{라 하면 } f'(x) = 2ax - 2a \\ \text{점 } A(0, a+2) \text{에서의 접선의 기울기는 } f'(0) &= -2a \text{이므로 접선의} \\ \text{방정식은} \\ y - (a+2) &= -2ax \quad \therefore y = -2ax + a + 2 \\ \text{이 직선이 } x \text{축과 만나는 점 } B \text{의 좌표는 } \left(\frac{a+2}{2a}, 0 \right) \\ \text{따라서 삼각형 } OAB \text{의 넓이 } S \text{는} \\ S &= \frac{1}{2} \times \left| \frac{a+2}{2a} \right| \times |a+2| = \frac{(a+2)^2}{4a} (\because a > 0) \\ \therefore \lim_{a \rightarrow 0^+} aS &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{a(a+2)^2}{4a} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{(a+2)^2}{4} = 1 \end{aligned}$$

39-1 ㉓ $\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 1 \text{이라 하면 } f'(x) = 3x^2 \\ \text{점 } A(t, t^3 - 1) \text{에서의 접선의 기울기는 } f'(t) &= 3t^2 \text{이므로 접선의} \\ \text{방정식은} \\ y - (t^3 - 1) &= 3t^2(x - t) \quad \therefore y = 3t^2x - 2t^3 - 1 \\ \text{이 직선이 } y \text{축과 만나는 점 } B \text{의 좌표는 } (0, -2t^3 - 1) \\ \text{또 점 } A(t, t^3 - 1) \text{을 지나고 점 } A \text{에서의 접선에 수직인 직선의 기} \\ \text{울기는 } -\frac{1}{f'(t)} &= -\frac{1}{3t^2} \text{이므로 직선의 방정식은} \\ y - (t^3 - 1) &= -\frac{1}{3t^2}(x - t) \\ \therefore y &= -\frac{1}{3t^2}x + \frac{1}{3t} + t^3 - 1 \\ \text{이 직선이 } y \text{축과 만나는 점 } C \text{의 좌표는 } \left(0, \frac{1}{3t} + t^3 - 1 \right) \\ \therefore \overline{BC} &= \left| \frac{1}{3t} + t^3 - 1 - (-2t^3 - 1) \right| = \left| \frac{1}{3t} + 3t^3 \right| \\ \text{따라서 삼각형 } ABC \text{의 넓이 } S \text{는} \\ S &= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times |t| = \frac{1}{2} \times \left| \frac{1}{3t} + 3t^3 \right| \times |t| \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + 3t^4 \right) (\because t > 0) \\ \therefore \lim_{t \rightarrow 0^+} S &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + 3t^4 \right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

40 ㉓ ④

$$\begin{aligned} \text{함수 } f(x) &= -x^2 + 4x \text{는 닫힌구간 } [0, 4] \text{에서 연속이고 열린구간} \\ (0, 4) \text{에서 미분가능하다.} \\ f(0) &= f(4) = 0 \text{이므로 롤의 정리에 의하여 } f'(c) = 0 \text{인 } c \text{가 열린} \end{aligned}$$

구간 $(0, 4)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 이때 $f'(x) = -2x + 4$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서
 $-2c + 4 = 0 \quad \therefore c = 2$

40-1 ㉔ ④

함수 $f(x) = x^2(x-2)$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$ 에서 미분가능하다.
 $f(0) = f(2) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 이때 $f'(x) = 2x(x-2) + x^2 = 3x^2 - 4x$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서
 $3c^2 - 4c = 0, c(3c-4) = 0$
 $\therefore c = \frac{4}{3} (\because 0 < c < 2)$

41 ㉔ -6

함수 $f(x) = 2x^2 + ax$ 는 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 4)$ 에서 미분가능하다.
 롤의 정리를 만족시키려면 $f(0) = f(4)$ 이어야 하므로
 $0 = 32 + 4a \quad \therefore a = -8 \quad \dots\dots ①$
 $\therefore f(x) = 2x^2 - 8x$
 즉 롤의 정리에 의하여 $f'(b) = 0$ 인 b 가 열린구간 $(0, 4)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 이때 $f'(x) = 4x - 8$ 이므로 $f'(b) = 0$ 에서
 $4b - 8 = 0 \quad \therefore b = 2 \quad \dots\dots ②$
 $\therefore a + b = -8 + 2 = -6 \quad \dots\dots ③$

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	40%
② b 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ $a + b$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

41-1 ㉔ 1

함수 $f(x) = x^3 - ax^2$ 는 닫힌구간 $[0, a]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, a)$ 에서 미분가능하다.
 $f(0) = f(a) = 0$ 이므로 롤의 정리를 만족시킨다.
 이때 $f'(x) = 3x^2 - 2ax$ 이므로 $f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ 에서
 $\frac{4}{3} - \frac{4}{3}a = 0 \quad \therefore a = 1$

42 ㉔ ⑤

함수 $f(x) = x^3 - 9x + 3$ 는 닫힌구간 $[-3, a]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-3, a)$ 에서 미분가능하다.
 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-3) = f(a)$ 이어야 하므로
 $3 = a^3 - 9a + 3, a^3 - 9a = 0$
 $a(a+3)(a-3) = 0 \quad \therefore a = 3 (\because a > 0)$
 즉 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(-3, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 이때 $f'(x) = 3x^2 - 9$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서
 $3c^2 - 9 = 0, c^2 - 3 = 0, (c + \sqrt{3})(c - \sqrt{3}) = 0$
 $\therefore c = -\sqrt{3}$ 또는 $c = \sqrt{3}$
 따라서 $c_1 = -\sqrt{3}, c_2 = \sqrt{3} (\because c_1 < c_2)$ 이므로
 $a + c_1^2 + c_2^2 = 3 + (-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 9$

42-1 ㉔ 16

함수 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 10x + 1$ 는 닫힌구간 $[-a, a]$ 에서 연속

이고 열린구간 $(-a, a)$ 에서 미분가능하다.
 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-a) = f(a)$ 이어야 하므로
 $-\frac{2}{3}a^3 + 4a^2 + 10a + 1 = \frac{2}{3}a^3 + 4a^2 - 10a + 1$
 $\frac{4}{3}a^3 - 20a = 0, a^3 - 15a = 0$
 $a(a + \sqrt{15})(a - \sqrt{15}) = 0$
 $\therefore a = \sqrt{15} (\because a > 0)$
 즉 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(-\sqrt{15}, \sqrt{15})$ 에 적어도 하나 존재한다.
 이때 $f'(x) = 2x^2 + 8x - 10$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서
 $2c^2 + 8c - 10 = 0, c^2 + 4c - 5 = 0$
 $(c+5)(c-1) = 0 \quad \therefore c = 1 (\because -\sqrt{15} < c < \sqrt{15})$
 $\therefore a^2 + c = (\sqrt{15})^2 + 1 = 16$

43 ㉔ ④

함수 $f(x) = x^2 + x$ 는 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
 $\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{12 - 0}{4} = 3 = f'(c)$
 인 c 가 열린구간 $(-1, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 이때 $f'(x) = 2x + 1$ 이므로 $f'(c) = 3$ 에서
 $2c + 1 = 3 \quad \therefore c = 1$

43-1 ㉔ 0

함수 $f(x) = -x^3 + x$ 는 닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-3, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
 $\frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)} = \frac{-24 - 24}{6} = -8 = f'(c)$
 인 c 가 열린구간 $(-3, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 이때 $f'(x) = -3x^2 + 1$ 이므로 $f'(c) = -8$ 에서
 $-3c^2 + 1 = -8, c^2 - 3 = 0, (c + \sqrt{3})(c - \sqrt{3}) = 0$
 $\therefore c = -\sqrt{3}$ 또는 $c = \sqrt{3}$
 따라서 모든 실수 c 의 값의 합은
 $-\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$

44 ㉔ ①

$f(x) = -x^2 + 3x + 1$ 에서 $f'(x) = -2x + 3$
 이때 $f(2) - f(0) = 2f'(c)$ 에서 $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c)$ 이므로
 $\frac{3 - 1}{2} = -2c + 3, 2c = 2 \quad \therefore c = 1$

44-1 ㉔ ④

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 에서 $f'(x) = 3x^2 - 6x$
 이때 $f(5) = f(-1) + 6f'(c)$ 에서 $\frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)} = f'(c)$ 이므로
 $\frac{51 - (-3)}{6} = 3c^2 - 6c, c^2 - 2c - 3 = 0$
 $(c+1)(c-3) = 0 \quad \therefore c = 3 (\because -1 < c < 5)$

45 ㉔ 3

함수 $f(x) = x^2 + 2x - 2$ 는 닫힌구간 $[-2, a]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-2, a)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(a)-f(-2)}{a-(-2)}=f'\left(\frac{1}{2}\right)$$

인 실수 $\frac{1}{2}$ 이 열린구간 $(-2, a)$ 에 존재한다.

$$\text{이때 } f'(x)=2x+2 \text{이므로 } \frac{(a^2+2a-2)-(-2)}{a+2}=3$$

$$a^2+2a=3a+6, a^2-a-6=0$$

$$(a+2)(a-3)=0 \quad \therefore a=3 (\because a>-2)$$

45-1 ㉓ ③

함수 $f(x)=x^3-2x$ 는 닫힌구간 $[a, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(a, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3)-f(a)}{3-a}=f'(\sqrt{3})$$

인 실수 $\sqrt{3}$ 이 열린구간 $(a, 3)$ 에 존재한다.

$$\text{이때 } f'(x)=3x^2-2 \text{이므로 } \frac{21-(a^3-2a)}{3-a}=7$$

$$-a^3+2a+21=21-7a, a^3-9a=0$$

$$a(a+3)(a-3)=0 \quad \therefore a=-3 (\because a<0)$$

46 ㉓ $-\frac{5}{6}$

함수 $f(x)$ 가 미분가능하므로 함수 $g(x)=\frac{f(x)}{x+1}$ 도 닫힌구간

$[0, 5]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 5)$ 에서 미분가능하다.

즉 평균값 정리에 의하여

$$\frac{g(5)-g(0)}{5-0}=g'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(0, 5)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$\text{이때 } g(5)=\frac{f(5)}{5+1}=-\frac{1}{6}, g(0)=\frac{f(0)}{0+1}=4 \text{이므로}$$

$$g'(c)=\frac{g(5)-g(0)}{5-0}=\frac{-\frac{1}{6}-4}{5}=-\frac{5}{6}$$

46-1 ㉓ -9

함수 $f(x)$ 가 미분가능하므로 함수 $g(x)=(x^2+2x+3)f(x)$ 도 닫힌구간 $[-2, 0]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-2, 0)$ 에서 미분가능하다. 즉 평균값 정리에 의하여

$$\frac{g(0)-g(-2)}{0-(-2)}=g'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(-2, 0)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$\text{이때 } g(0)=3f(0)=9, g(-2)=3f(-2)=27 \text{이므로}$$

$$g'(c)=\frac{g(0)-g(-2)}{0-(-2)}=\frac{9-27}{2}=-9$$

47 ㉓ 9

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 4)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(1, 4)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x) \geq 2 \text{에서 } \frac{f(4)-3}{3} \geq 2 \text{이므로}$$

$$f(4)-3 \geq 6 \quad \therefore f(4) \geq 9$$

따라서 $f(4)$ 의 최솟값은 9이다.

47-1 ㉓ ③

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$ 에서

미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$|f'(c)| \leq \frac{2}{3} \text{에서 } \left| \frac{f(2)-f(0)}{2-0} \right| \leq \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$\left| \frac{f(2)-1}{2} \right| \leq \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \leq \frac{f(2)-1}{2} \leq \frac{2}{3}$$

$$\therefore -\frac{1}{3} \leq f(2) \leq \frac{7}{3}$$

따라서 정수 $f(2)$ 의 값은 0, 1, 2이므로 그 개수는 3이다.

48 ㉓ -25

함수 $f(x)=x^2-3x$ 는 닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 4)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{4-(-2)}{4-1}=2=f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(1, 4)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$\text{이때 } f'(x)=2x-3 \text{이므로 } f'(c)=2 \text{에서}$$

$$2c-3=2 \quad \therefore c=\frac{5}{2} \quad \dots\dots ①$$

즉 점 $(c, f(c))$, 즉 $(\frac{5}{2}, -\frac{5}{4})$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'\left(\frac{5}{2}\right)=2 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y+\frac{5}{4}=2\left(x-\frac{5}{2}\right) \quad \therefore y=2x-\frac{25}{4} \quad \dots\dots ②$$

$$\text{따라서 } m=2, n=-\frac{25}{4} \text{이므로}$$

$$2mn=2 \times 2 \times \left(-\frac{25}{4}\right)=-25 \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① c 의 값을 구할 수 있다.	50%
② 점 $(c, f(c))$ 에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
③ $2mn$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

48-1 ㉓ $y=2x-3$

함수 $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ 은 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{7-1}{3}=2=f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(0, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$\text{이때 } f'(x)=3x^2-6x+2 \text{이므로 } f'(c)=2 \text{에서}$$

$$3c^2-6c+2=2, c^2-2c=0$$

$$c(c-2)=0 \quad \therefore c=2 (\because 0<c<3)$$

따라서 점 $(c, f(c))$, 즉 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=2$

이므로 접선의 방정식은

$$y-1=2(x-2) \quad \therefore y=2x-3$$

유형 완성하기

p. 105

49 ㉓ ②

$$f(x)=x^3-6x^2+6x \text{라 하면 } f'(x)=3x^2-12x+6$$

곡선 $y=f(x)$ 의 접선 중에서 직선 $x=3y$, 즉 $y=\frac{1}{3}x$ 와 수직인 접선의 접점의 좌표를 (t, t^3-6t^2+6t) 라 하면 이 점에서의 접선의

기울기가 -3 이므로

$$f'(t) = 3t^2 - 12t + 6 = -3$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0, (t-1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

즉 점점의 좌표는 $(1, 1), (3, -9)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-1 = -3(x-1), y+9 = -3(x-3)$$

$$\therefore 3x+y-4=0, 3x+y=0$$

따라서 위의 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x+y-4=0$ 위의 점 $(0, 4)$ 와 직선 $3x+y=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$$\frac{|0+4|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

50 1

$$f(x) = -x^2 + 4 \text{라 하면 } f'(x) = -2x$$

곡선 $y=f(x)$ 의 접선 중에서 직선 PQ와 평행한 접선의 점점의 좌표를 $(t, -t^2+4)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가

$$\frac{0-4}{2-0} = -2 \text{이어야 하므로}$$

$$f'(t) = -2t = -2 \quad \therefore t=1$$

즉 점점의 좌표는 $(1, 3)$ 이므로 $A(1, 3)$ 일 때 삼각형 PQA의 넓이가 최대이다.

두 점 $P(0, 4), Q(2, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-4 = -2x \quad \therefore 2x+y-4=0$$

이때 점 $A(1, 3)$ 과 직선 $2x+y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+3-4|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$PQ = \sqrt{(2-0)^2 + (0-4)^2} = 2\sqrt{5}$$

따라서 삼각형 PQA의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = 1$$

51 24

세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 α, β, γ 라 하면

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$$\overline{AC} = 6 \text{에서 } \gamma - \alpha = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(x) = (x-\beta)(x-\gamma) + (x-\alpha)(x-\gamma) + (x-\alpha)(x-\beta)$$

점 C에서의 접선의 기울기가 12이므로 $f'(\gamma) = 12$ 에서

$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 12, 6(\gamma-\beta) = 12$$

$$\therefore \gamma - \beta = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면 } \alpha - \beta = -4$$

이때 점 A에서의 접선의 기울기는 $f'(\alpha)$ 이므로

$$f'(\alpha) = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) = -4 \times (-6) = 24$$

52 1/2

$$f(x) = 3x^2 \text{에서 } f'(x) = 6x$$

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+kh) \text{에서}$$

$$3(a+h)^2 = 3a^2 + h\{6(a+kh)\}$$

$$h^2 = 2kh^2 \quad \therefore k = \frac{1}{2} (\because h > 0)$$

53 5

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{는 곡선 } y=f(x) \text{ 위의 두 점 } (a, f(a)), (b, f(b))$$

를 지나는 직선의 기울기이고, $f'(c)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 의 $x=c$ 에서

의 접선의 기울기이다.

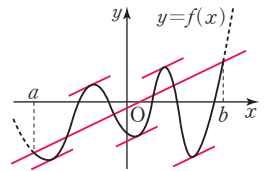
이때 오른쪽 그림과 같이 두 점

$(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직

선과 평행한 접선을 5개 그을 수 있으

므로 주어진 조건을 만족시키는 실수

c 의 개수는 5이다.



54 12

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[x-2, x+2]$ 에서 연속이고 열린구간

$(x-2, x+2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x+2)-f(x-2)}{x+2-(x-2)} = f'(c) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

인 c 가 열린구간 $(x-2, x+2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$\textcircled{1}$ 에서 $f(x+2)-f(x-2)=4f'(c)$ 이고 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $c \rightarrow \infty$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x+2)-f(x-2)\} = \lim_{c \rightarrow \infty} 4f'(c) = 4 \lim_{c \rightarrow \infty} f'(c) = 4 \times 3 = 12$$

학교 시험 대비 문제

p. 106~109

01 1

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 2 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3(x-2)^2 - 12$$

즉 $f'(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최소이고, 최솟값은 -12 이므로

$$m = -12$$

$$\text{이때 } f(2) = -14 \text{이므로 } a=2, b=-14$$

$$\therefore a+b+m = 2 + (-14) + (-12) = -24$$

02 1

(가)에서 함수 $f(x)$ 는 원점에 대하여 대칭이므로

$$f(x) = ax^3 + bx \text{ (} a, b \text{는 상수, } a \neq 0 \text{)} \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

(나)에서 $f(1)=1, f'(1)=-1$ 이므로

$$f(1)=1 \text{에서 } a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(1)=-1 \text{에서 } 3a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1, b=2$

따라서 $f(x) = -x^3 + 2x$ 이므로

$$f(2) = -8 + 4 = -4$$

03 -2

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(2, 1)$ 을 지나므로 $f(2)=1$

$$g(x) = (x-2)f(x) \text{라 하면 } g'(x) = f(x) + (x-2)f'(x)$$

점 $(2, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$g'(2) = f(2) + (2-2)f'(2) = f(2) = 1$$

즉 기울기가 1이고 점 $(2, 0)$ 을 지나는 접선의 방정식은

$$y = x - 2$$

따라서 $a=1, b=-2$ 이므로

$$ab = 1 \times (-2) = -2$$

04 ㉓ ③

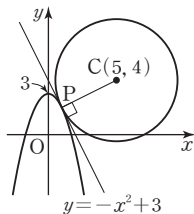
$y = x^3 + kx^2 + (2k-1)x + k + 2$ 에서
 $(x^2 + 2x + 1)k + x^3 - x - y + 2 = 0$
 이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면
 $x^2 + 2x + 1 = 0, x^3 - x - y + 2 = 0$
 $x^2 + 2x + 1 = 0$ 에서 $(x+1)^2 = 0 \quad \therefore x = -1$
 $x = -1$ 을 $x^3 - x - y + 2 = 0$ 에 대입하면
 $-1 + 1 - y + 2 = 0 \quad \therefore y = 2$
 즉 주어진 곡선은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $P(-1, 2)$ 를 지난다.
 $f(x) = x^3 + kx^2 + (2k-1)x + k + 2$ 라 하면
 $f'(x) = 3x^2 + 2kx + 2k - 1$
 점 $P(-1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1) = 2$ 이므로 접선의
 방정식은 $y - 2 = 2(x + 1) \quad \therefore y = 2x + 4$
 따라서 $a = 2, b = 4$ 이므로
 $a^2 + b^2 = 2^2 + 4^2 = 20$

05 ㉓ 9

$y = x^3 - kx^2 + 3kx + 1$ 에서
 $(-x^2 + 3x)k + x^3 - y + 1 = 0$
 이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면
 $-x^2 + 3x = 0, x^3 - y + 1 = 0$
 $-x^2 + 3x = 0$ 에서 $x^2 - 3x = 0$
 $x(x-3) = 0 \quad \therefore x = 0$ 또는 $x = 3$
 $x^3 - y + 1 = 0$ 에서 $y = x^3 + 1$ 이므로
 (i) $x = 0$ 일 때, $y = 1$
 (ii) $x = 3$ 일 때, $y = 27 + 1 = 28$
 (i), (ii)에서 곡선 $y = x^3 - kx^2 + 3kx + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상
 두 점 $(0, 1), (3, 28)$ 을 지난다.
 $f(x) = x^3 - kx^2 + 3kx + 1$ 이라 하면
 $f'(x) = 3x^2 - 2kx + 3k$
 두 점 $(0, 1), (3, 28)$ 에서의 접선이 서로 수직이므로
 $f'(0)f'(3) = -1$ 에서 $3k(27 - 3k) = -1$
 $\therefore 9k^2 - 81k - 1 = 0$
 이차방정식 $9k^2 - 81k - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (-9)^2 - 9 \times (-1) = 90 > 0$
 따라서 이차방정식 $9k^2 - 81k - 1 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가지
 므로 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k 의 값의 합은 9이다.

06 ㉓ 20π

$f(x) = -x^2 + 3$ 이라 하면 $f'(x) = -2x$
 오른쪽 그림과 같이 접점의 좌표를
 $P(t, -t^2 + 3)$ 이라 하면 점 P 에서의 접선
 의 기울기는 $f'(t) = -2t$
 직선 CP 의 기울기는
 $\frac{-t^2 + 3 - 4}{t - 5} = \frac{-t^2 - 1}{t - 5}$
 이때 접선과 직선 CP 는 서로 수직이므로
 $-2t \times \frac{-t^2 - 1}{t - 5} = -1$
 $2t^3 + 3t - 5 = 0, (t-1)(2t^2 + 2t + 5) = 0$
 $\therefore t = 1 (\because 2t^2 + 2t + 5 > 0)$
 즉 접점의 좌표는 $P(1, 2)$ 이므로 원 C 의 반지름의 길이는
 $\sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{5}$



따라서 원 C 의 넓이는

$$\pi \times (2\sqrt{5})^2 = 20\pi$$

Lecture 곡선과 원의 접선

곡선 $y = f(x)$ 와 원 C 가 접할 때

- (원 C 의 반지름의 길이) = (원 C 의 중심과 접점 사이의 거리)
- 원 C 의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선과 수직이다.

07 ㉓ ⑤

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = -2$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이
 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
 즉 $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - 5\} = 0$ 이므로 $f(2) = 5$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = -2$
 이때 $g(x) = (x-1)f(x)$ 라 하면
 $g'(x) = f(x) + (x-1)f'(x)$
 점 $(2, a)$ 는 곡선 $y = g(x)$ 위의 점이므로
 $g(2) = f(2) = 5 \quad \therefore a = 5$
 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(2, 5)$ 에서의 접선의 기울기는
 $g'(2) = f(2) + f'(2) = 5 + (-2) = 3$
 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(2, 5)$ 에서의 접선의 방정식은
 $y - 5 = 3(x - 2) \quad \therefore y = 3x - 1$
 따라서 접선의 y 절편은 -1 이므로 $b = -1$
 $\therefore a + b = 5 + (-1) = 4$

08 ㉓ ④

$f(x) = x^3 - 5x$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 5$
 점 $A(1, -4)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -2$ 이므로 접선의
 방정식은 $y + 4 = -2(x - 1) \quad \therefore y = -2x - 2$
 직선 $y = -2x - 2$ 가 주어진 곡선과 다시 만나는 점 B 의 x 좌표는
 $x^3 - 5x = -2x - 2$ 에서 $x^3 - 3x + 2 = 0$
 $(x-1)^2(x+2) = 0 \quad \therefore x = -2 (\because x \neq 1)$
 따라서 점 B 의 좌표는 $(-2, 2)$ 이므로
 $AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (2+4)^2} = 3\sqrt{5}$

09 ㉓ ②

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 6$ 이라 하면
 $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3(x+1)^2 - 3$
 이므로 $f'(x)$ 는 $x = -1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 -3 이다.
 즉 기울기가 최소인 접선의 접점의 좌표는 $(-1, 8)$ 이고 접선의 기
 울기가 -3 이므로 접선의 방정식은
 $y - 8 = -3(x + 1) \quad \therefore y = -3x + 5$
 따라서 $a = -3, b = 5$ 이므로
 $a + b = -3 + 5 = 2$

10 ㉓ ④

$f(x) = x^3 - 6x + 5$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 6$
 $x = 1$ 인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -3$ 이므로 제2사분면
 위의 접점의 좌표를 $(t, t^3 - 6t + 5) (t < 0)$ 라 하자
 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = -3$ 이므로
 $3t^2 - 6 = -3, t^2 - 1 = 0$
 $(t+1)(t-1) = 0 \quad \therefore t = -1 (\because t < 0)$

즉 접점의 좌표는 $(-1, 10)$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - 10 = -3(x + 1) \quad \therefore y = -3x + 7$
 따라서 구하는 y 절편은 7이다.

11 ㉡ 22

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 10$
 접점의 좌표를 $(t, t^3 + 3t^2 - 10t)$ 라 하면 접선의 기울기가 -1 이므로
 $f'(t) = 3t^2 + 6t - 10 = -1$
 $t^2 + 2t - 3 = 0, (t+3)(t-1) = 0$
 $\therefore t = -3$ 또는 $t = 1$

즉 접점의 좌표가 $(-3, 30), (1, -6)$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - 30 = -(x + 3), y + 6 = -(x - 1)$
 $\therefore y = -x + 27, y = -x - 5$
 따라서 $a = 27, b = -5 (\because a > b)$ 이므로
 $a + b = 27 + (-5) = 22$

12 ㉡ 1

$f(x) = x^3 + 5$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2$
 접점의 좌표를 $(t, t^3 + 5)$ 라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t) = 3t^2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - (t^3 + 5) = 3t^2(x - t) \quad \therefore y = 3t^2x - 2t^3 + 5$
 이 직선이 점 $(0, 3)$ 을 지나므로
 $3 = -2t^3 + 5, t^3 - 1 = 0$
 $(t - 1)(t^2 + t + 1) = 0 \quad \therefore t = 1 (\because t^2 + t + 1 > 0)$
 따라서 접점은 점 $(1, 6)$ 의 1개이므로 구하는 접선의 개수는 1이다.

13 ㉡ 3

$f(x) = x^3 - x$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 1$
 접점의 좌표를 $(t, t^3 - t)$ 라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t) = 3t^2 - 1$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - (t^3 - t) = (3t^2 - 1)(x - t)$
 $\therefore y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$
 이 직선이 점 $(0, -2)$ 를 지나므로
 $-2 = -2t^3, t^3 - 1 = 0$
 $(t - 1)(t^2 + t + 1) = 0 \quad \therefore t = 1 (\because t^2 + t + 1 > 0)$
 즉 접선의 기울기는 $f'(1) = 2$ 이므로 기울기가 2이고 점 $(-1, 3)$
 을 지나는 직선 l 의 방정식은
 $y - 3 = 2(x + 1) \quad \therefore y = 2x + 5$
 따라서 직선 $y = 2x + 5$ 위의 점은 ③이다.

14 ㉡ 2

$f(x) = -x^2 + x$ 라 하면 $f'(x) = -2x + 1$
 접점의 좌표를 $(t, -t^2 + t)$ 라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t) = -2t + 1$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - (-t^2 + t) = (-2t + 1)(x - t)$
 $\therefore y = (-2t + 1)x + t^2$
 이 직선이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로
 $2 = t^2 - 2t + 1 \quad \therefore t^2 - 2t - 1 = 0 \quad \dots\dots ㉠$
 이 이차방정식의 두 근이 두 접점의 x 좌표이므로 근과 계수의 관계
 에 의하여 두 접점의 x 좌표의 합은 2이다.

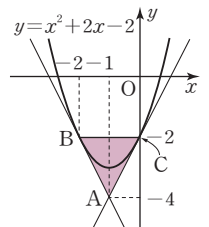
15 ㉡ 5

$f(x) = x^3 + ax, g(x) = bx^2 + 1$ 이라 하면

$f'(x) = 3x^2 + a, g'(x) = 2bx$
 두 곡선이 $x = 1$ 인 점을 지나므로
 $f(1) = g(1)$ 에서 $1 + a = b + 1$
 $\therefore a - b = 0 \quad \dots\dots ㉡$
 $x = 1$ 인 점에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로
 $f'(1) = g'(1)$ 에서 $3 + a = 2b$
 $\therefore a - 2b = -3 \quad \dots\dots ㉢$
 ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 3, b = 3$
 $\therefore a + b = 3 + 3 = 6$

16 ㉡ 1

$f(x) = x^2 + 2x - 2$ 라 하면 $f'(x) = 2x + 2$
 접점의 좌표를 $(t, t^2 + 2t - 2)$ 라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t) = 2t + 2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - (t^2 + 2t - 2) = (2t + 2)(x - t)$
 $\therefore y = (2t + 2)x - t^2 - 2$
 이 직선이 점 $A(-1, -4)$ 를 지나므로
 $-4 = -2t - 2 - t^2 - 2, t^2 + 2t = 0$
 $t(t + 2) = 0 \quad \therefore t = -2$ 또는 $t = 0$
 따라서 두 점 B, C의 좌표는
 $(-2, -2), (0, -2)$ 이므로 삼각형 ABC의
 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$



17 ㉡ 4

함수 $f(x) = x^3 - kx^2$ 은 닫힌구간 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 에서 연속이고 열린구간
 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 에서 미분가능하다.
 이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ 이어야 하므로
 $0 = \frac{1}{8} - \frac{k}{4}, \frac{k}{4} = \frac{1}{8} \quad \therefore k = \frac{1}{2}$
 $\therefore f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2$
 즉 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 에 적어
 도 하나 존재한다.
 이때 $f'(x) = 3x^2 - x$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서
 $3c^2 - c = 0, c(3c - 1) = 0 \quad \therefore c = \frac{1}{3} (\because 0 < c < \frac{1}{2})$
 $\therefore 6ck = 6 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = 1$

18 ㉡ 1

함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ 에 대하여 닫힌구간 $[0, a]$ 에서 평
 균값 정리를 만족시키는 실수 c 의 값이 2이므로
 $\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = f'(2)$
 이때 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ 이므로 $f'(2) = 2$
 즉 $\frac{a^3 - 3a^2 + 2a}{a} = 2$ 이므로 $a^3 - 3a^2 = 0$
 $a^2(a - 3) = 0 \quad \therefore a = 3 (\because a > 0)$

19 ㉮ ⑤

다항함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하다.

ㄱ. 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 연속이고 열린구간

$(-2, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = \frac{7-(-1)}{4} = 2 = f'(x)$$

인 x 가 열린구간 $(-2, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 2)$ 에

서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{7-2}{1} = 5 = f'(x)$$

인 x 가 열린구간 $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

즉 $f'(x)=5$ 인 x 가 열린구간 $(-2, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $g(x)=f(x)-x+8$ 에서 $g'(x)=f'(x)-1$

$$g'(x)=0 \text{에서 } f'(x)-1=0$$

$$\therefore f'(x)=1$$

$f'(x)=1$ 인 x 가 열린구간 $(-2, 2)$ 에 적어도 하나 존재함을 보이면 된다.

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 연속이고 열린구간

$(-2, 1)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)} = \frac{2-(-1)}{3} = 1 = f'(x)$$

인 x 가 열린구간 $(-2, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

즉 $g'(x)=0$ 인 x 가 열린구간 $(-2, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

20 ㉮ ③

$$f(x)=x^2-3x \text{라 하면}$$

$$f'(x)=2x-3$$

곡선 $y=f(x)$ 의 접선 중에서 직선 $y=x$ 와 평행한 접선의 접점의 좌표를 (t, t^2-3t) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이어야 하므로

$$f'(t)=2t-3=1 \quad \therefore t=2$$

따라서 접점의 좌표는 $(2, -2)$ 이므로 $P(2, -2)$ 일 때 삼각형 AOP의 넓이가 최대이다.

21 ㉮ ⑤

$$f(x)=x^2+4x+3 \text{에서 } f'(x)=2x+4$$

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+ah) \text{에서}$$

$$(x+h)^2+4(x+h)+3=x^2+4x+3+h\{2(x+ah)+4\}$$

$$x^2+2xh+h^2+4x+4h+3=x^2+4x+3+2xh+2ah^2+4h$$

$$h^2=2ah^2 \quad \therefore a=\frac{1}{2} (\because h>0)$$

서술형 1 ㉮ $\frac{1}{6}$

$$f(x)=-3x^2+\frac{1}{3} \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=-6x$$

$$\text{점 } A\left(t, -3t^2+\frac{1}{3}\right) \text{에서의 접선의 기울기는 } f'(t)=-6t \text{이므로}$$

이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{6t}$ 이다. ①

즉 기울기가 $\frac{1}{6t}$ 이고 점 $A\left(t, -3t^2+\frac{1}{3}\right)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-\left(-3t^2+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6t}(x-t)$$

$$\therefore y=\frac{1}{6t}x-3t^2+\frac{1}{6} \quad \dots\dots ②$$

따라서 $g(t)=-3t^2+\frac{1}{6}$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t)=\lim_{t \rightarrow 0} \left(-3t^2+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6} \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① 점 A에서의 접선에 수직인 직선의 기울기를 구할 수 있다.	30%
② 점 A를 지나고 점 A에서의 접선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
③ $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

서술형 2 ㉮ $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

$$f(x)=x^3-6x^2+2x \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-12x+2$$

점 A(1, -3)에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=3-12+2=-7 \quad \dots\dots ①$$

점 B(a, b)에서의 접선의 기울기가 -7이므로

$$f'(a)=3a^2-12a+2=-7$$

$$a^2-4a+3=0, (a-1)(a-3)=0$$

$$\therefore a=3 (\because a \neq 1)$$

즉 점 B의 좌표는 (3, -21)이므로 ②

기울기가 -7이고 점 B를 지나는 접선의 방정식은

$$y+21=-7(x-3) \quad \therefore 7x+y=0 \quad \dots\dots ③ \quad \dots\dots ③$$

따라서 점 A(1, -3)과 직선 ③ 사이의 거리는

$$\frac{|7-3|}{\sqrt{7^2+1^2}}=\frac{4}{5\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{5} \quad \dots\dots ④$$

채점 기준	비율
① 점 A에서의 접선의 기울기를 구할 수 있다.	20%
② 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	30%
③ 점 B에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
④ 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	20%

서술형 3 ㉮ 9

두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 가 점 (2, 3)을 지나므로

$$f(2)=g(2)=3 \quad \dots\dots ①$$

점 (2, 3)에서 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 접선의 기울기가 $\frac{3}{2}$

이므로

$$f'(2)=g'(2)=\frac{3}{2} \quad \dots\dots ②$$

$$h(x)=f(x)g(x) \text{에서}$$

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

따라서 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 (2, h(2))에서의 접선의 기울기는

$$h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2) \\ =\frac{3}{2} \times 3 + 3 \times \frac{3}{2} = 9 \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① $f(2), g(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
② $f'(2), g'(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 (2, h(2))에서의 접선의 기울기를 구할 수 있다.	40%

01 ㉮ ③

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + a$ 에서 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 2$

점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = 3 - 4 + 2 = 1$$

이때 $f(1) = 1 - 2 + 2 + a = a + 1$ 이므로

기울기가 1이고 점 $(1, a+1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - (a+1) = x - 1 \quad \therefore y = x + a$$

즉 두 점 P, Q의 좌표는 $(-a, 0), (0, a)$ 이므로

$$PQ = 6 \text{에서 } \sqrt{(0+a)^2 + (-a-0)^2} = 6, \sqrt{2a^2} = 6$$

$$2a^2 = 36, a^2 = 18 \quad \therefore a = 3\sqrt{2} (\because a > 0)$$

02 ㉮ 48

$f(x) = x^3 - ax$ 에서 $f'(x) = 3x^2 - a$

접점의 좌표를 $(t, t^3 - at)$ 라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t) = 3t^2 - a \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - (t^3 - at) = (3t^2 - a)(x - t)$$

$$\therefore y = (3t^2 - a)x - 2t^3$$

이 직선이 점 $(0, 16)$ 을 지나므로 $16 = -2t^3$

$$t^3 + 8 = 0, (t+2)(t^2 - 2t + 4) = 0$$

$$\therefore t = -2 (\because t^2 - 2t + 4 > 0)$$

즉 $x = -2$ 인 점에서의 접선의 기울기는 8이므로

$$f'(-2) = 8 \text{에서 } 12 - a = 8 \quad \therefore a = 4$$

따라서 $f(x) = x^3 - 4x$ 이므로

$$f(a) = f(4) = 64 - 16 = 48$$

03 ㉮ ①

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0)$ 이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$\therefore y = f'(0)x + f(0)$$

이 직선이 직선 $y = 3x - 1$ 과 일치하므로

$$f'(0) = 3, f(0) = -1$$

$$g(x) = (x+2)f(x) \text{에서}$$

$$g'(x) = f(x) + (x+2)f'(x)$$

$$\therefore g'(0) = f(0) + 2f'(0) = -1 + 2 \times 3 = 5$$

04 ㉮ 5

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{3} \text{이라 하면 } f'(x) = x^2$$

점 P에서의 접선의 기울기가 직선 $x - y - 10 = 0$, 즉 $y = x - 10$ 의 기울기와 같을 때 점 P와 직선 사이의 거리가 최소가 된다.

즉 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 기울기가 1이어야 하므로

$$f'(a) = a^2 = 1 \quad \therefore a = 1 (\because a > 0)$$

따라서 점 P의 좌표는 $(1, 4)$ 이므로 $b = 4$

$$\therefore a + b = 1 + 4 = 5$$

05 ㉮ 2

$f(x) = x^2 - x + 3$ 이라 하면 $f'(x) = 2x - 1$

점 A에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 1$

이때 점 B의 좌표를 $(t, t^2 - t + 3)$ 이라 하면 두 점 A, B에서의 접선이 서로 수직이므로 점 B에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = -1$

$$2t - 1 = -1 \quad \therefore t = 0$$

즉 점 B(0, 3)에서의 접선의 방정식은

$$y - 3 = -x \quad \therefore y = -x + 3$$

따라서 $a = -1, b = 3$ 이므로

$$a + b = -1 + 3 = 2$$

06 ㉮ 22

$f(x) = x^3 - 10, g(x) = x^3 + k$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2, g'(x) = 3x^2$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $P(-2, -18)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(-2) = 12 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y + 18 = 12(x + 2) \quad \therefore y = 12x + 6$$

점 Q의 좌표를 $(t, t^3 + k)$ 라 하면 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기는 $g'(t) = 3t^2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (t^3 + k) = 3t^2(x - t) \quad \therefore y = 3t^2x - 2t^3 + k$$

이 접선이 직선 $y = 12x + 6$ 과 일치하므로

$$3t^2 = 12, -2t^3 + k = 6$$

$$3t^2 = 12 \text{에서 } t^2 - 4 = 0$$

$$(t+2)(t-2) = 0 \quad \therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 2$$

$$-2t^3 + k = 6 \text{에서 } k = 2t^3 + 6$$

$$(i) t = -2 \text{일 때, } k = -16 + 6 = -10$$

$$(ii) t = 2 \text{일 때, } k = 16 + 6 = 22$$

$$(i), (ii) \text{에서 } k = 22 (\because k > 0)$$

07 ㉮ ③

점 $(2, 3)$ 에서의 접선이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로 이 접선의 기울기는 0이다.

즉 $f(2) = 3, f'(2) = 0$ 이므로

$f(x) - 3 = (x - a)(x - 2)^2$ (a 는 상수)이라 하자.

$$f(x) = (x - a)(x - 2)^2 + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = (x - 2)^2 + 2(x - a)(x - 2)$$

즉 점 $(-2, -16a - 29)$ 에서의 접선의 기울기가

$$f'(-2) = 8a + 32 \text{이므로 이 점에서의 접선의 방정식은}$$

$$y - (-16a - 29) = (8a + 32)(x + 2)$$

$$\therefore y = (8a + 32)x + 35$$

이 접선이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$3 = 8a + 32 + 35, 8a = -64$$

$$\therefore a = -8$$

따라서 $f(x) = (x + 8)(x - 2)^2 + 3$ 이므로

$$f(0) = 8 \times 4 + 3 = 35$$

08 ㉮ 28

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x^2 - 4} = -1$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이

존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - 1\} = 0 \text{이므로 } f(2) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x + 2}$$

$$= \frac{1}{4} f'(2)$$

$$\therefore \frac{1}{4} f'(2) = -1 \text{이므로 } f'(2) = -4$$

$$g(x) = (x+1)f(x) \text{라 하면}$$

$$g'(x) = f(x) + (x+1)f'(x)$$

점 (2, a)는 곡선 $y = g(x)$ 위의 점이므로

$$g(2) = 3f(2) = 3 \times 1 = 3 \quad \therefore a = 3$$

곡선 $y = g(x)$ 위의 점 (2, 3)에서의 접선의 기울기는

$$g'(2) = f(2) + 3f'(2) = 1 + 3 \times (-4) = -11$$

곡선 $y = g(x)$ 위의 점 (2, 3)에서의 접선의 방정식은

$$y - 3 = -11(x - 2) \quad \therefore y = -11x + 25$$

따라서 접선의 y절편은 25이므로 $b = 25$

$$\therefore a + b = 3 + 25 = 28$$

09 ㉡ 97

(나)에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - g(x)\} = 0 \text{이므로 } f(2) = g(2)$$

$x = 2$ 를 $g(x) = x^3 f(x) - 7$ 의 양변에 대입하면

$$g(2) = 8f(2) - 7, g(2) = 8g(2) - 7 (\because f(2) = g(2))$$

$$7g(2) = 7 \quad \therefore g(2) = f(2) = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - g(x)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2) - \{g(x) - g(2)\}}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} \\ &= f'(2) - g'(2) \end{aligned}$$

$$\therefore f'(2) - g'(2) = 2 \text{이므로}$$

$$f'(2) = g'(2) + 2$$

$$g(x) = x^3 f(x) - 7 \text{에서}$$

$$g'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x)$$

위의 식에 $x = 2$ 를 대입하면

$$g'(2) = 12f(2) + 8f'(2)$$

$$g'(2) = 12 \times 1 + 8\{g'(2) + 2\}$$

$$g'(2) = 8g'(2) + 28$$

$$7g'(2) = -28 \quad \therefore g'(2) = -4$$

곡선 $y = g(x)$ 위의 점 (2, $g(2)$), 즉 (2, 1)에서의 접선의 기울기가 -4이므로 접선의 방정식은

$$y - 1 = -4(x - 2) \quad \therefore y = -4x + 9$$

따라서 $a = -4, b = 9$ 이므로

$$a^2 + b^2 = (-4)^2 + 9^2 = 97$$

10 ㉡ 5

삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 가 점 (0, 0)을 지나므로 $f(0) = 0$

점 (0, 0)에서의 접선의 방정식은 $y = f'(0)x$ ㉠

$$g(x) = xf(x) \text{라 하면 } g'(x) = f(x) + xf'(x)$$

점 (1, 2)가 곡선 $y = g(x)$ 위의 점이므로

$$g(1) = f(1) = 2$$

곡선 $y = g(x)$ 위의 점 (1, 2)에서의 접선의 기울기는

$$g'(1) = f(1) + f'(1) = 2 + f'(1) \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - 2 = \{2 + f'(1)\}(x - 1)$$

$$\therefore y = \{2 + f'(1)\}x - f'(1) \quad \dots\dots\textcircled{A}$$

이때 두 접선 ㉠, ㉡이 일치하므로

$$f'(0) = 2 + f'(1), 0 = -f'(1)$$

$$\therefore f'(1) = 0, f'(0) = 2 \quad \text{--- } f(0) = 0 \text{이므로 함수 } f(x) \text{의 상수항은 0이다.}$$

삼차함수 $f(x)$ 를 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)

$$\text{라 하면 } f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f(1) = 2 \text{에서 } a + b + c = 2 \quad \dots\dots\textcircled{B}$$

$$f'(0) = 2 \text{에서 } c = 2$$

$$f'(1) = 0 \text{에서 } 3a + 2b + c = 0 \quad \dots\dots\textcircled{C}$$

$c = 2$ 를 ㉢, ㉡에 각각 대입하면

$$a + b = 0, 3a + 2b = -2$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -2, b = 2$

$$\text{따라서 } f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 2x \text{이므로}$$

$$f'(x) = -6x^2 + 4x + 2$$

$$\therefore f'(2) = -24 + 8 + 2 = -14$$

11 ㉡ 25

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 2x \text{에서 } f'(x) = -3x^2 + 2ax + 2$$

점 O(0, 0)에서의 접선의 기울기는 $f'(0) = 2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = 2x$$

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = 2x$ 가 만나는 점의 x좌표는

$$-x^3 + ax^2 + 2x = 2x \text{에서 } x^3 - ax^2 = 0$$

$$x^2(x - a) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = a$$

즉 점 A의 좌표는 (a, 2a)이다.

점 A가 OB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로 두 직선 OA와 AB는 서로 수직이다.

이때 $f'(0) = 2$ 에서 직선 AB의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이고

$$f'(a) = -3a^2 + 2a^2 + 2 = -a^2 + 2 \text{이므로}$$

$$-a^2 + 2 = -\frac{1}{2} \text{에서 } a^2 = \frac{5}{2}$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{10}}{2} (\because a > \sqrt{2})$$

기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 점 A($\frac{\sqrt{10}}{2}, \sqrt{10}$)을 지나는 접선의 방정식은

$$y - \sqrt{10} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{5\sqrt{10}}{4}$$

이 직선의 x절편은 $\frac{5\sqrt{10}}{2}$ 이므로 점 B의 좌표는 ($\frac{5\sqrt{10}}{2}, 0$)이다.

따라서

$$\overline{OA} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + (\sqrt{10})^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + (0 - \sqrt{10})^2} = 5\sqrt{2}$$

이므로

$$\overline{OA} \times \overline{AB} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times 5\sqrt{2} = 25$$

05 함수의 극대, 극소와 그래프

II 미분

개념 완성하기

p.115~116

01 **답** (가) < (나) 증가

02 **답** (가) > (나) 감소

03 **답** 증가

$0 < x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= 2x_1^2 - 2x_2^2 = 2(x_1^2 - x_2^2) \\ &= 2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) < 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x_1) < f(x_2)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(0, \infty)$ 에서 증가한다.

04 **답** 감소

$x_1 < x_2 < 0$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= 2x_1^2 - 2x_2^2 = 2(x_1^2 - x_2^2) \\ &= 2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x_1) > f(x_2)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 0)$ 에서 감소한다.

05 **답** 감소

$x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= -x_1^3 - (-x_2^3) = -(x_1^3 - x_2^3) \\ &= -(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \end{aligned}$$

$$\text{이때 } x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0 \text{이므로}$$

$$f(x_1) - f(x_2) > 0 \quad \therefore f(x_1) > f(x_2)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소한다.

06 **답** 증가

$1 < x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= (x_1^2 + x_1) - (x_2^2 + x_2) = x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2 \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 1) < 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x_1) < f(x_2)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(1, \infty)$ 에서 증가한다.

07 **답** 구간 $(-\infty, 3]$ 에서 감소, 구간 $[3, \infty)$ 에서 증가

$$f(x) = x^2 - 6x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 2x - 6$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로

나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 함수 $f(x)$ 는

구간 $(-\infty, 3]$ 에서 감소하고,

구간 $[3, \infty)$ 에서 증가한다.

참고 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 증가하는 구간과 감소하는 구간에 모두 포함될 수 있다.

08 **답** 구간 $(-\infty, 1]$ 에서 증가, 구간 $[1, \infty)$ 에서 감소

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 4 \text{에서}$$

$$f'(x) = -4x + 4$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로

나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 함수 $f(x)$ 는

구간 $(-\infty, 1]$ 에서 증가하고,

구간 $[1, \infty)$ 에서 감소한다.

x	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	6	↘

09 **답** 구간 $(-\infty, -1], [1, \infty)$ 에서 증가,

닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 감소

$$f(x) = x^3 - 3x + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	7	↘	3	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1], [1, \infty)$ 에서 증가하고, 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 감소한다.

10 **답** 구간 $(-\infty, -\sqrt{2}], [\sqrt{2}, \infty)$ 에서 증가,

닫힌구간 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 에서 감소

$$f(x) = 2x^3 - 12x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 12 = 6(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = \sqrt{2}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\sqrt{2}$	...	$\sqrt{2}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$8\sqrt{2}+1$	↘	$-8\sqrt{2}+1$	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -\sqrt{2}], [\sqrt{2}, \infty)$ 에서 증가하고,

닫힌구간 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 에서 감소한다.

11 **답** 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로

나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 함수 $f(x)$ 는

구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소한다.

x	...	1	...
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	↘	-1	↘

12 **답** 닫힌구간 $[-1, 0]$ 과 구간 $[1, \infty)$ 에서 증가,

구간 $(-\infty, -1]$ 과 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 감소

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 0]$ 과 구간 $[1, \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $(-\infty, -1]$ 과 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 감소한다.

13 ㉠ 구간 $(-\infty, -1], [2, \infty)$ 에서 증가,
닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 감소

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $-1, 2$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1], [2, \infty)$ 에서 증가하고, 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 감소한다.

14 ㉠ 극댓값: 5, 극솟값: -3

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 함수

$f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대이고, 극댓값은

$$f(-1) = -2 + 6 + 1 = 5$$

또 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 함수 $f(x)$

는 $x=1$ 에서 극소이고, 극솟값은

$$f(1) = 2 - 6 + 1 = -3$$

15 ㉠ (1) q, s, u (2) r, t, v

(1) 함수 $f(x)$ 는 $x=q, x=s, x=u$ 의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 함수 $f(x)$ 는 $x=q, x=s, x=u$ 에서 극댓값을 갖는다.

(2) 함수 $f(x)$ 는 $x=r, x=t, x=v$ 의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 함수 $f(x)$ 는 $x=r, x=t, x=v$ 에서 극솟값을 갖는다.

16 ㉠ (1) b, d, f (2) c, e, g

(1) 함수 $f(x)$ 는 $x=b, x=d, x=f$ 의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 함수 $f(x)$ 는 $x=b, x=d, x=f$ 에서 극댓값을 갖는다.

(2) 함수 $f(x)$ 는 $x=c, x=e, x=g$ 의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 함수 $f(x)$ 는 $x=c, x=e, x=g$ 에서 극솟값을 갖는다.

17 ㉠ 4

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하고 $x=2$ 에서 극값 4를 가지므로 $f(2)=4, f'(2)=0$

$$\therefore f(2) + f'(2) = 4 + 0 = 4$$

18 ㉠ 5

함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 미분가능하고 $x=3$ 에서 극값 5를 가지므로 $f(3)=5, f'(3)=0$

$$\therefore f(3) + f'(3) = 5 + 0 = 5$$

19 ㉠ 극댓값: 3, 극솟값: -1

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	3 극대	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=-1$ 일 때 극대이고, 극댓값은 $f(-1)=3$

$x=1$ 일 때 극소이고, 극솟값은 $f(1)=-1$

20 ㉠ 극댓값: 2, 극솟값: -7

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x - \frac{1}{3} \text{에서}$$

$$f'(x) = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2 극대	$\searrow$	-7 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=-1$ 일 때 극대이고, 극댓값은 $f(-1)=2$

$x=2$ 일 때 극소이고, 극솟값은 $f(2)=-7$

21 ㉠ 극댓값: 31, 극솟값: -1

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 12x = -3x(x-4)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=4$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	4	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$	31 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=0$ 일 때 극소이고, 극솟값은 $f(0)=-1$

$x=4$ 일 때 극대이고, 극댓값은 $f(4)=31$

22 ㉠ 극댓값: -5, 극솟값: -6

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 6 \text{에서}$$

$$f'(x) = -6x^2 + 6x = -6x(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-6 극소	$\nearrow$	-5 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=0$ 일 때 극소이고, 극솟값은 $f(0)=-6$

$x=1$ 일 때 극대이고, 극댓값은 $f(1)=-5$

23 ㉠ 극댓값: 5, 극솟값: 4

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	4 극소	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$	4 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x = -1, x = 1 \text{일 때 극소이고, 극솟값은 } f(-1) = f(1) = 4$$

$$x = 0 \text{일 때 극대이고, 극댓값은 } f(0) = 5$$

24 ㉠ 극댓값: 5, 극솟값: 2

$$f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x = 12x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	2 극소	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$	2 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x = -1, x = 1 \text{일 때 극소이고, 극솟값은 } f(-1) = f(1) = 2$$

$$x = 0 \text{일 때 극대이고, 극댓값은 } f(0) = 5$$

25 ㉠ 극댓값: 0, 극솟값: -1

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	0 극대	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$	0 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x = -1, x = 1 \text{일 때 극대이고, 극댓값은 } f(-1) = f(1) = 0$$

$$x = 0 \text{일 때 극소이고, 극솟값은 } f(0) = -1$$

26 ㉠ 극댓값: 27, 0, 극솟값: -5

$$f(x) = -3x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = -12x^3 - 12x^2 + 24x = -12x(x+2)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	27 극대	$\searrow$	-5 극소	$\nearrow$	0 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x = -2 \text{일 때 극대이고, 극댓값은 } f(-2) = 27$$

$$x = 0 \text{일 때 극소이고, 극솟값은 } f(0) = -5$$

$$x = 1 \text{일 때 극대이고, 극댓값은 } f(1) = 0$$

27 ㉠ 풀이 참조

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3 \text{에서}$$

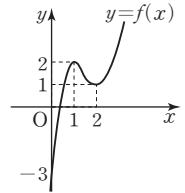
$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2 극대	$\searrow$	1 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



28 ㉠ 풀이 참조

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 1 \text{에서}$$

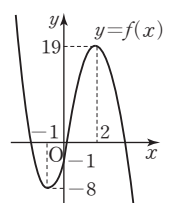
$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = -6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-8 극소	$\nearrow$	19 극대	$\searrow$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



29 ㉠ 풀이 참조

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1 \text{에서}$$

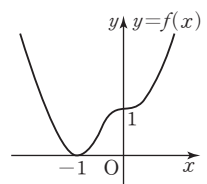
$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$	1	$\nearrow$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



30 ㉠ 풀이 참조

$$f(x) = -4x^2(x-1)^2 = -4x^4 + 8x^3 - 4x^2 \text{에서}$$

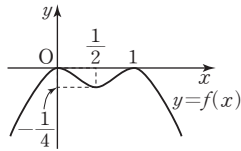
$$f'(x) = -16x^3 + 24x^2 - 8x = -8x(2x-1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	0 극대	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$ 극소	$\nearrow$	0 극대	$\searrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른 쪽 그림과 같다.



유형 완성하기

p.117~130

01 ㉮ ③

$f(x)=x^3-3x^2-9x$ 에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

함수 $f(x)$ 는 $f'(x)\leq 0$ 인 구간에서 감소하므로

$3(x+1)(x-3)\leq 0 \quad \therefore -1\leq x\leq 3$

따라서 함수 $f(x)$ 가 감소하는 구간은 닫힌구간 $[-1, 3]$ 이므로

$\alpha=-1, \beta=3$

$\therefore \alpha+\beta=-1+3=2$

01-1 ㉮ -9

$f(x)=(3x^2-1)(4-3x)$ 에서

$f'(x)=6x(4-3x)-3(3x^2-1)=-27x^2+24x+3$

함수 $f(x)$ 는 $f'(x)\geq 0$ 인 구간에서 증가하므로

$-27x^2+24x+3\geq 0, 9x^2-8x-1\leq 0$

$(9x+1)(x-1)\leq 0 \quad \therefore -\frac{1}{9}\leq x\leq 1$

따라서 $\alpha=-\frac{1}{9}, \beta=1$ 이므로 $\frac{\beta}{\alpha}=-9$

02 ㉮ ③

$f(x)=x^3+3x^2-5$ 에서

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

함수 $f(x)$ 는 $f'(x)\geq 0$ 인 구간에서 증가하므로

$3x(x+2)\geq 0 \quad \therefore x\leq -2$ 또는 $x\geq 0$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -2], [0, \infty)$ 에서 증가하므로 이 구간에 속하는 x 의 값이 아닌 것은 ③이다.

02-1 ㉮ ④

$f(x)=-x^3+3x^2+7$ 에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

함수 $f(x)$ 는 $f'(x)\leq 0$ 인 구간에서 감소하므로

$-3x(x-2)\leq 0, x(x-2)\geq 0$

$\therefore x\leq 0$ 또는 $x\geq 2$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 0], [2, \infty)$ 에서 감소하므로 이 구간에 속하는 x 의 값이 아닌 것은 ④이다.

03 ㉮ 10

$f(x)=-2x^3+3x^2+ax+1$ 에서

$f'(x)=-6x^2+6x+a$

함수 $f(x)$ 가 증가하는 x 의 값의 범위가 $-1\leq x\leq b$ 이므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근은 $-1, b$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+b=1, -1\times b=-\frac{a}{6}$$

$$\therefore a=12, b=2$$

$$\therefore a-b=12-2=10$$

Lecture 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

03-1 ㉮ 5

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+bx$ 에서

$f'(x)=x^2-2ax+b$

(가), (나)에서 함수 $f'(x)$ 의 부호가 $x=1, x=3$ 의 좌우에서 바뀌므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근은 1, 3이다. ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1+3=2a, 1\times 3=b \quad \therefore a=2, b=3 \quad \dots\dots ②$$

$$\therefore a+b=2+3=5 \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근을 구할 수 있다.	40%
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

04 ㉮ ③

$f(x)=x^3+kx^2+kx+16$ 에서

$f'(x)=3x^2+2kx+k$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)\geq 0$ 이어야 한다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-3k\leq 0, k(k-3)\leq 0$$

$$\therefore 0\leq k\leq 3$$

04-1 ㉮ $-1\leq k\leq 2$

$f(x)=-x^3+(k+1)x^2-(k+1)x$ 에서

$f'(x)=-3x^2+2(k+1)x-(k+1)$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)\leq 0$ 이어야 한다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(k+1)^2-3(k+1)\leq 0, (k+1)(k-2)\leq 0$$

$$\therefore -1\leq k\leq 2$$

05 ㉮ 6

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+ax^2-(4a-3)x+1$ 에서

$f'(x)=-x^2+2ax-(4a-3)$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대

하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - (4a-3) \leq 0, (a-1)(a-3) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 3$$

따라서 정수 a 의 값은 1, 2, 3이므로 그 합은

$$1+2+3=6$$

05-1 ㉮ 6

$$f(x) = x^3 - ax^2 + 2ax + 4 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + 2a$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 6a \leq 0, a(a-6) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 6$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 6이다.

06 ㉮ 0

함수 $f(x)$ 가 일대일대응이라면 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 는 증가하거나 감소해야 한다. 이때 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이므로 함수 $f(x)$ 는 감소해야 한다.

$$f(x) = -x^3 - kx^2 - kx + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 - 2kx - k$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 3k \leq 0, k(k-3) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq k \leq 3$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 0이다.

Lecture 일대일함수와 일대일대응

- (1) 함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 일대일함수이다.
 → 정의역 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$
- (2) 함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 일대일대응이다.
 → 정의역 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여
 - ① $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$
 - ② (치역) = (공역)

06-1 ㉮ 1

함수 $f(x)$ 가 일대일대응이라면 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 는 증가하거나 감소해야 한다. 이때 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$ 는 증가해야 한다.

$$f(x) = x^3 + x^2 + kx + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + k$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1^2 - 3k \leq 0 \quad \therefore k \geq \frac{1}{3}$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 1이다.

07 ㉮ 5

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 는 증가하거나 감소해야 한다. 이때 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$ 는 증가해야 한다. ①

$$f(x) = x^3 - kx^2 + 2x + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2kx + 2$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 6 \leq 0, (k+\sqrt{6})(k-\sqrt{6}) \leq 0$$

$$\therefore -\sqrt{6} \leq k \leq \sqrt{6}$$

따라서 정수 k 의 값은 -2, -1, 0, 1, 2이므로 그 개수는 5이다. ②

..... ③

채점 기준	비율
① 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가해야 함을 알 수 있다.	40%
② k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
③ 정수 k 의 개수를 구할 수 있다.	10%

07-1 ㉮ 5

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 는 증가하거나 감소해야 한다. 이때 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이므로 함수 $f(x)$ 는 감소해야 한다.

$$f(x) = -x^3 + ax^2 - (a+6)x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax - (a+6)$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3(a+6) \leq 0, a^2 - 3a - 18 \leq 0$$

$$(a+3)(a-6) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq a \leq 6$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 6이다.

08 ㉮ -3

$x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) < f(x_2)$ 가 성립하려면 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 - (k-6)x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 2kx - (k-6)$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 + k - 6 \leq 0, (k+3)(k-2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq k \leq 2$$

따라서 정수 k 의 값은 -3, -2, -1, 0, 1, 2이므로 그 합은

$$-3 + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 = -3$$

08-1 ㉮ 4

$x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) > f(x_2)$ 가 성립하려면 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

$$f(x) = -x^3 + 2kx^2 + 4kx - 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 4kx + 4k$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

즉 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4k^2 + 12k \leq 0, 4k(k+3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq k \leq 0$$

따라서 정수 k 의 값은 $-3, -2, -1, 0$ 이므로 그 개수는 4이다.

09 ㉠ $k \leq -3$

$x_1 \neq x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 가 성립하려면 함수 $f(x)$ 가 일대일함수이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 는 증가하거나 감소해야 한다.

$$f(x) = kx^3 - 3x^2 - x \text{에서}$$

$$f'(x) = 3kx^2 - 6x - 1$$

(i) 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

즉 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이어야 하므로

$$k > 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 + 3k \leq 0 \quad \therefore k \leq -3 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이때 ㉠, ㉡을 만족시키는 실수 k 는 존재하지 않는다.

(ii) 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

즉 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이어야 하므로

$$k < 0 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 + 3k \leq 0 \quad \therefore k \leq -3 \quad \dots\dots \text{㉣}$$

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면

$$k \leq -3$$

(iii) $k=0$ 이면 $f(x) = -3x^2 - x$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 일대일함수가 아니다.

(i)~(iii)에서 $k \leq -3$

09-1 ㉠ $k \geq \frac{12}{5}$

함수 $f(x)$ 가 일대일함수이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 는 증가하거나 감소해야 한다.

$$f(x) = kx^3 - 6x^2 + 5x \text{에서}$$

$$f'(x) = 3kx^2 - 12x + 5$$

(i) 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

즉 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이어야 하므로

$$k > 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 36 - 15k \leq 0 \quad \therefore k \geq \frac{12}{5} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$k \geq \frac{12}{5}$$

(ii) 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

즉 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이어야 하므로

$$k < 0 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 36 - 15k \leq 0 \quad \therefore k \geq \frac{12}{5} \quad \dots\dots \text{㉣}$$

이때 ㉢, ㉣을 만족시키는 실수 k 는 존재하지 않는다.

(iii) $k=0$ 이면 $f(x) = -6x^2 + 5x$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 일대일함수가 아니다.

(i)~(iii)에서 $k \geq \frac{12}{5}$

10 ㉠ $2 \leq k \leq 6$

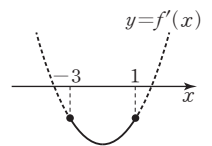
$$f(x) = x^3 + kx^2 - 15x - 4 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx - 15$$

함수 $f(x)$ 가 $-3 \leq x \leq 1$ 에서 감소하려면

$-3 \leq x \leq 1$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로

함수 $y = f'(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f'(-3) \leq 0$ 에서 $27 - 6k - 15 \leq 0$

$$6k \geq 12 \quad \therefore k \geq 2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

(ii) $f'(1) \leq 0$ 에서 $3 + 2k - 15 \leq 0$

$$2k \leq 12 \quad \therefore k \leq 6 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2 \leq k \leq 6$

10-1 ㉠ ④

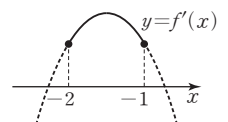
$$f(x) = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + kx - 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 - 3x + k$$

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[-2, -1]$ 에서

증가하려면 이 구간에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야

하므로 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f'(-2) \geq 0$ 에서 $-12 + 6 + k \geq 0$

$$\therefore k \geq 6 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

(ii) $f'(-1) \geq 0$ 에서 $-3 + 3 + k \geq 0$

$$\therefore k \geq 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $k \geq 6 \quad \therefore a = 6$

11 ㉠ ②

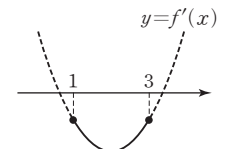
$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 2ax + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 2a$$

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 감소하

려면 이 구간에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로

함수 $y = f'(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f'(1) \leq 0$ 에서 $3 - 6 - 2a \leq 0$

$$\therefore a \geq -\frac{3}{2} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

(ii) $f'(3) \leq 0$ 에서 $27 - 18 - 2a \leq 0$

$$\therefore a \geq \frac{9}{2} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a \geq \frac{9}{2}$

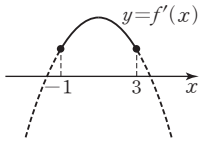
따라서 정수 a 의 최솟값은 5이다.

11-1 ㉟ 7

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 12x + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + 12$$

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 증가하려면 이 구간에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$$(i) f'(-1) \geq 0 \text{에서 } -3 - 2a + 12 \geq 0$$

$$\therefore a \leq \frac{9}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

$$(ii) f'(3) \geq 0 \text{에서 } -27 + 6a + 12 \geq 0$$

$$\therefore a \geq \frac{5}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{의 공통 범위를 구하면 } \frac{5}{2} \leq a \leq \frac{9}{2}$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 $\frac{9}{2}$, 최솟값은 $\frac{5}{2}$ 이므로 그 합은

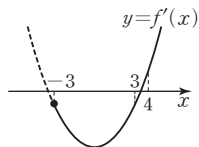
$$\frac{9}{2} + \frac{5}{2} = 7$$

12 ㉟ 5

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx + 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - k$$

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 감소하고, 구간 $[4, \infty)$ 에서 증가하려면 $-3 \leq x \leq 3$ 에서 $f'(x) \leq 0$, $x \geq 4$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$$(i) f'(-3) \leq 0 \text{에서 } 9 - k \leq 0$$

$$\therefore k \geq 9 \quad \dots\dots ㉠$$

$$(ii) f'(3) \leq 0 \text{에서 } 9 - k \leq 0$$

$$\therefore k \geq 9 \quad \dots\dots ㉡$$

$$(iii) f'(4) \geq 0 \text{에서 } 16 - k \geq 0$$

$$\therefore k \leq 16 \quad \dots\dots ㉢$$

$$㉠, ㉡, ㉢ \text{의 공통 범위를 구하면 } 9 \leq k \leq 16$$

따라서 정수 k 의 값은 9, 10, 11, ..., 16이므로 그 개수는 8이다.

12-1 ㉟ 2

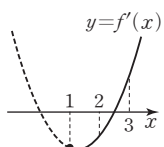
$$f(x) = x^3 + ax^2 + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 감소하고, 구간 $[3, \infty)$ 에서 증가하려면 $1 \leq x \leq 2$ 에서 $f'(x) \leq 0$, $x \geq 3$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

..... ㉠

즉 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$$(i) f'(1) \leq 0 \text{에서 } 3 + 2a \leq 0$$

$$\therefore a \leq -\frac{3}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

$$(ii) f'(2) \leq 0 \text{에서 } 12 + 4a \leq 0$$

$$\therefore a \leq -3 \quad \dots\dots ㉡$$

$$(iii) f'(3) \geq 0 \text{에서 } 27 + 6a \geq 0$$

$$\therefore a \geq -\frac{9}{2} \quad \dots\dots ㉢$$

$$㉠, ㉡, ㉢ \text{의 공통 범위를 구하면}$$

$$-\frac{9}{2} \leq a \leq -3 \quad \dots\dots ㉡$$

따라서 정수 a 의 값은 $-4, -3$ 이므로 그 개수는 2이다. ㉢

채점 기준	비율
① x 의 값의 범위에 따른 $f'(x)$ 의 부호를 알 수 있다.	30%
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
③ 정수 a 의 개수를 구할 수 있다.	20%

13 ㉟ 3

ㄱ. 열린구간 $(-2, -1)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(-2, -1)$ 에서 증가한다.

ㄴ. 열린구간 $(0, 1)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(0, 1)$ 에서 감소한다.

ㄷ. 열린구간 $(1, 2)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(1, 2)$ 에서 감소한다. 또 열린구간 $(2, 3)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(2, 3)$ 에서 증가한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

13-1 ㉟ 3

① 열린구간 $(-2, -1)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(-2, -1)$ 에서 감소한다. 또 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 증가한다.

② 열린구간 $(1, 2)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(1, 2)$ 에서 증가한다. 또 열린구간 $(2, 3)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(2, 3)$ 에서 감소한다.

③ 열린구간 $(4, 5)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(4, 5)$ 에서 증가한다.

④ 열린구간 $(3, 4)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(3, 4)$ 에서 감소한다.

⑤ 열린구간 $(-2, -1)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(-2, -1)$ 에서 감소한다. 또 열린구간 $(-1, 0)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 열린구간 $(-1, 0)$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$ 가 증가하는 구간은 ③이다.

14 ㉟ ㄴ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. 구간 $(-\infty, a)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, a)$ 에서 증가한다.

ㄴ. 열린구간 (a, b) 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 (a, b) 에서 증가한다.

ㄷ. 열린구간 (b, c) 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 (b, c) 에서 증가한다.

ㄹ. 구간 (c, ∞) 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 (c, ∞) 에서 감소한다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

14-1 ㉟ 4

집합 A 는 함수 $f(x)$ 가 감소하는 구간을 의미하고 주어진 그래프에서 $x < b$ 또는 $d < x < f$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 감소한다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

15 ㉟ 1

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	7 극대	↘	-25 극소	↗

즉 함수 $f(x)$ 는

$x=-1$ 일 때 극대이고, 극댓값은 $f(-1)=7$

$x=3$ 일 때 극소이고, 극솟값은 $f(3)=-25$

따라서 극댓값과 극솟값의 합은

$$7+(-25)=-18$$

15-1 ㉮ 1

$f(x)=-2x^3+9x^2-12x+5$ 에서

$f'(x)=-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	0 극소	↗	1 극대	↘

즉 함수 $f(x)$ 는

$x=1$ 일 때 극소이고, 극솟값은 $f(1)=0$

$x=2$ 일 때 극대이고, 극댓값은 $f(2)=1$

따라서 $M=1, m=0$ 이므로

$$M+m=1+0=1$$

16 ㉮ 37

$f(x)=x^4-4x^3-7$ 에서

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	3	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-7	↘	-34 극소	↗

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 극소이고, 극솟값은 $f(3)=-34$

따라서 $a=3, b=-34$ 이므로

$$a-b=3-(-34)=37$$

(주의) $x=0$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=0$ 에서는 극값을 갖지 않는다.

16-1 ㉮ ㄱ, ㄷ

$f(x)=3x^4+4x^3+1$ 에서

$f'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	↘	0 극소	↗	1	↗

ㄱ. 열린구간 $(-1, 0)$ 에서 $f'(x)>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(-1, 0)$ 에서 증가한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 극값을 가지므로 함수 $f(x)$ 는 1개의 극값을 갖는다.

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 극소이고, 극솟값은 $f(-1)=0$ 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17 ㉮ 3

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+3$ 에서

$f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	3 극대	↘	$\frac{5}{3}$ 극소	↗

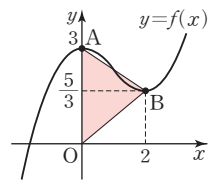
즉 함수 $f(x)$ 는

$x=0$ 일 때 극대이고, 극댓값은 $f(0)=3$

$x=2$ 일 때 극소이고, 극솟값은 $f(2)=\frac{5}{3}$

따라서 $A(0, 3), B(2, \frac{5}{3})$ 이므로

$$\triangle OAB=\frac{1}{2} \times 3 \times 2=3$$



17-1 ㉮ 6

$f(x)=\frac{8}{27}x^3-\frac{4}{3}x^2+4$ 에서

$f'(x)=\frac{8}{9}x^2-\frac{8}{3}x=\frac{8}{9}x(x-3)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	4 극대	↘	0 극소	↗

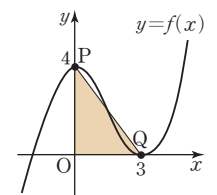
즉 함수 $f(x)$ 는

$x=0$ 일 때 극대이고, 극댓값은 $f(0)=4$

$x=3$ 일 때 극소이고, 극솟값은 $f(3)=0$

따라서 $P(0, 4), Q(3, 0)$ 이므로

$$\triangle OPQ=\frac{1}{2} \times 3 \times 4=6$$



18 ㉮ ④

$f(x)=-2x^3+ax^2+bx+c$ 에서

$f'(x)=-6x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$ 가 $x=1, x=2$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(1)=0, f'(2)=0$$

즉 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근이 1, 2이므로

$$f'(x)=-6(x-1)(x-2)=-6x^2+18x-12$$

즉 $2a=18, b=-12$ 이므로 $a=9, b=-12$

$$\therefore f(x)=-2x^3+9x^2-12x+c$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값 -2 를 가지므로 $f(1)=-2$

$$-2+9-12+c=-2 \quad \therefore c=3$$

$$\therefore a+b-c=9+(-12)-3=-6$$

18-1 ㉮ 6

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1, x=3$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(1)=0, f'(3)=0$$

즉 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근이 1, 3이므로

$$f'(x)=3(x-1)(x-3)=3x^2-12x+9$$

$$\therefore 2a=-12, b=9 \text{이므로 } a=-6, b=9$$

$$\therefore f(x)=x^3-6x^2+9x+c$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$c+4$ 극대	$\searrow$	c 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 극소이고, 극솟값은

$$f(3)=c \quad \therefore c=2$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은

$$2+4=6$$

19 ㉮ -2

$$f(x)=x^3+ax^2+bx \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2+2ax$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 극댓값 2를 가지므로

$$f'(-2)=0, f(-2)=2$$

$$f'(-2)=0 \text{에서 } 12-4a=0 \quad \therefore a=3$$

$$f(-2)=2 \text{에서 } -8+4a+b=2$$

$a=3$ 을 ㉮에 대입하면

$$-8+12+b=2 \quad \therefore b=-2$$

$$\therefore f(x)=x^3+3x^2-2 \text{이므로}$$

$$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2 극대	$\searrow$	-2 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 극소이고, 극솟값은

$$f(0)=-2$$

19-1 ㉮ $a=4, b=-4$

$$f(x)=-x^3+ax^2+bx+5 \text{에서}$$

$$f'(x)=-3x^2+2ax+b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극댓값 5를 가지므로

$$f'(2)=0, f(2)=5$$

$$f'(2)=0 \text{에서 } -12+4a+b=0$$

$$\therefore 4a+b=12$$

$$f(2)=5 \text{에서 } -8+4a+2b+5=5$$

$$\therefore 4a+2b=8$$

㉮, ㉬을 연립하여 풀면 $a=4, b=-4$

20 ㉮ -2

$$f(x)=-x^3+ax^2+bx+1 \text{에서}$$

$$f'(x)=-3x^2+2ax+b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1, x=3$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(1)=0, f'(3)=0$$

즉 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근이 1, 3이므로

$$f'(x)=-3(x-1)(x-3)=-3x^2+12x-9$$

$$\therefore 2a=12, b=-9 \text{이므로 } a=6, b=-9$$

$$\therefore f(x)=-x^3+6x^2-9x+1$$

따라서 함수 $f(x)$ 의

$$\text{극솟값은 } f(1)=-1+6-9+1=-3$$

$$\text{극댓값은 } f(3)=-27+54-27+1=1$$

$$\text{이므로 그 합은 } -3+1=-2$$

20-1 ㉮ 19

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x)=6x^2+2ax+b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-1, x=2$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(-1)=0, f'(2)=0$$

즉 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근이 -1, 2이므로

$$f'(x)=6(x+1)(x-2)=6x^2-6x-12$$

$$\therefore 2a=-6, b=-12 \text{이므로 } a=-3, b=-12$$

$$\therefore f(x)=2x^3-3x^2-12x+c$$

$$\text{이때 } f(1)=3 \text{이므로 } 2-3-12+c=3$$

$$c-13=3 \quad \therefore c=16$$

$$\therefore f(x)=2x^3-3x^2-12x+16$$

..... ①

따라서 함수 $f(x)$ 의

$$\text{극댓값은 } f(-1)=-2-3+12+16=23$$

$$\text{극솟값은 } f(2)=16-12-24+16=-4$$

..... ②

$$\text{이므로 그 합은 } 23+(-4)=19$$

..... ③

채점 기준	비율
① $f(x)$ 를 구할 수 있다.	60%
② 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있다.	30%
③ 극댓값과 극솟값의 합을 구할 수 있다.	10%

21 ㉮ -1

$$g(x)=(x^2-2x)f(x) \text{에서}$$

$$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x)f'(x)$$

함수 $g(x)$ 가 $x=3$ 에서 극댓값 9를 가지므로

$$g'(3)=0, g(3)=9$$

$$g(3)=9 \text{에서 } 3f(3)=9 \quad \therefore f(3)=3$$

$$g'(3)=0 \text{에서 } 4f(3)+3f'(3)=0$$

$$12+3f'(3)=0 \quad \therefore f'(3)=-4$$

$$\therefore f(3)+f'(3)=3+(-4)=-1$$

21-1 ㉮ $-\frac{1}{3}$

$$g(x)=(x^2+2)f(x) \text{에서}$$

$$g'(x)=2xf(x)+(x^2+2)f'(x)$$

함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값 3을 가지므로

$$g'(2)=0, g(2)=3$$

$$g(2)=3 \text{에서 } 6f(2)=3 \quad \therefore f(2)=\frac{1}{2}$$

$$g'(2)=0 \text{에서 } 4f(2)+6f'(2)=0$$

$$2+6f'(2)=0 \quad \therefore f'(2)=-\frac{1}{3}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 $x=2$ 인 점에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$ 이다.

22 ㉡ 4

$$f(x)=x^3-3x+a \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$a+2$ 극대	$\searrow$	$a-2$ 극소	$\nearrow$

$$\therefore A(-1, a+2), B(1, a-2)$$

이때 선분 AB의 중점의 좌표가 $(b, 2)$ 이므로

$$\frac{-1+1}{2}=b, \frac{a+2+a-2}{2}=2 \quad \therefore a=2, b=0$$

$$\therefore 2a+b=4+0=4$$

22-1 ㉡ -8

$$f(x)=x^3-12x-1 \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	15 극대	$\searrow$	-17 극소	$\nearrow$

$$\therefore A(-2, 15), B(2, -17)$$

선분 AB를 3:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{6-2}{3+1}, \frac{-51+15}{3+1}\right) \quad \therefore (1, -9)$$

따라서 $p=1, q=-9$ 이므로

$$p+q=1+(-9)=-8$$

23 ㉡ -25

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \text{ (} a, b, c \text{는 상수)라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 극댓값 7을 가지므로

$$f'(-1)=0, f(-1)=7$$

$$f'(-1)=0 \text{에서 } 3-2a+b=0$$

$$\therefore 2a-b=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(-1)=7 \text{에서 } -1+a-b+c=7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

또 $x=0$ 인 점과 $x=2$ 인 점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(0)=f'(2)$$

$$b=12+4a+b \quad \therefore a=-3$$

$a=-3$ 을 ①에 대입하면

$$-6-b=3 \quad \therefore b=-9$$

$a=-3, b=-9$ 를 ②에 대입하면

$$-1-3+9+c=7 \quad \therefore c=2$$

$$\text{따라서 } f(x)=x^3-3x^2-9x+2 \text{이므로}$$

$$f(3)=27-27-27+2=-25$$

23-1 ㉡ 7

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \text{ (} a, b, c \text{는 상수)라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

(가)에서 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값 5를 가지므로

$$f'(2)=0, f(2)=5$$

$$f'(2)=0 \text{에서 } 12+4a+b=0$$

$$\therefore 4a+b=-12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(2)=5 \text{에서 } 8+4a+2b+c=5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(나)에서 점 $(3, f(3))$ 에서의 접선의 기울기가 9이므로 $f'(3)=9$

$$27+6a+b=9 \quad \therefore 6a+b=-18 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

①, ③을 연립하여 풀면 $a=-3, b=0$

$a=-3, b=0$ 을 ②에 대입하면

$$8-12+c=5 \quad \therefore c=9$$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+9$ 이므로

$$f(1)=1-3+9=7$$

24 ㉡ 3

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌는 점의 x 좌표는 0이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이다.

또 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌는 점의 x 좌표는 -2, 3이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-2, x=3$ 에서 극소이다.

따라서 실수 a 의 값은 -2, 0, 3이므로 그 개수는 3이다.

24-1 ㉡ 3

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌는 점의 x 좌표는 5이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=5$ 에서 극대이다.

$$\therefore m=1$$

또 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌는 점의 x 좌표는 1, 6이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1, x=6$ 에서 극소이다.

$$\therefore n=2$$

$$\therefore m+n=1+2=3$$

참고 함수 $f(x)$ 는 $f'(6)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $x=6$ 에서 미분가능하지 않지만 $0 < x < 7$ 에서 연속이므로 $x=6$ 에서도 연속이다. 따라서 $x=6$ 에서의 극대, 극소를 판단할 수 있다.

25 ㉡ 68

$$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c \text{에서}$$

$$f'(x)=6x^2+2ax+b$$

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 -3, 1이므로

$$f'(x)=6(x+3)(x-1)=6x^2+12x-18$$

$$\text{즉 } 2a=12, b=-18 \text{이므로 } a=6, b=-18 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore f(x)=2x^3+6x^2-18x+c$$

주어진 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$c+54$ 극대	$\searrow$	$c-10$ 극소	$\nearrow$

이때 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 4이므로

$$c - 10 = 4 \quad \therefore c = 14 \quad \dots\dots ②$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은

$$c + 54 = 14 + 54 = 68 \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① a, b 의 값을 구할 수 있다.	50%
② c 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ 함수 $f(x)$ 의 극댓값을 구할 수 있다.	20%

25-1 ㉮ ③

$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$$

함수 $y = f'(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 0, 2이므로

$$f'(x) = -3x(x-2) = -3x^2 + 6x$$

$$\text{즉 } 2a = 6, b = 0 \text{이므로 } a = 3, b = 0$$

$$\therefore f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$$

주어진 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	0	$\dots$	2	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	c 극소	$\nearrow$	$c+4$ 극대	$\searrow$

이때 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 -6 이므로

$$c + 4 = -6 \quad \therefore c = -10$$

따라서 $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 10$ 이므로

$$f(1) = -1 + 3 - 10 = -8$$

26 ㉮ ⑤

함수 $y = f'(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 a, c 이므로

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = a \text{ 또는 } x = c$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	a	$\dots$	c	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

① $x = a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극값을 갖지 않는다.

② $f'(b) \neq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = b$ 에서 극값을 갖지 않는다.

③ 함수 $f(x)$ 는 $x = c$ 에서 극대이다.

④ 구간 $(-\infty, a)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, a)$ 에서 증가한다.

⑤ 열린구간 (b, c) 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 (b, c) 에서 증가한다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

26-1 ㉮ ⑤

함수 $y = f'(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-3, 1, 3$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -3$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-3	$\dots$	1	$\dots$	3	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

① $-1 < x < 1$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 감소한다.

② 함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극대이다.

③ 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극소이다.

④ $2 < x < 3$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

$x > 3$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 감소한다.

⑤ 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖는 점은 $x = -3, x = 1, x = 3$ 일 때이므로 극값을 갖는 점은 3개이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

27 ㉮ ㄱ, ㄷ

함수 $y = f'(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $a, 0, d$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $x = a$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = d$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	a	$\dots$	0	$\dots$	d	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

ㄱ. 열린구간 $(a, 0)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(a, 0)$ 에서 증가한다.

ㄴ. 열린구간 (c, d) 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 (c, d) 에서 증가한다.

구간 (d, ∞) 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 (d, ∞) 에서 감소한다.

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소이다.

ㄹ. 함수 $f(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 점은 $x = a, x = d$ 일 때이므로 극대 또는 극소가 되는 점은 2개이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

27-1 ㉮ ㄴ, ㄷ

함수 $y = f'(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 a, c, e, g 이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $x = a$ 또는 $x = c$ 또는 $x = e$ 또는 $x = g$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	a	$\dots$	c	$\dots$	e	$\dots$	g	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$

ㄱ. 열린구간 (b, c) 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 (b, c) 에서 증가한다.

ㄴ. 열린구간 (e, f) 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 (e, f) 에서 증가한다.

ㄷ. 함수 $f(x)$ 가 극소가 되는 점은 $x = a, x = e$ 일 때이므로 극소가 되는 점은 2개이다.

ㄹ. $x = g$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x = g$ 에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

28 ㉮ 13

$$f(x) = x^3 + kx^2 + 4kx + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx + 4k$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 12k > 0, k(k-12) > 0$$

$$\therefore k < 0 \text{ 또는 } k > 12$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 13이다.

참고 삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖는다.
 $\Leftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

28-1 ㉡ 3

$$f(x) = x^3 - ax^2 + (a^2 - 2a)x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + a^2 - 2a$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3(a^2 - 2a) > 0, -2a^2 + 6a > 0$$

$$a^2 - 3a < 0, a(a-3) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 3$$

따라서 정수 a 의 값은 1, 2이므로 그 합은

$$1 + 2 = 3$$

29 ㉡ 3

$$f(x) = x^3 + kx^2 + kx + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx + k$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식

$$f'(x) = 0 \text{이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식}$$

$$f'(x) = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$\frac{D}{4} = k^2 - 3k > 0, k(k-3) > 0$$

$$\therefore k < 0 \text{ 또는 } k > 3$$

따라서 $\alpha = 0, \beta = 3$ 이므로

$$\beta - \alpha = 3 - 0 = 3$$

29-1 ㉡ 5

$$f(x) = x^3 + kx^2 - (4 - k^2)x + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx - (4 - k^2)$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식

$$f'(x) = 0 \text{이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식}$$

$$f'(x) = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$\frac{D}{4} = k^2 + 3(4 - k^2) > 0, -2k^2 + 12 > 0$$

$$k^2 - 6 < 0, (k + \sqrt{6})(k - \sqrt{6}) < 0$$

$$\therefore -\sqrt{6} < k < \sqrt{6}$$

따라서 정수 k 의 값은 $-2, -1, 0, 1, 2$ 이므로 그 개수는 5이다.

30 ㉡ ①

$$f(x) = (a-2)x^3 + ax^2 + ax + 1 \text{이 삼차함수이므로}$$

$$a-2 \neq 0 \quad \therefore a \neq 2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f'(x) = 3(a-2)x^2 + 2ax + a$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3a(a-2) > 0, -2a^2 + 6a > 0$$

$$a^2 - 3a < 0, a(a-3) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 3 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$0 < a < 2 \text{ 또는 } 2 < a < 3$$

따라서 정수 a 의 값은 1이다.

30-1 ㉡ 2

$$f(x) = kx^3 + 3x^2 + kx + 1 \text{이 삼차함수이므로}$$

$$k \neq 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f'(x) = 3kx^2 + 6x + k \quad \dots\dots ㉡$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - 3k^2 > 0, k^2 - 3 < 0$$

$$(k + \sqrt{3})(k - \sqrt{3}) < 0$$

$$\therefore -\sqrt{3} < k < \sqrt{3} \quad \dots\dots ㉢$$

㉠, ㉢의 공통 범위를 구하면

$$-\sqrt{3} < k < 0 \text{ 또는 } 0 < k < \sqrt{3}$$

따라서 정수 k 의 값은 $-1, 1$ 이므로 그 개수는 2이다. $\dots\dots ㉣$

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	20%
② 삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가질 조건을 알 수 있다.	30%
③ 정수 k 의 개수를 구할 수 있다.	50%

31 ㉡ 7

$$f(x) = x^3 + kx^2 + 3x - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx + 3$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 9 \leq 0, (k+3)(k-3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq k \leq 3$$

따라서 정수 k 의 값은 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 이므로 그 개수는 7이다.

31-1 ㉡ 0

$$f(x) = -x^3 + 3kx^2 - 6x - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6kx - 6$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9k^2 - 18 \leq 0, k^2 - 2 \leq 0$$

$$(k + \sqrt{2})(k - \sqrt{2}) \leq 0 \quad \therefore -\sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2}$$

따라서 정수 k 의 값은 $-1, 0, 1$ 이므로 그 합은

$$-1 + 0 + 1 = 0$$

32 ㉡ 9

$$f(x) = -x^3 + kx^2 - 3kx + 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2kx - 3k$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을

을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 9k \leq 0, k(k-9) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq k \leq 9$$

따라서 $\alpha=0, \beta=9$ 이므로

$$\alpha + \beta = 0 + 9 = 9$$

32-1 ㉠ 9

$$f(x) = x^3 - kx^2 + (k+6)x + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2kx + (k+6)$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 ①

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 3(k+6) \leq 0, k^2 - 3k - 18 \leq 0$$

$$(k+3)(k-6) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq k \leq 6 \quad \text{..... ②}$$

따라서 $\alpha = -3, \beta = 6$ 이므로

$$\beta - \alpha = 6 - (-3) = 9 \quad \text{..... ③}$$

채점 기준	비율
① 삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않을 조건을 알 수 있다.	40%
② k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
③ $\beta - \alpha$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

33 ㉠ 5

$$f(x) = \frac{1}{3}kx^3 + 2kx^2 + (k+12)x + 3 \text{이 삼차함수이므로}$$

$$k \neq 0 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f'(x) = kx^2 + 4kx + (k+12)$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4k^2 - k(k+12) \leq 0, 3k^2 - 12k \leq 0$$

$$k^2 - 4k \leq 0, k(k-4) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq k \leq 4 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$\therefore 0 < k \leq 4$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 4, 최솟값은 1이므로 그 합은

$$4 + 1 = 5$$

33-1 ㉠ $a \leq -1$ 또는 $a > 2$

$$f(x) = (a-2)x^3 + (a-2)x^2 + ax + 1 \text{이 삼차함수이므로}$$

$$a-2 \neq 0 \quad \therefore a \neq 2 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f'(x) = 3(a-2)x^2 + 2(a-2)x + a$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-2)^2 - 3a(a-2) \leq 0, -2a^2 + 2a + 4 \leq 0$$

$$a^2 - a - 2 \geq 0, (a+1)(a-2) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -1 \text{ 또는 } a \geq 2 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

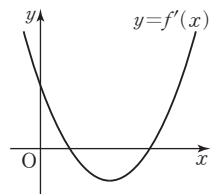
$$a \leq -1 \text{ 또는 } a > 2$$

34 ㉠ $k > 2$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + (k+2)x \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 2kx + k + 2$$

삼차함수 $f(x)$ 가 $x > 0$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 $x > 0$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k+2) > 0, (k+1)(k-2) > 0$$

$$\therefore k < -1 \text{ 또는 } k > 2$$

(ii) $f'(0) > 0$ 에서 $k+2 > 0 \quad \therefore k > -2$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x=k$ 이므로 $k > 0$

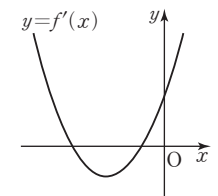
(i)~(iii)의 공통 범위를 구하면 $k > 2$

34-1 ㉠ $-4 < k < -1$

$$f(x) = x^3 - 3kx^2 + (k+4)x - 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6kx + k + 4$$

삼차함수 $f(x)$ 가 $x < 0$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 $x < 0$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9k^2 - 3(k+4) > 0, 3k^2 - k - 4 > 0$$

$$(k+1)(3k-4) > 0 \quad \therefore k < -1 \text{ 또는 } k > \frac{4}{3}$$

(ii) $f'(0) > 0$ 에서 $k+4 > 0 \quad \therefore k > -4$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x=k$ 이므로 $k < 0$

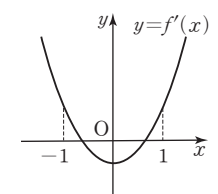
(i)~(iii)의 공통 범위를 구하면 $-4 < k < -1$

35 ㉠ $-\frac{1}{7} < k < 0$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2kx^2 + 3kx - 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 4kx + 3k$$

삼차함수 $f(x)$ 가 $-1 < x < 1$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 $-1 < x < 1$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4k^2 - 3k > 0, k(4k-3) > 0$$

$$\therefore k < 0 \text{ 또는 } k > \frac{3}{4}$$

(ii) $f'(-1) > 0$ 에서 $1 + 7k > 0 \quad \therefore k > -\frac{1}{7}$

$$f'(1) > 0 \text{에서 } 1 - k > 0 \quad \therefore k < 1$$

(iii) 이차함수 $y = f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x = 2k$ 이므로

$$-1 < 2k < 1 \quad \therefore -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$$

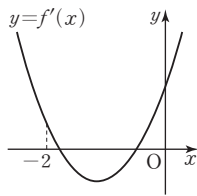
(i)~(iii)의 공통 범위를 구하면 $-\frac{1}{7} < k < 0$

35-1 ㉓ 3

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + ax \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + a$$

삼차함수 $f(x)$ 가 열린구간 $(-2, 0)$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 열린구간 $(-2, 0)$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - 3a > 0 \quad \therefore a < 3$$

(ii) $f'(-2) > 0$ 에서 $a > 0$

$$f'(0) > 0 \text{에서 } a > 0$$

(iii) 이차함수 $y = f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x = -1$

이때 $-2 < -1 < 0$ 이므로 성립한다.

(i)~(iii)의 공통 범위를 구하면 $0 < a < 3$

따라서 정수 a 의 값은 1, 2이므로 그 합은

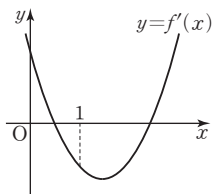
$$1 + 2 = 3$$

36 ㉓ 6

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}kx^2 + (k+3)x - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 + kx + k + 3$$

삼차함수 $f(x)$ 가 $0 < x < 1$ 에서 극댓값, $x > 1$ 에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 $0 < x < 1$ 에서 한 개의 실근, $x > 1$ 에서 한 개의 실근을 가져야 하므로 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f'(0) > 0$ 에서 $k + 3 > 0$

$$\therefore k > -3$$

(ii) $f'(1) < 0$ 에서 $2k + 4 < 0$

$$\therefore k < -2$$

(i), (ii)의 공통 범위를 구하면 $-3 < k < -2$

따라서 $a = -3$, $b = -2$ 이므로

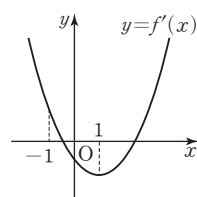
$$ab = -3 \times (-2) = 6$$

36-1 ㉓ 1

$$f(x) = x^3 + 2kx^2 - 4k^2x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4kx - 4k^2$$

삼차함수 $f(x)$ 가 $-1 < x < 1$ 에서 극댓값, $x > 1$ 에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 $-1 < x < 1$ 에서 한 개의 실근, $x > 1$ 에서 한 개의 실근을 가져야 하므로 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f'(-1) > 0$ 에서 $3 - 4k - 4k^2 > 0$

$$4k^2 + 4k - 3 < 0, (2k+3)(2k-1) < 0$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < k < \frac{1}{2}$$

(ii) $f'(1) < 0$ 에서 $3 + 4k - 4k^2 < 0$

$$4k^2 - 4k - 3 > 0, (2k+1)(2k-3) > 0$$

$$\therefore k < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } k > \frac{3}{2}$$

(i), (ii)의 공통 범위를 구하면 $-\frac{3}{2} < k < -\frac{1}{2}$

따라서 $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$b - a = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 1$$

37 ㉓ 3

$$f(x) = 2x^4 - kx^3 + x^2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 8x^3 - 3kx^2 + 2x = x(8x^2 - 3kx + 2)$$

사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $8x^2 - 3kx + 2 = 0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x = 0$ 은 이차방정식 $8x^2 - 3kx + 2 = 0$ 의 근이 아니므로 이차방정식 $8x^2 - 3kx + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 9k^2 - 64 > 0, (3k+8)(3k-8) > 0$$

$$\therefore k < -\frac{8}{3} \text{ 또는 } k > \frac{8}{3}$$

따라서 정수 k 의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

참고 사차함수 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a \neq 0$)에 대하여

(1) $a > 0$ 이면 함수 $f(x)$ 는 항상 극솟값을 갖는다.

(2) $a < 0$ 이면 함수 $f(x)$ 는 항상 극댓값을 갖는다.

37-1 ㉓ $k < 0$ 또는 $0 < k < \frac{3}{2}$

$$f(x) = -3x^4 + 4x^3 - kx^2 \text{에서}$$

$$f'(x) = -12x^3 + 12x^2 - 2kx = -2x(6x^2 - 6x + k)$$

사차함수 $f(x)$ 가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $6x^2 - 6x + k = 0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $x = 0$ 이 이차방정식 $6x^2 - 6x + k = 0$ 의 근이 될 수 없으므로

$$k \neq 0$$

(ii) 이차방정식 $6x^2 - 6x + k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - 6k > 0 \quad \therefore k < \frac{3}{2}$$

(i), (ii)의 공통 범위를 구하면

$$k < 0 \text{ 또는 } 0 < k < \frac{3}{2}$$

38 ㉓ $-\frac{9}{4} < a < 0$ 또는 $a > 0$

$$f(x) = -x^4 + 4x^3 + 2ax^2 \text{에서}$$

$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 + 4ax = -4x(x^2 - 3x - a) \quad \dots\dots ①$$

사차함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2 - 3x - a = 0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$\dots\dots ②$

(i) $x=0$ 이 이차방정식 $x^2-3x-a=0$ 의 근이 될 수 없으므로

$$a \neq 0$$

(ii) 이차방정식 $x^2-3x-a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=9+4a>0 \quad \therefore a>-\frac{9}{4}$$

(i), (ii)의 공통 범위를 구하면

$$-\frac{9}{4}<a<0 \text{ 또는 } a>0 \quad \dots\dots ㉓$$

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	20%
② 사차함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 조건을 알 수 있다.	30%
③ a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%

38-1 ㉑ $k<0$ 또는 $0<k<\frac{9}{4}$

$$f(x)=2x^4-4x^3+kx^2 \text{에서}$$

$$f'(x)=8x^3-12x^2+2kx=2x(4x^2-6x+k)$$

사차함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식

$$f'(x)=0 \text{이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식}$$

$$4x^2-6x+k=0 \text{이 } 0 \text{이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.}$$

(i) $x=0$ 이 이차방정식 $4x^2-6x+k=0$ 의 근이 될 수 없으므로

$$k \neq 0$$

(ii) 이차방정식 $4x^2-6x+k=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=9-4k>0 \quad \therefore k<\frac{9}{4}$$

(i), (ii)의 공통 범위를 구하면

$$k<0 \text{ 또는 } 0<k<\frac{9}{4}$$

39 ㉑ 2

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}(k+1)x^2-kx \text{에서}$$

$$f'(x)=x^3-(k+1)x-k=(x+1)(x^2-x-k)$$

사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$

이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-x-k=0$ 이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D=1+4k<0 \quad \therefore k<-\frac{1}{4}$$

(ii) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 중근을 갖는 경우

① 이차방정식 $x^2-x-k=0$ 이 $x=-1$ 을 근으로 가질 때,

$$1+1-k=0 \quad \therefore k=2$$

② 이차방정식 $x^2-x-k=0$ 이 -1 이 아닌 실수를 중근으로 가질 때, 판별식을 D 라 하면

$$D=1+4k=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{4}$$

(iii) $f'(x)=0$ 이 삼중근을 갖는 경우는 없다.

(i)~(iii)에서 $k \leq -\frac{1}{4}$ 또는 $k=2$

따라서 실수 k 의 최댓값은 2이다.

39-1 ㉑ -6

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3+(a-2)x^2-4ax \text{에서}$$

$$f'(x)=2x^3-2x^2+2(a-2)x-4a$$

$$=2(x-2)(x^2+x+a)$$

사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$

이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+x+a=0$ 이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D=1-4a<0 \quad \therefore a>\frac{1}{4}$$

(ii) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 중근을 갖는 경우

① 이차방정식 $x^2+x+a=0$ 이 $x=2$ 를 근으로 가질 때,

$$4+2+a=0 \quad \therefore a=-6$$

② 이차방정식 $x^2+x+a=0$ 이 2가 아닌 실수를 중근으로 가질 때, 판별식을 D 라 하면

$$D=1-4a=0 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$$

(iii) $f'(x)=0$ 이 삼중근을 갖는 경우는 없다.

(i)~(iii)에서 $a=-6$ 또는 $a \geq \frac{1}{4}$

따라서 실수 a 의 최솟값은 -6 이다.

유형+ 완성하기

p. 131

40 ㉑ ②

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \text{에서}$$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $f(x) \rightarrow \infty$ 이므로 $a>0$

$$f(0)>0 \text{이므로 } d>0$$

또 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근은 α, β 이고 $\alpha>0, \beta>0$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}>0, \alpha\beta=\frac{c}{3a}>0$$

$$\text{이때 } a>0 \text{이므로 } b<0, c>0$$

$$\therefore a>0, b<0, c>0, d>0$$

따라서 옳은 것은 ②이다.

41 ㉑ ⑤

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \text{에서}$$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $f(x) \rightarrow \infty$ 이므로 $a>0$

$$f(0)<0 \text{이므로 } d<0$$

또 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근은 α, β 이고 $\alpha>0, \beta>0$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}>0, \alpha\beta=\frac{c}{3a}>0$$

$$\text{이때 } a>0 \text{이므로 } b<0, c>0$$

$$\therefore a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

42 ㉡ ③

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{에서}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $f(x) \rightarrow -\infty$ 이므로 $a < 0$

$$f(0) < 0 \text{이므로 } d < 0$$

또 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근은 α, β 이고 $\alpha < 0, \beta > 0, |\beta| > |\alpha|$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{2b}{3a} > 0, \alpha\beta = \frac{c}{3a} < 0$$

이때 $a < 0$ 이므로 $b > 0, c > 0$

$$\therefore a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$$

따라서 그 값이 양수인 것은 ③이다.

43 ㉡ ①

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-2, 1$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극소이고, $x=1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ①이다.

44 ㉡ ㄱ, ㄴ

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-2, 0, 2$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

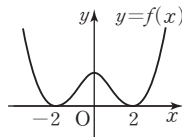
이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(2, 0), (-2, 0)$ 을 지나므로 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

$$\text{ㄱ. } f(0) > 0, f(2) = 0 \text{이므로 } f(0) > f(2)$$

$$\text{ㄴ. } f(-1) > 0, f(1) > 0 \text{이므로 } f(-1)f(1) > 0$$

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.



학교 시험 대비 문제

p. 132~135

01 ㉡ ①

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x+4)(x-2)$$

함수 $f(x)$ 는 $f'(x) \leq 0$ 인 구간에서 감소하므로

$$3(x+4)(x-2) \leq 0 \quad \therefore -4 \leq x \leq 2$$

따라서 $a = -4, \beta = 2$ 이므로

$$a\beta = -4 \times 2 = -8$$

02 ㉡ -12

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + ax^2 + bx + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = -2x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 증가하는 x 의 값의 범위가 $-3 \leq x \leq 2$ 이므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근은 $-3, 2$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-3+2=a, -3 \times 2 = -\frac{b}{2} \quad \therefore a = -1, b = 12$$

$$\therefore ab = -1 \times 12 = -12$$

03 ㉡ $-3 \leq k \leq 3$

$$f(x) = -x^3 + kx^2 - 3x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2kx - 3$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 9 \leq 0, (k+3)(k-3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq k \leq 3$$

04 ㉡ 3

$x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) > f(x_2)$ 가 성립하려면 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

$$f(x) = -x^3 + 2ax^2 - 3ax + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 4ax - 3a$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4a^2 - 9a \leq 0, a(4a-9) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq \frac{9}{4}$$

따라서 정수 a 의 값은 $0, 1, 2$ 이므로 그 개수는 3이다.

05 ㉡ 2

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

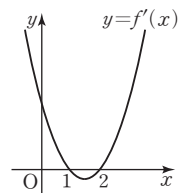
$x \geq a$ 에서 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면

$f(x_1) \neq f(x_2)$ 를 만족시키는 함수 $f(x)$ 는 일대일함수이고, 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$ 는 $x \geq a$ 에서 증가해야 한다.

즉 $x \geq a$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

오른쪽 그림에서 $a \geq 2$ 일 때, $f'(x) \geq 0$ 이므로

실수 a 의 최솟값은 2이다.



06 ㉓③

$h(x)=f(x)-g(x)$ 에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$
 함수 $h(x)$ 가 증가하는 구간은 $h'(x)>0$, 즉 $f'(x)>g'(x)$ 인 구간이므로 열린구간 (b, d) 이다.

07 ㉓⑤

$f(x)=x^3-12x+11$ 에서
 $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	27 극대	↘	-5 극소	↗

즉 함수 $f(x)$ 는
 $x=-2$ 일 때 극대이고, 극댓값은 $f(-2)=27$
 따라서 $a=-2, b=27$ 이므로
 $a+b=-2+27=25$

08 ㉓2

$f(x)=-x^3+3x+k$ 에서
 $f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	$k-2$ 극소	↗	$k+2$ 극대	↘

즉 함수 $f(x)$ 는
 $x=1$ 일 때 극대이고, 극댓값은 $f(1)=k+2$
 $x=-1$ 일 때 극소이고, 극솟값은 $f(-1)=k-2$
 이때 극댓값과 극솟값의 합이 4이므로
 $(k+2)+(k-2)=4$
 $2k=4 \quad \therefore k=2$

09 ㉓-4

$f(x)=(x+3k)(x+2k)(x+k)$ 에서
 $f'(x)=(x+2k)(x+k)+(x+3k)(x+k)+(x+3k)(x+2k)$
 $= (x^2+3kx+2k^2)+(x^2+4kx+3k^2)+(x^2+5kx+6k^2)$
 $= 3x^2+12kx+11k^2$
 함수 $f(x)$ 가 $x=a, x=\beta$ 에서 극값을 가지므로
 $f'(a)=0, f'(\beta)=0$
 즉 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근이 a, β 이므로
 $f'(x)=3(x-a)(x-\beta)=3x^2-3(a+\beta)x+3a\beta$
 $-3(a+\beta)=12k$ 이므로 $a+\beta=-4k$
 $\therefore \frac{a+\beta}{k}=\frac{-4k}{k}=-4$

10 ㉓①

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2ax^2-4x+1$ 에서
 $f'(x)=x^2+4ax-4$

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극대이고 $x=\beta$ 에서 극소라 하면

$$A(a, f(a)), B(\beta, f(\beta))$$

이때 선분 AB의 중점의 x 좌표가 2이므로

$$\frac{a+\beta}{2}=2 \quad \therefore a+\beta=4 \quad \dots\dots ㉑$$

또 a, β 는 이차방정식 $f'(x)=0$, 즉 $x^2+4ax-4=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+\beta=-4a \quad \dots\dots ㉒$$

$$㉑, ㉒ \text{에서 } -4a=4 \quad \therefore a=-1$$

11 ㉓25

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 4를 가지므로
 $f'(1)=0, f(1)=4$
 $\therefore g(1)=7f(1)=7 \times 4=28$
 $g(x)=(2x+5)f(x)$ 에서
 $g'(x)=2f(x)+(2x+5)f'(x)$
 $\therefore g'(1)=2f(1)+7f'(1)=2 \times 4+7 \times 0=8$
 함수 $y=g(x)$ 의 그래프 위의 점 $(1, g(1))$, 즉 점 $(1, 28)$ 에서의 접선의 방정식은
 $y-28=8(x-1) \quad \therefore y=8x+20$

따라서 이 직선의 x 절편이 $-\frac{5}{2}$, y 절편이 20이므로 구하는 도형의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 20=25$

12 ㉓11

$f(x)=-2x^3+ax^2+bx+c$ 에서
 $f'(x)=-6x^2+2ax+b$
 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-1, 2$ 이므로
 $f'(x)=-6(x+1)(x-2)=-6x^2+6x+12$
 즉 $2a=6, b=12$ 이므로 $a=3, b=12$
 $\therefore f(x)=-2x^3+3x^2+12x+c$
 이때 $f(-2)=-5$ 이므로
 $16+12-24+c=-5 \quad \therefore c=-9$
 $\therefore f(x)=-2x^3+3x^2+12x-9$
 주어진 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 극대이고, 극댓값은
 $f(2)=-16+12+24-9=11$

13 ㉓ㄱ, ㄷ, ㄹ

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 0, 2, 4이므로
 $f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...	4	...
$f'(x)$	+	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. $x<2$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x<2$ 에서 증가한다.

ㄴ, $x=0$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극값을 갖지 않는다.
 ㄷ, $f'(4)=0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 미분가능하다.
 ㄹ, 열린구간 $(3, 4)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 감소한다.
 즉 $f(x) < f(3)$ 이고 $f(3)=0$ 이므로 $f(x) < 0$
 $\therefore f(x)f'(x) > 0$
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

14 ㉡ ③

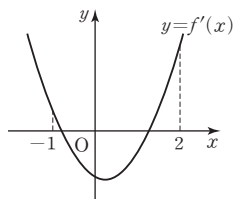
$f(x) = x^3 - ax^2 + (a^2 - 2a)x$ 에서
 $f'(x) = 3x^2 - 2ax + a^2 - 2a$
 삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = a^2 - 3(a^2 - 2a) > 0, -2a^2 + 6a > 0$
 $a^2 - 3a < 0, a(a-3) < 0$
 $\therefore 0 < a < 3$
 따라서 정수 a 의 최댓값은 2, 최솟값은 1이므로 그 합은 $2+1=3$

15 ㉡ 7

$f(x) = -x^3 + ax^2 + 2ax + 3$ 에서
 $f'(x) = -3x^2 + 2ax + 2a$
 삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = a^2 + 6a \leq 0, a(a+6) \leq 0$
 $\therefore -6 \leq a \leq 0$
 따라서 정수 a 의 값은 $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$ 이므로 그 개수는 7이다.

16 ㉡ $-\frac{3}{8} < a < 0$

$f(x) = x^3 - 2ax^2 + 4ax + 7$ 에서
 $f'(x) = 3x^2 - 4ax + 4a$
 삼차함수 $f(x)$ 가 $-1 < x < 2$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 $-1 < x < 2$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = 4a^2 - 12a > 0, a^2 - 3a > 0$
 $a(a-3) > 0 \therefore a < 0$ 또는 $a > 3$
 (ii) $f'(-1) > 0$ 에서 $3 + 4a + 4a > 0 \therefore a > -\frac{3}{8}$
 $f'(2) > 0$ 에서 $12 - 8a + 4a > 0 \therefore a < 3$
 (iii) 이차함수 $y = f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x = \frac{2}{3}a$ 이므로
 $-1 < \frac{2}{3}a < 2 \therefore -\frac{3}{2} < a < 3$
 (i)~(iii)의 공통 범위를 구하면 $-\frac{3}{8} < a < 0$

17 ㉡ 2

$f(x) = -x^4 + 4kx^3 - 6kx^2 + 1$ 에서
 $f'(x) = -4x^3 + 12kx^2 - 12kx = -4x(x^2 - 3kx + 3k)$
 사차함수 $f(x)$ 가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2 - 3kx + 3k = 0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
 (i) $x=0$ 이 이차방정식 $x^2 - 3kx + 3k = 0$ 의 근이 될 수 없으므로 $k \neq 0$
 (ii) 이차방정식 $x^2 - 3kx + 3k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = 9k^2 - 12k > 0, 3k^2 - 4k > 0$
 $k(3k-4) > 0 \therefore k < 0$ 또는 $k > \frac{4}{3}$
 (i), (ii)의 공통 범위를 구하면
 $k < 0$ 또는 $k > \frac{4}{3}$
 따라서 자연수 k 의 최솟값은 2이다.

18 ㉡ ⑤

최고차항의 계수가 양수인 사차함수가 극값을 하나만 갖는다는 것은 사차함수가 극댓값을 갖지 않는다는 의미이다.
 $f(x) = 3x^4 + 4ax^3 - 6(a-8)x^2$ 에서
 $f'(x) = 12x^3 + 12ax^2 - 12(a-8)x = 12x(x^2 + ax - a + 8)$
 사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x) = 0$ 이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.
 (i) $f'(x) = 0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우
 이차방정식 $x^2 + ax - a + 8 = 0$ 이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면
 $D = a^2 - 4(-a+8) < 0, a^2 + 4a - 32 < 0$
 $(a+8)(a-4) < 0 \therefore -8 < a < 4$
 (ii) $f'(x) = 0$ 이 한 실근과 중근을 갖는 경우
 ① 이차방정식 $x^2 + ax - a + 8 = 0$ 이 $x=0$ 을 근으로 가질 때
 $-a+8=0 \therefore a=8$
 ② 이차방정식 $x^2 + ax - a + 8 = 0$ 이 0이 아닌 실수를 중근으로 가질 때, 판별식을 D 라 하면
 $D = a^2 + 4a - 32 = 0, (a+8)(a-4) = 0$
 $\therefore a = -8$ 또는 $a = 4$
 (iii) $f'(x) = 0$ 이 삼중근을 갖는 경우가 없다.
 (i)~(iii)에서 $-8 \leq a \leq 4$ 또는 $a=8$
 따라서 한 자리 자연수 a 의 값은 1, 2, 3, 4, 8이므로 그 개수는 5이다.

19 ㉡ ④

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 에서
 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
 함수 $y = f(x)$ 의 그래프에서 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $f(x) \rightarrow -\infty$ 이므로 $a < 0$
 $f(0) > 0$ 이므로 $d > 0$
 또 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 두 실근이 α, β 이고 $\alpha < 0, \beta < 0$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = -\frac{2b}{3a} < 0, \alpha\beta = \frac{c}{3a} > 0$
 이때 $a < 0$ 이므로 $b < 0, c < 0$
 $\therefore a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$
 ① $a < 0$
 ② $a < 0, d > 0$ 이므로 $ad < 0$

- ③ $b < 0, c < 0$ 이므로 $b + c < 0$
 ④ $bc > 0, d > 0$ 이므로 $bc + d > 0$
 ⑤ $c < 0, ab > 0$ 이므로 $c - ab < 0$
 따라서 그 값이 양수인 것은 ④이다.

20 ㉮ ⑤

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 a, b, c 이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=c$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...	b	...	c	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이고, $x=c$ 에서 극대이다.

또 $x=b$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=b$ 에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

서술형 1 ㉮ $a \geq \frac{1}{3}$

임의의 실수 k 와 함수 $f(x)=x^3+x^2+ax+2$ 에 대하여 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 오직 한 점에서 만나려면 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 는 증가하거나 감소해야 한다.

이때 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$ 는 증가해야 한다. ①

$$f(x)=x^3+x^2+ax+2$$

$$f'(x)=3x^2+2x+a \quad \dots\dots ②$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=1-3a \leq 0 \quad \therefore a \geq \frac{1}{3} \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가해야 함을 알 수 있다.	40%
② $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	20%
③ a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%

서술형 2 ㉮ 2

$$f(x)=x^3-3x^2+a$$

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2) \quad \dots\dots ①$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	a 극대	↘	$a-4$ 극소	↗

즉 함수 $f(x)$ 는

$x=0$ 일 때 극대이고, 극댓값은 $f(0)=a$

$x=2$ 일 때 극소이고, 극솟값은 $f(2)=a-4$ ②

이때 극댓값과 극솟값의 부호가 반대이고 절댓값이 같으므로

$$a+(a-4)=0, 2a-4=0$$

$$\therefore a=2 \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	20%
② 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값을 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	40%

서술형 3 ㉮ $1 \leq a < 3$

$$f(x)=x^3-ax^2+(a^2-2a)x$$

$$f'(x)=3x^2-2ax+a^2-2a$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식

$f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식

$f'(x)=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=a^2-3(a^2-2a)>0, -2a^2+6a>0$$

$$a^2-3a<0, a(a-3)<0$$

$$\therefore 0 < a < 3 \quad \dots\dots ① \quad \dots\dots ①$$

$$g(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(5a-4)x+2$$

$$g'(x)=x^2+2ax+5a-4$$

삼차함수 $g(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $g'(x)=0$ 이

중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $g'(x)=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=a^2-(5a-4) \leq 0, a^2-5a+4 \leq 0$$

$$(a-1)(a-4) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq a \leq 4 \quad \dots\dots ② \quad \dots\dots ②$$

①, ②의 공통 범위를 구하면

$$1 \leq a < 3 \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① 함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 조건을 이용하여 a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
② 함수 $g(x)$ 가 극값을 갖지 않을 조건을 이용하여 a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
③ a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%

1등급

10% 핵심 기출 문제

p. 136~137

01 ㉮ ④

$$f(x)=x^3+ax^2+2ax$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+2a$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-6a \leq 0, a(a-6) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 6$$

따라서 $M=6, m=0$ 이므로

$$M-m=6-0=6$$

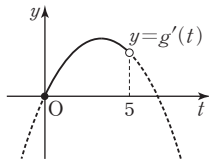
02 ㉮ 13

$$f(x)=x^3-(a+2)x^2+ax$$

$$f'(x)=3x^2-2(a+2)x+a$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은
 $y - \{t^3 - (a+2)t^2 + at\} = \{3t^2 - 2(a+2)t + a\}(x-t)$
 이 접선의 y 절편 $g(t)$ 는 $x=0$ 일 때 y 의 값과 같으므로
 $g(t) - \{t^3 - (a+2)t^2 + at\} = \{3t^2 - 2(a+2)t + a\}(0-t)$
 즉 $g(t) = -2t^3 + (a+2)t^2$ 이므로
 $g'(t) = -6t^2 + 2(a+2)t$
 $= -2t\{3t - (a+2)\}$

함수 $g(t)$ 가 열린구간 $(0, 5)$ 에서 증가하므로 $0 < t < 5$ 에서
 $g'(t) \geq 0$ 이다.
 이때 $g'(0) = 0$ 이므로 함수 $y = g'(t)$ 의
 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.
 $g'(5) \geq 0$ 에서 $-10\{15 - (a+2)\} \geq 0$
 $-a + 13 \leq 0 \quad \therefore a \geq 13$
 따라서 실수 a 의 최솟값은 13이다.



03 ㉮ 16

$g(x) = (x^3 + 2)f(x)$ 에서
 $g'(x) = 3x^2f(x) + (x^3 + 2)f'(x)$
 함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값 24를 가지므로
 $g'(1) = 0, g(1) = 24$
 $g(1) = 24$ 에서 $3f(1) = 24 \quad \therefore f(1) = 8$
 $g'(1) = 0$ 에서 $3f(1) + 3f'(1) = 0$
 $3 \times 8 + 3f'(1) = 0 \quad \therefore f'(1) = -8$
 $\therefore f(1) - f'(1) = 8 - (-8) = 16$

04 ㉮ ③

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 2이므로
 $f'(2) = 0$

즉 $f'(x) = a(x-2)^2$ ($a < 0$)이라 하고, 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.
 ㄱ. $f'(0) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 감소 상태에 있다.

x	...	2	...
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	↘		↘

ㄴ. $f'(2) = 0$ 이지만 $x=2$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극값을 갖지 않는다.
 ㄷ. 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 감소한다.
 즉 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 오직 한 점에서 만난다.
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

05 ㉮ 32

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d 는 정수, $a \neq 0$)라 하면
 (가)에서 $-ax^3 + bx^2 - cx + d = -ax^3 - bx^2 - cx - d$
 $2bx^2 + 2d = 0 \quad \therefore b=0, d=0$
 즉 $f(x) = ax^3 + cx$ 이므로 $f'(x) = 3ax^2 + c$
 (나)에서 $f(1) = 5$ 이므로 $a + c = 5$
 $\therefore c = 5 - a$ ㉠
 (다)에서 $1 < f'(1) < 7$ 이므로 $1 < 3a + c < 7$ ㉡
 ㉠을 ㉡에 대입하면 $1 < 2a + 5 < 7$
 $-4 < 2a < 2 \quad \therefore -2 < a < 1$
 이때 $a \neq 0$ 인 정수이므로 $a = -1$
 $a = -1$ 을 ㉠에 대입하면
 $c = 5 - (-1) = 6$
 $\therefore f(x) = -x^3 + 6x$

$$f'(x) = -3x^2 + 6 = -3(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = \sqrt{2}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\sqrt{2}$	...	$\sqrt{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	$-4\sqrt{2}$ 극소	↗	$4\sqrt{2}$ 극대	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 극대이고, 극댓값 m 은
 $m = f(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$
 $\therefore m^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$

06 ㉮ 4

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면
 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$(가)에서 3x^2 + 2ax + b = 3x^2 - 2ax + b$$

$$4ax = 0 \quad \therefore a = 0$$

$$\therefore f(x) = x^3 + bx + c, f'(x) = 3x^2 + b$$

$$(나)에서 f'(1) = 0, f(1) = 0$$

$$f'(1) = 0 \text{에서 } 3 + b = 0 \quad \therefore b = -3$$

$$f(1) = 0 \text{에서 } 1 + b + c = 0$$

$$1 + (-3) + c = 0 \quad \therefore c = 2$$

$$\text{즉 } f(x) = x^3 - 3x + 2 \text{이므로}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	4 극대	↘	0 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 일 때 극대이고, 극댓값은
 $f(-1) = 4$

07 ㉮ ②

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3(a^2 - 1)x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3(a^2 - 1)$$

$$= 3\{x^2 - 2ax + (a+1)(a-1)\}$$

$$= 3\{x - (a-1)\}\{x - (a+1)\}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = a-1 \text{ 또는 } x = a+1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$a-1$	...	$a+1$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉 함수 $f(x)$ 는 $x = a-1$ 일 때 극대이고, 극댓값은 $f(a-1) = 4$ 이므로

$$(a-1)^3 - 3a(a-1)^2 + 3(a^2-1)(a-1) = 4$$

$$a^3 - 3a - 2 = 0, (a+1)^2(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 2$$

(i) $a = -1$ 일 때

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

이때 $f(-2) = -8 + 12 = 4 > 0$ 이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $a=2$ 일 때

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

이때 $f(-2) = -8 - 24 - 18 = -50 < 0$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $f(x) = x^3 + 3x^2$

$$\therefore f(-1) = -1 + 3 = 2$$

08 ㉡ 16

(가)에서 $f(x-y) = f(x) - f(y) + xy(x-y)$

.....㉠

㉠의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) - f(0) \quad \therefore f(0) = 0$$

(나)에서 $f'(0) = 8$ 이므로

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 8 \quad (\because f(0) = 0)$$

이때 (가)에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-h) - xh(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(-h)}{-h} - x^2 - xh \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h)}{-h} + \lim_{h \rightarrow 0} (-x^2 - xh) \\ &= 8 - x^2 \quad (\because \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 8) \end{aligned}$$

즉 $f'(x) = 8 - x^2 = -(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})$ 이므로

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2\sqrt{2} \text{ 또는 } x = 2\sqrt{2}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-2\sqrt{2}$	...	$2\sqrt{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2\sqrt{2}$ 일 때 극댓값, $x=-2\sqrt{2}$ 일 때 극솟값을 가지므로

$$a = 2\sqrt{2}, b = -2\sqrt{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 8 + 8 = 16$$

09 ㉡ ①

사차함수 $g(x)$ 와 일차함수 $f(x)$ 의 그래프가 $x=-2, x=1$ 인 점에서 접하므로 사차방정식 $f(x) = g(x)$, 즉

$$h(x) = g(x) - f(x) = 0 \text{은 } x = -2 \text{와 } x = 1 \text{을 중근으로 갖는다.}$$

$$\therefore h(x) = g(x) - f(x)$$

$$= a(x+2)^2(x-1)^2 \quad (a \text{는 상수})$$

이때 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로 $a=1$

$$\text{즉 } h(x) = (x+2)^2(x-1)^2 \text{이므로}$$

$$h(x) = (x^2 + 4x + 4)(x^2 - 2x + 1)$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2x+4)(x^2-2x+1) + (x^2+4x+4)(2x-2) \\ &= 2(x+2)(x-1)^2 + 2(x+2)^2(x-1) \\ &= 2(x+2)(x-1)(2x+1) \end{aligned}$$

$$h'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	$-\frac{1}{2}$	...	1	...
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $h(x)$ 는 $x = -\frac{1}{2}$ 일 때 극대이고, 극댓값은

$$h\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{16}$$

10 ㉡ ③

(가)에서 $f(n) = 0$ 이고 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x) = (x-n)(x^2+ax+b)$ (a, b 는 상수)라 하자.

(나)에서 $g(x) = (x+n)f(x)$ 라 하면

$$g(x) = (x+n)(x-n)(x^2+ax+b)$$

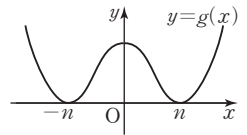
.....㉠

$$\therefore g(n) = g(-n) = 0$$

(다)에서 모든 실수 x 에 대하여

$$(x+n)f(x) \geq 0, \text{ 즉 } g(x) \geq 0 \text{이므로}$$

사차함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x = -n, x = n$ 에서 x 축에 접해야 한다.



$$\therefore g(x) = (x-n)^2(x+n)^2$$

㉠에서 $g(x) = (x+n)f(x)$ 이므로

$$f(x) = (x-n)^2(x+n) = (x^2-2nx+n^2)(x+n)$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= (2x-2n)(x+n) + (x^2-2nx+n^2) \\ &= 2(x-n)(x+n) + (x-n)^2 \\ &= (x-n)(3x+n) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -\frac{n}{3} \text{ 또는 } x = n$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{n}{3}$	...	n	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{n}{3}$ 일 때 극대이고, 극댓값 a_n 은

$$a_n = f\left(-\frac{n}{3}\right) = \left(-\frac{n}{3} - n\right)^2 \left(-\frac{n}{3} + n\right) = \frac{32}{27}n^3$$

이때 $a_n = \frac{32}{27}n^3$ 이 자연수가 되려면 n^3 은 27의 배수가 되어야 한다.

따라서 자연수 k 에 대하여 $n^3 = 27k = 3^3k$ 이어야 하므로 $k=1$ 일 때, 자연수 n 의 최솟값은 3이다.

개념 완성하기

p.141~142

01 ㉠ 최댓값: 31, 최솟값: 3

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	2	...	4
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	4	$\searrow$	3 극소	$\nearrow$	31

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=4$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(4)=31$

$x=2$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(2)=3$

02 ㉠ 최댓값: 7, 최솟값: -13

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

닫힌구간 $[-1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	2	...	4
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	7	$\searrow$	3 극소	$\nearrow$	7 극대	$\searrow$	-13

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=-1$ 또는 $x=2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(-1)=f(2)=7$

$x=4$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(4)=-13$

03 ㉠ 최댓값: 5, 최솟값: 1

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	1	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$	3

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=1$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(1)=5$

$x=0$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(0)=1$

04 ㉠ 최댓값: 21, 최솟값: 4

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	-	0	+	
$f(x)$	12	$\searrow$	5	$\searrow$	4 극소	$\nearrow$	21

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(2)=21$

$x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(1)=4$

05 ㉠ 최댓값: 1, 최솟값: -6

$$f(x) = -x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 12x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 + 4x - 12 = -4(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	1	$\searrow$	-6 극소	$\nearrow$	1

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=0$ 또는 $x=2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(0)=f(2)=1$

$x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(1)=-6$

06 ㉠ 최댓값: 9, 최솟값: $-\frac{7}{2}$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - x^2 - 6x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 2x^3 + 6x^2 - 2x - 6 = 2(x+3)(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=-3 \text{ 또는 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$ 극대	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$ 극소	$\nearrow$	9

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(2)=9$

$x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(1)=-\frac{7}{2}$

07 ㉠ 2

$$f(x) = ax^3 - 6ax^2 + 10 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3ax^2 - 12ax = 3ax(x-4)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=4$$

$a>0$ 이므로 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-7a+10$	$\nearrow$	10 극대	$\searrow$	$-16a+10$

함수 $f(x)$ 는

$x=2$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(2)=-16a+10$ 이므로
 $-16a+10=-22, -16a=-32 \quad \therefore a=2$

08 ㉠ 2

$f(x)=2x^3-3x^2+a$ 에서

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$

단한구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	a	$\searrow$	$-1+a$ 극소	$\nearrow$	$4+a$

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(2)=4+a$ 이므로
 $4+a=6 \quad \therefore a=2$

09 ㉠ 3

$f(x)=x^4-6x^2+a$ 에서

$f'(x)=4x^3-12x=4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

단한구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-5+a$	$\nearrow$	a 극대	$\searrow$	$-5+a$

함수 $f(x)$ 는

$x=0$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(0)=a$

$x=-1$ 또는 $x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$f(-1)=f(1)=-5+a$

즉 $M=a, m=-5+a$ 이므로 $a+(-5+a)=1$

$2a-5=1, 2a=6 \quad \therefore a=3$

10 ㉠ 2시간

$f(x)=x^3-15x^2+48x+65$ 라 하면

$f'(x)=3x^2-30x+48=3(x-2)(x-8)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=2$ ($\because 0 \leq x \leq 6$)

단한구간 $[0, 6]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
 다음과 같다.

x	0	...	2	...	6
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	65	$\nearrow$	109 극대	$\searrow$	29

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(2)=109$

따라서 방문한 사람의 수가 가장 많았을 때는 2시간이 지난 후이다.

11 ㉠ (1) $0 < x < 4$ (2) $V(x)=4x^3-32x^2+64x$ (3) $\frac{4}{3}$

(1) 잘라 내고 남은 부분을 접어서 만든 상자의 밑면의 한 변의 길이는 $(8-2x)$ cm

이때 길이는 양수이므로

$x > 0, 8-2x > 0$ 에서 $0 < x < 4$

(2) $V(x)=x(8-2x)^2=4x^3-32x^2+64x$

(3) $V'(x)=12x^2-64x+64=4(3x-4)(x-4)$

$V'(x)=0$ 에서 $x=\frac{4}{3}$ ($\because 0 < x < 4$)

열린구간 $(0, 4)$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{4}{3}$	...	4
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		$\nearrow$	$\frac{1024}{27}$ 극대	$\searrow$	

함수 $V(x)$ 는 $x=\frac{4}{3}$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(\frac{4}{3})=\frac{1024}{27}$

따라서 상자의 부피가 최대가 되도록 하는 x 의 값은 $\frac{4}{3}$ 이다.

12 ㉠ 3

$f(x)=x^3-3x+1$ 이라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

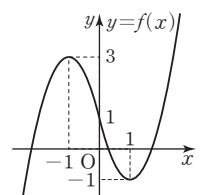
$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	3 극대	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로
 다른 세 점에서 만나므로 방정식

$x^3-3x+1=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는
 3이다.



13 ㉠ 1

$f(x)=2x^3-3x^2+5$ 라 하면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

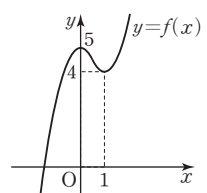
$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$	4 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽
 그림과 같고, $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과
 한 점에서 만나므로 방정식

$2x^3-3x^2+5=0$ 의 서로 다른 실근의 개수
 는 1이다.



14 ㉔ 2

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 1 \text{이라 하면}$$

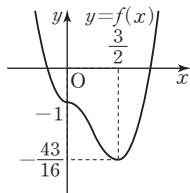
$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	$\frac{3}{2}$	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{43}{16}$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^4 - 2x^3 - 1 = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



15 ㉔ 2

$$x^3 - 5x - 5 = 3x^2 + 4x \text{에서 } x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 \text{라 하면}$$

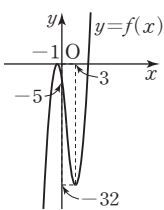
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0 극대	$\searrow$	-32 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^3 - 5x - 5 = 3x^2 + 4x$, 즉 $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



16 ㉔ 4

$$x^4 + 3x^3 + 1 = 3x^3 + 4x^2 \text{에서 } x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 1 \text{이라 하면}$$

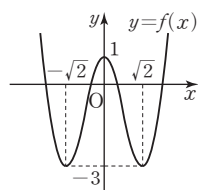
$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = \sqrt{2}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\sqrt{2}$	...	0	...	$\sqrt{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-3 극소	$\nearrow$	1 극대	$\searrow$	-3 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 네 점에서 만나므로 방정식 $x^4 + 3x^3 + 1 = 3x^3 + 4x^2$, 즉 $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



17 ㉔ (1) $0 < k < 1$ (2) $k = 0$ 또는 $k = 1$ (3) $k < 0$ 또는 $k > 1$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

즉 함수 $y=f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 k , $x=1$ 에서 극솟값 $-1+k$ 를 갖는다.

- (1) 삼차방정식 $2x^3 - 3x^2 + k = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 (극댓값) $\times$ (극솟값) < 0 이어야 하므로 $k(-1+k) < 0 \therefore 0 < k < 1$
- (2) 삼차방정식 $2x^3 - 3x^2 + k = 0$ 이 한 실근과 중근을 가지려면 (극댓값) $\times$ (극솟값) $= 0$ 이어야 하므로 $k(-1+k) = 0 \therefore k = 0$ 또는 $k = 1$
- (3) 삼차방정식 $2x^3 - 3x^2 + k = 0$ 이 한 실근과 두 허근을 가지려면 (극댓값) $\times$ (극솟값) > 0 이어야 하므로 $k(-1+k) > 0 \therefore k < 0$ 또는 $k > 1$

18 ㉔ (1) $-1 < k < 1$ (2) $k = -1$ 또는 $k = 1$ (3) $k < -1$ 또는 $k > 1$

$$f(x) = 4x^3 - 3x - k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 12x^2 - 3 = 3(2x+1)(2x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

즉 함수 $y=f(x)$ 는 $x = -\frac{1}{2}$ 에서 극댓값 $1-k$, $x = \frac{1}{2}$ 에서 극솟값 $-1-k$ 를 갖는다.

- (1) 삼차방정식 $4x^3 - 3x - k = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 (극댓값) $\times$ (극솟값) < 0 이어야 하므로 $(1-k)(-1-k) < 0 \therefore -1 < k < 1$
- (2) 삼차방정식 $4x^3 - 3x - k = 0$ 이 한 실근과 중근을 가지려면 (극댓값) $\times$ (극솟값) $= 0$ 이어야 하므로 $(1-k)(-1-k) = 0 \therefore k = -1$ 또는 $k = 1$
- (3) 삼차방정식 $4x^3 - 3x - k = 0$ 이 한 실근과 두 허근을 가지려면 (극댓값) $\times$ (극솟값) > 0 이어야 하므로 $(1-k)(-1-k) > 0 \therefore k < -1$ 또는 $k > 1$

19 ㉔ (가) 1 (나) $>$

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 2 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 (\because x \geq 0)$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	2	$\searrow$	1 극소	$\nearrow$

$x \geq 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $\boxed{\text{가}} 1$ 이다.

즉 $x \geq 0$ 에서 $f(x) \boxed{\text{나}} > 0$

$$\therefore x^3 - x^2 - x + 2 > 0$$

20 ㉔ $a \geq 1$

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + a \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$	0	-	0	+
$f(x)$	a	$\searrow$	$-1+a$ 극소	$\nearrow$

$x \geq 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이므로 최소값은 $-1+a$ 이다.

따라서 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$f(1) = -1+a \geq 0 \quad \therefore a \geq 1$$

21 $a \geq 3$

$f(x) = x^4 - 4x + a$ 라 하면

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2+x+1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=1 \quad (\because x^2+x+1 > 0)$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-3+a$ 극소	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 $-3+a$ 를 가지므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$f(1) = -3+a \geq 0 \quad \therefore a \geq 3$$

22 $v=3, a=4$

$$v = \frac{dx}{dt} = 4t - 3, a = \frac{dv}{dt} = 4$$

따라서 $t=1$ 에서의 점 P의 속도는 $4-3=1$, 가속도는 4이다.

23 $v=19, a=18$

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 8, a = \frac{dv}{dt} = 6t$$

따라서 $t=3$ 에서의 점 P의 속도는 $27-8=19$, 가속도는 18이다.

24 $v=4, a=-30$

$$v = \frac{dx}{dt} = -4t^3 + 18t, a = \frac{dv}{dt} = -12t^2 + 18$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 속도는 $-32+36=4$, 가속도는 $-48+18=-30$ 이다.

25 27

시각 t 에서의 길이 l 의 변화율은

$$\frac{dl}{dt} = 3t^2 + 6t + 3$$

따라서 $t=2$ 에서의 고무줄의 길이의 변화율은

$$12+12+3=27$$

26 $(1) 3.2\pi \quad (2) 3.2\pi$

반지름의 길이가 $0.2t$ 인 구의 겉넓이를 $S(t)$, 부피를 $V(t)$ 라 하자.

$$(1) S(t) = 4\pi(0.2t)^2 = 0.16\pi t^2$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = 0.32\pi t$$

따라서 $t=10$ 에서의 구의 겉넓이의 변화율은

$$0.32\pi \times 10 = 3.2\pi$$

$$(2) V(t) = \frac{4}{3}\pi(0.2t)^3 = \frac{0.032\pi t^3}{3}$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = 0.032\pi t^2$$

따라서 $t=10$ 에서의 구의 부피의 변화율은

$$0.032\pi \times 10^2 = 3.2\pi$$

유형 완성하기

p. 143~162

01 -124

$f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 12x + 3$ 에서

$$f'(x) = 12x^2 + 18x - 12 = 6(x+2)(2x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

닫힌구간 $[-3, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	...	-2	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	12	$\nearrow$	31 극대	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$ 극소	$\nearrow$	4

함수 $f(x)$ 는

$x=-2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(-2)=31$

$x=\frac{1}{2}$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$

따라서 $M=31, m=-\frac{1}{4}$ 이므로

$$\frac{M}{m} = \frac{31}{-\frac{1}{4}} = -124$$

01-1 2

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 \quad (\because 0 \leq x \leq 3)$$

닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	-10	$\searrow$	-15 극소	$\nearrow$	17

함수 $f(x)$ 는

$x=3$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(3)=17$

$x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(1)=-15$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$$17 + (-15) = 2$$

02 ㉔ 25

$$f(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 9 \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 = \frac{4}{3}x^2(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

닫힌구간 $[-2, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	0	...	3	...	4
$f'(x)$		-	0	-	0	+	
$f(x)$	25	$\searrow$	9	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$	9

함수 $f(x)$ 는

$x=-2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(-2)=25$

$x=3$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(3)=0$

따라서 $M=25, m=0$ 이므로

$$M+m=25+0=25$$

02-1 ㉔ -5

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ (} \because 0 \leq x \leq 2 \text{)}$$

닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2 극대	$\searrow$	-7

함수 $f(x)$ 는

$x=1$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(1)=2$

$x=2$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(2)=-7$

따라서 $M=2, m=-7$ 이므로

$$M+m=2+(-7)=-5$$

03 ㉔ 54

$$x^2+2x=t \text{라 하면 } t=x^2+2x=(x+1)^2-1$$

$$-2 \leq x \leq 1 \text{에서 } t \text{의 값의 범위는 } -1 \leq t \leq 3$$

$$g(t) = 2t^3 - 12t^2 + 3 \text{이라 하면}$$

$$g'(t) = 6t^2 - 24t = 6t(t-4)$$

$$g'(t)=0 \text{에서 } t=0 \text{ (} \because -1 \leq t \leq 3 \text{)}$$

닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	...	0	...	3
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	-11	$\nearrow$	3 극대	$\searrow$	-51

함수 $g(t)$ 는

$t=0$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $g(0)=3$

$t=3$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $g(3)=-51$

따라서 $M=3, m=-51$ 이므로

$$M-m=3-(-51)=54$$

Lecture 함수 $f(x)$ 의 식에 공통부분이 있을 때, 최대, 최소 구하기

① 공통부분을 t 라 하고 주어진 구간에서 t 의 값의 범위를 구한다.

② $f(x)$ 를 t 에 대한 함수 $g(t)$ 로 나타낸다.

③ ①에서 구한 t 의 값의 범위에서 $g(t)$ 의 최댓값과 최솟값을 구한다.

03-1 ㉔ 6

$$g(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$$

$$g(x)=t \text{라 하면 } t \geq 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(t) = -t^3 + 3t^2 + 2$$

$$f'(t) = -3t^2 + 6t = -3t(t-2)$$

$$f'(t)=0 \text{에서 } t=2 \text{ (} \because t \geq 1 \text{)}$$

$t \geq 1$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1	...	2	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$	4	$\nearrow$	6 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t=2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(2)=6$

04 ㉔ $-\frac{17}{2}$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - k \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ (} \because -2 \leq x \leq 2 \text{)}$$

닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-2-k$	$\nearrow$	$5-k$ 극대	$\searrow$	$-22-k$

함수 $f(x)$ 는

$x=-1$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(-1)=5-k$

$x=2$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(2)=-22-k$

이때 최댓값과 최솟값의 절댓값이 같고 그 부호가 반대이므로

$$(5-k) + (-22-k) = 0, -17-2k=0$$

$$\therefore k = -\frac{17}{2}$$

04-1 ㉔ 5

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + a \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

닫힌구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	2	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-4+a$	$\nearrow$	$7+a$ 극대	$\searrow$	$-20+a$ 극소	$\nearrow$	$-9+a$

함수 $f(x)$ 는

$x=-1$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(-1)=7+a$

$x=2$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(2)=-20+a$

즉 $M=7+a$, $m=-20+a$ 이므로
 $(7+a)+(-20+a)=-3$, $2a-13=-3$
 $\therefore a=5$

05 18

$f(x)=ax^4-4ax^3+b$ 에서
 $f'(x)=4ax^3-12ax^2=4ax^2(x-3)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=3$
 $a>0$ 이므로 닫힌구간 $[-1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를
 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	3	...	4
$f'(x)$		-	0	-	0	+	
$f(x)$	$5a+b$	$\searrow$	b	$\searrow$	$-27a+b$ 극소	$\nearrow$	b

함수 $f(x)$ 는
 $x=-1$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(-1)=5a+b$
 $x=3$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(3)=-27a+b$
 즉 $5a+b=7$, $-27a+b=-9$ 이므로
 두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{9}{2}$
 $\therefore 27a+b=\frac{27}{2}+\frac{9}{2}=18$

05-1 8

$f(x)=ax^4-4ax+b$ 에서
 $f'(x)=4ax^3-4a=4a(x-1)(x^2+x+1)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=1$ ($\because x^2+x+1>0$) ①
 $a>0$ 이므로 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를
 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$5a+b$	$\searrow$	$-3a+b$ 극소	$\nearrow$	$8a+b$

함수 $f(x)$ 는
 $x=2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(2)=8a+b$
 $x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(1)=-3a+b$ ②
 즉 $8a+b=10$, $-3a+b=-1$ 이므로
 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$ ③
 $\therefore 10a-b=10-2=8$ ④

채점 기준	비율
① $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구할 수 있다.	20%
② 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	40%
③ a, b 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ $10a-b$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

06 13

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 1, 3이
 므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=3$
 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $1+3=-\frac{2a}{3}$, $1 \times 3=\frac{b}{3}$ $\therefore a=-6$, $b=9$

$\therefore f(x)=x^3-6x^2+9x+c$
 이때 $x=1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로
 $x=1$ 일 때 극대이고, 극댓값은 $f(1)=7$
 $f(1)=7$ 에서 $1-6+9+c=7$ $\therefore c=3$
 $\therefore f(x)=x^3-6x^2+9x+3$
 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=3$
 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
 다음과 같다.

x	-1	...	1	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	-13	$\nearrow$	7 극대	$\searrow$	3

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 최소이고, 최솟값은
 $f(-1)=-13$

06-1 27

$f(x)=x^3-ax^2+bx+c$ 에서 $f'(x)=3x^2-2ax+b$
 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 -1, 3
 이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=3$
 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $-1+3=-\frac{2a}{3}$, $-1 \times 3=\frac{b}{3}$ $\therefore a=3$, $b=-9$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2-9x+c$
 이때 $x=3$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로
 $x=3$ 일 때 극소이고, 극솟값은 $f(3)=-5$
 $f(3)=-5$ 에서 $27-27-9+c=-5$ $\therefore c=22$
 $\therefore f(x)=x^3-3x^2-9x+22$
 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ ($\because -2 \leq x \leq 2$)
 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	20	$\nearrow$	27 극대	$\searrow$	0

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 최대이고, 최댓값은
 $f(-1)=27$

07 3시간

$E(t)=27t-t^3$ 에서 $E'(t)=27-3t^2=-3(t+3)(t-3)$
 $E'(t)=0$ 에서 $t=3$ ($\because t>0$)
 구간 $(0, \infty)$ 에서 함수 $E(t)$ 의
 증가와 감소를 표로 나타내면 오
 른쪽과 같다.
 함수 $E(t)$ 는 $t=3$ 일 때 최대이
 고, 최댓값은 $E(3)=54$
 따라서 약효가 최대일 때는 약품을 투여한 지 3시간 후이다.

t	0	...	3	...
$E'(t)$		+	0	-
$E(t)$		$\nearrow$	54 극대	$\searrow$

07-1 30개월

$R(t)=45t^2-t^3$ 에서 $R'(t)=90t-3t^2=-3t(t-30)$
 $R'(t)=0$ 에서 $t=30$ ($\because t>0$)

구간 $(0, \infty)$ 에서 함수 $R(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

함수 $R(t)$ 는 $x=30$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $R(30)=13500$

따라서 총 매출액이 최대일 때는 신제품을 출시한 지 30개월 후이다.

08 15

점 P의 좌표를 (t, t^2) 이라 하면 점 P와 점 $(3, 0)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(3-t)^2 + (t^2)^2} = \sqrt{t^4 + t^2 - 6t + 9}$$

$f(t) = t^4 + t^2 - 6t + 9$ 라 하면

$$f'(t) = 4t^3 + 2t - 6 = 2(t-1)(2t^2 + 2t + 3)$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } t=1 (\because 2t^2 + 2t + 3 > 0)$$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

즉 함수 $f(t)$ 는 $t=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(1)=5$

따라서 구하는 거리의 최솟값은 $\sqrt{5}$ 이다.

t	...	1	...
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	\	5 극소	/

08-1 35

점 P의 좌표를 $(t, -t^2+2)$ 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = (t-4)^2 + (-t^2+2)^2 + (t-4)^2 + (-t^2-3)^2$$

$$= 2t^4 + 4t^2 - 16t + 45$$

$f(t) = 2t^4 + 4t^2 - 16t + 45$ 라 하면

$$f'(t) = 8t^3 + 8t - 16 = 8(t-1)(t^2 + t + 2)$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } t=1 (\because t^2 + t + 2 > 0)$$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

즉 함수 $f(t)$ 는 $t=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(1)=35$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값은 35이다.

t	...	1	...
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	\	35 극소	/

09 27/4

두 점 P, Q의 좌표가 각각 $P(t, -\frac{t}{2})$, $Q(t, -t^2+4t)$ 이므로

$$\overline{PQ} = -t^2 + 4t - (-\frac{t}{2}) = -t^2 + \frac{9}{2}t$$

삼각형 OPQ의 넓이를 $f(t)$ 라 하면

$$f(t) = \frac{1}{2}t(-t^2 + \frac{9}{2}t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{9}{4}t^2$$

$$f'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{9}{2}t = -\frac{3}{2}t(t-3)$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } t=3 (\because 0 < t < 4)$$

열린구간 $(0, 4)$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	3	...	4
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		/	27/4 극대	\	

함수 $f(t)$ 는 $t=3$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(3) = \frac{27}{4}$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이의 최댓값은 $\frac{27}{4}$ 이다.

09-1 16

점 B의 x 좌표를 t ($0 < t < \sqrt{6}$)라 하면

$$B(t, -t^2+6)$$

$$\text{이때 } \overline{AB} = 2t, \overline{BE} = -t^2+6 \text{이므로}$$

$$\square ADEB = 2t(-t^2+6) = -2t^3+12t$$

삼각형 ABC의 넓이는 점 C의 좌표가 $(0, 6)$ 일 때 최대가 되므로 그때의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2t \times \{6 - (-t^2+6)\} = t^3$$

직사각형 ADEB와 삼각형 ABC의 넓이의 합을 $f(t)$ 라 하면

$$f(t) = (-2t^3+12t) + t^3 = -t^3+12t$$

$$f'(t) = -3t^2+12 = -3(t+2)(t-2)$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } t=2 (\because 0 < t < \sqrt{6})$$

열린구간 $(0, \sqrt{6})$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	2	...	$\sqrt{6}$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		/	16 극대	\	

함수 $f(t)$ 는 $t=2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(2)=16$

따라서 구하는 넓이의 합의 최댓값은 16이다.

10 8

곡선 $y=9-x^2$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는

$$9-x^2=0 \text{에서 } (3+x)(3-x)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=3$$

$$\therefore P(-3, 0), Q(3, 0) \quad \dots\dots ①$$

오른쪽 그림과 같이 사다리꼴의 나머지 두 꼭짓점을 R, S라 하고 점 R의 x 좌표를

$$t$$
 ($0 < t < 3$)라 하면 $R(t, 9-t^2)$

이때 $\overline{RS} = 2t$ 이므로 사다리꼴 PQRS의 넓이를 $f(t)$ 라 하면

$$f(t) = \frac{1}{2}(2t+6)(9-t^2) = -t^3-3t^2+9t+27 \quad \dots\dots ②$$

$$f'(t) = -3t^2-6t+9 = -3(t+3)(t-1)$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } t=1 (\because 0 < t < 3)$$

열린구간 $(0, 3)$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	1	...	3
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		/	32 극대	\	

함수 $f(t)$ 는 $t=1$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(1)=32$

따라서 넓이가 최대인 사다리꼴의 높이는 점 R의 y 좌표와 같으므로 $9-1=8$ ③

채점 기준	비율
① 곡선 $y=9-x^2$ 과 x 축과의 두 교점 P, Q의 좌표를 구할 수 있다.	20%
② 사다리꼴 PQRS의 넓이를 t 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
③ 사다리꼴 PQRS의 넓이가 최대가 될 때의 높이를 구할 수 있다.	40%

10-1 ㉔ $\frac{32}{9}$

곡선 $y=4x-x^2$ 과 x 축의 교점의 x 좌

표는 $4x-x^2=0$ 에서 $x(4-x)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

$\therefore O(0,0), A(4,0)$

$y=4x-x^2=-(x-2)^2+4$ 이므로

곡선 $y=4x-x^2$ 의 대칭축은 직선 $x=2$

즉 두 점 B, C는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로

$B(2-t, -t^2+4), C(2+t, -t^2+4) (0 < t < 2)$ 라 하자.

사다리꼴 OACB의 넓이를 $f(t)$ 라 하면

$$f(t) = \frac{1}{2}(2t+4)(-t^2+4) = -t^3 - 2t^2 + 4t + 8$$

$$f'(t) = -3t^2 - 4t + 4 = -(t+2)(3t-2)$$

$$f'(t)=0 \text{에서 } t=\frac{2}{3} (\because 0 < t < 2)$$

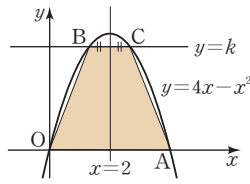
열린구간 $(0, 2)$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$\frac{2}{3}$	...	2
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{256}{27}$ 극대	$\searrow$	

함수 $f(t)$ 는 $t=\frac{2}{3}$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(\frac{2}{3}) = \frac{256}{27}$

따라서 k 의 값은 두 점 B, C의 y 좌표와 같으므로

$$k = -\frac{4}{9} + 4 = \frac{32}{9}$$



11 ㉔ 2

잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이가 x 이므로

상자의 밑면인 정사각형의 한 변의 길이는 $12-2x$

이때 길이는 양수이므로

$x > 0, 12-2x > 0$ 에서 $0 < x < 6$

상자의 부피를 $f(x)$ 라 하면

$$f(x) = x(12-2x)^2 = 4x^3 - 48x^2 + 144x$$

$$f'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x-2)(x-6)$$

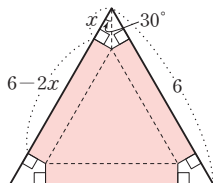
$$f'(x)=0 \text{에서 } x=2 (\because 0 < x < 6)$$

열린구간 $(0, 6)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	6
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	128 극대	$\searrow$	

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(2)=128$

따라서 이 상자의 부피가 최대가 되도록 하는 x 의 값은 2이다.



11-1 ㉔ 10

삼각기둥의 밑면인 정삼각형의 한 변의 길

이는 $6-2x$

이때 길이는 양수이므로

$x > 0, 6-2x > 0$ 에서

$0 < x < 3$

삼각기둥의 밑면의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}(6-2x)^2 = \sqrt{3}(x-3)^2$

상자의 높이는 $x \times \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}x$

상자의 부피를 $f(x)$ 라 하면

$$f(x) = \sqrt{3}(x-3)^2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}x = x(x-3)^2 = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 (\because 0 < x < 3)$$

열린구간 $(0, 3)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	4 극대	$\searrow$	

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(1)=4$

따라서 이 상자의 부피가 최대가 되도록 하는 x 의 값은 1이므로 $k=1$

$\therefore 10k = 10 \times 1 = 10$

12 ㉔ 4π

$3x+y=9$ 에서 $y=9-3x$

이때 길이는 양수이므로 $x > 0, 9-3x > 0$ 에서 $0 < x < 3$

직원뿔의 부피를 $f(x)$ 라 하면

$$f(x) = \frac{1}{3} \times x^2 \pi \times y = \frac{1}{3} x^2 \pi (9-3x) = \pi x^2 - \pi x^3$$

$$f'(x) = 6\pi x - 3\pi x^2 = -3\pi x(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=2 (\because 0 < x < 3)$$

열린구간 $(0, 3)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	3
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	4π 극대	$\searrow$	

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(2)=4\pi$

따라서 직원뿔의 부피의 최댓값은 4π 이다.

12-1 ㉔ 4000π

직원기둥의 높이를 $2t$ 라 하면 직원기둥의 밑면의 반지름의 길이는

$$\sqrt{(10\sqrt{3})^2 - t^2} = \sqrt{300 - t^2}$$

이때 길이는 양수이므로

$2t > 0, 300 - t^2 > 0$ 에서 $0 < t < 10\sqrt{3}$

직원기둥의 부피를 $f(t)$ 라 하면

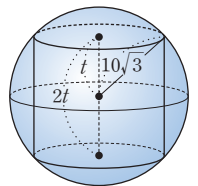
$$f(t) = \pi(\sqrt{300 - t^2})^2 \times 2t = 600\pi t - 2\pi t^3$$

$$f'(t) = 600\pi - 6\pi t^2 = -6\pi(t+10)(t-10)$$

$$f'(t)=0 \text{에서 } t=10 (\because 0 < t < 10\sqrt{3})$$

열린구간 $(0, 10\sqrt{3})$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	10	...	$10\sqrt{3}$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		$\nearrow$	4000π 극대	$\searrow$	



함수 $f(t)$ 는 $t=10$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(10)=4000\pi$ 따라서 직원기동의 부피의 최댓값은 4000π 이다.

13 ㉡ -4

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1 - k = 0 \text{에서}$$

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1 = k \text{ ㉠}$$

방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선

$y=3x^4-4x^3-12x^2+1$ 과 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+1 \text{이라 하면}$$

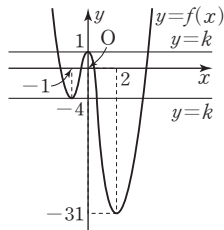
$$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$	1 극대	$\searrow$	-31 극소	$\nearrow$

즉 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나려면 $k=-4$ 또는 $k=1$ 따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은 $-4 \times 1 = -4$



13-1 ㉡ 19

$$3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 1 - k = 0 \text{에서}$$

$$3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 1 = k \text{ ㉠}$$

방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선

$y=3x^4-8x^3-6x^2+24x-1$ 과 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x-1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$$

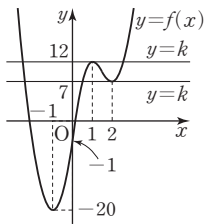
$$=12(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-20 극소	$\nearrow$	12 극대	$\searrow$	7 극소	$\nearrow$

즉 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나려면 $k=7$ 또는 $k=12$ 따라서 모든 실수 k 의 값의 합은 $7+12=19$



14 ㉡ 7

$$2x^3 - 9x^2 + 12x - 1 - a = 0 \text{에서}$$

$$2x^3 - 9x^2 + 12x - 1 = a \text{ ㉠}$$

방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선

$y=2x^3-9x^2+12x-1$ 과 직선 $y=a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$$f(x)=2x^3-9x^2+12x-1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

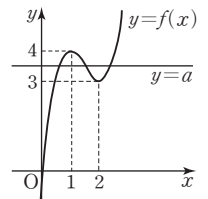
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	4 극대	$\searrow$	3 극소	$\nearrow$

즉 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나려면 $3 < a < 4$

따라서 $p=3, q=4$ 이므로

$$p+q=3+4=7$$



14-1 ㉡ 16

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - k = 0 \text{에서}$$

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x = k \text{ ㉠}$$

방정식 ㉠이 서로 다른 네 실근을 가지려면 곡선

$y=x^4-4x^3-2x^2+12x$ 과 직선 $y=k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나야 한다.

$$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x \text{라 하면}$$

$$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12$$

$$=4(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

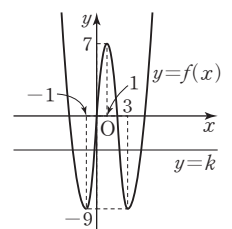
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-9 극소	$\nearrow$	7 극대	$\searrow$	-9 극소	$\nearrow$

즉 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나려면 $-9 < k < 7$

따라서 $\alpha=-9, \beta=7$ 이므로

$$\beta-\alpha=7-(-9)=16$$



15 ㉡ 2

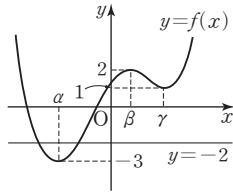
도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 α, β, γ 이므로

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=\alpha \text{ 또는 } x=\beta \text{ 또는 } x=\gamma$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	α	...	β	...	γ	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-3 극소	$\nearrow$	2 극대	$\searrow$	1 극소	$\nearrow$

즉 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 방정식 $f(x)+2=0$, 즉 $f(x)=-2$ 의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-2$ 의 교점의 개수와 같으므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

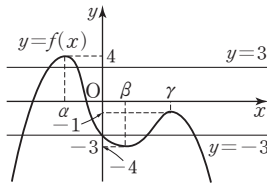


15-1 ㉮6

도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 α, β, γ 이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	4 극대	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$	-1 극대	$\searrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 방정식 $|f(x)|-3=0$, 즉 $|f(x)|=3$ 의 실근의 개수는 $f(x)=3$ 또는 $f(x)=-3$ 을 만족시키는 x 의 개수와 같으므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 $2+4=6$

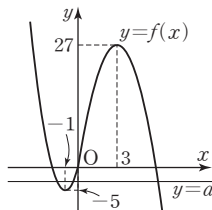


16 ㉮ -5 < a < 0

$x^3-2x^2+a=x^2+9x$ 에서
 $-x^3+3x^2+9x=a$
 $f(x)=-x^3+3x^2+9x$ 라 하면
 $f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-5 극소	$\nearrow$	27 극대	$\searrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 x 좌표가 한 개는 양수, 두 개는 서로 다른 음수가 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는 오른쪽 그림에서
 $-5 < a < 0$



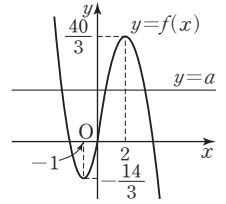
16-1 ㉮①

$\frac{4}{3}x^3-2x^2-8x+a=0$ 에서
 $-\frac{4}{3}x^3+2x^2+8x=a$
 $f(x)=-\frac{4}{3}x^3+2x^2+8x$ 라 하면
 $f'(x)=-4x^2+4x+8=-4(x+1)(x-2)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{14}{3}$ 극소	$\nearrow$	$\frac{40}{3}$ 극대	$\searrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 x 좌표가 두 개는 서로 다른 양수, 한 개는 음수가 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는 오른쪽 그림에서



$$0 < a < \frac{40}{3}$$

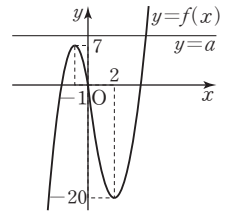
따라서 $M=13, m=1$ 이므로
 $M-m=13-1=12$

17 ㉮8

$2x^3-x^2-13x=2x^2-x+a$ 에서
 $2x^3-3x^2-12x=a$
 $f(x)=2x^3-3x^2-12x$ 라 하면
 $f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	7 극대	$\searrow$	-20 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 x 좌표가 오직 한 개의 양수가 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는 오른쪽 그림에서
 $a > 7$



따라서 정수 a 의 최솟값은 8이다.

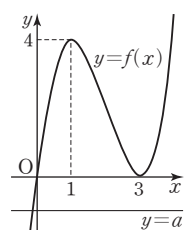
17-1 ㉮ -1

$x^3-4x^2+6x=2x^2-3x+a$ 에서
 $x^3-6x^2+9x=a$
 $f(x)=x^3-6x^2+9x$ 라 하면
 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	4 극대	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 x 좌표가 오직 한 개의 음수가 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는 오른쪽 그림에서
 $a < 0$

따라서 정수 a 의 최댓값은 -1이다.



18 ㉔ 6

$$3x^4 - 8x^3 - 18x^2 - k = 0 \text{에서}$$

$$3x^4 - 8x^3 - 18x^2 = k$$

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 36x = 12x(x+1)(x-3)$$

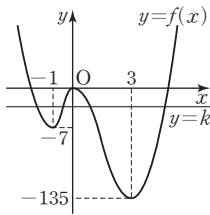
$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-7 극소	$\nearrow$	0 극대	$\searrow$	-135 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표가 두 개는 서로 다른 양수, 두 개는 서로 다른 음수가 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위는 오른쪽 그림에서 $-7 < k < 0$

따라서 정수 k 의 값은 $-6, -5, -4, \dots, -1$ 이므로 그 개수는 6이다.



18-1 ㉔ 10

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + k = 0 \text{에서}$$

$$-3x^4 + 4x^3 + 12x^2 = k$$

$$f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 24x = -12x(x+1)(x-2)$$

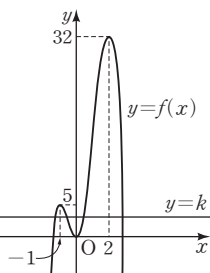
$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$	32 극대	$\searrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표가 두 개는 서로 다른 양수, 두 개는 서로 다른 음수가 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위는 오른쪽 그림에서 $0 < k < 5$

따라서 정수 k 의 값은 1, 2, 3, 4이므로 그 합은 $1+2+3+4=10$



19 ㉔ $-3 < k < 5$

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + k + 3 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$k+3$ 극대	$\searrow$	$k-5$ 극소	$\nearrow$

이때 삼차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) < 0$ 이어야 하므로 $(k+3)(k-5) < 0 \quad \therefore -3 < k < 5$

19-1 ㉔ ③

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - k - 1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$-k+4$ 극대	$\searrow$	$-k+3$ 극소	$\nearrow$

이때 삼차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) < 0$ 이어야 하므로

$$(-k+4)(-k+3) < 0 \quad \therefore 3 < k < 4$$

따라서 $a=3, b=4$ 이므로

$$a+b=3+4=7$$

20 ㉔ ②

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - a + 5 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$-a+5$ 극대	$\searrow$	$-a+1$ 극소	$\nearrow$

이때 삼차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) = 0$ 이어야 하므로

$$(-a+5)(-a+1) = 0 \quad \therefore a=1 \text{ 또는 } a=5$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$1+5=6$$

20-1 ㉔ 1

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 4a \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6ax = 3x(x-2a)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2a$$

$a > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	$2a$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$4a$ 극대	$\searrow$	$-4a^3+4a$ 극소	$\nearrow$

..... ①

이때 삼차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) = 0$ 이어야 하므로

$$4a(-4a^3+4a) = 0, -16a^2(a+1)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = 1 (\because a > 0)$$

..... ②

채점 기준	비율
① $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 4a$ 라 하고 함수 $f(x)$ 의 극값을 구할 수 있다.	40%
② a 의 값을 구할 수 있다.	60%

21 ㉔ $0 < a < 1$

$$f(x) = 2x^3 - 6ax + 4a \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6a = 6(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -\sqrt{a} \text{ 또는 } x = \sqrt{a}$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 실근을 가져야 하므로 $a > 0$ ㉠

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\sqrt{a}$	...	$\sqrt{a}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$4a\sqrt{a}+4a$ 극대	$\searrow$	$-4a\sqrt{a}+4a$ 극소	$\nearrow$

이때 삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 오직 하나의 실근을 가지려면

(극댓값) $\times$ (극솟값) > 0 이어야 하므로

$$(4a\sqrt{a}+4a)(-4a\sqrt{a}+4a) > 0$$

$$\{4a(\sqrt{a}+1)\} \{-4a(\sqrt{a}-1)\} > 0$$

$$a^2(a-1) < 0 \quad \therefore a < 0 \text{ 또는 } 0 < a < 1 \quad \text{.....㉡}$$

㉠, ㉡에서 $0 < a < 1$

21-1 ㉢ $0 < a < 9$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2ax + 4a \text{에서}$$

$$f'(x) = -2x^2 + 2a = -2(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -\sqrt{a} \text{ 또는 } x = \sqrt{a}$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 실근을 가져야 하므로 $a > 0$ ㉠

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\sqrt{a}$	...	$\sqrt{a}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{4}{3}a\sqrt{a}+4a$ 극소	$\nearrow$	$\frac{4}{3}a\sqrt{a}+4a$ 극대	$\searrow$

이때 삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 오직 하나의 실근을 가지려면

(극댓값) $\times$ (극솟값) > 0 이어야 하므로

$$\left(\frac{4}{3}a\sqrt{a}+4a\right)\left(-\frac{4}{3}a\sqrt{a}+4a\right) > 0$$

$$\left\{\frac{4}{3}a(\sqrt{a}+3)\right\}\left\{-\frac{4}{3}a(\sqrt{a}-3)\right\} > 0$$

$$a^2(a-9) < 0 \quad \therefore a < 0 \text{ 또는 } 0 < a < 9$$

㉠, ㉡에서 $0 < a < 9$

22 ㉢ $-1 < a < 1$

곡선 $y = 4x^3 - 2x$ 와 직선 $y = x + a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $4x^3 - 2x = x + a$, 즉 $4x^3 - 3x - a = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$$f(x) = 4x^3 - 3x - a \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 12x^2 - 3 = 3(2x+1)(2x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{1}{2}$	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$1-a$ 극대	$\searrow$	$-1-a$ 극소	$\nearrow$

이때 삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

(극댓값) $\times$ (극솟값) < 0 이어야 하므로

$$(1-a)(-1-a) < 0 \quad \therefore -1 < a < 1$$

22-1 ㉢ ㉣

곡선 $y = 2x^3 + 6x^2 + 2x$ 와 직선 $y = 20x + k$ 가 오직 한 점에서 만

나려면 방정식 $2x^3 + 6x^2 + 2x = 20x + k$, 즉

$2x^3 + 6x^2 - 18x - k = 0$ 이 한 실근과 두 허근을 가져야 한다.

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x - k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 12x - 18 = 6(x+3)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$54-k$ 극대	$\searrow$	$-10-k$ 극소	$\nearrow$

이때 삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 한 실근과 두 허근을 가지려면

(극댓값) $\times$ (극솟값) > 0 이어야 하므로

$$(54-k)(-10-k) > 0 \quad \therefore k < -10 \text{ 또는 } k > 54$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 55이다.

23 ㉢ ㉣

곡선 $y = x^3 - 4x + a$ 와 직선 $y = 8x$ 가 한 점에서 접하고 다른 한 점에서 만나려면 방정식 $x^3 - 4x + a = 8x$, 즉 $x^3 - 12x + a = 0$ 이 중근과 다른 한 실근을 가져야 한다.

$$f(x) = x^3 - 12x + a \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$16+a$ 극대	$\searrow$	$-16+a$ 극소	$\nearrow$

이때 삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

(극댓값) $\times$ (극솟값) $= 0$ 이어야 하므로

$$(16+a)(-16+a) = 0 \quad \therefore a = 16 (\because a > 0)$$

23-1 ㉢ ㉣

곡선 $y = x^3 - 3x^2 - 5x$ 와 직선 $y = 4x + k$ 가 한 점에서 접하고 다른 한 점에서 만나려면 방정식 $x^3 - 3x^2 - 5x = 4x + k$, 즉

$x^3 - 3x^2 - 9x - k = 0$ 이 중근과 다른 한 실근을 가져야 한다.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$5-k$ 극대	$\searrow$	$-27-k$ 극소	$\nearrow$

이때 삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

$$(극댓값) \times (극솟값) = 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$(5-k)(-27-k)=0 \quad \therefore k=5 \quad (\because k>0)$$

24 ㉮ 5

두 곡선 $y=x^3-x^2$, $y=2x^2-a$ 가 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $x^3-x^2=2x^2-a$, 즉 $x^3-3x^2+a=0$ 이 한 실근과 두 허근을 가져야 한다.

$$f(x)=x^3-3x^2+a \text{ 라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{ 에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	a 극대	$\searrow$	$-4+a$ 극소	$\nearrow$

..... ①

이때 삼차방정식 $f(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 가지려면
(극댓값) $\times$ (극솟값) > 0 이어야 하므로

$$a(-4+a) > 0 \quad \therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 4 \quad \text{..... ②}$$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 5이다. ③

채점 기준	비율
① $f(x)=x^3-3x^2+a$ 라 하고 함수 $f(x)$ 의 극값을 구할 수 있다.	50%
② 삼차방정식의 근의 판별을 이용하여 실수 a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
③ 자연수 a 의 최솟값을 구할 수 있다.	10%

24-1 ㉮ -18

두 곡선 $y=x^3-x^2-4x+2$, $y=2x^2+5x+a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $x^3-x^2-4x+2=2x^2+5x+a$, 즉 $x^3-3x^2-9x-a+2=0$ 이 중근과 다른 한 실근을 가져야 한다.

$$f(x)=x^3-3x^2-9x-a+2 \text{ 라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{ 에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$7-a$ 극대	$\searrow$	$-25-a$ 극소	$\nearrow$

이때 삼차방정식 $f(x)=0$ 이 중근과 다른 한 실근을 가지려면
(극댓값) $\times$ (극솟값) $= 0$ 이어야 하므로

$$(7-a)(-25-a)=0 \quad \therefore a=-25 \text{ 또는 } a=7$$

따라서 모든 정수 a 의 값의 합은

$$-25+7=-18$$

25 ㉮ $2 < a < 3$

$$y=x^3-3x \text{ 에서 } y'=3x^2-3$$

점 $(-1, a)$ 에서 곡선 $y=x^3-3x$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를 (t, t^3-3t) 라 하면 접선의 방정식은

$$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t)$$

이 직선이 점 $(-1, a)$ 를 지나므로

$$a-(t^3-3t)=(3t^2-3)(-1-t)$$

$$\therefore 2t^3+3t^2+a-3=0 \quad \text{..... ①}$$

점 $(-1, a)$ 에서 주어진 곡선에 서로 다른 세 개의 접선을 그으려

면 t 에 대한 삼차방정식 ①이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$$f(t)=2t^3+3t^2+a-3 \text{ 이라 하면}$$

$$f'(t)=6t^2+6t=6t(t+1)$$

$$f'(t)=0 \text{ 에서 } t=-1 \text{ 또는 } t=0$$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	-1	...	0	...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\nearrow$	$a-2$ 극대	$\searrow$	$a-3$ 극소	$\nearrow$

이때 삼차방정식 $f(t)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

(극댓값) $\times$ (극솟값) < 0 이어야 하므로

$$(a-2)(a-3) < 0 \quad \therefore 2 < a < 3$$

참고

점 $(-1, a)$ 에서 곡선에 그은 접선의 기울기와 두 점 $(-1, a)$, (t, t^3-3t) 를 지나는 직선의 기울기가 같음을 이용하여 풀어도 된다.

$$\text{즉 } 3t^2-3=\frac{t^3-3t-a}{t+1} \text{ 이므로}$$

$$(3t^2-3)(t+1)=t^3-3t-a$$

$$\therefore 2t^3+3t^2+a-3=0$$

25-1 ㉮ ③

$$y=x^3+6x^2-3x+2 \text{ 에서 } y'=3x^2+12x-3$$

점 $(0, a)$ 에서 곡선 $y=x^3+6x^2-3x+2$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를 (t, t^3+6t^2-3t+2) 라 하면 접선의 방정식은

$$y-(t^3+6t^2-3t+2)=(3t^2+12t-3)(x-t)$$

이 직선이 점 $(0, a)$ 를 지나므로

$$a-(t^3+6t^2-3t+2)=(3t^2+12t-3)(-t)$$

$$\therefore 2t^3+6t^2+a-2=0 \quad \text{..... ①}$$

점 $(0, a)$ 에서 주어진 곡선에 서로 다른 세 개의 접선을 그으려면 t 에 대한 삼차방정식 ①이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$$f(t)=2t^3+6t^2+a-2 \text{ 라 하면}$$

$$f'(t)=6t^2+12t=6t(t+2)$$

$$f'(t)=0 \text{ 에서 } t=-2 \text{ 또는 } t=0$$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	-2	...	0	...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\nearrow$	$a+6$ 극대	$\searrow$	$a-2$ 극소	$\nearrow$

이때 삼차방정식 $f(t)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

(극댓값) $\times$ (극솟값) < 0 이어야 하므로

$$(a+6)(a-2) < 0 \quad \therefore -6 < a < 2$$

따라서 $\alpha=-6$, $\beta=2$ 이므로

$$\alpha+\beta=-6+2=-4$$

26 ㉮ 1

$$y=-x^3+3kx+1 \text{ 에서 } y'=-3x^2+3k$$

점 $(-1, 0)$ 에서 곡선 $y=-x^3+3kx+1$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t, -t^3+3kt+1)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$y-(-t^3+3kt+1)=(-3t^2+3k)(x-t)$$

이 직선이 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로

$0 - (-t^3 + 3kt + 1) = (-3t^2 + 3k)(-1 - t)$
 $\therefore 2t^3 + 3t^2 - 3k + 1 = 0$ ㉑
 점 $(-1, 0)$ 에서 주어진 곡선에 오직 한 개의 접선을 그으려면 t 에 대한 삼차방정식 ㉑이 한 실근과 두 허근을 가져야 한다.
 $f(t) = 2t^3 + 3t^2 - 3k + 1$ 이라 하면
 $f'(t) = 6t^2 + 6t = 6t(t+1)$
 $f'(t) = 0$ 에서 $t = -1$ 또는 $t = 0$
 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	-1	...	0	...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\nearrow$	$-3k+2$ 극대	$\searrow$	$-3k+1$ 극소	$\nearrow$

이때 삼차방정식 $f(t) = 0$ 이 한 실근과 두 허근을 가지려면
 $(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) > 0$ 이어야 하므로
 $(-3k+2)(-3k+1) > 0 \quad \therefore k < \frac{1}{3} \text{ 또는 } k > \frac{2}{3}$
 따라서 자연수 k 의 최솟값은 1이다.

26-1 ㉑ ㉑

$y = x^3 - 3x^2 + k$ 에서 $y' = 3x^2 - 6x$
 점 $(3, 0)$ 에서 곡선 $y = x^3 - 3x^2 + k$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t, t^3 - 3t^2 + k)$ 라 하면 접선의 방정식은
 $y - (t^3 - 3t^2 + k) = (3t^2 - 6t)(x - t)$
 이 직선이 점 $(3, 0)$ 을 지나므로
 $0 - (t^3 - 3t^2 + k) = (3t^2 - 6t)(3 - t)$
 $\therefore 2t^3 - 12t^2 + 18t - k = 0$ ㉑
 점 $(3, 0)$ 에서 주어진 곡선에 오직 한 개의 접선을 그으려면 t 에 대한 삼차방정식 ㉑이 한 실근과 두 허근을 가져야 한다.
 $f(t) = 2t^3 - 12t^2 + 18t - k$ 라 하면
 $f'(t) = 6t^2 - 24t + 18 = 6(t-1)(t-3)$
 $f'(t) = 0$ 에서 $t = 1$ 또는 $t = 3$
 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	1	...	3	...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\nearrow$	$8-k$ 극대	$\searrow$	$-k$ 극소	$\nearrow$

이때 삼차방정식 $f(t) = 0$ 이 한 실근과 두 허근을 가지려면
 $(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) > 0$ 이어야 하므로
 $(8-k)(-k) > 0 \quad \therefore k < 0 \text{ 또는 } k > 8$
 따라서 자연수 k 의 최솟값은 9이다.

27 ㉑ ㉑

$y = x^3 + 1$ 에서 $y' = 3x^2$
 점 $(2, a)$ 에서 곡선 $y = x^3 + 1$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t, t^3 + 1)$ 이라 하면 접선의 방정식은
 $y - (t^3 + 1) = 3t^2(x - t)$
 이 직선이 점 $(2, a)$ 를 지나므로
 $a - (t^3 + 1) = 3t^2(2 - t)$
 $\therefore 2t^3 - 6t^2 + a - 1 = 0$ ㉑
 점 $(2, a)$ 에서 주어진 곡선에 서로 다른 두 개의 접선을 그으려면 t 에 대한 삼차방정식 ㉑이 중근과 다른 한 실근을 가져야 한다.
 $f(t) = 2t^3 - 6t^2 + a - 1$ 이라 하면

$f'(t) = 6t^2 - 12t = 6t(t-2)$
 $f'(t) = 0$ 에서 $t = 0$ 또는 $t = 2$
 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	0	...	2	...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\nearrow$	$a-1$ 극대	$\searrow$	$a-9$ 극소	$\nearrow$

이때 삼차방정식 $f(t) = 0$ 이 중근과 다른 한 실근을 가지려면
 $(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) = 0$ 이어야 하므로
 $(a-1)(a-9) = 0 \quad \therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 9$
 그런데 점 $(2, a)$ 는 곡선 $y = x^3 + 1$ 밖의 점이므로 $a \neq 9$
 따라서 실수 a 의 값은 1이다.

27-1 ㉑ -2

$y = x^3 - 3x + 1$ 에서 $y' = 3x^2 - 3$
 점 $(1, a)$ 에서 곡선 $y = x^3 - 3x + 1$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t, t^3 - 3t + 1)$ 이라 하면 접선의 방정식은
 $y - (t^3 - 3t + 1) = (3t^2 - 3)(x - t)$
 이 직선이 점 $(1, a)$ 를 지나므로
 $a - (t^3 - 3t + 1) = (3t^2 - 3)(1 - t)$
 $\therefore 2t^3 - 3t^2 + a + 2 = 0$ ㉑
 점 $(1, a)$ 에서 주어진 곡선에 서로 다른 두 개의 접선을 그으려면 t 에 대한 삼차방정식 ㉑이 중근과 다른 한 실근을 가져야 한다.
 $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + a + 2$ 라 하면
 $f'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t-1)$
 $f'(t) = 0$ 에서 $t = 0$ 또는 $t = 1$
 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	0	...	1	...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\nearrow$	$a+2$ 극대	$\searrow$	$a+1$ 극소	$\nearrow$

이때 삼차방정식 $f(t) = 0$ 이 중근과 다른 한 실근을 가지려면
 $(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) = 0$ 이어야 하므로
 $(a+2)(a+1) = 0 \quad \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = -1$
 그런데 점 $(1, a)$ 는 곡선 $y = x^3 - 3x + 1$ 밖의 점이므로
 $a \neq -1$
 따라서 실수 a 의 값은 -2이다.

28 ㉑ ㉑

$f(x) = x^4 - 4x^3 + k - 2$ 라 하면
 $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 3$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	3	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$k-2$	$\searrow$	$k-29$ 극소	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x = 3$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(3) = k - 29$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이 성립하려면
 $k - 29 > 0 \quad \therefore k > 29$
 따라서 실수 k 의 값이 될 수 없는 것은 ㉑이다.

28-1 ㉑

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + k$ 라 하면

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	k	$\searrow$	$-1+k$ 극소	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(1) = -1+k$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-1+k \geq 0 \quad \therefore k \geq 1$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 1이다.

29 ㉒

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - k$ 라 하면

$$f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x+1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{5}{12}-k$ 극소	$\nearrow$	$-k$ 극대	$\searrow$	$-\frac{8}{3}-k$ 극소	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(2) = -\frac{8}{3}-k$ 이

므로 임의의 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-\frac{8}{3}-k \geq 0 \quad \therefore k \leq -\frac{8}{3}$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 $-\frac{8}{3}$ 이다.

29-1 ㉓ -1

$x^4 - \frac{1}{3}x^3 > x^3 + k$ 에서 $x^4 - \frac{4}{3}x^3 - k > 0$

$f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - k$ 라 하면

$$f'(x) = 4x^3 - 4x^2 = 4x^2(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-k$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}-k$ 극소	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(1) = -\frac{1}{3}-k$ 이

므로 임의의 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이 성립하려면

$$-\frac{1}{3}-k > 0 \quad \therefore k < -\frac{1}{3}$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -1이다.

30 ㉔ 5

$f(x) = x^4 - 4k^3x + 48$ 이라 하면

$$f'(x) = 4x^3 - 4k^3 = 4(x-k)(x^2+kx+k^2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = k (\because x^2+kx+k^2 > 0)$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	k	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-3k^4+48$ 극소	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=k$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(k) = -3k^4+48$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-3k^4+48 \geq 0$$

$$k^4 - 16 \leq 0, (k+2)(k-2)(k^2+4) \leq 0$$

$$(k+2)(k-2) \leq 0 (\because k^2+4 > 0) \quad \therefore -2 \leq k \leq 2$$

따라서 정수 k 의 값은 -2, -1, 0, 1, 2이므로 그 개수는 5이다.

30-1 ㉕ $-1 < a < 1$

$f(x) = x^4 - 4a^3x + 3$ 이라 하면

$$f'(x) = 4x^3 - 4a^3 = 4(x-a)(x^2+ax+a^2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = a (\because x^2+ax+a^2 > 0)$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-3a^4+3$ 극소	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(a) = -3a^4+3$

이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이 성립하려면

$$-3a^4+3 > 0, a^4-1 < 0, (a+1)(a-1)(a^2+1) < 0$$

$$(a+1)(a-1) < 0 (\because a^2+1 > 0) \quad \therefore -1 < a < 1$$

31 ㉖ 1

$f(x) = x^3 + 6x^2 - 2k + 3$ 이라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 12x = 3x(x+4)$$

$-4 < x < 0$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(-4, 0)$ 에서 감소한다.

즉 $-4 < x < 0$ 에서 $f(x) > 0$ 이라면 $f(0) \geq 0$ 이어야 하므로

$$-2k+3 \geq 0 \quad \therefore k \leq \frac{3}{2}$$

따라서 자연수 k 의 최댓값은 1이다.

31-1 ㉗ 5

$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + a$ 라 하면

$$f'(x) = 12x^2 - 6x - 6 = 6(2x+1)(x-1)$$

$-\frac{1}{2} < x < 1$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간

$(-\frac{1}{2}, 1)$ 에서 감소한다.

즉 $-\frac{1}{2} < x < 1$ 에서 $f(x) > 0$ 이라면 $f(1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$4-3-6+a \geq 0 \quad \therefore a \geq 5$$

32 ㉘ 5

$x^3 \geq 2x^2 + 4x - a$ 에서 $x^3 - 2x^2 - 4x + a \geq 0$

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + a$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 = (3x+2)(x-2)$$

..... ①

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 감소한다. ②
 즉 $0 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이라면 $f(1) \geq 0$ 이어야 하므로
 $1 - 2 - 4 + a \geq 0 \quad \therefore a \geq 5$
 따라서 10 미만의 자연수 a 의 값은 5, 6, 7, 8, 9이므로 그 개수는 5이다. ③

채점 기준	비율
① $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + a$ 라 하고 $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	20%
② 주어진 구간에서 $f(x)$ 의 증가와 감소를 판단할 수 있다.	30%
③ 주어진 구간에서 부등식이 항상 성립하도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하고 10 미만의 자연수 a 의 개수를 구할 수 있다.	50%

32-1 ㉮ -9

$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + a$ 라 하면
 $f'(x) = -x^2 + 4x = -x(x-4)$
 $1 \leq x \leq 3$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 증가한다.
 즉 $1 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이라면 $f(3) \leq 0$ 이어야 하므로
 $-9 + 18 + a \leq 0 \quad \therefore a \leq -9$
 따라서 실수 a 의 최댓값은 -9 이다.

33 ㉮ -4

$f(x) = -2x^3 + 3x^2 - a$ 라 하면
 $f'(x) = -6x^2 + 6x = -6x(x-1)$
 $x > 2$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(2, \infty)$ 에서 감소한다.
 즉 $x > 2$ 에서 $f(x) < 0$ 이라면 $f(2) \leq 0$ 이어야 하므로
 $-16 + 12 - a \leq 0 \quad \therefore a \geq -4$
 따라서 실수 a 의 최솟값은 -4 이다.

33-1 ㉮ $a < 2$

$x^3 - 3x^2 - x < 8x - a$ 에서 $x^3 - 3x^2 - 9x + a < 0$
 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + a$ 라 하면
 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$
 $x \leq -2$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -2]$ 에서 증가한다.
 즉 $x \leq -2$ 에서 $f(x) < 0$ 이라면 $f(-2) < 0$ 이어야 하므로
 $-8 - 12 + 18 + a < 0 \quad \therefore a < 2$

34 ㉮ 23

$2x^2 - 9 \leq x^3 - 4x^2 + a$ 에서 $x^3 - 6x^2 + a + 9 \geq 0$
 $f(x) = x^3 - 6x^2 + a + 9$ 라 하면
 $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 4$
 구간 $[-2, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	0	...	4	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$a-23$	$\nearrow$	$a+9$ 극대	$\searrow$	$a-23$ 극소	$\nearrow$

$x \geq -2$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 또는 $x = 4$ 일 때 최소이고, 최솟

값은 $f(-2) = f(4) = a - 23$ 이므로
 $x \geq -2$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면
 $a - 23 \geq 0 \quad \therefore a \geq 23$
 따라서 실수 a 의 최솟값은 23이다.

34-1 ㉮ ⑤

$f(x) = 4x^3 - 12x + a - 2$ 라 하면
 $f'(x) = 12x^2 - 12 = 12(x+1)(x-1)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$ ($\because x \geq 0$)
 구간 $[0, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$a-2$	$\searrow$	$a-10$ 극소	$\nearrow$

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 일 때 최소이고, 최솟값은
 $f(1) = a - 10$ 이므로
 $x \geq 0$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면
 $a - 10 \geq 0 \quad \therefore a \geq 10$

35 ㉮ ①

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - k$ 라 하면
 $f'(x) = 3x^2 - 10x + 3 = (3x-1)(x-3)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = \frac{1}{3}$ 또는 $x = 3$
 구간 $(0, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{3}$	...	3	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-k$	$\nearrow$	$\frac{13}{27} - k$ 극대	$\searrow$	$-9 - k$ 극소	$\nearrow$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = 3$ 일 때 최소이고, 최솟값은
 $f(3) = -9 - k$ 이므로
 $x > 0$ 에서 $f(x) > 0$ 이 성립하려면
 $-9 - k > 0 \quad \therefore k < -9$

35-1 ㉮ ⑤

$f(x) = 2x^3 - 6x + a$ 라 하면
 $f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x+1)(x-1)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$
 구간 $(0, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$-4+a$ 극소	$\nearrow$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 일 때 최소이고, 최솟값은
 $f(1) = -4 + a$ 이므로
 $x > 0$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면
 $-4 + a \geq 0 \quad \therefore a \geq 4$
 따라서 실수 a 의 최솟값은 4이다.

36 ㉔②

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - a + 3$ 이라 하면

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 1$

단한구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-a+16$	$\searrow$	$-a-4$ 극소	$\nearrow$	$-a+7$

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$f(1) = -a-4 \text{ 이므로}$$

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-a-4 \geq 0 \quad \therefore a \leq -4$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 -4 이다.

36-1 ㉔①

$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x - a + 3$ 이라 하면

$$f'(x) = 12x^2 - 6x - 6 = 6(2x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = 1$

단한구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	$-\frac{1}{2}$	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$2-a$	$\nearrow$	$\frac{19}{4}-a$ 극대	$\searrow$	$-2-a$ 극소	$\nearrow$	$11-a$

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$f(1) = -2-a \text{ 이므로}$$

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-2-a \geq 0 \quad \therefore a \leq -2$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 -2 이다.

37 ㉔ $a > 8$

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면

$$h(x) = x^4 + 6x^2 + a - (4x^3 + 8x)$$

$$= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + a$$

$$h'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 8 = 4(x-2)(x^2 - x + 1)$$

$$h'(x) = 0 \text{에서 } x = 2 \quad (\because x^2 - x + 1 > 0)$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	2	...
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	$-8+a$ 극소	$\nearrow$

즉 함수 $h(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $h(2) = -8+a$ 이

므로 모든 실수 x 에 대하여 $h(x) > 0$ 이 성립하려면

$$-8+a > 0 \quad \therefore a > 8$$

37-1 ㉔ 6

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면

$$h(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + a - (x^3 - 4x^2 + 8x)$$

$$= x^4 + 2x^2 - 8x + a$$

$$h'(x) = 4x^3 + 4x - 8 = 4(x-1)(x^2 + x + 2)$$

$$h'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 \quad (\because x^2 + x + 2 > 0)$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	$-5+a$ 극소	$\nearrow$

즉 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $h(1) = -5+a$ 이

므로 모든 실수 x 에 대하여 $h(x) > 0$ 이 성립하려면

$$-5+a > 0 \quad \therefore a > 5$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 6이다.

38 ㉔②

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면

$$h(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2 - (2x^2 + k + 1)$$

$$= x^3 - 3x - k + 1$$

$$h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$h'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 \quad (\because 0 \leq x \leq 3)$$

단한구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$	$-k+1$	$\searrow$	$-k-1$ 극소	$\nearrow$	$-k+19$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$h(1) = -k-1 \text{ 이므로}$$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $h(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-k-1 \geq 0 \quad \therefore k \leq -1$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 -1 이다.

38-1 ㉔ $a \leq -4$

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면

$$h(x) = x^3 - x^2 + x - (2x^2 + x + a)$$

$$= x^3 - 3x^2 - a$$

$$h'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$h'(x) = 0 \text{에서 } x = 2 \quad (\because 1 \leq x \leq 3)$$

단한구간 $[1, 3]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	2	...	3
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$	$-2-a$	$\searrow$	$-4-a$ 극소	$\nearrow$	$-a$

$1 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $h(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$h(2) = -4-a \text{ 이므로}$$

$1 \leq x \leq 3$ 에서 $h(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-4-a \geq 0 \quad \therefore a \leq -4$$

39 ㉔③

임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 이라면

$(f(x) \text{의 최솟값}) \geq (g(x) \text{의 최댓값})$ 이어야 한다.

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	3	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$		10		-17 극소	

함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(3) = -17$

$$g(x) = -2x^2 + 8x + a$$

$$= -2(x-2)^2 + a + 8$$

이므로 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 $a+8$ 이다.

$$\text{즉 } -17 \geq a+8 \text{이므로 } a \leq -25$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 -25 이다.

39-1 ㉮ ③

임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a) \geq g(b)$ 이려면

$(f(x) \text{의 최솟값}) \geq (g(x) \text{의 최댓값})$ 이어야 한다.

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - 8x \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 4x - 8 = 4(x-1)(x^2 + x + 2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=1 (\because x^2 + x + 2 > 0)$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		-5 극소	

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(1) = -5$

$$g(x) = -2x^2 + 12x - k$$

$$= -2(x-3)^2 - k + 18$$

이므로 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 $-k+18$ 이다.

$$\text{즉 } -5 \geq -k+18 \text{이므로 } k \geq 23$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 23 이다.

40 ㉮ ①

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t, a = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

점 P의 가속도가 0이므로

$$6t - 12 = 0 \quad \therefore t = 2$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 속도는

$$12 - 24 = -12$$

40-1 ㉮ ③

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 18t + 34, a = \frac{dv}{dt} = 6t - 18$$

점 P의 속도가 10이 될 때는

$$3t^2 - 18t + 34 = 10 \text{에서 } 3t^2 - 18t + 24 = 0$$

$$3(t-2)(t-4) = 0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=4$$

따라서 점 P의 속도가 처음으로 10이 되는 순간은 $t=2$ 일 때이고

그때의 점 P의 가속도는 $12 - 18 = -6$

41 ㉮ ③

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = t^2 + 9, a = \frac{dv}{dt} = 2t$$

즉 $t=3$ 에서의 점 P의 속도는 $9+9=18$, 가속도는 6이므로

$$p=18, q=6$$

$$\therefore p+q=18+6=24$$

41-1 ㉮ 6

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 2pt, a = \frac{dv}{dt} = 6t + 2p \quad \dots\dots ①$$

즉 $t=2$ 에서의 점 P의 속도는 $12+4p$, 가속도는 $12+2p$ $\dots\dots ②$

이때 $12+4p=4$ 이므로 $p=-2$

$$\therefore q = 12 + 2 \times (-2) = 8 \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore p+q = -2+8=6 \quad \dots\dots ④$$

채점 기준	비율
① 시간 t 에서의 점 P의 속도와 가속도를 구할 수 있다.	40%
② $t=2$ 에서의 점 P의 속도와 가속도를 구할 수 있다.	30%
③ p, q 의 값을 구할 수 있다.	20%
④ $p+q$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

42 ㉮ 12

두 점 P, Q의 시간 t 에서의 속도를 각각 $v_P(t), v_Q(t)$ 라 하면

$$v_P(t) = \frac{dx_P}{dt} = t^2 + 4, v_Q(t) = \frac{dx_Q}{dt} = 4t$$

$$v_P(t) = v_Q(t) \text{에서 } t^2 + 4 = 4t$$

$$t^2 - 4t + 4 = 0, (t-2)^2 = 0 \quad \therefore t=2$$

즉 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간은 $t=2$ 일 때이므로 그때의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$$x_P(2) = \frac{8}{3} + 8 - \frac{2}{3} = 10$$

$$x_Q(2) = 8 - 10 = -2$$

$$\therefore |x_P(2) - x_Q(2)| = |10 - (-2)| = 12$$

42-1 ㉮ 29

두 점 P, Q의 시간 t 에서의 속도를 각각 $v_P(t), v_Q(t)$ 라 하면

$$v_P(t) = f'(t) = 3t^2 - 4t - 6, v_Q(t) = g'(t) = 2t + 3$$

$$v_P(t) = v_Q(t) \text{에서 } 3t^2 - 4t - 6 = 2t + 3$$

$$3t^2 - 6t - 9 = 0, 3(t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t=3 (\because t>0)$$

즉 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간은 $t=3$ 일 때이므로 그때의

두 점 P, Q의 위치는

$$f(3) = 27 - 18 - 18 = -9$$

$$g(3) = 9 + 9 + 2 = 20$$

$$\therefore |f(3) - g(3)| = |-9 - 20| = 29$$

43 ㉮ $2 < t < 4$

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = t^3 - 9t^2 + 24t - 5, a = \frac{dv}{dt} = 3t^2 - 18t + 24$$

점 P의 속도가 감소하면 $a < 0$ 이므로

$$3t^2 - 18t + 24 < 0, 3(t-2)(t-4) < 0 \quad \therefore 2 < t < 4$$

43-1 ㉮ 1

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -t^3 + 3t + 2, a = \frac{dv}{dt} = -3t^2 + 3 \quad \dots\dots ①$$

점 P의 속도가 증가하면 $a > 0$ 이므로

$$-3t^2 + 3 > 0, t^2 - 1 < 0$$

$$(t+1)(t-1) < 0 \quad \therefore 0 < t < 1 (\because t > 0)$$

따라서 $\alpha = 0, \beta = 1$ 이므로 ②

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 + 1 = 1 \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① 시간 t 에서의 점 P의 속도와 가속도를 구할 수 있다.	40%
② α, β 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $\alpha + \beta$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

44 ㉮ 36

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = f'(t) = 3t^2 - 12t = 3(t-2)^2 - 12$$

$0 \leq t \leq 6$ 에서 $-12 \leq f'(t) \leq 36$ 이고, 속력은 $|f'(t)|$ 이므로

$$0 \leq |f'(t)| \leq 36$$

따라서 $0 \leq t \leq 6$ 에서 점 P의 속력의 최댓값은 36이다.

44-1 ㉮ ④

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = f'(t) = t^2 - 8t + 7 = (t-4)^2 - 9$$

$0 \leq t \leq 5$ 에서 $-9 \leq f'(t) \leq 7$ 이고, 속력은 $|f'(t)|$ 이므로

$$0 \leq |f'(t)| \leq 9$$

따라서 $0 \leq t \leq 5$ 에서 점 P의 속력의 최댓값은 9이다.

45 ㉮ 48

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = f'(t) = 4t^3 - 10t^2 - 8t$$

$$v'(t) = 12t^2 - 20t - 8 = 4(3t+1)(t-2)$$

$$v'(t) = 0 \text{에서 } t = 2 (\because 1 \leq t \leq 3)$$

단현구간 $[1, 3]$ 에서 함수 $v(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1	...	2	...	3
$v'(t)$		-	0	+	
$v(t)$	-14	$\searrow$	-24 극소	$\nearrow$	-6

즉 함수 $v = f'(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림

과 같으므로 $1 \leq t \leq 3$ 에서

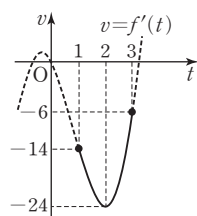
$$-24 \leq f'(t) \leq -6$$

이때 속력은 $|f'(t)|$ 이므로

$$6 \leq |f'(t)| \leq 24$$

따라서 $1 \leq t \leq 3$ 에서 점 P의 속력은 $t=2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 24이므로 $a=2, M=24$

$$\therefore aM = 2 \times 24 = 48$$



45-1 ㉮ 29

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = f'(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 1$$

$$v'(t) = 3t^2 - 6t - 9 = 3(t+1)(t-3)$$

$$v'(t) = 0 \text{에서 } t = 3 (\because 1 \leq t \leq 4)$$

단현구간 $[1, 4]$ 에서 함수 $v(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1	...	3	...	4
$v'(t)$		-	0	+	
$v(t)$	-10	$\searrow$	-26 극소	$\nearrow$	-19

즉 함수 $v = f'(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림

과 같으므로 $1 \leq t \leq 4$ 에서

$$-26 \leq f'(t) \leq -10$$

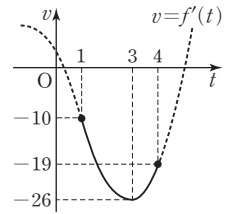
이때 속력은 $|f'(t)|$ 이므로

$$10 \leq |f'(t)| \leq 26$$

따라서 $1 \leq t \leq 4$ 에서 점 P의 속력은 $t=3$

일 때 최대이고, 최댓값은 26이므로 $a=3, M=26$

$$\therefore M + a = 26 + 3 = 29$$



46 ㉮ ②

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 6t$$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$$6t^2 - 6t = 0, 6t(t-1) = 0 \quad \therefore t = 1 (\because t > 0)$$

따라서 $t=1$ 에서의 점 P의 위치는

$$2 - 3 + 7 = 6$$

46-1 ㉮ -2

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 2at + b$$

$t=3$ 일 때, 점 P는 운동 방향을 바꾸므로 속도가 0이다.

$$27 + 6a + b = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$t=3$ 에서의 점 P의 위치가 -5이므로

$$27 + 9a + 3b + 4 = -5 \quad \therefore 3a + b + 12 = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -5, b = 3$

$$\therefore a + b = -5 + 3 = -2$$

47 ㉮ $\frac{1}{2} < t < 4$

두 점 P, Q의 시간 t 에서의 속도를 각각 $v_P(t), v_Q(t)$ 라 하면

$$v_P(t) = f'(t) = 4t - 2, v_Q(t) = g'(t) = 2t - 8$$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_P(t)v_Q(t) < 0$ 이므로

$$(4t-2)(2t-8) < 0 \quad \therefore \frac{1}{2} < t < 4$$

47-1 ㉮ $\frac{3}{2} < t < \frac{5}{2}$

두 점 P, Q의 시간 t 에서의 속도를 각각 $v_P(t), v_Q(t)$ 라 하면

$$v_P(t) = f'(t) = 2t - 3, v_Q(t) = g'(t) = 4t - 10$$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_P(t)v_Q(t) < 0$ 이므로

$$(2t-3)(4t-10) < 0 \quad \therefore \frac{3}{2} < t < \frac{5}{2}$$

48 ㉮ ㄱ, ㄴ

ㄱ. 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = t^2 - 8t + 12$$

즉 점 P가 출발할 때의 속도는 12이다.

ㄴ. 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$$t^2 - 8t + 12 = 0, (t-2)(t-6) = 0$$

$$\therefore t=2 \text{ 또는 } t=6$$

즉 $t=2, t=6$ 일 때, 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

ㄷ. 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 2t - 8$$

즉 5초 후의 점 P의 가속도는 $10 - 8 = 2$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

48-1 ㉡ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $x(1) = \frac{1}{3} - 4 + 7 = \frac{10}{3}$, $x(3) = 9 - 36 + 21 = -6$ 이므로

1초 후와 3초 후의 점 P의 위치는 같지 않다.

ㄴ. 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = t^2 - 8t + 7$$

즉 점 P가 출발할 때의 속도는 7이다.

ㄷ. 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 2t - 8$$

즉 4초 후의 점 P의 가속도는 $8 - 8 = 0$

ㄹ. 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$$t^2 - 8t + 7 = 0, (t-1)(t-7) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=7$$

즉 $t=1, t=7$ 일 때, 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

49 ㉡ ④

자동차가 브레이크를 밟은 후 t 초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 30 - 2t$$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$$30 - 2t = 0 \quad \therefore t = 15$$

따라서 브레이크를 밟은 후 자동차가 정지할 때까지 움직인 거리는

$$450 - 225 = 225 \text{ (m)}$$

49-1 ㉡ 600 m

제동을 건 지 t 초 후의 열차의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 60 - 3t$$

열차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$$60 - 3t = 0 \quad \therefore t = 20$$

따라서 제동을 건 후 열차가 정지할 때까지 움직인 거리는

$$1200 - 600 = 600 \text{ (m)}$$

50 ㉡ ③

제동을 건 지 t 초 후의 기차의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 16 - 0.8t$$

기차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$$16 - 0.8t = 0 \quad \therefore t = 20$$

즉 기차가 정지할 때까지 움직인 거리는

$$320 - 160 = 160 \text{ (m)}$$

따라서 목적지로부터 전방 160 m의 지점에서 제동을 걸어야 한다.

$$\therefore a = 160$$

50-1 ㉡ 32

제동을 건 지 t 초 후의 열차의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 16 - 4t \quad \dots\dots ①$$

열차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$$16 - 4t = 0 \quad \therefore t = 4 \quad \dots\dots ②$$

즉 열차가 정지할 때까지 움직인 거리는

$$64 - 32 = 32 \text{ (m)}$$

따라서 목적지로부터 전방 32 m의 지점에서 제동을 걸어야 한다.

$$\therefore a = 32 \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① 열차의 속도를 구할 수 있다.	20%
② 열차가 정지할 때의 시간을 구할 수 있다.	50%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	30%

51 ㉡ ③

제동을 건 지 t 초 후의 열차의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = a - 13t$$

이때 제동을 건 후 정지하는 데 2초가 걸렸으므로

$$a - 26 = 0 \quad \therefore a = 26$$

51-1 ㉡ $20\sqrt{2}$

제동을 건 지 t 초 후의 기차의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = a - 0.8t$$

기차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$$a - 0.8t = 0 \quad \therefore t = \frac{5}{4}a$$

기차가 멈출 때까지 움직인 거리는

$$x = \frac{5}{4}a^2 - 0.4\left(\frac{5}{4}a\right)^2 = \frac{5}{8}a^2$$

이때 $\frac{5}{8}a^2 \leq 500$ 이므로

$$a^2 \leq 800, a^2 - 800 \leq 0$$

$$(a + 20\sqrt{2})(a - 20\sqrt{2}) \leq 0 \quad \therefore -20\sqrt{2} \leq a \leq 20\sqrt{2}$$

따라서 상수 a 의 최댓값은 $20\sqrt{2}$ 이다.

52 ㉡ ④

t 초 후의 공의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = 40 - 10t$$

공이 최고 지점에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$$40 - 10t = 0 \quad \therefore t = 4$$

따라서 4초 후 이 공의 지면으로부터의 높이는

$$160 - 80 = 80 \text{ (m)}$$

52-1 ㉡ ③

t 초 후의 공의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = -10t + 20$$

공이 최고 지점에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$$-10t + 20 = 0 \quad \therefore t = 2$$

따라서 2초 후 이 공의 지면으로부터의 높이는

$$-20 + 40 + 40 = 60 \text{ (m)}$$

53 30 m/s

물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 0 m이므로
 $25 + 20t - 5t^2 = 0, -5(t+1)(t-5) = 0 \quad \therefore t = 5 (\because t > 0)$
 t 초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = 20 - 10t$$

$t = 5$ 일 때, 물체의 속도는

$$20 - 50 = -30 \text{ (m/s)}$$

따라서 이 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속력은 30 m/s이다.

53-1 -15 m/s

선수가 수면에 닿을 때의 높이는 0 m이므로
 $-5t^2 + 5t + 10 = 0, -5(t+1)(t-2) = 0 \quad \therefore t = 2 (\because t > 0)$
 t 초 후의 다이빙 선수의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = -10t + 5$$

$t = 2$ 일 때, 다이빙 선수의 속도는

$$-20 + 5 = -15 \text{ (m/s)}$$

따라서 이 선수가 수면에 닿는 순간의 속도는 -15 m/s이다.

54 60

t 초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = a - 10t$$

물체가 최고 지점에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$$a - 10t = 0 \quad \therefore t = \frac{a}{10}$$

즉 $t = \frac{a}{10}$ 일 때, 물체의 높이가 최대가 되므로

$$a \times \frac{a}{10} - 5\left(\frac{a}{10}\right)^2 \geq 180, \frac{a^2}{20} \geq 180$$

$$a^2 \geq 3600, a^2 - 3600 \geq 0$$

$$(a+60)(a-60) \geq 0 \quad \therefore a \geq 60 (\because a > 0)$$

따라서 상수 a 의 최솟값은 60이다.

54-1 120

t 초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = a - 10t$$

물체가 최고 지점에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$$a - 10t = 0 \quad \therefore t = \frac{a}{10}$$

즉 $t = \frac{a}{10}$ 일 때, 물체의 높이가 최대가 되므로

$$a \times \frac{a}{10} - 5\left(\frac{a}{10}\right)^2 = 720, \frac{a^2}{20} = 720$$

$$a^2 = 14400 = 120^2 \quad \therefore a = 120 (\because a > 0)$$

55 1.5 m/s

t 초 동안 사람이 움직인 거리를 x m, 사람의 그림자의 길이를 y m라 하면 오른쪽 그림에서

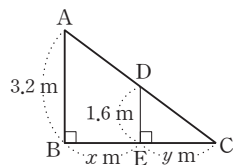
$\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (AA 답음)이므로

$$3.2 : 1.6 = (x+y) : y$$

$$3.2y = 1.6x + 1.6y$$

$$1.6y = 1.6x \quad \therefore y = x$$

이때 사람이 1.5 m/s의 속도로 걸어가므로 t 초 후 사람의 위치는



$$x = 1.5t$$

.....㉔

$$\textcircled{㉔} \text{을 } \textcircled{㉓} \text{에 대입하면 } y = 1.5t \quad \therefore \frac{dy}{dt} = 1.5$$

따라서 이 사람의 그림자의 길이의 변화율은 1.5 m/s이다.

55-1 12 m/min

t 분 동안 학생이 움직인 거리를 x m,

학생의 그림자의 길이를 y m라 하면

오른쪽 그림에서

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (AA 답음)이므로

$$3.6 : 1.6 = (x+y) : y$$

$$3.6y = 1.6x + 1.6y$$

$$2y = 1.6x \quad \therefore y = 0.8x$$

.....㉕

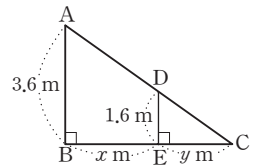
이때 학생이 15 m/min의 속도로 걸어가므로 t 분 후 학생의 위치는

$$x = 15t$$

.....㉖

$$\textcircled{㉖} \text{을 } \textcircled{㉕} \text{에 대입하면 } y = 12t \quad \therefore \frac{dy}{dt} = 12$$

따라서 이 학생의 그림자의 길이의 변화율은 12 m/min이다.



56 $3\pi \text{ m}^2/\text{s}$

t 초 후의 가장 바깥쪽 원의 반지름의 길이를 r m라 하면

$$r = 0.5t$$

t 초 후의 가장 바깥쪽 원의 넓이를 $S \text{ m}^2$ 라 하면

$$S = \pi r^2 = \pi (0.5t)^2 = 0.25\pi t^2 \quad \therefore \frac{dS}{dt} = 0.5\pi t$$

따라서 $t = 6$ 일 때, 가장 바깥쪽 원의 넓이의 변화율은

$$0.5\pi \times 6 = 3\pi \text{ (m}^2/\text{s)}$$

56-1 $32\pi \text{ cm}^2/\text{s}$

풍선에 공기를 넣기 시작하고 t 초 후의 풍선의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$$r = 6 + 0.4t$$

풍선의 겉넓이를 $S \text{ cm}^2$ 라 하면

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi (6 + 0.4t)^2 = 4\pi (0.16t^2 + 4.8t + 36)$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = 4\pi (0.32t + 4.8)$$

따라서 $t = 10$ 일 때, 풍선의 겉넓이의 변화율은

$$4\pi (0.32 \times 10 + 4.8) = 32\pi \text{ (cm}^2/\text{s)}$$

57 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

t 초 후의 선분 AB, BC의 길이는 각각 $10 - t, 10 + 4t$ 이고,

$\angle B = 60^\circ$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (10 - t)(10 + 4t)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (-4t^2 + 30t + 100)$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4} (-8t + 30)$$

따라서 $t = 3$ 일 때, 삼각형 ABC의 넓이의 변화율은

$$\frac{\sqrt{3}}{4} (-24 + 30) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

57-1 ㉠ 8 cm²/s

t 초 후의 직육면체의 가로 길이는 $(4+0.6t)$ cm, 세로 길이는 $(8+0.2t)$ cm

직사각형의 넓이를 S 라 하면

$$S = (4+0.6t)(8+0.2t) = 0.12t^2 + 5.6t + 32$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = 0.24t + 5.6$$

이때 가로의 길이와 세로의 길이가 같아지는 순간은

$$4+0.6t = 8+0.2t \text{에서 } 0.4t = 4 \quad \therefore t = 10$$

따라서 $t=10$ 일 때, 직사각형의 넓이의 변화율은

$$2.4 + 5.6 = 8 \text{ (cm}^2/\text{s)}$$

58 ㉠ 45

t 초 후의 가로, 세로 길이는 각각 $(10+2t)$ cm, 높이는 $(20+t)$ cm이므로 이 직육면체가 정육면체가 되는 순간은

$$10+2t = 20+t \text{에서 } t = 10$$

직육면체의 부피를 V cm³라 하면

$$V = (10+2t)^2(20+t)$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = 4(10+2t)(20+t) + (10+2t)^2$$

따라서 $t=10$ 일 때, 직육면체의 부피의 변화율 a 는

$$a = 3600 + 900 = 4500 \quad \therefore \frac{a}{100} = 45$$

58-1 ㉠ 200π cm³/s

t 초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $(5+t)$ cm, 높이는 $(30-2t)$ cm

원기둥의 부피를 V 라 하면

$$V = \pi(5+t)^2(30-2t)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dV}{dt} &= 2\pi(5+t)(30-2t) + \pi(5+t)^2 \times (-2) \\ &= 2\pi(5+t)(25-3t) \end{aligned}$$

이때 원기둥의 높이가 밑면의 반지름의 길이의 2배가 되는 순간은

$$30-2t = 2(5+t) \text{에서 } t = 5$$

따라서 $t=5$ 일 때, 원기둥의 부피의 변화율은

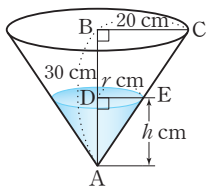
$$2\pi \times 10 \times 10 = 200\pi \text{ (cm}^3/\text{s)}$$

59 ㉠ ⑤

수면의 반지름의 길이를 r cm, 그때의 수면의 높이를 h cm라 하면 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (AA 닮음)이므로

$$30 : h = 20 : r, 30r = 20h$$

$$\therefore r = \frac{2}{3}h \quad \dots\dots ㉠$$



수면의 상승 속도가 매초 1 cm이므로 t 초 후의 수면의 높이는 $h=t$ ㉡

$$\text{㉡을 ㉠에 대입하면 } r = \frac{2}{3}t$$

물의 부피를 V cm³라 하면

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{2}{3}t\right)^2 \times t = \frac{4}{27}\pi t^3 \quad \therefore \frac{dV}{dt} = \frac{4}{9}\pi t^2$$

따라서 $t=6$ 일 때, 물의 부피의 변화율은

$$\frac{4}{9}\pi \times 36 = 16\pi \text{ (cm}^3/\text{s)}$$

59-1 ㉠ 108 cm³/s

t 초 후의 수면의 높이를 h cm, 한 변의 길이를 x cm라 하면

$$20 : h = 10 : x, 20x = 10h \quad \therefore x = \frac{h}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

매초 3 cm씩 수면이 올라가므로 t 초 후의 수면의 높이는 $h=3t$ ㉡

$$\text{㉡을 ㉠에 대입하면 } x = \frac{3}{2}t$$

물의 부피를 V cm³라 하면

$$V = \frac{1}{3}x^2 h = \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{2}t\right)^2 \times 3t = \frac{9}{4}t^3 \quad \therefore \frac{dV}{dt} = \frac{27}{4}t^2$$

이때 수면의 높이가 12 cm가 되는 순간은 $12=3t$ 에서 $t=4$

따라서 $t=4$ 일 때, 물의 부피의 변화율은

$$\frac{27}{4} \times 16 = 108 \text{ (cm}^3/\text{s)}$$

60 ㉠ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

t 초 후의 두 점 P, Q의 좌표는 $P(t, 0)$,

$Q(0, 2t)$ 이므로 직선 PQ의 방정식은

$$y-2t = \frac{-2t}{t}x \quad \therefore y = -2x+2t$$

이때 직선 PQ와 직선 $y=x$ 의 교점 R

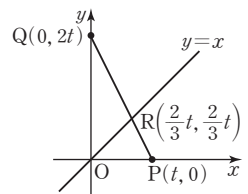
의 x 좌표는 $-2x+2t=x$ 에서

$$x = \frac{2}{3}t \quad \therefore R\left(\frac{2}{3}t, \frac{2}{3}t\right)$$

선분 OR의 길이를 l 이라 하면

$$l = \sqrt{\left(\frac{2}{3}t\right)^2 + \left(\frac{2}{3}t\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}t \quad \therefore \frac{dl}{dt} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서 선분 OR의 길이의 변화율은 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다.



60-1 ㉠ $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

t 초 후의 두 점 P, Q의 좌표는

$P(-3t, 0)$, $Q(0, t)$ 이므로

직선 PQ의 방정식은

$$y-t = \frac{t}{-3t}x \quad \therefore y = \frac{1}{3}x+t$$

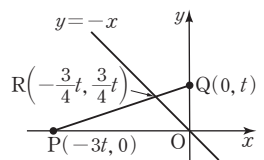
이때 직선 PQ와 직선 $y=-x$ 의 교점 R의 x 좌표는

$$\frac{1}{3}x+t = -x \text{에서 } x = -\frac{3}{4}t \quad \therefore R\left(-\frac{3}{4}t, \frac{3}{4}t\right)$$

선분 OR의 길이를 l 이라 하면

$$l = \sqrt{\left(-\frac{3}{4}t\right)^2 + \left(\frac{3}{4}t\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}t \quad \therefore \frac{dl}{dt} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

따라서 선분 OR의 길이의 변화율은 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ 이다.



유형 완성하기

p. 163

61 ㉠ ①

ㄱ. 점 P의 가속도는 $v'(t)$ 이고, $3 < t < 5$ 에서 $v'(t)=2$ 이므로 점 P의 가속도는 일정하다.

ㄴ. $v(2)=0$, $v(4)=0$ 이고, $t=2$, $t=4$ 의 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀌므로 $t=2$, $t=4$ 일 때, 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

즉 $0 < t < 7$ 에서 점 P는 운동 방향을 2번 바꾼다.

ㄷ. $5 < t < 6$ 에서 $v(t) > 0$ 이므로 점 P는 움직이고 있다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

62 ㉓ ③

- ① $t=a$ 일 때, $v'(a)>0$ 이므로 속도가 증가하고 있다.
 ② $t=b$ 일 때, $v'(b)<0$ 이므로 속도가 감소하고 있다.
 ③ $t=c$ 일 때, $v'(c)<0$ 이므로 가속도는 음의 값이다.
 ④ $t=d$ 일 때, $v'(d)>0$ 이므로 가속도는 양의 값이다.
 ⑤ $t>e$ 일 때, $v(t)>0$ 이므로 출발할 때와 같은 양의 방향으로 움직인다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

63 ㉓ ③

- ① $t=1$ 의 좌우에서 $x'(t)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 운동 방향이 바뀐다.
 ② t 의 값이 1, 2, 3, 5, 6, 7일 때, 운동 방향이 바뀐다.
 ③ $1<t<2$, $3<t<4$ 일 때, $x'(t)<0$ 이므로 점 P는 수직선의 음의 방향으로 움직인다.
 ④ $t=5$ 일 때의 위치와 $t=7$ 일 때의 위치는 -3 로 같다.
 ⑤ $x'(2)=0$, $x'(4)<0$ 이므로 $|x'(2)|<|x'(4)|$
 즉 $t=4$ 일 때의 속력이 $t=2$ 일 때의 속력보다 빠르다.
 따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

64 ㉓ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$x(t)$ 는 t 에 대한 삼차식이고 함수 $x(t)$ 의 그래프가 t 축과 만나는 점의 t 좌표가 0, 6이므로 $x(t)=kt(t-6)^2$ ($k>0$)이라 하자.

$$\text{이때 } x(2)=\frac{32}{3} \text{에서 } \frac{32}{3}=2k \times 16 \quad \therefore k=\frac{1}{3}$$

$$\therefore x(t)=\frac{1}{3}t(t-6)^2=\frac{1}{3}t^3-4t^2+12t$$

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=t^2-8t+12, a=\frac{dv}{dt}=2t-8$$

ㄱ, $t=0$ 일 때, $v=12$ 이므로 점 P의 출발할 때의 속도는 12이다.

ㄴ, $t=3$ 일 때, $a=6-8=-2$ 이므로 점 P의 가속도는 -2 이다.

$$\text{ㄷ, } x(8)=\frac{1}{3} \times 8 \times 4=\frac{32}{3} \text{이므로 } x(2)=x(8)$$

즉 점 P의 $t=2$ 일 때의 위치와 $t=8$ 일 때의 위치는 서로 같다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

학고 시험 대비 문제

p.164~167

01 ㉓ ③

$$f(x)=3x^4-4x^3+2 \text{에서}$$

$$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

단현구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	-	0	+	
$f(x)$	9	$\searrow$	2	$\searrow$	1 극소	$\nearrow$	18

함수 $f(x)$ 는

$x=2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(2)=18$

$x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(1)=1$

따라서 $M=18$, $m=1$ 이므로

$$M-m=18-1=17$$

02 ㉓ ④

$$f(x)=x^3-3x^2+a \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

단현구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	a	$\searrow$	$-4+a$

함수 $f(x)$ 는

$x=0$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(0)=a$

$x=2$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(2)=-4+a$

이때 최솟값이 -2 이므로 $-4+a=-2 \quad \therefore a=2$

03 ㉓ -5

$$f(x)=2kx^3-3kx^2 \text{에서}$$

$$f'(x)=6kx^2-6kx=6kx(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

$k>0$ 이므로 단현구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-5k$	$\nearrow$	0 극대	$\searrow$	$-k$ 극소	$\nearrow$	$4k$

함수 $f(x)$ 는

$x=2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(2)=4k$

$x=-1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(-1)=-5k$

이때 최댓값이 4이므로 $4k=4 \quad \therefore k=1$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -5 이다.

04 ㉓ 16

$$f(x)=-x^3+3x+10 \text{에서}$$

$$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

(i) $a=-1$ 일 때, 단현구간 $[-2, -1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	12	$\searrow$	8

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(-1)=8$ 이므로 $g(-1)=8$

(ii) $a=1$ 일 때, 단현구간 $[-2, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	1
$f'(x)$		-	0	+	0
$f(x)$	12	$\searrow$	8 극소	$\nearrow$	12

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(-1)=8$ 이므로 $g(1)=8$

(i), (ii)에서 $g(-1)+g(1)=8+8=16$

05 ㉡4

(가)에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(-x)$ 이므로

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=x^4-ax^3+bx^2-cx+d$$

$$a=0, c=0$$

$$\therefore f(x)=x^4+bx^2+d, f'(x)=4x^3+2bx$$

(나)에서 $f(1)=-5, f'(1)=0$ 이므로

$$f(1)=-5 \text{에서 } 1+b+d=-5 \quad \therefore b+d=-6 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f'(1)=0 \text{에서 } 4+2b=0 \quad \therefore b=-2$$

$b=-2$ 를 ㉠에 대입하면

$$-2+d=-6 \quad \therefore d=-4$$

$$f(x)=x^4-2x^2-4 \text{에서}$$

$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

단한구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	0	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	4	$\searrow$	-5 극소	$\nearrow$	-4 극대	$\searrow$	-5 극소	$\nearrow$	4

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f(-2)=f(2)=4$

06 ㉡1

$$x^3-6x^2+9x-k=0 \text{에서}$$

$$x^3-6x^2+9x=k \quad \dots\dots ㉠$$

방정식 ㉠이 한 실근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=x^3-6x^2+9x$ 와 직선 $y=k$ 가 한 점에서 만나야 한다.

$$f(x)=x^3-6x^2+9x \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

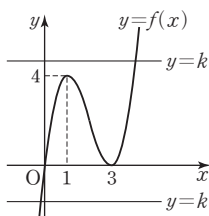
$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	4 극대	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

즉 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 한 점에서 만나려면 $k < 0$ 또는 $k > 4$

따라서 실수 k 의 값이 될 수 있는 것은 ㉠이다.



07 ㉡4

$$x^3-3x^2-9x+k-5=0 \text{에서}$$

$$x^3-3x^2-9x-5=-k$$

$$f(x)=x^3-3x^2-9x-5 \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0 극대	$\searrow$	-32 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선

$y=-k$ 의 교점의 x 좌표가 한 개는 양

수, 두 개는 서로 다른 음수가 되도록

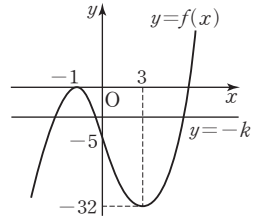
하는 실수 k 의 값의 범위는 오른쪽 그

림에서

$$-5 < -k < 0 \quad \therefore 0 < k < 5$$

따라서 정수 k 의 값은 1, 2, 3, 4이므로

그 개수는 4이다.



08 ㉡2

$$f(x)-2=k \text{에서 } f(x)-2-k=0$$

$$h(x)=f(x)-2-k \text{라 하면 } h'(x)=f'(x)$$

즉 $f(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값과 $h(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값이 같으므로 함수 $h(x)$ 의 극솟값은 $1-2-k=-1-k$, 극댓값은 $5-2-k=3-k$

이때 삼차방정식 $h(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$(-1-k)(3-k) < 0 \quad \therefore -1 < k < 3$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 0, 최댓값은 2이므로 그 합은

$$0+2=2$$

09 ㉡9

$$g(x)=f(x)+a=x^3-2x^2-4x+a-3$$

$$g'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x=-\frac{2}{3} \text{ 또는 } x=2$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{2}{3}$	...	2	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	$a-\frac{41}{27}$ 극대	$\searrow$	$a-11$ 극소	$\nearrow$

이때 삼차방정식 $g(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$\left(a-\frac{41}{27}\right)(a-11) < 0 \quad \therefore \frac{41}{27} < a < 11$$

따라서 정수 a 의 값은 2, 3, 4, ..., 10이므로 그 개수는 9이다.

10 ㉡4

곡선 $y=2x^3+6x^2+2x$ 와 직선 $y=20x+k$ 가 오직 한 점에서 만

나려면 방정식 $2x^3+6x^2+2x=20x+k$, 즉

$$2x^3+6x^2-18x-k=0 \text{은 한 실근과 두 허근을 가져야 한다.}$$

$$f(x)=2x^3+6x^2-18x-k \text{라 하면}$$

$$f'(x)=6x^2+12x-18=6(x+3)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$54-k$ 극대	$\searrow$	$-10-k$ 극소	$\nearrow$

이때 삼차방정식 $f(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 가지려면
(극댓값) $\times$ (극솟값) > 0 이어야 하므로
 $(54-k)(-10-k) > 0 \quad \therefore k < -10$ 또는 $k > 54$
따라서 자연수 k 의 최솟값은 55이다.

11 ㉡

$$y=x^3+3x^2 \text{에서 } y'=3x^2+6x$$

점 $(0, a)$ 에서 곡선 $y=x^3+3x^2$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를
 (t, t^3+3t^2) 이라 하면 접선의 방정식은
 $y-(t^3+3t^2)=(3t^2+6t)(x-t)$
이 직선이 점 $(0, a)$ 를 지나므로
 $a-(t^3+3t^2)=(3t^2+6t) \times (-t)$
 $\therefore 2t^3+3t^2+a=0 \quad \dots\dots ㉠$

점 $(0, a)$ 에서 주어진 곡선에 서로 다른 두 개의 접선을 그으려면 t
에 대한 삼차방정식 ㉠이 중근과 다른 실근을 가져야 한다.
 $f(t)=2t^3+3t^2+a$ 라 하면
 $f'(t)=6t^2+6t=6t(t+1)$
 $f'(t)=0$ 에서 $t=-1$ 또는 $t=0$
함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	-1	...	0	...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\nearrow$	$1+a$ 극대	$\searrow$	a 극소	$\nearrow$

이때 삼차방정식 $f(t)=0$ 이 중근과 다른 한 실근을 가지려면
(극댓값) $\times$ (극솟값) $= 0$ 이어야 하므로
 $(1+a) \times a = 0 \quad \therefore a = -1$ 또는 $a = 0$
그런데 점 $(0, a)$ 는 곡선 $y=x^3+3x^2$ 밖의 점이므로 $a \neq 0$
따라서 실수 a 의 값은 -1이다.

12 ㉢

$$f(x)=x^4-32x+a \text{라 하면}$$

$$f'(x)=4x^3-32=4(x-2)(x^2+2x+4)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=2 \quad (\because x^2+2x+4 > 0)$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-48+a$ 극소	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(2)=-48+a$
이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이 성립하려면
 $-48+a > 0 \quad \therefore a > 48$
따라서 정수 a 의 최솟값은 49이다.

13 ㉣

$$f(x)=x^3-9x^2+k \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-18x=3x(x-6)$$

$1 < x < 4$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(1, 4)$ 에서
감소한다.
즉 $1 < x < 4$ 에서 $f(x) > 0$ 이라면 $f(4) \geq 0$ 이어야 하므로
 $64-144+k \geq 0 \quad \therefore k \geq 80$
따라서 실수 k 의 최솟값은 80이다.

14 ㉤

$x \geq -1$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 함수 $y=g(x)$ 의 그래프
보다 항상 위쪽에 있으므로 $x \geq -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여
 $f(x) > g(x)$ 이어야 한다.

$$h(x)=f(x)-g(x) \text{라 하면}$$

$$h(x)=x^3-3kx^2+x+10-(-x^3+x+2) \\ =2x^3-3kx^2+8$$

$$h'(x)=6x^2-6kx=6x(x-k)$$

$$h'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=k$$

구간 $[-1, \infty)$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다
음과 같다.

x	-1	...	0	...	k	...
$h'(x)$		+	0	-	0	+
$h(x)$	$-3k+6$	$\nearrow$	8 극대	$\searrow$	$-k^3+8$ 극소	$\nearrow$

이때 $x \geq -1$ 에서 $h(x) > 0$ 이라면 $h(-1) > 0, h(k) > 0$ 이어야
하므로 $h(-1) > 0$ 에서 $-3k+6 > 0 \quad \therefore k < 2 \quad \dots\dots ㉠$
 $h(k) > 0$ 에서 $-k^3+8 > 0, k^3-8 < 0$
 $(k-2)(k^2+2k+4) < 0$
 $\therefore k < 2 \quad (\because k^2+2k+4 > 0) \quad \dots\dots ㉡$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $k < 2$

따라서 양수 k 의 값의 범위는 $0 < k < 2$

15 ㉥

임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 이라면
($f(x)$ 의 최솟값) $\geq$ ($g(x)$ 의 최댓값)이어야 한다.

$$f(x)=x^4+x^2-6x \text{에서}$$

$$f'(x)=4x^3+2x-6=2(x-1)(2x^2+2x+3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 \quad (\because 2x^2+2x+3 > 0)$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(1)=-4$

$$g(x)=-2x^2-16x+a=-2(x+4)^2+a+32$$

이므로 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 $a+32$ 이다.

$$\text{즉 } -4 \geq a+32 \text{이므로 } a \leq -36$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 -36이다.

16 ㉦

두 점 P, Q의 시간 t 에서의 속도를 각각 $v_P(t), v_Q(t)$ 라 하면

$$v_P(t)=f'(t)=2t^2+t, v_Q(t)=g'(t)=-t+12$$

$$v_P(t)=v_Q(t) \text{에서 } 2t^2+t=-t+12$$

$$2t^2+2t-12=0, t^2+t-6=0$$

$$(t+3)(t-2)=0 \quad \therefore t=2 \quad (\because t > 0)$$

즉 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간은 $t=2$ 일 때이므로 그때의 두 점 P, Q의 위치는

$$f(2) = \frac{16}{3} + 2 = \frac{22}{3}$$

$$g(2) = -2 + 24 + 1 = 23$$

$$\therefore |f(2) - g(2)| = \left| \frac{22}{3} - 23 \right| = \frac{47}{3}$$

17 ㉔②

시각 t 에서의 점 P의 속도를 $v(t)$ 라 하면

$$v(t) = f'(t) = 3t^2 - 12t - a$$

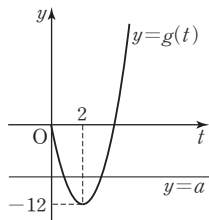
점 P의 운동 방향이 두 번만 바뀌어야 하므로 방정식 $v(t)=0$ 은 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

$$3t^2 - 12t - a = 0 \text{에서 } 3t^2 - 12t = a$$

$$g(t) = 3t^2 - 12t \text{라 하면 } g(t) = 3(t-2)^2 - 12$$

함수 $y=g(t)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 t 좌표가 서로 다른 두 양수가 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는 오른쪽 그림에서 $-12 < a < 0$

따라서 정수 a 의 값은 $-11, -10, -9, \dots, -1$ 이므로 그 개수는 11이다.



18 ㉔200

제동을 건 지 t 초 후의 자동차의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 18 - 0.9t$$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$$18 - 0.9t = 0 \quad \therefore t = 20$$

제동을 건 후 자동차가 정지할 때까지 움직인 거리는

$$360 - 180 = 180 \text{ (m)}$$

따라서 $a = 20, b = 180$ 이므로

$$a + b = 20 + 180 = 200$$

19 ㉔ $\frac{32}{25}\pi \text{ cm}^2/\text{s}$

오른쪽 그림에서 $2 : 4 = x : (x+10)$

$$2(x+10) = 4x \quad \therefore x = 10$$

t 초 후의 수면의 높이를 h cm, 수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$$r : 2 = (10 + h) : 10$$

$$\therefore r = 2 + \frac{h}{5} \quad \dots\dots ㉔$$

매초 1 cm씩 수면의 높이가 올라가므로 t 초 후의 수면의 높이는 $h = t$ $\dots\dots ㉕$

$$\textcircled{㉕} \text{을 } \textcircled{㉔} \text{에 대입하면 } r = 2 + \frac{t}{5}$$

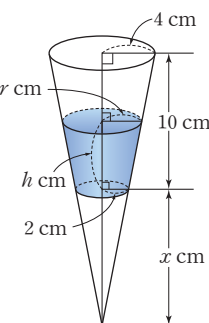
수면의 넓이를 $S \text{ cm}^2$ 라 하면

$$S = \pi r^2 = \pi \left(2 + \frac{t}{5} \right)^2 = \pi \left(\frac{t^2}{25} + \frac{4}{5}t + 4 \right)$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = \pi \left(\frac{2}{25}t + \frac{4}{5} \right)$$

수면의 높이가 6 cm가 되는 순간은 $t=6$ 일 때이므로 그때의 수면의 넓이의 변화율은

$$\pi \left(\frac{2}{25} \times 6 + \frac{4}{5} \right) = \frac{32}{25}\pi \text{ (cm}^2/\text{s)}$$



20 ㉔ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $v(d)=0$ 이고 $t=d$ 의 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀌므로 $t=d$ 에서 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

ㄴ. $v(d)=0, v(h)=0$ 이고 $t=d, t=h$ 의 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀌므로 $t=d, t=h$ 에서 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

즉 $0 < t < i$ 에서 점 P는 운동 방향을 2번 바꾼다.

ㄷ. $a < t < c$ 에서 $v(t) < 0$ 이므로 점 P는 수직선 위를 음의 방향으로 움직인다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21 ㉔ b

$t=b$ 와 $t=d$ 의 좌우에서 $x'(t)$ 의 부호가 바뀌므로 점 P의 운동 방향이 처음으로 바뀐 시각은 $t=b$ 이다.

서술형 1 ㉔ 30

삼각기둥의 밑면인 정삼각형의 한 변의 길이는 $20-2x$ 이때 길이는 양수이므로

$$x > 0, 20 - 2x > 0 \text{에서 } 0 < x < 10 \quad \dots\dots ㉑$$

삼각기둥의 밑면의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} (20-2x)^2 = \sqrt{3} (x-10)^2$$

$$\text{상자의 높이는 } x \times \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

상자의 부피를 $f(x)$ 라 하면

$$f(x) = \sqrt{3} (x-10)^2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}x = x(x-10)^2$$

$$= x^3 - 20x^2 + 100x \quad \dots\dots ㉒$$

$$f'(x) = 3x^2 - 40x + 100 = (3x-10)(x-10)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = \frac{10}{3} \quad (\because 0 < x < 10)$$

열린구간 $(0, 10)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\dots$	$\frac{10}{3}$	$\dots$	10
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{4000}{27}$ 극대	$\searrow$	

즉 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{10}{3}$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{4000}{27}$

이므로 상자의 부피가 최대가 되도록 하는 x 의 값은 $\frac{10}{3}$ 이다.

$$\text{따라서 } k = \frac{10}{3} \text{이므로 } 9k = 30 \quad \dots\dots ㉓$$

채점 기준	비율
㉑ x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%
㉒ 상자의 부피를 x 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
㉓ $9k$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

서술형 2 ㉔ -1

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프의 교점은 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다. 즉 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 근은 방정식 $f(x)=x$ 의 근과 같다.

$h(x) = f(x) - x$ 라 하면

$$h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{a}{3} \quad \dots\dots ①$$

$$h'(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

$$h'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	$\nearrow$	$\frac{2}{3} + \frac{a}{3}$ 극대	$\searrow$	$-\frac{2}{3} + \frac{a}{3}$ 극소	$\nearrow$

함수 $h(x)$ 는

$x = -1$ 일 때 극대이고, 극댓값은

$$f(-1) = \frac{2}{3} + \frac{a}{3}$$

$x = 1$ 일 때 극소이고, 극솟값은

$$f(1) = -\frac{2}{3} + \frac{a}{3} \quad \dots\dots ②$$

이때 삼차방정식 $h(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

(극댓값) $\times$ (극솟값) < 0 이어야 하므로

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{a}{3}\right)\left(-\frac{2}{3} + \frac{a}{3}\right) < 0$$

$$\therefore -2 < a < 2 \quad \dots\dots ③$$

$$\text{따라서 정수 } a \text{의 최솟값은 } -1 \text{이다.} \quad \dots\dots ④$$

채점 기준	비율
① 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 근이 방정식 $f(x) = x$ 의 근과 같음을 이용하여 함수 $h(x)$ 의 식을 세울 수 있다.	20%
② 함수 $h(x)$ 의 극값을 구할 수 있다.	30%
③ a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
④ 정수 a 의 최솟값을 구할 수 있다.	10%

서술형3 ④8

t 초 후에 $\overline{AP} = t$, $\overline{BQ} = 2t$ 이므로

$$\overline{PB} = 10 - t, \overline{QC} = 10 - 2t$$

t 초 후의 사각형 DPBQ의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \square ABCD - \triangle APD - \triangle DQC \\ &= 100 - \frac{1}{2} \times 10t - \frac{1}{2} \times 10 \times (10 - 2t) \\ &= 50 + 5t \end{aligned} \quad \dots\dots ①$$

이때 S_1 이 정사각형 ABCD의 넓이의 $\frac{11}{20}$ 배가 되는 순간은

$$50 + 5t = \frac{11}{20} \times 100 = 55 \quad \therefore t = 1 \quad \dots\dots ②$$

t 초 후의 삼각형 PBQ의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 2t \times (10 - t) = -t^2 + 10t$$

이므로 시각 t 에 대한 넓이 S 의 변화율은

$$\frac{dS}{dt} = -2t + 10$$

따라서 $t = 1$ 일 때 삼각형 PBQ의 넓이의 변화율은

$$-2 + 10 = 8 \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① 사각형 DPBQ의 넓이를 t 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
② t 의 값을 구할 수 있다.	20%
③ 삼각형 PBQ의 넓이의 변화율을 구할 수 있다.	40%

01 ④①

$\log x = t$ 라 하면 $1 \leq x \leq 100$ 에서 t 의 값의 범위는 $0 \leq t \leq 2$

$$g(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t - 1 \text{이라 하면}$$

$$g'(t) = -3t^2 + 12t - 9 = -3(t-1)(t-3)$$

$$g'(t) = 0 \text{에서 } t = 1 (\because 0 \leq t \leq 2)$$

단한구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	1	...	2
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$	-1	$\searrow$	-5 극소	$\nearrow$	-3

따라서 함수 $g(t)$ 는

$t = 0$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $g(0) = -1$

$t = 1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $g(1) = -5$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $-1 + (-5) = -6$

02 ④①

$$x^2 + y^2 = 9 \text{에서 } y^2 = 9 - x^2 \quad \dots\dots ①$$

$$y^2 \geq 0 \text{이므로 } 9 - x^2 \geq 0 \quad \therefore -3 \leq x \leq 3$$

①을 $x^2 + \frac{1}{3}xy^2$ 에 대입하면

$$x^2 + \frac{1}{3}xy^2 = x^2 + \frac{1}{3}x(9 - x^2) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \quad (-3 \leq x \leq 3) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

단한구간 $[-3, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	...	-1	...	3
$f'(x)$		-	0	+	0
$f(x)$	9	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$ 극소	$\nearrow$	9

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$f(-1) = -\frac{5}{3}$$

03 ④64

$$f(x) = (x-2)^2 \text{에서 } f'(x) = 2(x-2)$$

점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (a-2)^2 = 2(a-2)(x-a)$$

$$\therefore y = 2(a-2)x - a^2 + 4$$

이때 $P\left(\frac{a+2}{2}, 0\right)$, $Q(0, -a^2+4)$ 이고 삼각형 OPQ의 넓이를 $g(a)$ 라 하면

$$g(a) = \frac{1}{2} \times \frac{a+2}{2} \times (-a^2+4) = -\frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + a + 2$$

$$g'(a) = -\frac{3}{4}a^2 - a + 1 = -\frac{1}{4}(a+2)(3a-2)$$

$$g'(a) = 0 \text{에서 } a = \frac{2}{3} (\because 0 < a < 2)$$

열린구간 $(0, 2)$ 에서 함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다

a	0	...	$\frac{2}{3}$	...	2
$g'(a)$		+	0	-	
$g(a)$		$\nearrow$	$\frac{64}{27}$ 극대	$\searrow$	

함수 $g(a)$ 는 $a=\frac{2}{3}$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $g(\frac{2}{3})=\frac{64}{27}$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이의 최댓값 k 는 $k=\frac{64}{27}$

$$\therefore 27k=27 \times \frac{64}{27}=64$$

04 ㉮ ⑤

ㄱ. $a=b=c$ 이면 $f'(x)=(x-a)^3$

$f'(x)=0$ 에서 $x=a$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(a)$

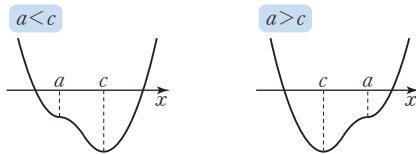
이때 $f(a)>0$ 이면 방정식 $f(x)=0$ 은 실근을 갖지 않는다.

ㄴ. $a=b \neq c$ 이면 $f'(x)=(x-a)^2(x-c)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=a$ 또는 $x=c$

함수 $f(x)$ 는 $x=c$ 에서 극소이고, $f(a)<0$ 이므로

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



즉 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $a < b < c$ 이면

$f'(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=c$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다

x	...	a	...	b	...	c	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

이때 $f(b)<0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

즉 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

05 ㉮ 6

$x^3 \geq a(x^2 - a)$ 에서 $x^3 - ax^2 + a^2 \geq 0$

$f(x)=x^3 - ax^2 + a^2$ 이라 하면

$f'(x)=3x^2 - 2ax = x(3x - 2a)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}a$

(i) $\frac{2}{3}a \leq 0$, 즉 $a \leq 0$ 일 때

$x>0$ 에서 $f'(x)>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

즉 $x>0$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$f(0)=a^2 \geq 0$

이 식이 항상 성립하므로 $a \leq 0$ 일 때 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $\frac{2}{3}a > 0$, 즉 $a > 0$ 일 때

구간 $(0, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{2}{3}a$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{4}{27}a^3 + a^2$ 극소	$\nearrow$

$x>0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{2}{3}a$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$-\frac{4}{27}a^3 + a^2$$

즉 $x \geq 0$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$f\left(\frac{2}{3}a\right) = -\frac{4}{27}a^3 + a^2 \geq 0$$

$$-\frac{4}{27}a^2\left(a - \frac{27}{4}\right) \geq 0$$

$$\therefore 0 < a \leq \frac{27}{4}$$

(i), (ii)에서 $a \leq \frac{27}{4}$

따라서 정수 a 의 최댓값은 6이다.

06 ㉮ 15

두 점 P, Q의 시간 t 에서의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$ 라 하면

$$v_P(t) = f'(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t$$

$$v_Q(t) = g'(t) = m$$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간이 세 번이 있으려면 방정식 $4t^3 - 24t^2 + 36t = m$ 이 서로 다른 세 개의 양의 실근을 가져야 한다.

$h(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t$ 라 하면

$$h'(t) = 12t^2 - 48t + 36 = 12(t-1)(t-3)$$

$h'(t)=0$ 에서 $t=1$ 또는 $t=3$

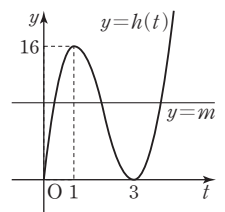
구간 $(0, \infty)$ 에서 함수 $h(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	1	...	3	...
$h'(t)$		+	0	-	0	+
$h(t)$	0	$\nearrow$	16 극대	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

$t \geq 0$ 에서 함수 $y=h(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=h(t)$ 의 그래프와 직선 $y=m$ 이 서로 다른 세 개의 양의 실근을 가지려면

$$0 < m < 16$$

따라서 자연수 m 의 최댓값은 15이다.



07 ㉮ 1

$$f(f(x)) = f(x^2 + a) = (x^2 + a)^2 + a = x^4 + 2ax^2 + a^2 + a$$

$$f(f(x)) \geq 2 \text{에서 } x^4 + 2ax^2 + a^2 + a \geq 2$$

$$\therefore x^4 + 2ax^2 + a^2 + a - 2 \geq 0$$

$$h(x) = x^4 + 2ax^2 + a^2 + a - 2 \text{라 하면}$$

$$h'(x) = 4x^3 + 4ax = 4x(x^2 + a)$$

$$h'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ (}\because a > 0\text{)}$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	$a^2 + a - 2$ 극소	$\nearrow$

즉 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $h(0) = a^2 + a - 2$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $h(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$a^2 + a - 2 \geq 0, (a+2)(a-1) \geq 0$$

$$\therefore a \geq 1 \text{ (}\because a > 0\text{)}$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 1이다.

08 ㉔ ㉕

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{3} \cos^3 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta - a = 0 \text{에서}$$

$$\frac{1}{3} \cos^3 \theta + \frac{1}{2} (1 - \cos^2 \theta) - a = 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} \cos^3 \theta - \frac{1}{2} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} = a \quad \dots\dots ㉔$$

$\cos \theta = t$ 라 하면 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ 에서 t 의 값의 범위는

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$f(t) = \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} \text{이라 하면}$$

$$f'(t) = t^2 - t = t(t-1)$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } t = 0 \text{ 또는 } t = 1$$

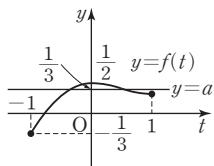
단한구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	...	0	...	1
$f'(t)$		+	0	-	0
$f(t)$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$ 극대	$\searrow$	$\frac{1}{3}$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $y = f(t)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y = f(t)$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 두 점에

서 만나려면 $\frac{1}{3} \leq a < \frac{1}{2}$



09 ㉔ 24

$$y = x^2 \text{에서 } y' = 2x$$

이므로 점 Q의 좌표를 (a, a^2) 이라 할 때 점 Q에서의 접선의 방정식은

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad \therefore y = 2ax - a^2$$

$$\therefore R(0, -a^2)$$

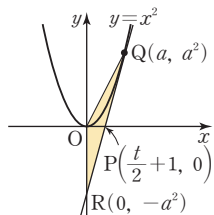
이 직선이 점 $P(\frac{t}{2} + 1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 2a(\frac{t}{2} + 1) - a^2, a(t + 2 - a) = 0$$

$$\therefore a = t + 2 \text{ (}\because a \neq 0\text{)}$$

즉 두 점 Q, R의 좌표는 각각

$$Q(t+2, (t+2)^2), R(0, -(t+2)^2)$$



삼각형 ORQ의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times (t+2)^2 \times (t+2) = \frac{1}{2} (t+2)^3$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = \frac{3}{2} (t+2)^2$$

따라서 $t=2$ 일 때, 삼각형 ORQ의 넓이의 변화율은

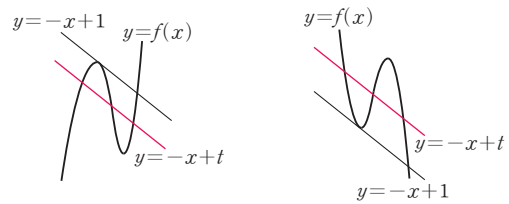
$$\frac{3}{2} (2+2)^2 = 24$$

10 ㉔ ㉕

ㄱ. 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = -x + t$ 는 한 점에서 만나므로 $g(t) = 1$

따라서 함수 $g(t)$ 는 상수함수이다.

ㄴ. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -x + 1$ 의 교점의 개수가 2인 경우는 다음과 같다.



즉 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -x + t$ 의 교점의 개수가 3, 즉 $g(t) = 3$ 인 t 가 존재한다.

ㄷ. 주어진 명제의 대우는 '삼차함수 $f(x)$ 의 극값이 존재하면 함수 $g(t)$ 는 상수함수가 아니다.'

[반례] $f(x) = x^3 - x$ 이면 $f'(x) = 3x^2 - 1$ 이고 함수 $f(x)$ 의 극값이 존재한다.

이때 $x^3 - x = -x + t$ 에서 $x^3 = t$ 이고, 함수 $y = x^3$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 는 t 의 값에 관계없이 항상 한 점에서 만나므로 $g(t) = 1$, 즉 함수 $g(t)$ 는 상수함수이다.

즉 대우가 거짓이므로 주어진 명제도 거짓이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

11 ㉔ ㉕

(가)에서 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

(나)에서 $f(0) = f'(0)$ 이므로 $c = b$

$$\therefore f(x) = x^3 + ax^2 + bx + b$$

$$g(x) = f(x) - f'(x) \text{라 하면}$$

$$g(x) = x^3 + ax^2 + bx + b - (3x^2 + 2ax + b) \\ = x^3 + (a-3)x^2 + (-2a+b)x$$

이때 $g(0) = f(0) - f'(0) = 0$ 이고,

(다)에서 $x \geq -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq 0$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$g'(0) = 0 \text{이므로}$$

$$g'(x) = 3x^2 + 2(a-3)x + b - 2a \text{에서}$$

$$b - 2a = 0 \quad \therefore b = 2a$$

$$\therefore g(x) = x^3 + (a-3)x^2$$

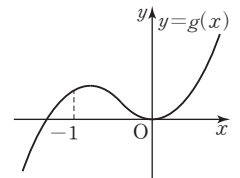
또 $g(-1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$-1 + a - 3 \geq 0 \quad \therefore a \geq 4$$

즉 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2ax + 2a$ 에서

$$f(2) = 8 + 4a + 4a + 2a = 10a + 8 \geq 48$$

따라서 $f(2)$ 의 최솟값은 48이다.



개념 완성하기

p.173~174

01 답 ㄴ, ㄷ

$$\neg. \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)' = x^2 + x$$

$$\neg. (x^3 + x^2)' = 3x^2 + 2x$$

$$\neg. (x^3 + x^2 + 6)' = 3x^2 + 2x$$

$$\neg. (x^3 + x^2 + x - 1)' = 3x^2 + 2x + 1$$

따라서 함수 $3x^2 + 2x$ 의 부정적분인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

02 답 $f(x) = 6x + 5$

$$f(x) = (3x^2 + 5x + C)' = 6x + 5$$

03 답 $f(x) = -3x + 4$

$$f(x) = \left(-\frac{3}{2}x^2 + 4x + C\right)' = -3x + 4$$

04 답 $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$

$$f(x) = (x^3 - x^2 + 2x + C)' = 3x^2 - 2x + 2$$

05 답 $f(x) = -6x^2 + 6x$

$$f(x) = (-2x^3 + 3x^2 + C)' = -6x^2 + 6x$$

06 답 $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$$f(x) = \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C\right)' = x^3 + x^2 + x + 1$$

07 답 $f(x) = x - 1$

$$\int xf(x)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$xf(x) = x^2 - x = x(x - 1)$$

$$\therefore f(x) = x - 1$$

08 답 $f(x) = 3x - 15$

$$\int (x+1)f(x)dx = x^3 - 6x^2 - 15x + C \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$(x+1)f(x) = x^3 - 12x - 15 = 3(x+1)(x-5)$$

$$\therefore f(x) = 3(x-5) = 3x - 15$$

09 답 $x^3 - 2x$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int f(x)dx \right\} = f(x) \text{이므로}$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int (x^3 - 2x)dx \right\} = x^3 - 2x$$

10 답 $x^3 - 2x + C$

$$\int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx = f(x) + C \text{이므로}$$

$$\int \left\{ \frac{d}{dx} (x^3 - 2x) \right\} dx = x^3 - 2x + C$$

11 답 $-2x^3 + 5x + 4$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int f(x)dx \right\} = f(x) \text{이므로}$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int (-2x^3 + 5x + 4)dx \right\} = -2x^3 + 5x + 4$$

12 답 $-2x^3 + 5x + 4 + C$

$$\int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx = f(x) + C \text{이므로}$$

$$\int \left\{ \frac{d}{dx} (-2x^3 + 5x + 4) \right\} dx = -2x^3 + 5x + 4 + C$$

13 답 $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int f(x)dx \right\} = f(x) \text{이므로}$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int (4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x)dx \right\} = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$$

14 답 $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + C$

$$\int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx = f(x) + C \text{이므로}$$

$$\int \left\{ \frac{d}{dx} (4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x) \right\} dx = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + C$$

15 답 17

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int f(x)dx \right\} = 2x^2 + 3x + 12 \text{에서 } f(x) = 2x^2 + 3x + 12$$

$$\therefore f(1) = 2 + 3 + 12 = 17$$

16 답 1

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int f(x)dx \right\} = -3x^2 - x + 5 \text{에서 } f(x) = -3x^2 - x + 5$$

$$\therefore f(1) = -3 - 1 + 5 = 1$$

17 답 -4

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int f(x)dx \right\} = x^3 - 12x + 7 \text{에서 } f(x) = x^3 - 12x + 7$$

$$\therefore f(1) = 1 - 12 + 7 = -4$$

18 답 1

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int xf(x)dx \right\} = x^3 + 3x^2 - 9x \text{에서}$$

$$xf(x) = x^3 + 3x^2 - 9x = x(x^2 + 3x - 9)$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^2 + 3x - 9 \text{이므로}$$

$$f(2) = 4 + 6 - 9 = 1$$

19 답 6

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int x^2 f(x)dx \right\} = x^4 + 2x^2 \text{에서}$$

$$x^2 f(x) = x^4 + 2x^2 = x^2(x^2 + 2)$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^2 + 2 \text{이므로}$$

$$f(2) = 4 + 2 = 6$$

20 ㉔ -2

$$F(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} (3x^2 + 2x) \right\} dx = 3x^2 + 2x + C$$

$$\text{이때 } F(1) = 2 \text{이므로 } 3 + 2 + C = 2 \quad \therefore C = -3$$

$$\text{따라서 } F(x) = 3x^2 + 2x - 3 \text{이므로}$$

$$F(-1) = 3 - 2 - 3 = -2$$

21 ㉔ 0

$$F(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} (x^2 + x - 6) \right\} dx = x^2 + x - 6 + C$$

$$\text{이때 } F(1) = 2 \text{이므로 } 1 + 1 - 6 + C = 2 \quad \therefore C = 6$$

$$\text{따라서 } F(x) = x^2 + x \text{이므로}$$

$$F(-1) = 1 - 1 = 0$$

22 ㉔ -2

$$F(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} (2x^3 - x^2 + 1) \right\} dx = 2x^3 - x^2 + 1 + C$$

$$\text{이때 } F(1) = 2 \text{이므로 } 2 - 1 + 1 + C = 2 \quad \therefore C = 0$$

$$\text{따라서 } F(x) = 2x^3 - x^2 + 1 \text{이므로}$$

$$F(-1) = -2 - 1 + 1 = -2$$

23 ㉔ 14

$$F(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} (-x^3 + 3x^2 - 5x + 4) \right\} dx$$

$$= -x^3 + 3x^2 - 5x + 4 + C$$

$$\text{이때 } F(1) = 2 \text{이므로 } -1 + 3 - 5 + 4 + C = 2 \quad \therefore C = 1$$

$$\text{따라서 } F(x) = -x^3 + 3x^2 - 5x + 5 \text{이므로}$$

$$F(-1) = 1 + 3 + 5 + 5 = 14$$

24 ㉔ -10

$$F(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} (x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 3x) \right\} dx$$

$$= x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 3x + C$$

$$\text{이때 } F(1) = 2 \text{이므로 } 1 + 3 - 6 + 3 + C = 2 \quad \therefore C = 1$$

$$\text{따라서 } F(x) = x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 \text{이므로}$$

$$F(-1) = 1 - 3 - 6 - 3 + 1 = -10$$

25 ㉔ $3x + C$

$$\int 3dx = 3x + C$$

26 ㉔ $\frac{1}{8}x^8 + C$

$$\int x^7 dx = \frac{1}{7+1} x^{7+1} + C = \frac{1}{8} x^8 + C$$

27 ㉔ $\frac{1}{201}x^{201} + C$

$$\int x^{200} dx = \frac{1}{200+1} x^{200+1} + C = \frac{1}{201} x^{201} + C$$

28 ㉔ $\frac{1}{7}x^7 + C$

$$\int (x^2)^3 dx = \int x^6 dx = \frac{1}{6+1} x^{6+1} + C = \frac{1}{7} x^7 + C$$

29 ㉔ $x^2 + 4x + C$

$$\begin{aligned} \int (2x+4)dx &= 2 \int xdx + 4 \int dx \\ &= x^2 + 4x + C \end{aligned}$$

30 ㉔ $\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + C$

$$\begin{aligned} \int (t^2 - 3t)dt &= \int t^2 dt - 3 \int t dt \\ &= \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + C \end{aligned}$$

31 ㉔ $x^4 - 5x^2 + 5x + C$

$$\begin{aligned} \int (4x^3 - 10x + 5)dx &= 4 \int x^3 dx - 10 \int x dx + 5 \int dx \\ &= x^4 - 5x^2 + 5x + C \end{aligned}$$

32 ㉔ $\frac{1}{2}y^4 - 2y^3 + 3y + C$

$$\begin{aligned} \int (2y^3 - 6y^2 + 3)dy &= 2 \int y^3 dy - 6 \int y^2 dy + 3 \int dy \\ &= \frac{1}{2}y^4 - 2y^3 + 3y + C \end{aligned}$$

33 ㉔ $x^3 - x^2 - x + C$

$$\begin{aligned} \int (x-1)(3x+1)dx &= \int (3x^2 - 2x - 1)dx \\ &= 3 \int x^2 dx - 2 \int x dx - \int dx \\ &= x^3 - x^2 - x + C \end{aligned}$$

34 ㉔ $\frac{1}{4}x^4 - x + C$

$$\begin{aligned} \int (x-1)(x^2+x+1)dx &= \int (x^3 - 1)dx \\ &= \int x^3 dx - \int dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 - x + C \end{aligned}$$

35 ㉔ $\frac{1}{2}x^2 + x + C$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x - 3}{x-3} dx &= \int \frac{(x+1)(x-3)}{x-3} dx \\ &= \int (x+1)dx \\ &= \int xdx + \int dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + C \end{aligned}$$

36 ㉔ $\frac{1}{2}x^2 - 3x + C$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 - 4} dx &= \int \frac{(x+2)(x-2)(x-3)}{(x+2)(x-2)} dx \\ &= \int (x-3)dx \\ &= \int xdx - 3 \int dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 3x + C \end{aligned}$$

37 ㉮ $6x^2+C$

$$\begin{aligned} & \int (3x+1)^2 dx - \int (3x-1)^2 dx \\ &= \int (9x^2+6x+1) dx - \int (9x^2-6x+1) dx \\ &= \int \{(9x^2+6x+1)-(9x^2-6x+1)\} dx \\ &= \int 12x dx \\ &= 12 \int x dx \\ &= 6x^2+C \end{aligned}$$

38 ㉮ $\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-2x+C$

$$\begin{aligned} & \int (x^2+3x+2) dx + \int (2x-4) dx \\ &= \int \{(x^2+3x+2)+(2x-4)\} dx \\ &= \int (x^2+5x-2) dx \\ &= \int x^2 dx + 5 \int x dx - 2 \int dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + C \end{aligned}$$

39 ㉮ $\frac{1}{2}x^2-x+C$

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2}{x+1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx = \int \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \int \frac{x^2-1}{x+1} dx \\ &= \int \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} dx \\ &= \int (x-1) dx \\ &= \int x dx - \int dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - x + C \end{aligned}$$

40 ㉮ $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^3}{x-1} dx - \int \frac{1}{x-1} dx = \int \left(\frac{x^3}{x-1} - \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= \int \frac{x^3-1}{x-1} dx \\ &= \int \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} dx \\ &= \int (x^2+x+1) dx \\ &= \int x^2 dx + \int x dx + \int dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C \end{aligned}$$

41 ㉮ $3x^2t-xt^2+t^3+C$

$$\begin{aligned} & \int (3x^2-2xt+3t^2) dt = 3x^2 \int dt - 2x \int t dt + 3 \int t^2 dt \\ &= 3x^2t - xt^2 + t^3 + C \end{aligned}$$

유형 완성하기

p. 175~184

01 ㉮ 4

$$\begin{aligned} & \int (x-1)f(x) dx = x^3-x^2-x+C \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ & (x-1)f(x) = (x^3-x^2-x+C)' \\ & \quad = 3x^2-2x-1 \\ & \quad = (3x+1)(x-1) \\ & \text{따라서 } f(x) = 3x+1 \text{이므로} \\ & f(1) = 3+1=4 \end{aligned}$$

01-1 ㉮ ⑤

$$\begin{aligned} & \int x^2 f(x) dx = x^5-3x^4+2x^3+C \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ & x^2 f(x) = (x^5-3x^4+2x^3+C)' \\ & \quad = 5x^4-12x^3+6x^2 \\ & \quad = x^2(5x^2-12x+6) \\ & \text{따라서 } f(x) = 5x^2-12x+6 \text{이므로} \\ & f(2) = 20-24+6=2 \end{aligned}$$

02 ㉮ ①

$$\begin{aligned} & f(x) = F'(x) = (8x^3+ax^2+bx+4)' = 24x^2+2ax+b \\ & f(0) = -2 \text{에서 } b = -2 \\ & f'(x) = 48x+2a \text{이므로} \\ & f'(1) = 24 \text{에서 } 48+2a=24 \quad \therefore a = -12 \\ & \therefore a+b = -12+(-2) = -14 \end{aligned}$$

02-1 ㉮ 8

$$\begin{aligned} & f(x) = F'(x) = (x^3+ax^2-4x+1)' = 3x^2+2ax-4 \\ & f(0) = b \text{에서 } b = -4 \quad \dots\dots ① \\ & f'(x) = 6x+2a \text{이므로} \\ & f'(1) = 2 \text{에서 } 6+2a=2 \quad \therefore a = -2 \quad \dots\dots ② \\ & \therefore ab = -2 \times (-4) = 8 \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

채점 기준	비율
① b의 값을 구할 수 있다.	40%
② a의 값을 구할 수 있다.	40%
③ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

03 ㉮ ②

$$\begin{aligned} & F(x) = \{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ & \quad = 6x(x+2) + (3x^2-1) \times 1 \\ & \quad = 9x^2+12x-1 \\ & \text{따라서 함수 } F(x) \text{의 상수항은 } -1 \text{이다.} \end{aligned}$$

Lecture 함수의 곱의 미분법

두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능할 때
 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

03-1 ㉮ ④

$$\begin{aligned} & F(x) = \{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ & \quad = (2x-1)(x^2-x-2) + (x^2-x+1)(2x-1) \\ & \quad = (2x-1)(2x^2-2x-1) \\ & \therefore F(0) = -1 \times (-1) = 1 \end{aligned}$$

04 ㉔ ②

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int (ax^3 + bx + 4) dx \right\} = 2x^3 + 4x + c \text{에서}$$

$$ax^3 + bx + 4 = 2x^3 + 4x + c$$

따라서 $a=2, b=4, c=4$ 이므로

$$a-b+c=2-4+4=2$$

04-1 ㉔ ②

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int (x-1)f(x) dx \right\} = 3x^3 + 5x + k \text{에서}$$

$$(x-1)f(x) = 3x^3 + 5x + k$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 3 + 5 + k \quad \therefore k = -8$$

따라서 $(x-1)f(x) = 3x^3 + 5x - 8 = (x-1)(3x^2 + 3x + 8)$ 이므로

$$f(x) = 3x^2 + 3x + 8$$

$$\therefore f(-2) = 12 - 6 + 8 = 14$$

05 ㉔ ③

$$F(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \int (x-3)f(x) dx \right\} = (x-3)f(x)$$

$$= (x-3)(x^2 + 3x + 1)$$

$$\therefore F(-2) = -5 \times (4 - 6 + 1) = 5$$

05-1 ㉔ ①

$$F(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \int f(x) dx \right\} = f(x)$$

$$= -x^2 + 6x + k$$

$$= -(x-3)^2 + k + 9$$

즉 함수 $F(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $k+9$ 이므로

$$k+9 = -1 \quad \therefore k = -10$$

06 ㉔ 10

$$\log_x \left\{ \frac{d}{dx} \left(\int x^5 dx \right) \right\} = \log_x x^5 = 5 \text{이므로}$$

$$5 = x^3 - 5x^2 - x + k \text{에서 } x^3 - 5x^2 - x + k - 5 = 0$$

이 방정식의 한 근이 5이므로

$$125 - 125 - 5 + k - 5 = 0 \quad \therefore k = 10$$

06-1 ㉔ ②

$$\log_x \left\{ \frac{d}{dx} \left(\int x^4 dx \right) \right\} = \log_x x^4 = 4$$

밑과 진수의 조건에서 $x > 0, x \neq 1, x^4 > 0$

$$\therefore x > 0, x \neq 1 \quad \dots\dots ㉔$$

주어진 등식에서 $4 = 2x^2 - 5x + 1$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0, (2x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 3 (\because ㉔)$$

Lecture 로그의 정의

$a > 0, a \neq 1, N > 0$ 일 때

$$a^x = N \iff x = \log_a N$$

07 ㉔ 7

$$F(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} (x-1)(x^2+1) \right\} dx = (x-1)(x^2+1) + C$$

$$F(1) = 2 \text{에서 } C = 2$$

따라서 $F(x) = (x-1)(x^2+1) + 2$ 이므로

$$F(2) = 5 + 2 = 7$$

07-1 ㉔ ④

$$F(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} (x^2 - 6x) \right\} dx = x^2 - 6x + C$$

$$= (x-3)^2 + C - 9$$

즉 함수 $F(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $C-9$ 이므로

$$C-9 = 4 \quad \therefore C = 13$$

따라서 $F(x) = x^2 - 6x + 13$ 이므로

$$F(1) = 1 - 6 + 13 = 8$$

08 ㉔ 4

$$g(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \int f(x) dx \right\} = f(x) = x^2 - 4x$$

$$h(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx = f(x) + C = x^2 - 4x + C$$

이때 $h(0) = 3$ 이므로 $C = 3$

$$\therefore h(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$\therefore g(2) + h(-1) = -4 + 8 = 4$$

08-1 ㉔ 15

$$g(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \int xf(x) dx \right\} = xf(x)$$

$$= x(x^2 + 3x + 1) = x^3 + 3x^2 + x \quad \dots\dots ①$$

$$h(x) = \int \left[\frac{d}{dx} \{ (x-1)f(x) \} \right] dx$$

$$= (x-1)f(x) + C$$

$$= (x-1)(x^2 + 3x + 1) + C$$

이때 $h(2) = 4$ 이므로 $11 + C = 4 \quad \therefore C = -7$

$$\therefore h(x) = (x-1)(x^2 + 3x + 1) - 7 \quad \dots\dots ②$$

$$\therefore g(2) + h(1) = 22 + (-7) = 15 \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① 함수 $g(x)$ 를 구할 수 있다.	40%
② 함수 $h(x)$ 를 구할 수 있다.	50%
③ $g(2) + h(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

09 ㉔ 5051

$$F(x) = \int \left[\frac{d}{dx} \left[\int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx \right] \right] dx$$

$$= \int \left[\frac{d}{dx} \{ f(x) + C_1 \} \right] dx$$

$$= f(x) + C_2$$

$$= 100x^{100} + 99x^{99} + \dots + 2x^2 + x + C_2$$

이때 $F(0) = 1$ 이므로 $C_2 = 1$

따라서 $F(x) = 100x^{100} + 99x^{99} + \dots + 2x^2 + x + 1$ 이므로

$$F(1) = 100 + 99 + \dots + 2 + 1 + 1$$

$$= \frac{100 \times 101}{2} + 1 = 5051$$

Lecture 등차수열의 합

등차수열의 첫째항을 a , 제 n 항을 l 이라 할 때, 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은 $S_n = \frac{n(a+l)}{2}$

09-1 ㉔ 0

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \left[\frac{d}{dx} \left[\int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx \right] \right] dx \\ &= \int \left[\frac{d}{dx} \{ f(x) + C_1 \} \right] dx \\ &= f(x) + C_2 \\ &= x^{25} + x^{24} + x^{23} + \cdots + x^2 + x + C_2 \end{aligned}$$

이때 $F(0) = 1$ 이므로 $C_2 = 1$

따라서 $F(x) = x^{25} + x^{24} + x^{23} + \cdots + x^2 + x + 1$ 이므로

$$F(-1) = -1 + 1 + (-1) + \cdots + 1 + (-1) + 1 = 0$$

10 ㉔ ③

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{x^3}{x+1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \int \frac{x^3+1}{x+1} dx \\ &= \int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} dx \\ &= \int (x^2-x+1) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C \end{aligned}$$

이때 $f(0) = \frac{1}{3}$ 이므로 $C = \frac{1}{3}$

따라서 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{3}$ 이므로

$$f(2) = \frac{8}{3} - 2 + 2 + \frac{1}{3} = 3$$

10-1 ㉔ $\frac{7}{3}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{x^4+1}{x+1} dx - \int \frac{2}{x+1} dx \\ &= \int \frac{x^4-1}{x+1} dx \\ &= \int \frac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{x+1} dx \\ &= \int (x-1)(x^2+1) dx \\ &= \int (x^3-x^2+x-1) dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C \end{aligned}$$

이때 $f(0) = 1$ 이므로 $C = 1$

따라서 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ 이므로

$$f(2) = 4 - \frac{8}{3} + 2 - 2 + 1 = \frac{7}{3}$$

11 ㉔ ③

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (3x^2 + 2x - 3) dx \\ &= x^3 + x^2 - 3x + C \end{aligned}$$

이때 $F(0) = 1$ 이므로 $C = 1$

따라서 $F(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$ 이므로

$$F(1) = 1 + 1 - 3 + 1 = 0$$

11-1 ㉔ ②

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (x^3 + 6x^2 + 4x - 5) dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 5x + C \end{aligned}$$

이때 $F(0) = -\frac{1}{4}$ 이므로 $C = -\frac{1}{4}$

따라서 $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 5x - \frac{1}{4}$ 이므로

$$F(-3) = \frac{81}{4} - 54 + 18 + 15 - \frac{1}{4} = -1$$

12 ㉔ -1

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (x-3)^2 dx - \int (x+1)^2 dx \\ &= \int \{ (x-3)^2 - (x+1)^2 \} dx \\ &= \int (-8x+8) dx \\ &= -4x^2 + 8x + C \end{aligned}$$

이때 $f(1) = 3$ 이므로 $-4 + 8 + C = 3 \quad \therefore C = -1$

따라서 $f(x) = -4x^2 + 8x - 1$ 이므로

$$f(2) = -16 + 16 - 1 = -1$$

12-1 ㉔ π

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (\sin x + \cos x)^2 dx + \int (\sin x - \cos x)^2 dx \\ &= \int (1 + 2 \sin x \cos x) dx + \int (1 - 2 \sin x \cos x) dx \\ &= \int 2 dx \\ &= 2x + C \end{aligned}$$

이때 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\pi$ 이므로 $\pi + C = 3\pi \quad \therefore C = 2\pi$

따라서 $f(x) = 2x + 2\pi$ 이므로

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi + 2\pi = \pi$$

13 ㉔ ①

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (4x+k) dx \\ &= 2x^2 + kx + C \end{aligned}$$

$$f(1) = 2 \text{에서 } 2 + k + C = 2$$

$$\therefore k + C = 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$f(2) = 12 \text{에서 } 8 + 2k + C = 12$$

$$\therefore 2k + C = 4 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $k = 4, C = -4$

따라서 $f(x) = 2x^2 + 4x - 4$ 이므로 방정식 $f(x) = 0$ 의 모든 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{4}{2} = -2$$

Lecture 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

13-1 ㉔ 0

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (9x^2 + 2x - 3) dx \\ &= 3x^3 + x^2 - 3x + C \end{aligned}$$

$f(x)$ 가 일차식 $x-1$ 로 나누어떨어지므로 $f(1) = 0$

$$3 + 1 - 3 + C = 0 \quad \therefore C = -1$$

따라서 $f(x) = 3x^3 + x^2 - 3x - 1$ 이므로

$$f(-1) = -3 + 1 + 3 - 1 = 0$$

Lecture 인수정리

다항식 $f(x)$ 가 일차식 $x-a$ 로 나누어떨어지면 $f(a) = 0$

14 ㉓ 7

$$f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 4} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x^2 + 2x + 4} = x - 2$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (x-2) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + C \end{aligned}$$

이때 $f(0) = 1$ 이므로 $C = 1$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ 이므로

$$f(-2) = 2 + 4 + 1 = 7$$

14-1 ㉓ ③

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^6 - 1}{x^2 - x + 1} \\ &= \frac{(x^3 + 1)(x^3 - 1)}{x^2 - x + 1} \\ &= \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)(x^3 - 1)}{x^2 - x + 1} \\ &= (x+1)(x^3 - 1) \\ &= x^4 + x^3 - x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (x^4 + x^3 - x - 1) dx \\ &= \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - x + C \end{aligned}$$

이때 $f(0) = 3$ 이므로 $C = 3$

따라서 $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - x + 3$ 이므로

$$20f(1) = 20 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 + 3 \right) = 39$$

15 ㉓ $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 3x + C$

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 2$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 4x - 2) dx \\ &= x^3 - 2x^2 - 2x + C_1 \end{aligned}$$

이때 $f(0) = 3$ 이므로 $C_1 = 3$

따라서 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int (x^3 - 2x^2 - 2x + 3) dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 3x + C \end{aligned}$$

15-1 ㉓ -7

$f'(x) = 2x^3 - 3x - 5$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (2x^3 - 3x - 5) dx \\ &= \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 5x + C_1 \end{aligned}$$

이때 $f(0) = 2$ 이므로 $C_1 = 2$

즉 $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 5x + 2$ 이므로

..... ①

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 5x + 2 \right) dx \\ &= \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + C_2 \end{aligned}$$

이때 $F(1) = -\frac{11}{10}$ 이므로 $\frac{1}{10} - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 2 + C_2 = -\frac{11}{10}$

$$\therefore C_2 = -\frac{1}{5}$$

따라서 $F(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{5}$ 이므로

..... ②

$$F(2) = \frac{16}{5} - 4 - 10 + 4 - \frac{1}{5} = -7$$

..... ③

채점 기준	비율
① 함수 $f(x)$ 를 구할 수 있다.	40%
② 함수 $F(x)$ 를 구할 수 있다.	40%
③ $F(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

16 ㉓ 2

$\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} = 3$ 에서

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} \right] dx = \int 3 dx$$

$$\therefore f(x) + g(x) = 3x + C_1$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$C_1 = f(0) + g(0) = 1 + 2 = 3$$

$$\therefore f(x) + g(x) = 3x + 3 = 3(x+1)$$

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = 4x + 4$ 에서

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} \right] dx = \int (4x + 4) dx$$

$$\therefore f(x)g(x) = 2x^2 + 4x + C_2$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$C_2 = f(0)g(0) = 1 \times 2 = 2$$

$$\therefore f(x)g(x) = 2x^2 + 4x + 2 = 2(x+1)^2$$

따라서 $h(x) = \frac{f(x)g(x)}{f(x)+g(x)} = \frac{2(x+1)^2}{3(x+1)} = \frac{2}{3}(x+1)$ 이므로

$$h(2) = \frac{2}{3} \times 3 = 2$$

16-1 ㉓ 7

$\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} = -2$ 에서

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} \right] dx = \int (-2) dx$$

$$\therefore f(x) + g(x) = -2x + C_1$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$C_1 = f(0) + g(0) = -1 + 4 = 3$$

$$\therefore f(x) + g(x) = -2x + 3$$

..... ㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} = -8x - 2$ 에서

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} \right] dx = \int (-8x - 2) dx$$

$$\therefore f(x) - g(x) = -4x^2 - 2x + C_2$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$C_2 = f(0) - g(0) = -1 - 4 = -5$$

$$\therefore f(x) - g(x) = -4x^2 - 2x - 5$$

..... ㉡

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{을 하면 } 2f(x) = -4x^2 - 4x - 2$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= -2x^2 - 2x - 1 \\ \textcircled{7} - \textcircled{6} \text{을 하면 } 2g(x) &= 4x^2 + 8 \\ \therefore g(x) &= 2x^2 + 4 \\ \therefore f(1) + g(2) &= -5 + 12 = 7\end{aligned}$$

17 ㉓ 3

$$\begin{aligned}\int \{f(x) + g(x)\} dx &= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분} \\ \text{하면} \\ f(x) + g(x) &= x^2 + 2x \quad \dots\dots \textcircled{7} \\ \frac{d}{dx} \{f(x)g(x)\} &= 3x^2 \text{에서} \\ \int \left[\frac{d}{dx} \{f(x)g(x)\} \right] dx &= \int 3x^2 dx \\ \therefore f(x)g(x) &= x^3 + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{8} \\ x=0 \text{을 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } f(0) + g(0) &= 0 \\ \text{이때 } f(0) = 1 \text{이므로 } 1 + g(0) &= 0 \quad \therefore g(0) = -1 \\ x=0 \text{을 } \textcircled{8} \text{에 대입하면} \\ C_1 = f(0)g(0) &= 1 \times (-1) = -1 \\ \therefore f(x)g(x) &= x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) \quad \dots\dots \textcircled{9} \\ \textcircled{7}, \textcircled{9} \text{에서 } \begin{cases} f(x) = x-1 \\ g(x) = x^2 + x + 1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} f(x) = x^2 + x + 1 \\ g(x) = x-1 \end{cases} \\ \text{이때 } f(0) = 1, g(0) = -1 \text{이므로} \\ f(x) = x^2 + x + 1, g(x) &= x-1 \\ \therefore f(1) - g(1) &= 3 - 0 = 3\end{aligned}$$

17-1 ㉓ 3

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \{f(x) + g(x)\} &= 3 \text{에서} \\ \int \left[\frac{d}{dx} \{f(x) + g(x)\} \right] dx &= \int 3 dx \\ \therefore f(x) + g(x) &= 3x + C_1 \\ \text{양변에 } x=0 \text{을 대입하면} \\ C_1 = f(0) + g(0) &= -3 + 2 = -1 \\ \therefore f(x) + g(x) &= 3x - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ f'(x)g(x) + f(x)g'(x) &= \{f(x)g(x)\}' = 4x + 1 \text{에서} \\ f(x)g(x) &= \int (4x + 1) dx = 2x^2 + x + C_2 \\ \text{양변에 } x=0 \text{을 대입하면} \\ C_2 = f(0)g(0) &= -3 \times 2 = -6 \\ \therefore f(x)g(x) &= 2x^2 + x - 6 = (x+2)(2x-3) \quad \dots\dots \textcircled{2} \\ \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \begin{cases} f(x) = x+2 \\ g(x) = 2x-3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} f(x) = 2x-3 \\ g(x) = x+2 \end{cases} \\ \text{이때 } f(0) = -3, g(0) = 2 \text{이므로} \\ f(x) = 2x-3, g(x) &= x+2 \\ \therefore f(1) + g(2) &= -1 + 4 = 3\end{aligned}$$

18 ㉓ 8

$$\begin{aligned}\int (x-3)f'(x) dx &= \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 9x \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분} \\ \text{하면} \\ (x-3)f'(x) &= 2x^2 - 9x + 9 = (2x-3)(x-3) \\ \therefore f'(x) &= 2x-3 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (2x-3) dx = x^2 - 3x + C \\ \text{이때 } f(0) &= 4 \text{이므로 } C = 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{따라서 } f(x) &= x^2 - 3x + 4 \text{이므로} \quad \dots\dots \textcircled{2} \\ f(4) &= 16 - 12 + 4 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	40%
② 함수 $f(x)$ 를 구할 수 있다.	40%
③ $f(4)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

18-1 ㉓ 1

$$\begin{aligned}\int (x+2)f'(x) dx &= x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 10x \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분} \\ \text{하면} \\ (x+2)f'(x) &= 3x^2 + x - 10 = (3x-5)(x+2) \\ \therefore f'(x) &= 3x-5 \\ \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (3x-5) dx = \frac{3}{2}x^2 - 5x + C \\ \text{이때 } f(1) &= -1 \text{이므로 } \frac{3}{2} - 5 + C = -1 \quad \therefore C = \frac{5}{2} \\ \text{따라서 } f(x) &= \frac{3}{2}x^2 - 5x + \frac{5}{2} \text{이므로} \\ f(3) &= \frac{27}{2} - 15 + \frac{5}{2} = 1\end{aligned}$$

19 ㉓ 2

$$\begin{aligned}F(x) &= xf(x) - 6x^3(x-1) \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ f(x) &= f(x) + xf'(x) - 18x^2(x-1) - 6x^3 \\ f(x) &= f(x) + xf'(x) - 24x^3 + 18x^2 \\ xf'(x) &= 24x^3 - 18x^2 = x(24x^2 - 18x) \\ \therefore f'(x) &= 24x^2 - 18x \\ \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (24x^2 - 18x) dx = 8x^3 - 9x^2 + C \\ \text{이때 } f(1) &= 0 \text{이므로 } 8 - 9 + C = 0 \quad \therefore C = 1 \\ \text{따라서 } f(x) &= 8x^3 - 9x^2 + 1 \text{이므로} \\ f(-1) &= -8 - 9 + 1 = -16\end{aligned}$$

19-1 ㉓ $-\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}F(x) &= xf(x) - 3x^4 + 2x^3 + x^2 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ f(x) &= f(x) + xf'(x) - 12x^3 + 6x^2 + 2x \\ xf'(x) &= 12x^3 - 6x^2 - 2x = x(12x^2 - 6x - 2) \\ \therefore f'(x) &= 12x^2 - 6x - 2 \\ \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (12x^2 - 6x - 2) dx \\ &= 4x^3 - 3x^2 - 2x + C \\ \text{이때 } f(0) &= 1 \text{이므로 } C = 1 \\ \text{따라서 } f(x) &= 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1 \text{이므로 방정식 } f(x) = 0, \text{ 즉} \\ 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1 &= 0 \text{의 모든 근의 곱은 삼차방정식의 근과 계수} \\ \text{의 관계에 의하여 } &-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Lecture 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면
 $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

20 ㉓ 10

$$\int (x-2)f(x) dx + 2F(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3 + x^2 + C \text{의 양변을}$$

x 에 대하여 미분하면

$$(x-2)f(x)+2f(x)=-2x^3+8x^2+2x$$

$$xf(x)=x(-2x^2+8x+2)$$

$$\therefore f(x)=-2x^2+8x+2=-2(x-2)^2+10$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 10이다.

20-1 ㉡ $\frac{11}{2}$

$\int f(x)dx=(x+1)f(x)-x^4-4x+3$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+(x+1)f'(x)-4x^3-4$$

$$(x+1)f'(x)=4x^3+4=4(x+1)(x^2-x+1)$$

$$\therefore f'(x)=4x^2-4x+4$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x^2-4x+4)dx$$

$$=\frac{4}{3}x^3-2x^2+4x+C$$

$$\text{이때 } f(0)=\frac{13}{6} \text{이므로 } C=\frac{13}{6}$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{4}{3}x^3-2x^2+4x+\frac{13}{6} \text{이므로}$$

$$f(1)=\frac{4}{3}-2+4+\frac{13}{6}=\frac{11}{2}$$

21 ㉡ ⑤

$2\int f(x)dx=xf(x)-2f(x)+4x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2f(x)=f(x)+xf'(x)-2f'(x)+4$$

$$\therefore f(x)=(x-2)f'(x)+4 \quad \dots\dots ㉠$$

$f(x)$ 가 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x)=a$$

$f(x), f'(x)$ 의 식을 ㉠에 대입하면

$$ax+b=a(x-2)+4=ax-2a+4$$

$$\therefore b=-2a+4 \quad \dots\dots ㉡$$

$$f(-1)=1 \text{이므로 } -a+b=1 \quad \dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1, b=2$

따라서 $f(x)=x+2$ 이므로

$$f(1)=1+2=3$$

21-1 ㉡ 7

$f(x)+\int xf(x)dx=\frac{1}{2}x^4+2x^3+\frac{3}{2}x^2+6x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)+xf(x)=2x^3+6x^2+3x+6 \quad \dots\dots ㉠$$

$f(x)$ 를 n 차함수라 하면 $xf(x)$ 는 $(n+1)$ 차함수이므로

㉠에서 양변의 최고차항의 차수를 비교하면

$$n+1=3 \quad \therefore n=2$$

즉 $f(x)$ 는 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x)=2ax+b$$

$f(x), f'(x)$ 의 식을 ㉠에 대입하면

$$2ax+b+x(ax^2+bx+c)=2x^3+6x^2+3x+6$$

$$\therefore ax^3+bx^2+(2a+c)x+b=2x^3+6x^2+3x+6$$

$$\text{즉 } a=2, b=6, 2a+c=3 \text{이므로 } a=2, b=6, c=-1$$

따라서 $f(x)=2x^2+6x-1$ 이므로

$$f(1)=2+6-1=7$$

22 ㉡ 8

점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가 $3x^2-4x$ 이므로

$$f'(x)=3x^2-4x$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-4x)dx$$

$$=x^3-2x^2+C$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(2, 9)$ 를 지나므로

$$f(2)=9 \text{에서 } 8-8+C=9 \quad \therefore C=9$$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+9$ 이므로

$$f(1)=1-2+9=8$$

22-1 ㉡ ④

점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가 $2x+k$ 이므로

$$f'(x)=2x+k$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x+k)dx$$

$$=x^2+kx+C$$

곡선 $y=f(x)$ 가 두 점 $(0, 0), (2, 2)$ 를 지나므로

$$f(0)=0 \text{에서 } C=0$$

$$f(2)=2 \text{에서 } 4+2k+C=2$$

$$2k=-2 \quad \therefore k=-1$$

따라서 $f(x)=x^2-x$ 이므로

$$f(5)=25-5=20$$

23 ㉡ ④

$f(x)=\int(2x^2+ax+3)dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2x^2+ax+3$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$ 에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$f'(-1)=1 \text{에서 } 2-a+3=1 \quad \therefore a=4$$

23-1 ㉡ -8

$f(x)=\int(ax^2-4x+6)dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=ax^2-4x+6$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, \frac{16}{3})$ 에서의 접선의 기울기가 4이므로

$$f'(1)=4 \text{에서 } a-4+6=4 \quad \therefore a=2 \quad \dots\dots ①$$

즉 $f'(x)=2x^2-4x+6$ 이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x^2-4x+6)dx$$

$$=\frac{2}{3}x^3-2x^2+6x+C$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1, \frac{16}{3})$ 을 지나므로

$$f(1)=\frac{16}{3} \text{에서 } \frac{2}{3}-2+6+C=\frac{16}{3} \quad \therefore C=\frac{2}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+6x+\frac{2}{3} \text{이므로} \quad \dots\dots ②$$

$$f(-1)=-\frac{2}{3}-2-6+\frac{2}{3}=-8 \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	40%
② 함수 $f(x)$ 를 구할 수 있다.	40%
③ $f(-1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

24 ㉔ - 2

점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가 $6x^2 - 2x - 5$ 이므로

$$f'(x) = 6x^2 - 2x - 5$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x)dx = \int (6x^2 - 2x - 5)dx \\ &= 2x^3 - x^2 - 5x + C\end{aligned}$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(2, 6)$ 을 지나므로

$$f(2) = 6 \text{에서 } 16 - 4 - 10 + C = 6 \quad \therefore C = 4$$

$$\therefore f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$$

따라서 방정식 $f(x) = 0$, 즉 $2x^3 - x^2 - 5x + 4 = 0$ 의 모든 근의 곱은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{4}{2} = -2$$

24-1 ㉔ 5

점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가 $2x + a$ 이므로

$$f'(x) = 2x + a$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x)dx = \int (2x + a)dx \\ &= x^2 + ax + C\end{aligned}$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$f(0) = 4 \text{에서 } C = 4$$

$$\therefore f(x) = x^2 + ax + 4$$

방정식 $f(x) = 0$, 즉 $x^2 + ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 16 > 0, (a+4)(a-4) > 0$$

$$\therefore a < -4 \text{ 또는 } a > 4$$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 5이다.

25 ㉔ - 38

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2) - \{f(2-h) - f(2)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h} \\ &= f'(2) + f'(2) = 2f'(2)\end{aligned}$$

$f(x) = \int (x-3)(x^2+3x+9)dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (x-3)(x^2+3x+9) = x^3 - 27$$

$$\therefore 2f'(2) = 2 \times (8 - 27) = -38$$

25-1 ㉔ ②

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2-1} \times (x+1) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \\ &= 2f'(1)\end{aligned}$$

$f(x) = \int (3x^2 - 2)dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

$$\therefore 2f'(1) = 2 \times (3 - 2) = 2$$

26 ㉔ ④

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1) = 0$$

$f(x) = \int (2x^3 - 3x^2 + k)dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + k$$

$$\text{이때 } f'(-1) = 0 \text{이므로 } -2 - 3 + k = 0 \quad \therefore k = 5$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int (2x^3 - 3x^2 + 5)dx \\ &= \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 5x + C\end{aligned}$$

$$f(0) = -3 \text{에서 } C = -3$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 5x - 3$ 이므로

$$f(2) = 8 - 8 + 10 - 3 = 7$$

26-1 ㉔ ①

(나)에서

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \times (-1) \\ &= -f'(1) = a - 3\end{aligned}$$

$$\therefore f'(1) = -a + 3$$

.....㉔

(가)의 $\int f(x)dx = x^3 + ax - 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 3x^2 + a$$

이 식의 양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 6x$$

이때 $f'(1) = 6$ 이므로 ㉔에서

$$6 = -a + 3 \quad \therefore a = -3$$

따라서 $f(x) = 3x^2 - 3$ 이므로

$$f(2) = 12 - 3 = 9$$

27 ㉔ 1

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x) - \{f(x-h) - f(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} \times 2 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \\ &= 2f'(x) + f'(x) = 3f'(x) \\ \text{즉 } 3f'(x) &= 9x^2 + 6x - 3 \text{이므로} \\ f'(x) &= 3x^2 + 2x - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x)dx = \int (3x^2 + 2x - 1)dx \\ &= x^3 + x^2 - x + C\end{aligned}$$

$$\text{이때 } f(1) = 4 \text{이므로 } 1 + 1 - 1 + C = 4 \quad \therefore C = 3$$

따라서 $f(x) = x^3 + x^2 - x + 3$ 이므로

$$f(-2) = -8 + 4 + 2 + 3 = 1$$

27-1 ㉔ 0

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-3h) - f(x+h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-3h) - f(x) - \{f(x+h) - f(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-3h) - f(x)}{-3h} \times (-3) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= -3f'(x) - f'(x) = -4f'(x) \\ \text{즉 } -4f'(x) &= -12x^2 + 8x - 8 \text{이므로} \\ f'(x) &= 3x^2 - 2x + 2\end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 2x + 2) dx$$

$$= x^3 - x^2 + 2x + C$$

$$\text{이때 } f(1) = 6 \text{ 이므로 } 1 - 1 + 2 + C = 6 \quad \therefore C = 4$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 4 \text{ 이므로}$$

$$f(-1) = -1 - 1 - 2 + 4 = 0$$

28 ㉮ 18

$$f'(x) = \begin{cases} x-2 & (x>2) \\ 3x^2-1 & (x<2) \end{cases} \text{에서}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 2x + C_1 & (x>2) \\ x^3 - x + C_2 & (x<2) \end{cases}$$

$$f(0) = 4 \text{에서 } C_2 = 4$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=2$ 에서도 연속이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2) \text{ 이므로}$$

$$2 - 4 + C_1 = 8 - 2 + C_2, -2 + C_1 = 10 \quad \therefore C_1 = 12$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 2x + 12 & (x \geq 2) \\ x^3 - x + 4 & (x < 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(6) = 18 - 12 + 12 = 18$$

28-1 ㉮ $\frac{35}{6}$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x & (x \geq 1) \\ x^2 + 2x & (x < 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + C_1 & (x \geq 1) \\ \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C_2 & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

즉 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

$$\frac{3}{2} + C_1 = \frac{1}{3} + 1 + C_2 \quad \therefore C_1 - C_2 = -\frac{1}{6}$$

$$\therefore f(2) - f(0) = 6 + C_1 - C_2 = 6 + \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{35}{6}$$

29 ㉮ 2

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & (x>1) \\ k & (x<1) \end{cases} \text{에서}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + C_1 & (x>1) \\ kx + C_2 & (x<1) \end{cases}$$

$$f(0) = 1 \text{에서 } C_2 = 1$$

$$f(4) = 9 \text{에서 } 16 - 12 + C_1 = 9 \quad \therefore C_1 = 5$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & (x>1) \\ kx + 1 & (x<1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

$$1 - 3 + 5 = k + 1 \quad \therefore k = 2$$

29-1 ㉮ ②

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+3 & (x>1) \\ -2x+k & (x<1) \end{cases} \text{에서}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + C_1 & (x>1) \\ -x^2 + kx + C_2 & (x<1) \end{cases}$$

$$f(-2) = 0 \text{에서 } -4 - 2k + C_2 = 0 \quad \therefore C_2 = 2k + 4$$

$$f(2) = 15 \text{에서 } 4 + 6 + C_1 = 15 \quad \therefore C_1 = 5$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 5 & (x>1) \\ -x^2 + kx + 2k + 4 & (x<1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

$$1 + 3 + 5 = -1 + k + 2k + 4, 9 = 3k + 3 \quad \therefore k = 2$$

30 ㉮ $\frac{7}{2}$

$$\text{주어진 그래프에서 } f'(x) = \begin{cases} -2x+4 & (x \geq 1) \\ x+1 & (x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + C_1 & (x \geq 1) \\ \frac{1}{2}x^2 + x + C_2 & (x < 1) \end{cases}$$

$$f(0) = 2 \text{에서 } C_2 = 2$$

함수 $f(x)$ 가 연속함수이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) \text{이므로}$$

$$-1 + 4 + C_1 = \frac{1}{2} + 1 + C_2, 3 + C_1 = \frac{7}{2} \quad \therefore C_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + \frac{1}{2} & (x \geq 1) \\ \frac{1}{2}x^2 + x + 2 & (x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(3) = -9 + 12 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

30-1 ㉮ $\frac{1}{2}$

$$\text{주어진 그래프에서 } f(x) = \begin{cases} -x+2 & (x \geq 1) \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 2x + C_1 & (x \geq 1) \\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + C_2 & (x < 1) \end{cases}$$

$$F(-1) = \frac{1}{2} \text{에서 } \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + C_2 = \frac{1}{2} \quad \therefore C_2 = \frac{3}{4}$$

함수 $F(x)$ 가 연속함수이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} F(x) = F(1) \text{이므로}$$

$$-\frac{1}{2} + 2 + C_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + C_2, \frac{3}{2} + C_1 = \frac{3}{2} \quad \therefore C_1 = 0$$

$$\text{따라서 } F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 2x & (x \geq 1) \\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} & (x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$F(2) - F(1) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

유형 + **완성하기**

p. 185

31 ㉮ 3

주어진 그래프에서 $f'(x) = ax(x-2)$ ($a < 0$)라 하면

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

즉 함수 $f(x)$ 는

$x=2$ 일 때 극대이고, 극댓값은 $f(2)=7$

$x=0$ 일 때 극소이고, 극솟값은 $f(0)=3$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int ax(x-2) dx$$

$$= \int (ax^2 - 2ax) dx = \frac{a}{3}x^3 - ax^2 + C$$

$f(0)=3$ 에서 $C=3$

$$f(2)=7 \text{에서 } \frac{8}{3}a - 4a + C = 7$$

$$-\frac{4}{3}a + 3 = 7 \quad \therefore a = -3$$

따라서 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 3$ 이므로

$$f(3) = -27 + 27 + 3 = 3$$

32 ㉠ 0

$f(x) = \int 6(x-1)(x-2)dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 6(x-1)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 극대이고, 극댓값은 $f(1)=1$

$$f(x) = \int 6(x-1)(x-2)dx = \int (6x^2 - 18x + 12)dx$$

$$= 2x^3 - 9x^2 + 12x + C$$

$$f(1)=1 \text{에서 } 2 - 9 + 12 + C = 1 \quad \therefore C = -4$$

$$\therefore f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 극소이므로 극솟값은

$$f(2) = 16 - 36 + 24 - 4 = 0$$

33 ㉠ $\frac{7}{2}$

주어진 그래프에서 $f'(x) = ax(x-1)$ ($a>0$)이라 하면

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} \text{이므로 } \frac{1}{2}a \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$-\frac{1}{4}a = -\frac{3}{4} \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore f'(x) = 3x(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 극소이고, 극솟값은 $f(1)=3$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 3x(x-1) dx = \int (3x^2 - 3x) dx$$

$$= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C$$

$$f(1)=3 \text{에서 } 1 - \frac{3}{2} + C = 3 \quad \therefore C = \frac{7}{2}$$

$$\therefore f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 극대이므로 극댓값은

$$f(0) = \frac{7}{2}$$

다른 풀이

주어진 그래프에서 $f'(x) = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$ ($a>0$)이라 하면

$$f'(0)=0 \text{이므로 } \frac{1}{4}a - \frac{3}{4} = 0 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore f'(x) = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} = 3x^2 - 3x = 3x(x-1)$$

34 ㉠ ⑤

$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) \quad \therefore f(0) = 0$$

$f'(1)=4$ 이므로

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) + f(h) + 2h - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 2 = 4$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 2$$

도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$ 를 구하면

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + 2xh - f(x)}{h}$$

$$= 2x + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}$$

$$= 2x + 2$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x + 2) dx$$

$$= x^2 + 2x + C$$

이때 $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

따라서 $f(x) = x^2 + 2x$ 이므로

$$f(3) = 9 + 6 = 15$$

35 ㉠ $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x$

$f(x+y) = f(x) + f(y) - xy(x+y)$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) \quad \therefore f(0) = 0$$

도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$ 를 구하면

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) - xh(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= -x^2 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}$$

$$= -x^2 + 2 \left(\because \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 2 \right)$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (-x^2 + 2) dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + 2x + C$$

이때 $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x$$

36 ㉡ 25

도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$ 를 구하면

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{kxh + 3h^2}{h} = kx$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int kx dx = \frac{k}{2}x^2 + C$$

$$f(1)=1 \text{에서 } \frac{k}{2} + C = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f(2)=10 \text{에서 } 2k + C = 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $k=6$, $C=-2$

따라서 $f(x) = 3x^2 - 2$ 이므로

$$f(-3) = 27 - 2 = 25$$

다른 풀이

$f(t+h) - f(t) = kth + 3h^2$ 의 양변에 $t=0$, $h=1$ 을 대입하면

$$f(1) - f(0) = 3 \quad \therefore f(0) = f(1) - 3 = 1 - 3 = -2$$

주어진 식의 양변에 $t=0$, $h=x$ 를 대입하면

$$f(x) - f(0) = 3x^2 \quad \therefore f(x) = 3x^2 - 2$$

$$\therefore f(-3) = 27 - 2 = 25$$

학교 시험 대비 문제

p. 186~189

01 ㉡ ①

$\int (x+1)f(x)dx = x^3 - 6x^2 - 15x + C$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$(x+1)f(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x+1)(x-5)$$

따라서 $f(x) = 3(x-5)$ 이므로

$$f(4) = 3 \times (-1) = -3$$

02 ㉡ 1

$\int f(x)dx = F(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = F'(x) = 3x^2 + ax + 1$$

이때 $f(1) = -2$ 이므로 $3 + a + 1 = -2 \quad \therefore a = -6$

따라서 $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ 이므로

$$f(2) = 12 - 12 + 1 = 1$$

03 ㉡ ②

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int x f(x) dx \right\} = x^{10} + x^9 + x^8 + \dots + x \text{에서}$$

$$x f(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + \dots + x$$

$$= x(x^9 + x^8 + x^7 + \dots + 1)$$

따라서 $f(x) = x^9 + x^8 + x^7 + \dots + 1$ 이므로

$$f(2) = 2^9 + 2^8 + 2^7 + \dots + 1$$

$$= \frac{2^9 \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 1023$$

Lecture 등비수열의 합

등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r 라 할 때, 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$(1) r \neq 1 \text{일 때, } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$(2) r = 1 \text{일 때, } S_n = na$$

04 ㉡ ③

$$F(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} (x^2 + 4x + 1) \right\} dx$$

$$= x^2 + 4x + 1 + C$$

$$= (x+2)^2 + C - 3$$

함수 $F(x)$ 는 $x = -2$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $F(-2) = C - 3$

이므로 $C - 3 = 0 \quad \therefore C = 3$

따라서 $F(x) = x^2 + 4x + 4$ 이므로

$$F(0) = 4$$

05 ㉡ ⑤

$$f(x) = \int (2x+1)^2 dx - \int (2x-1)^2 dx$$

$$= \int \{ (2x+1)^2 - (2x-1)^2 \} dx$$

$$= \int 8x dx$$

$$= 4x^2 + C$$

이때 $f(0) = -8$ 이므로 $C = -8$

따라서 $f(x) = 4x^2 - 8$ 이므로

$$f(2) = 16 - 8 = 8$$

06 ㉡ ①

$$f_n(x) = \int (1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}) dx$$

$$= x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + C$$

이때 $f_n(0) = 1$ 이므로 $C = 1$

즉 $f_n(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + 1$ 이므로

$$f_5(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$f_3(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\therefore f_5(-1) - f_3(2)$$

$$= -1 + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 - (8 + 4 + 2 + 1)$$

$$= -15$$

07 ㉡ ①

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (6x^2 - 4x + 3) dx$$

$$= 2x^3 - 2x^2 + 3x + C$$

$f(0) = 2$ 에서 $C = 2$

따라서 $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x + 2$ 이므로

$$f(1) = 2 - 2 + 3 + 2 = 5$$

08 ㉡ ⑤

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x - 4) dx$$

$$= x^2 - 4x + C$$

이때 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축에 접하므로 이차방정식

$f(x) = 0$ 이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^2-4x+C=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-C=0 \quad \therefore C=4$$

따라서 $f(x)=x^2-4x+4$ 이므로

$$f(5)=25-20+4=9$$

09 ㉡ ④

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x-1 \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} \right] dx = \int (2x-1) dx$$

$$\therefore f(x)+g(x)=x^2-x+C_1$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$C_1=f(0)+g(0)=3+2=5$$

$$\therefore f(x)+g(x)=x^2-x+5$$

.....㉠

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=-3x^2+4x-3 \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} \right] dx = \int (-3x^2+4x-3) dx$$

$$\therefore f(x)g(x)=-x^3+2x^2-3x+C_2$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$C_2=f(0)g(0)=3 \times 2=6$$

$$\therefore f(x)g(x)=-x^3+2x^2-3x+6$$

$$=-(x-2)(x^2+3)$$

.....㉡

㉠, ㉡에서

$$\begin{cases} f(x)=-x+2 \\ g(x)=x^2+3 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} f(x)=x^2+3 \\ g(x)=-x+2 \end{cases}$$

이때 $f(0)=3, g(0)=2$ 이므로

$$f(x)=x^2+3, g(x)=-x+2$$

$$\therefore f(3)-g(3)=12-(-1)=13$$

10 ㉡ ④

$g(x)=\int \{x^2+f(x)\} dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x)=x^2+f(x) \quad \therefore f(x)=g'(x)-x^2 \quad \text{.....㉠}$$

㉠을 $f(x)+g(x)=x^2+4x$ 에 대입하면

$$g'(x)-x^2+g(x)=x^2+4x$$

$$\therefore g'(x)+g(x)=2x^2+4x$$

.....㉡

즉 함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

$$g(x)=2x^2+ax+b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$g'(x)=4x+a$$

$g(x), g'(x)$ 의 식을 ㉡에 대입하면

$$(4x+a)+(2x^2+ax+b)=2x^2+4x$$

$$\therefore 2x^2+(a+4)x+a+b=2x^2+4x$$

$$\text{즉 } a+4=4, a+b=0 \text{이므로}$$

$$a=0, b=0$$

따라서 $g(x)=2x^2$ 이므로

$$g(2)=8$$

11 ㉡ ①

$F(x)=xf(x)-2x^3+4x^2+3$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+8x$$

$$xf'(x)=6x^2-8x=x(6x-8)$$

$$\therefore f'(x)=6x-8$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int (6x-8)dx$$

$$=3x^2-8x+C$$

이때 $f(0)=2$ 이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=3x^2-8x+2$ 이므로

$$f(1)=3-8+2=-3$$

12 ㉡ ④

$f(x)+\int xf(x)dx=x^4-2x^3+3x^2-6x$ 의 양변을 x 에 대하여

미분하면

$$f'(x)+xf(x)=4x^3-6x^2+6x-6$$

.....㉠

$f(x)$ 가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x)=2ax+b$$

$f(x), f'(x)$ 의 식을 ㉠에 대입하면

$$(2ax+b)+x(ax^2+bx+c)=4x^3-6x^2+6x-6$$

$$\therefore ax^3+bx^2+(2a+c)x+b=4x^3-6x^2+6x-6$$

즉 $a=4, b=-6, 2a+c=6$ 이므로

$$a=4, b=-6, c=-2$$

따라서 $f(x)=4x^2-6x-2$ 이므로

$$f(-1)=4+6-2=8$$

13 ㉡ ①

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가 $2x+1$

에 정비례하므로

$$f'(x)=(2x+1)k \quad (k \text{는 상수}, k \neq 0)$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int (2x+1)k dx$$

$$=k \int (2x+1)dx=kx^2+kx+C$$

곡선 $y=f(x)$ 가 두 점 $(0, 1), (1, 5)$ 를 지나므로

$$f(0)=1 \text{에서 } C=1$$

$$f(1)=5 \text{에서 } k+k+C=5$$

$$2k+1=5 \quad \therefore k=2$$

따라서 $f(x)=2x^2+2x+1$ 이므로

$$f(-1)=2-2+1=1$$

14 ㉡ ⑤

곡선 $y=f(x)$ 가 제4사분면에서 직선 $y=4x-15$ 에 접하므로 접

점의 x 좌표를 t ($t > 0$)라 하면

$$f'(t)=4 \text{에서 } 3t^2+6t-20=4, 3t^2+6t-24=0$$

$$3(t+4)(t-2)=0 \quad \therefore t=2 \quad (\because t > 0)$$

점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-f(2)=4(x-2) \quad \therefore y=4x-8+f(2)$$

이때 $-8+f(2)=-15$ 이므로 $f(2)=-7$

$$f'(x)=3x^2+6x-20 \text{에서}$$

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (3x^2+6x-20)dx$$

$$=x^3+3x^2-20x+C$$

$$f(2)=-7 \text{에서 } 8+12-40+C=-7$$

$$\therefore C=13$$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-20x+13$ 이므로

$$f(0)=13$$

15 ㉡ 18

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)-\{f(1-h)-f(1)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} \\ &= f'(1) + f'(1) = 2f'(1) \\ f(x) &= \int (x+2)(x^2-2x+4)dx \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ f'(x) &= (x+2)(x^2-2x+4) = x^3+8 \\ \therefore 2f'(1) &= 2 \times (1+8) = 18 \end{aligned}$$

16 ㉡ ④

(나)에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
 즉 $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+1\} = 0$ 이므로
 $f(0)+1=0 \quad \therefore f(0)=-1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)=2$
 (가)의 $\int f(x)dx = x^3+ax^2+bx-1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x) = 3x^2+2ax+b$
 이 식의 양변을 다시 x 에 대하여 미분하면
 $f'(x) = 6x+2a$
 $f(0) = -1$ 에서 $b = -1$
 $f'(0) = 2$ 에서 $2a = 2 \quad \therefore a = 1$
 따라서 $f(x) = 3x^2+2x-1$ 이므로
 $f(2) = 12+4-1 = 15$

17 ㉡ 3

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} 2x+1 & (x>1) \\ 3x^2 & (x<1) \end{cases} \text{에서} \\ f(x) &= \begin{cases} x^2+x+C_1 & (x>1) \\ x^3+C_2 & (x<1) \end{cases} \\ f(0) &= -2 \text{에서 } C_2 = -2 \\ \text{함수 } f(x) &\text{가 모든 실수 } x \text{에서 연속이므로 } x=1 \text{에서도 연속이다.} \\ \text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) \text{이므로} \\ 1+1+C_1 &= 1+C_2, 2+C_1 = -1 \quad \therefore C_1 = -3 \\ \text{따라서 } f(x) &= \begin{cases} x^2+x-3 & (x \geq 1) \\ x^3-2 & (x < 1) \end{cases} \text{이므로} \\ f(2) &= 4+2-3 = 3 \end{aligned}$$

18 ㉡ 10

$$\begin{aligned} f'(x) &= |x| + |x-2| = \begin{cases} 2x-2 & (x \geq 2) \\ 2 & (0 \leq x < 2) \\ -2x+2 & (x < 0) \end{cases} \text{이므로} \\ f(x) &= \begin{cases} x^2-2x+C_1 & (x \geq 2) \\ 2x+C_2 & (0 \leq x < 2) \\ -x^2+2x+C_3 & (x < 0) \end{cases} \\ \text{함수 } f(x) &\text{가 연속함수이므로 } x=2 \text{에서도 연속이다.} \\ \text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2) \text{이므로} \\ 4-4+C_1 &= 4+C_2 \quad \therefore C_1-C_2=4 \end{aligned}$$

또 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서도 연속이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0) \quad \therefore C_2 = C_3 \quad \dots\dots \textcircled{L} \\ \textcircled{L} \text{을 } \textcircled{L} \text{에 대입하면 } C_1-C_3 &= 4 \\ \therefore f(3)-f(-1) &= 3+C_1-(-3+C_3) \\ &= 6+C_1-C_3 \\ &= 6+4 = 10 \end{aligned}$$

19 ㉡ ④

주어진 그래프에서 $f'(x) = ax(x-2)$ ($a>0$)라 하면
 $f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$ 는
 $x=0$ 일 때 극대이고, 극댓값은 $f(0)=5$
 $x=2$ 일 때 극소이고, 극솟값은 $f(2)=1$
 $f(x) = \int f'(x)dx = \int ax(x-2)dx$
 $= \int (ax^2-2ax)dx = \frac{a}{3}x^3 - ax^2 + C$

$f(0)=5$ 에서 $C=5$
 $f(2)=1$ 에서 $\frac{8}{3}a - 4a + C = 1$
 $-\frac{4}{3}a + 5 = 1 \quad \therefore a = 3$
 따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ 이므로
 $f(1) = 1 - 3 + 5 = 3$

20 ㉡ 14

(가)에서
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h)-f(x)}{2h} \times 2$
 $= 2f'(x) = 6x^2 - 12x + a$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 6x + \frac{a}{2}$
 (나)에서 $f'(-1)=0$ 이므로
 $3+6+\frac{a}{2}=0 \quad \therefore a=-18$
 $\therefore f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=3$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$ 는
 $x=-1$ 일 때 극대이고, 극댓값은 $f(-1)$
 $x=3$ 일 때 극소이고, 극솟값은 $f(3)$
 이때
 $f(x) = \int f'(x)dx = \int (3x^2 - 6x - 9)dx$
 $= x^3 - 3x^2 - 9x + C$
 이므로

$$M=f(-1)=-1-3+9+C=C+5$$

$$m=f(3)=27-27-27+C=C-27$$

$$\therefore a+M-m=-18+(C+5)-(C-27)=14$$

21 ㉮ 3

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)-1 \quad \therefore f(0)=1$$

$f'(1)=5$ 이므로

$$f'(1)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)+f(h)+2h-1-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-1+2h}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}+2 \quad (\because f(0)=1)$$

$$=f'(0)+2=5$$

$$\therefore f'(0)=3$$

서술형 1 ㉮ $-\frac{2}{3}$

$$f(x)=F'(x)=3x^2+2ax-6$$

$$f(1)=-1 \text{에서 } 3+2a-6=-1 \quad \therefore a=1 \quad \dots\dots ①$$

$$\therefore f(x)=3x^2+2x-6 \quad \dots\dots ②$$

따라서 방정식 $f(x)=-5$, 즉 $3x^2+2x-1=0$ 의 모든 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{2}{3}$ $\dots\dots ③$

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	50%
② 함수 $f(x)$ 를 구할 수 있다.	10%
③ 방정식 $f(x)=-5$ 의 모든 근의 합을 구할 수 있다.	40%

서술형 2 ㉮ $\frac{50}{51}$

$$f(x)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\dots+\frac{1}{50}x^{50} \text{이므로}$$

$$F(x)=\int f(x)dx$$

$$=\int \left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\dots+\frac{1}{50}x^{50}\right)dx$$

$$=\frac{1}{1 \times 2}x^2+\frac{1}{2 \times 3}x^3+\frac{1}{3 \times 4}x^4+\dots$$

$$+\frac{1}{50 \times 51}x^{51}+C \quad \dots\dots ①$$

이때 $F(0)=0$ 이므로 $C=0$

$$\therefore F(x)=\frac{1}{1 \times 2}x^2+\frac{1}{2 \times 3}x^3+\frac{1}{3 \times 4}x^4+\dots$$

$$+\frac{1}{50 \times 51}x^{51} \quad \dots\dots ②$$

$$\therefore F(1)=\frac{1}{1 \times 2}+\frac{1}{2 \times 3}+\frac{1}{3 \times 4}+\dots+\frac{1}{50 \times 51}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{51}\right)$$

$$=1-\frac{1}{51}$$

$$=\frac{50}{51} \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① 함수 $F(x)$ 를 적분상수를 포함한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
② 함수 $F(x)$ 를 구할 수 있다.	20%
③ $F(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

서술형 3 ㉮ 2

(나)의 식의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0 \quad \dots\dots ①$$

도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$ 를 구하면

$$f'(x)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)-2xh-f(x)}{h}$$

$$=-2x+\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}$$

$$=-2x+3 \quad (\because f'(0)=3) \quad \dots\dots ②$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int (-2x+3)dx$$

$$=-x^2+3x+C$$

이때 $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

$$\text{따라서 } f(x)=-x^2+3x \text{이므로} \quad \dots\dots ③$$

$$f(1)=-1+3=2 \quad \dots\dots ④$$

채점 기준	비율
① $f(0)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%
② $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	40%
③ 함수 $f(x)$ 를 구할 수 있다.	30%
④ $f(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

1등급

10% 핵심 기출 문제

p. 190~191

01 ㉮ 12

$$F'(x)=G'(x) \text{이므로}$$

$$G(x)=F(x)+C$$

$$F(200)-G(200)=3 \text{에서 } G(200)=F(200)-3$$

$$F(200)+C=F(200)-3 \quad \therefore C=-3$$

따라서 $G(x)=F(x)-3$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{20} G(k)=\sum_{k=1}^{20} \{F(k)-3\}=\sum_{k=1}^{20} F(k)-3 \times 20$$

$$=72-60=12$$

02 ㉮ 16

$$f_n(x)=\int n(n+1)x^n dx$$

$$=n(n+1) \times \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

$$=nx^{n+1}+C$$

이때 $f_n(0)=0$ 이므로 $C=0$

$$\therefore f_n(x)=nx^{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{10} f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{10} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{에서 } S=\sum_{n=1}^{10} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{이라 하면}$$

$$S = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots + \frac{10}{2^{11}}$$

$$-\frac{1}{2}S = \frac{1}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \dots + \frac{9}{2^{11}} + \frac{10}{2^{12}}$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{11}} - \frac{10}{2^{12}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \right\}}{1 - \frac{1}{2}} - 10 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{12}$$

$$= \frac{1}{2} - 6 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{11}$$

$$\therefore S = 1 - 6 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{10}$$

$$\approx \sum_{n=1}^{10} f_n \left(\frac{1}{2} \right) = 1 - 6 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \text{ 이므로}$$

$$a=6, b=10 \quad \therefore a+b=6+10=16$$

03 ㉮ 15

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x - 2 & (|x| < 1) \\ 4x - 5 & (|x| > 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 5x + C_1 & (x < -1) \\ x^3 + x^2 - 2x + C_2 & (-1 < x < 1) \\ 2x^2 - 5x + C_3 & (x > 1) \end{cases}$$

$$f(2) = 2 \text{에서 } 8 - 10 + C_3 = 2 \quad \therefore C_3 = 4$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) \text{이므로}$$

$$2 - 5 + C_3 = 1 + 1 - 2 + C_2 \quad \therefore C_2 = 1$$

또 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1)$$

$$-1 + 1 + 2 + C_2 = 2 + 5 + C_1, 3 = 7 + C_1 \quad \therefore C_1 = -4$$

따라서 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 5x - 4 & (x < -1) \\ x^3 + x^2 - 2x + 1 & (-1 \leq x < 1) \\ 2x^2 - 5x + 4 & (x \geq 1) \end{cases}$ 이므로

$$f(-2) + f(0) = (8 + 10 - 4) + 1 = 15$$

04 ㉮ 2

삼차함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극값을 갖고, 그 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 $x=-1$ 에서도 극값을 갖는다.

즉 $f'(-1)=0, f'(1)=0$ 이므로

$f'(x)=a(x+1)(x-1)$ (a 는 상수, $a \neq 0$)이라 하면

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int a(x+1)(x-1) dx$$

$$= \int (ax^2 - a) dx = \frac{a}{3}x^3 - ax + C$$

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 원점을 지난다.

즉 $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

$$\therefore f(x) = \frac{a}{3}x^3 - ax = \frac{a}{3}x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는 $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ 이므로 양수인 것은 $\sqrt{3}$ 이다.

05 ㉮ 2

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

$$\therefore y = f'(t)x - tf'(t) + f(t)$$

이 식이 $y=2(1-t)x+g(t)$ 와 같으므로

$$f'(t)=2(1-t)=-2t+2, g(t)=-tf'(t)+f(t)$$

$$f(t) = \int f'(t) dt = \int (-2t+2) dt = -t^2 + 2t + C$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 가 원점을 지나므로

$$f(0)=0 \quad \therefore C=0$$

$$\therefore f(t) = -t^2 + 2t$$

따라서 $g(t) = -t(-2t+2) + (-t^2+2t) = t^2$ 이므로

$$f(1)+g(-1)=1+1=2$$

06 ㉮ 4

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = -2 \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값이}$$

존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-3\} = 0 \text{이므로}$$

$$f(2)-3=0 \quad \therefore f(2)=3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = -2$$

주어진 그래프에서 $f'(x)=ax^2(x-3)$ ($a>0$)이라 하면

$$f'(2) = -4a = -2 \text{에서 } a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{2}x^2(x-3) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	3	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $f(3)$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right) dx = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + C$$

$$f(2) = 3 \text{에서 } 2 - 4 + C = 3 \quad \therefore C = 5$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 5$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f(3) = \frac{81}{8} - \frac{27}{2} + 5 = \frac{13}{8}$$

07 ㉮ 5

$f(x) = \int xg(x) dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = xg(x) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\frac{d}{dx} \{f(x) - g(x)\} = 4x^3 + 2x \text{에서}$$

$$f'(x) - g'(x) = 4x^3 + 2x \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

㉮을 ㉮에 대입하면

$$xg(x) - g'(x) = 4x^3 + 2x \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

즉 함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 4인 이차함수이다.

$g(x) = 4x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$g'(x) = 8x + a$$

$g(x), g'(x)$ 의 식을 ㉮에 대입하면

$$x(4x^2 + ax + b) - (8x + a) = 4x^3 + 2x$$

$$\therefore 4x^3 + ax^2 + (b-8)x - a = 4x^3 + 2x$$

즉 $a=0, b-8=2$ 이므로

$$a=0, b=10$$

따라서 $g(x)=4x^2+10$ 이므로

$$g(1)=4+10=14$$

08 ㉡ 2

주어진 그래프에서 $f'(x)=a(x+2)(x-2)$ ($a<0$)라 하면

$$f'(0)=3\text{이므로 } -4a=3 \quad \therefore a=-\frac{3}{4}$$

$$\therefore f'(x)=-\frac{3}{4}(x+2)(x-2)=-\frac{3}{4}x^2+3$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx = \int \left(-\frac{3}{4}x^2+3\right)dx \\ &= -\frac{1}{4}x^3+3x+C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

$$\therefore f(x)=-\frac{1}{4}x^3+3x$$

$$f(x)=kx\text{에서 } -\frac{1}{4}x^3+3x=kx$$

$$\frac{1}{4}x^3+(k-3)x=0 \quad \therefore \frac{1}{4}x\{x^2+4(k-3)\}=0$$

위의 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식

$x^2+4(k-3)=0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+4(k-3)=0$ 의 근이 0이 아니므로

$$4(k-3)\neq 0 \quad \therefore k\neq 3 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2+4(k-3)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} D &= -16(k-3) > 0 \\ k-3 < 0 \quad \therefore k < 3 \quad \dots\dots\textcircled{2} \end{aligned}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통 범위를 구하면 $k < 3$

따라서 정수 k 의 최댓값은 2이다.

09 ㉡ 15

(가)에서 $f'(2)=0, f(2)=35$

(나)에서 방정식 $f(x)=f(4)$ 는 서로 다른 두 실근을 가지므로 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$\therefore f'(4)=0$$

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$f'(x)=3(x-2)(x-4)$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int 3(x-2)(x-4)dx$$

$$=\int (3x^2-18x+24)dx=x^3-9x^2+24x+C$$

이때 $f(2)=35$ 이므로

$$8-36+48+C=35 \quad \therefore C=15$$

따라서 $f(x)=x^3-9x^2+24x+15$ 이므로

$$f(0)=15$$

10 ㉡ ①

(나)에서 $f(-x)=f(x)$ 이고 $f(x)$ 가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+b$ (a, b 는 상수, $a\neq 0$)라 하자.

(가)에서 $f(0)=-2$ 이므로 $b=-2$

$$\therefore f(x)=ax^2-2, f'(x)=2ax$$

(다)에서 $f(f'(x))=f'(f(x))$ 이므로

$$a(2ax)^2-2=2a(ax^2-2)$$

$$4a^3x^2-2=2a^2x^2-4a$$

$$\therefore (4a^3-2a^2)x^2+4a-2=0$$

위의 식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$4a^3-2a^2=0, 4a-2=0 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$$

함수 $F(x)=\int f(x)dx$ 가 감소하는 구간의 길이를 구하려면

$F'(x)=f(x)\leq 0$ 인 구간의 길이를 구해야 하므로

$$\frac{1}{2}x^2-2\leq 0\text{에서 } x^2-4\leq 0$$

$$(x+2)(x-2)\leq 0 \quad \therefore -2\leq x\leq 2$$

따라서 함수 $F(x)=\int f(x)dx$ 가 감소하는 구간의 길이는

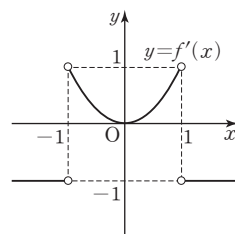
$$2-(-2)=4$$

11 ㉡ ④

$$\neg. f'(x)=\begin{cases} x^2 & (|x|<1) \\ -1 & (|x|>1) \end{cases} \text{의 그래프}$$

프는 오른쪽 그림과 같다.

즉 $x=-1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극값을 갖는다.



$$\therefore f(x)=\begin{cases} -x+C_1 & (x>1) \\ \frac{1}{3}x^3+C_2 & (-1<x<1) \\ -x+C_3 & (x<-1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 는 모든 실수에서 연속이므로 $x=-1, x=1$ 에서도 연속이다.

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x\rightarrow -1+} f(x)=\lim_{x\rightarrow -1-} f(x)=f(-1)$$

$$-\frac{1}{3}+C_2=1+C_3 \quad \therefore C_3=C_2-\frac{4}{3}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x\rightarrow 1+} f(x)=\lim_{x\rightarrow 1-} f(x)=f(1)$$

$$-1+C_1=\frac{1}{3}+C_2 \quad \therefore C_1=C_2+\frac{4}{3}$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} -x+C_2+\frac{4}{3} & (x\geq 1) \\ \frac{1}{3}x^3+C_2 & (-1\leq x<1) \\ -x+C_2-\frac{4}{3} & (x<-1) \end{cases}$$

$$\text{이때 } f(-1)=-\frac{1}{3}+C_2, f(1)=\frac{1}{3}+C_2\text{이므로}$$

$$f(-1)\neq f(1)$$

즉 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(-x)$ 가 성립하지 않는다.

$$\neg. f(0)=0\text{이면 } C_2=0$$

$$\text{즉 } x\geq 1\text{일 때, } f(x)=-x+\frac{4}{3}\text{이므로}$$

$$f(1)=-1+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}>0$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

개념 완성하기

p.195~196

01 답 1

$$\int_0^1 4x^3 dx = \left[x^4 \right]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

02 답 -2

$$\int_0^1 (2t-3) dt = \left[t^2 - 3t \right]_0^1 = (1-3) - 0 = -2$$

03 답 32

$$\int_2^4 (3x^2 - 4x) dx = \left[x^3 - 2x^2 \right]_2^4 = (64-32) - (8-8) = 32$$

04 답 40

$$\int_{-2}^3 (3t^2 + 2t) dt = \left[t^3 + t^2 \right]_{-2}^3 = (27+9) - (-8+4) = 40$$

05 답 42

$$\begin{aligned} \int_0^3 (9x^2 - 6x - 4) dx &= \left[3x^3 - 3x^2 - 4x \right]_0^3 \\ &= (81 - 27 - 12) - 0 \\ &= 42 \end{aligned}$$

06 답 $\frac{46}{3}$

$$\begin{aligned} \int_1^3 (2x^2 - x + 1) dx &= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_1^3 \\ &= \left(18 - \frac{9}{2} + 3 \right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{46}{3} \end{aligned}$$

07 답 $\frac{13}{12}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^3 + x^2 + x) dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - 0 \\ &= \frac{13}{12} \end{aligned}$$

08 답 $\frac{3}{4}$

$$\int_{-1}^2 (x^3 - 2x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^2 \right]_{-1}^2 = (4-4) - \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{3}{4}$$

09 답 $\frac{26}{3}$

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x+1)^2 dx &= \int_0^2 (x^2 + 2x + 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_0^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} + 4 + 2 \right) - 0 = \frac{26}{3} \end{aligned}$$

10 답 16

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 3(x+1)(x-1) dx &= \int_{-1}^3 (3x^2 - 3) dx \\ &= \left[x^3 - 3x \right]_{-1}^3 \\ &= (27-9) - (-1+3) \\ &= 16 \end{aligned}$$

11 답 0

$$\int_2^2 (3x^2 + 6x + 1) dx = 0$$

12 답 -4

$$\begin{aligned} \int_0^{-1} (4x^3 + 5) dx &= - \int_{-1}^0 (4x^3 + 5) dx \\ &= - \left[x^4 + 5x \right]_{-1}^0 \\ &= - \{ 0 - (1-5) \} \\ &= -4 \end{aligned}$$

13 답 -18

$$\begin{aligned} \int_3^1 (x-1)(x^2+x+1) dx &= - \int_1^3 (x^3-1) dx \\ &= - \left[\frac{1}{4}x^4 - x \right]_1^3 \\ &= - \left\{ \left(\frac{81}{4} - 3 \right) - \left(\frac{1}{4} - 1 \right) \right\} \\ &= -18 \end{aligned}$$

14 답 $2x-4$

$$\frac{d}{dx} \int_{-1}^x (2t-4) dt = 2x-4$$

15 답 x^2-5x

$$\frac{d}{dx} \int_{-2}^x (t^2-5t) dt = x^2-5x$$

16 답 $9x^2-6x-4$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x (9t^2-6t-4) dt = 9x^2-6x-4$$

17 답 $-x^3+2x^2-1$

$$\frac{d}{dx} \int_1^x (-t^3+2t^2-1) dt = -x^3+2x^2-1$$

18 답 32

$$\begin{aligned} \int_1^3 (3x^2-2x+1) dx + \int_1^3 (2x+2) dx \\ &= \int_1^3 (3x^2-2x+1+2x+2) dx \\ &= \int_1^3 (3x^2+3) dx \\ &= \left[x^3+3x \right]_1^3 \\ &= (27+9) - (1+3) \\ &= 32 \end{aligned}$$

19 ㉔ 6

$$\begin{aligned}
& \int_1^2 (6x^2+2x)dx - \int_1^2 (6x^2-2x)dx \\
&= \int_1^2 \{6x^2+2x - (6x^2-2x)\}dx \\
&= \int_1^2 4x dx \\
&= \left[2x^2 \right]_1^2 \\
&= 8-2 \\
&= 6
\end{aligned}$$

20 ㉔ -4

$$\begin{aligned}
& \int_0^2 (3x^2-1)dx + \int_0^2 (-3x^2-1)dx \\
&= \int_0^2 \{3x^2-1 + (-3x^2-1)\}dx \\
&= \int_0^2 (-2)dx \\
&= \left[-2x \right]_0^2 \\
&= -4-0 \\
&= -4
\end{aligned}$$

21 ㉔ -2

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (x-1)^2 dx - \int_0^1 (x+1)^2 dx \\
&= \int_0^1 (x^2-2x+1)dx - \int_0^1 (x^2+2x+1)dx \\
&= \int_0^1 \{x^2-2x+1 - (x^2+2x+1)\}dx \\
&= \int_0^1 (-4x)dx \\
&= \left[-2x^2 \right]_0^1 \\
&= -2-0 \\
&= -2
\end{aligned}$$

22 ㉔ 0

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^0 (x^2-1)dx + \int_0^2 (x^2-1)dx = \int_{-1}^2 (x^2-1)dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_{-1}^2 \\
&= \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

23 ㉔ $\frac{22}{3}$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (2x^2+1)dx + \int_1^2 (2x^2+1)dx = \int_0^2 (2x^2+1)dx \\
&= \left[\frac{2}{3}x^3 + x \right]_0^2 \\
&= \left(\frac{16}{3} + 2 \right) - 0 \\
&= \frac{22}{3}
\end{aligned}$$

24 ㉔ 116

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^2 (4x^3+3x^2+2)dx + \int_2^3 (4x^3+3x^2+2)dx \\
&= \int_{-1}^3 (4x^3+3x^2+2)dx \\
&= \left[x^4 + x^3 + 2x \right]_{-1}^3 \\
&= (81+27+6) - (1-1-2) \\
&= 116
\end{aligned}$$

25 ㉔ 24

$$\begin{aligned}
& \int_{-2}^0 (5x^4-3)dx - \int_1^0 (5x^4-3)dx \\
&= \int_{-2}^0 (5x^4-3)dx + \int_0^1 (5x^4-3)dx \\
&= \int_{-2}^1 (5x^4-3)dx \\
&= \left[x^5 - 3x \right]_{-2}^1 \\
&= (1-3) - (-32+6) \\
&= 24
\end{aligned}$$

26 ㉔ $f(x)=2x-2$

주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x)=2x-2$

27 ㉔ $f(x)=2x-5$

주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x)=2x-5$

28 ㉔ $f(x)=3x^2+7$

주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x)=3x^2+7$

29 ㉔ $f(x)=-3x^2-2x$

주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x)=-3x^2-2x$

30 ㉔ 6

주어진 식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면
 $\int_2^2 f(t)dt = 8-2k+4=0$
 $12-2k=0 \quad \therefore k=6$

31 ㉔ 4

주어진 식의 양변에 $x=3$ 을 대입하면
 $\int_3^3 f(t)dt = 9-3k+3=0$
 $12-3k=0 \quad \therefore k=4$

32 ㉔ $\frac{9}{4}$

주어진 식의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면
 $\int_{-2}^{-2} f(t)dt = -8+4k-1=0$
 $4k-9=0 \quad \therefore k=\frac{9}{4}$

33 ㉡ 1

주어진 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\int_1^1 f(t)dt = 1 - 3k + 2k = 0$$

$$1 - k = 0 \quad \therefore k = 1$$

34 ㉡ -3

$f(t) = (t-1)(t+3)$ 이라 하고 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h (t-1)(t+3)dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(t)dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[F(t)]_0^h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} \\ &= F'(0) = f(0) \\ &= -1 \times 3 = -3 \end{aligned}$$

35 ㉡ 1

$f(t) = t^2 - 2t + 2$ 라 하고 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} (t^2 - 2t + 2)dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} f(t)dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[F(t)]_1^{1+h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} \\ &= F'(1) = f(1) \\ &= 1 - 2 + 2 = 1 \end{aligned}$$

36 ㉡ 38

$f(t) = 4t^2 + t - 1$ 이라 하고 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_3^{3+h} (4t^2 + t - 1)dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_3^{3+h} f(t)dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[F(t)]_3^{3+h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(3+h) - F(3)}{h} \\ &= F'(3) = f(3) \\ &= 36 + 3 - 1 = 38 \end{aligned}$$

37 ㉡ -16

$f(t) = t^2 - 9$ 라 하고 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{1-h}^{1+h} (t^2 - 9)dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{1-h}^{1+h} f(t)dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[F(t)]_{1-h}^{1+h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1) - \{F(1-h) - F(1)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1-h) - F(1)}{-h} \\ &= F'(1) + F'(1) \\ &= 2F'(1) = 2f(1) \\ &= 2 \times (1 - 9) = -16 \end{aligned}$$

38 ㉡ 4

$f(t) = 6t^2 - 3t + 1$ 이라 하고 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x (6t^2 - 3t + 1)dt &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t)dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[F(t)]_1^x}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} \\ &= F'(1) = f(1) \\ &= 6 - 3 + 1 = 4 \end{aligned}$$

39 ㉡ 14

$f(t) = 3t^2 + 2$ 라 하고 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x (3t^2 + 2)dt &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x f(t)dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[F(t)]_2^x}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x-2} \\ &= F'(2) = f(2) \\ &= 12 + 2 = 14 \end{aligned}$$

40 ㉡ 19

$f(t) = 2t^2 + 2t - 5$ 라 하고 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \int_3^x (2t^2 + 2t - 5)dt &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \int_3^x f(t)dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{[F(t)]_3^x}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{F(x) - F(3)}{x-3} \\ &= F'(3) = f(3) \\ &= 18 + 6 - 5 = 19 \end{aligned}$$

41 ㉡ -1

$f(t) = t^2 - t - 3$ 이라 하고 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \int_{-1}^x (t^2 - t - 3)dt &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \int_{-1}^x f(t)dt \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{[F(t)]_{-1}^x}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{F(x) - F(-1)}{x - (-1)} \\ &= F'(-1) = f(-1) \\ &= 1 + 1 - 3 = -1 \end{aligned}$$

유형 완성하기

p.197~212

01 ㉡ 3

$$\begin{aligned} \int_3^{-1} (-2x-5)dx - \int_2^2 (x^3-x+1)dx &= \int_{-1}^3 (2x+5)dx - 0 \\ &= \left[x^2 + 5x \right]_{-1}^3 \\ &= 28 \end{aligned}$$

01-1 ㉔ ②

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{-1} (3x-2x^2+3)dx + \int_1^0 (3x-2x^2)dx \\ &= 0 + \int_0^1 (2x^2-3x)dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

02 ㉔ ⑤

$$\int_{-1}^2 (3x^2+2x+1)dx = \left[x^3 + x^2 + x \right]_{-1}^2 = 15$$

02-1 ㉔ 4

$$\int_{-1}^1 (4x^3+3x^2-2x+1)dx = \left[x^4 + x^3 - x^2 + x \right]_{-1}^1 = 4$$

03 ㉔ ①

$$\int_0^1 x^2(x-1)dx = \int_0^1 (x^3-x^2)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = -\frac{1}{12}$$

03-1 ㉔ ④

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 xf(x)dx &= \int_{-1}^2 x(4x^2-3x+2)dx \\ &= \int_{-1}^2 (4x^3-3x^2+2x)dx \\ &= \left[x^4 - x^3 + x^2 \right]_{-1}^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

04 ㉔ 2

$$\int_0^k (3x^2-4)dx = \left[x^3 - 4x \right]_0^k = k^3 - 4k \text{ 이므로}$$

$$k^3 - 4k = 0, k(k+2)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 0 \text{ 또는 } k = 2$$

$$\text{그런데 } k > 0 \text{ 이므로 } k = 2$$

04-1 ㉔ ①

$$\int_0^k (x+3)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_0^k = \frac{1}{2}k^2 + 3k \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{2}k^2 + 3k = \frac{7}{2}, k^2 + 6k - 7 = 0$$

$$(k+7)(k-1) = 0 \quad \therefore k = -7 \text{ 또는 } k = 1$$

$$\text{그런데 } k > 0 \text{ 이므로 } k = 1$$

05 ㉔ ③

$$\begin{aligned} \int_a^\beta (2x-1)dx &= \left[x^2 - x \right]_a^\beta \\ &= \beta^2 - \beta - (a^2 - a) \\ &= \beta^2 - a^2 - (\beta - a) \\ &= (\beta + a)(\beta - a) - (\beta - a) \\ &= (\beta - a)(\beta + a - 1) \end{aligned} \quad \dots\dots ㉔$$

이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -1$$

$$\text{이때 } (\beta - \alpha)^2 = (\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta \text{ 이므로}$$

$$(\beta - \alpha)^2 = 2^2 - 4 \times (-1) = 8$$

$$\therefore \beta - \alpha = 2\sqrt{2} \quad (\because \alpha < \beta)$$

㉔에서

$$\begin{aligned} \int_a^\beta (2x-1)dx &= (\beta - \alpha)(\beta + \alpha - 1) \\ &= 2\sqrt{2} \times (2 - 1) \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

05-1 ㉔ ①

$$\begin{aligned} \int_a^\beta (4x+3)dx &= \left[2x^2 + 3x \right]_a^\beta \\ &= 2\beta^2 + 3\beta - (2a^2 + 3a) \\ &= 2(\beta^2 - a^2) + 3(\beta - a) \\ &= 2(\beta + a)(\beta - a) + 3(\beta - a) \\ &= (\beta - a)\{2(\beta + a) + 3\} \end{aligned} \quad \dots\dots ㉔$$

이차방정식 $x^2 - x - 3 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -3$$

$$\text{이때 } (\beta - \alpha)^2 = (\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta \text{ 이므로}$$

$$(\beta - \alpha)^2 = 1^2 - 4 \times (-3) = 13$$

$$\therefore \beta - \alpha = \sqrt{13} \quad (\because \alpha > \beta)$$

㉔에서

$$\begin{aligned} \int_a^\beta (4x+3)dx &= (\beta - \alpha)\{2(\beta + \alpha) + 3\} \\ &= -\sqrt{13} \times (2 \times 1 + 3) \\ &= -5\sqrt{13} \end{aligned}$$

06 ㉔ 66

(가)에서

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (6x+2)dx = 3x^2 + 2x + C \quad \dots\dots ㉔$$

(나)에서

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 f(x)dx &= \int_{-2}^0 (3x^2 + 2x + C)dx = \left[x^3 + x^2 + Cx \right]_{-2}^0 \\ &= 2C + 4 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } 2C + 4 = -4 \text{ 이므로 } C = -4$$

$$\text{따라서 } f(x) = 3x^2 + 2x - 4 \text{ 이므로} \quad \dots\dots ㉔$$

$$\begin{aligned} \int_1^4 f(x)dx &= \int_1^4 (3x^2 + 2x - 4)dx \\ &= \left[x^3 + x^2 - 4x \right]_1^4 = 66 \end{aligned} \quad \dots\dots ㉔$$

채점 기준	비율
㉔ $f(x)$ 를 적분상수 C 를 포함한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
㉔ $f(x)$ 를 구할 수 있다.	40%
㉔ 정적분 $\int_1^4 f(x)dx$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

06-1 ㉔ $\frac{8}{3}$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 (x, y) 에서의 접선의 기울기가 $2x - 1$ 이므로

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx = \int (2x - 1)dx = x^2 - x + C$$

$$\text{이때 } \int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{6} \text{ 이므로}$$

$$\int_0^1 (x^2 - x + C)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + Cx \right]_0^1 = -\frac{1}{6} + C = \frac{5}{6}$$

$$\therefore C = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^2 - x + 1 \text{ 이므로}$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x^2 - x + 1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

07 ㉔ ①

$$\int_0^2 (2x^3 - ax + 2)dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{a}{2}x^2 + 2x \right]_0^2 = -2a + 12$$

$$\text{즉 } -2a + 12 = 7 \text{ 이므로 } a = \frac{5}{2}$$

07-1 ㉔ -8

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (6x^2 + ax)dx = \left[2x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^1 = 2 + \frac{a}{2}$$

이때 $f(1) = 6 + a$ 이므로

$$2 + \frac{a}{2} = 6 + a \quad \therefore a = -8$$

08 ㉔ ④

$$\int_{-1}^0 f(x)dx = 0 \text{ 이므로 } \int_{-1}^0 (x^2 + ax + b)dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + bx \right]_{-1}^0 = 0, \quad -\frac{a}{2} + b + \frac{1}{3} = 0$$

$$\therefore 3a - 6b = 2 \quad \dots\dots ㉔$$

$$\int_0^1 f(x)dx = 0 \text{ 이므로 } \int_0^1 (x^2 + ax + b)dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + bx \right]_0^1 = 0$$

$$\frac{a}{2} + b + \frac{1}{3} = 0$$

$$\therefore 3a + 6b = -2 \quad \dots\dots ㉕$$

㉔, ㉕을 연립하여 풀면

$$a = 0, b = -\frac{1}{3}$$

따라서 $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}$ 이므로

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x \right]_1^2 = 2$$

08-1 ㉔ ⑤

$$f(-1) = 2 \text{ 이므로 } a - b + c = 2 \quad \dots\dots ㉔$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ 에서 } f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(0) = 0 \text{ 이므로 } b = 0 \quad \dots\dots ㉕$$

$$\int_0^1 f(x)dx = -2 \text{ 이므로 } \int_0^1 (ax^2 + bx + c)dx = -2$$

$$\left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx \right]_0^1 = -2$$

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = -2$$

$$\therefore 2a + 3b + 6c = -12 \quad \dots\dots ㉖$$

㉔, ㉕, ㉖을 연립하여 풀면

$$a = 6, b = 0, c = -4$$

따라서 $f(x) = 6x^2 - 4$ 이므로

$$f(2) = 24 - 4 = 20$$

09 ㉔ ②

$$\int_0^1 (3a^2x^2 + 8ax - 1)dx = \left[a^2x^3 + 4ax^2 - x \right]_0^1$$

$$= a^2 + 4a - 1$$

$$= (a + 2)^2 - 5$$

즉 $\int_0^1 (3a^2x^2 + 8ax - 1)dx$ 의 값은 $a = -2$ 일 때 최소이고, 최소값은 -5 이다.

따라서 $\int_0^1 (3a^2x^2 + 8ax - 1)dx$ 의 값이 최소가 되도록 하는 실수 a 의 값은 -2 이다.

09-1 ㉔ $\frac{13}{4}$

$$\int_0^1 (3a^2x^2 - 2ax + 3)dx = \left[a^2x^3 - ax^2 + 3x \right]_0^1$$

$$= a^2 - a + 3$$

$$= \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{11}{4} \quad \dots\dots ㉔$$

즉 $\int_0^1 (3a^2x^2 - 2ax + 3)dx$ 의 값은 $a = \frac{1}{2}$ 일 때 최소이고, 최소값은 $\frac{11}{4}$ 이므로

$$p = \frac{1}{2}, q = \frac{11}{4} \quad \dots\dots ㉕$$

$$\therefore p + q = \frac{1}{2} + \frac{11}{4} = \frac{13}{4} \quad \dots\dots ㉖$$

채점 기준	비율
㉔ $\int_0^1 (3a^2x^2 - 2ax + 3)dx$ 를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
㉕ p, q 의 값을 구할 수 있다.	40%
㉖ $p + q$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

10 ㉔ ②

$$\int_0^2 (2x^2 + 5)dx - 2 \int_0^2 (x^2 + x)dx$$

$$= \int_0^2 (2x^2 + 5)dx - \int_0^2 (2x^2 + 2x)dx$$

$$= \int_0^2 \{ 2x^2 + 5 - (2x^2 + 2x) \} dx$$

$$= \int_0^2 (-2x + 5)dx$$

$$= \left[-x^2 + 5x \right]_0^2$$

$$= 6$$

10-1 ㉔ 8

$$\int_0^2 (x^2 + 4)dx + 2 \int_0^2 (x^2 - x - 1)dx$$

$$= \int_0^2 (x^2 + 4)dx + \int_0^2 (2x^2 - 2x - 2)dx$$

$$= \int_0^2 (x^2 + 4 + 2x^2 - 2x - 2)dx$$

$$= \int_0^2 (3x^2 - 2x + 2)dx$$

$$= \left[x^3 - x^2 + 2x \right]_0^2$$

$$= 8$$

11 ㉔ ③

$$\int_1^3 \frac{2x^2}{x-1}dx - \int_1^3 \frac{2x}{x-1}dx = \int_1^3 \left(\frac{2x^2}{x-1} - \frac{2x}{x-1} \right) dx$$

$$= \int_1^3 \frac{2x^2 - 2x}{x-1}dx$$

$$= \int_1^3 \frac{2x(x-1)}{x-1}dx$$

$$= \int_1^3 2xdx$$

$$= \left[x^2 \right]_1^3$$

$$= 8$$

11-1 ㉠ $\frac{5}{6}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx - \int_1^0 \frac{1}{t+1} dt &= \int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx - \int_1^0 \frac{1}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 (x^2-x+1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

12 ㉠ 37

$$\begin{aligned} \int_{-3}^2 \{f(x) - g(x)\} dx + \int_{-3}^2 \{f(x) + g(x)\} dx \\ &= \int_{-3}^2 \{f(x) - g(x) + f(x) + g(x)\} dx \\ &= \int_{-3}^2 2f(x) dx \\ &= 2 \int_{-3}^2 f(x) dx \\ &\approx 16 + 6 = 2 \int_{-3}^2 f(x) dx \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$\int_{-3}^2 f(x) dx = 11 \quad \dots\dots ①$$

$$\begin{aligned} \int_{-3}^2 \{f(x) - g(x)\} dx - \int_{-3}^2 \{f(x) + g(x)\} dx \\ &= \int_{-3}^2 [f(x) - g(x) - \{f(x) + g(x)\}] dx \\ &= \int_{-3}^2 \{-2g(x)\} dx \\ &= -2 \int_{-3}^2 g(x) dx \\ &\approx 16 - 6 = -2 \int_{-3}^2 g(x) dx \text{ 이므로} \\ \int_{-3}^2 g(x) dx &= -5 \quad \dots\dots ② \\ \therefore \int_{-3}^2 \{2f(x) - 3g(x)\} dx &= 2 \int_{-3}^2 f(x) dx - 3 \int_{-3}^2 g(x) dx \\ &= 2 \times 11 - 3 \times (-5) = 37 \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

채점 기준	비율
① $\int_{-3}^2 f(x) dx$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
② $\int_{-3}^2 g(x) dx$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $\int_{-3}^2 \{2f(x) - 3g(x)\} dx$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

12-1 ㉠ $\frac{31}{3}$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 \{x - f(x)\}^2 dx &= \int_{-1}^3 [x^2 - 2xf(x) + \{f(x)\}^2] dx \\ &= \int_{-1}^3 x^2 dx - \int_{-1}^3 2xf(x) dx \\ &\quad + \int_{-1}^3 \{f(x)\}^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^3 - 4 + 5 \quad (\because \textcircled{2}, \textcircled{4}) \\ &= \frac{28}{3} - 4 + 5 = \frac{31}{3} \end{aligned}$$

13 ㉠ ④

$$\begin{aligned} \int_3^5 f(x) dx - \int_4^5 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx \\ &= \int_0^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx + \int_5^4 f(x) dx \\ &= \int_0^5 f(x) dx + \int_5^4 f(x) dx \\ &= \int_0^4 f(x) dx \\ \text{이때 } f(x) &= x^2 - x \text{ 이므로} \\ \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^4 (x^2 - x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 = \frac{40}{3} \end{aligned}$$

13-1 ㉠ ②

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_0^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_0^2 f(x) dx \\ \text{이때 } f(x) &= 6x(2-x) = -6x^2 + 12x \text{ 이므로} \\ \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 (-6x^2 + 12x) dx = \left[-2x^3 + 6x^2 \right]_0^2 = 8 \end{aligned}$$

14 ㉠ 6

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (x^2 + 2x) dx + \int_0^1 (y^2 + 2y) dy + \int_1^2 (z^2 + 2z) dz \\ &= \int_{-1}^0 (x^2 + 2x) dx + \int_0^1 (x^2 + 2x) dx + \int_1^2 (x^2 + 2x) dx \\ &= \int_{-1}^2 (x^2 + 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_{-1}^2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

14-1 ㉠ 12

$$\begin{aligned} a &= \int_0^3 (x^2 - 2x) dx - \int_0^{-1} (x^2 - 2x) dx - \int_2^3 (x^2 - 2x) dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx + \int_0^3 (x^2 - 2x) dx + \int_3^2 (x^2 - 2x) dx \\ &= \int_{-1}^2 (x^2 - 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^2 \\ &= 0 \\ b &= \int_{-2}^{-1} (2x + 3) dx + \int_{-1}^2 (2x + 3) dx \\ &= \int_{-2}^2 (2x + 3) dx \\ &= \left[x^2 + 3x \right]_{-2}^2 \\ &= 12 \\ \therefore a + b &= 0 + 12 = 12 \end{aligned}$$

15 ㉠ 4

$$\begin{aligned} \int_2^3 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx \\ &= 2 + 5 - 3 = 4 \end{aligned}$$

15-1 ㉔ ②

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 \{f(x) - 3x^2\} dx \\ &= \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_{-1}^0 3x^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx + \int_5^0 f(x) dx - \left[x^3 \right]_{-1}^0 \\ &= 3 + 7 + (-5) - 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

16 ㉔ $\frac{25}{6}$

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 (x+2) dx + \int_1^2 (-x^2+4) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_1^2 \\ &= \frac{5}{2} + \frac{5}{3} = \frac{25}{6} \end{aligned}$$

16-1 ㉔ ③

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 xf(x) dx &= \int_{-1}^1 x(4x^2-1) dx + \int_1^2 x(2x+1) dx \\ &= \int_{-1}^1 (4x^3-x) dx + \int_1^2 (2x^2+x) dx \\ &= \left[x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^1 + \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 \\ &= 0 + \frac{37}{6} = \frac{37}{6} \end{aligned}$$

17 ㉔ 16

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (2x+a) = a+2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (4x^2-1) = 3$$

$$f(1) = a+2$$

$$\text{이므로 } a+2=3 \quad \therefore a=1$$

$$\text{즉 } f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ 4x^2-1 & (x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 (4x^2-1) dx + \int_1^2 (2x+1) dx \\ &= \left[\frac{4}{3}x^3 - x \right]_0^1 + \left[x^2 + x \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} + 4 = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

따라서 $p=3, q=13$ 이므로

$$p+q=3+13=16$$

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	30%
② $\int_0^2 f(x) dx$ 를 구간에 따라 나눌 수 있다.	20%
③ p, q 의 값을 구할 수 있다.	40%
④ $p+q$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

17-1 ㉔ 2

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 미분가능하다.

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (2x+b) = b+2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (3x^2+2ax) = 2a+3$$

$$f(1) = b+2$$

$$\text{이므로 } b+2=2a+3 \quad \therefore b=2a+1$$

.....㉔

또 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x+b-(b+2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{3x^2+2ax-(b+2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{3x^2+2ax-2a-3}{x-1} \quad (\because \text{㉔})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x-1)(3x+2a+3)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} (3x+2a+3)$$

$$= 2a+6$$

즉 $2=2a+6$ 이므로 $a=-2$

$a=-2$ 를 ㉔에 대입하면

$$b=-4+1=-3$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} 2x-3 & (x \geq 1) \\ 3x^2-4x & (x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 (3x^2-4x) dx + \int_1^2 (2x-3) dx$$

$$= \left[x^3 - 2x^2 \right]_{-1}^1 + \left[x^2 - 3x \right]_1^2$$

$$= 2+0=2$$

Lecture 미분가능한 함수

함수 $f(x) = \begin{cases} g(x) & (x \geq a) \\ h(x) & (x < a) \end{cases}$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하려면 다음 두 조건을 만족시켜야 한다.

(1) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이다.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$$

(2) $x=a$ 에서 함수 $f(x)$ 의 미분계수가 존재한다.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

18 ㉔ ①

주어진 그래프에서 $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 1) \\ x & (x \leq 1) \end{cases}$ 이므로

$$(x-1)f(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 1) \\ x(x-1) & (x \leq 1) \end{cases}$$

$$\therefore \int_0^2 (x-1)f(x) dx = \int_0^1 (x^2-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^2$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

18-1 ㉔ ⑤

주어진 그래프에서 $f(x) = \begin{cases} -x & (-2 \leq x \leq -1) \\ 1 & (-1 \leq x \leq 1) \\ x & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$ 이므로

$$(x+2)f(x) = \begin{cases} -x(x+2) & (-2 \leq x \leq -1) \\ x+2 & (-1 \leq x \leq 1) \\ x(x+2) & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \int_{-2}^2 (x+2)f(x)dx \\
&= \int_{-2}^{-1} (-x^2-2x)dx + \int_{-1}^1 (x+2)dx + \int_1^2 (x^2+2x)dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_1^2 \\
&= \frac{2}{3} + 4 + \frac{16}{3} \\
&= 10
\end{aligned}$$

19 ㉮ 3/2

닫힌구간 $[0, 2]$ 에서

$$|x^2(x-1)| = \begin{cases} -x^3+x^2 & (0 \leq x \leq 1) \\ x^3-x^2 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \int_0^2 |x^2(x-1)|dx \\
&= \int_0^1 (-x^3+x^2)dx + \int_1^2 (x^3-x^2)dx \\
&= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^2 \\
&= \frac{1}{12} + \frac{17}{12} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

19-1 ㉮ ③

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 |x^2-1|dx - 2 \int_2^0 |1-x^2|dx \\
&= \int_0^2 |x^2-1|dx + 2 \int_0^2 |x^2-1|dx \\
&= 3 \int_0^2 |x^2-1|dx
\end{aligned}$$

이때 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서

$$|x^2-1| = \begin{cases} -x^2+1 & (0 \leq x \leq 1) \\ x^2-1 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore 3 \int_0^2 |x^2-1|dx \\
&= 3 \int_0^1 (-x^2+1)dx + 3 \int_1^2 (x^2-1)dx \\
&= 3 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 + 3 \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_1^2 \\
&= 3 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{4}{3} = 6
\end{aligned}$$

20 ㉮ ②

닫힌구간 $[1, a]$ 에서

$$|3x^2-6x| = \begin{cases} -3x^2+6x & (1 \leq x \leq 2) \\ 3x^2-6x & (2 \leq x \leq a) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \int_1^a |3x^2-6x|dx \\
&= \int_1^2 (-3x^2+6x)dx + \int_2^a (3x^2-6x)dx \\
&= \left[-x^3 + 3x^2 \right]_1^2 + \left[x^3 - 3x^2 \right]_2^a \\
&= 2 + a^3 - 3a^2 + 4 \\
&= a^3 - 3a^2 + 6
\end{aligned}$$

$$\text{즉 } a^3 - 3a^2 + 6 = 6 \Rightarrow a^3 - 3a^2 = 0$$

$$a^2(a-3) = 0 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } a=3$$

그런데 $a \geq 2$ 이므로 $a=3$

20-1 ㉮ 3

닫힌구간 $[0, 3]$ 에서

$$|x-a| = \begin{cases} -x+a & (0 \leq x \leq a) \\ x-a & (a \leq x \leq 3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \int_0^3 |x-a|dx = \int_0^a (-x+a)dx + \int_a^3 (x-a)dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^2 + ax \right]_0^a + \left[\frac{1}{2}x^2 - ax \right]_a^3 \\
&= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 - 3a + \frac{9}{2} \\
&= a^2 - 3a + \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

$$\text{즉 } a^2 - 3a + \frac{9}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$(a-1)(a-2) = 0 \quad \therefore a=1 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$1+2=3$$

21 ㉮ 1/2

닫힌구간 $[0, 1]$ 에서

$$|x-k| = \begin{cases} -x+k & (0 \leq x \leq k) \\ x-k & (k \leq x \leq 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore f(k) = \int_0^1 |x-k|dx \\
&= \int_0^k (-x+k)dx + \int_k^1 (x-k)dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^2 + kx \right]_0^k + \left[\frac{1}{2}x^2 - kx \right]_k^1 \\
&= \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k^2 - k + \frac{1}{2} \\
&= k^2 - k + \frac{1}{2} \\
&= \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

즉 $f(k)$ 의 값은 $k = \frac{1}{2}$ 일 때 최소이고, 최소값은 $\frac{1}{4}$ 이다.

따라서 $f(k)$ 의 값이 최소가 되도록 하는 실수 k 의 값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

21-1 ㉮ ②

닫힌구간 $[1, 3]$ 에서

$$|x-k| = \begin{cases} -x+k & (1 \leq x \leq k) \\ x-k & (k \leq x \leq 3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore f(k) = \int_1^3 |x-k|dx \\
&= \int_1^k (-x+k)dx + \int_k^3 (x-k)dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^2 + kx \right]_1^k + \left[\frac{1}{2}x^2 - kx \right]_k^3 \\
&= \frac{1}{2}k^2 - k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k^2 - 3k + \frac{9}{2} \\
&= k^2 - 4k + 5 \\
&= (k-2)^2 + 1
\end{aligned}$$

이때

$$f(1) = (-1)^2 + 1 = 2$$

$$f(2) = 1$$

$$f(3) = 1^2 + 1 = 2$$

이므로 최댓값 M 은 $M=2$, 최솟값 m 은 $m=1$

$$\therefore M+m=2+1=3$$

22 ㉔ ⑤

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 (x^3+3x^2)dx + \int_1^2 (x^3+3x^2)dx &= \int_{-2}^2 (x^3+3x^2)dx \\ &= \int_{-2}^2 x^3dx + \int_{-2}^2 3x^2dx \\ &= 0 + 2 \int_0^2 3x^2dx \\ &= 2 \left[x^3 \right]_0^2 \\ &= 2 \times 8 \\ &= 16\end{aligned}$$

22-1 ㉔ -28

$$\begin{aligned}\int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx - \int_2^4 f(x)dx \\ &= \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx + \int_4^2 f(x)dx \\ &= \int_{-2}^4 f(x)dx + \int_4^2 f(x)dx \\ &= \int_{-2}^2 f(x)dx \\ &= \int_{-2}^2 (4x^3-6x^2+8x+1)dx \\ &= \int_{-2}^2 (4x^3+8x)dx + \int_{-2}^2 (-6x^2+1)dx \\ &= 0 + 2 \int_0^2 (-6x^2+1)dx \\ &= 2 \left[-2x^3+x \right]_0^2 \\ &= 2 \times (-14) \\ &= -28\end{aligned}$$

23 ㉔ ③

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a (3x^2+2x)dx &= \int_{-a}^a 3x^2dx + \int_{-a}^a 2xdx \\ &= 2 \int_0^a 3x^2dx + 0 \\ &= 2 \left[x^3 \right]_0^a \\ &= 2a^3 \\ \text{즉 } 2a^3 &= \frac{1}{4} \text{ 이므로 } a^3 = \frac{1}{8} \quad \therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because a > 0) \\ \therefore 50a &= 50 \times \frac{1}{2} = 25\end{aligned}$$

23-1 ㉔ 1

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 (x+a)^3dx &= \int_{-2}^2 (x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)dx \\ &= \int_{-2}^2 (x^3+3a^2x)dx + \int_{-2}^2 (3ax^2+a^3)dx \quad \dots\dots ① \\ &= 0 + 2 \int_0^2 (3a^2x+a^3)dx \\ &= 2 \left[ax^3+a^3x \right]_0^2 \\ &= 2(8a+2a^3) \quad \dots\dots ② \\ \text{즉 } 2(8a+2a^3) &= 20 \text{ 이므로 } 4a+a^3=5 \\ a^3+4a-5 &= 0, (a-1)(a^2+a+5)=0 \\ \therefore a &= 1 \quad (\because a^2+a+5 > 0) \quad \dots\dots ③\end{aligned}$$

채점 기준	비율
① 우함수와 기함수를 구분하여 정적분을 나누어 나타낼 수 있다.	30%
② $\int_{-2}^2 (x+a)^3dx$ 를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	30%

24 ㉔ 100

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x)dx \\ &= \int_{-1}^1 (1+2x+3x^2+\dots+100x^{99})dx \\ &= \int_{-1}^1 (1+3x^2+5x^4+\dots+99x^{98})dx \\ &\quad + \int_{-1}^1 (2x+4x^3+6x^5+\dots+100x^{99})dx \\ &= 2 \int_0^1 (1+3x^2+5x^4+\dots+99x^{98})dx + 0 \\ &= 2 \left[x+x^3+x^5+\dots+x^{99} \right]_0^1 \\ &= 2 \times 50 = 100\end{aligned}$$

24-1 ㉔ 24

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 (8x^7+10x^5-25x^3+3x^2-9x+2)dx \\ &= \int_{-2}^2 (8x^7+10x^5-25x^3-9x)dx + \int_{-2}^2 (3x^2+2)dx \\ &= 0 + 2 \int_0^2 (3x^2+2)dx \\ &= 2 \left[x^3+2x \right]_0^2 \\ &= 2 \times 12 = 24\end{aligned}$$

25 ㉔ 4

모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 는 그 그래프가 y 축에 대하여 대칭인 우함수이다.

$$\begin{aligned}\text{즉 } f(x) \text{는 우함수이고 } xf(x) \text{는 기함수이므로} \\ \int_{-2}^2 (x-1)f(x)dx &= \int_{-2}^2 xf(x)dx - \int_{-2}^2 f(x)dx \\ &= 0 - 2 \int_0^2 f(x)dx \\ &= -2 \times (-2) = 4\end{aligned}$$

Lecture 우함수와 기함수

- (1) (기함수) $\times$ (우함수) = (기함수)
- (2) (우함수) $\times$ (우함수) = (우함수)
- (3) (기함수) $\times$ (기함수) = (우함수)
- (4) (우함수) + (우함수) = (우함수)
- (5) (기함수) + (기함수) = (기함수)

25-1 ㉔ 40

$f(x)+f(-x)=0$ 에서 $f(-x)=-f(x)$
즉 함수 $y=f(x)$ 는 그 그래프가 원점에 대하여 대칭인 기함수이므로 $xf(x)$ 는 우함수, $x^2f(x)$ 는 기함수이다.

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-3}^3 (x^2+4x-3)f(x)dx \\ &= \int_{-3}^3 x^2f(x)dx + \int_{-3}^3 4xf(x)dx - \int_{-3}^3 3f(x)dx \\ &= 0 + 2 \int_0^3 4xf(x)dx - 0 \\ &= 8 \int_0^3 xf(x)dx \\ &= 8 \times 5 = 40\end{aligned}$$

26 ㉔ 6

모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$ 이므로
함수 $y=f(x)$ 는 그 그래프가 y 축에 대하여 대칭인 우함수이고, 함수 $y=g(x)$ 는 그 그래프가 원점에 대하여 대칭인 기함수이다.

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-1}^1 \{f(x)-g(x)\}dx &= \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_{-1}^1 g(x)dx \\ &= 2 \int_0^1 f(x)dx - 0 \\ &= 2 \times 3 \\ &= 6\end{aligned}$$

26-1 ㉔ -18

$f(x)+f(-x)=0$ 에서 $f(-x)=-f(x)$
즉 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$ 이므로
함수 $y=f(x)$ 는 그 그래프가 원점에 대하여 대칭인 기함수이고,
함수 $y=g(x)$ 는 그 그래프가 y 축에 대하여 대칭인 우함수이다.
또 $f(x)g(x)$ 는 기함수이다.

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-3}^3 \{2f(x)-3g(x)+f(x)g(x)\}dx \\ &= \int_{-3}^3 2f(x)dx - \int_{-3}^3 3g(x)dx + \int_{-3}^3 f(x)g(x)dx \\ &= 0 - 2 \int_0^3 3g(x)dx + 0 \\ &= -6 \int_0^3 g(x)dx\end{aligned}$$

이때 $g(x)$ 는 우함수이므로

$$\begin{aligned}\int_0^3 g(x)dx &= \int_{-3}^0 g(x)dx = 3 \\ \therefore -6 \int_0^3 g(x)dx &= -6 \times 3 = -18\end{aligned}$$

27 ㉔ 15

모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=-f(-x)$, 즉 $f(-x)=-f(x)$
이므로 함수 $y=f(x)$ 는 그 그래프가 원점에 대하여 대칭인 기함수이다.

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-3}^4 f(x)dx &= \int_{-3}^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx \\ &= 0 + \int_3^4 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx \\ &= - \int_0^3 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx \\ &= -(-6) + 9 \\ &= 15\end{aligned}$$

27-1 ㉔ 38

(가)에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 는 그 그래프가 y 축에 대하여 대칭인 우함수이다.
즉 $f(x)$ 는 우함수이고 $xf(x)$ 는 기함수이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 (x+4)f(x)dx \\ &= \int_{-1}^2 xf(x)dx + 4 \int_{-1}^2 f(x)dx \\ &= \int_{-1}^1 xf(x)dx + \int_1^2 xf(x)dx + 4 \int_{-1}^1 f(x)dx + 4 \int_1^2 f(x)dx \\ &= 0 + \int_1^2 xf(x)dx + 8 \int_0^1 f(x)dx + 4 \int_1^2 f(x)dx \\ &= 6 + 8 \times 2 + 4 \times 4 \quad (\because \text{ㄴ}, \text{ㄷ}) \\ &= 38\end{aligned}$$

28 ㉔ $\frac{3}{2}$

$$\int_0^3 f(t)dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \text{㉠}$$

라 하면 $f(x)=x^2-4x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}k &= \int_0^3 f(t)dt = \int_0^3 (t^2-4t+k)dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + kt \right]_0^3 = 3k - 9\end{aligned}$$

$$\text{즉 } k = 3k - 9 \text{ 이므로 } k = \frac{9}{2}$$

따라서 $f(x)=x^2-4x+\frac{9}{2}$ 이므로

$$f(1) = 1 - 4 + \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$$

28-1 ㉔ 8

$$\int_0^2 f(t)dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \text{㉠}$$

라 하면 $f(x)=2x^3-3x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}k &= \int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 (2t^3-3t+k)dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^4 - \frac{3}{2}t^2 + kt \right]_0^2 = 2k + 2\end{aligned}$$

$$\text{즉 } k = 2k + 2 \text{ 이므로 } k = -2$$

따라서 $f(x)=2x^3-3x-2$ 이므로

$$f(2) = 16 - 6 - 2 = 8$$

29 ㉔ $\frac{13}{6}$

$$\int_0^1 t f(t)dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \text{㉠}$$

라 하면 $f(x)=x^2-2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}k &= \int_0^1 t f(t)dt = \int_0^1 t(t^2-2t+k)dt = \int_0^1 (t^3-2t^2+kt)dt \\ &= \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{k}{2}t^2 \right]_0^1 = \frac{k}{2} - \frac{5}{12}\end{aligned}$$

$$\text{즉 } k = \frac{k}{2} - \frac{5}{12} \text{ 이므로 } k = -\frac{5}{6}$$

따라서 $f(x)=x^2-2x-\frac{5}{6}$ 이므로

$$f(3) = 9 - 6 - \frac{5}{6} = \frac{13}{6}$$

29-1 ㉔ 5

$$\int_0^1 t f'(t)dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \text{㉠}$$

라 하면 $f(x)=3x^2+8x+k$

$$\therefore f'(x)=6x+8$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}k &= \int_0^1 t f'(t)dt = \int_0^1 t(6t+8)dt \\ &= \int_0^1 (6t^2+8t)dt \\ &= \left[2t^3+4t^2 \right]_0^1 = 6\end{aligned}$$

따라서 $f(x)=3x^2+8x+6$ 이므로

$$f(1) = 3 + 8 + 6 = 17$$

30 ㉠ - 2

$$f(x) = x - \int_0^2 (x-2)f(t)dt$$

$$= x - (x-2) \int_0^2 f(t)dt$$

$$\text{이때 } \int_0^2 f(t)dt = k \text{ (} k \text{는 상수)}$$

.....㉠

$$\text{라 하면 } f(x) = x - k(x-2) = (1-k)x + 2k$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$k = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 \{(1-k)t + 2k\}dt$$

$$= \left[\frac{1-k}{2}t^2 + 2kt \right]_0^2 = 2k + 2$$

$$\text{즉 } k = 2k + 2 \text{ 이므로 } k = -2$$

$$\therefore \int_0^2 f(x)dx = -2$$

30-1 ㉠ ㉡

$$f(x) = -3x^2 + 2 \int_0^1 (x+1)f(t)dt$$

$$= -3x^2 + 2(x+1) \int_0^1 f(t)dt$$

$$\text{이때 } \int_0^1 f(t)dt = k \text{ (} k \text{는 상수)}$$

.....㉠

$$\text{라 하면 } f(x) = -3x^2 + 2k(x+1) = -3x^2 + 2kx + 2k$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$k = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (-3t^2 + 2kt + 2k)dt$$

$$= \left[-t^3 + kt^2 + 2kt \right]_0^1 = 3k - 1$$

$$\text{즉 } k = 3k - 1 \text{ 이므로 } k = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = -3x^2 + x + 1 \text{ 이므로}$$

$$f(2) = -12 + 2 + 1 = -9$$

31 ㉠ 17

$$\int_1^x f(t)dt = x^3 - 2ax^2 + ax \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$\int_1^1 f(t)dt = 1 - 2a + a = 0 \quad \therefore a = 1$$

$$\int_1^x f(t)dt = x^3 - 2x^2 + x \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$\text{이때 } f(3) = 27 - 12 + 1 = 16 \text{ 이므로}$$

$$a + f(3) = 1 + 16 = 17$$

31-1 ㉠ 8

$$(가)에서 \int_1^x f(t)dt = x^4 + x^3 + ax^2 + bx \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$\int_1^1 f(t)dt = 1 + 1 + a + b = 0 \quad \therefore a + b = -2 \quad \text{.....㉠}$$

$$\int_1^x f(t)dt = x^4 + x^3 + ax^2 + bx \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2ax + b$$

$$(나)에서 f(0) = -5 \text{ 이므로 } b = -5$$

$$b = -5 \text{를 ㉠에 대입하면}$$

$$a - 5 = -2 \quad \therefore a = 3$$

$$\text{따라서 } f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 6x - 5 \text{ 이므로}$$

$$f(1) = 4 + 3 + 6 - 5 = 8$$

32 ㉠ ㉡

$$\int_a^x f(t)dt = x^3 - x^2 - 2x \text{의 양변에 } x=a \text{를 대입하면}$$

$$\int_a^a f(t)dt = a^3 - a^2 - 2a = 0, a(a+1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 0 \text{ 또는 } a = 2$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-1 + 0 + 2 = 1$$

32-1 ㉠ ㉡

$$\int_a^x f(t)dt = x^2 + ax - 8 \text{의 양변에 } x=a \text{를 대입하면}$$

$$\int_a^a f(t)dt = a^2 + a^2 - 8 = 0, 2a^2 - 8 = 0$$

$$a^2 = 4 \quad \therefore a = \pm 2$$

그런데 $a < 0$ 이므로 $a = -2$

$$\int_{-2}^x f(t)dt = x^2 - 2x - 8 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) = 2x - 2$$

$$\text{이때 } f(a) = f(-2) = -4 - 2 = -6 \text{ 이므로}$$

$$a - f(a) = -2 - (-6) = 4$$

33 ㉠ - 1

$$xf(x) = x^3 - 4x^2 + \int_1^x f(t)dt \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$f(1) = 1 - 4 + \int_1^1 f(t)dt = -3$$

$$xf(x) = x^3 - 4x^2 + \int_1^x f(t)dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) + xf'(x) = 3x^2 - 8x + f(x)$$

$$xf'(x) = 3x^2 - 8x \quad \therefore f'(x) = 3x - 8$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx = \int (3x - 8)dx = \frac{3}{2}x^2 - 8x + C$$

$$f(1) = -3 \text{에서 } \frac{3}{2} - 8 + C = -3 \quad \therefore C = \frac{7}{2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + \frac{7}{2}$$

$$f(k) = 13 \text{에서 } \frac{3}{2}k^2 - 8k + \frac{7}{2} = 13$$

$$3k^2 - 16k - 19 = 0, (k+1)(3k-19) = 0$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = \frac{19}{3}$$

그런데 k 는 정수이므로 $k = -1$

33-1 ㉠ 2

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 3 \int_0^x f'(t)dt \text{의 양변에 } x=0 \text{을 대입하면}$$

$$f(0) = 0 \quad \text{.....㉠}$$

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 3 \int_0^x f'(t)dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x) = 4x - 6 + 3f'(x), 2f'(x) = -4x + 6$$

$$\therefore f'(x) = -2x + 3$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx = \int (-2x + 3)dx = -x^2 + 3x + C$$

$$f(0) = 0 \text{에서 } C = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = -x^2 + 3x \text{ 이므로}$$

.....㉡

$$f(2) = -4 + 6 = 2$$

.....㉢

채점 기준	비율
① $f(0)$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	50%
③ $f(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

34 ㉡ 8

$$\int_{-1}^x (t-x)f(t)dt = -x^4 + 2x^2 - 1 \text{에서}$$

$$\int_{-1}^x tf(t)dt - x \int_{-1}^x f(t)dt = -x^4 + 2x^2 - 1$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$xf(x) - \int_{-1}^x f(t)dt - xf(x) = -4x^3 + 4x$$

$$\therefore \int_{-1}^x f(t)dt = 4x^3 - 4x$$

이 식의 양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 12x^2 - 4 \quad \therefore f(1) = 12 - 4 = 8$$

34-1 ㉡ -4

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = \frac{3}{4}x^4 - 2x^2 \text{에서}$$

$$x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = \frac{3}{4}x^4 - 2x^2$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = 3x^3 - 4x$$

$$\therefore \int_0^x f(t)dt = 3x^3 - 4x$$

이 식의 양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 9x^2 - 4$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -4 이다.

35 ㉡ 1

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt = ax^2 + 2x + b \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$\int_1^1 (1-t)f(t)dt = a + 2 + b = 0$$

$$\therefore a + b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt = ax^2 + 2x + b \text{에서}$$

$$x \int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt = ax^2 + 2x + b$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = 2ax + 2$$

$$\therefore \int_1^x f(t)dt = 2ax + 2$$

이 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\int_1^1 f(t)dt = 2a + 2 = 0 \quad \therefore a = -1$$

$a = -1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-1 + b = -2 \quad \therefore b = -1$$

$$\therefore ab = -1 \times (-1) = 1$$

35-1 ㉡ -5

$$\int_{-1}^x (x-2t)f(t)dt = \frac{1}{3}x^4 + ax^3 + \frac{2}{3} \text{의 양변에 } x=-1 \text{을 대입하면}$$

$$\int_{-1}^{-1} (-1-2t)f(t)dt = \frac{1}{3} - a + \frac{2}{3} = 0 \quad \therefore a = 1$$

$$\text{즉 } \int_{-1}^x (x-2t)f(t)dt = \frac{1}{3}x^4 + x^3 + \frac{2}{3} \text{에서}$$

$$x \int_{-1}^x f(t)dt - 2 \int_{-1}^x tf(t)dt = \frac{1}{3}x^4 + x^3 + \frac{2}{3}$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_{-1}^x f(t)dt + xf(x) - 2xf(x) = \frac{4}{3}x^3 + 3x^2$$

$$\therefore \int_{-1}^x f(t)dt - xf(x) = \frac{4}{3}x^3 + 3x^2$$

이 식의 양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) - f(x) - xf'(x) = 4x^2 + 6x$$

$$-xf'(x) = 4x^2 + 6x \quad \therefore f'(x) = -4x - 6$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx = \int (-4x - 6)dx = -2x^2 - 6x + C$$

$$\text{이때 } f(-2) = 7 \text{이므로 } -8 + 12 + C = 7 \quad \therefore C = 3$$

$$\text{따라서 } f(x) = -2x^2 - 6x + 3 \text{이므로}$$

$$f(a) = f(1) = -2 - 6 + 3 = -5$$

36 ㉡ $f(x) = 3x^2 - 1$

$$\int_0^x (x-t)f'(t)dt = x^3 \text{에서}$$

$$x \int_0^x f'(t)dt - \int_0^x tf'(t)dt = x^3$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f'(t)dt + xf'(x) - xf'(x) = 3x^2$$

$$\int_0^x f'(t)dt = 3x^2, \left[f(t) \right]_0^x = 3x^2$$

$$\therefore f(x) - f(0) = 3x^2$$

$$\text{이때 } f(0) = -1 \text{이므로}$$

$$f(x) = 3x^2 - 1$$

36-1 ㉡ -6

$$f(x) = x^2 + 2x + \int_0^x (x-t)f'(t)dt \text{의 양변에 } x=0 \text{을 대입하면}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = x^2 + 2x + \int_0^x (x-t)f'(t)dt \text{에서}$$

$$f(x) = x^2 + 2x + x \int_0^x f'(t)dt - \int_0^x tf'(t)dt$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2x + 2 + \int_0^x f'(t)dt + xf'(x) - xf'(x)$$

$$\therefore f'(x) = 2x + 2 + \int_0^x f'(t)dt$$

$$= 2x + 2 + \left[f(t) \right]_0^x$$

$$= 2x + 2 + f(x) - f(0)$$

$$\text{이때 } f(0) = 0 \text{이므로 } f'(x) = 2x + 2 + f(x)$$

$$\therefore f(x) - f'(x) = -2x - 2$$

$$\therefore f(2) - f'(2) = -4 - 2 = -6$$

37 ㉡ 극댓값: $\frac{4}{27}$, 극솟값: 0

$$f(x) = \int_0^x (3t^2 - 4t + 1)dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x - 1)(x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\frac{1}{3}$	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉 함수 $f(x)$ 는

$x=\frac{1}{3}$ 일 때 극대이고, 극댓값은

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\int_0^{\frac{1}{3}}(3t^2-4t+1)dt=\left[t^3-2t^2+t\right]_0^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{27}$$

$x=1$ 일 때 극소이고, 극솟값은

$$f(1)=\int_0^1(3t^2-4t+1)dt=\left[t^3-2t^2+t\right]_0^1=0$$

37-1 ㉡ - $\frac{3}{4}$

$f(x)=\int_x^{x+1}(t^3-t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)^3 - (x+1) - (x^3-x) \\ &= 3x(x+1) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 극대이고, 극댓값은

$$f(-1)=\int_{-1}^0(t^3-t)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^0=\frac{1}{4}$$

따라서 $a=-1$, $b=\frac{1}{4}$ 이므로

$$a+b=-1+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$$

38 ㉡ $\frac{11}{6}$

$f(x)=\int_0^x(t^2+at+b)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=x^2+ax+b$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값 $\frac{2}{3}$ 를 가지므로

$$f'(2)=0, f(2)=\frac{2}{3}$$

$f'(2)=0$ 에서 $4+2a+b=0$

$$\therefore 2a+b=-4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$f(2)=\frac{2}{3}$ 에서

$$\begin{aligned} f(2) &= \int_0^2(t^2+at+b)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{a}{2}t^2 + bt\right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} + 2a + 2b = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=2$

$$\therefore f'(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=2$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 극대이고, 극댓값은

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^1(t^2+at+b)dt = \int_0^1(t^2-3t+2)dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t\right]_0^1 = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

따라서 $p=1$, $M=\frac{5}{6}$ 이므로

$$p+M=1+\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$$

38-1 ㉡ -1

$f(x)=\int_0^x(3t^2+at-9)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=3x^2+ax-9$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 극댓값 M 을 가지므로

$$f'(-1)=0, f(-1)=M$$

$$f'(-1)=0 \text{에서 } 3-a-9=0 \quad \therefore a=-6$$

$$\therefore f(x)=\int_0^x(3t^2-6t-9)dt$$

$$\text{즉 } M=f(-1)=\int_0^{-1}(3t^2-6t-9)dt=\left[t^3-3t^2-9t\right]_0^{-1}=5$$

이므로

$$a+M=-6+5=-1$$

39 ㉡ 2

$f(x)=\int_0^x t(t-a)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=x(x-a)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=a$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉 함수 $f(x)$ 는

$x=0$ 일 때 극대이고, 극댓값 M 은

$$M=f(0)=\int_0^0 t(t-a)dt=0$$

$x=a$ 일 때 극소이고, 극솟값 m 은

$$\begin{aligned} m=f(a) &= \int_0^a t(t-a)dt = \int_0^a (t^2-at)dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{a}{2}t^2\right]_0^a = -\frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

$$\therefore M-m=\frac{a^3}{6}$$

$$\text{즉 } \frac{a^3}{6}=\frac{4}{3} \text{이므로 } a^3=8$$

$$\therefore a=2 (\because a>0)$$

39-1 ㉡ - $\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 극댓값 -2 를 가지므로

$$f(-2)=-2$$

$$\text{즉 } \int_0^{-2}(t+2)(3t-a)dt=-2 \text{이므로}$$

$$\int_0^{-2}\{3t^2+(6-a)t-2a\}dt=-2$$

$$\left[t^3 + \frac{6-a}{2}t^2 - 2at\right]_0^{-2}=-2$$

$$-8+2(6-a)+4a=-2$$

$$2a+4=-2 \quad \therefore a=-3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore f(x)=\int_0^x(t+2)(3t+3)dt$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=(x+2)(3x+3)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	-1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 극소이고, 극솟값 m 은

$$\begin{aligned}
 m &= f(-1) = \int_0^{-1} (t+2)(3t+3)dt \\
 &= \int_0^{-1} (3t^2+9t+6)dt \\
 &= \left[t^3 + \frac{9}{2}t^2 + 6t \right]_0^{-1} = -\frac{5}{2} \quad \dots\dots ② \\
 \therefore a-m &= -3 - \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2} \quad \dots\dots ③
 \end{aligned}$$

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	40%
② m 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $a-m$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

40 ㉠ $\frac{9}{2}$

$f(x) = \int_0^x (3t-t^2)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 3x - x^2 = -x(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

$-1 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	3
$f'(x)$		-	0	+	0
$f(x)$		↘	극소	↗	

$$f(-1) = \int_0^{-1} (3t-t^2)dt = \left[\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^{-1} = \frac{11}{6}$$

$$f(0) = \int_0^0 (3t-t^2)dt = 0$$

$$f(3) = \int_0^3 (3t-t^2)dt = \left[\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{9}{2}$, 최솟값은 0이므로 $a = \frac{9}{2}$, $b = 0$

$$\therefore a+b = \frac{9}{2} + 0 = \frac{9}{2}$$

40-1 ㉠ 20

$f(x) = \int_1^x (6t^2-6t-12)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 6x^2-6x-12 = 6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$		↗	극대	↘	

$$f(-2) = \int_1^{-2} (6t^2-6t-12)dt = \left[2t^3-3t^2-12t \right]_1^{-2} = 9$$

$$f(-1) = \int_1^{-1} (6t^2-6t-12)dt = \left[2t^3-3t^2-12t \right]_1^{-1} = 20$$

$$f(2) = \int_1^2 (6t^2-6t-12)dt = \left[2t^3-3t^2-12t \right]_1^2 = -7$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 20이다.

41 ㉠ -15

$$g(x) = \int_1^{x+3} f(t)dt \text{에서 } g(x) = \int_1^{x+3} (t^2-4t)dt$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = (x+3)^2 - 4(x+3) = (x+3)(x-1)$$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

닫힌구간 $[-4, 2]$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-4	...	-3	...	1	...	2
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

$$g(-4) = \int_1^{-1} (t^2-4t)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 \right]_1^{-1} = -\frac{2}{3}$$

$$g(-3) = \int_1^0 (t^2-4t)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 \right]_1^0 = \frac{5}{3}$$

$$g(1) = \int_1^4 (t^2-4t)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 \right]_1^4 = -9$$

$$g(2) = \int_1^5 (t^2-4t)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 \right]_1^5 = -\frac{20}{3}$$

따라서 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 $\frac{5}{3}$, 최솟값은 -9 이므로 그 곱은 $\frac{5}{3} \times (-9) = -15$

41-1 ㉠ $-\frac{8}{3}$

$$g(x) = \int_0^x (t+1)f(t)dt \text{에서}$$

$$g(x) = \int_0^x \{-t(t+1)(t-2)\}dt$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = -x(x+1)(x-2)$$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	0	...	2
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0
$g(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

$$g(-2) = \int_0^{-2} (-t^3+t^2+2t)dt = \left[-\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + t^2 \right]_0^{-2} = -\frac{8}{3}$$

$$g(-1) = \int_0^{-1} (-t^3+t^2+2t)dt = \left[-\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + t^2 \right]_0^{-1} = \frac{5}{12}$$

$$g(0) = \int_0^0 (-t^3+t^2+2t)dt = 0$$

$$g(2) = \int_0^2 (-t^3+t^2+2t)dt = \left[-\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + t^2 \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

따라서 함수 $g(x)$ 의 최솟값은 $-\frac{8}{3}$ 이다.

42 ㉠ 2

$$\int_1^x (x-t)f'(t)dt = 2x^3-6x^2+4x \text{에서}$$

$$x \int_1^x f'(t)dt - \int_1^x tf'(t)dt = 2x^3-6x^2+4x$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f'(t)dt + xf'(x) - xf'(x) = 6x^2-12x$$

$$\therefore \int_1^x f'(t)dt = 6x^2-12x$$

$\int_1^x f'(t)dt = 6x^2 - 12x$ 의 양변을 다시 x 에 대하여 미분하면
 $f'(x) = 12x - 12$ ①
 $\therefore f(x) = \int f'(x)dx = \int (12x - 12)dx = 6x^2 - 12x + C$
 이때 $f(0) = 8$ 이므로 $C = 8$
 $\therefore f(x) = 6x^2 - 12x + 8 = 6(x-1)^2 + 2$ ②
 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 2이다. ③

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	40%
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	30%
③ 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 구할 수 있다.	30%

42-1 ㉞ 8

$\int_0^x (x-t)f(t)dt = -x^4 + 4x^3 - 2x^2$ 에서
 $x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = -x^4 + 4x^3 - 2x^2$
 이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = -4x^3 + 12x^2 - 4x$
 $\therefore \int_0^x f(t)dt = -4x^3 + 12x^2 - 4x$
 이 식의 양변을 다시 x 에 대하여 미분하면
 $f(x) = -12x^2 + 24x - 4 = -12(x-1)^2 + 8$
 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최대이고, 최댓값은 8이다.

43 ㉞ $\frac{1}{3}$

$f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{1-h}^{1+2h} f(t)dt$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[F(t)]_{1-h}^{1+2h}}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h) - F(1-h)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h) - F(1) - \{F(1-h) - F(1)\}}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h) - F(1)}{2h} \times 2 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1-h) - F(1)}{-h}$
 $= 2F'(1) + F'(1)$
 $= 3F'(1) = 3f(1)$
 $= 3(a+1)$
 $\therefore 3(a+1) = 4$ 이므로 $a+1 = \frac{4}{3} \therefore a = \frac{1}{3}$

43-1 ㉞ ④

$f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{3h} \int_1^{1+2h} f(t)dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[F(t)]_1^{1+2h}}{3h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h) - F(1)}{3h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h) - F(1)}{2h} \times \frac{2}{3}$
 $= \frac{2}{3}F'(1) = \frac{2}{3}f(1)$
 $= \frac{2}{3}(5-a)$

$\therefore \frac{2}{3}(5-a) = 8$ 이므로 $5-a = 12$
 $\therefore a = -7$
 따라서 $f(x) = 2x^3 + 7x + 3$ 이므로
 $f(2) = 16 + 14 + 3 = 33$

44 ㉞ ③

$f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{2-h}^{2+h} f(t)dt$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[F(t)]_{2-h}^{2+h}}{2h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2) - \{F(2-h) - F(2)\}}{2h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2)}{h} \times \frac{1}{2} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2-h) - F(2)}{-h} \times \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2}F'(2) + \frac{1}{2}F'(2)$
 $= F'(2) = f(2)$
 $= 1 \times 9 = 9$

44-1 ㉞ ②

$f(t) = t^2 + 3t + 2$ 라 하고 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_3^{3+h} (t^2 + 3t + 2)dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_3^{3+h} f(t)dt$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[F(t)]_3^{3+h}}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(3+h) - F(3)}{h}$
 $= F'(3) = f(3)$
 $= 9 + 9 + 2 = 20$

45 ㉞ -15

$f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_2^{x+2} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[F(t)]_2^{x+2}}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x+2) - F(2)}{x}$
 $= F'(2) = f(2)$

이므로 $f(2) = 3$ ①

이때
 $f(x) = \int f'(x)dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int (6x^2 - 2x + 7)dx \\
 &= 2x^3 - x^2 + 7x + C
 \end{aligned}$$

이고 $f(2) = 3$ 이므로 $16 - 4 + 14 + C = 3$
 $26 + C = 3 \therefore C = -23$

따라서 $f(x) = 2x^3 - x^2 + 7x - 23$ 이므로 ②
 $f(1) = 2 - 1 + 7 - 23 = -15$ ③

채점 기준	비율
① $f(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	50%
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	40%
③ $f(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

45-1 ㉮ 29

$f(x) = \int_0^x (3t^2 - 2t - 4)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{-3}^{x-3} f'(t)dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(t)]_{-3}^{x-3}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x-3) - f(-3)}{x} \\ &= f'(-3) \\ &= 27 + 6 - 4 \\ &= 29 \end{aligned}$$

46 ㉮ ①

$f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x f(t)dt &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[F(t)]_2^x}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x-2} \\ &= F'(2) \\ &= f(2) \\ &= 8 - 8 + 2 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

46-1 ㉮ ④

$f(t) = t^3 - 3t - 2$ 라 하고 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \int_{-1}^x (t^3 - 3t - 2)dt &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \int_{-1}^x f(t)dt \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{[F(t)]_{-1}^x}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{F(x) - F(-1)}{x - (-1)} \\ &= F'(-1) \\ &= f(-1) \\ &= -1 + 3 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

47 ㉮ 2

$f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} \int_2^x f(t)dt &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[F(t)]_2^x}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{F(x) - F(2)}{x-2} \times \frac{1}{x+2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} \\ &= F'(2) \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} f(2) \\ &= \frac{1}{4} \times (4 + 6 - 2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

47-1 ㉮ ④

$f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - 9} \int_3^x f(t)dt &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{[F(t)]_3^x}{x^2 - 9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{F(x) - F(3)}{x^2 - 9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{F(x) - F(3)}{x-3} \times \frac{1}{x+3} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{F(x) - F(3)}{x-3} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} \\ &= F'(3) \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} f(3) \\ &= \frac{1}{6} \times (27 - 27 - 15 + 3) \\ &= -2 \end{aligned}$$

48 ㉮ -5

$f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \int_{-1}^x f(t)dt &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{[F(t)]_{-1}^x}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{F(x) - F(-1)}{x - (-1)} \\ &= F'(-1) \\ &= f(-1) \\ &= k + 7 \end{aligned}$$

즉 $k + 7 = 2$ 이므로 $k = -5$

48-1 ㉮ -5

$f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하고 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하자.

(가)에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\int_2^x f(t)dt}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[F(t)]_2^x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x-2} \\ &= F'(2) = f(2) \end{aligned}$$

즉 $f(2) = 4$ 이므로 $4 + 2a + b = 4$

$$\therefore 2a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(나)에서

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 (x^2 + ax + b)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + bx \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b = -\frac{8}{3} \text{이므로}$$

$$a + 2b = -6 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 2, b = -4$$

따라서 $f(x) = x^2 + 2x - 4$ 이므로 $\dots\dots \textcircled{2}$

$$f(-1) = 1 - 2 - 4 = -5 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

채점 기준	비율
① $f(x) = x^2 + ax + b$ 라 하고 (가), (나)를 이용하여 a, b 에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	60%
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	20%
③ $f(-1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

49 ㉮ ⑤

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+3)=f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 f(x)dx &= \int_1^4 f(x)dx = \int_4^7 f(x)dx = \int_7^{10} f(x)dx \\ &= \int_{10}^{13} f(x)dx \\ \therefore \int_{-2}^{13} f(x)dx &= \int_{-2}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx + \int_4^7 f(x)dx \\ &\quad + \int_7^{10} f(x)dx + \int_{10}^{13} f(x)dx \\ &= 5 \int_1^4 f(x)dx \\ &= 5 \times 2 = 10\end{aligned}$$

50 ㉮ 63

$$\int_{-12}^{16} f(x)dx = \int_{-12}^{12} f(x)dx + \int_{12}^{16} f(x)dx \quad \dots\dots ㉠$$

(가)에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 는 그 그래프가 y 축에 대하여 대칭인 우함수이다.

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-12}^{12} f(x)dx &= 2 \int_0^{12} f(x)dx \\ \text{(가), (다)에서 } \int_{-4}^0 f(x)dx &= \int_0^4 f(x)dx = 9 \text{이므로 (나)에 의하여} \\ \int_{-4}^0 f(x)dx &= \int_4^8 f(x)dx = 9, \int_0^4 f(x)dx = \int_8^{12} f(x)dx = 9 \\ \therefore \int_0^{12} f(x)dx &= \int_0^4 f(x)dx + \int_4^8 f(x)dx + \int_8^{12} f(x)dx \\ &= 9 + 9 + 9 = 27 \\ \therefore \int_{-12}^{12} f(x)dx &= 2 \int_0^{12} f(x)dx = 2 \times 27 = 54 \text{이므로 ㉠에서} \\ \int_{-12}^{16} f(x)dx &= \int_{-12}^{12} f(x)dx + \int_{12}^{16} f(x)dx \\ &= 54 + \int_4^8 f(x)dx \\ &= 54 + 9 = 63\end{aligned}$$

51 ㉮ $-\frac{1}{4}$

(나)에서 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2)=f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{-1} f(x)dx &= \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx = \int_3^5 f(x)dx \\ \therefore \int_{-4}^5 f(x)dx &= \int_{-4}^{-3} f(x)dx + \int_{-3}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^1 f(x)dx \\ &\quad + \int_1^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx \\ &= \int_0^1 f(x)dx + \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_{-1}^1 f(x)dx \\ &\quad + \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_{-1}^1 f(x)dx \\ &= \int_0^1 f(x)dx + 4 \int_{-1}^1 f(x)dx \\ &= \int_0^1 (x^3 - x)dx + 4 \int_{-1}^1 (x^3 - x)dx (\because \text{가}) \\ &= \int_0^1 (x^3 - x)dx + 0 \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

52 ㉮ $-\frac{3}{4}$

$F(x)$ 는 이차함수이므로 주어진 그래프에서

$$F(x) = a(x-1)(x-2) = a(x^2 - 3x + 2) \quad (a > 0) \text{라 하자.}$$

$$\text{즉 } \int_1^x f(t)dt = a(x^2 - 3x + 2) \text{이므로 이 식의 양변을 } x \text{에 대하여}$$

$$\text{미분하면 } f(x) = a(2x - 3)$$

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(1, -3)$ 을 지나므로

$$-3 = -a \quad \therefore a = 3$$

$$\text{즉 } F(x) = 3(x^2 - 3x + 2) \text{이므로 } F'(x) = 3(2x - 3)$$

$$F'(x) = 0 \text{에서 } x = \frac{3}{2}$$

함수 $F(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	$\frac{3}{2}$	$\dots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $F(x)$ 는 $x = \frac{3}{2}$ 일 때 극소이고, 극솟값은

$$F\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \times \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2\right) = -\frac{3}{4}$$

53 ㉮ ㄱ, ㄴ

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = f(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $F(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-2	$\dots$	1	$\dots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

ㄱ. 함수 $F(x)$ 는 $x=1$ 일 때 극대이고, 극댓값은

$$F(1) = \int_1^1 f(t)dt = 0$$

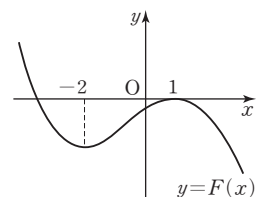
ㄴ. $F(-2) < F(1)$ 이므로 $F(-2) < 0$

ㄷ. 함수 $y=F(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식

$$F(x) = 0 \text{은 서로 다른 두 실근을}$$

갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.



학교 시험 대비 문제

p.214~217

01 ㉮ ①

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (x^3 - 3x^2)dx + \int_1^2 (x^3 - 3x^2)dx - \int_1^2 2dx \\ &= \int_0^2 (x^3 - 3x^2)dx - \int_1^2 2dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 \right]_0^2 - \left[2x \right]_1^2 \\ &= -4 - 2 \\ &= -6\end{aligned}$$

02 ㉔ ⑤

$f'(x) = 6x - 2$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (6x - 2) dx = 3x^2 - 2x + C$$

이때 $\int_0^1 f(x) dx = 1$ 이므로

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2 - 2x + C) dx = \left[x^3 - x^2 + Cx \right]_0^1 = C$$

$$\therefore C = 1$$

따라서 $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ 이므로

$$f(2) = 12 - 4 + 1 = 9$$

03 ㉔ ②

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (3x^2 - 2kx + 1) dx$$

$$= \left[x^3 - kx^2 + x \right]_1^2$$

$$= -3k + 8$$

즉 $-3k + 8 > 5$ 이므로 $-3k > -3$

$$\therefore k < 1$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 0이다.

04 ㉔ ④

$$\int_0^2 (x+k)^2 dx + \int_2^0 (x-k)^2 dx$$

$$= \int_0^2 (x+k)^2 dx - \int_0^2 (x-k)^2 dx$$

$$= \int_0^2 \{(x+k)^2 - (x-k)^2\} dx$$

$$= \int_0^2 4kx dx$$

$$= \left[2kx^2 \right]_0^2$$

$$= 8k$$

$$\text{즉 } 8k = 16 \text{이므로 } k = 2$$

05 ㉔ 420

$$\sum_{k=1}^{20} a_k$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}$$

$$= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \cdots + \int_{19}^{20} f(x) dx$$

$$= \int_0^{20} f(x) dx$$

$$= \int_0^{20} (2x+1) dx$$

$$= \left[x^2 + x \right]_0^{20} = 420$$

다른 풀이

$$a_n = \int_{n-1}^n f(x) dx = \int_{n-1}^n (2x+1) dx$$

$$= \left[x^2 + x \right]_{n-1}^n$$

$$= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\}$$

$$= 2n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} 2k = 2 \times \frac{20 \times 21}{2} = 420$$

06 ㉔ ②

(가)에서 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = (x-6)(x-a) = x^2 - (a+6)x + 6a$$

(나)에서 $\int_0^8 f(x) dx - \int_6^8 f(x) dx = 0$ 이므로

$$\int_0^8 f(x) dx + \int_8^6 f(x) dx = 0$$

$$\therefore \int_0^6 f(x) dx = 0$$

이때

$$\int_0^6 f(x) dx = \int_0^6 \{x^2 - (a+6)x + 6a\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a+6}{2}x^2 + 6ax \right]_0^6$$

$$= 18a - 36$$

이므로 $18a - 36 = 0$

$$\therefore a = 2$$

07 ㉔ $-\frac{19}{12}$

$$f(x+1) = \begin{cases} 2-(x+1) & (x+1 \geq 1) \\ 2-(x+1)^2 & (x+1 < 1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x+1 & (x \geq 0) \\ -x^2-2x+1 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-1}^2 xf(x+1) dx$$

$$= \int_{-1}^0 x(-x^2-2x+1) dx + \int_0^2 x(-x+1) dx$$

$$= \int_{-1}^0 (-x^3-2x^2+x) dx + \int_0^2 (-x^2+x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2$$

$$= -\frac{11}{12} + \left(-\frac{2}{3} \right)$$

$$= -\frac{19}{12}$$

08 ㉔ ③

닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서

$$|x| = \begin{cases} -x & (-2 \leq x \leq 0) \\ x & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-2}^2 (a - |x|) dx$$

$$= \int_{-2}^0 (a+x) dx + \int_0^2 (a-x) dx$$

$$= \left[ax + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^0 + \left[ax - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2$$

$$= 2a - 2 + 2a - 2$$

$$= 4a - 4$$

즉 $4a - 4 = 8$ 이므로

$$a = 3$$

09 ㉔ ①

(나)에서 $F(x) = xf(x) + x^2 + 2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x) + xf'(x) + 2x$$

이때 $F'(x) = f(x)$ 이므로

$$f(x) = f(x) + xf'(x) + 2x$$

$$xf'(x) = -2x \quad \therefore f'(x) = -2$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (-2) dx = -2x + C$$

(가)에서

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)dx &= \int_{-a}^a (-2x+C)dx \\ &= \int_{-a}^a (-2x)dx + \int_{-a}^a Cdx \\ &= 0 + 2 \int_0^a Cdx \\ &= 2 \left[Cx \right]_0^a \\ &= 2Ca\end{aligned}$$

이므로 $2Ca=0 \quad \therefore Ca=0$

이때 모든 실수 a 에 대하여 $Ca=0$ 이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=-2x$ 이므로

$$f(3)=-2 \times 3 = -6$$

참고 (가)에서 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 그 그래프가 원점에 대하여 대칭인 기함수이다.
즉 함수 $f(x)=-2x+C$ 가 기함수이므로 $C=0$

10 ㉡ 4

$$f(x)+f(-x)=0 \text{에서 } f(-x)=-f(x)$$

즉 함수 $y=f(x)$ 는 그 그래프가 원점에 대하여 대칭인 기함수이므로

$$\begin{aligned}\int_{-3}^3 f(x)dx &= 0 \\ \therefore \int_{-3}^4 f(x)dx &= \int_{-3}^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx \\ &= \int_3^4 f(x)dx\end{aligned}$$

$$\int_{-3}^4 f(x)dx=8 \text{이므로 } \int_3^4 f(x)dx=8$$

$$\text{이때 } \int_0^3 f(x)dx=-4 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\int_0^4 f(x)dx &= \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx \\ &= -4 + 8 = 4\end{aligned}$$

11 ㉡ ①

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x + \int_0^2 (4x-3)f(t)dt \\ &= 2x + (4x-3) \int_0^2 f(t)dt\end{aligned}$$

$$\text{이때 } \int_0^2 f(t)dt=k \text{ (} k \text{는 상수)}$$

$$\text{라 하면 } f(x)=2x+k(4x-3)=(4k+2)x-3k$$

이것을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}k &= \int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 \{(4k+2)t-3k\}dt \\ &= \left[(2k+1)t^2 - 3kt \right]_0^2 = 2k+4\end{aligned}$$

$$\text{즉 } k=2k+4 \text{이므로 } k=-4$$

$$\therefore \int_0^2 f(x)dx = -4$$

12 ㉡ ③

$$f(x) = \int_1^x (3t^2-2t+1)dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x)=3x^2-2x+1$$

$$\begin{aligned}A &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} \times 2 \\ &= 2f'(1)\end{aligned}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} \text{에서 } f(1)=0 \text{이므로}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) \quad \left[f(1)=\int_1^1 (3t^2-2t+1)dt=0 \right]$$

$$\therefore A+B=2f'(1)+f'(1)=3f'(1)=3 \times (3-2+1)=6$$

13 ㉡ ①

$$\text{(나)에서 } \int_0^a t f(t)dt=k \text{ (} k \text{는 상수)}$$

$$\text{라 하면 } \int_0^x f(t)dt = \frac{3}{2}kx^2$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=3kx$$

$$\text{(가)에서 } \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 3kt dt = \left[\frac{3}{2}kt^2 \right]_0^1 = \frac{3}{2}k$$

$$\text{즉 } \frac{3}{2}k=1 \text{이므로 } k=\frac{2}{3}$$

$$k=\frac{2}{3} \text{를 ㉠에 대입하면 } f(x)=2x$$

$$\text{㉠에서 } k = \int_0^a t f(t)dt = \int_0^a 2t^2 dt = \left[\frac{2}{3}t^3 \right]_0^a = \frac{2}{3}a^3 \text{이므로}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}a^3, a^3=1 \quad \therefore a=1 \text{ (} \because a \text{는 실수)}$$

14 ㉡ -1

$$f(x)+x^2+\int_1^x f(t)dt \text{가 } (x-1)^2 \text{으로 나누어떨어지므로 몫을 } Q(x) \text{라 하면}$$

$$f(x)+x^2+\int_1^x f(t)dt = (x-1)^2 Q(x) \quad \dots\dots ㉠$$

$$\text{㉠의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면 } f(1)+1+\int_1^1 f(t)dt=0$$

$$\therefore f(1)=-1$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)+2x+f(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2 Q'(x) \quad \dots\dots ㉡$$

이때 $f'(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $f'(1)$ 이므로 ㉡의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(1)+2+f(1)=0, f'(1)+2+(-1)=0$$

$$\therefore f'(1)=-1$$

따라서 구하는 나머지는 -1 이다.

Lecture 나머지정리

(1) 다항식 $f(x)$ 를 일차식 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지를 R 라 하면 $R=f(a)$

(2) 다항식 $f(x)$ 를 일차식 $ax+b$ 로 나누었을 때의 나머지를 R 라 하면 $R=f\left(-\frac{b}{a}\right)$

15 ㉡ 6

$$\int_1^x (x-1)f(t)dt = x^3-ax^2+bx-1 \text{에서}$$

$$(x-1) \int_1^x f(t)dt = x^3-ax^2+bx-1 \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt + (x-1)f(x) = 3x^2-2ax+b \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 양변에 $x=1$ 을 각각 대입하면

$$0=1-a+b-1 \quad \therefore a-b=0 \quad \dots\dots\textcircled{㉠}$$

$$0=3-2a+b \quad \therefore 2a-b=3 \quad \dots\dots\textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3, b=3$

$$\therefore a+b=3+3=6$$

16 ㉢ $-\frac{10}{3}$

$f(x)=\int_0^x (t^2+at+b)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=x^2+ax+b$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 극댓값 $\frac{7}{6}$ 을 가지므로

$$f'(-1)=0, f(-1)=\frac{7}{6}$$

$$f'(-1)=0 \text{에서 } 1-a+b=0 \quad \therefore a-b=1 \quad \dots\dots\textcircled{㉠}$$

$$f(-1)=\frac{7}{6} \text{에서}$$

$$f(-1)=\int_0^{-1} (t^2+at+b)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^{-1}^1$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{a}{2}-b=\frac{7}{6}$$

$$\therefore a-2b=3 \quad \dots\dots\textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1, b=-2$

$$\therefore f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 극소이고, 극솟값은

$$f(2)=\int_0^2 (t^2+at+b)dt=\int_0^2 (t^2-t-2)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-2t\right]_0^2=-\frac{10}{3}$$

17 ㉣ ④

$f(x)=\int_x^{x+1} (t^2+t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=(x+1)^2+(x+1)-(x^2+x)=2(x+1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

$$f(-2)=\int_{-2}^{-1} (t^2+t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_{-2}^{-1}=\frac{5}{6}$$

$$f(-1)=\int_{-1}^0 (t^2+t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^0=-\frac{1}{6}$$

$$f(2)=\int_2^3 (t^2+t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_2^3=\frac{53}{6}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{53}{6}$, 최솟값은 $-\frac{1}{6}$ 이므로

$$M=\frac{53}{6}, m=-\frac{1}{6}$$

$$\therefore M-m=\frac{53}{6}-\left(-\frac{1}{6}\right)=9$$

18 ㉤ 18

$f(t)=3t^3-2t^2-4t+1$ 이라 하고 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{2-h}^{2+h} (3t^3-2t^2-4t+1)dt$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{2-h}^{2+h} f(t)dt$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[F(t)\right]_{2-h}^{2+h}}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h)-F(2-h)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h)-F(2)-\{F(2-h)-F(2)\}}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h)-F(2)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2-h)-F(2)}{-h}$$

$$=F'(2)+F'(2)$$

$$=2F'(2)=2f(2)$$

$$=2 \times (24-8-8+1)$$

$$=18$$

19 ㉥ ⑤

$f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left[F(t)\right]_1^x}{x-1}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1} \times (x+1) \right\}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)$$

$$=F'(1) \times 2 = 2f(1)$$

$$=2 \times (1+2+3+\dots+10)$$

$$=110$$

20 ㉦ 300

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+3)=f(x)$ 이므로

$$\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_2^3 f(x)dx$$

$$\therefore \int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx$$

$$= \int_2^3 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx$$

$$= \int_0^3 f(x)dx = 3$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{300} \int_{k-1}^k f(x)dx$$

$$= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots$$

$$+ \int_{299}^{300} f(x)dx$$

$$= \int_0^3 f(x)dx + \int_3^6 f(x)dx + \int_6^9 f(x)dx + \dots$$

$$+ \int_{297}^{300} f(x)dx$$

$$= 100 \int_0^3 f(x)dx$$

$$= 100 \times 3 = 300$$

21 ㉧ ③

$\neg$. $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x)=f(x)$$

$$g'(x)=f(x)=0 \text{에서}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3 \text{ 또는 } x=5$$

닫힌구간 $[0, 5]$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3	...	5
$g'(x)$	0	+	0	-	0	+	0
$g(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

즉 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. 함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$\text{ㄷ. } \int_1^3 g'(x)dx = [g(x)]_1^3 = g(3) - g(1)$$

이때 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 함수 $g(x)$ 는 감소하므로 $g(1) > g(3)$

$$\therefore \int_1^3 g'(x)dx < 0$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

서술형 1 ㉞ 8

주어진 그래프에서

$0 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 증가하므로 $f'(x) \geq 0$

$1 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 감소하므로 $f'(x) \leq 0$ ①

$$\therefore \int_0^3 |f'(x)|dx = \int_0^1 f'(x)dx + \int_1^3 \{-f'(x)\}dx \quad \text{..... ②}$$

$$= \int_0^1 f'(x)dx - \int_1^3 f'(x)dx$$

$$= [f(x)]_0^1 - [f(x)]_1^3$$

$$= f(1) - f(0) - \{f(3) - f(1)\}$$

$$= -f(0) + 2f(1) - f(3)$$

$$= -(-3) + 2 \times 1 - (-3)$$

$$= 8 \quad \text{..... ③}$$

채점 기준	비율
① $0 \leq x \leq 3$ 에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사할 수 있다.	40%
② $\int_0^3 f'(x) dx$ 를 구간에 따라 나눌 수 있다.	20%
③ $\int_0^3 f'(x) dx$ 의 값을 구할 수 있다.	40%

서술형 2 ㉞ 28

$$\int_0^1 tf'(t)dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \text{..... ㉠}$$

라 하면 $f(x) = 3x^2 + 2x + k$

$$\therefore f'(x) = 6x + 2 \quad \text{..... ①}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} k &= \int_0^1 tf'(t)dt = \int_0^1 t(6t+2)dt = \int_0^1 (6t^2+2t)dt \\ &= \left[2t^3 + t^2 \right]_0^1 = 3 \end{aligned}$$

즉 $f(x) = 3x^2 + 2x + 3$ 이므로 ②

$$\int_{-2}^2 f(x)dx = \int_{-2}^2 (3x^2 + 2x + 3)dx$$

$$= \int_{-2}^2 (3x^2 + 3)dx + \int_{-2}^2 2xdx$$

$$= 2 \int_0^2 (3x^2 + 3)dx + 0$$

$$= 2 \left[x^3 + 3x \right]_0^2$$

$$= 2 \times 14 = 28 \quad \text{..... ③}$$

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	20%
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	40%
③ $\int_{-2}^2 f(x)dx$ 의 값을 구할 수 있다.	40%

서술형 3 ㉞ -1

$$xf'(x) = x^2 + \int_1^x f(t)dt \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$f(1) = 1 + \int_1^1 f(t)dt = 1 \quad \text{..... ①}$$

$$xf'(x) = x^2 + \int_1^x f(t)dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) + xf'(x) = 2x + f(x)$$

$$xf'(x) = 2x \quad \therefore f'(x) = 2$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx = \int 2dx = 2x + C$$

$$\text{이때 } f(1) = 1 \text{이므로 } 2 + C = 1 \quad \therefore C = -1$$

$$\therefore f(x) = 2x - 1 \quad \text{..... ②}$$

$f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[F(t) \right]_0^x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x}$$

$$= F'(0) = f(0)$$

$$= -1 \quad \text{..... ③}$$

채점 기준	비율
① $f(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	30%
③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$ 의 값을 구할 수 있다.	40%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p.218~219

01 ㉞ ①

$$\int_0^2 f'(x)dx = [f(x)]_0^2 = f(2) - f(0) = 0 - 2 = -2$$

다른 풀이

$$f(-1) = f(1) = f(2) = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = a(x+1)(x-1)(x-2) \quad (a \text{는 상수, } a \neq 0)$$

라 하자.

$$f(0) = 2 \text{이므로 } 2a = 2 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore f(x) = (x+1)(x-1)(x-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

따라서 $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$ 이므로

$$\int_0^2 f'(x)dx = \int_0^2 (3x^2 - 4x - 1)dx = \left[x^3 - 2x^2 - x \right]_0^2 = -2$$

02 ㉞ ②

$$f(x) = f(x+4) \text{이므로 } f(0) = f(4)$$

$$\text{즉 } 2 = 16 - 8 + a \text{이므로 } a = -6$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -4x + 2 & (0 \leq x < 2) \\ x^2 - 2x - 6 & (2 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

이때 $f(x) = f(x+4)$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_9^{11} f(x) dx &= \int_1^3 f(x) dx \\ &= \int_1^2 (-4x+2) dx + \int_2^3 (x^2-2x-6) dx \\ &= \left[-2x^2+2x \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3-x^2-6x \right]_2^3 \\ &= -4 + \left(-\frac{14}{3} \right) = -\frac{26}{3}\end{aligned}$$

03 ㉮ ㉮

(가)에서 $\int f(x) dx = \{f(x)\}^2 = f(x) \times f(x)$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f'(x)f(x) + f(x)f'(x)$$

$$f(x) = 2f(x)f'(x) \quad \therefore f'(x) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}x + C$$

(나)에서 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 50$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x + C \right) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}x dx + \int_{-1}^1 C dx \\ &= 0 + 2 \int_0^1 C dx = 2 \left[Cx \right]_0^1 = 2C\end{aligned}$$

$$\text{즉 } 2C = 50 \text{이므로 } C = 25$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}x + 25$ 이므로

$$f(0) = 25$$

04 ㉮ ㉮

5차 이하의 다항함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \quad (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \text{는 실수}) \text{이라 하면}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5) dx \\ &= \int_{-1}^1 (a_0 + a_2x^2 + a_4x^4) dx + \int_{-1}^1 (a_1x + a_3x^3 + a_5x^5) dx \\ &= 2 \int_0^1 (a_0 + a_2x^2 + a_4x^4) dx + 0 \\ &= 2 \left[a_0x + \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_4}{5}x^5 \right]_0^1 \\ &= 2 \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} \right) \\ &= 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4\end{aligned}$$

한편

$$\begin{aligned}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a + f(0)b + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a \\ &= \left\{ f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right\} a + f(0)b \\ &= 2a \left(a_0 + \frac{3}{5}a_2 + \frac{9}{25}a_4 \right) + a_0b \\ &= (2a+b)a_0 + \frac{6a}{5}a_2 + \frac{18a}{25}a_4\end{aligned}$$

이때 모든 실수 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 에 대하여 주어진 식이 성립해야 하므로

$$2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4 = (2a+b)a_0 + \frac{6a}{5}a_2 + \frac{18a}{25}a_4 \text{에서}$$

$$2 = 2a + b, \quad \frac{2}{3} = \frac{6a}{5}, \quad \frac{2}{5} = \frac{18a}{25}$$

$$\therefore a = \frac{5}{9}, \quad b = \frac{8}{9}$$

05 ㉮ 20

$$\int_1^2 f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

라 하면 $f(x) = \frac{12}{7}x^2 - 2kx + k^2$

이것을 ㉮에 대입하면

$$\begin{aligned}k &= \int_1^2 f(t) dt = \int_1^2 \left(\frac{12}{7}t^2 - 2kt + k^2 \right) dt = \left[\frac{4}{7}t^3 - kt^2 + k^2t \right]_1^2 \\ &= 4 - 3k + k^2\end{aligned}$$

$$\text{즉 } k = 4 - 3k + k^2 \text{이므로 } k^2 - 4k + 4 = 0$$

$$(k-2)^2 = 0 \quad \therefore k = 2$$

따라서 $\int_1^2 f(t) dt = 2$ 이므로

$$10 \int_1^2 f(x) dx = 10 \int_1^2 f(t) dt = 10 \times 2 = 20$$

06 ㉮ 132

$\int_{12}^x f(t) dt = -x^3 + x^2 + \int_0^1 xf(t) dt$ 의 양변에 $x=12$ 를 대입하면

$$\int_{12}^{12} f(t) dt = -12^3 + 12^2 + \int_0^1 12f(t) dt = 0$$

$$-12^3 + 12^2 + 12 \int_0^1 f(t) dt = 0, \quad -12^2 + 12 + \int_0^1 f(t) dt = 0$$

$$\int_0^1 f(t) dt = 12^2 - 12 = 132$$

$$\therefore \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(t) dt = 132$$

07 ㉮ ㉮

$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx = k$ (k 는 상수)라 하면

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \text{이므로}$$

$$k = k + k \quad \therefore k = 0$$

$$\therefore \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx = 0$$

이때 $f(0) = -1$ 이므로 $f(x) = ax^2 + bx - 1$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)

이라 하면

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = 0 \text{에서 } \int_{-1}^0 (ax^2 + bx - 1) dx = 0$$

$$\left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 - x \right]_{-1}^0 = 0, \quad \frac{a}{3} - \frac{b}{2} - 1 = 0$$

$$\therefore 2a - 3b = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = 0 \text{에서 } \int_0^1 (ax^2 + bx - 1) dx = 0$$

$$\left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 - x \right]_0^1 = 0, \quad \frac{a}{3} + \frac{b}{2} - 1 = 0$$

$$\therefore 2a + 3b = 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉮, ㉮을 연립하여 풀면 $a = 3, b = 0$

따라서 $f(x) = 3x^2 - 1$ 이므로

$$f(2) = 12 - 1 = 11$$

08 ㉮ ㉮

(가)에서 함수 $y = f(x)$ 는 그 그래프가 y 축에 대하여 대칭인 우함수이므로

$$f(x) = x^4 + bx^2 + 10 \quad \therefore f'(x) = 4x^3 + 2bx$$

이때 $f'(1)=4+2b$ 이므로 (나)에서
 $-6 < 4+2b < -2$, $-10 < 2b < -6$
 $\therefore -5 < b < -3$

그런데 b 는 정수이므로 $b=-4$

즉 $f(x)=x^4-4x^2+10$ 이므로

$f'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$ 일 때 극소이고, 극솟값은
 $f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})=4-8+10=6$

09 ㉔ ⑤

$\int_1^x \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} dt = x^3 + ax^2 - 2$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\int_1^1 \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} dt = 1 + a - 2 = 0 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore \int_1^x \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} dt = x^3 + x^2 - 2$$

이때 $\frac{d}{dt} f(t) = f'(t)$ 이므로

$$\int_1^x \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} dt = \int_1^x f'(t) dt = [f(t)]_1^x = f(x) - f(1)$$

즉 $f(x) - f(1) = x^3 + x^2 - 2$ 이므로

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

$$\therefore f'(a) = f'(1) = 3 + 2 = 5$$

10 ㉔ 27

(가)에서

$$f(x)g(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3 \\ = (x+3)(x+1)(x-1)$$

(나)에서 $f'(x)=1$ 이므로 $f(x)$ 는 x 의 계수가 1인 일차식이고, $g(x)$ 는 이차식이다.㉔

(다)에서 $g(x) = 2 \int_1^x f(t) dt$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$g(1) = 2 \int_1^1 f(t) dt = 0$$

즉 $g(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 갖는다.㉔

㉔, ㉔을 만족시키는 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 다음과 같다.

$f(x)$	$x+3$	$x+1$
$g(x)$	$(x+1)(x-1)=x^2-1$	$(x+3)(x-1)=x^2+2x-3$

(다)에서 $g(x) = 2 \int_1^x f(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = 2f(x) \quad \text{.....㉔}$$

위의 식 중에서 ㉔을 만족시키는 것은

$$f(x) = x+1, g(x) = x^2+2x-3$$

$$\therefore \int_0^3 3g(x) dx = \int_0^3 3(x^2+2x-3) dx$$

$$= \int_0^3 (3x^2+6x-9) dx$$

$$= \left[x^3 + 3x^2 - 9x \right]_0^3$$

$$= 27$$

11 ㉔ 45

(가)에서 $\int_0^2 |f(x)| dx = 4$, $\int_0^2 f(x) dx = -4$ 이므로

닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이다.

또 (나)에서 $\int_2^3 |f(x)| dx = \int_2^3 f(x) dx$ 이므로 닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이다.

이때 $f(0)=0$ 이므로 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉 $f(x) = ax(x-2) = ax^2 - 2ax$ ($a > 0$)라 하면

면 (가)에서 $\int_0^2 f(x) dx = -4$ 이므로

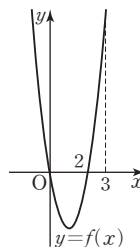
$$\int_0^2 (ax^2 - 2ax) dx = -4$$

$$\left[\frac{a}{3} x^3 - ax^2 \right]_0^2 = -4, -\frac{4}{3}a = -4$$

$$\therefore a = 3$$

따라서 $f(x) = 3x^2 - 6x$ 이므로

$$f(5) = 75 - 30 = 45$$



12 ㉔ 7

(가)에서 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \frac{1}{2} \{ f(x) + f(1) \} + \frac{x-1}{2} f'(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(1) + \frac{x-1}{2} f'(x)$$

$$\frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{2} f(1) + \frac{x-1}{2} f'(x)$$

$$\therefore f(x) = f(1) + (x-1)f'(x) \quad \text{.....㉔}$$

㉔의 좌변인 $f(x)$ 의 최고차항을 ax^n ($a \neq 0$, a 는 상수, n 은 자연수)이라 하면 ㉔의 우변의 최고차항은 $x \times anx^{n-1} = anx^n$ 이므로

$$ax^n = anx^n \quad \therefore n = 1$$

즉 $f(x)$ 는 일차함수이고 $f(0)=1$ 이므로 $f(x) = ax+1$ 이라 하자. 이때

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (ax+1) dx = \left[\frac{a}{2} x^2 + x \right]_0^2 = 2a+2$$

$$\int_{-1}^1 xf(x) dx = \int_{-1}^1 (ax^2+x) dx = \int_{-1}^1 ax^2 dx + \int_{-1}^1 x dx \\ = 2 \int_0^1 ax^2 dx + 0 = 2 \left[\frac{a}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}a$$

이고, (나)에서 $\int_0^2 f(x) dx = 5 \int_{-1}^1 xf(x) dx$ 이므로

$$2a+2 = 5 \times \frac{2}{3}a, 6a+6 = 10a$$

$$-4a = -6 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

따라서 $f(x) = \frac{3}{2}x + 1$ 이므로

$$f(4) = 6 + 1 = 7$$

개념 완성하기

p.223~224

01 답 $\frac{1}{6}$

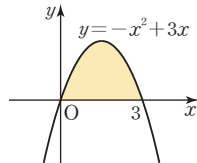
$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \{-x(x+1)\}dx &= \int_{-1}^0 (-x^2-x)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

02 답 8

$$\int_0^2 (x^3+2)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + 2x\right]_0^2 = 8$$

03 답 $\frac{9}{2}$

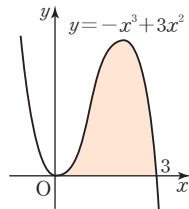
곡선 $y = -x^2 + 3x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $-x^2 + 3x = 0$ 에서 $x(x-3) = 0$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 3$
 이때 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면



$$\begin{aligned}S &= \int_0^3 (-x^2 + 3x)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^3 \\ &= \frac{9}{2}\end{aligned}$$

04 답 $\frac{27}{4}$

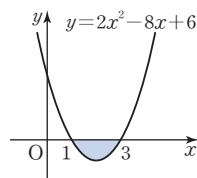
곡선 $y = -x^3 + 3x^2$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $-x^3 + 3x^2 = 0$ 에서 $x^2(x-3) = 0$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 3$
 이때 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면



$$\begin{aligned}S &= \int_0^3 (-x^3 + 3x^2)dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3\right]_0^3 \\ &= \frac{27}{4}\end{aligned}$$

05 답 $\frac{8}{3}$

곡선 $y = 2x^2 - 8x + 6$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $2x^2 - 8x + 6 = 0$ 에서 $2(x-1)(x-3) = 0$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = 3$
 이때 $1 \leq x \leq 3$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면



$$\begin{aligned}S &= -\int_1^3 (2x^2 - 8x + 6)dx \\ &= -\left[\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x\right]_1^3 \\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

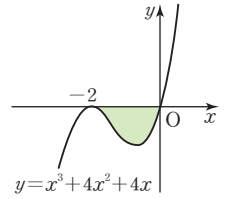
06 답 $\frac{4}{3}$

곡선 $y = x^3 + 4x^2 + 4x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$x^3 + 4x^2 + 4x = 0 \text{에서 } x(x+2)^2 = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$

이때 $-2 \leq x \leq 0$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면



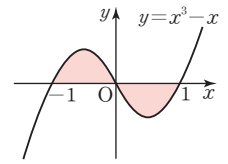
$$\begin{aligned}S &= -\int_{-2}^0 (x^3 + 4x^2 + 4x)dx \\ &= -\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2\right]_{-2}^0 \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

07 답 $\frac{1}{2}$

곡선 $y = x^3 - x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^3 - x = 0$ 에서 $x(x+1)(x-1) = 0$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

이때 $-1 \leq x \leq 0$ 에서 $y \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면



$$\begin{aligned}S &= \int_{-1}^0 (x^3 - x)dx - \int_0^1 (x^3 - x)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

08 답 8

곡선 $y = x^4 - 5x^2 + 4$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \text{에서}$$

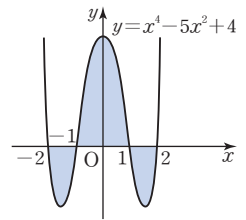
$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$$

$$(x+1)(x-1)(x+2)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

$$\text{또는 } x = 2$$

이때 $-2 \leq x \leq -1$, $1 \leq x \leq 2$ 에서 $y \leq 0$, $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면



$$\begin{aligned}S &= -\int_{-2}^{-1} (x^4 - 5x^2 + 4)dx + \int_{-1}^1 (x^4 - 5x^2 + 4)dx \\ &\quad - \int_1^2 (x^4 - 5x^2 + 4)dx \\ &= -\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right]_{-1}^1 \\ &\quad - \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right]_1^2 \\ &= -\left(-\frac{22}{15}\right) + \frac{76}{15} - \left(-\frac{22}{15}\right) \\ &= 8\end{aligned}$$

09 답 12

$-2 \leq x \leq 1$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_{-2}^1 (x^2 + 3)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 3x\right]_{-2}^1 = 12$$

10 ㉔ $\frac{22}{3}$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (-x^2 + 4) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{22}{3} \end{aligned}$$

11 ㉔ 2

$-1 \leq x \leq 0$ 에서 $y \leq 0$, $0 \leq x \leq 1$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-1}^0 (x^2 + 2x) dx + \int_0^1 (x^2 + 2x) dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1 \\ &= -\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{4}{3} = 2 \end{aligned}$$

12 ㉔ 4

$-2 \leq x \leq -1$, $1 \leq x \leq 2$ 에서 $y \leq 0$, $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-2}^{-1} (-x^2 + 1) dx + \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx - \int_1^2 (-x^2 + 1) dx \\ &= -\left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^1 - \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_1^2 \\ &= -\left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) \\ &= 4 \end{aligned}$$

13 ㉔ $\frac{1}{6}$

곡선 $y = -x^2 - 2x - 1$ 과 직선 $y = x + 1$ 의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} -x^2 - 2x - 1 &= x + 1 \text{에서} \\ x^2 + 3x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$(x+2)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = -1$$

이때 $-2 \leq x \leq -1$ 에서 $-x^2 - 2x - 1 \geq x + 1$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{-1} \{(-x^2 - 2x - 1) - (x + 1)\} dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (-x^2 - 3x - 2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x \right]_{-2}^{-1} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

14 ㉔ $\frac{4}{3}$

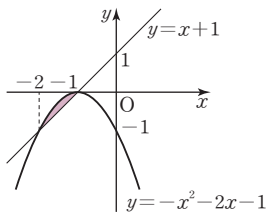
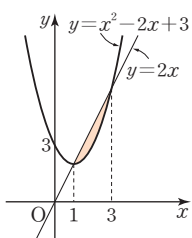
곡선 $y = x^2 - 2x + 3$ 과 직선 $y = 2x$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 2x + 3 = 2x \text{에서 } x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

이때 $1 \leq x \leq 3$ 에서 $x^2 - 2x + 3 \geq 2x$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면



$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \{2x - (x^2 - 2x + 3)\} dx \\ &= \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^3 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

15 ㉔ $\frac{1}{2}$

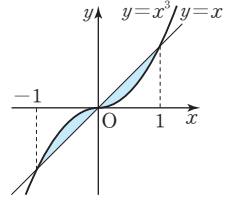
곡선 $y = x^3$ 과 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3 = x$ 에서 $x^3 - x = 0$

$$x(x+1)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

이때 $-1 \leq x \leq 0$ 에서 $x^3 \geq x$, $0 \leq x \leq 1$ 에서 $x^3 \leq x$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



16 ㉔ $\frac{8}{3}$

두 곡선 $y = -x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$ 의 교점의 x 좌표는

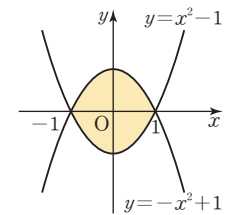
$$-x^2 + 1 = x^2 - 1 \text{에서 } x^2 - 1 = 0$$

$$(x+1)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

이때 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $-x^2 + 1 \geq x^2 - 1$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \{(-x^2 + 1) - (x^2 - 1)\} dx \\ &= \int_{-1}^1 (-2x^2 + 2) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$



17 ㉔ 9

두 곡선 $y = -x^2 + 2x$, $y = x^2 - 4$ 의 교점의 x 좌표는

$$-x^2 + 2x = x^2 - 4 \text{에서 } x^2 - x - 2 = 0$$

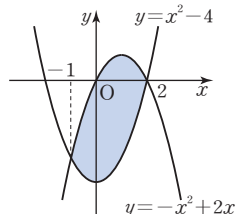
$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

이때 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $-x^2 + 2x \geq x^2 - 4$

이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \{(-x^2 + 2x) - (x^2 - 4)\} dx \\ &= \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right]_{-1}^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$



18 ㉮ $\frac{1}{3}$

두 곡선 $y=x^2-2x+2$, $y=-x^2+4x-2$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2-2x+2=-x^2+4x-2$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$(x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

이때 $1 \leq x \leq 2$ 에서

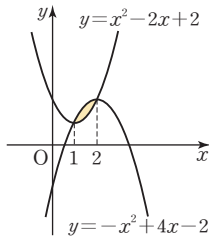
$x^2-2x+2 \leq -x^2+4x-2$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_1^2 \{(-x^2+4x-2) - (x^2-2x+2)\} dx$$

$$= \int_1^2 (-2x^2+6x-4) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3}$$



19 ㉮ $\frac{4}{3}$

두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ($x \geq 0$)과 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{2}x^2 = x \text{에서 } x^2 - 2x = 0$$

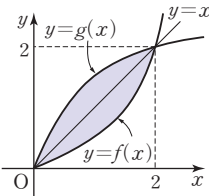
$$x(x-2)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = 2 \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^2$$

$$= 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$



20 ㉮ 3

두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $f(x) = -\frac{1}{3}x^2$ ($x \leq 0$)과 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$$-\frac{1}{3}x^2 = x \text{에서 } x^2 + 3x = 0$$

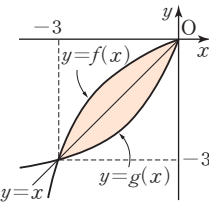
$$x(x+3)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=0$$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = 2 \int_{-3}^0 \left(-\frac{1}{3}x^2 - x \right) dx$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-3}^0$$

$$= 2 \times \frac{3}{2} = 3$$



21 ㉮ $\frac{9}{5}$

두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}$ ($x \geq 0$)와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5} = x \text{에서 } x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4)=0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

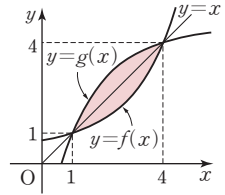
따라서 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = 2 \int_1^4 \left\{ x - \left(\frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5} \right) \right\} dx$$

$$= 2 \int_1^4 \left(-\frac{1}{5}x^2 + x - \frac{4}{5} \right) dx$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{15}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x \right]_1^4$$

$$= 2 \times \frac{9}{10} = \frac{9}{5}$$



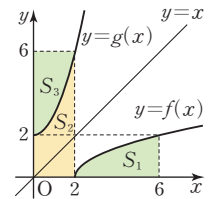
22 ㉮ 12

두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

이때 $f(2)=0$, $f(6)=2$ 이므로 $g(0)=2$, $g(2)=6$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 오른쪽 그림과 같고 $S_1=S_3$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_2^6 f(x) dx + \int_0^2 g(x) dx &= S_1 + S_2 \\ &= S_3 + S_2 \\ &= 2 \times 6 = 12 \end{aligned}$$



23 ㉮ 24

시각 $t=0$ 에서의 점 P의 위치가 0이므로 시각 $t=4$ 에서의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^4 (4t-2) dt = \left[2t^2 - 2t \right]_0^4 = 24$$

24 ㉮ 4

시각 $t=1$ 에서 $t=2$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^2 (4t-2) dt = \left[2t^2 - 2t \right]_1^2 = 4$$

25 ㉮ 13

시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^3 |4t-2| dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} (-4t+2) dt + \int_{\frac{1}{2}}^3 (4t-2) dt \\ &= \left[-2t^2 + 2t \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[2t^2 - 2t \right]_{\frac{1}{2}}^3 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{25}{2} = 13 \end{aligned}$$

26 ㉮ -3

시각 $t=0$ 에서의 점 P의 위치가 1이므로 시각 $t=2$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} 1 + \int_0^2 (t^3 - 4t) dt &= 1 + \left[\frac{1}{4}t^4 - 2t^2 \right]_0^2 \\ &= 1 + (-4) = -3 \end{aligned}$$

27 ㉔ 2

점 P의 속도가 0일 때 운동 방향을 바꾸므로

$$v(t)=0 \text{에서 } t^3-4t=0$$

$$t(t+2)(t-2)=0 \quad \therefore t=2 (\because t>0)$$

28 ㉔ 40

시간 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^4 |t^3-4t| dt &= \int_0^2 (-t^3+4t) dt + \int_2^4 (t^3-4t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{4}t^4+2t^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{4}t^4-2t^2 \right]_2^4 \\ &= 4+36=40 \end{aligned}$$

29 ㉔ 40 m

물체를 쏘아 올린 후 2초가 지났을 때 지면으로부터의 높이는

$$\int_0^2 (30-10t) dt = \left[30t-5t^2 \right]_0^2 = 40 \text{ (m)}$$

30 ㉔ 45 m

물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$$v(t)=0 \text{에서 } 30-10t=0 \quad \therefore t=3$$

따라서 $t=3$ 일 때 최고 높이에 도달하므로 구하는 높이는

$$\int_0^3 (30-10t) dt = \left[30t-5t^2 \right]_0^3 = 45 \text{ (m)}$$

31 ㉔ 65 m

물체를 쏘아 올린 후 5초 동안 물체가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^5 |30-10t| dt &= \int_0^3 (30-10t) dt + \int_3^5 (-30+10t) dt \\ &= \left[30t-5t^2 \right]_0^3 + \left[-30t+5t^2 \right]_3^5 \\ &= 45+20=65 \text{ (m)} \end{aligned}$$

32 ㉔ $\frac{5}{2}$

시간 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^4 |v(t)| dt &= -\int_0^2 v(t) dt + \int_2^4 v(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times (1+2) \times 1 \\ &= 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

유형 완성하기

p. 225~237

01 ㉔ $\frac{22}{3}$

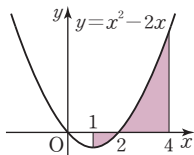
곡선 $y=x^2-2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$x^2-2x=0 \text{에서 } x(x-2)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

이때 $1 \leq x \leq 2$ 에서 $y \leq 0$, $2 \leq x \leq 4$ 에서

$y \geq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면



$$\begin{aligned} S &= -\int_1^2 (x^2-2x) dx + \int_2^4 (x^2-2x) dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3-x^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3-x^2 \right]_2^4 \\ &= -\left(-\frac{2}{3} \right) + \frac{20}{3} = \frac{22}{3} \end{aligned}$$

01-1 ㉔ $\frac{51}{4}$

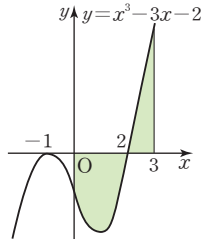
곡선 $y=x^3-3x-2$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$x^3-3x-2=0 \text{에서 } (x+1)^2(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

이때 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $y \leq 0$, $2 \leq x \leq 3$ 에서

$y \geq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면



$$\begin{aligned} S &= -\int_0^2 (x^3-3x-2) dx + \int_2^3 (x^3-3x-2) dx \\ &= -\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2-2x \right]_0^2 + \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2-2x \right]_2^3 \\ &= -(-6) + \frac{27}{4} \\ &= \frac{51}{4} \end{aligned}$$

02 ㉔ ⑤

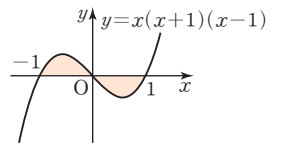
곡선 $y=x(x+1)(x-1)$ 과 x 축의

교점의 x 좌표는

$$x(x+1)(x-1)=0 \text{에서}$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

이때 $-1 \leq x \leq 0$ 에서 $y \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면



$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 x(x+1)(x-1) dx - \int_0^1 x(x+1)(x-1) dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3-x) dx - \int_0^1 (x^3-x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

02-1 ㉔ ④

곡선 $y=x(x+2)(x-1)^2$ 과

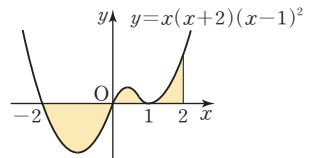
x 축의 교점의 x 좌표는

$$x(x+2)(x-1)^2=0 \text{에서}$$

$$x=-2 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

이때 $-2 \leq x \leq 0$ 에서 $y \leq 0$,

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면



$$\begin{aligned} S &= -\int_{-2}^0 x(x+2)(x-1)^2 dx + \int_0^2 x(x+2)(x-1)^2 dx \\ &= -\int_{-2}^0 (x^4-3x^2+2x) dx + \int_0^2 (x^4-3x^2+2x) dx \\ &= -\left[\frac{1}{5}x^5-x^3+x^2 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{5}x^5-x^3+x^2 \right]_0^2 \\ &= -\left(-\frac{28}{5} \right) + \frac{12}{5} \\ &= 8 \end{aligned}$$

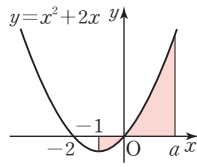
03 ㉔ 2

곡선 $y=x^2+2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^2+2x=0$ 에서 $x(x+2)=0$
 $\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

이때 $-1 \leq x \leq 0$ 에서 $y \leq 0$, $0 \leq x \leq a$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-1}^0 (x^2+2x)dx + \int_0^a (x^2+2x)dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^a \\ &= \frac{1}{3}a^3+a^2+\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{즉 } \frac{1}{3}a^3+a^2+\frac{2}{3} &= \frac{22}{3} \text{이므로 } a^3+3a^2-20=0 \\ (a-2)(a^2+5a+10) &= 0 \quad \therefore a=2 (\because a^2+5a+10>0) \end{aligned}$$

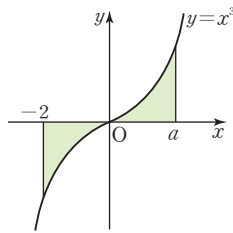


03-1 ㉔ 4

오른쪽 그림과 같이 $-2 \leq x \leq 0$ 에서 $y \leq 0$, $0 \leq x \leq a$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-2}^0 x^3dx + \int_0^a x^3dx \\ &= -\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^a \\ &= \frac{1}{4}a^4+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{즉 } \frac{1}{4}a^4+4 &= 8 \text{이므로 } a^4-16=0 \\ (a+2)(a-2)(a^2+4) &= 0 \quad \therefore a=2 (\because a>0) \end{aligned}$$



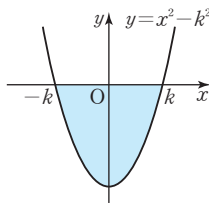
04 ㉔ 3

곡선 $y=x^2-k^2$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^2-k^2=0$ 에서 $(x+k)(x-k)=0$
 $\therefore x=-k$ 또는 $x=k$

이때 $-k \leq x \leq k$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-k}^k (x^2-k^2)dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3-k^2x\right]_{-k}^k \\ &= \frac{4}{3}k^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{즉 } \frac{4}{3}k^3 &= 36 \text{이므로 } k^3-27=0 \\ (k-3)(k^2+3k+9) &= 0 \quad \therefore k=3 (\because k^2+3k+9>0) \end{aligned}$$

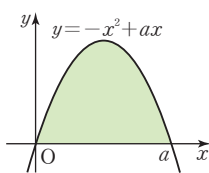


04-1 ㉔ 4

곡선 $y=-x^2+ax$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $-x^2+ax=0$ 에서 $x^2-ax=0$
 $x(x-a)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=a$ ①

이때 $0 \leq x \leq a$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a (-x^2+ax)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^a \\ &= \frac{1}{6}a^3 \end{aligned}$$



..... ②

$$\text{즉 } \frac{1}{6}a^3 = \frac{32}{3} \text{이므로 } a^3-64=0$$

$$(a-4)(a^2+4a+16)=0$$

$$\therefore a=4 (\because a^2+4a+16>0)$$

..... ③

채점 기준	비율
① 주어진 곡선과 x 축의 교점의 x 좌표를 구할 수 있다.	30%
② 도형의 넓이를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	30%

05 ㉔ 1/3

$\int_{-1}^x f(t)dt = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{5}{3}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

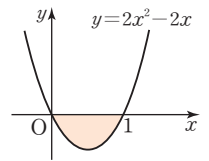
$$f(x) = 2x^2 - 2x = 2x(x-1)$$

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$2x(x-1)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

이때 $0 \leq x \leq 1$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= -\int_0^1 (2x^2-2x)dx \\ &= -\left[\frac{2}{3}x^3-x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$



05-1 ㉔ 27

$xf(x) = \int_0^x tf'(t)dt + 2x^3 + 3x^2 - 12x$ 의 양변을 x 에 대하여 미

분하면 $f(x) + xf'(x) = xf'(x) + 6x^2 + 6x - 12$

$$\therefore f(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$$

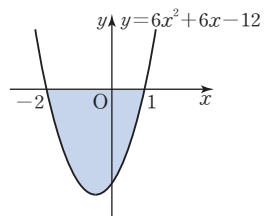
곡선 $y=f(x)$ 와 x 축의 교점의 x 좌

표는 $6(x+2)(x-1)=0$ 에서

$$x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

이때 $-2 \leq x \leq 1$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-2}^1 (6x^2+6x-12)dx \\ &= -\left[2x^3+3x^2-12x\right]_{-2}^1 \\ &= 27 \end{aligned}$$



06 ㉔ 32/5

곡선 $y=x^3-x^2-2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$x^3-x^2-2x=0 \text{에서 } x(x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

이때 $-1 \leq x \leq 0$ 에서 $y \geq 0$, $0 \leq x \leq 2$ 에서 $y \leq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0 \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= -\int_0^2 (x^3-x^2-2x)dx = -\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{32}{5}$$

06-1 ㉮ $\frac{3}{2}$

곡선 $y = -x^2 + x + 2$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는
 $-x^2 + x + 2 = 0$ 에서 $x^2 - x - 2 = 0$
 $(x+1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -1$ 또는 $x = 2$
 이때 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $y \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 &= \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

이때 S_1, S_2, S_3 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로
 $2S_2 = S_1 + S_3$

$$\text{따라서 } S_1 + S_2 + S_3 = 3S_2 = \frac{9}{2} \text{ 이므로 } S_2 = \frac{3}{2}$$

Lecture 등차중항

세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때

$$b = \frac{a+c}{2} \iff 2b = a+c$$

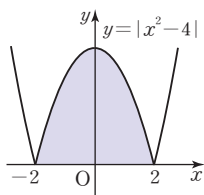
07 ㉮ ③

$$y = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & (x < -2 \text{ 또는 } x > 2) \\ -x^2 + 4 & (-2 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

곡선 $y = |x^2 - 4|$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는
 $x^2 - 4 = 0$ 에서 $(x+2)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 2$

오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이를
 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$



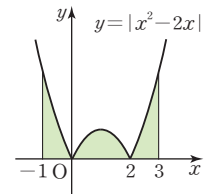
07-1 ㉮ 4

$$y = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & (x < 0 \text{ 또는 } x > 2) \\ -x^2 + 2x & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

곡선 $y = |x^2 - 2x|$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는
 $x^2 - 2x = 0$ 에서 $x(x-2) = 0$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$

오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이를
 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx + \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx \\ &\quad + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_2^3 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4 \end{aligned}$$



08 ㉮ ④

$$y = x^2 - 2|x| - 3 = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & (x \geq 0) \\ x^2 + 2x - 3 & (x < 0) \end{cases}$$

곡선 $y = x^2 - 2|x| - 3$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는

(i) $x \geq 0$ 일 때

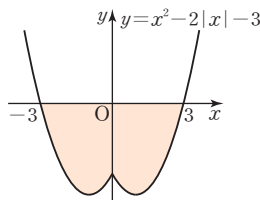
$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= 0 \text{에서 } (x+1)(x-3) = 0 \\ \therefore x &= 3 \quad (\because x \geq 0) \end{aligned}$$

(ii) $x < 0$ 일 때

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= 0 \text{에서 } (x+3)(x-1) = 0 \\ \therefore x &= -3 \quad (\because x < 0) \end{aligned}$$

오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이를
 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-3}^0 (x^2 + 2x - 3) dx \\ &\quad - \int_0^3 (x^2 - 2x - 3) dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \right]_{-3}^0 \\ &\quad - \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \right]_0^3 \\ &= -(-9) - (-9) = 18 \end{aligned}$$



다른 풀이

$y = x^2 - 2|x| - 3$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} 2 \left\{ -\int_0^3 (x^2 - 2x - 3) dx \right\} &= -2 \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \right]_0^3 \\ &= -2 \times (-9) = 18 \end{aligned}$$

08-1 ㉮ $\frac{8}{3}$

$$\begin{aligned} f(|x|) &= |x|^3 - 4|x|^2 + 4|x| \\ &= \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 4x & (x \geq 0) \\ -x^3 - 4x^2 - 4x & (x < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

곡선 $y = f(|x|)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

(i) $x \geq 0$ 일 때

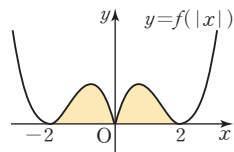
$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 4x &= 0 \text{에서 } x(x-2)^2 = 0 \\ \therefore x &= 0 \text{ 또는 } x = 2 \quad (\because x \geq 0) \end{aligned}$$

(ii) $x < 0$ 일 때

$$\begin{aligned} -x^3 - 4x^2 - 4x &= 0 \text{에서 } x^3 + 4x^2 + 4x = 0 \\ x(x+2)^2 &= 0 \\ \therefore x &= -2 \quad (\because x < 0) \end{aligned}$$

오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이를
 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 (-x^3 - 4x^2 - 4x) dx \\ &\quad + \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$



09 ㉮ 10

$$\int_0^1 f'(t) dt = k \quad (k \text{는 상수})$$

.....㉠

라 하면 $f(x) = 3x^2 + 6x - k$

$$\therefore f'(x) = 6x + 6$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$k = \int_0^1 f'(t) dt = \int_0^1 (6t+6) dt = \left[3t^2 + 6t \right]_0^1 = 9$$

즉 $f(x) = 3x^2 + 6x - 9$ 이므로

$$f(|x|) = 3|x|^2 + 6|x| - 9$$

$$= \begin{cases} 3x^2 + 6x - 9 & (x \geq 0) \\ 3x^2 - 6x - 9 & (x < 0) \end{cases}$$

곡선 $y = f(|x|)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

(i) $x \geq 0$ 일 때

$$3x^2 + 6x - 9 = 0 \text{ 에서 } x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0 \quad \therefore x = 1 \quad (\because x \geq 0)$$

(ii) $x < 0$ 일 때

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \text{ 에서 } x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0 \quad \therefore x = -1 \quad (\because x < 0)$$

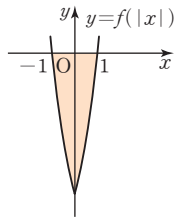
오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = - \int_{-1}^0 (3x^2 - 6x - 9) dx$$

$$- \int_0^1 (3x^2 + 6x - 9) dx$$

$$= - \left[x^3 - 3x^2 - 9x \right]_{-1}^0 - \left[x^3 + 3x^2 - 9x \right]_0^1$$

$$= -(-5) - (-5) = 10$$



09-1 12

$\int_1^x f(t) dt = -x^3 + ax^2 - 2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = -3x^2 + 2ax$$

$\int_1^x f(t) dt = -x^3 + ax^2 - 2$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\int_1^1 f(t) dt = -1 + a - 2 = 0 \quad \therefore a = 3$$

즉 $f(x) = -3x^2 + 6x$ 이므로

$$|f(x)| = |-3x^2 + 6x| = \begin{cases} 3x^2 - 6x & (x < 0 \text{ 또는 } x > 2) \\ -3x^2 + 6x & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

곡선 $y = |f(x)|$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$-3x^2 + 6x = 0 \text{ 에서 } x^2 - 2x = 0$$

$$3x(x-2) = 0$$

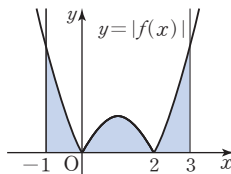
$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_{-1}^0 (3x^2 - 6x) dx + \int_0^2 (-3x^2 + 6x) dx + \int_2^3 (3x^2 - 6x) dx$$

$$= \left[x^3 - 3x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-x^3 + 3x^2 \right]_0^2 + \left[x^3 - 3x^2 \right]_2^3$$

$$= 4 + 4 + 4 = 12$$



10 1/2

곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는

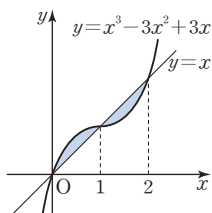
$$x^3 - 3x^2 + 3x = x \text{ 에서 } x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

이때 $0 \leq x \leq 1$ 에서 $x^3 - 3x^2 + 3x \geq x$,

$1 \leq x \leq 2$ 에서 $x^3 - 3x^2 + 3x \leq x$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면



$$S = \int_0^1 \{(x^3 - 3x^2 + 3x) - x\} dx + \int_1^2 \{x - (x^3 - 3x^2 + 3x)\} dx$$

$$= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

10-1 10

$$y = |x^2 - 2x| = \begin{cases} -x^2 + 2x & (0 \leq x \leq 2) \\ x^2 - 2x & (x < 0 \text{ 또는 } x > 2) \end{cases}$$

함수 $y = |x^2 - 2x|$ 의 그래프와 직선 $y = 2x$ 의 교점의 x 좌표는

(i) $0 \leq x \leq 2$ 일 때

$$-x^2 + 2x = 2x \text{ 에서 } x^2 = 0 \quad \therefore x = 0$$

(ii) $x < 0$ 또는 $x > 2$ 일 때

$$x^2 - 2x = 2x \text{ 에서 } x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0 \quad \therefore x = 4$$

이때 $0 \leq x \leq 2$ 에서

$$-x^2 + 2x \leq 2x, 2 \leq x \leq 4 \text{ 에서}$$

$$x^2 - 2x \leq 2x \text{ 이므로 구하는 도형의}$$

넓이를 S 라 하면

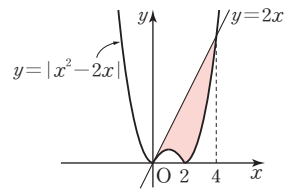
$$S = \int_0^2 \{2x - (-x^2 + 2x)\} dx$$

$$+ \int_2^4 \{2x - (x^2 - 2x)\} dx$$

$$= \int_0^2 x^2 dx + \int_2^4 (-x^2 + 4x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_2^4$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{16}{3} = 8$$



11 3

곡선 $y = x^2 - 2x$ 와 직선 $y = kx$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 2x = kx \text{ 에서 } x^2 - (k+2)x = 0$$

$$x(x - k - 2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = k + 2$$

이때 $0 \leq x \leq k + 2$ 에서 $x^2 - 2x \leq kx$ 이

므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^{k+2} \{kx - (x^2 - 2x)\} dx$$

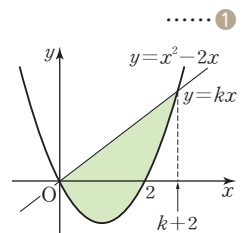
$$= \int_0^{k+2} \{-x^2 + (k+2)x\} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{k+2}{2}x^2 \right]_0^{k+2}$$

$$= \frac{(k+2)^3}{6}$$

$$\therefore \frac{(k+2)^3}{6} = \frac{125}{6} \text{ 이므로 } (k+2)^3 = 125$$

$$k+2 = 5 \quad \therefore k = 3$$



채점 기준	비율
① 주어진 곡선과 직선의 교점의 x 좌표를 구할 수 있다.	30%
② 주어진 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 k 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
③ k 의 값을 구할 수 있다.	30%

11-1 ㉔2

원점을 지나는 직선의 기울기를 k ($k > 0$)라 하면 직선의 방정식은 $y = kx$

곡선 $y = x^2 - 4x$ 와 직선 $y = kx$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 4x = kx \text{에서 } x^2 - (k+4)x = 0$$

$$x(x - k - 4) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = k + 4$$

이때 $0 \leq x \leq k+4$ 에서 $x^2 - 4x \leq kx$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^{k+4} \{kx - (x^2 - 4x)\} dx$$

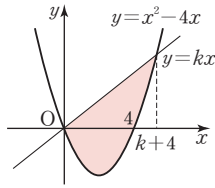
$$= \int_0^{k+4} \{-x^2 + (k+4)x\} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{k+4}{2}x^2 \right]_0^{k+4}$$

$$= \frac{(k+4)^3}{6}$$

$$\approx \frac{(k+4)^3}{6} = \frac{216}{6} \text{이므로 } (k+4)^3 = 216$$

$$k+4=6 \quad \therefore k=2$$



12 ㉔5

곡선 $y = x^2 + 2k$ 와 직선 $y = (k+2)x$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 + 2k = (k+2)x \text{에서}$$

$$x^2 - (k+2)x + 2k = 0$$

$$(x-k)(x-2) = 0 \quad \therefore x = k \text{ 또는 } x = 2$$

이때 $k \leq x \leq 2$ 에서 $x^2 + 2k \leq (k+2)x$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_k^2 \{(k+2)x - (x^2 + 2k)\} dx$$

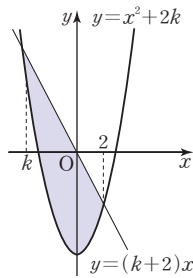
$$= \int_k^2 \{-x^2 + (k+2)x - 2k\} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{k+2}{2}x^2 - 2kx \right]_k^2$$

$$= -\frac{(k-2)^3}{6}$$

$$\approx -\frac{(k-2)^3}{6} = 36 \text{이므로 } (k-2)^3 = -216$$

$$k-2 = -6 \quad \therefore k = -4$$



12-1 ㉔9/2

곡선 $y = x^2 - 2x + k$ 와 직선 $y = x + k$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 2x + k = x + k \text{에서 } x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

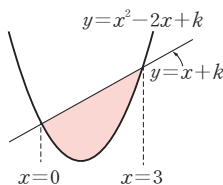
이때 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $x^2 - 2x + k \leq x + k$

이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^3 \{(x+k) - (x^2 - 2x + k)\} dx$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 = \frac{9}{2}$$



13 ㉔1/2

두 곡선 $y = -x^3 + x^2$, $y = x^2 - x$ 의 교점의 x 좌표는

$$-x^3 + x^2 = x^2 - x \text{에서 } x^3 - x = 0$$

$$x(x+1)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

이때 $-1 \leq x \leq 0$ 에서 $-x^3 + x^2 \leq x^2 - x$,

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $-x^3 + x^2 \geq x^2 - x$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

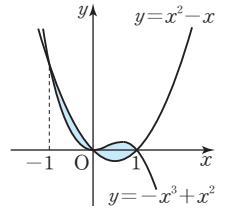
$$S = \int_{-1}^0 \{(x^2 - x) - (-x^3 + x^2)\} dx$$

$$+ \int_0^1 \{(-x^3 + x^2) - (x^2 - x)\} dx$$

$$= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (-x^3 + x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$



13-1 ㉔9

두 곡선 $y = x^2 + x - 2$,

$y = -x^2 + 3x + 2$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 + x - 2 = -x^2 + 3x + 2 \text{에서}$$

$$x^2 - x - 2 = 0, (x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

이때 $-1 \leq x \leq 2$ 에서

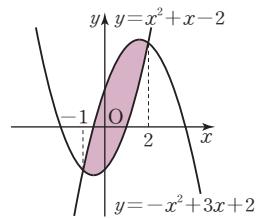
$x^2 + x - 2 \leq -x^2 + 3x + 2$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_{-1}^2 \{-x^2 + 3x + 2 - (x^2 + x - 2)\} dx$$

$$= \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right]_{-1}^2$$

$$= 9$$



14 ㉔-4

$a \leq x \leq b$ 에서 $f(x) \leq g(x)$, $b \leq x \leq c$ 에서 $f(x) \geq g(x)$ 이고 A , B 의 넓이가 각각 5, 9이므로

$$\int_a^b \{g(x) - f(x)\} dx = 5, \int_b^c \{f(x) - g(x)\} dx = 9$$

$$\therefore \int_a^c \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$= \int_a^b \{g(x) - f(x)\} dx + \int_b^c \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$= \int_a^b \{g(x) - f(x)\} dx - \int_b^c \{f(x) - g(x)\} dx$$

$$= 5 - 9 = -4$$

14-1 ㉔125/12

두 곡선 $y = x^3 - 6x$, $y = x^2$ 의 교점의 x 좌표는

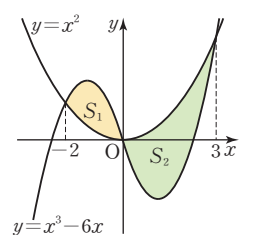
$$x^3 - 6x = x^2 \text{에서 } x^3 - x^2 - 6x = 0$$

$$x(x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

이때 $-2 \leq x \leq 0$ 에서 $x^3 - 6x \geq x^2$,

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $x^3 - 6x \leq x^2$ 이므로



$$\begin{aligned}
 S_2 - S_1 &= \int_0^3 \{x^2 - (x^3 - 6x)\} dx - \int_{-2}^0 \{(x^3 - 6x) - x^2\} dx \\
 &= \int_0^3 (-x^3 + x^2 + 6x) dx - \int_{-2}^0 (x^3 - x^2 - 6x) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^3 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 \right]_{-2}^0 \\
 &= \frac{63}{4} - \frac{16}{3} = \frac{125}{12}
 \end{aligned}$$

15 ㉮ $\frac{1}{3}$

곡선 $y=x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 곡선의 식은

$$-y=x^2 \quad \therefore y=-x^2$$

이 곡선을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 곡선의 식은

$$y-1=-(x+1)^2 \quad \therefore y=-(x+1)^2+1=-x^2-2x$$

즉 $f(x)=-x^2-2x$ 이므로 두 곡선

$y=x^2, y=f(x)$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2=-x^2-2x \text{에서 } x^2+x=0$$

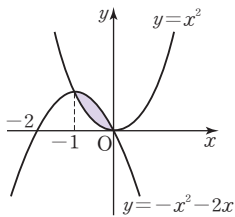
$$x(x+1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0$$

이때 $-1 \leq x \leq 0$ 에서 $x^2 \leq -x^2-2x$ 이

므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^0 \{(-x^2-2x) - x^2\} dx \\
 &= \int_{-1}^0 (-2x^2-2x) dx \\
 &= \left[-\frac{2}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$



15-1 ㉮ 9

곡선 $y=-x^2$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 곡선의 식은

$$-y=-(x)^2 \quad \therefore y=x^2$$

이 곡선을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 곡선의 식은

$$y+5=(x-1)^2 \quad \therefore y=(x-1)^2-5=x^2-2x-4$$

즉 $f(x)=x^2-2x-4$ 이므로 두 곡선

$y=x^2, y=f(x)$ 의 교점의 x 좌표는

$$-x^2=x^2-2x-4 \text{에서}$$

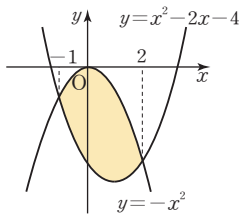
$$x^2-x-2=0, (x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

이때 $-1 \leq x \leq 2$ 에서

$-x^2 \geq x^2-2x-4$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^2 \{-x^2 - (x^2-2x-4)\} dx \\
 &= \int_{-1}^2 (-2x^2+2x+4) dx \\
 &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right]_{-1}^2 \\
 &= 9
 \end{aligned}$$



16 ㉮ ④

$f(x)=x^3-4x$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-4$

$$\therefore f'(1)=-1$$

즉 점 $(1, -3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y+3=-(x-1) \quad \therefore y=-x-2$$

곡선 $y=x^3-4x$ 와 직선 $y=-x-2$ 의 교점의 x 좌표는

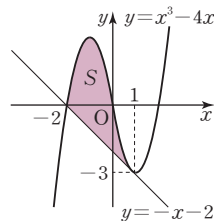
$$x^3-4x=-x-2 \text{에서 } x^3-3x+2=0$$

$$(x+2)(x-1)^2=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^1 \{(x^3-4x) - (-x-2)\} dx \\
 &= \int_{-2}^1 (x^3-3x+2) dx \\
 &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 \\
 &= \frac{27}{4}
 \end{aligned}$$

$$\therefore 4S=4 \times \frac{27}{4}=27$$



16-1 ㉮ $\frac{4}{3}$

$f(x)=x^3-x^2-x+2$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-2x-1$

$$\therefore f'(1)=0$$

즉 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 방정식은 $y=1$

곡선 $y=x^3-x^2-x+2$ 와 직선 $y=1$ 의 교점의 x 좌표는

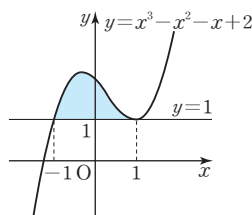
$$x^3-x^2-x+2=1 \text{에서 } x^3-x^2-x+1=0$$

$$(x+1)(x-1)^2=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이

를 S 라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^1 \{(x^3-x^2-x+2) - 1\} dx \\
 &= \int_{-1}^1 (x^3-x^2-x+1) dx \\
 &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$



17 ㉮ ③

$f(x)=x^2$ 이라 하면 $f'(x)=2x$

$$\therefore f'(a)=2a$$

즉 점 (a, a^2) 에서의 접선의 방정식은

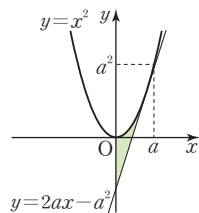
$$y-a^2=2a(x-a) \quad \therefore y=2ax-a^2$$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이를

S 라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^a \{x^2 - (2ax-a^2)\} dx \\
 &= \int_0^a (x^2-2ax+a^2) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x \right]_0^a \\
 &= \frac{1}{3}a^3
 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{1}{3}a^3=9 \text{이므로 } a^3=27 \quad \therefore a=3$$



17-1 ㉮ ②

$f(x)=-x^2+3x$ 라 하면 $f'(x)=-2x+3$

$$\therefore f'(a)=-2a+3$$

즉 점 $(a, -a^2+3a)$ 에서의 접선의 방정식은

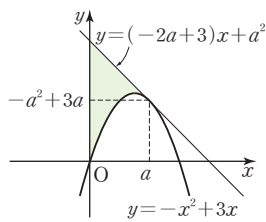
$$y - (-a^2+3a) = (-2a+3)(x-a)$$

$$\therefore y = (-2a+3)x + a^2$$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a \{(-2a+3)x + a^2 - (-x^2+3x)\} dx \\ &= \int_0^a (x^2 - 2ax + a^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x \right]_0^a \\ &= \frac{1}{3}a^3 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{1}{3}a^3 = \frac{8}{3} \text{ 이므로 } a^3 = 8 \quad \therefore a = 2$$



18 $\frac{2}{3}$

$f(x) = -x^2 + 4x - 1$ 이라 하면 $f'(x) = -2x + 4$

접점의 좌표를 $(t, -t^2 + 4t - 1)$ 이라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t) = -2t + 4$$

즉 접선의 방정식은

$$y - (-t^2 + 4t - 1) = (-2t + 4)(x - t)$$

$$\therefore y = (-2t + 4)x + t^2 - 1$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$t^2 - 1 = 0, (t+1)(t-1) = 0$$

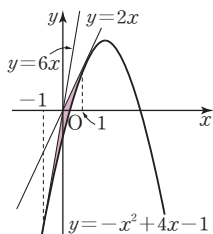
$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 1$$

이것을 ①에 각각 대입하면 접선의 방정식은

$$y = 6x, y = 2x$$

오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 \{6x - (-x^2 + 4x - 1)\} dx \\ &\quad + \int_0^1 \{2x - (-x^2 + 4x - 1)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) dx \\ &\quad + \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$



18-1 $\frac{9}{4}$

$f(x) = x^2$ 이라 하면 $f'(x) = 2x$

접점의 좌표를 (t, t^2) 이라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t) = 2t$$

즉 접선의 방정식은

$$y - t^2 = 2t(x - t) \quad \therefore y = 2tx - t^2$$

이 직선이 점 $P(\frac{1}{2}, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = t - t^2, t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t+1)(t-2) = 0 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 2$$

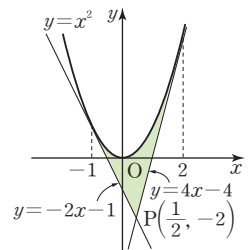
이것을 ①에 각각 대입하면 접선의 방정식은

$$y = -2x - 1, y = 4x - 4$$

오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이를

S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \{x^2 - (-2x - 1)\} dx \\ &\quad + \int_{\frac{1}{2}}^2 \{x^2 - (4x - 4)\} dx \\ &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (x^2 + 2x + 1) dx \\ &\quad + \int_{\frac{1}{2}}^2 (x^2 - 4x + 4) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right]_{\frac{1}{2}}^2 \\ &= \frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$



19 $\frac{1}{2}$

곡선 $y = x(x-k)(x-1)$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는

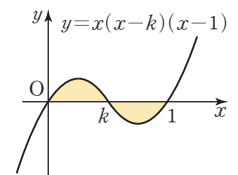
$$x(x-k)(x-1) = 0 \text{ 에서}$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = k \text{ 또는 } x = 1$$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 도형의 넓이

가 같으므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(x-k)(x-1) dx &= 0 \\ \int_0^1 \{x^3 - (k+1)x^2 + kx\} dx &= 0 \\ \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{k+1}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2 \right]_0^1 &= 0 \\ \frac{k}{6} - \frac{1}{12} &= 0 \quad \therefore k = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



19-1 2

곡선 $y = x(x-a)(x-a^2)$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는

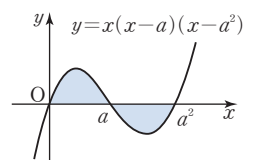
$$x(x-a)(x-a^2) = 0 \text{ 에서}$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = a \text{ 또는 } x = a^2$$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 도형의 넓이

가 같으므로

$$\begin{aligned} \int_0^a x(x-a)(x-a^2) dx &= 0 \\ \int_0^a \{x^3 - (a^2+a)x^2 + a^3x\} dx &= 0 \\ \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a^2+a}{3}x^3 + \frac{a^3}{2}x^2 \right]_0^a &= 0 \\ \frac{a^8}{4} - \frac{a^8+a^7}{3} + \frac{a^7}{2} &= 0, -\frac{a^8}{12} + \frac{a^7}{6} = 0 \\ a^7(a-2) &= 0 \quad \therefore a = 2 (\because a > 1) \end{aligned}$$



20 1

곡선 $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ 와 직선 $y = a^2x$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3 - 6x^2 + 9x = a^2x \text{ 에서 } x^3 - 6x^2 + (9-a^2)x = 0$$

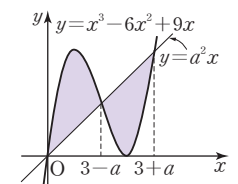
$$x\{x^2 - (3-a)x + (3+a)\} = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 3-a \text{ 또는 } x = 3+a$$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 도형의 넓이가

같으므로

$$\begin{aligned} \int_0^{3+a} \{(x^3 - 6x^2 + 9x) - a^2x\} dx &= 0 \\ \int_0^{3+a} \{x^3 - 6x^2 + (9-a^2)x\} dx &= 0 \end{aligned}$$



$$\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9-a^2}{2}x^2 \right]_0^{3+a} = 0$$

$$(3+a)^2 \left[\frac{(3+a)^2}{4} - 2(3+a) + \frac{9-a^2}{2} \right] = 0$$

$$-\frac{1}{4}(3+a)^2(a^2+2a-3)=0, (a+3)^3(a-1)=0$$

$$\therefore a=1 (\because 0 < a < 3)$$

20-1 ㉮ 4

두 곡선 $y=x^3-ax^2$, $y=2x^2-2ax$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3-ax^2=2x^2-2ax$ 에서 $x^3-(a+2)x^2+2ax=0$

$$x(x-2)(x-a)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=a$$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_0^a \{(x^3-ax^2)-(2x^2-2ax)\}dx=0$$

..... ②

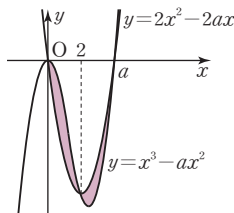
$$\int_0^a \{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+2}{3}x^3 + ax^2 \right]_0^a = 0$$

$$-\frac{a^4}{12} + \frac{a^3}{3} = 0, a^3(a-4)=0$$

$$\therefore a=4 (\because a>2)$$

..... ①



채점 기준	비율
① 주어진 두 곡선의 교점의 x 좌표를 구할 수 있다.	30%
② 주어진 두 곡선으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같은 조건을 알고 있다.	30%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	40%

21 ㉮ $\frac{1}{3}$

$$S_1=S_2 \text{ 이므로}$$

$$\int_0^1 \{(-x^2+x)-mx\}dx=0$$

$$\int_0^1 \{-x^2+(1-m)x\}dx=0$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1-m}{2}x^2 \right]_0^1 = 0$$

$$-\frac{1}{3} + \frac{1-m}{2} = 0 \quad \therefore m = \frac{1}{3}$$

21-1 ㉮ 1

$$y=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$$

므로 곡선 $y=x^2-4x+a$ 는 직선

$x=2$ 에 대하여 대칭이다.

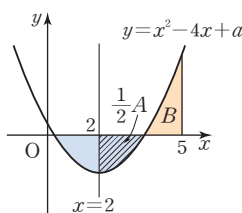
이때 A 는 직선 $x=2$ 에 의하여 이등분되므로 오른쪽 그림과 같이 넓이가 B 인 도형과 빗금 친 도형의 넓이가 같다.

$$A:B=2:1 \text{ 이므로 } A=2B$$

$$\therefore \int_2^5 (x^2-4x+a)dx=0 \text{ 이므로}$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + ax \right]_2^5 = 0$$

$$3a-3=0 \quad \therefore a=1$$



22 ㉮ $\frac{1}{2}$

곡선 $y=-x^2+x$ 와 직선 $y=mx$ 의 교점의 x 좌표는

$$-x^2+x=mx \text{ 에서 } x^2+(m-1)x=0$$

$$x(x+m-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1-m$$

곡선 $y=-x^2+x$ 와 x 축으로 둘러싸인

도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^1 (-x^2+x)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6}$$

곡선 $y=-x^2+x$ 와 직선 $y=mx$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^{1-m} \{(-x^2+x)-mx\}dx$$

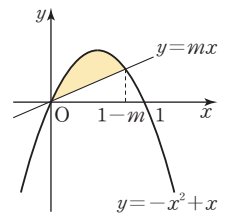
$$= \int_0^{1-m} \{-x^2+(1-m)x\}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1-m}{2}x^2 \right]_0^{1-m}$$

$$= \frac{(1-m)^3}{6}$$

$$\text{이때 } S=2S_1 \text{ 이므로 } \frac{1}{6} = \frac{(1-m)^3}{3}$$

$$\therefore (1-m)^3 = \frac{1}{2}$$



22-1 ㉮ 108

곡선 $y=-x^2+6x$ 와 직선 $y=mx$ 의 교점의 x 좌표는

$$-x^2+6x=mx \text{ 에서 } x^2+(m-6)x=0$$

$$x(x+m-6)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=6-m$$

곡선 $y=-x^2+6x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도

형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^6 (-x^2+6x)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^6$$

$$= 36$$

곡선 $y=-x^2+6x$ 와 직선 $y=mx$ 로 둘러

싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^{6-m} \{(-x^2+6x)-mx\}dx$$

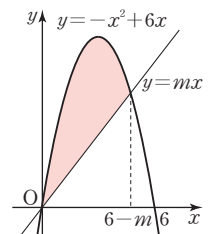
$$= \int_0^{6-m} \{-x^2+(6-m)x\}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{6-m}{2}x^2 \right]_0^{6-m}$$

$$= \frac{(6-m)^3}{6}$$

$$\text{이때 } S=2S_1 \text{ 이므로 } 36 = \frac{(6-m)^3}{3}$$

$$\therefore (6-m)^3 = 108$$



23 ㉮ 16

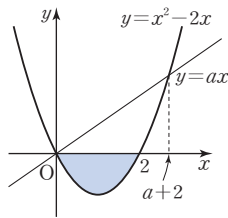
곡선 $y=x^2-2x$ 와 직선 $y=ax$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2-2x=ax \text{ 에서 } x^2-(a+2)x=0$$

$$x(x-a-2)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=a+2$$

곡선 $y=x^2-2x$ 와 직선 $y=ax$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{a+2} \{ax - (x^2 - 2x)\} dx \\ &= \int_0^{a+2} \{-x^2 + (a+2)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a+2}{2}x^2 \right]_0^{a+2} \\ &= \frac{(a+2)^3}{6} \end{aligned}$$



곡선 $y=x^2-2x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= -\int_0^2 (x^2 - 2x) dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } S=2S_1 \text{ 이므로 } \frac{(a+2)^3}{6} = \frac{8}{3}$$

$$\therefore (a+2)^3 = 16$$

23-1 ㉓ 3

곡선 $y=-x^2+5x$ 와 직선 $y=-x$ 의 교점의 x 좌표는

$$-x^2+5x=-x \text{에서 } x^2-6x=0$$

$$x(x-6)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=6$$

곡선 $y=-x^2+5x$ 와 직선 $y=-x$ 로

둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^6 \{(-x^2+5x) - (-x)\} dx \\ &= \int_0^6 (-x^2+6x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^6 \\ &= 36 \end{aligned}$$

단한구간 $[0, k]$ 에서 곡선

$y=-x^2+5x$ 와 직선 $y=-x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 이라 하면

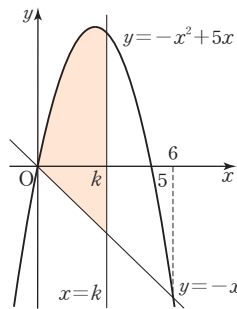
$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^k \{(-x^2+5x) - (-x)\} dx \\ &= \int_0^k (-x^2+6x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^k = -\frac{1}{3}k^3 + 3k^2 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } S_1 = \frac{1}{2}S \text{ 이므로 } -\frac{1}{3}k^3 + 3k^2 = 18$$

$$k^3 - 9k^2 + 54 = 0, (k-3)(k^2 - 6k - 18) = 0$$

$$\therefore k=3 \text{ 또는 } k=3-3\sqrt{3} \text{ 또는 } k=3+3\sqrt{3}$$

$$\therefore k=3 (\because 0 < k < 6)$$



24 ㉓ $\frac{3}{4}$

두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(-x^4+x) - (x^4-x^3)\} dx \\ &= \int_0^1 (-2x^4+x^3+x) dx \\ &= \left[-\frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{7}{20} \end{aligned}$$

..... ①

두 곡선 $y=ax(1-x)$, $y=-x^4+x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 \{(-x^4+x) - ax(1-x)\} dx \\ &= \int_0^1 \{-x^4+ax^2+(1-a)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{a}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{10} - \frac{a}{6} \end{aligned}$$

..... ②

$$\text{이때 } S=2S_1 \text{ 이므로 } \frac{7}{20} = \frac{3}{5} - \frac{a}{3}$$

$$\therefore a = \frac{3}{4}$$

..... ③

채점 기준	비율
① 두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	40%
② 두 곡선 $y=ax(1-x)$, $y=-x^4+x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20%

24-1 ㉓ 4

두 곡선 $y=f(x)$, $y=3x^2$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^1 \{f(x) - 3x^2\} dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_{-1}^1 3x^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) dx - \left[x^3 \right]_{-1}^1 \\ &= \int_{-1}^1 f(x) dx - 2 \end{aligned}$$

두 곡선 $y=3x^2$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-1}^1 \{3x^2 - g(x)\} dx \\ &= \int_{-1}^1 3x^2 dx - \int_{-1}^1 g(x) dx \\ &= \left[x^3 \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 g(x) dx \\ &= 2 (\because \int_{-1}^1 g(x) dx = 0) \end{aligned}$$

$$\text{이때 } S_1=S_2 \text{ 이므로 } \int_{-1}^1 f(x) dx - 2 = 2$$

$$\therefore \int_{-1}^1 f(x) dx = 4$$

25 ㉓ 4

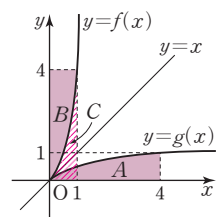
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

이때 $f(0)=0$, $f(1)=4$ 이므로 $g(0)=0$, $g(4)=1$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 오

른쪽 그림과 같고 $A=B$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx + \int_0^4 g(x) dx &= C + A \\ &= C + B \\ &= 1 \times 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$



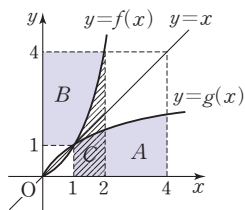
25-1 ㉓ 7

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

이때 $f(1)=1$, $f(2)=4$ 이므로 $g(1)=1$, $g(4)=2$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는
오른쪽 그림과 같고 $A=B$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x)dx + \int_1^4 g(x)dx \\&= C+A \\&= C+B \\&= 2 \times 4 - 1 \times 1 \\&= 7\end{aligned}$$



26 ㉡ 16

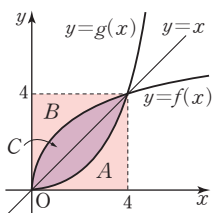
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

이때 $f(0)=0$, $f(4)=4$ 이므로

$$g(0)=0, g(4)=4$$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는
오른쪽 그림과 같고 $A=B$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^4 f(x)dx + \int_0^4 g(x)dx \\&= (A+C) + A \\&= (A+C) + B \\&= 4 \times 4 \\&= 16\end{aligned}$$



26-1 ㉡ 1

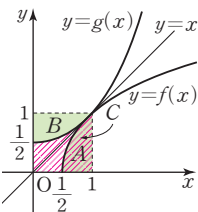
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

이때 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, $f(1)=1$ 이므로

$$g(0)=\frac{1}{2}, g(1)=1$$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는
오른쪽 그림과 같고 $A=B$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx &= A+C \\&= B+C \\&= 1 \times 1 \\&= 1\end{aligned}$$



27 ㉡ 15

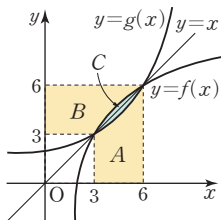
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

이때 $f(3)=3$, $f(6)=6$ 이므로

$$g(3)=3, g(6)=6$$

오른쪽 그림에서 $A=B$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_3^6 f(x)dx &= A+C \\&= 6 \times 6 - 3 \times 3 - B \\&= 27 - B \\&= 27 - A \\&= 27 - \int_3^6 g(x)dx \\&= 27 - 12 \\&= 15\end{aligned}$$



27-1 ㉡ 13

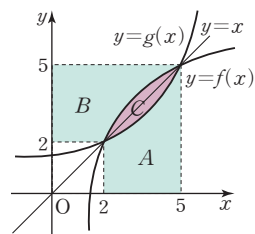
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

이때 $f(2)=2$, $f(5)=5$ 이므로

$$g(2)=2, g(5)=5$$

오른쪽 그림에서 $A=B$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_2^5 f(x)dx &= A+C \\&= 5 \times 5 - 2 \times 2 - B \\&= 21 - B \\&= 21 - A \\&= 21 - \int_2^5 g(x)dx \\&= 21 - 8 \\&= 13\end{aligned}$$



28 ㉡ 39

시각 $t=1$ 에서 $t=4$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^4 (8t - t^2)dt = \left[4t^2 - \frac{1}{3}t^3 \right]_1^4 = 39$$

28-1 ㉡ 2

시각 $t=0$ 에서의 점 P의 위치가 -2 이므로 시각 $t=2$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned}-2 + \int_0^2 (4 - 2t)dt &= -2 + \left[4t - t^2 \right]_0^2 \\&= -2 + 4 = 2\end{aligned}$$

29 ㉡ 2

물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$$v(t)=0 \text{에서 } 29.4 - 9.8t = 0 \quad \therefore t=3$$

따라서 $t=3$ 일 때 최고 높이에 도달하므로 구하는 높이는

$$\begin{aligned}30 + \int_0^3 (29.4 - 9.8t)dt &= 30 + \left[29.4t - 4.9t^2 \right]_0^3 \\&= 30 + 44.1 \\&= 74.1 \text{ (m)}\end{aligned}$$

29-1 ㉡ 3

물체가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$v(t)=0 \text{에서 } 20a - 10t = 0$$

$$\therefore t=2a$$

$t=2a$ 일 때 지면으로부터의 물체의 높이가 45 m이므로

$$0 + \int_0^{2a} (20a - 10t)dt = 45, \left[20at - 5t^2 \right]_0^{2a} = 45$$

$$20a^2 = 45, a^2 = \frac{9}{4} \quad \therefore a = \frac{3}{2} (\because a > 0)$$

$$\therefore 10a = 10 \times \frac{3}{2} = 15$$

30 ㉡ 5

시각 $t=0$ 에서의 점 P의 위치가 1이므로 시각 $t=5$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned}1 + \int_0^5 v(t)dt &= 1 + \int_0^2 (-3t^2 + 6t)dt + \int_2^5 (t^2 - 6t + 8)dt \\&= 1 + \left[-t^3 + 3t^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t \right]_2^5 \\&= 1 + 4 + 0 \\&= 5\end{aligned}$$

30-1 ㉡ 5

열기구가 출발한 지 20분 후 지면으로부터의 높이는

$$\begin{aligned}
 100 + \int_0^{20} v(t) dt &= 100 + \int_0^{10} 2t dt + \int_{10}^{20} (60 - 4t) dt \\
 &= 100 + \left[t^2 \right]_0^{10} + \left[60t - 2t^2 \right]_{10}^{20} \\
 &= 100 + 100 + 0 \\
 &= 200 \text{ (m)}
 \end{aligned}$$

31 ㉔ 6

점 P의 속도가 0일 때 운동 방향을 바꾸므로

$$v(t)=0 \text{에서 } t^2+4t-5=0$$

$$(t+5)(t-1)=0 \quad \therefore t=1 (\because t>0)$$

점 P가 출발한 후 2초 동안 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 |v(t)| dt &= \int_0^1 (-t^2-4t+5) dt + \int_1^2 (t^2+4t-5) dt \\
 &= \left[-\frac{1}{3}t^3-2t^2+5t \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}t^3+2t^2-5t \right]_1^2 \\
 &= \frac{8}{3} + \frac{10}{3} = 6
 \end{aligned}$$

31-1 ㉔ ②

시각 $t=1$ 에서 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
 \int_1^4 |v(t)| dt &= \int_1^2 t dt + \int_2^4 (-t+4) dt \\
 &= \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_1^2 + \left[-\frac{1}{2}t^2+4t \right]_2^4 \\
 &= \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

32 ㉔ 5

시각 $t=1$ 에서 점 P의 운동 방향이 바뀌므로

$$v(1)=0 \text{에서 } a-2=0 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore v(t)=2t-2$$

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 |v(t)| dt &= \int_0^1 (-2t+2) dt + \int_1^3 (2t-2) dt \\
 &= \left[-t^2+2t \right]_0^1 + \left[t^2-2t \right]_1^3 \\
 &= 1+4=5
 \end{aligned}$$

32-1 ㉔ 6

점 P의 속도가 0일 때 운동 방향을 바꾸므로

$$v(t)=0 \text{에서 } t^2-at=0$$

$$t(t-a)=0 \quad \therefore t=a (\because t>0)$$

시각 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
 \int_0^a |v(t)| dt &= \int_0^a (-t^2+at) dt \\
 &= \left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2 \right]_0^a \\
 &= \frac{1}{6}a^3
 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{1}{6}a^3=36 \text{이므로 } a^3=216$$

$$\therefore a=6$$

채점 기준	비율
① 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각을 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
② 점 P가 출발한 후 운동 방향이 바뀔 때까지 움직인 거리를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20%

33 ㉔ ②

정지할 때의 속도는 0이므로

$$v(t)=0 \text{에서 } 27-0.9t=0$$

$$\therefore t=30$$

따라서 열차가 제동을 건 지 30초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

$$\begin{aligned}
 \int_0^{30} |v(t)| dt &= \int_0^{30} (27-0.9t) dt \\
 &= \left[27t - \frac{9}{20}t^2 \right]_0^{30} \\
 &= 405 \text{ (m)}
 \end{aligned}$$

33-1 ㉔ 295 m

물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$$v(t)=0 \text{에서 } 49-9.8t=0$$

$$\therefore t=5$$

즉 물체를 쏘아 올린 지 5초 후에 최고 높이에 도달하므로 최고 높이까지 물체가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
 \int_0^5 |v(t)| dt &= \int_0^5 (49-9.8t) dt \\
 &= \left[49t - 4.9t^2 \right]_0^5 \\
 &= 122.5 \text{ (m)}
 \end{aligned}$$

따라서 물체가 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리는

$$122.5 + 122.5 + 50 = 295 \text{ (m)}$$

34 ㉔ ①

시각 $t=0$ 에서 $t=6$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
 \int_0^6 |v(t)| dt &= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^3 v(t) dt + \int_3^4 v(t) dt - \int_4^6 v(t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \\
 &= 2 + 2 + 1 + 1 \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

다른 풀이

점 P의 시각 t 에서의 속도 $v(t)$ 를 구하면

$$v(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 2) \\ 2 & (2 \leq t \leq 3) \\ -2t+8 & (3 \leq t \leq 4) \\ -\frac{1}{2}t+2 & (4 \leq t \leq 6) \end{cases}$$

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=6$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
 \int_0^6 |v(t)| dt &= \int_0^2 t dt + \int_2^3 2 dt + \int_3^4 (-2t+8) dt - \int_4^6 \left(-\frac{1}{2}t+2\right) dt \\
 &= \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_0^2 + \left[2t \right]_2^3 + \left[-t^2+8t \right]_3^4 - \left[-\frac{1}{4}t^2+2t \right]_4^6 \\
 &= 2 + 2 + 1 - (-1) = 6
 \end{aligned}$$

34-1 ㉔ ④

점 P의 속도가 0일 때 운동 방향을 바꾸므로

$$v(t)=0 \text{에서 } t=2 \text{ 또는 } t=4$$

따라서 점 P는 시각 $t=4$ 에서 두 번째로 운동 방향을 바꾸므로 시각 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^4 |v(t)| dt &= \int_0^2 v(t) dt - \int_2^4 v(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \times (1+2) \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \\ &= \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

35 ㉠ ①

시각 $t=7$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned}0 + \int_0^7 v(t) dt &= \int_0^1 v(t) dt + \int_1^5 v(t) dt + \int_5^7 v(t) dt \\ &= -\frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times (1+4) \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \\ &= -1 + 5 - 1 = 3\end{aligned}$$

35-1 ㉠ 1

$2 \leq t < 3$ 일 때 $v(t)=0$ 인 t 의 값을 구하면

$v(t)=3t-7$ 이므로

$$3t-7=0 \quad \therefore t=\frac{7}{3}$$

따라서 시각 $t=5$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned}0 + \int_0^5 v(t) dt &= \int_0^{\frac{7}{3}} v(t) dt + \int_{\frac{7}{3}}^5 v(t) dt \\ &= -\frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{7}{3}\right) \times 1 + \frac{1}{2} \times \left(5 - \frac{7}{3}\right) \times 2 \\ &= -\frac{5}{3} + \frac{8}{3} = 1\end{aligned}$$

36 ㉠ ㄷ

ㄱ. $v(t)=0$ 인 구간의 길이가 1이 되는 t 의 값의 범위가 존재하지 않으므로 점 P는 출발하고 나서 1초 동안 멈춘 적이 없다.

ㄴ. 점 P의 속도가 0일 때 운동 방향을 바꾸므로

$v(t)=0$ 에서 $t=3$ 또는 $t=5$

즉 점 P는 움직이는 동안 운동 방향을 2번 바꾼다.

ㄷ. $\int_3^5 v(t) dt = -\int_5^7 v(t) dt$ 이므로

$$\int_0^7 v(t) dt = \int_0^3 v(t) dt = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 2 = 4 > 0$$

즉 점 P는 출발하고 나서 7초 후 원점의 오른쪽에 위치한다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

36-1 ㉠ ④

ㄱ. 점 P의 속도가 0일 때 운동 방향을 바꾸므로

$v(t)=0$ 에서 $t=2$ 또는 $t=6$

즉 점 P는 움직이는 동안 운동 방향을 2번 바꾼다.

ㄴ. $\int_0^2 v(t) dt = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ 이므로 2초 후 점 P의 위치는 원점 이 아니다.

ㄷ. 점 P가 출발하고 나서 8초 동안 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^8 |v(t)| dt &= \int_0^2 v(t) dt - \int_2^6 v(t) dt + \int_6^8 v(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times (2+4) \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \\ &= 2 + 6 + 2 \\ &= 10 \text{ (m)}\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

37 ㉠ ⑤

ㄱ. 점 P의 속도가 0일 때 운동 방향을 바꾸므로

$v(t)=0$ 에서 $t=2$ 또는 $t=6$ 또는 $t=8$

즉 점 P는 움직이는 동안 운동 방향을 3번 바꾼다.

ㄴ. 시각 $t=6$ 에서 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있으므로

$$\begin{aligned}\int_0^6 v(t) dt &= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^6 v(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \frac{1}{2} \times (2+4) \times 1 \\ &= 1 - 3 = -2 \text{ (m)}\end{aligned}$$

즉 점 P가 출발 후 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있을 때의 위치는 -2 m이다.

$$\begin{aligned}\text{ㄷ. } \int_0^{\frac{7}{2}} v(t) dt &= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^{\frac{7}{2}} v(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \times 1 \\ &= 1 - 1 = 0 \text{ (m)}\end{aligned}$$

즉 점 P는 출발하고 나서 $\frac{7}{2}$ 초 후 원점에 위치한다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

37-1 ㉠ ㄷ

ㄱ. 기구는 출발 후 1초에서 3초 사이에 2m/s 의 속도로 움직인다.

ㄴ. 기구의 속도가 0일 때 운동 방향을 바꾸므로 $v(t)=0$ 에서 $t=5$

즉 기구는 움직이는 동안 운동 방향을 1번 바꾼다.

ㄷ. 시각 $t=5$ 에서 기구의 높이가 최대이므로

$$\int_0^5 v(t) dt = \frac{1}{2} \times (2+5) \times 2 = 7 \text{ (m)}$$

즉 기구가 올라간 최고 높이는 7 m이다.

ㄹ. 기구가 출발하고 나서 7초 동안 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^7 |v(t)| dt &= \int_0^5 v(t) dt - \int_5^7 v(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \times (2+5) \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \\ &= 7 + 2 = 9 \text{ (m)}\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

유형 완성하기

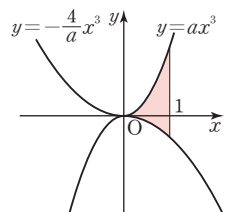
p. 238

38 ㉠ ②

두 곡선 $y=ax^3$, $y=-\frac{4}{a}x^3$ 과 직선 $x=1$

로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \left\{ ax^3 - \left(-\frac{4}{a}x^3 \right) \right\} dx \\ &= \left(a + \frac{4}{a} \right) \int_0^1 x^3 dx \\ &= \left(a + \frac{4}{a} \right) \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{a}{4} + \frac{1}{a}\end{aligned}$$



이때 $\frac{a}{4} > 0, \frac{1}{a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $\frac{a}{4} + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{4} \times \frac{1}{a}} = 1$ (단, 등호는 $\frac{a}{4} = \frac{1}{a}$ 일 때 성립)
 따라서 구하는 넓이의 최소값은 1이다.

Lecture 산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0, b > 0$ 일 때

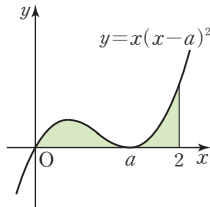
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

39 ㉡④

함수 $y = x(x-a)^2$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$x(x-a)^2 = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=a$$

이때 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이를 $S(a)$ 라 하면



$$S(a) = \int_0^2 x(x-a)^2 dx$$

$$= \int_0^2 (x^3 - 2ax^2 + a^2x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2a}{3}x^3 + \frac{a^2}{2}x^2 \right]_0^2$$

$$= 2a^2 - \frac{16}{3}a + 4$$

$$= 2\left(a - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{4}{9}$$

따라서 $S(a)$ 는 $a = \frac{4}{3}$ 일 때 최소이고, 최소값은 $\frac{4}{9}$ 이다.

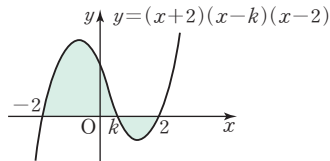
40 ㉡8

곡선

$$y = (x+2)(x-k)(x-2)$$

($-2 < k < 2$)와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(k)$

라 하면 오른쪽 그림에서



$S(k)$

$$= \int_{-2}^k (x+2)(x-k)(x-2) dx - \int_k^2 (x+2)(x-k)(x-2) dx$$

$$= \int_{-2}^k (x^3 - kx^2 - 4x + 4k) dx - \int_k^2 (x^3 - kx^2 - 4x + 4k) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{k}{3}x^3 - 2x^2 + 4kx \right]_{-2}^k - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{k}{3}x^3 - 2x^2 + 4kx \right]_k^2$$

$$= -\frac{1}{6}k^4 + 4k^2 + 8$$

$$\therefore S'(k) = -\frac{2}{3}k^3 + 8k = -\frac{2}{3}k(k^2 - 12)$$

$$S'(k) = 0 \text{에서 } k = 0 \quad (\because -2 < k < 2)$$

함수 $S(k)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	-2	...	0	...	2
$S'(k)$		-	0	+	
$S(k)$		\	8 극소	/	

즉 $S(k)$ 는 $k=0$ 일 때 최소이고, 최소값은 $S(0)=8$

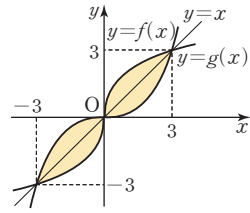
41 ㉡9

두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y = \frac{1}{9}x^3$ 과 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{9}x^3 = x \text{에서 } x^3 - 9x = 0, x(x+3)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$



따라서 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = 2 \left[\int_{-3}^0 \left(\frac{1}{9}x^3 - x \right) dx + \int_0^3 \left(x - \frac{1}{9}x^3 \right) dx \right]$$

$$= 2 \left[\left[\frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-3}^0 + 2 \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{36}x^4 \right]_0^3 \right]$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 9$$

42 ㉡2

오른쪽 그림과 같이 구하는 넓이는 직선

$y=x$ 에 의하여 이등분되고 빗금 친 부분

의 넓이는

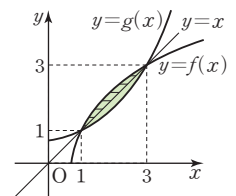
$$\int_1^3 f(x) dx - \frac{1}{2} \times (1+3) \times 2$$

$$= 5 - 4$$

$$= 1$$

따라서 구하는 넓이는 빗금 친 부분의 넓이의 2배이므로

$$2 \times 1 = 2$$



다른 풀이

$$\int_1^3 |f(x) - g(x)| dx = 2 \int_1^3 |x - f(x)| dx$$

$$= 2 \int_1^3 \{f(x) - x\} dx$$

$$= 2 \int_1^3 f(x) dx - 2 \int_1^3 x dx$$

$$= 2 \times 5 - 2 \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^3$$

$$= 10 - 8$$

$$= 2$$

43 ㉡1/6

두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌

표는

$$x^3 + x^2 + x = x \text{에서 } x^3 + x^2 = 0$$

$$x^2(x+1) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 0$$

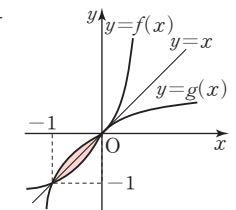
따라서 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = 2 \int_{-1}^0 \{(x^3 + x^2 + x) - x\} dx$$

$$= 2 \int_{-1}^0 (x^3 + x^2) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^0$$

$$= 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$



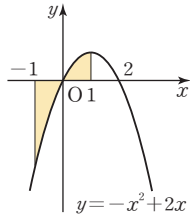
01 ㉔ ②

곡선 $y = -x^2 + 2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $-x^2 + 2x = 0$ 에서 $x(x-2) = 0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

이때 $-1 \leq x \leq 0$ 에서 $y \leq 0$, $0 \leq x \leq 1$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-1}^0 (-x^2 + 2x)dx + \int_0^1 (-x^2 + 2x)dx \\ &= -\left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2 \end{aligned}$$



02 ㉔ ③

$f'(x) = ax(x-2)$ ($a > 0$)라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx = \int ax(x-2)dx \\ &= \int (ax^2 - 2ax)dx \\ &= \frac{a}{3}x^3 - ax^2 + C \end{aligned}$$

$f(0) = 0$ 에서 $C = 0$

$f(1) = -2$ 에서 $\frac{a}{3} - a + C = -2$

$$\frac{2}{3}a = 2 \quad \therefore a = 3$$

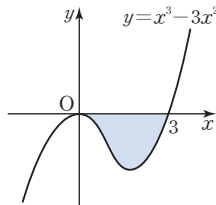
$$\therefore f(x) = x^3 - 3x^2$$

곡선 $y = x^3 - 3x^2$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^3 - 3x^2 = 0$ 에서 $x^2(x-3) = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = 3$

이때 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= -\int_0^3 (x^3 - 3x^2)dx \\ &= -\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3\right]_0^3 \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$



03 ㉔ $\frac{2}{3}$

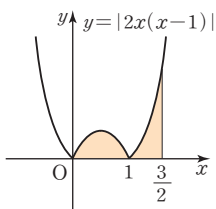
$$y = |2x(x-1)| = \begin{cases} 2x^2 - 2x & (x < 0 \text{ 또는 } x > 1) \\ -2x^2 + 2x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

곡선 $y = |2x(x-1)|$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는

$2x(x-1) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 1$

오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (-2x^2 + 2x)dx + \int_1^{\frac{3}{2}} (2x^2 - 2x)dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^3 - x^2\right]_1^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$



04 ㉔ ②

$$f(|x|) = |x|^2 - 4|x| - 5 = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 & (x \geq 0) \\ x^2 + 4x - 5 & (x < 0) \end{cases}$$

곡선 $y = f(|x|)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

(i) $x \geq 0$ 일 때

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \text{에서 } (x+1)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = 5 \quad (\because x \geq 0)$$

(ii) $x < 0$ 일 때

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \text{에서 } (x+5)(x-1) = 0$$

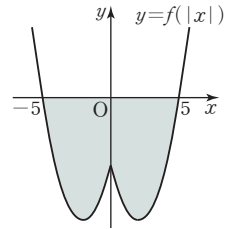
$$\therefore x = -5 \quad (\because x < 0)$$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이가 S

이므로

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-5}^0 (x^2 + 4x - 5)dx - \int_0^5 (x^2 - 4x - 5)dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x\right]_{-5}^0 - \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x\right]_0^5 \\ &= -\left(-\frac{100}{3}\right) - \left(-\frac{100}{3}\right) \\ &= \frac{200}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore 3S = 3 \times \frac{200}{3} = 200$$



05 ㉔ ①

곡선 $y = x^2 - 5x + 5$ 와 직선 $y = x + 5$

의 교점의 x 좌표는

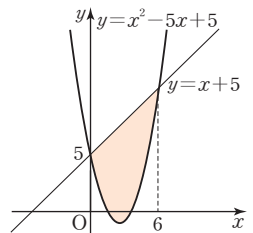
$$x^2 - 5x + 5 = x + 5 \text{에서 } x^2 - 6x = 0$$

$$x(x-6) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 6$$

이때 $0 \leq x \leq 6$ 에서 $x^2 - 5x + 5 \leq x + 5$

이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^6 \{(x+5) - (x^2 - 5x + 5)\}dx \\ &= \int_0^6 (-x^2 + 6x)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^6 \\ &= 36 \end{aligned}$$



06 ㉔ 32

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면 방정식 $h(x) = 0$, 즉 $f(x) = g(x)$ 의

해가 $x = 0$ 또는 $x = 3$ 또는 $x = 4$ 이고 $h(x)$ 는 삼차함수이므로

$h(x) = ax(x-3)(x-4)$ ($a \neq 0$)라 하자.

주어진 그림에서 색칠한 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \{f(x) - g(x)\}dx \\ &= \int_0^3 h(x)dx \\ &= \int_0^3 ax(x-3)(x-4)dx \\ &= a \int_0^3 (x^3 - 7x^2 + 12x)dx \\ &= a \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 6x^2\right]_0^3 \\ &= \frac{45}{4}a \end{aligned}$$

$$\approx \frac{45}{4}a=90 \text{이므로 } a=8$$

따라서 $h(x)=f(x)-g(x)=8x(x-3)(x-4)$ 이므로
 $f(2)-g(2)=8 \times 2 \times (-1) \times (-2)=32$

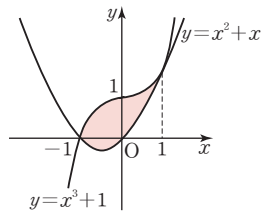
07 ㉔ ②

두 곡선 $y=x^3+1$, $y=x^2+x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} x^3+1 &= x^2+x \text{에서} \\ x^3-x^2-x+1 &= 0 \\ (x+1)(x-1)^2 &= 0 \\ \therefore x &= -1 \text{ 또는 } x=1 \end{aligned}$$

이때 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $x^3+1 \geq x^2+x$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \{(x^3+1)-(x^2+x)\}dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^3-x^2-x+1)dx \\ &= 2 \int_0^1 (-x^2+1)dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3+x \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$



Lecture 우함수와 기함수의 정적분

닫힌구간 $[-a, a]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여

(1) $-a \leq x \leq a$ 인 모든 실수 x 에서 $f(-x)=f(x)$ 를 만족시키면

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

(2) $-a \leq x \leq a$ 인 모든 실수 x 에서 $f(-x)=-f(x)$ 를 만족시키면

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

08 ㉔ 1

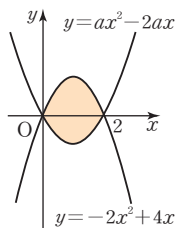
두 곡선 $y=-2x^2+4x$, $y=ax^2-2ax$ 의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} -2x^2+4x &= ax^2-2ax \text{에서} \\ (a+2)x^2-2(a+2)x &= 0 \\ (a+2)x(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= 0 \text{ 또는 } x=2 \end{aligned}$$

이때 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $-2x^2+4x \geq ax^2-2ax$ 이므로 색칠한 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{(-2x^2+4x)-(ax^2-2ax)\}dx \\ &= \int_0^2 \{-(a+2)x^2+2(a+2)x\}dx \\ &= \left[-\frac{a+2}{3}x^3+(a+2)x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{3}a + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\approx \frac{4}{3}a + \frac{8}{3} = 4 \text{이므로 } a=1$$



09 ㉔ ⑤

$f(x)=x^3-2x^2-6x+9$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-4x-6$$

$$\therefore f'(2)=12-8-6=-2$$

이때 $f(2)=8-8-12+9=-3$ 이므로 점 $(2, -3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y+3=-2(x-2) \quad \therefore y=-2x+1$$

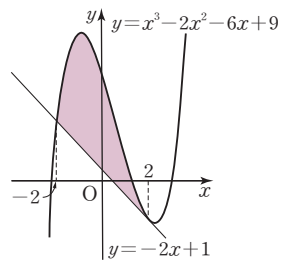
곡선 $y=x^3-2x^2-6x+9$ 와 직선 $y=-2x+1$ 의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} x^3-2x^2-6x+9 &= -2x+1 \text{에서} \\ x^3-2x^2-4x+8 &= 0 \\ (x+2)(x-2)^2 &= 0 \\ \therefore x &= -2 \text{ 또는 } x=2 \end{aligned}$$

이때 $-2 \leq x \leq 2$ 에서

$x^3-2x^2-6x+9 \geq -2x+1$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 \{(x^3-2x^2-6x+9)-(-2x+1)\}dx \\ &= \int_{-2}^2 (x^3-2x^2-4x+8)dx \\ &= 2 \int_0^2 (-2x^2+8)dx \\ &= 2 \left[-\frac{2}{3}x^3+8x \right]_0^2 \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$



10 ㉔ ②

주어진 그림에서 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x-a)(x-1)dx &= 0 \\ \int_0^1 \{x^2-(a+1)x+a\}dx &= 0 \\ \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a+1}{2}x^2+ax \right]_0^1 &= 0 \\ \frac{a}{2}-\frac{1}{6} &= 0 \quad \therefore a=\frac{1}{3} \\ \therefore 6a &= 6 \times \frac{1}{3} = 2 \end{aligned}$$

11 ㉔ 17/4

$y=-(x+1)^3+8$ 에서 $y=-x^3-3x^2-3x+7$

주어진 그림에서 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{(-x^3-3x^2-3x+7)-k\}dx &= 0 \\ \left[-\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{3}{2}x^2+(7-k)x \right]_0^1 &= 0 \\ \frac{17}{4}-k &= 0 \quad \therefore k=\frac{17}{4} \end{aligned}$$

12 ㉔ ③

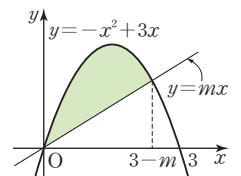
곡선 $y=-x^2+3x$ 와 직선 $y=mx$ 의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} -x^2+3x &= mx \text{에서} \\ x^2+(m-3)x &= 0 \\ x(x+m-3) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=3-m$$

곡선 $y=-x^2+3x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 (-x^2+3x)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$



곡선 $y = -x^2 + 3x$ 와 직선 $y = mx$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{3-m} \{(-x^2 + 3x) - mx\} dx \\ &= \int_0^{3-m} \{-x^2 + (3-m)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3-m}{2}x^2 \right]_0^{3-m} \\ &= \frac{(3-m)^3}{6} \end{aligned}$$

이때 $S = 2S_1$ 이므로 $\frac{9}{2} = \frac{(3-m)^3}{3}$
 $\therefore (3-m)^3 = \frac{27}{2}$

13 ㉡-8

곡선 $y = -x^2 + 2x$ 와 직선 $y = ax$ 의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x &= ax \text{에서 } x^2 + (a-2)x = 0 \\ x(x+a-2) &= 0 \\ \therefore x &= 0 \text{ 또는 } x = 2-a \end{aligned}$$

곡선 $y = -x^2 + 2x$ 와 직선 $y = ax$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2-a} \{(-x^2 + 2x) - ax\} dx \\ &= \int_0^{2-a} \{-x^2 + (2-a)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{2-a}{2}x^2 \right]_0^{2-a} \\ &= \frac{(2-a)^3}{6} \end{aligned}$$

곡선 $y = -x^2 + 2x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

이때 $S = 2S_1$ 이므로 $\frac{(2-a)^3}{6} = \frac{8}{3}$

$$\begin{aligned} (a-2)^3 &= -16, a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = -16 \\ \therefore a^3 - 6a^2 + 12a &= -8 \end{aligned}$$

14 ㉡②

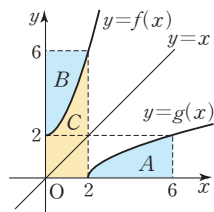
두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

이때 $f(0) = 2, f(2) = 6$ 이므로

$$g(2) = 0, g(6) = 2$$

따라서 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 는 오른쪽 그림과 같고 $A = B$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx + \int_2^6 g(x) dx &= C + A \\ &= C + B \\ &= 2 \times 6 \\ &= 12 \end{aligned}$$



15 ㉡④

점 P의 속도가 0일 때 운동 방향을 바꾸므로

$$v(t) = 0 \text{에서 } 12 - 4t = 0 \quad \therefore t = 3$$

따라서 시각 $t = 3$ 에서의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^3 (12 - 4t) dt = \left[12t - 2t^2 \right]_0^3 = 18$$

16 ㉡⑤

모형 로켓이 5초 후에 200 m 상공에 도달하려면

$$0 + \int_0^5 v(t) dt = 200$$

즉

$$\begin{aligned} \int_0^5 v(t) dt &= \int_0^5 (v_0 - 10t) dt = \left[v_0 t - 5t^2 \right]_0^5 \\ &= 5v_0 - 125 = 200 \end{aligned}$$

이므로 $v_0 = 65$ (m/s)

17 ㉡20

점 P의 시각 t 에서의 속도를 $v(t)$ 라 하면

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -6t^2 + 6t + 12$$

점 P의 속도가 0일 때 운동 방향을 바꾸므로

$$v(t) = 0 \text{에서 } -6t^2 + 6t + 12 = 0$$

$$-6(t+1)(t-2) = 0 \quad \therefore t = 2 (\because t > 0)$$

따라서 점 P는 시각 $t = 2$ 에서 운동 방향을 바꾸므로 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^2 |v(t)| dt &= \int_0^2 |-6t^2 + 6t + 12| dt \\ &= \int_0^2 (-6t^2 + 6t + 12) dt \\ &= \left[-2t^3 + 3t^2 + 12t \right]_0^2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

18 ㉡④

$$\begin{aligned} \neg. \int_0^4 v(t) dt &= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^4 v(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \\ &= 2 - 2 = 0 \text{ (m)} \end{aligned}$$

즉 점 P는 4초 후 원점에 위치한다.

ㄴ. 시각 $t = 6$ 에서 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있으므로

$$\begin{aligned} \int_0^6 v(t) dt &= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^6 v(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times (1+4) \times 2 \\ &= 2 - 5 = -3 \end{aligned}$$

즉 점 P가 출발한 후 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있을 때의 위치는 -3 m이다.

ㄷ. ㄱ에서 $\int_0^4 v(t) dt = 0$ 이므로 시각 $t = 4$ 일 때 점 P는 원점을 지난다.

즉 점 P가 움직이는 동안 원점을 다시 지나는 순간은 1회 있다. 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

19 ㉡③

곡선 $y = ax^2 - a^2x$ 와 직선 $y = 2x$ 의 교점의 x 좌표는

$$ax^2 - a^2x = 2x \text{에서 } ax^2 - (a^2 + 2)x = 0$$

$$x(ax - a^2 - 2) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{a^2 + 2}{a}$$

이때 $0 \leq x \leq \frac{a^2+2}{a}$ 에서 $ax^2 - a^2x \leq 2x$

이므로

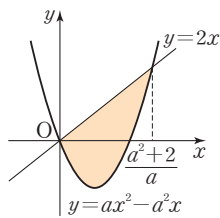
$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^{\frac{a^2+2}{a}} \{2x - (ax^2 - a^2x)\} dx \\ &= \int_0^{\frac{a^2+2}{a}} \{-ax^2 + (a^2+2)x\} dx \\ &= \left[-\frac{a}{3}x^3 + \frac{a^2+2}{2}x^2 \right]_0^{\frac{a^2+2}{a}} \\ &= \frac{(a^2+2)^3}{6a^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{S(a)}{a} = \frac{(a^2+2)^3}{6a^3} = \frac{1}{6} \left(a + \frac{2}{a} \right)^3$$

이때 $a > 0$, $\frac{2}{a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{S(a)}{a} &= \frac{1}{6} \left(a + \frac{2}{a} \right)^3 \\ &\geq \frac{1}{6} \left(2\sqrt{a \times \frac{2}{a}} \right)^3 \\ &= \frac{1}{6} \times (2\sqrt{2})^3 \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3} \quad (\text{단, 등호는 } a = \frac{2}{a} \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 $\frac{S(a)}{a}$ 의 최솟값은 $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ 이다.



20 ㉮ 2/3

$f(x) = -x^2 + 4$ 라 하면 $f'(x) = -2x$

$$\therefore f'(t) = -2t$$

즉 점 $(t, -t^2 + 4)$ 에서의 접선의 방정식은

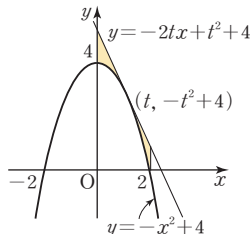
$$y - (-t^2 + 4) = -2t(x - t)$$

$$\therefore y = -2tx + t^2 + 4$$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^2 \{(-2tx + t^2 + 4) - (-x^2 + 4)\} dx \\ &= \int_0^2 (x^2 - 2tx + t^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + t^2x \right]_0^2 \\ &= 2t^2 - 4t + \frac{8}{3} \\ &= 2(t-1)^2 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

따라서 도형의 넓이 $S(t)$ 는 $t=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $\frac{2}{3}$ 이다.



21 ㉮ 11

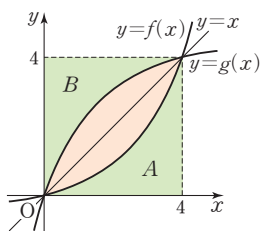
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

오른쪽 그림에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 6이고 $A=B$ 이므로

$$A+B+6=4 \times 4=16$$

$$2A=10 \quad \therefore A=5$$

$$\therefore \int_0^4 g(x) dx = 6 + A = 6 + 5 = 11$$



서술형 1 ㉮ 23/4

$f(x) = -x^3 + 3x + 1$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$	3 극대	$\searrow$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 일 때 극소이고, 극솟값은 $f(-1) = -1$

$$\therefore m = -1$$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=m$,

즉 $y = -1$ 의 교점의 x 좌표는

$$-x^3 + 3x + 1 = -1 \text{에서}$$

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$(x+1)^2(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

이때 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $-x^3 + 3x + 1 \geq -1$ 이므로

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \{(-x^3 + 3x + 1) - (-1)\} dx \\ &= \int_{-1}^2 (-x^3 + 3x + 2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore m + S = -1 + \frac{27}{4} = \frac{23}{4}$$

채점 기준	비율
① m 의 값을 구할 수 있다.	40%
② S 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $m + S$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 2 ㉮ 8/3

$$y = x^2 + 4x + k = (x+2)^2 + k - 4$$

이므로 곡선 $y = x^2 + 4x + k$ 는 직선

$x = -2$ 에 대하여 대칭이다. ①

$$A : B = 2 : 1 \text{이므로 } A = 2B$$

이때 A 는 직선 $x = -2$ 에 의하여 이등분되므로 오른쪽 그림과 같이 넓이가 B 인 도형과 빗금 친 도형의 넓이가 같다.

$$\text{즉 } \int_{-2}^0 (x^2 + 4x + k) dx = 0 \text{이므로}$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + kx \right]_{-2}^0 = 0$$

$$2k - \frac{16}{3} = 0$$

$$\therefore k = \frac{8}{3}$$

채점 기준	비율
① 주어진 곡선이 직선 $x = -2$ 에 대하여 대칭임을 알 수 있다.	30%
② 주어진 곡선과 x 축, y 축 및 직선 $x = -2$ 로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같음을 이용하여 관계식을 세울 수 있다.	40%
③ k 의 값을 구할 수 있다.	30%

서술형 3 27/4

두 점 P, Q의 t 초 후의 위치를 각각 x_1, x_2 라 하면

$$x_1 = 0 + \int_0^t v_P(t) dt = \int_0^t (4t - 6) dt = 2t^2 - 6t$$

$$x_2 = 0 + \int_0^t v_Q(t) dt = \int_0^t (-2t + 3) dt = -t^2 + 3t \quad \dots\dots ①$$

$$x_1 = x_2 \text{에서 } 2t^2 - 6t = -t^2 + 3t$$

$$3t^2 - 9t = 0, 3t(t - 3) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = 3$$

즉 출발한 후 $t = 3$ 일 때 두 점은 다시 만난다. $\dots\dots ②$

$0 \leq t \leq 3$ 에서 두 점 사이의 거리는

$$x_2 - x_1 = -t^2 + 3t - (2t^2 - 6t)$$

$$= -3t^2 + 9t$$

$$= -3\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}$$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는 $t = \frac{3}{2}$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$\frac{27}{4} \text{이다.} \quad \dots\dots ③$$

채점 기준	비율
① 두 점 P, Q의 t 초 후의 위치 x_1, x_2 를 시간 t 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
② 출발 후 두 점 P, Q가 다시 만날 때의 시각을 구할 수 있다.	30%
③ 출발 후 다시 만날 때까지 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값을 구할 수 있다.	30%

10% 핵심 기출 문제

p. 243~244

01 ②

곡선 $y = f(x)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$f(x) = 0 \text{에서 } kx(x-2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

이때

$$\begin{aligned} (A \text{의 넓이}) - (B \text{의 넓이}) &= \int_0^2 f(x) dx - \left(-\int_2^3 f(x) dx \right) \\ &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \\ &= \int_0^3 f(x) dx \\ &= \int_0^3 kx(x-2)(x-3) dx \\ &= k \int_0^3 (x^3 - 5x^2 + 6x) dx \\ &= k \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^3 \\ &= \frac{9}{4}k \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{9}{4}k = 3 \quad \therefore k = \frac{4}{3}$$

02 14

$$g(x) = |x-1| - 1 = \begin{cases} x-2 & (x \geq 1) \\ -x & (x < 1) \end{cases}$$

두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는

(i) $x \geq 1$ 일 때

$$\frac{1}{3}x(4-x) = x-2 \text{에서 } x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0 \quad \therefore x = 3 (\because x \geq 1)$$

(ii) $x < 1$ 일 때

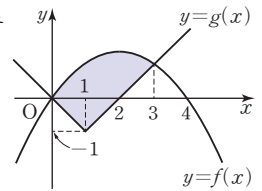
$$\frac{1}{3}x(4-x) = -x \text{에서 } x^2 - 7x = 0$$

$$x(x-7) = 0 \quad \therefore x = 0 (\because x < 1)$$

이때 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x) \geq g(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{3}x(4-x) - (-x) \right\} dx \\ &\quad + \int_1^3 \left\{ \frac{1}{3}x(4-x) - (x-2) \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x \right) dx + \int_1^3 \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{7}{6}x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + 2x \right]_1^3 \\ &= \frac{19}{18} + \frac{22}{9} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore 4S = 4 \times \frac{7}{2} = 14$$



03 ④

$x \geq 0$ 에서 곡선 $y = ax^2 + 2$ 와 직선 $y = 2x$ 가 접하므로 이차방정식 $ax^2 + 2 = 2x$ 가 중근을 갖는다.

이차방정식 $ax^2 + 2 = 2x$, 즉 $ax^2 - 2x + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 2a = 0, 1 - 2a = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

곡선 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ 와 직선 $y = 2x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{2}x^2 + 2 = 2x \text{에서 } x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0 \quad \therefore x = 2$$

따라서 두 함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ 와 $y = 2|x|$ 의 그래프가 y 축에 대하여

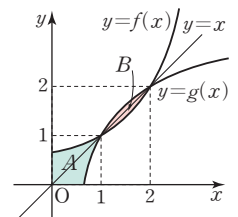
대칭이므로 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 \left\{ \left(\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) - (-2x) \right\} dx + \int_0^2 \left\{ \left(\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) - 2x \right\} dx \\ &= 2 \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \right) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x \right]_0^2 \\ &= 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

04 ④

두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선의 교점의 x 좌표는 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

즉 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 교점의 좌표는 $(1, 1), (2, 2)$ 이므로



$$f(1)=1 \text{에서 } a+b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$$f(2)=2 \text{에서 } 4a+b=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{3}, b=\frac{2}{3}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$$

또 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같다.

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^1 \{f(x) - x\} dx \\ &= 2 \int_0^1 \left\{ \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3} \right) - x \right\} dx \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^2 - x + \frac{2}{3} \right) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x \right]_0^1 \\ &= 2 \times \frac{5}{18} \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 2 \int_1^2 \{x - f(x)\} dx \\ &= 2 \int_1^2 \left\{ x - \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3} \right) \right\} dx \\ &= 2 \int_1^2 \left(-\frac{1}{3}x^2 + x - \frac{2}{3} \right) dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x \right]_1^2 \\ &= 2 \times \frac{1}{18} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\therefore A - B = \frac{5}{9} - \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

05 ㉔ ④

삼차함수 $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1이고

$$f(0)=f(a)=f(a+1)=0 \text{이므로}$$

$$f(x)=x(x-a)(x-a-1)$$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=2x$ 의 교점의 x 좌표는

$$x(x-a)(x-a-1)=2x \text{에서}$$

$$x(x-a+1)(x-a-2)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=a-1 \text{ 또는 } x=a+2$$

$a > 1$ 이고 $OP < OQ$ 이므로

$$\text{점 P의 좌표는 } (a-1, 2a-2)$$

$$\text{점 Q의 좌표는 } (a+2, 2a+4)$$

이때 $OQ=5\sqrt{5}$ 이므로 $OQ^2=125$ 에서

$$(a+2)^2 + (2a+4)^2 = 125$$

$$5(a+2)^2 = 125, (a+2)^2 = 25$$

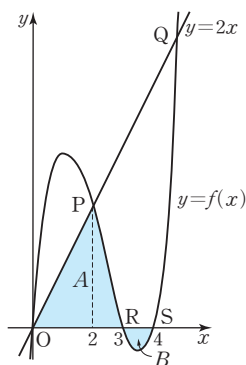
$$a+2 = \pm 5 \quad \therefore a=3 (\because a > 1)$$

즉 P(2, 4), Q(5, 10), R(3, 0), S(4, 0)이고

$$f(x)=x(x-3)(x-4)=x^3-7x^2+12x \text{이므로}$$

$$A = \int_0^2 2x dx + \int_2^3 (x^3 - 7x^2 + 12x) dx$$

$$B = - \int_3^4 (x^3 - 7x^2 + 12x) dx$$



$$\begin{aligned} \therefore A - B &= \int_0^2 2x dx + \int_2^3 (x^3 - 7x^2 + 12x) dx \\ &\quad - \left\{ - \int_3^4 (x^3 - 7x^2 + 12x) dx \right\} \\ &= \int_0^2 2x dx + \int_2^4 (x^3 - 7x^2 + 12x) dx \\ &= \left[x^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 6x^2 \right]_2^4 \\ &= 4 + \frac{4}{3} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

06 ㉔ ②

$$f(x)=x^3-6x^2+8x+1 \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2-12x+8$$

$$\therefore f'(k)=3k^2-12k+8$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $B(k, f(k))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (k^3 - 6k^2 + 8k + 1) = (3k^2 - 12k + 8)(x - k)$$

$$\therefore y = (3k^2 - 12k + 8)x - 2k^3 + 6k^2 + 1$$

이 직선이 점 A(0, 1)을 지나므로

$$1 = -2k^3 + 6k^2 + 1$$

$$k^3 - 3k^2 = 0, k^2(k - 3) = 0$$

$$\therefore k=3 (\because k > 0)$$

즉 직선 AB의 방정식은 $y = -x + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^3 \{f(x) - (-x + 1)\} dx \\ &= \int_0^3 f(x) dx - \int_0^3 (-x + 1) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^3 \{(-x + 1) - g(x)\} dx \\ &= \int_0^3 (-x + 1) dx - \int_0^3 g(x) dx \end{aligned}$$

이때 $S_1 = S_2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) dx - \int_0^3 (-x + 1) dx &= \int_0^3 (-x + 1) dx - \int_0^3 g(x) dx \\ \therefore \int_0^3 g(x) dx &= \int_0^3 f(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= - \int_0^3 f(x) dx + 2 \int_0^3 (-x + 1) dx \\ &= \int_0^3 \{-f(x) - 2x + 2\} dx \\ &= \int_0^3 (-x^3 + 6x^2 - 10x + 1) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x \right]_0^3 \\ &= -\frac{33}{4} \end{aligned}$$

07 ㉔ 18

시간 t 에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_P(t)$, $x_Q(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} x_P(t) &= 0 + \int_0^t (3t^2 - 15t + k) dt \\ &= \left[t^3 - \frac{15}{2}t^2 + kt \right]_0^t \\ &= t^3 - \frac{15}{2}t^2 + kt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_Q(t) &= 0 + \int_0^t (-3t^2 + 9t) dt \\ &= \left[-t^3 + \frac{9}{2}t^2 \right]_0^t \\ &= -t^3 + \frac{9}{2}t^2 \end{aligned}$$

두 점 P, Q가 출발한 후 한 번만 만나므로 방정식 $x_P(t) = x_Q(t)$ 는 한 개의 양의 실근을 갖는다.

$$t^3 - \frac{15}{2}t^2 + kt = -t^3 + \frac{9}{2}t^2 \text{에서 } 2t^3 - 12t^2 + kt = 0$$

$$\therefore t(2t^2 - 12t + k) = 0$$

이때 방정식 $x_P(t) = x_Q(t)$ 가 한 개의 양의 실근을 가지려면 방정식 $2t^2 - 12t + k = 0$ 이 중근을 가져야 하므로 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-6)^2 - 2 \times k = 0$$

$$36 - 2k = 0 \quad \therefore k = 18$$

08 ㉔ ②

점 P의 시각 t 에서의 위치를 $x(t)$ 라 하면

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t) dt$$

$$= \int_0^t 3(t-2)(t-a) dt$$

$$= \int_0^t \{3t^2 - 3(a+2)t + 6a\} dt$$

$$= \left[t^3 - \frac{3(a+2)}{2} t^2 + 6at \right]_0^t$$

$$= t^3 - \frac{3(a+2)}{2} t^2 + 6at$$

$$(i) v(t) = 3(t-2)(t-a) > 0$$

즉 $0 < t < 2$ 또는 $t > a$ 에서 점 P가 양의 방향으로 움직인다.

$$(ii) v(t) = 3(t-2)(t-a) < 0$$

즉 $2 < t < a$ 에서 점 P가 음의 방향으로 움직인다.

이때 $t > 0$ 에서 점 P의 위치가 0이 되는 순간이 한 번뿐이므로

$$x(a) = 0$$

$$\text{즉 } a^3 - \frac{3a^2(a+2)}{2} + 6a^2 = 0 \text{이므로}$$

$$-\frac{1}{2}a^3 + 3a^2 = 0, a^3 - 6a^2 = 0$$

$$a^2(a-6) = 0 \quad \therefore a = 6 (\because a > 2)$$

따라서 $v(t) = 3(t-2)(t-6)$ 이므로

$$v(8) = 3 \times 6 \times 2 = 36$$

09 ㉔ 80

$$f(x) = x^3 + x^2 - x \text{에서}$$

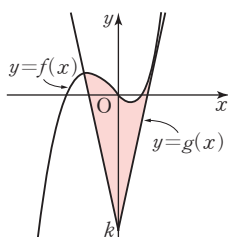
$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = \frac{1}{3}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1 극대	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$ 극소	$\nearrow$

즉 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 $x > 0$ 일 때 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 접해야 하므로 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 접점의 좌표를

$(t, t^3 + t^2 - t) (t > 0)$ 라 하면 $x > 0$ 일 때 $g(x) = 4x + k$ 이므로

$$f'(t) = 4 \text{에서 } 3t^2 + 2t - 1 = 4$$

$$3t^2 + 2t - 5 = 0, (3t+5)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = 1 (\because t > 0)$$

즉 접점의 좌표는 $(1, 1)$ 이고 이 점이 함수 $y=g(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$g(1) = 1 \text{에서 } 4 + k = 1 \quad \therefore k = -3$$

$$\therefore g(x) = 4|x| - 3$$

$x < 0$ 일 때, $g(x) = -4x - 3$ 이므로 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는

$$x^3 + x^2 - x = -4x - 3 \text{에서 } x^3 + x^2 + 3x + 3 = 0$$

$$(x+1)(x^2+3) = 0 \quad \therefore x = -1 (\because x^2+3 > 0)$$

이때 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) \geq g(x)$ 이므로

$$S = \int_{-1}^0 \{(x^3 + x^2 - x) - (-4x - 3)\} dx$$

$$+ \int_0^1 \{(x^3 + x^2 - x) - (4x - 3)\} dx$$

$$= \int_{-1}^0 (x^3 + x^2 + 3x + 3) dx + \int_0^1 (x^3 + x^2 - 5x + 3) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x \right]_0^1$$

$$= \frac{19}{12} + \frac{13}{12}$$

$$= \frac{8}{3}$$

$$\therefore 30S = 30 \times \frac{8}{3} = 80$$

10 ㉔ ③

ㄱ. $x(t) = t(t-1)(at+b) (a \neq 0)$ 에서 $x(0) = x(1) = 0$ 이고 $v(t) = x'(t)$ 이므로

$$\int_0^1 v(t) dt = \int_0^1 x'(t) dt = [x(t)]_0^1$$

$$= x(1) - x(0) = 0$$

ㄴ. $x(0) = 0$ 이므로 점 P는 원점에서 출발한다.

$$\int_0^1 |v(t)| dt = 2 \text{이고 시각 } t=1 \text{일 때 점 P가 원점에 있어야 하}$$

므로 점 P가 원점에서부터 움직인 최대 거리 $|x(t)|$ 는 1이다.

즉 $|x(t_1)| > 1$ 인 t_1 이 열린구간 $(0, 1)$ 에 존재하지 않는다.

ㄷ. $0 \leq t \leq 1$ 에서 점 P가 운동 방향을 바꿀 수 있는 횟수의 최댓값은 2, 최솟값은 1이다.

운동 방향을 1번 바꿀 경우, 점 P는 임의의 시각 t_a 일 때 1 또는 -1에 위치해야 하므로 $|x(t_a)| = 1$

이때 $0 \leq t \leq 1$ 인 모든 t 에 대하여 $|x(t)| < 1$ 이라면 점 P는 운

동 방향을 2번 바꾸는 경우이므로 $\int_0^1 |v(t)| dt = 2$ 의 조건을

만족시키기 위해서는 $x(t_2) = 0$ 인 t_2 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 존재해야 한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.