정답과 해설

Ⅰ 지수함수와 로그함수

01 지수 2쪽

02 로그 18쪽

03 지수함수 36쪽

04 로그함수 56쪽

Ⅱ 삼각함수

05 삼각함수 82쪽

06 삼각함수의 그래프 99쪽

07 사인법칙과 코사인법칙 125쪽

Ⅲ 수열

08 등차수열 145쪽

09 등비수열 163쪽

10 수열의 합 184쪽

11 수학적 귀납법 205쪽

01 지수

개념 완성하기 p.7~8

01 답 $-1, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$x^3=-1$이라 하면 $x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

02 답 $2, -1\pm\sqrt{3}i$

$x^3=8$이라 하면 $x^3-8=0$

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

03 답 $-3, \frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

$x^3=-27$이라 하면 $x^3+27=0$

$(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

04 답 $\pm2i, \pm2$

$x^4=16$이라 하면 $x^4-16=0$

$(x^2+4)(x^2-4)=0, (x^2+4)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=\pm2i$ 또는 $x=\pm2$

05 답 $\pm3i, \pm3$

$x^4=81$이라 하면 $x^4-81=0$

$(x^2+9)(x^2-9)=0, (x^2+9)(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=\pm3i$ 또는 $x=\pm3$

06 답 $\pm5i, \pm5$

$x^4=625$라 하면 $x^4-625=0$

$(x^2+25)(x^2-25)=0, (x^2+25)(x+5)(x-5)=0$

$\therefore x=\pm5i$ 또는 $x=\pm5$

07 답 ±6

$x^2=36$이라 하면 $x=\pm6$

따라서 36의 제곱근 중 실수인 것은 ±6이다.

08 답 0.6

$x^3=0.216$이라 하면 $x^3-0.216=0$

$(x-0.6)(x^2+0.6x+0.36)=0$

$\therefore x=0.6$ 또는 $x=-0.3\pm\frac{3\sqrt{3}}{10}i$

따라서 0.216의 세제곱근 중 실수인 것은 0.6이다.

09 답 $\pm\frac{3}{2}$

$x^4=\frac{81}{16}$이라 하면 $x^4-\frac{81}{16}=0$

$\left(x^2+\frac{9}{4}\right)\left(x^2-\frac{9}{4}\right)=0, \left(x^2+\frac{9}{4}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$

$\therefore x=\pm\frac{3}{2}i$ 또는 $x=\pm\frac{3}{2}$

따라서 $\frac{81}{16}$의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\frac{3}{2}$이다.

10 답 ±5

$x^4=(-5)^4$이라 하면 $x^4=625$

$x^4-625=0, (x^2+25)(x^2-25)=0$

$(x^2+25)(x+5)(x-5)=0$

$\therefore x=\pm5i$ 또는 $x=\pm5$

따라서 $(-5)^4$의 네제곱근 중 실수인 것은 ±5이다.

11 답 3

$\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

12 답 2

$\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

13 답 -5

$\sqrt[3]{-125}=\sqrt[3]{(-5)^3}=-5$

14 답 -3

$\sqrt[5]{-243}=\sqrt[5]{(-3)^5}=-3$

15 답 -2

$-\sqrt[4]{16}=-\sqrt[4]{2^4}=-2$

16 답 2

$-\sqrt[3]{(-2)^3}=-(-2)=2$

17 답 -2

$-\sqrt[6]{(-2)^6}=-\sqrt[6]{2^6}=-2$

18 답 0.2

$\sqrt[4]{0.0016}=\sqrt[4]{0.2^4}=0.2$

19 답 -0.3

$\sqrt[3]{-0.027}=\sqrt[3]{(-0.3)^3}=-0.3$

20 답 7

$\sqrt[3]{7}\times\sqrt[3]{49}=\sqrt[3]{7\times49}=\sqrt[3]{7^3}=7$

21 답 6

$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{4\times54}=\sqrt[3]{6^3}=6$

22 답 3

$\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[4]{\frac{243}{3}}=\sqrt[4]{3^4}=3$

23 답 7

$\frac{\sqrt[3]{686}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{686}{2}}=\sqrt[3]{7^3}=7$

24 답 36

$(\sqrt[5]{6})^{10}=\sqrt[5]{6^{10}}=\sqrt[5]{(6^2)^5}=6^2=36$

25 답 5

$(\sqrt[6]{25})^3=\sqrt[6]{25^3}=\sqrt[6]{(5^2)^3}=\sqrt[6]{5^6}=5$

26 답 7

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{7^{12}}}=\sqrt[12]{7^{12}}=7$

27 답 3

$\sqrt[5]{\sqrt[3]{3^{15}}}=\sqrt[15]{3^{15}}=3$

28 답 2

$\sqrt[4]{\sqrt{256}}=\sqrt[8]{2^8}=2$

29 답 3

$\sqrt[3]{\sqrt{729}}=\sqrt[6]{3^6}=3$

30 답 2

$\sqrt[4]{\sqrt[3]{81}}\times(\sqrt[6]{4})^3\div\sqrt[6]{9}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{81}}\times\sqrt[6]{4^3}\div\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^4}}\times\sqrt[6]{(2^2)^3}\div\sqrt[3]{3}$

$=\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{2^6}\div\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3}\times2\div\sqrt[3]{3}=2$

31 답 $\sqrt[24]{a}$

$\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}}\div\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}}=\dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[6]{a}}\times\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}}\times\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}}=\dfrac{\sqrt[12]{a}\times\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}\times\sqrt[8]{a}}$

$=\dfrac{\sqrt[24]{a^2}\times\sqrt[24]{a^6}}{\sqrt[24]{a^4}\times\sqrt[24]{a^3}}=\sqrt{\dfrac{a^2\times a^6}{a^4\times a^3}}$

$=\sqrt{\dfrac{a^8}{a^7}}=\sqrt[24]{a}$

32 답 $\sqrt[12]{a^5}$

$\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}}\div\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{a}}\times\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}}}=\dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[6]{a}}\times\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[12]{a}}\times\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}}=\dfrac{\sqrt[4]{a}\times\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}\times\sqrt[6]{a}}$

$=\dfrac{\sqrt[12]{a^3}\times\sqrt[12]{a^6}}{\sqrt[12]{a^2}\times\sqrt[12]{a^2}}=\sqrt{\dfrac{a^3\times a^6}{a^2\times a^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{a^9}{a^4}}=\sqrt[12]{a^5}$

33 답 $\dfrac{1}{9}$

$3^{-5}\times3^3=3^{-5+3}=3^{-2}=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$

34 답 64

$(2^{-3})^{-2}=2^{-3\times(-2)}=2^6=64$

35 답 a^7

$a^4\div(a^3)^{-1}=a^4\div a^{-3}=a^{4-(-3)}=a^7$

36 답 $a^{-4}b^6$

$(a^2b^{-3})^{-2}=a^{2\times(-2)}b^{-3\times(-2)}=a^{-4}b^6$

37 답 a^9

$a^2\div a^{-3}\times a^4=a^{2-(-3)+4}=a^9$

38 답 a^{-14}

$(a^{-3})^2\times(a^2)^{-4}=a^{-3\times2}\times a^{2\times(-4)}=a^{-6}\times a^{-8}$

$=a^{-6+(-8)}=a^{-14}$

39 답 $5^{\frac{1}{8}}$

$5^{\frac{1}{2}}\times5^{-\frac{3}{8}}=5^{\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{8}\right)}=5^{\frac{1}{8}}$

40 답 4

$2^{-\frac{2}{3}}\div2^{-\frac{8}{3}}=2^{-\frac{2}{3}-\left(-\frac{8}{3}\right)}=2^2=4$

41 답 $a^{\frac{1}{2}}$

$(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}}=a^{\frac{1}{2}}$

42 답 a^3b^2

$(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})^6=a^{\frac{1}{2}\times6}b^{\frac{1}{3}\times6}=a^3b^2$

43 답 1

$a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}\div a^{\frac{5}{6}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=a^0=1$

44 답 ab^3

$\sqrt[3]{a^5b^{10}}\div\sqrt[3]{a^2b}=a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{10}{3}}\div a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}}b^{\frac{10}{3}-\frac{1}{3}}=ab^3$

45 답 $a^{\frac{1}{6}}$

$\sqrt[6]{a^2b^3}\times\sqrt{ab}\div\sqrt[3]{a^2b^3}=a^{\frac{2}{6}}b^{\frac{3}{6}}\times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\div a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{3}}$

$=a^{\frac{2}{6}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{6}+\frac{1}{2}-\frac{3}{3}}$

$=a^{\frac{1}{6}}b^0=a^{\frac{1}{6}}$

46 답 $ab^{\frac{1}{4}}$

$\sqrt[12]{a^3b}\times\sqrt[4]{a^5b^2}\div\sqrt[6]{a^3b^2}=a^{\frac{3}{12}}b^{\frac{1}{12}}\times a^{\frac{5}{4}}b^{\frac{2}{4}}\div a^{\frac{3}{6}}b^{\frac{2}{6}}$

$=a^{\frac{3}{12}+\frac{5}{4}-\frac{3}{6}}b^{\frac{1}{12}+\frac{2}{4}-\frac{2}{6}}$

$=ab^{\frac{1}{4}}$

47 답 $2^{4\sqrt{2}}$

$2^{\sqrt{2}}\times2^{\sqrt{18}}=2^{\sqrt{2}}\times2^{3\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}=2^{4\sqrt{2}}$

48 답 $6^{2\sqrt{3}}$

$6^{\sqrt{27}}\div6^{\sqrt{3}}=6^{3\sqrt{3}}\div6^{\sqrt{3}}=6^{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}=6^{2\sqrt{3}}$

49 답 $\dfrac{1}{9}$

$(3^{\sqrt{2}})^{-\sqrt{2}}=3^{\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})}=3^{-2}=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$

50 답 $2^{\sqrt{3}}$

$4^{\sqrt{3}}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}=(2^2)^{\sqrt{3}}\times(2^{-1})^{\sqrt{3}}=2^{2\sqrt{3}}\times2^{-\sqrt{3}}=2^{2\sqrt{3}+(-\sqrt{3})}=2^{\sqrt{3}}$

51 답 2

$(2^{\sqrt{8}}\div 2^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=(2^{2\sqrt{2}}\div 2^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=(2^{2\sqrt{2}-\sqrt{2}})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=2^{\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}}=2$

52 답 $\frac{5}{3}$

$\left\{\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{5}{8}}\right\}^{-\frac{4}{5}}=\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{5}{8}\times\left(-\frac{4}{5}\right)}=\left(\frac{9}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^{2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{3}{5}\right)^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}=\frac{5}{3}$

53 답 $\frac{4}{7}$

$\left\{\left(\frac{49}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{49}{16}\right)^{-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}=\left(\frac{49}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left\{\left(\frac{7}{4}\right)^{2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{7}{4}\right)^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\left(\frac{7}{4}\right)^{-1}=\frac{4}{7}$

54 답 $\frac{4}{9}$

$\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}}\times\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{6}}=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right\}^{\frac{3}{4}}\times\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\right\}^{-\frac{1}{6}}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{2\times\frac{3}{4}}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{3\times\left(-\frac{1}{6}\right)}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$

$=\frac{4}{9}$

55 답 $\frac{1}{4}$

$16^{3}\times\left(\frac{1}{8}\right)^{3}\div 32=(2^{4})^{3}\times(2^{-3})^{3}\div 2^{5}=2^{4\times 3}\times 2^{-3\times 3}\div 2^{5}$

$=2^{12}\times 2^{-9}\div 2^{5}=2^{12+(-9)-5}$

$=2^{-2}=\frac{1}{4}$

56 답 4

$(\sqrt[3]{4})^{6}\div\sqrt[5]{32^{2}}=(\sqrt[3]{2^{2}})^{6}\div\sqrt[5]{(2^{5})^{2}}=\sqrt[3]{2^{12}}\div\sqrt[5]{2^{10}}=2^{\frac{12}{3}}\div 2^{\frac{10}{5}}$

$=2^{4}\div 2^{2}=2^{4-2}=2^{2}=4$

57 답 $\frac{1}{2}$

$2^{\frac{2}{3}}\div 8\times\sqrt[3]{4^{2}}=2^{\frac{2}{3}}\div 2^{3}\times\sqrt[3]{(2^{2})^{2}}=2^{\frac{2}{3}}\div 2^{3}\times\sqrt[3]{2^{4}}$

$=2^{\frac{2}{3}}\div 2^{3}\times 2^{\frac{4}{3}}=2^{\frac{2}{3}-3+\frac{4}{3}}$

$=2^{-1}=\frac{1}{2}$

58 답 $5^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[4]{\sqrt{625}}=\sqrt[8]{5^{4}}=5^{\frac{4}{8}}=5^{\frac{1}{2}}$

59 답 $3^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt{\sqrt[3]{81}}=\sqrt[6]{3^{4}}=3^{\frac{4}{6}}=3^{\frac{2}{3}}$

유형 완성하기 p.9~23

01 답 ③

① -8의 세제곱근을 x라 하면 $x^{3}=-8$

$x^{3}+8=0$, $(x+2)(x^{2}-2x+4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

② -7의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-7}$이다.

③ 81의 네제곱근을 x라 하면 $x^{4}=81$

$x^{4}-81=0$, $(x^{2}+9)(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=\pm 3i$ 또는 $x=\pm 3$

즉 81의 네제곱근 중 실수인 것은 ± 3이다.

④ n이 홀수일 때, -3의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{-3}$의 한 개이다.

⑤ n이 짝수일 때, 4의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{4}$, $-\sqrt[n]{4}$의 두 개이다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

01-1 답 ④

① 5의 다섯제곱근은 방정식 $x^{5}=5$의 근이므로 5개이다.

② -2의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-2}$이다.

③ -3^{6}의 세제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[3]{-3^{6}}=\sqrt[3]{-729}=\sqrt[3]{(-9)^{3}}=-9$이다.

④ n이 2 이상의 홀수일 때, n의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{n}$의 한 개이다.

⑤ n이 2 이상의 짝수일 때, $-n$의 n제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

02 답 3

$\sqrt[5]{(-5)^{5}}+\sqrt[6]{(-6)^{6}}+\sqrt[7]{(-7)^{7}}+\sqrt[8]{(-8)^{8}}$

$+\sqrt[9]{(-9)^{9}}+\sqrt[10]{(-10)^{10}}$

$=-5+6+(-7)+8+(-9)+10=3$

02-1 답 7

$\sqrt{(-2)^{2}}+\sqrt[3]{(-3)^{3}}+\sqrt[4]{(-4)^{4}}+\cdots+\sqrt[12]{(-12)^{12}}$

$=2+(-3)+4+(-5)+6+(-7)+8+(-9)$

$+10+(-11)+12$

$=-1\times 5+12=7$

03 답 20

-125의 세제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[3]{-125}=\sqrt[3]{(-5)^{3}}=-5$이므로 $a=-5$ ……❶

256의 네제곱근 중 음수인 것은

$-\sqrt[4]{256}=-\sqrt[4]{4^{4}}=-4$이므로 $b=-4$ ……❷

$\therefore ab=-5\times(-4)=20$ ……❸

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

03-1 답 ②

2^{100}의 다섯제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[5]{2^{100}}=\sqrt[5]{(2^{20})^5}=2^{20}$이므로 $x=2^{20}$

x, 즉 2^{20}의 네제곱근 중 음수인 것은

$-\sqrt[4]{2^{20}}=-\sqrt[4]{(2^5)^4}=-2^5$이므로 $y=-2^5$

따라서 y, 즉 -2^5의 세제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[3]{-2^5}=-\sqrt[3]{2^5}$

04 답 3

n이 짝수일 때, -2의 n제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로

$a=0$

8의 세제곱근은 방정식 $x^3=8$의 근이므로 3개이다.

$\therefore b=3$

$\therefore a+b=0+3=3$

04-1 답 ⑤

-64의 세제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[3]{-64}=\sqrt[3]{(-4)^3}=-4$의 1개이므로 $a=1$

16의 네제곱근 중 실수인 것은

$\pm\sqrt[4]{16}=\pm\sqrt[4]{2^4}=\pm2$의 2개이므로 $b=2$

81의 여섯제곱근은 방정식 $x^6=81$의 근이므로 6개이다.

$\therefore c=6$

$\therefore a+b+c=1+2+6=9$

05 답 4

-3의 3제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-3}$의 1개이므로

$f(3,-3)=1$ ……❶

-4의 4제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로

$f(4,-4)=0$ ……❷

5의 5제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{5}$의 1개이므로

$f(5,5)=1$ ……❸

6의 6제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[6]{6}$, $-\sqrt[6]{6}$의 2개이므로

$f(6,6)=2$ ……❹

$\therefore f(3,-3)+f(4,-4)+f(5,5)+f(6,6)$

$=1+0+1+2=4$ ……❺

채점 기준	비율
❶ $f(3,-3)$의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ $f(4,-4)$의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $f(5,5)$의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ $f(6,6)$의 값을 구할 수 있다.	20%
❺ $f(3,-3)+f(4,-4)+f(5,5)+f(6,6)$의 값을 구할 수 있다.	20%

05-1 답 18

$f(n)$은 16의 n제곱근 중 실수인 것의 개수이므로 방정식 $x^n=16$의 실근의 개수와 같다.

n이 홀수이면 $f(n)=1$이므로

$f(3)=f(5)=f(7)=f(9)=f(11)=f(13)=1$

n이 짝수이면 $f(n)=2$이므로

$f(2)=f(4)=f(6)=f(8)=f(10)=f(12)=2$

$\therefore f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(13)=1\times6+2\times6=18$

06 답 6

$B=\{4,25\}$이므로

(i) $b=4$일 때

$\sqrt[4]{-5}$, $\sqrt[4]{-2}$는 실수가 아니고 $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{5}$는 실수이다.

(ii) $b=25$일 때

$\sqrt[25]{-5}$, $\sqrt[25]{-2}$, $\sqrt[25]{2}$, $\sqrt[25]{5}$는 모두 실수이다.

(i), (ii)에서

$X=\{\sqrt[4]{2},\sqrt[4]{5},\sqrt[25]{-5},\sqrt[25]{-2},\sqrt[25]{2},\sqrt[25]{5}\}$

따라서 집합 X의 원소의 개수는 6이다.

06-1 답 8

$B=\{3,5\}$이므로 ……❶

(i) $y=3$일 때

$\sqrt[3]{-5}$, $\sqrt[3]{-3}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{5}$는 모두 실수이다.

(ii) $y=5$일 때

$\sqrt[5]{-5}$, $\sqrt[5]{-3}$, $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[5]{5}$는 모두 실수이다.

(i), (ii)에서

$X=\{\sqrt[3]{-5},\sqrt[3]{-3},\sqrt[3]{3},\sqrt[3]{5},\sqrt[5]{-5},\sqrt[5]{-3},\sqrt[5]{3},\sqrt[5]{5}\}$ ……❷

따라서 집합 X의 원소의 개수는 8이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ 집합 B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ 집합 X를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	60%
❸ 집합 X의 원소의 개수를 구할 수 있다.	10%

07 답 ⑤

① $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2^4}\times\sqrt[12]{2^3}=\sqrt[12]{2^4\times2^3}=\sqrt[12]{2^7}$

② $\sqrt[3]{-2\sqrt[3]{64}}=\sqrt[3]{-2\sqrt[3]{4^3}}=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$

③ $\sqrt[5]{\sqrt[3]{32}}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{2^5}}=\sqrt[3]{2}$

④ $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{-8}}=\frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{(-2)^3}}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}$, $-\sqrt{\frac{27}{8}}=-\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^3}=-\frac{3}{2}$

$\therefore \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{-8}}=-\sqrt{\frac{27}{8}}$

⑤ $\left(\sqrt[3]{5}\times\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^6=(\sqrt[3]{5})^6\times\frac{1}{(\sqrt{5})^6}=\{(\sqrt[3]{5})^3\}^2\times\frac{1}{\{(\sqrt{5})^2\}^3}$

$=5^2\times\frac{1}{5^3}=\frac{1}{5}$

07-1 답 ②

ㄱ. $\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2\times8}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

ㄴ. $\sqrt[6]{625}\times\sqrt[6]{5}=\sqrt[6]{5^4\times5}=\sqrt[6]{5^5}$

ㄷ. $(\sqrt[8]{9})^4=\sqrt[8]{9^4}=\sqrt[8]{(3^2)^4}=\sqrt[8]{3^8}=3$

ㄹ. $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{2^6}=2$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

08 답 (1) 6 (2) 7 (3) 3

(1) $(\sqrt[4]{4})^2+\sqrt[5]{32^3}\times\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}}=\sqrt[4]{4^2}+\sqrt[5]{(2^5)^3}\times\sqrt[3]{\frac{2}{16}}$

$=\sqrt[4]{(2^2)^2}+\sqrt[5]{(2^3)^5}\times\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$

$=\sqrt[4]{2^4}+2^3\times\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$

$=2+2^3\times\frac{1}{2}$

$=2+2^2=6$

(2) $\sqrt[4]{3}\times\sqrt{\sqrt{27}}+\dfrac{(\sqrt[3]{16})^2}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{3^3}+\dfrac{\sqrt[3]{2^8}}{\sqrt[3]{2^2}}$

$=\sqrt[4]{3\times3^3}+\sqrt[3]{\dfrac{2^8}{2^2}}$

$=\sqrt[4]{3^4}+\sqrt[3]{2^6}$

$=3+\sqrt[3]{(2^2)^3}$

$=3+2^2=7$

(3) $\dfrac{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}=\dfrac{(\sqrt[3]{2}+1)\{(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}\times1+1^2\}}{(\sqrt[3]{2}-1)\{(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}\times1+1^2\}}$

$=\dfrac{(\sqrt[3]{2})^3+1}{(\sqrt[3]{2})^3-1}=\dfrac{2+1}{2-1}=3$

08-1 답 (1) 42 (2) 21 (3) $\sqrt[3]{25}$

(1) $\sqrt[4]{36^2}+(\sqrt[3]{6})^3+\sqrt[3]{6^6}-\sqrt[4]{(-6)^4}$

$=\sqrt[4]{(6^2)^2}+\sqrt[3]{6^3}+\sqrt[3]{(6^2)^3}-\sqrt[4]{6^4}$

$=6+6+6^2-6$

$=42$

(2) $\sqrt[3]{3^4}\div\sqrt[3]{3}\times(\sqrt[3]{7})^3=\sqrt[3]{\dfrac{3^4}{3}}\times\sqrt[3]{7^3}$

$=\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[3]{7^3}$

$=3\times7$

$=21$

(3) $\sqrt[3]{3\sqrt{5}}\times\sqrt[6]{\dfrac{125}{9}}=\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{5}\times\dfrac{\sqrt[6]{5^3}}{\sqrt[6]{3^2}}$

$=\sqrt[6]{3^2}\times\sqrt[6]{5}\times\dfrac{\sqrt[6]{5^3}}{\sqrt[6]{3^2}}$

$=\sqrt[6]{5^4}=\sqrt[3]{25}$

09 답 ②

$\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2^5}}}\times\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt[6]{3}}}=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}}{\sqrt[3]{\sqrt{2^5}}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{3}}=\dfrac{\sqrt[12]{3}}{\sqrt[6]{2^5}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[12]{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2^5}}=\dfrac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2^5}}=\dfrac{1}{\sqrt[6]{2^2}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$\therefore m=3$

09-1 답 ⑤

$\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt[4]{4}}}}{\sqrt[12]{12}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt[6]{3}\times\sqrt[24]{4}}{\sqrt[12]{12}}=\dfrac{\sqrt[12]{2^6}\times\sqrt[12]{3^2}\times\sqrt[12]{2}}{\sqrt[12]{12}}$

$=\dfrac{\sqrt[12]{2^7\times3^2}}{\sqrt[12]{2^2\times3}}=\sqrt[12]{2^5\times3}=\sqrt[12]{96}$

$\therefore a=96$

10 답 12

$\sqrt{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}}\div\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}=\dfrac{\sqrt{\sqrt{a}}}{\sqrt{\sqrt[3]{a}}}\times\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt[4]{a}}}{\sqrt{\sqrt{a}}}\div\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}}$

$=\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}}\times\dfrac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[4]{a}}\times\dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}}$

$=\dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[6]{a}}=\dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[12]{a^2}}$

$=\sqrt[12]{\dfrac{a}{a^2}}=\sqrt[12]{\dfrac{1}{a}}$

$\therefore n=12$

10-1 답 1

$\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[5]{a}}}\times\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}}}\times\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}}=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}}\times\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt[5]{a}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}}\times\dfrac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[5]{\sqrt[4]{a}}}$

$=\dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[15]{a}}\times\dfrac{\sqrt[20]{a}}{\sqrt[12]{a}}\times\dfrac{\sqrt[15]{a}}{\sqrt[20]{a}}$

$=1$

11 답 a

$\sqrt{a^3b}\div\sqrt[3]{a^4b^2}\times\sqrt[6]{a^5b}=\dfrac{\sqrt[6]{a^9b^3}\times\sqrt[6]{a^5b}}{\sqrt[6]{a^8b^4}}=\sqrt[6]{\dfrac{a^{14}b^4}{a^8b^4}}$

$=\sqrt[6]{a^6}=a$

Lecture 거듭제곱근의 성질

실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여

$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a & (n\text{은 홀수})\\ |a| & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

11-1 답 ⑤

$\sqrt[3]{a^8\times\sqrt{b^2}}\div\sqrt[3]{a^2b}=\dfrac{\sqrt[3]{a^8}\times\sqrt[6]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[3]{b}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^8}\times\sqrt[6]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[6]{b^2}}$

$=\sqrt[3]{a^6}=\sqrt[3]{(a^2)^3}=a^2$

12 답 7

$\dfrac{\sqrt{\sqrt{a^3}\times\sqrt[4]{a}}}{\sqrt[6]{a}}=\dfrac{\sqrt[4]{a^3}\times\sqrt[8]{a}}{\sqrt[6]{a}}=\dfrac{\sqrt[24]{a^{18}}\times\sqrt[24]{a^3}}{\sqrt[24]{a^4}}$

$=\dfrac{\sqrt[24]{a^{21}}}{\sqrt[24]{a^4}}=\sqrt[24]{\dfrac{a^{21}}{a^4}}$

$=\sqrt[24]{a^{17}}$

따라서 $m=24$, $n=17$이므로

$m-n=24-17=7$

12-1 답 ④

$\sqrt{a\times\sqrt[3]{a^2\times\sqrt[4]{a}}}=\sqrt{a}\times\sqrt[6]{a^2}\times\sqrt[24]{a}=\sqrt[24]{a^{12}}\times\sqrt[24]{a^8}\times\sqrt[24]{a}$

$=\sqrt[24]{a^{12}\times a^8\times a}=\sqrt[24]{a^{21}}=\sqrt[8]{a^7}$

따라서 $m=7$, $n=8$이므로

$m+n=7+8=15$

13 답 ④

3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$

$\sqrt[4]{6}=\sqrt[12]{6^3}=\sqrt[12]{216}$

$\sqrt[6]{7}=\sqrt[12]{7^2}=\sqrt[12]{49}$

따라서 $\sqrt[12]{49}<\sqrt[12]{81}<\sqrt[12]{216}$이므로

$\sqrt[6]{7}<\sqrt[3]{3}<\sqrt[4]{6}$

13-1 답 ③

3, 5, 7의 최소공배수가 105이므로

$\sqrt[3]{9}=\sqrt[105]{9^{35}}=\sqrt[105]{(3^2)^{35}}=\sqrt[105]{3^{70}}$

$\sqrt[5]{27}=\sqrt[105]{27^{21}}=\sqrt[105]{(3^3)^{21}}=\sqrt[105]{3^{63}}$

$\sqrt[7]{243}=\sqrt[105]{243^{15}}=\sqrt[105]{(3^5)^{15}}=\sqrt[105]{3^{75}}$

따라서 $\sqrt[105]{3^{63}}<\sqrt[105]{3^{70}}<\sqrt[105]{3^{75}}$이므로

$\sqrt[5]{27}<\sqrt[3]{9}<\sqrt[7]{243}$

14 답 $C<B<A$

$A=\sqrt[3]{3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3}=\sqrt[6]{3^2}\times\sqrt[6]{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt{3}$

$B=\sqrt{2\sqrt[3]{2}}=\sqrt{2}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}$

$C=\sqrt[6]{5\sqrt{5}}=\sqrt[6]{5}\times\sqrt[12]{5}=\sqrt[12]{5^2}\times\sqrt[12]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[4]{5}$ ……❶

이때 2, 3, 4의 최소공배수가 12이므로

$A=\sqrt{3}=\sqrt[12]{3^6}=\sqrt[12]{729}$

$B=\sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{4^4}=\sqrt[12]{256}$

$C=\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}$ ……❷

따라서 $\sqrt[12]{125}<\sqrt[12]{256}<\sqrt[12]{729}$이므로

$C<B<A$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 세 수 A, B, C를 $\sqrt[m]{n}$ 꼴로 나타낼 수 있다.	30%
❷ 세 수 A, B, C를 $\sqrt[12]{a}$ 꼴로 나타낼 수 있다.	30%
❸ 세 수 A, B, C의 대소 관계를 나타낼 수 있다.	40%

14-1 답 ④

$\sqrt[3]{3\sqrt{2}}=\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{3^2}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{18}$

$\sqrt[3]{2\sqrt{3}}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{3}=\sqrt[6]{2^2}\times\sqrt[6]{3}=\sqrt[6]{12}$

$\sqrt{2\sqrt[3]{3}}=\sqrt{2}\times\sqrt[6]{3}=\sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{3}=\sqrt[6]{24}$

즉 $\sqrt[6]{12}<\sqrt[6]{18}<\sqrt[6]{24}$이므로 $a=\sqrt[6]{24}$, $b=\sqrt[6]{12}$

$b\le\sqrt[6]{n}\le a$에서 $\sqrt[6]{12}\le\sqrt[6]{n}\le\sqrt[6]{24}$

$\therefore 12\le n\le 24$

따라서 자연수 n의 값은 12, 13, 14, …, 24이므로 그 개수는 13이다.

15 답 505

3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$A=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\sqrt[12]{\frac{1}{4^4}}=\sqrt[12]{\frac{1}{256}}$

$B=\sqrt[4]{\frac{1}{6}}=\sqrt[12]{\frac{1}{6^3}}=\sqrt[12]{\frac{1}{216}}$

$C=\sqrt[6]{\frac{1}{17}}=\sqrt[12]{\frac{1}{17^2}}=\sqrt[12]{\frac{1}{289}}$

즉 $\sqrt[12]{\frac{1}{289}}<\sqrt[12]{\frac{1}{256}}<\sqrt[12]{\frac{1}{216}}$이므로

$a=\sqrt[12]{\frac{1}{216}}$, $b=\sqrt[12]{\frac{1}{289}}$

$\therefore \left(\frac{1}{a}\right)^{12}+\left(\frac{1}{b}\right)^{12}=216+289=505$

15-1 답 56

$\sqrt{\sqrt[3]{15}}=\sqrt[6]{15}=\sqrt[12]{15^2}=\sqrt[12]{225}$

$\sqrt{\sqrt{6}}=\sqrt[4]{6}=\sqrt[12]{6^3}=\sqrt[12]{216}$

$\sqrt[3]{\sqrt{16}}=\sqrt[6]{16}=\sqrt[12]{16^2}=\sqrt[12]{256}$

$\sqrt[4]{2\sqrt[3]{25}}=\sqrt[4]{2}\times\sqrt[12]{25}=\sqrt[12]{2^3}\times\sqrt[12]{25}=\sqrt[12]{200}$

즉 $\sqrt[12]{200}<\sqrt[12]{216}<\sqrt[12]{225}<\sqrt[12]{256}$이므로

$a=\sqrt[12]{256}$, $b=\sqrt[12]{200}$

$\therefore a^{12}-b^{12}=256-200=56$

16 답 ④

ㄱ. $2^{3+\sqrt{3}}\div 2^{\sqrt{3}}=2^{3+\sqrt{3}-\sqrt{3}}=2^3=8$

ㄴ. $(3^{\sqrt{2}}\div 9)^{\sqrt{2}+2}=(3^{\sqrt{2}}\div 3^2)^{\sqrt{2}+2}=(3^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}$

$=3^{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}=3^{-2}=\frac{1}{9}$

ㄷ. $\{(\sqrt[3]{3})^{\sqrt{3}}\}^{\sqrt{3}}=(\sqrt[3]{3})^{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=(\sqrt[3]{3})^3=\sqrt[3]{3^3}=3$

ㄹ. $(27^2)^{\frac{1}{6}}\times 32^{-\frac{1}{5}}=\{(3^3)^2\}^{\frac{1}{6}}\times(2^5)^{-\frac{1}{5}}$

$=3^{3\times 2\times\frac{1}{6}}\times 2^{5\times\left(-\frac{1}{5}\right)}$

$=3\times 2^{-1}=\frac{3}{2}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

16-1 답 ③

ㄱ. $\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$

ㄴ. $(-2)^3\times(-2)^2=(-2)^{3+2}=(-2)^5$

ㄷ. $\{(-1)^6\}^{\frac{1}{2}}=1^{\frac{1}{2}}=1$

ㄹ. $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=3^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=3^2=9$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

17 답 ④

$a^{-8}\times(a^{-3})^{-2}\div a^{-5}=a^{-8}\times a^{-3\times(-2)}\div a^{-5}=a^{-8}\times a^6\div a^{-5}$

$=a^{-8+6-(-5)}=a^3$

즉 $a^3=a^k$이므로 $k=3$

17-1 답 $\frac{3}{2}$

$\{(64^2)^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}}\times 32^{-\frac{1}{5}}\div(8^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{4}}=64^{2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}\times(2^5)^{-\frac{1}{5}}\div 8^{\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{4}\right)}$

$=(2^6)^{\frac{1}{3}}\times 2^{5\times\left(-\frac{1}{5}\right)}\div(2^3)^{-\frac{1}{6}}$

$=2^{6\times\frac{1}{3}}\times 2^{-1}\div 2^{3\times\left(-\frac{1}{6}\right)}$

$=2^2\times 2^{-1}\div 2^{-\frac{1}{2}}$

$=2^{2+(-1)-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$=2^{\frac{3}{2}}$

즉 $2^{\frac{3}{2}}=2^k$이므로 $k=\frac{3}{2}$

18 답 $\frac{9}{2}$

$\left\{\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}\times\left\{\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}\times\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}\times\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$

$=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\times\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}^{-\frac{1}{3}}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$=\frac{3}{2}\times 3=\frac{9}{2}$

18-1 답 $\frac{9}{16}$

$a=27^{\frac{5}{3}}\times 64^{-\frac{5}{3}}=(3^3)^{\frac{5}{3}}\times(2^6)^{-\frac{5}{3}}$

$=3^{3\times\frac{5}{3}}\times 2^{6\times\left(-\frac{5}{3}\right)}=3^5\times 2^{-10}$ ……❶

$$b=\left\{\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{9}{4}}=\left[\left\{\left(\frac{3}{2^2}\right)^2\right\}^{-\frac{2}{3}}\right]^{\frac{9}{4}}$$
$$=\left(\frac{3}{2^2}\right)^{2\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{9}{4}}$$
$$=\left(\frac{3}{2^2}\right)^{-3}=\frac{2^6}{3^3} \quad \cdots\cdots ❷$$
$$\therefore ab=3^5\times2^{-10}\times\frac{2^6}{3^3}=3^{5-3}\times2^{-10+6}$$
$$=3^2\times2^{-4}=\frac{9}{16} \quad \cdots\cdots ❸$$

채점 기준	비율
❶ a를 2, 3의 거듭제곱으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ b를 2, 3의 거듭제곱으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

19 답 ③

$$(a^{\frac{\sqrt{2}}{2}})^{-\frac{\sqrt{2}}{4}}\times a^3\div a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}\times a^3\div a^{\frac{1}{4}}$$
$$=a^{-\frac{1}{4}}\times a^3\div a^{\frac{1}{4}}$$
$$=a^{-\frac{1}{4}+3-\frac{1}{4}}$$
$$=a^{\frac{5}{2}}$$

이때 $a^5=16=2^4$이므로

$$a^{\frac{5}{2}}=(a^5)^{\frac{1}{2}}=(2^4)^{\frac{1}{2}}=2^{4\times\frac{1}{2}}=2^2=4$$

19-1 답 $4\sqrt{6}$

$$(a^{\sqrt{2}})^{3\sqrt{3}}\div a^{2\sqrt{6}}\times(a^{\frac{1}{4}})^{12\sqrt{6}}=a^{\sqrt{2}\times3\sqrt{3}}\div a^{2\sqrt{6}}\times a^{\frac{1}{4}\times12\sqrt{6}}$$
$$=a^{3\sqrt{6}}\div a^{2\sqrt{6}}\times a^{3\sqrt{6}}$$
$$=a^{3\sqrt{6}-2\sqrt{6}+3\sqrt{6}}$$
$$=a^{4\sqrt{6}}$$

즉 $a^{4\sqrt{6}}=a^k$이므로 $k=4\sqrt{6}$

20 답 ③

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{a}{6}}=(4^{-2})^{\frac{a}{6}}=4^{-\frac{a}{3}}=(4^a)^{-\frac{1}{3}}$$
$$=27^{-\frac{1}{3}}=(3^3)^{-\frac{1}{3}}=3^{-1}$$
$$=\frac{1}{3}$$

20-1 답 ③

$9^a=\frac{4}{25}$에서 $(3^a)^2=\left(\frac{2}{5}\right)^2$

$$\therefore 3^a=\frac{2}{5}$$
$$\therefore 2\times3^{2-a}=2\times3^2\div3^a=2\times3^2\div\frac{2}{5}$$
$$=2\times3^2\times\frac{5}{2}=45$$

21 답 ②

$$\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a}}}=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[15]{a}\times\sqrt[60]{a}=a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{15}}\times a^{\frac{1}{60}}$$
$$=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{60}}=a^{\frac{5}{12}}$$

즉 $a^{\frac{5}{12}}=a^{\frac{n}{m}}$이므로 $m=12$, $n=5$

$$\therefore m+n=12+5=17$$

21-1 답 ②

$$\sqrt[3]{2\sqrt[4]{4}}\times\sqrt[3]{16}\div\sqrt[6]{2\sqrt[3]{2^k}}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[12]{2^2}\times\sqrt[9]{2^4}\div(\sqrt[6]{2}\times\sqrt[18]{2^k})$$
$$=2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{2}{12}}\times2^{\frac{4}{9}}\div(2^{\frac{1}{6}}\times2^{\frac{k}{18}})$$
$$=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{12}+\frac{4}{9}}\div2^{\frac{1}{6}+\frac{k}{18}}$$
$$=2^{\frac{17}{18}}\div2^{\frac{1}{6}+\frac{k}{18}}$$
$$=2^{\frac{17}{18}-\left(\frac{1}{6}+\frac{k}{18}\right)}$$
$$=2^{\frac{7}{9}-\frac{k}{18}}$$

즉 $2^{\frac{7}{9}-\frac{k}{18}}=1$이므로 $\frac{7}{9}-\frac{k}{18}=0$

$$\therefore k=14$$

22 답 9

$\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{3}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[a]{3}}{\sqrt[6]{3}}}=\sqrt[18]{\frac{1}{3}}$에서 $\sqrt[3]{3^{\frac{1}{4}}\div3^{\frac{1}{3}}}\times\sqrt{3^{\frac{1}{a}}\div3^{\frac{1}{6}}}=\sqrt[18]{3^{-1}}$

$\sqrt[3]{3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}}\times\sqrt{3^{\frac{1}{a}-\frac{1}{6}}}=\sqrt[18]{3^{-1}}$, $\sqrt[3]{3^{-\frac{1}{12}}}\times\sqrt{3^{\frac{1}{a}-\frac{1}{6}}}=\sqrt[18]{3^{-1}}$

$(3^{-\frac{1}{12}})^{\frac{1}{3}}\times(3^{\frac{1}{a}-\frac{1}{6}})^{\frac{1}{2}}=3^{-\frac{1}{18}}$, $3^{-\frac{1}{36}}\times3^{\frac{1}{2a}-\frac{1}{12}}=3^{-\frac{1}{18}}$

$3^{-\frac{1}{36}+\frac{1}{2a}-\frac{1}{12}}=3^{-\frac{1}{18}}$, $3^{\frac{1}{2a}-\frac{1}{9}}=3^{-\frac{1}{18}}$

즉 $\frac{1}{2a}-\frac{1}{9}=-\frac{1}{18}$이므로 $\frac{1}{2a}=\frac{1}{18}$

$$\therefore a=9$$

22-1 답 -4

$$\sqrt[12]{\frac{1}{4}}\times\sqrt[6]{\frac{1}{6}}\times\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\times\sqrt{\frac{1}{9}}\times\sqrt{\frac{1}{12}}$$
$$=4^{-\frac{1}{12}}\times6^{-\frac{1}{6}}\times8^{-\frac{1}{3}}\times9^{-\frac{1}{2}}\times12^{-\frac{1}{2}}$$
$$=2^{-\frac{1}{6}}\times(2^{-\frac{1}{6}}\times3^{-\frac{1}{6}})\times2^{-1}\times3^{-1}\times(2^{-1}\times3^{-\frac{1}{2}})$$
$$=2^{-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-1-1}\times3^{-\frac{1}{6}-1-\frac{1}{2}}$$
$$=2^{-\frac{7}{3}}\times3^{-\frac{5}{3}} \quad \cdots\cdots ❶$$

즉 $2^{-\frac{7}{3}}\times3^{-\frac{5}{3}}=2^a\times3^b$이므로 $a=-\frac{7}{3}$, $b=-\frac{5}{3}$ $\cdots\cdots ❷$

$$\therefore a+b=-\frac{7}{3}+\left(-\frac{5}{3}\right)=-4 \quad \cdots\cdots ❸$$

채점 기준	비율
❶ 좌변을 밑이 2, 3이고 지수가 유리수인 수로 나타낼 수 있다.	60%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

23 답 ③

$$\frac{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\times\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2}}}{a}=\frac{\sqrt[3]{a}\times\sqrt[6]{a}\times\sqrt[4]{a}\times\sqrt[12]{a^2}}{a}=\frac{a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{6}}}{a}$$
$$=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-1}=a^{-\frac{1}{12}}$$

즉 $a^{-\frac{1}{12}}=a^k$이므로 $k=-\frac{1}{12}$

23-1 답 ②

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}}=\sqrt{a}\times\sqrt[4]{a}\times\sqrt[12]{a^2}=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=a^{\frac{11}{12}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{a^n}}{\sqrt{a}}}=\frac{\sqrt[12]{a^n}}{\sqrt[6]{a}}=\frac{a^{\frac{n}{12}}}{a^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{n}{12}-\frac{1}{6}}$$

즉 $\frac{11}{12}=\frac{n}{12}-\frac{1}{6}$이므로 $\frac{n}{12}=\frac{13}{12}$

$$\therefore n=13$$

24 답 10

$a=2^5$에서 $2=a^{\frac{1}{5}}$

$b=9^2$에서 $b=(3^2)^2=3^4$ $\therefore 3=b^{\frac{1}{4}}$

$\therefore 12^{10}=(2^2\times3)^{10}=2^{20}\times3^{10}=(a^{\frac{1}{5}})^{20}\times(b^{\frac{1}{4}})^{10}=a^4b^{\frac{5}{2}}$

따라서 $m=4$, $n=\frac{5}{2}$이므로

$mn=4\times\frac{5}{2}=10$

24-1 답 ②

$a=9$에서 $a=3^2$ $\therefore 3=a^{\frac{1}{2}}$

$b=\frac{1}{16}$에서 $b=2^{-4}$ $\therefore 2=b^{-\frac{1}{4}}$

$\therefore \frac{1}{18^4}=\frac{1}{(2\times3^2)^4}=\frac{1}{2^4\times3^8}=\frac{1}{(b^{-\frac{1}{4}})^4\times(a^{\frac{1}{2}})^8}=a^{-4}b$

따라서 $m=-4$, $n=1$이므로

$m+n=-4+1=-3$

25 답 ④

$a=32^3$에서 $a=(2^5)^3=2^{15}$ $\therefore 2=a^{\frac{1}{15}}$

$\therefore 1024^3=(2^{10})^3=2^{30}=(a^{\frac{1}{15}})^{30}=a^2$

즉 $a^2=a^k$이므로 $k=2$

25-1 답 ②

$a=\sqrt[5]{27^2}$에서 $a=\sqrt[5]{(3^3)^2}=\sqrt[5]{3^6}=3^{\frac{6}{5}}$ $\therefore 3=a^{\frac{5}{6}}$

$\therefore 243^4=(3^5)^4=3^{20}=(a^{\frac{5}{6}})^{20}=a^{\frac{50}{3}}$

따라서 $p=3$, $q=50$이므로

$p+q=3+50=53$

26 답 ①

$a=\sqrt{2}$에서 $a=2^{\frac{1}{2}}$ $\therefore 2=a^2$

$b=\sqrt[3]{3}$에서 $b=3^{\frac{1}{3}}$ $\therefore 3=b^3$

$\therefore \sqrt[6]{6}=(2\times3)^{\frac{1}{6}}=(a^2\times b^3)^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$

26-1 답 $a^{\frac{5}{8}}b^{\frac{10}{9}}$

16의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{16}$이므로

$a=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}=2^{\frac{4}{3}}$

$\therefore 2=a^{\frac{3}{4}}$ ……❶

27의 네제곱근 중 양수인 것은 $\sqrt[4]{27}$이므로

$b=\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{3}{4}}$ $\therefore 3=b^{\frac{4}{3}}$ ……❷

$\therefore \sqrt[12]{36^5}=36^{\frac{5}{12}}=(2^2\times3^2)^{\frac{5}{12}}$

$=\{(a^{\frac{3}{4}})^2\times(b^{\frac{4}{3}})^2\}^{\frac{5}{12}}$

$=(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{8}{3}})^{\frac{5}{12}}=a^{\frac{5}{8}}b^{\frac{10}{9}}$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 2를 a의 거듭제곱으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ 3을 b의 거듭제곱으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ $\sqrt[12]{36^5}$을 a, b를 사용하여 나타낼 수 있다.	40%

27 답 ②

$(1-x^{\frac{1}{4}})(1+x^{\frac{1}{4}})(1+x^{\frac{1}{2}})(1+x)$

$=\{1-(x^{\frac{1}{4}})^2\}(1+x^{\frac{1}{2}})(1+x)$

$=(1-x^{\frac{1}{2}})(1+x^{\frac{1}{2}})(1+x)$

$=\{1-(x^{\frac{1}{2}})^2\}(1+x)$

$=(1-x)(1+x)$

$=1-x^2$

$=1-(\sqrt{3})^2$ ← $x=\sqrt{3}$을 대입

$=-2$

27-1 답 ②

$(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})=\{(a^{\frac{1}{4}})^2-(b^{\frac{1}{4}})^2\}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})$

$=(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})$

$=(a^{\frac{1}{2}})^2-(b^{\frac{1}{2}})^2$

$=a-b$

$=9-3$ ← $a=9$, $b=3$을 대입

$=6$

28 답 (1) 65 (2) 7

(1) $(x^{\frac{5}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2+(x^{\frac{5}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2$

$=\{(x^{\frac{5}{2}})^2+2x^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+(x^{-\frac{1}{2}})^2\}$

$+\{(x^{\frac{5}{2}})^2-2x^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+(x^{-\frac{1}{2}})^2\}$

$=(x^5+2x^2+x^{-1})+(x^5-2x^2+x^{-1})$

$=2(x^5+x^{-1})$

$=2(2^5+2^{-1})$ ← $x=2$를 대입

$=65$

(2) $(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}})^3+(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}})^3$

$=\{(x^{\frac{1}{3}})^3+3x^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{4}{3}}+(x^{-\frac{2}{3}})^3\}$

$+\{(x^{\frac{1}{3}})^3-3x^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{4}{3}}-(x^{-\frac{2}{3}})^3\}$

$=(x+3+3x^{-1}+x^{-2})+(x-3+3x^{-1}-x^{-2})$

$=2x+6x^{-1}$

$=2\times2+6\times2^{-1}$ ← $x=2$를 대입

$=7$

28-1 답 256

$2^{3+\sqrt{3}}=A$, $2^{3-\sqrt{3}}=B$라 하면

(주어진 식)$=(A+B)^2-(A-B)^2$

$=A^2+2AB+B^2-(A^2-2AB+B^2)$

$=4AB$

$=2^2\times2^{3+\sqrt{3}}\times2^{3-\sqrt{3}}$ ← $A=2^{3+\sqrt{3}}$, $B=2^{3-\sqrt{3}}$을 대입

$=2^{2+(3+\sqrt{3})+(3-\sqrt{3})}$

$=2^8=256$

29 답 −15

$p=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)$의 양변에

$\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$을 곱하면

$\frac{1}{2}p=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2^8}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)$

$=1-\frac{1}{2^{16}}$

즉 $\frac{1}{2}p=1-\frac{1}{2^{16}}$이므로 $p=2-\frac{1}{2^{15}}$ ……❶

$2-p=\frac{1}{2^{15}}=2^{-15}$ $\therefore k=-15$ ……❷

채점 기준	비율
❶ p의 값을 구할 수 있다.	60%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40%

29-1 답 ②

(주어진 식)$=(1-2^{\frac{1}{4}})(1+2^{\frac{1}{4}})(1+2^{\frac{1}{2}})(1+2)(1+2^2)$

$=(1-2^{\frac{1}{2}})(1+2^{\frac{1}{2}})(1+2)(1+2^2)$

$=(1-2)(1+2)(1+2^2)$

$=(1-2^2)(1+2^2)$

$=1-2^4=-15$

30 답 $-\sqrt{2}$

$(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}-2=4-2=2$

$\therefore a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{2}\ (\because 0<a<1)$

30-1 답 ④

$(a+a^{-1})^3=a^3+3a+3a^{-1}+a^{-3}$

$=a^3+a^{-3}+3(a+a^{-1})$

$\therefore a^3+a^{-3}=(a+a^{-1})^3-3(a+a^{-1})$

$=3^3-3\times3=18$

31 답 $\frac{5}{2}$

$x=2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}$이므로 양변을 세제곱하면

$x^3=(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})^3$

$x^3=2+2^{-1}+3(\underbrace{2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}}_{x})$

$x^3=\frac{5}{2}+3x$ $\therefore x^3-3x=\frac{5}{2}$

다른 풀이

$x=2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}$이므로

$x^3-3x=(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})^3-3(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})$

$=\{2+2^{-1}+3(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})\}-3(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})$

$=2+2^{-1}=\frac{5}{2}$

31-1 답 ⑤

$x=3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}$의 양변을 세제곱하면

$x^3=(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}})^3$

$x^3=3-3^{-1}-3(\underbrace{3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}}_{x})$, $x^3=\frac{8}{3}-3x$

즉 $3x^3=8-9x$이므로 $3x^3+9x=8$

$\therefore 3x^3+9x+2=8+2=10$

32 답 2

$x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=2$의 양변을 제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2=2^2$

$x+x^{-1}-2=4$ $\therefore x+x^{-1}=6$ ……❶

$x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=2$의 양변을 세제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^3=2^3$

$x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}-3(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})=8$

$x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}-3\times2=8$

$\therefore x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}=14$ ……❷

$\therefore \frac{x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}}{x+x^{-1}+1}=\frac{14}{6+1}=2$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $x+x^{-1}$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $\frac{x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}}{x+x^{-1}+1}$의 값을 구할 수 있다.	20%

32-1 답 5

$3^x-3^{-x}=3$의 양변을 제곱하면

$(3^x-3^{-x})^2=3^2$

$3^{2x}+3^{-2x}-2=9$ $\therefore 3^{2x}+3^{-2x}=11$

$3^x-3^{-x}=3$의 양변을 세제곱하면

$(3^x-3^{-x})^3=3^3$

$3^{3x}-3^{-3x}-3(3^x-3^{-x})=27$, $3^{3x}-3^{-3x}-3\times3=27$

$3^{3x}-3^{-3x}-9=27$ $\therefore 3^{3x}-3^{-3x}=36$

$\therefore \frac{3^{3x}-3^{-3x}+9}{3^{2x}+3^{-2x}-2}=\frac{36+9}{11-2}=\frac{45}{9}=5$

33 답 $\frac{7}{2}$

주어진 식의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^x(a^{3x}-a^{-3x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\frac{a^{4x}-a^{-2x}}{a^{2x}-1}$

$=\frac{(a^{2x})^2-(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}-1}=\frac{2^2-2^{-1}}{2-1}$

$=\frac{7}{2}$

다른 풀이

$\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{(a^x-a^{-x})(a^{2x}+a^{-2x}+1)}{a^x-a^{-x}}=a^{2x}+a^{-2x}+1$

$=a^{2x}+(a^{2x})^{-1}+1=2+2^{-1}+1=\frac{7}{2}$

33-1 답 ③

좌변의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}$

즉 $\frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=2$이므로 $a^{2x}+1=2a^{2x}-2$

$\therefore a^{2x}=3$

주어진 식의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^x(a^{3x}+a^{-3x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}+1}$$
$$=\frac{(a^{2x})^2+(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}+1}=\frac{3^2+3^{-1}}{3+1}$$
$$=\frac{7}{3}$$

34 답 2

$3^{\frac{1}{x}}=25$에서 $3=25^x$ $\therefore 5^{2x}=3$

주어진 식의 분모, 분자에 각각 5^x을 곱하면

$$\frac{5^x+5^{-x}}{5^x-5^{-x}}=\frac{5^x(5^x+5^{-x})}{5^x(5^x-5^{-x})}=\frac{5^{2x}+1}{5^{2x}-1}=\frac{3+1}{3-1}=2$$

34-1 답 $\frac{7}{5}$

$6^{\frac{1}{x}}=9$에서 $6=9^x$ $\therefore 3^{2x}=6$

주어진 식의 분모, 분자에 각각 3^x을 곱하면

$$\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}=\frac{3^x(3^x+3^{-x})}{3^x(3^x-3^{-x})}=\frac{3^{2x}+1}{3^{2x}-1}=\frac{6+1}{6-1}=\frac{7}{5}$$

35 답 $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$

주어진 식의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$$\frac{a^{3x}-a^{-x}}{a^x+a^{-3x}}=\frac{a^x(a^{3x}-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-3x})}=\frac{a^{4x}-1}{a^{2x}+a^{-2x}}=\frac{(a^{2x})^2-1}{a^{2x}+(a^{2x})^{-1}}$$
$$=\frac{(2+\sqrt{3})^2-1}{2+\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}}=\frac{7+4\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$$

35-1 답 $3-\sqrt{2}$

주어진 식의 분모, 분자에 각각 3^x을 곱하면

$$\frac{3^{3x}-3^{-3x}}{3^x+3^{-x}}=\frac{3^x(3^{3x}-3^{-3x})}{3^x(3^x+3^{-x})}=\frac{3^{4x}-3^{-2x}}{3^{2x}+1}$$
$$=\frac{(3^{2x})^2-(3^{2x})^{-1}}{3^{2x}+1}$$ ……❶
$$=\frac{(\sqrt{2}+1)^2-\frac{1}{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1+1}$$
$$=\frac{3+2\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)}{2+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{4+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=3-\sqrt{2}$$ ……❷

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 3^{2x}을 포함하는 식으로 변형할 수 있다.	60%
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40%

36 답 ②

$5^x=81$에서 $5=81^{\frac{1}{x}}=(3^4)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{4}{x}}$ ……㉠

$45^y=243$에서 $45=243^{\frac{1}{y}}=(3^5)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{5}{y}}$ ……㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{5}{45}=3^{\frac{4}{x}}\div 3^{\frac{5}{y}}$

$3^{\frac{4}{x}-\frac{5}{y}}=\frac{1}{9}=3^{-2}$ $\therefore \frac{4}{x}-\frac{5}{y}=-2$

36-1 답 2

$28^x=32$에서 $28=32^{\frac{1}{x}}=(2^5)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{5}{x}}$ ……㉠

$49^y=64$에서 $49=64^{\frac{1}{y}}=(2^6)^{\frac{1}{y}}=(2^{\frac{3}{y}})^2$이므로

$7^2=(2^{\frac{3}{y}})^2$ $\therefore 7=2^{\frac{3}{y}}$ ……㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{28}{7}=2^{\frac{5}{x}}\div 2^{\frac{3}{y}}$

$2^{\frac{5}{x}-\frac{3}{y}}=4=2^2$ $\therefore \frac{5}{x}-\frac{3}{y}=2$

37 답 1

$4^x=12$에서 $2^{2x}=12$ $\therefore 2=12^{\frac{1}{2x}}$ ……㉠ ……❶

$6^y=12$에서 $6=12^{\frac{1}{y}}$ ……㉡ ……❷

㉠×㉡을 하면 $12=12^{\frac{1}{2x}}\times 12^{\frac{1}{y}}$

$12^{\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}}=12$ $\therefore \frac{1}{2x}+\frac{1}{y}=1$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 2를 12의 거듭제곱으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ 6을 12의 거듭제곱으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ $\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}$의 값을 구할 수 있다.	40%

37-1 답 100

$4^a=k$에서 $4=k^{\frac{1}{a}}$ ……㉠

$40^b=k$에서 $40=k^{\frac{1}{b}}$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $\frac{40}{4}=k^{\frac{1}{b}}\div k^{\frac{1}{a}}$

$\therefore k^{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=10$

이때 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$이므로 $k^{\frac{1}{2}}=10$

$\therefore k=100$

38 답 $\frac{5}{8}$

$64^x=8$에서 $64=8^{\frac{1}{x}}=(2^3)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{3}{x}}$ ……㉠

$\sqrt{10^y}=2$에서 $10^{\frac{y}{2}}=2$ $\therefore 10=2^{\frac{2}{y}}$ ……㉡

$a^z=2$에서 $a=2^{\frac{1}{z}}$ ……㉢

㉠÷㉡×㉢을 하면 $\frac{64}{10}a=2^{\frac{3}{x}}\div 2^{\frac{2}{y}}\times 2^{\frac{1}{z}}$

$\therefore 2^{\frac{3}{x}-\frac{2}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{32}{5}a$

이때 $\frac{3}{x}-\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=2$이므로

$\frac{32}{5}a=2^2=4$ $\therefore a=\frac{5}{8}$

38-1 답 ④

$a^x=5$에서 $a=5^{\frac{1}{x}}$ ……㉠

$(ab)^y=5^2$에서 $ab=5^{\frac{2}{y}}$ ……㉡

$(abc)^z=5^3$에서 $abc=5^{\frac{3}{z}}$ ……ⓒ

㉠×㉡÷ⓒ을 하면 $\frac{a\times ab}{abc}=5^{\frac{1}{x}}\times 5^{\frac{2}{y}}\div 5^{\frac{3}{z}}$

$\therefore 5^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}}=\frac{a}{c}$

39 답 ④

10년 후의 방사성 물질의 양이 $\frac{1}{4}m_0$이므로

$m(10)=m_0\times a^5=\frac{1}{4}m_0$ $\therefore a^5=\frac{1}{4}$

따라서 15년 후의 이 물질의 양은

$m(15)=m_0\times a^{\frac{15}{2}}=m_0\times (a^5)^{\frac{3}{2}}=m_0\times\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

$=m_0\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=m_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}m_0$

$\therefore k=\frac{1}{8}$

39-1 답 ③

배양한 지 2시간 후의 박테리아의 개체수가 $5n$이므로

$5n=n\times 2^{2k}$ $\therefore 2^{2k}=5$

배양한 지 5시간 후의 개체수는

$n\times 2^{5k}=n\times (2^{2k})^{\frac{5}{2}}=n\times 5^{\frac{5}{2}}=25\sqrt{5}n$

따라서 배양한 지 5시간 후의 개체수는 처음 개체수의 $25\sqrt{5}$배이다.

40 답 16배

pH=6.1인 용액 1 L 속에 들어 있는 수소 이온의 g 이온수는 $10^{-6.1}$

pH=7.3인 용액 1 L 속에 들어 있는 수소 이온의 g 이온수는 $10^{-7.3}$

$\therefore \frac{10^{-6.1}}{10^{-7.3}}=10^{-6.1-(-7.3)}=10^{1.2}=(10^{0.3})^4=2^4=16$(배)

40-1 답 10

해수면으로부터 높이가 960 m인 곳의 기압은

$P_{960}=10^{-\frac{960}{18400}}\times P_0$

해수면으로부터 높이가 2800 m인 곳의 기압은

$P_{2800}=10^{-\frac{2800}{18400}}\times P_0$

$\therefore \frac{P_{960}}{P_{2800}}=\frac{10^{-\frac{960}{18400}}\times P_0}{10^{-\frac{2800}{18400}}\times P_0}=10^{-\frac{960}{18400}-\left(-\frac{2800}{18400}\right)}$

$=10^{\frac{1840}{18400}}=10^{\frac{1}{10}}$(배)

$\therefore k^{10}=(10^{\frac{1}{10}})^{10}=10$

41 답 ⑤

A 지역에서 전년도에 비하여 감소한 연간 자동차 휘발유 소비량의 비율을 x라 하면 2016년의 연간 자동차 휘발유 소비량이 a이므로 2024년, 즉 8년 후의 연간 자동차 휘발유 소비량은 ax^8

이때 $ax^8=\frac{1}{3}a$이므로 $x^8=\frac{1}{3}$

$\therefore x=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$

A 지역의 2030년, 즉 14년 후의 연간 자동차 휘발유 소비량은

$a\times\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{8}}\right\}^{14}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{7}{4}}\times a$

따라서 $p=4$, $q=7$이므로

$p+q=4+7=11$

41-1 답 4

반음 1개만큼 올라갈 때 증가한 진동수의 비율을 x라 하면 음이 한 옥타브, 즉 반음 12개만큼 올라갈 때 진동수가 2배가 되므로

$x^{12}=2$ $\therefore x=2^{\frac{1}{12}}$

따라서 '미'음의 진동수는 '도'음의 진동수의

$(2^{\frac{1}{12}})^4=2^{\frac{1}{3}}$(배)

$\therefore k^6=(2^{\frac{1}{3}})^6=2^2=4$

42 답 ④

$H=72$, $t=10$일 때, $P_1=\frac{72-65}{14}\times 1.05^{10}=\frac{1}{2}\times 1.05^{10}$

$H=79$, $t=24$일 때, $P_2=\frac{79-65}{14}\times 1.05^{24}=1.05^{24}$

$\therefore \frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{1}{2}\times 1.05^{10}}{1.05^{24}}=\frac{1}{2}\times 1.05^{10-24}=\frac{1}{2}\times 1.05^{-14}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1.05^{14}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

42-1 답 1.6

압력 750 hPa, 기온 24 °C일 때의 건조공기의 온위 θ_1은

$\theta_1=24\times\left(\frac{1000}{750}\right)^{0.286}$ ……❶

압력 1500 hPa, 기온 18 °C일 때의 건조공기의 온위 θ_2는

$\theta_2=18\times\left(\frac{1000}{1500}\right)^{0.286}$ ……❷

$\therefore \frac{\theta_1}{\theta_2}=\frac{24\times\left(\frac{1000}{750}\right)^{0.286}}{18\times\left(\frac{1000}{1500}\right)^{0.286}}=\frac{4}{3}\times 2^{0.286}$

$=\frac{4}{3}\times 1.2=1.6$ ……❸

채점 기준	비율
❶ θ_1의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ θ_2의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $\frac{\theta_1}{\theta_2}$의 값을 구할 수 있다.	40%

유형 완성하기 p. 24

43 답 15

$\left(\frac{1}{256}\right)^{-\frac{1}{n}}=256^{\frac{1}{n}}=(2^8)^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{8}{n}}$

즉 $2^{\frac{8}{n}}$이 자연수가 되도록 하는 정수 n은 8의 양의 약수이므로

$n=1, 2, 4, 8$

따라서 모든 정수 n의 값의 합은

$1+2+4+8=15$

44 답 12

$a^4=3$에서 $a=3^{\frac{1}{4}}$

$b^3=5$에서 $b=5^{\frac{1}{3}}$

$c^2=7$에서 $c=7^{\frac{1}{2}}$

$\therefore (abc)^n=(3^{\frac{1}{4}}\times5^{\frac{1}{3}}\times7^{\frac{1}{2}})^n=3^{\frac{n}{4}}\times5^{\frac{n}{3}}\times7^{\frac{n}{2}}$ ……❶

따라서 $(abc)^n$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n은 2, 3, 4의 공배수이므로 n의 최솟값은 2, 3, 4의 최소공배수인 12이다. ……❷

채점 기준	비율
❶ $(abc)^n$을 3, 5, 7의 거듭제곱으로 나타낼 수 있다.	50%
❷ 자연수 n의 최솟값을 구할 수 있다.	50%

45 답 36

$(\sqrt[3]{2^4})^{\frac{1}{3}}=(2^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{9}}$

$2^{\frac{4}{9}}$이 자연수 N의 n제곱근이므로

$N=(2^{\frac{4}{9}})^n=2^{\frac{4n}{9}}$

이때 $2^{\frac{4n}{9}}$이 자연수이므로 $\frac{4n}{9}$이 자연수이어야 한다.

즉 n이 9의 배수이어야 하므로 $2\le n\le50$인 자연수 n의 값은

9, 18, 27, 36, 45

따라서 n의 최댓값은 45, 최솟값은 9이므로

$a=45$, $b=9$

$\therefore a-b=45-9=36$

참고 4는 9와 서로소이므로 $\frac{4n}{9}$이 자연수이려면 n이 9의 배수이어야 한다.

46 답 0

$2^x=3^y=6^z=k$ $(k>0)$라 하면 $xyz\neq0$이므로 ($k\neq1$; 밑을 k로 통일한다. $x\neq0, y\neq0, z\neq0$)

$2^x=k$에서 $2=k^{\frac{1}{x}}$ ……㉠

$3^y=k$에서 $3=k^{\frac{1}{y}}$ ……㉡

$6^z=k$에서 $6=k^{\frac{1}{z}}$ ……㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면 $\frac{2\times3}{6}=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{1}{z}}$

$\therefore k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}=1$

그런데 $k\neq1$이므로 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$

47 답 $\frac{27}{8}$

$x^y=y^x$에서 $x=y^{\frac{x}{y}}=y^{\frac{2}{3}}\left(\because \frac{x}{y}=\frac{2}{3}\right)$

$\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$에서 $x=\frac{2}{3}y$이므로 $\frac{2}{3}y=y^{\frac{2}{3}}$

$\frac{y}{y^{\frac{2}{3}}}=\frac{3}{2}$, $y^{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$ $\therefore y=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}$

48 답 ④

$4^x=9^y=48^z=k$ $(k>0)$라 하면 $x\neq0, y\neq0, z\neq0$이므로

$k\neq1$

$4^x=k$에서 $2^{2x}=k$ $\therefore 2=k^{\frac{1}{2x}}$

$9^y=k$에서 $3^{2y}=k$ $\therefore 3=k^{\frac{1}{2y}}$

$48^z=k$에서 $48=k^{\frac{1}{z}}$

이때 $48=2^4\times3$이므로

$k^{\frac{1}{z}}=(k^{\frac{1}{2x}})^4\times k^{\frac{1}{2y}}=k^{\frac{2}{x}+\frac{1}{2y}}$

$\therefore k^{\frac{2}{z}}=k^{\frac{4}{x}+\frac{1}{y}}$

그런데 $k\neq1$이므로 $\frac{4}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$

$\therefore a=4$

학교 시험 대비 문제

p. 25~28

01 답 ③

③ 256의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=256$

$x^4-256=0$, $(x^2+16)(x^2-16)=0$

$(x^2+16)(x+4)(x-4)=0$

$\therefore x=\pm4i$ 또는 $x=\pm4$

즉 256의 네제곱근 중 실수인 것은 -4, 4이다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

02 답 ②

$\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{25}+\sqrt{\sqrt{16}}=\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[4]{2^4}=\sqrt[3]{5\times5^2}+\sqrt[4]{2^4}$

$=\sqrt[3]{5^3}+\sqrt[4]{2^4}=5+2=7$

03 답 ②

$\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2^5}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[6]{3}}}}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}}{\sqrt[3]{\sqrt{2^5}}}\times\frac{\sqrt{\sqrt[n]{2}}}{\sqrt[6]{3}}=\frac{\sqrt[12]{3}}{\sqrt[6]{2^5}}\times\frac{\sqrt[2n]{2}}{\sqrt[12]{3}}=\frac{\sqrt[2n]{2}}{\sqrt[6]{2^5}}$

즉 $\frac{\sqrt[2n]{2}}{\sqrt[6]{2^5}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$이므로 $\sqrt[2n]{2}=\frac{\sqrt[6]{2^5}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[6]{2^5}}{\sqrt[6]{2^4}}=\sqrt[6]{\frac{2^5}{2^4}}=\sqrt[6]{2}$

$2n=6$ $\therefore n=3$

04 답 ①

$\sqrt{a^k\sqrt{a}}\div\sqrt[3]{\sqrt{a}}=\sqrt[m]{a^4\sqrt{a^7\sqrt{a}}}$에서

$\sqrt{a^k}\times\sqrt{\sqrt{a}}\div\sqrt[3]{\sqrt{a}}=\sqrt[m]{a^4}\times\sqrt[m]{\sqrt{a^7}}\times\sqrt[m]{\sqrt{\sqrt{a}}}$

$\sqrt{a^k}\times\sqrt[4]{a}\div\sqrt[6]{a}=\sqrt[m]{a^4}\times\sqrt[2m]{a^7}\times\sqrt[4m]{a}$

$\sqrt[12]{a^{6k}}\times\sqrt[12]{a^3}\div\sqrt[12]{a^2}=\sqrt[4m]{a^{16}}\times\sqrt[4m]{a^{14}}\times\sqrt[4m]{a}$

$\sqrt[12]{a^{6k}\times a^3\div a^2}=\sqrt[4m]{a^{16}\times a^{14}\times a}$

$\sqrt[12]{a^{6k+3-2}}=\sqrt[4m]{a^{16+14+1}}$

$\sqrt[12]{a^{6k+1}}=\sqrt[4m]{a^{31}}$

$\therefore \sqrt[12m]{a^{m(6k+1)}}=\sqrt[12m]{a^{93}}$

즉 $m(6k+1)=93=3\times31$이므로

$m=3$, $6k+1=31$ 또는 $m=31$, $6k+1=3$

$\therefore m=3$, $k=5$ 또는 $m=31$, $k=\frac{1}{3}$

그런데 m, k는 자연수이므로 $m=3$, $k=5$

$\therefore mk=3\times5=15$

05 답 ②

$(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^3=(\sqrt{\sqrt[3]{2^3\times4}})^3=(\sqrt[3]{\sqrt{32}})^3=\sqrt{32}$

이때 $\sqrt{25}<\sqrt{32}<\sqrt{36}$이므로 $(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^3$보다 작은 자연수 중 가장 큰 수는 5이다.

06 답 ④

① $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{2^6}=2$

② $\sqrt[5]{(-3)^5}=-3$

③ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$

④ $27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^2=9$

⑤ $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0.5}=\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=4$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

07 답 $\frac{9}{2}$

분모, 분자에 2^4을 곱한다. / 분모, 분자에 2^1을 곱한다.

$$\frac{1}{2^{-4}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{-1}+1}+\frac{1}{2^0+1}+\frac{1}{2^1+1}+\cdots+\frac{1}{2^4+1}$$

$$=\frac{2^4}{1+2^4}+\cdots+\frac{2^1}{1+2^1}+\frac{1}{2^0+1}+\frac{1}{2^1+1}+\cdots+\frac{1}{2^4+1}$$

$$=\frac{2^4+1}{2^4+1}+\frac{2^3+1}{2^3+1}+\frac{2^2+1}{2^2+1}+\frac{2^1+1}{2^1+1}+\frac{1}{2^0+1}$$

$$=1+1+1+1+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{9}{2}$$

다른 풀이

자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^{-n}+1}=\frac{2^{-n}+1+2^n+1}{(2^n+1)(2^{-n}+1)}=\frac{2^n+2^{-n}+2}{1+2^n+2^{-n}+1}=1$$

이므로

$$\frac{1}{2^{-4}+1}+\frac{1}{2^4+1}=\cdots=\frac{1}{2^{-1}+1}+\frac{1}{2^1+1}=1$$

$\therefore$ (주어진 식)

$$=\left(\frac{1}{2^{-4}+1}+\frac{1}{2^4+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{-1}+1}+\frac{1}{2^1+1}\right)+\frac{1}{2^0+1}$$

$$=1+1+1+1+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{9}{2}$$

08 답 ①

$a^kb^l=9^k\left(\frac{1}{27}\right)^l=(3^2)^k(3^{-3})^l=3^{2k-3l}$

$k=1, l=1$일 때, $3^{2-3}=3^{-1}=\frac{1}{3}$

$k=1, l=2$일 때, $3^{2-6}=3^{-4}=\frac{1}{3^4}$

$k=2, l=1$일 때, $3^{4-3}=3$

$k=2, l=2$일 때, $3^{4-6}=3^{-2}=\frac{1}{3^2}$

$k=3, l=1$일 때, $3^{6-3}=3^3$

$k=3, l=2$일 때, $3^{6-6}=3^0=1$

$\therefore A=\left\{\frac{1}{3^4}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3}, 1, 3, 3^3\right\}$

따라서 집합 A의 원소가 아닌 것은 ①이다.

09 답 ⑤

$\sqrt[4]{2\sqrt[3]{16}}=\sqrt[4]{2\times2^{\frac{4}{3}}}=(2^{\frac{7}{3}})^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{7}{12}}$,

$\sqrt[8]{4}\times\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{4}}\times2^{-\frac{3}{4}}=2^{-\frac{1}{2}}$이므로

$\sqrt[4]{2\sqrt[3]{16}}\div\left\{\sqrt[8]{4}\times\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}=2^{\frac{7}{12}}\div2^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{7}{12}-\left(-\frac{1}{2}\right)}=2^{\frac{13}{12}}$

즉 $2^{\frac{13}{12}}=2^k$이므로 $k=\frac{13}{12}$

10 답 ⑤

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2a-3b}=(3^{-1})^{2a-3b}=3^{-2a+3b}=\frac{3^{3b}}{3^{2a}}=\frac{(3^b)^3}{(3^a)^2}=\frac{y^3}{x^2}$

11 답 ④

$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})-(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2$

$=\{(a^{\frac{1}{2}})^2-(a^{-\frac{1}{2}})^2\}-\{(a^{\frac{1}{2}})^2-2a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}+(a^{-\frac{1}{2}})^2\}$

$=(a-a^{-1})-(a-2+a^{-1})$

$=2-2a^{-1}$

$=2-\frac{2}{a}$

이때 $a=2+\sqrt{2}$에서 $\frac{2}{a}=\frac{2}{2+\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}$이므로

$2-\frac{2}{a}=2-(2-\sqrt{2})=\sqrt{2}$

12 답 ②

$x^2-8x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-8+x^{-1}=0$ $\therefore x+x^{-1}=8$

$\therefore (x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}-2=8-2=6$

이때 $x>1$이므로 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$

13 답 ②

$(a+a^{-1})^2=a^2+a^{-2}+2=119+2=121$이므로

$a+a^{-1}=11$ ($\because a>1$)

$(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}-2=11-2=9$이므로

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=3$ ($\because a>1$)

$\therefore \frac{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}{a+a^{-1}}=\frac{3}{11}$

참고 $a>1$에서 $0<a^{-1}<1$이므로 $a+a^{-1}>0$

또 $a>1$에서 $a^{\frac{1}{2}}>1, 0<a^{-\frac{1}{2}}<1$이므로 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}>0$

14 답 ③

주어진 식의 좌변의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$\frac{a^x-2a^{-x}}{a^x+2a^{-x}}=\frac{a^x(a^x-2a^{-x})}{a^x(a^x+2a^{-x})}=\frac{a^{2x}-2}{a^{2x}+2}$

즉 $\frac{a^{2x}-2}{a^{2x}+2}=\frac{1}{3}$이므로 $3a^{2x}-6=a^{2x}+2$

$2a^{2x}=8$ $\therefore a^{2x}=4$

$\therefore (a^{2x}+a^{-2x})^{\frac{1}{2}}=\left(a^{2x}+\frac{1}{a^{2x}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(4+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{17}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

15 답 ⑤

$f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$f(x)=\frac{a^x(a^x-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$

$f(p)=\frac{1}{4}$에서 $\frac{a^{2p}-1}{a^{2p}+1}=\frac{1}{4}$, $4a^{2p}-4=a^{2p}+1$

$3a^{2p}=5 \quad \therefore a^{2p}=\frac{5}{3}$ ……㉠

$f(q)=\frac{1}{5}$에서 $\frac{a^{2q}-1}{a^{2q}+1}=\frac{1}{5}$, $5a^{2q}-5=a^{2q}+1$

$4a^{2q}=6 \quad \therefore a^{2q}=\frac{3}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$f(p+q)=\frac{a^{2(p+q)}-1}{a^{2(p+q)}+1}=\frac{a^{2p}a^{2q}-1}{a^{2p}a^{2q}+1}=\frac{\frac{5}{3}\times\frac{3}{2}-1}{\frac{5}{3}\times\frac{3}{2}+1}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}}=\frac{3}{7}$

16 답 ①

$15^x=25$에서 $15=25^{\frac{1}{x}}=(5^2)^{\frac{1}{x}}=5^{\frac{2}{x}}$ ……㉠

$375^y=125$에서 $375=125^{\frac{1}{y}}=(5^3)^{\frac{1}{y}}=5^{\frac{3}{y}}$ ……㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{15}{375}=5^{\frac{2}{x}}\div5^{\frac{3}{y}}$

$5^{\frac{2}{x}-\frac{3}{y}}=\frac{1}{25}=5^{-2} \quad \therefore \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-2$

17 답 $\frac{4}{3}$

$a^x=16$에서 $a=16^{\frac{1}{x}}$ ……㉠

$b^y=16$에서 $b=16^{\frac{1}{y}}$ ……㉡

㉠×㉡을 하면 $ab=16^{\frac{1}{x}}\times16^{\frac{1}{y}}=16^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

이때 $ab=8$이므로 $16^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=8$

$2^{4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2^3$, $4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=3$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4}$, $\frac{x+y}{xy}=\frac{3}{4}$

$\therefore \frac{xy}{x+y}=\frac{4}{3}$

18 답 1000

$R_A=Q\times10^{-p}$, $R_B=Q\times10^{-(p+3)}$이므로

$\frac{R_A}{R_B}=\frac{Q\times10^{-p}}{Q\times10^{-(p+3)}}=10^{-p+p+3}=10^3=1000$

19 답 ⑤

$a^5=3$에서 $a=3^{\frac{1}{5}}$

$b^{12}=9$에서 $b=9^{\frac{1}{12}}=(3^2)^{\frac{1}{12}}=3^{\frac{1}{6}}$

$\therefore (\sqrt[7]{ab^3})^n=(ab^3)^{\frac{n}{7}}=\{3^{\frac{1}{5}}\times(3^{\frac{1}{6}})^3\}^{\frac{n}{7}}=(3^{\frac{1}{5}}\times3^{\frac{1}{2}})^{\frac{n}{7}}$

$=(3^{\frac{7}{10}})^{\frac{n}{7}}=3^{\frac{n}{10}}$

이때 $3^{\frac{n}{10}}$이 자연수가 되려면 n은 100 이하의 10의 배수이어야 하므로 $n=10, 20, 30, \cdots, 100$

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$10+20+30+\cdots+100=550$

20 답 ③

$a^x=b^y=2^z=k\ (k>0)$라 하면 $xyz\neq0$이므로

$k\neq1$

$a^x=k$에서 $a=k^{\frac{1}{x}}$

$b^y=k$에서 $b=k^{\frac{1}{y}}$

$2^z=k$에서 $2=k^{\frac{1}{z}}$

이때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{z}$이므로

$ab=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{3}{z}}=(k^{\frac{1}{z}})^3=2^3=8$

21 답 36

$a^x=5$에서 $a=5^{\frac{1}{x}}$

$b^{2y}=5$에서 $b=5^{\frac{1}{2y}}$

$c^{3z}=5$에서 $c=5^{\frac{1}{3z}}$

$\therefore abc=5^{\frac{1}{x}}\times5^{\frac{1}{2y}}\times5^{\frac{1}{3z}}=5^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}}$

이때 $abc=125$이므로 $5^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}}=125=5^3$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}=3$

위 식의 양변에 12를 곱하면

$\frac{12}{x}+\frac{6}{y}+\frac{4}{z}=36$

서술형 1 답 32

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=-\frac{1}{2}$이므로 ……❶

$\sqrt[3]{2^\alpha}\times\sqrt[3]{2^\beta}=2^{\frac{\alpha}{3}}\times2^{\frac{\beta}{3}}=2^{\frac{\alpha+\beta}{3}}=2^{\frac{6}{3}}=2^2=4$

$(64^\alpha)^\beta=64^{\alpha\beta}=(2^6)^{\alpha\beta}=2^{6\alpha\beta}=2^{6\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=2^{-3}=\frac{1}{8}$ ……❷

$\therefore \frac{\sqrt[3]{2^\alpha}\times\sqrt[3]{2^\beta}}{(64^\alpha)^\beta}=\frac{4}{\frac{1}{8}}=32$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $\sqrt[3]{2^\alpha}\times\sqrt[3]{2^\beta}$, $(64^\alpha)^\beta$의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ $\frac{\sqrt[3]{2^\alpha}\times\sqrt[3]{2^\beta}}{(64^\alpha)^\beta}$의 값을 구할 수 있다.	10%

서술형 2 답 (1) $\sqrt{7}$ (2) $4\sqrt{7}$ (3) 23

(1) $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}+2=5+2=7$

이때 $a>0$이므로 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$ ……❶

(2) $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^3-3(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})$

$=(\sqrt{7})^3-3\sqrt{7}$

$=7\sqrt{7}-3\sqrt{7}$

$=4\sqrt{7}$ ……❷

(3) $a^2+a^{-2}=(a+a^{-1})^2-2=5^2-2=23$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ a^2+a^{-2}의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 −39

$\left(\frac{1}{2^{18}}\right)^{\frac{1}{n}}=(2^{-18})^{\frac{1}{n}}=2^{-\frac{18}{n}}$ ……❶

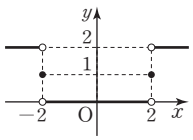
$2^{-\frac{18}{n}}$이 자연수가 되도록 하는 $-n$은 18의 양의 약수이므로
$-n=1, 2, 3, 6, 9, 18$ ← 거듭제곱의 지수 $-\frac{18}{n}$이 자연수이어야 한다.
$\therefore n=-1, -2, -3, -6, -9, -18$ ……❷
따라서 모든 정수 n의 값의 합은
$-1+(-2)+(-3)+(-6)+(-9)+(-18)=-39$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $\left(\frac{1}{2^{18}}\right)^{\frac{1}{n}}$을 2의 거듭제곱으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ $\left(\frac{1}{2^{18}}\right)^{\frac{1}{n}}$이 자연수가 되도록 하는 정수 n의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 n의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

1등급 10% 핵심 기출 문제 p. 29~30

01 답 ③
-3의 제곱근 중 실수인 것은 없으므로
$f_2(-3)=0$
-2의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-2}$의 1개이므로
$f_3(-2)=1$
5의 네제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[4]{5}, -\sqrt[4]{5}$의 2개이므로
$f_4(5)=2$
$\therefore f_2(-3)+f_3(-2)+f_4(5)=0+1+2=3$

02 답 ②
등식 $t^4=x^2-4$를 만족시키는 서로 다른 실수 t의 개수는 x^2-4의 네제곱근 중 실수인 것의 개수와 같다.
(i) $x^2-4>0$, 즉 $x<-2$ 또는 $x>2$일 때
x^2-4의 네제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[4]{x^2-4}, -\sqrt[4]{x^2-4}$의 2개이므로 $f(x)=2$
(ii) $x^2-4=0$, 즉 $x=\pm2$일 때
x^2-4의 네제곱근 중 실수인 것은 0의 1개이므로
$f(x)=1$
(iii) $x^2-4<0$, 즉 $-2<x<2$일 때
x^2-4의 네제곱근 중 실수인 것은 없으므로
$f(x)=0$
(i)~(iii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



03 답 36
$\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt[4]{a}=n$ (n은 자연수)이라 하고 양변을 네제곱하면
$\frac{9}{4}a=n^4$ $\therefore \frac{3^2}{4}a=n^4$ ……㉠
㉠의 좌변이 자연수 n의 네제곱이 되려면
$a=4\times3^2\times k^4$ (k는 자연수)
꼴이어야 한다.
따라서 $k=1$일 때 자연수 a의 최솟값은
$4\times3^2\times1^4=36$

다른 풀이
$\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt[4]{a}$가 자연수가 되려면 $\sqrt[4]{a}$는
$\sqrt{2\times3\times n^2}$ (n은 자연수)
꼴이어야 한다.
즉 $\sqrt[4]{a}$의 최솟값은 $n=1$일 때 $\sqrt{2\times3\times1^2}=\sqrt{6}$
따라서 자연수 a의 최솟값은 $\sqrt[4]{a}=\sqrt{6}$에서
$a=(\sqrt{6})^4=36$

04 답 11
집합 C의 원소는 b의 a제곱근 중 실수인 것들이다.
(i) $a=5$일 때
b의 다섯제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{-3}, \sqrt[5]{-2}, \sqrt[5]{2}, \sqrt[5]{3}, \sqrt[5]{4}$
(ii) $a=6$일 때
$b>0$, 즉 $b=2, 3, 4$이면
b의 여섯제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[6]{2}, \pm\sqrt[6]{3}, \pm\sqrt[6]{4}$
$b<0$, 즉 $b=-3, -2$이면
b의 여섯제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않는다.
(i), (ii)에서
$C=\{\sqrt[5]{-3}, \sqrt[5]{-2}, \sqrt[5]{2}, \sqrt[5]{3}, \sqrt[5]{4}, \sqrt[6]{2}, -\sqrt[6]{2}, \sqrt[6]{3}, -\sqrt[6]{3}, \sqrt[6]{4}, -\sqrt[6]{4}\}$
$\therefore n(C)=11$

05 답 2
정사각형의 넓이가 $\sqrt[n]{64}$이므로 정사각형의 한 변의 길이 $f(n)$은
$f(n)=\sqrt{\sqrt[n]{64}}=\sqrt[2n]{2^6}=2^{\frac{6}{2n}}=2^{\frac{3}{n}}$
$\therefore f(4)\times f(12)=2^{\frac{3}{4}}\times2^{\frac{3}{12}}=2^{\frac{3}{4}}\times2^{\frac{1}{4}}=2$

06 답 72
$\sqrt{2m}$이 자연수가 되려면
$m=2p^2$ (p는 자연수) ……㉠
꼴이어야 한다.
또 $\sqrt[3]{3m}$이 자연수가 되려면
$m=3^2q^3$ (q는 자연수) ……㉡
꼴이어야 한다.
$\sqrt{2m}, \sqrt[3]{3m}$이 모두 자연수가 되려면 ㉠, ㉡에서
$m=2^3\times3^2\times r^6$ (r는 자연수)
꼴이어야 한다.
따라서 $r=1$일 때 자연수 m의 최솟값은
$2^3\times3^2\times1^6=72$

07 답 ③
A 지역에서는
$H_1=12$ (m), $H_2=36$ (m), $V_1=2$ (m/s), $V_2=8$ (m/s)
이므로
$8=2\times\left(\frac{36}{12}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ $\therefore 4=3^{\frac{2}{2-k}}$ ……㉠

B 지역에서는

$H_1=10\,(\mathrm{m}),\ H_2=90\,(\mathrm{m}),\ V_1=a\,(\mathrm{m/s}),\ V_2=b\,(\mathrm{m/s})$

이므로

$b=a\times\left(\frac{90}{10}\right)^{\frac{2}{2-k}}$

$\therefore \frac{b}{a}=9^{\frac{2}{2-k}}=(3^2)^{\frac{2}{2-k}}=(3^{\frac{2}{2-k}})^2$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{b}{a}=4^2=16$

08 답 28

$\sqrt[4]{n^m}=n^{\frac{m}{4}}$ ……㉠

(i) $m=0$일 때

n의 값에 관계없이 ㉠은 유리수가 된다.

즉 n의 값은 1, 2, 3, …, 16이므로 그 개수는 16이다.

(ii) $m=-1$ 또는 $m=1$일 때

n이 어떤 자연수의 네제곱이어야 한다.

즉 n의 값은 1, 16이므로 그 개수는 2이다.

(iii) $m=-2$ 또는 $m=2$일 때

n이 어떤 자연수의 제곱이어야 한다.

즉 n의 값은 1, 4, 9, 16이므로 그 개수는 4이다.

(i)~(iii)에서 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는

$16+2\times2+2\times4=28$

09 답 ⑤

집합 X의 원소는 b의 a제곱근 중 실수인 것들이다.

(i) $a=3$일 때

b의 세제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[3]{-9},\ \sqrt[3]{-3},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{9}$

(ii) $a=4$일 때

b의 네제곱근 중 실수인 것은

$\pm\sqrt[4]{3},\ \pm\sqrt[4]{9}=\pm\sqrt{3}$

(i), (ii)에서

$X=\{\sqrt[3]{-9},\ \sqrt[3]{-3},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{9},\ \sqrt[4]{3},\ -\sqrt[4]{3},\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3}\}$

ㄱ. $\sqrt[3]{-9}\in X$

ㄴ. 집합 X의 원소의 개수는 8이다.

ㄷ. 집합 X의 원소 중 양수인 것은 $\sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{9},\ \sqrt[4]{3},\ \sqrt{3}$이므로 그 곱은

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[4]{3}\times\sqrt{3}&=3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{2}}\\&=3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}\\&=3^{\frac{7}{4}}\\&=\sqrt[4]{3^7}\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10 답 12

$64^{\frac{1}{m}}=k\times81^{\frac{1}{n}}$의 양변을 $81^{\frac{1}{n}}$으로 나누면

$k=\frac{64^{\frac{1}{m}}}{81^{\frac{1}{n}}}=\frac{(2^6)^{\frac{1}{m}}}{(3^4)^{\frac{1}{n}}}=2^{\frac{6}{m}}\times3^{-\frac{4}{n}}$

두 밑 2와 3은 서로소이므로 자연수 k가 존재하려면 밑 2의 지수 $\frac{6}{m}$과 밑 3의 지수 $-\frac{4}{n}$가 모두 자연수가 되어야 한다.

$\frac{6}{m}$이 자연수가 되려면 m은 6의 양의 약수이어야 한다.

즉 m의 값은 1, 2, 3, 6이므로 그 개수는 4이다.

또 $-\frac{4}{n}$가 자연수가 되려면 $-n$은 4의 양의 약수이어야 하므로

$-n=1,\ 2,\ 4$

즉 n의 값은 -1, -2, -4이므로 그 개수는 3이다.

따라서 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는

$4\times3=12$

02 로그

개념 완성하기 p.33~34

01 답 $4=\log_2 16$

02 답 $-2=\log_{10} 0.01$

03 답 $-3=\log_5 \frac{1}{125}$

04 답 $\frac{1}{2}=\log_{36} 6$

05 답 $10^3=1000$

06 답 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=32$

07 답 $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

08 답 $(\sqrt{3})^4=9$

09 답 $x>-1$
진수의 조건에서 $x+1>0$ $\therefore x>-1$

10 답 $0<x<2$
진수의 조건에서 $-x^2+2x>0$
$x^2-2x<0$, $x(x-2)<0$ $\therefore 0<x<2$

11 답 $4<x<5$ 또는 $x>5$
밑의 조건에서 $x-4>0$, $x-4\neq 1$
$x>4$, $x\neq 5$ $\therefore 4<x<5$ 또는 $x>5$

12 답 $1<x<2$ 또는 $2<x<4$
밑의 조건에서 $x-1>0$, $x-1\neq 1$
$x>1$, $x\neq 2$ $\therefore 1<x<2$ 또는 $x>2$ ……㉠
진수의 조건에서 $4-x>0$ $\therefore x<4$ ……㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$1<x<2$ 또는 $2<x<4$

13 답 $4<x<5$ 또는 $x>5$
밑의 조건에서 $x-4>0$, $x-4\neq 1$
$x>4$, $x\neq 5$ $\therefore 4<x<5$ 또는 $x>5$ ……㉠
진수의 조건에서 $x^2+x-6>0$
$(x+3)(x-2)>0$ $\therefore x<-3$ 또는 $x>2$ ……㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$4<x<5$ 또는 $x>5$

14 답 $3<x<4$ 또는 $4<x<5$
밑의 조건에서 $x-3>0$, $x-3\neq 1$
$x>3$, $x\neq 4$ $\therefore 3<x<4$ 또는 $x>4$ ……㉠
진수의 조건에서 $-x^2+7x-10>0$
$x^2-7x+10<0$, $(x-2)(x-5)<0$
$\therefore 2<x<5$ ……㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$3<x<4$ 또는 $4<x<5$

15 답 3
$\log_4 64=x$라 하면 로그의 정의에 의하여
$4^x=64=4^3$ $\therefore x=3$

16 답 2
$\log_5 25=x$라 하면 로그의 정의에 의하여
$5^x=25=5^2$ $\therefore x=2$

17 답 -3
$\log_{10} 0.001=x$라 하면 로그의 정의에 의하여
$10^x=0.001=10^{-3}$ $\therefore x=-3$

18 답 -4
$\log_3 \frac{1}{81}=x$라 하면 로그의 정의에 의하여
$3^x=\frac{1}{81}=3^{-4}$ $\therefore x=-4$

19 답 8
$\log_{\sqrt{2}} 16=x$라 하면 로그의 정의에 의하여
$(\sqrt{2})^x=16$, $2^{\frac{x}{2}}=2^4$
$\frac{x}{2}=4$ $\therefore x=8$

20 답 -5
$\log_{\frac{1}{3}} 243=x$라 하면 로그의 정의에 의하여
$\left(\frac{1}{3}\right)^x=243$, $3^{-x}=3^5$
$-x=5$ $\therefore x=-5$

21 답 -2
$\log_{\frac{1}{100}} 10000=x$라 하면 로그의 정의에 의하여
$\left(\frac{1}{100}\right)^x=10000$, $10^{-2x}=10^4$
$-2x=4$ $\therefore x=-2$

22 답 $\frac{7}{2}$
$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{128}=x$라 하면 로그의 정의에 의하여
$\left(\frac{1}{4}\right)^x=\frac{1}{128}$, $2^{-2x}=2^{-7}$
$-2x=-7$ $\therefore x=\frac{7}{2}$

23 답 1
$\log_5 25=x$라 하면 로그의 정의에 의하여
$5^x=25=5^2$ $\therefore x=2$
즉 $\log_2(\log_5 25)=\log_2 2$이므로 $\log_2 2=y$라 하면
$2^y=2$ $\therefore y=1$
$\therefore \log_2(\log_5 25)=1$

24 답 -3

$\log_{81}\sqrt{3}=x$라 하면 로그의 정의에 의하여

$81^x=\sqrt{3},\ 3^{4x}=3^{\frac{1}{2}}$

$4x=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{1}{8}$

즉 $\log_2(\log_{81}\sqrt{3})=\log_2\frac{1}{8}$이므로 $\log_2\frac{1}{8}=y$라 하면

$2^y=\frac{1}{8}=2^{-3}$ $\quad\therefore y=-3$

$\therefore \log_2(\log_{81}\sqrt{3})=-3$

25 답 $\frac{1}{5}$

$\log_5 x=-1$에서 $5^{-1}=x$ $\quad\therefore x=\frac{1}{5}$

26 답 81

$\log_{\sqrt{3}}x=8$에서 $(\sqrt{3})^8=x$ $\quad\therefore x=81$

27 답 10

$\log_x 1000=3$에서 $x^3=1000$

$\therefore x=1000^{\frac{1}{3}}=(10^3)^{\frac{1}{3}}=10$

28 답 $\frac{1}{2}$

$\log_x\frac{1}{32}=5$에서 $x^5=\frac{1}{32}$

$\therefore x=\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{2}$

29 답 1

$\log_3 3-\log_6 1=1-0=1$

30 답 2

$\log_2\frac{1}{3}+\log_2 12=\log_2\left(\frac{1}{3}\times 12\right)=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

31 답 $-\frac{9}{2}$

$$\begin{aligned}\log_5\sqrt{5}+\log_2\frac{1}{8}-\log_3\sqrt{81}&=\log_5 5^{\frac{1}{2}}+\log_2 2^{-3}-\log_3 3^2\\&=\frac{1}{2}\log_5 5-3\log_2 2-2\log_3 3\\&=\frac{1}{2}-3-2=-\frac{9}{2}\end{aligned}$$

32 답 -1

$$\begin{aligned}\log_3 12-2\log_3 6&=\log_3 12-\log_3 6^2=\log_3\frac{12}{36}\\&=\log_3\frac{1}{3}=\log_3 3^{-1}=-1\end{aligned}$$

33 답 2

$$\begin{aligned}\log_5 9+2\log_5\frac{5}{3}&=\log_5 3^2+2(\log_5 5-\log_5 3)\\&=2\log_5 3+2\log_5 5-2\log_5 3\\&=2\log_5 5=2\end{aligned}$$

34 답 0

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\log_2 25+\log_2\frac{1}{5}&=\frac{1}{2}\log_2 5^2+\log_2 5^{-1}\\&=\frac{1}{2}\times 2\log_2 5-\log_2 5\\&=0\end{aligned}$$

35 답 1

$$\begin{aligned}2\log_2\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}\log_2 9&=\log_2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2+\log_2 9^{\frac{1}{2}}\\&=\log_2\frac{2}{3}+\log_2 3\\&=\log_2\left(\frac{2}{3}\times 3\right)\\&=\log_2 2=1\end{aligned}$$

36 답 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\log_3 9-\log_3 3\sqrt{3}&=\log_3\frac{9}{3\sqrt{3}}=\log_3\sqrt{3}\\&=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

37 답 3

$\log_2 27\times\log_3 2=\log_2 3^3\times\log_3 2=3\log_2 3\times\log_3 2=3$

38 답 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\log_2 9\times\log_9\sqrt{2}&=\log_2 9\times\log_9 2^{\frac{1}{2}}=\log_2 9\times\frac{1}{2}\log_9 2\\&=\frac{1}{2}\log_2 9\times\log_9 2=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

39 답 2

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log_{28}2}-\frac{1}{\log_7 2}&=\log_2 28-\log_2 7=\log_2\frac{28}{7}\\&=\log_2 2^2=2\end{aligned}$$

40 답 1

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log_6 3}-\log_9 4&=\log_3 6-\log_{3^2}2^2=\log_3 6-\frac{2}{2}\log_3 2\\&=\log_3 6-\log_3 2=\log_3\frac{6}{2}\\&=\log_3 3=1\end{aligned}$$

41 답 6

$\log_5 3+\log_5 2=\log_5(3\times 2)=\log_5 6$이므로

(주어진 식)$=5^{\log_5 6}=6^{\log_5 5}=6$

42 답 6

$\log_3 30-\log_3 5=\log_3\frac{30}{5}=\log_3 6$이므로

(주어진 식)$=3^{\log_3 6}=6^{\log_3 3}=6$

43 답 $2a+b$

$\log_{10}12=\log_{10}(2^2\times 3)=2\log_{10}2+\log_{10}3=2a+b$

44 답 $2-a$

$\log_{10} 50=\log_{10} \frac{100}{2}=\log_{10} 10^2-\log_{10} 2=2-a$

45 답 $2b-1$

$\log_{10} 0.9=\log_{10} \frac{9}{10}=\log_{10} 3^2-\log_{10} 10$

$=2\log_{10} 3-1=2b-1$

46 답 $\frac{1}{2}(-a+b+1)$

$\log_{10} \sqrt{15}=\log_{10} 15^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_{10}(3\times 5)$

$=\frac{1}{2}(\log_{10} 3+\log_{10} 5)$

$=\frac{1}{2}\{\log_{10} 3+(1-\log_{10} 2)\}$

$=\frac{1}{2}\{b+(1-a)\}$

$=\frac{1}{2}(-a+b+1)$

47 답 $\frac{2a+2b}{1-a}$

$\log_5 36=\frac{\log_{10} 36}{\log_{10} 5}=\frac{\log_{10}(2^2\times 3^2)}{\log_{10} 5}$

$=\frac{2\log_{10} 2+2\log_{10} 3}{1-\log_{10} 2}$

$=\frac{2a+2b}{1-a}$

48 답 $\frac{a+2b}{2-2a}$

$\log_5 \sqrt{18}=\frac{\log_{10} 18^{\frac{1}{2}}}{\log_{10} 5}=\frac{\frac{1}{2}\log_{10}(2\times 3^2)}{\log_{10} 5}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\log_{10} 2+2\log_{10} 3}{1-\log_{10} 2}$

$=\frac{a+2b}{2-2a}$

49 답 0.7404

50 답 1.7582

$\log 57.3=\log(5.73\times 10)=\log 5.73+\log 10$

$=0.7582+1=1.7582$

51 답 2.7505

$\log 563=\log(5.63\times 10^2)=\log 5.63+2\log 10$

$=0.7505+2=2.7505$

52 답 1.88245

$\log\sqrt{5820}=\frac{1}{2}\log(5.82\times 10^3)=\frac{1}{2}(\log 5.82+3\log 10)$

$=\frac{1}{2}(0.7649+3)=1.88245$

53 답 -0.2441

$\log 0.570=\log(5.70\times 10^{-1})=\log 5.70+\log 10^{-1}$

$=0.7559-1=-0.2441$

54 답 -1.2358

$\log 0.0581=\log(5.81\times 10^{-2})=\log 5.81+\log 10^{-2}$

$=0.7642-2=-1.2358$

55 답 3.3766

$\log 2380=\log(2.38\times 10^3)=\log 2.38+3\log 10$

$=0.3766+3=3.3766$

56 답 1.3766

$\log 23.8=\log(2.38\times 10)=\log 2.38+\log 10$

$=0.3766+1=1.3766$

57 답 -1.6234

$\log 0.0238=\log(2.38\times 10^{-2})=\log 2.38+\log 10^{-2}$

$=0.3766-2=-1.6234$

58 답 -2.6234

$\log 0.00238=\log(2.38\times 10^{-3})=\log 2.38+\log 10^{-3}$

$=0.3766-3=-2.6234$

59 답 0.7922

$\log\sqrt[3]{238}=\frac{1}{3}\log(2.38\times 10^2)=\frac{1}{3}(\log 2.38+2\log 10)$

$=\frac{1}{3}(0.3766+2)=0.7922$

유형 완성하기 p.35~50

01 답 1024

$\log_2 a=7$에서 $a=2^7$

$\log_b \frac{1}{2}=\frac{1}{3}$에서 $b^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$ $\therefore b=\left(\frac{1}{2}\right)^3=2^{-3}$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{2^7}{2^{-3}}=2^{10}=1024$

01-1 답 ④

$\log_a 2=\frac{1}{3}$에서 $a^{\frac{1}{3}}=2$ $\therefore a=2^3=8$

$\therefore a^2=8^2=64$

02 답 ⑤

$\log_4(\log_3 k)=1$에서 $\log_3 k=4$

$\therefore k=3^4=81$

02-1 답 2

$\log_2\{\log_3(\log_k 8)\}=0$에서 $\log_3(\log_k 8)=1$

$\log_k 8=3$ $\therefore k^3=8=2^3$

$\therefore k=2$

03 답 2

$x=\log_2(\sqrt{2}+1)$에서 $2^x=\sqrt{2}+1$ ……❶

$\therefore 2^{-x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$ ……❷

$\therefore 2^x-2^{-x}=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)=2$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 2^x의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ 2^{-x}의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 2^x-2^{-x}의 값을 구할 수 있다.	20%

03-1 답 ①

$x=\log_7(\sqrt{5}-2)$에서 $7^x=\sqrt{5}-2$

$\therefore 7^{-x}=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$

$\therefore \dfrac{(7^x+7^{-x})^2}{7^x-7^{-x}}=\dfrac{\{\sqrt{5}-2+(\sqrt{5}+2)\}^2}{\sqrt{5}-2-(\sqrt{5}+2)}=\dfrac{(2\sqrt{5})^2}{-4}=-5$

04 답 ①

밑의 조건에서 $x-1>0$, $x-1\neq1$이므로

$x>1$, $x\neq2$ $\therefore 1<x<2$ 또는 $x>2$ ……㉠

진수의 조건에서 $-x^2+9x-8>0$이므로

$x^2-9x+8<0$, $(x-1)(x-8)<0$

$\therefore 1<x<8$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<2$ 또는 $2<x<8$

따라서 자연수 x의 값은 3, 4, 5, 6, 7이므로 그 합은

$3+4+5+6+7=25$

04-1 답 5

밑의 조건에서 $x-3>0$, $x-3\neq1$이므로

$x>3$, $x\neq4$ $\therefore 3<x<4$ 또는 $x>4$ ……㉠

진수의 조건에서 $9-x>0$이므로

$x<9$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<x<4$ 또는 $4<x<9$

따라서 정수 x의 최솟값은 5이다.

05 답 ④

밑의 조건에서 $k-3>0$, $k-3\neq1$이므로

$k>3$, $k\neq4$ $\therefore 3<k<4$ 또는 $k>4$ ……㉠

진수의 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2kx+9k>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2kx+9k=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-9k<0$

$k(k-9)<0$ $\therefore 0<k<9$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<k<4$ 또는 $4<k<9$

따라서 정수 k의 값은 5, 6, 7, 8이므로 그 개수는 4이다.

Lecture 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립할 조건

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립하려면 $a>0$, $b^2-4ac<0$

05-1 답 22

밑의 조건에서 $a-2>0$, $a-2\neq1$이므로

$a>2$, $a\neq3$ $\therefore 2<a<3$ 또는 $a>3$ ……㉠ ……❶

진수의 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+2a>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+ax+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\times1\times2a<0$

$a^2-8a<0$, $a(a-8)<0$

$\therefore 0<a<8$ ……㉡ ……❷

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$2<a<3$ 또는 $3<a<8$

따라서 정수 a의 값은 4, 5, 6, 7이므로 그 합은

$4+5+6+7=22$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 밑의 조건을 이용하여 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❷ 진수의 조건을 이용하여 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

06 답 ②

$a+2\neq0$ $\therefore a\neq-2$ $a+2\neq1$ 또는 $a+2\neq-1$ $\therefore a\neq-1$ 또는 $a\neq-3$

밑의 조건에서 $|a+2|>0$, $|a+2|\neq1$

$\therefore a=-3$, $a\neq-2$, $a\neq-1$ ……㉠

진수의 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+3-a>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+ax+3-a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\times1\times(3-a)<0$

$a^2+4a-12<0$, $(a+6)(a-2)<0$

$\therefore -6<a<2$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-6<a<-3$ 또는 $-3<a<-2$ 또는 $-2<a<-1$

또는 $-1<a<2$

따라서 정수 a의 값은 -5, -4, 0, 1이므로 그 개수는 4이다.

06-1 답 ③

밑의 조건에서 $(k-2)^2>0$, $(k-2)^2\neq1$

$\therefore k\neq1$, $k\neq2$, $k\neq3$ ……㉠

진수의 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2kx+5>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2kx+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-5<0$, $(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})<0$

$\therefore -\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-\sqrt{5}<k<1$ 또는 $1<k<2$ 또는 $2<k<\sqrt{5}$

따라서 정수 k의 값은 -2, -1, 0이므로 그 개수는 3이다.

07 답 ③

$$\begin{aligned}\log_2\sqrt{18}+\log_2\sqrt[3]{3}-\frac{4}{3}\log_2 3&=\log_2 3\sqrt{2}+\log_2\sqrt[3]{3}-\log_2 3^{\frac{4}{3}}\\&=\log_2 3\sqrt{2}+\log_2\sqrt[3]{3}-\log_2\sqrt[3]{3^4}\\&=\log_2\frac{3\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^4}}\\&=\log_2\sqrt{2}\\&=\log_2 2^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

07-1 답 ①

$\log_2 6+\log_2 4\sqrt{3}-3\log_2\sqrt{3}=\log_2 6+\log_2 4\sqrt{3}-\log_2(\sqrt{3})^3$

$=\log_2\dfrac{6\times 4\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\log_2 8$

$=\log_2 2^3=3$

08 답 ②

① $\log_2 3-\log_2 12=\log_2\dfrac{3}{12}=\log_2 2^{-2}=-2$

② $\log_2\sqrt[3]{6}-\dfrac{1}{3}\log_2\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{3}\log_2(2\times 3)-\dfrac{1}{3}(\log_2 3-\log_2 4)$

$=\dfrac{1}{3}(1+\log_2 3)-\dfrac{1}{3}(\log_2 3-2)$

$=1$

③ $\log_2 9\times\log_3\sqrt{2}=\log_2 3^2\times\log_3 2^{\frac{1}{2}}=2\log_2 3\times\dfrac{1}{2}\log_3 2$

$=\log_2 3\times\log_3 2=1$

④ $\log_2\dfrac{2}{3}+2\log_2\sqrt{12}=(1-\log_2 3)+2\log_2(2^2\times 3)^{\frac{1}{2}}$

$=1-\log_2 3+\log_2(2^2\times 3)$

$=1-\log_2 3+(2+\log_2 3)$

$=3$

⑤ $\log_{16}64+\log_{0.1}\sqrt[4]{10}=\log_{2^4}2^6+\log_{10^{-1}}10^{\frac{1}{4}}$

$=\dfrac{6}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

08-1 답 ③

① $\log_2 5+\log_2\dfrac{16}{5}=\log_2\left(5\times\dfrac{16}{5}\right)=\log_2 16=\log_2 2^4=4$

② $\log_2\sqrt{6}-\dfrac{1}{2}\log_2 3=\log_2\sqrt{6}-\log_2\sqrt{3}=\log_2\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

$=\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

③ $\log_7(5-3\sqrt{2})+\log_7(5+3\sqrt{2})=\log_7(5-3\sqrt{2})(5+3\sqrt{2})$

$=\log_7(25-18)$

$=\log_7 7=1$

④ $\log_3 27\times\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{16}=\log_3 3^3\times\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=3\times 4=12$

⑤ $\log_5 7-2\log_5\dfrac{1}{5}-\log_5 35=\log_5 7-2\log_5 5^{-1}-\log_5(5\times 7)$

$=\log_5 7+2-\log_5 5-\log_5 7$

$=2-1=1$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

09 답 2

$\log_{16}3a+\log_{16}2b+\log_{16}c=\dfrac{1}{2}$에서

$\log_{16}(3a\times 2b\times c)=\dfrac{1}{2}$, $\log_{16}6abc=\dfrac{1}{2}$

$6abc=16^{\frac{1}{2}}$, $6abc=4$ $\therefore 3abc=2$

09-1 답 9

$\log_4 2a+2\log_4\sqrt{b}+\dfrac{1}{3}\log_4(4c)^3=2$에서

$\log_4 2a+2\log_4 b^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{3}\log_4(4c)^3=2$

$\log_4 2a+\log_4 b+\log_4 4c=2$, $\log_4(2a\times b\times 4c)=2$

$\log_4 8abc=2$, $8abc=4^2=16$ $\therefore abc=2$

$\therefore 3^{abc}=3^2=9$

10 답 ②

$\log_2(x-1)+\log_2(x+1)=\log_2(x-1)(x+1)$

$=\log_2(x^2-1)$

$=\log_2\{(\sqrt{5})^2-1\}$

$=\log_2 4$

$=\log_2 2^2$

$=2$

10-1 답 ③

$\log_3(x-1)+\log_3(x^2+x+1)=\log_3(x-1)(x^2+x+1)$

$=\log_3(x^3-1)$

$=\log_3\{(\sqrt[3]{28})^3-1\}$

$=\log_3 27=\log_3 3^3$

$=3$

11 답 −2

$\log_{10}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\log_{10}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\log_{10}\left(1-\dfrac{1}{4}\right)$

$+\cdots+\log_{10}\left(1-\dfrac{1}{100}\right)$

$=\log_{10}\dfrac{1}{2}+\log_{10}\dfrac{2}{3}+\log_{10}\dfrac{3}{4}+\cdots+\log_{10}\dfrac{99}{100}$

$=\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\cdots\times\dfrac{99}{100}\right)$

$=\log_{10}\dfrac{1}{100}=\log_{10}10^{-2}$

$=-2$

11-1 답 6

$\log_2(1+1)+\log_2\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\log_2\left(1+\dfrac{1}{3}\right)$

$+\cdots+\log_2\left(1+\dfrac{1}{63}\right)$

$=\log_2 2+\log_2\dfrac{3}{2}+\log_2\dfrac{4}{3}+\cdots+\log_2\dfrac{64}{63}$

$=\log_2\left(2\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\cdots\times\dfrac{64}{63}\right)$

$=\log_2 64=\log_2 2^6$

$=6$

12 답 ⑤

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{\log_3 b-\log_3 a}{3-(-1)}=\dfrac{\log_3 b-\log_3 a}{4}$

이때 직선 AB가 직선 $y=-2x+5$에 수직이므로 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이다.

즉 $\dfrac{\log_3 b-\log_3 a}{4}=\dfrac{1}{2}$이므로 $\log_3 b-\log_3 a=2$

$\log_3\dfrac{b}{a}=2$ $\therefore \dfrac{b}{a}=3^2=9$

12-1 답 125

$\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times5+1\times2}{2+1}, \frac{2\times\log_5 b+1\times2\log_5 a}{2+1}\right)$

$\therefore \left(4, \frac{2\log_5 b+2\log_5 a}{3}\right)$ ……❶

이때 $\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표가 $(4, 2)$이므로

$\frac{2\log_5 b+2\log_5 a}{3}=2,\ 2\log_5 b+2\log_5 a=6$

$\log_5 b+\log_5 a=3,\ \log_5 ab=3$

$\therefore ab=5^3=125$ ……❷

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	50%
❷ ab의 값을 구할 수 있다.	50%

13 답 ②

$\log_a 3\times\log_3 5\times\log_5 b=12$에서

$\frac{1}{\log_3 a}\times\log_3 5\times\frac{\log_3 b}{\log_3 5}=12$

$\frac{\log_3 b}{\log_3 a}=12 \quad \therefore \log_a b=12$

$\therefore \log_{a^2}\sqrt{b}=\log_{a^2} b^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\log_a b$

$=\frac{1}{4}\times12=3$

13-1 답 ②

$\log_3 32\times\log_2 k=20$에서 $\log_3 2^5\times\log_2 k=20$

$5\log_3 2\times\log_2 k=20,\ \log_3 2\times\log_2 k=4$

$\frac{\log_9 2}{\log_9 3}\times\frac{\log_9 k}{\log_9 2}=4,\ \frac{\log_9 k}{\log_9 3}=4$

$\log_3 9\times\log_9 k=4,\ 2\log_9 k=4$

$\therefore \log_9 k=2$

14 답 2

$\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_4 a}+\frac{1}{\log_8 a}=6$에서

$\log_a 2+\log_a 4+\log_a 8=6$

$\log_a(2\times4\times8)=6,\ \log_a 64=6$

$a^6=64=2^6 \quad \therefore a=2\ (\because a>0)$

14-1 답 3

$\frac{1}{\log_3 a}-\frac{1}{\log_5 a}+\frac{1}{\log_{15} a}=\frac{2}{\log_k a}$에서

$\log_a 3-\log_a 5+\log_a 15=2\log_a k$

$\log_a\frac{3\times15}{5}=\log_a k^2,\ \log_a 9=\log_a k^2$

$k^2=9=3^2 \quad \therefore k=3\ (\because k>0)$

15 답 2

$\log_a x=3,\ \log_b x=8,\ \log_c x=24$에서

$\log_x a=\frac{1}{3},\ \log_x b=\frac{1}{8},\ \log_x c=\frac{1}{24}$ ……❶

$\therefore \log_{abc} x=\frac{1}{\log_x abc}=\frac{1}{\log_x a+\log_x b+\log_x c}$

$=\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}}$

$=\frac{1}{\frac{12}{24}}=2$ ……❷

채점 기준	비율
❶ $\log_x a$, $\log_x b$, $\log_x c$의 값을 구할 수 있다.	60%
❷ $\log_{abc} x$의 값을 구할 수 있다.	40%

15-1 답 7

$\log_a x=2,\ \log_b x=6,\ \log_c x=12$에서

$\log_x a=\frac{1}{2},\ \log_x b=\frac{1}{6},\ \log_x c=\frac{1}{12}$

$\therefore 2\log_{ab} x+\log_{bc} x=\frac{2}{\log_x ab}+\frac{1}{\log_x bc}$

$=\frac{2}{\log_x a+\log_x b}+\frac{1}{\log_x b+\log_x c}$

$=\frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}+\frac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}$

$=\frac{2}{\frac{4}{6}}+\frac{1}{\frac{3}{12}}$

$=3+4$

$=7$

16 답 164

$\log_3 1+\log_4 16+3^{\log_9 16}+16^{\log_2 3}$

$=0+\log_4 4^2+3^{\log_{3^2} 16}+3^{\log_2 16}$

$=2+3^{\log_{3^2} 2^4}+3^{\log_2 2^4}$

$=2+3^4+3^4$

$=164$

16-1 답 ④

$A=3^{\log_3 45-\log_3 18}=3^{\log_3\frac{45}{18}}=3^{\log_3\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$

$B=\log_2\{\log_4(\log_7 49)\}=\log_2\{\log_4(\log_7 7^2)\}$

$=\log_2(\log_4 2)=\log_2(\log_{2^2} 2)$

$=\log_2\frac{1}{2}=-1$

$\therefore 10(A+B)=10\left\{\frac{5}{2}+(-1)\right\}=15$

17 답 ③

$(\log_5 4+\log_{25} 8)(\log_2 5+\log_4 125)$

$=(\log_5 2^2+\log_{5^2} 2^3)(\log_2 5+\log_{2^2} 5^3)$

$=\left(2\log_5 2+\frac{3}{2}\log_5 2\right)\left(\log_2 5+\frac{3}{2}\log_2 5\right)$

$=\frac{7}{2}\log_5 2\times\frac{5}{2}\log_2 5$

$=\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times1$

$=\frac{35}{4}$

17-1 답 ②

$$\frac{(\log_3 25+\log_9 5)(\log_5 3+\log_{25} 3)}{(\log_9 32-\log_3 16)(\log_2 9-\log_4 243)}$$

$$=\frac{(\log_3 5^2+\log_{3^2} 5)(\log_5 3+\log_{5^2} 3)}{(\log_{3^2} 2^5-\log_3 2^4)(\log_2 3^2-\log_{2^2} 3^5)}$$

$$=\frac{\left(2\log_3 5+\frac{1}{2}\log_3 5\right)\left(\log_5 3+\frac{1}{2}\log_5 3\right)}{\left(\frac{5}{2}\log_3 2-4\log_3 2\right)\left(2\log_2 3-\frac{5}{2}\log_2 3\right)}$$

$$=\frac{\frac{5}{2}\log_3 5\times\frac{3}{2}\log_5 3}{-\frac{3}{2}\log_3 2\times\left(-\frac{1}{2}\log_2 3\right)}$$

$$=\frac{\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times 1}{-\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 1}=\frac{\frac{15}{4}}{\frac{3}{4}}=5$$

18 답 ④

$$\log_3 10\times\log_5 3\times\log_2 25=\frac{\log_3 10}{\log_3 5}\times\log_2 5^2$$

$$=\log_5 10\times 2\log_2 5$$

$$=\frac{2\log_5 10}{\log_5 2}$$

$$=2\log_2 10$$

$$=\log_2 100$$

$\therefore 2^{\log_3 10\times\log_5 3\times\log_2 25}=2^{\log_2 100}=100$

18-1 답 81

$A=\log_3 7\times 2\log_5 3\times\log_7 25$

$=\log_3 7\times\frac{2}{\log_3 5}\times\frac{\log_3 5^2}{\log_3 7}$ ……❶

$=\log_3 7\times\frac{2}{\log_3 5}\times\frac{2\log_3 5}{\log_3 7}$

$=4$ ……❷

$\therefore 3^A=3^4=81$ ……❸

채점 기준	비율
❶ A를 밑이 3인 로그로 바꿀 수 있다.	40%
❷ A의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 3^4의 값을 구할 수 있다.	20%

19 답 (가) a (나) c^{pq} (다) $\log_c b$

$\log_a b=p$, $\log_c a=q$라 하면 $a^p=b$, $c^q=$ (가) a

지수법칙에 의하여 $b=a^p=(c^q)^p=$ (나) c^{pq}이므로

$pq=$ (다) $\log_c b$

$\therefore \log_a b\times\log_c a=\log_c b$ ……㉠

그런데 $a\neq 1$이므로 $\log_c a\neq 0$

㉠의 양변을 $\log_c a$로 나누면 $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

19-1 답 ③

$x=\log_{a^m} b^n$이라 하면 로그의 정의에 의하여

$b^n=$ (가) $(a^m)^x=(a^x)^{\text{(나) } m}$이므로

$a^x=(b^n)^{\frac{1}{m}}=$ (다) $b^{\frac{n}{m}}$

$\therefore x=\log_a$ (다) $b^{\frac{n}{m}}=\frac{n}{m}\log_a b$

20 답 (가) 유리수 (나) 3^m (다) 홀수

$\log_2 3$이 (가) 유리수 라 가정하면 서로소인 두 자연수 m, $n(m<n)$에 대하여 $\log_2 3=\frac{n}{m}$으로 나타낼 수 있다.

로그의 정의에 의하여 $2^{\frac{n}{m}}=3$ $\therefore 2^n=$ (나) 3^m

이때 2^n은 짝수이고, (나) 3^m은 (다) 홀수이므로 2^n과 3^m은 항상 같지 않다.

따라서 $\log_2 3$은 무리수이다.

20-1 답 (가) $\log_a x$ (나) $\log_c a$ (다) $\log_c b$

$x=a^{\log_b c}$이라 하면 로그의 정의에 의하여

(가) $\log_a x=\log_b c$

이때 밑의 변환 공식에 의하여

(가) $\log_a x=\frac{\log_c x}{\text{(나) }\log_c a}$, $\log_b c=\frac{1}{\text{(다) }\log_c b}$이므로

$$\frac{\log_c x}{\text{(나) }\log_c a}=\frac{1}{\text{(다) }\log_c b}$$

$$\therefore \log_c x=\frac{\text{(나) }\log_c a}{\text{(다) }\log_c b}=\log_b a$$

따라서 $x=c^{\log_b a}$이므로

$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

21 답 ⑤

$\log_7 2=a$, $\log_7 3=b$이므로

$$\log_{14} 84=\frac{\log_7 84}{\log_7 14}=\frac{\log_7(2^2\times 3\times 7)}{\log_7(2\times 7)}$$

$$=\frac{2\log_7 2+\log_7 3+1}{\log_7 2+1}$$ ← $\log_7 2=a$, $\log_7 3=b$를 대입

$$=\frac{2a+b+1}{a+1}$$

21-1 답 ④

$\log_5 6=\log_5(2\times 3)=b$이므로 $\log_5 2+\log_5 3=b$

이때 $\log_5 3=a$이므로 $\log_5 2=b-a$

$$\therefore \log_{12} 9=\frac{\log_5 9}{\log_5 12}=\frac{\log_5 3^2}{\log_5(2^2\times 3)}$$

$$=\frac{2\log_5 3}{2\log_5 2+\log_5 3}$$ ← $\log_5 2=b-a$, $\log_5 3=a$를 대입

$$=\frac{2a}{2(b-a)+a}$$

$$=\frac{2a}{2b-a}$$

22 답 $\frac{5a-1}{a-1}$

$\log_3 12=\log_3(2^2\times 3)=2\log_3 2+1=a$이므로

$\log_3 2=\frac{a-1}{2}$ $\therefore \log_2 3=\frac{2}{a-1}$

$$\therefore \log_2 288=\log_2(2^5\times 3^2)$$

$$=5+2\log_2 3$$ ← $\log_2 3=\frac{2}{a-1}$를 대입

$$=5+2\times\frac{2}{a-1}$$

$$=\frac{5a-1}{a-1}$$

22-1 답 $\frac{4a+13}{a+1}$

$\log_3 \frac{8}{3}=\log_3 \frac{2^3}{3}=3\log_3 2-1=a$이므로

$\log_3 2=\frac{a+1}{3}$ $\therefore \log_2 3=\frac{3}{a+1}$

$\therefore \log_2 432=\log_2 (2^4\times 3^3)$

$=4+3\log_2 3$

$=4+3\times\frac{3}{a+1}$ ← $\log_2 3=\frac{3}{a+1}$을 대입

$=\frac{4a+13}{a+1}$

23 답 $\frac{2-a-2b}{3}$

$\log_{10}\frac{4}{3}=\log_{10}4-\log_{10}3=2\log_{10}2-\log_{10}3=a$ ……㉠

$\log_{10}\frac{5}{3}=\log_{10}5-\log_{10}3=1-\log_{10}2-\log_{10}3=b$ ……㉡

㉠+㉡×2를 하면 $2-3\log_{10}3=a+2b$

$\therefore \log_{10}3=\frac{2-a-2b}{3}$

23-1 답 $4b-2a+4$

$\log_3\frac{5}{2}=\log_3 5-\log_3 2=a$ ……㉠

$\log_3\frac{5}{3}=\log_3 5-1=b$이므로 $\log_3 5=b+1$

$\log_3 5=b+1$을 ㉠에 대입하면

$b+1-\log_3 2=a$ $\therefore \log_3 2=b-a+1$

$\therefore \log_3 100=\log_3 (2^2\times 5^2)$

$=2\log_3 2+2\log_3 5$

$=2(b-a+1)+2(b+1)$ ← $\log_3 2=b-a+1$, $\log_3 5=b+1$을 대입

$=4b-2a+4$

24 답 ④

$5^a=2$에서 $\log_5 2=a$

$5^b=3$에서 $\log_5 3=b$

$\therefore \log_2 15=\frac{\log_5 15}{\log_5 2}=\frac{\log_5 (3\times 5)}{\log_5 2}$

$=\frac{\log_5 3+1}{\log_5 2}=\frac{b+1}{a}$

24-1 답 ①

$2^a=3$에서 $\log_2 3=a$ $\therefore \log_3 2=\frac{1}{a}$

$3^b=5$에서 $\log_3 5=b$

$\therefore \log_{24}60=\frac{\log_3 60}{\log_3 24}=\frac{\log_3 (2^2\times 3\times 5)}{\log_3 (2^3\times 3)}$

$=\frac{2\log_3 2+1+\log_3 5}{3\log_3 2+1}$

$=\frac{\frac{2}{a}+1+b}{\frac{3}{a}+1}=\frac{ab+a+2}{a+3}$

25 답 ⑤

$2^a=x$에서 $\log_2 x=a$

$4^b=2^{2b}=y$에서 $\log_2 y=2b$

$8^c=2^{3c}=z$에서 $\log_2 z=3c$

$\therefore \log_x y^3z^4=\frac{\log_2 y^3z^4}{\log_2 x}=\frac{3\log_2 y+4\log_2 z}{\log_2 x}$

$=\frac{3\times 2b+4\times 3c}{a}=\frac{6b+12c}{a}$

25-1 답 $b+3c-2a$

$10^a=x$에서 $\log_{10}x=a$

$10^b=y$에서 $\log_{10}y=b$

$10^c=z$에서 $\log_{10}z=c$

$\therefore \log_{10}\frac{yz^3}{x^2}=\log_{10}y+3\log_{10}z-2\log_{10}x$

$=b+3c-2a$

26 답 $-\frac{2n}{m+n}$

$a^m=b^n=7$에서 $\log_a 7=m$, $\log_b 7=n$이므로

$\log_7 a=\frac{1}{m}$, $\log_7 b=\frac{1}{n}$ ……❶

$\therefore \log_{ab}\frac{1}{a^2}=\frac{\log_7 a^{-2}}{\log_7 ab}=\frac{-2\log_7 a}{\log_7 a+\log_7 b}$

$=\frac{\frac{-2}{m}}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=-\frac{2n}{m+n}$ ……❷

채점 기준	비율
❶ $\log_7 a$, $\log_7 b$를 m, n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ $\log_{ab}\frac{1}{a^2}$을 m, n으로 나타낼 수 있다.	60%

26-1 답 $\frac{2m-n}{m+n}$

$a^m=b^n=5$에서 $\log_a 5=m$, $\log_b 5=n$이므로

$\log_5 a=\frac{1}{m}$, $\log_5 b=\frac{1}{n}$

$\therefore \log_{ab}\frac{b^2}{a}=\frac{\log_5\frac{b^2}{a}}{\log_5 ab}=\frac{2\log_5 b-\log_5 a}{\log_5 a+\log_5 b}$

$=\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{m}}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$

$=\frac{2m-n}{m+n}$

27 답 5

$a^6b^4=1$의 양변에 a를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_a a^6b^4=\log_a 1$, $\log_a a^6+\log_a b^4=0$

$6+4\log_a b=0$ $\therefore \log_a b=-\frac{3}{2}$

$\therefore \log_a a^8b^2=\log_a a^8+\log_a b^2=8+2\log_a b$

$=8+2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=5$

다른 풀이

$a^6b^4=1$에서 $b^4=a^{-6}$ $\therefore b=a^{-\frac{3}{2}}$

$\therefore \log_a a^8b^2=\log_a \{a^8\times(a^{-\frac{3}{2}})^2\}=\log_a (a^8\times a^{-3})$

$=\log_a a^5=5$

27-1 답 ④

$\frac{a^4}{b^3}=1$의 양변에 b를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_b \frac{a^4}{b^3}=\log_b 1$, $\log_b a^4-\log_b b^3=0$

$4\log_b a-3=0$ $\quad\therefore \log_b a=\frac{3}{4}$

$\therefore \log_b \frac{b^{12}}{a^8}=\log_b b^{12}-\log_b a^8=12-8\log_b a$

$=12-8\times\frac{3}{4}=6$

28 답 ③

$\log_2 a=\log_3 b=k$라 하면 $a=2^k$, $b=3^k$

$\therefore ab=2^k\times 3^k=6^k$

이때 $ab=216$이므로 $6^k=216=6^3$ $\quad\therefore k=3$

따라서 $a=2^3=8$, $b=3^3=27$이므로

$a+b=8+27=35$

28-1 답 75

$\log_3 a+\log_3 b=1$에서 $\log_3 ab=1$

$\therefore ab=3$ ……❶

$\log_3 (a+b)=2$에서 $a+b=3^2=9$ ……❷

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=9^2-2\times 3$

$=81-6=75$ ……❸

채점 기준	비율
❶ ab의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	40%

29 답 ⑤

$100^x=5$에서 $x=\log_{100} 5$

$4^y=5$에서 $y=\log_4 5$

$\therefore \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{\log_{100} 5}-\frac{1}{\log_4 5}=\log_5 100-\log_5 4$

$=\log_5 \frac{100}{4}=\log_5 5^2=2$

29-1 답 −1

$15^x=25$에서 $x=\log_{15} 25=\log_{15} 5^2=2\log_{15} 5$

$75^y=125$에서 $y=\log_{75} 125=\log_{75} 5^3=3\log_{75} 5$

$\therefore \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=\frac{2}{2\log_{15} 5}-\frac{3}{3\log_{75} 5}=\log_5 15-\log_5 75$

$=\log_5 \frac{15}{75}=\log_5 5^{-1}=-1$

30 답 0

$9^x=25^y=15^z=k$라 하면

$x=\log_9 k$, $y=\log_{25} k$, $z=\log_{15} k$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=\frac{1}{\log_9 k}+\frac{1}{\log_{25} k}-\frac{2}{\log_{15} k}$

$=\log_k 9+\log_k 25-2\log_k 15$

$=\log_k 9+\log_k 25-\log_k 15^2$

$=\log_k \frac{3^2\times 5^2}{15^2}=\log_k 1=0$

30-1 답 0

$4^x=9^y=36^z=k$라 하면

$x=\log_4 k$, $y=\log_9 k$, $z=\log_{36} k$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{\log_4 k}+\frac{1}{\log_9 k}-\frac{1}{\log_{36} k}$

$=\log_k 4+\log_k 9-\log_k 36$

$=\log_k \frac{4\times 9}{36}$

$=\log_k 1=0$

31 답 ③

$\log_3 a+\log_9 b^2=3$에서 $\log_3 a+\log_{3^2} b^2=3$

$\log_3 a+\log_3 b=3$, $\log_3 ab=3$

$\therefore ab=3^3$

$\therefore (\sqrt[3]{3})^{\log_3 a}\times 3^{\log_{27} b}=a^{\log_3 \sqrt[3]{3}}\times b^{\log_{27} 3}$ ($\log_{3^3} 3=\frac{1}{3}\log_3 3$)

$=a^{\frac{1}{3}\log_3 3}\times b^{\frac{1}{3}\log_3 3}$

$=a^{\frac{1}{3}}\times b^{\frac{1}{3}}=(ab)^{\frac{1}{3}}$

$=(3^3)^{\frac{1}{3}}=3$

31-1 답 ③

$\log_5 x+\log_{25} y^2=5$에서 $\log_5 x+\log_{5^2} y^2=5$

$\log_5 x+\log_5 y=5$, $\log_5 xy=5$

$\therefore xy=5^5$

$\therefore 25^{\log_5 x}\times 5^{\log_{\sqrt{5}} y}=x^{\log_5 25}\times y^{\log_{\sqrt{5}} 5}=x^{2\log_5 5}\times y^{2\log_5 5}$

$=x^2y^2=(xy)^2=(5^5)^2=5^{10}$

즉 $5^k=5^{10}$이므로 $k=10$

32 답 4

$\frac{\log_2 9}{x}=\log_2 15$에서 $x=\frac{\log_2 9}{\log_2 15}=\log_{15} 9$

$\frac{\log_2 25}{y}=\log_2 15$에서 $y=\frac{\log_2 25}{\log_2 15}=\log_{15} 25$

$\frac{\log_2 225}{z}=\log_2 15$에서 $z=\frac{\log_2 225}{\log_2 15}=\log_{15} 225$

$\therefore x+y+z=\log_{15} 9+\log_{15} 25+\log_{15} 225$

$=\log_{15} (9\times 25\times 225)$

$=\log_{15} (3^2\times 5^2\times 15^2)$

$=\log_{15} 15^4=4$

32-1 답 4

$\frac{\log_{10} 4}{a}=\log_{10} 6$에서 $a=\frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 6}=\log_6 4$

$\frac{\log_{10} 9}{b}=\log_{10} 6$에서 $b=\frac{\log_{10} 9}{\log_{10} 6}=\log_6 9$

$\frac{\log_{10} 36}{c}=\log_{10} 6$에서 $c=\frac{\log_{10} 36}{\log_{10} 6}=\log_6 36$

$\therefore a+b+c=\log_6 4+\log_6 9+\log_6 36$

$=\log_6 (4\times 9\times 36)$

$=\log_6 (2^2\times 3^2\times 6^2)$

$=\log_6 6^4=4$

33 답 7

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3 \alpha+\log_3 \beta=3$, $\log_3 \alpha\times\log_3 \beta=1$

$$\therefore \log_\alpha \beta+\log_\beta \alpha=\frac{\log_3 \beta}{\log_3 \alpha}+\frac{\log_3 \alpha}{\log_3 \beta}$$
$$=\frac{(\log_3 \alpha)^2+(\log_3 \beta)^2}{\log_3 \alpha\times\log_3 \beta}$$
$$=\frac{(\log_3 \alpha+\log_3 \beta)^2-2\log_3 \alpha\times\log_3 \beta}{\log_3 \alpha\times\log_3 \beta}$$
$$=\frac{3^2-2\times1}{1}=7$$

33-1 답 $\frac{17}{4}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3 \alpha+\log_3 \beta=4$, $\log_3 \alpha\times\log_3 \beta=1$

$$\therefore \log_\alpha 3+\log_\beta 3+\log_{\alpha\beta} 3=\frac{1}{\log_3 \alpha}+\frac{1}{\log_3 \beta}+\frac{1}{\log_3 \alpha\beta}$$
$$=\frac{\log_3 \alpha+\log_3 \beta}{\log_3 \alpha\times\log_3 \beta}+\frac{1}{\log_3 \alpha+\log_3 \beta}$$
$$=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$$

34 답 2

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=3$ ……❶

$$\therefore \log_3(\alpha+1)+\log_3(\beta+1)=\log_3(\alpha+1)(\beta+1)$$
$$=\log_3(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)$$
$$=\log_3(3+5+1)$$
$$=\log_3 9$$
$$=2$$ ……❷

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $\log_3(\alpha+1)+\log_3(\beta+1)$의 값을 구할 수 있다.	60%

34-1 답 ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$

$$\therefore \log_4\left(\alpha-\frac{1}{\beta}\right)+\log_4\left(\beta-\frac{1}{\alpha}\right)=\log_4\left(\alpha-\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta-\frac{1}{\alpha}\right)$$
$$=\log_4\left(\alpha\beta-2+\frac{1}{\alpha\beta}\right)$$
$$=\log_4\left(2-2+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\log_4\frac{1}{2}$$
$$=\log_{2^2} 2^{-1}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

35 답 ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+\log_3 2=-\frac{a}{2}$, $2\times\log_3 2=\frac{b}{2}$이므로

$a=-(4+2\log_3 2)=-(\log_3 81+\log_3 4)=-\log_3 324$

$b=4\log_3 2=\log_3 16$

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{-\log_3 324}{\log_3 16}=-\log_{16} 324$$
$$=-\log_{4^2} 18^2=-\log_4 18$$

35-1 답 $\log_9 12$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+\log_2 3=a$, $2\times\log_2 3=b$이므로 ……❶

$a=\log_2 2^2+\log_2 3=\log_2 12$

$b=2\log_2 3=\log_2 9$ ……❷

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{\log_2 12}{\log_2 9}=\log_9 12$$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	30%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $\frac{a}{b}$의 값을 구할 수 있다.	30%

36 답 ⑤

$A=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^3=3$

$B=5\log_9 3=5\log_{3^2} 3=\frac{5}{2}$

$C=4^{\log_9 3}=4^{\log_{3^2} 3}=4^{\frac{1}{2}}=2$

$\therefore C<B<A$

36-1 답 ①

$A=\log_{\frac{1}{2}} 4=\log_{2^{-1}} 2^2=-2$

$B=6\log_4 2=6\log_{2^2} 2=3$

$C=16^{\log_4 2}=2^{\log_4 16}=2^{\log_{4^2} 4^2}=2^2=4$

$\therefore A<B<C$

37 답 ⑤

$a^6=b^4$에서 $b=a^{\frac{3}{2}}$이므로

① $\log_a b=\log_a a^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$ ② $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}=\frac{2}{3}$

⑤ $\log_a b^2=2\log_a b=3$

$a^6=c^3$에서 $c=a^2$이므로

③ $\log_a c=\log_a a^2=2$ ④ $\log_c a=\frac{1}{\log_a c}=\frac{1}{2}$

따라서 가장 큰 수는 ⑤이다.

37-1 답 ㅁ

$a^4=b^3$에서 $b=a^{\frac{4}{3}}$이므로

ㄱ. $\log_a b=\log_a a^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}$ ㄴ. $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}=\frac{3}{4}$

$a^4=c^6$에서 $c=a^{\frac{2}{3}}$이므로

ㄷ. $\log_a c=\log_a a^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$ ㄹ. $\log_c a=\frac{1}{\log_a c}=\frac{3}{2}$

$b^3=c^6$에서 $c=b^{\frac{1}{2}}$이므로

ㅁ. $\log_b c=\log_b b^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

따라서 가장 작은 수는 ㅁ이다.

38 답 ③

$A=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}+\log_3\frac{81}{2}=\log_3 2+\log_3\frac{81}{2}=\log_3 81=4$

$B=\log_4\{\log_{\sqrt{8}}(\log_{\sqrt{2}}16)\}=\log_4\{\log_{\sqrt{8}}(\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^4)\}$
$=\log_4(\log_{\sqrt{8}}8)=\log_4(\log_{8^{\frac{1}{2}}}8)$
$=\log_4 2=\log_{2^2}2=\frac{1}{2}$
$C=16^{\log_4\sqrt{3}}+27^{\log_9 2}=(\sqrt{3})^{\log_3 16}+2^{\log_9 27}$
$=(\sqrt{3})^2+2^{\frac{3}{2}}=3+2\sqrt{2}$
$\therefore B<A<C$

38-1 답 $C<A<B$

$A=4^{1-\log_4 2}=4^{1-\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}}=2$
$B=\log_3 6\times\log_6 27=\log_3 6\times\frac{\log_3 27}{\log_3 6}=\log_3 27=3$
$C=\log_9 3+\log_{16}4=\log_{3^2}3+\log_{4^2}4=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$
$\therefore C<A<B$

39 답 $\frac{25}{4}$

$\log_2 32<\log_2 40<\log_2 64$이므로 $5<\log_2 40<6$
$\therefore a=5$
$b=\log_2 40-5=\log_2 40-\log_2 32=\log_2\frac{5}{4}$
$\therefore a+2^b=5+2^{\log_2\frac{5}{4}}=5+\frac{5}{4}=\frac{25}{4}$

39-1 답 $\frac{1}{3}$

$\log_3 9<\log_3 15<\log_3 27$이므로 $2<\log_3 15<3$
$\therefore a=2$
$b=\log_3 15-2=\log_3 15-\log_3 9=\log_3\frac{5}{3}$
$\therefore a-3^b=2-3^{\log_3\frac{5}{3}}=2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$

40 답 $\frac{4}{9}$

$\log_3 3<\log_3 4<\log_3 9$이므로 $1<\log_3 4<2$
$\therefore x=1$ ……❶
$y=\log_3 4-1=\log_3 4-\log_3 3=\log_3\frac{4}{3}$ ……❷
$\therefore \frac{3^{-x}+3^y}{3^x+3^{-y}}=\frac{3^{-1}+3^{\log_3\frac{4}{3}}}{3^1+3^{-\log_3\frac{4}{3}}}=\frac{\frac{1}{3}+3^{\log_3\frac{4}{3}}}{3+3^{\log_3\frac{3}{4}}}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}{3+\frac{3}{4}}$
$=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{15}{4}}=\frac{4}{9}$ ……❸

채점 기준	비율
❶ x의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ y의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $\frac{3^{-x}+3^y}{3^x+3^{-y}}$의 값을 구할 수 있다.	40%

40-1 답 9

$\log_5 5<\log_5 20<\log_5 25$이므로 $1<\log_5 20<2$
$\therefore x=1$
$y=\log_5 20-1=\log_5 20-\log_5 5=\log_5 4$
$\therefore 5^x+5^y=5^1+5^{\log_5 4}=5+4=9$

41 답 ②

$\log_4 16<\log_4 32<\log_4 64$이므로 $2<\log_4 32<3$
$\therefore \alpha=2$
$\beta=\log_4 32-2=\log_4 32-\log_4 16=\log_4 2=\log_{2^2}2=\frac{1}{2}$
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha\beta=2\times\frac{1}{2}=\frac{k}{2}$ $\therefore k=2$

다른 풀이

$\log_4 32=\log_{2^2}2^5=\frac{5}{2}=2.5$이므로 $\alpha=2$, $\beta=0.5$
이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\frac{k}{2}=\alpha\beta=2\times0.5=1$ $\therefore k=2$

41-1 답 -6

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$n+\alpha=-\frac{5}{4}$, $n\alpha=\frac{k}{4}$
이때 $n+\alpha=-2+\frac{3}{4}$이므로 $n=-2$, $\alpha=\frac{3}{4}$
즉 $\frac{k}{4}=n\alpha=-2\times\frac{3}{4}=-\frac{3}{2}$이므로 $k=-6$

42 답 1.2552

$\log 50=\log\frac{100}{2}=\log 100-\log 2=2-\log 2$
$=2-0.3010=1.699$
$\log 0.36=\log\frac{36}{100}=\log 36-\log 100$
$=\log(2^2\times3^2)-\log 100$
$=2\log 2+2\log 3-2$
$=2\times0.3010+2\times0.4771-2$
$=-0.4438$
$\therefore \log 50+\log 0.36=1.699+(-0.4438)=1.2552$

42-1 답 ②

$\log 314+\log 0.314=\log(3.14\times100)+\log\left(3.14\times\frac{1}{10}\right)$
$=\log 3.14+\log 100+\log 3.14+\log\frac{1}{10}$
$=0.4969+2+0.4969-1$
$=1.9938$

43 답 2.86

$\log\sqrt[3]{x^2}-\log\frac{1}{x^3}=\log x^{\frac{2}{3}}-\log x^{-3}$
$=\frac{2}{3}\log x-(-3\log x)$
$=\frac{11}{3}\log x=\frac{11}{3}\times0.78$
$=2.86$

43-1 답 ⑤

$\log x^3+\log\sqrt{x}=3\log x+\frac{1}{2}\log x=\frac{7}{2}\log x$
$=\frac{7}{2}\times1.3412=4.6942$

44 답 3.2939

$10^{0.7419}=5.52$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 5.52=0.7419$

$\log x=-0.2581=-1+0.7419$

$=-1+\log 5.52=\log 10^{-1}+\log 5.52$

$=\log (5.52\times 10^{-1})=\log 0.552$

$\therefore x=0.552$

$y=\log 552=\log (5.52\times 10^{2})$

$=\log 5.52+\log 10^{2}=2+0.7419$

$=2.7419$

$\therefore x+y=0.552+2.7419=3.2939$

44-1 답 ⑤

㈎에서

$a=\log 3560=\log (3.56\times 10^{3})=\log 3.56+\log 10^{3}$

$=3+0.5514=3.5514$

㈏에서

$\log b=-1.4486=-2+0.5514=-2+\log 3.56$

$=\log 10^{-2}+\log 3.56=\log (3.56\times 10^{-2})$

$=\log 0.0356$

이므로 $b=0.0356$

$\therefore a+b=3.5514+0.0356=3.587$

45 답 ②

$\log x^{2}+\log \sqrt[3]{x}=2\log x+\frac{1}{3}\log x$

$=\frac{7}{3}\log x=\frac{7}{3}\times(-2.7)$

$=-6.3=-7+0.7$

따라서 $\log x^{2}+\log \sqrt[3]{x}$의 정수 부분은 -7, 소수 부분은 0.7이다.

45-1 답 -9

$\log \sqrt{x}=\frac{1}{2}\log x=-\frac{4}{3}$이므로

$\log x=2\times\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{8}{3}=-3+\frac{1}{3}$

즉 $n=-3$, $\alpha=\frac{1}{3}$이므로

$\frac{n}{\alpha}=n\div\alpha=-3\div\frac{1}{3}=-3\times 3=-9$

46 답 18

$\log A$의 정수 부분을 n, 소수 부분을 α라 하면

$\log A=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=\frac{27}{4}=6+\frac{3}{4}$

$\therefore n=6$, $\alpha=\frac{3}{4}$

또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$n\alpha=\frac{p}{4}$ $\therefore p=4n\alpha=4\times 6\times\frac{3}{4}=18$

46-1 답 ②

$\log 300=\log (3\times 10^{2})=2+\log 3$이므로 $\log 300$의 정수 부분은 2, 소수 부분은 $\log 3$이다.

즉 이차방정식 $x^{2}+ax+b=0$의 두 근이 2, $\log 3$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2+\log 3=-a$, $2\log 3=b$

$\therefore a+b=(-2-\log 3)+2\log 3=-2+\log 3$

$=\log 10^{-2}+\log 3=\log (3\times 10^{-2})$

$=\log 0.03$

47 답 $\sqrt{10}$

$\log x$와 $\log\frac{1}{x}$의 소수 부분이 같으므로

$\log x-\log\frac{1}{x}=\log x-(-\log x)=2\log x=$(정수) ……❶

$1<x<10$이므로 $0<\log x<1$

$\therefore 0<2\log x<2$ ……❷

이때 $2\log x$는 정수이므로 $2\log x=1$

$\log x=\frac{1}{2}$ $\therefore x=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $\log x-\log\frac{1}{x}$이 정수임을 알 수 있다.	40%
❷ $2\log x$의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ x의 값을 구할 수 있다.	20%

47-1 답 ④

$\log x$의 소수 부분과 $\log \sqrt[3]{x}$의 소수 부분이 같으려면

$\log x-\log \sqrt[3]{x}=\log x-\frac{1}{3}\log x=\frac{2}{3}\log x=$(정수)

$\log x$의 정수 부분이 4이므로

$4\le\log x<5$ $\therefore \frac{8}{3}\le\frac{2}{3}\log x<\frac{10}{3}$

이때 $\frac{2}{3}\log x$는 정수이므로 $\frac{2}{3}\log x=3$

$\log x=\frac{9}{2}$ $\therefore x=10^{\frac{9}{2}}$

유형 완성하기 p.51

48 답 ④

규모가 7.5인 지진과 규모가 5.5인 지진의 에너지를 각각 E_1, E_2라 하면

$\log E_1=1.5\times 7.5+11.4=22.65$

$\log E_2=1.5\times 5.5+11.4=19.65$

$\therefore \log\frac{E_1}{E_2}=\log E_1-\log E_2=22.65-19.65=3$

따라서 $\frac{E_1}{E_2}=10^{3}=1000$이므로 규모가 7.5인 지진의 에너지는 규모가 5.5인 지진의 에너지의 1000배이다.

49 답 100배

등급이 1인 별의 밝기를 I_1, 등급이 6인 별의 밝기를 I_2라 하면

$1=-\frac{5}{2}\log I_1+C$이므로 $C=1+\frac{5}{2}\log I_1$

$6=-\frac{5}{2}\log I_2+C$이므로 $C=6+\frac{5}{2}\log I_2$

즉 $1+\frac{5}{2}\log I_1=6+\frac{5}{2}\log I_2$이므로

$\frac{5}{2}(\log I_1-\log I_2)=5,\ \log\frac{I_1}{I_2}=2$

$\therefore \frac{I_1}{I_2}=10^2=100$

따라서 별의 등급이 1인 별의 밝기는 별의 등급이 6인 별의 밝기의 100배이다.

50 답 10배

감각 강도가 2일 때의 광원으로부터의 거리를 d_1 m, 감각 강도가 4일 때의 광원으로부터의 거리를 d_2 m라 하면

$2=\log\frac{h}{d_1^2}$이므로 $\log h-2\log d_1=2$

$\therefore \log d_1=\frac{1}{2}\log h-1$ ……㉠

$4=\log\frac{h}{d_2^2}$이므로 $\log h-2\log d_2=4$

$\therefore \log d_2=\frac{1}{2}\log h-2$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$\log\frac{d_1}{d_2}=\log d_1-\log d_2=\frac{1}{2}\log h-1-\left(\frac{1}{2}\log h-2\right)=1$

$\therefore \frac{d_1}{d_2}=10$

따라서 감각 강도가 2일 때의 광원으로부터의 거리는 감각 강도가 4일 때의 광원으로부터의 거리의 10배이다.

51 답 53 %

4년 전 수출액을 A라 하고, 수출액의 증가율을 r %라 하면

$A\left(1+\frac{r}{100}\right)^4=5.5A$ $\therefore \left(1+\frac{r}{100}\right)^4=5.5$

양변에 상용로그를 취하면

$4\log\left(1+\frac{r}{100}\right)=\log 5.5$

$\therefore \log\left(1+\frac{r}{100}\right)=\frac{1}{4}\log 5.5=\frac{1}{4}\times 0.74=0.185$

이때 $\log 1.53=0.185$이므로 $1+\frac{r}{100}=1.53$

$\frac{r}{100}=0.53$ $\therefore r=53$

따라서 4년 동안 수출액은 매년 53 %씩 증가했다.

52 답 37.5

처음 빛의 밝기를 A라 하자.

유리판 1장을 통과했을 때의 빛의 밝기는 $A\left(1-\frac{x}{100}\right)$

유리판 2장을 통과했을 때의 빛의 밝기는 $A\left(1-\frac{x}{100}\right)^2$

⋮

유리판 7장을 통과했을 때의 빛의 밝기는 $A\left(1-\frac{x}{100}\right)^7$

유리판 7장을 통과했을 때, 빛의 밝기는 처음 빛의 밝기의 4 %로 줄어들므로 $A\left(1-\frac{x}{100}\right)^7=\frac{4}{100}A$ ……❶

$\therefore \left(1-\frac{x}{100}\right)^7=\frac{4}{100}$

양변에 상용로그를 취하면

$7\log\left(1-\frac{x}{100}\right)=\log 4-2$

$7\log\left(1-\frac{x}{100}\right)=2\log 2-2=2\times 0.3-2=-1.4$

$-\log\left(1-\frac{x}{100}\right)=0.2,\ \log\left(1-\frac{x}{100}\right)^{-1}=0.2$

$\therefore \log\frac{100}{100-x}=0.2$ ……❷

이때 $\log 1.6=0.2$이므로 $\frac{100}{100-x}=1.6$

$160-1.6x=100$ $\therefore x=\frac{60}{1.6}=37.5$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 빛이 유리판 7장을 통과했을 때의 관계식을 세울 수 있다.	30%
❷ $\log\frac{100}{100-x}$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ x의 값을 구할 수 있다.	30%

53 답 5

현재 국민 총 생산량을 A라 하면 10년 후의 국민 총 생산량은 현재의 $\sqrt[3]{k^4}$배이므로

$A(1+0.03)^{10}=\sqrt[3]{k^4}A$ $\therefore 1.03^{10}=\sqrt[3]{k^4}$

양변에 상용로그를 취하면

$10\log 1.03=\frac{4}{3}\log k,\ 10\log(10.3\times 10^{-1})=\frac{4}{3}\log k$

$10(\log 10.3-1)=\frac{4}{3}\log k,\ 10(1.0128-1)=\frac{4}{3}\log k$

$0.128=\frac{4}{3}\log k$ $\therefore \log k=0.096$

이때 $\log 1.25=0.096$이므로 $k=1.25$

$\therefore 4k=4\times 1.25=5$

학교 시험 대비 문제

p.52~55

01 답 ①

$\log_a 32=5$에서 $a^5=32=2^5$이므로 $a=2$

$\log_3\{\log_2(\log_5 b)\}=0$에서 $\log_2(\log_5 b)=1$

$\log_5 b=2$ $\therefore b=5^2=25$

$\therefore ab=2\times 25=50$

02 답 ③

밑의 조건에서 $x-1>0,\ x-1\neq 1$

$x>1,\ x\neq 2$ $\therefore 1<x<2$ 또는 $x>2$ ……㉠

진수의 조건에서 $-x^2+5x-4>0$

$x^2-5x+4<0,\ (x-1)(x-4)<0$

$\therefore 1<x<4$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<2$ 또는 $2<x<4$

따라서 정수 x의 값은 3이다.

03 답 ②

밑의 조건에서 $|x-2|>0,\ |x-2|\neq 1$

$\therefore x\neq 1,\ x\neq 2,\ x\neq 3$ ……㉠

진수의 조건에서 $-x^2+2x+8>0$

$x^2-2x-8<0,\ (x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$-2<x<1$ 또는 $1<x<2$ 또는 $2<x<3$ 또는 $3<x<4$
따라서 정수 x의 값은 -1, 0이므로 그 개수는 2이다.

04 답 -4

$$\log_2 6-\log_2 12+\log_{\frac{1}{3}} 27=\log_2 \frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$$
$$=\log_2 2^{-1}-3$$
$$=-1-3=-4$$

05 답 ①

$$\log_3 9+\log_5 125-\log_2 25\times\log_5\sqrt{8}$$
$$=\log_3 3^2+\log_5 5^3-\log_2 5^2\times\log_5 2^{\frac{3}{2}}$$
$$=2+3-2\log_2 5\times\frac{3}{2}\log_5 2$$
$$=5-3\times\log_2 5\times\frac{1}{\log_2 5}$$
$$=5-3=2$$

06 답 4

$$\log_k(\log_3 4)+\log_k(\log_4 5)+\log_k(\log_5 6)$$
$$+\cdots+\log_k(\log_{80} 81)$$
$$=\log_k(\log_3 4\times\log_4 5\times\log_5 6\times\cdots\times\log_{80} 81)$$
$$=\log_k\left(\cancel{\log_3 4}\times\frac{\cancel{\log_3 5}}{\cancel{\log_3 4}}\times\frac{\cancel{\log_3 6}}{\cancel{\log_3 5}}\times\cdots\times\frac{\log_3 81}{\cancel{\log_3 80}}\right)$$
$$=\log_k(\log_3 81)$$
$$=\log_k(\log_3 3^4)$$
$$=\log_k 4$$

즉 $\log_k 4=1$이므로 $k=4$

07 답 ⑤

$$(\log_2 3+\log_4 27)(\log_3 8-\log_9 32)$$
$$=(\log_2 3+\log_{2^2} 3^3)(\log_3 2^3-\log_{3^2} 2^5)$$
$$=\left(\log_2 3+\frac{3}{2}\log_2 3\right)\left(3\log_3 2-\frac{5}{2}\log_3 2\right)$$
$$=\frac{5}{2}\log_2 3\times\frac{1}{2}\log_3 2$$
$$=\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}\times\log_2 3\times\frac{1}{\log_2 3}$$
$$=\frac{5}{4}$$

08 답 64

$$\log_3 5-2\log_{\frac{1}{3}} 4-\log_3 10=\log_3 5-\log_{3^{-1}} 4^2-\log_3 10$$
$$=\log_3 5+\log_3 16-\log_3 10$$
$$=\log_3\frac{5\times 16}{10}$$
$$=\log_3 8$$

$\therefore$ (주어진 식)$=9^{\log_3 8}=8^{\log_3 9}=8^{\log_3 3^2}=8^2=64$

09 답 ③

$\log_a M=m$, $\log_a N=n$이라 하면 로그의 정의에 의하여
$a^m=\boxed{\text{(가) } M}$, $a^n=N$이므로
$a^{m+n}=a^m\times a^n=\boxed{\text{(나) } MN}$
따라서 로그의 정의에 의하여
$\log_a \boxed{\text{(나) } MN}=\boxed{\text{(다) } m+n}$
$\therefore \log_a MN=\log_a M+\log_a N$

10 답 $\frac{2+ab}{a+ab}$

$\log_2 3=a$에서 $\log_3 2=\frac{1}{a}$이고, $\log_3 5=b$이므로

$$\log_{15} 20=\frac{\log_3 20}{\log_3 15}=\frac{\log_3(2^2\times 5)}{\log_3(3\times 5)}=\frac{2\log_3 2+\log_3 5}{1+\log_3 5}$$
$$=\frac{\frac{2}{a}+b}{1+b}=\frac{2+ab}{a+ab}$$

11 답 ④

$\log_7 4=b$이므로 $\log_4 7=\frac{1}{b}$

$\log_{11} 7=\frac{\log_4 7}{\log_4 11}$이므로

$$\log_4 11=\frac{\log_4 7}{\log_{11} 7}=\frac{\frac{1}{b}}{c}=\frac{1}{bc}$$
$$\therefore \log_{12} 231=\frac{\log_4 231}{\log_4 12}=\frac{\log_4(3\times 7\times 11)}{\log_4(3\times 4)}$$
$$=\frac{\log_4 3+\log_4 7+\log_4 11}{\log_4 3+1}$$
$$=\frac{a+\frac{1}{b}+\frac{1}{bc}}{a+1}$$
$$=\frac{abc+c+1}{abc+bc}$$

12 답 ②

$2^a=3$에서 $\log_2 3=a$
$3^b=5$에서 $\log_3 5=b$

$$\therefore \log_{24} 30=\frac{\log_2 30}{\log_2 24}=\frac{\log_2(2\times 3\times 5)}{\log_2(2^3\times 3)}$$
$$=\frac{1+\log_2 3+\log_2 5}{3+\log_2 3}$$
$$=\frac{1+\log_2 3+\frac{\log_3 5}{\log_3 2}}{3+\log_2 3}$$
$$=\frac{1+\log_2 3+\log_3 5\times\log_2 3}{3+\log_2 3}$$
$$=\frac{ab+a+1}{a+3}$$

13 답 ②

$a^2b^3=1$의 양변에 밑이 a인 로그를 취하면
$\log_a a^2b^3=\log_a 1$, $\log_a a^2+\log_a b^3=0$
$2+3\log_a b=0$ $\therefore \log_a b=-\frac{2}{3}$
$\therefore \log_a a^3b^6=\log_a a^3+\log_a b^6=3+6\log_a b$
$$=3+6\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-1$$

14 답 0

$25^x=4^y=10^z=k$라 하면
$x=\log_{25} k$, $y=\log_4 k$, $z=\log_{10} k$

$$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=\frac{1}{\log_{25} k}+\frac{1}{\log_4 k}-\frac{2}{\log_{10} k}$$
$$=\log_k 25+\log_k 4-2\log_k 10$$
$$=\log_k 25+\log_k 4-\log_k 10^2$$
$$=\log_k \frac{25\times 4}{10^2}$$
$$=\log_k 1=0$$

15 답 2

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=\frac{3}{2}$

이때 $a=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\times\frac{3}{2}=6$이므로

$$\log_a 8(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)=\log_6 8\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$=\log_6\left(8\times\frac{3}{2}\times 3\right)$$
$$=\log_6 36=2$$

16 답 ③

$A=3^{\log_9 4}=4^{\log_9 3}=4^{\log_{3^2} 3}=4^{\frac{1}{2}}=2$

$B=3^{\log_3 8-2}=3^{\log_3 8}\div 3^2=8^{\log_3 3}\div 9=\frac{8}{9}$

$C=\log_9 27+\log_{\frac{1}{9}} 3=\log_{3^2} 3^3+\log_{3^{-2}} 3=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$

$\therefore B<C<A$

17 답 ②

$\log_3 3^2<\log_3 20<\log_3 3^3$이므로 $2<\log_3 20<3$

$\therefore n=2$

$a=\log_3 20-2=\log_3 20-\log_3 9=\log_3\frac{20}{9}$

$\therefore 9(2^n+3^a)=9(2^2+3^{\log_3\frac{20}{9}})=9\left(4+\frac{20}{9}\right)=56$

18 답 ①

$A=0.393^3$이라 하고 양변에 상용로그를 취하면

$$\log A=\log 0.393^3=3\log 0.393$$
$$=3\log(3.93\times 10^{-1})=3(\log 3.93+\log 10^{-1})$$
$$=3(\log 3.93-1)=3(0.5944-1)$$
$$=-1.2168=-2+0.7832$$

이때 $\log 6.07=0.7832$이므로

$$\log A=-2+\log 6.07=\log(6.07\times 10^{-2})$$
$$=\log 0.0607$$

즉 $A=0.0607$이므로 $0.393^3=0.0607$

19 답 $10\sqrt{10}$

$\log x$와 $\log\sqrt[3]{x}$의 소수 부분이 서로 같으므로

$\log x-\log\sqrt[3]{x}=\log x-\frac{1}{3}\log x=\frac{2}{3}\log x=$(정수)

$1<x<100$이므로 $0<\log x<2$

$\therefore 0<\frac{2}{3}\log x<\frac{4}{3}$

이때 $\frac{2}{3}\log x$는 정수이므로 $\frac{2}{3}\log x=1$

$\log x=\frac{3}{2}$ $\therefore x=10^{\frac{3}{2}}=10\sqrt{10}$

20 답 1000배

진도가 8인 지진의 강도를 I_A, 진도가 5인 지진의 강도를 I_B라 하면

$8=\log\frac{I_A}{k}$이므로 $8=\log I_A-\log k$

$\therefore \log I_A=8+\log k$ ……㉠

$5=\log\frac{I_B}{k}$이므로 $5=\log I_B-\log k$

$\therefore \log I_B=5+\log k$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$$\log\frac{I_A}{I_B}=\log I_A-\log I_B=8+\log k-(5+\log k)=3$$

$\therefore \frac{I_A}{I_B}=10^3=1000$

따라서 진도가 8인 지진의 강도는 진도가 5인 지진의 강도의 1000배이다.

21 답 3 %

30년 전 매출액을 A라 하고, 매출액이 매년 r %씩 증가했다고 하면

$A\left(1+\frac{r}{100}\right)^{30}=2A$ $\therefore \left(1+\frac{r}{100}\right)^{30}=2$

양변에 상용로그를 취하면

$\log\left(1+\frac{r}{100}\right)^{30}=\log 2$

$30\log\left(1+\frac{r}{100}\right)=0.3$

$\therefore \log\left(1+\frac{r}{100}\right)=0.01$

이때 $\log 1.03=0.01$이므로

$\log\left(1+\frac{r}{100}\right)=\log 1.03$

$1+\frac{r}{100}=1.03$ $\therefore r=3$

따라서 이 기업의 매출액은 매년 3 %씩 증가했다.

서술형 1 답 2

$$\log_a\left(1+\frac{1}{4}\right)+\log_a\left(1+\frac{1}{5}\right)+\log_a\left(1+\frac{1}{6}\right)$$
$$+\cdots+\log_a\left(1+\frac{1}{63}\right)$$
$$=\log_a\frac{5}{4}+\log_a\frac{6}{5}+\log_a\frac{7}{6}+\cdots+\log_a\frac{64}{63}$$
$$=\log_a\left(\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}\times\frac{7}{6}\times\cdots\times\frac{64}{63}\right)$$
$$=\log_a\frac{64}{4}$$
$$=\log_a 16 \quad \cdots\cdots ❶$$

즉 $\log_a 16=4$이므로 $a^4=16$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$ ……❷

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%

서술형 2 답 30

$\frac{2}{\log_n 2}=k$ (k는 자연수)라 하면 $2\log_2 n=k$

$\log_2 n=\frac{k}{2}$ $\therefore n=2^{\frac{k}{2}}$

이때 n의 값은 $2 \le n \le 30$인 자연수이므로 $\frac{k}{2}$의 값도 자연수이다.

즉 k의 값은 2의 배수이므로

$k=2, 4, 6, 8$ ($\because 2 \le n \le 30$) ……❶

$k=2$일 때, $n=2^1=2$

$k=4$일 때, $n=2^2=4$

$k=6$일 때, $n=2^3=8$

$k=8$일 때, $n=2^4=16$ ……❷

따라서 모든 n의 값의 합은

$2+4+8+16=30$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $\frac{2}{\log_n 2}=k$라 하고 k의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 모든 n의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

참고 $n=2^{\frac{k}{2}}$이고 $2 \le n \le 30$이므로 $2 \le 2^{\frac{k}{2}} \le 30$

이때 $2^4=16$, $2^5=32$이므로 $1 \le \frac{k}{2} \le 4$

$\therefore 2 \le k \le 8$

서술형 3 답 $\frac{m+n}{3n}$

$a^m=b^n=5$에서 $\log_a 5=m$, $\log_b 5=n$

$\therefore \log_5 a=\frac{1}{m}$, $\log_5 b=\frac{1}{n}$ ……❶

$\therefore \log_{a^3} ab=\frac{\log_5 ab}{\log_5 a^3}=\frac{\log_5 a+\log_5 b}{3\log_5 a}$

$=\frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{\frac{3}{m}}=\frac{m+n}{3n}$ ……❷

채점 기준	비율
❶ $\log_5 a$, $\log_5 b$를 m, n으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ $\log_{a^3} ab$를 m, n으로 나타낼 수 있다.	60%

1등급 10% 핵심 기출 문제 p. 56~57

01 답 30

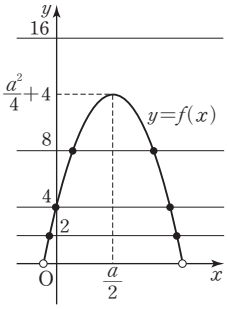
$f(x)=-x^2+ax+4$라 하면 로그의 진수 조건에 의하여 $f(x)>0$

$f(x)=-x^2+ax+4$

$=-\left(x^2-ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\right)+4$

$=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+4$

$\log_2(-x^2+ax+4)$의 값이 자연수가 되도록 하는 실수 x의 개수가 6이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 세 직선 $y=2$, $y=2^2$, $y=2^3$과 각각 2개의 점에서 만나고 직선 $y=2^n$ ($n \ge 4$)과는 만나지 않는다.



즉 $2^3 < \frac{a^2}{4}+4 < 2^4$이므로

$4 < \frac{a^2}{4} < 12$ $\therefore 16 < a^2 < 48$

이때 a는 자연수이므로 $a=5, 6$

따라서 모든 자연수 a의 값의 곱은

$5 \times 6=30$

02 답 ⑤

$\log_a \frac{a^3}{b^2}=\log_a a^3-\log_a b^2=3-2\log_a b=2$이므로

$2\log_a b=1$ $\therefore \log_a b=\frac{1}{2}$

$\therefore \log_a b+3\log_b a=\log_a b+\frac{3}{\log_a b}$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}+6=\frac{13}{2}$

03 답 ④

두 점 $P(\log_5 3)$, $Q(\log_5 12)$에 대하여 $\overline{PQ}$를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점을 C라 하면

$C\left(\frac{m \times \log_5 12+(1-m) \times \log_5 3}{m+(1-m)}\right)$

$\therefore C(m\log_5 12+(1-m)\log_5 3)$

이때 $\overline{PQ}$를 내분하는 점 C의 좌표가 1이므로

$m\log_5 12+(1-m)\log_5 3=1$

$\log_5 12^m+\log_5 3^{1-m}=1$, $\log_5(12^m \times 3^{1-m})=1$

$12^m \times 3^{1-m}=5^1$, $(4\times 3)^m \times 3^{1-m}=5$

$4^m \times 3^m \times 3^{1-m}=5$, $4^m \times 3^{m+(1-m)}=5$

$4^m \times 3=5$ $\therefore 4^m=\frac{5}{3}$

04 답 ①

$5\log_n 2=k$ (k는 자연수)라 하면

$\log_n 2=\frac{k}{5}$, $n^{\frac{k}{5}}=2$ $\therefore n=2^{\frac{5}{k}}$

n이 2 이상의 자연수이므로

$2^{\frac{5}{k}} \ge 2$, $\frac{5}{k} \ge 1$ $\therefore k \le 5$

이때 $2^{\frac{5}{k}}$이 자연수이므로 $k=1, 5$

$k=1$일 때, $n=2^5=32$

$k=5$일 때, $n=2$

따라서 모든 n의 값의 합은

$32+2=34$

05 답 ③

$\log_{\sqrt{3}} a=2\log_3 a=\log_3 a^2=\log_9 a^4$이므로

$\log_9 a^4=\log_9 ab$

즉 $a^4=ab$이므로 $a(a^3-b)=0$

이때 a는 1보다 큰 실수이므로 양변을 a로 나누면

$a^3-b=0 \quad \therefore b=a^3$

$\therefore \log_a b=\log_a a^3=3$

06 답 ②

$\log_{a^3} b^2+\log_{b^4} a^3=\frac{2}{3}\log_a b+\frac{3}{4}\log_b a$ ……㉠

이때 $a>1$, $b>1$이므로 $\log_a b>0$, $\log_b a>0$

㉠에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2}{3}\log_a b+\frac{3}{4}\log_b a \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}\log_a b\times\frac{3}{4}\log_b a}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\log_a b\times\frac{1}{\log_a b}}$$

$$=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{2}{3}\log_a b=\frac{3}{4}\log_b a \text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\log_{a^3} b^2+\log_{b^4} a^3$의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

07 답 ①

$$\log_2 ab=\log_2\left(2^{\frac{1}{n}}\times 2^{\frac{1}{n+1}}\right)=\log_2 2^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}$$

$$=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$$

$$(\log_2 a)(\log_2 b)=(\log_2 2^{\frac{1}{n}})(\log_2 2^{\frac{1}{n+1}})$$

$$=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\therefore \left\{\frac{3^{\log_2 ab}}{3^{(\log_2 a)(\log_2 b)}}\right\}^5=\left\{\frac{3^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}}{3^{\frac{1}{n(n+1)}}}\right\}^5$$

$$=\{3^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}}\}^5$$

$$=3^{\frac{10}{n+1}}$$

$3^{\frac{10}{n+1}}$이 자연수가 되려면 $n+1$은 10의 양의 약수이어야 하므로

$n+1=1, 2, 5, 10 \quad \therefore n=0, 1, 4, 9$

그런데 n은 자연수이므로 $n=1, 4, 9$

따라서 모든 n의 값의 합은

$1+4+9=14$

08 답 13

$$\log_4 2n^2-\frac{1}{2}\log_2\sqrt{n}=\log_4 2n^2-\log_4 n^{\frac{1}{2}}$$

$$=\log_4\frac{2n^2}{n^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\log_4 2n^{2-\frac{1}{2}}$$

$$=\log_4 2n^{\frac{3}{2}}$$

40 이하의 자연수 k에 대하여 $\log_4 2n^{\frac{3}{2}}=k$라 하면

$2n^{\frac{3}{2}}=4^k$에서 $4n^3=4^{2k}$, $n^3=4^{2k-1}$

$\therefore n=4^{\frac{2k-1}{3}}$

이때 n이 자연수이므로 $\frac{2k-1}{3}$은 자연수이어야 한다.

즉 $2k-1$은 3의 배수이어야 하므로 가능한 k의 값은 2, 5, 8, …, 38의 13개이다.

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는 자연수 k의 개수와 같으므로 13이다.

09 답 ②

약물 A의 흡수율과 배설률을 각각 K_A, E_A라 하고,

약물 B의 흡수율과 배설률을 각각 K_B, E_B라 하자.

주어진 조건에 의하여

$K_A=K_B$, $E_A=\frac{1}{2}K_A$, $E_B=\frac{1}{4}K_B=\frac{1}{4}K_A$

이므로 약물 A의 혈중농도가 최고치에 도달하는 시간은

$$c\times\frac{\log K_A-\log E_A}{K_A-E_A}=c\times\frac{\log K_A-\log\frac{1}{2}K_A}{K_A-\frac{1}{2}K_A}$$

$$=c\times\frac{\log\frac{K_A}{\frac{1}{2}K_A}}{\frac{1}{2}K_A}$$

$$=c\times\frac{\log 2}{\frac{1}{2}K_A}$$

$$=c\times\frac{2\log 2}{K_A}$$

즉 $c\times\frac{2\log 2}{K_A}=3$이므로 $\frac{c}{K_A}=\frac{3}{2\log 2}$

약물 B의 혈중농도가 최고치에 도달하는 시간은

$$c\times\frac{\log K_B-\log E_B}{K_B-E_B}=c\times\frac{\log K_A-\log\frac{1}{4}K_A}{K_A-\frac{1}{4}K_A}$$

$$=c\times\frac{\log\frac{K_A}{\frac{1}{4}K_A}}{\frac{3}{4}K_A}$$

$$=c\times\frac{\log 4}{\frac{3}{4}K_A}$$

$$=\frac{c}{K_A}\times\frac{4\log 2^2}{3}$$

$$=\frac{c}{K_A}\times\frac{8\log 2}{3}$$

$$=\frac{3}{2\log 2}\times\frac{8\log 2}{3}$$

$$=4$$

$\therefore a=4$

10 답 31

$10<x<100$에서 $\sqrt{10}<\sqrt{x}<10$이므로

$\frac{1}{2}<\log\sqrt{x}<1$

즉 $\log\sqrt{x}$의 정수 부분은 0이므로 소수 부분은 $\log\sqrt{x}$이다.

$10<x<100$에서 $\frac{1}{100}<\frac{1}{x}<\frac{1}{10}$이므로

$-2<\log\frac{1}{x}<-1$

즉 $\log\frac{1}{x}$의 정수 부분은 -2이므로 소수 부분은 $\log\frac{1}{x}+2$이다.

이때 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분이 $\log\frac{1}{x}$의 소수 부분의 5배이므로

$\log\sqrt{x}=5\left(\log\frac{1}{x}+2\right)$, $\frac{1}{2}\log x=5(-\log x+2)$

$\frac{11}{2}\log x=10$ $\therefore \log x=\frac{20}{11}$

따라서 $p=11$, $q=20$이므로

$p+q=11+20=31$

11 답 426

$4\log_{64}\frac{3}{4n+16}=k$ (k는 정수)라 하면

$4\log_{2^6}\frac{3}{4n+16}=k$, $\frac{4}{6}\log_2\frac{3}{4n+16}=k$

$\frac{2}{3}\log_2\frac{3}{4n+16}=k$, $\log_2\frac{3}{4n+16}=\frac{3}{2}k$

$\therefore \frac{3}{4n+16}=2^{\frac{3}{2}k}=(2^3)^{\frac{k}{2}}=8^{\frac{k}{2}}$ ……㉠

이때 자연수 n에 대하여 $0<\frac{3}{4n+16}<1$이므로

$0<8^{\frac{k}{2}}<1$

즉 $k<0$이어야 한다.

또 $\frac{3}{4n+16}$이 유리수이므로 $8^{\frac{k}{2}}$도 유리수이어야 한다.

따라서 자연수 m에 대하여 $k=-2m$이라 하면 ㉠에서

$\frac{3}{4n+16}=8^{-m}$, $\frac{4n+16}{3}=8^m$

$\therefore 4n+16=3\times8^m$

(i) $m=1$일 때

$4n+16=3\times8=24$이므로 $4n=8$

$\therefore n=2$

(ii) $m=2$일 때

$4n+16=3\times8^2=192$이므로 $4n=176$

$\therefore n=44$

(iii) $m=3$일 때

$4n+16=3\times8^3=1536$이므로 $4n=1520$

$\therefore n=380$

(iv) $m\geq4$일 때, n의 값은 1000보다 크다.

(i)~(iv)에서 모든 n의 값의 합은

$2+44+380=426$

12 답 44

(나)에서 $(n+1)\log a=3n^2-4n+4$의 양변을 $n+1$로 나누면

$\log a=\frac{3n^2-4n+4}{n+1}$

$=\frac{(3n-7)(n+1)+11}{n+1}$

$=3n-7+\frac{11}{n+1}$ ……㉠

(가)에서 $f(a)=f(a^{2n})$이므로 $\log a$와 $\log a^{2n}$의 소수 부분이 같다.

즉 $\log a^{2n}-\log a$의 값이 정수이므로

$2n\log a-\log a=(2n-1)\log a=$(정수)

㉠의 양변에 $(2n-1)$을 곱하면

$(2n-1)\log a=(2n-1)(3n-7)+\frac{11(2n-1)}{n+1}$

$\therefore (2n-1)\log a=(2n-1)(3n-7)+22-\frac{33}{n+1}$ ……㉡

㉡이 정수이므로 $\frac{33}{n+1}$이 정수이어야 한다.

즉 $n+1$은 33의 약수이므로

$n+1=1, 3, 11, 33$

$\therefore n=0, 2, 10, 32$

그런데 n은 자연수이므로 $n=2, 10, 32$

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$2+10+32=44$

03 지수함수

개념 완성하기 p.61~62

01 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

02 답 1
$f(0)=3^0=1$

03 답 $\frac{1}{3}$
$f(-1)=3^{-1}=\frac{1}{3}$

04 답 $\sqrt[3]{3}$
$f\left(\frac{1}{3}\right)=3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3}$

05 답 27
$f(3)=3^3=27$

06 답 1
$f(0)=\left(\frac{1}{5}\right)^0=1$

07 답 $\frac{1}{25}$
$f(2)=\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$

08 답 5
$f(-1)=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=5$

09 답 $\sqrt{5}$
$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

10 답 ㄷ, ㄹ, ㅁ
ㄱ, ㄴ. 함수 $f(x)=a^x$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
ㄷ. 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$이다.
ㄹ. $0<a<1$일 때, $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.
ㅁ. 그래프는 점 $(1, a)$를 지난다.
따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ, ㅁ이다.

11 답 $2^{3.1}<8\sqrt{2}$
$8\sqrt{2}=2^3\times 2^{0.5}=2^{3.5}$
함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
$2^{3.1}<2^{3.5}$ $\therefore 2^{3.1}<8\sqrt{2}$

12 답 $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{5}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$
함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로
$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{5}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

13 답 $\sqrt{7}<\sqrt[3]{7^2}<\sqrt[4]{7^3}$
$\sqrt{7}=7^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{7^3}=7^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[3]{7^2}=7^{\frac{2}{3}}$
함수 $y=7^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
$7^{\frac{1}{2}}<7^{\frac{2}{3}}<7^{\frac{3}{4}}$ $\therefore \sqrt{7}<\sqrt[3]{7^2}<\sqrt[4]{7^3}$

14 답 $\left(\frac{1}{5}\right)^2<\frac{1}{5}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-0.6}$
함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로
$\left(\frac{1}{5}\right)^2<\frac{1}{5}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-0.6}$

15 답 $-1, 3$

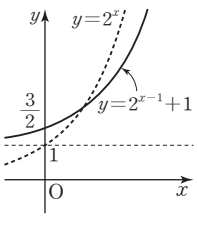
16 답 x

17 답 y
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$이므로 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

18 답 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-7$
함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y+7=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ $\therefore y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-7$

19 답 $y=-2^x$
함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ $\therefore y=-2^x$

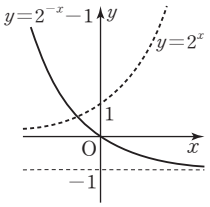
20 답 그래프는 풀이 참조
치역: $\{y|y>1\}$, 점근선의 방정식: $y=1$
함수 $y=2^{x-1}+1$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
$\therefore$ 치역: $\{y|y>1\}$,
점근선의 방정식: $y=1$



21 답 그래프는 풀이 참조

치역: $\{y|y>-1\}$, 점근선의 방정식: $y=-1$

함수 $y=2^{-x}-1$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



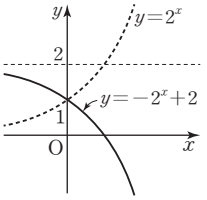
∴ 치역: $\{y|y>-1\}$,

점근선의 방정식: $y=-1$

22 답 그래프는 풀이 참조

치역: $\{y|y<2\}$, 점근선의 방정식: $y=2$

함수 $y=-2^x+2$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



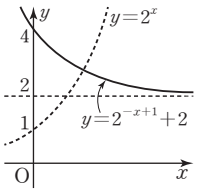
∴ 치역: $\{y|y<2\}$,

점근선의 방정식: $y=2$

23 답 그래프는 풀이 참조

치역: $\{y|y>2\}$, 점근선의 방정식: $y=2$

함수 $y=2^{-x+1}+2$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



∴ 치역: $\{y|y>2\}$,

점근선의 방정식: $y=2$

24 답 최댓값: 100, 최솟값: $\frac{1}{10}$

함수 $y=10^x$에서 밑 10이 $10>1$이므로

$x=2$일 때 최대이고, 최댓값은 $10^2=100$

$x=-1$일 때 최소이고, 최솟값은 $10^{-1}=\frac{1}{10}$

25 답 최댓값: 25, 최솟값: 1

함수 $y=5^{-x}=\left(\frac{1}{5}\right)^x$에서 밑 $\frac{1}{5}$이 $0<\frac{1}{5}<1$이므로

$x=-2$일 때 최대이고, 최댓값은 $5^2=25$

$x=0$일 때 최소이고, 최솟값은 $5^0=1$

26 답 최댓값: 83, 최솟값: $\frac{19}{9}$

함수 $y=3^{x+1}+2$에서 밑 3이 $3>1$이므로

$x=3$일 때 최대이고, 최댓값은 $3^4+2=83$

$x=-3$일 때 최소이고, 최솟값은 $3^{-2}+2=\frac{19}{9}$

27 답 최댓값: 0, 최솟값: $-\frac{15}{16}$

함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}-1$에서 밑 $\frac{1}{4}$이 $0<\frac{1}{4}<1$이므로

$x=1$일 때 최대이고, 최댓값은 $\left(\frac{1}{4}\right)^0-1=0$

$x=3$일 때 최소이고, 최솟값은 $\left(\frac{1}{4}\right)^2-1=-\frac{15}{16}$

28 답 $x=\frac{3}{2}$

$25^x=125$에서 $5^{2x}=5^3$

$2x=3$ ∴ $x=\frac{3}{2}$

29 답 $x=-\frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^x=2\sqrt{2}\times 2^x$에서 $2^{-2x}=2^{\frac{3}{2}+x}$

$-2x=\frac{3}{2}+x$, $3x=-\frac{3}{2}$

∴ $x=-\frac{1}{2}$

30 답 $x=-5$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{1-x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2(x+2)}$에서 $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2(x+2)}$

$x-1=2(x+2)$, $x-1=2x+4$

∴ $x=-5$

31 답 (가) $t^2-6t-16$ (나) 8 (다) 3

$2^{2x}-6\times 2^x-16=0$에서 $(2^x)^2-6\times 2^x-16=0$

$2^x=t$ $(t>0)$라 하면 주어진 방정식은

(가) $t^2-6t-16$ $=0$, $(t+2)(t-8)=0$

∴ $t=$ (나) 8 ($\because t>0$)

즉 $2^x=$ (나) 8 $=2^3$이므로 $x=$ (다) 3

32 답 $x=0$ 또는 $x=2$

$4^x-5\times 2^x+4=0$에서 $(2^x)^2-5\times 2^x+4=0$

$2^x=t$ $(t>0)$라 하면 주어진 방정식은

$t^2-5t+4=0$, $(t-1)(t-4)=0$

∴ $t=1$ 또는 $t=4$

즉 $2^x=1$ 또는 $2^x=4$이므로

$x=0$ 또는 $x=2$

33 답 $x=-2$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}-8\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-27=0$에서

$3\times\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-24\times\left(\frac{1}{3}\right)^x-27=0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$ $(t>0)$라 하면 주어진 방정식은

$3t^2-24t-27=0$, $t^2-8t-9=0$

$(t+1)(t-9)=0$ ∴ $t=9$ ($\because t>0$)

즉 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=9$이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

∴ $x=-2$

34 답 $x=3$

$3^{2x-6}=4^{2x-6}$에서 $3\neq 4$이므로

$2x-6=0$ ∴ $x=3$

35 답 $x<2$

$2^{2x+3}<128$에서 $2^{2x+3}<2^7$

이때 밑 2가 $2>1$이므로 $2x+3<7$

$2x<4$ ∴ $x<2$

36 답 $x \ge \frac{1}{4}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \le (3\sqrt{3})^{2x}$에서 $3^{-x+1} \le 3^{3x}$

이때 밑 3이 $3>1$이므로 $-x+1 \le 3x$

$-4x \le -1$ $\therefore x \ge \frac{1}{4}$

37 답 $x>-2$

$5^{3-x} > \left(\frac{1}{5}\right)^{3x+1}$에서 $5^{3-x} > 5^{-3x-1}$

이때 밑 5가 $5>1$이므로 $3-x > -3x-1$

$2x > -4$ $\therefore x > -2$

38 답 (가) $t^2-30t+81$ (나) 3 (다) 27 (라) -3 (마) -1

$\left(\frac{1}{9}\right)^x - 30\times\left(\frac{1}{3}\right)^x + 81 < 0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 - 30\times\left(\frac{1}{3}\right)^x + 81 < 0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t\ (t>0)$라 하면 주어진 부등식은

(가) $t^2-30t+81 < 0$, $(t-3)(t-27)<0$

$\therefore$ (나) $3 < t <$ (다) 27

즉 (나) $3 < \left(\frac{1}{3}\right)^x <$ (다) 27이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

이때 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

(라) $-3 < x <$ (마) -1

39 답 $1<x<2$

$9^x - 4\times 3^{x+1} + 27 < 0$에서 $(3^x)^2 - 12\times 3^x + 27 < 0$

$3^x = t\ (t>0)$라 하면 주어진 부등식은

$t^2-12t+27<0$, $(t-3)(t-9)<0$

$\therefore 3<t<9$

즉 $3<3^x<9$이므로 $3<3^x<3^2$

이때 밑 3이 $3>1$이므로 $1<x<2$

40 답 $x<-2$

$\left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 8$에서 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x - 8 > 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t\ (t>0)$라 하면 주어진 부등식은

$t^2-2t-8>0$, $(t+2)(t-4)>0$

$\therefore t>4\ (\because t>0)$

즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

이때 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$x<-2$

유형 완성하기 p.63~79

01 답 8

$f(1)=2$에서 $5^{a+b}=2$ ……㉠

$f(2)=4$에서 $5^{2a+b}=4$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $5^a=2$

$5^a=2$를 ㉠에 대입하면 $2\times 5^b=2$ $\therefore 5^b=1$

$\therefore f(3)=5^{3a+b}=(5^a)^3\times 5^b=2^3\times 1=8$

01-1 답 ③

$f(0)=3$에서 $a^c=3$ ……㉠

$f(1)=6$에서 $a^{b+c}=6$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $a^b=2$

$\therefore f(2)=a^{2b+c}=(a^b)^2\times a^c=2^2\times 3=12$

02 답 ④

$f(p)=4$에서 $a^p=4$

$f(q)=\frac{1}{3}$에서 $a^q=\frac{1}{3}$

$$\therefore f\left(\frac{p}{2}-q\right)=a^{\frac{p}{2}-q}=(a^p)^{\frac{1}{2}}\times(a^q)^{-1}$$
$$=4^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$
$$=2\times 3=6$$

02-1 답 ③

$f(2a)f(3b)=8$에서 $2^{-2a}\times 2^{-3b}=8$

$2^{-2a-3b}=2^3$ $\therefore 2a+3b=-3$ ……㉠

$f(a+b)=2$에서 $2^{-(a+b)}=2$

$2^{-a-b}=2$ $\therefore a+b=-1$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-1$

$\therefore f(a)+f(b)=f(0)+f(-1)=2^0+2^{-(-1)}=3$

03 답 ①

ㄱ. $f(p+q)=a^{p+q}=a^p\times a^q=f(p)f(q)$

ㄴ. $f(2p)=a^{2p}$, $2f(p)=2a^p$이므로 $f(2p)\ne 2f(p)$

ㄷ. $f(p)f(-p)=a^p\times a^{-p}=a^0=1$

ㄹ. $f(pq)=a^{pq}$, $f(p^q)=a^{p^q}$이므로 $f(pq)\ne f(p^q)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

참고 지수함수 $f(x)=a^x\ (a>0, a\ne 1)$과 임의의 실수 x, y에 대하여

(1) $f(0)=1$ (2) $f(x+y)=f(x)f(y)$

(3) $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$ (4) $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$

(5) $f(nx)=\{f(x)\}^n$ (n은 자연수)

03-1 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $f(-p)=3^{-p}=\frac{1}{3^p}=\frac{1}{f(p)}$

ㄴ. $f(pq)=3^{pq}$, $f(p)+f(q)=3^p+3^q$이므로

$f(pq)\ne f(p)+f(q)$

ㄷ. $f(3p)=3^{3p}=(3^p)^3=\{f(p)\}^3$

ㄹ. $f(p-q)=3^{p-q}=\frac{3^p}{3^q}=\frac{f(p)}{f(q)}$이므로

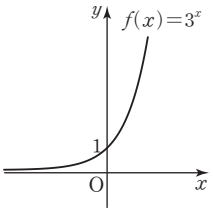
$f(p-q)\ne\frac{f(q)}{f(p)}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

04 답 ㄱ, ㄷ

$f(3)=27$에서 $a^3=27=3^3$ $\therefore a=3$

즉 $f(x)=3^x$이므로 함수 $f(x)=3^x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 그래프는 점 $(0, 1)$을 지난다.

ㄴ. 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$이므로 x축과 만나지 않는다.

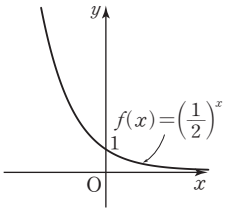
ㄷ. 밑 3이 $3>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

ㄹ. 그래프는 제 1, 2 사분면을 지난다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

04-1 답 ㄱ, ㄴ

함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

ㄴ. $x_1\neq x_2$이면 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\neq\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$이므로 일대일함수이다.

ㄷ. 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

ㄹ. 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

Lecture 일대일함수와 일대일대응

(1) 일대일함수

➡ $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$

(2) 일대일대응

① $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$

② (치역)=(공역)

05 답 ③

임의의 실수 a, b에 대하여 $a<b$일 때, $f(a)<f(b)$를 만족시키는 함수는 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하는 함수이다.

즉 $f(x)=a^x$에서 $a>1$인 함수를 찾으면 된다.

① $f(x)=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에서 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

② $f(x)=0.3^x=\left(\frac{3}{10}\right)^x$에서 밑 $\frac{3}{10}$이 $0<\frac{3}{10}<1$이므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

③ $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}=4^x$에서 밑 4가 $4>1$이므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

④ $f(x)=(\sqrt{2})^{-x}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$에서 밑 $\frac{\sqrt{2}}{2}$가 $0<\frac{\sqrt{2}}{2}<1$이므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

⑤ $f(x)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$에서 밑 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이 $0<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$이므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ③이다.

05-1 답 ③

임의의 실수 a, b에 대하여 $a<b$일 때, $f(a)>f(b)$를 만족시키는 함수는 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하는 함수이다.

즉 $f(x)=a^x$에서 $0<a<1$인 함수를 찾으면 된다.

① $f(x)=2^x$에서 밑 2가 $2>1$이므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

② $f(x)=1.5^x=\left(\frac{3}{2}\right)^x$에서 밑 $\frac{3}{2}$이 $\frac{3}{2}>1$이므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

③ $f(x)=\left(\frac{5}{3}\right)^{-x}=\left(\frac{3}{5}\right)^x$에서 밑 $\frac{3}{5}$이 $0<\frac{3}{5}<1$이므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

④ $f(x)=(\sqrt{7})^x$에서 밑 $\sqrt{7}$이 $\sqrt{7}>1$이므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

⑤ $f(x)=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x$에서 밑 $\frac{\sqrt{5}}{2}$가 $\frac{\sqrt{5}}{2}>1$이므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ③이다.

06 답 $-\sqrt{2}<a<-1$ 또는 $1<a<\sqrt{2}$

임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)>f(x_2)$를 만족시키는 함수는 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하는 함수이다. ……❶

$f(x)=(a^2-1)^x$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하려면

$0<a^2-1<1$ ……❷

(i) $0<a^2-1$에서 $(a+1)(a-1)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>1$

(ii) $a^2-1<1$에서 $a^2-2<0$

$(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})<0$ $\therefore -\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $-\sqrt{2}<a<-1$ 또는 $1<a<\sqrt{2}$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 감소함수임을 알 수 있다.	20%
❷ a^2-1의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%

06-1 답 $-1<a<0$

$y=(a^2+a+1)^x$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하려면

$0<a^2+a+1<1$

(i) $0<a^2+a+1$에서

$a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

이므로 항상 성립한다.

(ii) $a^2+a+1<1$에서 $a^2+a<0$

$a(a+1)<0$ $\therefore -1<a<0$

(i), (ii)에서 $-1<a<0$

07 답 ③

$f(b)=3$이므로 $a^b=3$

$f(c)=6$이므로 $a^c=6$

$\therefore f\left(\frac{b+c}{2}\right)=a^{\frac{b+c}{2}}=(a^{b+c})^{\frac{1}{2}}=(a^b\times a^c)^{\frac{1}{2}}$

$=(3\times 6)^{\frac{1}{2}}=18^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{2}$

07-1 답 ④

$3^a=\alpha$, $3^b=\beta$이므로 $\alpha\beta=3^a\times 3^b=3^{a+b}$

즉 $9=3^{a+b}$이므로 $3^{a+b}=3^2$

$\therefore a+b=2$

08 답 23

직선 $y=x$ 위의 점은 x좌표와 y좌표가 같으므로 오른쪽 그림에서

$a=2^0=1$

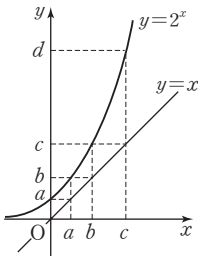
$b=2^a=2^1=2$

$c=2^b=2^2=4$

$d=2^c=2^4=16$

$\therefore a+b+c+d=1+2+4+16$

$=23$



08-1 답 52

직선 $y=x$ 위의 점은 x좌표와 y좌표가 같으므로 오른쪽 그림에서

$a=3^0=1$

$\therefore b=a=1$

$c=3^b=3^1=3$

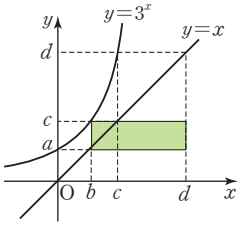
$d=3^c=3^3=27$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$(d-b)(c-a)=(27-1)\times(3-1)$

$=26\times2$

$=52$



09 답 $\sqrt[3]{4}$

$\overline{AB}:\overline{BC}=2:1$에서 $\overline{AB}:\overline{AC}=2:3$이므로 두 점 B, C의 x좌표를 각각 $2b$, $3b$ $(b>0)$라 하면

$2^{2b}=a^{3b}=k$, $4^b=(a^3)^b$

$4=a^3$ $\therefore a=\sqrt[3]{4}$

09-1 답 $\frac{1}{4}$

점 A의 좌표를 $(a, 2^a)$이라 하면 두 점 A, B의 y좌표가 같으므로 점 B의 y좌표는 2^a이다.

점 B는 함수 $y=4^x$의 그래프 위의 점이므로

$4^x=2^a$에서 $2^{2x}=2^a$

$2x=a$ $\therefore x=\frac{a}{2}$

$\therefore \mathrm{B}\left(\frac{a}{2}, 2^a\right)$

또 두 점 A, C의 y좌표가 같으므로 점 C의 y좌표는 2^a이다.

점 C는 함수 $y=8^x$의 그래프 위의 점이므로

$8^x=2^a$에서 $2^{3x}=2^a$

$3x=a$ $\therefore x=\frac{a}{3}$

$\therefore \mathrm{C}\left(\frac{a}{3}, 2^a\right)$

$\therefore \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\frac{a}{2}-\frac{a}{3}}{a-\frac{a}{3}}=\frac{\frac{a}{6}}{\frac{2}{3}a}=\frac{1}{4}$

10 답 9

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-b=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}$ $\therefore y=-2^{-x+a}+b$ ……㉠

㉠의 그래프가 점 $(-1, -1)$을 지나므로

$-1=-2^{1+a}+b$ ……㉡

㉠의 그래프가 점 $(-2, -9)$를 지나므로

$-9=-2^{2+a}+b$ ……㉢

㉡−㉢을 하면 $2^{2+a}-2^{1+a}=8$

$2\times2^{a+1}-2^{a+1}=8$, $2^{a+1}=2^3$

$a+1=3$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면

$-1=-2^3+b$ $\therefore b=7$

$\therefore a+b=2+7=9$

10-1 답 −1

$y=3^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=3^{2(x-m)}$ $\therefore y=3^{-2m}\times3^{2x}+n$

이 식이 $y=81\times3^{2x}+\frac{1}{2}$과 일치하므로

$3^{-2m}=81$, $n=\frac{1}{2}$

$3^{-2m}=81$에서 $3^{-2m}=3^4$

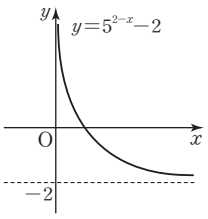
$-2m=4$ $\therefore m=-2$

$\therefore m+2n=-2+2\times\frac{1}{2}=-1$

11 답 ④

① $x=0$을 대입하면 $y=5^2-2=23$이므로 그래프는 점 $(0, 23)$을 지난다.

② $y=5^{2-x}-2=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}-2$이므로 함수 $y=5^{2-x}-2$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 −2만큼 평행이동한 것이다.



③ 치역은 $\{y\,|\,y>-2\}$이다.

④ 그래프의 점근선의 방정식은 $y=-2$이다.

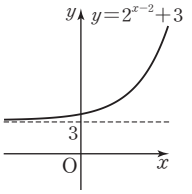
⑤ 주어진 함수에서 밑 $\frac{1}{5}$이 $0<\frac{1}{5}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

11-1 답 ④

① $x=2$를 대입하면 $y=2^0+3=4$이므로 그래프는 점 $(2, 4)$를 지난다.

② 함수 $y=2^{x-2}+3$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉 그래프의 점근선의 방정식은 $y=3$이다.



③ 정의역은 실수 전체의 집합이다.
④ 주어진 함수에서 밑 2가 $2>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
⑤ 그래프는 제3, 4사분면을 지나지 않는다.
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

12 답 4

$y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$y=3^{-x}$
$y=3^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y-b=3^{-(x-a)}$ $\therefore y=3^{-x+a}+b$ ……❶
이때 주어진 그래프에서 점근선의 방정식이 $y=-3$이므로
$b=-3$
즉 $y=3^{-x+a}-3$의 그래프가 원점을 지나므로
$0=3^a-3$, $3^a=3$ $\therefore a=1$ ……❷
$\therefore a-b=1-(-3)=4$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 조건을 만족시키는 함수의 식을 구할 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20%

12-1 답 -3

$y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y-b=2^{x-a}$ $\therefore y=2^{x-a}+b$
$y=2^{x-a}+b$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$y=2^{-x-a}+b$
이때 주어진 그래프에서 점근선의 방정식이 $y=-1$이므로
$b=-1$
즉 $y=2^{-x-a}-1$의 그래프가 점 $(2, 0)$을 지나므로
$0=2^{-2-a}-1$, $2^{-2-a}=1$
$-2-a=0$ $\therefore a=-2$
$\therefore a+b=-2+(-1)=-3$

13 답 ⑤

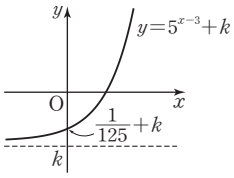
ㄱ. $y=2(2^x-1)=2^{x+1}-2$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
ㄴ. $y=2^{2x}=4^x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.
ㄷ. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}=2^{-(x-1)}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
ㄹ. $y=-\frac{2^x}{4}=-2^{x-2}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $y=2^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

13-1 답 ⑤

ㄱ. $y=9^{2x+1}=\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\left(\frac{1}{81}\right)^{-\left(x+\frac{1}{2}\right)}$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.
ㄴ. $y=3^{2x-5}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2\left(x-\frac{5}{2}\right)}=\left(\frac{1}{9}\right)^{-\left(x-\frac{5}{2}\right)}$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\frac{5}{2}$만큼 평행이동한 것이다.
ㄷ. $y=9^x+1=\left(\frac{1}{9}\right)^{-x}+1$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
ㄹ. $y=-\left(\frac{1}{9}\right)^{x-2}$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

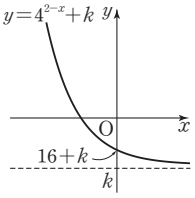
14 답 ⑤

함수 $y=5^{x-3}+k$의 그래프는 $y=5^x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.
이 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 y의 값이 0보다 작거나 같아야 하므로
$\frac{1}{125}+k\le 0$ $\therefore k\le -\frac{1}{125}$
따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다.



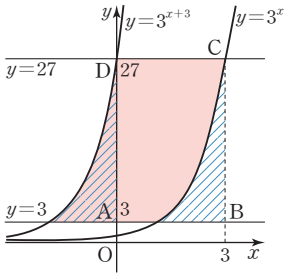
14-1 답 ④

함수 $y=4^{2-x}+k=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}+k$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.
이 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 y의 값이 0보다 작거나 같아야 하므로
$16+k\le 0$ $\therefore k\le -16$
따라서 정수 k의 최댓값은 -16이다.



15 답 72

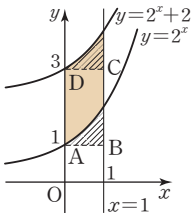
함수 $y=3^{x+3}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.
오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 두 함수 $y=3^x$, $y=3^{x+3}$의 그래프와 두 직선 $y=3$, $y=27$로 둘러싸인 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.
따라서 구하는 넓이는
$\overline{AB}\times\overline{AD}=3\times(27-3)$
$=3\times 24$
$=72$



15-1 답 ②

함수 $y=2^x+2$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 두 함수 $y=2^x$, $y=2^x+2$의 그래프와 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.
따라서 구하는 넓이는
$\overline{AB}\times\overline{AD}=1\times(3-1)=2$



16 답 ④

$\sqrt[5]{4}=4^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{2}{5}}$, $0.5^{-\frac{5}{4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{4}}=2^{\frac{5}{4}}$,
$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[4]{8}=8^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$
이때 $\frac{1}{4}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<\frac{5}{4}$이고, 밑 2가 $2>1$이므로
$2^{\frac{1}{4}}<2^{\frac{2}{5}}<2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{3}{4}}<2^{\frac{5}{4}}$
따라서 $M=2^{\frac{5}{4}}$, $m=2^{\frac{1}{4}}$이므로
$Mm=2^{\frac{5}{4}}\times2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{5}{4}+\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$

16-1 답 ③

$\sqrt[5]{8}=8^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{3}{5}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{1}{3}}$, $(2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{3}})^{\frac{8}{5}}=(2^{\frac{5}{6}})^{\frac{8}{5}}=2^{\frac{4}{3}}$,
$0.25^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}}=2$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^8}}}}=(2^8)^{\frac{1}{16}}=2^{\frac{1}{2}}$
이때 $-\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<1<\frac{4}{3}$이고, 밑 2가 $2>1$이므로
$2^{-\frac{1}{3}}<2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{3}{5}}<2<2^{\frac{4}{3}}$
따라서 $M=2^{\frac{4}{3}}$, $m=2^{-\frac{1}{3}}$이므로
$Mm=2^{\frac{4}{3}}\times2^{-\frac{1}{3}}=2$

17 답 ②

$A=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$, $B=9^{0.75}=(3^2)^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{3}{2}}$, $C=3\sqrt[3]{3}=3\times3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{4}{3}}$
이때 $1<\frac{4}{3}<\frac{3}{2}$이고, 밑 3이 $3>1$이므로
$3<3^{\frac{4}{3}}<3^{\frac{3}{2}}$ $\therefore A<C<B$

17-1 답 ④

$A=\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$, $B=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}=\frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$
$C=\sqrt[3]{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{6}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$
이때 $-1<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$이고, 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로
$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ $\therefore B<C<A$

18 답 ③

$0<a<1$에서 $a^1<a^a<a^0$ $\therefore a<a^a<1$
또 $a<a^a<1$에서 $a^1<a^{a^a}<a^a$ $\therefore a<a^{a^a}<a^a$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

18-1 답 ㄷ

주어진 조건에서 $a<1<b$ ……㉠
㉠의 각 변을 a제곱하면 $a^a<1<b^a$
이때 $0<a<1$, $a<b$이므로 $a^b<a^a$
또 $b>1$, $a<b$이므로 $b^a<b^b$
$\therefore a^b<a^a<1<b^a<b^b$
따라서 가장 작은 수는 ㄷ이다.

19 답 ⑤

$2\le x\le3$에서 함수 $f(x)=4^{x+a}-4$는 밑 4가 $4>1$이므로 $x=3$일 때 최댓값 12를 갖는다.
즉 $f(3)=12$이므로 $4^{3+a}-4=12$
$4^{3+a}=16$, $4^{3+a}=4^2$
$3+a=2$ $\therefore a=-1$
따라서 함수 $f(x)=4^{x-1}-4$는 $x=2$일 때 최소이고, 최솟값은
$f(2)=4^1-4=0$

19-1 답 1

$-2\le x\le1$에서 함수 $f(x)=a^x$은 밑 a가 $0<a<1$이므로 $x=1$일 때 최솟값 $\frac{3}{4}$을 갖는다.
즉 $f(1)=\frac{3}{4}$이므로 $a=\frac{3}{4}$
따라서 함수 $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$은 $x=-2$일 때 최대이고, 최댓값 M은
$M=f(-2)=\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=\frac{16}{9}$
$\therefore \frac{3}{4}aM=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{16}{9}=1$

20 답 −30

$y=2^{2-x}-1=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$
$-2\le x\le3$에서 함수 $y=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$은 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로
$x=-2$일 때 최대이고, 최댓값 M은
$M=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-1=15$
$x=3$일 때 최소이고, 최솟값 m은
$m=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3-1=-\frac{1}{2}$
$\therefore \frac{M}{m}=\frac{15}{-\frac{1}{2}}=-30$

20-1 답 25

$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+1=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$
$-1\le x\le3$에서 함수 $f(x)=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$은 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $x=-1$일 때 최대이고, 최댓값 M은
$M=f(-1)=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+1=17$
$g(x)=3^{2x-4}-1=\frac{1}{81}\times9^x-1$
$-1\le x\le3$에서 함수 $g(x)=\frac{1}{81}\times9^x-1$은 밑 9가 $9>1$이므로
$x=3$일 때 최대이고, 최댓값 M'은
$M'=g(3)=\frac{1}{81}\times9^3-1=8$
$\therefore M+M'=17+8=25$

21 답 $\frac{5}{2}$

$-1\le x\le 2$에서 함수 $f(x)=a^{x+2}$은

(i) $a>1$일 때

최댓값은 $f(2)$, 최솟값은 $f(-1)$이므로

$f(2)=8f(-1)$, $a^4=8a$

$a^3=8$ $\therefore a=2$

(ii) $0<a<1$일 때

최댓값은 $f(-1)$, 최솟값은 $f(2)$이므로

$f(-1)=8f(2)$, $a=8a^4$

$a^3=\frac{1}{8}$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 양수 a의 값의 합은

$2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

21-1 답 5

$2\le x\le a$에서 함수 $y=3^{x+a}$은 밑 3이 $3>1$이므로

$x=a$일 때 최대이고, 최댓값 M은 $M=3^{2a}$

$x=2$일 때 최소이고, 최솟값 m은 $m=3^{2+a}$ ……❶

이때 $\frac{m}{M}=\frac{1}{27}$이므로

$\frac{3^{2+a}}{3^{2a}}=\frac{1}{27}$, $3^{2-a}=3^{-3}$

$2-a=-3$ $\therefore a=5$ ……❷

채점 기준	비율
❶ M, m을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%

22 답 ③

$f(x)=-x^2+4x-3$이라 하면 $f(x)=-(x-2)^2+1$

$1\le x\le 4$에서 $f(1)=0$, $f(2)=1$, $f(4)=-3$

$\therefore -3\le f(x)\le 1$

밑 2가 $2>1$이므로 $y=2^{f(x)}+3$은

$f(x)=1$일 때 최대이고, 최댓값 M은

$M=2^1+3=5$

$f(x)=-3$일 때 최소이고, 최솟값 m은

$m=2^{-3}+3=\frac{25}{8}$

$\therefore M-m=5-\frac{25}{8}=\frac{15}{8}$

22-1 답 ④

$f(x)=x^2-2x+2$라 하면 $f(x)=(x-1)^2+1$

$-1\le x\le 2$에서 $f(-1)=5$, $f(1)=1$, $f(2)=2$

$\therefore 1\le f(x)\le 5$

밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$은

$f(x)=1$일 때 최대이고, 최댓값 M은 $M=\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{3}$

$f(x)=5$일 때 최소이고, 최솟값 m은 $m=\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$

$\therefore \frac{M}{m}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{243}}=81$

23 답 ⑤

$f(x)=x^2-2x+a$라 하면 $f(x)=(x-1)^2+a-1$

$\therefore f(x)\ge a-1$

밑 2가 $2>1$이므로 $y=2^{f(x)}$은 $f(x)=a-1$일 때 최소이고, 최솟값은 16이다.

즉 $2^{a-1}=16$이므로 $2^{a-1}=2^4$

$a-1=4$ $\therefore a=5$

23-1 답 2^{11}

$f(x)=-x^2-4x+a$라 하면 $f(x)=-(x+2)^2+a+4$

$-4\le x\le 2$에서 $f(-4)=a$, $f(-2)=a+4$, $f(2)=a-12$

$\therefore a-12\le f(x)\le a+4$

밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$은 $f(x)=a+4$일 때 최소이고, 최솟값은 $\frac{1}{32}$이다.

즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^{a+4}=\frac{1}{32}$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{a+4}=\left(\frac{1}{2}\right)^5$

$a+4=5$ $\therefore a=1$

따라서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$은 $f(x)=a-12=1-12=-11$일 때 최대이고, 최댓값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-11}=2^{11}$

24 답 ⑤

$f(x)=x^2-5x+7$이라 하면 $f(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

$\therefore f(x)\ge\frac{3}{4}$

이때 $a>1$이므로 $y=a^{f(x)}$은 $f(x)=\frac{3}{4}$일 때 최소이고, 최솟값은 8이다.

즉 $a^{\frac{3}{4}}=8$이므로 $a^{\frac{3}{4}}=2^3$ $\therefore a=(2^3)^{\frac{4}{3}}=2^4=16$

24-1 답 $\frac{1}{3}$

$f(x)=x^2-4x+b$라 하면 $f(x)=(x-2)^2+b-4$

$0\le x\le 2$에서 $f(0)=b$, $f(2)=b-4$

$\therefore b-4\le f(x)\le b$

이때 $0<a<1$이므로 $y=a^{f(x)}$은

$f(x)=b-4$일 때 최대이고, 최댓값은 27이다.

$\therefore a^{b-4}=27$ ……㉠

$f(x)=b$일 때 최소이고, 최솟값은 $\frac{1}{3}$이다.

$\therefore a^b=\frac{1}{3}$ ……㉡ ……❶

㉡÷㉠을 하면 $a^{b-(b-4)}=\frac{1}{81}$

$a^4=\left(\frac{1}{3}\right)^4$ $\therefore a=\frac{1}{3}$ ($\because 0<a<1$)

$a=\frac{1}{3}$을 ㉡에 대입하면 $\left(\frac{1}{3}\right)^b=\frac{1}{3}$ $\therefore b=1$ ……❷

$\therefore ab=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$ ……❸

채점 기준	비율
❶ a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

25 답 -7

$y=3\times2^{x+1}-4^x=6\times2^x-(2^x)^2$

$2^x=t\ (t>0)$라 하면 $1\le x\le3$에서

$2^1\le t\le2^3 \quad \therefore 2\le t\le8$

이때 주어진 함수는 $y=6t-t^2=-(t-3)^2+9$이므로

$t=3$일 때 최대이고, 최댓값은

$-(3-3)^2+9=9$

$t=8$일 때 최소이고, 최솟값은

$-(8-3)^2+9=-16$

따라서 주어진 함수의 최댓값과 최솟값의 합은

$9+(-16)=-7$

25-1 답 ②

$y=4^x-2^{x+3}+9=(2^x)^2-8\times2^x+9$

$2^x=t\ (t>0)$라 하면 $2\le x\le3$에서

$2^2\le t\le2^3 \quad \therefore 4\le t\le8$

이때 주어진 함수는 $y=t^2-8t+9=(t-4)^2-7$이므로

$t=4$일 때 최소이고, 최솟값 m은

$m=(4-4)^2-7=-7$

$t=8$일 때 최대이고, 최댓값 M은

$M=(8-4)^2-7=9$

$\therefore M+m=9+(-7)=2$

26 답 ③

$y=9^x-2\times3^{x+1}+a=(3^x)^2-6\times3^x+a$

$3^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 함수는

$y=t^2-6t+a=(t-3)^2+a-9$

주어진 함수는 $t=3$, 즉 $x=b=1$일 때 최소이고, 최솟값은 $a-9$이므로

$a-9=-4 \quad \therefore a=5$

$\therefore a-b=5-1=4$

26-1 답 2

$f(x)=-4^x+2^{x+a}+1=-(2^x)^2+2^a\times2^x+1$

$2^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 함수는

$f(x)=-t^2+2^at+1=-(t-2^{a-1})^2+2^{2a-2}+1$

주어진 함수는 $t=2^{a-1}$일 때 최대이고, 최댓값은 $2^{2a-2}+1$이므로

$2^{2a-2}+1=5,\ 2^{2a-2}=4=2^2$

$2a-2=2 \quad \therefore a=2$

즉 $t=2^{a-1}=2^{2-1}=2$이므로 $2^x=2$

$\therefore x=1$, 즉 $b=1$

$\therefore ab=2\times1=2$

27 답 2

$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x+a=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-\left(\frac{1}{2}\right)^x+a$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$라 하면 $0\le x\le3$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^3\le t\le\left(\frac{1}{2}\right)^0 \quad \therefore \frac{1}{8}\le t\le1$ ……❶

이때 주어진 함수는

$y=t^2-t+a=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{4}$이므로

$t=\frac{1}{2}$일 때 최소이고, 최솟값 m은

$m=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{4}=a-\frac{1}{4}$

$t=1$일 때 최대이고, 최댓값 M은

$M=\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{4}=a$ ……❷

이때 $M+m=\frac{15}{4}$이므로 $a+a-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

$2a=4 \quad \therefore a=2$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$로 치환한 후 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❷ M, m을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

27-1 답 ⑤

$y=4^x-2^{x+2}+a=(2^x)^2-4\times2^x+a$

$2^x=t\ (t>0)$라 하면 $0\le x\le2$에서

$2^0\le t\le2^2 \quad \therefore 1\le t\le4$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-4t+a=(t-2)^2+a-4$이므로

$t=2$일 때 최소이고, 최솟값은

$(2-2)^2+a-4=a-4$

$t=4$일 때 최대이고, 최댓값 M은

$M=(4-2)^2+a-4=a$

이때 주어진 함수의 최솟값이 -3이므로

$a-4=-3 \quad \therefore a=1$

따라서 $M=a=1$이므로

$a+M=1+1=2$

28 답 11

$2^x+2^{-x}=t$라 하면

$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$이므로

$y=6(2^x+2^{-x})-(4^x+4^{-x})=6t-(t^2-2)$

$=-t^2+6t+2=-(t-3)^2+11$

이때 $2^x>0,\ 2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=2^x+2^{-x}\ge2\sqrt{2^x\times2^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

$\therefore y=-(t-3)^2+11\ (t\ge2)$

따라서 주어진 함수는 $t=3$일 때 최대이고, 최댓값은

$-(3-3)^2+11=11$

28-1 답 22

$3^x+3^{-x}=t$라 하면

$9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2$이므로

$y=9^x+9^{-x}+6(3^x+3^{-x})+8=(t^2-2)+6t+8$

$=t^2+6t+6=(t+3)^2-3$

이때 $3^x>0,\ 3^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=3^x+3^{-x}\ge2\sqrt{3^x\times3^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

$\therefore y=(t+3)^2-3\ (t\ge2)$

주어진 함수는 $t=2$, 즉 $x=0$일 때 최소이고, 최솟값은

$(2+3)^2-3=22$

따라서 $a=0$, $b=22$이므로

$a+b=0+22=22$

29 답 ④

$2^x>0$, $2^y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2^x+2^y\geq 2\sqrt{2^x\times 2^y}=2\sqrt{2^{x+y}}$

(단, 등호는 $2^x=2^y$, 즉 $x=y$일 때 성립)

이때 $x+y=2$이므로

$2^x+2^y\geq 2\sqrt{2^2}=4$

따라서 2^x+2^y의 최솟값은 4이다.

29-1 답 100

$x+2y=4$ ……㉠

$5^x>0$, $25^y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$5^x+25^y\geq 2\sqrt{5^x\times 25^y}=2\sqrt{5^{x+2y}}=2\sqrt{5^4}=50$ ($\because$ ㉠)

이때 등호는 $5^x=25^y$일 때 성립하므로

$5^x=5^{2y}$ $\therefore x=2y$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $2y+2y=4$

$4y=4$ $\therefore y=1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=2$

따라서 5^x+25^y은 $x=2$, $y=1$일 때 최소이고, 최솟값은 50이므로

$\alpha=2$, $\beta=1$, $\gamma=50$

$\therefore \alpha\beta\gamma=2\times 1\times 50=100$

30 답 ②

$y=2^{x+a}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}=2^{x+a}+2^{-x+a}$

$2^{x+a}>0$, $2^{-x+a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2^{x+a}+2^{-x+a}\geq 2\sqrt{2^{x+a}\times 2^{-x+a}}$

$=2\sqrt{2^{2a}}=2\times 2^a$

$=2^{a+1}$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

따라서 주어진 함수의 최솟값은 2^{a+1}이므로

$2^{a+1}=4$, $2^{a+1}=2^2$

$a+1=2$ $\therefore a=1$

등호는 $2^{x+a}=2^{-x+a}$일 때 성립하므로
$x+a=-x+a$
$\therefore x=0$

30-1 답 12

$a^x+a^{-x}=t$라 하면

$a^{2x}+a^{-2x}=(a^x+a^{-x})^2-2=t^2-2$이므로

$y=4(a^x+a^{-x})-a^{2x}-a^{-2x}+k$

$=4(a^x+a^{-x})-(a^{2x}+a^{-2x})+k$

$=4t-(t^2-2)+k$

$=-t^2+4t+k+2$

$=-(t-2)^2+k+6$ ……❶

이때 $a>0$, $a\neq 1$이므로 $a^x>0$, $a^{-x}>0$

즉 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=a^x+a^{-x}\geq 2\sqrt{a^x\times a^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

……❷

$\therefore y=-(t-2)^2+k+6$ $(t\geq 2)$

따라서 주어진 함수는 $t=2$일 때 최대이고, 최댓값은 $k+6$이므로

$k+6=18$ $\therefore k=12$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $a^x+a^{-x}=t$로 치환한 후 주어진 함수를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30%

31 답 ③

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-7}=\left(\frac{3}{2}\right)^{4-x}$에서 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-7}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x-4}$

$2x^2-7=x-4$, $2x^2-x-3=0$

$(x+1)(2x-3)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은

$-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

31-1 답 ②

$2^{x^2}=(\sqrt{2})^{1-x}$에서 $2^{x^2}=2^{\frac{1}{2}(1-x)}$

$x^2=\frac{1}{2}(1-x)$, $2x^2+x-1=0$

$(x+1)(2x-1)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

따라서 모든 실근의 합은

$-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

32 답 ④

$8^x=4^{x-3}$에서 $2^{3x}=2^{2x-6}$

$3x=2x-6$ $\therefore x=-6$, 즉 $a=-6$

$9\sqrt{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^x$에서 $3^{\frac{5}{2}}=3^{-x}$

$\frac{5}{2}=-x$ $\therefore x=-\frac{5}{2}$, 즉 $b=-\frac{5}{2}$

$\therefore ab=-6\times\left(-\frac{5}{2}\right)=15$

32-1 답 ④

$(3^{x-2}-81)(6^{-2x+8}-36)=0$에서

$3^{x-2}=81$ 또는 $6^{-2x+8}=36$

$3^{x-2}=81$에서 $3^{x-2}=3^4$

$x-2=4$ $\therefore x=6$

$6^{-2x+8}=36$에서 $6^{-2x+8}=6^2$

$-2x+8=2$ $\therefore x=3$

따라서 주어진 방정식의 두 실근이 6, 3이므로

$\alpha\beta=6\times 3=18$

33 답 4

$125^x=5^{x^2+a}$에서 $5^{3x}=5^{x^2+a}$

$3x=x^2+a$, $x^2-3x+a=0$

한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면

$1+3+a=0$ $\therefore a=-4$

즉 $x^2-3x-4=0$에서 $(x+1)(x-4)=0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 다른 한 근은 4이다.

33-1 답 $-\frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{9}\right)^{2x^2+a}=\left(\frac{1}{27}\right)^{2x}$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2(2x^2+a)}=\left(\frac{1}{3}\right)^{6x}$

$2(2x^2+a)=6x$, $2x^2+a=3x$

$2x^2-3x+a=0$

한 근이 2이므로 $x=2$를 대입하면

$8-6+a=0$ $\therefore a=-2$

즉 $2x^2-3x-2=0$에서 $(2x+1)(x-2)=0$이므로

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

따라서 다른 한 근은 $-\frac{1}{2}$이다.

34 답 4

$4^{x+1}-5\times2^x+1=0$에서 $4\times(2^x)^2-5\times2^x+1=0$

$2^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 방정식은

$4t^2-5t+1=0,\ (4t-1)(t-1)=0$

$\therefore t=\frac{1}{4}$ 또는 $t=1$

따라서 $2^x=\frac{1}{4}=2^{-2}$ 또는 $2^x=1=2^0$이므로

$x=-2$ 또는 $x=0$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(-2)^2+0=4$

34-1 답 ①

$9^x-4\times3^{x+1}+27=0$에서 $(3^x)^2-12\times3^x+27=0$

$3^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 방정식은

$t^2-12t+27=0,\ (t-3)(t-9)=0$

$\therefore t=3$ 또는 $t=9$

즉 $3^x=3$ 또는 $3^x=9=3^2$이므로

$x=1$ 또는 $x=2$

따라서 $\alpha=1,\ \beta=2$이므로

$\beta-\alpha=2-1=1$

35 답 ①

$3^x+3^{3-x}=12$의 양변에 3^x을 곱하면

$(3^x)^2+3^3=12\times3^x$ $\therefore (3^x)^2-12\times3^x+27=0$

$3^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 방정식은

$t^2-12t+27=0,\ (t-3)(t-9)=0$

$\therefore t=3$ 또는 $t=9$

즉 $3^x=3$ 또는 $3^x=9=3^2$이므로

$x=1$ 또는 $x=2$

따라서 $\alpha=1,\ \beta=2$이므로

$\beta-\alpha=2-1=1$

35-1 답 ②

$3-2\sqrt{2}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$이므로

$(3+2\sqrt{2})^x+(3-2\sqrt{2})^x=6$에서

$(3+2\sqrt{2})^x+(3+2\sqrt{2})^{-x}=6$

양변에 $(3+2\sqrt{2})^x$을 곱하면

$\{(3+2\sqrt{2})^x\}^2+1=6(3+2\sqrt{2})^x$

$\therefore \{(3+2\sqrt{2})^x\}^2-6(3+2\sqrt{2})^x+1=0$

$(3+2\sqrt{2})^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 방정식은

$t^2-6t+1=0$

$\therefore t=3-2\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^{-1}$ 또는 $t=3+2\sqrt{2}$

따라서 $(3+2\sqrt{2})^x=(3+2\sqrt{2})^{-1}$ 또는 $(3+2\sqrt{2})^x=3+2\sqrt{2}$이므로 $x=-1$ 또는 $x=1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(-1)^2+1^2=2$

36 답 64

$9^x+27^x=8\times3^{x+2}$에서 $(3^x)^2+(3^x)^3=72\times3^x$

$3^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 방정식은

$t^2+t^3=72t,\ t^3+t^2-72t=0$ ……❶

$t(t^2+t-72)=0,\ t(t+9)(t-8)=0$

$\therefore t=8\ (\because t>0)$ ……❷

따라서 $3^\alpha=8$이므로

$9^\alpha=(3^\alpha)^2=8^2=64$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $3^x=t$로 치환하여 주어진 방정식을 t에 대한 방정식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ t의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 9^α의 값을 구할 수 있다.	20%

36-1 답 ④

$8^x+2\times4^x=2^{x+2}+8$에서 $(2^x)^3+2\times(2^x)^2=4\times2^x+8$

$2^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 방정식은

$t^3+2t^2=4t+8,\ t^3+2t^2-4t-8=0$

$(t+2)^2(t-2)=0$ $\therefore t=2\ (\because t>0)$

따라서 $2^\alpha=2$이므로 $\alpha=1$ $\therefore 4^\alpha=4$

37 답 $\sqrt{2}$

$4^x-k\times2^{x+1}+k^2-2=0$에서 $(2^x)^2-2k\times2^x+k^2-2=0$

$2^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 방정식은

$t^2-2kt+k^2-2=0$ ……㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k^2-2)=2>0$

(ii) (두 근의 합)$=2k>0$ $\therefore k>0$

(iii) (두 근의 곱)$=k^2-2>0$

$\therefore k<-\sqrt{2}$ 또는 $k>\sqrt{2}$

(i)~(iii)에서 $k>\sqrt{2}$ $\therefore a=\sqrt{2}$

Lecture 이차방정식의 실근의 부호

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근을 $\alpha,\ \beta$, 판별식을 D라 하면

(1) 두 근이 모두 양수 ➡ $D\ge0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$

(2) 두 근이 모두 음수 ➡ $D\ge0,\ \alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$

(3) 두 근이 서로 다른 부호 ➡ $\alpha\beta<0$

37-1 답 5

$4^x-k\times2^{x-1}+1=0$에서 $(2^x)^2-k\times\frac{1}{2}\times2^x+1=0$

$\therefore 2\times(2^x)^2-k\times2^x+2=0$

$2^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 방정식은

$2t^2-kt+2=0$ ……㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\times2\times2>0$

$k^2-16>0,\ (k+4)(k-4)>0$

$\therefore k<-4$ 또는 $k>4$

(ii) (두 근의 합)$=\frac{k}{2}>0$ $\therefore k>0$

(iii) (두 근의 곱)$=\frac{2}{2}=1>0$

(i)~(iii)에서 $k>4$

따라서 정수 k의 최솟값은 5이다.

38 답 ⑤

$25^x-2\times5^{x+1}+k=0$에서 $(5^x)^2-10\times5^x+k=0$

$5^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 방정식은

$t^2-10t+k=0$ ……㉠

주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=2$

이차방정식 ㉠의 두 근은 5^α, 5^β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$k=5^\alpha\times5^\beta=5^{\alpha+\beta}=5^2=25$

38-1 답 3

$9^x-10\times3^x+k=0$에서 $(3^x)^2-10\times3^x+k=0$

$3^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 방정식은

$t^2-10t+k=0$ ……㉠

이차방정식 ㉠의 두 근은 3^α, 3^β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$k=3^\alpha\times3^\beta=3^{\alpha+\beta}=3$

39 답 ④

$9^x-7\times3^x+5=0$에서 $(3^x)^2-7\times3^x+5=0$

$3^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 방정식은

$t^2-7t+5=0$ ……㉠

주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 이차방정식 ㉠의 두 근은 3^α, 3^β이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3^\alpha+3^\beta=7$, $3^\alpha\times3^\beta=5$

$3^\alpha+3^\beta=7$의 양변을 제곱하면

$(3^\alpha+3^\beta)^2=7^2$, $3^{2\alpha}+2\times3^\alpha\times3^\beta+3^{2\beta}=49$

$\therefore 3^{2\alpha}+3^{2\beta}=49-2\times3^\alpha\times3^\beta=49-2\times5=39$

39-1 답 ①

$36^x-6^{x+1}+3=0$에서 $(6^x)^2-6\times6^x+3=0$

$6^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 방정식은

$t^2-6t+3=0$ ……㉠

주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 이차방정식 ㉠의 두 근은 6^α, 6^β이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$6^\alpha\times6^\beta=3$ $\therefore 6^{\alpha+\beta}=3$

40 답 ③

$\begin{cases}3\times2^x-2\times3^y=6\\2^{x-2}-3^{y-1}=-1\end{cases}$에서 $\begin{cases}3\times2^x-2\times3^y=6\\\frac{1}{4}\times2^x-\frac{1}{3}\times3^y=-1\end{cases}$

$2^x=X$, $3^y=Y\ (X>0, Y>0)$라 하면

$\begin{cases}3X-2Y=6 & \cdots\cdots㉠\\\frac{1}{4}X-\frac{1}{3}Y=-1 & \cdots\cdots㉡\end{cases}$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $X=8$, $Y=9$

즉 $2^x=8$, $3^y=9$이므로 $x=3$, $y=2$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=2$이므로

$\alpha+\beta=3+2=5$

40-1 답 3

$\begin{cases}3^x+3^{y-1}=6\\3^{x+2}-3^y=18\end{cases}$에서 $\begin{cases}3^x+\frac{1}{3}\times3^y=6\\9\times3^x-3^y=18\end{cases}$

$3^x=X$, $3^y=Y\ (X>0, Y>0)$라 하면

$\begin{cases}X+\frac{1}{3}Y=6 & \cdots\cdots㉠\\9X-Y=18 & \cdots\cdots㉡\end{cases}$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $X=3$, $Y=9$

즉 $3^x=3$, $3^y=9$이므로 $x=1$, $y=2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로

$\alpha+\beta=1+2=3$

41 답 2

$\begin{cases}2^{x+1}+2^{y+1}=12\\2^{x+y}=8\end{cases}$에서 $\begin{cases}2\times2^x+2\times2^y=12\\2^x\times2^y=8\end{cases}$

$2^x=X$, $2^y=Y\ (X>0, Y>0)$라 하면

$\begin{cases}2X+2Y=12\\XY=8\end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases}X+Y=6 & \cdots\cdots㉠\\XY=8 & \cdots\cdots㉡\end{cases}$

㉠에서 $Y=6-X$ ……㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $X(6-X)=8$

$X^2-6X+8=0$, $(X-2)(X-4)=0$

$\therefore X=2$ 또는 $X=4$

(i) $X=2$일 때

$X=2$를 ㉢에 대입하면 $Y=6-2=4$

즉 $2^x=2$, $2^y=4$이므로 $x=1$, $y=2$

(ii) $X=4$일 때

$X=4$를 ㉢에 대입하면 $Y=6-4=2$

즉 $2^x=4$, $2^y=2$이므로 $x=2$, $y=1$

(i), (ii)에서 $\alpha\beta=2$

참고 $Y=6-X$이고 $Y>0$이므로 $6-X>0$ $\therefore X<6$

이때 $X>0$이므로 $0<X<6$

따라서 X, Y에 대한 연립방정식을 풀었을 때, X의 값이 6 이상이면 이 값을 해에서 제외해야 한다.

41-1 답 8

$2^x=X$, $2^y=Y\ (X>0, Y>0)$라 하면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases}X-Y=12 & \cdots\cdots㉠\\\frac{X}{Y}=4 & \cdots\cdots㉡\end{cases}$ ……❶

㉡에서 $X=4Y$ ……㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $4Y-Y=12$

$3Y=12$ $\therefore Y=4$

$Y=4$를 ㉢에 대입하면 $X=16$

즉 $2^x=16$, $2^y=4$이므로 $x=4$, $y=2$ ……❷

따라서 $\alpha=4$, $\beta=2$이므로

$\alpha\beta=4\times2=8$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $2^x=X$, $2^y=Y$로 치환하여 주어진 연립방정식을 X, Y에 대한 연립방정식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	20%

42 답 1

$f(-a)f(2b)=49$에서 $7^{a}\times 7^{-2b}=7^{2}$

$7^{a-2b}=7^{2}$ $\therefore a-2b=2$ ……㉠

$f(b-a)=7$에서 $7^{-(b-a)}=7$

$7^{a-b}=7$ $\therefore a-b=1$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-1$

$\therefore a^{2}+b^{2}=0^{2}+(-1)^{2}=1$

42-1 답 3

$f(3a-2b)=125$에서 $5^{3a-2b}=5^{3}$

$\therefore 3a-2b=3$ ……㉠

$f(a)f(-2b)=\frac{1}{5}$에서 $5^{a}\times 5^{-2b}=\frac{1}{5}$

$5^{a-2b}=5^{-1}$ $\therefore a-2b=-1$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=\frac{3}{2}$

$\therefore ab=2\times\frac{3}{2}=3$

43 답 -2

$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^{2}}\le\left(\frac{1}{16}\right)^{x^{2}+x-4}$에서 $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^{2}}\le\left(\frac{1}{4}\right)^{2x^{2}+2x-8}$

이때 밑 $\frac{1}{4}$이 $0<\frac{1}{4}<1$이므로 $x^{2}\ge 2x^{2}+2x-8$

$x^{2}+2x-8\le 0$, $(x+4)(x-2)\le 0$

$\therefore -4\le x\le 2$

따라서 실수 x의 최댓값은 2, 최솟값은 -4이므로 그 합은

$2+(-4)=-2$

43-1 답 ②

$5^{2x}>25^{x^{2}-2}$에서 $5^{2x}>5^{2x^{2}-4}$

이때 밑 5가 $5>1$이므로 $2x>2x^{2}-4$

$x^{2}-x-2<0$, $(x+1)(x-2)<0$

$\therefore -1<x<2$

따라서 정수 x의 값은 0, 1이므로 그 개수는 2이다.

44 답 ②

$4^{x^{2}}<\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{3x-1}$에서 $2^{2x^{2}}<2^{-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}$

이때 밑 2가 $2>1$이므로 $2x^{2}<-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

$4x^{2}+3x-1<0$, $(x+1)(4x-1)<0$

$\therefore -1<x<\frac{1}{4}$

44-1 답 ①

$\left(\frac{1}{3}\right)^{9-x^{2}}<\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-9x}$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{9-x^{2}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{9}{2}x}$

이때 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $9-x^{2}>-\frac{9}{2}x$

$2x^{2}-9x-18<0$, $(2x+3)(x-6)<0$

$\therefore -\frac{3}{2}<x<6$

따라서 정수 x의 값은 -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 합은

$-1+0+1+2+3+4+5=14$

45 답 ④

$3^{x^{2}}<9\times 3^{x}$에서 $3^{x^{2}}<3^{x+2}$

이때 밑 3이 $3>1$이므로 $x^{2}<x+2$

$x^{2}-x-2<0$, $(x+1)(x-2)<0$

$\therefore -1<x<2$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=2$이므로

$\alpha+\beta=-1+2=1$

45-1 답 ④

$2^{x^{2}}\le 8\times\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$에서 $2^{x^{2}}\le 2^{3-2x}$

이때 밑 2가 $2>1$이므로 $x^{2}\le 3-2x$

$x^{2}+2x-3\le 0$, $(x+3)(x-1)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 1$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=1$이므로

$\beta-\alpha=1-(-3)=4$

46 답 2

$\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-5\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+16\le 0$에서 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\right\}^{2}-10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+16\le 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=t$ $(t>0)$라 하면 주어진 부등식은

$t^{2}-10t+16\le 0$, $(t-2)(t-8)\le 0$

$\therefore 2\le t\le 8$

즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$이고 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$-3\le x\le -1$

따라서 $M=-1$, $m=-3$이므로

$M-m=-1-(-3)=2$

46-1 답 ④

$9^{x}+2\times 3^{x}\ge 15$에서 $(3^{x})^{2}+2\times 3^{x}-15\ge 0$

$3^{x}=t$ $(t>0)$라 하면 주어진 부등식은

$t^{2}+2t-15\ge 0$, $(t+5)(t-3)\ge 0$

$\therefore t\le -5$ 또는 $t\ge 3$

그런데 $t>0$이므로 $t\ge 3$

즉 $3^{x}\ge 3$이고 밑 3이 $3>1$이므로 $x\ge 1$

따라서 실수 x의 최솟값은 1이다.

47 답 ②

$3^{2x+1}+a\times 3^{x}+b\le 0$에서 $3\times(3^{x})^{2}+a\times 3^{x}+b\le 0$

$3^{x}=t$ $(t>0)$라 하면 주어진 부등식은

$3t^{2}+at+b\le 0$ ……㉠

이때 $-1\le x\le 2$에서 $3^{-1}\le 3^{x}\le 3^{2}$

$\therefore \frac{1}{3}\le t\le 9$

해가 $\frac{1}{3}\le t\le 9$이고 t^{2}의 계수가 3인 이차부등식은

$3\left(t-\frac{1}{3}\right)(t-9)\le 0$ $\therefore 3t^{2}-28t+9\le 0$

이 부등식이 ㉠과 일치해야 하므로

$a=-28$, $b=9$

$\therefore a+b=-28+9=-19$

47-1 답 ④

$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1}-a\times\left(\frac{1}{5}\right)^{x}+b>0$에서

$\frac{1}{5}\times\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\right\}^{2}-a\times\left(\frac{1}{5}\right)^{x}+b>0$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=t\ (t>0)$라 하면 주어진 부등식은

$\frac{1}{5}t^{2}-at+b>0 \qquad \therefore\ t^{2}-5at+5b>0$ ……㉠

이때 $x<-1$ 또는 $x>0$에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^{x}>\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ 또는 $\left(\frac{1}{5}\right)^{x}<\left(\frac{1}{5}\right)^{0}$

$\therefore\ t<1$ 또는 $t>5$

해가 $t<1$ 또는 $t>5$이고 t^{2}의 계수가 1인 이차부등식은

$(t-1)(t-5)>0 \qquad \therefore\ t^{2}-6t+5>0$

이 부등식이 ㉠과 일치해야 하므로

$-5a=-6,\ 5b=5 \qquad \therefore\ a=\frac{6}{5},\ b=1$

$\therefore\ 5ab=5\times\frac{6}{5}\times1=6$

48 답 9

$9^{x}-35\times3^{x+1}-500<0$에서 $(3^{x})^{2}-105\times3^{x}-500<0$

$3^{x}=t\ (t>0)$라 하면 주어진 부등식은

$t^{2}-105t-500<0$ ……❶

$(t-5)(t-100)<0 \qquad \therefore\ 5<t<100$ ……❷

즉 $5<3^{x}<100$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x의 값은 2, 3, 4이다.

따라서 모든 자연수 x의 값의 합은

$2+3+4=9$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $3^{x}=t$로 치환하여 주어진 부등식을 t에 대한 부등식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ t의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❸ 자연수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	30%

48-1 답 26

$4^{x}-5\times2^{x+6}-6000<0$에서 $(2^{x})^{2}-320\times2^{x}-6000<0$

$2^{x}=t\ (t>0)$라 하면 주어진 부등식은

$t^{2}-320t-6000<0,\ (t-20)(t-300)<0$

$\therefore\ 20<t<300$

즉 $20<2^{x}<300$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x의 값은 5, 6, 7, 8이다.

따라서 모든 자연수 x의 값의 합은

$5+6+7+8=26$

49 답 3

$\left(\frac{1}{5}\right)^{3-x}<5^{x^{2}-1}<\left(\frac{1}{25}\right)^{x-1}$에서 $5^{x-3}<5^{x^{2}-1}<5^{-2x+2}$

밑 5가 $5>1$이므로 $x-3<x^{2}-1<-2x+2$

(i) $x-3<x^{2}-1$에서 $x^{2}-x+2>0$

이때 $x^{2}-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{7}{4}>0$이므로 이 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $x^{2}-1<-2x+2$에서 $x^{2}+2x-3<0$

$(x+3)(x-1)<0 \qquad \therefore\ -3<x<1$

(i), (ii)에서 $-3<x<1$

따라서 정수 x의 값은 -2, -1, 0이므로 그 개수는 3이다.

49-1 답 ③

$\left(\frac{1}{8}\right)^{2x+1}<32<\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-9}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{6x+3}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-9}$

밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $3x-9<-5<6x+3$

(i) $3x-9<-5$에서 $3x<4 \qquad \therefore\ x<\frac{4}{3}$

(ii) $-5<6x+3$에서 $6x>-8 \qquad \therefore\ x>-\frac{4}{3}$

(i), (ii)에서 $-\frac{4}{3}<x<\frac{4}{3}$

따라서 정수 x의 값은 -1, 0, 1이므로 그 개수는 3이다.

50 답 $-6\le x\le2$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x}\ge\left(\frac{3}{2}\right)^{2(x-5)}$에서 $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x}\ge\left(\frac{2}{3}\right)^{-2x+10}$

밑 $\frac{2}{3}$가 $0<\frac{2}{3}<1$이므로 $3x\le-2x+10$

$5x\le10 \qquad \therefore\ x\le2$ ……㉠

$8^{x^{2}+2x-4}\le4^{x^{2}+x}$에서 $2^{3x^{2}+6x-12}\le2^{2x^{2}+2x}$

밑 2가 $2>1$이므로 $3x^{2}+6x-12\le2x^{2}+2x$

$x^{2}+4x-12\le0,\ (x+6)(x-2)\le0$

$\therefore\ -6\le x\le2$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $-6\le x\le2$

50-1 답 1

$\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}<\frac{1}{2\sqrt{2}}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$

밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $2x+2>\frac{3}{2}$

$2x>-\frac{1}{2} \qquad \therefore\ x>-\frac{1}{4}$ ……㉠

$9^{x+1}-28\times3^{x}+3\le0$에서 $9\times(3^{x})^{2}-28\times3^{x}+3\le0$

$3^{x}=t\ (t>0)$라 하면 $9t^{2}-28t+3\le0$

$(9t-1)(t-3)\le0 \qquad \therefore\ \frac{1}{9}\le t\le3$

즉 $3^{-2}\le3^{x}\le3^{1}$이고 밑 3이 $3>1$이므로

$-2\le x\le1$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $-\frac{1}{4}<x\le1$

따라서 정수 x의 값은 0, 1이므로 그 합은

$0+1=1$

51 답 2

$2^{2x+2}+4\le65\times2^{x-1}$에서 $4\times(2^{x})^{2}+4\le\frac{65}{2}\times2^{x}$

$2^{x}=t\ (t>0)$라 하면 $4t^{2}+4\le\frac{65}{2}t$

$8t^{2}-65t+8\le0,\ (8t-1)(t-8)\le0$

$\therefore\ \frac{1}{8}\le t\le8$

즉 $2^{-3}\le2^{x}\le2^{3}$이고 밑 2가 $2>1$이므로

$-3\le x\le3$ ……㉠

$9^{x}-3^{x}>6$에서 $(3^{x})^{2}-3^{x}>6$

$3^{x}=s\ (s>0)$라 하면 $s^{2}-s>6$

$s^{2}-s-6>0,\ (s+2)(s-3)>0$

$\therefore\ s<-2$ 또는 $s>3$

그런데 $s>0$이므로 $s>3$
즉 $3^x>3$이고 밑 3이 $3>1$이므로
$x>1$ ……㉡
㉠, ㉡의 공통 범위는 $1<x\le 3$
따라서 $\alpha=1$, $\beta=3$이므로
$\beta-\alpha=3-1=2$

51-1 답 ②

$\left(\frac{1}{4}\right)^{3x}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{6x}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}$
밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $6x\ge 2x-1$
$4x\ge -1$ $\therefore x\ge -\frac{1}{4}$ ……㉠
$125^x>0.2^{4-x^2}$에서 $5^{3x}>5^{x^2-4}$
밑 5가 $5>1$이므로 $3x>x^2-4$
$x^2-3x-4<0$, $(x+1)(x-4)<0$
$\therefore -1<x<4$ ……㉡
㉠, ㉡의 공통 범위는 $-\frac{1}{4}\le x<4$
따라서 $\alpha=-\frac{1}{4}$, $\beta=4$이므로
$\alpha\beta=-\frac{1}{4}\times 4=-1$

유형 완성하기 p.80

52 답 ①

$9^x-2\times 3^{x+1}+2k-1>0$에서 $(3^x)^2-6\times 3^x+2k-1>0$
$3^x=t$ $(t>0)$라 하면 주어진 부등식은
$t^2-6t+2k-1>0$ $\therefore (t-3)^2+2k-10>0$
이 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 항상 성립하려면
$2k-10>0$ $\therefore k>5$
따라서 정수 k의 최솟값은 6이다.

53 답 ③

$\left(\frac{1}{36}\right)^x-2\times\left(\frac{1}{6}\right)^x+k+3\ge 0$에서
$\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^x\right\}^2-2\times\left(\frac{1}{6}\right)^x+k+3\ge 0$
$\left(\frac{1}{6}\right)^x=t$ $(t>0)$라 하면 주어진 부등식은
$t^2-2t+k+3\ge 0$ $\therefore (t-1)^2+k+2\ge 0$
이 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 항상 성립하려면
$k+2\ge 0$ $\therefore k\ge -2$
따라서 실수 k의 최솟값은 -2이다.

54 답 $k\le 3$

$4^x-k\times 2^{x+1}+9\ge 0$에서 $(2^x)^2-2k\times 2^x+9\ge 0$
$2^x=t$ $(t>0)$라 하면 주어진 부등식은
$t^2-2kt+9\ge 0$ $\therefore (t-k)^2-k^2+9\ge 0$ ……㉠ ……❶
부등식 ㉠이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 항상 성립하려면
(i) $k>0$일 때
$-k^2+9\ge 0$에서 $k^2-9\le 0$
$(k+3)(k-3)\le 0$ $\therefore -3\le k\le 3$
그런데 $k>0$이므로 $0<k\le 3$ ……❷
(ii) $k\le 0$일 때
$t=0$이면 ㉠에서 $9\ge 0$이므로 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 부등식 ㉠이 항상 성립한다. ……❸
(i), (ii)에서 $k\le 3$ ……❹

채점 기준	비율
❶ $2^x=t$로 치환하여 주어진 부등식을 t에 대한 부등식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $k>0$일 때, k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❸ $k\le 0$일 때, k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❹ 조건을 만족시키는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	10%

55 답 8 m

호수에서 빛의 세기가 수면에서의 빛의 세기의 $\frac{1}{4}$인 곳의 수심을 d m라 하자.
이때 수심이 d m인 곳에서의 빛의 세기는 $\frac{1}{4}I_0$이므로
$\frac{1}{4}I_0=I_0\times 2^{-0.25d}$, $2^{-2}=2^{-0.25d}$
$-2=-0.25d$ $\therefore d=\frac{2}{0.25}=8$
따라서 호수에서 빛의 세기가 수면에서의 빛의 세기의 $\frac{1}{4}$인 곳의 수심은 8 m이다.

56 답 ⑤

100마리의 박테리아가 12시간 후에 1600마리가 되므로
$100a^{12}=1600$, $a^{12}=16$
$a^{12}=2^4$ $\therefore a=2^{\frac{1}{3}}$
100마리의 박테리아가 t시간 후에 6400마리가 된다고 하면
$100\times(2^{\frac{1}{3}})^t=6400$, $2^{\frac{1}{3}t}=64$
$2^{\frac{1}{3}t}=2^6$, $\frac{1}{3}t=6$ $\therefore t=18$
따라서 100마리의 박테리아가 6400마리가 되는 것은 처음으로부터 18시간 후이다.

57 답 12시간

4시간 후에 해충의 수가 처음의 $\frac{3}{5}$이 되므로 $4n$(n은 자연수)시간 후에 해충의 수는 처음의 $\left(\frac{3}{5}\right)^n$이다.
$21.6\,\%=\frac{216}{10^3}=\frac{2^3\times 3^3}{2^3\times 5^3}=\left(\frac{3}{5}\right)^3$이고 해충의 수가 처음의 21.6 % 이하가 되어야 하므로
$\left(\frac{3}{5}\right)^n\le\left(\frac{3}{5}\right)^3$
이때 밑 $\frac{3}{5}$이 $0<\frac{3}{5}<1$이므로 $n\ge 3$
따라서 해충의 수가 처음의 21.6 % 이하가 되려면 최소 $4\times 3=12$(시간)이 걸린다.

학교 시험 대비 문제

p.81~84

01 답 ④

$g(f(x))=x$이므로 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

$g(27)=k$라 하면 $f(k)=27$이므로

$3^{k+1}=27,\ 3^{k+1}=3^3$

$k+1=3 \quad \therefore k=2$

$\therefore g(27)=2$

Lecture 함수의 역함수와 함숫값

함수 $y=f(x)$의 역함수를 $y=g(x)$라 할 때

(1) $f(g(x))=x$

(2) $f(a)=b \Longleftrightarrow g(b)=a$

02 답 $1<a<2$ 또는 $2<a<3$

$f(x)=(a^2-4a+4)^x$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하려면 $0<a^2-4a+4<1$

(i) $0<a^2-4a+4$에서

$a^2-4a+4=(a-2)^2>0\ (\because a\neq 2)$

이므로 항상 성립한다.

(ii) $a^2-4a+4<1$에서 $a^2-4a+3<0$

$(a-1)(a-3)<0 \quad \therefore 1<a<3$

(i), (ii)에서 $1<a<2$ 또는 $2<a<3$

03 답 $\frac{71}{9}$

점 A의 좌표를 (α, β)라 하면

$\triangle AOB=\frac{1}{2}\times 4\times\beta=16$

$\therefore \beta=8$

즉 $y=2^x-1$의 그래프가 점 $(\alpha, 8)$을 지나므로

$8=2^\alpha-1 \quad \therefore 2^\alpha=9$ ……㉠

또 $y=2^{-x}+a$의 그래프가 점 $(\alpha, 8)$을 지나므로

$8=2^{-\alpha}+a$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$8=\frac{1}{9}+a \quad \therefore a=\frac{71}{9}$

04 답 ③

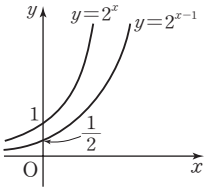
ㄱ. 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=2^x \quad \therefore y=-2^x$

ㄴ. 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2^{x-1}$

즉 두 함수 $y=2^x$, $y=2^{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=2^{x-1}$의 그래프가 $y=2^x$의 그래프보다 아래에 위치한다.



ㄷ. $y=\sqrt{2}\times 2^x=2^{\frac{1}{2}}\times 2^x=2^{x+\frac{1}{2}}$이므로 $y=2^{x+\frac{1}{2}}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2^{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}} \quad \therefore y=2^x$

즉 $y=\sqrt{2}\times 2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하면 $y=2^x$의 그래프와 겹쳐질 수 있다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

05 답 ①

$\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}=(2^3\times 2^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}=(2^{\frac{11}{3}})^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{11}{12}}$

$\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{1}{6}}=(2^{-5})^{-\frac{1}{6}}=2^{\frac{5}{6}}$

$(2^{\frac{9}{2}}\times 4^{\frac{1}{8}})^{\frac{3}{19}}=(2^{\frac{9}{2}}\times 2^{\frac{1}{4}})^{\frac{3}{19}}=(2^{\frac{19}{4}})^{\frac{3}{19}}=2^{\frac{3}{4}}$

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^8}}}=(2^8)^{\frac{1}{8}}=2$

이때 $\frac{3}{4}<\frac{5}{6}<\frac{11}{12}<1$이고 밑 2가 $2>1$이므로

$2^{\frac{3}{4}}<2^{\frac{5}{6}}<2^{\frac{11}{12}}<2$

따라서 $M=2,\ m=2^{\frac{3}{4}}$이므로

$\frac{M}{m}=\frac{2}{2^{\frac{3}{4}}}=2^{1-\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{4}}$

06 답 ④

$f(x)=3^{-2x}\times 4^x=\left(\frac{4}{9}\right)^x$

$-2\le x\le 1$에서 함수 $f(x)=\left(\frac{4}{9}\right)^x$은 밑 $\frac{4}{9}$가 $0<\frac{4}{9}<1$이므로

$x=-2$일 때 최대이고, 최댓값은

$f(-2)=\left(\frac{4}{9}\right)^{-2}=\frac{81}{16}$

$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$f(1)=\left(\frac{4}{9}\right)^1=\frac{4}{9}$

따라서 주어진 함수의 최댓값과 최솟값의 곱은

$\frac{81}{16}\times\frac{4}{9}=\frac{9}{4}$

07 답 ①

$f(x)=x^2-4x+1$이라 하면 $f(x)=(x-2)^2-3$

$0\le x\le 3$에서 $f(0)=1,\ f(2)=-3,\ f(3)=-2$

$\therefore -3\le f(x)\le 1$

밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$은

$f(x)=-3$일 때 최대이고, 최댓값 M은 $M=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$

$f(x)=1$일 때 최소이고, 최솟값 m은 $m=\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$

$\therefore Mm=8\times\frac{1}{2}=4$

08 답 ③

$f(x)=x^2-6x+3=(x-3)^2-6$

$1\le x\le 4$에서 $f(1)=-2,\ f(3)=-6,\ f(4)=-5$

$\therefore -6\le f(x)\le -2$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=a^{f(x)}$이고 밑 a가 $0<a<1$이므로

함수 $y=a^{f(x)}$은 $f(x)=-6$일 때 최댓값 27을 갖는다.

즉 $a^{-6}=27$이므로 $(a^{-2})^3=3^3 \quad \therefore a^{-2}=3$

따라서 함수 $(g\circ f)(x)=a^{f(x)}$은 $f(x)=-2$일 때 최솟값 m을 가지므로

$m=a^{-2}=3$

09 답 ④

$y=4^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{-x-3}+a=4^x-2^{x+3}+a=(2^x)^2-8\times 2^x+a$

$2^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 함수는

$y=t^2-8t+a=(t-4)^2+a-16$

주어진 함수는 $t=4$, 즉 $x=b=2$일 때 최소이고, 최솟값은 $a-16$이므로

$a-16=-10 \quad \therefore a=6$

$\therefore b-a=2-6=-4$

10 답 1

$x+4y-2=0$에서 $x+4y=2$ ……㉠

$2^x>0,\ 2^{4y}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2^x+2^{4y}\geq 2\sqrt{2^x\times 2^{4y}}=2\sqrt{2^{x+4y}}=2\sqrt{2^2}=4$

이때 등호는 $2^x=2^{4y}$일 때 성립하므로

$x=4y$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=\frac{1}{4}$

따라서 2^x+2^{4y}은 $x=1,\ y=\frac{1}{4}$일 때 최소이고, 최솟값은 4이므로

$a=1,\ b=\frac{1}{4},\ m=4$

$\therefore abm=1\times\frac{1}{4}\times 4=1$

11 답 ②

$8^{|x|}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4}$에서 $2^{3|x|}=2^{-x^2+4}$

$3|x|=-x^2+4,\ x^2+3|x|-4=0$

이때 $x^2=|x|^2$이므로

$|x|^2+3|x|-4=0,\ (|x|+4)(|x|-1)=0$

$\therefore |x|=1\ (\because |x|\geq 0)$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 모든 실근의 곱은

$-1\times 1=-1$

12 답 1

$4^x-9\times 2^{x-1}+2=0$에서 $(2^x)^2-\frac{9}{2}\times 2^x+2=0$

$\therefore 2\times(2^x)^2-9\times 2^x+4=0$

$2^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 방정식은

$2t^2-9t+4=0,\ (2t-1)(t-4)=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=4$

즉 $2^x=\frac{1}{2}$ 또는 $2^x=4$이므로 $x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=2$이므로

$(\sqrt{2})^{2\alpha+\beta}=(\sqrt{2})^{2\times(-1)+2}=(\sqrt{2})^0=1$

13 답 ③ $2^x>0,\ 2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $t=2^x+2^{-x}\geq 2\sqrt{2^x\times 2^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

$2^x+2^{-x}=t\ (t\geq 2)$라 하면

$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$

이므로 주어진 방정식은

$2(t^2-2)-3t-1=0,\ 2t^2-3t-5=0$

$(t+1)(2t-5)=0 \quad \therefore t=\frac{5}{2}\ (\because t\geq 2)$

즉 $2^x+2^{-x}=\frac{5}{2}$이므로 $2^x=a\ (a>0)$라 하면

$a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2},\ 2a^2-5a+2=0$

$(2a-1)(a-2)=0 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$

즉 $2^x=\frac{1}{2}$ 또는 $2^x=2$이므로

$x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 모든 실근의 합은

$-1+1=0$

14 답 ②

$4^{2x}+a\times 4^{x+1}+8=0$에서 $(4^x)^2+4a\times 4^x+8=0$

$4^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 방정식은

$t^2+4at+8=0$ ……㉠

주어진 방정식의 두 근을 $\alpha,\ 2\alpha\ (\alpha\neq 0)$라 하면 이차방정식 ㉠의 두 근은 $4^\alpha,\ 4^{2\alpha}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$4^\alpha+4^{2\alpha}=-4a,\ 4^\alpha\times 4^{2\alpha}=8$

$4^\alpha\times 4^{2\alpha}=8$에서 $2^{2\alpha}\times 2^{4\alpha}=2^3$

$2^{6\alpha}=2^3,\ 6\alpha=3 \quad \therefore \alpha=\frac{1}{2}$

$\alpha=\frac{1}{2}$을 $4^\alpha+4^{2\alpha}=-4a$에 대입하면

$4^{\frac{1}{2}}+4=-4a,\ -4a=6 \quad \therefore a=-\frac{3}{2}$

15 답 ②

$f(2a)f(b)=4$에서 $2^{-2a}\times 2^{-b}=4$

$2^{-2a-b}=2^2 \quad \therefore 2a+b=-2$ ……㉠

$f(a-b)=2$에서 $2^{-(a-b)}=2$

$2^{-a+b}=2^1 \quad \therefore a-b=-1$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=0$

$\therefore a+b=-1+0=-1$

16 답 ③

$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-3}<\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}$에서 $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-3}<\left(\frac{3}{2}\right)^{-x^2}$

이때 밑 $\frac{3}{2}$이 $\frac{3}{2}>1$이므로 $2x-3<-x^2$

$x^2+2x-3<0,\ (x+3)(x-1)<0$

$\therefore -3<x<1$

따라서 정수 x의 값은 $-2,\ -1,\ 0$이므로 그 개수는 3이다.

17 답 ①

$5^{2x+1}-6\times 5^x+1<0$에서 $5\times(5^x)^2-6\times 5^x+1<0$

$5^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 부등식은

$5t^2-6t+1<0,\ (5t-1)(t-1)<0$

$\therefore \frac{1}{5}<t<1$

즉 $5^{-1}<5^x<5^0$이고 밑 5가 $5>1$이므로

$-1<x<0$

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=0$이므로

$\beta-\alpha=0-(-1)=1$

18 답 3

주어진 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면 이차방정식 $x^2-2(3^a+1)x+10(3^a+1)=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D \le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=\{-(3^a+1)\}^2-10(3^a+1)\le 0$

$(3^a)^2+2\times 3^a+1-10\times 3^a-10\le 0$

$\therefore (3^a)^2-8\times 3^a-9\le 0$

$3^a=t\ (t>0)$라 하면 $t^2-8t-9\le 0$

$(t+1)(t-9)\le 0 \quad \therefore -1\le t\le 9$

그런데 $t>0$이므로 $0<t\le 9$

즉 $3^a\le 3^2$이고 밑 3이 3>1이므로 $a\le 2$

따라서 자연수 a의 값은 1, 2이므로 그 합은

$1+2=3$

19 답 ③

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+8}<2^{-x^2}$에서 $2^{-2x-8}<2^{-x^2}$

이때 밑 2가 2>1이므로 $-2x-8<-x^2$

$x^2-2x-8<0,\ (x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$ ……㉠

$9^{x^2-3}\le 27^{-x+1}$에서 $3^{2x^2-6}\le 3^{-3x+3}$

이때 밑 3이 3>1이므로 $2x^2-6\le -3x+3$

$2x^2+3x-9\le 0,\ (x+3)(2x-3)\le 0$

$\therefore -3\le x\le \frac{3}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $-2<x\le \frac{3}{2}$

$\therefore A\cap B=\left\{x\middle|-2<x\le\frac{3}{2},\ x\text{는 정수}\right\}=\{-1,0,1\}$

따라서 집합 $A\cap B$의 원소의 개수는 3이다.

> **참고** $A=\{-1,0,1,2,3\}$, $B=\{-3,-2,-1,0,1\}$이므로 $A\cap B=\{-1,0,1\}$

20 답 −3

$9^x-2\times 3^x+k+4\ge 0$에서 $(3^x)^2-2\times 3^x+k+4\ge 0$

$3^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 부등식은

$t^2-2t+k+4\ge 0 \quad \therefore (t-1)^2+k+3\ge 0$

이 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 항상 성립하려면

$k+3\ge 0 \quad \therefore k\ge -3$

따라서 실수 k의 최솟값은 −3이다.

21 답 18시간

처음 주사한 양을 A라 하자.

t시간 후에 혈액 속에 남은 양이 처음 주사한 양의 $\frac{1}{64}$ 이하가 되려면 $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^t A\le \frac{1}{64}A \quad \therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}t}\le\left(\frac{1}{2}\right)^6$

이때 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$\frac{1}{3}t\ge 6 \quad \therefore t\ge 18$

따라서 약효의 지속 시간은 18시간이다.

서술형 1 답 22

점 P_k의 좌표를 $(a, 2^a)$이라 하면 두 점 P_k, Q_k는 y좌표가 같으므로

점 Q_k의 y좌표는 2^a이다.

점 Q_k는 함수 $y=2^{x-2}$의 그래프 위의 점이므로

$2^a=2^{x-2}$에서 $a=x-2$

$\therefore x=a+2$

즉 점 Q_k의 좌표가 $(a+2, 2^a)$이므로

$\overline{P_kQ_k}=(a+2)-a=2$ ……❶

따라서 $\overline{P_kQ_k}$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 2이므로

$S_k=\frac{1}{2}\times\overline{P_kQ_k}\times k=\frac{1}{2}\times 2\times k=k$ ……❷

$\therefore S_1+S_4+S_7+S_{10}=1+4+7+10=22$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $\overline{P_kQ_k}$의 길이를 구할 수 있다.	50%
❷ S_k를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ $S_1+S_4+S_7+S_{10}$의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 2 답 6

$2^x-2^{-x}=t$라 하면

$4^x+4^{-x}=(2^x-2^{-x})^2+2=t^2+2$

이므로 주어진 방정식은 $t^2+2-kt+7=0$

$\therefore t^2-kt+9=0$ ……㉠ ……❶

주어진 방정식이 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\times 1\times 9\ge 0,\ k^2-36\ge 0$

$(k+6)(k-6)\ge 0 \quad \therefore k\le -6$ 또는 $k\ge 6$ ……❷

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ $2^x-2^{-x}=t$로 치환하여 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 자연수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 $a<1$

$2^{2x}-a\times 2^{x+1}+4-3a>0$에서

$(2^x)^2-2a\times 2^x+4-3a>0$

$2^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 부등식은

$t^2-2at+4-3a>0$

$\therefore (t-a)^2-a^2-3a+4>0$ ……㉠ ……❶

부등식 ㉠이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 항상 성립하려면

(i) $a>0$일 때

$-a^2-3a+4>0$에서 $a^2+3a-4<0$

$(a+4)(a-1)<0 \quad \therefore -4<a<1$

그런데 $a>0$이므로 $0<a<1$ ……❷

(ii) $a\le 0$일 때

$t=0$이면 ㉠에서 $-3a+4\ge 0$

$\therefore a\le\frac{4}{3}$

그런데 $a\le 0$이므로 $a\le 0$ ……❸

(i), (ii)에서 $a<1$ ……❹

채점 기준	비율
❶ $2^x=t$로 치환하여 주어진 부등식을 t에 대한 부등식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $a>0$일 때, a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❸ $a\le 0$일 때, a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❹ 조건을 만족시키는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	10%

01 답 ③

$4^x-2^{x+3}+15=0$에서 $(2^x)^2-8\times2^x+15=0$

$2^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 방정식은

$t^2-8t+15=0,\ (t-3)(t-5)=0$

$\therefore t=3$ 또는 $t=5$

즉 $2^x=3$ 또는 $2^x=5$이고 $\alpha<\beta$이므로

$2^\alpha=3,\ 2^\beta=5$

따라서 $\beta=\log_2 5$이므로

$2^\alpha\times\beta=3\log_2 5$

02 답 ③

$y=\frac{1}{16}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}$에서 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

또 $y=2^x+1$에서 밑 2가 $2>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

곡선 $y=2^x+1$은 점 $(0,2)$를 지나므로 곡선 $y=\frac{1}{16}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}$이 곡선 $y=2^x+1$과 제1사분면에서 만나려면 곡선 $y=\frac{1}{16}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}$이 y축과 만나는 점의 y좌표가 2보다 커야 한다.

즉 $\frac{1}{16}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-m}>2$이므로 $2^{-4}\times2^m>2$ $\therefore 2^{m-4}>2$

이때 밑 2가 $2>1$이므로 $m-4>1$ $\therefore m>5$

따라서 자연수 m의 최솟값은 6이다.

03 답 ②

함수 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=a^{-x}$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=a^{-(x-m)}$ $\therefore g(x)=a^{-(x-m)}$

(가)에서 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프는 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $f(1)=g(1)$

즉 $a=a^{-(1-m)}$이므로 $1=-(1-m)$

$m-1=1$ $\therefore m=2$, 즉 $g(x)=a^{-(x-2)}$

이때 함수 $f(x)=a^x$은 지수함수이므로

$a>0,\ a\neq1$ ……㉠

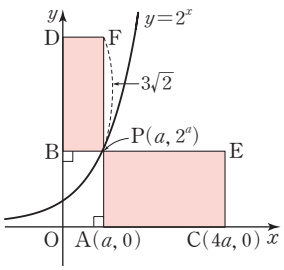
(나)에서 $f(3)=16g(3)$이므로 $a^3=16a^{-1}$

$a^4=16$ $\therefore a=2$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a+m=2+2=4$

04 답 ③

$\overline{BP}:\overline{PE}=1:3$이므로 두 점 A, C의 좌표를 각각 $A(a,0)$, $C(4a,0)$이라 하면 점 P의 좌표는 $(a,2^a)$이다.



$\therefore$ □PFDB$=\overline{BP}\times\overline{PF}=a\times3\sqrt{2}=3\sqrt{2}a$

□PACE$=\overline{AC}\times\overline{AP}=3a\times2^a$

이때 직사각형 PACE의 넓이는 직사각형 PFDB의 넓이의 2배이므로 $3a\times2^a=2\times3\sqrt{2}a$

$2^a=2\sqrt{2},\ 2^a=2^{\frac{3}{2}}$

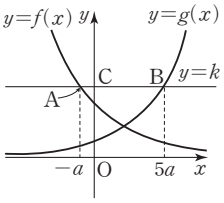
$\therefore a=\frac{3}{2}$

따라서 점 E의 x좌표는

$4a=4\times\frac{3}{2}=6$

05 답 16

점 A의 x좌표를 $-a\ (a>0)$라 하면 $\overline{AC}:\overline{CB}=1:5$이므로 점 B의 x좌표는 $5a$이다.



이때 두 점 A, B의 y좌표가 같으므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-a-1}=4^{5a-1},\ 2^{a+1}=2^{10a-2}$

$a+1=10a-2,\ 9a=3$

$\therefore a=\frac{1}{3}$

즉 점 B의 좌표는 $\left(\frac{5}{3},k\right)$이고 점 B가 함수 $y=g(x)$의 그래프 위에 있으므로

$k=4^{\frac{5}{3}-1}=4^{\frac{2}{3}}$

$\therefore k^3=(4^{\frac{2}{3}})^3=4^2=16$

06 답 ④

$(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2}-1=t$라 하면 주어진 부등식은

$t^m\geq(t^2)^{5-n}$ $\therefore t^m\geq t^{10-2n}$

이때 밑 t가 $0<t<1$이므로 $m\leq10-2n$

(i) $n=1$일 때

$1\leq m\leq8$이므로 순서쌍 (m,n)의 개수는 8이다.

(ii) $n=2$일 때

$1\leq m\leq6$이므로 순서쌍 (m,n)의 개수는 6이다.

(iii) $n=3$일 때

$1\leq m\leq4$이므로 순서쌍 (m,n)의 개수는 4이다.

(iv) $n=4$일 때

$1\leq m\leq2$이므로 순서쌍 (m,n)의 개수는 2이다.

(v) $n\geq5$일 때

부등식을 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.

(i)~(v)에서 구하는 순서쌍 (m,n)의 개수는

$8+6+4+2=20$

07 답 12

$\left(\frac{1}{4}\right)^x-(3n+16)\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+48n\leq0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-(3n+16)\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+48n\leq0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$라 하면 주어진 부등식은

$t^2-(3n+16)t+48n\leq0$

$(t-3n)(t-16)\leq0$

$\therefore\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x-3n\right\}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\right\}\leq0$ ……㉠

(i) $3n<\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$일 때

㉠에서 $3n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 2가 되려면

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$이므로

$4<3n\le8$ $\therefore \frac{4}{3}<n\le\frac{8}{3}$

즉 자연수 n의 값은 2이므로 그 개수는 1이다.

(ii) $3n>\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$일 때

㉠에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\le3n$

부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 2가 되려면

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=32$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}=64$이므로

$32\le3n<64$ $\therefore \frac{32}{3}\le n<\frac{64}{3}$

즉 자연수 n의 값은 11, 12, 13, …, 21이므로 그 개수는 11이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n의 개수는

$1+11=12$

참고 $3n=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$을 만족시키는 자연수 n의 값은 존재하지 않으므로 위의 풀이와 같이

(i) $3n<\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ (ii) $3n>\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

인 경우만 생각하면 된다.

08 답 ⑤

오른쪽 그림에서 직사각형의 가로의 길이는 $b-a=4$, 세로의 길이는 $2^{a}-(-2^{-b})=2^{a}+2^{-b}$이므로 직사각형의 넓이는

$(b-a)(2^{a}+2^{-b})=4(2^{a}+2^{-b})$

$2^{a}>0$, $2^{-b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4(2^{a}+2^{-b})\ge4\times2\sqrt{2^{a}\times2^{-b}}$

$=8\sqrt{2^{a-b}}=8\sqrt{2^{-4}}$

$=2$ (단, 등호는 $2^{a}=2^{-b}$일 때 성립)

따라서 직사각형의 넓이의 최솟값은 2이다.

09 답 ③

두 곡선 $y=2^{x-3}+1$과 $y=2^{x-1}-2$가 만나는 점 A의 x좌표는

$2^{x-3}+1=2^{x-1}-2$에서 $2^{x-3}+1=4\times2^{x-3}-2$

$3\times2^{x-3}=3$, $2^{x-3}=1$

$x-3=0$ $\therefore x=3$

즉 점 A의 좌표는 $(3, 2)$이다.

점 B의 x좌표를 a라 하면 점 B의 좌표는 $(a, 2^{a-3}+1)$

두 점 B, C는 기울기가 -1인 직선 위의 점이고 $\overline{BC}=\sqrt{2}$이므로 점 C의 좌표는 $(a-1, 2^{a-3}+2)$이다.

이때 점 C는 곡선 $y=2^{x-1}-2$ 위의 점이므로

$2^{a-3}+2=2^{a-2}-2$에서 $2^{a-3}+2=2\times2^{a-3}-2$

$2^{a-3}=4=2^{2}$, $a-3=2$

$\therefore a=5$

즉 점 B의 좌표는 $(5, 5)$이다.

이때 점 B가 직선 $y=-x+k$ 위의 점이므로

$5=-5+k$ $\therefore k=10$

점 A$(3, 2)$와 직선 $y=-x+10$, 즉 $x+y-10=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3+2-10|}{\sqrt{1^{2}+1^{2}}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$

따라서 $\triangle ABC$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5}{2}$

10 답 ②

$9^{x}-2(a-4)3^{x}+2a=0$에서

$(3^{x})^{2}-2(a-4)3^{x}+2a=0$

$3^{x}=t$ $(t>0)$라 하면 주어진 방정식은

$t^{2}-2(a-4)t+2a=0$ ……㉠

주어진 방정식의 두 근이 모두 1보다 크므로

$x>1$에서 $3^{x}>3^{1}$ $\therefore t>3$

즉 방정식 ㉠의 두 근은 모두 3보다 크면 된다.

$f(t)=t^{2}-2(a-4)t+2a$라 하면

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=\{-(a-4)\}^{2}-2a\ge0$

$a^{2}-10a+16\ge0$, $(a-2)(a-8)\ge0$

$\therefore a\le2$ 또는 $a\ge8$

(ii) 이차함수 $y=f(t)$의 그래프의 축의 방정식이 $t=a-4$이므로

$a-4>3$ $\therefore a>7$

(iii) $f(3)>0$이어야 하므로

$9-6(a-4)+2a>0$

$-4a+33>0$ $\therefore a<\frac{33}{4}$

(i)~(iii)에서 $8\le a<\frac{33}{4}$

따라서 정수 a의 값은 8이다.

04 로그함수

개념 완성하기 p.89~90

01 답 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$

주어진 함수는 $\{x|x$는 실수$\}$에서 $\{y|y>0\}$으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$에서 로그의 정의에 의하여 $x=\log_{\frac{1}{3}}y$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$

02 답 $y=\log_{\sqrt{2}}x$

주어진 함수는 $\{x|x$는 실수$\}$에서 $\{y|y>0\}$으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=(\sqrt{2})^x$에서 로그의 정의에 의하여 $x=\log_{\sqrt{2}}y$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\log_{\sqrt{2}}x$

03 답 0

$f(1)=\log_4 1=0$

04 답 1

$f(4)=\log_4 4=1$

05 답 -2

$f\left(\frac{1}{16}\right)=\log_4\frac{1}{16}=\log_4 4^{-2}=-2$

06 답 $-\frac{1}{3}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)=\log_4\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\log_4 4^{-\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}$

07 답 0

$f(1)=\log_{\frac{1}{3}}1=0$

08 답 1

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=1$

09 답 -2

$f(9)=\log_{\frac{1}{3}}9=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=-2$

10 답 $-\frac{1}{2}$

$f(\sqrt{3})=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$

11 답 ㄴ, ㅁ

ㄱ. 그래프는 점 $(1, 0)$을 지난다.

ㄷ. 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다.

ㄹ. 치역은 실수 전체의 집합이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㅁ이다.

12 답 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}>\log_{\frac{1}{2}}4$

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}>\log_{\frac{1}{2}}4$

13 답 $\log_4 7<\log_2 7$

$\log_4 7=\log_{2^2}7=\frac{1}{2}\log_2 7=\log_2 7^{\frac{1}{2}}=\log_2\sqrt{7}$

함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$\log_2\sqrt{7}<\log_2 7$ $\therefore \log_4 7<\log_2 7$

14 답 2, 1

15 답 x

16 답 y

17 답 $y=\log_{\frac{1}{5}}(x+1)+2$

함수 $y=\log_{\frac{1}{5}}x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-2=\log_{\frac{1}{5}}(x+1)$ $\therefore y=\log_{\frac{1}{5}}(x+1)+2$

18 답 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

함수 $y=\log_{\frac{1}{5}}x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $x=\log_{\frac{1}{5}}y$ $\therefore y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

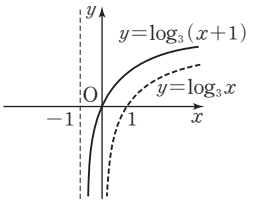
19 답 $y=-\log_{\frac{1}{5}}(-x)$

함수 $y=\log_{\frac{1}{5}}x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=\log_{\frac{1}{5}}(-x)$ $\therefore y=-\log_{\frac{1}{5}}(-x)$

20 답 그래프는 풀이 참조

정의역: $\{x|x>-1\}$, 점근선의 방정식: $x=-1$

함수 $y=\log_3(x+1)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x|x>-1\}$

점근선의 방정식: $x=-1$

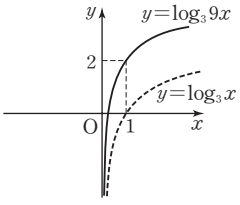
21 답 그래프는 풀이 참조

정의역: $\{x|x>0\}$, 점근선의 방정식: $x=0$

$y=\log_3 9x=\log_3 9+\log_3 x$

$=\log_3 x+2$

즉 함수 $y=\log_3 9x$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x|x>0\}$

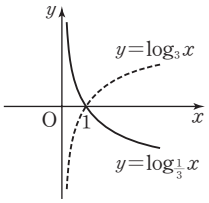
점근선의 방정식: $x=0$

22 답 그래프는 풀이 참조

정의역: $\{x|x>0\}$, 점근선의 방정식: $x=0$

$y=\log_{\frac{1}{3}}x=\log_{3^{-1}}x=-\log_3 x$

즉 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



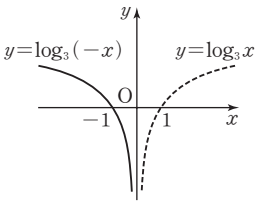
∴ 정의역: $\{x|x>0\}$

점근선의 방정식: $x=0$

23 답 그래프는 풀이 참조

정의역: $\{x|x<0\}$, 점근선의 방정식: $x=0$

함수 $y=\log_3(-x)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



∴ 정의역: $\{x|x<0\}$

점근선의 방정식: $x=0$

24 답 최댓값: 3, 최솟값: 0

함수 $y=\log_2(x+2)$에서 밑 2가 $2>1$이므로

$x=6$일 때 최대이고, 최댓값은 $\log_2(6+2)=\log_2 2^3=3$

$x=-1$일 때 최소이고, 최솟값은 $\log_2(-1+2)=\log_2 1=0$

25 답 최댓값: 4, 최솟값: 2

함수 $y=\log_2 2x$에서 밑 2가 $2>1$이므로

$x=8$일 때 최대이고, 최댓값은 $\log_2(2\times8)=\log_2 2^4=4$

$x=2$일 때 최소이고, 최솟값은 $\log_2(2\times2)=\log_2 2^2=2$

26 답 최댓값: 2, 최솟값: 1

함수 $y=\log_3(3x+3)$에서 밑 3이 $3>1$이므로

$x=2$일 때 최대이고, 최댓값은 $\log_3(3\times2+3)=\log_3 3^2=2$

$x=0$일 때 최소이고, 최솟값은 $\log_3 3=1$

27 답 최댓값: 0, 최솟값: -3

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$에서 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$x=2$일 때 최대이고, 최댓값은 $\log_{\frac{1}{2}}(2-1)=\log_{\frac{1}{2}}1=0$

$x=9$일 때 최소이고, 최솟값은 $\log_{\frac{1}{2}}(9-1)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=-3$

28 답 최댓값: -1, 최솟값: -4

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}4x$에서 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$x=\frac{1}{2}$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{2}}\left(4\times\frac{1}{2}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=-1$

$x=4$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{\frac{1}{2}}(4\times4)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=-4$

29 답 최댓값: -1, 최솟값: -2

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)$에서 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$x=1$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{3}}(2\times1+1)=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=-1$

$x=4$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{\frac{1}{3}}(2\times4+1)=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=-2$

30 답 $x=3$

진수의 조건에서 $x+1>0$ ∴ $x>-1$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{4}}(x+1)=-1$에서 $x+1=\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=4$ ∴ $x=3$

$x=3$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해는

$x=3$

31 답 $x=\frac{1}{4}$

밑의 조건에서 $x>0$, $x\neq1$ ……㉠

$\log_x 4=-1$에서 $4=x^{-1}$ ∴ $x=\frac{1}{4}$

$x=\frac{1}{4}$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{1}{4}$

32 답 $x=6$

밑의 조건에서 $x-3>0$, $x-3\neq1$

∴ $x>3$, $x\neq4$ ……㉠

$\log_{x-3}9=2$에서 $9=(x-3)^2$, $x-3=\pm3$

∴ $x=0$ 또는 $x=6$

이때 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는

$x=6$

33 답 $x=-5$

진수의 조건에서 $x^2-4>0$, $-4x+1>0$

∴ $x<-2$ ……㉠

$\log_2(x^2-4)=\log_2(-4x+1)$에서 $x^2-4=-4x+1$

$x^2+4x-5=0$, $(x+5)(x-1)=0$

∴ $x=-5$ 또는 $x=1$

이때 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는

$x=-5$

34 답 $x=4$

진수의 조건에서 $x>0$, $3x+4>0$

∴ $x>0$ ……㉠

$2\log_3 x=\log_3(3x+4)$에서 $\log_3 x^2=\log_3(3x+4)$

즉 $x^2=3x+4$이므로 $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$ ∴ $x=-1$ 또는 $x=4$

이때 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는

$x=4$

35 답 $x=9$

진수의 조건에서 $x+3>0$, $x+7>0$

∴ $x>-3$ ……㉠

$\log_3(x+3)=\log_9(x+7)+1$에서

$\log_9(x+3)^2=\log_9 9(x+7)$

즉 $(x+3)^2=9(x+7)$이므로 $x^2-3x-54=0$

$(x+6)(x-9)=0$ ∴ $x=-6$ 또는 $x=9$

이때 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는

$x=9$

36 답 $x=1$ 또는 $x=2$

진수의 조건에서 $x>0$, $3-x>0$

$\therefore 0<x<3$ ……㉠

$\log_2 x+\log_2(3-x)=1$에서 $\log_2 x(3-x)=\log_2 2$

즉 $x(3-x)=2$이므로 $-x^2+3x=2$

$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

이때 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는

$x=1$ 또는 $x=2$

37 답 $x=9$

진수의 조건에서 $x>0$, $x-6>0$

$\therefore x>6$ ……㉠

$\log_3 x+\log_3(x-6)=3$에서 $\log_3 x(x-6)=\log_3 27$

즉 $x(x-6)=27$이므로 $x^2-6x-27=0$

$(x+3)(x-9)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=9$

이때 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는

$x=9$

38 답 $x=5$

진수의 조건에서 $x>0$, $x-3>0$

$\therefore x>3$ ……㉠

$\log x+\log(x-3)=1$에서 $\log x(x-3)=\log 10$

즉 $x(x-3)=10$이므로 $x^2-3x-10=0$

$(x+2)(x-5)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=5$

이때 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는

$x=5$

39 답 $\frac{1}{2}<x<5$

진수의 조건에서 $2x-1>0$ $\therefore x>\frac{1}{2}$ ……㉠

$\log_3(2x-1)<2$에서 $\log_3(2x-1)<\log_3 9$

밑 3이 $3>1$이므로 $2x-1<9$ $\therefore x<5$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{2}<x<5$

40 답 $3<x<4$

진수의 조건에서 $4-x>0$ $\therefore x<4$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(4-x)>0$에서 $\log_{\frac{1}{3}}(4-x)>\log_{\frac{1}{3}}1$

밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $4-x<1$ $\therefore x>3$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x<4$

41 답 $5<x\le 25$

진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$1<\log_5 x\le 2$에서 $\log_5 5<\log_5 x\le\log_5 25$

밑 5가 $5>1$이므로 $5<x\le 25$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $5<x\le 25$

42 답 $x\ge 3$

진수의 조건에서 $x+3>0$, $2x>0$

$\therefore x>0$ ……㉠

$\log_3(x+3)\le\log_3 2x$에서 밑 3이 $3>1$이므로

$x+3\le 2x$ $\therefore x\ge 3$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x\ge 3$

43 답 $\frac{1}{4}<x<1$

진수의 조건에서 $x+2>0$, $4x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{4}$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)<\log_{\frac{1}{2}}(4x-1)$에서 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$x+2>4x-1$ $\therefore x<1$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{4}<x<1$

44 답 $-1<x<0$ 또는 $3<x<4$

진수의 조건에서 $x^2-3x>0$이므로 $x(x-3)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>3$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x)>\log_{\frac{1}{3}}4$에서 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$x^2-3x<4$, $x^2-3x-4<0$

$(x+1)(x-4)<0$ $\therefore -1<x<4$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-1<x<0$ 또는 $3<x<4$

45 답 $\frac{5}{3}<x<2$ 또는 $x>3$

진수의 조건에서 $x-1>0$, $3x-5>0$

$\therefore x>\frac{5}{3}$ ……㉠

$2\log_{\frac{1}{2}}(x-1)<\log_{\frac{1}{2}}(3x-5)$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2<\log_{\frac{1}{2}}(3x-5)$

밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $(x-1)^2>3x-5$

$x^2-5x+6>0$, $(x-2)(x-3)>0$

$\therefore x<2$ 또는 $x>3$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{5}{3}<x<2$ 또는 $x>3$

46 답 $5<x\le 8$

진수의 조건에서 $x-5>0$, $x+1>0$

$\therefore x>5$ ……㉠

$\log_3(x-5)+\log_3(x+1)\le 3$에서

$\log_3(x-5)(x+1)\le\log_3 27$

밑 3이 $3>1$이므로 $(x-5)(x+1)\le 27$

$x^2-4x-32\le 0$, $(x+4)(x-8)\le 0$

$\therefore -4\le x\le 8$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $5<x\le 8$

47 답 $1<x<2$

진수의 조건에서 $x-1>0$, $x+2>0$

$\therefore x>1$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+2)>-2$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)(x+2)>\log_{\frac{1}{2}}4$

밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $(x-1)(x+2)<4$

$x^2+x-6<0$, $(x+3)(x-2)<0$

$\therefore -3<x<2$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x<2$

유형 완성하기 p.91~112

01 답 -2

$f\left(\frac{7}{3}\right)=\log_a\left(\frac{7}{3}-2\right)-4=\log_a\frac{1}{3}-4=-5$이므로

$\log_a\frac{1}{3}=-1,\ a^{-1}=\frac{1}{3}$ $\therefore a=3$

따라서 $f(x)=\log_3(x-2)-4$이므로

$f(11)=\log_3 9-4=\log_3 3^2-4=2-4=-2$

01-1 답 ⑤

$f(9)=\log_3 9+k\log_{81}9=\log_3 3^2+k\log_{9^2}9=2+\frac{k}{2}=3$이므로

$\frac{k}{2}=1$ $\therefore k=2$

02 답 46

$f(-23)=\left(\frac{1}{4}\right)^{-23}=(2^{-2})^{-23}=2^{46}$이므로

$(g\circ f)(-23)=g(f(-23))=g(2^{46})=\log_2 2^{46}=46$

02-1 답 ①

$f(27)=\log_{\frac{1}{3}}27=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=-3$이므로

$(g\circ f)(27)=g(f(27))=g(-3)=\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}=729$

$h(27)=27^2=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right\}^2=\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}$이므로

$(f\circ h)(27)=f(h(27))=f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}\right)=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}=-6$

$\therefore (g\circ f)(27)+(f\circ h)(27)=729+(-6)=723$

03 답 -1

$f(2)+f(4)=-3$에서 $\log_a 2+\log_a 4=-3$

$\log_a 8=-3,\ 3\log_a 2=-3$

$\log_a 2=-1,\ 2=a^{-1}$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$이므로

$f(10)-f(5)=\log_{\frac{1}{2}}10-\log_{\frac{1}{2}}5=\log_{\frac{1}{2}}2=-1$

03-1 답 ②

$f(x)=\log_a\left(1+\frac{1}{x+1}\right)=\log_a\frac{x+2}{x+1}$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(160)$

$=\log_a\frac{3}{2}+\log_a\frac{4}{3}+\log_a\frac{5}{4}+\cdots+\log_a\frac{162}{161}$

$=\log_a\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{162}{161}\right)$

$=\log_a\frac{162}{2}=\log_a 81$

즉 $\log_a 81=-4$이므로 $a^{-4}=81$

$a^{-4}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ $\therefore a=\frac{1}{3}\ (\because a>0)$

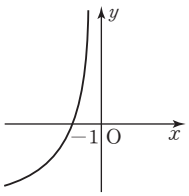
04 답 ④

④ 밑 3이 $3>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

04-1 답 ③

$y=\log_{\frac{1}{a}}(-x)=-\log_a(-x)$이므로 함수 $y=\log_{\frac{1}{a}}(-x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



③ $x<0$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

05 답 58

함수 $y=\log_2(x+3)$의 그래프가 점 $(a, 6)$을 지나므로

$6=\log_2(a+3),\ a+3=2^6=64$

$\therefore a=61$ ……❶

점근선의 방정식이 $x=-3$이므로 $b=-3$ ……❷

$\therefore a+b=61+(-3)=58$ ……❸

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

05-1 답 $x=-5$

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$의 그래프가 점 $(11, -4)$를 지나므로

$-4=\log_{\frac{1}{2}}(11+k),\ 11+k=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$

$\therefore k=5$

따라서 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+5)$이므로 점근선의 방정식은

$x=-5$

06 답 ㄷ

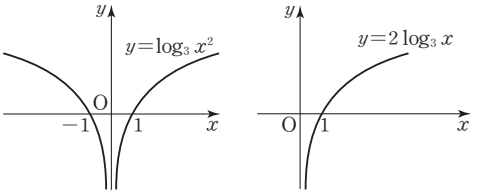
ㄱ. 함수 $y=\log_3 x^2$은 $x\neq0$에서 정의되고, 함수 $y=2\log_3 x$는 $x>0$에서 정의되므로 다른 함수이다.

ㄴ. 함수 $y=\log_3 x^2$의 정의역은 $\{x|x\neq0$인 실수$\}$이다.

ㄷ. 그래프는 y축을 점근선으로 한다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

참고 로그의 성질에 의하여 $\log_3 x^2=2\log_3 x$이므로 두 함수 $y=\log_3 x^2$, $y=2\log_3 x$가 서로 같은 함수라고 생각할 수 있다.
하지만 두 함수의 정의역이 다음과 같이 서로 다르므로 두 함수 $y=\log_3 x^2$, $y=2\log_3 x$는 다른 함수이다.
함수 $y=\log_3 x^2$의 정의역은 진수의 조건에서
$x^2>0$이므로 $\{x|x\neq0$인 실수$\}$
함수 $y=2\log_3 x$의 정의역은 진수의 조건에서
$x>0$이므로 $\{x|x>0$인 실수$\}$
실제로 두 함수 $y=\log_3 x^2$, $y=2\log_3 x$의 그래프를 그려 보면 아래 그림과 같다.



06-1 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. 일대일함수이므로 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다.

ㄴ. 밑 4가 $4>1$이므로 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다.

ㄷ. $y=\log_{\frac{1}{4}} x=-\log_4 x$이므로 함수 $y=\log_4 x$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

07 답 ④

$a=\log_7 5$, $b=\log_7 10$이므로

$$f(20)=\log_7 20=\log_7 \frac{100}{5}$$
$$=2\log_7 10-\log_7 5$$
$$=2b-a$$

07-1 답 9

$\overline{OA}=\log_3 a$, $\overline{OB}=\log_3 b$이므로

$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=\log_3 b-\log_3 a$

이때 $\overline{AB}=2$이므로

$\log_3 b-\log_3 a=2$, $\log_3 \frac{b}{a}=2$

$\therefore \frac{b}{a}=3^2=9$

08 답 12

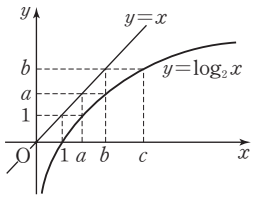
직선 $y=x$ 위의 점의 x좌표와 y좌표가 같으므로 오른쪽 그림에서

$\log_2 a=1$ $\therefore a=2^1=2$

$\log_2 b=a$ $\therefore b=2^a=2^2=4$

$\log_2 c=b$ $\therefore c=2^b=2^4=16$

$\therefore c-b=16-4=12$



08-1 답 13자리

직선 $y=x$ 위의 점의 x좌표와 y좌표가 같으므로 오른쪽 그림에서

$\log_3 a=1$ $\therefore a=3^1=3$ ……❶

$\log_3 b=a$ $\therefore b=3^a=3^3=27$ ……❷

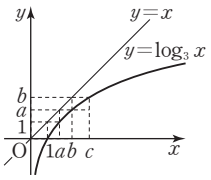
$\log_3 c=b$ $\therefore c=3^b=3^{27}$ ……❸

$\therefore \log c=\log 3^{27}=27\log 3$

$=27\times 0.477$

$=12.879$

따라서 c는 13자리 자연수이다. ……❹



채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ c의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ c가 몇 자리 자연수인지 구할 수 있다.	40%

09 답 1

점 C의 좌표를 $(k, 0)$이라 하면 $\overline{CD}=2$이므로 점 D의 좌표는 $(k, 2)$이다.

함수 $y=\log_2 x$의 그래프가 점 D를 지나므로

$2=\log_2 k$ $\therefore k=2^2=4$

$\overline{BC}=2$이므로 점 B의 x좌표는

$k-2=4-2=2$ $\therefore$ A$(2, 2)$

점 E의 x좌표가 2이므로 점 E의 y좌표는

$\log_2 2=1$ $\therefore$ E$(2, 1)$

$\therefore \overline{AE}=2-1=1$

09-1 답 $\frac{9}{4}$

두 점 C, D의 x좌표를 k라 하면 $\overline{AD}=2$이므로 두 점 A, B의 x좌표는 $k-2$이다.

함수 $y=\log_3 x$의 그래프가 두 점 B, D를 지나므로 두 점 B, D의 y좌표는 각각 $\log_3(k-2)$, $\log_3 k$이다.

이때 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이므로

$\log_3 k-\log_3(k-2)=2$, $\log_3 \frac{k}{k-2}=2$

$\frac{k}{k-2}=3^2=9$, $k=9k-18$ $\therefore k=\frac{9}{4}$

따라서 점 D의 x좌표는 $\frac{9}{4}$이다.

10 답 5

$y=a\log_2 x-1$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=a\log_2(x-b)-1$

$y=a\log_2(x-b)-1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=-a\log_2(x-b)+1$

이때

$$y=2\log_{\frac{1}{2}}\frac{(x+1)^3}{\sqrt{2}}=-2\log_2\frac{(x+1)^3}{\sqrt{2}}$$
$$=-2\{\log_2(x+1)^3-\log_2\sqrt{2}\}$$
$$=-2\left\{3\log_2(x+1)-\frac{1}{2}\log_2 2\right\}$$
$$=-6\log_2(x+1)+1$$

이므로 $a=6$, $b=-1$

$\therefore a+b=6+(-1)=5$

10-1 답 2

$y=2^{x-a}-b$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$x=2^{y-a}-b$, $x+b=2^{y-a}$

로그의 정의에 의하여 $y-a=\log_2(x+b)$

$\therefore y=\log_2(x+b)+a$

$y=\log_2(x+b)+a$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\log_2(x+b)+a+2$

즉 $y=\log_2(x+b)+a+2$가 $y=\log_2 x$와 일치해야 하므로

$a+2=0$, $b=0$ $\therefore a=-2$, $b=0$

$\therefore b-a=0-(-2)=2$

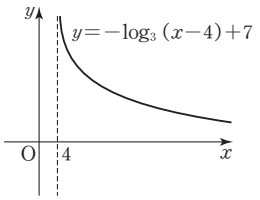
11 답 ②

① $x=5$를 $y=-\log_3(x-4)+7$에 대입하면

$-\log_3(5-4)+7=-\log_3 1+7=7$

즉 주어진 함수의 그래프는 점 $(5, 7)$을 지난다.

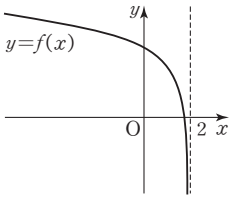
② 함수 $y=-\log_3(x-4)+7$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 7만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



③ 정의역은 $\{x|x>4\}$이고 치역은 실수 전체의 집합이다.
④ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=4$이다.
⑤ x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

11-1 답 ④

① $f(1)=\log_2(2-1)+3=3$이므로 주어진 함수의 그래프는 점 $(1, 3)$을 지난다.
② $f(x)=\log_2(2-x)+3=\log_2\{-(x-2)\}+3$
즉 $f(x)=\log_2(2-x)+3$의 그래프는 $y=\log_2(-x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



③ 정의역은 $\{x|x<2\}$이고 치역은 실수 전체의 집합이다.
④ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$이다.
⑤ $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.
따라서 옳은 것은 ④이다.

12 답 2

그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$이므로 $a=1$
즉 $y=\log_3(x-1)+b$의 그래프가 점 $(4, 0)$을 지나므로
$0=\log_3(4-1)+b$, $0=1+b$ $\therefore b=-1$
$\therefore a-b=1-(-1)=2$

12-1 답 −3

그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$이므로 $a=-2$ ····· ❶
즉 $y=\log_4(x+2)+b$의 그래프가 점 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$을 지나므로
$-\frac{1}{2}=\log_4 2+b$, $-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+b$ $\therefore b=-1$ ····· ❷
$\therefore a+b=-2+(-1)=-3$ ····· ❸

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

13 답 ⑤

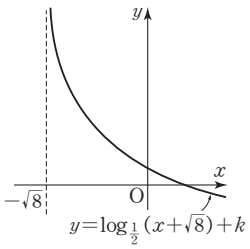
ㄱ. $y=\log_2(4x-3)=\log_2 4\left(x-\frac{3}{4}\right)=\log_2\left(x-\frac{3}{4}\right)+2$
즉 $y=\log_2(4x-3)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{4}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
ㄴ. $y=\log_4 x^2=\log_{2^2} x^2=\log_2|x|$
즉 $y=\log_4 x^2$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.
ㄷ. $y=\log_{0.5}(-x+1)=\log_{\frac{1}{2}}\{-(x-1)\}=-\log_2\{-(x-1)\}$
즉 $y=\log_{0.5}(-x+1)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
ㄹ. $y=\log_2\frac{16}{x}=\log_2 16-\log_2 x=4-\log_2 x$
즉 $y=\log_2\frac{16}{x}$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $y=\log_2 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

13-1 답 ②

① $y=\log_3(9x-3)=\log_3 9\left(x-\frac{1}{3}\right)=\log_3\left(x-\frac{1}{3}\right)+2$
즉 $y=\log_3(9x-3)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
② $y=\log_9 x^2=\log_{3^2} x^2=\log_3|x|$
즉 $y=\log_9 x^2$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.
③ $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x+1)=\log_{\frac{1}{3}}\{-(x-1)\}=-\log_3\{-(x-1)\}$
즉 $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x+1)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
④ $y=\log_3\frac{9}{x}=\log_3 9-\log_3 x=2-\log_3 x$
즉 $y=\log_3\frac{9}{x}$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
⑤ $y=\log_3\left(3x-\frac{1}{9}\right)=\log_3 3\left(x-\frac{1}{27}\right)=\log_3\left(x-\frac{1}{27}\right)+1$
즉 $y=\log_3\left(3x-\frac{1}{9}\right)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{27}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $y=\log_3 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식이 아닌 것은 ②이다.

14 답 $\frac{3}{2}$

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+\sqrt{8})+k$의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\sqrt{8}$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.
이 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 y의 값이 0보다 크거나 같아야 하므로

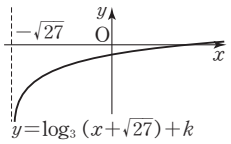


$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{8}+k\geq 0$
$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}+k\geq 0$
$-\frac{3}{2}+k\geq 0$ $\therefore k\geq\frac{3}{2}$
따라서 실수 k의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다.

14-1 답 $-\frac{3}{2}$

함수 $y=\log_3(x+\sqrt{27})+k$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\sqrt{27}$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

이 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 y의 값이 0보다 작거나 같아야 하므로 …… ❶



$\log_3\sqrt{27}+k\le 0$, $\log_3 3^{\frac{3}{2}}+k\le 0$

$\frac{3}{2}+k\le 0$ $\therefore k\le -\frac{3}{2}$ …… ❷

따라서 실수 k의 최댓값은 $-\frac{3}{2}$이다. …… ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수의 그래프가 제2사분면을 지나지 않도록 하는 조건을 알 수 있다.	40%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 실수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

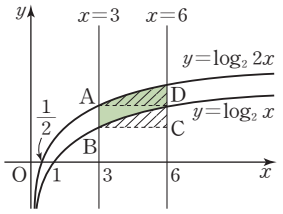
15 답 3

$y=\log_2 2x=\log_2 x+1$이므로 $y=\log_2 2x$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.

따라서 구하는 부분의 넓이는

$(6-3)\times 1=3$



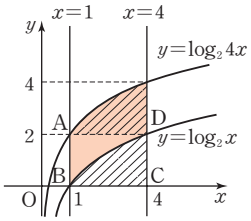
15-1 답 6

$y=\log_2 4x=\log_2 x+2$이므로 $y=\log_2 4x$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.

따라서 구하는 부분의 넓이는

$(4-1)\times 2=6$



16 답 ③

$y=\log_4(x-3)+1$에서 $y-1=\log_4(x-3)$

로그의 정의에 의하여 $x-3=4^{y-1}$

$\therefore x=4^{y-1}+3$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=4^{x-1}+3=(2^2)^{x-1}+3=2^{2x-2}+3$

따라서 $p=-2$, $q=3$이므로

$p+q=-2+3=1$

16-1 답 12

$y=\log_{\frac{1}{9}}(x-2)+3$에서 $y-3=\log_{\frac{1}{9}}(x-2)$

로그의 정의에 의하여 $x-2=\left(\frac{1}{9}\right)^{y-3}$

$\therefore x=\left(\frac{1}{9}\right)^{y-3}+2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\left(\frac{1}{9}\right)^{x-3}+2=(3^{-2})^{x-3}+2=3^{-2x+6}+2$

따라서 $p=6$, $q=2$이므로

$pq=6\times 2=12$

17 답 2

$f^{-1}(2)=k$ $(k>1)$라 하면 $f(k)=2$이므로

$f(k)=\log_3(3k^2-3)=2$, $3k^2-3=3^2=9$

$3k^2=12$, $k^2=4$ $\therefore k=2$ ($\because k>1$)

즉 $f^{-1}(2)=2$이므로

$(f^{-1}\circ f^{-1})(2)=f^{-1}(f^{-1}(2))$

$=f^{-1}(2)=2$

17-1 답 31

$f^{-1}(0)=a$라 하면 $f(a)=0$이므로

$f(a)=\log_2(a+1)-2=0$, $\log_2(a+1)=2$

$a+1=2^2=4$ $\therefore a=3$

즉 $f^{-1}(0)=3$이므로 $f^{-1}(f^{-1}(0))=f^{-1}(3)$

$f^{-1}(3)=b$라 하면 $f(b)=3$이므로

$f(b)=\log_2(b+1)-2=3$, $\log_2(b+1)=5$

$b+1=2^5=32$ $\therefore b=31$

즉 $f^{-1}(3)=31$이므로

$(f\circ f)^{-1}(0)=f^{-1}(f^{-1}(0))$

$=f^{-1}(3)=31$

18 답 $6\sqrt{2}$

함수 $f(x)=\log_a(x-2)$의 그래프가 점 $(4, 2)$를 지나므로

$2=\log_a 2$, $a^2=2$ $\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

$\therefore f(x)=\log_{\sqrt{2}}(x-2)$

함수 $y=f(x)$의 역함수의 그래프가 점 $(4, b)$를 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(b, 4)$를 지난다.

즉 $4=\log_{\sqrt{2}}(b-2)$이므로

$b-2=(\sqrt{2})^4=4$ $\therefore b=6$

$\therefore ab=\sqrt{2}\times 6=6\sqrt{2}$

18-1 답 11

$f(5)=2$이므로 $f(5)=\log_a 4=2$

$a^2=4$ $\therefore a=2$ ($\because a>0$) …… ❶

$\therefore f(x)=\log_2(x-1)$

$f(g(x))=x$이므로 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수 관계이다.

$g(3)=b$이므로 $f(b)=3$

즉 $f(b)=\log_2(b-1)=3$이므로

$b-1=2^3=8$ $\therefore b=9$ …… ❷

$\therefore a+b=2+9=11$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

19 답 4

$y=3^x$의 역함수는 $f^{-1}(x)=\log_3 x$

$y=f^{-1}(x)$의 그래프와 x축의 교점은 점 A$(1, 0)$이므로 점 B의 좌표를 $(1, b)$라 하면

$b=3$ …… ❶

점 C의 좌표를 $(a, 3)$이라 하면 $f^{-1}(a)=3$이므로

$\log_3 a=3$ $\therefore a=3^3$ …… ❷

$\therefore \log_3 ab=\log_3 3^4=4$ …… ❸

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $\log_3 ab$의 값을 구할 수 있다.	20%

19-1 답 ④

함수 $y=2^x$의 그래프는 점 $(0, 1)$을 지나므로 $a=1$

오른쪽 그림에서

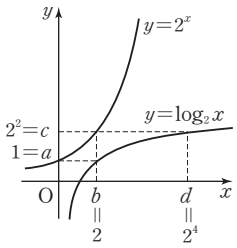
$\log_2 b=a=1$이므로 $b=2$

$2^b=c$이므로 $c=2^2$

$\log_2 d=c=2^2$이므로 $d=2^4$

$\therefore \log_2 abcd=\log_2 (1\times 2\times 2^2\times 2^4)$

$=\log_2 2^7=7$



20 답 21

$g(x)$는 $y=\log_2 x$의 역함수이므로 $g(x)=2^x$

점 A는 $y=g(x)$의 그래프와 y축의 교점이므로 $\mathrm{A}(0, 1)$

점 B의 y좌표가 1이므로 $1=\log_2 x$에서 $x=2$

$\therefore \mathrm{B}(2, 1)$

점 C의 x좌표가 2이므로 $\mathrm{C}(2, 2^2)$, 즉 $\mathrm{C}(2, 4)$

점 D의 y좌표가 4이므로 $4=\log_2 x$에서 $x=2^4=16$

$\therefore \mathrm{D}(16, 4)$

따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=4-1=3$, $\overline{\mathrm{CD}}=16-2=14$이므로

$\triangle \mathrm{BDC}=\frac{1}{2}\times \overline{\mathrm{BC}}\times \overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}\times 3\times 14=21$

20-1 답 40

두 함수 $y=\log_3 x$, $y=3^x$은 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

점 A의 좌표는 $(9, 2)$이므로 점 B의 좌표는 $(2, 9)$이다.

점 C의 좌표는 $(0, 1)$

점 D의 좌표는 $(1, 0)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2-9)^2+(9-2)^2}=7\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

직선 AB는 점 $\mathrm{A}(9, 2)$를 지나고 기울기가 -1인 직선이므로

$y-2=-(x-9)$ $\therefore x+y-11=0$

이때 점 D와 직선 AB 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|1+0-11|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$

직선 CD의 기울기는 $\frac{0-1}{1-0}=-1$이므로 직선 AB와 직선 CD는 평행하다. 즉 사각형 ABCD는 사다리꼴이다.

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}})\times d=\frac{1}{2}\times(7\sqrt{2}+\sqrt{2})\times 5\sqrt{2}=40$

Lecture 점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

21 답 $-\frac{3}{2}$

함수 $y=\log_a bx$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=\log_a bx$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

두 교점의 y좌표가 -1, -2이므로 $y=\log_a bx$의 그래프는 두 점 $(-1, -1)$, $(-2, -2)$를 지난다.

$-1=\log_a(-b)$에서 $-b=\frac{1}{a}$ $\therefore b=-\frac{1}{a}$ ……㉠

$-2=\log_a(-2b)$에서 $-2b=\frac{1}{a^2}$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{2}{a}=\frac{1}{a^2}$, $2a^2-a=0$

$a(2a-1)=0$ $\therefore a=\frac{1}{2}$ $(\because a>0)$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

$\therefore a+b=\frac{1}{2}+(-2)=-\frac{3}{2}$

21-1 답 $a=\sqrt{2}$, $b=0$

함수 $y=\log_a(x-b)$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=\log_a(x-b)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

두 교점의 y좌표가 2, 4이므로 $y=\log_a(x-b)$의 그래프는 두 점 $(2, 2)$, $(4, 4)$를 지난다.

$2=\log_a(2-b)$에서 $a^2=2-b$ $\therefore b=2-a^2$ ……㉠

$4=\log_a(4-b)$에서 $a^4=4-b$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^4=a^2+2$, $a^4-a^2-2=0$

$\therefore (a^2+1)(a^2-2)=0$

이때 $a^2+1>0$이므로 $a^2-2=0$

$a^2=2$ $\therefore a=\sqrt{2}$ $(\because a>0)$

$a=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면

$b=2-(\sqrt{2})^2=0$

22 답 ②

$A=\log_3\sqrt{10}$

$B=\log_{\frac{1}{3}} 4=\log_3 4^{-1}=\log_3\frac{1}{4}$

$C=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{14}=\log_3(\sqrt{14})^{-1}=\log_3\frac{1}{\sqrt{14}}$

이때 $\frac{1}{4}<\frac{1}{\sqrt{14}}<\sqrt{10}$이고, 밑 3이 $3>1$이므로

$\log_3\frac{1}{4}<\log_3\frac{1}{\sqrt{14}}<\log_3\sqrt{10}$

$\therefore B<C<A$

22-1 답 ④

$A=\log_4 10=\log_2 10^{\frac{1}{2}}=\log_2\sqrt{10}$

$B=\log_{\frac{1}{4}} 15=\log_2 15^{-\frac{1}{2}}=\log_2\frac{1}{\sqrt{15}}$

$C=\log_2\sqrt{11}$

이때 $\frac{1}{\sqrt{15}}<\sqrt{10}<\sqrt{11}$이고, 밑 2가 $2>1$이므로

$\log_2\frac{1}{\sqrt{15}}<\log_2\sqrt{10}<\log_2\sqrt{11}$

$\therefore B<A<C$

23 답 $C<B<A$

$A=3\log_{0.1} 2\sqrt{3}=\log_{0.1}(2\sqrt{3})^3=\log_{0.1} 24\sqrt{3}$

$B=\log\frac{1}{81}=-\log 81=\log_{0.1} 81$

$C=\log_{0.1} 4-2=\log_{0.1} 4-\log_{0.1} 0.01=\log_{0.1}\frac{4}{0.01}=\log_{0.1} 400$

이때 $24\sqrt{3}<81<400$이고, 밑 0.1이 $0<0.1<1$이므로
$\log_{0.1} 400<\log_{0.1} 81<\log_{0.1} 24\sqrt{3}$
$\therefore C<B<A$

23-1 답 $B<A<C$
$1<x<3$의 각 변에 밑이 3인 로그를 취하면
$\log_3 1<\log_3 x<\log_3 3 \quad \therefore 0<\log_3 x<1$
$A-B=\log_3 x-(\log_3 x)^2=(1-\log_3 x)\log_3 x$
이때 $0<\log_3 x<1$이므로 $1-\log_3 x>0$
$\therefore A-B>0 \quad \therefore A>B$ ……㉠
$C=\log_x 3=\frac{1}{\log_3 x}$
이때 $0<\log_3 x<1$이므로 $\frac{1}{\log_3 x}>1$, 즉 $C>1$
$\therefore A<C$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $B<A<C$

Lecture 두 수의 대소 비교
(1) $A-B>0$이면 $A>B$
$A-B<0$이면 $A<B$
(2) $A>0, B>0$일 때
① $A^2-B^2>0$이면 $A>B$
$A^2-B^2<0$이면 $A<B$
② $\frac{A}{B}>1$이면 $A>B$
$\frac{A}{B}<1$이면 $A<B$

24 답 C, B
$1<a<b$의 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면
$\log_a 1<\log_a a<\log_a b \quad \therefore 0<1<\log_a b$
이때 $C=\log_a b^2=2\log_a b$이므로 $0<1<A<C$ ……❶
또 $1<a<b$의 각 변에 밑이 b인 로그를 취하면
$\log_b 1<\log_b a<\log_b b \quad \therefore 0<\log_b a<1$
이때 $B=\log_{b^2} a=\frac{1}{2}\log_b a$이므로 $0<B<D<1$ ……❷
따라서 가장 큰 수는 C, 가장 작은 수는 B이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ 두 수 A, C의 대소 관계를 구할 수 있다.	40%
❷ 두 수 B, D의 대소 관계를 구할 수 있다.	40%
❸ 가장 큰 수와 가장 작은 수를 구할 수 있다.	20%

24-1 답 $\log_a \frac{a}{b}$
$b<a<1$의 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면
$\log_a 1<\log_a a<\log_a b \quad \therefore 0<1<\log_a b$ ……㉠
또 $b<a<1$의 각 변에 밑이 b인 로그를 취하면
$\log_b 1<\log_b a<\log_b b \quad \therefore 0<\log_b a<1$
$\log_a \frac{b}{a}=\log_a b-\log_a a=\log_a b-1$이고 ㉠에서
$\log_a b-1>0$
$\log_a \frac{a}{b}=\log_a a-\log_a b=1-\log_a b$이고 ㉠에서
$1-\log_a b<0$
따라서 가장 작은 수는 $\log_a \frac{a}{b}$이다.

25 답 ①
$f(x)=-x^2+4x+4$라 하면 $f(x)=-(x-2)^2+8$이므로
$1\le x\le 4$에서 $f(1)=7, f(2)=8, f(4)=4$
$\therefore 4\le f(x)\le 8$
밑 2가 $2>1$이므로 $y=\log_2 f(x)$는
$f(x)=8$일 때 최대이고, 최댓값 M은
$M=\log_2 8=3$
$f(x)=4$일 때 최소이고, 최솟값 m은
$m=\log_2 4=2$
따라서 $M=3, m=2$이므로
$\therefore M+m=3+2=5$

25-1 답 -2
$f(x)=x^2-4x+8$이라 하면 $f(x)=(x-2)^2+4$이므로
$-1\le x\le 3$에서 $f(-1)=13, f(2)=4, f(3)=5$
$\therefore 4\le f(x)\le 13$
밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $y=\log_{\frac{1}{2}} f(x)$는 $f(x)=4$일 때 최대이고, 최댓값은 $\log_{\frac{1}{2}} 4=-2$

26 답 ②
$f(x)=x^2-4x+a$라 하면 $f(x)=(x-2)^2+a-4$
$\therefore f(x)\ge a-4$
밑 2가 $2>1$이므로 $y=\log_2 f(x)$는 $f(x)=a-4$일 때 최소이고, 최솟값은 1이다.
즉 $\log_2 (a-4)=1$이므로
$a-4=2 \quad \therefore a=6$

26-1 답 6
함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)+k$는 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
즉 $x=7$일 때 최소이고, 최솟값이 5이므로
$\log_{\frac{1}{3}} 9+k=5, \ -2+k=5 \quad \therefore k=7$ ……❶
따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)+7$은 $x=1$일 때 최대이고, 최댓값은
$\log_{\frac{1}{3}} 3+7=-1+7=6$ ……❷

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	60%
❷ 주어진 함수의 최댓값을 구할 수 있다.	40%

27 답 ①
$f(x)=x^2-6x+34$라 하면 $f(x)=(x-3)^2+25$
(i) $a>1$일 때
밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최댓값을 가질 때, 주어진 함수는 최댓값을 갖는다.
그런데 $f(x)$는 최댓값이 없으므로 주어진 함수는 최댓값을 갖지 않는다.
(ii) $0<a<1$일 때
밑이 1보다 작은 양수이므로 $f(x)$가 최솟값을 가질 때, 주어진 함수는 최댓값을 갖는다.
$f(x)$는 $x=3$일 때, 최솟값이 25이므로 주어진 함수의 최댓값은 $\log_a 25$

(i), (ii)에서 $\log_a 25=-2$이므로 $a^{-2}=25$

$a^2=\frac{1}{25}$ $\therefore a=\frac{1}{5}$ ($\because 0<a<1$)

27-1 답 ②

진수의 조건에서 $x+1>0, 3-x>0$ $\therefore -1<x<3$

$f(x)=\log_a(x+1)+\log_a(3-x)=\log_a(x+1)(3-x)$

$=\log_a(-x^2+2x+3)$

$g(x)=-x^2+2x+3$이라 하면 $g(x)=-(x-1)^2+4$

(i) $a>1$일 때

밑이 1보다 크므로 $g(x)$가 최솟값을 가질 때, $f(x)$는 최솟값을 갖는다.

그런데 $-1<x<3$에서 $g(x)$의 최솟값은 없으므로 $f(x)$는 최솟값을 갖지 않는다.

(ii) $0<a<1$일 때

밑이 1보다 작은 양수이므로 $g(x)$가 최댓값을 가질 때, $f(x)$는 최솟값을 갖는다.

$-1<x<3$에서 $g(x)$는 $x=1$일 때, 최댓값이 4이므로 $f(x)$의 최솟값은 $\log_a 4$

(i), (ii)에서 $\log_a 4=-2$이므로 $a^{-2}=4$

$a^2=\frac{1}{4}$ $\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because 0<a<1$)

28 답 −6

$y=(\log_3 x)^2-\log_3 81x^2=(\log_3 x)^2-2\log_3 x-4$

$\log_3 x=t$라 하면 $3\le x\le 27$에서

$\log_3 3\le\log_3 x\le\log_3 27$ $\therefore 1\le t\le 3$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t-4=(t-1)^2-5$이므로

$t=3$일 때 최대이고, 최댓값 M은 $M=(3-1)^2-5=-1$

$t=1$일 때 최소이고, 최솟값 m은 $m=-5$

$\therefore M+m=-1+(-5)=-6$

28-1 답 ①

$y=(\log_2 x)^2+\log_{\frac{1}{2}} x^6+1=(\log_2 x)^2-6\log_2 x+1$

$\log_2 x=t$라 하면

$y=t^2-6t+1=(t-3)^2-8$

따라서 $t=3$일 때 최소이고, 최솟값은 -8이다.

29 답 −12

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$라 하면 $y=(\log_{\frac{1}{2}} x)^2+p\log_{\frac{1}{2}} x+q$에서

$y=t^2+pt+q$ ……㉠

이 함수가 $x=\frac{1}{4}$, 즉 $t=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=2$에서 최솟값 -1을 가지므로

$y=(t-2)^2-1=t^2-4t+3$ ……㉡

이때 ㉠과 ㉡의 식이 같아야 하므로

$p=-4, q=3$

$\therefore pq=-4\times 3=-12$

29-1 답 5

$y=(\log_3 x)^2+a\log_{27} x^2+b$

$=(\log_3 x)^2+a\log_{3^3} x^2+b$

$=(\log_3 x)^2+\frac{2}{3}a\log_3 x+b$

$\log_3 x=t$라 하면

$y=t^2+\frac{2}{3}at+b$ ……㉠ ……❶

이 함수가 $x=\frac{1}{3}$, 즉 $t=\log_3\frac{1}{3}=-1$에서 최솟값 1을 가지므로

$y=(t+1)^2+1=t^2+2t+2$ ……㉡

이때 ㉠과 ㉡의 식이 같아야 하므로

$\frac{2}{3}a=2, b=2$ $\therefore a=3, b=2$ ……❷

$\therefore a+b=3+2=5$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $\log_3 x$를 t로 치환하고 주어진 함수를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

30 답 9

$y=(\log_2 2x)\left(\log_2\frac{8}{x}\right)=(1+\log_2 x)(3-\log_2 x)$

$\log_2 x=t$라 하면 $\frac{1}{4}\le x\le 2$에서

$\log_2\frac{1}{4}\le\log_2 x\le\log_2 2$ $\therefore -2\le t\le 1$

이때 주어진 함수는

$y=(1+t)(3-t)=-t^2+2t+3=-(t-1)^2+4$이므로

$t=1$일 때 최대이고, 최댓값 M은 $M=4$

$t=-2$일 때 최소이고, 최솟값 m은 $m=-(-2-1)^2+4=-5$

$\therefore M-m=4-(-5)=9$

30-1 답 13

$y=(\log_3 x)(\log_{\frac{1}{3}} x)+2\log_3 x+10$

$=-(\log_3 x)^2+2\log_3 x+10$

$\log_3 x=t$라 하면 $1\le x\le 81$에서

$\log_3 1\le\log_3 x\le\log_3 81$ $\therefore 0\le t\le 4$

이때 주어진 함수는

$y=-t^2+2t+10=-(t-1)^2+11$이므로

$t=1$일 때 최대이고, 최댓값 M은 $M=11$

$t=4$일 때 최소이고, 최솟값 m은 $m=-(4-1)^2+11=2$

$\therefore M+m=11+2=13$

31 답 ③

$y=27x^{-4+\log_3 x}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 y=\log_3 27x^{-4+\log_3 x}$

$=\log_3 27+\log_3 x^{-4+\log_3 x}$

$=3+(-4+\log_3 x)\log_3 x$

$=(\log_3 x)^2-4\log_3 x+3$

$\log_3 x=t$라 하면 $\frac{1}{3}\le x\le 27$에서

$\log_3\frac{1}{3}\le\log_3 x\le\log_3 27$ $\therefore -1\le t\le 3$

이때 $\log_3 y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$이므로 $\log_3 y$는

$t=-1$일 때 최대이고, 최댓값은 $(-1-2)^2-1=8$

$t=2$일 때 최소이고, 최솟값은 -1

$\log_3 y=8$에서 $y=3^8$ $\therefore M=3^8$

$\log_3 y=-1$에서 $y=3^{-1}$ $\therefore m=3^{-1}$

$\therefore Mm=3^8\times 3^{-1}=3^7$

31-1 답 11

$y=x^{2-\log x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log y=\log x^{2-\log x}$

$=(2-\log x)\log x$

$=-(\log x)^2+2\log x$

$\log x=t$라 하면 $1\le x\le 100$에서

$\log 1\le\log x\le\log 100$ $\therefore 0\le t\le 2$

이때 $\log y=-t^2+2t=-(t-1)^2+1$이므로 $\log y$는

$t=1$일 때 최대이고, 최댓값은 1

$t=0$ 또는 $t=2$일 때 최소이고, 최솟값은 $-(0-1)^2+1=0$

$\log y=1$에서 $y=10$ $\therefore M=10$

$\log y=0$에서 $y=1$ $\therefore m=1$

$\therefore M+m=10+1=11$

32 답 최댓값: 48, 최솟값: 9

$2^{\log x}=x^{\log 2}$이므로

$y=2^{\log x}\times x^{\log 2}+2\times 2^{\log 100x}$

$=2^{\log x}\times 2^{\log x}+2\times 2^{2+\log x}$

$=2^{\log x}\times 2^{\log x}+2\times 2^2\times 2^{\log x}$

$=(2^{\log x})^2+8\times 2^{\log x}$

$2^{\log x}=t$라 하면 $1\le x\le 100$에서

$\log 1\le\log x\le\log 100$이므로 $0\le\log x\le 2$

$2^0\le 2^{\log x}\le 2^2$ $\therefore 1\le t\le 4$

이때 주어진 함수는

$y=t^2+8t=(t+4)^2-16$이므로

$t=4$일 때 최대이고, 최댓값은 $(4+4)^2-16=48$

$t=1$일 때 최소이고, 최솟값은 $(1+4)^2-16=9$

32-1 답 ④

$3^{\log x}=x^{\log 3}$이므로

$y=3^{\log x}\times x^{\log 3}-3(3^{\log x}+x^{\log 3})+2$

$=3^{\log x}\times 3^{\log x}-3(3^{\log x}+3^{\log x})+2$

$=(3^{\log x})^2-6\times 3^{\log x}+2$

$3^{\log x}=t$라 하면 $x>1$에서

$\log x>\log 1$이므로 $\log x>0$

$3^{\log x}>3^0$ $\therefore t>1$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-6t+2=(t-3)^2-7$이므로

$t=3$일 때 최소이고, 최솟값은 -7

$t=3$에서 $3^{\log x}=3$이므로

$\log x=1$ $\therefore x=10$

따라서 $a=10$, $b=-7$이므로

$a+b=10+(-7)=3$

33 답 ④

$y=\dfrac{x^2}{x^{\log_2 x}}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 y=\log_2\dfrac{x^2}{x^{\log_2 x}}$

$=\log_2 x^2-\log_2 x^{\log_2 x}$

$=2\log_2 x-(\log_2 x)^2$

$\log_2 x=t$라 하면

$\log_2 y=-t^2+2t=-(t-1)^2+1$이므로 $\log_2 y$는

$t=1$, 즉 $x=2$일 때 최대이고, 최댓값은 1

$\log_2 y=1$에서 $y=2$

따라서 $a=2$, $b=2$이므로

$a+b=2+2=4$

33-1 답 80

$y=\dfrac{27x^2}{x^{\log_3 x}}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 y=\log_3\dfrac{27x^2}{x^{\log_3 x}}$

$=\log_3 27x^2-\log_3 x^{\log_3 x}$

$=3+2\log_3 x-(\log_3 x)^2$

$\log_3 x=t$라 하면 $\dfrac{1}{3}\le x\le 9$에서

$\log_3\dfrac{1}{3}\le\log_3 x\le\log_3 9$ $\therefore -1\le t\le 2$

이때 $\log_3 y=-t^2+2t+3=-(t-1)^2+4$ ……❶

이므로 $\log_3 y$는

$t=1$일 때 최대이고, 최댓값은 4

$t=-1$일 때 최소이고, 최솟값은 $-(-1-1)^2+4=0$

$\log_3 y=4$에서 $y=3^4=81$ $\therefore M=81$

$\log_3 y=0$에서 $y=1$ $\therefore m=1$ ……❷

$\therefore M-m=81-1=80$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수의 양변에 밑이 3인 로그를 취한 후 $\log_3 x$를 t로 치환하여 나타낼 수 있다.	40%
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $M-m$의 값을 구할 수 있다.	20%

34 답 4

$y=\log_3 x+\log_x 81=\log_3 x+\dfrac{\log_3 81}{\log_3 x}=\log_3 x+\dfrac{4}{\log_3 x}$

이때 $x>1$에서 $\log_3 x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_3 x+\dfrac{4}{\log_3 x}\ge 2\sqrt{\log_3 x\times\dfrac{4}{\log_3 x}}$

$=4$ (단, 등호는 $\log_3 x=2$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

$\log_3 x=\dfrac{4}{\log_3 x}$에서 $(\log_3 x)^2=4$

$\therefore \log_3 x=2$ ($\because \log_3 x>0$)

34-1 답 $2\sqrt{3}$

$y=\log_2 x+\log_x 8=\log_2 x+\dfrac{\log_2 8}{\log_2 x}=\log_2 x+\dfrac{3}{\log_2 x}$

이때 $x>1$에서 $\log_2 x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_2 x+\dfrac{3}{\log_2 x}\ge 2\sqrt{\log_2 x\times\dfrac{3}{\log_2 x}}$

$=2\sqrt{3}$ (단, 등호는 $\log_2 x=\sqrt{3}$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{3}$이다.

35 답 2

$\log_4 x+\log_4 y=\log_4 xy$ ……㉠

㉠에서 밑 4가 $4>1$이므로 xy가 최대일 때, $\log_4 xy$는 최대이다.

이때 $x>0$, $y>0$이므로 $x+y=8$에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$, $8 \geq 2\sqrt{xy}$
$\therefore xy \leq 16$ (단, 등호는 $x=y=4$일 때 성립) ……❶
즉 xy의 최댓값이 16이므로 ㉠의 최댓값은
$\log_4 16=2$ ……❷

채점 기준	비율
❶ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 xy에 대한 부등식을 세울 수 있다.	60%
❷ $\log_4 x+\log_4 y$의 최댓값을 구할 수 있다.	40%

35-1 답 -2

$\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} y=\log_{\frac{1}{2}} xy$ ……㉠
㉠에서 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 xy가 최대일 때, $\log_{\frac{1}{2}} xy$는 최소이다.
이때 $x>0$, $y>0$이므로 $9x+y=12$에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$9x+y \geq 2\sqrt{9xy}$, $12 \geq 6\sqrt{xy}$
$\therefore xy \leq 4$ (단, 등호는 $9x=y=6$일 때 성립)
즉 xy의 최댓값이 4이므로 ㉠의 최솟값은
$\log_{\frac{1}{2}} 4=-2$

36 답 ③

$$\log_3 (x+3y)+\log_3\left(\frac{3}{x}+\frac{4}{y}\right)=\log_3 (x+3y)\left(\frac{3}{x}+\frac{4}{y}\right)$$
$$=\log_3\left(\frac{9y}{x}+\frac{4x}{y}+15\right)$$

이때 $\frac{y}{x}>0$, $\frac{x}{y}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$\frac{9y}{x}+\frac{4x}{y}+15 \geq 2\sqrt{\frac{9y}{x}\times\frac{4x}{y}}+15$$
$$=27 \text{ (단, 등호는 } 2x=3y \text{일 때 성립)}$$
따라서 구하는 최솟값은 $\log_3 27=3$

36-1 답 ⑤

$$\log_2\left(x+\frac{9}{y}\right)+\log_2\left(2y+\frac{2}{x}\right)=\log_2\left(x+\frac{9}{y}\right)\left(2y+\frac{2}{x}\right)$$
$$=\log_2\left(2xy+\frac{18}{xy}+20\right)$$

이때 $xy>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$2xy+\frac{18}{xy}+20 \geq 2\sqrt{2xy\times\frac{18}{xy}}+20$$
$$=32 \text{ (단, 등호는 } xy=3 \text{일 때 성립)}$$
따라서 구하는 최솟값은 $\log_2 32=5$

37 답 10

진수의 조건에서 $x-1>0$, $3(2x+7)>0$
$\therefore x>1$ ……㉠
$\log_3 (x-1)=\log_9 3(2x+7)$에서
$\log_9 (x-1)^2=\log_9 3(2x+7)$
즉 $(x-1)^2=3(2x+7)$이므로 $x^2-8x-20=0$
$(x+2)(x-10)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=10$
이때 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는
$x=10$ $\therefore k=10$

37-1 답 ⑤

진수의 조건에서 $x+1>0$, $3x+13>0$
$\therefore x>-1$ ……㉠
$\log_{\frac{1}{3}} (x+1)=\log_{\frac{1}{9}} (3x+13)$에서
$\log_{\frac{1}{9}} (x+1)^2=\log_{\frac{1}{9}} (3x+13)$
즉 $(x+1)^2=3x+13$이므로 $x^2-x-12=0$
$(x+3)(x-4)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=4$
이때 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=4$

38 답 7

㈎ 진수의 조건에서 $5x+6>0$ $\therefore x>-\frac{6}{5}$ ……㉠
$\log_4 (5x+6)=2$에서 $5x+6=4^2$
$5x=10$ $\therefore x=2$
$x=2$는 ㉠을 만족시키므로 방정식 ㈎의 해는
$x=2$ $\therefore a=2$
㈏ 진수의 조건에서 $x-2>0$, $x-4>0$
$\therefore x>4$ ……㉡
$\log_9 (x-2)+\log_{\frac{1}{9}} (x-4)=\frac{1}{2}$에서
$\log_9 (x-2)-\log_9 (x-4)=\log_9 9^{\frac{1}{2}}$
$\log_9 \frac{x-2}{x-4}=\log_9 3$
즉 $\frac{x-2}{x-4}=3$이므로 $x-2=3x-12$
$2x=10$ $\therefore x=5$
$x=5$는 ㉡을 만족시키므로 방정식 ㈏의 해는
$x=5$ $\therefore b=5$
$\therefore a+b=2+5=7$

38-1 답 $x=5$

진수의 조건에서 $x+1>0$, $x+4>0$
$\therefore x>-1$ ……㉠ ……❶
$2\log_2 (x+1)=2+\log_2 (x+4)$에서
$\log_2 (x+1)^2=\log_2 4(x+4)$
즉 $(x+1)^2=4(x+4)$이므로 $x^2-2x-15=0$
$(x+3)(x-5)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=5$
이때 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는
$x=5$ ……❷

채점 기준	비율
❶ 진수의 조건을 이용하여 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❷ 방정식의 해를 구할 수 있다.	70%

39 답 ②

밑과 진수의 조건에서
$x^2-8x+16>0$, $x^2-8x+16 \neq 1$, $5-x>0$
$(x-4)^2>0$, $(x-4)^2 \neq 1$, $x<5$이므로
$x \neq 3$, $x \neq 4$, $x \neq 5$, $x<5$
$\therefore x<3$ 또는 $3<x<4$ 또는 $4<x<5$ ……㉠
(i) $x^2-8x+16=4$일 때
$x^2-8x+12=0$, $(x-2)(x-6)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=6$
이때 ㉠에 의하여 $x=2$

(ii) $5-x=1$일 때
$x=4$
그런데 $x=4$는 ㉠을 만족시키지 않는다.
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는
$x=2$

39-1 답 3
밑과 진수의 조건에서
$4x>0,\ 4x\neq 1,\ x^2+2x-2>0$
$\therefore x>-1+\sqrt{3}$ ……㉠
(i) $x^2+4=4x$일 때
$x^2-4x+4=0,\ (x-2)^2=0$
$\therefore x=2$
이때 ㉠에 의하여 $x=2$
(ii) $x^2+2x-2=1$일 때
$x^2+2x-3=0,\ (x+3)(x-1)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$
이때 ㉠에 의하여 $x=1$
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는
$x=1$ 또는 $x=2$
따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은
$1+2=3$

참고 밑의 조건에서 $x^2+4>0,\ x^2+4\neq 1$은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 생각하지 않아도 된다.

40 답 ⑤
$\log_2 x=t$라 하면 $t^2+2t-35=0$
$(t+7)(t-5)=0$ $\therefore t=-7$ 또는 $t=5$
즉 $\log_2 x=-7$ 또는 $\log_2 x=5$이므로
$x=2^{-7}$ 또는 $x=2^5$ $\therefore \alpha=2^{-7},\ \beta=2^5\ (\because \alpha<\beta)$
$\therefore \alpha\beta^2=2^{-7}\times(2^5)^2=2^3=8$

40-1 답 −3
$\log_5 x=8\log_x 5+2$에서 $\log_5 x=\dfrac{8}{\log_5 x}+2$
$\log_5 x=t$라 하면 $t=\dfrac{8}{t}+2$
$t^2-2t-8=0,\ (t+2)(t-4)=0$
$\therefore t=-2$ 또는 $t=4$
즉 $\log_5 x=-2$ 또는 $\log_5 x=4$이므로
$x=5^{-2}$ 또는 $x=5^4$ $\therefore \alpha=5^4,\ \beta=5^{-2}\ (\because \alpha>\beta)$
$\therefore \log_\alpha \beta^2+\log_\beta \alpha=2\log_\alpha \beta+\log_\beta \alpha$
$=2\log_{5^4} 5^{-2}+\log_{5^{-2}} 5^4$
$=2\times\dfrac{-2}{4}+\dfrac{4}{-2}=-3$

41 답 $x=8$
주어진 방정식의 한 근이 $x=2$이므로
$(\log_2 2)^2-\log_2 2^4+a=0,\ 1-4+a=0$ $\therefore a=3$
즉 $(\log_2 x)^2-\log_2 x^4+3=0$이므로
$(\log_2 x)^2-4\log_2 x+3=0$
$\log_2 x=t$라 하면 $t^2-4t+3=0$
$(t-1)(t-3)=0$ $\therefore t=1$ 또는 $t=3$
즉 $\log_2 x=1$ 또는 $\log_2 x=3$이므로
$x=2$ 또는 $x=2^3=8$
따라서 다른 한 근은 $x=8$이다.

41-1 답 6
$x=16$을 $(\log_2 x)^2-\log_2 x^5+a=0$에 대입하면
$(\log_2 16)^2-\log_2 16^5+a=0$
$16-20+a=0$ $\therefore a=4$ ……❶
즉 $(\log_2 x)^2-\log_2 x^5+4=0$이므로
$(\log_2 x)^2-5\log_2 x+4=0$
$\log_2 x=t$라 하면 $t^2-5t+4=0$
$(t-1)(t-4)=0$ $\therefore t=1$ 또는 $t=4$
즉 $\log_2 x=1$ 또는 $\log_2 x=4$이므로
$x=2$ 또는 $x=2^4=16$
따라서 다른 한 근은 $x=2$이므로
$a=2$ ……❷
$\therefore a+a=4+2=6$ ……❸

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $a+a$의 값을 구할 수 있다.	10%

42 답 ③
$\left(\log_2 \dfrac{4}{x}\right)\left(\log_2 \dfrac{x}{2}\right)+6=0$에서
$(\log_2 4-\log_2 x)(\log_2 x-\log_2 2)+6=0$
$\therefore (2-\log_2 x)(\log_2 x-1)+6=0$
$\log_2 x=t$라 하면 $(2-t)(t-1)+6=0$
$t^2-3t-4=0,\ (t+1)(t-4)=0$
$\therefore t=-1$ 또는 $t=4$
즉 $\log_2 x=-1$ 또는 $\log_2 x=4$이므로
$x=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=2^4=16$ $\therefore \alpha=\dfrac{1}{2},\ \beta=16\ (\because \alpha<\beta)$
$\therefore 2\alpha+\beta=2\times\dfrac{1}{2}+16=17$

42-1 답 −5
$(\log_3 3x)(\log_3 27x)=8$에서
$(\log_3 3+\log_3 x)(\log_3 27+\log_3 x)=8$
$\therefore (1+\log_3 x)(3+\log_3 x)=8$
$\log_3 x=t$라 하면 $(1+t)(3+t)=8$
$t^2+4t-5=0,\ (t+5)(t-1)=0$
$\therefore t=-5$ 또는 $t=1$
즉 $\log_3 x=-5$ 또는 $\log_3 x=1$이므로
$x=3^{-5}$ 또는 $x=3$ $\therefore \alpha=3,\ \beta=3^{-5}\ (\because \alpha>\beta)$
$\therefore \log_\alpha \beta=\log_3 3^{-5}=-5$

43 답 $\dfrac{1}{9}$
$(\log_3 x)^2+\log_3 x^2-1=0$에서
$(\log_3 x)^2+2\log_3 x-1=0$
$\log_3 x=t$라 하면 $t^2+2t-1=0$ ……㉠
이차방정식 ㉠의 두 근이 $\log_3 \alpha,\ \log_3 \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\log_3 \alpha+\log_3 \beta=-2$

$\log_3 \alpha\beta=-2 \quad \therefore \alpha\beta=3^{-2}=\frac{1}{9}$

43-1 답 ①

$(\log_2 x)^2-\log_2 x^2-1=0$에서

$(\log_2 x)^2-2\log_2 x-1=0$

$\log_2 x=t$라 하면 $t^2-2t-1=0$ ……㉠

이차방정식 ㉠의 두 근이 $\log_2 \alpha$, $\log_2 \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 \alpha+\log_2 \beta=2$, $\log_2 \alpha\times\log_2 \beta=-1$

$$\therefore \log_\alpha \beta+\log_\beta \alpha=\frac{\log_2 \beta}{\log_2 \alpha}+\frac{\log_2 \alpha}{\log_2 \beta}$$
$$=\frac{(\log_2 \beta)^2+(\log_2 \alpha)^2}{\log_2 \alpha\times\log_2 \beta}$$
$$=\frac{(\log_2 \alpha+\log_2 \beta)^2-2\log_2 \alpha\times\log_2 \beta}{\log_2 \alpha\times\log_2 \beta}$$
$$=\frac{2^2-2\times(-1)}{-1}$$
$$=-6$$

44 답 16

$\log x\times\log\frac{x}{16}=k$에서

$\log x(\log x-\log 16)=k$

$\log x=t$라 하면 $t(t-\log 16)=k$

$\therefore t^2-(\log 16)t-k=0$ ……㉠

이차방정식 ㉠의 두 근이 $\log \alpha$, $\log \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\log \alpha+\log \beta=\log 16$

$\log \alpha\beta=\log 16 \quad \therefore \alpha\beta=16$

44-1 답 $\frac{1}{6}$

$\log 2x\times\log 3x=1$에서

$(\log 2+\log x)(\log 3+\log x)=1$

$\log x=t$라 하면 $(\log 2+t)(\log 3+t)=1$

$t^2+(\log 2+\log 3)t+\log 2\times\log 3-1=0$

$\therefore t^2+(\log 6)t+\log 2\times\log 3-1=0$ ……㉠

이차방정식 ㉠의 두 근이 $\log \alpha$, $\log \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\log \alpha+\log \beta=-\log 6$

$\log \alpha\beta=\log\frac{1}{6} \quad \therefore \alpha\beta=\frac{1}{6}$

45 답 3

$(\log_2 x)^2-\log_2 x^{2k}+k+2=0$에서

$(\log_2 x)^2-2k\log_2 x+k+2=0$

$\log_2 x=t$라 하면 $t^2-2kt+k+2=0$ ……㉠

주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식 ㉠의 두 근은 $\log_2 \alpha$, $\log_2 \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 \alpha+\log_2 \beta=2k$, $\log_2 \alpha\beta=2k$

$\therefore \alpha\beta=2^{2k}$

이때 $\alpha\beta=64$이므로 $2^{2k}=64=2^6$

$2k=6 \quad \therefore k=3$

45-1 답 5

$(\log_3 x)^2-\log_3 x^k+6=0$에서

$(\log_3 x)^2-k\log_3 x+6=0$

$\log_3 x=t$라 하면 $t^2-kt+6=0$ ……㉠ ……❶

이차방정식 ㉠의 두 근이 $\log_3 \alpha$, $\log_3 \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\log_3 \alpha+\log_3 \beta=k$

$\log_3 \alpha\beta=k \quad \therefore \alpha\beta=3^k$ ……❷

이때 $\alpha\beta=243$이므로 $3^k=243=3^5$

$\therefore k=5$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $\log_3 x$를 t로 치환하고 주어진 방정식을 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ α, β, k의 관계식을 구할 수 있다.	40%
❸ 실수 k의 값을 구할 수 있다.	30%

46 답 ⑤

$x^{\log x}=\frac{1}{4}x^2$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}=\log\frac{1}{4}x^2$, $\log x\times\log x=\log\frac{1}{4}+\log x^2$

$(\log x)^2=-2\log 2+2\log x$

$\therefore (\log x)^2-2\log x+2\log 2=0$

$\log x=t$라 하면 $t^2-2t+2\log 2=0$ ……㉠

이차방정식 ㉠의 두 근이 $\log \alpha$, $\log \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\log \alpha+\log \beta=2$

$\log \alpha\beta=2 \quad \therefore \alpha\beta=10^2=100$

46-1 답 ①

주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha\beta=8$

$x^{\log_2 x}=16x^k$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 16x^k$, $\log_2 x\times\log_2 x=\log_2 16+\log_2 x^k$

$(\log_2 x)^2=4+k\log_2 x$

$\therefore (\log_2 x)^2-k\log_2 x-4=0$

$\log_2 x=t$라 하면 $t^2-kt-4=0$ ……㉠

이차방정식 ㉠의 두 근이 $\log_2 \alpha$, $\log_2 \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\log_2 \alpha+\log_2 \beta=k$

$\log_2 \alpha\beta=k \quad \therefore k=\log_2 8=3$

47 답 8

$x^{\log_4 x}-\frac{64}{x^2}=0$에서 $x^{\log_4 x}=\frac{64}{x^2}$

양변에 밑이 4인 로그를 취하면

$\log_4 x^{\log_4 x}=\log_4\frac{64}{x^2}$, $\log_4 x\times\log_4 x=\log_4 64-\log_4 x^2$

$(\log_4 x)^2=3-2\log_4 x$

$\therefore (\log_4 x)^2+2\log_4 x-3=0$

$\log_4 x=t$라 하면 $t^2+2t-3=0$ ……❶

$(t+3)(t-1)=0 \quad \therefore t=-3$ 또는 $t=1$ ……❷

즉 $\log_4 x=-3$ 또는 $\log_4 x=1$이므로

$x=4^{-3}$ 또는 $x=4 \quad \therefore \alpha=4, \beta=4^{-3}\ (\because \alpha>\beta)$ ……❸

$$\therefore \log_2\frac{\alpha}{\beta}=\log_2 \alpha-\log_2 \beta=\log_2 4-\log_2 4^{-3}$$
$$=\log_2 2^2-\log_2 2^{-6}=2-(-6)=8$$ ……❹

채점 기준	비율
❶ $\log_4 x$를 t로 치환하고 주어진 방정식을 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ t의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ α, β의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ $\log_2\frac{\alpha}{\beta}$의 값을 구할 수 있다.	20%

47-1 답 ⑤

$x^{\log x}=\frac{10^4}{x^3}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}=\log \frac{10^4}{x^3}$, $\log x\times\log x=\log 10^4-\log x^3$

$(\log x)^2=4-3\log x$

$\therefore (\log x)^2+3\log x-4=0$

$\log x=t$라 하면 $t^2+3t-4=0$

$(t+4)(t-1)=0$ $\therefore t=-4$ 또는 $t=1$

즉 $\log x=-4$ 또는 $\log x=1$이므로

$x=10^{-4}=\frac{1}{10000}$ 또는 $x=10$

따라서 모든 실수 x의 값의 곱은

$\frac{1}{10000}\times 10=\frac{1}{1000}$

48 답 $x=\frac{1}{6}$

$(2x)^{\log 2}=(3x)^{\log 3}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log (2x)^{\log 2}=\log (3x)^{\log 3}$

$\log 2\times\log 2x=\log 3\times\log 3x$

$\log 2(\log 2+\log x)=\log 3(\log 3+\log x)$

$(\log 2)^2+\log 2\times\log x=(\log 3)^2+\log 3\times\log x$

$(\log 2-\log 3)\log x=(\log 3)^2-(\log 2)^2$

$(\log 2-\log 3)\log x=(\log 3+\log 2)(\log 3-\log 2)$

$\log x=-(\log 3+\log 2)$, $\log x=-\log 6$

$\log x=\log 6^{-1}$ $\therefore x=6^{-1}=\frac{1}{6}$

48-1 답 $x=\frac{1}{400}$

$(25x)^{\log 5}-(16x)^{\log 4}=0$에서 $(25x)^{\log 5}=(16x)^{\log 4}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log (25x)^{\log 5}=\log (16x)^{\log 4}$

$\log 5\times\log 25x=\log 4\times\log 16x$

$\log 5(\log 25+\log x)=\log 4(\log 16+\log x)$

$\log 5(2\log 5+\log x)=\log 4(2\log 4+\log x)$

$2\times(\log 5)^2+\log 5\times\log x=2\times(\log 4)^2+\log 4\times\log x$

$(\log 5-\log 4)\log x=2\times(\log 4)^2-2\times(\log 5)^2$

$(\log 5-\log 4)\log x=2(\log 4+\log 5)(\log 4-\log 5)$

$\log x=-2(\log 4+\log 5)$, $\log x=-2\log 20$

$\log x=\log 20^{-2}$ $\therefore x=20^{-2}=\frac{1}{400}$

49 답 3

밑의 조건에서 $x>0, x\neq 1, y>0, y\neq 1$ ……㉠

$\begin{cases}\log_x 27-\log_y 9=-4\\ \log_x 3+\log_y 81=1\end{cases}$에서 $\begin{cases}3\log_x 3-2\log_y 3=-4\\ \log_x 3+4\log_y 3=1\end{cases}$

$\log_x 3=X$, $\log_y 3=Y$라 하면

$\begin{cases}3X-2Y=-4\\ X+4Y=1\end{cases}$

연립방정식을 풀면 $X=-1, Y=\frac{1}{2}$

즉 $\log_x 3=-1$, $\log_y 3=\frac{1}{2}$이므로 $x^{-1}=3$, $y^{\frac{1}{2}}=3$

$\therefore x=\frac{1}{3}, y=9$

이 값은 ㉠을 만족시키므로 $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=9$

$\therefore \alpha\beta=\frac{1}{3}\times 9=3$

49-1 답 $x=\frac{1}{2}, y=4$

밑의 조건에서 $x>0, x\neq 1, y>0, y\neq 1$ ……㉠

$\begin{cases}\log_x 2-\log_y 16=-3\\ \log_x 8+\log_y 4=-2\end{cases}$에서 $\begin{cases}\log_x 2-4\log_y 2=-3\\ 3\log_x 2+2\log_y 2=-2\end{cases}$

$\log_x 2=X$, $\log_y 2=Y$라 하면

$\begin{cases}X-4Y=-3\\ 3X+2Y=-2\end{cases}$

연립방정식을 풀면 $X=-1, Y=\frac{1}{2}$

즉 $\log_x 2=-1$, $\log_y 2=\frac{1}{2}$이므로 $x^{-1}=2$, $y^{\frac{1}{2}}=2$

$\therefore x=\frac{1}{2}, y=4$

이 값은 ㉠을 만족시키므로 주어진 연립방정식의 해는

$x=\frac{1}{2}, y=4$

50 답 ③

진수의 조건에서 $x>0, y>0$

$2^x\times 2^y=16$에서 $2^{x+y}=2^4$ $\therefore x+y=4$

$\log_5 x+\log_5 y=0$에서 $\log_5 xy=0$ $\therefore xy=1$

이때 연립방정식의 해가 $x=\alpha, y=\beta$이므로

$\alpha+\beta=4, \alpha\beta=1$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=4^3-3\times 1\times 4=52$

50-1 답 60

진수의 조건에서 $x+y>0, x>0, y>0$

$\therefore x>0, y>0$

$\log_2(x+y)=3$에서 $x+y=2^3=8$

$\log_2 x+\log_2 y=1$에서 $\log_2 xy=1$ $\therefore xy=2$

이때 연립방정식의 해가 $x=\alpha, y=\beta$이므로

$\alpha+\beta=8, \alpha\beta=2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=8^2-2\times 2=60$

51 답 7

진수의 조건에서 $x>0, y>0$ ……㉠

$\log_2 x=X$, $\log_5 y=Y$라 하면

$\begin{cases}X+Y=7\\ XY=10\end{cases}$ ……㉡ ……㉢

㉡에서 $Y=7-X$이므로 ㉢에 대입하면

$X(7-X)=10$, $X^2-7X+10=0$

$(X-2)(X-5)=0$ $\therefore X=2$ 또는 $X=5$

이 값을 ㉡에 대입하면 $Y=5$ 또는 $Y=2$

즉 $\begin{cases}X=2\\ Y=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}X=5\\ Y=2\end{cases}$이므로 $\begin{cases}\log_2 x=2\\ \log_5 y=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\log_2 x=5\\ \log_5 y=2\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}x=4\\ y=5^5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=32\\ y=25\end{cases}$

따라서 ㉠을 만족시키고 $\alpha>\beta$이므로

$\alpha=32, \beta=25$

$\therefore \alpha-\beta=32-25=7$

51-1 답 ②

진수의 조건에서 $xy>0, x>0, y>0$

$\therefore x>0, y>0$ ……㉠

$\begin{cases}\log_2 xy=2\\ \log_2 x\times\log_2 y=-3\end{cases}$ 에서 $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=2\\ \log_2 x\times\log_2 y=-3\end{cases}$

$\log_2 x=X, \log_2 y=Y$라 하면

$\begin{cases}X+Y=2\\ XY=-3\end{cases}$ ……㉡ ……㉢

㉡에서 $Y=2-X$이므로 ㉢에 대입하면

$X(2-X)=-3, X^2-2X-3=0$

$(X+1)(X-3)=0$ $\therefore X=-1$ 또는 $X=3$

이 값을 ㉡에 대입하면 $Y=3$ 또는 $Y=-1$

즉 $\begin{cases}X=-1\\ Y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}X=3\\ Y=-1\end{cases}$ 이므로

$\begin{cases}\log_2 x=-1\\ \log_2 y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\log_2 x=3\\ \log_2 y=-1\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=8\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=8\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$

따라서 ㉠을 만족시키고 $\alpha>1$이므로

$\alpha=8, \beta=\frac{1}{2}$ $\therefore \frac{\alpha}{\beta}=\frac{8}{\frac{1}{2}}=16$

52 답 ③

진수의 조건에서 $x^2-9>0$ ($x<-3$ 또는 $x>3$), $x-1>0$ ($x>1$)

$\therefore x>3$ ……㉠

$\log_2(x^2-9)-\log_2(x-1)<2$에서

$\log_2(x^2-9)<\log_2(x-1)+\log_2 4$

$\therefore \log_2(x^2-9)<\log_2 4(x-1)$

이때 밑 2가 $2>1$이므로 $x^2-9<4(x-1)$

$x^2-4x-5<0, (x+1)(x-5)<0$

$\therefore -1<x<5$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x<5$

52-1 답 18

진수의 조건에서 $x-3>0, x-2>0$

$\therefore x>3$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(x-3)+\log_{\frac{1}{3}}(x-2)>-1+\log_{\frac{1}{3}}4$에서

$\log_{\frac{1}{3}}(x-3)+\log_{\frac{1}{3}}(x-2)>\log_{\frac{1}{3}}3+\log_{\frac{1}{3}}4$

$\therefore \log_{\frac{1}{3}}(x-3)(x-2)>\log_{\frac{1}{3}}12$

이때 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $(x-3)(x-2)<12$

$x^2-5x-6<0, (x+1)(x-6)<0$

$\therefore -1<x<6$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x<6$

따라서 $a=3, b=6$이므로

$ab=3\times6=18$

53 답 7

진수의 조건에서 $x-2>0, 2x-1>0$

$\therefore x>2$ ……㉠ ……❶

$\log_3(x-2)<\log_9(2x-1)$에서

$\log_9(x-2)^2<\log_9(2x-1)$

이때 밑 9가 $9>1$이므로 $(x-2)^2<2x-1$

$x^2-6x+5<0, (x-1)(x-5)<0$

$\therefore 1<x<5$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2<x<5$ ……❷

따라서 정수 x의 값은 3, 4이므로 그 합은

$3+4=7$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 진수의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❷ 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

53-1 답 ②

진수의 조건에서 $x-4>0, x+2>0$

$\therefore x>4$ ……㉠

$2\log_{\frac{1}{2}}(x-4)>\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(x-4)^2>\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

이때 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $(x-4)^2<x+2$

$x^2-9x+14<0, (x-2)(x-7)<0$

$\therefore 2<x<7$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $4<x<7$

따라서 정수 x의 값은 5, 6이므로 그 개수는 2이다.

54 답 1

진수의 조건에서 $2x-1>0, x-\frac{1}{2}>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+1>\log_{\frac{1}{4}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$에서

$\log_{\frac{1}{4}}(2x-1)^2+\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}>\log_{\frac{1}{4}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore \log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}(2x-1)^2>\log_{\frac{1}{4}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

이때 밑 $\frac{1}{4}$이 $0<\frac{1}{4}<1$이므로 $\frac{1}{4}(2x-1)^2<x-\frac{1}{2}$

$4x^2-8x+3<0, (2x-1)(2x-3)<0$

$\therefore \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$

따라서 정수 x의 값은 1이다.

54-1 답 10

진수의 조건에서 $x>0, 3x-5>0$

$\therefore x>\frac{5}{3}$ ……㉠

$\log_2 x-\log_4(3x-5)\le1$에서

$\log_2 x\le1+\log_4(3x-5)$

$\log_4 x^2\le\log_4 4+\log_4(3x-5)$

$\therefore \log_4 x^2\le\log_4 4(3x-5)$

이때 밑 4가 $4>1$이므로 $x^2\le4(3x-5)$

$x^2-12x+20\le0, (x-2)(x-10)\le0$

$\therefore 2\le x\le10$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2\le x\le10$

따라서 정수 x의 최댓값은 10이다.

55 답 ④

진수의 조건에서 $\log_{\frac{1}{3}} x>0$, $x>0$

$\therefore 0<x<1$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{3}} x)\geq 1$에서 $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{3}} x)\geq \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$

밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $\log_{\frac{1}{3}} x\leq \frac{1}{2}$

즉 $\log_{\frac{1}{3}} x\leq \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$에서 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$x\geq\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\therefore x\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{\sqrt{3}}{3}\leq x<1$

55-1 답 $1<x\leq 9$

진수의 조건에서 $\log_3 x>0$, $x>0$

$\therefore x>1$ ……㉠

$\log_2(\log_3 x)\leq 1$에서 $\log_2(\log_3 x)\leq \log_2 2$

밑 2가 $2>1$이므로 $\log_3 x\leq 2$

즉 $\log_3 x\leq \log_3 3^2$에서 밑 3이 $3>1$이므로 $x\leq 9$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x\leq 9$

56 답 ④

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\log_3(\log_3 x)$이므로

$\log_3(\log_3 x)\leq 1$

진수의 조건에서 $\log_3 x>0$, $x>0$

$\therefore x>1$ ……㉠

$\log_3(\log_3 x)\leq 1$에서 $\log_3(\log_3 x)\leq \log_3 3$

밑 3이 $3>1$이므로 $\log_3 x\leq 3$

즉 $\log_3 x\leq \log_3 3^3$에서 밑 3이 $3>1$이므로 $x\leq 27$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x\leq 27$

따라서 자연수 x의 값은 2, 3, 4, …, 27이므로 그 개수는 26이다.

56-1 답 3

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\log_{\frac{1}{2}}(\log_9 x)$이므로

$\log_{\frac{1}{2}}(\log_9 x)\geq 1$

진수의 조건에서 $\log_9 x>0$, $x>0$

$\therefore x>1$ ……㉠ ……❶

$\log_{\frac{1}{2}}(\log_9 x)\geq 1$에서 $\log_{\frac{1}{2}}(\log_9 x)\geq \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$

밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $\log_9 x\leq \frac{1}{2}$

즉 $\log_9 x\leq \log_9 9^{\frac{1}{2}}$에서 밑 9가 $9>1$이므로

$x\leq 9^{\frac{1}{2}}$ $\therefore x\leq 3$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x\leq 3$ ……❷

따라서 자연수 x의 최댓값은 3이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ 진수의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❷ 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ 자연수 x의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

57 답 ③

진수의 조건에서 $\log_3 x>0$, $x>0$

$\therefore x>1$ ……㉠

$\log_4(\log_3 x)+\log_4(\log_7 9)<1$에서

$\log_4(\log_3 x\times\log_7 9)<\log_4 4$

밑 4가 $4>1$이므로 $\log_3 x\times\log_7 9<4$

$\frac{\log_7 x}{\log_7 3}\times 2\log_7 3<4$, $2\log_7 x<4$ $\therefore \log_7 x<2$

밑 7이 $7>1$이므로 $x<49$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x<49$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=49$이므로

$\alpha+\beta=1+49=50$

57-1 답 ②

진수의 조건에서 $\log_5 x>0$, $x>0$

$\therefore x>1$ ……㉠

$\log_2(\log_5 x)+\log_2(\log_3 25)\leq 1$에서

$\log_2(\log_5 x\times\log_3 25)\leq\log_2 2$

밑 2가 $2>1$이므로 $\log_5 x\times\log_3 25\leq 2$

$\frac{\log_3 x}{\log_3 5}\times 2\log_3 5\leq 2$, $2\log_3 x\leq 2$ $\therefore \log_3 x\leq 1$

밑 3이 $3>1$이므로 $x\leq 3$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x\leq 3$

따라서 정수 x의 값은 2, 3이므로 그 개수는 2이다.

58 답 ③

진수의 조건에서 $8x>0$, $\frac{x}{4}>0$

$\therefore x>0$ ……㉠

$(\log_{\frac{1}{2}} 8x)\left(\log_2\frac{x}{4}\right)>0$에서 $-(\log_2 8x)\left(\log_2\frac{x}{4}\right)>0$

$\therefore (\log_2 x+3)(\log_2 x-2)<0$

$\log_2 x=t$라 하면

$(t+3)(t-2)<0$ $\therefore -3<t<2$

즉 $-3<\log_2 x<2$이므로 $\log_2 2^{-3}<\log_2 x<\log_2 2^2$

밑 2가 $2>1$이므로 $\frac{1}{8}<x<4$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{8}<x<4$

따라서 $\alpha=\frac{1}{8}$, $\beta=4$이므로

$\alpha\beta=\frac{1}{8}\times 4=\frac{1}{2}$

58-1 답 8

진수의 조건에서 $x>0$, $4x>0$

$\therefore x>0$ ……㉠

$(\log_2 x)(\log_2 4x)\leq 15$에서 $\log_2 x(\log_2 x+2)\leq 15$

$\log_2 x=t$라 하면 $t(t+2)\leq 15$

$t^2+2t-15\leq 0$, $(t+5)(t-3)\leq 0$

$\therefore -5\leq t\leq 3$

즉 $-5\leq\log_2 x\leq 3$이므로 $\log_2 2^{-5}\leq\log_2 x\leq\log_2 2^3$

밑 2가 $2>1$이므로 $\frac{1}{32}\leq x\leq 8$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{32}\leq x\leq 8$

따라서 자연수 x의 최댓값은 8이다.

59 답 ④

진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$(\log_2 x)^2\geq 4+3\log_2 x$에서 $(\log_2 x)^2-3\log_2 x-4\geq 0$

$\log_2 x=t$라 하면 $t^2-3t-4\geq 0$

$(t+1)(t-4)\geq 0$ $\therefore t\leq -1$ 또는 $t\geq 4$

즉 $\log_2 x\leq -1$ 또는 $\log_2 x\geq 4$이므로

$\log_2 x\leq \log_2 2^{-1}$ 또는 $\log_2 x\geq \log_2 2^4$

밑 2가 $2>1$이므로 $x\leq \frac{1}{2}$ 또는 $x\geq 16$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x\leq \frac{1}{2}$ 또는 $x\geq 16$

따라서 자연수 x의 최솟값은 16이다.

59-1 답 2

진수의 조건에서 $2x>0$, $x>0$

$\therefore x>0$ ……㉠ ……❶

$(\log_{\frac{1}{2}} 2x)^2+3\log_{\frac{1}{2}} x\leq 7$에서 $(\log_{\frac{1}{2}} x-1)^2+3\log_{\frac{1}{2}} x-7\leq 0$

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$라 하면 $(t-1)^2+3t-7\leq 0$

$t^2+t-6\leq 0$, $(t+3)(t-2)\leq 0$

$\therefore -3\leq t\leq 2$

즉 $-3\leq \log_{\frac{1}{2}} x\leq 2$이므로 $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\leq \log_{\frac{1}{2}} x\leq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$

밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $\frac{1}{4}\leq x\leq 8$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{4}\leq x\leq 8$ ……❷

따라서 실수 x의 최댓값은 8, 최솟값은 $\frac{1}{4}$이므로

$a=8$, $b=\frac{1}{4}$ $\therefore ab=8\times\frac{1}{4}=2$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 진수의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❷ 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

60 답 6

$\log_{\frac{1}{5}} x=t$라 하면 $\frac{1}{125}\leq x\leq 25$에서 밑 $\frac{1}{5}$이 $0<\frac{1}{5}<1$이므로

$\log_{\frac{1}{5}} 25\leq \log_{\frac{1}{5}} x\leq \log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{125}$, $-2\leq \log_{\frac{1}{5}} x\leq 3$

$\therefore -2\leq t\leq 3$

이때 주어진 부등식은 $t^2+at+b\leq 0$ ……㉠

해가 $-2\leq t\leq 3$이고 t^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(t+2)(t-3)\leq 0$ $\therefore t^2-t-6\leq 0$

이 부등식과 ㉠이 일치해야 하므로 $a=-1$, $b=-6$

$\therefore ab=-1\times(-6)=6$

Lecture 이차부등식의 작성

(1) 해가 $\alpha\leq x\leq\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-\alpha)(x-\beta)\leq 0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\leq 0$

(2) 해가 $x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$ $(\alpha<\beta)$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-\alpha)(x-\beta)\geq 0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\geq 0$

60-1 답 ③

$(\log_3 x)^2+\log_3 x^a+b<0$에서 $(\log_3 x)^2+a\log_3 x+b<0$

$\log_3 x=t$라 하면 $\frac{1}{3}<x<9$에서 밑 3이 $3>1$이므로

$\log_3\frac{1}{3}<\log_3 x<\log_3 9$, $-1<\log_3 x<2$

$\therefore -1<t<2$

이때 주어진 부등식은 $t^2+at+b<0$ ……㉠

해가 $-1<t<2$이고 t^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(t+1)(t-2)<0$ $\therefore t^2-t-2<0$

이 부등식과 ㉠이 일치해야 하므로 $a=-1$, $b=-2$

$\therefore a+b=-1+(-2)=-3$

61 답 10

진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$8x^{\log_2 x}<x^4$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 8x^{\log_2 x}<\log_2 x^4$, $\log_2 8+\log_2 x\times\log_2 x<4\log_2 x$

$\therefore (\log_2 x)^2-4\log_2 x+3<0$

$\log_2 x=t$라 하면 $t^2-4t+3<0$

$(t-1)(t-3)<0$ $\therefore 1<t<3$

즉 $1<\log_2 x<3$이므로 $\log_2 2<\log_2 x<\log_2 2^3$

밑 2가 $2>1$이므로 $2<x<8$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2<x<8$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=8$이므로

$\alpha+\beta=2+8=10$

61-1 답 ④

진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$x^{\log x}\leq 100x$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}\leq \log 100x$, $(\log x)^2\leq \log 100+\log x$

$\therefore (\log x)^2-\log x-2\leq 0$

$\log x=t$라 하면 $t^2-t-2\leq 0$

$(t+1)(t-2)\leq 0$ $\therefore -1\leq t\leq 2$

즉 $-1\leq \log x\leq 2$이므로 $\log 10^{-1}\leq \log x\leq \log 10^2$

밑 10이 $10>1$이므로 $\frac{1}{10}\leq x\leq 100$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{10}\leq x\leq 100$

따라서 실수 x의 최댓값은 100, 최솟값은 $\frac{1}{10}$이므로

$a=100$, $b=\frac{1}{10}$ $\therefore ab=100\times\frac{1}{10}=10$

62 답 ⑤

진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$x^{\log_{\frac{1}{2}} x}>8\times\left(\frac{1}{x}\right)^4$의 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{2}} x^{\log_{\frac{1}{2}} x}<\log_{\frac{1}{2}}\left\{8\times\left(\frac{1}{x}\right)^4\right\}$, $(\log_{\frac{1}{2}} x)^2<\log_{\frac{1}{2}} 8-4\log_{\frac{1}{2}} x$

$\therefore (\log_{\frac{1}{2}} x)^2+4\log_{\frac{1}{2}} x+3<0$

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$라 하면 $t^2+4t+3<0$

$(t+3)(t+1)<0$ $\therefore -3<t<-1$

즉 $-3<\log_{\frac{1}{2}} x<-1$이므로

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}<\log_{\frac{1}{2}} x<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $2<x<8$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2<x<8$

62-1 답 $\frac{1}{81}<x<\frac{1}{3}$

진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$x^{\log_{\frac{1}{3}}x}>81x^5$의 양변에 밑이 $\frac{1}{3}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{3}}x^{\log_{\frac{1}{3}}x}<\log_{\frac{1}{3}}81x^5$, $(\log_{\frac{1}{3}}x)^2<\log_{\frac{1}{3}}81+5\log_{\frac{1}{3}}x$

$\therefore (\log_{\frac{1}{3}}x)^2-5\log_{\frac{1}{3}}x+4<0$

$\log_{\frac{1}{3}}x=t$라 하면 $t^2-5t+4<0$

$(t-1)(t-4)<0$ $\therefore 1<t<4$

즉 $1<\log_{\frac{1}{3}}x<4$이므로 $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}<\log_{\frac{1}{3}}x<\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^4$

밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $\frac{1}{81}<x<\frac{1}{3}$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{81}<x<\frac{1}{3}$

63 답 2

$4^{x+1}>5^{3-x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$(x+1)\log 4>(3-x)\log 5$

$\therefore (\log 4+\log 5)x>3\log 5-\log 4$

이때

$\log 4=2\log 2=2\times 0.3=0.6$

$\log 5=\log\frac{10}{2}=1-\log 2=1-0.3=0.7$

이므로 $(0.6+0.7)x>3\times 0.7-0.6$

$1.3x>1.5$ $\therefore x>1.153\cdots$

따라서 정수 x의 최솟값은 2이다.

63-1 답 6

$2^{2x-5}\geq 5^{x-3}$의 양변에 상용로그를 취하면

$(2x-5)\log 2\geq(x-3)\log 5$

$\therefore (2\log 2-\log 5)x\geq 5\log 2-3\log 5$ ……❶

$\log 5=\log\frac{10}{2}=1-\log 2=1-0.3=0.7$이므로

$(2\times 0.3-0.7)x\geq 5\times 0.3-3\times 0.7$

$-0.1x\geq -0.6$ $\therefore x\leq 6$ ……❷

따라서 정수 x의 최댓값은 6이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식의 양변에 상용로그를 취하여 정리할 수 있다.	40%
❷ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 x의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

64 답 ①

(i) $\log_9(x+3)^2\geq\log_3 2x$의 진수의 조건에서

$(x+3)^2>0$, $2x>0$ $\therefore x>0$ ……㉠

$\log_9(x+3)^2\geq\log_3 2x$에서 $\log_9(x+3)^2\geq\log_9(2x)^2$

밑 9가 $9>1$이므로 $(x+3)^2\geq(2x)^2$

$3x^2-6x-9\leq 0$, $x^2-2x-3\leq 0$

$(x+1)(x-3)\leq 0$ $\therefore -1\leq x\leq 3$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x\leq 3$

(ii) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\geq -1$의 진수의 조건에서

$x+1>0$ $\therefore x>-1$ ……㉢

$\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\geq -1$에서 $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\geq\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $x+1\leq 2$ $\therefore x\leq 1$ ……㉣

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면 $-1<x\leq 1$

(i), (ii)에서 연립부등식의 해는 $0<x\leq 1$

따라서 자연수 x의 값은 1이다.

64-1 답 ④

(i) $\log_4(x+1)^2\geq\log_2 3x$의 진수의 조건에서

$(x+1)^2>0$, $3x>0$ $\therefore x>0$ ……㉠

$\log_4(x+1)^2\geq\log_2 3x$에서 $\log_4(x+1)^2\geq\log_4(3x)^2$

밑 4가 $4>1$이므로 $(x+1)^2\geq(3x)^2$

$8x^2-2x-1\leq 0$, $(4x+1)(2x-1)\leq 0$

$\therefore -\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{1}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x\leq\frac{1}{2}$

(ii) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)\geq -1$의 진수의 조건에서

$x+2>0$ $\therefore x>-2$ ……㉢

$\log_{\frac{1}{3}}(x+2)\geq -1$에서 $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)\geq\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $x+2\leq 3$ $\therefore x\leq 1$ ……㉣

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면 $-2<x\leq 1$

(i), (ii)에서 연립부등식의 해는 $0<x\leq\frac{1}{2}$이므로

$\alpha=0$, $\beta=\frac{1}{2}$ $\therefore \alpha+\beta=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

65 답 $x>3$

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3}\leq\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-3}$에서 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3}\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{3-2x}$

밑 $\frac{2}{3}$가 $0<\frac{2}{3}<1$이므로 $x-3\geq 3-2x$

$3x\geq 6$ $\therefore x\geq 2$ ……❶

(ii) $\log_3(x^2-2x+6)>2$에서 $\log_3(x^2-2x+6)>\log_3 3^2$

$\therefore \log_3(x^2-2x+6)>\log_3 9$

이때 $x^2-2x+6=(x-1)^2+5>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 진수의 조건을 만족시킨다.

$\log_3(x^2-2x+6)>\log_3 9$에서 밑 3이 $3>1$이므로

$x^2-2x+6>9$, $x^2-2x-3>0$

$(x+1)(x-3)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>3$ ……❷

(i), (ii)에서 연립부등식의 해는 $x>3$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 지수부등식의 해를 구할 수 있다.	40%
❷ 로그부등식의 해를 구할 수 있다.	40%
❸ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	20%

65-1 답 3

(i) $\frac{1}{8}<2\times 4^{x-1}\leq 32$에서 $2^{-3}<2^{2x-1}\leq 2^5$

밑 2가 $2>1$이므로 $-3<2x-1\leq 5$ $\therefore -1<x\leq 3$

(ii) $(\log_3 x)^2-2\log_3 x<8$의 진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$\log_3 x=t$라 하면 $t^2-2t<8$, $t^2-2t-8<0$

$(t+2)(t-4)<0$ $\therefore -2<t<4$

즉 $-2<\log_3 x<4$이므로 $\log_3 3^{-2}<\log_3 x<\log_3 3^4$

밑 3이 $3>1$이므로 $\frac{1}{9}<x<81$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{9}<x<81$

(i), (ii)에서 연립부등식의 해는 $\frac{1}{9}<x\le 3$

따라서 정수 x의 값은 1, 2, 3이므로 그 개수는 3이다.

유형 완성하기 p. 113

66 답 $0<a\le 1$ 또는 $a\ge 10$

진수의 조건에서 $a>0$ ……㉠

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(1-\log a)^2-\{1-(\log a)^2\}\ge 0$

$\log a=t$라 하면 $(1-t)^2-(1-t^2)\ge 0$

$2t^2-2t\ge 0$, $2t(t-1)\ge 0$

$\therefore t\le 0$ 또는 $t\ge 1$

즉 $\log a\le 0$ 또는 $\log a\ge 1$이므로

$\log a\le \log 1$ 또는 $\log a\ge \log 10$

$\therefore a\le 1$ 또는 $a\ge 10$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<a\le 1$ 또는 $a\ge 10$

67 답 2

진수의 조건에서 $k>0$ ……㉠

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(1+\log_{\frac{1}{3}} k)^2-2(1+\log_{\frac{1}{3}} k)<0$

$\log_{\frac{1}{3}} k=t$라 하면 $(1+t)^2-2(1+t)<0$

$t^2-1<0$, $(t+1)(t-1)<0$

$\therefore -1<t<1$

즉 $-1<\log_{\frac{1}{3}} k<1$이므로 $\log_{\frac{1}{3}} 3<\log_{\frac{1}{3}} k<\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$

$\therefore \frac{1}{3}<k<3$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{3}<k<3$

따라서 정수 k의 최댓값은 2이다.

68 답 ⑤

모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$x^2-2(\log_3 3a)x+3(1+\log_3 a)>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2(\log_3 3a)x+3(1+\log_3 a)=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 한다. 즉

$\frac{D}{4}=(\log_3 3a)^2-3(1+\log_3 a)<0$

$(1+\log_3 a)^2-3-3\log_3 a<0$

$\therefore (\log_3 a)^2-\log_3 a-2<0$

진수의 조건에서 $a>0$ ……㉠

$\log_3 a=t$라 하면 $t^2-t-2<0$

$(t+1)(t-2)<0$ $\therefore -1<t<2$

즉 $-1<\log_3 a<2$이므로 $\log_3 3^{-1}<\log_3 a<\log_3 3^2$

$\therefore \frac{1}{3}<a<9$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{3}<a<9$

따라서 정수 a의 값은 1, 2, 3, …, 8이므로 그 개수는 8이다.

Lecture 이차부등식이 항상 성립할 조건

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

(1) 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립한다.

➡ $a>0$, $D<0$

(2) 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$이 항상 성립한다.

➡ $a<0$, $D<0$

69 답 $\frac{7}{3}$ cm

$k=0.69$, $I=\frac{I_0}{5}$이므로 $\log I=\log I_0-\frac{k}{2.3}d$에서

$\log \frac{I_0}{5}=\log I_0-\frac{0.69}{2.3}d$

$\log I_0-\log 5=\log I_0-0.3d$, $0.3d=\log 5$

이때 $\log 5=1-\log 2=1-0.3=0.7$이므로

$d=\frac{\log 5}{0.3}=\frac{0.7}{0.3}=\frac{7}{3}$

따라서 구하는 물질의 두께는 $\frac{7}{3}$ cm이다.

70 답 10장

유리를 1장 설치하면 들어오는 빛의 양의 $\frac{4}{5}$가 유리를 통과하므로

n장 설치하면 빛의 양의 $\left(\frac{4}{5}\right)^n$이 유리를 통과한다.

즉 $\left(\frac{4}{5}\right)^n=\frac{1}{10}$이므로 양변에 상용로그를 취하면

$n\log \frac{4}{5}=\log \frac{1}{10}$

이때

$\log \frac{4}{5}=2\log 2-(1-\log 2)=3\log 2-1$

$=3\times 0.3-1=-0.1$

이므로 $-0.1n=-1$ $\therefore n=\frac{1}{0.1}=10$

따라서 필요한 유리는 10장이다.

71 답 17일

현재의 저수량을 A, 경보가 발령되는 것을 n일 후라 하면

$A(1-0.04)^n\le \frac{1}{2}A$, $0.96^n\le \frac{1}{2}$ ……㉠

㉠의 양변에 상용로그를 취하면

$n\log 0.96\le \log \frac{1}{2}$, $n\log \frac{96}{100}\le \log \frac{1}{2}$

$n(\log 96-\log 100)\le -\log 2$

$n(5\log 2+\log 3-2)\le -\log 2$

$n(5\times 0.3010+0.4771-2)\le -0.3010$

$-0.0179n\le -0.3010$

$\therefore n\ge 16.815\cdots$

따라서 17일 후에 처음으로 경보가 발령된다.

01 답 ②

① $f(1)=\log_a 1=0$

② $f(x+y)=\log_a(x+y)$,
$f(x)+f(y)=\log_a x+\log_a y=\log_a xy$이므로
$f(x+y)\neq f(x)+f(y)$

③ $f(x^2)=\log_a x^2=2\log_a x=2f(x)$

④ $f\left(\frac{1}{x}\right)=\log_a \frac{1}{x}=\log_a x^{-1}=-\log_a x=-f(x)$

⑤ $f\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y=f(x)-f(y)$

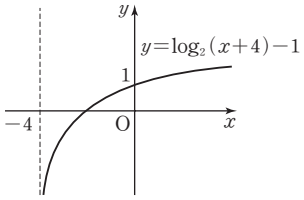
따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

02 답 14

$y=\log_2 x$에서
$x=8$일 때, $y=\log_2 8=3$이므로 A(8, 3)
$x=16$일 때, $y=\log_2 16=4$이므로 D(16, 4)
$y=\log_4 x$에서
$x=8$일 때, $y=\log_4 8=\frac{3}{2}$이므로 $B\left(8, \frac{3}{2}\right)$
$x=16$일 때, $y=\log_4 16=2$이므로 C(16, 2)
이때 사각형 ABCD는 사다리꼴이므로 구하는 넓이는
$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}+2\right)\times 8=14$

03 답 ④

함수 $y=\log_2(x+4)-1$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



① 정의역은 $\{x|x>-4\}$이고,
치역은 실수 전체의 집합이다.

② $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다.

③ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-4$이다.

④ $x=-3$을 $y=\log_2(x+4)-1$에 대입하면
$\log_2(-3+4)-1=\log_2 1-1=-1$
즉 주어진 함수의 그래프는 점 $(-3, -1)$을 지난다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

04 답 ①

밑의 조건에서 $a>0$, $a\neq 1$
함수 $y=\log_a x$의 그래프가 점 (4, 2)를 지나므로
$2=\log_a 4$, $a^2=4$ $\therefore a=2\ (\because a>0)$
함수 $y=\log_a(4x+b)$의 그래프가 점 (4, 2)를 지나므로
$2=\log_a(16+b)$, $16+b=a^2$
$16+b=4$ $\therefore b=-12$
즉 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\log_2(x-m)+n$ ……㉠
이때 ㉠의 그래프가 함수 $y=\log_2(4x-12)$, 즉 $y=\log_2 4(x-3)=\log_2(x-3)+2$의 그래프와 겹쳐지므로
$m=3$, $n=2$
$\therefore a+b+m+n=2+(-12)+3+2=-5$

05 답 15

함수 $y=\log_5(x-3)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=\log_5(x-3)$
함수 $-y=\log_5(x-3)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$-x=\log_5(y-3)$, $5^{-x}=y-3$
$\therefore y=\left(\frac{1}{5}\right)^x+3$
따라서 $a=\frac{1}{5}$, $b=3$이므로
$\frac{b}{a}=\frac{3}{\frac{1}{5}}=15$

06 답 ①

$f(x)=x^2+2x+a$라 하면 $f(x)=(x+1)^2+a-1$
$-3\le x\le 0$에서 $f(-3)=a+3$, $f(-1)=a-1$, $f(0)=a$
$\therefore a-1\le f(x)\le a+3$
밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $y=\log_{\frac{1}{2}} f(x)$는 $f(x)=a+3$일 때 최소이고, 최솟값은 -3이다.
즉 $\log_{\frac{1}{2}}(a+3)=-3$이므로 $a+3=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$
$\therefore a=5$
따라서 $y=\log_{\frac{1}{2}} f(x)$는 $f(x)=a-1=5-1=4$일 때 최대이고, 최댓값은 $\log_{\frac{1}{2}} 4=-2$

07 답 ②

$y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^2-1=(\log_2 x)^2-2\log_2 x-1$
$\log_2 x=t$라 하면
$y=t^2-2t-1=(t-1)^2-2$
따라서 $t=1$, 즉 $x=2$일 때 최솟값 -2를 가지므로
$a=2$, $b=-2$
$\therefore a+b=2+(-2)=0$

08 답 ④

$y=x^{4-\log x}$의 양변에 상용로그를 취하면
$\log y=\log x^{4-\log x}=(4-\log x)\log x$
$=-(\log x)^2+4\log x$
$\log x=t$라 하면
$\log y=-t^2+4t=-(t-2)^2+4$이므로 $\log y$는
$t=2$, 즉 $x=100$일 때 최대이고, 최댓값은 4
$\log y=4$에서 $y=10^4=10000$
따라서 $a=100$, $M=10000$이므로
$\frac{M}{a}=\frac{10000}{100}=100$

09 답 ④

$y=\log_4 x+\log_{x^2} 16+k=\log_4 x+\log_{x^2} 4^2+k$
$=\log_4 x+\log_x 4+k=\log_4 x+\frac{1}{\log_4 x}+k$

이때 $x>1$에서 $\log_4 x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\log_4 x+\frac{1}{\log_4 x}+k\geq 2\sqrt{\log_4 x\times\frac{1}{\log_4 x}}+k$$
$$=2+k$$

이때 등호는 $\log_4 x=1$일 때 성립하므로

$x=4$ $\therefore a=4$

즉 주어진 함수는 $x=4$일 때 최솟값 $k+2$를 가지므로

$k+2=10$ $\therefore k=8$

$\therefore k+a=8+4=12$

10 답 ①

진수의 조건에서 $x+3>0$, $3x+1>0$

$\therefore x>-\frac{1}{3}$ ……㉠

$\log_4(x+3)-\log_2(3x+1)=-1$에서

$\log_4(x+3)+\log_4 4=\log_4(3x+1)^2$

$\therefore \log_4 4(x+3)=\log_4(3x+1)^2$

즉 $4(x+3)=(3x+1)^2$이므로 $9x^2+2x-11=0$

$(9x+11)(x-1)=0$ $\therefore x=-\frac{11}{9}$ 또는 $x=1$

이때 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=1$

11 답 ①

$(\log_3 9x)(\log_3 3x)=6$에서

$(\log_3 9+\log_3 x)(\log_3 3+\log_3 x)=6$

$(2+\log_3 x)(1+\log_3 x)=6$

$\log_3 x=t$라 하면 $(2+t)(1+t)=6$

$t^2+3t-4=0$, $(t+4)(t-1)=0$

$\therefore t=-4$ 또는 $t=1$

즉 $\log_3 x=-4$ 또는 $\log_3 x=1$이므로

$x=3^{-4}=\frac{1}{81}$ 또는 $x=3$

따라서 모든 실수 x의 값의 곱은

$\frac{1}{81}\times 3=\frac{1}{27}$

12 답 $\frac{1}{18}$

$(2\log 3x)(\log 6x)=1$에서

$(2\log 3+2\log x)(\log 6+\log x)=1$

$\log x=t$라 하면 $(2\log 3+2t)(\log 6+t)=1$

$2t^2+(2\log 3+2\log 6)t+2\log 3\times\log 6-1=0$

$\therefore 2t^2+(2\log 18)t+2\log 3\times\log 6-1=0$ ……㉠

이차방정식 ㉠의 두 근이 $\log\alpha$, $\log\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\log\alpha+\log\beta=-\log 18$

$\log\alpha\beta=\log\frac{1}{18}$ $\therefore \alpha\beta=\frac{1}{18}$

13 답 ④

$x^{2\log_3 x}-9x^3=0$에서 $x^{2\log_3 x}=9x^3$

양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{2\log_3 x}=\log_3 9x^3$, $2(\log_3 x)^2=\log_3 9+\log_3 x^3$

$2(\log_3 x)^2=2+3\log_3 x$

$\therefore 2(\log_3 x)^2-3\log_3 x-2=0$

$\log_3 x=t$라 하면 $2t^2-3t-2=0$

$(2t+1)(t-2)=0$ $\therefore t=-\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

즉 $\log_3 x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\log_3 x=2$이므로

$x=3^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=3^2=9$

$\therefore \alpha\beta=3\sqrt{3}$

참고 13에서 α, β에 대한 조건이 없으므로

$\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\beta=9$ 또는 $\alpha=9$, $\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \alpha\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 9=3\sqrt{3}$

14 답 ④

$xy=16$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 xy=\log_2 16$ $\therefore \log_2 x+\log_2 y=4$

$y^{\log_2 x}=8$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 y^{\log_2 x}=\log_2 8$ $\therefore \log_2 x\times\log_2 y=3$

즉 주어진 연립방정식은 $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=4\\ \log_2 x\times\log_2 y=3\end{cases}$이므로

$\log_2 x=X$, $\log_2 y=Y$라 하면

$\begin{cases}X+Y=4 & \cdots\cdots㉠\\ XY=3 & \cdots\cdots㉡\end{cases}$

㉠에서 $Y=4-X$이므로 ㉡에 대입하면

$X(4-X)=3$, $X^2-4X+3=0$

$(X-1)(X-3)=0$ $\therefore X=1$ 또는 $X=3$

이 값을 ㉠에 대입하면 $Y=3$ 또는 $Y=1$

따라서 $\begin{cases}X=1\\ Y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}X=3\\ Y=1\end{cases}$이므로

$\begin{cases}\log_2 x=1\\ \log_2 y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\log_2 x=3\\ \log_2 y=1\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}x=2\\ y=8\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=8\\ y=2\end{cases}$

$\therefore x+y=10$

15 답 ④

진수의 조건에서 $x^2+x-2>0$, $-2x+2>0$

$x^2+x-2>0$에서 $(x+2)(x-1)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>1$

$-2x+2>0$에서 $x<1$

$\therefore x<-2$ ……㉠

$\log_2(x^2+x-2)<\log_2(-2x+2)$에서 밑 2가 $2>1$이므로

$x^2+x-2<-2x+2$, $x^2+3x-4<0$

$(x+4)(x-1)<0$ $\therefore -4<x<1$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-4<x<-2$

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=-2$이므로

$\alpha\beta=-4\times(-2)=8$

16 답 ①

진수의 조건에서 $\log_2(\log_3 x)>0$ ($\log_3 x>1$이므로 $x>3$), $\log_3 x>0$ ($x>1$), $x>0$

$\therefore x>3$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{3}}\{\log_2(\log_3 x)\}>0$에서 $\log_{\frac{1}{3}}\{\log_2(\log_3 x)\}>\log_{\frac{1}{3}}1$

밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $\log_2(\log_3 x)<1$

$\log_2(\log_3 x)<\log_2 2$에서 밑 2가 $2>1$이므로 $\log_3 x<2$

$\log_3 x<\log_3 3^2$에서 밑 3이 $3>1$이므로 $x<9$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x<9$

따라서 정수 x의 값은 4, 5, 6, 7, 8이므로 그 합은

$4+5+6+7+8=30$

17 답 ③

진수의 조건에서 $x>0$, $x^2>0$

$\therefore x>0$ ……㉠

$(\log x)^2-\log x^2<0$에서 $(\log x)^2-2\log x<0$

$\log x=t$라 하면 $t^2-2t<0$

$t(t-2)<0$ $\therefore 0<t<2$

즉 $0<\log x<2$이므로 $\log 1<\log x<\log 10^2$

밑 10이 $10>1$이므로 $1<x<100$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x<100$

따라서 정수 x의 값은 2, 3, 4, …, 99이므로 그 개수는 98이다.

18 답 80

(i) $\log_3|x-3|<4$의 진수의 조건에서

$|x-3|>0$ $\therefore x\neq 3$ ……㉠

$\log_3|x-3|<4$에서 $\log_3|x-3|<\log_3 3^4$

밑 3이 $3>1$이므로 $|x-3|<81$

$-81<x-3<81$ $\therefore -78<x<84$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-78<x<3$ 또는 $3<x<84$

(ii) $\log_2 x+\log_2(x-2)\geq 3$의 진수의 조건에서

$x>0$, $x-2>0$ $\therefore x>2$ ……㉢

$\log_2 x+\log_2(x-2)\geq 3$에서 $\log_2 x(x-2)\geq\log_2 2^3$

밑 2가 $2>1$이므로 $x(x-2)\geq 8$

$x^2-2x-8\geq 0$, $(x+2)(x-4)\geq 0$

$\therefore x\leq -2$ 또는 $x\geq 4$ ……㉣

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면 $x\geq 4$

(i), (ii)에서 연립부등식의 해는

$4\leq x<84$

따라서 정수 x의 값은 4, 5, 6, …, 83이므로 그 개수는 80이다.

19 답 ①

$x^{\log_2 x}\geq ax^2$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}\geq\log_2 ax^2$

$(\log_2 x)^2\geq\log_2 a+2\log_2 x$

$\therefore (\log_2 x)^2-2\log_2 x-\log_2 a\geq 0$

$\log_2 x=t$라 하면 $t^2-2t-\log_2 a\geq 0$ ……㉠

모든 양수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 모든 실수 t에 대하여 부등식 ㉠이 성립해야 한다.

즉 이차방정식 $t^2-2t-\log_2 a=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq 0$이어야 하므로 $\frac{D}{4}=1+\log_2 a\leq 0$

$\log_2 a\leq -1$, $\log_2 a\leq\log_2 2^{-1}$

$\therefore 0<a\leq\frac{1}{2}$ ($\because a>0$)

20 답 4

이차방정식 $x^2-(1-\log_2 a)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(1-\log_2 a)^2-4<0$

$\therefore (\log_2 a)^2-2\log_2 a-3<0$

$\log_2 a=t$라 하면 $t^2-2t-3<0$

$(t+1)(t-3)<0$ $\therefore -1<t<3$

즉 $-1<\log_2 a<3$이므로 $\log_2 2^{-1}<\log_2 a<\log_2 2^3$

밑 2가 $2>1$이므로 $\frac{1}{2}<a<8$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=8$이므로

$\alpha\beta=\frac{1}{2}\times 8=4$

Lecture 이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

(1) 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 갖는다. ➡ $D>0$

(2) 이차방정식이 중근을 갖는다. ➡ $D=0$

(3) 이차방정식이 허근을 갖는다. ➡ $D<0$

21 답 ③

10년 후에 처음 질량의 $\frac{1}{2}$로 감소하였으므로

$2^{10k}A=\frac{1}{2}A$에서 $2^{10k}=2^{-1}$

$10k=-1$ $\therefore k=-\frac{1}{10}$

n년 후에 처음 질량의 $\frac{1}{5}$ 이하로 감소한다고 하면

$2^{-\frac{1}{10}n}A\leq\frac{1}{5}A$ $\therefore 2^{-\frac{1}{10}n}\leq\frac{1}{5}$

양변에 상용로그를 취하면 $\log 2^{-\frac{1}{10}n}\leq\log\frac{1}{5}$

$-\frac{1}{10}n\log 2\leq -\log 5$, $\frac{1}{10}n\log 2\geq 1-\log 2$

$\frac{1}{10}n\times 0.3010\geq 1-0.3010$, $0.0301n\geq 0.699$

$\therefore n\geq 23.222\cdots$

따라서 최소 24년이 걸린다.

서술형 1 답 6

A(1, 0)이므로 선분 AB를 이등분하는 점 C의 좌표는 (3, 0)

$x=3$을 $y=k\log_3 x$에 대입하면 $y=k$

$\therefore$ D(3, k) ……❶

즉 $\overline{BC}=2$, $\overline{CD}=k$이므로 직사각형 BEDC의 넓이는

$\overline{BC}\times\overline{CD}=2k$ ……❷

이때 직사각형 BEDC의 넓이가 12이므로

$2k=12$ $\therefore k=6$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 두 점 C, D의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ 사각형 BEDC의 넓이를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 2 답 $\log_{\frac{1}{3}}12$

$f(x)=x^2-10x+28$이라 하면 $f(x)=(x-5)^2+3$

$2\leq x\leq 7$에서 $f(2)=12$, $f(5)=3$, $f(7)=7$

$\therefore 3 \le f(x) \le 12$ ····· ❶

밑 a가 $0<a<1$이므로 $y=\log_a f(x)$는 $f(x)=3$일 때 최대이고, 최댓값은 -1이다.

즉 $\log_a 3=-1$이므로 $a^{-1}=3$

$\frac{1}{a}=3 \quad \therefore a=\frac{1}{3}$ ····· ❷

따라서 $y=\log_{\frac{1}{3}} f(x)$는 $f(x)=12$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{\frac{1}{3}} 12$ ····· ❸

채점 기준	비율
❶ $f(x)=x^2-10x+28$이라 하고 $f(x)$의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 주어진 함수의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 20

$\log_{\frac{1}{2}} f(x)>\log_{\frac{1}{2}} g(x)$의 진수의 조건에서 $f(x)>0, g(x)>0$

$f(x)>0$에서 $x<2$ 또는 $x>4$

$g(x)>0$에서 $x>2$

$\therefore x>4$ ····· ㉠ ····· ❶

$\log_{\frac{1}{2}} f(x)>\log_{\frac{1}{2}} g(x)$에서 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$f(x)<g(x)$ ····· ㉡

부등식 ㉡의 해는 직선 $y=g(x)$가 이차함수 $y=f(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로 부등식 ㉡의 해는

$2<x<5$ ····· ㉢

㉠, ㉢의 공통 범위를 구하면

$4<x<5$ ····· ❷

따라서 $\alpha=4, \beta=5$이므로

$\alpha\beta=4\times5=20$ ····· ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식의 진수의 조건을 구할 수 있다.	30%
❷ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	60%
❸ $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	10%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 118~119

01 답 65

점 B는 선분 OA를 1 : 3으로 내분하는 점이므로 점 B의 좌표는

$\left(\frac{1\times\sqrt{23}+3\times0}{1+3}, \frac{1\times\log_2 k+3\times0}{1+3}\right)$

$\therefore \left(\frac{\sqrt{23}}{4}, \frac{\log_2 k}{4}\right)$

이때 $\overline{OB}=\sqrt{2}$에서 $\overline{OB}^2=2$이므로

$\overline{OB}^2=\left(\frac{\sqrt{23}}{4}\right)^2+\left(\frac{\log_2 k}{4}\right)^2=\frac{23+(\log_2 k)^2}{16}=2$

$23+(\log_2 k)^2=32, (\log_2 k)^2=9$

$\log_2 k=3$ 또는 $\log_2 k=-3$

$\therefore k=2^3=8$ 또는 $k=2^{-3}=\frac{1}{8}$

따라서 $S=8+\frac{1}{8}=\frac{65}{8}$이므로

$8S=8\times\frac{65}{8}=65$

Lecture 선분의 내분점

두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n\ (m>0, n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{m\times x_2+n\times x_1}{m+n}, \frac{m\times y_2+n\times y_1}{m+n}\right)$

02 답 ②

$\log_2(x+4)=0$에서 $x+4=1$이므로

$x=-3 \quad \therefore A(-3, 0)$

$\log_2 x+1=0$에서 $\log_2 x=-1$이므로

$x=2^{-1}=\frac{1}{2} \quad \therefore B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$\log_2(x+4)=\log_2 x+1$에서

$\log_2(x+4)=\log_2 x+\log_2 2$

$\log_2(x+4)=\log_2 2x, x+4=2x$

$\therefore x=4$, 즉 $C(4, 3)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1}{2}-(-3)\right\}\times3=\frac{21}{4}$

03 답 9

㈏에서 $\frac{\log_n(m+1)-\log_n m}{m+1-m}<\frac{1}{3}$이므로

$\log_n\frac{m+1}{m}<\frac{1}{3}, \log_n\frac{m+1}{m}<\log_n n^{\frac{1}{3}}$

이때 $n>2$이므로 $\frac{m+1}{m}<n^{\frac{1}{3}}$

$\therefore (m+1)^3<n\times m^3$

(i) $n=3$일 때, $(m+1)^3<3m^3$

$m=2$이면 $(2+1)^3>3\times2^3$이므로 성립하지 않는다.

$m=3$이면 $(3+1)^3<3\times3^3$이므로 $f(3)=3$

(ii) $n=4$일 때, $(m+1)^3<4m^3$

$m=2$이면 $(2+1)^3<4\times2^3$이므로 $f(4)=2$

(iii) $n=5$일 때, $(m+1)^3<5m^3$

$m=2$이면 $(2+1)^3<5\times2^3$이므로 $f(5)=2$

(iv) $n=6$일 때, $(m+1)^3<6m^3$

$m=2$이면 $(2+1)^3<6\times2^3$이므로 $f(6)=2$

(i)~(iv)에서

$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=3+2+2+2=9$

다른 풀이

㈏에서 $n>2$이므로 $\frac{m+1}{m}<n^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \left(\frac{m+1}{m}\right)^3<n$

(i) $m=2$일 때

$\left(\frac{2+1}{2}\right)^3=\frac{27}{8}<n$이므로 $n>3.375$

$\therefore n=4, 5, 6, \cdots$

$\therefore f(4)=f(5)=f(6)=2$

(ii) $m=3$일 때

$\left(\frac{3+1}{3}\right)^3=\frac{64}{27}<n$이므로 $n>2.370\cdots$

$\therefore n=3, 4, 5, \cdots$

$\therefore f(3)=3$

(i), (ii)에서

$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=3+2+2+2=9$

04 답 ③

로켓의 질량과 속력을 표로 나타내면 다음과 같다.

로켓의 질량(ton)	200	160	a
로켓의 속력(km/s)	2	2.5	3

$2.5=k\alpha \log \frac{200}{160}+2$에서 $0.5=k\alpha \log \frac{5}{4}$ ……㉠

$3=k\alpha \log \frac{200}{a}+2$에서 $1=k\alpha \log \frac{200}{a}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $2k\alpha \log \frac{5}{4}=k\alpha \log \frac{200}{a}$

$2 \log \frac{5}{4}=\log \frac{200}{a}$, $\log \left(\frac{5}{4}\right)^2=\log \frac{200}{a}$

$\frac{200}{a}=\left(\frac{5}{4}\right)^2$, $\frac{200}{a}=\frac{25}{16}$

$25a=3200$ $\therefore a=128$

05 답 6

$\log_2 x=0$에서 $x=1$이므로 $A(1, 0)$

$x-p=0$에서 $x=p$이므로 $B(p, 0)$

점 D의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면 $C(a, a-p)$

이때 점 C는 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이므로

$a-p=\log_2 a$ ……㉠

$\triangle BDC=\frac{1}{2}(a-p)^2=\frac{9}{2}$이므로 $(a-p)^2=9$

$\therefore a-p=3$ ($\because a>p$) ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $3=\log_2 a$ $\therefore a=8$

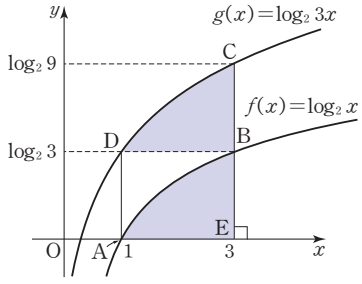
$a=8$을 ㉡에 대입하면 $8-p=3$ $\therefore p=5$

즉 $A(1, 0)$, $B(5, 0)$, $C(8, 3)$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times(5-1)\times 3=6$

06 답 ②

$g(x)=\log_2 3x=\log_2 x+\log_2 3$이므로 함수 $g(x)=\log_2 3x$의 그래프는 함수 $f(x)=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\log_2 3$만큼 평행이동한 것과 같다.



점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 E라 하면 점 E의 좌표는 $E(3, 0)$

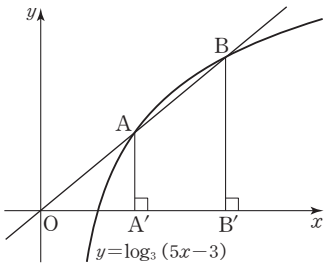
이때 함수 $y=g(x)$의 그래프와 선분 DB, 선분 BC로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 선분 AE, 선분 EB로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 선분 AD, 선분 BC로 둘러싸인 부분의 넓이는 사각형 AEBD의 넓이와 같다.

$\overline{AD}=\log_2 3$, $\overline{AE}=2$이므로 구하는 넓이는

$2\times \log_2 3=2 \log_2 3$

07 답 11

다음 그림과 같이 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하자.



$\triangle AOA' \sim \triangle BOB'$이므로

$\overline{OA'}:\overline{OB'}=\overline{AA'}:\overline{BB'}=\overline{OA}:\overline{OB}=1:2$

점 A의 좌표를 $(a, \log_3(5a-3))$ $\left(a>\frac{3}{5}\right)$이라 하면

점 B의 좌표는 $(2a, \log_3(10a-3))$

이때 $\overline{AA'}:\overline{BB'}=1:2$이므로 $2\overline{AA'}=\overline{BB'}$

$2 \log_3(5a-3)=\log_3(10a-3)$

$\log_3(5a-3)^2=\log_3(10a-3)$

$(5a-3)^2=10a-3$, $25a^2-40a+12=0$

$(5a-2)(5a-6)=0$ $\therefore a=\frac{2}{5}$ 또는 $a=\frac{6}{5}$

그런데 $a>\frac{3}{5}$이므로 $a=\frac{6}{5}$ $\therefore A\left(\frac{6}{5}, 1\right)$

이때 직선 AB의 기울기는 직선 OA의 기울기와 같으므로

$\frac{1-0}{\frac{6}{5}-0}=\frac{5}{6}$

따라서 $p=6$, $q=5$이므로

$p+q=6+5=11$

참고 △AOA′과 △BOB′에서
∠AOA′=∠BOB′, ∠AA′O=∠BB′O=90°이므로
△AOA′∽△BOB′(AA 닮음)

08 답 ①

㈎에서 $|\log_3 a-\log_3 b|\le 1$이므로 $-1\le \log_3 \frac{a}{b}\le 1$

$\log_3 3^{-1}\le \log_3 \frac{a}{b}\le \log_3 3$ $\therefore \frac{1}{3}\le \frac{a}{b}\le 3$

이때 $b>0$이므로 $\frac{1}{3}b\le a\le 3b$ ……㉠

㈏에서 $f(a+b)=\log_3(a+b)=1$이므로

$a+b=3$ $\therefore a=3-b$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{3}b\le 3-b\le 3b$

이 부등식을 풀면 $\frac{3}{4}\le b\le \frac{9}{4}$

$ab=(3-b)b=-\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$ $\left(\frac{3}{4}\le b\le \frac{9}{4}\right)$이므로 ab는

$b=\frac{3}{4}$ 또는 $b=\frac{9}{4}$일 때 최소이고, 최솟값 m은 $m=\frac{27}{16}$

따라서 $f(m)=f\left(\frac{27}{16}\right)=\log_3 \frac{27}{16}=3-\log_3 16$이므로

$k=16$

참고 $ab=-\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\left(\frac{3}{4}\le b\le\frac{9}{4}\right)$에서

$b=\frac{3}{2}$과 $b=\frac{3}{4}$, $b=\frac{9}{4}$와의 차가 $\frac{3}{4}$으로 같으므로

ab는 $b=\frac{3}{4}$ 또는 $b=\frac{9}{4}$일 때 최솟값을 갖는다.

09 답 ⑤

ㄱ. $f(1)=2^0+a-1=a$, $h(1)=a+\log_2 1=a$이므로

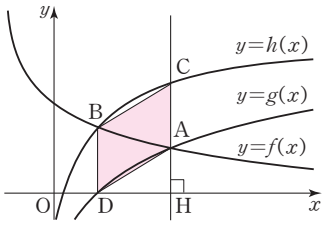
$f(1)=h(1)=a$

즉 점 B의 좌표는 $(1, a)$이다.

ㄴ. 점 A는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점이므로 점 A의 x좌표가 4이면

$\log_2 4=2^{1-4}+a-1$, $2=\frac{1}{8}+a-1$

$\therefore a=\frac{23}{8}$



이때 $\overline{BD}\,/\!/\,\overline{CA}$이고, $\overline{BD}=\overline{CA}=a$이므로 사각형 ACBD는 평행사변형이다.

즉 사각형 ACBD의 넓이는

$(4-1)\times\frac{23}{8}=\frac{69}{8}$

ㄷ. $\overline{CA}:\overline{AH}=3:2$에서 $2\overline{CA}=3\overline{AH}$

점 A의 x좌표를 k라 하면 $\overline{CA}=a$, $\overline{AH}=\log_2 k$이므로

$2a=3\log_2 k$ ……㉠

또 점 A는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점이므로

$\log_2 k=2^{1-k}+a-1$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $2a=3(2^{1-k}+a-1)$

$2a=3\times2^{1-k}+3a-3$, $3\times2^{1-k}=3-a$

$\therefore 2^{1-k}=1-\frac{a}{3}$

이때 $a>0$이므로 ㉠에서 $2a=3\log_2 k>0$

$\log_2 k>0$ $\therefore k>1$

$k>1$에서 $-k<-1$이므로 $1-k<0$

$2^{1-k}<2^0$ $\therefore 2^{1-k}<1$

그런데 $2^{1-k}>0$이므로 $0<2^{1-k}<1$

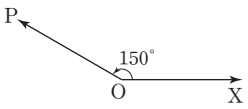
즉 $0<1-\frac{a}{3}<1$이므로 $-1<-\frac{a}{3}<0$

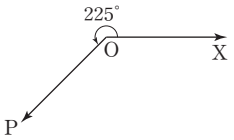
$\therefore 0<a<3$

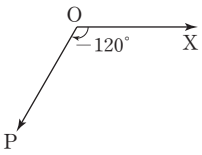
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

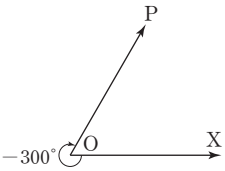
05 삼각함수

개념 완성하기 p. 123~124

01 답


02 답


03 답


04 답


05 답 $360^\circ\times n+120^\circ$ (n은 정수)

06 답 $360^\circ\times n+290^\circ$ (n은 정수)

07 답 $360^\circ\times n+40^\circ$ (n은 정수)

08 답 $360^\circ\times n+80^\circ$ (n은 정수)

09 답 $360^\circ\times n+160^\circ$ (n은 정수)

10 답 $360^\circ\times n+220^\circ$ (n은 정수)

11 답 제2사분면

$500^\circ=360^\circ\times1+140^\circ$이므로 500°는 제2사분면의 각이다.

12 답 제1사분면

$790^\circ=360^\circ\times2+70^\circ$이므로 790°는 제1사분면의 각이다.

13 답 제3사분면

$-160^\circ=360^\circ\times(-1)+200^\circ$이므로 -160°는 제3사분면의 각이다.

14 답 제4사분면

$-780^\circ=360^\circ\times(-3)+300^\circ$이므로 -780°는 제4사분면의 각이다.

15 답 $\frac{5}{4}\pi$

$225^\circ=225\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{4}\pi$

16 답 $-\frac{7}{3}\pi$

$-420^\circ=-420\times\frac{\pi}{180}=-\frac{7}{3}\pi$

17 답 $\frac{17}{4}\pi$

$765^\circ=765\times\frac{\pi}{180}=\frac{17}{4}\pi$

18 답 150°

$\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{6}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=150^\circ$

19 답 -120°

$-\frac{2}{3}\pi=-\frac{2}{3}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=-120^\circ$

20 답 690°

$\frac{23}{6}\pi=\frac{23}{6}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=690^\circ$

21 답 $l=\pi$, $S=\frac{3}{2}\pi$

$l=3\times\frac{\pi}{3}=\pi$, $S=\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi$

22 답 $l=\frac{15}{2}\pi$, $S=\frac{75}{2}\pi$

$l=10\times\frac{3}{4}\pi=\frac{15}{2}\pi$, $S=\frac{1}{2}\times10^2\times\frac{3}{4}\pi=\frac{75}{2}\pi$

23 답 $r=24$, $S=72\pi$

$6\pi=r\times\frac{\pi}{4}$에서 $r=24$

$S=\frac{1}{2}\times24\times6\pi=72\pi$

24 답 $\theta=\frac{\pi}{4}$, $l=\pi$

$2\pi=\frac{1}{2}\times4^2\times\theta$에서 $\theta=\frac{\pi}{4}$

$l=4\times\frac{\pi}{4}=\pi$

25 답 $\sin\theta=\frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{17}}{17}$, $\tan\theta=4$

$\overline{OP}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$이므로

$\sin\theta=\frac{4}{\sqrt{17}}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$, $\tan\theta=4$

26 답 $\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

$\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$이므로

$\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

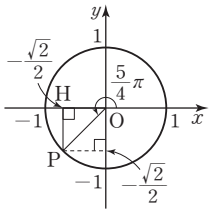
27 답 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$, $\tan\theta=\frac{3}{4}$

$\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$이므로

$\sin\theta=-\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$, $\tan\theta=\frac{3}{4}$

28 답 $\sin\frac{5}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{5}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\frac{5}{4}\pi=1$

오른쪽 그림과 같이 각 $\frac{5}{4}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

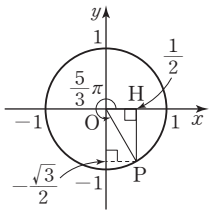


$\overline{OP}=1$이고, $\angle POH=\frac{\pi}{4}$이므로 점 P의 좌표는 $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore \sin\frac{5}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{5}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\frac{5}{4}\pi=1$

29 답 $\sin\frac{5}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{5}{3}\pi=\frac{1}{2}$, $\tan\frac{5}{3}\pi=-\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 각 $\frac{5}{3}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{OP}=1$이고, $\angle POH=\frac{\pi}{3}$이므로 점 P의 좌표는 $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore \sin\frac{5}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{5}{3}\pi=\frac{1}{2}$, $\tan\frac{5}{3}\pi=-\sqrt{3}$

30 답 $\sin 300^\circ<0$, $\cos 300^\circ>0$, $\tan 300^\circ<0$

300°는 제4사분면의 각이므로

$\sin 300^\circ<0$, $\cos 300^\circ>0$, $\tan 300^\circ<0$

31 답 $\sin 460^\circ>0$, $\cos 460^\circ<0$, $\tan 460^\circ<0$

$460^\circ=360^\circ\times1+100^\circ$이므로 460°는 제2사분면의 각이다.

$\therefore \sin 460^\circ>0$, $\cos 460^\circ<0$, $\tan 460^\circ<0$

32 답 $\sin(-320^\circ)>0$, $\cos(-320^\circ)>0$, $\tan(-320^\circ)>0$

$-320^\circ=360^\circ\times(-1)+40^\circ$이므로 -320°는 제1사분면의 각이다.

$\therefore \sin(-320^\circ)>0$, $\cos(-320^\circ)>0$, $\tan(-320^\circ)>0$

33 답 $\sin\frac{13}{3}\pi>0$, $\cos\frac{13}{3}\pi>0$, $\tan\frac{13}{3}\pi>0$

$\frac{13}{3}\pi=2\pi\times2+\frac{\pi}{3}$이므로 $\frac{13}{3}\pi$는 제1사분면의 각이다.

$\therefore \sin\frac{13}{3}\pi>0$, $\cos\frac{13}{3}\pi>0$, $\tan\frac{13}{3}\pi>0$

34 답 $\sin\frac{19}{6}\pi<0$, $\cos\frac{19}{6}\pi<0$, $\tan\frac{19}{6}\pi>0$

$\frac{19}{6}\pi=2\pi\times1+\frac{7}{6}\pi$이므로 $\frac{19}{6}\pi$는 제3사분면의 각이다.

$\therefore \sin\frac{19}{6}\pi<0$, $\cos\frac{19}{6}\pi<0$, $\tan\frac{19}{6}\pi>0$

35 답 $\sin\left(-\frac{11}{5}\pi\right)<0$, $\cos\left(-\frac{11}{5}\pi\right)>0$, $\tan\left(-\frac{11}{5}\pi\right)<0$

$-\frac{11}{5}\pi=2\pi\times(-2)+\frac{9}{5}\pi$이므로 $-\frac{11}{5}\pi$는 제4사분면의 각이다.

$\therefore \sin\left(-\frac{11}{5}\pi\right)<0$, $\cos\left(-\frac{11}{5}\pi\right)>0$, $\tan\left(-\frac{11}{5}\pi\right)<0$

36 답 제3사분면

$\sin\theta<0$이면 제3사분면 또는 제4사분면의 각이고,

$\cos\theta<0$이면 제2사분면 또는 제3사분면의 각이므로 동시에 만족시키는 각 θ는 제3사분면의 각이다.

37 답 제2사분면

$\sin\theta>0$이면 제1사분면 또는 제2사분면의 각이고,

$\tan\theta<0$이면 제2사분면 또는 제4사분면의 각이므로 동시에 만족시키는 각 θ는 제2사분면의 각이다.

38 답 제4사분면

$\cos\theta>0$이면 제1사분면 또는 제4사분면의 각이고,

$\tan\theta<0$이면 제2사분면 또는 제4사분면의 각이므로 동시에 만족시키는 각 θ는 제4사분면의 각이다.

39 답 제1사분면 또는 제3사분면

$\sin\theta\cos\theta>0$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이므로

각 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

40 답 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

θ가 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

$\therefore \cos\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$

41 답 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=-1$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

θ가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$

42 답 $\sin\theta=\frac{12}{13}$, $\cos\theta=-\frac{5}{13}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{12}{5}$에서 $\cos\theta=-\frac{5}{12}\sin\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta+\left(-\frac{5}{12}\sin\theta\right)^2=1$, $\frac{169}{144}\sin^2\theta=1$

$\therefore \sin^2\theta=\frac{144}{169}$

θ가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$

$\therefore \sin\theta=\frac{12}{13}, \cos\theta=-\frac{5}{12}\times\frac{12}{13}=-\frac{5}{13}$

43 답 $-\frac{3}{8}$

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{4}$

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

44 답 $-\frac{4}{3}$

$$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{8}}=-\frac{4}{3}$$

45 답 $\frac{64}{9}$

$$\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{1}{\left(-\frac{3}{8}\right)^2}=\frac{64}{9}$$

46 답 $-\frac{8}{3}$

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$$
$$=\frac{1}{-\frac{3}{8}}=-\frac{8}{3}$$

47 답 $\frac{11}{16}$

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(-\frac{3}{8}\right)\right\}=\frac{11}{16}$$

유형 완성하기 p.125~136

01 답 ⑤

① $-660^\circ=360^\circ\times(-2)+60^\circ$

② $-300^\circ=360^\circ\times(-1)+60^\circ$

③ $420^\circ=360^\circ\times1+60^\circ$

④ $780^\circ=360^\circ\times2+60^\circ$

⑤ $1110^\circ=360^\circ\times3+30^\circ$

따라서 동경 OP가 나타내는 각이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

01-1 답 ⑤

① $-390^\circ=360^\circ\times(-2)+330^\circ$

② $-30^\circ=360^\circ\times(-1)+330^\circ$

③ $330^\circ=360^\circ\times0+330^\circ$

④ $690^\circ=360^\circ\times1+330^\circ$

⑤ $1020^\circ=360^\circ\times2+300^\circ$

따라서 동경 OP가 나타내는 각이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

02 답 ⑤

① $-490^\circ=360^\circ\times(-2)+230^\circ$

② $-130^\circ=360^\circ\times(-1)+230^\circ$

③ $230^\circ=360^\circ\times0+230^\circ$

④ $590^\circ=360^\circ\times1+230^\circ$

⑤ $930^\circ=360^\circ\times2+210^\circ$

따라서 각을 나타내는 동경이 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

02-1 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $-290^\circ=360^\circ\times(-1)+70^\circ$

ㄴ. $-70^\circ=360^\circ\times(-1)+290^\circ$

ㄷ. $430^\circ=360^\circ\times1+70^\circ$

ㄹ. $1070^\circ=360^\circ\times2+350^\circ$

따라서 70°를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

03 답 330

-120°를 나타내는 동경 OP가 주어진 조건을 만족시키며 회전한 후 나타내는 각의 크기를 θ라 하면

$\theta=-120^\circ+540^\circ-450^\circ=-30^\circ$

$-30^\circ=360^\circ\times(-1)+330^\circ$이므로 $\alpha=330$

03-1 답 30

400°를 나타내는 동경 OP가 주어진 조건을 만족시키며 회전한 후 나타내는 각의 크기를 θ라 하면

$\theta=400^\circ-210^\circ+920^\circ=1110^\circ$

$1110^\circ=360^\circ\times3+30^\circ$이므로 $\alpha=30$

04 답 제1사분면 또는 제3사분면

θ가 제1사분면의 각이므로

$360^\circ\times n<\theta<360^\circ\times n+90^\circ$ (n은 정수)

$\therefore 180^\circ\times n<\frac{\theta}{2}<180^\circ\times n+45^\circ$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때

$360^\circ\times k<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+45^\circ$이므로 각 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+180^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+225^\circ$이므로 각 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제1사분면 또는 제3사분면이다.

04-1 답 제3사분면

θ가 제2사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+90^\circ<\theta<360^\circ\times n+180^\circ$ (n은 정수)

$\therefore 120^\circ\times n+30^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ\times n+60^\circ$

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+30^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+60^\circ$이므로 각 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+150^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+180^\circ$이므로 각 $\frac{\theta}{3}$는 제2사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+270^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+300^\circ$이므로 각 $\frac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다.

(i)~(iii)에서 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면 또는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이므로 각 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제3사분면이다.

05 답 ㄱ, ㅁ

ㄱ. $-510^\circ=360^\circ\times(-2)+210^\circ$

ㄴ. $-290^\circ=360^\circ\times(-1)+70^\circ$

ㄷ. $-210^\circ=360^\circ\times(-1)+150^\circ$

ㄹ. $100^\circ=360^\circ\times0+100^\circ$

ㅁ. $240^\circ=360^\circ\times0+240^\circ$

ㅂ. $780^\circ=360^\circ\times2+60^\circ$

따라서 제3사분면의 각은 ㄱ, ㅁ이다.

05-1 답 ㄴ, ㄷ, ㅂ

ㄱ. $-500^\circ=360^\circ\times(-2)+220^\circ$

ㄴ. $-390^\circ=360^\circ\times(-2)+330^\circ$

ㄷ. $-45^\circ=360^\circ\times(-1)+315^\circ$

ㄹ. $150^\circ=360^\circ\times0+150^\circ$

ㅁ. $225^\circ=360^\circ\times0+225^\circ$

ㅂ. $640^\circ=360^\circ\times1+280^\circ$

따라서 제4사분면의 각은 ㄴ, ㄷ, ㅂ이다.

06 답 ⑤

θ가 제2사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+90^\circ<\theta<360^\circ\times n+180^\circ$ (n은 정수)

$\therefore 180^\circ\times n+45^\circ<\frac{\theta}{2}<180^\circ\times n+90^\circ$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+45^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+90^\circ$

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+225^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+270^\circ$

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 존재하는 모든 영역을 좌표평면 위에 나타내면 ⑤와 같다.

06-1 답 ③

θ가 제3사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+180^\circ<\theta<360^\circ\times n+270^\circ$ (n은 정수)

$\therefore 120^\circ\times n+60^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ\times n+90^\circ$

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+60^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+90^\circ$

(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+180^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+210^\circ$

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+300^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+330^\circ$

(i)~(iii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재하는 모든 영역을 좌표평면 위에 나타내면 ③과 같다.

07 답 ④

① $25^\circ=25\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{36}\pi$

② $160^\circ=160\times\frac{\pi}{180}=\frac{8}{9}\pi$

③ $300^\circ=300\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{3}\pi$

④ $\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}\times\frac{180^\circ}{\pi}=36^\circ$

⑤ $-\frac{5}{12}\pi=-\frac{5}{12}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=-75^\circ$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

07-1 답 ⑤

① $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{12}\times\frac{180^\circ}{\pi}=15^\circ$

② $\frac{9}{10}\pi=\frac{9}{10}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=162^\circ$

③ $\frac{13}{6}\pi=\frac{13}{6}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=390^\circ$

④ $84^\circ=84\times\frac{\pi}{180}=\frac{7}{15}\pi$

⑤ $150^\circ=150\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{6}\pi$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

08 답 ⑤

① $\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\times\frac{180^\circ}{\pi}=30^\circ$ ➡ 제1사분면

② $-\frac{11}{6}\pi=-\frac{11}{6}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=-330^\circ$

$\therefore -330^\circ=360^\circ\times(-1)+30^\circ$ ➡ 제1사분면

③ $\frac{7}{3}\pi=\frac{7}{3}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=420^\circ$

$\therefore 420^\circ=360^\circ\times1+60^\circ$ ➡ 제1사분면

④ $-680^\circ=360^\circ\times(-2)+40^\circ$ ➡ 제1사분면

⑤ $\frac{17}{3}\pi=\frac{17}{3}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=1020^\circ$

$\therefore 1020^\circ=360^\circ\times2+300^\circ$ ➡ 제4사분면

따라서 각을 나타내는 동경이 존재하는 사분면이 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

08-1 답 ④

① $-\frac{8}{3}\pi=-\frac{8}{3}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=-480^\circ$

$\therefore -480^\circ = 360^\circ \times (-2) + 240^\circ$ ➡ 제3사분면

② $-\frac{3}{4}\pi = -\frac{3}{4}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -135^\circ$

$\therefore -135^\circ = 360^\circ \times (-1) + 225^\circ$ ➡ 제3사분면

③ $\frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 240^\circ$ ➡ 제3사분면

④ $\frac{14}{5}\pi = \frac{14}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 504^\circ$

$\therefore 504^\circ = 360^\circ \times 1 + 144^\circ$ ➡ 제2사분면

⑤ $\frac{46}{9}\pi = \frac{46}{9}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 920^\circ$

$\therefore 920^\circ = 360^\circ \times 2 + 200^\circ$ ➡ 제3사분면

따라서 각을 나타내는 동경이 존재하는 사분면이 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

09 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\frac{360^\circ}{\pi} = \frac{360}{\pi} \times \frac{\pi}{180} = 2$라디안

ㄴ. $-\frac{5}{6}\pi = -\frac{5}{6}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -150^\circ$

이때 $-150^\circ = 360^\circ \times (-1) + 210^\circ$이므로 $-\frac{5}{6}\pi$는 제3사분면의 각이다.

ㄷ. $300^\circ - \frac{5}{6}\pi + 45^\circ = 300 \times \frac{\pi}{180} - \frac{5}{6}\pi + 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{13}{12}\pi$

$\therefore a = \frac{13}{12}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

09-1 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $\frac{900^\circ}{\pi} = \frac{900}{\pi} \times \frac{\pi}{180} = 5$라디안

ㄴ. $\frac{40}{9}\pi = \frac{40}{9}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 800^\circ$

이때 $800^\circ = 360^\circ \times 2 + 80^\circ$이므로 $\frac{40}{9}\pi$는 제1사분면의 각이다.

ㄷ. $-200^\circ + \frac{2}{3}\pi + 150^\circ = -200 \times \frac{\pi}{180} + \frac{2}{3}\pi + 150 \times \frac{\pi}{180}$

$= \frac{7}{18}\pi$

$\therefore a = \frac{7}{18}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

10 답 $\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi$

각 2θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$6\theta - 2\theta = (2n+1)\pi$ (n은 정수)

$4\theta = (2n+1)\pi$ $\therefore \theta = \frac{2n+1}{4}\pi$

$0 < \theta < \pi$에서 $0 < \frac{2n+1}{4}\pi < \pi$이므로

$0 < 2n+1 < 4$ $\therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n = 0, 1$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$ 또는 $\theta = \frac{3}{4}\pi$

10-1 답 $\frac{\pi}{2}$

각 θ를 나타내는 동경과 각 9θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$9\theta - \theta = (2n+1)\pi$ (n은 정수)

$8\theta = (2n+1)\pi$ $\therefore \theta = \frac{2n+1}{8}\pi$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $0 < \frac{2n+1}{8}\pi < \frac{\pi}{2}$이므로

$0 < 2n+1 < 4$ $\therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n = 0, 1$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{8}$ 또는 $\theta = \frac{3}{8}\pi$

따라서 모든 θ의 값의 합은

$\frac{\pi}{8} + \frac{3}{8}\pi = \frac{\pi}{2}$

11 답 0

각 -3θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$5\theta - (-3\theta) = 2n\pi$ (n은 정수)

$8\theta = 2n\pi$ $\therefore \theta = \frac{n}{4}\pi$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $0 < \frac{n}{4}\pi < \frac{\pi}{2}$이므로 $0 < n < 2$

이때 n은 정수이므로 $n = 1$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \cos 2\theta = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

11-1 답 $\frac{6}{11}\pi$ 또는 $\frac{8}{11}\pi$ 또는 $\frac{10}{11}\pi$

각 -2θ를 나타내는 동경과 각 9θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$9\theta - (-2\theta) = 2n\pi$ (n은 정수)

$11\theta = 2n\pi$ $\therefore \theta = \frac{2n}{11}\pi$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$에서 $\frac{\pi}{2} < \frac{2n}{11}\pi < \pi$이므로 $\frac{11}{4} < n < \frac{11}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n = 3, 4, 5$

$\therefore \theta = \frac{6}{11}\pi$ 또는 $\theta = \frac{8}{11}\pi$ 또는 $\theta = \frac{10}{11}\pi$

12 답 1

각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로 원점에 대하여 대칭이다.

즉 $7\theta - \theta = (2n+1)\pi$ (n은 정수)이므로

$6\theta = (2n+1)\pi$ $\therefore \theta = \frac{2n+1}{6}\pi$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$에서 $\frac{\pi}{2} < \frac{2n+1}{6}\pi < \pi$이므로

$3 < 2n+1 < 6$ $\therefore 1 < n < \frac{5}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n = 2$ $\therefore \theta = \frac{5}{6}\pi$

$\therefore \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

12-1 답 4π

각 -4θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로 원점에 대하여 대칭이다.

즉 $4\theta-(-4\theta)=(2n+1)\pi$ (n은 정수)이므로

$8\theta=(2n+1)\pi$ $\therefore \theta=\frac{2n+1}{8}\pi$ ……❶

$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n+1}{8}\pi<\frac{3}{2}\pi$이므로

$4<2n+1<12$ $\therefore \frac{3}{2}<n<\frac{11}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n=2, 3, 4, 5$

$\therefore \theta=\frac{5}{8}\pi$ 또는 $\theta=\frac{7}{8}\pi$ 또는 $\theta=\frac{9}{8}\pi$ 또는 $\theta=\frac{11}{8}\pi$ ……❷

따라서 모든 θ의 값의 합은

$\frac{5}{8}\pi+\frac{7}{8}\pi+\frac{9}{8}\pi+\frac{11}{8}\pi=4\pi$ ……❸

채점 기준	비율
❶ θ를 정수 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ θ의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 모든 θ의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

13 ③

각 θ를 나타내는 동경과 각 8θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+8\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$9\theta=2n\pi$ $\therefore \theta=\frac{2n}{9}\pi$

$0<\theta<2\pi$에서 $0<\frac{2n}{9}\pi<2\pi$이므로

$0<n<9$

이때 n은 정수이므로 $n=1, 2, 3, \cdots, 8$

따라서 $n=1$일 때 θ의 최솟값은 $\frac{2}{9}\pi$, $n=8$일 때 θ의 최댓값은 $\frac{16}{9}\pi$이므로 $\alpha=\frac{2}{9}\pi$, $\beta=\frac{16}{9}\pi$

$\therefore \beta-\alpha=\frac{16}{9}\pi-\frac{2}{9}\pi=\frac{14}{9}\pi$

13-1 ③

각 2θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$2\theta+5\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$7\theta=2n\pi$ $\therefore \theta=\frac{2n}{7}\pi$

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n}{7}\pi<\pi$이므로

$0<n<\frac{7}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n=1, 2, 3$

$\therefore \theta=\frac{2}{7}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{7}\pi$ 또는 $\theta=\frac{6}{7}\pi$

따라서 각 θ의 개수는 3이다.

14 $\frac{5}{4}\pi$ 또는 $\frac{7}{4}\pi$

각 -2θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$-2\theta+6\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$4\theta=(2n+1)\pi$ $\therefore \theta=\frac{2n+1}{4}\pi$

$\pi<\theta<2\pi$에서 $\pi<\frac{2n+1}{4}\pi<2\pi$이므로

$4<2n+1<8$ $\therefore \frac{3}{2}<n<\frac{7}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n=2, 3$

$\therefore \theta=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $\theta=\frac{7}{4}\pi$

14-1 $\frac{16}{9}\pi$

각 θ를 나타내는 동경과 각 8θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+8\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$9\theta=(2n+1)\pi$ $\therefore \theta=\frac{2n+1}{9}\pi$

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n+1}{9}\pi<\pi$이므로

$0<2n+1<9$ $\therefore -\frac{1}{2}<n<4$

이때 n은 정수이므로 $n=0, 1, 2, 3$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{9}$ 또는 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\frac{5}{9}\pi$ 또는 $\theta=\frac{7}{9}\pi$

따라서 모든 θ의 값의 합은

$\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{3}+\frac{5}{9}\pi+\frac{7}{9}\pi=\frac{16}{9}\pi$

15 ③

각 θ를 나타내는 동경과 각 2θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+2\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

$3\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ $\therefore \theta=\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}$

$0<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $0<\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{3}{2}\pi$이므로

$-\frac{\pi}{6}<\frac{2n}{3}\pi<\frac{4}{3}\pi$ $\therefore -\frac{1}{4}<n<2$

이때 n은 정수이므로 $n=0, 1$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 θ의 값의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\pi$

15-1 ⑤

각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+4\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

$5\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ $\therefore \theta=\frac{2n}{5}\pi+\frac{\pi}{10}$

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n}{5}\pi+\frac{\pi}{10}<\pi$이므로

$-\frac{\pi}{10}<\frac{2n}{5}\pi<\frac{9}{10}\pi$ $\therefore -\frac{1}{4}<n<\frac{9}{4}$

이때 n은 정수이므로 $n=0, 1, 2$

따라서 $n=0$일 때 θ의 최솟값은 $\frac{\pi}{10}$, $n=2$일 때 θ의 최댓값은 $\frac{9}{10}\pi$이므로 $\alpha=\frac{\pi}{10}$, $\beta=\frac{9}{10}\pi$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{10}+\frac{9}{10}\pi=\pi$

16 답 ③

반지름의 길이가 6, 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴의

호의 길이는 $6\times\frac{2}{3}\pi=4\pi$

넓이는 $\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{2}{3}\pi=12\pi$

따라서 $a=4\pi$, $b=12\pi$이므로

$a+b=4\pi+12\pi=16\pi$

16-1 답 ②

반지름의 길이가 a, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴의 넓이가 $\frac{3}{2}\pi$이므로

$\frac{1}{2}\times a^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi$, $a^2=9$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

따라서 부채꼴의 호의 길이는 $3\times\frac{\pi}{3}=\pi$이므로 $b=\pi$

$\therefore ab=3\times\pi=3\pi$

17 답 ④

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 하면

넓이가 2π이므로 $\frac{1}{2}\times r\times\pi=2\pi$

$\therefore r=4$

호의 길이가 π이므로 $4\theta=\pi$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$

다른 풀이

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 하면

호의 길이가 π, 넓이가 2π이므로

$r\theta=\pi$ ……㉠

$\frac{1}{2}r^2\theta=2\pi$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $\frac{1}{2}r=2$ $\therefore r=4$

$r=4$를 ㉠에 대입하면 $4\theta=\pi$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$

17-1 답 $18+6\pi$

부채꼴의 호의 길이가 2π, 넓이가 3π이므로

$\frac{1}{2}\times r\times2\pi=3\pi$ $\therefore r=3$

따라서 부채꼴의 둘레의 길이는

$2\times3+2\pi=6+2\pi$ $\therefore a=6+2\pi$

$\therefore ar=(6+2\pi)\times3=18+6\pi$

18 답 2

$\angle AOB=\theta$라 하면 $\overline{OA}\times\theta=2\pi$, $\overline{OC}\times\theta=\frac{4}{3}\pi$이므로

$\overline{OC}=\frac{2}{3}\overline{OA}$ ……㉠

이때 색칠한 부분의 넓이가 $\frac{10}{3}\pi$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times2\pi-\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times\frac{4}{3}\pi=\frac{10}{3}\pi$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\pi\times\overline{OA}-\frac{4}{9}\pi\times\overline{OA}=\frac{10}{3}\pi$

$\frac{5}{9}\pi\times\overline{OA}=\frac{10}{3}\pi$ $\therefore \overline{OA}=6$

㉠에서 $\overline{OC}=\frac{2}{3}\overline{OA}=\frac{2}{3}\times6=4$

$\therefore \overline{AC}=\overline{OA}-\overline{OC}=6-4=2$

18-1 답 108π

반지름의 길이가 18, 중심각의 크기가 $\frac{8}{9}\pi$인 부채꼴 COD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times18^2\times\frac{8}{9}\pi=144\pi$ ……❶

반지름의 길이가 9, 중심각의 크기가 $\frac{8}{9}\pi$인 부채꼴 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times9^2\times\frac{8}{9}\pi=36\pi$ ……❷

따라서 종이의 넓이는

$144\pi-36\pi=108\pi$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 부채꼴 COD의 넓이를 구할 수 있다.	40%
❷ 부채꼴 AOB의 넓이를 구할 수 있다.	40%
❸ 종이의 넓이를 구할 수 있다.	20%

19 답 $\pi-2$

원과 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면 원의 둘레의 길이가 부채꼴의 둘레의 길이의 2배이므로

$2\pi r=2(2r+r\theta)$, $\pi=2+\theta$

$\therefore \theta=\pi-2$

19-1 답 ④

반지름의 길이가 r인 원의 넓이는 πr^2

반지름의 길이가 $2r$, 호의 길이가 6π인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2r\times6\pi=6\pi r$

이때 원의 넓이와 부채꼴의 넓이가 서로 같으므로

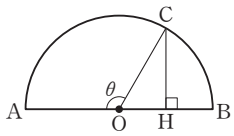
$\pi r^2=6\pi r$ $\therefore r=6$

20 답 ④

오른쪽 그림과 같이 반원의 중심을 O라 하면

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=6$

$\angle AOC=\theta$라 하면 호 AC의 길이가 4π이므로



$6\theta=4\pi$ $\therefore \theta=\frac{2}{3}\pi$

이때 $\angle COH=\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$이므로 $\triangle COH$에서

$\frac{\overline{CH}}{\overline{OC}}=\sin\frac{\pi}{3}$, $\frac{\overline{CH}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore \overline{CH}=3\sqrt{3}$

20-1 답 $2\pi-4$

부채꼴 AOP의 중심각의 크기를 θ라 하면 호 AP의 길이와 지름 AB의 길이가 같으므로

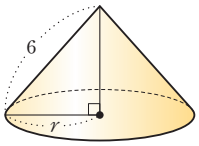
$2\theta=4$ $\therefore \theta=2$

따라서 부채꼴 POB의 중심각의 크기는 $\pi-2$이므로
부채꼴 POB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 2^2\times(\pi-2)=2\pi-4$

다른 풀이
반지름의 길이가 2인 반원의 호의 길이는 2π이고, 호 AP의 길이는 지름 AB의 길이와 같은 4이므로 호 PB의 길이는 $2\pi-4$
따라서 부채꼴 POB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 2\times(2\pi-4)=2\pi-4$

21 답 $2\sqrt{5}$

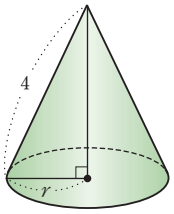
오른쪽 그림과 같이 만들어진 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r라 하면 부채꼴의 호의 길이와 밑면인 원의 둘레의 길이가 같으므로 $6\times\frac{4}{3}\pi=2\pi r$ $\therefore r=4$



따라서 원뿔의 높이는
$\sqrt{6^2-4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

21-1 답 ⑤

오른쪽 그림과 같이 만들어진 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r라 하면 부채꼴의 호의 길이와 밑면인 원의 둘레의 길이가 같으므로
$4\times\frac{5}{6}\pi=2\pi r$ $\therefore r=\frac{5}{3}$
따라서 원뿔의 밑면의 넓이는
$\pi\times\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}\pi$



22 답 ⑤

부채꼴의 반지름의 길이가 a cm, 둘레의 길이가 16 cm이므로
호의 길이는 $(16-2a)$ cm
이때 $a>0$, $16-2a>0$이므로 $0<a<8$
부채꼴의 넓이를 S cm^{2}라 하면
$S=\frac{1}{2}a(16-2a)=-a^2+8a$
$=-(a-4)^2+16\ (0<a<8)$
즉 $a=4$일 때 S의 최댓값은 16이다.
이때 부채꼴의 중심각의 크기는 b라디안이므로
$\frac{1}{2}\times 4^2\times b=16$ $\therefore b=2$
$\therefore a+b=4+2=6$

22-1 답 ④

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 둘레의 길이가 20이므로
호의 길이는 $20-2r$
이때 $r>0$, $20-2r>0$이므로 $0<r<10$
부채꼴의 넓이를 S라 하면
$S=\frac{1}{2}r(20-2r)=-r^2+10r$
$=-(r-5)^2+25\ (0<r<10)$
즉 $r=5$일 때 S의 최댓값은 25이다.
이때 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면
$\frac{1}{2}\times 5^2\times\theta=25$ $\therefore \theta=2$

23 답 81

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 둘레의 길이가 36이므로
호의 길이는 $36-2r$
이때 $r>0$, $36-2r>0$이므로 $0<r<18$
부채꼴의 넓이를 S라 하면
$S=\frac{1}{2}r(36-2r)=-r^2+18r$
$=-(r-9)^2+81\ (0<r<18)$
따라서 $r=9$일 때 S의 최댓값은 81이다.

23-1 답 ⑤

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 둘레의 길이가 40이므로
호의 길이는 $40-2r$
이때 $r>0$, $40-2r>0$이므로 $0<r<20$
부채꼴의 넓이를 S라 하면
$S=\frac{1}{2}r(40-2r)=-r^2+20r$
$=-(r-10)^2+100\ (0<r<20)$
따라서 $r=10$일 때 S가 최대이므로 넓이가 최대인 부채꼴의 반지름의 길이는 10이다.

24 답 25

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 부채꼴의 넓이가 k이므로
$\frac{1}{2}rl=k$ $\therefore l=\frac{2k}{r}$
부채꼴의 둘레의 길이는
$2r+l=2r+\frac{2k}{r}$
이때 $2r>0$, $\frac{2k}{r}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$2r+\frac{2k}{r}\ge 2\sqrt{2r\times\frac{2k}{r}}=4\sqrt{k}$ (단, 등호는 $r=\sqrt{k}$일 때 성립)
($2r=\frac{2k}{r}$에서 $r^2=k$, $\therefore r=\sqrt{k}\ (\because r>0)$)
즉 $4\sqrt{k}=20$이므로 $\sqrt{k}=5$ $\therefore k=25$

24-1 답 $8\sqrt{2}$

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 부채꼴의 넓이가 8이므로
$\frac{1}{2}rl=8$ $\therefore l=\frac{16}{r}$
부채꼴의 둘레의 길이는
$2r+l=2r+\frac{16}{r}$ ……❶
이때 $2r>0$, $\frac{16}{r}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$2r+\frac{16}{r}\ge 2\sqrt{2r\times\frac{16}{r}}=8\sqrt{2}$ (단, 등호는 $r=2\sqrt{2}$일 때 성립)
($2r=\frac{16}{r}$에서 $r^2=8$, $\therefore r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\ (\because r>0)$)
따라서 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 $8\sqrt{2}$이다. ……❷

채점 기준	비율
❶ 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하고 둘레의 길이를 r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	60%

25 답 ④

$\overline{OP}=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}=13$이므로

$\sin\theta=-\frac{12}{13}$, $\cos\theta=-\frac{5}{13}$

$\therefore \cos\theta-\sin\theta=-\frac{5}{13}-\left(-\frac{12}{13}\right)=\frac{7}{13}$

25-1 답 $\frac{1}{10}$

$\overline{OP}=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$이므로

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\tan\theta=-\frac{1}{2}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta-\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$

26 답 18

점 $P(a, 3\sqrt{3})$에서 $\tan\theta=\frac{3\sqrt{3}}{a}$이므로

$\frac{3\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}$ $\quad\therefore a=3$

즉 점 P의 좌표가 $(3, 3\sqrt{3})$이므로

$r=\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}=6$

$\therefore ar=3\times6=18$

26-1 답 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

θ가 제4사분면의 각이고 $\tan\theta=-\frac{1}{3}$이므로 점 P의 좌표를 $(3a, -a)$ $(a>0)$라 하면

$\overline{OP}=\sqrt{(3a)^2+(-a)^2}=\sqrt{10}a$이므로

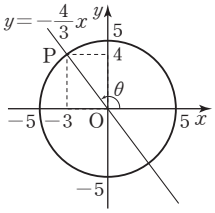
$\sin\theta=\frac{-a}{\sqrt{10}a}=-\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

$\cos\theta=\frac{3a}{\sqrt{10}a}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\therefore \cos\theta-\sin\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}-\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

27 답 $\frac{7}{15}$

오른쪽 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원이 직선 $4x+3y=0$, 즉 $y=-\frac{4}{3}x$와 만나는 점 중에서 제2사분면 위의 점을 P라 하면



P$(-3, 4)$

이때 $\overline{OP}=5$이므로

$\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

$\therefore \cos\theta-\sin\theta\tan\theta=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\times\left(-\frac{4}{3}\right)$

$=-\frac{3}{5}+\frac{16}{15}=\frac{7}{15}$

27-1 답 $-\frac{1}{2}$

두 점 P, Q는 원점에 대하여 대칭이므로 $Q(-5, -12)$

이때 $\overline{OQ}=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}=13$이므로

$\sin\theta=-\frac{12}{13}$, $\cos\theta=-\frac{5}{13}$, $\tan\theta=\frac{12}{5}$ ……❶

$\therefore \frac{13\cos\theta+5\tan\theta}{13\sin\theta-2}=\frac{13\times\left(-\frac{5}{13}\right)+5\times\frac{12}{5}}{13\times\left(-\frac{12}{13}\right)-2}$

$=\frac{-5+12}{-12-2}=-\frac{1}{2}$ ……❷

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	60%
❷ $\frac{13\cos\theta+5\tan\theta}{13\sin\theta-2}$의 값을 구할 수 있다.	40%

28 답 $2\sin\theta-2\cos\theta$

θ가 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta>0$, $\tan\theta-\sin\theta<0$이므로

$|\cos\theta|-|\tan\theta|+\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}+\sqrt{(\tan\theta-\sin\theta)^2}$

$=-\cos\theta-(-\tan\theta)+|\sin\theta-\cos\theta|+|\tan\theta-\sin\theta|$

$=-\cos\theta+\tan\theta+\sin\theta-\cos\theta-(\tan\theta-\sin\theta)$

$=2\sin\theta-2\cos\theta$

28-1 답 ②

θ가 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

① $\sin\theta\cos\theta<0$ ② $\sin\theta\tan\theta>0$

③ $\cos\theta\tan\theta<0$ ④ $\sin\theta-\cos\theta<0$

⑤ $\cos\theta-\tan\theta>0$

따라서 옳은 것은 ②이다.

29 답 제2사분면

(i) $\sin\theta\cos\theta<0$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이므로

각 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\sin\theta\tan\theta<0$에서

$\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로

각 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 θ는 제2사분면의 각이다.

29-1 답 $-\sin\theta-\cos\theta+\tan\theta$

(i) $\sin\theta\cos\theta>0$에서

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이므로

각 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta<0$에서

$\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$ 또는 $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$이므로

각 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 θ는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$ ……❶

따라서 $\sin\theta+\cos\theta<0$, $\cos\theta-\tan\theta<0$이므로

$|\sin\theta+\cos\theta|-\sqrt{\cos^2\theta}+|\cos\theta-\tan\theta|$

$=-(\sin\theta+\cos\theta)-|\cos\theta|-(\cos\theta-\tan\theta)$

$=-\sin\theta-\cos\theta-(-\cos\theta)-\cos\theta+\tan\theta$

$=-\sin\theta-\cos\theta+\tan\theta$ ……❷

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값의 부호를 알 수 있다.	60%
❷ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	40%

30 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$\sqrt{\sin\theta}\sqrt{\tan\theta}=-\sqrt{\sin\theta\tan\theta}$ $(\sin\theta\neq0)$에서

$\sin\theta<0$, $\tan\theta<0$이므로 θ는 제4사분면의 각이다.

이때 $\cos\theta>0$이므로

ㄱ. $\sin\theta\cos\theta<0$ ㄴ. $\sin\theta\tan\theta>0$

ㄷ. $\sin\theta+\tan\theta<0$ ㄹ. $\tan\theta-\cos\theta<0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

Lecture 음수의 제곱근의 성질

실수 a, b에 대하여

(1) $a<0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

그 외에는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

(2) $a>0$, $b<0$이면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

그 외에는 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (단, $b\neq0$)

30-1 답 ④

$\dfrac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\cos\theta}}=-\sqrt{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$이고 $\sin\theta\cos\theta\neq0$이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로

$\sqrt{\sin^2\theta}+\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}-|\cos\theta|$

$=|\sin\theta|+|\sin\theta-\cos\theta|-(-\cos\theta)$

$=\sin\theta+\sin\theta-\cos\theta+\cos\theta=2\sin\theta$

31 답 ③

$$\begin{aligned}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}&=\frac{\sin^2\theta-(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta-1}{(1+\cos\theta)\sin\theta}\\&=\frac{1-1}{(1+\cos\theta)\sin\theta}\\&=0\end{aligned}$$

31-1 답 ③

$$\begin{aligned}\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}-\tan\theta&=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\&=\frac{\cos^2\theta-\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)\cos\theta}\\&=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta-\sin\theta}{(1-\sin\theta)\cos\theta}\\&=\frac{1-\sin\theta}{(1-\sin\theta)\cos\theta}\\&=\frac{1}{\cos\theta}\end{aligned}$$

32 답 ④

① $$\begin{aligned}\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}&=\frac{\cos^2\theta+(1+\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)\cos\theta}\\&=\frac{2(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\cos\theta}\\&=\frac{2}{\cos\theta}\end{aligned}$$

② $$\begin{aligned}\frac{1}{\tan\theta}-\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}&=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\\&=\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)-\sin^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}\\&=\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta(1-\cos\theta)}\\&=-\frac{1}{\sin\theta}\end{aligned}$$

③ $$\begin{aligned}\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}&=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}\\&=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}}\\&=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\end{aligned}$$

④ $$\begin{aligned}\frac{\tan\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}&=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta+1}{\cos^2\theta}\\&=\frac{\sin\theta+1}{1-\sin^2\theta}=\frac{\sin\theta+1}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}\\&=\frac{1}{1-\sin\theta}\end{aligned}$$

⑤ $$\begin{aligned}\left(\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)^2&=\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\right)^2=\frac{(\sin\theta+1)^2}{\cos^2\theta}\\&=\frac{(\sin\theta+1)^2}{1-\sin^2\theta}=\frac{(\sin\theta+1)^2}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}\\&=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

32-1 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $$\begin{aligned}\cos^4\theta-\sin^4\theta&=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\&=\cos^2\theta-\sin^2\theta\\&=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)\\&=2\cos^2\theta-1\end{aligned}$$

ㄴ. $$\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}=\frac{1-\cos\theta+1+\cos\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{2}{\sin^2\theta}$$

ㄷ. $$\begin{aligned}&\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}+\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}\\&=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}+\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1}\\&=\frac{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}+\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\\&=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=0\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

33 답 $2\sin\theta$

$$\begin{aligned}&\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}+\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}\\&=\sqrt{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}\\&\qquad+\sqrt{\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}\\&=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}+\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}\\&=|\sin\theta+\cos\theta|+|\sin\theta-\cos\theta|\\&=\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta-\cos\theta\ (\because\ \sin\theta-\cos\theta>0)\\&=2\sin\theta\end{aligned}$$

33-1 답 ③

$\sin\theta-\cos\theta>0$, $\sin\theta\cos\theta<0$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

$\therefore \sqrt{4-8\sin\theta\cos\theta}-|\sin\theta|-\sqrt{\cos^2\theta}$

$=\sqrt{4\sin^2\theta-8\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta}-\sin\theta-|\cos\theta|$

$=\sqrt{4(\sin\theta-\cos\theta)^2}-\sin\theta-(-\cos\theta)$

$=2|\sin\theta-\cos\theta|-\sin\theta+\cos\theta$

$=2(\sin\theta-\cos\theta)-\sin\theta+\cos\theta$

$=\sin\theta-\cos\theta$

34 답 $\frac{1}{2}$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$

이때 θ가 제4사분면의 각이므로 $\cos\theta>0$

$\therefore \cos\theta=\frac{4}{5}$

따라서 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$이므로

$\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta=\frac{5}{4}+\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}$

34-1 답 $-\frac{5}{6}$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

따라서 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$이므로

$\sin\theta\tan\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=-\frac{5}{6}$

35 답 ④

$\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}=2-\sqrt{3}$에서

$1+\cos\theta=(2-\sqrt{3})(1-\cos\theta)$

$(3-\sqrt{3})\cos\theta=1-\sqrt{3}$

$\therefore \cos\theta=\frac{1-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{(1-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{2}{3}$

이때 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{\sqrt{6}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{2}$

35-1 답 $\frac{1}{2}$

$|\sin\theta|=|\cos\theta|$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta=\cos^2\theta$ ……㉠

㉠을 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$2\cos^2\theta=1$ $\therefore \cos^2\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \sin^2\theta=\cos^2\theta=\frac{1}{2}$

이때 θ가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$이므로

$\sin\theta\cos\theta-\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(-1)=\frac{1}{2}$

36 답 $\frac{8}{7}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$의 양변을 $\cos^2\theta$으로 나누면

$\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$이므로

$\frac{1}{\cos^2\theta}=\left(-\frac{1}{3}\right)^2+1=\frac{10}{9}$ $\therefore \cos^2\theta=\frac{9}{10}$

$\therefore \sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\theta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\therefore \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+\sin\theta\cos\theta}=\frac{\frac{9}{10}-\frac{1}{10}}{1+\frac{\sqrt{10}}{10}\times\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)}$

$=\frac{\frac{8}{10}}{1-\frac{3}{10}}=\frac{8}{7}$

36-1 답 ④

$\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=3$에서 $1+\tan\theta=3-3\tan\theta$

$4\tan\theta=2$ $\therefore \tan\theta=\frac{1}{2}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$의 양변을 $\cos^2\theta$으로 나누면

$\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$이므로

$\frac{1}{\cos^2\theta}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\frac{5}{4}$ $\therefore \cos^2\theta=\frac{4}{5}$

$\therefore \sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

이때 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{2}{5}$

유형 완성하기 p. 137

37 답 $\frac{\sqrt{17}}{9}$

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$

$\therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{4}{9}\right)=\frac{17}{9}$

이때 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta<0$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{17}}{3}$

$\therefore \sin^2\theta-\cos^2\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$

$=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{17}}{3}\right)=\frac{\sqrt{17}}{9}$

38 답 ⑤

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$

$\therefore \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\frac{4}{9}}=\frac{9}{4}$

39 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=2$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$

$\therefore \sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\sqrt{2}\times\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

40 답 ⑤

이차방정식 $2x^2-ax+1=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{a}{2}$ ……㉠

$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$ ……㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{a^2}{4}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{a^2-4}{8}$ ……㉢

㉡, ㉢에서 $\frac{a^2-4}{8}=\frac{1}{2}$

$a^2=8$ $\therefore a=\pm2\sqrt{2}$

그런데 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이므로 $a>0$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a=2\sqrt{2}$

41 답 1

이차방정식 $x^2-\sqrt{3}x+k=0$의 두 근이 $\frac{1}{\sin\theta}$, $\frac{1}{\cos\theta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=k$ ……㉠

$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\sqrt{3}$에서

$k(\sin\theta+\cos\theta)=\sqrt{3}$ $\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{k}$

이때 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$이므로

$\frac{3}{k^2}=1+2\times\frac{1}{k}$, $k^2+2k-3=0$

$(k+3)(k-1)=0$ $\therefore k=-3$ 또는 $k=1$

그런데 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이므로 $k>0$ ($\because$ ㉠)

$\therefore k=1$

42 답 −7

이차방정식 $9x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{a}{9}$, $\sin\theta\cos\theta=\frac{b}{9}$

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$이므로 $-\frac{a}{9}=\frac{1}{3}$ $\therefore a=-3$ ……❶

이때 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$이므로

$\frac{1}{9}=1+\frac{2}{9}b$, $\frac{2}{9}b=-\frac{8}{9}$ $\therefore b=-4$ ……❷

$\therefore a+b=-3+(-4)=-7$ ……❸

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

학교 시험 대비 문제

p. 138~141

01 답 ④

① $-320^\circ=360^\circ\times(-1)+40^\circ$

② $40^\circ=360^\circ\times0+40^\circ$

③ $400^\circ=360^\circ\times1+40^\circ$

④ $650^\circ=360^\circ\times1+290^\circ$

⑤ $1120^\circ=360^\circ\times3+40^\circ$

따라서 각을 나타내는 동경이 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

02 답 ④

θ가 제4사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+270^\circ<\theta<360^\circ\times n+360^\circ$ (n은 정수)

$\therefore 180^\circ\times n+135^\circ<\frac{\theta}{2}<180^\circ\times n+180^\circ$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+135^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+180^\circ$이므로 각 $\frac{\theta}{2}$는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+315^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+360^\circ$이므로 각 $\frac{\theta}{2}$는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

03 답 ⑤

① $920^\circ=360^\circ\times2+200^\circ$ ➡ 제3사분면

② $-530^\circ=360^\circ\times(-2)+190^\circ$ ➡ 제3사분면

③ $-\frac{5}{6}\pi=-\frac{5}{6}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=-150^\circ$

$\therefore -150^\circ=360^\circ\times(-1)+210^\circ$ ➡ 제3사분면

④ $\frac{4}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=240^\circ$ ➡ 제3사분면

⑤ $\frac{14}{5}\pi=\frac{14}{5}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=504^\circ$

$\therefore 504^\circ=360^\circ\times1+144^\circ$ ➡ 제2사분면

따라서 각을 나타내는 동경이 존재하는 사분면이 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

04 답 $\frac{17}{9}$

$120^\circ+\frac{5}{2}\pi-230^\circ=120\times\frac{\pi}{180}+\frac{5}{2}\pi-230\times\frac{\pi}{180}=\frac{17}{9}\pi$

$\therefore a=\frac{17}{9}$

05 답 $\frac{4}{3}\pi$

각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$4\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$3\theta=2n\pi$ $\therefore \theta=\frac{2n}{3}\pi$

$\pi<\theta<2\pi$에서 $\pi<\frac{2n}{3}\pi<2\pi$이므로

$\frac{3}{2}<n<3$

이때 n은 정수이므로 $n=2$

$\therefore \theta=\frac{4}{3}\pi$

06 답 $\frac{\pi}{4}$

각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$5\theta-\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$4\theta=(2n+1)\pi$ $\therefore \theta=\frac{2n+1}{4}\pi$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\frac{2n+1}{4}\pi<\frac{\pi}{2}$이므로

$0<2n+1<2$ $\therefore -\frac{1}{2}<n<\frac{1}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n=0$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$

07 답 3π

각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$6\theta=2n\pi$ $\therefore \theta=\frac{n}{3}\pi$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{n}{3}\pi<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\frac{3}{2}<n<\frac{9}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n=2, 3, 4$

$\therefore \theta=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi$

따라서 모든 θ의 값의 합은

$\frac{2}{3}\pi+\pi+\frac{4}{3}\pi=3\pi$

08 답 $\frac{17}{12}\pi$

각 2θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$2\theta+4\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

$6\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ $\therefore \theta=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{12}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{12}<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\frac{5}{12}\pi<\frac{n}{3}\pi<\frac{17}{12}\pi$ $\therefore \frac{5}{4}<n<\frac{17}{4}$

이때 n은 정수이므로 $n=2, 3, 4$

$\therefore \theta=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $\theta=\frac{13}{12}\pi$ 또는 $\theta=\frac{17}{12}\pi$

따라서 θ의 최댓값은 $\frac{17}{12}\pi$이다.

09 답 $\frac{\pi}{6}$

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 하면

넓이가 $\frac{3}{4}\pi$이므로 $\frac{1}{2}\times r\times\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi$ $\therefore r=3$

호의 길이가 $\frac{\pi}{2}$이므로 $3\theta=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$

10 답 ④

부채꼴 AOB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2^2\times\theta=2\theta$

$\tan\theta=\frac{\overline{AC}}{2}$에서 $\overline{AC}=2\tan\theta$이므로

$\triangle OAC=\frac{1}{2}\times2\times2\tan\theta=2\tan\theta$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$2\tan\theta-2\theta=2(\tan\theta-\theta)$

11 답 ②

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 둘레의 길이가 24이므로

호의 길이는 $24-2r$

이때 $r>0$, $24-2r>0$이므로 $0<r<12$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}r(24-2r)=-r^2+12r$

$=-(r-6)^2+36\ (0<r<12)$

즉 $r=6$일 때 S의 최댓값은 36이다.

이때 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$\frac{1}{2}\times 6^2\times\theta=36 \qquad \therefore \theta=2$

12 답 0

점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 $\overline{OP}=1$이므로

$\cos\alpha=\frac{a}{\overline{OP}}=a$

이때 두 점 P, Q가 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이므로

점 Q의 좌표는 $(-b, -a)$이고 $\overline{OQ}=1$

$\therefore \sin\beta=\frac{-a}{\overline{OQ}}=-a$

$\therefore \cos\alpha+\sin\beta=a+(-a)=0$

13 답 ①

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이므로 $\sin\theta-\cos\theta<0$

$\therefore \sqrt{\sin^2\theta}+\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}+\sqrt{\cos^2\theta}$

$=|\sin\theta|+|\sin\theta-\cos\theta|+|\cos\theta|$

$=-\sin\theta-(\sin\theta-\cos\theta)+\cos\theta$

$=-2(\sin\theta-\cos\theta)$

14 답 ②

$\left(1+\frac{1}{\tan\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(1+\tan\theta-\frac{1}{\cos\theta}\right)$

$=\frac{\sin\theta+\cos\theta+1}{\sin\theta}\times\frac{\cos\theta+\sin\theta-1}{\cos\theta}$

$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=2$

15 답 2

$\cos^2\theta(1-\tan\theta)^2+\cos^2\theta(1+\tan\theta)^2$

$=\cos^2\theta\{(1-\tan\theta)^2+(1+\tan\theta)^2\}$

$=\cos^2\theta(1-2\tan\theta+\tan^2\theta+1+2\tan\theta+\tan^2\theta)$

$=\cos^2\theta(2+2\tan^2\theta)$

$=2\cos^2\theta\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$

$=2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

$=2$

16 답 ③

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

이때 θ가 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\frac{3}{5}$

따라서 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$이므로

$5\sin\theta-4\tan\theta=5\times\left(-\frac{3}{5}\right)-4\times\left(-\frac{3}{4}\right)=0$

17 답 ⑤

$\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)$

$=2\cos^2\theta-1$

즉 $2\cos^2\theta-1=\frac{1}{2}$이므로 $\cos^2\theta=\frac{3}{4}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta>0$이므로

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

18 답 $\frac{5\sqrt{7}}{16}$

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4} \qquad \therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{4}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이므로 $\sin\theta-\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$

$\therefore \sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\frac{\sqrt{7}}{2}\times\left\{1+\left(-\frac{3}{8}\right)\right\}$

$=\frac{5\sqrt{7}}{16}$

다른 풀이

$\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)^3+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$

$=\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^3+3\times\left(-\frac{3}{8}\right)\times\frac{\sqrt{7}}{2}$

$=\frac{7\sqrt{7}}{8}-\frac{9\sqrt{7}}{16}$

$=\frac{5\sqrt{7}}{16}$

19 답 ⑤

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\times\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{2}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이므로 $\sin\theta+\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$$\therefore \frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}+\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta}{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}}+\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$
$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$
$$=\frac{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}{\cos\theta-\sin\theta}$$
$$=\cos\theta+\sin\theta$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

20 답 ③

이차방정식 $6x^2-3x+2a=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\sin\theta\cos\theta=\frac{a}{3}$

이때 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$이므로

$\frac{1}{4}=1+\frac{2}{3}a$, $\frac{2}{3}a=-\frac{3}{4}$

$\therefore a=-\frac{9}{8}$

21 답 ⑤

이차방정식 $x^2-kx+3=0$의 두 근이 $\frac{1}{\sin\theta}$, $\frac{1}{\cos\theta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=k$, $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=3$

$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=k$에서

$3(\sin\theta+\cos\theta)=k$ $\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{k}{3}$

이때 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$이므로

$\frac{k^2}{9}=1+2\times\frac{1}{3}$, $\frac{k^2}{9}=\frac{5}{3}$

$\therefore k^2=15$

서술형 1 답 제4사분면

θ가 제1사분면의 각이므로

$2n\pi<\theta<2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

$\therefore \frac{2n}{3}\pi<\frac{\theta}{3}<\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}$ ……❶

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때

$2k\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{\pi}{6}$이므로 각 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때

$2k\pi+\frac{2}{3}\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{5}{6}\pi$이므로 각 $\frac{\theta}{3}$는 제2사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때

$2k\pi+\frac{4}{3}\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{3}{2}\pi$이므로 $\frac{\theta}{3}$는 제3사분면의 각이다.

……❷

(i)~(iii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면 또는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이므로 각 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제4사분면이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ 각 $\frac{\theta}{3}$의 범위를 n에 대한 부등식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ n의 값에 따라 각 $\frac{\theta}{3}$가 제몇 사분면의 각인지 구할 수 있다.	60%
❸ 각 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면을 구할 수 있다.	10%

서술형 2 답 $\frac{2}{5}\pi$ 또는 $\frac{4}{5}\pi$

각 2θ를 나타내는 동경과 각 3θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$2\theta+3\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$5\theta=2n\pi$ $\therefore \theta=\frac{2n}{5}\pi$ ……❶

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n}{5}\pi<\pi$이므로

$0<n<\frac{5}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n=1, 2$ ……❷

$\therefore \theta=\frac{2}{5}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{5}\pi$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 각 θ를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ θ의 값을 모두 구할 수 있다.	30%

서술형 3 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=4$에서 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=4$

$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=4$, $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=4$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ ……❶

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$
$=1+2\sin\theta\cos\theta$
$=1+2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ……㉠ ……❷

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$
$=1-2\sin\theta\cos\theta$
$=1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because \sin\theta>\cos\theta$) ……㉡ ……❸

㉠, ㉡에서

$\sin^2\theta-\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$
$=\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ……❹

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ $\sin\theta+\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $\sin\theta-\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $\sin^2\theta-\cos^2\theta$의 값을 구할 수 있다.	20%

10% 핵심 기출 문제 1등급

p. 142~143

01 답 ④

각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$6\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$5\theta=2n\pi$ $\therefore \theta=\frac{2n}{5}\pi$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n}{5}\pi<\pi$이므로

$\frac{5}{4}<n<\frac{5}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n=2$

$\therefore \theta=\frac{4}{5}\pi$

02 답 ②

반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 θ인 호 AB의 길이는 2θ

이므로 부채꼴 APB의 둘레의 길이는 $2\times2+2\theta=4+2\theta$

또 반지름의 길이가 1인 원 O의 둘레의 길이는

$2\pi\times1=2\pi$

이때 부채꼴 APB가 원 O에 접하면서 한 바퀴를 돌아서 중심 P가 제자리에 왔으므로 부채꼴 APB의 둘레의 길이와 원 O의 둘레의 길이는 같다.

즉 $4+2\theta=2\pi$이므로 $\theta=\pi-2$

03 답 6

$\overline{OA}=r$ ($r>0$), $\angle COA=\theta$ ($0<\theta<\pi$)라 하면 호 AC의 길이가 π이므로

$r\theta=\pi$ $\therefore \theta=\frac{\pi}{r}$

부채꼴 BOC의 넓이는

$\frac{1}{2}r^2(\pi-\theta)=\frac{1}{2}r^2\left(\pi-\frac{\pi}{r}\right)=\frac{1}{2}\pi(r^2-r)$

즉 $\frac{1}{2}\pi(r^2-r)=15\pi$이므로 $r^2-r-30=0$

$(r+5)(r-6)=0$ $\therefore r=6$ ($\because r>0$)

$\therefore \overline{OA}=6$

04 답 ②

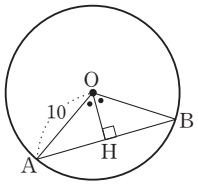
원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 넓이가 100π이므로

$\pi r^2=100\pi$ $\therefore r=10$ ($\because r>0$)

호 AB의 길이는 반지름의 길이의 2배이므로

$r\theta=2r$ $\therefore \theta=2$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 OAH에서 $\overline{OA}=10$이고



$\angle AOH=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times2=1$이므로

$\overline{AH}=\overline{OA}\sin1=10\sin1$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=20\sin1$

05 답 ②

점 $P(a, b)$에서 $\tan\theta_1=\frac{b}{a}$

점 $Q(a^2, -2b^2)$에서 $\tan\theta_2=-\frac{2b^2}{a^2}$

$\tan\theta_1+\tan\theta_2=0$이므로

$\frac{b}{a}+\left(-\frac{2b^2}{a^2}\right)=0$

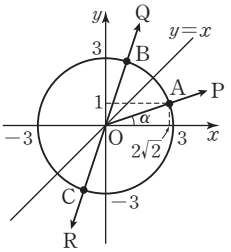
$\frac{b(a-2b)}{a^2}=0$ $\therefore a=2b$ ($\because b>0$)

$\therefore \sin\theta_1=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b}{\sqrt{(2b)^2+b^2}}$

$=\frac{b}{\sqrt{5b^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

06 답 80

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원이 세 동경 OP, OQ, OR와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자.



$\overline{OA}=3$, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$이므로 점 A의 x좌표는 $\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$ $\therefore A(2\sqrt{2}, 1)$

점 Q가 점 P와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 동경 OQ도 동경 OP와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$\therefore B(1, 2\sqrt{2})$

점 R가 점 Q와 원점에 대하여 대칭이므로 동경 OR도 동경 OQ와 원점에 대하여 대칭이다.

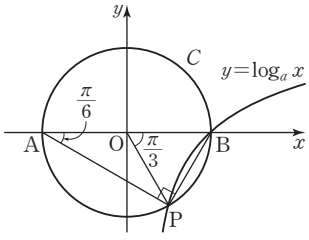
$\therefore C(-1, -2\sqrt{2})$

따라서 $\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\gamma=\frac{-2\sqrt{2}}{-1}=2\sqrt{2}$이므로

$9(\sin^2\beta+\tan^2\gamma)=9\times\left\{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2+(2\sqrt{2})^2\right\}=80$

07 답 ②

오른쪽 그림에서 삼각형 APB는 빗변의 길이가 2인 직각삼각형이고 $\overline{AP}=\sqrt{3}$이므로



$\cos(\angle BAP)=\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \angle BAP=\frac{\pi}{6}$

즉 $\angle BOP=\frac{\pi}{3}$이므로 점 P의 좌표는

$\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $\therefore \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

점 P는 함수 $y=\log_a x$의 그래프 위의 점이므로

$-\frac{\sqrt{3}}{2}=\log_a\frac{1}{2}$

$a^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}$ $\therefore a^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$

$\therefore a^{\sqrt{3}}=(a^{\frac{\sqrt{3}}{2}})^2=2^2=4$

참고 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이므로

$\angle BAP=\frac{1}{2}\angle BOP$

$\therefore \angle BOP=2\angle BAP=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

08 답 ③

$\triangle BOQ$에서 $\overline{OB}=1$이므로

$\cos\theta=\frac{\overline{OQ}}{\overline{OB}}=\overline{OQ}$, $\sin\theta=\frac{\overline{BQ}}{\overline{OB}}=\overline{BQ}$

$\triangle POA$에서 $\overline{OA}=1$이므로

$\tan\theta=\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}}=\overline{AP}$

$\overline{OQ}=2\overline{AP}\times\overline{BQ}$에서 $\cos\theta=2\tan\theta\sin\theta$

$\cos\theta=2\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\sin\theta$, $\cos^2\theta=2\sin^2\theta$

$1-\sin^2\theta=2\sin^2\theta$ $\therefore \sin^2\theta=\frac{1}{3}$

$\therefore \frac{1}{\sin\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}\times\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

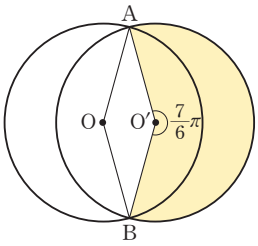
$=\frac{1}{\sin^2\theta}$

$=3$

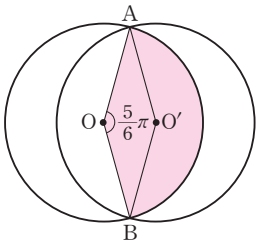
09 답 ④

마름모 AOBO′에서 $\angle AO'B=\angle AOB=\frac{5}{6}\pi$이므로 2개의 $\angle AO'B$ 중 크기가 더 큰 각의 크기는

$\angle AO'B=2\pi-\frac{5}{6}\pi=\frac{7}{6}\pi$



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]과 같이 원 O′에서 중심각의 크기가 $\angle AO'B=\frac{7}{6}\pi$인 부채꼴의 넓이를 T_1, [그림 2]와 같이 원 O에서 중심각의 크기가 $\angle AOB=\frac{5}{6}\pi$인 부채꼴의 넓이를 T_2라 하면

$S_1=T_1+S_2-T_2$

$=\left(\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{7}{6}\pi\right)+S_2-\left(\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{5}{6}\pi\right)$

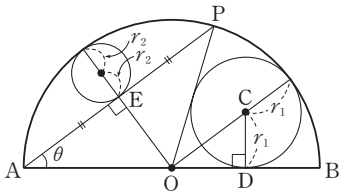
$=\frac{21}{4}\pi+S_2-\frac{15}{4}\pi$

$=\frac{3}{2}\pi+S_2$

$\therefore S_1-S_2=\frac{3}{2}\pi$

10 답 ①

다음 그림과 같이 반지름의 길이가 r_1인 원의 중심을 C, 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 D, 선분 AP의 중점을 E라 하자.



$\angle BAP=\theta$라 하면

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$이고 $\cos\theta=\frac{4}{5}$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

$\angle BOP=2\theta$이므로

$\angle BOC=\frac{1}{2}\angle BOP=\frac{1}{2}\times2\theta=\theta$

$\triangle COD$에서 $\sin\theta=\frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}=\frac{r_1}{1-r_1}$

즉 $\frac{r_1}{1-r_1}=\frac{3}{5}$이므로 $5r_1=3-3r_1$

$8r_1=3$ $\therefore r_1=\frac{3}{8}$

$\triangle OAE$에서 $\sin\theta=\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}}=1-2r_2$

즉 $1-2r_2=\frac{3}{5}$이므로

$2r_2=\frac{2}{5}$ $\therefore r_2=\frac{1}{5}$

$\therefore r_1r_2=\frac{3}{8}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{40}$

06 삼각함수의 그래프

개념 완성하기 p.147~148

01 답 4

$f(x+4)=f(x)$이므로

$f(11)=f(7)=f(3)=4$

02 답 1

함수 $f(x)$의 주기가 3π이므로

$f(x+3\pi)=f(x)$

$\therefore f(10\pi)=f(7\pi)=f(4\pi)=f(\pi)$

$=\frac{\pi}{\pi}=1$

03 답 1

$f(x-3)=f(x+3)$에서

$f(x)=f(x+6)$

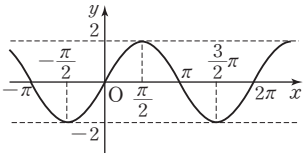
$\therefore f(20)=f(14)=f(8)=f(2)=1$

04 답 그래프: 풀이 참조

주기: 2π, 치역: $\{y\,|\,-2\le y\le 2\}$

함수 $y=2\sin x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주기는 2π이고, 치역은 $\{y\,|\,-2\le y\le 2\}$이다.

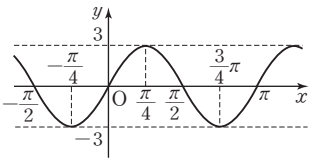


05 답 그래프: 풀이 참조

주기: π, 치역: $\{y\,|\,-3\le y\le 3\}$

함수 $y=3\sin 2x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배, y축의 방향으로 3배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주기는 π이고, 치역은 $\{y\,|\,-3\le y\le 3\}$이다.



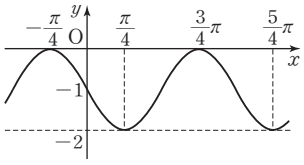
06 답 그래프: 풀이 참조

주기: π, 치역: $\{y\,|\,-2\le y\le 0\}$

$y=\sin(2x-\pi)-1=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1$

즉 주어진 함수의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 후 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주기는 π이고, 치역은 $\{y\,|\,-2\le y\le 0\}$이다.

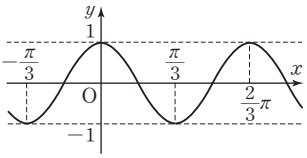


07 답 그래프: 풀이 참조

주기: $\frac{2}{3}\pi$, 치역: $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$

함수 $y=\cos 3x$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주기는 $\frac{2}{3}\pi$이고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이다.

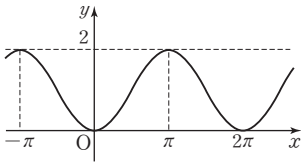


08 답 그래프: 풀이 참조

주기: 2π, 치역: $\{y\,|\,0\le y\le 2\}$

함수 $y=\cos(x-\pi)+1$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주기는 2π이고, 치역은 $\{y\,|\,0\le y\le 2\}$이다.



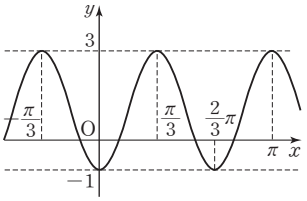
09 답 그래프: 풀이 참조

주기: $\frac{2}{3}\pi$, 치역: $\{y\,|\,-1\le y\le 3\}$

$y=2\cos(3x-\pi)+1=2\cos 3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$

즉 주어진 함수의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$배, y축의 방향으로 2배 한 후 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주기는 $\frac{2}{3}\pi$이고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 3\}$이다.

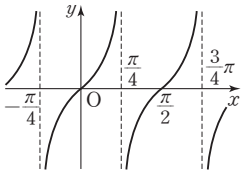


10 답 그래프: 풀이 참조

주기: $\frac{\pi}{2}$, 점근선의 방정식: $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)

함수 $y=\tan 2x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주기는 $\frac{\pi}{2}$이고, 점근선의 방정식은 $2x=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서 $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)

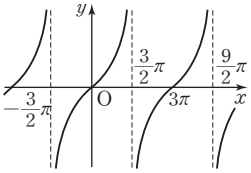


11 답 그래프: 풀이 참조

주기: 3π, 점근선의 방정식: $x=3n\pi+\frac{3}{2}\pi$ (n은 정수)

함수 $y=2\tan\frac{x}{3}$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 3배, y축의 방향으로 2배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

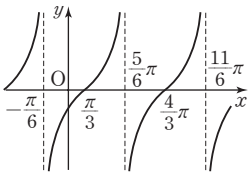
따라서 주기는 3π이고, 점근선의 방정식은 $\frac{x}{3}=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서 $x=3n\pi+\frac{3}{2}\pi$ (n은 정수)



12 답 그래프: 풀이 참조

주기: π, 점근선의 방정식: $x=n\pi+\frac{5}{6}\pi$ (n은 정수)

함수 $y=3\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 3배 한 후 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주기는 π이고, 점근선의 방정식은

$x-\frac{\pi}{3}=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서 $x=n\pi+\frac{5}{6}\pi$ (n은 정수)

13 답 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: $\frac{2}{3}\pi$

$y=\sin(3x+\pi)$에서 최댓값은 $|1|=1$, 최솟값은 $-|1|=-1$, 주기는 $\frac{2}{3}\pi$이다.

14 답 최댓값: 2, 최솟값: 0, 주기: 2π

$y=-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$에서 최댓값은 $|-1|+1=2$, 최솟값은 $-|-1|+1=0$, 주기는 2π이다.

15 답 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: 4π

$y=-2\cos\left(\frac{x}{2}+\pi\right)$에서 최댓값은 $|-2|=2$, 최솟값은 $-|-2|=-2$, 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이다.

16 답 최댓값: 2, 최솟값: -8, 주기: π

$y=5\cos 2(x-2\pi)-3$에서 최댓값은 $|5|-3=2$, 최솟값은 $-|5|-3=-8$, 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

17 답 최댓값: 없다., 최솟값: 없다., 주기: $\frac{1}{3}$

$y=\tan 3\pi x-1$에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 $\frac{\pi}{3\pi}=\frac{1}{3}$이다.

18 답 최댓값: 없다., 최솟값: 없다., 주기: π

$y=\frac{1}{2}\tan\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)+2$에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 $\frac{\pi}{|-1|}=\pi$이다.

19 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{19}{3}\pi=\sin\left(2\pi\times3+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

20 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan\frac{13}{6}\pi=\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

21 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

22 답 -1

$\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right)=-\tan\frac{9}{4}\pi=-\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

23 답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{4}{3}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

24 답 1

$\tan\frac{5}{4}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

25 답 $\frac{1}{2}$

$\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

26 답 $-\frac{1}{2}$

$\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

27 답 $\frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

28 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

29 답 $-\frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

30 답 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

31 답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{5}{2}\pi+\theta\right)=-\sin\theta=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

32 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan\left(\frac{5}{2}\pi-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

33 답 $-\frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{7}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

34 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

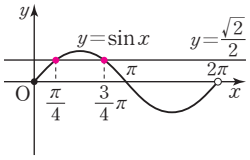
$\cos\left(\frac{7}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

35 답 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

$2\sin x=\sqrt{2}$에서 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$이므로 구하는 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

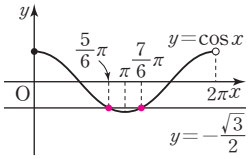


36 답 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

$2\cos x+\sqrt{3}=0$에서 $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$이므로 구하는 방정식의 해는

$x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

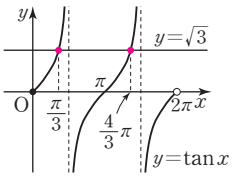


37 답 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

$\tan x-\sqrt{3}=0$에서 $\tan x=\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{3}\pi$이므로 구하는 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$



38 답 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$에서 $\frac{x}{2}=t$라 하면 주어진 방정식은

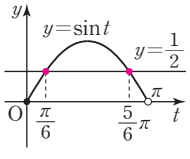
$\sin t=\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $0\le\frac{x}{2}<\pi$ $\therefore 0\le t<\pi$

오른쪽 그림과 같이 $0\le t<\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$이므로

$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{x}{2}=\frac{5}{6}\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$



39 답 $x=\frac{5}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{12}\pi$

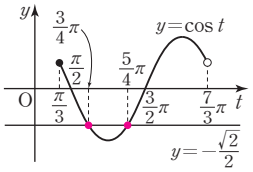
$x+\frac{\pi}{3}=t$라 하면 주어진 방정식은

$\cos t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$ $\therefore \frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$

오른쪽 그림과 같이 $\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$에서 함수 $y=\cos t$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$이므로 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{4}\pi$

$\therefore x=\frac{5}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{12}\pi$



40 답 $x=\frac{7}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{19}{12}\pi$

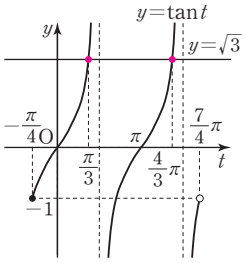
$x-\frac{\pi}{4}=t$라 하면 주어진 방정식은

$\tan t=\sqrt{3}$

$0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{4}\le x-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi$ $\therefore -\frac{\pi}{4}\le t<\frac{7}{4}\pi$

오른쪽 그림과 같이 $-\frac{\pi}{4}\le t<\frac{7}{4}\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{3}\pi$이므로 $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x-\frac{\pi}{4}=\frac{4}{3}\pi$

$\therefore x=\frac{7}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{19}{12}\pi$

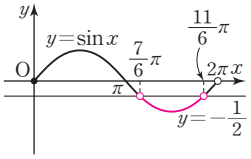


41 답 $\frac{7}{6}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$

$2\sin x+1<0$에서 $\sin x<-\frac{1}{2}$

부등식 $\sin x<-\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서

$\frac{7}{6}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$

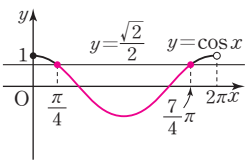


42 답 $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{7}{4}\pi$

$2\cos x-\sqrt{2}\le 0$에서 $\cos x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

부등식 $\cos x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$와 만나는 부분 또는 직선보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서

$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{7}{4}\pi$

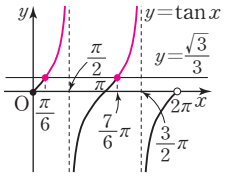


43 답 $\frac{\pi}{6}\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi\le x<\frac{3}{2}\pi$

$3\tan x-\sqrt{3}\ge 0$에서 $\tan x\ge\frac{\sqrt{3}}{3}$

부등식 $\tan x\ge\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$과 만나는 부분 또는 직선보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서

$\frac{\pi}{6}\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi\le x<\frac{3}{2}\pi$



유형 완성하기 p.149~170

01 답 1

함수 $f(x)$의 주기가 p이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x+p)=f(x)$

따라서 $f(10p)=f(9p)=f(8p)=\cdots=f(p)=f(0)$이므로

$f(10p)=f(0)=\sin 0+\cos 0-\tan 0=0+1-0=1$

01-1 답 1

함수 $f(x)$의 주기가 p이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x+p)=f(x)$

따라서 $f(\pi+3p)=f(\pi+2p)=f(\pi+p)=f(\pi)$이므로

$f(\pi+3p)=f(\pi)=\sin 2\pi+\cos^2\pi+\tan 4\pi$

$=0+(-1)^2+0=1$

02 답 ④

㈎에서 함수 $f(x)$는 주기가 1인 주기함수이므로

$f\left(\frac{201}{4}\right)=f\left(\frac{197}{4}\right)=f\left(\frac{193}{4}\right)=\cdots=f\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(-\frac{3}{4}\right)$

㈏에서

$f\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)=-\frac{1}{2}\sin\frac{3}{2}\pi=\frac{1}{2}$

02-1 답 ⑤

㈎에서 함수 $f(x)$는 주기가 $\frac{5}{4}$인 주기함수이므로

$f\left(\frac{51}{4}\right)=f\left(\frac{46}{4}\right)=f\left(\frac{41}{4}\right)=\cdots=f\left(\frac{6}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)$

㈏에서

$f\left(\frac{1}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

03 답 4

$f\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)=f\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)$의 양변에 x 대신 $x+\frac{3}{2}\pi$를 대입하면

$f(x)=f(x+3\pi)$

즉 함수 $f(x)$는 주기가 3π인 주기함수이므로 ……❶

$f(100\pi)=f(97\pi)=f(94\pi)=\cdots=f(\pi)=2$

$f(101\pi)=f(98\pi)=f(95\pi)=\cdots=f(2\pi)=3$

$f(102\pi)=f(99\pi)=f(96\pi)=\cdots=f(0)=1$ ……❷

$\therefore f(100\pi)+f(101\pi)-f(102\pi)=2+3-1=4$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$의 주기를 구할 수 있다.	30%
❷ $f(100\pi)$, $f(101\pi)$, $f(102\pi)$의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ $f(100\pi)+f(101\pi)-f(102\pi)$의 값을 구할 수 있다.	10%

03-1 답 0

$f(x-1)=f(x+3)$의 양변에 x 대신 $x+1$을 대입하면

$f(x)=f(x+4)$

즉 함수 $f(x)$는 주기가 4인 주기함수이므로

$f(11)=f(7)=f(3)=1$

$f(12)=f(8)=f(4)=f(0)=0$

$f(13)=f(9)=f(5)=f(1)=-1$

$f(14)=f(10)=f(6)=f(2)=0$

$\therefore f(11)+f(12)+f(13)+f(14)=1+0+(-1)+0=0$

04 답 ㄱ

함수 $y=\cos x$에 대하여

ㄱ. 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이다.

ㄷ. 주기는 2π이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

04-1 답 ㄴ, ㄷ

함수 $y=\sin x$에 대하여

ㄱ. 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이다.

ㄷ. 주기는 2π이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

05 답 ②, ⑤

함수 $f(x)=\tan x$에 대하여

① 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

② 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\ne n\pi+\frac{\pi}{2}\text{인 실수, }n\text{은 정수}\right\}$이다.

③ 치역은 실수 전체의 집합이다.

④ 주기가 π인 주기함수이므로 $f(x+\pi)=f(x)$

⑤ 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

따라서 옳지 않은 것은 ②, ⑤이다.

05-1 답 ④, ⑤

함수 $f(x)=\cos x$에 대하여

① 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

② 정의역은 실수 전체의 집합이다.

③ 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이므로 치역의 원소 중 최댓값은 1이다.

④ 주기가 2π인 주기함수이므로 $f(x+2\pi)=f(x)$

⑤ 점근선의 방정식은 존재하지 않는다.

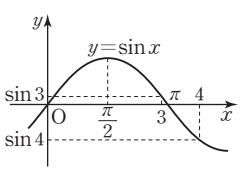
따라서 옳지 않은 것은 ④, ⑤이다.

06 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\frac{\pi}{2}<3<\pi<4$이므로

오른쪽 그림에서

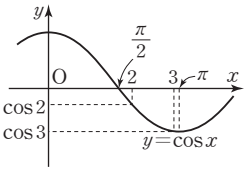
$\sin 4<\sin\pi<\sin 3$



ㄴ. $\frac{\pi}{2}<2<3<\pi$이므로

오른쪽 그림에서

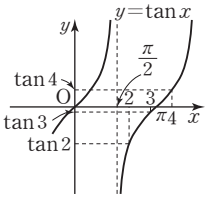
$\cos\pi<\cos 3<\cos 2$



ㄷ. $\frac{\pi}{2}<2<3<\pi<4$이므로

오른쪽 그림에서

$\tan 2<\tan 3<\tan 4$



따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

06-1 답 $g(1)<f(1)<h(1)$

$\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{3}$이고, 세 함수

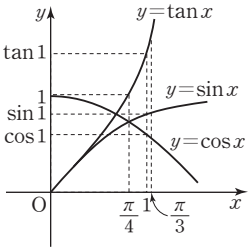
$f(x)=\sin x, g(x)=\cos x,$

$h(x)=\tan x$에 대하여 $y=\sin x,$

$y=\cos x, y=\tan x$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

$\cos 1<\sin 1<\tan 1$

$\therefore g(1)<f(1)<h(1)$



07 답 π

$y=\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-1=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ $\therefore y=\cos(2x-\pi)+1$

이 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\cos(-2x-\pi)+1=\cos(2x+\pi)+1$

따라서 $a=\pi, b=1$이므로

$ab=\pi\times 1=\pi$

07-1 답 4

$y=\cos\pi x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-1=\cos\pi\left(x+\frac{1}{4}\right)$ $\therefore y=\cos\pi\left(x+\frac{1}{4}\right)+1$

이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\cos\pi\left(x+\frac{1}{4}\right)+1$ $\therefore y=-\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)-1$

따라서 $a=-1, b=\frac{\pi}{4}, c=-1$이므로

$\frac{ac}{b}\pi=\frac{-1\times(-1)}{\frac{\pi}{4}}\times\pi=4$

08 답 ㄱ, ㄴ

$y=\sin(2x-\pi)=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$이므로 $y=\sin(2x-\pi)$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$이므로 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{12}$만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=-\sin 2x+1$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\sin 3x+\pi$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{2}{3}$배 한 후 y축의 방향으로 π만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=2\sin(2x-3\pi)=2\sin 2\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)$이므로

$y=2\sin(2x-3\pi)$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}\pi$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sin(2x-\pi)$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄴ이다.

08-1 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

$y=2\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\tan 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$이므로

$y=2\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=2\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. $y=\tan 2x+1$의 그래프는 $y=2\tan 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=-2\tan(2x+\pi)=-2\tan 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=2\tan 2x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=2\tan 2x-\frac{3}{2}\pi$의 그래프는 $y=2\tan 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 $-\frac{3}{2}\pi$만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=2\tan\left(-2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\tan\left\{-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$의 그래프는 $y=2\tan 2x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=2\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

09 답 7

$y=3\tan\frac{x}{2}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=3\tan\frac{x}{2}$ $\therefore y=-3\tan\frac{x}{2}$

이때 $y=-3\tan\left(\frac{x}{2}-1\right)+5=-3\tan\frac{1}{2}(x-2)+5$이므로

$y=-3\tan\left(\frac{x}{2}-1\right)+5$의 그래프는 $y=-3\tan\frac{x}{2}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=2, b=5$이므로

$a+b=2+5=7$

09-1 답 -3

$y=\sin 2x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sin 2(-x)$ $\therefore y=\sin(-2x)$

이 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\sin\left\{-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}-4$

$\therefore y=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{2}\right)-4$ ……❶

이 그래프가 점 $(0, k)$를 지나므로

$k=\sin\frac{\pi}{2}-4=1-4=-3$ ……❷

채점 기준	비율
❶ 대칭이동과 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	50%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50%

10 답 3

주기는 $\frac{2\pi}{2\pi}=1$이므로 $a=1$

최댓값은 $|-3|+1=4$이므로 $b=4$

최솟값은 $-|-3|+1=-2$이므로 $c=-2$

$\therefore 3a+b+2c=3\times1+4+2\times(-2)=3$

10-1 답 6

함수 $y=2\sin\left(ax-\frac{\pi}{6}\right)+1$의 주기가 π이므로

$\frac{2\pi}{|a|}=\pi$, $|a|=2$ $\therefore a=-2\ (\because a<0)$

$\therefore y=2\sin\left(-2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$

최댓값은 $2+1=3$이므로 $b=3$

최솟값은 $-2+1=-1$이므로 $c=-1$

$\therefore abc=-2\times3\times(-1)=6$

11 답 3

$y=-2\sin\pi x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{4\pi}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-\frac{1}{2}=-2\sin\pi\left(x-\frac{3}{4\pi}\right)$

$\therefore y=-2\sin\left(\pi x-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}$ ……❶

이 함수의 최댓값은 $|-2|+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$이므로 $a=\frac{5}{2}$

최솟값은 $-|-2|+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$이므로 $b=-\frac{3}{2}$

주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로 $c=2$ ……❷

$\therefore a+b+c=\frac{5}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)+2=3$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	30%
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10%

11-1 답 4

$y=3\sin\pi x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{2}{\pi}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-1=3\sin\pi\left(x-\frac{2}{\pi}\right)$ $\therefore y=3\sin(\pi x-2)+1$

이 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=3\sin(-\pi x-2)+1$

이 함수의 최댓값은 $3+1=4$이므로 $a=4$

최솟값은 $-3+1=-2$이므로 $b=-2$

주기는 $\frac{2\pi}{|-\pi|}=2$이므로 $c=2$

$\therefore a+b+c=4+(-2)+2=4$

12 답 ㄴ, ㄹ

함수 $y=-\tan\frac{\pi}{2}x-1$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$

ㄱ. 함수 $y=3\sin\frac{x}{2}-1$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

ㄴ. 함수 $y=-\cos\pi x+\pi$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

ㄷ. 함수 $y=\sin\left(2\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$의 주기는 $\frac{2\pi}{2\pi}=1$

ㄹ. 함수 $y=2\tan\left(-\frac{\pi}{2}x\right)+3$의 주기는 $\frac{\pi}{\left|-\frac{\pi}{2}\right|}=2$

따라서 함수 $y=-\tan\frac{\pi}{2}x-1$과 주기가 같은 함수는 ㄴ, ㄹ이다.

12-1 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. 함수 $f(x)=\cos2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

ㄴ. 함수 $f(x)=\sin(-\pi x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{|-\pi|}=2$

ㄷ. 함수 $f(x)=3\tan\frac{\pi}{2}x$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$

ㄹ. 함수 $f(x)=-\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+3$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

따라서 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 $f(x)=f(x+2)$를 만족시키는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

13 답 ⑤

① 최댓값은 $2-1=1$, 최솟값은 $-2-1=-3$이므로 최댓값과 최솟값의 합은 -2이다.

② 함수 $f(x)=2\sin\pi x-1$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

함수 $y=3\tan\frac{\pi}{2}x$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$

즉 두 함수의 주기가 같다.

③ $f(1)=2\sin\pi-1=-1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1, -1)$을 지난다.

④ 함수 $f(x)$의 주기가 2이므로

$f(-1.2)=f(0.8)=f(2.8)$

⑤ $f(-x)=2\sin(-\pi x)-1=-2\sin\pi x-1$이므로

$f(x)\neq f(-x)$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

13-1 답 ㄱ, ㄹ

ㄱ. 최댓값은 $|-2|+1=3$, 최솟값은 $-|-2|+1=-1$

ㄴ. 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

ㄷ. $f(0)=-2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+1=-2\times\frac{1}{2}+1=0$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\cos\frac{\pi}{3}+1=-2\times\frac{1}{2}+1=0$

$\therefore f(0)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0+0=0$

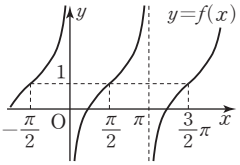
ㄹ. $f(x)=-2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1=-2\cos 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$의 그래프는 $y=-2\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

14 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. 함수 $f(x)$의 주기는 π이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+\pi)=f(x+2\pi)$

ㄴ. $f(x)=2\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$의 그래프는 $y=2\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



즉 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$에서 x축과 한 점에서 만난다.

ㄷ. 그래프의 점근선의 방정식은 $x-\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore x=n\pi$ (n은 정수)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

14-1 답 ④

① 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

② 최댓값은 없다.

③ 그래프의 점근선의 방정식은 $2x-\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore x=\frac{n}{2}\pi$ (n은 정수)

④ $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)-1=-1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{4},-1\right)$을 지난다.

⑤ $f(x)=\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-1=\tan 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$의 그래프는 $y=\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

15 답 1

$f(x)=\cos x$의 그래프에서 두 점 $(a,0)$, $(d,0)$은 직선 $x=2\pi$에 대하여 대칭이므로 $\frac{a+d}{2}=2\pi$ $\therefore a+d=4\pi$

또 두 점 $(b,0)$, $(c,0)$은 직선 $x=2\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{b+c}{2}=2\pi$ $\therefore b+c=4\pi$

이때 $2a-b-c+2d=2(a+d)-(b+c)=8\pi-4\pi=4\pi$이므로

$f(2a-b-c+2d)=f(4\pi)=\cos 4\pi=1$

15-1 답 3

$y=\sin x$의 그래프에서 두 점 $(a,0)$, $(b,0)$은 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로 $\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore a+b=\pi$

또 두 점 $(c,0)$, $(d,0)$은 직선 $x=\frac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{c+d}{2}=\frac{3}{2}\pi$ $\therefore c+d=3\pi$

$\therefore \frac{c+d}{a+b}=\frac{3\pi}{\pi}=3$

16 답 0

$y=\sin\frac{x}{2}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

두 점 $(a,0)$, $(b,0)$은 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{a+b}{2}=\pi$ $\therefore a+b=2\pi$

두 점 $(c,0)$, $(d,0)$은 직선 $x=3\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{c+d}{2}=3\pi$ $\therefore c+d=6\pi$

두 점 $(e,0)$, $(f,0)$은 직선 $x=5\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{e+f}{2}=5\pi$ $\therefore e+f=10\pi$

이때 $a+b+c+d+e+f=2\pi+6\pi+10\pi=18\pi$이므로

$\tan(a+b+c+d+e+f)=\tan 18\pi=0$

16-1 답 0

$k>0$이므로 $y=\sin 2kx$의 주기는 $\frac{2\pi}{2k}=\frac{\pi}{k}$

두 점 $(\alpha,0)$, $(\beta,0)$은 직선 $x=\frac{\pi}{4k}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4k}$ $\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{2k}$

두 점 $(\gamma,0)$, $(\delta,0)$은 직선 $x=\frac{3\pi}{4k}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{3\pi}{4k}$ $\therefore \gamma+\delta=\frac{3\pi}{2k}$

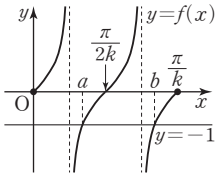
이때 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{\pi}{2k}+\frac{3\pi}{2k}=\frac{2\pi}{k}$이므로

$f(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=f\left(\frac{2\pi}{k}\right)=\sin 4\pi=0$

17 답 0

$k>0$이므로 $y=\tan 2kx$의 주기는 $\frac{\pi}{2k}$

$0\le x\le\frac{\pi}{k}$에서 함수 $y=\tan 2kx$의 그래프와 직선 $y=-1$은 오른쪽 그림과 같다.



이때 $b=\frac{\pi}{2k}+a$이므로 $b-a=\frac{\pi}{2k}$

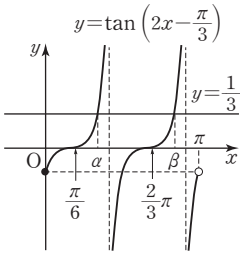
$\therefore f(b-a)=f\left(\frac{\pi}{2k}\right)=\tan\pi=0$

17-1 답 $-\frac{1}{2}$

$y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\tan 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 $y=\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이다.

주기는 $\frac{\pi}{2}$

$0 \le x < \pi$에서 함수 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3}$은 오른쪽 그림과 같다.



$\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha \quad \therefore \alpha-\beta=-\frac{\pi}{2}$

$\therefore \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

18 답 9

함수 $y=\sin\frac{\pi}{6}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$이므로 두 점 B, C는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.

이때 $\overline{BC}=4$이므로 두 점 B, C의 좌표는 B(1, 0), C(5, 0)

$x=1$일 때 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$이므로 점 A의 좌표는 $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2\left(4+\frac{1}{2}\right)=9$

18-1 답 8

함수 $y=2\sin\frac{\pi}{12}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}}=24$이므로 두 점 B, C는 직선 $x=6$에 대하여 대칭이다.

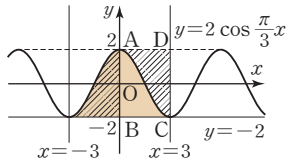
이때 $\overline{BC}=8$이므로 두 점 B, C의 좌표는 B(2, 0), C(10, 0)

$x=2$일 때 $2\sin\frac{\pi}{6}=1$이므로 점 A의 좌표는 A(2, 1)

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는 $1\times 8=8$

19 답 12

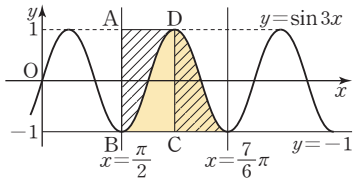
다음 그림에서 빗금 친 부분의 넓이가 서로 같으므로 함수 $y=2\cos\frac{\pi}{3}x$의 그래프와 세 직선 $x=-3$, $x=3$, $y=-2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.



이때 직사각형 ABCD의 가로의 길이는 3이고 세로의 길이는 4이므로 구하는 넓이는 $3\times 4=12$

19-1 답 $\frac{2}{3}\pi$

다음 그림에서 빗금 친 부분의 넓이가 서로 같으므로 함수 $y=\sin 3x$의 그래프와 세 직선 $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{7}{6}\pi$, $y=-1$로 둘러싸인 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.

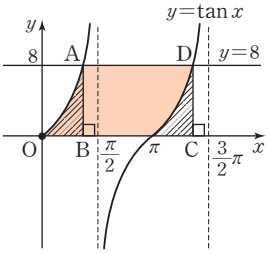


이때 직사각형 ABCD의 가로의 길이는 $\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$이고 세로의 길이는 2이므로 구하는 넓이는

$\frac{\pi}{3}\times 2=\frac{2}{3}\pi$

20 답 8π

오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이가 서로 같으므로 함수 $y=\tan x\left(0\le x<\frac{3}{2}\pi\right)$의 그래프와 x축 및 직선 $y=8$로 둘러싸인 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.

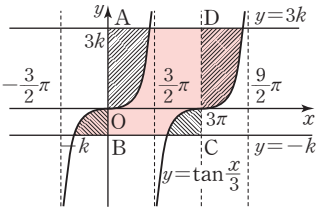


이때 직사각형 ABCD의 가로의 길이는 $\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}=\pi$이고 세로의 길이는 8이므로 구하는 넓이는

$\pi\times 8=8\pi$

20-1 답 2

오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이가 서로 같으므로 함수 $y=\tan\frac{x}{3}\left(-\frac{3}{2}\pi<x<\frac{9}{2}\pi\right)$의 그래프와 두 직선 $y=3k$, $y=-k$로 둘러싸인 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.



이때 직사각형 ABCD의 가로의 길이는 3π이고 세로의 길이는 $3k-(-k)=4k$이므로 직사각형 ABCD의 넓이는

$3\pi\times 4k=12k\pi$

따라서 $12k\pi=24\pi$이므로 $k=2$

21 답 3

$f(x)=a\sin\left(bx-\frac{\pi}{2}\right)+c$의 최댓값이 3, 최솟값이 -1이고 $a>0$이므로

$a+c=3$, $-a+c=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=1$

주기가 π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi \quad \therefore b=2$

따라서 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+1$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)+1=2\sin\frac{\pi}{2}+1=3$

21-1 답 $-\frac{7}{2}$

$f(x)=a\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)+b$의 최댓값이 $\frac{9}{2}$이고 $a<0$이므로

$-a+b=\frac{9}{2}$ ……㉠

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$에서 $a\sin\frac{\pi}{6}+b=-\frac{3}{2}$

$\therefore \frac{a}{2}+b=-\frac{3}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-4\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$이므로 $f(x)$의 최솟값은

$-|-4|+\frac{1}{2}=-\frac{7}{2}$

22 답 8

$f(x)=a\cos bx+c$의 주기가 2π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=2\pi$ $\therefore b=1$

최댓값과 최솟값의 합이 2, 차가 12이고 $a>0$이므로

$a+c+(-a+c)=2,\ 2c=2$ $\therefore c=1$

$a+c-(-a+c)=12,\ 2a=12$ $\therefore a=6$

$\therefore a+b+c=6+1+1=8$

22-1 답 −80

$f(x)=a\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{x}{b}\right)+c$의 주기가 4π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{\frac{1}{b}}=4\pi$ $\therefore b=2$ ……❶

$\therefore f(x)=a\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{x}{2}\right)+c$

최솟값이 -3이고 $a<0$이므로

$a+c=-3$ ……㉠

$f(\pi)=13$에서

$a\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\right)+c=-a+c=13$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-8,\ c=5$ ……❷

$\therefore abc=-8\times2\times5=-80$ ……❸

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ a, c의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	10%

23 답 $\frac{\pi}{3}$

$y=2\tan(ax+b)-1$의 주기가 $\frac{2}{3}\pi$이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=\frac{2}{3}\pi$ $\therefore a=\frac{3}{2}$

즉 함수 $y=2\tan\left(\frac{3}{2}x+b\right)-1$의 그래프의 점근선의 방정식은

$\frac{3}{2}x+b=n\pi+\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}x=n\pi+\frac{\pi}{2}-b$

$\therefore x=\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}b$ (n은 정수)

즉 $\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}b=\frac{2k}{3}\pi$ (k는 정수)이므로

$-\frac{2}{3}b=\frac{2k}{3}\pi-\frac{\pi}{3}$ $\therefore b=-k\pi+\frac{\pi}{2}$ ……㉠

이때 $0<b<\pi$이므로 $0<-k\pi+\frac{\pi}{2}<\pi$

$-\frac{\pi}{2}<-k\pi<\frac{\pi}{2},\ -\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$

$\therefore k=0$ ($\because k$는 정수)

$k=0$을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{\pi}{3}$

23-1 답 8

$f(x)=a\tan bx$의 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 $b<0$이므로

$\frac{\pi}{-b}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore b=-2$

$\therefore f(x)=a\tan(-2x)$

$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=4$에서 $a\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=4$

$-a=4$ $\therefore a=-4$

$\therefore ab=-4\times(-2)=8$

24 답 -3π

$y=a\sin(bx-c)$의 그래프에서 최댓값은 3, 최솟값은 -3이고 $a<0$이므로 $a=-3$

주기가 $2\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\pi$이고 $b<0$이므로

$\frac{2\pi}{-b}=\pi$ $\therefore b=-2$

즉 함수 $y=-3\sin(-2x-c)$의 그래프가 점 $(0,\ -3)$을 지나므로

$-3=-3\sin(-c)$ $\therefore \sin(-c)=1$

이때 $-\pi\le c\le0$에서 $0\le-c\le\pi$이므로

$-c=\frac{\pi}{2}$ $\therefore c=-\frac{\pi}{2}$

$\therefore abc=-3\times(-2)\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-3\pi$

24-1 답 6

$y=a\sin bx+c$의 그래프에서 최댓값이 1, 최솟값이 -3이고 $a>0$이므로 $a+c=1,\ -a+c=-3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ c=-1$

주기가 $\frac{2}{3}\pi$이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\frac{2}{3}\pi$ $\therefore b=3$

$\therefore a+b-c=2+3-(-1)=6$

25 답 4

$y=a\cos b(x-\pi)+c$의 그래프에서 최댓값이 3, 최솟값이 -1이고 $a>0$이므로

$a+c=3,\ -a+c=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ c=1$

주기가 2π이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=2\pi$ $\therefore b=1$

$\therefore a+b+c=2+1+1=4$

25-1 답 4π

$y=a\cos(bx-c)+d$의 그래프에서 최댓값은 4, 최솟값은 0이고 $a>0$이므로

$a+d=4,\ -a+d=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ d=2$

주기가 π이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\therefore b=2$

즉 함수 $y=2\cos(2x-c)+2$의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=2\cos(-c)+2$ $\therefore \cos(-c)=0$

이때 $0<c<\pi$에서 $-\pi<-c<0$이므로

$-c=-\frac{\pi}{2}$ $\therefore c=\frac{\pi}{2}$

$\therefore abcd=2\times2\times\frac{\pi}{2}\times2=4\pi$

26 답 $\frac{4}{3}\pi$

$y=\tan(ax+b)$의 그래프에서 주기가 $\frac{11}{12}\pi-\frac{5}{12}\pi=\frac{\pi}{2}$이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore a=2$ ……❶

즉 함수 $y=\tan(2x+b)$의 그래프가 점 $\left(\frac{7}{6}\pi, 0\right)$을 지나므로

$0=\tan\left(\frac{7}{3}\pi+b\right)$

이때 $\frac{\pi}{2}<b<\pi$에서 $\frac{17}{6}\pi<\frac{7}{3}\pi+b<\frac{10}{3}\pi$이므로

$\frac{7}{3}\pi+b=3\pi$ $\therefore b=\frac{2}{3}\pi$ ……❷

$\therefore ab=2\times\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$ ……❸

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

26-1 답 $\frac{\pi}{2}$

$y=a\tan(bx-c)$의 그래프에서 주기가 $\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{4}=\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=\pi$ $\therefore b=1$

즉 함수 $y=a\tan(x-c)$의 그래프는 $y=a\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것과 같으므로

$y=a\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ $\therefore c=\frac{\pi}{4}\left(\because 0<c<\frac{\pi}{2}\right)$

또 함수 $y=a\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프가 점 $(0, -2)$를 지나므로

$-2=a\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ $\therefore a=2$

$\therefore abc=2\times1\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

27 답 8

$f(x)=a|\sin bx|+c$의 최댓값이 -1이고 $a>0$이므로

$a+c=-1$ ……㉠

주기가 $\frac{\pi}{3}$이고 $b>0$이므로 $\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{3}$ $\therefore b=3$

$\therefore f(x)=a|\sin 3x|+c$

$f\left(\frac{\pi}{18}\right)=-2$에서 $a\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|+c=\frac{a}{2}+c=-2$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=-3$

$\therefore a+b-c=2+3-(-3)=8$

Lecture 절댓값 기호를 포함한 삼각함수의 주기

(1) $y=|\sin x|$의 주기가 π이므로 $y=|\sin bx|$의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$

(2) $y=|\cos x|$의 주기가 π이므로 $y=|\cos bx|$의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$

(3) $y=|\tan x|$의 주기가 π이므로 $y=|\tan bx|$의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$

27-1 답 2

$f(x)=a|\sin bx|-c$의 주기가 2π이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=2\pi$ $\therefore b=\frac{1}{2}$

$0\le\left|\sin\frac{1}{2}x\right|\le1$이므로 $0\le a\left|\sin\frac{1}{2}x\right|\le a$

$\therefore -c\le a\left|\sin\frac{1}{2}x\right|-c\le a-c$

이때 최댓값이 3, 최솟값이 -1이므로

$a-c=3$, $-c=-1$ $\therefore a=4$, $c=1$

$\therefore abc=4\times\frac{1}{2}\times1=2$

28 답 $\frac{5}{2}$

$a>0$이므로 $y=|4\cos ax|$의 주기는 $\frac{\pi}{a}$

$y=3\sin(-5x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{|-5|}=\frac{2}{5}\pi$

따라서 $\frac{\pi}{a}=\frac{2}{5}\pi$이므로 $a=\frac{5}{2}$

28-1 답 24

$y=a|\cos bx|+5$의 그래프에서 주기는 6π이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=6\pi$ $\therefore b=\frac{1}{6}$ ……❶

즉 함수 $y=a\left|\cos\frac{1}{6}x\right|+5$의 그래프가 점 $(0, 9)$를 지나므로

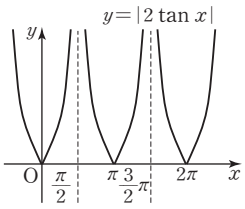
$9=a|\cos0|+5$, $a+5=9$ $\therefore a=4$ ……❷

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{4}{\frac{1}{6}}=24$ ……❸

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $\frac{a}{b}$의 값을 구할 수 있다.	20%

29 답 ③

함수 $y=|2\tan x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 주기가 π인 주기함수이다.

② 최댓값은 존재하지 않는다.

④ 그래프의 점근선의 방정식은

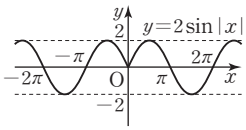
$x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

⑤ 정의역은 $x\ne n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이다.

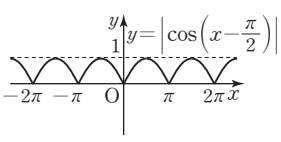
따라서 옳은 것은 ③이다.

29-1 답 ㄱ

ㄱ. 함수 $y=2\sin|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최솟값은 -2이다.



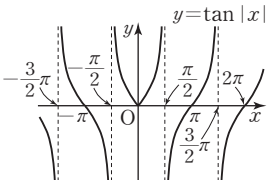
ㄴ. 함수 $y=\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right|$의 그래프는 $y=|\cos x|$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



즉 이 함수는 주기가 π인 주기함수이다.

ㄷ. 함수 $y=\tan|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 점근선의 방정식은

$x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)



따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

30 답 1

$$\frac{\sin(\pi+\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cos(\pi-\theta)}+\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)\tan(\pi-\theta)$$
$$=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}-\frac{1}{\tan\theta}\times(-\tan\theta)=1$$

30-1 답 $\frac{3}{2}$

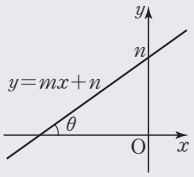
$3x+4y-5=0$에서 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ $\therefore \tan\theta=-\frac{3}{4}$

$$\therefore \frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}+\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}-\tan\theta$$
$$=-\tan\theta-\tan\theta$$
$$=-2\tan\theta$$
$$=-2\times\left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$=\frac{3}{2}$$

Lecture

직선 $y=mx+n$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=m$



31 답 ③

$\sin 780^\circ=\sin(90^\circ\times8+60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-600^\circ)=\cos 600^\circ=\cos(90^\circ\times6+60^\circ)$
$=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$

$\tan 240^\circ=\tan(90^\circ\times2+60^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

$\therefore 2\sin 780^\circ+\cos(-600^\circ)-\tan 240^\circ$
$=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)-\sqrt{3}=-\frac{1}{2}$

31-1 답 ①

$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{2}{3}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{4}{3}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{5}{3}\pi=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2}{3}\pi+\sin\frac{4}{3}\pi+\sin\frac{5}{3}\pi$
$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$

32 답 $-\sin\theta$

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$일 때, $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이므로

$$\sqrt{\left\{\cos\left(\theta-\frac{3}{2}\pi\right)-\sin\left(\theta-\frac{3}{2}\pi\right)\right\}^2}-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)$$
$$=\left|\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)-\left\{-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\right\}\right|-(-\cos\theta)$$
$$=|-\sin\theta-\cos\theta|+\cos\theta$$
$$=-\sin\theta-\cos\theta+\cos\theta\ (\because -\sin\theta-\cos\theta>0)$$
$$=-\sin\theta$$

32-1 답 $-\frac{19}{20}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

$\therefore \cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$ ……❶

이때 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$이므로 ……❷

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)+\tan(\pi+\theta)$$
$$=\sin\theta-(-\cos\theta)+\tan\theta$$
$$=\sin\theta+\cos\theta+\tan\theta$$
$$=\frac{3}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$=-\frac{19}{20}$$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)+\tan(\pi+\theta)$의 값을 구할 수 있다.	60%

33 답 2

$\theta=\frac{\pi}{10}$에서 $5\theta=\frac{\pi}{2}$이므로 $3\theta=\frac{\pi}{2}-2\theta$, $4\theta=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\therefore \sin\theta\cos 4\theta+\sin 2\theta\cos 3\theta+\sin 3\theta\cos 2\theta+\sin 4\theta\cos\theta$
$=\sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin 2\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$
$+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\cos 2\theta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\theta$
$=\sin\theta\sin\theta+\sin 2\theta\sin 2\theta+\cos 2\theta\cos 2\theta+\cos\theta\cos\theta$
$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta$
$=1+1=2$

33-1 답 1

$\theta=\frac{\pi}{8}$에서 $4\theta=\frac{\pi}{2}$이므로 $3\theta=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\therefore \sin\theta\cos 3\theta+\sin\theta\sin 3\theta-\cos\theta\cos 3\theta+\sin 3\theta\cos\theta$
$=\sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
$-\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\theta$
$=\sin\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin\theta+\cos\theta\cos\theta$
$=\sin^2\theta+\cos^2\theta$
$=1$

34 답 1

$\tan 1^\circ=\tan(90^\circ-89^\circ)=\dfrac{1}{\tan 89^\circ}$

$\tan 3^\circ=\tan(90^\circ-87^\circ)=\dfrac{1}{\tan 87^\circ}$

$\tan 5^\circ=\tan(90^\circ-85^\circ)=\dfrac{1}{\tan 85^\circ}$

$\vdots$

$\tan 43^\circ=\tan(90^\circ-47^\circ)=\dfrac{1}{\tan 47^\circ}$

$\therefore \tan 1^\circ\times\tan 3^\circ\times\tan 5^\circ\times\cdots\times\tan 87^\circ\times\tan 89^\circ$

$=(\tan 1^\circ\times\tan 89^\circ)\times(\tan 3^\circ\times\tan 87^\circ)$

$\times\cdots\times(\tan 43^\circ\times\tan 47^\circ)\times\tan 45^\circ$

$=\left(\dfrac{1}{\tan 89^\circ}\times\tan 89^\circ\right)\times\left(\dfrac{1}{\tan 87^\circ}\times\tan 87^\circ\right)$

$\times\cdots\times\left(\dfrac{1}{\tan 47^\circ}\times\tan 47^\circ\right)\times\tan 45^\circ$

$=1\times1\times\cdots\times1\times1$

$=1$

34-1 답 1

$\tan 1^\circ=\tan(90^\circ-89^\circ)=\dfrac{1}{\tan 89^\circ}$

$\tan 2^\circ=\tan(90^\circ-88^\circ)=\dfrac{1}{\tan 88^\circ}$

$\tan 3^\circ=\tan(90^\circ-87^\circ)=\dfrac{1}{\tan 87^\circ}$

$\vdots$

$\tan 44^\circ=\tan(90^\circ-46^\circ)=\dfrac{1}{\tan 46^\circ}$

$\therefore \tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\tan 3^\circ\times\cdots\times\tan 88^\circ\times\tan 89^\circ$

$=(\tan 1^\circ\times\tan 89^\circ)\times(\tan 2^\circ\times\tan 88^\circ)$

$\times\cdots\times(\tan 44^\circ\times\tan 46^\circ)\times\tan 45^\circ$

$=\left(\dfrac{1}{\tan 89^\circ}\times\tan 89^\circ\right)\times\left(\dfrac{1}{\tan 88^\circ}\times\tan 88^\circ\right)$

$\times\cdots\times\left(\dfrac{1}{\tan 46^\circ}\times\tan 46^\circ\right)\times\tan 45^\circ$

$=1\times1\times\cdots\times1\times1$

$=1$

35 답 $\frac{9}{2}$

$\sin\dfrac{9}{20}\pi=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{20}\right)=\cos\dfrac{\pi}{20}$

$\sin\dfrac{8}{20}\pi=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{20}\pi\right)=\cos\dfrac{2}{20}\pi$

$\sin\dfrac{7}{20}\pi=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3}{20}\pi\right)=\cos\dfrac{3}{20}\pi$

$\sin\dfrac{6}{20}\pi=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{20}\pi\right)=\cos\dfrac{4}{20}\pi$

$\therefore \sin^2\dfrac{\pi}{20}+\sin^2\dfrac{2}{20}\pi+\sin^2\dfrac{3}{20}\pi+\cdots+\sin^2\dfrac{9}{20}\pi$

$=\sin^2\dfrac{\pi}{20}+\sin^2\dfrac{2}{20}\pi+\sin^2\dfrac{3}{20}\pi+\sin^2\dfrac{4}{20}\pi+\sin^2\dfrac{5}{20}\pi$

$+\cos^2\dfrac{4}{20}\pi+\cos^2\dfrac{3}{20}\pi+\cos^2\dfrac{2}{20}\pi+\cos^2\dfrac{\pi}{20}$

$=4+\sin^2\dfrac{\pi}{4}$

$=4+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$

35-1 답 ⑤

$f(1)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$f(2)=\sin\dfrac{2}{3}\pi=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$f(3)=\sin\pi=0$

$f(4)=\sin\dfrac{4}{3}\pi=\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$f(5)=\sin\dfrac{5}{3}\pi=\sin\left(2\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$f(6)=\sin 2\pi=0$

$f(7)=\sin\dfrac{7}{3}\pi=\sin\left(2\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=f(1)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$f(8)=\sin\dfrac{8}{3}\pi=\sin\left(2\pi+\dfrac{2}{3}\pi\right)=\sin\dfrac{2}{3}\pi=f(2)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\vdots$

$f(12)=f(6)=0$

$f(13)=f(1)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(13)$

$=2\{f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)\}+f(1)$

$=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+0-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+0\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

36 답 0

$\overline{AB}$가 원의 지름이므로 $\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$ $\therefore \theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \sin\left(\dfrac{4}{3}\pi-\theta_1-\theta_2\right)+\cos\left(\theta_1+\theta_2+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\left(\dfrac{4}{3}\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin\dfrac{\pi}{6}$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$

36-1 답 $\frac{3}{5}$

$\overline{AB}$가 원의 지름이므로 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$ $\therefore \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$

$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\therefore \sin(2\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta+\alpha)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$

$=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{3}{5}$

37 답 $-2\sqrt{2}$

$\cos\theta_1=\dfrac{1}{3}$에서 θ_1은 예각이므로

$\sin\theta_1=\sqrt{1-\cos^2\theta_1}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ……❶

$\therefore \tan\theta_1=\dfrac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}=2\sqrt{2}$ ……❷

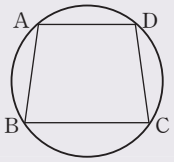
이때 □ABCD가 원에 내접하므로 $\theta_1+\theta_2=\pi$

$\therefore \tan\theta_2=\tan(\pi-\theta_1)=-\tan\theta_1=-2\sqrt{2}$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta_1$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $\tan\theta_1$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $\tan\theta_2$의 값을 구할 수 있다.	40%

Lecture 원에 내접하는 사각형

사각형 ABCD가 원에 내접할 때
(1) $\angle A+\angle C=\pi$
(2) $\angle B+\angle D=\pi$



37-1 답 ㄱ, ㄴ

□ABCD가 원에 내접하므로 $A+C=\pi$, $B+D=\pi$
ㄱ. $B=\pi-D$이므로 $\cos B=\cos(\pi-D)=-\cos D$
ㄴ. $A=\pi-C$이므로 $\sin A=\sin(\pi-C)=\sin C$
ㄷ. $A+B+C+D=2\pi$이므로 $D=2\pi-(A+B+C)$
$\therefore \tan D=\tan\{2\pi-(A+B+C)\}$
$=-\tan(A+B+C)$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

38 답 0

$4\theta=\pi$이므로
$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\cdots+\sin 8\theta$
$=\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\sin 4\theta+\sin(\pi+\theta)$
$\quad+\sin(\pi+2\theta)+\sin(\pi+3\theta)+\sin(\pi+4\theta)$
$=\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\sin 4\theta$
$\quad-\sin\theta-\sin 2\theta-\sin 3\theta-\sin 4\theta$
$=0$

38-1 답 2

네 점 P_1, P_2, P_3, P_4는 사분원의 호 AB를 5등분한 점이므로
$\angle AOP_1=\theta$라 하면
$\angle AOP_2=2\theta$, $\angle AOP_3=3\theta$, $\angle AOP_4=4\theta$
이때 $\overline{OA}=\overline{OB}=1$이므로
$\overline{P_1Q_1}=\sin\theta$, $\overline{P_2Q_2}=\sin 2\theta$, $\overline{P_3Q_3}=\sin 3\theta$, $\overline{P_4Q_4}=\sin 4\theta$
$5\theta=\frac{\pi}{2}$이므로 $3\theta=\frac{\pi}{2}-2\theta$, $4\theta=\frac{\pi}{2}-\theta$
$\therefore \overline{P_1Q_1}^2+\overline{P_2Q_2}^2+\overline{P_3Q_3}^2+\overline{P_4Q_4}^2$
$=\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\sin^2 3\theta+\sin^2 4\theta$
$=\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
$=\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta+\cos^2\theta$
$=1+1$
$=2$

39 답 2

$y=-\sin(x+\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+1$
$=\sin x+\sin x+1=2\sin x+1$
이때 $-1\le\sin x\le 1$이므로 $-1\le 2\sin x+1\le 3$
따라서 $M=3$, $m=-1$이므로
$M+m=3+(-1)=2$

39-1 답 2

$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos(x+\pi)+k$
$=\cos x+\cos x+k=2\cos x+k$
이때 $-1\le\cos x\le 1$이므로
$-2+k\le 2\cos x+k\le 2+k$
즉 최댓값은 $2+k$, 최솟값은 $-2+k$이므로
$2+k+(-2+k)=4$, $2k=4$ $\therefore k=2$

40 답 5

$y=\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)-2\cos(\pi-x)+k$
$=-\cos x+2\cos x+k=\cos x+k$
이때 $-1\le\cos x\le 1$이므로 $-1+k\le\cos x+k\le 1+k$
즉 최댓값은 $1+k$이므로
$1+k=6$ $\therefore k=5$

40-1 답 4

$y=2\sin(\pi-x)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)+k$
$=2\sin x+\sin x+k=3\sin x+k$
이때 $-1\le\sin x\le 1$이므로 $-3+k\le 3\sin x+k\le 3+k$
즉 최솟값은 $-3+k$이므로
$-3+k=-2$ $\therefore k=1$
따라서 최댓값은 $3+k=3+1=4$

41 답 22

$-1\le\sin\frac{2}{3}x\le 1$이므로 $-7\le\sin\frac{2}{3}x-6\le -5$
$\therefore 5\le\left|\sin\frac{2}{3}x-6\right|\le 7$
이때 $a<0$이므로 $7a\le a\left|\sin\frac{2}{3}x-6\right|\le 5a$
$\therefore 7a+b\le a\left|\sin\frac{2}{3}x-6\right|+b\le 5a+b$ ……❶
즉 최댓값은 $5a+b$, 최솟값은 $7a+b$이므로
$5a+b=10$, $7a+b=4$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=25$ ……❷
$\therefore a+b=-3+25=22$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $a\left\|\sin\frac{2}{3}x-6\right\|+b$의 값의 범위를 구할 수 있다.	60%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

41-1 답 ④

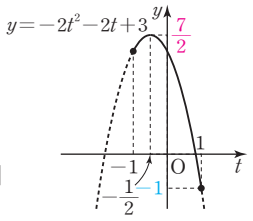
$-1\le\sin(3x-\pi)\le 1$이므로 $-2\le 2\sin(3x-\pi)\le 2$
$0\le|2\sin(3x-\pi)|\le 2$
$\therefore 4\le|2\sin(3x-\pi)|+4\le 6$
즉 최댓값은 6, 최솟값은 4이므로
$M=6$, $m=4$
$\therefore Mm=6\times 4=24$

42 답 ③

$y=2\cos^2 x-2\sin x+1=2(1-\sin^2 x)-2\sin x+1$
$=-2\sin^2 x-2\sin x+3$

$\sin x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$
이때 주어진 함수는
$y=-2t^2-2t+3=-2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$이므로
$t=-\frac{1}{2}$일 때 최대이고, 최댓값 M은 $M=\frac{7}{2}$
$t=1$일 때 최소이고, 최솟값 m은 $m=-2-2+3=-1$
$\therefore M+m=\frac{7}{2}+(-1)=\frac{5}{2}$

참고 **42**에서 그래프를 이용하여 최댓값과 최솟값을 구해 보자.
$-1\le t\le 1$에서 함수
$y=-2t^2-2t+3$
$=-2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$
의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
함수 $y=-2t^2-2t+3$의 그래프에서
$t=-\frac{1}{2}$일 때, 최댓값은 $\frac{7}{2}$
$t=1$일 때, 최솟값은 -1



42-1 답 $\frac{3}{2}$

$f(\theta)=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)-\cos^2\theta+2\sin(3\pi+\theta)$
$=\sin^2\theta-\cos^2\theta-2\sin\theta$
$=\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)-2\sin\theta$
$=2\sin^2\theta-2\sin\theta-1$
$\sin\theta=t$라 하면 $-1\le t\le 1$
이때 주어진 함수는
$y=2t^2-2t-1=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$이므로
$t=-1$일 때 최대이고, 최댓값은 $2+2-1=3$
$t=\frac{1}{2}$일 때 최소이고, 최솟값은 $-\frac{3}{2}$
따라서 최댓값과 최솟값의 합은
$3+\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$

43 답 $-\pi$

$\tan x=t$라 하면 $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $-1\le t\le 1$
이때 주어진 함수는
$y=t^2-4t-1=(t-2)^2-5$이므로
$t=-1$일 때 최대이고, 최댓값은 $(-1-2)^2-5=4$
$\therefore q=4$
또 $t=-1$, 즉 $\tan x=-1$에서 $x=-\frac{\pi}{4}\left(\because -\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$이므로
$p=-\frac{\pi}{4}$
$\therefore pq=-\frac{\pi}{4}\times 4=-\pi$

43-1 답 $\frac{\pi}{4}$

$\tan x=t$라 하면 $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $-1\le t\le 1$
이때 주어진 함수는
$y=t^2+2t-3=(t+1)^2-4$이므로
$t=1$일 때 최대이고, 최댓값은 $2^2-4=0$
$\therefore q=0$
또 $t=1$, 즉 $\tan x=1$에서 $x=\frac{\pi}{4}\left(\because -\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$이므로
$p=\frac{\pi}{4}$
$\therefore p+q=\frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{4}$

44 답 6

$y=\sin^2 x+2\sin\left(\frac{5}{2}\pi+x\right)+k+1$
$=1-\cos^2 x+2\cos x+k+1$
$=-\cos^2 x+2\cos x+k+2$
$\cos x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$
이때 주어진 함수는
$y=-t^2+2t+k+2=-(t-1)^2+k+3$이므로
$t=-1$일 때 최소이고, 최솟값은 $-(-2)^2+k+3=k-1$
즉 $k-1=5$이므로 $k=6$

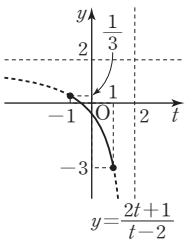
44-1 답 8

$y=2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\sin(\pi+x)+k$
$=2\cos^2 x+2\sin x+k$
$=2(1-\sin^2 x)+2\sin x+k$
$=-2\sin^2 x+2\sin x+k+2$ ……❶
$\sin x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$
이때 주어진 함수는
$y=-2t^2+2t+k+2=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{5}{2}$이므로
$t=\frac{1}{2}$일 때 최대이고, 최댓값은 $k+\frac{5}{2}$
즉 $k+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$이므로 $k=-2$ ……❷
또 주어진 함수는 $t=-1$일 때 최소이고, 최솟값 m은
$m=-2-2+k+2=k-2$
$=-2-2=-4$ ……❸
$\therefore km=-2\times(-4)=8$ ……❹

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 한 종류의 삼각함수로 나타낼 수 있다.	30%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ m의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ km의 값을 구할 수 있다.	10%

45 답 -1

$\sin x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$
이때 주어진 함수는
$y=\frac{2t+1}{t-2}=\frac{2(t-2)+5}{t-2}=\frac{5}{t-2}+2$
따라서 오른쪽 그림에서
$t=-1$일 때 최대이고, 최댓값 M은
$M=\frac{1}{3}$
$t=1$일 때 최소이고, 최솟값 m은
$m=-3$
$\therefore Mm=\frac{1}{3}\times(-3)=-1$



45-1 답 3π

$\sin x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$

이때 주어진 함수는

$y=\dfrac{1-t}{t+2}=\dfrac{-(t+2)+3}{t+2}=\dfrac{3}{t+2}-1$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최대이고,

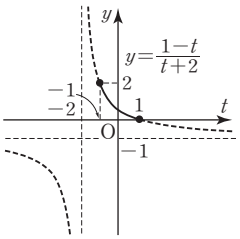
최댓값은 2이므로 $b=2$

또 $t=-1$, 즉 $\sin x=-1$에서

$x=\dfrac{3}{2}\pi$ ($\because 0\le x<2\pi$)이므로

$a=\dfrac{3}{2}\pi$

$\therefore ab=\dfrac{3}{2}\pi\times 2=3\pi$



46 답 ②

$y=\dfrac{2\cos x-1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+2}=\dfrac{2\cos x-1}{\cos x+2}$

$\cos x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$

이때 주어진 함수는

$y=\dfrac{2t-1}{t+2}=\dfrac{2(t+2)-5}{t+2}=-\dfrac{5}{t+2}+2$

따라서 오른쪽 그림에서

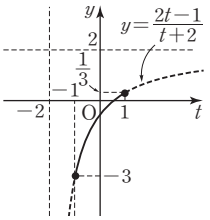
$t=1$일 때 최대이고, 최댓값 M은

$M=\dfrac{1}{3}$

$t=-1$일 때 최소이고, 최솟값 m은

$m=-3$

$\therefore Mm=\dfrac{1}{3}\times(-3)=-1$



46-1 답 ②

$\cos x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$

이때 주어진 함수는

$y=\dfrac{-2t+1}{t-2}=\dfrac{-2(t-2)-3}{t-2}=-\dfrac{3}{t-2}-2$

따라서 오른쪽 그림에서

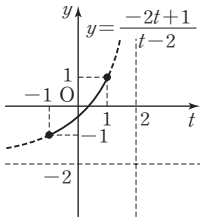
$t=1$일 때 최대이고, 최댓값 M은

$M=1$

$t=-1$일 때 최소이고, 최솟값 m은

$m=-1$

$\therefore M-m=1-(-1)=2$



47 답 $\dfrac{1}{2}$

$\tan x=t$라 하면 $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$에서 $0\le t\le 1$

이때 주어진 함수는

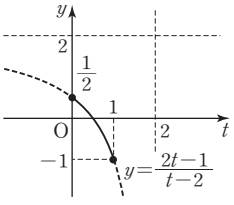
$y=\dfrac{2t-1}{t-2}=\dfrac{2(t-2)+3}{t-2}=\dfrac{3}{t-2}+2$ ……❶

오른쪽 그림에서 $t=0$, 즉 $x=0$일 때

최대이고, 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$이므로

$a=0,\ b=\dfrac{1}{2}$ ……❷

$\therefore a+b=0+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ ……❸



채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 t에 대한 함수로 나타낼 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

47-1 답 $\dfrac{3}{2}$

$\tan x=t$라 하면 $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$에서 $0\le t\le 1$

이때 주어진 함수는

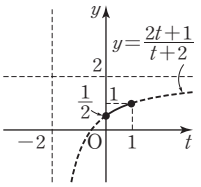
$y=\dfrac{2t+1}{t+2}=\dfrac{2(t+2)-3}{t+2}=-\dfrac{3}{t+2}+2$

따라서 오른쪽 그림에서

$t=1$일 때 최대이고, 최댓값 M은 $M=1$

$t=0$일 때 최소이고, 최솟값 m은 $m=\dfrac{1}{2}$

$\therefore M+m=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$



48 답 $\dfrac{5}{6}\pi$

$2x-\dfrac{\pi}{3}=t$라 하면 $0\le x<\pi$에서 $-\dfrac{\pi}{3}\le t<\dfrac{5}{3}\pi$

이때 주어진 방정식은 $\sin t=\dfrac{1}{2}$

오른쪽 그림과 같이

$-\dfrac{\pi}{3}\le t<\dfrac{5}{3}\pi$에서 함수

$y=\sin t$의 그래프와 직선

$y=\dfrac{1}{2}$의 교점의 t좌표는

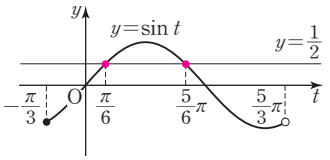
$\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi$이므로

$2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{6}\pi$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{7}{12}\pi$

따라서 모든 근의 합은

$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{7}{12}\pi=\dfrac{5}{6}\pi$



48-1 답 $\dfrac{\pi}{2}$

$x-\dfrac{\pi}{4}=t$라 하면 $0\le x<2\pi$에서 $-\dfrac{\pi}{4}\le t<\dfrac{7}{4}\pi$

이때 주어진 방정식은 $\cos t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

오른쪽 그림과 같이

$-\dfrac{\pi}{4}\le t<\dfrac{7}{4}\pi$에서 함수

$y=\cos t$의 그래프와 직선

$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 t좌표는

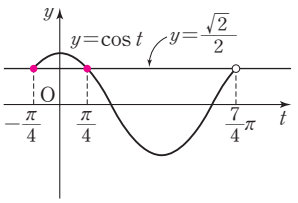
$-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}$이므로

$x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{2}$

따라서 모든 근의 합은

$0+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$

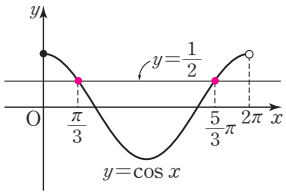


49 답 $\sqrt{3}$

$2\cos x-1=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표는

$\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$이므로



$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$이므로

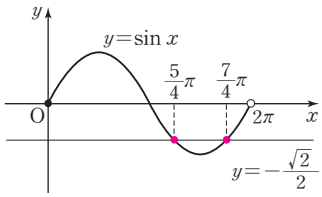
$\tan(\beta-\alpha)=\tan\left(\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{4}{3}\pi$

$=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

49-1 답 3π

$2\sin x=-\sqrt{2}$에서 $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표는 $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이므로



$x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

따라서 모든 근의 합은

$\frac{5}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi=3\pi$

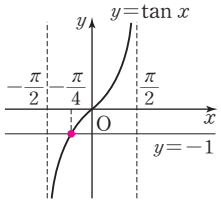
50 답 ②

$\sin x+\cos x=0$에서 $\sin x=-\cos x$ ……㉠

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos x\neq0$이므로 ㉠의 양변을 $\cos x$로 나누면

$\frac{\sin x}{\cos x}=-1$ $\therefore \tan x=-1$

오른쪽 그림과 같이 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=-1$의 교점의 x좌표는 $-\frac{\pi}{4}$이므로



$x=-\frac{\pi}{4}$

50-1 답 ③

$2\sin x=\sqrt{3}\tan x$에서 $2\sin x=\sqrt{3}\times\frac{\sin x}{\cos x}$

이때 $0\le x<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos x\neq0$이므로 양변에 $\cos x$를 곱하면

$2\sin x\cos x=\sqrt{3}\sin x$, $\sin x(2\cos x-\sqrt{3})=0$

$\therefore \sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(i) $\sin x=0$일 때, $x=0$

(ii) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때, $x=\frac{\pi}{6}$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은

$0+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$

51 답 $\frac{7}{2}\pi$

$2\cos^2x+\sin x-1=0$에서 $2(1-\sin^2x)+\sin x-1=0$

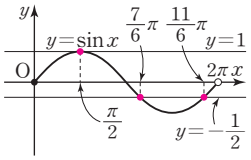
$2\sin^2x-\sin x-1=0$, $(2\sin x+1)(\sin x-1)=0$

$\therefore \sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

(i) $\sin x=-\frac{1}{2}$일 때

$0\le x<2\pi$이므로

$x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$



(ii) $\sin x=1$일 때

$0\le x<2\pi$이므로 $x=\frac{\pi}{2}$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은

$\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{7}{2}\pi$

51-1 답 2π

$2\sin^2x+3\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=3$에서

$2(1-\cos^2x)+3\cos x-3=0$

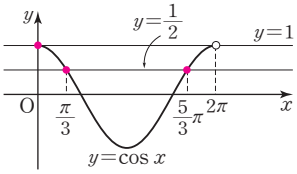
$2\cos^2x-3\cos x+1=0$, $(2\cos x-1)(\cos x-1)=0$

$\therefore \cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=1$

(i) $\cos x=\frac{1}{2}$일 때

$0\le x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$



(ii) $\cos x=1$일 때

$0\le x<2\pi$이므로 $x=0$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은

$\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi+0=2\pi$

52 답 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$4\sin^2A-4\cos A-5=0$에서 $4(1-\cos^2A)-4\cos A-5=0$

$4\cos^2A+4\cos A+1=0$, $(2\cos A+1)^2=0$

$\therefore \cos A=-\frac{1}{2}$

$0<A<\pi$이므로 $A=\frac{2}{3}\pi$

이때 $A+B+C=\pi$이므로

$B+C=\pi-A=\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \tan\left(\pi-\frac{B+C}{2}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

52-1 답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$A+B+C=\pi$이므로 $B+C=\pi-A$

$4\sin^2(B+C)-4\cos A-1=0$에서

$4\sin^2(\pi-A)-4\cos A-1=0$

$4\sin^2A-4\cos A-1=0$, $4(1-\cos^2A)-4\cos A-1=0$

$4\cos^2A+4\cos A-3=0$, $(2\cos A-1)(2\cos A+3)=0$

$\therefore \cos A=\frac{1}{2}$ ($\because -1<\cos A<1$)

$0<A<\pi$이므로 $A=\frac{\pi}{3}$ ……❶

이때 $A+B+C=\pi$이므로

$B+C=\pi-A=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

$\therefore \sin\left(\pi+\frac{B+C}{2}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ……❷

채점 기준	비율
❶ A의 값을 구할 수 있다.	60%
❷ $\sin\left(\pi+\frac{B+C}{2}\right)$의 값을 구할 수 있다.	40%

53 답 $\frac{\pi}{2}$

$\cos x=\sin x+1$의 양변을 제곱하면 $\cos^2 x=(\sin x+1)^2$

$\cos^2 x=\sin^2 x+2\sin x+1$, $1-\sin^2 x=\sin^2 x+2\sin x+1$

$2\sin^2 x+2\sin x=0$, $2\sin x(\sin x+1)=0$

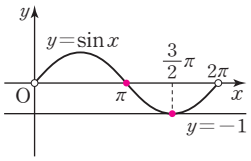
$\therefore \sin x=0$ 또는 $\sin x=-1$

(i) $\sin x=0$일 때

$0<x<2\pi$이므로 $x=\pi$

(ii) $\sin x=-1$일 때

$0<x<2\pi$이므로 $x=\frac{3}{2}\pi$



(i), (ii)에서 두 근의 차는

$\frac{3}{2}\pi-\pi=\frac{\pi}{2}$

53-1 답 ③

$\frac{3\sin\theta}{\cos\theta}+2\cos\theta=0$에서 $\cos\theta\neq0$이므로 양변에 $\cos\theta$를 곱하면

$3\sin\theta+2\cos^2\theta=0$, $3\sin\theta+2(1-\sin^2\theta)=0$

$2\sin^2\theta-3\sin\theta-2=0$, $(2\sin\theta+1)(\sin\theta-2)=0$

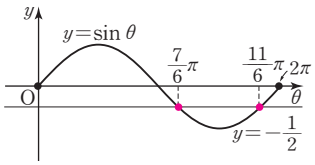
$\therefore \sin\theta=-\frac{1}{2}$ ($\because -1\le\sin\theta\le1$)

$0\le\theta\le2\pi$이므로

$\theta=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\theta=\frac{11}{6}\pi$

따라서 모든 근의 합은

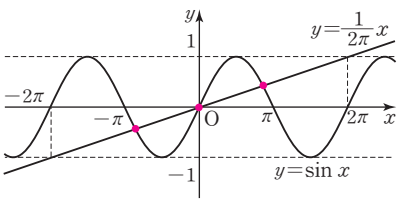
$\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi=3\pi$



54 답 3

$2\pi\sin x=x$에서 $\sin x=\frac{1}{2\pi}x$

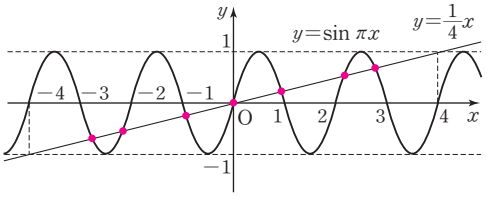
즉 방정식 $\sin x=\frac{1}{2\pi}x$의 실근은 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2\pi}x$의 교점의 x좌표와 같다.



위의 그림에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2\pi}x$의 교점의 개수는 3이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

54-1 답 7

방정식 $\sin\pi x=\frac{1}{4}x$의 실근은 함수 $y=\sin\pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}x$의 교점의 x좌표와 같다.



위의 그림에서 함수 $y=\sin\pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}x$의 교점의 개수는 7이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

55 답 4

$(\sin x-\cos x)\cos x=0$에서

$\sin x=\cos x$ 또는 $\cos x=0$

(i) $\sin x=\cos x$일 때

$0<x<2\pi$이므로 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

(ii) $\cos x=0$일 때

$0<x<2\pi$이므로 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

55-1 답 4

$(\tan x-1)(2\sin x-1)=0$에서

$\tan x=1$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

(i) $\tan x=1$일 때

$0<x<2\pi$이므로 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

(ii) $\sin x=\frac{1}{2}$일 때

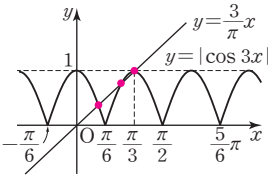
$0<x<2\pi$이므로 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

56 답 3

방정식 $|\cos3x|=\frac{3}{\pi}x$의 실근은 함수 $y=|\cos3x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{\pi}x$의 교점의 x좌표와 같다.

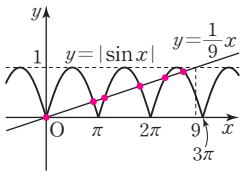
오른쪽 그림에서 함수 $y=|\cos3x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{\pi}x$의 교점의 개수는 3이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



56-1 답 6

방정식 $|\sin x|=\frac{1}{9}x$의 실근은 함수 $y=|\sin x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{9}x$의 교점의 x좌표와 같다.

오른쪽 그림에서 함수 $y=|\sin x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{9}x$의 교점의 개수는 6이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.



57 답 $-2\le k\le 2$

$\cos^2 x-2\sin x-k=0$에서

$1-\sin^2 x-2\sin x-k=0$

$\therefore -\sin^2 x-2\sin x+1=k$

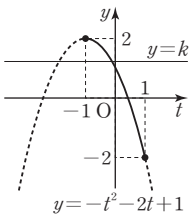
주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=-\sin^2 x-2\sin x+1$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재해야 한다.

$y=-\sin^2 x-2\sin x+1$에서 $\sin x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-t^2-2t+1=-(t+1)^2+2$

오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 가지려면

$-2\le k\le 2$



57-1 답 $-5\le k\le 3$

$2\sin^2 x+4\cos x-1=k$에서

$2(1-\cos^2 x)+4\cos x-1=k$

$\therefore -2\cos^2 x+4\cos x+1=k$

주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=-2\cos^2 x+4\cos x+1$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재해야 한다.

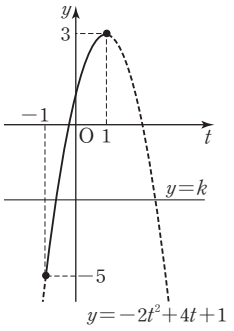
$y=-2\cos^2 x+4\cos x+1$에서

$\cos x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-2t^2+4t+1=-2(t-1)^2+3$

오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 가지려면

$-5\le k\le 3$



58 답 $\frac{9}{4}$

$-\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)+\cos(\pi+x)+k-1=0$에서

$-(-\sin x)^2-\cos x+k-1=0$

$\sin^2 x+\cos x+1=k$, $1-\cos^2 x+\cos x+1=k$

$\therefore -\cos^2 x+\cos x+2=k$

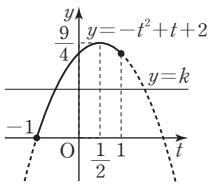
주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=-\cos^2 x+\cos x+2$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재해야 한다.

$y=-\cos^2 x+\cos x+2$에서 $\cos x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-t^2+t+2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 $0\le k\le\frac{9}{4}$

따라서 실수 k의 최댓값은 $\frac{9}{4}$이다.



58-1 답 -2

$\cos^2 x+2\sin(\pi+x)+k=0$에서

$1-\sin^2 x-2\sin x+k=0$

$\therefore \sin^2 x+2\sin x-1=k$

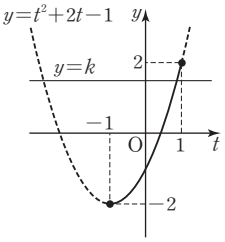
주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=\sin^2 x+2\sin x-1$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재해야 한다.

$y=\sin^2 x+2\sin x-1$에서 $\sin x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$이고

$y=t^2+2t-1=(t+1)^2-2$

오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 $-2\le k\le 2$

따라서 실수 k의 최솟값은 -2이다.



59 답 -9

$2\sin x+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)=a$에서

$2\sin x+\sin x=a$ $\quad\therefore 3\sin x=a$

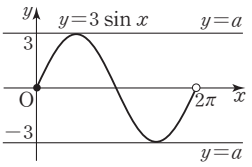
주어진 방정식이 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=3\sin x$의 그래프와 직선 $y=a$가 한 점에서 만나야 한다. …… ❶

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=3\sin x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=3\sin x$의 그래프와 직선 $y=a$가 한 점에서 만나려면

$a=-3$ 또는 $a=3$ …… ❷

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$-3\times 3=-9$ …… ❸



채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식이 하나의 실근을 가질 조건을 알 수 있다.	40%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 모든 실수 a의 값의 곱을 구할 수 있다.	10%

59-1 답 1

$\cos(\pi+x)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+1=k$에서

$-\cos x\times\cos x+1=k$

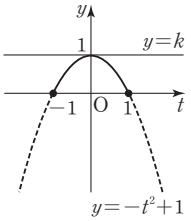
$\therefore -\cos^2 x+1=k$

주어진 방정식이 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=-\cos^2 x+1$의 그래프와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 한다.

$y=-\cos^2 x+1$에서 $\cos x=t$라 하면

$-1\le t\le 1$이고 $y=-t^2+1$

오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 값은 1이다.



60 답 $0<x<\frac{\pi}{3}$

$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>\sqrt{3}$에서 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x+\frac{\pi}{3}=t$라 하면 $0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$

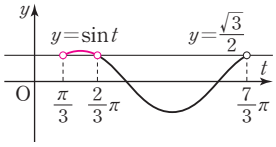
이때 주어진 부등식은 $\sin t>\frac{\sqrt{3}}{2}$

오른쪽 그림에서 t의 값의 범위는

$\frac{\pi}{3}<t<\frac{2}{3}\pi$이므로

$\frac{\pi}{3}<x+\frac{\pi}{3}<\frac{2}{3}\pi$

$\therefore 0<x<\frac{\pi}{3}$



60-1 답 $0\le x<\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{7}{6}\pi<x<2\pi$

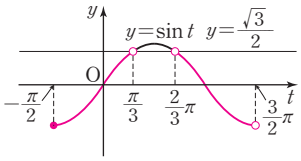
$2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)<\sqrt{3}$에서 $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x-\frac{\pi}{2}=t$라 하면 $0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{2}\le t<\frac{3}{2}\pi$

이때 주어진 부등식은 $\sin t<\frac{\sqrt{3}}{2}$

오른쪽 그림에서 t의 값의 범위는

$-\frac{\pi}{2}\le t<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{2}{3}\pi<t<\frac{3}{2}\pi$



이므로

$-\frac{\pi}{2}\le x-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{3}$ 또는

$\frac{2}{3}\pi<x-\frac{\pi}{2}<\frac{3}{2}\pi$

$\therefore 0\le x<\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{7}{6}\pi<x<2\pi$

61 답 $\frac{5}{6}\pi$

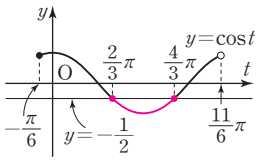
$2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\le-1$에서 $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\le-\frac{1}{2}$

$x-\frac{\pi}{6}=t$라 하면 $0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{6}\le t<\frac{11}{6}\pi$

이때 주어진 부등식은 $\cos t\le-\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 t의 값의 범위는

$\frac{2}{3}\pi\le t\le\frac{4}{3}\pi$이므로



$\frac{2}{3}\pi\le x-\frac{\pi}{6}\le\frac{4}{3}\pi$

$\therefore \frac{5}{6}\pi\le x\le\frac{3}{2}\pi$

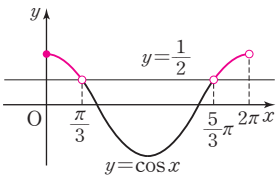
따라서 실수 x의 최솟값은 $\frac{5}{6}\pi$이다.

61-1 답 $\frac{4}{3}\pi$

$2\cos x-1>0$에서 $\cos x>\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는

$0\le x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi<x<2\pi$



따라서 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$

62 답 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{2}{3}\pi$

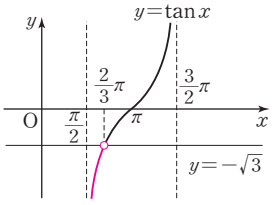
$\sin x+\sqrt{3}\cos x>0$에서 $\sin x>-\sqrt{3}\cos x$

$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$에서 $\cos x<0$이므로 양변을 $\cos x$로 나누면

$\frac{\sin x}{\cos x}<-\sqrt{3}$ $\therefore \tan x<-\sqrt{3}$

오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는

$\frac{\pi}{2}<x<\frac{2}{3}\pi$

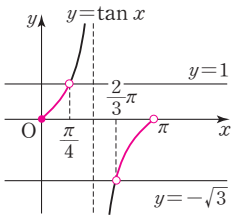


62-1 답 $0\le x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{2}{3}\pi<x<\pi$

주어진 부등식의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 두 직선 $y=-\sqrt{3}$과 $y=1$ 사이에 있는 x의 값의 범위이다.

오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는

$0\le x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{2}{3}\pi<x<\pi$



63 답 $\frac{2}{3}\pi$

$2\cos^2x-\sin x-1<0$에서 $2(1-\sin^2x)-\sin x-1<0$

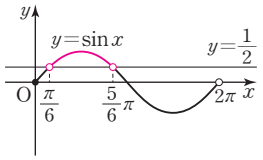
$2\sin^2x+\sin x-1>0$, $(\sin x+1)(2\sin x-1)>0$

이때 $0\le x<2\pi$에서 $\sin x+1\ge0$이므로

$2\sin x-1>0$ $\therefore \sin x>\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$



따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$

63-1 답 $\frac{7}{6}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$

$2\cos^2x-5\sin x-4>0$에서 $2(1-\sin^2x)-5\sin x-4>0$

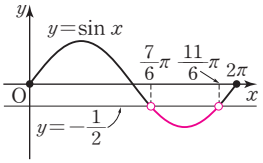
$2\sin^2x+5\sin x+2<0$, $(2\sin x+1)(\sin x+2)<0$

이때 $0\le x\le2\pi$에서 $\sin x+2>0$이므로

$2\sin x+1<0$ $\therefore \sin x<-\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는

$\frac{7}{6}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$



64 답 ③

$2\sin^2x+3\cos x\le0$에서 $2(1-\cos^2x)+3\cos x\le0$

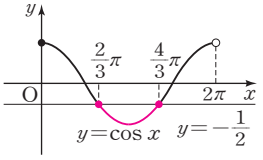
$2\cos^2x-3\cos x-2\ge0$, $(2\cos x+1)(\cos x-2)\ge0$

이때 $0\le x<2\pi$에서 $\cos x-2<0$이므로

$2\cos x+1\le0$ $\therefore \cos x\le-\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는

$\frac{2}{3}\pi\le x\le\frac{4}{3}\pi$



64-1 답 $\frac{4}{3}\pi$

$2\sin^2x+5\cos x>4$에서 $2(1-\cos^2x)+5\cos x>4$

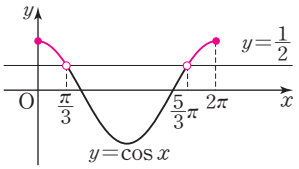
$2\cos^2x-5\cos x+2<0$, $(2\cos x-1)(\cos x-2)<0$

이때 $0\le x\le2\pi$에서 $\cos x-2<0$이므로

$2\cos x-1>0$ $\therefore \cos x>\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는

$0 \le x < \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi < x \le 2\pi$



따라서 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$

65 답 $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi \le x < 2\pi$

$2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-3\cos(\pi+x)-3 \ge 0$에서

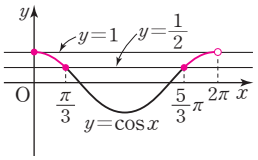
$2(-\sin x)^2+3\cos x-3 \ge 0$, $2\sin^2 x+3\cos x-3 \ge 0$

$2(1-\cos^2 x)+3\cos x-3 \ge 0$, $2\cos^2 x-3\cos x+1 \le 0$

$(2\cos x-1)(\cos x-1) \le 0$ $\therefore \frac{1}{2} \le \cos x \le 1$

오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는

$0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi \le x < 2\pi$



65-1 답 $0 \le x \le \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi \le x < 2\pi$

$\cos^2 x-\sin^2 x-5\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)+3 \ge 0$에서

$\cos^2 x-(1-\cos^2 x)+5\cos x+3 \ge 0$

$2\cos^2 x+5\cos x+2 \ge 0$

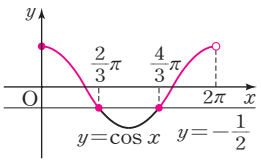
$(2\cos x+1)(\cos x+2) \ge 0$

이때 $0 \le x < 2\pi$에서 $\cos x+2>0$이므로

$2\cos x+1 \ge 0$ $\therefore \cos x \ge -\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는

$0 \le x \le \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi \le x < 2\pi$



유형 완성하기 p. 171

66 답 ③

이차방정식 $x^2-4x\cos\theta+1=0$이 중근을 가지므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2\cos\theta)^2-1=0$, $4\cos^2\theta-1=0$

$(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=0$

$\therefore \cos\theta=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos\theta=\frac{1}{2}$

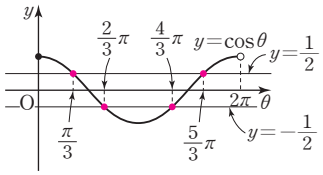
(i) $\cos\theta=-\frac{1}{2}$일 때

$0 \le \theta < 2\pi$이므로

$\theta=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi$

(ii) $\cos\theta=\frac{1}{2}$일 때

$0 \le \theta < 2\pi$이므로



$\theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\frac{5}{3}\pi$

(i), (ii)에서 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{5}{3}\pi$이므로 θ의 값이 아닌 것은 ③이다.

67 답 ⑤

이차함수 $y=x^2-2x\sin\theta-(\cos\theta+1)$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2-2x\sin\theta-(\cos\theta+1)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-\sin\theta)^2+\cos\theta+1=0$, $\sin^2\theta+\cos\theta+1=0$

$1-\cos^2\theta+\cos\theta+1=0$, $\cos^2\theta-\cos\theta-2=0$

$(\cos\theta+1)(\cos\theta-2)=0$

이때 $0 \le \theta \le \pi$에서 $\cos\theta-2 \ne 0$이므로

$\cos\theta+1=0$, $\cos\theta=-1$ $\therefore \theta=\pi$

68 답 $\frac{\pi}{6}$

$y=x^2-2x\sin\theta+\cos^2\theta$

$=(x-\sin\theta)^2-\sin^2\theta+\cos^2\theta$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(\sin\theta, -\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

꼭짓점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$-\sin^2\theta+\cos^2\theta=\sin\theta$, $-\sin^2\theta+(1-\sin^2\theta)=\sin\theta$

$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$, $(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)=0$

이때 $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta+1 \ne 0$이므로

$2\sin\theta-1=0$, $\sin\theta=\frac{1}{2}$ $\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$

69 답 π

모든 실수 x에 대하여 $x^2-4x\cos\theta+6\sin\theta \ge 0$이 성립하므로 이차방정식 $x^2-4x\cos\theta+6\sin\theta=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2\cos\theta)^2-6\sin\theta \le 0$, $2\cos^2\theta-3\sin\theta \le 0$

$2(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta \le 0$, $2\sin^2\theta+3\sin\theta-2 \ge 0$

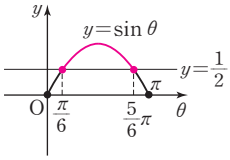
$(\sin\theta+2)(2\sin\theta-1) \ge 0$

이때 $0 \le \theta \le \pi$에서 $\sin\theta+2>0$이므로

$2\sin\theta-1 \ge 0$ $\therefore \sin\theta \ge \frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5}{6}\pi$



따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\pi$

70 답 $\frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi$

이차방정식 $x^2+4x\cos\theta+6\sin\theta+6=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

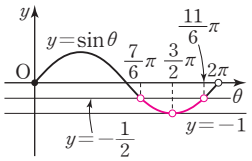
$\frac{D}{4}=4\cos^2\theta-(6\sin\theta+6)>0$, $4(1-\sin^2\theta)-6\sin\theta-6>0$

$2\sin^2\theta+3\sin\theta+1<0$, $(\sin\theta+1)(2\sin\theta+1)<0$

$\therefore -1<\sin\theta<-\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$\frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi$



71 답 $0\le\theta<\frac{5}{4}\pi$ 또는 $\frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$

$y=x^2-2x\sin\theta-\cos^2\theta$

$=x^2-2x\sin\theta-(1-\sin^2\theta)$

$=(x-\sin\theta)^2-1$

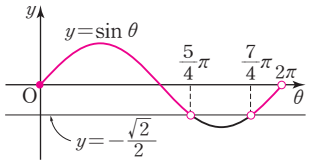
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(\sin\theta, -1)$

꼭짓점이 직선 $y=\sqrt{2}x$의 아래쪽에 있으므로

$-1<\sqrt{2}\sin\theta$ $\therefore \sin\theta>-\frac{\sqrt{2}}{2}$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$0\le\theta<\frac{5}{4}\pi$ 또는 $\frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$



학교 시험 대비 문제

p. 172~175

01 답 ⑤

함수 $f(x)$의 주기가 p이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x+p)=f(x)$

따라서 $f(3p)=f(2p+p)=f(2p)=f(p+p)=f(p)=f(0)$

이므로

$f(3p)=f(0)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

02 답 ①

함수 $y=\sin 4x$의 그래프를 x축의 방향으로 $a\pi$만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-b=\sin 4(x-a\pi)$ $\therefore y=\sin(4x-4a\pi)+b$

이때 $y=\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)+1=\sin(4x-4a\pi)+b$이므로

$4a\pi=\frac{\pi}{2}, b=1$ $\therefore a=\frac{1}{8}, b=1$

$\therefore 8ab=8\times\frac{1}{8}\times1=1$

03 답 ④

함수 $y=\tan x$의 주기는 π이다.

ㄱ. 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$ ㄴ. 주기는 π

ㄷ. 주기는 2π ㄹ. 주기는 π

따라서 함수 $y=\tan x$와 주기가 같은 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

04 답 ⑤

① 주기는 $\frac{2\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

② 최댓값은 $2+1=3$

③ 최솟값은 $-2+1=-1$

④ $x=0$을 대입하면 $y=2\cos(-\pi)+1=-2+1=-1$

즉 주어진 함수의 그래프는 점 $(0, -1)$을 지난다.

⑤ $y=2\cos(3x-\pi)+1=2\cos 3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$의 그래프는

$y=2\cos 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

05 답 $-\frac{3}{4}$

함수 $f(x)=\sin\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로

$b=1-a, c=2+a$

이때 $a+b+c=a+(1-a)+(2+a)=3+a$이므로

$f(a+b+c)=f(3+a)=\sin(3\pi+a\pi)=-\sin a\pi$

$=-f(a)=-\frac{3}{4}$

06 답 15

$f(x)=a\cos\left(\frac{\pi}{2}-bx\right)+c$에서 최댓값이 5이고 $a>0$이므로

$a+c=5$ ……㉠

주기가 2π이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=2\pi$ $\therefore b=1$

즉 $f(x)=a\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+c$이고 $f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=3$이므로

$3=a\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+c, \frac{a}{2}+c=3$

$\therefore a+2c=6$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4, c=1$

$\therefore 3a+2b+c=3\times4+2\times1+1=15$

07 답 ①

함수 $y=\cos a(x+b)+1$의 주기가 $\frac{2}{3}\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$이고 $a>0$

이므로 $\frac{2\pi}{a}=\pi$ $\therefore a=2$

즉 $y=\cos 2(x+b)+1$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같으므로

$y=\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1$ $\therefore b=\frac{\pi}{3}$ ($\because 0<b<\pi$)

$\therefore ab=2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

08 답 $\frac{\pi}{3}$

함수 $y=\left|\cos\frac{\pi}{3}x\right|$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}}=3$

$a>0$이므로 함수 $y=\tan ax$의 주기는 $\frac{\pi}{a}$

즉 $3=\frac{\pi}{a}$이므로 $a=\frac{\pi}{3}$

09 답 ③

$\frac{\pi}{4}+x=\theta$라 하면 $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$에서 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{4}-\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$

$\therefore \tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\tan\theta\times\frac{1}{\tan\theta}=1$

10 답 ③

$\theta=\frac{\pi}{18}$에서 $18\theta=\pi$이므로

$\cos 19\theta=\cos(18\theta+\theta)=\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\cos 20\theta=\cos(18\theta+2\theta)=\cos(\pi+2\theta)=-\cos 2\theta$

$\cos 21\theta=\cos(18\theta+3\theta)=\cos(\pi+3\theta)=-\cos 3\theta$

$\vdots$

$\cos 36\theta=\cos(18\theta+18\theta)=\cos(\pi+18\theta)=-\cos 18\theta$

$\therefore \cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 36\theta$

$=(\cos\theta+\cos 19\theta)+(\cos 2\theta+\cos 20\theta)$

$+(\cos 3\theta+\cos 21\theta)+\cdots+(\cos 18\theta+\cos 36\theta)$

$=(\cos\theta-\cos\theta)+(\cos 2\theta-\cos 2\theta)$

$+(\cos 3\theta-\cos 3\theta)+\cdots+(\cos 18\theta-\cos 18\theta)$

$=0$

11 답 ③

삼각형 ABC에서 세 내각의 크기의 합은 π이므로

$A+B+C=\pi$

ㄱ. $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로 $B=C$

$A+B+C=\pi$에서 $A+2B=\pi$이므로 $A=\pi-2B$

$\therefore \sin A=\sin(\pi-2B)=\sin 2B$

ㄴ. ㄱ에서 $A=\pi-2B$이므로

$\cos\frac{A}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\sin B$

ㄷ. ㄱ에서 $A=\pi-2B=\pi-2C$이므로

$\tan A=\tan(\pi-2C)=-\tan 2C$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

12 답 2

$-1\le\cos 2x\le 1$이므로 $-3\le\cos 2x-2\le-1$

$1\le|\cos 2x-2|\le 3$, $3\le 3|\cos 2x-2|\le 9$

$\therefore 3+k\le 3|\cos 2x-2|+k\le 9+k$

따라서 최댓값은 $9+k$, 최솟값은 $3+k$이므로

$9+k+3+k=16$, $2k+12=16$

$2k=4$ $\therefore k=2$

13 답 ②

$y=\cos^2 x+2\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)+k+1$

$=(1-\sin^2 x)+2\sin x+k+1$

$=-\sin^2 x+2\sin x+k+2$

$\sin x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$

이때 주어진 함수는

$y=-t^2+2t+k+2=-(t-1)^2+k+3$이므로

$t=-1$일 때 최소이고, 최솟값은 $k-1$

즉 $k-1=1$이므로 $k=2$

14 답 0

$\tan x=t$라 하면 $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $-1\le t\le 1$

이때 주어진 함수는

$y=\frac{2t-1}{t-2}=\frac{2(t-2)+3}{t-2}=\frac{3}{t-2}+2$이므로

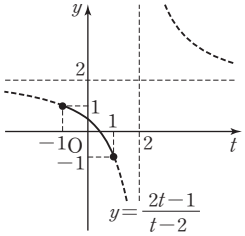
$t=-1$일 때 최대이고, 최댓값 M은

$M=1$

$t=1$일 때 최소이고, 최솟값 m은

$m=-1$

$\therefore M+m=1+(-1)=0$



15 답 $-\sqrt{3}$

$4\cos^2 A+4\sin A-5=0$에서 $4(1-\sin^2 A)+4\sin A-5=0$

$4\sin^2 A-4\sin A+1=0$, $(2\sin A-1)^2=0$

$\therefore \sin A=\frac{1}{2}$

$0<A<\frac{\pi}{2}$이므로 $A=\frac{\pi}{6}$

이때 $A+B+C=\pi$이므로

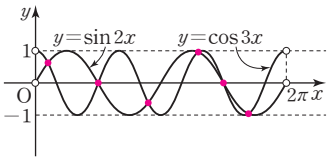
$B+C=\pi-A=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi$

$\therefore \tan\left(\frac{\pi}{2}-B-C\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\pi\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

16 답 ③

방정식 $\sin 2x=\cos 3x$의 실근은 두 함수 $y=\sin 2x$, $y=\cos 3x$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.



위의 그림과 같이 $0<x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sin 2x$, $y=\cos 3x$의 그래프의 교점의 개수는 6이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

17 답 ①

$\cos^2 x+2\sin x-a=0$에서 $1-\sin^2 x+2\sin x-a=0$

$\therefore -\sin^2 x+2\sin x+1=a$

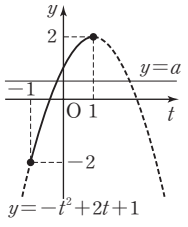
주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=-\sin^2 x+2\sin x+1$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 존재해야 한다.

$y=-\sin^2 x+2\sin x+1$에서 $\sin x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-t^2+2t+1=-(t-1)^2+2$

오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 가지려면

$-2\le a\le 2$



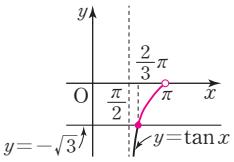
18 답 $\frac{2}{3}\pi \le x < \pi$

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$에서 $\cos x < 0$이므로 $\sin x + \sqrt{3}\cos x \le 0$의 양변을 $\cos x$로 나누면

$\frac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{3} \ge 0$ $\quad \therefore \tan x \ge -\sqrt{3}$

오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는

$\frac{2}{3}\pi \le x < \pi$



19 답 $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi \le x < 2\pi$

$2\sin^2 x - 5\cos x + 1 \le 0$에서 $2(1-\cos^2 x) - 5\cos x + 1 \le 0$

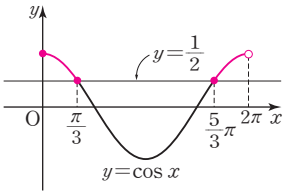
$2\cos^2 x + 5\cos x - 3 \ge 0$, $(\cos x + 3)(2\cos x - 1) \ge 0$

이때 $0 \le x < 2\pi$에서 $\cos x + 3 > 0$이므로

$2\cos x - 1 \ge 0$ $\quad \therefore \cos x \ge \frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는

$0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi \le x < 2\pi$



20 답 $\frac{5}{2}\pi$

$y = x^2 - 2x\sin\theta + \cos^2\theta$

$= (x - \sin\theta)^2 - \sin^2\theta + \cos^2\theta$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(\sin\theta, -\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

꼭짓점이 직선 $y = 2x + 1$ 위에 있으므로

$-\sin^2\theta + \cos^2\theta = 2\sin\theta + 1$, $-\sin^2\theta + 1 - \sin^2\theta = 2\sin\theta + 1$

$2\sin^2\theta + 2\sin\theta = 0$, $2\sin\theta(\sin\theta + 1) = 0$

$\therefore \sin\theta = 0$ 또는 $\sin\theta = -1$

(i) $\sin\theta = 0$일 때

$0 \le \theta < 2\pi$이므로

$\theta = 0$ 또는 $\theta = \pi$

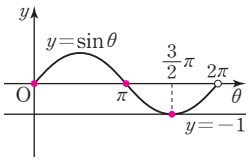
(ii) $\sin\theta = -1$일 때

$0 \le \theta < 2\pi$이므로

$\theta = \frac{3}{2}\pi$

(i), (ii)에서 모든 θ의 값의 합은

$0 + \pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{5}{2}\pi$



21 답 3

모든 실수 x에 대하여 $x^2 - 2(2\cos\theta + 1)x + 4 > 0$이 항상 성립하므로 이차방정식 $x^2 - 2(2\cos\theta + 1)x + 4 = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = \{-(2\cos\theta + 1)\}^2 - 4 < 0$

$4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 3 < 0$

$(2\cos\theta + 3)(2\cos\theta - 1) < 0$

이때 $0 \le \theta < \pi$에서 $2\cos\theta + 3 > 0$이므로

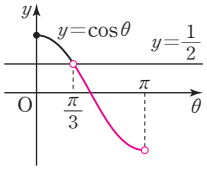
$2\cos\theta - 1 < 0$ $\quad \therefore \cos\theta < \frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$\frac{\pi}{3} < \theta < \pi$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \pi$이므로

$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} = 3$



서술형 1 답 36

$y = a\sin\left(bx + \frac{\pi}{c}\right) + d$의 최댓값이 4, 최솟값이 -2이고 $a > 0$이므로

$a + d = 4$, $-a + d = -2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a = 3$, $d = 1$ ……❶

주기가 $\frac{7}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \pi$이고 $b > 0$이므로

$\frac{2\pi}{b} = \pi$ $\quad \therefore b = 2$ ……❷

즉 $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{c}\right) + 1$이고 이 함수의 그래프가 점 $\left(0, \frac{5}{2}\right)$를 지나므로 $\frac{5}{2} = 3\sin\frac{\pi}{c} + 1$

$\sin\frac{\pi}{c} = \frac{1}{2}$ $\quad \therefore c = 6$ $(\because c > 2)$ ……❸

$\therefore abcd = 3 \times 2 \times 6 \times 1 = 36$ ……❹

채점 기준	비율
❶ a, d의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ c의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $abcd$의 값을 구할 수 있다.	10%

서술형 2 답 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$

$\pi\sin x = t$라 하면 $0 \le x \le \pi$에서 $0 \le \sin x \le 1$

$\therefore 0 \le t \le \pi$ ……❶

이때 주어진 방정식은 $\sin t = 1$

$0 \le t \le \pi$이므로 $t = \frac{\pi}{2}$ ……❷

즉 $\pi\sin x = \frac{\pi}{2}$이므로 $\sin x = \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $\pi\sin x = t$로 치환한 후 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%
❷ t의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ x의 값을 구할 수 있다.	40%

서술형 3 답 $0 \le x \le \frac{4}{3}\pi$

$x - \frac{\pi}{6} = t$라 하면 $0 \le x < 2\pi$에서

$-\frac{\pi}{6} \le t < \frac{11}{6}\pi$

또 $x + \frac{\pi}{3} = x - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = t + \frac{\pi}{2}$이므로 주어진 부등식은

$2\cos^2 t + 5\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - 4 \le 0$

$2(1 - \sin^2 t) - 5\sin t - 4 \le 0$

$2\sin^2 t+5\sin t+2\geq 0$

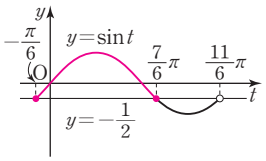
$(2\sin t+1)(\sin t+2)\geq 0$ ····· ❶

이때 $-\frac{\pi}{6}\leq t<\frac{11}{6}\pi$에서 $\sin t+2>0$이므로

$2\sin t+1\geq 0 \quad \therefore \sin t\geq -\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 t의 값의 범위는

$-\frac{\pi}{6}\leq t\leq\frac{7}{6}\pi$이므로 ····· ❷



$-\frac{\pi}{6}\leq x-\frac{\pi}{6}\leq\frac{7}{6}\pi$

$\therefore 0\leq x\leq\frac{4}{3}\pi$ ····· ❸

채점 기준	비율
❶ $x-\frac{\pi}{6}=t$로 치환하여 주어진 부등식을 t에 대한 부등식으로 변형할 수 있다.	40%
❷ t의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 176~177

01 답 ③

$y=a\tan b\pi x$의 주기가 $8-2=6$이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b\pi}=6 \quad \therefore b=\frac{1}{6}$

즉 $y=a\tan\frac{\pi}{6}x$이고 이 함수의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로

$3=a\tan\frac{\pi}{3}$, $\sqrt{3}a=3 \quad \therefore a=\sqrt{3}$

$\therefore a^2b=(\sqrt{3})^2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

02 답 8

$f(x)=3\sin\frac{\pi(x+a)}{2}+b$의 최댓값이 5, 최솟값이 -1이므로

$3+b=5$, $-3+b=-1 \quad \therefore b=2$

즉 함수 $f(x)=3\sin\frac{\pi(x+a)}{2}+2$의 그래프는 함수

$y=3\sin\frac{\pi}{2}x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $f(x)$의 주기가 4이므로 $f(x)=3\sin\frac{\pi(x+a)}{2}+2$의 그래프를 평행이동하여 $y=3\sin\frac{\pi}{2}x+2$의 그래프와 일치하려면

$a=4k$ (k는 정수)이어야 한다.

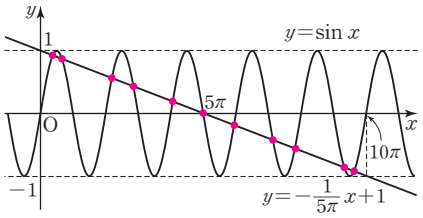
a가 양수이므로 a의 최솟값은 4이다.

따라서 ab의 최솟값은

$4\times 2=8$

03 답 ⑤

직선 $y=-\frac{1}{5\pi}x+1$과 함수 $y=\sin x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 직선 $y=-\frac{1}{5\pi}x+1$과 함수 $y=\sin x$의 그래프의 교점의 개수는 11이다.

04 답 ①

$3+2\sin^2\theta=t$라 하면

$3-2\cos^2\theta=3-2(1-\sin^2\theta)=3+2\sin^2\theta-2=t-2$

$\therefore 3+2\sin^2\theta+\frac{1}{3-2\cos^2\theta}=t+\frac{1}{\boxed{(가)}\ t-2}$

$0<\theta<2\pi$에서 $t\geq 3$이므로 $\boxed{(가)\ t-2}>0$

$t-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t-2+\frac{1}{t-2}\geq 2\sqrt{(t-2)\times\frac{1}{t-2}}$

$=2$

$t+\frac{1}{\boxed{(가)\ t-2}}=t-2+\frac{1}{\boxed{(가)\ t-2}}+2\geq 4$

이때 등호는 $t-2=\frac{1}{t-2}$일 때 성립하므로

$(t-2)^2=1$에서 $t^2-4t+4=1$

$t^2-4t+3=0$, $(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

그런데 $t\geq 3$이므로 $t=\boxed{(나)\ 3}$

즉 $3+2\sin^2\theta=3$이므로 $\sin\theta=0$

이때 $0<\theta<2\pi$이므로 $\theta=\pi$

따라서 $3+2\sin^2\theta+\frac{1}{3-2\cos^2\theta}$은 $\theta=\boxed{(다)\ \pi}$에서 최솟값 4를 갖는다.

즉 $f(t)=t-2$, $p=3$, $q=\pi$이므로

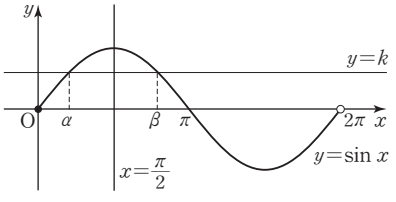
$f(p)+\tan^2\left(q+\frac{\pi}{3}\right)=f(3)+\tan^2\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=3-2+\tan^2\frac{\pi}{3}$

$=1+(\sqrt{3})^2=4$

05 답 ①

다음 그림과 같이 방정식 $\sin x=k$의 두 근 α, β는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표와 같으므로 두 점 $(\alpha, \sin\alpha)$, $(\beta, \sin\beta)$는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이다.



즉 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\alpha+\beta=\pi$ $\therefore \beta=\pi-\alpha$

$\therefore \frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{(\pi-\alpha)-\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}-\alpha$

$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{5}{7}$에서 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{5}{7}$

$\therefore \cos\alpha=\frac{5}{7}$

이때 $x=\alpha$는 방정식 $\sin x=k$의 근이므로 $\sin\alpha=k$

$k^2=\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{24}{49}$

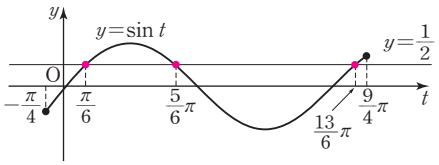
$\therefore k=\frac{2\sqrt{6}}{7}$ ($\because 0<k<1$)

06 답 24

$4\sin\frac{1}{4}(x-\pi)=2$에서 $\sin\frac{1}{4}(x-\pi)=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}(x-\pi)=t$라 하면 $0\le x\le 10\pi$에서 $-\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{9}{4}\pi$

이때 주어진 방정식은 $\sin t=\frac{1}{2}$

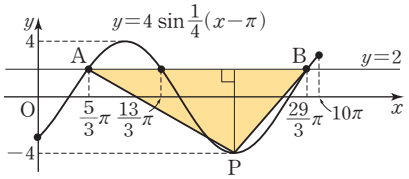


즉 $-\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{9}{4}\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{13}{6}\pi$이므로

$\frac{1}{4}(x-\pi)=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{1}{4}(x-\pi)=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{1}{4}(x-\pi)=\frac{13}{6}\pi$

$\therefore x=\frac{5}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{29}{3}\pi$

$0\le x\le 10\pi$에서 곡선 $y=4\sin\frac{1}{4}(x-\pi)$와 직선 $y=2$는 다음 그림과 같다.



△PAB의 넓이가 최대이려면 밑변의 길이가 가장 길어야 하므로 두 점 A, B는 위의 그림과 같아야 하고, 높이도 가장 길어야 하므로 점 P는 y좌표가 -4인 점이어야 한다.

따라서 △PAB의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{29}{3}\pi-\frac{5}{3}\pi\right)\times\{2-(-4)\}=\frac{1}{2}\times 8\pi\times 6=24\pi$

$\therefore k=24$

07 답 6

$0\le x\le\frac{\pi}{6}$에서 $\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{3}$

즉 함수 $g(x)=3\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$는 $0\le x\le\frac{\pi}{6}$에서 증가함수이므로

$3\tan\frac{\pi}{6}\le 3\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 3\tan\frac{\pi}{3}$

$\sqrt{3}\le 3\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 3\sqrt{3}$

$\therefore \sqrt{3}\le g(x)\le 3\sqrt{3}$

$g(x)=t$라 하면 $\sqrt{3}\le t\le 3\sqrt{3}$이고

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=\log_3 t+2$

$\sqrt{3}\le t\le 3\sqrt{3}$에서 함수 $f(t)=\log_3 t+2$는 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가하므로

$\log_3\sqrt{3}+2\le\log_3 t+2\le\log_3 3\sqrt{3}+2$

$\frac{1}{2}+2\le\log_3 t+2\le\frac{3}{2}+2$

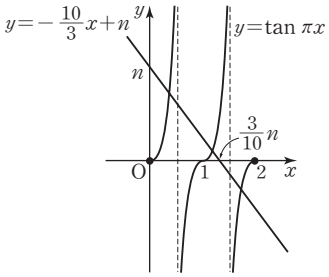
$\therefore \frac{5}{2}\le(f\circ g)(x)\le\frac{7}{2}$

따라서 $M=\frac{7}{2}$, $m=\frac{5}{2}$이므로

$M+m=\frac{7}{2}+\frac{5}{2}=6$

08 답 ⑤

함수 $y=\tan\pi x$의 주기는 $\frac{\pi}{\pi}=1$



위의 그림과 같이 $0\le x\le 2$에서 함수 $y=\tan\pi x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{10}{3}x+n$이 서로 다른 세 점에서 만나려면 직선 $y=-\frac{10}{3}x+n$의 x절편인 $\frac{3}{10}n$이 0보다 크거나 같고 2보다 작거나 같아야 하므로 $0\le\frac{3}{10}n\le 2$ $\therefore 0\le n\le\frac{20}{3}$

따라서 자연수 n의 최댓값은 6이다.

09 답 5

함수 $y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 그래프에서

(i) $k=0$일 때

$y=-6$이므로 함수의 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다.

(ii) $k>0$일 때

$y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 최댓값은 $k+(k^2-6)$

함수의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 최댓값이 0보다 작거나 같아야 하므로

$k+(k^2-6)\le 0$, $k^2+k-6\le 0$

$(k+3)(k-2)\le 0$ $\therefore -3\le k\le 2$

그런데 $k>0$이므로 $0<k\le 2$

(iii) $k<0$일 때

$y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 최댓값은 $-k+(k^2-6)$

함수의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 최댓값이 0보다 작거나 같아야 하므로

$-k+(k^2-6)\le 0$, $k^2-k-6\le 0$

$(k+2)(k-3)\le 0$ $\therefore -2\le k\le 3$

그런데 $k<0$이므로 $-2\le k<0$

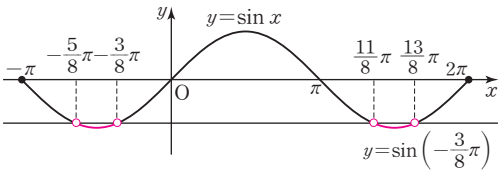
(i)~(iii)에서 $-2\le k\le 2$

따라서 정수 k의 값은 -2, -1, 0, 1, 2이므로 그 개수는 5이다.

10 답 ④

$\sin x+\cos\frac{\pi}{8}<0$에서 $\sin x<-\cos\frac{\pi}{8}$

이때 $-\cos\frac{\pi}{8}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=-\sin\frac{3}{8}\pi=\sin\left(-\frac{3}{8}\pi\right)$이므로 주어진 부등식은 $\sin x<\sin\left(-\frac{3}{8}\pi\right)$



$-\pi\le x\le 2\pi$에서 x의 값의 범위는

$-\frac{5}{8}\pi<x<-\frac{3}{8}\pi$ 또는 $\frac{11}{8}\pi<x<\frac{13}{8}\pi$

즉 $-\pi\le x\le k$에서 부등식 $\sin x<\sin\left(-\frac{3}{8}\pi\right)$를 만족시키는 모든 x의 값의 범위가 $-\pi-a<x<a$이려면 $a=-\frac{3}{8}\pi$이고

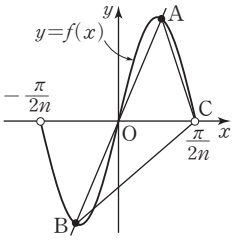
$0\le k\le\frac{11}{8}\pi$이어야 한다.

따라서 k의 최댓값은 $\frac{11}{8}\pi$이다.

11 답 ④

함수 $y=3\sin 2nx$의 주기는 $\frac{2\pi}{2n}=\frac{\pi}{n}$

오른쪽 그림과 같이 원점을 지나고 기울기가 양수인 직선이 $-\frac{\pi}{2n}<x<\frac{\pi}{2n}$에서 함수 $y=3\sin 2nx$의 그래프와 만나는 원점이 아닌 두 점 A, B는 원점에 대하여 대칭이다.



즉 실수 $t\left(-\frac{\pi}{2n}<t<\frac{\pi}{2n},\ t\neq 0\right)$에 대하여 점 A의 좌표를 $(t,\ 3\sin 2nt)$라 하면 점 B의 좌표는 $(-t,\ -3\sin 2nt)$

이때 $\triangle AOC$의 넓이와 $\triangle BOC$의 넓이가 같고 $\triangle ABC$의 넓이는 $\frac{\pi}{12}$이므로

$2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2n}\times 3|\sin 2nt|=\frac{\pi}{12}$ $\therefore\ |\sin 2nt|=\frac{n}{18}$

$0<|\sin 2nt|\le 1$이므로 $0<\frac{n}{18}\le 1$

$\therefore\ 0<n\le 18$

따라서 자연수 n의 최댓값은 18이다.

07 사인법칙과 코사인법칙

개념 완성하기 p. 181~182

01 답 $5\sqrt{2}$

사인법칙에 의하여 $\frac{10}{\sin 45^\circ}=\frac{c}{\sin 30^\circ}$이므로

$c\sin 45^\circ=10\sin 30^\circ$

$\therefore c=10\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$

02 답 $\sqrt{2}$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$이므로

$a\sin 60^\circ=\sqrt{3}\sin 45^\circ$

$\therefore a=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$

03 답 $2\sqrt{3}$

사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin 30^\circ}=\frac{c}{\sin 120^\circ}$이므로

$c\sin 30^\circ=2\sin 120^\circ$

$\therefore c=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=2\sqrt{3}$

04 답 $\sqrt{6}$

$A+B+C=180^\circ$이므로

$B=180^\circ-(A+C)=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)=45^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{b}{\sin 45^\circ}=\frac{3}{\sin 60^\circ}$이므로

$b\sin 60^\circ=3\sin 45^\circ$

$\therefore b=3\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}$

05 답 $2\sqrt{6}$

$A+B+C=180^\circ$이므로

$B=180^\circ-(A+C)=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{b}{\sin 60^\circ}=\frac{4}{\sin 45^\circ}$이므로

$b\sin 45^\circ=4\sin 60^\circ$

$\therefore b=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{2}}=2\sqrt{6}$

06 답 30°

사인법칙에 의하여 $\frac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\frac{2}{\sin B}$이므로

$2\sqrt{2}\sin B=2\sin 45^\circ$

$\therefore \sin B=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=30^\circ$ 또는 $B=150^\circ$

그런데 $B=150^\circ$이면 $A+B>180^\circ$이므로

$B=30^\circ$

07 답 90°

사인법칙에 의하여 $\frac{6}{\sin A}=\frac{3}{\sin 30^\circ}$이므로

$3\sin A=6\sin 30^\circ$

$\therefore \sin A=6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=1$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=90^\circ$

08 답 30°

사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin B}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$이므로

$2\sqrt{3}\sin B=2\sin 60^\circ$

$\therefore \sin B=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=30^\circ$ 또는 $B=150^\circ$

그런데 $B=150^\circ$이면 $B+C>180^\circ$이므로

$B=30^\circ$

09 답 30°

사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}$이므로

$2\sqrt{3}\sin A=2\sin 120^\circ$

$\therefore \sin A=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=30^\circ$ 또는 $A=150^\circ$

그런데 $A=150^\circ$이면 $A+C>180^\circ$이므로

$A=30^\circ$

10 답 15° 또는 75°

사인법칙에 의하여 $\frac{\sqrt{6}}{\sin 45^\circ}=\frac{3}{\sin B}$이므로

$\sqrt{6}\sin B=3\sin 45^\circ$

$\therefore \sin B=3\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=60^\circ$ 또는 $B=120^\circ$

(i) $B=60^\circ$일 때, $C=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=75^\circ$

(ii) $B=120^\circ$일 때, $C=180^\circ-(45^\circ+120^\circ)=15^\circ$

(i), (ii)에서 $C=15^\circ$ 또는 $C=75^\circ$

11 답 4

사인법칙에 의하여 $\frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2R$이므로

$R=\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{1}{2}=4$

12 답 5

$A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(50^\circ+100^\circ)=30^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{5}{\sin 30^\circ}=2R$이므로

$R=\frac{5}{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{2}=5$

13 답 $2\sqrt{2}$

$A+B+C=180^\circ$이므로

$B=180^\circ-(A+C)=180^\circ-(110^\circ+25^\circ)=45^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{4}{\sin 45^\circ}=2R$이므로

$R=\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{2}$

14 답 $3\sqrt{3}$

코사인법칙에 의하여

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=3^2+6^2-2\times3\times6\times\cos 60^\circ$

$=9+36-2\times3\times6\times\frac{1}{2}$

$=9+36-18=27$

이때 $c>0$이므로 $c=3\sqrt{3}$

15 답 $\sqrt{3}$

코사인법칙에 의하여

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=3^2+(2\sqrt{3})^2-2\times3\times2\sqrt{3}\times\cos 30^\circ$

$=9+12-2\times3\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=9+12-18=3$

이때 $a>0$이므로 $a=\sqrt{3}$

16 답 $\sqrt{2}$

코사인법칙에 의하여

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$=(\sqrt{2})^2+2^2-2\times\sqrt{2}\times2\times\cos 45^\circ$

$=2+4-2\times\sqrt{2}\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=2+4-4=2$

이때 $b>0$이므로 $b=\sqrt{2}$

17 답 $\sqrt{237}$

코사인법칙에 의하여

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=9^2+(4\sqrt{3})^2-2\times9\times4\sqrt{3}\times\cos 150^\circ$

$=81+48-2\times9\times4\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=81+48+108=237$

이때 $c>0$이므로 $c=\sqrt{237}$

18 답 7

코사인법칙에 의하여

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos 120^\circ$

$=9+25-2\times3\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=9+25+15=49$

이때 $b>0$이므로 $b=7$

19 답 $\frac{13}{14}$

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+7^2-3^2}{2\times5\times7}=\frac{13}{14}$

20 답 $\frac{\sqrt{2}}{10}$

$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{(4\sqrt{2})^2+5^2-7^2}{2\times4\sqrt{2}\times5}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

21 답 $\frac{13}{15}$

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{5^2+6^2-3^2}{2\times5\times6}=\frac{13}{15}$

22 답 $\frac{1}{8}$

$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\times4\times5}=\frac{1}{8}$

23 답 6

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times6\times\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\times4\times6\times\frac{1}{2}$

$=6$

24 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\sin 135^\circ$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

25 답 $3\sqrt{2}$

$\triangle ABC=\frac{36\sqrt{2}}{4\times3}=3\sqrt{2}$

26 답 $4\sqrt{3}$

$A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(30^\circ+120^\circ)=30^\circ$

$\therefore\ \triangle ABC=2\times4^2\times\sin 30^\circ\times\sin 30^\circ\times\sin 120^\circ$

$=2\times16\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=4\sqrt{3}$

27 답 4

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times c\times2\sqrt{3}\times\sin 60^\circ=6$이므로

$\frac{3}{2}c=6 \quad \therefore\ c=4$

28 답 2

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times a\times6\times\sin 45^\circ=3\sqrt{2}$이므로

$\frac{3\sqrt{2}}{2}a=3\sqrt{2} \quad \therefore\ a=2$

29 답 60° 또는 120°

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 2\times 8\times \sin A=4\sqrt{3}$이므로

$8\sin A=4\sqrt{3}$ $\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=60^\circ$ 또는 $A=120^\circ$

30 답 $6\sqrt{3}$

$\square ABCD=3\times 4\times \sin 60^\circ$

$=3\times 4\times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$=6\sqrt{3}$

31 답 $8\sqrt{2}$

$B+C=180^\circ$이므로

$C=180^\circ-B=180^\circ-135^\circ=45^\circ$

$\therefore \square ABCD=4\times 4\times \sin 45^\circ$

$=4\times 4\times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$=8\sqrt{2}$

32 답 5

$A+B=180^\circ$이므로

$B=180^\circ-A=180^\circ-150^\circ=30^\circ$

$\therefore \square ABCD=2\times 5\times \sin 30^\circ$

$=2\times 5\times \frac{1}{2}$

$=5$

33 답 120°

평행사변형의 넓이가 $4\sqrt{3}$이므로

$2\times 4\times \sin A=4\sqrt{3}$ $\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $90^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=120^\circ$

34 답 $2\sqrt{39}$

평행사변형 ABCD의 넓이가 $70\sqrt{3}$이므로

$10\times \overline{BC}\times \sin 60^\circ=70\sqrt{3}$

$5\sqrt{3}\times \overline{BC}=70\sqrt{3}$ $\therefore \overline{BC}=14$

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times \overline{AB}\times \overline{BC}\times \cos B$

$=10^2+14^2-2\times 10\times 14\times \cos 60^\circ$

$=100+196-2\times 10\times 14\times \frac{1}{2}$

$=100+196-140=156$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{156}=2\sqrt{39}$ ($\because \overline{AC}>0$)

35 답 24

$\square ABCD=\frac{1}{2}\times 8\times 12\times \sin 150^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 8\times 12\times \frac{1}{2}$

$=24$

유형 완성하기 p. 183~199

01 답 ①

사인법칙에 의하여 $\frac{10}{\sin B}=\frac{10\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$이므로

$10\sqrt{2}\sin B=10\sin 45^\circ$

$\therefore \sin B=10\times \frac{\sqrt{2}}{2}\times \frac{1}{10\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=30^\circ$ 또는 $B=150^\circ$

그런데 $B=150^\circ$이면 $B+C>180^\circ$이므로

$B=30^\circ$

01-1 답 $\frac{3}{4}$

사인법칙에 의하여 $\frac{\sqrt{3}}{\sin A}=\frac{1}{\sin 30^\circ}$이므로

$\sin A=\sqrt{3}\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=60^\circ$ 또는 $A=120^\circ$

(i) $A=60^\circ$일 때, $C=180^\circ-(60^\circ+30^\circ)=90^\circ$

(ii) $A=120^\circ$일 때, $C=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=30^\circ$

그런데 $0^\circ<C<90^\circ$이므로 $C=30^\circ$

$\therefore \cos^2 30^\circ=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

02 답 $4\sqrt{2}$

사인법칙에 의하여 $\frac{4}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}$이므로

$\overline{AB}\times \sin 30^\circ=4\sin 45^\circ$

$\therefore \overline{AB}=4\times \frac{\sqrt{2}}{2}\times 2=4\sqrt{2}$

02-1 답 ④

$\triangle ABC$에서 $B=180^\circ-135^\circ=45^\circ$

또 $A+75^\circ=135^\circ$이므로 $A=60^\circ$

$\triangle ABC$에서 사인법칙에 의하여 $\frac{50}{\sin 60^\circ}=\frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ}$이므로

$\overline{AC}\times \sin 60^\circ=50\sin 45^\circ$

$\therefore \overline{AC}=50\times \frac{\sqrt{2}}{2}\times \frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{50\sqrt{6}}{3}$

03 답 ④

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{CA}}{\sin B}$이므로

$\frac{7}{\sin A}=\frac{5}{\sin B}$ $\therefore \frac{\sin A}{\sin B}=\frac{7}{5}$

03-1 답 ①

$\triangle ABC$에서 $A+B+C=\pi$이므로 $B+C=\pi-A$

$\therefore \sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$ ……㉠

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$이므로

$\frac{4}{\sin A}=\frac{6}{\sin C}$ $\therefore \frac{\sin A}{\sin C}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{\sin(B+C)}{\sin C}=\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{2}{3}$ ($\because$ ㉠)

04 답 $\sqrt{2}$

$\angle DBC=60^\circ-\angle ABD=60^\circ-15^\circ=45^\circ$

한 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로

$\angle BDC=\angle BAC=60^\circ$

$\triangle DBC$에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{CD}}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$이므로

$\overline{CD}\times\sin 60^\circ=\sqrt{3}\sin 45^\circ$

$\therefore \overline{CD}=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$

04-1 답 6

$\angle DBC=60^\circ-\angle ABD=60^\circ-30^\circ=30^\circ$

한 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로

$\angle BDC=\angle BAC=60^\circ$

$\triangle DBC$에서 사인법칙에 의하여 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ}$이므로

$\overline{BC}\times\sin 30^\circ=2\sqrt{3}\sin 60^\circ$

$\therefore \overline{BC}=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=6$

따라서 $\triangle ABC$의 한 변의 길이는 6이다.

05 답 $2\sqrt{2}$

$\triangle ABP$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BP}}{\sin(\angle BAP)}=\frac{\overline{AP}}{\sin 45^\circ}=\frac{\overline{AP}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}\,\overline{AP}$ …㉠ ……❶

즉 $\overline{AP}$의 길이가 최소일 때 ㉠의 값이 최소이다.

$\overline{AP}\perp\overline{BC}$일 때 $\overline{AP}$의 길이가 최소가 되므로

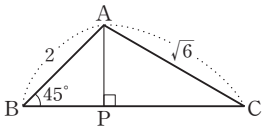
$\overline{AP}\ge 2\sqrt{2}\sin 45^\circ=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$ ……❷

따라서 ㉠의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 $\overline{AP}$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ $\overline{AP}$의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	40%
❸ 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

05-1 답 $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 P라 하면



$\triangle ABP$는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AP}=\overline{BP}=2\sin 45^\circ=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$\triangle APC$는 직각삼각형이므로

$\overline{PC}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}=2$

즉 $\triangle ABC$에서 $\overline{BC}=2+\sqrt{2}$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{6}}{\sin 45^\circ}=\frac{2+\sqrt{2}}{\sin A}$, $\sqrt{6}\sin A=(2+\sqrt{2})\sin 45^\circ$

$\therefore \sin A=(2+\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}$

06 답 ④

$\angle EAC=\theta$라 하면 $\angle EAC=90^\circ-\angle ACE=\angle BCD=\theta$

$\triangle ACE$에서 $\overline{CE}=2\sin\theta$이므로

$\overline{BD}=\overline{CE}=2\sin\theta$

$\triangle BCD$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BDC)}=\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)}$

이때 $\angle BCD=\angle EAC=\theta$, $\angle BDC=30^\circ+90^\circ=120^\circ$이므로

$\frac{\overline{BC}}{\sin 120^\circ}=\frac{2\sin\theta}{\sin\theta}=2$

$\therefore \overline{BC}=2\sin 120^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

06-1 답 $2\sqrt{3}$

$\angle ACD=\theta$라 하면 $\angle ACD=90^\circ-\angle ADC=\angle BDE=\theta$

$\triangle ADC$에서 $\overline{AD}=4\sin\theta$이므로

$\overline{BE}=\overline{AD}=4\sin\theta$ ……❶

$\triangle DBE$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BE}}{\sin(\angle BDE)}=\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BED)}$ ……❷

이때 $\angle BDE=\angle ACD=\theta$, $\angle BED=30^\circ+90^\circ=120^\circ$이므로

$\frac{\overline{BD}}{\sin 120^\circ}=\frac{4\sin\theta}{\sin\theta}=4$

$\therefore \overline{BD}=4\sin 120^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $\angle ACD=\theta$라 하고 $\overline{BE}$의 길이를 θ에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ $\triangle DBE$에서 사인법칙을 이용할 수 있다.	30%
❸ $\overline{BD}$의 길이를 구할 수 있다.	30%

07 답 $\frac{7}{25}$

$\triangle ADB$와 $\triangle ADC$의 외접원이 같으므로 사인법칙에 의하여

$\frac{5}{\sin(\angle DAB)}=\frac{2}{\sin(\angle DAC)}$

$\therefore \sin(\angle DAC)=\frac{2}{5}\sin(\angle DAB)=\frac{2}{5}\times\frac{7}{10}=\frac{7}{25}$

07-1 답 2

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2R$ $\therefore R=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{1}{2}=2$

$\triangle ADC$에서 $\angle CAD=30^\circ$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CD}}{\sin 30^\circ}=2R=2\times 2=4$

$\therefore \overline{CD}=4\sin 30^\circ=4\times\frac{1}{2}=2$

08 답 $16\sqrt{3}$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 60^\circ}=\frac{4\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=2R$

이때 $\frac{4\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=8$이므로

$a=8\sin 60^\circ=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$, $R=8\times\frac{1}{2}=4$

$\therefore aR=4\sqrt{3}\times 4=16\sqrt{3}$

08-1 답 16

$\triangle ABC$에서 $A=180^\circ-(105^\circ+45^\circ)=30^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{8}{\sin 30^\circ}=\frac{c}{\sin 45^\circ}=2R$

이때 $\frac{8}{\sin 30^\circ}=16$이므로

$c=16\sin 45^\circ=16\times\frac{\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{2}$, $R=16\times\frac{1}{2}=8$

$\therefore \frac{c^2}{R}=\frac{(8\sqrt{2})^2}{8}=16$

09 답 ⑤

$A+B+C=\pi$이므로 $B+C=\pi-A$

$\therefore \sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$

$4\sin A\sin(B+C)=3$에서 $4\sin^2 A=3$

$\sin^2 A=\frac{3}{4}$ $\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\because 0^\circ<A<180^\circ$)

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A}=2\times 3$이므로

$a=6\sin A=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

09-1 답 $\frac{81}{4}\pi$

$A+B+C=\pi$이므로 $A+C=\pi-B$

$\therefore \sin(A+C)=\sin(\pi-B)=\sin B$

$\frac{3}{4}\sin(A+C)=\frac{1}{3\sin B}$에서 $\frac{3}{4}\sin B=\frac{1}{3\sin B}$

$\sin^2 B=\frac{4}{9}$ $\therefore \sin B=\frac{2}{3}$ ($\because 0^\circ<B<180^\circ$)

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{b}{\sin B}=2R$이므로 $\frac{6}{\frac{2}{3}}=2R$

$2R=9$ $\therefore R=\frac{9}{2}$

따라서 △ABC의 외접원의 넓이는

$\pi\times\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{81}{4}\pi$

10 답 ③

$\frac{a+b}{8}=\frac{b+c}{9}=\frac{c+a}{11}=k$ ($k>0$)라 하면

$a+b=8k$, $b+c=9k$, $c+a=11k$ ……㉠

위의 세 식을 각각 변끼리 더하면

$2(a+b+c)=28k$ $\therefore a+b+c=14k$ ……㉡

㉡에서 ㉠의 각 식을 빼면 $a=5k$, $b=3k$, $c=6k$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=5k:3k:6k=5:3:6$

10-1 답 ⑤

$a+2b-2c=0$ ……㉠

$3a-6b+4c=0$ ……㉡

㉠$\times 2$+㉡을 하면 $5a-2b=0$ $\therefore a=\frac{2}{5}b$

$a=\frac{2}{5}b$를 ㉠에 대입하면 $\frac{2}{5}b+2b-2c=0$

$2c=\frac{12}{5}b$ $\therefore c=\frac{6}{5}b$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=\frac{2}{5}b:b:\frac{6}{5}b=2:5:6$

11 답 ②

$A=180^\circ\times\frac{3}{6}=90^\circ$, $B=180^\circ\times\frac{2}{6}=60^\circ$, $C=180^\circ\times\frac{1}{6}=30^\circ$

이므로

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

$=\sin 90^\circ:\sin 60^\circ:\sin 30^\circ$

$=1:\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}$

$=2:\sqrt{3}:1$

11-1 답 $\sqrt{6}$

$A=180^\circ\times\frac{3}{12}=45^\circ$, $B=180^\circ\times\frac{4}{12}=60^\circ$이므로

$a:b=\sin A:\sin B$에서 $2:b=\sin 45^\circ:\sin 60^\circ$

$2:b=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}b=\sqrt{3}$

$\therefore b=\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$

12 답 $\frac{15}{16}$

△ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로

$A+B=\pi-C$, $B+C=\pi-A$, $C+A=\pi-B$

$\therefore \sin(A+B):\sin(B+C):\sin(C+A)$

$=\sin(\pi-C):\sin(\pi-A):\sin(\pi-B)$

$=\sin C:\sin A:\sin B$ ……❶

$=4:5:3$

즉 $c:a:b=4:5:3$이므로 ……❷

$a=5k$, $b=3k$, $c=4k$ ($k>0$)라 하면

$\frac{ab}{c^2}=\frac{5k\times 3k}{(4k)^2}=\frac{15k^2}{16k^2}=\frac{15}{16}$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $\sin(A+B)=\sin C$, $\sin(B+C)=\sin A$, $\sin(C+A)=\sin B$임을 알 수 있다.	60%
❷ $c:a:b$를 구할 수 있다.	30%
❸ $\frac{ab}{c^2}$의 값을 구할 수 있다.	10%

12-1 답 ①

$9\sin A=12\sin B=8\sin C=k$ ($k>0$)라 하면

$\sin A=\frac{k}{9}$, $\sin B=\frac{k}{12}$, $\sin C=\frac{k}{8}$

$\therefore a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\frac{k}{9}:\frac{k}{12}:\frac{k}{8}=8:6:9$

이때 $a=8p$, $b=6p$, $c=9p$ ($p>0$)라 하면

$\frac{a}{b+c}=\frac{8p}{6p+9p}=\frac{8p}{15p}=\frac{8}{15}$

13 답 ③

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 주어진 식에 대입하면

$a\times\frac{a}{2R}=c\times\frac{c}{2R}$ $\therefore a^2=c^2$

이때 a, c는 양수이므로 $a=c$

따라서 △ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다.

13-1 답 ①

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 주어진 식에 대입하면

$a^2\times\frac{a}{2R}=b^2\times\frac{b}{2R}=c^2\times\frac{c}{2R}$

$\therefore a^3=b^3=c^3$

이때 a, b, c는 양수이므로 $a=b=c$

따라서 △ABC는 정삼각형이다.

14 답 ⑤

$\cos^2 A+\cos^2 B=2-\sin^2 C$에서

$(1-\sin^2 A)+(1-\sin^2 B)=2-\sin^2 C$

$\therefore \sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$ ……㉠

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{c}{2R}\right)^2$ $\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 △ABC는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

14-1 답 ④

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 주어진 식에 대입하면

$a\times\frac{a}{2R}+c\times\frac{c}{2R}=b\times\frac{b}{2R}$

$\therefore a^2+c^2=b^2$

따라서 △ABC는 $B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

15 답 $a=b$인 이등변삼각형

△ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로 $B+C=\pi-A$

$\sin^2 A+\sin^2 B=2\sin A\sin(B+C)$에서

$\sin^2 A+\sin^2 B=2\sin A\sin(\pi-A)$

$\sin^2 A+\sin^2 B=2\sin^2 A$ ($0^\circ<\theta<180^\circ$에서 $\sin\theta>0$이므로 $\sin A>0$, $\sin B>0$)

$\sin^2 A=\sin^2 B$ $\therefore \sin A=\sin B$ ……㉠ ……❶

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{a}{2R}=\frac{b}{2R}$ $\therefore a=b$ ……❷

따라서 △ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ $\sin(B+C)=\sin A$임을 이용하여 주어진 식을 정리할 수 있다.	40%
❷ a, b 사이의 관계를 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❸ △ABC가 어떤 삼각형인지 말할 수 있다.	10%

15-1 답 ⑤

△ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로 $C+A=\pi-B$

$\cos^2 A+\cos^2(C+A)-1=\cos^2 C$에서

$\cos^2 A+\cos^2(\pi-B)-1=\cos^2 C$

$\cos^2 A+(-\cos B)^2-1=\cos^2 C$

$\cos^2 A+\cos^2 B-1=\cos^2 C$

$(1-\sin^2 A)+(1-\sin^2 B)-1=1-\sin^2 C$

$\therefore \sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$ ……㉠

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{c}{2R}\right)^2$ $\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 △ABC는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

16 답 ③

△ABC에서 $\overline{AB}=c$라 하면 코사인법칙에 의하여

$7^2=5^2+c^2-2\times5\times c\times\cos\frac{\pi}{3}$

$49=25+c^2-5c$, $c^2-5c-24=0$

$(c+3)(c-8)=0$ $\therefore c=8$ ($\because c>0$)

$\therefore \overline{AB}=8$

16-1 답 1

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 60^\circ$이므로

$a^2=b^2+c^2-bc$ $\therefore b^2+c^2=a^2+bc$ ……㉠

$\therefore \frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}=\frac{c(a+c)+b(a+b)}{(a+b)(a+c)}$

$=\frac{ac+c^2+ab+b^2}{a^2+ab+ac+bc}$

$=\frac{a^2+bc+ac+ab}{a^2+ab+ac+bc}$ ($\because$ ㉠)

$=1$

17 답 120°

$(a+b+c)(a-b-c)+bc=0$에서

$\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}+bc=0$

$a^2-(b+c)^2+bc=0$, $a^2-b^2-bc-c^2=0$

$\therefore a^2=b^2+c^2+bc$ ……㉠

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$b^2+c^2+bc=b^2+c^2-2bc\cos A$

$2bc\cos A=-bc$ $\therefore \cos A=-\frac{1}{2}$

$\therefore A=120^\circ$ ($\because 0^\circ<A<180^\circ$)

17-1 답 60°

$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$에서 $(a+b)^2-c^2=3ab$

$a^2+2ab+b^2-c^2=3ab$

$\therefore c^2=a^2+b^2-ab$ ……㉠

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2+b^2-ab=a^2+b^2-2ab\cos C$

$2ab\cos C=ab$ $\therefore \cos C=\frac{1}{2}$

$\therefore C=60^\circ$ ($\because 0^\circ<C<180^\circ$)

18 답 $\sqrt{7}$

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi=r\times\frac{\pi}{3}$ $\therefore r=3$

즉 $\overline{OA}=3$, $\overline{OP}=2$이므로 $\triangle AOP$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AP}^2=\overline{OA}^2+\overline{OP}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OP}\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=3^2+2^2-2\times3\times2\times\frac{1}{2}$

$=9+4-6=7$

$\therefore \overline{AP}=\sqrt{7}\ (\because \overline{AP}>0)$

18-1 답 244

$\overline{BD}=\overline{AB}=5$, $\overline{BE}=\overline{BC}=13$ ……❶

$\triangle ABC$에서 $\angle ABC=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{5}{13}$, $\angle DBE=\pi-\theta$

($\theta+\angle ABD+\angle DBE+\angle CBE=2\pi$ 이므로 $\angle DBE=\pi-\theta$)

$\triangle BDE$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DE}^2=\overline{BE}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{BE}\times\overline{BD}\times\cos(\pi-\theta)$

$=13^2+5^2-2\times13\times5\times(-\cos\theta)$

$=169+25-2\times13\times5\times\left(-\frac{5}{13}\right)$

$=169+25+50=244$ ……❷

따라서 $\overline{DE}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는

$\overline{DE}^2=244$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $\overline{BD}$, $\overline{BE}$의 길이를 구할 수 있다.	20%
❷ $\overline{DE}^2$의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $\overline{DE}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 구할 수 있다.	30%

19 답 5

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{7^2+6^2-5^2}{2\times7\times6}=\frac{5}{7}$

$\triangle ABD$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=7^2+4^2-2\times7\times4\times\cos B$

$=49+16-2\times7\times4\times\frac{5}{7}=25$

$\therefore \overline{AD}=5\ (\because \overline{AD}>0)$

19-1 답 6

$\overline{BP}:\overline{CP}=\overline{AB}:\overline{AC}=3:4$이므로 $\overline{BP}=3$, $\overline{CP}=4$

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{6^2+7^2-8^2}{2\times6\times7}=\frac{1}{4}$

$\triangle ABP$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AP}^2=6^2+3^2-2\times6\times3\times\cos B$

$=36+9-2\times6\times3\times\frac{1}{4}=36$

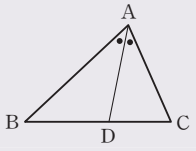
$\therefore \overline{AP}=6\ (\because \overline{AP}>0)$

Lecture 각의 이등분선의 성질

오른쪽 그림과 같은 $\triangle ABC$에서

$\angle BAD=\angle CAD$이면

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$



20 답 ③

코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{3^2+8^2-7^2}{2\times3\times8}=\frac{1}{2}$

20-1 답 $\frac{5}{7}$

세 원의 반지름의 길이를 각각 $2k$, $3k$, $4k$ $(k>0)$라 하면

$\overline{AB}=2k+3k=5k$, $\overline{BC}=3k+4k=7k$, $\overline{CA}=4k+2k=6k$

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{(7k)^2+(6k)^2-(5k)^2}{2\times7k\times6k}=\frac{60k^2}{84k^2}=\frac{5}{7}$

21 답 ⑤

$(a+b):(b+c):(c+a)=5:7:6$에서

$a+b=5k$, $b+c=7k$, $c+a=6k$ $(k>0)$ ……㉠

라 하자.

위의 세 식을 각각 변끼리 더하면

$2(a+b+c)=18k$ $\therefore a+b+c=9k$ ……㉡

㉡에서 ㉠의 각 식을 빼면 $a=2k$, $b=3k$, $c=4k$

따라서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{(3k)^2+(4k)^2-(2k)^2}{2\times3k\times4k}=\frac{21k^2}{24k^2}=\frac{7}{8}$

21-1 답 90°

$a=\frac{b+c}{3}$에서 $b=3a-c$ ……㉠

$b=\frac{a+c}{2}$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $3a-c=\frac{a+c}{2}$

$6a-2c=a+c$, $5a=3c$ $\therefore c=\frac{5}{3}a$

$c=\frac{5}{3}a$를 ㉠에 대입하면 $b=3a-\frac{5}{3}a=\frac{4}{3}a$

$\therefore a:b:c=a:\frac{4}{3}a:\frac{5}{3}a=3:4:5$

즉 $a=3k$, $b=4k$, $c=5k$ $(k>0)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{(3k)^2+(4k)^2-(5k)^2}{2\times3k\times4k}=0$

이때 $0°<C<180°$이므로 $C=90°$

22 답 ④

삼각형에서 가장 긴 변의 대각이 최대각이므로 주어진 조건에서 B가 최대각이 된다.

코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$=\frac{(3-\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times(3-\sqrt{3})\times2\sqrt{3}}$

$=\frac{12-6\sqrt{3}+12-18}{12\sqrt{3}-12}$

$=\frac{6(1-\sqrt{3})}{12(\sqrt{3}-1)}$

$=-\frac{1}{2}$

이때 $0°<B<180°$이므로 $B=120°$

22-1 답 120°

삼각형에서 가장 긴 변의 대각이 최대각이므로 주어진 조건에서 C가 최대각이 된다.

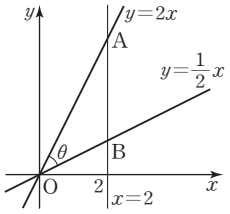
$a=3k$, $b=5k$, $c=7k$ $(k>0)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$=\frac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\times 3k\times 5k}$$
$$=\frac{-15k^2}{30k^2}=-\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=120^\circ$

23 답 ④

오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=2x$, $y=\frac{1}{2}x$와 직선 $x=2$의 교점을 각각 A, B라 하면



A(2, 4), B(2, 1)

$\therefore \overline{OA}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{OB}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

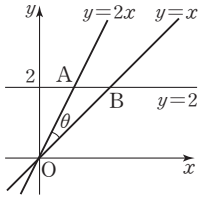
$\overline{AB}=4-1=3$

△AOB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-3^2}{2\times 2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

23-1 답 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=2x$, $y=x$와 직선 $y=2$의 교점을 각각 A, B라 하면



A(1, 2), B(2, 2)

$\therefore \overline{OA}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\overline{OB}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

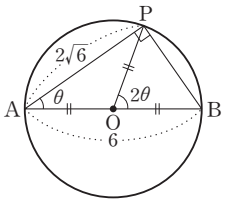
$\overline{AB}=2-1=1$

△AOB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{2})^2-1^2}{2\times\sqrt{5}\times 2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

24 답 $\frac{1}{3}$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{PB}$를 그으면



$\angle APB=90^\circ$이므로 △PAB에서

$\overline{PB}^2=\overline{AB}^2-\overline{AP}^2=6^2-(2\sqrt{6})^2$

$=12$

$\therefore \overline{PB}=2\sqrt{3}$ $(\because \overline{PB}>0)$

또 $\overline{PO}$를 그으면

$\overline{PO}=\overline{BO}=\frac{1}{2}\overline{AB}=3$ ……❶

중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로

$\angle POB=2\theta$ ……❷

△POB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos 2\theta=\frac{3^2+3^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times 3\times 3}=\frac{1}{3}$$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $\overline{PB}$, $\overline{PO}$, $\overline{BO}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❷ $\angle POB$의 크기를 θ를 이용하여 나타낼 수 있다.	30%
❸ $\cos 2\theta$의 값을 구할 수 있다.	40%

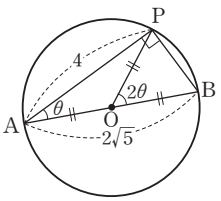
24-1 답 ⑤

△PAB에서 $\angle APB=90^\circ$이므로

$\overline{PB}^2=\overline{AB}^2-\overline{AP}^2=(2\sqrt{5})^2-4^2=4$

$\therefore \overline{PB}=2$ $(\because \overline{PB}>0)$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{PO}$를 그으면



$\overline{PO}=\overline{BO}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{5}$

중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로 $\angle POB=2\theta$

△POB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos 2\theta=\frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-2^2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3}{5}$$

25 답 $-\frac{1}{15}$

$\frac{\sin A}{3}=\frac{\sin B}{5}=\frac{\sin C}{6}=k$ $(k>0)$라 하면

$\sin A=3k$, $\sin B=5k$, $\sin C=6k$

$\therefore a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3k:5k:6k=3:5:6$

이때 $a=3p$, $b=5p$, $c=6p$ $(p>0)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{(3p)^2+(5p)^2-(6p)^2}{2\times 3p\times 5p}=\frac{-2p^2}{30p^2}=-\frac{1}{15}$$

다른 풀이

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 $\frac{\sin A}{3}=\frac{\sin B}{5}=\frac{\sin C}{6}$에 대입하면

$\frac{\frac{a}{2R}}{3}=\frac{\frac{b}{2R}}{5}=\frac{\frac{c}{2R}}{6}$ $\therefore \frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}$

이때 $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}=k$ $(k>0)$라 하면

$a=3k$, $b=5k$, $c=6k$

따라서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{(3k)^2+(5k)^2-(6k)^2}{2\times 3k\times 5k}=\frac{-2k^2}{30k^2}=-\frac{1}{15}$$

25-1 답 $-\sqrt{3}$

$\frac{\sin A+\sin B}{4}=\frac{\sin B+\sin C}{5}=\frac{\sin C+\sin A}{6}=k$ $(k>0)$

라 하면

$\sin A+\sin B=4k$, $\sin B+\sin C=5k$,

$\sin C+\sin A=6k$ ……㉠

위의 세 식을 각각 변끼리 더하면

$2(\sin A+\sin B+\sin C)=15k$

$\therefore \sin A+\sin B+\sin C=\frac{15}{2}k$ ……㉡

㉡에서 ㉠의 각 식을 빼면

$\sin A=\frac{5}{2}k$, $\sin B=\frac{3}{2}k$, $\sin C=\frac{7}{2}k$

$\therefore a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\frac{5}{2}k:\frac{3}{2}k:\frac{7}{2}k=5:3:7$

이때 $a=5p$, $b=3p$, $c=7p$ $(p>0)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{(5p)^2+(3p)^2-(7p)^2}{2\times 5p\times 3p}=\frac{-15p^2}{30p^2}=-\frac{1}{2}$$

따라서 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$$

다른 풀이

$\cos C=-\frac{1}{2}$이므로 $C=120^\circ$ ($\because$ $0^\circ<C<180^\circ$)

$\therefore \tan C=\tan 120^\circ=\tan(180^\circ-60^\circ)$

$=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$

26 답 $\frac{49}{3}\pi$

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos B$

$=3^2+8^2-2\times3\times8\times\cos 60^\circ$

$=9+64-2\times3\times8\times\frac{1}{2}=49$

$\therefore \overline{AC}=7$ ($\because \overline{AC}>0$) ……❶

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{7}{\sin 60^\circ}=2R$ $\therefore R=\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$ ……❷

따라서 △ABC의 외접원의 넓이는

$\pi\times\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{49}{3}\pi$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $\overline{AC}$의 길이를 구할 수 있다.	40%
❷ △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40%
❸ △ABC의 외접원의 넓이를 구할 수 있다.	20%

26-1 답 $\frac{8\sqrt{7}}{7}$

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{5^2+4^2-6^2}{2\times5\times4}=\frac{1}{8}$

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{6}{\sin A}=2R$ $\therefore R=\frac{6}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}\times\frac{1}{2}=\frac{8\sqrt{7}}{7}$

27 답 $\frac{13}{14}$

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=7:5:3$이므로

$a=7k$, $b=5k$, $c=3k$ ($k>0$)라 하자.

이때 삼각형에서 가장 짧은 변의 대각이 가장 작은 각이므로 주어진 조건에서 C가 가장 작은 각이 된다.

즉 $C=\theta$이므로 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\cos C=\frac{(7k)^2+(5k)^2-(3k)^2}{2\times7k\times5k}$

$=\frac{65k^2}{70k^2}=\frac{13}{14}$

27-1 답 $-\frac{1}{5}$

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=4:5:7$이므로

$a=4k$, $b=5k$, $c=7k$ ($k>0$)라 하자.

이때 삼각형에서 가장 긴 변의 대각이 가장 큰 각이므로 주어진 조건에서 C가 가장 큰 각이 된다.

즉 $C=\theta$이므로 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\cos C=\frac{(4k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\times4k\times5k}=\frac{-8k^2}{40k^2}=-\frac{1}{5}$

28 답 ④

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$\sin A\cos B=\sin C$에서

$\frac{a}{2R}\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{c}{2R}$, $\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}=c$

$c^2+a^2-b^2=2c^2$ $\therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 △ABC는 $A=90^\circ$인 직각삼각형이다.

28-1 답 ①

△ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로 $A+C=\pi-B$

$\therefore \sin\left(\frac{A-B+C}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi-2B}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$

이때 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$\sin A=2\sin\left(\frac{A-B+C}{2}\right)\sin C$에서

$\sin A=2\cos B\sin C$

$\frac{a}{2R}=2\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\times\frac{c}{2R}$, $a=\frac{c^2+a^2-b^2}{a}$

$a^2=c^2+a^2-b^2$, $b^2=c^2$

$\therefore b=c$ ($\because b>0$, $c>0$)

따라서 △ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

29 답 $a=b$인 이등변삼각형

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$,

$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\sin A\cos B=\sin B\cos A$에서

$\frac{a}{2R}\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{b}{2R}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$c^2+a^2-b^2=b^2+c^2-a^2$

$a^2=b^2$ $\therefore a=b$ ($\because a>0$, $b>0$)

따라서 △ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

29-1 답 $B=90^\circ$인 직각삼각형

△ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로 $A+B=\pi-C$

$\therefore \cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\sin A+\sin B\cos(A+B)=0$에서 $\sin A-\sin B\cos C=0$

$\frac{a}{2R}-\frac{b}{2R}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=0$, $a-\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}=0$

$2a^2-(a^2+b^2-c^2)=0$, $a^2-b^2+c^2=0$

$\therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 $\triangle ABC$는 $B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

30 답 $b=c$인 이등변삼각형

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$\sin A=2\cos B\sin C$에서

$\frac{a}{2R}=2\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\times\frac{c}{2R}$

$a=\frac{c^2+a^2-b^2}{a}$, $a^2=c^2+a^2-b^2$

$b^2=c^2$ $\therefore b=c\ (\because b>0, c>0)$

따라서 $\triangle ABC$는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

30-1 답 ⑤

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$,

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$\sin A+\sin B=(\cos A+\cos B)\sin C$에서

$\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}=\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)\times\frac{c}{2R}$

$a+b=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$

$2ab(a+b)=a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)$

$(a+b)c^2-(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=0$

$(a+b)c^2-(a+b)a^2-(a+b)b^2=0$

$(a+b)(c^2-a^2-b^2)=0$

이때 $a+b\neq0$이므로 $c^2-a^2-b^2=0$

$\therefore c^2=a^2+b^2$

따라서 $\triangle ABC$는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

31 답 $5\sqrt{21}$

$\triangle BCD$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=8^2+10^2-2\times8\times10\times\cos 60^\circ$

$=64+100-2\times8\times10\times\frac{1}{2}$

$=84$

$\therefore \overline{BD}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}\ (\because \overline{BD}>0)$

따라서 $\triangle ABD$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{21}\times10\times\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times2\sqrt{21}\times10\times\frac{1}{2}=5\sqrt{21}$

31-1 답 $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

$\triangle ABC$에서 $\overline{BC}=x$라 하면 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{13})^2=x^2+2^2-2\times x\times2\times\cos 120^\circ$

$52=x^2+4+2x$, $x^2+2x-48=0$

$(x+8)(x-6)=0$ $\therefore x=6\ (\because x>0)$

이때 $\angle BCD=180^\circ-120^\circ=60^\circ$이므로

$\triangle BDC=\frac{1}{2}\times5\times6\times\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times5\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{15\sqrt{3}}{2}$

32 답 $\frac{2}{3}\pi$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AB}\times\sin A=6$이므로

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times4\times\sin A=6$

$4\sqrt{3}\times\sin A=6$, $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore A=\frac{2}{3}\pi\left(\because \frac{\pi}{2}<A<\pi\right)$

32-1 답 $2\sqrt{37}$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times8\times c\times\sin 120^\circ=12\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times8\times c\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}c=12\sqrt{3}$ $\therefore c=6$

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$a^2=8^2+6^2-2\times8\times6\times\cos 120^\circ$

$=64+36-2\times8\times6\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=148$

$\therefore a=\sqrt{148}=2\sqrt{37}\ (\because a>0)$

33 답 $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{10})^2=b^2+c^2-2bc\cos 60^\circ$, $10=b^2+c^2-2bc\times\frac{1}{2}$

$10=b^2+c^2-bc$ $\therefore 10=(b+c)^2-3bc$ ……㉠ ……❶

이때 $b+c=5$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$10=5^2-3bc$, $3bc=15$ $\therefore bc=5$ ……❷

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 코사인법칙을 이용하여 b, c 사이의 관계를 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ bc의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $\triangle ABC$의 넓이를 구할 수 있다.	30%

33-1 답 ①

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$4^2=c^2+a^2-2ca\cos 45^\circ$, $16=a^2+c^2-2ac\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$16=a^2+c^2-\sqrt{2}ac$, $16=(a+c)^2-2ac-\sqrt{2}ac$

$\therefore 16=(a+c)^2-(2+\sqrt{2})ac$ ……㉠

이때 $a+c=6$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$16=6^2-(2+\sqrt{2})ac$, $(2+\sqrt{2})ac=20$

$\therefore ac=\frac{20}{2+\sqrt{2}}=10(2-\sqrt{2})$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}ac\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\times10(2-\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=5(\sqrt{2}-1)$

34 답 $4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$

$\triangle ABC$에서 $A=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\times8=4\,(\mathrm{cm})$

$\therefore$ $\triangle ABC=2\times4^2\times\sin 120^\circ\times\sin 30^\circ\times\sin 30^\circ$

$=2\times16\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$

$=4\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

34-1 답 $\frac{28\sqrt{3}}{3}$

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\triangle ABC=\frac{6\times10\times14}{4R}=15\sqrt{3}$이므로

$\frac{210}{R}=15\sqrt{3}$ $\therefore R=\frac{210}{15\sqrt{3}}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$

따라서 $\triangle ABC$의 외접원의 지름의 길이는

$2R=2\times\frac{14\sqrt{3}}{3}=\frac{28\sqrt{3}}{3}$

35 답 280

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로

$10=\frac{abc}{4\times7}$ $\therefore abc=4\times7\times10=280$

다른 풀이

$\triangle ABC$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin A}=2\times7$ $\therefore \sin A=\frac{a}{14}$

이때 $\triangle ABC$의 넓이가 10이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin A=10$, $\frac{1}{2}bc\times\frac{a}{14}=10$

$\frac{abc}{28}=10$ $\therefore abc=280$

35-1 답 ⑤

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 3이므로

$15=\frac{abc}{4\times3}$ $\therefore abc=4\times3\times15=180$

36 답 $25(3+\sqrt{3})$

원주각의 크기는 호의 길이에 정비례하므로

$\triangle ABC$에서 $A:B:C=\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}:\overset{\frown}{AB}=4:5:3$

$A=180^\circ\times\frac{4}{12}=60^\circ$, $B=180^\circ\times\frac{5}{12}=75^\circ$,

$C=180^\circ\times\frac{3}{12}=45^\circ$ ……❶

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 10이므로

$\triangle ABC=2\times10^2\times\sin 60^\circ\times\sin 75^\circ\times\sin 45^\circ$

$=2\times10^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=25(3+\sqrt{3})$ ……❷

채점 기준	비율
❶ A, B, C의 크기를 구할 수 있다.	60%
❷ $\triangle ABC$의 넓이를 구할 수 있다.	40%

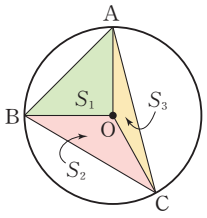
다른 풀이

오른쪽 그림에서

$\angle AOB=360^\circ\times\frac{3}{12}=90^\circ$

$\angle BOC=360^\circ\times\frac{4}{12}=120^\circ$

$\angle COA=360^\circ\times\frac{5}{12}=150^\circ$



$\therefore$ $\triangle ABC=S_1+S_2+S_3$

$=\frac{1}{2}\times10\times10\times\sin 90^\circ+\frac{1}{2}\times10\times10\times\sin 120^\circ$

$+\frac{1}{2}\times10\times10\times\sin 150^\circ$

$=50+25\sqrt{3}+25=25(3+\sqrt{3})$

36-1 답 $\frac{105\sqrt{7}}{4}$

$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=4:5:6$이므로

$\overline{AB}=4k$, $\overline{BC}=5k$, $\overline{CA}=6k\,(k>0)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{(5k)^2+(6k)^2-(4k)^2}{2\times5k\times6k}=\frac{45k^2}{60k^2}=\frac{3}{4}$

$\therefore \sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

이때 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 8이므로 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2\times8$

$\frac{4k}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=16$ $\therefore k=16\times\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{1}{4}=\sqrt{7}$

즉 $\overline{AB}=4\sqrt{7}$, $\overline{BC}=5\sqrt{7}$, $\overline{CA}=6\sqrt{7}$이므로

$\triangle ABC=\frac{4\sqrt{7}\times5\sqrt{7}\times6\sqrt{7}}{4\times8}=\frac{105\sqrt{7}}{4}$

다른 풀이

36-1의 풀이에서

$\overline{BC}=5\sqrt{7}$, $\overline{CA}=6\sqrt{7}$이고 $\sin C=\frac{\sqrt{7}}{4}$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\sin C$

$=\frac{1}{2}\times5\sqrt{7}\times6\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{7}}{4}$

$=\frac{105\sqrt{7}}{4}$

37 답 $\sqrt{3}$

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$c^2=7^2+8^2-2\times7\times8\times\cos 120^\circ$

$=49+64-2\times7\times8\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=169$

$\therefore c=13\,(\because c>0)$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times7\times8\times\sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times7\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=14\sqrt{3}$

$\triangle ABC$의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(a+b+c)$이므로 $14\sqrt{3}=\frac{1}{2}r(7+8+13)$

$14r=14\sqrt{3}$ $\therefore r=\sqrt{3}$

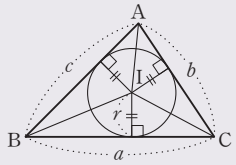
Lecture 삼각형의 넓이와 내접원의 반지름의 길이

삼각형 ABC의 내심을 I, 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\triangle ABC=\triangle IBC+\triangle ICA+\triangle IAB$

$=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$

$=\frac{1}{2}r(a+b+c)$



37-1 답 ②

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=8^2+5^2-2\times8\times5\times\cos 60^\circ$

$=64+25-2\times8\times5\times\frac{1}{2}$

$=49$

$\therefore \overline{BC}=7\ (\because \overline{BC}>0)$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times8\times5\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times8\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=10\sqrt{3}$

△ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(7+8+5)=10\sqrt{3}$

$10r=10\sqrt{3}$ $\therefore r=\sqrt{3}$

따라서 △ABC의 내접원의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{3})^2=3\pi$

38 답 ③

헤론의 공식에서 $s=\frac{7+5+3}{2}=\frac{15}{2}$이므로

$\triangle ABC=\sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-7\right)\left(\frac{15}{2}-5\right)\left(\frac{15}{2}-3\right)}$

$=\sqrt{\frac{15}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{9}{2}}$

$=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

△ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(7+5+3)=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

$\frac{15}{2}r=\frac{15\sqrt{3}}{4}$ $\therefore r=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 △ABC의 내접원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

다른 풀이

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{5^2+3^2-7^2}{2\times5\times3}=-\frac{1}{2}$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times\overline{AB}\times\sin A$

$=\frac{1}{2}\times5\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

38-1 답 $\frac{\sqrt{15}}{3}$

헤론의 공식에서 $s=\frac{6+8+4}{2}=9$이므로

$\triangle ABC=\sqrt{9(9-6)(9-8)(9-4)}$

$=\sqrt{9\times3\times1\times5}$

$=3\sqrt{15}$

△ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(6+8+4)=3\sqrt{15}$

$9r=3\sqrt{15}$ $\therefore r=\frac{\sqrt{15}}{3}$

따라서 △ABC의 내접원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{15}}{3}$이다.

39 답 16

△ABC의 넓이를 S라 하자.

헤론의 공식에서 $s=\frac{8+10+12}{2}=15$이므로

$S=\sqrt{15(15-8)(15-10)(15-12)}$

$=\sqrt{15\times7\times5\times3}$

$=15\sqrt{7}$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이가 R이므로

$S=\frac{8\times10\times12}{4R}=15\sqrt{7}$, $\frac{240}{R}=15\sqrt{7}$ $\therefore R=\frac{16\sqrt{7}}{7}$

△ABC의 내접원의 반지름의 길이가 r이므로

$S=\frac{1}{2}r(8+10+12)=15\sqrt{7}$, $15r=15\sqrt{7}$ $\therefore r=\sqrt{7}$

$\therefore Rr=\frac{16\sqrt{7}}{7}\times\sqrt{7}=16$

다른 풀이

$S=\frac{abc}{4R}=\frac{1}{2}r(a+b+c)$이므로

$\frac{8\times10\times12}{4R}=\frac{1}{2}r(8+10+12)$

$\frac{240}{R}=15r$ $\therefore Rr=\frac{240}{15}=16$

39-1 답 ③

△ABC의 넓이를 S라 하자.

헤론의 공식에서 $s=\frac{9+10+11}{2}=15$이므로

$S=\sqrt{15(15-9)(15-10)(15-11)}$

$=\sqrt{15\times6\times5\times4}$

$=30\sqrt{2}$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이가 R이므로

$S=\frac{9\times10\times11}{4R}=30\sqrt{2}$, $\frac{495}{2R}=30\sqrt{2}$ $\therefore R=\frac{33\sqrt{2}}{8}$

△ABC의 내접원의 반지름의 길이가 r이므로

$S=\frac{1}{2}r(9+10+11)=30\sqrt{2}$, $15r=30\sqrt{2}$ $\therefore r=2\sqrt{2}$

$\therefore Rr=\frac{33\sqrt{2}}{8}\times2\sqrt{2}=\frac{33}{2}$

40 답 $\frac{25}{6}\pi$

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$7^2=c^2+8^2-2\times c\times8\times\cos 60^\circ$

$49=c^2+64-2\times c\times8\times\frac{1}{2}$

$c^2-8c+15=0$, $(c-3)(c-5)=0$

$\therefore c=5\ (\because c>4)$

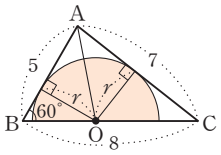
이때 △ABC의 넓이는

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times5\times8\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times5\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=10\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$를 긋고 반원의 반지름의 길이를 r라 하면



$\triangle ABC=\triangle ABO+\triangle AOC$이므로

$10\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times5\times r+\frac{1}{2}\times7\times r$

$10\sqrt{3}=6r \qquad \therefore r=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

따라서 반원의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{25}{6}\pi$

40-1 답 ④

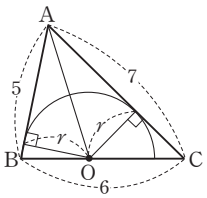
헤론의 공식에서 $s=\frac{6+7+5}{2}=9$이므로

$\triangle ABC=\sqrt{9(9-6)(9-7)(9-5)}$

$=\sqrt{9\times3\times2\times4}$

$=6\sqrt{6}$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$를 긋고 반원의 반지름의 길이를 r라 하면



$\triangle ABC=\triangle ABO+\triangle AOC$이므로

$6\sqrt{6}=\frac{1}{2}\times5\times r+\frac{1}{2}\times7\times r$

$6\sqrt{6}=6r \qquad \therefore r=\sqrt{6}$

따라서 반원의 반지름의 길이는 $\sqrt{6}$이다.

41 답 $6\sqrt{6}$

$\overline{AB}=2+3=5$, $\overline{BC}=3+4=7$, $\overline{CA}=2+4=6$

헤론의 공식에서 $s=\frac{5+7+6}{2}=9$이므로

$\triangle ABC=\sqrt{9(9-5)(9-7)(9-6)}$

$=\sqrt{9\times4\times2\times3}$

$=6\sqrt{6}$

41-1 답 $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

헤론의 공식에서 $s=\frac{7+4+5}{2}=8$이므로

$\triangle ABC=\sqrt{8(8-7)(8-4)(8-5)}$

$=\sqrt{8\times1\times4\times3}$

$=4\sqrt{6}$

이때 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times5\times\sin\theta=10\sin\theta$이므로

$10\sin\theta=4\sqrt{6} \qquad \therefore \sin\theta=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

42 답 $\frac{39\sqrt{3}}{4}$

$\triangle ABD$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos120^\circ$

$=9+25-2\times3\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=49$

$\therefore \overline{BD}=7\ (\because \overline{BD}>0)$

$\triangle BCD$에서 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{8^2+3^2-7^2}{2\times8\times3}=\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=60^\circ$

따라서 □ABCD의 넓이는

$\triangle ABD+\triangle BCD=\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin120^\circ+\frac{1}{2}\times8\times3\times\sin60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times3\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times8\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{15\sqrt{3}}{4}+6\sqrt{3}=\frac{39\sqrt{3}}{4}$

참고 42에서 $\triangle BCD$의 넓이를 다음과 같이 헤론의 공식을 이용하여 구할 수도 있다.

$\triangle BCD$에서 $s=\frac{8+3+7}{2}=9$이므로

$\triangle BCD=\sqrt{9(9-8)(9-3)(9-7)}$

$=\sqrt{9\times1\times6\times2}$

$=6\sqrt{3}$

세 변의 길이가 주어진 삼각형의 넓이를 구할 때는 42의 해설과 같이 구하거나 헤론의 공식을 이용하여 구할 수 있다. 두 가지 방법 중 계산이 편한 방법으로 문제를 해결한다.

42-1 답 $4\sqrt{35}+14\sqrt{3}$

$\triangle BCD$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=7^2+8^2-2\times7\times8\times\cos120^\circ$

$=49+64-2\times7\times8\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=169$

$\therefore \overline{BD}=13\ (\because \overline{BD}>0)$

$\triangle ABD$에서 헤론의 공식에 의하여

$s=\frac{13+6+9}{2}=14$이므로

$\triangle ABD=\sqrt{14(14-13)(14-6)(14-9)}$

$=\sqrt{14\times1\times8\times5}$

$=4\sqrt{35}$

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\times7\times8\times\sin120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times7\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

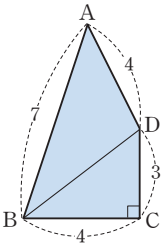
$=14\sqrt{3}$

따라서 □ABCD의 넓이는

$\triangle ABD+\triangle BCD=4\sqrt{35}+14\sqrt{3}$

43 답 $6+4\sqrt{6}$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면 $\triangle DBC$에서 피타고라스 정리에 의하여



$\overline{BD}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$\triangle ABD$에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{4^2+7^2-5^2}{2\times4\times7}=\frac{5}{7}$

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

따라서 □ABCD의 넓이는

$\triangle ABD+\triangle BCD=\frac{1}{2}\times7\times4\times\sin A+\frac{1}{2}\times4\times3$

$=\frac{1}{2}\times7\times4\times\frac{2\sqrt{6}}{7}+6$

$=6+4\sqrt{6}$

43-1 답 ⑤

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=4^2+(2+2\sqrt{3})^2-2\times4\times(2+2\sqrt{3})\times\cos 60^\circ$

$=16+16+8\sqrt{3}-2\times4\times(2+2\sqrt{3})\times\frac{1}{2}$

$=24$

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{6}\ (\because \overline{AC}>0)$

△ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=\frac{4}{\sin(\angle ACB)},\ 2\sqrt{6}\sin(\angle ACB)=4\sin 60^\circ$

$\therefore \sin(\angle ACB)=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0^\circ<\angle ACB<90^\circ$이므로 $\angle ACB=45^\circ$

$\therefore \angle ACD=90^\circ-45^\circ=45^\circ$

$\therefore$ □ABCD

$=$△ABC$+$△ACD

$=\frac{1}{2}\times4\times(2+2\sqrt{3})\times\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times4\times\sin 45^\circ$

$=\frac{1}{2}\times4\times(2+2\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=2\sqrt{3}+6+4\sqrt{3}=6+6\sqrt{3}$

44 답 3

△ABC의 넓이가 $4\sqrt{2}$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin B=4\sqrt{2}$

$6\sin B=4\sqrt{2}\qquad\therefore \sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin^2 B+\cos^2 B=1$이므로

$\cos^2 B=1-\sin^2 B=1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

$\therefore \cos B=-\frac{1}{3}$ 또는 $\cos B=\frac{1}{3}$

이때 $0^\circ<B<90^\circ$이므로 $\cos B=\frac{1}{3}$

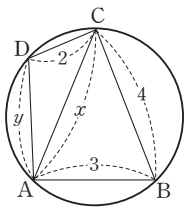
$\overline{AC}=x$라 하면 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$x^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos B$

$=9+16-2\times3\times4\times\frac{1}{3}$

$=17$

$\therefore x=\sqrt{17}\ (\because x>0)$



원에 내접하는 사각형에서 마주 보는 두 각의 크기의 합은 π이므로

△ACD에서 $D=\pi-B$

$\overline{AD}=y$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos(\pi-B)=\frac{2^2+y^2-(\sqrt{17})^2}{2\times2\times y}=\frac{y^2-13}{4y}$

이때 $\cos(\pi-B)=-\cos B=-\frac{1}{3}$이므로

$\frac{y^2-13}{4y}=-\frac{1}{3},\ 3y^2+4y-39=0$

$(3y+13)(y-3)=0\qquad\therefore y=3\ (\because y>0)$

$\therefore \overline{AD}=3$

44-1 답 $44\sqrt{3}$

원에 내접하는 사각형에서 마주 보는 각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle BCD=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

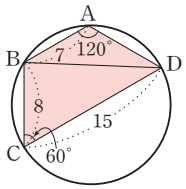
△BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=8^2+15^2-2\times8\times15\times\cos 60^\circ$

$=64+225-2\times8\times15\times\frac{1}{2}$

$=169$

$\therefore \overline{BD}=13\ (\because \overline{BD}>0)$ ……❶



$\overline{AD}=x$라 하면 △ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=x^2+7^2-2\times x\times7\times\cos 120^\circ$

$169=x^2+49+7x,\ x^2+7x-120=0$

$(x+15)(x-8)=0\qquad\therefore x=8\ (\because x>0)$ ……❷

$\therefore$ □ABCD$=$△ABD$+$△BCD

$=\frac{1}{2}\times8\times7\times\sin 120^\circ+\frac{1}{2}\times8\times15\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times8\times7\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times8\times15\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=14\sqrt{3}+30\sqrt{3}$

$=44\sqrt{3}$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $\overline{BD}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❷ $\overline{AD}=x$라 하고 x의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ □ABCD의 넓이를 구할 수 있다.	40%

45 답 $9\sqrt{3}$

△ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{3^2+6^2-(3\sqrt{7})^2}{2\times3\times6}=-\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=120^\circ$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$6\times3\times\sin 120^\circ=6\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$

45-1 답 $4\sqrt{14}$

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{3^2+6^2-5^2}{2\times3\times6}=\frac{5}{9}$

$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{9}\right)^2}=\frac{2\sqrt{14}}{9}$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$3\times6\times\sin B=3\times6\times\frac{2\sqrt{14}}{9}=4\sqrt{14}$

46 답 $9\sqrt{3}$

$\overline{BC}=x$라 하면 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(3\sqrt{3})^2=3^2+x^2-2\times3\times x\times\cos 60^\circ$

$27=9+x^2-2\times3\times x\times\frac{1}{2}$

$x^2-3x-18=0,\ (x+3)(x-6)=0$

$\therefore x=6\ (\because x>0)$, 즉 $\overline{BC}=6$ ……❶

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$3\times6\times\sin 60^\circ=3\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$ ……❷

채점 기준	비율
❶ $\overline{BC}$의 길이를 구할 수 있다.	50%
❷ 평행사변형 ABCD의 넓이를 구할 수 있다.	50%

46-1 답 $16\sqrt{3}$

$C=A=120^\circ$

$\overline{CD}=x$라 하면 $\triangle BCD$에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{7})^2=8^2+x^2-2\times8\times x\times\cos 120^\circ$

$112=64+x^2-2\times8\times x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2+8x-48=0,\ (x+12)(x-4)=0$

$\therefore x=4\ (\because x>0)$, 즉 $\overline{CD}=4$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$8\times4\times\sin 120^\circ=8\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}$

47 답 ②

$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$4\times6\times\sin B=4\times6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=16\sqrt{2}$

47-1 답 $8\sqrt{15}$

$\overline{AB}=\overline{CD}=x$, $\overline{AD}=\overline{BC}=y$라 하면

$\overline{AB}+\overline{BC}=10$이므로 $x+y=10$ ……㉠

$\triangle ABD$에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{13})^2=x^2+y^2-2xy\cos A$이므로

$52=x^2+y^2-2xy\times\left(-\frac{1}{4}\right)$

$52=x^2+y^2+\frac{1}{2}xy,\ 52=(x+y)^2-\frac{3}{2}xy$

$52=10^2-\frac{3}{2}xy\ (\because$ ㉠$),\ \frac{3}{2}xy=48$

$\therefore xy=32$

이때 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$이므로 평행사변형 ABCD의 넓이는

$xy\sin A=32\times\frac{\sqrt{15}}{4}=8\sqrt{15}$

48 답 ④

$\square ABCD$는 등변사다리꼴이므로 $\overline{AC}=\overline{BD}$

이때 $\square ABCD$의 넓이가 64이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin 30^\circ=64$

$\frac{1}{4}\overline{AC}^2=64,\ \overline{AC}^2=256$

$\therefore \overline{AC}=16\ (\because \overline{AC}>0)$

48-1 답 $2\sqrt{3}$

$\overline{AC}=\overline{BD}=x$라 하면 $\square ABCD$의 넓이가 $12\sqrt{3}$이므로

$\square ABCD=\frac{1}{2}x^2\sin 120^\circ=12\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=12\sqrt{3},\ x^2=48 \quad \therefore x=4\sqrt{3}\ (\because x>0)$

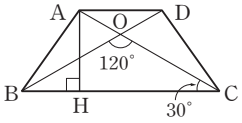
두 대각선의 교점을 O라 하면

$\triangle OBC$는 이등변삼각형이므로

$\angle OCB=\angle OBC=30^\circ$

이때 직각삼각형 AHC에서

$\overline{AH}=\overline{AC}\sin 30^\circ=4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$



49 답 30°

두 대각선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\square ABCD=\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times3\sqrt{2}\times\sin\theta=3\sqrt{3}$이므로

$6\sqrt{3}\sin\theta=3\sqrt{3},\ \sin\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \theta=30^\circ\ (\because \theta$는 예각)

49-1 답 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

$\square ABCD=2\times4\times\sin 60^\circ=4\sqrt{3}$ ……❶

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=2^2+4^2-2\times2\times4\times\cos 60^\circ$

$=4+16-2\times2\times4\times\frac{1}{2}$

$=12$

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{3}\ (\because \overline{AC}>0)$

$\triangle ABD$에서 $A=120^\circ$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=4^2+2^2-2\times4\times2\times\cos 120^\circ$

$=16+4-2\times4\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=28$

$\therefore \overline{BD}=2\sqrt{7}\ (\because \overline{BD}>0)$ ……❷

즉 $\square ABCD=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{7}\times\sin\theta=4\sqrt{3}$이므로

$\sqrt{7}\sin\theta=2 \quad \therefore \sin\theta=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $\square ABCD$의 넓이를 구할 수 있다.	30%
❷ $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 길이를 구할 수 있다.	40%
❸ $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	30%

50 답 20

$\square ABCD$의 넓이가 $2\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}pq\sin 120^\circ=2\sqrt{3},\ \frac{1}{2}pq\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$\therefore pq=8$

이때 $p+q=6$이므로

$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=6^2-2\times8=20$

50-1 답 ②

$\square ABCD$의 두 대각선의 길이를 각각 p, q라 하면

$p+q=12 \quad \therefore q=12-p$

이때 $q=12-p>0$이므로 $0<p<12$

$\square ABCD$의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}pq\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}p(12-p)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(-p^2+12p)$

$=-\frac{\sqrt{3}}{4}(p-6)^2+9\sqrt{3}$

$0<p<12$에서 $\square ABCD$의 넓이는 $p=6$일 때 최대이고, 최댓값은 $9\sqrt{3}$이다.

유형 완성하기 p. 200

51 답 ③

$\triangle PAC$에서 $\overline{AP}=\dfrac{10\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{10\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=20\sqrt{2}\,(\mathrm{m})$

$\triangle PDB$에서 $\overline{BP}=\dfrac{15\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{15\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=30\sqrt{2}\,(\mathrm{m})$

$\triangle APB$에서 $\angle APB=180^\circ-30^\circ-30^\circ=120^\circ$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=(20\sqrt{2})^2+(30\sqrt{2})^2-2\times20\sqrt{2}\times30\sqrt{2}\times\cos 120^\circ$

$=800+1800-2\times20\sqrt{2}\times30\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$=800+1800+1200=3800$

$\therefore \overline{AB}=10\sqrt{38}\,(\mathrm{m})\ (\because \overline{AB}>0)$

52 답 $(1+\sqrt{3})$ m

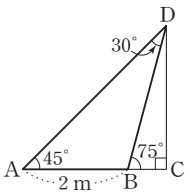
$\triangle ABD$에서 $\angle ADB=75^\circ-45^\circ=30^\circ$

$\triangle ABD$에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{2}{\sin 30^\circ}=\dfrac{\overline{DB}}{\sin 45^\circ}$

$\overline{DB}\times\sin 30^\circ=2\sin 45^\circ$

$\therefore \overline{DB}=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times2=2\sqrt{2}\,(\mathrm{m})$



$\overline{DC}=x$ m라 하면 $\overline{BC}=(x-2)$ m이므로 $\triangle BCD$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BC}$: $\triangle ACD$는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AC}=\overline{DC}$, $\therefore \overline{BC}=\overline{AC}-2=\overline{DC}-2=x-2\,(\mathrm{m})$

$(2\sqrt{2})^2=(x-2)^2+x^2$, $x^2-2x-2=0$

$\therefore x=1+\sqrt{3}\ (\because x>2)$

따라서 나무의 높이는 $(1+\sqrt{3})$ m이다.

53 답 $50\sqrt{2}$ m

$\triangle ABQ$에서 $\angle AQB=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

$\triangle ABQ$에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BQ}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{100}{\sin 45^\circ}$, $\overline{BQ}\sin 45^\circ=100\sin 60^\circ$

$\therefore \overline{BQ}=100\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{2}}=50\sqrt{6}\,(\mathrm{m})$

$\triangle PBQ$에서 $\angle BPQ=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

$\triangle PBQ$에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{50\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{\overline{PQ}}{\sin 30^\circ}$, $\overline{PQ}\sin 60^\circ=50\sqrt{6}\sin 30^\circ$

$\therefore \overline{PQ}=50\sqrt{6}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=50\sqrt{2}\,(\mathrm{m})$

따라서 타워의 높이는 $50\sqrt{2}$ m이다.

54 답 (1) $\dfrac{5}{7}$ (2) 5 km

(1) $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{7^2+(4+2)^2-5^2}{2\times7\times(4+2)}=\dfrac{60}{84}=\dfrac{5}{7}$

(2) $\triangle ABD$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BD}\times\cos B$

$=7^2+4^2-2\times7\times4\times\dfrac{5}{7}$

$=49+16-40=25$

$\therefore \overline{AD}=5\,(\mathrm{km})\ (\because \overline{AD}>0)$

따라서 두 지점 A, D 사이의 거리는 5 km이다.

55 답 340 m

$\overline{PQ}=a$ m라 하면 $\triangle PAQ$는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AQ}=\overline{PQ}=a$

$\triangle PBQ$에서 $\tan 30^\circ=\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}=\dfrac{a}{\overline{BQ}}$이므로

$\overline{BQ}=\dfrac{a}{\tan 30^\circ}=\dfrac{a}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}a$

$\triangle ABQ$에서 코사인법칙에 의하여

$340^2=(\sqrt{3}a)^2+a^2-2\times\sqrt{3}a\times a\times\cos 30^\circ$

$340^2=3a^2+a^2-2\times\sqrt{3}a\times a\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$340^2=3a^2+a^2-3a^2$, $a^2=340^2$

$\therefore a=340\ (\because a>0)$

따라서 탑의 높이는 340 m이다.

학교 시험 대비 문제 p. 201~204

01 답 4

사인법칙에 의하여 $\dfrac{2}{\sin 30^\circ}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}$이므로

$\overline{AB}\sin 30^\circ=2\sin C$

$\therefore \overline{AB}=4\sin C$

$0^\circ<C<180^\circ$에서 $0<\sin C\le1$이므로 $\sin C=1$일 때 $\overline{AB}$의 길이의 최댓값은 4이다.

02 답 9π

$\triangle ABC$는 정삼각형이므로 $\overline{AC}=3\sqrt{3}$

외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2R$ $\therefore R=\dfrac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\dfrac{1}{2}=3$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times3^2=9\pi$

03 답 ①

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=2R$

$\therefore R=\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\dfrac{1}{2}=1$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 1이다.

04 답 ③

□ABCD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하자.

$\triangle ABD$에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AD}}{\sin 45^\circ}=2R$ $\therefore \overline{AD}=\sqrt{2}R$

△BCD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CD}}{\sin 60^\circ}=2R \qquad \therefore \overline{CD}=\sqrt{3}R$

$\therefore \overline{AD}:\overline{CD}=\sqrt{2}R:\sqrt{3}R=\sqrt{2}:\sqrt{3}$

05 답 ①

$ab:bc:ca=8:9:12$에서 $ab=8k^2$, $bc=9k^2$, $ca=12k^2$ $(k>0)$이라 하면

$ab\times bc\times ca=8k^2\times 9k^2\times 12k^2$, $(abc)^2=864k^6$

$\therefore abc=12\sqrt{6}k^3$ ($\because abc>0$)

$\therefore a=\frac{abc}{bc}=\frac{12\sqrt{6}k^3}{9k^2}=\frac{4\sqrt{6}}{3}k$

$b=\frac{abc}{ca}=\frac{12\sqrt{6}k^3}{12k^2}=\sqrt{6}k$

$c=\frac{abc}{ab}=\frac{12\sqrt{6}k^3}{8k^2}=\frac{3\sqrt{6}}{2}k$

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

$=\frac{4\sqrt{6}}{3}k:\sqrt{6}k:\frac{3\sqrt{6}}{2}k$

$=8:6:9$

이므로 $\sin A=8t$, $\sin B=6t$, $\sin C=9t$ $(t>0)$라 하면

$\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{8t}{6t+9t}=\frac{8}{15}$

06 답 ②

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(\cos C)^2+(\sin A+\cos B)(\sin A-\cos B)$

$=\cos^2 C+\sin^2 A-\cos^2 B$

$=1-\sin^2 C+\sin^2 A-(1-\sin^2 B)$

$=\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=0$

$\therefore \sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{c}{2R}\right)^2$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 △ABC는 c를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

07 답 ⑤

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BA}$의 연장선과 $\overline{CD}$의 연장선이 만나는 점을 E라 하면

△EBC는 정삼각형이므로

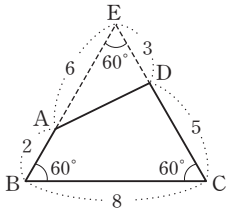
$\overline{AE}=6$, $\overline{ED}=3$, $E=60^\circ$

△EAD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=3^2+6^2-2\times 3\times 6\times\cos 60^\circ$

$=9+36-2\times 3\times 6\times\frac{1}{2}=27$

$\therefore \overline{AD}=3\sqrt{3}$ ($\because \overline{AD}>0$)



08 답 $\frac{\sqrt{15}}{9}$

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{4^2+(2\sqrt{10})^2-6^2}{2\times 4\times 2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{8}$이므로

$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{6}}{8}$

$\therefore \frac{\cos B}{\sin B}=\frac{\frac{\sqrt{10}}{8}}{\frac{3\sqrt{6}}{8}}=\frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{15}}{9}$

09 답 $-\frac{13}{14}$

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$이므로

$a=3k$, $b=5k$, $c=7k$ $(k>0)$라 하자.

이때 $A+B+C=\pi$이므로 $B+C=\pi-A$

$\therefore \cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(5k)^2+(7k)^2-(3k)^2}{2\times 5k\times 7k}=\frac{65k^2}{70k^2}=\frac{13}{14}$

$\therefore \cos(B+C)=-\cos A=-\frac{13}{14}$

10 답 ②

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\sin A=\sin B\cos C$에서

$\frac{a}{2R}=\frac{b}{2R}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$2a^2=a^2+b^2-c^2 \qquad \therefore a^2+c^2=b^2$

따라서 △ABC는 $B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

11 답 2

원 O의 반지름의 길이를 r라 하면

$\triangle ABC=\triangle ABO+\triangle AOC$

$=\frac{1}{2}r^2\sin\theta+\frac{1}{2}r^2\underbrace{\sin(\pi-\theta)}_{\sin(\pi-\theta)=\sin\theta}$

$=r^2\sin\theta$

부채꼴 AOB의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta$이므로

$r^2\sin\theta=\frac{1}{2}r^2\theta \qquad \therefore \frac{\theta}{\sin\theta}=2$

12 답 $27\sqrt{3}$

$A=B=C=60^\circ$이고 외접원의 반지름의 길이가 6이므로 정삼각형 ABC의 넓이는

$2\times 6^2\times\sin 60^\circ\times\sin 60^\circ\times\sin 60^\circ$

$=2\times 36\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=27\sqrt{3}$

다른 풀이

정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin 60^\circ}=2\times 6$

$\therefore a=2\times 6\times\sin 60^\circ=2\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

따라서 정삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(6\sqrt{3})^2=27\sqrt{3}$

13 답 $\frac{7\sqrt{7}}{2}$

$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=1:\sqrt{2}:2$이므로

$\overline{AB}=k, \overline{BC}=\sqrt{2}k, \overline{CA}=2k\ (k>0)$라 하면

$\cos B=\frac{k^2+(\sqrt{2}k)^2-(2k)^2}{2\times k\times\sqrt{2}k}=\frac{-k^2}{2\sqrt{2}k^2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{4}$

$\triangle ABC$에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{CA}}{\sin B}=2R$이므로

$\frac{2k}{\frac{\sqrt{14}}{4}}=2\times 4 \qquad \therefore k=\sqrt{14}$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{14}, \overline{BC}=\sqrt{2}\times\sqrt{14}=2\sqrt{7}$

따라서 $\triangle ABC$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B=\frac{1}{2}\times\sqrt{14}\times 2\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{14}}{4}=\frac{7\sqrt{7}}{2}$

14 답 16

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R, 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}$

$=\frac{a+b+c}{2R}$

$=\frac{a+b+c}{8}$

즉 $\frac{a+b+c}{8}=\sqrt{2}+1$이므로 $a+b+c=8(\sqrt{2}+1)$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}\times 4(\sqrt{2}-1)\times 8(\sqrt{2}+1)$

$=16(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=16$

15 답 ③

$\triangle ABC$의 세 변의 길이의 비가 $2:3:4$이므로 세 변의 길이를 $4k, 6k, 8k\ (k>0)$라 하자.

헤론의 공식에서 $s=\frac{4k+6k+8k}{2}=9k$이므로

$\triangle ABC=\sqrt{9k(9k-4k)(9k-6k)(9k-8k)}$

$=\sqrt{9k\times 5k\times 3k\times k}=3\sqrt{15}k^2$

즉 $3\sqrt{15}k^2=\frac{9\sqrt{15}}{8}$이므로 $k^2=\frac{3}{8}$

$\therefore k=\frac{\sqrt{6}}{4}\ (\because k>0)$

따라서 $\triangle ABC$의 세 변의 길이는 $\sqrt{6}, \frac{3\sqrt{6}}{2}, 2\sqrt{6}$이므로 $\triangle ABC$의 둘레의 길이는

$\sqrt{6}+\frac{3\sqrt{6}}{2}+2\sqrt{6}=\frac{9\sqrt{6}}{2}$

16 답 $32+24\sqrt{3}$

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times 8\times 16\times\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times 8\times 16\times\frac{1}{2}=32$

$\triangle BCD$에서 헤론의 공식에 의하여

$s=\frac{16+14+6}{2}=18$이므로

$\triangle BCD=\sqrt{18(18-16)(18-14)(18-6)}$

$=\sqrt{18\times 2\times 4\times 12}=24\sqrt{3}$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD=32+24\sqrt{3}$

17 답 $\frac{45\sqrt{3}}{2}$

$\overline{AB}=x, \overline{BC}=\overline{AD}=y$라 하면

$\overline{AB}+\overline{BC}=9$이므로 $x+y=9$ ……㉠

$\triangle ABD$에서 $A=180^\circ-60^\circ=120^\circ$이므로 코사인법칙에 의하여

$6^2=x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ$

$36=x^2+y^2+xy,\ 36=(x+y)^2-xy$

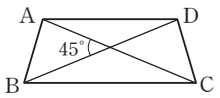
$36=9^2-xy\ (\because ㉠) \qquad \therefore xy=45$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$xy\sin 120^\circ=45\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{45\sqrt{3}}{2}$

18 답 ④

오른쪽 그림과 같은 등변사다리꼴 ABCD에서 두 대각선의 길이는 서로 같으므로 $\overline{AC}=\overline{BD}$



등변사다리꼴의 넓이가 $2\sqrt{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin 45^\circ=2\sqrt{2}$

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

$\overline{AC}^2=8 \qquad \therefore \overline{AC}=2\sqrt{2}\ (\because \overline{AC}>0)$

따라서 등변사다리꼴의 대각선의 길이는 $2\sqrt{2}$이다.

19 답 1

$\overline{AB}=a, \overline{BC}=b$라 하면

$\square ABCD=ab\sin 60^\circ=ab\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}ab$

$\overline{AC}=2\sqrt{3}, \overline{BD}=6$이므로

$\square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 6\times\sin\theta$

$=6\sqrt{3}\sin\theta$

즉 $\frac{\sqrt{3}}{2}ab=6\sqrt{3}\sin\theta$이므로 $ab=12\sin\theta$ ……㉠

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{3})^2=a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ$

$\therefore 12=a^2+b^2-ab$ ……㉡

$\triangle BCD$에서 $C=180^\circ-60^\circ=120^\circ$이므로 코사인법칙에 의하여

$6^2=a^2+b^2-2ab\cos 120^\circ$

$\therefore 36=a^2+b^2+ab$ ……㉢

㉢에서 ㉡을 변끼리 빼면

$2ab=24 \qquad \therefore ab=12$

$ab=12$를 ㉠에 대입하면

$12=12\sin\theta \qquad \therefore \sin\theta=1$

20 답 $10\sqrt{2}$

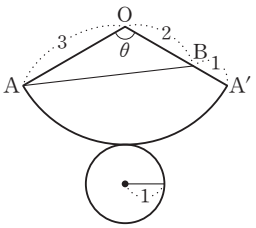
사인법칙에 의하여 $\frac{10\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=\frac{\overline{OA}}{\sin 45^\circ}$이므로

$\overline{OA}\times\sin 120^\circ=10\sqrt{3}\sin 45^\circ$

$\therefore \overline{OA}=10\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=10\sqrt{2}$

21 답 $\sqrt{19}$ km

주어진 원뿔의 전개도를 그리면 오른쪽 그림과 같고, 구하는 최단 거리는 $\overline{AB}$의 길이와 같다.



부채꼴 AOA′의 중심각의 크기를 θ라 하면 호 AA′의 길이는 3θ이고, 이는 반지름의 길이가 1인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$3\theta=2\pi \quad \therefore \theta=\frac{2}{3}\pi$

△OAB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$=4+9-2\times2\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=19$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{19}\,(\text{km})\ (\because \overline{AB}>0)$

따라서 구하는 최단 거리는 $\sqrt{19}$ km이다.

서술형 1 답 $2\sqrt{3}$

$\overline{AD}$가 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=6:12=1:2$

$\overline{BD}=x$, $\overline{CD}=2x\ (x>0)$라 하고 $\angle BAD=\angle CAD=\theta$라 하면

△ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{(4\sqrt{3})^2+6^2-x^2}{2\times4\sqrt{3}\times6}$

$=\frac{84-x^2}{48\sqrt{3}}$ ……㉠ ……❶

△ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{12^2+(4\sqrt{3})^2-(2x)^2}{2\times12\times4\sqrt{3}}$

$=\frac{192-4x^2}{96\sqrt{3}}$ ……㉡ ……❷

㉠, ㉡에서 $\frac{84-x^2}{48\sqrt{3}}=\frac{192-4x^2}{96\sqrt{3}}$

$168-2x^2=192-4x^2,\ 2x^2=24$

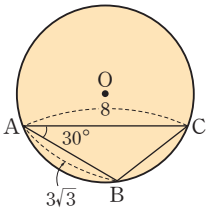
$x^2=12 \quad \therefore x=2\sqrt{3}\ (\because x>0)$

$\therefore \overline{BD}=2\sqrt{3}$ ……❸

채점 기준	비율
❶ △ABD에서 $\cos(\angle BAD)$를 구할 수 있다.	30%
❷ △ADC에서 $\cos(\angle CAD)$를 구할 수 있다.	30%
❸ $\overline{BD}$의 길이를 구할 수 있다.	40%

서술형 2 답 19π

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$를 그으면 △ABC에서 코사인법칙에 의하여



$\overline{BC}^2$

$=8^2+(3\sqrt{3})^2-2\times8\times3\sqrt{3}\times\cos30^\circ$

$=64+27-2\times8\times3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=19$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{19}\ (\because \overline{BC}>0)$ ……❶

이때 원 O의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{19}}{\sin30^\circ}=2R \quad \therefore R=\frac{\sqrt{19}}{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{2}=\sqrt{19}$ ……❷

따라서 원 O의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{19})^2=19\pi$ ……❸

채점 기준	비율
❶ $\overline{BC}$의 길이를 구할 수 있다.	40%
❷ 원 O의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40%
❸ 원 O의 넓이를 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 $12\sqrt{3}$

$\overline{BC}=x\ (x>0)$라 하면 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{13})^2=6^2+x^2-2\times6\times x\times\cos60^\circ$

$52=x^2+36-6x,\ x^2-6x-16=0$

$(x+2)(x-8)=0$

$\therefore x=8\ (\because x>0)$, 즉 $\overline{BC}=8$ ……❶

$\therefore$ △ABC$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B$

$=\frac{1}{2}\times6\times8\times\sin60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times6\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=12\sqrt{3}$ ……❷

채점 기준	비율
❶ $\overline{BC}$의 길이를 구할 수 있다.	50%
❷ △ABC의 넓이를 구할 수 있다.	50%

10% 핵심 기출 문제 p. 205

01 답 41

△ABD에서 $\overline{AB}=\overline{AD}=6$, $\overline{BD}=\sqrt{15}$이므로 $\angle BAD=\theta$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{6^2+6^2-(\sqrt{15})^2}{2\times6\times6}=\frac{19}{24}$

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$k^2=\overline{BC}^2$

$=10^2+6^2-2\times10\times6\times\cos\theta$

$=100+36-2\times10\times6\times\frac{19}{24}$

$=41$

02 답 11

△ABD에서 $\angle ADB=\theta$라 하자.

△ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin\theta}=2r_1 \quad \therefore r_1=\frac{\overline{AB}}{2\sin\theta}$ ……㉠

△ACD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=2r_2 \quad \therefore r_2=\frac{\overline{AC}}{2\sin\theta}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{r_2}{r_1}=\frac{\frac{\overline{AC}}{2\sin\theta}}{\frac{\overline{AB}}{2\sin\theta}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{13}}{3}$

$\overline{AB}=3k$, $\overline{AC}=\sqrt{13}k$ $(k>0)$라 하면 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{13}k)^2=(3k)^2+6^2-2\times3k\times6\times\cos\frac{\pi}{3}$

$13k^2=9k^2+36-18k$, $2k^2+9k-18=0$

$(k+6)(2k-3)=0$ $\therefore k=\frac{3}{2}$ $(\because k>0)$

$\therefore \overline{AB}=3k=\frac{9}{2}$

따라서 $p=2$, $q=9$이므로

$p+q=2+9=11$

03 답 ③

$\angle COA=\theta$라 하면 $\triangle COA$에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{2^2+2^2-1^2}{2\times2\times2}=\frac{7}{8}$ ……㉠

$\triangle BOD$에서 $\angle BOD=\frac{\pi}{2}-\theta$

이때 $\overline{OD}=x$라 하면 $\triangle BOD$의 넓이가 $\frac{7}{6}$이므로

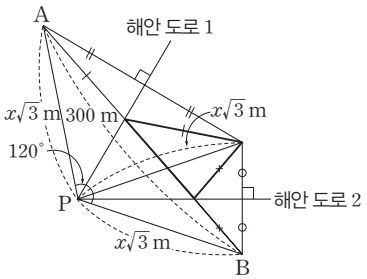
$\triangle BOD=\frac{1}{2}\times2\times x\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{7}{6}$

$x\cos\theta=\frac{7}{6}$, $\frac{7}{8}x=\frac{7}{6}$ $(\because$ ㉠$)$ ($\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$)

$\therefore x=\frac{4}{3}$, 즉 $\overline{OD}=\frac{4}{3}$

04 답 100

다음 그림과 같이 배의 위치를 해안 도로 1과 해안 도로 2에 대하여 대칭이동한 지점을 각각 A, B라 하면 수영 코스의 최단 길이는 $\overline{AB}$의 길이와 같다.



$\triangle APB$에서 코사인법칙에 의하여

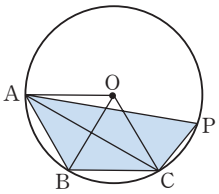
$300^2=(x\sqrt{3})^2+(x\sqrt{3})^2-2\times x\sqrt{3}\times x\sqrt{3}\times\cos120^\circ$

$90000=3x^2+3x^2-2\times x\sqrt{3}\times x\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$90000=9x^2$, $x^2=10000$

$\therefore x=100$ $(\because x>0)$

05 답 ②



오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O라 하고 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$를 그으면 두 삼각형 OAB와 OBC는 정삼각형이므로

$\overline{AB}=\overline{BC}=3$

$\triangle ABC$에서 $\angle ABC=\frac{2}{3}\pi$이므로

코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=3^2+3^2-2\times3\times3\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$=9+9-2\times3\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=9+9+9$

$=27$

$\therefore \overline{AC}=3\sqrt{3}$ $(\because \overline{AC}>0)$

사각형 ABCP가 원에 내접하므로

$\angle ABC+\angle APC=\pi$, $\frac{2}{3}\pi+\angle APC=\pi$

$\therefore \angle APC=\frac{\pi}{3}$

$\overline{AP}=x$, $\overline{CP}=y$라 하면 $\triangle ACP$에서 코사인법칙에 의하여

$(3\sqrt{3})^2=x^2+y^2-2xy\cos\frac{\pi}{3}$

$27=x^2+y^2-xy$ $\therefore 27=(x+y)^2-3xy$

이때 $x+y=8$이므로 $27=8^2-3xy$

$3xy=37$ $\therefore xy=\frac{37}{3}$

$\triangle ABC$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times3\times\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$

$\triangle ACP$의 넓이는

$\frac{1}{2}xy\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{37}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{37\sqrt{3}}{12}$

$\therefore \square ABCP=\triangle ABC+\triangle ACP$

$=\frac{9\sqrt{3}}{4}+\frac{37\sqrt{3}}{12}$

$=\frac{16\sqrt{3}}{3}$

08 등차수열

개념 완성하기 p.209~210

01 답 1, 3, 5, 7, 9
$a_1=2\times1-1=1$, $a_2=2\times2-1=3$, $a_3=2\times3-1=5$,
$a_4=2\times4-1=7$, $a_5=2\times5-1=9$

02 답 0, 3, 8, 15, 24
$a_1=1^2-1=0$, $a_2=2^2-1=3$, $a_3=3^2-1=8$,
$a_4=4^2-1=15$, $a_5=5^2-1=24$

03 답 4, 10, 28, 82, 244
$a_1=3^1+1=4$, $a_2=3^2+1=10$, $a_3=3^3+1=28$,
$a_4=3^4+1=82$, $a_5=3^5+1=244$

04 답 $2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}$
$a_1=1+\frac{1}{1}=2$, $a_2=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$, $a_3=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$,
$a_4=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$, $a_5=5+\frac{1}{5}=\frac{26}{5}$

05 답 2, 6, 12, 20, 30
$a_1=1\times2=2$, $a_2=2\times3=6$, $a_3=3\times4=12$,
$a_4=4\times5=20$, $a_5=5\times6=30$

06 답 $a_n=10^{n-1}$

07 답 $a_n=(-1)^n\times(n+1)$

08 답 $a_n=\frac{n(n+1)}{5^n}$

09 답 7, 10
$4-1=3$이므로 공차가 3이다. 따라서 주어진 수열은
1, 4, [7], [10], 13, …

10 답 −12, 0
$-4-(-8)=4$이므로 공차가 4이다. 따라서 주어진 수열은
−16, [−12], −8, −4, [0], …

11 답 첫째항: −3, 공차: 2
$a_1=2\times1-5=-3$이므로 첫째항은 −3이다.
이때 $a_2=2\times2-5=-1$이므로 공차는
$a_2-a_1=-1-(-3)=2$

12 답 첫째항: $-\frac{1}{2}$, 공차: $-\frac{5}{2}$
$a_1=-\frac{5}{2}\times1+2=-\frac{1}{2}$이므로 첫째항은 $-\frac{1}{2}$이다.
이때 $a_2=-\frac{5}{2}\times2+2=-3$이므로 공차는
$a_2-a_1=-3-\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{2}$

13 답 $a_n=3n-5$
$a_n=-2+(n-1)\times3=3n-5$

14 답 $a_n=4n-10$
$a_n=-6+(n-1)\times4=4n-10$

15 답 $a_n=-2n-1$
$a_n=-3+(n-1)\times(-2)=-2n-1$

16 답 $a_n=-2n+4$
첫째항이 2, 공차가 −2이므로
$a_n=2+(n-1)\times(-2)=-2n+4$

17 답 $a_n=4n-3$
첫째항이 1, 공차가 4이므로
$a_n=1+(n-1)\times4=4n-3$

18 답 $a_n=-4n+7$
첫째항이 3, 공차가 −4이므로
$a_n=3+(n-1)\times(-4)=-4n+7$

19 답 $a_n=-5n+10$
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_{10}=-40$에서 $5+9d=-40$
$9d=-45$ $\therefore d=-5$
$\therefore a_n=5+(n-1)\times(-5)=-5n+10$

20 답 $a_n=2n+4$
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_2=8$에서 $a+d=8$ ……㉠
$a_{10}=24$에서 $a+9d=24$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $d=2$
$\therefore a_n=6+(n-1)\times2=2n+4$

21 답 26
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3=-2$에서 $a+2d=-2$ ……㉠
$a_6=10$에서 $a+5d=10$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-10$, $d=4$
$\therefore a_n=-10+(n-1)\times4=4n-14$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 제10항은
$a_{10}=4\times10-14=26$

22 답 −4
수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_8=32$에서 $60+7d=32$
$7d=-28$ $\therefore d=-4$

23 답 $\frac{1}{2}$

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_6=3$에서 $\frac{1}{2}+5d=3$

$5d=\frac{5}{2}$ $\therefore d=\frac{1}{2}$

24 답 2

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}=-82$에서 $-100+9d=-82$

$9d=18$ $\therefore d=2$

25 답 -1

세 수 3, x, -5가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$x=\frac{3+(-5)}{2}=-1$

26 답 $\frac{1}{5}$

세 수 x, $5x$, $4x+1$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\times5x=x+(4x+1)$, $10x=5x+1$ $\therefore x=\frac{1}{5}$

27 답 -2 또는 1

세 수 x, 1, x^2이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\times1=x+x^2$, $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

참고 (i) $x=-2$일 때, 세 수는 -2, 1, 4이므로 공차가 3인 등차수열이 된다.
(ii) $x=1$일 때, 세 수는 1, 1, 1이므로 공차가 0인 등차수열이 된다.

28 답 -2 또는 3

세 수 x, x^2+x-2, $3x+8$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(x^2+x-2)=x+(3x+8)$, $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

참고 (i) $x=-2$일 때, 세 수는 -2, 0, 2이므로 공차가 2인 등차수열이 된다.
(ii) $x=3$일 때, 세 수는 3, 10, 17이므로 공차가 7인 등차수열이 된다.

29 답 105

$\frac{10(-3+24)}{2}=105$

30 답 210

$\frac{15(5+23)}{2}=210$

31 답 450

등차수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=2+(n-1)\times4=4n-2$이므로

$4n-2=58$ $\therefore n=15$

따라서 첫째항이 2, 끝항이 58, 항수가 15인 등차수열의 합은

$\frac{15(2+58)}{2}=450$

32 답 465

등차수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=30+(n-1)\times(-1)=-n+31$이므로

$-n+31=1$ $\therefore n=30$

따라서 첫째항이 30, 끝항이 1, 항수가 30인 등차수열의 합은

$\frac{30(30+1)}{2}=465$

33 답 440

첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$\frac{20\{2\times3+(20-1)\times2\}}{2}=440$

34 답 470

첫째항이 -5, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$\frac{20\{2\times(-5)+(20-1)\times3\}}{2}=470$

35 답 -580

첫째항이 9, 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$\frac{20\{2\times9+(20-1)\times(-4)\}}{2}=-580$

36 답 490

첫째항이 53, 공차가 -3인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$\frac{20\{2\times53+(20-1)\times(-3)\}}{2}=490$

37 답 $a_n=2n+3$

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2+4\times1=5$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+4n-\{(n-1)^2+4(n-1)\}$

$=2n+3$ ……㉠

이때 $a_1=5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n+3$

38 답 $a_n=4n-1$

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2\times1^2+1=3$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2+n-\{2(n-1)^2+(n-1)\}$

$=4n-1$ ……㉠

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4n-1$

39 답 $a_1=1,\ a_n=2n-2\ (n\geq 2)$

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2-1+1=1$

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-n+1-\{(n-1)^2-(n-1)+1\}$

$=2n-2$ ……㉠

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않으므로

$a_1=1,\ a_n=2n-2\ (n\geq 2)$

40 답 -15

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=-1^2+2\times 1=1$

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=-n^2+2n-\{-(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=-2n+3$ …… ㉠

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=-2n+3$

$\therefore a_9=-2\times 9+3=-15$

다른 풀이

$a_9=S_9-S_8=(-9^2+2\times 9)-(-8^2+2\times 8)$

$=-63-(-48)=-15$

유형 완성하기 p.211~223

01 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_7=24$에서 $a+6d=24$ ……㉠

$a_{10}=15$에서 $a+9d=15$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=42,\ d=-3$

$\therefore a_n=42+(n-1)\times(-3)=-3n+45$

$a_k=0$에서 $-3k+45=0$ $\therefore k=15$

01-1 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_9=70$에서 $a+8d=70$ ……㉠

$a_{16}=84$에서 $a+15d=84$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=54,\ d=2$

$\therefore a_n=54+(n-1)\times 2=2n+52$

100을 제n항이라 하면 $2n+52=100$

$2n=48$ $\therefore n=24$

따라서 100은 제24항이다.

02 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차가 각각 1, -2이므로

$a_n=a_1+(n-1)\times 1=n+a_1-1$

$b_n=b_1+(n-1)\times(-2)=-2n+b_1+2$

$\therefore 4a_n+b_n=4(n+a_1-1)+(-2n+b_1+2)$

$=4a_1+b_1+2(n-1)$

따라서 등차수열 $\{4a_n+b_n\}$의 공차는 2이다.

02-1 답 4

등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차가 각각 7, 5이므로

$a_n=a_1+(n-1)\times 7=7n+a_1-7$

$b_n=b_1+(n-1)\times 5=5n+b_1-5$

$\therefore 2(a_n-b_n)=2\{(7n+a_1-7)-(5n+b_1-5)\}$

$=2(a_1-b_1)+4(n-1)$

따라서 등차수열 $\{2(a_n-b_n)\}$의 공차는 4이다.

03 답 20

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

등차수열 $\{a_{3n}\}$은 $a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots$이고 공차가 12이므로

$a_6-a_3=12,\ (a+5d)-(a+2d)=12$

$3d=12$ $\therefore d=4$ ……❶

등차수열 $\{a_{5n-1}\}$은 $a_4,\ a_9,\ a_{14},\ \cdots$이므로

$a_9-a_4=(a+8d)-(a+3d)=5d=5\times 4=20$

따라서 등차수열 $\{a_{5n-1}\}$의 공차는 20이다. ……❷

채점 기준	비율
❶ 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 구할 수 있다.	50%
❷ 등차수열 $\{a_{5n-1}\}$의 공차를 구할 수 있다.	50%

03-1 답 82

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

등차수열 $\{a_{4n+2}\}$는 $a_6,\ a_{10},\ a_{14},\ \cdots$이고 공차가 16이므로

$a_{10}-a_6=16,\ (a+9d)-(a+5d)=16$

$4d=16$ $\therefore d=4$

따라서 $a_n=6+(n-1)\times 4=4n+2$이므로

$a_{20}=4\times 20+2=82$

04 답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1+a_2=10$에서 $a+(a+d)=10$

$\therefore 2a+d=10$ ……㉠

$a_3+a_4+a_5=45$에서 $(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)=45$

$3a+9d=45$ $\therefore a+3d=15$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ d=4$

따라서 $a_n=3+(n-1)\times 4=4n-1$이므로

$a_{10}=4\times 10-1=39$

04-1 답 24

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3+a_5=26$에서 $(a+2d)+(a+4d)=26$

$2a+6d=26$ $\therefore a+3d=13$ ……㉠

$a_4-a_7=-12$에서 $(a+3d)-(a+6d)=-12$

$-3d=-12$ $\therefore d=4$

$d=4$를 ㉠에 대입하면 $a+12=13$ $\therefore a=1$

$\therefore a_n=1+(n-1)\times 4=4n-3$

$a_k=93$에서 $4k-3=93$

$4k=96$ $\therefore k=24$

05 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=10$에서 $a+4d=10$ ……㉠

$a_3 : a_9=4 : 7$에서 $(a+2d) : (a+8d)=4 : 7$

$7(a+2d)=4(a+8d)$, $3a-18d=0$

$\therefore a-6d=0$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $d=1$

따라서 $a_n=6+(n-1)\times 1=n+5$이므로

$a_{20}=20+5=25$

05-1 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2+a_4=12$에서 $(a+d)+(a+3d)=12$

$2a+4d=12$ $\therefore a+2d=6$ ……㉠

$a_3 : a_5=3 : 7$에서 $(a+2d) : (a+4d)=3 : 7$

$7(a+2d)=3(a+4d)$, $4a+2d=0$

$\therefore 2a+d=0$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $d=4$

따라서 $a_n=-2+(n-1)\times 4=4n-6$이므로

$a_{15}=4\times 15-6=54$

06 답 66

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4=-a_{12}$이므로 $a+3d=-(a+11d)$

$2a+14d=0$ $\therefore a+7d=0$ ……㉠

$a_{10}=6$에서 $a+9d=6$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-21$, $d=3$

따라서 $a_n=-21+(n-1)\times 3=3n-24$이므로

$a_{30}=3\times 30-24=66$

06-1 답 −470

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

(i) $a_3=a_9$일 때

$a+2d=a+8d$이므로 $d=0$

그런데 공차가 0이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_3=-a_9$일 때

$a+2d=-(a+8d)$이므로

$2a+10d=0$ $\therefore a+5d=0$ ……㉠

$a_7=-5$에서 $a+6d=-5$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=25$, $d=-5$ ……❶

따라서 $a_n=25+(n-1)\times(-5)=-5n+30$이므로 ……❷

$a_{100}=-5\times 100+30=-470$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 구할 수 있다.	50%
❷ a_n을 구할 수 있다.	30%
❸ a_{100}의 값을 구할 수 있다.	20%

07 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=21$에서 $a+4d=21$ ……㉠

$a_{20}=-39$에서 $a+19d=-39$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=37$, $d=-4$

$\therefore a_n=37+(n-1)\times(-4)=-4n+41$

$-4n+41<0$에서 $-4n<-41$

$\therefore n>\frac{41}{4}=10.25$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제11항이다.

07-1 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2+a_4=30$에서 $(a+d)+(a+3d)=30$

$2a+4d=30$ $\therefore a+2d=15$ ……㉠

$a_3+a_5=26$에서 $(a+2d)+(a+4d)=26$

$2a+6d=26$ $\therefore a+3d=13$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=19$, $d=-2$

$\therefore a_n=19+(n-1)\times(-2)=-2n+21$

$-2n+21<-10$에서 $-2n<-31$ $\therefore n>\frac{31}{2}=15.5$

따라서 처음으로 −10보다 작아지는 항은 제16항이다.

08 답 제17항

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_7=-29$에서 $a+6d=-29$ ……㉠

$a_{10}=-20$에서 $a+9d=-20$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-47$, $d=3$

$\therefore a_n=-47+(n-1)\times 3=3n-50$

$3n-50>0$에서 $3n>50$ $\therefore n>\frac{50}{3}=16.6\cdots$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제17항이다.

08-1 답 8

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1+a_3=-70$에서 $a+(a+2d)=-70$

$2a+2d=-70$ $\therefore a+d=-35$ ……㉠

$a_2+a_4=-54$에서 $(a+d)+(a+3d)=-54$

$2a+4d=-54$ $\therefore a+2d=-27$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-43$, $d=8$ ……❶

$\therefore a_n=-43+(n-1)\times 8=8n-51$ ……❷

$a_k>10$에서 $8k-51>10$

$8k>61$ $\therefore k>\frac{61}{8}=7.625$

따라서 자연수 k의 최솟값은 8이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 구할 수 있다.	40%
❷ a_n을 구할 수 있다.	20%
❸ 자연수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	40%

09 답 13

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=25$에서 $a+4d=25$ ……㉠

$a_{15}=95$에서 $a+14d=95$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $d=7$

$\therefore a_n=-3+(n-1)\times 7=7n-10$

$10\le a_k<100$에서 $10\le 7k-10<100$, $20\le 7k<110$

$\therefore \frac{20}{7}\le k<\frac{110}{7}$, 즉 $2.8\cdots\le k<15.7\cdots$

따라서 자연수 k의 값은 3, 4, 5, …, 15이므로 그 개수는 13이다.

09-1 답 3

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 5, 공차가 3이므로

$a_n=5+(n-1)\times 3=3n+2$

등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항이 29, 공차가 -2이므로

$b_n=29+(n-1)\times(-2)=-2n+31$

$2a_k\le b_k$에서 $2(3k+2)\le -2k+31$

$6k+4\le -2k+31,\ 8k\le 27$

$\therefore k\le \frac{27}{8}=3.375$

따라서 자연수 k의 값은 1, 2, 3이므로 그 개수는 3이다.

10 답 36

첫째항이 1, 제21항이 101인 등차수열의 공차를 d라 하면

$1+20d=101,\ 20d=100 \quad \therefore d=5$

이때 a_7은 주어진 수열의 제8항이므로

$a_7=1+(8-1)\times 5=36$

10-1 답 168

첫째항이 4, 제5항이 108인 등차수열의 공차를 d라 하면

$4+4d=108,\ 4d=104 \quad \therefore d=26$

따라서 $a=4+26=30$, $b=4+2\times 26=56$, $c=4+3\times 26=82$이므로

$a+b+c=30+56+82=168$

11 답 20

첫째항이 -5, 공차가 $\frac{1}{3}$인 등차수열의 제$(n+2)$항이 2이므로

$-5+(n+1)\times\frac{1}{3}=2,\ \frac{1}{3}(n+1)=7$

$n+1=21 \quad \therefore n=20$

11-1 답 12

첫째항이 43, 공차가 -3인 등차수열의 제$(n+2)$항이 4이므로

$43+(n+1)\times(-3)=4$

$-3(n+1)=-39,\ n+1=13 \quad \therefore n=12$

12 답 ⑤

주어진 수열을 $\{b_n\}$이라 하면 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 -1, 제7항이 3인 등차수열이므로 공차를 d라 하면

$-1+6d=3,\ 6d=4 \quad \therefore d=\frac{2}{3}$

$\therefore b_n=-1+(n-1)\times\frac{2}{3}$

이때 등차수열 $\{b_n\}$의 제$(n+3)$항이 11이므로

$-1+(n+2)\times\frac{2}{3}=11,\ \frac{2}{3}(n+2)=12$

$n+2=18 \quad \therefore n=16$

12-1 답 14

첫째항이 -11, 공차가 2인 등차수열의 제$(m+2)$항이 3이므로

$-11+(m+1)\times 2=3,\ 2(m+1)=14$

$m+1=7 \quad \therefore m=6$ ……❶

이때 제$(m+n+3)$항, 즉 제$(n+9)$항이 21이므로

$-11+(n+8)\times 2=21,\ 2(n+8)=32$

$n+8=16 \quad \therefore n=8$ ……❷

$\therefore m+n=6+8=14$ ……❸

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	20%

13 답 ②

세 수 $x+4$, x^2+2x, $x+8$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(x^2+2x)=(x+4)+(x+8),\ x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0 \quad \therefore x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은

$-3+2=-1$

참고 (i) $x=-3$일 때, 세 수는 1, 3, 5이므로 공차가 2인 등차수열이 된다.
(ii) $x=2$일 때, 세 수는 6, 8, 10이므로 공차가 2인 등차수열이 된다.

13-1 답 $a=5,\ b=11$

세 수 2, a, 8이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a=2+8 \quad \therefore a=5$

세 수 a, 8, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\times 8=a+b,\ 16=5+b$

$\therefore b=11$

14 답 $\frac{1}{3}$

다항식 $f(x)=ax^2+x+4$를 일차식 $x+1$, $x-1$, $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(-1)=a-1+4=a+3$

$f(1)=a+1+4=a+5$

$f(2)=4a+2+4=4a+6$

즉 세 수 $a+3$, $a+5$, $4a+6$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a+5)=(a+3)+(4a+6),\ 2a+10=5a+9$

$3a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{3}$

Lecture 나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a)$이다.

14-1 답 9

다항식 $f(x)=x^2-ax-36$을 일차식 $x-1$, $x-2$, $x-4$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$R_1=f(1)=1-a-36=-a-35$

$R_2=f(2)=4-2a-36=-2a-32$

$R_3=f(4)=16-4a-36=-4a-20$ ……❶

즉 세 수 R_1, R_2, R_3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2R_2=R_1+R_3$ ……❷

$2(-2a-32)=(-a-35)+(-4a-20)$

$-4a-64=-5a-55$

$\therefore a=9$ ……❸

채점 기준	비율
❶ R_1, R_2, R_3을 구할 수 있다.	40%
❷ R_1, R_2, R_3 사이의 관계를 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

15 답 90

세 수 $\log_3 2$, $\log_3 a$, $\log_3 18$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2\log_3 a=\log_3 2+\log_3 18$, $\log_3 a^2=\log_3 36$
$a^2=36$ $\therefore a=6$ ($\because a$는 자연수)
세 수 $\log_3 a$, $\log_3 18$, $\log_3 b$, 즉 $\log_3 6$, $\log_3 18$, $\log_3 b$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2\log_3 18=\log_3 6+\log_3 b$, $\log_3 18^2=\log_3 6b$
$6b=18^2$ $\therefore b=54$
이때 세 수 b, c, a도 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$c=\frac{b+a}{2}=\frac{54+6}{2}=30$
$\therefore a+b+c=6+54+30=90$

15-1 답 −8

세 수 $\log_2 6$, a, $\log_2 24$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2a=\log_2 6+\log_2 24$, $2a=\log_2 144=2\log_2 12$
$\therefore a=\log_2 12$
세 수 a, $\log_2 24$, b, 즉 $\log_2 12$, $\log_2 24$, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2\log_2 24=\log_2 12+b$
$\therefore b=2\log_2 24-\log_2 12=\log_2 48$
세 수 2, c, 8이 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2c=2+8=10$ $\therefore c=5$
세 수 c, 8, d, 즉 5, 8, d가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2\times 8=5+d$ $\therefore d=11$
$\therefore a-b+c-d=\log_2 12-\log_2 48+5-11$
$=\log_2\frac{1}{4}+5-11=-8$

16 답 384

네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$라 하면
네 수의 합이 20이므로
$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=20$
$4a=20$ $\therefore a=5$
가운데 두 수의 곱은 처음 수와 마지막 수의 곱보다 8만큼 크므로
$(5-d)(5+d)=(5-3d)(5+3d)+8$
$25-d^2=25-9d^2+8$, $8d^2=8$
$d^2=1$ $\therefore d=\pm 1$
따라서 네 수는 2, 4, 6, 8이므로 네 수의 곱은
$2\times 4\times 6\times 8=384$

16-1 답 −25

네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$라 하면
네 수의 합이 −28이므로
$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=-28$
$4a=-28$ $\therefore a=-7$
가장 작은 수와 가장 큰 수의 곱이 −275이므로
$(-7-3d)(-7+3d)=-275$, $49-9d^2=-275$
$9d^2=324$, $d^2=36$ $\therefore d=\pm 6$
따라서 네 수는 −25, −13, −1, 11이므로 가장 작은 수는 −25이다.

17 답 ⑤

삼차방정식의 세 근을 $a-d$, a, $a+d$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 합은
$(a-d)+a+(a+d)=6$
$3a=6$ $\therefore a=2$
따라서 주어진 방정식의 한 근이 2이므로 방정식에 $x=2$를 대입하면
$2^3-6\times 2^2+2k-6=0$, $2k=22$
$\therefore k=11$

Lecture 삼차방정식의 근과 계수의 관계

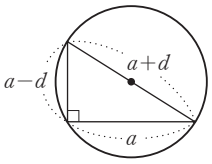
삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

17-1 답 ③

삼차방정식의 세 근을 $a-d$, a, $a+d$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 합은
$(a-d)+a+(a+d)=9$
$3a=9$ $\therefore a=3$
따라서 주어진 방정식의 한 근이 3이므로 방정식에 $x=3$을 대입하면
$3^3-9\times 3^2+11\times 3+k=0$
$\therefore k=21$

18 답 25π

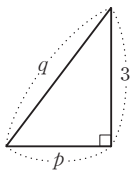
오른쪽 그림과 같이 직각삼각형의 세 변의 길이를 $a-d$, a, $a+d$ ($a>0$, $d>0$)라 하면 직각삼각형의 넓이가 24이므로



$\frac{1}{2}a(a-d)=24$
$\therefore a^2-ad=48$ ……㉠
피타고라스 정리에 의하여
$(a+d)^2=a^2+(a-d)^2$, $a^2-4ad=0$
$a(a-4d)=0$ $\therefore a=4d$ ($\because a>0$) ……㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $16d^2-4d^2=48$
$12d^2=48$, $d^2=4$ $\therefore d=2$ ($\because d>0$)
$d=2$를 ㉡에 대입하면 $a=4\times 2=8$
따라서 직각삼각형의 세 변의 길이는 6, 8, 10이고 가장 긴 변이 외접원의 지름이므로 외접원의 넓이는
$\pi\times 5^2=25\pi$

18-1 답 $\frac{27}{8}$

세 수 p, 3, q가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면
$p=3-d$, $q=3+d$
오른쪽 그림과 같이 q가 직각삼각형의 빗변의 길이를 나타내므로 피타고라스 정리에 의하여



$q^2=3^2+p^2$
$(3+d)^2=3^2+(3-d)^2$
$12d=9$ $\therefore d=\frac{3}{4}$
$\therefore p=3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$, $q=3+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$

따라서 직각삼각형의 세 변의 길이는 $\frac{9}{4}$, 3, $\frac{15}{4}$이므로 직각삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}\times 3=\frac{27}{8}$

다른 풀이

세 수 p, 3, q가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$p+q=6$ $\quad\therefore q=6-p$ ……㉠

또 p, 3, q는 직각삼각형의 세 변의 길이이고, 가장 긴 변의 길이가 q이므로 피타고라스 정리에 의하여

$q^2=3^2+p^2$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(6-p)^2=p^2+9$, $36-12p+p^2=p^2+9$

$12p=27$ $\quad\therefore p=\frac{9}{4}$

따라서 직각삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}\times 3=\frac{27}{8}$

19 답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=-2$에서 $a+2d=-2$ ……㉠

$a_7=14$에서 $a+6d=14$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-10$, $d=4$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{10\{2\times(-10)+(10-1)\times 4\}}{2}=80$

19-1 답 −230

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 첫째항부터 제12항까지의 합이 −90이므로

$\frac{12\{2a+(12-1)\times(-1)\}}{2}=-90$

$12a-66=-90$, $12a=-24$

$\therefore a=-2$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$\frac{20\{2\times(-2)+(20-1)\times(-1)\}}{2}=-230$

20 답 −5

첫째항이 100, 제n항이 0이고, 첫째항부터 제n항까지의 합이 1050이므로

$\frac{n(100+0)}{2}=1050$, $50n=1050$

$\therefore n=21$

즉 $a_{21}=0$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$100+20d=0$, $20d=-100$ $\quad\therefore d=-5$

20-1 답 ①

첫째항이 50, 제n항이 −10이고, 첫째항부터 제n항까지의 합이 220이므로

$\frac{n\{50+(-10)\}}{2}=220$, $20n=220$

$\therefore n=11$

즉 $a_{11}=-10$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$50+10d=-10$, $10d=-60$ $\quad\therefore d=-6$

21 답 330

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5+a_{10}=15$에서 $(a+4d)+(a+9d)=15$

$\therefore 2a+13d=15$ ……㉠

$a_7+a_{12}=27$에서 $(a+6d)+(a+11d)=27$

$\therefore 2a+17d=27$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-12$, $d=3$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$\frac{20\{2\times(-12)+(20-1)\times 3\}}{2}=330$

21-1 답 220

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2+a_5+a_8=57$에서 $(-5+d)+(-5+4d)+(-5+7d)=57$

$-15+12d=57$, $12d=72$

$\therefore d=6$ ……❶

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{10\{2\times(-5)+(10-1)\times 6\}}{2}=220$ ……❷

채점 기준	비율
❶ 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 구할 수 있다.	50%
❷ 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합을 구할 수 있다.	50%

22 답 8

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_6=44$에서 $a+5d=44$ ……㉠

$a_{18}=116$에서 $a+17d=116$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=14$, $d=6$ ……❶

이때 첫째항부터 제n항까지의 합이 280이므로

$\frac{n\{2\times 14+(n-1)\times 6\}}{2}=280$ ……❷

$3n^2+11n-280=0$, $(3n+35)(n-8)=0$

$\therefore n=-\frac{35}{3}$ 또는 $n=8$

그런데 n은 자연수이므로 $n=8$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 구할 수 있다.	40%
❷ 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ n의 값을 구할 수 있다.	20%

22-1 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=10$에서 $a+4d=10$ ……㉠

$a_2:a_4=1:2$에서 $(a+d):(a+3d)=1:2$

$2(a+d)=a+3d$ $\quad\therefore a=d$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=2$

이때 첫째항부터 제n항까지의 합이 110이므로

$\frac{n\{2\times 2+(n-1)\times 2\}}{2}=110$

$n^2+n-110=0$, $(n+11)(n-10)=0$

$\therefore n=-11$ 또는 $n=10$

그런데 n은 자연수이므로 $n=10$

23 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, d'이라 하면

$a_1+b_1=4$, $d+d'=2$이므로

$(a_1+a_2+\cdots+a_{15})+(b_1+b_2+\cdots+b_{15})$

$=\frac{15(2a_1+14d)}{2}+\frac{15(2b_1+14d')}{2}$

$=\frac{15\{2(a_1+b_1)+14(d+d')\}}{2}$

$=\frac{15(2\times4+14\times2)}{2}$

$=270$

다른 풀이

수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열이므로

$(a_1+a_2+\cdots+a_{15})+(b_1+b_2+\cdots+b_{15})$

$=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_{15}+b_{15})$

$=\frac{15\{2\times4+(15-1)\times2\}}{2}$

$=270$

참고 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 d, 등차수열 $\{b_n\}$의 공차가 d'이면 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 a_1+b_1, 공차가 $d+d'$인 등차수열이다.

23-1 답 500

$a_1+b_1+c_1=7$, $a_{20}+b_{20}+c_{20}=43$이므로

$(a_1+a_2+\cdots+a_{20})+(b_1+b_2+\cdots+b_{20})+(c_1+c_2+\cdots+c_{20})$

$=\frac{20(a_1+a_{20})}{2}+\frac{20(b_1+b_{20})}{2}+\frac{20(c_1+c_{20})}{2}$

$=10(a_1+a_{20})+10(b_1+b_{20})+10(c_1+c_{20})$

$=10\{(a_1+b_1+c_1)+(a_{20}+b_{20}+c_{20})\}$

$=10(7+43)$

$=500$

24 답 260

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 8, 공차가 -2이므로

$a_n=8+(n-1)\times(-2)=-2n+10$

$a_n<0$에서 $-2n+10<0$

$-2n<-10$ $\therefore n>5$

즉 등차수열 $\{a_n\}$은 제6항부터 음수이다.

이때 $a_1=8$, $a_5=0$, $a_6=-2$, $a_{20}=-30$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$

$=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)-(a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{20})$

$=\frac{5(8+0)}{2}-\frac{15\{-2+(-30)\}}{2}$ (제6항부터 제20항까지의 항수는 $20-6+1=15$)

$=20+240$

$=260$

24-1 답 578

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=9$에서 $a+2d=9$ ……㉠

$a_{15}=-15$에서 $a+14d=-15$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=13$, $d=-2$

$\therefore a_n=13+(n-1)\times(-2)=-2n+15$

$a_n<0$에서 $-2n+15<0$

$-2n<-15$ $\therefore n>\frac{15}{2}=7.5$

즉 등차수열 $\{a_n\}$은 제8항부터 음수이다.

이때 $a_1=13$, $a_7=1$, $a_8=-1$, $a_{30}=-45$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{30}|$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7)-(a_8+a_9+a_{10}+\cdots+a_{30})$

$=\frac{7(13+1)}{2}-\frac{23\{-1+(-45)\}}{2}$ (제8항부터 제30항까지의 항수는 $30-8+1=23$)

$=49+529$

$=578$

25 답 ⑤

첫째항이 -5, 끝항이 90, 항수가 $(n+2)$인 등차수열의 합이 850이므로 (제$(n+2)$항이 90이다.)

$\frac{(n+2)(-5+90)}{2}=850$, $\frac{n+2}{2}=10$

$n+2=20$ $\therefore n=18$

즉 90이 제20항이므로 $-5+(20-1)d=90$

$19d=95$ $\therefore d=5$

25-1 답 15

첫째항이 6, 끝항이 34, 항수가 $(n+2)$인 등차수열의 합이 300이므로

$\frac{(n+2)(6+34)}{2}=300$, $20(n+2)=300$

$n+2=15$ $\therefore n=13$

즉 34가 제15항이므로 $6+(15-1)d=34$

$14d=28$ $\therefore d=2$

$\therefore d+n=2+13=15$

26 답 935

첫째항이 1, 끝항이 109, 항수가 19인 등차수열의 합은

$\frac{19(1+109)}{2}=1045$

즉 $1+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{17}+109=1045$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{17}=1045-(1+109)$

$=935$

26-1 답 336

첫째항이 2, 끝항이 30, 항수가 23인 등차수열의 합은

$\frac{23(2+30)}{2}=368$

따라서 $2+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{21}+30=368$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{21}=368-(2+30)$

$=336$

27 답 18

$-30+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+6=-30+(-216)+6=-240$

즉 첫째항이 -30, 끝항이 6, 항수가 $(n+2)$인 등차수열의 합이 -240이므로

$\frac{(n+2)(-30+6)}{2}=-240$, $-12(n+2)=-240$

$n+2=20$ $\therefore n=18$

27-1 답 ⑤

$-13+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+85=-13+468+85=540$

즉 첫째항이 -13, 끝항이 85, 항수가 $(n+2)$인 등차수열의 합이 540이므로

$\frac{(n+2)(-13+85)}{2}=540$, $36(n+2)=540$

$n+2=15$ $\therefore n=13$

또 85가 제15항이므로 $-13+(15-1)d=85$

$14d=98$ $\therefore d=7$

$\therefore d+n=7+13=20$

28 답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10}=-10$에서 $\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=-10$

$\therefore 2a+9d=-2$ ……㉠

$S_{20}=180$에서 $\frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=180$

$\therefore 2a+19d=18$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-10$, $d=2$

$\therefore S_{30}=\frac{30\{2\times(-10)+(30-1)\times2\}}{2}=570$

28-1 답 15

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_5=70$에서 $\frac{5\{2a+(5-1)d\}}{2}=70$

$\therefore a+2d=14$ ……㉠

$S_{10}=190$에서 $\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=190$

$\therefore 2a+9d=38$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=10$, $d=2$

$S_k=360$에서 $\frac{k\{2\times10+(k-1)\times2\}}{2}=360$

$k^2+9k-360=0$, $(k+24)(k-15)=0$

$\therefore k=-24$ 또는 $k=15$

그런데 k는 자연수이므로 $k=15$

29 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_5=S_{11}$이므로

$\frac{5\{2\times15+(5-1)d\}}{2}=\frac{11\{2\times15+(11-1)d\}}{2}$

$150+20d=330+110d$, $90d=-180$

$\therefore d=-2$

$\therefore a_{15}=15+(15-1)\times(-2)=-13$

29-1 답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $S_3=S_6$이므로

$\frac{3\{2\times12+(3-1)d\}}{2}=\frac{6\{2\times12+(6-1)d\}}{2}$

$24+2d=48+10d$, $8d=-24$

$\therefore d=-3$

$\therefore a_{20}=12+(20-1)\times(-3)=-45$

30 답 -216

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_4=-8$에서 $\frac{4\{2a+(4-1)d\}}{2}=-8$

$\therefore 2a+3d=-4$ ……㉠

$S_9-S_4=-55$에서 $\frac{9\{2a+(9-1)d\}}{2}-(-8)=-55$

$\therefore a+4d=-7$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $d=-2$

따라서 제5항부터 제16항까지의 합은

$S_{16}-S_4=\frac{16\{2\times1+(16-1)\times(-2)\}}{2}-(-8)=-216$

30-1 답 480

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_6=60$에서 $\frac{6\{2a+(6-1)d\}}{2}=60$

$\therefore 2a+5d=20$ ……㉠

$S_{10}-S_6=80$에서 $\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}-60=80$

$\therefore 2a+9d=28$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $d=2$ ……❶

따라서 첫째항부터 제20항까지의 합은

$S_{20}=\frac{20\{2\times5+(20-1)\times2\}}{2}=480$ ……❷

채점 기준	비율
❶ 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 구할 수 있다.	60%
❷ 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합을 구할 수 있다.	40%

31 답 606

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=64$에서 $a+4d=64$ ……㉠

$a_{10}=19$에서 $a+9d=19$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=100$, $d=-9$

$\therefore a_n=100+(n-1)\times(-9)=-9n+109$

$-9n+109<0$에서 $-9n<-109$

$\therefore n>\frac{109}{9}=12.1\cdots$

즉 등차수열 $\{a_n\}$은 제13항부터 음수이므로 첫째항부터 제12항까지의 합이 최대이다.

이때 $a_{12}=-9\times12+109=1$이므로 구하는 최댓값은

$S_{12}=\frac{12(100+1)}{2}=606$

31-1 답 -51

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=-10$에서 $a+2d=-10$ ……㉠

$a_{10}=11$에서 $a+9d=11$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-16$, $d=3$

$\therefore a_n=-16+(n-1)\times3=3n-19$

$3n-19>0$에서 $3n>19$

$\therefore n>\frac{19}{3}=6.3\cdots$

즉 등차수열 $\{a_n\}$은 제7항부터 양수이므로 첫째항부터 제6항까지의 합이 최소이다.

이때 $a_6=3\times6-19=-1$이므로 구하는 최솟값은

$S_6=\dfrac{6\{-16+(-1)\}}{2}=-51$

32 답 105

등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 26, 공차가 -4이므로

$a_n=26+(n-1)\times(-4)=-4n+30$ ……❶

$-4n+30<0$에서 $-4n<-30$

$\therefore n>\dfrac{30}{4}=7.5$

즉 등차수열 $\{a_n\}$은 제8항부터 음수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최대이다.

$\therefore a=7$ ……❷

이때 $a_7=-4\times7+30=2$이므로 구하는 최댓값은

$S_7=\dfrac{7(26+2)}{2}=98$ $\therefore b=98$ ……❸

$\therefore a+b=7+98=105$ ……❹

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	20%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

32-1 답 −81

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10}=-45$에서 $\dfrac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=-45$

$\therefore 2a+9d=-9$ ……㉠

$S_{15}=120$에서 $\dfrac{15\{2a+(15-1)d\}}{2}=120$

$\therefore a+7d=8$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-27$, $d=5$

$\therefore a_n=-27+(n-1)\times5=5n-32$

$5n-32>0$에서 $5n>32$

$\therefore n>\dfrac{32}{5}=6.4$

즉 등차수열 $\{a_n\}$은 제7항부터 양수이므로 첫째항부터 제6항까지의 합이 최소이다.

$\therefore p=6$

이때 $a_6=5\times6-32=-2$이므로 구하는 최솟값은

$S_6=\dfrac{6\{-27+(-2)\}}{2}=-87$ $\therefore q=-87$

$\therefore p+q=6+(-87)=-81$

33 답 −12

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $S_3=S_8$이므로

$\dfrac{3\{2\times(-4)+(3-1)d\}}{2}=\dfrac{8\{2\times(-4)+(8-1)d\}}{2}$

$3d-12=28d-32$, $25d=20$ $\therefore d=\dfrac{4}{5}$

$\therefore a_n=-4+(n-1)\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{5}n-\dfrac{24}{5}$

$\dfrac{4}{5}n-\dfrac{24}{5}>0$에서 $n>6$

즉 등차수열 $\{a_n\}$은 제7항부터 양수이므로 첫째항부터 제6항까지의 합이 최소이다.

이때 $a_6=\dfrac{4}{5}\times6-\dfrac{24}{5}=0$이므로 구하는 최솟값은

$S_6=\dfrac{6(-4+0)}{2}=-12$

33-1 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $S_4=S_{10}$이므로

$\dfrac{4\{2\times39+(4-1)d\}}{2}=\dfrac{10\{2\times39+(10-1)d\}}{2}$

$6d+156=45d+390$, $39d=-234$

$\therefore d=-6$

$\therefore a_n=39+(n-1)\times(-6)=-6n+45$

$-6n+45<0$에서 $n>\dfrac{45}{6}=7.5$

즉 등차수열 $\{a_n\}$은 제8항부터 음수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최대이다.

이때 $a_7=-6\times7+45=3$이므로 구하는 최댓값은

$S_7=\dfrac{7(39+3)}{2}=147$

34 답 ②

100 이하의 자연수 중에서 7로 나누었을 때의 나머지가 2인 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

2, 9, 16, …, 100

즉 첫째항이 2, 공차가 7인 등차수열이므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=2+(n-1)\times7=7n-5$

이때 100을 제n항이라 하면

$7n-5=100$, $7n=105$ $\therefore n=15$

따라서 구하는 총합은 첫째항이 2, 끝항이 100, 항수가 15인 등차수열의 합이므로

$\dfrac{15(2+100)}{2}=765$

34-1 답 ②

100과 300 사이에 있는 자연수 중에서 8로 나누어떨어지는 수, 즉 8의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

104, 112, 120, …, 296

즉 첫째항이 104, 공차가 8인 등차수열이므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=104+(n-1)\times8=8n+96$

이때 296을 제n항이라 하면

$8n+96=296$, $8n=200$ $\therefore n=25$

따라서 구하는 총합은 첫째항이 104, 끝항이 296, 항수가 25인 등차수열의 합이므로

$\dfrac{25(104+296)}{2}=5000$

35 답 ③

2로 나누었을 때의 나머지가 1인 자연수를 작은 것부터 차례로 나열하면

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, …

3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 자연수를 작은 것부터 차례로 나열하면

2, 5, 8, 11, 14, 17, …

즉 2로 나누었을 때의 나머지가 1이고, 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 자연수를 작은 것부터 차례로 나열하면

5, 11, 17, …

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 5, 공차가 6인 등차수열이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{10\{2\times5+(10-1)\times6\}}{2}$$

$$=320$$

35-1 답 364

두 자리 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 자연수를 작은 것부터 차례로 나열하면

10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, …, 88, 91, 94, 97

두 자리 자연수 중에서 4의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, …, 88, 92, 96

즉 두 자리 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 1이고, 4의 배수인 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

16, 28, 40, …, 88

이 수열은 첫째항이 16, 공차가 12인 등차수열이므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=16+(n-1)\times12=12n+4$

이때 88을 제n항이라 하면

$12n+4=88$, $12n=84$ $\therefore n=7$

따라서 구하는 총합은 첫째항이 16, 끝항이 88, 항수가 7인 등차수열의 합이므로

$$\frac{7(16+88)}{2}=364$$

36 답 2925

두 자리 자연수 중에서 2의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

10, 12, 14, …, 98 ……㉠

㉠은 첫째항이 10, 공차가 2인 등차수열이므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=10+(n-1)\times2=2n+8$

이때 98을 제n항이라 하면

$2n+8=98$, $2n=90$ $\therefore n=45$

즉 두 자리 자연수 중에서 2의 배수의 총합은

$$\frac{45(10+98)}{2}=2430$$

두 자리 자연수 중에서 5의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

10, 15, 20, …, 95 ……㉡

㉡은 첫째항이 10, 공차가 5인 등차수열이므로 일반항을 b_n이라 하면

$b_n=10+(n-1)\times5=5n+5$

이때 95를 제n항이라 하면

$5n+5=95$, $5n=90$ $\therefore n=18$

즉 두 자리 자연수 중에서 5의 배수의 총합은

$$\frac{18(10+95)}{2}=945$$

두 자리 자연수 중에서 2와 5의 최소공배수인 10의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

10, 20, 30, …, 90 ……㉢

㉢은 첫째항이 10, 공차가 10인 등차수열이므로 일반항을 c_n이라 하면

$c_n=10+(n-1)\times10=10n$

이때 90을 제n항이라 하면

$10n=90$ $\therefore n=9$

즉 두 자리 자연수 중에서 10의 배수의 총합은

$$\frac{9(10+90)}{2}=450$$

따라서 두 자리 자연수 중에서 2의 배수 또는 5의 배수인 수의 총합은

$2430+945-450=2925$

36-1 답 2475

50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 2로 나누어떨어지는 수, 즉 2의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

52, 54, 56, …, 98 ……㉠

㉠은 첫째항이 52, 공차가 2인 등차수열이므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=52+(n-1)\times2=2n+50$

이때 98을 제n항이라 하면

$2n+50=98$, $2n=48$ $\therefore n=24$

즉 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 2로 나누어떨어지는 수의 총합은 $\frac{24(52+98)}{2}=1800$ ……❶

50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 3으로 나누어떨어지는 수, 즉 3의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

51, 54, 57, …, 99 ……㉡

㉡은 첫째항이 51, 공차가 3인 등차수열이므로 일반항을 b_n이라 하면

$b_n=51+(n-1)\times3=3n+48$

이때 99를 제n항이라 하면

$3n+48=99$, $3n=51$ $\therefore n=17$

즉 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 3으로 나누어떨어지는 수의 총합은 $\frac{17(51+99)}{2}=1275$ ……❷

50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 2와 3의 최소공배수인 6으로 나누어떨어지는 수, 즉 6의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

54, 60, 66, …, 96 ……㉢

㉢은 첫째항이 54, 공차가 6인 등차수열이므로 일반항을 c_n이라 하면

$c_n=54+(n-1)\times6=6n+48$

이때 96을 제n항이라 하면

$6n+48=96$, $6n=48$ $\therefore n=8$

즉 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 6으로 나누어떨어지는 수의 총합은 $\frac{8(54+96)}{2}=600$ ……❸

따라서 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 2 또는 3으로 나누어떨어지는 수의 총합은

$1800+1275-600=2475$ ……❹

채점 기준	비율
❶ 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 2로 나누어떨어지는 수의 총합을 구할 수 있다.	30%
❷ 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 3으로 나누어떨어지는 수의 총합을 구할 수 있다.	30%
❸ 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 6으로 나누어떨어지는 수의 총합을 구할 수 있다.	30%
❹ 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 2 또는 3으로 나누어떨어지는 수의 총합을 구할 수 있다.	10%

37 답 ②

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2+2\times1=3$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=2n+1$ ……㉠

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n+1$

즉 $a_1=3$, $a_3=7$, $a_5=11$, …, $a_{99}=199$이므로

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}$는 첫째항이 3, 끝항이 199, 항수가 50인 등차수열의 합이다.

$\therefore a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=\frac{50(3+199)}{2}$

$=5050$

37-1 답 10

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2-2\times1=-1$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-2n-\{(n-1)^2-2(n-1)\}$

$=2n-3$ ……㉠

이때 $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-3$

따라서 $a_2=1$, $a_4=5$, $a_6=9$, …이므로 수열 a_2, a_4, a_6, …, a_{2k}는 첫째항이 1, 공차가 4, 항수가 k인 등차수열이므로

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}=190$에서

$\frac{k\{2\times1+(k-1)\times4\}}{2}=190$

$k(2k-1)=190$, $2k^2-k-190=0$

$(2k+19)(k-10)=0$

$\therefore k=-\frac{19}{2}$ 또는 $k=10$

그런데 k는 자연수이므로 $k=10$

38 답 38

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2+3\times1+2=6$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+3n+2-\{(n-1)^2+3(n-1)+2\}$

$=2n+2$ ……㉠

이때 $a_1=6$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않으므로

$a_1=6$, $a_n=2n+2$ $(n\geq2)$

따라서 $a_5=2\times5+2=12$, $a_9=2\times9+2=20$이므로

$a_1+a_5+a_9=6+12+20$

$=38$

참고 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=An^2+Bn+C$ (A, B, C는 실수)일 때

(1) $C=0$이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등차수열을 이룬다.

(2) $C\neq0$이면 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등차수열을 이룬다.

38-1 답 43

다항식 $2x^2+x+1$을 일차식 $x-n$으로 나누었을 때의 나머지 S_n은 나머지정리에 의하여

$S_n=2n^2+n+1$

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2\times1^2+1+1=4$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2+n+1-\{2(n-1)^2+(n-1)+1\}$

$=4n-1$ ……㉠

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않으므로

$a_1=4$, $a_n=4n-1$ $(n\geq2)$

따라서 $a_{10}=4\times10-1=39$이므로

$a_1+a_{10}=4+39=43$

39 답 18

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하면

$S_n=n^2+pn$, $T_n=2n^2-n$

$a_{10}=S_{10}-S_9=10^2+10p-(9^2+9p)=p+19$ ……❶

$b_{10}=T_{10}-T_9=2\times10^2-10-(2\times9^2-9)=37$ ……❷

이때 $a_{10}=b_{10}$이므로 $p+19=37$

$\therefore p=18$ ……❸

채점 기준	비율
❶ a_{10}의 값을 p에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ b_{10}의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ p의 값을 구할 수 있다.	20%

39-1 답 23

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하면

$S_n=n^2-n$, $T_n=3n^2+kn+3$

$a_5=S_5-S_4=5^2-5-(4^2-4)=8$

$b_{10}=T_{10}-T_9$

$=3\times10^2+10k+3-(3\times9^2+9k+3)$

$=k+57$

이때 $10a_5=b_{10}$이므로 $10\times8=k+57$

$\therefore k=23$

유형 완성하기 p. 224

40 답 ④

연속하는 10개의 자연수 중 가장 작은 수를 a라 하면 10개의 자연수는 첫째항이 a, 공차가 1인 등차수열을 이루므로

$\frac{10\{2a+(10-1)\times1\}}{2}=255$, $2a+9=51$

$2a=42$ $\therefore a=21$

따라서 가장 큰 자연수는

$21+(10-1)\times1=30$

41 답 15

$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 12\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$A^n=\begin{pmatrix}1 & 3n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

즉 행렬 $A+A^2+A^3+\cdots+A^n$의 모든 성분의 합은

$5+8+11+\cdots+(3n+2)=390$

따라서 첫째항이 5, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이 390이므로

$\frac{n\{2\times5+(n-1)\times3\}}{2}=390,\ n(3n+7)=780$

$3n^2+7n-780=0,\ (3n+52)(n-15)=0$

$\therefore n=-\frac{52}{3}$ 또는 $n=15$

그런데 n은 자연수이므로 $n=15$

42 답 1050

공연장의 관람석 수는 $24,\ 24+3,\ 24+3\times2,\ \cdots$

즉 관람석 수는 첫째항이 24, 공차가 3인 등차수열을 이루므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=24+(n-1)\times3=3n+21$

20번째 줄의 관람석 수는

$a_{20}=3\times20+21=81$

따라서 20번째 줄까지 배치되어 있는 총관람석 수는

$\frac{20(24+81)}{2}=1050$

43 답 32권

1등 반에 지급되는 공책의 수를 x권이라 하면 각 반에 지급되는 공책의 수는 다음 표와 같다.

등수	1등	2등	3등	4등	5등
공책의 수(권)	x	$x-4$	$x-8$	$x-12$	$x-16$

즉 각 반에 지급되는 공책의 수는 첫째항이 x, 공차가 -4인 등차수열을 이루므로 5개의 반에 지급되는 공책의 총수는

$x+(x-4)+(x-8)+(x-12)+(x-16)$

$=\frac{5\{x+(x-16)\}}{2}$

$=5x-40$

이때 120권의 공책을 모두 지급하므로

$5x-40=120,\ 5x=160 \quad \therefore x=32$

따라서 1등 반에 지급되는 공책의 수는 32권이다.

44 답 ②

새로 그리는 11개의 동심원의 반지름의 길이를 $r_1,\ r_2,\ r_3,\ \cdots,\ r_{11}$이라 하면 $4,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \cdots,\ r_{11},\ 16$은 첫째항이 4, 끝항이 16, 항수가 13인 등차수열을 이루므로 모든 동심원의 둘레의 길이의 합은

$2\pi\times4+2\pi r_1+2\pi r_2+2\pi r_3+\cdots+2\pi r_{11}+2\pi\times16$

$=2\pi(4+r_1+r_2+r_3+\cdots+r_{11}+16)$

$=2\pi\times\frac{13(4+16)}{2}$

$=260\pi$

45 답 3

n각형의 내각의 크기의 합은

$180^\circ\times(n-2)=180^\circ\times n-360^\circ$ ……❶

첫째항이 30°, 공차가 30°, 항수가 n인 등차수열의 합은

$\frac{n\{2\times30^\circ+(n-1)\times30^\circ\}}{2}=15^\circ\times n^2+15^\circ\times n$ ……❷

즉 $15^\circ\times n^2+15^\circ\times n=180^\circ\times n-360^\circ$이므로

$n^2-11n+24=0,\ (n-3)(n-8)=0$

$\therefore n=3$ 또는 $n=8$

이때 $n=8$이면 가장 큰 내각의 크기가 $30^\circ+(8-1)\times30^\circ=240^\circ$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore n=3$ ……❸

채점 기준	비율
❶ n각형의 내각의 크기의 합을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❷ 등차수열의 합을 이용하여 n각형의 내각의 크기의 합을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ n의 값을 구할 수 있다.	40%

학교 시험 대비 문제

p. 225~228

01 답 ②

주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 제5항이 $\log_2 243$이므로

$\log_2 3+(5-1)d=\log_2 243$

$4d=\log_2 243-\log_2 3=\log_2\frac{243}{3}=\log_2 81=4\log_2 3$

$\therefore d=\log_2 3$

02 답 ⑤

$a_3=11$에서 $a+2d=11$ ……㉠

$a_9=29$에서 $a+8d=29$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5,\ d=3$

$\therefore a+d=5+3=8$

03 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3+a_5=20$에서 $(a+2d)+(a+4d)=20$

$2a+6d=20 \quad \therefore a+3d=10$ ……㉠

$a_8=26$에서 $a+7d=26$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ d=4$

따라서 $a_n=-2+(n-1)\times4=4n-6$이므로

$a_7=4\times7-6=22$

04 답 ①

첫째항이 -80, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=-80+(n-1)\times3=3n-83$

$a_{21}=m$에서 $3\times21-83=m$

$\therefore m=-20$

$3n-83>0$에서 $n>\frac{83}{3}=27.6\cdots$

즉 처음으로 양수가 되는 항은 제28항이므로

$n=28$

$\therefore m+n=-20+28=8$

05 답 ⑤

첫째항이 11, 제5항이 35인 등차수열의 공차를 d라 하면

$11+4d=35$, $4d=24$

$\therefore d=6$

따라서 $a=11+6=17$, $c=11+3\times6=29$이므로

$c-a=29-17=12$

06 답 11

첫째항이 -3, 공차가 $\frac{3}{2}$인 등차수열의 제$(n+2)$항이 15이므로

$-3+(n+1)\times\frac{3}{2}=15$, $\frac{3}{2}(n+1)=18$

$n+1=12$ $\therefore n=11$

07 답 ③

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$b=\frac{a+c}{2}$ ……㉠

세 수 b^2, c^2, a^2이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2c^2=b^2+a^2$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2c^2=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2+a^2$

$7c^2-2ac-5a^2=0$, $(7c+5a)(c-a)=0$

$\therefore c=-\frac{5}{7}a\ (\because c\neq a)$

이때 c가 정수이므로 a는 7의 배수이다.

그런데 $0<a<10$이므로 $a=7$, $c=-5$ ……㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$b=\frac{7+(-5)}{2}=1$

$\therefore abc=7\times1\times(-5)=-35$

08 답 ③

등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$라 하면

세 수의 합이 6이므로

$(a-d)+a+(a+d)=6$, $3a=6$

$\therefore a=2$

세 수의 제곱의 합이 14이므로

$(2-d)^2+4+(2+d)^2=14$, $2d^2+12=14$

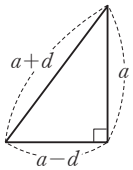
$d^2=1$ $\therefore d=\pm1$

따라서 세 수는 1, 2, 3이므로 세 수의 곱은

$1\times2\times3=6$

09 답 25

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형의 세 변의 길이를 $a-d$, a, $a+d$ $(a>0, d>0)$라 하면 직각삼각형의 넓이가 150이므로



$\frac{1}{2}a(a-d)=150$

$\therefore a^2-ad=300$ ……㉠

피타고라스 정리에 의하여

$(a+d)^2=a^2+(a-d)^2$, $a^2-4ad=0$

$a(a-4d)=0$ $\therefore a=4d\ (\because a>0)$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $16d^2-4d^2=300$

$d^2=25$ $\therefore d=5\ (\because d>0)$

$d=5$를 ㉡에 대입하면 $a=4\times5=20$

따라서 직각삼각형의 빗변의 길이는

$a+d=20+5=25$

10 답 -330

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1-a_{10}=27$에서 $a-(a+9d)=27$

$-9d=27$ $\therefore d=-3$

$S_{10}=a_{10}$에서 $\frac{10\{2a+(10-1)\times(-3)\}}{2}=a+9\times(-3)$

$5(2a-27)=a-27$, $10a-135=a-27$

$9a=108$ $\therefore a=12$

$\therefore S_{20}=\frac{20\{2\times12+(20-1)\times(-3)\}}{2}=-330$

11 답 ①

첫째항이 1, 끝항이 2, 항수가 $(n+2)$인 등차수열의 합이 24이므로

$\frac{(n+2)(1+2)}{2}=24$, $3(n+2)=48$

$n+2=16$ $\therefore n=14$

12 답 ④

첫째항이 4, 공차가 4, 제$(n+2)$항이 56이므로

$4+(n+1)\times4=56$, $4(n+1)=52$

$n+1=13$ $\therefore n=12$

즉 주어진 수열은 첫째항이 4, 끝항이 56, 항수가 14인 등차수열이므로 주어진 수열의 합은

$\frac{14(4+56)}{2}=420$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=420-4-56=360$

13 답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_5=40$에서 $\frac{5\{2a+(5-1)d\}}{2}=40$

$\therefore a+2d=8$ ……㉠

$S_{10}=155$에서 $\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=155$

$\therefore 2a+9d=31$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=3$

$\therefore a_{10}=2+(10-1)\times3=29$

14 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_{10}=40$에서 $\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=40$

$\therefore 2a+9d=8$ ……㉠

$S_{20}-S_{10}=240$에서 $\frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}-40=240$

$\therefore 2a+19d=28$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $d=2$

따라서 첫째항부터 제30항까지의 합은

$S_{30}=\frac{30\{2\times(-5)+(30-1)\times2\}}{2}=720$

15 답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_7=2$에서 $a+6d=2$ ……㉠

$a_{10}=-7$에서 $a+9d=-7$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=20$, $d=-3$

$\therefore a_n=20+(n-1)\times(-3)=-3n+23$

$-3n+23<0$에서 $-3n<-23$

$\therefore n>\frac{23}{3}=7.6\cdots$

즉 등차수열 $\{a_n\}$은 제8항부터 음수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최대이다.

이때 $a_7=2$이므로 구하는 최댓값은

$S_7=\frac{7(20+2)}{2}=77$

16 답 ③

첫째항이 21, 끝항이 3, 항수가 $(n+2)$인 등차수열의 합이 120이므로

$\frac{(n+2)(21+3)}{2}=120$, $12(n+2)=120$

$n+2=10$ $\therefore n=8$

이때 공차를 d라 하면 3은 제10항이므로

$21+9d=3$ $\therefore d=-2$

주어진 수열을 $\{b_n\}$이라 하면 일반항은

$b_n=21+(n-1)\times(-2)=-2n+23$

$-2n+23<0$에서 $-2n<-23$

$\therefore n>\frac{23}{2}=11.5$

즉 등차수열 $\{b_n\}$은 제12항부터 음수이므로 첫째항부터 제11항까지의 합이 최대이다.

$\therefore p=11$

이때 $b_{11}=-2\times11+23=1$이므로 최댓값은

$S_{11}=\frac{11(21+1)}{2}=121$ $\therefore q=121$

$\therefore p+q=11+121=132$

17 답 5586

100과 300 사이의 자연수 중에서 7의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

105, 112, 119, …, 294

즉 첫째항이 105, 공차가 7인 등차수열이므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=105+(n-1)\times7=7n+98$

이때 294를 제n항이라 하면

$7n+98=294$, $7n=196$

$\therefore n=28$

따라서 구하는 총합은 첫째항이 105, 끝항이 294, 항수가 28인 등차수열의 합이므로

$\frac{28(105+294)}{2}=5586$

18 답 ①

두 자리 자연수 중에서 3으로 나누어떨어지는 수, 즉 3의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

12, 15, 18, …, 99 ……㉠

㉠은 첫째항이 12, 공차가 3인 등차수열이므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=12+(n-1)\times3=3n+9$

이때 99를 제n항이라 하면

$3n+9=99$, $3n=90$

$\therefore n=30$

즉 두 자리 자연수 중에서 3으로 나누어떨어지는 수의 총합은

$\frac{30(12+99)}{2}=1665$

두 자리 자연수 중에서 7로 나누어떨어지는 수, 즉 7의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

14, 21, 28, …, 98 ……㉡

㉡은 첫째항이 14, 공차가 7인 등차수열이므로 일반항을 b_n이라 하면

$b_n=14+(n-1)\times7=7n+7$

이때 98을 제n항이라 하면

$7n+7=98$, $7n=91$

$\therefore n=13$

즉 두 자리 자연수 중에서 7로 나누어떨어지는 수의 총합은

$\frac{13(14+98)}{2}=728$

두 자리 자연수 중에서 3과 7의 최소공배수인 21로 나누어떨어지는 수, 즉 21의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

21, 42, 63, 84

즉 두 자리 자연수 중에서 21로 나누어떨어지는 수의 총합은

$21+42+63+84=210$

따라서 두 자리 자연수 중에서 3 또는 7로 나누어떨어지는 수의 총합은

$1665+728-210=2183$

19 답 17

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2\times1^2-1-1=0$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2-n-1-\{2(n-1)^2-(n-1)-1\}$

$=4n-3$ ……㉠

이때 $a_1=0$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않으므로

$a_1=0$, $a_n=4n-3$ $(n\geq2)$

따라서 $a_5=4\times5-3=17$이므로

$a_1+a_5=0+17=17$

20 답 185

경기장의 관람석 수는

$12, 12+5, 12+5\times2, \cdots$

즉 관람석 수는 첫째항이 12, 공차가 5인 등차수열을 이룬다.

따라서 첫 번째 줄부터 n번째 줄까지 배치되어 있는 관람석 수를 S_n이라 하면 4번째 줄부터 8번째 줄까지 배치되어 있는 관람석 수는

$$S_8-S_3=\frac{8\{2\times12+(8-1)\times5\}}{2}-\frac{3\{2\times12+(3-1)\times5\}}{2}$$

$$=236-51=185$$

21 답 ①

큰 원의 반지름의 길이가 $4\sqrt{3}$이므로

$S_1+S_2=\pi\times(4\sqrt{3})^2=48\pi$

이때 S_1, S_2, S_1+S_2가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면

$S_1+S_2=S_1+2d=48\pi$ ……㉠

또 $S_1+S_2=S_1+(S_1+d)=48\pi$이므로

$2S_1+d=48\pi$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $S_1=16\pi$, $d=16\pi$

따라서 작은 원의 넓이는 16π이다.

서술형 1 답 제14항

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{10}=51$에서 $a+9d=51$ ……㉠

$a_3:a_8=2:1$에서 $(a+2d):(a+7d)=2:1$

$a+2d=2(a+7d)$ $\therefore a+12d=0$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=204$, $d=-17$ ……❶

$\therefore a_n=204+(n-1)\times(-17)=-17n+221$ ……❷

$-17n+221<0$에서 $-17n<-221$

$\therefore n>\frac{221}{17}=13$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제14항이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 구할 수 있다.	40%
❷ a_n을 구할 수 있다.	20%
❸ 처음으로 음수가 되는 항은 제몇 항인지 구할 수 있다.	40%

서술형 2 답 15

$a_n=n+3$에서 $a_1=4$, $a_k=k+3$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제k항까지의 합은

$$\frac{k\{4+(k+3)\}}{2}=\frac{k(k+7)}{2}$$ ……❶

$b_n=\frac{1}{2}n+7$에서 $b_1=\frac{15}{2}$, $b_k=\frac{1}{2}k+7$이므로 등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제k항까지의 합은

$$\frac{k\left\{\frac{15}{2}+\left(\frac{1}{2}k+7\right)\right\}}{2}=\frac{k(k+29)}{4}$$ ……❷

이때 $\frac{k(k+7)}{2}=\frac{k(k+29)}{4}$이므로 $2k(k+7)=k(k+29)$

$k^2-15k=0$, $k(k-15)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=15$

그런데 k는 자연수이므로 $k=15$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제k항까지의 합을 구할 수 있다.	40%
❷ 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제k항까지의 합을 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 4

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2+3\times1=4$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+3n-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$

$=2n+2$ ……㉠

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n+2$ ……❶

$10<a_n<20$에서 $10<2n+2<20$

$8<2n<18$ $\therefore 4<n<9$ ……❷

따라서 자연수 n의 값은 5, 6, 7, 8이므로 그 개수는 4이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다.	50%
❷ n의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❸ 자연수 n의 개수를 구할 수 있다.	20%

10% 핵심 기출 문제

p. 229~230

01 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 a, 공차가 -2이므로

$(a_2+a_4)^2=16a_3$에서 $(a-2+a-6)^2=16(a-4)$

$(2a-8)^2=16(a-4)$, $a^2-12a+32=0$

$(a-4)(a-8)=0$ $\therefore a=4$ 또는 $a=8$

$a=4$일 때, $a_3=4+(3-1)\times(-2)=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a=8$일 때, $a_3=8+(3-1)\times(-2)=4$이므로 조건을 만족시킨다.

$\therefore a=8$

02 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_n=a+(n-1)\times6=6n+a-6$

$|a_2-3|=|a_3-3|$에서 $|a+3|=|a+9|$

$\therefore a+3=\pm(a+9)$

(i) $a+3=a+9$일 때, $3=9$이므로 모순이다.

(ii) $a+3=-(a+9)$일 때

$a+3=-a-9$, $2a=-12$ $\therefore a=-6$

(i), (ii)에서 $a=-6$

따라서 $a_n=6n-12$이므로

$a_5=6\times5-12=18$

03 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$|a_3|-a_4=0$에서 $|a_3|=a_4$

$|-15+2d|=-15+3d$
$\therefore -15+2d=\pm(-15+3d)$
또 $-15+3d\geq 0$이므로 $d\geq 5$ ……㉠
(i) $-15+2d=-15+3d$일 때
$d=0$이므로 ㉠에 모순이다.
(ii) $-15+2d=-(-15+3d)$일 때
$5d=30$ $\therefore d=6$
(i), (ii)에서 $d=6$
$\therefore a_7=-15+(7-1)\times 6=21$

04 답 ③
$x^2-nx+4(n-4)=0$에서 $(x-4)(x-n+4)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=n-4$
세 수 $1, \alpha, \beta$가 등차수열을 이루므로
$2\alpha=\beta+1$ ……㉠
(i) $\alpha=4, \beta=n-4$일 때
$\alpha<\beta$이므로 $4<n-4$ $\therefore n>8$
㉠에서 $8=(n-4)+1$이므로
$n=11$
(ii) $\alpha=n-4, \beta=4$일 때
$\alpha<\beta$이므로 $n-4<4$ $\therefore n<8$
㉠에서 $2(n-4)=4+1$이므로
$n=\frac{13}{2}$
그런데 n은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(i), (ii)에서 $n=11$

05 답 ③
함수 $y=|x^2-9|$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로
$a_2=-a_3$
공차는 $a_3-a_2=a_3-(-a_3)=2a_3$이므로
$a_4=a_3+2a_3=3a_3$
이때 점 (a_3, k)는 함수 $y=-x^2+9$의 그래프 위의 점이므로
$k=-a_3^2+9$ $\therefore a_3^2=9-k$ ……㉠
또 점 (a_4, k)는 함수 $y=x^2-9$의 그래프 위의 점이므로
$k=a_4^2-9=(3a_3)^2-9=9a_3^2-9$
$\therefore a_3^2=\frac{k+9}{9}$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $9-k=\frac{k+9}{9}$
$k+9=9(9-k)$, $10k=72$
$\therefore k=\frac{36}{5}$

06 답 183
$a_n=2n+1$, $b_n=3n+3$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로
$\{a_n\}$: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, …
$\{b_n\}$: 6, 9, 12, 15, 18, 21, …
두 수열에서 공통인 항을 작은 것부터 차례로 나열하면
9, 15, 21, …
즉 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 9, 공차가 6인 등차수열이므로
$c_{30}=9+(30-1)\times 6=183$

07 답 240
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3=-2$에서 $a+2d=-2$ ……㉠
$a_9=46$에서 $a+8d=46$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-18$, $d=8$
$\therefore a_n=-18+(n-1)\times 8=8n-26$
$8n-26>0$에서 $8n>26$
$\therefore n>\frac{26}{8}=3.25$
즉 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제3항까지 음수이고 제4항부터 양수이다.
이때 $a_2=8\times 2-26=-10$, $a_3=8\times 3-26=-2$이므로
$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{10}|$
$=-a_1-a_2-a_3+a_4+\cdots+a_{10}$
$=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{10}-2(a_1+a_2+a_3)$
$=\frac{10\{2\times(-18)+(10-1)\times 8\}}{2}-2(-18-10-2)$
$=180+60=240$

08 답 315
x좌표가 t인 점에서 선분의 길이를 $f(t)$라 하면 선분의 길이는 두 직선의 y의 값의 차이므로
$f(t)=a(t-1)-t=at-a-t=(a-1)t-a$
이때 각 선분을 같은 간격으로 그었으므로 그 간격을 d라 하면 t는 공차가 d인 등차수열을 이루고 14개의 선분의 길이도 등차수열을 이룬다.
따라서 선분의 길이의 합은 첫째항이 3, 끝항이 42, 항수가 14인 등차수열의 합이므로
$\frac{14(3+42)}{2}=315$

> **참고** 일차함수 $f(x)=ax+b$에서 x의 값들이 등차수열을 이루면 $f(x)$의 값들도 등차수열을 이룬다.

09 답 37
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 a, 공차가 -4이므로
$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)\times(-4)\}}{2}=-2n^2+(a+2)n$
모든 자연수 n에 대하여 $S_n<200$이므로
$-2n^2+(a+2)n<200$, $2n^2+200>(a+2)n$
$\therefore 2n+\frac{200}{n}>a+2$ ……㉠
이때 $n>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$2n+\frac{200}{n}\geq 2\sqrt{2n\times\frac{200}{n}}=2\sqrt{400}=40$
(단, 등호는 $n=10$일 때 성립)
모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립하려면
$40>a+2$ $\therefore a<38$
따라서 자연수 a의 최댓값은 37이다.

10 답 30
(가)에서 $S_7=S_8$이므로 $a_8=S_8-S_7=0$
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_8=0$에서 $a+7d=0$ $\therefore a=-7d$ ……㉠

S_n의 값은 $n=8$에서 최소이므로 $S_9 \geq S_8$

$\therefore a_9 = S_9 - S_8 \geq 0$

즉 $a_9 = a_8 + d$이므로 $d \geq 0$

그런데 $d=0$이면 ㉠에서 $a=0$이므로 ㈏를 만족시키지 않는다.

$\therefore d > 0$

$a_8 = 0$이고 $d > 0$이므로 $n \geq 9$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$이다.

즉 $m > 8$일 때, $S_{2m} > S_m$이므로

㈏에서 $-S_m = S_{2m} = 162$ ……㉡

$$-\frac{m\{2a+(m-1)d\}}{2}$$

$$=\frac{2m\{2a+(2m-1)d\}}{2}-\frac{m\{2\times(-7d)+(m-1)d\}}{2}$$

$$=\frac{2m\{2\times(-7d)+(2m-1)d\}}{2}\ (\because ㉠)$$

$14-(m-1) = -28+2(2m-1)$

$-m+15 = 4m-30,\ 5m=45$

$\therefore m=9$

즉 ㉡에서 $S_9 = -162$이므로

$$\frac{9\{2a+(9-1)d\}}{2}=-162,\ \frac{9(-14d+8d)}{2}=-162$$

$-27d = -162 \quad \therefore d=6$

$d=6$을 ㉠에 대입하면 $a=-42$

$\therefore a_{13} = -42+(13-1)\times 6 = 30$

11 답 273

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\ (a \neq 0)$, 공차를 d라 하면

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

이때 $S_9 = S_{18}$이므로

$$\frac{9\{2a+(9-1)d\}}{2}=\frac{18\{2a+(18-1)d\}}{2}$$

$2a+8d = 2(2a+17d),\ a+4d = 2a+17d$

$\therefore a=-13d$ ……㉠

즉 $S_n=\frac{n\{-26d+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n(n-27)$이므로

$S_1 = S_{26} = -13d$

$S_2 = S_{25} = -25d$

$S_3 = S_{24} = -36d$

⋮

$S_{13} = S_{14} = -91d$

$S_{27} = 0,\ S_{28} = 14d,\ S_{29} = 29d,\ \cdots$

이때 집합 T_n의 원소의 개수는

$1 \leq n \leq 12$일 때

$T_n = \{S_1, S_2, \cdots, S_n\} \quad \therefore n(T_n) = n \leq 12$

$n=13$일 때

$T_{13} = \{S_1, S_2, \cdots, S_{13}\} \quad \therefore n(T_{13}) = 13$

$n=14$일 때

$T_{14} = \{S_1, S_2, \cdots, S_{13}, S_{14}\}$

$= \{S_1, S_2, \cdots, S_{13}\}\ (\because S_{13} = S_{14})$

$\therefore n(T_{14}) = 13$

$n=15$일 때

$T_{15} = \{S_1, S_2, \cdots, S_{13}, S_{14}, S_{15}\}$

$= \{S_1, S_2, \cdots, S_{13}\}\ (\because S_{13} = S_{14}, S_{12} = S_{15})$

$\therefore n(T_{15}) = 13$

⋮

$n=26$일 때

$T_{26} = \{S_1, S_2, \cdots, S_{26}\}$

$= \{S_1, S_2, \cdots, S_{13}\}\ (\because S_{13} = S_{14}, S_{12} = S_{15}, \cdots, S_1 = S_{26})$

$\therefore n(T_{26}) = 13$

$n=27$일 때

$T_{27} = \{S_1, S_2, \cdots, S_{26}, S_{27}\}$

$= \{S_1, S_2, \cdots, S_{13}, 0\}\ (\because S_{13} = S_{14}, S_{12} = S_{15}, \cdots, S_1 = S_{26})$

$\therefore n(T_{27}) = 14$

$n=28$일 때

$T_{28} = \{S_1, S_2, \cdots, S_{26}, S_{27}, S_{28}\}$

$= \{S_1, S_2, \cdots, S_{13}, 0, S_{28}\}$

$(\because S_{13} = S_{14}, S_{12} = S_{15}, \cdots, S_1 = S_{26})$

$\therefore n(T_{28}) = 15$

⋮

즉 $n \geq 27$이면 $n(T_n) \geq 14$

따라서 집합 T_n의 원소의 개수가 13이 되도록 하는 자연수 n의 값은 13, 14, 15, …, 26이므로 그 합은

$$13+14+15+\cdots+26=\frac{14(13+26)}{2}=273$$

09 등비수열

개념 완성하기 p. 233~234

01 답 $a=4, r=4$

$a=4^1=4$

$r=4$

02 답 $a=1, r=3$

$a=3^{1-1}=1$

$r=3$

03 답 $a=10, r=-\frac{1}{2}$

$a=-20\times\left(-\frac{1}{2}\right)^1=10$

$r=-\frac{1}{2}$

04 답 $a=5, r=\frac{1}{5}$

$a=25\times5^{-1}=5$

$r=5^{-1}=\frac{1}{5}$

05 답 공비: -3, $a=9$, $b=81$

공비가 -3이므로

$a=-3\times(-3)=9$

$b=-27\times(-3)=81$

06 답 공비: $\frac{1}{2}$, $a=80$, $b=10$

공비가 $\frac{1}{2}$이므로

$a\times\frac{1}{2}=40$ $\therefore a=80$

$b=20\times\frac{1}{2}=10$

07 답 공비: $-\sqrt{2}$, $a=1$, $b=-2\sqrt{2}$

공비가 $-\sqrt{2}$이므로

$a\times(-\sqrt{2})=-\sqrt{2}$ $\therefore a=1$

$b=2\times(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$

08 답 공비: $-\frac{1}{3}$, $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{2}{9}$

공비가 $-\frac{1}{3}$이므로

$a=-2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$

$b=a\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{9}$

09 답 $a_n=-3^{n-1}$

10 답 $a_n=4\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

11 답 $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$

첫째항이 3, 공비가 $\frac{1}{3}$이므로

$a_n=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$

12 답 $a_n=2\sqrt{2}\times(-1)^{n-1}$

첫째항이 $2\sqrt{2}$, 공비가 -1이므로

$a_n=2\sqrt{2}\times(-1)^{n-1}$

13 답 $a_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

첫째항이 3, 공비가 $\frac{1}{2}$이므로

$a_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

14 답 $\frac{1}{3}$

$a_n=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이므로

$a_6=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{3}$

15 답 8

$a_n=\sqrt{2}\times(\sqrt{2})^{n-1}=(\sqrt{2})^n$이므로

$a_6=(\sqrt{2})^6=8$

16 답 1

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=81$에서 $ar=81$ ……㉠

$a_7=\frac{1}{3}$에서 $ar^6=\frac{1}{3}$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^5=\frac{1}{243}=\left(\frac{1}{3}\right)^5$ $\therefore r=\frac{1}{3}$

$r=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{3}a=81$ $\therefore a=243$

따라서 $a_n=243\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이므로

$a_6=243\times\left(\frac{1}{3}\right)^5=1$

17 답 48

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=6$에서 $ar^2=6$ ……㉠

$a_8=192$에서 $ar^7=192$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^5=32=2^5$ $\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$a\times2^2=6$ $\therefore a=\frac{3}{2}$

따라서 $a_n=\frac{3}{2}\times2^{n-1}$이므로

$a_6=\frac{3}{2}\times2^5=48$

18 답 -96

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=12$에서 $ar^2=12$ ……㉠

$a_8=-384$에서 $ar^7=-384$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^5=-32=(-2)^5$ $\therefore r=-2$

$r=-2$를 ㉠에 대입하면

$a\times(-2)^2=12$ $\therefore a=3$

따라서 $a_n=3\times(-2)^{n-1}$이므로

$a_6=3\times(-2)^5=-96$

19 답 512

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_5=256$에서 $ar^4=256$ ……㉠

$a_8=2048$에서 $ar^7=2048$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8=2^3$ $\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$a\times2^4=256$ $\therefore a=16$

따라서 $a_n=16\times2^{n-1}$이므로

$a_6=16\times2^5=512$

20 답 $-6\sqrt{6}$ 또는 $6\sqrt{6}$

세 수 6, x, 36이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$x^2=6\times36=216$ $\therefore x=\pm6\sqrt{6}$

참고 (i) $x=-6\sqrt{6}$일 때, 세 수는 6, $-6\sqrt{6}$, 36이므로 공비가 $-\sqrt{6}$인 등비수열이다.

(ii) $x=6\sqrt{6}$일 때, 세 수는 6, $6\sqrt{6}$, 36이므로 공비가 $\sqrt{6}$인 등비수열이다.

21 답 $-\frac{1}{3}$ 또는 $\frac{1}{3}$

세 수 9, x, $\frac{1}{81}$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$x^2=9\times\frac{1}{81}=\frac{1}{9}$ $\therefore x=\pm\frac{1}{3}$

참고 (i) $x=-\frac{1}{3}$일 때, 세 수는 9, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{81}$이므로 공비가 $-\frac{1}{27}$인 등비수열이다.

(ii) $x=\frac{1}{3}$일 때, 세 수는 9, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{81}$이므로 공비가 $\frac{1}{27}$인 등비수열이다.

22 답 6

세 수 $3x$, x, 2가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$x^2=3x\times2$, $x^2-6x=0$

$x(x-6)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=6$

그런데 $x=0$이면 세 수는 0, 0, 2이므로 등비수열이 아니다.

$\therefore x=6$

23 답 3

세 수 $x+1$, $2x$, $4x-3$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(2x)^2=(x+1)(4x-3)$, $4x^2=4x^2+x-3$

$\therefore x=3$

24 답 $\frac{1}{4}(5^7-1)$

$\frac{5^7-1}{5-1}=\frac{1}{4}(5^7-1)$

25 답 $\frac{2}{5}(6^{10}-1)$

$\frac{2(6^{10}-1)}{6-1}=\frac{2}{5}(6^{10}-1)$

26 답 $\frac{27}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6\right\}$

$\frac{9\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6\right\}$

27 답 $36\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^8\right\}$

$\frac{30\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{6}}=36\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^8\right\}$

28 답 $3(2^{10}-1)$

첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{3(2^{10}-1)}{2-1}=3(2^{10}-1)$

29 답 $27\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$

첫째항이 9, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{9\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{2}{3}}=27\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$

30 답 $\frac{1}{6}(1-2^{10})$

첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 -2인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{\frac{1}{2}\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}=\frac{1}{6}(1-2^{10})$

31 답 $\frac{25}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\right\}$

첫째항이 10, 공비가 $-\frac{1}{5}$인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{10\left\{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^{10}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)}=\frac{25}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\right\}$

32 답 $\frac{5}{16}(2^6-1)$

첫째항이 $\frac{5}{16}$, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n=\frac{5}{16}\times2^{n-1}$

이때 10을 제n항이라 하면

$\frac{5}{16}\times 2^{n-1}=10,\ 2^{n-1}=2^5$

$n-1=5 \quad \therefore n=6$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제6항까지의 합은

$\frac{\frac{5}{16}(2^6-1)}{2-1}=\frac{5}{16}(2^6-1)$

33 답 $\frac{1}{4}(3^7+1)$

첫째항이 1, 공비가 -3인 등비수열이므로

$a_n=(-3)^{n-1}$

이때 729를 제n항이라 하면

$(-3)^{n-1}=729,\ (-3)^{n-1}=(-3)^6$

$n-1=6 \quad \therefore n=7$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제7항까지의 합은

$\frac{1-(-3)^7}{1-(-3)}=\frac{1}{4}(3^7+1)$

34 답 $4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$

첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

이때 $\frac{1}{256}$을 제n항이라 하면

$2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{256},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^9$

$n-1=9 \quad \therefore n=10$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$

35 답 $1-0.1^9$

첫째항이 0.9, 공비가 0.1인 등비수열이므로

$a_n=0.9\times 0.1^{n-1}$

이때 0.000000009를 제n항이라 하면

$0.9\times 0.1^{n-1}=0.000000009,\ 0.1^{n-1}=0.1^8$

$n-1=8 \quad \therefore n=9$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합은

$\frac{0.9\times(1-0.1^9)}{1-0.1}=1-0.1^9$

36 답 $a_n=3\times 4^{n-1}$

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=4-1=3$

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=4^n-1-(4^{n-1}-1)$

$=3\times 4^{n-1}$ ……㉠

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=3\times 4^{n-1}$

37 답 $a_n=-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=3\times\frac{1}{2}-3=-\frac{3}{2}$

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-3-\left\{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-3\right\}$

$=-\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ……㉠

이때 $a_1=-\frac{3}{2}$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

38 답 $a_1=4,\ a_n=2\times 3^n\ (n\geq 2)$

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=3^2-5=4$

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3^{n+1}-5-(3^n-5)$

$=2\times 3^n$ ……㉠

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않으므로

$a_1=4,\ a_n=2\times 3^n\ (n\geq 2)$

39 답 $a_1=\frac{11}{2},\ a_n=\frac{9}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (n\geq 2)$

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=4-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{2}$

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=4-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\left\{4-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$=\frac{9}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ……㉠

이때 $a_1=\frac{11}{2}$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않으므로

$a_1=\frac{11}{2},\ a_n=\frac{9}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (n\geq 2)$

40 답 100만 원

매월 초에 6만 원씩 월이율 5 %의 복리로 1년, 즉 12개월 동안 적립한 적립금의 원리합계는

$6(1+0.05)+6(1+0.05)^2+6(1+0.05)^3+\cdots+6(1+0.05)^{12}$

$=\frac{6\times 1.05\times(1.05^{12}-1)}{1.05-1}$

$=\frac{6\times 1.05\times(1.8-1)}{0.05}$

$=\frac{6\times 1.05\times 0.8}{0.05}$

$=100.8$(만 원)

이때 만 원 미만은 버리므로 1년 후 월말의 적립금의 원리합계는 100만 원이다.

41 답 1133만 원

매년 말에 100만 원씩 연이율 3 %의 복리로 10년 동안 적립한 적립금의 원리합계는

$100+100(1+0.03)+100(1+0.03)^2+\cdots+100(1+0.03)^9$

$=\dfrac{100\times(1.03^{10}-1)}{1.03-1}$

$=\dfrac{100\times(1.34-1)}{0.03}$

$=\dfrac{100\times0.34}{0.03}$

$=1133.33\cdots$(만 원)

이때 만 원 미만은 버리므로 10년 후 연말의 적립금의 원리합계는 1133만 원이다.

유형 완성하기 p. 235~248

01 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=6$에서 $ar=6$ ……㉠

$a_5=48$에서 $ar^4=48$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$ $\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$2a=6$ $\therefore a=3$

따라서 $a_n=3\times2^{n-1}$이므로

$a_7=3\times2^6=192$

01-1 답 11

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=16$에서 $ar^2=16$ ……㉠

$a_6=2$에서 $ar^5=2$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=\dfrac{1}{8}$ $\therefore r=\dfrac{1}{2}$

$r=\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{1}{4}a=16$ $\therefore a=64$

$\therefore a_n=64\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

이때 $a_k=\dfrac{1}{16}$에서 $64\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}=\dfrac{1}{16}$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}$, $k-1=10$

$\therefore k=11$

02 답 ①

$a_n=3\times2^{1-2n}$에서

$a_1=3\times2^{-1}=\dfrac{3}{2}$, $a_2=3\times2^{-3}=\dfrac{3}{8}$

$\therefore$ (공비)$=a_2\div a_1=\dfrac{3}{8}\div\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{4}$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 $\dfrac{3}{2}$, 공비는 $\dfrac{1}{4}$이다.

02-1 답 첫째항: $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$, 공비: $\dfrac{1}{3}$

$a_n=\dfrac{5}{(\sqrt{3})^{2n-1}}$에서

$a_1=\dfrac{5}{\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$, $a_2=\dfrac{5}{(\sqrt{3})^3}=\dfrac{5}{3\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

$\therefore$ (공비)$=a_2\div a_1=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}\div\dfrac{5\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{3}$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$, 공비는 $\dfrac{1}{3}$이다.

03 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_5=\dfrac{1}{8}$에서 $ar^4=\dfrac{1}{8}$ ……㉠

$a_7=\dfrac{1}{32}$에서 $ar^6=\dfrac{1}{32}$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=\dfrac{1}{4}$ $\therefore r=\dfrac{1}{2}$ $(\because r>0)$

$r=\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{1}{16}a=\dfrac{1}{8}$ $\therefore a=2$

따라서 $a_n=2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$이므로

$a_2a_4a_6\cdots a_{20}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^0\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\times\cdots\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{18}$

$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0+2+4+\cdots+18}$ (첫째항이 0, 공차가 2, 항수가 10인 등차수열의 합)

$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{10(0+18)}{2}}$

$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{90}$

$=2^{-90}$

03-1 답 3^{80}

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_4=9$에서 $ar^3=9$ ……㉠

$a_6=81$에서 $ar^5=81$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=9$ $\therefore r=3$ $(\because r>0)$ ……❶

$r=3$을 ㉠에 대입하면

$27a=9$ $\therefore a=\dfrac{1}{3}$ ……❷

따라서 $a_n=\dfrac{1}{3}\times3^{n-1}=3^{n-2}$이므로

$a_1a_3a_5\cdots a_{19}=3^{-1}\times3^1\times3^3\times\cdots\times3^{17}$

$=3^{-1+1+3+\cdots+17}$ (첫째항이 −1, 공차가 2, 항수가 10인 등차수열의 합)

$=3^{\frac{10(-1+17)}{2}}$

$=3^{80}$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 구할 수 있다.	30%
❷ 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 구할 수 있다.	30%
❸ $a_1a_3a_5\cdots a_{19}$의 값을 구할 수 있다.	40%

04 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3+a_4=12$에서 $ar^2+ar^3=12$

$\therefore ar^2(1+r)=12$ ……㉠

$a_3 : a_4=2 : 1$에서 $ar^2 : ar^3=2 : 1$

$ar^2=2ar^3$ $\therefore r=\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{a}{4}\left(1+\frac{1}{2}\right)=12$

$\frac{3}{8}a=12$ $\therefore a=32$

$\therefore a_n=32\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}$

이때 $\frac{1}{128}$을 제n항이라 하면 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}=\frac{1}{128}=\left(\frac{1}{2}\right)^7$

$n-6=7$ $\therefore n=13$

따라서 $\frac{1}{128}$은 제13항이다.

04-1 답 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_2+a_3=6$에서 $ar+ar^2=6$

$\therefore ar(1+r)=6$ ……㉠

$a_5 : a_7=1 : 4$에서 $ar^4 : ar^6=1 : 4$

$4ar^4=ar^6$, $r^2=4$ $\therefore r=2$ $(\because r>0)$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $6a=6$ $\therefore a=1$

따라서 $a_n=2^{n-1}$이므로 $a_{10}=2^9$

05 답 48

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_2=3$에서 $a+ar=3$

$\therefore a(1+r)=3$ ……㉠

$a_5+a_6=12$에서 $ar^4+ar^5=12$

$\therefore ar^4(1+r)=12$ ……㉡ ……❶

㉡÷㉠을 하면 $r^4=4$ ……❷

$\therefore a_9+a_{10}=ar^8+ar^9=ar^8(1+r)$

$=ar^4(1+r)\times r^4$

$=12\times4=48$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 첫째항과 공비에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ r^4의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ a_9+a_{10}의 값을 구할 수 있다.	40%

05-1 답 4

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a\neq0)$, 공비를 r라 하면

$a_1+2a_2=0$에서 $a+2ar=0$

$a(1+2r)=0$ $\therefore r=-\frac{1}{2}$ $(\because a\neq0)$

$a_1+a_2+a_3=3$에서 $a+ar+ar^2=3$ ……㉠

$r=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $a-\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a=3$

$\frac{3}{4}a=3$ $\therefore a=4$

따라서 $a_n=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$a_5=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$ $\therefore \frac{1}{a_5}=4$

06 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a\neq0)$, 공비를 r라 하면

$8(a_1+a_3)=a_4+a_6$에서 $8(a+ar^2)=ar^3+ar^5$

$8a(1+r^2)=ar^3(1+r^2)$ $\therefore r^3=8$

$\therefore \frac{a_5+a_7+a_9}{a_2+a_4+a_6}=\frac{ar^4+ar^6+ar^8}{ar+ar^3+ar^5}$

$=\frac{ar^4(1+r^2+r^4)}{ar(1+r^2+r^4)}$

$=r^3=8$

06-1 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\frac{a_2+a_5+a_8}{a_5+a_8+a_{11}}=8$에서 $\frac{ar+ar^4+ar^7}{ar^4+ar^7+ar^{10}}=8$

$\frac{ar(1+r^3+r^6)}{ar^4(1+r^3+r^6)}=8$, $\frac{1}{r^3}=8$

$\therefore r^3=8$

$\therefore \frac{a_8}{a_2}=\frac{ar^7}{ar}=r^6=(r^3)^2=8^2=64$

07 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_4=3$에서 $ar^3=3$ ……㉠

$a_7=24$에서 $ar^6=24$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$ $\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $8a=3$ $\therefore a=\frac{3}{8}$

$\therefore a_n=\frac{3}{8}\times2^{n-1}$

$\frac{3}{8}\times2^{n-1}>150$에서 $2^{n-1}>400$

이때 $2^8=256$, $2^9=512$이므로

$n-1\geq9$ $\therefore n\geq10$

따라서 처음으로 150보다 커지는 항은 제10항이다.

07-1 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=6$에서 $ar^2=6$ ……㉠

$a_6=48$에서 $ar^5=48$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$ $\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $4a=6$ $\therefore a=\frac{3}{2}$

$\therefore a_n=\frac{3}{2}\times2^{n-1}$

$a_k>1500$에서 $\frac{3}{2}\times2^{k-1}>1500$ $\therefore 2^{k-1}>1000$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$k-1\geq10$ $\therefore k\geq11$

따라서 자연수 k의 최솟값은 11이다.

08 답 ⑤

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$라 하면 첫째항이 10이므로

$a_3=\frac{2}{5}$에서 $10r^2=\frac{2}{5}$

$r^2=\frac{1}{25}$ $\therefore r=\frac{1}{5}$ $(\because r>0)$

$\therefore a_n=10\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

$10\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}<\frac{1}{100}$에서 $\frac{1}{5^{n-1}}<\frac{1}{1000}$

$\therefore 5^{n-1}>1000$

이때 $5^4=625$, $5^5=3125$이므로

$n-1\geq 5$ $\therefore n\geq 6$

따라서 처음으로 $\frac{1}{100}$보다 작아지는 항은 제6항이다.

08-1 답 15

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$\log_2 a_3=4$에서 $a_3=2^4$이므로

$ar^2=16$ ……㉠

$\log_2 a_5=2$에서 $a_5=2^2$이므로

$ar^4=4$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=\frac{1}{4}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$ $(\because r>0)$

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{4}a=16$ $\therefore a=64$ ……❶

$\therefore a_n=64\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-7}$

$a_k<\frac{1}{200}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-7}<\frac{1}{200}$ $\therefore 2^{k-7}>200$

이때 $2^7=128$, $2^8=256$이므로

$k-7\geq 8$ $\therefore k\geq 15$ ……❷

따라서 자연수 k의 최솟값은 15이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 구할 수 있다.	40%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 자연수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

09 답 3

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_5=4$에서 $ar^4=4$ ……㉠

$a_9=16$에서 $ar^8=16$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=4$ $\therefore r=\sqrt{2}$ $(\because r>0)$

$r=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면

$4a=4$ $\therefore a=1$

$\therefore a_n=(\sqrt{2})^{n-1}=2^{\frac{n-1}{2}}$

$100<2^{\frac{n-1}{2}}<300$에서 $2^6=64$, $2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$이므로

$7\leq\frac{n-1}{2}\leq 8$, $14\leq n-1\leq 16$

$\therefore 15\leq n\leq 17$

따라서 자연수 n의 값은 15, 16, 17이므로 그 개수는 3이다.

09-1 답 33

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_4=3$에서 $ar^3=3$ ……㉠

$a_8=27$에서 $ar^7=27$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=9$ $\therefore r=\sqrt{3}$ $(\because r>0)$

$r=\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면 $3\sqrt{3}a=3$ $\therefore a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore a_n=\frac{\sqrt{3}}{3}\times(\sqrt{3})^{n-1}=3^{\frac{n-2}{2}}$

$50<3^{\frac{n-2}{2}}<500$에서 $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, $3^6=729$이므로

$4\leq\frac{n-2}{2}\leq 5$, $8\leq n-2\leq 10$

$\therefore 10\leq n\leq 12$

따라서 자연수 n의 값은 10, 11, 12이므로 그 합은

$10+11+12=33$

10 답 ④

첫째항이 6, 제12항이 15인 등비수열의 공비를 r라 하면

$6r^{11}=15$ $\therefore r^{11}=\frac{5}{2}$

이때 a_1, a_{10}은 각각 주어진 수열의 제2항, 제11항이므로

$a_1=6r$, $a_{10}=6r^{10}$

$\therefore a_1a_{10}=6r\times 6r^{10}=36r^{11}=36\times\frac{5}{2}=90$

10-1 답 10

첫째항이 1, 제7항이 1000인 등비수열의 공비를 r라 하면

$1\times r^6=1000$ $\therefore r^2=10$

이때 a_2는 주어진 수열의 제3항이므로

$a_2=1\times r^2=10$

참고 (i) $r=\sqrt{10}$일 때, 주어진 등비수열은 $1, \sqrt{10}, 10, 10\sqrt{10}, \cdots$, 1000이므로 $a_2=10$

(ii) $r=-\sqrt{10}$일 때, 주어진 등비수열은 $1, -\sqrt{10}, 10, -10\sqrt{10}, \cdots$, 1000이므로 $a_2=10$

11 답 2

첫째항이 3, 공비가 4인 등비수열의 제 $(n+2)$항이 192이므로

$3\times 4^{n+1}=192$, $4^{n+1}=64=4^3$

$n+1=3$ $\therefore n=2$

11-1 답 ③

주어진 등비수열의 공비를 r라 하면

첫째항이 3, 제 $(n+2)$항이 243이므로

$3r^{n+1}=243$ $\therefore r^{n+1}=81=3^4$ ……㉠

또 모든 항의 곱이 3^{15}이므로

$3\times a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n\times 243$

$=3\times 3r\times 3r^2\times 3r^3\times\cdots\times 3r^n\times 3^5$

$=3^{n+1}\times 3^5\times r^{1+2+3+\cdots+n}$

$=3^{n+6}\times r^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$=3^{n+6}\times(r^{n+1})^{\frac{n}{2}}$

$=3^{n+6}\times(3^4)^{\frac{n}{2}}$ $(\because$ ㉠$)$

$=3^{n+6}\times 3^{2n}$

$=3^{3n+6}$

$=3^{15}$

즉 $3n+6=15$이므로 $3n=9$ $\therefore n=3$

12 답 5

첫째항이 64, 제12항이 $\frac{1}{32}$인 등비수열의 공비를 r $(r>0)$라 하면

$64r^{11}=\frac{1}{32}$, $r^{11}=\left(\frac{1}{2}\right)^{11}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$

이때 $a_1=64r$, $a_2=64r^2$, $a_3=64r^3$, $\cdots$, $a_{10}=64r^{10}$이므로

$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_{10}$

$=\log_2 (a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{10})$

$=\log_2 (64r\times 64r^2\times 64r^3\times\cdots\times 64r^{10})$

$=\log_2 64^{10}r^{1+2+3+\cdots+10}$

$=\log_2 \{(2^6)^{10}\times r^{55}\}$

$=\log_2 \left\{(2^6)^{10}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{55}\right\}$

$=\log_2 (2^{60}\times 2^{-55})$

$=\log_2 2^5$

$=5$

12-1 답 21

첫째항이 -3, 제8항이 $24\sqrt{2}$인 등비수열의 공비를 r라 하면

$-3r^7=24\sqrt{2}$, $r^7=-8\sqrt{2}=(-\sqrt{2})^7$

$\therefore r=-\sqrt{2}$

이때 $a_1=-3r$, $a_2=-3r^2$, $a_3=-3r^3$, $\cdots$, $a_6=-3r^6$이므로

$$\frac{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}{3^6}=\frac{-3r\times(-3r^2)\times(-3r^3)\times\cdots\times(-3r^6)}{3^6}$$

$$=\frac{(-3)^6\times r^{1+2+3+4+5+6}}{3^6}$$

$$=\frac{3^6\times r^{21}}{3^6}=r^{21}$$

$$=(-\sqrt{2})^{21}=-(\sqrt{2})^{21}$$

$\therefore k=21$

13 답 8

세 양수 x, $x+4$, $2x+2$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(x+4)^2=x(2x+2)$, $x^2+8x+16=2x^2+2x$

$x^2-6x-16=0$, $(x+2)(x-8)=0$

$\therefore x=8$ ($\because x>0$)

13-1 답 ④

세 수 2, $\log_2 a$, 8이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(\log_2 a)^2=2\times 8=16$

이때 $a>1$이므로 $\log_2 a>0$

즉 $\log_2 a=4$이므로 $a=2^4$

또 세 수 $\log_2 a$, 8, $\log_2 b$, 즉 4, 8, $\log_2 b$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$8^2=4\log_2 b$, $\log_2 b=16$ $\quad\therefore b=2^{16}$

$\therefore \log_2\frac{b}{a}=\log_2\frac{2^{16}}{2^4}=\log_2 2^{12}=12$

14 답 ③

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b^2=ac$

$$\therefore \frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_c b}=\log_b a+\log_b c=\log_b ac$$

$$=\log_b b^2=2$$

Lecture 로그의 밑의 변환

$a>0$, $a\neq 1$이고 $b>0$일 때

(1) $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ (단, $c>0$, $c\neq 1$)

(2) $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq 1$)

14-1 답 ②

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b^2=ac$

$$\therefore \frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_c x}=\log_x a+\log_x c=\log_x ac$$

$$=\log_{b^2} b^2=\frac{1}{2}$$

15 답 3

다항식 $f(x)=2x^2+4x+a$를 일차식 $x+1$, x, $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(-1)=2-4+a=a-2$

$f(0)=a$

$f(1)=2+4+a=a+6$ ……❶

즉 세 수 $a-2$, a, $a+6$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=(a-2)(a+6)$ ……❷

$a^2=a^2+4a-12$, $4a=12$ $\quad\therefore a=3$ ……❸

채점 기준	배점
❶ 나머지를 구할 수 있다.	40%
❷ 나머지 사이의 관계를 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

Lecture 나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a)$

15-1 답 ③

다항식 $f(x)=x^2-ax+2a$를 일차식 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$R_1=f(1)=1-a+2a=a+1$

$R_2=f(2)=4-2a+2a=4$

$R_3=f(3)=9-3a+2a=-a+9$

즉 세 수 R_1, R_2, R_3이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$R_2^2=R_1R_3$

$4^2=(a+1)(-a+9)$, $16=-a^2+8a+9$

$a^2-8a+7=0$, $(a-1)(a-7)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=7$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$1+7=8$

16 답 ④

a_1, a_6, a_{11}이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $a_6^2=a_1a_{11}$

a_2, a_6, a_{10}이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $a_6^2=a_2a_{10}$

a_3, a_6, a_9가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $a_6^2=a_3a_9$

a_4, a_6, a_8이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $a_6^2=a_4a_8$

a_5, a_6, a_7이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $a_6^2=a_5a_7$

$\therefore a_1a_2a_3\cdots a_{11}$

$=(a_1a_{11})\times(a_2a_{10})\times(a_3a_9)\times(a_4a_8)\times(a_5a_7)\times a_6$

$=a_6^2\times a_6^2\times a_6^2\times a_6^2\times a_6^2\times a_6$

$=a_6^{11}=3^{11}$

16-1 답 ⑤

a_2, a_5, a_8이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_5^2=a_2a_8=4$ $\quad\therefore a_5=2$ ($\because a_5>0$)

a_1, a_5, a_9가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $a_5^2=a_1a_9$
a_3, a_5, a_7이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $a_5^2=a_3a_7$
a_4, a_5, a_6이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $a_5^2=a_4a_6$
$\therefore a_1a_2a_3\cdots a_9$
$=(a_1a_9)\times(a_2a_8)\times(a_3a_7)\times(a_4a_6)\times a_5$
$=a_5^2\times a_5^2\times a_5^2\times a_5^2\times a_5$
$=a_5^9$
$=2^9$

17 답 ④

세 양수 $a, b, 14$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2b=a+14$ ……㉠
세 양수 $2, a, 18$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$a^2=2\times18=36$ $\therefore a=6\ (\because a>0)$
$a=6$을 ㉠에 대입하면 $2b=20$ $\therefore b=10$
$\therefore ab=6\times10=60$

17-1 답 −3

세 수 $2, a, b$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2a=2+b$ $\therefore b=2a-2$ ……㉠
세 수 $a, 2, b$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$2^2=ab$ $\therefore ab=4$ ……㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$a(2a-2)=4$, $a(a-1)=2$
$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$
그런데 $a\neq2$이므로 $a=-1$
$a=-1$을 ㉠에 대입하면
$b=-2-2=-4$
$\therefore a+b=-1+(-4)=-5$

18 답 60

세 양수 $3, a, b$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$a^2=3b$ ……㉠
세 양수 $b, c, 27$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$c^2=27b$ ……㉡
세 양수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2b=a+c$ ……㉢ ……❶
㉠, ㉡에서 $c^2=9a^2$
이때 a, c는 양수이므로 $c=3a$
$c=3a$를 ㉢에 대입하면
$2b=4a$ $\therefore b=2a$
세 수 $3, a, b$, 즉 $3, a, 2a$는 공비가 2인 등비수열이므로
(공비)$=2a\div a=2$
$a=6, b=12$
세 수 a, b, c, 즉 $6, 12, c$는 공차가 6인 등차수열이므로
(공차)$=12-6=6$
$c=18$ ……❷
$\therefore 3a+2b+c=3\times6+2\times12+18=60$ ……❸

채점 기준	비율
❶ a, b, c 사이의 관계를 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $3a+2b+c$의 값을 구할 수 있다.	20%

18-1 답 ②

세 양수 $2, a, b$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$a^2=2b$ ……㉠
세 양수 $a, b, 12$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2b=a+12$ ……㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $a^2=a+12$
$a^2-a-12=0$, $(a+3)(a-4)=0$
$\therefore a=4\ (\because a>0)$
$a=4$를 ㉠에 대입하면 $16=2b$ $\therefore b=8$
$\therefore a+b=4+8=12$

19 답 9

등비수열을 이루는 세 수를 $a, ar, ar^2\ (a\neq0, r\neq0)$이라 하면
세 수의 합이 13이므로
$a+ar+ar^2=13$ $\therefore a(1+r+r^2)=13$ ……㉠
세 수의 곱이 27이므로
$a\times ar\times ar^2=27$, $(ar)^3=27$
$ar=3$ $\therefore a=\frac{3}{r}$ ……㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $\frac{3}{r}(1+r+r^2)=13$
$3+3r+3r^2=13r$, $3r^2-10r+3=0$
$(3r-1)(r-3)=0$ $\therefore r=\frac{1}{3}$ 또는 $r=3$
(i) $r=\frac{1}{3}$이면 $a=9$이므로 세 수는 9, 3, 1
(ii) $r=3$이면 $a=1$이므로 세 수는 1, 3, 9
(i), (ii)에서 세 수 중 가장 큰 수는 9이다.

19-1 답 8

등비수열을 이루는 세 수를 $a, ar, ar^2\ (a\neq0, r\neq0)$이라 하면
세 수의 합이 6이므로
$a+ar+ar^2=6$ $\therefore a(1+r+r^2)=6$ ……㉠
세 수의 곱이 -64이므로
$a\times ar\times ar^2=-64$, $(ar)^3=-64$
$ar=-4$ $\therefore a=-\frac{4}{r}$ ……㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $-\frac{4}{r}(1+r+r^2)=6$
$4+4r+4r^2=-6r$, $2r^2+5r+2=0$
$(r+2)(2r+1)=0$ $\therefore r=-2$ 또는 $r=-\frac{1}{2}$
(i) $r=-2$이면 $a=2$이므로 세 수는 2, -4, 8
(ii) $r=-\frac{1}{2}$이면 $a=8$이므로 세 수는 8, -4, 2
(i), (ii)에서 세 수 중 가장 큰 수는 8이다.

20 답 14

삼차방정식의 세 실근을 a, ar, ar^2이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$a+ar+ar^2=\frac{k}{3}$ ……㉠
$a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a=-\frac{56}{3}$이므로
$ar(a+ar+ar^2)=-\frac{56}{3}$ ……㉡
$a\times ar\times ar^2=-64$이므로

$(ar)^3=-64$ $\therefore ar=-4$ ……㉢

㉠, ㉢을 ㉡에 대입하면

$-\frac{4k}{3}=-\frac{56}{3}$ $\therefore k=14$

20-1 답 ①

주어진 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $x^3-20x^2=6x^2+156x+k$, 즉 $x^3-26x^2-156x-k=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

이때 세 실근을 a, ar, ar^2이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=26$ ……㉠

$a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a=-156$이므로

$ar(a+ar+ar^2)=-156$ ……㉡

$a\times ar\times ar^2=k$이므로 $(ar)^3=k$ ……㉢

㉡÷㉠을 하면 $ar=-6$

$ar=-6$을 ㉢에 대입하면

$(-6)^3=k$ $\therefore k=-216$

21 답 ④

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, ar, ar^2이라 하면 직육면체의 부피가 27이므로

$a\times ar\times ar^2=27$, $(ar)^3=27$ $\therefore ar=3$ ……㉠

겉넓이가 60이므로

$2(a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a)=60$

$\therefore a^2r(1+r+r^2)=30$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $a(1+r+r^2)=10$

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$4(a+ar+ar^2)=4a(1+r+r^2)=4\times 10=40$

21-1 답 28

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, ar, ar^2이라 하면 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 28이므로

$4(a+ar+ar^2)=28$ $\therefore a+ar+ar^2=7$

부피가 8이므로

$a\times ar\times ar^2=8$, $(ar)^3=8$ $\therefore ar=2$

따라서 직육면체의 겉넓이는

$2(a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a)=2ar(a+ar+ar^2)$

$=2\times 2\times 7=28$

22 답 ④

$\triangle OP_1P_2$가 직각이등변삼각형이므로

$\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{OP_1}}=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\overline{P_1P_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OP_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\overline{P_2P_3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{P_1P_2}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$\overline{P_3P_4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{P_2P_3}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$

⋮

$\overline{P_nP_{n+1}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

이때 $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{10}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$이므로

$n=20$

따라서 구하는 선분은 $\overline{P_{20}P_{21}}$이다.

22-1 답 ④

직각삼각형 OA_1A_2와 OA_2A_3은 닮음이므로

$\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}=\overline{OA_1}:\overline{OA_2}=8:6=4:3$

이때 $\overline{A_1A_2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$이므로

$\overline{A_2A_3}=\frac{3}{4}\overline{A_1A_2}=10\times\frac{3}{4}$

$\overline{A_3A_4}=\frac{3}{4}\overline{A_2A_3}=10\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$

⋮

$\overline{A_nA_{n+1}}=10\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore \overline{A_{10}A_{11}}=10\times\left(\frac{3}{4}\right)^9$

참고 22-1에서

$\triangle OA_1A_2\backsim\triangle OA_2A_3\backsim\triangle OA_3A_4\backsim\triangle OA_4A_5\backsim\cdots$

23 답 $\frac{1}{64}$

한 변의 길이가 4인 색종이의 넓이는

$4^2=16$

1회 시행 후 남아 있는 색종이의 넓이는

$16\times\frac{1}{2}$

2회 시행 후 남아 있는 색종이의 넓이는

$\left(16\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=16\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$

⋮

n회 시행 후 남아 있는 색종이의 넓이는

$16\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

따라서 10회 시행 후 남아 있는 색종이의 넓이는

$16\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{64}$

23-1 답 ④

한 변의 길이가 4인 정사각형의 넓이는

$4^2=16$

1회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$16\times\frac{3}{4}$

2회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$\left(16\times\frac{3}{4}\right)\times\frac{3}{4}=16\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$

⋮

n회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$16\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$

즉 12회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$16\times\left(\frac{3}{4}\right)^{12}=2^4\times\frac{3^{12}}{2^{24}}$

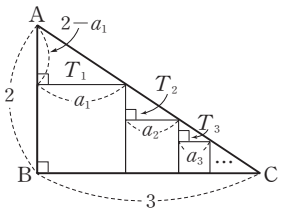
$=2^{-20}\times 3^{12}$

따라서 $a=-20$, $b=12$이므로

$b-a=12-(-20)=32$

24 답 $2\times\left(\frac{3}{5}\right)^9$

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 T_1과 직각삼각형 ABC는 닮음이므로



$(2-a_1) : a_1=\overline{AB} : \overline{BC}=2 : 3$

$3(2-a_1)=2a_1,\ 6-3a_1=2a_1$

$5a_1=6 \qquad \therefore a_1=\frac{6}{5}$

직각삼각형 T_2와 직각삼각형 ABC는 닮음이므로

$(a_1-a_2) : a_2=\overline{AB} : \overline{BC}=2 : 3$

$3(a_1-a_2)=2a_2,\ 3a_1-3a_2=2a_2$

$5a_2=3a_1 \qquad \therefore a_2=\frac{3}{5}a_1=\frac{6}{5}\times\frac{3}{5}$

직각삼각형 T_3과 직각삼각형 ABC는 닮음이므로

$(a_2-a_3) : a_3=\overline{AB} : \overline{BC}=2 : 3$

$3(a_2-a_3)=2a_3,\ 3a_2-3a_3=2a_3$

$5a_3=3a_2 \qquad \therefore a_3=\frac{3}{5}a_2=\frac{6}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2$

$\vdots$

$a_n=\frac{6}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}=2\times\left(\frac{3}{5}\right)^n$

$\therefore a_9=2\times\left(\frac{3}{5}\right)^9$

24-1 답 91

세 정사각형 A, B, C의 한 변의 길이를 각각 a, b, c라 하자.

직선 l과 세 정사각형 A, B, C 사이의 직각삼각형을 이용하여 직선 l의 기울기를 구하면

$\frac{b-a}{a}=\frac{c-b}{b},\ b(b-a)=a(c-b)$

$b^2-ab=ac-ab \qquad \therefore b^2=ac$

같은 방법으로 두 정사각형 D, E의 한 변의 길이를 각각 d, e라 하면 $c^2=bd$, $d^2=ce$

즉 5개의 정사각형 A, B, C, D, E의 각 변의 길이는 이웃한 순서대로 등비수열을 이루므로 정사각형의 넓이도 이웃한 순서대로 등비수열을 이룬다.

정사각형의 넓이로 이루어진 등비수열의 공비를 r라 하면 두 정사각형 B, D의 넓이가 각각 3, 27이므로

$3r^2=27,\ r^2=9$

$\therefore r=3\ (\because r>0)$

따라서 5개의 정사각형 A, B, C, D, E의 넓이는 각각 1, 3, 9, 27, 81이므로 세 정사각형 A, C, E의 넓이의 합은

$1+9+81=91$

25 답 ⑤

처음 세포의 개수는 20

1회 배양한 후 살아 있는 세포의 개수는

$20\times0.5\times4=20\times2$

2회 배양한 후 살아 있는 세포의 개수는

$(20\times2)\times0.5\times4=20\times2^2$

$\vdots$

n회 배양한 후 살아 있는 세포의 개수는

20×2^n

따라서 8회 배양한 후 살아 있는 세포의 개수는

$20\times2^8=5\times2^{10}$

25-1 답 ③

A 도시의 올해 인구를 a만 명, 매년 인구의 증가율을 r라 하면 n년 후의 인구는 $a(1+r)^n$(만 명)

10년 후의 인구가 80만 명이므로

$a(1+r)^{10}=80$ ……㉠

20년 후의 인구가 100만 명이므로

$a(1+r)^{20}=100$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $(1+r)^{10}=\frac{5}{4}$

$\therefore (1+r)^5=\frac{\sqrt{5}}{2}$

따라서 예상되는 A 도시의 25년 후의 인구는

$a(1+r)^{25}=a(1+r)^{20}\times(1+r)^5=100\times\frac{\sqrt{5}}{2}$

$=100\times\frac{2.2}{2}$

$=110$(만 명)

26 답 3000만 원

6년 전 이 자동차를 처음 구입했을 때의 가격을 a만 원이라 하면

구입 후 1년이 지났을 때 중고차 가격은

$a(1-0.08)=0.92a$(만 원)

구입 후 2년이 지났을 때 중고차 가격은

$0.92a(1-0.08)=0.92^2a$(만 원)

$\vdots$

구입 후 n년이 지났을 때 중고차 가격은

0.92^na(만 원)

구입 후 6년이 지났을 때 중고차 가격이 1800만 원이므로

$0.92^6a=1800,\ 0.6a=1800$

$\therefore a=3000$

따라서 6년 전 이 자동차를 처음 구입했을 때의 가격은 3000만 원이다.

26-1 답 11

유해 물질 100 g이 포함된 물이 여과기를 1번 통과하였을 때의 유해 물질의 양은

$100(1-0.2)=100\times0.8$ (g)

여과기를 2번 통과하였을 때의 유해 물질의 양은

$(100\times0.8)(1-0.2)=100\times0.8^2$ (g)

$\vdots$

여과기를 n번 통과하였을 때의 유해 물질의 양은

$100\times(0.8)^n$ (g) ……❶

$100\times(0.8)^n\le10$에서 $\left(\frac{4}{5}\right)^n\le\frac{1}{10}$ ……❷

위의 식의 양변에 상용로그를 취하면

$n(\log4-\log5)\le-1,\ n\{2\log2-(1-\log2)\}\le-1$

$n(3\log2-1)\le-1,\ n(3\times0.301-1)\le-1$

$-0.097n\le-1 \qquad \therefore n\ge\frac{1}{0.097}=10.3\cdots$

따라서 자연수 n의 최솟값은 11이다. ……❸

채점 기준	비율
❶ 여과기를 n번 통과하였을 때의 유해 물질의 양을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ 조건을 만족시키는 부등식을 세울 수 있다.	20%
❸ 자연수 n의 최솟값을 구할 수 있다.	40%

27 답 6

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a>0)$, 공비를 $r\,(r>0)$라 하면

$a_3=12$에서 $ar^2=12$ ……㉠

$a_5=48$에서 $ar^4=48$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=4$ $\therefore r=2\,(\because r>0)$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $4a=12$ $\therefore a=3$

이때 첫째항부터 제n항까지의 합이 189이므로

$\dfrac{3(2^n-1)}{2-1}=189,\ 2^n-1=63$

$2^n=64=2^6$ $\therefore n=6$

27-1 답 5

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a>0)$, 공비를 $r\,(r>0)$라 하면

$a_5=24$에서 $ar^4=24$ ……㉠

$a_9=96$에서 $ar^8=96$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=4$ $\therefore r=\sqrt{2}\,(\because r>0)$

$r=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면 $4a=24$ $\therefore a=6$

$\therefore a_n=6\times(\sqrt{2})^{n-1}$

즉 $a_n{}^2=\{6\times(\sqrt{2})^{n-1}\}^2=36\times2^{n-1}$이므로 수열 $\{a_n{}^2\}$은 첫째항이 36, 공비가 2인 등비수열이다.

이때 $a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots+a_n{}^2=1116$이므로

$\dfrac{36(2^n-1)}{2-1}=1116,\ 2^n-1=31$

$2^n=32=2^5$ $\therefore n=5$

28 답 1023

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2+a_4=10$에서 $ar+ar^3=10$

$\therefore ar(1+r^2)=10$ ……㉠

$a_5+a_7=80$에서 $ar^4+ar^6=80$

$\therefore ar^4(1+r^2)=80$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$ $\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $10a=10$ $\therefore a=1$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\dfrac{2^{10}-1}{2-1}=1023$

28-1 답 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a>0)$, 공비를 $r\,(r>0)$라 하면

$a_1a_3=36$에서 $a\times ar^2=36$ $\therefore a^2r^2=36$ ……㉠

$a_2a_4=324$에서 $ar\times ar^3=324$ $\therefore a^2r^4=324$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=9$ $\therefore r=3\,(\because r>0)$

$r=3$을 ㉠에 대입하면 $9a^2=36$

$a^2=4$ $\therefore a=2\,(\because a>0)$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=\dfrac{2(3^8-1)}{3-1}=3^8-1$

29 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$라 하면

$a_3=4$에서 $1\times r^2=4$ $\therefore r=2\,(\because r>0)$

$\therefore S_n=\dfrac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$

$2^n-1>3000$에서 $2^n>3001$

이때 $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로 $n\geq12$

따라서 S_n이 처음으로 3000보다 커지도록 하는 자연수 n의 값은 12이다.

29-1 답 4

주어진 등비수열의 첫째항이 36, 공비가 $\dfrac{1}{3}$이므로

$S_n=\dfrac{36\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=54\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

$54\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}>53$에서 $1-\left(\frac{1}{3}\right)^n>\dfrac{53}{54}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^n<\dfrac{1}{54}$ $\therefore 3^n>54$

이때 $3^3=27$, $3^4=81$이므로 $n\geq4$

따라서 S_n이 처음으로 53보다 커지도록 하는 자연수 n의 값은 4이다.

30 답 3

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

첫째항부터 제5항까지의 합이 27이므로

$\dfrac{a(r^5-1)}{r-1}=27$

첫째항부터 제5항까지의 곱이 243이므로

$a_1a_2a_3a_4a_5=a\times ar\times ar^2\times ar^3\times ar^4=a^5r^{10}=(ar^2)^5=243$

$(ar^2)^5=3^5$ $\therefore ar^2=3$

$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{ar^{n-1}}=\dfrac{1}{a}\times\left(\dfrac{1}{r}\right)^{n-1}$에서 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{a}$, 공비가 $\dfrac{1}{r}$인 등비수열이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}&=\frac{\frac{1}{a}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{r}}\\&=\frac{\frac{1}{a}\times\frac{r^5-1}{r^5}}{\frac{r-1}{r}}\\&=\frac{1}{a}\times\frac{1}{r^4}\times\frac{r^5-1}{r-1}\\&=\frac{1}{(ar^2)^2}\times\frac{a(r^5-1)}{r-1}\\&=\frac{1}{3^2}\times27=3\end{aligned}$$

30-1 답 6

공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

첫째항부터 제6항까지의 합이 $\dfrac{63}{2}$이므로

$\dfrac{a\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{63}{2},\ 2a\left(1-\dfrac{1}{64}\right)=\dfrac{63}{2}$

$\dfrac{63}{64}a=\dfrac{63}{4}$ $\therefore a=16$

즉 $a_n=16\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{16}\times2^{n-1}$

따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{16}$, 공비가 2인 등비수열이므로

$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_k}=\dfrac{\frac{1}{16}(2^k-1)}{2-1}=\dfrac{1}{16}(2^k-1)$

즉 $\frac{1}{16}(2^k-1)=\frac{63}{16}$이므로 $2^k-1=63$

$2^k=64=2^6$ $\therefore k=6$

31 답 12

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_3=\frac{1}{6}$에서 $ar^2=\frac{1}{6}$ ……㉠

$a_7=\frac{1}{54}$에서 $ar^6=\frac{1}{54}$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=\frac{1}{9}$ $\therefore r=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $(\because r>0)$

$r=\frac{\sqrt{3}}{3}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{a}{3}=\frac{1}{6}$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

즉 $a_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}$이므로

$a_n^{\,2}=\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}\right\}^2=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \frac{1}{a_n^{\,2}}=4\times3^{n-1}$

수열 $\left\{\frac{1}{a_n^{\,2}}\right\}$은 첫째항이 4, 공비가 3인 등비수열이므로

$$\frac{1}{a_1^{\,2}}+\frac{1}{a_2^{\,2}}+\frac{1}{a_3^{\,2}}+\cdots+\frac{1}{a_{10}^{\,2}}=\frac{4(3^{10}-1)}{3-1}$$
$$=2(3^{10}-1)$$

따라서 $p=2$, $q=10$이므로

$p+q=2+10=12$

31-1 답 10

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=81$에서

$\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=81$ ……㉠

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{10}}$은 첫째항이 $\frac{1}{a}$, 공비가 $\frac{1}{r}$인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\frac{\frac{1}{a}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{r}}=\frac{\frac{1}{a}\times\frac{r^{10}-1}{r^{10}}}{\frac{r-1}{r}}$$
$$=\frac{1}{a}\times\frac{1}{r^9}\times\frac{r^{10}-1}{r-1}$$
$$=\frac{1}{a^2r^9}\times\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}$$
$$=\frac{81}{a^2r^9}\ (\because ㉠)$$

즉 $\frac{81}{a^2r^9}=9$이므로 $a^2r^9=9$

$\therefore \log_3 a_1+\log_3 a_2+\log_3 a_3+\cdots+\log_3 a_{10}$
$=\log_3(a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{10})$
$=\log_3(a\times ar\times ar^2\times\cdots\times ar^9)$
$=\log_3(a^{10}r^{1+2+3+\cdots+9})$
$=\log_3(a^{10}r^{45})$
$=\log_3(a^2r^9)^5$
$=\log_3 9^5$
$=\log_3 3^{10}$
$=10$

32 답 120

첫째항이 3, 제12항이 40인 등비수열의 공비를 r라 하면

$3r^{11}=40$ $\therefore r^{11}=\frac{40}{3}$ ……❶

$3+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}+40=\frac{3(r^{12}-1)}{r-1}$ ……❷

수열 $\frac{1}{3}, \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \cdots, \frac{1}{a_{10}}, \frac{1}{40}$은 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 $\frac{1}{r}$인 등비수열이므로

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{10}}+\frac{1}{40}=\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^{12}\right\}}{1-\frac{1}{r}}$$
$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{r^{12}-1}{r^{12}}}{\frac{r-1}{r}}$$
$$=\frac{r^{12}-1}{3r^{11}(r-1)}$$ ……❸

즉 $\frac{3(r^{12}-1)}{r-1}=k\times\frac{r^{12}-1}{3r^{11}(r-1)}$이므로

$k=9r^{11}=9\times\frac{40}{3}=120$ ……❹

채점 기준	비율
❶ 주어진 등비수열의 공비를 r라 하고 r^{11}의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ 주어진 식의 좌변을 r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ 주어진 식의 우변을 r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❹ k의 값을 구할 수 있다.	20%

32-1 답 60

첫째항이 2, 제22항이 30인 등비수열의 공비를 r라 하면

$2r^{21}=30$ $\therefore r^{21}=15$

$2+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}+30=\frac{2(r^{22}-1)}{r-1}$

수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \cdots, \frac{1}{a_{20}}, \frac{1}{30}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{r}$인 등비수열이므로

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{20}}+\frac{1}{30}=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^{22}\right\}}{1-\frac{1}{r}}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{r^{22}-1}{r^{22}}}{\frac{r-1}{r}}$$
$$=\frac{r^{22}-1}{2r^{21}(r-1)}$$

즉 $\frac{2(r^{22}-1)}{r-1}=k\times\frac{r^{22}-1}{2r^{21}(r-1)}$이므로

$k=4r^{21}=4\times15=60$

33 답 3

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_{20}=30$에서 $\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=30$

$\therefore \frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}=30$ ……㉠

$S_{30}=70$에서 $\frac{a(r^{30}-1)}{r-1}=70$

$\therefore \frac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1}=70$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $\frac{r^{20}+r^{10}+1}{r^{10}+1}=\frac{7}{3}$

이때 $r^{10}=t\ (t>0)$라 하면 $\frac{t^2+t+1}{t+1}=\frac{7}{3}$

$3(t^2+t+1)=7(t+1),\ 3t^2+3t+3=7t+7$

$3t^2-4t-4=0,\ (3t+2)(t-2)=0$

$\therefore t=2\ (\because t>0)$

즉 $r^{10}=2$이므로 $S_{20}=kS_{10}$에서

$\frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}=k\times\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}$

$\therefore k=r^{10}+1=2+1=3$

33-1 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_4=15$에서 $\frac{a(r^4-1)}{r-1}=15$ ……㉠

$S_8=60$에서 $\frac{a(r^8-1)}{r-1}=60$

$\therefore \frac{a(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}=60$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4+1=4$ $\therefore r^4=3$

$\therefore S_{12}=\frac{a(r^{12}-1)}{r-1}=\frac{a(r^4-1)(r^8+r^4+1)}{r-1}$

$=15(3^2+3+1)$

$=195$

34 답 48

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=50$에서 $\frac{a(r^n-1)}{r-1}=50$ ……㉠

$S_{2n}=80$에서 $\frac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=80$

$\therefore \frac{a(r^n-1)(r^n+1)}{r-1}=80$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^n+1=\frac{8}{5}$ $\therefore r^n=\frac{3}{5}$

$\therefore S_{3n}=\frac{a(r^{3n}-1)}{r-1}=\frac{a(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r-1}$

$=50\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\frac{3}{5}+1\right\}$

$=98$

따라서 제$(n+1)$항부터 제$3n$항까지의 합은

$S_{3n}-S_n=98-50=48$

34-1 답 285

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_{10}=5$에서 $\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=5$ ……㉠ ……❶

$S_{20}-S_{10}=35$에서 $\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}-5=35$

$\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=40$

$\therefore \frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}=40$ ……㉡ ……❷

㉡÷㉠을 하면 $r^{10}+1=8$ $\therefore r^{10}=7$

따라서 첫째항부터 제30항까지의 합은

$S_{30}=\frac{a(r^{30}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1}$

$=5(7^2+7+1)=285$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 첫째항부터 제10항까지의 합을 a, r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ 제11항부터 제20항까지의 합을 a, r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ 첫째항부터 제30항까지의 합을 구할 수 있다.	40%

35 답 $\frac{1}{3}$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=200$ ……㉠

수열 $a_1, a_3, a_5, \cdots, a_{19}$는 첫째항이 a, 공비가 r^2인 등비수열이므로

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=\frac{a\{(r^2)^{10}-1\}}{r^2-1}=\frac{a(r^{20}-1)}{r^2-1}$

$=\frac{a(r^{20}-1)}{(r-1)(r+1)}=150$ ……㉡

㉠÷㉡을 하면 $r+1=\frac{4}{3}$ $\therefore r=\frac{1}{3}$

참고 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

(1) $a_1=a,\ a_3=ar^2,\ a_5=ar^4,\ \cdots$이므로 수열 $a_1, a_3, a_5, \cdots$는 첫째항이 a, 공비가 r^2인 등비수열이다.

(2) $a_2=ar,\ a_4=ar^3,\ a_6=ar^5,\ \cdots$이므로 수열 $a_2, a_4, a_6, \cdots$은 첫째항이 ar, 공비가 r^2인 등비수열이다.

35-1 답 5

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

수열 $a_1, a_3, a_5, \cdots, a_{2k-1}$은 첫째항이 1, 공비가 r^2인 등비수열이므로

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}=\frac{(r^2)^k-1}{r^2-1}=341$

$\therefore \frac{r^{2k}-1}{r^2-1}=341$ ……㉠

수열 $a_2, a_4, a_6, \cdots, a_{2k}$는 첫째항이 r, 공비가 r^2인 등비수열이므로

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}=\frac{r\{(r^2)^k-1\}}{r^2-1}=682$

$\therefore \frac{r(r^{2k}-1)}{r^2-1}=682$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $\frac{4^k-1}{3}=341$

$4^k-1=1023,\ 4^k=1024=4^5$

$\therefore k=5$

36 답 23

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=3-4=-1$

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3\times 2^{n-1}-4-(3\times 2^{n-2}-4)$

$=3\times 2^{n-2}$ ……㉠

이때 $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않으므로

$a_1=-1,\ a_n=3\times 2^{n-2}\ (n\geq 2)$

따라서 $a_5=3\times 2^3=24$이므로

$a_1+a_5=-1+24=23$

36-1 답 6

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2^{-1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2^{n-2}-\frac{1}{4}-\left(2^{n-3}-\frac{1}{4}\right)$

$=2^{n-3}$ ……㉠

이때 $a_1=\frac{1}{4}$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2^{n-3}=\frac{1}{4}\times 2^{n-1}$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k=\frac{\frac{1}{4}(2^k-1)}{2-1}=\frac{63}{4}$

$2^k-1=63,\ 2^k=64=2^6$ $\therefore k=6$

37 답 −3

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=3^2+k=k+9$

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3^{n+1}+k-(3^n+k)$

$=2\times 3^n$ ……㉠

수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 $a_1=k+9$가 같아야 하므로

$6=k+9$ $\therefore k=-3$

37-1 답 4

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2k-4$ ……❶

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=k\times 2^n-4-(k\times 2^{n-1}-4)$

$=k\times 2^{n-1}$ ……㉠ ……❷

수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 $a_1=2k-4$가 같아야 하므로

$k=2k-4$ $\therefore k=4$ ……❸

채점 기준	비율
❶ a_1의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ $n\geq 2$일 때, a_n을 구할 수 있다.	30%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	50%

38 답 9

$\log_5(S_n+5)=n+1$에서 $S_n+5=5^{n+1}$

$\therefore S_n=5^{n+1}-5$

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=5^2-5=20$

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=5^{n+1}-5-(5^n-5)$

$=4\times 5^n$ ……㉠

이때 $a_1=20$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4\times 5^n$

따라서 $p=4,\ q=5$이므로

$p+q=4+5=9$

38-1 답 100

수열 $\log a_1, \log a_2, \log a_3, \cdots, \log a_n$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=n^2+2n$

(i) $n=1$일 때

$\log a_1=S_1=1+2=3$

(ii) $n\geq 2$일 때

$\log a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=2n+1$ ……㉠

이때 $\log a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$\log a_n=2n+1$ $\therefore a_n=10^{2n+1}=1000\times 100^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 공비는 100이다.

39 답 ③

5년 동안 매년 초에 a만 원씩 연이율 4 %의 복리로 적립한 적립금의 원리합계는

$a(1+0.04)+a(1+0.04)^2+a(1+0.04)^3$

$+a(1+0.04)^4+a(1+0.04)^5$

$=\frac{a\times 1.04\times(1.04^5-1)}{1.04-1}$

$=\frac{a\times 1.04\times 0.2}{0.04}$

$=5.2a$(만 원)

즉 $5.2a=1300$이므로 $a=250$

39-1 답 ①

매년 말에 적립하는 금액을 a만 원이라 하면 10년 동안 매년 말에 a만 원씩 연이율 6 %의 복리로 적립한 적립금의 원리합계는

$a+a(1+0.06)+a(1+0.06)^2+\cdots+a(1+0.06)^9$

$=\frac{a(1.06^{10}-1)}{1.06-1}$

$=\frac{a\times 0.8}{0.06}$

$=\frac{40}{3}a$(만 원)

즉 $\frac{40}{3}a=4000$이므로 $a=300$

따라서 매년 말에 300만 원씩 적립해야 한다.

40 답 ①

24년 동안 매년 말에 50만 원씩 연이율 5 %의 복리로 적립한 적립금의 원리합계는

$50+50(1+0.05)+50(1+0.05)^2+\cdots+50(1+0.05)^{23}$

$=\frac{50(1.05^{24}-1)}{1.05-1}$

$=\frac{50\times 2.2}{0.05}$

$=2200$(만 원)

따라서 24년 후 연말의 적립금의 원리합계는 2200만 원이다.

40-1 답 ⑤

15년 동안 매년 초에 100만 원씩 연이율 4 %의 복리로 적립한 적립금의 원리합계는

$100(1+0.04)+100(1+0.04)^2+100(1+0.04)^3$
$+\cdots+100(1+0.04)^{15}$

$=\dfrac{100\times1.04\times(1.04^{15}-1)}{1.04-1}$

$=\dfrac{100\times1.04\times0.8}{0.04}$

$=2080$(만 원)

따라서 15년 후 연말의 적립금의 원리합계는 2080만 원이다.

유형 완성하기 p. 249

41 답 ⑤

1회 시행에서 색칠한 부분의 넓이는 원래 도형의 넓이의 $\frac{1}{3}$이므로

$\dfrac{S}{3}$

2회 시행에서 색칠한 부분의 넓이는

$\dfrac{2}{3}S\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{S}{3}\times\dfrac{2}{3}$

3회 시행에서 색칠한 부분의 넓이는

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times S\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{S}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

⋮

이와 같은 방법으로 시행을 반복하면 이 수열은 첫째항이 $\frac{S}{3}$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열을 이룬다.

따라서 10회 시행 후 색칠된 부분의 넓이의 합은

$$\frac{\frac{S}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{2}{3}}=S\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$$

42 답 $\frac{1}{16}$배

1일에 가입한 신규 회원 수를 a만 명, 매일 감소하는 신규 회원 수의 비율을 r라 하자.

1일부터 20일까지의 신규 회원 수가 10만 명이므로

$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{19}=10$에서 $\dfrac{a(1-r^{20})}{1-r}=10$

$\therefore \dfrac{a(1-r^{10})(1+r^{10})}{1-r}=10$ ……㉠

11일부터 20일까지의 신규 회원 수가 2만 명이므로

$ar^{10}+ar^{11}+ar^{12}+\cdots+ar^{19}=2$에서

$\dfrac{ar^{10}(1-r^{10})}{1-r}=2$ ……㉡

㉠÷㉡을 하면 $\dfrac{1+r^{10}}{r^{10}}=5$

$1+r^{10}=5r^{10}$, $4r^{10}=1$ $\therefore r^{10}=\dfrac{1}{4}$

즉 21일에 가입한 신규 회원 수는

$ar^{20}=a\times(r^{10})^2=a\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}a$

따라서 21일에 가입한 신규 회원 수는 1일에 가입한 신규 회원 수의 $\frac{1}{16}$배이다.

43 답 $128\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$ cm²

'넓이 조정'에서 50 %를 1번 적용한 사진의 넓이는 처음 사진의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로

$128\times\dfrac{1}{2}=64$ (cm²)

2번 적용한 사진의 넓이는

$128\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=64\times\dfrac{1}{2}$ (cm²)

3번 적용한 사진의 넓이는

$128\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=64\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ (cm²)

⋮

이와 같은 과정을 반복하면 사진의 넓이는 첫째항이 64, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열을 이룬다.

따라서 '넓이 조정'에서 50 %를 적용하는 과정을 10번 반복하여 얻은 사진의 넓이의 합은

$$\frac{64\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=128\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}\text{ (cm}^2\text{)}$$

44 답 ④

두 정삼각형 ABC, $A_1B_1C_1$의 한 변의 길이의 비는 2 : 1이므로 넓이의 비는 4 : 1

한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\sqrt{3}$

1회 시행에서 만든 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 넓이는 정삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{4}$이므로

$S_1=\sqrt{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

2회 시행에서 만든 정삼각형 $A_2B_2C_2$의 넓이는

$S_2=\dfrac{1}{4}S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{1}{4}$

3회 시행에서 만든 정삼각형 $A_3B_3C_3$의 넓이는

$S_3=\dfrac{1}{4}S_2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$

⋮

이와 같은 방법으로 시행을 반복하면 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열을 이룬다.

$$\therefore S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{20}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{20}\right\}$$

01 답 ③

$a_n=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$

$a_p=a$에서 $2^{p+1}=a$ $\therefore 2^p=\frac{a}{2}$

$a_q=b$에서 $2^{q+1}=b$ $\therefore 2^q=\frac{b}{2}$

$\therefore a_{p+q}=2^{p+q+1}=2\times2^p\times2^q$

$=2\times\frac{a}{2}\times\frac{b}{2}=\frac{ab}{2}$

02 답 12

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$\therefore 2a_n-a_{n+1}=2ar^{n-1}-ar^n=a(2-r)\times r^{n-1}$

즉 수열 $\{2a_n-a_{n+1}\}$은 첫째항이 $a(2-r)$, 공비가 r인 등비수열이므로

$a(2-r)=12$, $r=-2$

$r=-2$를 $a(2-r)=12$에 대입하면

$4a=12$ $\therefore a=3$

따라서 $a_n=3\times(-2)^{n-1}$이므로

$a_3=3\times(-2)^2=12$

03 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_2+a_4=36$에서 $ar+ar^3=36$

$\therefore ar(1+r^2)=36$ ……㉠

$a_4+a_6=108$에서 $ar^3+ar^5=108$

$\therefore ar^3(1+r^2)=108$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=3$ $\therefore r=\sqrt{3}$ $(\because r>0)$

$r=\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면 $4\sqrt{3}a=36$ $\therefore a=3\sqrt{3}$

따라서 $a_n=3\sqrt{3}\times(\sqrt{3})^{n-1}=(\sqrt{3})^{n+2}$이므로

$a_{10}=(\sqrt{3})^{12}=3^6$

04 답 155

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3+a_4=9$에서 $a+ar+ar^2+ar^3=9$

$\therefore a(1+r+r^2+r^3)=9$ ……㉠

$a_5+a_6+a_7+a_8=45$에서 $ar^4+ar^5+ar^6+ar^7=45$

$\therefore ar^4(1+r+r^2+r^3)=45$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=5$

$\therefore \frac{a_{99}}{a_{87}}+\frac{a_{100}}{a_{92}}+\frac{a_{101}}{a_{97}}=\frac{ar^{98}}{ar^{86}}+\frac{ar^{99}}{ar^{91}}+\frac{ar^{100}}{ar^{96}}$

$=r^{12}+r^8+r^4$

$=(r^4)^3+(r^4)^2+r^4$

$=5^3+5^2+5$

$=155$

05 답 6

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_4=10\sqrt{5}$에서 $ar^3=10\sqrt{5}$ ……㉠

$a_7=250$에서 $ar^6=250$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=5\sqrt{5}$ $\therefore r=\sqrt{5}$

$r=\sqrt{5}$를 ㉠에 대입하면 $5\sqrt{5}a=10\sqrt{5}$ $\therefore a=2$

즉 $a_n=2\times(\sqrt{5})^{n-1}$이므로 $a_n{}^2=4\times5^{n-1}$

$4\times5^{n-1}>4000$에서 $5^{n-1}>1000$

이때 $5^4=625$, $5^5=3125$이므로

$n-1\geq5$ $\therefore n\geq6$

따라서 자연수 n의 최솟값은 6이다.

06 답 9

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$이므로

$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

이때 $|a_{n+1}-a_n|<\frac{1}{5000}$에서 $\left|\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right|<\frac{1}{5000}$

$2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n<\frac{1}{5000}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^n<\frac{1}{10000}$

$\therefore 3^n>10000$

이때 $3^8=6561$, $3^9=19683$이므로 $n\geq9$

따라서 자연수 n의 최솟값은 9이다.

07 답 ②

첫째항이 1, 제6항이 100인 등비수열의 공비를 r라 하면

$r^5=100$ $\therefore r=10^{\frac{2}{5}}$

이때 a_3은 주어진 수열의 제4항이므로

$a_3=(10^{\frac{2}{5}})^3=10^{\frac{6}{5}}$

$\therefore 10\log a_3=10\log10^{\frac{6}{5}}=10\times\frac{6}{5}=12$

08 답 104

첫째항이 4, 제12항이 26인 등비수열의 공비를 r라 하면

$4r^{11}=26$ $\therefore r^{11}=\frac{13}{2}$

이때 a_1, a_{10}은 각각 주어진 수열의 제2항, 제11항이므로

$a_1=4r$, $a_{10}=4r^{10}$

$\therefore a_1a_{10}=4r\times4r^{10}=16r^{11}$

$=16\times\frac{13}{2}=104$

09 답 24

세 수 a^n, $2^{18}\times3^6$, b^n이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(2^{18}\times3^6)^2=a^n\times b^n$ $\therefore (ab)^n=2^{36}\times3^{12}$

이때 ab의 값이 최소가 되려면 자연수 n의 값은 36과 12의 최대공약수인 12이어야 한다.

이때 $(ab)^{12}=2^{36}\times3^{12}=(2^3\times3)^{12}=24^{12}$이므로 ab의 최솟값은 24이다.

10 답 $\frac{8}{3}$

세 수 $\cos\theta$, $\frac{\sqrt{6}}{4}$, $\sin\theta$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2=\cos\theta\times\sin\theta$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

$$\therefore \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\frac{3}{8}}=\frac{8}{3}$$

11 답 8

주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $x^3-3x^2-2x=4x-k$, 즉 $x^3-3x^2-6x+k=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

서로 다른 세 실근을 a, ar, ar^2이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=3$ ……㉠

$a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a=-6$이므로

$ar(a+ar+ar^2)=-6$ ……㉡

$a\times ar\times ar^2=-k$이므로 $(ar)^3=-k$ ……㉢

㉡÷㉠을 하면 $ar=-2$

$ar=-2$를 ㉢에 대입하면

$(-2)^3=-k$ $\therefore k=8$

Lecture 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

12 답 ⑤

등비수열을 이루는 네 수를 a, ar, ar^2, ar^3 (a, r는 자연수, $r>1$)이라 하면 $ar^3\le 100$

(i) $r=2$일 때, $8a\le 100$에서 $a\le\frac{100}{8}=12.5$

즉 자연수 a의 값은 1, 2, 3, …, 12이므로 그 개수는 12이다.

(ii) $r=3$일 때, $27a\le 100$에서 $a\le\frac{100}{27}=3.7\cdots$

즉 자연수 a의 값은 1, 2, 3이므로 그 개수는 3이다.

(iii) $r=4$일 때, $64a\le 100$에서 $a\le\frac{100}{64}=1.5625$

즉 자연수 a의 값은 1이므로 그 개수는 1이다.

(iv) $r\ge 5$일 때, $ar^3\le 100$을 만족시키는 자연수 a는 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$12+3+1=16$

13 답 6

두 정삼각형 A_0과 A_1의 한 변의 길이의 비는 2 : 1이므로 넓이의 비는 4 : 1

한 변의 길이가 $4\sqrt{3}$인 정삼각형 A_0의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{3})^2=12\sqrt{3}$

1회 시행에서 그린 정삼각형 A_1의 넓이는 정삼각형 A_0의 넓이의 $\frac{1}{4}$이므로

$12\sqrt{3}\times\frac{1}{4}=3\sqrt{3}$

2회 시행에서 그린 정삼각형 A_2의 넓이는 정삼각형 A_1의 넓이의 $\frac{1}{4}$이므로

$3\sqrt{3}\times\frac{1}{4}$

3회 시행에서 그린 정삼각형 A_3의 넓이는 정삼각형 A_2의 넓이의 $\frac{1}{4}$이므로

$3\sqrt{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=3\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$

⋮

즉 n회 시행에서 그린 정삼각형 A_n의 넓이는

$3\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$3\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}<\frac{\sqrt{3}}{100}$에서 $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}<\frac{1}{300}$

$\therefore 4^{n-1}>300$

이때 $4^4=256$, $4^5=1024$이므로

$n-1\ge 5$ $\therefore n\ge 6$

따라서 넓이가 처음으로 $\frac{\sqrt{3}}{100}$보다 작게 되도록 하는 n의 값은 6이다.

14 답 ③

두께가 0.3 mm인 종이를 한 번 접었을 때 종이의 두께는

$0.3\times 2=0.6$ (mm)

두 번 접었을 때 종이의 두께는

0.6×2 (mm)

세 번 접었을 때 종이의 두께는

$0.6\times 2\times 2=0.6\times 2^2$ (mm)

⋮

즉 n번 접었을 때 종이의 두께는

$0.6\times 2^{n-1}$ (mm)

$0.6\times 2^{n-1}>1620$에서 $2^{n-1}>2700$

이때 $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로

$n-1\ge 12$ $\therefore n\ge 13$

따라서 종이를 접은 횟수의 최솟값은 13이다.

15 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=6$에서 $ar^2=6$ ……㉠

$a_7=24$에서 $ar^6=24$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=4$ $\therefore r^2=2$ ($\because r$는 실수)

$r^2=2$를 ㉠에 대입하면 $2a=6$ $\therefore a=3$

$\therefore a_n^2=(ar^{n-1})^2=a^2\times(r^2)^{n-1}=9\times 2^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_n^2\}$은 첫째항이 9, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{10}^2=\frac{9(2^{10}-1)}{2-1}=9(2^{10}-1)$

16 답 −5

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 a, 공비가 r이므로

$S_3=-9$에서 $\frac{a(r^3-1)}{r-1}=-9$ ……㉠

$S_6=63$에서 $\frac{a(r^6-1)}{r-1}=63$

$\therefore \frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=63$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3+1=-7$

$r^3=-8$ $\therefore r=-2$

$r=-2$를 ㉠에 대입하면

$3a=-9$ $\therefore a=-3$

$\therefore a+r=-3+(-2)=-5$

17 답 ①

$\log_3(S_n+a)=n$에서 $S_n+a=3^n$

$\therefore S_n=3^n-a$

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=3-a$

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3^n-a-(3^{n-1}-a)$

$=2\times 3^{n-1}$ ……㉠

수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 $a_1=3-a$가 같아야 하므로

$3-a=2$ $\therefore a=1$

18 답 ②

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2p-q+5$

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2p^n-q+5-(2p^{n-1}-q+5)$

$=(2p-2)p^{n-1}$ ……㉠

이때 등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 3이므로 ㉠에서 $p=3$

수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 $a_1=2p-q+5$가 같아야 하므로

$2p-q+5=2p-2$ $\therefore q=7$

$\therefore p+q=3+7=10$

19 답 ②

10년 동안 매년 초에 200만 원씩 연이율 2 %의 복리로 적립한 적립금의 원리합계는

$200(1+0.02)+200(1+0.02)^2+200(1+0.02)^3$

$+\cdots+200(1+0.02)^{10}$

$=\dfrac{200\times 1.02\times(1.02^{10}-1)}{1.02-1}$

$=\dfrac{200\times 1.02\times 0.22}{0.02}$

$=2244$(만 원)

따라서 10년 후 연말의 적립금의 원리합계는 2244만 원이다.

20 답 100만 원

매년 말에 적립하는 금액을 a만 원이라 하면 25년 동안 매년 말에 a만 원씩 연이율 1 %의 복리로 적립한 적립금의 원리합계는

$a+a(1+0.01)+a(1+0.01)^2+\cdots+a(1+0.01)^{24}$

$=\dfrac{a(1.01^{25}-1)}{1.01-1}$

$=\dfrac{a\times 0.28}{0.01}$

$=28a$(만 원)

즉 $28a=2800$이므로 $a=100$

따라서 매년 말에 100만 원씩 적립해야 한다.

21 답 1

첫 번째 시행에서 그린 원의 반지름의 길이는 1이므로 원의 넓이는 $\pi\times 1^2=\pi$

첫 번째 시행에서 그린 원의 지름의 길이와 그 원에 내접하는 정사각형의 대각선의 길이는 같으므로 내접하는 정사각형의 한 변의 길이는 $2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

두 번째 시행에서 그린 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 원의 넓이는 $\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{\pi}{2}$

⋮

이와 같은 시행을 반복하면 원의 넓이는 첫째항이 π, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열을 이룬다.

따라서 10회 시행 후 얻은 모든 원의 넓이의 합은

$\dfrac{\pi\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\dfrac{1}{2}}=2\pi\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}\right\}$

따라서 $a=2$, $b=\dfrac{1}{2}$이므로

$ab=2\times\dfrac{1}{2}=1$

서술형 1 답 224

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k$, $\alpha\beta=48$

이때 $k>0$이므로 $\alpha+\beta>0$

즉 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이므로 $\alpha>0$, $\beta>0$

$\therefore 0<\alpha<\beta$

(i) α, $\beta-\alpha$, β가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때

$2(\beta-\alpha)=\alpha+\beta$ $\therefore \beta=3\alpha$ ……㉠

㉠을 $\alpha\beta=48$에 대입하면 $3\alpha^2=48$, $\alpha^2=16$

α가 양수이므로 $\alpha=4$, $\beta=3\alpha=12$

$\therefore a=\alpha+\beta=4+12=16$ ……❶

(ii) α, $\beta-\alpha$, β가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때

$(\beta-\alpha)^2=\alpha\beta=48$

$\therefore b^2=(\alpha+\beta)^2=(\beta-\alpha)^2+4\alpha\beta$

$=48+4\times 48=240$ ……❷

(i), (ii)에서

$b^2-a=240-16=224$ ……❸

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b^2의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ b^2-a의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 2 답 1024

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2, 공비가 r이므로 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{2}$, 공비가 $\dfrac{1}{r}$인 등비수열이다.

$S_{10}=256$에서 $\dfrac{2(r^{10}-1)}{r-1}=256$

$\therefore \dfrac{r^{10}-1}{r-1}=128$ ……㉠

$T_{10}=4$에서 $\dfrac{\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{r}\right)^{10}\right\}}{1-\dfrac{1}{r}}=4$

$\therefore \dfrac{r^{10}-1}{r^9(r-1)}=8$ ……㉡ ……❶

㉠÷㉡을 하면 $r^9=16$ ……❷

$S_{19}=\dfrac{2(r^{19}-1)}{r-1}$, $T_{19}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{r}\right)^{19}\right\}}{1-\dfrac{1}{r}}=\dfrac{r^{19}-1}{2r^{18}(r-1)}$이므로

$\dfrac{S_{19}}{T_{19}}=S_{19}\div T_{19}=\dfrac{2(r^{19}-1)}{r-1}\div\dfrac{r^{19}-1}{2r^{18}(r-1)}$

$=\dfrac{2(r^{19}-1)}{r-1}\times\dfrac{2r^{18}(r-1)}{r^{19}-1}=4r^{18}$

$=4\times(r^9)^2=4\times16^2=1024$ ……❸

채점 기준	비율
❶ S_{10}, T_{10}을 r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ r^9의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $\dfrac{S_{19}}{T_{19}}$의 값을 구할 수 있다.	40%

서술형 3 답 490

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_n=10$에서 $\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}=10$ ……㉠

$S_{2n}=80$에서 $\dfrac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=80$

$\therefore \dfrac{a(r^n-1)(r^n+1)}{r-1}=80$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^n+1=8$ $\therefore r^n=7$ ……❶

$\therefore S_{3n}=\dfrac{a(r^{3n}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r-1}$

$=10(7^2+7+1)=570$ ……❷

$\therefore a_{2n+1}+a_{2n+2}+a_{2n+3}+\cdots+a_{3n}=S_{3n}-S_{2n}$

$=570-80$

$=490$ ……❸

채점 기준	비율
❶ r^n의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ S_{3n}의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a_{2n+1}+a_{2n+2}+a_{2n+3}+\cdots+a_{3n}$의 값을 구할 수 있다.	20%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 254~255

01 답 ②

$\log_2\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$에서 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이다.

이때 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$\dfrac{S_{12}}{S_6}=\dfrac{\dfrac{a\{(\sqrt{2})^{12}-1\}}{\sqrt{2}-1}}{\dfrac{a\{(\sqrt{2})^6-1\}}{\sqrt{2}-1}}$

$=\dfrac{2^6-1}{2^3-1}$

$=\dfrac{(2^3+1)(2^3-1)}{2^3-1}$

$=2^3+1$

$=9$

02 답 ⑤

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a<0)$, 공비를 r라 하면

$a_3a_5=8a_8$에서 $ar^2\times ar^4=8ar^7$

$a^2r^6=8ar^7$ $\therefore a=8r$ ……㉠

$\therefore a_n=a\times r^{n-1}=8r\times r^{n-1}=8r^n$

이때 ㉠에서 $a<0$이므로 $r<0$

$\therefore a_1+|a_2|+|2a_3|=a+|8r^2|+|16r^3|$

$=8r+8r^2-16r^3$ ($8r^2>0$이므로 $|8r^2|=8r^2$, $16r^3<0$이므로 $|16r^3|=-16r^3$)

즉 $8r+8r^2-16r^3=0$이므로 $2r^2-r-1=0$

$(2r+1)(r-1)=0$

$\therefore r=-\dfrac{1}{2}$ ($\because r<0$)

따라서 $a_n=8\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$이므로

$a_2=8\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=2$

03 답 12

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3+a_2=1$에서 $ar^2+ar=1$

$\therefore ar(r+1)=1$ ……㉠

$a_6-a_4=18$에서 $ar^5-ar^3=18$

$ar^3(r^2-1)=18$ $\therefore ar^3(r+1)(r-1)=18$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2(r-1)=18$

$r^3-r^2-18=0$, $(r-3)(r^2+2r+6)=0$

이때 $r^2+2r+6=(r+1)^2+5$에서 모든 실수 r에 대하여

$(r+1)^2\geq0$이므로 $r^2+2r+6>0$

$\therefore r=3$

$r=3$을 ㉠에 대입하면

$12a=1$ $\therefore a=\dfrac{1}{12}$

따라서 $a_1=a=\dfrac{1}{12}$이므로 $\dfrac{1}{a_1}=12$

04 답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 3이므로 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_n=3r^{n-1}$

(i) $r=1$일 때

$\dfrac{S_6}{S_5-S_2}=\dfrac{3\times6}{3\times5-3\times2}=2$, $\dfrac{a_2}{2}=\dfrac{a_1r}{2}=\dfrac{3}{2}$

즉 $\dfrac{S_6}{S_5-S_2}\neq\dfrac{a_2}{2}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $r\neq1$일 때

$$\frac{S_6}{S_5-S_2}=\frac{\frac{3(r^6-1)}{r-1}}{\frac{3(r^5-1)}{r-1}-\frac{3(r^2-1)}{r-1}}$$
$$=\frac{r^6-1}{r^5-r^2}=\frac{(r^3+1)(r^3-1)}{r^2(r^3-1)}$$
$$=\frac{r^3+1}{r^2}$$

이때 $\frac{a_2}{2}=\frac{a_1r}{2}=\frac{3r}{2}$이므로 $\frac{r^3+1}{r^2}=\frac{3r}{2}$

$2(r^3+1)=3r^3$ $\therefore r^3=2$

$\therefore a_4=3r^3=3\times2=6$

05 답 25

세 실수 a, b, c가 이루는 등비수열의 공비를 r라 하면

$b=ar, c=ar^2$ ……㉠

㉠을 $\frac{b-c}{a}$에 대입하면

$$\frac{b-c}{a}=\frac{ar-ar^2}{a}=-r^2+r=-\left(r-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

즉 $\frac{b-c}{a}$는 $r=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{1}{4}$을 갖는다.

따라서 $k=\frac{1}{4}$이므로

$100k=100\times\frac{1}{4}=25$

06 답 64

첫째항이 $\frac{1}{4}$, 제$(n+2)$항이 16인 등비수열의 공비가 $r\,(r>0)$이므로

$16=\frac{1}{4}r^{n+1}$ $\therefore r^{n+1}=64=2^6$ ……㉠

$\frac{1}{4}\times a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n\times16$

$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}r\times\frac{1}{4}r^2\times\frac{1}{4}r^3\times\cdots\times\frac{1}{4}r^n\times16$

$=\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\times16\times r^{1+2+3+\cdots+n}$ (첫째항이 1, 끝항이 n, 항수가 n인 등차수열의 합)

$=2^{-2n-2}\times2^4\times r^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$=2^{-2n+2}\times(r^{n+1})^{\frac{n}{2}}$

$=2^{-2n+2}\times(2^6)^{\frac{n}{2}}$

$=2^{-2n+2}\times2^{3n}$

$=2^{n+2}$

이때 주어진 등비수열의 모든 항의 곱이 1024이므로

$2^{n+2}=1024=2^{10}$, $n+2=10$

$\therefore n=8$

$n=8$을 ㉠에 대입하면

$r^9=64$

07 답 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2이므로 공비를 $r\,(r\neq0, r\neq1)$라 하면

$a_n=2r^{n-1}$

㈏에서 $S_{12}<S_{10}$이므로 $\frac{2(r^{12}-1)}{r-1}<\frac{2(r^{10}-1)}{r-1}$

$\frac{2(r^{12}-1)-2(r^{10}-1)}{r-1}<0$, $\frac{2(r^{12}-r^{10})}{r-1}<0$

$\frac{2r^{10}(r^2-1)}{r-1}<0$, $\frac{2r^{10}(r+1)(r-1)}{r-1}<0$

$2r^{10}(r+1)<0$ $\therefore r<-1\ (\because r^{10}>0)$ ……㉠

㈎에서 $S_{12}-S_2=4S_{10}$이므로

$\frac{2(r^{12}-1)}{r-1}-\frac{2(r^2-1)}{r-1}=4\times\frac{2(r^{10}-1)}{r-1}$

$r^{12}-1-(r^2-1)=4(r^{10}-1)$, $r^{12}-r^2=4(r^{10}-1)$

$r^2(r^{10}-1)=4(r^{10}-1)$

이때 $r\neq1$이므로 $r^2=4$

$\therefore r=-2\ (\because$ ㉠)

따라서 $a_n=2\times(-2)^{n-1}$이므로

$a_4=2\times(-2)^3=-16$

참고 $r=0$이면 $S_{12}=S_{10}=0$이므로 ㈏를 만족시키지 않는다.
$r=1$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=2$이므로
$S_{12}-S_2=12\times2-2\times2=20$
$4S_{10}=4\times10\times2=80$
즉 $S_{12}-S_2\neq4S_{10}$이므로 ㈎를 만족시키지 않는다.

08 답 9

$S_{n+3}-S_n=13\times3^{n-1}$에서 $S_{n+3}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$이므로

모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=13\times3^{n-1}$ ……㉠

이때 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$n=1$을 ㉠에 대입하면 $a_2+a_3+a_4=13$이므로

$ar+ar^2+ar^3=13$ $\therefore ar(1+r+r^2)=13$ ……㉡

$n=2$를 ㉠에 대입하면 $a_3+a_4+a_5=13\times3=39$이므로

$ar^2+ar^3+ar^4=39$ $\therefore ar^2(1+r+r^2)=39$ ……㉢

㉢÷㉡을 하면 $r=3$

$r=3$을 ㉡에 대입하면

$39a=13$ $\therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 $a_n=\frac{1}{3}\times3^{n-1}=3^{n-2}$이므로

$a_4=3^2=9$

09 답 477

$A(200)$은 첫째항이 3이고 공비가 2 이상의 자연수인 등비수열의 제k항이 3×2^{200}이 되는 모든 k의 값의 합과 같다.

$2^{200}=(2^1)^{200}=(2^2)^{100}=(2^4)^{50}=\cdots=(2^{200})^1$이므로 공비가 될 수 있는 수는

$2^1, 2^2, 2^4, \cdots, 2^{200}$

즉 공비는 2^p (p는 200의 양의 약수)이다.

(i) 공비가 2^1일 때

제k항은 $3\times2^{k-1}$이므로 $k-1=200$ $\therefore k=201$

(ii) 공비가 2^2일 때

제k항은 $3\times(2^2)^{k-1}=3\times2^{2(k-1)}$이므로

$2(k-1)=200$, $k-1=100$ $\therefore k=101$

(iii) 공비가 2^4일 때

제k항은 $3\times(2^4)^{k-1}=3\times2^{4(k-1)}$이므로

$4(k-1)=200$, $k-1=50$ $\therefore k=51$

⋮

따라서 k의 값은 201, 101, 51, …, 2, 즉 200+1, 100+1, 50+1, …, 1+1이므로

$A(200)=(200+1)+(100+1)+(50+1)+\cdots+(1+1)$
$=(200$의 양의 약수의 총합$)+1\times12$
$=(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)+12$
$=15\times31+12$
$=477$

Lecture 양의 약수의 총합

자연수 N이
$N=a^pb^q$ (a, b는 서로 다른 소수, p, q는 자연수)
꼴로 소인수분해 될 때, 자연수 N의 양의 약수의 총합은
$(1+a+a^2+\cdots+a^p)(1+b+b^2+\cdots+b^q)$

10 답 9

㈎에서 $r\in A$
㈏에서 집합 A의 원소들을 작은 수부터 차례로 배열한 수열은 등비수열이고 $r>1$이므로 등비수열의 첫째항은 r이다.
이 등비수열의 공비를 r^p (p는 102 이하의 자연수), 일반항을 a_n이라 하면
$a_n=r\times(r^p)^{n-1}$
$r^{31}\in A$, $r^{100}\in A$이므로 102 이하의 두 자연수 n_1, n_2에 대하여 두 수 r^{31}, r^{100}을 각각 제n_1항, 제n_2항이라 하면
$r\times(r^p)^{n_1-1}=r^{31}$, $r\times(r^p)^{n_2-1}=r^{100}$
$\therefore r^{p(n_1-1)}=r^{30}$, $r^{p(n_2-1)}=r^{99}$
즉 p는 30과 99의 공약수이므로 $p=1$ 또는 $p=3$
㈐에서 $A\neq U$이므로 $p=3$
$\therefore a_n=r\times(r^3)^{n-1}=r^{3n-2}$
즉 집합 A의 원소는 r^{3n-2} 꼴이므로 ┌ $3n-2=100$에서 $n=34$이므로 $n(A)=34$
$A=\{r, r^4, r^7, \cdots, r^{100}\}$ $\therefore n(A)=34$
집합 A의 모든 원소들의 합은 첫째항이 r, 공비가 r^3인 등비수열의 첫째항부터 제34항까지의 합이므로
$\dfrac{r\{(r^3)^{34}-1\}}{r^3-1}=\dfrac{r(r^{102}-1)}{r^3-1}$
전체집합 U의 모든 원소들의 합이 집합 A의 모든 원소들의 합의 91배이므로
$\dfrac{r(r^{102}-1)}{r-1}=91\times\dfrac{r(r^{102}-1)}{r^3-1}$
$\dfrac{r(r^{102}-1)}{r-1}=91\times\dfrac{r(r^{102}-1)}{(r-1)(r^2+r+1)}$
$r^2+r+1=91$, $r^2+r-90=0$
$(r+10)(r-9)=0$ $\therefore r=9$ ($\because r>1$)

참고 전체집합 U의 모든 원소들의 합은 첫째항이 r, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제102항까지의 합이므로
$\dfrac{r(r^{102}-1)}{r-1}$

11 답 117

모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 d이므로 첫째항을 a ($a>0$)라 하면
$a_n=a+(n-1)d$ ……㉠
㈏에서 $a_k^2=a_2a_{3k-1}$이므로
$\{a+(k-1)d\}^2=(a+d)\{a+(3k-2)d\}$
$a^2+2(k-1)ad+(k-1)^2d^2=a^2+(3k-1)ad+(3k-2)d^2$
$\therefore d^2(k^2-5k+3)=ad(k+1)$ ……㉡
㈎에서 $0<a\leq d$이므로 $ad(k+1)\leq d^2(k+1)$ ……㉢
㉡을 ㉢에 대입하면 $d^2(k^2-5k+3)\leq d^2(k+1)$
$k^2-5k+3\leq k+1$, $k^2-6k+2\leq0$
$\therefore 3-\sqrt{7}\leq k\leq3+\sqrt{7}$
그런데 $k\geq3$이므로 $3\leq k\leq3+\sqrt{7}$
$\therefore k=3$ 또는 $k=4$ 또는 $k=5$ ($\because k$는 자연수)
이때 $0<a\leq d$이므로 ㉡에서 $k^2-5k+3>0$ ……㉣
(i) $k=3$일 때
$k^2-5k+3=9-15+3=-3$이므로 ㉣을 만족시키지 않는다.
(ii) $k=4$일 때
$k^2-5k+3=16-20+3=-1$이므로 ㉣을 만족시키지 않는다.
(iii) $k=5$일 때
$k^2-5k+3=25-25+3=3$이므로 ㉣을 만족시킨다.
(i)~(iii)에서 $k=5$
$k=5$를 ㉡에 대입하면
$3d^2=6ad$ $\therefore d=2a$ ($\because d>0$)
$d=2a$를 ㉠에 대입하면
$a_n=a+(n-1)\times2a=a(2n-1)$
$\therefore a_{16}=31a$
$90\leq a_{16}\leq100$에서 $90\leq31a\leq100$
$\dfrac{90}{31}\leq a\leq\dfrac{100}{31}$, $2.9\cdots\leq a\leq3.2\cdots$
$\therefore a=3$ ($\because a$는 자연수)
따라서 $a_n=3(2n-1)=6n-3$이므로
$a_{20}=6\times20-3=117$

10 수열의 합

개념 완성하기 p.259~260

01 답 $3+6+9+12$

$\sum_{k=1}^{4}3k=3\times1+3\times2+3\times3+3\times4=3+6+9+12$

02 답 $3^2+3^4+3^6+3^8+3^{10}$

$\sum_{k=1}^{5}3^{2k}=3^{2\times1}+3^{2\times2}+3^{2\times3}+3^{2\times4}+3^{2\times5}=3^2+3^4+3^6+3^8+3^{10}$

03 답 $4+7+10+\cdots+(3n+1)$

$\sum_{i=1}^{n}(3i+1)=(3\times1+1)+(3\times2+1)+(3\times3+1)+\cdots+(3n+1)$

$=4+7+10+\cdots+(3n+1)$

04 답 $-1+0+3+\cdots+n(n-2)$

$\sum_{i=1}^{n}i(i-2)=1\times(1-2)+2\times(2-2)+3\times(3-2)+\cdots+n(n-2)$

$=-1+0+3+\cdots+n(n-2)$

05 답 $\sum_{k=1}^{100}k$

06 답 $\sum_{k=1}^{10}(2k-1)^2$

07 답 $\sum_{k=1}^{21}2^{k-1}$

08 답 $\sum_{k=1}^{50}k(k+1)$

09 답 10

$\sum_{k=1}^{10}2a_k=2\sum_{k=1}^{10}a_k=2\times5=10$

10 답 14

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k=5+9=14$

11 답 79

$\sum_{k=1}^{10}(b_k+7)=\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}7=9+7\times10=79$

12 답 1

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=2\times5-9=1$

13 답 17

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k+3)=\sum_{k=1}^{10}a_k-2\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}3$

$=5-2\times9+3\times10=17$

14 답 48

$\sum_{k=1}^{6}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{6}k+\sum_{k=1}^{6}1=2\times\frac{6\times7}{2}+1\times6$

$=42+6=48$

15 답 112

$\sum_{k=1}^{7}(k^2-k)=\sum_{k=1}^{7}k^2-\sum_{k=1}^{7}k$

$=\frac{7\times8\times15}{6}-\frac{7\times8}{2}$

$=140-28=112$

16 답 200

$\sum_{k=1}^{10}(k^2-3k-2)=\sum_{k=1}^{10}k^2-3\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}2$

$=\frac{10\times11\times21}{6}-3\times\frac{10\times11}{2}-2\times10$

$=385-165-20=200$

17 답 430

$\sum_{k=1}^{5}(k^3+4k^2-3)=\sum_{k=1}^{5}k^3+4\sum_{k=1}^{5}k^2-\sum_{k=1}^{5}3$

$=\left(\frac{5\times6}{2}\right)^2+4\times\frac{5\times6\times11}{6}-3\times5$

$=225+220-15=430$

18 답 454

$\sum_{k=1}^{8}(2^k-7)=\sum_{k=1}^{8}2^k-\sum_{k=1}^{8}7$

$=\frac{2(2^8-1)}{2-1}-7\times8$

$=510-56=454$

19 답 $2n^2+n$

$\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$

$=4\times\frac{n(n+1)}{2}-n$

$=2n^2+n$

20 답 $2n^2(n+1)$

$\sum_{k=1}^{n}(6k^2-2k)=6\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k$

$=6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\times\frac{n(n+1)}{2}$

$=2n^2(n+1)$

21 답 $\frac{n(n^2-7)}{3}$

$\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-2)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k-2)$

$=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}2$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}-2n$

$=\frac{n(n^2-7)}{3}$

22 답 $n(n+1)(n^2-n-1)$

$$\sum_{k=1}^{n}2k^2(2k-3)=\sum_{k=1}^{n}(4k^3-6k^2)$$
$$=4\sum_{k=1}^{n}k^3-6\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=4\times\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=n(n+1)(n^2-n-1)$$

23 답 1770

주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면 $a_k=(2k+1)^2$이므로

$(2k+1)^2=21^2$에서 $k=10$

$$\therefore \text{(주어진 식)}=\sum_{k=1}^{10}(2k+1)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(4k^2+4k+1)$$
$$=4\sum_{k=1}^{10}k^2+4\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$$
$$=4\times\frac{10\times11\times21}{6}+4\times\frac{10\times11}{2}+1\times10$$
$$=1540+220+10=1770$$

24 답 3080

주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면 $a_k=k(k+1)$이므로

$k(k+1)=20\times21$에서 $k=20$

$$\therefore \text{(주어진 식)}=\sum_{k=1}^{20}k(k+1)=\sum_{k=1}^{20}(k^2+k)$$
$$=\sum_{k=1}^{20}k^2+\sum_{k=1}^{20}k$$
$$=\frac{20\times21\times41}{6}+\frac{20\times21}{2}$$
$$=2870+210=3080$$

25 답 495

주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면 $a_k=k(k+2)$이므로

$k(k+2)=10\times12$에서 $k=10$

$$\therefore \text{(주어진 식)}=\sum_{k=1}^{10}k(k+2)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}k^2+2\sum_{k=1}^{10}k$$
$$=\frac{10\times11\times21}{6}+2\times\frac{10\times11}{2}$$
$$=385+110=495$$

26 답 $\frac{1023}{512}$

주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면 $a_k=\frac{1}{2^{k-1}}$이므로

$\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{1}{2^9}$에서 $k-1=9$ $\therefore k=10$

$$\therefore \text{(주어진 식)}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2^{k-1}}=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$
$$=\frac{1\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1023}{512}$$

27 답 $\frac{29}{45}$

$$\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=\frac{29}{45}$$

28 답 $\frac{5}{11}$

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{21}-\frac{1}{22}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{22}=\frac{5}{11}$$

29 답 $\frac{60}{31}$

$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$이므로

$$\sum_{k=1}^{30}\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}=\sum_{k=1}^{30}\frac{2}{k(k+1)}$$
$$=2\sum_{k=1}^{30}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{31}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{31}\right)=\frac{60}{31}$$

30 답 $\frac{36}{55}$

$$\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{k^2-1}=\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{(k-1)(k+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{10}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=\frac{36}{55}$$

31 답 $S_n=\frac{n}{n+1}$

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{n}{n+1}$$

32 답 $S_n=\frac{n}{2n+1}$

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{n}{2n+1}$$

33 답 $S_n=\frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}$

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=\frac{2}{n(n+2)}$이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$
$$=\frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}$$

34 답 $S_n=\frac{4n(4n+5)}{3(2n+1)(2n+3)}$

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{4}{(2n-1)(2n+3)}$이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{(2k-1)(2k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$
$$=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}$$
$$=\frac{4n(4n+5)}{3(2n+1)(2n+3)}$$

35 답 $S_n=\frac{n(11n^2+48n+49)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=\frac{3}{n(n+3)}$이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{k(k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$$
$$=\frac{n(11n^2+48n+49)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$$

36 답 $S_n=\frac{n}{2(3n+2)}$

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$$
$$=\frac{n}{2(3n+2)}$$

37 답 $3+\sqrt{15}-\sqrt{2}$

$$\sum_{k=1}^{14}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})=(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{15}-\sqrt{13})+(\sqrt{16}-\sqrt{14})$$
$$=\sqrt{15}+\sqrt{16}-1-\sqrt{2}$$
$$=3+\sqrt{15}-\sqrt{2}$$

38 답 $2+\sqrt{6}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sum_{k=1}^{23}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{23}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{24}-\sqrt{22})+(\sqrt{25}-\sqrt{23})\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{24}+\sqrt{25}-1-\sqrt{2})$$
$$=2+\sqrt{6}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

39 답 4

$$\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{40}(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})$$
$$=-\frac{1}{2}\{(\sqrt{1}-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{5})+(\sqrt{5}-\sqrt{7})+\cdots+(\sqrt{79}-\sqrt{81})\}$$
$$=-\frac{1}{2}(1-\sqrt{81})=4$$

40 답 $3+2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sum_{k=2}^{48}\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k+1}}$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{48}(\sqrt{k-1}-\sqrt{k+1})$$
$$=-\frac{1}{2}\{(\sqrt{1}-\sqrt{3})+(\sqrt{2}-\sqrt{4})+(\sqrt{3}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{46}-\sqrt{48})+(\sqrt{47}-\sqrt{49})\}$$
$$=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{48}-\sqrt{49})$$
$$=3+2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

유형 완성하기 p.261~272

01 답 600

$\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=\sum_{k=1}^{2n}a_k$

이므로 $\sum_{k=1}^{2n}a_k=6n^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k=6\times10^2=600$

01-1 답 160

$\sum_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1})=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots$

$+(a_n-a_{n-1})$

$=a_n-a_1$

이므로 $a_n-17=n^2-1$ $\therefore a_n=n^2+16$

$\therefore a_{12}=12^2+16=160$

02 답 ④

① $\sum_{k=1}^{n}5^k=5+5^2+5^3+\cdots+5^n$

② $\sum_{k=1}^{6}(-1)^k=-1+1-1+1-1+1$

③ $\sum_{k=1}^{20}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{19}+a_{20}$

$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20})$

$=\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{10}a_{2k}$

④ $\sum_{k=1}^{n}3^k=3+3^2+3^3+\cdots+3^n$

$\sum_{k=0}^{n}3^k=1+3+3^2+\cdots+3^n$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}3^k\neq\sum_{k=0}^{n}3^k$

⑤ $\sum_{i=2}^{11}(i-1)^5=1^5+2^5+3^5+\cdots+10^5=\sum_{k=1}^{10}k^5$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

02-1 답 ⑤

① $\sum_{k=1}^{n}(-2)^k=-2+4-8+\cdots+(-2)^n$

② $\sum_{k=1}^{6}(2k+1)=3+5+7+9+11+13$

③ $\sum_{k=1}^{20}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2$

$\sum_{k=0}^{20}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}k^2=\sum_{k=0}^{20}k^2$

④ $\sum_{k=0}^{n-1}(3k+2)=2+5+8+\cdots+3(n-1)+2$

$=2+5+8+\cdots+(3n-1)$

$\sum_{i=1}^{n}(3i-1)=2+5+8+\cdots+(3n-1)$

$\therefore \sum_{k=0}^{n-1}(3k+2)=\sum_{i=1}^{n}(3i-1)$

⑤ $\sum_{k=1}^{n}k^4=1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$

$\sum_{i=3}^{n+1}(i-2)^4=1^4+2^4+3^4+\cdots+(n-1)^4$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}k^4\neq\sum_{i=3}^{n+1}(i-2)^4$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

03 답 25

$\sum_{n=1}^{10}a_{2n-1}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{17}+a_{19}=35$ ……㉠

$\sum_{n=1}^{20}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{19}-a_{20}=10$ ……㉡

㉠−㉡을 하면

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}=25$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_{2n}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}=25$

03-1 답 100

$\sum_{k=1}^{100}(a_k+a_{k+1})$

$=(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{100}+a_{101})$

$=a_1+2(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{100})+a_{101}$

$=300$ ……㉠

$\sum_{k=1}^{50}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{99}+a_{100})$

$=200$ ……㉡

㉠−㉡을 하면

$a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{101}=100$

$\therefore a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{100}=100-a_{101}$ ……㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$a_1+2(100-a_{101})+a_{101}=300$

$a_1-a_{101}+200=300$

$\therefore a_1-a_{101}=100$

04 답 64

$\sum_{k=1}^{10}(3a_k-2)^2=\sum_{k=1}^{10}(9a_k{}^2-12a_k+4)$

$=9\sum_{k=1}^{10}a_k{}^2-12\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}4$

$=9\times8-12\times4+4\times10$

$=64$

04-1 답 ②

$\sum_{k=1}^{30}(a_k+1)^2=\sum_{k=1}^{30}(a_k{}^2+2a_k+1)$

$=\sum_{k=1}^{30}a_k{}^2+2\sum_{k=1}^{30}a_k+\sum_{k=1}^{30}1$

$=\sum_{k=1}^{30}a_k{}^2+2\times(-8)+1\times30$

$=\sum_{k=1}^{30}a_k{}^2+14$

즉 $\sum_{k=1}^{30}a_k{}^2+14=50$이므로

$\sum_{k=1}^{30}a_k{}^2=36$

05 답 18

$$\sum_{k=1}^{10}(3a_k-b_k-3)=3\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}3$$
$$=3\times21-15-3\times10$$
$$=18$$

05-1 답 ②

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k-2\sum_{k=1}^{10}b_k$$
$$=10-2\sum_{k=1}^{10}b_k$$

즉 $10-2\sum_{k=1}^{10}b_k=-4$이므로 $2\sum_{k=1}^{10}b_k=14$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}b_k=7$

06 답 20

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-6b_k+2)=\sum_{k=1}^{n}a_k-6\sum_{k=1}^{n}b_k+\sum_{k=1}^{n}2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}a_i-6\sum_{j=1}^{n}b_j+\sum_{k=1}^{n}2$$
$$=n^2-6\times2n+2n$$
$$=n^2-10n \quad \cdots\cdots ❶$$

즉 $n^2-10n=200$이므로 $n^2-10n-200=0$

$(n+10)(n-20)=0$

$\therefore n=20$ ($\because n$은 자연수) $\cdots\cdots ❷$

채점 기준	비율
❶ $\sum_{k=1}^{n}(a_k-6b_k+2)$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60%
❷ 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	40%

06-1 답 16

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-2b_k+1)=\sum_{k=1}^{n}a_k-2\sum_{k=1}^{n}b_k+\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=\sum_{i=1}^{n}a_i-2\sum_{j=1}^{n}b_j+\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=(n+1)^2-2\times2n+n$$
$$=n^2-n+1$$

즉 $n^2-n+1=241$이므로 $n^2-n-240=0$

$(n+15)(n-16)=0$

$\therefore n=16$ ($\because n$은 자연수)

07 답 ④

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{3^k-2^k}{4^k}=\sum_{k=1}^{100}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{3}{4}\right)^k-\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$=\frac{\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{100}\right\}}{1-\frac{3}{4}}-\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=3-3\times\left(\frac{3}{4}\right)^{100}-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$
$$=2-3\times\left(\frac{3}{4}\right)^{100}+\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

따라서 $a=2$, $b=-3$, $c=1$이므로

$a+b+c=2+(-3)+1=0$

07-1 답 4

$a_n=2\times2^{n-1}=2^n$이므로

$$\sum_{k=1}^{50}\frac{a_k}{3^k}=\sum_{k=1}^{50}\frac{2^k}{3^k}=\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{50}\right\}}{1-\frac{2}{3}}$$
$$=2\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{50}\right\}=2-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{50}$$

따라서 $p=2$, $q=2$이므로

$pq=2\times2=4$

08 답 ④

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}=\frac{1\times(3^n-1)}{3-1}=\frac{3^n-1}{2}$$

따라서 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}\frac{3^k-1}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{10}3^k-\sum_{k=1}^{10}1\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^{10}-1)}{3-1}-1\times10\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3^{11}-3}{2}-10\right)$$
$$=\frac{3^{11}-23}{4}$$

08-1 답 9

$$a_n=1+(-2)+(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^{n-1}$$
$$=\frac{1\times\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{1-(-2)^n}{3}$$

이므로 $3a_n-1=-(-2)^n$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}(3a_k-1)=\sum_{k=1}^{n}\{-(-2)^k\}=-\sum_{k=1}^{n}(-2)^k$$
$$=-\frac{-2\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}$$
$$=\frac{2\{1-(-2)^n\}}{3}$$

즉 $\frac{2\{1-(-2)^n\}}{3}=342$이므로 $2\{1-(-2)^n\}=1026$

$1-(-2)^n=513$, $-(-2)^n=512$

$(-2)^n=-512=(-2)^9$

$\therefore n=9$

09 답 30

수열 9, 99, 999, …, 999…9(20개)의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=10^n-1$ $\cdots\cdots ❶$

이때 주어진 식의 좌변은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}(10^k-1)=\sum_{k=1}^{20}10^k-\sum_{k=1}^{20}1$$
$$=\frac{10(10^{20}-1)}{10-1}-1\times20$$
$$=\frac{10^{21}-10}{9}-20$$
$$=\frac{10^{21}-190}{9}$$

따라서 $a=21$, $b=9$이므로 $\cdots\cdots ❷$

$a+b=21+9=30$ $\cdots\cdots ❸$

채점 기준	비율
❶ 수열 9, 99, 999, …, 999…9의 일반항을 구할 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

09-1 답 ⑤

수열 7, 77, 777, 7777, … 의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=10^{n-1}\times7+10^{n-2}\times7+\cdots+10\times7+7$

$=\dfrac{7(10^n-1)}{10-1}=\dfrac{7(10^n-1)}{9}$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{7(10^k-1)}{9}=\frac{7}{9}\sum_{k=1}^{n}10^k-\frac{7}{9}\sum_{k=1}^{n}1$

$=\dfrac{7}{9}\times\dfrac{10(10^n-1)}{10-1}-\dfrac{7}{9}n$

$=\dfrac{70(10^n-1)}{81}-\dfrac{7}{9}n$

$=\dfrac{7(10^{n+1}-9n-10)}{81}$

10 답 ①

$\displaystyle\sum_{k=1}^{40}\frac{1+2+3+\cdots+k}{k}=\sum_{k=1}^{40}\frac{\frac{k(k+1)}{2}}{k}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{40}\frac{k+1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{40}k+\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{40\times41}{2}+\dfrac{1}{2}\times40$

$=410+20=430$

10-1 답 223

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}{2k+1}=\sum_{k=1}^{10}\frac{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}{2k+1}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{k(k+1)}{6}$

$=\dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)$

$=\dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^2+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{10}k$

$=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{10\times11\times21}{6}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{10\times11}{2}$

$=\dfrac{385}{6}+\dfrac{55}{6}=\dfrac{220}{3}$

따라서 $p=3$, $q=220$이므로

$p+q=3+220=223$

11 답 6

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+4)=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}4=\frac{n(n+1)}{2}+4n$이므로

$\dfrac{n(n+1)}{2}+4n=45$, $n(n+1)+8n=90$

$n^2+9n-90=0$, $(n+15)(n-6)=0$

$\therefore n=6$ ($\because n$은 자연수)

11-1 답 ②

$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}k(k+a)=\sum_{k=1}^{6}(k^2+ak)$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{6}k^2+a\sum_{k=1}^{6}k$

$=\dfrac{6\times7\times13}{6}+a\times\dfrac{6\times7}{2}$

$=91+21a$

즉 $91+21a=133$이므로 $21a=42$

$\therefore a=2$

12 답 ⑤

$\displaystyle\sum_{k=1}^{16}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{16}k(k-1)=\sum_{k=1}^{16}(k^2+2k+1)-\sum_{k=1}^{16}(k^2-k)$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{16}\{k^2+2k+1-(k^2-k)\}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{16}(3k+1)$

$=3\displaystyle\sum_{k=1}^{16}k+\sum_{k=1}^{16}1$

$=3\times\dfrac{16\times17}{2}+1\times16$

$=408+16=424$

12-1 답 ③

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{k^3}{k+2}+\sum_{k=1}^{10}\frac{8}{k+2}=\sum_{k=1}^{10}\frac{k^3+8}{k+2}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{(k+2)(k^2-2k+4)}{k+2}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k^2-2k+4)$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^2-2\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}4$

$=\dfrac{10\times11\times21}{6}-2\times\dfrac{10\times11}{2}+4\times10$

$=385-110+40=315$

13 답 ③

$a_n=-5+(n-1)\times2=2n-7$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}(2k-7)=2\sum_{k=1}^{20}k-\sum_{k=1}^{20}7$

$=2\times\dfrac{20\times21}{2}-7\times20$

$=420-140=280$

13-1 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2=6$에서 $a_1+d=6$ ……㉠

$a_6=-2$에서 $a_1+5d=-2$ ……㉡

㉠, ㉡를 연립하여 풀면 $a_1=8$, $d=-2$

$\therefore a_n=8+(n-1)\times(-2)=-2n+10$

$\therefore\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(-2n+10)$

$=-2\displaystyle\sum_{n=1}^{10}n+\sum_{n=1}^{10}10$

$=-2\times\dfrac{10\times11}{2}+10\times10$

$=-110+100=-10$

14 답 135

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=-3$ ……㉠ ……❶

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}(k-\alpha)(k-\beta)=\sum_{k=1}^{10}\{k^2-(\alpha+\beta)k+\alpha\beta\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(k^2-4k-3)\ (\because ㉠)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}k^2-4\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}3$$
$$=\frac{10\times11\times21}{6}-4\times\frac{10\times11}{2}-3\times10$$
$$=385-220-30=135$$ ……❷

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $\sum_{k=1}^{10}(k-\alpha)(k-\beta)$의 값을 구할 수 있다.	70%

14-1 답 ③

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=2n+1,\ \alpha_n\beta_n=n(n+1)$

$$\therefore (1-\alpha_n)(1-\beta_n)=1-(\alpha_n+\beta_n)+\alpha_n\beta_n$$
$$=1-(2n+1)+n(n+1)$$
$$=n^2-n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}(1-\alpha_n)(1-\beta_n)=\sum_{n=1}^{10}(n^2-n)$$
$$=\sum_{n=1}^{10}n^2-\sum_{n=1}^{10}n$$
$$=\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}$$
$$=385-55=330$$

15 답 ②

$$f(x)=\sum_{k=1}^{9}(x-k)^2=\sum_{k=1}^{9}(x^2-2kx+k^2)$$
$$=\sum_{k=1}^{9}x^2-2x\sum_{k=1}^{9}k+\sum_{k=1}^{9}k^2$$
$$=9x^2-2x\times\frac{9\times10}{2}+\frac{9\times10\times19}{6}$$
$$=9x^2-90x+285$$
$$=9(x-5)^2+60$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=5$일 때 최솟값 60을 가지므로 구하는 합은

$60+5=65$

Lecture 이차함수의 최대·최소

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$에 대하여

(1) $a>0$이면 $x=p$일 때 최솟값 q를 갖는다.

(2) $a<0$이면 $x=p$일 때 최댓값 q를 갖는다.

15-1 답 130

$$\sum_{k=1}^{11}(k-a)(2k-a)=\sum_{k=1}^{11}(2k^2-3ak+a^2)$$
$$=2\sum_{k=1}^{11}k^2-3a\sum_{k=1}^{11}k+\sum_{k=1}^{11}a^2$$
$$=2\times\frac{11\times12\times23}{6}-3a\times\frac{11\times12}{2}+11a^2$$
$$=11a^2-198a+1012$$
$$=11(a-9)^2+121$$ ……❶

따라서 주어진 식은 $a=9$일 때 최솟값 121을 가지므로

$a=9,\ m=121$ ……❷

$\therefore a+m=9+121=130$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❷ $a,\ m$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $a+m$의 값을 구할 수 있다.	20%

16 답 ①

$$\sum_{l=1}^{k}\frac{kl}{2}=\frac{k}{2}\sum_{l=1}^{k}l=\frac{k}{2}\times\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k^3+k^2}{4}$$이므로

$$\sum_{k=1}^{7}\left(\sum_{l=1}^{k}\frac{kl}{2}\right)=\sum_{k=1}^{7}\frac{k^3+k^2}{4}=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{7}k^3+\sum_{k=1}^{7}k^2\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{7\times8}{2}\right)^2+\frac{7\times8\times15}{6}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}(784+140)=231$$

16-1 답 ⑤

$$\sum_{k=1}^{10}\left(\sum_{j=1}^{5}kj\right)=\sum_{k=1}^{10}\left(k\sum_{j=1}^{5}j\right)=\sum_{k=1}^{10}\left(k\times\frac{5\times6}{2}\right)=\sum_{k=1}^{10}15k$$
$$=15\times\frac{10\times11}{2}=825$$

$$\sum_{k=1}^{5}\left\{\sum_{j=1}^{10}(k+j)\right\}=\sum_{k=1}^{5}\left(\sum_{j=1}^{10}k+\sum_{j=1}^{10}j\right)=\sum_{k=1}^{5}\left(10k+\frac{10\times11}{2}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{5}(10k+55)=10\times\frac{5\times6}{2}+55\times5$$
$$=425$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\left(\sum_{j=1}^{5}kj\right)+\sum_{k=1}^{5}\left\{\sum_{j=1}^{10}(k+j)\right\}=825+425=1250$$

17 답 8

$$\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)=\sum_{m=1}^{n}\frac{m(m+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{n}m^2+\sum_{m=1}^{n}m\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+4)}{12}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$ ……❶

즉 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=120$이므로

$n(n+1)(n+2)=720=8\times9\times10$

$\therefore n=8$ ……❷

채점 기준	비율
❶ $\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❷ 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	50%

17-1 답 9

$$\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{m}(k+m)\right\}=\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}k+\sum_{k=1}^{m}m\right)=\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{m(m+1)}{2}+m^2\right\}$$
$$=\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{3m^2+m}{2}\right)=\frac{3}{2}\sum_{m=1}^{n}m^2+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}m$$
$$=\frac{3}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+2)}{4}=\frac{n(n+1)^2}{2}$$

즉 $\frac{n(n+1)^2}{2}=450$이므로

$n(n+1)^2=900=9\times10^2$

$\therefore n=9$

18 답 ⑤

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right\}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}i+\sum_{j=1}^{n}j\right)=\sum_{i=1}^{m}\left\{in+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=n\sum_{i=1}^{m}i+\sum_{i=1}^{m}\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=n\times\frac{m(m+1)}{2}+\frac{mn(n+1)}{2}$$
$$=\frac{mn(m+n+2)}{2}$$
$$=\frac{40(13+2)}{2}\ (\because m+n=13,\ mn=40)$$
$$=300$$

18-1 답 45

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$m+n=7,\ mn=10$ ……㉠

$$\therefore \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}ij\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(i\sum_{j=1}^{n}j\right)=\sum_{i=1}^{m}\left\{i\times\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{m}i$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{m(m+1)}{2}$$
$$=\frac{mn(m+1)(n+1)}{4}$$
$$=\frac{mn(mn+m+n+1)}{4}$$
$$=\frac{10(10+7+1)}{4}\ (\because ㉠)$$
$$=45$$

19 답 ③

수열 $1\times5,\ 2\times6,\ 3\times7,\ \cdots,\ 11\times15$의 제$k$항을 a_k라 하면

$a_k=k(k+4)=k^2+4k$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\sum_{k=1}^{11}a_k=\sum_{k=1}^{11}(k^2+4k)=\sum_{k=1}^{11}k^2+4\sum_{k=1}^{11}k$$
$$=\frac{11\times12\times23}{6}+4\times\frac{11\times12}{2}$$
$$=506+264=770$$

19-1 답 ⑤

수열 $1^2-2,\ 2^2-4,\ 3^2-6,\ \cdots,\ 15^2-30$의 제 k항을 a_k라 하면

$a_k=k^2-2k$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\sum_{k=1}^{15}a_k=\sum_{k=1}^{15}(k^2-2k)=\sum_{k=1}^{15}k^2-2\sum_{k=1}^{15}k$$
$$=\frac{15\times16\times31}{6}-2\times\frac{15\times16}{2}$$
$$=1240-240=1000$$

20 답 3410

수열 $2\times1^2,\ 3\times2^2,\ 4\times3^2,\ \cdots,\ 11\times10^2$의 제$k$항을 a_k라 하면

$a_k=(k+1)k^2=k^3+k^2$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(k^3+k^2)=\sum_{k=1}^{10}k^3+\sum_{k=1}^{10}k^2$$
$$=\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2+\frac{10\times11\times21}{6}$$
$$=3025+385=3410$$

20-1 답 4404

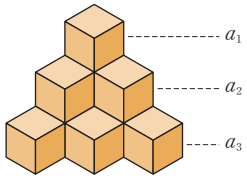
주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면

$a_k=k(2k-1)^2=4k^3-4k^2+k$

$$\therefore \sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{8}(4k^3-4k^2+k)=4\sum_{k=1}^{8}k^3-4\sum_{k=1}^{8}k^2+\sum_{k=1}^{8}k$$
$$=4\times\left(\frac{8\times9}{2}\right)^2-4\times\frac{8\times9\times17}{6}+\frac{8\times9}{2}$$
$$=5184-816+36=4404$$

21 답 84

오른쪽 그림과 같이 각 층에 놓인 정육면체의 개수를 맨 위층부터 차례로 a_1, a_2, a_3, … 이라 하면



$a_1=1$

$a_2=1+2=3$

$a_3=1+2+3=6$

$a_4=1+2+3+4=10$

⋮

$\therefore a_k=1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ ……❶

따라서 7층 탑을 쌓는 데 필요한 정육면체의 개수는

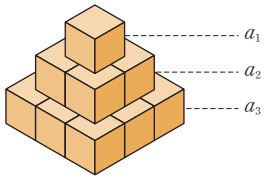
$\sum_{k=1}^{7}a_k=\sum_{k=1}^{7}\frac{k(k+1)}{2}$ ……❷

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{7}k^2+\sum_{k=1}^{7}k\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{7\times8\times15}{6}+\frac{7\times8}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(140+28)=84$$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 각 층에 놓인 정육면체의 개수에 대한 일반항을 구할 수 있다.	40%
❷ 7층 탑을 쌓는 데 필요한 정육면체의 개수를 $\sum$를 사용하여 나타낼 수 있다.	20%
❸ 7층 탑을 쌓는 데 필요한 정육면체의 개수를 구할 수 있다.	40%

21-1 답 650

오른쪽 그림과 같이 각 층에 놓인 정육면체의 개수를 맨 위층부터 차례로 a_1, a_2, a_3, … 이라 하면



$a_1=1$

$a_2=4=2^2$

$a_3=9=3^2$

$a_4=16=4^2$

⋮

$\therefore a_k=k^2$

따라서 12층을 쌓는 데 필요한 정육면체의 개수는

$\sum_{k=1}^{12}a_k=\sum_{k=1}^{12}k^2=\frac{12\times13\times25}{6}=650$

22 답 7

수열 $1\times(3n-1)$, $2\times(3n-3)$, $3\times(3n-5)$, $\cdots$, $n\times(n+1)$의 제k항을 a_k라 하면

$a_k=k\{3n-(2k-1)\}=(3n+1)k-2k^2$

주어진 식의 좌변은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}(\text{좌변})&=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{(3n+1)k-2k^2\}\\&=(3n+1)\sum_{k=1}^{n}k-2\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=(3n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}-2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=\frac{n(n+1)(5n+1)}{6}\\&=\frac{5n^3+6n^2+n}{6}\end{aligned}$$

따라서 $a=6$, $b=1$이므로

$a+b=6+1=7$

22-1 답 ①

수열 $1^2\times(2n-1)$, $2^2\times(2n-3)$, $3^2\times(2n-5)$, $\cdots$, $n^2\times1$의 제k항을 a_k라 하면

$a_k=k^2\{2n-(2k-1)\}=(2n+1)k^2-2k^3$

주어진 식의 좌변은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}(\text{좌변})&=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{(2n+1)k^2-2k^3\}\\&=(2n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k^3\\&=(2n+1)\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2\\&=\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6}\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=1$이므로

$a+b+c=1+1+1=3$

23 답 $\frac{n(n-1)(n+1)}{12}$

수열 $1^2\times\frac{n-1}{n}$, $2^2\times\frac{n-2}{n}$, $3^2\times\frac{n-3}{n}$, $\cdots$, $(n-1)^2\times\frac{1}{n}$의 제k항을 a_k라 하면

$a_k=k^2\times\frac{n-k}{n}=k^2-\frac{k^3}{n}$

주어진 수열의 합은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$(n-1)$항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}a_k&=\sum_{k=1}^{n-1}\left(k^2-\frac{k^3}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}k^2-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k^3\\&=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-\frac{1}{n}\left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2\\&=\frac{2n(n-1)(2n-1)-3n(n-1)^2}{12}\\&=\frac{n(n-1)(n+1)}{12}\end{aligned}$$

23-1 답 7

수열 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$, $\left(1+\frac{2}{n}\right)^2$, $\left(1+\frac{3}{n}\right)^2$, $\cdots$, $\left(1+\frac{n}{n}\right)^2$의 제$k$항을 a_k라 하면

$a_k=\left(1+\frac{k}{n}\right)^2=1+\frac{2k}{n}+\frac{k^2}{n^2}$

주어진 식의 좌변은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}(\text{좌변})&=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}1+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=n+\frac{2}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=\frac{6n(2n+1)+(n+1)(2n+1)}{6n}\\&=\frac{(2n+1)(7n+1)}{6n}\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=7$이므로

$ab=1\times7=7$

24 답 11

수열 $\frac{n+1}{n}$, $\frac{n+2}{n}$, $\frac{n+3}{n}$, $\cdots$, $\frac{2n}{n}$의 제k항을 a_k라 하면

$a_k=\frac{n+k}{n}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n}=\sum_{k=1}^{n}1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\\&=n+\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{3n+1}{2}\end{aligned}$$

즉 $\frac{3n+1}{2}=17$이므로 $3n+1=34$

$3n=33$ $\therefore n=11$

24-1 답 10

주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면

$a_k=\frac{2n+2k}{n}$ ……❶

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2n+2k}{n}=\sum_{k=1}^{n}2+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}k\\&=2n+\frac{2}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}\\&=3n+1\end{aligned}$$ ……❷

즉 $3n+1=31$이므로 $3n=30$

$\therefore n=10$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 수열의 제k항을 구할 수 있다.	30%
❷ 주어진 수열의 합을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❸ 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	20%

25 답 190

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2$이라 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2=1$

(ii) $n\geq2$일 때

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=n^2-(n-1)^2\\&=2n-1\end{aligned}$$ ……㉠

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-1$

따라서 $a_{2k-1}=2(2k-1)-1=4k-3$이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{10}(4k-3)$$
$$=4\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}3$$
$$=4\times\frac{10\times11}{2}-3\times10$$
$$=220-30=190$$

25-1 답 ②

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-4n$이라 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2-4=-3$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n^2-4n-\{(n-1)^2-4(n-1)\}$
$=2n-5$ ……㉠

이때 $a_1=-3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-5$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}ka_k=\sum_{k=1}^{10}k(2k-5)$
$=\sum_{k=1}^{10}(2k^2-5k)$
$=2\sum_{k=1}^{10}k^2-5\sum_{k=1}^{10}k$
$=2\times\frac{10\times11\times21}{6}-5\times\frac{10\times11}{2}$
$=770-275=495$

26 답 30

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k=n(n+1)$이므로

$S_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k=n(n+1)$이라 하면

(i) $n=1$일 때

$1\times a_1=S_1=1\times2=2$이므로 $a_1=2$

(ii) $n\geq2$일 때

$na_n=S_n-S_{n-1}=n(n+1)-(n-1)n=2n$

$\therefore a_n=2$ ……㉠

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2$

$\therefore \sum_{k=1}^{15}a_k=\sum_{k=1}^{15}2=2\times15=30$

26-1 답 524

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k+1}=n^2+2n$이라 하면

(i) $n=1$일 때

$\frac{a_1}{1+1}=S_1=1^2+2=3$이므로 $a_1=6$

(ii) $n\geq2$일 때

$\frac{a_n}{n+1}=S_n-S_{n-1}$
$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$
$=2n+1$

$\therefore a_n=(n+1)(2n+1)$ ……㉠

이때 $a_1=6$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=(n+1)(2n+1)$ ……❶

$\therefore \sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{8}(k+1)(2k+1)$
$=\sum_{k=1}^{8}(2k^2+3k+1)$
$=2\sum_{k=1}^{8}k^2+3\sum_{k=1}^{8}k+\sum_{k=1}^{8}1$
$=2\times\frac{8\times9\times17}{6}+3\times\frac{8\times9}{2}+1\times8$
$=408+108+8=524$ ……❷

채점 기준	비율
❶ 일반항 a_n을 구할 수 있다.	50%
❷ $\sum_{k=1}^{8}a_k$의 값을 구할 수 있다.	50%

27 답 ④

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-3n$이라 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2-3=-2$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n^2-3n-\{(n-1)^2-3(n-1)\}$
$=2n-4$ ……㉠

이때 $a_1=-2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-4$

$\therefore \sum_{k=1}^{5}k^2a_{2k}=\sum_{k=1}^{5}k^2(4k-4)$
$=\sum_{k=1}^{5}(4k^3-4k^2)$
$=4\left(\sum_{k=1}^{5}k^3-\sum_{k=1}^{5}k^2\right)$
$=4\left\{\left(\frac{5\times6}{2}\right)^2-\frac{5\times6\times11}{6}\right\}$
$=4(225-55)=680$

27-1 답 480

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=n(n+3)$이라 하면

(i) $n=1$일 때

$\frac{a_1}{1}=S_1=1\times4=4$이므로 $a_1=4$

(ii) $n\geq2$일 때

$\frac{a_n}{n}=S_n-S_{n-1}$
$=n(n+3)-(n-1)(n+2)$
$=n^2+3n-(n^2+n-2)$
$=2(n+1)$

$\therefore a_n=2n(n+1)$ ……㉠

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n(n+1)$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{a_{2k+1}}{k+1}=\sum_{k=1}^{10}\frac{2(2k+1)(2k+2)}{k+1}$
$=\sum_{k=1}^{10}(8k+4)$
$=8\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}4$
$=8\times\frac{10\times11}{2}+4\times10$
$=440+40=480$

28 답 210

수열 $\frac{1}{2^2-1}, \frac{1}{4^2-1}, \frac{1}{6^2-1}, \cdots, \frac{1}{20^2-1}$의 제$k$ 항을 a_k라 하면

$$a_k=\frac{1}{(2k)^2-1}=\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

즉 주어진 수열의 합은

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)$$
$$=\frac{10}{21}$$

따라서 $p=21$, $q=10$이므로

$pq=21\times10=210$

28-1 답 151

주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면

$$a_k=\frac{1}{(k+1)^2-1}=\frac{1}{k(k+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{14}a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{14}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\right)+\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{16}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right)$$
$$=\frac{329}{480}$$

따라서 $p=480$, $q=329$이므로

$p-q=480-329=151$

29 답 $\frac{5}{11}$

$a_n=4+(n-1)\times4=4n$이므로 ……❶

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}4k=4\times\frac{n(n+1)}{2}=2n(n+1)$ ……❷

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{S_k}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2k(k+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{11}\right)$$
$$=\frac{5}{11}$$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 일반항 a_n을 구할 수 있다.	20%
❷ S_n을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{S_k}$의 값을 구할 수 있다.	50%

29-1 답 43

$a_n=2+(n-1)\times5=5n-3$이므로

$a_{2n-1}=10n-8$, $a_{2n+1}=10n+2$

$$\therefore \sum_{n=1}^{8}\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}=\sum_{n=1}^{8}\frac{1}{(10n-8)(10n+2)}$$
$$=\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{8}\left(\frac{1}{10n-8}-\frac{1}{10n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{10}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{22}\right)+\left(\frac{1}{22}-\frac{1}{32}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{72}-\frac{1}{82}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{82}\right)=\frac{2}{41}$$

따라서 $p=41$, $q=2$이므로

$p+q=41+2=43$

30 답 $\frac{10}{41}$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2-1=1$

(ii) $n\geq2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=2n^2-n-\{2(n-1)^2-(n-1)\}$$
$$=4n-3$$ ……㉠

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4n-3$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{37}-\frac{1}{41}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{41}\right)=\frac{10}{41}$$

30-1 답 $\frac{99}{100}$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{3}n(n^2-1)$이라 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=0$

(ii) $n\geq2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=\frac{1}{3}n(n^2-1)-\frac{1}{3}(n-1)\{(n-1)^2-1\}$$
$$=n(n-1)$$ ……㉠

이때 $a_1=0$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=n(n-1)$

$$\therefore \sum_{k=2}^{100}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=2}^{100}\frac{1}{k(k-1)}$$
$$=\sum_{k=2}^{100}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$
$$=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$$

31 답 3

주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면

$$a_k=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$
$$=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{15}a_k=\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$$
$$=\sqrt{16}-1=3$$

31-1 답 399

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$
$$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots$$
$$+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\sqrt{n+1}-1$$

즉 $\sqrt{n+1}-1=19$이므로 $\sqrt{n+1}=20$

$n+1=400$ $\therefore n=399$

32 답 (1) $a_n=3n-2$ (2) 8

(1) 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1+a_4=11$에서 $a_1+(a_1+3d)=11$이므로

$2a_1+3d=11$ ……㉠

$a_4+a_7=29$에서 $(a_1+3d)+(a_1+6d)=29$이므로

$2a_1+9d=29$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1=1$, $d=3$

$\therefore a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$ ……❶

(2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{3k-2}+\sqrt{3k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{3k-2}-\sqrt{3k+1}}{(\sqrt{3k-2}+\sqrt{3k+1})(\sqrt{3k-2}-\sqrt{3k+1})}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{3k+1}-\sqrt{3k-2})$$
$$=\frac{1}{3}\{(\sqrt{4}-1)+(\sqrt{7}-\sqrt{4})+(\sqrt{10}-\sqrt{7})+\cdots$$
$$+(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2})\}$$
$$=\frac{1}{3}(\sqrt{3n+1}-1)$$ ……❷

즉 $\frac{1}{3}(\sqrt{3n+1}-1)=\frac{4}{3}$이므로 $\sqrt{3n+1}-1=4$

$\sqrt{3n+1}=5$, $3n+1=25$

$3n=24$ $\therefore n=8$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 일반항 a_n을 구할 수 있다.	30%
❷ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$을 간단히 할 수 있다.	50%
❸ n의 값을 구할 수 있다.	20%

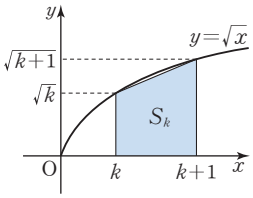
32-1 답 2

$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$이므로

$$\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{23})\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{25}-1)=2$$

33 답 20

오른쪽 그림과 같이 네 점 $(k, 0)$, $(k+1, 0)$, $(k, \sqrt{k})$, $(k+1, \sqrt{k+1})$을 꼭짓점으로 하는 사각형은 윗변의 길이가 $\sqrt{k}$, 아랫변의 길이가 $\sqrt{k+1}$, 높이가 1인 사다리꼴이므로



$$S_k=\frac{1}{2}(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\times1$$
$$=\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{2}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{120}\frac{1}{S_k}=\sum_{k=1}^{120}\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$
$$=2\sum_{k=1}^{120}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$
$$=2\sum_{k=1}^{120}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=2\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots$$
$$+(\sqrt{121}-\sqrt{120})\}$$
$$=2(\sqrt{121}-1)=20$$

33-1 답 5

두 점 A_k, B_k의 좌표는 $A_k(k, \sqrt{2k})$, $B_k(k, -\sqrt{2k+2})$이므로

$\overline{A_kB_k}=\sqrt{2k}+\sqrt{2k+2}$

$$\therefore \sum_{k=2}^{71}\frac{1}{\overline{A_kB_k}}=\sum_{k=2}^{71}\frac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k+2}}$$
$$=\sum_{k=2}^{71}\frac{\sqrt{2k}-\sqrt{2k+2}}{(\sqrt{2k}+\sqrt{2k+2})(\sqrt{2k}-\sqrt{2k+2})}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{71}(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{6}-\sqrt{4})+(\sqrt{8}-\sqrt{6})+(\sqrt{10}-\sqrt{8})+\cdots$$
$$+(\sqrt{144}-\sqrt{142})\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{144}-\sqrt{4})=5$$

34 답 ③

$$a_n=\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=\log\frac{n^2-1}{n^2}$$
$$=\log\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$
$$=\log\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\therefore \sum_{k=2}^{99} a_k=\sum_{k=2}^{99} \log\left(\frac{k-1}{k}\times\frac{k+1}{k}\right)$$
$$=\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)+\log\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)+\cdots$$
$$+\log\left(\frac{98}{99}\times\frac{100}{99}\right)$$
$$=\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{98}{99}\times\frac{100}{99}\right)$$
$$=\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{100}{99}\right)$$
$$=2-\log 198$$

34-1 답 ①

$$\sum_{k=1}^{n}\log_4\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\log_4\frac{k+1}{k}$$
$$=\log_4\frac{2}{1}+\log_4\frac{3}{2}+\log_4\frac{4}{3}+\cdots+\log_4\frac{n+1}{n}$$
$$=\log_4\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)$$
$$=\log_4(n+1)$$

즉 $\log_4(n+1)=3$이므로 $n+1=4^3=64$

$\therefore n=63$

35 답 ⑤

$a_n=\log n-\log(n+1)=\log\frac{n}{n+1}$이므로

$$\sum_{k=10}^{n} a_k=\sum_{k=10}^{n}\log\frac{k}{k+1}$$
$$=\log\frac{10}{11}+\log\frac{11}{12}+\log\frac{12}{13}+\cdots+\log\frac{n}{n+1}$$
$$=\log\left(\frac{10}{11}\times\frac{11}{12}\times\frac{12}{13}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}\right)$$
$$=\log\frac{10}{n+1}$$

즉 $\log\frac{10}{n+1}=\log\frac{5}{12}$이므로 $\frac{10}{n+1}=\frac{5}{12}$

$n+1=24 \quad \therefore n=23$

35-1 답 80

$\log_3\sqrt{\frac{k+1}{k}}=\frac{1}{2}\log_3\frac{k+1}{k}$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\log_3\sqrt{\frac{k+1}{k}}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\log_3\frac{k+1}{k}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\log_3\frac{2}{1}+\log_3\frac{3}{2}+\log_3\frac{4}{3}+\cdots+\log_3\frac{n+1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\log_3\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\log_3(n+1)$$

즉 $\frac{1}{2}\log_3(n+1)=2$이므로 $\log_3(n+1)=4$

$n+1=3^4=81 \quad \therefore n=80$

36 답 21

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\log\frac{(n+1)(n+2)}{2}$라 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=\log\frac{2\times3}{2}=\log 3$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$$=\log\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\log\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\log\frac{n+2}{n} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=\log 3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=\log\frac{n+2}{n}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_{2k}=\sum_{k=1}^{20}\log\frac{2k+2}{2k}=\sum_{k=1}^{20}\log\frac{k+1}{k}$$
$$=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots+\log\frac{21}{20}$$
$$=\log\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{21}{20}\right)$$
$$=\log 21$$

따라서 $p=\log 21$이므로

$10^p=10^{\log 21}=21$

36-1 답 ②

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\log\frac{2}{(n+1)(n+2)}$라 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=\log\frac{2}{2\times3}=\log\frac{1}{3}$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$$=\log\frac{2}{(n+1)(n+2)}-\log\frac{2}{n(n+1)}$$
$$=\log\frac{n}{n+2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=\log\frac{1}{3}$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=\log\frac{n}{n+2}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{90} a_{2k}=\sum_{k=1}^{90}\log\frac{2k}{2k+2}=\sum_{k=1}^{90}\log\frac{k}{k+1}$$
$$=\log\frac{1}{2}+\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}+\cdots+\log\frac{90}{91}$$
$$=\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{90}{91}\right)$$
$$=\log\frac{1}{91}$$
$$=-\log 91$$

유형 완성하기 p. 273

37 답 60

자연수 a에 대하여

(i) $n=3a-2$일 때

$n^2=(3a-2)^2=9a^2-12a+4$
$=3(3a^2-4a+1)+1$

$\therefore f(1)=f(4)=f(7)=\cdots=1$

(ii) $n=3a-1$일 때

$n^2=(3a-1)^2=9a^2-6a+1$
$=3(3a^2-2a)+1$

$\therefore f(2)=f(5)=f(8)=\cdots=1$

(iii) $n=3a$일 때

$n^2=(3a)^2=9a^2=3\times 3a^2$

$\therefore f(3)=f(6)=f(9)=\cdots=0$

(i)~(iii)에서

$\sum_{k=1}^{90} f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(90)$

$=30\{f(1)+f(2)+f(3)\}$

$=30(1+1+0)=60$

38 답 86

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 중 1이 a개, 2가 b개 있다고 하면

$\sum_{k=1}^{n} a_k=1\times a+2\times b=16$

$\therefore a+2b=16$ ……㉠

$\sum_{k=1}^{n} a_k^2=1^2\times a+2^2\times b=26$

$\therefore a+4b=26$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=5$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} a_k^4=1^4\times 6+2^4\times 5=6+80=86$

39 답 $9\times 2^{10}+1$

$a_nb_n=n\times 2^{n-1}$이므로 $S=\sum_{k=1}^{10} a_kb_k$라 하면

$S=1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+10\times 2^9$ ……㉠

㉠의 양변에 2를 곱하면

$2S=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+9\times 2^9+10\times 2^{10}$ ……㉡

㉠−㉡을 하면

$-S=\underbrace{1+2+2^2+\cdots+2^9}_{\text{첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합}}-10\times 2^{10}$

$=\frac{2^{10}-1}{2-1}-10\times 2^{10}$

$=-9\times 2^{10}-1$

$\therefore S=\sum_{k=1}^{10} a_kb_k=9\times 2^{10}+1$

40 답 170

주어진 수열을 다음과 같이 나타내 보자.

$\underbrace{(1)}_{\text{제1군}}, \underbrace{(3, 3)}_{\text{제2군}}, \underbrace{(5, 5, 5)}_{\text{제3군}}, \underbrace{(7, 7, 7, 7)}_{\text{제4군}}, \underbrace{(9, 9, 9, 9, 9)}_{\text{제5군}}, \cdots$

이때 제n군에 있는 각 항의 값은 $2n-1$이므로

$2n-1=25$ $\therefore n=13$

즉 25는 제13군의 항이다.

제n군의 항의 개수는 n이므로 제1군부터 제12군까지의 항의 개수는 $\sum_{k=1}^{12} k=\frac{12\times 13}{2}=78$

따라서 25는 제$\underbrace{79}_{78+1}$항부터 제$\underbrace{91}_{78+13}$항까지 계속되므로

$p=79$, $q=91$

$\therefore p+q=79+91=170$

41 답 $\frac{7}{14}$

주어진 수열을 분모가 같은 항끼리 묶으면 다음과 같다.

$\underbrace{\left(\frac{1}{1}\right)}_{\text{제1군}}, \underbrace{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)}_{\text{제2군}}, \underbrace{\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{3}, \frac{5}{3}\right)}_{\text{제3군}}, \underbrace{\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right)}_{\text{제4군}}, \cdots$

이때 제n군의 항의 개수는 n이므로 제1군부터 제13군까지의 항의 개수는

$\sum_{k=1}^{13} k=\frac{13\times 14}{2}=91$

즉 제95항은 제14군의 4번째 항이다.

제14군은

$\left(\frac{1}{14}, \frac{3}{14}, \frac{5}{14}, \frac{7}{14}, \cdots, \frac{27}{14}\right)$

이므로 제95항은 $\frac{7}{14}$이다.

42 답 119

위에서 1번째 줄의 1번째 칸에 있는 수는 $1=1^2$

위에서 3번째 줄의 1번째 칸에 있는 수는 $9=3^2$

위에서 5번째 줄의 1번째 칸에 있는 수는 $25=5^2$

⋮

위에서 $(2n-1)$번째 줄의 1번째 칸에 있는 수는 $(2n-1)^2$

따라서 위에서 11번째 줄의 1번째 칸에 있는 수는 $11^2=121$이므로

위에서 11번째 줄의 왼쪽에서 3번째 칸에 있는 수는

$121-2=119$

학교 시험 대비 문제

p. 274~277

01 답 100

$\sum_{k=1}^{198} a_{k+2}-\sum_{k=3}^{200} a_{k-1}$

$=(a_3+a_4+a_5+\cdots+a_{200})-(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{199})$

$=a_{200}-a_2=107-7=100$

02 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $\sum_{k=1}^{30} a_k=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{29}+a_{30}$

$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{29})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{30})$

$=\sum_{k=1}^{15} a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{15} a_{2k}$

ㄴ. $\sum_{k=1}^{n} 6^k=6+6^2+6^3+\cdots+6^n$, $\sum_{k=0}^{n} 6^k=1+6+6^2+\cdots+6^n$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} 6^k\neq\sum_{k=0}^{n} 6^k$

ㄷ. $\sum_{i=2}^{21}(i-1)^6=1^6+2^6+3^6+\cdots+20^6=\sum_{k=1}^{20} k^6$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

03 답 ⑤

$\sum_{k=1}^{10}(3a_k-1)^2=\sum_{k=1}^{10}(9a_k^2-6a_k+1)$

$=9\sum_{k=1}^{10} a_k^2-6\sum_{k=1}^{10} a_k+\sum_{k=1}^{10} 1$

$=9\times 7-6\times 4+1\times 10$

$=49$

04 답 ③

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+1)^2=\sum_{k=1}^{10}(4a_k^2+4a_k+1)$$
$$=4\sum_{k=1}^{10}a_k^2+4\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1$$
$$=4\sum_{k=1}^{10}a_k^2+4\times10+1\times10$$
$$=50+4\sum_{k=1}^{10}a_k^2$$

즉 $50+4\sum_{k=1}^{10}a_k^2=170$이므로 $4\sum_{k=1}^{10}a_k^2=120$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k^2=30$

05 답 1023

$$\sum_{k=1}^{6}a_k-\sum_{k=1}^{5}(a_k+1)=a_6+\sum_{k=1}^{5}a_k-\sum_{k=1}^{5}(a_k+1)$$
$$=a_6+\sum_{k=1}^{5}\{a_k-(a_k+1)\}$$
$$=a_6+\sum_{k=1}^{5}(-1)$$
$$=a_6-5$$

즉 $a_6-5=27$이므로 $a_6=32$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_6=a_1r^{6-1}=1\times r^5=r^5=32$ $\quad\therefore r=2$

따라서 $a_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}2^{k-1}=\frac{1\times(2^{10}-1)}{2-1}$$
$$=2^{10}-1=1023$$

06 답 210

$$\sum_{k=1}^{20}k^2+\sum_{k=2}^{20}k^2+\sum_{k=3}^{20}k^2+\cdots+\sum_{k=20}^{20}k^2$$
$$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2)+(2^2+3^2+4^2+\cdots+20^2)$$
$$+(3^2+4^2+5^2+\cdots+20^2)+\cdots+(19^2+20^2)+20^2$$
$$=1^2\times1+2^2\times2+3^2\times3+\cdots+20^2\times20$$
$$=1^3+2^3+3^3+\cdots+20^3$$
$$=\sum_{k=1}^{20}k^3=\left(\frac{20\times21}{2}\right)^2=210^2$$

즉 $210^2=x^2$이므로 $x=210$ ($\because x>0$)

07 답 55

다항식 $3x^2-5x+2$를 일차식 $x-n$으로 나누었을 때의 나머지가 a_n이므로 나머지정리에 의하여

$a_n=3n^2-5n+2$

$$\therefore \sum_{k=1}^{5}(a_k-k^2+2)=\sum_{k=1}^{5}(3k^2-5k+2-k^2+2)$$
$$=\sum_{k=1}^{5}(2k^2-5k+4)$$
$$=2\sum_{k=1}^{5}k^2-5\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}4$$
$$=2\times\frac{5\times6\times11}{6}-5\times\frac{5\times6}{2}+4\times5$$
$$=110-75+20=55$$

Lecture 나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면 $R=f(\alpha)$

08 답 940

$$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{k=1}^{8}\left(2k+\frac{1}{2}j\right)\right\}=\sum_{j=1}^{10}\left(2\sum_{k=1}^{8}k+\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{2}j\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{10}\left(2\times\frac{8\times9}{2}+\frac{1}{2}j\times8\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{10}(72+4j)=\sum_{j=1}^{10}72+4\sum_{j=1}^{10}j$$
$$=72\times10+4\times\frac{10\times11}{2}$$
$$=720+220=940$$

09 답 6

$$\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)=\sum_{m=1}^{n}\frac{m(m+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}(m^2+m)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{n}m^2+\sum_{m=1}^{n}m\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+4)}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

즉 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=56$이므로

$n(n+1)(n+2)=6\times7\times8$

$\therefore n=6$

10 답 ③

수열 $1\times2, 3\times4, 5\times6, \cdots, 19\times20$의 제$k$항을 a_k라 하면

$a_k=(2k-1)\times2k=4k^2-2k$

$\therefore 1\times2+3\times4+5\times6+\cdots+19\times20$
$$=\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(4k^2-2k)=4\sum_{k=1}^{10}k^2-2\sum_{k=1}^{10}k$$
$$=4\times\frac{10\times11\times21}{6}-2\times\frac{10\times11}{2}$$
$$=1540-110$$
$$=1430$$

11 답 ④

$$\sum_{i=1}^{10}i\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i+1}+\frac{1}{i+2}+\cdots+\frac{1}{10}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}\right)+2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{10}\right)$$
$$+3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{10}\right)+\cdots$$
$$+9\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+10\times\frac{1}{10}$$
$$=\frac{1}{1}+\left(\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{1}{10}+\cdots+10\times\frac{1}{10}\right)$$
$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}(1+2)+\frac{1}{3}(1+2+3)+\cdots$$
$$+\frac{1}{10}(1+2+3+\cdots+10)$$
$$=\frac{1}{1}+\frac{1+2}{2}+\frac{1+2+3}{3}+\cdots+\frac{1+2+3+\cdots+10}{10}$$

이때 수열 $\frac{1}{1}, \frac{1+2}{2}, \frac{1+2+3}{3}, \cdots, \frac{1+2+3+\cdots+10}{10}$의 제

k항을 a_k라 하면

$$a_k=\frac{1+2+3+\cdots+k}{k}=\frac{\frac{k(k+1)}{2}}{k}=\frac{k+1}{2}$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}\frac{k+1}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\times11}{2}+10\right)=\frac{65}{2}$$

12 답 7

수열 $1\times(2n-1), 2\times(2n-3), 3\times(2n-5), \cdots, n\times1$의 제$k$항을 a_k라 하면

$a_k=k\{2n-(2k-1)\}=(2n+1)k-2k^2$

주어진 수열의 합은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{(2n+1)k-2k^2\}$$
$$=(2n+1)\sum_{k=1}^{n}k-2\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=(2n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}-2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

즉 $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=140$이므로

$n(n+1)(2n+1)=7\times8\times15$

$\therefore n=7$

13 답 ③

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+n$이라 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2+1=2$

(ii) $n\geq2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=n^2+n-\{(n-1)^2+(n-1)\}$$
$$=2n \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n$

즉 $a_{2k-1}=2(2k-1)=4k-2$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}(4k-2)=4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}2$$
$$=4\times\frac{n(n+1)}{2}-2n=2n^2$$

따라서 $2n^2=200$이므로 $n^2=100$

$\therefore n=10$ ($\because n$은 자연수)

14 답 ⑤

$a_n={}_{n+1}C_{n-1}={}_{n+1}C_2=\frac{n(n+1)}{2}$ ($\because {}_{n+1}C_{n-1}={}_{n+1}C_{n+1-(n-1)}={}_{n+1}C_2$)이므로

$$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{15}\frac{8}{a_k}=16\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=16\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right)\right\}$$
$$=16\left(1-\frac{1}{16}\right)=15$$

15 답 ③

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$이므로

$$\frac{2k+1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}=\frac{2k+1}{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}=\frac{6}{k(k+1)}$$
$$=6\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}$$
$$=6\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=6\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=6\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{6n}{n+1}$$

즉 $\frac{6n}{n+1}=\frac{180}{31}$이므로 $\frac{n}{n+1}=\frac{30}{31}$

$31n=30n+30$ $\therefore n=30$

16 답 $-\frac{20}{21}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=\frac{1}{n}$, $\alpha_n\beta_n=\frac{-n(n+1)}{n}=-n-1$이므로

$$\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\frac{\frac{1}{n}}{-n-1}=-\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{21}-\frac{1}{20}\right)$$
$$=\frac{1}{21}-1=-\frac{20}{21}$$

17 답 3

$a_n=25+(n-1)\times4=4n+21$이므로

$$\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\frac{1}{\sqrt{4k+21}+\sqrt{4k+25}}$$
$$=\frac{\sqrt{4k+21}-\sqrt{4k+25}}{(\sqrt{4k+21}+\sqrt{4k+25})(\sqrt{4k+21}-\sqrt{4k+25})}$$
$$=\frac{\sqrt{4k+25}-\sqrt{4k+21}}{4}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{66}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{66}(\sqrt{4k+25}-\sqrt{4k+21})$$
$$=\frac{1}{4}\{(\sqrt{29}-\sqrt{25})+(\sqrt{33}-\sqrt{29})+(\sqrt{37}-\sqrt{33})+\cdots+(\sqrt{289}-\sqrt{285})\}$$
$$=\frac{1}{4}(\sqrt{289}-\sqrt{25})$$
$$=\frac{1}{4}(17-5)=3$$

18 답 60

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$$

$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots$$

$$+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$$

즉 $\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)=5$이므로 $\sqrt{2n+1}=11$

$2n+1=121,\ 2n=120 \quad \therefore n=60$

19 답 15

$a_{2n-1}a_{2n}=2^n\times5^n=10^n$ ……㉠

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\log a_k=\log a_1+\log a_2+\log a_3+\log a_4+\cdots+\log a_{10}$$

$$=(\log a_1+\log a_2)+(\log a_3+\log a_4)+\cdots$$

$$+(\log a_9+\log a_{10})$$

$$=\log a_1a_2+\log a_3a_4+\cdots+\log a_9a_{10}$$

$$=\log 10+\log 10^2+\cdots+\log 10^5\ (\because ㉠)$$

$$=1+2+3+4+5=15$$

다른 풀이

$a_{2n-1}=2^n,\ a_{2n}=5^n$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\log a_k=\sum_{k=1}^{5}(\log a_{2k-1}+\log a_{2k})$$

$$=\sum_{k=1}^{5}\log a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5}\log a_{2k}$$

$$=\sum_{k=1}^{5}\log 2^k+\sum_{k=1}^{5}\log 5^k$$

$$=\sum_{k=1}^{5}k\log 2+\sum_{k=1}^{5}k\log 5$$

$$=\log 2\sum_{k=1}^{5}k+\log 5\sum_{k=1}^{5}k$$

$$=(\underbrace{\log 2+\log 5}_{\log 2+\log 5=\log(2\times5)=\log 10=1})\sum_{k=1}^{5}k$$

$$=\frac{5\times6}{2}=15$$

20 답 12

(i) $n=2$일 때

-1의 제곱근 중 실수인 것의 개수는 $f(2)=0$

(ii) $n=3$일 때

0의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 $f(3)=1$

(iii) $n\geq4$인 짝수일 때

$n-3>0$이므로 $(n-3)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 $f(n)=2$

(iv) $n\geq4$인 홀수일 때

$n-3>0$이므로 $(n-3)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 $f(n)=1$

(i)~(iv)에서

$$\sum_{n=2}^{10}f(n)=f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(9)+f(10)$$

$$=0+1+2\times4+1\times3=12$$

21 답 ③

각 줄을 군으로 묶으면 다음과 같다.

$\underbrace{(1)}_{\text{제1군}},\ \underbrace{(2,3,4)}_{\text{제2군}},\ \underbrace{(5,6,7,8,9)}_{\text{제3군}},\cdots$

이때 제n군의 항의 개수는 $2n-1$이므로 제1군부터 제9군까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{9}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{9}k-\sum_{k=1}^{9}1=2\times\frac{9\times10}{2}-9=81$$

따라서 위에서 10번째 줄의 왼쪽에서 5번째에 있는 수는 제10군의 5번째 항이므로

$81+5=86$

서술형 1 답 1086

주어진 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표를 구하면

$\log_3(2x+1)=\log_3(x+3^n)$에서 $2x+1=x+3^n$

$\therefore x=3^n-1$, 즉 $a_n=3^n-1$ ……❶

$$\therefore \sum_{k=1}^{6}a_k=\sum_{k=1}^{6}(3^k-1)$$

$$=\sum_{k=1}^{6}3^k-\sum_{k=1}^{6}1$$

$$=\frac{3(3^6-1)}{3-1}-1\times6$$

$$=\frac{3^7-3}{2}-6$$

$$=1092-6$$

$$=1086$$ ……❷

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40%
❷ $\sum_{k=1}^{6}a_k$의 값을 구할 수 있다.	60%

서술형 2 답 11

$$f(a)=\sum_{k=1}^{10}(2k-a)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{10}(4k^2-4ak+a^2)$$

$$=4\sum_{k=1}^{10}k^2-4a\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}a^2$$

$$=4\times\frac{10\times11\times21}{6}-4a\times\frac{10\times11}{2}+a^2\times10$$

$$=10a^2-220a+1540$$ ……❶

$$=10(a-11)^2+330$$ ……❷

따라서 $f(a)$의 값은 $a=11$일 때 최소가 된다. ……❸

채점 기준	비율
❶ $f(a)$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❷ $f(a)$를 완전제곱 꼴로 나타낼 수 있다.	20%
❸ $f(a)$의 값이 최소가 되게 하는 a의 값을 구할 수 있다.	30%

서술형 3 답 $\frac{36}{55}$

$$(g\circ f)(n)=g(f(n))=\frac{1}{f(n)-1}$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2-1}$$

$$=\frac{1}{n(n+2)}$$ ……❶

$$\therefore \sum_{k=1}^{9}(g\circ f)(k)$$
$$=\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k(k+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) \quad \cdots\cdots ❷$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$$
$$=\frac{36}{55} \quad \cdots\cdots ❸$$

채점 기준	비율
❶ $(g\circ f)(n)$을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❷ 부분분수로 변형할 수 있다.	30%
❸ $\sum_{k=1}^{9}(g\circ f)(k)$의 값을 구할 수 있다.	50%

1등급 10% 핵심 기출 문제

p. 278~279

01 답 ⑤

$f(x)=\log_{\sqrt{2}}x$의 역함수는 $g(x)=(\sqrt{2})^x$

ㄱ. $g(6)=(\sqrt{2})^6=\{(\sqrt{2})^2\}^3=2^3=8$

ㄴ. $f(2)=\log_{\sqrt{2}}2=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^2=2$

$f(4)=\log_{\sqrt{2}}4=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^4=4$

$f(8)=\log_{\sqrt{2}}8=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^6=6$

즉 $f(2), f(4), f(8)$은 이 순서대로 공차가 2인 등차수열을 이룬다.

ㄷ. $\sum_{k=1}^{n}f(2^k)=\sum_{k=1}^{n}\log_{\sqrt{2}}2^k=\sum_{k=1}^{n}\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^{2k}$

$$=\sum_{k=1}^{n}2k=2\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=2\times\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=n(n+1)$$

즉 $n(n+1)=110=10\times11$이므로 $n=10$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}g(2k)=\sum_{k=1}^{10}(\sqrt{2})^{2k}=\sum_{k=1}^{10}2^k$$
$$=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2046$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

02 답 ②

$\sum_{n=1}^{10}(2a_n-b_n)=7$, $\sum_{n=1}^{10}(a_n+b_n)=5$이므로

$\sum_{n=1}^{10}(2a_n-b_n)+\sum_{n=1}^{10}(a_n+b_n)=7+5$

$\sum_{n=1}^{10}\{(2a_n-b_n)+(a_n+b_n)\}=12$

$\sum_{n=1}^{10}3a_n=12$, $3\sum_{n=1}^{10}a_n=12$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_n=4 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\sum_{n=1}^{10}(a_n+b_n)=5$에서 $\sum_{n=1}^{10}a_n+\sum_{n=1}^{10}b_n=5 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면 $4+\sum_{n=1}^{10}b_n=5$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}b_n=1$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}(a_n-2b_n)=\sum_{n=1}^{10}a_n-2\sum_{n=1}^{10}b_n$
$=4-2\times1=2$

다른 풀이

$\sum_{n=1}^{10}(2a_n-b_n)=7$, $\sum_{n=1}^{10}(a_n+b_n)=5$이므로

$\sum_{n=1}^{10}(a_n-2b_n)=\sum_{n=1}^{10}\{(2a_n-b_n)-(a_n+b_n)\}$
$=\sum_{n=1}^{10}(2a_n-b_n)-\sum_{n=1}^{10}(a_n+b_n)$
$=7-5=2$

03 답 ③

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\sqrt{n}x$가 만나는 점의 x좌표를 구하면

$x^2=\sqrt{n}x$에서 $x^2-\sqrt{n}x=0$

$x(x-\sqrt{n})=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=\sqrt{n}$

즉 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\sqrt{n}x$가 만나는 서로 다른 두 점의 좌표는 $(0,0), (\sqrt{n}, n)$이므로

$\{f(n)\}^2=(\sqrt{n}-0)^2+(n-0)^2$
$=n+n^2$
$=n(n+1)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{\{f(n)\}^2}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$$
$$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$$

04 답 105

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$이므로

$\sum_{k=1}^{n}b_k=2\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{k=1}^{n}2k$ $\therefore b_k=2k \quad \cdots\cdots ㉠$

$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-5\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(a_k-5)b_k=\frac{n^2(n+1)^2}{2}$이고

$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$이므로

$\sum_{k=1}^{n}(a_k-5)b_k=2\sum_{k=1}^{n}k^3=\sum_{k=1}^{n}2k^3$

$\therefore (a_k-5)b_k=2k^3 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면 $(a_k-5)\times2k=2k^3$

$a_k-5=k^2$ $\therefore a_k=k^2+5$

$\therefore a_{10}=10^2+5=105$

다른 풀이

(가)에서 $S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=n^2+n$이라 하면

(i) $n=1$일 때, $b_1=S_1=1^2+1=2$

(ii) $n\geq 2$일 때

$b_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+n-\{(n-1)^2+(n-1)\}$

$=2n$ ……㉠

이때 $b_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$b_n=2n$ ……㉡

(나)에서 $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-5\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(a_k-5)b_k$이므로

$S'_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-5)b_k=\frac{n^2(n+1)^2}{2}$이라 하면

(iii) $n=1$일 때, $(a_1-5)b_1=S'_1=\frac{1^2\times 2^2}{2}=2$

(iv) $n\geq 2$일 때

$(a_n-5)b_n=S'_n-S'_{n-1}$

$=\frac{n^2(n+1)^2}{2}-\frac{(n-1)^2n^2}{2}$

$=2n^3$ ……㉢

이때 $(a_1-5)b_1=2$는 ㉢에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$(a_n-5)b_n=2n^3$ ……㉣

㉡을 ㉣에 대입하면 $(a_n-5)\times 2n=2n^3$

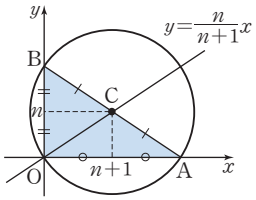
$a_n-5=n^2$ $\therefore a_n=n^2+5$

$\therefore a_{10}=10^2+5=105$

05 답 ①

$\angle BOA=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{AB}$는 원의 지름이다.

원의 중심을 C라 하면 점 C는 $\overline{AB}$의 중점이고 $\overline{OB}=2n$이므로 점 C의 y좌표는 n이다. 점 C는 직선 $y=\frac{n}{n+1}x$ 위의 점이므로 점 C의 좌표는 $(n+1, n)$



즉 $\overline{OA}=2(n+1)$, $\overline{OB}=2n$이므로 $\triangle OAB$의 넓이 S_n은

$S_n=\frac{1}{2}\times 2n\times 2(n+1)=2n(n+1)$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2n(n+1)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{5}{11}$

06 답 ③

ㄱ. $P_1(0, 0)$, $P_2(x_2, x_2^2)$이고 직선 P_1P_2의 기울기가 a_1이므로

$a_1=\frac{x_2^2-0}{x_2-0}=x_2=3$

ㄴ. 직선 P_nP_{n+1}의 기울기 a_n은

$a_n=\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{x_{n+1}-x_n}=\frac{(x_{n+1}+x_n)(x_{n+1}-x_n)}{x_{n+1}-x_n}=x_{n+1}+x_n$

(가), (나)에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고 공차가 $d(d>3)$인 등차수열이므로

$a_n=x_{n+1}+x_n=3+(n-1)d$ ……㉠

㉠에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하면

$x_2=3$, $x_3=d$, $x_4=3+d$, $x_5=2d$, $x_6=3+2d$, $x_7=3d$, $\cdots$

즉 $x_{2n}=3+(n-1)d$, $x_{2n-1}=(n-1)d$이므로

$x_{20}=3+9d$, $x_{19}=9d$

$\therefore x_{20}=x_{19}+3$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10}(x_{2k+1}-x_{2k})$

$=(x_3-x_2)+(x_5-x_4)+(x_7-x_6)+\cdots+(x_{21}-x_{20})$

$=(d-3)+(d-3)+(d-3)+\cdots+(d-3)$

$=10(d-3)$

$10(d-3)\leq 100$이므로 $d-3\leq 10$ $\therefore d\leq 13$

즉 d의 최댓값은 13이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

07 답 ③

곡선 $y=4^x$ 위의 점 P의 좌표를 $(a_n, 4^{a_n})$이라 하면 $\triangle OAP$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt[3]{2}\times 4^{a_n}=2^{-1}\times 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{2a_n}=2^{2a_n-\frac{2}{3}}$

이때 $\triangle OAP=4^n$이므로 $2^{2a_n-\frac{2}{3}}=4^n=2^{2n}$

$2a_n-\frac{2}{3}=2n$ $\therefore a_n=n+\frac{1}{3}$

$\therefore \sum_{k=1}^{9}a_k=\sum_{k=1}^{9}\left(k+\frac{1}{3}\right)=\sum_{k=1}^{9}k+\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{3}$

$=\frac{9\times 10}{2}+\frac{1}{3}\times 9=48$

08 답 ⑤

$a_n=\sqrt[n+1]{\sqrt[n+2]{4}}=(2^{\frac{2}{n+2}})^{\frac{1}{n+1}}=2^{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}$이므로

$\log_2 a_k=\log_2 2^{\frac{2}{(k+1)(k+2)}}=\frac{2}{(k+1)(k+2)}$

$=2\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}\log_2 a_k=2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=2\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)\right\}$

$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)=\frac{5}{6}$

09 답 24

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{26}=30$에서 $a_1+25d=30$ $\therefore a_1=30-25d$ ……㉠

$\sum_{n=1}^{13}\{(a_{2n})^2-(a_{2n-1})^2\}=\sum_{n=1}^{13}(a_{2n}-a_{2n-1})(a_{2n}+a_{2n-1})$

(공차가 d이므로 $a_{2n}-a_{2n-1}=d$)

$=\sum_{n=1}^{13}d(a_{2n}+a_{2n-1})$

$=d\{(a_2+a_1)+(a_4+a_3)+(a_6+a_5)+\cdots+(a_{26}+a_{25})\}$

$=d(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{26})$

(첫째항이 a_1, 끝항이 a_{26}, 항수가 26인 등차수열의 합)

$=d\times\frac{26(a_1+a_{26})}{2}$

$=13d(a_1+30)$

즉 $13d(a_1+30)=260$이므로

$d(a_1+30)=20$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $d(30-25d+30)=20$

$25d^2-60d+20=0$, $5d^2-12d+4=0$

$(5d-2)(d-2)=0$

$\therefore d=\frac{2}{5}$ 또는 $d=2$

(i) $d=\frac{2}{5}$일 때

㉠에서 $a_1=30-25\times\frac{2}{5}=20$이므로 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이다.

(ii) $d=2$일 때

㉠에서 $a_1=30-25\times2=-20$이므로 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수인 것에 모순이다.

(i), (ii)에서 $a_1=20$, $d=\frac{2}{5}$이므로

$a_{11}=20+10\times\frac{2}{5}=24$

10 답 ②

(i) $m=1$일 때

$f(1)=\log_2 1=0$

(ii) $m=2^{n-1}(n\geq2)$일 때

$f(2^{n-1})=\log_4 2^{n-1}=\frac{n-1}{2}$

(i), (ii)에서 $f(1)=0$, $f(2^{n-1})=\frac{n-1}{2}$은 모두 유리수이므로 일반항 a_n은

$a_1=0$, $a_n=\frac{n-1}{2}(n\geq2)$

이때 $a_1=0$은 $a_n=\frac{n-1}{2}$에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=\frac{n-1}{2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}=\frac{1}{2}\times\frac{n(n-1)}{2}$

$=\frac{n(n-1)}{4}$

$\sum_{k=1}^{n}a_k>50$이므로 $\frac{n(n-1)}{4}>50$

$\therefore n(n-1)>200$ ……㉢

$n=14$일 때, $n(n-1)=14\times13=182$

$n=15$일 때, $n(n-1)=15\times14=210$

따라서 $n\geq15$일 때 부등식 ㉢이 성립하므로 자연수 n의 최솟값은 15이다.

참고 (1) m이 3 이상인 홀수일 때, $f(m)$의 값은 유리수가 아니다.

(2) $m=2$일 때, $f(2)=\log_4 2=\frac{1}{2}$

$m=4=2^2$일 때, $f(4)=\log_4 4=1$

$m=6$일 때, $f(6)=\log_4 6$

$m=8=2^3$일 때, $f(8)=\log_4 8=\frac{3}{2}$

$m=10$일 때, $f(10)=\log_4 10$

⋮

따라서 m이 2의 거듭제곱일 때, $f(m)$의 값은 유리수이다.

11 수학적 귀납법

개념 완성하기 p. 283~284

01 답 45

$a_{n+1}=3a_n+n$에서

$a_2=3a_1+1=3\times1+1=4$

$a_3=3a_2+2=3\times4+2=14$

$\therefore a_4=3a_3+3=3\times14+3=45$

02 답 $\frac{41}{6}$

$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n}$에서

$a_2=a_1+\frac{1}{1}=5+1=6$

$a_3=a_2+\frac{1}{2}=6+\frac{1}{2}=\frac{13}{2}$

$\therefore a_4=a_3+\frac{1}{3}=\frac{13}{2}+\frac{1}{3}=\frac{41}{6}$

03 답 -27

$a_{n+1}=2a_n-n$에서

$a_2=2a_1-1=2\times(-2)-1=-5$

$a_3=2a_2-2=2\times(-5)-2=-12$

$\therefore a_4=2a_3-3=2\times(-12)-3=-27$

04 답 6

$a_{n+1}=na_n$에서

$a_2=1\times a_1=1\times1=1$

$a_3=2\times a_2=2\times1=2$

$\therefore a_4=3\times a_3=3\times2=6$

05 답 57

$a_{n+1}=n^2a_n+n$에서

$a_2=1^2a_1+1=1\times0+1=1$

$a_3=2^2a_2+2=4\times1+2=6$

$\therefore a_4=3^2a_3+3=9\times6+3=57$

06 답 5

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서

$a_3=a_2+a_1=2+1=3$

$\therefore a_4=a_3+a_2=3+2=5$

07 답 -9

$a_{n+2}=a_{n+1}a_n$에서

$a_3=a_2a_1=3\times(-1)=-3$

$\therefore a_4=a_3a_2=-3\times3=-9$

08 답 $a_1=2,\ a_{n+1}-a_n=3\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

첫째항 a_1은 $a_1=2$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2-a_1=5-2=3$

$a_3-a_2=8-5=3$

$a_4-a_3=11-8=3$

⋮

$\therefore a_{n+1}-a_n=3$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=2,\ a_{n+1}-a_n=3\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

09 답 $a_1=-9,\ a_{n+1}-a_n=4\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

첫째항 a_1은 $a_1=-9$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2-a_1=-5-(-9)=4$

$a_3-a_2=-1-(-5)=4$

$a_4-a_3=3-(-1)=4$

⋮

$\therefore a_{n+1}-a_n=4$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=-9,\ a_{n+1}-a_n=4\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

10 답 $a_1=6,\ a_{n+1}-a_n=-5\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

첫째항 a_1은 $a_1=6$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2-a_1=1-6=-5$

$a_3-a_2=-4-1=-5$

$a_4-a_3=-9-(-4)=-5$

⋮

$\therefore a_{n+1}-a_n=-5$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=6,\ a_{n+1}-a_n=-5\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

11 답 $a_1=17,\ a_{n+1}-a_n=-2\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

첫째항 a_1은 $a_1=17$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2-a_1=15-17=-2$

$a_3-a_2=13-15=-2$

$a_4-a_3=11-13=-2$

⋮

$\therefore a_{n+1}-a_n=-2$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=17,\ a_{n+1}-a_n=-2\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

12 답 $a_n=3n-1$

$a_{n+1}-a_n=3$에서 주어진 수열은 공차가 3인 등차수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=2$이므로

$a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$

13 답 $a_n=-2n+5$

$a_{n+1}=a_n-2$에서 주어진 수열은 공차가 -2인 등차수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=3$이므로

$a_n=3+(n-1)\times(-2)=-2n+5$

14 답 $a_n=-4n+9$

$a_{n+1}=a_n-4$에서 주어진 수열은 공차가 -4인 등차수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=5$이므로

$a_n=5+(n-1)\times(-4)=-4n+9$

15 답 $a_n=4n-2$

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 주어진 수열은 등차수열이고, 공차는

$a_2-a_1=6-2=4$

이때 첫째항이 $a_1=2$이므로

$a_n=2+(n-1)\times 4=4n-2$

16 답 $a_n=-3n+7$

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 주어진 수열은 등차수열이고, 공차는

$a_1=4,\ a_2-a_1=1-4=-3$

이때 첫째항이 $a_1=4$이므로

$a_n=4+(n-1)\times(-3)=-3n+7$

17 답 $a_n=2n$

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 주어진 수열은 등차수열이고, 공차는

$a_1=2,\ a_2-a_1=4-2=2$

이때 첫째항이 $a_1=2$이므로

$a_n=2+(n-1)\times 2=2n$

18 답 $a_n=-5n+8$

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$에서 주어진 수열은 등차수열이고, 공차는

$a_2-a_1=-2-3=-5$

이때 첫째항이 $a_1=3$이므로

$a_n=3+(n-1)\times(-5)=-5n+8$

19 답 $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

첫째항 a_1은 $a_1=1$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2\div a_1=3\div 1=3$

$a_3\div a_2=9\div 3=3$

$a_4\div a_3=27\div 9=3$

$\vdots$

$\therefore\ a_{n+1}\div a_n=3$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

20 답 $a_1=1000,\ a_{n+1}=\frac{1}{10}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

첫째항 a_1은 $a_1=1000$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2\div a_1=100\div 1000=\frac{1}{10}$

$a_3\div a_2=10\div 100=\frac{1}{10}$

$a_4\div a_3=1\div 10=\frac{1}{10}$

$\vdots$

$\therefore\ a_{n+1}\div a_n=\frac{1}{10}$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=1000,\ a_{n+1}=\frac{1}{10}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

21 답 $a_1=2,\ a_{n+1}=-2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

첫째항 a_1은 $a_1=2$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2\div a_1=-4\div 2=-2$

$a_3\div a_2=8\div(-4)=-2$

$a_4\div a_3=-16\div 8=-2$

$\vdots$

$\therefore\ a_{n+1}\div a_n=-2$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=2,\ a_{n+1}=-2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

22 답 $a_1=16,\ a_{n+1}=-\frac{1}{4}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

첫째항 a_1은 $a_1=16$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2\div a_1=-4\div 16=-\frac{1}{4}$

$a_3\div a_2=1\div(-4)=-\frac{1}{4}$

$a_4\div a_3=-\frac{1}{4}\div 1=-\frac{1}{4}$

$\vdots$

$\therefore\ a_{n+1}\div a_n=-\frac{1}{4}$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=16,\ a_{n+1}=-\frac{1}{4}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

23 답 $a_n=3^{n-1}$

$a_{n+1}\div a_n=3$에서 주어진 수열은 공비가 3인 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=1$이므로

$a_n=1\times 3^{n-1}=3^{n-1}$

24 답 $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$

$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$에서 주어진 수열은 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=3$이므로

$a_n=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$

25 답 $a_n=(\sqrt{3})^{n-1}$

$a_{n+1}=\sqrt{3}a_n$에서 주어진 수열은 공비가 $\sqrt{3}$인 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=1$이므로

$a_n=1\times(\sqrt{3})^{n-1}=(\sqrt{3})^{n-1}$

26 답 $a_n=6\times(-2)^{n-1}$

$a_{n+1}=-2a_n$에서 주어진 수열은 공비가 -2인 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=6$이므로

$a_n=6\times(-2)^{n-1}$

27 답 $a_n=6\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 주어진 수열은 등비수열이고, 공비는

$a_2\div a_1=-3\div 6=-\frac{1}{2}$

이때 첫째항이 $a_1=6$이므로

$a_n=6\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

28 답 $a_n=4^{n-3}$

${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$에서 주어진 수열은 등비수열이고, 공비는

$a_2\div a_1=\frac{1}{4}\div\frac{1}{16}=4$

이때 첫째항이 $a_1=\frac{1}{16}$이므로

$a_n=\frac{1}{16}\times4^{n-1}=4^{n-3}$

29 답 $a_n=4^{n-1}$

${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$에서 주어진 수열은 등비수열이고, 공비는

$a_2\div a_1=4\div1=4$

이때 첫째항이 $a_1=1$이므로

$a_n=1\times4^{n-1}=4^{n-1}$

30 답 $a_n=2\times(-1)^{n-1}$

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$에서 주어진 수열은 등비수열이고, 공비는

$a_2\div a_1=(-2)\div2=-1$

이때 첫째항이 $a_1=2$이므로

$a_n=2\times(-1)^{n-1}$

31 답 170

$a_{n+1}=a_n+4n-1$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
&a_2=a_1+4\times1-1\\
&a_3=a_2+4\times2-1\\
&a_4=a_3+4\times3-1\\
&\quad\vdots\\
+)\ &a_{10}=a_9+4\times9-1\\
\hline
&a_{10}=a_1+\sum_{k=1}^{9}(4k-1)\\
&\quad=-1+4\sum_{k=1}^{9}k-\sum_{k=1}^{9}1\\
&\quad=-1+4\times\frac{9\times10}{2}-1\times9\\
&\quad=-1+180-9=170
\end{aligned}$$

32 답 $\frac{3^{10}+9}{2}$

$a_{n+1}=a_n+3^n$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
&a_2=a_1+3^1\\
&a_3=a_2+3^2\\
&a_4=a_3+3^3\\
&\quad\vdots\\
+)\ &a_{10}=a_9+3^9\\
\hline
&a_{10}=a_1+\sum_{k=1}^{9}3^k=6+\frac{3(3^9-1)}{3-1}\\
&\quad=\frac{3^{10}+9}{2}
\end{aligned}$$

33 답 $\frac{2}{19}$

$a_{n+1}=\frac{2n-1}{2n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
&a_2=\frac{1}{3}a_1\\
&a_3=\frac{3}{5}a_2\\
&a_4=\frac{5}{7}a_3\\
&\quad\vdots\\
\times)\ &a_{10}=\frac{17}{19}a_9\\
\hline
&a_{10}=\frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{7}}\times\cdots\times\frac{\cancel{17}}{19}a_1\\
&\quad=\frac{1}{19}\times2=\frac{2}{19}
\end{aligned}$$

34 답 $\frac{11}{2}$

$a_{n+1}=\frac{n+2}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
&a_2=\frac{3}{2}a_1\\
&a_3=\frac{4}{3}a_2\\
&a_4=\frac{5}{4}a_3\\
&\quad\vdots\\
\times)\ &a_{10}=\frac{11}{10}a_9\\
\hline
&a_{10}=\frac{\cancel{3}}{2}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\times\cdots\times\frac{11}{\cancel{10}}a_1\\
&\quad=\frac{11}{2}\times1=\frac{11}{2}
\end{aligned}$$

35 답 2^{45}

$a_{n+1}=2^na_n$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
&a_2=2^1a_1\\
&a_3=2^2a_2\\
&a_4=2^3a_3\\
&\quad\vdots\\
\times)\ &a_{10}=2^9a_9\\
\hline
&a_{10}=2^1\times2^2\times2^3\times\cdots\times2^9\times a_1\\
&\quad=2^{1+2+3+\cdots+9}\times1=2^{\frac{9\times10}{2}}=2^{45}
\end{aligned}$$

36 답 (가) $2k+1$ (나) $(k+1)^2$

$n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ ……㉡

이므로 ㉡의 양변에 $\boxed{\text{(가) } 2k+1}$을 더하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(\boxed{\text{(가) } 2k+1})$

$=k^2+(\boxed{\text{(가) } 2k+1})=\boxed{\text{(나) } (k+1)^2}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

37 답 풀이 참조

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=2$, (우변)$=1\times2=2$이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$2+4+6+\cdots+2k=k(k+1)$ ……㉡

이므로 ㉡의 양변에 $2(k+1)$을 더하면

$2+4+6+\cdots+2k+2(k+1)$

$=k(k+1)+2(k+1)$

$=(k+1)(k+2)$

즉 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

유형 완성하기 p. 285~298

01 답 ①

$a_{n+1}-a_n=-4$에서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -4인 등차수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=46$이므로

$a_n=46+(n-1)\times(-4)=-4n+50$

$a_k=-2$에서 $-4k+50=-2$

$4k=52$ $\therefore k=13$

01-1 답 ③

$a_{n+1}+3=a_n$에서 $a_{n+1}-a_n=-3$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -3인 등차수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=100$이므로

$a_n=100+(n-1)\times(-3)=-3n+103$

즉 $a_6=-3\times6+103=85$, $a_{10}=-3\times10+103=73$이므로

$a_6-a_{10}=85-73=12$

02 답 70

$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$에서 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=-1$ ……㉠

$a_3=a+2d=2$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $d=3$

$\therefore a_n=-4+(n-1)\times3=3n-7$

$a_n>200$에서 $3n-7>200$

$3n>207$ $\therefore n>69$

따라서 자연수 n의 최솟값은 70이다.

02-1 답 ④

$a_{n+1}=\dfrac{a_n+a_{n+2}}{2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=-20$, 공차가 $a_2-a_1=-10-(-20)=10$이므로

$a_n=-20+(n-1)\times10=10n-30$

$\therefore a_{10}=10\times10-30=70$

03 답 222

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다. ……❶

이때 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=5$ ……㉠

$a_4=a+3d=11$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=3$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$ ……❷

$\therefore \sum_{k=1}^{12}a_k=\sum_{k=1}^{12}(3k-1)$

$=3\times\dfrac{12\times13}{2}-1\times12$

$=234-12=222$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 관계식이 등차수열을 나타내는 식임을 알 수 있다.	20%
❷ 일반항 a_n을 구할 수 있다.	40%
❸ $\sum_{k=1}^{12}a_k$의 값을 구할 수 있다.	40%

03-1 답 ②

$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$에서 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=-62$, 공차가 $a_2-a_1=-58-(-62)=4$이므로

$a_n=-62+(n-1)\times4=4n-66$

$4n-66>0$에서 $4n>66$ $\therefore n>16.5$

따라서 제17항부터 양수이므로 제16항까지의 합이 최소가 된다.

$\therefore n=16$

04 답 256

$a_{n+1}=-2a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 -2인 등비수열이다.

이때 $a_1=a_2+3$에서 $a_1=-2a_1+3$

$3a_1=3$ $\therefore a_1=1$

따라서 $a_n=1\times(-2)^{n-1}=(-2)^{n-1}$이므로

$a_9=(-2)^8=256$

04-1 답 ⑤

$a_{n+1}=2a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

이때 $a_1=a_2-1$에서 $a_1=2a_1-1$

$\therefore a_1=1$

따라서 $a_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$이므로

$a_{10}=2^9=512$

05 답 ②

$a_{n+1}=4a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 4인 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=2$이므로 $a_n=2\times4^{n-1}$

$2\times4^{n-1}>1000$에서 $4^{n-1}>500$

$4^4=256$, $4^5=1024$이므로

$n-1\geq5$ $\therefore n\geq6$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제6항이다.

05-1 답 113

$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\dfrac{2}{3}$인 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=3$이므로

$a_n=3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore a_6=3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^5=\dfrac{32}{81}$

따라서 $p=81$, $q=32$이므로

$p+q=81+32=113$

06 답 50

이차방정식 $a_n x^2-2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}={a_{n+1}}^2-a_n a_{n+2}=0$ ……㉠

$\therefore {a_{n+1}}^2=a_n a_{n+2}$

즉 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=2$, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$

주어진 이차방정식에서 근의 공식에 의하여

$x=\frac{a_{n+1}\pm\sqrt{{a_{n+1}}^2-a_n a_{n+2}}}{a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{1}{2}$ (중근)

이때 주어진 이차방정식의 중근이 b_n이므로 $b_n=\frac{1}{2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{100} b_k=\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times 100=50$

다른 풀이

위의 풀이 과정에서 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{2}$이므로

$a_n=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$\therefore a_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_{n+2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

따라서 주어진 이차방정식은

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}x^2-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}x+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=0$

이 식의 양변에 2^n을 곱하면 $4x^2-4x+1=0$

$(2x-1)^2=0$ $\therefore x=b_n=\frac{1}{2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{100} b_k=\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times 100=50$

06-1 답 25

$2\log a_{n+1}=\log a_n+\log a_{n+2}$에서

$\log {a_{n+1}}^2=\log a_n a_{n+2}$ $\therefore {a_{n+1}}^2=a_n a_{n+2}$

즉 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다. ……❶

이때 첫째항이 $a_1=2$, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{8}{2}=4$이므로

$a_n=2\times 4^{n-1}=2^{2n-1}$ ……❷

$\therefore \sum_{k=1}^{5}\log_2 a_k=\sum_{k=1}^{5}\log_2 2^{2k-1}$

$=\sum_{k=1}^{5}(2k-1)$

$=2\times\frac{5\times 6}{2}+(-1)\times 5$

$=30-5=25$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 관계식이 등비수열을 나타내는 식임을 알 수 있다.	30%
❷ 일반항 a_n을 구할 수 있다.	30%
❸ $\sum_{k=1}^{5}\log_2 a_k$의 값을 구할 수 있다.	40%

07 답 10

$a_{n+1}-a_n=2n$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$a_2-a_1=2\times 1$

$a_3-a_2=2\times 2$

$a_4-a_3=2\times 3$

⋮

$+)\ a_{10}-a_9=2\times 9$

$a_{10}-a_1=2\sum_{k=1}^{9}k=2\times\frac{9\times 10}{2}=90$

이때 $a_{10}=88$이므로 $88-a_1=90$ $\therefore a_1=-2$

$\therefore a_4=a_1+2\sum_{k=1}^{3}k=-2+2\times\frac{3\times 4}{2}$

$=-2+12=10$

07-1 답 −76

$a_2=a_1-4\times 1+5$이므로

$a_2=a_1+1$ ……㉠

㉠을 $3a_1=a_2+1$에 대입하면 $3a_1=a_1+2$ $\therefore a_1=1$

$a_{n+1}=a_n-4n+5$의 n에 1, 2, 3, …, 7을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$a_2=a_1-4\times 1+5$

$a_3=a_2-4\times 2+5$

$a_4=a_3-4\times 3+5$

⋮

$+)\ a_8=a_7-4\times 7+5$

$a_8=a_1+\sum_{k=1}^{7}(-4k+5)$

$=1+(-4)\times\frac{7\times 8}{2}+5\times 7$

$=1-112+35=-76$

08 답 11

$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$

$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ ……❶

즉 $a_{n+1}=a_n+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$의 n에 1, 2, 3, …, 99를 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$a_2=a_1+\sqrt{2}-\sqrt{1}$

$a_3=a_2+\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$a_4=a_3+\sqrt{4}-\sqrt{3}$

⋮

$+)\ a_{100}=a_{99}+\sqrt{100}-\sqrt{99}$

$a_{100}=a_1+\sqrt{100}-\sqrt{1}$ ……❷

$=2+10-1=11$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 유리화할 수 있다.	30%
❷ ❶의 식의 n에 1, 2, 3, …, 99를 대입한 후 변끼리 더할 수 있다.	50%
❸ a_{100}의 값을 구할 수 있다.	20%

08-1 답 $-\frac{25}{49}$

$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

즉 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$의 n에 1, 2, 3, …, 24를 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$a_2=a_1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)$$
$$a_3=a_2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$
$$a_4=a_3+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$$
$$\vdots$$
$$+)\ a_{25}=a_{24}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{47}-\frac{1}{49}\right)$$
$$a_{25}=a_1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{49}\right)$$
$$=-1+\frac{24}{49}=-\frac{25}{49}$$

09 답 2500

$a_{n+1}=a_n+f(n)$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 50을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$a_2=a_1+f(1)$$
$$a_3=a_2+f(2)$$
$$a_4=a_3+f(3)$$
$$\vdots$$
$$+)\ a_{51}=a_{50}+f(50)$$
$$a_{51}=a_1+\sum_{k=1}^{50}f(k)=1+(50^2-1)=2500$$

09-1 답 ③

$a_n=a_{n-1}+f(n)$의 n에 2, 3, 4, ⋯, 10을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$a_2=a_1+f(2)$$
$$a_3=a_2+f(3)$$
$$a_4=a_3+f(4)$$
$$\vdots$$
$$+)\ a_{10}=a_9+f(10)$$
$$a_{10}=a_1+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$$
$$=f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(10)$$
$$=\sum_{k=2}^{10}f(k)$$

10 답 420

$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n$에서 $a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$이므로 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$a_2=\frac{2}{1}a_1$$
$$a_3=\frac{3}{2}a_2$$
$$a_4=\frac{4}{3}a_3$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=\frac{n}{n-1}a_{n-1}$$
$$a_n=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}\times a_1$$
$$=n\times2=2n$$

$$\therefore\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}2k=2\times\frac{20\times21}{2}=420$$

10-1 답 33

$a_{n+1}=3^n a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 11을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$a_2=3^1a_1$$
$$a_3=3^2a_2$$
$$a_4=3^3a_3$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_{12}=3^{11}a_{11}$$
$$a_{12}=3^1\times3^2\times3^3\times\cdots\times3^{11}\times a_1$$
$$=3^{1+2+3+\cdots+11}\times1=3^{\frac{11\times12}{2}}=3^{66}$$

$$\therefore\log_9 a_{12}=\log_9 3^{66}=\log_9 9^{33}=33$$

11 답 10000

$\sqrt{n+1}\,a_{n+1}=\sqrt{n}\,a_n$에서 $a_{n+1}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}a_n$이므로 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$a_2=\sqrt{\frac{1}{2}}a_1$$
$$a_3=\sqrt{\frac{2}{3}}a_2$$
$$a_4=\sqrt{\frac{3}{4}}a_3$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=\sqrt{\frac{n-1}{n}}a_{n-1}$$
$$a_n=\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{\frac{3}{4}}\times\cdots\times\sqrt{\frac{n-1}{n}}\times a_1$$
$$=\sqrt{\frac{1}{n}}\times100=\frac{100}{\sqrt{n}}$$

$a_k=1$에서 $\frac{100}{\sqrt{k}}=1$이므로

$\sqrt{k}=100$ $\quad\therefore k=10000$

11-1 답 $\frac{1}{35}$

$\sqrt{n+2}\,a_{n+1}=\sqrt{n}\,a_n$에서 $a_{n+1}=\sqrt{\frac{n}{n+2}}a_n$ ……❶

이므로 n에 1, 2, 3, ⋯, 48을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$a_2=\sqrt{\frac{1}{3}}a_1$$
$$a_3=\sqrt{\frac{2}{4}}a_2$$
$$a_4=\sqrt{\frac{3}{5}}a_3$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_{49}=\sqrt{\frac{48}{50}}a_{48}$$
$$a_{49}=\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{\frac{2}{4}}\times\sqrt{\frac{3}{5}}\times\cdots\times\sqrt{\frac{47}{49}}\times\sqrt{\frac{48}{50}}\times a_1 \quad \cdots❷$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{49}\times\sqrt{50}}\times1=\frac{\sqrt{2}}{7\times5\sqrt{2}}=\frac{1}{35} \quad \cdots❸$$

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	20%
❷ ❶의 식의 n에 1, 2, 3, ⋯, 48을 대입한 후 변끼리 곱할 수 있다.	50%
❸ a_{49}의 값을 구할 수 있다.	30%

12 답 2

$a_{n+1}=a_n\log_{n+2}(n+1)$에서 $a_{n+1}=\dfrac{\log(n+1)}{\log(n+2)}a_n$이므로 n에 1, 2, 3, …, 98을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$a_2=\frac{\log 2}{\log 3}a_1$$
$$a_3=\frac{\log 3}{\log 4}a_2$$
$$a_4=\frac{\log 4}{\log 5}a_3$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_{99}=\frac{\log 99}{\log 100}a_{98}$$

$$a_{99}=\frac{\log 2}{\log 3}\times\frac{\log 3}{\log 4}\times\frac{\log 4}{\log 5}\times\cdots\times\frac{\log 99}{\log 100}\times a_1$$
$$=\frac{\log 2}{\log 100}\times 2$$
$$=\log 2$$

$\therefore 10^{a_{99}}=10^{\log 2}=2$

12-1 답 12

$2^{n-1}a_{n+1}=6^{n-1}a_n$에서 $a_{n+1}=\dfrac{6^{n-1}}{2^{n-1}}a_n=3^{n-1}a_n$이므로 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$a_2=3^0a_1$$
$$a_3=3^1a_2$$
$$a_4=3^2a_3$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=3^{n-2}a_{n-1}$$

$$a_n=3^0\times3^1\times3^2\times\cdots\times3^{n-2}\times a_1$$
$$=3^{1+2+3+\cdots+(n-2)}\times 1$$
$$=3^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}=3^{\frac{n^2-3n+2}{2}}$$

$a_k=3^{55}$에서 $3^{\frac{k^2-3k+2}{2}}=3^{55}$이므로

$\dfrac{k^2-3k+2}{2}=55$, $k^2-3k-108=0$

$(k+9)(k-12)=0$ $\therefore k=12$ ($\because k$는 자연수)

13 답 450

$a_n+a_{n+1}=2n$에서

$n=1$일 때, $a_1+a_2=2\times1$

$n=3$일 때, $a_3+a_4=2\times3$

$n=5$일 때, $a_5+a_6=2\times5$

$\vdots$

$n=29$일 때, $a_{29}+a_{30}=2\times29$

$$\therefore\sum_{n=1}^{30}a_n=2\times1+2\times3+2\times5+\cdots+2\times29$$
$$=\sum_{k=1}^{15}2(2k-1)=\sum_{k=1}^{15}(4k-2)$$
$$=4\times\frac{15\times16}{2}-2\times15$$
$$=480-30=450$$

13-1 답 −1

$a_1=3$

$a_2=(-1)^2a_1=1\times3=3$

$a_3=(-1)^3a_2=-1\times3=-3$

$a_4=(-1)^4a_3=1\times(-3)=-3$

$a_5=(-1)^5a_4=-1\times(-3)=3$

$\vdots$

즉 수열 $\{a_n\}$은 3, 3, −3, −3이 이 순서대로 반복되므로

$a_{100}=a_{4\times25}=a_4=-3$

$a_{150}=a_{4\times37+2}=a_2=3$

$\therefore\dfrac{a_{100}}{a_{150}}=\dfrac{-3}{3}=-1$

14 답 ⑤

$a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$

$a_1=2$

$a_2=3$

$a_3=a_2-a_1=3-2=1$

$a_4=a_3-a_2=1-3=-2$

$a_5=a_4-a_3=-2-1=-3$

$a_6=a_5-a_4=-3-(-2)=-1$

$a_7=a_6-a_5=-1-(-3)=2$

$a_8=a_7-a_6=2-(-1)=3$

$\vdots$

즉 수열 $\{a_n\}$은 2, 3, 1, −2, −3, −1이 이 순서대로 반복되므로

$a_{2018}=a_{6\times336+2}=a_2=3$

14-1 답 $\frac{41}{6}$

$a_na_{n+2}=a_{n+1}$에서 $a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

$a_1=2$

$a_2=6$

$a_3=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{6}{2}=3$

$a_4=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

$a_5=\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{\frac{1}{2}}{3}=\dfrac{1}{6}$

$a_6=\dfrac{a_5}{a_4}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$

$a_7=\dfrac{a_6}{a_5}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}}=2$

$a_8=\dfrac{a_7}{a_6}=\dfrac{2}{\frac{1}{3}}=6$

$\vdots$

즉 수열 $\{a_n\}$은 2, 6, 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$이 이 순서대로 반복되므로 ……❶

$a_{100}=a_{6\times16+4}=a_4=\dfrac{1}{2}$

$a_{200}=a_{6\times33+2}=a_2=6$

$a_{300}=a_{6\times50}=a_6=\dfrac{1}{3}$ ……❷

$\therefore a_{100}+a_{200}+a_{300}=\dfrac{1}{2}+6+\dfrac{1}{3}=\dfrac{41}{6}$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 수열 $\{a_n\}$의 항의 값의 반복되는 규칙을 알 수 있다.	50%
❷ a_{100}, a_{200}, a_{300}의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $a_{100}+a_{200}+a_{300}$의 값을 구할 수 있다.	20%

15 답 -200

$a_n+a_{n+1}=(-1)^n$에서

$n=1$일 때, $a_1+a_2=-1$에서 $1+a_2=-1$ $\therefore a_2=-2$

$n=2$일 때, $a_2+a_3=1$에서 $-2+a_3=1$ $\therefore a_3=3$

$n=3$일 때, $a_3+a_4=-1$에서 $3+a_4=-1$ $\therefore a_4=-4$

$\vdots$

따라서 $a_n=(-1)^{n-1}\times n$이므로

$a_{200}=(-1)^{199}\times 200=-200$

다른 풀이

$a_n+a_{n+1}=(-1)^n$의 n에 1, 3, 5, …, 199를 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}&a_1+a_2=-1\\&a_3+a_4=-1\\&a_5+a_6=-1\\&\quad\vdots\\+)\ &a_{199}+a_{200}=-1\\\hline&a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{200}=-100\end{aligned}\quad\cdots\cdots㉠$$

$a_n+a_{n+1}=(-1)^n$의 n에 2, 4, 6, …, 198을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}&a_2+a_3=1\\&a_4+a_5=1\\&a_6+a_7=1\\&\quad\vdots\\+)\ &a_{198}+a_{199}=1\\\hline&a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{199}=99\end{aligned}\quad\cdots\cdots㉡$$

㉠−㉡을 하면 $a_1+a_{200}=-199$

$\therefore a_{200}=-199-a_1=-199-1=-200$

15-1 답 $\frac{3^{20}-1}{8}$

$a_{n+1}=3^{n-1}-a_n$에서 $a_n+a_{n+1}=3^{n-1}$이므로 n에 1, 3, 5, …, 19를 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}&a_1+a_2=1\\&a_3+a_4=3^2\\&a_5+a_6=3^4\\&\quad\vdots\\+)\ &a_{19}+a_{20}=3^{18}\\\hline&a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{19}+a_{20}\\&=\underbrace{1+3^2+3^4+\cdots+3^{18}}_{\text{첫째항이 1, 공비가 }3^2\text{인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합}}\\&=\frac{1\times\{(3^2)^{10}-1\}}{3^2-1}\\&=\frac{3^{20}-1}{8}\end{aligned}$$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k=\frac{3^{20}-1}{8}$

16 답 ④

$a_1=\frac{1}{2}$이고, $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+7a_n}$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$$a_2=\frac{a_1}{1+7a_1}=\frac{\frac{1}{2}}{1+7\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{9}$$

$$a_3=\frac{a_2}{1+7a_2}=\frac{\frac{1}{9}}{1+7\times\frac{1}{9}}=\frac{1}{16}$$

$$a_4=\frac{a_3}{1+7a_3}=\frac{\frac{1}{16}}{1+7\times\frac{1}{16}}=\frac{1}{23}$$

$\vdots$

즉 수열 $\{a_n\}$의 각 항의 분자는 1이고, 분모는 첫째항이 2, 공차가 7인 등차수열이므로

$$a_n=\frac{1}{2+(n-1)\times 7}=\frac{1}{7n-5}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}&=\sum_{k=1}^{10}(7k-5)\\&=7\times\frac{10\times 11}{2}-5\times 10\\&=385-50\\&=335\end{aligned}$$

다른 풀이

$a_{n+1}=\frac{a_n}{1+7a_n}$에서 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1+7a_n}{a_n}$

$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+7$

$\frac{1}{a_n}=b_n$이라 하면

$b_{n+1}=b_n+7$, $b_1=\frac{1}{a_1}=2$

즉 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 7인 등차수열이므로

$b_n=2+(n-1)\times 7=7n-5$

따라서 $a_n=\frac{1}{7n-5}$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}&=\sum_{k=1}^{10}(7k-5)\\&=7\times\frac{10\times 11}{2}-5\times 10\\&=385-50\\&=335\end{aligned}$$

16-1 답 11

$a_1=3=\frac{6}{2}$이고, $a_{n+1}=\frac{2a_n}{2+a_n}$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$$a_2=\frac{2a_1}{2+a_1}=\frac{2\times 3}{2+3}=\frac{6}{5}$$

$$a_3=\frac{2a_2}{2+a_2}=\frac{2\times\frac{6}{5}}{2+\frac{6}{5}}=\frac{6}{8}$$

$$a_4=\frac{2a_3}{2+a_3}=\frac{2\times\frac{6}{8}}{2+\frac{6}{8}}=\frac{6}{11}$$

$\vdots$

즉 수열 $\{a_n\}$의 각 항의 분자는 6이고, 분모는 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로

$$a_n=\frac{6}{2+(n-1)\times 3}=\frac{6}{3n-1}$$

$a_k=\frac{3}{16}$에서 $\frac{6}{3k-1}=\frac{3}{16}$이므로 $9k-3=96$

$9k=99$ $\therefore k=11$

17 답 11

$a_1=7$이고, (가)에서 $a_{n+2}=a_n-4$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_3=a_1-4=7-4=3$

$a_4=a_2-4$

$a_5=a_3-4=3-4=-1$

$a_6=a_4-4=(a_2-4)-4=a_2-8$ ……❶

(나)에서 $a_{n+6}=a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 7, a_2, 3, a_2-4, -1, a_2-8이 이 순서대로 반복된다.

$\therefore \sum_{k=1}^{50}a_k=8(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+a_{49}+a_{50}$

$=8(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+a_1+a_2$

$=8\{7+a_2+3+(a_2-4)+(-1)+(a_2-8)\}+7+a_2$

$=25a_2-17$ ……❷

즉 $25a_2-17=258$이므로

$25a_2=275$

$\therefore a_2=11$ ……❸

채점 기준	비율
❶ (가)를 이용하여 a_3, a_4, a_5, a_6의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ (나)를 이용하여 $\sum_{k=1}^{50}a_k$를 a_2에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ a_2의 값을 구할 수 있다.	20%

17-1 답 164

$a_1=1$이고, (가)에서 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$의 n에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$a_2=\frac{a_1}{2a_1+1}=\frac{1}{2\times1+1}=\frac{1}{3}$

$a_3=\frac{a_2}{2a_2+1}=\frac{\frac{1}{3}}{2\times\frac{1}{3}+1}=\frac{1}{5}$

$a_4=\frac{a_3}{2a_3+1}=\frac{\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{5}+1}=\frac{1}{7}$

(나)에서 $a_{n+4}=a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$이 이 순서대로 반복된다.

$\therefore \sum_{n=1}^{42}\frac{1}{a_n}=10\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\right)+\frac{1}{a_{41}}+\frac{1}{a_{42}}$

$=10\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\right)+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}$

$=10(1+3+5+7)+1+3=164$

18 답 45

$a_1=11$에서

$a_2=a_1+3=14$, $a_3=\frac{1}{2}a_2=7$

$a_4=a_3+3=10$, $a_5=\frac{1}{2}a_4=5$, $a_6=a_5+3=8$

$a_7=\frac{1}{2}a_6=4$, $a_8=\frac{1}{2}a_7=2$, $a_9=\frac{1}{2}a_8=1$

$a_{10}=a_9+3=4$, $a_{11}=\frac{1}{2}a_{10}=2$, $a_{12}=\frac{1}{2}a_{11}=1$, …

$\therefore a_n=\begin{cases}4\ (n=3m-2)\\2\ (n=3m-1)\\1\ (n=3m)\end{cases}$ ($m\geq3$인 자연수)

$\therefore a_{101}+a_{102}+a_{103}+\cdots+a_{120}$

$=(a_{101}+a_{102}+a_{103})\times6+\underbrace{a_{119}+a_{120}}_{\substack{a_{119}=a_{3\times40-1}=2\\a_{120}=a_{3\times40}=1}}$

$=(2+1+4)\times6+2+1=45$

18-1 답 ④

$a_1=15$에서

$a_2=a_1+3=15+3=18$

$a_3=a_2-2=18-2=16$

$a_4=a_3+3=16+3=19$

$a_5=a_4-4=19-4=15$

$a_6=a_5+3=15+3=18$

⋮

즉 수열 $\{a_n\}$은 15, 18, 16, 19가 이 순서대로 반복되므로

$a_{50}=a_{4\times12+2}=a_2=18$

19 답 $\frac{1}{8}$

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ ($n\geq1$)이므로

$a_{n+1}=-a_{n+1}+2-(-a_n+2)$ $\therefore a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

즉 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=4$이므로

$a_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\therefore a_6=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{8}$

19-1 답 ③

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ ($n\geq1$)이므로

$a_{n+1}=2a_{n+1}+n+1-(2a_n+n)$ $\therefore a_{n+1}=2a_n-1$

$a_{n+1}=2a_n-1$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=2a_1-1=2\times1-1=1$

$a_3=2a_2-1=2\times1-1=1$

$a_4=2a_3-1=2\times1-1=1$

⋮

$\therefore a_{99}=1$

20 답 -512

$S_{n+1}=2S_n-3$ ($n\geq1$) ……㉠

㉠의 n에 $n-1$을 대입하면

$S_n=2S_{n-1}-3$ ($n\geq2$) ……㉡

㉠−㉡을 하면 $S_{n+1}-S_n=2(S_n-S_{n-1})$

$\therefore a_{n+1}=2a_n$ ($n\geq2$)

㉠에 $n=1$을 대입하면

$S_2=2S_1-3=2\times1-3=-1$

$\therefore a_2=S_2-S_1=-1-1=-2$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제2항부터 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n=-2\times2^{n-2}=-2^{n-1}$ ($n\geq2$)

$\therefore a_{10}=-2^9=-512$

다른 풀이

$S_1=1$이고, $S_{n+1}=2S_n-3$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례로 대입하면

$S_2=2S_1-3=2\times1-3=-1$
$S_3=2S_2-3=2\times(-1)-3=-5$
$S_4=2S_3-3=2\times(-5)-3=-13$
$S_5=2S_4-3=2\times(-13)-3=-29$
$S_6=2S_5-3=2\times(-29)-3=-61$
$S_7=2S_6-3=2\times(-61)-3=-125$
$S_8=2S_7-3=2\times(-125)-3=-253$
$S_9=2S_8-3=2\times(-253)-3=-509$
$S_{10}=2S_9-3=2\times(-509)-3=-1021$
$\therefore a_{10}=S_{10}-S_9=-1021-(-509)=-512$

20-1 답 $-\frac{1}{3^{49}}$

$S_{n+1}=\frac{1}{3}S_n+1\ (n\geq1)$ ……㉠
㉠의 n에 $n-1$을 대입하면
$S_n=\frac{1}{3}S_{n-1}+1\ (n\geq2)$ ……㉡
㉠−㉡을 하면
$S_{n+1}-S_n=\frac{1}{3}(S_n-S_{n-1})$
$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n\ (n\geq2)$
㉠에 $n=1$을 대입하면
$S_2=\frac{1}{3}S_1+1=\frac{1}{3}\times2+1=\frac{5}{3}$
$\therefore a_2=S_2-S_1=\frac{5}{3}-2=-\frac{1}{3}$
즉 수열 $\{a_n\}$은 제2항부터 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로
$a_n=-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\ (n\geq2)$
$\therefore a_{50}=-\left(\frac{1}{3}\right)^{49}=-\frac{1}{3^{49}}$

21 답 2880

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n$이라 하면 주어진 식은
$a_{n+1}=3S_n$
이때 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로
$S_{n+1}-S_n=3S_n \quad \therefore S_{n+1}=4S_n$
즉 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $S_1=a_1=3$, 공비가 4인 등비수열이므로
$S_n=3\times4^{n-1}$
$\therefore a_5+a_6=(S_5-S_4)+(S_6-S_5)=S_6-S_4$
$=3\times4^5-3\times4^3=2880$

21-1 답 9

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n$이라 하면 주어진 식은
$a_{n+1}=S_n$
이때 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로
$S_{n+1}-S_n=S_n \quad \therefore S_{n+1}=2S_n$
즉 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $S_1=a_1=4$, 공비가 2인 등비수열이므로
$S_n=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$
$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+1}-2^n=2^n\ (n\geq2)$
$a_k>500$에서 $2^k>500$
$2^8=256$, $2^9=512$이므로 $k\geq9$
따라서 자연수 k의 최솟값은 9이다.

22 답 ③

(가), (나)에서 $p(1), p(3), p(3^2), p(3^3), \cdots$이 참이다.
(가), (다)에서 $p(1), p(4), p(4^2), p(4^3), \cdots$이 참이다.
$p(3)$이 참이므로 (다)에서 $p(3\times4), p(3\times4^2), p(3\times4^3), \cdots$이 참이다.
$p(3^2)$이 참이므로 (다)에서 $p(3^2\times4), p(3^2\times4^2), p(3^2\times4^3), \cdots$이 참이다.
⋮
즉 음이 아닌 정수 a, b에 대하여 $p(3^a\times4^b)$이 참이다.
① $p(120)=p(2^3\times3\times5)$
② $p(130)=p(2\times5\times13)$
③ $p(144)=p(3^2\times4^2)$
④ $p(216)=p(2^3\times3^3)$
⑤ $p(288)=p(2^5\times3^2)$
따라서 반드시 참인 명제는 ③이다.

22-1 답 ②

ㄱ. $p(1)$이 참이면
$p(4), p(7), p(10), \cdots, p(3n+1)$ (n은 자연수)
이 모두 참이지만 $p(3n)$이 참인지는 알 수 없다.
ㄴ. $p(3)$이 참이면
$p(6), p(9), p(12), \cdots, p(3n)$ (n은 자연수)
이 모두 참이므로 모든 3의 배수 k에 대하여 $p(k)$는 참이다.
ㄷ. ㄱ에서 $p(1)$이 참이면 $k=3n+1$ (n은 자연수)일 때, $p(k)$는 참이다.
또 $p(2)$가 참이면
$p(5), p(8), p(11), \cdots, p(3n+2)$ (n은 자연수)
가 모두 참이므로 $k=3n+2$일 때, $p(k)$는 참이다.
그러나 $n=3k$일 때, $p(k)$가 참인지는 알 수 없다.
따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

23 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $p(1)$이 참이면
$p(3), p(5), p(7), \cdots, p(2l+1)$ (l은 자연수)
이 모두 참이므로 $p(25)=p(2\times12+1)$은 참이다.
ㄴ. 대우 '$p(k)$가 참이면 $p(2k+1)$도 참이다.'에 의하여 $p(1)$이 참이면
$p(2\times1+1)=p(3), p(2\times3+1)=p(7),$
$p(2\times7+1)=p(15), p(2\times15+1)=p(31), \cdots$
이 모두 참이지만 $p(25)$가 참인지는 알 수 없다.
ㄷ. $p(1)$이 참이면
$p(5), p(5\times5)=p(25), \cdots$
가 모두 참이다.
따라서 (나)의 조건이 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

23-1 답 ③

ㄱ. $p(1)$이 참이면
$p(4), p(7), p(10), \cdots, p(3n+1)$ (n은 자연수)
이 모두 참이므로 $p(31)=p(3\times10+1)$은 참이다.
ㄴ. $p(1)$이 참이면
$p(2), p(2^2), \cdots, p(2^n)$ (n은 자연수)

이 모두 참이지만 31은 2의 거듭제곱이 아니므로 $p(31)$이 참인지는 알 수 없다.

ㄷ. 대우 '$p(k)$가 참이면 $p(2k+1)$도 참이다.'에 의하여 $p(1)$이 참이면

$p(2\times1+1)=p(3)$, $p(2\times3+1)=p(7)$,

$p(2\times7+1)=p(15)$, $p(2\times15+1)=p(31)$, …

이 모두 참이다.

따라서 (나)의 조건이 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

24 답 ④

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1$, (우변)$=\dfrac{1\times(1+1)}{2}=1$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ ……㉡

이 성립한다.

㉡의 양변에 $\boxed{\text{(가) } k+1}$을 더하면

$1+2+3+\cdots+k+\boxed{\text{(가) } k+1}$

$=\dfrac{k(k+1)}{2}+\boxed{\text{(가) } k+1}$

$=\boxed{\text{(나) } \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

따라서 $f(k)=k+1$, $g(k)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$이므로

$f(1)+g(10)=2+66=68$

24-1 답 ④

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=\dfrac{1}{1\times2}=\dfrac{1}{2}$, (우변)$=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{k}{k+1}$ ……㉡

가 성립한다.

㉡의 양변에 $\boxed{\text{(가) } \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}}$을 더하면

$\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{k(k+1)}+\boxed{\text{(가) } \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}}$

$=\dfrac{k}{k+1}+\boxed{\text{(가) } \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}}$

$=\dfrac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$

$=\dfrac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$

$=\boxed{\text{(나) } \dfrac{k+1}{k+2}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

25 답 ②

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=2^{1-1}=1$, (우변)$=2^1-1=1$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$ ……㉡

이 성립한다.

㉡의 양변에 $\boxed{\text{(가) } 2^k}$을 더하면

$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+\boxed{\text{(가) } 2^k}=2^k-1+\boxed{\text{(가) } 2^k}$

$=2\times2^k-1$

$=\boxed{\text{(나) } 2^{k+1}}-1$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

25-1 답 9

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=\dfrac{1}{1\times3}=\dfrac{1}{3}$, (우변)$=\dfrac{1}{2\times1+1}=\dfrac{1}{3}$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{3\times5}+\dfrac{1}{5\times7}+\cdots+\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{k}{2k+1}$ ……㉡

가 성립한다.

㉡의 양변에 $\boxed{\text{(가) } \dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$을 더하면

$\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{3\times5}+\dfrac{1}{5\times7}+\cdots+\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\boxed{\text{(가) } \dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$

$=\dfrac{k}{2k+1}+\boxed{\text{(가) } \dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$

$=\dfrac{k(2k+3)}{(2k+1)(2k+3)}+\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\dfrac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\dfrac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\boxed{\text{(나) } \dfrac{k+1}{2k+3}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

따라서 $f(k)=\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, $g(k)=\dfrac{k+1}{2k+3}$이므로

$f(4)=\dfrac{1}{9\times11}=\dfrac{1}{99}$, $g(4)=\dfrac{4+1}{8+3}=\dfrac{5}{11}$

$\therefore \dfrac{g(4)}{5f(4)}=\dfrac{\frac{5}{11}}{\frac{5}{99}}=9$

26 답 풀이 참조

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$ ……㉠

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1^3=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=(1+2+3+\cdots+k)^2$ ……㉡

㉡의 양변에 $(k+1)^3$을 더하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$

$=(1+2+3+\cdots+k)^2+(k+1)^3$

$=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+(k+1)^3$

$=\frac{(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}}{4}$

$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

$=\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$

$=\{1+2+3+\cdots+(k+1)\}^2$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

26-1 답 풀이 참조

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n+2}{2}$ ……㉠

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, (우변)$=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=\frac{k+2}{2}$ ……㉡

가 성립한다.

㉡의 양변에 $1+\frac{1}{k+2}$을 곱하면

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\left(1+\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{k+2}{2}\left(1+\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{k+2}{2}\times\frac{k+3}{k+2}$

$=\frac{k+3}{2}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

27 답 ③

(i) $n=1$일 때

$2^2+3^1=7$이므로 7의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때, $2^{n+1}+3^{2n-1}$이 7의 배수라 가정하면

$2^{k+1}+3^{2k-1}=7N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$2^{k+2}+3^{2k+1}=2\times2^{k+1}+$ [(가) 9] $\times3^{2k-1}$ ($3^{2k+1}=3^{2k-1+2}=3^2\times3^{2k-1}$)

$=2\times2^{k+1}+2\times3^{2k-1}+7\times3^{2k-1}$

$=2(2^{k+1}+3^{2k-1})+7\times3^{2k-1}$

$=2\times$ [(나) $7N$] $+7\times$ [(다) 3^{2k-1}]

$=7(2N+$ [(다) 3^{2k-1}] $)$

따라서 $n=k+1$일 때도 $2^{n+1}+3^{2n-1}$이 7의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 $2^{n+1}+3^{2n-1}$은 7의 배수이다.

27-1 답 ⑤

(i) $n=2$일 때

$4^2-3\times2-1=9$이므로 9의 배수이다.

(ii) $n=k$ ($k\geq2$)일 때, 4^n-3n-1이 9의 배수라 가정하면

$4^k-3k-1=9N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$4^{k+1}-3(k+1)-1=$ [(가) 4×4^k] $-3k-4$

$=4(4^k-3k-1)+$ [(나) $9k$]

$=4\times9N+$ [(나) $9k$]

$=9($ [(다) $4N+k$] $)$

따라서 $n=k+1$일 때도 4^n-3n-1이 9의 배수이다.

(i), (ii)에서 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 4^n-3n-1은 9의 배수이다.

28 답 17

(i) $n=1$일 때

$4^2-1=15$이므로 5의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때, $4^{2n}-1$이 5의 배수라 가정하면

$4^{2k}-1=5a$ (a는 자연수)

로 놓을 수 있으므로 $4^{2k}=5a+1$

위의 식의 양변에 [(가) 4^2]을 곱하면

$4^{2k+2}=4^2(5a+1)$

$=4^2\times5a+16$

$=5($ [(가) 4^2] $a+3)+$ [(나) 1]

따라서 $4^{2(k+1)}-1$은 5의 배수이므로 $n=k+1$일 때도 $4^{2n}-1$은 5의 배수이다. ($4^{2(k+1)}-1=5(4^2a+3)$이므로 5의 배수이다.)

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 $4^{2n}-1$은 5의 배수이다.

따라서 $p=4^2=16$, $q=1$이므로

$p+q=16+1=17$

28-1 답 35

(i) $n=1$일 때

$3^2-1=$ [(가) 8]이므로 8의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때, $3^{2n}-1$이 8의 배수라 가정하면

$3^{2k}-1=8m$ (m은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$3^{2(k+1)}-1=3^2\times3^{2k}-1$

$=9\times$ [(나) 3^{2k}] -1 ($3^{2k}=8m+1$)

$=9(8m+1)-1$

$=9\times8m+8$

$=8($ [(다) $9m$] $+1)$

따라서 $n=k+1$일 때도 $3^{2n}-1$은 8의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 $3^{2n}-1$은 8의 배수이다.

따라서 $a=8$, $f(k)=3^{2k}$, $g(m)=9m$이므로

$a+f(1)+g(2)=8+3^2+9\times2=35$

29 답 9

(i) $n=1$일 때

$1^3+5\times1=6$이므로 6의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때, n^3+5n이 6의 배수라 가정하면

$k^3+5k=6m$ (m은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$(k+1)^3+5(k+1)=k^3+3k^2+8k+6$

$=k^3+5k+6+3k^2+3k$

$=6m+6+3k^2+3k$

$=6(\boxed{(가)\ m+1})+\boxed{(나)\ 3}k(k+1)$

이때 $k(k+1)$은 짝수이므로 $\boxed{(나)\ 3}k(k+1)$은 6의 배수이다.

따라서 $n=k+1$일 때도 n^3+5n은 6의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 n^3+5n은 6의 배수이다.

따라서 $f(m)=m+1$, $t=3$이므로

$\sum_{m=1}^{t} f(m)=\sum_{m=1}^{3}(m+1)=\frac{3\times4}{2}+3=9$

29-1 답 9

(i) $n=1$일 때

$5^0+7=8$이므로 2의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때, $5^{n-1}+7^n$이 2의 배수라 가정하면

$5^{k-1}+7^k=2N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$5^k+7^{k+1}=5\times5^{k-1}+7\times7^k=7(5^{k-1}+7^k)-\boxed{(가)\ 2\times5^{k-1}}$

$=7\times2N-\boxed{(가)\ 2\times5^{k-1}}=2(7N-\boxed{(나)\ 5^{k-1}})$

따라서 $n=k+1$일 때도 $5^{n-1}+7^n$은 2의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 $5^{n-1}+7^n$은 2의 배수이다.

따라서 $f(k)=2\times5^{k-1}$, $g(k)=5^{k-1}$이므로

$f(2)-g(1)=2\times5^1-5^0=9$

30 답 17

(i) $n=2$일 때

(좌변)$=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$, (우변)$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$이므로 (좌변)$<$(우변)

즉 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k\geq2$)일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$

이 성립한다.

위의 식의 양변에 $\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)^2}}$을 더하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)^2}}$

$<2-\frac{1}{k}+\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)^2}}$

이때

$2-\frac{1}{k}+\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)^2}}-\left(\boxed{(나)\ 2-\frac{1}{k+1}}\right)$

$=-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{k+1}$

$=\frac{-(k+1)^2+k+k(k+1)}{k(k+1)^2}$

$=-\frac{1}{k(k+1)^2}<0$

이므로

우변에는 $n=k+1$일 때의 꼴인 $2-\frac{1}{k+1}$이 나타나야 하므로 두 식의 대소를 비교한다.

$2-\frac{1}{k}+\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)^2}}<\boxed{(나)\ 2-\frac{1}{k+1}}$

$\therefore 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)^2}}$

$<\boxed{(나)\ 2-\frac{1}{k+1}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

따라서 $f(k)=\frac{1}{(k+1)^2}$, $g(k)=2-\frac{1}{k+1}$이므로

$f(2)=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$, $g(8)=2-\frac{1}{9}=\frac{17}{9}$

$\therefore \frac{g(8)}{f(2)}=\frac{\frac{17}{9}}{\frac{1}{9}}=17$

30-1 답 ①

(i) $n=3$일 때

(좌변)$=3^{3+1}=81$, (우변)$=(3+1)^3=64$이므로

(좌변)$>$(우변)

즉 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k\geq3$)일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$k^{k+1}>(k+1)^k$ ……㉡

이때

$(k+1)^{k+2}=\frac{(k+1)^{k+2}}{k^{k+1}}\times k^{k+1}$

$>\frac{(k+1)^{k+2}}{k^{k+1}}\times\boxed{(가)\ (k+1)^k}$ ($\because$ ㉡)

$=\frac{(k+1)^{2k+2}}{k^{k+1}}$

$=\left(\frac{k^2+2k+1}{k}\right)^{k+1}$

$=\left(k+2+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$

$>\boxed{(나)\ (k+2)^{k+1}}$ ($\because k\geq3$)

이므로 $(k+1)^{k+2}>\boxed{(나)\ (k+2)^{k+1}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\geq3$인 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

31 답 16

(i) $n=5$일 때

(좌변)$=2^5=32$, (우변)$=5^2=25$이므로 (좌변)$>$(우변)

즉 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k\geq5$)일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$2^k>k^2$

위의 식의 양변에 2를 곱하면 $2^{k+1}>2k^2$

그런데 $k\geq5$이면

$k^2-2k-1=\boxed{(가)\ (k-1)^2}-2>0$

이므로 $k^2>2k+1$

$\therefore 2^{k+1}>2k^2$

$=k^2+k^2$

$>k^2+2k+1$

$=\boxed{(나)\ (k+1)^2}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.
따라서 $f(k)=(k-1)^2$, $g(k)=(k+1)^2$이므로
$f(2)=1^2=1$, $g(3)=4^2=16$
$\therefore f(2)g(3)=1\times 16=16$

31-1 답 ③

(i) $n=1$일 때
(좌변)$=\dfrac{7+3}{2}=5$, (우변)$=5^1=5$이므로 (좌변)$\geq$(우변)
즉 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$\dfrac{7^k+3^k}{2} \geq \boxed{(가)\ 5^k}$
위의 식의 양변에 5를 곱하면
$5\times\dfrac{7^k+3^k}{2} \geq 5\times\boxed{(가)\ 5^k}$이므로
$\dfrac{7^{k+1}+3^{k+1}}{2}-5^{k+1} \geq \dfrac{7^{k+1}+3^{k+1}}{2}-5\times\dfrac{7^k+3^k}{2}$
$=\dfrac{2\times 7^k-2\times 3^k}{2}$
$=\boxed{(나)\ 7^k-3^k} \geq 0$
즉 $\dfrac{7^{k+1}+3^{k+1}}{2}-5^{k+1}\geq 0$이므로
$\dfrac{7^{k+1}+3^{k+1}}{2} \geq 5^{k+1}$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.
(i), (ii)에서 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.
따라서 $f(k)=5^k$, $g(k)=7^k-3^k$이므로
$f(2)=5^2=25$, $g(1)=7-3=4$
$\therefore f(2)+g(1)=25+4=29$

32 답 풀이 참조

$1\times 2\times 3\times \cdots \times n > 2^n$ ……㉠
(i) $n=4$일 때
(좌변)$=1\times 2\times 3\times 4=24$, (우변)$=2^4=16$이므로
(좌변)$>$(우변)
즉 ㉠이 성립한다.
(ii) $n=k$ $(k\geq 4)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
$1\times 2\times 3\times \cdots \times k > 2^k$ ……㉡
㉡의 양변에 $k+1$을 곱하면
$1\times 2\times 3\times \cdots \times k\times(k+1) > 2^k\times(k+1) > 2^{k+1}$
$(\because k\geq 4$이므로 $k+1>2)$
따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.
(i), (ii)에서 $n\geq 4$인 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

32-1 답 풀이 참조

$2^n > 2n+1$ ……㉠
(i) $n=3$일 때
(좌변)$=2^3=8$, (우변)$=2\times 3+1=7$이므로
(좌변)$>$(우변)
즉 ㉠이 성립한다.
(ii) $n=k$ $(k\geq 3)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
$2^k > 2k+1$
위의 식의 양변에 2를 곱하면
$2^{k+1} > 2(2k+1)$ ……㉡
이때
$2(2k+1)-\{2(k+1)+1\}=2k-1>0$ $(\because k\geq 3)$
이므로 $2(2k+1) > 2(k+1)+1$ ……㉢
㉡, ㉢에서 $2^{k+1} > 2(k+1)+1$
따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.
(i), (ii)에서 $n\geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

유형 완성하기 p. 299

33 답 ①

직선 1개를 그으면 2개의 평면이 생기므로 $a_1=2$
n개의 직선이 그려진 평면 위에 문제의 조건에 맞는 1개의 직선을 추가하면 이 직선은 기존의 n개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 $(n+1)$개의 새로운 평면이 생긴다. 즉 $(n+1)$개의 직선에 의하여 분할된 평면은 n개의 직선에 의하여 분할된 평면보다 $(n+1)$개가 많으므로 $a_{n+1}=a_n+n+1$
위의 식의 n에 1, 2, 3, …, 19를 차례로 대입한 후 변끼리 더하면
$a_2=a_1+1+1$
$a_3=a_2+2+1$
$a_4=a_3+3+1$
⋮
$+)\ a_{20}=a_{19}+19+1$
$a_{20}=a_1+\sum_{k=1}^{19}(k+1)$
$=2+\dfrac{19\times 20}{2}+1\times 19$
$=2+190+19=211$

34 답 (1) 28 (2) $a_{n+1}=a_n+2n+4$ (3) 990

(1) $a_1=4\times 1=4$
$a_2=a_1+6\times 1=4+6$
$a_3=a_2+8\times 1=4+6+8$
$a_4=a_3+10\times 1=4+6+8+10=28$
(2) $a_1=4$
$a_2=a_1+6\times 1$
$a_3=a_2+8\times 1$
$a_4=a_3+10\times 1$
⋮
$\therefore a_{n+1}=a_n+2n+4$
(3) $a_{n+1}=a_n+2n+4$의 n에 1, 2, 3, …, 29를 대입한 후 변끼리 더하면
$a_2=a_1+2\times 1+4$
$a_3=a_2+2\times 2+4$
$a_4=a_3+2\times 3+4$
⋮
$+)\ a_{30}=a_{29}+2\times 29+4$
$a_{30}=a_1+\sum_{k=1}^{29}(2k+4)$
$=4+2\times\dfrac{29\times 30}{2}+4\times 29$
$=4+870+116=990$

35 답 397

$a_1=1$

$a_2=a_1+6=a_1+6\times1$

$a_3=a_2+12=a_2+6\times2$

⋮

$\therefore a_{n+1}=a_n+6n$

$a_{n+1}=a_n+6n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 11을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
&\cancel{a_2}=a_1+6\times1\\
&\cancel{a_3}=\cancel{a_2}+6\times2\\
&\cancel{a_4}=\cancel{a_3}+6\times3\\
&\quad\vdots\\
+)\ &a_{12}=\cancel{a_{11}}+6\times11\\
\hline
&a_{12}=a_1+\sum_{k=1}^{11}6k\\
&\quad=1+6\times\frac{11\times12}{2}\\
&\quad=1+396=397
\end{aligned}$$

36 답 (1) $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+20$ (2) 45

(1) n회 시행 후 수족관에 남아 있는 물의 양이 a_n L이므로

$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}a_n+20$

$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+20$

(2) $a_1=200-\frac{1}{2}\times200+20=120$이므로

$a_2=\frac{1}{2}a_1+20=\frac{1}{2}\times120+20=80$

$a_3=\frac{1}{2}a_2+20=\frac{1}{2}\times80+20=60$

$a_4=\frac{1}{2}a_3+20=\frac{1}{2}\times60+20=50$

$a_5=\frac{1}{2}a_4+20=\frac{1}{2}\times50+20=45$

37 답 10일

n일 후 측정한 세균의 수를 a_n이라 하면

$a_1=20$, $a_{n+1}=2(a_n-5)$이므로

$a_1=20$

$a_2=2(a_1-5)=2(20-5)=30=10\times2+10$

$a_3=2(a_2-5)=2(30-5)=50=10\times2^2+10$

$a_4=2(a_3-5)=2(50-5)=90=10\times2^3+10$

⋮

$\therefore a_n=10\times2^{n-1}+10$

이때 $10\times2^{n-1}+10=5130$에서 $10\times2^{n-1}=5120$

$2^{n-1}=512=2^9$, $n-1=9$

$\therefore n=10$

따라서 측정한 세균의 수가 5130마리가 되는 것은 10일 후이다.

다른 풀이

n일 후 측정한 세균의 수를 a_n이라 하면

$a_{n+1}=2(a_n-5)$ $\therefore a_{n+1}-10=2(a_n-10)$

즉 수열 $\{a_n-10\}$은 첫째항이 $a_1-10=10$, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n-10=10\times2^{n-1}$ $\therefore a_n=10\times2^{n-1}+10$

이때 $10\times2^{n-1}+10=5130$에서 $10\times2^{n-1}=5120$

$2^{n-1}=512=2^9$, $n-1=9$

$\therefore n=10$

따라서 측정한 세균의 수가 5130마리가 되는 것은 10일 후이다.

학교 시험 대비 문제

p.300~302

01 답 −140

$a_{n+1}=a_n-2$에서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 −2인 등차수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=3$이므로

$a_n=3+(n-1)\times(-2)=-2n+5$

$\therefore \sum_{k=1}^{14}a_k=\sum_{k=1}^{14}(-2k+5)$

$=-2\times\frac{14\times15}{2}+5\times14$

$=-210+70$

$=-140$

02 답 ③

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=2$이므로

$a_n=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$\therefore a_5=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

따라서 $p=8$, $q=1$이므로

$p+q=8+1=9$

03 답 ②

$a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=6$, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$이므로

$\sum_{k=1}^{7}a_k=\frac{6\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{129}{32}$

04 답 17

$a_{n+1}=a_n+2n-1$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 7을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
&\cancel{a_2}=a_1+2\times1-1\\
&\cancel{a_3}=\cancel{a_2}+2\times2-1\\
&\cancel{a_4}=\cancel{a_3}+2\times3-1\\
&\quad\vdots\\
+)\ &a_8=\cancel{a_7}+2\times7-1\\
\hline
&a_8=a_1+\sum_{k=1}^{7}(2k-1)\\
&\quad=a_1+2\times\frac{7\times8}{2}-1\times7\\
&\quad=a_1+49
\end{aligned}$$

$a_8=50$에서 $a_1+49=50$ $\therefore a_1=1$

$\therefore a_5=a_1+\sum_{k=1}^{4}(2k-1)=1+2\times\frac{4\times5}{2}-1\times4$

$=1+20-4=17$

05 답 ③

$a_{n+1}-a_n=2$에서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 2인 등차수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=3$이므로

$a_n=3+(n-1)\times2=2n+1$

$\therefore a_{12}=2\times12+1=25$

$b_{n+1}=b_n+3a_n$에서 $b_{n+1}=b_n+3(2n+1)$

$\therefore b_{n+1}=b_n+6n+3$

위의 식의 n에 1, 2, 3, …, 20을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$b_2=b_1+6\times1+3$

$b_3=b_2+6\times2+3$

$b_4=b_3+6\times3+3$

$\vdots$

$+)\ b_{21}=b_{20}+6\times20+3$

$b_{21}=b_1+\sum_{k=1}^{20}(6k+3)$

$=5+6\times\frac{20\times21}{2}+3\times20$

$=5+1260+60=1325$

$\therefore \frac{b_{21}}{a_{12}}=\frac{1325}{25}=53$

06 답 55

$a_{n+1}=2^n a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 10을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$a_2=2a_1$

$a_3=2^2a_2$

$a_4=2^3a_3$

$\vdots$

$\times)\ a_{11}=2^{10}a_{10}$

$a_{11}=2\times2^2\times2^3\times\cdots\times2^{10}\times a_1$

$=2^{1+2+3+\cdots+10}\times1=2^{55}$

$\therefore \log_2 a_{11}=\log_2 2^{55}=55$

07 답 ②

$\sqrt{n}a_{n+1}=\sqrt{n+1}a_n$에서 $a_{n+1}=\sqrt{\frac{n+1}{n}}a_n$이므로

n에 1, 2, 3, …, 63을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$a_2=\sqrt{\frac{2}{1}}a_1$

$a_3=\sqrt{\frac{3}{2}}a_2$

$a_4=\sqrt{\frac{4}{3}}a_3$

$\vdots$

$\times)\ a_{64}=\sqrt{\frac{64}{63}}a_{63}$

$a_{64}=\sqrt{\frac{2}{1}}\times\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\frac{4}{3}}\times\cdots\times\sqrt{\frac{64}{63}}\times a_1$

$=\sqrt{64}\times5=8\times5=40$

08 답 12

$a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$에 $n=3$을 대입하면

$a_4=2a_3+2^4=2a_3+16$

이때 $a_4=80$이므로 $2a_3+16=80$

$2a_3=64 \quad \therefore a_3=32$

$a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$에 $n=2$를 대입하면

$a_3=2a_2+2^3=2a_2+8$

이때 $a_3=32$이므로 $2a_2+8=32$

$2a_2=24 \quad \therefore a_2=12$

09 답 ⑤

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n\ (n\geq1)$이므로

$S_{n+1}-S_n=2S_n \quad \therefore S_{n+1}=3S_n$

즉 수열 $\{S_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

이때 첫째항이 $S_1=a_1=3$이므로

$S_n=3\times3^{n-1}=3^n$

$\therefore a_{100}=S_{100}-S_{99}=3^{100}-3^{99}=3^{99}(3-1)=2\times3^{99}$

10 답 ③

(가), (나)에서 $p(1), p(3), p(3^2), p(3^3), \cdots$이 참이다.

(가), (다)에서 $p(1), p(5), p(5^2), p(5^3), \cdots$이 참이다.

$p(3)$이 참이므로 (다)에서 $p(3\times5), p(3\times5^2), p(3\times5^3), \cdots$이 참이다.

$p(3^2)$이 참이므로 (다)에서 $p(3^2\times5), p(3^2\times5^2), p(3^2\times5^3), \cdots$이 참이다.

$\vdots$

즉 음이 아닌 정수 a, b에 대하여 $p(3^a\times5^b)$이 참이다.

① $p(30)=p(2\times3\times5)$

② $p(60)=p(2^2\times3\times5)$

③ $p(75)=p(3\times5^2)$

④ $p(90)=p(2\times3^2\times5)$

⑤ $p(105)=p(3\times5\times7)$

따라서 반드시 참인 명제는 ③이다.

11 답 30

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1\times2\times3=6$, (우변)$=\frac{1\times2\times3\times4}{4}=6$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}k(k+1)(k+2)=\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4}$ ……㉡

㉡의 양변에 $\boxed{\text{(가) }(m+1)(m+2)(m+3)}$을 더하면

$\sum_{k=1}^{m}k(k+1)(k+2)+(m+1)(m+2)(m+3)$

$=\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4}$

$+\boxed{\text{(가) }(m+1)(m+2)(m+3)}$

$=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{4}\times(m+4)$

$=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)(\boxed{\text{(나) }m+4})}{4}$

따라서 $n=m+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

따라서 $f(m)=(m+1)(m+2)(m+3)$, $g(m)=m+4$이므로

$f(1)=2\times3\times4=24$, $g(2)=2+4=6$

$\therefore f(1)+g(2)=24+6=30$

12 답 풀이 참조

(i) $n=1$일 때

$4^1-1=3$이므로 3의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때, 4^n-1이 3의 배수라 가정하면

$4^k-1=3N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$4^{k+1}-1=4\times4^k-1=4(3N+1)-1$

$=12N+3=3(4N+1)$

따라서 $n=k+1$일 때도 4^n-1은 3의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 4^n-1은 3의 배수이다.

13 답 (가) 2 (나) $1+h$ (다) $1+(k+1)h$

(i) $n=$ (가) 2 일 때

(좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2$, (우변)$=1+2h$

이므로 (좌변)$>$(우변)

즉 $n=$ (가) 2 일 때 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k\geq2$)일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k>1+kh$ ……㉡

㉡의 양변에 (나) $1+h$ 를 곱하면

$(1+h)^{k+1}>(1+kh)$ ((나) $1+h$)

$=1+(k+1)h+kh^2$

그런데 $kh^2>0$이므로

$1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h$

$\therefore (1+h)^{k+1}>$ (다) $1+(k+1)h$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $h>0$일 때, $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

14 답 670

꼭대기 층에서부터 각 층에 놓이는 정육면체의 개수를 차례로 $a_1, a_2, a_3, \cdots$이라 하면

$a_1=1$

$a_2=a_1+4$

$a_3=a_2+4\times2$

$a_4=a_3+4\times3$

⋮

$\therefore a_{n+1}=a_n+4n$

$a_{n+1}=a_n+4n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$a_2=a_1+4\times1$

$a_3=a_2+4\times2$

$a_4=a_3+4\times3$

⋮

$+)\ a_n=a_{n-1}+4(n-1)$

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4k$

$=1+4\times\frac{(n-1)n}{2}$

$=2n^2-2n+1$

따라서 10층 탑을 쌓을 때, 필요한 정육면체의 개수는

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2k^2-2k+1)$

$=2\times\frac{10\times11\times21}{6}-2\times\frac{10\times11}{2}+1\times10$

$=770-110+10=670$

서술형 1 답 59

$(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+36$에서

$a_{n+1}^2+2a_na_{n+1}+a_n^2=4a_na_{n+1}+36$

$a_{n+1}^2-2a_na_{n+1}+a_n^2=36$

$\therefore (a_{n+1}-a_n)^2=36$

이때 $a_n<a_{n+1}$이므로 $a_{n+1}-a_n=6$ ……❶

즉 수열 $\{a_n\}$은 공차가 6인 등차수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=5$이므로

$a_n=5+(n-1)\times6=6n-1$ ……❷

$\therefore a_{10}=6\times10-1=59$ ……❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	40%
❷ 일반항 a_n을 구할 수 있다.	40%
❸ a_{10}의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 2 답 15

$a_{2n+2}=a_{2n}+3$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_4=a_2+3=2+3=5$

$a_6=a_4+3=5+3=8$

$a_8=a_6+3=8+3=11$

$\therefore a_{10}=a_8+3=11+3=14$ ……❶

또 $a_{2n-1}=a_{2n+1}$의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$a_1=a_3=1$

$a_3=a_5=1$

$a_5=a_7=1$

$a_7=a_9=1$

$a_9=a_{11}=1$ ……❷

$\therefore a_{10}+a_{11}=14+1=15$ ……❸

채점 기준	비율
❶ a_{10}의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ a_{11}의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a_{10}+a_{11}$의 값을 구할 수 있다.	20%

서술형 3 답 300

50 %의 소금물 100 g과 30 %의 소금물 100 g을 섞은 소금물의 농도가 a_1 %이므로

$100\times\frac{50}{100}+100\times\frac{30}{100}=200\times\frac{a_1}{100}$

$50+30=2a_1$, $2a_1=80$ $\therefore a_1=40$ ……❶

a_n %의 소금물 100 g과 30 %의 소금물 100 g을 섞은 소금물의 농도가 a_{n+1} %이므로

$100\times\frac{a_n}{100}+100\times\frac{30}{100}=200\times\frac{a_{n+1}}{100}$

$a_n+30=2a_{n+1}$ $\therefore a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+15$ ……❷

따라서 $k=40$, $p=\frac{1}{2}$, $q=15$이므로

$kpq=40\times\frac{1}{2}\times15=300$ ……❸

채점 기준	비율
❶ a_1의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40%
❸ kpq의 값을 구할 수 있다.	20%

10% 핵심 기출 문제 1등급

p. 303~304

01 답 ①

$S_{n+1}-S_{n-1}=a_{n+1}+a_n$이므로 주어진 식은

$(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+4$

$a_{n+1}^2+2a_na_{n+1}+a_n^2=4a_na_{n+1}+4$

$a_{n+1}^2-2a_na_{n+1}+a_n^2=4$

$\therefore (a_{n+1}-a_n)^2=4$

이때 $a_n<a_{n+1}$이므로

$a_{n+1}-a_n=2$

즉 수열 $\{a_n\}$은 공차가 2인 등차수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=1$이므로

$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$

$\therefore a_{20}=2\times 20-1=39$

02 답 15

$a_{n+1}-a_n=2n-14$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
&a_2-a_1=2\times 1-14\\
&a_3-a_2=2\times 2-14\\
&a_4-a_3=2\times 3-14\\
&\quad\vdots\\
+)\ &a_n-a_{n-1}=2(n-1)-14\\
\hline
&a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}(2k-14)\\
&\qquad=2\times\frac{(n-1)n}{2}-14(n-1)\\
&\qquad=n^2-15n+14
\end{aligned}$$

$\therefore a_n=n^2-15n+14+a_1$

$=n^2-15n+14+36$

$=n^2-15n+50$

이때 $a_n=6$이므로 $n^2-15n+50=6$에서

$n^2-15n+44=0$, $(n-4)(n-11)=0$

$\therefore n=4$ 또는 $n=11$

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$4+11=15$

03 답 513

모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이므로

$\frac{1}{n+2}<\frac{a_n}{k}<\frac{1}{n}$에서 $\frac{1}{(n+2)a_n}<\frac{1}{k}<\frac{1}{na_n}$

$\therefore na_n<k<(n+2)a_n$

이때 na_n, $(n+2)a_n$은 모두 자연수이므로 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 k의 개수는

$(n+2)a_n-na_n-1=2a_n-1$

$\therefore a_{n+1}=2a_n-1$

위의 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=2a_1-1=2\times 2-1=3=2+1$

$a_3=2a_2-1=2\times 3-1=5=2^2+1$

$a_4=2a_3-1=2\times 5-1=9=2^3+1$

$\quad\vdots$

$\therefore a_{10}=2^9+1=512+1=513$

다른 풀이

$a_{n+1}=2a_n-1$에서 $a_{n+1}-1=2(a_n-1)$

즉 수열 $\{a_n-1\}$은 첫째항이 $a_1-1=1$, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n-1=1\times 2^{n-1}$ $\quad\therefore a_n=2^{n-1}+1$

$\therefore a_{10}=2^9+1=512+1$

$=513$

04 답 ②

㉠의 n에 $n-1$을 대입하면

$\frac{S_n}{n}=\sum_{k=1}^{n-1}S_k\ (n\geq 2)$ ……㉡

㉠−㉡을 하면

$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\sum_{k=1}^{n}S_k-\sum_{k=1}^{n-1}S_k$

$=S_n$

$\frac{S_{n+1}}{n+1}=S_n+\frac{S_n}{n}$

$=\frac{(n+1)S_n}{n}$

$\therefore \frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{\boxed{(\text{가})\ (n+1)^2}}{n}\ (n\geq 2)$

㉡에서 $\frac{S_2}{2}=S_1=a_1=1$ $\quad\therefore S_2=2$

$S_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}\times\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\times\frac{S_{n-2}}{S_{n-3}}\times\cdots\times\frac{S_3}{S_2}\times S_2$

$=\frac{n^2}{n-1}\times\frac{(n-1)^2}{n-2}\times\frac{(n-2)^2}{n-3}\times\cdots\times\frac{3^2}{2}\times 2$

$=n^2(n-1)(n-2)\times\cdots\times 3$

$=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1\times\frac{1}{2}\times n$

$=n!\times\boxed{(\text{나})\ \frac{n}{2}}\ (n\geq 3)$

이때 $a_n=S_n-S_{n-1}$이므로

$a_n=n!\times\frac{n}{2}-(n-1)!\times\frac{n-1}{2}$

$=\frac{n^2-n+1}{2}\times(n-1)!\ (n\geq 3)$

$a_1=1$, $a_2=S_2-S_1=2-1=1$이므로

$a_n=\begin{cases}1 & (n=1,\ 2)\\ \frac{n^2-n+1}{2}\times(n-1)! & (n\geq 3)\end{cases}$

따라서 $f(n)=(n+1)^2$, $g(n)=\frac{n}{2}$이므로

$f(4)=5^2=25$, $g(20)=\frac{20}{2}=10$

$\therefore f(4)\times g(20)=25\times 10=250$

05 답 ①

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1\times1=1$, (우변)$=\dfrac{1\times2\times3\times4}{24}=1$

(좌변)$=$(우변)$=$ (가) 1 이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}k\{k+(k+1)+(k+2)+\cdots+m\}=\frac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24}$$

이 성립한다.

$n=m+1$일 때, ㉠이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1}k\{k+(k+1)+(k+2)+\cdots+(m+1)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}k\{k+(k+1)+\cdots+(m+1)\}+\sum_{k=m+1}^{m+1}k\{k+(k+1)+\cdots+(m+1)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}k\{k+(k+1)+\cdots+(m+1)\}+\boxed{\text{(나)}\ (m+1)^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}k\{k+(k+1)+\cdots+m\}+(m+1)\sum_{k=1}^{m}k+\boxed{\text{(나)}\ (m+1)^2}$$

$$=\boxed{\text{(다)}\ \frac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24}}+\frac{m(m+1)^2}{2}+\boxed{\text{(나)}\ (m+1)^2}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)(3m+4)}{24}$$

따라서 $n=m+1$일 때도 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

따라서 $a=1$, $f(m)=(m+1)^2$

$g(m)=\dfrac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24}$이므로

$f(2)=3^2=9$

$g(3)=\dfrac{3\times4\times5\times10}{24}=25$

$\therefore a+f(2)+g(3)=1+9+25=35$

참고 위의 풀이 과정에서

$$\frac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24}+\frac{m(m+1)^2}{2}+(m+1)^2$$

$$=\frac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24}+\frac{(m+2)(m+1)^2}{2}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)}{2}\times\left\{\frac{m(3m+1)}{12}+(m+1)\right\}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)}{2}\times\frac{3m^2+13m+12}{12}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)(3m+4)}{24}$$

06 답 142

a_n이 홀수이면 $a_{n+1}=a_n+3$, 즉 a_{n+1}은 짝수이다.

따라서 a_{n+1}이 홀수이면 a_n은 짝수이다.

이때 $a_5=5$이므로 a_4는 짝수이어야 한다.

즉 $a_5=\dfrac{a_4}{2}=5$이므로 $a_4=10$

수열 $\{a_n\}$의 규칙에 따라 a_5, a_4, a_3, a_2, a_1의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

a_5	$a_5=5$		
a_4	$a_4=10$		
a_3	a_3이 홀수	a_3이 짝수	
	$a_3+3=10$에서 $a_3=7$	$\dfrac{a_3}{2}=10$에서 $a_3=20$	
a_2	$\dfrac{a_2}{2}=7$에서 $a_2=14$	a_2가 홀수	a_2가 짝수
		$a_2+3=20$에서 $a_2=17$	$\dfrac{a_2}{2}=20$에서 $a_2=40$
a_1 (짝수)	$\dfrac{a_1}{2}=14$에서 $a_1=28$	$\dfrac{a_1}{2}=17$에서 $a_1=34$	$\dfrac{a_1}{2}=40$에서 $a_1=80$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 될 수 있는 수는 28, 34, 80이므로 모든 수의 합은

$28+34+80=142$

참고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=14$일 때, $14=a_1+3$ $\therefore a_1=11$

$a_2=40$일 때, $40=a_1+3$ $\therefore a_1=37$

07 답 ⑤

$$a_{n+2}=\begin{cases}a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 3의 배수가 아닌 경우})\\ \dfrac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 3의 배수인 경우})\end{cases}$$

이고 $a_7=40$이므로 a_6의 값에 따라 경우를 다음과 같이 나누면

(i) a_6이 3의 배수인 경우

$a_7=\dfrac{1}{3}a_6=40$ $\therefore a_6=120$

이때 $a_7=40$은 3의 배수가 아니므로

$a_8=a_7+a_6=40+120=160$

$a_8=160$은 3의 배수가 아니므로

$a_9=a_8+a_7=160+40=200$

(ii) a_6이 3의 배수가 아닌 경우

i) 자연수 k에 대하여 $a_6=3k-2$이면

$a_7=a_6+a_5$에서

$a_5=a_7-a_6=40-(3k-2)$

$=42-3k=3(14-k)$

이때 a_5는 자연수이므로

$a_5=3(14-k)>0$에서

$14-k>0$ $\therefore k<14$ ……㉠

한편 $a_5=3(14-k)$는 3의 배수이므로

$a_6=\dfrac{1}{3}a_5$에서 $3k-2=\dfrac{1}{3}\times3(14-k)$

$3k-2=14-k$, $4k=16$ $\therefore k=4$

이것은 ㉠을 만족시키므로

$a_6=3\times4-2=10$

$a_7=40$은 3의 배수가 아니므로

$a_8=a_7+a_6=40+10=50$

$a_8=50$은 3의 배수가 아니므로

$a_9=a_8+a_7=50+40=90$

ⅱ) 자연수 k에 대하여 $a_6=3k-1$이면

$a_7=a_6+a_5$에서

$a_5=a_7-a_6=40-(3k-1)=41-3k$

이때 a_5는 자연수이므로

$a_5=41-3k>0$에서

$3k<41 \quad \therefore k<\frac{41}{3}=13.6\cdots$ ……㉡

한편 $a_5=41-3k$는 3의 배수가 아니므로

$a_6=a_5+a_4$에서

$a_4=a_6-a_5=(3k-1)-(41-3k)$

$=6k-42=3(2k-14)$

이때 a_4는 자연수이므로

$a_4=3(2k-14)>0$에서

$2k-14>0 \quad \therefore k>7$ ……㉢

㉡, ㉢에서 $7<k<13.6\cdots$ ……㉣

한편 $a_4=3(2k-14)$는 3의 배수이므로

$a_5=\frac{1}{3}a_4$에서 $41-3k=\frac{1}{3}\times3(2k-14)$

$41-3k=2k-14,\ 5k=55 \quad \therefore k=11$

이것은 ㉣을 만족시키므로

$a_6=3\times11-1=32$

$a_7=40$은 3의 배수가 아니므로

$a_8=a_7+a_6=40+32=72$

$a_8=72$는 3의 배수이므로

$a_9=\frac{1}{3}a_8=\frac{1}{3}\times72=24$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 a_9의 값은 200, 90, 24이므로 a_9의 최댓값은 $M=200$, 최솟값은 $m=24$

$\therefore M+m=200+24=224$

memo