: 개념 해결의 법칙

정답과 해설

Ⅰ 함수의 극한과 연속

1 | 함수의 극한 002
2 | 함수의 연속 016

Ⅱ 미분

3 | 미분계수와 도함수 027
4 | 도함수의 활용 (1) 041
5 | 도함수의 활용 (2) 051
6 | 도함수의 활용 (3) 066

Ⅲ 적분

7 | 부정적분 079
8 | 정적분 090
9 | 정적분의 활용 105

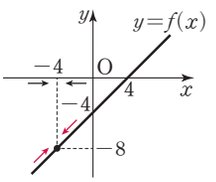
1 함수의 극한

1 함수의 극한

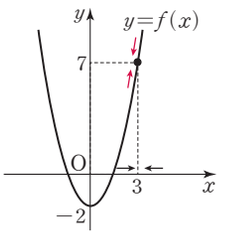
개념 확인 8~12쪽

1 (1) -8 (2) 7 (3) -2 (4) 6
2 (1) 0 (2) 0 (3) -3 (4) 1
3 (1) ∞ (2) $-\infty$
4 (1) $-\infty$, $-\infty$ (2) ∞, ∞
5 (1) ∞ (2) ∞ (3) $-\infty$ (4) ∞
6 (1) 3 (2) 2 (3) 존재하지 않는다.

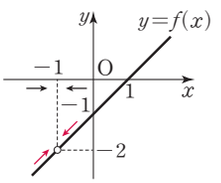
1 (1) $f(x)=x-4$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이 그래프에서 x의 값이 -4에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -8에 한없이 가까워지므로
$\lim\limits_{x\to -4}(x-4)=-8$



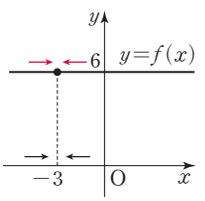
(2) $f(x)=x^2-2$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이 그래프에서 x의 값이 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 7에 한없이 가까워지므로
$\lim\limits_{x\to 3}(x^2-2)=7$



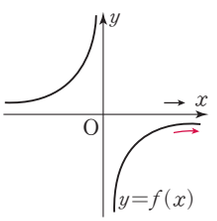
(3) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$이라 하면
$x\neq -1$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1}=x-1$
이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -2에 한없이 가까워지므로
$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=-2$



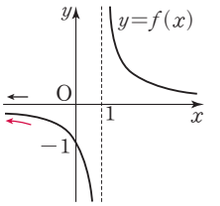
(4) $f(x)=6$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 -3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 6에 한없이 가까워지므로 $\lim\limits_{x\to -3}6=6$



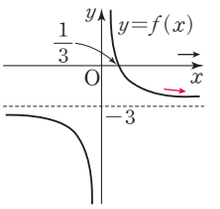
2 (1) $f(x)=-\dfrac{1}{x}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$



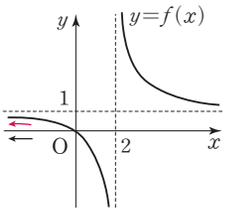
(2) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로
$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$



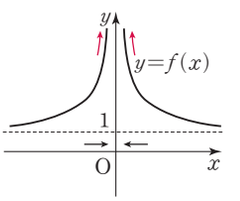
(3) $f(x)=\dfrac{1}{x}-3$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 -3에 한없이 가까워지므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}-3\right)=-3$



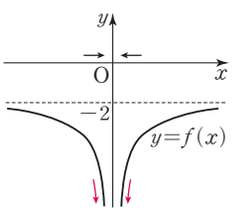
(4) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{2}{x-2}+1$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{x-2}=1$



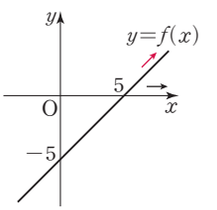
3 (1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+1$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)=\infty$



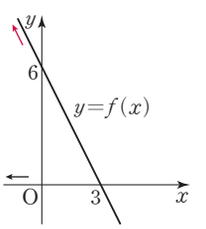
(2) $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}-2$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2}-2\right)=-\infty$



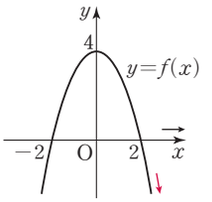
5 (1) $f(x)=x-5$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값도 한없이 커지므로
$\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)=\infty$



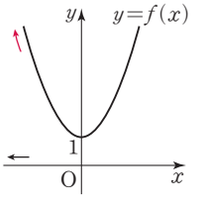
(2) $f(x)=-2x+6$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로
$\lim\limits_{x\to -\infty}(-2x+6)=\infty$



(3) $f(x)=4-x^2$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로
$\lim_{x\to\infty}(4-x^2)=-\infty$



(4) $f(x)=x^2+1$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로
$\lim_{x\to-\infty}(x^2+1)=\infty$



6 (1) x의 값이 -1보다 크면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to-1+}f(x)=3$

(2) x의 값이 -1보다 작으면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to-1-}f(x)=2$

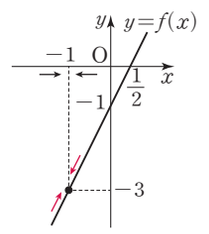
(3) $\lim_{x\to-1+}f(x)\neq\lim_{x\to-1-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

개념 드릴

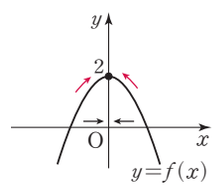
13쪽

1 (1) -3 (2) 2 (3) $\sqrt{2}$ (4) $-\frac{1}{4}$
2 (1) 0 (2) -1 (3) 1 (4) 2
3 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) ∞ (4) $-\infty$
4 (1) 0 (2) 0 (3) 0 (4) 1 (5) 2 (6) 존재하지 않는다.

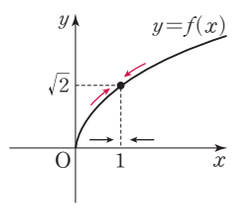
1 (1) $f(x)=2x-1$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이 그래프에서 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -3에 한없이 가까워지므로
$\lim_{x\to-1}(2x-1)=-3$



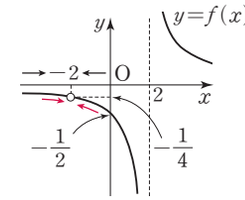
(2) $f(x)=-x^2+2$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로
$\lim_{x\to0}(-x^2+2)=2$



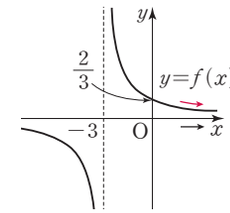
(3) $f(x)=\sqrt{2x}$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이 그래프에서 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $\sqrt{2}$에 한없이 가까워지므로
$\lim_{x\to1}\sqrt{2x}=\sqrt{2}$



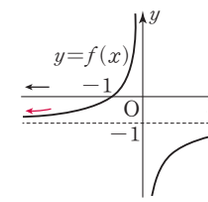
(4) $f(x)=\frac{x+2}{x^2-4}$라 하면
$x\neq\pm2$일 때, $f(x)=\frac{x+2}{x^2-4}=\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x-2}$
이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이 그래프에서 x의 값이 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $-\frac{1}{4}$에 한없이 가까워지므로
$\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{x^2-4}=-\frac{1}{4}$



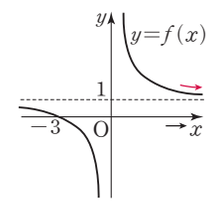
2 (1) $f(x)=\frac{2}{x+3}$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로
$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x+3}=0$



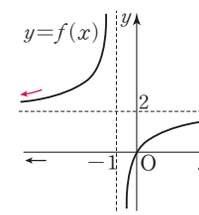
(2) $f(x)=-\frac{1}{x}-1$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로
$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}-1\right)=-1$



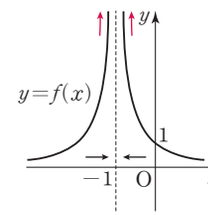
(3) $f(x)=\frac{3}{x}+1$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}+1\right)=1$



(4) $f(x)=\frac{2x}{x+1}=-\frac{2}{x+1}+2$라 하면
$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로
$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x+1}=2$

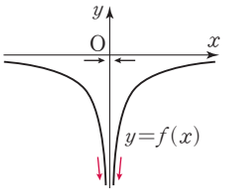


3 (1) $f(x)=\frac{1}{|x+1|}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로
$\lim_{x\to-1}\frac{1}{|x+1|}=\infty$



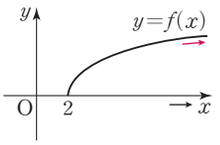
(2) $f(x)=-\dfrac{1}{|x|}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)=-\infty$



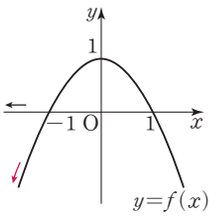
(3) $f(x)=\sqrt{x-2}$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값도 한없이 커지므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x-2}=\infty$



(4) $f(x)=-x^2+1$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값도 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2+1)=-\infty$



4 (1) x의 값이 -1보다 크면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=0$

(2) x의 값이 -1보다 작으면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=0$

(3) $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=0$

(4) x의 값이 1보다 크면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$

(5) x의 값이 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=2$

(6) $\lim\limits_{x\to1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1-}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$는 존재하지 않는다.

필수 예제 01 $x\longrightarrow a$일 때의 함수의 수렴과 발산 14쪽

01-1 답 (1) -4 (2) 1 (3) ∞ (4) $-\infty$

|전략| 함수의 그래프를 그려 $x\longrightarrow a$일 때의 함수의 극한을 조사한다.

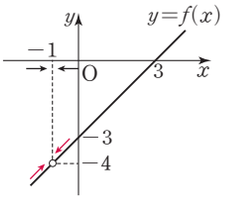
(1) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$이라 하면

$x\neq-1$일 때,

$f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x-3)}{x+1}=x-3$

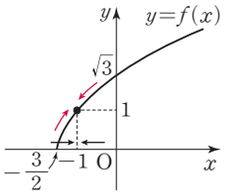
이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -4에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}=-4$



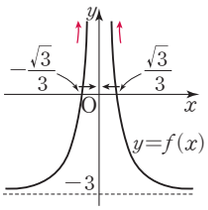
(2) $f(x)=\sqrt{2x+3}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이 그래프에서 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to-1}\sqrt{2x+3}=1$



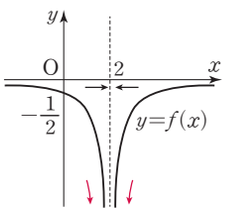
(3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-3$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-3\right)=\infty$



(4) $f(x)=-\dfrac{1}{|x-2|}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim\limits_{x\to2}\left(-\dfrac{1}{|x-2|}\right)=-\infty$



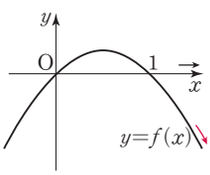
필수 예제 02 $x\longrightarrow\infty$, $x\longrightarrow-\infty$일 때의 함수의 수렴과 발산 15쪽

02-1 답 (1) $-\infty$ (2) -1 (3) ∞ (4) 2

|전략| 함수의 그래프를 그려 $x\longrightarrow\infty$ 또는 $x\longrightarrow-\infty$일 때의 함수의 극한을 조사한다.

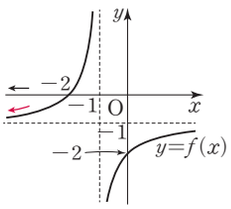
(1) $f(x)=-x^2+x$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim\limits_{x\to\infty}(-x^2+x)=-\infty$

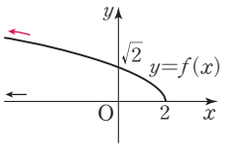


(2) $f(x)=-\dfrac{1}{x+1}-1$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{x+1}-1\right)=-1$



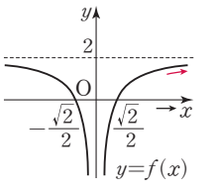
(3) $f(x)=\sqrt{2-x}$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}=\infty$

(4) $f(x)=2-\frac{1}{x^2}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)=2$

필수 예제 03 우극한과 좌극한 16쪽

03-1 답 (1) −1 (2) 1 (3) 0 (4) −1 (5) 존재하지 않는다. (6) 2

|전략| 구하는 극한값이 우극한인지 좌극한인지 확인한다. 또, 우극한과 좌극한이 모두 존재하고 그 값이 같을 때만 극한값이 존재한다고 한다.

(1) x의 값이 0보다 크면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 −1에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to0+}f(x)=-1$

(2) x의 값이 −2보다 작으면서 −2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to-2-}f(x)=1$

(3) x의 값이 −1보다 크면서 −1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to-1+}f(x)=0$

(4) (1)에서 $\lim_{x\to0+}f(x)=-1$ …… ㉠

x의 값이 0보다 작으면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 −1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to0-}f(x)=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=-1$

(5) x의 값이 1보다 크면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 −1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=-1$ …… ㉠

x의 값이 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)$는 존재하지 않는다.

(6) x의 값이 2보다 크면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=2$ …… ㉠

x의 값이 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to2-}f(x)=2$ …… ㉡

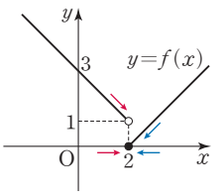
㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=2$

03-2 답 (1) 0 (2) 1

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 주어진 극한값을 구한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(1) x의 값이 2보다 크면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to2+}f(x)=0$

(2) x의 값이 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to2-}f(x)=1$

필수 예제 04 함수의 극한값의 존재 17쪽

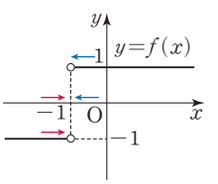
04-1 답 (1) 존재하지 않는다. (2) 존재하지 않는다. (3) 0 (4) 0

|전략| 우극한과 좌극한을 각각 구하고 그 값이 같은지 다른지 파악한다.

(1) $f(x)=\frac{|x+1|}{x+1}$이라 하면

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x+1} & (x>-1)\\ \frac{-(x+1)}{x+1} & (x<-1)\end{cases}=\begin{cases}1 & (x>-1)\\ -1 & (x<-1)\end{cases}$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore\ \lim_{x\to-1+}\frac{|x+1|}{x+1}=1,$

$\lim_{x\to-1-}\frac{|x+1|}{x+1}=-1$

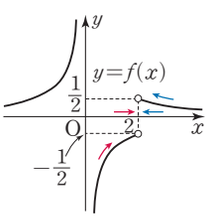
따라서 $\lim_{x\to-1+}\frac{|x+1|}{x+1}\neq\lim_{x\to-1-}\frac{|x+1|}{x+1}$이므로

$\lim_{x\to-1}\frac{|x+1|}{x+1}$의 값은 존재하지 않는다.

(2) $f(x)=\frac{|x-2|}{x^2-2x}$라 하면

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{x(x-2)} & (x>2)\\ \frac{-(x-2)}{x(x-2)} & (x<2)\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x>2)\\ -\frac{1}{x} & (x<2)\end{cases}$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore\ \lim_{x\to2+}\frac{|x-2|}{x^2-2x}=\frac{1}{2},$

$\lim_{x\to2-}\frac{|x-2|}{x^2-2x}=-\frac{1}{2}$

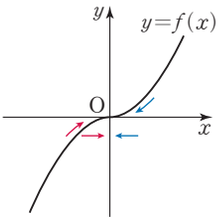
따라서 $\lim_{x\to2+}\frac{|x-2|}{x^2-2x}\neq\lim_{x\to2-}\frac{|x-2|}{x^2-2x}$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{|x-2|}{x^2-2x}$의 값은 존재하지 않는다.

(3) $f(x)=x|x|$라 하면

$$f(x)=\begin{cases} x\times x & (x\geq 0) \\ x\times(-x) & (x<0) \end{cases}=\begin{cases} x^2 & (x\geq 0) \\ -x^2 & (x<0) \end{cases}$$

이므로 $y=f(x)$ 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore \lim_{x\to 0+} x|x|=0,\ \lim_{x\to 0-} x|x|=0$

따라서 $\lim_{x\to 0+} x|x|=\lim_{x\to 0-} x|x|=0$

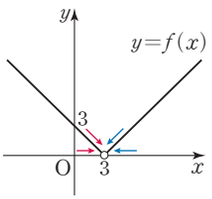
이므로

$\lim_{x\to 0} x|x|=0$

(4) $f(x)=\dfrac{x^2-6x+9}{|x-3|}$라 하면

$$f(x)=\frac{(x-3)^2}{|x-3|}=\begin{cases} \dfrac{(x-3)^2}{x-3} & (x>3) \\ \dfrac{(x-3)^2}{-(x-3)} & (x<3) \end{cases}=\begin{cases} x-3 & (x>3) \\ -x+3 & (x<3) \end{cases}$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore \lim_{x\to 3+} \dfrac{x^2-6x+9}{|x-3|}=0,$

$\lim_{x\to 3-} \dfrac{x^2-6x+9}{|x-3|}=0$

따라서 $\lim_{x\to 3+} \dfrac{x^2-6x+9}{|x-3|}=\lim_{x\to 3-} \dfrac{x^2-6x+9}{|x-3|}=0$이므로

$\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{|x-3|}=0$

필수 예제 05 함수의 극한값이 존재할 조건 18쪽

05-1 답 2

|전략| 함수의 극한값이 존재하면 우극한과 좌극한이 같음을 이용한다.

$x\geq -1$일 때, $f(x)=-2x+a$이므로

$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+} (-2x+a)=2+a$

$x<-1$일 때, $f(x)=x+5$이므로

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-} (x+5)=-1+5=4$

$\lim_{x\to -1} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1-} f(x)$이어야 하므로

$2+a=4 \qquad \therefore a=2$

05-2 답 5

|전략| 함수의 극한값이 존재하면 우극한과 좌극한이 같음을 이용한다.

$x\geq 2$일 때, $f(x)=10-ax$이므로

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+} (10-ax)=10-2a$

$x<2$일 때, $f(x)=bx$이므로

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-} bx=2b$

$\lim_{x\to 2} f(x)$의 값이 존재하므로 $\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)$에서

$10-2a=2b,\ 2a+2b=10 \qquad \therefore a+b=5$

05-3 답 15

|전략| 함수의 극한값이 존재하면 우극한과 좌극한이 같음을 이용한다.

$x\geq 1$일 때, $f(x)=ax^2+x+1$이므로

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+} (ax^2+x+1)=a+1+1=a+2$

$x<1$일 때, $f(x)=-3x+8$이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} (-3x+8)=-3+8=5$

$\lim_{x\to 1} f(x)$의 값이 존재하므로 $\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)$에서

$a+2=5 \qquad \therefore a=3$

따라서 $f(x)=\begin{cases} 3x^2+x+1 & (x\geq 1) \\ -3x+8 & (x<1) \end{cases}$이므로

$f(2)=3\times 2^2+2+1=15$

2 함수의 극한에 대한 성질

개념 확인 19~20쪽

1 (1) 14 (2) -7 (3) -15 (4) $-\dfrac{1}{10}$

2 (1) $\dfrac{3}{2}$ (2) 2 (3) ∞ (4) $-\dfrac{1}{2}$

1 (1) $\lim_{x\to 1} \{f(x)+3g(x)\}=\lim_{x\to 1} f(x)+3\lim_{x\to 1} g(x)$

$=-1+3\times 5=14$

(2) $\lim_{x\to 1} \{2f(x)-g(x)\}=2\lim_{x\to 1} f(x)-\lim_{x\to 1} g(x)$

$=2\times(-1)-5=-7$

(3) $\lim_{x\to 1} 3f(x)g(x)=3\lim_{x\to 1} f(x)\times\lim_{x\to 1} g(x)$

$=3\times(-1)\times 5=-15$

(4) $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{2g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to 1} f(x)}{2\lim_{x\to 1} g(x)}=\dfrac{-1}{2\times 5}=-\dfrac{1}{10}$

2 (1) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to -1} \dfrac{x-2}{x-1}$

$=\dfrac{-1-2}{-1-1}=\dfrac{3}{2}$

(2) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2x^2}{x^2+3}=\lim_{x\to \infty} \dfrac{2}{1+\dfrac{3}{x^2}}=\dfrac{2}{1+0}=2$

(3) $\lim_{x\to \infty} (x^2-x)=\lim_{x\to \infty} x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\infty$

(4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{2}{x+2}-1\right)=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\times\dfrac{-x}{x+2}\right)$

$=\lim_{x\to 0} \dfrac{-1}{x+2}$

$=\dfrac{-1}{0+2}=-\dfrac{1}{2}$

개념 드릴 21쪽

1 (1) -3 (2) 6 (3) -3 (4) $-\frac{1}{3}$

2 (1) 2 (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) 2

3 (1) 5 (2) $\frac{4}{3}$ (3) 3 (4) $\frac{1}{6}$

4 (1) ∞ (2) 0

5 (1) 2 (2) $\frac{1}{2}$

1 (1) $\lim\limits_{x\to -1}(-2x^2+x)=-2\lim\limits_{x\to -1}x^2+\lim\limits_{x\to -1}x$

$=-2\times(-1)^2+(-1)=-3$

(2) $\lim\limits_{x\to 3}(x+3)(x-2)=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)\times\lim\limits_{x\to 3}(x-2)$

$=(\lim\limits_{x\to 3}x+\lim\limits_{x\to 3}3)(\lim\limits_{x\to 3}x-\lim\limits_{x\to 3}2)$

$=(3+3)\times(3-2)=6$

다른 풀이 $\lim\limits_{x\to 3}(x+3)(x-2)=\lim\limits_{x\to 3}(x^2+x-6)$

$=\lim\limits_{x\to 3}x^2+\lim\limits_{x\to 3}x-\lim\limits_{x\to 3}6$

$=3^2+3-6=6$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x+1}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x-2)}$

$=\frac{2\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}1}{\lim\limits_{x\to 1}x-\lim\limits_{x\to 1}2}$

$=\frac{2\times 1+1}{1-2}=-3$

(4) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x}{x^2+2}=\frac{\lim\limits_{x\to -2}x}{\lim\limits_{x\to -2}(x^2+2)}$

$=\frac{\lim\limits_{x\to -2}x}{\lim\limits_{x\to -2}x^2+\lim\limits_{x\to -2}2}$

$=\frac{-2}{(-2)^2+2}=-\frac{1}{3}$

2 (1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+3}{x+1}$

$=\frac{1+3}{1+1}=2$

(2) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{x^2-x+1}$

$=\frac{1}{(-1)^2-(-1)+1}=\frac{1}{3}$

(3) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim\limits_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}$

$=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1)=1+1=2$

3 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x}{x-6}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{1-\frac{6}{x}}=5$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-3}{3x-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}}{3-\frac{5}{x}}=\frac{4}{3}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+1}{x^2+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{5}{x^2}}=3$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{6x^3+x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^3}}{6+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{6}$

4 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^4-x^2+1)=\lim\limits_{x\to\infty}x^4\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)=\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4}-x)(\sqrt{x^2+4}+x)}{\sqrt{x^2+4}+x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}=0$

5 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3x+1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{2x}{(x+1)(3x+1)}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{(x+1)(3x+1)}$

$=\frac{2}{1\times 1}=2$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{x-1}\left(1-\frac{4}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x-1}\times\frac{x-1}{x+3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{x+3}=\frac{2}{1+3}=\frac{1}{2}$

필수 예제 01 함수의 극한에 대한 성질 22쪽

01-1 답 $\frac{3}{4}$

|전략| $2f(x)-g(x)=h(x)$로 놓고 $\lim\limits_{x\to 2}h(x)=4$임을 이용한다.

$2f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 $g(x)=2f(x)-h(x)$이고

$\lim\limits_{x\to 2}h(x)=4$이다.

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)}{2f(x)+g(x)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)\{2f(x)-h(x)\}}{2f(x)+\{2f(x)-h(x)\}}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2\{f(x)\}^2-f(x)h(x)}{4f(x)-h(x)}$

$=\frac{2\times 3^2-3\times 4}{4\times 3-4}=\frac{3}{4}$

다른 풀이 $2f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 $g(x)=2f(x)-h(x)$이고 $\lim_{x\to 2}h(x)=4$이므로

$$\lim_{x\to 2}g(x)=\lim_{x\to 2}\{2f(x)-h(x)\}$$
$$=2\times 3-4=2$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)}{2f(x)+g(x)}=\frac{3\times 2}{2\times 3+2}=\frac{3}{4}$$

01-2 답 $\frac{4}{3}$

|전략| 주어진 식을 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$를 이용할 수 있는 형태로 변형한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+2x}{2f(x)-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}+2}{2\times\frac{f(x)}{x}-1}$$
$$=\frac{2+2}{2\times 2-1}=\frac{4}{3}$$

필수 예제 02 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한 23쪽

02-1 답 (1) 12 (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) -4

|전략| 분모, 분자가 모두 다항식이면 분모, 분자를 각각 인수분해하고, 분모, 분자 중 무리식이 있으면 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

(1) $$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2}(x^2-2x+4)$$
$$=(-2)^2-2\times(-2)+4=12$$

(2) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-1)}{(x+3)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-1}{x+3}$$
$$=\frac{1^2+1-1}{1+3}=\frac{1}{4}$$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{3+x}-\sqrt{3})(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})}{\sqrt{3}x(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{3}x(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}\times(\sqrt{3}+\sqrt{3})}=\frac{1}{6}$$

(4) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^2+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-3)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x+1}$$
$$=\frac{(1-3)\times(2+2)}{1+1}=-4$$

필수 예제 03 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 24쪽

03-1 답 (1) 0 (2) $-\infty$ (3) 1 (4) -2

|전략| 분모, 분자를 분모의 최고차항으로 각각 나눈 후 $\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x^p}=0$ (c는 상수, p는 양수)임을 이용한다.

(1) 분모, 분자를 x^2으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2-x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=0$$

(2) $x=-t$라 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-3}{x^2-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t^3-3}{t^2-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t-\frac{3}{t^2}}{1-\frac{1}{t^2}}=-\infty$$

(3) 분모, 분자를 x로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}-4}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{x}}-\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}}=1$$

(4) $x=-t$라 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t+1}{\sqrt{t^2-t}-1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}-\frac{1}{t}}=-2$$

필수 예제 04 $\infty-\infty$ 꼴의 극한 25쪽

04-1 답 (1) $-\infty$ (2) 2 (3) $\frac{1}{2}$ (4) -1

|전략| 다항식이면 최고차항으로 묶고, 무리식이면 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

(1) $$\lim_{x\to-\infty}(-2x^2-x+1)=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(-2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)=1+1=2$$

(3) $$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+2x-1}-2x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+2x-1}-2x)(\sqrt{4x^2+2x-1}+2x)}{\sqrt{4x^2+2x-1}+2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+2x-1}+2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+2}$$
$$=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$$

(4) $x=-t$라 하면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-2t}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-2t}-t)(\sqrt{t^2-2t}+t)}{\sqrt{t^2-2t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{t^2-2t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{t}}+1}$$
$$=\frac{-2}{1+1}=-1$$

필수 예제 05 $\infty\times0$ 꼴의 극한 26쪽

05-1 (1) $-\frac{1}{9}$ (2) $-\frac{1}{54}$ (3) 2 (4) 1

|전략| 통분 또는 유리화하여 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty\times c$, $\frac{c}{\infty}$ (c는 상수) 꼴로 변형한다.

(1) $\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3}\right)$

$=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{1}{x+1}\times\frac{x+1}{3(x-2)}\right\}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{3(x-2)}$

$=\frac{1}{3\times(-1-2)}=-\frac{1}{9}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x+9}}-\frac{1}{3}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\times\frac{3-\sqrt{x+9}}{3\sqrt{x+9}}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{(3-\sqrt{x+9})(3+\sqrt{x+9})}{3\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{3\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})}$

$=\frac{-1}{3\times3\times(3+3)}=-\frac{1}{54}$

(3) $\lim_{x\to\infty}2x\left(1-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\left(2x\times\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{2x\times\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}\right\}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x\times2}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x+1+\sqrt{x^2-1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

$=\frac{4}{1+1}=2$

(4) $x=-t$라 하면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}+1\right)$

$=\lim_{t\to\infty}\left\{-t\times\left(\frac{-t}{\sqrt{t^2-2t}}+1\right)\right\}$

$=\lim_{t\to\infty}\left(-t\times\frac{-t+\sqrt{t^2-2t}}{\sqrt{t^2-2t}}\right)$

$=\lim_{t\to\infty}\left\{-t\times\frac{(\sqrt{t^2-2t}-t)(\sqrt{t^2-2t}+t)}{\sqrt{t^2-2t}(\sqrt{t^2-2t}+t)}\right\}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{-t\times(-2t)}{\sqrt{t^2-2t}(\sqrt{t^2-2t}+t)}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2}{t^2-2t+\sqrt{t^4-2t^3}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{2}{1-\frac{2}{t}+\sqrt{1-\frac{2}{t}}}$

$=\frac{2}{1+1}=1$

3 함수의 극한의 응용

개념 확인 27~28쪽

1 (1) -2 (2) 2

2 (1) 7 (2) $\frac{1}{3}$

1 (1) $\lim_{x\to2}\frac{ax+4}{x-2}=-2$에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(ax+4)=0$

즉, $2a+4=0$이므로 $a=-2$

(2) $\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2+3x+a}=1$에서 $1\neq0$이고

$\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}(x^2+3x+a)=0$

즉, $1-3+a=0$이므로 $a=2$

2 (1) 모든 실수 x에 대하여 $4x-1\le f(x)\le x^2+3$이고

$\lim_{x\to2}(4x-1)=7$, $\lim_{x\to2}(x^2+3)=7$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to2}f(x)=7$

(2) 모든 양의 실수 x에 대하여 $\frac{x-1}{3x}<f(x)<\frac{x+1}{3x}$이고

$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{3x}=\frac{1}{3}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{3x}=\frac{1}{3}$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{3}$

개념 드릴 29쪽

1 (1) -3 (2) -4 (3) 2 (4) 12 (5) 1 (6) 3 (7) -2 (8) 2

2 (1) $a=4, b=4$ (2) $a=3, b=-2$

(3) $a=-1, b=3$ (4) $a=-2, b=-\frac{1}{5}$

3 (1) -2 (2) 5

1 (1) $\lim_{x\to-1}\frac{ax-3}{x+1}=-3$에서 $\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}(ax-3)=0$

즉, $-a-3=0$이므로 $a=-3$

(2) $\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x+a}{x-1}=5$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(x^2+3x+a)=0$

즉, $1+3+a=0$이므로 $a=-4$

(3) $\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-8}{x-2}=6$에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(x^2+ax-8)=0$

즉, $4+2a-8=0$이므로 $a=2$

(4) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-7x+a}{x-3}=-1$에서 $\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to3}(x^2-7x+a)=0$

즉, $9-21+a=0$이므로 $a=12$

(5) $\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x}{x+a}=-1$에서 $-1\neq0$이고

$\lim_{x\to-1}(x^2+x)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}(x+a)=0$

즉, $-1+a=0$이므로 $a=1$

(6) $\lim_{x\to-3}\frac{x^2-x-12}{x+a}=-7$에서 $-7\neq0$이고

$\lim_{x\to-3}(x^2-x-12)=0$이므로

$\lim_{x\to-3}(x+a)=0$

즉, $-3+a=0$이므로 $a=3$

(7) $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-x+a}=\frac{1}{3}$에서 $\frac{1}{3}\neq0$이고

$\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(x^2-x+a)=0$

즉, $4-2+a=0$이므로 $a=-2$

(8) $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax-3}=\frac{1}{4}$에서 $\frac{1}{4}\neq0$이고

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(x^2+ax-3)=0$

즉, $1+a-3=0$이므로 $a=2$

2 (1) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-a}{x-2}=b$에서 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(x^2-a)=0$

즉, $4-a=0$이므로 $a=4$

$a=4$를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)=4$

$\therefore b=4$

(2) $\lim_{x\to-1}\frac{ax^2+4x+1}{x+1}=b$에서 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}(ax^2+4x+1)=0$

즉, $a-4+1=0$이므로 $a=3$

$a=3$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+4x+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(3x+1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}(3x+1)=-2$

$\therefore b=-2$

(3) $\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x+a}=b$에서 0이 아닌 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to1}(x^2+x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(x+a)=0$

즉, $1+a=0$이므로 $a=-1$

$a=-1$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x+2)=3$

$\therefore b=3$

(4) $\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{2x^2+3x+a}=b$에서 0이 아닌 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to-2}(x+2)=0$이므로

$\lim_{x\to-2}(2x^2+3x+a)=0$

즉, $8-6+a=0$이므로 $a=-2$

$a=-2$를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{2x^2+3x-2}=\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{(x+2)(2x-1)}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{1}{2x-1}=-\frac{1}{5}$

$\therefore b=-\frac{1}{5}$

3 (1) 모든 실수 x에 대하여

$-x^2+x-2\le f(x)\le x^2-3x$이고

$\lim_{x\to1}(-x^2+x-2)=-2$, $\lim_{x\to1}(x^2-3x)=-2$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to1}f(x)=-2$

(2) 모든 양의 실수 x에 대하여 $5-\frac{1}{x}<f(x)<5+\frac{1}{x}$이고

$\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{1}{x}\right)=5$, $\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{1}{x}\right)=5$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=5$

필수 예제 01 극한값을 이용한 미정계수의 결정 30쪽

01-1 답 (1) $a=4, b=2$ (2) $a=5, b=-3$

| 전략 | (1) 극한값이 존재하고 (분모) → 0이면 (분자) → 0임을 이용한다.
(2) 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) → 0이면 (분모) → 0임을 이용한다.

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+ax+b+1}{x+1}=2$에서 $\lim\limits_{x\to -1}(x+1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to -1}(x^2+ax+b+1)=0$

$1-a+b+1=0 \quad \therefore b=a-2$ …… ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+ax+a-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x+a-1)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to -1}(x+a-1)=a-2$

즉, $a-2=2$이므로 $a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=2$

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x+a}+b}=3$에서 $3\neq 0$이고 $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{2x+a}+b)=0$

$\sqrt{4+a}+b=0 \quad \therefore b=-\sqrt{4+a}$ …… ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x+a}-\sqrt{4+a}}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(\sqrt{2x+a}+\sqrt{4+a})}{(\sqrt{2x+a}-\sqrt{4+a})(\sqrt{2x+a}+\sqrt{4+a})}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(\sqrt{2x+a}+\sqrt{4+a})}{2(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+a}+\sqrt{4+a}}{2}=\sqrt{4+a}$

즉, $\sqrt{4+a}=3$이므로 $a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면 $b=-3$

필수 예제 02 극한값을 이용한 다항함수의 결정 31쪽

02-1 답 12

| 전략 | 다항함수 $f(x)$의 차수를 파악한 후 미정계수를 구한다.

조건 (가)에서 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2-x-1}=1$이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다. …… ㉠

또, 조건 (나)에서 $\lim\limits_{x\to -1}(x+1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=0 \quad \therefore f(-1)=0$ …… ㉡

($f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.)

㉠, ㉡에서 $f(x)=(x+1)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x+a)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to -1}(x+a)=-1+a$

즉, $-1+a=4$이므로 $a=5$

따라서 $f(x)=(x+1)(x+5)=x^2+6x+5$이므로

$f(1)=1+6+5=12$

02-2 답 20

| 전략 | 다항함수 $f(x)$의 차수를 파악한 후 미정계수를 구한다.

조건 (가)에서 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{x^2}=2$이므로 $f(x)$는 삼차항의 계수가 1, 이차항의 계수가 2인 삼차함수이다. …… ㉠

또, 조건 (나)에서 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0 \quad \therefore f(0)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=x^3+2x^2+ax$라 하면

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2x^2+ax}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2x+a)=a$

즉, $a=-10$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-10x$이므로

$f(-2)=-8+8+20=20$

필수 예제 03 함수의 극한의 대소 관계 32쪽

03-1 답 1

| 전략 | 주어진 부등식을 변형하여 $\dfrac{f(x)}{x^3+1}$의 값의 범위를 구한다.

모든 양의 실수 x에 대하여 $x^3+1>0$이므로

$x^3-x^2-2x+1<f(x)<x^3+x^2-x+2$의 각 변을 x^3+1로 나누면

$\dfrac{x^3-x^2-2x+1}{x^3+1}<\dfrac{f(x)}{x^3+1}<\dfrac{x^3+x^2-x+2}{x^3+1}$

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2-2x+1}{x^3+1}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-x+2}{x^3+1}=1$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3+1}=1$

참고 부등식의 각 변을 어떤 식으로 나눌 때, 그 식의 값의 부호에 따라 부등호의 방향이 바뀔 수 있으므로 나누는 식의 부호를 먼저 확인해야 한다.

03-2 답 $\dfrac{5}{3}$

| 전략 | 주어진 부등식을 변형하여 $xf(x)$의 값의 범위를 구한다.

모든 양의 실수 x에 대하여 $3x^2+2>0$이므로

$5x-1<(3x^2+2)f(x)<5x+9$의 각 변을 $3x^2+2$로 나누면

$\dfrac{5x-1}{3x^2+2}<f(x)<\dfrac{5x+9}{3x^2+2}$

또, x가 양의 실수이므로 위 부등식의 각 변에 x를 곱하면

$\dfrac{5x^2-x}{3x^2+2}<xf(x)<\dfrac{5x^2+9x}{3x^2+2}$

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-x}{3x^2+2}=\dfrac{5}{3}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+9x}{3x^2+2}=\dfrac{5}{3}$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=\dfrac{5}{3}$

03-3 답 4

|전략| 주어진 부등식을 변형하여 $\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+x+1}$의 값의 범위를 구한다.

$x>1$인 모든 실수 x에 대하여 $2x-1>0$, $2x+3>0$이므로

$2x-1<f(x)<2x+3$의 각 변을 제곱하면

$(2x-1)^2<\{f(x)\}^2<(2x+3)^2$

또, $x>1$인 모든 실수 x에 대하여 $x^2+x+1>0$이므로 위 부등식의 각 변을 x^2+x+1로 나누면

$$\frac{(2x-1)^2}{x^2+x+1}<\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+x+1}<\frac{(2x+3)^2}{x^2+x+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^2}{x^2+x+1}=4$, $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^2}{x^2+x+1}=4$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+x+1}=4$$

필수 예제 04 함수의 극한의 활용 33쪽

04-1 답 2

|전략| $\overline{AP}^2$, $\overline{AQ}^2$을 a에 대한 식으로 나타낸다.

점 $P(a, a+2)$를 지나고 직선 $y=x+2$에 수직인 직선의 방정식은

$y=-(x-a)+a+2$ $\therefore y=-x+2a+2$

이때 점 Q는 이 직선과 y축의 교점이므로 $Q(0, 2a+2)$

즉,

$\overline{AP}^2=\{a-(-2)\}^2+\{(a+2)-0\}^2=2a^2+8a+8$,

$\overline{AQ}^2=\{0-(-2)\}^2+\{(2a+2)-0\}^2=4a^2+8a+8$

이므로

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2}=\lim_{a\to\infty}\frac{4a^2+8a+8}{2a^2+8a+8}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{4+\frac{8}{a}+\frac{8}{a^2}}{2+\frac{8}{a}+\frac{8}{a^2}}=2$$

04-2 답 6

|전략| 삼각형 PAB와 삼각형 PCA의 넓이를 각각 t에 대한 식으로 나타낸다.

$B(2, 0)$, $C(0, 4)$

$\triangle PAB=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times$(두 점 P, A의 x좌표의 차)

$=\frac{1}{2}\times4\times(t-2)=2t-4$

$\triangle PCA=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times$(두 점 P, A의 y좌표의 차)

$=\frac{1}{2}\times2\times(t^2-4)=t^2-4$

즉,

$f(t)=\triangle PAB+\triangle PCA=(2t-4)+(t^2-4)=t^2+2t-8$

이므로

$$\lim_{t\to2+}\frac{f(t)}{t-2}=\lim_{t\to2+}\frac{t^2+2t-8}{t-2}=\lim_{t\to2+}\frac{(t+4)(t-2)}{t-2}$$

$$=\lim_{t\to2+}(t+4)=6$$

개념 정리 34~35쪽

01 수렴, 극한값, α, α

02 (1) 발산, ∞, ∞ (2) 발산, $-\infty$, $-\infty$

03 우극한 **04** 좌극한 **05** ㉢ **06** ㉠

07 ㉣ **08** ㉡ **09** (1) 인수분해 (2) 유리화

10 (1) 0 (2) 최고차항 **11** (1) 최고차항 (2) 유리화

12 0 **13** 0 **14** $\le$ **15** $=$

12 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha$는 실수)이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 함수의 극한의 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x)\right\}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\times\lim_{x\to a}g(x)=\alpha\times0=\boxed{0}$$

13 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha$는 0이 아닌 실수)이고 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이면 함수의 극한의 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\left\{f(x)\div\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to a}f(x)\div\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{\alpha}=\boxed{0}$$

중단원 마무리 36~38쪽

01 ⑤ **02** ① **03** ④ **04** $-\frac{10}{3}$

05 ① **06** 2 **07** 8 **08** ④

09 ① **10** ⑤ **11** ② **12** ④

13 ① **14** ⑤ **15** ② **16** ③

17 ② **18** ⑤ **19** 5 **20** $-\frac{3}{4}$

21 7 **22** 32

LEVEL 1

01 $\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)=2+1=3$

02 $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3+}(x^2-2x+a)=a+3$

$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3-}(-x^2+x)=-6$

$\lim_{x\to3}f(x)$의 값이 존재하므로 $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)$에서

$a+3=-6$ $\therefore a=-9$

03 $(x+1)f(x)=g(x)$라 하면 $x\neq-1$일 때

$f(x)=\frac{g(x)}{x+1}$이고 $\lim_{x\to1}g(x)=1$

$$\therefore \lim_{x\to 1}(5x^2+1)f(x)=\lim_{x\to 1}\left\{(5x^2+1)\times\frac{g(x)}{x+1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{5x^2+1}{x+1}\times g(x)\right\}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{5x^2+1}{x+1}\times\lim_{x\to 1}g(x)$$
$$=\frac{6}{2}\times 1=3$$

04 $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+2x+3}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+3)}{(x+1)(x-1)}$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+3}{x-1}$$
$$=\frac{1+1+3}{-1-1}=-\frac{5}{2}$$
$\therefore a=-\frac{5}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{\sqrt{x^2+1}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2}=\frac{4}{1+2}=\frac{4}{3}$$
$\therefore b=\frac{4}{3}$
$\therefore ab=-\frac{5}{2}\times\frac{4}{3}=-\frac{10}{3}$

05 $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2+ax+b+2}{x-2}=4$에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로
$\lim_{x\to 2}(x^3+x^2+ax+b+2)=0$
$8+4+2a+b+2=0$
$\therefore b=-2a-14$ ····· ㉠
㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2+ax-2a-12}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+3x+a+6)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x^2+3x+a+6)$$
$$=a+16$$
즉, $a+16=4$이므로 $a=-12$
$a=-12$를 ㉠에 대입하면 $b=10$
$\therefore a+b=-12+10=-2$

06 조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+2}{f(x)}=1$이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다. ····· ㉠
또, 조건 (나)에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로
$\lim_{x\to 2}f(x)=0$ $\therefore f(2)=0$ ····· ㉡
㉠, ㉡에서 $f(x)=(x-2)(x+a)$ (a는 상수)라 하면
$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+a)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x+a)=2+a$$
즉, $2+a=-1$이므로 $a=-3$
따라서 $f(x)=(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$이므로
$f(1)=1-5+6=2$

07 $|f(x)-2x|<1$이므로
$-1<f(x)-2x<1$
$\therefore 2x-1<f(x)<2x+1$
위 부등식의 각 변을 세제곱하면
$(2x-1)^3<\{f(x)\}^3<(2x+1)^3$
또, $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $x^3+3>0$이므로 위 부등식의 각 변을 x^3+3으로 나누면
$$\frac{(2x-1)^3}{x^3+3}<\frac{\{f(x)\}^3}{x^3+3}<\frac{(2x+1)^3}{x^3+3}$$
이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^3}{x^3+3}=8$, $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^3}{x^3+3}=8$이므로
함수의 극한의 대소 관계에 의하여
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^3}{x^3+3}=8$$

08 $\mathrm{P}(t,\sqrt{t})$, $\mathrm{A}(2,0)$, $\mathrm{H}(0,\sqrt{t})$이므로
$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{(t-2)^2+(\sqrt{t}-0)^2}=\sqrt{t^2-3t+4}$
$\overline{\mathrm{PH}}=t$
$$\therefore \lim_{t\to\infty}(\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PH}})$$
$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-3t+4}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-3t+4}-t)(\sqrt{t^2-3t+4}+t)}{\sqrt{t^2-3t+4}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-3t+4}{\sqrt{t^2-3t+4}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-3+\frac{4}{t}}{\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{4}{t^2}}+1}=\frac{-3}{1+1}=-\frac{3}{2}$$

LEVEL 2

09 $x>2$일 때
$|x-2|=x-2$이므로
$$\lim_{x\to 2+}\frac{|x-2|}{x^2-4}=\lim_{x\to 2+}\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$
$\therefore a=\frac{1}{4}$
$1<x<2$일 때
$|x^2-3x+2|=-(x^2-3x+2)$이므로
$$\lim_{x\to 2-}\frac{|x^2-3x+2|}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{-(x^2-3x+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\left\{-\frac{(x-1)(x-2)}{x-2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\{-(x-1)\}=-1$$
$\therefore b=-1$
$\therefore \frac{b}{a}=\frac{-1}{\frac{1}{4}}=-4$

10 ㄱ. $\lim_{x\to 1+} f(x)=0$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=-1$

즉, $\lim_{x\to 1+} f(x)\neq \lim_{x\to 1-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)$는 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to 2+} f(x)=1$, $\lim_{x\to 2-} f(x)=1$

즉, $\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to 2} f(x)$가 존재한다. (참)

ㄷ. $-1<a<1$인 임의의 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

11 $\lim_{x\to 0+}\{f(x)+kg(x)\}=\lim_{x\to 0+} f(x)+k\lim_{x\to 0+} g(x)$

$=-1+k\times 3=3k-1$

$\lim_{x\to 0-}\{f(x)+kg(x)\}=\lim_{x\to 0-} f(x)+k\lim_{x\to 0-} g(x)$

$=2+k\times 1=k+2$

이때 $\lim_{x\to 0}\{f(x)+kg(x)\}$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to 0+}\{f(x)+kg(x)\}=\lim_{x\to 0-}\{f(x)+kg(x)\}$에서

$3k-1=k+2$, $2k=3$ $\therefore k=\frac{3}{2}$

12 $\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)}{x-1}\times\frac{(x-1)(x+1)}{g(x)}\right\}$

$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)}{x-1}\times\frac{1}{\frac{g(x)}{x^2-1}}\right\}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}\times\frac{1}{\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x^2-1}}$

$=6\times\frac{1}{\frac{2}{3}}=9$

13 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}}=0$

$\therefore a=0$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

$\therefore b=\frac{1}{2}$

$x=-t$라 하면 $x\longrightarrow -\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3+2x^2-1}{x^3+x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-3t^3+2t^2-1}{-t^3-t+1}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{-3+\frac{2}{t}-\frac{1}{t^3}}{-1-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}}=\frac{-3}{-1}=3$

$\therefore c=3$

$\therefore a<b<c$

14 $x=-t$라 하면 $x\longrightarrow -\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-3}+3x}{x-\sqrt{x^2+2x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-3}-3t}{-t-\sqrt{t^2-2t}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{t^2}}-3}{-1-\sqrt{1-\frac{2}{t}}}=\frac{1-3}{-1-1}=1$

$\therefore a=1$

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\frac{2}{1+1}=1$

$\therefore b=1$

$\therefore 2a-b=2\times 1-1=1$

15 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{ax^2+x+b}=\frac{1}{5}$에서 $\frac{1}{5}\neq 0$이고

$\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}(ax^2+x+b)=0$

$a+1+b=0$ $\therefore b=-a-1$ ····· ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{ax^2+x-a-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(ax+a+1)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{ax+a+1}$

$=\frac{1}{2a+1}$

즉, $\frac{1}{2a+1}=\frac{1}{5}$이므로

$2a+1=5$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=-3$

$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{x^2-ax+b}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-2x-3}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-3)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}(x-3)=-4$

16 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$의 x^2의 계수를 각각 a, b $(a\neq 0, b\neq 0)$라 하자.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)-x^2}=1$에서 두 다항식 $f(x)$, $g(x)-x^2$의 차수는 2이고, $\frac{a}{b-1}=1$, 즉 $b-a=1$이므로 $g(x)-f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다. ····· ㉠

또, $\lim_{x\to 3}\frac{g(x)-f(x)}{x-3}$의 값이 존재하고 $\lim_{x\to 3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to 3}\{g(x)-f(x)\}=0$이다.

즉, $g(3)-f(3)=0$이므로 다항식 $g(x)-f(x)$는 $x-3$을 인수로 갖는다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 $g(x)-f(x)=(x-3)(x+k)$(k는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to 3}\frac{g(x)-f(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+k)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}(x+k)=3+k$$

즉, $3+k=10$이므로 $k=7$

따라서 $g(x)-f(x)=(x-3)(x+7)$이므로

$g(5)-f(5)=(5-3)\times(5+7)=24$

17 (i) $\frac{1}{2}x^2+2x<f(x)<x^2+2x$에서

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)=0$, $\lim_{x\to 0}(x^2+2x)=0$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$

(ii) $x>0$일 때, 부등식의 각 변을 x로 나누면

$\frac{1}{2}x+2<\frac{f(x)}{x}<x+2$이고

$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{2}x+2\right)=2$, $\lim_{x\to 0+}(x+2)=2$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=2$

$x<0$일 때, 부등식의 각 변을 x로 나누면

$x+2<\frac{f(x)}{x}<\frac{1}{2}x+2$이고

$\lim_{x\to 0-}(x+2)=2$, $\lim_{x\to 0-}\left(\frac{1}{2}x+2\right)=2$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x}=2$

즉, $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x}=2$이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$

(i), (ii)에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+6x}{5f(x)-x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+6}{5\times\frac{f(x)}{x}-1}$$
$$=\frac{0+6}{5\times 2-1}=\frac{2}{3}$$

18 직선 l의 기울기가 1이고 y절편이 $g(t)$이므로 직선 l의 방정식은 $y=x+g(t)$

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$A(\alpha, \alpha+g(t))$, $B(\beta, \beta+g(t))$ $(\alpha<\beta)$

이차방정식 $x^2=x+g(t)$, 즉 $x^2-x-g(t)=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-g(t)$ …… ㉠

이때 $\overline{AB}=3t$이므로

$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{\beta+g(t)-\alpha-g(t)\}^2}=3t$

$\sqrt{2(\beta-\alpha)^2}=3t$, $2(\beta-\alpha)^2=9t^2$

$2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=9t^2$, $2\{1+4g(t)\}=9t^2$ ($\because$ ㉠)

$2+8g(t)=9t^2$ $\quad\therefore\ g(t)=\frac{9t^2-2}{8}$

$$\therefore\ \lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{9t^2-2}{8t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{9-\frac{2}{t^2}}{8}=\frac{9}{8}$$

서술형

19 $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1)\\ -x^2+3x & (-1<x<1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1+}(-x^2+3x)=-4$

$\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1-}(x^2+ax+b)=1-a+b$

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2+ax+b)=1+a+b$

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(-x^2+3x)=2$ … ❶

모든 실수 x에서 극한값이 존재하려면

$\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1-}f(x)$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)$

이어야 하므로

$-4=1-a+b$, $1+a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$ … ❷

$\therefore\ 3a+2b=3\times 3+2\times(-2)=5$ … ❸

채점 기준	비율
❶ $x=-1$, $x=1$에서의 우극한과 좌극한을 구할 수 있다.	40 %
❷ 극한값이 존재할 조건을 이용하여 a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $3a+2b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

20 $2f(x)+g(x)=h(x)$라 하면 $g(x)=h(x)-2f(x)$이고

$\lim_{x\to\infty}h(x)=2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0$이다. … ❶

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2g(x)}{2f(x)-g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2\{h(x)-2f(x)\}}{2f(x)-\{h(x)-2f(x)\}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3f(x)+2h(x)}{4f(x)-h(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+2\times\frac{h(x)}{f(x)}}{4-\frac{h(x)}{f(x)}}$$
$$=-\frac{3}{4}$$ … ❷

채점 기준	비율
❶ $2f(x)+g(x)=h(x)$로 놓고 $g(x)$를 $f(x)$, $h(x)$로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2g(x)}{2f(x)-g(x)}$의 값을 구할 수 있다.	60 %

21 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$에서 $f(x)$는 이차 이하의 함수이다. …… ㉠

또, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4$에서 $\lim_{x\to 0}x=0$이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=0$ $\quad\therefore\ f(0)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=x(ax+b)$ (a, b는 상수)라 하면 … ❶

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(ax+b)}{x}=\lim\limits_{x\to0}(ax+b)=b$

즉, $b=4$이므로 … ❷

$f(x)=x(ax+4)=ax^2+4x$

이때 방정식 $f(x)=x$의 한 근이 -1이므로 $f(-1)=-1$에서

$a-4=-1 \quad \therefore a=3$ … ❸

따라서 $f(x)=3x^2+4x$이므로

$f(1)=3+4=7$ … ❹

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 이용하여 $f(x)=x(ax+b)$라 나타낼 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

22 두 점 A, B의 교점의 x좌표는

$\dfrac{3t}{x}=-\dfrac{1}{t}x+4$에서

$x^2-4tx+3t^2=0$, $(x-t)(x-3t)=0$

$\therefore x=t$ 또는 $x=3t$

$x=t$를 $y=\dfrac{3t}{x}$에 대입하면 $y=\dfrac{3t}{t}=3$

$x=3t$를 $y=\dfrac{3t}{x}$에 대입하면 $y=\dfrac{3t}{3t}=1$

이때 점 B의 x좌표가 점 A의 x좌표보다 크므로

$\mathrm{A}(t,\,3)$, $\mathrm{B}(3t,\,1)$ … ❶

즉, $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{t^2+9}$, $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{9t^2+1}$이므로

$$\lim_{t\to1+}\frac{\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{OA}}}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to1+}\frac{\sqrt{9t^2+1}-\sqrt{t^2+9}}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to1+}\frac{(\sqrt{9t^2+1}-\sqrt{t^2+9})(\sqrt{9t^2+1}+\sqrt{t^2+9})}{(t-1)(\sqrt{9t^2+1}+\sqrt{t^2+9})}$$

$$=\lim_{t\to1+}\frac{8(t^2-1)}{(t-1)(\sqrt{9t^2+1}+\sqrt{t^2+9})}$$

$$=\lim_{t\to1+}\frac{8(t+1)(t-1)}{(t-1)(\sqrt{9t^2+1}+\sqrt{t^2+9})}$$

$$=\lim_{t\to1+}\frac{8(t+1)}{\sqrt{9t^2+1}+\sqrt{t^2+9}}$$

$=\dfrac{16}{2\sqrt{10}}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$ … ❷

따라서 $k=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$이므로

$5k^2=5\times\left(\dfrac{4\sqrt{10}}{5}\right)^2=32$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B의 좌표를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 극한값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $5k^2$의 값을 구할 수 있다.	20 %

2 함수의 연속

1 함수의 연속

개념 확인 40~42쪽

1 (1) $f(2)$가 정의되어 있지 않으므로 불연속이다.
(2) $\lim\limits_{x\to2}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 불연속이다.
(3) $\lim\limits_{x\to2}f(x)\neq f(2)$이므로 불연속이다.

2 (1) $\le$, $\le$ (2) $<$, $\le$ (3) $\le$, $<$ (4) $<$, $<$

3 (1) $[-3,\,2]$ (2) $(1,\,5)$ (3) $(-\infty,\,4]$ (4) $(-1,\,\infty)$

4 (1) $(-\infty,\,\infty)$ (2) $\left[\dfrac{3}{2},\,\infty\right)$

5 ㄱ, ㄷ, ㄹ

6 (1) $(-\infty,\,\infty)$ (2) $(-\infty,\,-1)$, $(-1,\,\infty)$

1 (1) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 정의되어 있지 않으므로 불연속이다.
(2) $\lim\limits_{x\to2+}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to2-}f(x)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to2+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to2-}f(x)$
따라서 $\lim\limits_{x\to2}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 불연속이다.
(3) $f(2)=1$, $\lim\limits_{x\to2}f(x)=2$
따라서 $\lim\limits_{x\to2}f(x)\neq f(2)$이므로 불연속이다.

4 (1) 함수 $f(x)=x^2-1$의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 구간의 기호로 나타내면 $(-\infty,\,\infty)$이다.
(2) 함수 $f(x)=\sqrt{2x-3}$의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\ge\dfrac{3}{2}\right\}$이므로 구간의 기호로 나타내면 $\left[\dfrac{3}{2},\,\infty\right)$이다.

5 ㄴ. 함수 $y=\dfrac{x+1}{x-2}$은 $x=2$에서 불연속이다.

6 (1) 함수 $f(x)=2x+1$은 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)$가 연속인 구간은 $(-\infty,\,\infty)$이다.
(2) 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$는 $x+1\neq0$, 즉 $x\neq-1$인 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)$가 연속인 구간은 $(-\infty,\,-1)$, $(-1,\,\infty)$이다.

개념 드릴 43쪽

1 (1) 0, 1, 1, 불연속 (2) 0, -1, 0, 불연속
2 (1) 연속 (2) 불연속 (3) 연속 (4) 불연속
3 (1) $[-3,\,2]$ (2) $(-4,\,-1)$ (3) $[1,\,5)$
(4) $(0,\,6]$ (5) $(-\infty,\,7]$ (6) $[-1,\,\infty)$
(7) $(-\infty,\,-2)$ (8) $(3,\,\infty)$
4 (1) $(-\infty,\,\infty)$ (2) $(-\infty,\,5)$, $(5,\,\infty)$
(3) $(-\infty,\,1]$ (4) $(-\infty,\,\infty)$

2 (1) $f(1)=0$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(x-1)=0$

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}\{-(x-1)\}=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}f(x)=0$

따라서 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(2) $x=1$에서의 함숫값 $f(1)$이 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(3) $f(1)=\sqrt{2}$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\sqrt{2}$

따라서 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(4) $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}(x-2)=-1$

따라서 $\lim\limits_{x\to1}f(x)\neq f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

4 (1) 함수 $f(x)=2$는 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)$가 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

(2) 함수 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-5}$은 $x-5\neq0$, 즉 $x\neq5$인 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)$가 연속인 구간은 $(-\infty, 5)$, $(5, \infty)$이다.

(3) 함수 $f(x)=\sqrt{1-x}$는 $1-x\geq0$, 즉 $x\leq1$인 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)$가 연속인 구간은 $(-\infty, 1]$이다.

(4) 함수 $f(x)=|x+4|$는 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)$가 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

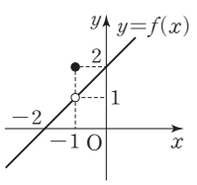
필수 예제 01 함수의 연속과 불연속 44쪽

01-1 답 (1) 불연속 (2) 불연속 (3) 연속 (4) 불연속

|전략| 함수가 연속이 되는 조건을 모두 만족시키는지 조사한다.

(1) $x=-1$에서의 함숫값은 $f(-1)=2$

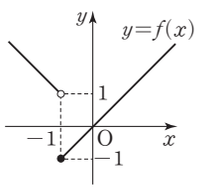
$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+2)(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x+2)=1$$



따라서 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)\neq f(-1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(2) $x=-1$에서의 함숫값은 $f(-1)=-1$

$$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}\frac{x^2+x}{|x+1|}=\lim_{x\to-1+}\frac{x(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-1+}x=-1$$



$$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}\frac{x^2+x}{|x+1|}=\lim_{x\to-1-}\frac{x(x+1)}{-(x+1)}=\lim_{x\to-1-}(-x)=1$$

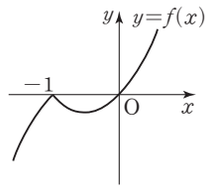
$\therefore \lim\limits_{x\to-1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-1-}f(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(3) $x=-1$에서의 함숫값은 $f(-1)=0$

$$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}x|x+1|=\lim_{x\to-1+}x(x+1)=0$$

$$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}x|x+1|=\lim_{x\to-1-}\{-x(x+1)\}=0$$



$\therefore \lim\limits_{x\to-1}f(x)=0$

따라서 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

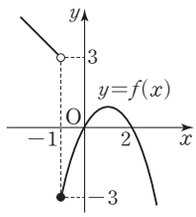
(4) $x=-1$에서의 함숫값은 $f(-1)=-3$

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1+}(-x^2+2x)=-3$

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-}(-x+2)=3$

$\therefore \lim\limits_{x\to-1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-1-}f(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.



필수 예제 02 함수의 그래프와 연속 (1) 45쪽

02-1 답 $a=1, b=3$

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프가 끊어져 있는 점의 x의 값에서 $f(x)$가 연속인지 불연속인지 조사한다.

(i) $x=-1$에서의 함숫값은 $f(-1)=2$

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=1$

따라서 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)\neq f(-1)$이므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $x=0$에서의 함숫값은 $f(0)=-1$

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0-}f(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(iii) $x=1$에서의 함숫값은 $f(1)=-1$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=-2$이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=-2$

따라서 $\lim\limits_{x\to1}f(x)\neq f(1)$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(iv) $x=2$에서의 함숫값은 $f(2)=1$

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to2-}f(x)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=1$

따라서 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(i)~(iv)에서 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 $x=0$이고, 불연속인 x의 값은 $x=-1$, $x=0$, $x=1$이므로

$a=1, b=3$

필수 예제 03 함수의 그래프와 연속 (2) 46쪽

03-1 답 ㄱ

|전략| 주어진 함수의 $x=0$에서의 함숫값과 극한값이 각각 존재하는지 확인한 후 두 값이 같은지 알아본다.

ㄱ. $x=0$에서의 함숫값은 $f(0)+g(0)=-1+1=0$

$\lim_{x\to 0+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 0+}f(x)+\lim_{x\to 0+}g(x)$

$=-2+2=0$

$\lim_{x\to 0-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 0-}g(x)$

$=2+(-2)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}=0$

즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}=f(0)+g(0)$이므로

함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $x=0$에서의 함숫값은 $f(0)-g(0)=-1-1=-2$

$\lim_{x\to 0+}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to 0+}f(x)-\lim_{x\to 0+}g(x)$

$=-2-2=-4$

$\lim_{x\to 0-}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to 0-}f(x)-\lim_{x\to 0-}g(x)$

$=2-(-2)=4$

$\therefore \lim_{x\to 0+}\{f(x)-g(x)\}\neq\lim_{x\to 0-}\{f(x)-g(x)\}$

즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)-g(x)\}$의 값이 존재하지 않으므로

함수 $f(x)-g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $x=0$에서의 함숫값은 $f(0)g(0)=-1\times 1=-1$

$\lim_{x\to 0+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)\times\lim_{x\to 0+}g(x)$

$=-2\times 2=-4$

$\lim_{x\to 0-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)\times\lim_{x\to 0-}g(x)$

$=2\times(-2)=-4$

$\therefore \lim_{x\to 0}f(x)g(x)=-4$

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)g(x)\neq f(0)g(0)$이므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 $x=0$에서 연속인 함수는 ㄱ이다.

필수 예제 04 함수가 연속일 조건 47쪽

04-1 답 3

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$\therefore a=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x})(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x})}{x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x})}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{6x}{x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x})}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{6}{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x}}=\dfrac{6}{1+1}=3$

04-2 답 $a=5, b=-3$

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이면 $\lim_{x\to -2}f(x)=f(-2)$임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -2}f(x)=f(-2)$

$\therefore \lim_{x\to -2}\dfrac{2x^2+ax+2}{x+2}=b$ ····· ㉠

㉠에서 $\lim_{x\to -2}(x+2)=0$이므로

$\lim_{x\to -2}(2x^2+ax+2)=0$

$8-2a+2=0 \quad \therefore a=5$

$a=5$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x+2}{x+2}=\lim_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(2x+1)}{x+2}$

$=\lim_{x\to -2}(2x+1)=-3$

$\therefore b=-3$

04-3 답 $a=2, b=-2$

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이면 $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$

$\therefore \lim_{x\to 2}\dfrac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2}=1$ ····· ㉠

㉠에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}(a\sqrt{x-1}+b)=0$

$a+b=0 \quad \therefore b=-a$ ····· ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to 2}\dfrac{a\sqrt{x-1}-a}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{a(\sqrt{x-1}-1)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\dfrac{a(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$

$=\lim_{x\to 2}\dfrac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$

$=\lim_{x\to 2}\dfrac{a}{\sqrt{x-1}+1}=\dfrac{a}{2}$

즉, $\dfrac{a}{2}=1$이므로 $a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면 $b=-2$

필수 예제 05 $(x-a)f(x)=g(x)$ 꼴의 함수의 연속 48쪽

05-1 답 12

|전략| 함수 $f(x)$가 $x\geq -4$인 모든 실수 x에서 연속이므로 $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$임을 이용한다.

$x\neq 0$일 때, 함수 $f(x)$를 구하면

$f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x+4}-2}$

함수 $f(x)$가 $x\geq -4$인 모든 실수 x에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{x+4}-2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x(\sqrt{x+4}+2)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}3(\sqrt{x+4}+2)=3\times(2+2)=12$$

05-2 답 4

|전략| 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $f(-1)=\lim_{x\to -1} f(x)$임을 이용한다.

$x\neq -1$일 때, 함수 $f(x)$를 구하면

$$f(x)=\frac{x^2+ax+2}{x+1}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$에서 연속이므로

$$f(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+ax+2}{x+1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $\lim_{x\to -1}(x+1)=0$이므로

$$\lim_{x\to -1}(x^2+ax+2)=0$$

$1-a+2=0 \quad \therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$$f(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+2)(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}(x+2)=1$$

$\therefore a+f(-1)=3+1=4$

05-3 답 $\frac{1}{3}$

|전략| 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$임을 이용한다.

$x\neq 1$일 때, 함수 $f(x)$를 구하면

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+8}+a}{x-1}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+8}+a}{x-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$$\lim_{x\to 1}(\sqrt{x^2+8}+a)=0$$

$3+a=0 \quad \therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$$f(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x^2+8}-3)(\sqrt{x^2+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}=\frac{2}{3+3}=\frac{1}{3}$$

2 연속함수의 성질

개념 확인 49~51쪽

1 (1) 모든 실수 x에서 연속이다.
(2) 모든 실수 x에서 연속이다.
(3) $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
(4) $x\neq -1$, $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
2 (1) 최댓값: 2, 최솟값: 없다.
(2) 최댓값: 3, 최솟값: 2
3 연속, 0, 2, 사잇값 정리
4 연속, -2, 10, $(-1, 2)$

1 (1) 함수 $f(x)=2x^2-2x-1$은 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

(2) 함수 $f(x)=(x+3)(3x+4)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

(3) 함수 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$은 유리함수이므로 $x-1\neq 0$, 즉 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.

(4) 함수 $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$는 유리함수이므로 $x^2-1\neq 0$
즉, $x\neq -1$이고 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.

2 (1) $x=2$일 때 최댓값 2를 갖고, 최솟값은 없다.
(2) $x=3$일 때 최댓값 3, $x=2$일 때 최솟값 2를 갖는다.

개념 드릴 52쪽

1 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ
2 (1) 연속, 3, 3, 1, -1
(2) 연속, -2, $-\frac{2}{5}$, 2, -2
3 (1) 최댓값: 0, 최솟값: -3
(2) 최댓값: $\frac{1}{4}$, 최솟값: -2
(3) 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{1}{2}$
(4) 최댓값: 2, 최솟값: 1
4 풀이 참조
5 풀이 참조

1 ㄱ. $f(x)+g(x)=(x^2+4)+(x-3)=x^2+x+1$
즉, 함수 $f(x)+g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. $f(x)-g(x)=(x^2+4)-(x-3)=x^2-x+7$
즉, 함수 $f(x)-g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

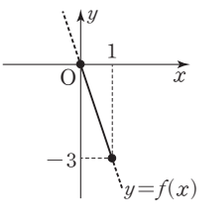
ㄷ. $f(x)g(x)=(x^2+4)(x-3)=x^3-3x^2+4x-12$
즉, 함수 $f(x)g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄹ. 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2+4}{x-3}$는 유리함수이고 $x=3$에서 정의되지 않으므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=3$에서 불연속이다.

ㅁ. 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x-3}{x^2+4}$은 유리함수이고 모든 실수 x에 대하여 $x^2+4\neq0$이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 모든 실수 x에서 연속이다.

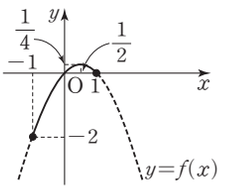
따라서 모든 실수 x에서 연속인 함수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ이다.

3 (1) 함수 $f(x)=-3x$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고, 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



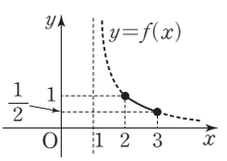
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 0, $x=1$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

(2) 함수 $f(x)=-x^2+x$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고, 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



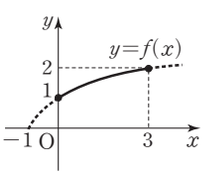
따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{1}{4}$, $x=-1$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

(3) 함수 $f(x)=\frac{1}{x-1}$은 닫힌구간 $[2, 3]$에서 연속이고, 닫힌구간 $[2, 3]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 1, $x=3$일 때 최솟값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

(4) 함수 $f(x)=\sqrt{x+1}$은 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고, 닫힌구간 $[0, 3]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 2, $x=0$일 때 최솟값 1을 갖는다.

4 함수 $f(x)=x^3-1$은 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고
$f(-1)=-2$, $f(2)=7$
에서 $f(-1)\neq f(2)$이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=1$인 c가 열린구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

5 $f(x)=x^2-3x+1$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고
$f(1)=-1<0$, $f(3)=1>0$
이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
즉, 방정식 $x^2-3x+1=0$은 열린구간 $(1, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

필수 예제 01 연속함수의 성질 53쪽

01-1 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

|전략| 다항함수는 모든 실수에서 연속이고, 유리함수는 (분모)$\neq0$인 모든 실수에서 연속이다.

ㄱ. $2f(x)-g(x)=2(x^2+1)-(x^2-2x)=x^2+2x+2$
즉, 함수 $2f(x)-g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2-2x}{x^2+1}$는 유리함수이고 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1\neq0$이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄷ. $\{f(x)\}^2=(x^2+1)^2=x^4+2x^2+1$
즉, 함수 $\{f(x)\}^2$은 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄹ. $\frac{1}{f(x)-g(x)}=\frac{1}{(x^2+1)-(x^2-2x)}=\frac{1}{2x+1}$
함수 $\frac{1}{f(x)-g(x)}$은 유리함수이고 $2x+1=0$, 즉 $x=-\frac{1}{2}$에서 정의되지 않으므로 함수 $\frac{1}{f(x)-g(x)}$은 $x=-\frac{1}{2}$에서 불연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속인 함수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

01-2 답 ㄱ, ㄹ

|전략| 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 함수 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$도 $x=a$에서 연속임을 이용한다.

ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $2g(x)$는 $x=a$에서 연속이므로 함수 $f(x)-2g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. $f(a)+g(a)<0$이면 $\sqrt{f(x)+g(x)}$는 $x=a$에서 정의되지 않으므로 함수 $\sqrt{f(x)+g(x)}$는 $x=a$에서 항상 연속이라고 할 수 없다.

ㄷ. $g(a)=0$이면 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=a$에서 정의되지 않으므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=a$에서 항상 연속이라고 할 수 없다.

ㄹ. 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이므로 함수 $\{g(x)\}^2=g(x)\times g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

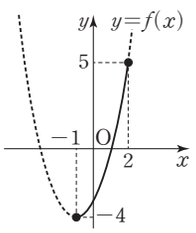
따라서 $x=a$에서 항상 연속인 함수인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

필수 예제 02 최대·최소 정리 54쪽

02-1 답 (1) 최댓값: 5, 최솟값: -4 (2) 최댓값: 2, 최솟값: 1 (3) 최댓값: 4, 최솟값: 0 (4) 최댓값: 4, 최솟값: 1

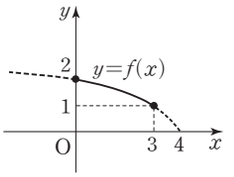
|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후 주어진 닫힌구간에서 최댓값과 최솟값을 구한다.

(1) 함수 $f(x)=x^2+2x-3$은 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고, 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



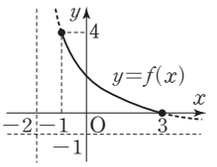
따라서 $x=2$일 때 최댓값 5, $x=-1$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

(2) 함수 $f(x)=\sqrt{4-x}$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고, 닫힌구간 $[0, 3]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



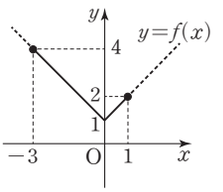
따라서 $x=0$일 때 최댓값 2, $x=3$일 때 최솟값 1을 갖는다.

(3) 함수 $f(x)=\frac{5}{x+2}-1$은 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 연속이고, 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=-1$일 때 최댓값 4, $x=3$일 때 최솟값 0을 갖는다.

(4) 함수 $f(x)=|x|+1$은 닫힌구간 $[-3, 1]$에서 연속이고, 닫힌구간 $[-3, 1]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

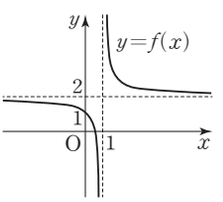


따라서 $x=-3$일 때 최댓값 4, $x=0$일 때 최솟값 1을 갖는다.

02-2 ㄴ, ㄹ

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후 주어진 닫힌구간에서 최댓값과 최솟값을 찾는다.

함수 $f(x)=\frac{2x-1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-3, -1]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 최댓값과 최솟값이 모두 없다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 최댓값 $f(0)=1$을 갖고, 최솟값은 없다.

ㄹ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 4]$에서 최댓값은 없고, 최솟값 $f(4)=\frac{7}{3}$을 갖는다.

따라서 최댓값이 존재하지 않는 구간은 ㄴ, ㄹ이다.

필수 예제 03 사잇값 정리 55쪽

03-1 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

|전략| 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$임을 보인다.

(1) $f(x)=x^3-2x-6$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고

$f(0)=-6<0, f(3)=15>0$

이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $x^3-2x-6=0$은 열린구간 $(0, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(2) $f(x)=x^4+2x^2-5$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고

$f(-1)=-2<0, f(2)=19>0$

이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $x^4+2x^2-5=0$은 열린구간 $(-1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

03-2 3개

|전략| 사잇값 정리를 이용한다.

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 4]$에서 연속이고

$f(0)f(1)<0, f(1)f(2)<0, f(2)f(3)<0, f(3)f(4)>0$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 4)$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

03-3 $-5<k<3$

|전략| $f(x)=x^2-4x+k$로 놓고 사잇값 정리를 이용한다.

$f(x)=x^2-4x+k$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 연속이고

$f(-1)=1+4+k=k+5, f(3)=9-12+k=k-3$

이때 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(-1, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 $f(-1)f(3)<0$이어야 하므로

$(k+5)(k-3)<0 \quad \therefore -5<k<3$

개념 정리 56~57쪽

01 연속, $\lim_{x\to a} f(x)$, $f(a)$ **02** 불연속, 불연속

03 ㉢ **04** ㉣ **05** ㉡ **06** ㉠

07 연속함수 **08** $f(a)$, $f(b)$ **09** 연속, $(-\infty, \infty)$

10 2, $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$ **11** 연속, 4, 3, 0, 1

12 $\neq$ **13** 다르면, 0

09 $f(x)g(x)=(x^2+2)(x-2)=x^3-2x^2+2x-4$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 [연속]이다.

따라서 연속인 구간은 [$(-\infty, \infty)$]이다.

10 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2+2}{x-2}$는 유리함수이므로 $x\neq$ [2]인 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 연속인 구간은 [$(-\infty, 2)$], [$(2, \infty)$]이다.

11 함수 $f(x)=\sqrt{2x+1}$은 닫힌구간 $[0, 4]$에서 [연속]이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=$ [4]일 때 최댓값 [3], $x=$ [0]일 때 최솟값 [1]을 갖는다.

중단원 마무리

58~60쪽

01 ③	**02** 3	**03** 7	**04** ㄱ, ㄷ
05 ③	**06** ②	**07** ㄴ, ㄷ	**08** ④
09 ④	**10** ㄴ, ㄷ	**11** ②	**12** ①
13 ⑤	**14** ㄱ, ㄴ	**15** $-\frac{5}{2}$	**16** $-\frac{1}{3}$
17 ②	**18** ⑤	**19** 2개	**20** 18
21 3	**22** 0, 1	**23** 풀이 참조	

LEVEL 1

01 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$

이때 $\lim_{x\to 2} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)$이어야 하므로

$3a-2=a+4,\ 2a=6 \qquad \therefore a=3$

즉, $\lim_{x\to 2} f(x)=3\times 3-2=7$이므로 $f(2)=7$

$\therefore a+f(2)=3+7=10$

02 $f(x)=3-\dfrac{1}{x-\dfrac{4}{x}}=3-\dfrac{x}{x^2-4}$에서 $x=0,\ x^2-4=0$인 x의 값에서 함수 $f(x)$가 정의되지 않는다.

이때 $x^2-4=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값의 개수는 -2, 0, 2의 3이다.

03 (i) $x=-1$에서의 함숫값은 $f(-1)=2$

$\lim_{x\to -1+} f(x)=0,\ \lim_{x\to -1-} f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to -1+} f(x)\neq \lim_{x\to -1-} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to -1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $x=0$에서의 함숫값은 $f(0)=0$

$\lim_{x\to 0+} f(x)=1,\ \lim_{x\to 0-} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to 0+} f(x)\neq \lim_{x\to 0-} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to 0} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(iii) $x=1$에서의 함숫값은 $f(1)=0$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=-1,\ \lim_{x\to 1-} f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to 1+} f(x)\neq \lim_{x\to 1-} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(iv) $x=2$에서의 함숫값은 $f(2)=-2$

$\lim_{x\to 2+} f(x)=-1,\ \lim_{x\to 2-} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to 2} f(x)=-1$

따라서 $\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(i)~(iv)에서 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 $x=-1,\ x=0,\ x=1$이고, 불연속인 x의 값은 $x=-1,\ x=0,\ x=1,\ x=2$이므로 $a=3,\ b=4$

$\therefore a+b=3+4=7$

04 ㄱ. $\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)\times\lim_{x\to 1+} g(x)$

$=-1\times 1=-1$

$\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)\times\lim_{x\to 1-} g(x)$

$=1\times(-1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)g(x)=-1$ (참)

ㄴ. $x=-1$에서의 함숫값은

$f(-1)-g(-1)=1-(-1)=2$

$\lim_{x\to -1+}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to -1+} f(x)-\lim_{x\to -1+} g(x)$

$=-1-(-1)=0$

$\lim_{x\to -1-}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to -1-} f(x)-\lim_{x\to -1-} g(x)$

$=1-(-1)=2$

$\therefore \lim_{x\to -1+}\{f(x)-g(x)\}\neq\lim_{x\to -1-}\{f(x)-g(x)\}$

즉, $\lim_{x\to -1}\{f(x)-g(x)\}$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $x=1$에서의 함숫값은 $f(1)+g(1)=-1+1=0$

$\lim_{x\to 1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 1+} f(x)+\lim_{x\to 1+} g(x)$

$=-1+1=0$

$\lim_{x\to 1-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 1-} g(x)$

$=1+(-1)=0$

$\therefore \lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}=0$

즉, $\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}=f(1)+g(1)$이므로 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

05 $f(x)=\begin{cases} x+3 & (|x|\geq 1) \\ x^2+ax+b & (|x|<1) \end{cases}$

$=\begin{cases} x+3 & (x\leq -1 \text{ 또는 } x\geq 1) \\ x^2+ax+b & (-1<x<1) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-1,\ x=1$에서도 연속이다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1-} f(x)=f(-1)$

이때

$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+}(x^2+ax+b)=1-a+b$,

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-}(x+3)=2$,

$f(-1)=2$이므로

$1-a+b=2 \qquad \therefore a-b=-1$ ····· ㉠

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$

이때

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(x+3)=4$,

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(x^2+ax+b)=1+a+b$,

$f(1)=4$이므로

$4=1+a+b \quad \therefore a+b=3$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

$\therefore ab=1\times 2=2$

06 $x\neq -2$일 때, 함수 $f(x)$를 구하면

$f(x)=\dfrac{ax^2+bx}{x+2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-2$에서 연속이다.

$f(-2)=\lim_{x\to -2}\dfrac{ax^2+bx}{x+2}$ ····· ㉠

㉠에서 $\lim_{x\to -2}(x+2)=0$이므로

$\lim_{x\to -2}(ax^2+bx)=0$

$4a-2b=0 \quad \therefore 2a-b=0$ ····· ㉡

또, $f(-1)=-1$이므로 주어진 식에 $x=-1$을 대입하면

$(-1+2)f(-1)=a-b$

$\therefore a-b=-1$ ····· ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

$a=1$, $b=2$를 ㉠에 대입하면

$f(-2)=\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x+2}=\lim_{x\to -2}\dfrac{x(x+2)}{x+2}$

$=\lim_{x\to -2} x=-2$

07 ㄱ. [반례] $f(x)=x$, $g(x)=x-1$이면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=0$, $x=1$에서 연속이지만 함수 $\dfrac{1}{f(x)g(x)}=\dfrac{1}{x(x-1)}$은 $x=0$, $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄴ. $\{f(x)+1\}\{g(x)+1\}=f(x)g(x)+f(x)+g(x)+1$

이므로 두 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 함수 $\{f(x)+1\}\{g(x)+1\}$도 $x=a$에서 연속이다. (참)

ㄷ. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 함수 $|g(x)|+1$도 $x=a$에서 연속이고 모든 실수 x에 대하여 $|g(x)|+1\neq 0$이므로 함수 $\dfrac{f(x)}{|g(x)|+1}$는 $x=a$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

08 $f(x)=x^3+3x-5$라 하면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(-2)=-19$, $f(-1)=-9$, $f(0)=-5$,

$f(1)=-1$, $f(2)=9$, $f(3)=31$

따라서 $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(1, 2)$이다.

LEVEL 2

09 ①, ② 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

③ $x=0$에서의 함숫값은 $f(0)=2$

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(x+2)=2$

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(-x)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0+} f(x)\neq \lim_{x\to 0-} f(x)$

즉, $\lim_{x\to 0} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

④ $x=0$에서의 함숫값은 $f(0)=1$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1$

즉, $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

⑤ $x=0$에서의 함숫값은 $f(0)=-3$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x-3}{x-1}=3$

즉, $\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 $x=0$에서 연속인 함수는 ④이다.

10 ㄱ. $\lim_{x\to -1+} f(x)=1$, $\lim_{x\to -1-} f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to -1+} f(x)\neq \lim_{x\to -1-} f(x)$

즉, $\lim_{x\to -1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ, ㄷ.

(i) $x=-1$에서의 함숫값은 $f(-1)=1$

ㄱ에서 $\lim_{x\to -1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $x=0$에서의 함숫값은 $f(0)=0$

$\lim_{x\to 0+} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to 0+} f(x)\neq \lim_{x\to 0-} f(x)$

즉, $\lim_{x\to 0} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(iii) $x=1$에서의 함숫값은 $f(1)=0$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=-1$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)=-1$

즉, $\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(i)~(iii)에서 극한값이 존재하지 않는 x의 값의 개수는 -1, 0의 2이고, 불연속인 x의 값의 개수는 -1, 0, 1의 3이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

11 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1-}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(1)}{f(1)}$

이때

$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1+}\frac{2x+a}{-3}=\frac{2+a}{-3}$,

$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1-}\frac{-x+a}{2}=\frac{-1+a}{2}$,

$\frac{g(1)}{f(1)}=\frac{2+a}{-3}$이므로

$\frac{2+a}{-3}=\frac{-1+a}{2}$, $4+2a=3-3a$

$\therefore a=-\frac{1}{5}$

12 함수 $f(x)$가 $x=b$에서 연속이므로 $\lim_{x\to b}f(x)=f(b)$

$\therefore \lim_{x\to b}\frac{\sqrt{x-2}+a}{x-b}=1$ ····· ㉠

㉠에서 $\lim_{x\to b}(x-b)=0$이므로 $\lim_{x\to b}(\sqrt{x-2}+a)=0$

$\sqrt{b-2}+a=0$ $\therefore a=-\sqrt{b-2}$ ····· ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to b}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{b-2}}{x-b}$

$=\lim_{x\to b}\frac{(\sqrt{x-2}-\sqrt{b-2})(\sqrt{x-2}+\sqrt{b-2})}{(x-b)(\sqrt{x-2}+\sqrt{b-2})}$

$=\lim_{x\to b}\frac{x-b}{(x-b)(\sqrt{x-2}+\sqrt{b-2})}$

$=\lim_{x\to b}\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{b-2}}=\frac{1}{2\sqrt{b-2}}$

즉, $\frac{1}{2\sqrt{b-2}}=1$이므로

$\sqrt{b-2}=\frac{1}{2}$, $b-2=\frac{1}{4}$ $\therefore b=\frac{9}{4}$

$b=\frac{9}{4}$를 ㉡에 대입하면 $a=-\sqrt{\frac{9}{4}-2}=-\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=-\frac{1}{2}+\frac{9}{4}=\frac{7}{4}$

13 $x\neq1$, $x\neq2$일 때, 함수 $f(x)$를 구하면

$f(x)=\frac{x^4+ax+b}{x^2-3x+2}=\frac{x^4+ax+b}{(x-1)(x-2)}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$, $x=2$에서도 연속이다.

(i) $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$에서

$f(1)=\lim_{x\to1}\frac{x^4+ax+b}{x^2-3x+2}$ ····· ㉠

㉠에서 $\lim_{x\to1}(x^2-3x+2)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(x^4+ax+b)=0$

$1+a+b=0$ $\therefore a+b=-1$ ····· ㉡

(ii) $f(2)=\lim_{x\to2}f(x)$에서

$f(2)=\lim_{x\to2}\frac{x^4+ax+b}{x^2-3x+2}$ ····· ㉢

㉢에서 $\lim_{x\to2}(x^2-3x+2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(x^4+ax+b)=0$

$16+2a+b=0$ $\therefore 2a+b=-16$ ····· ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-15$, $b=14$

$\therefore f(1)=\lim_{x\to1}\frac{x^4-15x+14}{x^2-3x+2}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(x^2+3x+7)}{(x-1)(x-2)}$

$=\lim_{x\to1}(x^2+3x+7)=11$

14 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서만 불연속이고, 보기의 함수 $g(x)$는 모두 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 연속이면 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이다.

ㄱ. $x=-1$에서의 함숫값은 $f(-1)g(-1)=0\times0=0$

$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)\times\lim_{x\to-1+}(x^2-1)$

$=1\times0=0$

$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)\times\lim_{x\to-1-}(x^2-1)$

$=-1\times0=0$

$\therefore \lim_{x\to-1}f(x)g(x)=0$

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$이므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

ㄴ. $x=-1$에서의 함숫값은 $f(-1)g(-1)=0\times0=0$

$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)\times\lim_{x\to-1+}(|x|-1)$

$=1\times0=0$

$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)\times\lim_{x\to-1-}(|x|-1)$

$=-1\times0=0$

$\therefore \lim_{x\to-1}f(x)g(x)=0$

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$이므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

ㄷ. $x=-1$에서의 함숫값은 $f(-1)g(-1)=0\times2=0$

$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)\times\lim_{x\to-1+}|x-1|$

$=1\times2=2$

$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)\times\lim_{x\to-1-}|x-1|$

$=-1\times2=-2$

$\therefore \lim_{x\to-1+}f(x)g(x)\neq\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)$

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)g(x)$의 값이 존재하지 않으므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

따라서 조건을 만족시키는 함수 $g(x)$인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

15 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$

이때

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}\{a(x-4)^2+b\}=4a+b$,

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}(x-3)=-1$, $f(2)=4a+b$이므로

$4a+b=-1$ ····· ㉠

한편, 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$를 만족시키므로 $x=0$을 대입하면

$f(4)=f(0)$ $\therefore b=-3$

$b=-3$을 ㉠에 대입하면

$4a-3=-1$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x-3 & (0\le x<2) \\ \frac{1}{2}(x-4)^2-3 & (2\le x\le 4) \end{cases}$이고

$f(x+4)=f(x)$이므로

$f(23)=f(19)=\cdots=f(3)=\frac{1}{2}\times(3-4)^2-3=-\frac{5}{2}$

Lecture

연속함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, c]$에서 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (a\le x<b) \\ h(x) & (b\le x\le c) \end{cases}$이고

모든 실수 x에 대하여 $f(x+c-a)=f(x)$를 만족시키면

$\lim_{x\to b-} g(x)=\lim_{x\to b+} h(x)$ ➡ $g(b)=h(b)$

$\lim_{x\to a+} g(x)=\lim_{x\to c-} h(x)$ ➡ $g(a)=h(c)$

16 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$, $x=3$에서도 연속이다.

(i) $\lim_{x\to -1+}|f(x)|=\lim_{x\to -1-}|f(x)|=|f(-1)|$

이때

$\lim_{x\to -1+}|f(x)|=\lim_{x\to -1+}|x|=1$,

$\lim_{x\to -1-}|f(x)|=\lim_{x\to -1-}|x+b|=|-1+b|$,

$|f(-1)|=|-1|=1$이므로

$1=|-1+b|$, $-1+b=\pm 1$ $\therefore b=2$ ($\because b>0$)

(ii) $\lim_{x\to 3+}|f(x)|=\lim_{x\to 3-}|f(x)|=|f(3)|$

이때

$\lim_{x\to 3+}|f(x)|=\lim_{x\to 3+}|ax-2|=|3a-2|$,

$\lim_{x\to 3-}|f(x)|=\lim_{x\to 3-}|x|=3$,

$|f(3)|=|3a-2|$이므로

$|3a-2|=3$, $3a-2=\pm 3$ $\therefore a=\frac{5}{3}$ ($\because a>0$)

$\therefore a-b=\frac{5}{3}-2=-\frac{1}{3}$

17 $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+kx+9}$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 (분모)$\neq 0$이어야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2+kx+9=0$의 실근이 존재하지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-36<0$

$(k+6)(k-6)<0$ $\therefore -6<k<6$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k의 개수는 -5, -4, ⋯, 4, 5의 11이다.

18 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)$

이때

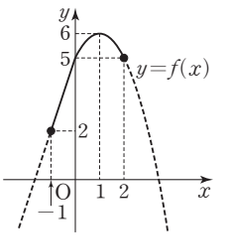
$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(-x^2+2x+5)=5$,

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(3x+a)=a$,

$f(0)=5$이므로 $a=5$

즉, $f(x)=\begin{cases} -x^2+2x+5 & (x\ge 0) \\ 3x+5 & (x<0) \end{cases}$

이므로 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(1)=-1+2+5=6$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $M=6$, $x=-1$에서 최솟값 $m=2$를 갖는다.

$f(-1)=-3+5=2$

$\therefore M+m=6+2=8$

19 $g(x)=f(x)+3x$라 하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속이고

$g(1)=f(1)+3\times 1=-4+3=-1$

$g(2)=f(2)+3\times 2=-2+6=4$

$g(3)=f(3)+3\times 3=3+9=12$

$g(4)=f(4)+3\times 4=-15+12=-3$

이때 $g(1)g(2)<0$, $g(3)g(4)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$, $(3, 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)+3x=0$은 열린구간 $(1, 4)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

서술형

20 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^3-ax+b}{(x-1)^2}=c$ ····· ㉠

㉠에서 $\lim_{x\to 1}(x-1)^2=0$이므로 $\lim_{x\to 1}(x^3-ax+b)=0$

$1-a+b=0$ $\therefore b=a-1$ ····· ㉡ ··· ❶

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-ax+a-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-a+1)}{(x-1)^2}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-a+1}{x-1}$ ····· ㉢

㉢에서 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to 1}(x^2+x-a+1)=0$

$1+1-a+1=0$ $\therefore a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면 $b=2$ ··· ❷

또, $a=3$을 ㉢에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+2)=3$$

$\therefore c=3$ … ❸

$\therefore abc=3\times 2\times 3=18$ … ❹

채점 기준	비율
❶ 연속의 조건을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	20 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ c의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ abc의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 ㉠에서 $\lim_{x\to 1}(x-1)^2=0$이므로 $\lim_{x\to 1}(x^3-ax+b)=0$

즉, 다항식 x^3-ax+b는 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면 다음과 같다.

1	1	0	$-a$	b
		1	1	$-a+1$
1	1	1	$-a+1$	$b-a+1$
		1	2	
	1	2	$-a+3$	

$\therefore x^3-ax+b=(x-1)^2(x+2)$

따라서 $-a+3=0$, $b-a+1=0$이므로 $a=3$, $b=2$

또, ㉠에서

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-ax+b}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}(x+2)=3$$이므로

$c=3$

$\therefore abc=3\times 2\times 3=18$

21 $f(x)=\begin{cases}-1 & (|x|\geq 1)\\ 1 & (|x|<1)\end{cases}=\begin{cases}-1 & (x\leq -1 \text{ 또는 } x\geq 1)\\ 1 & (-1<x<1)\end{cases}$

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서만 불연속이고 이차함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 연속이면 모든 실수 x에서 연속이다.

$g(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하자.

(i) $\lim_{x\to -1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to -1-}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$

이므로

$$\lim_{x\to -1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to -1+}1\times\lim_{x\to -1+}(x^2+ax+b)$$
$$=1-a+b$$
$$\lim_{x\to -1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to -1-}(-1)\times\lim_{x\to -1-}(x^2+ax+b)$$
$$=-1+a-b$$

$f(-1)g(-1)=-(1-a+b)=-1+a-b$에서

$1-a+b=-1+a-b$ $\therefore a-b=1$ …… ㉠ … ❶

(ii) $\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=f(1)g(1)$이므로

$$\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+}(-1)\times\lim_{x\to 1+}(x^2+ax+b)$$
$$=-1-a-b$$
$$\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}1\times\lim_{x\to 1-}(x^2+ax+b)$$
$$=1+a+b$$

$f(1)g(1)=-(1+a+b)=-1-a-b$에서

$-1-a-b=1+a+b$ $\therefore a+b=-1$ …… ㉡ … ❷

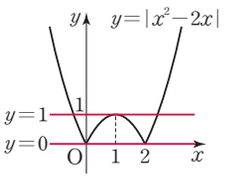
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-1$ … ❸

따라서 $g(x)=x^2-1$이므로

$g(-2)=4-1=3$ … ❹

채점 기준	비율
❶ $g(x)=x^2+ax+b$라 놓고 함수 $f(x)g(x)$가 $x=-1$에서 연속임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $g(-2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

22 함수 $y=|x^2-2x|$의 그래프는 함수 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.



즉, 함수 $y=|x^2-2x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 … ❶

함수 $f(k)$는 다음과 같다.

$$f(k)=\begin{cases}2 & (k>1)\\ 3 & (k=1)\\ 4 & (0<k<1)\\ 2 & (k=0)\\ 0 & (k<0)\end{cases}$$ … ❷

따라서 함수 $f(k)$가 불연속인 실수 k의 값은 0, 1이다. … ❸

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=\|x^2-2x\|$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❷ 함수 $f(k)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 함수 $f(k)$가 불연속인 실수 k의 값을 구할 수 있다.	30 %

23 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$

라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, c]$에서 연속이다.

이때 $a<b<c$이므로

$f(a)=(a-b)(a-c)>0$

$f(b)=(b-c)(b-a)<0$

$f(c)=(c-a)(c-b)>0$ … ❶

즉, $f(a)f(b)<0$, $f(b)f(c)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b), (b, c)에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다. … ❷

채점 기준	비율
❶ $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$로 놓고 $f(a), f(b), f(c)$의 값의 부호를 구할 수 있다.	50 %
❷ 사잇값 정리를 이용하여 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가짐을 보일 수 있다.	50 %

3 미분계수와 도함수

1 미분계수

개념 확인 62~65쪽

1 (1) 7 (2) $5+\Delta x$
2 -1
3 (1) 10 (2) -4
4 풀이 참조

1 (1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}$
$=\dfrac{(3^2+3\times3-1)-(1^2+3\times1-1)}{2}$
$=7$

(2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{(1+\Delta x)-1}$
$=\dfrac{\{(1+\Delta x)^2+3(1+\Delta x)-1\}-(1^2+3\times1-1)}{\Delta x}$
$=\dfrac{5\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$
$=5+\Delta x$

2 $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$ ← $f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$
$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\{(1+\Delta x)^2-3(1+\Delta x)+2\}-(1^2-3\times1+2)}{\Delta x}$
$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{-\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$
$=\lim\limits_{\Delta x\to0}(-1+\Delta x)=-1$

3 (1) $f(x)=5x^2$이라 하면 구하는 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$과 같으므로
$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$
$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{5(1+\Delta x)^2-5\times1^2}{\Delta x}$
$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{10\Delta x+5(\Delta x)^2}{\Delta x}$
$=\lim\limits_{\Delta x\to0}(10+5\Delta x)=10$

(2) $f(x)=-x^2+1$이라 하면 구하는 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수 $f'(2)$와 같으므로
$f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$
$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\{-(2+\Delta x)^2+1\}-(-2^2+1)}{\Delta x}$
$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{-4\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}$
$=\lim\limits_{\Delta x\to0}(-4-\Delta x)=-4$

4 (i) $x=0$에서의 함숫값은 $f(0)=0$
$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}(x+|x|)=\lim\limits_{x\to0+}(x+x)=0$,
$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}(x+|x|)=\lim\limits_{x\to0-}(x-x)=0$이므로
$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$
$\therefore\ \lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{h+|h|}{h}=\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{h+h}{h}=2$
$\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{h+|h|}{h}=\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{h-h}{h}=0$
따라서 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)=x+|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

개념 드릴

66쪽

1 (1) -1 (2) $4+\Delta x$
2 (1) 2 (2) $2a+4+\Delta x$
3 (1) -4 (2) -1 (3) -3 (4) 7
4 (1) 3 (2) -5 (3) -1 (4) 5
5 (1) $x=-1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.
(2) $x=-1$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

1 (1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}$
$=\dfrac{(2^2-2\times2)-\{(-1)^2-2\times(-1)\}}{3}$
$=-1$

(2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(3+\Delta x)-f(3)}{(3+\Delta x)-3}$
$=\dfrac{\{(3+\Delta x)^2-2(3+\Delta x)\}-(3^2-2\times3)}{\Delta x}$
$=\dfrac{4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$
$=4+\Delta x$

2 (1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}$
$=\dfrac{\{2(a+\Delta x)-3\}-(2a-3)}{\Delta x}$
$=\dfrac{2\Delta x}{\Delta x}=2$

(2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}$
$=\dfrac{\{(a+\Delta x)^2+4(a+\Delta x)-1\}-(a^2+4a-1)}{\Delta x}$
$=\dfrac{(2a+4)\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2a+4+\Delta x$

3 (1) $f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{-4(-1+\Delta x)+1\}-\{-4\times(-1)+1\}}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{-4\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(-4)=-4$

(2) $f'(-1)$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{2(-1+\Delta x)^2+3(-1+\Delta x)\}-\{2\times(-1)^2+3\times(-1)\}}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{-\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(-1+2\Delta x)=-1$

(3) $f'(-1)$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{(-1+\Delta x)^2-(-1+\Delta x)+7\}-\{(-1)^2-(-1)+7\}}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{-3\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(-3+\Delta x)=-3$

(4) $f'(-1)$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{-3(-1+\Delta x)^2+(-1+\Delta x)-5\}-\{-3\times(-1)^2+(-1)-5\}}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{7\Delta x-3(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(7-3\Delta x)=7$

4 (1) $f(x)=2x^2+3x-1$이라 하면 구하는 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=0$에서의 미분계수 $f'(0)$과 같으므로

$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{2(\Delta x)^2+3\Delta x-1\}-(2\times 0^2+3\times 0-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{3\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(3+2\Delta x)=3$

(2) $f(x)=x^2-7x$라 하면 구하는 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$과 같으므로

$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{(1+\Delta x)^2-7(1+\Delta x)\}-(1^2-7\times 1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{-5\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(-5+\Delta x)=-5$

(3) $f(x)=-x^2-3x+2$라 하면 구하는 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=-1$에서의 미분계수 $f'(-1)$과 같으므로

$f'(-1)$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{-(-1+\Delta x)^2-3(-1+\Delta x)+2\}-\{-(-1)^2-3\times(-1)+2\}}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{-\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(-1-\Delta x)=-1$

(4) $f(x)=x^3+x^2$이라 하면 구하는 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$과 같으므로

$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{(1+\Delta x)^3+(1+\Delta x)^2\}-(1^3+1^2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{5\Delta x+4(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\{5+4\Delta x+(\Delta x)^2\}=5$

5 (1) (i) $x=-1$에서의 함숫값은 $f(-1)=0$

$\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1+}|x+1|=\lim_{x\to -1+}(x+1)=0$,

$\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1-}|x+1|=\lim_{x\to -1-}\{-(x+1)\}=0$

이므로 $\lim_{x\to -1}f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to -1}f(x)=f(-1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to 0+}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\dfrac{|h|}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\dfrac{h}{h}=1$

$\lim_{h\to 0-}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\dfrac{|h|}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}\dfrac{-h}{h}=-1$

따라서 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$이 존재하지 않으므로

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

(2) $x=-1$에서의 함숫값은 $f(-1)=2\times(-1)=-2$

$\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1+}2x=-2$,

$\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1-}(-2x)=2$이므로

$\lim_{x\to -1+}f(x)\neq\lim_{x\to -1-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to -1}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

또, 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 불연속이므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

참고 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이면 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

필수 예제 01 평균변화율과 미분계수 67쪽

01-1 답 2

|전략| 평균변화율의 정의를 이용하여 평균변화율을 구한다.

함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 k까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(k)-f(1)}{k-1}=\frac{(k^3+2k^2-3k)-(1^3+2\times1^2-3\times1)}{k-1}$$

$$=\frac{k^3+2k^2-3k}{k-1}=\frac{k(k+3)(k-1)}{k-1}$$

$$=k^2+3k$$

따라서 $k^2+3k=10$이므로

$k^2+3k-10=0$, $(k+5)(k-2)=0$

$\therefore k=2$ ($\because k>1$)

01-2 답 4

|전략| 평균변화율과 미분계수를 각각 구하여 두 식이 같음을 이용한다.

함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 k까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(k)-f(0)}{k-0}=\frac{(k^2+3k+1)-1}{k}$$

$$=\frac{k^2+3k}{k}=\frac{k(k+3)}{k}$$

$$=k+3$$

함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(2+h)^2+3(2+h)+1\}-(2^2+3\times2+1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{7h+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}(7+h)=7$$

이때 평균변화율과 미분계수가 같으므로

$k+3=7$ $\therefore k=4$

01-3 답 $c=\frac{a+b}{2}$

|전략| 평균변화율과 미분계수를 각각 구하여 두 식이 같음을 이용한다.

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b^2+b+5)-(a^2+a+5)}{b-a}$$

$$=\frac{(b^2-a^2)+(b-a)}{b-a}=\frac{(b-a)(a+b+1)}{b-a}$$

$$=a+b+1$$

함수 $f(x)$의 $x=c$에서의 미분계수는

$$f'(c)=\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(c+h)^2+(c+h)+5\}-(c^2+c+5)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(2c+1)h+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}(2c+1+h)=2c+1$$

이때 평균변화율과 미분계수가 같으므로

$a+b+1=2c+1$ $\therefore c=\frac{a+b}{2}$

필수 예제 02 미분계수를 이용한 극한값의 계산 (1) 68쪽

02-1 답 (1) 8 (2) 6 (3) 2 (4) 0

|전략| $f'(a)=\lim_{\blacksquare\to0}\frac{f(a+\blacksquare)-f(a)}{\blacksquare}$와 같이 ■가 모두 같아지도록 주어진 식을 변형한다.

(1) $\lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}\times4$

$=4f'(a)=4\times2=8$

(2) $\lim_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-3h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\times3$

$=3f'(a)=3\times2=6$

(3) $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{2h}+\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\times\frac{1}{2}+\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}f'(a)+\frac{1}{2}f'(a)=f'(a)=2$

(4) $\lim_{h\to0}\frac{f(a-h^3)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a-h^3)-f(a)}{-h^3}\times(-h^2)\right\}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a-h^3)-f(a)}{-h^3}\times\lim_{h\to0}(-h^2)$

$=f'(a)\times0=0$

Lecture

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\lim_{h\to0}\frac{f(a+nh)-f(a)}{mh}=\frac{n}{m}f'(a)$

(2) $\lim_{h\to0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{h}=(m-n)f'(a)$

02-2 답 $\frac{1}{2}$

|전략| $f'(a)=\lim_{\blacksquare\to0}\frac{f(a+\blacksquare)-f(a)}{\blacksquare}$와 같이 ■가 모두 같아지도록 주어진 식을 변형한다.

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+4h)-f(2-3h)}{4h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+4h)-f(2)+f(2)-f(2-3h)}{4h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+4h)-f(2)}{4h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-3h)-f(2)}{-4h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+4h)-f(2)}{4h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-3h)-f(2)}{-3h}\times\frac{3}{4}$

$=f'(2)+\frac{3}{4}f'(2)=\frac{7}{4}f'(2)$

따라서 $\frac{7}{4}f'(2)=\frac{7}{8}$이므로 $f'(2)=\frac{1}{2}$

필수 예제 03 미분계수를 이용한 극한값의 계산 (2) 69쪽

03-1 답 1

|전략| $f'(\bullet)=\lim\limits_{\blacktriangle\to\bullet}\dfrac{f(\blacktriangle)-f(\bullet)}{\blacktriangle-\bullet}$와 같이 ▲는 ▲끼리, ●는 ●끼리 같아지도록 주어진 식을 변형한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(\sqrt{x})-f(1)}&=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{f(\sqrt{x})-f(1)}\\&=\lim_{x\to1}\left\{\frac{\sqrt{x}-1}{f(\sqrt{x})-f(1)}\times(\sqrt{x}+1)\right\}\\&=\lim_{x\to1}\frac{1}{\dfrac{f(\sqrt{x})-f(1)}{\sqrt{x}-1}}\times\lim_{x\to1}(\sqrt{x}+1)\\&=\frac{1}{f'(1)}\times2=\frac{1}{2}\times2=1\end{aligned}$$

03-2 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 2

|전략| $f'(\bullet)=\lim\limits_{\blacktriangle\to\bullet}\dfrac{f(\blacktriangle)-f(\bullet)}{\blacktriangle-\bullet}$와 같이 ▲는 ▲끼리, ●는 ●끼리 같아지도록 주어진 식을 변형한다.

(1) $$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2+4x-5}&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x+5)(x-1)}\\&=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+5}\right\}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+5}\\&=f'(1)\times\frac{1}{6}=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}&\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(1)+f(1)-f(x^2)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{(x+1)(x-1)}\times(x+1)\right\}\\&=\lim_{x\to1}(x+1)f(1)-\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\lim_{x\to1}(x+1)\\&=2f(1)-f'(1)\times2=2\times4-3\times2=2\end{aligned}$$

Lecture

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{af(x)-xf(a)}{x-a}=af'(a)-f(a)$

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}=2af(a)-a^2f'(a)$

필수 예제 04 관계식이 주어진 경우의 미분계수 70쪽

04-1 답 1

|전략| $f'(a)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$에서 $f(a+h)$에 주어진 관계식을 대입하여 $f'(a)$의 값을 구한다.

모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)+1$이므로

$f(x+y)=f(x)+f(y)+1$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+1$

$\therefore f(0)=-1$ ····· ㉠

미분계수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}f'(-1)&=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{f(-1)+f(h)+1\}-f(-1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\ (\because\ ㉠)\\&=f'(0)=2\end{aligned}$$

$\therefore f(0)+f'(-1)=-1+2=1$

04-2 답 −5

|전략| $f'(a)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$에서 $f(a+h)$에 주어진 관계식을 대입하여 $f'(a)$의 값을 구한다.

모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)-2xy$이므로

$f(x+y)=f(x)+f(y)-2xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0$

$\therefore f(0)=0$ ····· ㉠

미분계수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}f'(2)&=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2)+f(h)-4h\}-f(2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-4h}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)-4h}{h}\ (\because\ ㉠)\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-\lim_{h\to0}4\\&=f'(0)-4\\&=-1-4=-5\end{aligned}$$

필수 예제 05 미분계수의 기하적 의미 71쪽

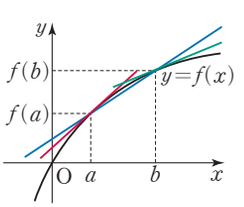
05-1 답 $f'(b)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(a)$

|전략| 평균변화율과 미분계수의 기하적 의미를 파악한다.

(i) $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기이다.

(ii) $f'(b)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(b, f(b))$에서의 접선의 기울기이다.

(iii) $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기이다.



(i)~(iii)을 그래프에서 확인하면

$f'(b)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(a)$

05-2 답 3

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

$f(x)=3x^2-x+1$이라 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a$인 점에서의 접선의 기울기는 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같으므로

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{3(a+h)^2-(a+h)+1\}-(3a^2-a+1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(6a-1)h+3h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(6a-1+3h)=6a-1$$

이때 접선의 기울기가 17이므로 $6a-1=17$ $\therefore a=3$

필수 예제 06 미분가능성과 연속성 – 식 72쪽

06-1 답 $x=3$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하려면 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재해야 한다.

(i) $x=3$에서의 함숫값은 $f(3)=0$

$\lim_{x\to 3+}f(x)=\lim_{x\to 3+}|(x+1)(x-3)|=\lim_{x\to 3+}(x+1)(x-3)=0$,

$\lim_{x\to 3-}f(x)=\lim_{x\to 3-}|(x+1)(x-3)|=\lim_{x\to 3-}\{-(x+1)(x-3)\}=0$

이므로 $\lim_{x\to 3}f(x)=0$ $\therefore \lim_{x\to 3}f(x)=f(3)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to 0+}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{|(4+h)h|}{h}$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{(h+4)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}(h+4)=4$$

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{|(4+h)h|}{h}$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{-(h+4)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\{-(h+4)\}=-4$$

따라서 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

06-2 답 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하려면 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재해야 한다.

(i) $x=1$에서의 함숫값은 $f(1)=-1$

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2-3x+1)=-1$,

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(x-2)=-1$이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=-1$ $\therefore \lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\{(1+h)^2-3(1+h)+1\}-(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2-h}{h}=\lim_{h\to 0+}(h-1)=-1$$

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\{(1+h)-2\}-(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{h}{h}=1$$

따라서 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

06-3 답 $x=0$에서 미분가능하다.

|전략| 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$이 존재해야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$

이때 $g(x)=xf(x)$에서 $g(0)=0$이고

$\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{g(h)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{hf(h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0+}f(h)=f(0)$$

$\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{g(h)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{hf(h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0-}f(h)=f(0)$$

즉, $\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$이 존재한다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

필수 예제 07 미분가능성과 연속성 – 그래프 73쪽

07-1 답 ㄹ

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 불연속이거나 $x=1$에서 연속이지만 그래프가 꺾이면 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

ㄱ. $x=1$에서 $\lim_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이고 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $x=1$에서 $\lim_{x\to 1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이고 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 $y=f(x)$의 그래프가 꺾여 있으므로 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

ㄹ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고 그래프가 꺾이지 않았으므로 $x=1$에서 미분가능하다.

따라서 $x=1$에서 미분가능한 것은 ㄹ이다.

07-2 ⑤

| 전략 | 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이거나 $x=a$에서의 연속이지만 그래프가 꺾이면 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

① $f'\left(\frac{1}{2}\right)$은 점 $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$에서의 접선의 기울기와 같으므로

$f'\left(\frac{1}{2}\right)<0$

② $f'(x)=0$인 점은 미분가능하면서 접선의 기울기가 0인 점이므로 $1<x<2$인 모든 x에 대하여 $f'(x)=0$이다.

③ $\lim_{x\to 3+} f(x)=1$이고 $\lim_{x\to 3-} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to 3} f(x)=1$

④ 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 끊어져 있으면 불연속이므로 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 $x=3$, $x=4$의 2개이다.

⑤ 함수 $f(x)$가 $x=3$, $x=4$에서 불연속이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$, $x=4$에서 미분가능하지 않다.

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$, $x=2$에서 연속이지만 그래프가 꺾여 있으므로 미분가능하지 않다.

즉, 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 x의 값은 $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$의 4개이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

2 도함수

개념 확인 74~77쪽

1 (1) $f'(x)=0, f'(3)=0$
(2) $f'(x)=3, f'(3)=3$
(3) $f'(x)=4x, f'(3)=12$
(4) $f'(x)=2x-1, f'(3)=5$

2 (1) $4, 4x^3$ (2) $10, 10x^9$ (3) 1 (4) 0

3 (1) $f'(x)=9x^8$
(2) $f'(x)=7x^6$
(3) $f'(x)=100x^{99}$
(4) $f'(x)=0$

4 (1) $y'=2000$
(2) $y'=-14x$
(3) $y'=12x^2+2x-2$
(4) $y'=-5x^4+15x^2-8x$

5 (1) $y'=9x^2+2x-6$
(2) $y'=3x^2+2x-3$
(3) $y'=3x^2-8x-16$
(4) $y'=20x^3+18x^2-26x-6$

1 (1) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{7-7}{h}$

$=0$

$\therefore f'(3)=0$

(2) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{3(x+h)+2\}-(3x+2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}$

$=3$

$\therefore f'(3)=3$

(3) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{2(x+h)^2-3\}-(2x^2-3)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{4xh+2h^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(4x+2h)$

$=4x$

$\therefore f'(3)=4\times 3=12$

(4) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^2-(x+h)+2\}-(x^2-x+2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{(2x-1)h+h^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(2x-1+h)$

$=2x-1$

$\therefore f'(3)=2\times 3-1=5$

3 (1) $f'(x)=9x^{9-1}=9x^8$
(2) $f'(x)=7x^{7-1}=7x^6$
(3) $f'(x)=100x^{100-1}=100x^{99}$
(4) $f'(x)=(10^5)'=0$

4 (1) $y'=2000(x)'=2000$
(2) $y'=-7(x^2)'+(3)'=-7\times 2x=-14x$
(3) $y'=4(x^3)'+(x^2)'-2(x)'-(1)'$
$=4\times 3x^2+2x-2$
$=12x^2+2x-2$
(4) $y'=-(x^5)'+5(x^3)'-4(x^2)'+(3)'$
$=-5x^4+5\times 3x^2-4\times 2x$
$=-5x^4+15x^2-8x$

5 (1) $y'=(x^2-2)'(3x+1)+(x^2-2)(3x+1)'$
$=2x(3x+1)+(x^2-2)\times 3$
$=(6x^2+2x)+(3x^2-6)$
$=9x^2+2x-6$
(2) $y'=(-x^2+3)'(-x-1)+(-x^2+3)(-x-1)'$
$=-2x(-x-1)+(-x^2+3)\times(-1)$
$=(2x^2+2x)+(x^2-3)$
$=3x^2+2x-3$

(3) $y'=(x+3)'(x^2-7x+5)+(x+3)(x^2-7x+5)'$
$=1\times(x^2-7x+5)+(x+3)(2x-7)$
$=(x^2-7x+5)+(2x^2-x-21)$
$=3x^2-8x-16$

(4) $y'=(x+2)'(x^2-1)(5x-4)+(x+2)(x^2-1)'(5x-4)$
$+(x+2)(x^2-1)(5x-4)'$
$=1\times(x^2-1)(5x-4)+(x+2)\times2x\times(5x-4)$
$+(x+2)(x^2-1)\times5$
$=(5x^3-4x^2-5x+4)+(10x^3+12x^2-16x)$
$+(5x^3+10x^2-5x-10)$
$=20x^3+18x^2-26x-6$

개념 드릴 79쪽

1 (1) $f'(x)=-2x+1$ (2) -1
2 109
3 (1) $y'=2x+9$ (2) $y'=-6x-7$
(3) $y'=3x+1$ (4) $y'=-5x^2-2x+5$
4 (1) $y'=12x+1$ (2) $y'=-9x^2-6x+6$
(3) $y'=4x^3+3x^2-4x$ (4) $y'=3x^2+20x+31$
5 (1) $y'=6(2x+3)^2$
(2) $y'=2(x^2-x+3)(2x-1)$
(3) $y'=(12x+53)(3x-1)^2$
(4) $y'=2(x+3)(10x+13)(4x-5)^2$

1 (1) $f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\dfrac{\{-(x+h)^2+(x+h)+1\}-(-x^2+x+1)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\dfrac{(-2x+1)h-h^2}{h}$
$=\lim_{h\to0}(-2x+1-h)$
$=-2x+1$

(2) $f'(1)=-2\times1+1=-1$

2 함수 $f(x)=x^n$에 대하여 $f'(x)=nx^{n-1}$이므로
$f'(1)=n$
이때 $f'(1)=109$이므로
$n=109$

3 (1) $y'=(x^2)'+9(x)'-(4)'$
$=2x+9$

(2) $y'=-3(x^2)'-7(x)'$
$=-3\times2x-7=-6x-7$

(3) $y'=\dfrac{3}{2}(x^2)'+(x)'-(3)'$
$=\dfrac{3}{2}\times2x+1=3x+1$

(4) $y'=-\dfrac{5}{3}(x^3)'-(x^2)'+5(x)'-(5)'$
$=-\dfrac{5}{3}\times3x^2-2x+5=-5x^2-2x+5$

4 (1) $y'=(2x+3)'(3x-4)+(2x+3)(3x-4)'$
$=2(3x-4)+(2x+3)\times3$
$=(6x-8)+(6x+9)$
$=12x+1$

(2) $y'=(-x^2+2)'(3x+3)+(-x^2+2)(3x+3)'$
$=-2x(3x+3)+(-x^2+2)\times3$
$=(-6x^2-6x)+(-3x^2+6)$
$=-9x^2-6x+6$

(3) $y'=(x^2)'(x-1)(x+2)+x^2(x-1)'(x+2)$
$+x^2(x-1)(x+2)'$
$=2x(x-1)(x+2)+x^2(x+2)+x^2(x-1)$
$=(2x^3+2x^2-4x)+(x^3+2x^2)+(x^3-x^2)$
$=4x^3+3x^2-4x$

(4) $y'=(x+2)'(x+3)(x+5)+(x+2)(x+3)'(x+5)$
$+(x+2)(x+3)(x+5)'$
$=(x+3)(x+5)+(x+2)(x+5)+(x+2)(x+3)$
$=(x^2+8x+15)+(x^2+7x+10)+(x^2+5x+6)$
$=3x^2+20x+31$

5 (1) $y'=\{(2x+3)^3\}'$
$=3(2x+3)^2(2x+3)'$
$=6(2x+3)^2$

(2) $y'=\{(x^2-x+3)^2\}'$
$=2(x^2-x+3)(x^2-x+3)'$
$=2(x^2-x+3)(2x-1)$

(3) $y'=\{(3x-1)^3(x+6)\}'$
$=\{3(3x-1)^2(3x-1)'\}(x+6)+(3x-1)^3(x+6)'$
$=9(3x-1)^2(x+6)+(3x-1)^3$
$=(3x-1)^2\{9(x+6)+(3x-1)\}$
$=(12x+53)(3x-1)^2$

(4) $y'=\{(x+3)^2(4x-5)^3\}'$
$=\{2(x+3)(x+3)'\}(4x-5)^3$
$+(x+3)^2\times3(4x-5)^2(4x-5)'$
$=2(x+3)(4x-5)^3+12(x+3)^2(4x-5)^2$
$=2(x+3)(4x-5)^2\{(4x-5)+6(x+3)\}$
$=2(x+3)(10x+13)(4x-5)^2$

필수 예제 01 미분법 80쪽

01-1 답 5050

| 전략 | $f(x)=x^n\ (n\geq2)$인 정수이면 $f'(x)=nx^{n-1}$임을 이용한다.

$f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{100}$에서
$f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+100x^{99}$
$\therefore f'(1)=1+2+3+\cdots+100$
$=\dfrac{100(1+100)}{2}=5050$

01-2 답 2

|전략| 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$임을 이용한다.

$g(x)=(x^2+3)f(x)$에서

$g'(x)=(x^2+3)'f(x)+(x^2+3)f'(x)$

$\quad=2xf(x)+(x^2+3)f'(x)$

$\therefore g'(1)=2f(1)+4f'(1)=2\times(-3)+4\times2=2$

01-3 답 (1) 20 (2) $\frac{123}{4}$

|전략| 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $[\{f(x)\}^n]'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$ $(n\geq2$인 정수$)$임을 이용한다.

$f'(x)=\frac{1}{2}\times2x+\frac{1}{3}\times3x^2+\frac{1}{4}\times4x^3$

$\quad=x+x^2+x^3$

$g'(x)=3(1+x^2+3x^3)^2(1+x^2+3x^3)'$

$\quad=3(1+x^2+3x^3)^2(2x+9x^2)$

$\therefore f'(-1)=-1+1-1=-1$

$g'(-1)=3\times(1+1-3)^2\times(-2+9)=21$

(1) 함수 $h(x)=f(x)+g(x)$에서 $h'(x)=f'(x)+g'(x)$이므로 함수 $h(x)$의 $x=-1$에서의 미분계수는

$h'(-1)=f'(-1)+g'(-1)=-1+21=20$

(2) 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에서 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로 함수 $h(x)$의 $x=-1$에서의 미분계수는

$h'(-1)=f'(-1)g(-1)+f(-1)g'(-1)$

이때 $f(-1)=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{17}{12}$,

$g(-1)=(1+1-3)^3=-1$이므로

$h'(-1)=-1\times(-1)+\frac{17}{12}\times21=\frac{123}{4}$

필수 예제 02 미분계수와 극한값 (1) 81쪽

02-1 답 $\frac{5}{6}$

|전략| 주어진 식을 미분계수 형태로 변형한다.

$f(2)=2^3-2\times2-5=-1$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+1}{x^3-8}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^3-8}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x^2+2x+4}\right\}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2+2x+4}$$
$$=\frac{1}{12}f'(2)$$

이때 $f'(x)=3x^2-2$이므로 $f'(2)=3\times2^2-2=10$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)+1}{x^3-8}=\frac{1}{12}f'(2)=\frac{1}{12}\times10=\frac{5}{6}$

02-2 답 $-\frac{13}{12}$

|전략| 주어진 식을 미분계수 형태로 변형한다.

$$\lim_{h\to0}\frac{13h}{f(1)-f(1+h)}=\lim_{h\to0}\frac{13}{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times(-1)}$$
$$=-\frac{13}{f'(1)}$$

이때

$f'(x)=(x^2+1)'(x^3+x^2-1)+(x^2+1)(x^3+x^2-1)'$

$\quad=2x(x^3+x^2-1)+(x^2+1)(3x^2+2x)$

이므로

$f'(1)=2\times1\times1+2\times5=12$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{13h}{f(1)-f(1+h)}=-\frac{13}{f'(1)}=-\frac{13}{12}$

필수 예제 03 미분계수와 극한값 (2) 82쪽

03-1 답 -8

|전략| 주어진 식의 일부를 $f(x)$로 놓고 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

$f(x)=x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6$이라 하면

$f(-1)=1-1+1-1+1=1$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=f'(-1)$$

$f(x)=x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6$에서

$f'(x)=10x^9+9x^8+8x^7+7x^6+6x^5$

따라서 구하는 값은

$f'(-1)=-10+9-8+7-6=-8$

03-2 답 9

|전략| 주어진 식의 일부를 $f(x)$로 놓고 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

$f(x)=x^9+x^6+x^3$이라 하면

$f(1)=1+1+1=3$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^9+x^6+x^3-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}f'(1)$$

$f(x)=x^9+x^6+x^3$에서

$f'(x)=9x^8+6x^5+3x^2$

따라서 구하는 값은

$\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}\times(9+6+3)=9$

03-3 답 8

|전략| 주어진 식의 일부를 $f(x)$로 놓고 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

$f(x)=x^n+2x^3+x$라 하면

$f(1)=1+2+1=4$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n+2x^3+x-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)$$

$\therefore f'(1)=15$

$f(x)=x^n+2x^3+x$에서

$f'(x)=nx^{n-1}+6x^2+1$이므로

$f'(1)=n+6+1=n+7$

따라서 $n+7=15$이므로 $n=8$

필수 예제 04 미분계수를 이용한 미정계수의 결정 83쪽

04-1 답 18

|전략| $g(x)=(x-1)f(x)$에서 곱의 미분법을 이용하여 $g'(x)$를 구한다.

$f(x)=x^2+ax-5$에서 $f'(x)=2x+a$

$\therefore f'(2)=4+a$

$g(x)=(x-1)f(x)$에서

$g'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$

$\therefore g'(2)=f(2)+f'(2)$
$=(2a-1)+(4+a)$
$=3a+3$

$f'(2)+g'(2)=0$이므로

$(4+a)+(3a+3)=0 \qquad \therefore a=-\frac{7}{4}$

따라서 $f(x)=x^2-\frac{7}{4}x-5$이므로

$f(-4)=16+7-5=18$

04-2 답 5

|전략| 주어진 식에서 미분계수의 정의를 활용한다.

$f(x)=ax^2+bx+1$에서 $f'(x)=2ax+b$

$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=1$에서 $f'(0)=1$이므로

$b=1$

$\lim_{h\to0}\frac{f(-1-h)-f(-1)}{h}=3$의 좌변을 정리하면

$$\lim_{h\to0}\frac{f(-1-h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(-1-h)-f(-1)}{-h}\times(-1)$$
$$=-f'(-1)$$

즉, $-f'(-1)=3$에서 $f'(-1)=-3$이므로

$-2a+b=-3$, $-2a+1=-3$ ($\because b=1$)

$\therefore a=2$

따라서 $f'(x)=4x+1$이므로

$f'(1)=4+1=5$

04-3 답 −6

|전략| $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=3$에서 (분모) → 0이므로 (분자) → 0임을 이용한다.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=3$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)-3\}=0$이다.

즉, $f(1)=3$이므로

$1+a+b=3 \qquad \therefore a+b=2$ …… ㉠

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$f(x)=x^3+ax^2+bx$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

즉, $f'(1)=3$이므로

$3+2a+b=3 \qquad \therefore 2a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=4$

$\therefore a-b=-2-4=-6$

필수 예제 05 미분가능할 조건 84쪽

05-1 답 22

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이고 $f'(1)$이 존재함을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(ax^2+2x+b)=a+2+b$,

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(3x^2+ax+1)=a+4$,

$f(1)=a+2+b$이므로

$a+b+2=a+4 \qquad \therefore b=2$

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $f'(1)$이 존재한다.

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(ax^2+2x+2)-(a+4)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{a(x^2-1)+2(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\{a(x+1)+2\}=2a+2$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(3x^2+ax+1)-(a+4)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{3(x^2-1)+a(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\{3(x+1)+a\}=6+a$$

$2a+2=6+a \qquad \therefore a=4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}4x^2+2x+2 & (x\geq1)\\ 3x^2+4x+1 & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(2)=16+4+2=22$

다른 풀이 $g(x)=ax^2+2x+b$, $h(x)=3x^2+ax+1$이라 하면

$g'(x)=2ax+2$, $h'(x)=6x+a$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $g(1)=h(1)$에서 $b=2$

함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로 $g'(1)=h'(1)$에서 $a=4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}4x^2+2x+2 & (x\geq1)\\ 3x^2+4x+1 & (x<1)\end{cases}$이므로 $f(2)=16+4+2=22$

필수 예제 06 미분법과 다항식의 나눗셈 85쪽

06-1 답 −8

|전략| 다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어지면 $f(x)=(x-a)^2Q(x)$로 놓을 수 있음을 이용한다.

다항식 $2x^3+3ax+b$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$2x^3+3ax+b=(x-1)^2Q(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2+3a+b=0$ $\therefore b=-3a-2$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x^2+3a=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$6+3a=0$ $\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉡에 대입하면 $b=4$

$\therefore ab=-2\times4=-8$

06-2 답 0

|전략| 다항식 $f(x)$를 $(x+a)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면 $f(x)=(x+a)^2Q(x)+R(x)$가 성립한다.

다항식 x^5+ax^2+bx를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $2x+3$이므로

$x^5+ax^2+bx=(x+1)^2Q(x)+2x+3$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1+a-b=-2+3$ $\therefore a-b=2$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$5x^4+2ax+b=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+2$

위 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$5-2a+b=2$ $\therefore 2a-b=3$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-1$

$\therefore a+b=1+(-1)=0$

개념 정리 86~87쪽

01 $b-a$, $f(b)-f(a)$, Δx, Δy **02** $b-a$, Δx
03 기울기 **04** 미분가능 **05** 순간변화율, $f'(a)$
06 기울기 **07** 연속, $f'(a)$ **08** 역, 미분가능
09 $f'(x)$, 도함수, $\frac{dy}{dx}$ **10** $f'(a)$ **11** ㉡
12 ㉢ **13** ㉠ **14** $cf'(x)$ **15** $g'(x)$
16 $g(x)$, $f(x)$ **17** $2x$, 1, $6x-6$
18 4, $2x$, $12x^2-2x+36$

17 $y'=3(x^2)'-6(x)'+(5)'$
$=3\times\boxed{2x}-6\times\boxed{1}+0=\boxed{6x-6}$

18 $y'=(4x-1)'(x^2+9)+(4x-1)(x^2+9)'$
$=\boxed{4}\times(x^2+9)+(4x-1)\times\boxed{2x}$
$=(4x^2+36)+(8x^2-2x)=\boxed{12x^2-2x+36}$

중단원 마무리 88~90쪽

01 ③	**02** ⑤	**03** 5	**04** ㄱ
05 ②	**06** −12	**07** ④	**08** ⑤
09 ②	**10** ①	**11** ①	**12** ㄴ, ㄷ
13 ④	**14** ③	**15** 4	**16** ③
17 ⑤	**18** ①	**19** 3	**20** ③
21 2	**22** −5	**23** −8	**24** 17

LEVEL 1

01 함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 $1+h$까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=h^2+3h+4$

$\therefore f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}(h^2+3h+4)=4$

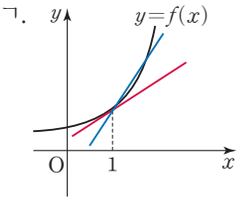
02 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2, 5)$를 지나므로 $f(2)=5$
또, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, 5)$에서의 접선의 기울기가 −3이므로 $f'(2)=-3$

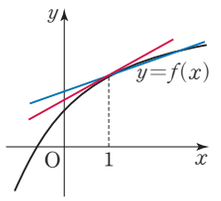
$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(2-3h)-5}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2-3h)-f(2)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(2-3h)-f(2)}{-3h}\times(-3)$
$=-3f'(2)=-3\times(-3)=9$

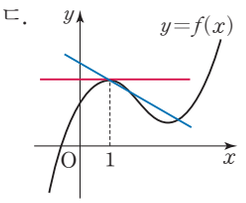
03 (i) $x=-1$에서 $\lim_{x\to-1}f(x)\neq f(-1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.
$x=-1$에서 불연속이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.
(ii) $x=0$에서 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
$x=0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 꺾여 있으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.
(iii) $x=1$에서 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.
$x=1$에서 불연속이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.
(i)~(iii)에서 불연속인 x의 값은 $x=-1$, $x=1$이므로 $m=2$이고, 미분가능하지 않은 x의 값은 $x=-1$, $x=0$, $x=1$이므로 $n=3$이다.
$\therefore m+n=2+3=5$

04 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $(1, f(1))$, $(x, f(x))$를 지나는 직선의 기울기이고, $f'(1)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기이다.

따라서 $x>1$일 때 주어진 부등식을 항상 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 ㄱ이다.

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


05 $\frac{1}{t}=h$라 하면 $t\longrightarrow\infty$일 때 $h\longrightarrow 0+$이므로

$$\lim_{t\to\infty}t\left\{f\left(1+\frac{1}{t}\right)-f(1)\right\}=\lim_{t\to\infty}\frac{f\left(1+\frac{1}{t}\right)-f(1)}{\frac{1}{t}}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=f'(1)$$

이때 $f(x)=(x^3-x^2+x)^3$이므로

$f'(x)=3(x^3-x^2+x)^2(x^3-x^2+x)'$

$\quad=3(x^3-x^2+x)^2(3x^2-2x+1)$

$\therefore$ (주어진 식)$=f'(1)=3\times 1\times 2=6$

06 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-4}{h}=12$에서 $\lim_{h\to 0}h=0$이므로

$\lim_{h\to 0}\{f(2+2h)-4\}=0$이다.

즉, $f(2)=4$이므로

$8+4a+b=4 \quad \therefore 4a+b=-4$ …… ㉠

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{2h}\times 2$$

$$=2f'(2)$$

즉, $2f'(2)=12$이므로 $f'(2)=6$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax$이므로

$12+4a=6 \quad \therefore a=-\frac{3}{2}$

$a=-\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면

$-6+b=-4 \quad \therefore b=2$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+2$이므로

$f(-2)=-8-6+2=-12$

07 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=-2$에서 미분가능하므로 $x=-2$에서 연속이고 미분계수 $f'(-2)$가 존재한다.

(i) $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -2+}f(x)=\lim_{x\to -2-}f(x)=f(-2)$이다.

$\lim_{x\to -2+}f(x)=\lim_{x\to -2+}(x^2+ax+b)=4-2a+b$,

$\lim_{x\to -2-}f(x)=\lim_{x\to -2-}2x=-4$,

$f(-2)=4-2a+b$이므로

$4-2a+b=-4 \quad \therefore 2a-b=8$ …… ㉠

(ii) $f'(-2)$가 존재하므로

$$\lim_{x\to -2+}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$$

$$=\lim_{x\to -2+}\frac{x^2+ax+b-(4-2a+b)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2+}\frac{x^2-4+ax+2a}{x+2}=\lim_{x\to -2+}\frac{(x+2)(x-2+a)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2+}(x-2+a)=a-4$$

$$\lim_{x\to -2-}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$$

$$=\lim_{x\to -2-}\frac{2x-(4-2a+b)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2-}\frac{2x+4}{x+2}\ (\because ㉠)$$

$$=\lim_{x\to -2-}\frac{2(x+2)}{x+2}=2$$

즉, $a-4=2$이므로 $a=6$

$a=6$을 ㉠에 대입하면 $12-b=8 \quad \therefore b=4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2+6x+4 & (x\geq -2)\\ 2x & (x<-2)\end{cases}$이므로

$f(1)=1+6+4=11$

다른 풀이 $g(x)=x^2+ax+b$, $h(x)=2x$라 하면

$g'(x)=2x+a$, $h'(x)=2$

$x=-2$에서 연속이므로 $g(-2)=h(-2)$에서

$4-2a+b=-4 \quad \therefore 2a-b=8$ …… ㉠

$x=-2$에서의 미분계수가 존재하므로 $g'(-2)=h'(-2)$에서

$-4+a=2 \quad \therefore a=6$

$a=6$을 ㉠에 대입하면 $12-b=8 \quad \therefore b=4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2+6x+4 & (x\geq -2)\\ 2x & (x<-2)\end{cases}$이므로 $f(1)=1+6+4=11$

08 다항식 x^3+3x^2+a를 $(x-b)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^3+3x^2+a=(x-b)^2Q(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=b$를 대입하면

$b^3+3b^2+a=0$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+6x=2(x-b)Q(x)+(x-b)^2Q'(x)$

위 식의 양변에 $x=b$를 대입하면

$3b^2+6b=0$, $3b(b+2)=0 \quad \therefore b=-2\ (\because b\neq 0)$

$b=-2$를 ㉡에 대입하면

$-8+12+a=0 \quad \therefore a=-4$

$\therefore ab=-4\times(-2)=8$

LEVEL 2

09 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{9+3a-(1+a)}{2}=a+4$$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2+a(a+h)-(a^2+a^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3ah+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(3a+h)=3a$$

따라서 $a+4=3a$이므로

$2a=4 \quad \therefore a=2$

10 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)+4}{2h}=5$에서 $\lim_{h\to 0}2h=0$이므로

$\lim_{h\to 0}\{f(1+h)+4\}=0$이다.

즉, $f(1)+4=0$이므로 $f(1)=-4$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)+4}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}f'(1)$$

즉, $\frac{1}{2}f'(1)=5$이므로 $f'(1)=10$

$\therefore f(1)+f'(1)=-4+10=6$

11 $\lim_{x\to 4}\frac{\{f(\sqrt{x})\}^2+f(\sqrt{x})}{x^2-16}=1$에서

$\lim_{x\to 4}(x^2-16)=0$이므로 $\lim_{x\to 4}[\{f(\sqrt{x})\}^2+f(\sqrt{x})]=0$이다.

즉, $\{f(2)\}^2+f(2)=0$이므로

$f(2)\{f(2)+1\}=0 \quad \therefore f(2)=-1\ (\because f(2)\neq 0)$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\{f(\sqrt{x})\}^2+f(\sqrt{x})}{x^2-16}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{f(\sqrt{x})\{f(\sqrt{x})+1\}}{x^2-16}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{f(\sqrt{x})\{f(\sqrt{x})-f(2)\}}{(x+4)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

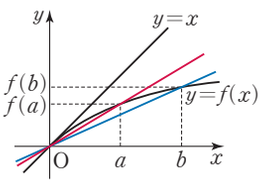
$$=\lim_{x\to 4}\frac{f(\sqrt{x})}{(x+4)(\sqrt{x}+2)}\times\lim_{x\to 4}\frac{f(\sqrt{x})-f(2)}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\frac{f(2)}{8\times 4}\times f'(2)=-\frac{1}{32}f'(2)$$

즉, $-\frac{1}{32}f'(2)=1$이므로 $f'(2)=-32$

12 ㄱ. $\frac{f(a)}{a}$는 원점 $(0, 0)$과 점 $(a, f(a))$를 지나는 직선의 기울기이고, $\frac{f(b)}{b}$는 원점 $(0, 0)$과 점 $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기이다.

$\therefore \frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}$ (거짓)

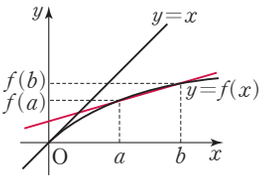


ㄴ. 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는 직선 $y=x$의 기울기보다 작으므로

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$

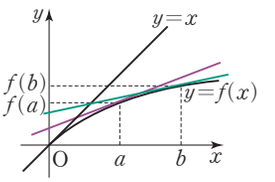
이때 $a<b$에서 $b-a>0$이므로

$f(b)-f(a)<b-a$ (참)



ㄷ. $f'(a)$는 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$는 점 $(b, f(b))$에서의 접선의 기울기이다.

$\therefore f'(a)>f'(b)$ (참)



따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

13 ① 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 불연속이므로 $\lim_{x\to 5}f(x)\neq f(5)$이다.

② $f'(x)=0$, 즉 접선의 기울기가 0인 x의 값은 $x=1$, $x=3$의 2개이다.

③ 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 $x=5$의 1개이다.

④ $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)$는 곡선 $y=f(x)$의 $x=4$인 점에서의 접선의 기울기이므로 $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}>0$이다.

⑤ 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 x의 값은 $x=2$, $x=5$의 2개이다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

14 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)+axy$이므로 $f(x+y)=f(x)+f(y)+axy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$ ····· ㉠

또, $f'(x)=3x-2$에서 $f'(0)=-2$ ····· ㉡

도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x)+f(h)+axh\}-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+axh}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+\lim_{h\to 0}ax$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to 0}ax\ (\because ㉠)$$

$$=f'(0)+ax=ax-2\ (\because ㉡)$$

따라서 $ax-2=3x-2$이므로 $a=3$

15 $g(x)=(x^2-3x)f(x)$에서

$g'(x)=(2x-3)f(x)+(x^2-3x)f'(x)$이므로

$g'(0)=-3f(0)$, $g'(3)=3f(3)$

따라서 $g'(0)+g'(3)=12$이므로

$-3f(0)+3f(3)=12 \quad \therefore f(3)-f(0)=4$

16 $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^n+2x-20}{x-2}=k$에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}(x^n+2x-20)=0$이다.

즉, $2^n+4-20=0$이므로

$2^n=16 \quad \therefore n=4$

$f(x)=x^4+2x$라 하면

$f(2)=16+4=20$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4+2x-20}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=f'(2)$$

$f(x)=x^4+2x$에서 $f'(x)=4x^3+2$

$f'(2)=32+2=34=k$

$\therefore n+k=4+34=38$

17 $f(1)=-1+1+1=1$, $g(1)=2+1-1-1=1$

즉, $f(1)=g(1)$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-g(1+h)}{3h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)+g(1)-g(1+h)}{3h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times\left(-\frac{2}{3}\right)+\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}\times\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$=-\frac{2}{3}f'(1)-\frac{1}{3}g'(1)$$

이때 $f(x)=-x^5+x^3+1$, $g(x)=2x^3+x^2-x-1$에서

$f'(x)=-5x^4+3x^2$, $g'(x)=6x^2+2x-1$이므로

$f'(1)=-5+3=-2$, $g'(1)=6+2-1=7$

$\therefore$ (주어진 식) $=-\dfrac{2}{3}f'(1)-\dfrac{1}{3}g'(1)$

$$=-\frac{2}{3}\times(-2)-\frac{1}{3}\times 7=-1$$

18 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-1$에서 $\lim_{x\to 0}x=0$이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$이다.

$\therefore f(0)=0$

또, $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=-1$에서 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=0$이다.

$\therefore f(1)=0$

즉, 삼차함수 $f(x)$는 x, $x-1$을 인수로 가지므로

$f(x)=x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하자.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)(ax+b)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(ax+b)=-b$$

즉, $-b=-1$에서 $b=1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(ax+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}x(ax+b)=a+b$$

즉, $a+b=-1$에서 $a+1=-1 \quad \therefore a=-2$

따라서 $f(x)=x(x-1)(-2x+1)$이므로

$f(2)=2\times 1\times(-3)=-6$

19 $f(x)g(x)=\begin{cases}(x+1)(x^2+ax+b) & (x\geq 1)\\ (-x+2)(x^2+ax+b) & (x<1)\end{cases}$

함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이고 $x=1$에서의 미분계수가 존재한다.

(i) $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+}(x+1)(x^2+ax+b)$$
$$=2(1+a+b)$$
$$\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}(-x+2)(x^2+ax+b)$$
$$=1+a+b$$

$f(1)g(1)=2(1+a+b)$이므로

$2(1+a+b)=1+a+b \quad \therefore b=-a-1$ ····· ㉠

(ii) $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x+1)(x^2+ax+b)-2(1+a+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x+1)(x^2-1+ax-a)}{x-1}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x+1)\{(x-1)(x+1)+a(x-1)\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x+1)(x-1)(x+1+a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}(x+1)(x+1+a)=2(2+a)$$
$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{(-x+2)(x^2+ax+b)-2(1+a+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{(-x+2)(x^2-1+ax-a)}{x-1}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{(-x+2)\{(x-1)(x+1)+a(x-1)\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{(-x+2)(x-1)(x+1+a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}(-x+2)(x+1+a)=2+a$$

즉, $2(2+a)=2+a$이므로 $a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=2-1=1$

$\therefore b-a=1-(-2)=3$

다른 풀이 $h(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$,

$k(x)=(-x+2)(x^2+ax+b)$라 하면

$h'(x)=(x^2+ax+b)+(x+1)(2x+a)$,

$k'(x)=-(x^2+ax+b)+(-x+2)(2x+a)$

$x=1$에서 연속이므로 $h(1)=k(1)$에서

$2(1+a+b)=1+a+b \quad \therefore a+b=-1$ ····· ㉠

$x=1$에서의 미분계수가 존재하므로 $h'(1)=k'(1)$에서

$1+a+b+2(2+a)=-(1+a+b)+2+a$

$\therefore 3a+2b=-4$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$

$\therefore b-a=1-(-2)=3$

20 $f(x)$는 이차함수이고 $f(0)=-3$이므로
$f(x)=ax^2+bx-3$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)
이라 하면
$f'(x)=2ax+b$
$f(x)$, $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면
$(x+2)(2ax+b)-2(ax^2+bx-3)-14=0$
$(4a-b)x+(2b-8)=0$
위 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로
$4a-b=0$, $2b-8=0$
$\therefore a=1, b=4$
따라서 $f'(x)=2x+4$이므로
$f'(1)=2+4=6$

서술형

21 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)f(1)-f(x^2)+f(1)}{x-1}$
$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)f(1)-\{f(x^2)-f(1)\}}{x-1}$
$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)f(1)}{x-1}-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$
$=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)f(1)-\lim\limits_{x\to 1}\left\{\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$
$=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)f(1)-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\lim\limits_{x\to 1}(x+1)$ … ❶
$=2f(1)-2f'(1)$
$=2\times 4-2\times 3=2$ … ❷

채점 기준	비율
❶ 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형할 수 있다.	70 %
❷ 주어진 극한값을 구할 수 있다.	30 %

22 조건 (가)에 주어진 식의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)+f(0)-1 \quad \therefore f(0)=1$ … ❶
조건 (나)에서 $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0$이다.
즉, $f(2)=0$이므로
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$
$\therefore f'(2)=3$ … ❷
$f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{f(2)+f(h)+8h-1\}-f(2)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)+8h-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-1}{h}+\lim\limits_{h\to 0}8$
$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}8=f'(0)+8$
따라서 $f'(0)+8=3$이므로
$f'(0)=-5$ … ❸

채점 기준	비율
❶ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f'(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f'(0)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

23 $f(x)=x^4+ax^3+bx+5$에서
$f'(x)=4x^3+3ax^2+b$
$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=-7$에서 $f'(-2)=-7$
즉, $-32+12a+b=-7$에서
$12a+b=25$ …… ㉠ … ❶
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x^3)-f(1)}{x^2-1}$
$=\lim\limits_{x\to 1}\left\{\dfrac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times\dfrac{x^3-1}{x^2-1}\right\}$
$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$
$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$
$=f'(1)\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}f'(1)$
이때 $\dfrac{3}{2}f'(1)=3$이므로 $f'(1)=2$
즉, $4+3a+b=2$에서
$3a+b=-2$ …… ㉡ … ❷
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-11$
$\therefore a+b=3+(-11)=-8$ … ❸

채점 기준	비율
❶ $f'(-2)=-7$임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f'(1)=2$임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

24 다항식 x^4-3x^3+8x+1을 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$x^4-3x^3+8x+1=(x-2)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠ … ❶
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면
$16-24+16+1=2a+b \quad \therefore b=-2a+9$ …… ㉡
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$4x^3-9x^2+8=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+a$
위 식의 양변에 $x=2$를 대입하면
$32-36+8=a \quad \therefore a=4$
$a=4$를 ㉡에 대입하면 $b=1$ … ❷
따라서 $R(x)=4x+1$이므로
$R(4)=16+1=17$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$로 놓고 나눗셈의 등식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $R(4)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

4 도함수의 활용 (1)

1 접선의 방정식

개념 확인 92~95쪽

1 (1) 1 (2) 12 (3) 2 (4) -1

2 $2x-3$, -1, -1, $-x+3$

3 (1) $y=-2x+3$ (2) $y=5x-7$ (3) $y=x+3$ (4) $y=-2x-1$

4 1, (1, 0), 0, 1, $x-1$

5 (1) $y=2x-8$ (2) $y=2x+\frac{1}{2}$ (3) $y=2x$ 또는 $y=2x+4$

6 $-2t+2$, $-2t+2$, $-2t+2$, 0, 0, $2x+3$

7 $y=x+3$ 또는 $y=-7x+11$

1 (1) $f(x)=3x^2-5x+1$이라 하면 $f'(x)=6x-5$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이므로
$f'(1)=6\times1-5=1$

(2) $f(x)=2x^3-3x^2-3$이라 하면 $f'(x)=6x^2-6x$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$이므로
$f'(2)=6\times2^2-6\times2=12$

(3) $f(x)=2x^4-5x^2+2$라 하면 $f'(x)=8x^3-10x$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)$이므로
$f'(-1)=8\times(-1)^3-10\times(-1)=2$

(4) $f(x)=x^4-x^3-x^2+5$라 하면 $f'(x)=4x^3-3x^2-2x$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이므로
$f'(1)=4\times1^3-3\times1^2-2\times1=-1$

3 (1) $f(x)=-x^2+2$라 하면 $f'(x)=-2x$이므로
점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-2$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-1=-2(x-1)$
$\therefore y=-2x+3$

(2) $f(x)=2x^2-3x+1$이라 하면 $f'(x)=4x-3$이므로
점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=8-3=5$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-3=5(x-2)$
$\therefore y=5x-7$

(3) $f(x)=x^3-2x+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-2$이므로
점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3-2=1$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-2=x-(-1)$
$\therefore y=x+3$

(4) $f(x)=-2x^3+4x+3$이라 하면 $f'(x)=-6x^2+4$이므로
점 $(-1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-6+4=-2$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-1=-2\{x-(-1)\}$
$\therefore y=-2x-1$

5 (1) $f(x)=x^2-4x+1$이라 하면 $f'(x)=2x-4$
접점의 좌표를 (t, t^2-4t+1)이라 하면 접선의 기울기가 2이므로
$f'(t)=2t-4=2$에서
$2t=6 \quad \therefore t=3$
따라서 접점의 좌표는 $(3, -2)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-(-2)=2(x-3)$
$\therefore y=2x-8$

(2) $f(x)=-2x^2+4x$라 하면 $f'(x)=-4x+4$
접점의 좌표를 $(t, -2t^2+4t)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로
$f'(t)=-4t+4=2$에서
$-4t=-2 \quad \therefore t=\frac{1}{2}$
따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-\frac{3}{2}=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$
$\therefore y=2x+\frac{1}{2}$

(3) $f(x)=-x^3+5x+2$라 하면 $f'(x)=-3x^2+5$
접점의 좌표를 $(t, -t^3+5t+2)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로
$f'(t)=-3t^2+5=2$에서
$-3t^2=-3$, $t^2=1$
$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$
따라서 접점의 좌표는 $(-1, -2)$ 또는 $(1, 6)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-(-2)=2\{x-(-1)\}$ 또는 $y-6=2(x-1)$
$\therefore y=2x$ 또는 $y=2x+4$

7 $f(x)=-x^2-x+2$라 하면 $f'(x)=-2x-1$
접점의 좌표를 $(t, -t^2-t+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t-1$이므로 접선의 방정식은
$y-(-t^2-t+2)=(-2t-1)(x-t)$
$\therefore y=(-2t-1)x+t^2+2$ ····· ㉠
이 직선이 점 $(1, 4)$를 지나므로
$4=(-2t-1)+t^2+2$
$t^2-2t-3=0$, $(t+1)(t-3)=0$
$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$
따라서 $t=-1$, $t=3$을 ㉠에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$y=x+3$ 또는 $y=-7x+11$

개념 드릴 97쪽

1 (1) -3 (2) 7 (3) -27

2 (1) $y=3x-1$ (2) $y=-3x+6$ (3) $y=-3x+2$

3 (1) $y=x+2$ (2) $y=-\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}$

4 (1) $y=x+4$ (2) $y=-2x+17$

5 (1) $y=x+2$ (2) $y=-x-4$ 또는 $y=3x$

6 (1) $a+b=-2$ (2) -4 (3) 2

1 (1) $f(x)=2x^2-7x+3$이라 하면 $f'(x)=4x-7$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이므로
$f'(1)=4\times1-7=-3$
(2) $f(x)=-x^3+5x^2-x+2$라 하면 $f'(x)=-3x^2+10x-1$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 12)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$이므로
$f'(2)=-3\times2^2+10\times2-1=7$
(3) $f(x)=x^4+5x-5$라 하면 $f'(x)=4x^3+5$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)$이므로
$f'(-2)=4\times(-2)^3+5=-27$

2 (1) $f(x)=x^2+3x-1$이라 하면 $f'(x)=2x+3$이므로
점 $(0, -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=3$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-(-1)=3(x-0)$
$\therefore y=3x-1$
(2) $f(x)=x^3-3x^2+5$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x$이므로
점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=3-6=-3$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-3=-3(x-1)$
$\therefore y=-3x+6$
(3) $f(x)=x^4-x^3-2x^2+5$라 하면 $f'(x)=4x^3-3x^2-4x$이므로 점 $(-1, 5)$에서의 접선의 기울기는
$f'(-1)=-4-3+4=-3$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-5=-3\{x-(-1)\}$
$\therefore y=-3x+2$

3 (1) $f(x)=2x^2-x+2$라 하면 $f'(x)=4x-1$이므로
점 $(0, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-1$
따라서 점 $(0, 2)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 1이므로 구하는 직선의 방정식은
$y-2=x-0$ $\therefore y=x+2$
(2) $f(x)=x^3-1$이라 하면 $f'(x)=3x^2$이므로
점 $(-1, -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3$
따라서 점 $(-1, -2)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이므로 구하는 직선의 방정식은
$y-(-2)=-\frac{1}{3}\{x-(-1)\}$ $\therefore y=-\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}$

4 (1) $f(x)=x^3+x+4$라 하면 $f'(x)=3x^2+1$
접점의 좌표를 (t, t^3+t+4)라 하면 접선의 기울기가 1이므로
$f'(t)=3t^2+1=1$에서 $t=0$
따라서 접점의 좌표는 $(0, 4)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-4=x-0$ $\therefore y=x+4$
(2) $f(x)=-x^2+6x+1$이라 하면 $f'(x)=-2x+6$
접점의 좌표를 $(t, -t^2+6t+1)$이라 하면 접선의 기울기가 -2이므로
$f'(t)=-2t+6=-2$에서 $t=4$
따라서 접점의 좌표는 $(4, 9)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-9=-2(x-4)$ $\therefore y=-2x+17$

5 (1) $f(x)=x^3-2x$라 하면 $f'(x)=3x^2-2$
접점의 좌표를 (t, t^3-2t)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-2$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^3-2t)=(3t^2-2)(x-t)$
$\therefore y=(3t^2-2)x-2t^3$ ····· ㉠
이 직선이 점 $(0, 2)$를 지나므로
$2=-2t^3$, $t^3=-1$ $\therefore t=-1$ ($\because t$는 실수)
따라서 $t=-1$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$y=x+2$
(2) $f(x)=x^2+3x$라 하면 $f'(x)=2x+3$
접점의 좌표를 (t, t^2+3t)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+3$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^2+3t)=(2t+3)(x-t)$
$\therefore y=(2t+3)x-t^2$ ····· ㉠
이 직선이 점 $(-1, -3)$을 지나므로
$-3=-(2t+3)-t^2$, $t^2+2t=0$
$t(t+2)=0$ $\therefore t=-2$ 또는 $t=0$
따라서 $t=-2$, $t=0$을 ㉠에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$y=-x-4$ 또는 $y=3x$

6 (1) $f(1)=-1$, $g(1)=1+a+b$에서 $f(1)=g(1)$이므로
$-1=1+a+b$ $\therefore a+b=-2$
(2) $f(x)=-x^2$, $g(x)=x^2+ax+b$에서
$f'(x)=-2x$, $g'(x)=2x+a$
$f'(1)=-2$, $g'(1)=2+a$에서 $f'(1)=g'(1)$이므로
$-2=2+a$ $\therefore a=-4$
(3) $a+b=-2$에 $a=-4$를 대입하면
$-4+b=-2$ $\therefore b=2$

필수 예제 01 접선의 기울기 98쪽

01-1 답 22

|전략| $f(x)=ax^2+bx+c$라 할 때 $f(0)=10$, $f'(0)=-5$, $f(1)=12$임을 이용한다.

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $f'(x)=2ax+b$

점 $(0, 10)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(0)=10$

$\therefore c=10$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 10)$에서의 접선의 기울기가 -5이므로

$f'(0)=-5$

$\therefore b=-5$

또, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 12)$를 지나므로 $f(1)=12$

$a+b+c=a+(-5)+10=12$ $\therefore a=7$

$\therefore a-b+c=7-(-5)+10=22$

01-2 답 2

|전략| $f(x)=ax^4+bx^2$이라 할 때 $f(-1)=-1$, $f'(-1)=f'(1)$임을 이용한다.

$f(x)=ax^4+bx^2$이라 하면 $f'(x)=4ax^3+2bx$

점 $(-1, -1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(-1)=-1$

$\therefore a+b=-1$ ····· ㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(-1, -1)$, $(1, k)$에서의 접선의 기울기가 서로 같으므로 $f'(-1)=f'(1)$

이때 $f'(-1)=-4a-2b$, $f'(1)=4a+2b$이므로

$-4a-2b=4a+2b$ $\therefore 2a+b=0$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$

따라서 $f(x)=x^4-2x^2$이므로

$f(1)=1-2=-1$ $\therefore k=-1$

$\therefore abk=1\times(-2)\times(-1)=2$

01-3 답 −7

|전략| $f(x)=-x^3+6x^2+ax$라 할 때 함수 $f'(x)$의 최댓값이 5임을 이용한다.

$f(x)=-x^3+6x^2+ax$라 하면

$f'(x)=-3x^2+12x+a=-3(x-2)^2+a+12$

따라서 주어진 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기, 즉 $f'(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $a+12$를 가지므로

$a+12=5$ $\therefore a=-7$

필수 예제 02 접점의 좌표가 주어진 접선의 방정식 99쪽

02-1 답 (1) $y=2x$ (2) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

(1) $f(x)=-x^2+4x-1$이라 하면 $f'(x)=-2x+4$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-2+4=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-2=2(x-1)$ $\therefore y=2x$

(2) 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 이 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$ $\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

02-2 답 4

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

$f(x)=-x^3+5x$라 하면 $f'(x)=-3x^2+5$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, -4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=-3+5=2$

즉, 구하는 접선의 방정식은

$y-(-4)=2\{x-(-1)\}$ $\therefore y=2x-2$

따라서 직선 $y=2x-2$가 점 $(3, k)$를 지나므로

$k=6-2=4$

02-3 답 $\frac{7}{2}$

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, b)에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{f'(a)}$이다.

$f(x)=x^3+6x^2-11x+7$이라 하면 $f'(x)=3x^2+12x-11$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3+12-11=4$

즉, 점 $(1, 3)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-3=-\frac{1}{4}(x-1)$ $\therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$

따라서 $m=-\frac{1}{4}$, $n=\frac{13}{4}$이므로

$n-m=\frac{13}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{2}$

필수 예제 03 기울기가 주어진 접선의 방정식 100쪽

03-1 답 $y=2x-6$

|전략| 접선의 기울기를 이용하여 접점의 좌표를 구한 후 접선의 방정식을 구한다.

$f(x)=x^2-4x+3$이라 하면 $f'(x)=2x-4$

접점의 좌표를 (t, t^2-4t+3)이라 하면 직선 $y=2x-7$에 평행한 접선의 기울기는 2이므로

$f'(t)=2t-4=2$ $\therefore t=3$

따라서 접점의 좌표는 $(3, 0)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-0=2(x-3)$ $\therefore y=2x-6$

참고 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$가

(1) 평행하다. ➡ $a=c$, $b\neq d$

(2) 수직이다. ➡ $ac=-1$

03-2 답 $y=x+1$

|전략| 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ일 때, 이 직선의 기울기는 $\tan\theta$이다.

$f(x)=x^3-3x^2+4x$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x+4$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+4t)라 하면 접선의 기울기가 $\tan 45^\circ=1$이므로

$f'(t)=3t^2-6t+4=1$, $3t^2-6t+3=0$

$(t-1)^2=0$ $\therefore t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(1, 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2=x-1$ $\therefore y=x+1$

03-3 답 $y=-2x+15$

|전략| 접선의 기울기와 직선 $x-2y+1=0$의 기울기의 곱이 -1임을 이용하여 접점의 좌표를 구한 후 접선의 방정식을 구한다.

$f(x)=-x^2+4x+6$이라 하면 $f'(x)=-2x+4$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+4t+6)$이라 하면 직선 $x-2y+1=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$에 수직인 접선의 기울기는 -2이므로

$f'(t)=-2t+4=-2$ $\therefore t=3$

따라서 접점의 좌표는 $(3, 9)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-9=-2(x-3)$ $\therefore y=-2x+15$

필수 예제 04 접선을 이용한 미정계수의 결정 101쪽

04-1 답 13

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (p, q)에서의 접선의 방정식이 $y=mx+n$이면 $f(p)=q, f'(p)=m, mp+n=q$임을 이용한다.

$f(x)=x^3+ax+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2+a$

점 $(-2, k)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$k=-8-2a+1$ $\therefore 2a+k=-7$ …… ㉠

점 $(-2, k)$에서의 접선의 방정식이 $y=9x+b$이므로 이 점에서의 접선의 기울기는 9이다.

즉, $f'(-2)=12+a=9$이므로 $a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $k=-1$

이때 점 $(-2, -1)$이 직선 $y=9x+b$ 위의 점이므로

$-1=-18+b$ $\therefore b=17$

$\therefore a+b+k=-3+17+(-1)=13$

04-2 답 -20

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (p, q)에서의 접선에 수직인 직선의 방정식이 $y=mx+n$이면 $f(p)=q, f'(p)=-\frac{1}{m}$임을 이용한다.

$f(x)=x^2+ax+b$라 하면 $f'(x)=2x+a$

점 $(1, 2)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$2=1+a+b$ $\therefore a+b=1$ …… ㉠

점 $(1, 2)$에서의 접선에 수직인 직선의 방정식이 $x-2y+3=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$이므로 이 점에서의 접선의 기울기는 -2이다.

즉, $f'(1)=2+a=-2$이므로 $a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $b=5$

$\therefore ab=-4\times5=-20$

04-3 답 9

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (p, q)에서의 접선의 방정식이 $y=mx+n$이면 $f(p)=q, f'(p)=m, mp+n=q$임을 이용한다.

$f(x)=2x^4-4x+a$라 하면 $f'(x)=8x^3-4$

접점의 좌표를 $(t, 2t^4-4t+a)$라 하면 이 점에서의 접선의 방정식이 $y=4x+3$이므로 접선의 기울기는 4이다.

즉, $f'(t)=8t^3-4=4$이므로

$t^3=1$ $\therefore t=1$ ($\because t$는 실수)

따라서 점 $(1, a-2)$가 직선 $y=4x+3$ 위의 점이므로

$a-2=4+3$ $\therefore a=9$

다른 풀이 $f(x)=2x^4-4x+a$라 하면 $f'(x)=8x^3-4$

접점의 좌표를 $(t, 2t^4-4t+a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=8t^3-4$이므로 접선의 방정식은

$y-(2t^4-4t+a)=(8t^3-4)(x-t)$

$\therefore y=(8t^3-4)x-6t^4+a$

이 직선이 $y=4x+3$이므로

$8t^3-4=4$, $-6t^4+a=3$

$8t^3-4=4$에서 $t^3=1$ $\therefore t=1$ ($\because t$는 실수)

$t=1$을 $-6t^4+a=3$에 대입하면

$-6+a=3$ $\therefore a=9$

필수 예제 05 곡선 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식 102쪽

05-1 답 12

|전략| 접점의 좌표를 (t, t^2-2t+2)로 놓고 접선의 방정식을 구한 후 접선이 점 $(3, 4)$를 지남을 이용한다.

$f(x)=x^2-2x+2$라 하면 $f'(x)=2x-2$

접점의 좌표를 (t, t^2-2t+2)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-2t+2)=(2t-2)(x-t)$

$\therefore y=(2t-2)x-t^2+2$

이 직선이 점 $(3, 4)$를 지나므로

$4=3(2t-2)-t^2+2$, $t^2-6t+8=0$

$(t-2)(t-4)=0$ $\therefore t=2$ 또는 $t=4$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$f'(2)f'(4)=2\times6=12$

05-2 답 $\frac{3}{2}$

|전략| 접점의 좌표를 (t, t^3-t-1)로 놓고 접선의 방정식을 구한 후 접선이 점 $(0, -3)$을 지남을 이용한다.

$f(x)=x^3-x-1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 (t, t^3-t-1)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-t-1)=(3t^2-1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-1)x-2t^3-1$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0, -3)$을 지나므로

$-3=-2t^3-1$, $t^3=1$ $\therefore t=1$ ($\because t$는 실수)

$t=1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $y=2x-3$

따라서 구하는 접선의 x절편은 $\frac{3}{2}$이다.

05-3 17

|전략| 접점의 좌표를 $(t, -t^3+1)$로 놓고 접선의 방정식을 구한 후 접선이 점 $(0, -1)$을 지남을 이용한다.

$f(x)=-x^3+1$이라 하면 $f'(x)=-3x^2$

접점의 좌표를 $(t, -t^3+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^3+1)=-3t^2(x-t)$

$\therefore y=-3t^2x+2t^3+1$ ····· ㉠

이 직선이 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1=2t^3+1$, $t^3=-1$ $\therefore t=-1$ ($\because t$는 실수)

$t=-1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $y=-3x-1$

따라서 이 접선이 점 $(-6, k)$를 지나므로

$k=18-1=17$

필수 예제 06 두 곡선의 공통인 접선 103쪽

06-1 −48

|전략| 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 (p, q)에서 접하면 $f(p)=g(p)=q$, $f'(p)=g'(p)$임을 이용한다.

$f(x)=2x^2+ax+b$, $g(x)=-x^3+cx$라 하면

$f'(x)=4x+a$, $g'(x)=-3x^2+c$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(1, 3)$을 지나므로

$f(1)=3$에서

$2+a+b=3$ $\therefore a+b=1$ ····· ㉠

$g(1)=3$에서

$-1+c=3$ $\therefore c=4$

점 $(1, 3)$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(1)=g'(1)$에서

$4+a=-3+c$ $\therefore a=-3+4-4=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $-3+b=1$ $\therefore b=4$

$\therefore abc=-3\times4\times4=-48$

06-2 −8

|전략| 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=p$인 점에서 접하면 $f(p)=g(p)$, $f'(p)=g'(p)$임을 이용한다.

$f(x)=x^3+ax+12$, $g(x)=x^2$이라 하면

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=2x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$에서 서로 접한다고 하면

$f(t)=g(t)$에서

$t^3+at+12=t^2$ ····· ㉠

$x=t$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(t)=g'(t)$에서

$3t^2+a=2t$ $\therefore a=-3t^2+2t$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$t^3+(-3t^2+2t)t+12=t^2$

$2t^3-t^2-12=0$, $(t-2)(2t^2+3t+6)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t$는 실수)

따라서 $t=2$를 ㉡에 대입하면

$a=-12+4=-8$

2 평균값 정리

개념 확인 104~105쪽

1 미분가능, -4, $2x-6$, $2c-6$, 3

2 연속, 1, (1, 2), $-2x+4$, $-2c+4$, $\frac{3}{2}$

3 풀이 참조

3 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하다.

이때 열린구간 (a, b)에 속하는 모든 x에 대하여

$f'(x)=g'(x)$이므로

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$

따라서 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 상수함수이므로

$h(x)=f(x)-g(x)=C$

$\therefore f(x)=g(x)+C$ (단, C는 상수)

개념 드릴 107쪽

1 (1) 존재하지 않는다. (2) 존재한다. (3) 존재하지 않는다.

2 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (3) $\frac{1-\sqrt{13}}{3}$

3 (1) 존재하지 않는다. (2) 존재하지 않는다. (3) 존재한다.

4 (1) 1 (2) $\frac{\sqrt{39}}{3}$ (3) -1

1 (1) 함수 $f(x)=|x|-1$은 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고, $f(-1)=f(1)=0$이지만 $x=0$에서 미분가능하지 않으므로 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하지 않다.

이때 $f'(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이므로 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 존재하지 않는다.

(2) 함수 $f(x)=x^2$은 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고, 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(1)=1$이다.

따라서 롤의 정리를 만족시키는 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

(3) 함수 $f(x)=x^2-3x$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고, 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하지만 $f(-1)=4$, $f(1)=-2$에서 $f(-1)\neq f(1)$이다.

이때 $f'(x)=2x-3$이므로 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 존재하지 않는다.

2 (1) 함수 $f(x)=x^2-x-4$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(2)=-2$이다.
따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=2x-1$이므로
$f'(c)=2c-1=0$
$\therefore c=\frac{1}{2}$

(2) 함수 $f(x)=x^3-4x+1$은 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(2)=1$이다.
따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=3x^2-4$이므로
$f'(c)=3c^2-4=0$
$c^2=\frac{4}{3}$ $\therefore c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ($\because 0<c<2$)

(3) 함수 $f(x)=-x^3+x^2+4x-4$는 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 1)$에서 미분가능하며
$f(-2)=f(1)=0$이다.
따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2, 1)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=-3x^2+2x+4$이므로
$f'(c)=-3c^2+2c+4=0$
$3c^2-2c-4=0$ $\therefore c=\frac{1-\sqrt{13}}{3}$ ($\because -2<c<1$)
→ 근의 공식에 의하여 $c=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-3\times(-4)}}{3}$

3 (1) 함수 $f(x)=\begin{cases} x & (x\neq 1) \\ 0 & (x=1) \end{cases}$은 $x=1$에서 불연속이므로
닫힌구간 $[-1, 1]$에서 불연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하다.
이때 $f(-1)=-1$, $f(1)=0$이고 $-1<x<1$에서 $f'(x)=1$이므로 $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{0-(-1)}{2}=\frac{1}{2}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 존재하지 않는다.

(2) 함수 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$은 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 $x=\frac{1}{2}$에서 미분가능하지 않으므로 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하지 않다.
이때 $f(-1)=\frac{3}{2}$, $f(1)=\frac{1}{2}$이고 $f'(x)=\begin{cases} 1 & \left(x>\frac{1}{2}\right) \\ -1 & \left(x<\frac{1}{2}\right) \end{cases}$이므로 $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2}=-\frac{1}{2}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 존재하지 않는다.

(3) 함수 $f(x)=x^3$은 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하다.
따라서 평균값 정리를 만족시키는 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

4 (1) 함수 $f(x)=x^2-3x$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{-2-0}{2}=-1=f'(c)$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=2x-3$이므로
$f'(c)=2c-3=-1$
$2c=2$ $\therefore c=1$

(2) 함수 $f(x)=x^3+2$는 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{29-3}{2}=13=f'(c)$인 c가 열린구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=3x^2$이므로
$f'(c)=3c^2=13$
$c^2=\frac{13}{3}$ $\therefore c=\frac{\sqrt{39}}{3}$ ($\because 1<c<3$)

(3) 함수 $f(x)=-x^3+6x$는 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{5-(-4)}{3}=3=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-2, 1)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=-3x^2+6$이므로
$f'(c)=-3c^2+6=3$
$c^2=1$ $\therefore c=-1$ ($\because -2<c<1$)

필수 예제 01 롤의 정리 108쪽

01-1 답 3

|전략| $f'(c)=0$을 만족시키는 c의 값 중 열린구간 $(-2, 2)$에 속하는 값을 찾는다.

함수 $f(x)=x^4-2x^2+5$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(2)=13$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=4x^3-4x$이므로
$f'(c)=4c^3-4c=0$, $c(c+1)(c-1)=0$
$\therefore c=-1$ 또는 $c=0$ 또는 $c=1$
따라서 롤의 정리를 만족시키는 실수 c의 개수는 3이다.

01-2 답 $c=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $a=-1$

|전략| 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0, 1]$에서 롤의 정리를 만족시키므로 $f(0)=f(1)$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

함수 $f(x)=x^3+ax+1$은 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$에서 미분가능하다.
닫힌구간 $[0, 1]$에서 롤의 정리를 만족시키려면 $f(0)=f(1)$이어야 하므로
$1=1+a+1$ $\therefore a=-1$
$\therefore f(x)=x^3-x+1$

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-1$이므로

$f'(c)=3c^2-1=0,\ c^2=\frac{1}{3}$

$\therefore\ c=\frac{\sqrt{3}}{3}\ (\because\ 0<c<1)$

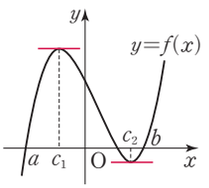
01-3 답 2

|전략| 기울기가 0인 접선을 그을 수 있는 곡선 위의 점을 찾는다.

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하며 $f(a)=f(b)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

$f'(c)=0$을 만족시키는 c는 기울기가 0인 접선을 갖는 점의 x좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(c_1, f(c_1))$, $(c_2, f(c_2))$에서 기울기가 0인 접선을 그을 수 있으므로 구하는 c의 개수는 c_1, c_2의 2이다.



필수 예제 02 평균값 정리 109쪽

02-1 답 6

|전략| $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(3)$임을 이용하여 식을 세운다.

함수 $f(x)=x^2+2x-7$은 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하다.

평균값 정리를 만족시키는 실수 c의 값이 3이므로

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(3)$

이때 $f'(x)=2x+2$이므로

$f'(3)=8$

따라서 $\frac{(b^2+2b-7)-(a^2+2a-7)}{b-a}=8$이므로

$\frac{(b-a)(b+a)+2(b-a)}{b-a}=8,\ a+b+2=8$

$\therefore\ a+b=6$

02-2 답 −1

|전략| $\frac{f(1)-f(a)}{1-a}=f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$을 만족시키는 a의 값을 구한다.

함수 $f(x)=x^3-2x$는 닫힌구간 $[a, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(a, 1)$에서 미분가능하다.

평균값 정리를 만족시키는 실수 c의 값이 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\frac{f(1)-f(a)}{1-a}=f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

이때 $f'(x)=3x^2-2$이므로

$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-1$

따라서 $\frac{-1-(a^3-2a)}{1-a}=-1$이므로

$-1-a^3+2a=-1+a$

$a^3-a=0,\ a(a+1)(a-1)=0$

$\therefore\ a=-1\ (\because\ a<0)$

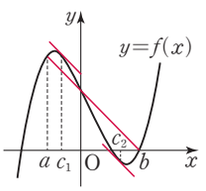
02-3 답 2

|전략| 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 그을 수 있는 곡선 위의 점을 찾는다.

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$를 만족시키는 c는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(c_1, f(c_1))$, $(c_2, f(c_2))$에서 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 그을 수 있으므로 구하는 c의 개수는 c_1, c_2의 2이다.



개념 정리 110~111쪽

01 $f'(a)$ **02** $f(a)$, $f'(a)$ **03** $f(a)$, $-\frac{1}{f'(a)}$

04 $f'(a)$, $f'(a)$, a **05** m, $f(t)$

06 $f'(t)$, $f'(t)$, t, $f'(t)$ **07** 연속, 미분가능, 0, 롤의 정리

08 평행한 **09** -12, 0, 0, 4

10 연속, 미분가능, $f'(c)$, 평균값 정리 **11** 평행한

12 4, 5, 5, $\frac{5}{2}$

09 함수 $f(x)=x^2-8x$는 닫힌구간 $[2, 6]$에서 연속이고 열린구간 $(2, 6)$에서 미분가능하며 $f(2)=f(6)=$ $\boxed{-12}$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=$ $\boxed{0}$인 c가 열린구간 $(2, 6)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x-8$이므로

$f'(c)=2c-8=$ $\boxed{0}$ $\quad\therefore\ c=$ $\boxed{4}$

12 함수 $f(x)=x^2+3$은 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(4)-f(1)}{\boxed{4}-1}=\frac{19-4}{3}=\boxed{5}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(1, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x$이므로

$f'(c)=2c=\boxed{5}$ $\quad\therefore\ c=\boxed{\frac{5}{2}}$

중단원 마무리

112~114쪽

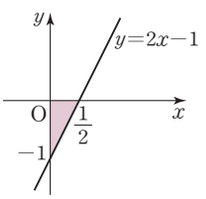
01 ②	**02** ④	**03** ①	**04** ④
05 ⑤	**06** ⑤	**07** ⑤	**08** 3
09 ④	**10** ③	**11** ⑤	**12** ①
13 ③	**14** ④	**15** ②	**16** ③
17 $\frac{4}{3}$	**18** ②	**19** ①	**20** ③
21 18	**22** $\frac{7\sqrt{5}}{5}$	**23** 2	**24** 3

LEVEL 1

01 점 $(2, 1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(2)=1$
점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기가 3이므로 $f'(2)=3$
$g(x)=(x+1)f(x)$에서
$g'(x)=f(x)+(x+1)f'(x)$
$\therefore g'(2)=f(2)+3f'(2)=1+3\times3=10$

02 $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+ax$에서 $f'(x)=-2x^2+a$
곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$에서의 접선이 서로 수직이므로 $f'(-1)f'(0)=-1$에서
$(-2+a)a=-1$, $a^2-2a+1=0$
$(a-1)^2=0$ $\therefore a=1$

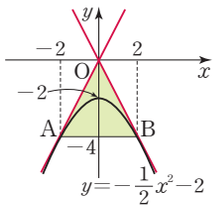
03 $f(x)=2x^3-4x+3$이라 하면 $f'(x)=6x^2-4$이므로
$f'(1)=2$
즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식은
$y-1=2(x-1)$ $\therefore y=2x-1$
따라서 이 접선의 x절편과 y절편이 각각 $\frac{1}{2}$, -1이므로 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{4}$



04 $f(x)=x^3-2x+4$라 하면 $f'(x)=3x^2-2$
접점의 좌표를 (t, t^3-2t+4)라 하면 직선 $y=x+1$에 평행한 접선의 기울기는 1이므로 $f'(t)=1$에서
$3t^2-2=1$, $t^2-1=0$
$(t+1)(t-1)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=1$
따라서 접점의 좌표는 $(-1, 5)$ 또는 $(1, 3)$이다.
한편, 점 $(1, 3)$에서의 접선의 방정식은
$y-3=x-1$ $\therefore x-y+2=0$
이때 두 접선 사이의 거리는 점 $(-1, 5)$와 직선 $x-y+2=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는
$\frac{|-1-5+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

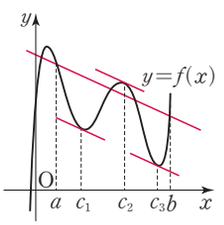
05 $f(x)=x^3+6x^2+8x+10$이라 하면 $f'(x)=3x^2+12x+8$
접점의 좌표를 $(t, t^3+6t^2+8t+10)$이라 하면 접선의 기울기가 -1이므로 $f'(t)=-1$에서
$3t^2+12t+8=-1$, $t^2+4t+3=0$
$(t+3)(t+1)=0$ $\therefore t=-3$ 또는 $t=-1$
즉, 접점의 좌표는 $(-3, 13)$ 또는 $(-1, 7)$이므로 접선의 방정식은
$y-13=-\{x-(-3)\}$ 또는 $y-7=-\{x-(-1)\}$
$\therefore y=-x+10$ 또는 $y=-x+6$
$\therefore ab=10\times6=6\times10=60$

06 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2$라 하면 $f'(x)=-x$
접점의 좌표를 $\left(t, -\frac{1}{2}t^2-2\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 방정식은
$y-\left(-\frac{1}{2}t^2-2\right)=-t(x-t)$ $\therefore y=-tx+\frac{1}{2}t^2-2$
이 직선이 원점 O를 지나므로 $0=\frac{1}{2}t^2-2$
$t^2-4=0$, $(t+2)(t-2)=0$ $\therefore t=-2$ 또는 $t=2$
즉, 접점의 좌표는 $(-2, -4)$, $(2, -4)$이므로
$A(-2, -4)$, $B(2, -4)$라 하면
삼각형 OAB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times4\times4=8$



07 $f(x)=x^2+3x-1$이라 하면 $f'(x)=2x+3$이므로
$f'(3)=9$
즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, 17)$에서의 접선의 방정식은
$y-17=9(x-3)$ $\therefore y=9x-10$ ····· ㉠
$g(x)=x^3+ax+6$이라 하면 $g'(x)=3x^2+a$
곡선 $y=g(x)$ 위의 접점의 좌표를 (t, t^3+at+6)이라 하면 이 점에서의 접선의 방정식은
$y-(t^3+at+6)=(3t^2+a)(x-t)$
$\therefore y=(3t^2+a)x-2t^3+6$ ····· ㉡
두 접선 ㉠, ㉡이 일치하므로 $-2t^3+6=-10$에서
$t^3=8$ $\therefore t=2$ ($\because t$는 실수)
따라서 $3t^2+a=9$이므로
$a=9-12=-3$

08 평균변화율 $m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기이고,
$\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=f'(c)$는 점 $(c, f(c))$에서의 접선의 기울기이다. 따라서 오른쪽 그림과 같이 주어진 조건을 만족시키는 실수 c의 개수는 c_1, c_2, c_3의 3이다.



LEVEL 2

09 $f(x)=x^4-4x^3+6x^2+4$라 하면
$f'(x)=4x^3-12x^2+12x$
점 (a, b)가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
$b=a^4-4a^3+6a^2+4$ …… ㉠
점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(a)=4$에서
$4a^3-12a^2+12a=4$
$a^3-3a^2+3a-1=0$, $(a-1)^3=0$ $\therefore a=1$
$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=1-4+6+4=7$
$\therefore a+b=1+7=8$

10 $f(x)=x^3+ax^2$이라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax$
접점의 좌표를 (t, t^3+at^2)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2at$
이때 곡선 $y=f(x)$에 대하여 기울기가 $-\frac{2}{3}$인 접선이 존재하지 않으려면 $f'(t)=-\frac{2}{3}$인 실수 t가 존재하지 않아야 한다.
$f'(t)=-\frac{2}{3}$에서 $3t^2+2at=-\frac{2}{3}$
$\therefore 9t^2+6at+2=0$ …… ㉠
즉, 이차방정식 ㉠의 실근이 존재하지 않아야 하므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=9a^2-18<0$
$a^2-2<0$, $(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})<0$
$\therefore -\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$
따라서 정수 a의 개수는 -1, 0, 1의 3이다.

11 $f(x)=x^3-4x^2+5x+a$에서 $f'(x)=3x^2-8x+5$이므로
$f'(2)=1$
즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, a+2)$에서의 접선의 방정식은
$y-(a+2)=x-2$ $\therefore y=x+a$
직선 $y=x+a$가 x축, y축과 만나는 점이 각각 P, Q이므로
$P(-a, 0)$, $Q(0, a)$
이때 $\overline{PQ}=10$이므로
$\sqrt{a^2+a^2}=10$, $2a^2=100$
$a^2=50$ $\therefore a=5\sqrt{2}$ $(\because a>0)$

12 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=-2$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로
$\lim_{x\to1}\{f(x)-1\}=0$ $\therefore f(1)=1$
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-2$
즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로 접선의 방정식은
$y-1=-2(x-1)$ $\therefore y=-2x+3$
따라서 $m=-2$, $n=3$이므로
$m-n=-2-3=-5$

13 $f(x)=x^3+3x^2+ax-5$라 하면 $f'(x)=3x^2+6x+a$이므로
$f'(-2)=a$
즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{a}$이므로 구하는 직선의 방정식은
$y-(-2a-1)=-\frac{1}{a}\{x-(-2)\}$
$\therefore y=-\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}-2a-1$
이 직선의 x절편이 -12이므로
$0=\frac{10}{a}-2a-1$, $2a^2+a-10=0$
$(2a+5)(a-2)=0$ $\therefore a=-\frac{5}{2}$ $(\because a<0)$

14 $f(x)=x^3+2x-3$이라 하면 $f'(x)=3x^2+2$이므로
$f'(-1)=5$
즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(-1, -6)$에서의 접선의 방정식은 $y-(-6)=5\{x-(-1)\}$ $\therefore y=5x-1$
곡선 $y=x^3+2x-3$과 직선 $y=5x-1$의 교점의 x좌표는
$x^3+2x-3=5x-1$에서 $x^3-3x-2=0$
$(x+1)^2(x-2)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
따라서 점 B의 좌표는 $(2, 9)$이므로
$\overline{OB}=\sqrt{2^2+9^2}=\sqrt{85}$

15 $f(x)=x^3-6x^2+3x$라 하면
$f'(x)=3x^2-12x+3=3(x-2)^2-9$
즉, 접선의 기울기는 $x=2$일 때 최솟값 -9를 갖는다.
이때 접점의 좌표는 $(2, -10)$이므로 접선의 방정식은
$y-(-10)=-9(x-2)$ $\therefore y=-9x+8$
따라서 직선 $y=-9x+8$이 점 $(k, -7)$을 지나므로
$-7=-9k+8$, $9k=15$ $\therefore k=\frac{5}{3}$

16 $f(x)=x^3-5x^2+8x-4$라 하면 $f'(x)=3x^2-10x+8$
접점의 좌표를 (t, t^3-5t^2+8t-4)라 하면 이 점에서의 접선의 방정식은
$y-(t^3-5t^2+8t-4)=(3t^2-10t+8)(x-t)$
$\therefore y=(3t^2-10t+8)x-2t^3+5t^2-4$
이 직선이 점 $(3, 0)$을 지나므로
$0=3(3t^2-10t+8)-2t^3+5t^2-4$
$\therefore t^3-7t^2+15t-10=0$ …… ㉠
따라서 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근이 세 접점의 x좌표이므로 세 접점의 x좌표를 α, β, γ라 하면 구하는 합은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{-7}{1}=7$

Lecture
삼차방정식의 근과 계수의 관계
삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

17 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+1,\ g(x)=-x^2+x+a$라 하면

$f'(x)=x^2,\ g'(x)=-2x+1$

두 곡선이 $x=t$에서 만난다고 하면

$f(t)=g(t)$에서

$\frac{1}{3}t^3+1=-t^2+t+a$ …… ㉠

$x=t$에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$f'(t)g'(t)=-1$에서

$t^2(-2t+1)=-1,\ 2t^3-t^2-1=0$

$(t-1)(2t^2+t+1)=0$

$\therefore\ t=1\ (\because\ t$는 실수)

$t=1$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{3}+1=-1+1+a \qquad \therefore\ a=\frac{4}{3}$

18 $f(x)=x^3-9,\ g(x)=x^3+a$라 하면

$f'(x)=3x^2,\ g'(x)=3x^2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(-2,\ -17)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=12$이므로 접선의 방정식은

$y-(-17)=12\{x-(-2)\}$

$\therefore\ y=12x+7$ …… ㉠

한편, 점 Q의 좌표를 $(t,\ t^3+a)$라 하면 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{Q}(t,\ t^3+a)$에서의 접선의 기울기는 $g'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+a)=3t^2(x-t)$

$\therefore\ y=3t^2x-2t^3+a$ …… ㉡

두 접선 ㉠, ㉡이 일치하므로

$3t^2=12,\ -2t^3+a=7$

$3t^2=12$에서 $t^2-4=0$

$(t+2)(t-2)=0 \qquad \therefore\ t=-2$ 또는 $t=2$

$t=-2$를 $-2t^3+a=7$에 대입하면

$16+a=7 \qquad \therefore\ a=-9$

$t=2$를 $-2t^3+a=7$에 대입하면

$-16+a=7 \qquad \therefore\ a=23$

따라서 양수 a의 값은 23이다.

19 함수 $f(x)=x^3-ax^2$은 닫힌구간 $[0,\ a]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ a)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(a)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 실수 c가 열린구간 $(0,\ a)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-2ax$에서 $f'(c)=0$인 c의 값이 $\frac{1}{3}$이므로

$\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a=0 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{2}$

20 $f(x)=ax^2+bx+1$에서 $f'(x)=2ax+b$

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하다.

이때 평균값 정리를 만족시키는 실수 c의 값이 $a\ (0<a<3)$이므로 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(a)$에서

$\frac{(9a+3b+1)-1}{3}=2a^2+b$

$3a+b=2a^2+b$

$2a^2-3a=0,\ a(2a-3)=0$

$\therefore\ a=\frac{3}{2}\ (\because\ 0<a<3)$

$f(x)=\frac{3}{2}x^2+bx+1$에서 $f(-1)=-1$이므로

$\frac{3}{2}-b+1=-1 \qquad \therefore\ b=\frac{7}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=5$

서술형

21 $y=x^3+ax^2+(2a+1)x+a+5$를 a에 대하여 정리하면

$a(x+1)^2+(x^3+x+5-y)=0$

이 등식이 a에 대한 항등식이므로

$x+1=0,\ x^3+x+5-y=0$

$\therefore\ x=-1,\ y=3$

따라서 주어진 곡선은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 3)$을 지난다. … ❶

$f(x)=x^3+ax^2+(2a+1)x+a+5$라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+2a+1$이므로

$f'(-1)=3-2a+2a+1=4$

즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

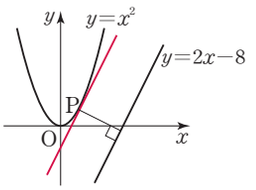
$y-3=4\{x-(-1)\} \qquad \therefore\ y=4x+7$ … ❷

따라서 $m=4,\ n=7$이므로

$m+2n=4+2\times7=18$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 곡선이 항상 지나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $m+2n$의 값을 구할 수 있다.	20 %

22 곡선 $y=x^2$에 접하고 직선 $y=2x-8$과 기울기가 같은 접선의 접점을 P라 하면 구하는 거리의 최솟값은 점 P와 직선 $y=2x-8$ 사이의 거리와 같다. … ❶



$f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$

점 P의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=2t=2 \qquad \therefore\ t=1$ … ❷

따라서 점 P의 좌표는 $(1,\ 1)$이고, 이 점과 직선 $y=2x-8$, 즉 $2x-y-8=0$ 사이의 거리가 구하는 최솟값이므로

$\frac{|2-1-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 곡선 위의 점과 주어진 직선 사이의 거리가 최소가 되는 경우를 찾을 수 있다.	40 %
❷ 기울기가 2인 접선의 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 곡선 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

23 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+a$라 하면 $f'(x)=x+1$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{2}t^2+t+a\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{2}t^2+t+a\right)=(t+1)(x-t)$

$\therefore y=(t+1)x-\frac{1}{2}t^2+a$

이 직선이 점 $(2, 1)$을 지나므로 $1=2(t+1)-\frac{1}{2}t^2+a$

$\therefore t^2-4t-2a-2=0$ ····· ㉠ … ❶

이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β라 하면 α, β는 두 접점의 x좌표이므로 $t=\alpha$, $t=\beta$에서의 접선의 기울기는 각각

$f'(\alpha)=\alpha+1$, $f'(\beta)=\beta+1$

이때 두 접선이 수직으로 만나므로 $f'(\alpha)f'(\beta)=-1$에서

$(\alpha+1)(\beta+1)=-1$ $\therefore \alpha\beta+(\alpha+\beta)=-2$ … ❷

따라서 이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-2a-2$이므로

$(-2a-2)+4=-2$ $\therefore a=2$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 접점의 x좌표를 t로 놓고 t에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 두 접선이 수직으로 만남을 이용하여 이차방정식의 두 근 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❸ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a의 값을 구할 수 있다.	30 %

참고 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-(-2a-2)=2a+6>0$ ($\because a>-3$)

24 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1)=f'(c)$인 c가 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다. … ❶

조건 (가)에서 $1<c<2$인 c에 대하여 $|f'(c)|\le 1$이므로

$|f(2)-f(1)|\le 1$

이때 조건 (나)에서 $f(1)=2$이므로

$|f(2)-2|\le 1$, $-1\le f(2)-2\le 1$

$\therefore\ 1\le f(2)\le 3$ … ❷

따라서 $f(2)$의 최댓값은 3이고 최솟값은 1이므로 구하는 곱은

$3\times 1=3$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 평균값 정리를 활용할 수 있다.	40 %
❷ $f(2)$의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(2)$의 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

5 도함수의 활용 (2)

1 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

개념 확인 116~120쪽

1 <, <, 증가
2 (1) 증가 (2) 감소
3 (1) 구간 $(-\infty, -1]$에서 증가, 구간 $[-1, \infty)$에서 감소
(2) 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가
4 (1) 구간 $[3, \infty)$에서 증가, 구간 $(-\infty, 3]$에서 감소
(2) 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 증가,
구간 $(-\infty, -2]$, $[1, \infty)$에서 감소
5 (1) 극댓값: 없다., 극솟값: -1
(2) 극댓값: 4, 극솟값: 0
6 (1) 극댓값: 없다., 극솟값: -4
(2) 극댓값: 0, 극솟값: -32

2 (1) $2\le x_1<x_2\le 4$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=(2x_1+1)-(2x_2+1)$

$=2(x_1-x_2)<0$

즉, $f(x_1)<f(x_2)$이므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[2, 4]$에서 증가한다.

(2) $2\le x_1<x_2\le 4$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$

$=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}>0$

즉, $f(x_1)>f(x_2)$이므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[2, 4]$에서 감소한다.

3 (1) $f(x)=-x^2-2x+5$에서

$f'(x)=-2x-2=-2(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	-1	···
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	6	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$에서 증가하고 구간 $[-1, \infty)$에서 감소한다.

(2) $f(x)=x^3-3x^2+3x$에서

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	1	···
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

4 (1) $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(3)$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[3, \infty)$에서 증가하고,
구간 $(-\infty, 3]$에서 감소한다.

(2) $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$f(-2)$	↗	$f(1)$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 증가하고,
구간 $(-\infty, -2]$, $[1, \infty)$에서 감소한다.

5 (1) 함수 $f(x)$는 극댓값은 없다.
또, 함수 $f(x)$는 $x=0$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로
$f(x)$는 $x=0$에서 극소이고 극솟값은
$f(0)=-1$

(2) 함수 $f(x)$는 $x=0$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은
$f(0)=4$
또, 함수 $f(x)$는 $x=2$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로
$f(x)$는 $x=2$에서 극소이고 극솟값은
$f(2)=0$

6 (1) $f(x)=x^2-4x$에서
$f'(x)=2x-4=2(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗

따라서 함수 $f(x)$는 극댓값은 없고,
$x=2$에서 극소이고 극솟값은 $f(2)=-4$이다.

(2) $f(x)=x^3-6x^2$에서
$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-32	↗

따라서 함수 $f(x)$는
$x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=0$,
$x=4$에서 극소이고 극솟값은 $f(4)=-32$이다.

개념 드릴

121쪽

1 (1) 감소 (2) 증가 (3) 감소 (4) 증가
2 (1) 구간 $[1, \infty)$에서 증가, 구간 $(-\infty, 1]$에서 감소
(2) 구간 $(-\infty, 2]$에서 증가, 구간 $[2, \infty)$에서 감소
(3) 구간 $[-2, \infty)$에서 증가, 구간 $(-\infty, -2]$에서 감소
(4) 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소
3 b, d, f
4 (1) -10, 0 (2) -4, 2
5 (1) 극댓값: 8, 극솟값: 없다.
(2) 극댓값: 44, 극솟값: -81
(3) 극댓값: 1, 극솟값: -31

1 (1) $3 \le x_1 < x_2 \le 6$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
$f(x_1)-f(x_2)=(-4x_1^2+1)-(-4x_2^2+1)$
$=-4(x_1^2-x_2^2)$
$=-4(x_1+x_2)(x_1-x_2)>0$
즉, $f(x_1)>f(x_2)$이므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[3, 6]$에서 감소한다.

(2) $3 \le x_1 < x_2 \le 6$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
$f(x_1)-f(x_2)=(x_1^3-3)-(x_2^3-3)$
$=x_1^3-x_2^3$
$=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)<0$
즉, $f(x_1)<f(x_2)$이므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[3, 6]$에서 증가한다.

(3) $3 \le x_1 < x_2 \le 6$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
$f(x_1)-f(x_2)=\frac{3}{x_1}-\frac{3}{x_2}$
$=\frac{3(x_2-x_1)}{x_1x_2}>0$
즉, $f(x_1)>f(x_2)$이므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[3, 6]$에서 감소한다.

(4) $3 \le x_1 < x_2 \le 6$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
$f(x_1)-f(x_2)=x_1^4-x_2^4$
$=(x_1^2+x_2^2)(x_1+x_2)(x_1-x_2)<0$
즉, $f(x_1)<f(x_2)$이므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[3, 6]$에서 증가한다.

2 (1) $f(x)=5(x-1)^2$에서 $f'(x)=10(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[1, \infty)$에서 증가하고,
구간 $(-\infty, 1]$에서 감소한다.

(2) $f(x)=-3x^2+12x$에서
$f'(x)=-6x+12=-6(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	12	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 2]$에서 증가하고,
구간 $[2, \infty)$에서 감소한다.

(3) $f(x)=4(x+2)^2-8$에서 $f'(x)=8(x+2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	-8	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-2, \infty)$에서 증가하고,
구간 $(-\infty, -2]$에서 감소한다.

(4) $f(x)=-x^3+6x^2-12x+1$에서
$f'(x)=-3x^2+12x-12=-3(x-2)^2$
$f'(x)=0$에서 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	−
$f(x)$	↘	-7	↘

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다.

3 함수 $f(x)$는 $x=b$, $x=d$, $x=f$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $f(x)$가 극대가 되는 x의 값은 b, d, f이다.

4 (1) $f(x)=-x^3-15x^2+6$에서
$f'(x)=-3x^2-30x=-3x(x+10)$
$x=-10$ 또는 $x=0$에서 $f'(x)=0$이고 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 $a=-10$ 또는 $a=0$

(2) $f(x)=x^3+3x^2-24x$에서
$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$
$x=-4$ 또는 $x=2$에서 $f'(x)=0$이고 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 $a=-4$ 또는 $a=2$

5 (1) $f(x)=-x^2+4x+4$에서
$f'(x)=-2x+4=-2(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	8	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이고 극댓값은 $f(2)=8$,
극솟값은 없다.

(2) $f(x)=2x^3-3x^2-36x$에서
$f'(x)=6x^2-6x-36=6(x+2)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	44	↘	-81	↗

따라서 함수 $f(x)$는
$x=-2$에서 극대이고 극댓값은 $f(-2)=44$,
$x=3$에서 극소이고 극솟값은 $f(3)=-81$이다.

(3) $f(x)=-x^3-6x^2+1$에서
$f'(x)=-3x^2-12x=-3x(x+4)$
$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=0$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	-31	↗	1	↘

따라서 함수 $f(x)$는
$x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=1$,
$x=-4$에서 극소이고 극솟값은 $f(-4)=-31$이다.

필수 예제 01 함수의 증가와 감소 122쪽

01-1 (1) 구간 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$에서 증가,
닫힌구간 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$에서 감소
(2) 구간 $[0, \infty)$에서 증가, 구간 $(-\infty, 0]$에서 감소

|전략| 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내어 조사한다.

(1) $f(x)=4x^3-3x+1$에서
$f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	0	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$에서 증가하고,
닫힌구간 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$에서 감소한다.

(2) $f(x)=x^4+3x^2-8$에서
$f'(x)=4x^3+6x=2x(2x^2+3)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	-8	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[0, \infty)$에서 증가하고,
구간 $(-\infty, 0]$에서 감소한다.

01-2 답 3

|전략| 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내어 $f(x)$가 증가하는 구간을 구한다.

$f(x)=-2x^3-3x^2+12x+3$에서

$f'(x)=-6x^2-6x+12=-6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-17	↗	10	↘

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 증가하므로

$\alpha=-2, \beta=1$

$\therefore \beta-\alpha=1-(-2)=3$

다른 풀이 $f(x)=-2x^3-3x^2+12x+3$에서

$f'(x)=-6x^2-6x+12=-6(x+2)(x-1)$

이때 함수 $f(x)$가 구간 $[\alpha, \beta]$에서 증가하므로 이 구간에서 $f'(x)\geq 0$이다.

$-6(x+2)(x-1)\geq 0$에서 $(x+2)(x-1)\leq 0$ $\therefore -2\leq x\leq 1$

따라서 $\alpha=-2, \beta=1$이므로 $\beta-\alpha=1-(-2)=3$

필수 예제 02 삼차함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건 123쪽

02-1 답 $-9\leq a\leq 0$

|전략| 삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

$f(x)=-3x^3+ax^2+ax+5$에서 $f'(x)=-9x^2+2ax+a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

이때 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq 0$이어야 한다.

따라서 $\frac{D}{4}=a^2+9a\leq 0$에서

$a(a+9)\leq 0$ $\therefore -9\leq a\leq 0$

Lecture

삼차함수가 실수 전체의 집합에서 증가 또는 감소하기 위한 조건

함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq 0$)가 실수 전체의 집합에서

❶ 증가하기 위한 조건 → 최고차항의 계수가 양수인 이차함수

$a>0, f'(x)\geq 0$

➡ $a>0$, 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식 $D\leq 0$

❷ 감소하기 위한 조건 → 최고차항의 계수가 음수인 이차함수

$a<0, f'(x)\leq 0$

➡ $a<0$, 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식 $D\leq 0$

02-2 답 3

|전략| 삼차함수 $f(x)$가 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

$f(x)=x^3-ax^2+ax+2$에서 $f'(x)=3x^2-2ax+a$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

이때 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq 0$이어야 한다.

즉, $\frac{D}{4}=a^2-3a\leq 0$에서

$a(a-3)\leq 0$ $\therefore 0\leq a\leq 3$

따라서 $M=3, m=0$이므로

$M+m=3+0=3$

02-3 답 $-1\leq a\leq 2$

|전략| 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)<f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(a+2)x-1$에서

$f'(x)=x^2+2ax+a+2$

함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이다.

이때 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq 0$이어야 하므로 $\frac{D}{4}=a^2-(a+2)\leq 0$에서

$a^2-a-2\leq 0, (a+1)(a-2)\leq 0$

$\therefore -1\leq a\leq 2$

필수 예제 03 주어진 구간에서 삼차함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건 124쪽

03-1 답 (1) $a\geq 15$ (2) $a\leq 0$

|전략| 삼차함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 증가하려면 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하고, 감소하려면 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

$f(x)=-x^3-3x^2+3ax-1$에서

$f'(x)=-3x^2-6x+3a$

(1) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1, 3]$에서 증가하려면 $1\leq x\leq 3$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로

$f'(1)\geq 0$에서

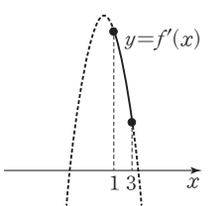
$-9+3a\geq 0$ $\therefore a\geq 3$ ····· ㉠

$f'(3)\geq 0$에서

$-45+3a\geq 0$ $\therefore a\geq 15$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$a\geq 15$



(2) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-4, -2]$에서 감소하려면 $-4\leq x\leq -2$에서 $f'(x)\leq 0$이어야 하므로

$f'(-4)\leq 0$에서

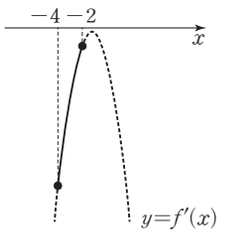
$-24+3a\leq 0$ $\therefore a\leq 8$ ····· ㉠

$f'(-2)\leq 0$에서

$3a\leq 0$ $\therefore a\leq 0$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$a\leq 0$



03-2 답 9

| 전략 | 삼차함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 증가하려면 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이어야 한다.

$f(x)=x^3+ax^2+5x+2$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+5$

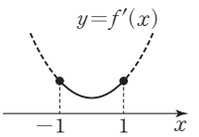
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 증가하려면 $-1 \leq x \leq 1$에서 $f'(x) \geq 0$이어야 하므로

$f'(-1) \geq 0$에서

$8-2a \geq 0 \quad \therefore a \leq 4$ ····· ㉠

$f'(1) \geq 0$에서

$8+2a \geq 0 \quad \therefore a \geq -4$ ····· ㉡



㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-4 \leq a \leq 4$

따라서 정수 a의 개수는 $-4, -3, \cdots, 3, 4$의 9이다.

03-3 답 −16

| 전략 | 삼차함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[2, 4]$에서 감소하려면 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x) \leq 0$이어야 한다.

$f(x)=2x^3-6x^2+3ax+5$에서

$f'(x)=6x^2-12x+3a$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[2, 4]$에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$를 만족시키려면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소해야 한다.

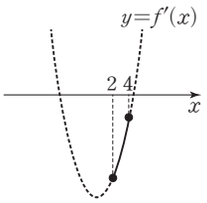
즉, $2 \leq x \leq 4$에서 $f'(x) \leq 0$이어야 한다.

$f'(2) \leq 0$에서

$3a \leq 0 \quad \therefore a \leq 0$ ····· ㉠

$f'(4) \leq 0$에서

$48+3a \leq 0 \quad \therefore a \leq -16$ ····· ㉡



㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$a \leq -16$

따라서 실수 a의 최댓값은 -16이다.

필수 예제 04 함수의 극대와 극소 125쪽

04-1 답 (1) 극댓값: -1, 극솟값: $-\frac{7}{3}$ (2) 극댓값: 13, 극솟값: -19, 8

| 전략 | $f'(x)=0$이 되는 x의 값을 구하고 그 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는지 조사한다.

(1) $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x-1$에서

$f'(x)=-x^2+4x-3=-(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	1	···	3	···
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	$-\frac{7}{3}$	↗	-1	↘

따라서 함수 $f(x)$는

$x=3$에서 극대이고 극댓값은 $f(3)=-1$,

$x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=-\frac{7}{3}$이다.

(2) $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$에서

$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24=12(x+1)(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	-1	···	1	···	2	···
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	-19	↗	13	↘	8	↗

따라서 함수 $f(x)$는

$x=1$에서 극대이고 극댓값은 $f(1)=13$,

$x=-1$, $x=2$에서 극소이고 극솟값은 $f(-1)=-19$, $f(2)=8$이다.

04-2 답 26

| 전략 | $f'(x)=0$이 되는 x의 값을 구하고 그 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는지 조사한다.

$f(x)=x^3+3x^2-9x+2$에서

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	-3	···	1	···
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	29	↘	-3	↗

즉, 함수 $f(x)$는

$x=-3$에서 극대이고 극댓값은 $f(-3)=29$,

$x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=-3$이다.

따라서 $M=29$, $m=-3$이므로

$M+m=29+(-3)=26$

필수 예제 05 함수의 극대와 극소를 이용한 미정계수의 결정 126쪽

05-1 답 −2

| 전략 | 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 0을 가지므로 $f'(1)=0$, $f(1)=0$임을 이용한다.

$f(x)=x^3+ax^2+9x+b$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+9$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값을 가지므로 $f'(1)=0$에서

$3+2a+9=0 \quad \therefore a=-6$

함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+b$가 $x=1$에서 극댓값 0을 가지므로

$f(1)=0$에서

$1-6+9+b=0 \quad \therefore b=-4$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$이므로

$f(2)=8-24+18-4=-2$

05-2 답 −20

|전략| 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=2$, $x=4$에서 극값을 가지므로 $f'(2)=0$, $f'(4)=0$임을 이용한다.

$f(x)=-x^3+ax^2+bx$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=2$, $x=4$에서 극값을 가지므로

$f'(2)=0$에서

$-12+4a+b=0$ $\therefore 4a+b=12$ …… ㉠

$f'(4)=0$에서

$-48+8a+b=0$ $\therefore 8a+b=48$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=9$, $b=-24$

따라서 함수 $f(x)=-x^3+9x^2-24x$의 극솟값은

$f(2)=-8+36-48=-20$

다른 풀이 $f(x)=-x^3+ax^2+bx$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=2$, $x=4$에서 극값을 가지므로

$f'(2)=0$, $f'(4)=0$

즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 2, 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2+4=-\frac{2a}{-3}$ $\therefore a=9$

$2\times4=\frac{b}{-3}$ $\therefore b=-24$

따라서 $f(x)=-x^3+9x^2-24x$의 극솟값은

$f(2)=-8+36-48=-20$

참고 $f'(x)=-3x^2+2ax+b$에서 $f'(2)=0$, $f'(4)=0$이므로

$f'(x)=-3(x-2)(x-4)=-3x^2+18x-24$

즉, $2a=18$, $b=-24$에서 $a=9$, $b=-24$를 구해도 된다.

05-3 답 15

|전략| 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 극솟값 -17을 가지므로 $f'(-3)=0$, $f(-3)=-17$임을 이용한다.

$f(x)=-x^3+ax^2+bx+10$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 극솟값 -17을 가지므로

$f'(-3)=0$에서

$-27-6a+b=0$ $\therefore 6a-b=-27$ …… ㉠

$f(-3)=-17$에서

$27+9a-3b+10=-17$ $\therefore 3a-b=-18$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=9$

즉, $f(x)=-x^3-3x^2+9x+10$이므로

$f'(x)=-3x^2-6x+9=-3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-3	…	1	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-17	↗	15	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 극댓값은 $f(1)=15$이다.

필수 예제 06 도함수의 그래프를 이용한 함수의 극대와 극소 127쪽

06-1 답 −3, 2

|전략| 도함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌면 그 점에서 함수 $f(x)$는 극소이다.

닫힌구간 $[-4, 5]$에서 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

-3, -1, 2, 4

(i) $x=-1$, $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=4$에서 극대이다.

(ii) $x=-3$, $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=2$에서 극소이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=2$에서 극소이다.

06-2 답 0

|전략| 도함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−) 또는 음(−)에서 양(+)으로 바뀌는 x좌표의 개수를 각각 구한다.

닫힌구간 $[a, g]$에서 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

b, c, 0, d, e, f

(i) $x=b$, $x=d$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=b$, $x=d$에서 극값을 갖지 않는다.

(ii) $x=c$, $x=e$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=c$, $x=e$에서 극대이다.

(iii) $x=0$, $x=f$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=f$에서 극소이다.

(i)~(iii)에서 $m=2$, $n=2$이므로

$m-n=2-2=0$

06-3 답 5

|전략| 도함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 극대인지 극소인지 확인한다.

도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

0, 2

$x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이고,

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이다.

$f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

$f'(0)=0$이므로 $b=0$

$f'(2)=0$이므로 $-12+4a+b=0$, $-12+4a=0$ $\therefore a=3$

또, 함수 $f(x)=-x^3+3x^2+c$는 $x=0$에서 극소이고 극솟값 1을 가지므로 $f(0)=1$에서 $c=1$

따라서 함수 $f(x)=-x^3+3x^2+1$은 $x=2$에서 극대이므로 극댓값은

$f(2)=-8+12+1=5$

2 함수의 그래프

개념 확인 128~131쪽

1 -2, 2, -2, 2, 17, -15, 0, 1

2 풀이 참조

3 $-6 \le a \le 6$

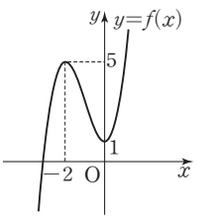
4 최댓값: $\frac{25}{4}$, 최솟값: 0

2 $f(x)=x^3+3x^2+1$에서 $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	1	↗



함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, 1)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

3 $f(x)=-x^3+ax^2-12x+1$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax-12$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D \le 0$이어야 한다.

따라서 $\frac{D}{4}=a^2-36 \le 0$에서

$(a+6)(a-6) \le 0$ $\therefore -6 \le a \le 6$

4 $f(x)=-x^2+5x$에서 $f'(x)=-2x+5$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{5}{2}$

닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\frac{25}{4}$	↘	6

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{5}{2}$에서 최댓값 $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{4}$,

$x=0$에서 최솟값 $f(0)=0$을 갖는다.

개념 드릴

132쪽

1 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조 (3) 풀이 참조

2 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조 (3) 풀이 참조

3 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조 (3) 풀이 참조

4 (1) 최댓값: 64, 최솟값: 0

(2) 최댓값: 64, 최솟값: 50

(3) 최댓값: 32, 최솟값: 0

1 (1) $f(x)=-2x^3-3x^2$에서

$f'(x)=-6x^2-6x=-6x(x+1)$

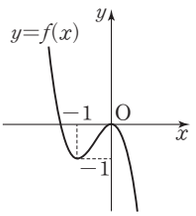
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	-1	↗	0	↘

함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, 0)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x)=x^3+3x^2-9x-7$에서

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

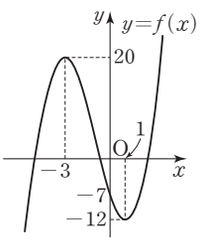
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	20	↘	-12	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, -7)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



(3) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$

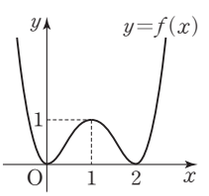
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

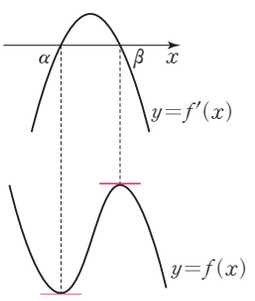
x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	0	↗	1	↘	0	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, 0)$

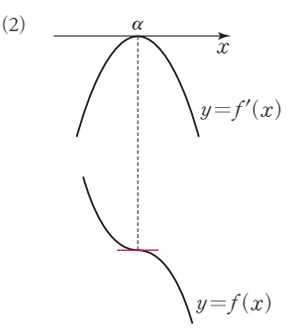
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



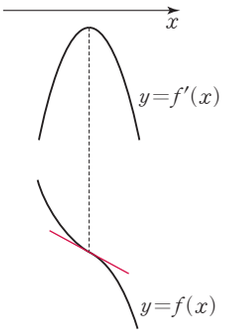
2 (1)



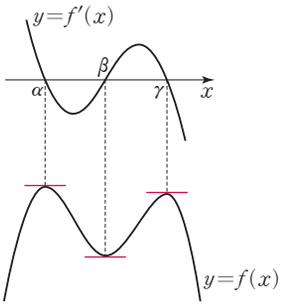
(2)



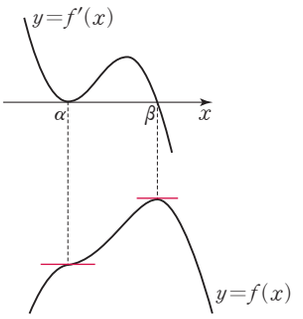
(3)



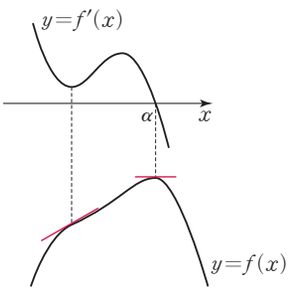
3 (1)



(2)



(3)



4 $f(x)=2x^3+12x^2$에서 $f'(x)=6x^2+24x=6x(x+4)$

(1) $f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -1\le x\le 2$)

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	10	$\searrow$	0	$\nearrow$	64

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $f(2)=64$,
$x=0$에서 최솟값 $f(0)=0$을 갖는다.

(2) $f'(x)=0$에서 $x=-4$ ($\because -5\le x\le -3$)

닫힌구간 $[-5, -3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-5	$\cdots$	-4	$\cdots$	-3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	50	$\nearrow$	64	$\searrow$	54

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 최댓값 $f(-4)=64$,
$x=-5$에서 최솟값 $f(-5)=50$을 갖는다.

(3) $f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -2\le x\le 1$)

닫힌구간 $[-2, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	32	$\searrow$	0	$\nearrow$	14

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 $f(-2)=32$,
$x=0$에서 최솟값 $f(0)=0$을 갖는다.

필수 예제 01 함수의 그래프의 개형 133쪽

01-1 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

|전략| 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 좌표축과의 교점을 조사하여 함수의 그래프의 개형을 그린다.

(1) $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

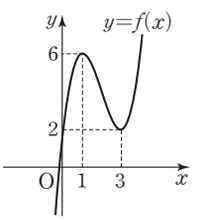
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, 2)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x)=-3x^4+8x^3-3$에서

$f'(x)=-12x^3+24x^2=-12x^2(x-2)$

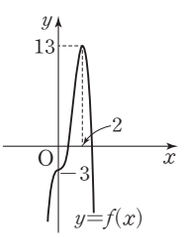
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	13	$\searrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, -3)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



필수 예제 02 삼차함수가 극값을 갖거나 갖지 않을 조건 134쪽

02-1 답 (1) $a<-3$ 또는 $a>3$ (2) $2\le a\le 5$

|전략| 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하고, 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 함을 이용한다.

(1) $f(x)=-x^3+ax^2-3x+4$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax-3$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 한다.

따라서 $\frac{D}{4}=a^2-9>0$에서

$(a+3)(a-3)>0$ $\therefore a<-3$ 또는 $a>3$

(2) $f(x)=x^3+(a+1)x^2+3(a-1)x+7$에서

$f'(x)=3x^2+2(a+1)x+3(a-1)$

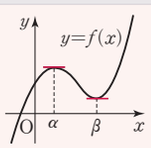
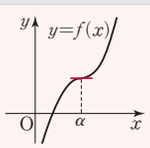
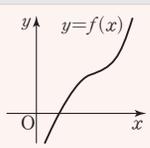
함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 한다.

따라서 $\frac{D}{4}=(a+1)^2-9(a-1)\le 0$에서 $a^2-7a+10\le 0$

$(a-2)(a-5)\le 0$ $\therefore 2\le a\le 5$

Lecture

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$의 그래프의 개형

$f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 가질 때	$f'(x)=0$이 중근 α를 가질 때	$f'(x)=0$이 서로 다른 두 허근을 가질 때
		
$f'(x)=0$의 판별식 $D>0$	$f'(x)=0$의 판별식 $D=0$	$f'(x)=0$의 판별식 $D<0$
$f(x)$가 극값을 갖는다.	$f(x)$가 극값을 갖지 않는다.	

필수 예제 03 삼차함수가 주어진 구간에서 극값을 가질 조건 135쪽

03-1 답 $a<7$

|전략| 삼차함수 $f(x)$가 $x<1$에서 극솟값, $x>1$에서 극댓값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x<1$, $x>1$에서 각각 실근을 하나씩 가져야 한다.

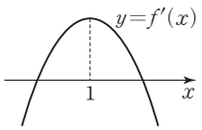
$f(x)=-x^3-ax^2+(a+10)x-2$에서

$f'(x)=-3x^2-2ax+a+10$

함수 $f(x)$가 $x<1$에서 극솟값을 갖고, $x>1$에서 극댓값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x<1$에서 한 실근을 갖고, $x>1$에서 다른 한 실근을 가져야 한다.

즉, $f'(1)>0$이어야 하므로

$-3-2a+a+10>0$ $\therefore a<7$



03-2 답 $a<-3$ 또는 $-3<a<0$

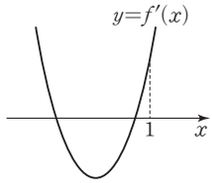
|전략| 삼차함수 $f(x)$가 $x<1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x<1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 이용한다.

$f(x)=x^3-ax^2-(2a+3)x+1$에서 $f'(x)=3x^2-2ax-(2a+3)$

함수 $f(x)$가 $x<1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x<1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=a^2+3(2a+3)>0$에서

$(a+3)^2>0$ $\therefore a\ne -3$



(ii) $f'(1)=-4a>0$에서 $a<0$

(iii) 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{a}{3}$이므로 $\frac{a}{3}<1$에서 $a<3$

(i)~(iii)에서 $a<-3$ 또는 $-3<a<0$

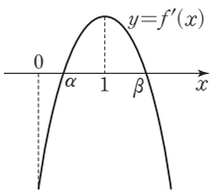
03-3 답 $a>\frac{3}{2}$

|전략| 삼차함수 $f(x)$가 $0<x<1$에서 극솟값, $x>1$에서 극댓값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근 중 한 근은 $0<x<1$에 있고, 다른 한 근은 $x>1$에 있어야 함을 이용한다.

$f(x)=-x^3+a^2x^2-ax$에서 $f'(x)=-3x^2+2a^2x-a$

함수 $f(x)$가 $0<x<1$에서 극솟값, $x>1$에서 극댓값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $0<x<1$에서 한 실근을 갖고, $x>1$에서 다른 한 실근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 $0<\alpha<1<\beta$이어야 하므로



(i) $f'(0)=-a<0$에서 $a>0$

(ii) $f'(1)=2a^2-a-3>0$에서

$(a+1)(2a-3)>0$ $\therefore a<-1$ 또는 $a>\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 $a>\frac{3}{2}$

필수 예제 04 함수의 최댓값과 최솟값 136쪽

04-1 답 (1) 최댓값: 30, 최솟값: -51 (2) 최댓값: 27, 최솟값: 2

닫힌구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 극값, $f(a)$, $f(b)$를 구한 후 그 크기를 비교하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

(1) $f(x)=-x^3+3x^2+9x+3$에서

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ ($\because 2\le x\le 6$)

닫힌구간 $[2, 6]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	2	$\cdots$	3	$\cdots$	6
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	25	↗	30	↘	-51

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $f(3)=30$, $x=6$에서 최솟값 $f(6)=-51$을 갖는다.

(2) $f(x)=x^4+8x^3+16x^2+2$에서

$f'(x)=4x^3+24x^2+32x=4x(x+2)(x+4)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ ($\because -3\le x\le 1$)

닫힌구간 $[-3, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	11	↗	18	↘	2	↗	27

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $f(1)=27$,

$x=0$에서 최솟값 $f(0)=2$를 갖는다.

04-2 답 $0<a\le\frac{5}{2}$

|전략| $x\ge 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 조사하여 최댓값이 $f(0)$이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구한다.

$f(x)=2x^3-5x^2+4$에서 $f'(x)=6x^2-10x=2x(3x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

$x\ge 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

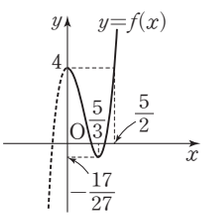
x	0	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$	4	↘	$-\frac{17}{27}$	↗

이때 최댓값이 $f(0)=4$이므로

$f(x)=4$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f(0)=4$이기 위한 a의 값의 범위는

$0<a\le\frac{5}{2}$ ($\because a>0$)



필수 예제 05 함수의 최댓값과 최솟값을 이용한 미정계수의 결정 137쪽

05-1 답 16

|전략| 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내어 최솟값을 a에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 값과 비교한다.

$f(x)=-x^3+3x^2+a$에서 $f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		−	0	+	0
$f(x)$	$a+20$	↘	a	↗	$a+4$

함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 $f(-2)=a+20$, $x=0$일 때 최솟값 $f(0)=a$를 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 -4이므로 $a=-4$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $a+20=-4+20=16$

05-2 답 −48

|전략| 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내어 최댓값과 최솟값을 a, b에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 값과 비교한다.

$f(x)=ax^3-6ax^2+b$에서

$f'(x)=3ax^2-12ax=3ax(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -1\le x\le 2$)

$a<0$이므로 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$b-7a$	↘	b	↗	$b-16a$

$a<0$일 때 $b<b-7a<b-16a$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $f(2)=b-16a$, $x=0$에서 최솟값 $f(0)=b$를 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 최댓값이 3, 최솟값이 -45이므로

$b-16a=3$, $b=-45$ $\quad\therefore a=-3$, $b=-45$

$\therefore a+b=-3+(-45)=-48$

05-3 답 22

|전략| 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내어 최댓값과 최솟값을 a에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 조건을 이용한다.

$f(x)=2x^3-9x^2+a$에서

$f'(x)=6x^2-18x=6x(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ ($\because 1\le x\le 4$)

닫힌구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$a-7$	↘	$a-27$	↗	$a-16$

함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 $f(1)=a-7$, $x=3$일 때 최솟값 $f(3)=a-27$을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합이 10이므로

$(a-7)+(a-27)=10$, $2a=44$ $\quad\therefore a=22$

필수 예제 06 함수의 최댓값과 최솟값의 활용 – 넓이 138쪽

06-1 답 32

|전략| 점 C의 x좌표를 a로 놓고 사다리꼴 OABC의 넓이를 a에 대한 함수로 나타내어 최댓값을 구한다.

$6x-x^2=0$에서 $x(x-6)=0$이므로 $x=0$ 또는 $x=6$

$\therefore$ A$(6, 0)$

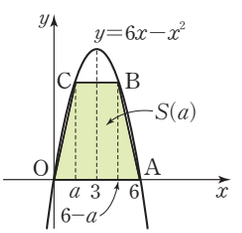
오른쪽 그림과 같이 점 C의 좌표를 $(a, 6a-a^2)$ $(0<a<3)$이라 하면

B$(6-a, 6a-a^2)$

사다리꼴 OABC의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}\times\{(6-2a)+6\}\times(6a-a^2)$

$\quad=a^3-12a^2+36a$



$S'(a)=3a^2-24a+36=3(a-2)(a-6)$

$S'(a)=0$에서 $a=2$ ($\because$ $0<a<3$)

$0<a<3$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	32	↘	

따라서 함수 $S(a)$는 $a=2$에서 최대이므로 사다리꼴 OABC의 넓이 $S(a)$의 최댓값은

$S(2)=32$

참고 $a=0$ 또는 $a=3$일 때, 사다리꼴이 만들어지지 않으므로 $S(0)$, $S(3)$의 값을 계산할 필요가 없다.

06-2 답 $\frac{1}{2}$

|전략| 점 P의 x좌표를 a로 놓고 삼각형 POH의 넓이를 a에 대한 함수로 나타내어 최댓값을 구한다.

$x(x-2)^2=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$\therefore$ A$(2, 0)$

점 P의 좌표를 $(a, a(a-2)^2)$ $(0<a<2)$이라 하고, 삼각형 POH의 넓이를 $S(a)$라 하면

$$S(a)=\frac{1}{2}\times a\times a(a-2)^2$$

$$=\frac{1}{2}a^4-2a^3+2a^2$$

$S'(a)=2a^3-6a^2+4a=2a(a-1)(a-2)$

$S'(a)=0$에서 $a=1$ ($\because$ $0<a<2$)

$0<a<2$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	$\frac{1}{2}$	↘	

따라서 함수 $S(a)$는 $a=1$에서 최대이므로 삼각형 POH의 넓이 $S(a)$의 최댓값은

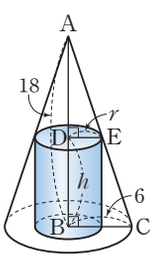
$S(1)=\frac{1}{2}$

필수 예제 07 함수의 최댓값과 최솟값의 활용 – 부피 139쪽

07-1 답 96π

|전략| 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h로 놓고 닮음비를 이용해 h를 r에 대한 식으로 표현한 후 원기둥의 부피를 r에 대한 함수로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 원뿔에 내접하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면



$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{DE}$

$18:6=(18-h):r$

$6(18-h)=18r$

$\therefore$ $h=18-3r$

이때 $r>0$, $h>0$이므로

$r>0$, $18-3r>0$에서 $0<r<6$

원기둥의 부피를 $V(r)$라 하면

$V(r)=\pi r^2h$

$=\pi r^2(18-3r)$

$=\pi(18r^2-3r^3)$

$V'(r)=\pi(36r-9r^2)=-9\pi r(r-4)$

$V'(r)=0$에서 $r=4$ ($\because$ $0<r<6$)

$0<r<6$에서 함수 $V(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$V'(r)$		+	0	−	
$V(r)$		↗	96π	↘	

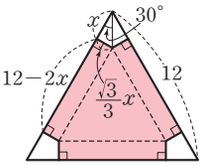
따라서 함수 $V(r)$는 $r=4$에서 최대이므로 원기둥의 부피 $V(r)$의 최댓값은

$V(4)=96\pi$

07-2 답 32

|전략| 잘라 내는 부분의 한 변의 길이를 x로 놓고 삼각기둥의 부피를 x에 대한 함수로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 정삼각형의 꼭짓점으로부터 거리가 x인 부분까지 잘라낸다고 하면



$x>0$, $12-2x>0$에서 $0<x<6$

삼각기둥의 밑면은 한 변의 길이가 $12-2x$인 정삼각형이므로 그 넓이는

$\frac{1}{2}\times(12-2x)^2\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}(12-2x)^2$

또, 삼각기둥의 높이는 $x\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}x$이므로 상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(12-2x)^2\times\frac{\sqrt{3}}{3}x$

$=x(x-6)^2$

$=x^3-12x^2+36x$

$V'(x)=3x^2-24x+36=3(x-2)(x-6)$

$V'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because$ $0<x<6$)

$0<x<6$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	32	↘	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=2$에서 최대이므로 상자의 부피 $V(x)$의 최댓값은

$V(2)=32$

Lecture

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

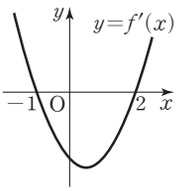
$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

개념 정리

140~141쪽

01 (1) 증가 (2) 감소 **02** <, 감소 **03** (1) ≥ (2) ≤
04 극대, 극댓값 **05** 극소, 극솟값 **06** 0
07 양(+), 음(−) **08** 음(−), 양(+) **09** −1, −1, 0, 2, 1
10 서로 다른 두 실근, $D>0$
11 서로 다른 두 허근, $D\le 0$
12 극댓값, 최댓값, 최솟값
13 (1) 극댓값, 최솟값 (2) 극솟값, 최댓값

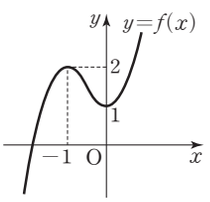
02 함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 열린구간 $(-1, 2)$에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 감소한다.



09 $f(x)=2x^3+3x^2+1$에서
$f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$
$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{-1}$ 또는 $x=0$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	$\boxed{-1}$	⋯	$\boxed{0}$	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\boxed{2}$	↘	$\boxed{1}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



중단원 마무리

142~144쪽

01 ⑤	**02** ④	**03** 2	**04** ④
05 ①	**06** −2	**07** ②	**08** 8
09 ③	**10** $\frac{1}{3}$	**11** ⑤	**12** ㄱ
13 7	**14** ②	**15** 4	**16** ②
17 ①	**18** 12	**19** ②	**20** ③
21 2	**22** 11	**23** −1	**24** 30

LEVEL 1

01 $f(x)=x^3-ax+4$에서 $f'(x)=3x^2-a$
함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위가 $-3\le x\le 3$이므로 $-3\le x\le 3$에서 $f'(x)\le 0$이다.
따라서 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 -3, 3이므로
$f'(x)=3(x+3)(x-3)=3x^2-27$
$\therefore a=27$

02 $f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$에서
$f'(x)=3x^2+2ax-(a^2-8a)$
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.
이때 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 한다.
즉, $\frac{D}{4}=a^2+3(a^2-8a)\le 0$에서 $a^2-6a\le 0$
$a(a-6)\le 0$ $\therefore 0\le a\le 6$
따라서 정수 a의 개수는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6의 7이다.

03 $f(x)=x^3-3x+a$에서
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	-1	⋯	1	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$a+2$	↘	$a-2$	↗

따라서 함수 $f(x)$는
$x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=a+2$,
$x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=a-2$이다.
이때 극댓값과 극솟값의 합이 4이므로
$(a+2)+(a-2)=4$, $2a=4$ $\therefore a=2$

04 ㄱ. $x=\alpha$, $x=\beta$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 갖는다.
한편, $x=\gamma$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=\gamma$에서 극값을 갖지 않는다.
즉, 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 개수는 2이다. (거짓)
ㄴ. $x=\alpha$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖는다. (참)
ㄷ. 열린구간 (α, β)에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

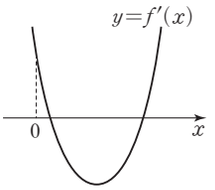
05 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 1이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	-1	⋯	1	⋯
$f'(x)$	−	0	+	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $f(x)$는 $x<-1$일 때 감소하고, $x>-1$일 때 증가하므로 $x=-1$에서 극소이다.
한편, $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ①이다.

06 $f(x)=x^3+3(a-1)x^2-3(a-3)x+3$에서
$f'(x)=3x^2+6(a-1)x-3(a-3)$
함수 $f(x)$가 $x>0$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$에서



$\frac{D}{4}=9(a-1)^2+9(a-3)>0$
$a^2-a-2>0$, $(a+1)(a-2)>0$
$\therefore a<-1$ 또는 $a>2$

(ii) $f'(0)=-3(a-3)>0$에서 $a<3$

(iii) $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-(a-1)$이므로 $-(a-1)>0$에서 $a<1$

(i)~(iii)에서 $a<-1$이므로 정수 a의 최댓값은 -2이다.

다른 풀이 $f(x)=x^3+3(a-1)x^2-3(a-3)x+3$에서
$f'(x)=3x^2+6(a-1)x-3(a-3)$
함수 $f(x)$가 $x>0$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다. 즉,
(i) $f'(x)=0$의 판별식 $D>0$에서
$\frac{D}{4}=9(a-1)^2+9(a-3)>0$ $\therefore a<-1$ 또는 $a>2$
(ii) ($f'(x)=0$의 두 근의 합)>0에서 $-2(a-1)>0$ $\therefore a<1$
(iii) ($f'(x)=0$의 두 근의 곱)>0에서 $-(a-3)>0$ $\therefore a<3$
(i)~(iii)에서 $a<-1$이므로 정수 a의 최댓값은 -2이다.

07 $f(x)=2x^3+3ax^2-12a^2x+50$에서
$f'(x)=6x^2+6ax-12a^2=6(x+2a)(x-a)$
$f'(x)=0$에서 $x=a$ ($\because a>0$, $0\le x\le 2a$)
닫힌구간 $[0, 2a]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	$2a$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	50	↘	$-7a^3+50$	↗	$4a^3+50$

$a>0$일 때 $-7a^3+50<50<4a^3+50$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2a$에서 최댓값 $f(2a)=4a^3+50$, $x=a$에서 최솟값 $f(a)=-7a^3+50$을 갖는다.
이때 최댓값과 최솟값의 합이 76이므로
$(4a^3+50)+(-7a^3+50)=76$
$-3a^3=-24$, $a^3=8$ $\therefore a=2$ ($\because a$는 실수)

08 두 곡선 $y=x^2+1$, $y=-x^2+7$의 교점의 x좌표는
$x^2+1=-x^2+7$에서 $x^2=3$ $\therefore x=\pm\sqrt{3}$
점 A의 x좌표를 a $(0<a<\sqrt{3})$라 하면
A$(a, -a^2+7)$, B$(-a, -a^2+7)$, C$(-a, a^2+1)$, D(a, a^2+1)
직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라 하면
$S(a)=\{a-(-a)\}\times\{-a^2+7-(a^2+1)\}$
$=2a(-2a^2+6)=-4a^3+12a$
$S'(a)=-12a^2+12=-12(a+1)(a-1)$
$S'(a)=0$에서 $a=1$ ($\because 0<a<\sqrt{3}$)
$0<a<\sqrt{3}$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	8	↘	

따라서 함수 $S(a)$는 $a=1$에서 최대이므로 직사각형 ABCD의 넓이 $S(a)$의 최댓값은
$S(1)=8$

LEVEL 2

09 $f(x)=-x^3+ax^2+bx-2$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 증가하는 x의 값의 범위가 $-1\le x\le 2$이므로 $-1\le x\le 2$에서 $f'(x)\ge 0$이다.
즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 -1, 2이므로
$f'(x)=-3(x+1)(x-2)=-3x^2+3x+6$
따라서 $2a=3$, $b=6$이므로
$2a+b=3+6=9$

10 $f(x)=x^3+x^2+ax+2$에서 $f'(x)=3x^2+2x+a$
함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.
즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=1-3a\le 0$ $\therefore a\ge\frac{1}{3}$
따라서 실수 a의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이다.

11 $f(x)=-x^4+4x^3-4x^2-6$에서
$f'(x)=-4x^3+12x^2-8x=-4x(x-1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-6	↘	-7	↗	-6	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=-7$이므로 $a=1$, $b=-7$이다.
$\therefore a-b=1-(-7)=8$

12 ㄱ. $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이다.
이때 $f(0)=1$이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은 1이다. (참)

ㄴ. $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. 열린구간 $(0, 4)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 4]$에서 감소한다.

$\therefore f(4)<f(2)<f(0)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

13 $f(x)=x^3+ax^2-9x+b$에서 $f'(x)=3x^2+2ax-9$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로 $f'(1)=0$에서

$3+2a-9=0 \quad \therefore a=3$

즉, $f(x)=x^3+3x^2-9x+b$이고

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$b+27$	↘	$b-5$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이고 극댓값이 31이므로

$f(-3)=b+27=31 \quad \therefore b=4$

$\therefore a+b=3+4=7$

14 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 0, 2이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x<-2$일 때 증가하고, $-2<x<0$일 때 감소하므로 $x=-2$에서 극대, $0<x<2$일 때 감소하고, $x>2$일 때 증가하므로 $x=2$에서 극소이다.

한편, $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ②이다.

15 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+ax^2+(a^2-4a-6)x-8$에서

$f'(x)=-x^2+2ax+a^2-4a-6$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 한다.

즉, $\frac{D}{4}=a^2+(a^2-4a-6)\le 0$에서

$a^2-2a-3\le 0$, $(a+1)(a-3)\le 0$

$\therefore -1\le a\le 3$

따라서 $M=3$, $m=-1$이므로

$M-m=3-(-1)=4$

16 $f(x)=x^4-4x^3+4ax^2$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+8ax=4x(x^2-3x+2a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식

$x^2-3x+2a=0$은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x=0$이 이차방정식 $x^2-3x+2a=0$의 근이 아니어야 하므로

$a\ne 0$ ····· ㉠

이차방정식 $x^2-3x+2a=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 하므로

$D=9-8a>0 \quad \therefore a<\frac{9}{8}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{8}$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=\frac{9}{8}$이므로 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{9}{8}$

Lecture

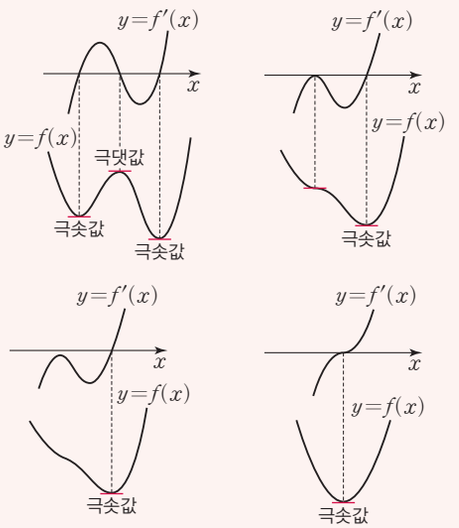
사차함수가 극값을 가질 조건

(1) 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면

➡ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

(2) 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면

➡ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 중근 또는 한 실근과 두 허근 또는 삼중근을 가져야 한다.



17 $g(x)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$이므로 $g(x)=t$라 하면 $t\le 1$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^3-12t-3$이므로

$f'(t)=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $t=-2$ ($\because t\le 1$)

$t\le 1$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	-2	$\cdots$	1
$f'(t)$	$+$	0	$-$	
$f(t)$	↗	13	↘	-14

따라서 함수 $f(t)$의 최댓값은 $f(-2)=13$이므로 함수 $(f\circ g)(x)$의 최댓값은 13이다.

Lecture

닫힌구간 $[a, b]$에서 합성함수 $(f \circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값

(i) $g(x)=t$로 놓고 $a \le x \le b$일 때 t의 값의 범위를 구한다.

(ii) 함수 $f(t)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

18 $x^2+y^2=2$에서 $y^2=2-x^2 \ge 0$이므로

$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \le 0$ $\therefore -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$

$f(x)=x^4+4y^2=x^4+4(2-x^2)=x^4-4x^2+8$이라 하면

$f'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

$-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	4	↗	8	↘	4

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)=8$, 최솟값은

$f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})=4$이므로 구하는 합은 $8+4=12$

19 $f(x)=ax^3-6x^2$에서 $f'(x)=3ax^2-12x=3x(ax-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{4}{a}$

$\dfrac{4}{a} \ge a$이면 $0 \le x \le a$에서 $f'(x) \le 0$이므로 닫힌구간 $[0, a]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)=0$이 되어 주어진 조건에 모순이다.

즉, $\dfrac{4}{a} < a$이므로 닫힌구간 $[0, a]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\dfrac{4}{a}$	$\cdots$	a
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\dfrac{32}{a^2}$	↗	a^4-6a^2

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최댓값 16을 가지므로

$f(a)=a^4-6a^2=16$, $a^4-6a^2-16=0$

$(a^2+2)(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})=0$ $\therefore a=2\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

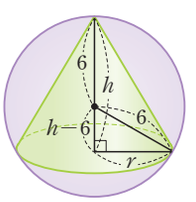
따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$에서 최소이고 최솟값은

$f(\sqrt{2})=-\dfrac{32}{8}=-4$

20 오른쪽 그림과 같이 원뿔의 높이를 $h(0<h<12)$, 밑면의 반지름의 길이를 r라 하면 $r^2+(h-6)^2=6^2$에서

$r^2=12h-h^2$

원뿔의 부피를 $V(h)$라 하면



$V(h)=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h=\dfrac{1}{3}\pi(12h-h^2)h=\dfrac{1}{3}\pi(12h^2-h^3)$

$V'(h)=\dfrac{1}{3}\pi(24h-3h^2)=\pi h(8-h)$

$V'(h)=0$에서 $h=8$ ($\because 0<h<12$)

$0<h<12$에서 함수 $V(h)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	0	$\cdots$	8	$\cdots$	12
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$		↗	$\dfrac{256}{3}\pi$	↘	

따라서 함수 $V(h)$는 $h=8$에서 최대이므로 원뿔의 부피가 최대일 때의 원뿔의 높이는 8이다.

서술형

21 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2x+3$에서

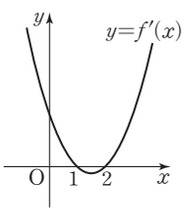
$f'(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$ … ❶

$x \ge a$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \ne x_2$이면 $f(x_1) \ne f(x_2)$를 만족시키는 함수 $f(x)$는 $x \ge a$에서 일대일 함수이고, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 $x \ge a$에서 증가해야 한다.

즉, $x \ge a$에서 $f'(x) \ge 0$이어야 한다. … ❷

따라서 오른쪽 그림에서 $a \ge 2$일 때, $x \ge a$에서 $f'(x) \ge 0$이므로 구하는 실수 a의 최솟값은 2이다. … ❸



채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $x \ge a$에서 $f'(x) \ge 0$이어야 함을 알 수 있다.	40 %
❸ 실수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

22 $f(x)=x^3-3x^2-9x+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$ … ❶

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$a+5$	↘	$a-27$	↗

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=a+5$,

$x=3$에서 극소이고 극솟값은 $f(3)=a-27$이다. … ❷

이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같으므로

$|a+5|=|a-27|$에서

$a+5=-(a-27)$ $\therefore a=11$ … ❸

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 극댓값과 극솟값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 조건을 만족시키는 상수 a의 값을 구할 수 있다.	30 %

23 $f(x)=-x^3-2ax^2+4a^2x$에서

$f'(x)=-3x^2-4ax+4a^2$ … ❶

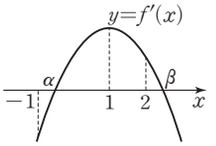
함수 $f(x)$가 $-1\le x\le 1$에서 극솟값, $x\ge 2$에서 극댓값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-1\le x\le 1$에서 한 실근을 갖고, $x\ge 2$에서 다른 한 실근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 $-1\le\alpha\le 1$, $\beta\ge 2$이어야 한다. … ❷

(i) $f'(-1)=4a^2+4a-3\le 0$에서

$(2a+3)(2a-1)\le 0$

$\therefore -\frac{3}{2}\le a\le\frac{1}{2}$



(ii) $f'(1)=4a^2-4a-3\ge 0$에서

$(2a+1)(2a-3)\ge 0$ $\therefore a\le -\frac{1}{2}$ 또는 $a\ge\frac{3}{2}$

(iii) $f'(2)=4a^2-8a-12\ge 0$에서

$(a+1)(a-3)\ge 0$ $\therefore a\le -1$ 또는 $a\ge 3$

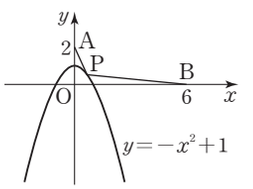
(i)~(iii)에서 $-\frac{3}{2}\le a\le -1$ … ❸

따라서 정수 a는 -1이다. … ❹

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ 이차방정식 $f'(x)=0$의 실근의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❹ 정수 a의 값을 구할 수 있다.	20 %

24 점 P의 x좌표를 t라 하면

$P(t, -t^2+1)$이므로



$\overline{AP}^2=(t-0)^2+\{(-t^2+1)-2\}^2$

$=t^4+3t^2+1$

$\overline{BP}^2=(t-6)^2+\{(-t^2+1)-0\}^2$

$=t^4-t^2-12t+37$ … ❶

$f(t)=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$이라 하면

$f(t)=(t^4+3t^2+1)+(t^4-t^2-12t+37)$

$=2t^4+2t^2-12t+38$ … ❷

$f'(t)=8t^3+4t-12=4(t-1)(2t^2+2t+3)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because$ t는 실수)

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	…	1	…
$f'(t)$	−	0	+
$f(t)$	↘	30	↗

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$일 때 최소이므로 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 $f(1)=30$이다. … ❸

채점 기준	비율
❶ 점 P의 x좌표를 t로 놓고 $\overline{AP}^2$, $\overline{BP}^2$을 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$을 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

6 도함수의 활용 (3)

1 방정식과 부등식에의 활용

개념 확인 146~148쪽

1 (1) 2, 2 (2) 3, 3

개념 드릴 149쪽

1 (1) 3 (2) 2 (3) 4 (4) 3

2 (1) 서로 다른 세 실근

(2) 한 실근과 중근

(3) 한 실근과 두 허근

3 0, 2, 0, 2, 6, 2, 2, 2, 2

4 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

1 (1) $f(x)=x^3-12x-2$라 하면

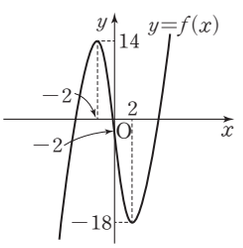
$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	−2	…	2	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	14	↘	−18	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



(2) $f(x)=2x^3+3x^2$이라 하면

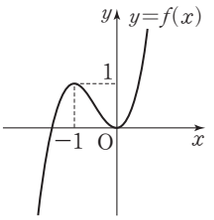
$f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	−1	…	0	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



(3) $f(x)=x^4-4x^2+1$이라 하면

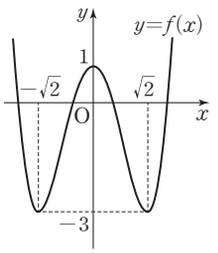
$f'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3	↗	1	↘	-3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 네 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



(4) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$이라 하면

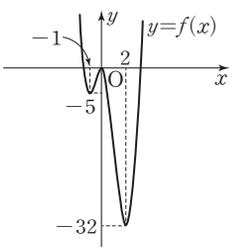
$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-5	↗	0	↘	-32	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



2 (1) $f(x)=2x^3-6x^2+7$이라 하면

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	-1	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $f(0)=7$,

$x=2$에서 극솟값 $f(2)=-1$을 가지므로

(극댓값)$\times$(극솟값)$=7\times(-1)=-7<0$

따라서 방정식 $2x^3-6x^2+7=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

(2) $f(x)=x^3-3x-2$라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=0$,

$x=1$에서 극솟값 $f(1)=-4$를 가지므로

(극댓값)$\times$(극솟값)$=0\times(-4)=0$

따라서 방정식 $x^3-3x-2=0$은 한 실근과 중근을 갖는다.

(3) $f(x)=2x^3+3x^2-12x+9$라 하면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	29	↘	2	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $f(-2)=29$,

$x=1$에서 극솟값 $f(1)=2$를 가지므로

(극댓값)$\times$(극솟값)$=29\times2=58>0$

따라서 방정식 $2x^3+3x^2-12x+9=0$은 한 실근과 두 허근을 갖는다.

4 (1) $x^4+16\geq8x^2$에서 $x^4-8x^2+16\geq0$

$f(x)=x^4-8x^2+16$이라 하면

$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

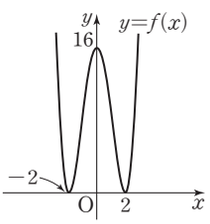
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	16	↘	0	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $f(x)$는 $x=-2$ 또는 $x=2$에서 최솟값 0을 가지므로

$f(x)=x^4-8x^2+16\geq0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4+16\geq8x^2$이 성립한다.



(2) $x^3-x^2\geq x-1$에서 $x^3-x^2-x+1\geq0$

$f(x)=x^3-x^2-x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because$ $x\geq0$)

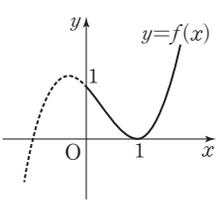
$x\geq0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↘	0	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x\geq0$일 때 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 0을 가지므로

$f(x)=x^3-x^2-x+1\geq0$

따라서 $x\geq0$일 때, 부등식 $x^3-x^2\geq x-1$이 성립한다.



필수 예제 01 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수 150쪽

01-1 답 1

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구한다.

$f(x)=2x^3+6x^2+1$이라 하면

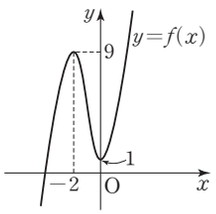
$f'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	9	↘	1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



01-2 답 2

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구한다.

$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x+2$라 하면

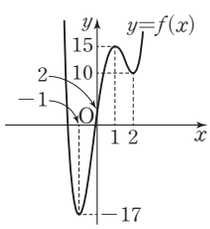
$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24=12(x+1)(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-17	↗	15	↘	10	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



01-3 답 1

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구한다.

$4x^4+5x^3-1=x^4+x^3-2$에서

$3x^4+4x^3+1=0$

$f(x)=3x^4+4x^3+1$이라 하면

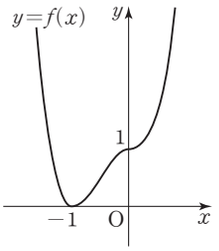
$f'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



필수 예제 02 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수 151쪽

02-1 답 (1) $-7<k<20$ (2) $k=-7$ 또는 $k=20$ (3) $k<-7$ 또는 $k>20$

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수를 이용하여 조건을 만족시키는 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구한다.

$2x^3-3x^2-12x+k=0$에서 $-2x^3+3x^2+12x=k$

$f(x)=-2x^3+3x^2+12x$라 하면

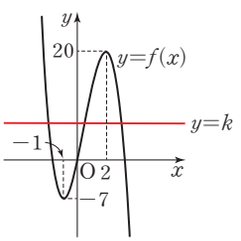
$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-7	↗	20	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(1) 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로
$-7<k<20$

(2) 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로
$k=-7$ 또는 $k=20$

(3) 주어진 방정식이 한 개의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 하므로
$k<-7$ 또는 $k>20$

02-2 답 (1) $-9<k<7$ (2) $k=7$ (3) $k=-9$ 또는 $k>7$

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수를 이용하여 조건을 만족시키는 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구한다.

$x^4-4x^3-2x^2+12x-k=0$에서 $x^4-4x^3-2x^2+12x=k$

$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x$라 하면

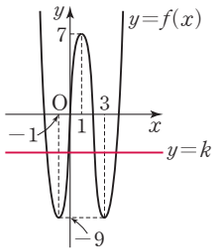
$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=4(x+1)(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-9	↗	7	↘	-9	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(1) 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로
$-9<k<7$

(2) 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로
$k=7$

(3) 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로
$k=-9$ 또는 $k>7$

02-3 답 (1) $-2<k<2$ (2) $k=-2$ 또는 $k=2$

|전략| 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근의 개수와 같다.

곡선 $y=x^3-6x^2+11x-2$와 직선 $y=2x+k$의 교점의 개수는 방정식 $x^3-6x^2+11x-2=2x+k$, 즉 $x^3-6x^2+9x-2=k$의 서로 다른 실근의 개수와 같고, 이는 곡선 $y=x^3-6x^2+9x-2$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^3-6x^2+9x-2$라 하면

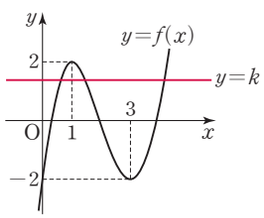
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(1) 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로
$-2<k<2$

(2) 곡선과 직선이 접하려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로
$k=-2$ 또는 $k=2$

참고 곡선 $y=x^3-6x^2+11x-2$와 직선 $y=2x+k$가 접한다.
$\Longleftrightarrow$ 곡선 $y=x^3-6x^2+9x-2$와 직선 $y=k$가 접한다.
$\Longleftrightarrow$ 방정식 $x^3-6x^2+9x-2=k$가 서로 다른 두 실근을 갖는다.

필수 예제 03 방정식 $f(x)=k$의 실근의 부호 152쪽

03-1 답 $k>32$

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 단 한 개의 양수가 되도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구한다.

$x^3-12x^2+36x-k=0$에서 $x^3-12x^2+36x=k$

$f(x)=x^3-12x^2+36x$라 하면

$f'(x)=3x^2-24x+36=3(x-2)(x-6)$

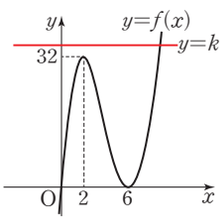
$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=6$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	32	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 단 한 개의 양의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 한 개이고 교점의 x좌표가 양수이어야 하므로

$k>32$



03-2 답 (1) $k=-2$ 또는 $k=2$ (2) $-2<k<0$ (3) $0<k<2$ (4) $k<-2$

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표의 부호를 이용하여 조건을 만족시키는 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구한다.

$x^3-3x-k=0$에서 $x^3-3x=k$

$f(x)=x^3-3x$라 하면

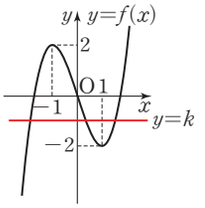
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(1) 주어진 방정식이 한 개의 음의 실근과 한 개의 양의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 두 개이고 교점의 x좌표가 한 개는 음수, 다른 한 개는 양수이어야 하므로
$k=-2$ 또는 $k=2$

(2) 주어진 방정식이 한 개의 음의 실근과 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수, 두 개는 양수이어야 하므로
$-2<k<0$

(3) 주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 음의 실근과 한 개의 양의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 음수, 한 개는 양수이어야 하므로
$0<k<2$

(4) 주어진 방정식이 단 한 개의 음의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점은 한 개이고 교점의 x좌표가 음수이어야 하므로
$k<-2$

필수 예제 04 극값을 이용한 삼차방정식의 근의 판별 153쪽

04-1 답 (1) $4<k<5$ (2) $k=4$ 또는 $k=5$ (3) $k<4$ 또는 $k>5$

|전략| 함수 $f(x)$의 (극댓값)×(극솟값)의 부호를 이용하여 조건을 만족시키는 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구한다.

$f(x)=2x^3-9x^2+12x-k$라 하면
$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$-k+5$	↘	$-k+4$	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $f(1)=-k+5$,
$x=2$에서 극솟값 $f(2)=-k+4$를 갖는다.

(1) (극댓값)×(극솟값)<0이어야 하므로
$(-k+5)(-k+4)<0$ $\therefore 4<k<5$

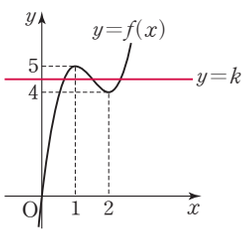
(2) (극댓값)×(극솟값)$=0$이어야 하므로
$(-k+5)(-k+4)=0$ $\therefore k=4$ 또는 $k=5$

(3) (극댓값)×(극솟값)>0이어야 하므로
$(-k+5)(-k+4)>0$ $\therefore k<4$ 또는 $k>5$

다른 풀이 $2x^3-9x^2+12x-k=0$에서
$2x^3-9x^2+12x=k$
$f(x)=2x^3-9x^2+12x$라 하면
$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	4	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 근의 조건을 만족시키는 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위는
(1) $4<k<5$
(2) $k=4$ 또는 $k=5$
(3) $k<4$ 또는 $k>5$



필수 예제 05 모든 실수에서 부등식이 항상 성립할 조건 154쪽

05-1 답 $k\le-16$

|전략| $(f(x)$의 최솟값$)\ge0$인 실수 k의 값의 범위를 구한다.

$f(x)=x^4-8x^2-k$라 하면
$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	$-k-16$	↗	$-k$	↘	$-k-16$	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$ 또는 $x=2$에서 최솟값 $-k-16$을 갖는다.
따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge0$이 성립하려면
$f(-2)=f(2)=-k-16\ge0$ $\therefore k\le-16$

참고 $x^4-8x^2-k\ge0$에서 $x^4-8x^2\ge k$이므로 $f(x)=x^4-8x^2$이라 할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=k$보다 항상 위에 있거나 접해야 함을 이용하여 풀어도 된다.

05-2 답 $k\le-32$

|전략| $(f(x)$의 최솟값$)\ge0$인 실수 k의 값의 범위를 구한다.

$3x^4-4x^3\ge12x^2+k$에서 $3x^4-4x^3-12x^2-k\ge0$
$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2-k$라 하면
$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	$-k-5$	↗	$-k$	↘	$-k-32$	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $-k-32$를 갖는다.
따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge0$이 성립하려면
$f(2)=-k-32\ge0$ $\therefore k\le-32$

05-3 답 $1\le k\le3$

|전략| $(f(x)$의 최댓값$)\le0$인 실수 k의 값의 범위를 구한다.

$-x^4+4x+k^2\le4k$에서 $-x^4+4x+k^2-4k\le0$
$f(x)=-x^4+4x+k^2-4k$라 하면
$f'(x)=-4x^3+4=-4(x-1)(x^2+x+1)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x$는 실수)
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	k^2-4k+3	↘

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 k^2-4k+3을 갖는다.
따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le0$이 성립하려면
$f(1)=k^2-4k+3\le0$
$(k-1)(k-3)\le0$ $\therefore 1\le k\le3$

Lecture

$\alpha<\beta$일 때

(1) 이차부등식 $(x-\alpha)(x-\beta)\le 0$의 해

➡ $\alpha\le x\le\beta$

(2) 이차부등식 $(x-\alpha)(x-\beta)\ge 0$의 해

➡ $x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$

필수 예제 06 주어진 구간에서 부등식이 항상 성립할 조건 155쪽

06-1 답 (1) $k\ge 54$ (2) $k\le 10$

|전략| (1) $x\ge -3$에서 ($f(x)$의 최솟값) ≥ 0인 실수 k의 값의 범위를 구한다.

(2) $2<x<5$에서 함수 $f(x)$가 증가하므로 $f(2)\ge 0$인 실수 k의 값의 범위를 구한다.

(1) $f(x)=x^3-27x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-27=3(x+3)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=3$

$x\ge -3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$k+54$	↘	$k-54$	↗

$x\ge -3$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값 $k-54$를 갖는다.

따라서 $x\ge -3$일 때 $f(x)\ge 0$이 항상 성립하려면

$f(3)=k-54\ge 0$ $\therefore k\ge 54$

(2) $f(x)=x^3+x^2-x-k$라 하면

$f'(x)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$

$2<x<5$일 때, $f'(x)>0$이므로 $2<x<5$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

따라서 $2<x<5$일 때 $f(x)>0$이 항상 성립하려면

$f(2)=-k+10\ge 0$ $\therefore k\le 10$

06-2 답 $k\le -8$

|전략| $0\le x\le 3$에서 ($f(x)$의 최댓값) ≤ 0인 실수 k의 값의 범위를 구한다.

$-x^3-x^2+8x+k\le 5x^2-7x$에서 $-x^3-6x^2+15x+k\le 0$

$f(x)=-x^3-6x^2+15x+k$라 하면

$f'(x)=-3x^2-12x+15=-3(x+5)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 0\le x\le 3$)

$0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	k	↗	$k+8$	↘	$k-36$

$0\le x\le 3$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $k+8$을 갖는다.

따라서 $0\le x\le 3$일 때 $f(x)\le 0$이 항상 성립하려면

$f(1)=k+8\le 0$ $\therefore k\le -8$

참고 $-x^3-x^2+8x+k\le 5x^2-7x$에서 $x^3+6x^2-15x-k\ge 0$이므로 $f(x)=x^3+6x^2-15x-k$라 할 때, $0\le x\le 3$에서 ($f(x)$의 최솟값) ≥ 0이어야 함을 이용하여 풀어도 된다.

2 속도와 가속도

개념 확인 156쪽

1 (1) 속도: 11, 가속도: 4 (2) 속도: 14, 가속도: 14

1 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

(1) $v=\frac{dx}{dt}=4t+3$, $a=\frac{dv}{dt}=4$이므로

$t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=4\times 2+3=11$, $a=4$

(2) $v=\frac{dx}{dt}=3t^2+2t-2$, $a=\frac{dv}{dt}=6t+2$이므로

$t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=3\times 2^2+2\times 2-2=14$, $a=6\times 2+2=14$

개념 드릴 157쪽

1 (1) -11 (2) $v=3t^2-24t$ (3) -36 (4) $a=6t-24$ (5) -6 (6) 8

2 (1) 속도: 6, 가속도: 2 (2) 속도: -1, 가속도: -12 (3) 속도: 3, 가속도: 10

3 (1) $\frac{dl}{dt}=2$ (2) $\frac{dS}{dt}=8t+4$ (3) $\frac{dV}{dt}=24t+12$

4 (1) -1 (2) 20

5 (1) 32π (2) 32π

1 (1) $t=1$에서의 점 P의 위치는

$x=1^3-12\times 1^2=-11$

(2) 시각 t에서의 점 P의 속도 v는

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-24t$

(3) $t=2$에서의 점 P의 속도는

$v=3\times 2^2-24\times 2=-36$

(4) 시각 t에서의 점 P의 가속도 a는

$a=\frac{dv}{dt}=6t-24$

(5) $t=3$에서의 점 P의 가속도는

$a=6\times 3-24=-6$

(6) 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$3t^2-24t=0$, $3t(t-8)=0$ $\therefore t=8$ ($\because t>0$)

2 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

(1) $v=\frac{dx}{dt}=2t+2$, $a=\frac{dv}{dt}=2$이므로

$t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=2\times 2+2=6$, $a=2$

(2) $v=\frac{dx}{dt}=-6t^2+5$, $a=\frac{dv}{dt}=-12t$이므로

$t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=-6\times 1^2+5=-1$, $a=-12\times 1=-12$

(3) $v=\frac{dx}{dt}=3t^2-8t$, $a=\frac{dv}{dt}=6t-8$이므로

$t=3$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=3\times3^2-8\times3=3$, $a=6\times3-8=10$

3 (1) 시각 t에서의 밑면의 한 변의 길이 l은 $l=1+2t$

따라서 시각 t에서의 길이 l의 변화율은

$\frac{dl}{dt}=(1+2t)'=2$

(2) 시각 t에서의 밑면의 넓이 S는

$S=(1+2t)^2=4t^2+4t+1$

따라서 시각 t에서의 넓이 S의 변화율은

$\frac{dS}{dt}=(4t^2+4t+1)'=8t+4$

(3) 시각 t에서의 직육면체의 부피 V는

$V=3(4t^2+4t+1)=12t^2+12t+3$

따라서 시각 t에서의 부피 V의 변화율은

$\frac{dV}{dt}=(12t^2+12t+3)'=24t+12$

4 (1) $\frac{dl}{dt}=6t^2-2t-5$이므로 $t=1$에서의 고무줄의 길이의 변화율은 $6\times1^2-2\times1-5=-1$

(2) $\frac{dl}{dt}=12t^2+8$이므로 $t=1$에서의 고무줄의 길이의 변화율은

$12\times1^2+8=20$

5 (1) 구의 겉넓이를 S라 하면

$S=4\pi\times(2t)^2=16\pi t^2$ $\therefore \frac{dS}{dt}=32\pi t$

따라서 $t=1$에서의 구의 겉넓이의 변화율은

$32\pi\times1=32\pi$

(2) 구의 부피를 V라 하면

$V=\frac{4}{3}\pi\times(2t)^3=\frac{32}{3}\pi t^3$ $\therefore \frac{dV}{dt}=32\pi t^2$

따라서 $t=1$에서의 구의 부피의 변화율은

$32\pi\times1^2=32\pi$

필수 예제 01 수직선 위를 움직이는 점의 속도와 가속도 158쪽

01-1 답 −18

|전략| 위치를 미분하면 속도, 속도를 미분하면 가속도임을 이용한다.

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-42t+60$, $a=\frac{dv}{dt}=12t-42$

점 P의 속도가 0이면 $v=0$에서

$6t^2-42t+60=0$, $6(t-2)(t-5)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=5$

따라서 점 P의 속도가 처음으로 0이 되는 시각은 $t=2$일 때이므로 구하는 점 P의 가속도는

$a=24-42=-18$

01-2 답 36

|전략| 위치를 미분하면 속도임을 이용한다.

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-6t+a$

점 P의 $t=4$에서의 속도가 29이므로

$48-24+a=29$ $\therefore a=5$

따라서 $x=t^3-3t^2+5t$이므로 $t=4$에서의 점 P의 위치는

$x=64-48+20=36$

01-3 답 4

|전략| 두 점이 만나면 두 점의 위치가 같음을 이용한다.

두 점 P, Q가 만나는 시각은 $f(t)=g(t)$에서

$2t^3-8t^2+t=t^3-2t^2-7t$, $t^3-6t^2+8t=0$

$t(t-2)(t-4)=0$ $\therefore t=2$ 또는 $t=4$ ($\because t>0$)

즉, 두 점 P, Q가 동시에 원점을 출발한 후 처음으로 만나는 시각은 $t=2$일 때이다.

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_1, v_2라 하면

$v_1=f'(t)=6t^2-16t+1$, $v_2=g'(t)=3t^2-4t-7$

이므로 $t=2$에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$v_1=24-32+1=-7$

$v_2=12-8-7=-3$

따라서 구하는 두 점 P, Q의 속도의 차는

$-3-(-7)=4$

필수 예제 02 수직선 위를 움직이는 점의 운동 방향 159쪽

02-1 답 7

|전략| 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0임을 이용한다.

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-5t-1$, $a=\frac{dv}{dt}=12t-5$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$6t^2-5t-1=0$, $(6t+1)(t-1)=0$

$\therefore t=1$ ($\because t>0$)

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는

$a=12-5=7$

02-2 답 $1<t<4$

|전략| 두 점이 서로 같은 방향으로 움직이면 두 점의 속도의 부호가 서로 같음을 이용한다.

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_1, v_2라 하면

$v_1=f'(t)=2t-2$, $v_2=g'(t)=-2t+8$

두 점 P, Q가 서로 같은 방향으로 움직이면 속도의 부호가 서로 같으므로 $v_1v_2>0$에서

$(2t-2)(-2t+8)>0$, $4(t-1)(t-4)<0$

$\therefore 1<t<4$

02-3 답 9

|전략| 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0임을 이용한다.

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=t^2-2t-3$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t^2-2t-3=0$, $(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t>0$)

따라서 $t=3$일 때의 점 P의 위치가 원점이므로 $x=0$에서

$0=9-9-9+a$ $\quad\therefore a=9$

필수 예제 03 위로 던진 물체의 위치와 속도 160쪽

03-1 답 (1) 2초, 45 m (2) −30 m/s

|전략| (1) 속도가 0일 때의 t의 값을 구한 후 그 시각에서의 높이를 구한다.
(2) 높이가 0일 때의 t의 값을 구한 후 그 시각에서의 속도를 구한다.

t초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-10t+20$

(1) 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$-10t+20=0$ $\quad\therefore t=2$

따라서 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은 2초이고, 최고 높이는

$x=-20+40+25=45$ (m)

참고 ① 물체가 지면과 수직으로 운동하는 경우, $v>0$일 때 물체는 위로 올라가고, $v<0$일 때 물체는 아래로 내려오므로 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 $v=0$이다.

② 이차함수의 최대, 최소를 이용하여 풀 수도 있다.

$x=-5t^2+20t+25=-5(t-2)^2+45$이므로 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은 2초이고 그때의 높이는 45 m이다.

(2) 물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로 $x=0$에서

$-5t^2+20t+25=0$, $-5(t+1)(t-5)=0$

$\therefore t=5$ ($\because t>0$)

따라서 물체가 지면에 떨어지는 순간, 즉 $t=5$일 때 속도는

$v=-50+20=-30$ (m/s)

03-2 답 100 m

|전략| 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0임을 이용한다.

t초 후의 공의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-10t+a$

최고 높이에 도달하는 데 걸린 시간이 4초이고 이때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$0=-40+a$ $\quad\therefore a=40$

따라서 $x=-5t^2+40t+20$이고, 공이 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간이 4초이므로 최고 높이는

$x=-80+160+20=100$ (m)

필수 예제 04 속도, 가속도와 그래프 161쪽

04-1 답 ㄱ, ㄴ

|전략| (가속도)=(속도 $v(t)$의 그래프에서 접선의 기울기)임을 이용하고, 운동 방향은 $v(t)$의 부호를 확인한다.

ㄱ. $v(2)=3>0$, $v(4)=-2<0$이므로 $t=2$일 때와 $t=4$일 때의 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다. (참)

ㄴ. 시각 $t=a$에서의 점 P의 가속도는 속도 $v(t)$의 그래프 위의 $t=a$인 점에서의 접선의 기울기와 같다.

즉, $4<t<5$인 점에서의 접선의 기울기는 양수이므로 $4<t<5$에서 점 P의 가속도는 양수이다. (참)

ㄷ. $t=3$과 $4<t<5$의 어느 한 점의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 운동 방향을 2번 바꾼다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

04-2 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

|전략| (속도)=(위치 $x(t)$의 그래프에서 접선의 기울기)임을 이용한다.

ㄱ. $x(2)=0$이므로 $t=2$일 때, 점 P는 원점을 지난다. (참)

ㄴ. $3<t<4$에서 $x'(t)>0$이므로 점 P의 속도는 양수이다.

즉, $3<t<4$에서 점 P는 양의 방향으로 움직인다. (참)

ㄷ. $x'(1)=0$이므로 $t=1$일 때, 점 P의 속도는 0이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

참고 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$의 그래프가 주어질 때, $t=a$에서의 점 P의 속도는 $t=a$인 점에서의 접선의 기울기 $x'(a)$이다.

필수 예제 05 시각에 대한 길이의 변화율 162쪽

05-1 답 (1) 2 m/s (2) 1 m/s

|전략| (1) 그림자 끝이 t초 동안 움직이는 거리 x를 t에 대한 함수로 나타낸 후 그림자 끝이 움직이는 속도는 $\frac{dx}{dt}$임을 이용한다.

(2) 그림자의 길이 l을 t에 대한 함수로 나타낸 후 그림자의 길이의 변화율은 $\frac{dl}{dt}$임을 이용한다.

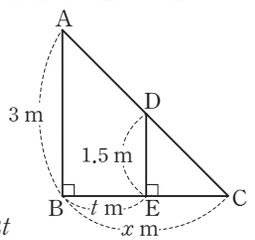
(1) 학생이 1 m/s의 속도로 걸어가므로 t초 동안 걸어간 거리는 t m

그림자 끝이 t초 동안 움직이는 거리를 x m라 하면 오른쪽 그림에서

$\triangle ABC \backsim \triangle DEC$ (AA 닮음)이므로 $\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{EC}$

$3:1.5=x:(x-t)$

$1.5x=3x-3t$, $1.5x=3t$ $\quad\therefore x=2t$



따라서 그림자 끝이 움직이는 속도는

$\frac{dx}{dt}=2$ (m/s)

(2) t초 후의 그림자의 길이를 l m라 하면

$l=\overline{EC}=x-t=2t-t=t$

따라서 그림자의 길이의 변화율은

$\frac{dl}{dt}=1$ (m/s)

05-2 답 $\frac{5}{2}$

|전략| 선분 OC의 길이 l을 t에 대한 함수로 나타낸 후 선분 OC의 길이의 변화율은 $\frac{dl}{dt}$임을 이용한다.

t초 후의 두 점 A, B의 좌표는 $A(4t, 0)$, $B(0, 3t)$이므로

선분 AB의 중점 C의 좌표는 $C\left(2t, \frac{3}{2}t\right)$

선분 OC의 길이를 l이라 하면

$l=\overline{OC}=\sqrt{(2t)^2+\left(\frac{3}{2}t\right)^2}=\frac{5}{2}t$ ($\because t>0$)

따라서 선분 OC의 길이의 변화율은

$\frac{dl}{dt}=\frac{5}{2}$

필수 예제 06 시각에 대한 넓이, 부피의 변화율 163쪽

06-1 답 80 cm²/s

|전략| 정사각형의 넓이 S를 t에 대한 함수로 나타낸 후 정사각형의 넓이의 변화율은 $\frac{dS}{dt}$임을 이용한다.

각 변의 길이가 매초 2 cm씩 늘어나므로 t초 후의 정사각형의 한 변의 길이는 $(10+2t)$ cm

t초 후의 정사각형의 넓이를 S cm²라 하면

$S=(10+2t)^2$

시각 t에 대한 정사각형의 넓이 S의 변화율은

$\frac{dS}{dt}=2(10+2t)\times 2=8(5+t)$

정사각형의 넓이가 400 cm²가 될 때 한 변의 길이는 20 cm이므로

$10+2t=20$에서 $t=5$

따라서 $t=5$일 때, 정사각형의 넓이의 변화율은

$8\times 10=80$ (cm²/s)

06-2 답 42π cm³/s

|전략| 원기둥의 부피 V를 t에 대한 함수로 나타낸 후 원기둥의 부피의 변화율은 $\frac{dV}{dt}$임을 이용한다.

밑면의 반지름의 길이는 매초 1 cm씩 늘어나고, 높이는 매초 2 cm씩 줄어드므로 t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $(4+t)$ cm, 높이는 $(16-2t)$ cm

t초 후의 원기둥의 부피를 V cm³라 하면

$V=\pi(4+t)^2(16-2t)$

시각 t에 대한 원기둥의 부피 V의 변화율은

$\frac{dV}{dt}=\pi\times 2(4+t)(16-2t)+\pi(4+t)^2\times(-2)$

$=2\pi(4+t)\{(16-2t)-(4+t)\}$

$=6\pi(4+t)(4-t)$

원기둥의 높이가 10 cm가 될 때의 시각은

$16-2t=10$에서 $t=3$

따라서 $t=3$일 때, 원기둥의 부피의 변화율은

$6\pi\times 7\times 1=42\pi$ (cm³/s)

개념 정리 164~165쪽

01 x **02** x, 교점 **03** ㉢ **04** ㉠
05 ㉡ **06** 1, 3, 4, 1, $k+4$, 3, k, <, 4, −4, 0
07 최솟값 **08** 최댓값 **09** −, ≥ **10** $\frac{dx}{dt}$
11 $\frac{dv}{dt}$ **12** 양, 음, $v=0$ **13** dl
14 dS **15** dV

06 $f(x)=x^3-6x^2+9x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	1	⋯	3	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$k+$ 4	↘	k	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=$ 1 에서 극댓값 $k+4$, $x=$ 3 에서 극솟값 k 를 갖는다.

따라서 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면

(극댓값)×(극솟값) < 0이어야 하므로

$k(k+$ 4 $)<0$ ∴ −4 $<k<$ 0

중단원 마무리 166~168쪽

01 ① **02** ② **03** ⑤ **04** −5
05 16 **06** ④ **07** ③ **08** 32π cm³/s
09 32 **10** ① **11** ③ **12** ②
13 8 **14** ④ **15** ⑤ **16** ②
17 48 **18** ㄱ, ㄴ **19** ⑤ **20** ③
21 15 **22** 1 **23** $k<-1$ **24** −5

LEVEL 1

01 $f(x)=3x^4-6x^2$이라 하면

$f'(x)=12x^3-12x=12x(x+1)(x-1)$

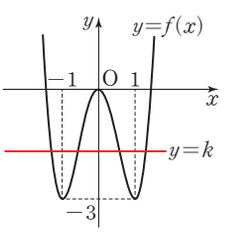
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	−1	⋯	0	⋯	1	⋯
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	−3	↗	0	↘	−3	↗

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로

$-3<k<0$



따라서 모든 정수 k의 값의 합은 $-2+(-1)=-3$

02 $2x^3-3x^2-k=0$에서 $2x^3-3x^2=k$

$f(x)=2x^3-3x^2$이라 하면

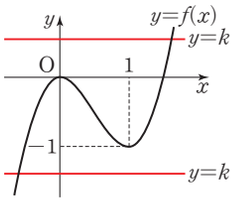
$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	−1	↗

주어진 방정식이 단 한 개의 음의 실근 또는 단 한 개의 양의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 한 개이고 교점의 x좌표가 음수 또는 양수이어야 하므로



$k<-1$ 또는 $k>0$

따라서 $a=-1$, $b=0$이므로

$a+b=-1+0=-1$

03 $f(x)=x^3-9x^2+24x-k$라 하면

$f'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$-k+20$	↘	$-k+16$	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $f(2)=-k+20$,

$x=4$에서 극솟값 $f(4)=-k+16$을 갖는다.

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면

(극댓값)×(극솟값)<0이어야 하므로

$(-k+20)(-k+16)<0$, $(k-16)(k-20)<0$

$\therefore 16<k<20$

따라서 정수 k의 최댓값은 19이다.

04 $x^3-x+6\geq x^2-k$에서

$x^3-x^2-x+k+6\geq 0$

$f(x)=x^3-x^2-x+k+6$이라 하면

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x\geq 0$)

$x\geq 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$	$k+6$	↘	$k+5$	↗

$x\geq 0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $k+5$를 갖는다.

즉, $x\geq 0$일 때 $f(x)\geq 0$이 항상 성립하려면

$f(1)=k+5\geq 0$ $\therefore k\geq -5$

따라서 실수 k의 최솟값은 -5이다.

05 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_1, v_2라 하면

$v_1=f'(t)=t^2+9$, $v_2=g'(t)=6t$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각은 $v_1=v_2$에서

$t^2+9=6t$, $(t-3)^2=0$ $\therefore t=3$

$t=3$에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$f(3)=9+27-10=26$, $g(3)=27-17=10$

따라서 구하는 두 점 P, Q 사이의 거리는

$26-10=16$

06 t초 후의 공의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-10t+40$

공이 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$-10t+40=0$ $\therefore t=4$

따라서 공이 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은 4초이므로 $a=4$

한편, 공이 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로 $x=0$에서

$-5t^2+40t+45=0$, $-5(t+1)(t-9)=0$

$\therefore t=9$ ($\because t>0$)

공이 지면에 떨어질 때, 즉 $t=9$일 때의 속도는

$v=-90+40=-50$ $\therefore b=-50$

$\therefore a-b=4-(-50)=54$

07 시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$라 하면 $t=a$, $t=c$일 때, $v(a)=x'(a)=0$, $v(c)=x'(c)=0$이고, 그 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 $t=a$, $t=c$일 때 운동 방향을 바꾼다.

따라서 점 P가 운동 방향을 두 번째로 바꾼 시각은 $t=c$이다.

Lecture

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$의 그래프에서

(1) $x'(t)>0$일 때 ➡ 점 P는 양의 방향으로 움직인다.

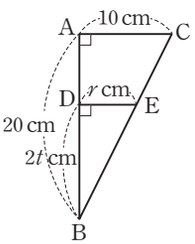
(2) $x'(t)=0$일 때 ➡ 점 P는 정지하거나 운동 방향을 바꾼다.

(3) $x'(t)<0$일 때 ➡ 점 P는 음의 방향으로 움직인다.

08 수면의 높이가 매초 2 cm씩 올라가므로 t초 후의 수면의 높이는 $2t$ cm

수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면

오른쪽 그림에서



△ABC∽△DBE (AA 닮음)이므로

$\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{DE}$

$20:2t=10:r$, $20t=20r$

$\therefore r=t$

t초 후의 물의 부피를 V cm^{3}라 하면

$V=\frac{1}{3}\times\pi t^2\times 2t=\frac{2}{3}\pi t^3$

시각 t에 대한 물의 부피 V의 변화율은

$\frac{dV}{dt}=\frac{2}{3}\pi\times 3t^2=2\pi t^2$

따라서 $t=4$일 때, 물의 부피의 변화율은

$2\pi\times 4^2=32\pi$ (cm^3/s)

LEVEL 2

09 곡선 $y=x^3-3x^2+2x-4$와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $x^3-3x^2+2x-4=2x+k$, 즉 $x^3-3x^2-4=k$가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2-4$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

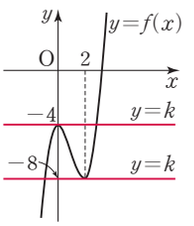
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	−4	↘	−8	↗

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 방정식 $x^3-3x^2-4=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 $k=-8$ 또는 $k=-4$이어야 하므로 구하는 모든 실수 k의 값의 곱은

$-8\times(-4)=32$



다른 풀이 곡선 $y=x^3-3x^2+2x-4$와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선 $y=2x+k$는 곡선 $y=x^3-3x^2+2x-4$에 접해야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2+2x-4$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x+2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2+2t-4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-6t+2$이므로

$3t^2-6t+2=2$에서 $3t^2-6t=0$

$t(t-2)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=2$

즉, 접점의 좌표가 $(0,\ -4)$ 또는 $(2,\ -4)$이고, 이 점이 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$-4=k$ 또는 $-4=4+k$ $\therefore k=-8$ 또는 $k=-4$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 $-8\times(-4)=32$

10 $3x^4-2x^3=3x^2-k$에서 $-3x^4+2x^3+3x^2=k$

$f(x)=-3x^4+2x^3+3x^2$이라 하면

$f'(x)=-12x^3+6x^2+6x=-6x(2x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

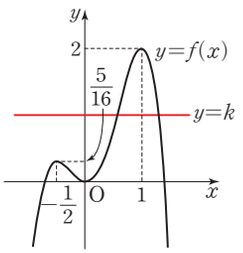
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗	$\frac{5}{16}$	↘	0	↗	2	↘

주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 2개이고 교점의 x좌표가 모두 양수이어야 하므로

$\frac{5}{16}<k<2$

따라서 정수 k의 개수는 1의 1이다.



11 $3x^3+kx^2-3x=x^3-2kx^2-3x-8$에서

$2x^3+3kx^2+8=0$

$f(x)=2x^3+3kx^2+8$이라 하면

$f'(x)=6x^2+6kx=6x(x+k)$

(i) $k=0$이면 $f'(x)=6x^2\geq 0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

즉, 방정식 $f(x)=0$은 한 개의 실근만을 가지므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $k\neq 0$이면 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=-k$에서 극값을 갖는다.

즉, 주어진 방정식이 한 개의 실근만을 가지려면

$f(0)f(-k)>0$이어야 하므로

$8(k^3+8)>0$, $(k+2)(k^2-2k+4)>0$

$\therefore k>-2$ ($\because$ $k^2-2k+4>0$ → $k^2-2k+4=(k-1)^2+3>0$)

(i), (ii)에서 $k>-2$

따라서 정수 k의 최솟값은 -1이다.

12 방정식 $|f(x)|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=2x^3-6x-1$에서

$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

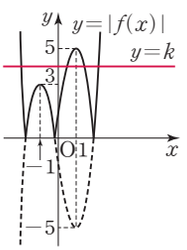
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	−5	↗

즉, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와 만나는 점의 개수가 4가 되도록 하는 k의 값의 범위는

$3<k<5$

따라서 정수 k의 값은 4이다.



참고 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동하여 그린다.

13 $f(x)=x^4-4x-k^2+k+15$라 하면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because$ x는 실수)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	$-k^2+k+12$	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $-k^2+k+12$를 갖는다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 항상 성립하려면

$-k^2+k+12\geq 0$, $(k+3)(k-4)\leq 0$

$\therefore -3\leq k\leq 4$

따라서 정수 k의 개수는 -3, -2, $\cdots$, 3, 4의 8이다.

14 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=(3x^3+9x+k)-(2x^3-6x^2)=x^3+6x^2+9x+k$

$h'(x)=3x^2+12x+9=3(x+1)(x+3)$

$h'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$

$-4\le x\le 0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-4	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$k-4$	↗	k	↘	$k-4$	↗	k

$-4\le x\le 0$일 때, 함수 $h(x)$는 $x=-4$ 또는 $x=-1$에서 최솟값 $k-4$를 갖는다. → $f(x)\ge g(x)$에서 $f(x)-g(x)\ge 0$

즉, $-4\le x\le 0$일 때 $h(x)\ge 0$이 항상 성립하려면

$h(-4)=h(-1)=k-4\ge 0$ $\therefore k\ge 4$

따라서 실수 k의 최솟값은 4이다.

15 점 P가 원점을 지날 때의 위치는 0이므로 $x=0$에서

$t^3-5t^2+6t=0$, $t(t-2)(t-3)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=3$ ($\because t>0$)

점 P가 출발한 후 마지막으로 원점을 지나는 시각은 $t=3$일 때이고, 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-10t+6$

$a=\frac{dv}{dt}=6t-10$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 가속도는

$a=18-10=8$

16 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-12t+9$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$3t^2-12t+9=0$, $3(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

$t=1$에서의 점 P의 위치는 $1-6+9+2=6$

$t=3$에서의 점 P의 위치는 $27-54+27+2=2$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는

$|6-2|=4$

17 전기차가 제동을 건 후 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=24-6t$

전기차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$24-6t=0$ $\therefore t=4$

즉, 제동을 건 후 전기차가 멈추는 것은 4초 후이다.

이때 4초 동안 전기차가 움직인 거리는

$96-48=48$ (m)

따라서 목적지로부터 전방 48 m인 지점에서 제동을 걸어야 하므로

$a=48$

18 ㄱ. $0<t<a$에서 점 P의 속도는 감소한다. (참)

ㄴ. $v(a)<0$이고 $v(c)>0$이므로 $t=a$일 때와 $t=c$일 때의 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다. (참)

ㄷ. 점 P의 시각 $t=k$에서의 가속도는 속도 $v(t)$의 그래프 위의 $t=k$인 점에서의 접선의 기울기와 같다.

즉, $c<t<d$인 점에서의 접선의 기울기는 음수이므로 $c<t<d$에서 점 P의 가속도는 음수이다. (거짓)

ㄹ. $0<t<b$에서 $v(t)<0$이므로 점 P는 원점을 출발하여 $0<t<b$에서 음의 방향으로 이동한다.

즉, $t=b$일 때, 점 P는 원점을 지나지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

19 가로의 길이는 매초 3 cm씩 늘어나고, 세로의 길이는 매초 2 cm씩 줄어들므로 t초 후의 직사각형의 가로의 길이는 $(40+3t)$ cm, 세로의 길이는 $(60-2t)$ cm

t초 후의 직사각형의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=(40+3t)(60-2t)=-6t^2+100t+2400$

시각 t에 대한 직사각형의 넓이 S의 변화율은

$\frac{dS}{dt}=-12t+100$

직사각형이 정사각형이 될 때, 즉 가로의 길이와 세로의 길이가 같아질 때의 시각은

$40+3t=60-2t$에서

$5t=20$ $\therefore t=4$

따라서 $t=4$일 때, 직사각형의 넓이의 변화율은

$-48+100=52$ (cm^2/s)

20 각 모서리의 길이가 매초 1 cm씩 늘어나므로 t초 후의 정육면체의 한 모서리의 길이는 $(4+t)$ cm

t초 후의 정육면체의 부피를 V cm^{3}라 하면

$V=(4+t)^3$

시각 t에 대한 정육면체의 부피 V의 변화율은

$\frac{dV}{dt}=3(4+t)^2$

정육면체의 부피가 216 cm^{3}가 될 때의 시각은

$(4+t)^3=216=6^3$에서

$4+t=6$ $\therefore t=2$

따라서 $t=2$일 때, 정육면체의 부피의 변화율은

$3\times 6^2=108$ (cm^3/s)

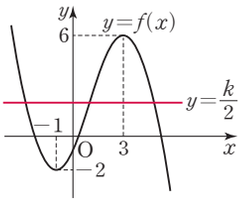
서술형

21 주어진 그래프에서 $f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

또, $f(-1)=-2$, $f(3)=6$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	6	↘

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. … ❶



방정식 $2f(x)-k=0$, 즉 $f(x)=\frac{k}{2}$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{k}{2}$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-2<\frac{k}{2}<6 \quad \therefore -4<k<12$ … ❷

따라서 정수 k의 개수는 $-3, -2, \cdots, 10, 11$의 15이다. … ❸

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
❷ 조건을 만족시키는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20 %

22 $f(x)=x^3-3x^2+2x$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x+2$

점 $(0, k)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+2t)라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-6t+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2+2t)=(3t^2-6t+2)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-6t+2)x-2t^3+3t^2$ … ❶

이 직선이 점 $(0, k)$를 지나므로

$2t^3-3t^2+k=0$ …… ㉠

점 $(0, k)$에서 곡선 $y=x^3-3x^2+2x$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. … ❷

$g(t)=2t^3-3t^2+k$라 하면

$g'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	+	0	−	0	+
$g(t)$	↗	k	↘	$k-1$	↗

즉, 함수 $g(t)$는 $t=0$에서 극댓값 $g(0)=k$, $t=1$에서 극솟값 $g(1)=k-1$을 갖는다.

따라서 삼차방정식 $g(t)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 (극댓값)×(극솟값)$=0$이어야 하므로

$k(k-1)=0 \quad \therefore k=1 \ (\because k>0)$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 접점의 x좌표를 t로 놓고 접선의 방정식을 세울 수 있다.	30 %
❷ t에 대한 삼차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	30 %
❸ 조건을 만족시키는 양수 k의 값을 구할 수 있다.	40 %

23 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$이어야 한다. … ❶

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=(x^4-k)-2x^2=x^4-2x^2-k$

$h'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$h(x)$	↘	$-k-1$	↗	$-k$	↘	$-k-1$	↗

함수 $h(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 최솟값 $-k-1$을 갖는다. … ❷

따라서 모든 실수 x에 대하여 항상 $h(x)>0$이려면

$h(-1)=h(1)=-k-1>0$ ($h(x)>0$ → $f(x)>g(x)$에서 $f(x)-g(x)>0$)

$\therefore k<-1$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립해야 함을 알 수 있다.	30 %
❷ $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 함수 $h(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 실수 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %

Lecture

열린구간 (a, b)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있다.

➡ $a<x<b$에서 $f(x)>g(x)$가 성립한다.

24 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 v_1, v_2, 가속도를 a_1, a_2라 하면

$v_1=f'(t)=t^3-6t^2+8$, $v_2=g'(t)=2kt$

$a_1=\frac{dv_1}{dt}=3t^2-12t$, $a_2=\frac{dv_2}{dt}=2k$ … ❶

두 점 P, Q의 가속도가 서로 같으면 $a_1=a_2$에서

$3t^2-12t=2k \quad \therefore 3t^2-12t-2k=0$ …… ㉠

$t>0$에서 가속도가 같아지는 순간이 두 번 존재하려면 t에 대한 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가져야 한다. … ❷

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=36+6k>0 \quad \therefore k>-6$

(ii) 이차방정식 ㉠의 (두 근의 합)>0, (두 근의 곱)>0이어야 하므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{-12}{3}>0$, $\frac{-2k}{3}>0 \quad \therefore k<0$

(i), (ii)에서 $-6<k<0$ … ❸

따라서 정수 k의 최솟값은 -5이다. … ❹

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q의 가속도를 구할 수 있다.	20 %
❷ 가속도가 같아지는 순간이 두 번 존재할 조건을 알 수 있다.	30 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❹ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

7 부정적분

1 부정적분

개념 확인 170~171쪽

1 (1) $f(x)=4x+1$ (2) $f(x)=-3x^2+6x$

2 (1) x^2+3x (2) x^2+3x+C

1 (1) $\int f(x)dx=2x^2+x+C$에서

$f(x)=(2x^2+x+C)'=4x+1$

(2) $\int f(x)dx=-x^3+3x^2+C$에서

$f(x)=(-x^3+3x^2+C)'=-3x^2+6x$

2 (1) $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)=x^2+3x$

(2) $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C=x^2+3x+C$

개념 드릴

172쪽

1 ㄴ, ㄷ **2** ㄱ, ㄷ

3 (1) $-3x+C$ (2) $2x^2+C$ (3) $-x^6+C$ (4) y^2+C

4 (1) $f(x)=-2x+3$ (2) $f(x)=-2x^2+2x$

(3) $f(x)=21x^2+\frac{2}{3}$ (4) $f(x)=20x^3+10x-1$

5 (1) $-\frac{1}{3}x^5+6x^3$ (2) $-\frac{1}{3}x^5+6x^3+C$

6 (1) $a=5, b=2$ (2) $a=1, b=-3$

1 보기에 주어진 함수의 도함수를 구하면

ㄱ. $(4x^3+x)'=12x^2+1$ ㄴ. $(x^4-5)'=4x^3$

ㄷ. $(x^4+100)'=4x^3$ ㄹ. $(x^4-x^2)'=4x^3-2x$

따라서 함수 $4x^3$의 부정적분인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

2 보기에 주어진 함수의 도함수를 구하면

ㄱ. $(x^3+2x^2)'=3x^2+4x$ ㄴ. $\left(\frac{1}{3}x^3+x^2\right)'=x^2+2x$

ㄷ. $\left(\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right)'=x^2+2x+1$

ㄹ. $\left(\frac{1}{3}x^3+x^2-\sqrt{2}\right)'=x^2+2x$

따라서 함수 x^2+2x의 부정적분이 아닌 것은 ㄱ, ㄷ이다.

3 (1) $(-3x)'=-3$이므로 $\int(-3)dx=-3x+C$

(2) $(2x^2)'=4x$이므로 $\int 4xdx=2x^2+C$

(3) $(-x^6)'=-6x^5$이므로 $\int(-6x^5)dx=-x^6+C$

(4) $(y^2)'=2y$이므로 $\int 2ydy=y^2+C$

4 (1) $\int f(x)dx=-x^2+3x+C$에서

$f(x)=(-x^2+3x+C)'=-2x+3$

(2) $\int f(x)dx=-\frac{2}{3}x^3+x^2+C$에서

$f(x)=\left(-\frac{2}{3}x^3+x^2+C\right)'=-2x^2+2x$

(3) $\int f(x)dx=7x^3+\frac{2}{3}x+C$에서

$f(x)=\left(7x^3+\frac{2}{3}x+C\right)'=21x^2+\frac{2}{3}$

(4) $\int f(x)dx=5x^4+5x^2-x+C$에서

$f(x)=(5x^4+5x^2-x+C)'=20x^3+10x-1$

5 (1) $\frac{d}{dx}\left\{\int\left(-\frac{1}{3}x^5+6x^3\right)dx\right\}=-\frac{1}{3}x^5+6x^3$

(2) $\int\left\{\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3}x^5+6x^3\right)\right\}dx=-\frac{1}{3}x^5+6x^3+C$

6 (1) $\frac{d}{dx}\left\{\int(ax^3+2x)dx\right\}=ax^3+2x$이므로 주어진 등식은

$ax^3+2x=5x^3+bx$ $\therefore a=5, b=2$

(2) $\frac{d}{dx}\left\{\int(ax^2+b)dx\right\}=ax^2+b$이므로 주어진 등식은

$ax^2+b=x^2-3$ $\therefore a=1, b=-3$

필수 예제 01 부정적분의 정의

173쪽

01-1 답 1

|전략| $\int f(x)dx=F(x)+C$이면 $f(x)=F'(x)$임을 이용한다.

$\int(2x^3-3x^2+ax+1)dx=bx^4-x^3+x^2+cx-2$에서

$2x^3-3x^2+ax+1=(bx^4-x^3+x^2+cx-2)'$

$=4bx^3-3x^2+2x+c$

이때 $2=4b$, $a=2$, $1=c$이므로

$a=2, b=\frac{1}{2}, c=1$ $\therefore abc=2\times\frac{1}{2}\times1=1$

01-2 답 -10

|전략| $\int f(x)dx=F(x)+C$이면 $f(x)=F'(x)$임을 이용한다.

$\int xf(x)dx=-2x^3+x^2$에서

$xf(x)=(-2x^3+x^2)'$

$=-6x^2+2x=x(-6x+2)$

따라서 $f(x)=-6x+2$이므로

$f(2)=-12+2=-10$

01-3 답 -6

|전략| $\int f(x)dx=F(x)+C$이면 $f(x)=F'(x)$임을 이용한다.

$\int f(x)dx=-x^5+ax^2+3x+C$에서

$f(x)=(-x^5+ax^2+3x+C)'$

$\quad=-5x^4+2ax+3$

이때 $f(1)=2$이므로

$-5+2a+3=2,\ 2a=4 \qquad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=-5x^4+4x+3$이므로

$f(-1)=-5-4+3=-6$

필수 예제 02 부정적분과 미분의 관계 174쪽

02-1 답 2

|전략| $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$임을 이용한다.

$\frac{d}{dx}\left\{\int(x^3+ax^2+3)dx\right\}=x^3+ax^2+3$이므로 주어진 등식은

$x^3+ax^2+3=bx^3-2x^2+c$

따라서 $a=-2,\ b=1,\ c=3$이므로

$a+b+c=-2+1+3=2$

02-2 답 29

|전략| $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$임을 이용한다.

$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(4x^3+x^2-3x)\right\}dx$

$\quad=4x^3+x^2-3x+C$

이때 $f(1)=1$이므로

$4+1-3+C=1 \qquad \therefore C=-1$

따라서 $f(x)=4x^3+x^2-3x-1$이므로

$f(2)=32+4-6-1=29$

02-3 답 $\frac{3}{2}$

|전략| $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$임을 이용한다.

$\frac{d}{dx}\left\{\int(x+4)dx\right\}=x+4$이므로 주어진 등식은

$x+4=2x^2-2x+5$

$2x^2-3x+1=0,\ (2x-1)(x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

따라서 주어진 등식을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합은

$\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

다른 풀이 $x+4=2x^2-2x+5$에서 $2x^2-3x+1=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 x의 값의 합은 $\frac{3}{2}$이다.

2 부정적분의 계산

개념 확인 175~176쪽

1 (1) $\frac{1}{5}x^5+C$ (2) $\frac{1}{8}x^8+C$

1 (1) $\int x^4dx=\frac{1}{4+1}x^{4+1}+C=\frac{1}{5}x^5+C$

(2) $\int x^7dx=\frac{1}{7+1}x^{7+1}+C=\frac{1}{8}x^8+C$

개념 드릴 177쪽

1 (1) $11x+C$ (2) $-3x^4+C$ (3) $\frac{1}{11}x^{11}+C$ (4) $\frac{1}{61}x^{61}+C$

2 (1) $-x^4+x^3+C$ (2) $3x^3-3x^2+x+C$

(3) $-\frac{1}{4}t^4+2t^2+C$ (4) $\frac{4}{3}y^3-ty+C$

3 (1) $\frac{1}{3}x^3-x^2+x+C$ (2) $\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+x^2-8x+C$

(3) $2x^4-x+C$ (4) $-\frac{1}{2}x^2-3x+C$

(5) $t^3-\frac{1}{2}t^2-2t+C$ (6) $(2t+3)x^2+3(2t+3)x+C$

4 (1) x^3+C (2) x^3-6x+C

1 (1) $\int 11dx=11\int dx$

$\quad=11x+C$

(2) $\int(-12x^3)dx=-12\times\frac{1}{3+1}x^{3+1}+C$

$\quad=-3x^4+C$

(3) $\int x^3\times x^7dx=\int x^{10}dx=\frac{1}{10+1}x^{10+1}+C$

$\quad=\frac{1}{11}x^{11}+C$

(4) $\int(x^{15})^4dx=\int x^{60}dx=\frac{1}{60+1}x^{60+1}+C$

$\quad=\frac{1}{61}x^{61}+C$

2 (1) $\int(-4x^3+3x^2)dx=\int(-4x^3)dx+\int 3x^2dx$

$\quad=-4\int x^3dx+3\int x^2dx$

$\quad=-x^4+x^3+C$

(2) $\int(9x^2-6x+1)dx=\int 9x^2dx-\int 6xdx+\int 1dx$

$\quad=9\int x^2dx-6\int xdx+\int dx$

$\quad=3x^3-3x^2+x+C$

(3) $\int(-t^3+4t)dt=\int(-t^3)dt+\int 4tdt$

$\quad=-\int t^3dt+4\int tdt$

$\quad=-\frac{1}{4}t^4+2t^2+C$

(4) $\int(4y^2-t)dy=\int 4y^2dy-\int tdy$

$=4\int y^2dy-t\int dy$

$=\frac{4}{3}y^3-ty+C$

3 (1) $\int(x-1)^2dx=\int(x^2-2x+1)dx$

$=\int x^2dx-\int 2xdx+\int 1dx$

$=\int x^2dx-2\int xdx+\int dx$

$=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+C$

다른 풀이 $\int(x-1)^2dx=\frac{1}{3}(x-1)^3+C$

(2) $\int(x^2+2)(x-4)dx=\int(x^3-4x^2+2x-8)dx$

$=\int x^3dx-\int 4x^2dx+\int 2xdx-\int 8dx$

$=\int x^3dx-4\int x^2dx+2\int xdx-8\int dx$

$=\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+x^2-8x+C$

(3) $\int(2x-1)(4x^2+2x+1)dx=\int(8x^3-1)dx$

$=\int 8x^3dx-\int 1dx$

$=8\int x^3dx-\int dx$

$=2x^4-x+C$

(4) $\int\frac{x^2-9}{3-x}dx=\int\frac{(x+3)(x-3)}{-(x-3)}dx$

$=\int(-x-3)dx$

$=\int(-x)dx-\int 3dx$

$=-\int xdx-3\int dx$

$=-\frac{1}{2}x^2-3x+C$

(5) $\int(t-1)(3t+2)dt=\int(3t^2-t-2)dt$

$=\int 3t^2dt-\int tdt-\int 2dt$

$=3\int t^2dt-\int tdt-2\int dt$

$=t^3-\frac{1}{2}t^2-2t+C$

(6) $\int(2t+3)(2x+3)dx=\int\{2(2t+3)x+3(2t+3)\}dx$

$=\int 2(2t+3)xdx+\int 3(2t+3)dx$

$=2(2t+3)\int xdx+3(2t+3)\int dx$

$=(2t+3)x^2+3(2t+3)x+C$

4 (1) $\int(x^2-x+1)dx+\int(2x^2+x-1)dx$

$=\int\{(x^2-x+1)+(2x^2+x-1)\}dx$

$=\int 3x^2dx=3\int x^2dx=x^3+C$

(2) $\int(3x^3+x^2-2)dx-\int(3x^3-2x^2+4)dx$

$=\int\{(3x^3+x^2-2)-(3x^3-2x^2+4)\}dx$

$=\int(3x^2-6)dx=3\int x^2dx-6\int dx=x^3-6x+C$

필수 예제 01 부정적분의 계산 178쪽

01-1 답 (1) $xy-\frac{1}{2}y^2+C$ (2) $\frac{1}{2}x^2+2x+C$

|전략| 부정적분의 실수배, 합, 차의 성질을 이용한다.

(1) $\int(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})dy=\int(x-y)dy=xy-\frac{1}{2}y^2+C$

(2) $\int\frac{x^3}{x^2-2x+4}dx+\int\frac{8}{x^2-2x+4}dx$

$=\int\frac{x^3+8}{x^2-2x+4}dx=\int\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4}dx$

$=\int(x+2)dx=\frac{1}{2}x^2+2x+C$

01-2 답 12

|전략| 부정적분의 실수배, 합, 차의 성질을 이용한다.

$f(x)=\int(1+2x+3x^2+\cdots+10x^9)dx$

$=x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}+C$

이때 $f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}+2$이므로

$f(1)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{10개}+2=1\times10+2=12$

필수 예제 02 도함수가 주어질 때 함수 구하기 179쪽

02-1 답 -3

|전략| $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용한다.

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+ax+1)dx$

$=x^3+\frac{a}{2}x^2+x+C$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

또, $f(x)=x^3+\frac{a}{2}x^2+x+1$에서 $f(2)=3$이므로

$8+2a+2+1=3$ $\therefore a=-4$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+x+1$이므로

$f(1)=1-2+1+1=1$

$\therefore a+f(1)=-4+1=-3$

02-2 답 9

|전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$임을 이용한다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $6x^2-6x+1$이므로 $f'(x)=6x^2-6x+1$에서

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2-6x+1)dx$$
$$=2x^3-3x^2+x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1, 3)$을 지나므로 $f(-1)=3$에서

$-2-3-1+C=3 \quad \therefore C=9$

따라서 $f(x)=2x^3-3x^2+x+9$이므로

$f(1)=2-3+1+9=9$

02-3 답 $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2-2x+C$

|전략| $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용한다.

$f'(x)=3x^2+2x-5$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+2x-5)dx$$
$$=x^3+x^2-5x+C_1$$

이때 $f(0)=-2$이므로 $C_1=-2$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-5x-2$이므로

$$\int f(x)dx=\int(x^3+x^2-5x-2)dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2-2x+C$$

필수 예제 03 함수와 그 부정적분 사이의 관계식이 주어질 때 함수 구하기 180쪽

03-1 답 $f(x)=-3x^2+2x+4$

|전략| 양변을 x에 대하여 미분한 후 $F'(x)=f(x)$임을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

$F(x)-xf(x)=2x^3-x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)-f(x)-xf'(x)=6x^2-2x$

이때 $F'(x)=f(x)$이므로

$f(x)-f(x)-xf'(x)=6x^2-2x$

$xf'(x)=-6x^2+2x$

$=x(-6x+2)$

$\therefore f'(x)=-6x+2$

$$f(x)=\int(-6x+2)dx=-3x^2+2x+C$$

이때 $f(2)=-4$이므로

$-12+4+C=-4$에서 $C=4$

$\therefore f(x)=-3x^2+2x+4$

Lecture

함수의 곱의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

03-2 답 27

|전략| $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$임을 이용한다.

$\int f(x)dx=(x-1)f(x)-2x^3+6x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x-1)f'(x)-6x^2+6$

$(x-1)f'(x)=6x^2-6$

$=6(x+1)(x-1)$

$\therefore f'(x)=6x+6$

$$f(x)=\int(6x+6)dx=3x^2+6x+C$$

이때 $f(-1)=0$이므로

$3-6+C=0 \quad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=3x^2+6x+3$이므로

$f(2)=12+12+3=27$

03-3 답 20

|전략| $\frac{d}{dx}\left\{\int xf(x)dx\right\}=xf(x)$임을 이용한다.

$\int xf(x)dx=\frac{\{f(x)\}^2}{4}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)=\frac{f(x)f'(x)}{2}$ ← 함수 $f(x)$가 미분가능할 때 $y=\{f(x)\}^n$(n은 자연수) $\Rightarrow y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

$f(x)\neq0$이므로 $x=\frac{f'(x)}{2} \quad \therefore f'(x)=2x$

$$f(x)=\int 2xdx=x^2+C$$

이때 $f(1)=5$이므로

$1+C=5 \quad \therefore C=4$

따라서 $f(x)=x^2+4$이므로

$f(4)=16+4=20$

참고 $f(1)=5$이므로 $f(x)\neq0$이다.

필수 예제 04 부정적분과 미분의 관계를 이용하여 함수 구하기 181쪽

04-1 답 6

|전략| $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$임을 이용한다.

$f(x)-g(x)=2x^2+x-3$ ……㉠

$g(1)=1$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)-g(1)=2+1-3 \quad \therefore f(1)=g(1)=1$

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=-8x+5$에서

$$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int(-8x+5)dx$$

$\therefore f(x)+g(x)=-4x^2+5x+C$

이때 $f(1)=1$, $g(1)=1$이므로 위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)+g(1)=-4+5+C \quad \therefore C=2-1=1$

$\therefore f(x)+g(x)=-4x^2+5x+1$ ……㉡

㉠+㉡을 하면 $2f(x)=-2x^2+6x-2$

$\therefore f(x)=-x^2+3x-1$

㉡−㉠을 하면 $2g(x)=-6x^2+4x+4$

$\therefore g(x)=-3x^2+2x+2$

$\therefore f(3)g(2)=(-9+9-1)\times(-12+4+2)$

$=-1\times(-6)=6$

04-2 답 7

|전략| $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$임을 이용한다.

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=-2x+3$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}\right]dx=\int(-2x+3)dx$

$\therefore f(x)-g(x)=-x^2+3x+C_1$

이때 $f(0)=1$, $g(0)=2$이므로 위 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)-g(0)=C_1$ $\therefore C_1=1-2=-1$

$\therefore f(x)-g(x)=-x^2+3x-1$ ……㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2-2x$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(3x^2-2x)dx$

$\therefore f(x)g(x)=x^3-x^2+C_2$

이때 $f(0)=1$, $g(0)=2$이므로 위 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=C_2$ $\therefore C_2=1\times2=2$

$\therefore f(x)g(x)=x^3-x^2+2=(x+1)(x^2-2x+2)$ ……㉡

이때 $f(0)=1$, $g(0)=2$이므로 ㉠, ㉡에서

$f(x)=x+1$, $g(x)=x^2-2x+2$

$\therefore f(4)+g(2)=(4+1)+(4-4+2)$

$=5+2=7$

필수 예제 05 부정적분과 함수의 연속 182쪽

05-1 답 18

|전략| 구간별로 $f'(x)$의 부정적분을 구하고 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속임을 이용한다.

$f'(x)=\begin{cases}-6x+1 & (x>-1)\\ 3x^2-1 & (x<-1)\end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases}-3x^2+x+C_1 & (x\geq-1)\\ x^3-x+C_2 & (x<-1)\end{cases}$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$에서

$-3-1+C_1=-1+1+C_2$ $\therefore C_1-C_2=4$

$\therefore f(2)-f(-3)=(-12+2+C_1)-(-27+3+C_2)$

$=(-10+C_1)-(-24+C_2)$

$=14+(C_1-C_2)=14+4=18$

05-2 답 22

|전략| 구간별로 $f'(x)$의 부정적분을 구하고 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속임을 이용한다.

$f'(x)=|2x-4|+5$에서 $f'(x)=\begin{cases}2x+1 & (x\geq2)\\ -2x+9 & (x<2)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}x^2+x+C_1 & (x\geq2)\\ -x^2+9x+C_2 & (x<2)\end{cases}$

이때 $f(3)=13$이므로

$9+3+C_1=13$ $\therefore C_1=1$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$에서

$4+2+1=-4+18+C_2$ $\therefore C_2=-7$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1 & (x\geq2)\\ -x^2+9x-7 & (x<2)\end{cases}$이므로

$f(1)+f(4)=(-1+9-7)+(16+4+1)$

$=1+21=22$

05-3 답 −1

|전략| 구간별로 $f'(x)$의 부정적분을 구하고 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속임을 이용한다.

$f'(x)=\begin{cases}-x+2 & (x\geq0)\\ 2 & (x<0)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+2x+C_1 & (x\geq0)\\ 2x+C_2 & (x<0)\end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 1)$을 지나므로 $f(1)=1$에서

$-\frac{1}{2}+2+C_1=1$ $\therefore C_1=-\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$에서

$C_1=C_2$ $\therefore C_2=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2} & (x\geq0)\\ 2x-\frac{1}{2} & (x<0)\end{cases}$이므로

$f(-1)+f(2)=\left(-2-\frac{1}{2}\right)+\left(-2+4-\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=-1$

필수 예제 06 부정적분과 미분계수 183쪽

06-1 답 9

|전략| $F(x)$가 함수 $f(x)$의 부정적분이므로 $F'(x)=f(x)$임을 이용한다.

$\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$

$=F'(2)\times\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{4}f(2)$

이때 $f(2)=32-4+8=36$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}=\frac{1}{4}f(2)=\frac{1}{4}\times36=9$

06-2 답 -5

|전략| $f(x)=\int g(x)dx$이면 $f'(x)=g(x)$임을 이용한다.

$f(x)=\int(3x^2-8x+k)dx$에서

$f'(x)=3x^2-8x+k$

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=5$에서 $f'(3)=5$이므로

$27-24+k=5 \qquad \therefore k=2$

$\therefore f(x)=\int(3x^2-8x+2)dx=x^3-4x^2+2x+C$

이때 $f(0)=-1$이므로 $C=-1$

따라서 $f(x)=x^3-4x^2+2x-1$이므로

$f(2)=8-16+4-1=-5$

06-3 답 60

|전략| $f'(x)=g(x)$이면 $f(x)=\int g(x)dx$임을 이용한다.

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)-\{f(x-h)-f(x)\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right\}$

$=f'(x)+f'(x)=2f'(x)$

즉, $2f'(x)=12x^2-4x+6$이므로 $f'(x)=6x^2-2x+3$

$\therefore f(x)=\int(6x^2-2x+3)dx=2x^3-x^2+3x+C$

이때 $f(-1)=0$이므로

$-2-1-3+C=0 \qquad \therefore C=6$

따라서 $f(x)=2x^3-x^2+3x+6$이므로

$f(3)=54-9+9+6=60$

필수 예제 07 부정적분과 극값 184쪽

07-1 답 -20

|전략| 극대가 되는 x의 값을 찾아 $f'(x)$의 부정적분에서 적분상수를 구한다.

$f'(x)=3x(x-4)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 $f(0)=12$

이때

$f(x)=\int3x(x-4)dx=\int(3x^2-12x)dx$

$=x^3-6x^2+C$

이므로 $f(0)=12$에서 $C=12$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+12$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$f(4)=64-96+12=-20$

07-2 답 37

|전략| 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값을 가지면 $f'(-1)=0$임을 이용한다.

$f(x)=\int(-3x^2+kx+9)dx$에서

$f'(x)=-3x^2+kx+9$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 가지므로 $f'(-1)=0$에서

$-3-k+9=0 \qquad \therefore k=6$

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

이때

$f(x)=\int(-3x^2+6x+9)dx=-x^3+3x^2+9x+C$

이므로 $f(-1)=5$에서

$1+3-9+C=5 \qquad \therefore C=10$

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2+9x+10$이므로 $f(x)$의 극댓값은

$f(3)=-27+27+27+10=37$

07-3 답 4

|전략| $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $f'(x)$의 식을 세운다.

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x=-1$, $x=1$에서 x축과 만나고 아래로 볼록하므로 $f'(x)=a(x+1)(x-1)$ $(a>0)$이라 하자.

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 가지므로 $f(-1)=4$, $f(1)=0$

이때

$f(x)=\int a(x+1)(x-1)dx=\int(ax^2-a)dx$

$=\dfrac{1}{3}ax^3-ax+C$

이므로 $f(-1)=4$에서

$-\dfrac{1}{3}a+a+C=4 \qquad \therefore \dfrac{2}{3}a+C=4$ ……㉠

$f(1)=0$에서

$\dfrac{1}{3}a-a+C=0 \qquad \therefore -\dfrac{2}{3}a+C=0$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $C=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x+2$이므로

$f(2)=8-6+2=4$

필수 예제 08 도함수의 정의를 이용하여 함수 구하기 185쪽

08-1 답 1

|전략| $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$임을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1$ $\quad\therefore f(0)=1$

도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-1-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+2xh-1}{h}$$
$$=2x+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\ (\because f(0)=1)$$
$$=2x+f'(0)=2x+3$$

$\therefore f(x)=\int(2x+3)dx=x^2+3x+C$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^2+3x+1$이므로

$f(-3)=9-9+1=1$

08-2 답 −4

|전략| $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$임을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\quad\therefore f(0)=0$

도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+3xh(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+3xh(x+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{3x(x+h)+\frac{f(h)-f(0)}{h}\right\}\ (\because f(0)=0)$$
$$=3x^2+f'(0)=3x^2-6$$

$\therefore f(x)=\int(3x^2-6)dx=x^3-6x+C$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=x^3-6x$이므로

$f(2)=8-12=-4$

개념 정리 186~187쪽

01 부정적분 **02** $f(x)$, $F(x)$, 적분상수 **03** 적분법

04 $3b$, $3b$, 2, 2, 8 **05** $f(x)$ **06** $f(x)+C$

07 $2x$, 3, 3, 31 **08** $n+1$ **09** x

10 x^{27}, 27, 27, 28, 28 **11** ㉡ **12** ㉢

13 ㉠ **14** x^3-1, $x-1$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{10}{3}$

04 부정적분의 정의에 의하여

$6x^2+ax+4=(bx^3+x^2+cx+3)'=$ [3b] x^2+2x+c

이때 $6=$ [3b], $a=2$, $4=c$이므로 $a=2$, $b=$ [2], $c=4$

$\therefore a+b+c=2+$ [2] $+4=$ [8]

07 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(4x^3-2x)\right\}dx=4x^3-$ [2x] $+C$

이때 $f(-1)=1$이므로

$-4+2+C=1$ $\quad\therefore C=$ [3]

$\therefore f(2)=32-4+$ [3] $=$ [31]

10 $\int(x^4\times x^5)^3dx=\int(x^9)^3dx=\int$ [x^{27}] dx

$$=\frac{1}{\boxed{27}+1}x^{\boxed{27}+1}+C=\frac{1}{\boxed{28}}x^{\boxed{28}}+C$$

14 $f(x)=\int\frac{x^3}{x-1}dx-\int\frac{1}{x-1}dx=\int\frac{\boxed{x^3-1}}{x-1}dx$

$$=\int\frac{\boxed{x-1}(x^2+x+1)}{x-1}dx=\int(x^2+x+1)dx$$
$$=\boxed{\frac{1}{3}}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$$

이때 $f(0)=\frac{3}{2}$이므로 $C=$ [$\frac{3}{2}$]

$\therefore f(1)=$ [$\frac{1}{3}$] $+\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=$ [$\frac{10}{3}$]

중단원 마무리 188~190쪽

01 ③ **02** ② **03** 27 **04** ④

05 ① **06** $-\frac{2}{3}$ **07** ③ **08** ④

09 ⑤ **10** ④ **11** ⑤ **12** 38

13 ② **14** ① **15** ④ **16** ⑤

17 ② **18** $\frac{32}{27}$ **19** ② **20** −8

21 7 **22** 20 **23** −3

LEVEL 1

01 $f(x)=(x^3-6x^2+9x-7)'=3x^2-12x+9$

$\therefore f(2)=12-24+9=-3$

02 $\int\{2x^3-f(x)\}dx=x^4-2x^2+6x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x^3-f(x)=4x^3-4x+6$

따라서 $f(x)=-2x^3+4x-6$이므로

$f(-2)=16-8-6=2$

03 $g(x)=\dfrac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)=-x^3+x$

$h(x)=\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C=-x^3+x+C$

$g(0)+h(0)=3$에서 $C=3$

따라서 $g(x)=-x^3+x$, $h(x)=-x^3+x+3$이므로

$g(-3)+h(1)=(27-3)+(-1+1+3)=27$

04 $f(x)=\int(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})dx$

$=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+C$

이때 $f(0)=-1$이므로 $C=-1$

또, $f(1)=7$이므로 $\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{개}}-1=7$

$n-1=7$ $\therefore n=8$

따라서 $f(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^8-1$이므로

$f(2)=2+2^2+2^3+\cdots+2^8-1$

$=\dfrac{2(2^8-1)}{2-1}-1=509$

Lecture

첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq0)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

(1) $r\neq1$일 때, $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2) $r=1$일 때, $S_n=na$

05 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $-3x^2+1$이므로 $f'(x)=-3x^2+1$에서

$f(x)=\int(-3x^2+1)dx=-x^3+x+C$

직선 $y=x+1$과 곡선 $y=f(x)$의 접점의 좌표를 $(a, a+1)$이라 하면 $f'(a)=1$이므로 $-3a^2+1=1$에서

$3a^2=0$ $\therefore a=0$

즉, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$f(0)=1$에서 $C=1$

따라서 $f(x)=-x^3+x+1$이므로

$f(-2)=8-2+1=7$

06 $xf(x)-F(x)=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-f(x)=x^3-4x$

$xf'(x)=x^3-4x=x(x^2-4)$

$\therefore f'(x)=x^2-4$

$f(x)=\int(x^2-4)dx=\dfrac{1}{3}x^3-4x+C$

이때 $f(x)$가 $x-3$으로 나누어떨어지므로 $f(3)=0$에서

$9-12+C=0$ $\therefore C=3$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-4x+3$이므로

$f(1)=\dfrac{1}{3}-4+3=-\dfrac{2}{3}$

07 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{4h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{1}{4}f'(1)$

이때 $f(x)=\int(3x^2+4x+1)dx$이므로

$f'(x)=3x^2+4x+1$

$\therefore a=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{4h}=\dfrac{1}{4}f'(1)$

$=\dfrac{1}{4}\times(3+4+1)=2$

$\therefore f'(a)=f'(2)=12+8+1=21$

08 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x=-2$, $x=2$에서 x축과 만나고 위로 볼록하므로

$f'(x)=a(x+2)(x-2)$ $(a<0)$라 하면 $f'(0)=2$이므로

$-4a=2$ $\therefore a=-\dfrac{1}{2}$

즉, $f'(x)=-\dfrac{1}{2}(x+2)(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값 -3을 가지므로

$f(-2)=-3$

이때

$f(x)=\int\left\{-\dfrac{1}{2}(x+2)(x-2)\right\}dx=\int\left(-\dfrac{1}{2}x^2+2\right)dx$

$=-\dfrac{1}{6}x^3+2x+C$

이므로 $f(-2)=-3$에서

$\dfrac{4}{3}-4+C=-3$ $\therefore C=-\dfrac{1}{3}$

따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{6}x^3+2x-\dfrac{1}{3}$이므로 $f(x)$의 극댓값은

$f(2)=-\dfrac{4}{3}+4-\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$

LEVEL 2

09 $\int\left[\dfrac{d}{dx}\left[\int\left[\dfrac{d}{dx}\{4x^3-2x^2+5x-f(x)\}\right]dx\right]\right]dx$

$=\int\left[\dfrac{d}{dx}\{4x^3-2x^2+5x-f(x)+C_1\}\right]dx$

$=4x^3-2x^2+5x-f(x)+C_2$

즉, 주어진 등식은

$f(x)+3x=4x^3-2x^2+5x-f(x)+C_2$

$2f(x)=4x^3-2x^2+2x+C_2$

$\therefore f(x)=2x^3-x^2+x+\frac{C_2}{2}$

이때 $f(1)=5$이므로

$2-1+1+\frac{C_2}{2}=5 \quad \therefore C_2=6$

따라서 $f(x)=2x^3-x^2+x+3$이므로

$f(3)=54-9+3+3=51$

10 $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$이므로

$xf(x)=\int\{f(x)+xf'(x)\}dx$

$=\int(x^2+2x+3)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+C$

위 식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $C=0$

$\therefore xf(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+3x=x\left(\frac{1}{3}x^2+x+3\right)$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^2+x+3=\frac{1}{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\frac{9}{4}$이다.

11 $f'(x)=-6x^2+kx+1$이므로

$f(x)=\int(-6x^2+kx+1)dx$

$=-2x^3+\frac{k}{2}x^2+x+C$

이때 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 합이 $-\frac{5}{2}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{\frac{k}{2}}{-2}=-\frac{5}{2} \quad \therefore k=-10$

즉, $f(x)=-2x^3-5x^2+x+C$이고, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, 0)$을 지나므로 $f(2)=0$에서

$-16-20+2+C=0 \quad \therefore C=34$

따라서 $f(x)=-2x^3-5x^2+x+34$이므로

$f(-2)=16-20-2+34=28$

참고 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}, \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

12 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 기울기가 6, 즉 $f'(a)=6$인 실수 a의 값이 -2뿐이므로 이차방정식 $f'(a)-6=0$은 $a=-2$를 중근으로 갖는다.

즉, $f'(a)-6=3(a+2)^2$이므로

$f'(x)=3(x+2)^2+6=3x^2+12x+18$

$\therefore f(x)=\int(3x^2+12x+18)dx$

$=x^3+6x^2+18x+C$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$f(-1)=0$에서

$-1+6-18+C=0 \quad \therefore C=13$

따라서 $f(x)=x^3+6x^2+18x+13$이므로

$f(1)=1+6+18+13=38$

13 $F(x)=(x+3)f(x)-x^3-3x^2+9x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x+3)f'(x)-3x^2-6x+9$

$(x+3)f'(x)=3x^2+6x-9$

$=3(x+3)(x-1)$

$\therefore f'(x)=3x-3$

$f(x)=\int(3x-3)dx=\frac{3}{2}x^2-3x+C$

이때 $f(1)=-1$이므로

$\frac{3}{2}-3+C=-1 \quad \therefore C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-3x+\frac{1}{2}$이므로

$F(0)=3f(0)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ → 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입!

14 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+4$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int(2x+4)dx$

$\therefore f(x)+g(x)=x^2+4x+C_1$

이때 $f(2)=-3$, $g(2)=4$이므로 위 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$-3+4=4+8+C_1 \quad \therefore C_1=-11$

$\therefore f(x)+g(x)=x^2+4x-11$ ……㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2+10x-7$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(3x^2+10x-7)dx$

$\therefore f(x)g(x)=x^3+5x^2-7x+C_2$

이때 $f(2)=-3$, $g(2)=4$이므로 위 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$-3\times4=8+20-14+C_2 \quad \therefore C_2=-26$

$\therefore f(x)g(x)=x^3+5x^2-7x-26$

$=(x+2)(x^2+3x-13)$ ……㉡

이때 $f(2)=-3$, $g(2)=4$이므로 ㉠, ㉡에서

$f(x)=x^2+3x-13$, $g(x)=x+2$

즉, 방정식 $f(x)=g(x)$에서

$x^2+3x-13=x+2$, $x^2+2x-15=0$

$(x+5)(x-3)=0 \quad \therefore x=-5$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 값은 -5이다.

15 $f'(x)=\begin{cases}1 & (x\geq 1)\\ x & (-1\leq x<1)\\ 1 & (x<-1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}x+C_1 & (x\geq 1)\\ \frac{1}{2}x^2+C_2 & (-1\leq x<1)\\ x+C_3 & (x<-1)\end{cases}$

이때 $f(0)=0$이므로 $C_2=0$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1-} f(x)=f(-1)$에서

$\frac{1}{2}=-1+C_3 \qquad \therefore C_3=\frac{3}{2}$

또, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$에서

$1+C_1=\frac{1}{2} \qquad \therefore C_1=-\frac{1}{2}$

즉, $f(x)=\begin{cases}x-\frac{1}{2} & (x\geq 1)\\ \frac{1}{2}x^2 & (-1\leq x<1)\\ x+\frac{3}{2} & (x<-1)\end{cases}$이므로

$f(a)=\frac{1}{8}$을 만족시키는 a의 값을 구하면

(i) $a\geq 1$일 때

$a-\frac{1}{2}=\frac{1}{8} \qquad \therefore a=\frac{5}{8}$

그런데 $a\geq 1$이므로 $a=\frac{5}{8}$는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $-1\leq a<1$일 때

$\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{8}$, $a^2=\frac{1}{4} \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

(iii) $a<-1$일 때

$a+\frac{3}{2}=\frac{1}{8} \qquad \therefore a=-\frac{11}{8}$

따라서 $f(a)=\frac{1}{8}$을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱은

$-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{11}{8}\right)=\frac{11}{32}$

16 $F(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$f(x)=\begin{cases}k(x^2-4x) & (x\geq 0)\\ 2x & (x<0)\end{cases}$에서

$F(x)=\begin{cases}k\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2\right)+C_1 & (x\geq 0)\\ x^2+C_2 & (x<0)\end{cases}$

이때 함수 $F(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉, 함수 $F(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0+} F(x)=\lim_{x\to 0-} F(x)=F(0)$에서

$C_1=C_2$

$\therefore F(x)=\begin{cases}k\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2\right)+C_1 & (x\geq 0)\\ x^2+C_1 & (x<0)\end{cases}$

이때 $F(3)-F(-3)=18$에서

$(-9k+C_1)-(9+C_1)=18$, $-9k=27$

$\therefore k=-3$

따라서 $x\geq 0$일 때, $f(x)=-3(x^2-4x)$이므로

$f(3)=-3\times(-3)=9$

17 $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x^2+5x+4}=-3$에서 $\lim_{x\to -1}(x^2+5x+4)=0$이므로

$\lim_{x\to -1} f(x)=0 \qquad \therefore f(-1)=0$

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x^2+5x+4}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{(x+1)(x+4)}$

$=\lim_{x\to -1}\left\{\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\times\frac{1}{x+4}\right\}$

$=\frac{1}{3}f'(-1)$

즉, $\frac{1}{3}f'(-1)=-3$이므로

$f'(-1)=-9$

이때 $f(x)=\int(3x^2+kx)dx$이므로

$f'(x)=3x^2+kx$

$f'(-1)=-9$에서

$3-k=-9 \qquad \therefore k=12$

$\therefore f(x)=\int(3x^2+12x)dx=x^3+6x^2+C$

$f(-1)=0$에서

$-1+6+C=0 \qquad \therefore C=-5$

따라서 $f(x)=x^3+6x^2-5$이므로

$f(2)=8+24-5=27$

18 $\int\{f(x)-k\}dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)-k=x^3-x^2-x-1$

$\therefore f(x)=x^3-x^2-x-1+k$

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 0을 가지므로

$f(1)=0$에서

$1-1-1-1+k=0 \qquad \therefore k=2$

따라서 $f(x)=x^3-x^2-x+1$이므로 $f(x)$의 극댓값은

$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1=\frac{32}{27}$

19 $f(x+y)=f(x)+f(y)-4xy-3$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-3$ $\therefore f(0)=3$

도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-4xh-3-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-4xh-3}{h}$$
$$=-4x+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\ (\because f(0)=3)$$
$$=-4x+f'(0)$$

$f'(1)=-2$이므로 위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=-4+f'(0)$ $\therefore f'(0)=-2+4=2$

$\therefore f'(x)=-4x+2$

$f(x)=\int(-4x+2)dx=-2x^2+2x+C$

이때 $f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=-2x^2+2x+3=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$이므로

함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{7}{2}$이다.

서술형

20 조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 -4를 가지므로

$f(x)=kx^2-4$ $(k>0)$라 하자. … ❶

$f'(x)=2kx$이므로 조건 (가)에서 $k(2kx)^2-4=2k(kx^2-4)$

$4k^3x^2-4=2k^2x^2-8k$ → x에 대한 항등식

$4k^3=2k^2$, $4=8k$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2-4$ … ❷

이때 함수 $F(x)=\int f(x)dx$가 감소하는 x의 값의 범위가 $a\le x\le b$이므로 부등식 $F'(x)\le 0$을 만족시키는 x의 값의 범위가 $a\le x\le b$이다.

따라서 방정식 $F'(x)=0$, 즉 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 a, b이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$ab=\frac{-4}{\frac{1}{2}}=-8$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 조건 (나)를 이용하여 $f(x)=kx^2-4$ $(k>0)$라 놓을 수 있다.	20 %
❷ 조건 (가)를 이용하여 $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 ab의 값을 구할 수 있다.	40 %

Lecture

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고 이 구간의 모든 x에 대하여

(1) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가

(2) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소

21 $f(x)=\int xg(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=xg(x)$ ……㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=2x^3-x^2+1$에서

$f'(x)-g'(x)=2x^3-x^2+1$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$xg(x)-g'(x)=2x^3-x^2+1$ ……㉢

이때 $g(x)$의 최고차항을 ax^n (a는 상수, n은 자연수, $a\neq 0$)이라 하면 $xg(x)-g'(x)$의 최고차항은 ax^{n+1}이므로 ㉢에서

$a=2$, $n+1=3$

$\therefore a=2$, $n=2$ … ❶

즉, $g(x)=2x^2+bx+c$ (b, c는 상수)라 하면

$g'(x)=4x+b$이므로 ㉢에서

$x(2x^2+bx+c)-(4x+b)=2x^3-x^2+1$

$2x^3+bx^2+(c-4)x-b=2x^3-x^2+1$

$b=-1$, $c-4=0$, $-b=1$에서

$b=-1$, $c=4$

따라서 $g(x)=2x^2-x+4$이므로 … ❷

$g(-1)=2+1+4=7$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 이용하여 $g(x)$가 최고차항의 계수가 2인 이차함수임을 알아낼 수 있다.	40 %
❷ $g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $g(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

22 조건 (가)에서 $g'(x)=f(x)+(x-k)f'(x)$, 즉 $g'(x)=\{(x-k)f(x)\}'$이므로

$$g(x)=\int\{(x-k)f(x)\}'dx$$
$$=(x-k)f(x)+C$$
$$=x^2(x-k)^2+C$$ … ❶

$\therefore g'(x)=2x(x-k)^2+2x^2(x-k)$
$=2x(x-k)(2x-k)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{k}{2}$ 또는 $x=k$

$k>0$이므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	0	…	$\frac{k}{2}$	…	k	…
$g'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=\frac{k}{2}$에서 극댓값을 갖고 $x=0$, $x=k$에서 극솟값을 갖는다.

이때 조건 (나)에서 $g(x)$의 극댓값이 11이므로

$g\left(\frac{k}{2}\right)=\left(\frac{k}{2}\right)^2\left(\frac{k}{2}-k\right)^2+C=11$

$\left(\frac{k}{2}\right)^4+C=11$ ……㉣

또, 조건 (나)에서 $g(x)$의 극솟값이 -5이므로

$g(0)=g(k)=C=-5$

$C=-5$를 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{k}{2}\right)^4-5=11,\ \left(\frac{k}{2}\right)^4=16$

$\therefore\ k=4\ (\because\ k>0)$

따라서 $g(x)=x^2(x-4)^2-5$이므로 … ❷

$g(5)=25-5=20$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 이용하여 $g(x)=x^2(x-k)^2+C$임을 알아낼 수 있다.	40 %
❷ $g(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $g(5)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

23 $f(x+y)=f(x)+f(y)-6xy(x+y)+4$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+4 \qquad \therefore\ f(0)=-4$ … ❶

도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-6xh(x+h)+4-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-6xh(x+h)+4}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{-6x(x+h)+\frac{f(h)-f(0)}{h}\right\}\ (\because\ f(0)=-4)$$

$$=-6x^2+f'(0)$$

$\therefore\ f(x)=\int\{-6x^2+f'(0)\}dx$

$=-2x^3+f'(0)x+C$ … ❷

이때 $f(0)=-4$이므로 $C=-4$

따라서 $f(x)=-2x^3+f'(0)x-4$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\{-2x^3+f'(0)x-4\}-\{-6x^2+f'(0)\}}{x^2-x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(-2x^3+6x^2-4)+f'(0)(x-1)}{x^2-x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(-2x^2+4x+4)+f'(0)(x-1)}{x(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2x^2+4x+4+f'(0)}{x}$$

$=-2+4+4+f'(0)=6+f'(0)$

즉, $6+f'(0)=9$이므로 $f'(0)=3$ … ❸

따라서 $f(x)=-2x^3+3x-4$이므로

$f(1)=-2+3-4=-3$ … ❹

채점 기준	비율
❶ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	10 %
❷ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f'(0)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

8 정적분

1 정적분의 정의

개념 확인 192~195쪽

1 (1) $F'(x)=x^3+2x-3$ (2) $F'(x)=4x^3+1$

2 (1) -40 (2) 10

3 (1) 6 (2) 8

1 (1) $F(x)=\int_0^x(t^3+2t-3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=x^3+2x-3$

(2) $F(x)=\int_3^x(4t^3+1)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=4x^3+1$

2 (1) $\int_1^3(-2x^3)dx=\left[-\frac{1}{2}x^4\right]_1^3=-\frac{81}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=-40$

(2) $\int_0^{-2}5x dx=\left[\frac{5}{2}x^2\right]_0^{-2}=10-0=10$

3 (1) $\int_0^1(3-x)dx+\int_0^1(3+x)dx=\int_0^1\{(3-x)+(3+x)\}dx$

$=\int_0^1 6\,dx=\left[6x\right]_0^1$

$=6-0=6$

(2) $\int_{-1}^0 2x\,dx+\int_0^3 2x\,dx=\int_{-1}^3 2x\,dx=\left[x^2\right]_{-1}^3$

$=9-1=8$

개념 드릴 196쪽

1 (1) 0 (2) 2 (3) -6 (4) 12 (5) $\frac{11}{3}$ (6) $\frac{45}{4}$ (7) $\frac{16}{3}$ (8) -8

2 (1) -4 (2) 12 (3) $\frac{15}{2}$ (4) -8 (5) 5 (6) 44 (7) 6 (8) $\frac{21}{10}$

1 (1) $\int_1^1(-x^2+2x-1)dx=0$

(2) $\int_{-2}^0(2x+3)dx=\left[x^2+3x\right]_{-2}^0$

$=0-(4-6)=2$

(3) $\int_1^4(x-3)(3x+1)dx=\int_1^4(3x^2-8x-3)dx$

$=\left[x^3-4x^2-3x\right]_1^4$

$=(64-64-12)-(1-4-3)$

$=-6$

(4) $\int_{-1}^2(3t^2-2t+2)dt=\left[t^3-t^2+2t\right]_{-1}^2$

$=(8-4+4)-(-1-1-2)$

$=12$

(5) $\int_0^{-1}(-2x^2+6x)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_0^{-1}$

$=\left(\frac{2}{3}+3\right)-0$

$=\frac{11}{3}$

(6) $\int_3^2(-x^3+5)dx=\left[-\frac{1}{4}x^4+5x\right]_3^2$

$=(-4+10)-\left(-\frac{81}{4}+15\right)$

$=\frac{45}{4}$

(7) $\int_2^0(x+2)(x-2)dx=\int_2^0(x^2-4)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_2^0$

$=0-\left(\frac{8}{3}-8\right)$

$=\frac{16}{3}$

(8) $\int_4^2(3y^2-8y)dy=\left[y^3-4y^2\right]_4^2$

$=(8-16)-(64-64)$

$=-8$

참고 미적분의 기본정리는 위끝과 아래끝의 대소에 관계없이 성립한다.

2 (1) $6\int_1^2\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x\right)dx=\int_1^2 6\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x\right)dx$

$=\int_1^2(-3x^2+2x)dx$

$=\left[-x^3+x^2\right]_1^2$

$=(-8+4)-(-1+1)$

$=-4$

(2) $\int_{-1}^2(2x^2+3x)dx+\int_{-1}^2(x^2-x)dx$

$=\int_{-1}^2\{(2x^2+3x)+(x^2-x)\}dx$

$=\int_{-1}^2(3x^2+2x)dx$

$=\left[x^3+x^2\right]_{-1}^2$

$=(8+4)-(-1+1)$

$=12$

(3) $\int_1^2(4x^2+2)dx-\int_1^2(x^2+x)dx$

$=\int_1^2\{(4x^2+2)-(x^2+x)\}dx$

$=\int_1^2(3x^2-x+2)dx$

$=\left[x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^2$

$=(8-2+4)-\left(1-\frac{1}{2}+2\right)$

$=\frac{15}{2}$

(4) $\int_5^7(x^3-7)dx+\int_5^7(-y^3+3)dy$

$=\int_5^7(x^3-7)dx+\int_5^7(-x^3+3)dx$

$=\int_5^7\{(x^3-7)+(-x^3+3)\}dx$

$=\int_5^7(-4)dx$

$=\left[-4x\right]_5^7$

$=-28-(-20)=-8$

(5) $\int_1^4(3x^2-2x+1)dx+\int_4^2(3x^2-2x+1)dx$

$=\int_1^2(3x^2-2x+1)dx$

$=\left[x^3-x^2+x\right]_1^2$

$=(8-4+2)-(1-1+1)$

$=5$

(6) $\int_{-1}^0(x^3+6)dx-\int_3^0(x^3+6)dx$

$=\int_{-1}^0(x^3+6)dx+\int_0^3(x^3+6)dx$

$=\int_{-1}^3(x^3+6)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+6x\right]_{-1}^3$

$=\left(\frac{81}{4}+18\right)-\left(\frac{1}{4}-6\right)$

$=44$

(7) $-\int_0^{-1}(3x^2-2x)dx+\int_0^2(3x^2-2x)dx$

$=\int_{-1}^0(3x^2-2x)dx+\int_0^2(3x^2-2x)dx$

$=\int_{-1}^2(3x^2-2x)dx$

$=\left[x^3-x^2\right]_{-1}^2$

$=(8-4)-(-1-1)$

$=6$

(8) $\int_2^5(-t^4+t+1)dt+\int_5^{-1}(-y^4+y+1)dy$

$=\int_2^5(-t^4+t+1)dt+\int_5^{-1}(-t^4+t+1)dt$

$=\int_2^{-1}(-t^4+t+1)dt$

$=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{2}t^2+t\right]_2^{-1}$

$=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-1\right)-\left(-\frac{32}{5}+2+2\right)$

$=\frac{21}{10}$

필수 예제 01 미적분의 기본정리 197쪽

01-1 답 (1) 0 (2) 4 (3) $\frac{51}{2}$

| 전략 | 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$임을 이용한다.

(1) $\int_{-3}^{-3}(x+1)^5dx=0$

(2) $\int_{-1}^{1}(x+1)^3dx=\int_{-1}^{1}(x^3+3x^2+3x+1)dx$

$=\Big[\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{3}{2}x^2+x\Big]_{-1}^{1}$

$=\Big(\frac{1}{4}+1+\frac{3}{2}+1\Big)-\Big(\frac{1}{4}-1+\frac{3}{2}-1\Big)$

$=4$

(3) $\int_1^{-2}\frac{27-y^3}{y-3}dy=\int_{-2}^{1}\frac{y^3-27}{y-3}dy$

$=\int_{-2}^{1}\frac{(y-3)(y^2+3y+9)}{y-3}dy$

$=\int_{-2}^{1}(y^2+3y+9)dy$

$=\Big[\frac{1}{3}y^3+\frac{3}{2}y^2+9y\Big]_{-2}^{1}$

$=\Big(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+9\Big)-\Big(-\frac{8}{3}+6-18\Big)$

$=\frac{51}{2}$

01-2 답 -2

| 전략 | 정적분의 값을 k에 대한 식으로 정리한 후 주어진 조건을 이용한다.

$\int_1^k(x^2-2x+k)dx=\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2+kx\Big]_1^k$

$=\Big(\frac{1}{3}k^3-k^2+k^2\Big)-\Big(\frac{1}{3}-1+k\Big)$

$=\frac{1}{3}k^3-k+\frac{2}{3}$

즉, $\frac{1}{3}k^3-k+\frac{2}{3}=0$이므로

$k^3-3k+2=0$, $(k+2)(k-1)^2=0$

$\therefore k=-2\ (\because k\neq1)$

01-3 답 4

| 전략 | 정적분의 값을 k에 대한 식으로 정리한 후 주어진 조건을 이용한다.

$\int_{-1}^{2}(3x^2-2kx+1)dx=\Big[x^3-kx^2+x\Big]_{-1}^{2}$

$=(8-4k+2)-(-1-k-1)$

$=-3k+12$

즉, $-3k+12<1$이므로

$3k>11$ $\quad\therefore k>\frac{11}{3}$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k의 최솟값은 4이다.

필수 예제 02 정적분의 계산 198쪽

02-1 답 (1) 23 (2) 42

| 전략 | (1) $\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx=\int_a^b\{f(x)+g(x)\}dx$임을 이용한다.

(2) $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$임을 이용한다.

(1) $\int_2^1(x+3)(x-3)dx+4\int_1^2(x^3+x^2-2)dx$

$=-\int_1^2(x^2-9)dx+\int_1^2 4(x^3+x^2-2)dx$

$=\int_1^2\{-(x^2-9)+4(x^3+x^2-2)\}dx$

$=\int_1^2(4x^3+3x^2+1)dx$

$=\Big[x^4+x^3+x\Big]_1^2$

$=(16+8+2)-(1+1+1)=23$

(2) $\int_2^3(x^3-3x)dx-\int_{-1}^{3}(x^3-3x)dx+\int_{-1}^{4}(x^3-3x)dx$

$=\int_2^3(x^3-3x)dx+\int_3^{-1}(x^3-3x)dx+\int_{-1}^{4}(x^3-3x)dx$

$=\int_2^{-1}(x^3-3x)dx+\int_{-1}^{4}(x^3-3x)dx$

$=\int_2^4(x^3-3x)dx$

$=\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2\Big]_2^4$

$=(64-24)-(4-6)=42$

02-2 답 $2\sqrt{2}$

| 전략 | $\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$임을 이용한다.

$\int_0^k(x+1)^2dx-\int_0^k(x-1)^2dx=\int_0^k\{(x+1)^2-(x-1)^2\}dx$

$=\int_0^k 4x\,dx=\Big[2x^2\Big]_0^k$

$=2k^2$

즉, $2k^2=16$이므로

$k^2=8$ $\quad\therefore k=2\sqrt{2}\ (\because k>0)$

02-3 답 2

| 전략 | $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$임을 이용한다.

$\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{2}f(x)dx+\int_2^0 f(x)dx$

$=\int_{-1}^{2}f(x)dx-\int_0^2 f(x)dx$

$=\int_{-1}^{2}f(x)dx-\Big\{\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx\Big\}$

$=\int_{-1}^{2}f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx$

$=5-1-2=2$

필수 예제 03 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분 199쪽

03-1 답 5

|전략| $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$임을 이용하여 적분 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

$$\int_0^2 f(x)dx$$
$$=\int_0^1(-x^2+3)dx+\int_1^2(x^2-2x+3)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_1^2$$
$$=\left(-\frac{1}{3}+3\right)+\left\{\left(\frac{8}{3}-4+6\right)-\left(\frac{1}{3}-1+3\right)\right\}$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{7}{3}=5$$

03-2 답 2

|전략| 정적분의 값을 a에 대한 식으로 정리한 후 주어진 조건을 이용한다.

$a>0$이므로
$$\int_{-2}^a f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^0(3x^2-2x)dx+\int_0^a(-4x)dx$$
$$=\left[x^3-x^2\right]_{-2}^0+\left[-2x^2\right]_0^a$$
$$=-(-8-4)+(-2a^2)=-2a^2+12$$
즉, $-2a^2+12=2a$이므로
$2a^2+2a-12=0$, $2(a+3)(a-2)=0$
$\therefore a=2\ (\because a>0)$

03-3 답 $\frac{21}{2}$

|전략| $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$임을 이용하여 적분 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

주어진 그래프에서 $f(x)=\begin{cases}-x+3 & (x\geq 0)\\ 3 & (x<0)\end{cases}$이므로
$$\int_{-2}^3 f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^0 3dx+\int_0^3(-x+3)dx$$
$$=\left[3x\right]_{-2}^0+\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_0^3$$
$$=-(-6)+\left(-\frac{9}{2}+9\right)=6+\frac{9}{2}=\frac{21}{2}$$

다른 풀이 주어진 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 연속이고 $f(x)\geq 0$이므로 정적분 $\int_{-2}^3 f(x)dx$의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-2$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.
$\therefore \int_{-2}^3 f(x)dx=2\times 3+\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{21}{2}$

필수 예제 04 절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분 200쪽

04-1 답 (1) −1 (2) −4 (3) $\frac{5}{2}$ (4) 15

|전략| 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 적분 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

(1) $|x|-1=\begin{cases}x-1 & (x\geq 0)\\ -x-1 & (x<0)\end{cases}$이므로
$$\int_{-1}^1(|x|-1)dx$$
$$=\int_{-1}^0(-x-1)dx+\int_0^1(x-1)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2-x\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^1$$
$$=-\left(-\frac{1}{2}+1\right)+\left(\frac{1}{2}-1\right)=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

(2) $x|x+1|=\begin{cases}x^2+x & (x\geq -1)\\ -x^2-x & (x<-1)\end{cases}$이므로
$$\int_{-3}^1 x|x+1|dx$$
$$=\int_{-3}^{-1}(-x^2-x)dx+\int_{-1}^1(x^2+x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^{-1}+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^1$$
$$=\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)-\left(9-\frac{9}{2}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=-\frac{14}{3}+\frac{2}{3}=-4$$

(3) $x^2-4=0$, 즉 $(x+2)(x-2)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$이므로
$|x^2-4|=\begin{cases}x^2-4 & (x\leq -2 \text{ 또는 } x\geq 2)\\ -x^2+4 & (-2<x<2)\end{cases}$
$$\therefore \int_0^3\frac{|x^2-4|}{x+2}dx$$
$$=\int_0^2\frac{-x^2+4}{x+2}dx+\int_2^3\frac{x^2-4}{x+2}dx$$
$$=\int_0^2\frac{-(x+2)(x-2)}{x+2}+\int_2^3\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}dx$$
$$=\int_0^2(-x+2)dx+\int_2^3(x-2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^3$$
$$=(-2+4)+\left\{\left(\frac{9}{2}-6\right)-(2-4)\right\}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

(4) $|x-1|+|x-3|=\begin{cases}2x-4 & (x\geq 3)\\ 2 & (1\leq x<3)\\ -2x+4 & (x<1)\end{cases}$
$$\therefore \int_0^5(|x-1|+|x-3|)dx$$
$$=\int_0^1(-2x+4)dx+\int_1^3 2dx+\int_3^5(2x-4)dx$$
$$=\left[-x^2+4x\right]_0^1+\left[2x\right]_1^3+\left[x^2-4x\right]_3^5$$
$$=(-1+4)+(6-2)+\{(25-20)-(9-12)\}$$
$$=3+4+8=15$$

2 여러 가지 정적분

개념 확인 201~202쪽

1 (1) 2 (2) 20 **2** 2, 0, 3

1 (1) $\int_{-1}^{1}(2x+1)dx=\int_{-1}^{1}2x\,dx+\int_{-1}^{1}1\,dx$

$=0+2\int_{0}^{1}1dx=2\Big[x\Big]_{0}^{1}$

$=2\times1=2$

(2) $\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2-2x+1)dx$

$=\int_{-2}^{2}(x^3-2x)dx+\int_{-2}^{2}(3x^2+1)dx$

$=0+2\int_{0}^{2}(3x^2+1)dx$

$=2\Big[x^3+x\Big]_{0}^{2}$

$=2\times10=20$

2 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로

$\int_{a}^{a+2}f(x)dx=\int_{b}^{b+2}f(x)dx$가 성립한다.

$\therefore \int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{\boxed{2}}^{4}f(x)dx=\int_{-2}^{\boxed{0}}f(x)dx=\boxed{3}$

개념 드릴

203쪽

1 (1) $\frac{10}{3}$ (2) -54 (3) 8

2 (1) 0 (2) 12 (3) 32

3 (1) 3 (2) 7

4 (1) $-\frac{9}{2}$ (2) $-\frac{9}{2}$ (3) $-\frac{27}{2}$ (4) -9

1 (1) $\int_{-1}^{1}(5x^4+2x^2+5x)dx=2\int_{0}^{1}(5x^4+2x^2)dx$

$=2\Big[x^5+\frac{2}{3}x^3\Big]_{0}^{1}$

$=2\times\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$

(2) $\int_{3}^{-3}(x^3+3x^2-6x)dx=2\int_{0}^{-3}3x^2dx$

$=2\Big[x^3\Big]_{0}^{-3}$

$=2\times(-27)=-54$

(3) $\int_{-2}^{2}(x^5+3x^2-7x-2)dx=2\int_{0}^{2}(3x^2-2)dx$

$=2\Big[x^3-2x\Big]_{0}^{2}$

$=2\times4=8$

2 (1) $\int_{-1}^{0}(2x^3+x)dx+\int_{0}^{1}(2x^3+x)dx=\int_{-1}^{1}(2x^3+x)dx=0$

(2) $\int_{2}^{3}(3x^2+4x-7)dx+\int_{3}^{-2}(3x^2+4x-7)dx$

$=\int_{2}^{-2}(3x^2+4x-7)dx$

$=2\int_{0}^{-2}(3x^2-7)dx$

$=2\Big[x^3-7x\Big]_{0}^{-2}=2\times6=12$

(3) $\int_{-2}^{4}(x^7+5x^4-6x^2)dx+\int_{4}^{2}(x^7+5x^4-6x^2)dx$

$=\int_{-2}^{2}(x^7+5x^4-6x^2)dx$

$=2\int_{0}^{2}(5x^4-6x^2)dx$

$=2\Big[x^5-2x^3\Big]_{0}^{2}=2\times16=32$

3 (1) 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로

$\int_{-2}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{2}f(x)dx$

$\therefore \int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx=2\int_{-2}^{0}f(x)dx$

즉, $2\int_{-2}^{0}f(x)dx=6$에서

$\int_{-2}^{0}f(x)dx=3$

(2) 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

$\int_{-2}^{2}f(x)dx=0$

즉, $\int_{-2}^{4}f(x)dx=7$에서

$\int_{-2}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{4}f(x)dx=7$ $\quad\therefore \int_{2}^{4}f(x)dx=7$

4 (1) $0\le x\le3$에서 $f(x)=x^2-3x$이므로

$\int_{0}^{3}f(x)dx=\int_{0}^{3}(x^2-3x)dx$

$=\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\Big]_{0}^{3}=-\frac{9}{2}$

(2) 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}}f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+3}f(x)dx=\int_{0}^{3}f(x)dx=-\frac{9}{2}$

(3) $\int_{0}^{9}f(x)dx=\int_{0}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{6}f(x)dx+\int_{6}^{9}f(x)dx$

$=3\int_{0}^{3}f(x)dx$

$=3\times\Big(-\frac{9}{2}\Big)=-\frac{27}{2}$

(4) $\int_{1}^{7}f(x)dx=\int_{1}^{4}f(x)dx+\int_{4}^{7}f(x)dx$

$=2\int_{0}^{3}f(x)dx$

$=2\times\Big(-\frac{9}{2}\Big)=-9$

필수 예제 01 정적분 $\int_{-a}^{a} x^n dx$의 계산 204쪽

01-1 답 1

|전략| 함수 $f(x)$가 짝수 차수의 항 또는 상수항으로만 이루어진 함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$를 만족시키고, 홀수 차수의 항으로만 이루어진 함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$을 만족시킨다.

$$\int_{-2}^{2}(x-1)(x+k)dx=\int_{-2}^{2}\{x^2+(k-1)x-k\}dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(x^2-k)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3-kx\right]_0^2$$
$$=2\times\left(\frac{8}{3}-2k\right)=\frac{4}{3}$$

따라서 $\frac{8}{3}-2k=\frac{2}{3}$이므로 $k=1$

01-2 답 -4

|전략| $f(-x)=f(x)$이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$이고 $f(-x)=-f(x)$이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키므로

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=2\int_{0}^{1} f(x)dx=2\times 2=4$$

$g(x)=xf(x)$, $h(x)=x^3f(x)$라 하면

$g(-x)=-xf(-x)=-xf(x)=-g(x)$,

$h(-x)=(-x)^3f(-x)=-x^3f(x)=-h(x)$

이므로

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx=0,\ \int_{-1}^{1} x^3f(x)dx=0$$

$$\therefore \int_{-1}^{1}(x^3+2x-1)f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1} x^3f(x)dx+2\int_{-1}^{1} xf(x)dx-\int_{-1}^{1} f(x)dx$$
$$=-4$$

01-3 답 30

|전략| $f(-x)=-f(x)$이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$이고 $g(-x)=g(x)$이면 $\int_{-a}^{a} g(x)dx=2\int_{0}^{a} g(x)dx$임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키므로

$$\int_{-3}^{3} f(x)dx=0$$

함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=g(x)$를 만족시키므로

$$\int_{-3}^{3} g(x)dx=2\int_{0}^{3} g(x)dx=2\times 3=6$$

$$\therefore \int_{-3}^{3}\{4f(x)+5g(x)\}dx=4\int_{-3}^{3} f(x)dx+5\int_{-3}^{3} g(x)dx$$
$$=4\times 0+5\times 6=30$$

필수 예제 02 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 함수 $f(x)$의 정적분 205쪽

02-1 답 $\frac{16}{3}$

|전략| $f(x+p)=f(x)$이면 $\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a+np}^{b+np} f(x)dx$ (n은 정수)임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키므로

$$\int_{-4}^{4} f(x)dx$$
$$=\int_{-4}^{-2} f(x)dx+\int_{-2}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{4} f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx$$
$$=4\int_{0}^{2} f(x)dx$$

이때 $0\le x\le 2$에서 $f(x)=-x^2+2x$이므로

$$\int_{-4}^{4} f(x)dx=4\int_{0}^{2} f(x)dx$$
$$=4\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx$$
$$=4\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$
$$=4\times\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$$

02-2 답 8

|전략| $f(x+p)=f(x)$이면 $\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a+np}^{b+np} f(x)dx$ (n은 정수)임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시키므로

$$\int_{1}^{10} f(x)dx=\int_{1}^{4} f(x)dx+\int_{4}^{7} f(x)dx+\int_{7}^{10} f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{3} f(x)dx+\int_{0}^{3} f(x)dx+\int_{0}^{3} f(x)dx$$
$$=3\int_{0}^{3} f(x)dx$$

이때 $f(x)=\begin{cases}2x^2 & (0\le x<1)\\ -x+3 & (1\le x<3)\end{cases}$이므로

$$\int_{0}^{3} f(x)dx=\int_{0}^{1} 2x^2dx+\int_{1}^{3}(-x+3)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1+\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_1^3$$
$$=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$$

$$\therefore \int_{1}^{10} f(x)dx=3\int_{0}^{3} f(x)dx$$
$$=3\times\frac{8}{3}=8$$

02-3 답 -16

|전략| $f(x+p)=f(x)$이면 $\int_a^b f(x)dx=\int_{a+np}^{b+np} f(x)dx$ (n은 정수)임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$를 만족시키므로
$f(3)=f(-1)=-1+a$
이때 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로 $f(3)=\lim_{x\to 3-} f(x)$에서
$-1+a=27-3a,\ 4a=28$
$\therefore a=7$
따라서 $-1\le x<3$에서 $f(x)=x^3-7x$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^8 f(x)dx&=\int_0^4 f(x)dx+\int_4^8 f(x)dx\\&=\int_{-1}^3 f(x)dx+\int_{-1}^3 f(x)dx\\&=2\int_{-1}^3 f(x)dx\\&=2\int_{-1}^3 (x^3-7x)dx\\&=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{2}x^2\right]_{-1}^3\\&=2\times(-8)=-16\end{aligned}$$

참고 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속 $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

3 정적분으로 정의된 함수

개념 확인 206~208쪽

1 (1) -5 (2) 13

1 (1) $f(t)=2t^5+3t$라 하고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^x (2t^5+3t)dt&=\lim_{x\to -1}\frac{F(x)-F(-1)}{x+1}\\&=F'(-1)=f(-1)\\&=-2-3=-5\end{aligned}$$

(2) $f(t)=t^3-2t^2+4$라 하고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_3^{x+3} (t^3-2t^2+4)dt&=\lim_{x\to 0}\frac{F(x+3)-F(3)}{x}\\&=F'(3)=f(3)\\&=27-18+4=13\end{aligned}$$

개념 드릴 209쪽

1 (1) x^3+3x-4 (2) $3x^2+3x+4$ (3) x^4+3x^2-4x
2 (1) x^3+2x^2+4 (2) $5x^3-x^2+1$ (3) $-2x-2$ (4) $4x$
3 (1) $f(x)=3x^2+10x-2$ (2) $f(x)=18x^2-4x+9$
(3) $f(x)=4x^2-3x-4$
4 (1) -4 (2) 10 (3) -2 (4) 9

1 (1) $\frac{d}{dx}\int_{-2}^x f(t)dt=f(x)=x^3+3x-4$

(2) $\frac{d}{dx}\int_x^{x+1} f(t)dt=f(x+1)-f(x)$
$=\{(x+1)^3+3(x+1)-4\}-(x^3+3x-4)$
$=3x^2+3x+4$

(3) $\frac{d}{dx}\int_5^x tf(t)dt=xf(x)=x^4+3x^2-4x$

2 (1) $\frac{d}{dx}\int_1^x (t^3+2t^2+4)dt=x^3+2x^2+4$

(2) $\frac{d}{dx}\int_{-3}^x (5t^3-t^2+1)dt=5x^3-x^2+1$

(3) $\frac{d}{dx}\int_x^{x-1} (s^2+3s)ds=\{(x-1)^2+3(x-1)\}-(x^2+3x)$
$=-2x-2$

(4) $\frac{d}{dx}\int_x^{x+2} (t+2)(t-4)dt$
$=(x+4)(x-2)-(x+2)(x-4)$
$=4x$

3 (1) $\int_x^0 f(t)dt=-x^3-5x^2+2x$에서
$\int_0^x f(t)dt=x^3+5x^2-2x$
위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=3x^2+10x-2$

(2) $\int_{\frac{1}{3}}^x f(s)ds=(2x^2+3)(3x-1)$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=4x(3x-1)+(2x^2+3)\times 3=18x^2-4x+9$

(3) $\int_{-1}^x tf(t)dt=x^4-x^3-2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$xf(x)=4x^3-3x^2-4x$ $\therefore f(x)=4x^2-3x-4$

4 (1) $f(t)=t^2-8$이라 하고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x (t^2-8)dt&=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\\&=F'(2)=f(2)\\&=4-8=-4\end{aligned}$$

(2) $f(t)=(t^2+1)(t-2)$라 하고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\int_3^x (t^2+1)(t-2)dt&=\lim_{x\to 3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}\\&=F'(3)=f(3)\\&=10\times 1=10\end{aligned}$$

(3) $f(t)=t^3+t^2-4$라 하고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_1^{x+1} (t^3+t^2-4)dt&=\lim_{x\to 0}\frac{F(x+1)-F(1)}{x}\\&=F'(1)=f(1)\\&=1+1-4=-2\end{aligned}$$

(4) $f(t)=(2t+1)(t+4)$라 하고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{-5}^{x-5}(2t+1)(t+4)dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(x-5)-F(-5)}{x}$$
$$=F'(-5)=f(-5)$$
$$=-9\times(-1)=9$$

필수 예제 01 정적분을 포함한 등식 – 적분 구간이 상수인 경우 210쪽

01-1 답 -2

| 전략 | $\int_0^2 tf(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓고 k의 값을 구한다.

$\int_0^2 tf(t)dt=k$ (k는 상수) ……㉠

라 하면 $f(x)=x^2+3x+k$

$f(t)=t^2+3t+k$를 ㉠에 대입하면

$\int_0^2(t^3+3t^2+kt)dt=k$, $\left[\frac{1}{4}t^4+t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^2=k$

$4+8+2k=k$ $\therefore k=-12$

따라서 $f(x)=x^2+3x-12$이므로 $f(2)=4+6-12=-2$

01-2 답 18

| 전략 | $\int_0^1 f(t)dt=a$, $\int_0^2 f(t)dt=b$ (a, b는 상수)로 놓고 a, b의 값을 구한다.

$\int_0^1 f(t)dt=a$, $\int_0^2 f(t)dt=b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=x^2-2ax+b$ ……㉠

㉠을 $\int_0^1 f(t)dt=a$에 대입하면 $\int_0^1(t^2-2at+b)dt=a$

$\left[\frac{1}{3}t^3-at^2+bt\right]_0^1=a$, $\frac{1}{3}-a+b=a$ $\therefore 2a-b=\frac{1}{3}$ ……㉡

㉠을 $\int_0^2 f(t)dt=b$에 대입하면 $\int_0^2(t^2-2at+b)dt=b$

$\left[\frac{1}{3}t^3-at^2+bt\right]_0^2=b$, $\frac{8}{3}-4a+2b=b$ $\therefore 4a-b=\frac{8}{3}$ ……㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=\frac{7}{6}$, $b=2$

따라서 $f(x)=x^2-\frac{7}{3}x+2$이므로 $f(-3)=9+7+2=18$

필수 예제 02 정적분을 포함한 등식 – 적분 구간에 변수가 있는 경우 211쪽

02-1 답 1

| 전략 | $\int_a^x f(t)dt=g(x)$의 양변에 $x=a$를 대입하면 $g(a)=0$이고, 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=g'(x)$임을 이용한다.

$\int_a^x f(t)dt=x^3-2x+1$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=a$를 대입하면 $\int_a^a f(t)dt=a^3-2a+1$

$a^3-2a+1=0$, $(a-1)(a^2+a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a$는 정수)

또, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-2$

$\therefore f(a)=f(1)=3-2=1$

02-2 답 $\frac{3}{4}$

| 전략 | $\int_a^x f(t)dt=g(x)$의 양변에 $x=a$를 대입하면 $g(a)=0$이고, 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=g'(x)$임을 이용한다.

$x^2f(x)=\frac{1}{2}x^6-2x^4+2\int_2^x tf(t)dt$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$4f(2)=32-32+2\int_2^2 tf(t)dt$

$\therefore f(2)=0$

또, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)=3x^5-8x^3+2xf(x)$

$x^2f'(x)=3x^5-8x^3$

$\therefore f'(x)=3x^3-8x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^3-8x)dx$

$=\frac{3}{4}x^4-4x^2+C$

이때 $f(2)=0$이므로

$12-16+C=0$ $\therefore C=4$

따라서 $f(x)=\frac{3}{4}x^4-4x^2+4$이므로

$f(1)=\frac{3}{4}-4+4=\frac{3}{4}$

필수 예제 03 정적분을 포함한 등식 – 적분 구간과 피적분함수에 변수가 있는 경우 212쪽

03-1 답 14

| 전략 | $\int_a^x(x-t)f(t)dt=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$로 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

$\int_0^x(x-t)f(t)dt=3x^3-2x^2$에서

$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=3x^3-2x^2$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=9x^2-4x$

$\therefore \int_0^x f(t)dt=9x^2-4x$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=18x-4$

$\therefore f(1)=18-4=14$

03-2 답 32

| 전략 | $\int_a^x f(t)dt=g(x)$의 양변에 $x=a$를 대입하면 $g(a)=0$임을 이용하고, $\int_a^x (x-t)f(t)dt=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$로 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

$$\int_{-1}^x (x-t)f(t)dt=x^4+ax^3+2x^2-\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$\int_{-1}^{-1} (-1-t)f(t)dt=1-a+2-\frac{1}{3}$$

$$0=\frac{8}{3}-a \qquad \therefore a=\frac{8}{3}$$

㉠을 정리하면

$$x\int_{-1}^x f(t)dt-\int_{-1}^x tf(t)dt=x^4+\frac{8}{3}x^3+2x^2-\frac{1}{3}$$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{-1}^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=4x^3+8x^2+4x$$

$$\therefore \int_{-1}^x f(t)dt=4x^3+8x^2+4x$$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x^2+16x+4$

$\therefore f(1)=12+16+4=32$

03-3 답 −12

| 전략 | $\int_a^x f(t)dt=g(x)$의 양변에 $x=a$를 대입하면 $g(a)=0$임을 이용하고, $\int_a^x (x-t)f(t)dt=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$로 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

$$\int_2^x (x-t)f(t)dt=-x^4+ax^3+bx \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$\int_2^2 (2-t)f(t)dt=-16+8a+2b$$

$$0=-16+8a+2b \qquad \therefore 4a+b=8 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 정리하면

$$x\int_2^x f(t)dt-\int_2^x tf(t)dt=-x^4+ax^3+bx$$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_2^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=-4x^3+3ax^2+b$$

$$\therefore \int_2^x f(t)dt=-4x^3+3ax^2+b$$

위 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$\int_2^2 f(t)dt=-32+12a+b$$

$$0=-32+12a+b \qquad \therefore 12a+b=32 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-4$

$\therefore ab=3\times(-4)=-12$

필수 예제 04 정적분으로 정의된 함수의 극대와 극소 213쪽

04-1 답 $\frac{1}{4}$

| 전략 | $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사한다.

$f(x)=\int_0^x t(t-1)(t-2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은

$$f(1)=\int_0^1 t(t-1)(t-2)dt=\int_0^1 (t^3-3t^2+2t)dt$$

$$=\left[\frac{1}{4}t^4-t^3+t^2\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

Lecture

함수의 극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

양(+)에서 음(−)으로 바뀌면 ➡ $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

음(−)에서 양(+)으로 바뀌면 ➡ $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

04-2 답 $-\frac{1}{6}$

| 전략 | $f(x)=\int_x^{x+1} g(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=g(x+1)-g(x)$임을 이용한다.

$f(x)=\int_x^{x+1} t(t-1)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x+1)x-x(x-1)=2x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고 극솟값은

$$f(0)=\int_0^1 t(t-1)dt=\int_0^1 (t^2-t)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=-\frac{1}{6}$$

04-3 답 −2

| 전략 | 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 가지면 $f'(a)=0$이고 $f(a)=b$임을 이용한다.

$f(x)=\int_1^x (3t^2+at+b)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 0을 가지므로

$f'(-1)=0, f(-1)=0$

$f'(-1)=0$에서

$3-a+b=0 \quad \therefore a-b=3$ ……㉠

$f(-1)=0$에서

$$f(-1)=\int_1^{-1}(3t^2+at+b)dt=-\int_{-1}^{1}(3t^2+at+b)dt$$

$$=-2\int_0^1(3t^2+b)dt=-2\Big[t^3+bt\Big]_0^1=-2(1+b)=0$$

$\therefore b=-1$

$b=-1$을 ㉠에 대입하면 $a=2$

$\therefore ab=2\times(-1)=-2$

필수 예제 05 정적분으로 정의된 함수의 최대와 최소 214쪽

05-1 답 $\frac{4}{3}$

|전략| $f(x)$의 극값과 $f(-1), f(1)$의 값을 비교한다.

$f(x)=\int_{-1}^{x}(t^2-2t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -1\le x\le 1$)

$-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

이때

$$f(-1)=\int_{-1}^{-1}(t^2-2t)dt=0$$

$$f(0)=\int_{-1}^{0}(t^2-2t)dt=\Big[\frac{1}{3}t^3-t^2\Big]_{-1}^{0}=\frac{4}{3}$$

$$f(1)=\int_{-1}^{1}(t^2-2t)dt=2\int_0^1 t^2dt=2\Big[\frac{1}{3}t^3\Big]_0^1=\frac{2}{3}$$

이므로 $-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{4}{3}$, 최솟값은 0이다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{4}{3}+0=\frac{4}{3}$

05-2 답 $-\frac{64}{3}$

|전략| $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 최솟값을 구한다.

$f(x)=\int_{-2}^{x}(t+2)^2(t-2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x+2)^2(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

$$f(2)=\int_{-2}^{2}(t+2)^2(t-2)dt=\int_{-2}^{2}(t^3+2t^2-4t-8)dt$$

$$=2\int_0^2(2t^2-8)dt=2\Big[\frac{2}{3}t^3-8t\Big]_0^2$$

$$=2\times\Big(-\frac{32}{3}\Big)=-\frac{64}{3}$$

05-3 답 1

|전략| $f(x)$의 극값과 $f(0), f(2)$의 값을 비교한다.

$f(x)=\int_x^{x+1}(t^2-3t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+1)^2-3(x+1)\}-(x^2-3x)$

$=2x-2=2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

$0\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

이때

$$f(0)=\int_0^1(t^2-3t)dt=\Big[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\Big]_0^1=-\frac{7}{6}$$

$$f(1)=\int_1^2(t^2-3t)dt=\Big[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\Big]_1^2=-\frac{13}{6}$$

$$f(2)=\int_2^3(t^2-3t)dt=\Big[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\Big]_2^3=-\frac{7}{6}$$

이므로 닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $-\frac{7}{6}$, 최솟값은 $-\frac{13}{6}$이다.

따라서 $M=-\frac{7}{6}$, $m=-\frac{13}{6}$이므로

$M-m=-\frac{7}{6}-\Big(-\frac{13}{6}\Big)=1$

필수 예제 06 정적분으로 정의된 함수의 극한 215쪽

06-1 답 (1) 4 (2) 8

|전략| $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$임을 이용하여 극한값을 구한다.

(1) $f(t)=2t^3+t^2-4$라 하고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x(2t^3+t^2-4)dt$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\Big\{\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\Big\}$$

$$=F'(2)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}f(2)$$

$$=\frac{1}{4}\times 16=4$$

(2) $f(x)=3x^2-x+2$라 하고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+h}(3x^2-x+2)dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{F(1+h)-F(1)\}+\{F(1)-F(1-h)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{F(1-h)-F(1)}{-h}$$
$$=F'(1)+F'(1)=2F'(1)=2f(1)$$
$$=2\times 4=8$$

06-2 답 $-\frac{2}{3}$

|전략| $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$임을 이용하여 극한값을 구한다.

$f(x)=x^3-2x+1$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to -1}\frac{1}{x^3+1}\int_x^{-1}f(t)dt=-\lim_{x\to -1}\frac{1}{x^3+1}\int_{-1}^{x}f(t)dt$$
$$=-\lim_{x\to -1}\frac{F(x)-F(-1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$=-\lim_{x\to -1}\left\{\frac{F(x)-F(-1)}{x+1}\times\frac{1}{x^2-x+1}\right\}$$
$$=-F'(-1)\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}f(-1)$$
$$=-\frac{1}{3}\times 2=-\frac{2}{3}$$

06-3 답 -5

|전략| $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$임을 이용하여 주어진 극한을 a에 대한 식으로 정리한다.

$f(x)=x^4+ax^2-1$이라 하고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{2h-2}^{-2}(x^4+ax^2-1)dx=\lim_{h\to 0}\frac{F(-2)-F(2h-2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(2h-2)-F(-2)}{2h}\times(-2)$$
$$=-2F'(-2)=-2f(-2)$$
$$=-2\times(16+4a-1)$$
$$=-8a-30$$

즉, $-8a-30=10$이므로

$8a=-40$ $\therefore a=-5$

개념 정리

216~217쪽

01 정적분 **02** $-S$ **03** S_1-S_2 **04** $f(x)$
05 $F(x)$, $F(b)$, $F(a)$ **06** ㉢ **07** ㉠
08 ㉡ **09** 2 **10** 0
11 2, 2, $\frac{1}{4}$, 2, $\frac{9}{4}$, $\frac{27}{4}$ **12** 0, 4, -2, 4, 2, 22
13 $F(a)$, $f(a)$ **14** $F(x+a)$, $F'(a)$

11 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시키므로

$$\int_0^9 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx+\int_6^9 f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^2 f(x)dx+\int_{-1}^2 f(x)dx+\int_{-1}^2 f(x)dx$$
$$=3\int_{-1}^{\boxed{2}} f(x)dx=3\int_{-1}^{\boxed{2}}(x^3-3x+1)dx$$
$$=3\left[\boxed{\frac{1}{4}}x^4-\frac{3}{2}x^2+x\right]_{-1}^{\boxed{2}}=3\times\boxed{\frac{9}{4}}=\boxed{\frac{27}{4}}$$

12 $\int_{-1}^x f(t)dt=xf(x)-3x^4+2x^2-1$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$\boxed{0}=-f(-1)-3+2-1$ $\therefore f(-1)=-2$

또, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3+4x$

$xf'(x)=12x^3-4x$ $\therefore f'(x)=12x^2-4$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(12x^2-4)dx=\boxed{4}x^3-4x+C$

이때 $f(-1)=-2$이므로

$-4+4+C=-2$ $\therefore C=\boxed{-2}$

따라서 $f(x)=\boxed{4}x^3-4x-\boxed{2}$이므로

$f(2)=32-8-2=\boxed{22}$

중단원 마무리

218~220쪽

01 ④ **02** ③ **03** ② **04** ①
05 $\frac{50}{3}$ **06** -6 **07** ① **08** ④
09 ④ **10** ① **11** ② **12** $-\frac{80}{3}$
13 2 **14** ③ **15** ③ **16** ①
17 ⑤ **18** $\frac{11}{3}$ **19** -42 **20** ③
21 $\frac{50}{3}$ **22** $\frac{31}{12}$ **23** 10 **24** $-\frac{7}{6}$

LEVEL 1

01 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x^3-kx)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k}{2}x^2\right]_0^2=4-2k$

이때 $f(1)=1-k$이므로

$4-2k=1-k$ $\therefore k=3$

따라서 $f(x)=x^3-3x$이므로

$f(k)=f(3)=27-9=18$

02 $\int_{-2}^3 f(x)dx-\int_1^3 f(x)dx=\int_{-2}^3 f(x)dx+\int_3^1 f(x)dx$

$$=\int_{-2}^1 f(x)dx=5$$

즉, $\int_{-2}^{3}f(x)dx-2\int_{1}^{3}f(x)dx=5-\int_{1}^{3}f(x)dx=3$이므로

$\int_{1}^{3}f(x)dx=2$

$\therefore \int_{-2}^{3}f(x)dx=\int_{-2}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{3}f(x)dx=5+2=7$

03 $\int_{0}^{k}\frac{x^3}{x+1}dx-\int_{k}^{0}\frac{1}{t+1}dt$

$=\int_{0}^{k}\frac{x^3}{x+1}dx+\int_{0}^{k}\frac{1}{x+1}dx=\int_{0}^{k}\frac{x^3+1}{x+1}dx$

$=\int_{0}^{k}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx=\int_{0}^{k}(x^2-x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{0}^{k}=\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2+k$

즉, $\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2+k=k$이므로

$\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2=0,\ 2k^3-3k^2=0$

$k^2(2k-3)=0 \qquad \therefore k=\frac{3}{2}\ (\because k>0)$

04 $\int_{-2}^{3}f(x)dx$

$=\int_{-2}^{0}(-2x^3+6x-1)dx+\int_{0}^{1}(3x^2-1)dx+\int_{1}^{3}(4x-2)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^4+3x^2-x\right]_{-2}^{0}+\left[x^3-x\right]_{0}^{1}+\left[2x^2-2x\right]_{1}^{3}$

$=-6+0+12=6$

05 $f(x)=\begin{cases}4 & (x\geq 0)\\ 2x+4 & (x<0)\end{cases}$이므로

$\int_{-1}^{3}xf(x)dx=\int_{-1}^{0}(2x^2+4x)dx+\int_{0}^{3}4xdx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_{-1}^{0}+\left[2x^2\right]_{0}^{3}$

$=-\frac{4}{3}+18=\frac{50}{3}$

06 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키므로

$\int_{-3}^{3}f(x)dx=2\int_{0}^{3}f(x)dx=4 \qquad \therefore \int_{0}^{3}f(x)dx=2$

함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=-g(x)$를 만족시키므로

$\int_{-3}^{3}g(x)dx=\int_{-3}^{0}g(x)dx+\int_{0}^{3}g(x)dx=0$

$\therefore \int_{0}^{3}g(x)dx=-\int_{-3}^{0}g(x)dx=-3$

$\therefore 3\int_{0}^{3}f(x)dx+4\int_{0}^{3}g(x)dx=3\times 2+4\times(-3)$

$=6+(-12)=-6$

07 $\int_{-1}^{2}f'(t)dt=k$ (k는 상수) ……㉠

라 하면 $f(x)=-x^3+kx^2+2x$

$f'(x)=-3x^2+2kx+2$를 ㉠에 대입하면

$\int_{-1}^{2}(-3t^2+2kt+2)dt=k,\ \left[-t^3+kt^2+2t\right]_{-1}^{2}=k$

$3k-3=k \qquad \therefore k=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2+2x$이므로

$\int_{-1}^{3}f(x)dx=\int_{-1}^{3}\left(-x^3+\frac{3}{2}x^2+2x\right)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3+x^2\right]_{-1}^{3}=2$

08 $f(x)=\int_{x}^{x+1}(t^3-t+3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+1)^3-(x+1)+3\}-(x^3-x+3)$

$=3x^2+3x=3x(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-1	…	0	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 $x=0$에서 극소이므로 극댓값과 극솟값의 합은

$f(-1)+f(0)=\int_{-1}^{0}(t^3-t+3)dt+\int_{0}^{1}(t^3-t+3)dt$

$=\int_{-1}^{1}(t^3-t+3)dt$

$=2\int_{0}^{1}3dt=2\left[3t\right]_{0}^{1}=6$

LEVEL 2

09 $\int_{-1}^{0}f'(x)dx=\left[f(x)\right]_{-1}^{0}=f(0)-f(-1)=0$

$\int_{-1}^{2}f'(x)dx=\left[f(x)\right]_{-1}^{2}=f(2)-f(-1)=0$

$\therefore f(-1)=f(0)=f(2)$

$f(-1)=f(0)=f(2)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x(x+1)(x-2)+k$

이때 $f(1)=1$이므로

$1\times 2\times(-1)+k=1 \qquad \therefore k=3$

따라서

$f(x)=x(x+1)(x-2)+3=x^3-x^2-2x+3$

이므로

$\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{2}(x^3-x^2-2x+3)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{4}$

10 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로
$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(x^2+b)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+bx\right]_0^1=\frac{2}{3}+2b$$

즉, $\frac{2}{3}+2b=-2$이므로 $b=-\frac{4}{3}$

$$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^3+ax^2+bx)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}ax^2dx$$
$$=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}a$$

즉, $\frac{2}{3}a=6$이므로 $a=9$

따라서 $f(x)=x^2+9x-\frac{4}{3}$이므로

$f(1)=1+9-\frac{4}{3}=\frac{26}{3}$

11 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_{-1}^{0}f(x)dx=2\int_{0}^{1}f(x)dx=4$$
$$\therefore\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx=2$$

이때 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키므로

$$\int_{-1}^{6}f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{5}f(x)dx+\int_{5}^{6}f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{-1}^{0}f(x)dx$$
$$=3\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{-1}^{0}f(x)dx$$
$$=3\times4+2=14$$

12 $$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}(4x-4)dx+\int_{0}^{a}(x^2+2x-4)dx$$
$$=\left[2x^2-4x\right]_{-a}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-4x\right]_0^a$$
$$=(-2a^2-4a)+\left(\frac{1}{3}a^3+a^2-4a\right)$$
$$=\frac{1}{3}a^3-a^2-8a$$

$g(a)=\frac{1}{3}a^3-a^2-8a$라 하면

$g'(a)=a^2-2a-8=(a+2)(a-4)$

$g'(a)=0$에서 $a=4$ ($\because a>0$)

$a>0$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	…	4	…
$g'(a)$		−	0	+
$g(a)$		↘	극소	↗

따라서 $g(a)$는 $a=4$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$g(4)=\frac{64}{3}-16-32=-\frac{80}{3}$

13 $|3x^2-3x|=\begin{cases}3x^2-3x & (x\le0 \text{ 또는 } x\ge1)\\ -3x^2+3x & (0<x<1)\end{cases}$

$a>1$이므로

$$\int_{0}^{a}|3x^2-3x|dx=\int_{0}^{1}(-3x^2+3x)dx+\int_{1}^{a}(3x^2-3x)dx$$
$$=\left[-x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+\left[x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_1^a$$
$$=\frac{1}{2}+\left(a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}\right)$$
$$=a^3-\frac{3}{2}a^2+1$$

즉, $a^3-\frac{3}{2}a^2+1=3$이므로

$a^3-\frac{3}{2}a^2-2=0$, $2a^3-3a^2-4=0$

$(a-2)(2a^2+a+2)=0$ $\quad\therefore a=2$

14 $f(x)=x^3-2x^2+\int_{-1}^{1}|f'(t)|dt$에서

$\int_{-1}^{1}|f'(t)|dt=k$ (k는 상수)라 하면

$f(x)=x^3-2x^2+k$이므로 $f'(x)=3x^2-4x$

$|3x^2-4x|=\begin{cases}3x^2-4x & \left(x\le0 \text{ 또는 } x\ge\frac{4}{3}\right)\\ -3x^2+4x & \left(0<x<\frac{4}{3}\right)\end{cases}$ 이므로

$$\int_{-1}^{1}|f'(t)|dt=\int_{-1}^{0}(3t^2-4t)dt+\int_{0}^{1}(-3t^2+4t)dt$$
$$=\left[t^3-2t^2\right]_{-1}^{0}+\left[-t^3+2t^2\right]_0^1$$
$$=3+1=4$$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+4$이므로

$f(3)=27-18+4=13$

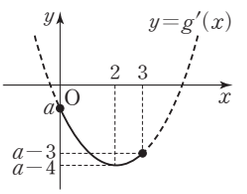
15 $g(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$

함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0, 3]$에서 감소하려면 닫힌구간 $[0, 3]$에서 $g'(x)\le0$이어야 한다.

따라서 오른쪽 그림에서

$g'(0)=a\le0$이어야 하므로 구하는 실수 a의 최댓값은 0이다.



16 $\int_1^x (x-t)f'(t)dt = ax^3+3x+b$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a+3+b$ $\therefore a+b=-3$ ……㉡

㉠을 정리하면

$x\int_1^x f'(t)dt - \int_1^x tf'(t)dt = ax^3+3x+b$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f'(t)dt + xf'(x) - xf'(x) = 3ax^2+3$

$\int_1^x f'(t)dt = 3ax^2+3$ ……㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f'(t)dt = 3a+3$

$0=3a+3$ $\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉡에 대입하면

$-1+b=-3$ $\therefore b=-2$

㉢에서 $\int_1^x f'(t)dt = -3x^2+3$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=-6x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(-6x)dx=-3x^2+C$

이때 $f(0)=20$이므로 $C=20$

따라서 $f(x)=-3x^2+20$이므로

$f(b)=f(-2)=-12+20=8$

17 $\int_2^x f(t)dt = xf(x)+ax^3-2x^2+4a$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=2f(2)+8a-8+4a$ $\therefore f(2)=-6a+4$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\int_2^0 f(t)dt = 4a$ $\therefore \int_0^2 f(t)dt = -4a$

이때 $f(2)=\int_0^2 f(t)dt$이므로

$-6a+4=-4a$, $-2a=-4$ $\therefore a=2$

㉠에서 $\int_2^x f(t)dt = xf(x)+2x^3-2x^2+8$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+6x^2-4x$

$xf'(x)=-6x^2+4x$ $\therefore f'(x)=-6x+4$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(-6x+4)dx$

$=-3x^2+4x+C$

이때 $f(2)=-6a+4=-8$이므로

$-12+8+C=-8$ $\therefore C=-4$

따라서 $f(x)=-3x^2+4x-4$이므로

$f(1)=-3+4-4=-3$

$\therefore a+f(1)=2+(-3)=-1$

18 $\int_0^x tf'(t)dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\int_{-3}^3 x^2 f(t)dt$에서

$\int_0^x tf'(t)dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\int_{-3}^3 f(t)dt$

$\int_{-3}^3 f(t)dt = k$ (k는 상수)라 하면

$\int_0^x tf'(t)dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{k}{2}x^2$ ……㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf'(x)=x^2-kx$ $\therefore f'(x)=x-k$

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 극솟값을 가지므로 $f'(4)=0$에서

$4-k=0$ $\therefore k=4$

즉, $f'(x)=x-4$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x-4)dx=\frac{1}{2}x^2-4x+C$

$\int_{-3}^3 f(t)dt = \int_{-3}^3 \left(\frac{1}{2}t^2-4t+C\right)dt$

$=2\int_0^3 \left(\frac{1}{2}t^2+C\right)dt$

$=2\left[\frac{1}{6}t^3+Ct\right]_0^3 = 9+6C$

이때 $9+6C=4$이므로 $C=-\frac{5}{6}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4x-\frac{5}{6}$이므로

$f(-1)=\frac{1}{2}+4-\frac{5}{6}=\frac{11}{3}$

19 $\int_0^x (x-t)f(t)dt = -\frac{1}{2}x^4+2x^3$에서

$x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = -\frac{1}{2}x^4+2x^3$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = -2x^3+6x^2$

$\therefore \int_0^x f(t)dt = -2x^3+6x^2$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-6x^2+12x=-6(x-1)^2+6$

따라서 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(1)=6$, 최솟값은 $f(4)=-48$이므로 구하는 합은

$6+(-48)=-42$

20 $f(x)=x^3+ax+b$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{-2}^x f(t)dt = \lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(-2)}{x-2}=6$ ……㉠

㉠에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}\{F(x)-F(-2)\}=0$이다.

즉, $F(2)-F(-2)=0$에서

$F(2)=F(-2)$ ……㉡

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{-2}^{x} f(t)\,dt=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\ (\because \text{㉡})$$
$$=F'(2)=f(2)$$
$$=8+2a+b$$

즉, $8+2a+b=6$이므로

$2a+b=-2$ ……㉢

한편, ㉡에서 $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=0$이므로

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{2}(x^3+ax+b)\,dx=2\int_{0}^{2} b\,dx$$
$$=2\Big[bx\Big]_0^2=4b$$

즉, $4b=0$이므로 $b=0$

$b=0$을 ㉢에 대입하면

$2a=-2$ $\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=x^3-x$이므로

$f(3)=27-3=24$

참고 ㉡에서 $F(2)=F(-2)$이므로

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_{-2}^{2}=F(2)-F(-2)=0$$

서술형

21 조건 ㈐에서 $x^3+3x^2+x-1=(x+1)(x^2+2x-1)$

또, 조건 ㈏에서 $x^2+3x=(x+1)+(x^2+2x-1)$ … ❶

즉, 조건 ㈎에 의하여

$x^2+2x-1\ge x+1$이면

$f(x)=x^2+2x-1$, $g(x)=x+1$

$x^2+2x-1<x+1$이면

$f(x)=x+1$, $g(x)=x^2+2x-1$

이때 $x^2+2x-1=x+1$에서

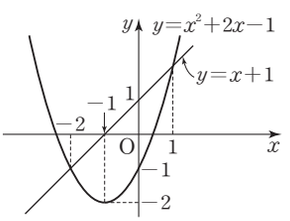
$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 두 함수

$y=x^2+2x-1$, $y=x+1$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & (x\le -2 \text{ 또는 } x\ge 1)\\ x+1 & (-2<x<1)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x+1 & (x\le -2 \text{ 또는 } x\ge 1)\\ x^2+2x-1 & (-2<x<1)\end{cases}$$ … ❷

$$\therefore \int_{-1}^{3} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx+\int_{1}^{3}(x^2+2x-1)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1} dx+\int_{1}^{3}(x^2+2x-1)\,dx$$
$$=2\Big[x\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{3}x^3+x^2-x\Big]_1^3$$
$$=2+\frac{44}{3}=\frac{50}{3}$$ … ❸

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 이용하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $y=x^2+2x-1$ 또는 $y=x+1$임을 알아낼 수 있다.	20 %
❷ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$의 값을 구할 수 있다.	30 %

22 $0\le x\le 1$에서 $f(x)=x^2$이므로

$f(x+1)=xf(x)+ax+b=x^3+ax+b$

이때 $1\le x+1\le 2$이므로 $x+1=t$라 하면 $1\le t\le 2$에서

$f(t)=\underline{(t-1)^3+a(t-1)+b}$ ← x^3+ax+b에 x 대신 $t-1$ 대입

$=t^3-3t^2+(3+a)t-a+b-1$

즉, $1\le x\le 2$에서 $f(x)=x^3-3x^2+(3+a)x-a+b-1$

이때 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $f(x)$는

$x=1$에서 연속이다. 즉, $\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)$에서

$1-3+(3+a)-a+b-1=1$ $\therefore b=1$

한편, $f'(x)=\begin{cases} 2x & (0<x<1)\\ 3x^2-6x+3+a & (1<x<2)\end{cases}$이고,

$f(x)$는 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$\lim_{x\to 1+} f'(x)=\lim_{x\to 1-} f'(x)$에서

$3-6+3+a=2$ $\therefore a=2$ … ❶

따라서 $1\le x\le 2$에서 $f(x)=x^3-3x^2+5x-2$이므로

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx=\int_{0}^{1} x^2\,dx+\int_{1}^{2}(x^3-3x^2+5x-2)\,dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{5}{2}x^2-2x\Big]_1^2$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{9}{4}=\frac{31}{12}$$ … ❷

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 이용하여 상수 a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %

23 $g(x)=\int_{2}^{x} f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+k$

$g'(x)$가 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로 $g(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수이다.

따라서 함수 $g(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $g'(x)=0$, 즉 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. … ❶

이때 $f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=k+\frac{5}{3}$를 갖고,

$x=3$에서 극솟값 $f(3)=k-9$를 가지므로

$f(-1)f(3)<0$에서

$\left(k+\frac{5}{3}\right)(k-9)<0$ $\therefore -\frac{5}{3}<k<9$ … ❷

따라서 구하는 정수 k의 개수는 $-1, 0, 1, \cdots, 8$의 10이다. … ❸

채점 기준	비율
❶ 함수 $g(x)$가 극댓값을 가지려면 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 알아낼 수 있다.	40 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20 %

24 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수이다.

주어진 조건에서 $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq g(3)$이므로 삼차함수 $g(x)$는 구간 $[0, \infty)$에서 $x=3$일 때 극소이면서 최소이다. ……㉠ … ❶

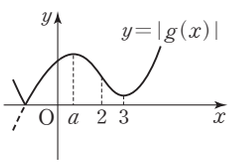
즉, $g'(3)=0$에서 $f(3)=0$이므로

$f(x)=(x-3)(x-a)$ $(a<3$인 상수$)$라 하자.

(i) $g(3)\geq 0$일 때

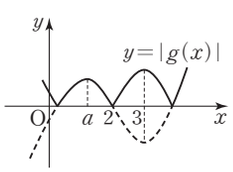
$x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq g(3)\geq 0$이므로 $|g(x)|=g(x)$이다.

즉, $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq g(2)$이어야 하므로 ㉠에 의하여 이 경우는 조건을 만족시키지 않는다.



(ii) $g(3)<0$일 때

$x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $|g(x)|\geq|g(2)|$이려면 $g(2)=0$이어야 한다. … ❷



$g(x)=\int_0^x f(t)dt$

$=\int_0^x (t-3)(t-a)dt$

$=\int_0^x \{t^2-(3+a)t+3a\}dt$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{3+a}{2}x^2+3ax$

$g(2)=0$에서 $\frac{8}{3}-2(3+a)+6a=0$

$4a-\frac{10}{3}=0$ $\therefore a=\frac{5}{6}$

따라서 $f(x)=(x-3)\left(x-\frac{5}{6}\right)$이므로 … ❸

$f(2)=-1\times\frac{7}{6}=-\frac{7}{6}$ … ❹

채점 기준	비율
❶ 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극소임을 알아낼 수 있다.	30 %
❷ $g(2)=0$임을 알아낼 수 있다.	40 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❹ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

참고 $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $x=3$에서 극소이려면 $a<3$이어야 한다.

9 정적분의 활용

1 넓이

개념드릴 226쪽

1 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) 1 (4) 4

2 (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{32}{3}$ (3) $\frac{9}{2}$ (4) 36

3 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{27}{2}$ (5) 2

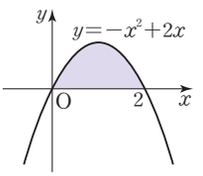
4 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{16}{3}$

1 (1) 곡선 $y=-x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=0$에서

$-x(x-2)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_0^2(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$



다른 풀이 공식을 이용하면 $\frac{|-1|}{6}(2-0)^3=\frac{4}{3}$

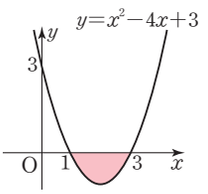
(2) 곡선 $y=x^2-4x+3$과 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-4x+3=0$에서

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_1^3(-x^2+4x-3)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3=\frac{4}{3}$



다른 풀이 공식을 이용하면 $\frac{|1|}{6}(3-1)^3=\frac{4}{3}$

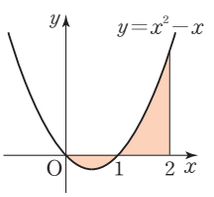
(3) 곡선 $y=x^2-x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-x=0$에서

$x(x-1)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_0^1(-x^2+x)dx+\int_1^2(x^2-x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$



(4) 곡선 $y=-x^2+4$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+4=0$에서

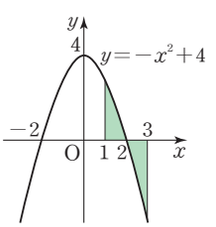
$-(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_1^2(-x^2+4)dx+\int_2^3(x^2-4)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_2^3=\frac{5}{3}+\frac{7}{3}=4$

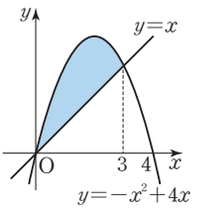


2 (1) 곡선 $y=-x^2+4x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $-x^2+4x=x$에서

$x^2-3x=0,\ x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_0^3\{(-x^2+4x)-x\}dx=\int_0^3(-x^2+3x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$

$$=\frac{9}{2}$$

다른 풀이 공식을 이용하면 $\frac{|-1|}{6}(3-0)^3=\frac{9}{2}$

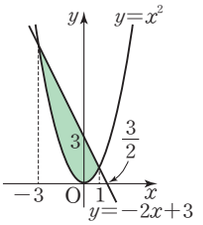
(2) 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=-2x+3$의 교점의 x좌표는 $x^2=-2x+3$에서

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-3}^1\{(-2x+3)-x^2\}dx=\int_{-3}^1(-x^2-2x+3)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-3}^1$$

$$=\frac{32}{3}$$

다른 풀이 공식을 이용하면 $\frac{|1|}{6}\{1-(-3)\}^3=\frac{32}{3}$

(3) 곡선 $y=-x^2-2x+1$과 직선 $y=-x-1$의 교점의 x좌표는

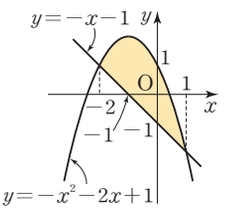
$-x^2-2x+1=-x-1$에서

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-2}^1\{(-x^2-2x+1)-(-x-1)\}dx$$

$$=\int_{-2}^1(-x^2-x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1$$

$$=\frac{9}{2}$$

다른 풀이 공식을 이용하면 $\frac{|-1|}{6}\{1-(-2)\}^3=\frac{9}{2}$

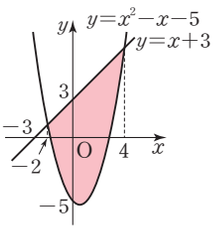
(4) 곡선 $y=x^2-x-5$와 직선 $y=x+3$의 교점의 x좌표는

$x^2-x-5=x+3$에서

$x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^4\{(x+3)-(x^2-x-5)\}dx=\int_{-2}^4(-x^2+2x+8)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+8x\right]_{-2}^4$$

$$=36$$

다른 풀이 공식을 이용하면

$\frac{|1|}{6}\{4-(-2)\}^3=36$

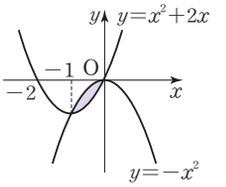
3 (1) 두 곡선 $y=x^2+2x,\ y=-x^2$의 교점의 x좌표는

$x^2+2x=-x^2$에서

$2x^2+2x=0,\ 2x(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$

따라서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-1}^0\{-x^2-(x^2+2x)\}dx=\int_{-1}^0(-2x^2-2x)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0=\frac{1}{3}$$

다른 풀이 공식을 이용하면

$\frac{|1-(-1)|}{6}\{0-(-1)\}^3=\frac{1}{3}$

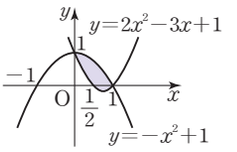
(2) 두 곡선 $y=-x^2+1,$ $y=2x^2-3x+1$의 교점의 x좌표는

$-x^2+1=2x^2-3x+1$에서

$3x^2-3x=0,\ 3x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_0^1\{(-x^2+1)-(2x^2-3x+1)\}dx=\int_0^1(-3x^2+3x)dx$$

$$=\left[-x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

다른 풀이 공식을 이용하면

$\frac{|-1-2|}{6}(1-0)^3=\frac{1}{2}$

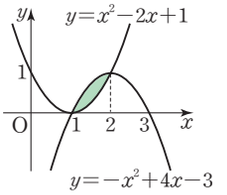
(3) 두 곡선 $y=x^2-2x+1,$ $y=-x^2+4x-3$의 교점의 x좌표는 $x^2-2x+1=-x^2+4x-3$에서

$2x^2-6x+4=0$

$2(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_1^2\{(-x^2+4x-3)-(x^2-2x+1)\}dx$$

$$=\int_1^2(-2x^2+6x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_1^2=\frac{1}{3}$$

다른 풀이 공식을 이용하면

$\frac{|1-(-1)|}{6}(2-1)^3=\frac{1}{3}$

(4) 두 곡선 $y=2x^2+4x-4$, $y=-x^2+x+2$의 교점의 x좌표는

$2x^2+4x-4=-x^2+x+2$에서

$3x^2+3x-6=0$, $3(x+2)(x-1)=0$

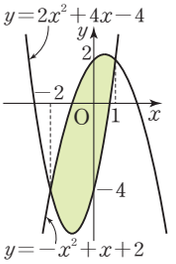
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_{-2}^{1}\{(-x^2+x+2)-(2x^2+4x-4)\}dx$

$=\int_{-2}^{1}(-3x^2-3x+6)dx$

$=\left[-x^3-\frac{3}{2}x^2+6x\right]_{-2}^{1}=\frac{27}{2}$



다른 풀이 공식을 이용하면

$\frac{|2-(-1)|}{6}\{1-(-2)\}^3=\frac{27}{2}$

(5) 두 곡선 $y=x^2+x-3$, $y=x^2-x-1$의 교점의 x좌표는

$x^2+x-3=x^2-x-1$에서

$2x-2=0$, $2(x-1)=0$

$\therefore x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

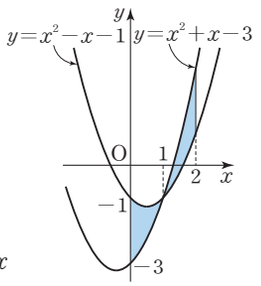
$\int_{0}^{1}\{(x^2-x-1)-(x^2+x-3)\}dx$

$+\int_{1}^{2}\{(x^2+x-3)-(x^2-x-1)\}dx$

$=\int_{0}^{1}(-2x+2)dx+\int_{1}^{2}(2x-2)dx$

$=\left[-x^2+2x\right]_{0}^{1}+\left[x^2-2x\right]_{1}^{2}$

$=1+1=2$



4 (1) 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 $S_1=S_2$이다.

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^2=x$에서

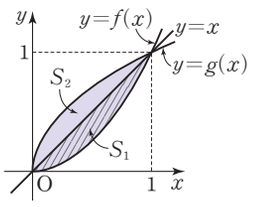
$x^2-x=0$, $x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$2\int_{0}^{1}(x-x^2)dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}$

$=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$



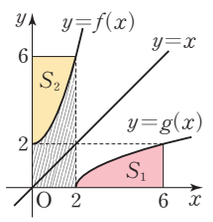
(2) 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 $S_1=S_2$이다.

$\therefore \int_{2}^{6}g(x)dx=S_1=S_2$

$=2\times6-\int_{0}^{2}(x^2+2)dx$

$=12-\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_{0}^{2}$

$=12-\frac{20}{3}=\frac{16}{3}$



필수 예제 01 곡선과 x축 사이의 넓이 227쪽

01-1 답 $\frac{37}{12}$

|전략| $S=\int_a^b|f(x)|dx$임을 이용한다.

곡선 $y=-x^3-x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^3-x^2+2x=0$에서

$-x(x+2)(x-1)=0$

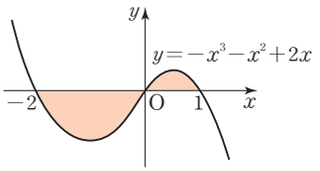
$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3-x^2+2x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}$

$=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}$



01-2 답 4

|전략| 닫힌구간 $[0, a]$에서 $x^2-ax\le0$이므로 $\int_0^a(-x^2+ax)dx=\frac{32}{3}$임을 이용한다.

곡선 $y=x^2-ax$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-ax=0$에서

$x(x-a)=0$

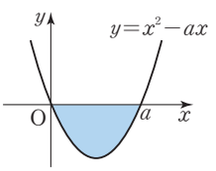
$\therefore x=0$ 또는 $x=a$

이때 $a>0$이므로 곡선 $y=x^2-ax$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_{0}^{a}(-x^2+ax)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_{0}^{a}=\frac{1}{6}a^3$

즉, $\frac{1}{6}a^3=\frac{32}{3}$이므로

$a^3=64$ $\therefore a=4$ ($\because a>0$)



01-3 답 -2

|전략| $S=\int_a^b|f(x)|dx$임을 이용한다.

곡선 $y=8x^3$과 x축의 교점의 x좌표는

$8x^3=0$에서 $x=0$

이때 $a<0$이므로 곡선 $y=8x^3$과 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는

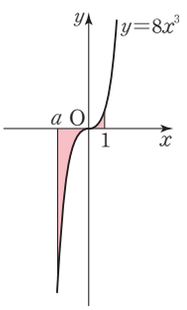
$\int_{a}^{0}(-8x^3)dx+\int_{0}^{1}8x^3dx$

$=\left[-2x^4\right]_{a}^{0}+\left[2x^4\right]_{0}^{1}$

$=2a^4+2$

즉, $2a^4+2=34$이므로

$a^4=16$ $\therefore a=-2$ ($\because a<0$)



필수 예제 02 곡선과 직선 또는 두 곡선 사이의 넓이 228쪽

02-1 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{71}{6}$

|전략| 곡선과 직선 또는 두 곡선의 교점의 x좌표를 찾아 적분 구간을 나눈다.

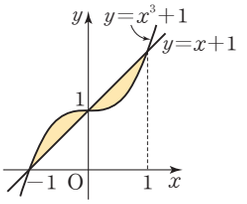
(1) 곡선 $y=x^3+1$과 직선 $y=x+1$의 교점의 x좌표는 $x^3+1=x+1$에서

$x^3-x=0$

$x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-1}^{0}\{(x^3+1)-(x+1)\}dx+\int_{0}^{1}\{(x+1)-(x^3+1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3+x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

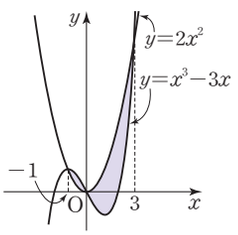
(2) 두 곡선 $y=x^3-3x$, $y=2x^2$의 교점의 x좌표는 $x^3-3x=2x^2$에서

$x^3-2x^2-3x=0$

$x(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-1}^{0}\{(x^3-3x)-2x^2\}dx+\int_{0}^{3}\{2x^2-(x^3-3x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3-2x^2-3x)dx+\int_{0}^{3}(-x^3+2x^2+3x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}$$

$$=\frac{7}{12}+\frac{45}{4}=\frac{71}{6}$$

02-2 답 $\frac{2}{3}$

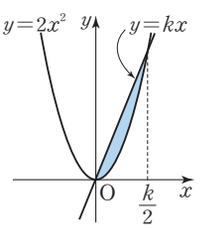
|전략| 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 찾고 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{81}$임을 이용한다.

곡선 $y=2x^2$과 직선 $y=kx$의 교점의 x좌표는 $2x^2=kx$에서

$2x^2-kx=0$, $x(2x-k)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{k}{2}$

이때 $k>0$이므로 곡선 $y=2x^2$과 직선 $y=kx$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_{0}^{\frac{k}{2}}(kx-2x^2)dx=\left[\frac{k}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_{0}^{\frac{k}{2}}=\frac{1}{24}k^3$$

즉, $\frac{1}{24}k^3=\frac{1}{81}$이므로

$k^3=\frac{8}{27}$ $\therefore k=\frac{2}{3}$ ($\because k>0$)

필수 예제 03 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이 229쪽

03-1 답 $\frac{27}{4}$

|전략| 곡선 $y=x^3-1$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선의 방정식을 먼저 구한다.

$f(x)=x^3-1$이라 하면 $f'(x)=3x^2$

$f'(1)=3$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선의 방정식은

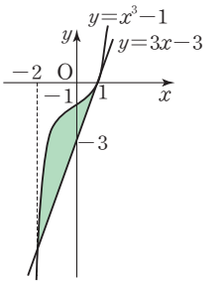
$y-0=3(x-1)$ $\therefore y=3x-3$

곡선 $y=x^3-1$과 직선 $y=3x-3$의 교점의 x좌표는 $x^3-1=3x-3$에서

$x^3-3x+2=0$, $(x+2)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-2}^{1}\{(x^3-1)-(3x-3)\}dx=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\frac{27}{4}$$

03-2 답 $\frac{8}{3}$

|전략| 곡선 $y=-x^2+6x-5$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 방정식을 먼저 구한다.

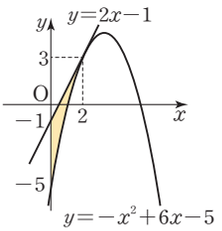
$f(x)=-x^2+6x-5$라 하면

$f'(x)=-2x+6$

$f'(2)=2$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 방정식은

$y-3=2(x-2)$ $\therefore y=2x-1$

따라서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{0}^{2}\{(2x-1)-(-x^2+6x-5)\}dx=\int_{0}^{2}(x^2-4x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{0}^{2}$$

$$=\frac{8}{3}$$

03-3 답 $\frac{2}{3}$

|전략| 점 $(0, 1)$에서 곡선 $y=-x^2$에 그은 두 접선의 방정식을 먼저 구한다.

$f(x)=-x^2$이라 하면 $f'(x)=-2x$

$f'(t)=-2t$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, -t^2)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-t^2)=-2t(x-t)$

$\therefore y=-2tx+t^2$ ……㉠

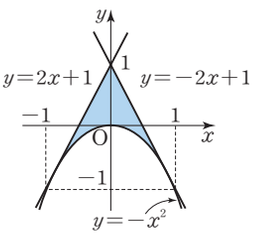
이 접선이 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=t^2$, $(t+1)(t-1)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

㉠에 $t=-1$, $t=1$을 각각 대입하면 접선의 방정식은

$y=2x+1$ 또는 $y=-2x+1$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{(2x+1)-(-x^2)\}dx+\int_{0}^{1}\{(-2x+1)-(-x^2)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)dx+\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

다른 풀이 두 직선 $y=2x+1$, $y=-2x+1$은 y축에 대하여 대칭이고, 곡선 $y=-x^2$도 y축에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=-x^2$과 두 직선 $y=2x+1$, $y=-2x+1$로 둘러싸인 도형도 y축에 대하여 대칭이다.
따라서 구하는 도형의 넓이는

$$2\int_{0}^{1}\{(-2x+1)-(-x^2)\}dx=2\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{0}^{1}$$

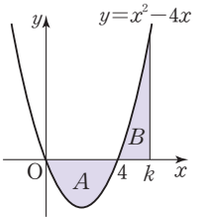
$$=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

필수 예제 04 두 도형의 넓이가 같은 경우 230쪽

04-1 답 6

|전략| $\int_{0}^{k}(x^2-4x)dx=0$임을 이용한다.

곡선 $y=x^2-4x$와 x축의 교점의 x좌표는
$x^2-4x=0$에서 $x(x-4)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=4$
이때 $k>4$이므로 곡선 $y=x^2-4x$와 직선 $x=k$는 오른쪽 그림과 같고, $A=B$이므로 색칠한 두 도형의 넓이가 서로 같다.



즉, $\int_{0}^{k}(x^2-4x)dx=0$이므로

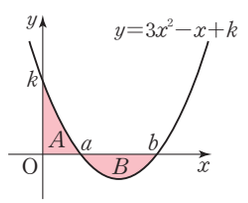
$$\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_{0}^{k}=0,\ \frac{1}{3}k^3-2k^2=0$$

$$\frac{1}{3}k^2(k-6)=0 \qquad \therefore k=6\ (\because k>4)$$

04-2 답 $\frac{1}{16}$

|전략| 곡선 $y=3x^2-x+k$와 x축의 교점의 x좌표를 a, b $(0<a<b)$라 하면 $\int_{0}^{b}(3x^2-x+k)dx=0$임을 이용한다.

곡선 $y=3x^2-x+k$와 x축의 교점의 x좌표를 a, b $(0<a<b)$라 하면
$3b^2-b+k=0$
$\therefore k=-3b^2+b$ ····· ㉠
이때 $A=B$이면



$\int_{0}^{b}(3x^2-x+k)dx=0$이므로

$$\left[x^3-\frac{1}{2}x^2+kx\right]_{0}^{b}=0,\ b^3-\frac{1}{2}b^2+kb=0$$

$$b^3-\frac{1}{2}b^2+(-3b^2+b)b=0\ (\because ㉠)$$

$$-2b^3+\frac{1}{2}b^2=0,\ -2b^2\left(b-\frac{1}{4}\right)=0$$

$\therefore b=\frac{1}{4}$ $(\because b>0)$

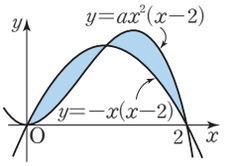
$b=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면

$$k=-\frac{3}{16}+\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

04-3 답 −1

|전략| $\int_{0}^{2}[ax^2(x-2)-\{-x(x-2)\}]dx=0$임을 이용한다.

두 곡선 $y=ax^2(x-2)$, $y=-x(x-2)$의 교점의 x좌표는
$ax^2(x-2)=-x(x-2)$에서
$ax^2(x-2)+x(x-2)=0$
$x(x-2)(ax+1)=0$ → $a<-\frac{1}{2}$이므로 $-\frac{1}{a}<2$
$\therefore x=0$ 또는 $x=-\frac{1}{a}$ 또는 $x=2$



이때 색칠한 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{0}^{2}[ax^2(x-2)-\{-x(x-2)\}]dx=0$$

$$\int_{0}^{2}\{ax^3-(2a-1)x^2-2x\}dx=0$$

$$\left[\frac{a}{4}x^4-\frac{2a-1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{2}=0$$

$$4a-\frac{8}{3}(2a-1)-4=0$$

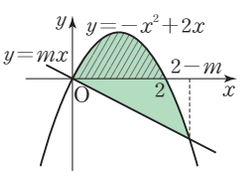
$$\frac{4}{3}a=-\frac{4}{3} \qquad \therefore a=-1$$

필수 예제 05 도형의 넓이를 이등분하는 경우 231쪽

05-1 답 16

|전략| 곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=-x^2+2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배임을 이용한다.

곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=mx$에서
$x^2-(2-m)x=0$
$x\{x-(2-m)\}=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=2-m$



곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{0}^{2-m}\{(-x^2+2x)-mx\}dx$$

$$=\int_{0}^{2-m}\{-x^2+(2-m)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{2-m}{2}x^2\right]_{0}^{2-m}=\frac{1}{6}(2-m)^3$$

한편, 곡선 $y=-x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는
$-x^2+2x=0$에서 $-x(x-2)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

곡선 $y=-x^2+2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\int_0^2(-x^2+2x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

이때 $S=2S_1$이므로

$$\frac{1}{6}(2-m)^3=2\times\frac{4}{3}$$

$\therefore (2-m)^3=16$

참고 공식을 이용하면

$$S=\frac{|-1|}{6}(2-m-0)^3=\frac{1}{6}(2-m)^3$$

$$S_1=\frac{|-1|}{6}(2-0)^3=\frac{4}{3}$$

05-2 답 $1-\sqrt{2}$

|전략| 곡선 $y=x^2-4x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=x^2-4x$와 곡선 $y=mx^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배임을 이용한다.

곡선 $y=x^2-4x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-4x=0$에서

$x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

곡선 $y=x^2-4x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^4(-x^2+4x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$$

한편, 곡선 $y=x^2-4x$와 곡선 $y=mx^2$의 교점의 x좌표는

$x^2-4x=mx^2$에서

$(1-m)x^2-4x=0$

$x\{(1-m)x-4\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{4}{1-m}$

곡선 $y=x^2-4x$와 곡선 $y=mx^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\int_0^{\frac{4}{1-m}}\{mx^2-(x^2-4x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{4}{1-m}}\{-(1-m)x^2+4x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1-m}{3}x^3+2x^2\right]_0^{\frac{4}{1-m}}=\frac{32}{3(1-m)^2}$$

이때 $S=2S_1$이므로

$$\frac{32}{3}=2\times\frac{32}{3(1-m)^2}$$

$(1-m)^2=2$, $m^2-2m-1=0$

$\therefore m=1-\sqrt{2}$ ($\because m<0$)

참고 공식을 이용하면

$$S=\frac{|1|}{6}(4-0)^3=\frac{32}{3}$$

$$S_1=\frac{|m-1|}{6}\left(\frac{4}{1-m}-0\right)^3=\frac{32}{3(1-m)^2}$$

필수 예제 06 도형의 넓이의 최솟값 232쪽

06-1 답 -1

|전략| 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낸 후 도함수를 이용한다.

곡선 $y=-x(x+2)(x-a)$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x(x+2)(x-a)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=a$ 또는 $x=0$

곡선 $y=-x(x+2)(x-a)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)$

$$=\int_{-2}^{a}x(x+2)(x-a)dx+\int_a^0\{-x(x+2)(x-a)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{a}\{x^3+(2-a)x^2-2ax\}dx+\int_a^0\{-x^3-(2-a)x^2+2ax\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2-a}{3}x^3-ax^2\right]_{-2}^{a}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{2-a}{3}x^3+ax^2\right]_a^0$$

$$=\left(-\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{3}a^3+\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{3}a^3\right)$$

$$=-\frac{1}{6}a^4-\frac{2}{3}a^3+\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}$$

$a^2+2a-2=0$에서 $a=-1+\sqrt{3}>0$, $a=-1-\sqrt{3}<-2$

$\therefore S'(a)=-\frac{2}{3}a^3-2a^2+\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}(a+1)(a^2+2a-2)$

$S'(a)=0$에서 $a=-1$ ($\because -2<a<0$)

$-2<a<0$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	극소	↗	

따라서 $-2<a<0$에서 함수 $S(a)$는 $a=-1$일 때 극소이면서 최소이므로 구하는 실수 a의 값은 -1이다.

06-2 답 16

|전략| 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낸 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$a>0$이므로 두 곡선 $y=4ax^3$, $y=-\frac{1}{a}x^3$과 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^2\left\{4ax^3-\left(-\frac{1}{a}x^3\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^2\left(4a+\frac{1}{a}\right)x^3dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}\left(4a+\frac{1}{a}\right)x^4\right]_0^2$$

$$=4\left(4a+\frac{1}{a}\right)$$

이때 $4a>0$, $\frac{1}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4\left(4a+\frac{1}{a}\right)\geq4\times2\sqrt{4a\times\frac{1}{a}}=16\left(\text{단, 등호는 }a=\frac{1}{2}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 구하는 도형의 넓이의 최솟값은 16이다.

참고 $4a+\frac{1}{a}\ge 2\sqrt{4a+\frac{1}{a}}$에서

등호는 $4a=\frac{1}{a}$일 때 성립하므로

$4a^2=1 \quad \therefore a=\frac{1}{2}\ (\because a>0)$

Lecture

산술평균과 기하평균의 관계

$a>0, b>0$일 때

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

필수 예제 07 역함수의 그래프와 넓이 233쪽

07-1 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 19

|전략| (1) 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같음을 이용한다.

(2) 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 넓이가 같은 도형을 이용한다.

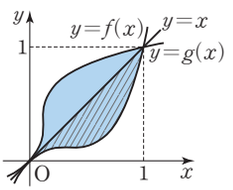
(1) 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $3x^3-3x^2+x=x$에서

$3x^3-3x^2=0$

$3x^2(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

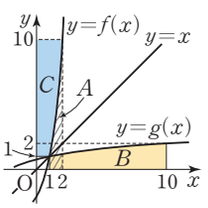


따라서 구하는 도형의 넓이는

$$2\int_0^1\{x-(3x^3-3x^2+x)\}dx=2\int_0^1(-3x^3+3x^2)dx$$
$$=2\left[-\frac{3}{4}x^4+x^3\right]_0^1$$
$$=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

(2) 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 $f(1)=1$, $f(2)=10$이므로 $g(1)=1$, $g(10)=2$이다.

따라서 오른쪽 그림에서 $B=C$이므로



$$\int_1^2 f(x)dx+\int_1^{10} g(x)dx=A+B$$
$$=A+C$$
$$=2\times10-1\times1=19$$

07-2 답 5

|전략| 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

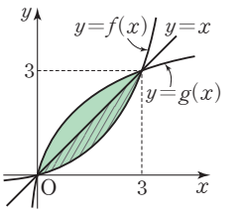
두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$2\int_0^3\{x-f(x)\}dx$

$=2\int_0^3 xdx-2\int_0^3 f(x)dx$

$=2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3-2\times2=2\times\frac{9}{2}-4=5$



2 속도와 거리

개념 드릴 236쪽

1 (1) 1 (2) 6 (3) 10

2 (1) 7 (2) 3 (3) 5

3 (1) $-\frac{5}{3}$ (2) -3 (3) $\frac{23}{3}$

4 (1) 4 (2) -16 (3) 24

1 (1) $1+\int_0^2(4t-4)dt=1+\left[2t^2-4t\right]_0^2=1+0=1$

(2) $\int_0^3(4t-4)dt=\left[2t^2-4t\right]_0^3=6$

(3) $v(t)=0$에서 $4t-4=0 \quad \therefore t=1$

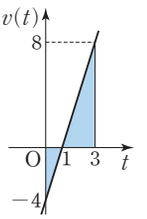
따라서 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3|4t-4|dt=\int_0^1(-4t+4)dt+\int_1^3(4t-4)dt$$
$$=\left[-2t^2+4t\right]_0^1+\left[2t^2-4t\right]_1^3=2+8=10$$

다른 풀이 넓이를 이용하면

$\frac{1}{2}\times1\times4+\frac{1}{2}\times2\times8=2+8$

$=10$



2 (1) $-2+\int_0^3(6-2t)dt=-2+\left[6t-t^2\right]_0^3=-2+9=7$

(2) $\int_1^4(6-2t)dt=\left[6t-t^2\right]_1^4=3$

(3) $v(t)=0$에서 $6-2t=0 \quad \therefore t=3$

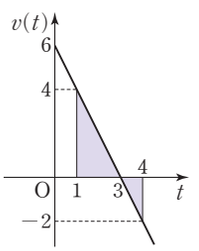
따라서 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^4|6-2t|dt=\int_1^3(6-2t)dt+\int_3^4(-6+2t)dt$$
$$=\left[6t-t^2\right]_1^3+\left[-6t+t^2\right]_3^4=4+1=5$$

다른 풀이 넓이를 이용하면

$\frac{1}{2}\times2\times4+\frac{1}{2}\times1\times2=4+1$

$=5$



3 (1) $2+\int_0^1(t^2-4)dt=2+\left[\frac{1}{3}t^3-4t\right]_0^1=2+\left(-\frac{11}{3}\right)=-\frac{5}{3}$

(2) $\int_0^3(t^2-4)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-4t\right]_0^3=-3$

(3) $v(t)=0$에서 $t^2-4=0$

$(t+2)(t-2)=0$ $\therefore t=2\ (\because t>0)$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3|t^2-4|dt=\int_0^2(-t^2+4)dt+\int_2^3(t^2-4)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+4t\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3-4t\right]_2^3$$
$$=\frac{16}{3}+\frac{7}{3}=\frac{23}{3}$$

4 (1) $0+\int_0^2(-3t^2+6t)dt=\left[-t^3+3t^2\right]_0^2=4$

(2) $\int_0^4(-3t^2+6t)dt=\left[-t^3+3t^2\right]_0^4=-16$

(3) $v(t)=0$에서 $3t^2-6t=0$

$3t(t-2)=0$ $\therefore t=2\ (\because t>0)$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^4|-3t^2+6t|dt=\int_0^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^4(3t^2-6t)dt$$
$$=\left[-t^3+3t^2\right]_0^2+\left[t^3-3t^2\right]_2^4$$
$$=4+20=24$$

필수 예제 01 수직선 위를 움직이는 점의 위치와 움직인 거리 237쪽

01-1 답 8

|전략| 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0임을 이용한다.

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v(t)=0$에서

$t^2-6t+8=0$, $(t-2)(t-4)=0$ $\therefore t=2$ 또는 $t=4$

따라서 점 P는 $t=4$에서 두 번째로 운동 방향을 바꾸므로 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^4|t^2-6t+8|dt=\int_0^2(t^2-6t+8)dt+\int_2^4(-t^2+6t-8)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_0^2+\left[-\frac{1}{3}t^3+3t^2-8t\right]_2^4$$
$$=\frac{20}{3}+\frac{4}{3}=8$$

01-2 답 90 m

|전략| 기차가 정지할 때의 속도는 0임을 이용한다.

기차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v(t)=0$에서

$30-5t=0$ $\therefore t=6$

따라서 기차는 제동을 건 후 6초 후에 정지하므로 구하는 거리는

$$\int_0^6|30-5t|dt=\int_0^6(30-5t)dt=\left[30t-\frac{5}{2}t^2\right]_0^6=90\ (\text{m})$$

01-3 답 $\frac{64}{27}$

|전략| 점 P가 원점을 출발하여 원점으로 다시 돌아오면 점 P의 위치의 변화량이 0임을 이용한다.

점 P가 출발한 후 원점으로 다시 돌아온 시각을 $t=a\ (a>0)$라 하면 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P의 위치의 변화량은 0이다.

즉, $\int_0^a(3t^2-4t)dt=0$에서 $\left[t^3-2t^2\right]_0^a=0$

$a^3-2a^2=0$, $a^2(a-2)=0$ $\therefore a=2\ (\because a>0)$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v(t)=0$에서

$3t^2-4t=0$, $t(3t-4)=0$ $\therefore t=\frac{4}{3}\ (\because t>0)$

따라서 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2|3t^2-4t|dt=\int_0^{\frac{4}{3}}(-3t^2+4t)dt+\int_{\frac{4}{3}}^2(3t^2-4t)dt$$
$$=\left[-t^3+2t^2\right]_0^{\frac{4}{3}}+\left[t^3-2t^2\right]_{\frac{4}{3}}^2$$
$$=\frac{32}{27}+\frac{32}{27}=\frac{64}{27}$$

다른 풀이 점 P는 $0\le t<\frac{4}{3}$에서 $v(t)\le0$이므로 음의 방향으로 움직이고, $t\ge\frac{4}{3}$에서 $v(t)\ge0$이므로 양의 방향으로 움직인다. 즉, 점 P가 원점을 출발한 후 원점으로 다시 돌아올 때까지 움직인 거리는 출발한 후 $t=\frac{4}{3}$까지 움직인 거리의 2배이므로 구하는 거리는

$$2\int_0^{\frac{4}{3}}|3t^2-4t|dt=2\int_0^{\frac{4}{3}}(-3t^2+4t)dt$$
$$=2\left[-t^3+2t^2\right]_0^{\frac{4}{3}}=2\times\frac{32}{27}=\frac{64}{27}$$

필수 예제 02 위로 던진 물체의 위치와 움직인 거리 238쪽

02-1 답 (1) 75 m (2) 80 m (3) 50 m

|전략| 위로 던진 물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0임을 이용한다.

(1) 물체를 쏘아 올린 지 4초 후의 물체의 지면으로부터의 높이는

$$35+\int_0^4(30-10t)dt=35+\left[30t-5t^2\right]_0^4$$
$$=35+40=75\ (\text{m})$$

(2) 물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v(t)=0$에서

$30-10t=0$ $\therefore t=3$

따라서 $t=3$일 때 최고 높이에 도달하므로 구하는 물체의 높이는

$$35+\int_0^3(30-10t)dt=35+\left[30t-5t^2\right]_0^3$$
$$=35+45=80\ (\text{m})$$

(3) 물체를 쏘아 올린 후 4초 동안 물체가 움직인 거리는

$$\int_0^4|30-10t|dt=\int_0^3(30-10t)dt+\int_3^4(-30+10t)dt$$
$$=\left[30t-5t^2\right]_0^3+\left[-30t+5t^2\right]_3^4$$
$$=45+5=50\ (\text{m})$$

02-2 답 3초

| 전략 | 지면으로부터 h_0의 높이에서 위로 던진 물체의 t초 후의 높이는 $h_0+\int_0^t v(t)dt$임을 이용한다.

물체의 시각 t에서의 높이를 $x(t)$ m라 하면

$$x(t)=25+\int_0^t(20-10t)dt$$
$$=25+\left[20t-5t^2\right]_0^t$$
$$=-5t^2+20t+25$$

이 물체가 두 번째로 지면으로부터 40 m의 높이에 도달하는 시각은 $x(t)=40$에서

$-5t^2+20t+25=40$, $5t^2-20t+15=0$

$5(t-1)(t-3)=0$ $\therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 물체가 두 번째로 지면으로부터 40 m의 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은 3초이다.

필수 예제 03 그래프에서의 위치와 움직인 거리 239쪽

03-1 답 (1) $\frac{3}{2}$ (2) 2

| 전략 | (1) 원점을 출발한 점 P의 시각 $t=a$에서의 위치는 $0+\int_0^a v(t)dt$임을 이용한다.

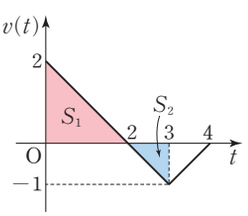
(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_a^b|v(t)|dt$임을 이용한다.

(1) $0+\int_0^3 v(t)dt$

$=\int_0^2 v(t)dt+\int_2^3 v(t)dt$

$=S_1-S_2=\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times1\times1$

$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$



(2) 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서 $t=2$ 또는 $t=4$

따라서 점 P는 $t=2$에서 운동 방향을 바꾸므로 구하는 거리는

$\int_0^2|v(t)|dt=\int_0^2 v(t)dt=S_1=2$

참고 $t=4$일 때 점 P는 정지한다.

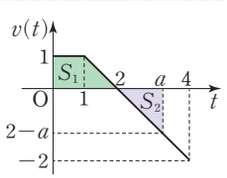
03-2 답 $2+\sqrt{3}$

| 전략 | $\int_0^a v(t)dt=0$이 되는 양수 a의 값을 구한다.

점 P가 원점을 출발한 후 원점으로 다시 돌아온 시각을 $t=a$ $(2<a<4)$라 하면 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P의 위치의 변화량은 0이다.

즉, $\int_0^a v(t)dt=0$에서

$\int_0^2 v(t)dt+\int_2^a v(t)dt=S_1-S_2=0$



$\frac{1}{2}\times(1+2)\times1-\frac{1}{2}\times(a-2)\times(a-2)=0$

$(a-2)^2-3=0$, $a^2-4a+1=0$

$\therefore a=2+\sqrt{3}$ $(\because 2<a<4)$

따라서 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 걸린 시간은 $2+\sqrt{3}$이다.

참고 $0\le t\le2$에서 $v(t)\ge0$이므로 $a>2$이어야 한다.

개념 정리 240~241쪽

01 $|f(x)|$ **02** $|f(x)-g(x)|$

03 4, 4, 4, 4, 6, 3, 4, $\frac{4}{3}$

04 2, 2 **05** B, C, $\int_0^a f(x)dx$ **06** a

07 $v(t)$ **08** $|v(t)|$ **09** 양, 음

10 미분, 적분

11 6, 6, 6, 6, 2, 2, 4, 2, 4, 2, $\frac{32}{3}$, $\frac{64}{3}$

03

곡선 $y=-x^2+8x-6$과 직선 $y=2x+2$의 교점의 x좌표는

$-x^2+8x-6=2x+2$

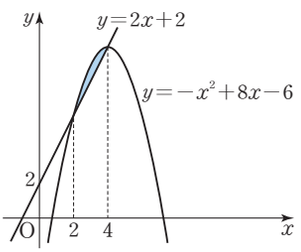
에서

$x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-\boxed{4})=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=\boxed{4}$

따라서 구하는 도형의 넓이는



$\int_2^{\boxed{4}}\{(-x^2+8x-6)-(2x+2)\}dx$

$=\int_2^{\boxed{4}}(-x^2+\boxed{6}x-8)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\boxed{3}x^2-8x\right]_2^{\boxed{4}}$

$=\boxed{\frac{4}{3}}$

11

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서

$t^2-8t+12=0$, $(t-2)(t-\boxed{6})=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=\boxed{6}$

따라서 점 P는 $t=\boxed{6}$에서 두 번째로 운동 방향을 바꾸므로 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^{\boxed{6}}|t^2-8t+12|dt$

$=\int_0^{\boxed{2}}(t^2-8t+12)dt+\int_{\boxed{2}}^6(-t^2+8t-12)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\boxed{4}t^2+12t\right]_0^{\boxed{2}}+\left[-\frac{1}{3}t^3+\boxed{4}t^2-12t\right]_{\boxed{2}}^6$

$=\frac{32}{3}+\boxed{\frac{32}{3}}=\boxed{\frac{64}{3}}$

중단원 마무리

242~244쪽

01 ③	**02** ②	**03** ①	**04** ④
05 3초 후	**06** ②	**07** $\frac{29}{6}$	**08** ①
09 ③	**10** ⑤	**11** ④	**12** ④
13 3	**14** $-\frac{7}{6}$	**15** ①	**16** ④
17 ②	**18** -2	**19** $\frac{1}{2}$	**20** 52

LEVEL 1

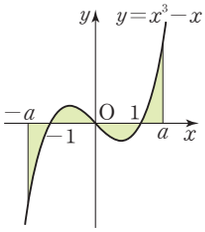
01 곡선 $y=x^3-x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^3-x=0$에서

$x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 곡선 $y=x^3-x$와 x축 및 두 직선 $x=-a$, $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_{-a}^{a}|x^3-x|\,dx=2\int_{0}^{a}|x^3-x|\,dx$$

$$=2\left\{\int_0^1(-x^3+x)\,dx+\int_1^a(x^3-x)\,dx\right\}$$

$$=2\left\{\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_1^a\right\}$$

$$=2\left\{\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}a^4-a^2+1$$

즉, $\frac{1}{2}a^4-a^2+1=5$이므로

$a^4-2a^2-8=0$, $(a+2)(a-2)(a^2+2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>1$)

02 함수 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-2 & (x\geq 1)\\ x^2-2x+2 & (x<1)\end{cases}$의 그래프와 직선 $y=2x+2$의 교점의 x좌표는

(i) $x\geq 1$일 때

$x^2+2x-2=2x+2$에서

$x^2-4=0$, $(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=2$ ($\because x\geq 1$)

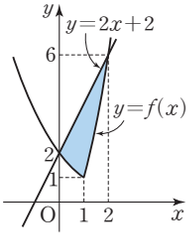
(ii) $x<1$일 때

$x^2-2x+2=2x+2$에서

$x^2-4x=0$, $x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ ($\because x<1$)

(i), (ii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x+2$는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

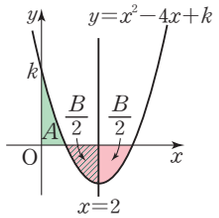
$$\int_0^1\{(2x+2)-(x^2-2x+2)\}\,dx+\int_1^2\{(2x+2)-(x^2+2x-2)\}\,dx$$

$$=\int_0^1(-x^2+4x)\,dx+\int_1^2(-x^2+4)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_1^2$$

$$=\frac{5}{3}+\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$$

03 곡선 $y=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4$가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 빗금친 부분의 넓이는 $\frac{B}{2}$이다.



이때 $B=2A$에서 $\frac{B}{2}=A$이므로

$A-\frac{B}{2}=0$

즉, $\int_0^2(x^2-4x+k)\,dx=0$이므로

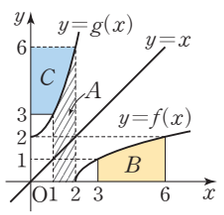
$\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx\right]_0^2=0$

$\frac{8}{3}-8+2k=0$ $\therefore k=\frac{8}{3}$

참고 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 직선 $x=p$에 대하여 대칭이다.

04 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 $f(3)=1$, $f(6)=2$이므로 $g(1)=3$, $g(2)=6$이다.

따라서 오른쪽 그림에서 $B=C$이므로



$$\int_3^6 f(x)\,dx+\int_1^2 g(x)\,dx=B+A$$

$$=C+A$$

$$=2\times 6-1\times 3=9$$

05 점 P가 출발한 지점을 다시 지나는 시각을 $t=a$ ($a>0$)라 하면 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P의 위치의 변화량은 0이므로

$\int_0^a(t^2-2t)\,dt=0$에서

$\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_0^a=0$

$\frac{1}{3}a^3-a^2=0$, $\frac{1}{3}a^2(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

따라서 점 P가 출발한 지점을 다시 지나는 것은 출발한 지 3초 후이다.

06 물체의 시각 t에서의 높이를 $x(t)$ m라 하면

$$x(t)=30+\int_0^t(25-10t)dt=30+\left[25t-5t^2\right]_0^t$$
$$=-5t^2+25t+30$$

물체가 지면에 떨어졌을 때의 위치는 0이므로 $x(t)=0$에서

$-5t^2+25t+30=0$, $-5(t+1)(t-6)=0$

$\therefore t=6$ ($\because t>0$)

또, $v(t)=0$에서

$25-10t=0$ $\quad\therefore t=\frac{5}{2}$

따라서 물체가 지면에 떨어질 때까지 걸린 시간은 6초이므로 물체가 움직인 거리는

$$\int_0^6|25-10t|dt=\int_0^{\frac{5}{2}}(25-10t)dt+\int_{\frac{5}{2}}^6(-25+10t)dt$$
$$=\left[25t-5t^2\right]_0^{\frac{5}{2}}+\left[-25t+5t^2\right]_{\frac{5}{2}}^6$$
$$=\frac{125}{4}+\frac{245}{4}=\frac{185}{2}\text{ (m)}$$

다른 풀이 물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v(t)=0$에서

$25-10t=0$ $\quad\therefore t=\frac{5}{2}$

따라서 물체가 최고 높이에 도달했을 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{5}{2}}|25-10t|dt=\int_0^{\frac{5}{2}}(25-10t)dt$$
$$=\left[25t-5t^2\right]_0^{\frac{5}{2}}=\frac{125}{4}\text{ (m)}$$

이때 지면으로부터 30 m의 높이에서 물체를 쏘아 올렸으므로 물체가 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리는

$\frac{125}{4}+\left(\frac{125}{4}+30\right)=\frac{185}{2}$ (m)

07 주어진 그래프에서 $v(3)=0$이므로

$9+3a+b=0$ $\quad\therefore 3a+b=-9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

점 P는 $t=3$에서 두 번째로 운동 방향을 바꾸므로

$$\int_0^3v(t)dt=\int_0^3(t^2+at+b)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^3$$
$$=9+\frac{9}{2}a+3b$$

즉, $9+\frac{9}{2}a+3b=\frac{9}{2}$이므로

$\frac{9}{2}a+3b=-\frac{9}{2}$ $\quad\therefore 3a+2b=-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=6$

즉, $v(t)=t^2-5t+6=(t-2)(t-3)$이므로

$v(t)=0$에서 $t=2$ 또는 $t=3$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3|v(t)|dt=\int_0^2(t^2-5t+6)dt+\int_2^3(-t^2+5t-6)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+6t\right]_0^2+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2-6t\right]_2^3$$
$$=\frac{14}{3}+\frac{1}{6}=\frac{29}{6}$$

LEVEL 2

08 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=2+3-5-f(-1)$ $\quad\therefore f(-1)=0$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-6x^2+6x+f(x)+xf'(x)$

$xf'(x)=6x^2-6x$

따라서 $f'(x)=6x-6$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x-6)dx=3x^2-6x+C$$

이때 $f(-1)=0$이므로

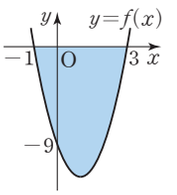
$3+6+C=0$ $\quad\therefore C=-9$

즉, $f(x)=3x^2-6x-9$이므로 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는

$3x^2-6x-9=0$에서

$3(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^3(-3x^2+6x+9)dx=\left[-x^3+3x^2+9x\right]_{-1}^3$$
$$=32$$

09 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는

$kx(x-3)(x-4)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$

즉, 두 점 P, Q의 x좌표는 각각 3, 4이고

$A-B=4$이므로 정적분의 정의에 의하여

$$\int_0^4f(x)dx=4$$

$$\int_0^4kx(x-3)(x-4)dx=k\int_0^4(x^3-7x^2+12x)dx$$
$$=k\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{3}x^3+6x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}k$$

따라서 $\frac{32}{3}k=4$이므로 $k=\frac{3}{8}$

10 곡선 $y=x^3$을 y축에 대하여 대칭이동한 곡선은

$y=(-x)^3$, 즉 $y=-x^3$

곡선 $y=-x^3$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 곡선은 $y=-(x-1)^3+1$

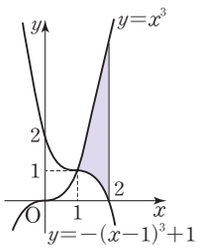
두 곡선 $y=x^3$, $y=-(x-1)^3+1$의 교점의 x좌표는

$x^3=-(x-1)^3+1$에서

$2x^3-3x^2+3x-2=0$

$(x-1)(2x^2-x+2)=0$

$\therefore x=1$ ($\because x$는 실수)



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_1^2\{x^3+(x-1)^3-1\}dx=\int_1^2(2x^3-3x^2+3x-2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^2=3$$

11 $|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ -x^2+1 & (-1<x<1) \end{cases}$

곡선 $y=x^2-1$과 직선 $y=3$의 교점의 x좌표는 $x^2-1=3$에서 $x^2-4=0$

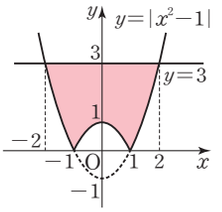
$(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

곡선 $y=-x^2+1$과 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+1=0$에서

$-(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$



$y=|x^2-1|$의 그래프와 직선 $y=3$은 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 도형의 넓이는

$$2\left[\int_0^1\{3-(-x^2+1)\}dx+\int_1^2\{3-(x^2-1)\}dx\right]$$

$$=2\left\{\int_0^1(x^2+2)dx+\int_1^2(-x^2+4)dx\right\}$$

$$=2\left(\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_1^2\right)$$

$$=2\left(\frac{7}{3}+\frac{5}{3}\right)=8$$

12 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 $x=-2$에서 접하고 $x=0$에서 만나므로 삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$은 중근 $x=-2$와 실근 $x=0$을 갖는다.

즉, $f(x)-g(x)=ax(x+2)^2$ $(a>0)$이라 하면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^0|f(x)-g(x)|dx=\int_{-2}^0\{-ax(x+2)^2\}dx$$

$$=-a\int_{-2}^0(x^3+4x^2+4x)dx$$

$$=-a\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_{-2}^0$$

$$=\frac{4}{3}a$$

즉, $\frac{4}{3}a=8$이므로 $a=6$

따라서 $f(x)-g(x)=6x(x+2)^2$이므로

$f(1)-g(1)=6\times 1\times 9=54$

13 곡선 $y=\frac{1}{3}x^2$과 직선 $y=3$의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{3}x^2=3$에서

$x^2=9$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

즉, 곡선 $y=\frac{1}{3}x^2$과 직선 $y=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-3}^3\left(3-\frac{1}{3}x^2\right)dx=2\int_0^3\left(3-\frac{1}{3}x^2\right)dx$$

$$=2\left[3x-\frac{1}{9}x^3\right]_0^3$$

$$=2\times 6=12$$

한편, 곡선 $y=kx^2$과 직선 $y=3$의 교점의 x좌표는

$kx^2=3$에서

$x^2=\frac{3}{k}$ $\therefore x=-\sqrt{\frac{3}{k}}$ 또는 $x=\sqrt{\frac{3}{k}}$

즉, 곡선 $y=kx^2$과 직선 $y=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-\sqrt{\frac{3}{k}}}^{\sqrt{\frac{3}{k}}}(3-kx^2)dx=2\int_0^{\sqrt{\frac{3}{k}}}(3-kx^2)dx=2\left[3x-\frac{k}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{k}}}$$

$$=2\times 2\sqrt{\frac{3}{k}}=4\sqrt{\frac{3}{k}}$$

따라서 $4\sqrt{\frac{3}{k}}=\frac{1}{3}\times 12$이므로

$\sqrt{\frac{3}{k}}=1$ $\therefore k=3$

14 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치를 a라 하자.

$v(t)=\begin{cases} -t^2+t+3 & (0\le t<2) \\ 2t-3 & (t\ge 2) \end{cases}$

이므로 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$$a+\int_0^3v(t)dt=a+\int_0^2(-t^2+t+3)dt+\int_2^3(2t-3)dt$$

$$=a+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+3t\right]_0^2+\left[t^2-3t\right]_2^3$$

$$=a+\frac{16}{3}+2=a+\frac{22}{3}$$

즉, $a+\frac{22}{3}=3$이므로 $a=-\frac{13}{3}$

따라서 시각 $t=1$에서의 점 P의 위치는

$$a+\int_0^1v(t)dt=-\frac{13}{3}+\int_0^1(-t^2+t+3)dt$$

$$=-\frac{13}{3}+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+3t\right]_0^1$$

$$=-\frac{13}{3}+\frac{19}{6}=-\frac{7}{6}$$

다른 풀이 시각 $t=1$에서의 점 P의 위치를 k라 하면 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$$k+\int_1^3v(t)dt=k+\int_1^2(-t^2+t+3)dt+\int_2^3(2t-3)dt$$

$$=k+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+3t\right]_1^2+\left[t^2-3t\right]_2^3$$

$$=k+\frac{13}{6}+2=k+\frac{25}{6}$$

따라서 $k+\frac{25}{6}=3$이므로 $k=-\frac{7}{6}$

15 시각 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$$\int_0^2(t^2-3t+a)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+at\right]_0^2$$

$$=2a-\frac{10}{3}$$

즉, $2a-\frac{10}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$2a=4$ $\therefore a=2$

따라서 $v(t)=t^2-3t+2$이므로 $v(t)=0$에서

$t^2-3t+2=0$, $(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |t^2-3t+2|\,dt$$

$$=\int_0^1 (t^2-3t+2)\,dt+\int_1^2 (-t^2+3t-2)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-2t\right]_1^2$$

$$=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$$

16 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $x_P(t)$, $x_Q(t)$라 하면

$$x_P(t)=0+\int_0^t (3t^2-6t+2)\,dt$$

$$=\left[t^3-3t^2+2t\right]_0^t=t^3-3t^2+2t$$

$$x_Q(t)=0+\int_0^t (-6t+a)\,dt$$

$$=\left[-3t^2+at\right]_0^t=-3t^2+at$$

두 점 P, Q가 만나면 $x_P(t)=x_Q(t)$이므로

$t^3-3t^2+2t=-3t^2+at$에서

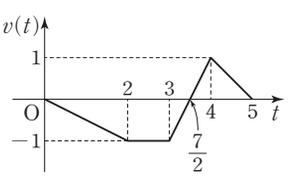
$t^3+(2-a)t=0$, $t(t^2+2-a)=0$

두 점 P, Q가 원점을 동시에 출발한 후 다시 만나지 않으려면 이 방정식이 양의 실근을 갖지 않아야 한다. 즉, 이차방정식 $t^2+2-a=0$이 양의 실근을 갖지 않아야 하므로

$2-a\geq 0$ $\quad\therefore a\leq 2$

따라서 구하는 실수 a의 최댓값은 2이다.

17



ㄱ. 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서 $t=\frac{7}{2}$

즉, 점 P는 $0<t<5$에서 운동 방향을 한 번 바꾼다. (거짓)

ㄴ. 점 P가 출발한 후 $t=5$까지 움직인 거리는

$$\int_0^5 |v(t)|\,dt=\int_0^{\frac{7}{2}} \{-v(t)\}\,dt+\int_{\frac{7}{2}}^5 v(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{7}{2}\right)\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 1$$

$$=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=3\ (\text{참})$$

ㄷ. $t=4$에서 속도가 최대이고

$$\int_3^{\frac{7}{2}} \{-v(t)\}\,dt=\int_{\frac{7}{2}}^4 v(t)\,dt$$이므로 $\int_3^4 v(t)\,dt=0$

$$\therefore \int_0^4 v(t)\,dt=\int_0^3 v(t)\,dt+\int_3^4 v(t)\,dt=\int_0^3 v(t)\,dt$$

$$=-\left\{\frac{1}{2}\times(1+3)\times 1\right\}=-2$$

즉, 속도가 최대일 때의 위치는 -2이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

서술형

18 곡선 $y=x^2-2x-2$와 직선 $y=kx$의 두 교점의 x좌표를 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 α, β는 방정식 $x^2-2x-2=kx$, 즉 $x^2-(k+2)x-2=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k+2$, $\alpha\beta=-2$ ····· ㉠ ··· ❶

이때 곡선 $y=x^2-2x-2$와 직선 $y=kx$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(k)$라 하면

$S(k)$

$$=\int_\alpha^\beta \{kx-(x^2-2x-2)\}\,dx$$

$$=\int_\alpha^\beta \{-x^2+(k+2)x+2\}\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k+2}{2}x^2+2x\right]_\alpha^\beta$$

$$=-\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{k+2}{2}(\beta^2-\alpha^2)+2(\beta-\alpha)$$

$$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(k+2)(\beta+\alpha)-12\}$$

$$=-\frac{1}{6}\sqrt{(\beta+\alpha)^2-4\beta\alpha}$$

$$\times[2\{(\beta+\alpha)^2-\beta\alpha\}-3(k+2)(\beta+\alpha)-12]\ (\because \alpha<\beta)$$

$$=-\frac{1}{6}\sqrt{(k+2)^2+8}\times[2\{(k+2)^2+2\}-3(k+2)^2-12]$$

$(\because$ ㉠$)$

$$=-\frac{1}{6}\sqrt{(k+2)^2+8}\times\{-(k+2)^2-8\}$$

$$=\frac{1}{6}\{(k+2)^2+8\}^{\frac{3}{2}}$$ ··· ❷

따라서 $S(k)$는 $(k+2)^2+8$의 값이 최소일 때, 즉 $k=-2$일 때 최소이다. ··· ❸

채점 기준	비율
❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 곡선 $y=x^2-2x-2$와 직선 $y=kx$의 두 교점의 x좌표에 대한 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이가 최소가 되도록 하는 k의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 곡선 $y=x^2-2x-2$와 직선 $y=kx$의 두 교점의 x좌표를 α, β $(\alpha<\beta)$라 하고, 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(k)$라 하면 공식에 의하여

$$S(k)=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

이때 α, β는 방정식 $x^2-2x-2=kx$, 즉 $x^2-(k+2)x-2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k+2$, $\alpha\beta=-2$

$$\therefore \beta-\alpha=\sqrt{(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$

$$=\sqrt{(k+2)^2+8}$$

$$S(k)=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}=\frac{1}{6}\{(k+2)^2+8\}^{\frac{3}{2}}$$

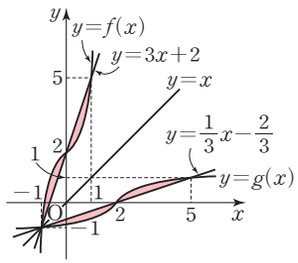
이므로 $S(k)$는 $(k+2)^2+8$의 값이 최소일 때, 즉 $k=-2$일 때 최솟값을 갖는다.

19 $f(x)=x^3+2x+2$에서 $f'(x)=3x^2+2>0$

따라서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

한편, 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$x=\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}$ $\quad\therefore\ y=3x+2$ … ❶



즉, 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x+2$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다. … ❷

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x+2$의 교점의 x좌표는

$x^3+2x+2=3x+2$에서

$x^3-x=0$, $x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{(x^3+2x+2)-(3x+2)\}dx+\int_{0}^{1}\{(3x+2)-(x^3+2x+2)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3+x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$ … ❸

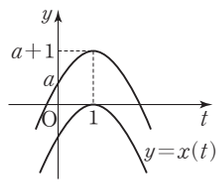
채점 기준	비율
❶ 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 구하는 도형의 넓이가 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x+2$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같음을 알아낼 수 있다.	30 %
❸ 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

20 점 P의 시각 t에서의 위치를 $x(t)$라 하면

$x(t)=a+\int_0^t(2-2t)dt=-t^2+2t+a$

$\quad=-(t-1)^2+a+1$

점 P가 출발한 후 원점을 한 번만 지나려면 함수 $y=x(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다. … ❶



(i) $t>0$에서 $y=x(t)$의 그래프가 t축에 접하는 경우

$a+1=0$에서 $a=-1$ … ❷

(ii) $t>0$에서 $y=x(t)$의 그래프가 t축과 한 점에서 만나는 경우

$x(0)=a\geq 0$ … ❸

(i), (ii)에서 $a=-1$ 또는 $a\geq 0$

따라서 조건을 만족시키는 50 이하의 정수 a의 개수는

$-1, 0, 1, \cdots, 50$의 52이다. … ❹

채점 기준	비율
❶ 점 P의 위치 함수의 그래프의 개형을 알아 낼 수 있다.	20 %
❷ $t>0$에서 $y=x(t)$의 그래프가 t축에 접하는 경우의 a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $t>0$에서 $y=x(t)$의 그래프가 t축과 한 점에서 만나는 경우의 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ 조건을 만족시키는 50 이하의 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

Memo

Memo